Motto: ”*Învăţând matematică, înveţi să gândeşti.* ” Grigore C. Moisil
“*Învăţând supermatematica, înveţi să şi înţelegi* ” Autorul

CAPITOLUL I

I N T R O D U C E R E

CHESTIUNI ELEMENTARE ALE SUPERMATEMATICII (SM)

1 FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) AMPLITUDINE EXCENTRICĂ DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ $\mathbf{aex_{1,2}\theta}$ ŞI DE VARIABILĂ CENTRICĂ $\mathbf{Aex\alpha_{1,2}}$

FSM-CE amplitudine excentrică $\mathbf{aex_{1,2}\theta}$ şi $\mathbf{Aex\alpha_{1,2}}$ sunt dintre cele mai importante **funcţii supermatematice** (**FSM**) deoarece prin intermediul lor se face trecerea din domeniul **matematicii centrice** (**MC**) în cel al **matematicii excentrice** (**ME**); cele două domenii alcătuind **SM** = **MC** ∪ **ME.**

Fenomenul este similar cu trecerea de la **funcţiile circulare** la **funcţiile eliptice** prin intermediul funcţiei **amplitudine eliptică am(u, k).**

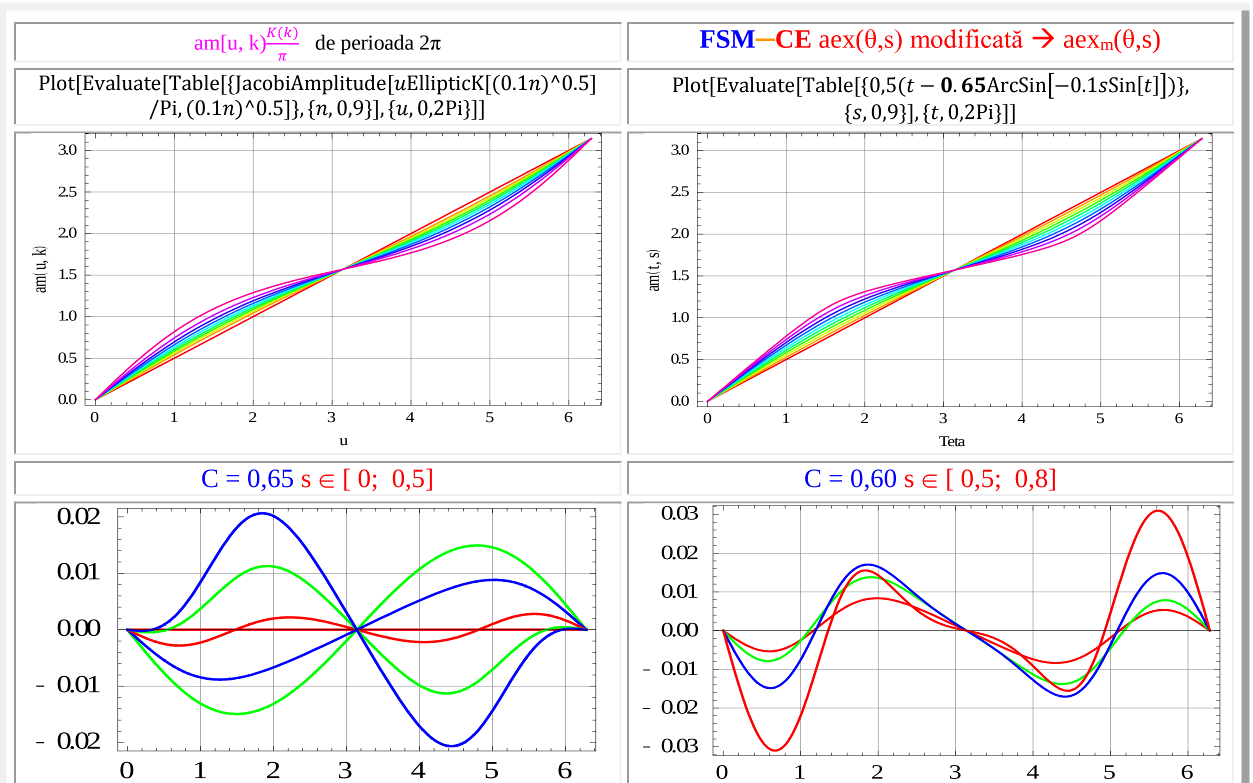


Fig. 1 Funcţiile **eliptice Jacobi am(u,k)** ◄ şi **FSM—CE** modificată $\mathbf{aex_m(\theta,s)}$ ►
ambele de perioade $\mathbf{2\pi}$

Dacă **cos**[**am(u, k)**] = **cn(u, k)**, **sin**[**am(u, k)**] = **sn(u, k),** tot aşa, **cos[aex(θ, S)] = cex(θ, S),** iar **sin[aex(θ, S)]** = **sex(θ, S)** şi la fel pentru celelalte funcţii compuse **texθ, ctexθ, texv θ, ctexv θ** ş.a

Funcţia eliptică **Jacobi am(u,k)** de perioadă **4K(k)** are expresia / ecuaţia:

(1) **am(u,k) = am(z, m = k²)** $= z - \frac{mz^3}{6} + \frac{1}{120}(4m + m^2)z^5 + \frac{(-16m - 44m^2 - m^3)z^7}{5040} +$
$+ \frac{(64m + 912m^2 + 408m^3 + m^4)z^9}{362880} + O[z]^{11}$

şi cea modificată, la o perioadă de **2π,** este:

(2) **am$_m$(u, m = k²) = am(u, m = k²)**$\frac{K(k)}{\pi}$,

în care **K(k)** este integrala eliptică de prima speţă a cărei expresie, cu 15 zecimale exacte, este dată în lucrarea [14]: **Mircea Şelariu**, "**DETERMINAREA UNEI RELAŢII DE CALCUL ORICÂT DE EXACTE A INTEGRALEI ELIPTICE DE PRIMA SPEŢĂ K(k)**") şi este :

K(k) = $\frac{\pi}{2\,R(k)}$ în care: **R$_5$(k)** $= \frac{1}{4}[\frac{A+G}{2} + \sqrt[4]{\frac{A^2+G^2}{2}AG}] = \frac{1}{4}\,[A_2(R_2{,}p_2) + \sqrt{G_2(R_2{,}p_2)}]^2$, cu notaţiile:

G $= \sqrt[8]{1-k^2} = \sqrt[4]{k'} = \sqrt[4]{\sqrt{1-k^2}} = \sqrt{p_1}$ şi $A = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+G^4}{2}} = \sqrt{R_1}$

Funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**) de variabilă excentrică **aexθ** are expresia:

(3) **aexθ** ≡ aex[θ, S(s,ε)] = **α$_{1,2}$** (θ) = θ – arcsin[s**.**sin(θ — ε)]

iar cea modificată, prezentată în **figura 1** ▶are expresia :

(4) **aex$_m$θ** ≡ aex$_m$[θ, S(s,ε)] = **0,5** (θ – **C** arcsin[s**.**sin(θ — ε)]),

în care **C = 0,5**.

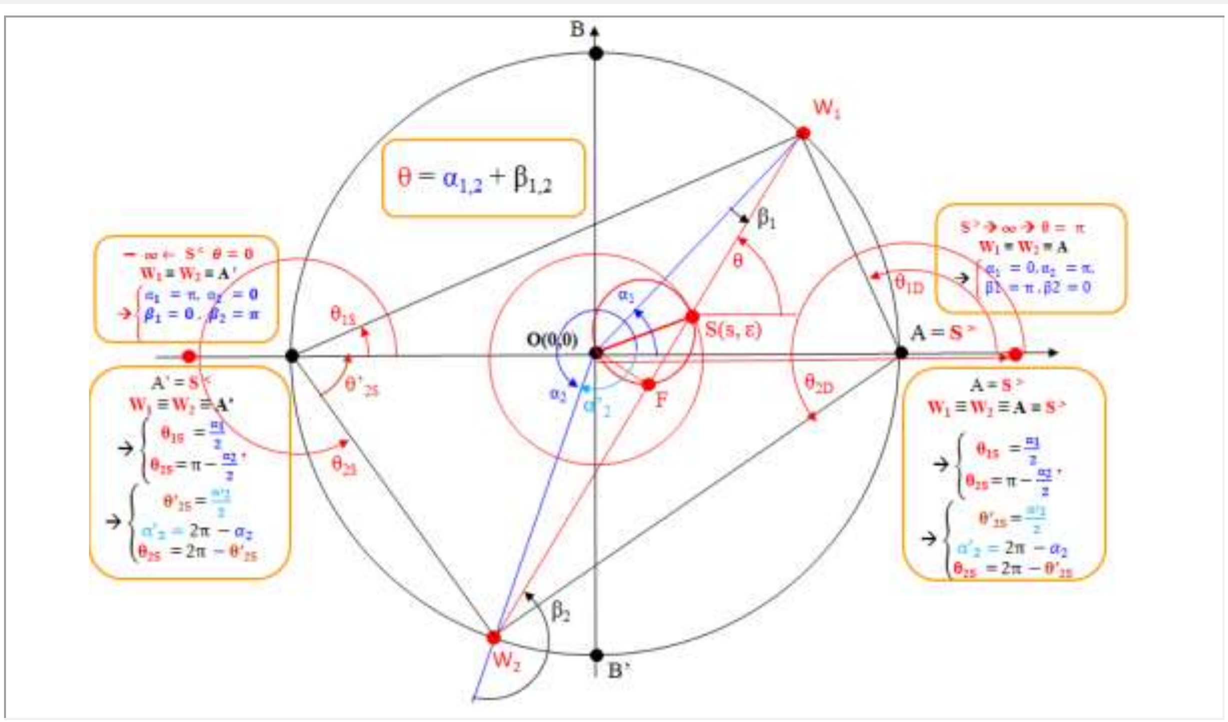


Fig. 2 Semnificaţiile geometrice ale **FSM─CE**

aex$_{1,2}$θ = α$_{1,2}$(θ) = θ ─ β$_{1,2}$(θ) şi **Aexα$_{1,2}$ = θ(α$_{1,2}$) = α$_{1,2}$ + β$_{1,2}$(α$_{1,2}$)**

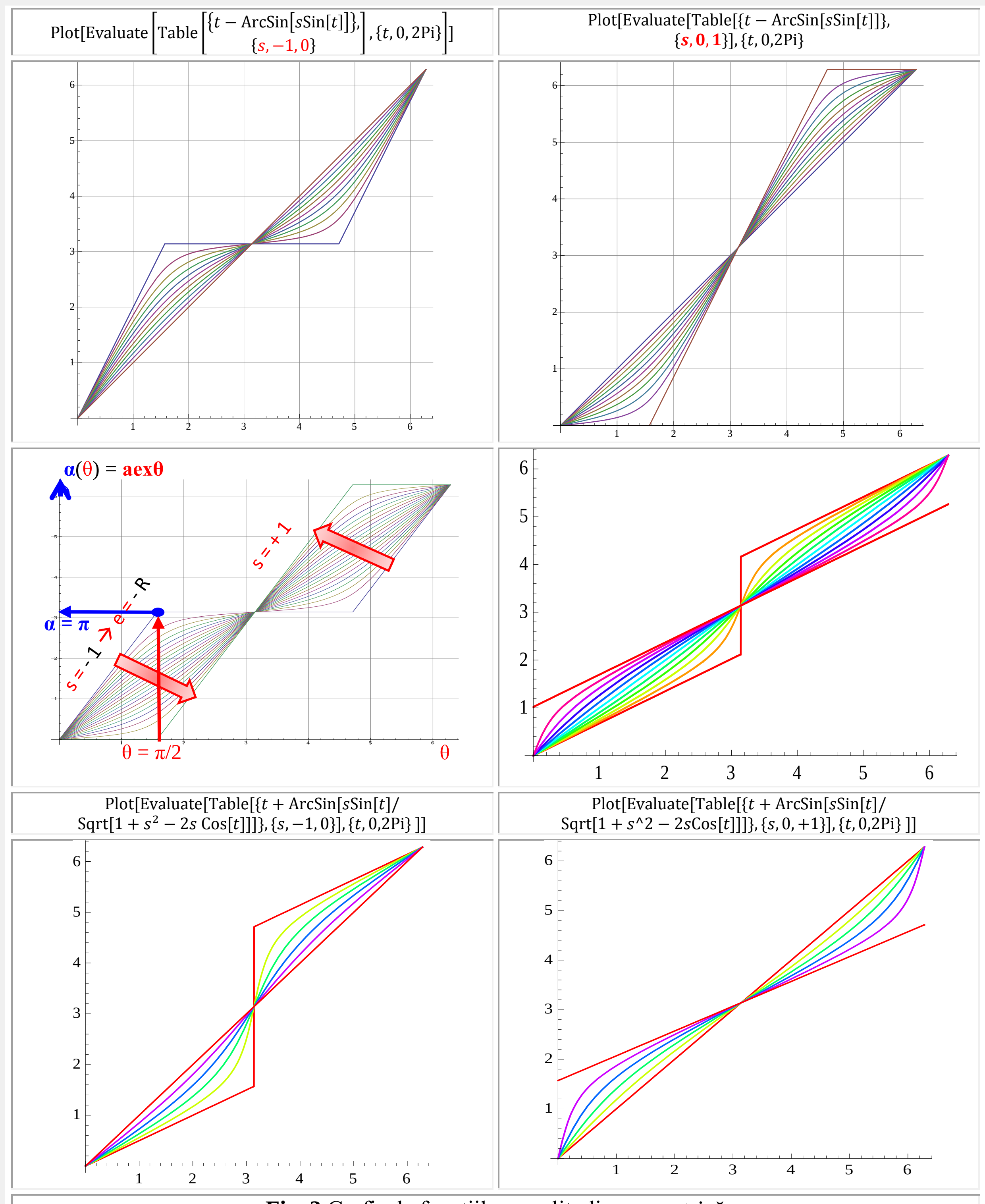


Fig. 3 Graficele funcţiilor amplitudine excentrică
de variabilă **excentrică θ** cu pasul **0,1▲** şi de variabilă **centrică** $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$, cu pasul **0,2▼**

BUPT

Din **figura 1** rezultă suficient de clar că diferenţele dintre cele două tipuri de funcţii sunt destul de mici, sub 2 %, pentru **s = k < 0,5**, ceea ce, pentru utilizări tehnice, este acceptabil.

Semnificaţiile geometrice ale funcţiilor **amplitudine excentrică** sunt prezentate în **figura 2** şi sunt relaţii între principalele unghiuri din triunghiurile **OSW$_{1,2}$**. Se observă îmediat că funcţia de variabilă **excentrică aex$_{1,2}$θ = α$_{1,2}$** (θ) este inversa funcţiei de variabilă **centrică Aexα$_{1,2}$ = θ(α$_{1,2}$)**, aşa cum rezultă şi din graficele din **figura 3**; curbele fiind simetrice faţă de prima bisectoare. Se spune că funcţiile f şi f^{-1} sunt mutual inverse, adică inversa inversei este funcţia însăşi: $(f^{-1})^{-1} = f$.

FSM-CE amplitudine excentrică de variabilă excentrică **aex$_{1,2}$θ** are expresia (3), iar funcţile de variabile centrice **α$_{1,2}$** au expresia :

(5) $$\mathbf{Aex}\alpha_{1,2} = \theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \beta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}}$$

FSM-CE amplitudine excentrică exprimă măsura unghiului la centru **α(θ)**, sau cu vârful în centrul **O**(0, 0), al cercului unitate CU(O, 1), când se cunoaşte măsura unghiului **θ** cu vârful într-un punct oarecare din planul cercului **S**(s, ε), denumit **excentru** şi invers, măsura unghiului **θ,** din excentrul **S**, când se cunoaşte măsura unghiului la centru **α**. Astfel, pentru un **excentru S(s = —1, ε = 0),** acelaşi cu excentrul **S**(s = 1, ε = π), din relaţia (3) rezultă (**Fig. 2** şi **Fig.4**):

(3') $\boldsymbol{\alpha}(\theta) = \theta - \arcsin[-1.\sin(\theta)] = \theta - \arcsin[+1.\sin(\theta - \pi)] = \mathbf{2\,\theta}$,

relaţie elementară, binecunoscută, dintre unghiul cu vârful pe cerc **θ** şi cel cu vârful în centrul cercului **α**.

Esenţial este că această relaţie poate fi foarte **mult generalizată**, ea exprimând dependenţa măsurii celor două unghiuri — θ(α) sau α(**θ**) — oriunde ar fi plasat **S**(**s**, **ε**) în planul cercului, deci vârful unghiului **θ**, când vârful unghiului rămâne în toate cazurile în centrul cercului **O(0, 0)**. Şi toate acestea, cu relaţii extrem de simple, cum sunt relaţiile (3) şi (5). Astfel de dependenţe ar putea fi prezentate chiar şi elevilor din ciclul primar şi mediu. Câteva exemple fiind arătate în figurile anterior amintite.

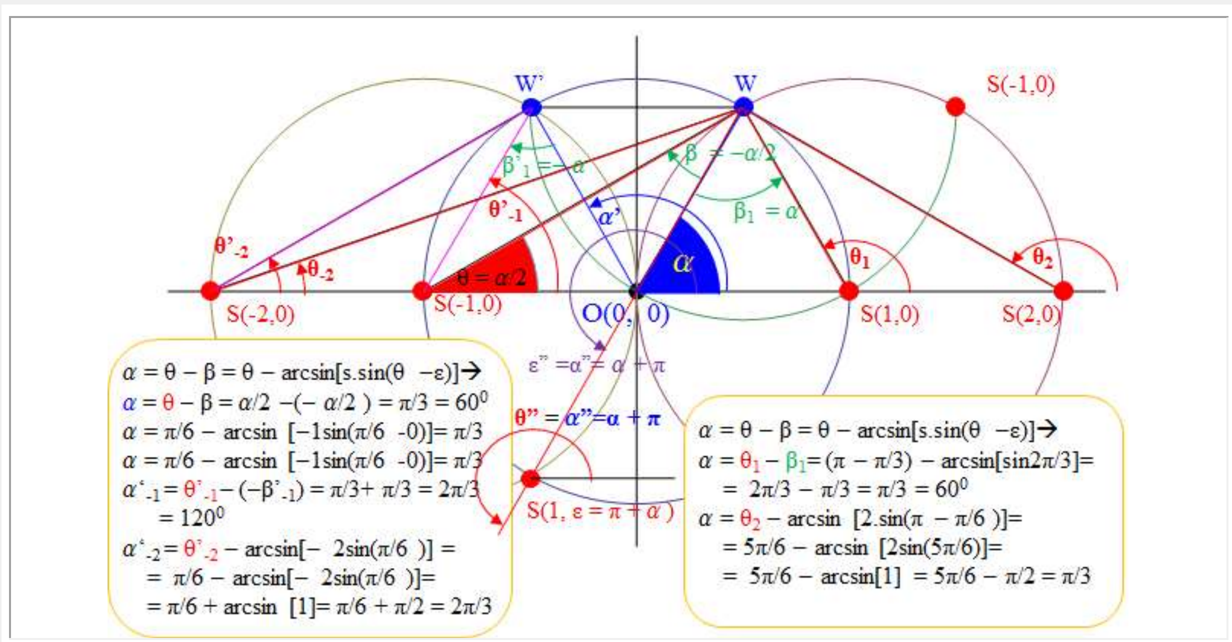


Fig. 4 Generalizarea relaţiei dintre măsura unghiului cu vârful în centrul cercului **α** şi măsura unghiurilor înscrise în cerc sau cu vârful pe cerc **θ,** la măsura unghiurilor **θ** cu vârful în excentrul **S(s, ε) situat într-un punct oarecare din planul cercului.**

Ca urmare aceste **FSM-CE** au un rol major şi la extensia sau generalizarea teoremei şi a relaţiei de legătură dintre măsura unghiului la centru **α** şi măsura unghiului înscris în cerc **θ,** sau cu vârful pe cerc.

Teorema este generalizată la măsura unghiului la centru **α** şi măsura unghiului **θ** la excentrul **S**(**s**, **ε**), sau cu vârful într-un punct oarecare din planul cercului **S(s ,ε),** aşa cum se poate constata din **figura 4.**

În stânga figurii, pentru **S(s = —1, ε = 0)** sau **S(s = +1, ε = π)**, pe axa **x < 0**, din geometria elementară, ştiindu-se că, în acest caz, **α = 2.θ** sau **α = 2.θ = 2.π/6,= π/3,** ceea ce rezultă şi din expresia **FSM-CE** $\mathbf{aex_1\theta = \alpha = \theta - \arcsin[-1.\sin\theta] = 2.\theta}$.

Diferenţa, faţă de geometria clasică, este că toate unghiurile se măsoară faţă de axa Ox, iar segmentele considerate sunt **orientate**.

În cazul punctului **S**(-1, α + π), situat pe cercul central, în prelungirea în sens invers / negativ a razei **OW**, deci **s** = −1, pentru **ε"**= **α** + π, rezultă **α"**= θ"– arcsin[**s**.sin(**θ**"– ε")] = **α** + π − arcsin[1.sin(α + π – (**α** + π))] = **α** + π − arcsin[sin0)] = **α** + π, adică **α** = ε = θ = π + π/3 = 4.π/3 = 240^0.

α" = **α** − arcsin[−1.sin(α − α − π)] = α + π

Teorema din matematica centrică (**MC**) a unghiului înscris în cerc – **θ** – stipulează că el are ca măsură jumătatea unghiului la centru - **α** – corespunzător aceluiaşi arc ($\theta = \frac{\alpha}{2}$). Prin urmare, toate unghiurile înscrise, care subîntind acelaşi arc, sunt egale. Unghiurile înscrise pe arc sunt suplementare. Într-un caz particular, fiecare unghi înscris care subîntinde un diametru este un unghi drept.

Noua teoremă generalizată, din **SM**, stipulează că dependenţa dintre măsura unghiului **θ** la excentru **E(e, ε)** şi măsura unghiului **α** la centrul **O(0, 0)** este dată de funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**) amplitudine excentrică **aexθ**

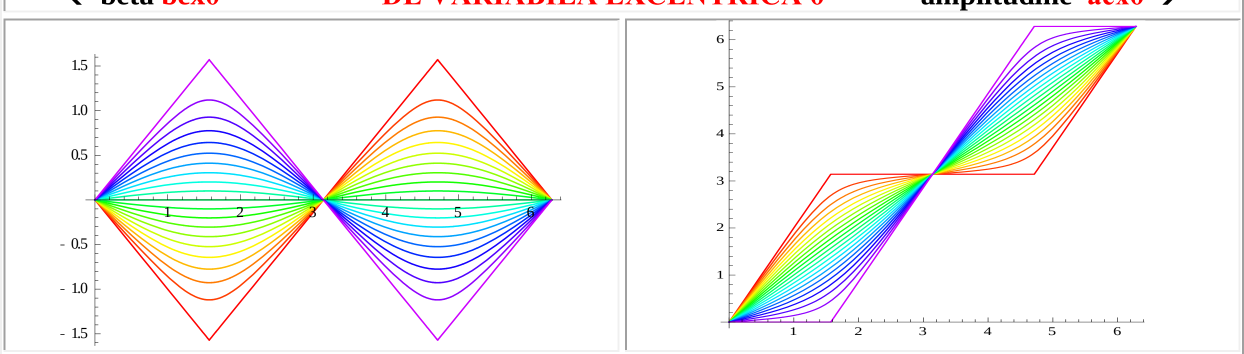
(3") $$\alpha = \mathrm{aex}[\theta, S(\tfrac{e}{R})] = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[(\tfrac{e}{R}).\sin(\theta - \varepsilon)].$$

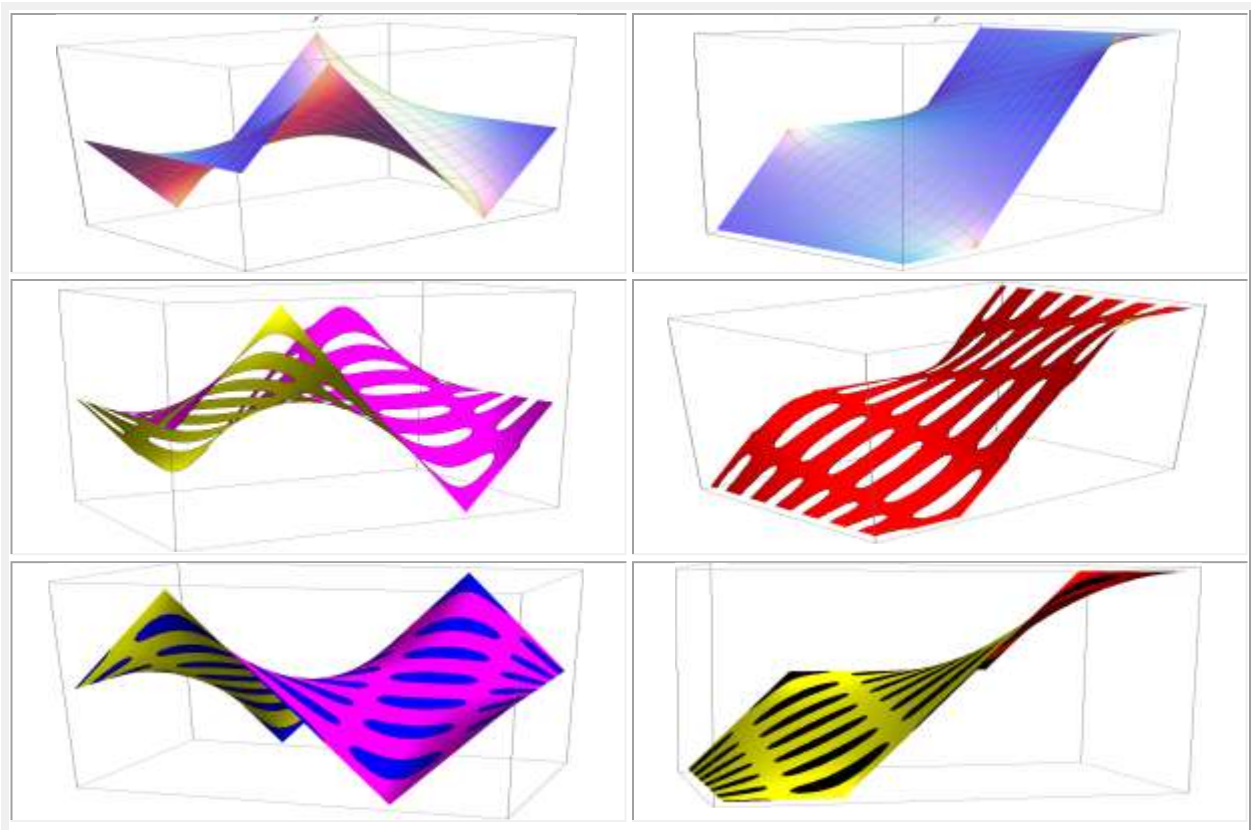
Dacă **θ** este unghiul necunoscut şi **α** cel cunoscut / dat, atunci:

(5") $$\theta = \mathrm{Aex}[\alpha, S(\tfrac{e}{R})] = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \begin{cases} \arcsin\dfrac{\frac{e}{R}\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{R^2+e^2-2e\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \dfrac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{R\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} \\ \arctan\dfrac{\frac{e}{R}\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-\frac{e}{R}\cos(\alpha-\varepsilon)} = \arctan\dfrac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s\cos(\alpha-\varepsilon)} \end{cases},$$

Din relaţiile anterioare rezultă că **beta** este unghiul de pe cerc, din punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ şi se poate deduce că al doilea termen din ecuaţiile (3") şi (5") reprezintă tocmai ecuaţiile **FSM-CE beta excentrice.** Ele exprimă măsura unghiului **β**, când sunt cunoscute raza R a cercului şi lungimea segmentului **OS**, adică poziţia în plan a excentrului **S(s, ε)**: coordonata radială **s** sau **excentricitatea liniară reală e** sau numerică **s** = **e**/R, precum şi coordonata unghiulară **ε** sau **excentricitatea unghiulară ε**.

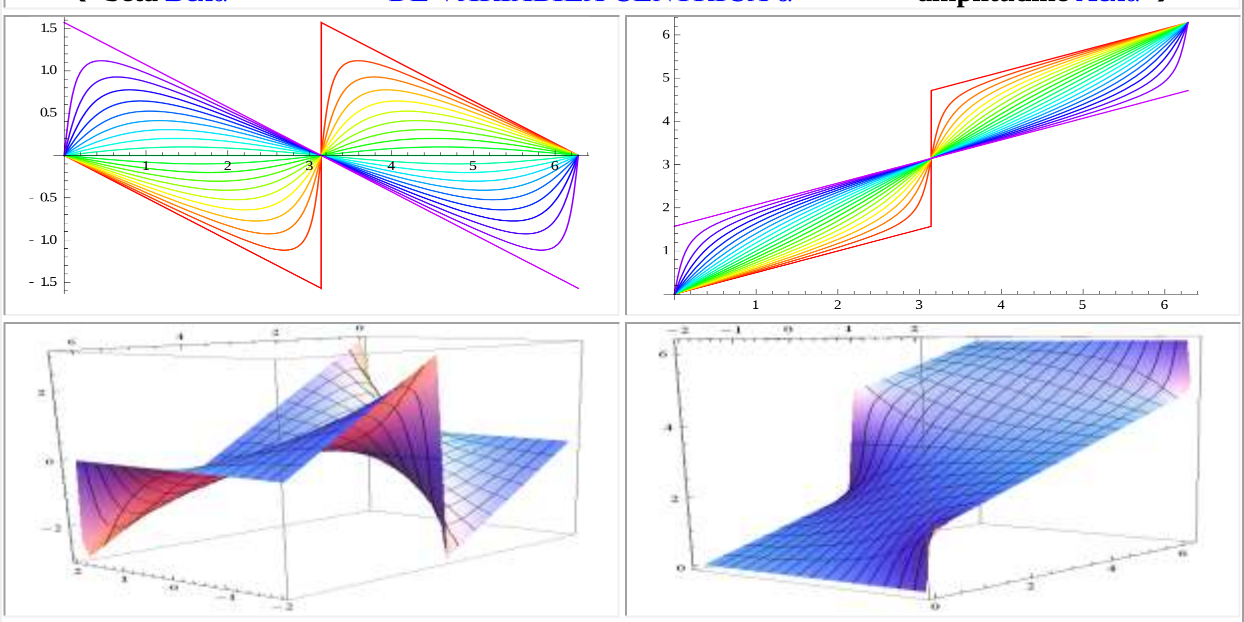
GRAFICELE **FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE**
← beta bexθ **DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ** **amplitudine aexθ →**





GRAFICELE **FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE**

← beta Bexα **DE VARIABILĂ CENTRICĂ α** **amplitudine Aexα →**



Motto: ”Nu fi trist că n-ai fost remarcat. Fii trist că n-ai făcut nimic remarcabil” **Confucius.**
„Nu sunt trist că n-am făcut nimic remarcabil. Sunt trist că n-au fost remarcate” **Autorul.**

CAPITOLUL II

FUNCŢII SUPERMATEMATICE NOI (EFECTIVE - FSEf)

1 INTRODUCERE ÎN NEMĂRGINIREA SM

SUPERMATEMATICA (SM) este constituită din reuniunea **matematicii centrice (MC)**, ordinară, veche, cu noua matematică, **matematica excentrică (ME)**, adică **SM** = **MC** ∪ **ME**.

Mai mult chiar, **MC** este un caz particular, de excentricitate nulă (**s** = **e** = 0) al **ME**, adică **MC** = **ME** (**s** = **e** = **0**). Şi mai mult, toată **SM** a apărut prin deplasarea unui singur punct, a polului **P(0,0)** pe care marele **Euler** l-a plasat în centrul **C(0,0)** al cercului unitate şi în originea **O(0,0)** a unui reper / sistem de coordonate, adică 3 **puncte (P, O** şi **C) confundate**. Ca urmare, apar următoarele domenii ale **SM:**

1. **Domeniul matematicii centrice: O(0,0) ≡ C(0,0) ≡ P(0,0);** → **MC**
2. **Domeniul matematicii excentrice (ME) : O(0,0) ≡ C(0,0) ≠ P(0,0) ≡ S(s,ε);** → **ME**
3. **Domeniul matematicii elevate (MEL) : C(0,0) ≠ O(0,0) ≡ P(0,0) ≡ S(s,ε);** → **MEL**
4. **Domeniul matematicii exotice : (MEXo) : O(0,0) ≠ C(0,0) ≠ P(0,0) ≡ S(s,ε);** → MEx

ultimele trei grupe (2, 3 şi 4) fiind, de fapt, toate **excentrice** .

Un mare matematician, l-am numit pe **Anton Hadnagy**, ale cărui aripi s-au frânt mult prea devreme, a „decretat”: ”***Acum, toate formele 2D vechi trebuie numite CENTRICE, iar cele noi, care rezultă din noua matematică,*** *excentrică*, ***(ME) trebuie denumite EXCENTRICE***”

Astfel au apărut **excentricele circulare**, **eliptice**, **hiperbolice**, **parabolice**, **bilobice**, **trilobice**, **quadrilobice / cvadrilobice**, ş.m.a. pentru **domeniul 2**. Pentru **domeniile 3** şi **4** ele vor fi denumite, în plus, şi ca **elevate**, respectiv, **exotice**.

În **domeniul centric** (**DC**) există câte o singură funcţie din cele cunoscute (**cosα, sinα, tanα, cotα,** ....cosh, sinh, tanh, coth, ... cn(u,k), sn(u,k), dn(u,k) ş.m.a.), în timp ce, în **domeniul excentric** (**DE**) al **SM** există câte **<u>o infinitate</u>** din fiecare dintre aceste funcţii, corespunzătoare infinităţii de puncte din plan în care poate fi plasat un **excentru S(s,ε)** în cercul unitate / trigonometric **CU(O,1),** respectiv, **E(s,ε)** într-un cerc oarecare **C(O,R),** sau în afara lui, în planul cercului. Ca urmare, **SM** multiplică la infinit toate entităţile **MC**.

În plus, în domeniul **excentric** apar o serie de funcţii noi, care în centric nu-şi aveau sens, sau, pur şi simplu, n-au fost definite, precum **amplitudine excentrică**, similară funcţiei **eliptice Jacobi,** amplitudine eliptică **am(u,k),** de **variabilă excentrică aexθ** şi de variabilă **centrică Aexα** (**2**), beta excentrică **bexθ** şi **Bexα (1)** radial excentric **rexθ** şi **Rexα** (**3**), derivată excentrică **dexθ** şi **Dexα** (**4**) ş.m.a.

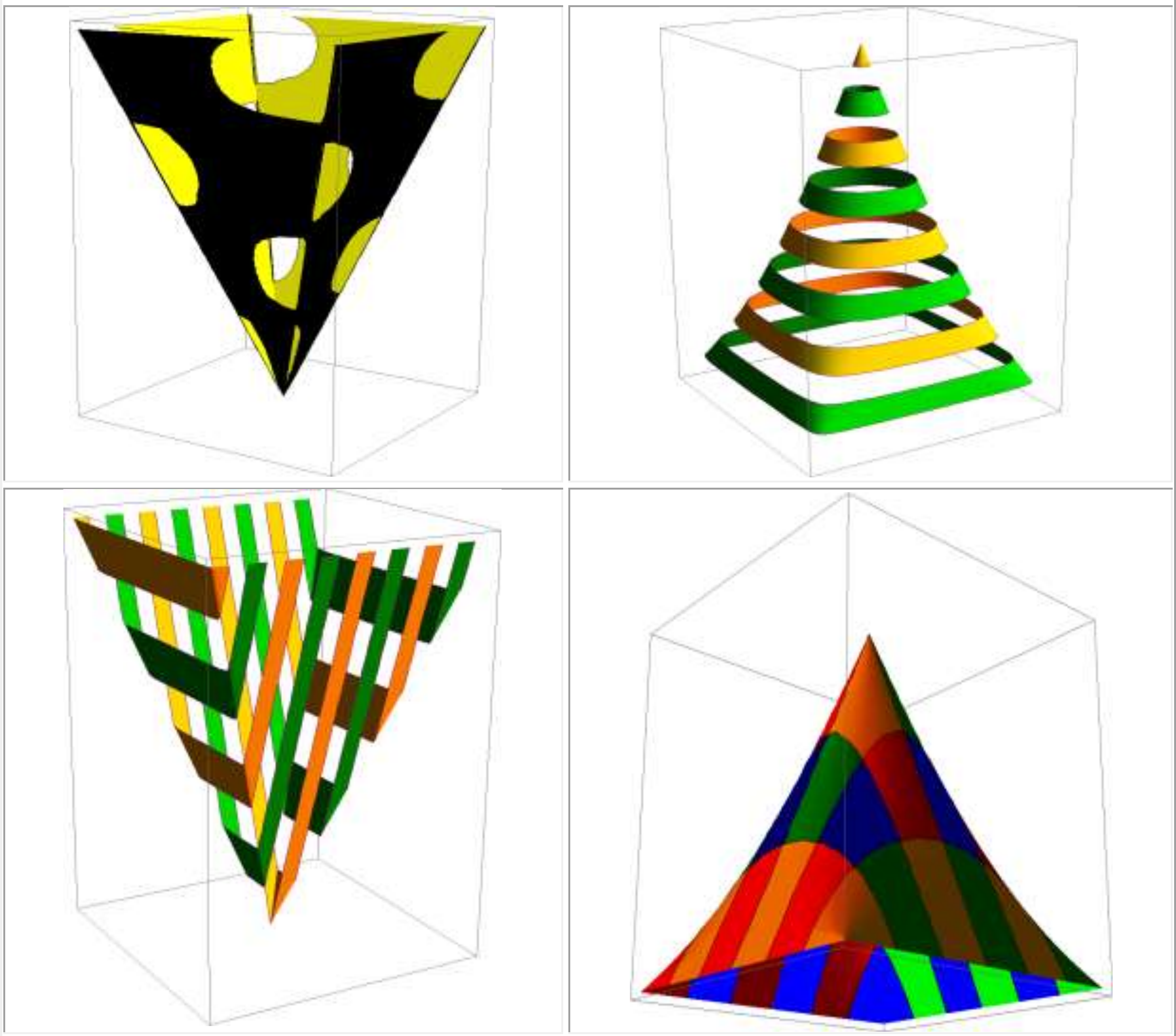
$$(1)\quad \begin{cases} \mathbf{bex_{1,2}(\theta,s)} \equiv \mathrm{bex}_{1,2}\theta = \pm\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ \mathbf{Bex(\alpha_{1,2},s)} \equiv \mathbf{Bex\alpha_{1,2}} = \pm\arcsin\dfrac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}} = \pm\arctan\dfrac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{1-s.cos(\theta-\varepsilon)} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \mathbf{aex_{1,2}(\theta,s)} \equiv \mathrm{aex}_{1,2}\theta = \boldsymbol{\theta} \mp \mathrm{bex}\theta = \theta \mp \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ \mathbf{Aex(\alpha_{1,2},s)} \equiv \boldsymbol{\alpha_{1,2}} \pm \mathbf{Bex\alpha_{1,2}} = \boldsymbol{\alpha_{1,2}} \pm \arcsin\dfrac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}} = \\ = \boldsymbol{\alpha_{1,2}} \pm \arctan\dfrac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1-s.cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \mathbf{rex_{1,2}(\theta, s)]} \equiv \mathrm{rex}_{1,2}\theta = -s.\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{1-s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)} \\ \mathbf{Rex(\alpha_{1,2}, s)} \equiv \mathbf{Rex\alpha_{1,2}} = \pm\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \mathbf{dex_{1,2}(\theta, s)]} \equiv \mathrm{dex}_{1,2}\theta = 1 \mp \dfrac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ \mathbf{Dex(\alpha_{1,2}, s)} \equiv \mathbf{Dex\alpha_{1,2}} = \mp \dfrac{1-s\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} \end{cases}$$

Din relaţiile anterioare, rezultă că noile funcţii nu necesită tabelarea lor, deoarece se exprimă în funcţie de cele centrice, constituind, astfel, o structură piramidală, cu vârful în jos (v. Figura 🡣).



Piramidele matematicii centrice (MC)	**Conopiramidele matematicii excentrice (ME)**

www.SuperMatematica.ro | www.supermatematicaonline.blogspot.ro | www.SuperMathematica.com

Piramidele ciuruite ale **matematicii centrice** sugerează lipsurile care există în acest domeniu, iar structura multiplă a conopiramidei **SM** sugerează multitudinea de domenii ce-o alcătuiesc.

Se ştie că **sin**[**am(u,k)**] = **sn(k,u), cos**[**am(u,k)**] = **cn (k,u)**. Tot aşa, **cos**[**aex(θ, s)**] = **cex (s, θ)** ≡ **cexθ, sin**[**aex(θ, s)**] = **sex(s, θ)** ≡ **sexθ** ş.a.m.d.

Ecuaţiile anterioare (**1**) ...(**4**), ale principalelor **funcţii supermatematice circulare excentrice** (**FSM — CE**), au fost prezentate pentru a sublinia că ele au două determinări:

- de **indice 1**, **principală**, sau fără indice, când confuziile sunt excluse;
- de **indice 2**, **secundară**;

corespunzătoare celor două puncte de intersecţie ale cercului unitate **CU(O,1)** cu **dreapta excentrică d** = $\mathbf{d^+} \cup \mathbf{d^-}$, cu originea dreptei în excentrul **S(s, ε)**, sau E(e,**ε**), care împarte dreapta **d** în cele două semidrepte: pozitivă $\mathbf{d^+}$ şi negativă $\mathbf{d^-}$. Şi sunt de două tipuri: de **variabilă excentrică θ** şi de **variabilă centrică α.**

Totodată, pentru exemplificarea exprimării lor prin **funcţii circulare centrice** (**FCC**), ordinare, care arată că **SM** este o construcţie piramidală, cu vârful în jos: în partea inferioară se află **MCC**, pe baza ei sunt construite **matematicile circulare excentrice MCE**, **exotice MCEx** şi **elevate MCEl**.

Funcţiile din aceste matematici pot exprima curbe închise precum: **bilobe, trilobe, quadrilobe, ...multilobe**, precum şi **excentrice** hiperbolice, parabolice, şi eliptice ş.m.a. care, la rândul lor, pot înlocui cercul unitate şi pe care pot fi generate noi funcţii **SM** precum **trilobe**, quadrilobe / cvadrilobe şi **hiperbolice, eliptice** şi **elevate,** toate putând fi **excentrice**, exotice şi elevate ş.m.a.

Noile funcţii dau naştere, în paralel, altor **SM necirculare: hiperbolice, eliptice şi elevate excentrice**, **exotice** şi **elevate**, rezultate prin înlocuirea **cercului unitate** cu alte **curbe generatoare** precum **excentrice hiperbolice, parabolice şi eliptice**, pe care se pot genera noi funcţii **SM hiperbolice, eliptice** şi **elevate** toate **excentrice**, exotice şi elevate, ş.m.a; toate acestea constituind, împreună, ceea ce numim **acum SM** şi au fost deja prezentate în cele două volume, cu acelaşi titlu, din **Editura Politehnica Timişoara**, în ediţia a 2-a, revizuită şi adăugită.

Astfel, în **SM**, are loc un fenomen asemănător celui ilustrat în butada matematicianului **Grigore C. Moisil** ***:" Fiecare om are dreptul la un pahar de vin. După ce l-a băut este alt om şi are dreptul la un alt pahar de vin".*** Ş.a.m.d........

Numai că, aşa cum se va putea constata în continuare, în noile domenii ale **SM**, numărul „paharelor de vin" tinde spre infinit !!.

Să exemplificăm: În **SM** exista **4 noi domenii supermatematice** şi un al **5-lea** schiţat anterior şi prezentat şi dezvoltat în continuare în **§ 2 TANGENTE ŞI COTANGENTE SUPERMATEMATICE EFECTIVE** (**SME**) şi care fac obiectul acestui capitol. Scriind în tangente şi în cotangente raportul a două funcţii sinus şi cosinus, din două **domenii diferite** / distincte, de exemplu **sinα**/cexθ, selθ/cexoθ, cexθ/**sinα**, **celθ**/**sinα** ş.a.m.d. rezultă **al 5-lea domeniu distinct al SM** definit pe **funcţii circulare,** domeniu pe care-l numim şi domeniul **SM EFECTIV**, numai pentru că el, **domeniul 5**, trebuie să poarte o denumire. Dar, la fel de bine, pot fi definite pe **curbe SM** ca **bilobe, trilobe, quadrilobe,** sau pe **excentrice eliptice, elevate** sau **exotice** ş.m.a., care se circumscriu aceluiaşi domeniu.

Noile **FSM — CE** au aplicaţii deosebit de importante, dacă este să amintim doar contribuţia funcţiei **radial excentrică**, denumită de Prof. Dr. math. **Octav Em. Gheorghiu**, şeful Catedrei de **Matematica I** a Universităţii „**POLITEHNICA**" din Timişoara „**o adevărată funcţie rege**", deoarece poate descrie, **singură**, ***toate curbele plane*** cunoscute, întrucât exprimă distanţa în plan dintre două puncte - **excentrul S** sau **E** şi un punct de pe cercul unitate **W** sau **M** de pe un cerc oarecare C(O,R).

Ea, **rexθ**, poate constitui ecuaţiile multor curbe noi şi poate descrie **exact** mişcarea / deplasarea mecanismului bielă – manivelă, centric şi excentric, precum şi vitezele şi acceleraţiile acestuia.

Cu ajutorul ei a fost determinată o relaţie de calcul simplă, cu numai doi termeni, a integralei eliptice complete de prima speţă K(k), cu precizia de **15 zecimale exacte**, relaţie cu posibilităţi de ameliorare în continuare a preciziei de calcul. Tot ea a făcut posibilă exprimarea sub formă trigonometrică a sumei şi a diferenţei a două numere complexe !. Şi exemplele pot continua ...

Ecuaţia de definiţie a funcţiei **derivată excentrică dexθ**, deşi nu este o « **funcţie rege** » ca şi funcţia **rexθ**, poate exprima funcţia de transfer de ordinul doi, a vitezelor, sau raportul de transmitere a turaţiilor / vitezelor tuturor mecanismelor plane cunoscute, aşa cum se poate constata în lucrarea „**SUPERMATEMATICA**” Vol I şi Vol. II, ediţia a 3-a, color, revăzută şi adăugită, Editura MatrixRom, Buc. 2015, (www.librarie.net/**matrixrom**).

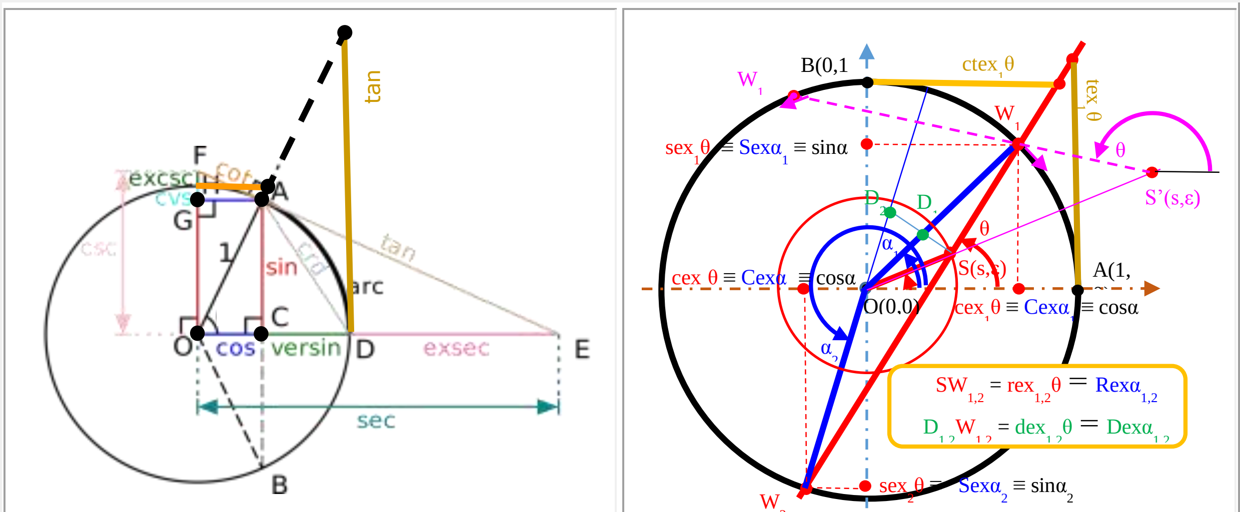
Totodată, apar o serie de forme noi în **2D:** monolobe, bilobe, trilobe, quadrilobe / cvadrilobe, ... multilobe ş.m.a. şi o serie de transformări continue: a cercului în pătrat sau în dreptunghi, cercul şi pătratul, cercul şi dreptunghiul având aceleaşi ecuaţii parametrice :

$$(5)\qquad \begin{cases} x = R_x.cex[\theta, S(s,\varepsilon)] \\ y = R_y.sex[\theta, S(s,\varepsilon)] \end{cases},$$

în toate cazurile, pentru **s = 0** şi $R_x = R_y$ se obţin cercuri iar pentru $R_x \neq R_y$ se obţin şi elipse sau bilobe, iar pentru **s = ± 1** şi $R_x = R_y$ se obţin pătrate perfecte şi pentru $R_x = R_y$ dreptunghiuri perfecte (**Fig2**).

Pot fi obţinute şi transformările continue ale cercului în triunghi sau trilobe (**fig.3**) ş.m.a. şi, în **3D**, se pot obţine obiecte hibride ca: ***sferocub, conopiramidă, piramidocon, cilindroprisma***, ş.m.a. şi o serie de transformări continue a sferei în cub (**Fig. 4**), a priramidei în con, a cilindrului în prismă ş.m.a (**Fig.6**).

Noile curbe stau la baza generării unor noi funcţii importante, precum **funcţii trilobe** şi funcţii **quadrilobe** (cosinus quadrilob **coqθ**, sinus quadrilob **siqθ** ş.a.) în **2D⁺** şi a noi obiecte în **3D⁺**: triloboizi, qudriloboizi ş.m.a.



https://ro.wikipedia.org/wiki/Identit%C4%83%C8%9Bi_trigonometrice modificată / completată

Fig. 1 Funcţii circulare centrice **(FCC)** ◀ şi funcţii **SM circulare excentrice** (**FSM — CE**) ▶

Spre deosebire de celelalte funcţii trigonometrice /circulare centrice, **considerate primare** (**cosα** şi **sinα**), funcţiile tangentă (**tanα ≡ tgα**) şi cotangentă (**cotα ≡ ctgα**) se exprimă ca raport al acestora. De fapt, de abia acum s-a putut constata că nu ele sunt funcţii **primare**, ci funcţia **beta excentrică bexθ** şi amplitudine excentrică **aexθ.**

În domeniul excentric sunt importante trei unghiuri / variabile, între care există relaţia: $\alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = \theta$ şi relaţiile **SM**:

$$(6)\qquad \begin{cases} \beta(\theta,s) \equiv \boldsymbol{\beta(\theta)} = \mathbf{bex(\theta,s)} = \mathbf{bex\theta} = \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \beta(\alpha,s) \equiv \boldsymbol{\beta(\alpha)} = \mathbf{Bex(\alpha,s)} = \arcsin[\mathbf{s}.\sin(\boldsymbol{\alpha} - \varepsilon)/(Sqrt[1 + s^2 - 2s\cos(\boldsymbol{\alpha} - \varepsilon)]] \end{cases}$$

care, prin adăugarea **variabilei excentrice θ**, defineşte funcţia **amplitudine excentrică**, prezentată anterior,

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha(\theta,s) \equiv \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{aex}(\boldsymbol{\theta},\mathbf{s}) = \mathbf{aex\theta} = \theta - \mathrm{bex}(\theta,s) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ \theta(\alpha,s) \equiv \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Aex}(\boldsymbol{\alpha},s) = \theta - \mathbf{Bex}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{s}) = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}} \end{cases}$$

care, la rândul ei, poate defini **FSM — CE** cosinus şi sinus excentrice.

FSM — CE aexθ(α) şi **Aexα(θ)** sunt inverse una alteia, având graficele simetrice faţă de prima bisectoare. Ele au permis, pe lângă cele enunţate anterior, şi **introducerea strâmbei în matematică**, **strâmba** de **s = 0** fiind **dreapta**, iar de **s = ± 1** exprimând **o linie frântă** formată din segmente de dreaptă.

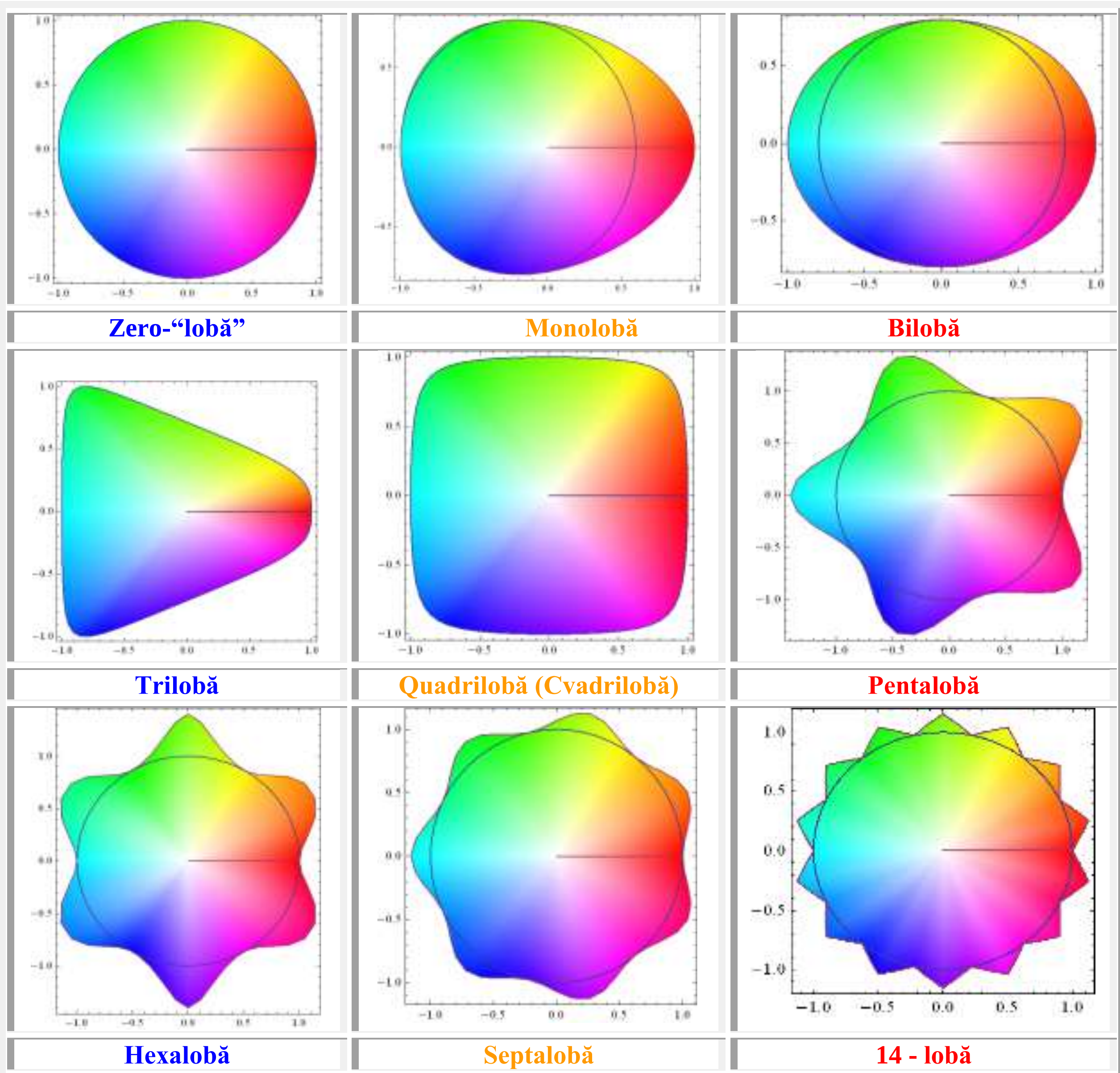


Fig. 2 DISCURI L O B I C E diverse

$$(8)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{cex}[\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\varepsilon})] \equiv \boldsymbol{cex\theta} = cos\boldsymbol{\alpha}(\theta,s) = \cos\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} \\ \boldsymbol{sex}[\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\varepsilon})] \equiv \boldsymbol{sex\theta} = sin\boldsymbol{\alpha}(\theta,s) = \sin\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\}' \end{cases}$$

în care, făcând excentricitatea nulă (**s = 0**) se obţin **FCC cosα** şi **sinα.** Pentru **s = 0** rezultă **$\beta_{1,2}$** = 0 → **θ ≡ α**; **$\beta_{1,2}$** fiind unghiurile din punctele **$W_{1,2}$** (v. **Fig.1** ▶), de pe cercul unitate, dintre **direcţia radială excentrică** de unghi **θ**, dreaptă excentrică **d** = **$d^+ \cup d^-$** cu originea în punctul / excentrul S(s,ε) cu direcţiile **radiale centrice** **$D_{1,2}$** de centru / origine **O(0,0)** definite ca $|\overrightarrow{D_{1,2}}| = |\overrightarrow{OW_{1,2}}|$.

FSM ─ CE de variabilă **excentrică** $\boldsymbol{cex\theta}$ şi $\boldsymbol{sex\theta}$ sunt continue doar perntru **s** ∈ [-1,+1], în timp ce, cele de variabilă **centrică** $\boldsymbol{Cex\alpha}$ şi $\boldsymbol{Sex\alpha}$ sunt continue pe toată axa reală, adică pentru **s** ∈[─ ∞, +∞].

Toate funcţiile trigonometrice centrice (**FCC**) de unghi **α** pot fi construite geometric pe cercul unitate cu centrul în **O**. Unele dintre aceste funcţii, reprezentate în **figura 1** ◀ , nu mai sunt folosite în prezent ca, de exemplu,
versin$\boldsymbol{\alpha}$, coversin$\boldsymbol{\alpha}$, haversin$\boldsymbol{\alpha}$, havercosin$\boldsymbol{\alpha}$ ş.a.:

ParametricPlot[{Cos[u + ArcSin[s Sin[u]]], Sin[u − ArcSin[s Cos[u]]]}, {u, 0,2Pi}, {s, 0,1}]]

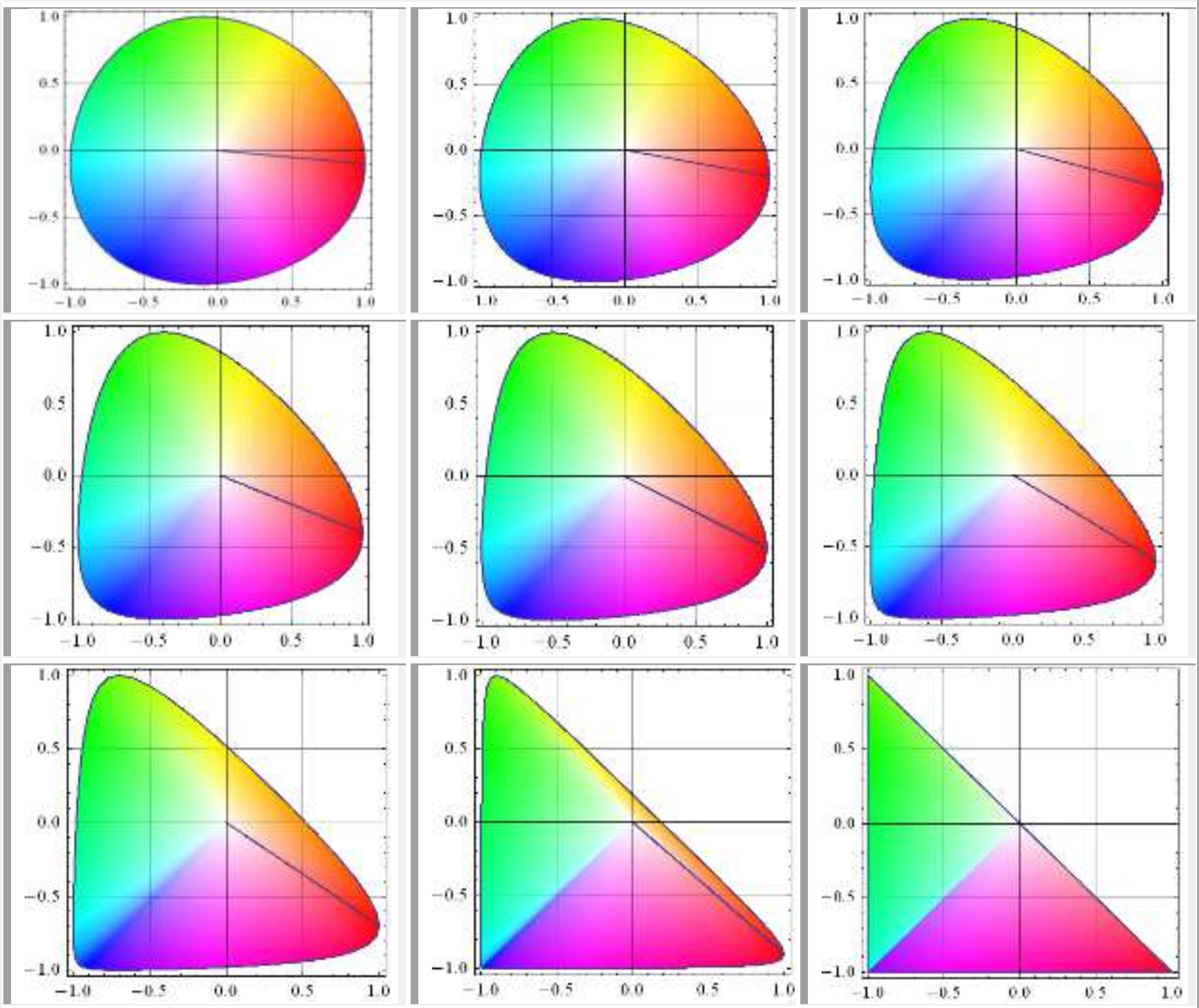


Fig. 3 DISCURI T R I L O B I C E S de variabilă **excentrică θ**, cu **R = 1**
şi excentricitate numerică s ∈ (0; 1) cu pasul cca. **0,1**

www.supermathematica.com | **www.supermatematica.ro**

Unele dintre ele, precum **versinα**, au fost considerate, în vremuri demult apuse, ale corăbiilor cu pânze, foarte importante, în general, şi extrem de importante pentru navigaţie, în special.

„***Dacă ai cultul istoriei, ai cultul apariţiei şi al dispariţiei***” spunea **Petre Ţuţea.** Iată că, **şi în matematică, funcţii dispar şi altele apar**, aparent din neant. Şi nu numai funcţii, ci şi obiecte geometrice noi (**Fig.2 ...6**), dintre care se remarcă, în **figura 6▼▶**, **cubul românesc, cel mai uşor cub din lume**, de volum nul, format din 6 piramide, fără suprafaţa lor de bază, cu vârful comun în centrul de simetrie al cubului.

$$(9)\quad \begin{cases} \mathbf{versin\alpha} \coloneqq 1 - \cos\alpha = 2\sin2\frac{\alpha}{2}; \quad \mathrm{vercosin}\alpha: = 1 + \cos\alpha = 2\cos2\frac{\alpha}{2}; \\ \mathrm{coversin}\alpha: = \mathrm{versin}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 - \sin\alpha; \mathrm{covercosin}\alpha: = \mathrm{vercos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 + \sin\alpha; \\ haversin\alpha \coloneqq \frac{1}{2}\mathrm{versin}\alpha = \frac{1}{2}(1 - cos\alpha); havercosin\alpha \coloneqq \frac{1}{2}\mathrm{vercosin}\alpha = \frac{1}{2}(1 + cos\alpha); \\ havercosin \coloneqq \frac{1}{2}\mathrm{vercosin}\alpha = \frac{1}{2}(1 + cos\alpha); \; hacoversin \coloneqq \frac{1}{2}\mathrm{coversin}\alpha = \frac{1}{2}(1 - sin\alpha); \\ hacovercosin \coloneqq \frac{1}{2}\mathrm{covercosin}\alpha = \frac{1}{2}(1 + sin\alpha); exsec\alpha \coloneqq sec\alpha - 1; excsc\alpha \coloneqq cosec\alpha - 1; \\ coard\breve{a} : crd\alpha \coloneqq 2sin\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

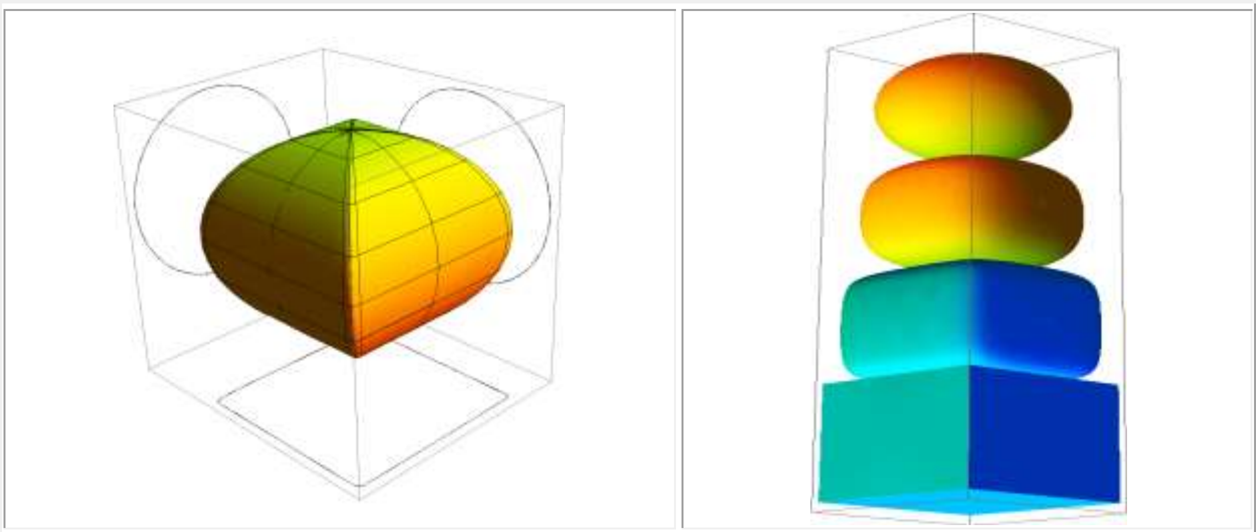
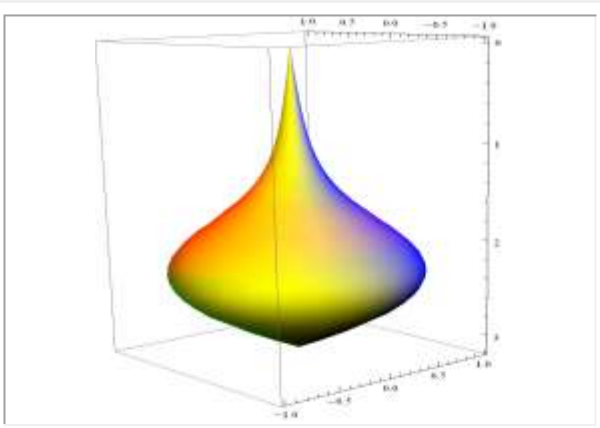
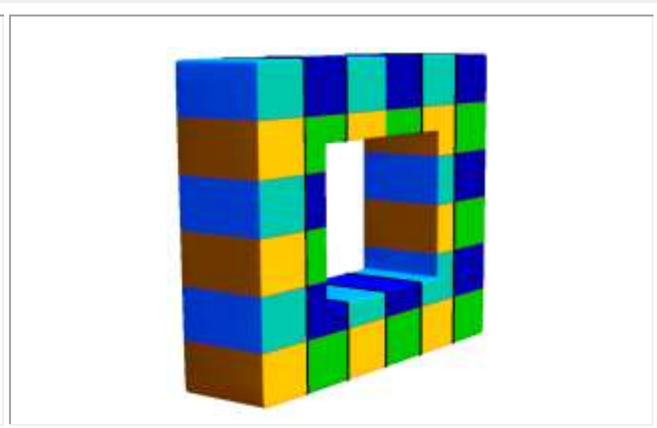


Fig. 4 Sferocub ◀ şi transformarea continuă a sferei în cub şi invers ▶.





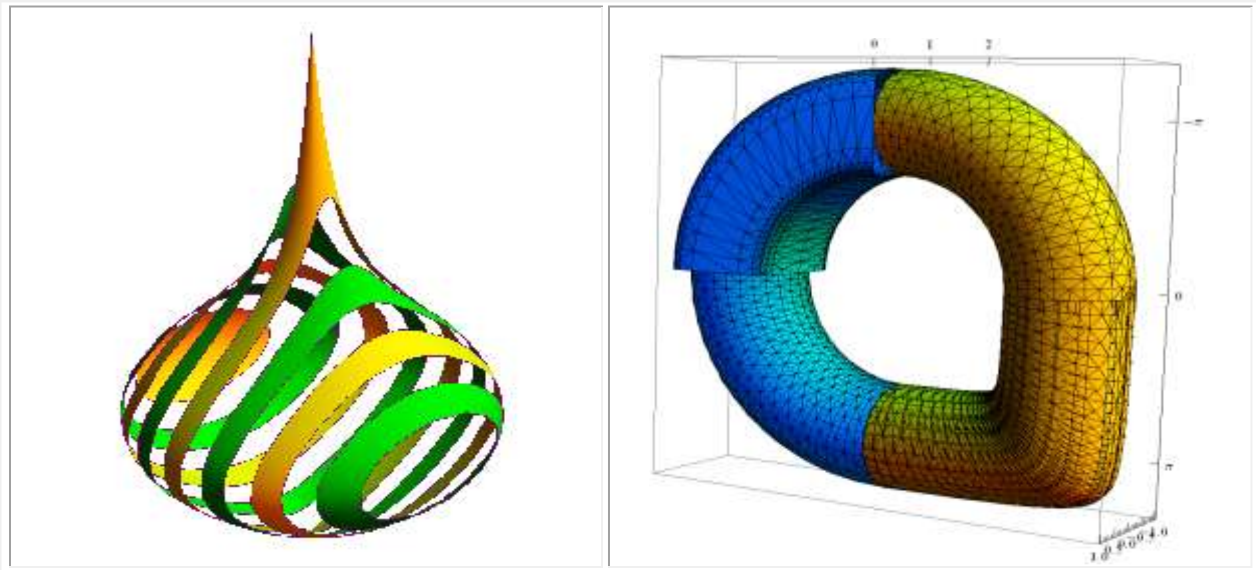
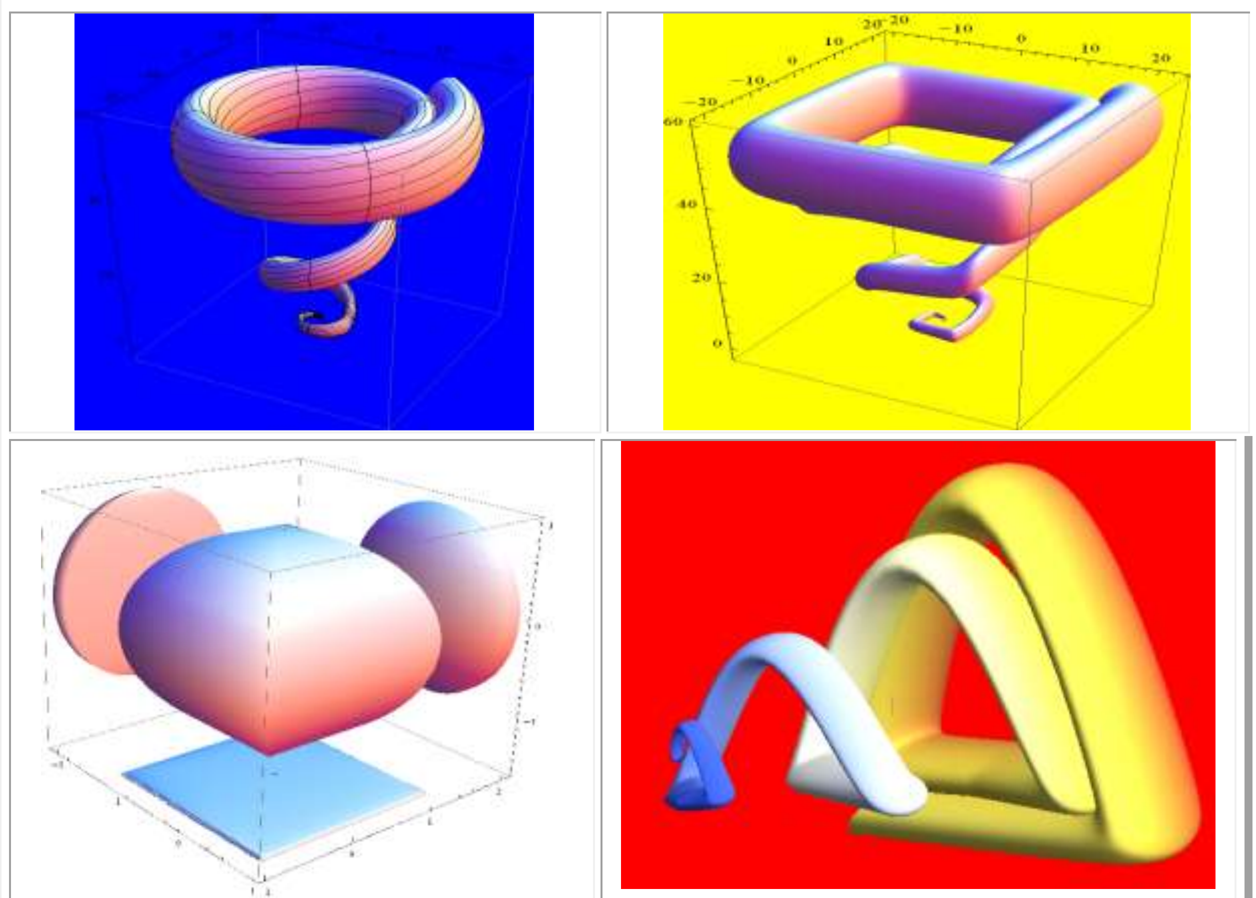


Fig. 5 Alte transformări, mai artistice, ale SFEREI ◄ şi ale TORULUI ►



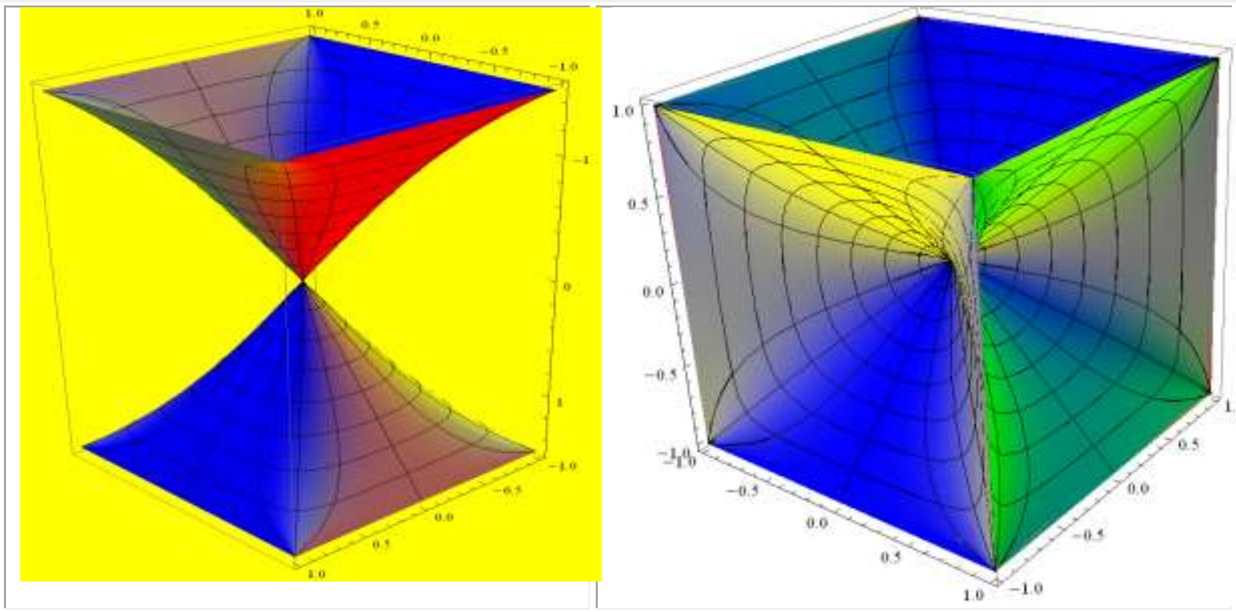


Fig. 6 Obiecte geometrice 3D noi, **SM,** inexistente în **MC**

2. TANGENTE ŞI COTANGENTE SUPERMATEMATICE EFECTIVE (SMEf)

Existenţa a cel puţin 4 domenii ale **supermatematicii** (**SM**), enunţate anterior, face posibilă apariţia celui de al **5**-lea domeniu al **supermatematicii**, pe care-l denumim domeniul **supermatematicii efective (SMEf)**, prin combinarea a câte două funcţii existente în cele 4 domenii. Apar astfel, în **demeniul 5** al **SME**, o pleiadă de funcţii tangente şi cotangente noi, **SMEf,** ca raport a două funcţii (sinus şi cosinus), care le definesc.

Celelalte funcţii noi, rezultate din **combinarea** celor **4 domenii** cunoscute **şi a celor patru operaţii matematice**, vor fi denumite **SM EVOLUATE** (**SME**v) şi sunt tratate în **Cap.2**.

Tangenta şi cotangenta sunt singurele funcţii matematice centrice definite ca rapoarte ale altor două funcţii: cosinusul şi sinususul **centrice**, **excentrice**, elevate, şi exotice, prin combinarea cărora rezultă următoarele funcţii şi simbolurile lor (**10**).

Notaţiile funcţiilor din cele **4 domenii** ale **SM** sunt :

<u>Domeniile SM:</u> 1.1) centric → texα, 1.2) excentric → ***texθ***, **1.**3) **elevat →** ***telθ*** şi 1.4) **exotic →** ***texoθ***;

cu graficele din **figura 8,a**, (remember) în care, în stânga ◀, sunt reprezentate **FCC ordinare**, iar in dreapta ▶ cele **Voinoiu**.

Notaţiile funcţiilor din cel de-al **5-lea domeniu** (**<u>SMEf)</u>** sunt (**ts → tangenta SM**):

5.1) ts **centric**/excentric → ts **c**exθ, ts **centric**/elevat → ts **c**elθ, ts **centric**/exotic → ts **c**exoθ;

5.2) ts excentric / elevat → *ts sexelθ*, ts excentric/ exotic→ *ts exexoθ*, ts excentric/**centric** → ts ex**c**θ

5,3) ts elevat / excentric → *ts elexθ*, ts elevat/ exotic / → *ts elexoθ*, ts elevat /**centric** → ts ex**c**θ;

5.4) ts exotic / excentric → ***ts exoelθ***; ts exotic /elevat → *ts exoelθ*, ts exotic/**centric** → ts exo**c**θ.

Tangentele supermatematice (ts) **centrice**, **excentrice**, elevate, şi exotice sunt deja cunoscute, fiind tratate în alte lucrări ca, de exemplu, **Şelariu Mircea Eugen**, „**SUPERMATEMATICA**” Vol. I şi Vol.II, ediţia a 2-a, Editura „Politehnica” din Timişoara, 2012, lucrare distinsă cu „**Diploma AGIR**” în domeniul „**Tehnologia informaţiei – IT**” în anul 2013 şi a primit un „**Certificat de apreciere**”, din partea

Universităţii Gallup din New Mexico, pentru contribuţiile aduse la dezvoltarea matematicii, **SM** fiind denumită „***matematica viitorului***” sau „***matematicii mileniului III***”.

Pentru noile obiecte **3D SM sferocub, cilindroprismă, conopiramidă, clepsidre, lacrimi (v.Fig.5)** ş.a., autorul a fost declarat / primit membru de onoare al „***Clubului exclusivist al paradoxiştilor***”.

$$(10)\quad \begin{cases} tscex\theta = \dfrac{\sin\theta}{cex\theta}, tscel\theta = \dfrac{\sin\theta}{cel\theta}, tscexo\theta = \dfrac{\sin\theta}{sexo\theta}; \\ tsexc\theta = \dfrac{sex\theta}{\cos\theta}, tselc\theta = \dfrac{sel\theta}{\cos\theta}, tsexoc\theta = \dfrac{sexo\theta}{\cos\theta}; \\ \dfrac{sex\theta}{cel\theta} = tsexel\theta, \quad \dfrac{sex\theta}{cexo\theta} = tsexexo\theta; \\ \dfrac{sel\theta}{cex\theta} = tselex\theta, \quad tselexo\theta = \dfrac{sel\theta}{cexo\theta}; \\ \dfrac{sexo\theta}{cex\theta} = tsexoex\theta, \quad \dfrac{sexo\theta}{cel\theta} = tsexoel\theta; \end{cases}$$

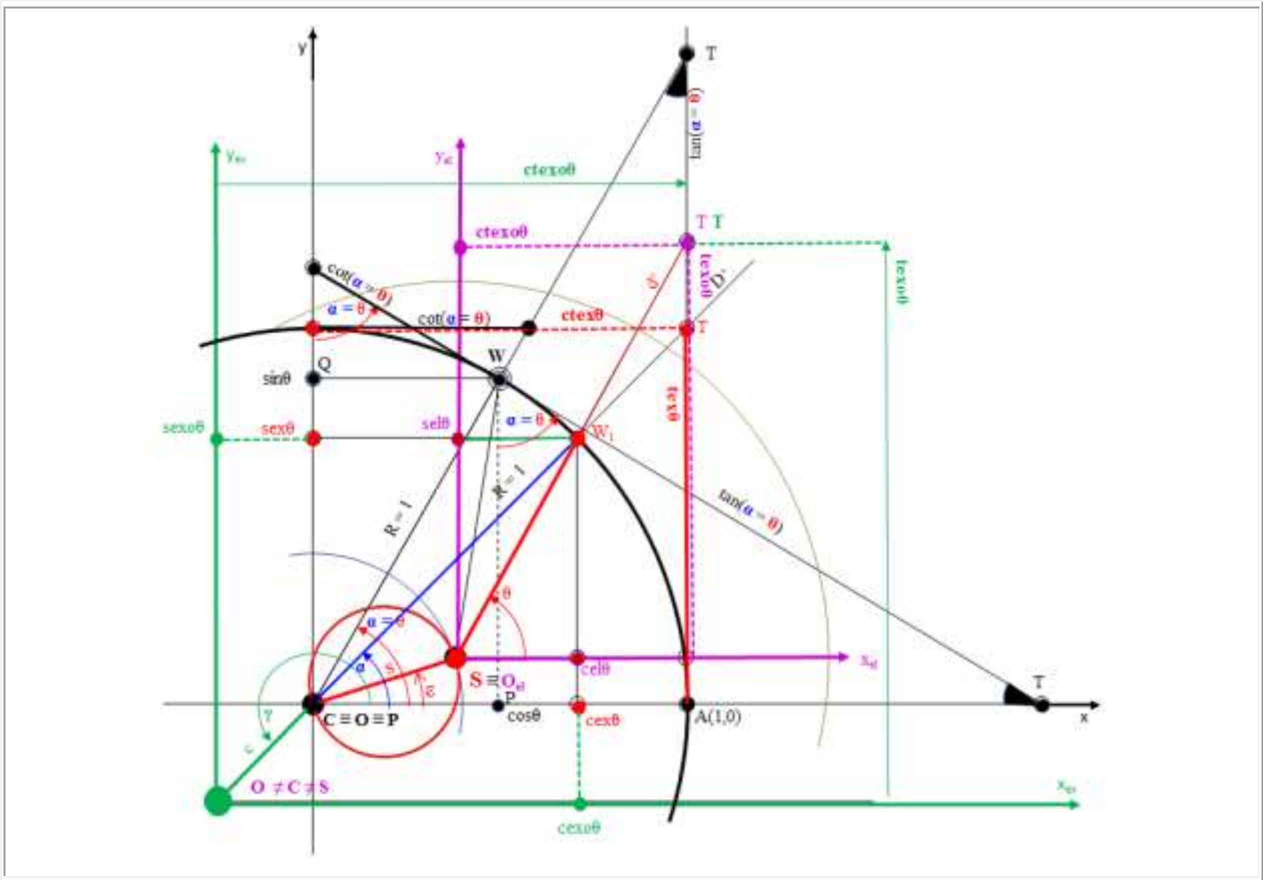
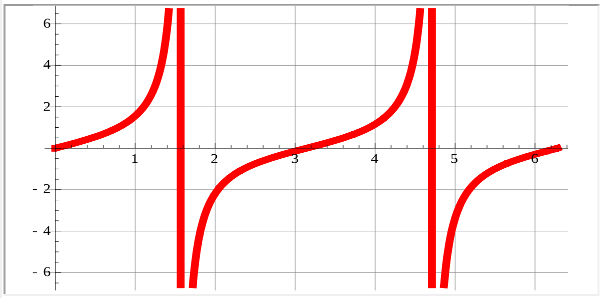


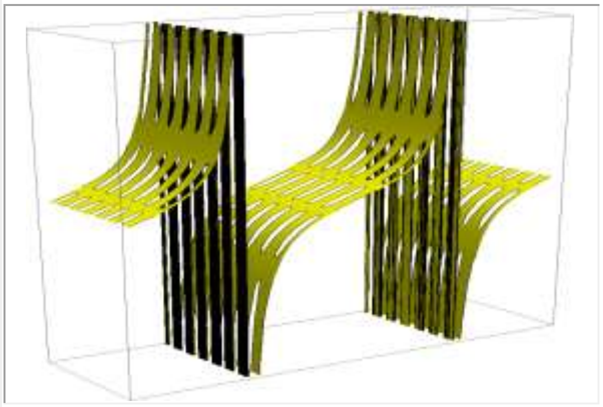
Fig.7 Schiţă explicativă pentru tangentele şi cotangentele din cele **4 domenii ale SM :** **centric → texα, excentric→ *texθ*, elevat → *telθ*** şi **exotic → *texoθ*, cotα, *ctexθ*, *ctelθ*, *ctexoθ***

Tangentele şi cotangentele din cele 4 domenii ale supermatematicii (**SM**) sunt prezentate în **figura 7**. Între acestea există relaţiile:

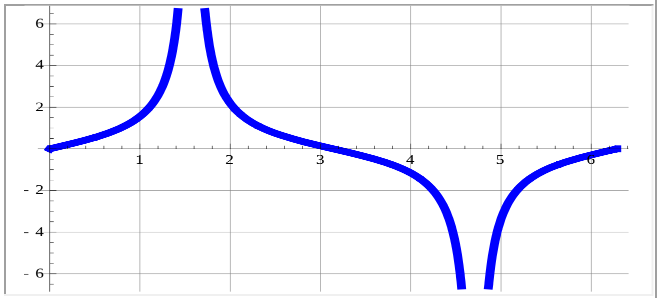
$$(11)\quad \begin{cases} \mathbf{tex\theta} = \tan\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \tan\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} \\ \mathbf{tel\theta} = \mathbf{tex\theta} - s.\sin\boldsymbol{\varepsilon} = \tan\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] - s.\sin\varepsilon\} \\ \mathbf{texo\theta} = \mathbf{tex\theta} - \mathbf{c}.\,\mathbf{sin}\gamma = \tan\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] - \mathbf{c}.\sin\gamma\} \end{cases}$$

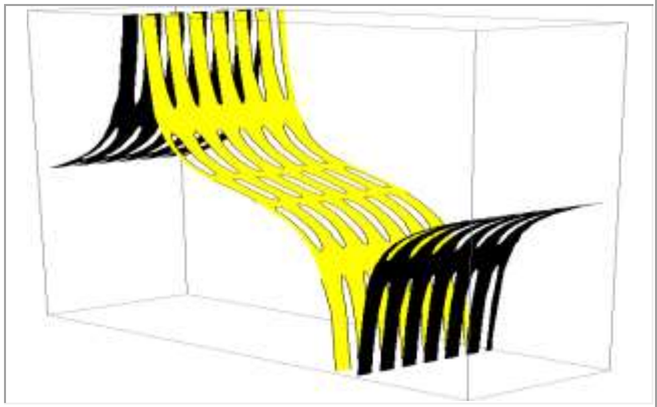
Plot[Tan[t], {t, 0,2Pi}] → **tanα** ← **Euler**



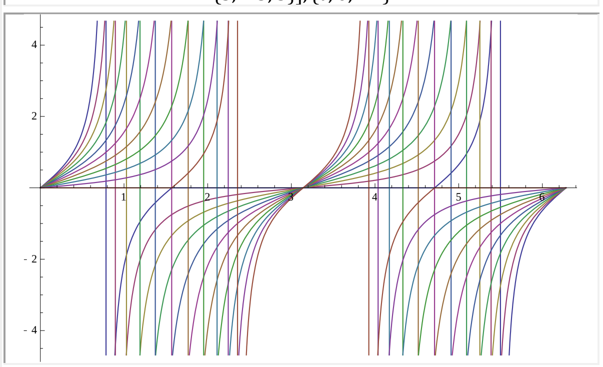


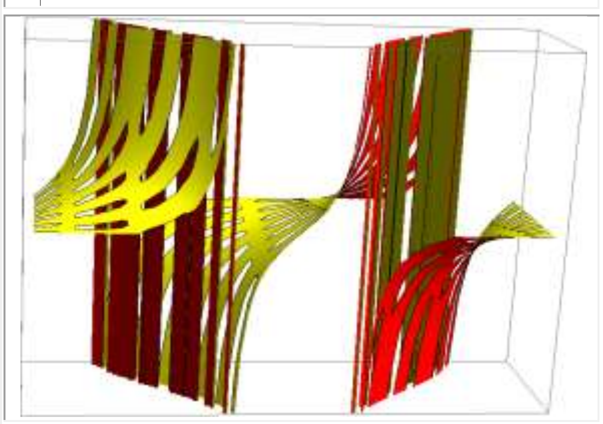
Plot[Sin[t]/Abs[Cos[t]] , {t, 0,2Pi}] → **tanvα** ←**Voinoiu**



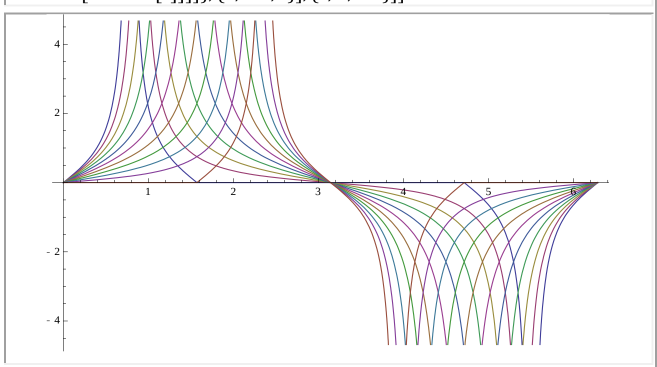


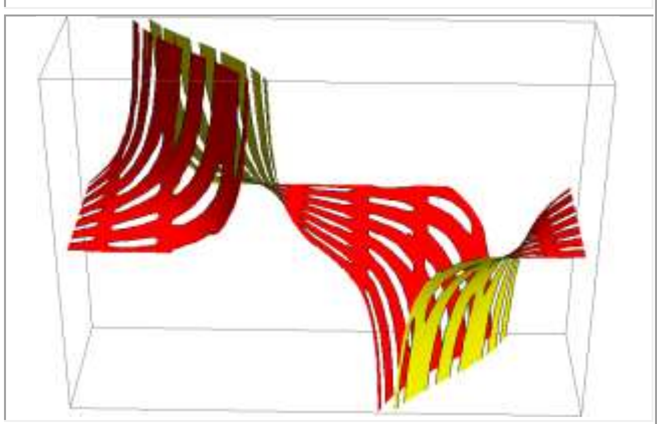
texθ ← Plot[Evaluate[Table[{Tan[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]}, {s, −5, 5}], {t, 0,2Pi}]





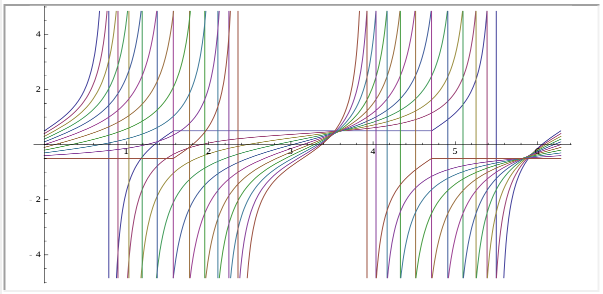
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]/Abs[Cos[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]]}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]] → **texvθ**

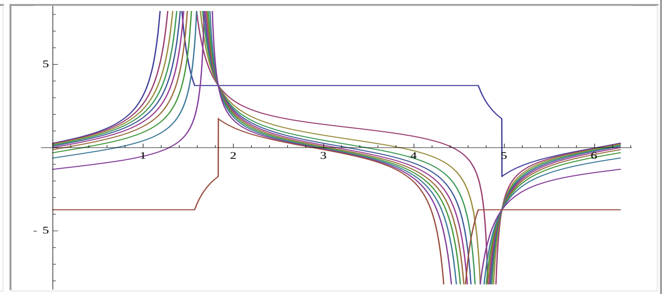


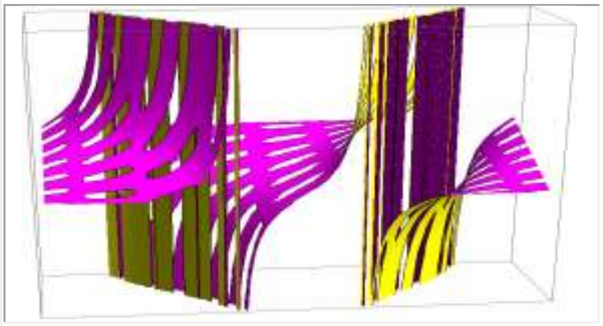


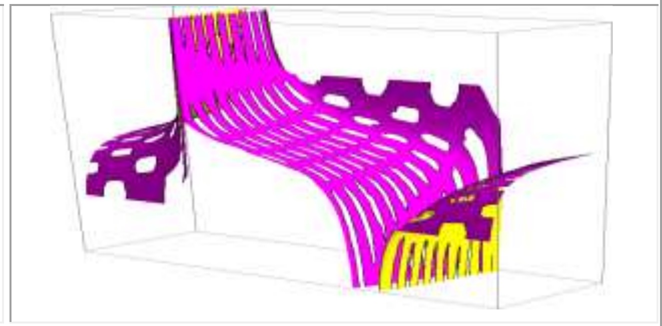
telθ ← Plot[Evaluate[Table[{Tan[t − ArcSin[0.2sSin[π/6]]] − 0.2sSin[t]}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] −0.2sSin[Pi/6])/Abs[Cos[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] −0.2sCos[Pi/6]]}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]] → **telvθ**



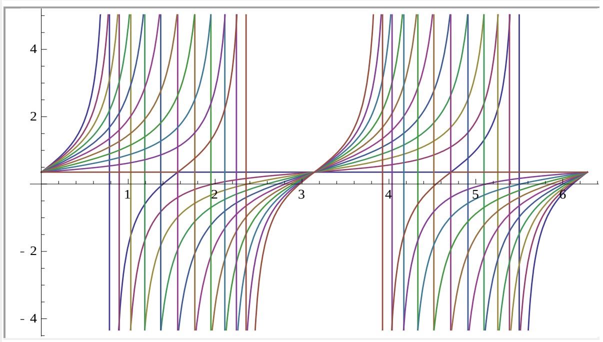


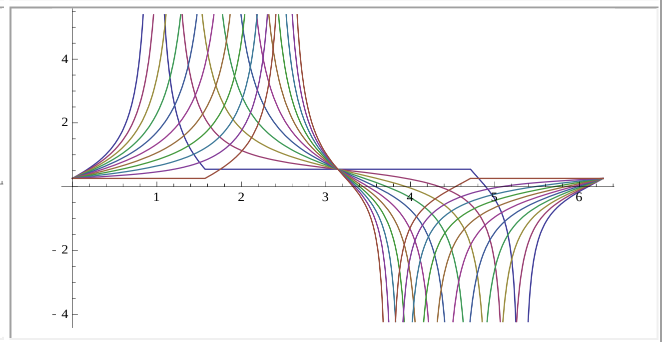


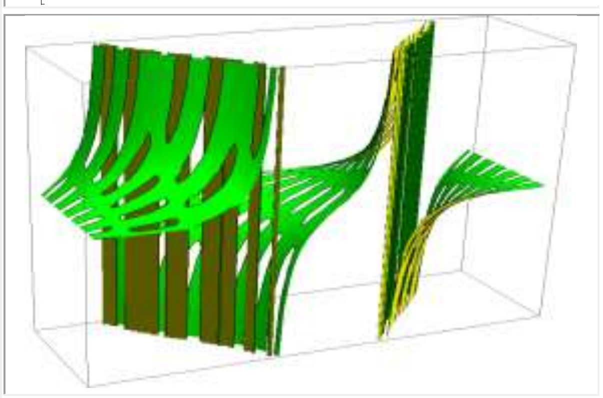


← **texoθ** Plot[Evaluate[Table[{Tan[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] + 0.5Sin[Pi/4]}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] + 0.5Sin[Pi/4]) /Abs[Cos[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] + 0.5Cos[Pi/4]]}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]] → **texovθ**







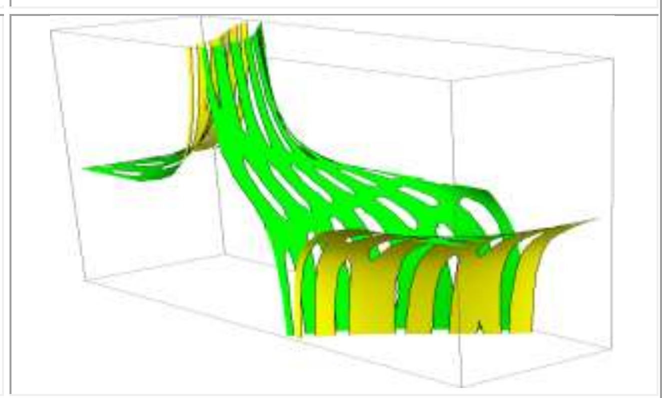
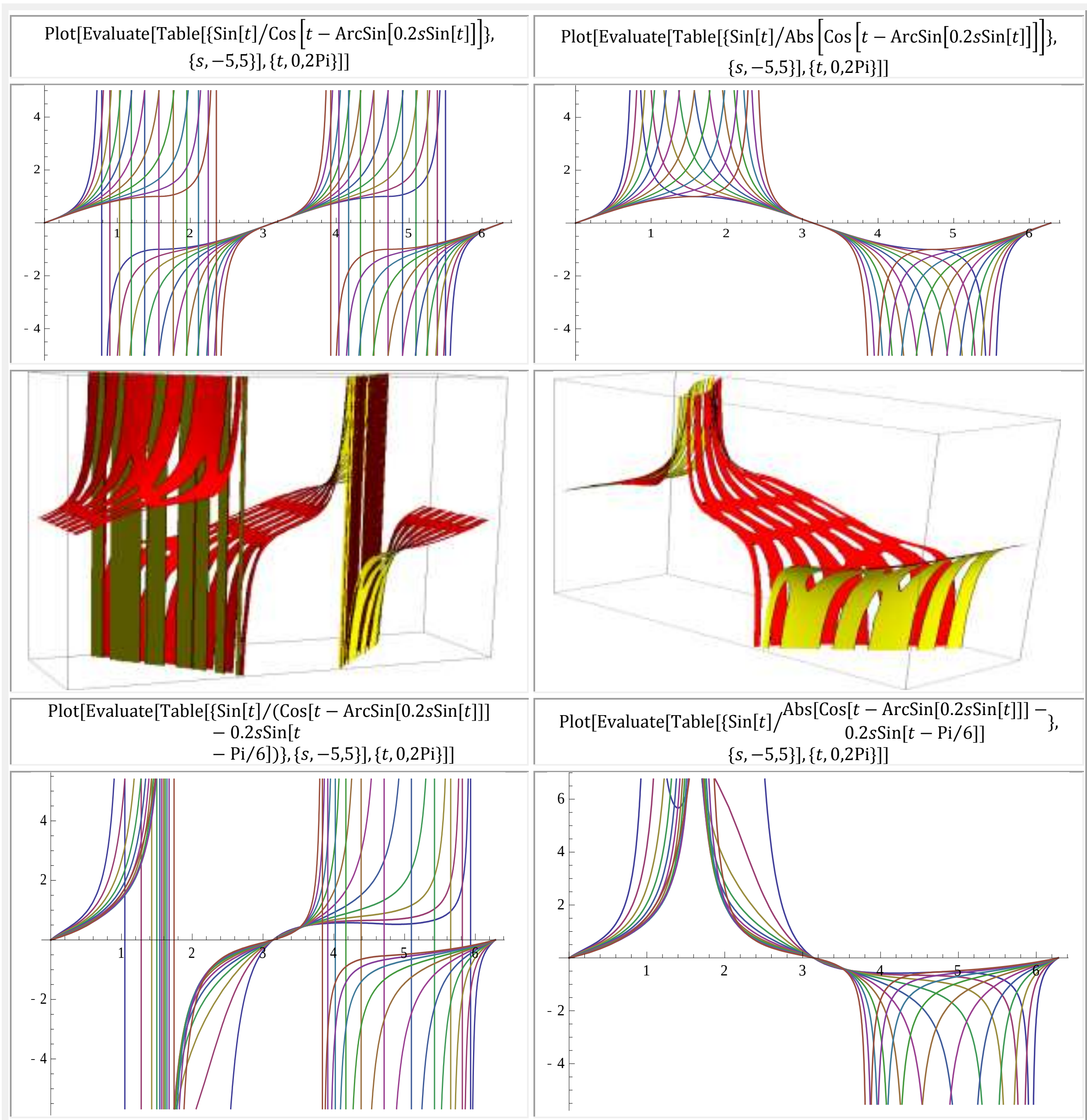
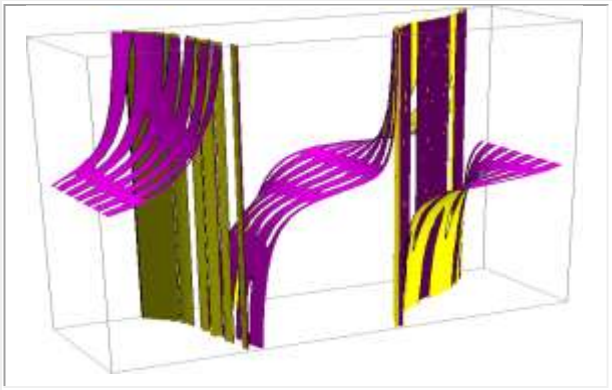


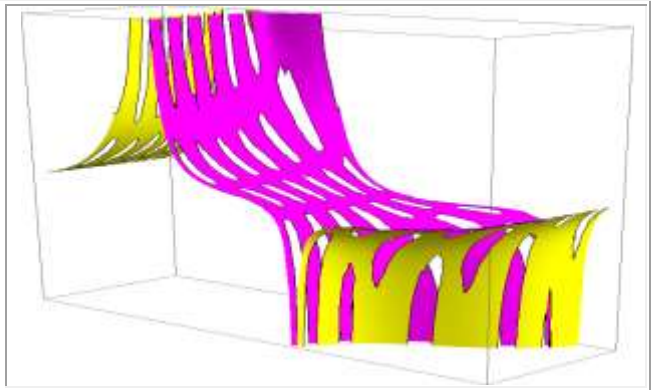
Fig. 8,a Graficele FCC tangentă Euler (tgα ≡ tanθ)▲◀, ale **FSM** ***texθ, telθ*** şi ***texoθ*** ◀▼ şi ale tangentelor centrice ▶▲ şi **SM Voinoiu (tanvθ) FSM** ***texvθ, telvθ*** şi ***texovθ*** ▼▶

3 GRAFICELE FUNCŢIILOR TANGENTE SUPERMATEMATICE EFECTIVE (SMEf)

Vor fi prezentate, în ordinea din relaţia (**10**), în partea superioară relaţiile şi, în partea inferioară, graficele funcţiilor **SMEf**. Imaginile **3D⁺** sunt <u>ciuruite</u> pentru o mai buna înţelegere a suprafeţelor, altfel, ele fiind continue. Curbe mai deosebite in **2D⁺** au fost uneori reprezentate şi ele (**Fig. 8, b1**)

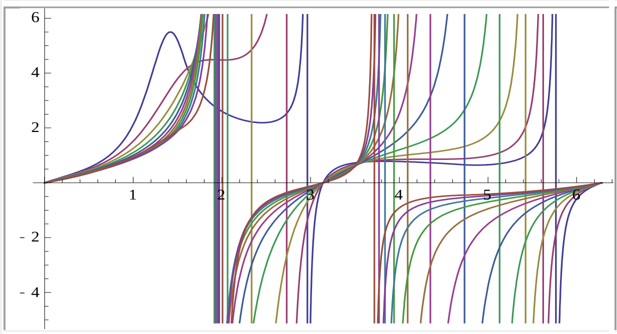


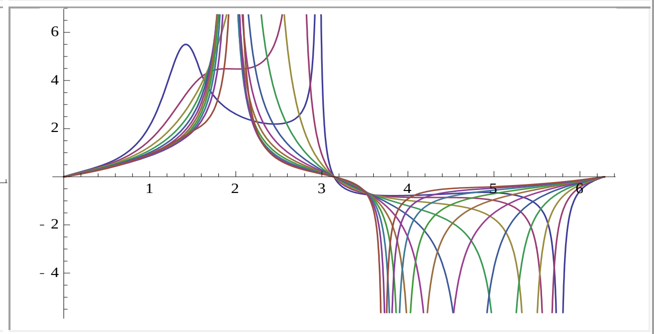




$\text{Plot[Evaluate[Table[}\{\text{Sin}[t]/\frac{(\text{Cos}[t-\text{ArcSin}[0.2s\text{Sin}[t]]]-}{0.2s\text{Sin}[t-\text{Pi}/6]+0.5\text{Cos}[\text{Pi}/4])}\},\ \{s,-5,5\}],\{t,0,2\text{Pi}\}]]$

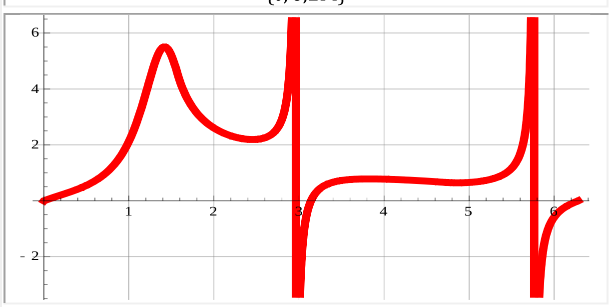
$\text{Plot[Evaluate[Table[}\{\text{Sin}[t]/\frac{\text{Abs}[\text{Cos}[t-\text{ArcSin}[0.2s\text{Sin}[t]]]-}{0.2s\text{Sin}[t-\text{Pi}/6]+0.5\text{Cos}[\text{Pi}/4]]}\},\ \{s,-5,5\}],\{t,0,2\text{Pi}\}]]$

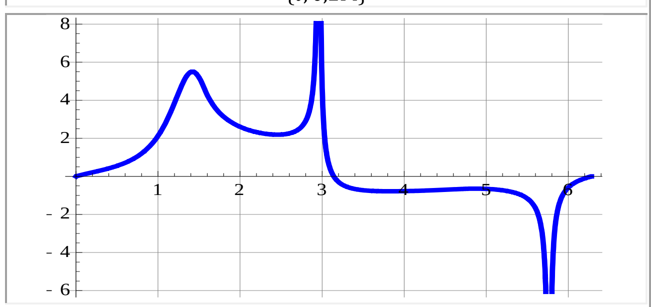


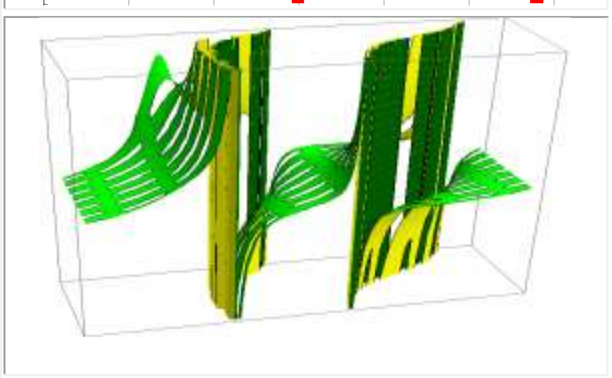


$\text{Plot[}\{\text{Sin}[t]/\frac{(\text{Cos}[t-\text{ArcSin}[-\text{Sin}[t]]]+\text{Sin}[t-\text{Pi}/6]+}{0.5\text{Cos}[\text{Pi}/4])}\},\ \{t,0,2\text{Pi}\}$

$\text{Plot[}\{\text{Sin}[t]/\frac{\text{Abs}[\text{Cos}[t-\text{ArcSin}[-\text{Sin}[t]]]+\square\text{Sin}[t-\text{Pi}/6]+}{0.5\text{Cos}[\text{Pi}/4]]}\},\ \{t,0,2\text{Pi}\}$







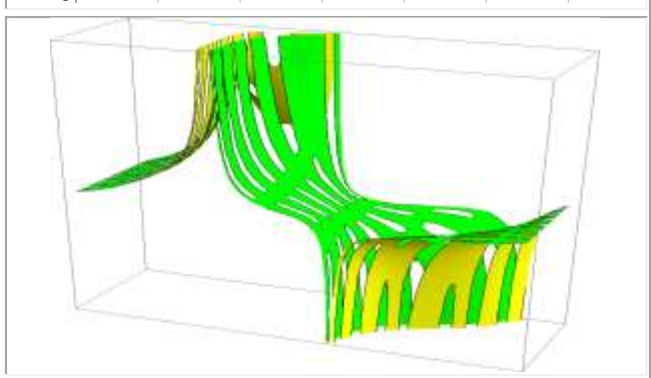
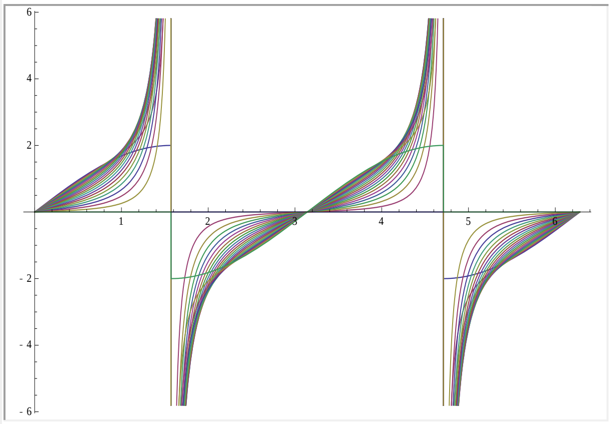
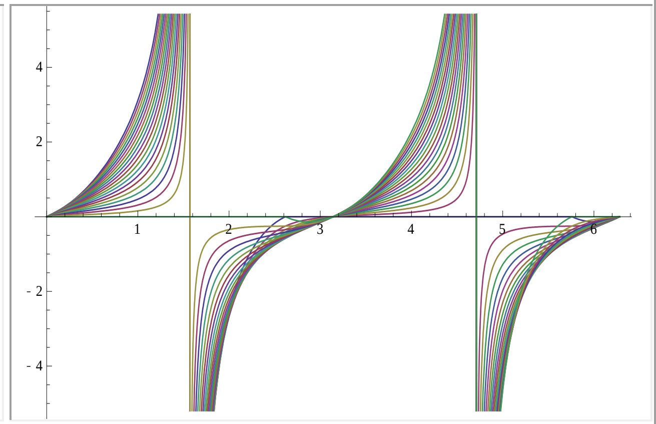


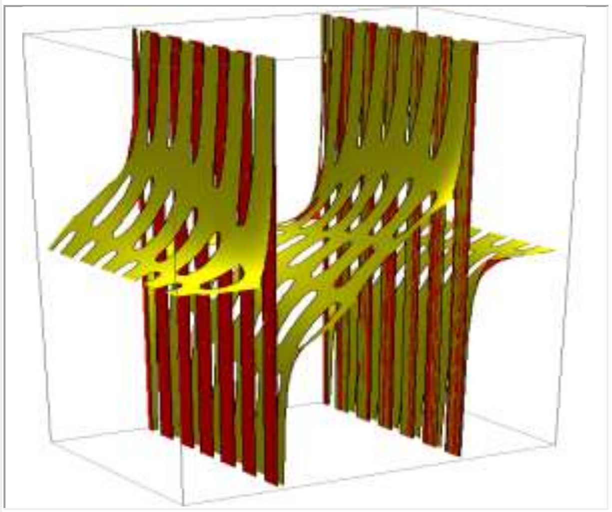
Fig. 8, b1 Graficele SMEf $tscex\theta$, $tscel\theta$, $tscexo\theta$ ◀ şi $tscexv\theta$, $tscelv\theta$, $tscexov\theta$ ▶

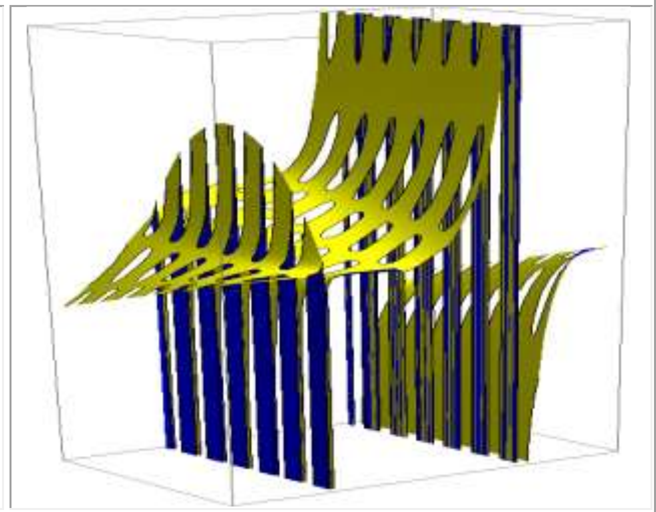
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]/Cos[t]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]] → ***tsexcθ***

Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[sSin[t − Pi/3]]] −sSin[Pi/3])/Cos[t]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]] → ***tselcθ***



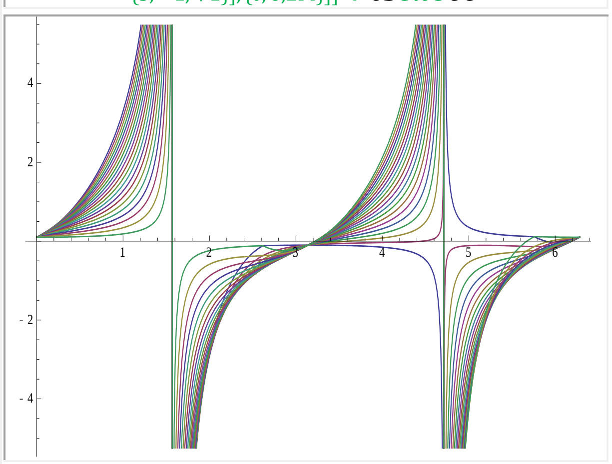


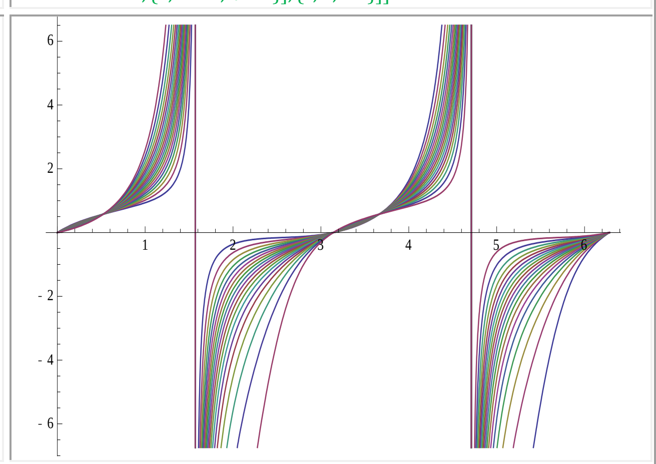




Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[sSin[t − Pi/3]]] − sSin[Pi/3] + 0.1)/Cos[t]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]] → ***tsexocθ***

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]/(Cos[t − ArcSin[sSin[t − Pi/3]]] − sCos[Pi/3])} ,{s, −0.9, +0.9}], {t, 0,2Pi}]] → *tsexelθ*





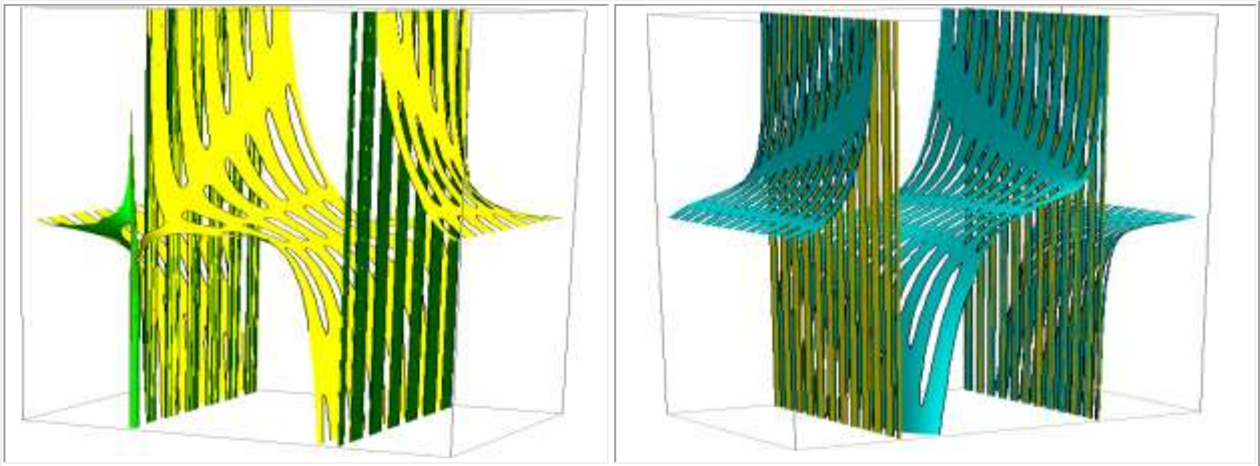
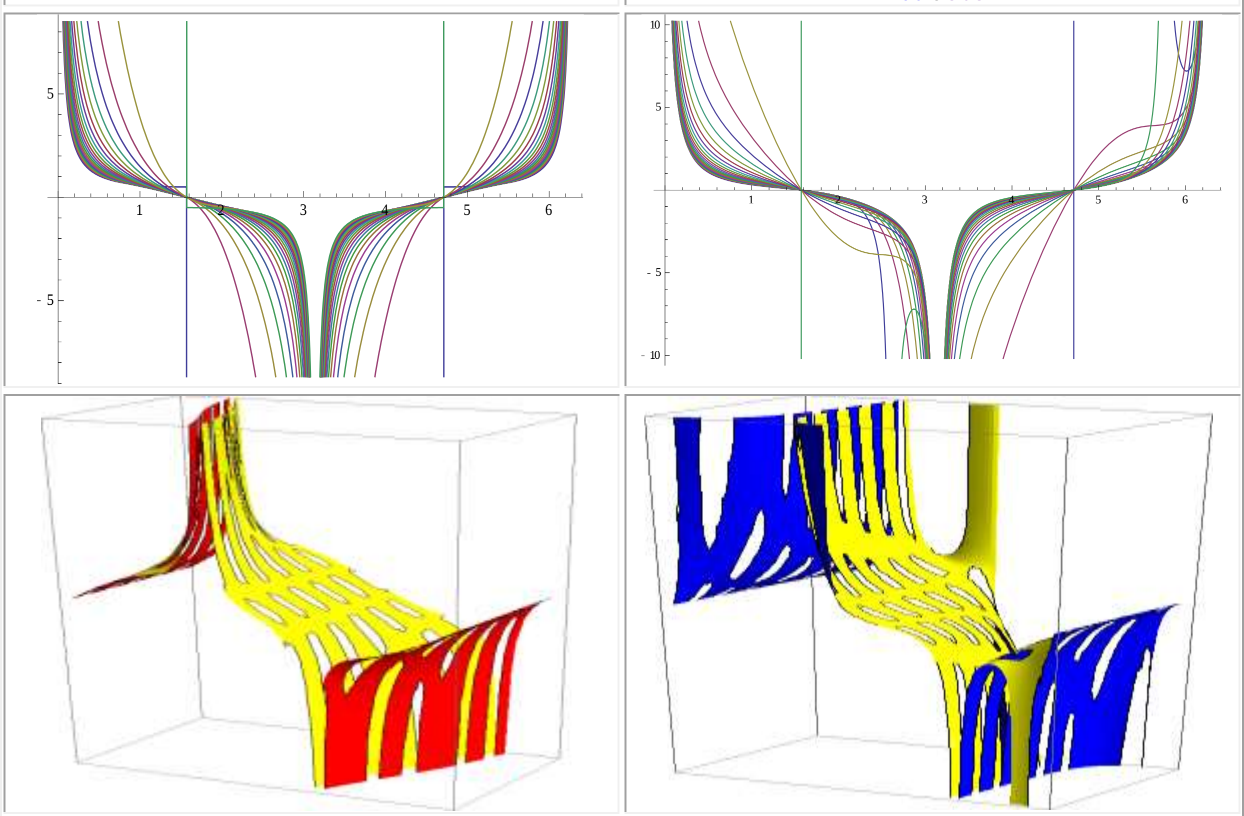


Fig. 8, b2 Graficele SME $\boldsymbol{tsexc\theta}$, $\boldsymbol{tselc\theta}$, $\boldsymbol{tsexoc\theta}$, şi $\boldsymbol{tsexel\theta}$

Aceleaşi funcţii, dar **Voinoiu** (cele **CC** definite ca de exemplu tanv = $\frac{\sin\alpha}{Abs[cos\alpha]}$) sunt prezentate cu ecuaţiile şi cu graficele lor, în continuare, în **figura 9**.

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Abs[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, −9,9}], {t, 0,2Pi}]]→ $\boldsymbol{tvcex\theta}$	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Abs[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3] −0.1sCos[Pi/3]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] → $\boldsymbol{tvcel\theta}$



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] /Abs[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]] −0.1sCos[Pi/3] + 0.1]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] →**tvc*exoθ***	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/ Abs[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]] − 0.1sCos[Pi/3]]} ,{s, −9,9}], {t, 0,2Pi}]] → ***tv**exelθ*

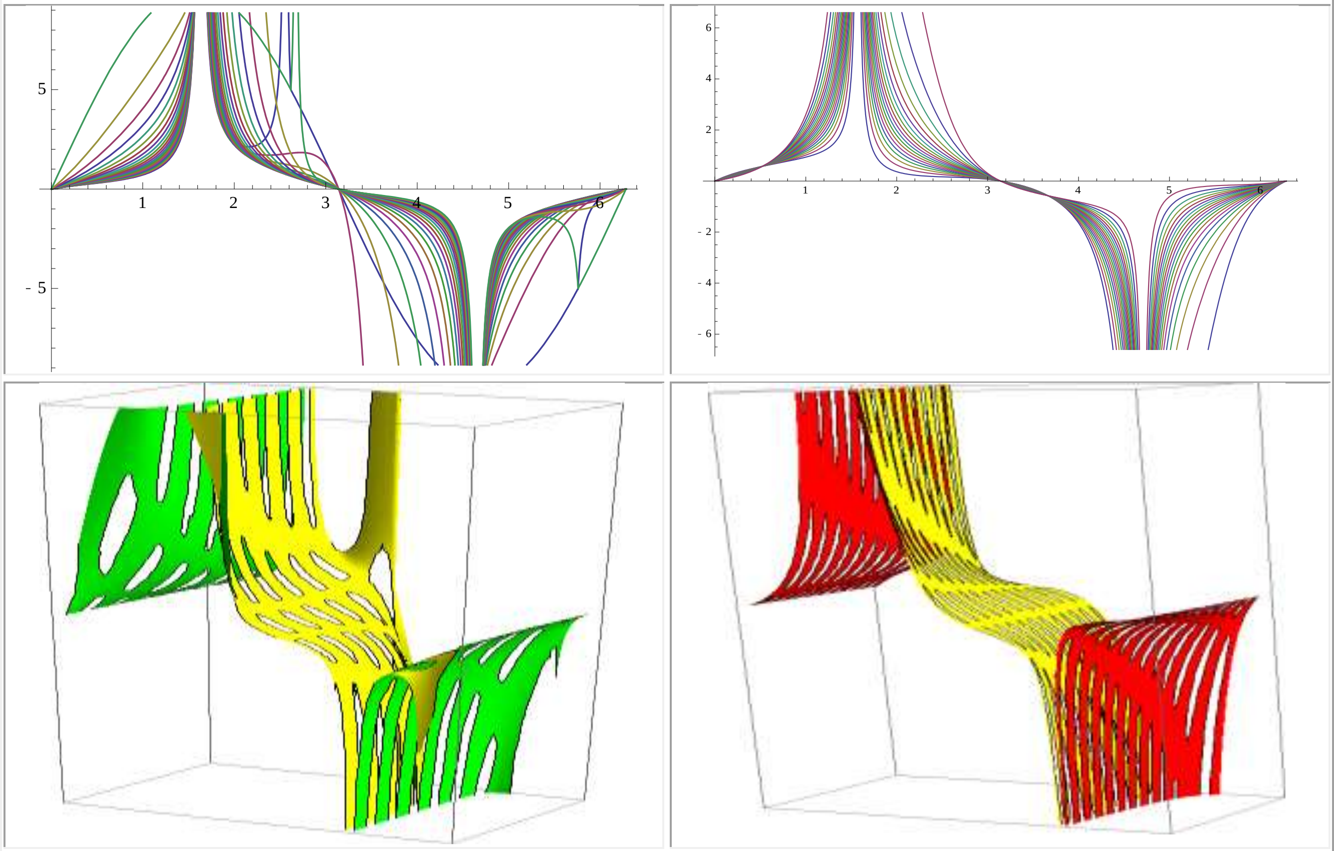
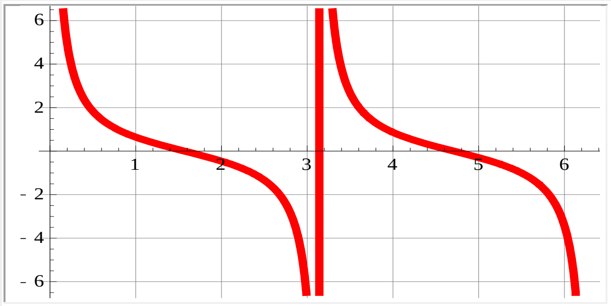


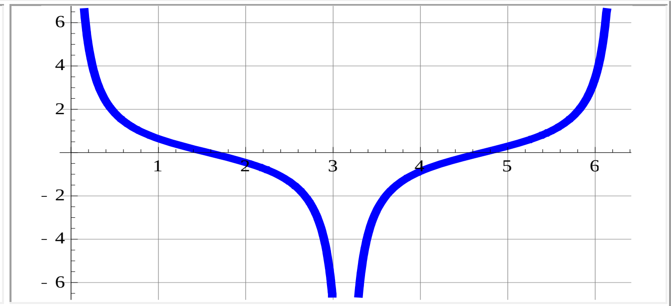
Fig. 8, b3 Graficele SME ***tvcsexθ*, *tvcelθ*, *tvcexoθ*,** şi ***tv**exelθ*

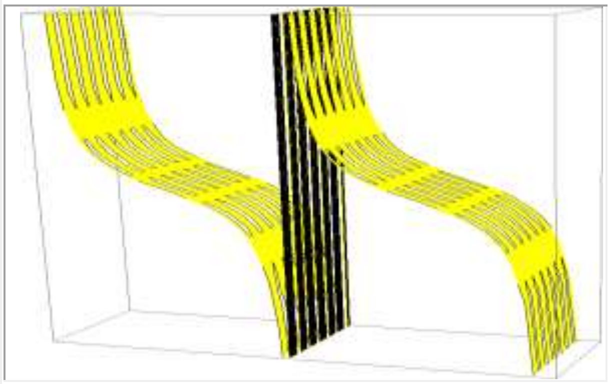
4 GRAFICELE FUNCŢIILOR COTANGENTE SUPERMATEMATICE

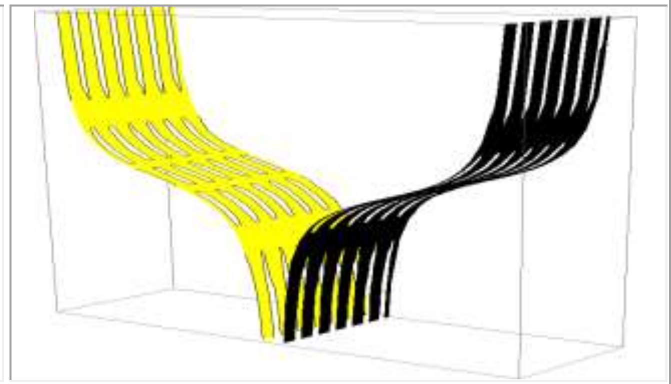
Vor fi prezentate, ca şi în cazul tangentelor, în ordinea din relaţia (**12**): în partea superioară relaţiile şi, în partea inferioară, graficele funcţiilor **SME**. Sub acestea, imaginile **3D** sunt ciuruite pentru o mai bună înţelegere a suprafeţelor, altfel ele sunt continue.

← cotα Plot[Cot[t], {t, 0,2Pi}] → Euler	Plot[Cos[t]/Abs[Sin[t]] , {t, 0,2Pi}] → cotvα→ Voinoiu



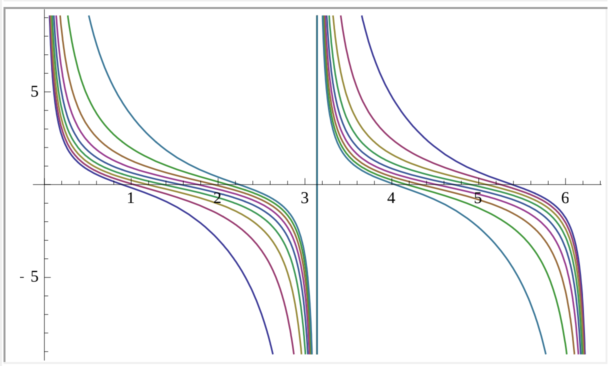


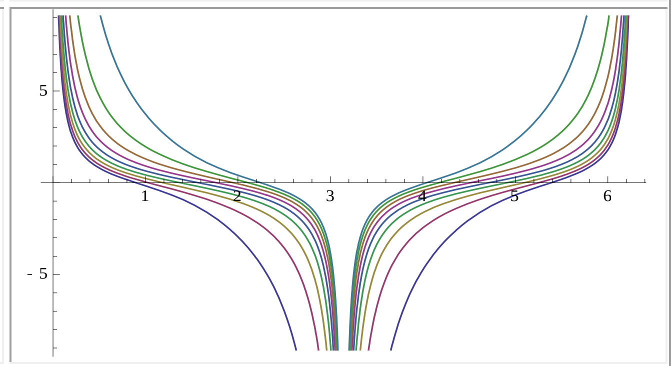


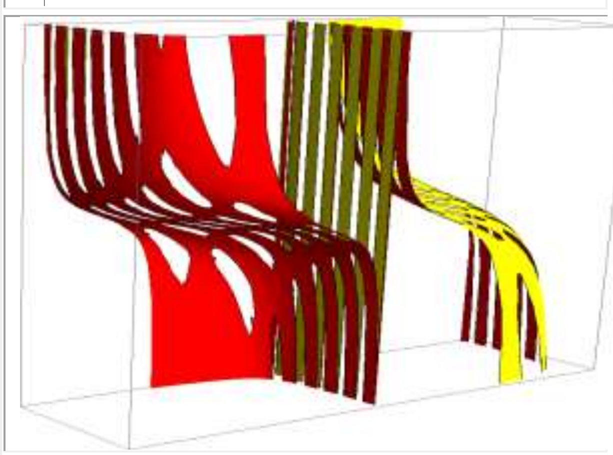


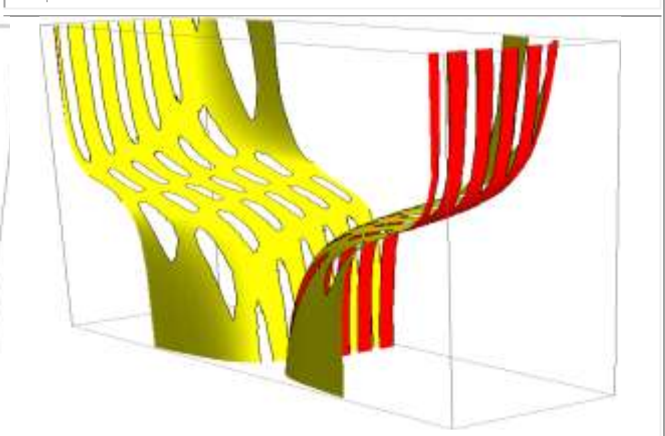
ctexθ ← Plot[Evaluate[Table[{Cot[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]}, {s, −5, 5}], {t, 0,2Pi}

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]/Abs[Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]]}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]] → **ctexvθ**





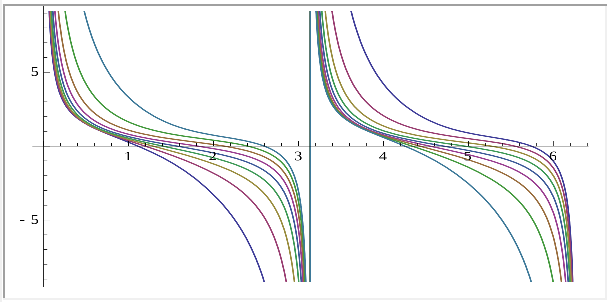


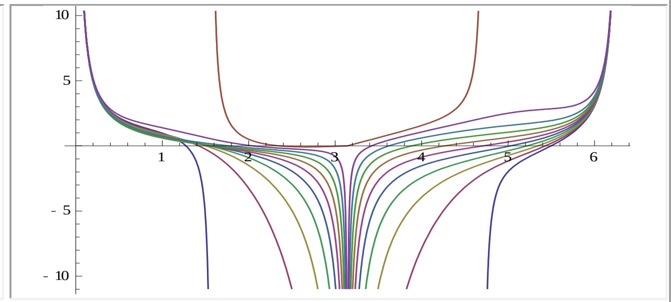


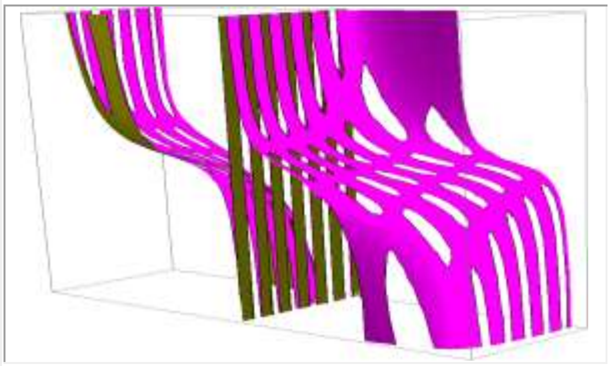
Plot[Evaluate[Table[{(Cot[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] − 0.2s. cos[t])}, {s, −4,4}], {t, 0,2Pi}]]← ctelθ

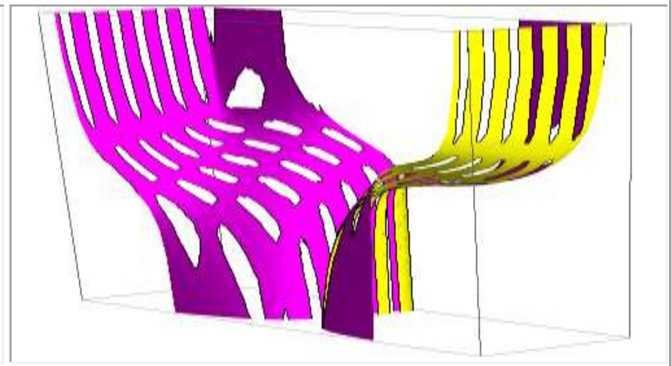
Plot[Evaluate[Table[{(Cos[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] −0.2sCos[t])/Abs[Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]]]

$-0.2s\mathrm{Sin}[t]\},\{s,-5,5\}],\{t,0,2\mathrm{Pi}\}]] \rightarrow$ ctelvθ



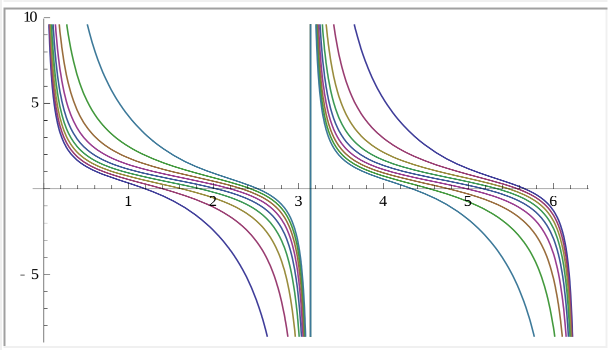


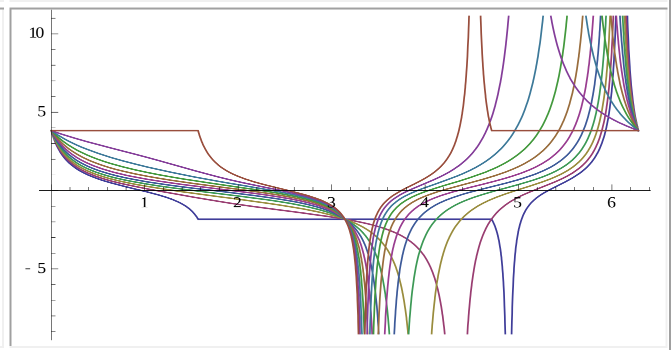


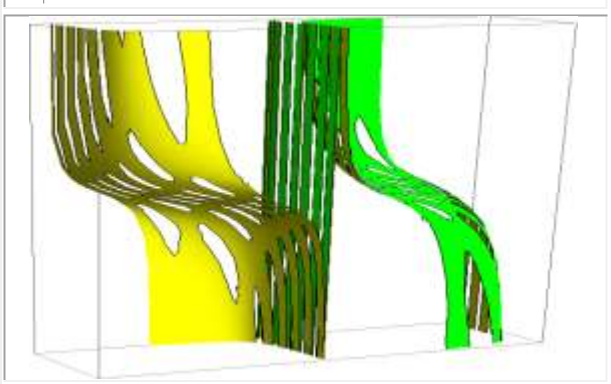


← ctexoθ Plot[Evaluate[Table[{Cot[$t-$ ArcSin[$0.2s\mathrm{Sin}[t]$]] + 0.5 Sin[Pi/4]}, {$s,-4,4$}], {t, 0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{(Cos[$t-$ ArcSin[$0.2s\mathrm{Sin}[t]$]] + 0.5Cos[Pi/4])/ Abs[Sin[$t-$ ArcSin[$0.2s\mathrm{Sin}[t]$]] + 0.5Sin[Pi/4]]}, {$s,-5,5$}], {t, 0,2Pi}]] → ctexovθ







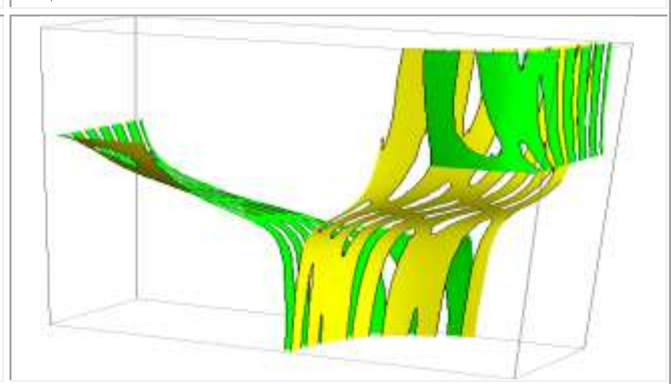
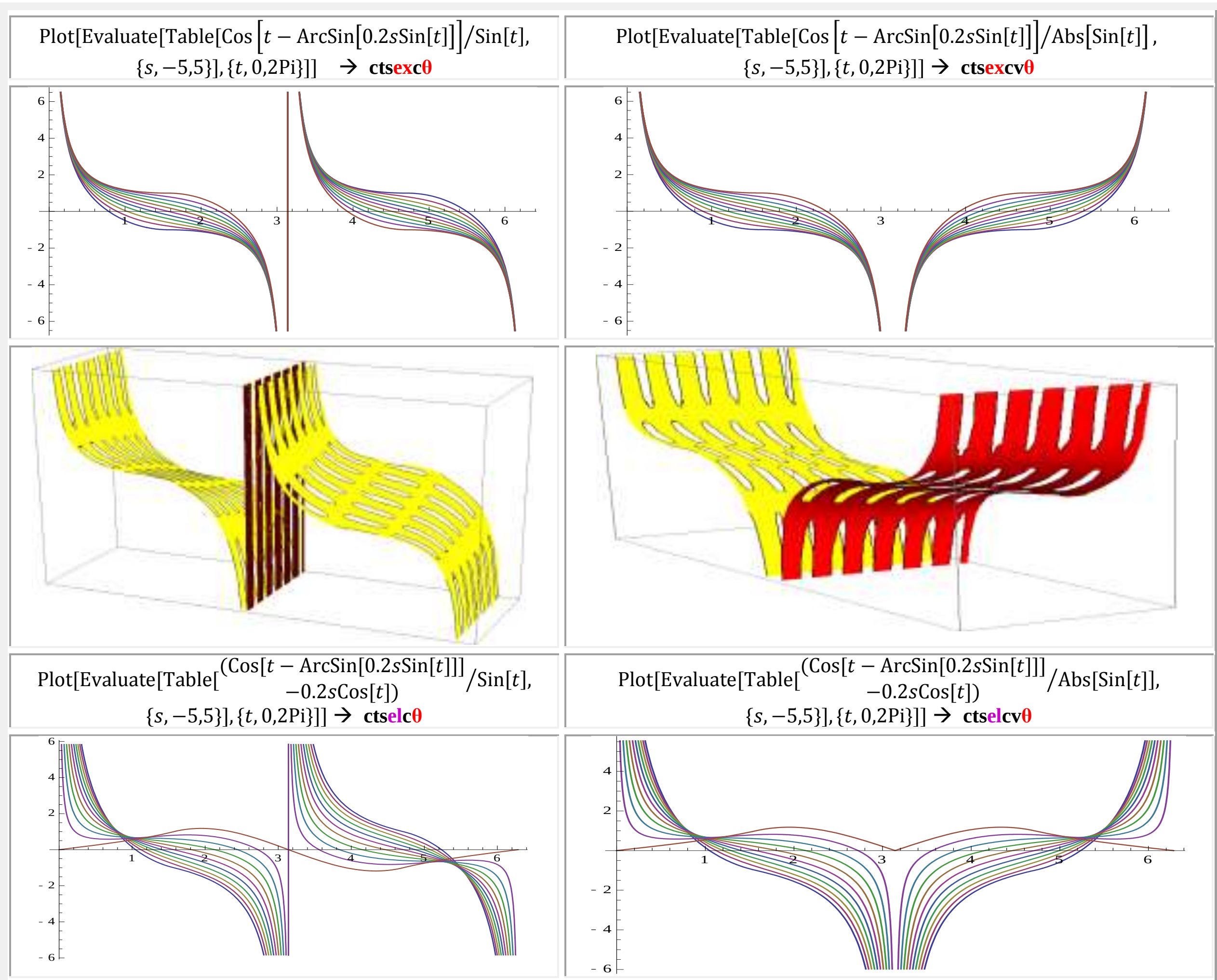


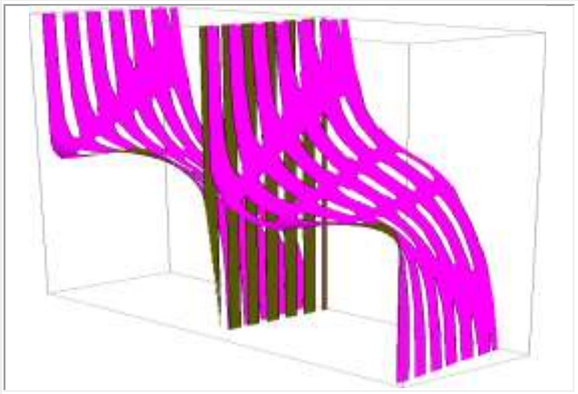
Fig. 9 Graficele FCC cotangente Euler (tgα ≡ tanθ) ◀ şi cotangenta **Voinoiu (tanvθ)** ▶ şi a **FSM** ***ctexθ***, ***ctelθ*** şi ***ctexoθ*** ◀ precum şi ale **FSM** ***ctexvθ***, ***ctelvθ*** şi ***ctexovθ*** ▶

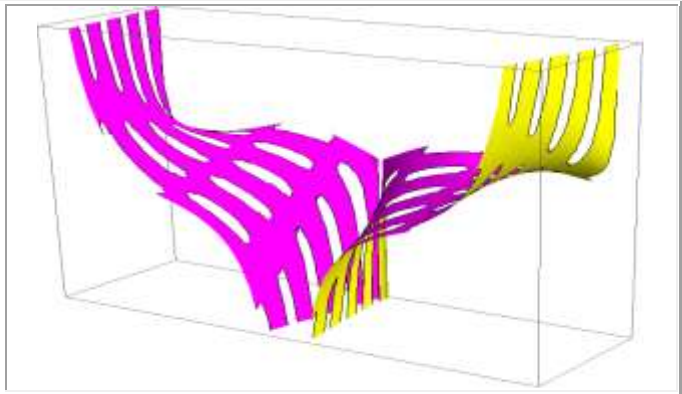
$$\begin{cases} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta, \frac{cex\theta}{sex\theta} = ctex\theta \;;\; \frac{cel\theta}{sel\theta} = ctel\theta \;;\; \frac{cexo\theta}{sexo\theta} = ctexo\theta; \\ \frac{\cos\theta}{sex\theta} = ctcsex\theta \;;\; \frac{\cos\theta}{sel\theta} = ctcsel\theta \;;\; \frac{\cos\theta}{sexo\theta} = ctcsexol\theta; \\ \frac{sex\theta}{\cos\theta} = ctsexc\theta \;;\; \frac{sel\theta}{\cos\theta} = ctselc\theta \;;\; \frac{sexo\theta}{\cos\theta} = ctsexolc\theta; \\ \frac{cel\theta}{sex\theta} = ctselex\theta; \frac{cexo\theta}{sex\theta} = ctsexoex\theta; \\ \frac{cex\theta}{sel\theta} = ctsexel\theta \;;\; \frac{cexo\theta}{sel\theta} = ctexosel\theta; \\ \frac{cex\theta}{sexo\theta} = ctsexexo\theta \;;\; \frac{cel\theta}{sexo\theta} = ctselexo\theta; \end{cases} \tag{12}$$

5. GRAFICELE FUNCŢIILOR COTANGENTE SUPERMATEMATICE EFECTIVE (SMEf)

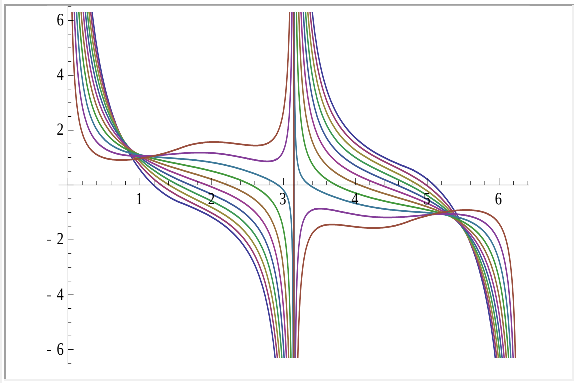
Sunt prezentate în **figura 10** în care, în **ctcelvθ (Fig. 10,b)**, sunt inserate şi două grafice de **s = +1** şi **s = —1** pentru a evidenţia formele mai deosebite ce sunt estompate în fasciculul / mulţimea de funcţii de **s ∈ [-1, +1]**.

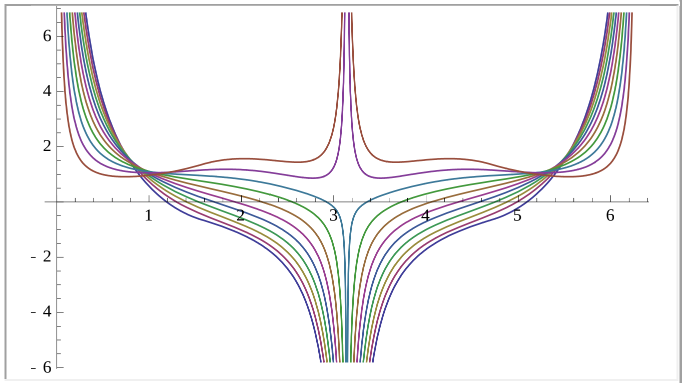


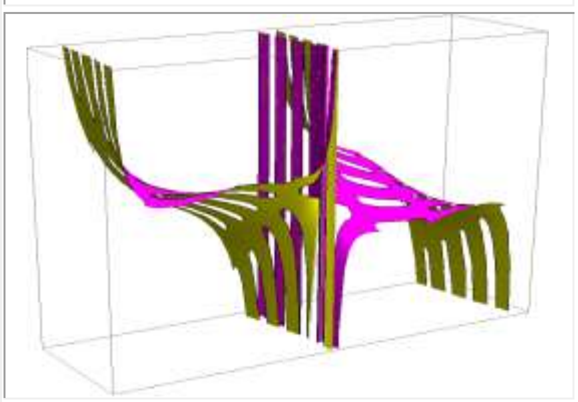




Plot[Evaluate[Table[$(\mathrm{Cos}[t-\mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[t]]]-0.2s\mathrm{Cos}[t$ +0.5Cos[Pi/4]) {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]] → **ctsexocθ**	Plot3D[$(\mathrm{Cos}[t-\mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[t]]]-0.2s\mathrm{Cos}[t]$ +0.5Cos[Pi/4]) /Abs[Sin[t], {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]] → **ctsexocvθ**







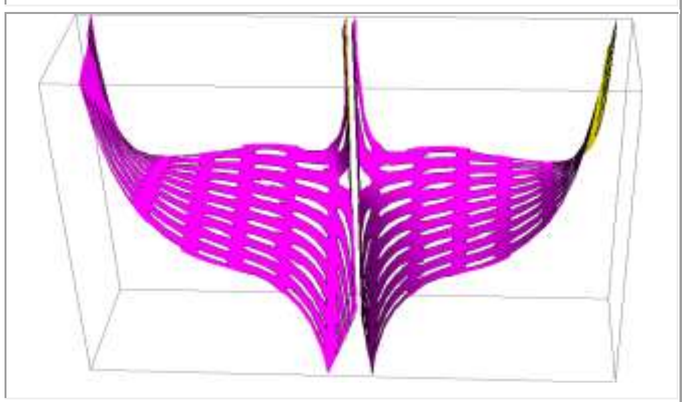
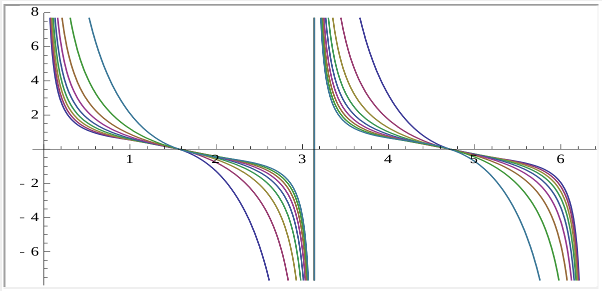
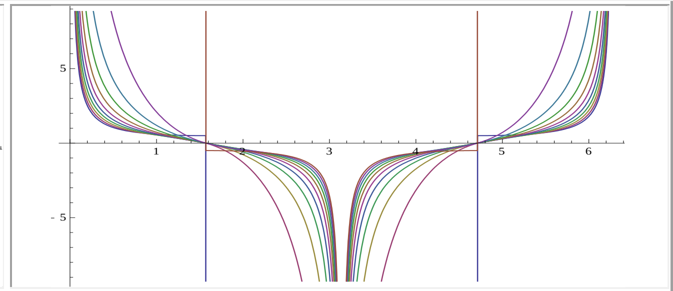
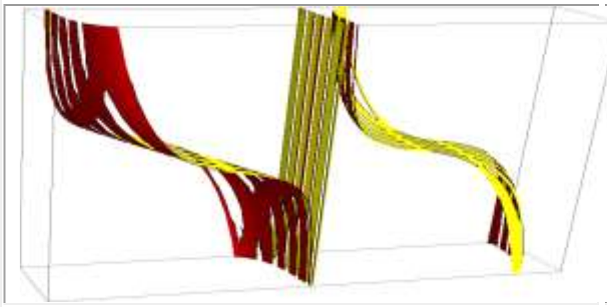


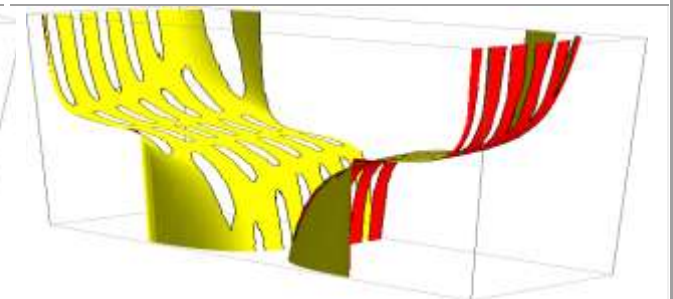
Fig. 10, a Graficele FSMEf $ct sexc\theta$, $ct selc\theta$, $ct sexolc\theta$ ◄
şi Voinoiu : $ct sexcv\theta$, $ct selcv\theta$, $ct sexolcv\theta$►

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sin$\left[t-\mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[t]]\right]$}, {$s$, −4,4}], {$t$, 0,2Pi}]] → **ctcexθ**	Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Abs$\left[\mathrm{Sin}\left[t-\mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[t]]\right]\right]$}, {$s$, −4,4}], {$t$, 0,2Pi}]] → **ctcexvθ**



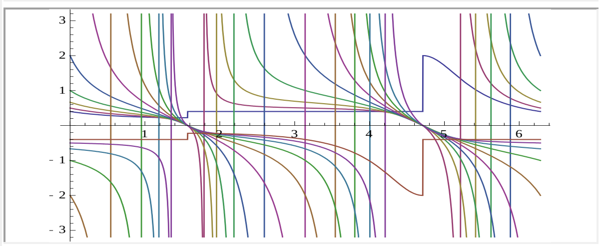


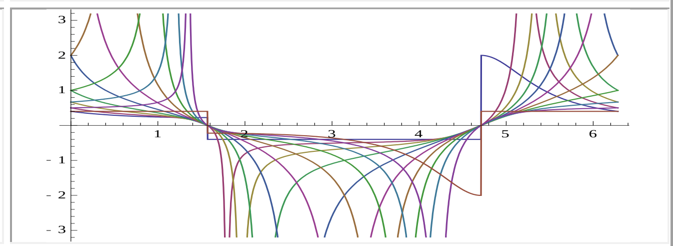


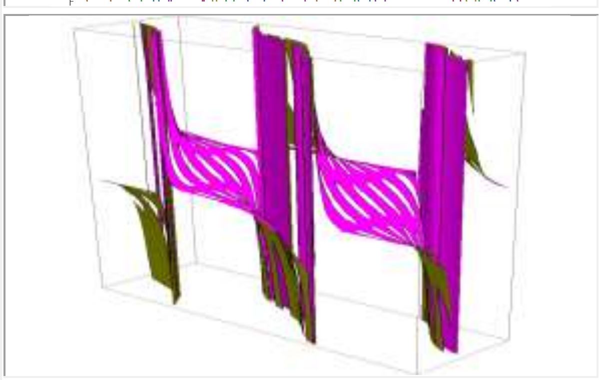


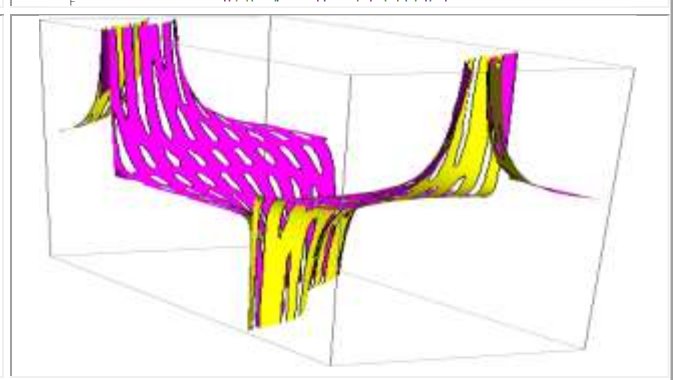
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/(Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] −0.5sCos[t])}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]] → **ctcelθ**

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Abs[Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] −0.5sCos[t]]}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]] → **ctcelvθ**



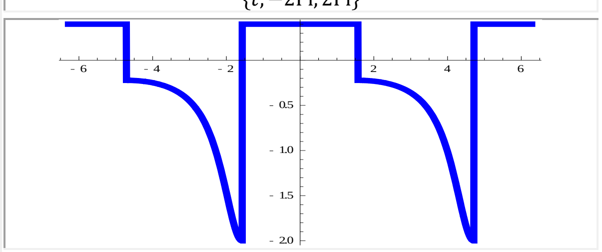


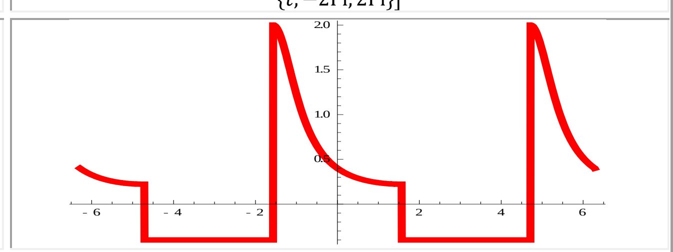




Plot[{Cos[t]/Abs[Sin[t − ArcSin[Sin[t]]] − 2.5Cos[t]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]

Plot[{Cos[t]/Abs[Sin[t + ArcSin[Sin[t]]] + 2.5Cos[t]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]





Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/(Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] +0.4Cos[Pi/3])}, {s, − {t, 0,2Pi}]] → **ctcexoθ**	Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Abs[Sin[t − ArcSin[0.2sSin[t]]] +0.4Cos[Pi/3]]}, {s, −5,5}], {t, 0,2Pi}]]

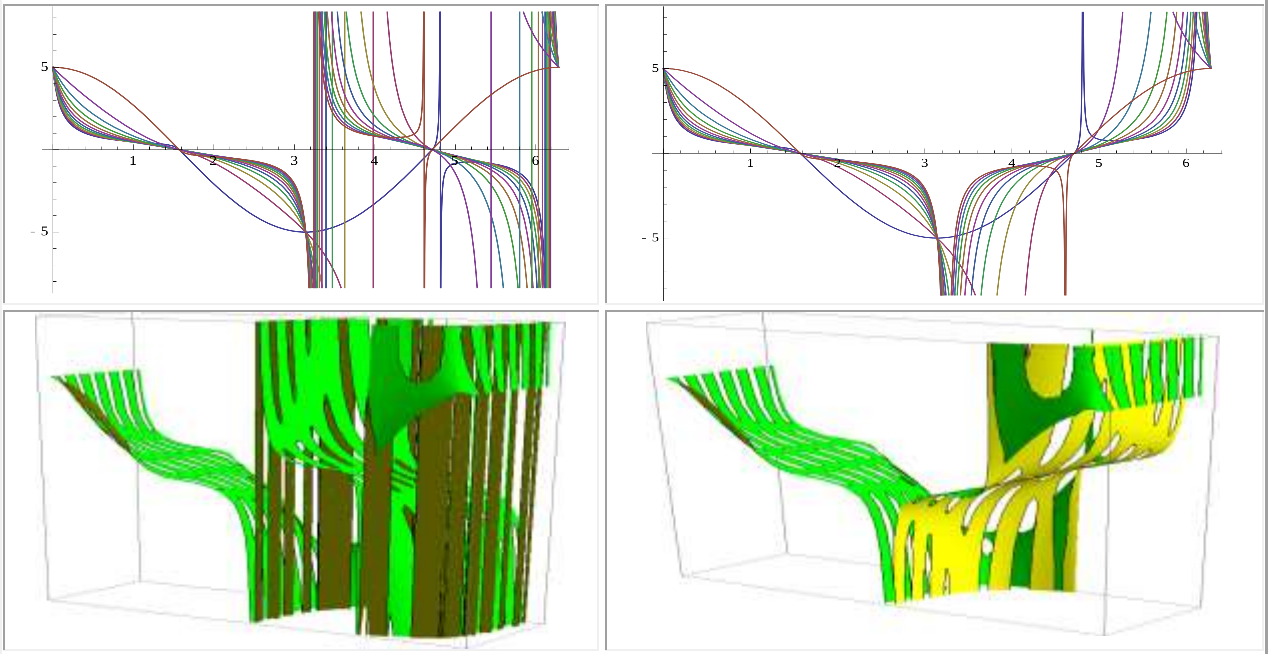


Fig. 10, b Graficele SME ***ctexcθ, ctelcθ, ctexocθ,*** şi ***ct****exelθ*

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/(Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]] − 0.1sSin[Pi/3] + 0.1)}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] → *ssexexoθ*	Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]] −Sin[Pi/3])/Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] → ***sselexθ***

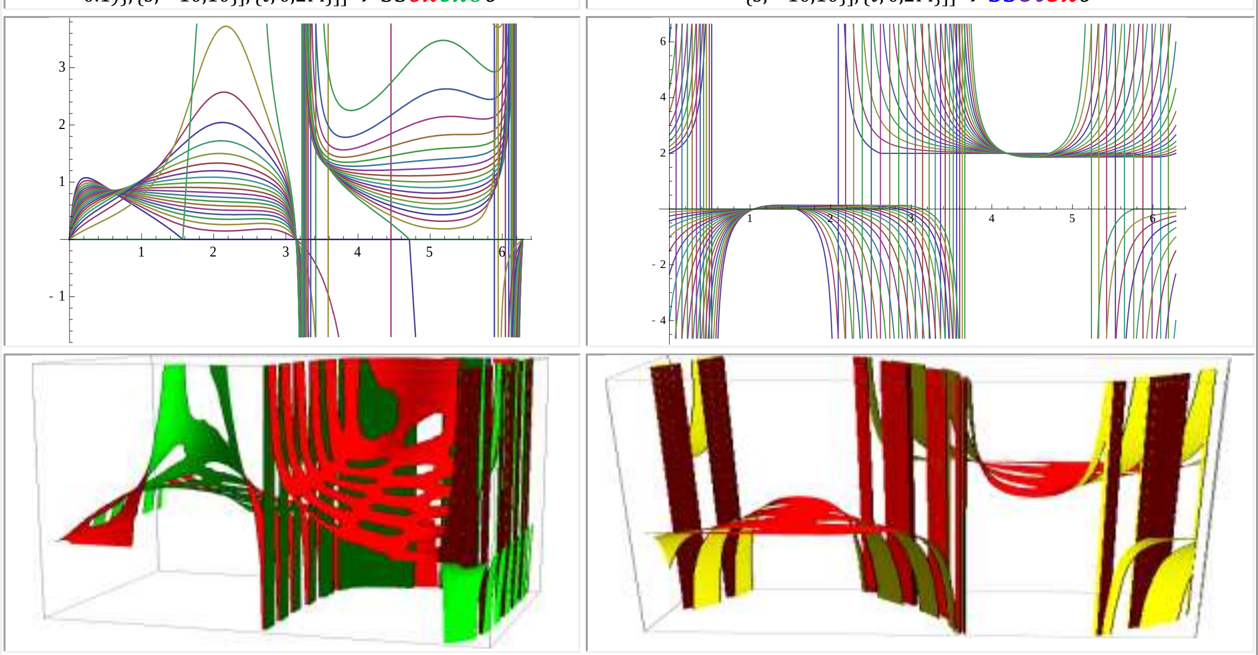


Fig. 11, a Graficele SME *ssexexoθ, sselexθ*

Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]] −Sin[Pi/3])/Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]] −Sin[t − Pi/3] + 0.1}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] → $tselexo\theta$	Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]] −Sin[t − Pi/3] + 0.1)/(Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/3]]] −Sin[t − Pi/3])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]→ $tsexoel\theta$

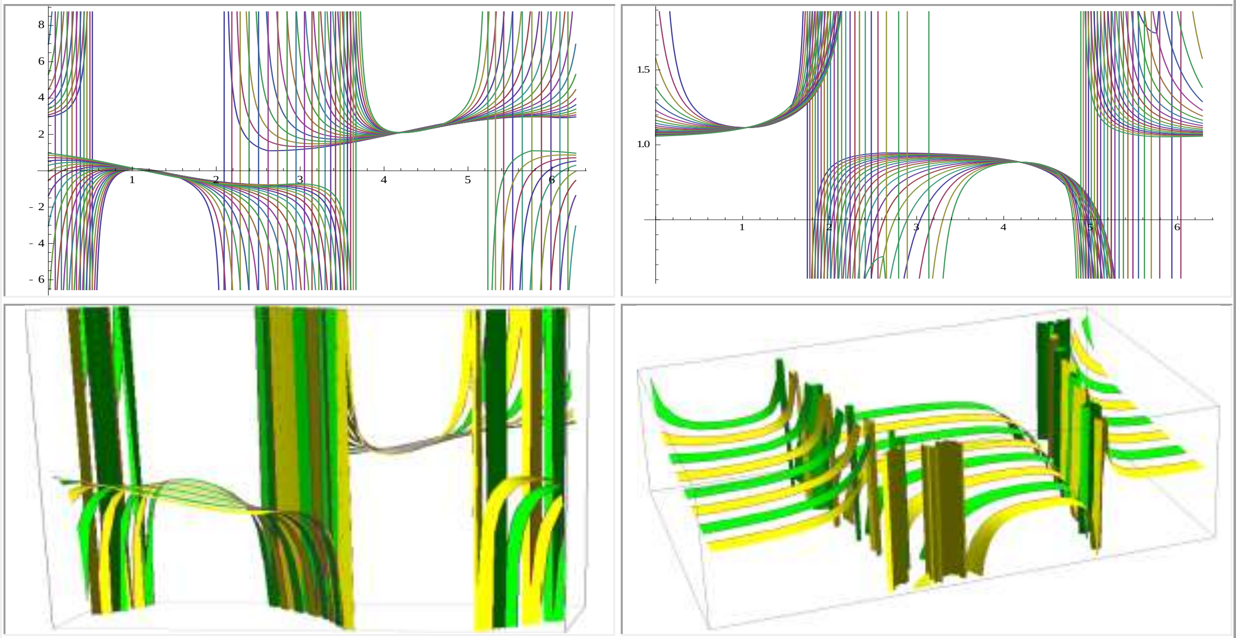


Fig. 11, b Graficele SME $tselex\theta$, $tsexoel\theta$

Dacă în **Cap. 2** au putut fi prezentate integral **FSMEf**, nu acelaşi lucru poate fi realizat în **Cap. 3** şi în următoarele, în care, aşa cum s-a mai afirmat, numărul funcţiilor **SM** noi, denumite şi **evoluate** (**Ev**), **FSMEv** tinde spre infinit, atribuind **supermatematicii** (**SM**), în general şi celei evoluate (**Ev**), în special, caracterul de ***domeniul supermatematicii nemarginite.***

Iniţial, capitolele acestei lucrări au fost tot atâtea Note, publicate independent. Deoarece nu există trimiteri de la o Notă la alta, sau de la un capitol la altul, nici în ceea ce privesc figurile şi nici relaţiile matematice, numerotarea acestor şi cu numărul capitolului a fost considerată inutilă şi s-au păstrat notaţiile din Note.

Deşi **supermatematica** (**SM**) este o lucrare unitară, multiplele ei domenii lasă impresia inversă. Adevărul este că cele două domenii mari ale **SM** cel **centric (MC)** şi cel **excentric** (**ME**) se deosebesc radical, din multe puncte de vedere, totuşi **domeniul centric** se poate obţine integral din **domeniul excentric** pentru o **excentricitate liniară e = s = 0.**

Şi domeniul matematicii excentrice **exotice** poate fi adus în domeniul matematicii excentrice **elevate** prin anularea distanţei **c** (**c = 0**) dintre **O(c, γ)** - originea sistemului de axe- şi C(0,0) - centrul cercului unitate, apoi, prin readucerea originii sistemului / reperului din polul **O(s, ε)** ≡ **S(s, ε)** în **O(0,0)** se poate trece de la domeniul **elevat** la cel **excentric**.

Toate aceste posibilităţi, de trecere dintr-un domeniu în altul, evidenţiază unitatea în diversitate a lucrării de faţă.

Motto:" Evoluţia este reapariţia spiritului ţâşnind din materia pe care a fecundat-o, a animat-o, i-a dat virtute." definiţie clasică de **Stanislas de Guaita**

CAPITOLUL III

FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE (FSMEV)

1 INTRODUCERE

În **Cap. II** au fost prezentate **funcţiile supermatematice efective (SM Ef)** tangentă şi cotangentă **efective**

rezultate din definiţiile acestor două funcţii, ca raport al altor două funcţii (cosinus şi sinus) şi prin combinarea acestora cu funcţiile corespondente din cele 4 domenii iniţiale ale **SM**:

1) **centric** (cos şi sin),

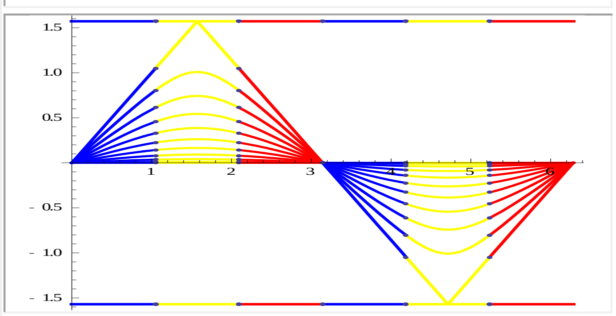
2) excentric (cex şi sex),

3) elevat (**cel** şi **sel**) şi

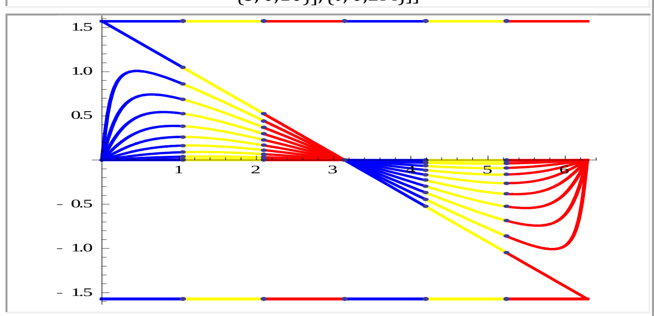
4) exotic (**cexo** şi **sexo**) constituindu-se, astfel, cel de al **5-lea domeniu** al **SM**, denumit al **super-matematicii efective** (**SMEf**).

Domeniul 5 al **SMEf** are un număr limitat de funcţii, ceea ce se poate deduce imediat din combinarea celor **2 funcţii**, cosinus şi sinus, pentru exprimarea tangentei şi a cotangentei, din cele **4 domenii** ale **SM**, de aceea, graficele lor, în **2D** cât şi în **3D**, au putut fi integral prezentate în **Cap. II**.

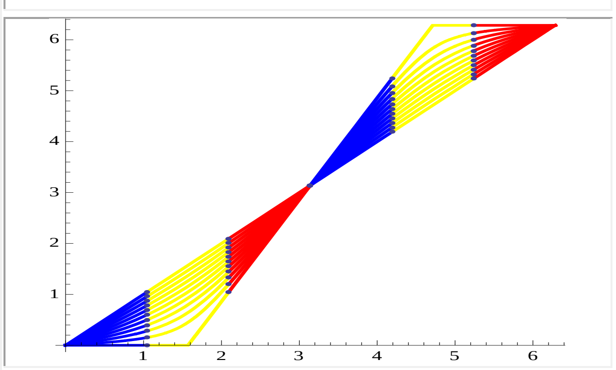
Plot[Evaluate[Table[{sArcSin[0.1sSin[t]]},{s,0,1}],{t,0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{sArcSin[0.1s Sin[t]/Sqrt[1 + s² − 2sCos[t]]]},{s,0,10}],{t,0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{t − ArcSin[sSin[t]]},{s,0,1}],{t,0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{t + ArcSin[sSin[t]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]},{s,0,1}],{t,0,2Pi

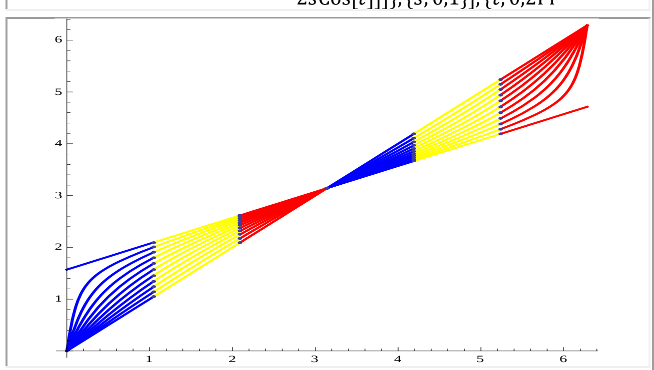


Fig. 1 Graficele **FSM - CE** beta şi amplitudine **excentrice** de variabilă **excentrică: bexθ ▲ ◀** şi **aexθ ▼ ◀** precum şi cele de variabile centrice **Bexα ▲ ▶** şi **Aexα▼ ▶**

Aşa cum s-a afirmat, în acea **Notă** I sau **Cap.II**, numărul funcţiilor noi, din domeniul **supermatematicii evolutive** (**SMEv**)**,** tinde la infinit, ceea ce constituie un fapt nemaiîntâlnit, dar îmbucurător, cu privire la diversificarea funcţiilor matematice, pe de o parte, dar, pe de altă parte, în mod evident, ele, infinitatea de funcţii, nu vor putea fi niciodată prezentate exhaustiv, deoarece „***infinitul este locul unde se întâmplă ... tot ce nu se poate întâmpla***”.

De ce acest domeniu infinit a fost denumit ***evolutiv*** ?

Pentru că, prin ***evolutiv*** se înţelege o dezvoltare treptată şi neîntreruptă, aidoma dezvoltării actuale şi, mai ales, viitoare a celui mai nou domeniu al **SM**: domeniul **evolutiv** (**SMEv**). ***Evolutivul*** ține de evoluție, este supus evoluțiunii, exact ceea ce se întâmplă şi cu domeniul **SMEv.**

Deoarece prezentarea exhaustivă este imposibilă, din multitudinea de **funcţii supermatematice evolutive circulare excentrice (FSMEv—CE),** autorul a ales unele pe gustul său (De gustibus non est disputandum) începând cu **FSM—CE** într-adevăr elementare **bexθ** şi, mai ales, **aexθ**, în combinaţie cu **FCC cosα** şi **sinα**, care ***au fost***, anterior descoperirii **SM**, considerate elementare.

De ce sunt bexθ, Bexα şi aexθ, Aexα **(Fig. 1) FSM—CE** cu adevărat funcţii elementare **?**

Deoarece, aşa cum funcţia **amplitudine excentrică** **Jacobi** **am(u,k)** este o funcţie elementară care stă la baza edificiului domeniului **matematicii eliptice centrice** (**MEC**), întrucât toate funcţiile eliptice **Jacobi** se pot exprima prin această funcţie, ca de exemplu: **sn(u,k)** = sin [**am(u,k)**], **cn(u,k)** = cos [**am(u,k)**], tot aşa, toate **FSM—CE** se pot exprima cu ajutorul funcţiilor bexθ şi aexθ.

Astfel, **aexθ** = **α**(θ) = θ — β(θ) = **θ — bexθ** = **θ —** arcsin[**s.sin**(**θ — ε**)] cu ajutorul cărora se pot exprima ecuaţiile **FSM — CE** sinus excentric **sex(θ, s)** = sin[**aex(θ, s)**] şi cosinus excentric **cex(θ, s)** = cos[**aex(θ, s)**] ş.a. iar, pentru **excentricitatea liniară s** nulă (**s = 0**), domneiul **matematicii excentrice** degenerează în cel al matematicii **centrice** (**MC**)**: sexθ → sinα, cexθ → cosα, texθ → tanα ≡ tgα** ş.a.m.d..

Observaţia este adevărată pentru toate cele 5 domenii (vezi **Nota I**) ale **supermatematicii** (**SM**)**: elevat▶ selθ → sinα, celθ → cosα, telθ → tanα ≡ tgα** ş.a.m.d., şi **exotic▶ sexoθ → sinα, cexoθ → cosα, texoθ → tanα ≡ tgα** ş.a.m.d.

Se pate afirma, fără exagerare, deci cu temei, că **SM** ***a ţâşnit*** din **MC** odată cu apariţia **excentrului S(s, ε)** în cercul unitate CU(O,1), respectiv, **E(e,ε)** într-un cerc oarecare C(O,R) şi a coordonatelor sale polare: **excentri-citatea liniară numerică s** sau **reală e** şi a **excentricităţii unghiulară ε.**

Ele constituie **dimensiunile de formare şi de deformare a spaţiulu**i: **a 3-a** şi, respectiv, **a 4-a** dimensiune a spaţiului bidimensional **2D**, dacă **S** este un punct fix, şi a spaţiului plan (2D) **multidimensional**, dacă **S** este un **punct mobil în plan**, care se deplasează după anumite legi exprimabile, la rândul lor, tot prin **FSM,** dar de alţi excentri. Aşa pot să apară funcţiile **SM** de excentricitate dublă, triplă, ..., multiplă, cu un număr nedefinit de excentricităţi, ale căror grafice diferă sensibil de cele ale funcţiilor **SM** de o singură excentricitate, aşa cum se poate constata din graficele din **figura 2.**

În primul caz, prezentat în **figura 2,a ▲▶**, excentricitatea **s ∈ [-1, +1]** este exprimată de funcţia s_m = **s.bex3θ**, adică, s_m → **s**.arcsin[**s**.sin(3θ)]. Cu alte cuvinte, dintr-un excentru punct fix **S(s, ε = 0)**, devine un excentru punct mobil în plan **S_m(s.bex3θ, ε = 0)**, care oscilează, pe axa Ox, de la valoarea $s_{mm} = -\frac{\pi}{2}$ la $s_{mM} = +\frac{\pi}{2}$, aşa cum rezultă din **figura 1, b**. În partea stângă ◀ sunt reprezentate funcţiile **beta excentrice** de variabilă **excentrică θ**, iar în dreapta ▶, cele de variabilă **centrică α**; limitele / extremele lor fiind aceleaşi $\pm\frac{\pi}{2}$. Pentru celelalte grafice, excentricităţile pot fi deduse din ecuaţii.

2 UTILITATEA MULTIPLICĂRII FUNCŢIILOR MATEMATICE

În **figura 2, b** sus▲, din multitudinea de grafice din **figura 2, a**, au fost alese acelea de excentricitate **s = 1** şi **s = 0,9**, care, pentru **s = 1**, vor să simuleze exact un anumit grafic / funcţie dat prin puncte, dar considerat necunoscut, iar pentru **s = 0,9** aproximarea acestuia, aşa cum se întâmplă şi în realitate prin utilizarea diverselor metode de aproximare, descoperite înaintea apariţiei **SM.** Prin mărirea excentricităţii de la **s = 0,9** la **s = 0,98** aproximarea devine mult mai bună, aşa cum se poate observa în **figura 2, b** jos▼. Şi, pentru **s = 0,999** aproxima-rea devine, evident, şi mai bună.

Metodele clasice de aproximare, ale **matematicii centrice (MC)**, mai cunoscute şi mai utilizate sunt:

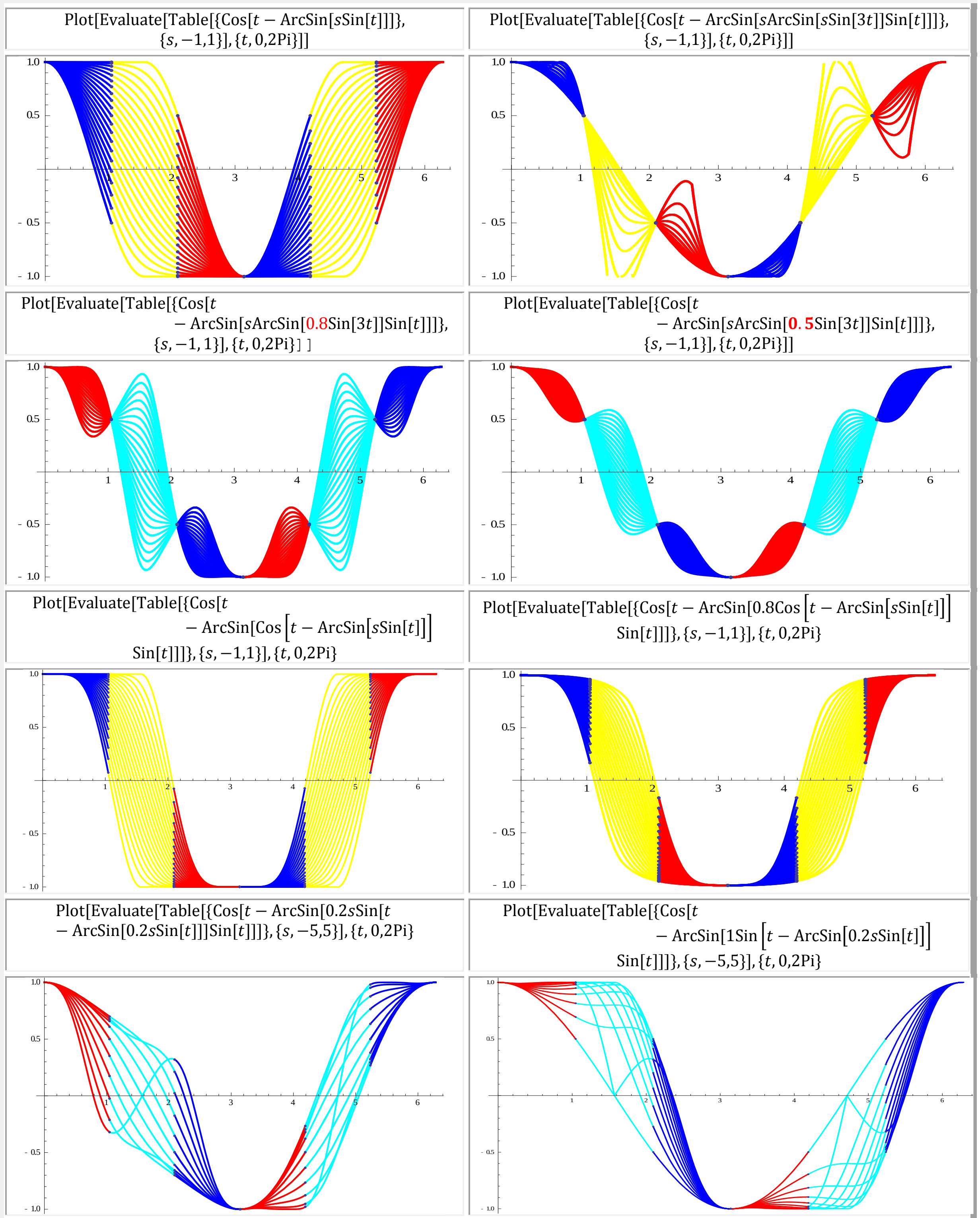


Fig. 2,a Graficele FSM - CE cosinus de excentru punct fix (**excentricitate liniară numerică constantă unică** ▲◀)şi de **excentru punct mobil** în plan ▲▶, ◀▼▶

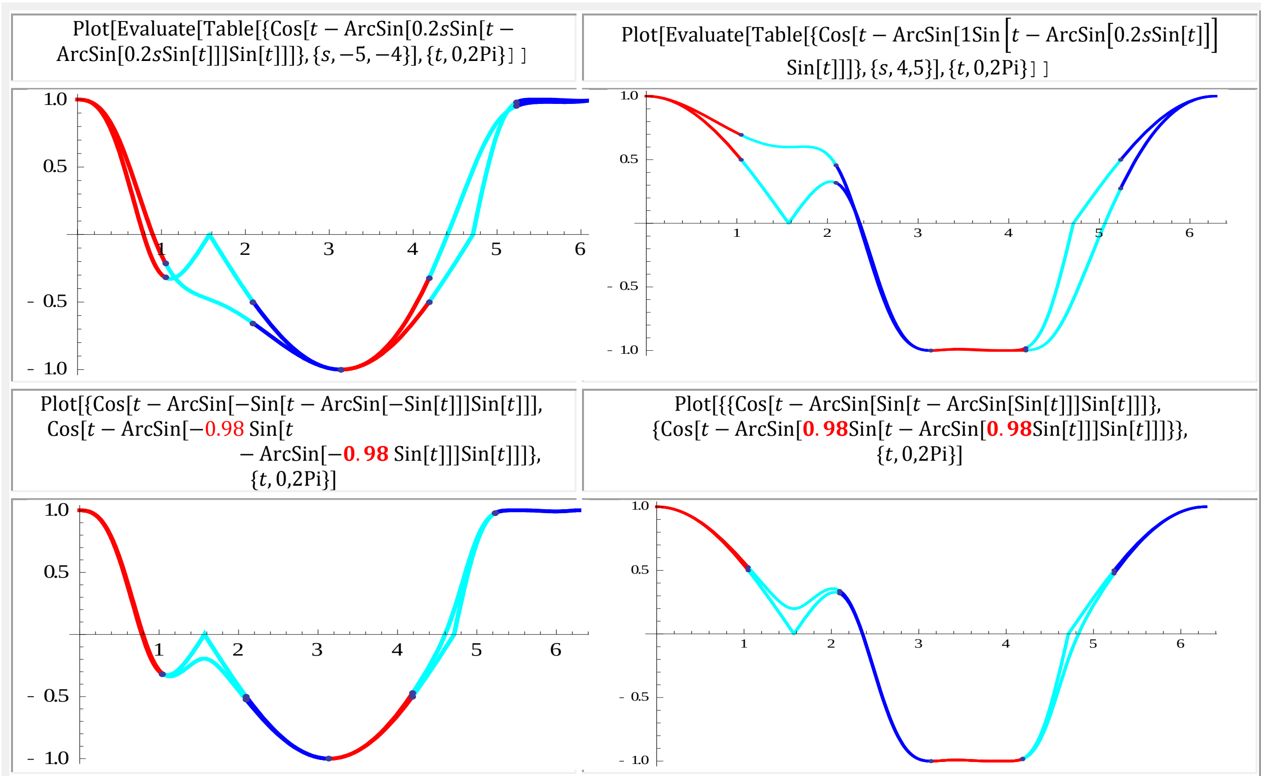


Fig. III.2,b Simularea grafică a aproximării unei funcţii (de s = ± 1) din figura anterioară.

- Interpolarea polinomială, trigonometrică şi exponenţială; liniară, parabolică, diferenţă divizată de ordinul unu, de ordinul doi şi de ordinul n; formula polinomului de interpolare al lui **Newton**, polinomul lui **Newton** de interpolare de gradul n cu diferenţe divizate;
- Minimizarea abaterii maxime, minimizarea sumei pătratelor abaterilor, metoda celor mai mici pătrate.

Pentru a evidenţia avantajele noilor metode **SM** de aproximare (v. **Şelariu Mircea „UN SISTEM SUPERMATEMATIC CU BAZĂ CONTINUĂ DE APROXIMARE A FUNCŢIILOR**”) să considerăm metoda de interpolare trigonometrică**,** cunoscută şi sub denumirea de ***dezvoltare în serii Fourier,*** care se bazează pe **funcţiile** trigonometrice / **circulare centrice** (FCC): **cosx, sinx; cos2x, sin2x; ... , cosnx, sinnx**.

Figurile 3 şi **4** arată, comparativ, diferenţele care există la exprimarea funcţiei **SM Dexα** cu relaţia ei invariantă de definiţie (1)

(1) $$\mathrm{Dex}\alpha = \frac{1 - s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}$$

şi, respectiv, prin dezvoltarea ei în serie trigonometrică (2), la care s-au reţinut primii 10 termeni din serie

(2) $$\frac{1 - s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n . \cos n\alpha$$

(v. **Rîjik** şi **Gradstein**, ”***Tabele*** **DE INTEGRALE, SUME, SERII ŞI PRODUSE**” pag. 54, 1.447, - FII559m -).

În **figura 4** **excentricitatea maximă** s_M a fost redusă de la **s = 1** la valoarea de **s = 0,8**, deoarece, peste această valoare, erorile / abaterile sunt exagerat de mari; graficele eronate acoperind şi graficele mai precise, de excentricitate mai redusă, aşa cum se poate observa direct ▼.

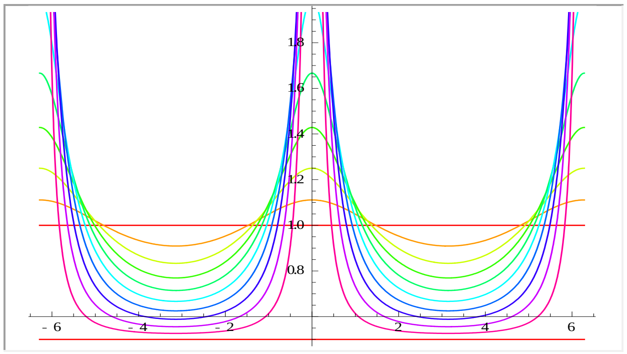
Comentariile sunt de prisos.

Un exemplu mai concludent, privind avantajele utilizarii **FSM-CE** de variabilă excentrică, îl constituie **FSM — CE** y = **dexθ** care, pentru **s = 0**, este **dreapta y = 1**, iar pentru **s = ± 1** este un **<u>semnal</u>**

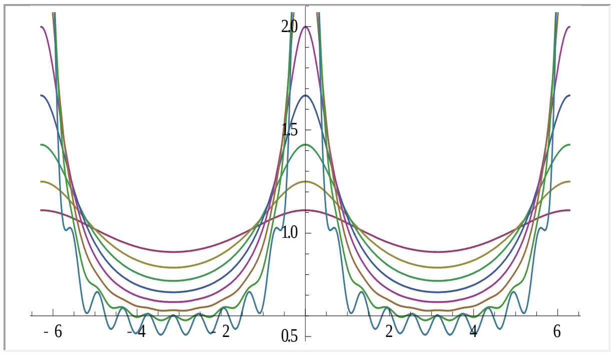
dreptunghiular sau ***funcţia poartă temporală*** care, prin dezvoltare în serie **Fourier**, se **apropie** de reprezentarea **exactă** dată de funcţia:

(3) **dexθ** = $1 - \dfrac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ **(Fig. 5 ▲◀)**

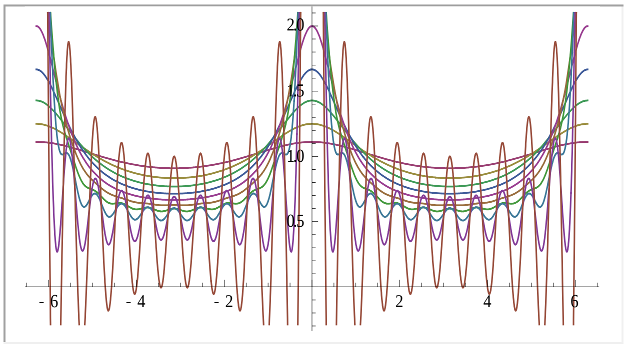
Plot[Evaluate[Table[{(1 − 0. 1sCos[t])/(1 + (0. 1s)^2 − 0. 2sCos[t])}, {s, 0, 8}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{(Sum[(0.1s)^iCos[it], {i, 0,10}])}, {s, 0,8}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{(Sum[(0. 1s)^iCos[it], {i, 0, 10}])}, {s, 0, 10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{(Sum[(0.1s)^iCos[it], {i, 0,10}])}, {s, 0,15}], {t, −2Pi, 2Pi}]]

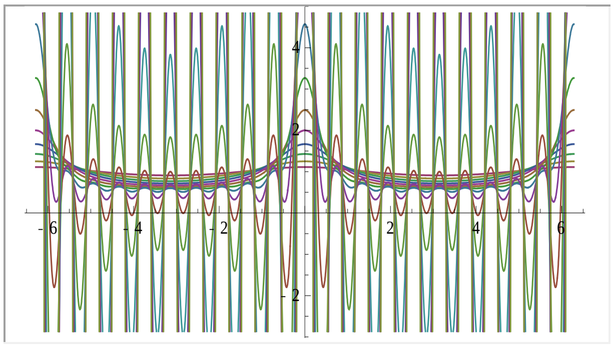


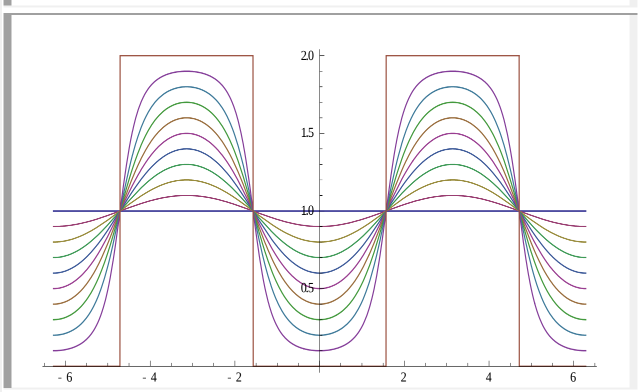
Fig. 3 Dexα exprimat cu relaţia (1) pentru **s ∈[0, 1]** cu pasul 0,2 şi α ∈ [0, 4π].▲◀

Fig. 4 Dexα exprimat prin suma (2), pentru **s = ∈[0, 0,8]** cu pasul 0,2.▲▶ şi ◀▼▶

www.SuperMathematica.com

www.SuperMatematica.ro

Plot[Evaluate[Table[{1 − sCos[t]/Sqrt[1 − (sSin[t])^2]}, {s, 0,1}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{t, 1 − sCos[t]/Sqrt[1 − (sSin[t])^2], s}, {s, 0,1}, {t, −2Pi, 2Pi}]]

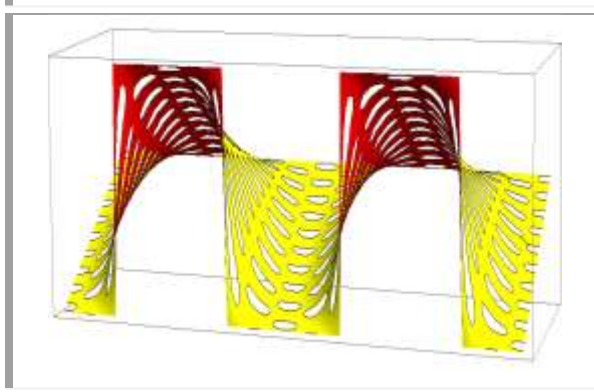
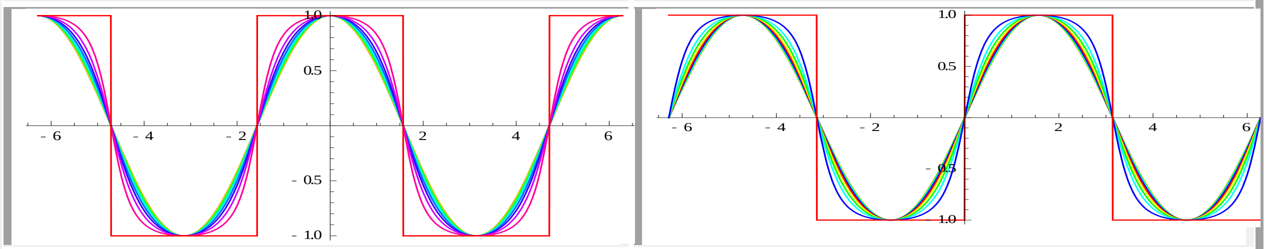


Fig. 5,a Transformarea a unui semnal continuu în unul dreptunghiular / rectangular cu **dexθ**

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (sSin[t])^2]}, {s, 0,1}], {t, −2Pi, 2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (sCos[t])^2]}, {s, 0,1}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{t, 0.2s(Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]),0.4s}, {s, 0,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]

ParametricPlot3D[{t, 0.2s(Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]),0.4s}, {s, 0,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]

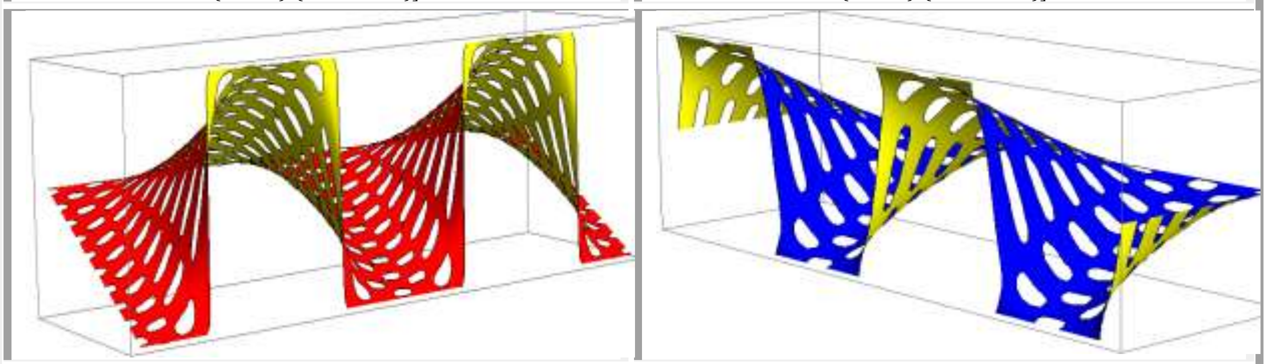


Fig. III. 5,b Transformarea continuă a unui semnal continuu în unul dreptunghiular / rectangular cu **FSM- quadrilobe excentrice QE** cosinus **coq** ◀ şi sinus **siq** ▶ quadrilobe

$$\text{Plot}[\{\frac{4\text{Sin}[2\pi x]}{\pi}+\frac{4\text{Sin}[6\pi x]}{3\pi}+\frac{4\text{Sin}[10\pi x]}{5\pi}+\frac{4\text{Sin}[14\pi x]}{7\pi}+\frac{4\text{Sin}[18\pi x]}{9\pi}\}, \{x, -\text{Pi}/2.5, \text{Pi}/2.5\}]$$

Plot[{Sign[Sin[x]], Sign[Cos[x]]}, {x, −3Pi, 3Pi}]

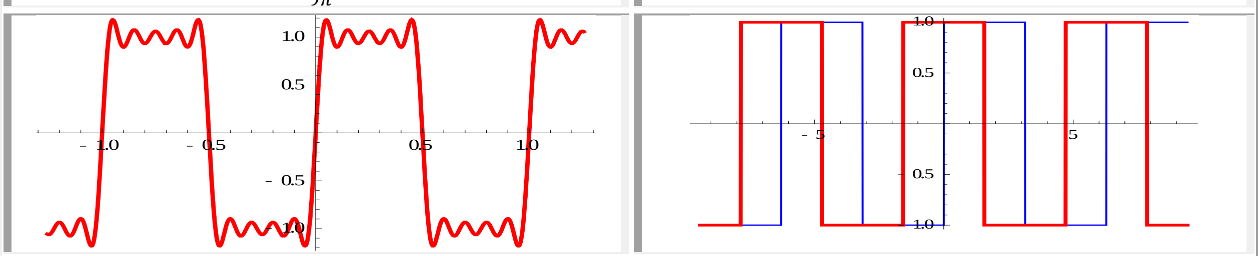


Fig. 5,c Reprezentarea unui semnal dreptunghiular / rectangular prin dezvoltarea în **serie Fourier** ◀ şi cu funcţia circulară centrică **signum** ▶ de **sin** şi de **cos** → **sign[sinx , sign[cosx]**

www.SuperMathematica.com **www.SuperMatematica.ro**

Se poate afirma, cu temei, aşa cum va rezulta în continuare, că „ **matematica centrică (MC) face *ce poate***, în timp ce, **supermatematica (SM)** face ***ce trebuie***”.

Astfel, **MC** are un singur set de funcţii, cele **centrice,** anterior amintite, fiecare tip de funcţie fiind unică: un singur **sinθ**, un singur **cosθ**, un singur **sin2θ**, un singur **cos2θ**, ş.a.m.d.

SM mai are **între sinx** şi **sin2x** ca şi între **cosx şi cos2x,** şi următoarele, ***o infinitate de funcţii excentrice sexθ*** şi ***cexθ*** deoarece, pentru **s = 0** → *sex(θ,0)* = **sinθ** şi ***cex(θ,0)*** = **cosθ,** iar pentru s = ± 1→ *sex(θ, ± 1)* = ***sin2θ*** şi *cex(θ, ±1)* = cos2θ.

Rezultă că **sistemul trigonometrice centric** (**STC**) este unul discret, în timp ce **sistemul supermatematic** (**trigonometric excentric**) este un sistem cu **bază continuă** (!!), deoarece între **cosx** şi **cos2x**, între **sinx** şi **sin2x** există o infinitate de funcţii circulare excentrice ***cexθ*** şi, respectiv, ***sexθ*** corespunzătoare infinităţii de valori posibile ale **excentricităţii liniare numerice s**, din planul cercului unitate.

Se poate afirma că numărul funcţiilor matematice este la fel de important ca şi numărul sculelor şi al dispozitivelor din dulapul unui meseriaş de valoare.

Dispozitivele constituie multitudinea de funcţii matematice noi ale **SM**, iar sculele reprezintă multitudinea funcţiilor de acelaşi tip, aşa cum este cazul în matematica excentrică (**ME:** o infinitate de **cex**, o infinitate de **sex** ş.a.m.d.), matematica elevată (**ME**) şi în matematica exotică (**MEx**), scule care, în **MC,** lipsesc cu desăvârşire; funcţiile **MC** find unicate: un singur **cos**, un singur **sin**, o singură **tan / tg** ş.a.m.d.

Chiar dacă funcţia **signum** poate descrie exact un semnal dreptunghiular, ea este ***„o funcţie statică, unicată***” ce nu poate reproduce ***transformarea continuă*** a unui semnal liniar în unul dreptunghiular.

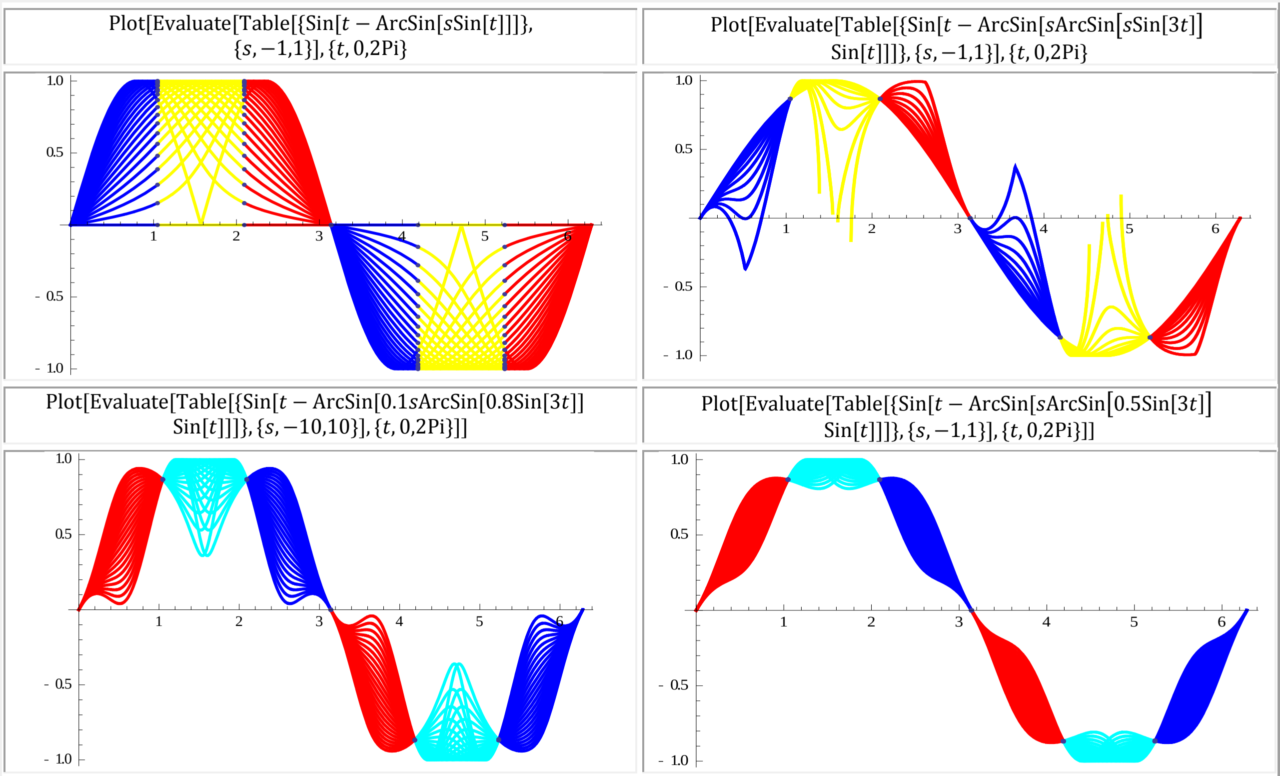


Fig. 5,d Graficele FSM — CE sinus **excentric de excentru fix ▲◀** şi **variabil ▲▶**, ▼

În **figura 5,d** sunt prezentate **FSM—CE sexθ** de excentru fix ▲◀ şi de excentru variabil, după legile prezentate în figură, deasupra graficelor.

3 FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE
CENTRICO * EXCENTRICE : sinθ*sexθ, cosθ*cexθ, cosθ*sexθ, sinθ*cexθ

Din infinitatea de combinaţii, sigurul criteriu al alegerilor a fost estetica funcţiilor în 2D şi / sau în 3D.

S-a început cu ***<u>produsul</u>*** dintre o funcţie circulară centrică (**FCC**) **sinθ** şi una **supermatematică circulară excentrică** (**FSM – CE**) sinus excentrice **sexθ**

(3) **sinθ.sexθ** = **sinθ** * sin[θ — arcsin[s.sin(θ — ε)]

cu graficele din **figura 6**. **FSMEv centrico * excentrice** sunt aceleaşi / identice cu **FSMEv excentrico * centrice,** la fel şi cele de sumă **centrico + excentrice** ≡ **excentrico + centrice.** Este de remarcat faptul, că toate graficele **3D** din **figura 6** reprezintă una şi aceeaşi funcţie **supermate-matică evolutivă** (**FSMEv**) —

centrico * **excentrică** ─ completată cu simetricul ei şi văzută din diverse unghiuri / părţi. Imaginile **3D** au fost prezentate „***ciuruite***” pentru o mai bună înţelegere a formelor lor.

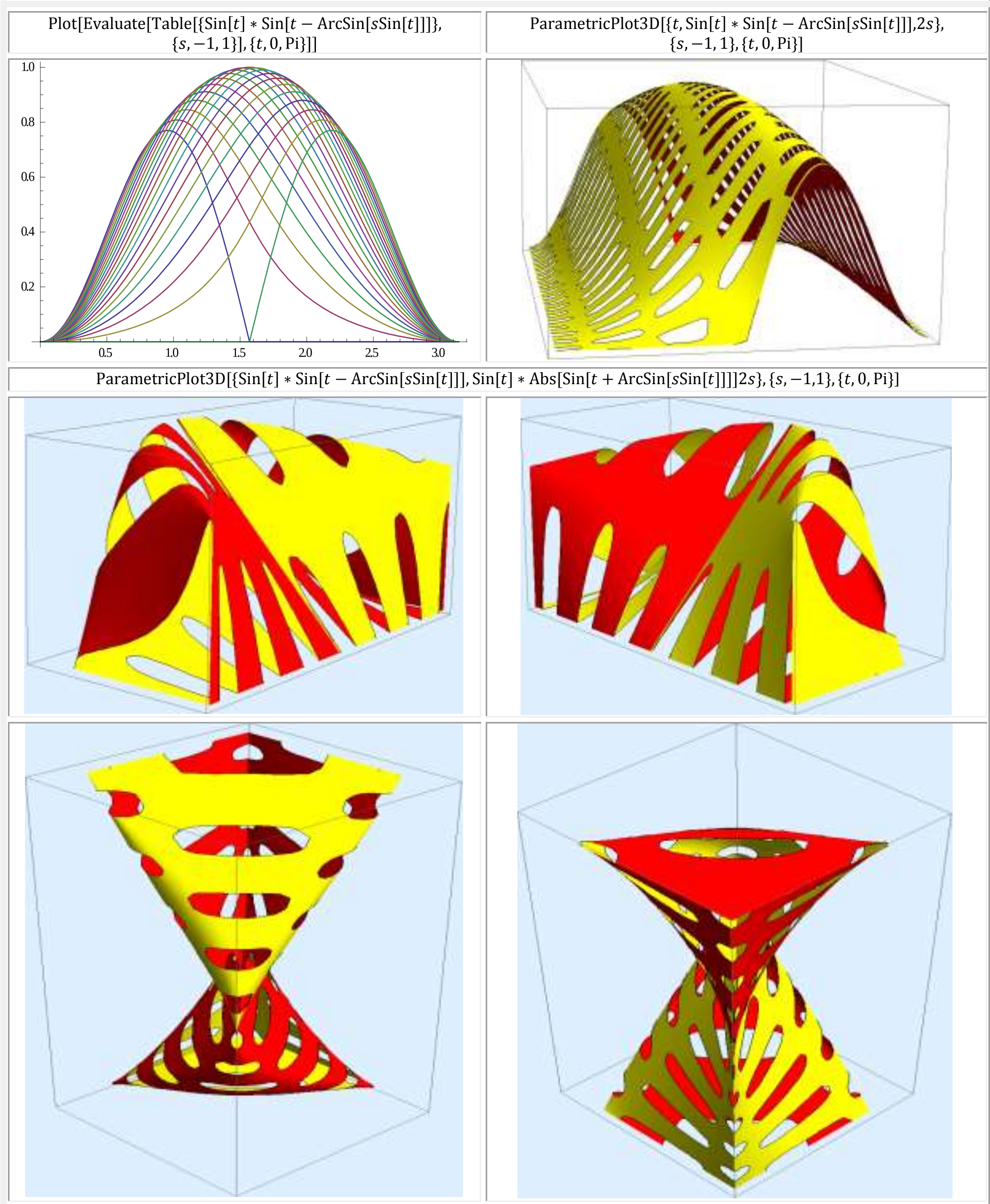
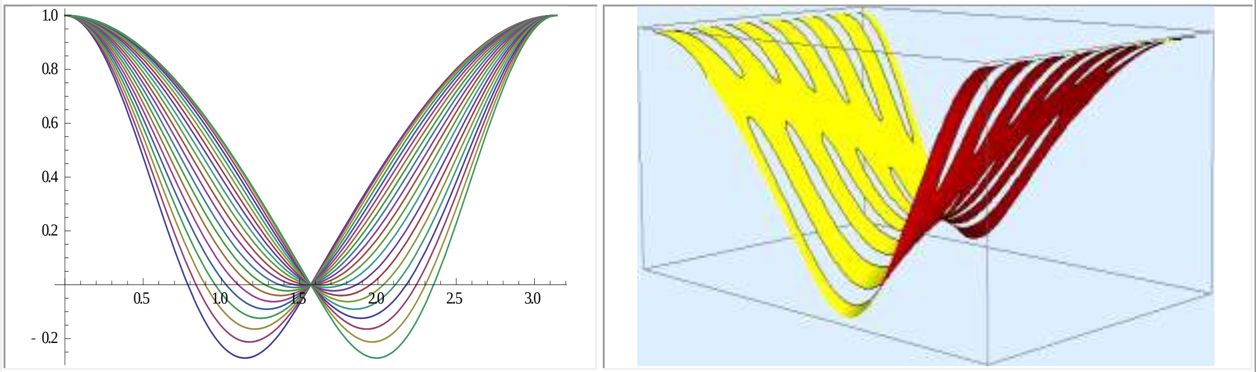


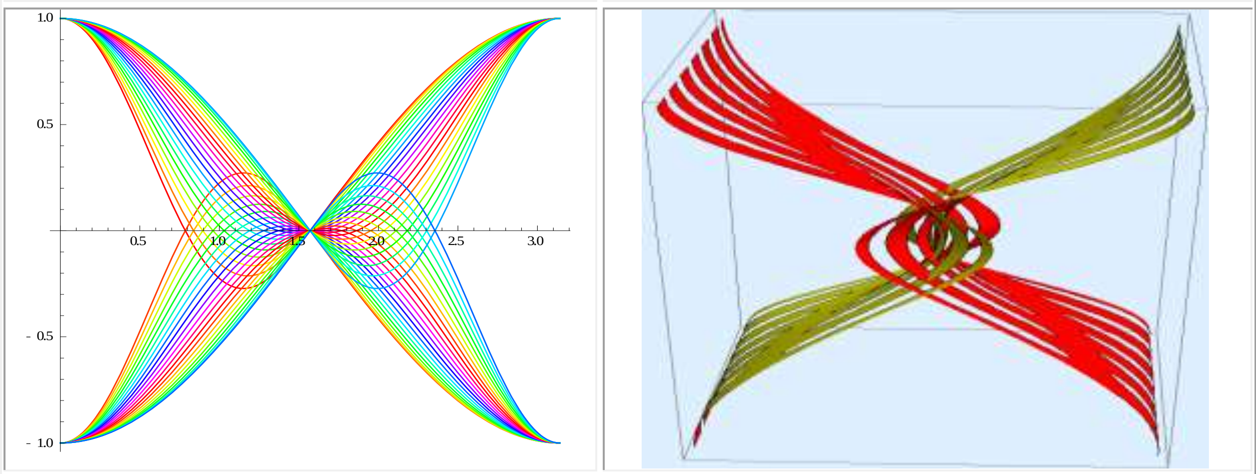
Fig. 6 Graficele **FSMEv sinθ** * **sexθ**

S-a continuat în **figura 7** cu graficele **2D** şi **3D** ale **FSMEv — centrico** * **excentrice cosθ** * **cexθ** şi în **figura 8** cu **FSMEv — centrico** * **excentrice cosθ** * **sexθ**, apoi, în **figura 9** cu **FSMEv — centrico** * **excentrice sinθ** * **cexθ** .

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t] ∗ Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]}, {s, −1,1}], {t, 0, Pi}]]	ParametricPlot3D[{t, Cos[t] ∗ Cos[t − ArcSin[sSin[t]]], s}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]



Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]Cos[t − ArcSin[sSin[t]]], −Cos[t]Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]}, {s, −1,1}], {t, 0, Pi}]]	ParametricPlot3D[{{t, Cos[t]Cos[t − ArcSin[sSin[t]]], s}, {t, −Cos[t]Cos[t − ArcSin[sSin[t]]],0.1s}}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]



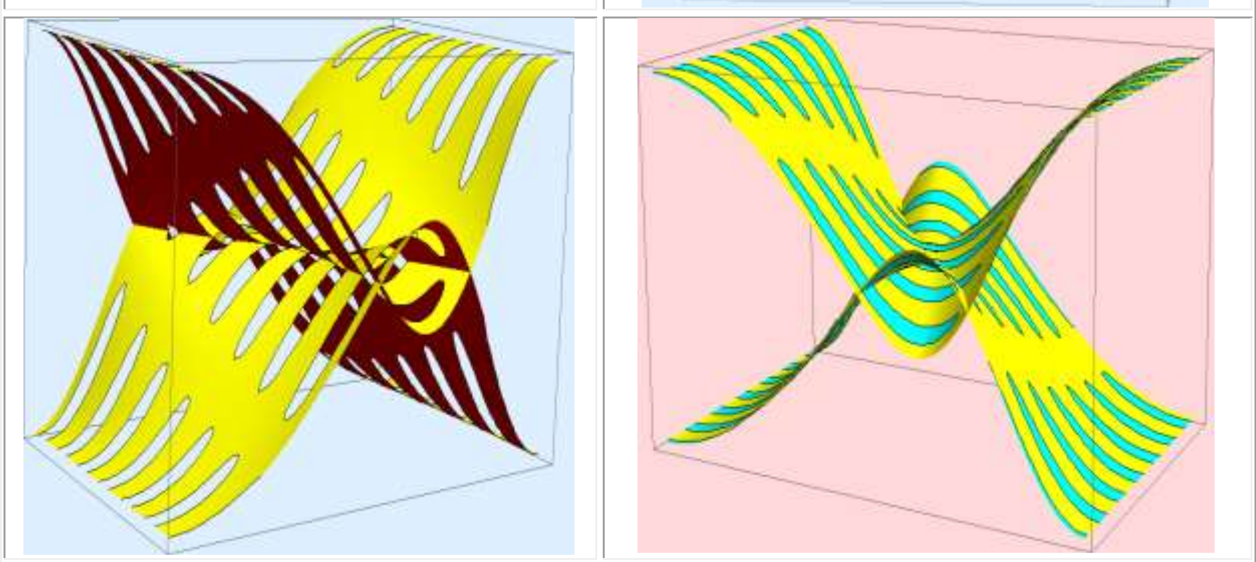


Fig. 7 Graficele **FSMEv cosθ** * **cexθ**

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t] * Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]}, {s, −1,1}], {t, 0, Pi}]]	ParametricPlot3D[{t, Cos[t] * Sin[t − ArcSin[sSin[t]]], s}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]

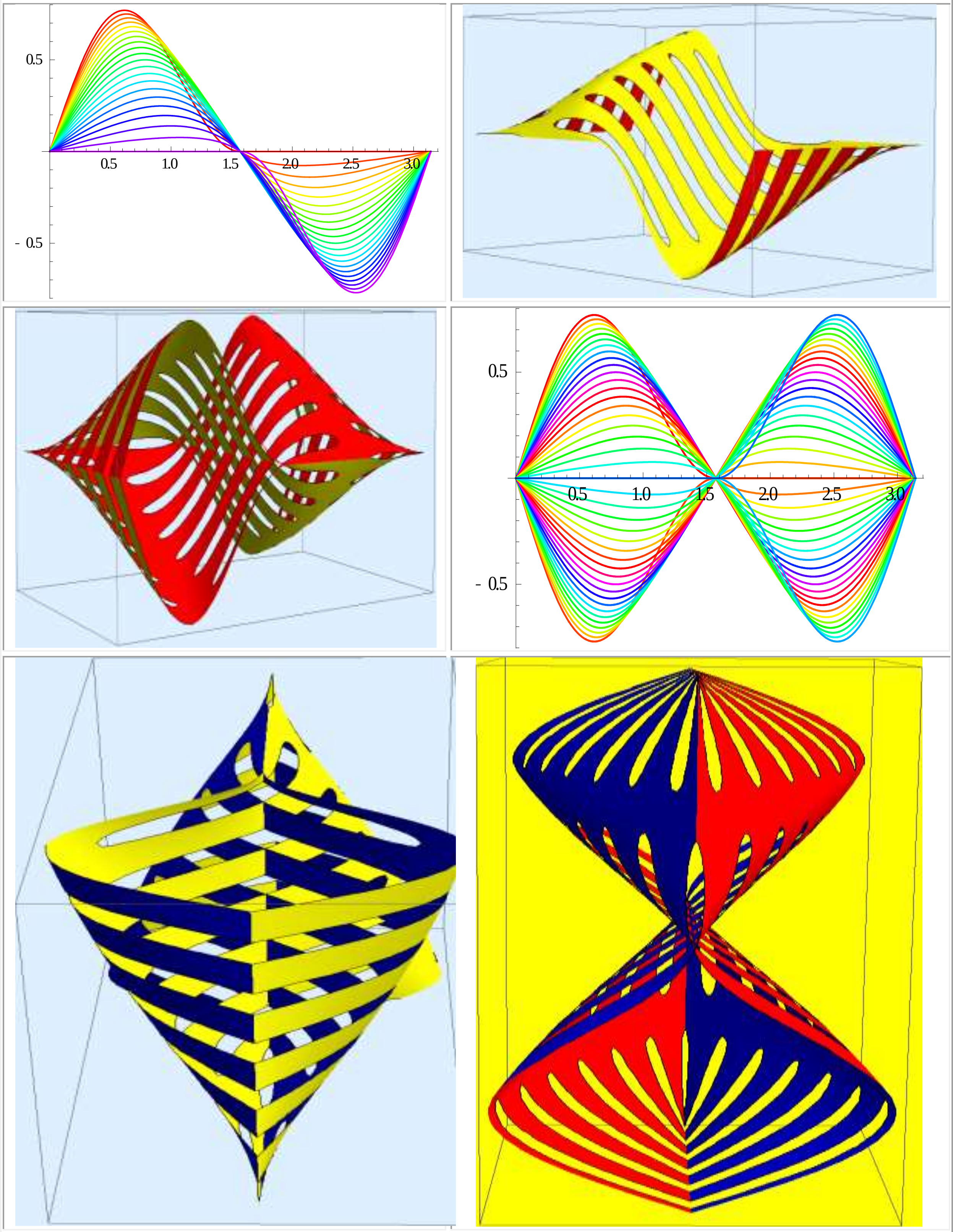
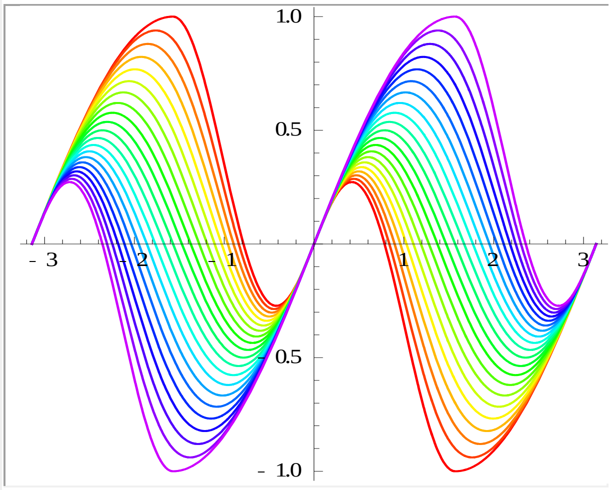
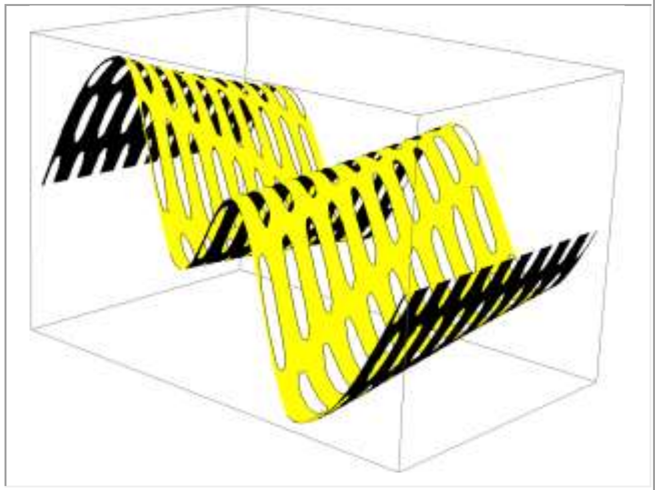


Fig. 8 Graficele **FSMEv cosθ** * **sexθ**

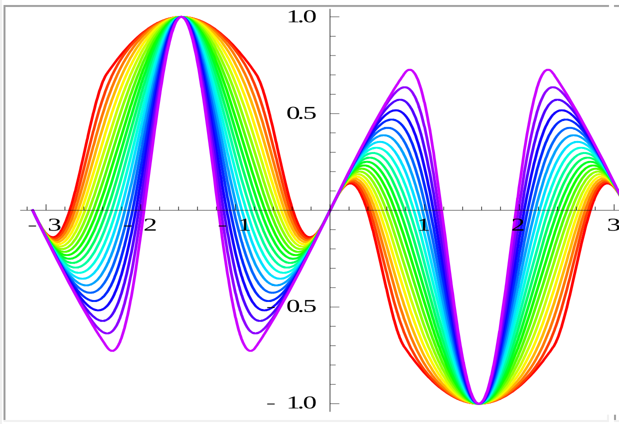
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] * Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]}
,{s, −1,1}], {t, −Pi, Pi}]]



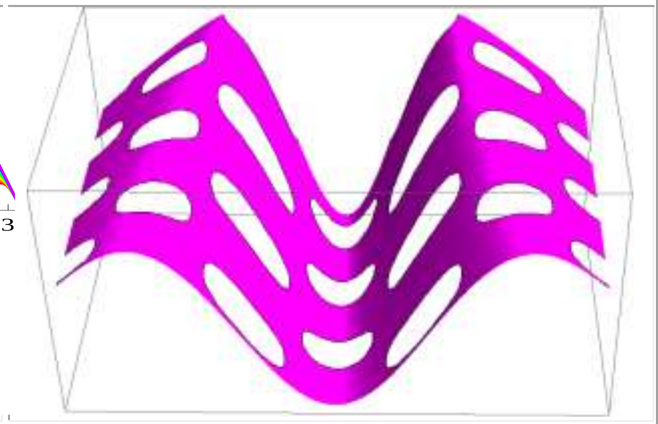
ParametricPlot3D[{t, Sin[t] * Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]s},
{s, 0,1}, {t, 0,2Pi}]]



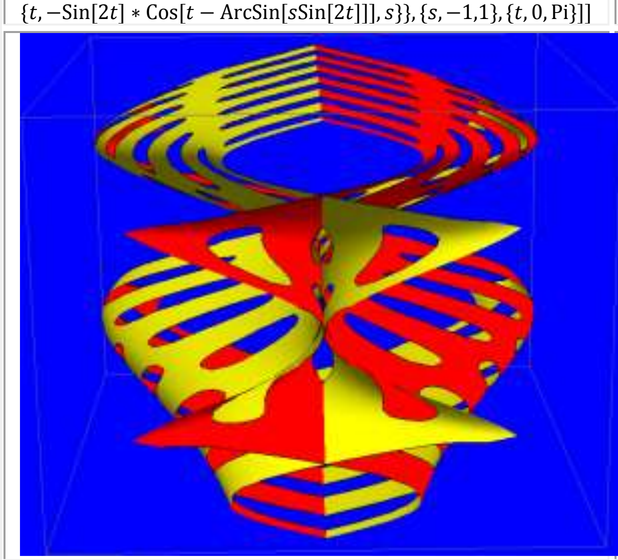
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] * Cos[2t − ArcSin[sSin[2t]]]},
{s, −1,1}], {t, −Pi, Pi}]]



ParametricPlot3D[{t, (Sin[t] * Cos[2t − ArcSin[0.1sSin[2t]]]), s},
{s, 0,1}, {t, 0, Pi}]]



ParametricPlot3D[{{t, Sin[2t] * Cos[t
− ArcSin[0.1sSin[2t]]], s},
{t, −Sin[2t] * Cos[t − ArcSin[sSin[2t]]], s}}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t] * Cos[t − ArcSin[sSin[2t]]]},
{s, −1,1}], {t, 0, Pi}]]

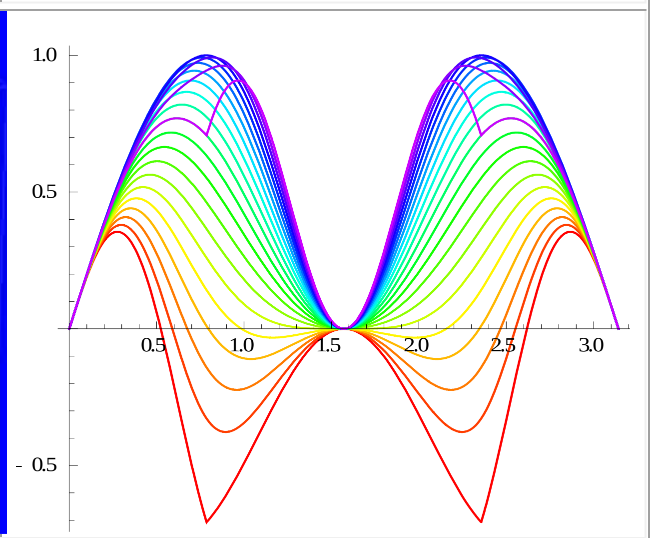
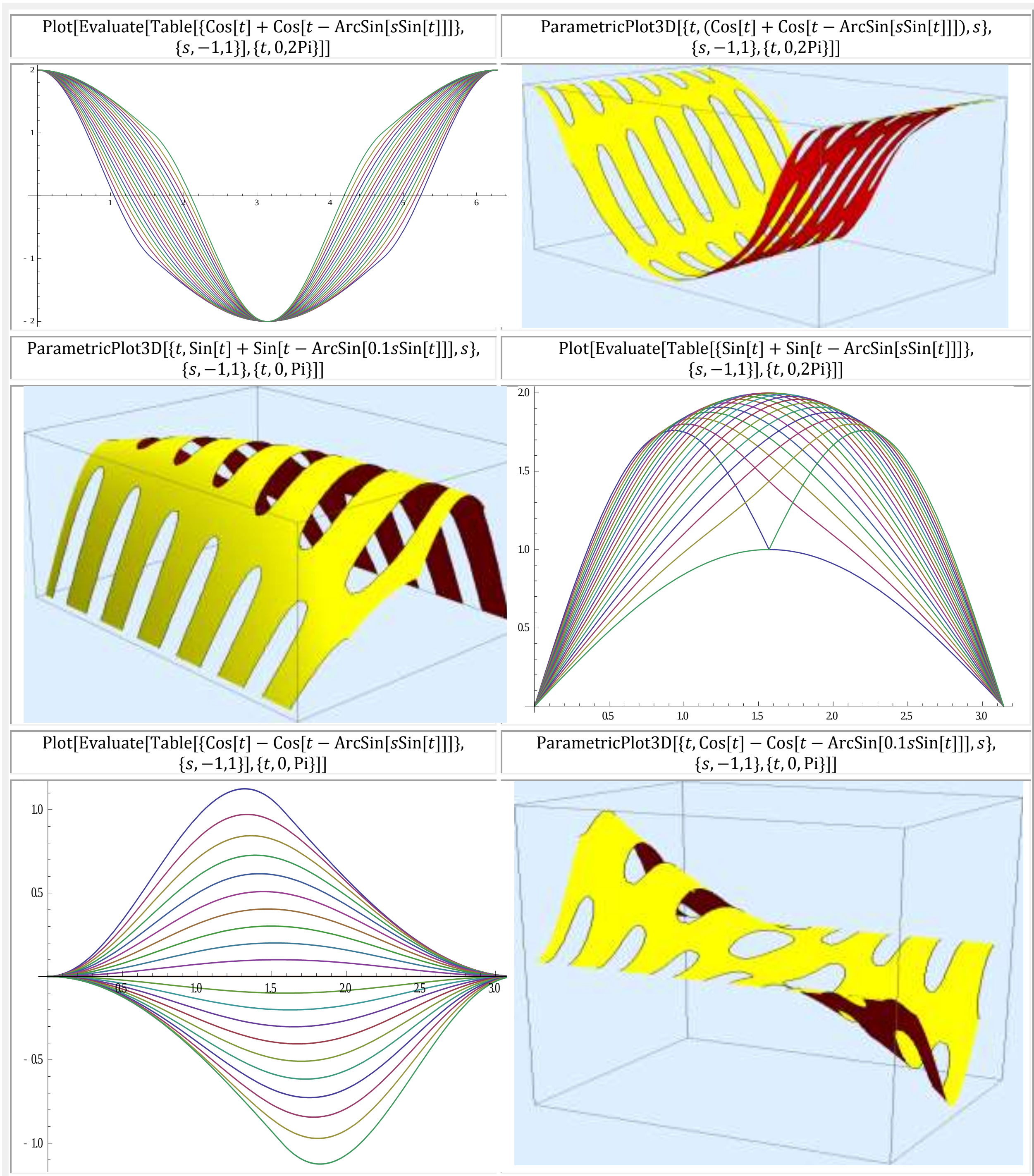


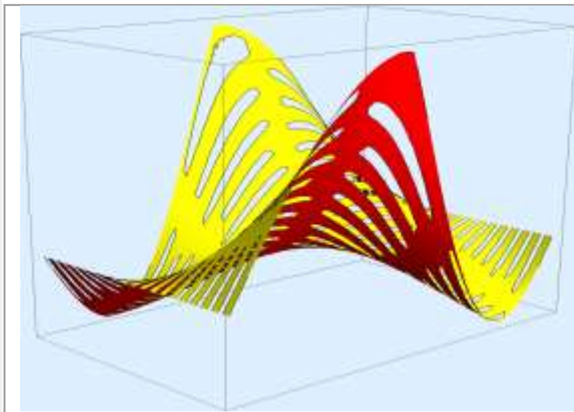
Fig. 9 Graficele **FSMEv sinθ** * **cexθ**

4. FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE (FSMEv) CENTRICO ± EXCENTRICE : cosθ + cexθ, sinθ + sexθ, cosθ - cexθ, sinθ – sexθ

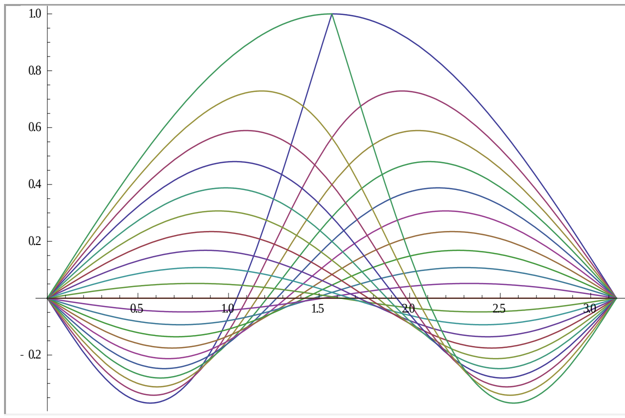
FSMEv centrico ± excentrice, în ordinea indicată anterior, sunt prezentate în figura **Fig. 10**. Analizând cu atenţie reprezentările în **2D** şi pe cele în **3D**, rezultă necesitatea reprezentărilor şi în 3D, deoarece, familia de grafice ale celor reprezentate exclusiv în 2D pot să inducă în eroare, cu privire la forma şi la evoluţia funcţiilor în funcţie de evoluţia excentricităţii liniare numerice **s** .



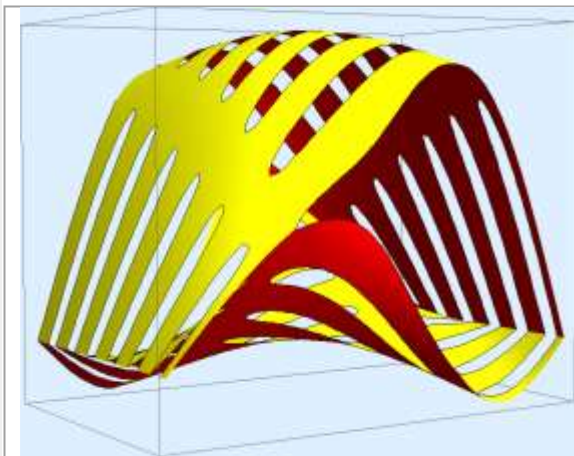
ParametricPlot3D[{t, Sin[t] − Sin[t − ArcSin[sSin[t]]], s}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]]



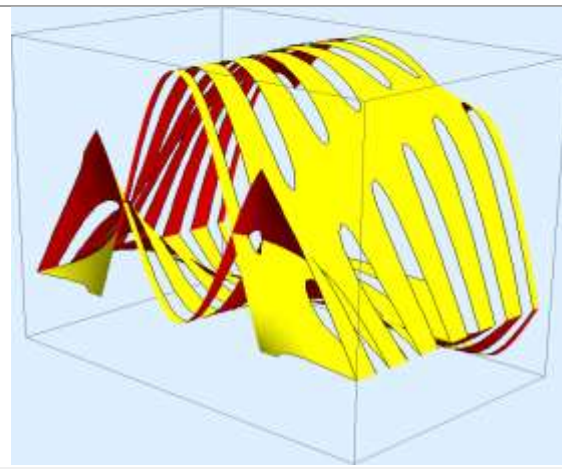
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] − Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]}, {s, −1,1}], {t, 0, Pi}]]



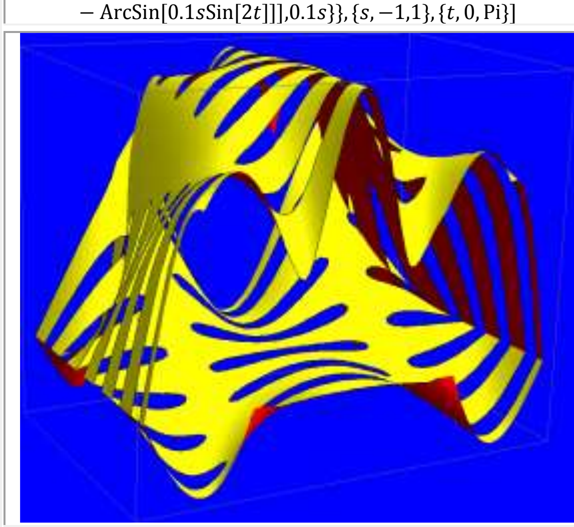
ParametricPlot3D[{{t, (Sin[t] + Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]), s}, {t, (Sin[t] − Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]), s}}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]



ParametricPlot3D[{{t, Sin[t] + Sin[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]], s}, {t, Sin[t] − Sin[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]], s}}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]



ParametricPlot3D[{{t, Sin[t] + Sin[t − ArcSin[0.1sSin[4t]]], s}, {t, Sin[t] − Sin[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]],0.1s}}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]



ParametricPlot3D[{{t, Sin[t] + Sin[t − ArcSin[0.1sSin[4t]]], s}, {t, Sin[t] − Sin[t − ArcSin[0.1sSin[3t]]], s}}, {s, −10,10}, {t, 0, Pi}]

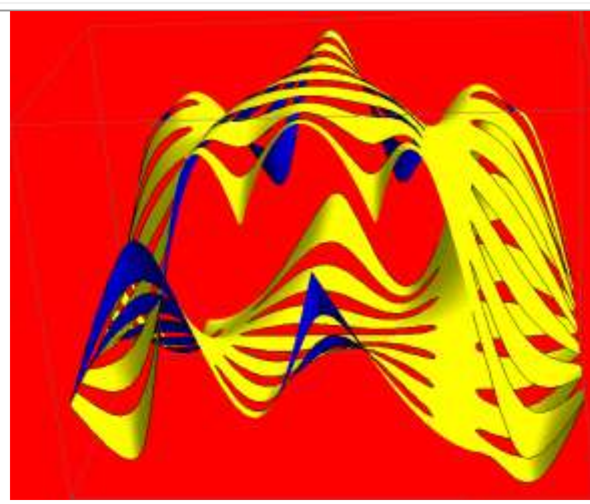
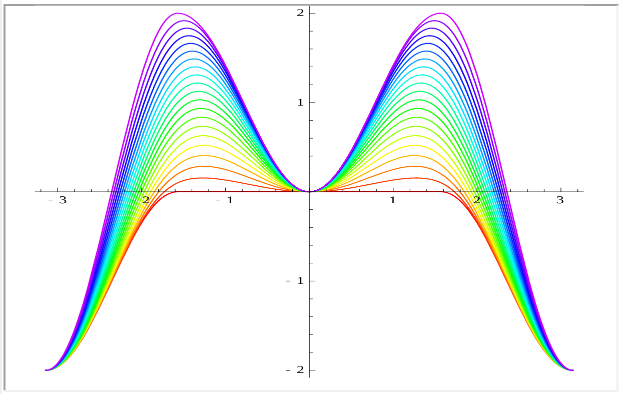


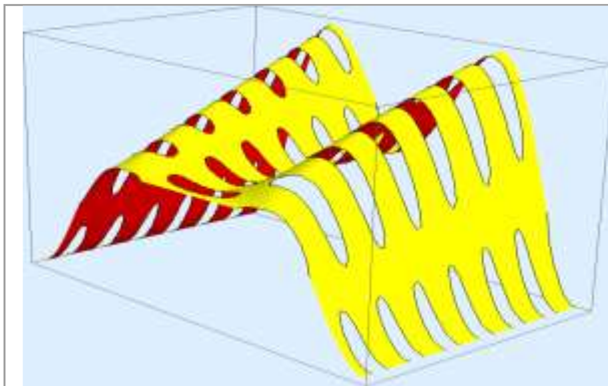
Fig. 10 Graficele **FSMEv cosθ** ± **cexθ** şi **sinθ** ± **sexθ**

5. FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE (FSMEv) CENTRICO ± EXCENTRICE : cexθ ─ cosθ, sexθ ─ sinθ, cosθ / cexθ, sinθ / sexθ

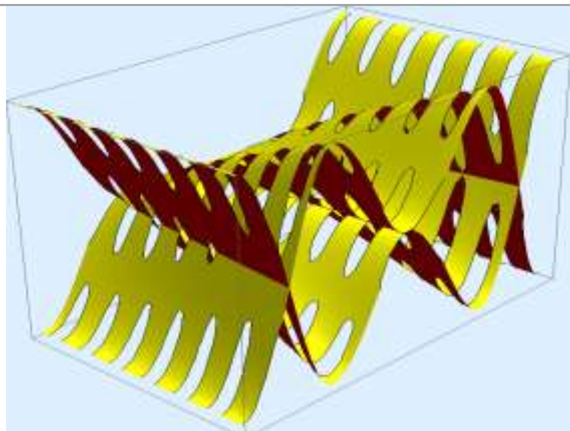
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[sSin[t]]] − Cos[2t]}, {s, −1,1}], {t, −Pi, Pi}



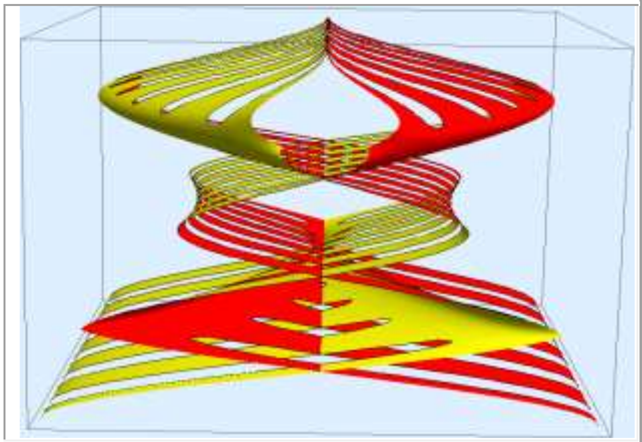
ParametricPlot3D[{t, Cos[t − ArcSin[sSin[t]]] − Cos[2t], s}, {s, −1,0}, {t, −Pi, Pi}]



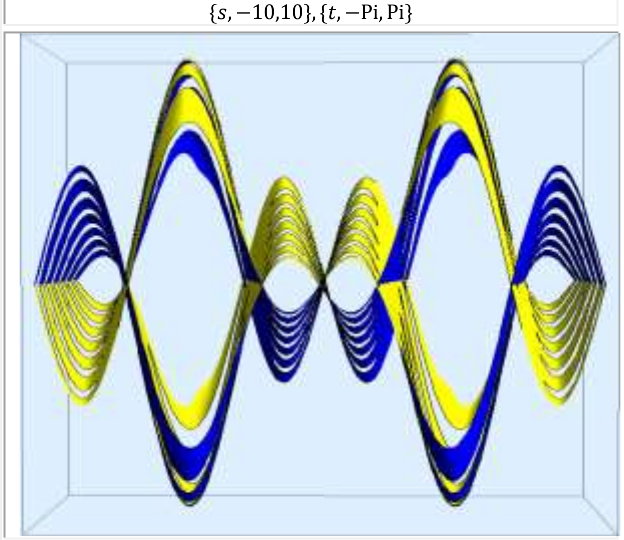
ParametricPlot3D[{{t, Cos[t − ArcSin[sSin[t]]] − Cos[2t], s}, {t, −Cos[t − ArcSin[sSin[t]]] − Cos[2t], s}}, {s, −1,0}, {t, −Pi, Pi}]



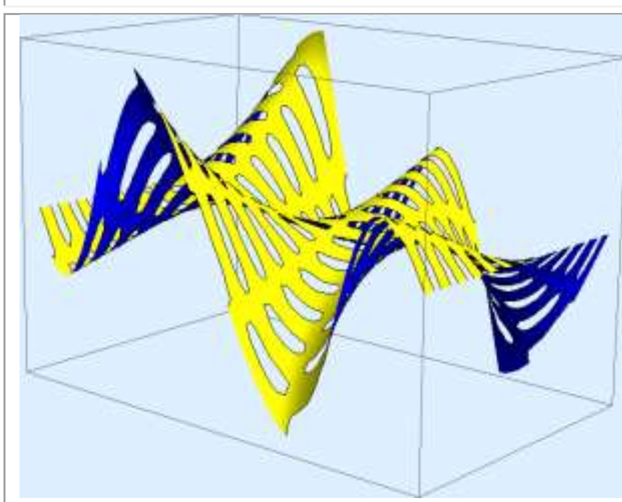
ParametricPlot3D[{{t, Cos[t − ArcSin[sSin[2t]]] − Cos[4t], s}, {t, −Cos[t − ArcSin[sSin[2t]]] − Cos[4t], s}}, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]



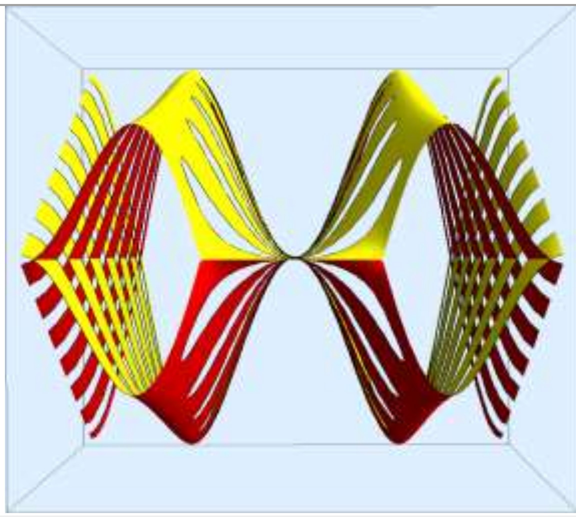
ParametricPlot3D[{{t, Sin[t − ArcSin[sSin[t]]] − Sin[3t], s}, {t, −Sin[t − ArcSinsSin[t]]] − Sin[3t], s}}, {s, −10,10}, {t, −Pi, Pi}



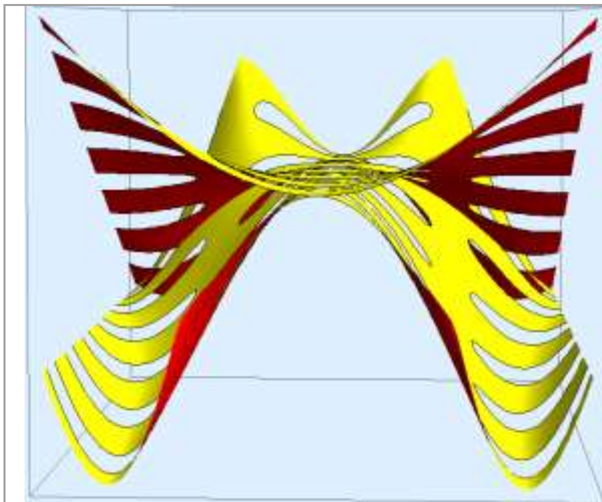
ParametricPlot3D[{t, Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − Sin[t], s}, {s, −1,1}, {t, −Pi, Pi}



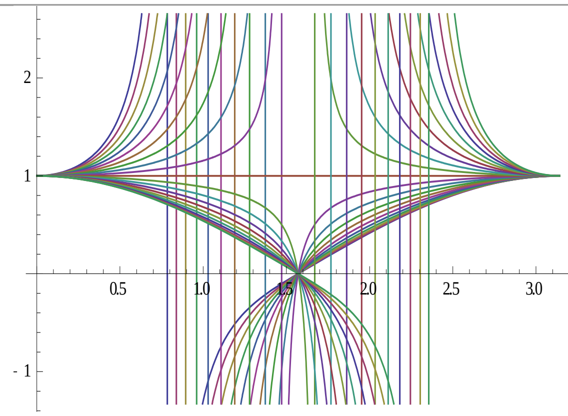
ParametricPlot3D[{{t, Cos[t − ArcSin[sSin[3t]]] − Cos[4t], s},
{t, −(Cos[t − ArcSin[sSin[3t]]] − Cos[4t], s}},
{s, −1,1}, {t, −Pi/2 , Pi/2}



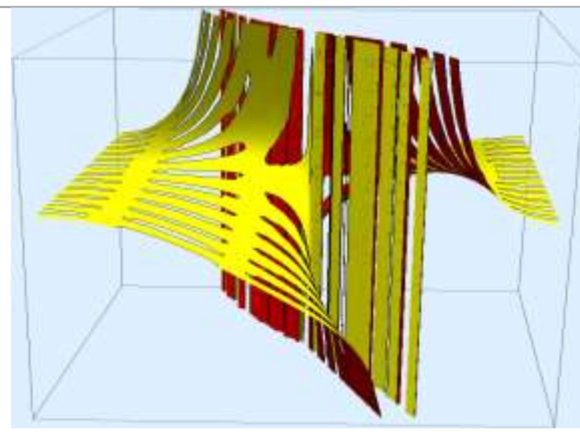
ParametricPlot3D[{{t, Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]
− Cos[t], s}, {t, (Cos[t − ArcSin[sSin[2t]]]
− Cos[2t], s}}
, {s, −1,1}, {t, −Pi/2 , Pi/2}]



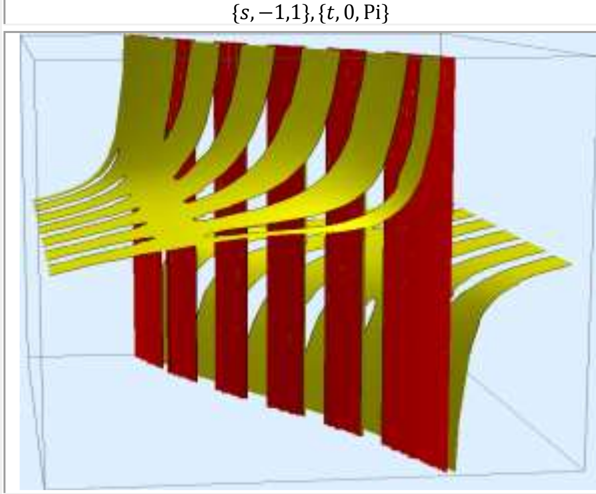
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]},
{s, −1,1}], {t, 0, Pi}]]



ParametricPlot3D[{t, Cos[t]/Cos[t − ArcSin[sSin[t]]], s}
, {s, −1,1}, {t, 0, Pi}]



ParametricPlot3D[{t, Sin[t]/Cos[t − ArcSin[sSin[t]]], s},
{s, −1,1}, {t, 0, Pi}



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]},
{s, −1,1}], {t, 0, Pi}]]

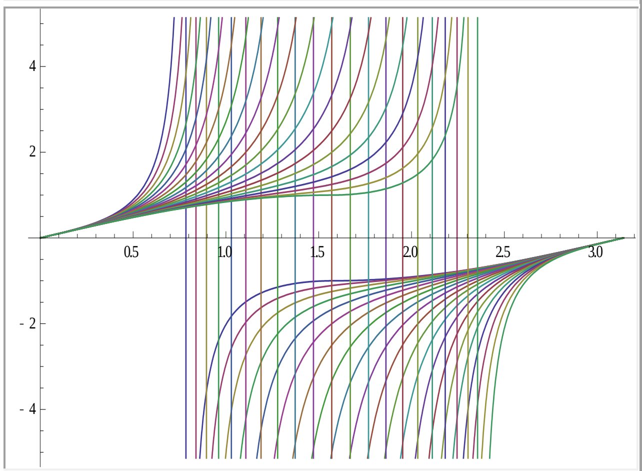
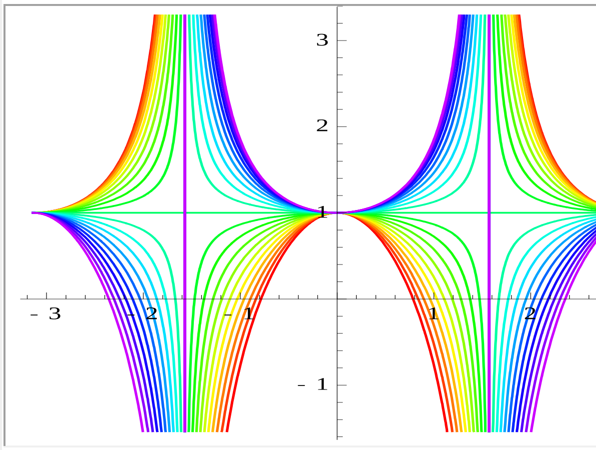


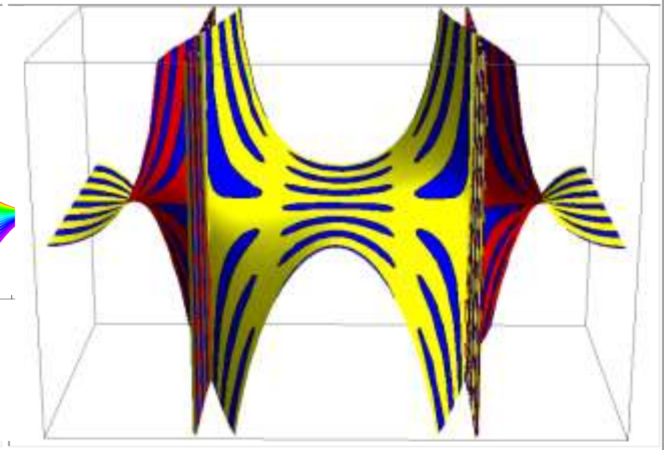
Fig. 11 Graficele **FSMEv cexθ ─ cosθ, sexθ ─ sinθ, cosθ / cexθ, sinθ / sexθ**

6. FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE (FSMEv) CENTRICO / EXCENTRICE : cexθ / cosθ, sexθ / cosθ, sexθ / cosvθ, cexθ / cosvθ

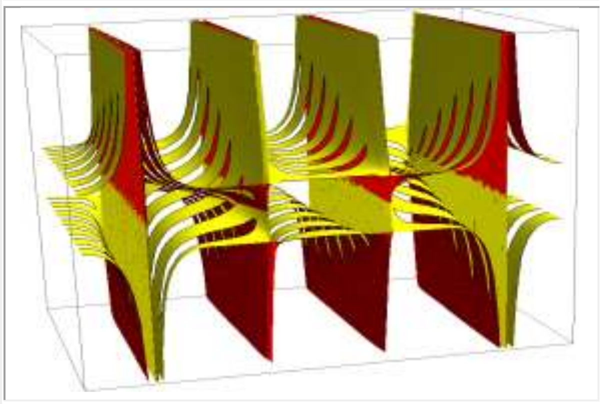
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]/Cos[t]}, {s, −1,1}], {t, −Pi, Pi}]]



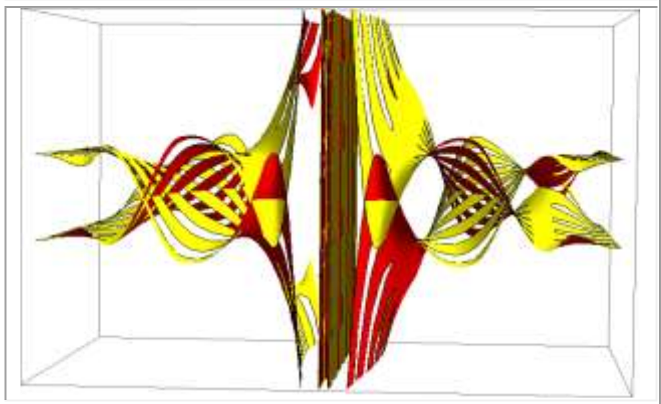
ParametricPlot3D[{t, Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]/Cos[t] , s}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]



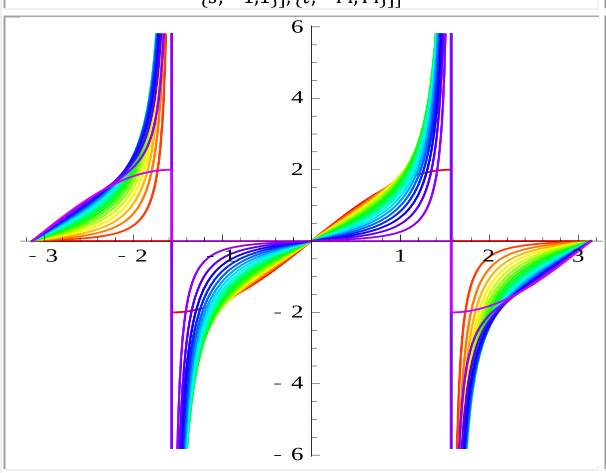
ParametricPlot3D[{{t, Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]/Cos[2t] , s}, {t, − Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]/Cos[2t] , s}}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]



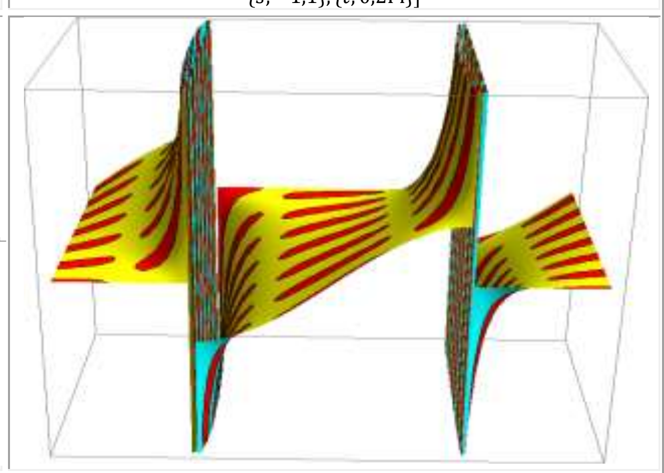
ParametricPlot3D[{{t, Cos[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Cos[t/2] , s}, {t, − Cos[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Cos[t/2] , s}}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]]

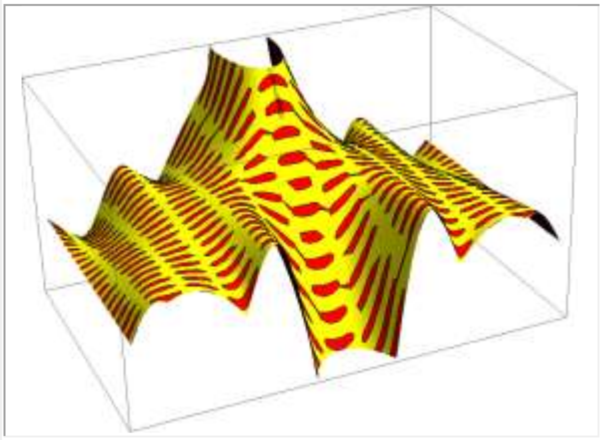
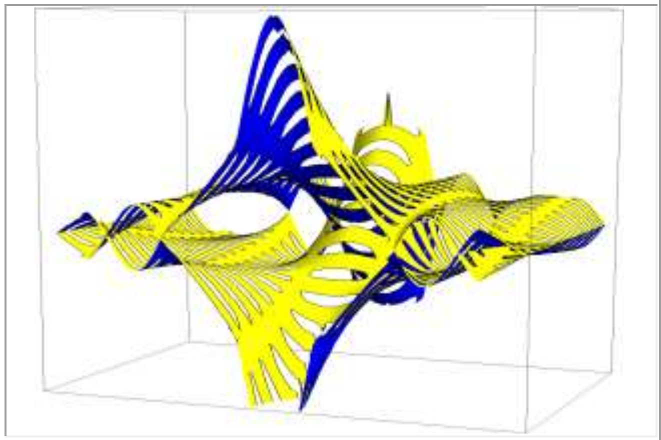
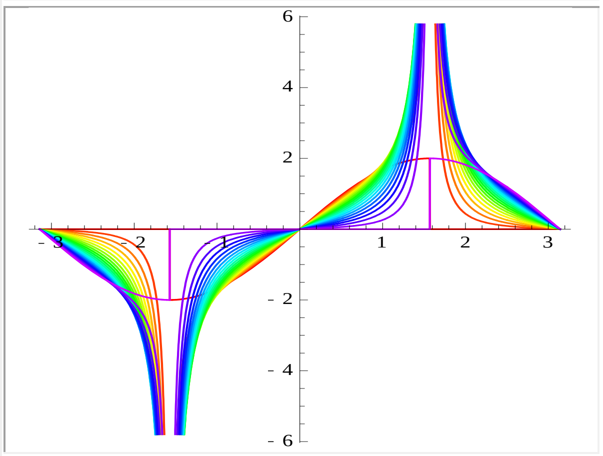
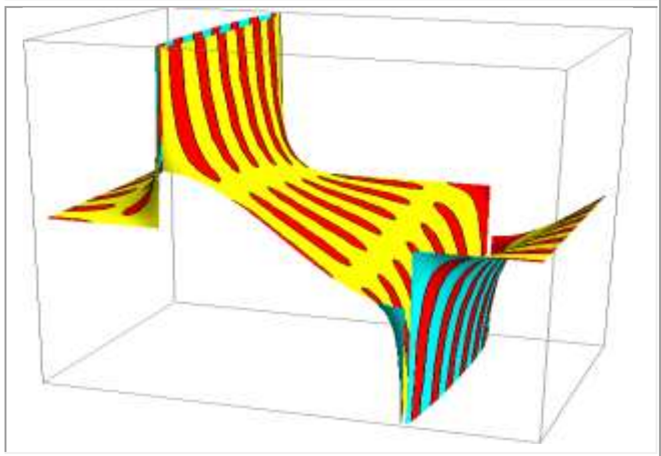
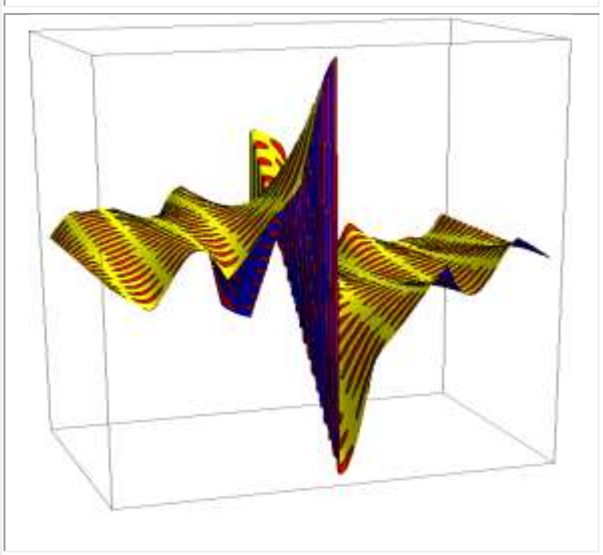
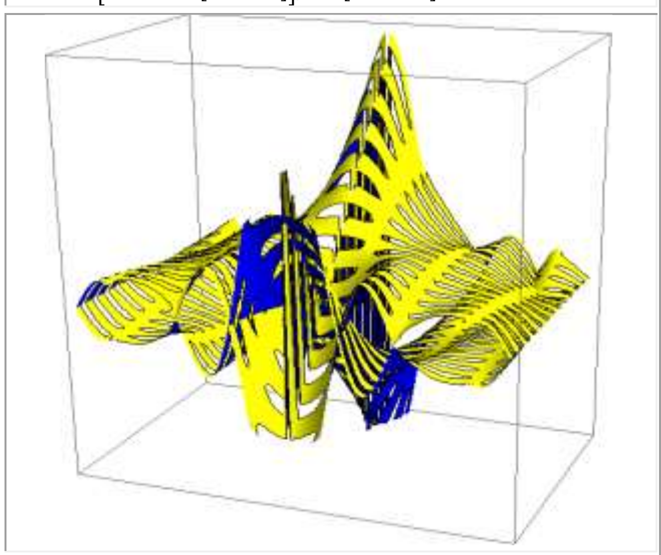


Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]/Cos[t]}, {s, −1,1}], {t, −Pi, Pi}]]

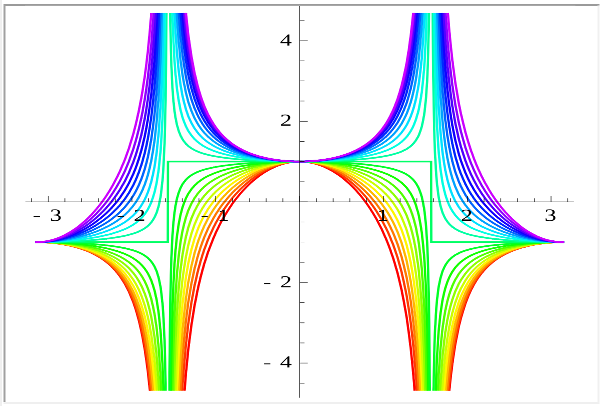


ParametricPlot3D[{t, Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]/Cos[t] , s}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]

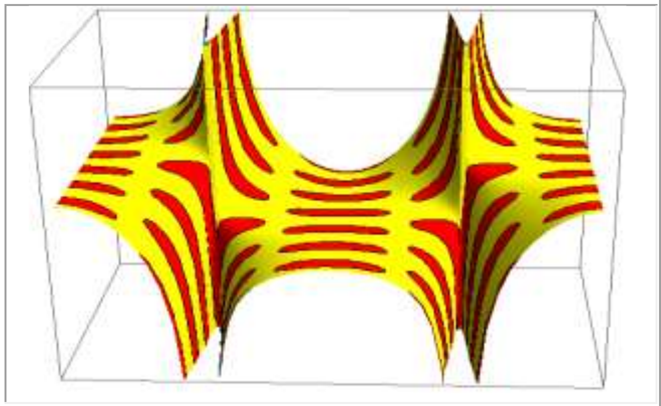


ParametricPlot3D[{t, Sin[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Cos[t/2], s}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]]	ParametricPlot3D[{{t, Sin[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Cos[t/2], s}, {t, − Sin[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Cos[t/2], s}}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]
	
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]/Abs[Cos[t]]}, {s, −1,1}], {t, −Pi, Pi}]	ParametricPlot3D[{t, Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]/Abs[Cos[t]], s}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]
	
ParametricPlot3D[{t, Sin[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Abs[Cos[t/2]], {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot3D[{{t, Sin[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Abs[Cos[t/2]], s}, {t, − Sin[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Abs[Cos[t/2]], s}}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]
	

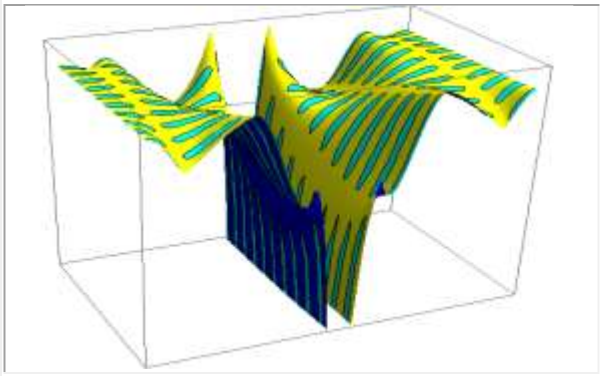
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]/Abs[Cos[t]]}, {s, −1,1}], {t, −Pi, Pi}]]



ParametricPlot3D[{t, Cos[t − ArcSin[sSin[t]]]/Abs[Cos[t]], s}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]



ParametricPlot3D[{t, Cos[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Abs[Cos[t/2]], s}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]



ParametricPlot3D[{{t, Cos[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Abs[Cos[t/2]], s}, {t, − Cos[t − ArcSin[sSin[3t]]]/Abs[Cos[t/2]], s}}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]

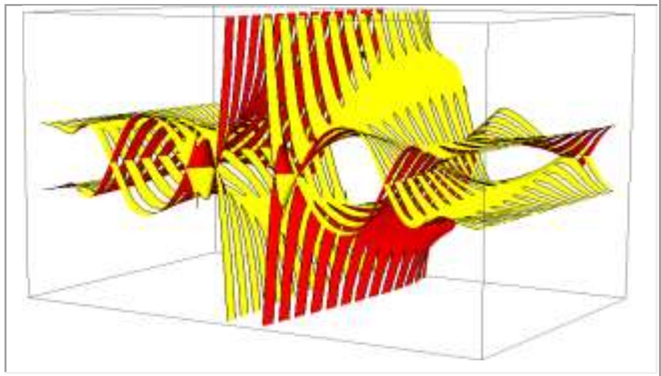


Fig. 12 Graficele **FSMEv : cexθ / cosθ, sexθ / cosθ, sexθ / cosvθ, cexθ / cosvθ**

În **Cap. III** a fost prezentat un ***crâmpei*** din domeniul **FSMEv**, cu precădere cele mai arătoase, dintre cele mai puţin importante, dar mai cunoscute, urmând ca **FSMEv** de tipul **bexθ** ± **Bexα**, **bexθ** * **Bexα**, **bexθ** / **Bexα**, **Bexα** / **bexθ**, şi multe alte combinaţii posibile ale **FSM — CE** precum **aexθ** şi **Aexα, dexθ** şi **Dexα, rexθ** şi **Rexα** ş.m.a. mai puţin cunoscute, ***deocamdată***, să fie prezentate într-un **al IV-lea capitol**.

Şi două domenii **elvat** şi **exotic** încă n-au fost atinse, nicidecum combinaţiile lor şi ale celor patru domenii amintite.

În acest vast domeniu, există loc suficient şi pentru contribuţiile cititorilor la dezvoltarea acestui nou şi extrem de interesant domeniu. Domeniu în care aplicaţiile lor nu se vor lăsa aşteptate o perioadă prea îndelungată.

Încheiem cu speranţa că aceast **al III-lea capitol** care, împreună cu cele următoare şi cu cele 80 de articole publicate ***cândva*** pe **www.cartiAZ.ro**, acum acolo dispărute, să stea la baza celui de-al **III**–lea volum al autorului, pe lângă celelalte două volume daja apărute şi premiate ale **SUPERMATEMATICII.**

Motto:" Cea mai infidelă amantă a omului este Speranţa
Te inşală zilnic şi totuşi, traieşti cu ea toată viaţa. – **Necunoscut** "
Diseminarea **SUPERMATEMATICIl ?**... dar trăim cu Speranţa.
Greu nu e să ai dreptate, greu e să convingi pe alţii. **Grigore C. Moisil.**

CAPITOLUL IV

FUNCŢII SM REPREZENTÂND SEMNALE LINIARE FRÂNTE

1. INTRODUCERE

Semnalele sunt variaţii ale unor mărimi fizice care transportă sau conţin informaţii. Din punct de vedere fizic, ele pot fi de diferite tipuri: ***electrice, electromagnetice, acustice, optice, termice, chimice*** ş.a. şi sunt produse ***efectiv*** de către un **generator de funcţii** şi ***virtual*** de un program de matematică computaţional.

Generatorul de funcţii este un dispozitiv / aparat ce poate să furnizeze cel puţin trei funcţii sau forme de undă de bază: **sinusoidală, dreptunghiulară şi triunghiulară** (**Fig. 1 ▲**) din ***matematica centrică*** (**MC**).

Plecând de la aceste funcţii de bază, generatoarele mai perfecţionate sunt capabile să furnizeze şi alte funcţii (semnale): rampe liniare, rampe în trepte, trapez, semnale dreptunghiulare cu factor de umplere variabil (**Fig. 1 ▼**) sau chiar şi semnale de zgomot.

Este cunoscut că punctul şi dreapta sunt entităţi şi noţiuni elementare, ce nu pot fi definite în matematică. Dar numai ***dreapta este o figură fundamentală*** din geometria şi din **matematica centrică** (**MC**), tot aşa cum ***strâmba este o figură fundamentală în supermatematică***; ***dreapta*** fiind o ***strâmbă*** **(Fig. 2,a; Fig. 2,b** şi **Fig. III. 2,c)** de **excentricitate nulă** (**e = s** = 0).

De fapt, după declaraţia matematicianului Acad. **Solomon Marcus**, nici **matematica** (***centrică***) nu poate fi riguros definită. În consecinţă, **supermatematica** (**SM**) poate fi definită ca o **extensie nemărginită, măreaţă** şi **utilă** (şi prin semnale) a ceea ce nu poate fi definit, adică a ***matematicii ordinare, centrice*** (**MC**).

Punctul este singura entitate de dimensiune nulă, astfel că el este acelaşi, ca formă sau, mai precis, fară ea, în ambele matematici: **centrică** şi **excentrică**, întrucât, el neavând "***figură***", nu-şi poate modifica forma prin modificarea valorii **excentricităţii** (reală **e** sau **numerică s**) care este dimensiunea de ***formare*** şi de ***deformare a spaţiului.***

La întrebarea pusă de **Fourier**, într-o discuţie cu **Monge,** în 1795 şi relatată de **Jeremy Gray** în "**IDEI DESPRE SPAŢIU**": "***Ce are* drept *o linie dreaptă ?*** " acum se poate răspunde cu certitudine: ***excentricitatea nulă***.

Dacă **A. G. Köstner** afirma la 2 august 1789 " ***Nu există o definiţie clară a dreptei*** ", acum se poate afirma cu claritate că ***dreapta este o strâmba de excentricitate nulă.***

*„**Dreapta**, în matematică, este linia ce poate fi definită ca având doar o dimensiune: lungimea.*

Orice dreaptă este de lungime infinită, conține o infinitate de puncte, este de grosime zero și este o curbă perfect "dreaptă" (şi **continuă,** adăugăm noi, deoarece linia frântă este formată tot din segmente de linii drepte, dar este o **strâmbă** de **s = ± 1**).

În geometria euclidiană, pentru două puncte fixe există o dreaptă și numai una ce trece prin amândouă. Folosind metrica standard, linia dreaptă reprezintă drumul cel mai scurt dintre două puncte."(https://ro. wikipedia. org / wiki/Dreapt%C4%83_(geometrie)).

Nu numai dreapta are o singură dimensiune, ci toate curbele plane şi spaţiale, ca urmare şi **strâmbele**. Orice strâmbă este de lungime infinită, conține o infinitate de puncte, este de grosime zero şi este o curbă de la perfect "dreaptă şi continuă ", pentru **e = s = 0**, până la „perfect liniară / dreaptă cu linii drepte frânte, sau linii în trepte”, pentru **s = ± 1** şi linii curbe frânte pentru -1 < s > +1.

În **geometria supermatematică**, prin ***anumite*** două puncte trec o infinitate de strâmbe şi numai o dreaptă continuă şi două linii frânte ale căror puncte pe direcţia y sunt simetrice faţă de dreapta unică.

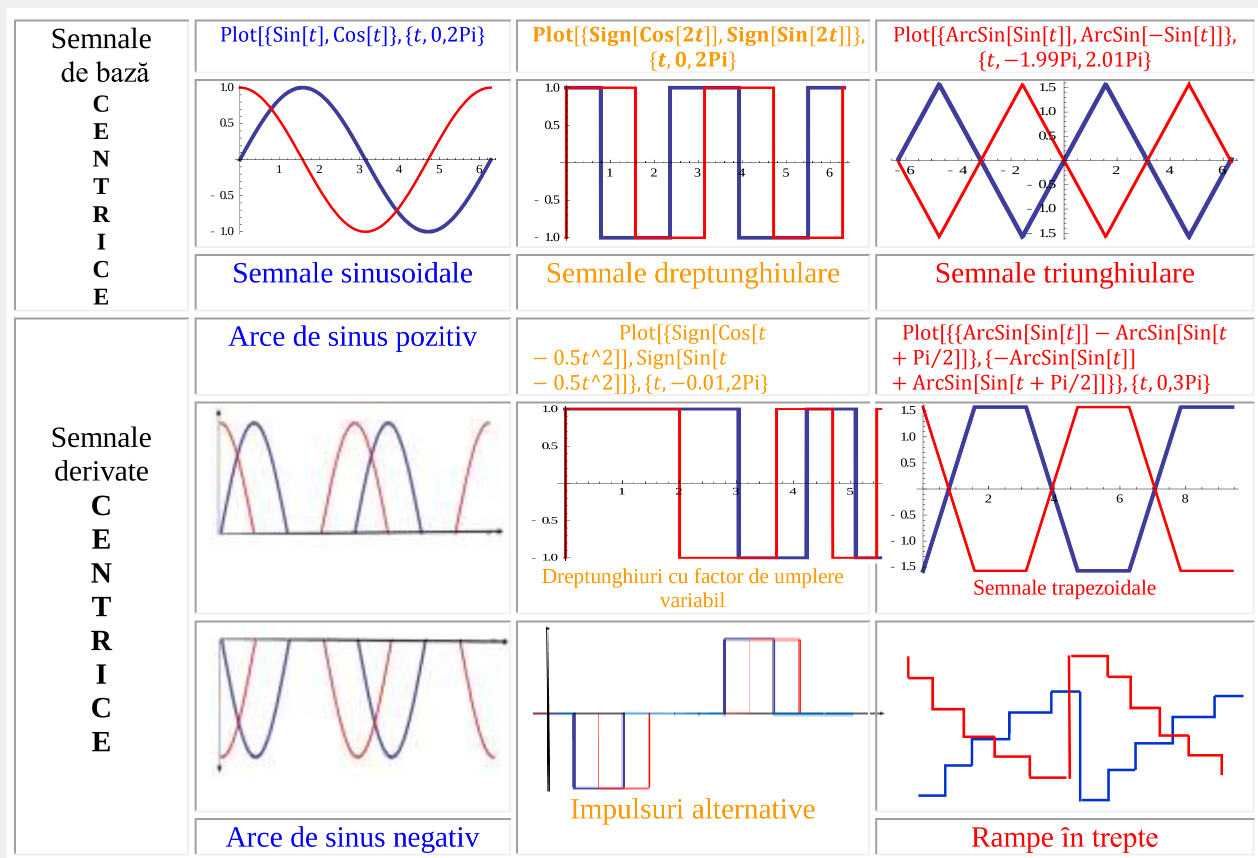
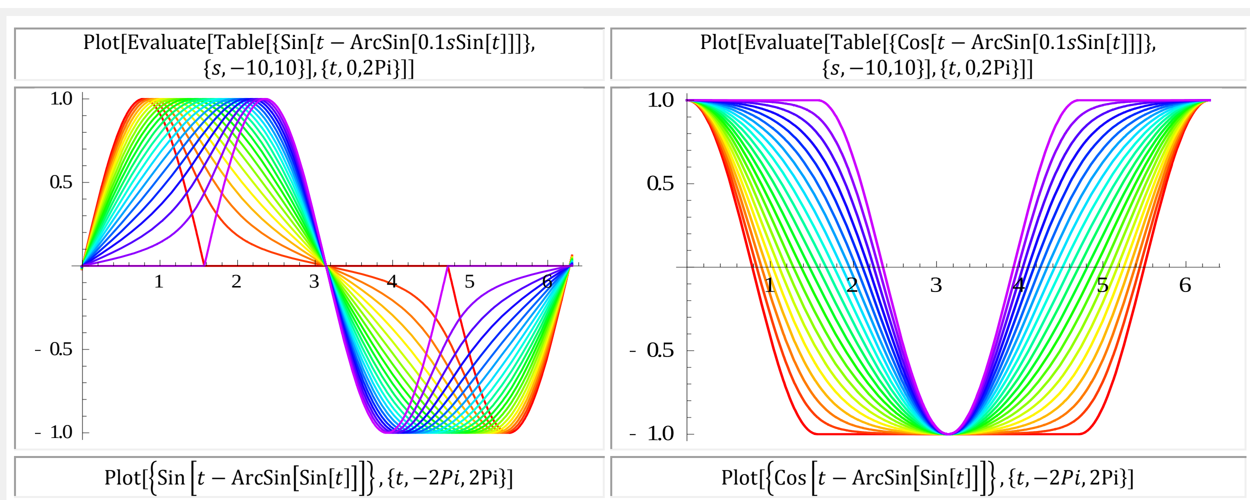
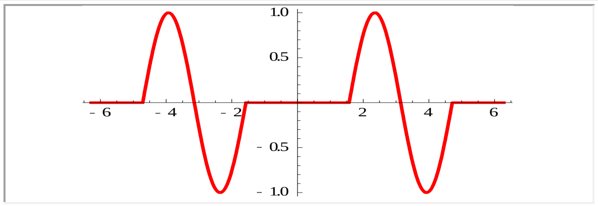
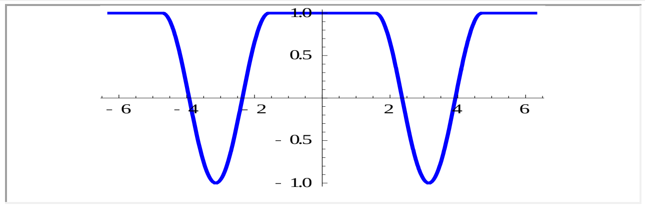
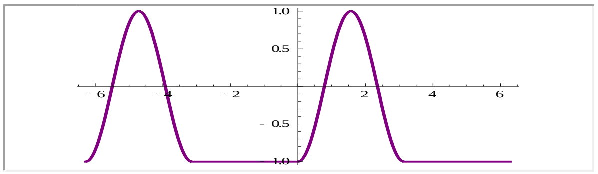
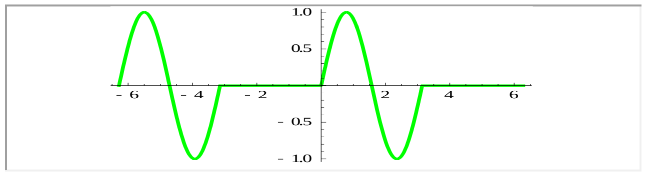
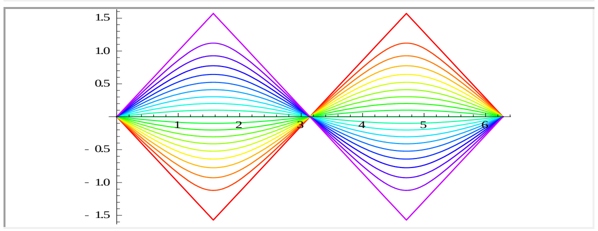
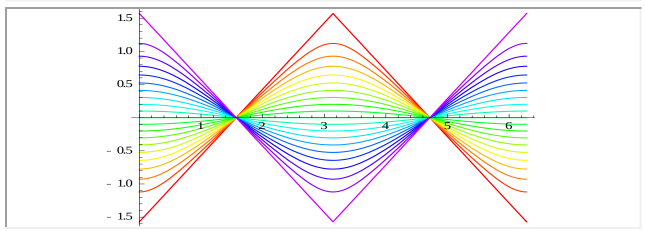
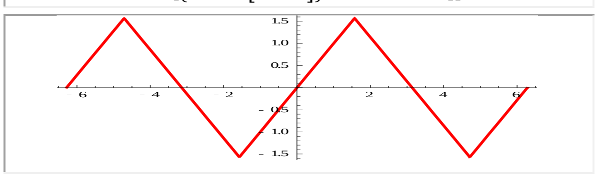
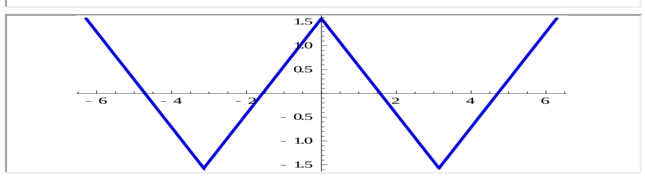
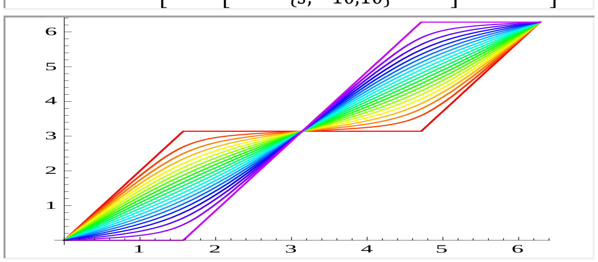
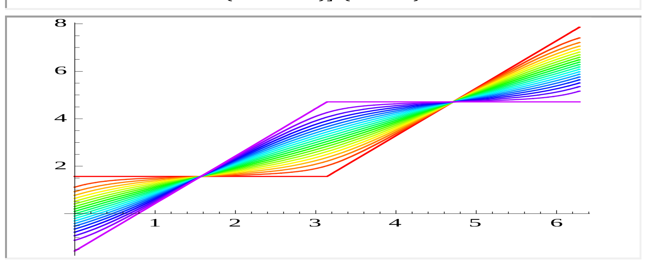
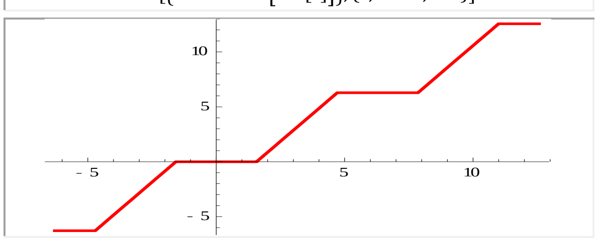
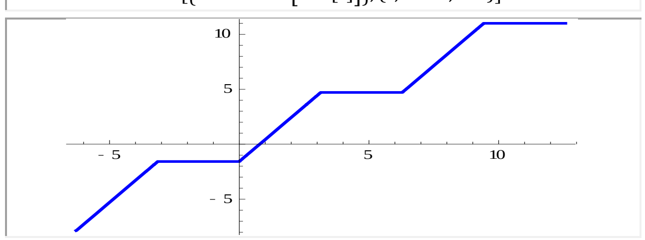


Fig. 1, a. Semnale **matematice centrice**



BUPT

	
Semnale sexoidale excentrice de var. excentrică θ	Semnale cexoidale excentrice de var. excentrică θ
Plot[{Sin[t − ArcSin[Cos[t]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]	Plot[{Cos[t − ArcSin[Cos[t]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]
	
Semnale sexoidale C excentrice de var. excentrică θ	Semnale cexoidale S excentrice de var. excentrică θ
Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[t]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}	Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sCos[t]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]
	
Plot[{ArcSin[Sin[t]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]]	Plot[{ArcSin[Cos[t]]}, {t, −2Pi, 2Pi}
	
Semnale bexoidale S de var. excentrică θ	Semnale bexoidale **C** de var. excentrică θ
Plot[Evaluate[Table[{t − ArcSin[0.1sSin[t]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{t − ArcSin[0.1sCos[t]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}
	
Plot[{t − ArcSin[Sin[t]]}, {t, −2Pi, 4Pi}]	Plot[{t − ArcSin[Cos[t]]}, {t, −2Pi, 4Pi}]
	

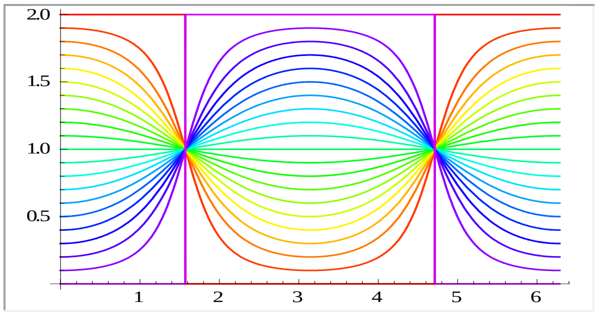
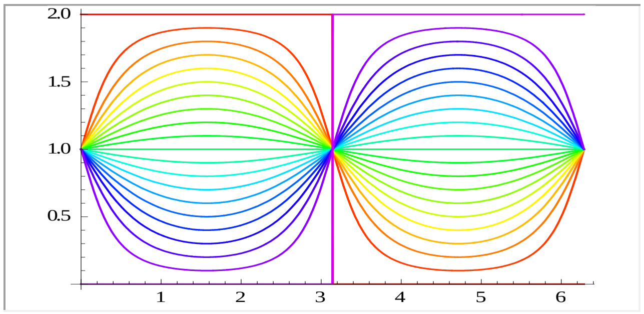
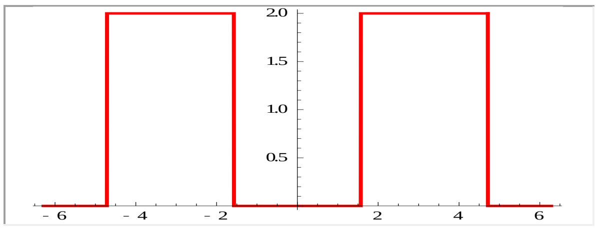
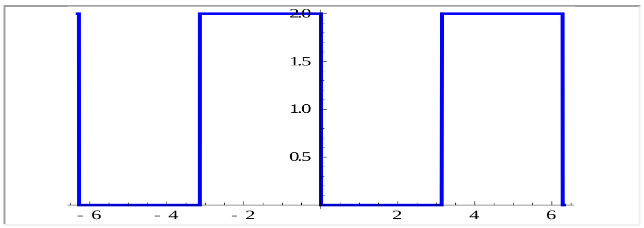
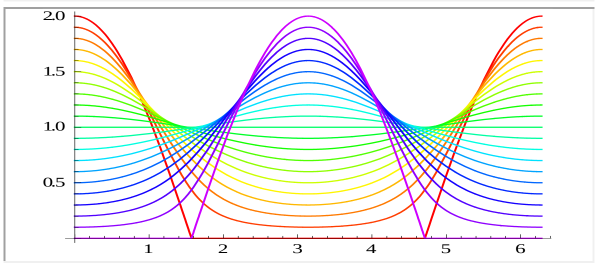
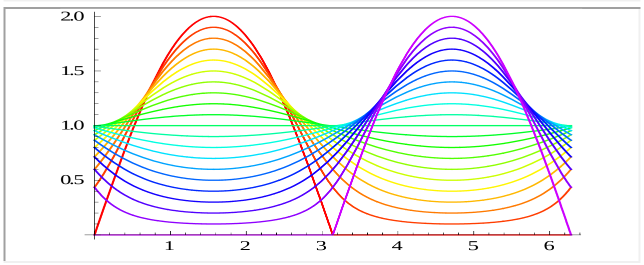
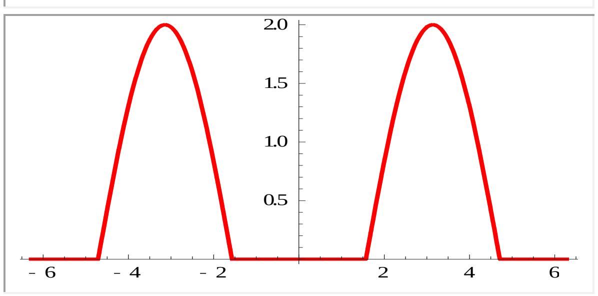
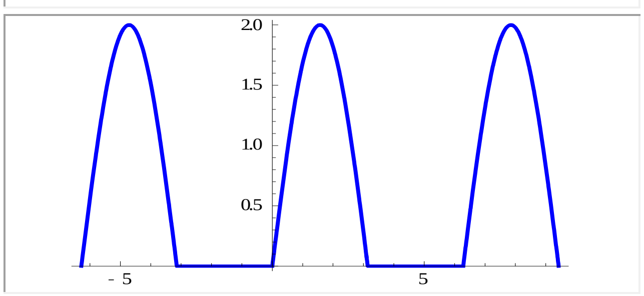
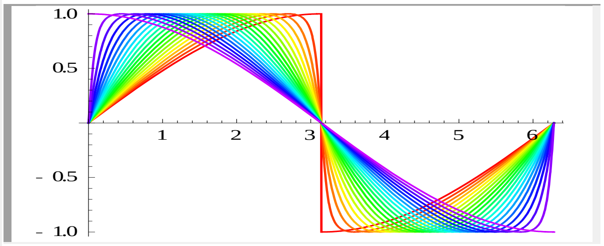
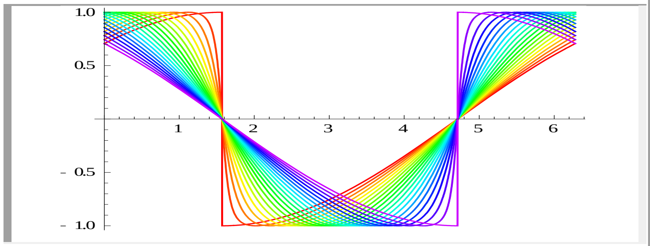
Semnale aexoidale S de var. excentrică θ	Semnale aexoidale **C** de var. excentrică θ
Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1*s* Cos[*t*]/Sqrt[1 − (0.1*s*Sin[*t*])²]}, {*s*, −10,10}], {*t*, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1*s* Sin[*t*]/Sqrt[1 − (0.1*s*Cos[*t*])²]}, {*s*, −10,10}], {*t*, 0,2Pi}]]
	
Plot[{1 − Cos[*t*]/Sqrt[1 − Sin[*t*]²]}, {*t*, −2Pi, 2Pi}]]	Plot[{1 − Sin[*t*]/Sqrt[1 − Cos[*t*]²]}, {*t*, −2Pi, 2Pi}]
	
Semnale dexoidale S de var. excentrică θ	Semnale dexoidale **C** de var. excentrică θ
Plot[Evaluate[Table[{−0.1*s*Cos[*t*] + Sqrt[1 − (0.1*s*Sin[*t*])^2]}, {*s*, −10,10}], {*t*, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{−0.1*s*Sin[*t*] + Sqrt[1 − (0.1*s*Cos[*t*])^2]}, {*s*, −10,10}], {*t*, 0,2Pi}]]
	
Plot[−Cos[*t*] + Sqrt[1 − Sin[*t*]²], {*t*, −2Pi, 2Pi}]	Plot[Sin[*t*] + Sqrt[1 − Cos[*t*]^2], {*t*, −2Pi, 3Pi}]
	
Semnale rexoidale S de var. excentrică θ	Semnale rexoidale **C** de var. excentrică θ

Fig. 1, b. Familie de **FSM—CE** pentru **s** ∈ [-1,+1] ▲ şi semnale **supermatematice excentrice** de variabilă **excentrică θ** şi de **s** = ±1 ▼

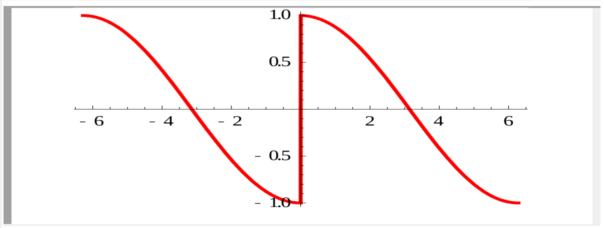
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



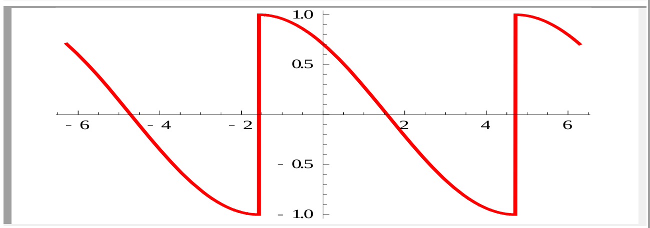
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sCos[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 + 0.2sSin[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



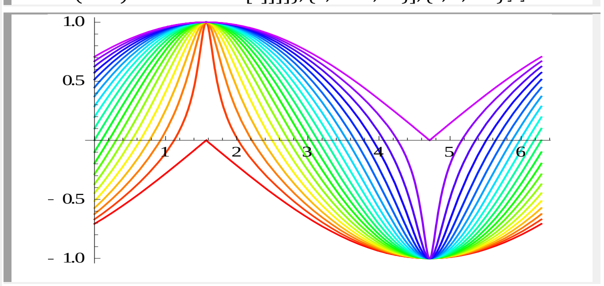
Plot[{Sin[t + ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 − 2Cos[t]]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



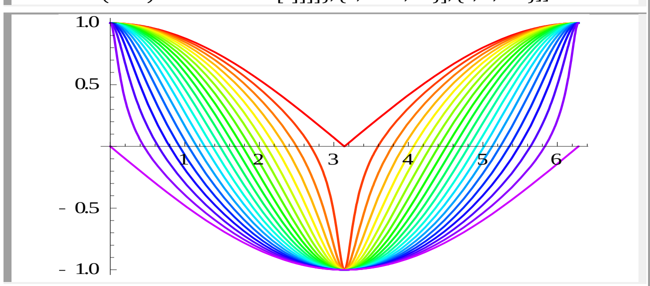
Plot[{Cos[t + ArcSin[Cos[t]/Sqrt[2 + 2Sin[t]]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



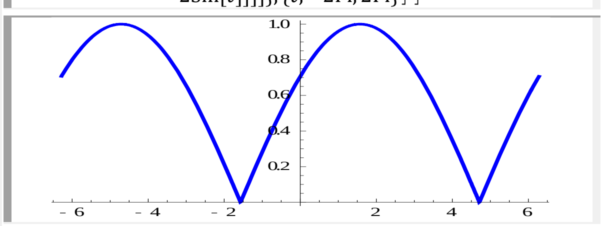
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t + ArcSin[0.1sCos[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 + 0.2sSin[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



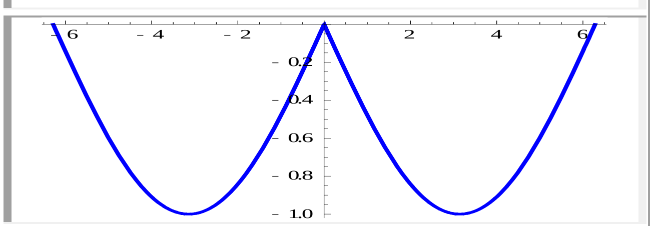
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



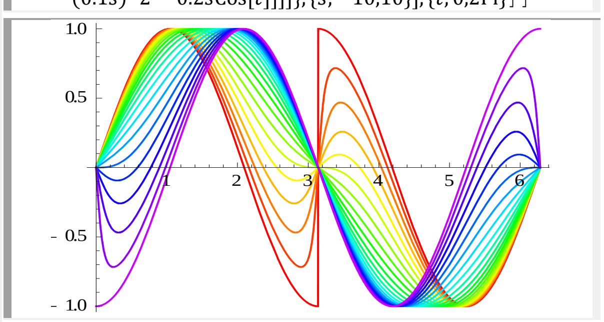
Plot[{Sin[t + ArcSin[Cos[t]/Sqrt[2 + 2Sin[t]]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



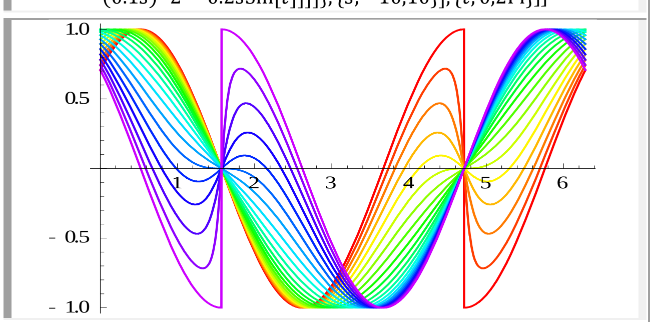
Plot[{Cos[t + ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 − 2Cos[t]]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



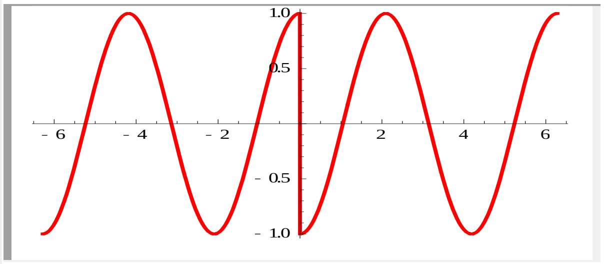
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



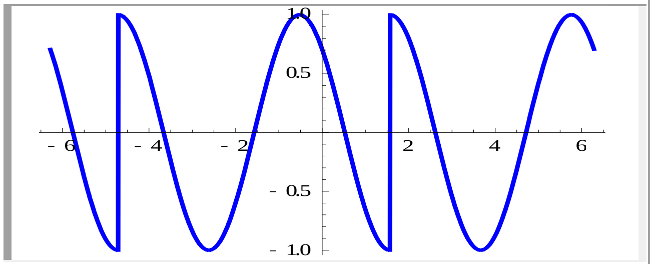
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sCos[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sSin[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



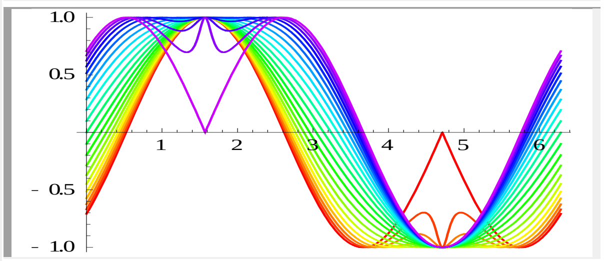
Plot[{Sin[t − ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 − 2Cos[t]]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



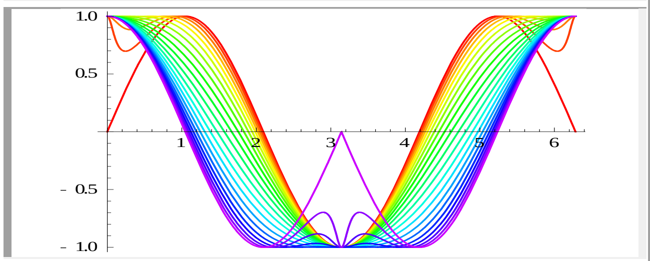
Plot[{Cos[t + ArcSin[Cos[t]/Sqrt[2 − 2Sin[t]]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



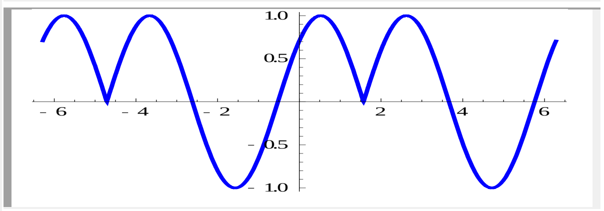
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t + ArcSin[0.1sCos[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sSin[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



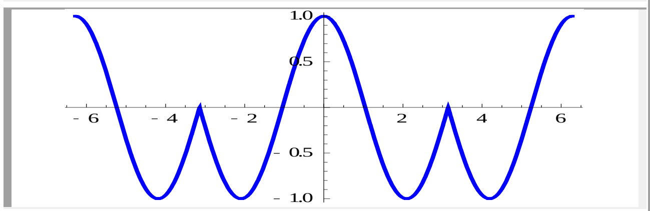
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 + 0.2sCos[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



Plot[{Sin[t + ArcSin[Cos[t]/Sqrt[2 − 2Sin[t]]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



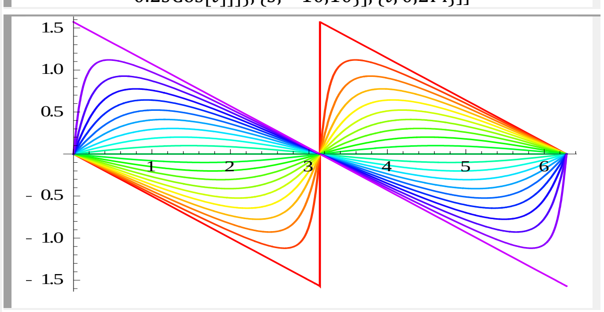
Plot[{Cos[t + ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 + 2Cos[t]]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



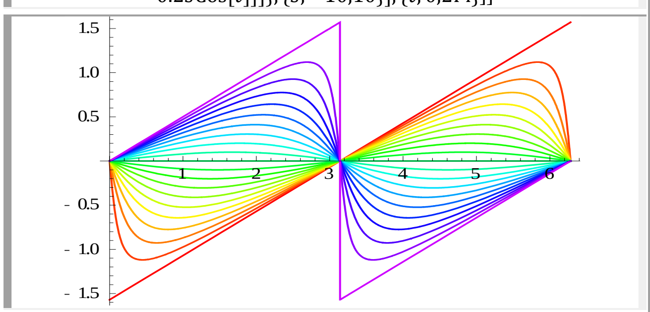
Semnale sexoidale excentrice de variabilă **centrică α**

Semnale cexoidale excentrice de variabilă **centrică α**

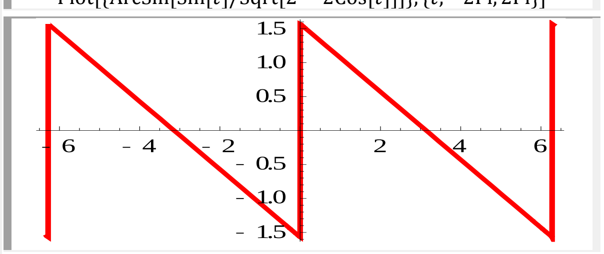
Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



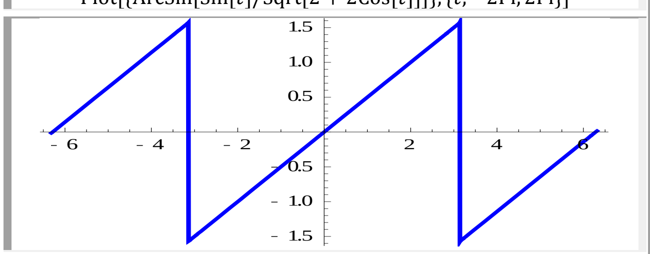
Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 + 0.2sCos[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



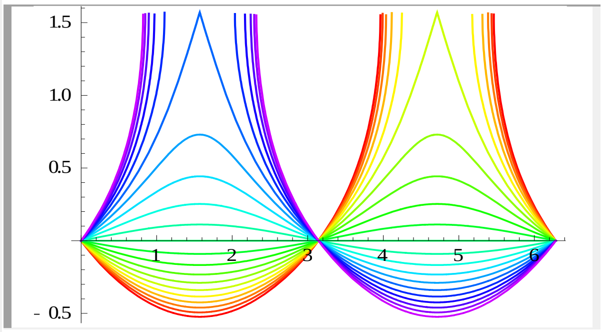
Plot[{ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 − 2Cos[t]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



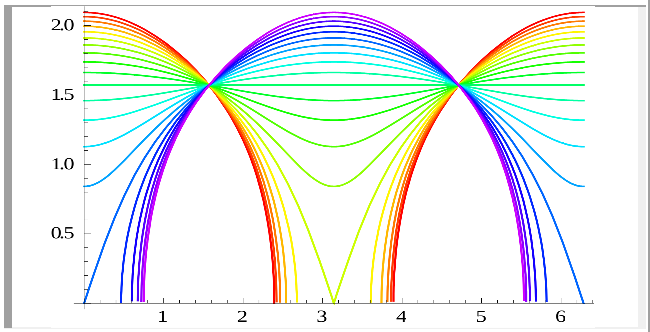
Plot[{ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 + 2Cos[t]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



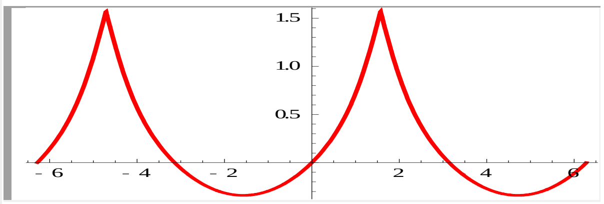
Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



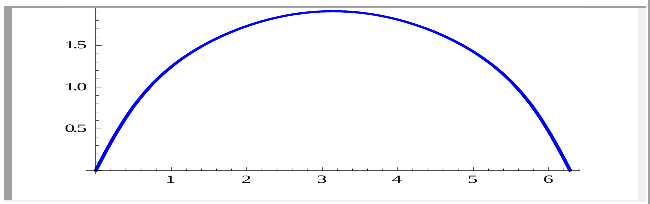
Plot[Evaluate[Table[{ArcCos[0.1sCos[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



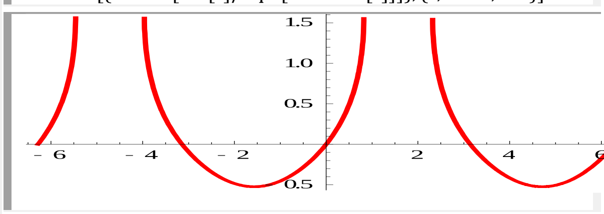
Plot[{ArcSin[0.5Sin[t]/Sqrt[1.25 − Sin[t]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



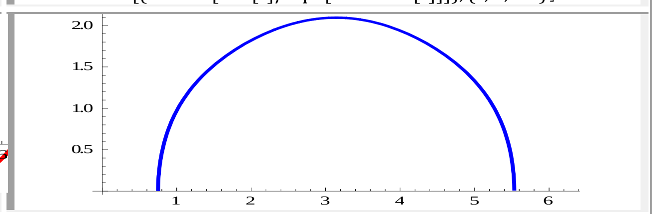
lot[{ArcCos[0.5Cos[t]/Sqrt[1.25 − Cos[t]]]}, {t, 0,2Pi}



Plot[{ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 − 2Sin[t]]]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



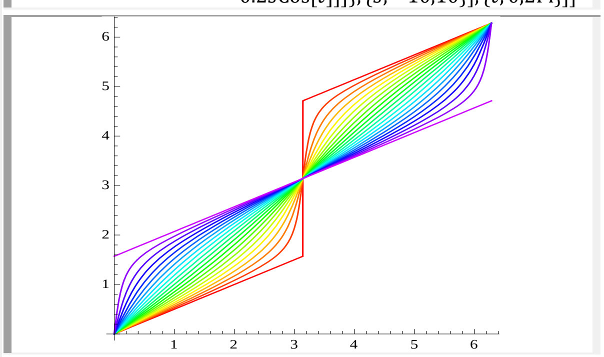
Plot[{ArcCos[Cos[t]/Sqrt[2 − 2Cos[t]]]}, {t, 0,2Pi}]



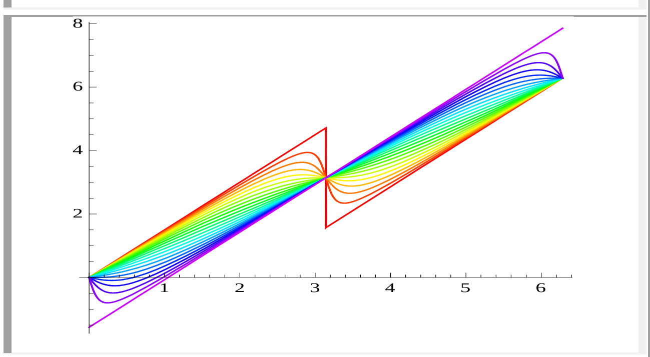
Semnale bexoidale excentrice S de variabilă **centrică α**

Semnale bexoidale excentrice C de variabilă **centrică α**

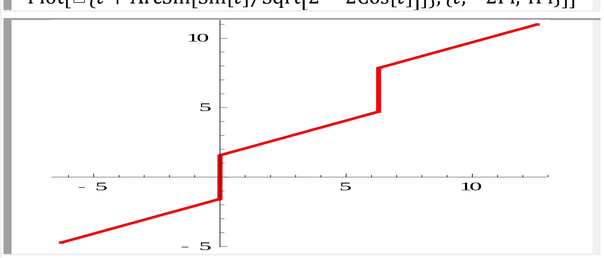
Plot[Evaluate[Table[{t + ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



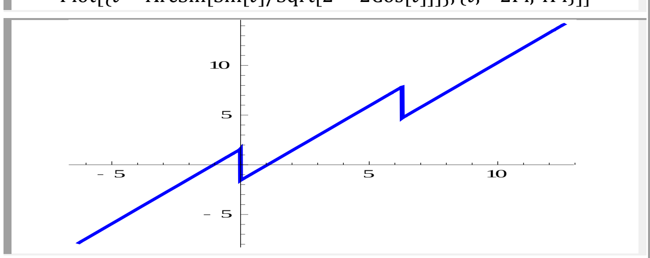
Plot[Evaluate[Table[{t − ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

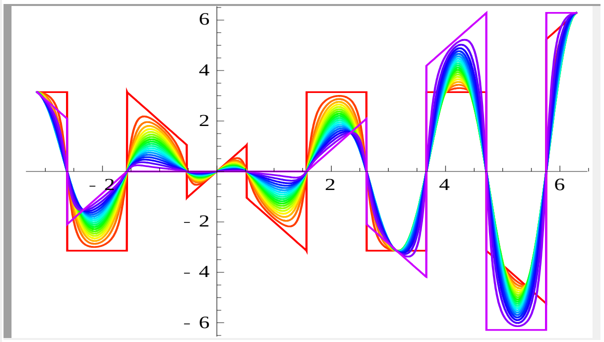
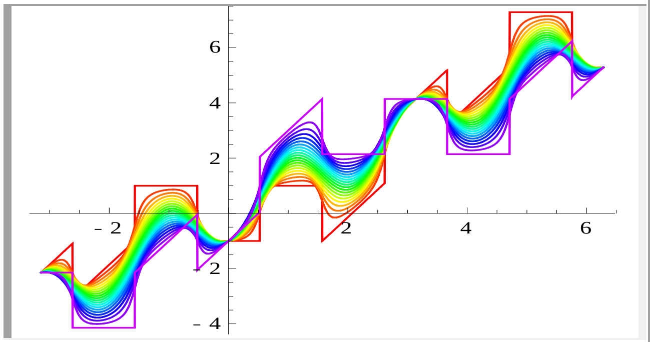
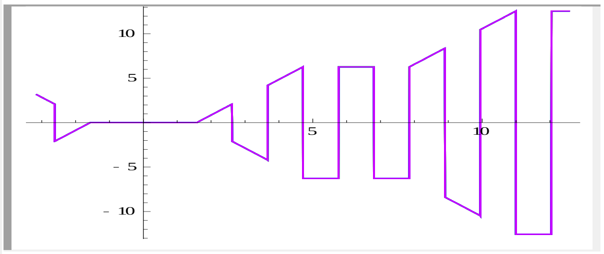
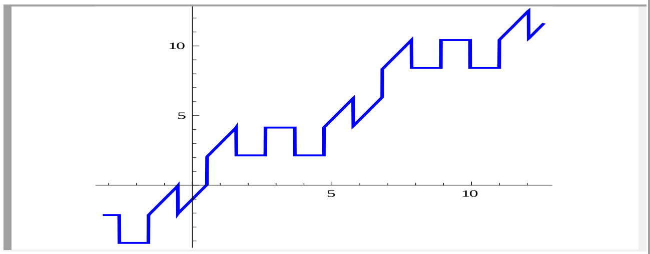


Plot[□{t + ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 − 2Cos[t]]]}, {t, −2Pi, 4Pi}]]



Plot[{t − ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 − 2Cos[t]]]}, {t, −2Pi, 4Pi}]]



Semnale aexoidale excentrice S de variabilă **centrică α**	Semnale aexoidale excentrice C de variabilă **centrică α**
Plot[Evaluate[Table[{(t − ArcSin[0.1sSin[t]]) Cos[3t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[3t])^2]}, {s, −10,10}], {t, −Pi, 2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{(t − ArcSin[−0.1sSin[t]]) − Cos[3t]/Sqrt[1 − (−0.1sSin[3t])²]}, {s, −10,10}], {t, −Pi, 2Pi}]]
	
Plot[Evaluate[Table[{(t − ArcSin[Sin[t]])Cos[3t] /Sqrt[1 − (Sin[3t])^2]}, {t, −Pi, 4Pi}]	Plot[{(t − ArcSin[−Sin[t]]) − Cos[3t]/Sqrt[1 − (−Sin[3t])²]}, {t, −Pi, 4Pi}]
	

Funcţii şi semnale în trepte **Florentin Smarandache**

Fig. 1, c. Familie de **FSM** – **CE** de **s** ∈ [-1,+1] ▲
şi semnale **supermatematice excentrice** de **<u>variabilă centrică α</u>** şi de **s** = — / + 1 ▼

2 S T R Â M B E L E, FIGURI FUNDAMENTALE ALE S. M.

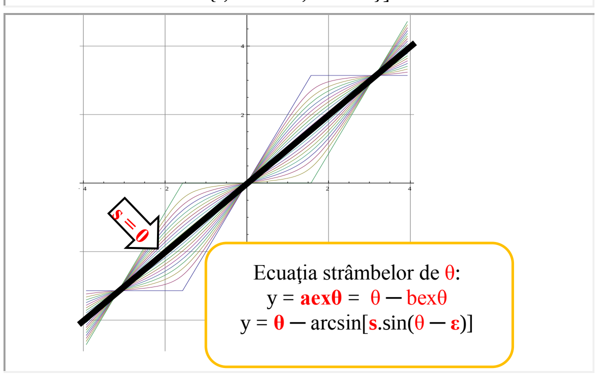
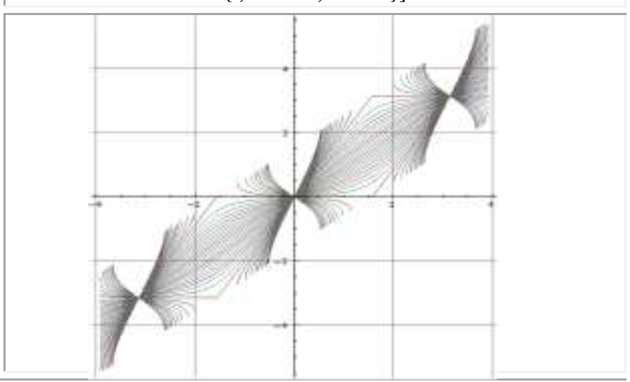
Plot[Evaluate[Table[{t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]}, {s,-10,10}], {t, -1.25 Pi, 1.25 Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]},{s,-20,20}], {t, -1.25 Pi, 1.25 Pi}]
	

Fig. 2, a. Familie de **S T R Â M B E,** rezultate din ecuaţia primei bisectoare. Pentru e = s = 0 se obţine **dreapta** care este **prima bisectoare**, iar pentru s = ± 1 se obţin ***linii frânte***◀ . Pentru **-1** < **s** > **+1** ▶

ParametricPlot[Evaluate[Table[{t + 2, 1.5 (t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]) + 3},{s,-10,10}],{t, -1.25 Pi, 1.25 Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{t + 2, -1.2 (t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]) + 3}, {s,-20,20}], {t, -1.25 Pi, 1.25 Pi}

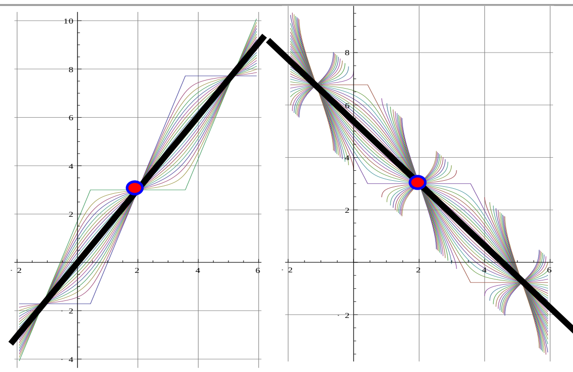
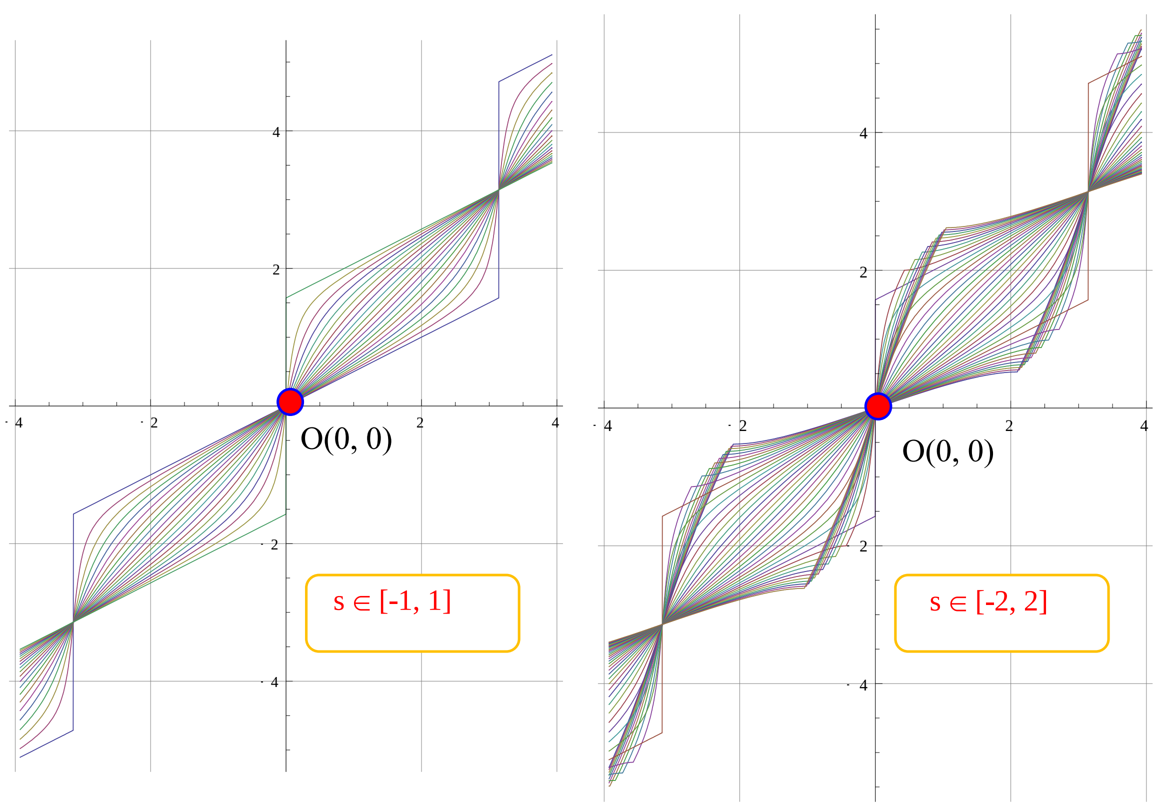


Fig. 2,b Strâmbe de variabilă excentrică ce trec prin punctul **M(2; 3)** de coeficient unghiular pozitiv, **m = + 1,5** ◄ şi negativ **m = ─ 1,2** , iar **-1 < s > +1** ►

Plot[Evaluate[Table[{t+ArcSin[0.1 s Sin[t]/Sqrt[1+(0.1 s)^2 -0.2 s Cos[t]]]},{s,-10,10}],{t,-1.25 Pi,1.25 Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{t+ArcSin[0.1 s Sin[t]/Sqrt[1+(0.1 s)^2 -0.2 s Cos[t]]]},{s,-20,20}],{t,-1.25 Pi,1.25 Pi}]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{t+2, 1.5 (t+ArcSin[0.1 s Sin[t]/Sqrt[1+(0.1 s)^2 -0.2 s Cos[t]]])+3}, {s, -10, 10}], {t,-1.25 Pi,1.25 Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{t+2, -1.2 (t+ArcSin[0.1 s Sin[t]/Sqrt[1+(0.1 s)^2 -0.2 s Cos[t]]])+3},{s,-20,20}], {t,-1.25 Pi,1.25 Pi}]

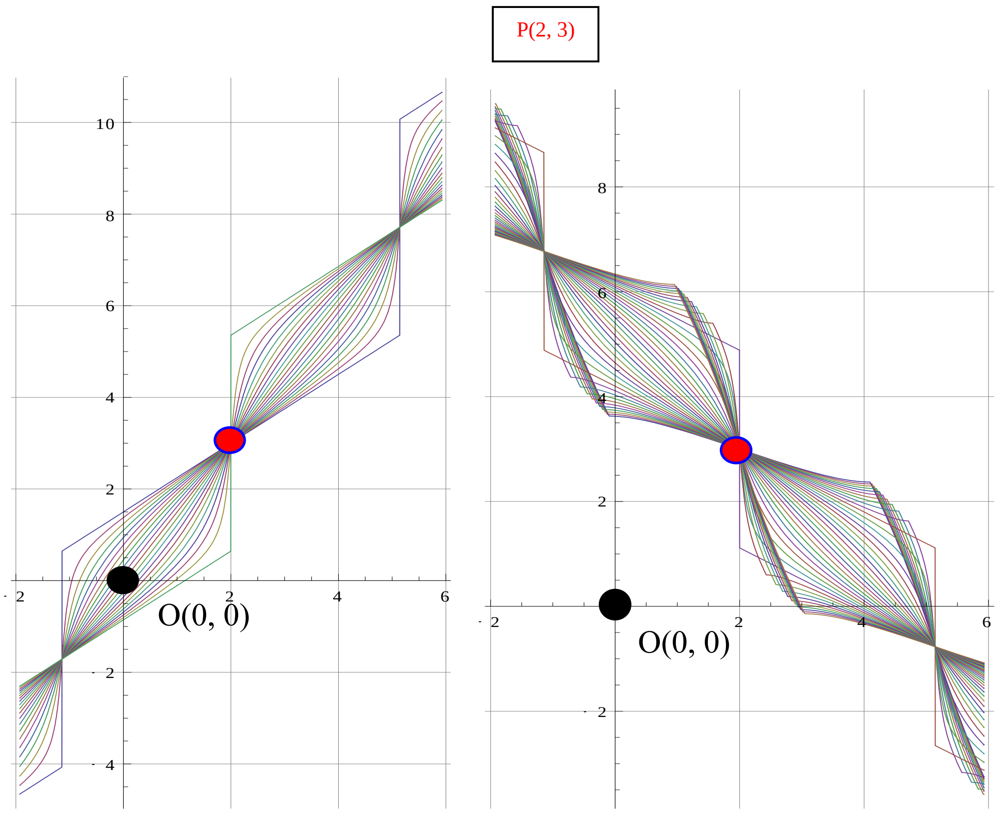


Fig. 2, c Strâmbe de variabilă **centrică α**

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematicaonline.blogspot.ro

2. FUNCŢIA DE GRADUL 1 : FUNCŢIA LINIARĂ ŞI FUNCŢIA AFINĂ

Funcţia de gradul 1 (funcţia liniară şi funcţia afină) este o funcţie definită pe mulţimea numerelor reale R (sau pe submulţimi sau intervale ale acesteia), cu valori reale, f : R → R, definită prin:

(1) $y = f(x) = \mathbf{m}x + b$,

în care, $\mathbf{m} = \text{tg}\alpha \equiv \tan\alpha \in \mathbf{R}$ este **panta** dreptei şi $b \in \mathbf{R}$ este **ordonata la origine**, $\mathbf{m} \neq 0$.

Pentru **b = 0** ea se denumeşte funcţie **liniară**, iar pentru **b ≠ 0** este denumită funcţie **afină.**

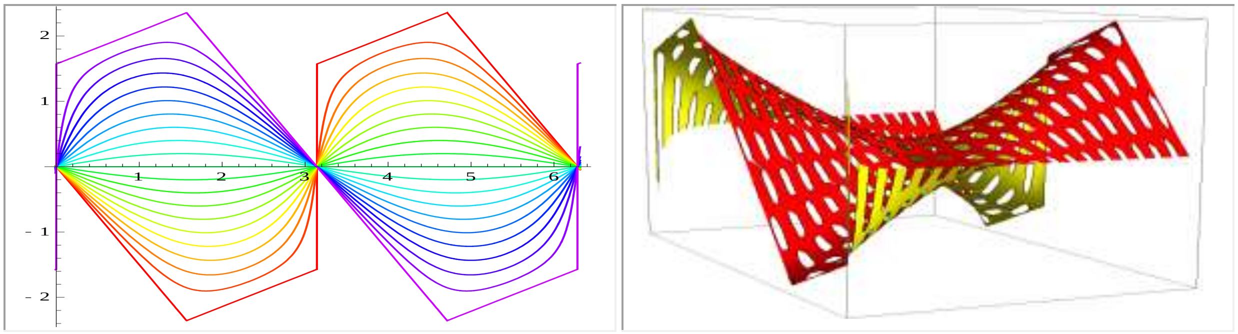
Graficul funcţiei de gradul 1 este mulţimea: $G_f = \{(x, y)\ x \in \mathbf{R},\ y = mx + b \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, care se reprezintă

în planul axelor de coordonate printr-o **dreaptă**, care este o **strâmbă** de excentricitate numerică liniară **s = 0**.

Dacă m > 0 funcţia de gradul 1 este crescătoare, iar dacă m < 0 funcţia este descrescătoare.

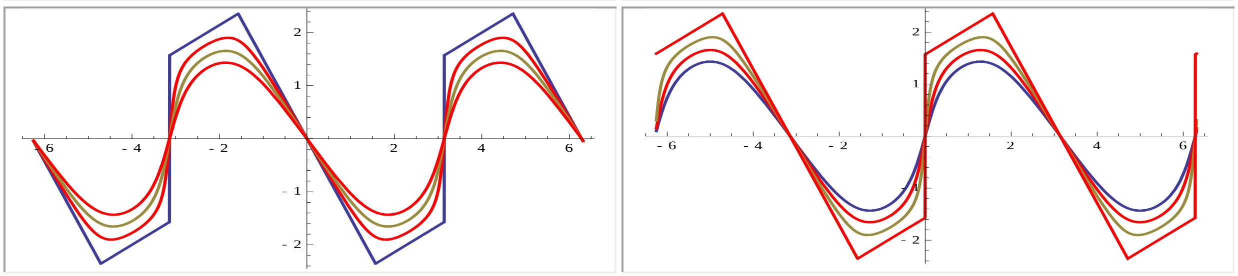
Se remarcă faptul că **x = m** este ecuaţia unei drepte verticale, paralele cu axa Oy, iar pentru **y = b** este ecuaţia unei drepte orizontale, paralele cu Ox.

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[t]] + ArcSin[0.1sSin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −0.01,2.01Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[t]] + ArcSin[0.1s Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]}, {s, −10, −7}], {t, −1.99Pi, 2.01Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[t]] + ArcSin[0.1s Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]]]}, {s, 7,10}], {t, −1.99Pi, 2.01Pi}]



Plot[{ArcSin[Sin[t]], ArcSin[Sin[t]/Sqrt[2 − 2Cos[t]]], (t − ArcSin[Sin[t]])/Pi , 1 − Cos[t]/Sqrt[1 − Sin[t]^2], Cos[t]/Sqrt[1 − Sin[t]^2] , Sin[t]/Sqrt[1 − Cos[t]^2] , Sign[Cos[t]], Sign[Sin[t]]}, {t, −2.01Pi, 2.01Pi}]

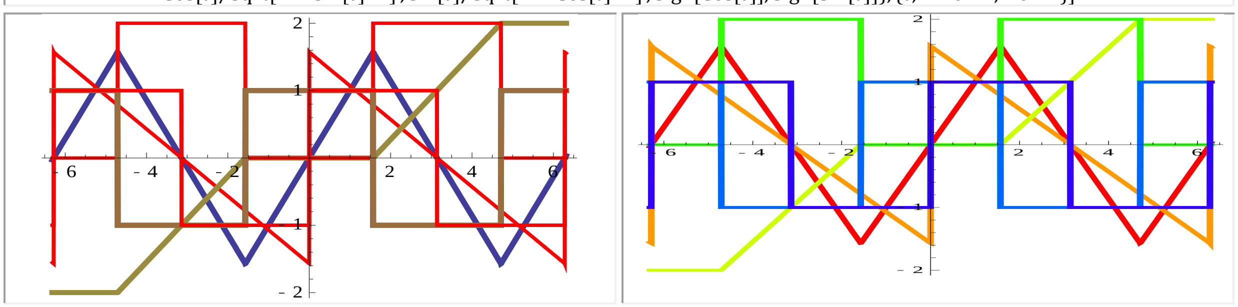
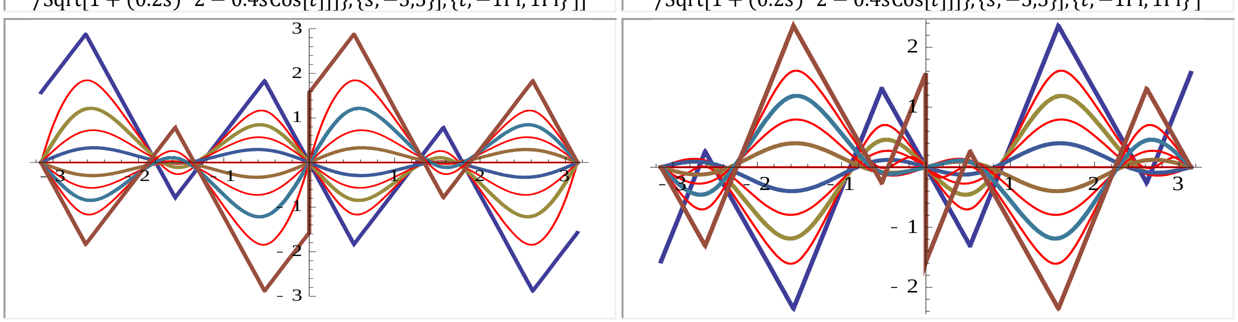
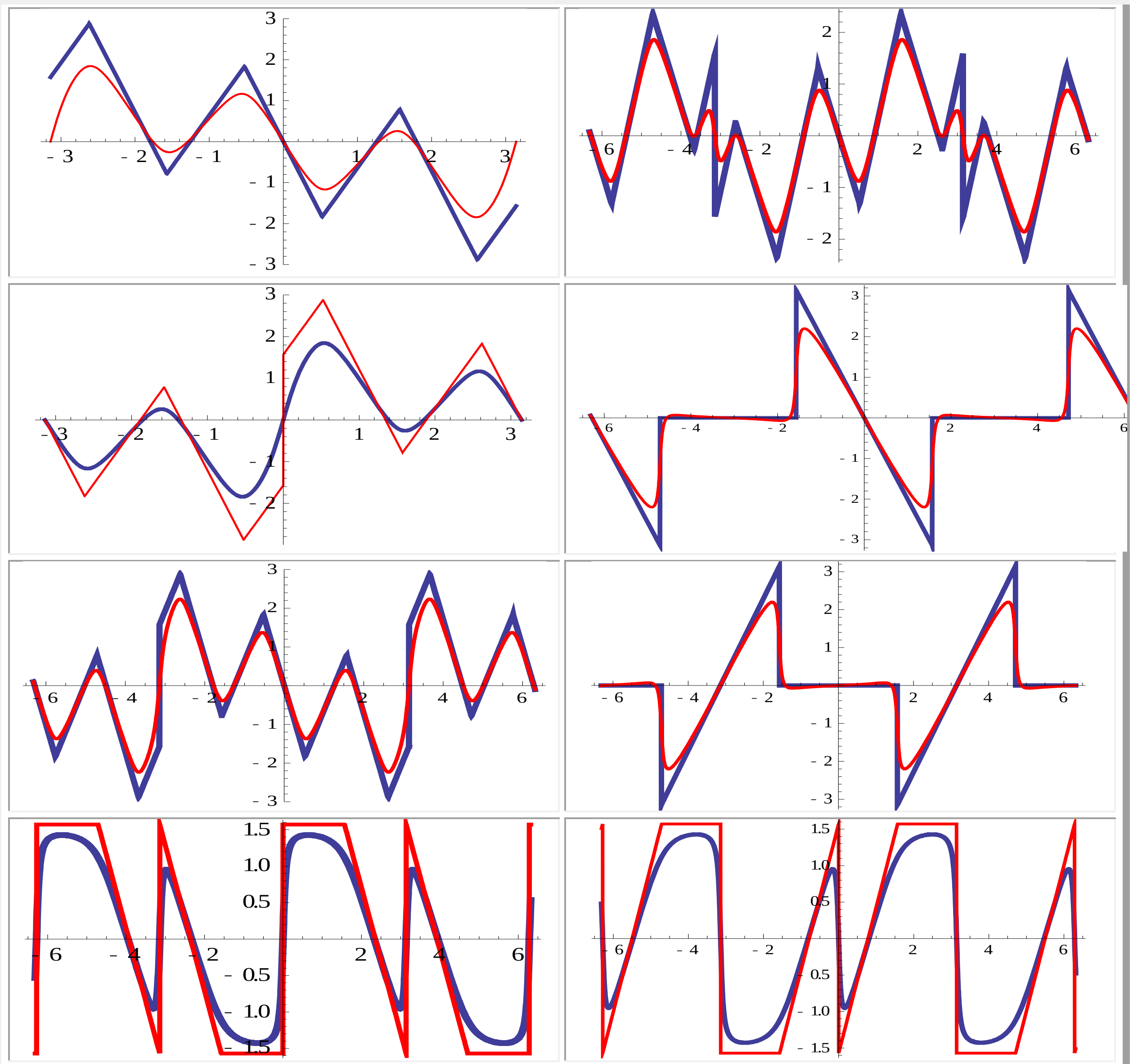


Fig. 3 **Funcţii supermatematice** generatoare de funcţii liniare segmentate, precum şi funcţii în trepte

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.2sSin[3t]] + ArcSin[0.2sSin[t] /Sqrt[1 + (0.2s)^2 − 0.4sCos[t]]]}, {s, −5,5}], {t, −1Pi, 1Pi}]]

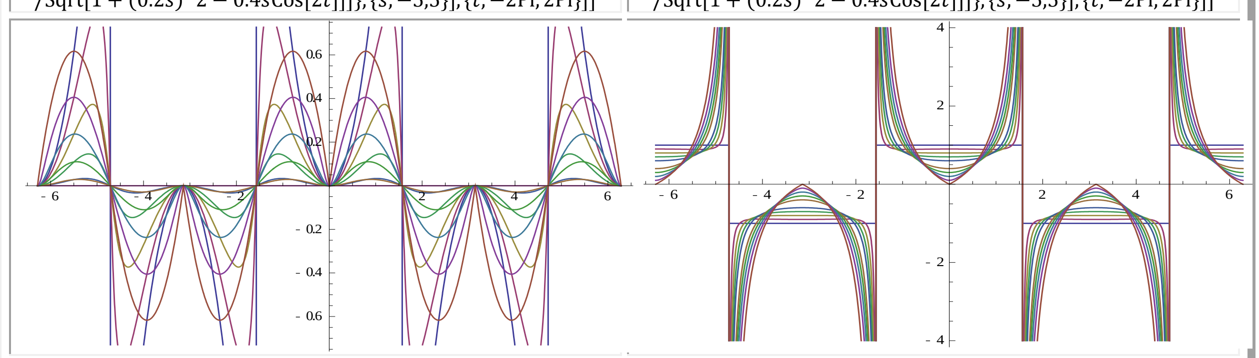
Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.2sSin[3t]] − ArcSin[0.2sSin[t] /Sqrt[1 + (0.2s)^2 − 0.4sCos[t]]]}, {s, −5,5}], {t, −1Pi, 1Pi}]

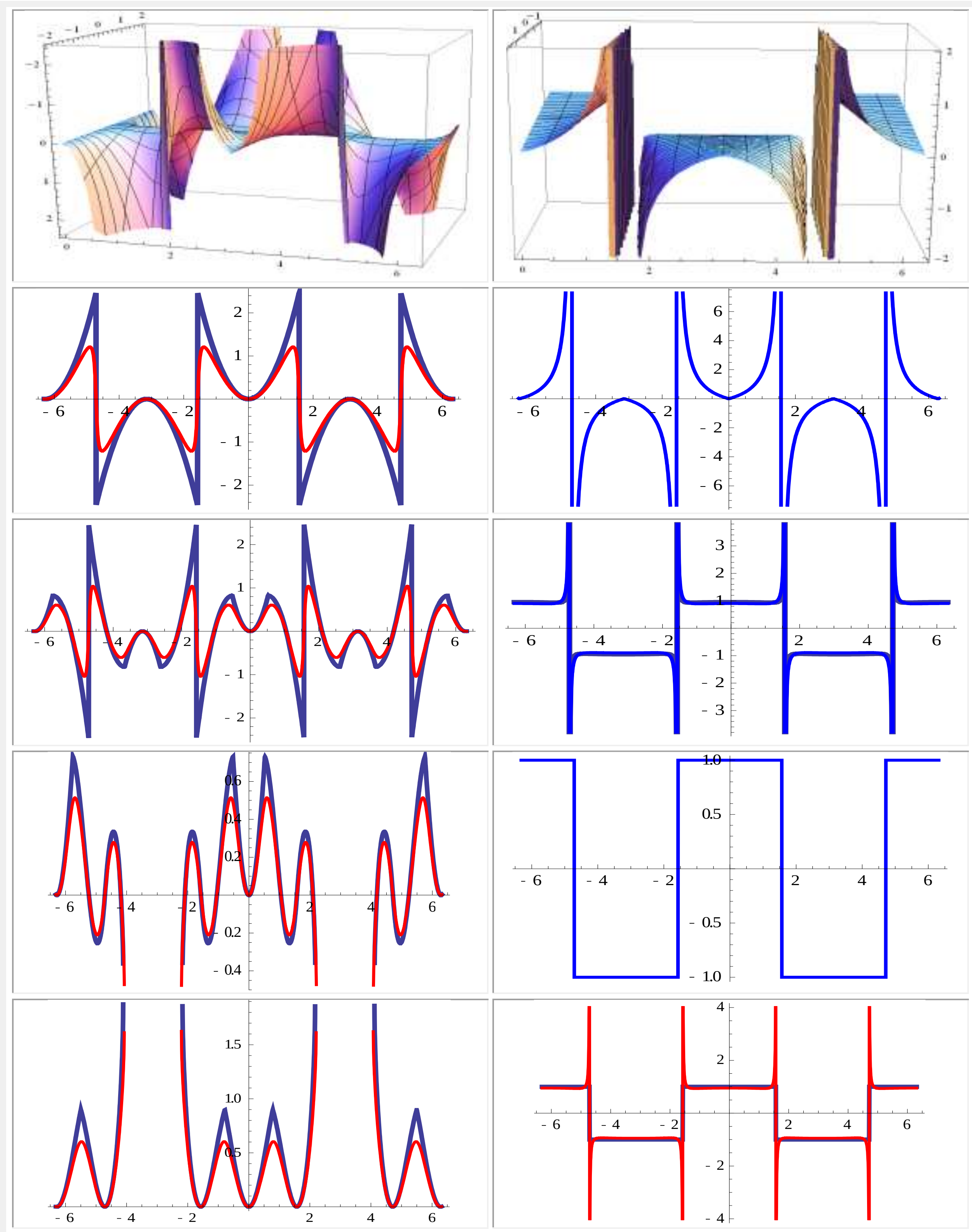




Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.2sSin[t]] ∗ ArcSin[0.2sSin[2t] /Sqrt[1 + (0.2s)^2 − 0.4sCos[2t]]]}, {s, −5,5}], {t, −2Pi, 2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.2sSin[t]]/ArcSin[0.2sSin[2t] /Sqrt[1 + (0.2s)^2 − 0.4sCos[2t]]]}, {s, −5,5}], {t, −2Pi, 2Pi}]]





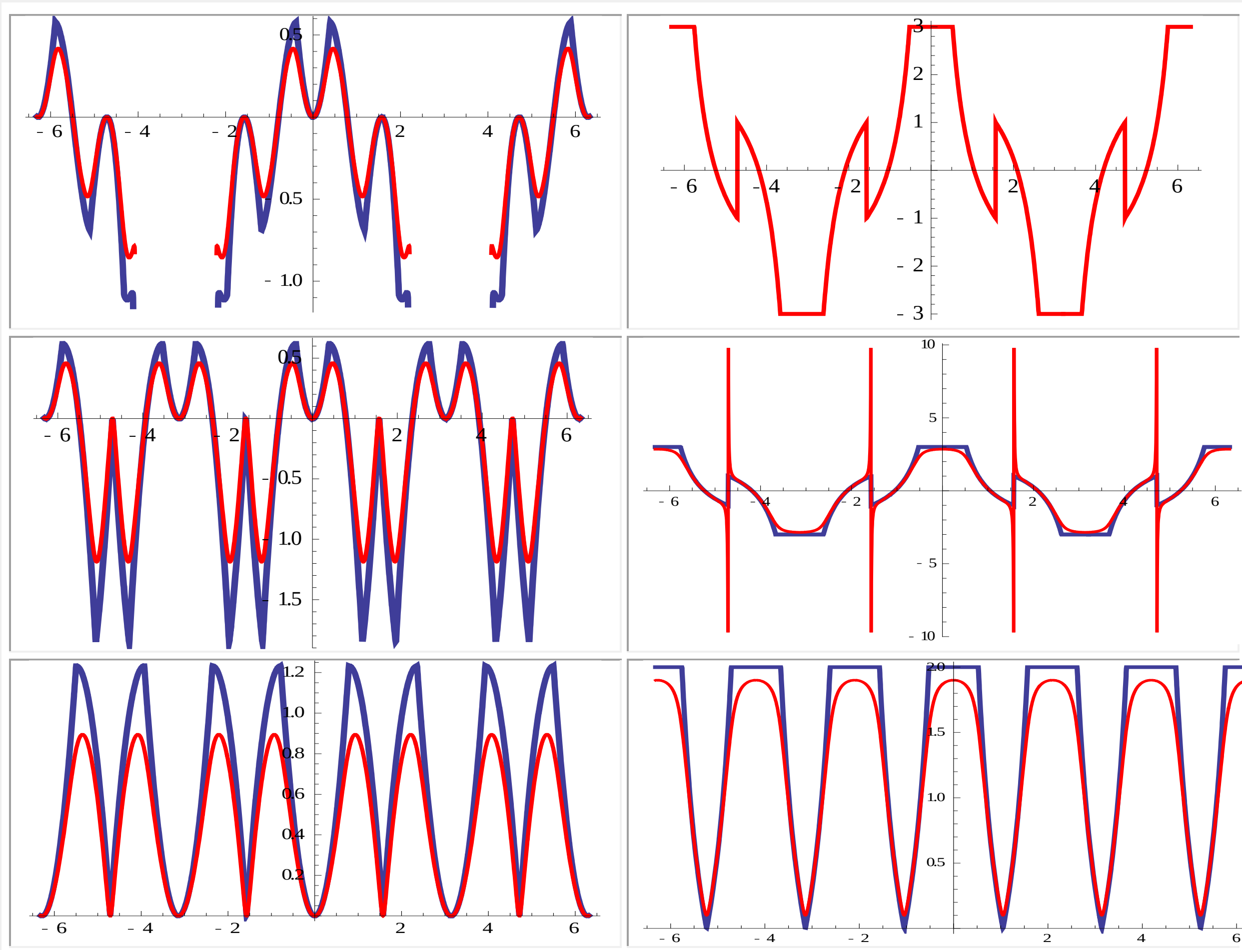


Fig. 4 Funcţii **supermatematice** generatoare de funcţii liniare segmentate cu **bexmθ ± * / Bexnα**

www.SuperMathematica.com | www.SuperMatematicaonline.blogspot.ro

În graficele anterioare au fost prezentate **FSM — CE** de s ∈ [-1, 1] din care provin, pentru **s = 1**, funcţiile **liniare frânte**. Au fost reprezentate în paralel / suprapuse şi funcţiile de **s = 0,9** care pot aproxima, destul de grosier, funcţiile liniare de **s = 1**. Evident că pentru s = 0,999 aproximarea era cu mult mai fidelă / bună, dar curbele deveneau greu lizibile sau greu decelabile / diferenţiabile.

Diversele variante de grafice de s ∈ [0,9; 1] au aparut prin modificarea constantelor **m** şi **n** în **FSM — CE** beta excentrice de variabilă **excentrică** şi, respectiv, **centrice.**

Motto:" ..Fiecare opinie care e acum acceptată,
a fost la un moment dat **excentrică**.**"** **Bertrand Russell**
„ Jocul este cel mai **elevat** tip de cercetare **".** **Albert Einstein**.

CAPITOLUL V :
FUNCŢII SUPERMATEMATICE EXCENTRICOELEVATE

1. INTRODUCERE

În **Capitolele II …IV** s-a evidenţiat faptul că funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM – CE**), parte a **supermatematicii**, matematica mileniului III, referindu-ne doar la ele, sunt constituite din funcţiile ordinare, **vechi**, din domeniul **centric** şi cele **noi**, din **domeniul excentric**, denumite **excentrice, elevate** şi **exotice**, în funcţie de poziţia relativă a celor 3 puncte **confundate** stabilite de **Euler**: **centrul** cercului **C**, **originea** unui sistem de coordonate / reper **O** şi **polul** unei (semi)drepte P ≡ **S**, denumit acum excentru şi notat cu **E(e, ε)** în planul unui cerc oarecare C(O,R), de raza **R** şi cu **S(s,ε)** în planul cercului unitate CU(O,1), fost trigonometric.

Dacă, în cazul matematicii centrice (**MC**), în care punctele erau confundate, nu exista decât câte o singură funcţie cosα, sinα, tanα ≡ tgα, cotα ≡ ctgα, secα, cscα ≡ cosecα şi, în general, câte o singură entitate **matematică centrică** (**MC**: dreaptă, cerc, elipsă, hiperbolă …, sferă, con, prismă, …), în celelalte matematici, matematicile noi ale **supermatematicii (SM)**, din **domeniul excentric**, ele există într-un număr care tinde spre infinit. De aceea, se poate afirma, cu temei, că **SM** multiplică la infinit toate entităţile **matematicii centrice** (**MC**), graţie ***noilor dimensiuni ale spaţiului***, cele ***de formare şi de deformare*** a lui: **excentricitatea** liniară **efectivă e**, excentricitatea liniară **numerică s** şi excentricitatea **unghiulară ε**, coordonate polare ale excentrelor **E** şi, respectiv, **S**.

Odată cu deplasarea / expulzarea polului **P** din originea **O** şi denumit **excentru S**, apar şi o serie de funcţii excentrice noi precum **aex, bex, dex, rex**, ş.a., fără echivalente în **MC**, iar prin combinarea **FSM** din cele 4 domenii amintite şi utilizând doar primele 4 operaţii matematice şi numărul **FSM** noi, denumite **efective** (**Cap.II**) şi, respectiv, **evolutive** (**Cap. III**) ***tinde la infinit***, justificând, cu prisosinţă, atributul de **"nemărginire"** atribuit **SM**, în aceste **capitole**. Ca urmare, şi cititorii pot să-şi aducă contribuţia la propăşirea şi diseminarea noii matematici, a **supermatematicii** (**SM).**

Aşa cum a procedat şi **Editura Matrix Rom** din Bucureşti, prin bunăvoinţa directorului ei, matematicianul de prestigiu **Iancu Ilie**, publicând în 2015 "**Supermatematica**", Vol I şi Vol. II, în cea de a 3-a ediţie, revizuită şi adăugită, şi străduindu-se, din răsputeri, prin "**Librarie.Net**", s-o facă cunoscută iubitorilor de nou şi de matematică, oferindu-le posibilitatea achiziţionării ei. Apoi s-a răzgândit, renunţând la Vol.II, apoi şi la vânzarea Vol. I !

Capitolele prezentate, precum şi cele ce vor urma, ar putea chiar să extindă **SM** şi la un al III-lea volum. Citiţi-le acum şi nu aşteptaţi acel moment, care nu se ştie când şi dacă va veni ! Redactorii se supără repede !

Este de menţionat faptul că toate funcţiile **domeniului excentric** pot fi de **variabilă excentrică *θ*** sau de **variabila centrică α**, de excentru **S** punct fix (**s** şi **ε** → constante) sau de excentru **Sv** punct mobil (**s** şi **ε** → variabile) în planul cercului unitate. Ele pot fi, de asemenea, de simplă, dublă, triplă sau multiplă excentricitate. Altfel spus, **FSM** pot fi de atâtea variabile (θ sau α, **s**, **ε**, s_1, ε_1, s_2, ε_2, … s_n, ε_n) de câte avem nevoie, sau de câte dorim, dintre care, în plan, există o singură variabilă clasică (θ sau α), restul fiind de **formare şi de deformare** a spaţiului, cu ajutorul cărora **cercul** (zero lobă) se poate **transforma / metamorfoza** continuu într-o infinitate de **monolobe**, **bilobe** (elipse excentrice fără centru de simetrie, doar cu o singură axă de simetrie), **trilobe** (triunghiuri diverse), **quadrilobe / cvadrilobe** (pătrat sau dreptunghi perfecte) pentalobe, hexalobe, … **multilobe** sau **n-lobe**. Toate acestea au, la “extremităţi”, adică pentru **s** = **0** un cerc, iar pentru **s** = ± 1 un poligon perfect, nu neapărat şi regulat.

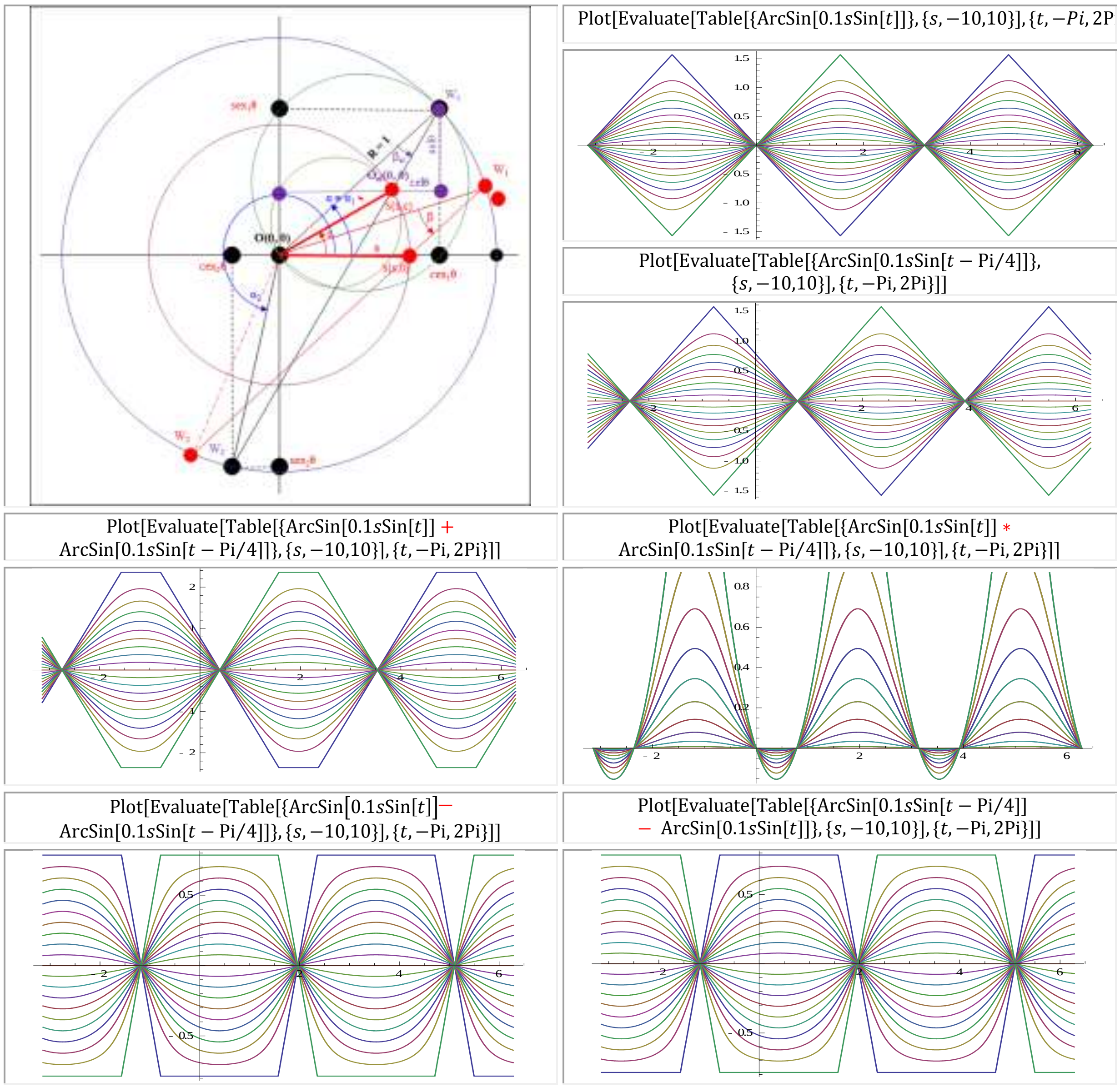


Fig. 1 Explicaţii pentru **FSM — CE** excentrice bexθ şi **FSM — CEL** elevate belθ ◄
Funcţiile bex[θ,S(s,0)] ≡ bel[θ,S(s,0)] ►▲ şi ≠ bex[θ,S(s,ε = $\frac{\pi}{4}$)] ≡ bel[θ, S(s,ε = $\frac{\pi}{4}$)] ►▼
Funcţiile bex[θ,S(s,0)] şi bel[θ,S(s, ε = $\frac{\pi}{4}$)] şi operaţiile +, — , * şi / cu aceste funcţii ◄▼►

Lăsăm la latitudinea cititorului să aprecieze dacă şi atributul de “**mǎreţie**” îi este propriu şi / sau i se potriveşte **SM**. Atributele de “***matematică a viitorului***” şi, respectiv, de “***matematică a mileniului III***“ au fost atribuite **SM** de doi prestigioşi profesori universitari de matematică din USA, i-am numit pe Prof.

Dr. Math. **Malvina Florica Baica** de la Universitatea din Wisconsin, membră a Academiei de Ştiinţe din New-York şi pe Prof. Dr. Math. **Florentin Smarandache**, şeful Departamentului de Ştiinţă şi Matematică de la Universitatea din New Mexico, în referatele lor, necesare decernării "**Diplomei AGIR**" pe anul 2012, în domeniul **IT**, lucrării Mircea Eugen Şelariu "SUPERMATEMATICA. Fundamente" Vol.I şi Vol.II, Ediţia a 2-a, 2012, din Editura "Politehnica" din Timişoara.

Cred că şi ceialalţi referenţi, Prof.dr. ing. **Ion Grozav** şi Prof. ing. **Ioan Ghiocel,** au avut aceeaşi opinie.

2. FUNCŢII SUPERMATEMATICE EXCENTRICOELEVATE

Aşa cum le spune şi numele, sunt combinaţii, prin cele patru operaţii matematice elementare (**+, —, *** şi **/**), ale unor **FSM - circulare excentrice CE** cu cele circulare **elevate** (**FSM — CEL**) (**Fig. 1** şi **Fig.2**).

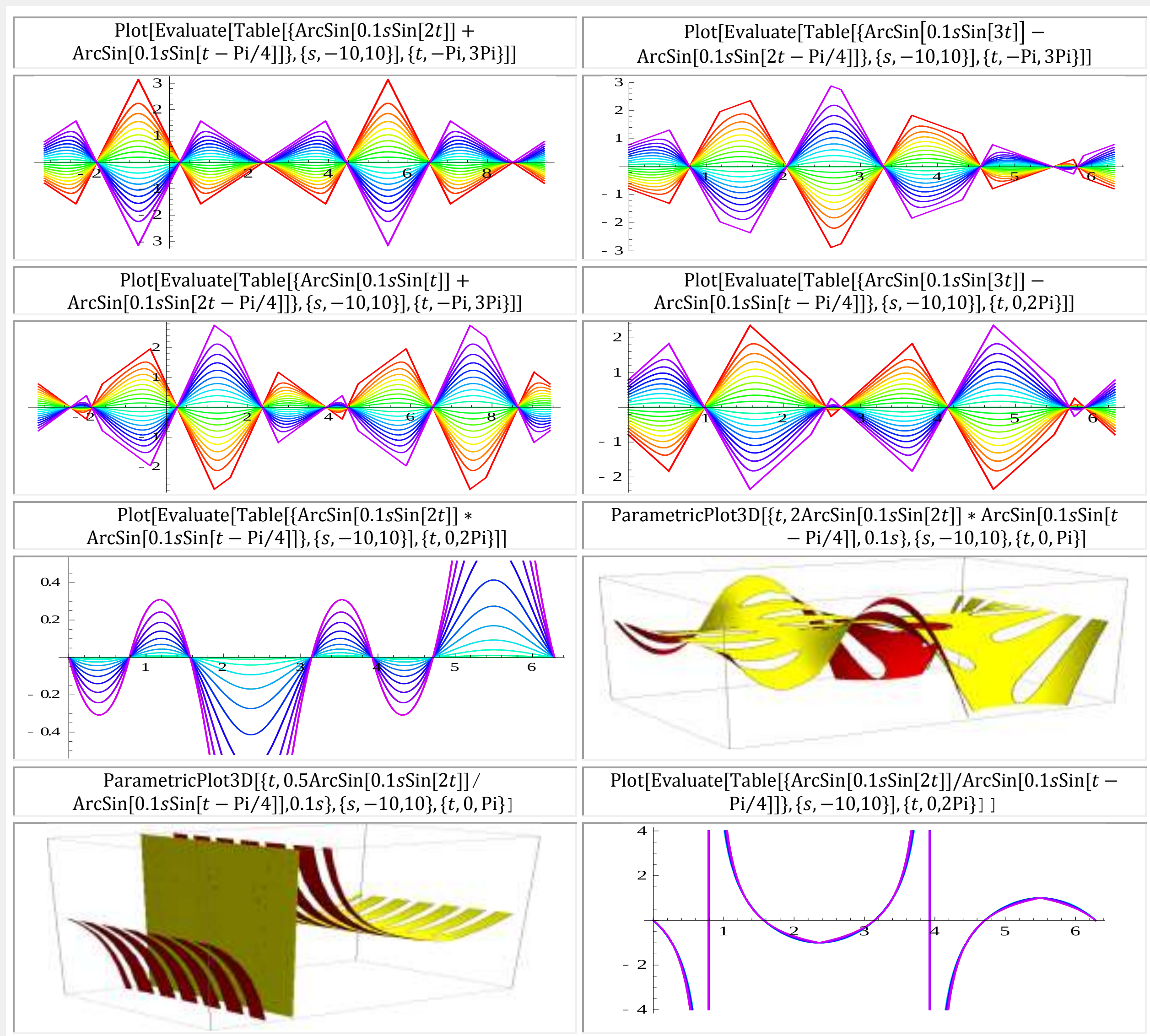
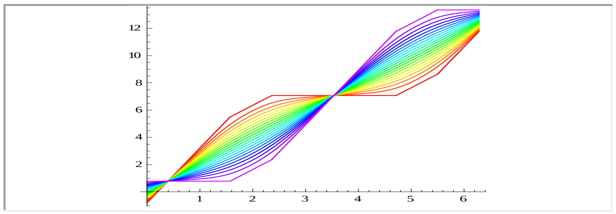


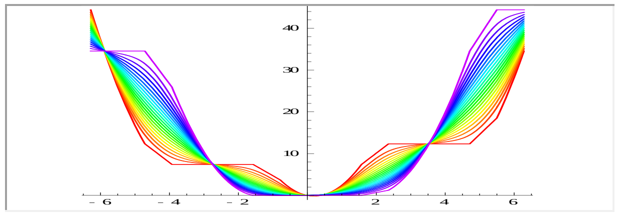
Fig. 2 Graficele **FSM** beta **CE +, - ,*, /** cu beta **CEL** sau de **ε = 0** şi, respectiv, ε = π/4 şi de aceeaşi excentricitate liniară numerică **s** ∈ [**-1, +1**]

Pentru început au fost alese funcţiile beta excentrice de variabilă excentrică **β(θ)** = **bexθ** de excentru **S**(**s**, **ε = 0**) şi, respectiv, de excentru **S'**(**s' = s**, **ε' = $\frac{\pi}{4}$**) → (**Fig. 1** şi **Fig. 2**) deoarece, pentru **<u>acelaşi excentru</u>**, funcţiile **beta excentrice** sunt identice cu cele **beta elevate**: **β(θ)** ≡ **β_{el}(θ)**. Aceeaşi situaţie este şi în cazul funcţiilor **amplitudine excentrică aexθ** şi amplitudine elevată aelθ (**Fig. 3**), derivată excentrică **dexθ** şi derivată elevată **delθ** (**Fig. 4**), precum şi pentru **FSM**—**CE** radial excentrice **radθ** şi **FSM**—**CEL** radial elevate **relθ** (**Fig. 5**).

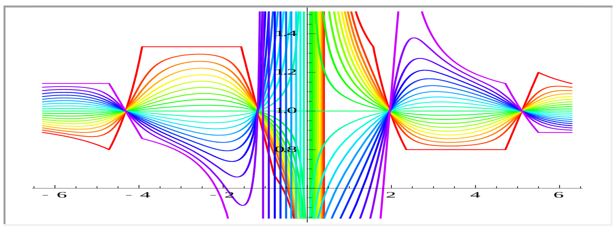
Plot[Evaluate[Table[{2t − ArcSin[0.1sSin[t]] − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]



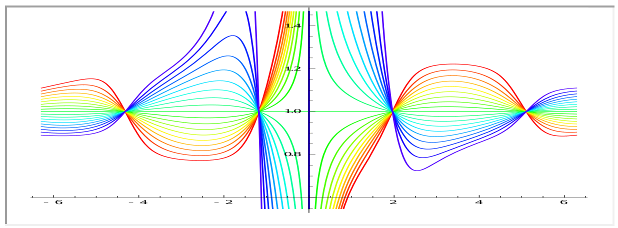
Plot[Evaluate[Table[{(t − ArcSin[0.1sSin[t]]) * (t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]])}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]



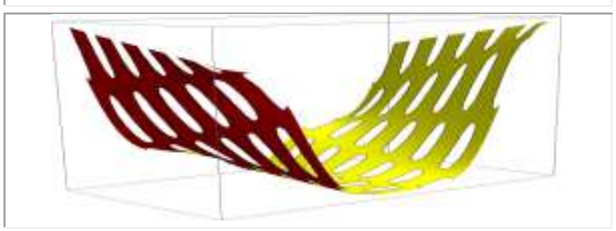
Plot[Evaluate[Table[{(t − ArcSin[0.1sSin[t]])/(t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]])}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{$\frac{t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t - \text{Pi}/4]]}{t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]}$}, {s, −9, +9}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{t, (t − ArcSin[0.1sSin[t]]) * (t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]), 0.4s}, {s, −9, +9}, {t, −2Pi, 2Pi}]



ParametricPlot3D[{t, $\frac{(t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t - \text{Pi}/4]])}{t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]}$, 0.3s}, {s, −9,9}, {t, −Pi, Pi}]

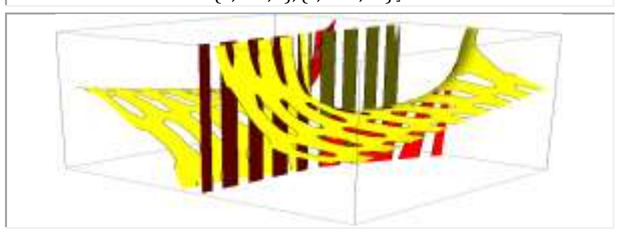
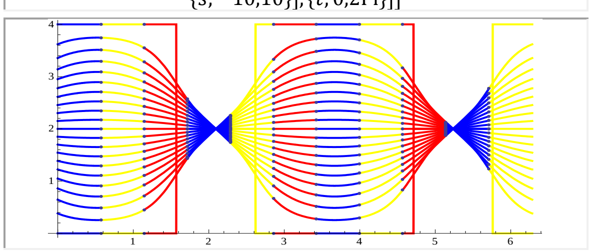
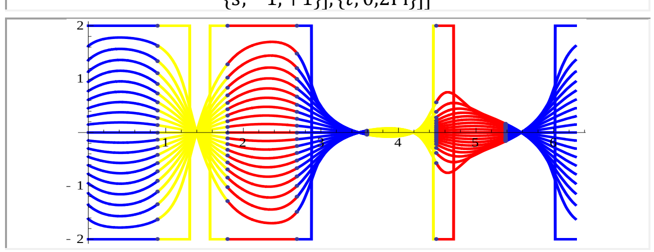


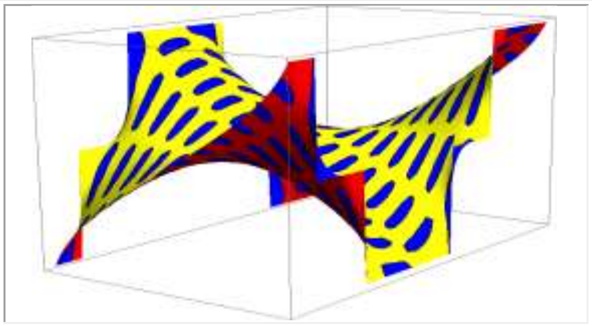
Fig. 3 Graficele **FSM**—**CE** amplitudine excentrică **aexθ +, - ,*, /** cu **FSM**— **CEL** amplitudine elevată ael**θ** sau **aexθ** de **ε = 0** şi, respectiv, ε = π/4 şi de aceeaşi excentricitate liniară numerică **s** ∈ [**-1, +1**]

Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] + 1 − 0.1s Cos[t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t − Pi/3])^2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

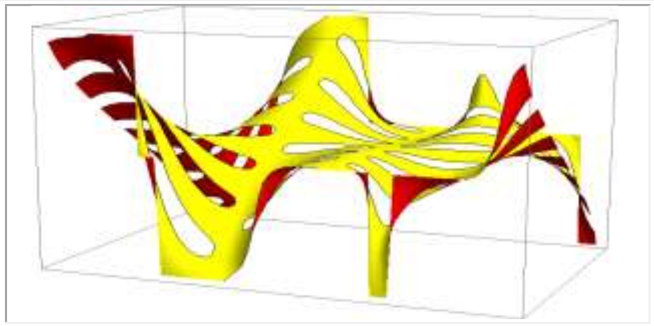


Plot[Evaluate[Table[{s Cos[t]/Sqrt[1 − (sSin[t])^2] + s Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (sSin[2t − Pi/3])^2]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

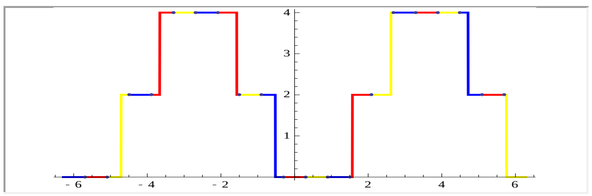




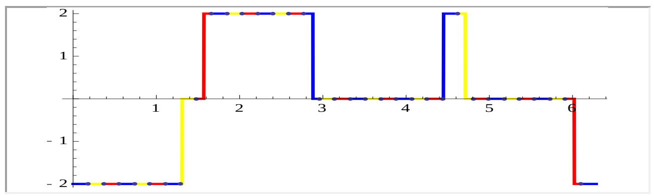
Plot[{1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] + 1 − Cos[t − Pi/3]/Sqrt[1 − (Sin[t − Pi/3])²]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



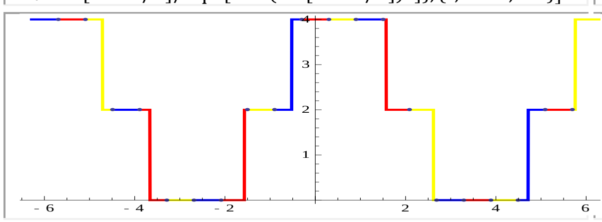
Plot[{−Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])²] − Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (Sin[2t − Pi/3])²]}, {t, 0,2Pi}]



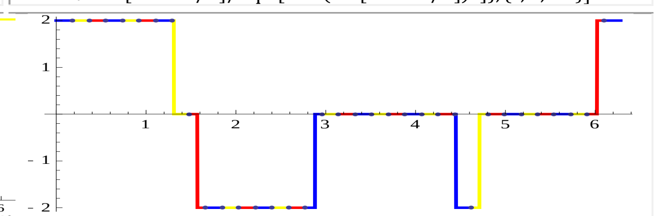
Plot[{1 + Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])²] + 1 + Cos[t − Pi/3]/Sqrt[1 − (Sin[t − Pi/3])²]}, {t, −2Pi, 2Pi}]



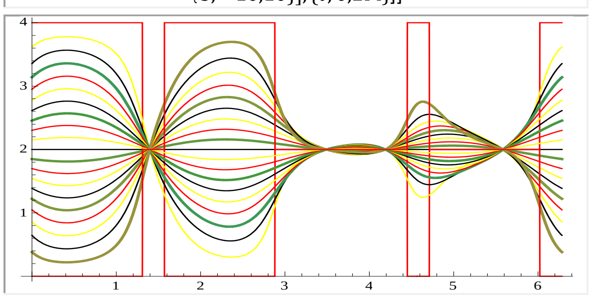
Plot[{Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])²] + Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (Sin[2t − Pi/3])²]}, {t, 0,2Pi}]



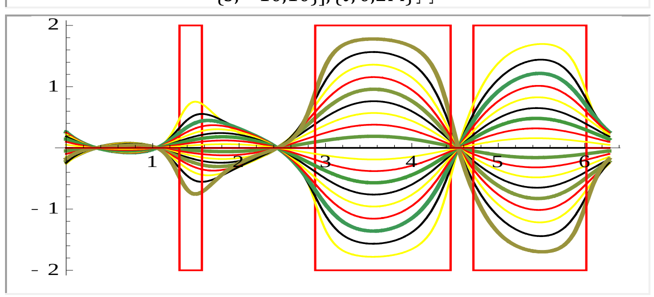
Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²] + 1 − 0.1s Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t − Pi/3])²]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



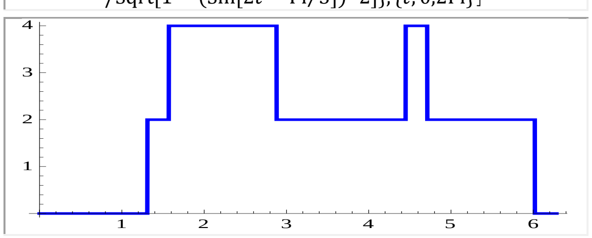
Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²] − 1 + 0.1s Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t − Pi/3])²]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



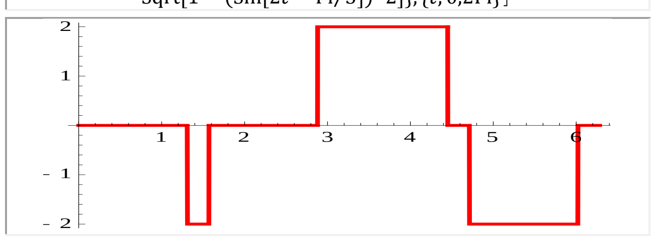
Plot[{1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] + 1 − Cos[2t − Pi/3] /Sqrt[1 − (Sin[2t − Pi/3])^2]}, {t, 0,2Pi}]



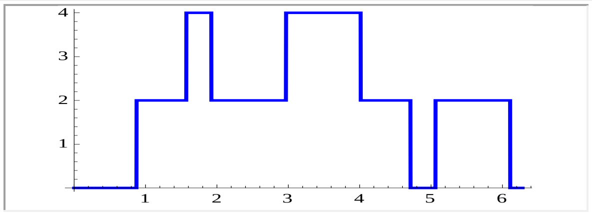
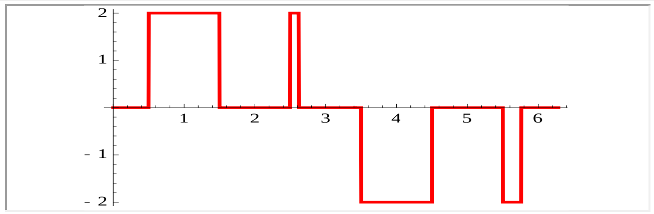
Plot[{1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] − 1 + Cos[2t − Pi/3]/ Sqrt[1 − (Sin[2t − Pi/3])^2]}, {t, 0,2Pi}]



Plot[{1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] + 1 − Cos[3t − Pi/3]/Sqrt[1 − (Sin[3t − Pi/3])^2]}, {t, 0,2Pi}]

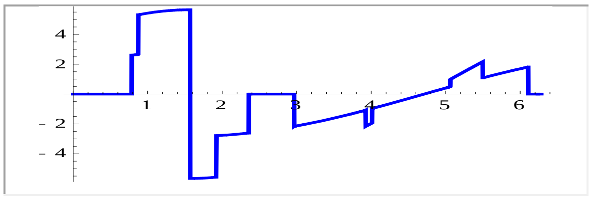
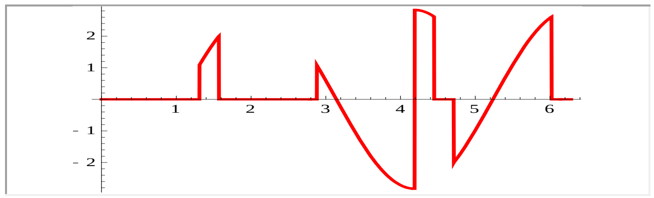


Plot[{1 − Cos[Pit]/Sqrt[1 − (Sin[Pit])²] − 1 + Cos[t − Pi/3] /Sqrt[1 − (Sin[t − Pi/3])^2]}, {t, 0,2Pi}]

Plot[{Cos[t](1 − Cos[2t]/Sqrt[1 − (Sin[2t])^2] + 1 − Cos[3t − Pi/3] + 1 /Sqrt[1 − (Sin[3t − Pi/3])^2])/Sqrt[1 − Sin[t]]}, {t, 0,2Pi}

Plot[{Sin[3t](1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] − 1 + Cos[2t − Pi/3] /Sqrt[1 − (Sin[2t − Pi/3])^2])/Sqrt[1 − Cos[3t]]}, {t, 0,2Pi}]

Plot[{Cos[2t](1 − Cos[2t]/Sqrt[1 − (Sin[2t])^2] + 1 − Cos[3t − Pi/3] /Sqrt[1 − (Sin[3t − Pi/3])^2])/Sqrt[1 − Sin[2t]]}, {t, 0,2]

Plot[{(1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] − 1 + Cos[3t − Pi/3] /Sqrt[1 − (Sin[3t − Pi/3])^2])/Sqrt[1 − Cos[4t]]}, {t, 0,2Pi}]

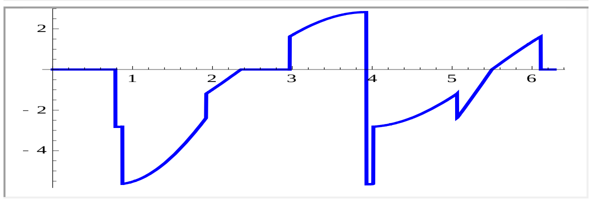
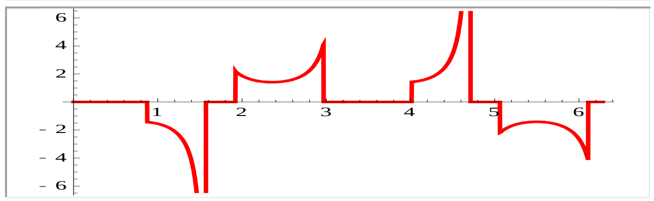
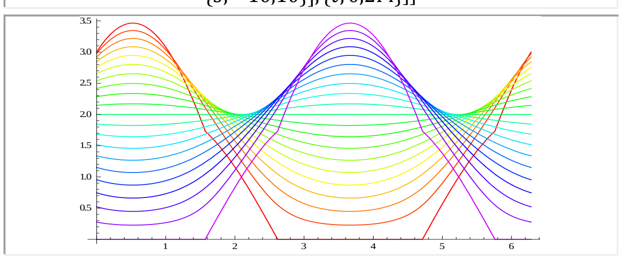
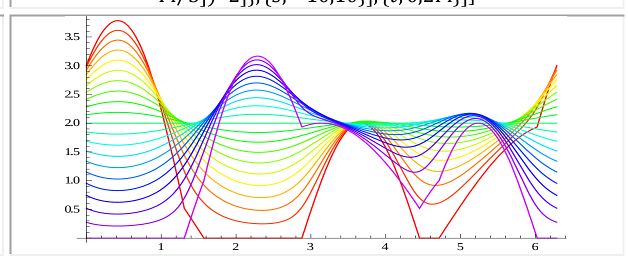
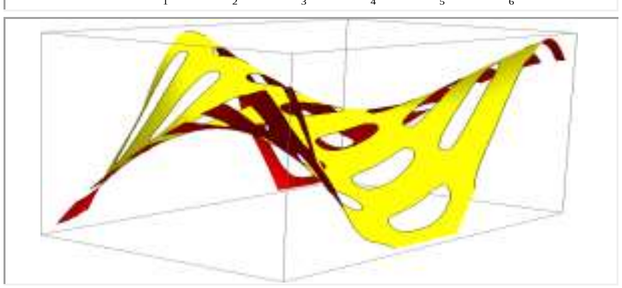
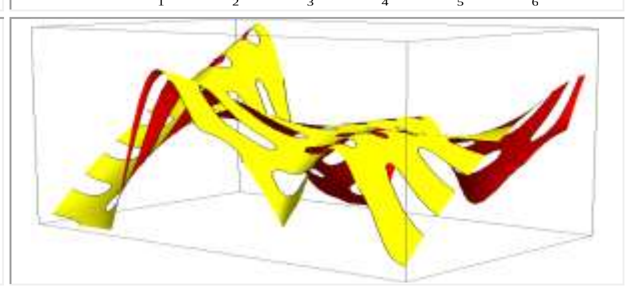



Fig. 4 Graficele **FSM-CE** derivată excentrică **dexθ +, - ,*, /** cu **FSM- CEL** derivată elevată **delθ** sau **dexθ** de **ε = 0** şi, respectiv, ε = π/4 şi de aceeaşi excentricitate liniară numerică **s** ∈ [**-1, +1**]

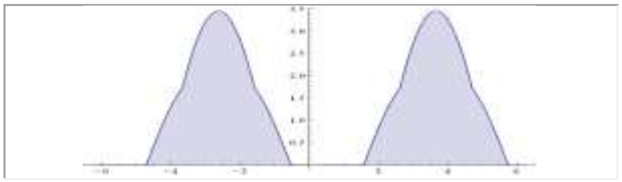
lot[Evaluate[Table[{−0.1sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] −0.1sCos[t − Pi/3] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t − Pi/3])^2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

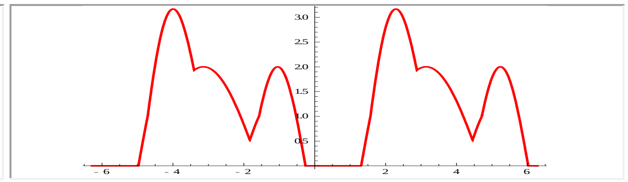
Plot[Evaluate[Table[{−0.1sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − 0.1sCos[2t − Pi/3] + Sqrt[1 − (0.1sSin[2t − Pi/3])^2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

Plot[{−Cos[t] + Sqrt[1 − (Sin[t])²] − Cos[t − Pi/3] + Sqrt[1 − (Sin[t − Pi/3])²]}, {t, −2Pi, 2Pi}]

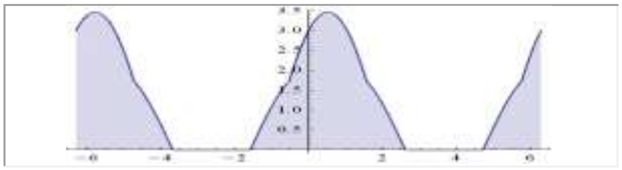
Plot[{−Cos[t] + Sqrt[1 − Sin[t]²] − Cos[2t − Pi/3] + Sqrt[1 − Sin[2t − Pi/3]²]}, {t, −2Pi, 2Pi}]





Plot[{Cos[t] + Sqrt[1 − (Sin[t])²] + Cos[t − Pi/3] + Sqrt[1 − (Sin[t − Pi/3])²]}, {t, −2Pi, 2Pi}]

Plot[{Cos[t] + Sqrt[1 − Sin[t]²]Cos[2t − Pi/3] + Sqrt[1 − Sin[2t − Pi/3]²]}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



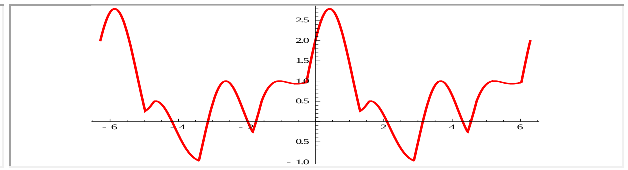
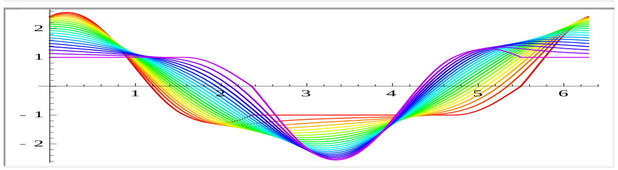
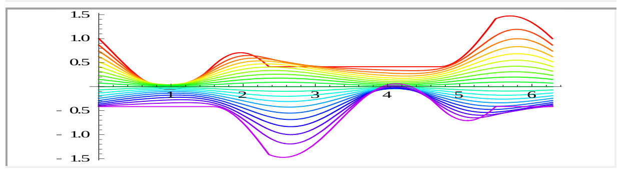


Fig. 5 Graficele **FSM-CE** radială excentrică **rexθ +, - ,*, /** cu **FSM- CEL** radială elevată **relθ** sau **rexθ** de **ε = 0** şi, respectiv, ε = π/4 şi de aceeaşi excentricitate liniară numerică **s** ∈ [**-1, +1**]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sCos[Pi/4]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

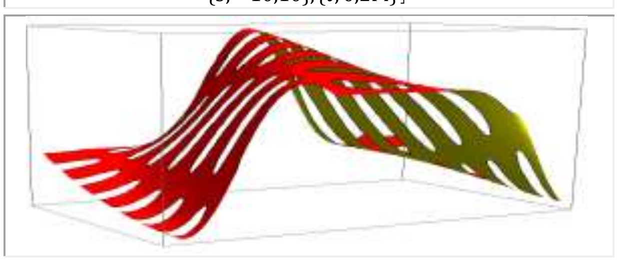
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sCos[Pi/4]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

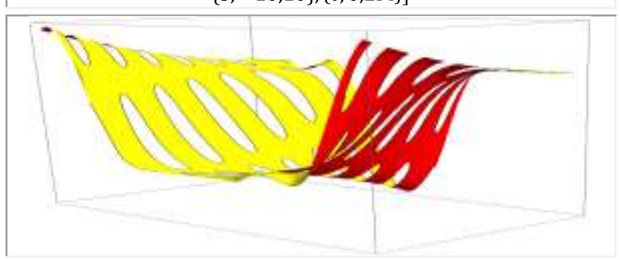




ParametricPlot3D[{t, Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]] − 0.1sCos[Pi/4],0.2s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

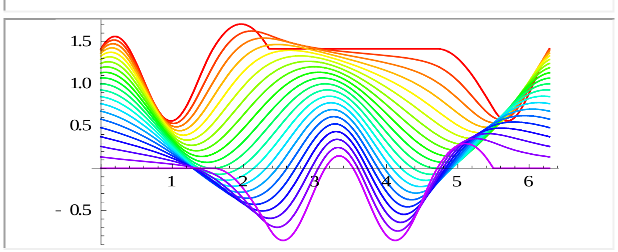
ParametricPlot3D[{t, 3Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sCos[Pi/4],0.2s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

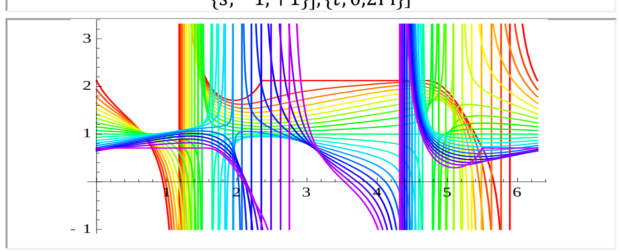




Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] * Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sCos[Pi/4]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

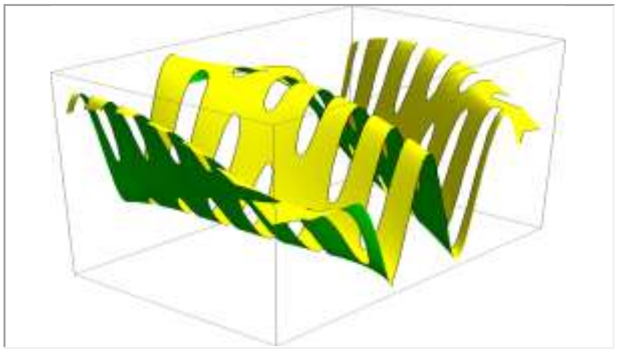
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[sSin[t]]] / (Cos[t − ArcSin[sSin[t − Pi/4]]] − sCos[Pi/4 {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]





ParametricPlot3D[{t, 3Cos[t − ArcSin[sSin[t]]] ∗ Cos[t − ArcSin[sSin[t − Pi/4]]] − sCos[Pi/4], s}, {s, −1,1}, {t, 0,2Pi}]]

ParametricPlot3D[{t, $\dfrac{\mathrm{Cos}\left[t - \mathrm{ArcSin}[s\mathrm{Sin}[t]]\right]}{\mathrm{Cos}[t - \mathrm{ArcSin}[s\mathrm{Sin}[t - \mathrm{Pi}/4]]] - s\mathrm{Cos}[\mathrm{Pi}/4}$
{s, −1, +1}, {t, 0,2Pi}]]



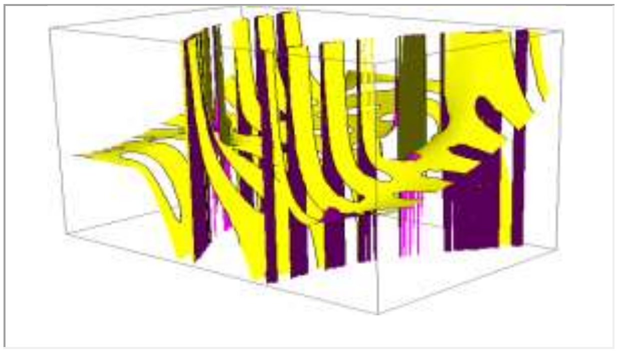
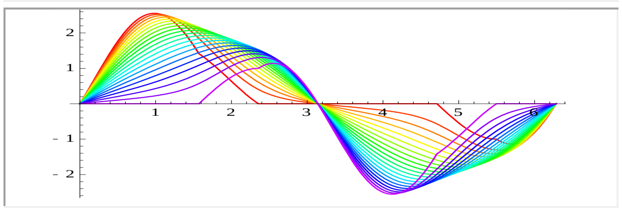
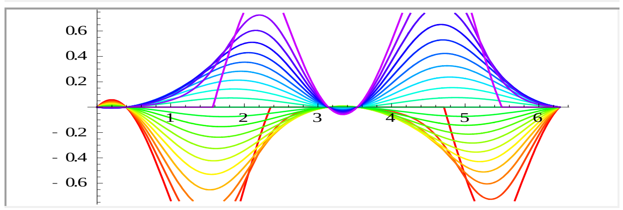


Fig. 6 Graficele **FSM– CE** cosinus excentrică **cexθ +, - ,*, /** cu **FSM– CEL** cosinus elevat celθ sau de $\varepsilon = 0$ şi, respectiv, $\varepsilon = \pi/4$ şi de aceeaşi excentricitate liniară numerică $s \in [-1, +1]$

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sSin[Pi/4]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

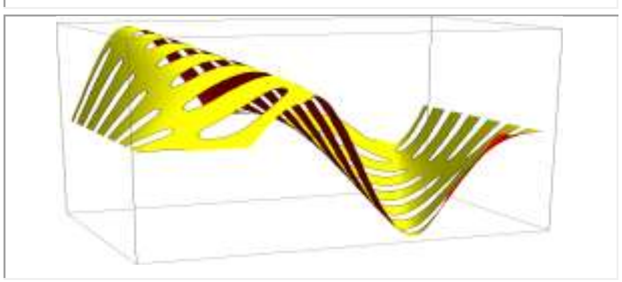
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sSin[Pi/4])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

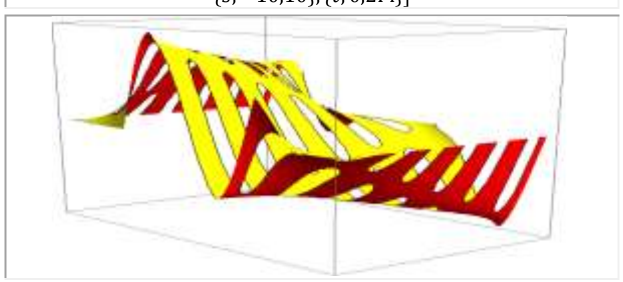




ParametricPlot3D[{t, Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sSin[Pi/4],0.2s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

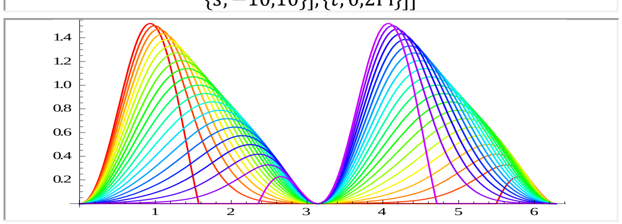
ParametricPlot3D[{t, 3Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sSin[Pi/4]),0.2s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

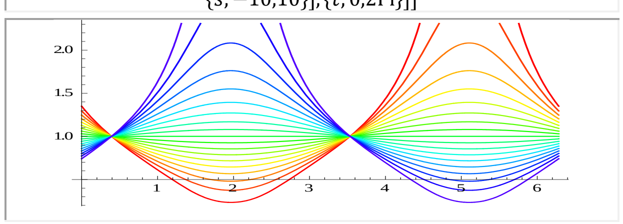




Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] ∗ (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sSin[Pi/4])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/ (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sSin[Pi/4])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]





ParametricPlot3D[{t, 3Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] ∗ (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sSin[Pi/4]),0.2s},

ParametricPlot3D[{t, 3Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/

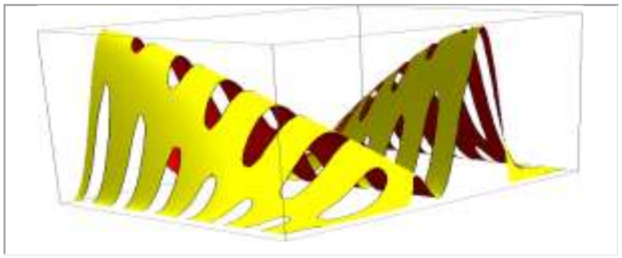
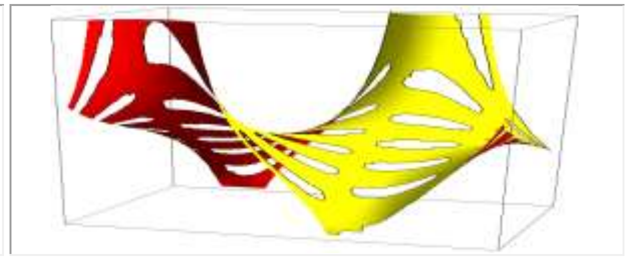
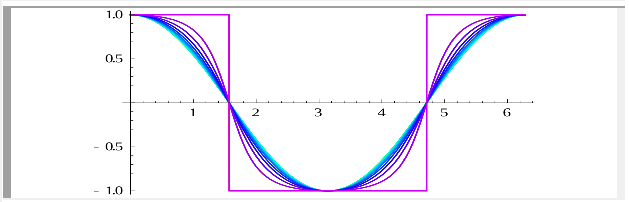
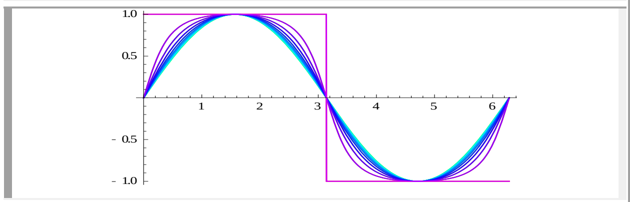
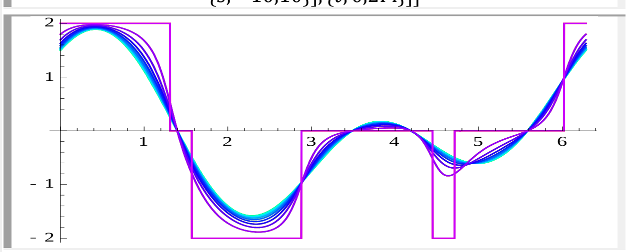
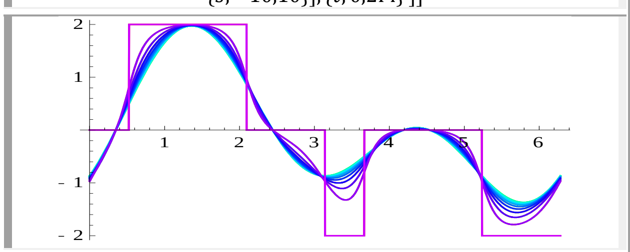
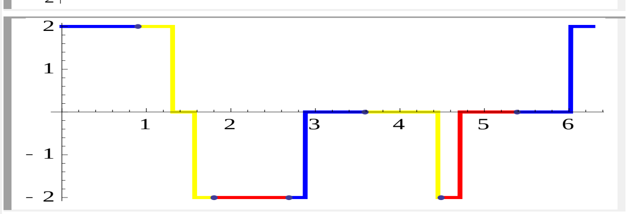
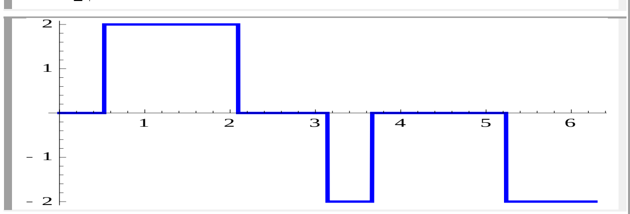
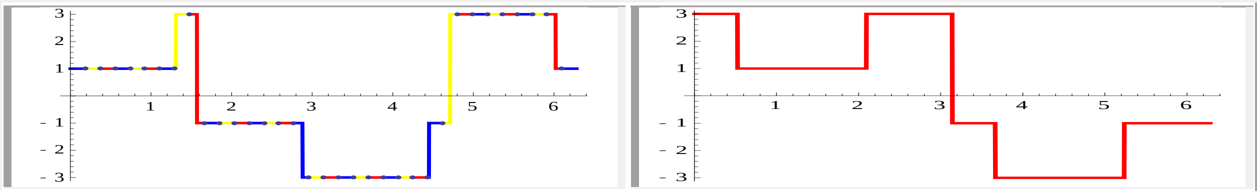
{s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]	(Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t − Pi/4]]] − 0.1sSin[Pi/4]),0.2s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]
	

Fig. 7 Graficele **FSM— CE** sinus excentric **sexθ +, - ,*, /** cu **FSM— CEL** sinus elevat selθ sau de **ε = 0** şi, respectiv, ε = π/4 şi de aceeaşi excentricitate liniară numerică **s** ∈ [**-1, +1**]

Situaţia este net diferită în cazul **FSM-CE** cosinus excentrice **cexθ** cu **FSM- CEL** cosinus elevate **celθ** (**Fig. 6**), sinus excentrice **sexθ** cu sinus elevate **selθ** **(Fig. 7)**, ca şi pentru tangente şi cotangente.

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] → **coqθ**	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])²]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] → **siqθ**
	

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²] + Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t − Pi/3])²]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2] +Sin[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sCos[2t − Pi/3])^2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]
	
	
Plot[{2 Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] − Cos[2t − Pi/3] /Sqrt[1 − (Sin[2t − Pi/3])^2]}, {t, 0,2Pi}]	Plot[{2 Sin[t]/Sqrt[1 − (Cos[t])^2] − Sin[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (Cos[2t − Pi/3])^2]}, {t, 0,2Pi}]



Plot[{2 Cos[0.5t]/Sqrt[1 − (Sin[0.5t])^2] − Cos[2Pit − Pi/3] /Sqrt[1 − (Sin[2Pit − Pi/3])^2]}, {t, 0,2Pi}]

Plot[{−2 Sin[t]/Sqrt[1 − (Cos[t])^2] Sin[2Pit − Pi/3] − /Sqrt[1 − (Cos[2Pit − Pi/3])^2]}, {t, 0,2Pi}]

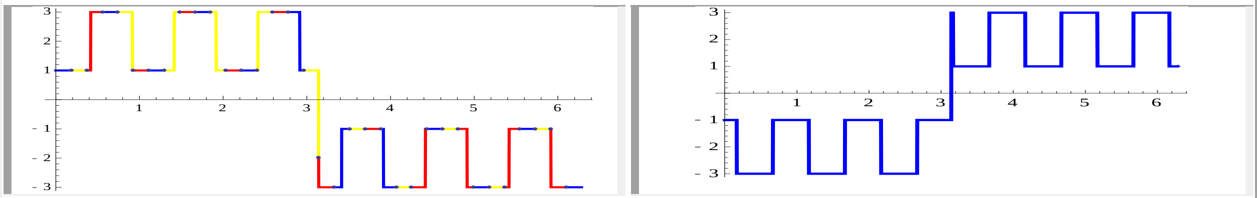
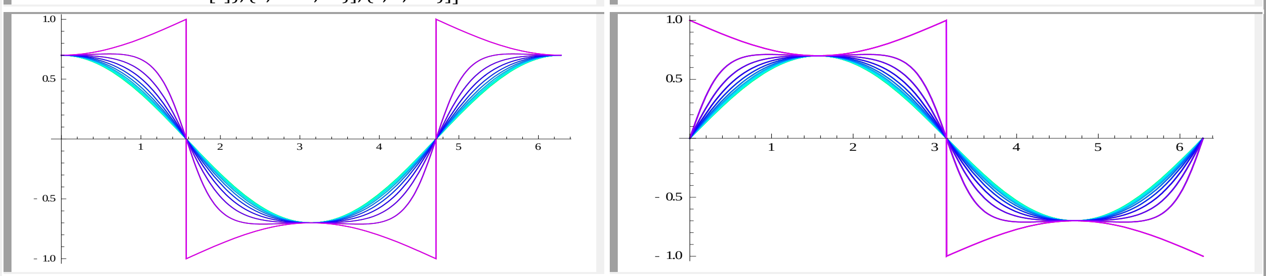


Fig. 8 Graficele **FSM— CE** sinus quadrilobic excentric **seqθ +, - ,*, /**
cu **FSM— CE** cosinus quadrilobic excentric **ceqθ**
sau de **ε = 0** şi, respectiv, ε = π/3 şi de aceeaşi excentricitate liniară numerică **s** ∈ [**-1, +1**]

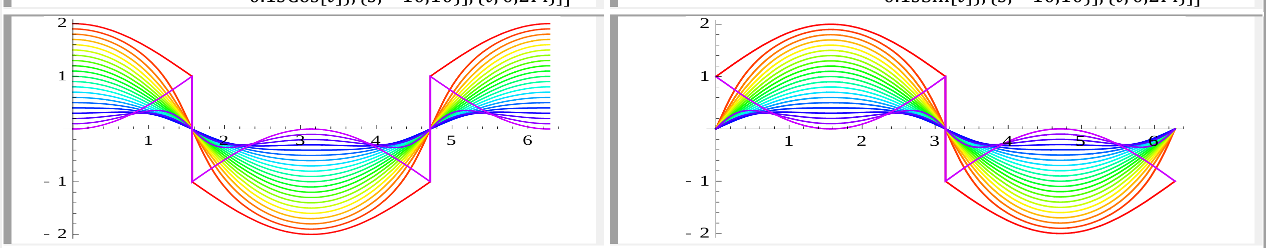
cqelθ
→ Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − 0.3Cos[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

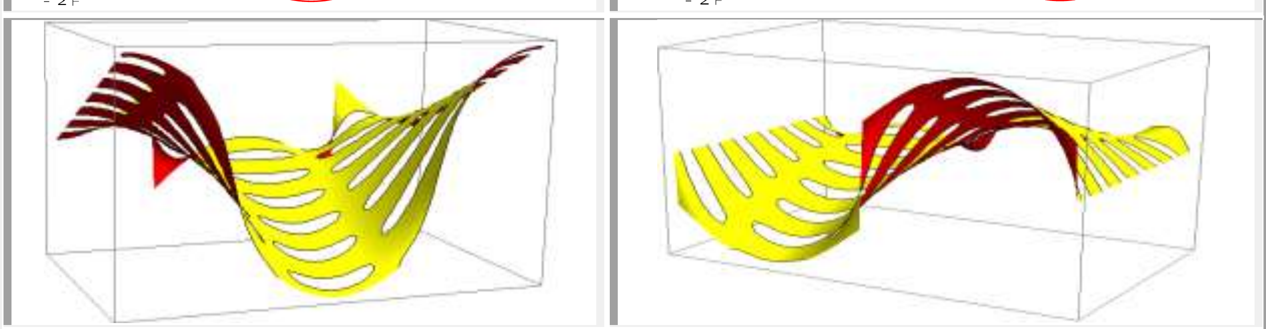
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2] − 0.3Sin[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] →**sqelθ**



Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − 0.1sCos[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2] − 0.1sSin[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

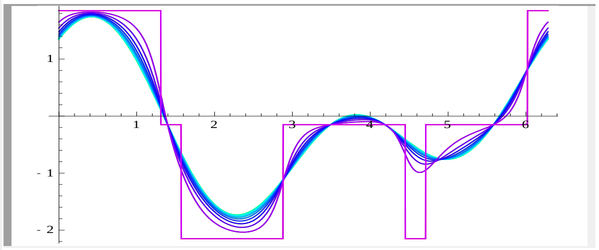


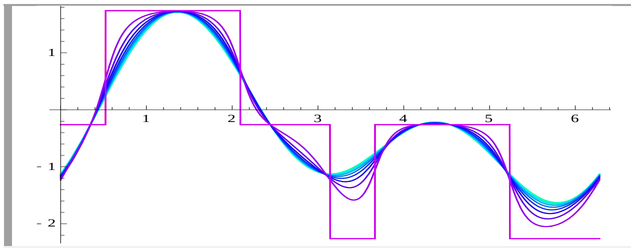


BUPT

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]
+ Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t − Pi/3])^2]
− 0.3Cos[Pi/3]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

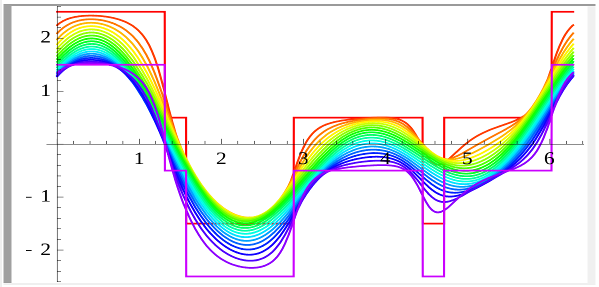
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]
+ Sin[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sCos[2t − Pi/3])^2]
− 0.3Sin[Pi/3]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

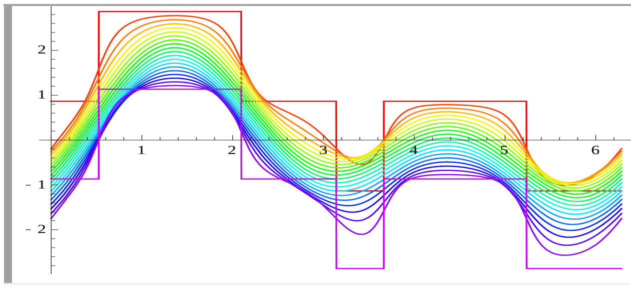


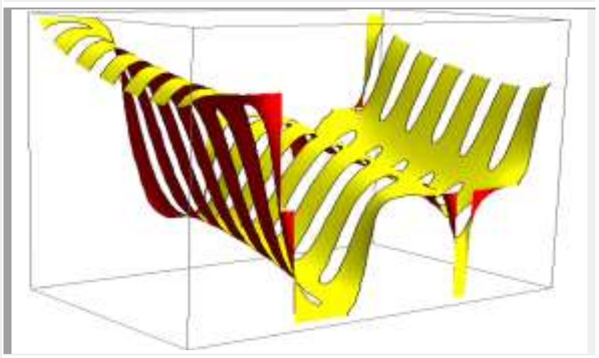


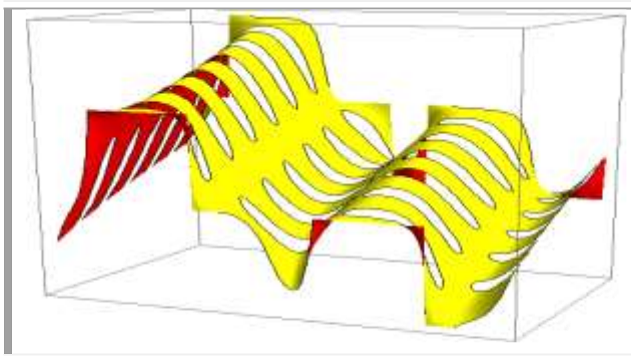
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]
+ Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t − Pi/3])^2]
− 0.1sCos[Pi/3]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

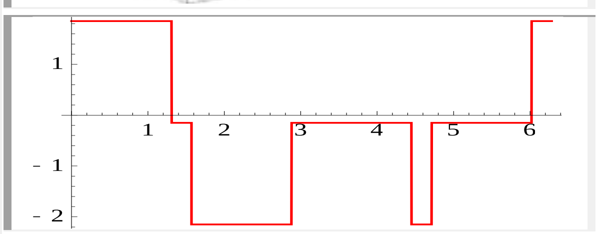
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]
+ Sin[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sCos[2t − Pi/3])^2]
− 0.1sSin[Pi/3]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

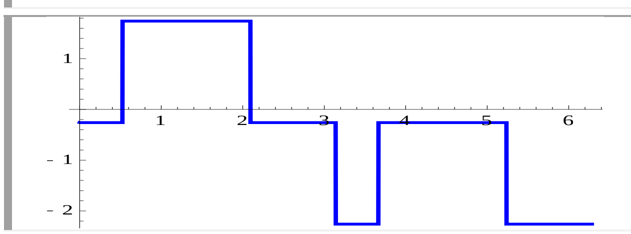






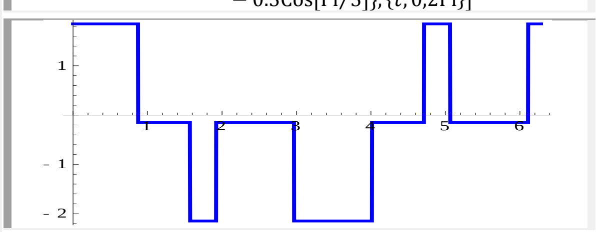


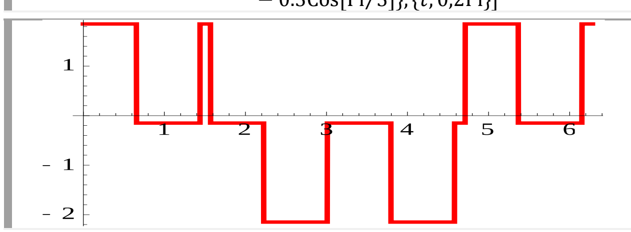




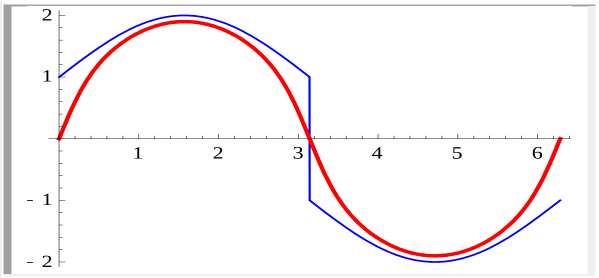
Plot[{Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] + Cos[3t − Pi/3]/Sqrt[1
− Sin[3t − Pi/3]^2]
− 0.3Cos[Pi/3]}, {t, 0,2Pi}]

Plot[{Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2] + Cos[4t − Pi/3]/Sqrt[1
− (Sin[4t − Pi/3])^2]
− 0.3Cos[Pi/3]}, {t, 0,2Pi}]

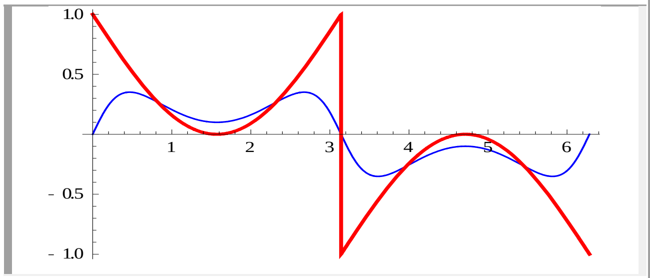




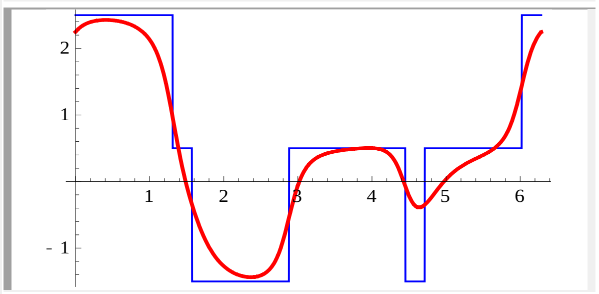
```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])²]
        − 0.1sSin[t]}, {s, −10, −9}], {t, 0,2Pi}]
```



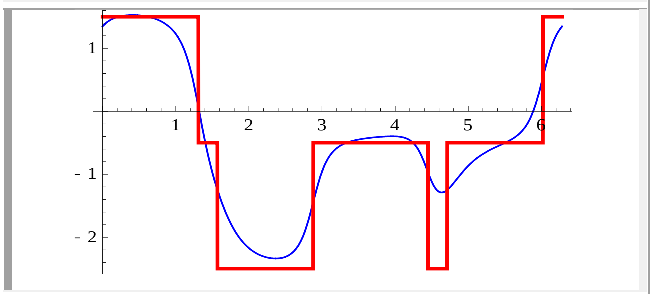

```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])²]
        − 0.1sSin[t]}, {s, 9,10}], {t, 0,2Pi}]
```



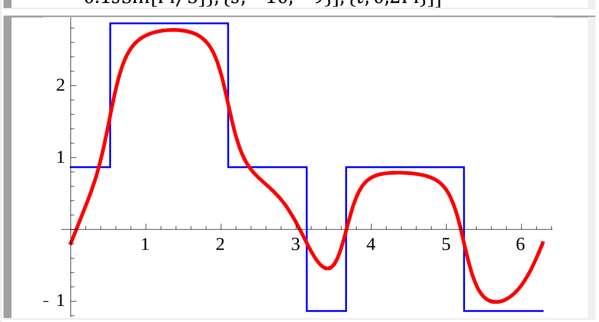

```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²]
+ Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t − Pi/3])²]
− 0.1sCos[Pi/3]}, {s, −10, −9}], {t, 0,2Pi}]]
```



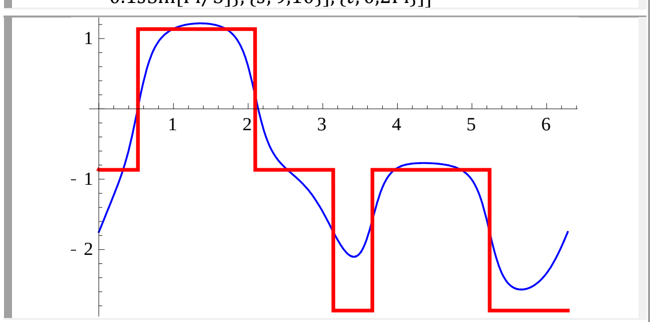

```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]
+ Cos[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t − Pi/3])^2]
− 0.1sCos[Pi/3]}, {s, 9,10}], {t, 0,2Pi}
```



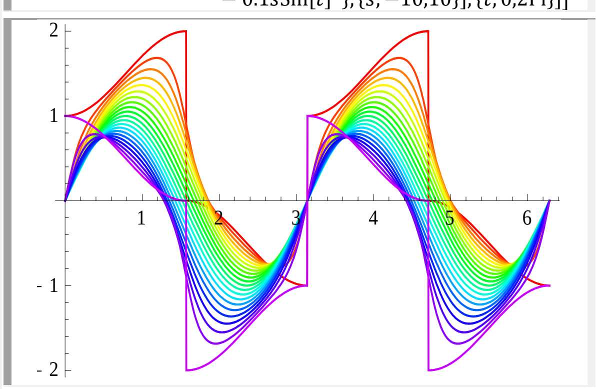

```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])²]
+ Sin[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sCos[2t − Pi/3])²]
− 0.1sSin[Pi/3]}, {s, −10, −9}], {t, 0,2Pi}]]
```



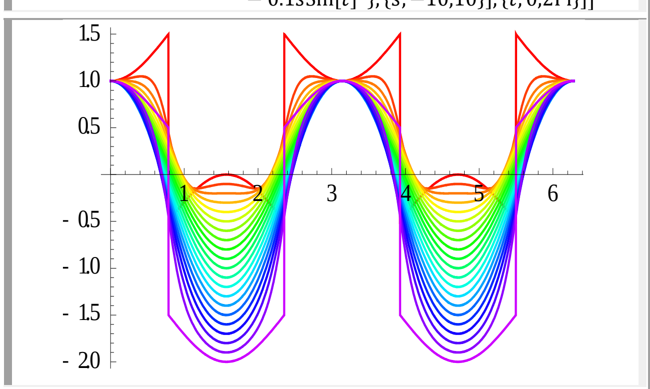

```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])²]
+ Sin[2t − Pi/3]/Sqrt[1 − (0.1sCos[2t − Pi/3])²]
− 0.1sSin[Pi/3]}, {s, 9,10}], {t, 0,2Pi}]]
```

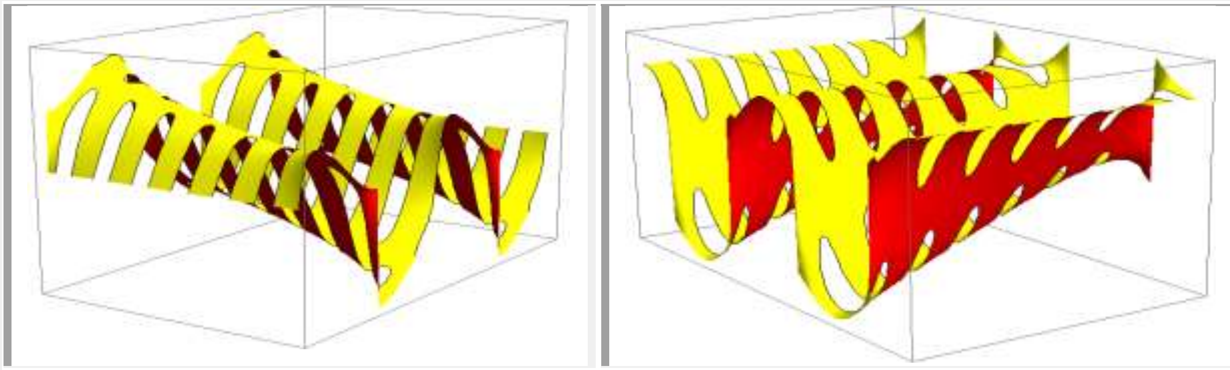



```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[2t])²]
        − 0.1sSin[t]²}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]
```



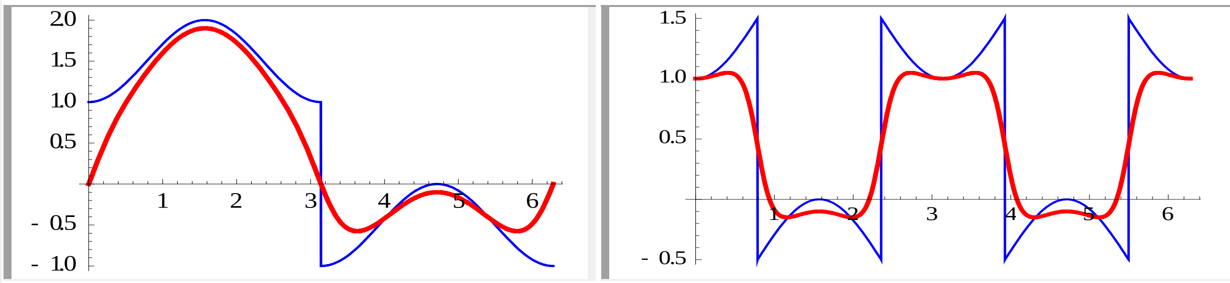

```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])²]
        − 0.1sSin[t]²}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]
```





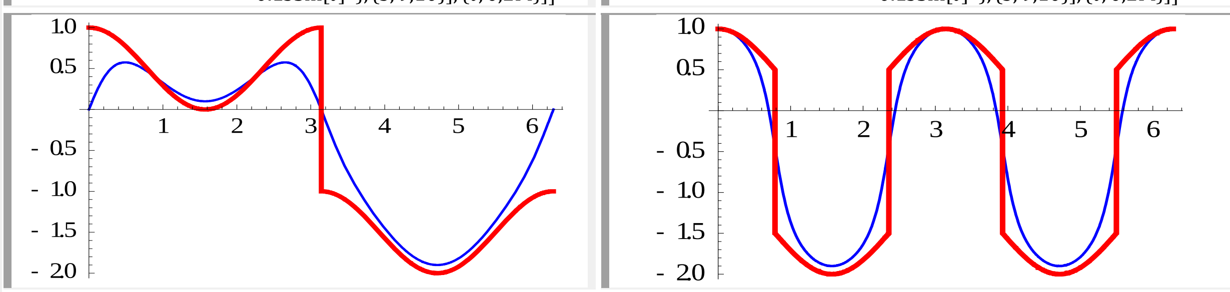
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])²] − 0.1sSin[t]²},{s,−10,−9}],{t,0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])²] − 0.1sSin[t]²},{s,−10,−9}],{t,0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])²] − 0.1sSin[t]²},{s,9,10}],{t,0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])²] − 0.1sSin[t]²},{s,9,10}],{t,0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t]/Sqrt[1 − (0.2sCos[3t])^2] − 0.2sCos[3t]^2},{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.2sSin[3t])^2] − 0.2sSin[3t]^2},{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]

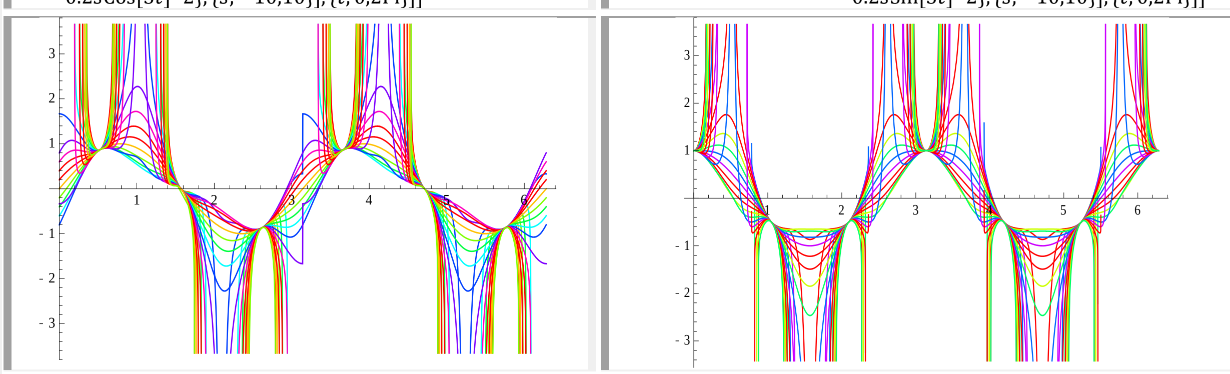


Fig. 9 Graficele **FSM— QE** cosinus şi sinus quadrilobice excentrice **coqθ** şi **seqθ +, - ,*, /** cu **FSM— QEL** cosinus şi sinus quadrilobice **excentrice elevate sqelθ** şi **cqelθ** de **ε = 0** şi **s** ∈ [**-1, +1**], respectiv, de **s' = 0.3** şi **ε = π/3**

Motto:” *Matematica este ceea ce începe, ca şi Nilul, în modestie şi se termină în magnific* **”** definiţie de **Calvin Colton**
“**SUPERMATEMATICA** este **ŞI MAI ŞI: 40 de ani necunoscută, apoi ignorată**” **Autorul**

CAPITOLUl VI :

FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE EXCENTRICE DE VARIABILE EXCENTRICOCENTRICE

1. INTRODUCERE

Funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM — CE**) au apărut în momentul în care polul **P(0,0)**, al unei semidrepte centrice **D**$^+$, a fost **expulzat**, din centrul **C(0,0)** al cercului trigonometric / unitate şi originea **O(0,0),** al unui reper, unde le-a plasat / suprapus, neinspirat, **Euler,** într-un punct oarecare din planul cercului unitate şi a fost denumit, din această cauză, **excentru.** De coordonate polare **E(e,ε)**, într-un cerc oarecare şi **S(s,ε)**, în cercul unitate **CU(O,1)**; **excentrul** este totodată şi originea unei drepte excentrice **d** = **d**$^+$ ∪ **d**$^-$, turnante în jurul excentrului S.

În funcţie de situaţia relativă a celor 3 puncte se disting următoarele matematici şi funcţii **FSM** :

Matematica centrică (MC) cu **FSM**
1) **Centrice**, dacă **O** ≡ **C** ≡ **P** ;
Matematica excentrică (ME) cu **FSM**
2) **Excentrice**, dacă **O** ≡ **C** ≠ **S** ≡ **P**;
3) **Elevate**, dacă **C** ≠ **O** ≡ **S** ≡ **P**;
4) **Exotice**, dacă **C** ≠ **O** ≠ **S** ≡ **P**;

Rezultă că **matematica ordinară,** denumită acum şi **centrică** (**MC- 1**), este un caz particular al **matematicilor excentrice** (**ME** -2, 3, 4)) şi anume, pentru cazul excentricităţilor nule: e = **s** = 0.

Ca urmare, **FSM — CE** pot fi de variabilă **excentrică θ**, pentru rotaţia lui **d** în jurul jurul lui **E** sau **S(s, ε)**, sau de variabilă **centrică α**, pentru rotaţia lui **D** în jurul lui **O(0,0)**, pentru fiecare semidreaptă în parte rezultând la intersecţia cu **CU** câte un punct ($W_{1,2}$ pentru $s^2 < 1$ şi $W_{1,2,3,4}$ pentru $s^2 > 1$) pe cercul unitate şi respectiv două determinări ale **FSM — CE : principală**, fără indice sau de indice **1**, şi **secundară**, de indice **2**, dacă **E** şi **S** sunt în interiorul discului circular şi **patru** determinări două câte două situate pe câte o semidreaptă, dacă excentrele sunt în exteriorul discului circular, discuri de rază R pentru **E** sau de rază R = 1, pentru **S**.

Noile coordonate **e** şi **ε**, dacă sunt constante, pentru un **E** sau **S** puncte fixe în plan, devin, pe lângă cele două coordonate ordinare din plan, **x** şi **y**, coordonatele ascunse ale acestuia, cele de **formare şi de deformare** ale entităţilor geometrice din plan, cu ajutorul cărora cercul şi elipsa (**e = s = 0**) se pot transforma continuu în pătrat perfect, respectiv în dreptunghi perfect (**e = ± R, s = ± 1**), în triunghi sau oricare polinom regulat sau neregulat.

Noile entităţi geometrice plane, curbe închise, rezultate pentru valorile intermediare **e** ∈ (-R, + R)\0, respectiv, **s** ∈ (-1, +1)\0, s = e/R, sunt denumite **bilobe**, **trilobe**, **quadrilobe** / cvadrilobe ş.a.m.d., în funcţie de numărul de lobi ai curbei închise; cercul fiind o “**zero lobă**”, iar pătratele şi dreptunghiurile, cu laturi curbe şi colţuri rotunjite, fiind denumite **quadrilobe**.

Corespondentele în **3D** ale **trilobelor** şi ale **quadrilobelor** sunt denumite (cilindri) **triloboizi** şi, respectiv, **quadriloboizi** (**Fig.1**). Ei au la mijlocul lor un cerc şi la cele două extremităţi două triunghiuri şi, respectiv, două pătrate perfecte, aşa cum se poate deduce facil din figură; ciuruirea fiind necesară pentru substituirea / imitarea transparenţei.

ParametricPlot3D[{Cos[t − ArcSin[sSin[t]]], Sin[t − ArcSin[sCos[t]]], s}, {s, −1, +1}, {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot3D[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2], Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2], 0.1s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

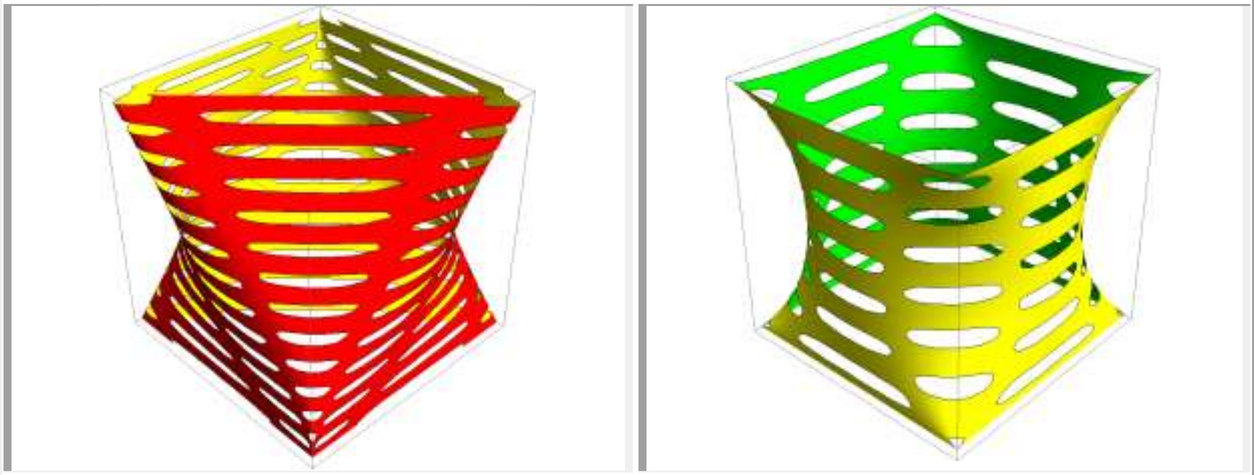


Fig. 1,a Triloboid ◀ şi **quadriloboid** ▶ ciuruiţi

Prin combinarea **FSM—CE** din cele **4 grupe**, anterior amintite, se obţin **FSM evolutive : centrico-excentrice, centricoelevate, centricoexotice, centricoexcentrice, excentricoelevate, excentricoexotice, elevatoexotice** care, la rândul lor, pot fi combinate şi combinaţiile rezultate pot fi, la rândul lor, combinate între ele ş.a.m.d. ceea ce oferă **SM** atributul / calificativul incontestabil de “ **nemarginire** “; cel de “**măreţie**” rămânând la aprecierea cititorilor.

2 FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE EXCENTRICE DE VARIABILE EXCENTRICOCENTRICE CENTRICE α ŞI EXCENTRICE θ ÎN 3D

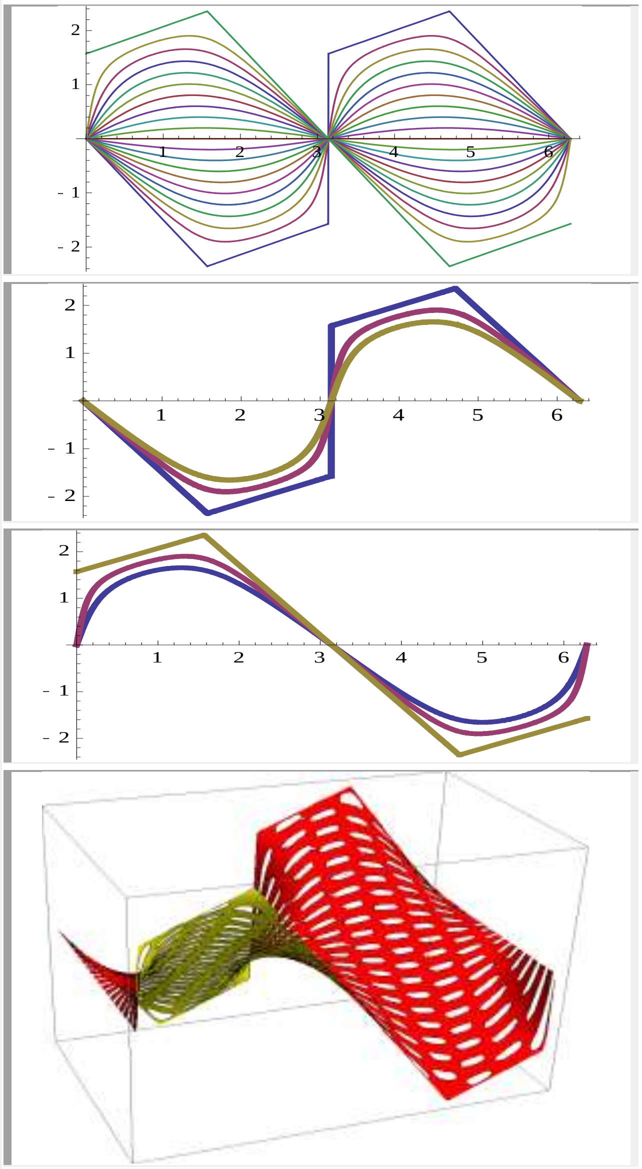
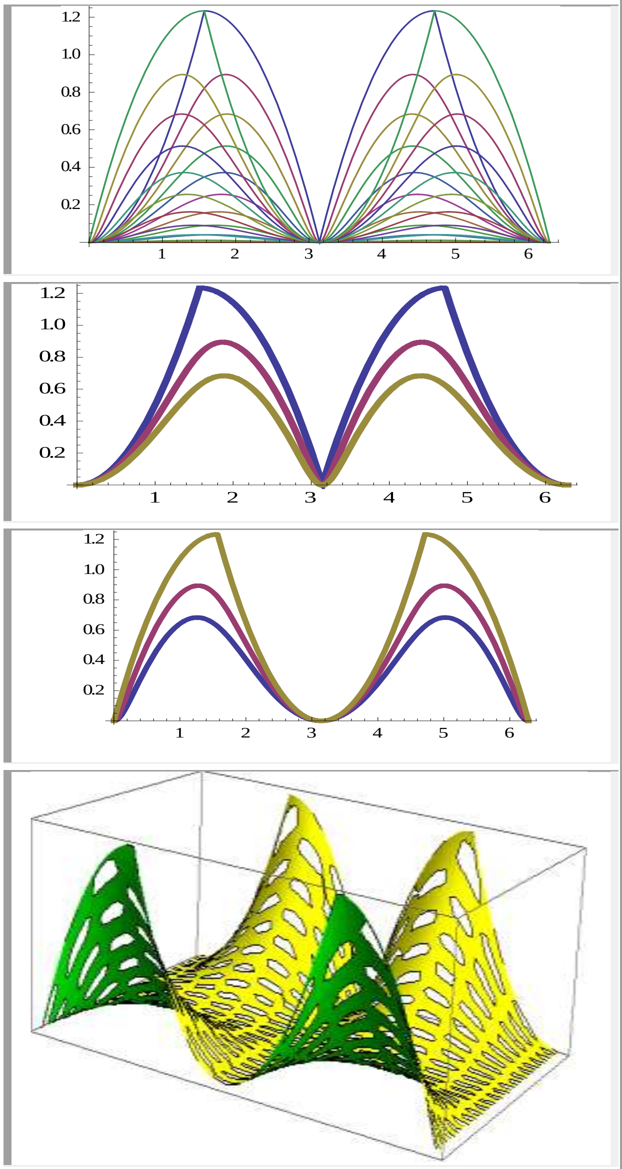
Pentru a nu repeta, în grafice, ecuaţiile **FSM—CE**, ele vor fi prezentate concentrat în **tabelul 1**, scrise cu expresiile cunoscute ale funcţiilor din matematica centrică (**FMC**), ordinară. **FSM—CE** de variabilă **excentrică θ**, sunt prezentate în stânga ◀ şi cele de variabila **centrică α**, scrise cu majusculă, în dreapta ▶ tabelului, numai pentru determinările principale, fără indice. Semnul plus (+) din faţa radicalilor corespunde primei determinări iar semnul minus (–) celei de a doua determinări.

Tabelul 1 Relaţiile de calcul ale **FSM — CE** de variabile **excentrice** ◀ şi **centrice** ▶

bex θ	$\beta(\theta) = \theta - \alpha(\theta) = \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]$	Bexα	$\beta(\alpha) = \begin{cases} \arcsin[s.\sin(\alpha-\varepsilon) \,/\, \sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}] \\ \arctan[s.\sin(\alpha-\varepsilon) \,/\, \{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)\} \end{cases} = \; = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\sin[n(\alpha-\varepsilon)]$
aex θ	$\alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]$	Aexα	$\theta(\alpha) = \theta + \beta(\theta) = \theta + \frac{arcsin[s.sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)]}} =$

			$= \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \sin[n(\alpha - \varepsilon)]$
rex θ	r(θ) = α(θ) /du = $= -s.\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}$	Rexα	$r(\alpha) = \frac{d\theta(\propto)}{du} = \sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha - \varepsilon)}] = \frac{1}{\sum_0^{\infty} P_n(\alpha - \varepsilon) z^n}$
dex θ	$\frac{d[\alpha(\theta)]}{d\theta} = 1 - \frac{s.\cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}}$	Dexα	$\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\mathrm{dex}\,\theta} = \frac{1 - s\cos(\alpha - \varepsilon)}{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha - \varepsilon)} = \sum_0^{\infty} s^n . \cos n(\alpha - \varepsilon)$
cex θ	$x = \cos[\alpha(\theta)] = \cos\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]$ }	Cexα	X = Cexα = cos(Aexα) = $\cos\{[\theta + \frac{\arcsin[s.\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha - \varepsilon)}}]$
sex θ	$y = \sin[\alpha(\theta)] = \sin\{\theta -$ $\arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]\}$	Sexα	Y = Sexα = sin(Aexα) = $\sin\{[\theta + \frac{\arcsin[s.\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha - \varepsilon)}}]$
	$\cos\beta(\theta) = \frac{rex\theta}{dex\theta} = rex\theta . Dex\alpha$		Rexα *Dexα = dn(u, k=s); $\frac{\mathrm{Rex}\alpha}{\mathrm{dex}\theta} = \mathrm{dn}(u, k = s)$

FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE EXCENTRICE
DE VARIABILE CENTRICE α ŞI EXCENTRICE θ ÎN 3D

Bexα + bexθ	**Bexα * bexθ**
	

BUPT

Fig. 1,b Sume ◀ şi produse ▶

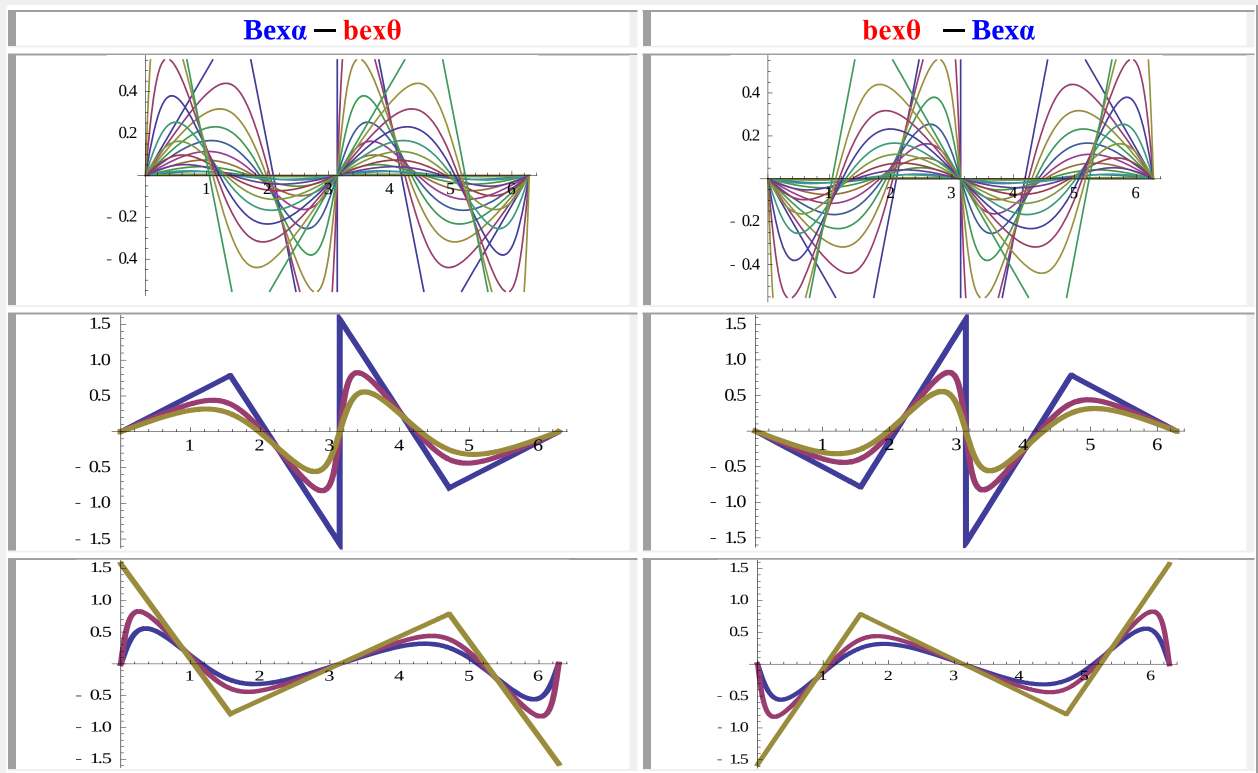
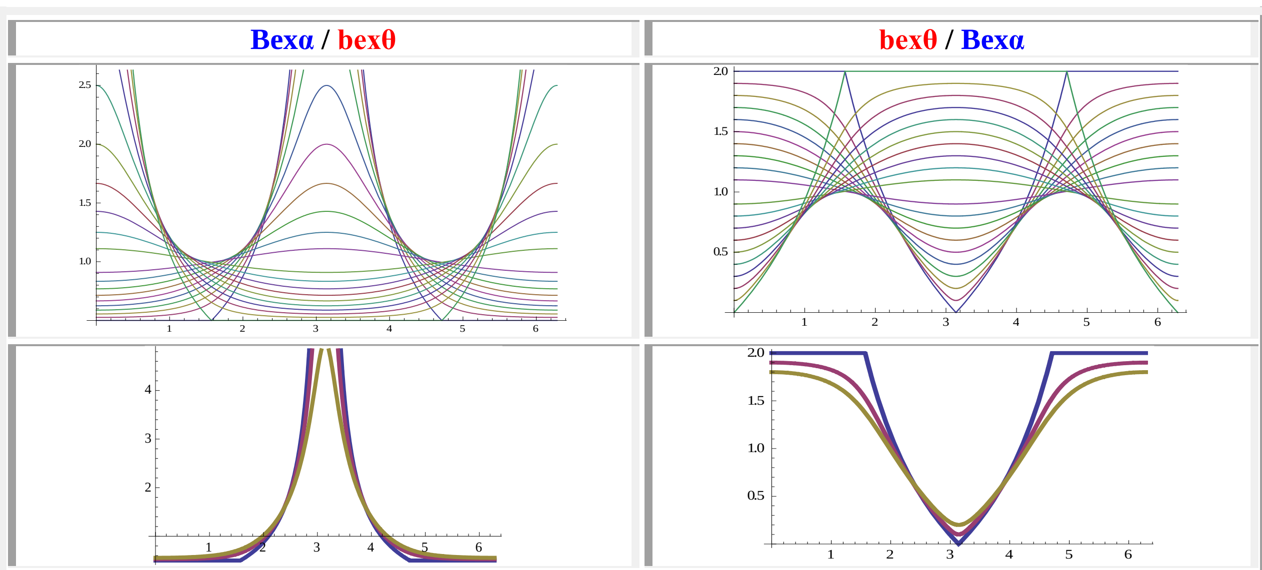


Fig. 2 Diferenţe



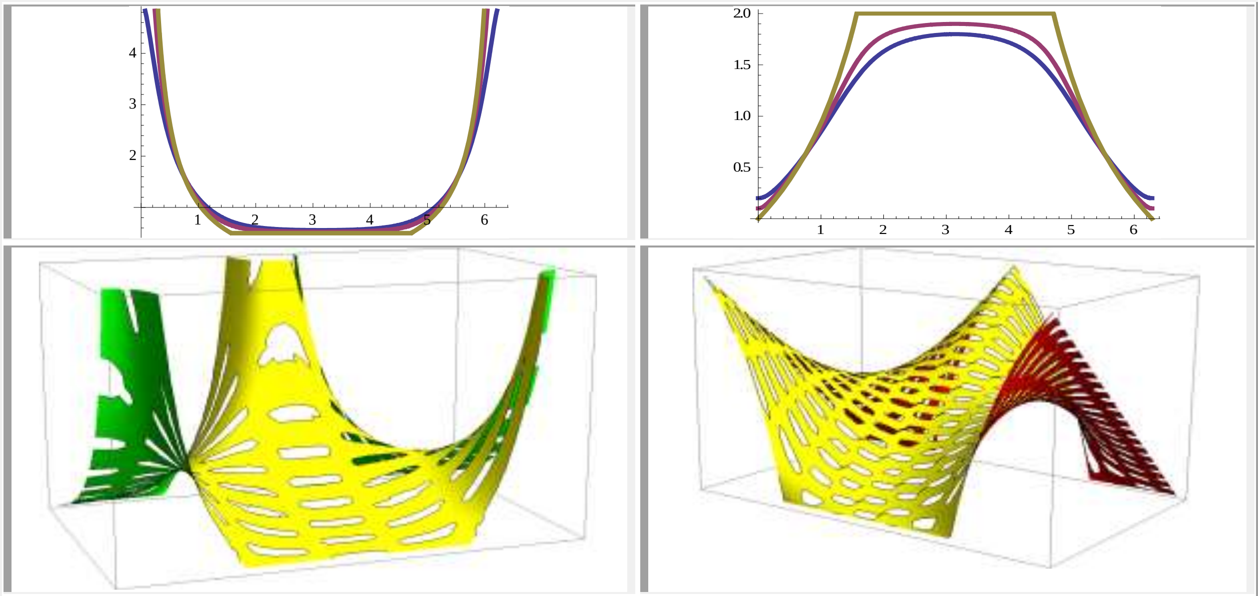
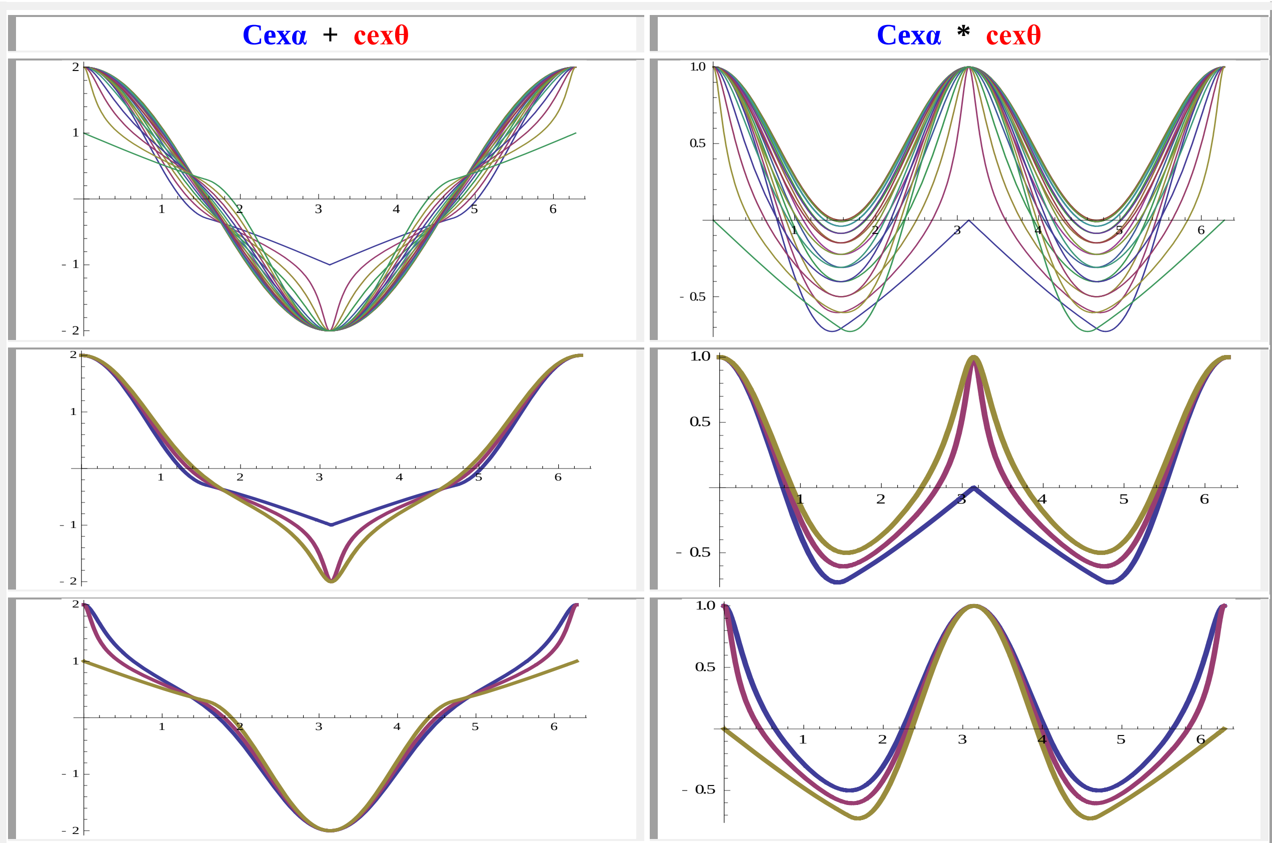


Fig. 3 Rapoarte



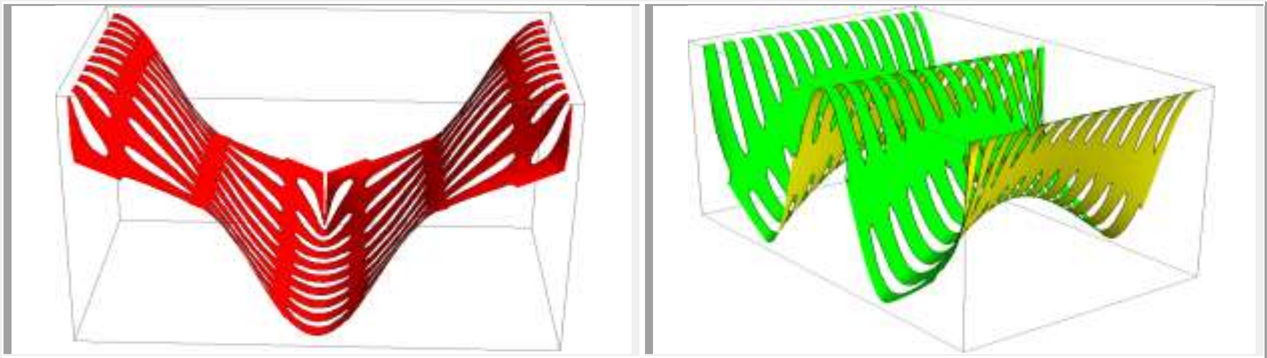


Fig. 4,a Sume ◀ şi produse ▶ de cosinusuri excentrice

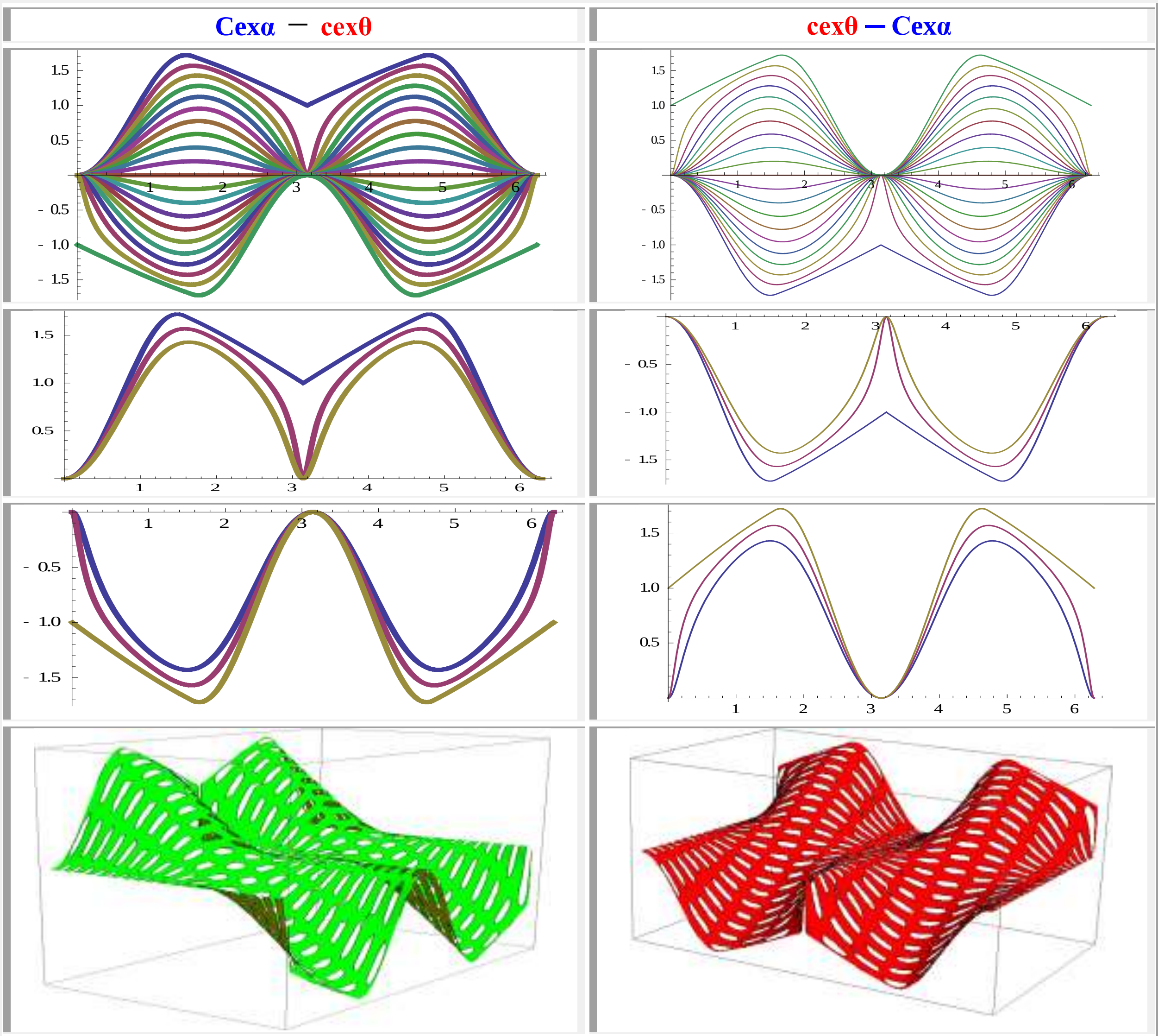


Fig. 4,b Diferenţe de cosinusuri excentrice

Cexα / cexθ	**cexθ / Cexα**

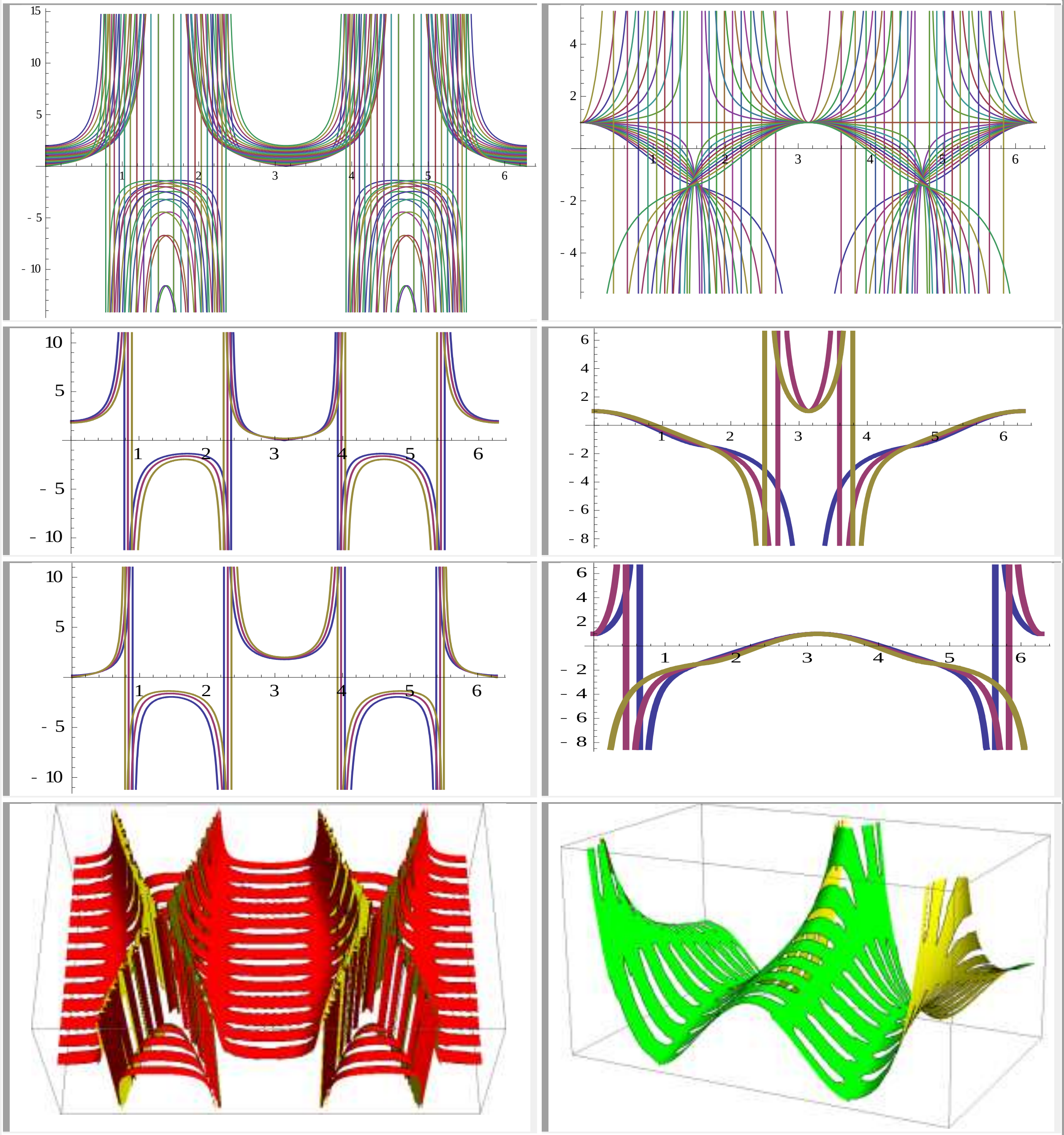
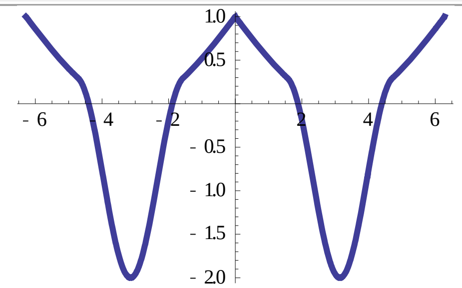
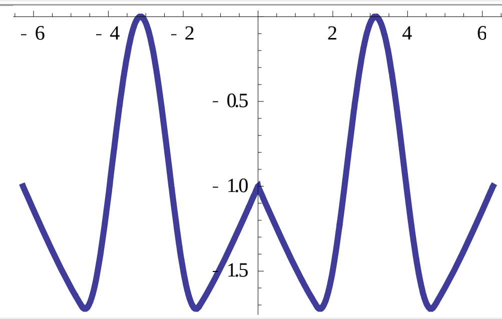


Fig. 5 Rapoarte de cosinusuri excentrice

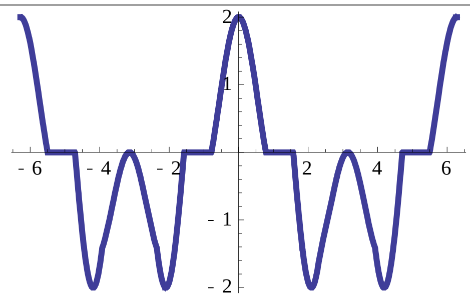
Plot[cos[t-arcsin[sint]]] + cos[t+arcsin[sint/Sqrt[2-2Cos[t]]], {t,0,2Pi]} **y = cexθ + Cexα**	Plot{[cos[t+arcsin[sint/Sqrt[2-2Cos[t]]] ─ 0.2 cos[t-arcsin[sint]]], {t,0,2Pi]}] → **y = cexθ + Cexα**



Plot[cos[t-arcsin[sin2t]]] + cos[2t + arcsin[sin2t/Sqrt[2-2Cos[2t]]], {t, 0, 2Pi]} → **y = cexθ + Cex2α**



Plot[cos[t-arcsin[sint]]] * cos[t+arcsin[sint/Sqrt[2-2Cos[t]]], {t,0,2Pi]}
y = cexθ * Cexα



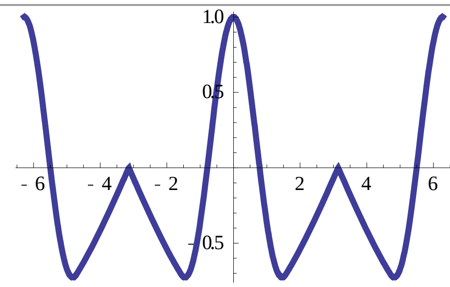


Fig. 6 Diverse

Motto: ” Cea mai înaltă *formă a gândirii pure* există în **matematică.**”
Citat clasic din **PLATON**
“Una şi ***mai înaltă*** o găsiţi în **SUPERMATEMATICĂ**”
Autorul **supermatematicii**

CAPITOLUL VII:
FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE ELEVATOEXCENTRICE DE θ şi de α

1. INTRODUCERE

Se spune că “*o imagine face mai mult decât o mie de cuvinte*” iar, în (**super**)matematică, insoţită de ecuaţiile care o generează, face cu mult mai mult. De aceea, în prezenta expunere, acestea, cuvintele, vor fi extrem de puţine, rezumându-ne doar la a reaminti ecuaţiile unor **funcţii supermatematice circulare excentrice** (**FSM—CE**) şi a celor **elevate** (**FSM—EL**), de care facem uz în prezenta lucrare.

Astfel, **FSM—CE cosinus cexθ** şi **sinus sexθ excentrice** de variabilă excentrică **θ** sunt:

(1) $$\begin{cases} cex\theta = \cos[\theta - bex\theta] = \cos[\boldsymbol{aex}\theta] = \cos[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]] \\ sex\theta = \sin[\theta - bex\theta] = \sin[\boldsymbol{aex}\theta] = \sin[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]] \end{cases}$$

iar cele de variabilă centrică **α** sunt :

(2) $$\begin{cases} Cex\alpha = \cos[\alpha + Bex\alpha] = \cos[\boldsymbol{Aex}\alpha] = \cos[\alpha + \arcsin[s.\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2-2s.cos(\alpha-\varepsilon)}}] \\ Sex\alpha = \sin[\alpha + Bex\alpha] = \sin[\boldsymbol{Aex}\alpha] = \sin[\alpha + \arcsin[s.\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2-2s.cos(\alpha-\varepsilon)}}] \end{cases}$$

FSM— EL cosinus celθ şi **sinus selθ elevate** de variabilă excentrică **θ** sunt:

(3) $$\begin{cases} \boldsymbol{cex\theta} = \cos[\theta - bex\theta] - s.cos\varepsilon = \cos[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]] - s.cos\varepsilon = \boldsymbol{cex\theta} - s.sin\varepsilon \\ \boldsymbol{sex\theta} = \sin[\theta - bex\theta] - s.sin\varepsilon = \sin[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]] - s.sin\varepsilon = \boldsymbol{sex\theta} - s.sin\varepsilon \end{cases}$$

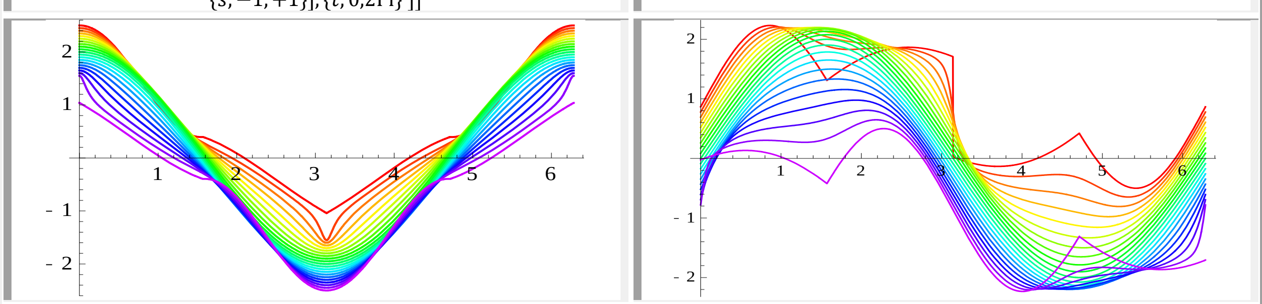
iar cele de variabilă centrică **α** sunt :

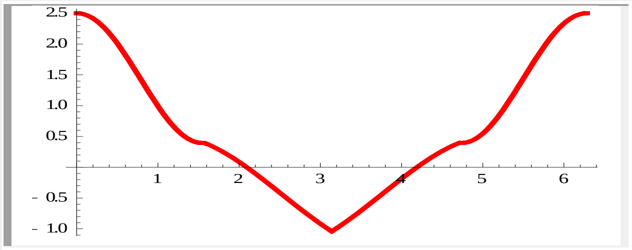
(4) $$\begin{cases} Cex\alpha = \cos[\alpha + Bex\alpha] - s.cos\varepsilon = \cos[\alpha + \arcsin\left[s.\frac{sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2-2s.cos(\alpha-\varepsilon)}}\right] - s.cos\varepsilon \\ Sex\alpha = \sin[\alpha + Bex\alpha] - s.sin\varepsilon = \sin[\alpha + \arcsin\left[s.\frac{sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2-2s.cos(\alpha-\varepsilon)}}\right] - s.sin\varepsilon \end{cases}$$

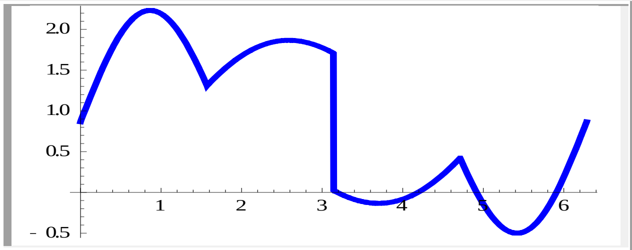
Pe baza lor au fost realizate graficele unor **funcţii supermatematice circulare evolutive** (**FSM—Ev**) prezentate în **figura 1** şi în **figura 2** prin suma, diferenţa, produsul şi raportul lor.

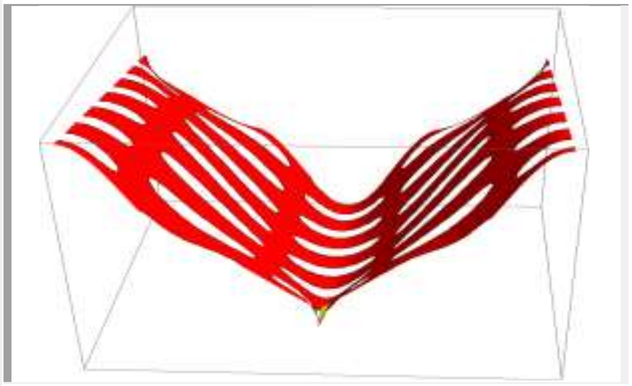
2. GRAFICE 1

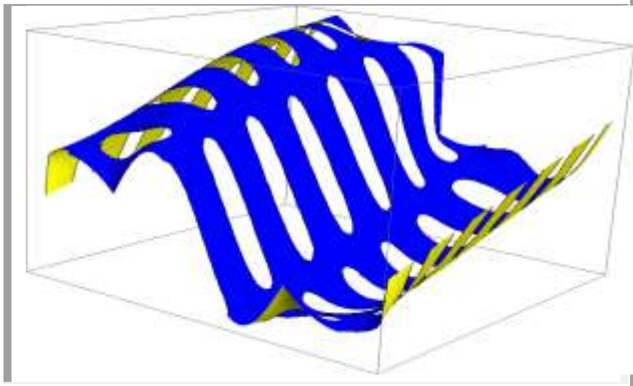
ParametricPlot3D[{t, (Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sCos[Pi/3]) + Cos[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]	ParametricPlot3D[{t, (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sSin[Pi/3]) +Sin[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]





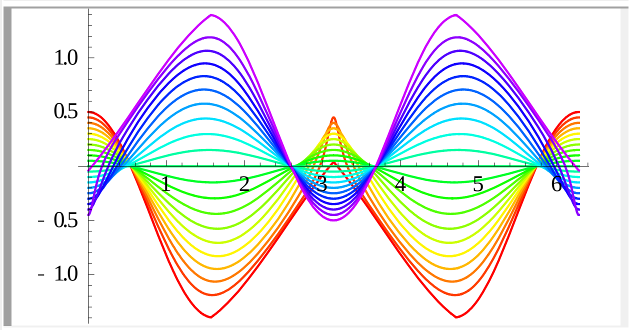


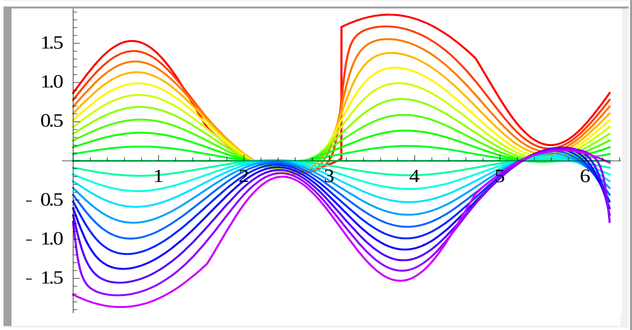


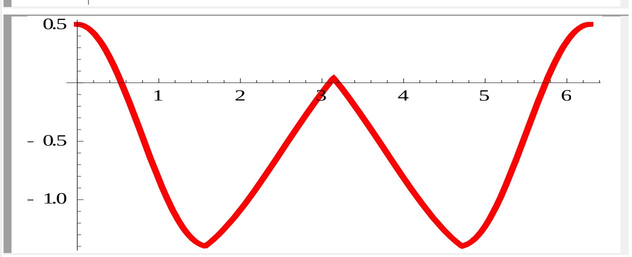


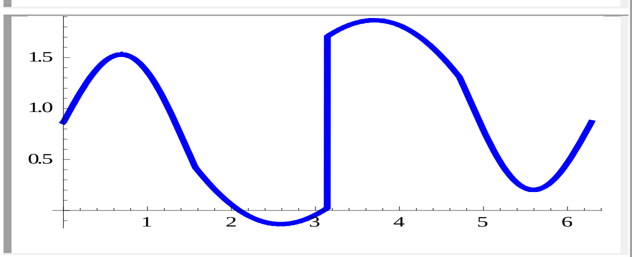
ParametricPlot3D[{t, (Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sCos[Pi/3]) −Cos[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

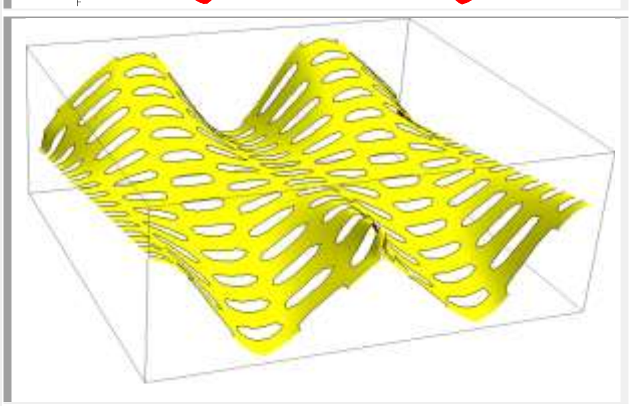
ParametricPlot3D[{t, (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sSin[Pi/3]) −Sin[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

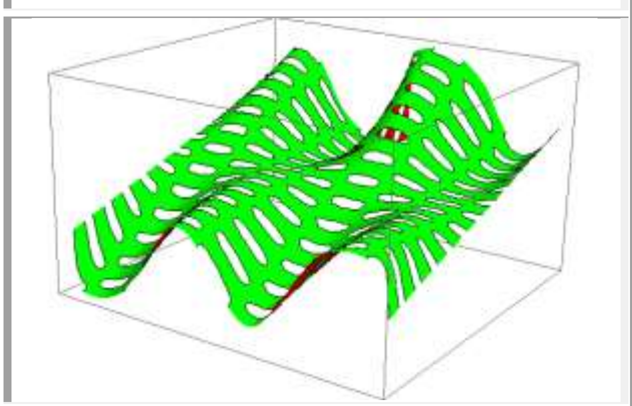






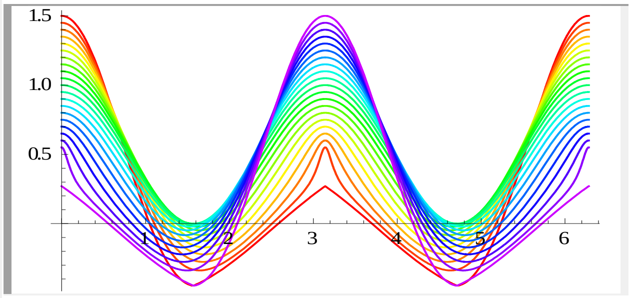


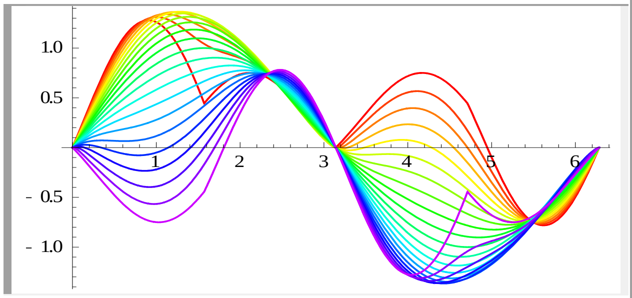


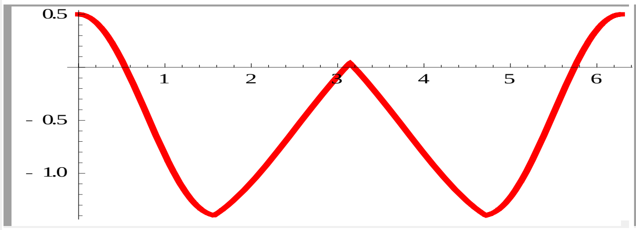


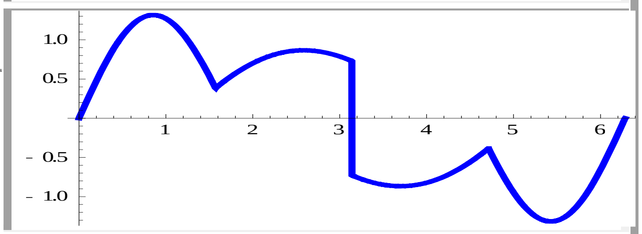
ParametricPlot3D[{t, (Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sCos[Pi/3]) ∗ Cos[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

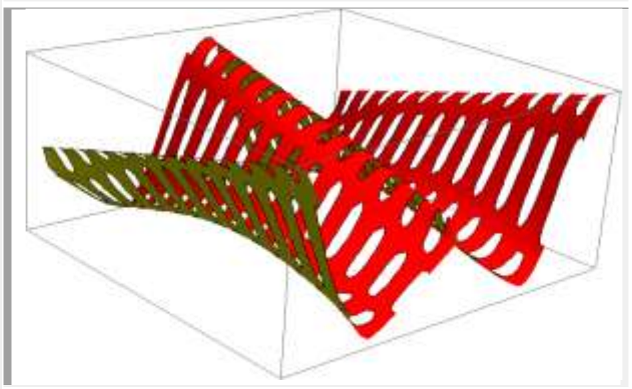
ParametricPlot3D[{t, (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sSin[Pi/3]) ∗ Sin[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

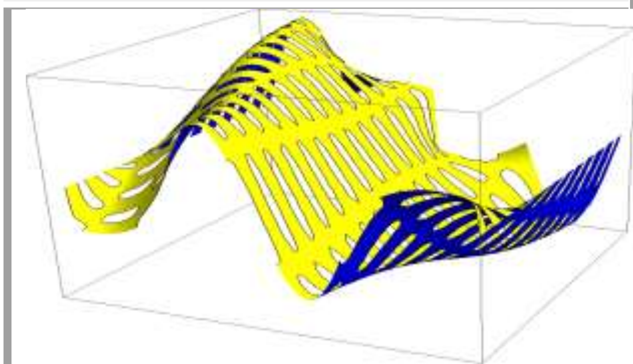






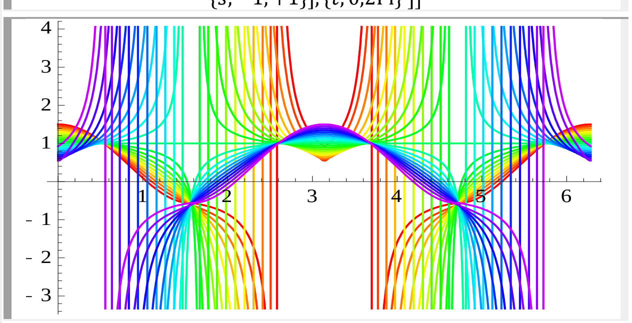


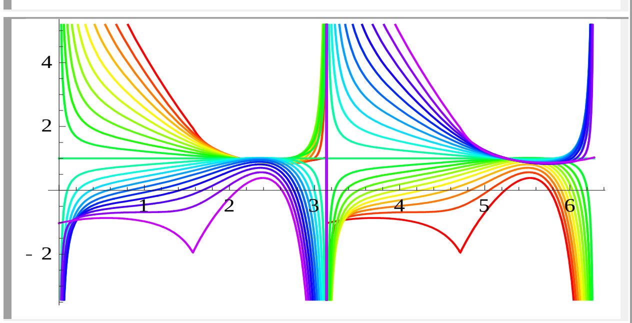


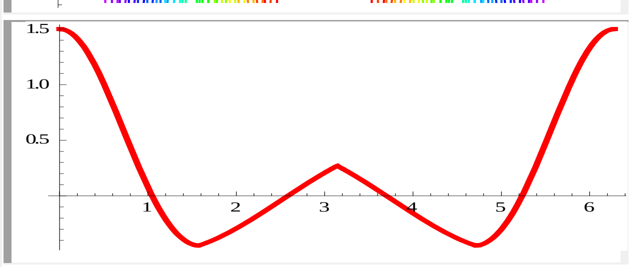


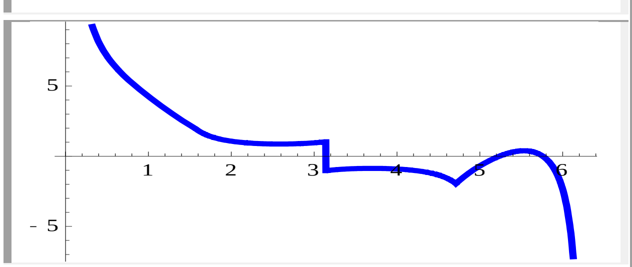
ParametricPlot3D[{t, (Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sCos[Pi/3]) / Cos[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

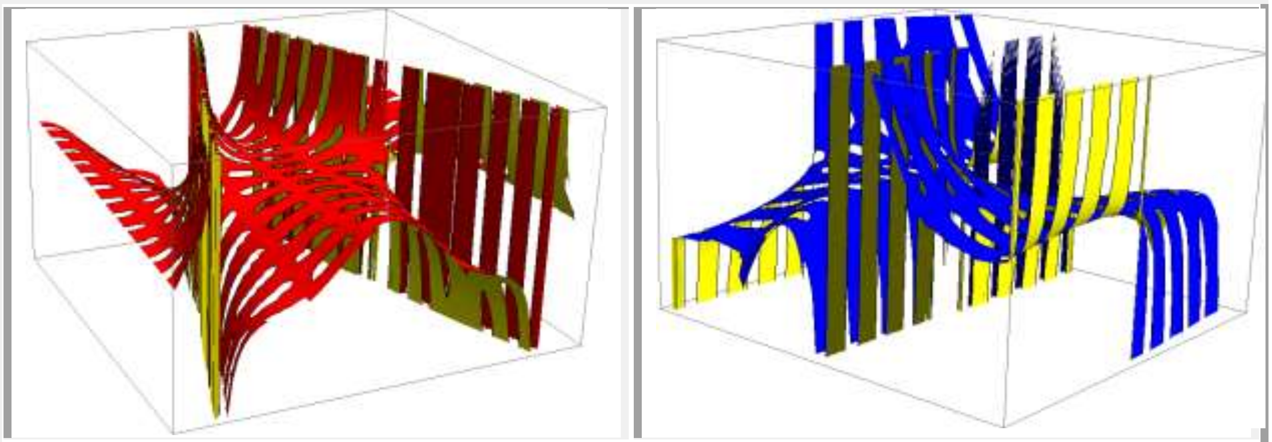
ParametricPlot3D[{t, (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sSin[Pi/3]) /Sin[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]











Plot[Evaluate[Table[{(Cos[t − ArcSin[sSin[t]]] − sCos[Pi/3]) /Abs[Cos[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

ParametricPlot3D[{t, (Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − sSin[Pi/3]) /Abs[Sin[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s² − 2sCos[t]]]]}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

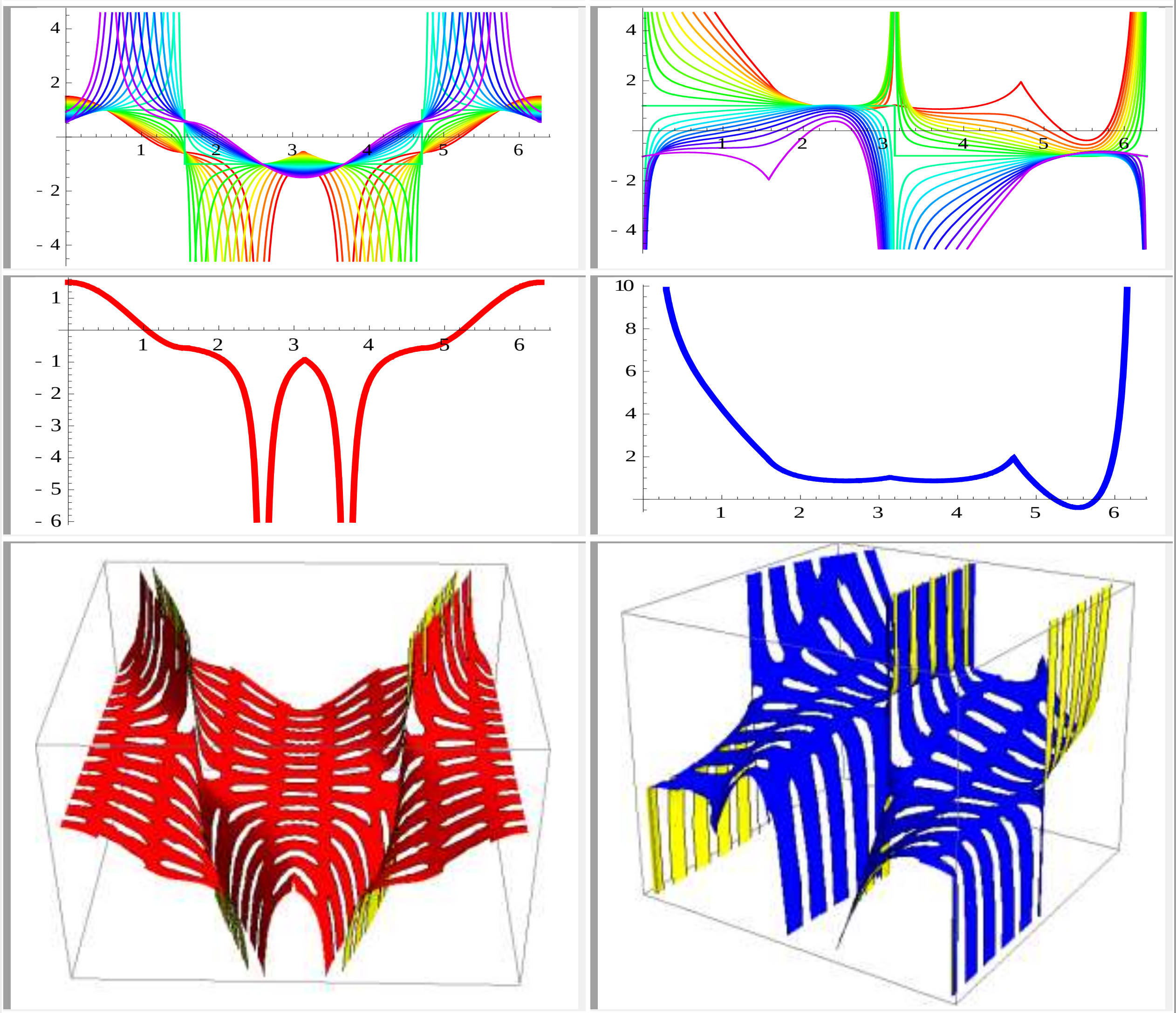
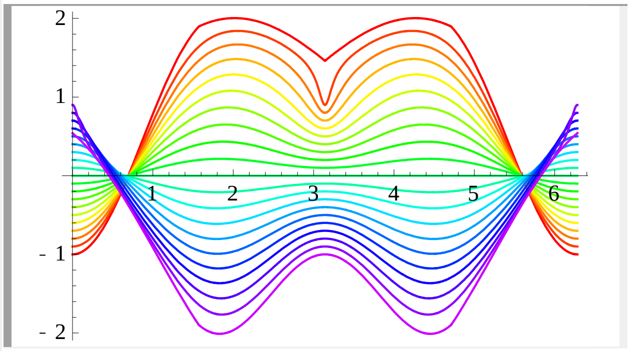
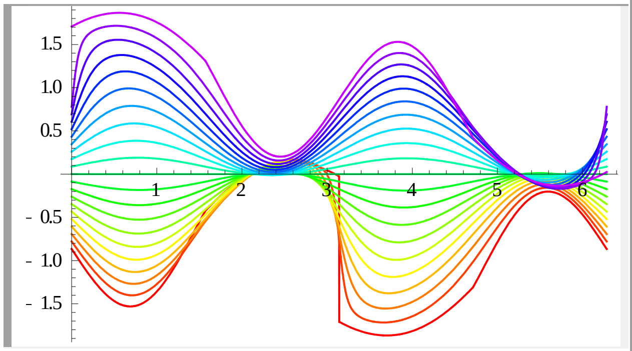


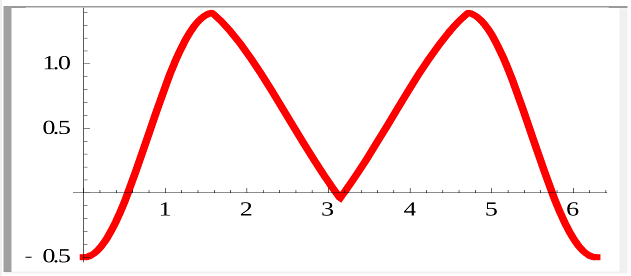
Fig.1 Cosinusul ◀ şi sinusul ▶ SM evolutive elevate de θ şi excentrice de α

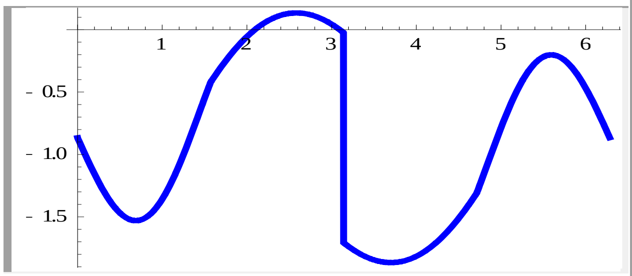
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]] − (Cos[t − ArcSin[sSin[t]]] − sCos[Pi/3])}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

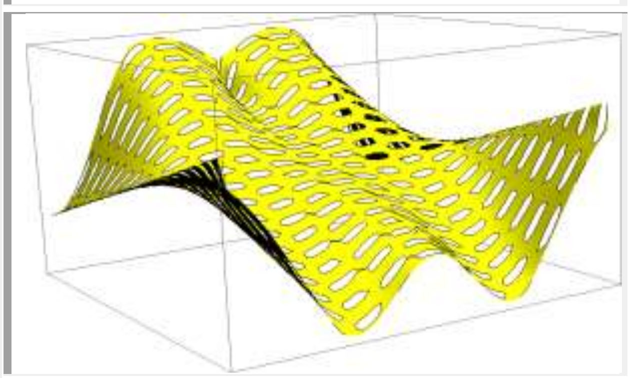
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[Pi/3]]] − (Sin[t − ArcSin[sSin[t]]] − sSin[t])}, {s, −1, +1}], {t, 0,2Pi}]]

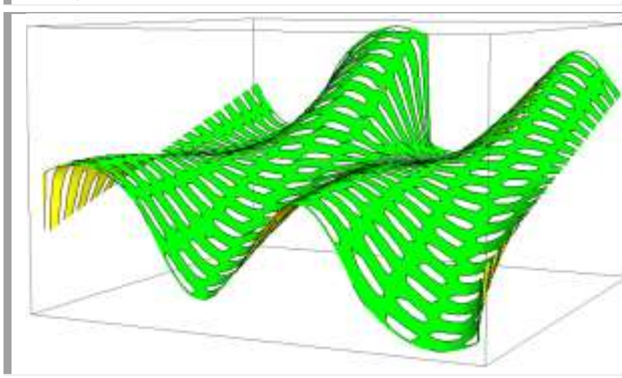






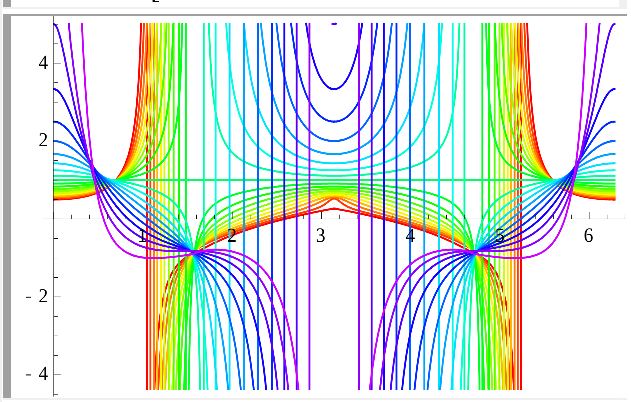


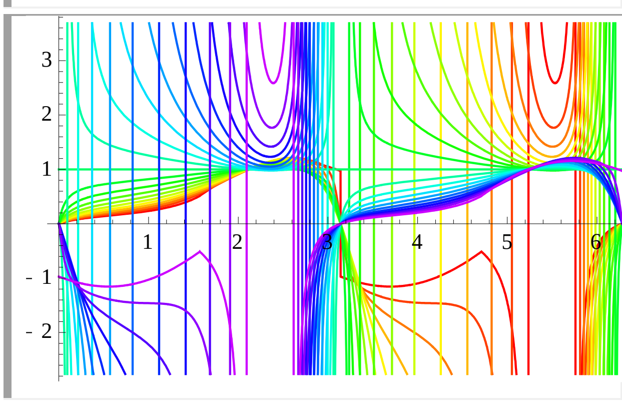




$$\text{Plot}\left[\text{Evaluate}\left[\text{Table}\left[\left\{\left(\frac{\text{Cos}\left[t+\dfrac{\text{ArcSin}[s\text{Sin}[t]]}{\text{Sqrt}[1+s^2-2s\text{Cos}[t]]}\right]}{\text{Cos}\left[t-\text{ArcSin}[s\text{Sin}[t]]\right]-s\text{Cos}[Pi/3]}\right)\right\}, \{s,-1,+1\},\{t,0,2\text{Pi}\}\right]\right]\right]$$

$$\text{Plot}\left[\text{Evaluate}\left[\text{Table}\left[\left\{\frac{\text{Sin}\left[t+\dfrac{\text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]}{\text{Sqrt}[1+s^2-2s\text{Cos}[t]]}\right]}{\text{Sin}\left[t-\text{ArcSin}[s\text{Sin}[t]]\right]-s\text{Sin}[Pi/3]}\right\}, \{s,-1,1\},\{t,0,2\text{Pi}\}\right]\right]\right]$$





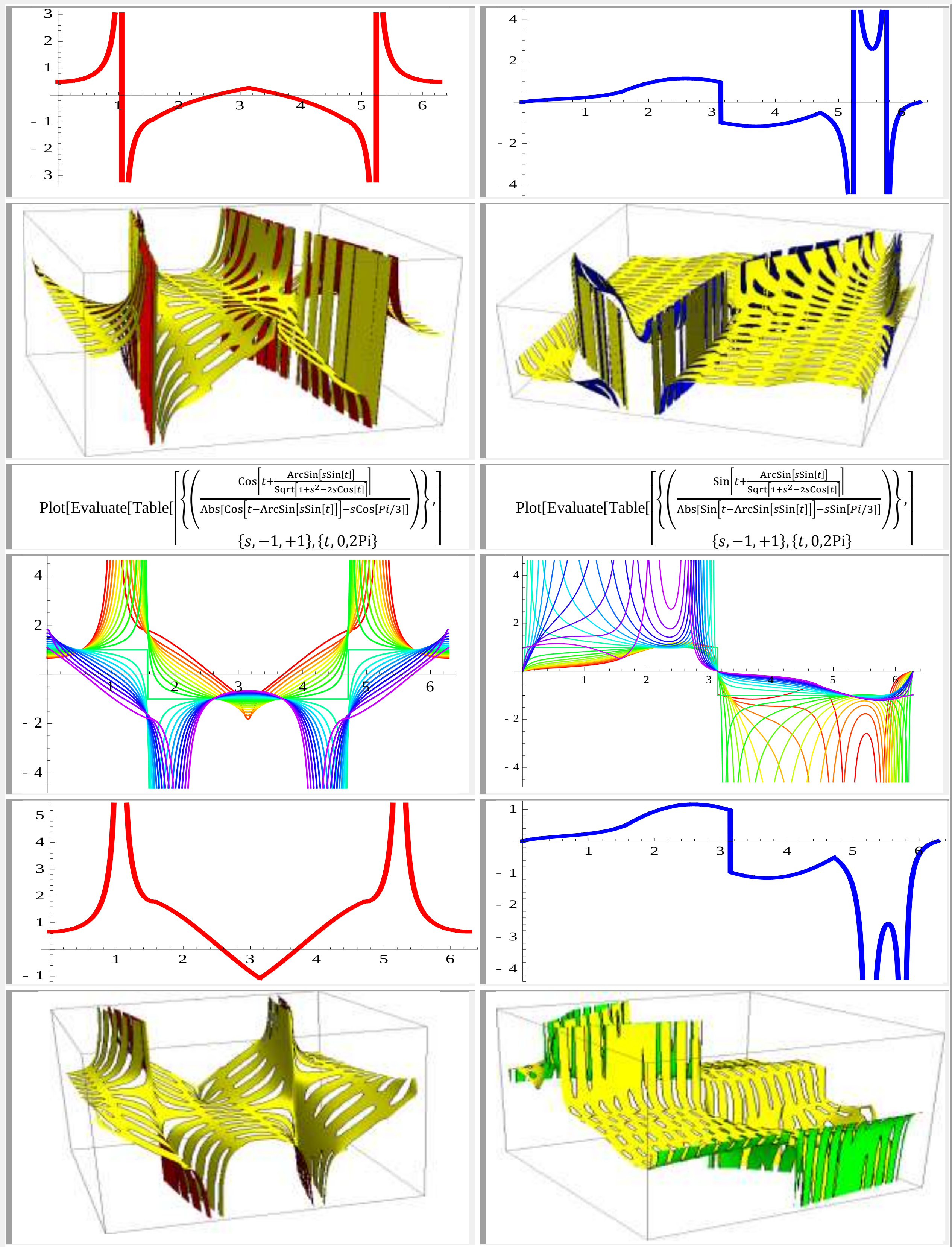


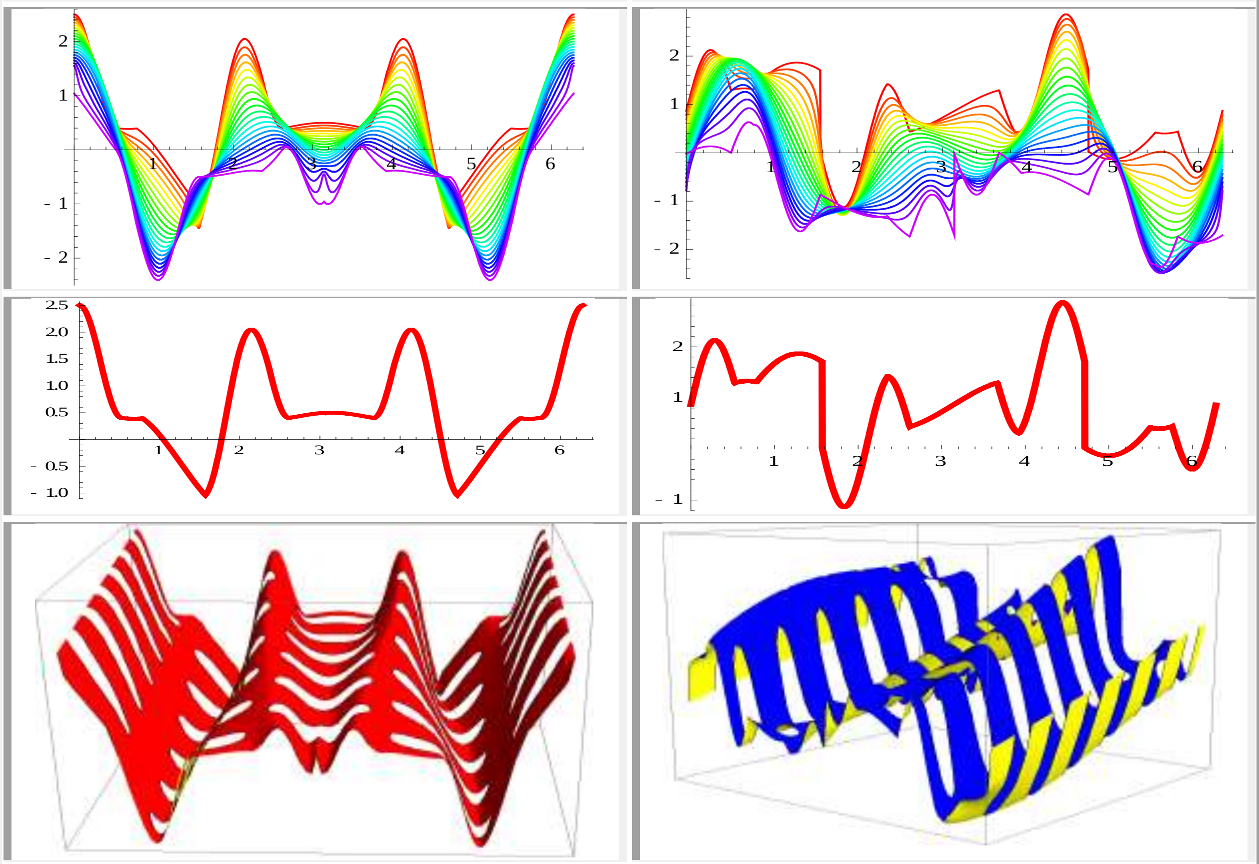
Fig. 2 Cosinusul ◀ şi sinusul ▶ SM evolutive excentrice de α ─ elevate de θ

În **figurile 1** şi **2** au fost prezentate cele patru operaţii cu funcţiile cosinus, în stânga ◀, iar în partea dreaptă, cele ale funcţiilor sinus; ambele de variabile **θ** şi respectiv ***α***. În continuare vor fi prezentate aceleaşi funcţii dar de variabile **mθ** si, respectiv **n*α***, de **m = 3** si **n = 2 în Figura 3**. Sunt prezentate, totodată, şi graficele funcţiilor **SM evolutive** de **s = −1**.

3. G R A F I C E 2

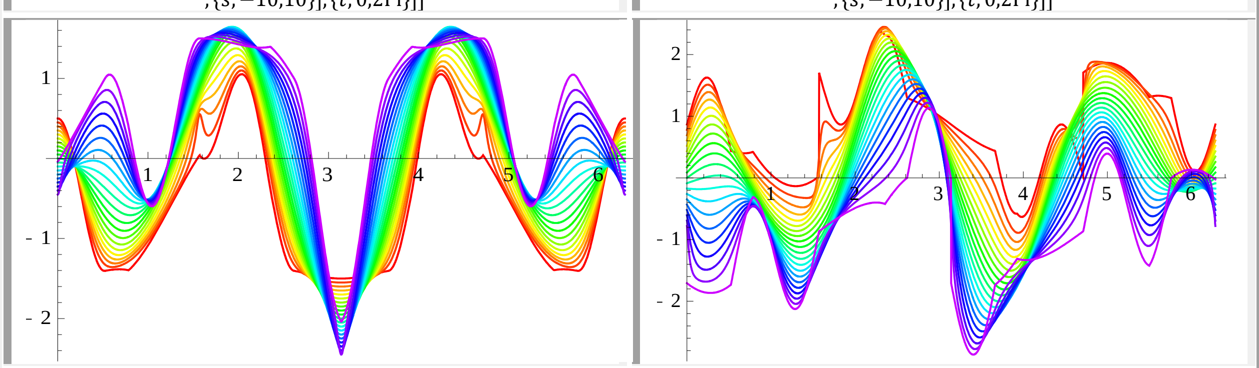
```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]
− 0.1sCos[Pi/3]
+Cos[2t
+ ArcSin[0.1sSin[2t]]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]}
,{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```

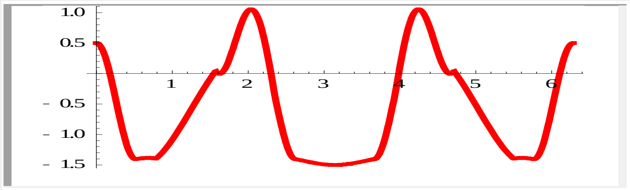
```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]
− 0.1s{Sin[Pi/3]
+{Sin[2t
+ ArcSin[0.1sSin[2t]]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]}
,{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```

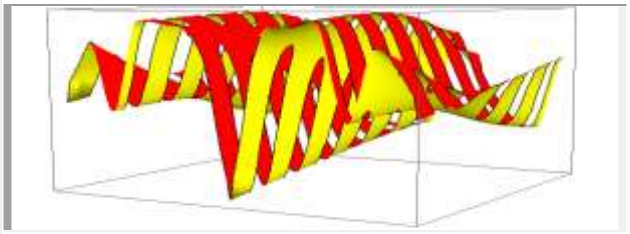


```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]
− 0.1sCos[Pi/3]
−Cos[2t
+ ArcSin[0.1sSin[2t]]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]}
,{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```

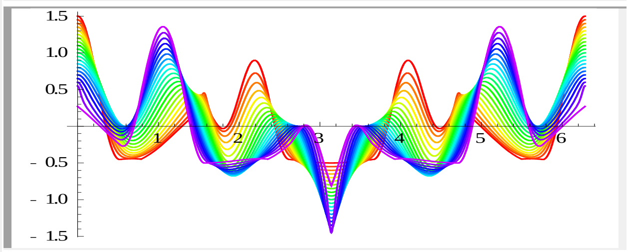
```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]
− 0.1s{Sin[Pi/3]
−{Sin[2t
+ ArcSin[0.1sSin[2t]]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]}
,{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```

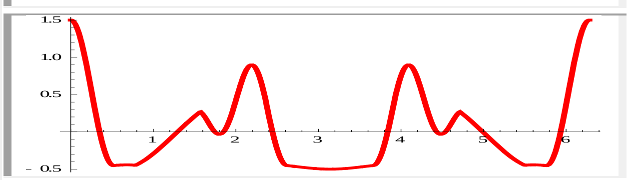


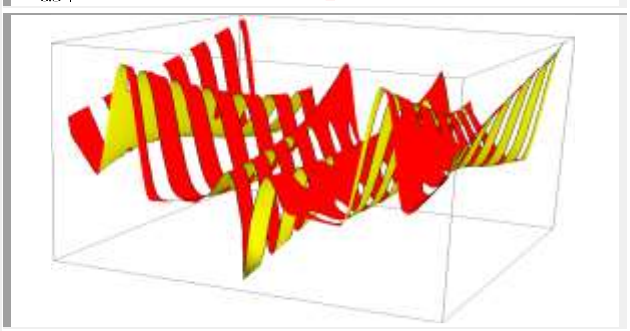




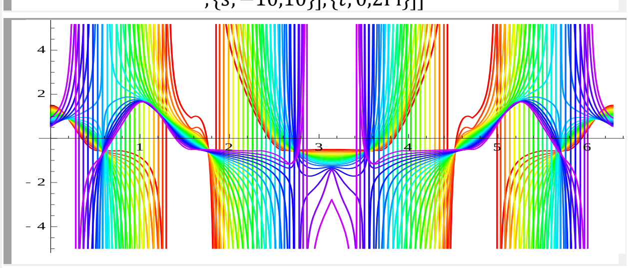
Plot[Evaluate[Table[{(Cos[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]] − 0.1sCos[Pi/3])*
Cos[2t
+ ArcSin[0.1sSin[2t]]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]}
,{s, −10,10}],{t, 0,2Pi}]]

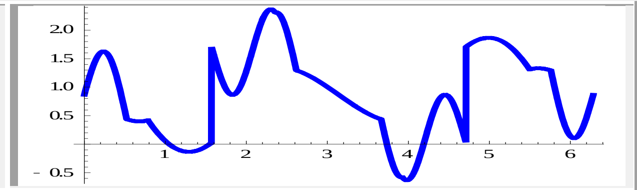


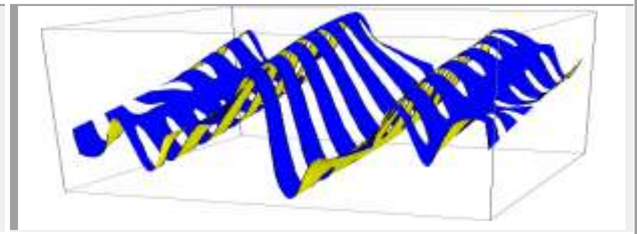




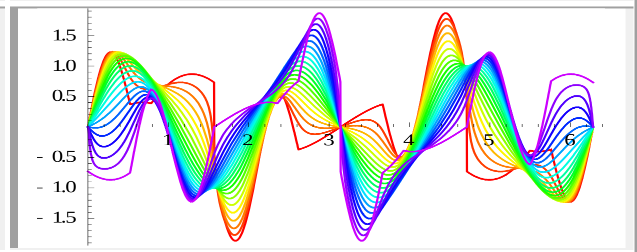
Plot[Evaluate[Table[{(Cos[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]
− 0.1sCos[Pi/3])/
Cos[2t
+ ArcSin[0.1sSin[2t]]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]}
,{s, −10,10}],{t, 0,2Pi}]]

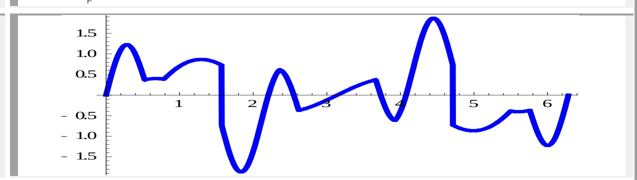


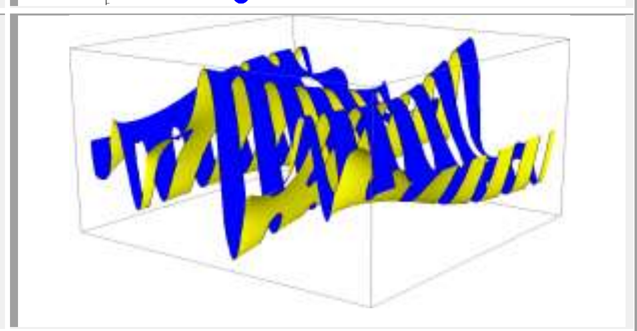




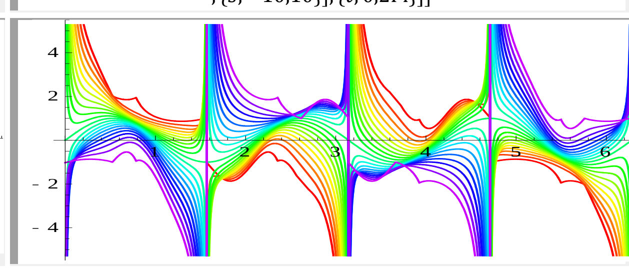
Plot[Evaluate[Table[{Sin[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]
− 0.1s{Sin[Pi/3]
∗ {Sin[2t
+ ArcSin[0.1sSin[2t]]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]}
,{s, −10,10}],{t, 0,2Pi}]]

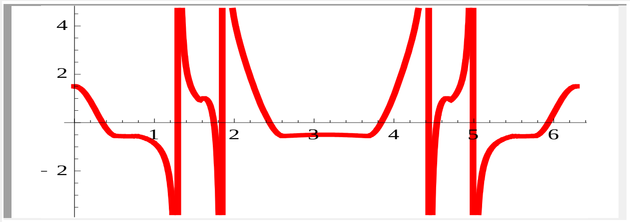


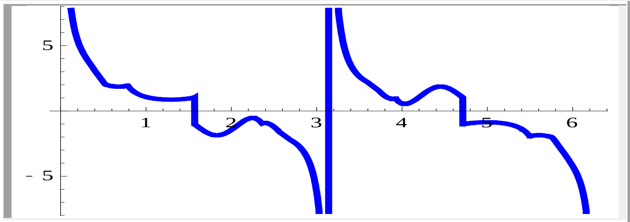


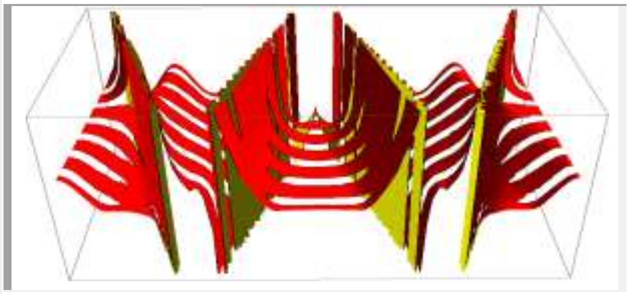


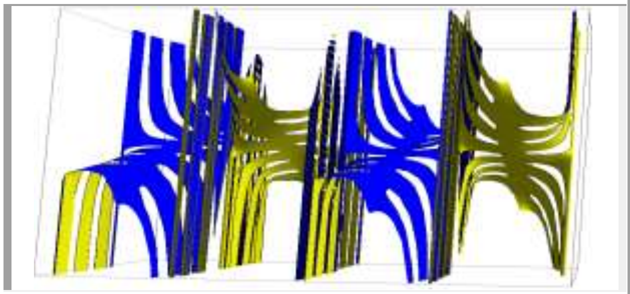
Plot[Evaluate[Table[{Sin[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]
− 0.1s{Sin[Pi/3]
/{Sin[2t
+ ArcSin[0.1sSin[2t]]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]}
,{s, −10,10}],{t, 0,2Pi}]]





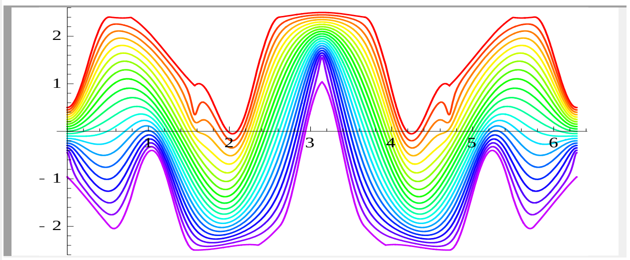


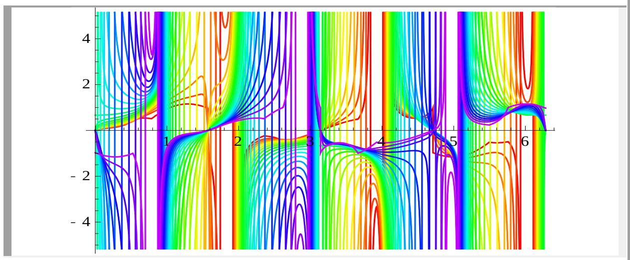


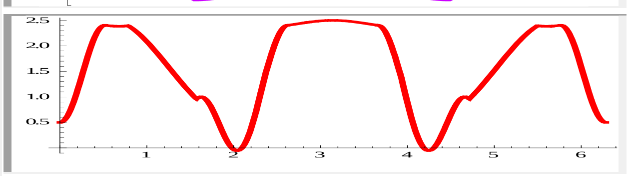


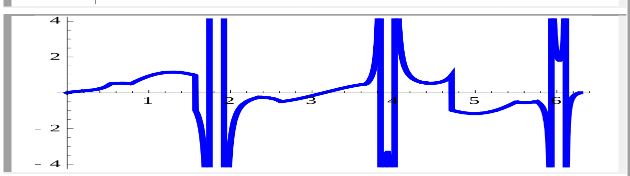
ParametricPlot3D[{Cos[2t + ArcSin[0.1sSin[2t]]/ Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]] − Cos[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]] −0.1sCos[Pi/3]},{s,−10,10},{t,0,2Pi}]]

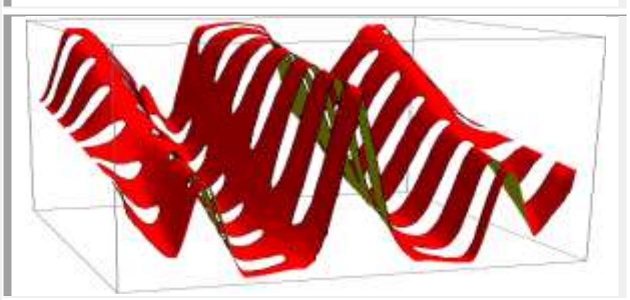
Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t + ArcSin[0.1sSin[2t]]/ Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]]/(Sin[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]] −0.1sSin[Pi/3])} ,{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]

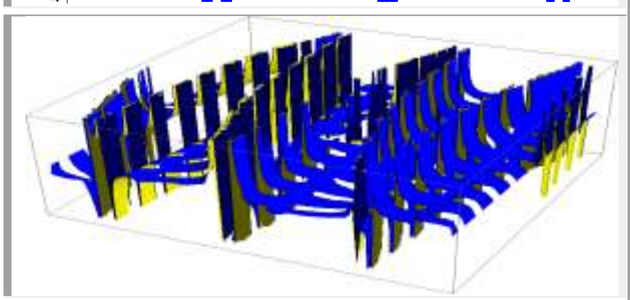






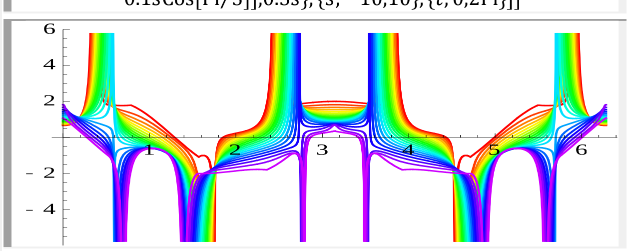


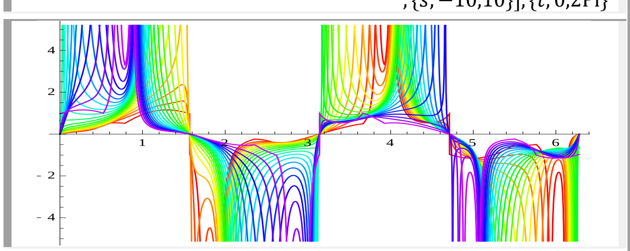




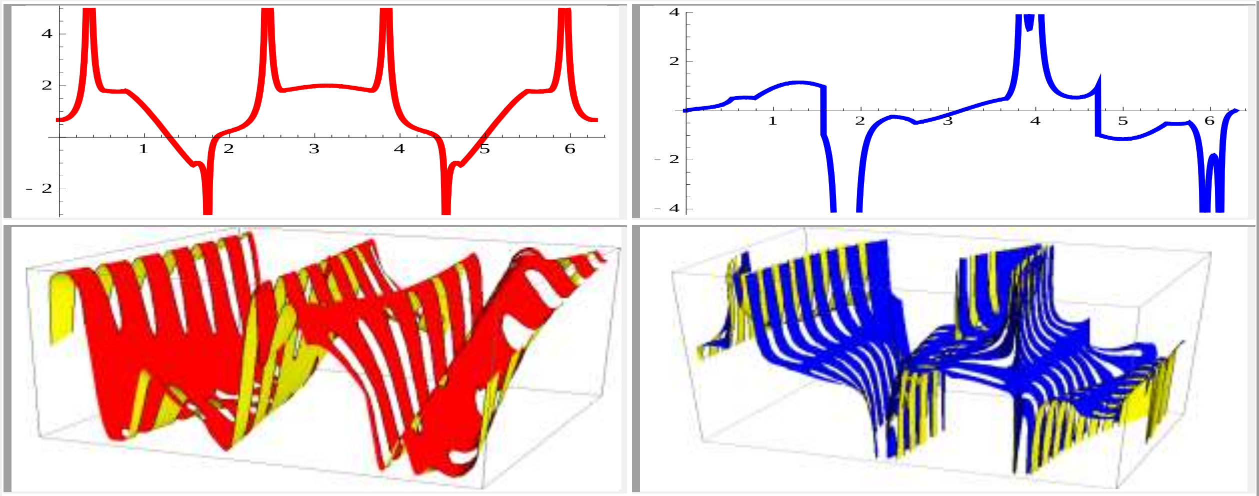
ParametricPlot3D[{t, Cos[2t + ArcSin[0.1sSin[2t]]/ Abs[Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]] − Cos[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]] −0.1sCos[Pi/3]],0.3s},{s,−10,10},{t,0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t + ArcSin[0.1sSin[2t]]/ Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]] / Abs[Sin[3t − ArcSin[0.1sSin[−0.1sSin[Pi/3]] ,{s,−10,10}],{t,0,2Pi}





BUPT



```
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]/
  Cos[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]]
  − 0.1s Cos[Pi/3]/Abs[Sin[2t + ArcSin[0.1sSin[2t]]]]}
  ,{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```

```
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]]/
  Sin[3t − ArcSin[0.1sSin[3t]]]
  − 0.1s Sin[Pi/3]/Abs[Sin[2t + ArcSin[0.1sSin[2t]]]]}
  ,{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```

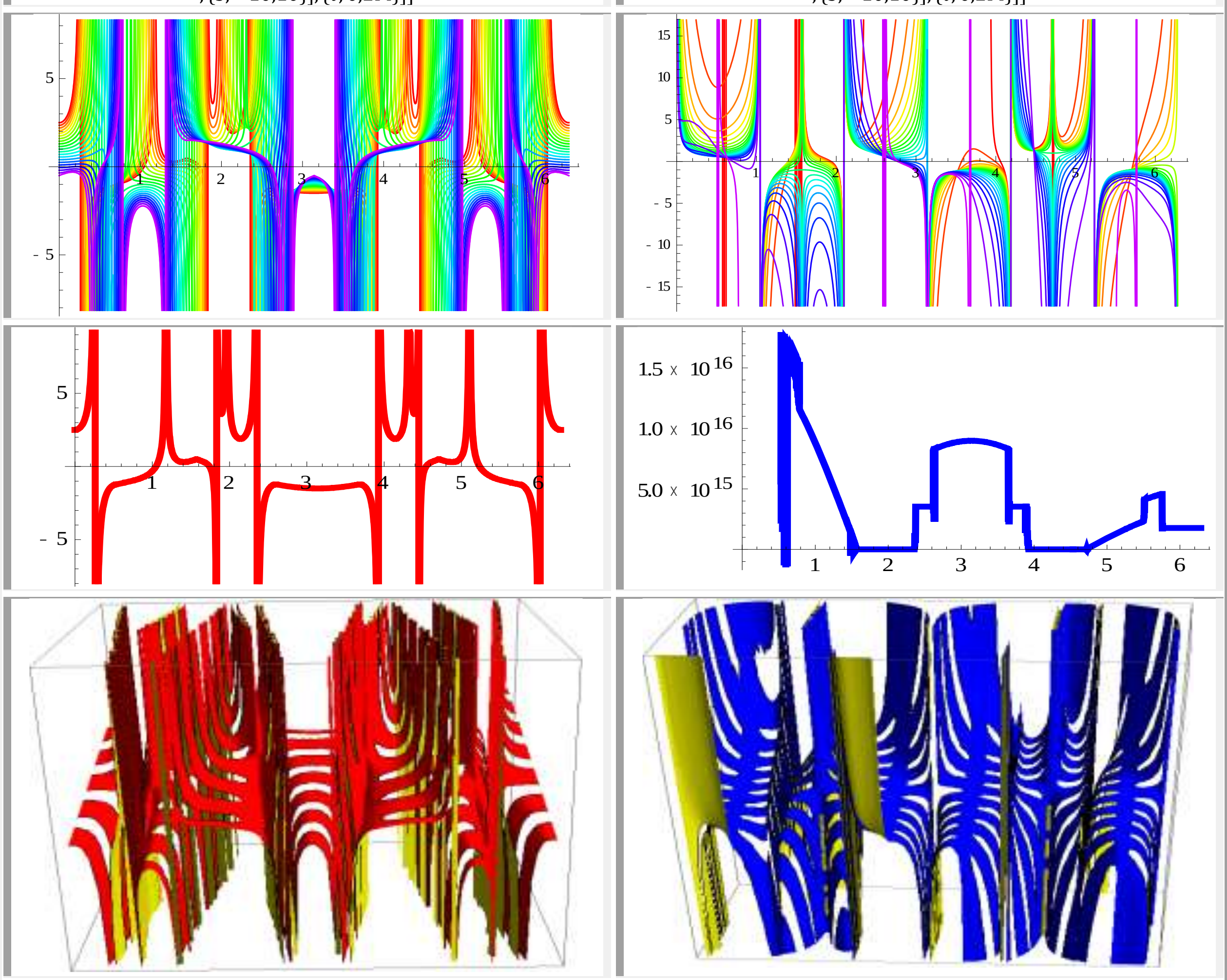
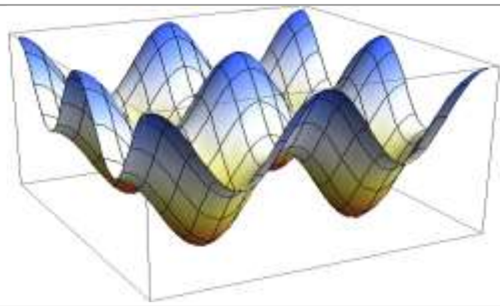
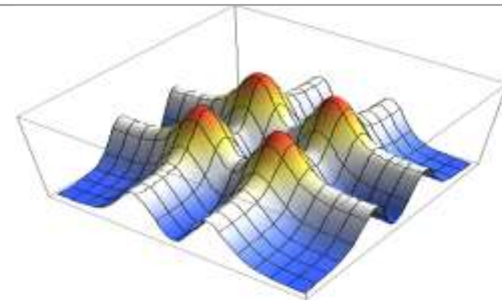
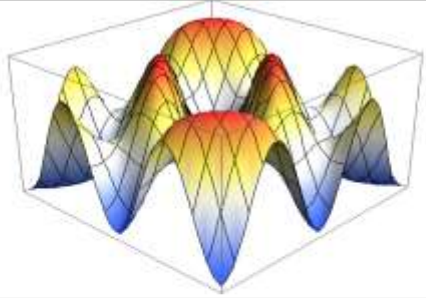
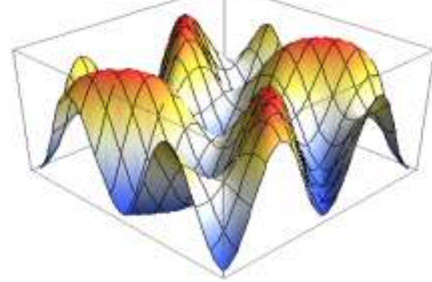
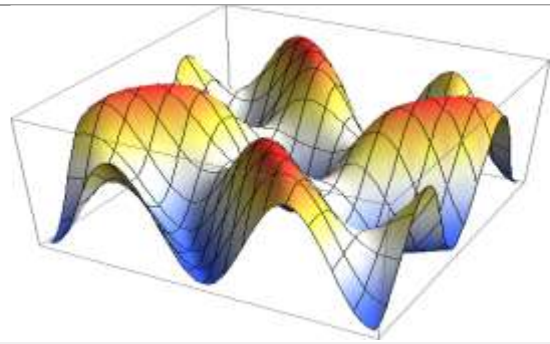
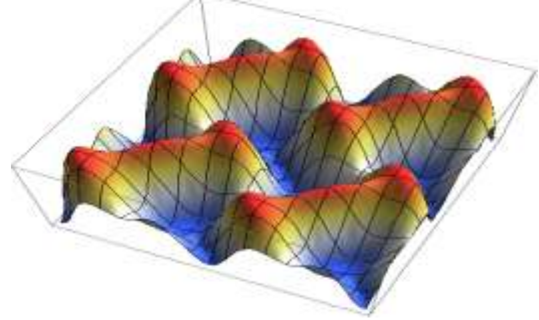
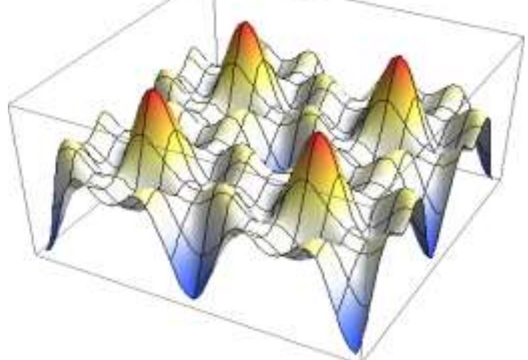
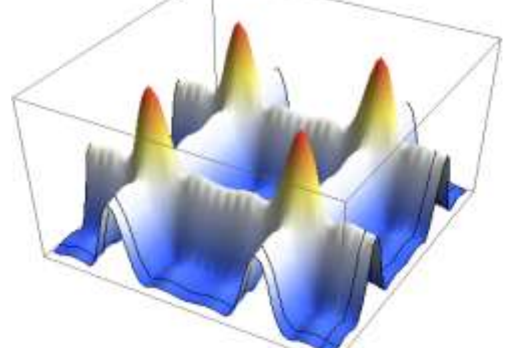
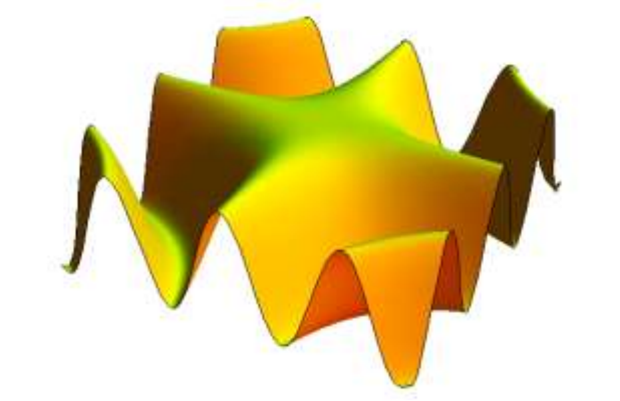


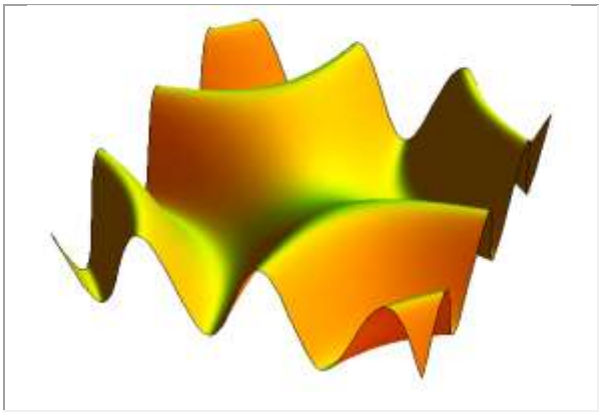
Fig. 3 Cosinusul ◀ şi sinusul ▶ **SM evolutive excentrice de nα — elevate** şi de **mθ** cele **excentrice,** pentru **n = 2 şi m = 3**

SUPRAFEŢE ONDULATE CU FSM cexθ şi sexθ	
Plot3D[{Sin[x]^2 + Sin[y]^2}, {x, 0, 2Pi}, {y, 0, 2Pi}]	Plot3D[{Sin[x − ArcSin[0.8Sin[x]]]^2 + Sin[y − ArcSin[0.8Sin[y]]]^2}, {x, 0, 2Pi}, {y, 0, 2Pi}]
	
z = Sin[x − ArcSin[0.8Sin[xy]]]^2 + Sin[y − ArcSin[0.8Sin[x]]]^2	z = Sin[x − ArcSin[0.8Sin[y]]]^2 + Sin[y + ArcSin[0.8Sin[x]]]^2
	
z = Sin[x + ArcSin[0.8Sin[y]]]^2 + Sin[y − ArcSin[0.8Sin[x]]]^2	z = Sin[x − ArcSin[0.8Sin[2y]]]^2 + Sin[y − ArcSin[0.8Sin[2x]]]^2
	
z = Sin[x − ArcSin[0.8Sin[2y]]]^2 + Sin[y + ArcSin[0.8Sin[2x]]]^2	z = Sin[x − ArcSin[0.8Sin[2x]]]^2 + Sin[y − ArcSin[0.8Sin[2y]]]^2
	

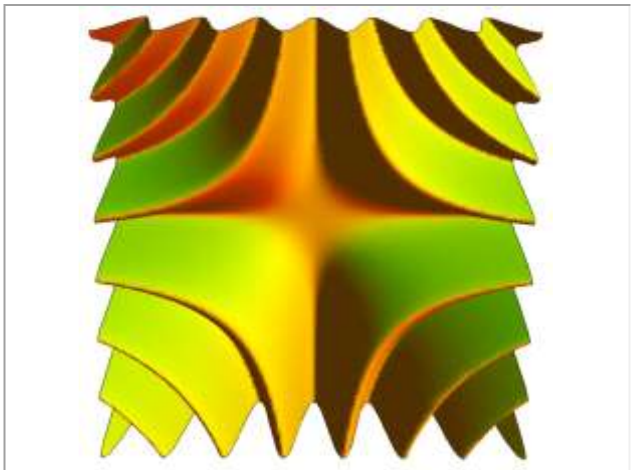
Plot3D[{Cos[xy]}, {x, −Pi, Pi}, {y, −Pi, Pi}, RegionFunction → Function[{x, y, z, u, t}, Sin[6u]Sin[6t] ≥ 0.05]



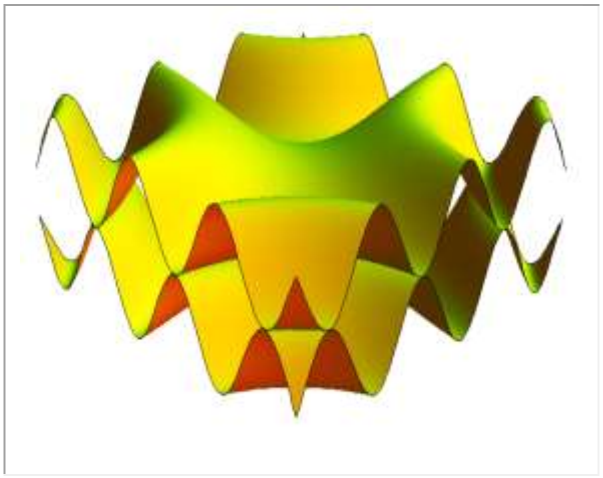
Plot3D[{Sin[xy]}, {x, −Pi, Pi}, {y, −Pi, Pi}, RegionFunction → Function[{x, y, z, u, t}, Sin[6u]Sin[6t] ≥ 0.05]



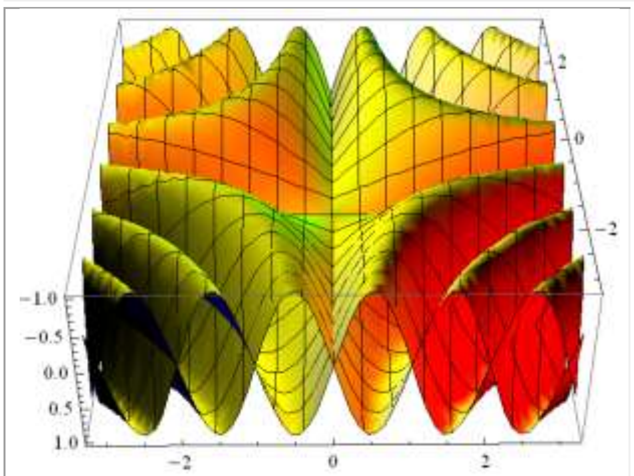
Plot3D[{Cos[xy]}, {x, −1.5Pi, 1.5Pi}, {y, −1.5Pi, 1.5Pi}, RegionF → Function[{x, y, z, u, t}, Sin[6u]Sin[6t] ≥ 0.05]

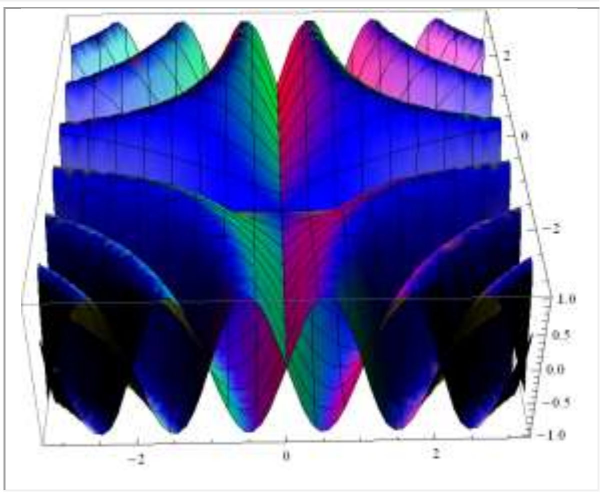


Plot3D[{{Sin[xy] + 1}, {−Sin[xy] − 1}}, {x, −Pi, Pi}, {y, −Pi, Pi}, RegionFunction → Function[{x, y, z, u, t}, Sin[6u]Sin[6t] ≥ 0.05]



Plot3D[{{Sin[xy]}, {−Sin[xy]}}, {x, −Pi, Pi}, {y, −Pi, Pi}, RegionFunction → Function[Sin[xy] ≤ 4], Lighting → {{"Point", Yellow, {0, −4, −4}}, {"Point", Blue, {0, −1.12Pi, 1.12Pi}}, {"Point", Red, {−1.12Pi, 1.12Pi, 0}}, {"Point", Green, {5, 5





S U P R A F E Ţ E   O N D U L A T E   2

Motto:” Un matematician vede în **matematică** ceva frumos, ceva interesant, ceva care îi place, ceva care îi e drag, ceva care îl tulbură, îl face să gândească, să mediteze, să viseze. ”

Grigore C. Moisil

Un inginer, la fel, în supermatematică vede şi nemărginirea şi măreţia ei. **Autorul.**

CAPITOLUL VIII

FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE ELIPTICE CENTRICOEXCENTRICE DE PERIOADĂ 4K(k)

1 INTRODUCERE

Funcţiile eliptice, pe care acum le denumim şi **centrice (FEL C),** din motive evidente, au fost introduse în matematică de **Carl Gustav Jacob Jacobi**, ca funcţii inverse ale integralelor eliptice de speţa întâi **E(k,u)** şi de speţa a doua **K(k,u)**.

Integralele şi **funcţiile eliptice excentrice (FEL E)** au fost introduse în matematică de autor prin lucrarea **Şelariu, M. E. “SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE”**, Vol. I şi Vol. II, ediţia a 2-a, Ed “Politehnica” din Timişoara, 2012, în Vol II, Cap. 12 “**INTEGRALE ŞI FUNCŢII ELIPTICE EXCENTRICE”.**

Aplicând simultan, cele patru operaţii matematice, acestor două tipuri de funcţii eliptice se vor obţine funcţiile **centricoexcentrice** şi, în cazul diferenţei şi a raportului lor, şi a celor **excentricocentrice**, care, în cazul diferenţei sunt egale cu cele sumă dar cu semn schimbat, iar în cazul raportului este inversul **FEL E centricoexcentrice.**

În **figura 1**, în partea superioară ▲, sunt prezentate, în **2D**, graficele **funcţiilor eliptice centrice** în partea stângă ◀, iar a celor **excentrice** în partea dreaptă ▶ iar, în partea inferioară ▼, în 3D în următoarea ordine: **am(u, k), dn(u, k), cn(u, k), sn(u, k)**.

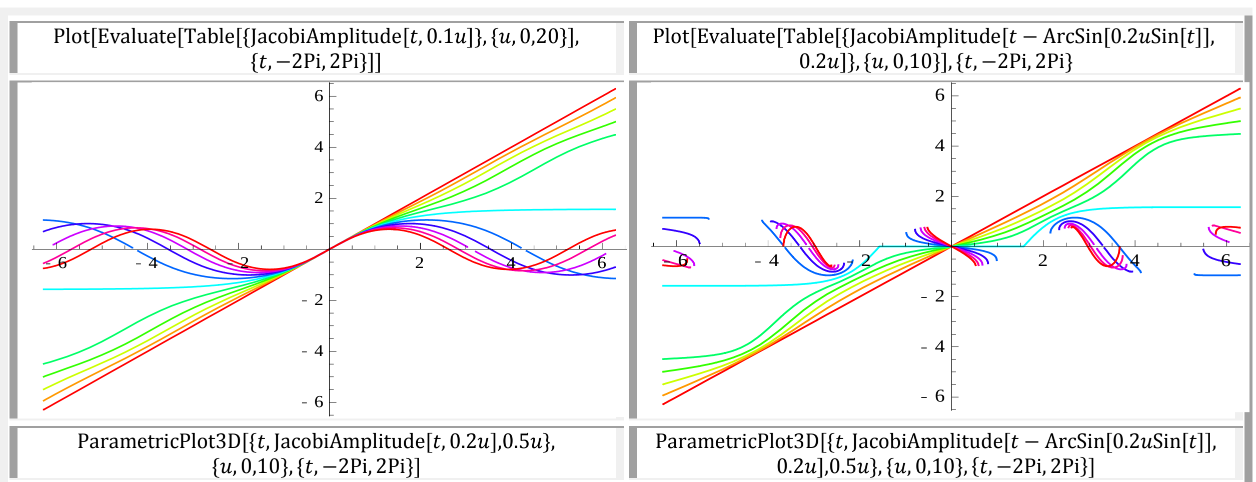
Funcţiile eliptice combinate (**evolutive FEL Ev**) vor fi prezentate în figurile următoare în aceeaşi ordine: **dnev(u, k)** , **cnev(u, k)** , **snev(u, k)** în partea stângă în **2D** ◀ şi în **3D** în partea dreaptă ▶ a figurilor.

În graficele amintite anterior, funcţiile eliptice sunt cele clasice de perioadă **T = 4K(k).** Ele pot fi convertite la perioada de **T = 2π** (şi vor fi prezentate în nota următoare) prin amplificarea variabilei **u** cu :

(1) $\mathbf{T = 4K(k) \rightarrow T = 2\pi : \; u \rightarrow u\frac{K(k)}{2\pi}}$

FEL Ev generate prin cele patru operaţii matematice elementare **(+, —, *, /)** vor fi notate, de exemplu: **dn (u,k)** + **dnex(u,k)** = **dnev(+, u, k)** ş.a.m.d. pentru **(+, —, *, /)**

În fiecare figură sunt indicate ecuaţiile de definire ale **FEL C** cât şi a celor excentrice (**FEL E**).



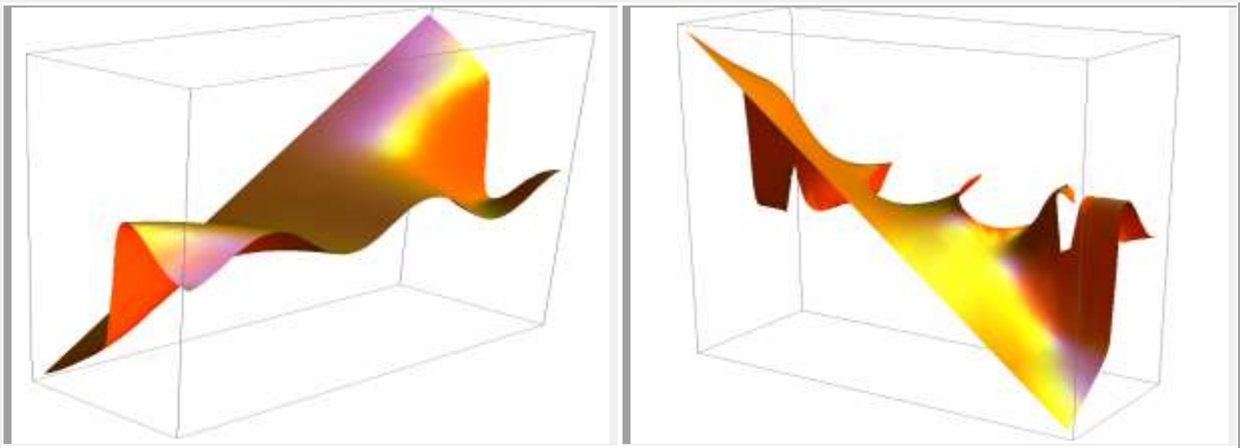
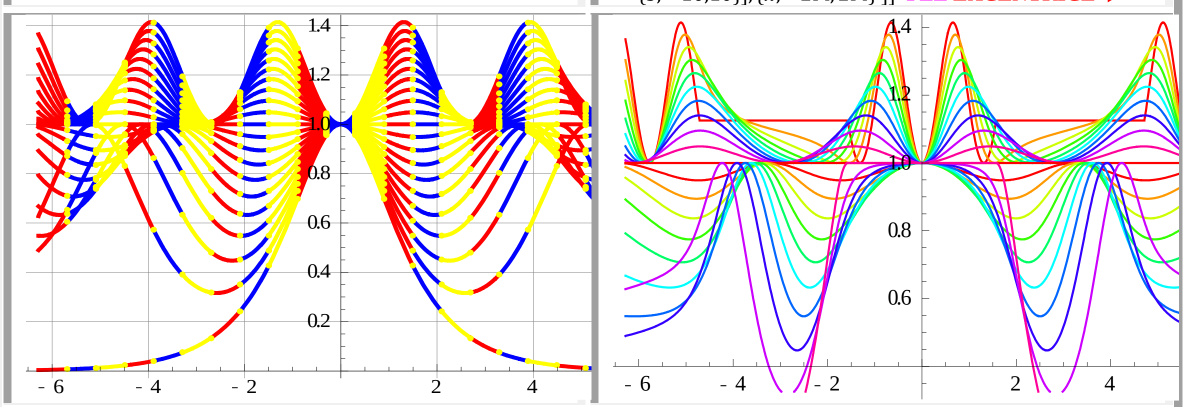


Fig.1,a Graficele FEL centrice am(u, k ≡ s) ◀ şi
excentrice **amex(u, k ≡ s)** ▶ în **2D** ▲ şi în **3D** ▼

Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[u, 0.1s]}, {s, −10,10}], {u, −2I
◀ **FEL CENTRICE**

Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[x
− ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]},
{s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]] **FEL EXCENTRICE** ▶



ParametricPlot3D[{0.5x, 3JacobiDN[x, 0.1s],0.1s},
{s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}

ParametricPlot3D[{0.5x, 3JacobiDN[x
− ArcSin[0.1sSin[x]],
0.1s],0.1s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]

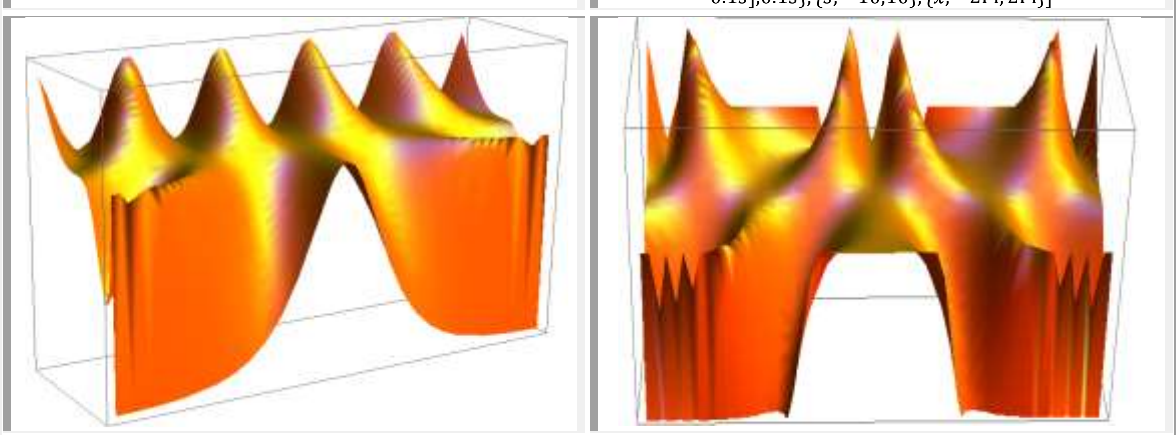
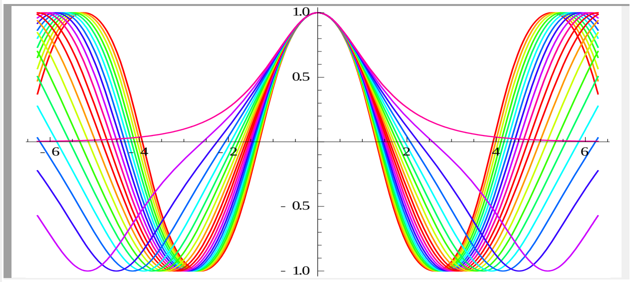
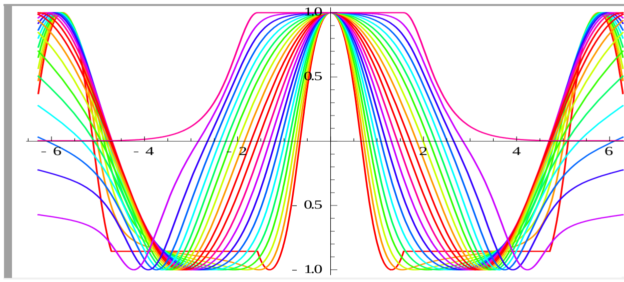


Fig.1,b Graficele FEL centrice dn(u, k ≡ s) ◀ şi
excentrice **dnex(u, k ≡ s)** ▶ în **2D** ▲ şi în **3D** ▼

Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[x, 0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi

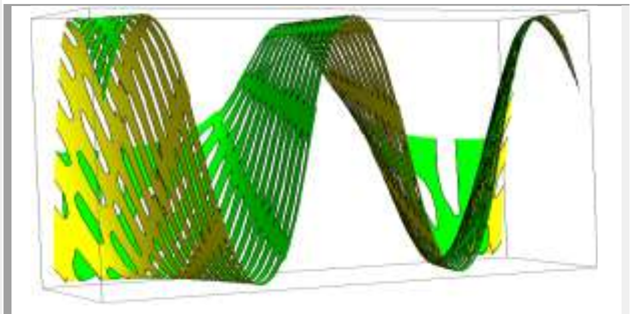
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[−ArcSin[0.1sSin[x]], 0.1s]} , {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]





ParametricPlot3D[{0.5x, 2JacobiCN[x, 0.1s],0.1s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]

ParametricPlot3D[{0.5x, 3JacobiCN[x − ArcSin[0.1sSin[x]], 0.1s],0.1s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



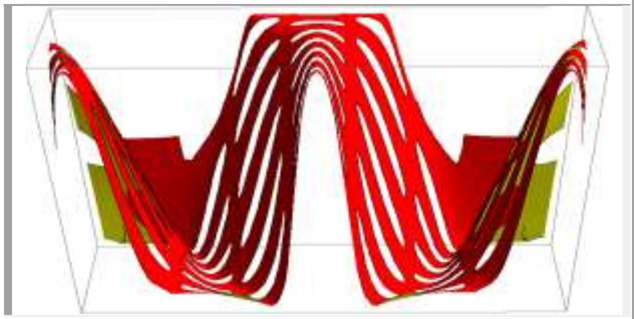
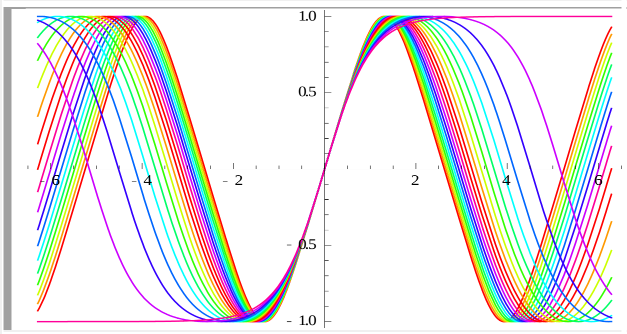
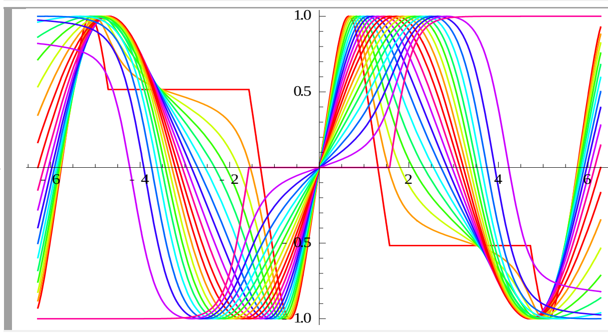


Fig.1,c Graficele FEL centrice cn(u, k ≡ s) ◀ şi excentrice **cnex(u, k ≡ s)** ▶ în **2D** ▲ şi în **3D** ▼

Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x, 0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2P

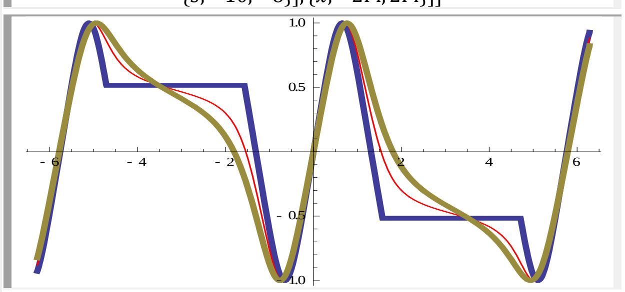
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]

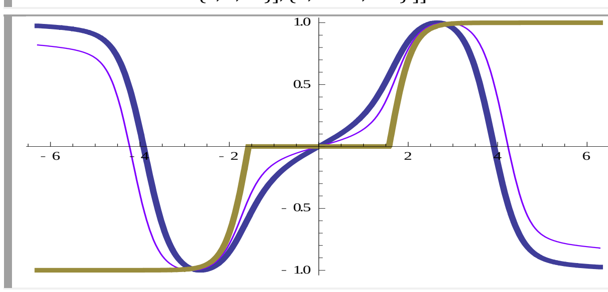




Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]], 0.1s]}, {s, −10, −8}], {x, −2Pi, 2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, 8,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]





ParametricPlot3D[{0.5x, 3JacobiSN[x, 0.1s],0.1s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]

ParametricPlot3D[{0.5x, 3(JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]], 0.1s]),0.1s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]

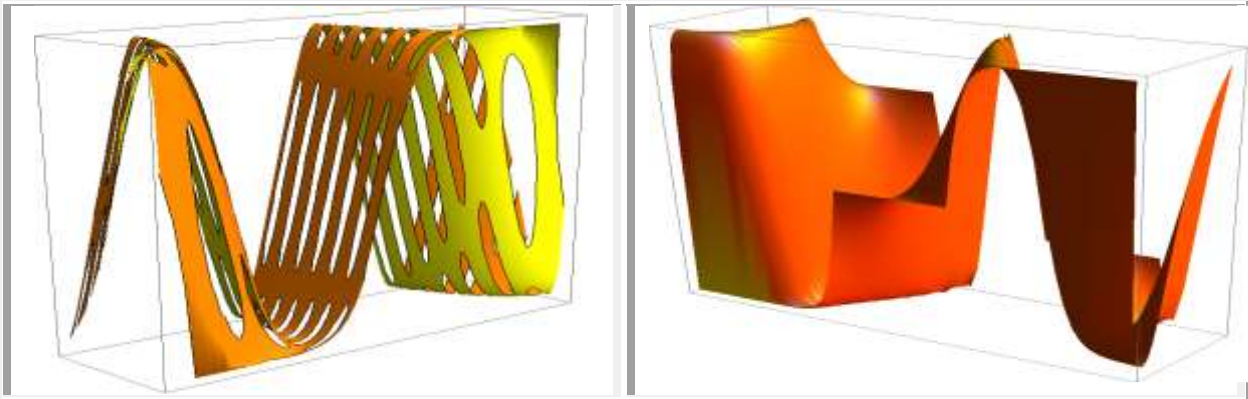
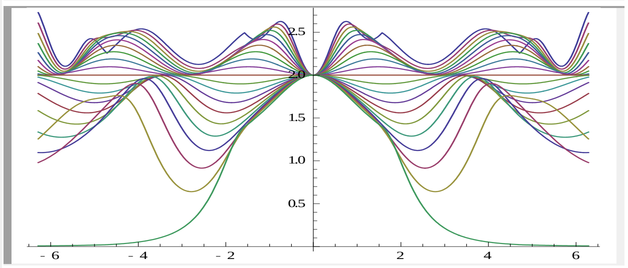


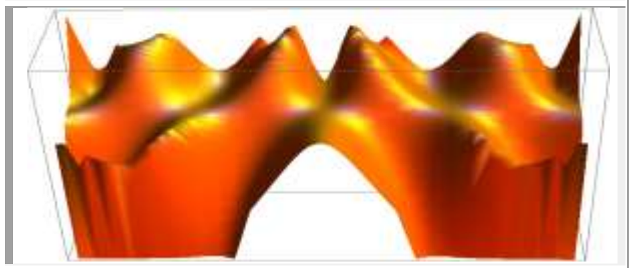
Fig.1,d Graficele FEL centrice sn(u, k ≡ s) ◀ şi excentrice **snex(u, k ≡ s)** ▶ în **2D** ▲ şi în **3D** ▼

2 FUNCŢII ELIPTICE (FEL Ev) dnev(u,k ≡ s) CENTRICOEXCENTRICE

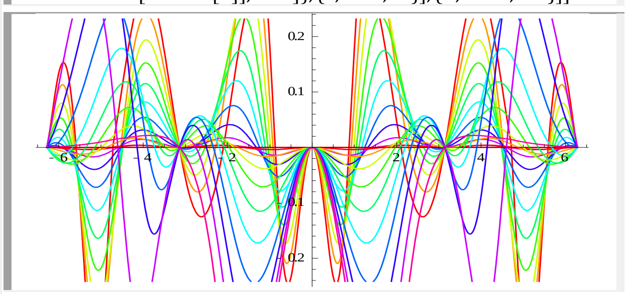
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[u, 0.1s] + JacobiDN[u − ArcSin[0.1sSin[u]], 0.1s]}, {s, −10,10}], {u, −2Pi, 2Pi}]]



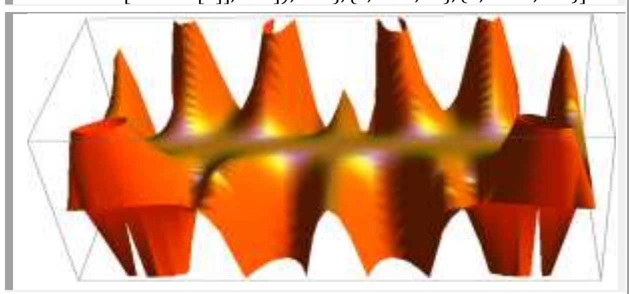
ParametricPlot3D[{0.5u, 2(JacobiDN[u, 0.1s] + JacobiDN[u − ArcSin[0.1sSin[u]],0.1s]),0.2s}, {s, −10,10}, {u, −2Pi, 2Pi}]



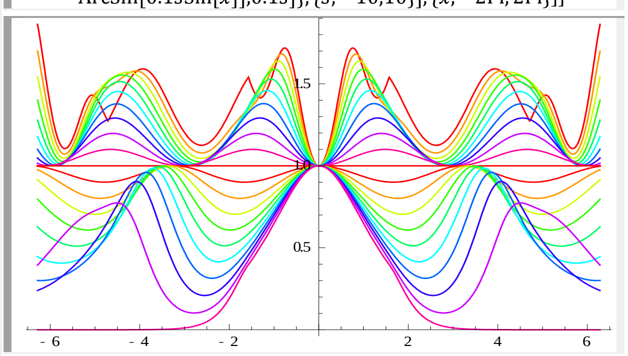
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[u, 0.1s] − JacobiDN[u − ArcSin[0.1sSin[u]], 0.1s]}, {s, −10,10}], {u, −2Pi, 2Pi}]]



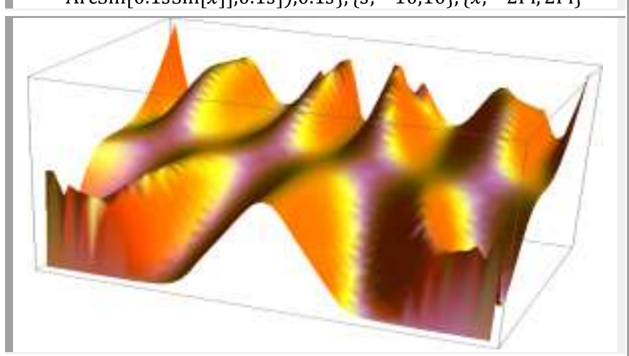
ParametricPlot3D[{0.25x, 4(JacobiDN[x, 0.1s] − JacobiDN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]),0.1s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[x, 0.1s] ∗ JacobiDN[x −ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



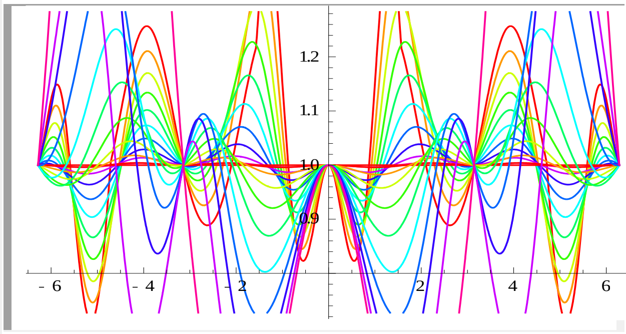
ParametricPlot3D[{0.25x, 2(JacobiDN[x, 0.1s] ∗ JacobiDN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]),0.1s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}



Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[x, 0.1s]/JacobiDN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}

ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]},{s,−10,10}],{x,−2Pi,2Pi}]]

ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]),0.1s},{s,−10,10},{x,−2Pi,2Pi}]



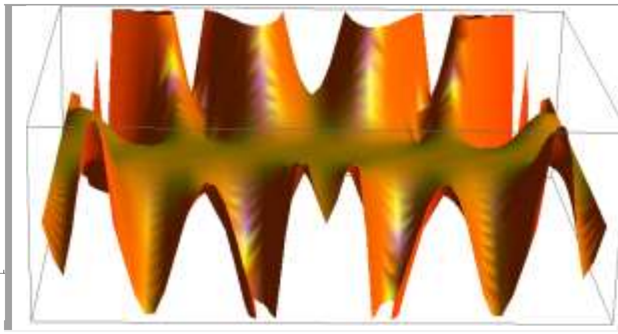
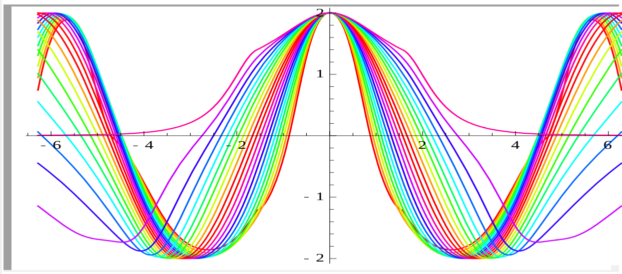


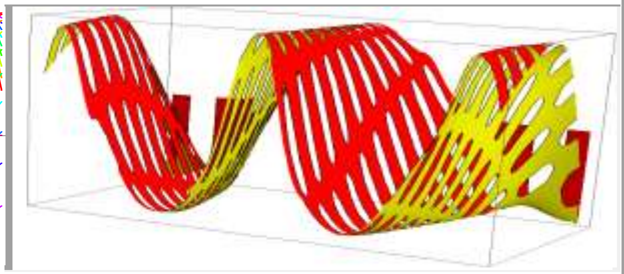
Fig.2 Graficele FEL Ev dn(u,k) + ,—, *, / dnex(u, k ≡ s) = dnev(u, k ≡ s)

3 FUNCŢII ELIPTICE (FEL Ev) cnev(u,k ≡ s) CENTRICOEXCENTRICE

Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[x, 0.1s] + JacobiCN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]

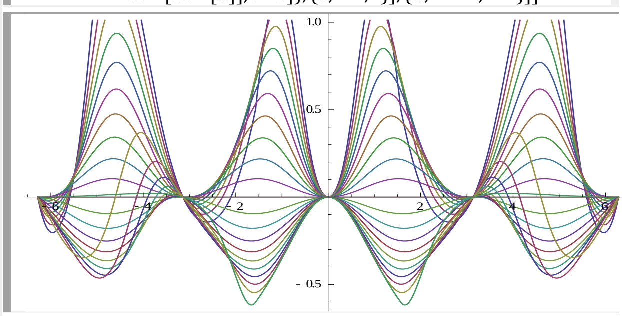
ParametricPlot3D[{x, 2(JacobiCN[x, 0.1s] + JacobiCN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],□0.1s]),0.3s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]

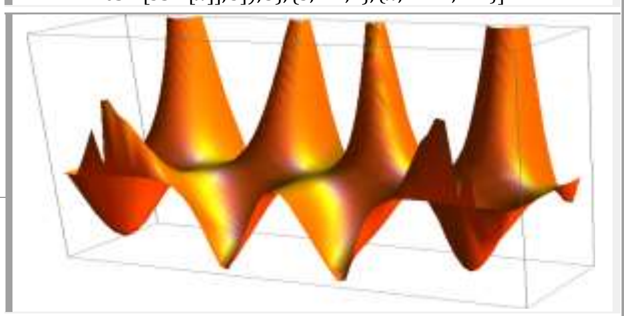




Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[x, s] − JacobiCN[x − ArcSin[sSin[x]],0.1s]}, {s, −1,1}], {x, −2Pi, 2Pi}]]

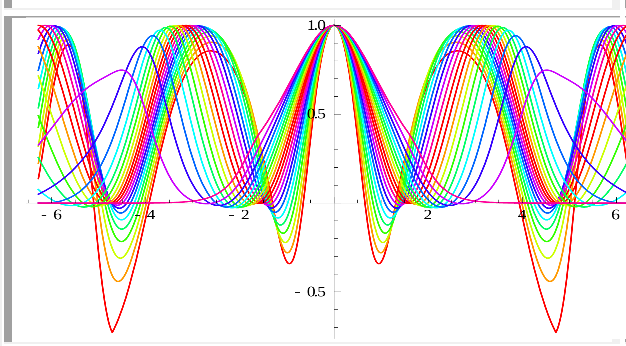
ParametricPlot3D[{0.5x, 3(JacobiCN[x, s] − JacobiCN[x − ArcSin[sSin[x]], s]), s}, {s, −1,1}, {x, −2Pi, 2Pi}]

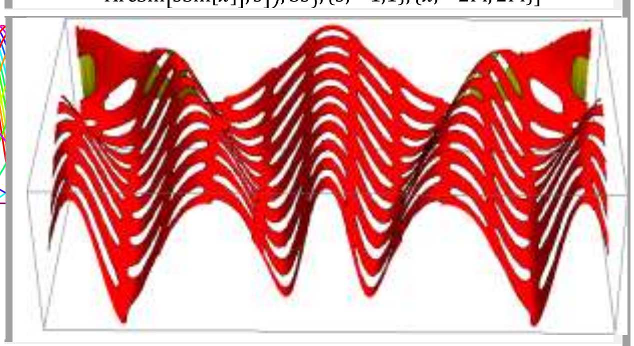




Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[x, s] ∗ JacobiCN[x − ArcSin[sSin[x]], s]}, {s, −1,1}], {x, −2Pi, 2Pi}]]

ParametricPlot3D[{x, 2(JacobiCN[x, s] ∗ JacobiCN[x − ArcSin[sSin[x]], s]), 3s}, {s, −1,1}, {x, −2Pi, 2Pi}]





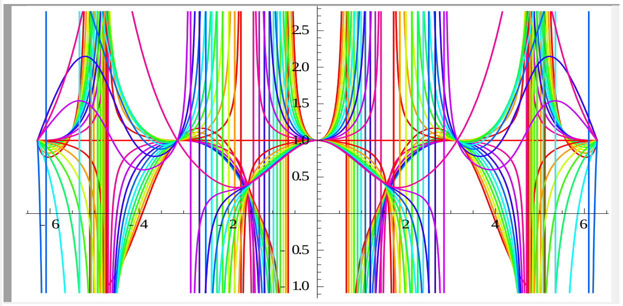
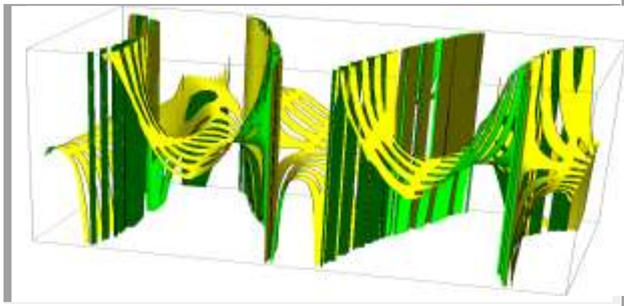
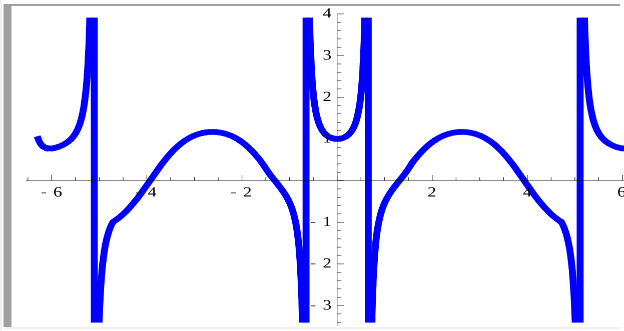
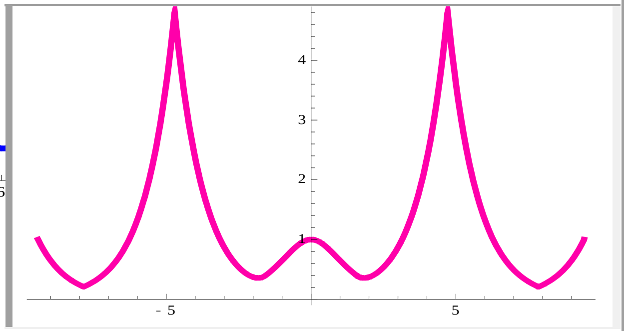
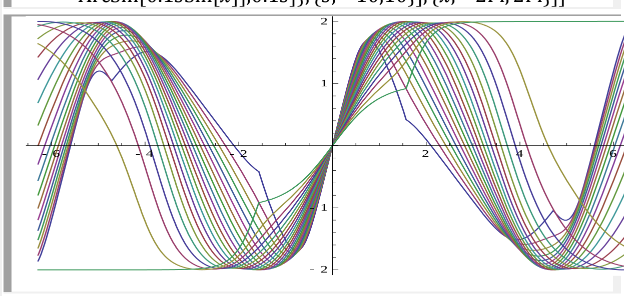
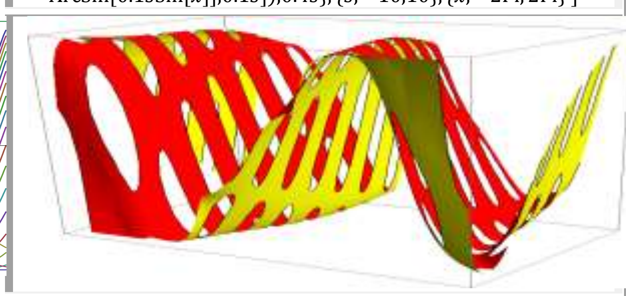
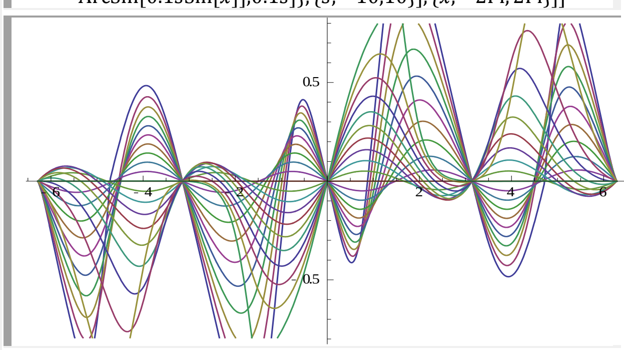
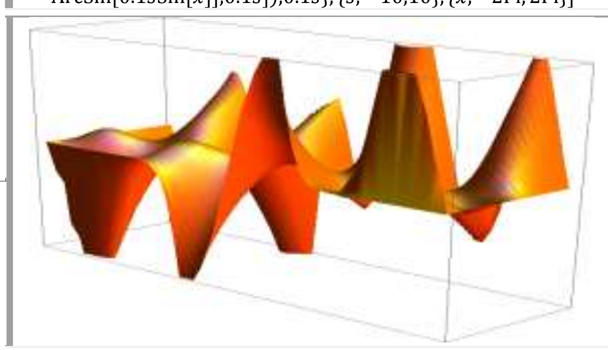
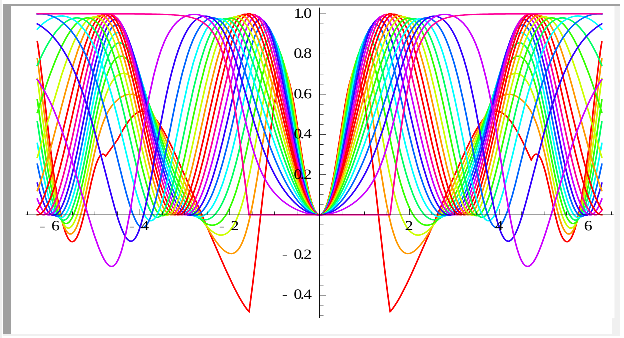
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[x, 0.1s]/JacobiCN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]	ParametricPlot3D[{x, 2(JacobiCN[x, 0.1s]/JacobiCN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]),0.3s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]
	
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[x, s]/JacobiCN[x − ArcSin[sSin[x]], s]}, {s, −1, −1}], {x, −2Pi, 2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[x, s] /JacobiCN[−ArcSin[0sSin[x]], s]}, {s, 1,1}], {x, −3Pi, 3Pi}
	

Fig. 2 Graficele FEL Ev cn(u,k) + ,—, *, / cnex(u, k ≡ s) = dnev(u, k ≡ s)

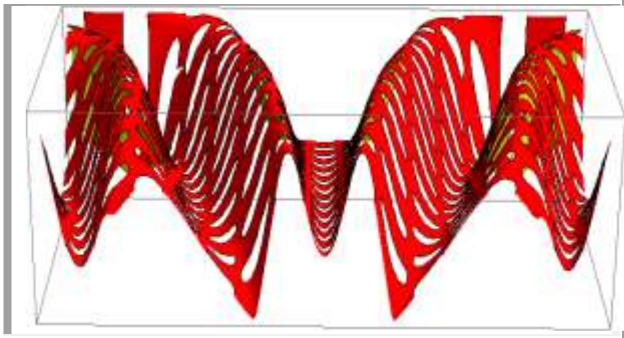
4 FUNCŢII ELIPTICE (FEL Ev) snev(u,k ≡ s) CENTRICOEXCENTRICE

Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x, 0.1s] + JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]	ParametricPlot3D[{x, 3(JacobiSN[x, 0.1s] + JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]),0.4s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]
	
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x, 0.1s] − JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]	ParametricPlot3D[{0.5x, 3(JacobiSN[x, 0.1s] − JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]),0.1s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]
	

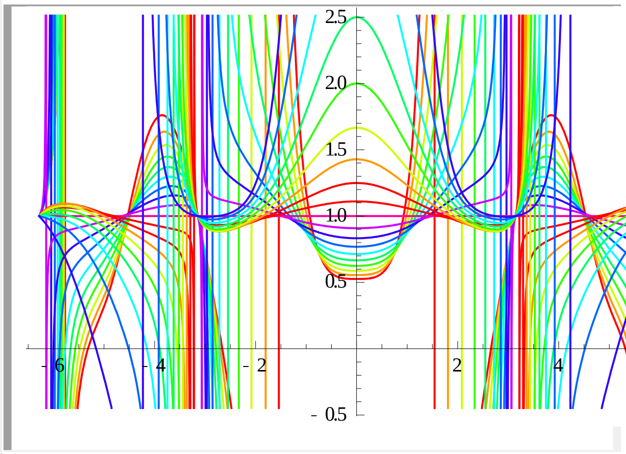
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x, 0.1s] * JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



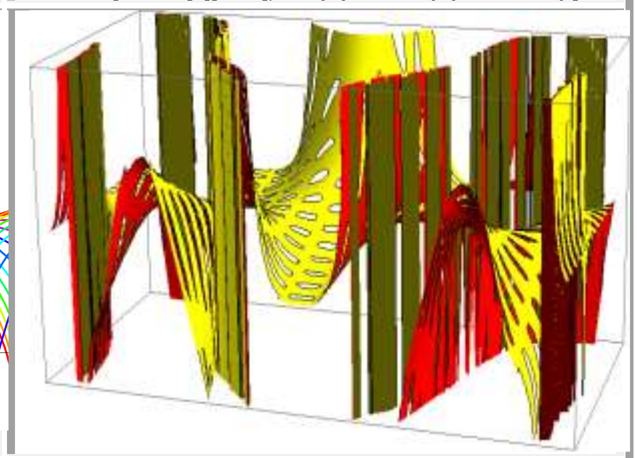
ParametricPlot3D[{x, 3(JacobiSN[x, 0.1s] * JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]),0.3s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]



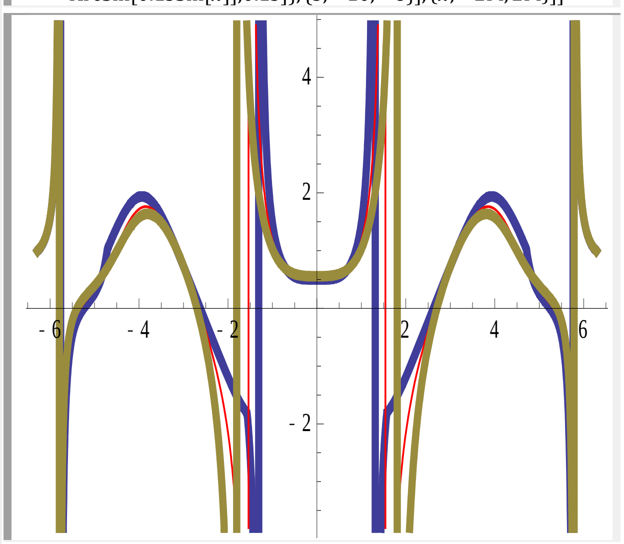
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x, 0.1s]/JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −9,9}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{x, 2(JacobiSN[x, 0.1s]/JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]),0.3s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x, 0.1s]/JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, −10, −8}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[x, 0.1s]/JacobiSN[x − ArcSin[0.1sSin[x]],0.1s]}, {s, 7,9}], {x, −2Pi, 2Pi}]]

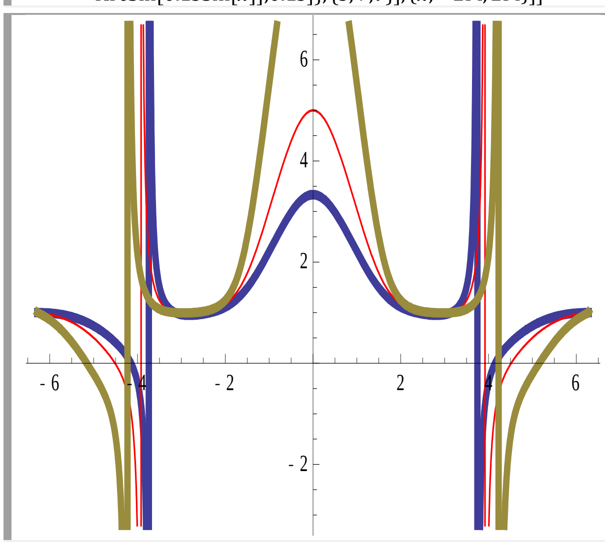
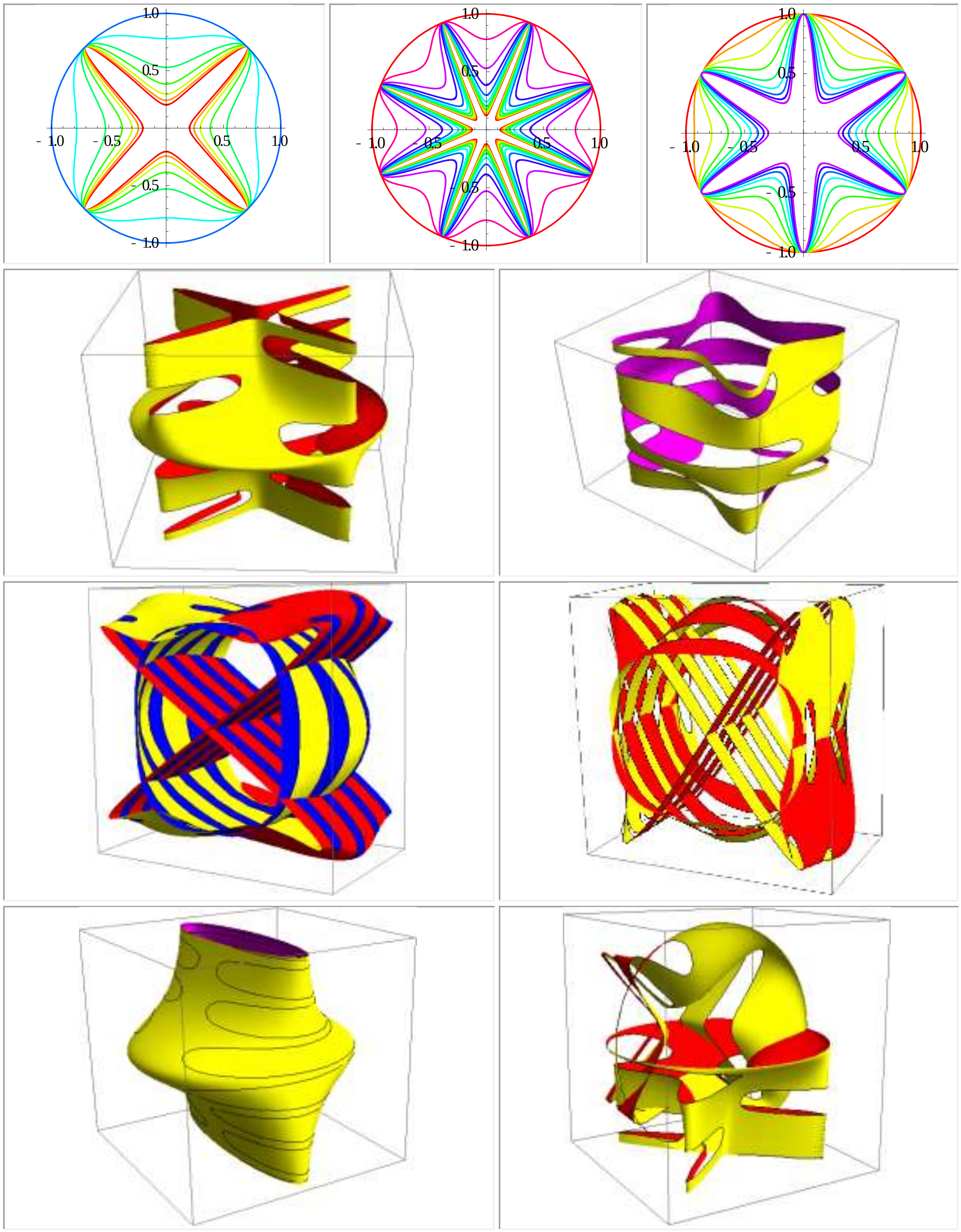


Fig. 3 Graficele FEL Ev sn(u,k) + snex(u, k ≡ s) = snev$^+$(u, k ≡ s)

În unele figuri, cum este şi **figura 3**, au fost prezentate doar câteva grafice considerate interesante sau de interes major.

R O Z E   S U P E R M A T E M A T I C E



Motto: "**Matematicienii** bătrâni **nu mor** niciodată, pur şi simplu **îşi pierd din funcţii"**
Prof. univ. dr. **Ghiocel Moţ**, Prodecan al Facultăţii de Ştiinţe Exacte

În acelaşi timp şi în aceleaşi condiţii, **inginerii** bătrâni **le multiplică** la infinit
şi **le ridică în slăvi**, evidenţiindu-le mareţia lor: a **funcţiilor !**
Autorul, pensionar UPT

CAPITOLUL IX :

FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE ELIPTICE CENTRICOEXCENTRICE DE PERIOADĂ 2π

1. INTRODUCERE: FUNCŢII ELIPTICE, FUNCŢII EXCENTRICE ŞI UNELE ECHIVALENŢE ALE LOR

Cele mai uzuale **funcţii eliptice Jacobi (FEJ)** sunt cosinusul eliptic **cn**(**u,k**), sinusul eliptic **sn**(u,k), derivată eliptică **dn**(u,k) — denumire dată de noi prin comparaţie / similitudine cu **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM-CE**) **derivată excentrică dexθ** — şi amplitudine **Jacobi am(u,k),** cea care face trecerea din domeniul **circular centric** (**CC**), de la **cosφ** şi **sinφ**, în cel **eliptic centric** (**EC**), la **cnu** şi snu, exprimate de relaţiile:

(1)
$$\begin{cases} am(u,k) = \varphi(u) = u - \frac{mu^3}{6} + \frac{1}{120}(4m+m^2)u^5 + \frac{(-16m-44m^2-m^3)u^7}{5040} + O[u]^9 \\ cn(u,k) = \cos\varphi(u) = \cos[am(u,k)] \\ sn(u,k) = \sin\varphi(u) = \sin(am(u,k)] \\ dn(u,k) = \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi} = \frac{d\varphi}{du} = \frac{d[am(u,k)]}{du} \end{cases}$$

unele **FEJ**, cu o estetică deosebită, sunt prezentate de pe INTERNET, pentru frumuseţea lor, în **figura 3**.

Pentru comparaţie, prezentăm ecuaţiile anterioare din domeniul **excentric** (**FSM-CE**):

(1')
$$\begin{cases} aex_{1,2}\,\theta \equiv aex_{1,2}[\theta, S(s,\varepsilon)] = \alpha_{1,2}(\theta) = \theta - \beta_{1,2} = \begin{cases} aex_1\,\theta = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ aex_1\,\theta = \theta - \pi + \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \end{cases} \\ cex_{1,2}\theta \equiv cex_{1,2}[\theta, S(s,\varepsilon)] = \begin{cases} \cos\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} \\ \cos\{\theta - \pi + \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} \end{cases} \\ sex_{1,2}\theta \equiv sex_{1,2}[\theta, S(s,\varepsilon)] = \begin{cases} \sin\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} \\ \sin\{\theta - \pi + \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} \end{cases} \\ dex_{1,2}\theta = \frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} \equiv dex_{1,2}[\theta, S(s,\varepsilon)] = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\pm\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases}$$

Ele au două determinări: principală **1** şi secundară **2**, corespunzătoare intersecţiei celor două semidrepte **excentrice** (cu originea în **excentrul S**) d = $d^+ \cup d^-$ şi turnantă în jurul excentrului **S**(s, ε), cu cercul unitate sau trigonometric **C(O,1).**

Există o funcţie **supermatematică** (**SM**) similară **FEJ am(u,k),** din care cauză este denumită la fel, adică **amplitudine excentrică aexθ** (1'), care face trecerea din **domeniul centric,** de la **cosα** şi **sinα**, în domeniul **excentric,** la **cexθ** şi **sexθ**, de la matematica **centrică (MC)** la matematica **excentrică (ME),** cele două entităţi fiind cele două părţi ale **supermatematicii (SM)**. Adică **SM = MC ∪ ME.**

Expresiile matematice ale primei determinări ale unor **FSM—CE,** dintre cele asemănătoare **FEJ**, sunt:

(2) $$\begin{cases} aex\theta = \alpha(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ cex(\theta,S) = cos\alpha(\theta) = \cos[aex\theta] \\ sex(\theta,S) = \sin\alpha(\theta) = \sin[aex\theta] \\ dex(\theta,S) = \Delta\alpha(\theta) = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d[aex(\theta,S)]}{d\theta} = \frac{rex\theta}{bex\theta} \end{cases}$$

Comparând cele două grupe de relaţii (1) cu (1') şi (2), similitudinile sunt evidente, cu privire la trecerile din: **centric** → eliptic şi din **centric** → excentric, treceri care sunt reprezentate grafic în **figura 1**.

Există şi un caz, în care **funcţia eliptică Jacobi** (**FEJ**) **dn(u,k)**, exprimată prin radicalul din (1) să fie identică cu **FSM-CE cos[β(θ)]**, în care, **β(θ)** = **arcsin[s.sin(θ – ε)]** este funcţia **beta excentrică** de variabilă **excentrică θ**, adică pentru o excentricitate unghiulară **ε** = 0 :

(3) **cos[bex(θ, s)]** = **cos[β(θ)]** = **cos[arcsin[s.sinθ]]**, dar **cos[arcsinx]** = $\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$, astfel că

(3') **cos[bex(θ, s)]** = $\sqrt{1 - \mathbf{s^2} sin^2\boldsymbol{\theta}}$

şi corespunde cu ultima relaţie din (1), identitatea putându-se constata şi comparând grafice din **figura 2**.

Dacă demonstrarea identităţii funcţiilor anterior aminitite a fost simplă, în cazul funcţiilor **Neville theta C** este cu mult mai dificilă, ţinând cont de relaţiile lor de definire (4) şi (5), de aceea, ne vom rezuma la demonstrarea grafică şi la determinarea diferenţelor dintre cele două funcţii, care sunt nule (**Fig.4** ◀) !

Funcţiile **Neville theta s, c, d, n** sunt definite de ecuaţiile (**Abramowitz** and **Steguns**' " Handbook of Mathematical Functions"):

(4) $$\begin{cases} \vartheta s(u,k) = (2K/\pi)\, \vartheta_1(z,q) / \vartheta'_1(0,q) \\ \vartheta s(u,k) = (2K/\pi)\, \vartheta_1(z,q) / \vartheta'_1(0,q) \\ \vartheta d(u,k) = \vartheta_3(z,q) / \vartheta_3(0,q) \\ \vartheta n(u,k) = \vartheta_4(z,q) / \vartheta_4(0,q) \end{cases}$$

în care **funcţiile theta** $\boldsymbol{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4}$ sunt exprimate de ecuaţiile

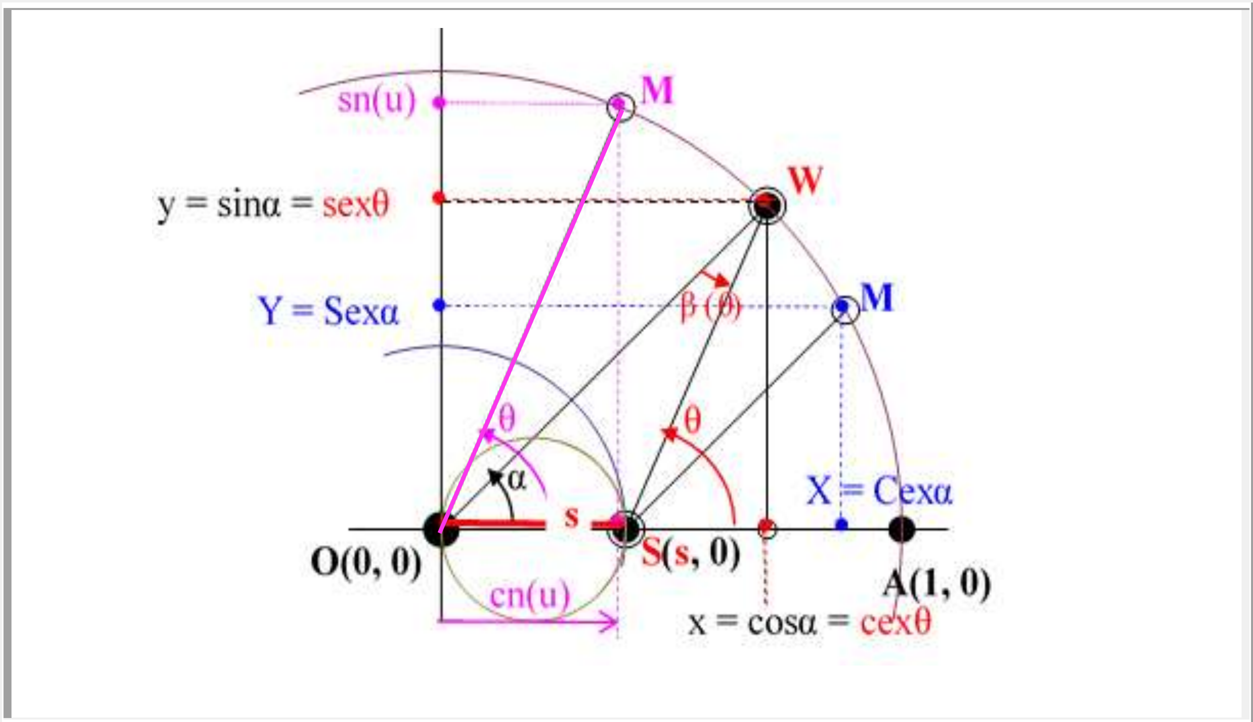
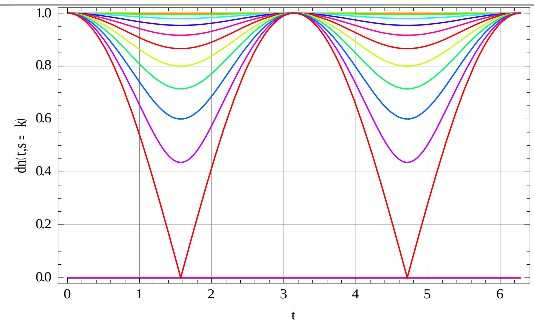


Fig.1 Funcţii eliptice **Jacobi** (**FEJ**) **cn(u,k)** şi **sn(u,k)** prezentate pe cercul unitate / trigonometric

Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 − $(s.\sin[t])^2$]}, {s, 0, 1}]], {t, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{cos[arcsin[s. sin[t]]]}, {s, 0,1}]], {t, 0,2Pi}]]



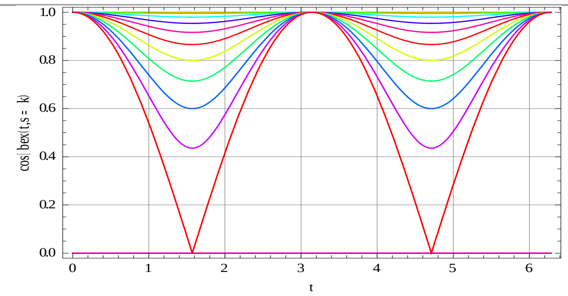
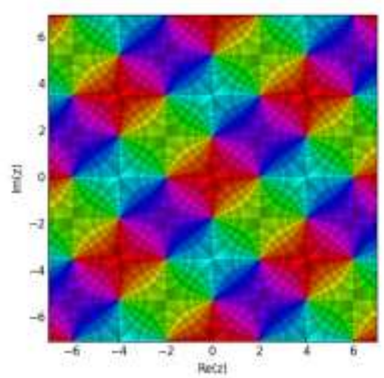
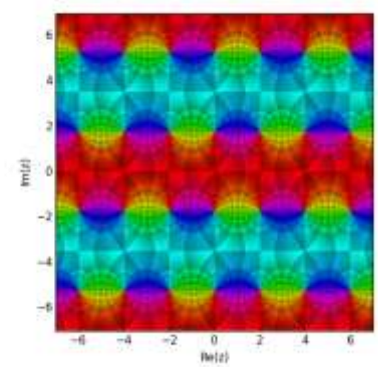


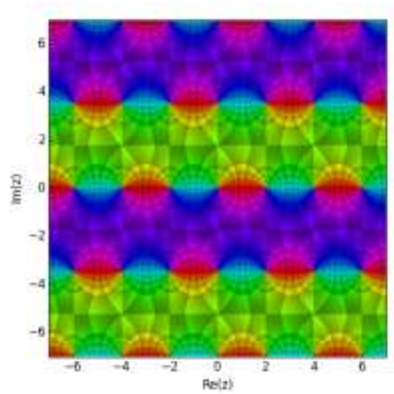
Fig. 2 Graficele **FEJ dn(u,k)** exprimate cu relaţia **(1)** ◄
şi prin **FSM-CE cos[bex(θ, s)] = cos[arcsin[s.sinθ]]** ►



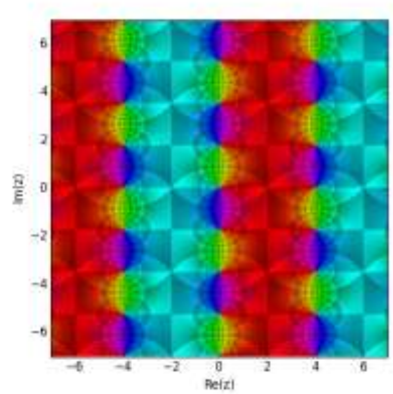
cn(z, m)



dn(z, m)



sc(z, m)



sn(z, m)

Fig. 3 Functii eliptice Jacobi în planul complex ($m = k^2$)
Reproducere după https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_elliptic_functions

(5) $$\begin{cases} \vartheta_1(z,q) = 2\frac{q\,1}{4\,\Sigma n} = 0\infty\,(-1)\,nq\,n(n+1)\ \sin[(2n+1)z] \\ \vartheta_2(z,q) = 2\frac{q\,1}{4\,\Sigma n} = 0\infty\,q\,n(n+1)\ \cos[(2n+1)z] \\ \vartheta_3(z,q) = 1 + 2\,\Sigma n = 1\infty\,q\,n^2\,cos[2nz] \\ \vartheta_4(z,q) = 1 + 2\,\Sigma n = 1\infty\,(-1)\,nq\,n^2\,cos[2nz] \end{cases}$$

În aceste condiţii se poate afirma, cu mare probabilitate, că există egalitate între funcţia lui **Eric Harold Neville** **Neville theta C,** de variabilă modificată, astfel încât, variabila **u** trece în **funcţia supermatematică circu-lară excentrică** (**FSM—CE**) **amplitudine excentrică** de variabilă excentrică **θ** **:** **u → aex(θ, s).**

Altfel spus, există egalitatea:

(6) Neville ThetaC{**aex$_{AS}$**[**θ**, **S**(**s**, **ε** = 0)]} = cex[θ, S(s, ε = 0)], în care

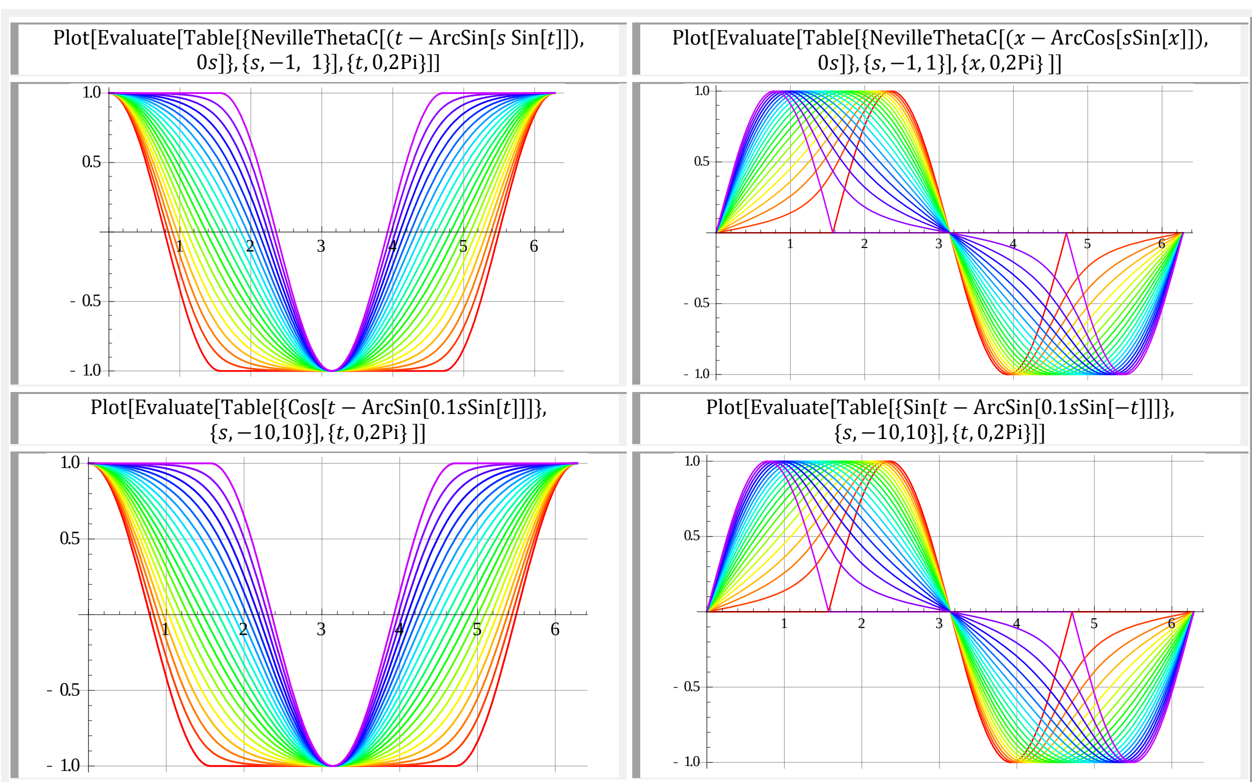
(7) **aex$_{AS}$**[**θ**, **S**(**s**, **ε** = 0)]}= θ — arcsin[s sin(θ - ε)]

cu graficele din **figura 4** ◀, cu erori minime, nule, precum şi echivalenţa

(8) Neville ThetaC{**aex$_{AC}$**[**θ**, **S**(**s**, **ε** = 0)]} = sex[θ, S(s, ε = 0)], în care

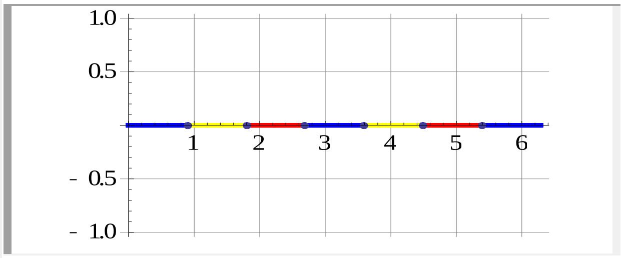
(9) **aex$_{AC}$**[**θ**, **S**(**s**, **ε** = 0)]}= θ — arccos[s sin(θ - ε)] şi cu graficele din **figura 4** ▶ şi cu diferenţe ∍, sau cu erori de aproximare sub **2*10^{-16}**, adică ∍ < **2*10^{-16}.**

În **figura 5** sunt prezentate comparativ funcţiile **FE Neville ThetaC** ▲◀ şi cexθ ▼◀ care, la prima vedere par identice, dar ele sunt net diferite aşa cum se ilustrează prin prima diferenţă. Numai prin introducerea şi a excentricităţii unghiulare ε = — π, precizia de aproximare se îmbunătăţeşte considerabil, ajungând să scadă sub valoarea de 1*10^{-16}, adică, ∍ < 1* 10^{-16} . Pentru funcţiile **FE Neville ThetaD** şi **FE Neville ThetaN** autorul nu a găsit, încă, echivalenţele lor în matematica excentrică (**ME**), dacă acestea ar exista (?).



BUPT

Plot[Evaluate[Table[{Cos[x − ArcSin[mSin[x]]] − NevilleThetaC[2(x − ArcSin[mSin[x]]) EllipticK[0]/Pi , 0m]}, {m, −1, 1}], {x, 0,2Pi}



Plot[Evaluate[Table[{Sin[x + ArcSin[mSin[x]]] − NevilleThetaC[(x − ArcCos[mSin[x]]),0m]}, {m, −1, 1}], {x, 0,2Pi}

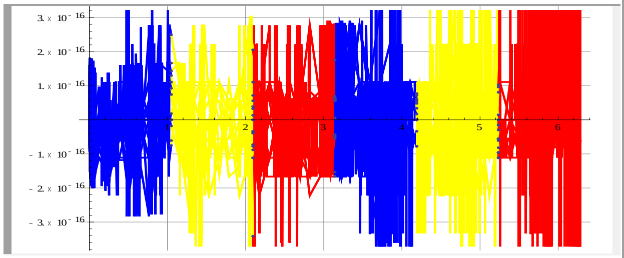
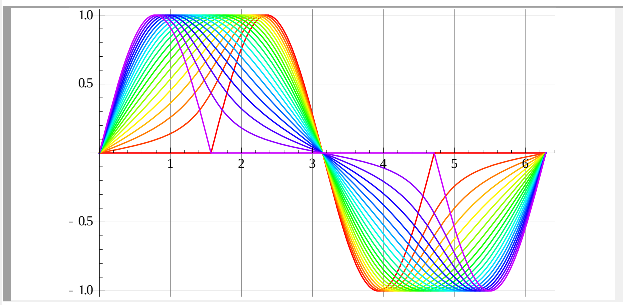
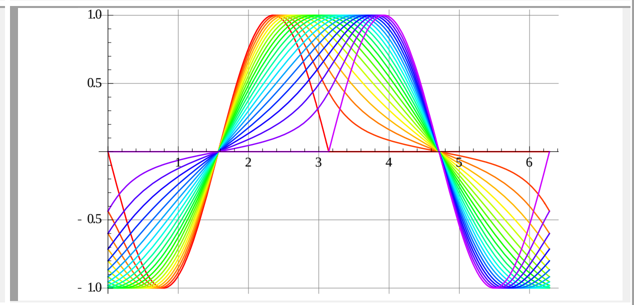


Fig. 4 Graficele **FE Neville ThetaC** exprimate cu relaţia **(1)** ◄
şi prin **FSM-CE** **aex$_{AC}$[θ, S(s, ε = 0)]}** ►

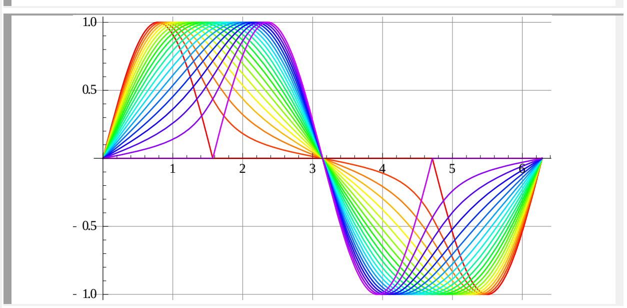
Plot[Evaluate[Table[{NevilleThetaC[(x − ArcCos[0.1mSin[x]]), 0m]}, {m, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



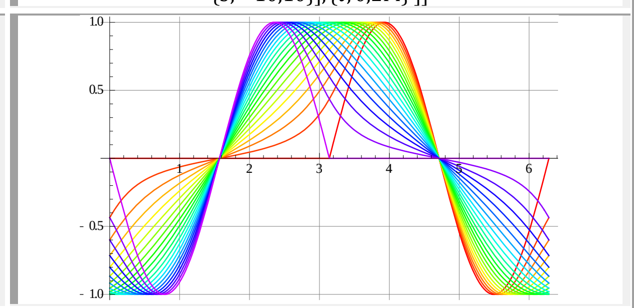
Plot[Evaluate[Table[{−NevilleThetaC[(−ArcSin[0.1mSin[x − Pi/2]]), 0m]}, {m, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



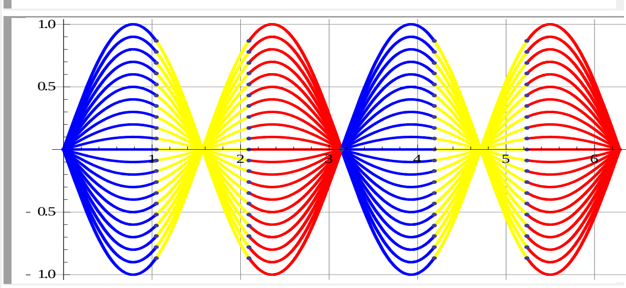
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



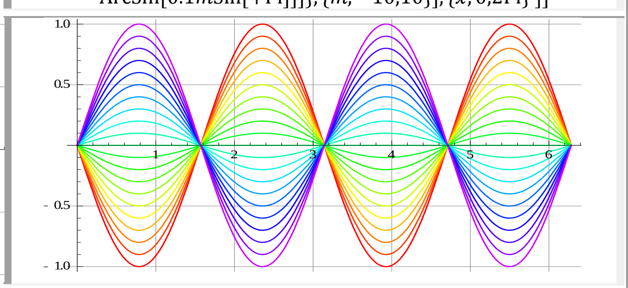
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − Pi/2 − ArcSin[0.1sSin[t − 3 Pi/2]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{NevilleThetaC[t − ArcCos[0.1sSin[t]],0s] − Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{NevilleThetaC[(x + ArcCos[0.1mSin[x]]),0m] + Sin[x − ArcSin[0.1mSin[+Pi]]]}, {m, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



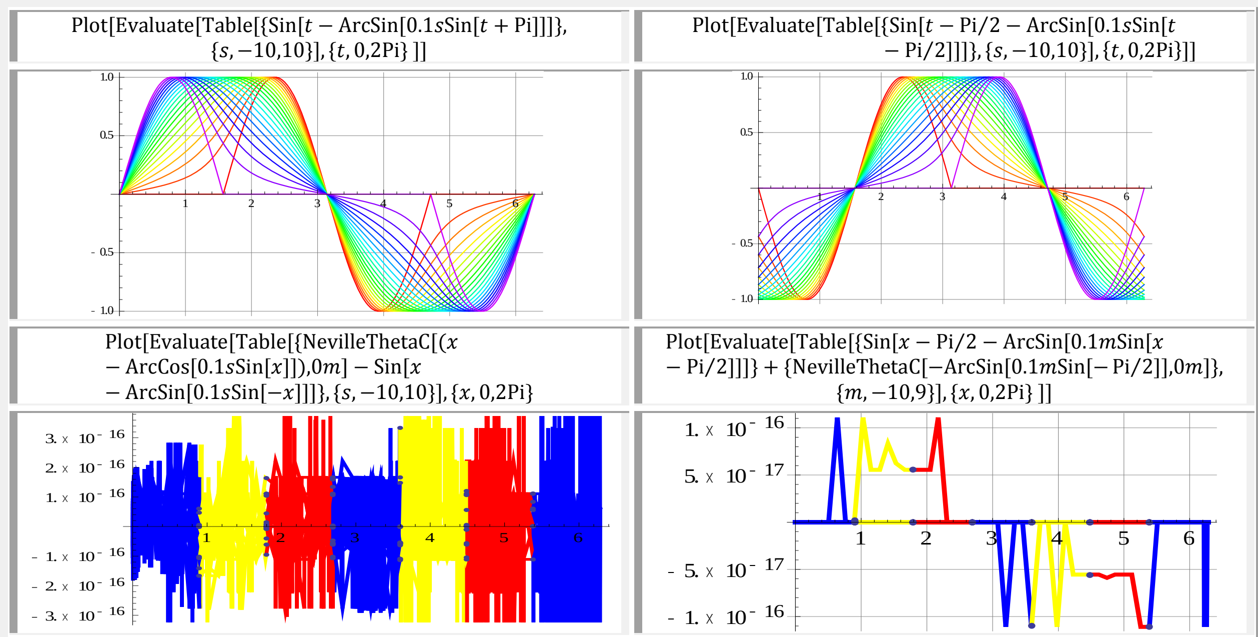
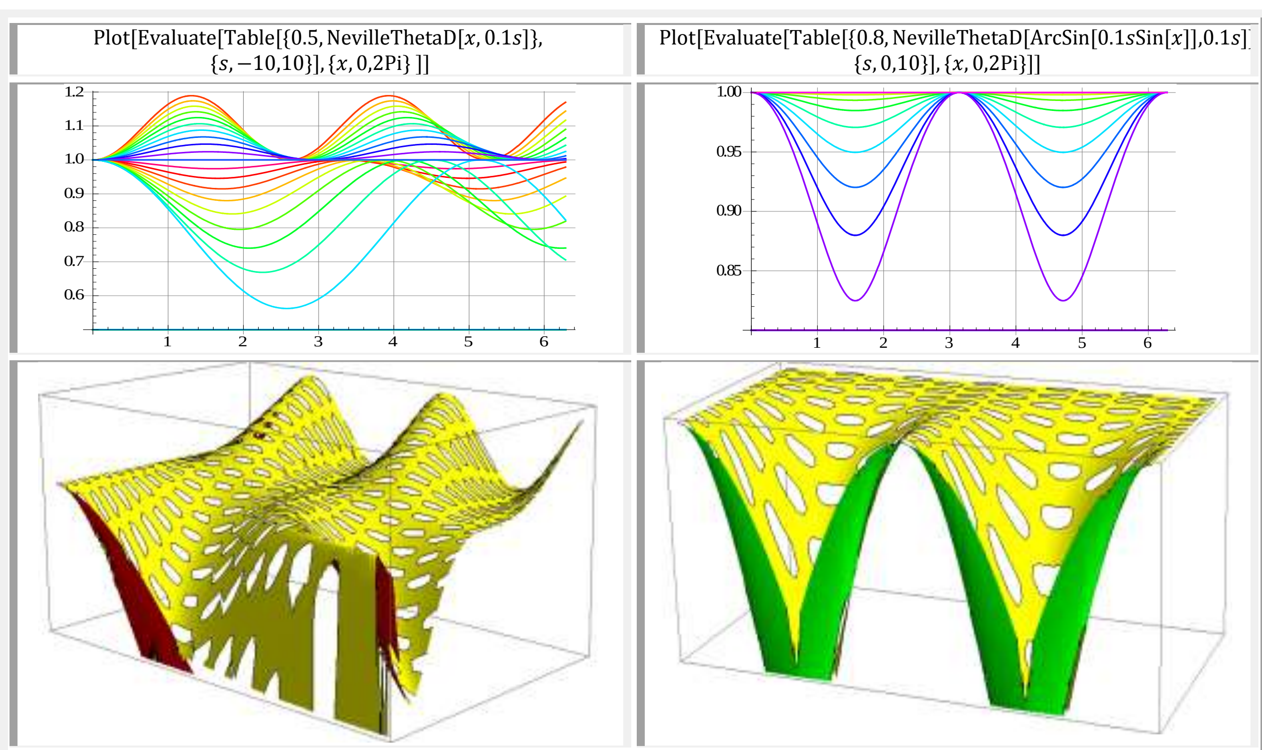


Fig. 5 Graficele **FE Neville ThetaC** de aex$_{AC}$[θ, S(s, ε = 0)]}, exprimate prin **FSM-CE sex[θ, S(s, ε = -π)]◀** şi **— FE Neville ThetaC** de **—** aex$_{AS}$[θ, S(s, ε = 0)]} ▶

Alte **FE Neville Theta D, N, C$_M$ şi D$_M$ (M → modificate)** sunt prezentate în **2D** şi în **3D** în **figura 6.**



BUPT

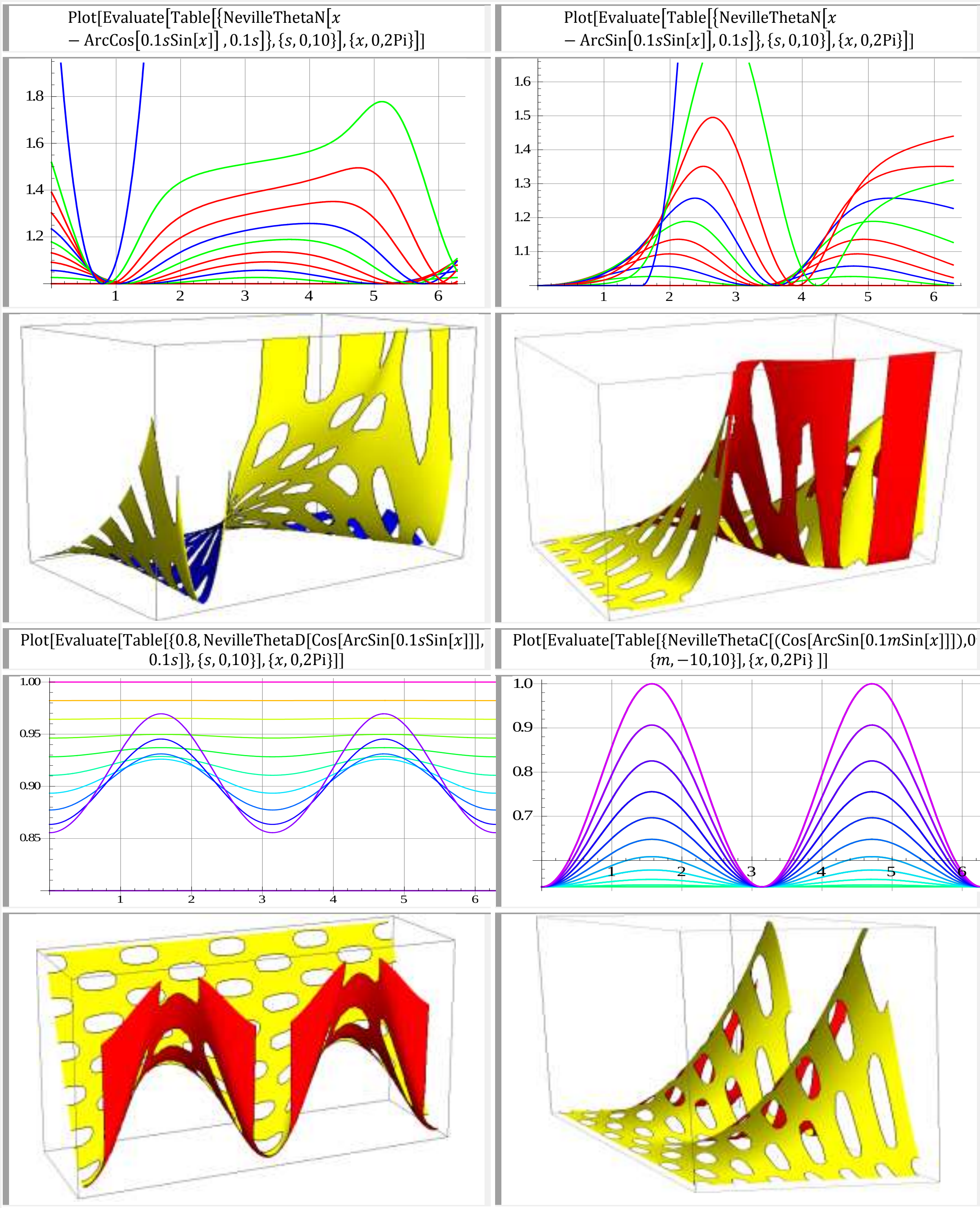


Fig. 6 Graficele **FEJC** NevilleTheta**D** şi **N** ▲◄ si **NevilleThetaD** şi **N** excentrică ▲►
precum şi NevilleTheta D şi **C** excentrice **modificate**▼

2. COSINUS ELIPTIC cn(u,k) de T = 2 π ŞI COSINUSUL ELIPTIC EXCENTRIEC cnex(u,k)

Funcţia eliptică **Jacobi centrică** este definită prin dezvoltarea în serie de puteri a variabilei u :

(10) **cn(u, m)** $\cong 1-\frac{u^2}{2}+\left(\frac{1}{24}+\frac{m}{6}\right)u^4+\frac{1}{720}(-1-44m-16m^2)u^6+O[u]^8$,

în care modulul **m = k²**, cât şi prin seria trigonometrică :

(11) **cn(u, m)** $\cong \cos[u]+(\frac{1}{4}z.\sin[u]-\frac{1}{8}\sin[u]\sin[2u])m+O[m]^2$, **m = k²**

Relaţii prezentate în **MATHEMATICA 8** a lui **Stephan Wolfram** cu un număr redus de termeni.

În lucrarea **Abramowitz** and **Steguns**' " Handbook of Mathematical Functions" sunt prezentate cu un număr mai mare de termeni:

(10') **cn(u, k)** $= 1-\frac{1}{2\,!}u^2+\frac{1+4k^2}{4\,!}u^4-\frac{1+44k^2+16k^4}{6\,!}+\frac{1+408\,k^2+912\,k^4+64\,k^6}{8\,!}-\cdots$

Prin înlocuirea variabilei u cu funcţia care face trecerea din matematica **centrică** în cea excentrică, adică :

(12) aex(u, **s** = m) = u – arcsin(**s**. sinu)

şi prin înlocuirea ei în (1) sau în (2) se obţin **FSM—EE cnex[θ, S(s, ε = -π)]**, adică :

(13) $1-\frac{[\text{u}-\arcsin(\mathbf{s}.\text{sinu})]^2}{2}+\left(\frac{1}{24}+\frac{m}{6}\right)[\text{u}-\arcsin(\mathbf{s}.\text{sinu})]^4+\frac{1}{720}(-1-44s-16\boldsymbol{s}^2)$

(14) $*\,u[\text{u}-\arcsin(\mathbf{s}.\text{sinu})]^6+O[[\text{u}-\arcsin(\mathbf{s}.\text{sinu})]]^8$,

sau

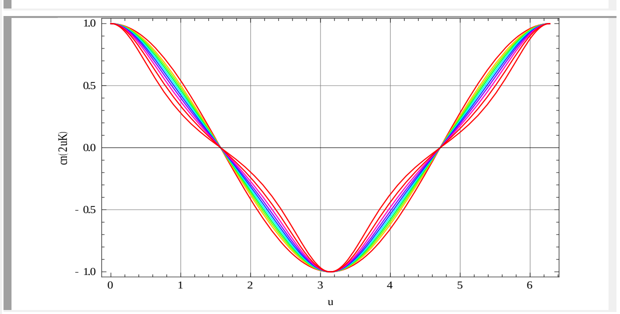
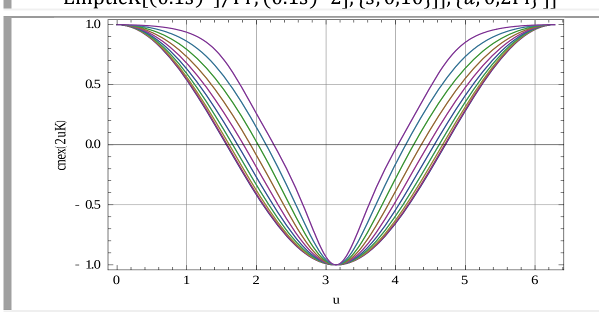
(15) $\text{Cos}[\text{u}-\arcsin(\mathbf{s}.\text{sinu})]+(\frac{1}{4}u\text{Sin}[\text{u}-\arcsin(\mathbf{s}.\text{sinu})]-$

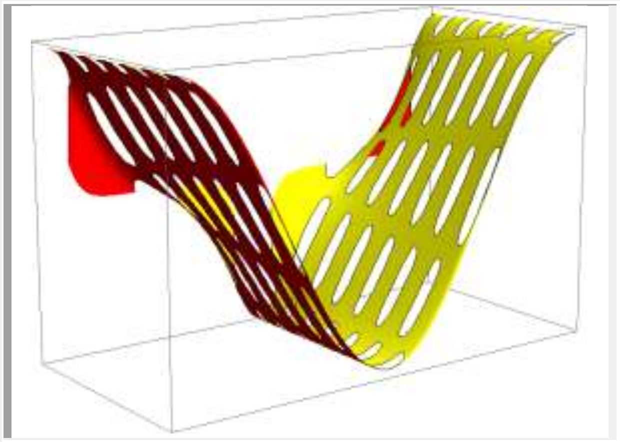
$\frac{1}{8}\text{Sin}[\text{u}-\arcsin(\mathbf{s}.\text{sinu})]\text{Sin}\{2[\text{u}-\arcsin(\mathbf{s}.\text{sinu})\}])\boldsymbol{s}+O[\boldsymbol{s}]^2$

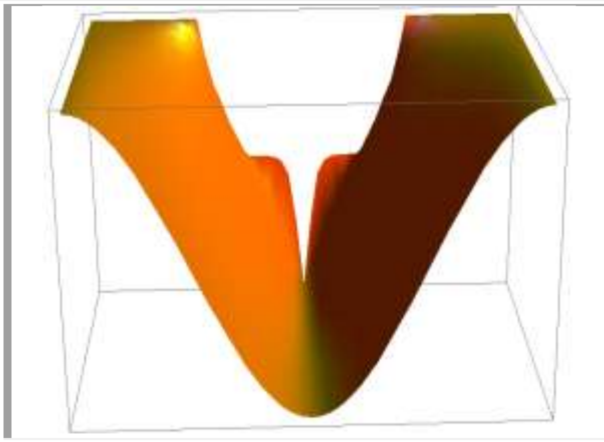
Utilizând aceste serii, graficele funcţiilor eliptice sunt **extrem de diferite** de cele "reale" reprezentate prin seriile infinite, cum este seria (1") a lui **cn(u, k):**

(10") **cn(u, k)** $= \frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\,\boldsymbol{cos}(2n-1)\frac{\pi.u}{2K}$, în care, $\mathbf{q}=\boldsymbol{e}^{-\frac{\pi K\prime}{K}}$

Pentru reprezentarea graficelor funcţiilor eliptice se vor folosi notaţile din **Matematica 8** în "spatele" cărora există, cu siguranţă, un număr considerabil de termeni care apropie mult mai mult reprezentările grafice de realitate. Astfel au fost reprezentate, în 2D şi în 3D, **FEJ centrice cn(u, m)** precum şi cele **excentrice cnex(θ ≡ u, s ≡ m)** din **figura 7** şi următoarele.

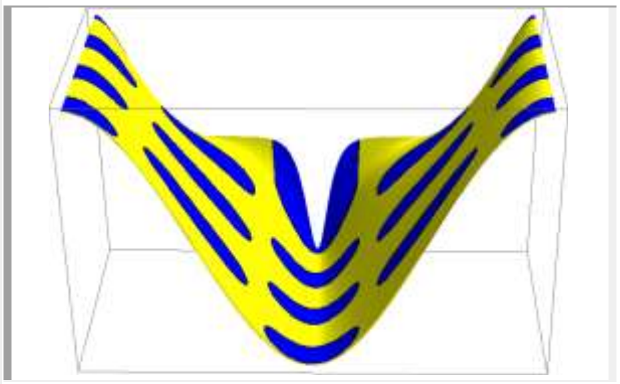
Plot[Evaluate[Table[JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5], {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[JacobiCN[2(u − ArcSin[(0.1s)^2Sin[u]]) EllipticK[(0.1s)^2]/Pi , (0.1s)^2], {s, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]
	
ParametricPlot3D[{u, 2JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5],0.3n}, {n, 0,10}, {u, 0,2Pi}]]	ParametricPlot3D[{u, JacobiCN[2(u − ArcSin[(0.1s)^2Sin[u]]) EllipticK[(0.1s)^2]/Pi , (0.1s)^2],0.2s}, {s, 0,10}, {u, 0,2Pi}]





ParametricPlot3D[{u, 2JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5],0.3n}, {n, 0,10}, {u, 0,2Pi}]

ParametricPlot3D[{u/2 , JacobiCN[2(u − ArcSin[(0.1s)^2Sin[u]]) EllipticK[(0.1s)^2]/Pi , (0.1s)^2],0.2s}, {s, 0,10}, {u, 0,2Pi}]



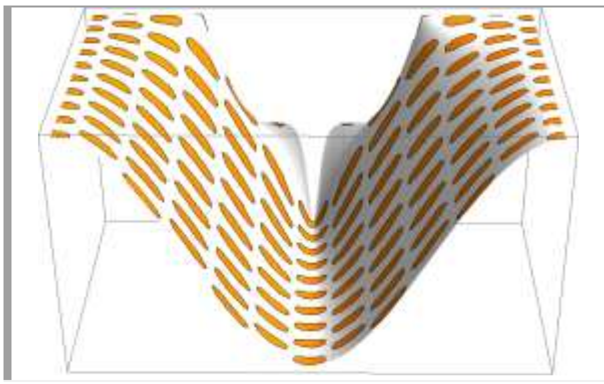
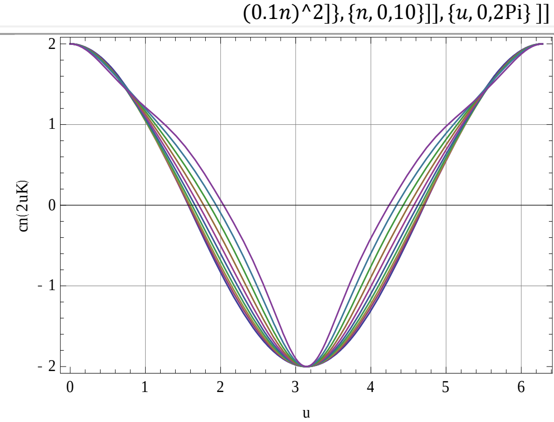
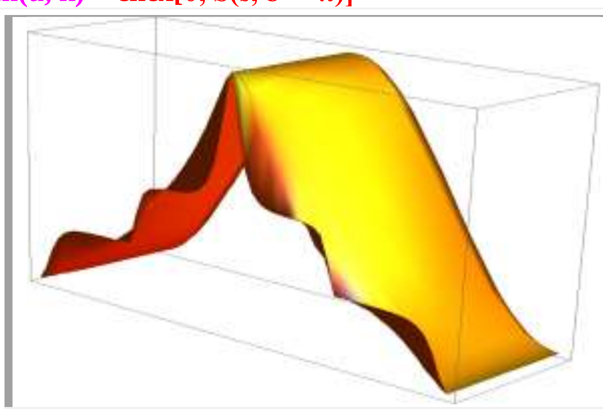


Fig. 7 Graficele **funcţiilor eliptice Jacobi centrice cn(u, k)** ▲◄ şi **FSM─EE cnex[θ, S(s, ε = -π)]** ▲►

Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi , (0.1n)^0.5] + JacobiCN[2(u − ArcSin[(0.1n)^2Sin[u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi, (0.1n)^2]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]] → **cn(u, k)** + **cnex[θ, S(s, ε = -π)]**





Plot[Evaluate[Table[{5JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi , (0.1n)^0.5] + JacobiCN[2(u − ArcSin[(0.1n)^2Sin[u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi , (0.1n)^2]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]

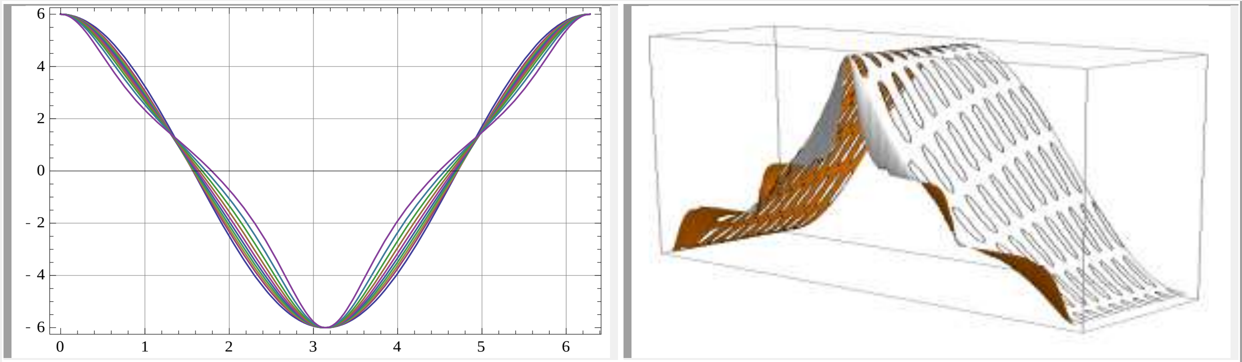
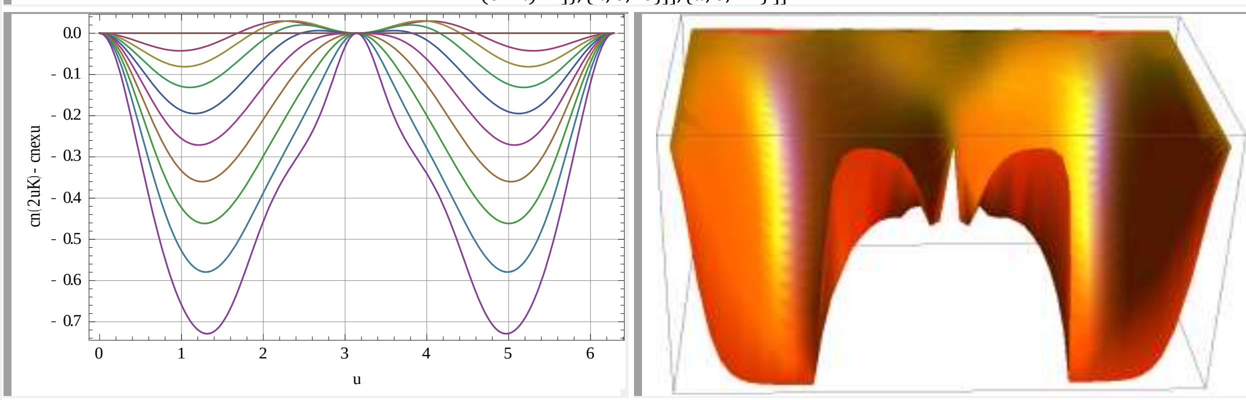


Fig. 8,a Graficele **funcţiilor cn(u, k)** + **cnex[θ, S(s, ε = -π)]**

Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2u EllipticK[(n)^0.5]/Pi , (n)^0.5] − JacobiCN[2(u − ArcSin[(0.1n)^2Sin[u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi, (0.1n)^2]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5] − JacobiCN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[2u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi , (0.1n)^2]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}

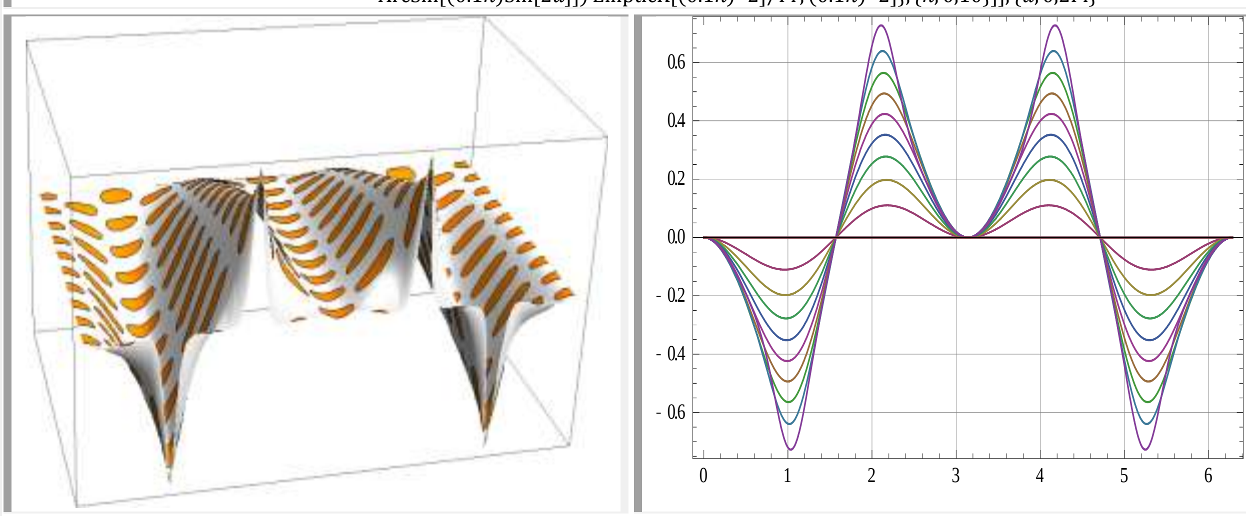
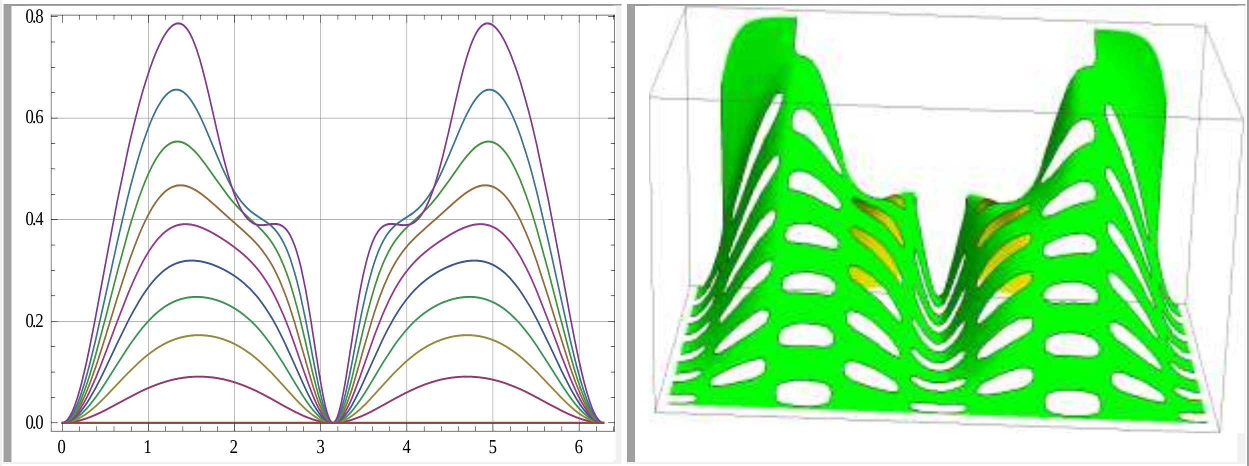


Fig. 8,b$_1$ Graficele **funcţiilor cn(u, k)** — **cnex[θ, S(s, ε = -π)]**

Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2(u − ArcSin[0.1nSin[u]]) EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5] −
JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2(u − ArcSin[0.1nSin[3u]]) EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5]
− JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]

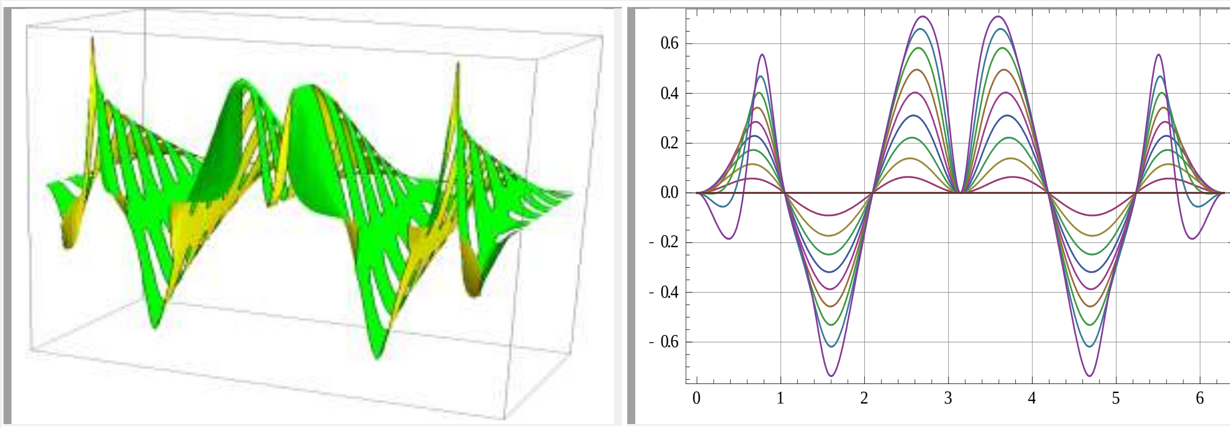
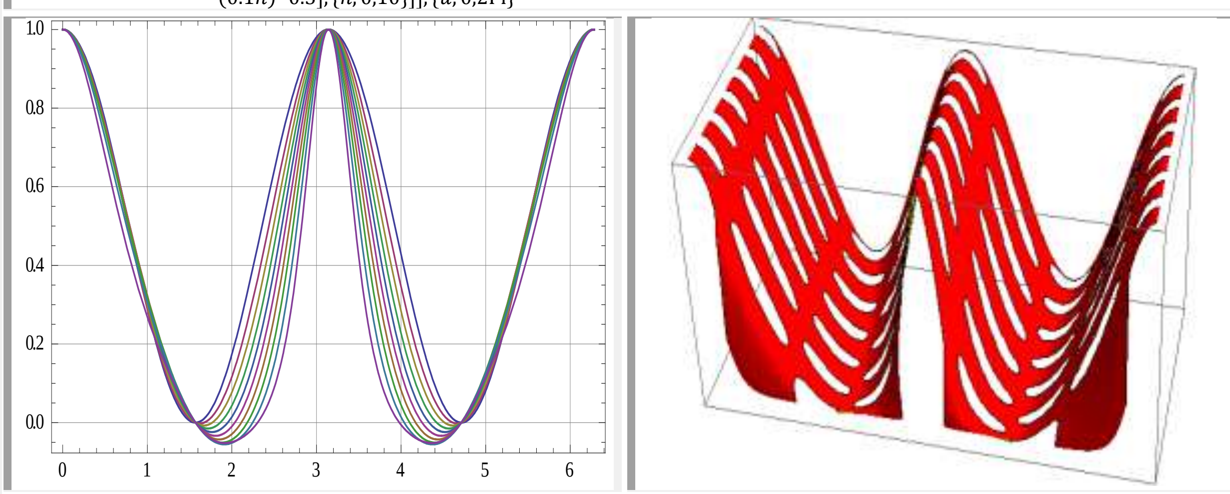


Fig. 8,b₂ Graficele **funcţiilor cnex[θ, S(s, ε = -π)] — cn(u, k)**

Plot[Evaluate[Table[JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5] ∗ JacobiCN[2(u − ArcSin[0.1nSin[u]]) EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi ,
(0.1n)^0.5], {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}



Plot[Evaluate[Table[JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi , (0.1n)^0.5] ∗ JacobiCN[2(u − ArcSin[0.1nSin[3u]]) EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5], {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]

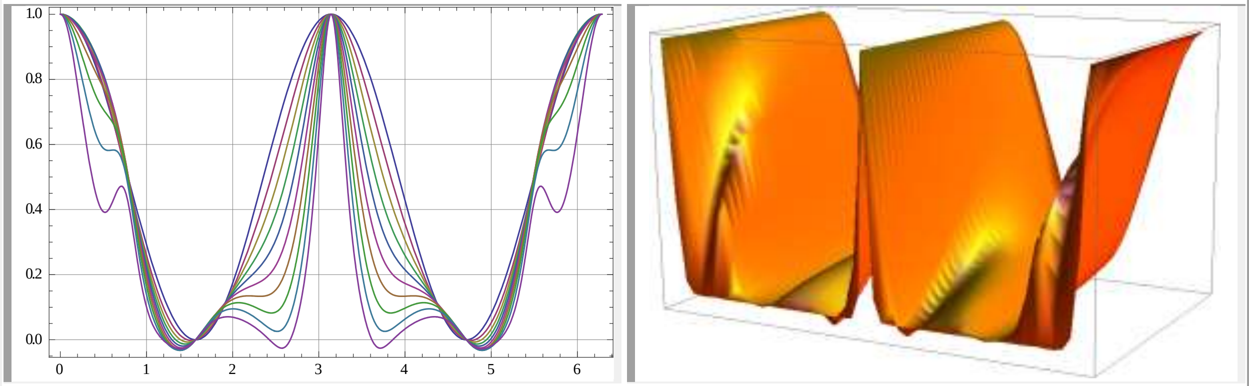
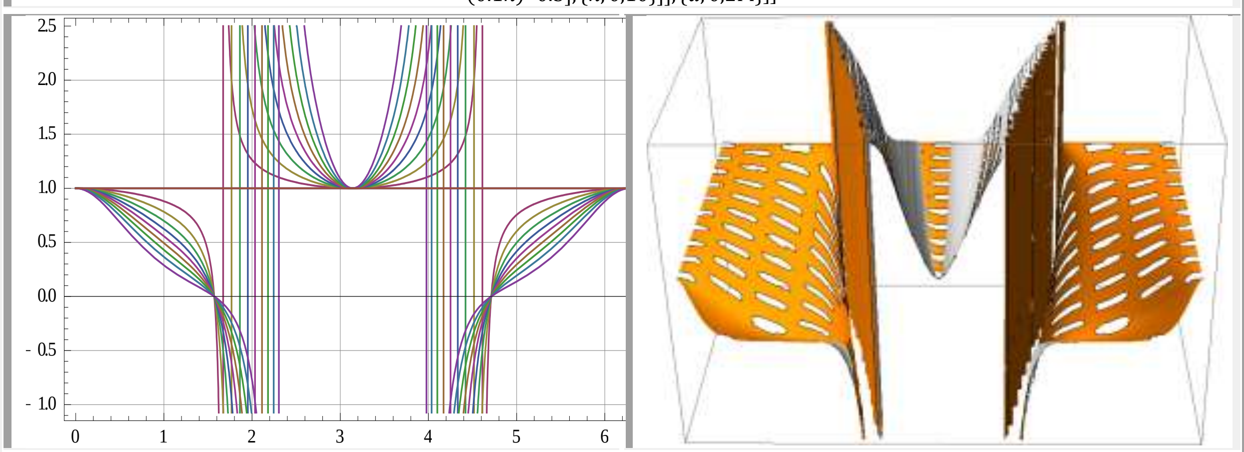
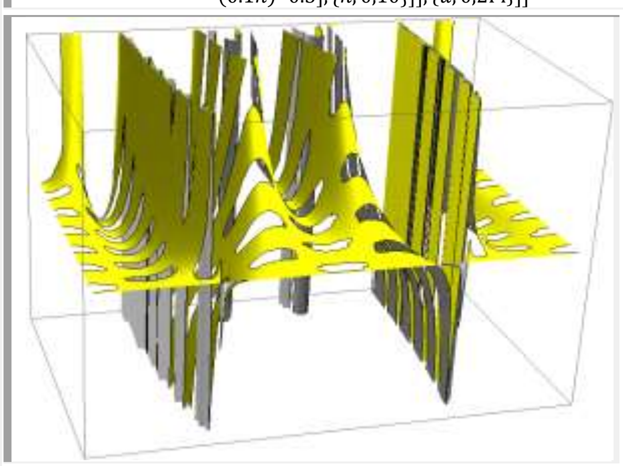


Fig. 8,c Graficele **funcţiilor cn(u, k)** * **cnex[θ, S(s, ε = -π)]**

Plot[Evaluate[Table[JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi , (0.1n)^0.5]/JacobiCN[2(u − ArcSin[0.1nSin[u]]) EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi , (0.1n)^0.5], {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi , (0.1n)^0.5]/JacobiCN[2(u − ArcSin[0.1nSin[3u]]) EllipticK[(0.1n)$^{0.5}$]/Pi , (0.1n)^0.5], {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]



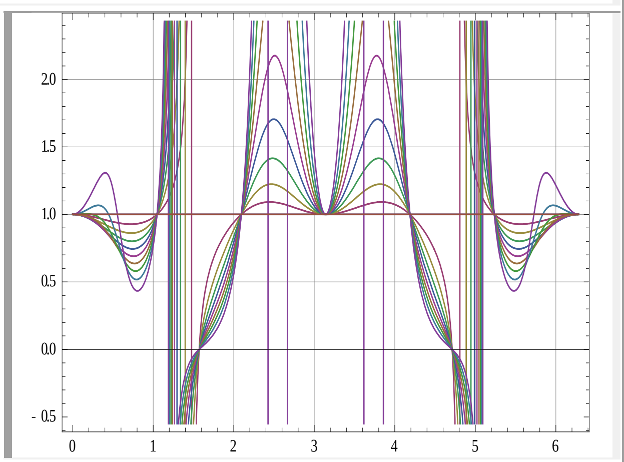
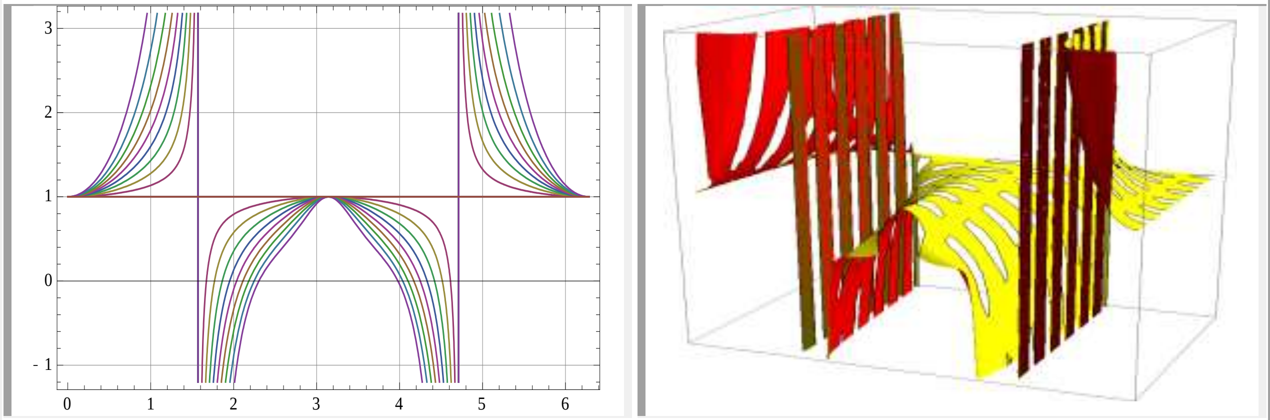


Fig. 8,d$_1$ Graficele **funcţiilor cn(u, k)** / **cnex[θ, S(s, ε = -π)]**

BUPT

```
Plot[Evaluate[Table[JacobiCN[2(u − ArcSin[0.1nSin[u]]) EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi,
(0.1n)^0.5]/JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5], {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]
```




```
ParametricPlot3D[{u/2 , 0.5JacobiCN[2(2u − ArcSin[0.1nSin[2u]]) EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi,
(0.1n)^0.5]/JacobiCN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5],0.2n}, {n, 0,10}, {u, 0,2Pi} ]]
```

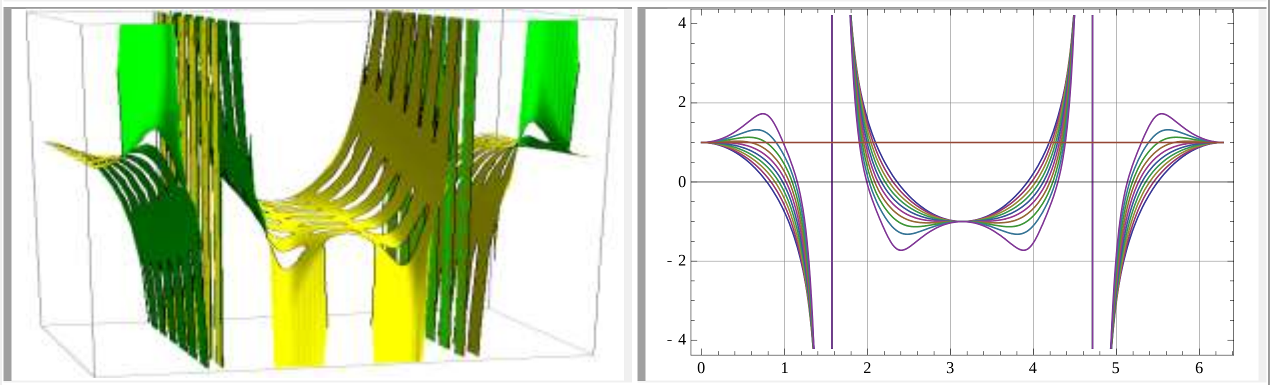
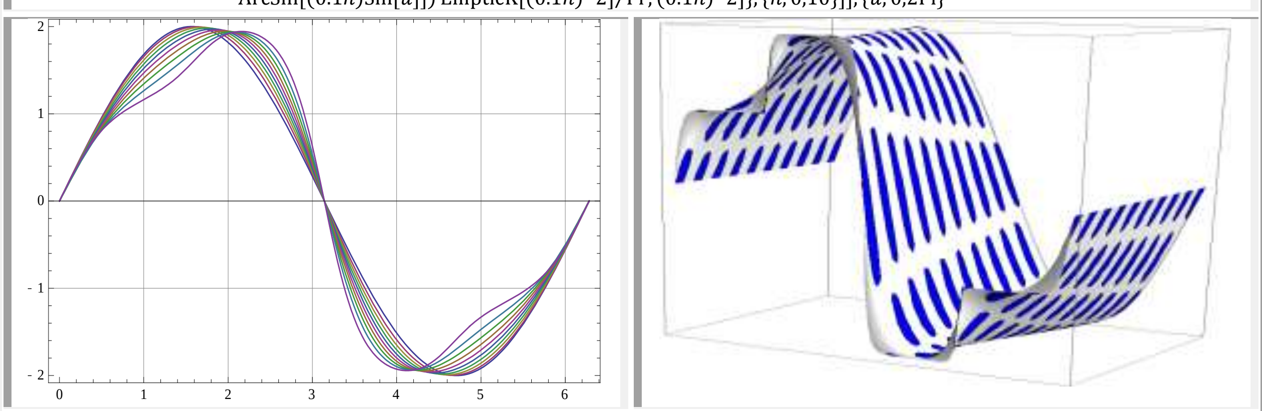


Fig. 8,d$_2$ Graficele **funcţiilor cnex[θ, S(s, ε = -π)]** / **cn(u, k)**

3. SINUS ELIPTIC sn(u,k) de T = 2 π ŞI SINUSUL ELIPTIC EXCENTRIC snex(u,k)

```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5] + JacobiSN[2(u
− ArcSin[(0.1n)Sin[u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi , (0.1n)^2]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}
```



Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi, (0.1n)^0.5] + JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[2u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi, (0.1n)^2]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]

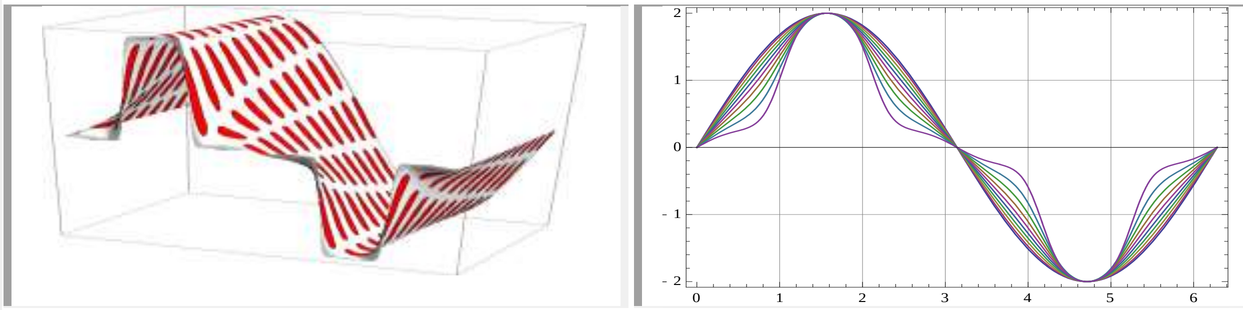
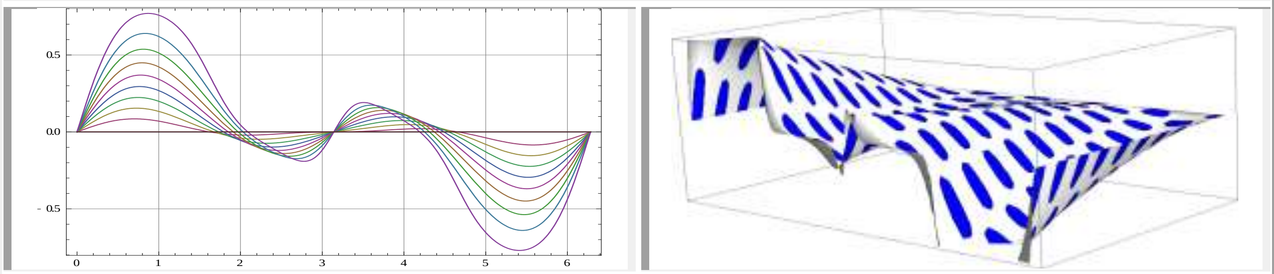


Fig. 9,a Graficele **funcţiilor sn(u, k)** + **snex[θ, S(s, ε = -π)]**

Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2u EllipticK[$(0.1n)^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5] − JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[u]]) EllipticK[$(0.1n)^2$]/Pi, (0.1n)^2]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2u EllipticK[$(0.1n)^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5] − JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[3u]]) EllipticK[$(0.1n)^2$]/Pi, (0.1n)^2]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]

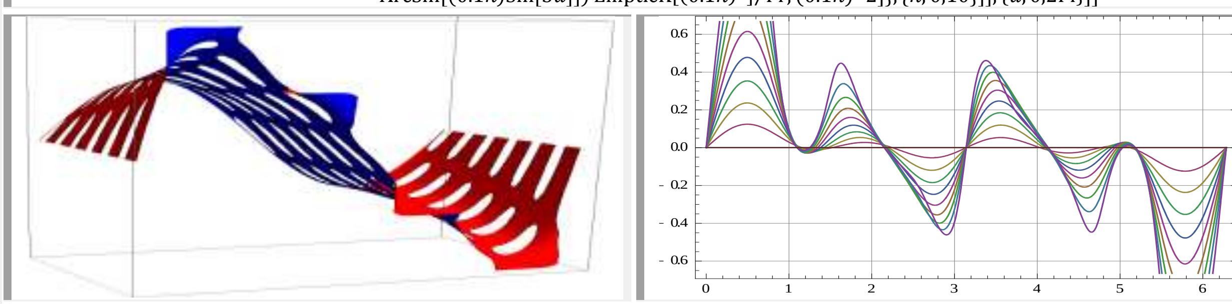
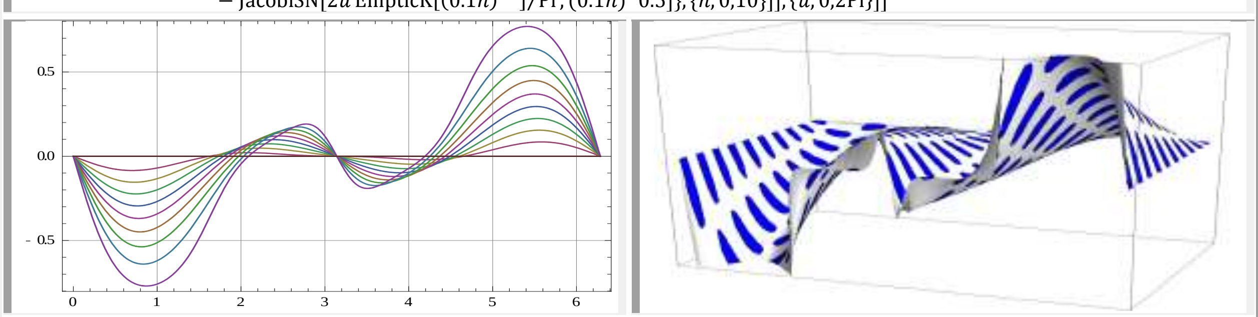


Fig. 9,b$_1$ Graficele **funcţiilor sn(u, k) — snex[θ, S(s, ε = -π)]**

Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[u]]) EllipticK[$(0.1n)^2$]/Pi, (0.1n)^2] − JacobiSN[2u EllipticK[$(0.1n)^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]



```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[3u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi , (0.1n)^2]
        − JacobiSN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}, Frame → True, GridLines
        → Automatic]
```

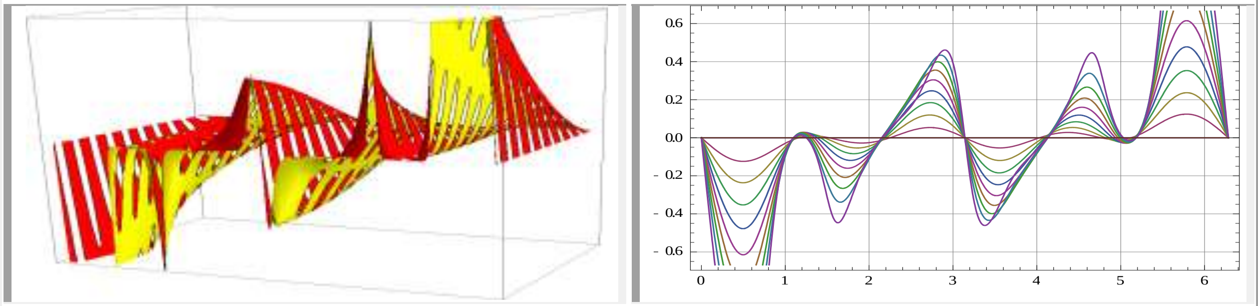
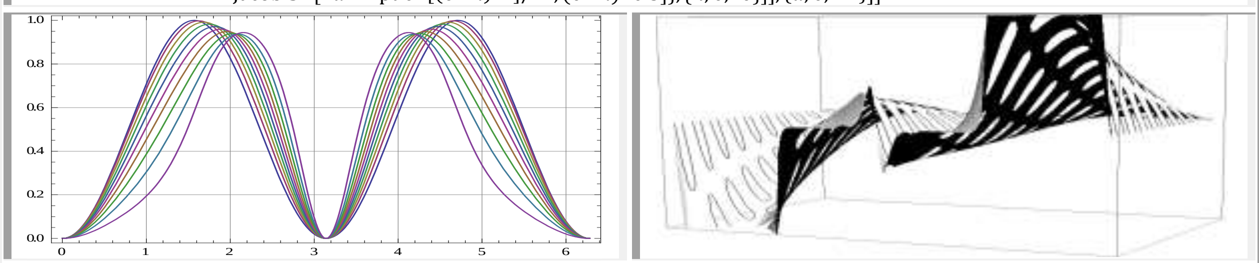


Fig. 9,b₂ Graficele **funcţiilor snex[θ, S(s, ε = -π)] — sn(u, k)**

```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi , (0.1n)^2]
        ∗ JacobiSN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]
```




```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[3u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi , (0.1n)^2]
        ∗ JacobiSN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]
```

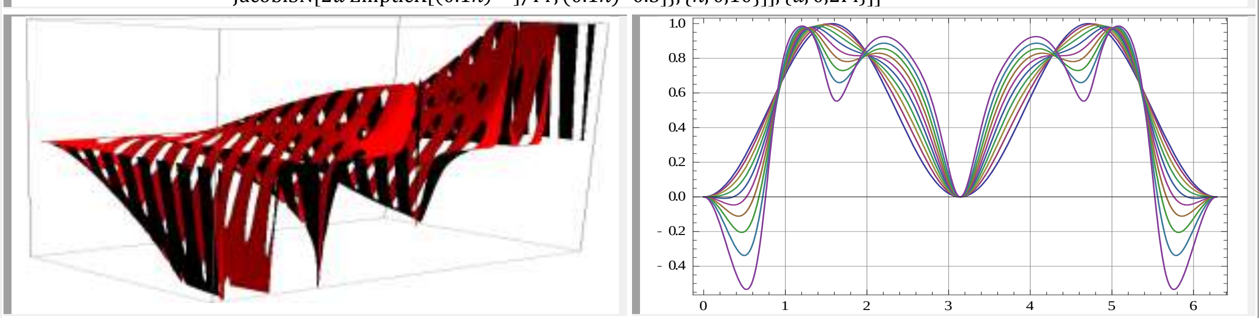
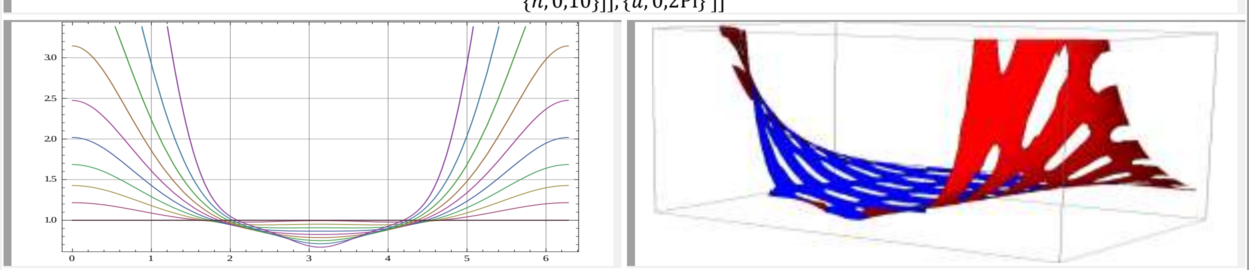


Fig. 9,c Graficele **funcţiilor snex[θ, S(s, ε = -π)] * sn(u, k)**

```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2u EllipticK[(0.1n)^0.5]/Pi , (0.1n)^0.5]/JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[u]]) EllipticK[(0.1n)^2]/Pi , (0.1
        {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi} ]]
```



Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[$2u$ EllipticK[$(0.1n)^{0.5}$]/Pi, $(0.1n)^{0.5}$]/JacobiSN$\left[\begin{matrix}2(u - \text{ArcSin}[(0.1n)\text{Sin}3[u]])\ \text{EllipticK}[(0.1n)^2]/\text{Pi}, \\ (0.1n)^2\end{matrix}\right]$}, {$n$, 0,10}]], {$u$, 0,2Pi}]]

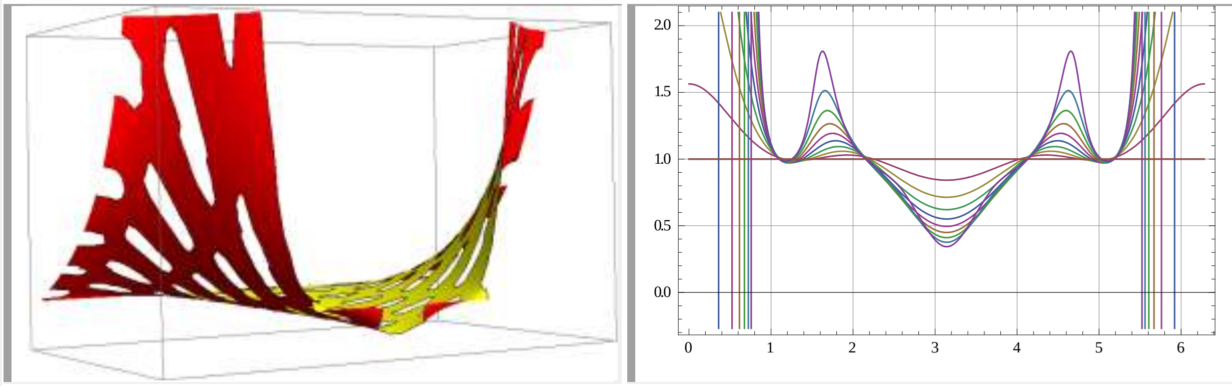
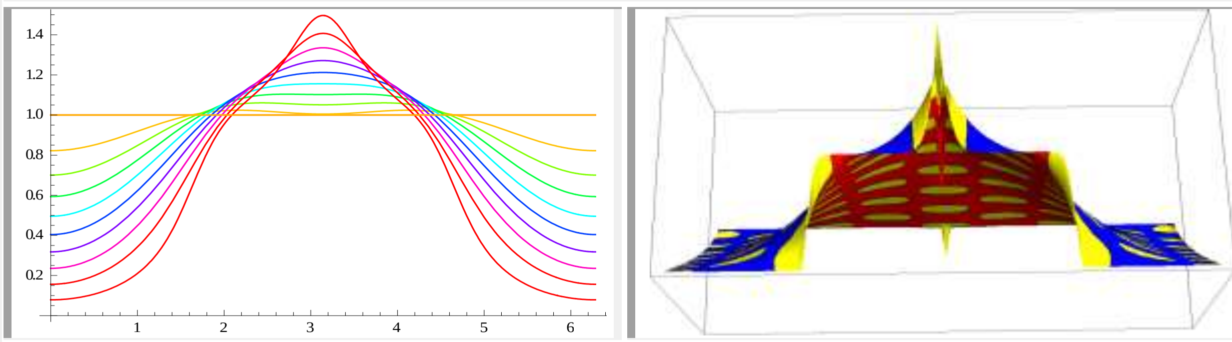


Fig. 9,d₁ Graficele **funcţiilor sn(u, k)** / **snex[θ, S(s, ε = -π)]**

Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[u]]) EllipticK[$(0.1n)^2$]/Pi, (0.1n)^2]/JacobiSN[2u EllipticK[$(0.1n)^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2(u − ArcSin[(0.1n)Sin[3u]]) EllipticK[$(0.1n)^2$]/Pi, (0.1n)^2]/JacobiSN[2u EllipticK[$(0.1n)^{0.5}$]/Pi, (0.1n)^0.5]}, {n, 0,10}]], {u, 0,2Pi}]]

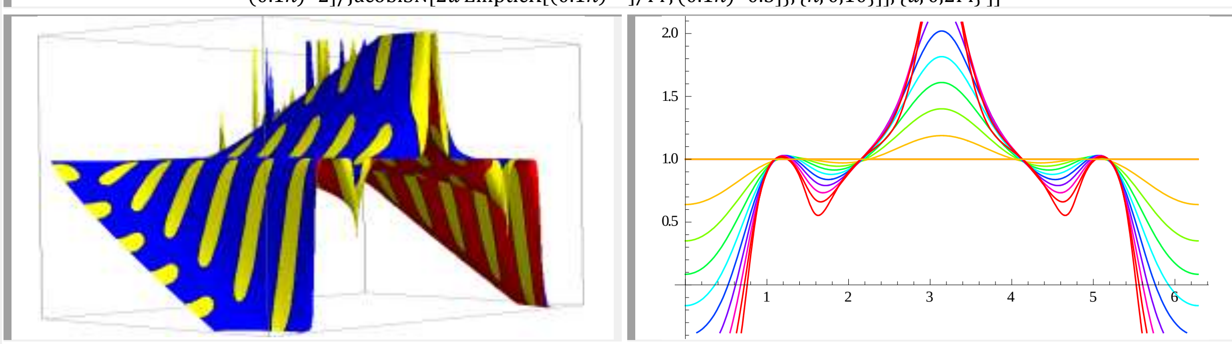


Fig. 9,d₂ Graficele **funcţiilor snex[θ, S(s, ε = -π)]** / **sn(u, k)**

Motto:"Natura ne aseamănă. Educaţia ne deosebeşte." **Confucius**
”**Hiperbola** exagerează pentru a **impresiona**,
iar **excentricitatea** pentru a **hiperboliza**” **Autorul**

Capitolul X :

FUNCŢII SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE HIPERBOLICE EXCENTRICOCENTRICE

1. INTRODUCERE : FUNCŢII HIPERBOLICE CENTRICE ŞI EXCENTRICE

În domeniul funcţiilor, în general şi al celor circulare precum şi hiperbolice în special, s-a simţit nevoia diversificării acestora, în ideea obţinerii unor noi funcţii, capabile să rezolve noi aplicaţii în ştiinţă şi în tehnică.

În domeniul funcţiilor circulare, aşa cum s-a descris în “SUPERMATEMATICA. Fundamente” Vol.I, Ed “POLITEHNICA” din Timişoara, Cap.2, lucrare distinsă cu **Diploma AGIR** în domeniul **IT** pentru anul 2013, s-a căutat să se înlocuiască **cercul**, pe care s-au definit aceste funcţii circulare, cu alte curbe închise, sau cu obiecte matematice noi. S-a căutat înlocuirea cercului cu **pătratul** sau **rombul** (**V.Alaci**, 1939), definindu-se funcţiile pătratice şi cele rombice, cu **poligoane - M. O. Enulescu** (1940) - definind funcţii generalizate, apoi pe cele cu n laturi ca **funcţii poligonale**.

Încă în 1877, **Dr. Biehringer** [23] defineşte funcţiile trigonometrice **înclinate**, iar **A.I. Marcuşevici** (1965), publică funcţii trigonometrice definite pe **lemniscată** şi funcţii trigonometrice **generalizate**, evidenţiind şi legăturile ce există între aceste funcţii şi funcţiile **eliptice.**

Există şi preocupări foarte recente de diversificare a funcţiilor circulare, printre care se numără **FUNCŢIILE INTRATRIGONOMETRICE** ale **Malvinei Baica** şi **Mircea Cârdu**, ca şi **FUNCŢIILE PARATRIGONOMETRICE** şi **ULTRATRIGONOMETRICE** ale aceloraşi autori, publicate în “The **PARATRIGONOMETRY**, AGIR Publishing House, Bucharest, Romania, 2010.

Este aproape inexplicabil faptul, că nimeni n-a încercat să schimbe (mute) din centru şi din originea sistemului de referinţă (reperul), poziţia unui singur punct, dintre cele trei puncte, definite de **Euler**, **super confundate**: **originea O**(0,0), **centrul** cercului unitate **C**(0,0) şi **polul P**(0,0) al unei semidrepte, din care cauză matematica a sărăcit enorm. Matematica ordinară, veche, denumită acum şi **centrică** (**MC**).

Şi în domeniul funcţiilor hiperbolice s-a procedat la înlocuirea hiperbolei echilatere, pe care sunt definite funcţiile **hiperbolice centrice** (**FHC**), cu… cercul trigonometric, de **M. Moscovici** (1956) în [**Moscovici, M**, **O INTERPRETARE GEOMETRCĂ NATURALĂ A SOLUŢIILOR COMPLEXE REZULTATE DIN UNELE PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ**, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956], reuşind o folositoare reunificare a celor doua domenii, care va fi utilizată şi de noi. În plus, autorul a reuşit o interpretare intuitivă şi coerentă a intersecţiei unei drepte cu un cerc, intersecţie folosită apoi în tot restul lucrării. Prin similitudine, devine posibilă şi unificarea celor două domenii ale **SM**: **circular** şi **hiperbolic** !

Analog funcţiilor pătratice ale lui **V. Alaci**, prof. **E. Vişa** (1940) a definit **funcţiile pseudohiperbolice** [**Vişa**, **Eugen**, **FUNCŢII PSEUDOHIPERBOLICE, STUDIU ELEMENTAR**, Rev. Matematică din Timişoara, anul XX, Nr. 1, 2, 4, 5, Timişoara, 1940]: definind o **pseudohiperbolă,** formată din semidrepte paralele cu asimptotele hiperbolei echilatere, cu vârful în vârful hiperbolei (v. SUPERMATEMATICA. Fundamente, Vol.I, Cap. 2, §2.5, pag. 62 …65), pseudohiperbolă prezentată şi în **figura 1**, alături de hiperbola echilateră, cercul unitate şi asimptotele hiperbolei.

Ca şi în multe alte cazuri, după definirea funcţiilor directe, au fost definite şi cele inverse, hiperbolice şi pseudohiperbolice.

Definirea **funcţiilor supermatematice hiprerbolice excentrice** (**FSM-HE**) se poate face în mai multe moduri, începând cu cel geometric, mai intuitiv, pentru că beneficiază şi de primul simţ al sistemului senzorial, prin care se percep peste 80% din informaţiile noastre: **văzul**.

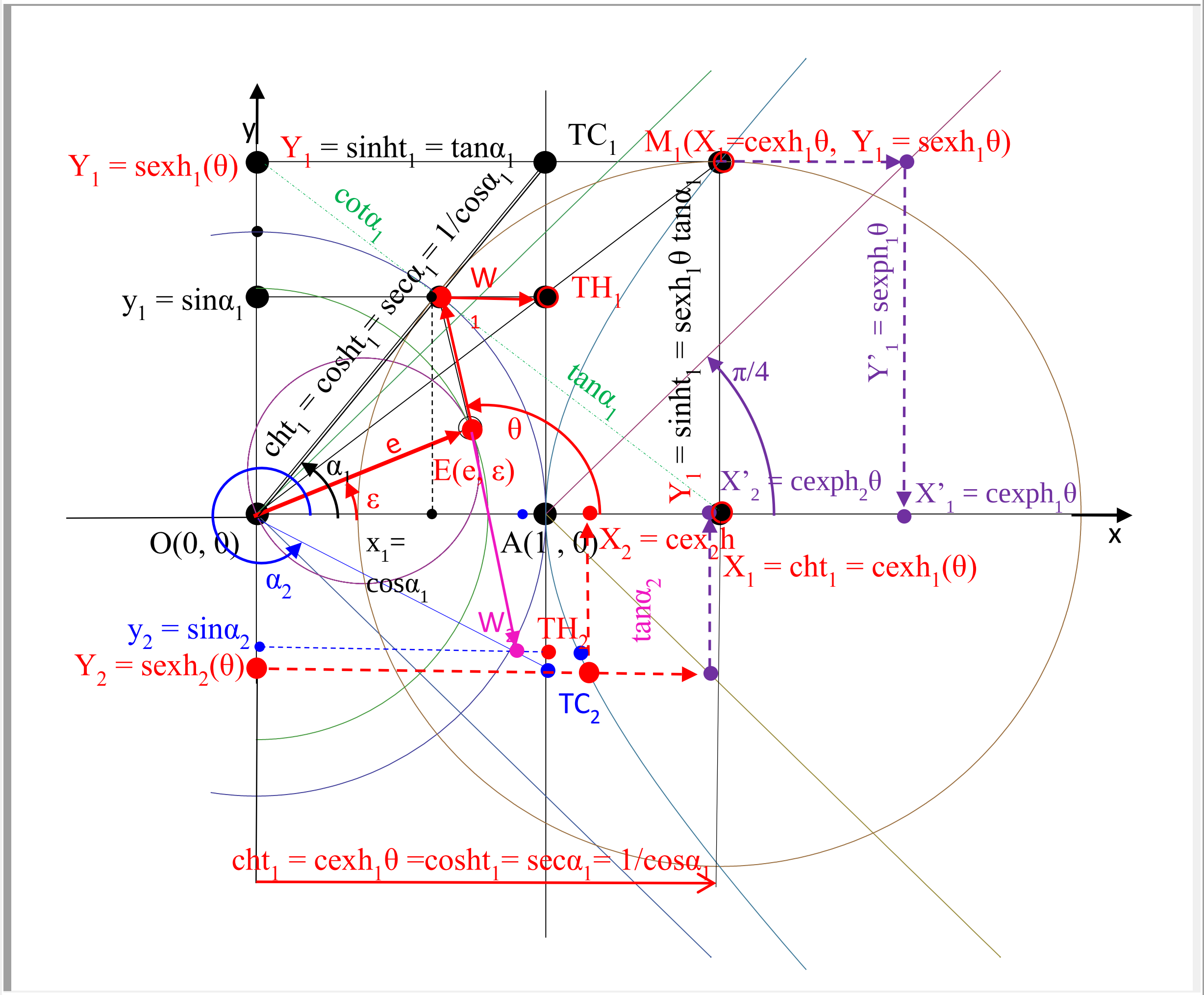


Fig. 1 Schiţă explicativă pentru definirea funcţiilor **supermatematice circulare centrice** ($cos\alpha_1$, $sin\alpha_1$, $sin\alpha_2$, $tan\alpha_1$, $tan\alpha_2$, $ctg\alpha_1$), **hiperbolice centrice** ($cht_1 \equiv cosht_1$, $sinht_1$), **hiperbolice excentrice** ($cexh_{1,2}\theta$, $sexh_{1,2}\theta$, $texh_{1,2}\theta$) şi **pseudohiperbolice excentrice** ($cexph_{1,2}\theta$, $sexph_{1,2}\theta$)

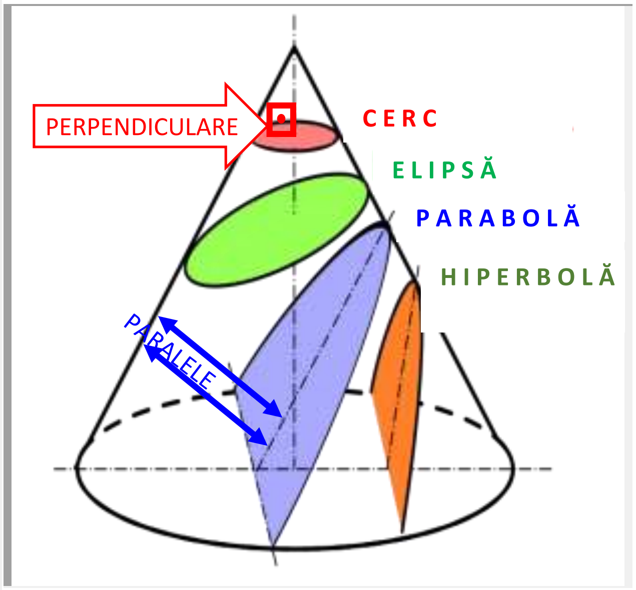
Toată lumea ştie ce-i un con şi ce-i o conică, până când va da de **supermatematică**. Atunci, lumea cultă, va afla că sunt **numai** patru conice **doar** în matematica **centrică** (**MC**) (cercul, elipsa, parabola şi hiperbola **Fig. 2**) ◄, căci, în matematica **excentrică** (**ME**), există o infinitate de conuri şi, prin intersetarea lor cu un plan, o infinitate de conice. Tot aşa cum, în această matematică, toate entităţile s-au multiplicat de la unu la infinit.

Dintre conurile excentrice, trei tipuri (**clepsidra 1**, **conopiramida 2** şi **conul cvadrilob 3**) sunt prezentate în dreapta ► **figurii 2**; fiecare tip fiind format dintr-o familie cu o infinitate de astfel de **conuri excentrice**, corespunzătoare infinităţii de valori ale **excentricităţii liniare numerice s** în domeniul **s** ∈ [0, 1], de exemplu, în care, suprafeţele unor conice excentrice mai sunt continue.

Denumirea de **excentrice** a fost dată tuturor curbelor din **2D**, exprimabile doar prin **funcţii supermatematice circulare**, **hiperbolice**, **eliptice** ş.a. **excentrice** (**FSM-CE**, **-HE**, **EE**, ş.a), de regretatul matematician al Universităţii "POLITEHNICA" din Timişoare drd. math **Anton Hadnady.**

El a **"decretat":** "Toate curbele **2D** cunoscute din matematica ordinară centrică (**MC**) vor fi denumite **centrice** şi toate curbele **2D** noi, apărute graţie **supermatematicii** (**SM**), vor fi denumite **excentrice**".

Evident că între curbe şi funcţii există o strânsă legatură: cerc → funcţii circulare; elipsă → funcţii eliptice; hiperbolă →funcţii hiperbolice; ş.a.m.d.



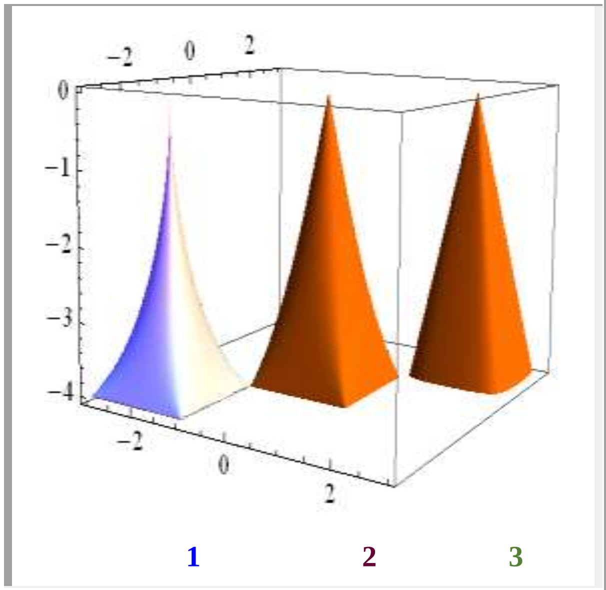


Fig.2 Conicele centrice ◄, ca intersecţie a planului cu un **con centric** şi **conicele excentrice** ca intersecţie a planului cu **conurile excentrice** ► (**clepsidra 1**, **conopiramida 2** şi **conul cvadrilob 3**, care, pentru **s = ± 1**, sunt **prisme** centrice)

Ca urmare, pentru a descrie o **excentrică hiperbolică**, sau o **hiperbolă excentrică**, sunt necesare, în prealabil, **funcţiile hiperbolice excentrice** (**FHE**), date, anticipativ, de relaţiile (1).

Precum şi în domeniul **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**), trecerea din **centric** în **excentric** se realizează prin funcţia **amplitudine excentrică aexθ**, adică variabila centrică **θ**, **x** sau **t** se înlocuieşte cu funcţia **aexθ**, **aex**x sau **aex**t, tot aşa cum trecerea de la funcţiile circulare centrice **cosx** şi **sinx** la funcţiile eliptice **Jacobi**, se face prin funcţia amplitudine **am(u, k)**, adică **cn(u, k)** = cos[**am(u, k)**] şi **sn(u,k)** = sin[**am(u,k)**]; parametrul **k** fiind similar cu excentricitatea numerică **s**.

Ca urmare, funcţiile supermatematice **hiperbolice excentrice** (**FSM-HE**) se exprimă prin cele **hiperbolice centrice** (**HC**) în care, variabila t se înlocuieşte cu funcţia **aex**t, adică:

$$(1)\quad \begin{cases} cosht = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \\ sinht = \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ tanht = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \\ \quad ş.a.m.d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cexht = \cosh[\boldsymbol{aext}] = \frac{e^{\boldsymbol{aext}}+e^{-\boldsymbol{aext}}}{2} \\ sexht = \sinh[\boldsymbol{aext}] = \frac{e^{\boldsymbol{aext}}-e^{-\boldsymbol{aext}}}{2} \\ texht = \tanh[\boldsymbol{aext}] = \frac{e^{\boldsymbol{aext}}-e^{-\boldsymbol{aext}}}{e^{\boldsymbol{aext}}+e^{-\boldsymbol{aext}}} \\ \quad ş.a.m.d \end{cases}$$

În **figura 3** sunt prezentate graficele unor hiperbole excentrice pe direcţia **x** (**HEx**), denumite astfel, deoarece, în ecuaţiile parametrice ale unei hiperbole centrice (**HC**), doar în parametrul **x** s-a făcut trecerea din centric în excentric, în sensul că, funcţia hiperbolică **centrică** (**FHC**) **cosht** a fost înlocuită cu funcţia hiperbolică **excentrică** (**FHE**), adică **cosht** → **cexht**. Altfel spus, excentrul $S_x \neq O(0,0)$, iar $S_y \equiv O(0, 0)$ în ecuaţiile parametrice (2) (**Fig. 3** ◄).

În cazul în care $S_y \neq O(0,0)$ şi $S_y \equiv O(0, 0)$ → $s_y = 0$ se obţin hiperbole excentrice doar pe direcţia y (**HEy**), precum cele prezentate în **figura 3**► dreapta.

Ecuaţiile parametrice ale hiperborelor **excentrice** (**HE**) sunt

(2) $$\begin{cases} x = \boldsymbol{cexht} = cexh[t = \theta, \boldsymbol{S_x}(s_x, \varepsilon_x)] \\ y = \boldsymbol{sexht} = sexht[t = \theta, \boldsymbol{S_y}(s_y, \varepsilon_y)] \end{cases}$$

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cosh[t − ArcSin[sSin[t]]], Sinh[t]}, {s, −1,1}], {t, −Pi, Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cosh[t], Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −Pi, Pi}]]

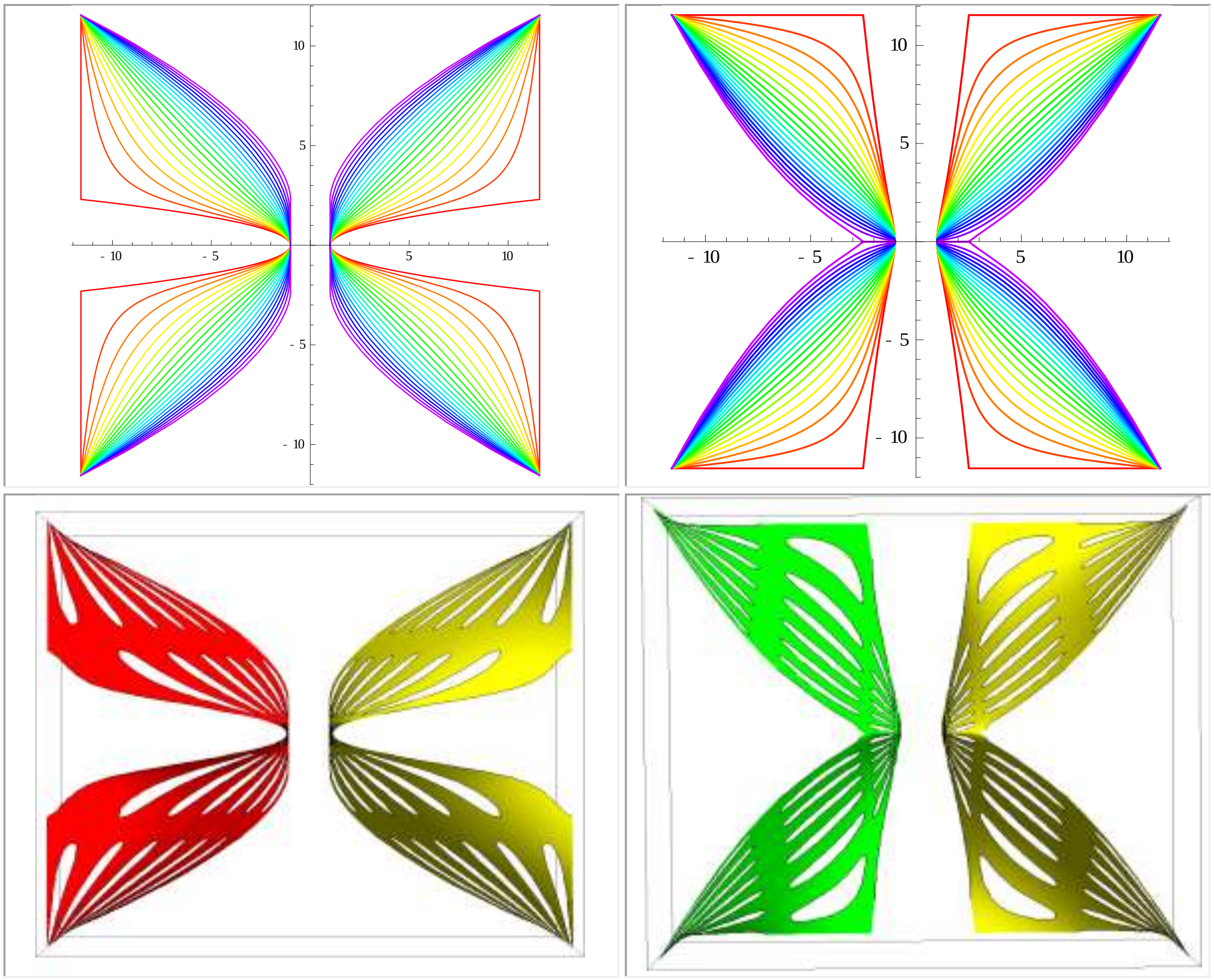


Fig. 3 Hiperbole excentrice, în **2D** şi în **3D**, pe direcţia x ◄ şi, respectiv, pe directa y ►

Ecuaţiile parametrice ale hiperborelor **excentrice** pe x (**HEx**) şi, respectiv, pe **y** (**HEy**) sunt:

(3) $$\boldsymbol{HEx}\begin{cases} x = \boldsymbol{cexht} = sexh[t = \theta, S_x(s_x, \varepsilon_x)] \\ y = sinht \end{cases}, \quad \boldsymbol{HEy}\begin{cases} x = cosht \\ y = \boldsymbol{sexht} = sexh[t = \theta, S_y(s_y, \varepsilon_y)] \end{cases}$$

Pentru **s = 0**, toate hiperbolele excentrice, pe x sau pe y, degenerează în hiperbola centrică.

Dacă, în ecuaţiile parametrice ale oricărei hiperbole excentrice se fac înlocuirile amintite, cu funcţii **aext** ***de aceeaşi excentricitate numerică*** s, în x şi în y, atunci se obţine din nou doar **hiperbola centrică.**

Fenomenul este valabil şi pentru cerc, ca şi pentru multe alte curbe.

Dacă notăm cu $\mathbf{s_x}$ şi cu $\mathbf{s_y}$ excentricităţile numerice liniare şi cu $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ şi $\boldsymbol{\varepsilon_y}$ pe cele unghiulare, care sunt coordonatele excentrelor S_x şi, respectiv S_y, din expresia lui x şi, respectiv, a lui y, atunci din ecuaţiile parametrice ale cercului centric, sau, mai precis a centricei circulare, care este cercul, prin relaţia (3) se poate trece la excentrice circulare (4)

(4) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = sint \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = cex[t, S_x(s_x, \varepsilon_x)] \\ y = sex[t, S_y(s_y, \varepsilon_y)] \end{cases}$

Dacă excentricităţile numerice liniare nu sunt aceleaşi în ambele expresii (x şi y), adică $s_x \neq s_y \neq 0$ şi $\varepsilon_y = \varepsilon_y = 0$, atunci se obţin graficele hiperbolelor excentrice de excentre S_x şi S_y distincte sau de excentricităţi liniare diferite (**Fig. 4**).

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t
    − 0.5]]], Sinh[t]}, {−Cosh[t
    − ArcSin[0.1sSin[t
    − 0.5]]], Sinh[t]}}, {s, −10,10}], {t, −Pi, Pi}]]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t
    + 0.5]]], Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t
    − 0.5]]]},
 {−Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t + 0.5]]], Sinh[t
    − ArcSin[0.1sSin[t
    − 0.5]]]}}, {s, −10,10}], {t, −Pi, Pi} ]]
```

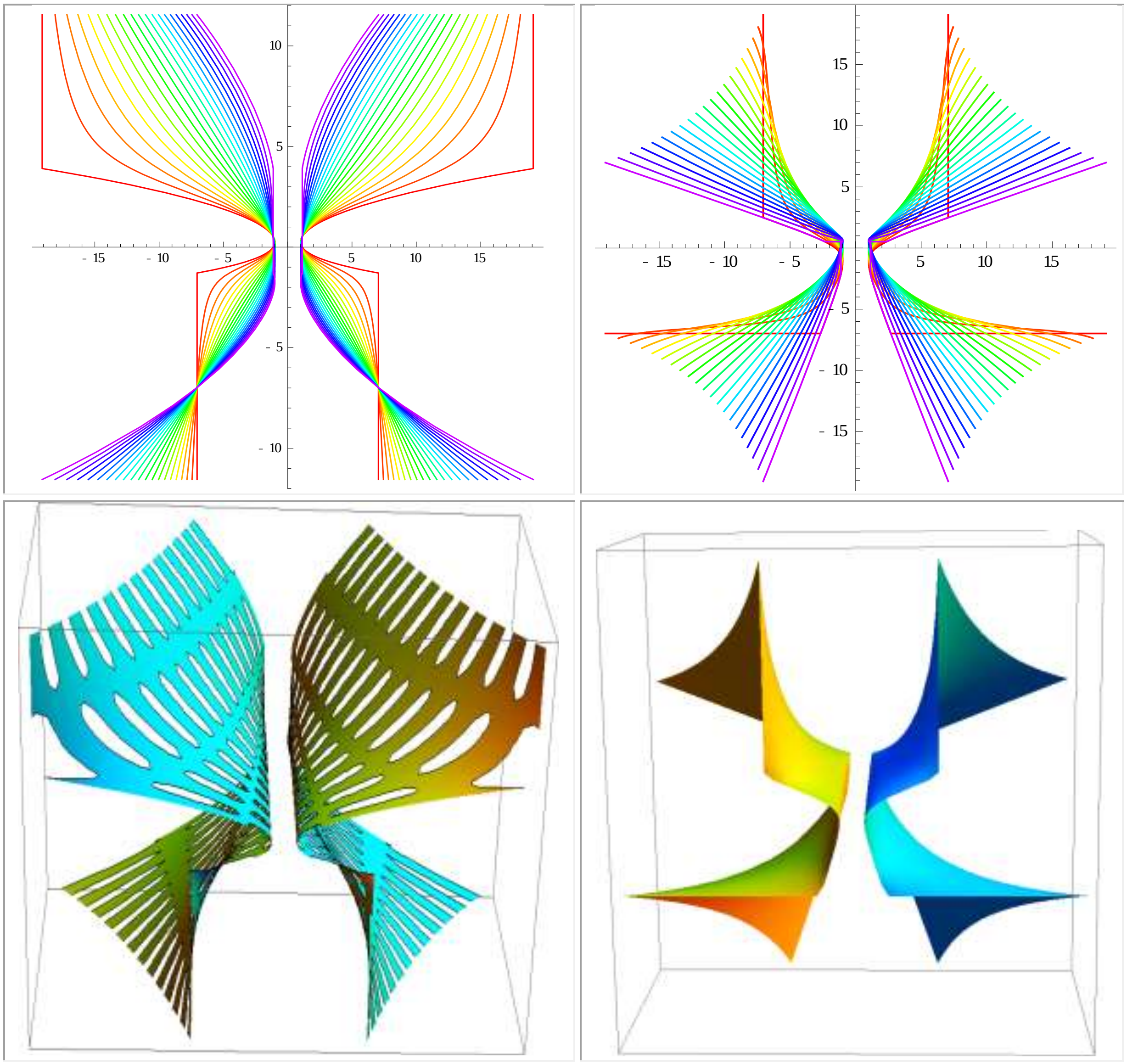


Fig.4 **Hiperbole excentrice** de excentre S_x şi S_y distincte şi diferite de originea **O(0, 0)** şi cu excentricităţi unghiulare diferite (ε_x = 0,5 ε_y = 0)

FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE EVOLUTIVE HIPERBOLICE EXCENTRICOCENTRICE cexht (+ , ─m *, /) cosht şi sexht (+ , ─m *, /) sinht

În partea superioară ▲ a **figurii 5** sunt prezentate **FSM─HE cexht** ◀ şi **sexht** ▶, în culorile ţării în care acestea au fost descoperite, iar în subsol ▼, în stânga **figurii 5** ▼◀ sunt prezentate sumele **cexht** + **cosht** şi în dreapta ▼ ▶ **sexht** + **sinht**.

În figurile următoare sunt prezentate diferenţele lor (**Fig. 6** şi **Fig 7**), apoi produsele **(Fig. 8)** şi rapoartele lor normale (**Fig.9** şi **Fig. 10**)

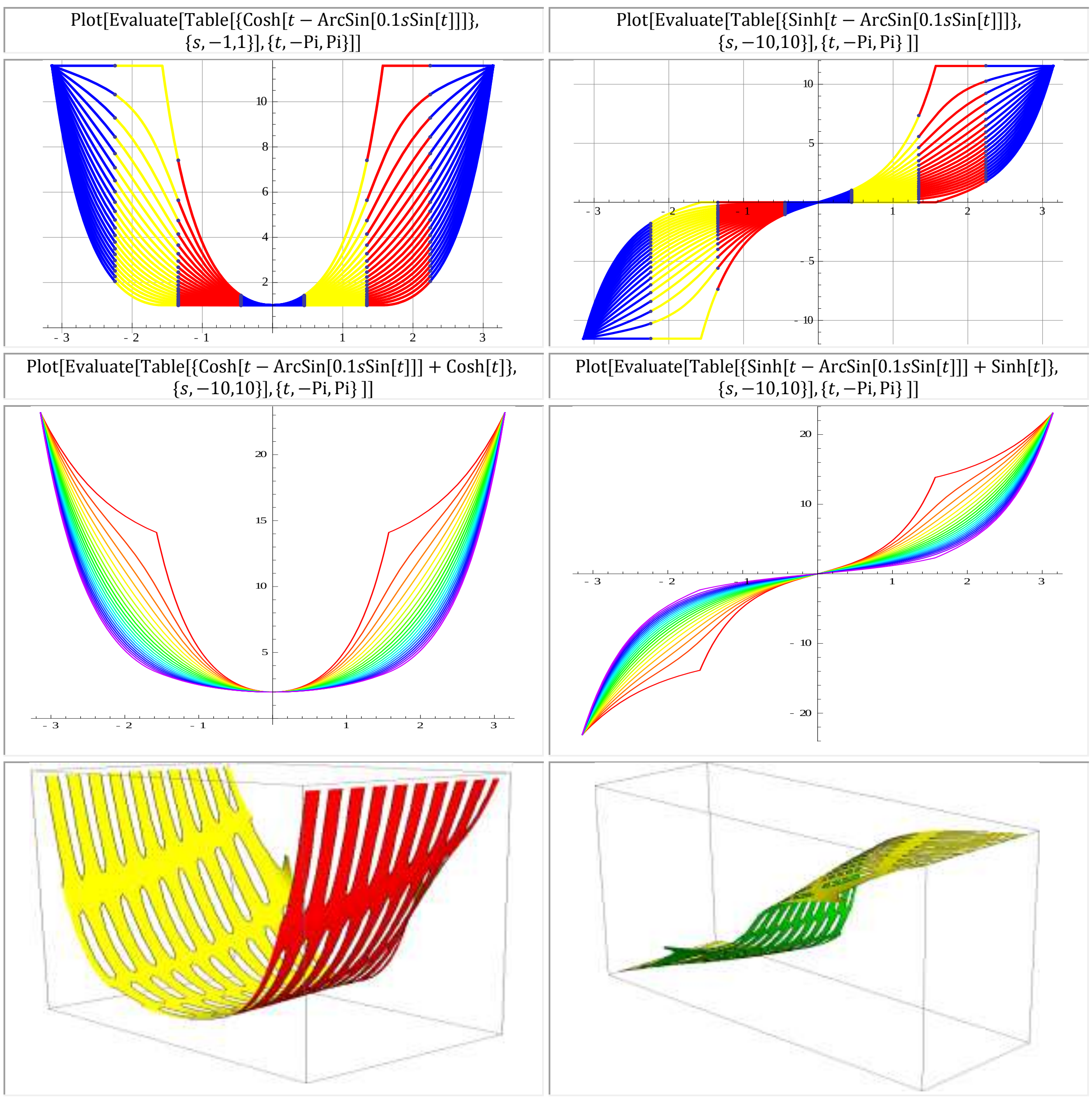


Fig.5 Funcţii hiperbolice excentrice cexhθ ▲◀ şi **sexhθ** ▲▶
precum şi sumele lor: **cexhθ + cosh** şi **sexhθ + sinh** în **2D** ● **şi în 3D** ▼

Plot[Evaluate[Table[{Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − Cosh[t]}, {s, −10,10}], {t, −Pi, Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] − Sinh[t]}, {s, −10,10}], {t, −Pi, Pi}]]

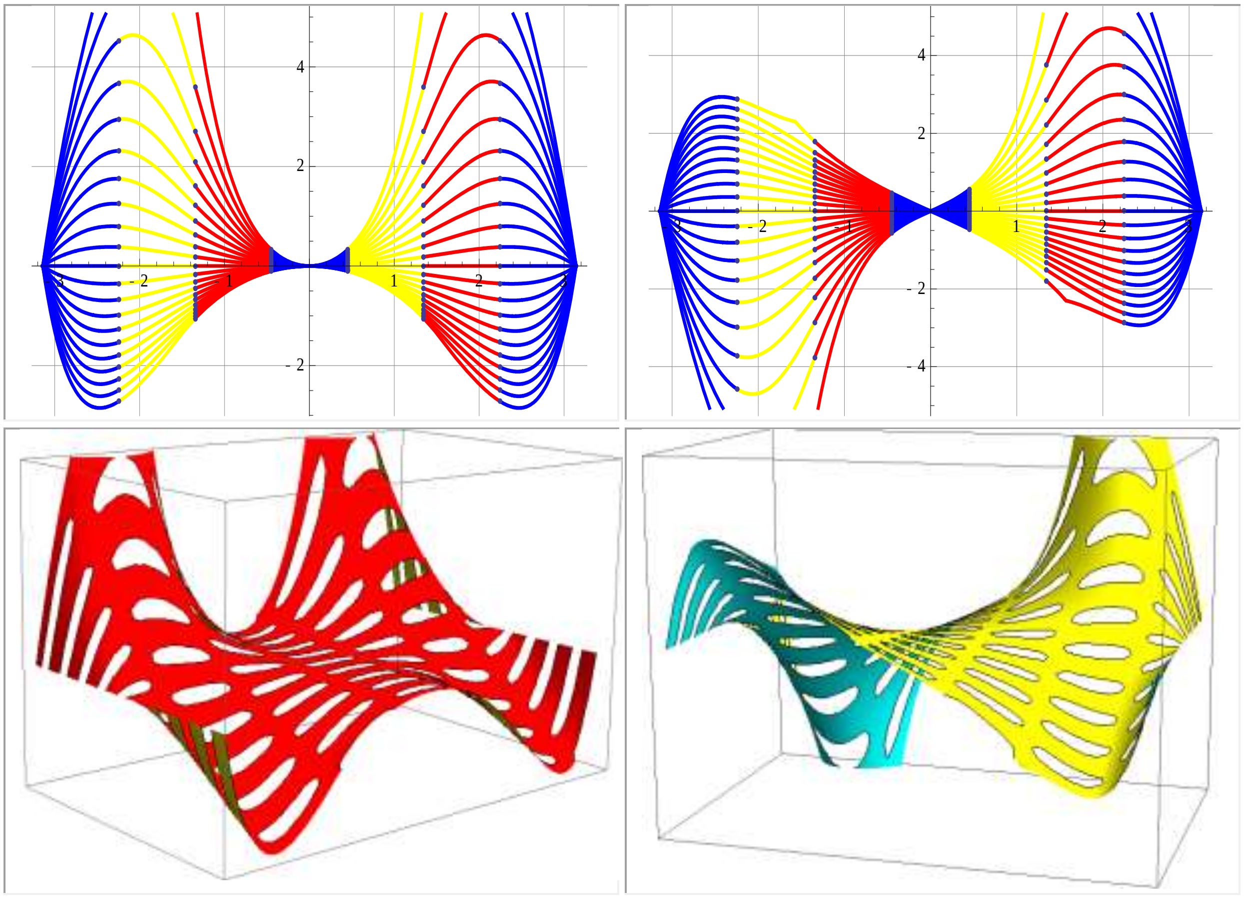
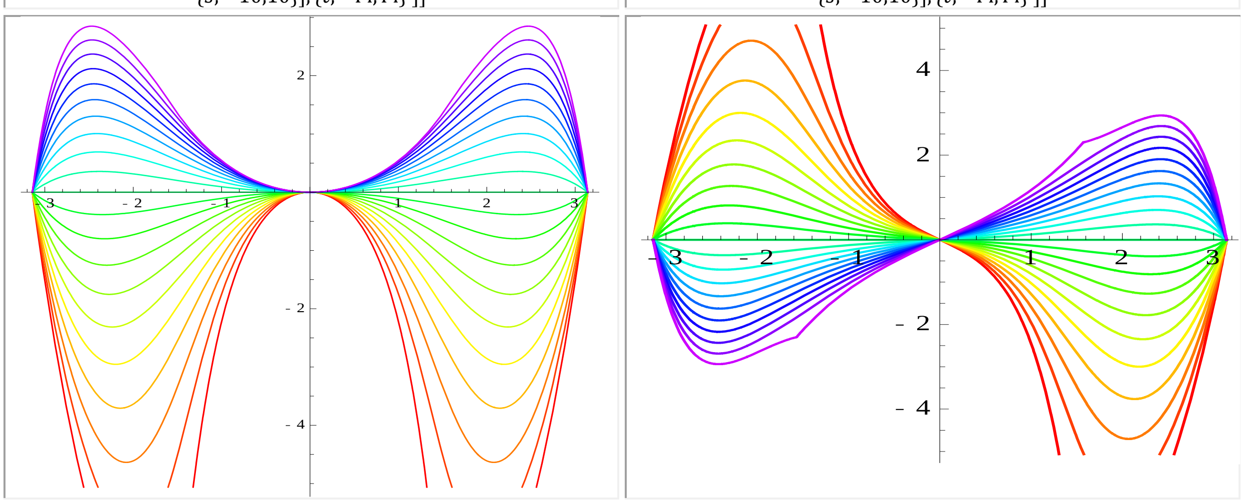


Fig. 6 Funcţii hiperbolice excentrice evolutive **cexhθ — cosh** şi **sexhθ — sinh** în **2D ▲** şi în **3D ▼**

Plot[Evaluate[Table[{Cosh[t] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}], {s, −10,10}], {t, −Pi, Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sinh[t] − Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}], {s, −10,10}], {t, −Pi, Pi}]]



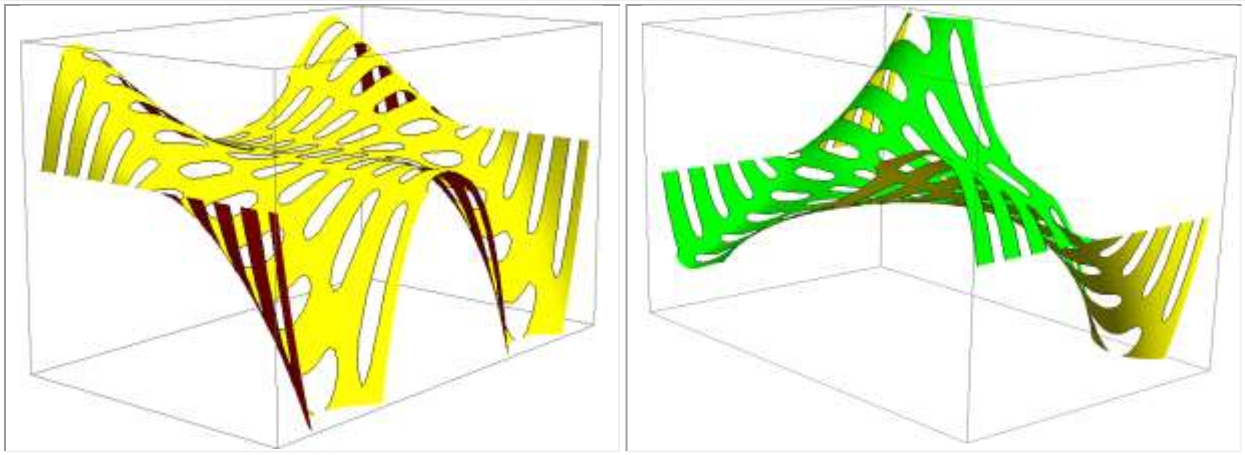


Fig. 7 Funcţii hiperbolice excentrice evolutive **cosh — cexhθ** şi **sinh — sexhθ** în **2D** ▲ şi în **3D** ▼

Plot[Evaluate[Table[{Cosh[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]] ∗ Cosh[*t*]}, {*s*, −10,10}], {*t*, −Pi, Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sinh[*t*] ∗ Sinh[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]]}, {*s*, −10,10}], {*t*, −Pi, Pi}]]

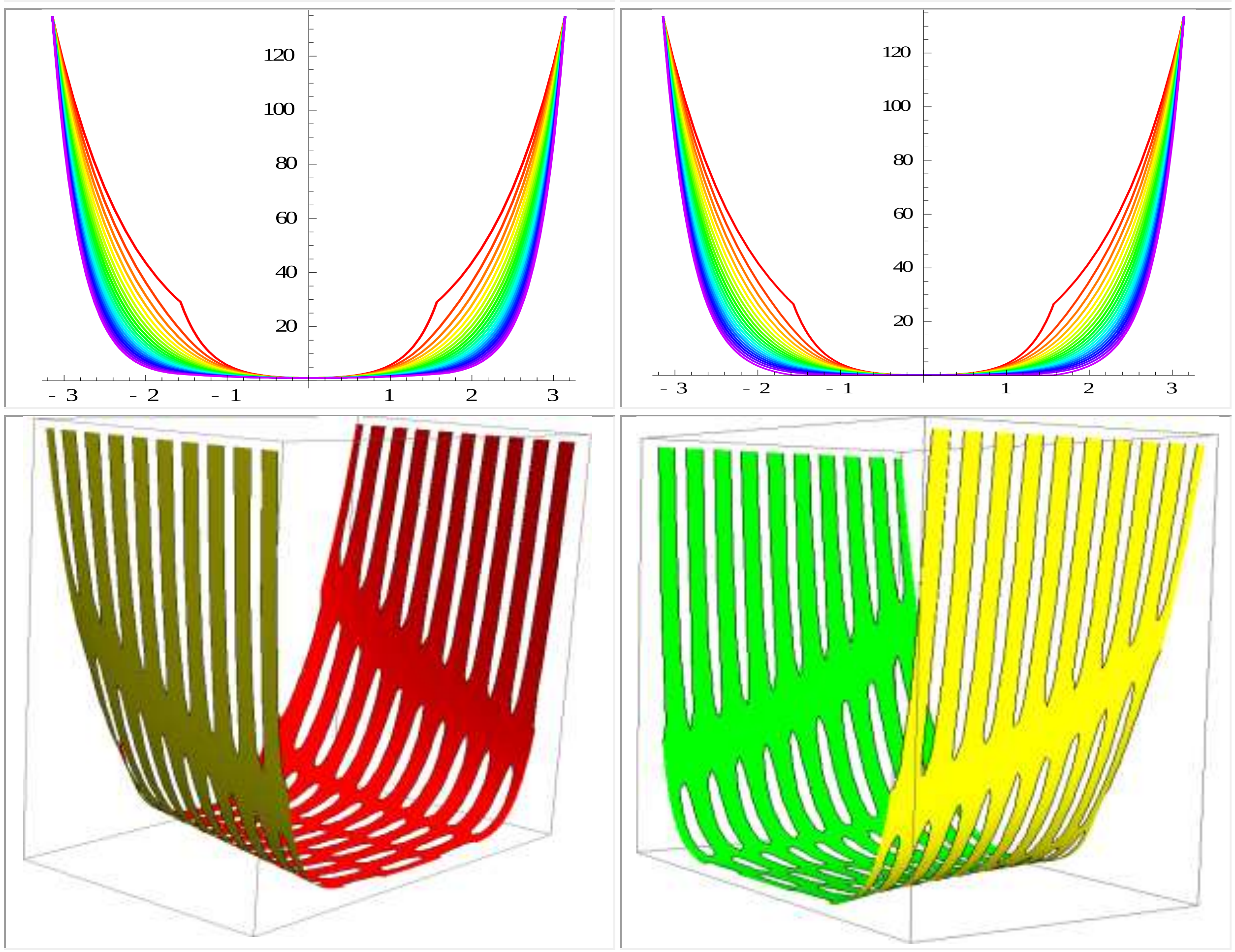


Fig. 8 Funcţii hiperbolice excentrice evolutive **cexhθ * cosh** şi **sexhθ * sinh** în **2D** ▲ şi în **3D** ▼

Plot[Evaluate[Table[{Cosh $\left[t - \text{ArcSin}[0.1 s \text{Sin}[t]]\right]$/Cosh[$t$]}, {$s$, −10,10}], {$t$, −Pi, Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sinh $\left[t - \text{ArcSin}[0.1 s \text{Sin}[t]]\right]$/Sinh[$t$]}, {$s$, −10,10}], {$t$, −Pi, Pi}]]

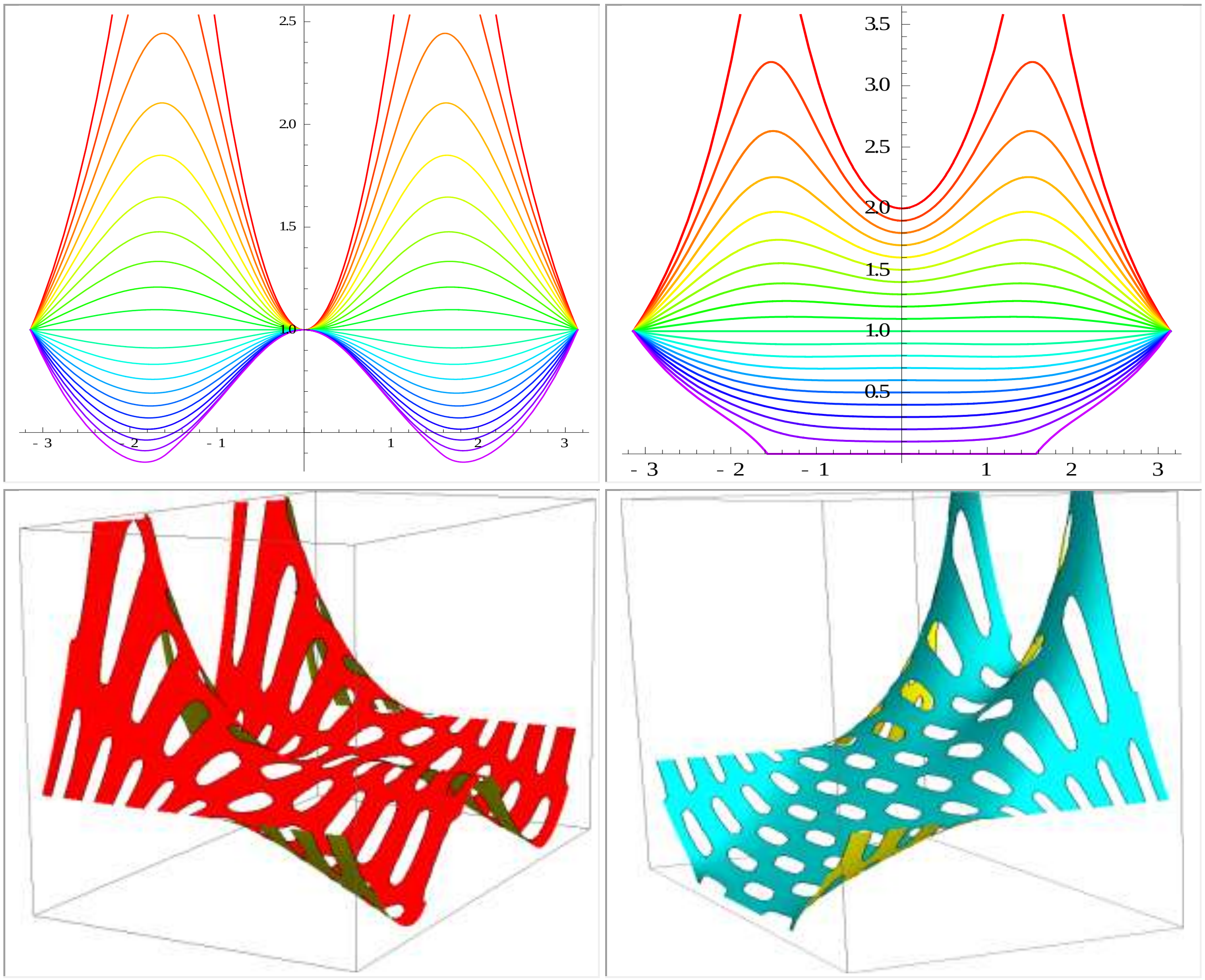
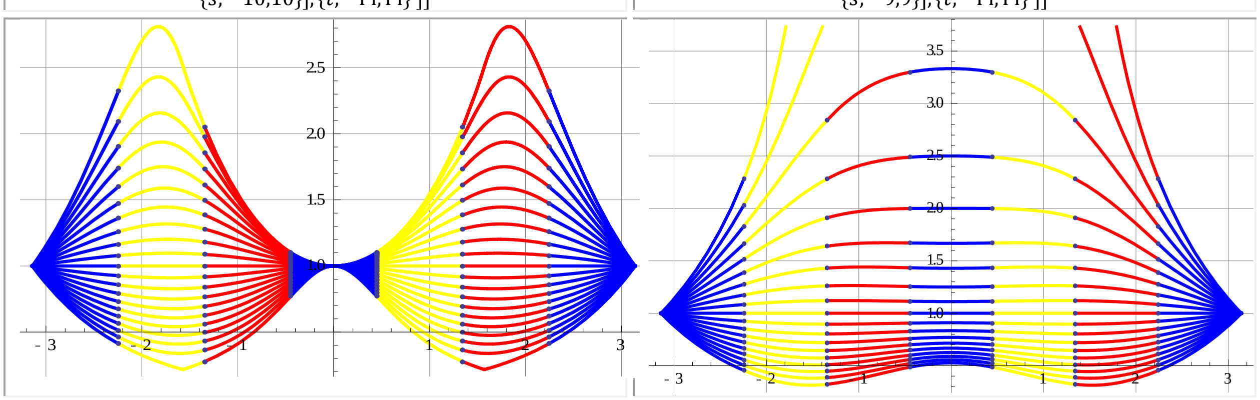


Fig. 9 Funcţii hiperbolice excentrice evolutive **cexhθ / cosh** şi **sexhθ / sinh** în **2D ▲** şi în **3D ▼**

Plot[Evaluate[Table[{Cosh[t]/Cosh $\left[t - \text{ArcSin}[0.1 s \text{Sin}[t]]\right]$}, {$s$, −10,10}], {$t$, −Pi, Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sinh[t]/Sinh $\left[t - \text{ArcSin}[0.1 s \text{Sin}[t]]\right]$}, {$s$, −9,9}], {$t$, −Pi, Pi}]]



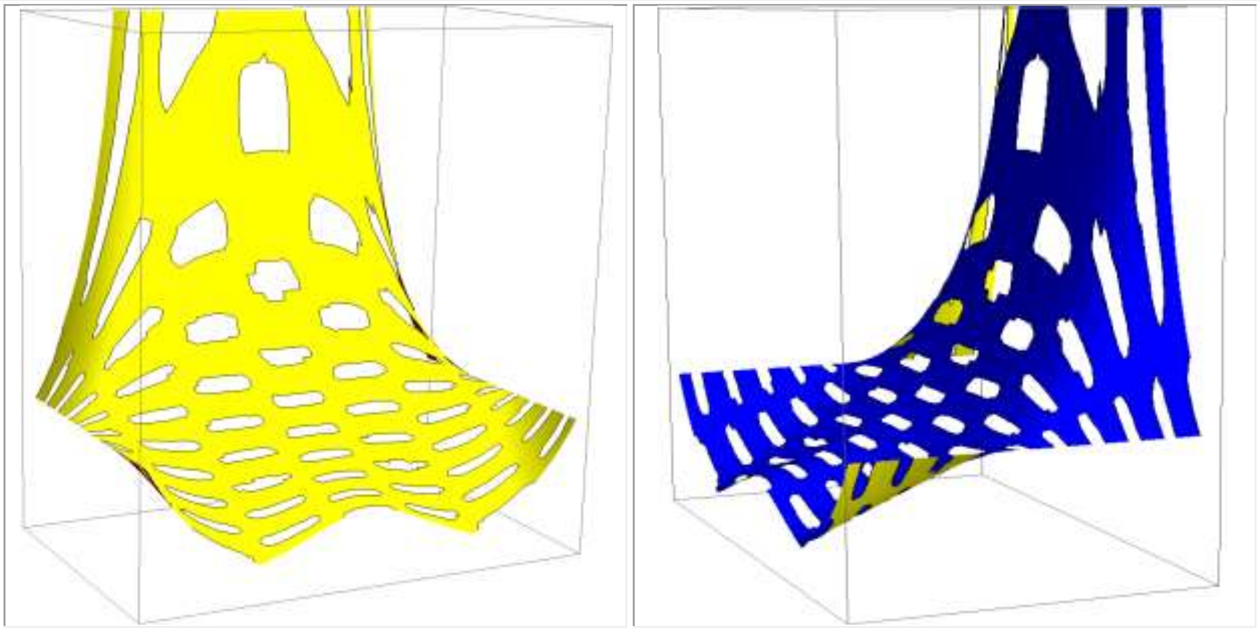
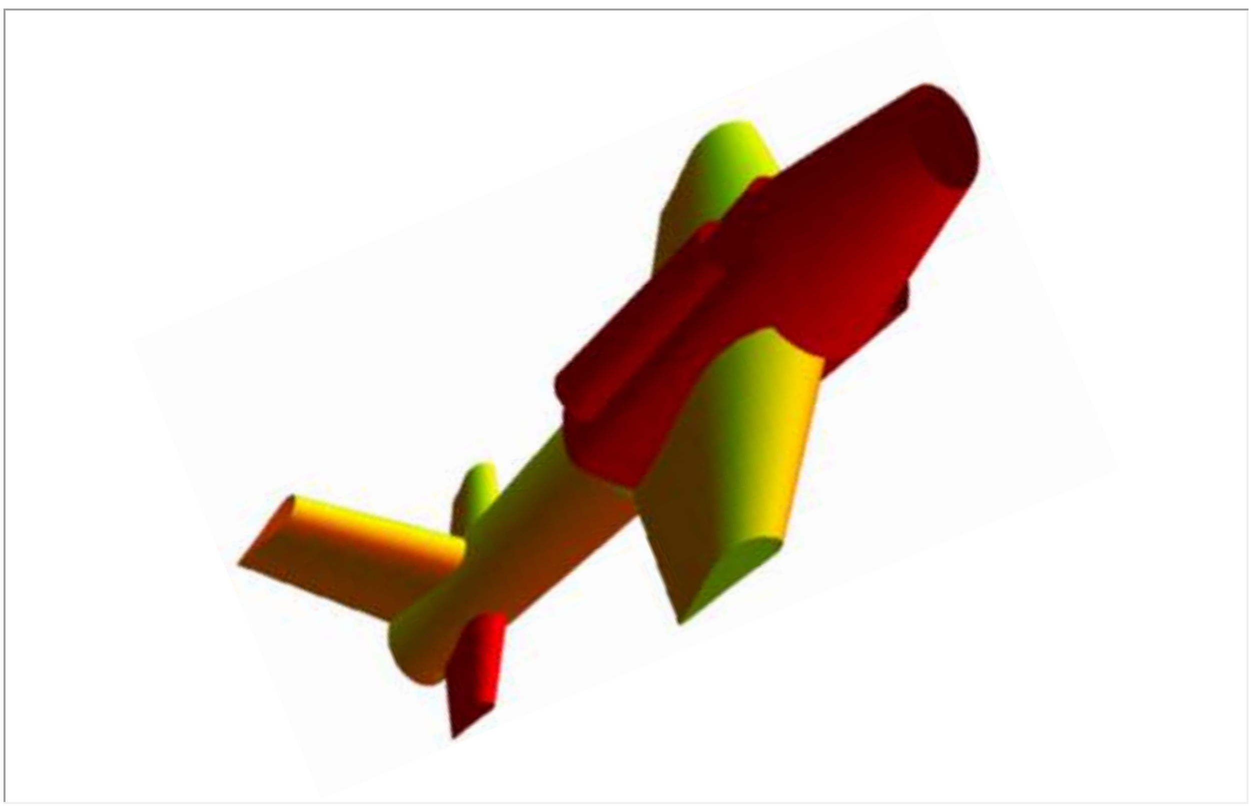


Fig. 10 Funcţii hiperbolice excentrice evolutive **cosh / cexhθ** şi **sinh / sexhθ** în **2D ▲** şi în **3D ▼**



AVION REALIZAT CU FUNCTII SUPERMATEMATICE

MOTTO:" Matematica constă în a dovedi ceea ce este evident
în cel mai puţin evident mod"
George Polya

CAPITOLUL XI

FUNCŢII INDUSE CA FUNCŢII SPECIALE

1.INTRODUCERE

Funcţiile supermatematice circulare excentrice (FSM − CE) autoinduse şi induse, atât pentru **funcţiile circulare centrice** (FCC) **cosα, sinα** etc, cât şi pentru cele excentrice (**cexθ**, **Cexα** , **sexθ**, **Sexα** etc), cu excepţia celor care au fost prezentate într-un alt articol [2] (**bexθ**, **Bexα**, **aexθ**, **Aexα**, **dexθ**, **Dexα**, **rexθ**, **Rexα** etc**)** au făcut obiectul unor capitole din lucrarea autorului **SUPERMATEMATICA**, Vol I şi Vol II, ediţia a 3-a, revizuită şi îmbunătăţită, din Editura Matrix Rom, Buc. 2015 şi ediţiile a 1-a şi a 2-a în Editura Politehnica din Timişoara [1].

Funcţiile ***autoinduse centrice*** sunt de forma **A.sin(B.sin(C.sin(… …U.sin(α))…)))**, de exemplu, iar cele ***induse*** de forma **A.cos(B.sin(C.cos(D.tan(… …V.cosα**))…)))), în care amplitudinile A, B, C, … U, V pot fi şi toate unitare.

În **matematica centrică** (**MC**) şi în literatura ei de specialitate (v. **Rîjik / Ryzhik**, **I.M,, Gradştein / Gradshteyn I.S.**, "**Tabele de INTEGRALE, SUME, SERII ŞI PRODUSE**", Ed.Tehnică, Buc. 1955) funcţiile autoinduse sunt cunoscute sub denumirea de "Funcţii trigonometrice de funcţii trigonometrice" - sin(z.sinx), pag.184 - şi cele induse, sub denumirea de "Funcţii trigonometrice de funcţii trigonometrice inverse" - cos(arctanx), pag.185-.

```
Plot[{Sin[x], Sin[Sin[x]], Sin[Sin[2Sin[x]]], Sin[Sin[Sin[3Sin[x]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[4Sin[x]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[5Sin[x]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[6Sin[x]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[7Sin[x]]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[8Sin[x]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[9Sin[x]]]]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[10Sin[x]]]]]]]]]]]}, {x, −Pi, Pi}]
```

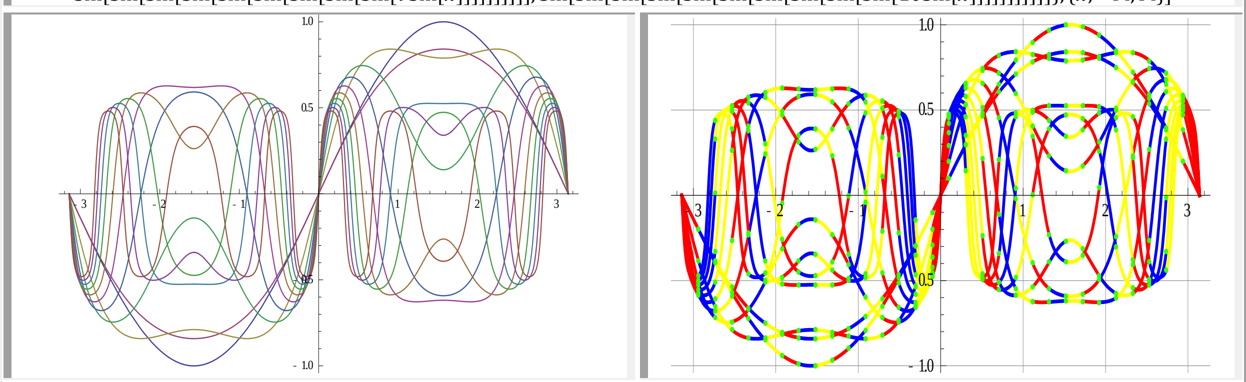


Fig.1 Funcţii sinus autoinduse de tipul : sin(sin(… sin(n.sinx)…)) , n ∈ [1, 10]

www.supermathematica.com www.supermatematica.ro

Exemple de funcţii circulare centrice ***autoinduse*** au graficele din **figura 1**, în funcţie de ***gradul* n *de autoinducţie***. Astfel, **sinx** este de grad 0, **sin(sinx)** are gradul **1**, iar **sin(sin(sin(sinx)))** este de gradul **n** = **3**. În **figura 1**, gradul de autoinducţie este cuprins în intervalul **n** ∈ [0, 10] şi se obsevă că, prin creşterea lui **n**, amplitudinile funcţiilor scad treptat. **Funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM − CE**), prezentate în continuare, sunt acelea care nu au echivalente în matematica centrică **(MC),** aşa cum au **cosx → cex, sinx → sex ş.m.a.**

2. POLINOAME CEBÎŞEV EXCENTRICE DE PRIMA SPEŢĂ

Polinoamele lui **Cebîşev** de speţa întâi, notate $T_n(x)$ sau T(n, x), reprezintă o mulţime de polinoame ortogonale care sunt soluţiile ecuaţiilor diferenţiale de tip **Cebîşev**:

(1) $(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2} - x\frac{dw}{dx} + n^2 w = 0$

Primele 10 polinoame **Cebîşev** sunt reprezentate grafic în **figura 1:n ∈ [1, 5] 🡅, n ∈ [5, 7] 🡇◀ şi n ∈ [7, 10] 🡇▶.**

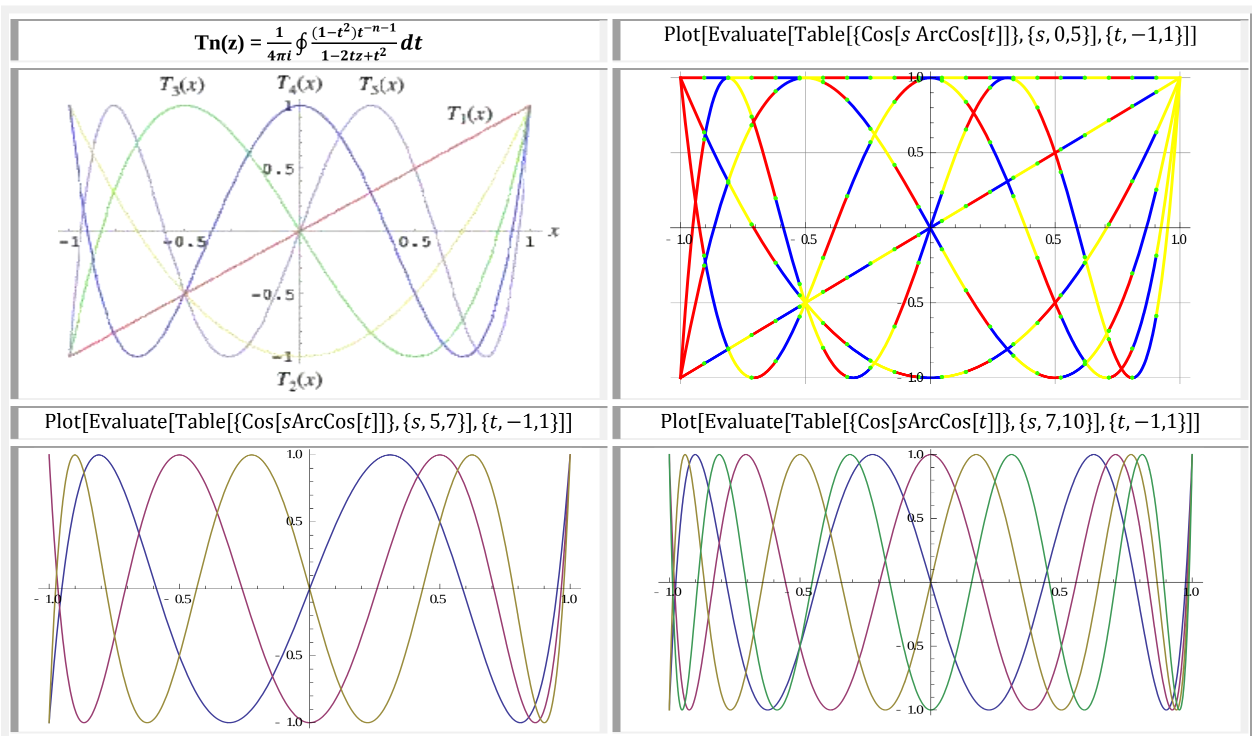


Fig.1 Funcţia cosinus cosx indusă prin **x = s. arccosx** ca polinoame **Cebîşev centrice** de prima speţă

Polinoamele **Cebîşev** pot fi exprimate prin urmatoarele ecuaţii de definiţie

$$(2)\quad \begin{cases} T_n(z) = \frac{1}{4\pi i}\oint\frac{(1-t^2)t^{-n-1}}{1-2tz+t^2}dt \\ T_n(z) = \\ T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \\ T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left\{x - \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]\right\} \\ T_n(x) = \frac{1}{2}z^2\left[\left(\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}+1\right)^n + \left(\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}\right)^n\right] \end{cases}$$

dar şi cu ajutorul **funcţiilor induse** (2')

(2') $T_n(\cos\theta) = \cos(n.\theta)$ → $\mathbf{T_n(x) = \cos[n.\arccos x]} = \frac{\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x-i\sqrt{1-x^2}\right)^n}{2} =$
$\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2m}(x^2-1)^m = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \binom{n}{6}x^{n-6}(1-x^2)^3 + \ldots$

cu proprietăţile:

(3) $$\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(x).T_m(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0, m\neq n\\ \frac{\pi}{2},\ m=n\ \neq 0\\ \pi, m=n=0\end{cases}$$

Ecuaţiile (2') permit multiplicarea polinoamelor **Cebîşev** de la câte unu pentru fiecare **n** la o infinitate de polinoame excentrice pentru fiecare n, prin trecerea din **centric** în **excentric**, adică, prin trecerea de la funcţiile circulare centrice (**FCC**) **cosα** şi **sinα** la **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM−CE**) corespondente **cexθ** şi **sexθ**, exprimate de ecuaţiile de definiţie, pentru un **excentru** punct fix sau mobil în planul cercului unitate **CU[R = 1 ,O(0,0]** de coordonate polare **S**(**s**, ε):

(4) $$\begin{cases}\boldsymbol{cex\theta}=cos\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta})=\cos[\theta-\arcsin[\boldsymbol{s}.\sin(\theta-\varepsilon)]]\\ \boldsymbol{sex\theta}=sin\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta})=\sin[\theta-\arcsin[\boldsymbol{s}.\sin(\theta-\varepsilon)]]\end{cases}$$

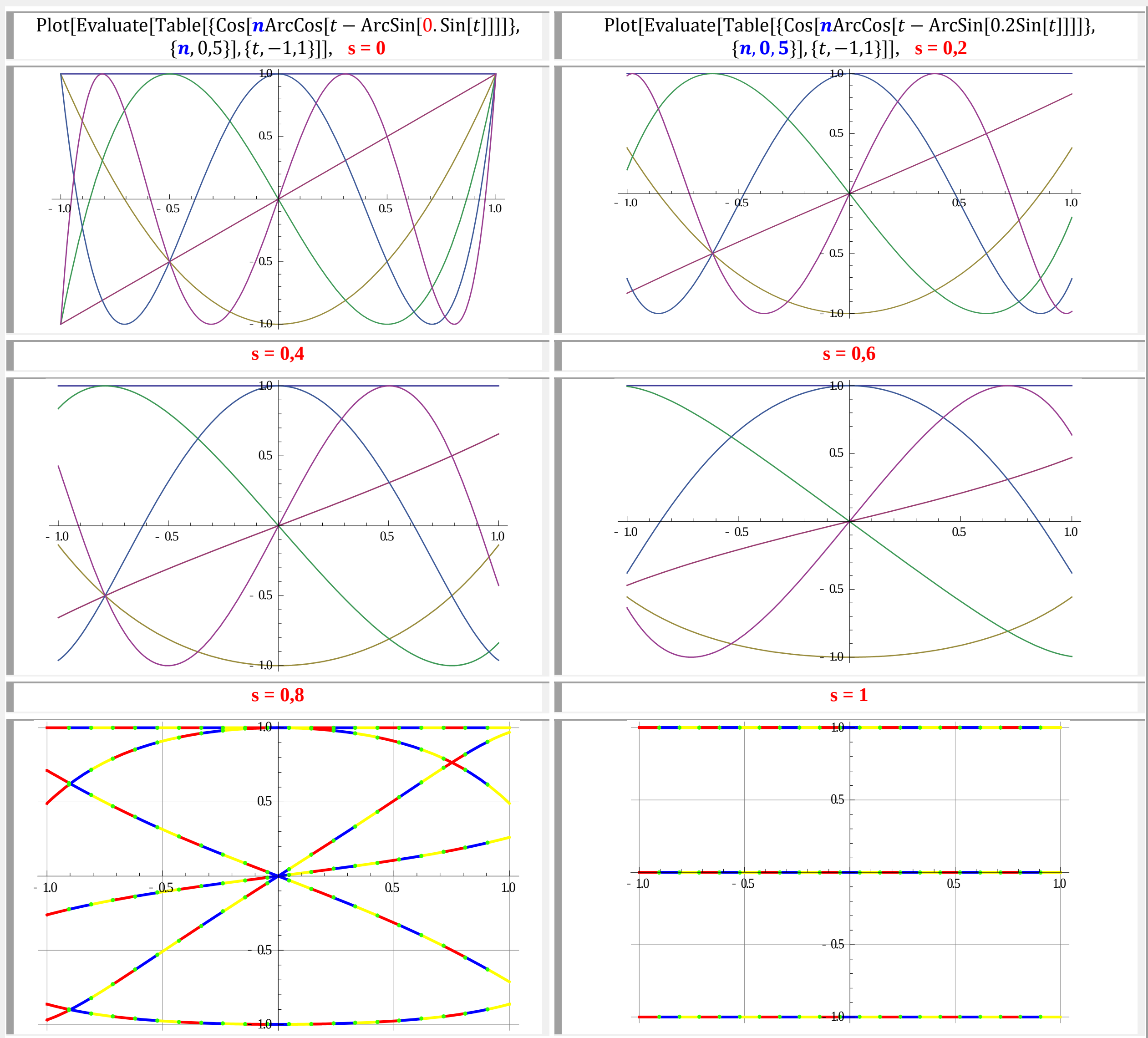


Fig. 2 Funcţia cosinus cosx indusă prin **x = s. arccex(x)** ca **polinoame Cebîşev excentrice** de prima speţă

Pentru **s = 0**, **polinoamele Cebîşev supermatematice** (**PCSM**) degenerează în cele centrice, aşa cum rezultă din **figura 2** ↑◀, iar pentru n ∈ **[0, 5]** şi **s = 0,2n** ∈ **[0, 1]** graficele sunt prezentate sus- dreapta ↑▶ .

Din **figura 2** se constată că prin creşterea **excentricităţii liniare numerice s**, apare o deplasare / fugă a punctelor curbelor spre cele două extremităţi ale axei x ∈ [− 1, +1], astfel că unele segmente / porţiuni de curbă sunt exterioare domeniului. De aceea, în **figurile 3**, şi **4** sunt prezentate curbele şi în afara acestui domeniu.

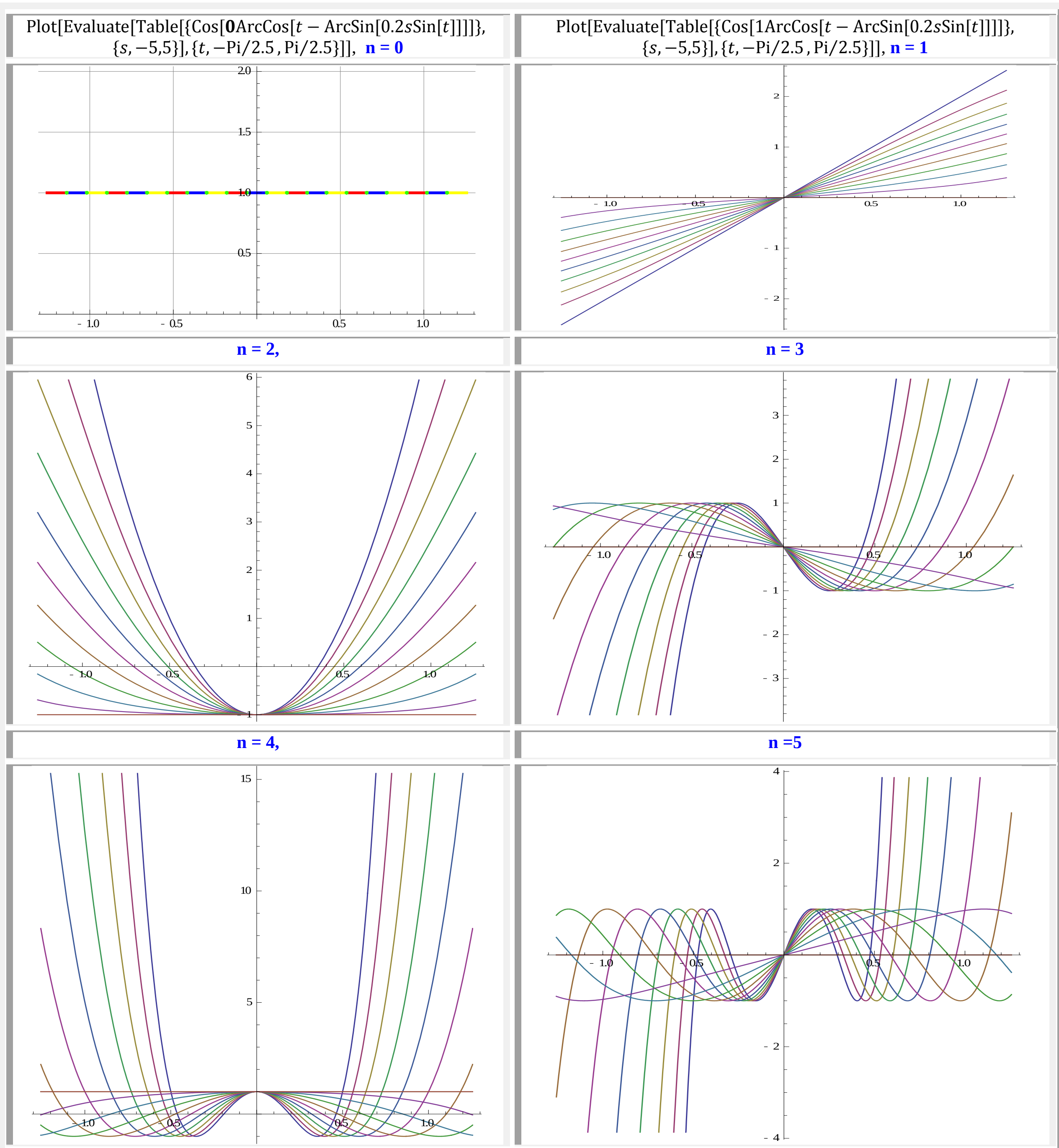
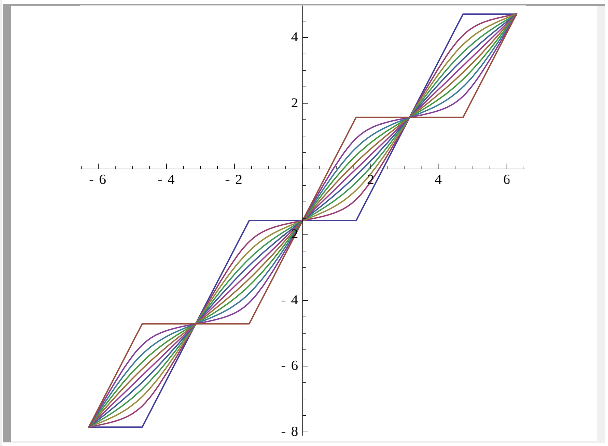
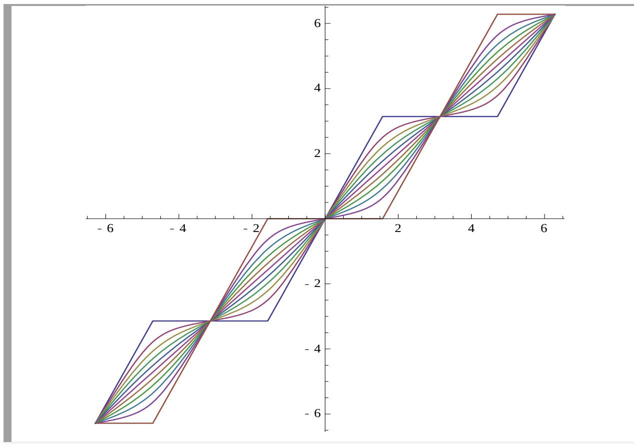


Fig. 3 Polinoame Cebîşev excentrice de prima speţă de n ∈ [0,5] în domeniul x ∈$[-\frac{\pi}{2.2}, +\frac{\pi}{2.2}]$

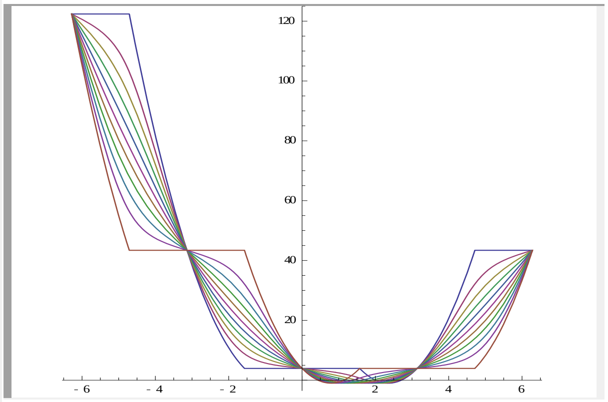
Plot[Evaluate[Table[{Cos[1ArcCos[(t − ArcCos[0.2sSin[t]])]]}, {s, −5, 5}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



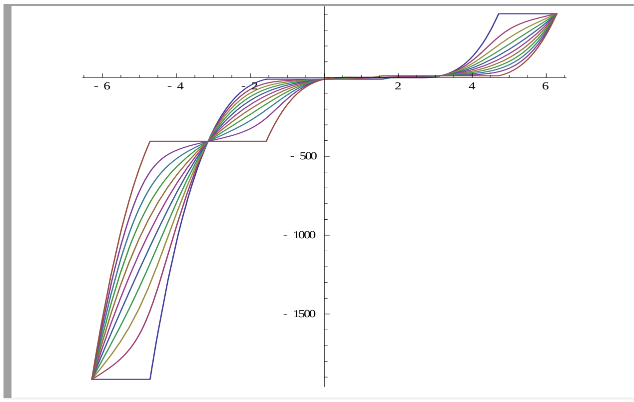
Plot[Evaluate[Table[{t − ArcSin[0.2sSin[t]]}, {s, −5, 5}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



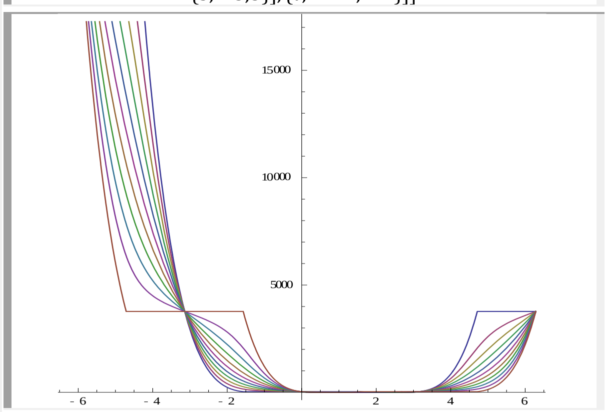
Plot[Evaluate[Table[{Cos[2ArcCos[(t − ArcCos[0.2sSin[t]])]]}, {s, −5, 5}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Cos[3ArcCos[(t − ArcCos[0.2sSin[t]])]]}, {s, −5,5}], {t, −2Pi, 2Pi}



Plot[Evaluate[Table[{Cos[4 ArcCos[(t − ArcCos[0.2sSin[t]])]]}, {s, −5,5}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Cos[5 ArcCos[(t − ArcCos[0.2sSin[t]])]]}, {s, −5,5}], {t, −2Pi, 2Pi}]]

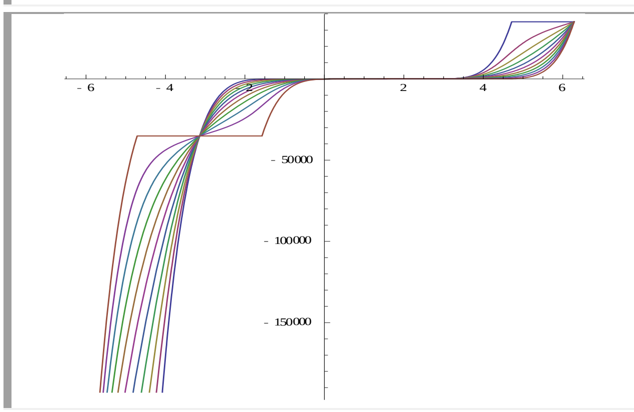


Fig. 4 Polinoame Cebîşev excentrice de prima speţă, de n $\in$ [**1**, **5**] şi **s** $\in$ [-1,+1] în domeniul x $\in [-2\pi, +2\pi]$

În **figura 4** ↑▶ au fost reprezentate şi **FSM**-CE **amplitudine excentrică aexθ = θ – arcsin[s.sin(θ− ε),** faţă de care, **polinoamele Cebîşev excentrice** de **n = 1** sunt translatate paralel, în sensul negativ, al axei **Oy**.

3. POLINOAME CEBÎŞEV EXCENTRICE DE SPEŢA A DOUA

Polinoamele **Cebîşev centrice** de speţa a doua, notate **U_n(x)** pot avea ecuaţia exprimată şi de funcţia circulară centrică indusă:

(5) **U_n(x) = sin[n.arccosx]**

iar cele excentrice se obţin, ca şi în cazul anterior, prin înlocuirea funcţiei **CC cosx cu FSM-CE cexθ** şi rezultă :

(6) **Ue_n(x) = sin[n.arccexθ]** = **= sin[n.arccos(θ – arcsin(s.sin(θ − ε))]**

Dacă polinoamele **Cebîşev** de speţa a 2-a **centrice** (**Fig. 5,a**) există doar în domeniul x ∈ [-1, +1] cele **excentrice** există şi în domeniul mai extins x ∈ $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ (**Fig. 5,b**).

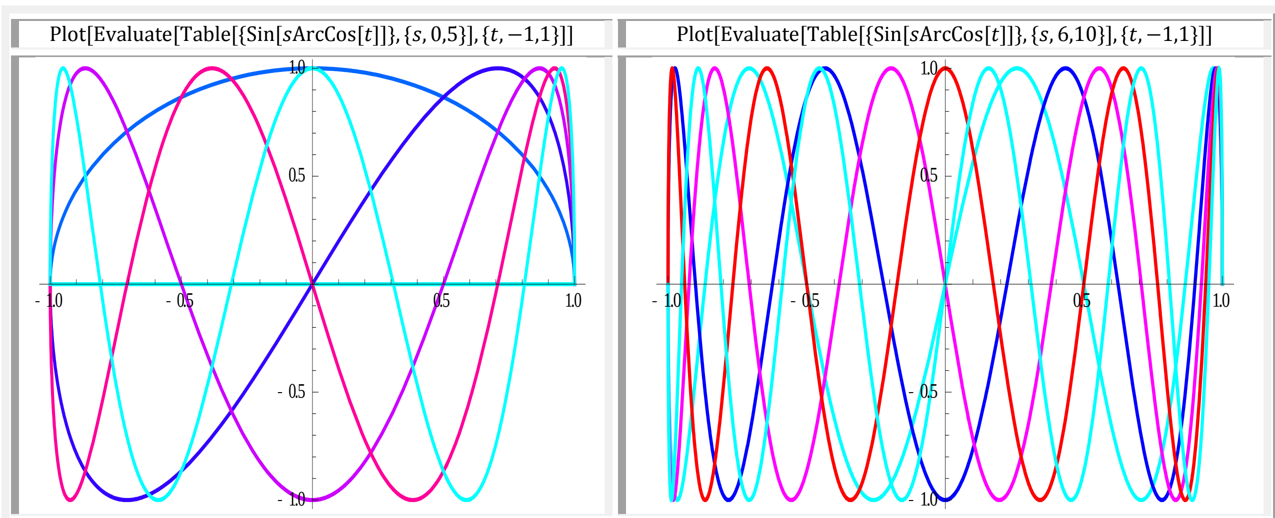
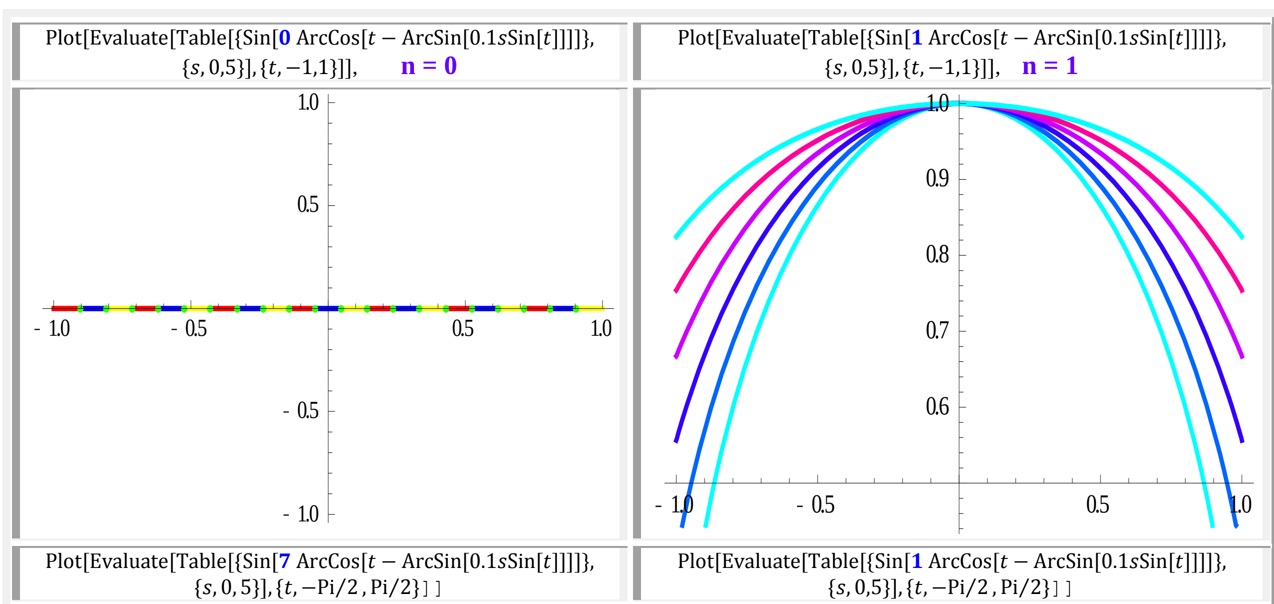
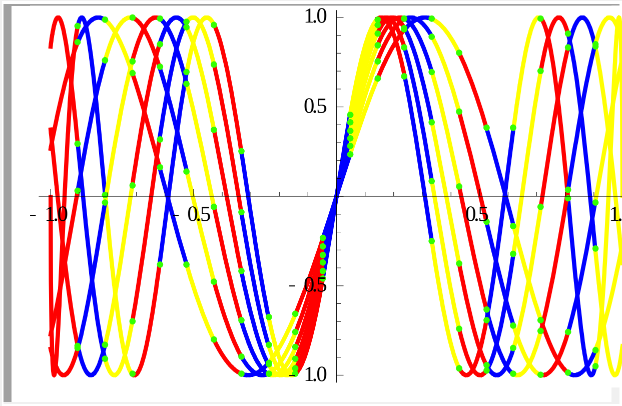
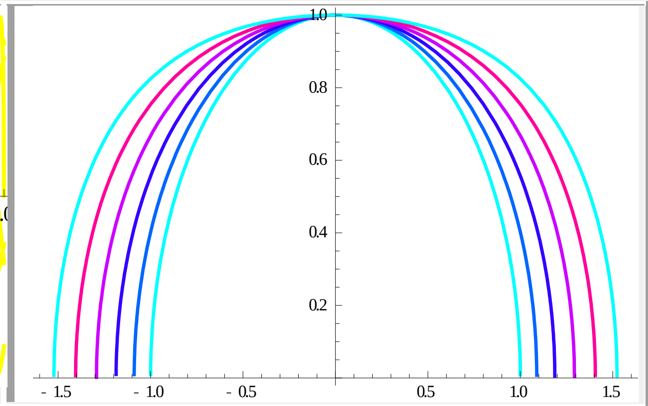


Fig.5,a Polinoame Cebîşev centrice de speţa a doua, pentru **n** ∈ [0, **5**] ◀ si **n** ∈ [6, **10**] ▶

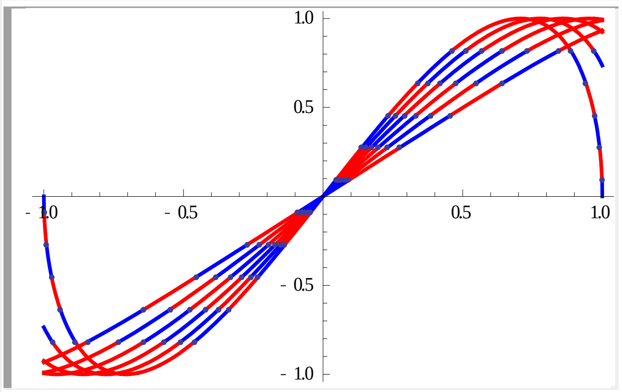




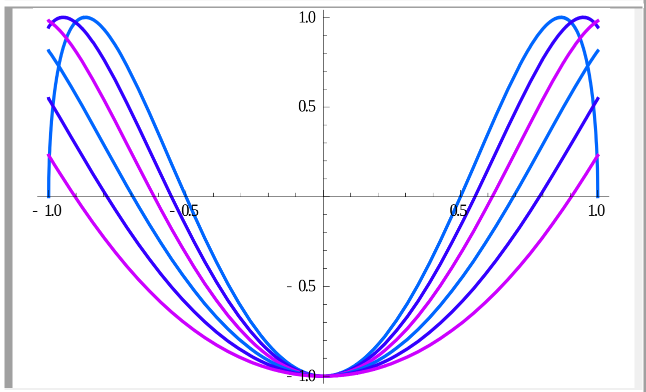
Plot[Evaluate[Table[{Sin[**2** ArcCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 0,5}], {t, −1,1}]], **n = 2**



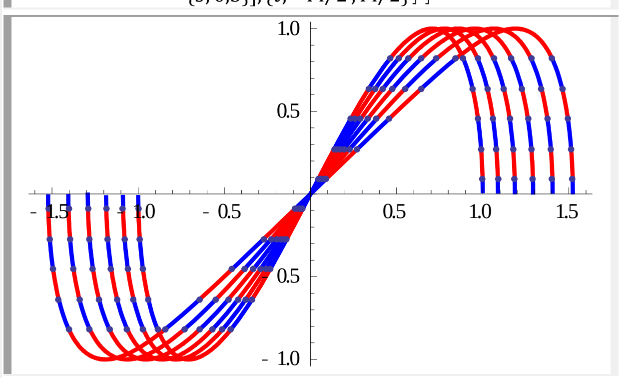
Plot[Evaluate[Table[{Sin[**3** ArcCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 0,5}], {t, −1,1}]]



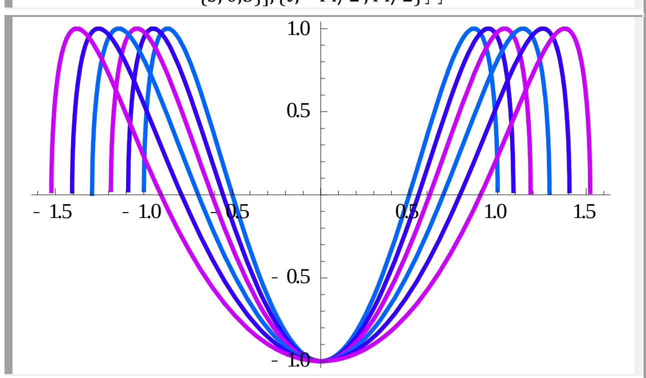
Plot[Evaluate[Table[{Sin[**2** ArcCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 0,5}], {t, −Pi/2 , Pi/2}]]



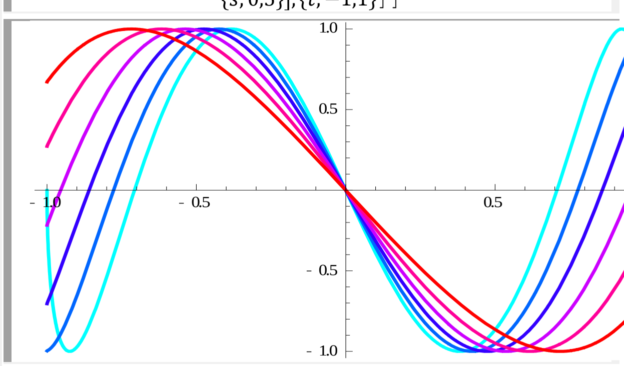
Plot[Evaluate[Table[{Sin[**3** ArcCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 0,5}], {t, −Pi/2 , Pi/2}]]

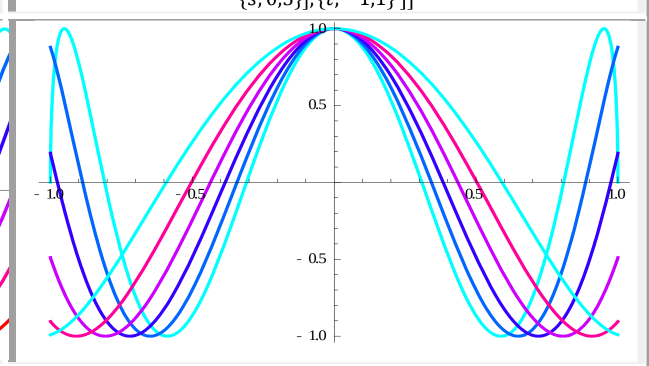


Plot[Evaluate[Table[{Sin[**4** ArcCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 0,5}], {t, −1,1}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[**5** ArcCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 0,5}], {t, −1,1}]]





Plot[Evaluate[Table[{Sin[**4**ArcCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 0,5}], {t, −Pi/2 , Pi/2}]]	Plot[Evaluate[Table[{Sin[**5** ArcCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 0,5}], {t, −Pi/2 , Pi/2}]]

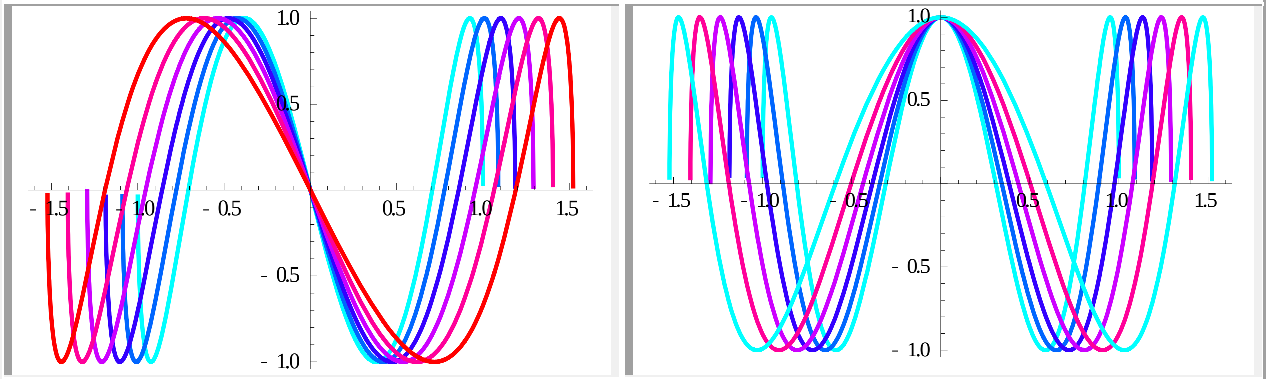


Fig. 5,b Polinoame Cebîşev excentrice de speţa a doua, pentru **n** ∈ [0, **5**] ◀
şi **s** ∈ [-1,+**1**] în domeniul x ∈[-1, +1]

4. FUNCŢIILE GENERATOARE ALE POLINOAMELOR CEBÎŞEV

Câteva funcţii generatoare sunt prezentate în lucrarea lui **Gh. Mocica** ”**PROBLEME DE FUNCŢII SPECIALE**” EDP, Buc. 1988, la care s-au adăugat şi expresiile echivalente exprimate cu **funcţii supermatematice circulare excentrice** (**FSM**- CE) de variabilă **centrică α**, (**Dexα** şi **Rexα**) au expresiile :

(7)
$$\begin{cases} \dfrac{1-s.\cos\alpha}{1+s^2-2s\cos\alpha} = \dfrac{1-sx}{1+s^2-2sx} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n\,(x=\cos\alpha).s^n = Dex\alpha \\ \dfrac{1}{1+s^2-2s\cos\alpha} = \dfrac{1}{1+s^2-2sx} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n(x=\cos\alpha)s^n = \dfrac{1}{\operatorname{Re}x^2\alpha} \\ \dfrac{1-s^2}{1+s\;\;-2s\cos\alpha} = \dfrac{1-s^2}{1+s^2-2sx} = T_0(x)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(x=\cos\alpha) = 2Dex\alpha-1 \\ \ln(1+s^2-2s\cos\alpha) = \ln(1+s^2-2sx) = -2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{T_n(x=\cos\alpha)}{n}s^n = 2\ln(\operatorname{Re}x\alpha) \\ \ln\dfrac{1+s^2+2s.\cos\alpha}{1+s^2-2s\cos\alpha} = \ln\dfrac{1+s\;\;+2sx}{1+s\;\;-2sx} = 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{T_{2n+1}(x=\cos\alpha)}{2n+1} = 2\ln\left|\dfrac{\operatorname{Re}x_2\alpha}{\operatorname{Re}x_1\alpha}\right| \end{cases}$$

în care, polinoamele **Cebîşev** de primul gen / speţă T_n şi de speţa / genul a doua U_n sunt date de expresiile:

(8)
$$\begin{cases} T_n(x=\cos[n.\arccos(x=\cos\alpha)] = \cos n\alpha, n\in Z_+ \\ U_n(x=\cos\alpha) = \dfrac{\sin[(n+1).\arccos(x=\cos\alpha)]}{\sin[\arccos(x=\cos\alpha)]} = \dfrac{\sin[(n+1)\alpha]}{\sin\alpha}, n\in Z_+ \end{cases}$$

şi formează un şir ortogonal pe intervalul [-1, 1] în raport cu ponderea

(9) $\rho = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sin\alpha$

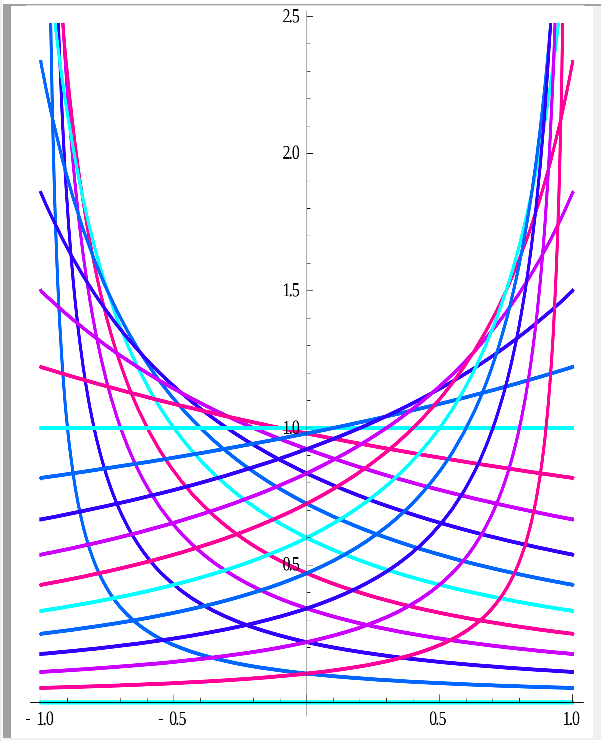
Graficele funcţiilor generatoare ale polinoamelor **Cebîşev centrice** de prima speţă, ca funcţii de x au expresiile (http://ro.math.wikia.com/wiki/Polinom_Cebîşev_de_speţa_întâi):

(10)
$$\begin{cases} g_1(t,x) \equiv \dfrac{1-t^2}{1+t^2-2xt} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x).t^n \\ g_2(t,x) \equiv \dfrac{1-x.t^2}{1+t^2-2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x).t^n \end{cases}$$

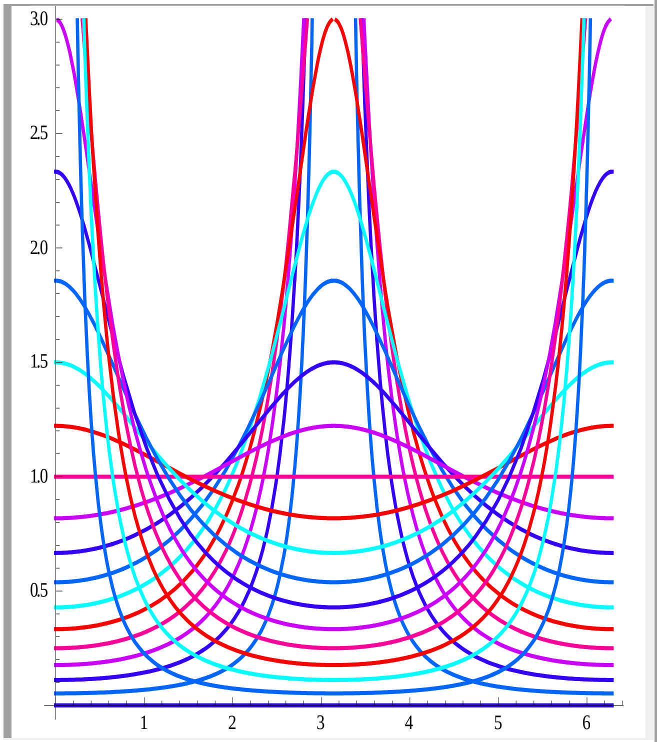
cu ajutorul cărora au fost reprezentate $g_1(t,x)$ 🡅 ◀ şi $g_2(t,x)$ 🡇 ◀ ca funcţii de x în stânga ◀ **figurii 6** şi ca funcţii de **α** - **x = coaα** din ecuaţiile (7) - în dreapta.

În **figura 7** sunt prezentate graficele funcţiilor generatoare ale polinoamelor **Cebîşev centrice** de speţa a doua.

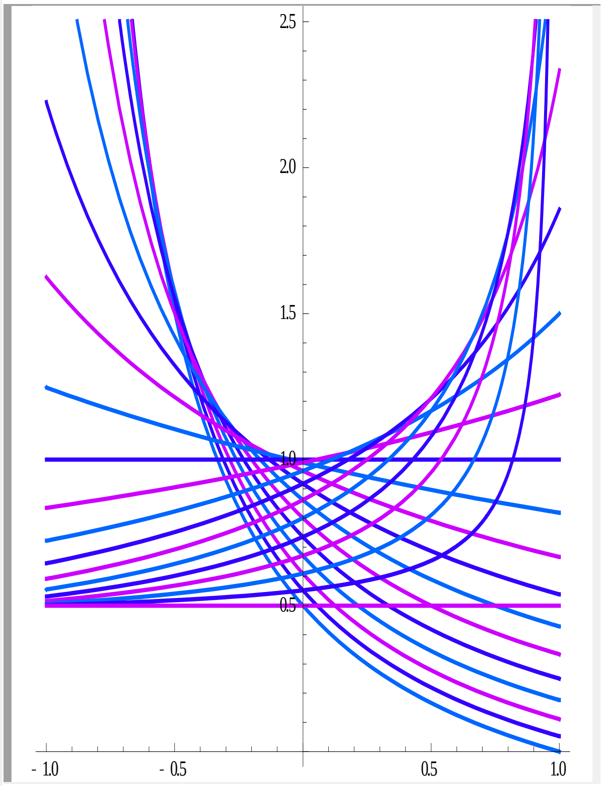
Plot[Evaluate[Table[{$(1-(0.1t)^2)/(1+(0.1t)^2-0.2tx)$}, {$t,-10,10$}], {$x,-1,1$}]]



Plot[Evaluate[Table[{$(1-(0.1s)^2)/(1+(0.1s)^2-0.2s\mathrm{Cos}[t])$}, {$s,-10,10$}], {$t$, 0,2Pi}]] → **2Dexα - 1**



Plot[Evaluate[Table[{$(1-x(0.1t)^2)/(1+(0.1t)^2-0.2xt)$}, {$t,-10,10$}], {$x,-1,1$}]]



Plot[Evaluate[Table[{$(1-(0.1s)$^2Cos[t])/($1+(0.1s)$^2 − 0.2sCos[t])}, {$s,-10,10$}], {{t, −Pi, Pi}}]]→ **Dexα**

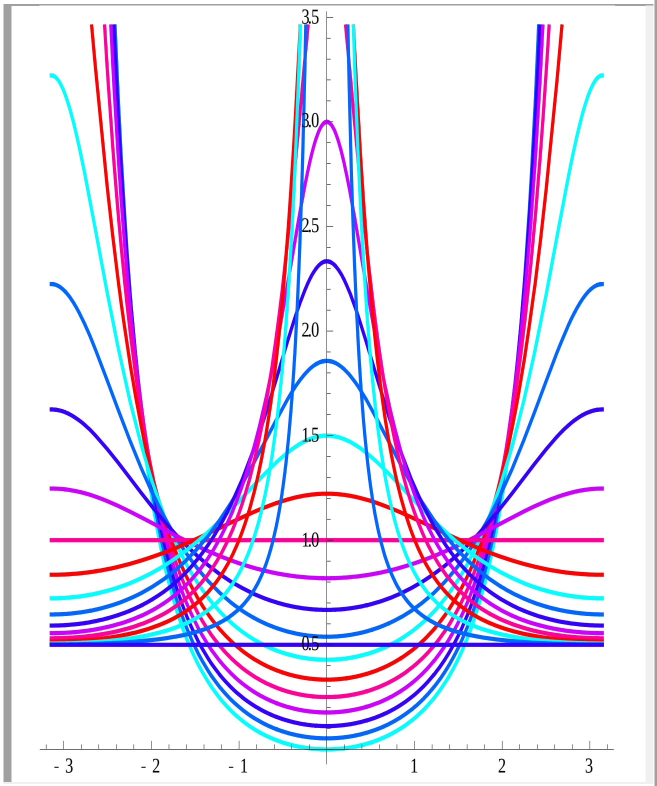


Fig.6 Graficele funcţiilor generatoare ale polinoamelor **Cebîşev** **centrice** de speţa întâi

Plot[Evaluate[Table[{$1/(1+(0.1t)^2-0.2tx)$}, {$t,-10,10$}], {$x,-1,1$}]	Plot[Evaluate[Table[{$1/(1+(0.1s)^2-0.2s\mathrm{Cos}[t]$)}, {$s,-10,10$}], {$t,-\mathrm{Pi},\mathrm{Pi}$}]

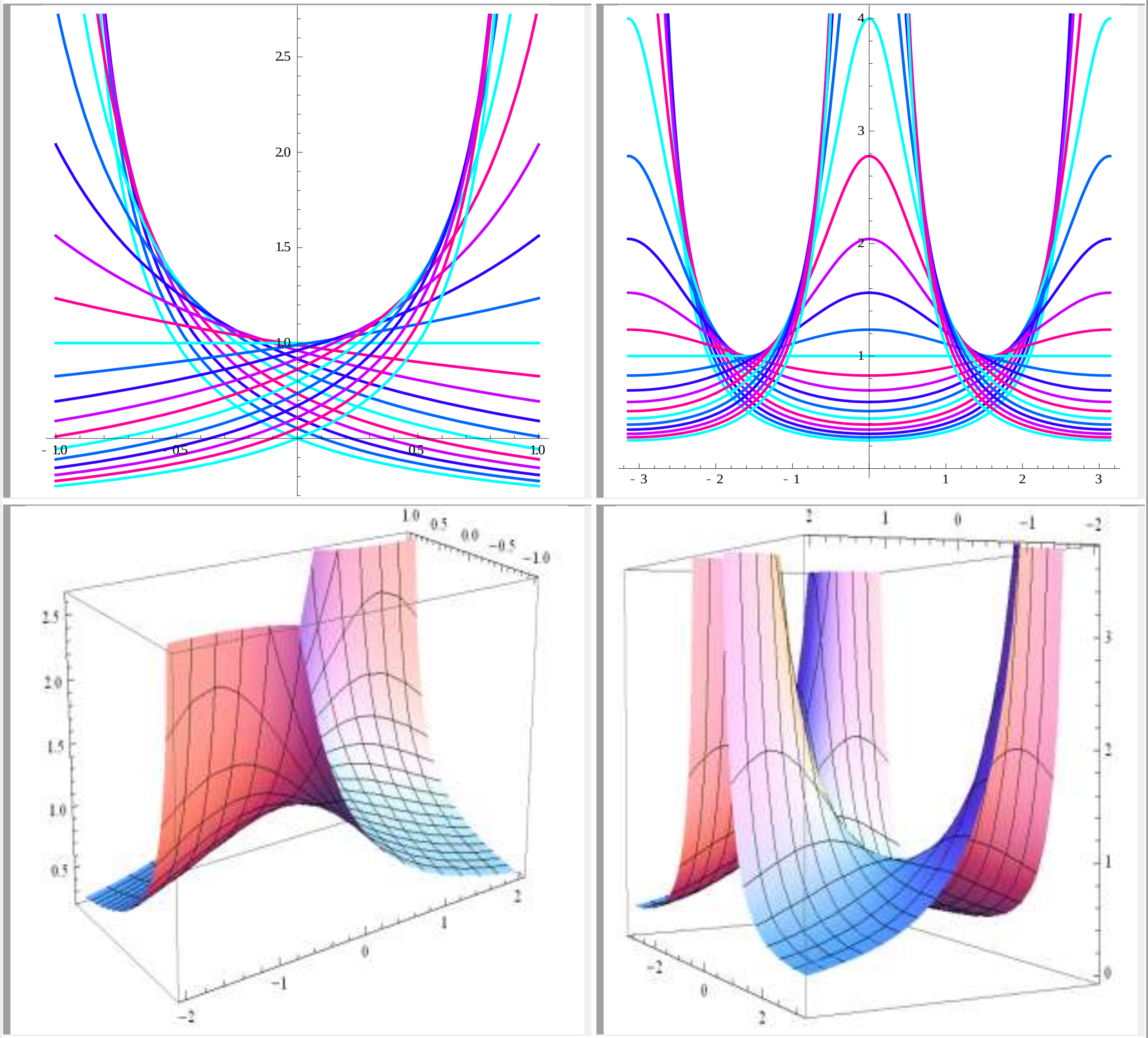


Fig.7 Graficele funcţiilor generatoare ale polinoamelor **Cebîşev centrice** de speţa a doua

Motto:" Geometria este ştiinţa care restaurează situaţia dinainte de creaţia lumii
şi încearcă să umple "golul" renunţând la oficiile materiei **"**
Lucian Blaga, *Discobolul*

CAPITOLUL XII

FUNCŢII SUPERMATEMATICE (FSM)
RADIAL EXCENTRICE CVADRILOBE

1. Q U A D R I L O B E (C V A D R I L O B E)

Quadrilobele sunt curbe plane închise, întroduse în matematică în anul 2005 prin lucrarea [19, **Şelariu Mircea Eugen** "**QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**", The 11 – th International Conference on **Vibration Engineering**, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82].

1.1 QUADRILOBE / CVADRILOBE (QLE) EXTERIOARE CERCULUI UNITATE

◄ $x = dex\theta$; y = dex(θ-Pi/2); s ∈ [0,1] x = coqθ; y = siqθ; s ∈ [0,1] ►	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2], Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi}]]

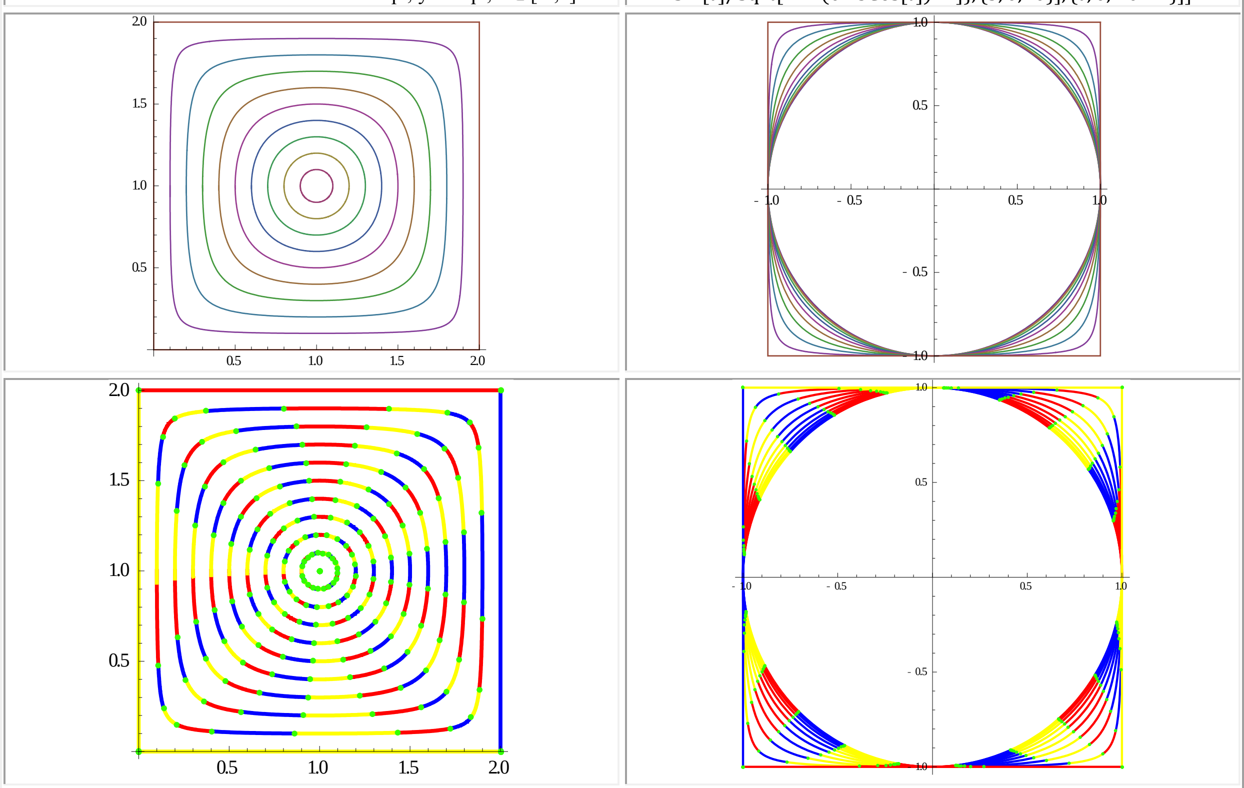


Fig.1,a Quadrilobe (exterioare) în 2D cu dexθ şi dex(θ - $\frac{\pi}{2}$) ◄ şi cu coqθ şi siqθ în ►

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.ro www.SuperMathematica.org

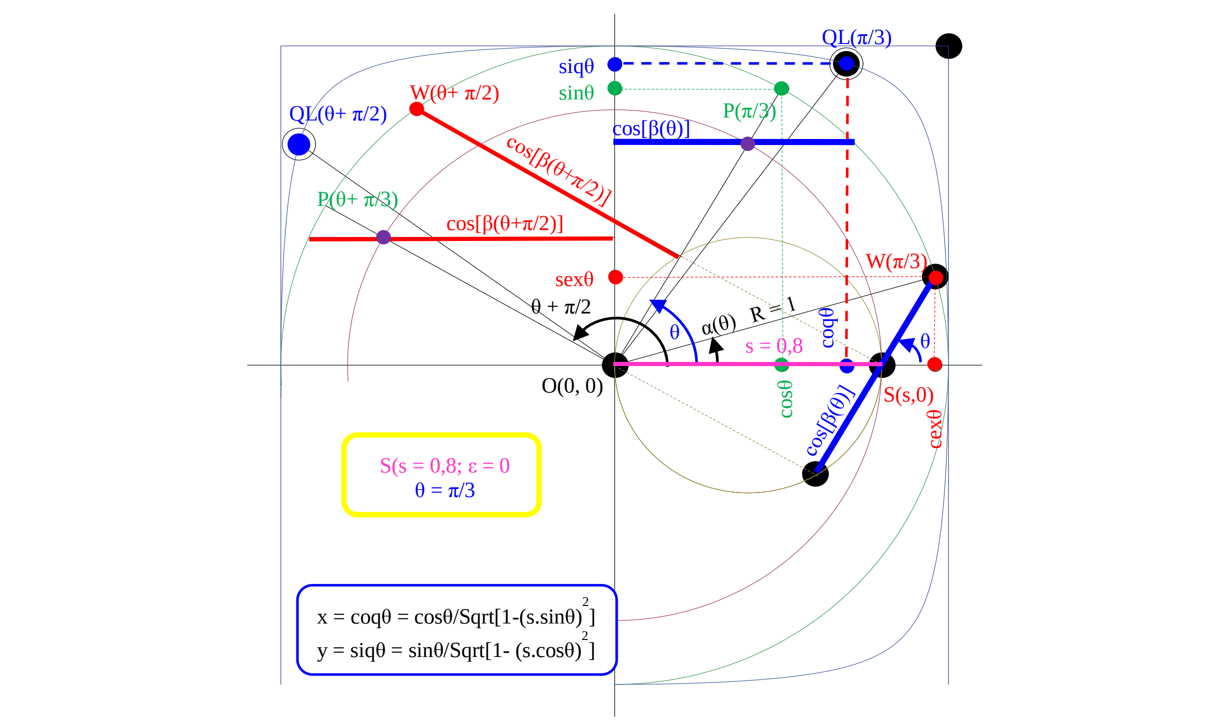


Fig. 1,b Reprezentarea grafica a **quadrilobelor (cvadrilobelor) exterioare** cercului unitate / trigonometric şi a funcţiilor cosinus şi sinus cvadrilobe

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

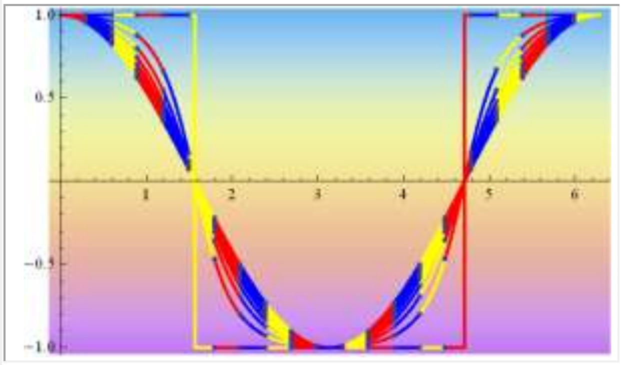
Funcţiile quadrilobe, cosinus **coqθ** şi sinus **siqθ** quadrilobe, sunt acelea care, precum funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**) **derivată excentrică**, de variabilă excentrică **dexθ**, pot realiza transformarea continuă a cercului în pătrat (**Fig.1, a**) sau a conului în piramidă (**Fig.1, d◄**), respectiv al cilindrului circular în cilindru pătrat, aşa cum se poate constata în **figura1, d**.

Dacă cercul şi pătratul sunt entităţi matematice proprii **matematicii centrice** (**MC**), **qudrilobele** sunt proprii matematicii excentrice (**ME**). Altfel spus, quadrilobele sunt curbele **supermatematice (SM) excentrice închise (excentrice pătratice)** obţinute prin **hibridarea matematică** a 2 curbe **matematice centrice închise**: cercului cu pătratul.

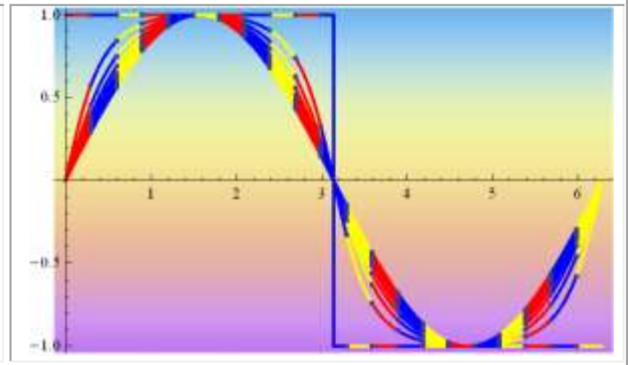
Cvadrilobele (în limba engleză quadrilobes) **exterioare** cercului unitate sau trigonometric (**Fig.1, a**), de raza R = 1, au fost întroduse în matematică simultan cu funcţiile periodice cvadrilobe cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ (Fig.1,a►)** a căror expresii de definiţie sunt

$$(1)\qquad \begin{cases} coq\theta = coq[\theta, S(s,\varepsilon)] = \dfrac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ siq\theta = siq[\theta, S(s,\varepsilon)] = \dfrac{\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases},$$

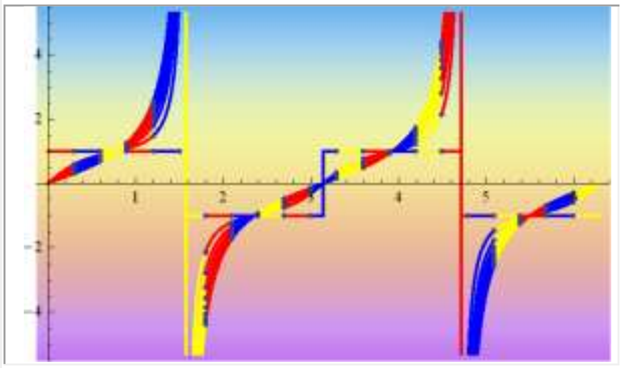
cu graficele din **figura 1, c**, în care **s** şi **ε** sunt coordonatele polare radiale centrice şi, respectiv, unghiulare ale **excentrului** sau polului **S**(s, ε): raza polară **s**, sau **excentricitatea** liniară **numerică** şi unghiul polar, sau azimutul **ε**, sau **excentricitatea unghiulară**.



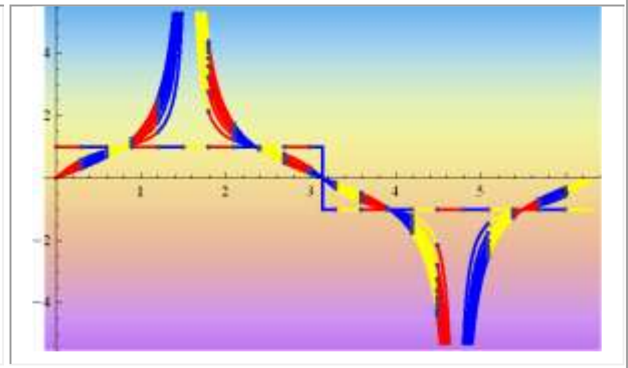
coqθ



siqθ



taqθ



taqvθ

Fig. 1,c FSM-QLE
cosinus coq, sinus siq, tangenta Euler taq şi tangenta Voinoiu taqv cvadrilobe

Pentru s = ± 1 cvadriloba degenerează într-un pătrat perfect, circumscris cercului unitate (Fig.**1, a** ►şi Fig. **1, d** ►), denumit şi **pătrat supermatematic** (SM) pentru a se distinge de pătratul **Alaci**, înscris în cercul unitate şi rotit cu ± π/4, pe care sunt definite **funcţiile trigonometrice pătratice Alaci**.

Pentru ca o curbă să fie din **familia lobelor** (**bi**-, **tri**-, **cvadri**-, ş.a.m.d), ea trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

1. Să fie o curbă închisă, pentru toate valorile date excentricităţii numerice liniare **s**, în domeniul **s** ∈ [0, 1] → **S**(**s** ∈ [0, 1]; **ε** = 0);
2. Curba să nu conţină puncte unghiulare în vârfurile ei, cu excepţia poligonului, adică pentru **s** = ± 1;
3. Pentru **s** = 0 să degenereze într-un cerc perfect;
4. Pentru **s** = 1 să degenereze într-un poligon perfect, regulat sau neregulat.

Se spune că "degenerează" pentru că, plecând de la **s** = 0, care este domeniul **matematicii centrice** (**MC**), la **s** = 1, trecând prin **domeniul matematicii excentrice** (**ME → s ∈ (−∞, +∞)**\ 0), se ajunge la un poligon, adică, din nou la o figură comună matematicii ordinare, **centrice**.

Ambele poligoane, sau pătrate, de exemplu, sunt identice **ca formă**, şi totuşi, diferenţele dintre poligoanele sau pătratul **MC** şi poligoanele sau pătratul matematicii excentrice (**ME**) sunt **colosale**.

Pătratul **MC** nu are ecuaţii sau, mai precis, ***nu avea*** ca cercul, de exemplu, el compunându-se din patru segmente de dreaptă congruente şi paralele, două câte două, pe când pătratul **ME** ***are ecuaţiile***

parametrice (1), obţinute pentru **s** = ± 1 în ecuaţiile (1), sau cu ajutorul funcţiei supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) derivată excentrică de variabilă excentrică dex**θ**

(2) $$\begin{cases} x = R\ dex[\theta, S(s,\varepsilon)] \\ y = R\ dex[\theta\ \pm\frac{\pi}{2}, S(s,\varepsilon)]\text{'} \end{cases} \qquad \text{dex}\theta = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}}$$

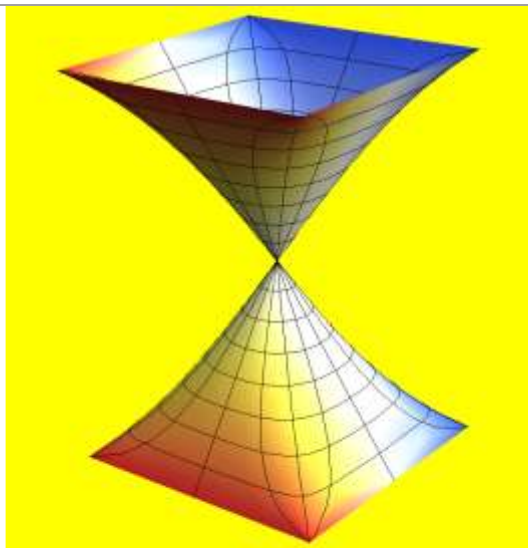
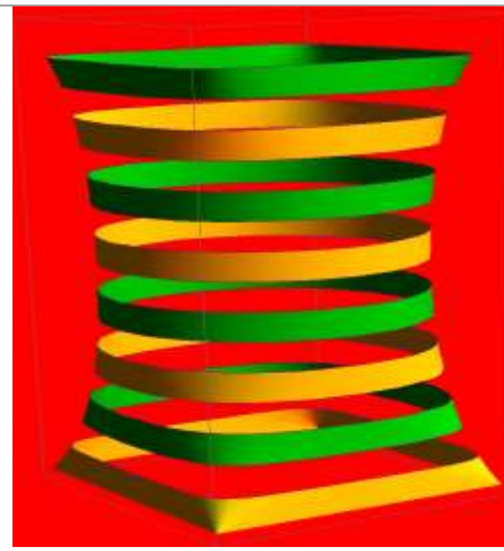
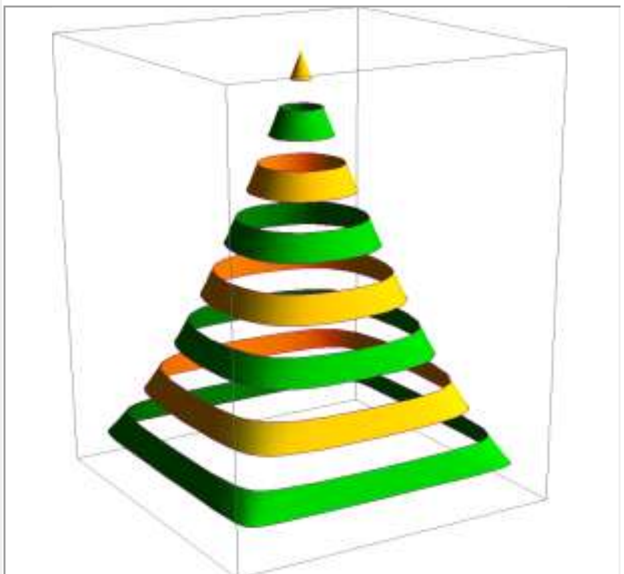
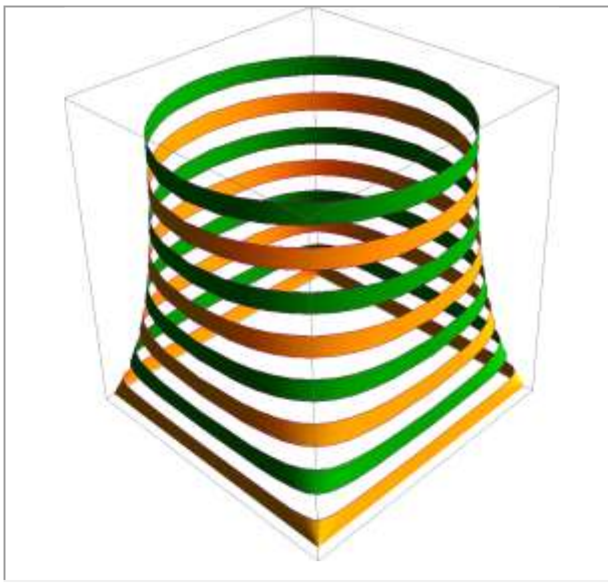
ParametricPlot3D[{u Cos[t]/Sqrt[1 − (uSin[t])²], 1.5u, u Sin[t]/Sqrt[1 − (uCos[t])^2]}, {t, 0,2Pi}, {u, −1, 1}	ParametricPlot3D[{1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (uSin[t])²], 1 − Cos[t − Pi/2]/Sqrt[1 − (uSin[t − Pi/2])²], 2u}, {t, 0,2Pi}, {u, −1 ,1}
	
	

Fig.1,d Quadrilobe în 3D cu dexθ şi dex(θ - $\frac{\pi}{2}$) ◄ şi cu **coqθ** şi **siqθ** în ►

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.ro	www.SuperMathematica.org

1.2 QUADRILOBE (CVADRILOBE) INTERIOARE CERCULUI UNITATE (QLI)

Quadrilobele (cvadrilobele) **interioare** cercului unitate, prezentate în **figura 3, a**, respectă doar două din cele trei condiţii; ele degenerând, pentru **s** = 1, într-un pătrat cu colţuri rotunjite, rotit cu $\frac{\pi}{4}$ faţă de quadrilobele exterioare de s = 1, ca şi pătratul **Valeriu Alaci**. Dar pătratul quadrilobelor interioare este cu colţuri rotunjite şi nu este, deci, un pătrat perfect, iar pentru **s** > 1 ia forma astroidelor din **figura 3, b**, de aceea denumirea de quadrilobe este improprie / forţată.

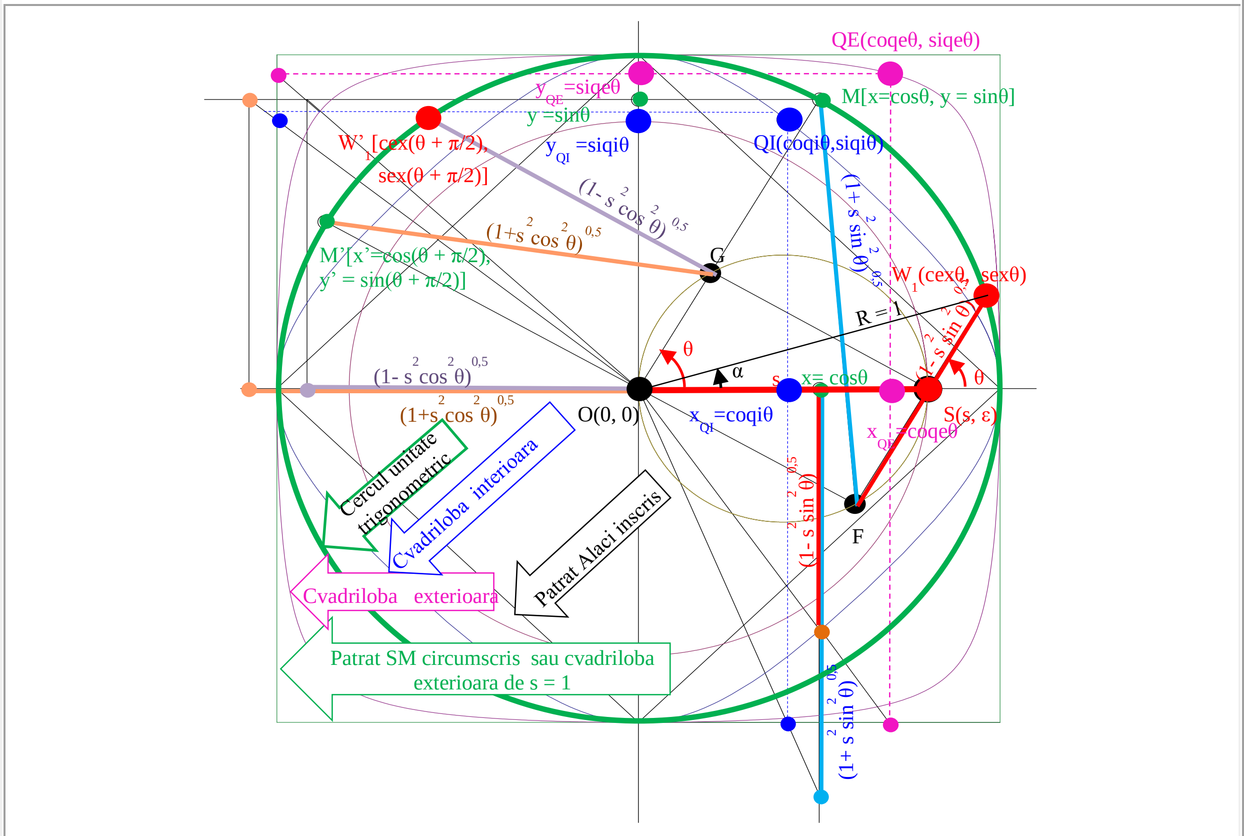


Fig. 2 Reprezentarea grafică a **cvadrilobelor exterioare** de s = 0,8 şi θ = π/3 şi a funcţiilor cosinus şi sinus: ○ centrice (**cosθ, sinθ**), ●excentrice (**cexθ, sexθ**) şi ◙cvadrilobe (**coqθ, siqθ**)

Relaţiile parametrice de definiţie ale **quadrilobelor interioare** cercului unitate au următoarele relaţii de definiţie cu functiile cosinus quadrilob interior ***coqiθ*** şi sinus quadrilob interior ***siqiθ***

$$(3)\qquad \begin{cases} coqi\theta = \dfrac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ siqi\theta = \dfrac{\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases}$$

Se ştie că radicalul, din expresia lui siqθ şi a lui coqθ din relaţia (1), este, totodată, funcţia specială **delθ** sau **δ** ca şi funcţia eliptică **Jacobi** dn(u,k), pentru k = s, adică

(4) $$\boldsymbol{del\theta} = \sqrt{1 - s^2 sin^2\theta} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{deli\theta} = \sqrt{1 + s^2 sin^2\theta}$$

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]}, {s,0,10}], {t,0,2.01 Pi}]]
```

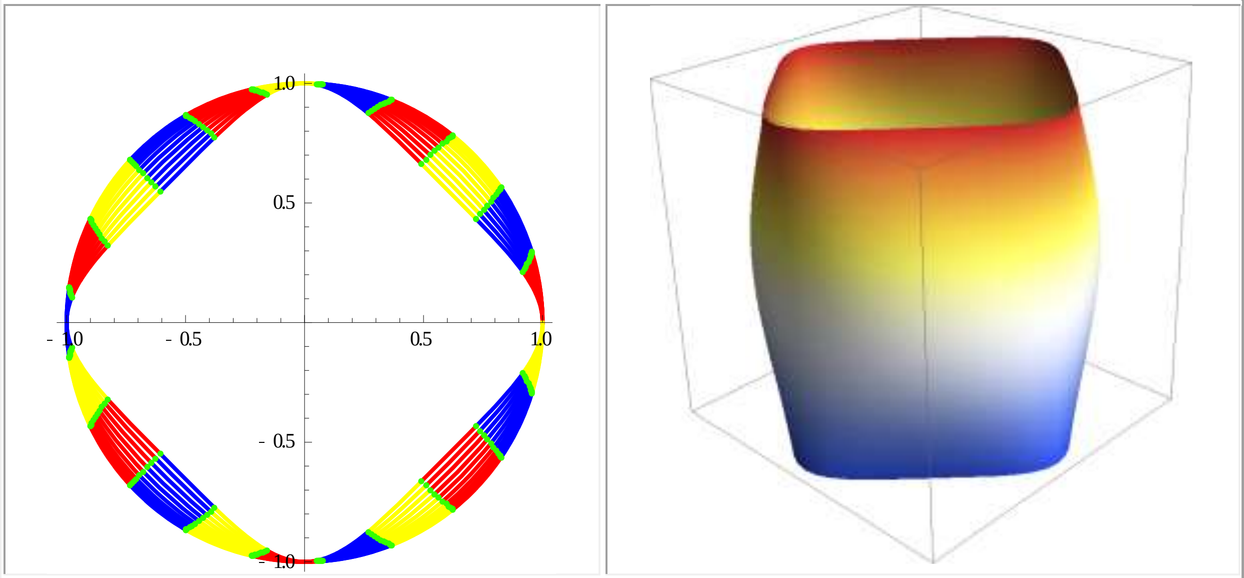


Fig.3,a Quadrilobe (Cvadrilobe) **interioare** cercului unitate, pentru **s** ∈ [0, 1]

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]},
{s,10,40}], {t,0,2.01 Pi}]]
```

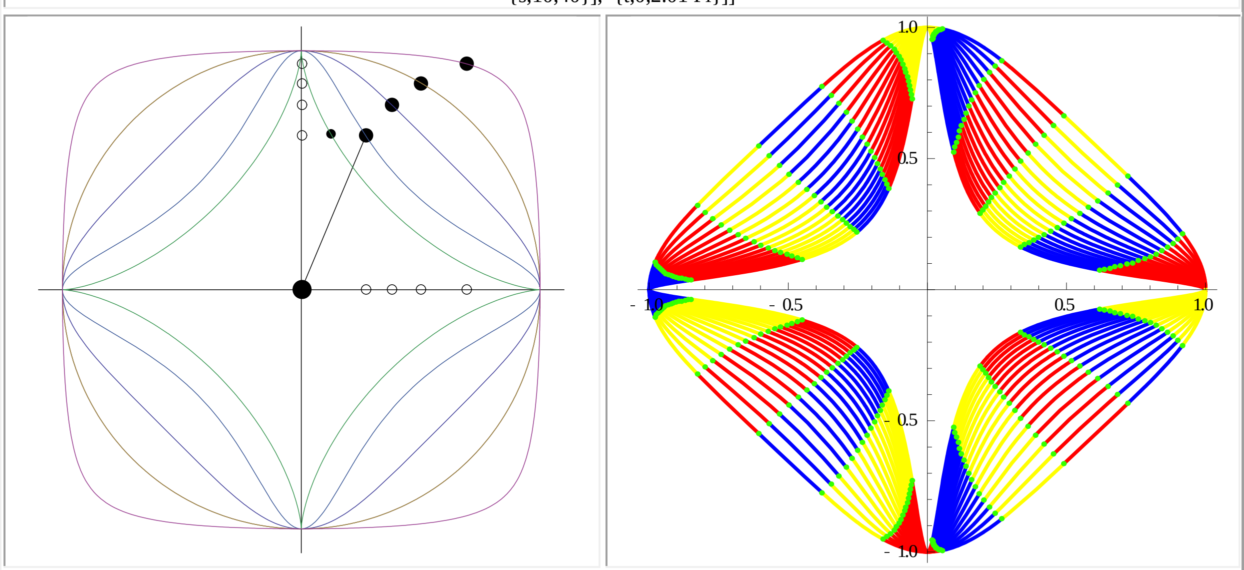


Fig.3,b Quadrilobe (cvadrilobe) **interioare** cu **s > 1** degenerează în quqsiquqdrilobe (cvazicvdrilobe) **astroidale**, pentru **s** ∈ [1, 4]

Punctul generator **P** a **FCC** sinθ şi cosθ pe cercul unitate CU(1, O) este de coordonate polare centrice **P**(R = 1, θ) şi, în **figura 2**, este la **θ** = $\frac{\pi}{3}$, în timp ce, punctul generator **W₁** al **FSM-CE cex₁θ** şi **sex₁θ** apare pe **CU**(1, O) la un unghi **α** la centrul **O** dat de relaţia sau **FSM-CE amplitudine excentrică aex θ**

(5) **α** = **aexθ** = θ – arcsin[**s**.sin(**θ** - **ε**)],

care, pentru **θ** = $\frac{\pi}{3}$ şi **s** = 0,8 (**Fig.2**), are valoarea de **α** = 0,28180472497614373 radiani, cea ce corespunde la **α** = 16,146221387977935^0 , adică 16^0 8' 46,397".

Graficele de variaţie ale unghiului la centru **α**(θ) sunt date în lucrările [47], [48] şi [49].

Unghiul **α** mai poate fi exprimat / obţinut şi prin relaţiile din **MC**

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha = \arcsin[sex\theta] = \arcsin\{\sin[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]]\} = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha = \arccos[cex\theta] = \arccos\{\cos[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]]\} = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha = \arctan[tex\theta] = arctan\frac{sex\theta}{cex\theta} \end{cases}$$

Cele patru variante de exprimare a unghiului **α**(θ), din relaţiile (5) şi (6), sunt toate corecte, dar se evidenţiază superioritatea utilizării **FSM-CE** în acest scop, deoarece numai prin relaţia (**5**), a **FSM-CE** amplitudine excentrică **aexθ**, de variabilă excentrică, unghiul poate fi exprimat corect, în întreg domeniul, de la zero la 2π. Celelalte expresii, care utilizează **FCC,** pot exprima corect variaţia acestui unghi doar în domeniile de definiţie ale acestor funcţii, care sunt **θ** ∈ [— π/2, + π/2] pentru arctan**α** şi arcsin**α** şi **θ** ∈ [0, π] pentru arccos**α**.

Faţă de punctul **P**(1, θ), punctele generatoare ale **FQL** interne sunt defazate în minus şi cele exterioare **FQQL** sunt defazate în plus / avans (**Fig. 1, b, Fig. 2** şi **Fig. 13**).

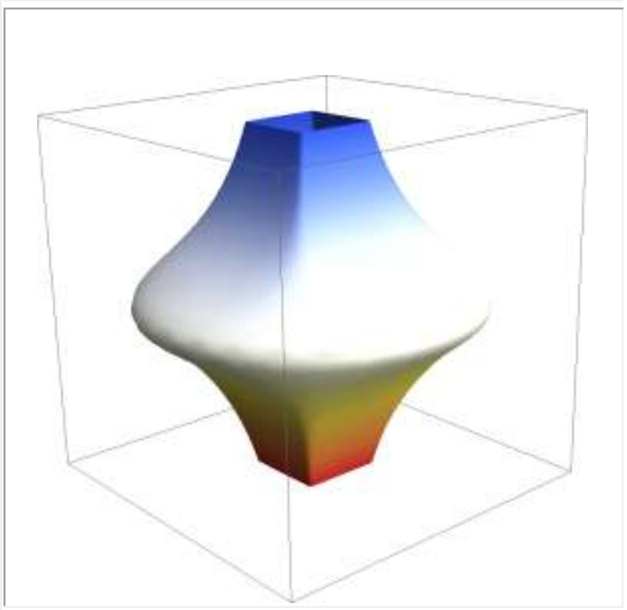
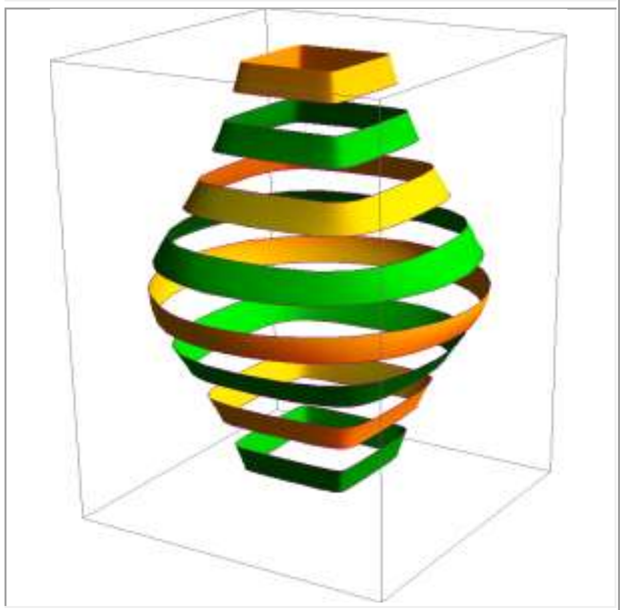
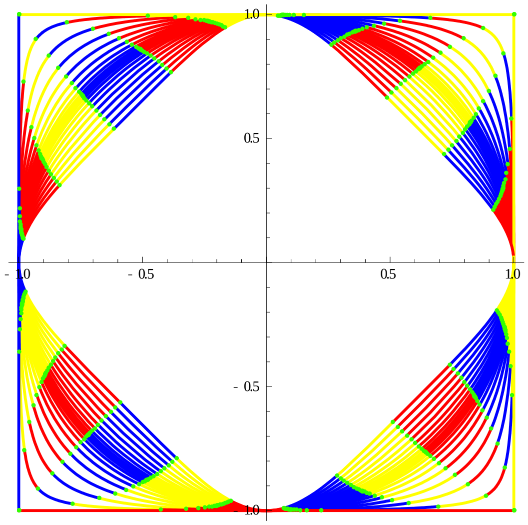
ParametricPlot3D[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.2sSin[t])^2], Cos[t]/Sqrt[1 + (0.2sCos[t])^2] , 0.05s}, {s, −20,20}, {t, 0,2.01Pi}	ParametricPlot3D[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2], Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2] , 0.05s}, {s, −30,30}, {t, 0,2.01Pi}
	

Fig.3,c Quasiququdrilobe (cvazicvdrilobe) **astroidale**, pentru **s** ∈ [-2, 2]◄ şi **s** ∈ [-3, 3]►

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.ro	www.SuperMathematica.org

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[t]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]}, {Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/ Sqrt [1+(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]}},{s,0,10}],{t,0,2.01 Pi}]]

ParametricPlot3D[{{Cos[t]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2],1-0.1 s}, {Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/ Sqrt[1+(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2], 1+0.1 s}}, {s,0,10},{t,0,2.01 Pi}]



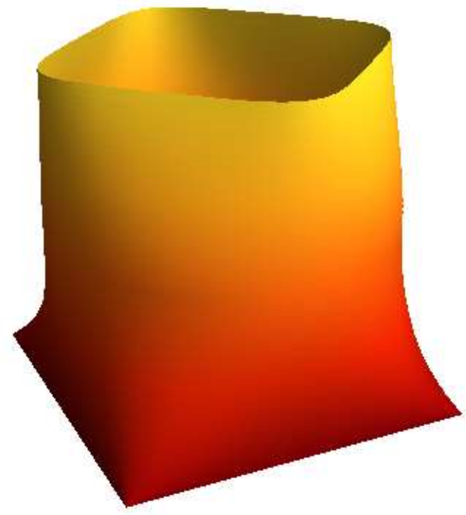


Fig.3,d Quadrilobe exterioare şi quadrilobe interioare asamblate

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

1.3. QUADRILOBE (CVADRILOBE) VALERIU ALACI

Lucrările reputatului matematician timişorean Prof. math. **Valeriu Alaci,** profesor al **Şcolii POLITEHNICE** din Timişoara**,** astăzi **Universitatea "POLITEHNICA"**, şeful Catedrei de Matematici, sunt unanim necunoscute peste ocean. Sperăm că, măcar în **România**, ele să fie cunoscute, măcar sau în special **funcţiile trigonometrice pătratic**e şi **funcţiile trigonometrice rombice**.

Bazaţi pe această presupunere, amintim că **funcţiile trigonometrice pătratic**e sunt definite pe un pătrat, cu laturile rotite cu un unghi de $\pi/4$ (45^0) faţă de axele unui reper / sistem cartezian drept, aşa cum se poate observa în **figura 2** şi **4, a**. A fost denumit pătrat **Alaci Valeriu**. Dar, între cerc şi pătrat mai pot fi o infinitate de curbe plane închise denumite quadrilobe **Alaci Valeriu** interioare cercului.

Ecuaţiile acestor quadrilobe **Valeriu Alaci** **interioare cerului unitate** sunt

$$(7)\qquad \begin{cases} x = (1-s^2(1-\sqrt{2}/2))\left(\frac{\mathrm{Cos}[t]\mathrm{Cos}[\mathrm{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\mathrm{Sin}[t]^2}} - \frac{\mathrm{Sin}[t]\mathrm{Sin}[\mathrm{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\mathrm{Cos}[t]^2}}\right) \\ y = (1-s^2(1-\sqrt{2}/2))\left(\frac{\mathrm{Cos}[t]\mathrm{Sin}[\mathrm{Pi}/4]}{\sqrt{1-1s^2\mathrm{Sin}[t]^2}} + \frac{\mathrm{Sin}[t]\mathrm{Cos}[\mathrm{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\mathrm{Cos}[t]^2}}\right) \\ z = s \end{cases}$$

Între cerc şi pătrat este o mare aglomeraţie / ("inflaţie") de diverse funcţii matematice noi. Astfel, pe lângă quadrilobele interioare şi quadrilobele **Valeriu Alaci**, Prof.dr. **Malvina Baica** şi ing. **Mircea Cârdu** au introdus în Matematică **funcţiile transtrigonometrice** (v.**"THE PARATRIGONOMETRY"** **AGIR** Publishing House, Bucharest, Romania, 2010) cosinus $ct_k\alpha$ şi sinus $st_k\alpha$ transtrigonometrice, pe care eu le-aş fi denumit intratrigonometrice; fiind ***între*** cerc şi pătrat. Ecuaţiile acestora sunt

$$\begin{cases} x = (1 - s^2(1-\sqrt{2}/2))(\frac{\text{Cos}[t]\text{Cos}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\text{Sin}[t]^2}} - \frac{\text{Sin}[t]\text{Sin}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}}) \\ y = (1 - s^2(1-\sqrt{2}/2))(\frac{\text{Cos}[t]\text{Sin}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-1s^2\text{Sin}[t]^2}} + \frac{\text{Sin}[t]\text{Cos}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}}), \\ z = s \end{cases} \quad s \in[-1,+1]\ ,\ t \equiv \theta \in [0, 2\pi]$$

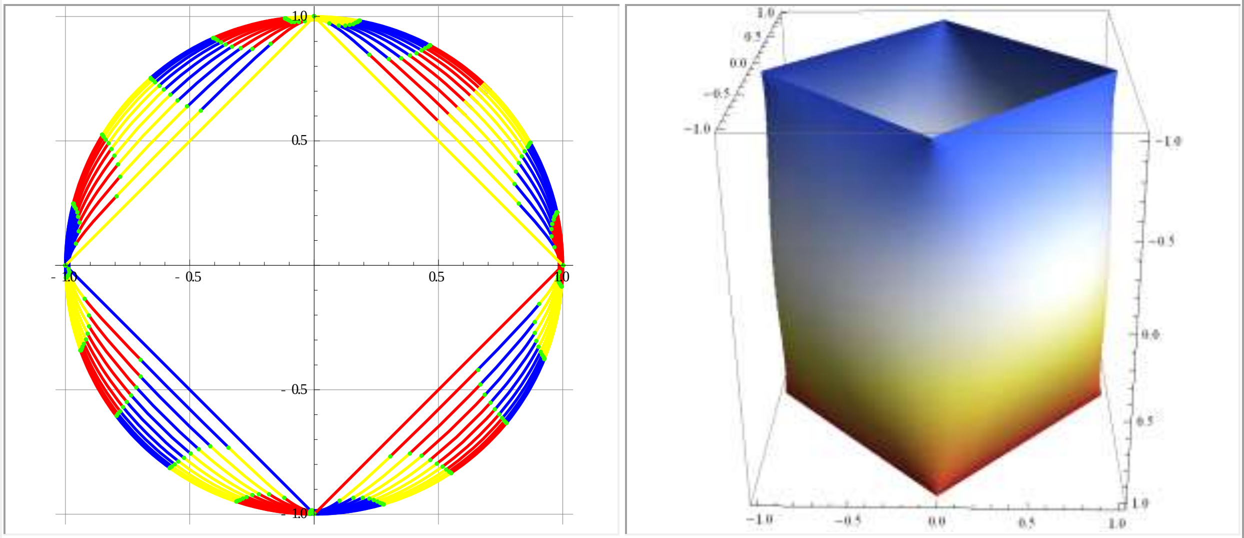


Fig.4,a Quadrilobe **Valeriu Alaci** interioare cercului unitate

$$\begin{cases} x = (1 + s^2(1-\sqrt{2}/2))(\frac{\text{Cos}[t]\text{Cos}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\text{Sin}[t]^2}} - \frac{\text{Sin}[t]\text{Sin}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}}) \\ y = (1 + s^2(1-\sqrt{2}/2))(\frac{\text{Cos}[t]\text{Sin}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-1s^2\text{Sin}[t]^2}} + \frac{\text{Sin}[t]\text{Cos}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}}), \\ z = s \end{cases} \quad s \in[-1,+1]\ \ t \equiv \theta \in [0, 2\pi]$$

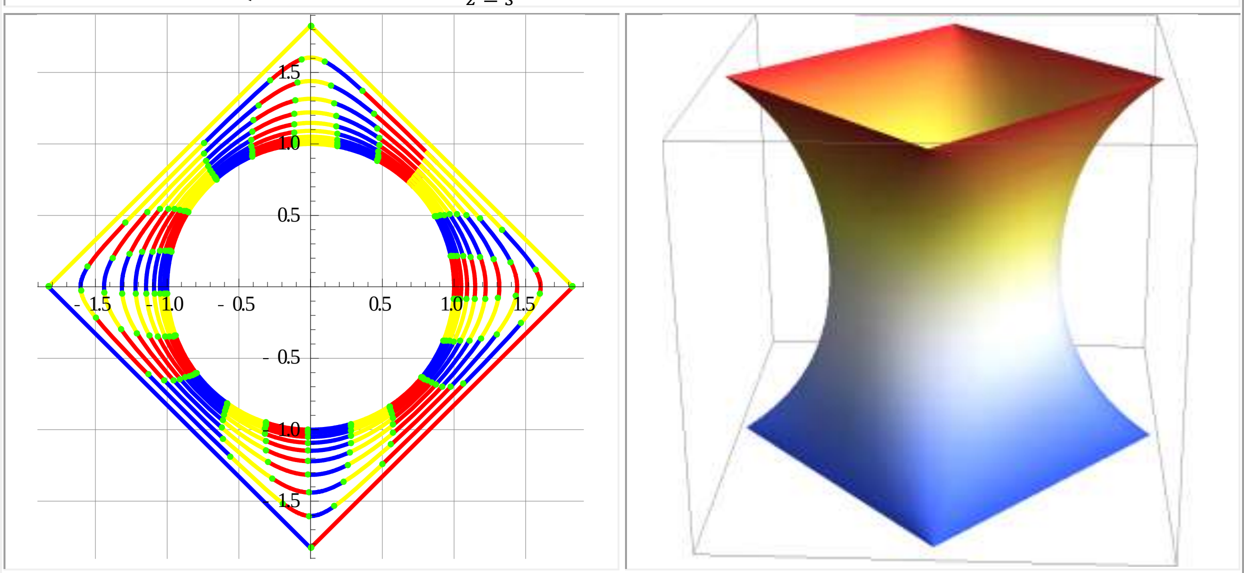


Fig. 4,b Quadrilobe **Valeriu Alaci** exterioare cercului unitate

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

(8) $$\begin{cases} ct_k\alpha = \pm(1+cot^k\alpha)^{\frac{-1}{k}} \\ st_k\alpha = \pm(1+ant^k\alpha)^{\frac{-1}{k}} \end{cases},$$

cu care pot fi corect plotate funcţiile doar în domeniul α ∈ [0, $\frac{\pi}{2}$], aşa cum rezultă din **figura 5,a◄**.

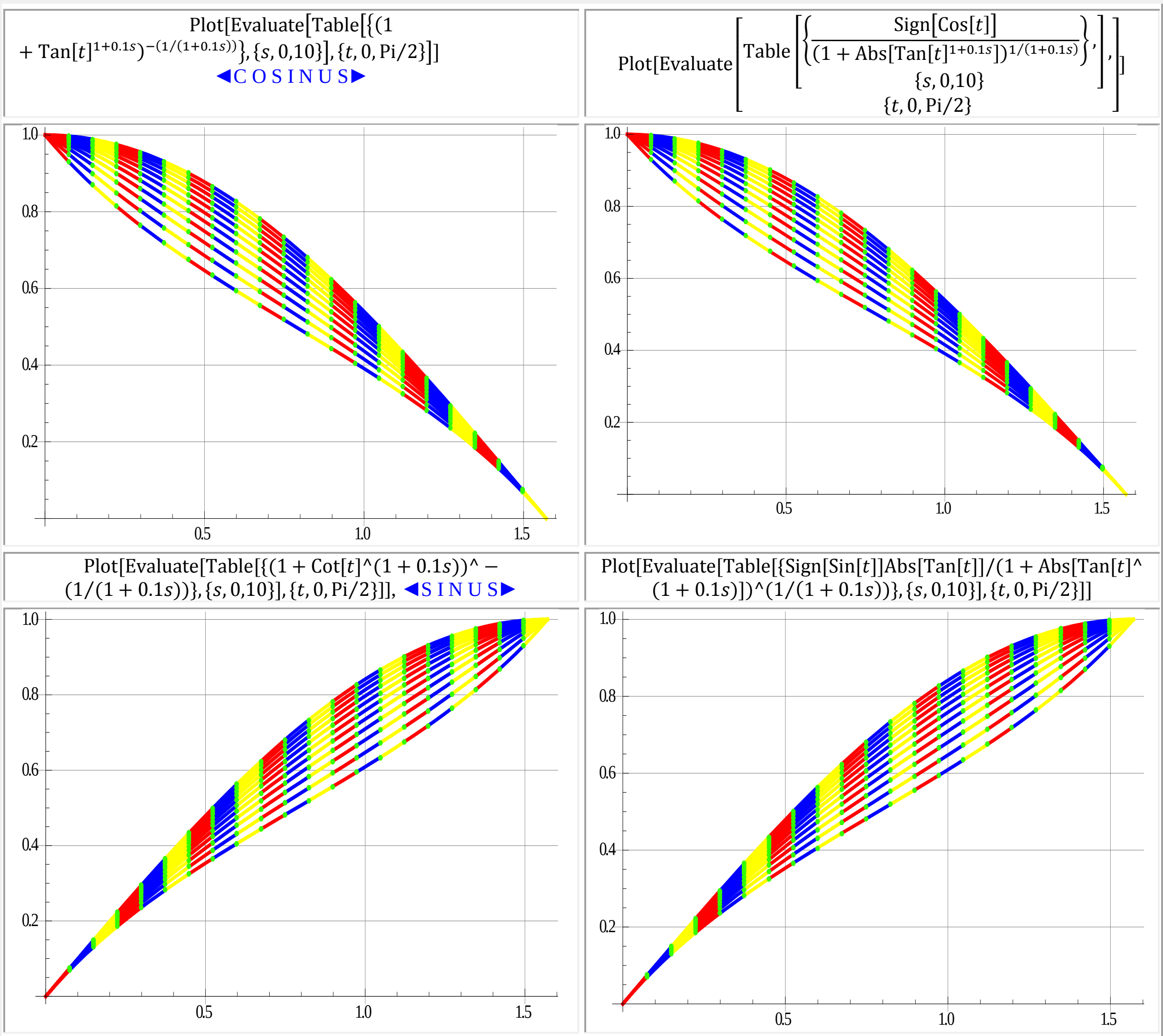


Fig. 5,a FSM-QLE cosinus şi sinus transtrigonometrice exprimate de relaţiile (8)◄ şi (8')►

Ele pot fi plotate în întregul domeniu α ∈ [0, 2 π] utilizând formulele plotabile ale autorului (8'), adică(8')

$$\begin{cases} ct_k x = \frac{Sign[cosx]}{(1+Abs[tan^k x])^{1/k}} \\ st_k x = \frac{Sign[sinx]Abs[tanx]}{(1+Abs[tan^k x])^{1/k}}, \end{cases}$$

utilizate comparativ cu (8) în **figura 5,a►**.

```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]},
{s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi},
```

```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]},
{s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi},
```

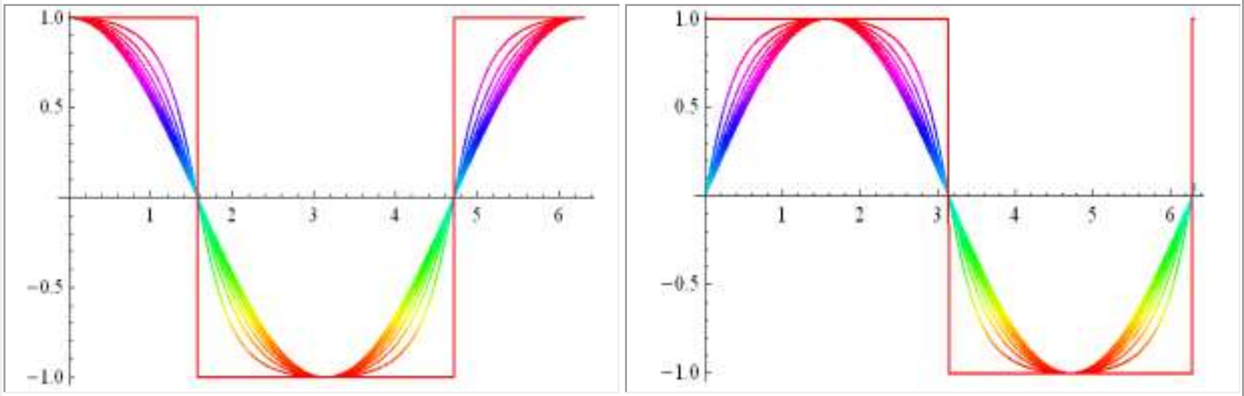
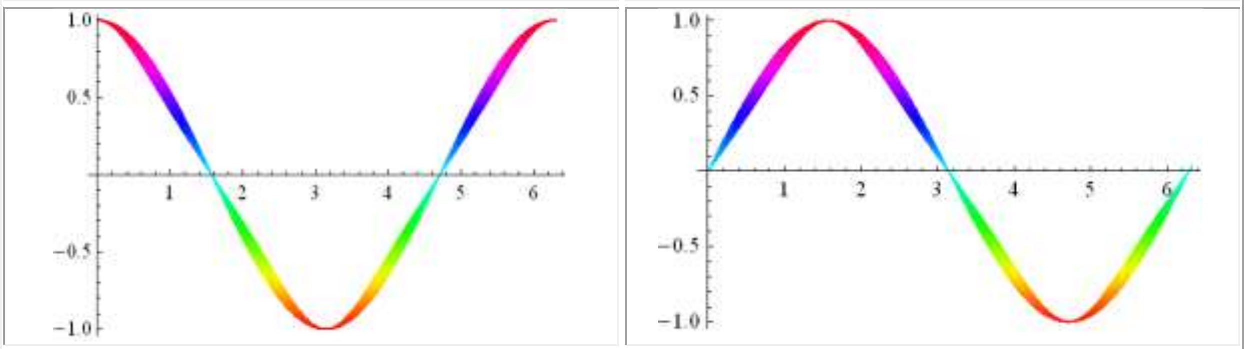


Fig.5,b FSM-QLE cosinus coqθ şi sinus siqθ cvadrilobice excentrice exterioare cercului unitate

```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2]},
{s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi},
```

```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2]},
{s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi},
```




```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 + (0.4sSin[t])^2]},
{s, 0,50}], {t, 0,2.01Pi}
```

```
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.4sCos[t])^2]},
{s, 0,50}], {t, 0,2.01Pi}
```

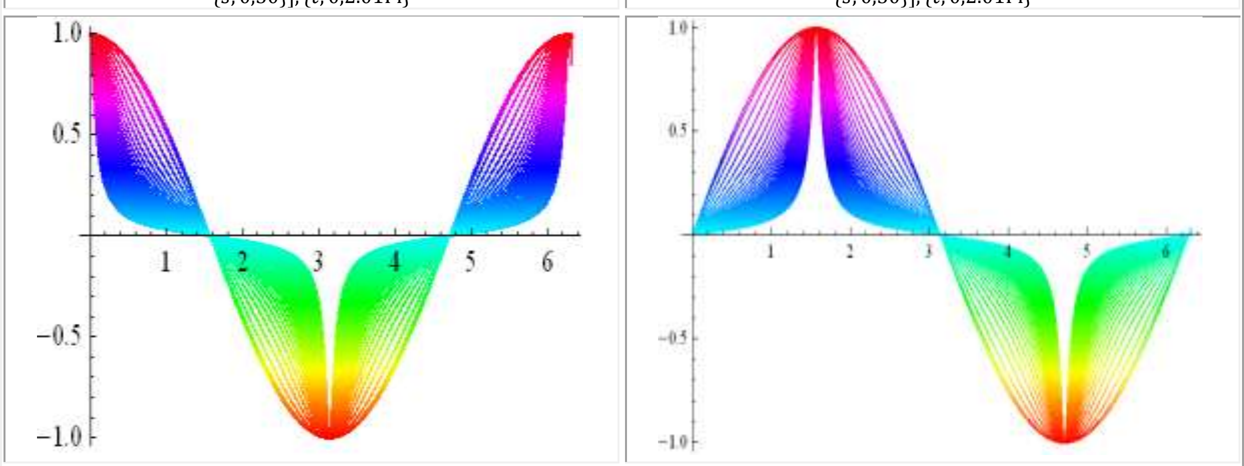


Fig.5,c FSM-QLE cosinus coqθ şi sinus siqθ cvadrilobice excentrice interioare cercului unitate

Curbele închise, reprezentate de aceste ecuaţii parametrice, nu sunt quadrilobe, deoarece numai pentru s = k = 0 curba este continuă (cerc), pentru restul valorilor, în vârfurile de α = 0 + K $\frac{\pi}{2}$, ele prezintă puncte unghiulare, cu derivate diferie la stânga şi la dreapta punctului, deci nu respectă condiţia a 2 – a.

Pentru k = 1 se obţin funcţiile pătratice **Valeriu Alaci** şi pentru k = 2 se obţin funcţiile trigonometrice centrice sau **Euler (Fig. 5,c)**.

Funcţiile (8) şi (8') sunt echivalente, dovadă că ele generează aceleaşi curbe (identice) în 2D, în domeniul α ≡ x ∈ [0, π/2], aşa cum este ilustrat în **figura 5,a**. Diferenţa consistă în aceea că (8'0 permite reprezentarea funcţiilor nu numai in domeniul anterior amintit, ci pe toată axa reală, aşa cum rezultă din **figurile 6.**

În **figurile 5,b** şi **5,c** sunt prezentate funcţiile cosinus şi sinus quadrilobe, exterioare (**Fig. 5,b**) şi interioare (**Fig. 5,c**) şi curbele limită, în care degenerează, pentru valorile limită ale excentricităţii liniare numerice s = 0 → cerc şi s = 1 → pătrat b (**Fig. 6,a**◄ şi **Fig. 6,b** ◄) şi corespondentele lor în 2D (**Fig. 6,a**► şi **Fig. 6,b** ►)).Funcţiile quadrilobe interioare sunt prezentate pentru s∈ [0, 1] în **figura 5,c** ▲ sus şi pentru s∈ [0, 1] în **figura 5,c** jos▼ .

```
ParametricPlot[{{Cos[t], Sin[t]}, {Cos[t]^1.4, Sin[t]^1.4}, {−Cos[t]^1.4, Sin[t]^1.4}, {−Cos[t]^1.4, −Sin[t]^1.4},
{Cos[t]^1.4, −Sin[t]^1.4}, {Cos[t]^1.4, Sin[t]^1.4}, {Cos[t]^2, Sin[t]^2}, {−Cos[t]^2, Sin[t]^2}, {−Cos[t]^2, −Sin[t]^2},
{Cos[t]^2, −Sin[t]^2}}, {t, 0,2Pi},
```

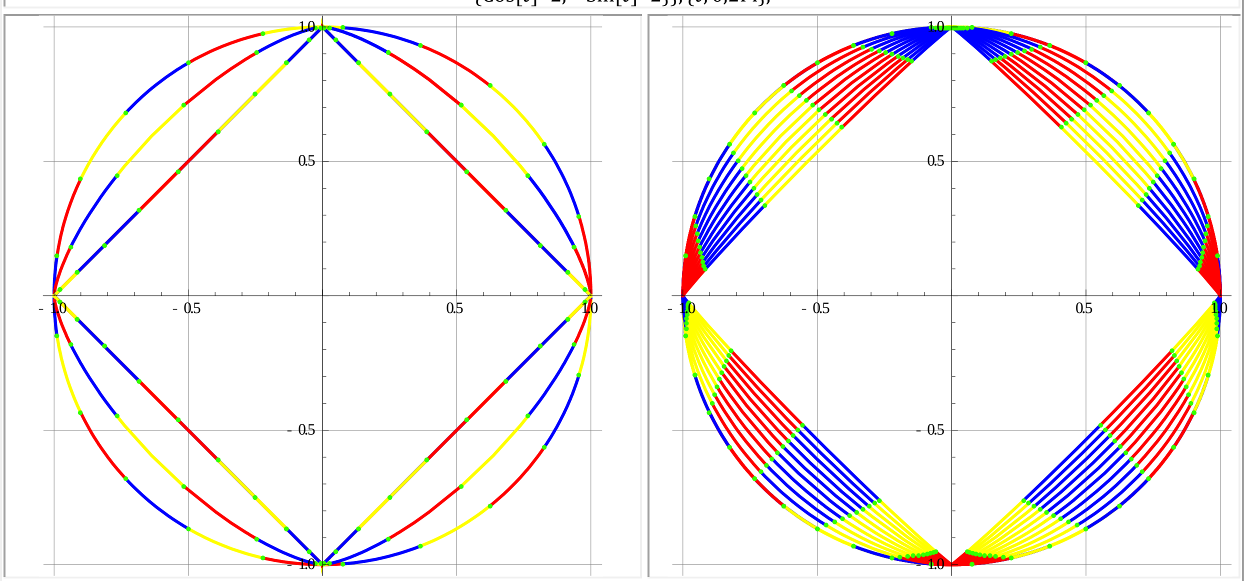


Fig. 6,a Cercul **Euler** k = 2 , Patratul **Alaci** k = 1 şi 4 segmentele de curbe **Baica-Cârdu** k = 1,4◄
"Cvadrilobe" **Baica-Cârdu** cu k ∈ [1, 2]→ segmente interioare cercului unitate

www.SuperMathematica.com	**www.SuperMatematica.ro**	**www.SuperMathematica.org**

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

Quadrilobele Valeriu Alaci din **figura 4,a,** se observă fără dificultate, că sunt interioare cercului unitate. Prin schimbarea semnului plus cu semnul minus în expresiile lui x(t) şi y(t), se obţin quadrilobele **Alaci Valeriu** exterioare cu ecuaţiile

(9) $$\begin{cases} x = (1 + s^2(1 - \sqrt{2}/2))\left(\frac{\text{Cos}[t]\text{Cos}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1 - 1s^2\text{Sin}[t]^2}} - \frac{\text{Sin}[t]\text{Sin}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1 - 1s^2\text{Cos}[t]^2}}\right) \\ y = (1 + s^2(1 - \sqrt{2}/2))\left(\frac{\text{Cos}[t]\text{Sin}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1 - 1s^2\text{Sin}[t]^2}} + \frac{\text{Sin}[t]\text{Cos}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1 - 1s^2\text{Cos}[t]^2}}\right) \\ z = s \end{cases}$$

şi cu graficele din **figura 4,b**.

Quadrilobele definite de ecuaţiile parametrice (8) pot fi denumite qvasiquadrilobe **Malvina Baica - Mircea Cârdu** şi au graficele din **figura 6,c**.

Plot[Evaluate[Table[{Sign[Cos[t]]/(1 + Abs[Tan[t]^s])$^{1/s}$}, {s, 1,2}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sign[Sin[t]] * Abs[Tan[t]]/(1 + Abs[Tan[t]^s])^(1/s)}, {s, 1,2}], {t, 0,2Pi}]

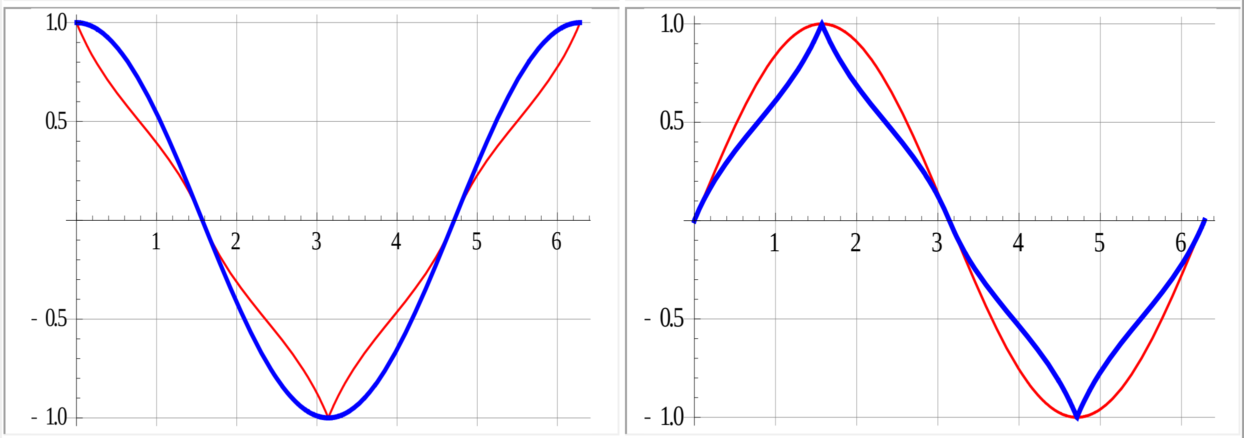


Fig.6,b Extremele funcţii transtrigonometrice **Malvina Baica – Mircea Cârdu,** pentru s ≡ k = 1 → **pătratice Valeriu Alaci,** pentru s ≡ k **= 2→** trigonometrice / circulare centrice **Euler**

Plot[Evaluate[Table[{Sign[Cos[t]]/(1 + Abs[Tan[t]] ^ (1 + 0.1k))^(1/(1 + 0.1k))}, {k, 0,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sign[Sin[t]] * Abs[Tan[t]]/(1 + Abs[Tan[t]]^(1 + 0.1k))^(1/(1 + 0.1k))}, {k, 0,10}], {t, 0,2Pi}]

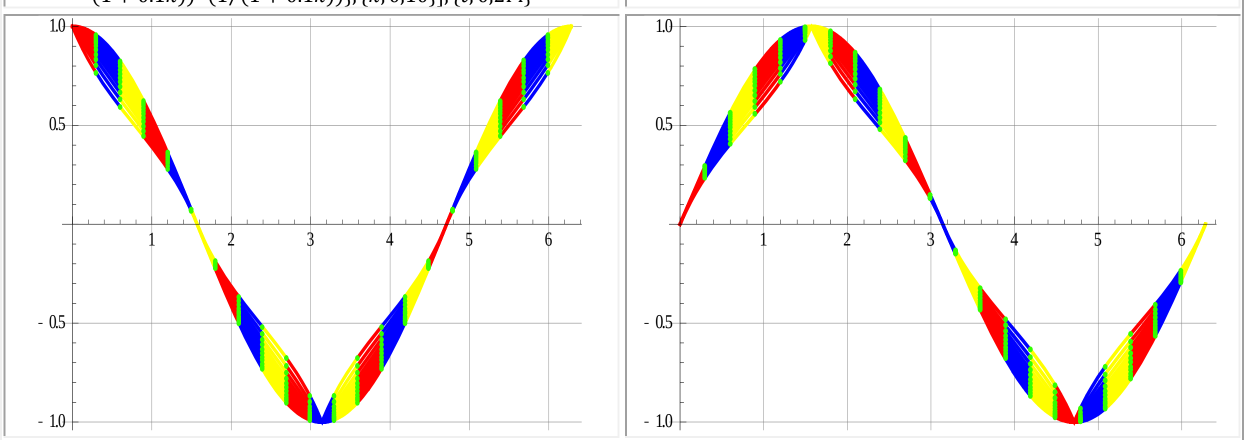


Fig.6,c Funcţiile transtrigonometrice **Malvina Baica – Mircea Cârdu**

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

www.SuperMathematica.com **www.SuperMatematica.ro** **www.SuperMathematica.org**

1.4. QUAZIQUADRILOBE (CVAZICVADRILOBE)

Prin depăşirea valorii de **s = 1,** a excentricităţii liniare numerice (**Fig.7,a**), ca şi prin combinarea / schimbarea semnelor de sub radical ale funcţiei speciale **delθ** şi a termenilor din expresiile parametrice ale **FSM–QL,** pot fi obţinute multe alte ecuaţii parametrice ale unor curbe plane închise, reunite sub denumirea de **quasiquadrilobe (cvazicvadrilobe).**

Figurile 7,a, 7,b, 7,c şi **7,d** prezintă unele dintre aceste quasiquadrilobe, interesante prin formele corpurilor obţinute în 3 D. Altele, prin forma unor curbe din 2D (**Fig.7,a◄**).

Obiectul / corpul **supermatematic** din **figura 7,c**, asemănator cu un con, cu baza un hexagon, poate fi denumit "**con quasiquadrilobic** (**cvazicvadrilobic**), iar cilindrul din **figura 7,b**, poate fi denumit **cilindru quasiquadrilobic**.

Curbe interesante asemănătoare unor curbe de histereză sunt prezentate în **figura 8** stânga ◄, iar unele artistice moderne în dreapta **figurii 8**.

Curbele din **figura 7,b** sunt reprezentate de ecuaţiile parametrice ca sume ale cosinusurilor şi, respectiv, sinusurilor cvadrilobe exterioare şi interioare, adică

$$\begin{cases} x = coq\theta + coqi\theta \\ y = siq\theta + siqi\theta \end{cases}$$

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[2t])^2], Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[2t])^2]},
{s, 0,20}], {t, 0,2Pi}] ]
```

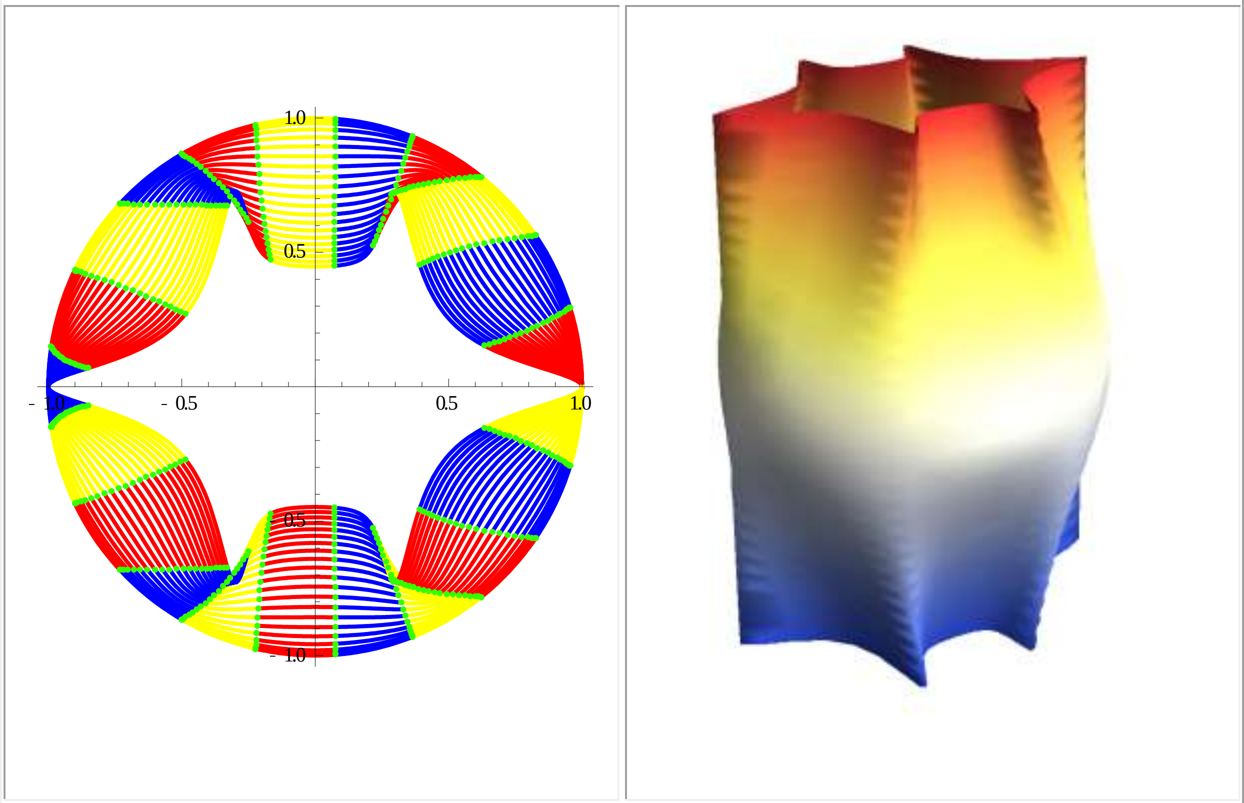


Fig. 7,a Quasiquadrilobe (cvazicvadrilobe) şi pentru s > 1; s ∈ [0, 2] .

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (sSin[t])^2] + Cos[t]/Sqrt[1 + (sSin[t])^2],
Sin[t]/Sqrt[1 − (sCos[t])^2] + Sin[t]/Sqrt[1 + (sCos[t])^2]}, {s, 0,1}], {t, 0,2Pi}]]
```

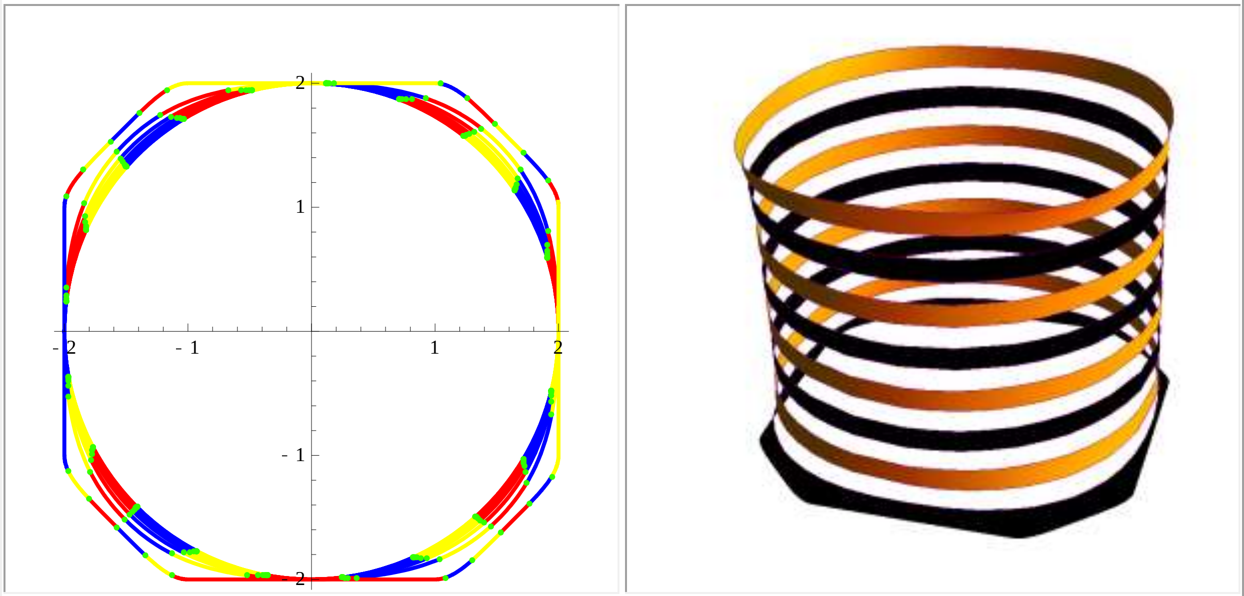


Fig.7,b Quasiquadrilobe (cvazicvadrilobe) cu termeni modificaţi

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

```
ParametricPlot3D[{0.1s(Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] + Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2]),
0.1s(Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2] + Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2]),0.4s}, {s, 0,10}, {t, 0,2Pi}]
```

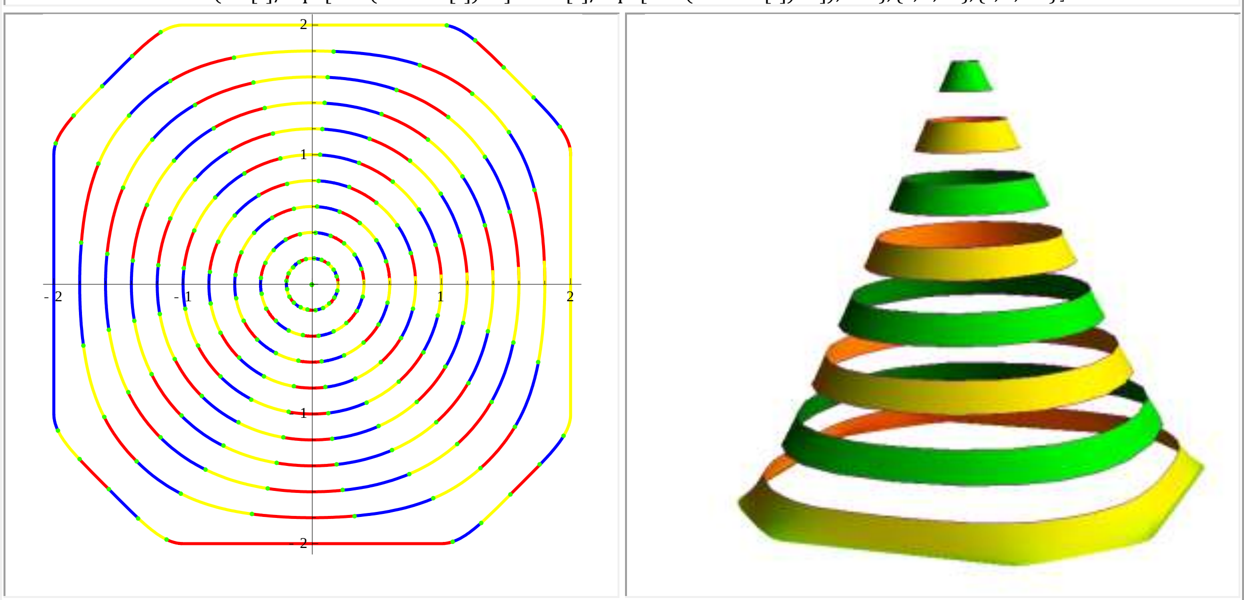


Fig. 7,c Quadrilobe şi **qusiquadrilobe** interioare şi exterioare reprezentate împreună

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[t]/Sqrt[$1-(0.1s\mathrm{Sin}[2t])^2$], Sin[$t$]/Sqrt[$1-(0.1s\mathrm{Cos}[2t])^2$]},
{Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[2t])^2], Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[2t])^2]}}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}

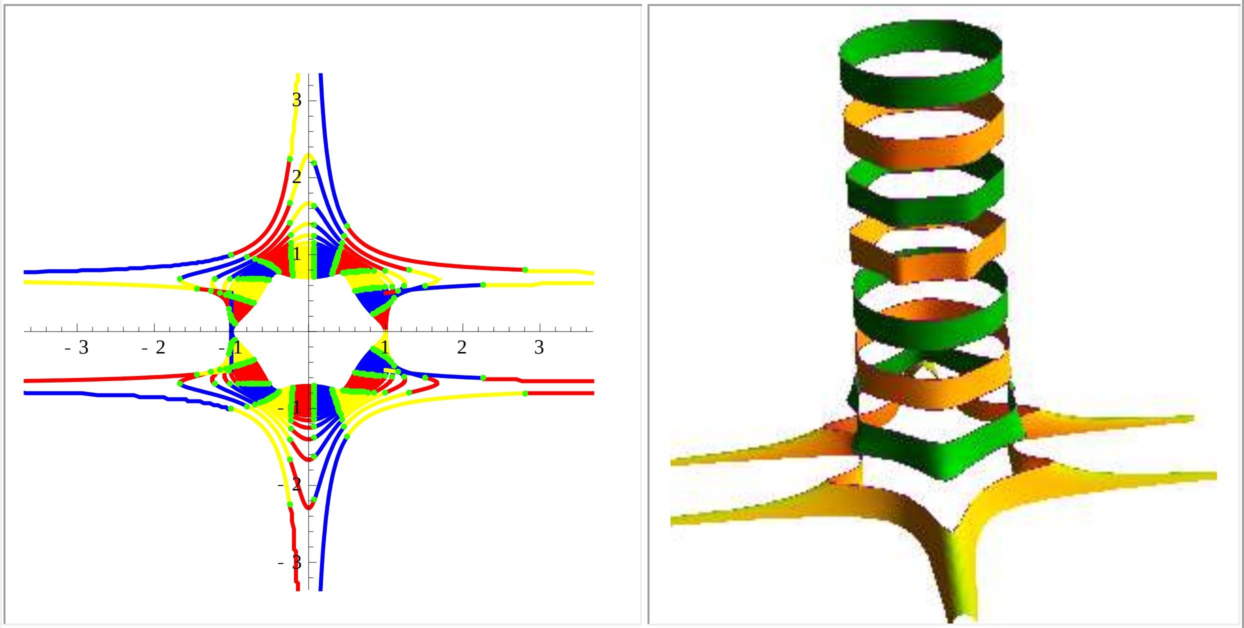


Fig. 8 **Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe)** diverse

www.supermatematica.ro; www.eng.upt.ro/~mselariu, www.supermathematica.com

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[t]/Sqrt[1 − (sSin[t])^2] + Sin[t]/Sqrt[1 + (sCos[t])^2], Cos[t]/Sqrt[1 + (sSin[t])^2] + Sin[t]/Sqrt[1 + (sCos[t])^2]}}, {s, 0,1}], {t, 0,2Pi}

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[2t]/Sqrt[1 − (sSin[2t])^ + Sin[3t]/Sqrt[1 + (sCos[2t])^2], Cos[2t]/Sqrt[1 + (sSin[2t]) + Sin[2t]/Sqrt[1 + (sCos[3t])^2]}}, {s, 0,1}], {t, −2Pi, 2Pi},

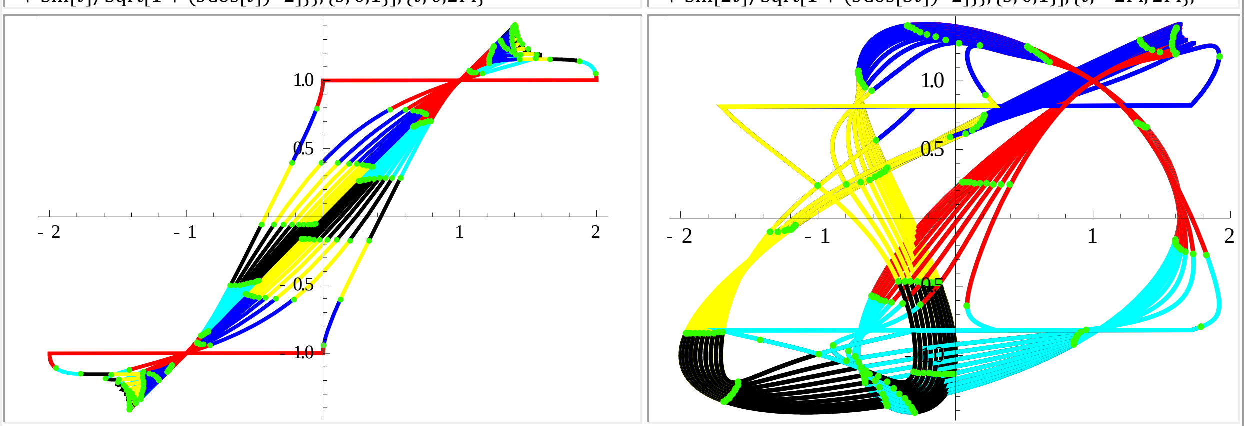


Fig.9,a **Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe)** diverse

În **figura 9,b** ▲◄sunt prezentate funcţiile **sinus autoinduse**

(10) **sina(x, m = 8)** = sin(sin(sin(sin(sin(sin(sinsinx))))))).

Întâmplarea face ca o variantă a funcţiei sinus cvadrilobic, denumit sinus quadrilobic modificat şi notat **siqmθ** şi anume

(10') $$\mathbf{siqm\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+(s.\sin[t])\text{^}2}}$$

să poată imita, destul de bine, dar pentru valori diferite **m ≠ s**, funcţiile autoinduse (10), prin mărirea lui s, şi să poată, fără dificultate, să exprime funcţii sinus autoinduse de un grad de multiplicitate **m = s** cu mult mai mare. În **figura 9,b ▲►** m = 20.

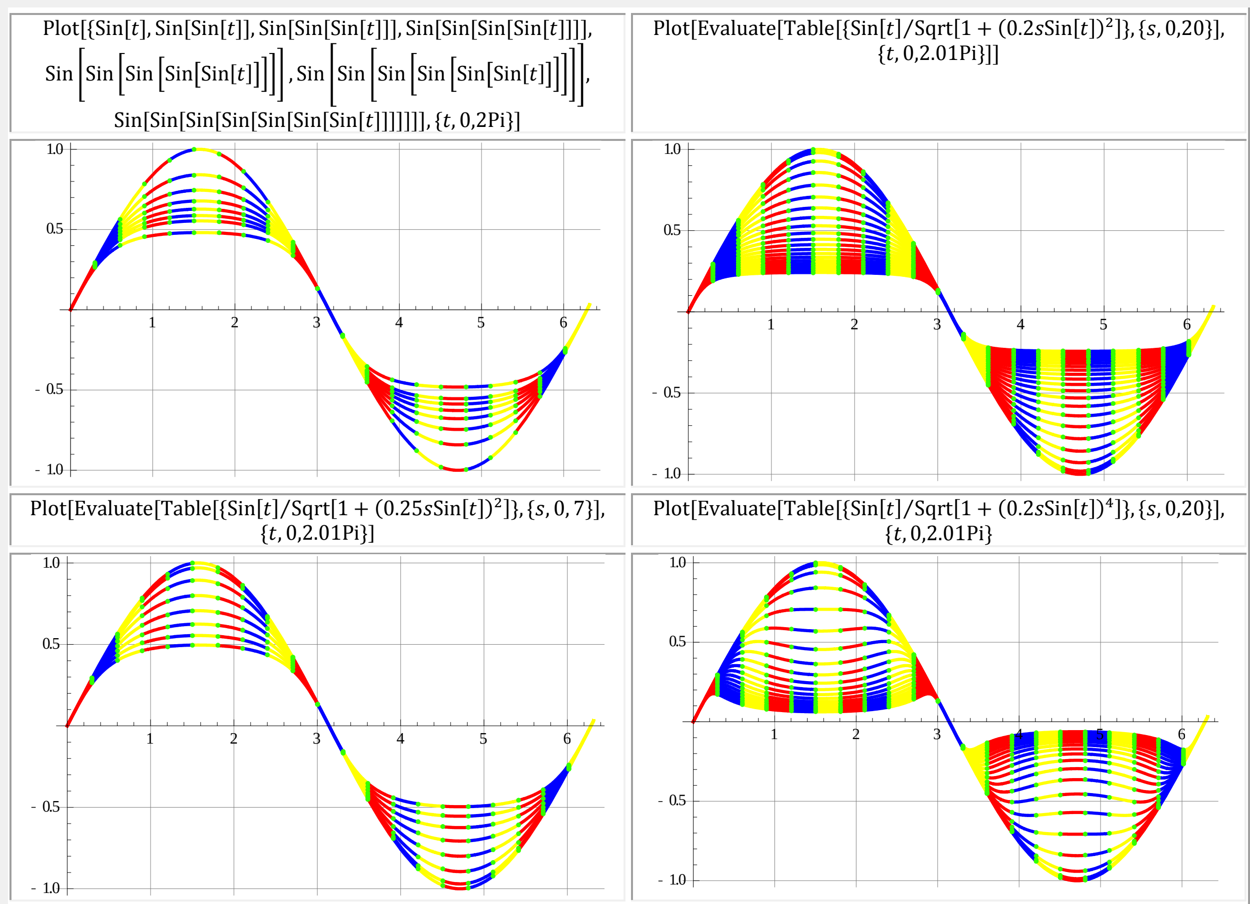
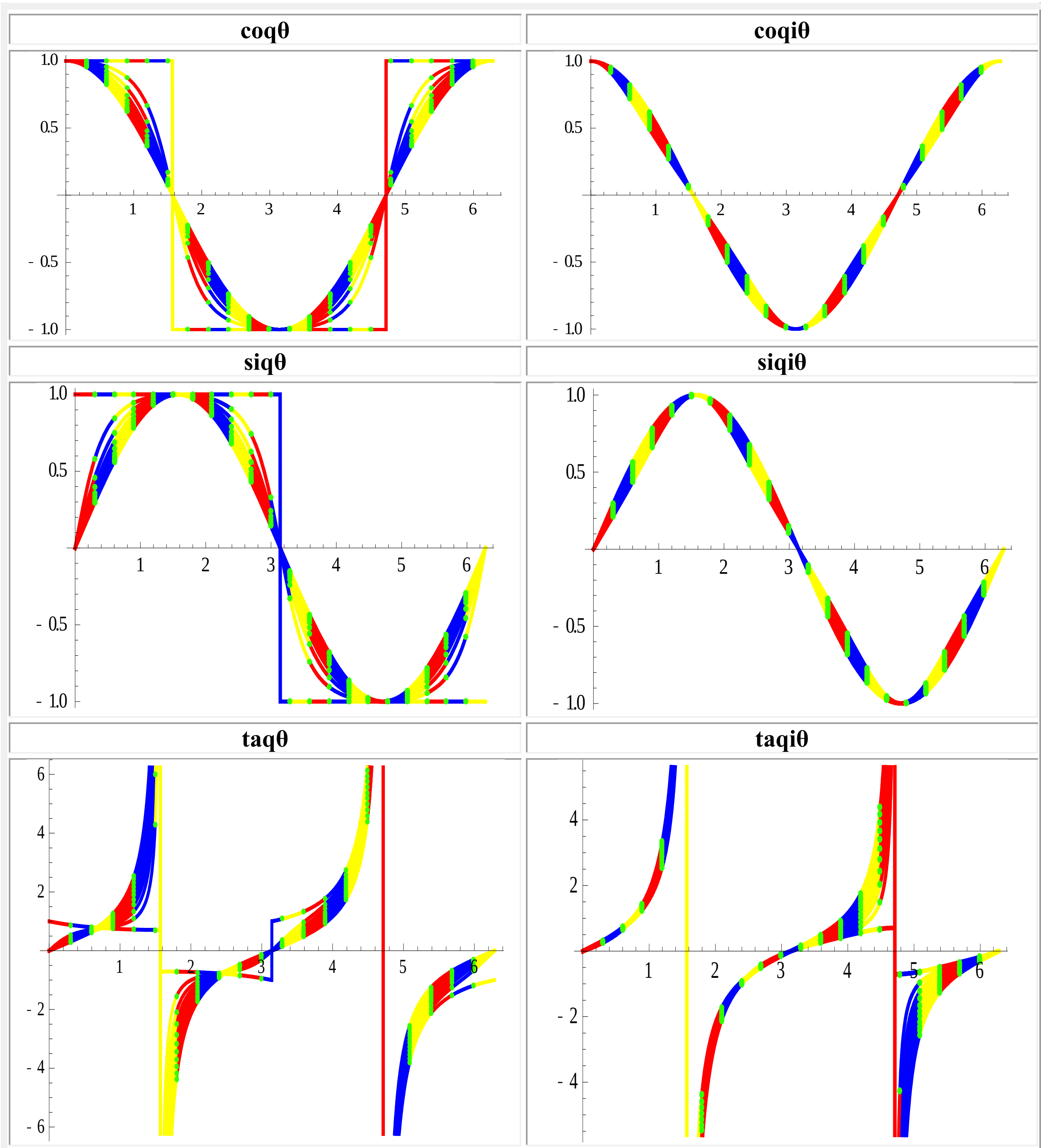


Fig.9.b Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe) diverse,
care pot exprima **funcţii autoinduse**, cum este sin(sin(sin(…sint))) ◄▲

2 RAZELE POLARE ALE QUADRILOBELOR (QLE) EXTERIOARE ŞI ALE CVADRILOBELOR INTERIOARE (QLI)

Ca oricare altă rază polară şi acestea se pot obţine prin însumarea vectorială a proiecţiilor razei pe cele două axe ale reperului cartezian drept, adică

(7)
$$\begin{cases} r_{ql} = \sqrt{coq^2\theta + siq^2\theta} = \sqrt{\frac{sin^2\theta}{1-s^2cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{1-s^2sin^2\theta}} \\ r_{qli} = \sqrt{coqi^2\theta + siqi^2\theta} = \sqrt{\frac{sin^2\theta}{1+s^2cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{1+s^2sin^2\theta}} \end{cases}$$



taqvθ	**taqviθ**

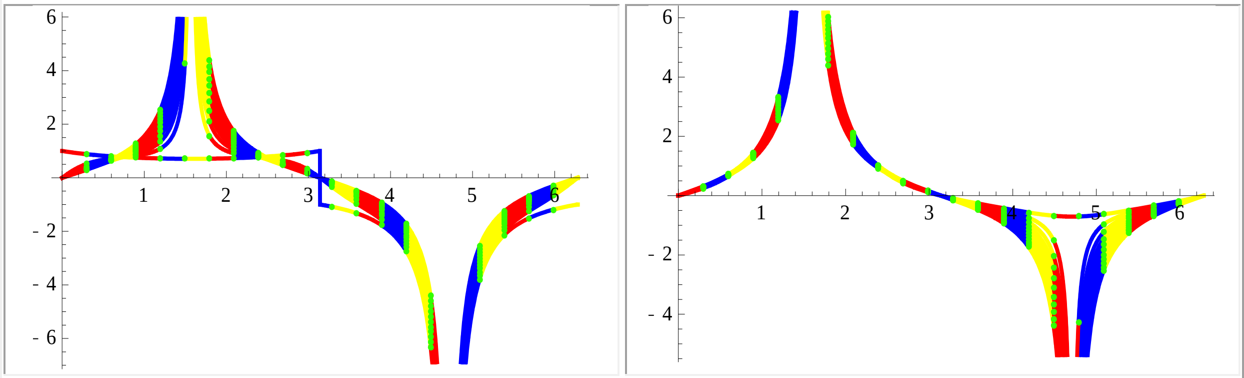
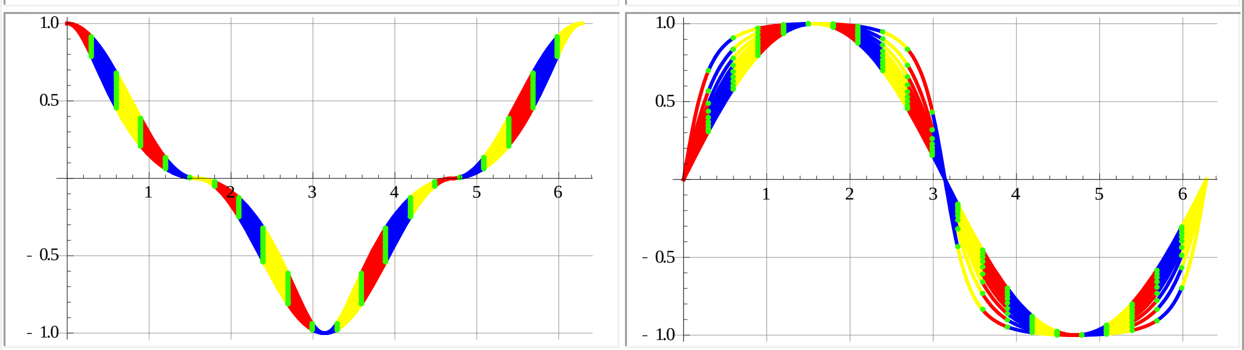


Fig.10 **Quasiquadrilobe** (**Cvazicvadrilobe**) diverse

www.supermatematica.ro; www.eng.upt.ro/~mselariu, www.supermathematica.com

În această **figură 10**, graficele funcţiilor **supermatematice** quadrilobe excentrice exterioare **FSM-QEE** coq şi siq au fost reluate pentru a putea fi mai facil comparate cu graficele celorlalte funcţii **quadrilobe**

	$y = \text{Sqrt}[1/(1-((0.1u)\text{^}0.5\text{Cos}[x])\text{^}2)]\text{Sin}[x]$



cn(u,k), k ∈ [0; 0.9]	**sn(u,k)**

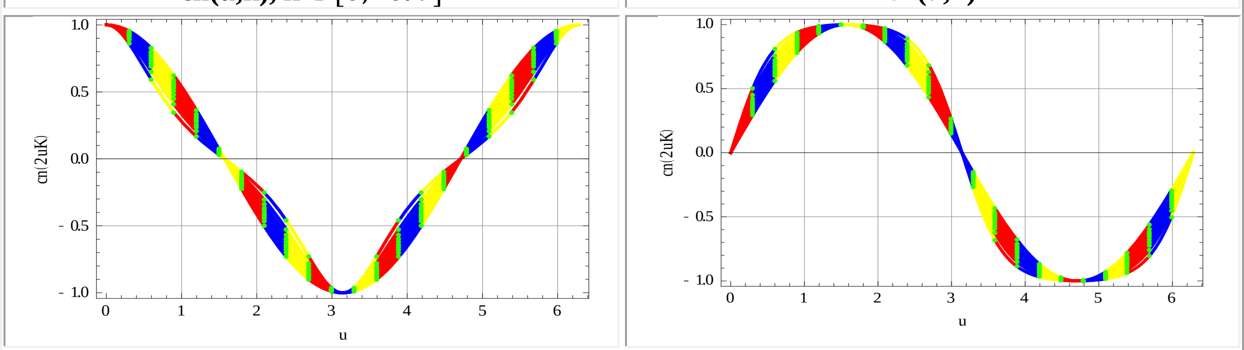


Fig. 11 Câteva asemănări între funcţiile eliptice **Jacobi** şi unele **FSM**

PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\sqrt{\frac{Sin[t]^2}{1-0.01s^2Cos[t]^2}+\frac{Cos[t]^2}{1-0.01s^2Sin[t]^2}}$}, {s,0,10}],{t,0,2 Pi}]]

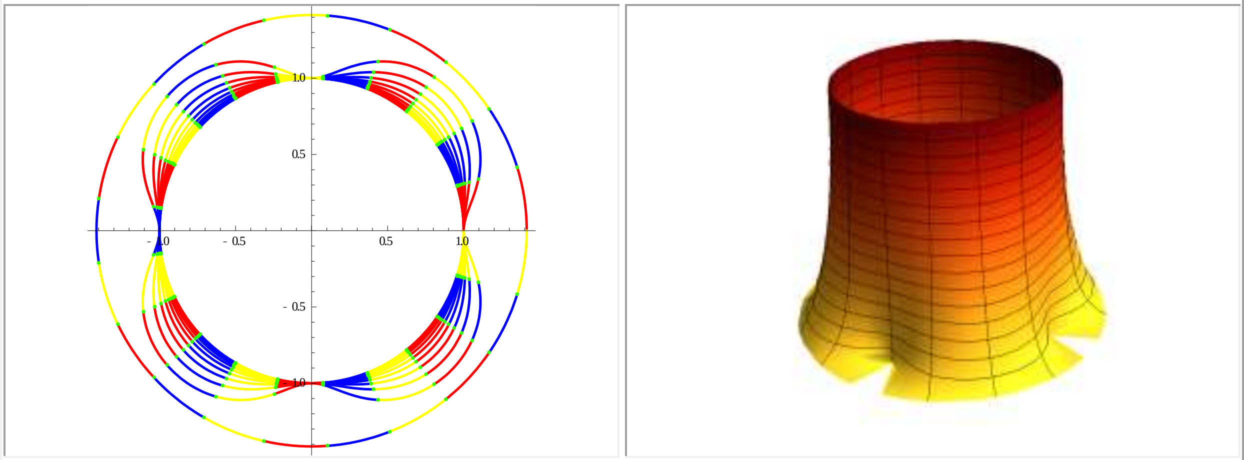


Fig.12,a Razele polare **centrice** ale **cvadrilobelor exterioare**

PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\sqrt{\frac{Sin[t]^2}{1+0.01s^2Cos[t]^2}+\frac{Cos[t]^2}{1+0.01s^2Sin[t]^2}}$},{s,0,10}],{t,0,2 Pi}]]

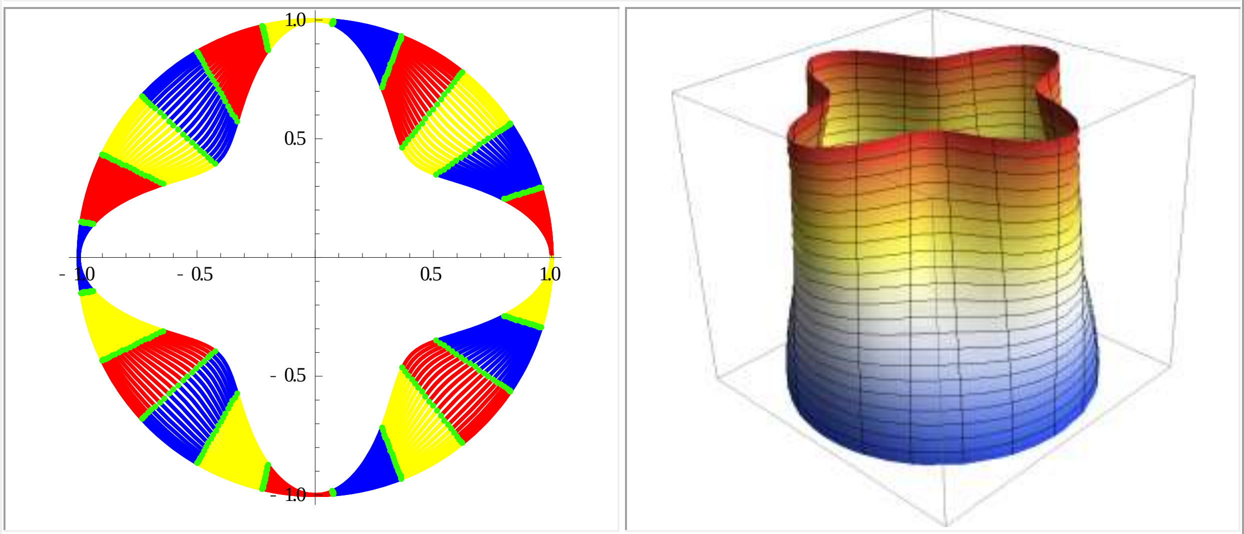


Fig.12,b Razele polare **centrice** ale quadrilobelor interioare▶

cu graficele, în coordonate polare centrice, din **figura 6,a,** pentru cele două tipuri de cvadrilobe, de excentricitate numerică sbunitară şi, în **figura 6,b** şi pentru excentricităţi liniare spraunitare.

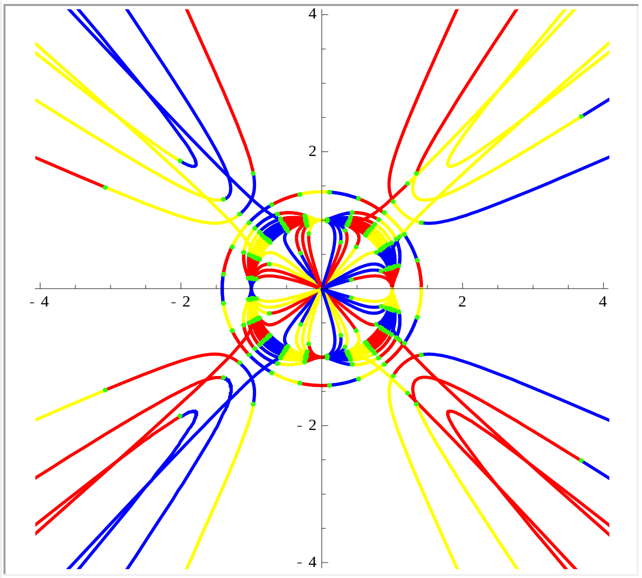
(8)
$$\begin{cases} taq = \frac{coq\theta}{siq\theta} = \frac{sin\theta}{cos\theta}\sqrt{\frac{1-s^2sin^2\theta}{1-s^2cos^2\theta}} \\ taqi = \frac{coqi\theta}{siqi\theta}\sqrt{\frac{1+s^2sin^2\theta}{1+s^2cos^2\theta}} \end{cases}$$

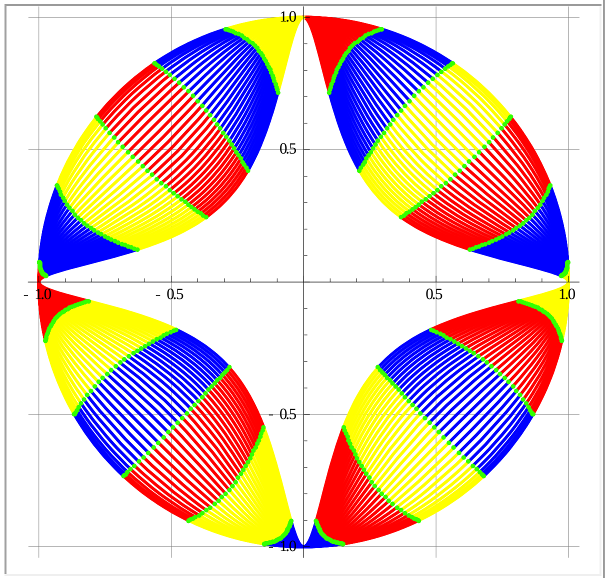
cu graficele din **figura 6**

Unghiurile la centrul O(0, 0), la care apar aceste raze polare, sunt

PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\sqrt{\frac{Sin[t]^2}{1-0.01s^2Cos[t]^2}+\frac{Cos[t]^2}{1-0.01s^2Sin[t]^2}}$ }, {s, 0, 15}],{t ,0, 2 Pi}]]

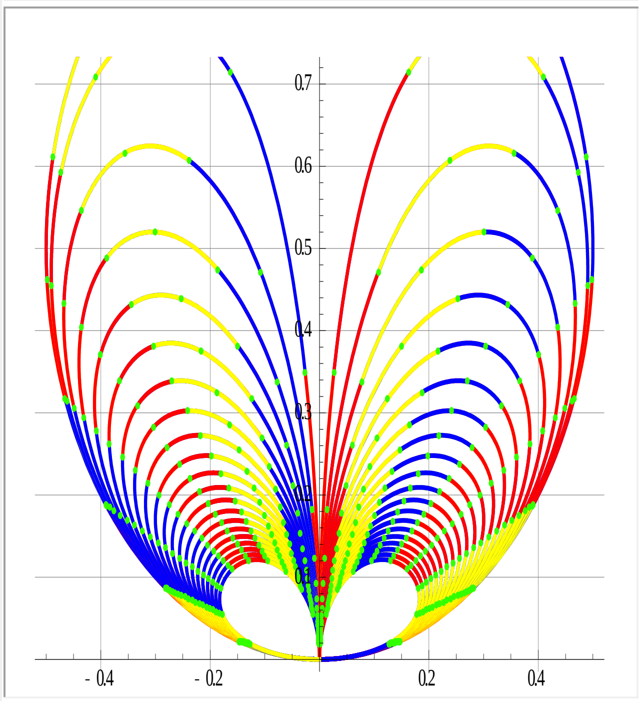
PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\sqrt{\frac{Sin[t]^2}{1+0.01s^2Cos[t]^2}+\frac{Cos[t]^2}{1+0.01s^2Sin[t]^2}}$ }, {s, 0, 30}],{t, 0, 2 Pi}]]





PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\mathrm{Sin}[t]/\mathrm{Sqrt}[1+(0.2s\mathrm{Tan}[t])^2]$ }, { s, 0,20}], { t, 0,2Pi}]]

ParametricPlot3D[{ $\mathrm{Sin}[t]\,\mathrm{Cos}[t]/\mathrm{Sqrt}[1+(0.2s\mathrm{Tan}[t])^2]$, Sin[t]^2/Sqrt[1 + (0.2 s Tan[t])^2] , 0.05 s }, { s, 0,20}, { t, 0,2Pi}]



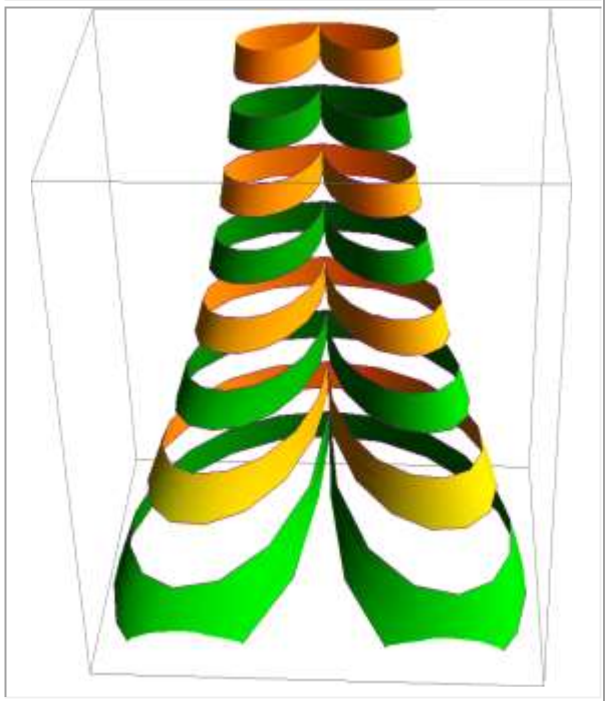


Fig.12,c Razele polare **centrice** ale quadrilobelor exterioare, pentru s ∈ [0, 2] ◄
şi ale quadrilobelor interioare, pentru s ∈ [0, 3] ►

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2], Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,20}], {t, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.2sTan[t])^2]}, {s, 0,20}], {t, 0,2Pi}]]

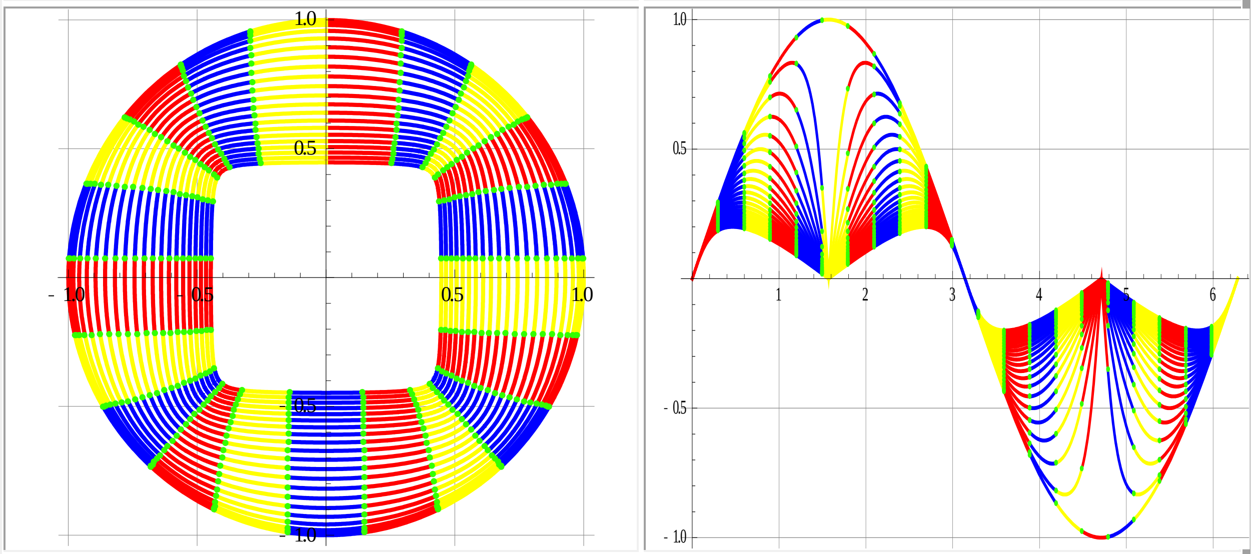


Fig.12,d Quasiquadrilobel corespunătoare curbelor polare din **figura12,c**

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

$$
(9) \quad \begin{cases} \alpha_{qe} = \arctan\left[\dfrac{sin\theta}{cos\theta}\sqrt{\dfrac{1-s^2 sin^2\theta}{1-s^2 cos^2\theta}}\right] \\ \alpha_{qi} = \arctan\left[\dfrac{coqi\theta}{siqi\theta}\sqrt{\dfrac{1+s^2 sin^2\theta}{1+s^2 cos^2\theta}}\right] \end{cases}
$$

Graficele funcţiilor cosinus şi sinus cvadrilobe, exterioare (stânga ◄) şi interioare (dreapta ►) cercului unitate, sunt prezentate în **figura 6** pentru s ∈ [0, 1], iar în **figura 11** sunt prezentate graficele unor **FSM** şi a unor **funcţii eliptice Jacobi**, pentru evidenţierea unor asemănări grafice.

În **figura 12,a** sunt prezentate curbele închise generate de razele polare centrice, date de relaţiile (7) ale cvadrilobelor exterioare. Se observă că ele diferă semnificativ de forma quadrilobelor exterioare cercului unitate (**Fig. 3,a**), atât în 2D cât şi, evident, în 3 D. Acest fapt se dotoreşte faptului că razele polare sunt la un unghi la centru θ, egal cu unghiul la excentrul E(e, ε), în timp ce punctele care generează cvadrilobele exterioare sunt defazate în avans faţă de unghiul polar θ al razelor polare (7), aşa cum s-a mai afirmat şi cum se poate observa din **figura 1,b** şi **figura 2**.

3.FSM-QL RADIAL EXCENTRICE req$_{1,2}$ θ şi Reqα$_{1,2}$ EXTERIOARE CERCULUI UNITATE

Printre **FSM-CE**, funcţiile **radial excentrice** de variabilă excentrica rex$_{1,2}$θ şi de variabilă centrică Rexα reprezintă distanţa $r_{1,2} = \left|\overline{SW_{1,2}}\right|$ în planul cercului unitate de la excentrul **S(s, ε)**

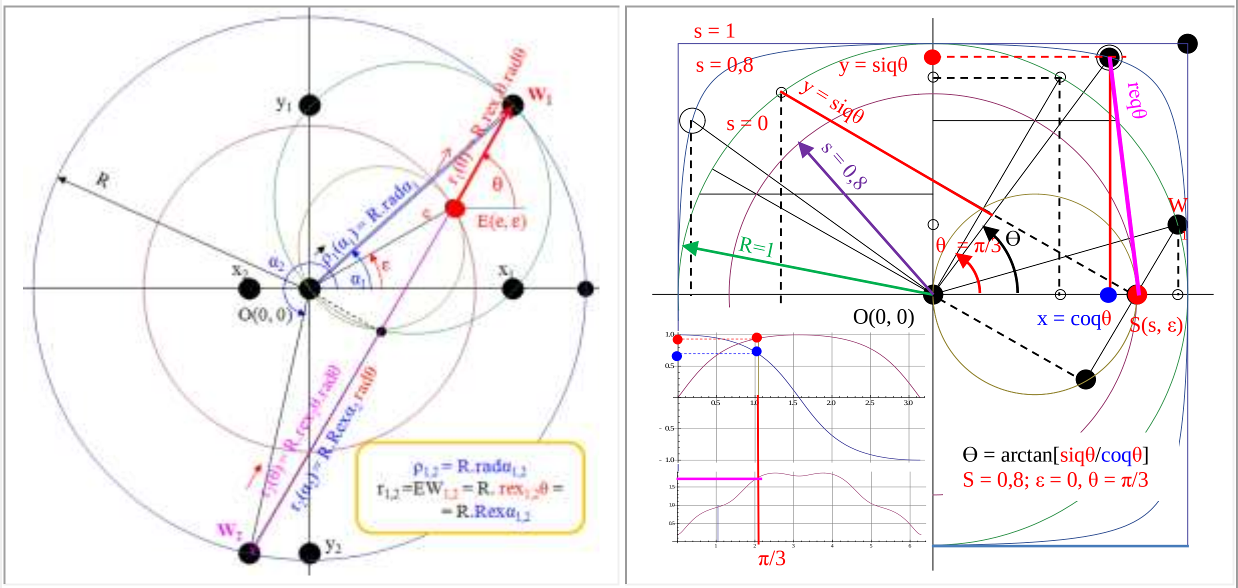


Fig. 13,a Desene explicative pentru funcţii radiale excentriec **circulare rex** ◄ şi funcţii radiale excentrice **quadrilobe** (cvadrilobe) **req** ►

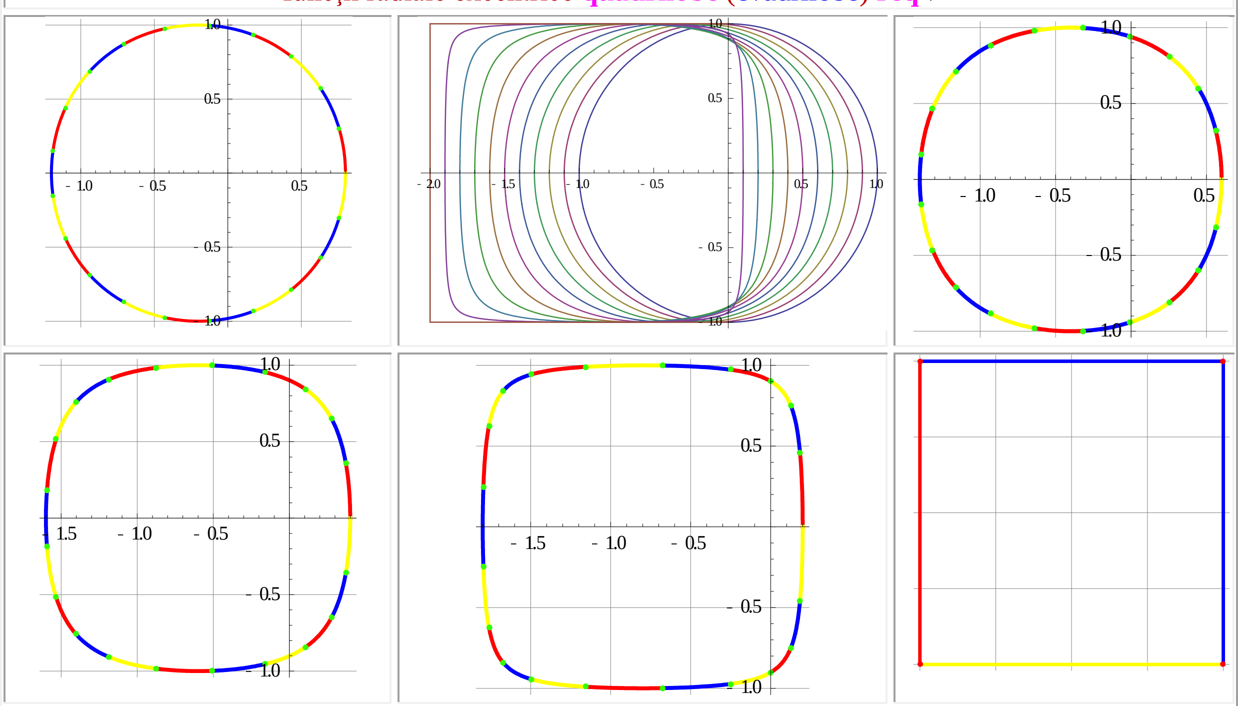


Fig. 13,b Curbele descrise de ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = \text{req}\,\theta.\cos\theta \\ y = \text{req}\theta.\sin\theta \end{cases}$, s∈ [0, 1]; ε = o

www.SuperMathematica.com; www.eng.upt.ro/~mselariu; www.supermatematica.ro

$\rho_q(\theta)$ = Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − 0.1s)^2 + (Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2])^2]

S(s∈[-1, 0], ε = 0) | S(s∈[0,+1], ε = 0)

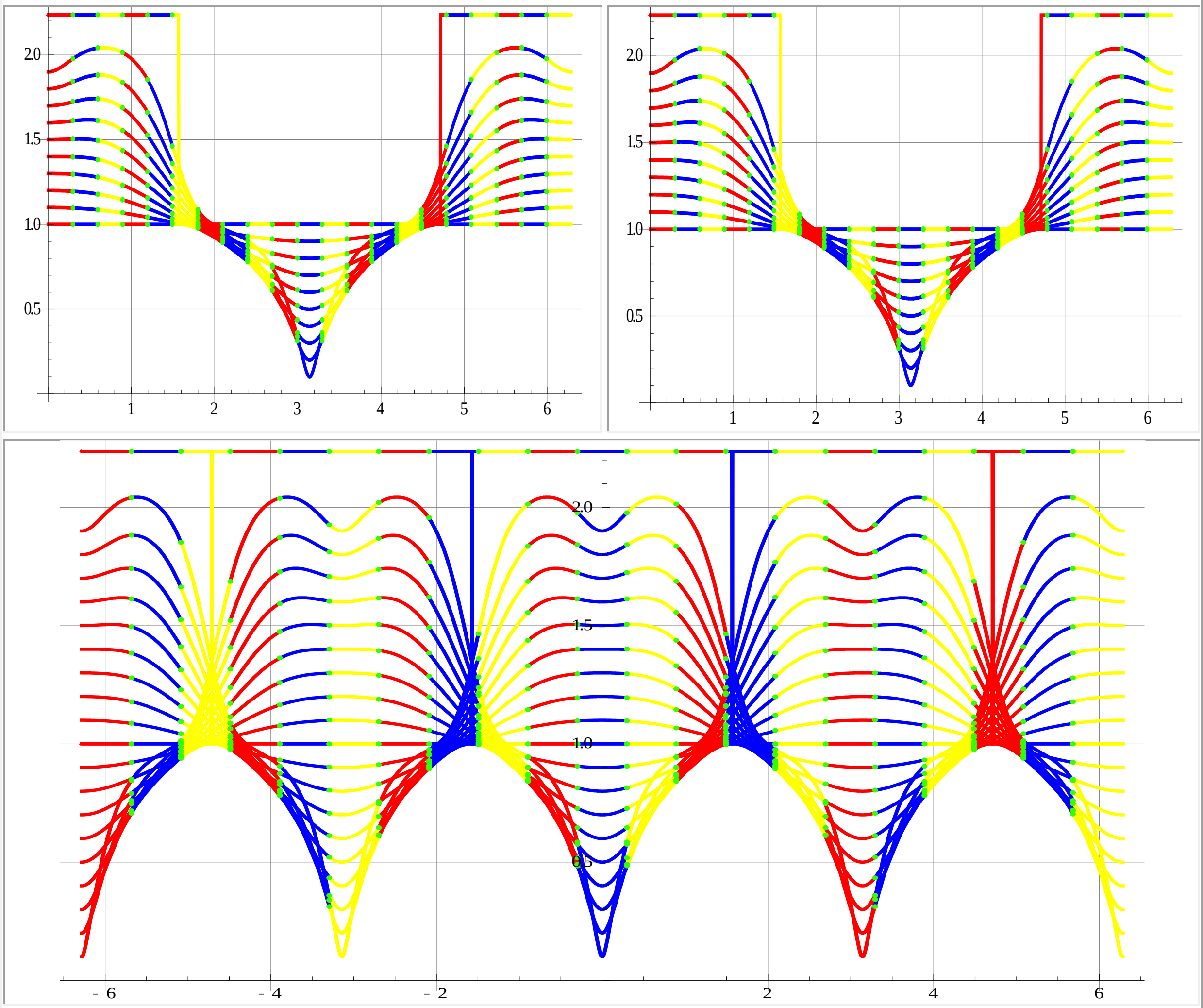


Fig. 14,a Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice exterioare **raqθ** de **ε = 0**

www.SuperMathematica.com | www.SuperMatematica.Ro

la punctele **W**$_{1,2}$ de intersecţie a cercului cu dreapta excentrică d = d$^+$ ∪ d$^-$, (**Fig. 13,a** ◄) turnantă în jurul lui **S**, exprimate prin unghiul la excentru **θ** şi, respectiv, unghiul α la centrul **O(0, 0).** Indicele **1** este pentru determinarea principală, prin intersecţia cu d $^+$ şi indicele **2** pentru determinarea secundară de intersecţie cu d $^-$.

În **matematica centrică (MC),** în coordonate **polare**, cercul de rază R, centrat în originea unui reper polar O(0,0), putea fi descris, faţă de centrul lui M (0, 0) ≡ O(0, 0) de ecuaţia vectorială (**Fig. 13,a** ◄)

(10) $\vec{\rho}(\alpha) = \vec{R}$ = R radα,

iar, acum, în **matematica excentrică** (ME) şi în **supermatematică** (**SM**), faţa de un punct oarecare E(e,ε) din planul cercului, denumit, după cum aţi dedus deja, **excentru real**, de ecuaţia vectorială

(11) $\vec{\rho}(\theta) = R.\boldsymbol{rex\theta}.rad\theta$ = R[-s cos(θ − ε) + $\sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}$].radθ, **s** = **e**/R,

prin unghiul / **variabila excentrică θ**, faţă de **E(e,ε)** şi cu ecuaţia vectorială

(12) $\vec{\rho}(\theta)$ = R.**Rexα**. radθ

prin **variabila centrică α** sau unghiul **α** la centrul O(0, 0).

$\rho_q(\theta)$ = Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − 0.1sCos[Pi/3])^2 + (Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2] − 0.1sSin[Pi/3])^2]

S(s∈[-1, 0], ε = π/3)	**S(s∈[0,+1], ε = π/3)**

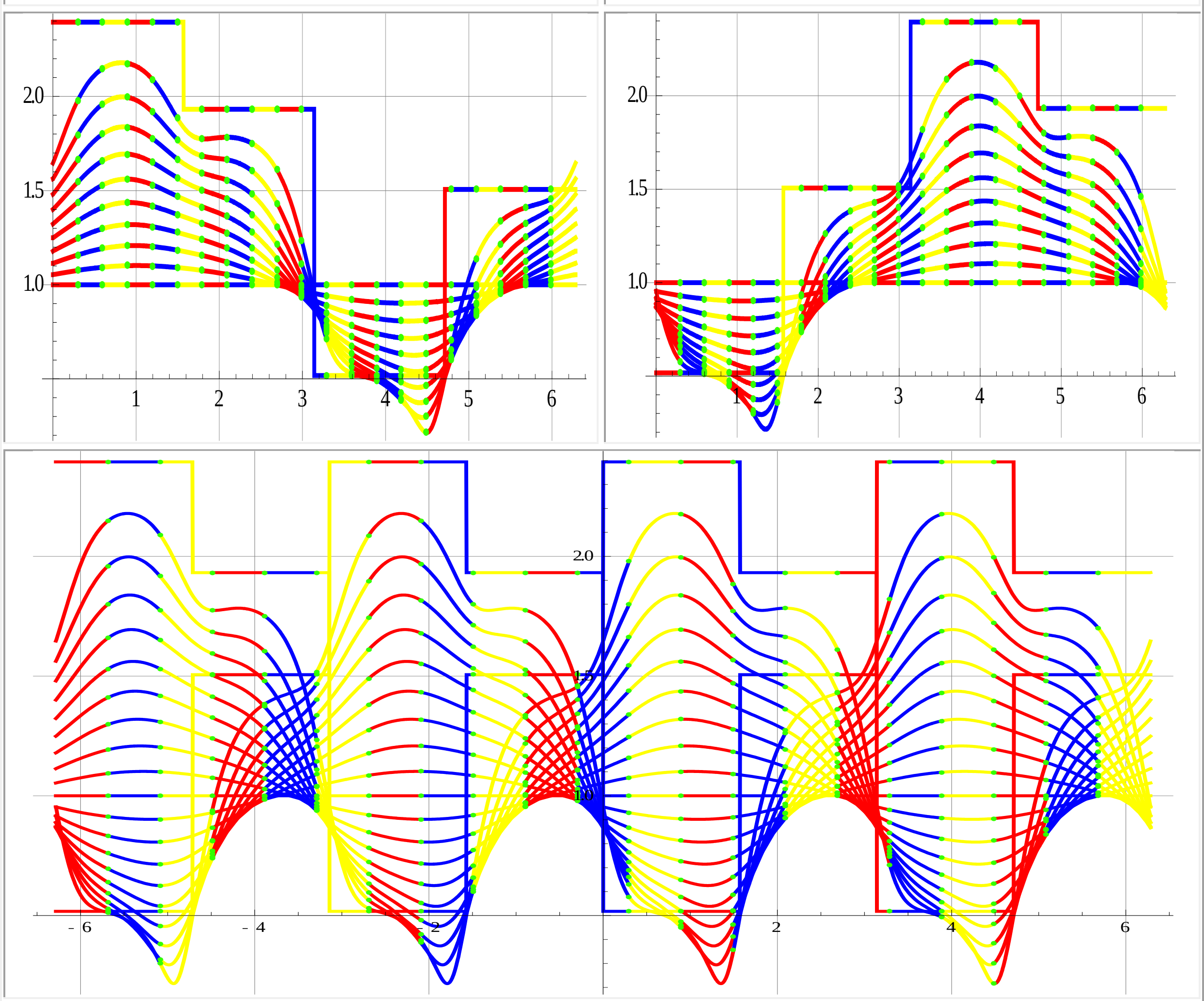


Fig. 14,b Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **raqθ** de **ε** = $\frac{\pi}{3}$

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

În mod asemănător, prin definirea **funcţiilor supermatematice** quadrilobe excentrice **FSM-QLE** şi a quadrilobelor, ecuaţiile lor în coordonate polare se pot defini fie faţă de centrul O(0,0), fie de excentrul **E(e, ε)** sau **S(s, ε)** **(Fig. 13,a►).**

Definite prin variabila excentrică **θ** ele au ecuaţiile

(13) $\text{req}\theta = \pm\sqrt{(coq\theta + s\ cos\varepsilon)^2 + (siq\theta + s.sin\varepsilon)^2}$

şi pentru **ε = 0** au graficele din **figura 14,a** iar, pentru **ε =** $\frac{\pi}{3}$, în **figura 14,b.**

ParametricPlot3D[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − 0.1s, Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2], 0.2s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot3D[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − 0.1sCos[Pi/3], Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2] − 0.1sSin[Pi/3], 0.2s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

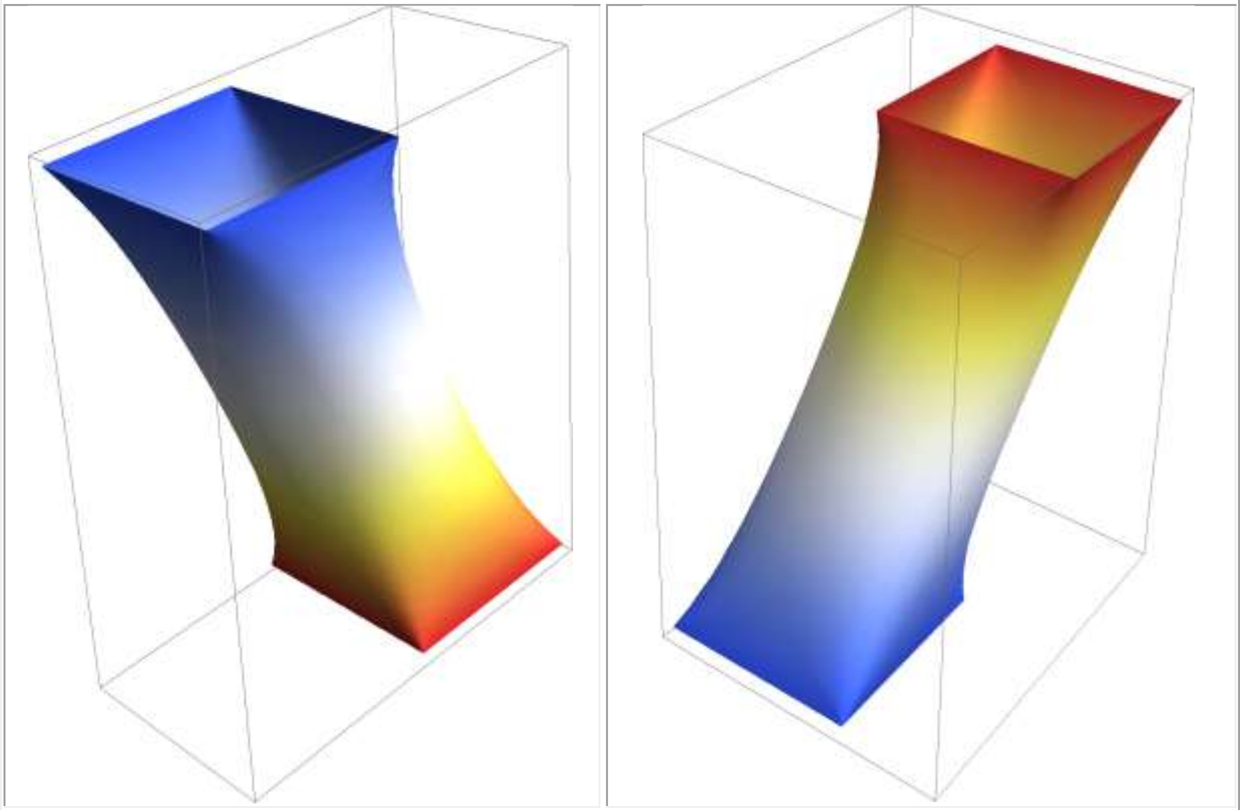


Fig.15 Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **raqθ** în **3D,** de **ε = 0◄** şi **ε =** $\frac{\pi}{3}$**►**

www.SuperMathematica.com | www.SuperMatematica.Ro

www.supermatematicaonline.blogspot.ro; **www.supermathematica.org**

Reprezentarea polară cu ecuaţia (13) ca şi prin ecuaţiile parametrice bazate pe ea, dau evident curbele plane închise quadrilobe (cvadrilobe) care sunt însă deplasate pe direcţia excentricităţii **s** : a axei x pentru **ε = 0** şi în diagonală pentru **ε = π/3** , aşa cum se prezintă situaţia în **figura 13,b** în 2D şi în **figura 15** în 3D.

În **figura 16** sunt prezentate graficele polare ale **FSM-QLE**

$$x = req\theta.cos\theta;\ y = req\theta.sin\theta;\ z = 2s$$

S(s∈[-1, 0], ε = 0)	S(s∈[0,+1], ε = 0)

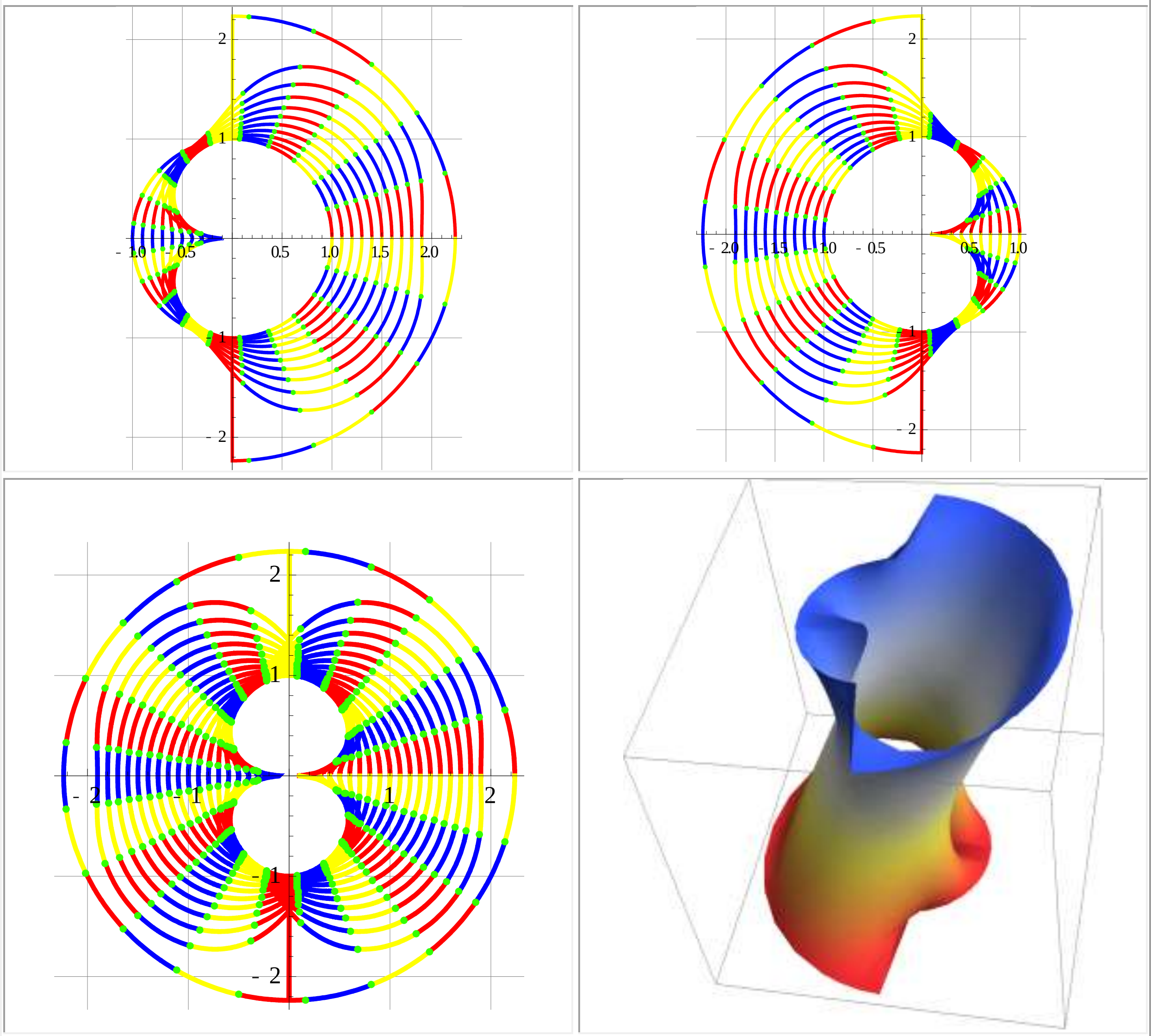


Fig.16 Graficele polare ale **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **raqθ** de **ε = 0**

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.Ro

4. FSM-QL RADIAL EXCENTRICE **reqi$_{1,2}$ θ şi Reqiα$_{1,2}$** INTERIOARE CERCULUI UNITATE

Funcţiile supermatematice radiale excentrice quadrilobe (cvadrilobe) interioare cercului unitate (**FSM-QEI**) **reqiθ** sunt reprezentate / schiţate geometric în **figura 17**, impreună cu cele exterioare cercului unitate reqθ şi cu cele circulare excentrice rexθ.

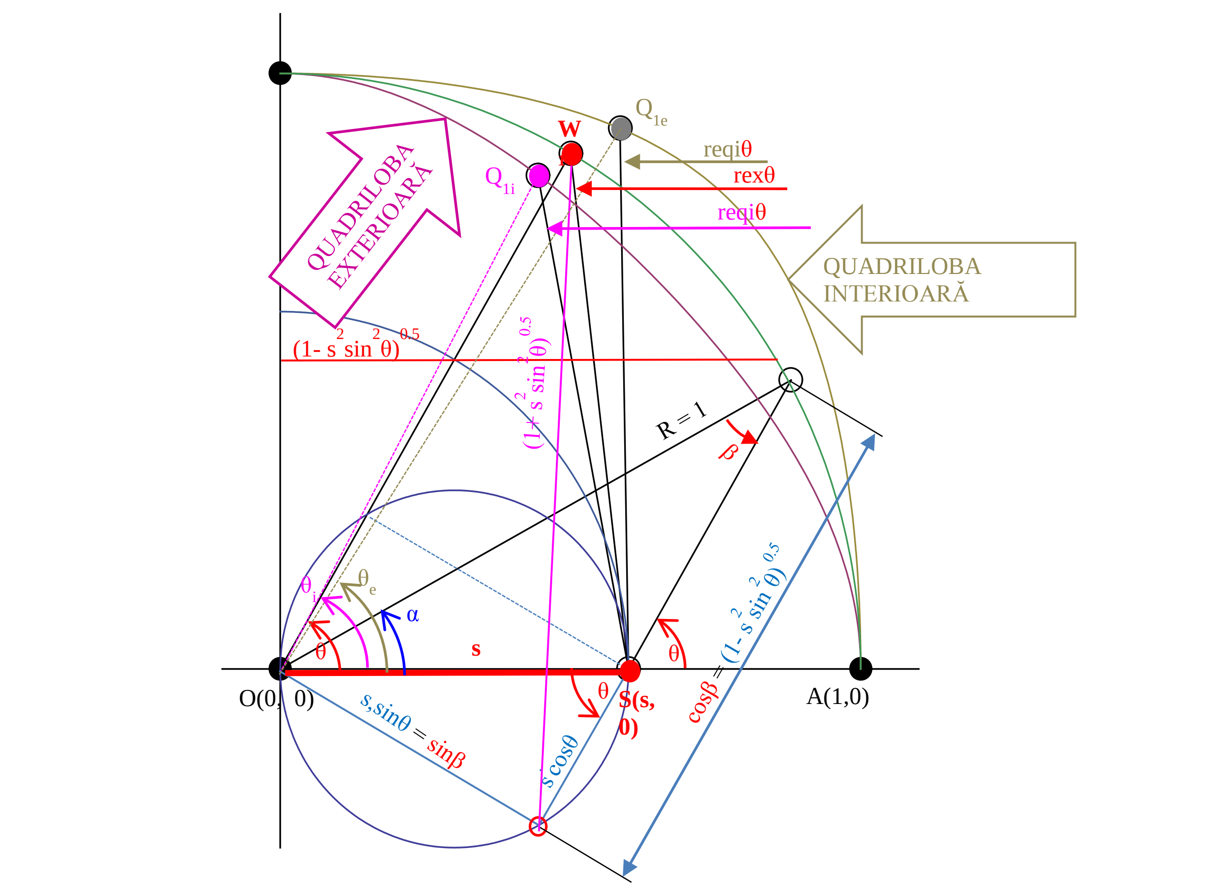
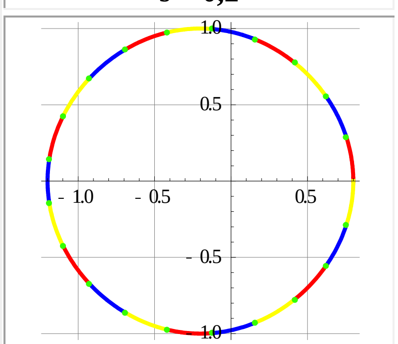
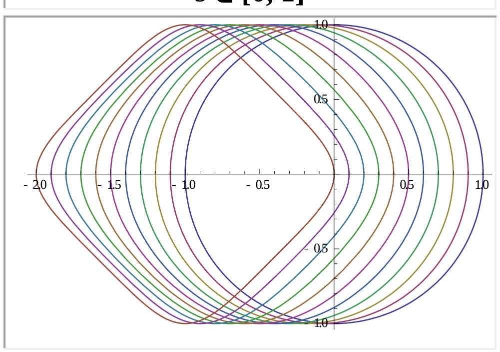


Fig. 17 Desene explicative pentru funcţii radiale excentriec **circulare** resθ şi funcţii radiale excentrice **quadrilobe** (cvadrilobe) exterioare **reqθ** şi interioare cercului unitate **reqiθ** de variabile excentrice θ

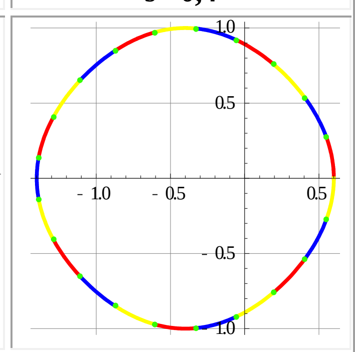
s = 0,2



s ∈ [0, 1]



s =0,4



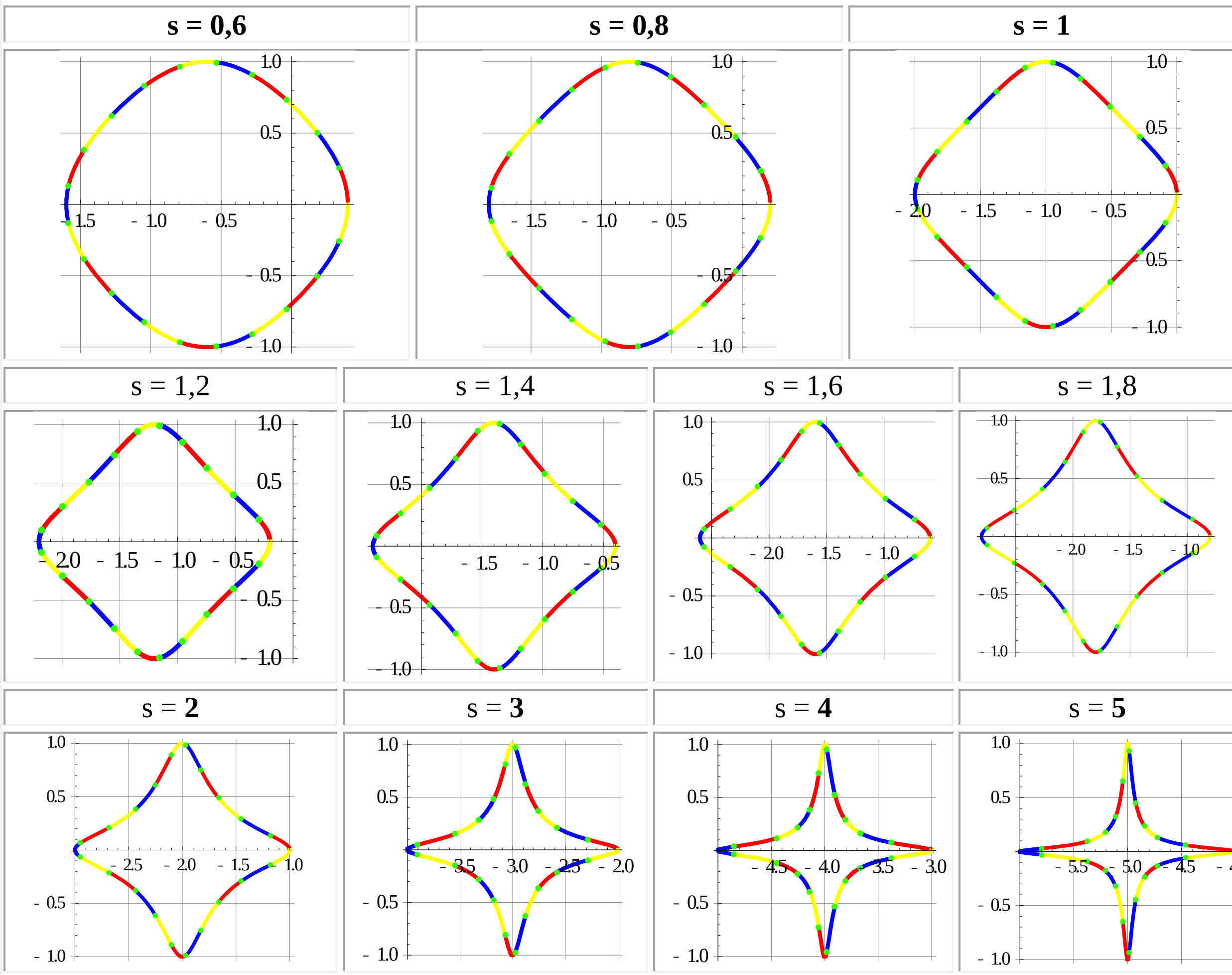


Fig. 18 Curbele descrise de ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = \text{reqi}\,\theta.\cos\theta \\ y = \text{reqi}\theta.\sin\theta \end{cases}$,

s $\in [0, 1]$; $\varepsilon = 0$ → **s** $\in [1,2; 5]$;

www.SuperMathematica.com; **www.eng.upt.ro/~mselariu;** www.supermatematica.ro

www.supermatematicaonline.blogspot.ro; **www.supermathematica.org**

(14) $\text{deli}\theta = = \sqrt{1 + s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}$

Pe de alta parte, ele nu sunt, strict vorbind, quadrilobe (cvadrilobe), deoarece aşa cum se poate observa în **figura 18**, în care, pentru **s = 1**, curba plană închisă nu mai este un pătrat perfect, ci cu colţurile rotunjite, iar pentru s > 1 degenereaza în astroide.

Ecuaţiile funcţiilor radiale excentrice quadrilobe interioare sunt deduse ca sumă vectorială a funcţiilor

(15) $\begin{cases} \text{coqi}\theta - \text{s}\cos\varepsilon \\ \text{siqi}\theta - \text{s}.\sin\varepsilon \end{cases}$,

şi reprezintă distanţă de la excentrul S(s, ε) la punctul Q_i de pe cvadriloba interioară cercului, adică

(16) $\rho_{qi} = \mathrm{raqi}\theta = \sqrt{(\mathrm{coqi}\theta - s.\cos\varepsilon)^2 + (\mathrm{siqi}\theta - s.\sin\varepsilon)^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+(s^2.\sin(\theta-\varepsilon))^{\wedge}2}} - s.\cos\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+(s^2.\cos(\theta-\varepsilon))^{\wedge}2}} - s.\cos\varepsilon\right)^2}$$

cu graficele funcţiilor din **figura 19,a** pentru un excentru S(s ∈ [0,1]; ε = 0) şi din **figura 19,b** pentru S(s ∈ [0,1]; ε = $\frac{\pi}{3}$)

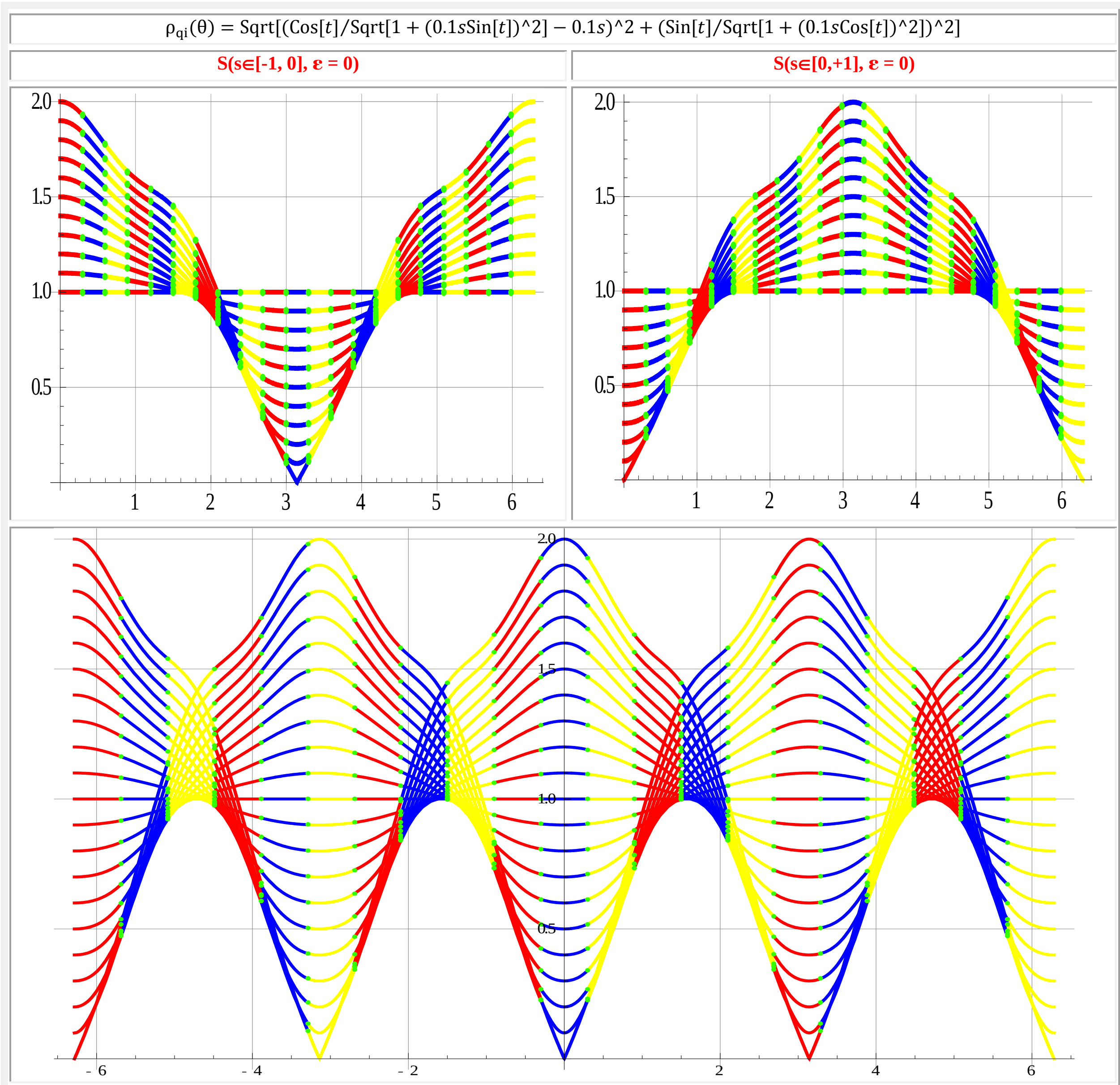


Fig. 19,a Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice interioare **raqiθ** de **ε = 0**

$\rho_{qi}(\theta)$ = Sqrt[(Cos[*t*]/Sqrt[1 − (0.1*s*Sin[*t*])^2] − 0.1*s*Cos[Pi/3])^2 + (Sin[*t*]/Sqrt[1 − (0.1*s*Cos[*t*])^2] − 0.1*s*Sin[Pi/3])^2]

S(s∈[-1, 0], ε = π/3)	S(s∈[0,+1], ε = π/3)

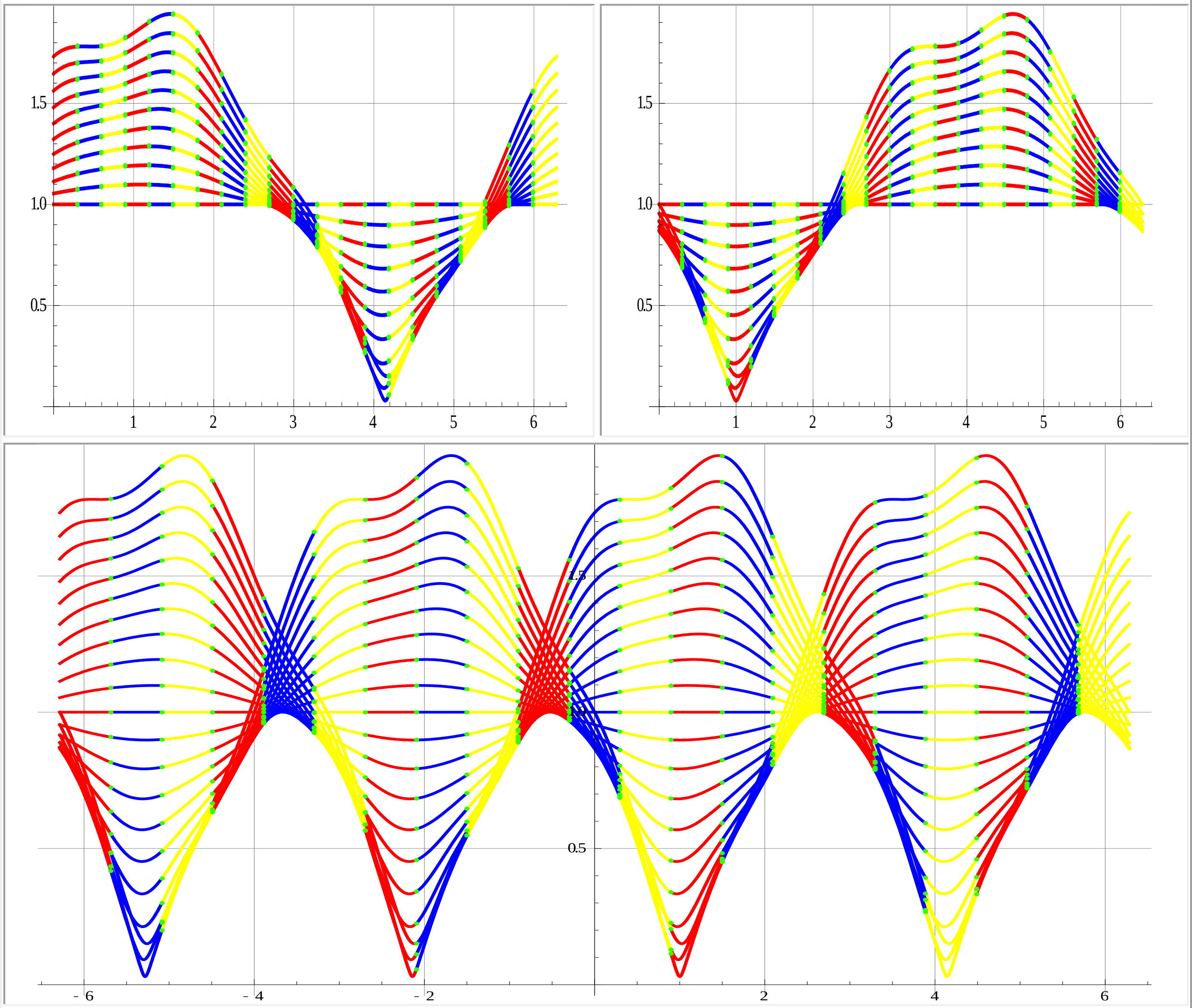


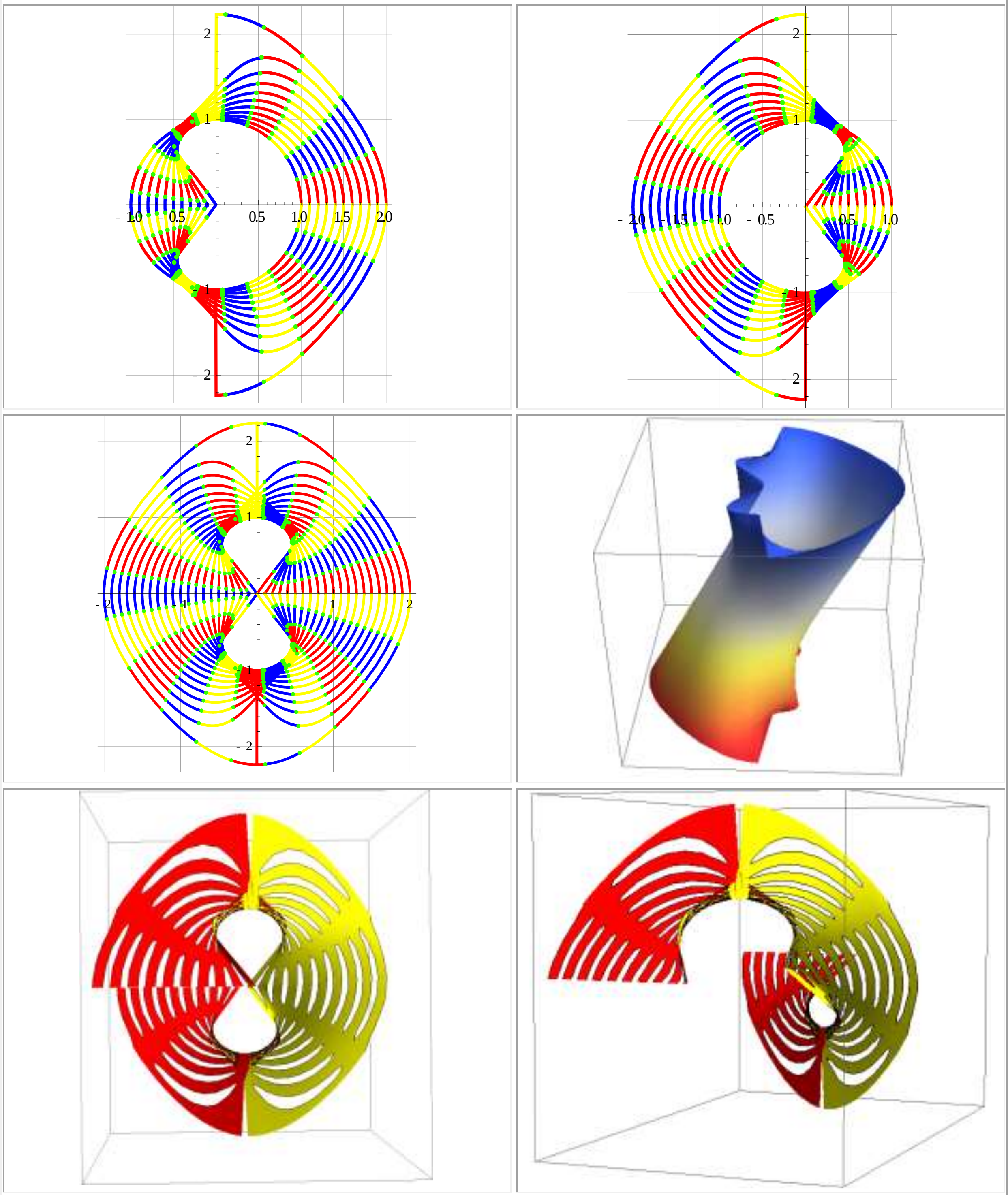
Fig. 19,b Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **raqiθ** de **ε = $\frac{\pi}{3}$**

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro
www.supermatematicaonline.blogspot.ro;	**www.supermathematica.org**

În **figura 20** sunt prezentate graficele polare ale **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **combinate; interioare cu x = raqiθ cosθ şi** exterioare cercului unitate **cu y = reqθ.sinθ,** de **S(s ∈ [-1, +1] ; ε = 0)**.

În **figura 21** sunt prezentate aceleaşi curbe închise, dar numai pentru funcţii cvadrilobe interioare. Deoarece imaginile curbelor în **2D** pot să inducă în eroare, au fost prezentate şi în **3D**.

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2] − 0.1s)^2
+ (Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2])^2]Cos[t], Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − 0.1s)^2
+ (Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2])^2]Sin[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}
```



BUPT

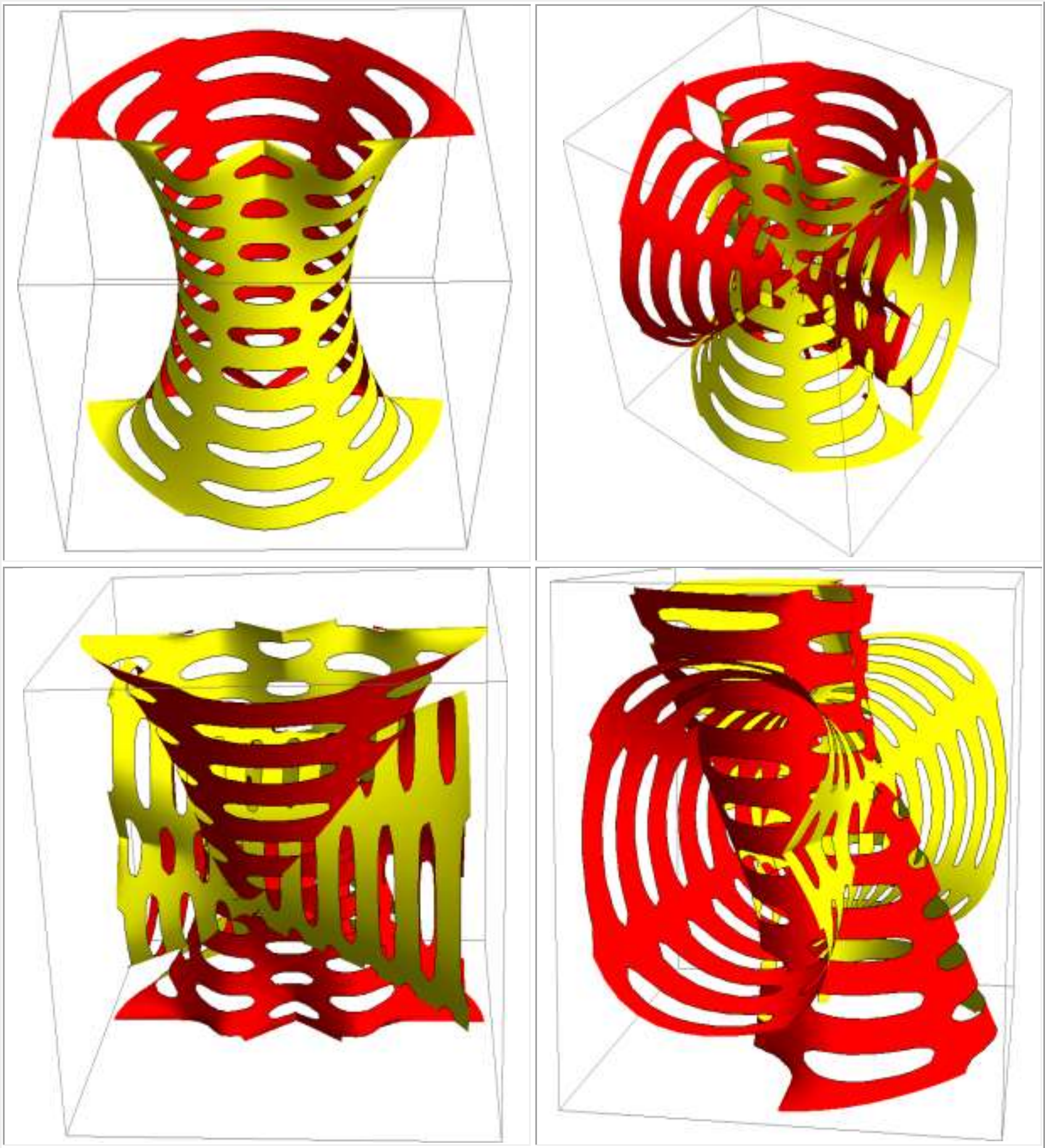
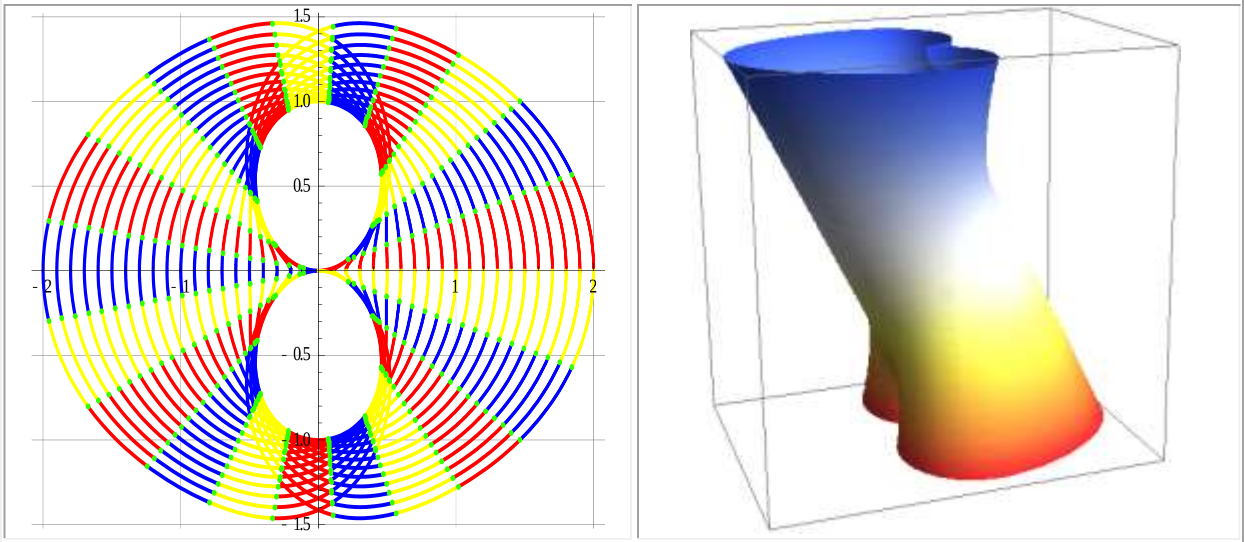


Fig. 20 Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice interioare x = **raqiθ. cosθ** combinate cu cele exterioare **y = raqθ. sinθ** de **ε = 0**

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2] − 0.1s)^2
+ (Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2])^2]Cos[t], Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2] − 0.1s)^2
+ (Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2])^2]Sin[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}
```



www.supermatematicaonline.blogspot.ro; **www.supermathematica.org**

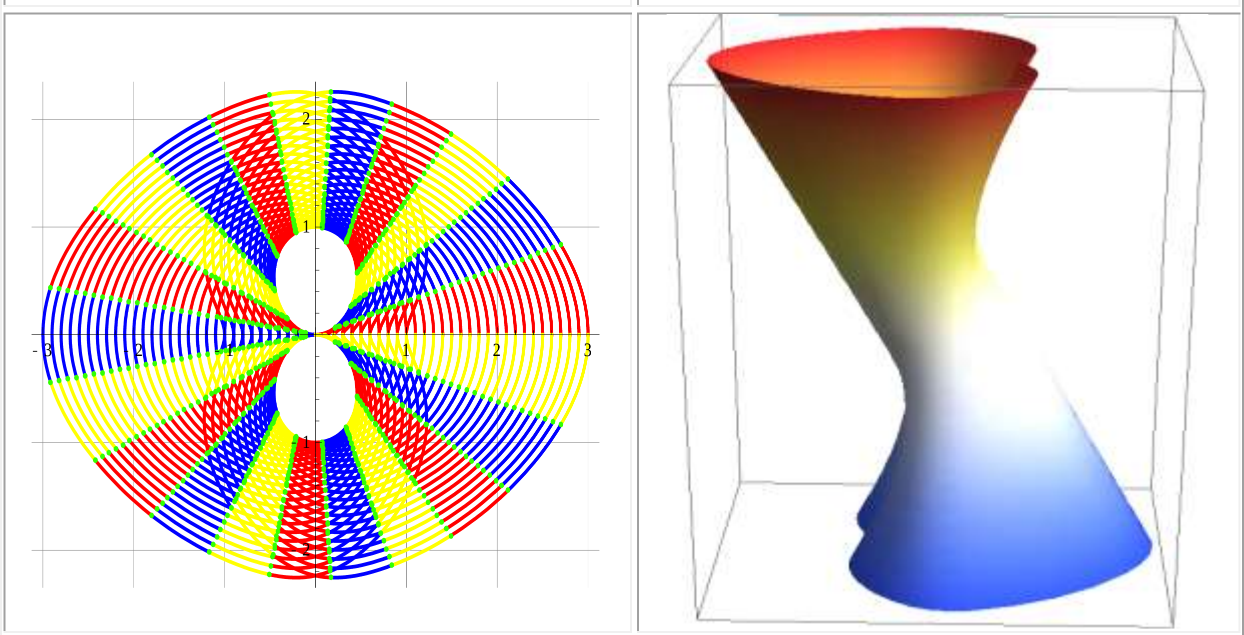


Fig. 21 Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice interioare x = **raqiθ. cosθ y = raqθ. sinθ** de **S(s ∈ [-1,+1], ε = 0) ▲ şi S(s ∈ [-2,+2], ε = 0) ▼**

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.Ro

Motto:" ***Matematica*** *este fundaţia de nezdruncinat a ştiinţei şi fântâna inepuizabilă a foloaselor pentru treburile omeneşti*.**"**
Isaac Barrow
"Supermatematica este edificiul de nezdruncinat şi aripile ce-i conferă nemărginire şi măreţie **Matematicii"**
Autorul SM

Cap XIII : FUNCŢII SUPERMATEMATICE (FSM) QUADRILOBICE / CVADRILOBICE ELIPTICE

1. INTRODUCERE. QUDRILOBE CIRCULARE

Toate funcţiile matematice ordinare, vechi, sunt denumite acum **centrice** (**FMC**), deoarece se obţin din cele *supermatematice* pentru ***excentricitate*** efectivă **e** sau numerică **s** ***nulă***, adică, **s** = **e** / R = **0**.

Excentricitatea *numerică* e şi s fiind distanţa la care punctele, denumite **excentre** E(e, ε) şi / sau S(s, ε), au fost expulzate, pe direcţia *excentricităţii unghiulare ε*, din îngrămădirea de ***puncte confundate*** plasate de marele **Euler** : centrul cercului **C(0,0),** originea unui reper / sistem **O(0, 0)** şi, totodată, polul **P(0, 0)** al unei semidrepte centrice $\mathbf{d^+}$ şi, din care cauză, matematica a rămas ***peste 300 de ani*** mult sărăcită, rămânând cu un singur rând de funcţii, curbe 2D şi de obiecte 3D.

Astfel, **MC** a rămas cu ***un singur sinus***, ***un singur cosinus***, ***o singură tangentă***, ***un singur sinus hiperbolic***, ***un singur sinus eliptic***, ***un singur cilindru, un singur cub, un singur con, o singură sferă, un singur tor*** **ş.a.m.d.** Când, de fapt, există o infinitate din fiecare dintre aceste obiecte matematice, în domeniul ***matematicii excentrice***, câte unul pentru fiecare punct din plan în care poate fi plasat excentrul **E** sau **S**, ca **<u>pol</u>** al ***dreptei excentrice*** (**d** = $\mathbf{d^+} \cup \mathbf{d^-}$), cu originea în **E**, pentru un cerc oarecare de raza R, sau în **S**, pentru cercul unitate / trigonometric, având forme din ce în ce mai diferite, de formele ***obiectelor centrice***, cu cât ***excentrul*** este mai îndepărtat de centrul **C(0,0)** şi de originea **O(0, 0).**

Dacă se consideră originea reperului / axelor în O(s, ε) ≡ **S(s, ε)** şi numai C(0, 0) rămâne la locul lui, unde l-a plasat **Euler**, atunci se obţin **FSM** elevate, deoarece, prin creşterea excentricităţii numerice **s**, graficele acestor funcţii se elevează (se ridică şi coboară pe verticală / pe direcţia y).

În fine, dacă toate cele 3 puncte sunt distincte atunci se obţin funcţii **SM** denumite **exotice**.

Toate aceste funcţiile matematice noi îşi datorează existenţa apariţiei noii dimensiuni a spaţiului, **excentricitatea**, motiv pentru care au fost denumite ***excentrice***. Fiind, deci, rezultatul utilizării ***<u>celei de a 3-a dimensiuni din plan</u>***, ***excentricitatea*** s ∈ [-∞, +∞] \ 0, considerată ***dimensiunea de formare şi de deformare a spaţiului***. *Ea a deschis* ***cutia Pandorei matematicii*** *!*

Prin utilizarea excentriciăţii în spaţiul **2D**, acesta devine **spaţiul SM** $\mathbf{2D^+}$, dacă **s** şi **e** precum şi **ε** sunt constante şi se transformă în spaţiul $\mathbf{3D^+}$ **SM**, notat şi **3DSM**, în care, obiectele plane devin dinamice, adică "prind viaţă", se deplasează în plan, odată cu modificarea valorii excentricităţilor.

În spaţiul **3D**, în aceleaşi condiţii, se obţine spaţiul **SM** $\mathbf{3D^+}$ şi, respectiv **4DSM** dacă numai **e** sau **s** sunt variabile, Dacă **e** şi **ε** sunt variabile, atunci spaţiul **3D** centric devine un spaţiu **5DS** şi spaţiul **5DS** la rândul lui poate fi multiplicat folosind excentre multiple. Adică, **FSM** pot fi de excentru $\mathbf{S_1}$ variabil, care la rândul lui este o funcţie **SM** de excentru $\mathbf{S_2}$, care este un excentru variabil de $\mathbf{s_3}$ şi / sau $\boldsymbol{\varepsilon_3}$ variabile ş.a.m.d.

Matematica centrică (MC), împreună cu **matematica excentrică** (**ME**), formează, ceea ce s-a denumit, **supermatematică** (**SM**), adică **SM = MC** ∪ **ME**. Repetăm să se înţelegă !

SM a multiplicat la infinit nu numai funcţiile matematice, ci şi toate obiectele matematicii centrice, introducând o pleiadă de funcţii matematice şi de obiecte matematice $\mathbf{2D^+}$ şi $\mathbf{3D^+}$ noi.

Aşa au apărut **lobele** (monolobe, bilobe, trilobe, **quadrilobe / cvadrilobe**, pentalobele ş.a.m.d. … multilobele sau n-lobele), pe oricare dintre ele putându-se defini **FSM**, aşa cum sunt **FSM** ***quadrilobice***

circulare excentrice (**FSM-QCE**), prezentate în **figura 1**, din care rezultă că, pentru **s ≤ 1** , **e** ≤ ***R***, funcţiile sunt continue, iar pentru **s > 1**, e > *R* sunt discontinue.

De ce aceste funcţii se scriu în două moduri: **quadrilobe** şi **cvadrilobe ?**

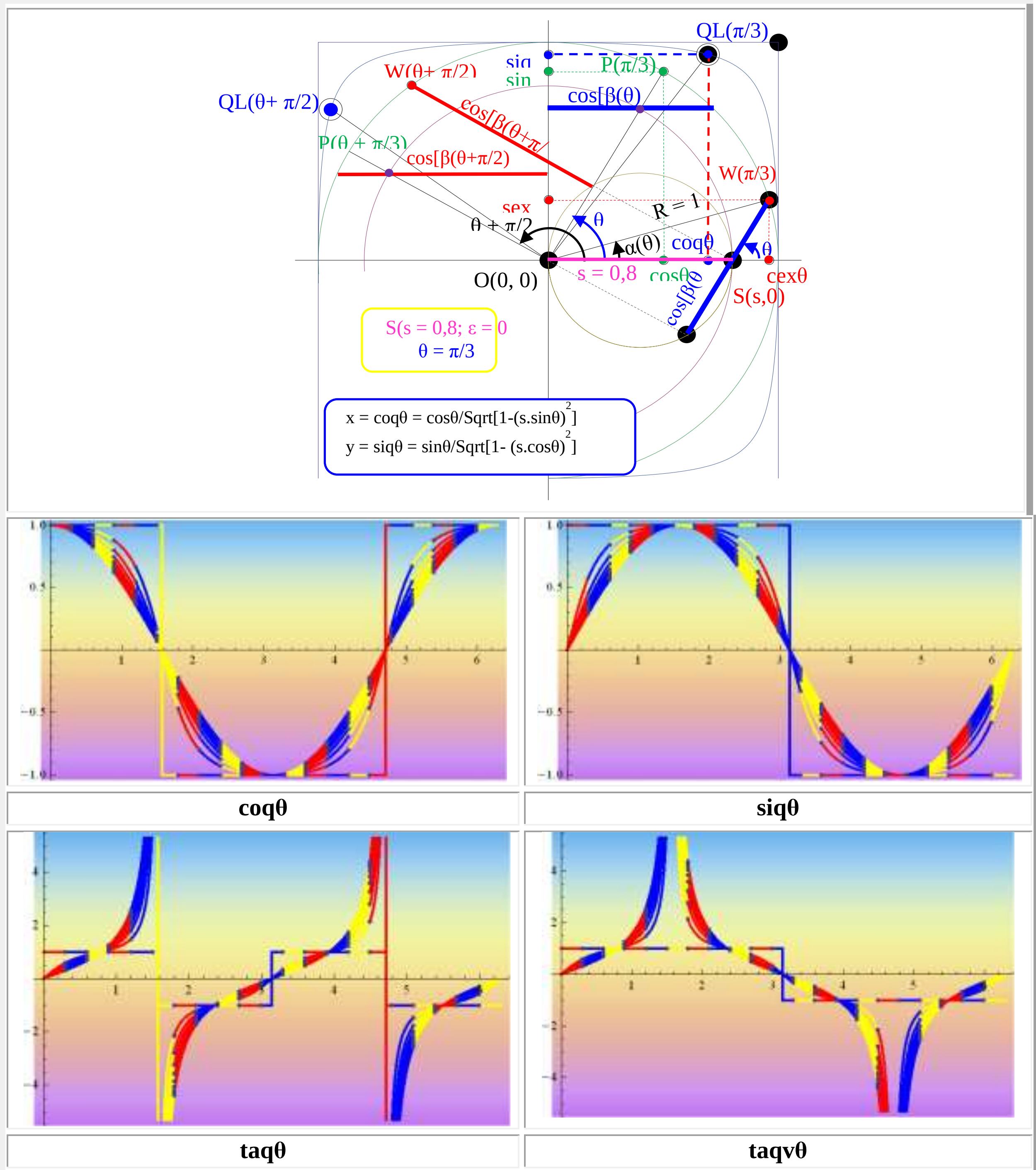


Fig. 1,a₁ Definirea FSM-QLC (desen) 🡅 şi principalele funcţii quadrilobe :
cosinus coq, sinus siq, tangenta Euler taq şi **tangenta Voinoiu taqv cvadrilobe**

Deoarece, o organizaţie mi-a comunicat că aceste noi funcţii au fost introduse în dicţionarele lor cu scrierea normală, cândva normală şi în România, de **quadrilobe** şi nu de ***cvadrilobe***.

Numai că Academia României întârzie să restabilească normalitatea în domeniul alfabetului şi al dicţionarului limbii române, rămânând la vechea limbă româno-sovietică !

Şi, ca să împac şi capra şi varza, … Asta e !

Ecuaţiile funcţiilor cosinus (***coqθ***) şi sinus (**siqθ**) ***quadrilobice circulare şi eliptice*** de ***variabilă excentrică θ*** sunt:

(1) $$\begin{cases} x(\theta) = coq\theta = R_C.\dfrac{cos\theta}{\sqrt{1-s^2 sin^2\theta}} \\ y(\theta) = siq\theta = R_S.\dfrac{sin\theta}{\sqrt{1-s^2 cos^2\theta}} \end{cases}$$, (**Fig, 1** în **2D**$^+$ şi **Fig. 2** în **3D**$^+$)

În **MC,** funcţiile mai cunoscute au fost definite pe ***cerc*** ca ***FMC Circulare***, pe *hiperbolă* (nu iperbolă !) ca ***FMC hiperbolice*** şi pe ***elipsă*** ca ***FMC eliptice***. Şi cam atât ! În timp ce, în **ME** numărul lor este nelimitat ! Ceea ce conferă **nemarginire supermatematicii**.

Deşi sunt definite pe ***quadrilobe***, au fost denumite şi ***circulare*** pentru $\mathbf{R_C = R_s}$, deoarece, pentru aceeaşi rază R şi pentru s = e = 0, degenerează într-un cerc (**Fig. 2** ↑).

Dacă razele **R** din relaţia (10) au valori diferite ($\mathbf{R_C \neq R_S}$), atunci, pentru **s = e = 0**, quadrilobele degenerează într-o **elipsă**, motiv pentru care funcţiile au fost denumite ***funcţii quadrilobice eliptice*** (**FQE**), iar entităţile 2D$^+$ au fost denumite **quadrilobe** / cvadrilobe ***eliptice***, acestea fiind funcţiile care fac obiectul lucrării de faţă.

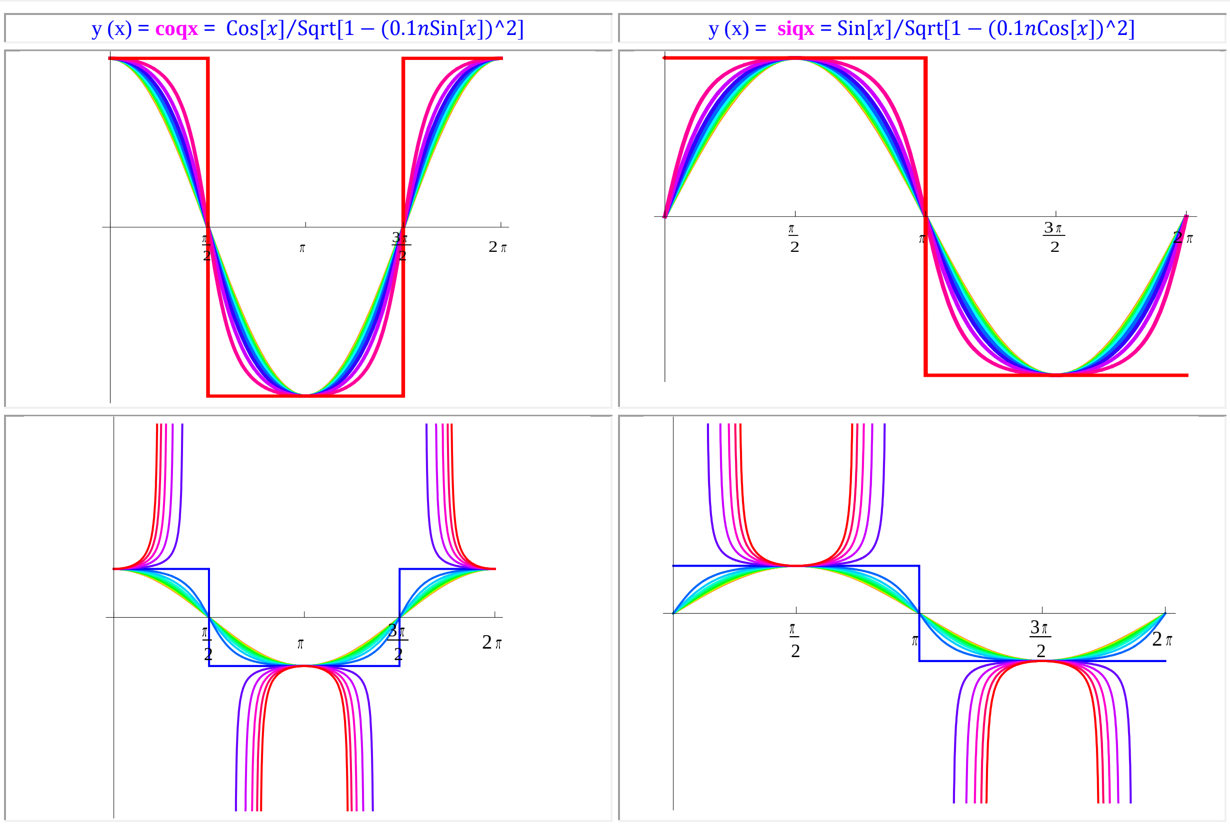


Fig. 1, a₂ Funcţii SM quadrilobice circulare de **s < 1** ↑ şi de **s > 1 < 1.5** ↓
de variabilă **excentrică θ**

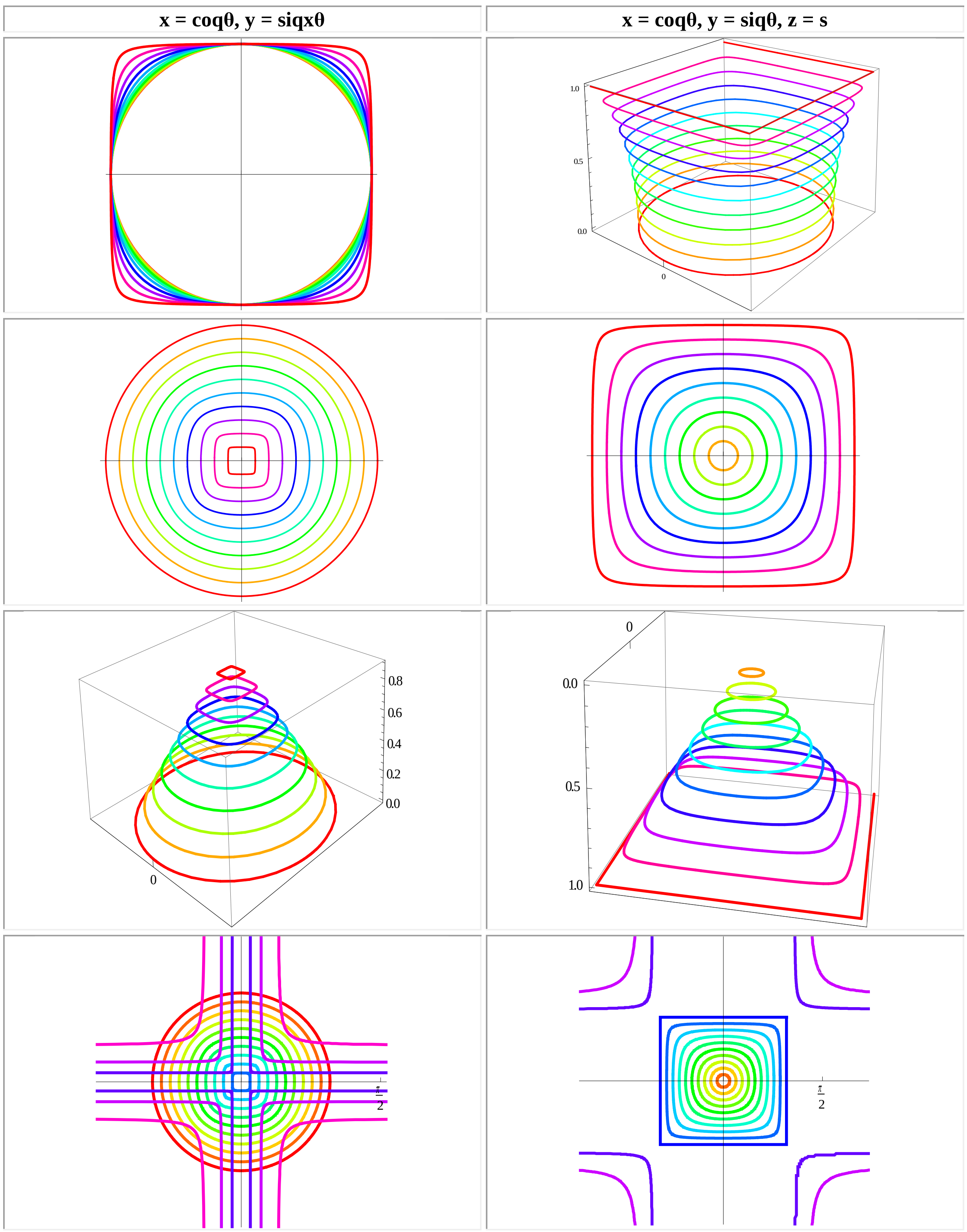


Fig.1.b **QUADRILOBE CIRCULARE** în **$2D^+$** şi în **$3D^+$** de **$s \in [\,0;\ 1\,]$** ↑ şi **$s \in [\,0;\ 1{,}5\,]$** ↓

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2], Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25 Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t]) , Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]

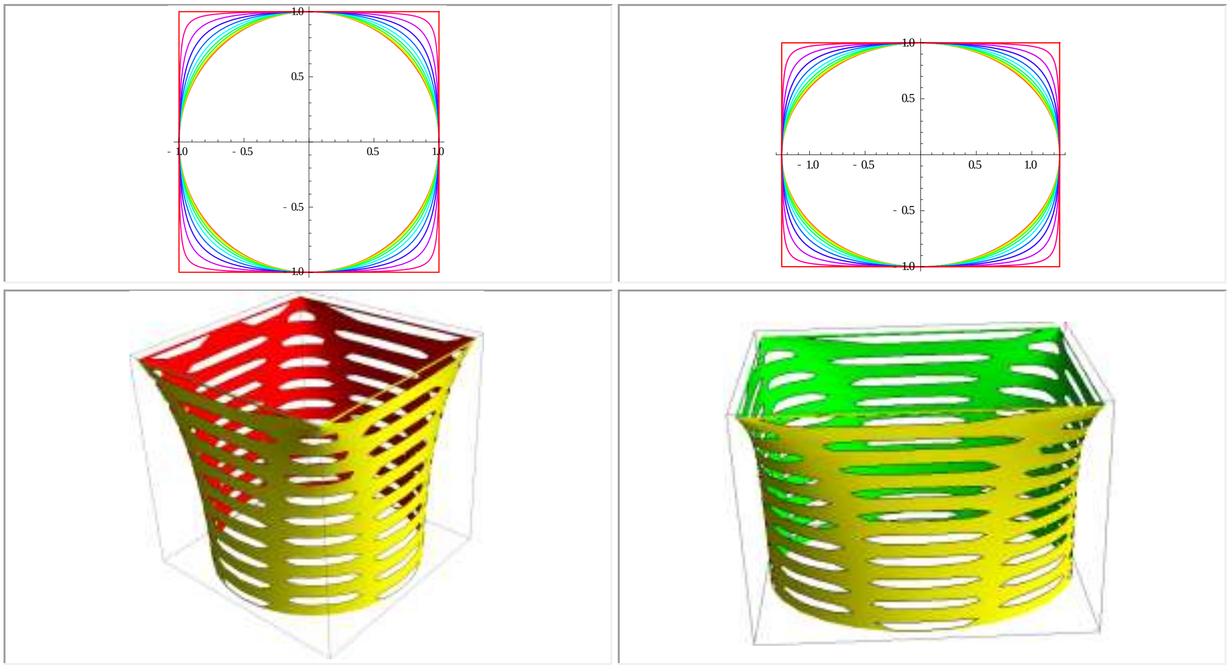


Fig. 1,c Transformarea continuă a **cercului** în pătrat si a **elipsei** în reptunghi

ParametricPlot3D[{0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − 0.1sSin[t]^2], Sin[t]/Sqrt[1 − 0.1sCos[t]^2] , 0.15s}, {s, 0,10}, {t, 0,2.01Pi}]	ParametricPlot3D[{0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − 0.1sSin[t]^2], 0.1s Sin[t]/Sqrt[1 − 0.1sCos[t]^2] , 0.15s}, {s, 0,10}, {t, 0,2.01Pi}]

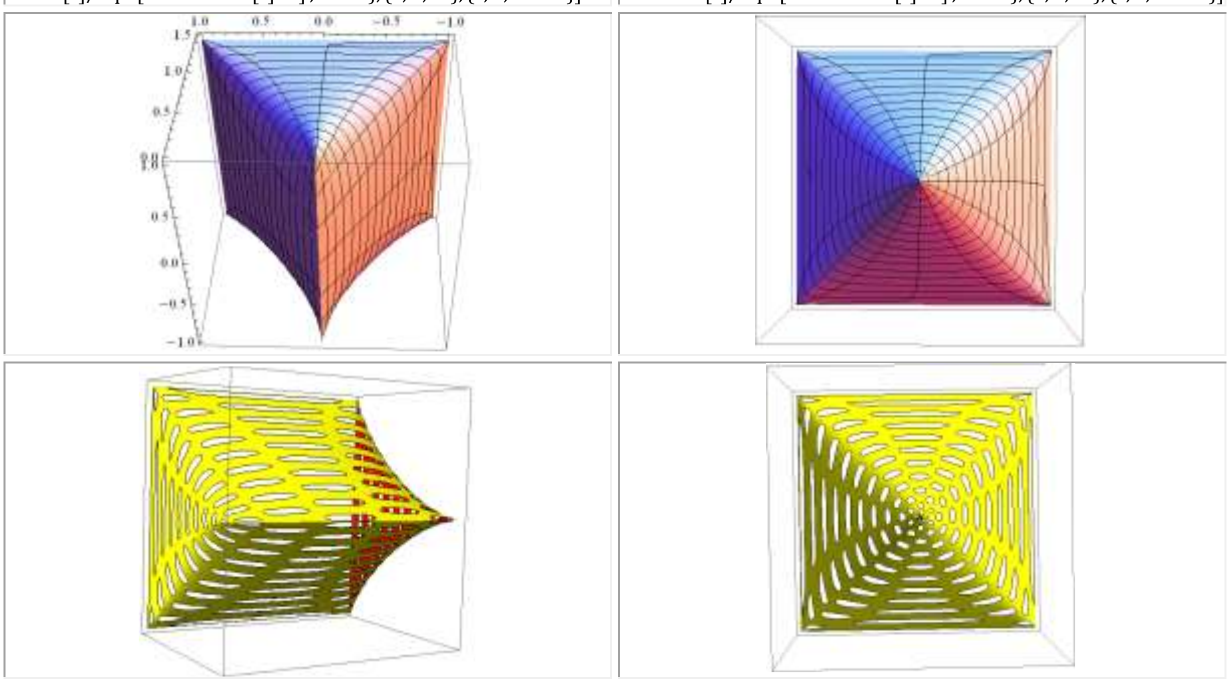


Fig. 1, d Transformarea continuă a pătratului într-un **segment de dreapta◀** şi într-un **punct▶**

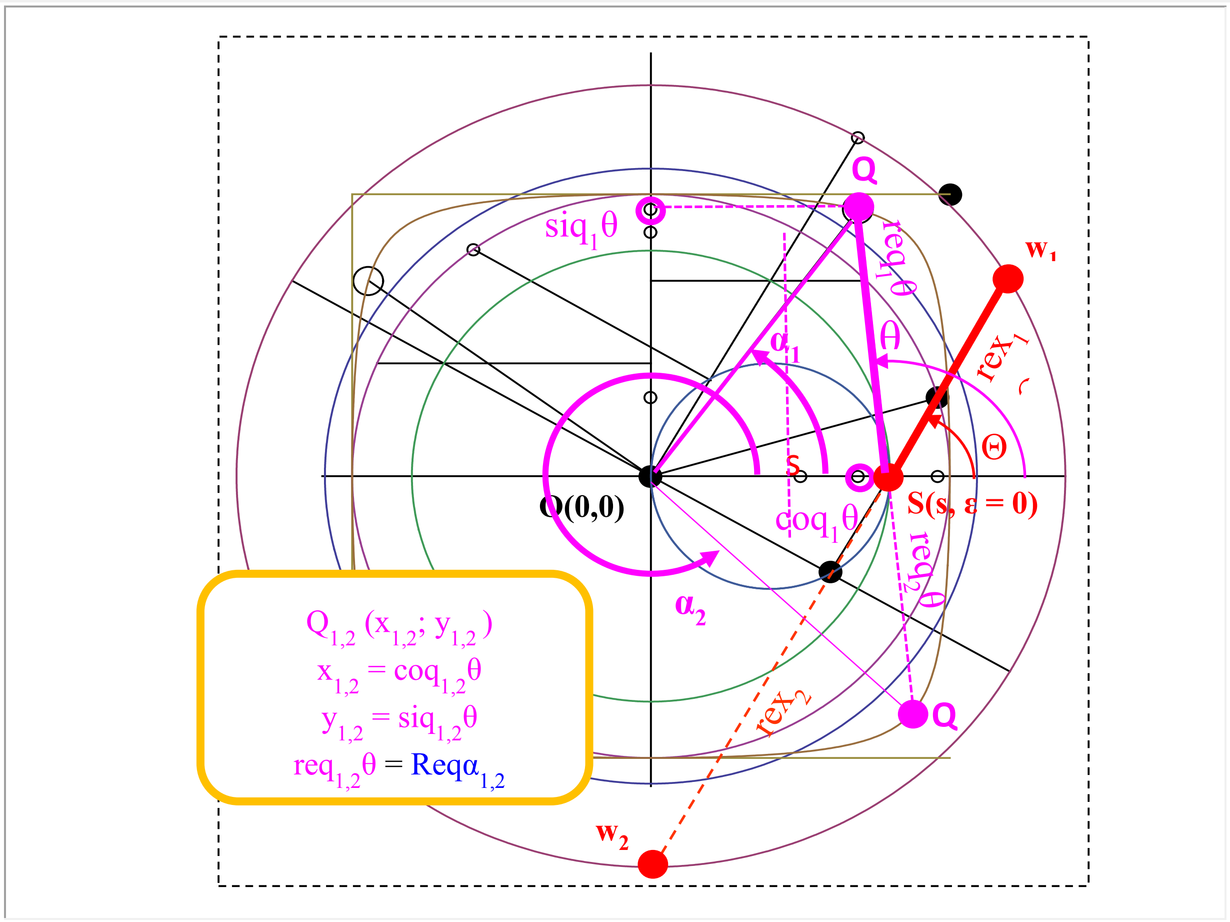
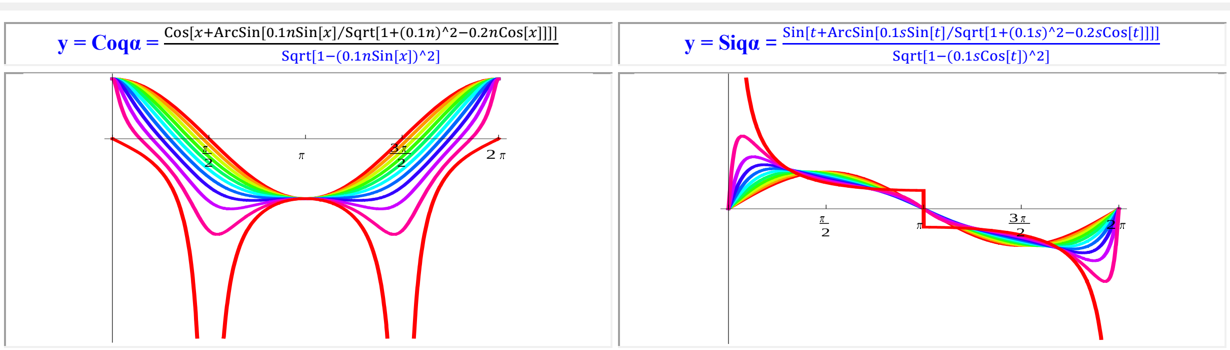


Fig. 2 Schema definirii FSM quadrilobe radial excentric quadrilobe

Funcţiile cosinus quadrilobic **Coqα** şi sinus quadrilobic **Siqα** de **variabilă centrică α** au ecuaţiile:

(2) $$\begin{cases} X(\alpha) = Coq\alpha = \dfrac{Cex\alpha}{\sqrt{1-s^2 sin^2\alpha}} = \dfrac{\cos[\alpha+\beta(\alpha)]}{\sqrt{1-s^2 sin^2\alpha}} = \dfrac{\cos[\alpha + arcsin\frac{s.sin\alpha}{\sqrt{1+s^2-2s.cos\alpha}}]}{\sqrt{1-s^2 sin^2\alpha}} \\ Y(\alpha) = Siq\alpha = \dfrac{Sex\alpha}{\sqrt{1-s^2 cos^2\alpha}} = \dfrac{\sin[\alpha+\beta(\alpha)]}{\sqrt{1-s^2 cos^2\alpha}} = \dfrac{\sin[\alpha + arcsin\frac{s.sin\alpha}{\sqrt{1+s^2-2s.cos\alpha}}]}{\sqrt{1-s^2 cos^2\alpha}} \end{cases}$$



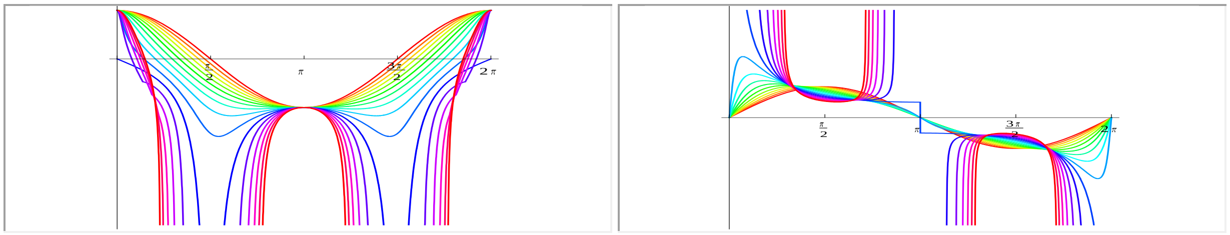


Fig. 2,a Funcţii SM quadrilobice circulare de **s ≤ 1** ↑ şi de **s ≤ 1,5** ↓de variabilă **centrică α**

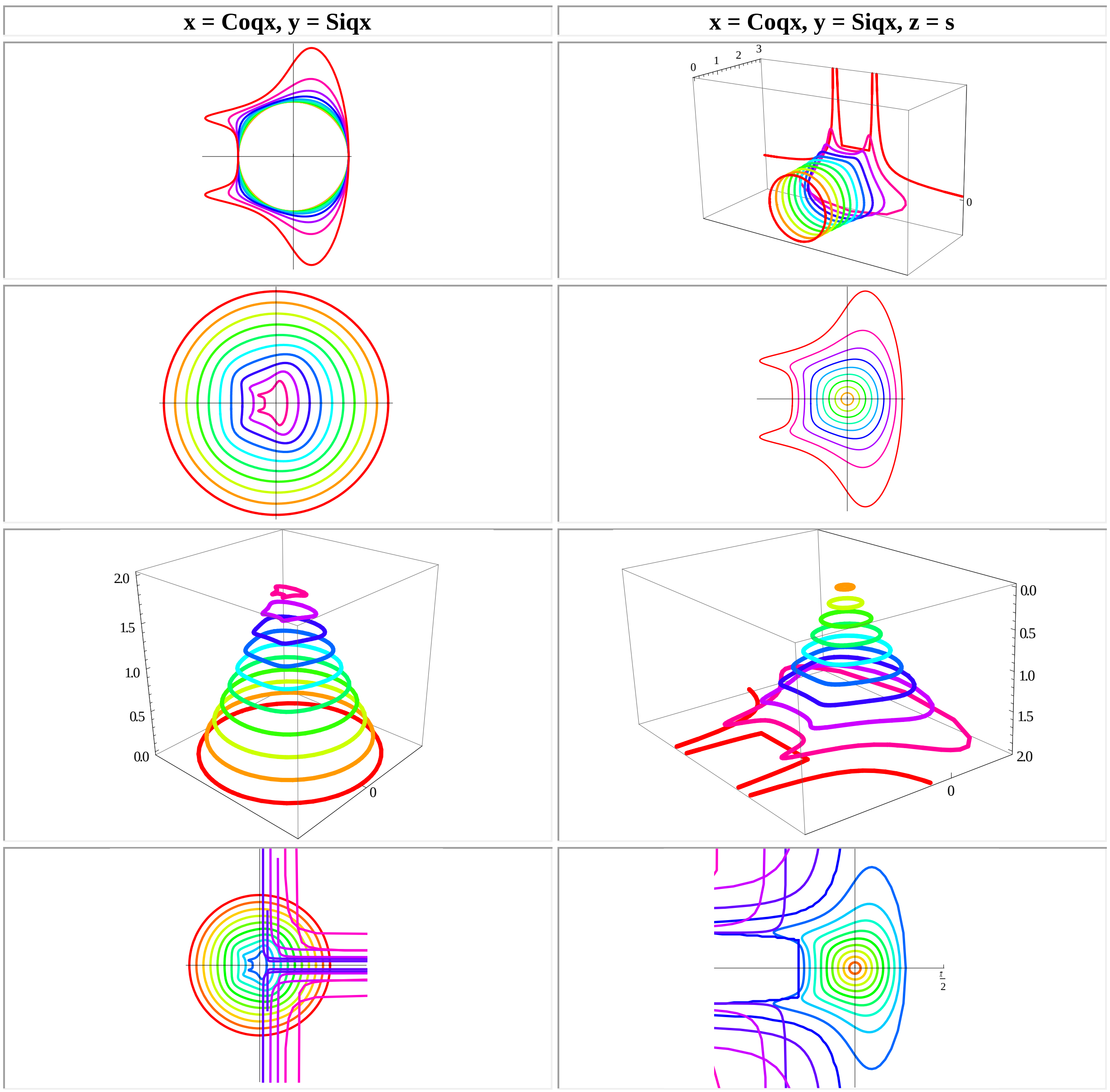


Fig. 2,b Quadrilobice circulare de **s ≤ 1** ↑ şi de **s ≤ 1,5** ↓de variabilă **centrică α**

şi graficele din **figura 2,a.** În **figura 2,b** sunt prezentate **quadrilobele circulare** de variabilă **centrică α**.

Razele din originea **O(0, 0)** şi centrul **C(0, 0)** al cercului unitate sunt variabile şi au **4 maxime** (**Fig. 3**), corspunzătoare celor 4 lobi, atât a celor de ***variabilă excentrica θ*** ◄ cât şi a celor de ***variabilă centrică α*** ►, ceea ce atestă că într-adevăr curbele plane închise sunt sau pot fi considerate ***quadrilobe***.

R(θ) = $\sqrt{x^2(\boldsymbol{\theta}) + y^2(\boldsymbol{\theta})}$	**R(α)** = $\sqrt{X^2(\boldsymbol{\alpha}) + Y^2(\boldsymbol{\alpha})}$

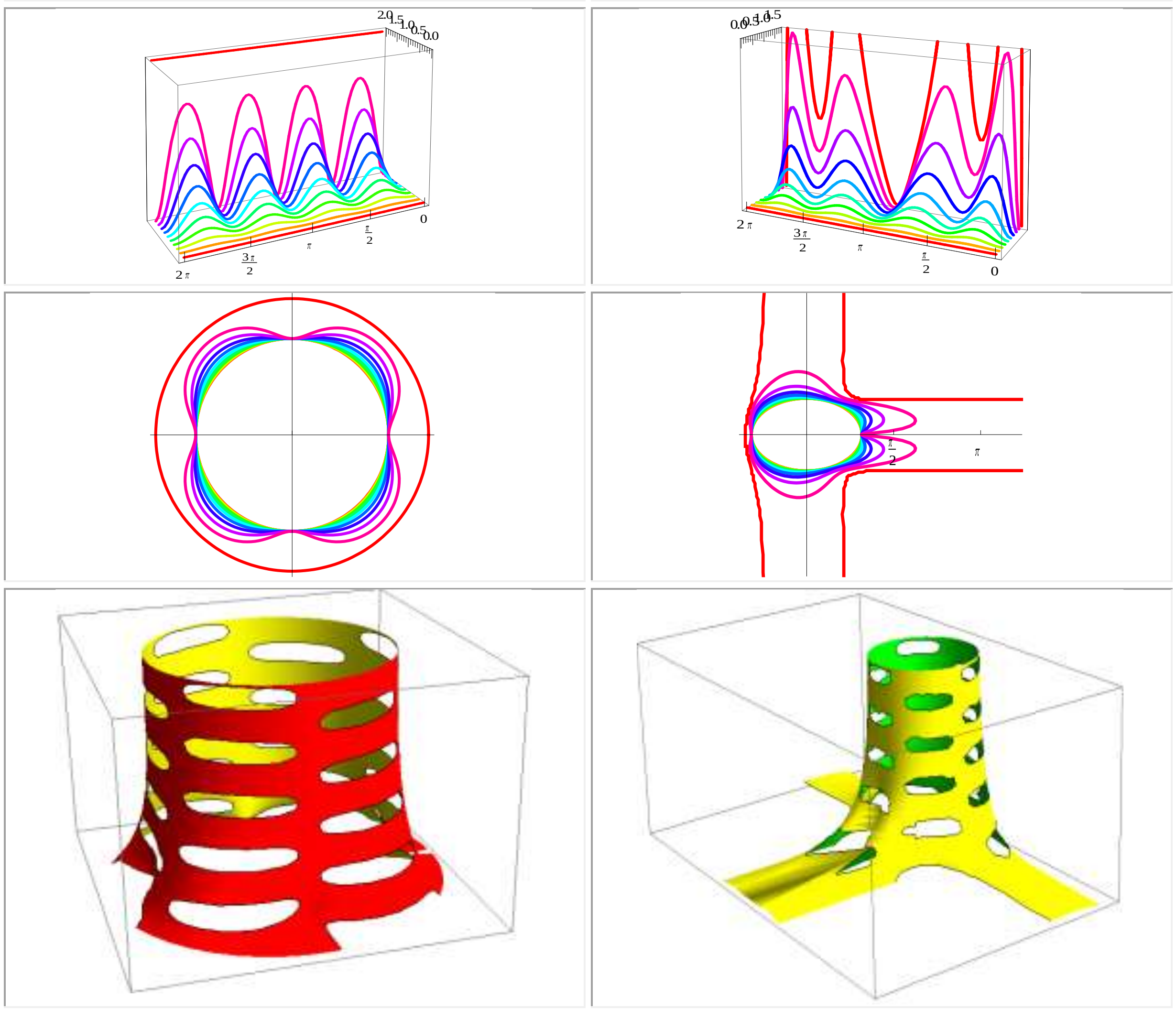


Fig. 3. Razele din centrul **O(0,0)** ale **quadrilobelor circulare de θ**◄ şi de **α** ►
în coordonate **carteziene** 🡅 şi **polare** ▣ şi 🡇

Distanţele de la excentrul **S(s, ε)** la punctele M(x = coqθ, y = siqθ) de pe quadrilobele circulare de variabilă excentrică **θ**, precum şi la punctele M(x = Coqθ, y = Siqθ) ale quadrilobelor circulare de variabilă centrică sunt denumite funcţii ***radiale excentrice quadrilobe*** şi sunt notate cu **reqθ** şi, respectiv, cu **Reqα**.

Ecuaţiile acestora sunt:

$$(3)\qquad \begin{cases} req\boldsymbol{\theta} = \sqrt{(coq\theta - \boldsymbol{s}.cos\varepsilon)^2 + (siq\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{s}.sin\varepsilon)^2} \\ Req\boldsymbol{\alpha} = \sqrt{(Coq\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{s}.cos\varepsilon)^2 + (Siq\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{s}.sin\varepsilon)^2} \end{cases}$$

```
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[(0.1s − Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2])^2
+(Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]
```

```
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[(0.1s − Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2])^2
+(1.5 Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]
```

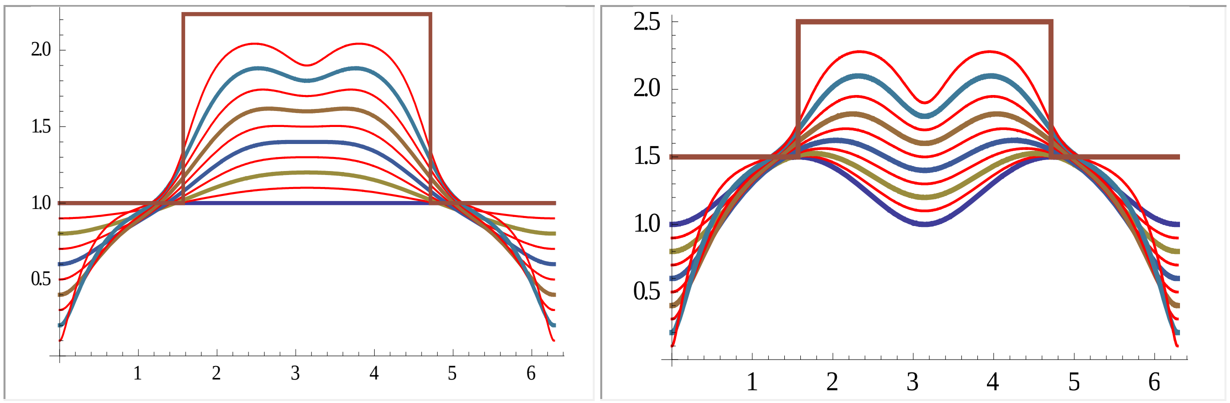
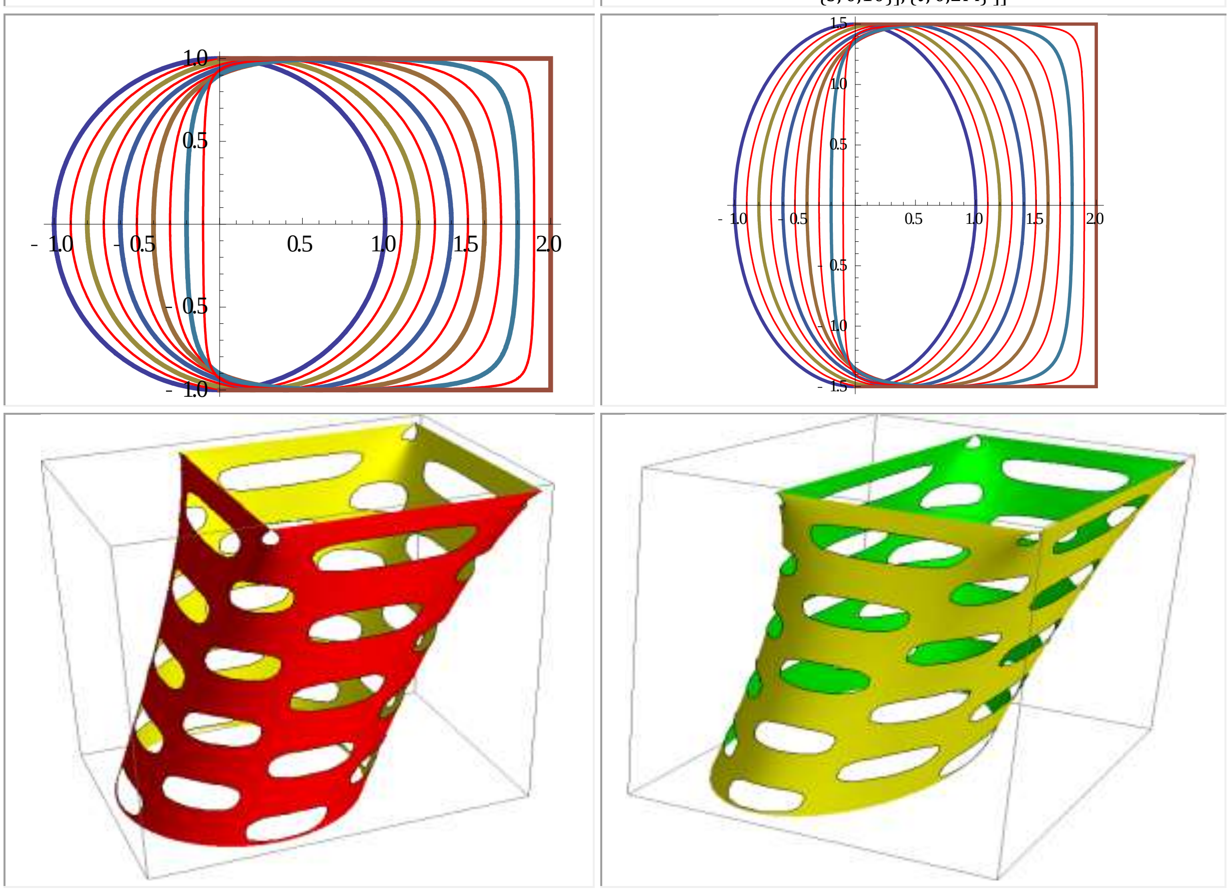


Fig. 3,a Graficele unor FSM quadrilobe radial excentrice de a = b = 1 ⇦ şi a = 1,5, b = 1⇨

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1s
    − Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²],
(Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])²])}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1s
− Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²] , 1.5 Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}},
{s, 0,10}], {t, 0,2Pi} ]]
```



```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{(Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2
− Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1s
        − 1.5 Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2],
Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi} ]]
```

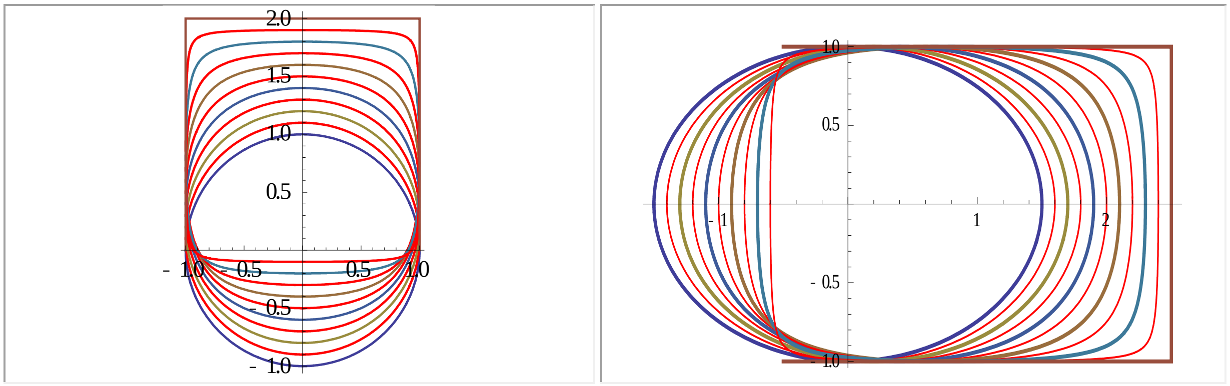


Fig. 3,b Trilobe cu quadrilobe **circulare** ⇦ şi **eliptice** ⇨

```
y = Sqrt[(Cos[x + ArcSin[0.1n Sin[x]/Sqrt[1 + (0.1n)^2 − 0.2nCos[x]]]]/Sqrt[1 − (0.1nSin[x])^2] − 0.1n)^2 +
(Sin[x + ArcSin[0.1n Sin[x]/Sqrt[1 + (0.1n)^2 − 0.2nCos[x]]]]/Sqrt[1 − (0.1nCos[x])^2])^2]}▶
```

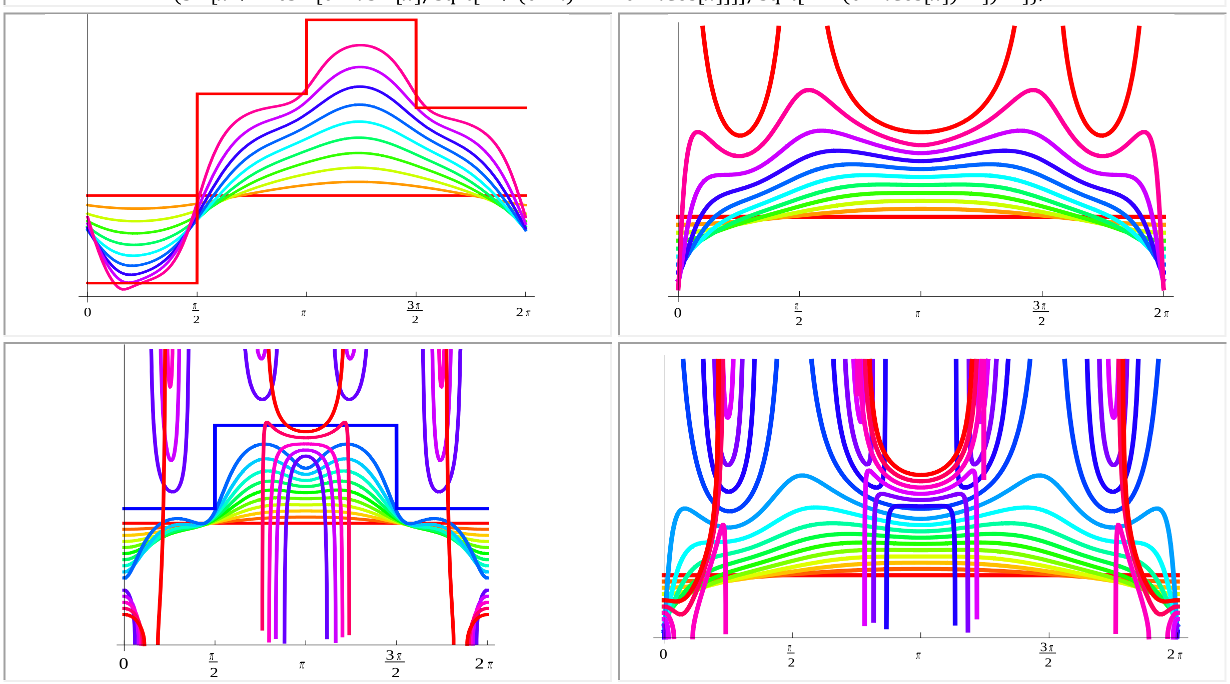
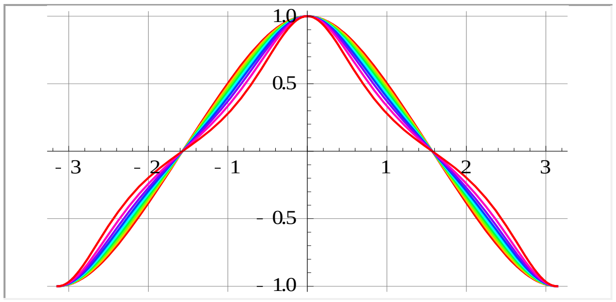
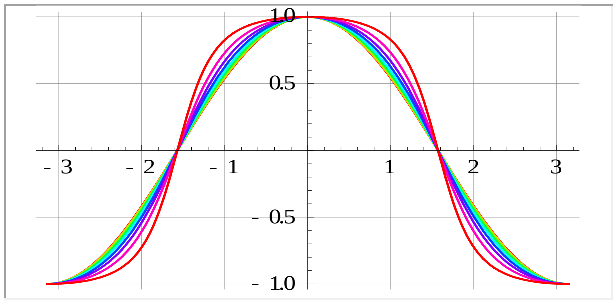


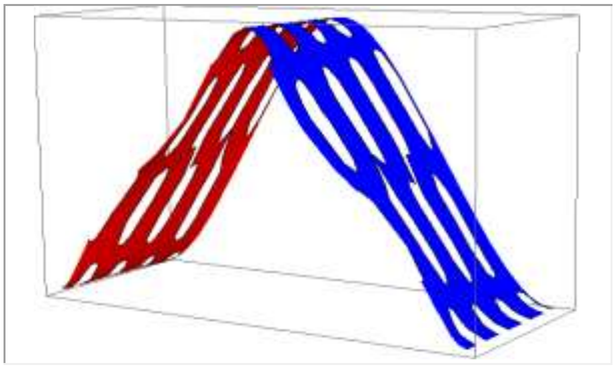
Fig. 4. Razele excentrice, din excentrul **S(s, ε),** sau funcţiile **radiale excentrice quadrilobe** ale **quadrilobelor circulare de θ**◀ şi de **α** ▶ în coordonate **carteziene** 🡅 şi **polare** ▣ şi 🡇 de **ε = π/3**

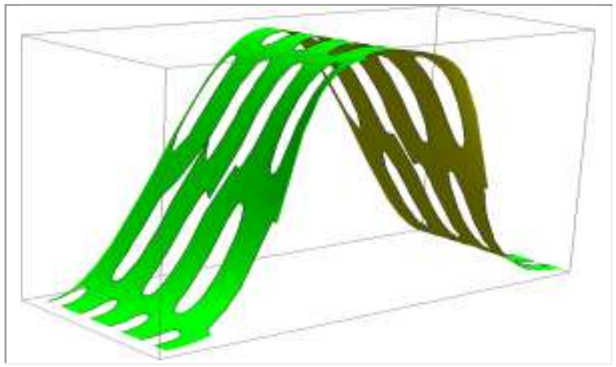
Qudrilobele şi ***funcţiile quadrilobice circulare*** au fost utilizate la descrierea unor vibraţii mecanice quadrilobe neliniare în lucrarea **Mircea Şelariu** “ **VIBRATIONS OF QUADRILOB SYSTEMS**” prezentată la The 11th International Conference on Vibration Engineering Timişoara, România, September 27 - 30, 2005.

Funcţii eliptice Jacobi	**Funcţii eliptice quadrilobe**
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[(0.1m)$^{0.5}$]/Pi, (0.1m)^0.5]}, {m, 1,9}], {x, −Pi, Pi}]] ← **cn(u,m)**	Plot[Evaluate[Table[{Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1uSin[x])^2]}, {u, 1,9}], {x, −Pi, Pi}]] ← coqθ

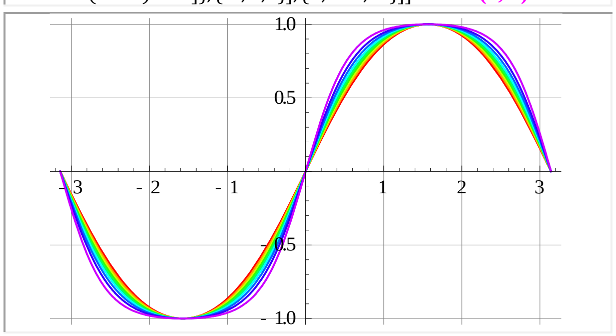


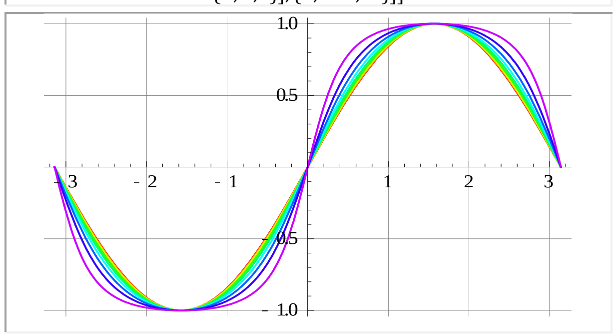


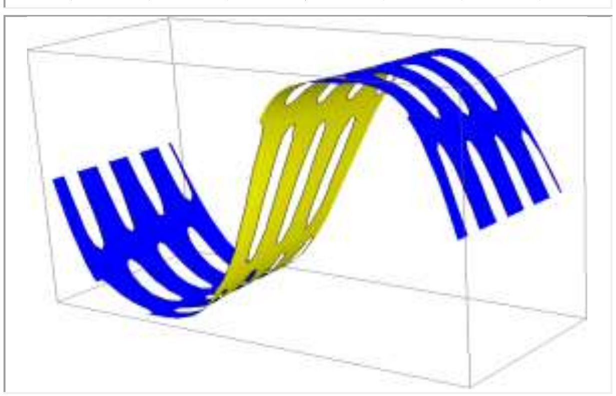




Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2x EllipticK[(0.1m)$^{0.5}$]/Pi, (0.1m)^0.5]}, {m, 1,9}], {x, −Pi, Pi}]] ← **sn(u,m)**	Plot[Evaluate[Table[{Sin[x]/Sqrt[1 − (0.1uCos[x])^2]}, {u, 1,9}], {x, −Pi, Pi}]]







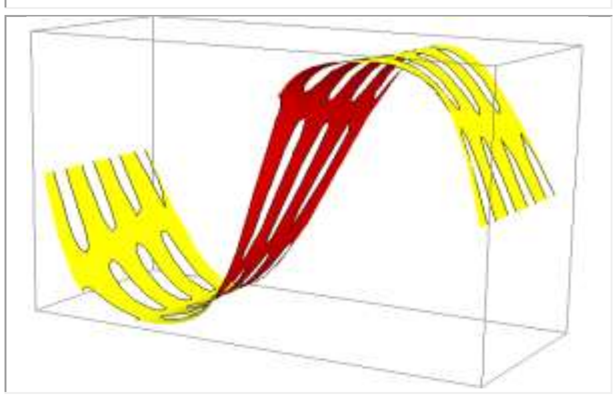


Fig.5 QUADRILOBE ELIPTICE în **2D$^+$** şi în **3D$^+$** de **s ∈ [0; 1]** ↑ şi **s ∈ [0; 1,5]** ↓

2. LEMNISCATE SUPERMATEMATICE QUADRILOBE

În geometria algebrică, noțiunea de **lemniscată** se poate referi la oricare dintre curbele în formă de 8 sau ∞, dintre care cea mai cunoscută este lemniscata lui Bernoulli denumită astfel de acesta în 1694.

Se mai cunosc lemniscatele lui **Booth**, lemniscatele lui **Gerono**, lemniscatele poliniomiale şi acum şi lemniscata **supermatematică**.

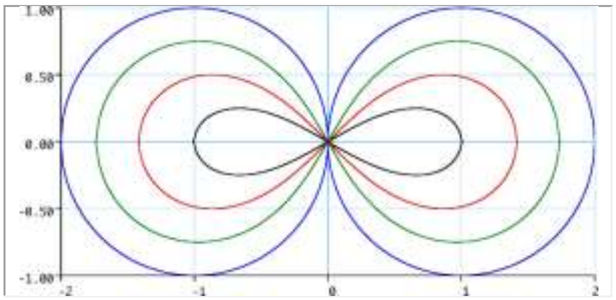


Fig. 6,a Lemniscatele lui Booth

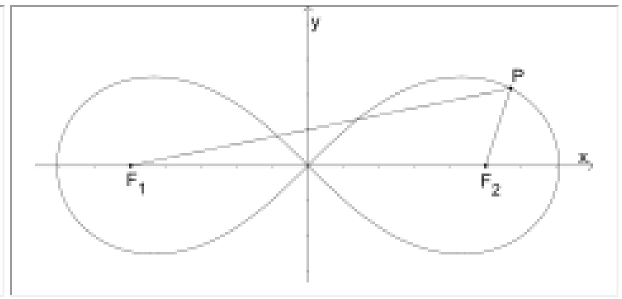


Fig. 6,b Lemniscata lui Bernouli

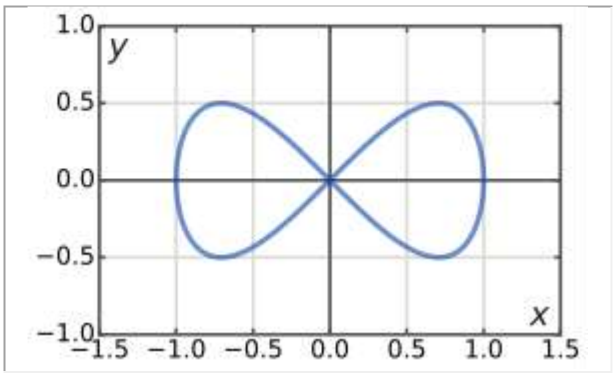


Fig. 7,a Lemniscate of Gerono:
solution set of $x^4 - x^2 + y^2 = 0$

ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]], Sin[2t]}, {s, 0,5}], {t, 0,2Pi}]]

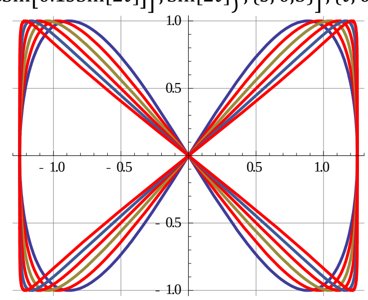
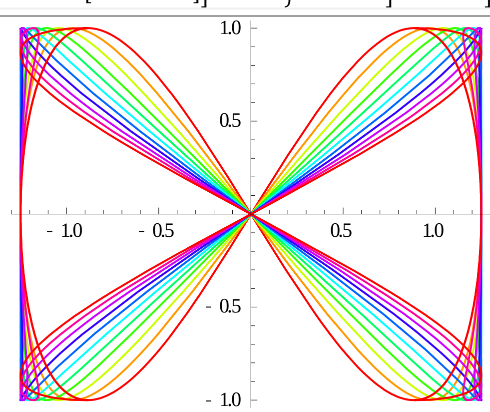
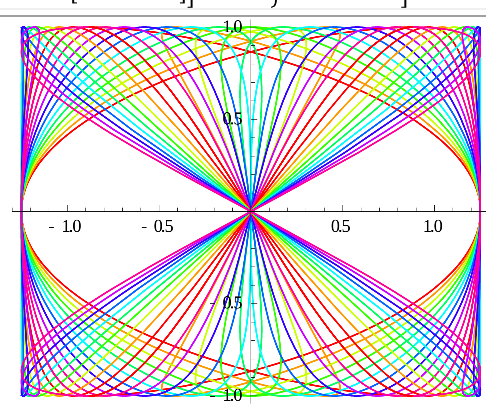


Fig. 7,b Leminiscate supermatematice de excentricitate liniara numerică s ∈ [0; 0,5]

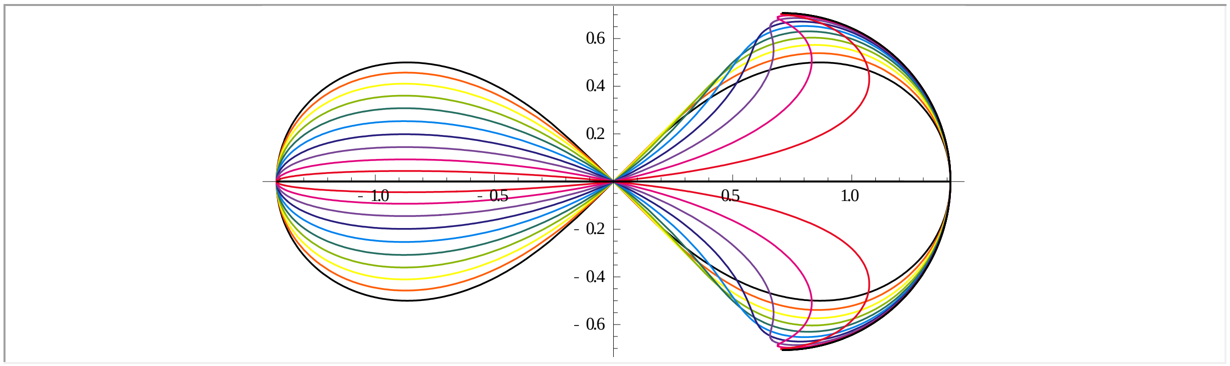
ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]], Sin[2t]}, {**s, 0, 10**}], {t, 0,2Pi}]]

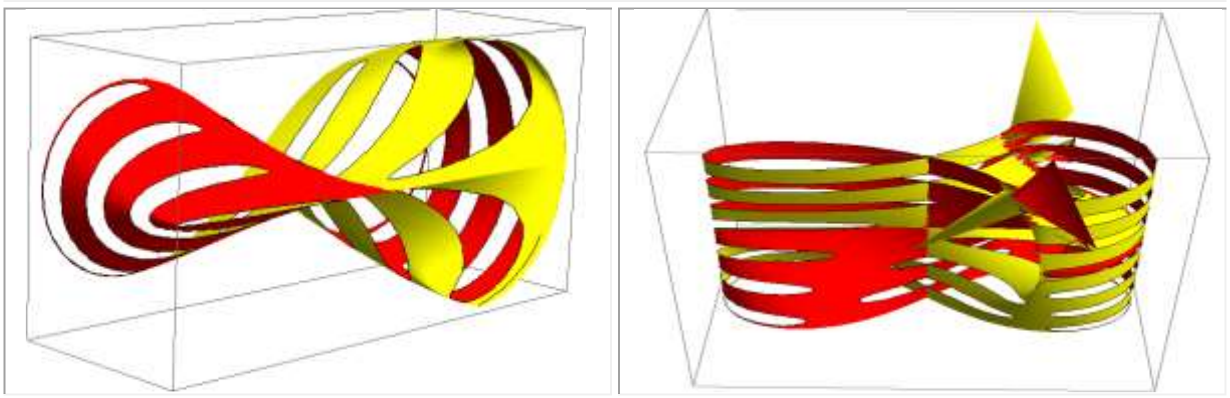
ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]], Sin[2t]}, {**s, −10, 10**}], {t, 0,2Pi}]]





```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{2^0.5Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/(1 + Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]^2),2^0.5Cos[t
− ArcSin[0.1sSin[t]]] Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]/(1 + Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]^2)}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]
```





```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{2^0.5 Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/(1 + Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]^2), 2^0.5Cos[t
− ArcSin[0.1sSin[t]]] Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]/(1 + Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]^2)}, {s, 0,20}], {t, 0,2Pi}]]
```

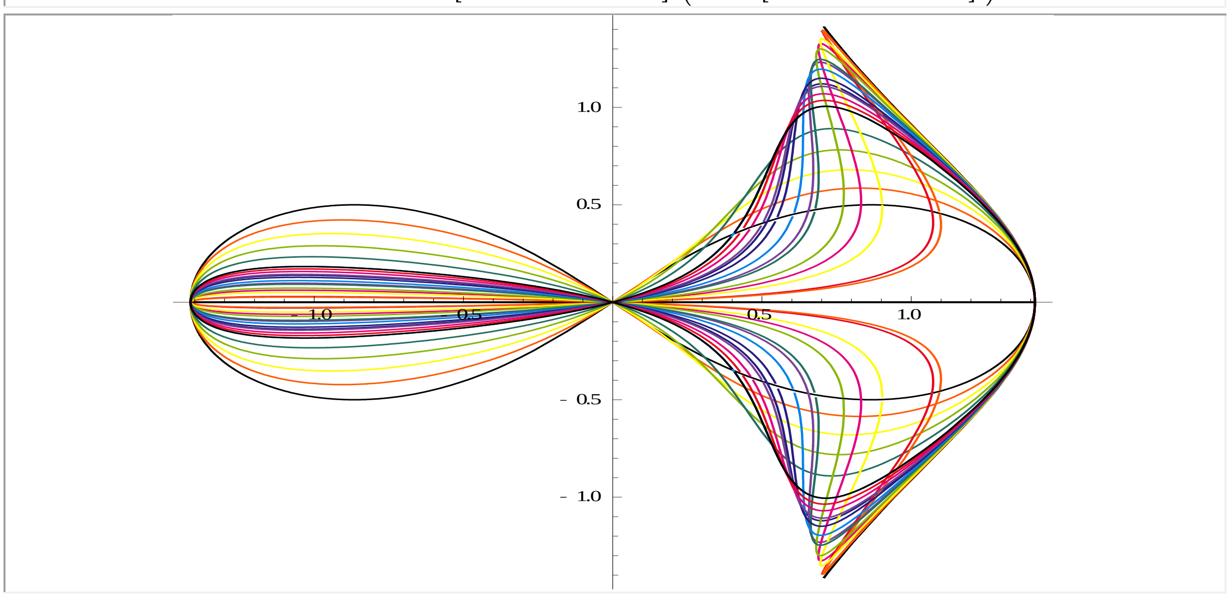
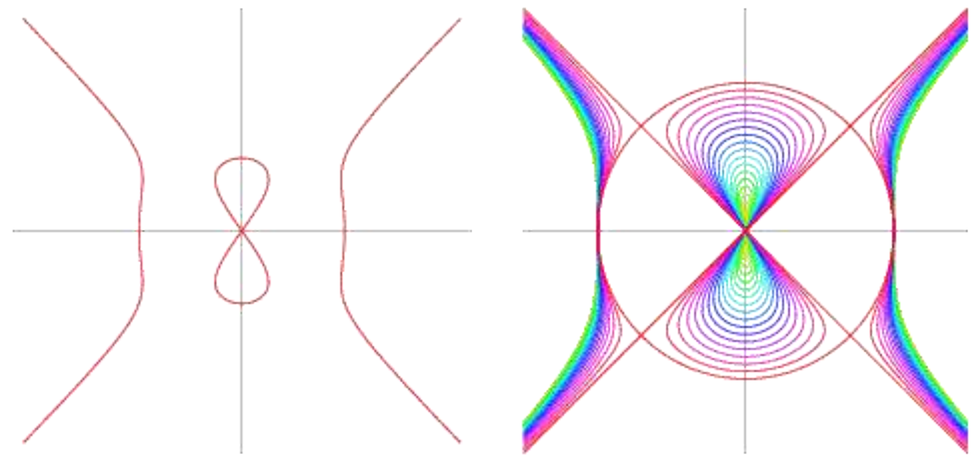
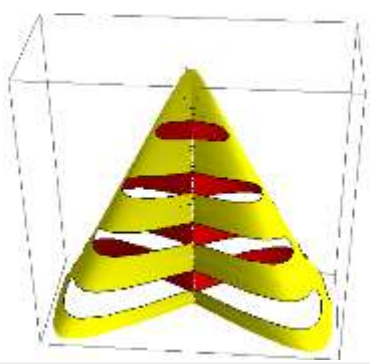


Fig. 8 Leminiscate supermatematice de excentricitate liniară numerică s ∈ [0; 1]◀ ▲ şi s ∈ [-1; 1] ▶▼

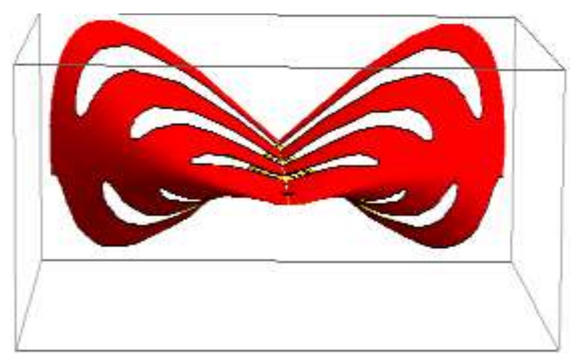


Reproducere după “http://mathworld.wolfram.com/DevilsCurve.html”

$$\text{ParametricPlot3D}[\{\frac{\text{Cos}[t]\sqrt{(a\text{Sin}[t])^2-(b\ \text{Cos}[t])^2}}{\text{Sin}[t]^2-\text{Cos}[t]^2},\frac{\text{Sin}[t]\sqrt{(a\text{Sin}[t])^2-(b\text{Cos}[t])^2}}{\text{Sin}[t]^2-\text{Cos}[t]^2},0.2a\},\{a,0,10\},\{t,0,2\pi\}$$



a∈ [0; 2],   b = 0.5



a∈[0; 0.9], b = 1.8

$$\text{ParametricPlot3D}[\left\{0.2a^{0.5},\frac{2\text{Cos}[t]\sqrt{(0.1a\text{Sin}[t])^2-(1.8\text{Cos}[t])^2}}{\text{Sin}[t]^2-\text{Cos}[t]^2},\frac{\text{Sin}[t]\sqrt{(0.1a\text{Sin}[t])^2-(1.8\text{Cos}[t])^2}}{\text{Sin}[t]^2-\text{Cos}[t]^2}\right\},\{a,0,9\},\{t,0,2\pi\}]$$

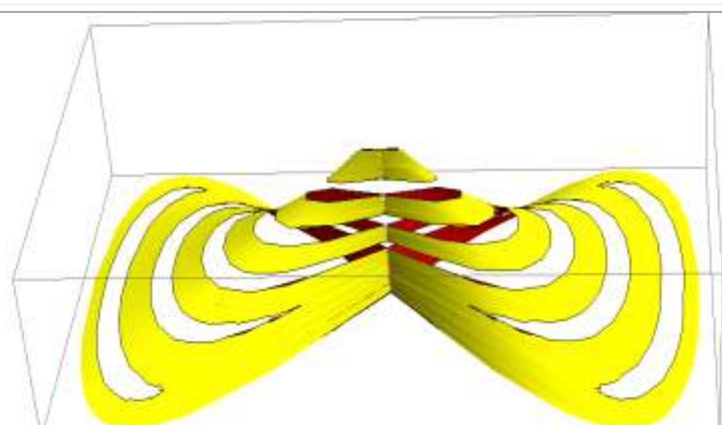


Fig. 9 Alte lemniscate existente în literatura matematică

Motto:" În **supermatematică** se numeşte **lobă**,
în **vest**, se numeşte ***lobby***, în **est**, ***corupţie***"
Modificare după **Alex Dospian**

CAPITOLUL XIV

OVALE ŞI LEMNISCATE SUPERMATEMATICE

1. INTRODUCERE

"În matematică, un oval este o curbă plană închisă a cărui formă seamănă cu cea a unui ou desenat pe o foaie de hârtie. Nu există nici o definiție clară a acestui concept: în general, oval este o curbă care delimitează o regiune convexă având cel puțin o axă de simetrie (și adesea două).

Elipsa este un exemplu de un oval. Forma unui stadion sau o minge de rugby sunt alte exemple. Toate acestea au două axe de simetrie." (https://it.wikipedia.org/wiki/Ovale)

Deoarece prezintă doi lobi, în **supermatematică** au fost denumite **bilobe**. Ele putând fi **mono -**, **bi -**, **tri -**, … **multi-**lobe sau **n**-lobe (**Fig.1**) şi, astfel, **biloba** sau **ovalul**, precum şi celelalte **lobe**, au o **definiţie clară** şi **simplă** . În **matematica excentrică** a **supermatematicii !**

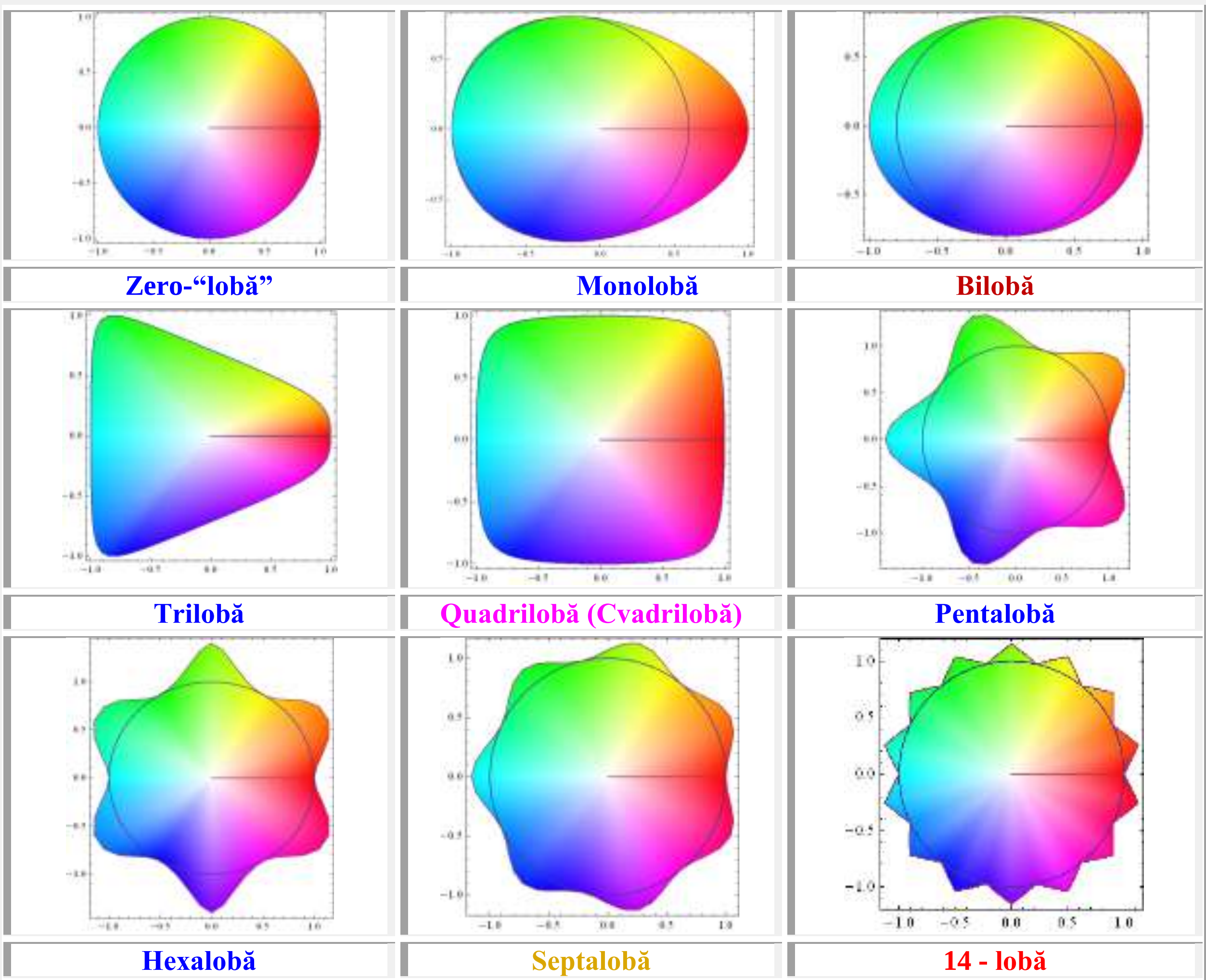


Fig. 1 DISCURI L O B I C E diverse

Monolobe, reprzentate în **2D**$^+$ ◄şi în **3D**$^+$✷►**,** sunt redate în **figura 2**.

arametricPlot[{{Sin[t] + $\left(1 + \frac{0.6\text{Cos}[t]}{\sqrt{1-0.36\text{Sin}[t]^2}}\right)$, Sin[ArcSin[−0.6Sin[$t$]]]Cos[$t$]}, {0.5Cos[$t$], 0.5Sin[$t$] − 0.5}}, {$t$, −0.01,2.01Pi}]

RevolutionPlot3D[{Sin[t] + $\left(1 + \frac{0.6\text{Cos}[t]}{\sqrt{1-0.36\text{Sin}[t]^2}}\right)$ Sin[ArcSin[−0.6Sin[t]]], Cos[t]}, {t, −0.01,2.01Pi}]

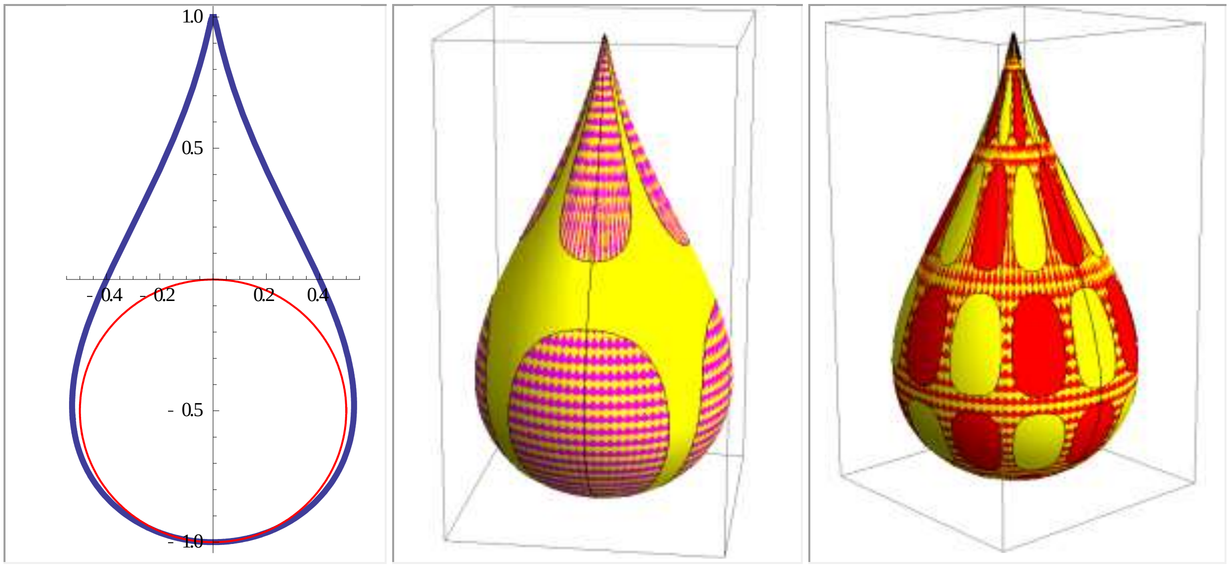


Fig. 2 **Monolobe** **2D**$^+$ şi în **3D**$^+$

În geometria algebrică, noţiunea de **lemniscată** se poate referi la oricare dintre curbele în formă de **8** sau de infinit (∞), dintre care cea mai cunoscută este lemniscata lui **Bernoulli** denumită astfel, de acesta în 1694, ca soluţie a unei probleme de mecanică.

Se mai cunosc lemniscatele lui **Booth**, lemniscatele lui **Gerono**, lemniscatele **poliniomiale** şi acum şi lemniscatele **supermatematice**, prezentate în **figura 4,b**.

Se poate afirma că o **lemniscată** este formată din **2 monolobe** cu vârful comun.

Lemniscata lui **Bernoulli** [gr. ***Lemniscos***-“panglică”] este o curbă plană, loc geometric al punctelor **P**, de pe lemniscată, pentru care produsul distanţelor la doua puncte fixe $\mathbf{F_{1,2}}$ — (F_1(-a,0), F_2 (a,0) — este egal cu pătratul jumătaţii distanţei $\overrightarrow{F_1F_2}$ = **2a** dintre punctele fixe, adică $\mathbf{PF_1{*}PF_2 = a^2}$

Lemniscata lui **Cassini** este un caz particular al ovalelor lui **Cassini** şi are ecuaţia carteziană (**1** 🡅), ecuaţia polară (**1**✷) şi ecuaţiile parametrice (**1**🡇) prezentate prin relaţiile (1).

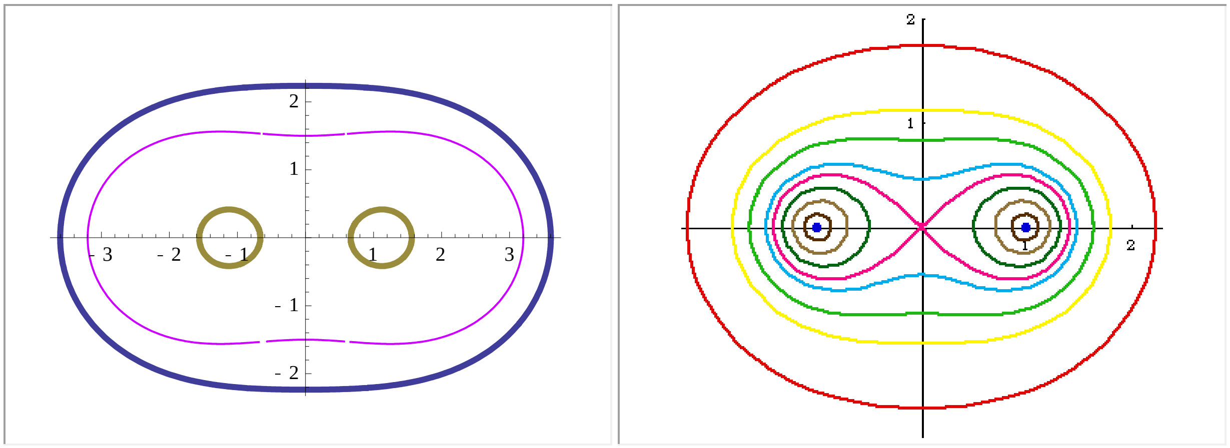
Aria unei bucle a lemniscatei este A = $\mathbf{2a^2}$

Ecuaţiile lemniscatelor lui **Bernoulli** sunt:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Ecuaţiile carteziene: } (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \\ \textit{Ecuaţiile în polar}: r^2 = 2a^2\cos 2\theta \\ \textit{Ecuaţii parametrice}: \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t} \\ y = \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t}\sin t \end{cases} \end{cases} \qquad \text{sau fară 2 şi } \sqrt{2}$$

(2) Ecuaţia bipolară : r.r’ = $\frac{a^2}{2}$

Ovalele lui Cassini sunt o familie de curbe cuartice, numite şi **elipsele lui Cassini**, descrise printr-un punct astfel încât produsul distanţelor sale de la două puncte fixe la distanţa **2a** între ele este o constantă $\mathbf{b}^2$. Forma curbei depinde de **b / a**. Dacă **a < b**, curba este o singură buclă cu o formă ovală (figura din stânga de mai jos) sau cu “osul câinelui” (a doua cifră). Cazul **a = b** produce o lemniscată (a treia cifră). Dacă a > b, curba constă din două bucle . Ovalele **Cassini** sunt curbele analgetice.



a > b$\sqrt{2}$, **c < a< b$\sqrt{2}$** şi **a < c** | a = b → Lemniscată

Fig. 3,a Ovalele lui **Cassini** ◄ şi **ovalele** şi **lemniscata** lui **Casssini** centrice ►

ParametricPlot[Evaluate[Table[{a Sin[t]/(1 + Cos[t]^2), aSin[t] Cos[t]/(1 + Cos[t]^2)}], {a, 1,5}], {t, 0,2Pi}]]

ParametricPlot3D[{a Sin[t]/(1 + Cos[t]^2), aSin[t] Cos[t]/(1 + Cos[t]^2) , a}, {a, 1,10}, {t, 0,2Pi}]

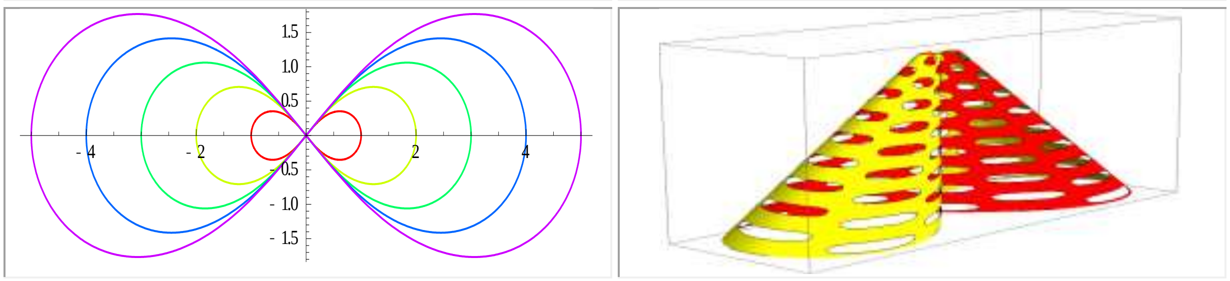


Fig. 3,b Lemniscatele lui **Casssini** centrice în **2D** şi în **3D**►

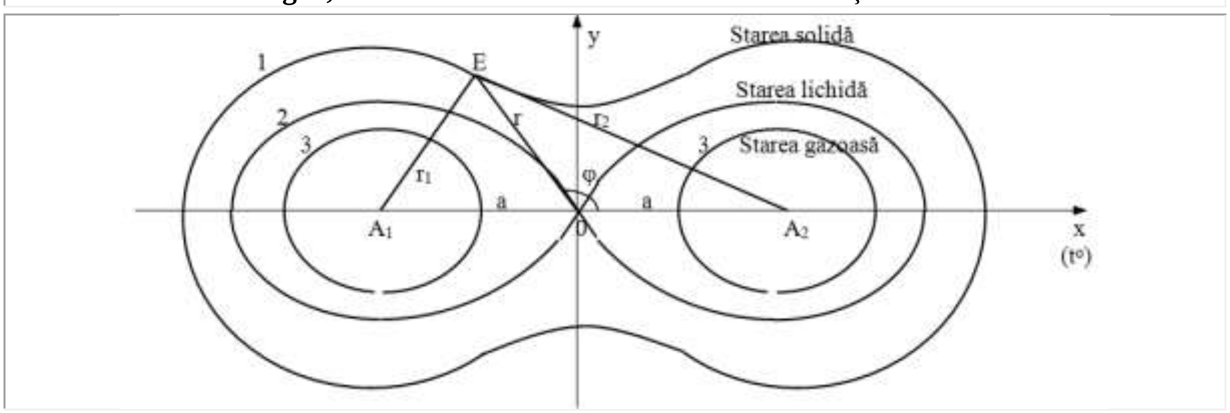


Fig. 3,c Ovalele şi **lemniscata** lui **Cassini** în cazul moleculei de hidrogen

Aplicaţii surprinzătoare şi extrem de interesante ale ovalelor lui **Cassini**, în special pentru moleculele de hidrogen în diverse stări se pot vedea pe:

https://constantinteodorescu.blogspot.ro/2015/06/molecula-de-apa-si-apa-vie-autor-ing.html

Astfel, cele două ovale independente (**a < b**) reprezintă cei doi atomi de hidrogen în stare gazoasă. Ovalul exterior (**a > b**) este pentru moleculele în stare solidă iar, în cazul lemniscatei lui **Cassini** (**a = b**), molelculele sunt în stare lichidă (**Fig. 3c**).

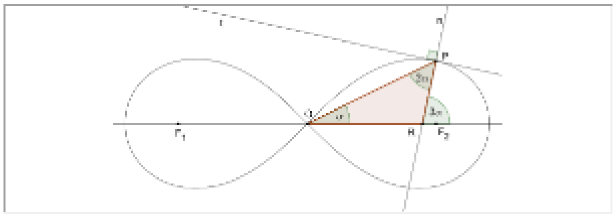
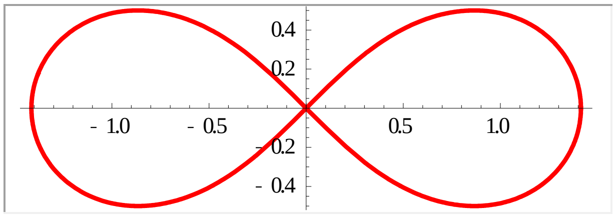
Proprietaţile lemniscatei lui Bernoulli	ParametricPlot[{2^0.5 Cos[t]/(1 + Sin[t]^2), 2^0.5Cos[t] Sin[t]/(1 + Sin[t]^2)}, {t, 0,2Pi}] → a = 1
	

Fig. 4,a Lemniscatele lui **Bernouli centrice**

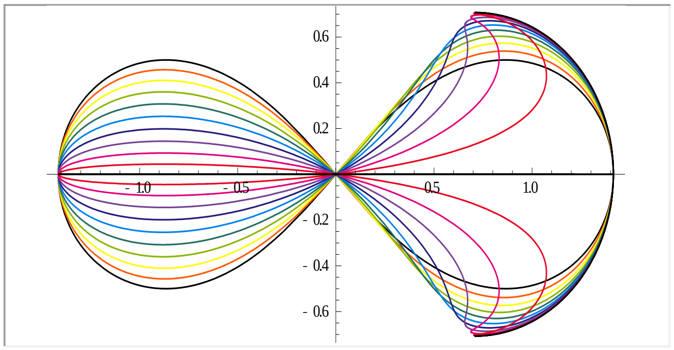
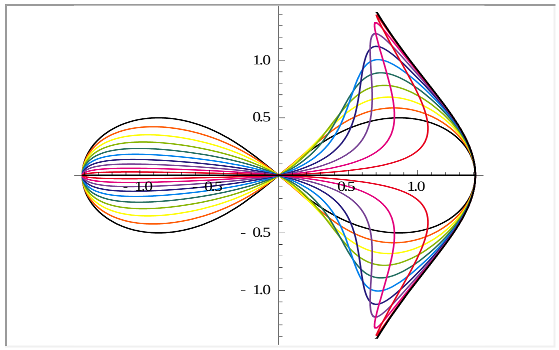
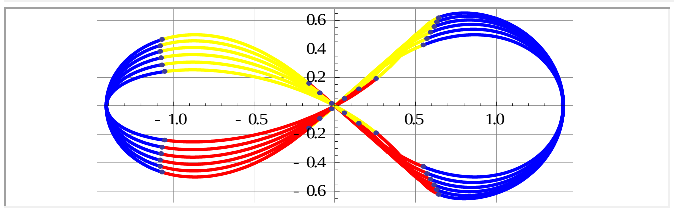
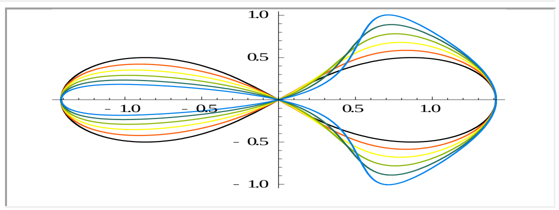
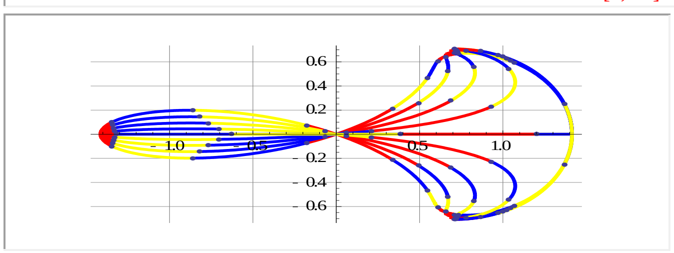
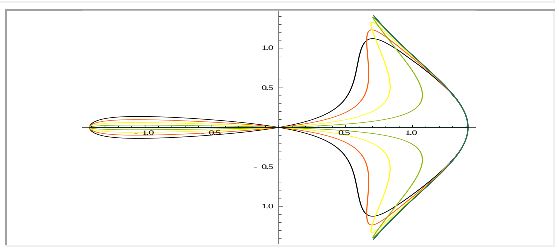
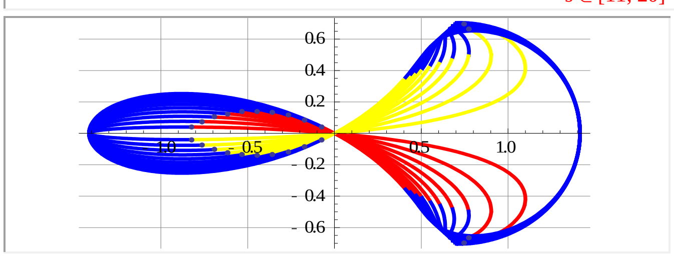
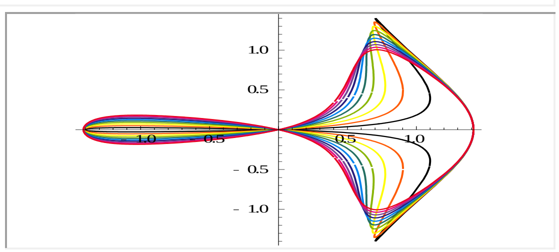
ParametricPlot[Evaluate[Table[{2^0.5Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/(1 + Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]^2),2^0.5Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]/(1 + Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]^2)}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{2^0.5Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/(1 + Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]^2), 2^0.5Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]/(1 + Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]^2)}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]
	
s ∈ [0, 5]	
	
s ∈ [6, 10]	
	
s ∈ [11, 20]	
	

Fig. 4,b Lemniscata lui **Bernouli supermatematice excentrice**

cos*α* → cex[θ, S(s, ε = 0)] ; sinα → cex[θ, S(s, ε = *π*)]

2. OVALELE ŞI LEMNISCATELE LUI BOOTH

Aceste curbe au fost studiate de **Fagnano** în anul 1750, de **Euler** în anul 1751 şi de **Booth** în anul 1878.

James Booth (1810 - 1878) este un matematician englez. Curbele lui mai sunt cunoscute sub denumirile de hipopedele lui **Proclus**, lemniscate eliptice (pentru ovale) şi lemniscate hiperbolice (pentru lemniscate).

Ecuaţiile lor carteziene sunt:

(3) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + \epsilon b^2 y^2$

pentru $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{+1}$ şi 0 < b ≤ a a se obţin **ovalele**, iar pentru $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{-1}$ se obţin **lemniscatele**

Ovalele **tip Booth** supermatematice au ecuaţiile polare

(4) $\rho = \sqrt{1 - \boldsymbol{s}^2 sin^2\theta}$

Din care se deduc ecuaţiile parametrice:

(5) $\begin{cases} x = \sqrt{1 - \boldsymbol{s}^2 sin^2\theta}.cos\theta \\ y = \sqrt{1 - \boldsymbol{s}^2 sin^2\theta}.sin\theta \end{cases}$

în care **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM — CE**) **beta excentrică** (**bexθ**) are ecuaţia **bexθ** = **β(θ)** = **θ — α**(**θ**) = arcsin[**s**.sin(θ – ε)] astfel că

(6) sin(**bexθ**) = sin[**β(θ)**] = **s**.sin(θ – ε)] şi

(7) $\sqrt{1 - \boldsymbol{s}^2 sin^2\theta} = \sqrt{1 - sin^2[\boldsymbol{\beta(\theta)}]}$ = cos[**β(θ)**] şi ecuaţiile (5) devin (5')

(5') $\begin{cases} x = \cos[\,\boldsymbol{\beta(\theta)}].\cos\theta = \cos[\mathbf{bex\theta}]\,.\cos\theta \\ y = \cos[\,\boldsymbol{\beta(\theta)}].\sin\theta = \cos[\mathbf{bex\theta}]\,.sin\theta \end{cases}$

La prima vedere, ovalele lui **Booth** centrice (**Fig. 5,a**) par identice cu cele **supermatematice** din (**Fig. 5,b**). Urmărind însă succesiunea culorilor ne putem da seama că ele sunt mult deosebite, diferenţele lor fiind apreciabile, aşa cum rezultă în **figura 5,c**.

PolarPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[Cos[t]^2 + (0.1sSin[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]], **a = 1**, **ϵ = s ∈ [0, 1]**

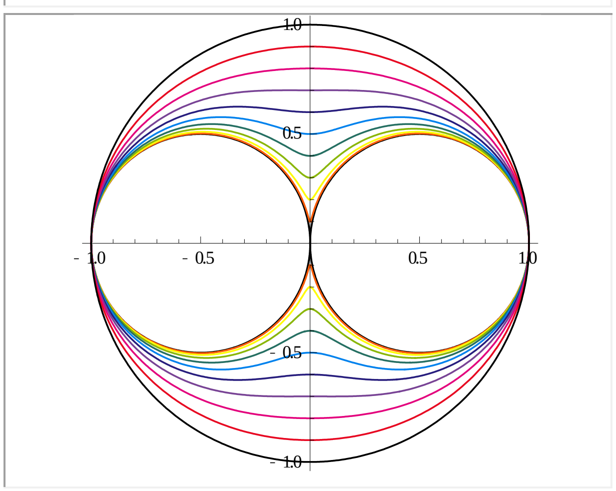


Fig.5,a Ovalele lui Booth centrice

PolarPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]

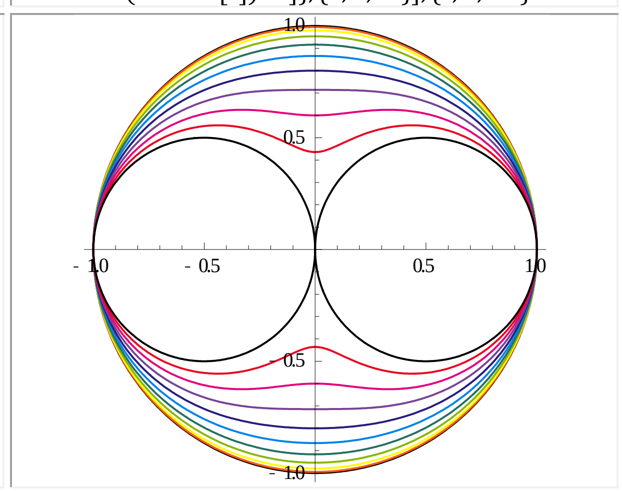
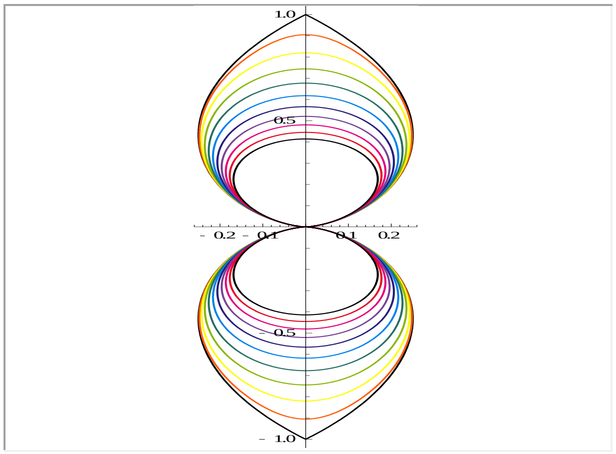


Fig. 5,b Ovalele tip Booth supermatematice

Dacă în ecuaţiile ovalelor şi ale lemniscatelor lui **Booth** centrice se înlocuiesc funcţiile circulare / trigonometrice centrice **cosα** şi **sinα** cu cele **supermatematice** circulare excentrice **cexθ** şi **sexθ** atunci se obţin funcţiile **Booth excentrice** din **figura 7**.

PolarPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[Cos[t]^2 + (0.1sSin[t])^2] − Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]



PolarPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[Cos[t]^2 + (0.1sSin[t])^2] − Sqrt[1 − ((10 − 0.1s)Sin[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]

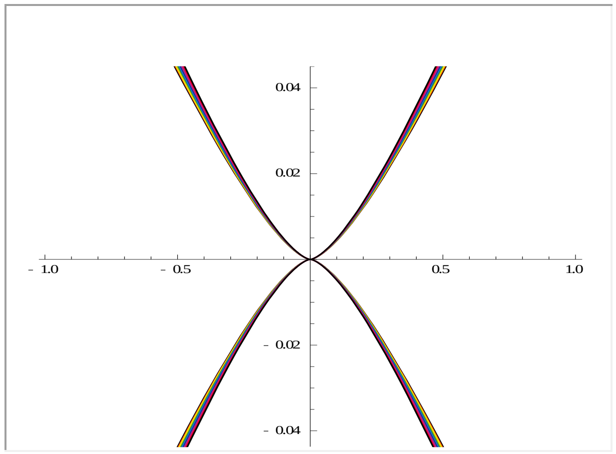
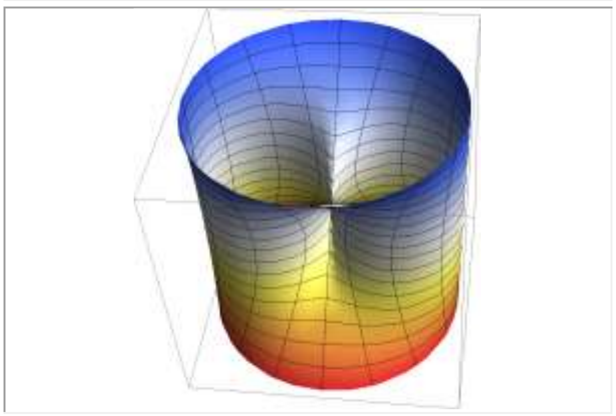
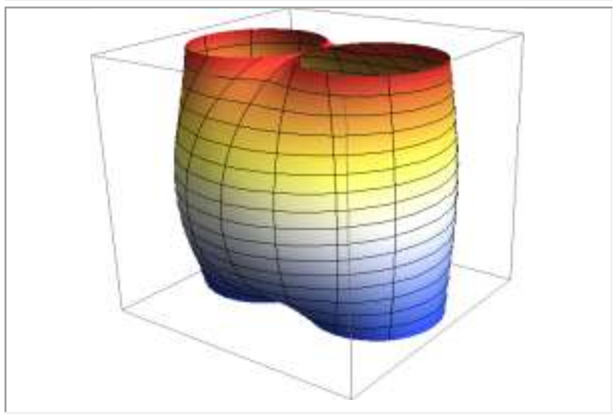


Fig. 5,c Diferenţele dintre **ovalele lui Booth** şi cele **supermatematice**

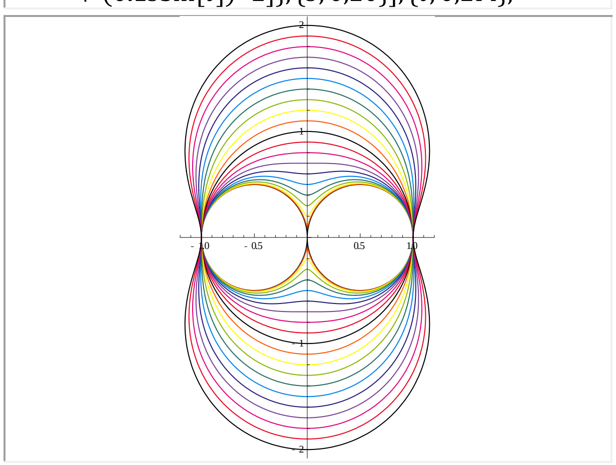
ParametricPlot3D[{Sqrt[Cos[t]² + (0.1sSin[t])²]Cos[t], Sqrt[Cos[t]² + (0.1sSin[t])²]Sin[t], 0.1s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]



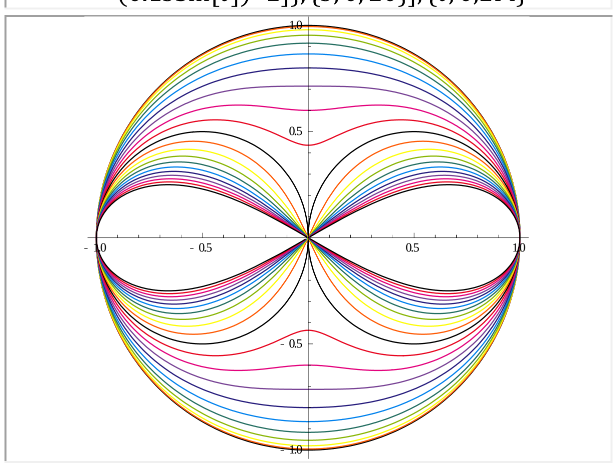
ParametricPlot3D[{2Cos[t]Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²], 2Sin[t]Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²], 0.2s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]



PolarPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[Cos[t]^2 + (0.1sSin[t])^2]}, {s, 0,20}], {t, 0,2Pi},



PolarPlot[Evaluate[Table[{1 − (0.1sSin[t])^2]}, {s, 0, 20}], {t, 0,2Pi}



ParametricPlot3D[{Sqrt[Cos[t]^2 + (0.1sSin[t])^2]Cos[t], Sqrt[Cos[t]^2 + (0.1sSin[t])^2]Sin[t],0.1s}, {s, −15, +15}, {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot3D[{Cos[t]Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2], Sin[t]Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2],0.1s}, {s, −15,15}, {t, 0,2Pi}]

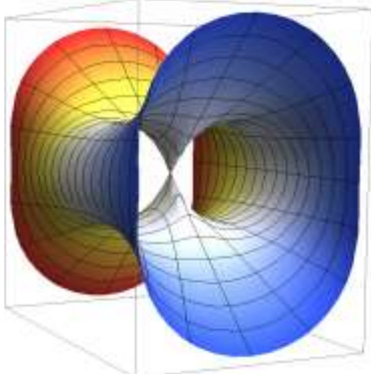
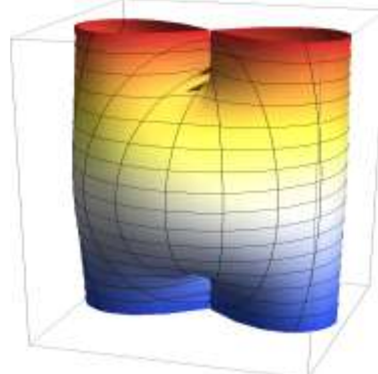

	

Fig.5,d Ovalele lui Booth supermatematice centrice	**Fig. 5,e Ovalele tip Booth supermatematice excentrice**

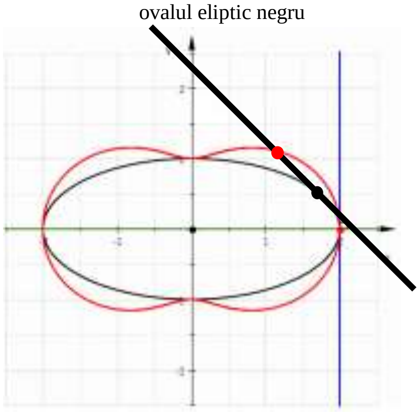
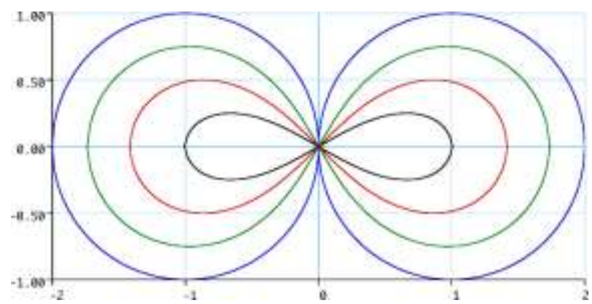
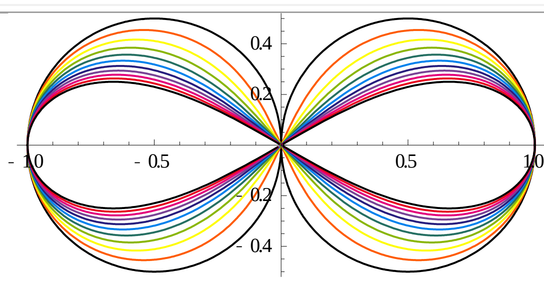
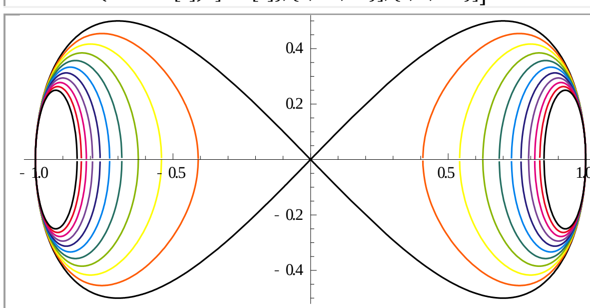
Ovalele lui **Booth** ca hipopedele lui **Proclus**	**Lemniscatele lui Booth**
Dacă punctul roşu, din mijlocul segmentului, se deplasează pe ovalul lui **Booth**, atunci segmentul este tangent la ovalul eliptic negru 	

Fig. 5,f Ovalele şi lemniscatele lui **Booth** centrice

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]Cos[t], Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]Sin[t]}, {s, 10,20}], {t, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{(1 − 0.02s)Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]Cos[t], Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]Sin[t]}, {s, 10,20}], {t, 0,2Pi}]]
	

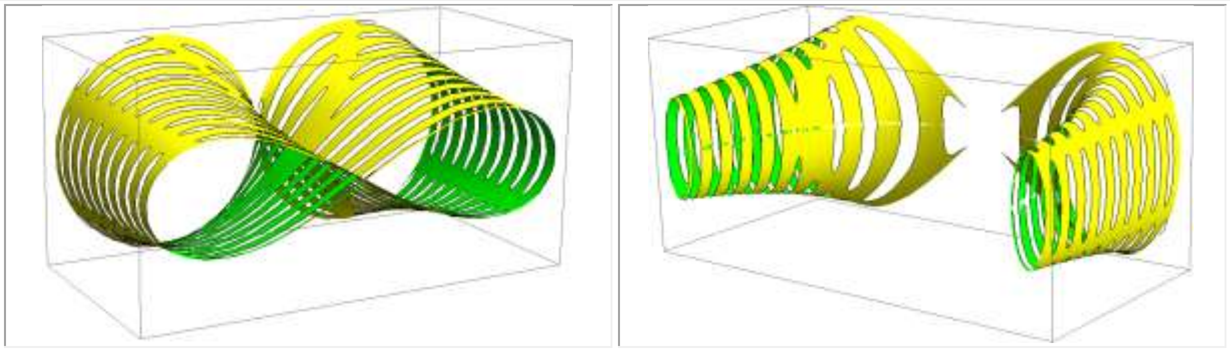
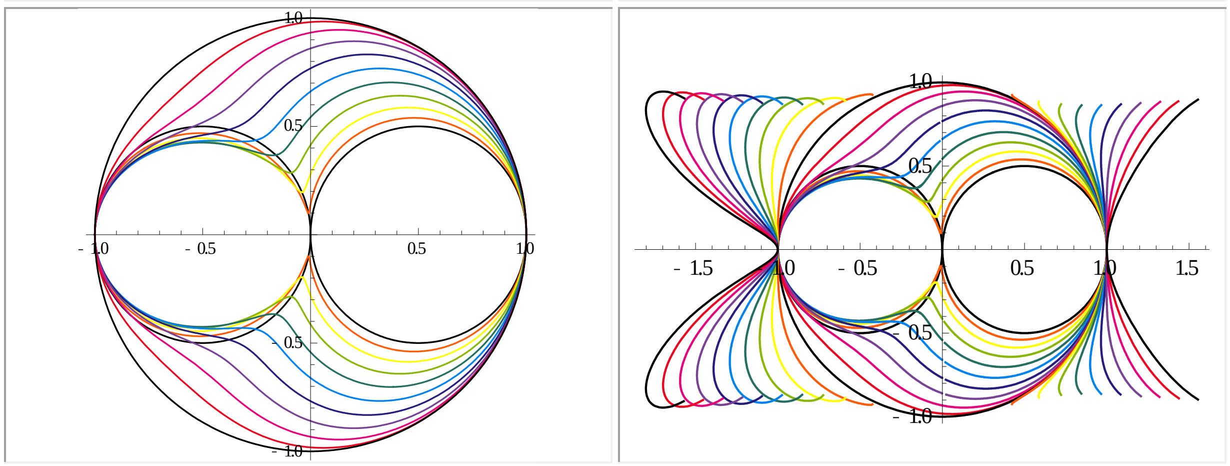


Fig.6 Lemniscatele lui **Booth supermatematice excentrice** de excentricitate liniară numerică **s > 1**

PolarPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]^2 + (0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]	PolarPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]^2 + (0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])^2]}, {s, 0,20}], {t, 0,2Pi}]]



ParametricPlot3D[{Sqrt[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]^2 + (0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])^2]Cos[t], Sqrt[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]^2 + (0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])^2]Sin[t],0.1s}, {s, 0,10}, {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot3D[{Sqrt[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]^2 + (0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])^2]Cos[t], Sqrt[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]^2 + (0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])^2]Sin[t],0.1s}, {s, 0,20}, {t, 0,2Pi}]

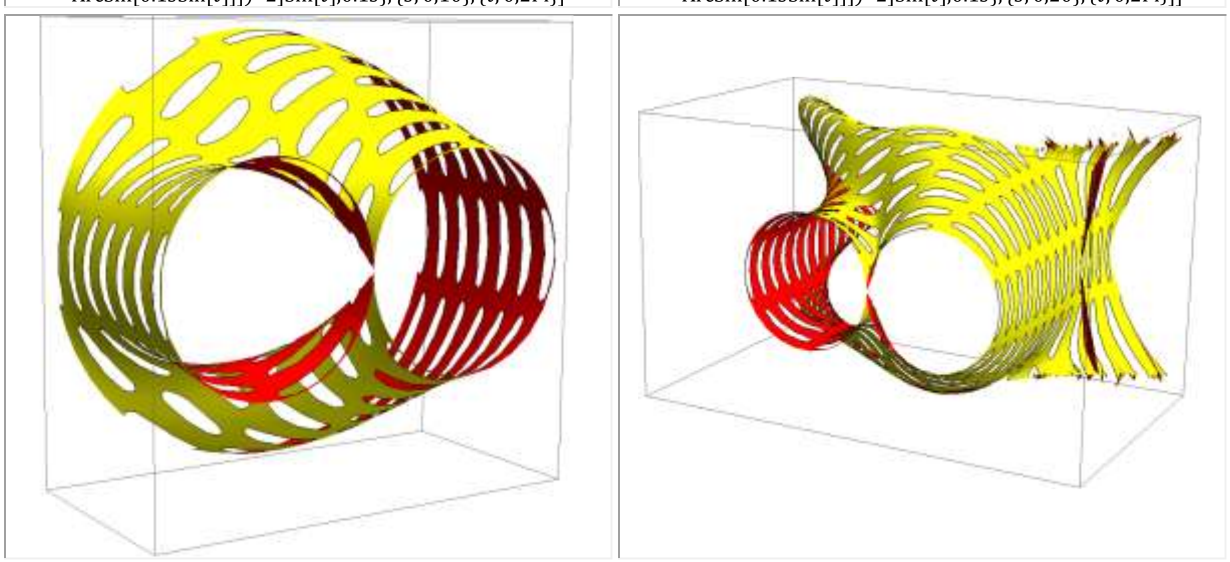


Fig. 7 Ovalele lui **Booth excentrice** şi lemniscatele **excentrice** ale lui **Booth** în **2D** şi în **3D**

ParametricPlot3D[{2Cos[t]Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2],2Sin[t]Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2],0.2s},{s,−10,10},{t,0,2Pi}]	ParametricPlot3D[{2Cos[t]Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²],2Sin[t]Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²],0.2s},{s,10,20},{t,0,2Pi}]]

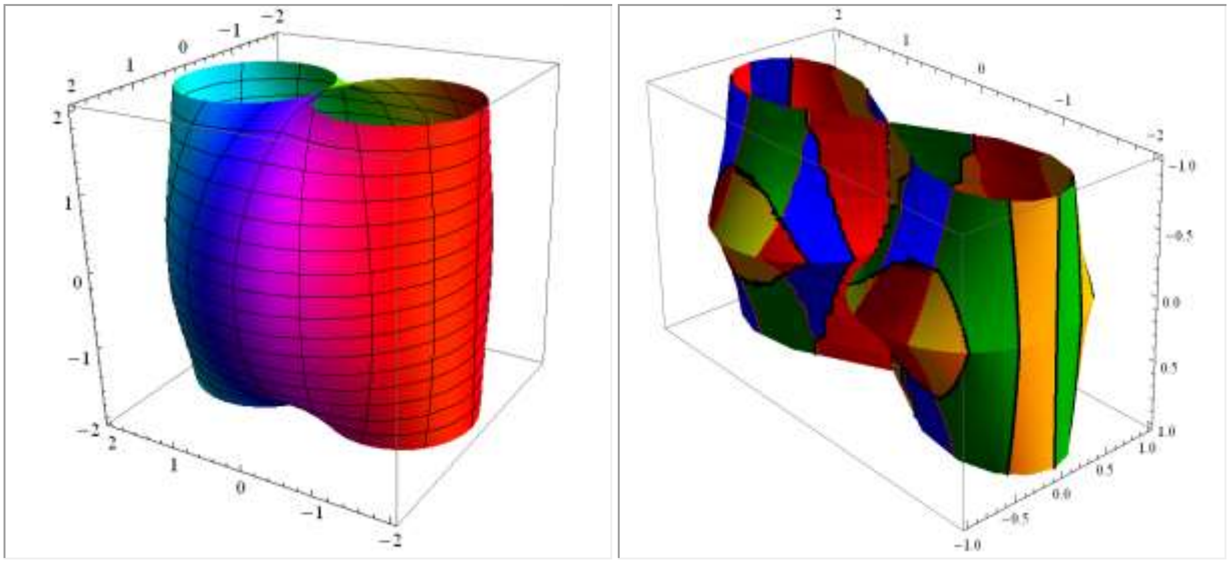
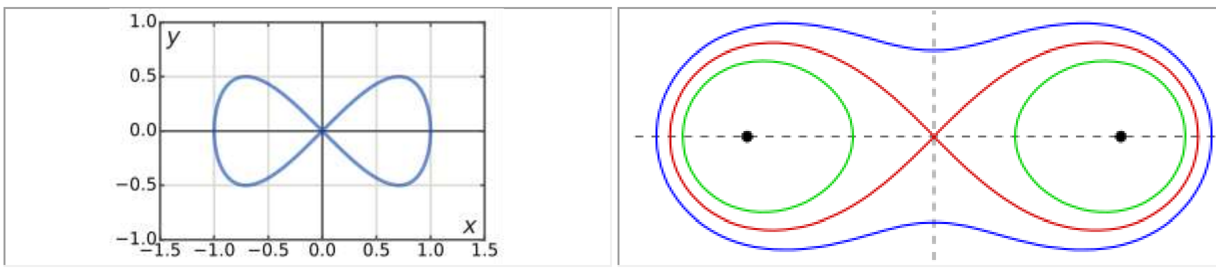


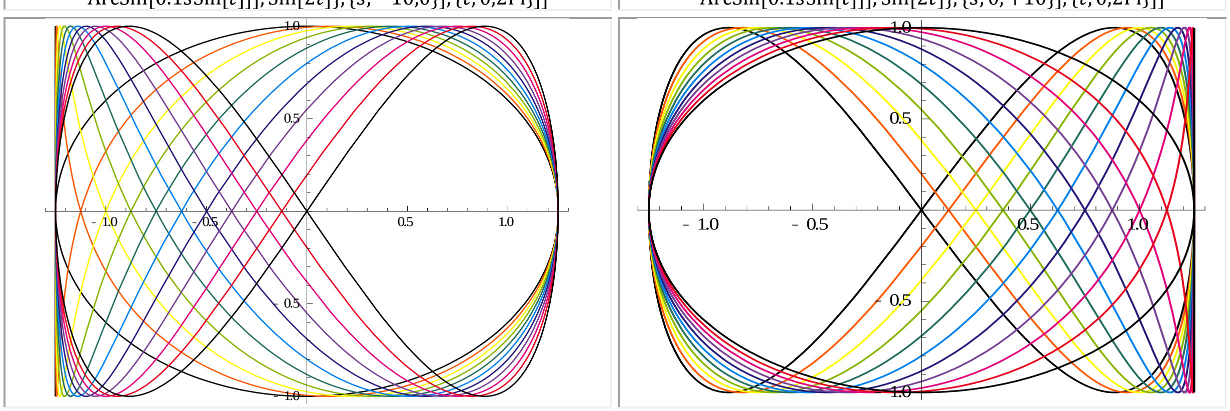
Fig. 8 Ovalele lui **Booth excentrice** şi lemniscatele lui **Booth** centrice de **s > 1** în **3D**



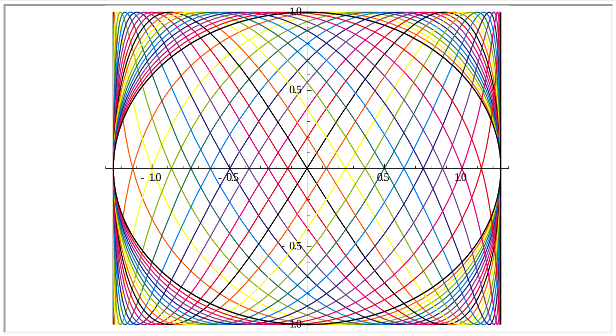
Lemniscatele lui **Gerono** sau curba lui **Watt** din Mecanică, soluţii ale ecuaţiei $x^4 - x^2 + y^2 = 0$	Ovalele lui **Cassini**

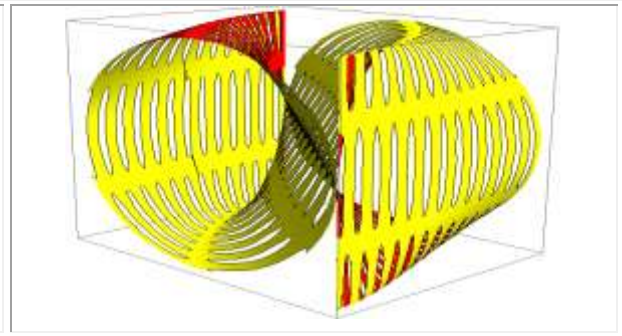
Fig. 9 Alte lemniscate centrice

ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],Sin[2t]},{s,−10,0}],{t,0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],Sin[2t]},{s,0,+10}],{t,0,2Pi}]]



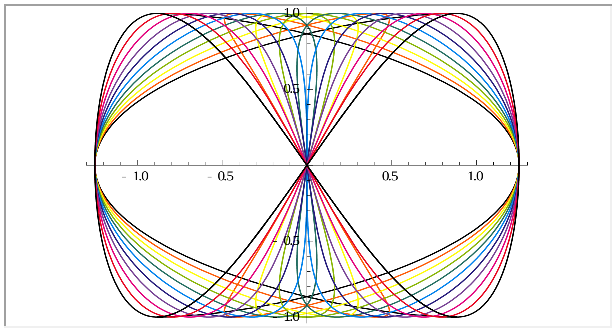
ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],Sin[2t]},{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]

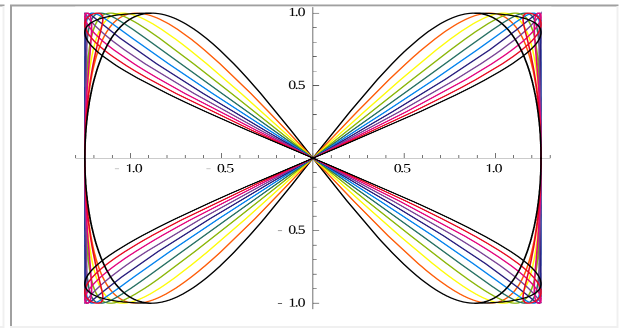




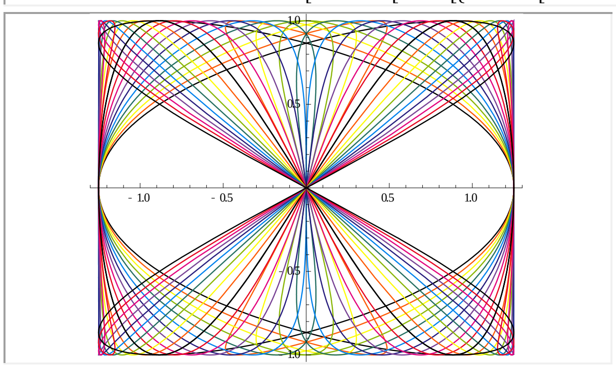
ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]], Sin[2t]}, {s, −10,0}], {t, 0,2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]], Sin[2t]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]





ParametricPlot[Evaluate[Table[{1.25Cos[t − ArcSin[0.1sSin[2t]]], Sin[2t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



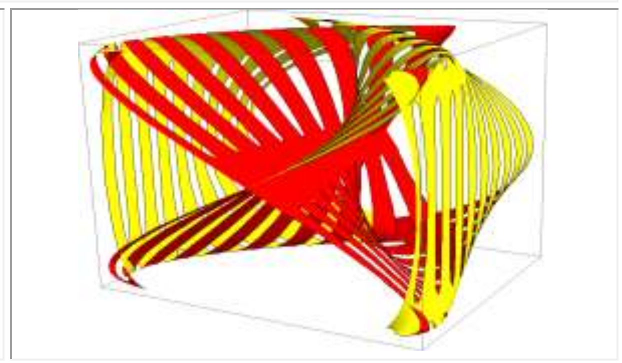
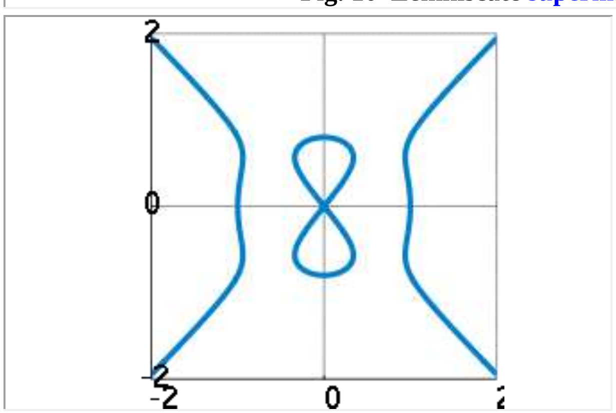
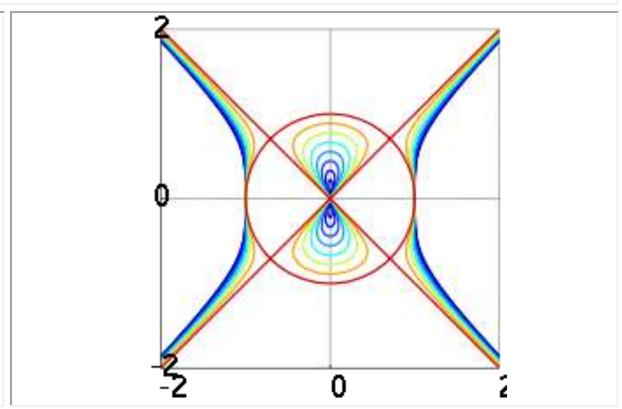


Fig. 10 Lemniscate supermatematice excentrice diverse





Curbele lui **Devil** pentru $a = 0.8$ şi $b = 1$

Devil's curve with ranging from 0 to 1 and b = 1 (with the curve colour going from blue to red).

Fig. 11 Alte curbe centrice cu lemniscate

Motto: *" Proştii mor, dar prostia rămâne." I.L.Caragiale.*
Un exemplu concret:" ***La ce foloseşte supermatematica*** ?"

CAPITOLUL XV

FUNCŢII SUPERMATEMATICE EXPONENŢIALE

1. FUNCŢII SUPERMATEMATICE EXPONENŢIALE CENTRICE ŞI EXCENTRICE

Aplicarea **funcției exponențiale centrice** (**FEC**) unei valori x se scrie ca **exp(*x*), Exp(x)** sau e^x, unde ***e*** este o constantă matematică, **baza logaritmului natural** (e = 2,71828 18284 59045 23536…).

Numărul **e** este uneori numit și **numărul lui Euler,** după matematicianul elvețian **Leonhard Euler**, sau **constanta lui Napier** în cinstea matematicianului scoțian **John Napier**, care a introdus logaritmii.

Ea este una din cele mai importante **funcții** din matematica centrică (**MC**).

Aşa cum se poate observa din **figura 1,a** ▲◀, funcţia exponenţială creşte încet pentru valori negative ale lui *x*, şi creşte repede pentru valori pozitive ale lui *x*. este egală cu 1 când *x* este 0.

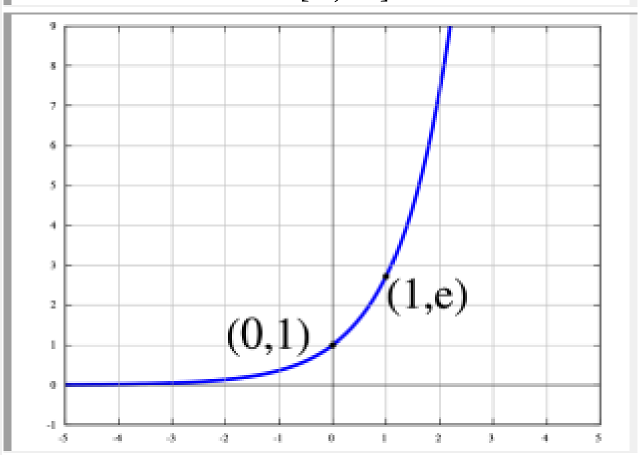
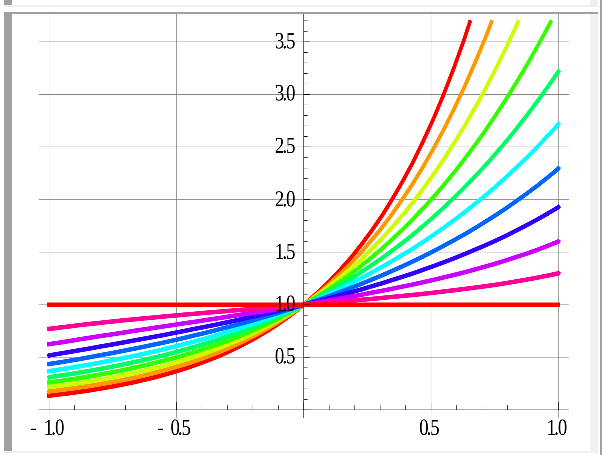
Valoarea ***y*** este mereu egală cu panta din punctele respective, ceea ce este evident în punctele (0, 1) şi (1, e).

În dreapta **figurii 1,a** ▶ sunt prezentate **funcţiile supermatematice exponenţiale** (**FSM─Ex**) pentru un **excentru S**(**s**, **ε**) de excentricitate liniară numerică **s** ∈ [**-1**, **+1**] şi unghiulară nulă (**ε = 0**) sus ▲ şi jos ▼, defalcate pe cele două domenii: negativ (**s < 0**) ▼◀ şi pozitiv (**s > 0**) ▼▶, cu pasul 0,2, iar în **figura 1,b** sunt prezentate simultan funcţiile $y_1 = e^{aex\theta}$ ◀ şi $y_2 = -e^{aex\theta}$ ▶, simetrice faţă de **Ox**.

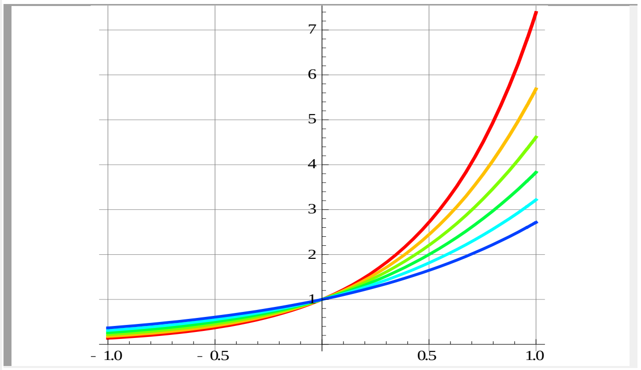
Dacă funcţia exponenţială centrică (**FEC**), propriu-zisă, adică de $\mathbf{a^x = e^x}$, este unică, cea **super-matematică** este multiplicată la infinit, ceea ce constituie o ***extensie nemărginită*** a domeniului.

Nu mă întreb: "***Şi la ce foloseşte acest lucru ?"*** din motivele enunţate în **motto**, dar subliniez că acest lucru oferă, totodată, aceeaşi **mareţie** **supermatematicii** precum cea oferită de universul infinit !

În **figura 2** sunt prezentate **FSM─Ex** de excentricitate unghiulară **ε** variabilă şi numerică s ∈ [**─1**, +**1**] cu pasul **0,2.** În toate cazurile, pentru **s = 0**, **FSM─Ex** degenerează în **FEC**, aşa cum se poate observa destul de simplu, în toate graficele din **figurile 1** şi **2**, urmărind curba care trece prin punctul (**1, e**).

Exp(x) ≡ exp(x) ≡ e^x x ∈ [-5, +5]	Plot[Evaluate[Table[{Exp[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]}, {s, −5, 5}], {t, −1,1}]
	

Plot[Evaluate[Table[{Exp[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]},
{s, −5, 0}], {t, −1,1}]]



Plot[Evaluate[Table[{Exp[t − ArcSin[0.2sSin[t]]]},
{s, 0, +5}], {t, −1, 1}]]

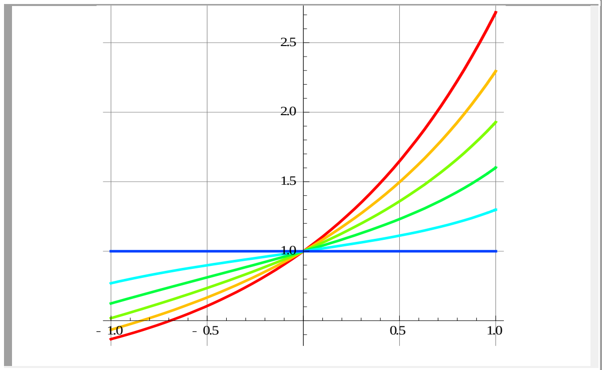
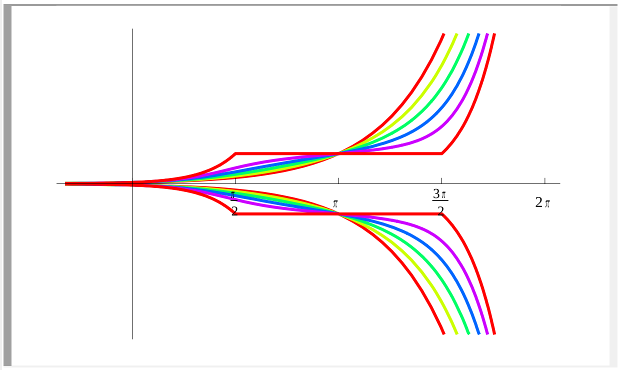


Fig. 1,a Funcţia exponenţială centrică (FEC) ▲ ◀ Reproducere după
https://ro.wikipedia.org/wiki/Func%C8%9Bie_exponen%C8%9Bial%C4%83
şi funcţii **supermatematice exponenţiale** excentrice de **s ∈ [-1, 1]** cu pasul 0,2▲ ▶ şi ◀▼▶

s ∈ [-1, 0]◀ y1 = Exp$\left[x - \text{ArcSin}[-0.2n\text{Sin}[x]]\right]$ şi y2 = −Exp[x − ArcSin[−0.2nSin[x]]] ▶ s ∈ [0, +1]



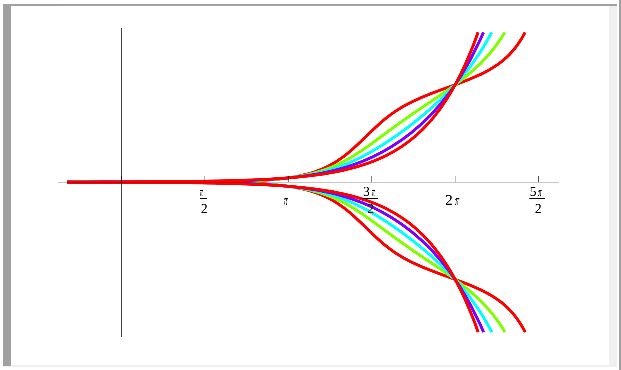
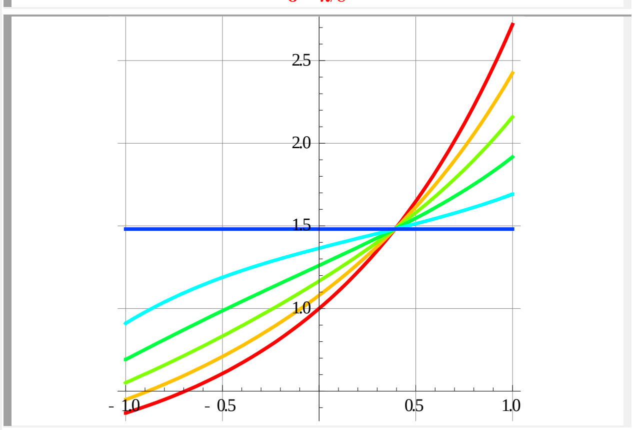
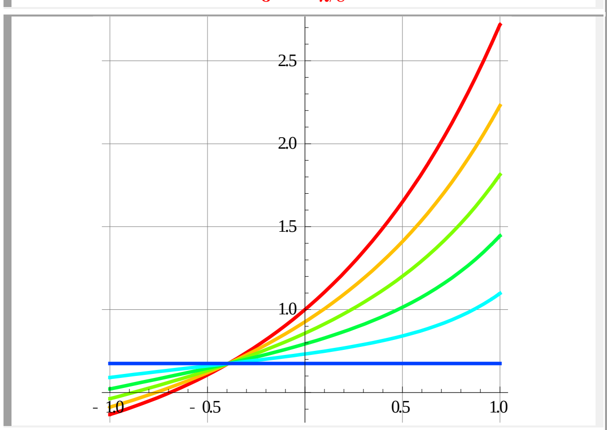


Fig.1.b Funcţii supermatematice exponenţiale (FSM-Ex)
de variabilă excentrică θ şi de **s ∈ [-1, 1]** cu pasul 0,2

ε = π/8



ε = − π/8



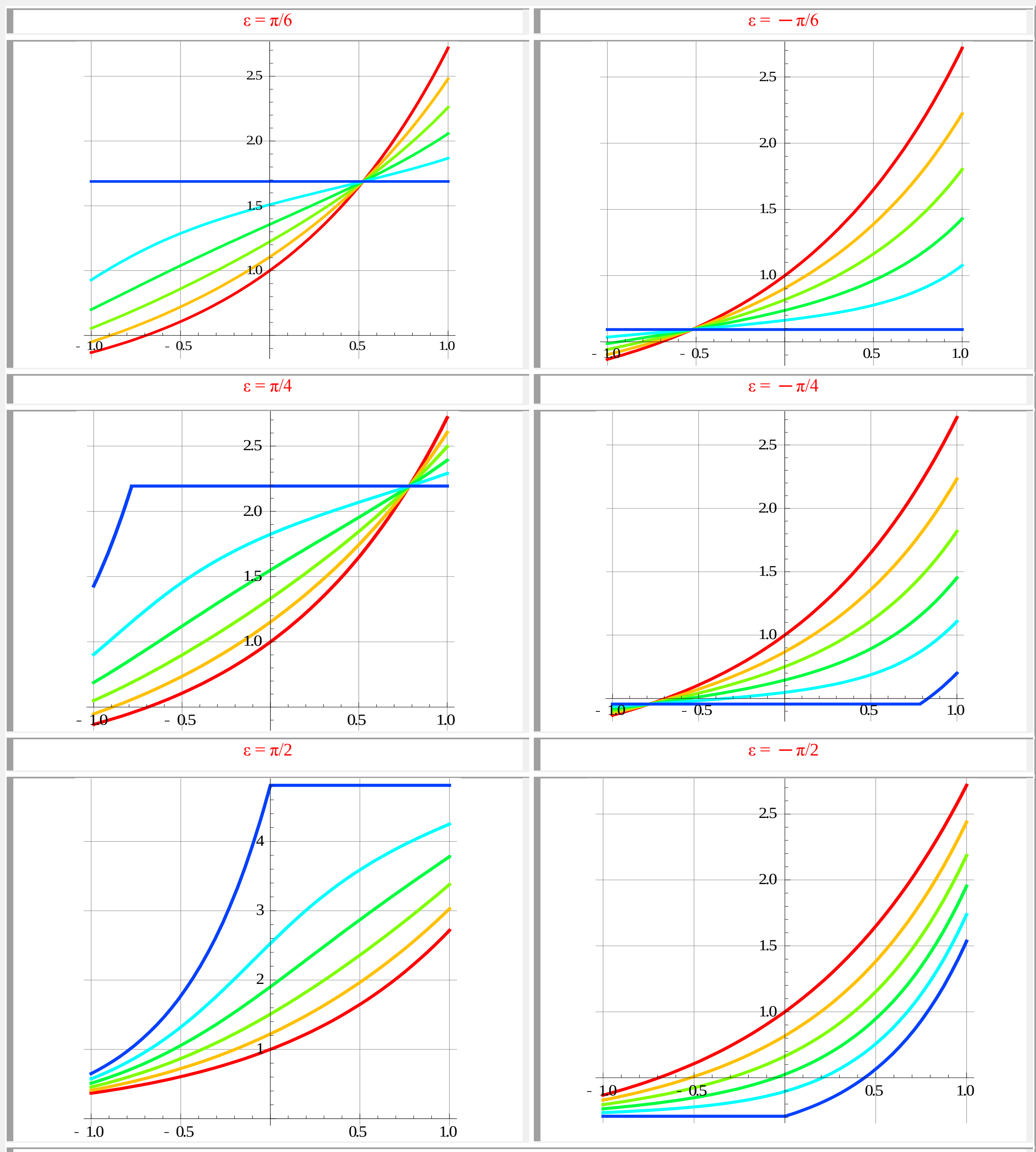


Fig.2 FSM—Ex de excentricitate unghiulară **ε** variabilă

După **Wikipedia:** "Uneori, termenul **funcţie exponenţială** este folosit în sens mai general pentru a denumi funcţiile de forma $\boldsymbol{ka^x}$, unde $\boldsymbol{a}$, denumit ***bază***, este orice număr real pozitiv diferit de unu.

În general, variabila *x* poate fi orice număr real sau complex, sau un ***cu totul alt fel de obiect matematic***, de exemplu o matrice." Caz în care ea este denumită ***funcţie exponenţială de bază***.

Ei bine, în domeniul **supermatematicii**, aceasta este o **funcţie**, adică x → **f(x)** şi poate fi **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM— CE**) amplitudine excentrică ***aexθ***, de variabilă **excentrică θ**, sau ***Aexα*** de **variabilă centrică α** de ecuaţii :

$$
(1)\qquad \begin{cases} aex\theta = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \boldsymbol{Aex\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + arcsin\dfrac{s.\sin(\boldsymbol{\alpha}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(\boldsymbol{\alpha}-\varepsilon)}} \end{cases}
$$

prin care, în **SM,** se face trecerea din **domeniul centric** în cel **excentric** de variabilă **excentrică θ** şi, respectiv, **centrică α**, tot aşa cum, prin funcţia amplitudine eliptică **Jacobi** ***am (u,k)***, se face trecerea din **domeniul centric** în cel **eliptic** → sin[am(u, k)] = sn(u,k) şi cos[am(u, k)] = **cn(u, k)**.

Se ştie că în **SM** există domeniile: **centric**, **excentric**, **elevat** şi **exotic**, în funcţie de poziţia relativă ocupată de cele 3 **puncte esenţiale**, pe care **Euler** le-a dispus **suprapuse** sau în coincidere: **originea O(0,0): centrul** cercului trigonometric / unitate **C(c, γ)** şi **polul P(0, 0)** devenit, după expulzarea lui de către autor din **O** şi din **C**, **excentrul S**(s, ε). Ca urmare, **în general**, există tot atâtea funcţii **SM** echivalente celor centrice **cos**, **sin**, **tan**, **cot ş.a.**: **centrice**, **excentrice**, **elevate** şi **exotice** cele care au dimensiunea lungimii sau exprimă o astfel de entitate (x = cos, y = sin ş.a.m.d.), dar **NU** şi pentru cele exprimate prin unghiuri, precum **bexθ** = β(**θ**), **Bexα = β(α), aexθ = α(θ)** şi **Aexα = θ(α).** În cosecinţă, toate **FSM—exponenţiale: centrice (e^x), excentrice ($e^{aex\theta}$** şi **$e^{Aex\alpha}$), elevate** (**$e^{ael\theta}$** şi **$e^{Ael\alpha}$**) şi **exotice** (**$e^{aexo\theta}$** şi **$e^{Aexo\alpha}$**) **sunt identice**.

În cazul de faţă au fost excluse **FSM EVOLUTIVE,** care sunt combinaţii ale celor anterior amintite şi cele care oferă **SM** atributele de **nemărginire şi mareţie** (v. **Şelariu M.E**. "***NEMĂRGINIREA ŞI MĂREŢIA SUPERMATEMATICII"*** , **Nota I** … **Nota X**").

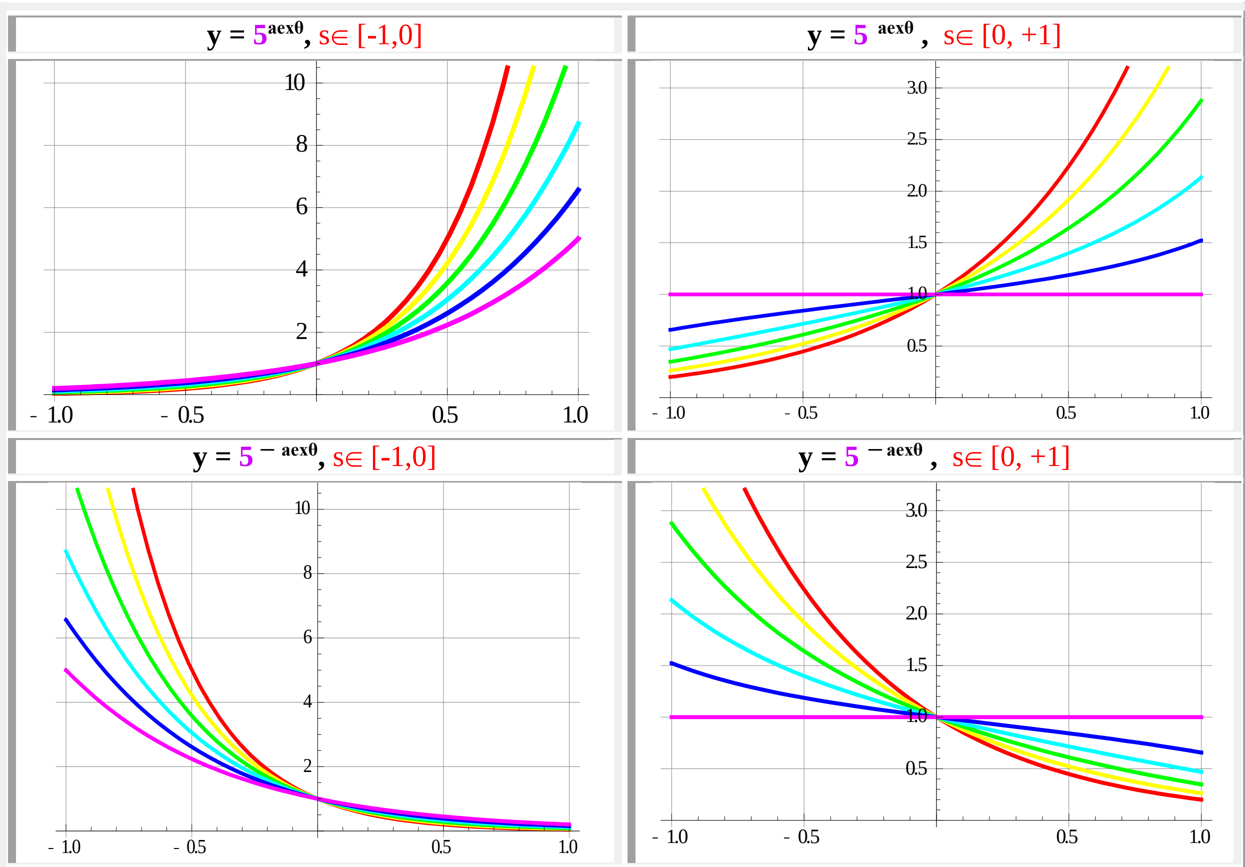


Fig.3,a FSM—Ex de bază de **a = 5** şi excentru **S**(**s** ∈ [-**1**, +**1**], **ε = 0**)

BUPT

Câteva proprietăţi ale funcţiilor exponenţiale **centrice de bază** sunt următoarele:

DEFINIŢIE:

Funcţia **f(x) = a^x** este o funcţie exponenţială $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ dacă **a > 0, a ≠ 0** funcţia **f** : $\mathbb{R}$ → **(0, +∞)**

PROPRIETĂŢI:

f(0) = 1, A(0, 1) $\in \boldsymbol{G_f}, \forall \boldsymbol{a} > 0, a \neq 1$, în traducere**:** punctul **A** aparţine graficului funcţiei **f** →**(G$_f$)**

- Funcţia este strict monotonă:dacă **a** $\in (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \Rightarrow \boldsymbol{f}$;
- Strict descrescătoare dacă $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$;
- Strict crescătoare dacă $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$;
- Bijectivă: $\begin{cases} a)\ f\ injectivă, dacă\ a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \\ b)\ f\ surjectivă, dacă\ \forall\ b > 0, \exists x \in \mathbb{R}, astfel\ încât\ a^x = b \end{cases}$
- Inversabilă dacă $(\exists)\boldsymbol{f^{-1}} : (\mathbf{0}, \infty)$→ $\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{cases} a) f^{-1}(f(x)) = x, \forall(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \\ a) f^{-1}(f(x)) = z, \forall(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \end{cases}$

O funcţie ***f*****: A → B** se numeste **funcţie surjectivă** (sau simplu **surjecţie**), dacă orice element din **B** este imaginea prin *f* a cel puţin unui element din **A**, ceea ce-i echivalent cu faptul că pentru orice y ∈ B ecuaţia *f*(x) = y are cel puţin o soluţie x ∈ **A**.

Altfel spus, funcţia *f* este surjectivă ⇔ ∀ y ∈ B, ∃ x ∈ A astfel încât *f*(x) = y.

Din **figura 1,a** rezultă că pentru **ε = 0**, indiferent de valoarea excentricităţii numerice s ∈ [**−1**, +**1**], toate curbele / graficele trec prin punctl **A(0, 1),** iar, din **figura 2,** rezultă că numai graficul / curba de **roşu corai** pentru **s = 0** trece / conţine acest punct, facilitând, astfel, depistarea acestui grafic.

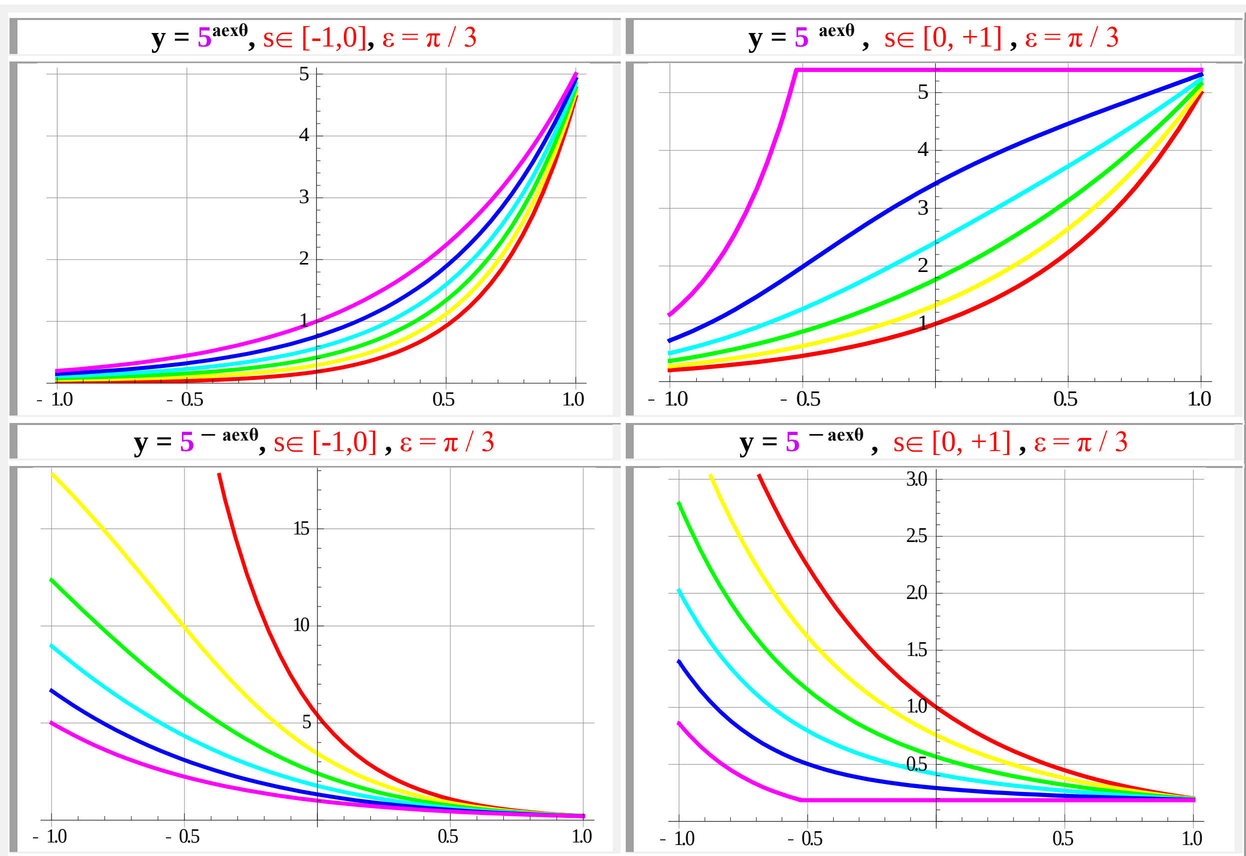


Fig.3,b FSM—Ex de bază de **a = 5** şi excentru **S(s** ∈ [**-1**, **+1**], **ε = π/6**)

Graficele unor **FSM—Ex** de **bază** cu baza **a = 5** sunt prezentate în **figura 3,a**, pentru **ε = 0** şi **în figura 3,b** pentru **ε = π/3**. În cazul **ε = 0**, punctul **(0, 1)** este comun întregului fascicul de curbe, iar pentru **ε ≠ 0** numai în cazul **s = 0**.

FSM—Ex de variabilă **centrică α**, exprimate / descrise cu a doua funcţie din (1) sunt prezetate în **figura 4** pentru **ε = 0** ▲ **s** ∈[-1, 0] ◀ şi **s** ∈[0, +1] ▶, precum şi pentru **ε = π/3** ▼ .

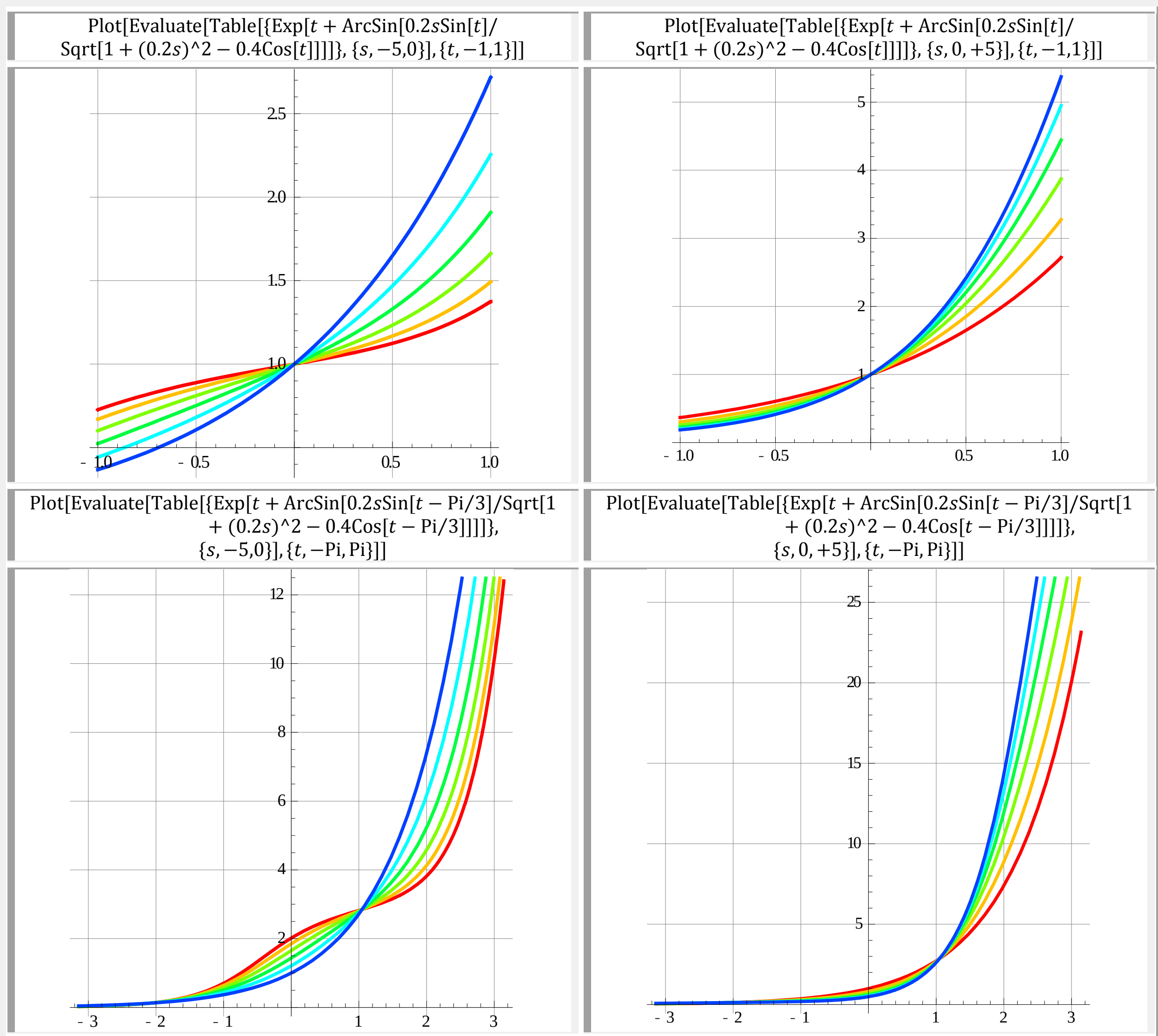


Fig.4 FSM—Ex de variabilă **centrică α** de excentru **S**(**s** ∈ [**-1**, **+1**], **ε = 0**)

Motto: " Parafrazându-l pe **Abel**, consacru toate forţele mele ca **să răspândesc lumina SUPERMTEMATICII** în **imensa obscuritate** ce domneşte încă în ***MATEMATICA CENTRICĂ - ORDINARĂ***, pentru a şterge ***petele albe ale necunoaşterii*** de pe (supra)faţa ei"
Autorul **supermatematicii**

CAPITOLUL XVI

FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM − CE) AUTOINDUSE

1. I N T R O D U C E R E

Funcţiile supermatematice circulare excentrice (FSM − CE) autoinduse şi induse, atât pentru funcţiile circulare centrice (**cosα, sinα** etc) cât şi pentru cele excentrice (**cexθ**, **Cexα** , **sexθ**, **Sexα** etc), cu excepţia celor care vor fi prezentate în continuare (**bexθ**, **Bexα**, **aexθ**, **Aexα**, **dexθ**, **Dexα**, **rexθ**, **Rexα** etc**)** au făcut obiectul unor capitole din lucrarea autorului **SUPERMATEMATICA**, Vol I şi Vol II, ediţia a 3-a, revizuită şi îmbunătăţită, din Editura Matrix Rom, Buc. 2015 şi ediţia 2-a şi a 1-a în Editura Politehnica din Timişoara.

Funcţiile ***autoinduse centrice*** sunt de forma **A.sin(B.sin(C.sin(… …U.sin(α))…)))**, de exemplu, iar cele ***induse*** de forma **A.cos(B.sin(C.cos(D.tan(… …V.cosα**))…)))), în care amplitudinile A, B, C, … U, V pot fi şi toate unitare.

```
Plot[{Sin[x],Sin[Sin[x]],Sin[Sin[Sin[x]]],Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]]]]]]},
{x,0,2Pi}]
```

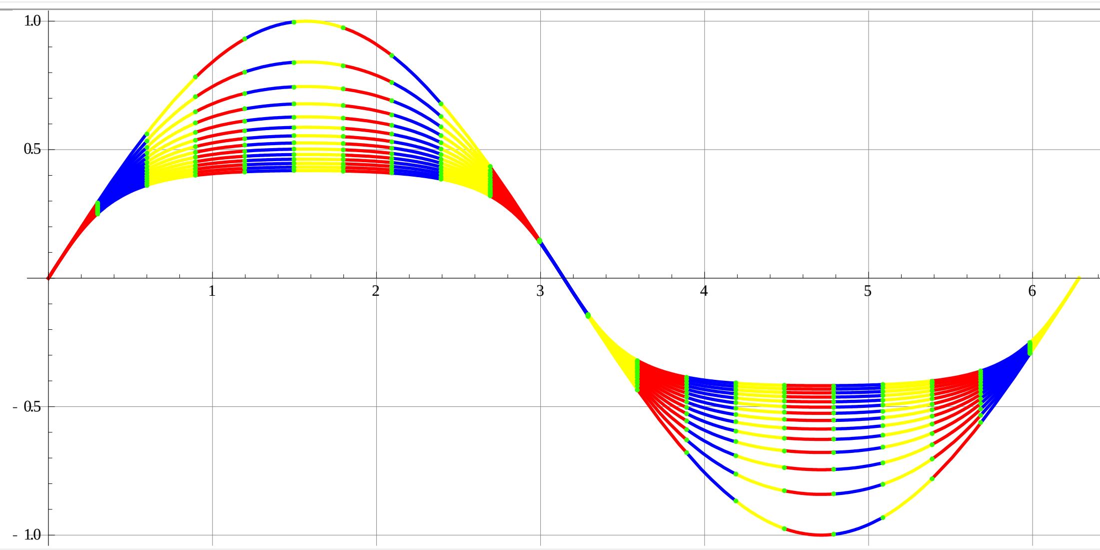


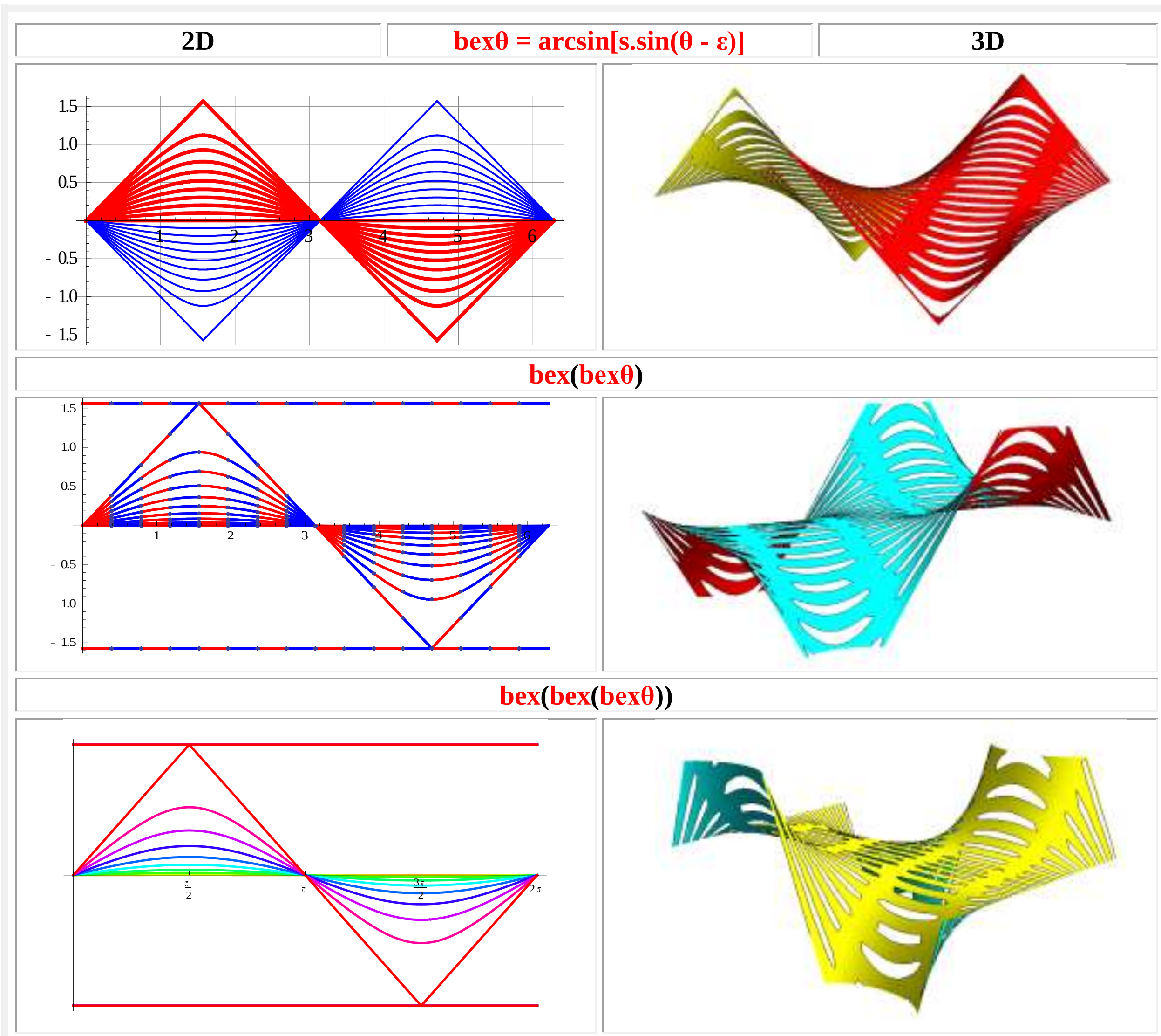
Fig. 1 Funcţii **circulare centrice (FCC)** sinus **autoinduse** de **n ∈ [0, 13]**

În **matematica centrică** (**MC**) şi în literatura ei de specialitate (v. **Rîjik / Ryzhik**,I,M,. **Gradştein / Gradshteyn** I.S., Tabele de **INTEGRALE, SUME, SERII ŞI PRODUSE**, Ed.Tehnică, Buc. 1955) funcţiile autoinduse sunt cunoscute sub denumirea de “Funcţii trigonometrice de funcţii trigonometrice” - sin(z.sinx), pag.184 - şi cele autoinduse, sub denumirea de “Funcţii trigonometrice de funcţii trigonometrice inverse” - cos(arctanx), pag.185-. Exemple de funcţii circulare centrice ***autoinduse*** au graficele din **figura 1**, în funcţie de ***gradul* n *de autoinducţie***. Astfel, **sinx** este de grad 0, **sin(sinx)** are gradul **1**, iar **sin(sin(sin(sinx)))** este de gradul **n** = **3**.

În **figura 1**, gradul de autoinducţie este cuprins în intervalul **n** ∈ [1, 13] şi se obsevă că, prin creşterea lui **n**, amplitudinile funcţiilor scad treptat.

Funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM – CE**), prezentate în continuare, sunt acelea care nu au echivalente în matematica centrică **(MC),** aşa cum au **cosx → cex, sinx → sex ş.m.a.**

1) FSM–CE *AUTOINDUSE* bexθ de variabilă **excentrică θ** sunt prezentate în **figura 2** pentru **n** ∈ [0, 3].



BUPT

bex(bex(bex(bexθ)))

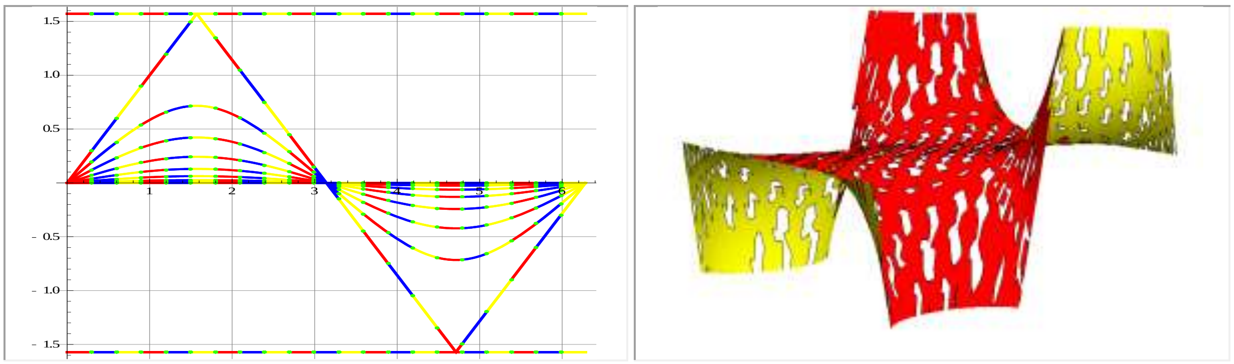


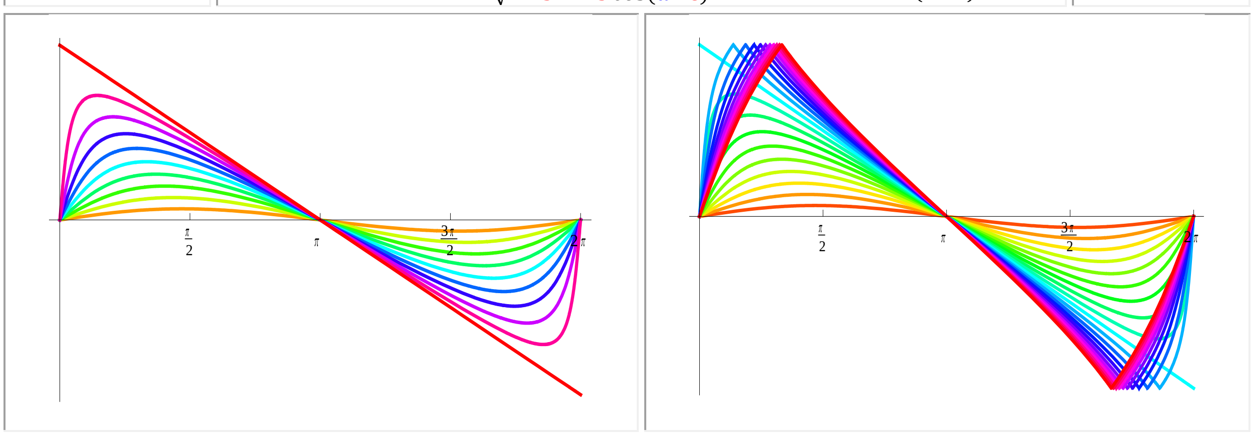
Fig. 2 Graficele FSM − CE beta excentrice autoinduse bex(bex(bex(…(bexθ) …)))

2) FSM–CE *<u>AUTOINDUSE</u>* Bexα de variabile **centrice α sunt prezentate în figura 3 în 2D** 🡅 **.**

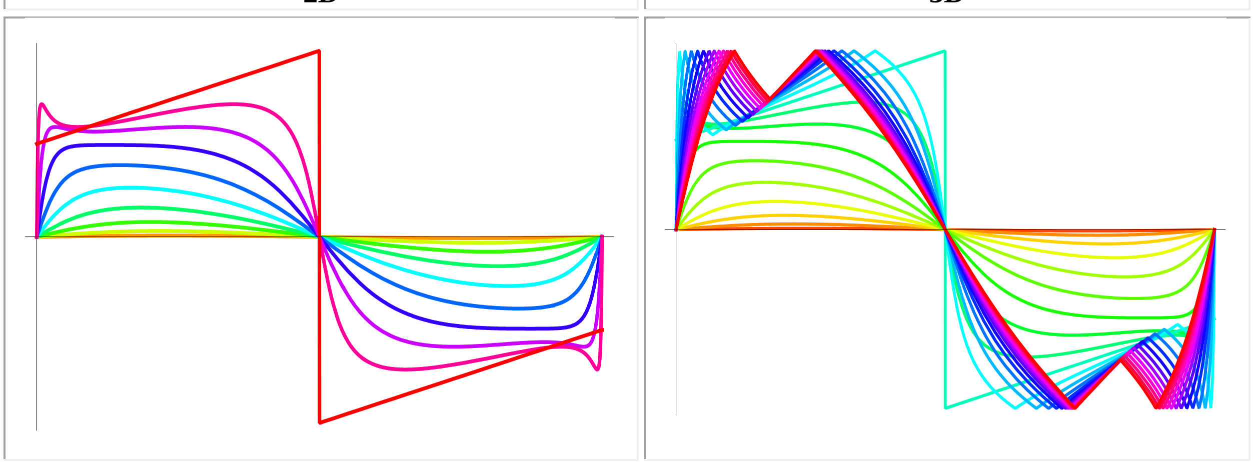
s ∈ [-1,+1]

$$\mathbf{Bex\alpha} = arcsin\,\frac{s.sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(\alpha-\varepsilon)}} = arctan\,\frac{s.sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.cos(\alpha-\varepsilon)}$$

s ∈ [-2,+2]



2D **3D**



BUPT

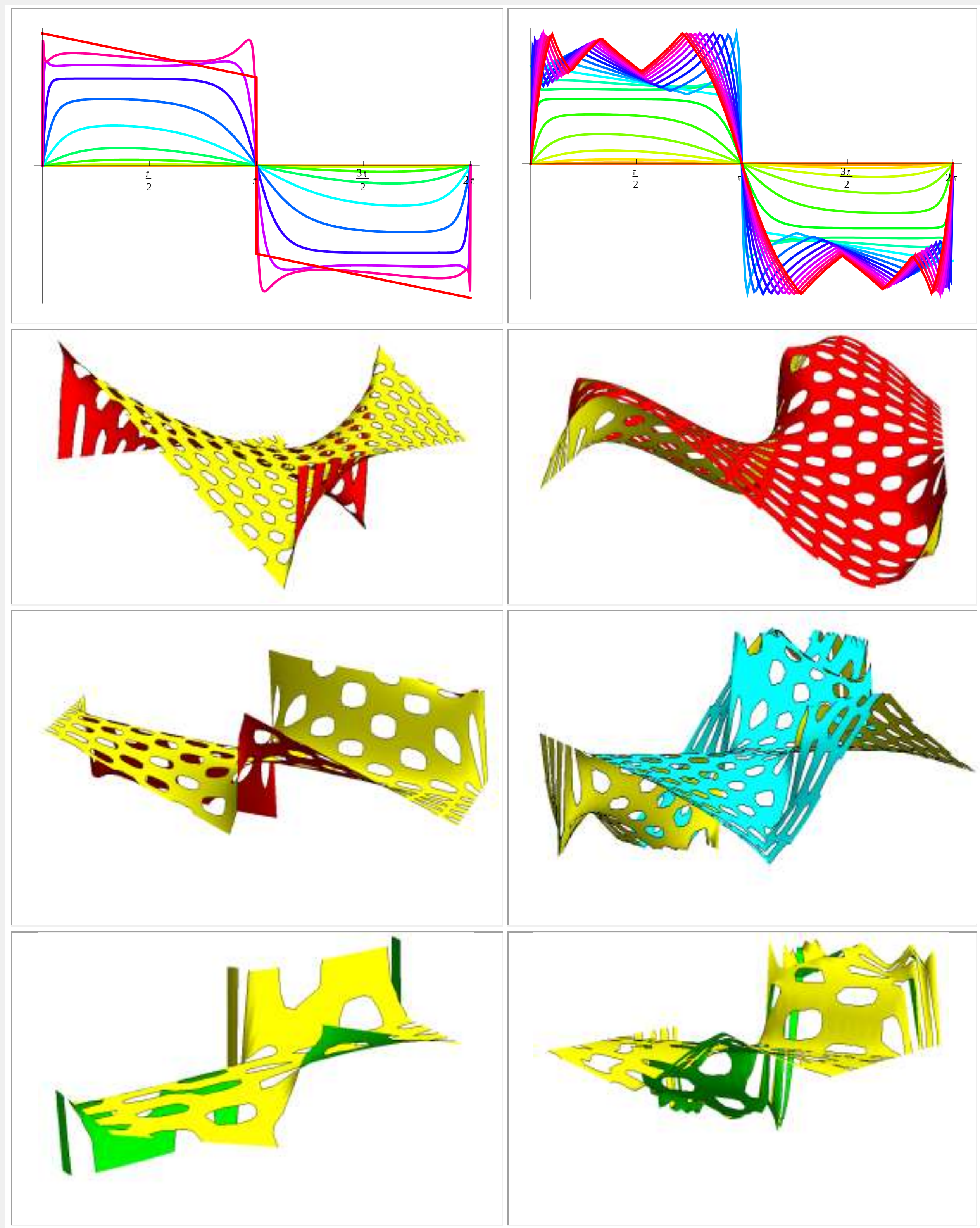


Fig. 3 Graficele FSM − CE Beta excentrice autoinduse Bex(Bex(Bex(…Bexα) …))

3) FSM – CE *AUTOINDUSE* aexθ de variabile **excentrice θ** sunt prezentate în **figura 4** în 2D ◄

2D	aexθ = θ –arcsin[s.sin(θ - ε)]	3D

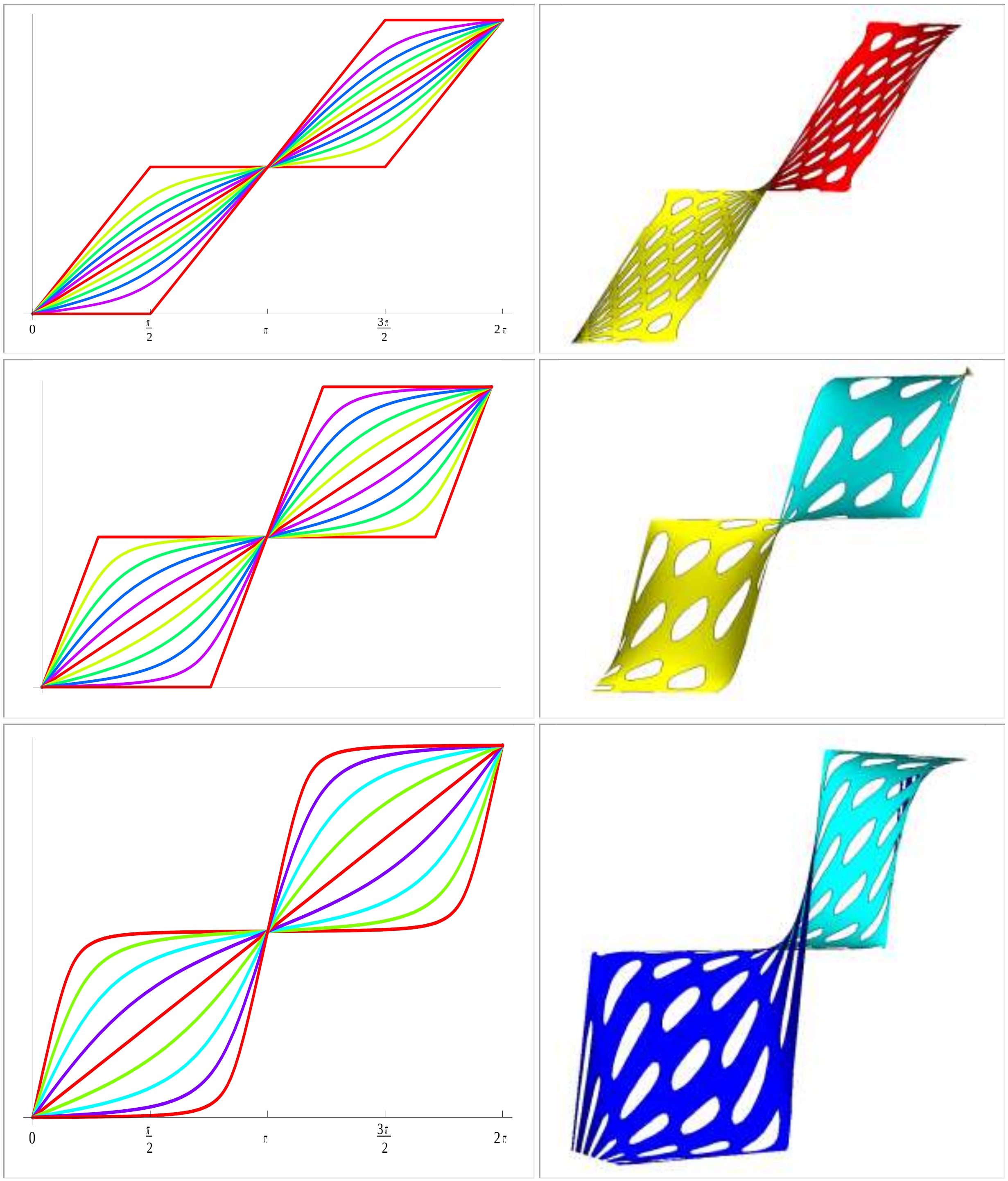
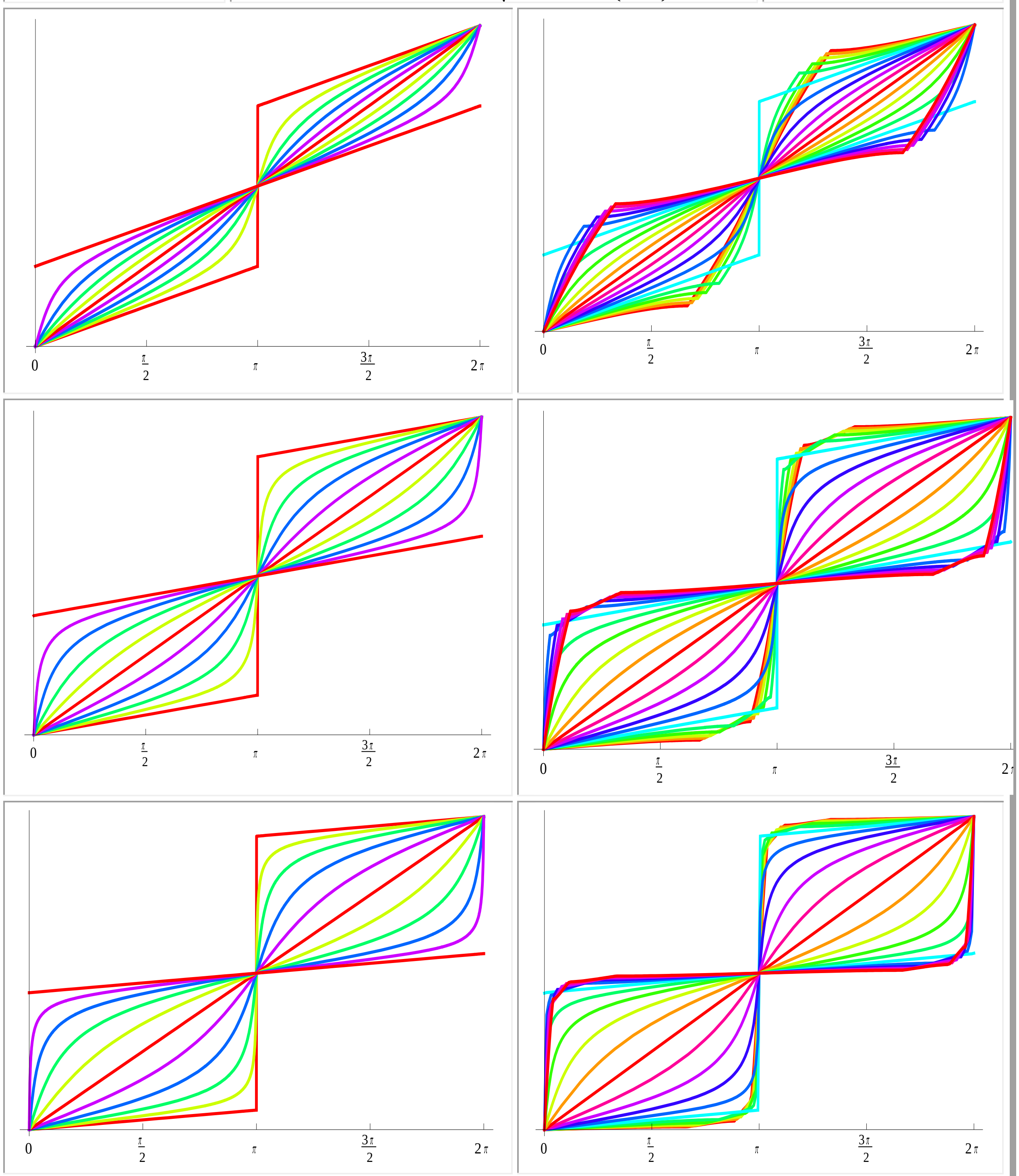


Fig.4 Graficele FSM − CE aexθ excentrice autoinduse aex (aex (aex (… (aexθ) …))

4) FSM – CE *AUTOINDUSE* Aexα de variabile **centrice α** sunt prezentate în **figura 5** în 2D ↑

s ∈ [-1, +1]	**Aexα** = **α** –arcsin[$\frac{s.sin(\alpha-\varepsilon)]}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(\alpha-\varepsilon)}}$	s ∈ [-2, +2]



s ∈ [-1, +1]	3D	s ∈ [-2, +2]

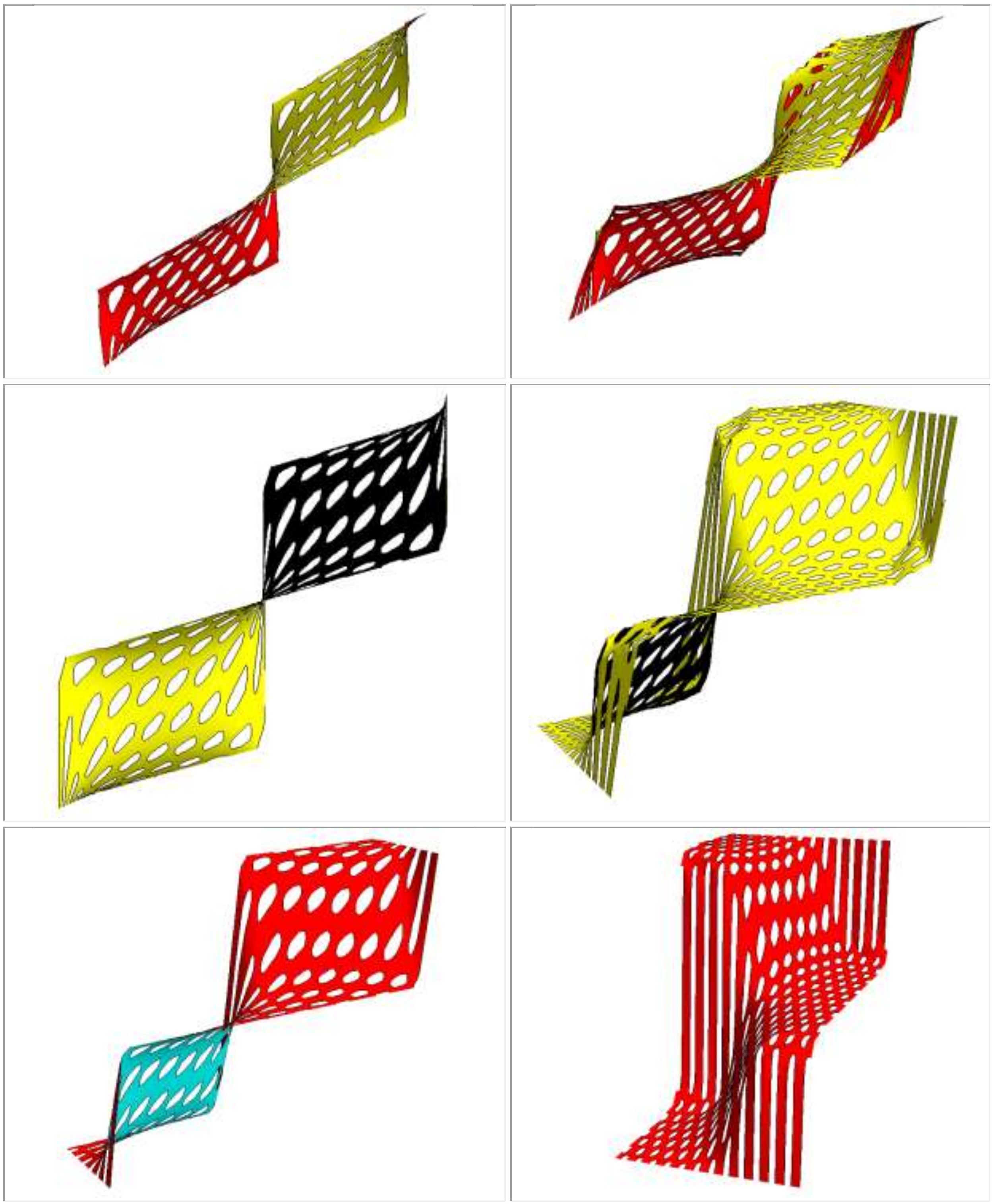


Fig.5 Graficele FSM − CE Aexα excentrice autoinduse Aex (Aex (Aex (… (Aexα) …))

5) FSM – CE *AUTOINDUSE* rexθ de variabile **excentrice θ** sunt prezentate în **figura 6** în **2D**

2D s ∈ [-1, +1]	$\mathbf{Rex_{1,2}\,\theta = -\,s.\cos(\theta - \varepsilon)\;\theta\;\pm\;\sqrt{1 - s^2.\sin^2(\theta\; - \;\varepsilon)}]}$	2D s ∈ [-2, + 2]

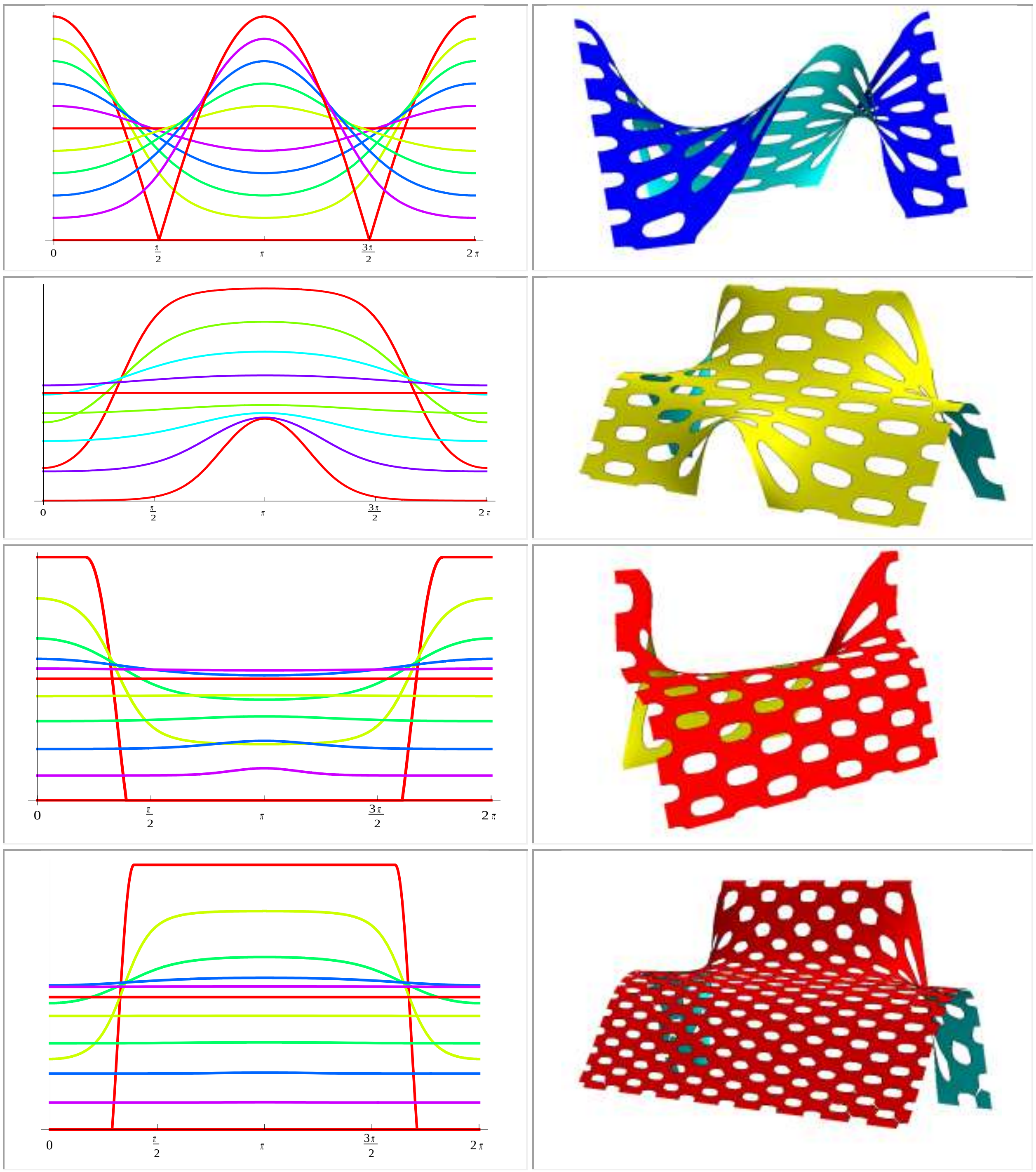


Fig.6 Graficele FSM − CE excentrice ”rege” rex θ autoinduse rex(rex(rex(… (rexθ) …)))

BUPT

6) FSM–CE *AUTOINDUSE* Rexα de variabile **centrice α** sunt prezentate în **figura 7** în **2D** şi **8** în **3D.**

$s \in [-1, +1]$	$\mathrm{Rex}\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha - \varepsilon)}$	$s \in [-2, +2]$

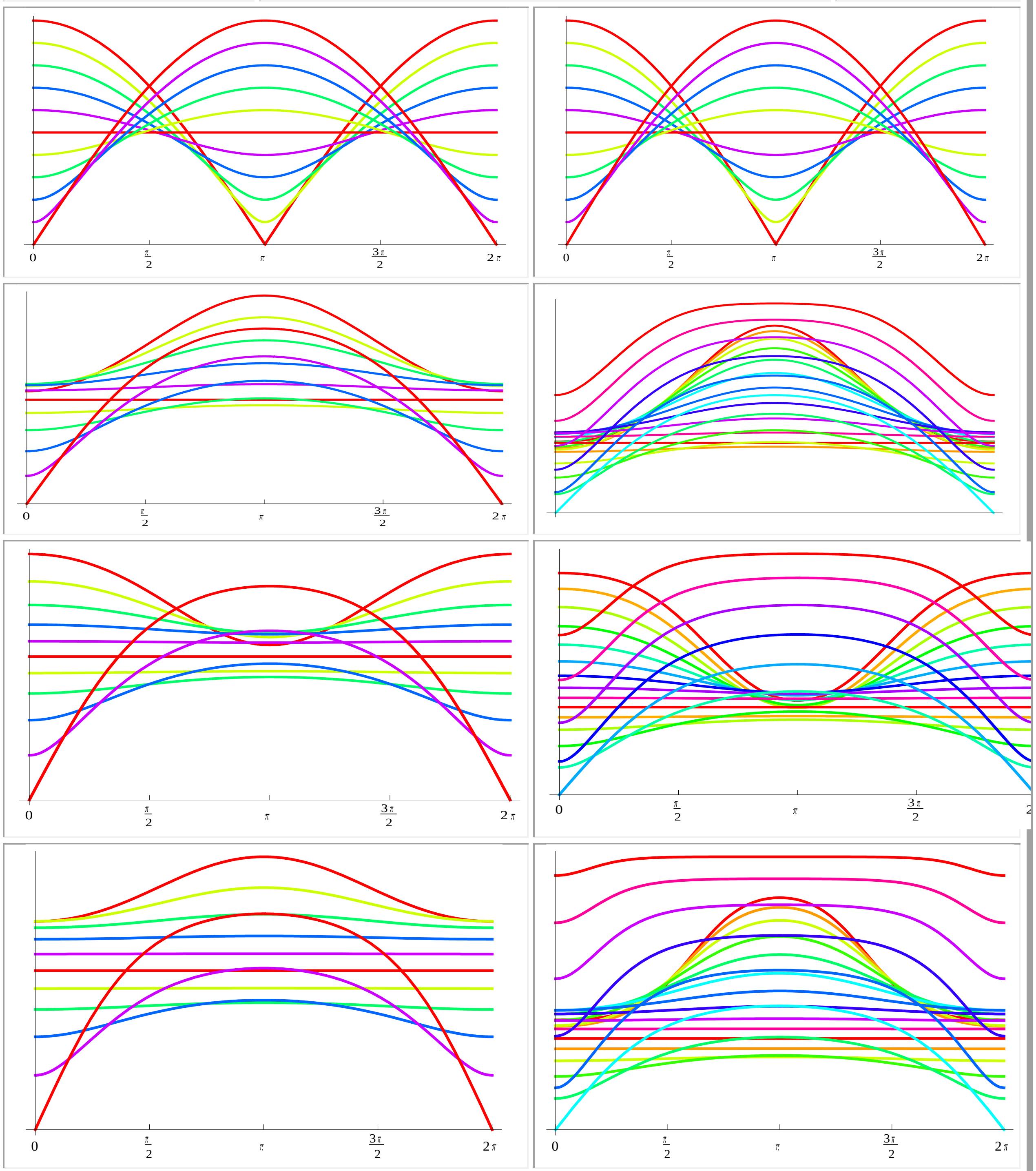


Fig.7 Graficele FSM – CE excentrice Rexα autoinduse Rex (Rex (Rex (… (Rexα) …)) în 2D

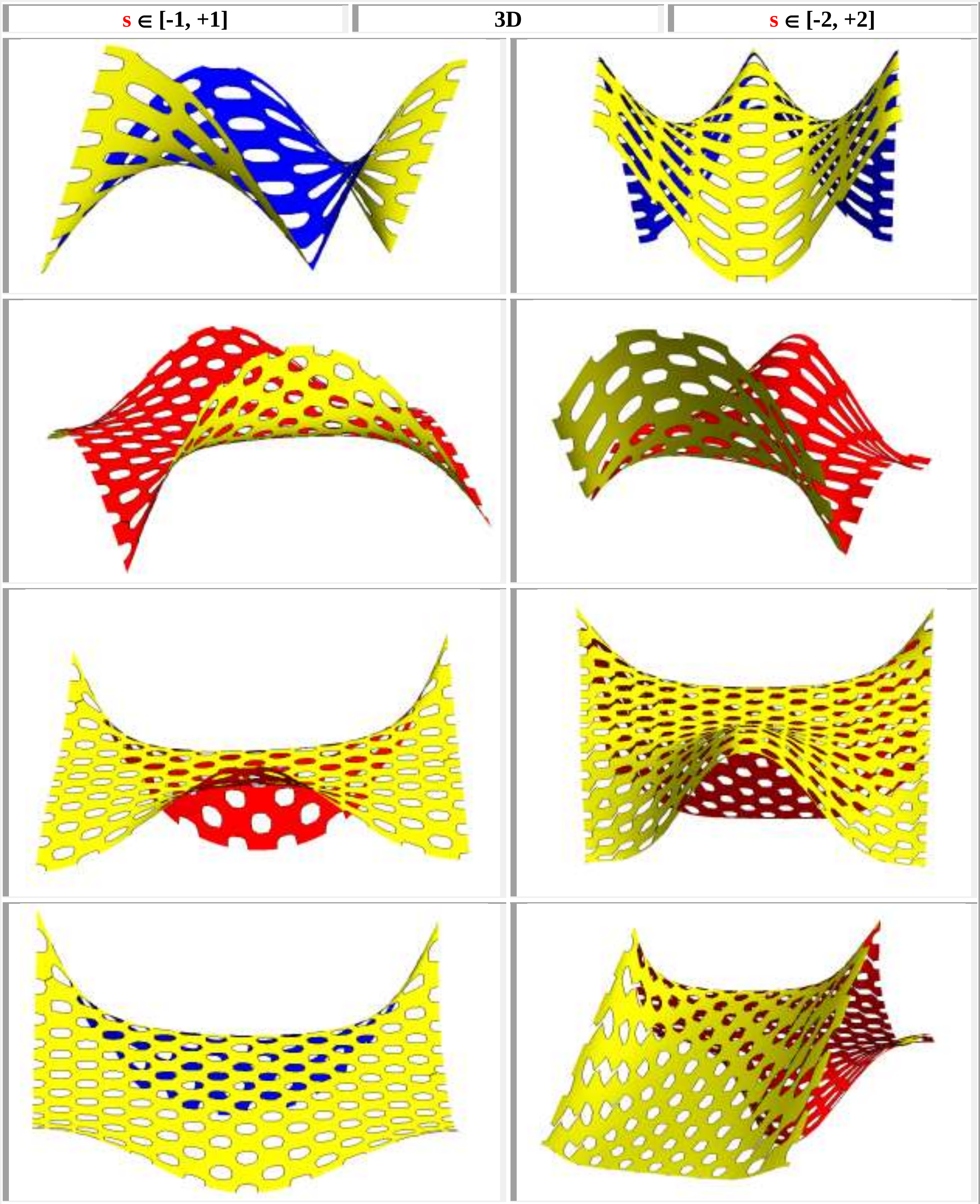


Fig.8   Graficele FSM − CE excentrice Rexα autoinduse Rex (Rex (Rex (…(Rexα …) …)) în 3D

6) FSM – CE *AUTOINDUSE* dexθ de variabile **excentrice θ** sunt prezentate în **figura 9** în **2D** ◄

2D	$\mathbf{dex\theta = 1 - \frac{s.cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}}}$	3D

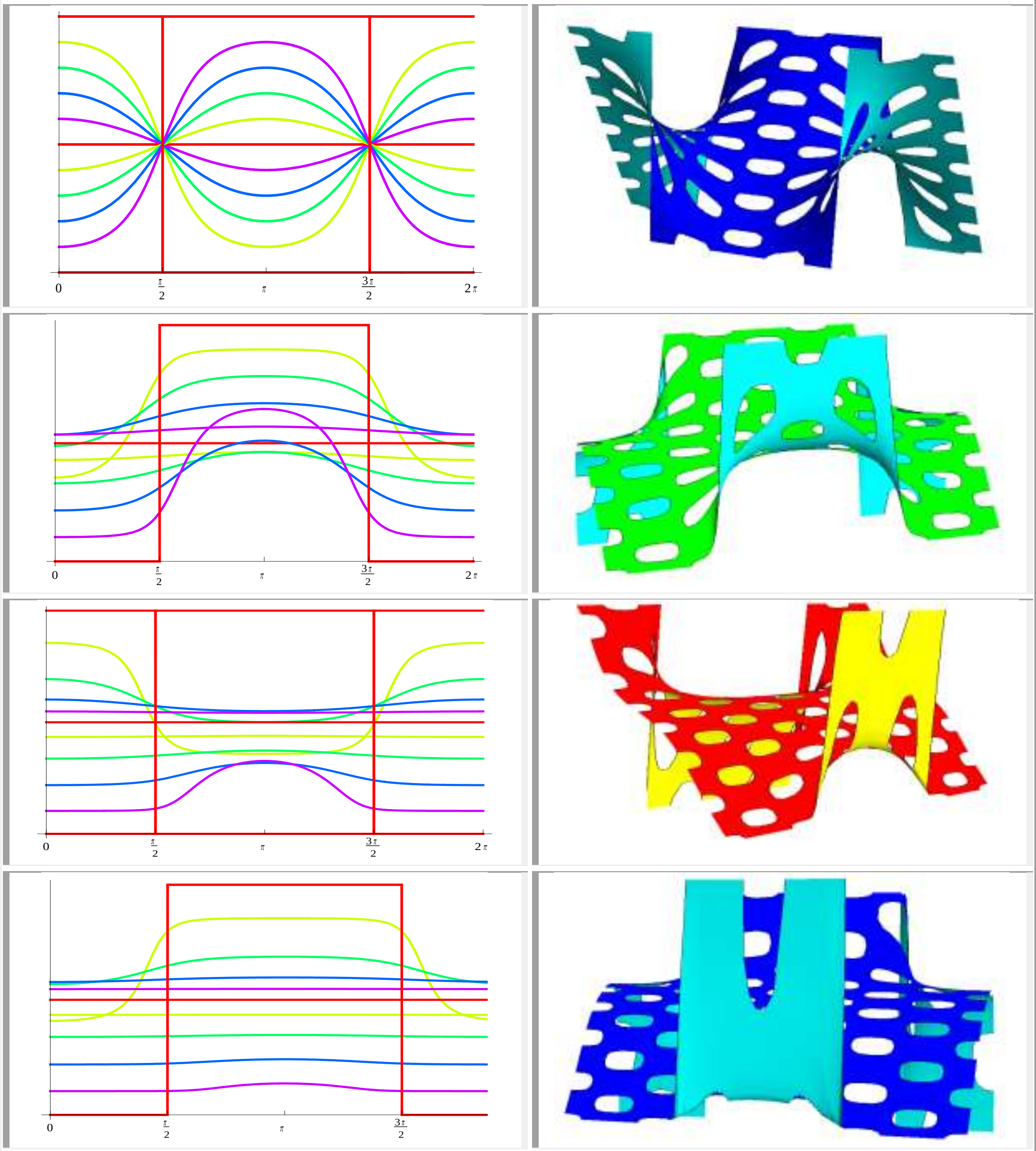


Fig.9 Graficele FSM − CE excentrice dex θ autoinduse dex(dex(dex(…(dexθ) …))

7) FSM – CE *AUTOINDUSE* Dexα de variabile **centrice α** sunt prezentate în **figura 10** în **2D** ◀ şi în **11** în 3D ▶

s ∈ [-1, +1]	**Dexα** = $\dfrac{1-s.cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s.cos(\alpha-\varepsilon)}$	**s ∈ [-2, +2]**

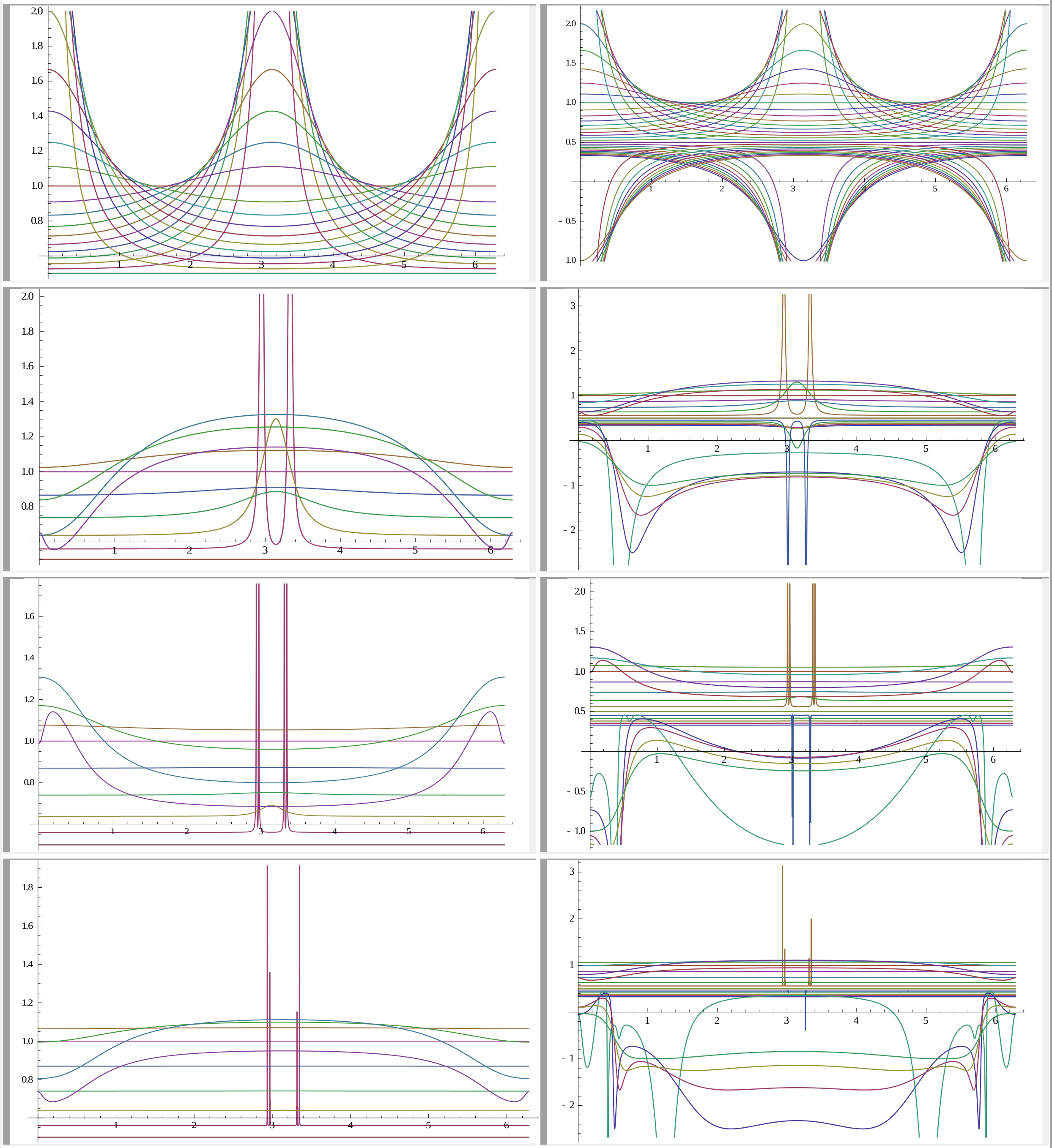


Fig.10,a Graficele FSM − CE centrice Dexα autoinduse Dex (Dex (Dex (… (Dexα) …))) în 2D

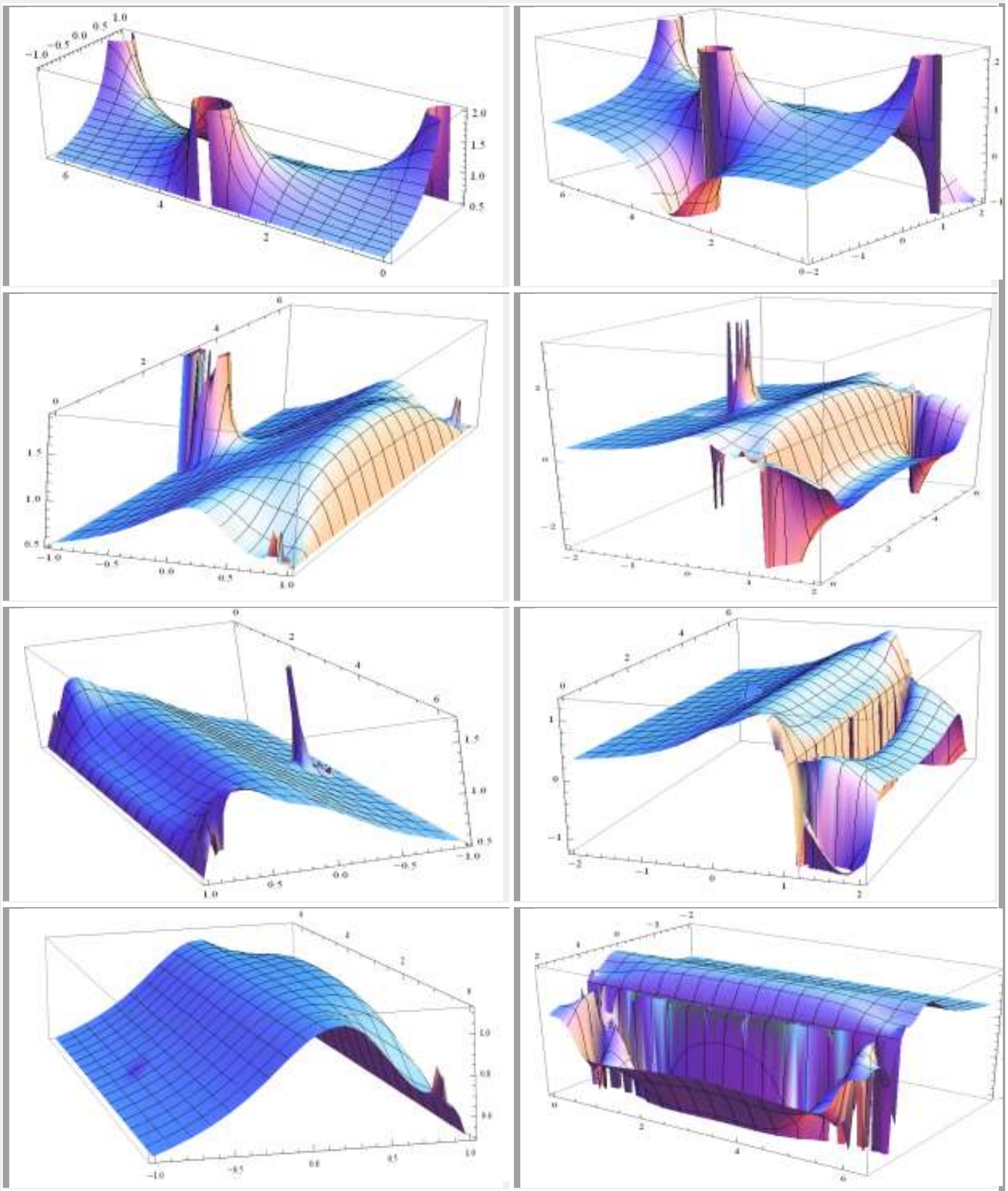


Fig.10,b Graficele FSM − CE centrice Dexα autoinduse Dex (Dex (Dex (… (Dexα) …))) în 3D

Suprafeţele **FSM-CE** autoinduse reprezentate în **3D** sunt continue, dar pentru o mai bună vizualizare au fost “ciuruite”, cu excepţia figurii anterioare, pentru a se vizualiza şi zonele obturate / ascunse.

O altă clasă de **FSM**, prezentate în continuare ca funcţii autoinduse, este cea a **FSM quadrilobe / cvadrilobe** (**FSM**-QL)

8) FSM – QL *AUTOINDUSE* coqθ de variabile **excentrice θ**

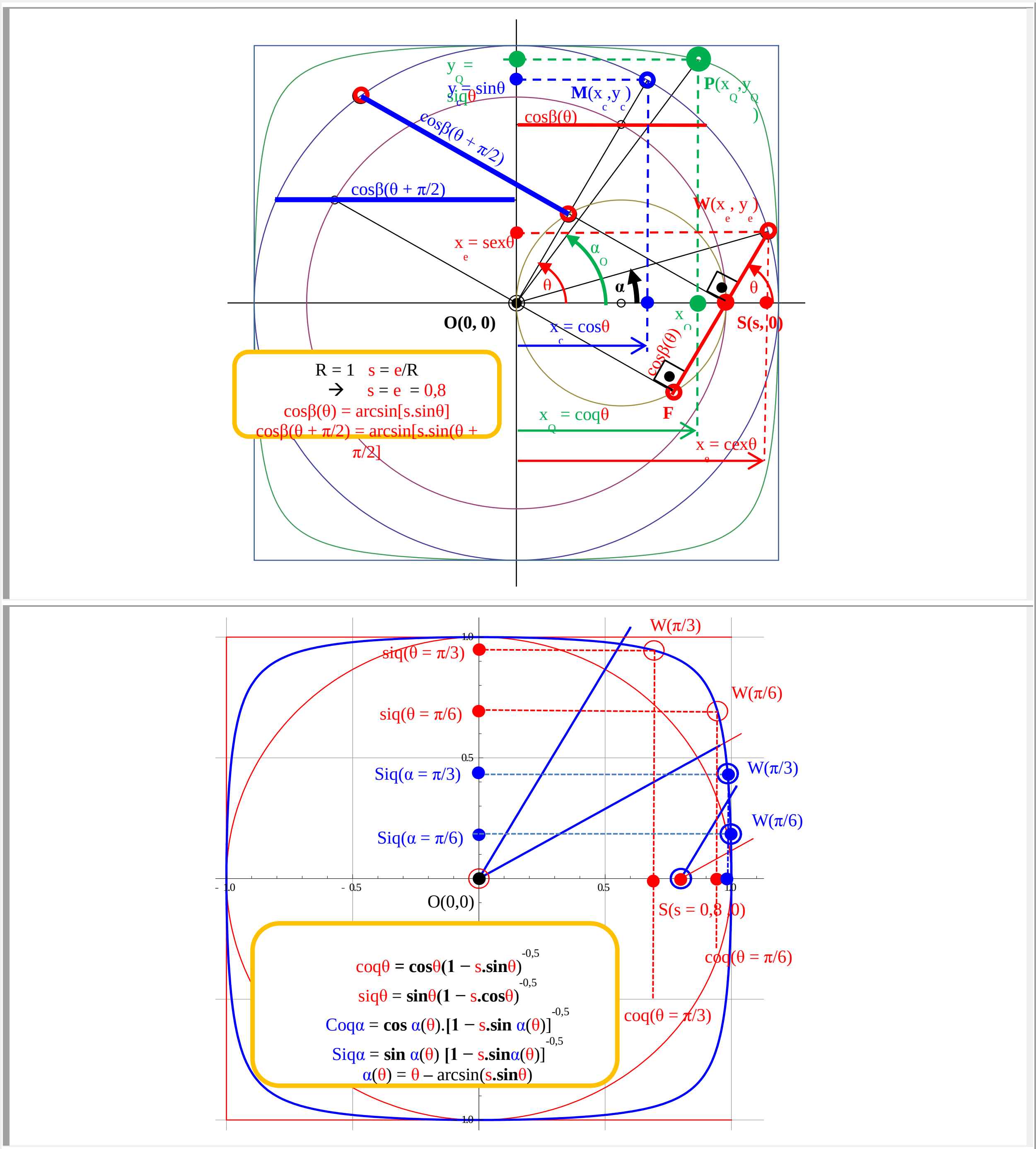


Fig.11 Schiţă cu FSM–QL excentrice coqθ şi siqθ de variabilă excentrică θ ◀ şi de variabilă centrică α ▶

BUPT

FSM – QL fiind mai puţin cunoscute, ele sunt prezentate în comparaţie cu **FSM-CE cexθ** şi **sexθ**, precum şi cu **FCC cosα** şi **sinα**, în schiţa din stânga **figurii 11**◀. În dreapta ▶ sunt prezentate cele de variabilă **centrică Coqα** şi **Siqα,** ale căror forme în **2D** şi în **3D** sunt asemănătoare celor de variabilă **excentrică** cu deosebirea că repartizarea punctelor pe cele două curbe este diferită. Punctele - W(**θ**) şi W(**α**) - de acelaşi argument ($\frac{\pi}{3}$ *şi* $\frac{\pi}{6}$) de variabilă excentrică (**roşii**) sunt defazate în faţă, faţă de cele de variabilă centrică (**albastre**).

2D	**coq**θ = $\frac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}}$	**3D**

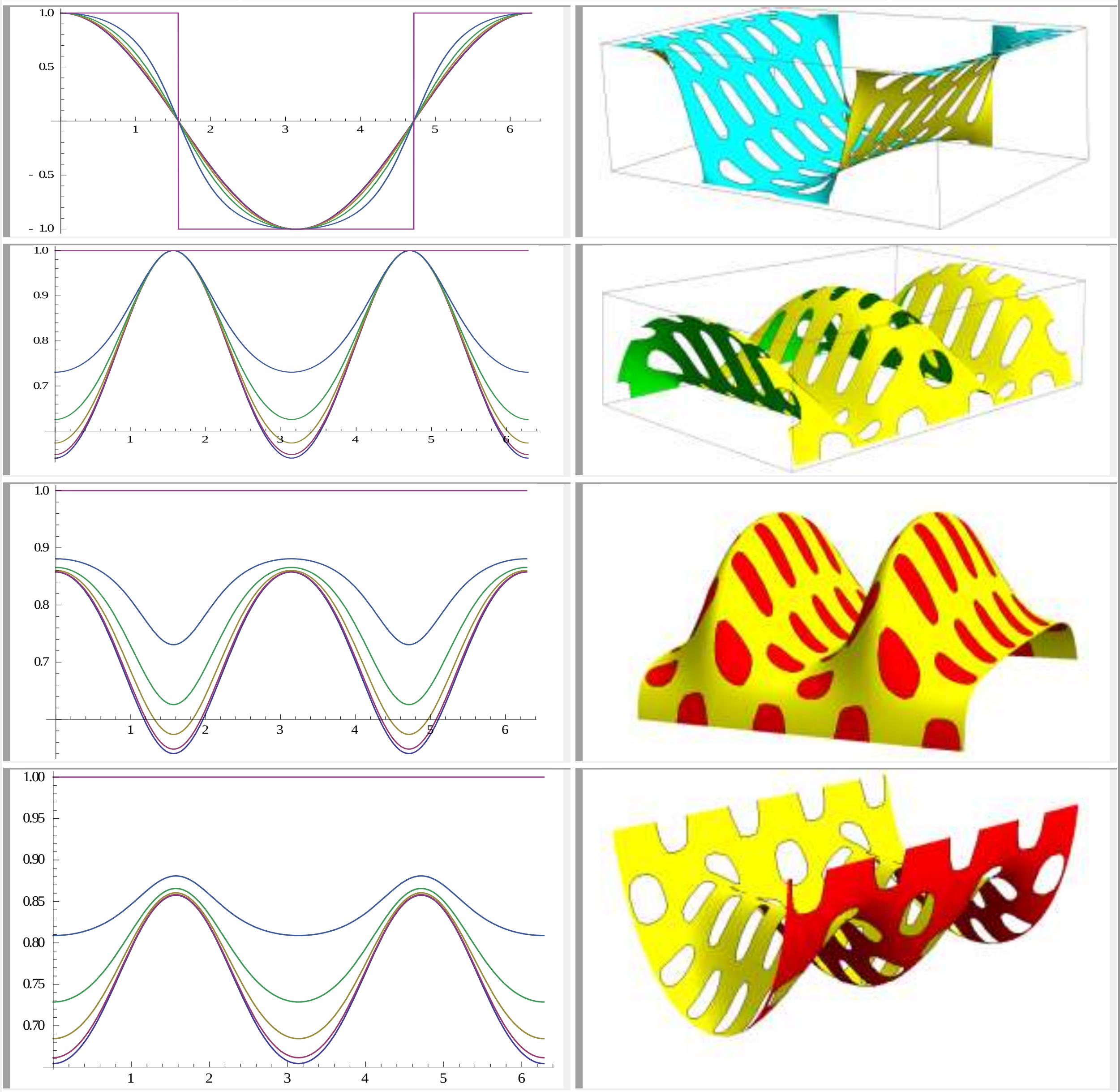


Fig.12 Graficele FSM − QL excentrice coqexα autoinduse coq (coq (coq (… (coqθ) …)))

BUPT

10) FSM – QL *AUTOINDUSE* siqθ de variabile **excentrice θ** sunt prezentate în **figura 13** în **2D** ◄

2D	siqθ = $\frac{sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}}$	3D

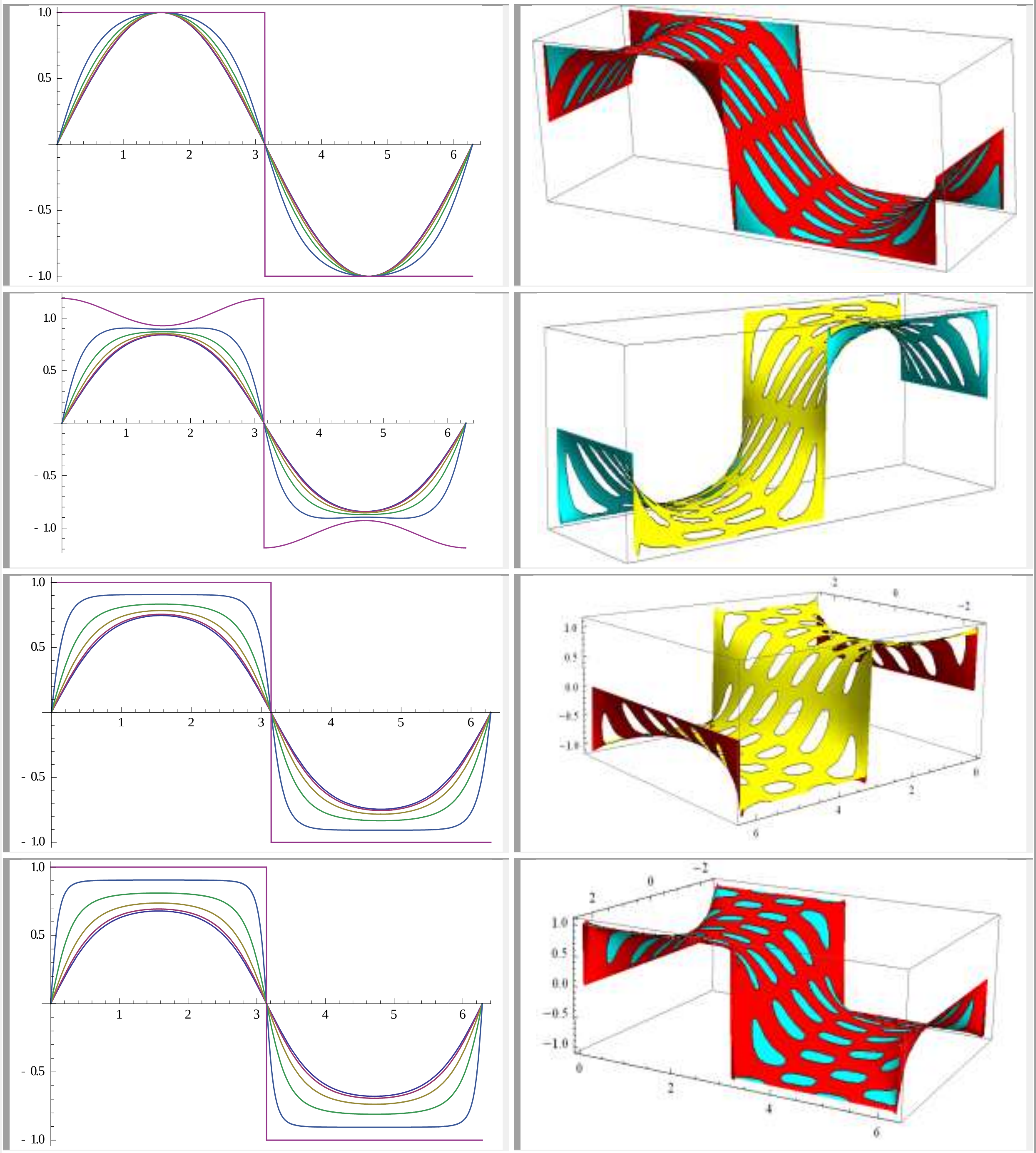


Fig.13 Graficele FSM − QL excentrice coqexα autoinduse siq (siq (siq (… (siq θ) …)))

11. FSM – QL *AUTOINDUSE* Coqα de variabile **centrice α** sunt prezentate în **figura 14** în **2D** ◀

Se obţin prin înlocuirea în ecuaţiile anterioare a variabilei **θ** cu variabila $\alpha(\theta) = \theta - \arcsin[s.\ \sin(\theta-\varepsilon)]$

2D	**Coqα** = $= \dfrac{\cos[\alpha(\theta)-\varepsilon]}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\alpha(\theta)-\varepsilon)}} = \dfrac{\cos\{t-\arcsin[s\sin[t]]\}}{\sqrt{1-(s\sin[t-\arcsin[s\sin[t]]])\verb|^|2}}$	**3D**

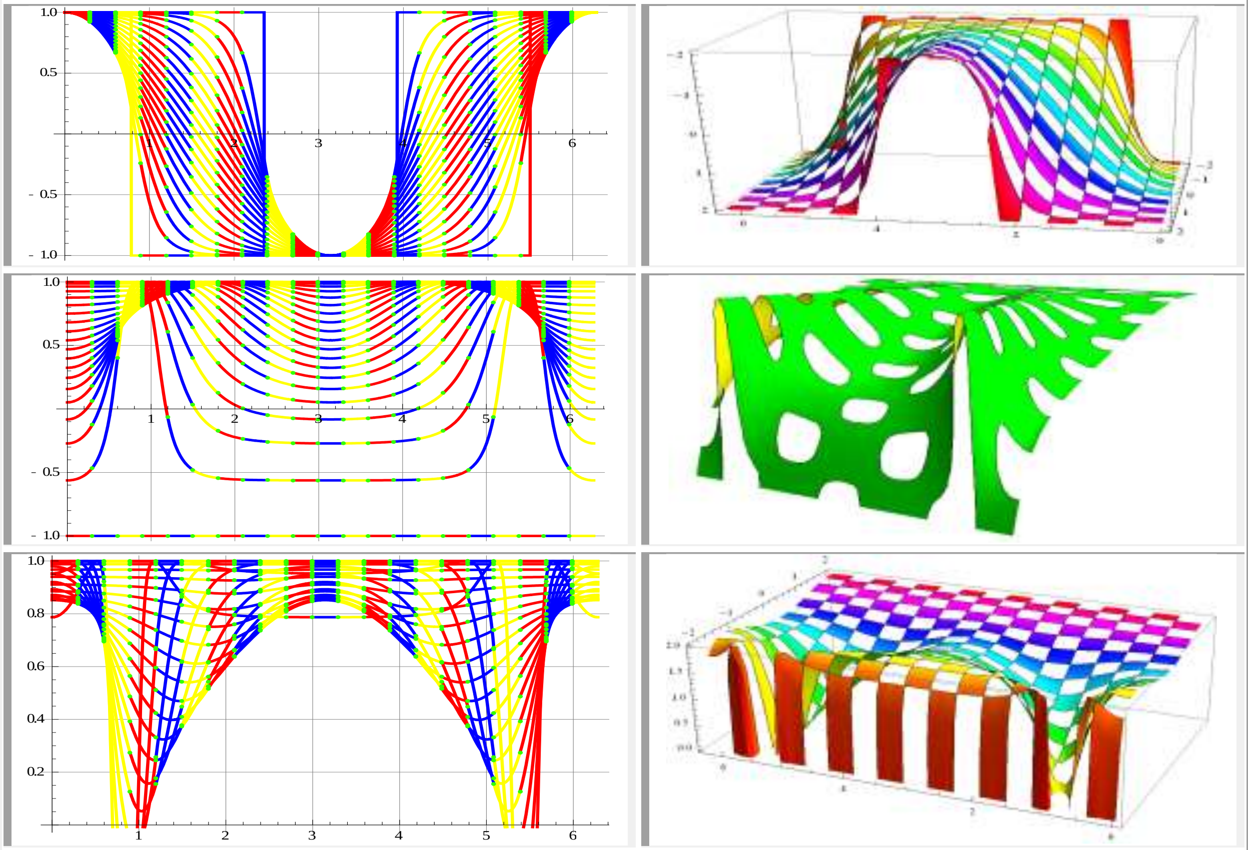
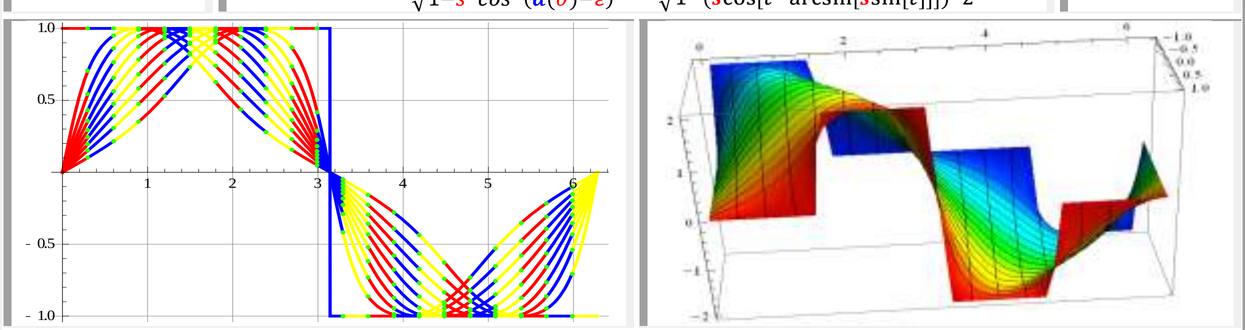


Fig.14 Graficele FSM − QL excentrice Coqα autoinduse Coq (Coq (Coq (… (Coqα) …)))

11) **FSM – QL *AUTOINDUSE* Coqθ** de variabile **centrice α** sunt prezentate în **figura 15** în **2D** ◀

2D	**Siqα** = $= \dfrac{\sin[\alpha(\theta)-\varepsilon]}{\sqrt{1-s^2 cos^2(\alpha(\theta)-\varepsilon)}} = \dfrac{\sin\{t-\arcsin[s\sin[t]]\}}{\sqrt{1-(s\cos[t-\arcsin[s\sin[t]]])\verb|^|2}}$	**3D**



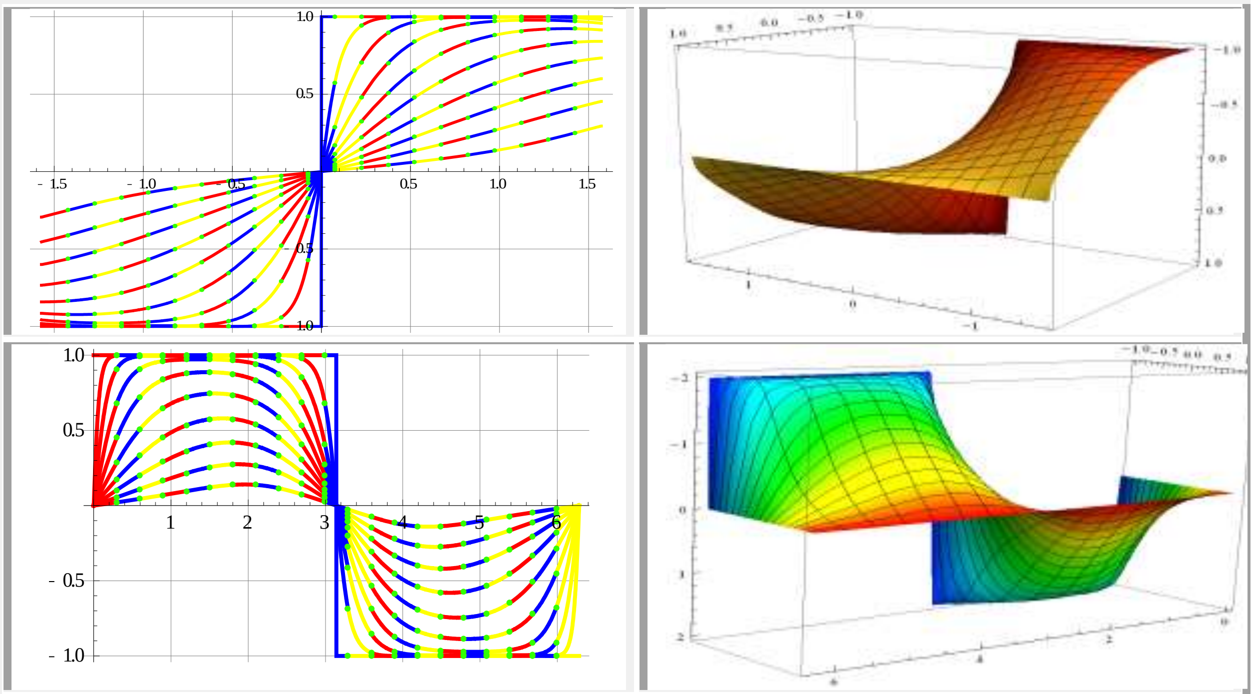
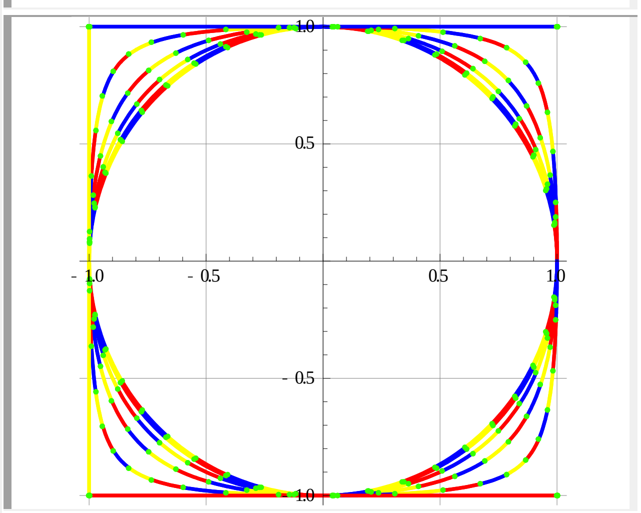
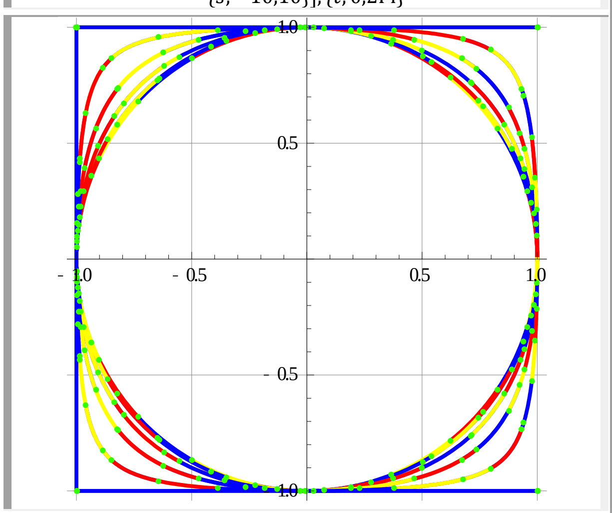


Fig.15 Graficele FSM − QL excentrice Siqα autoinduse Siq (Siq (Siq (… (Siqα) …)))

12) FSM – QL *AUTOINDUSE* de variabile **centrice α** în **2D** (**Fig. 15**) şi în 3D (**Fig.16**)

De θ	**De α**
ParametricPlot[Evaluate[Table[$\left\{\frac{\mathrm{Cos}[t]}{\mathrm{Sqrt}[1-(s\mathrm{Sin}[t])^2]}, \frac{\mathrm{Sin}[t]}{\mathrm{Sqrt}[1-(s\mathrm{Cos}[t])^2]}\right\}$, {$s$, −1,1}], {$t$, 0,2Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] / Sqrt[1 − (0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])^2], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])^2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]
	

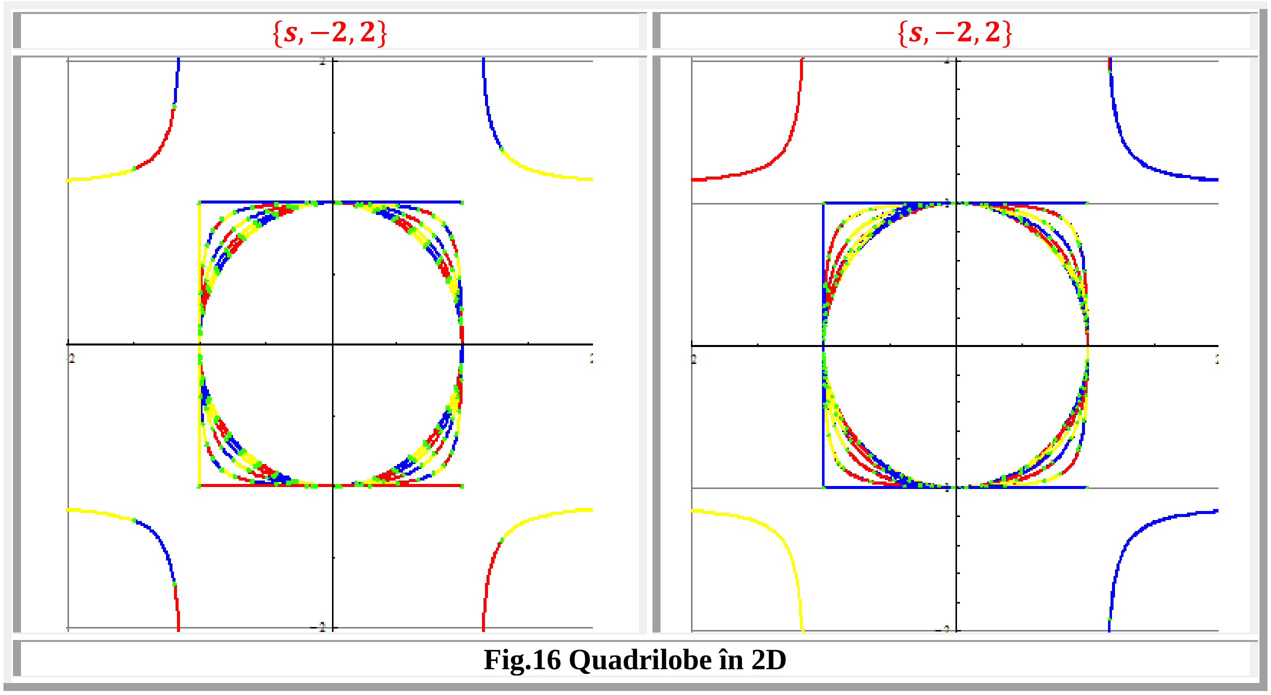
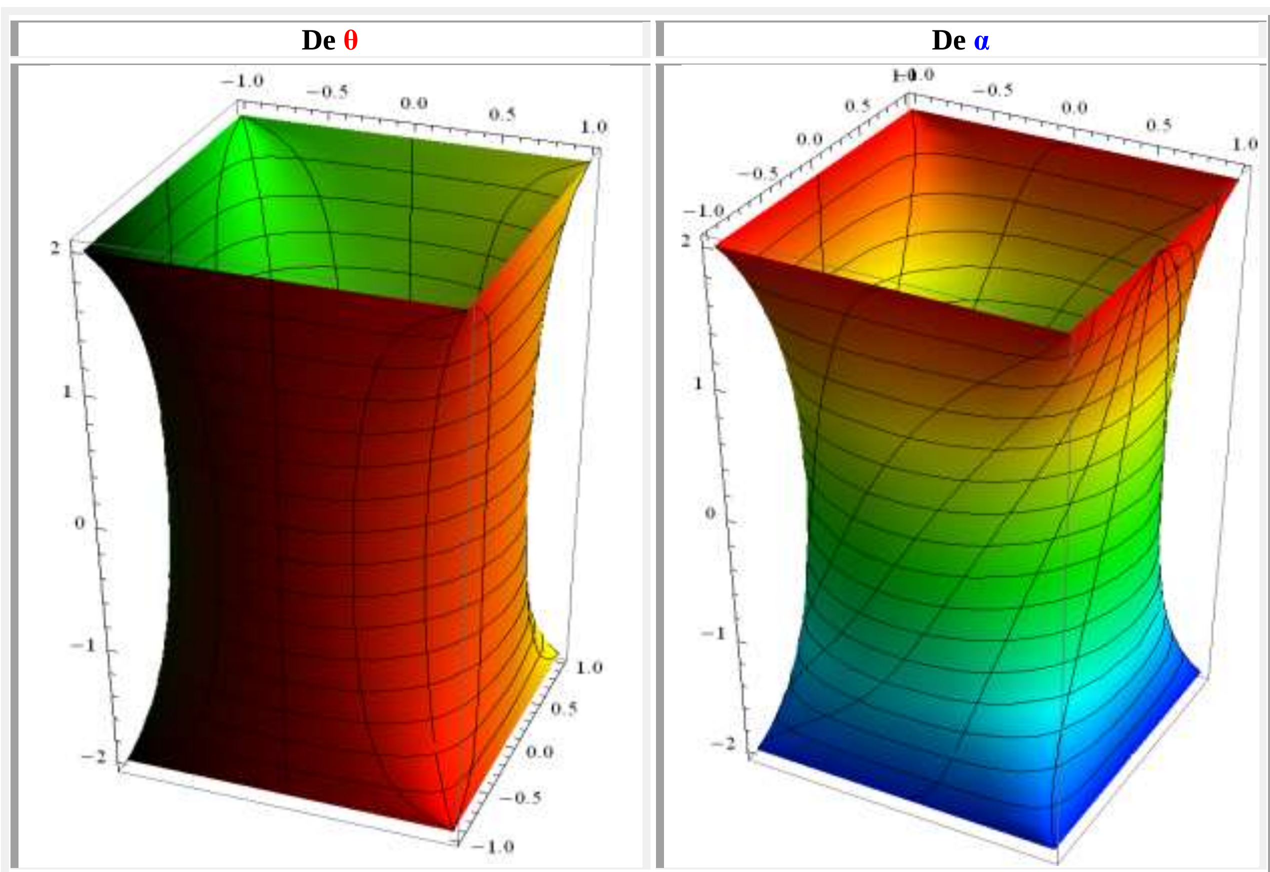


Fig.16 Quadrilobe în 2D



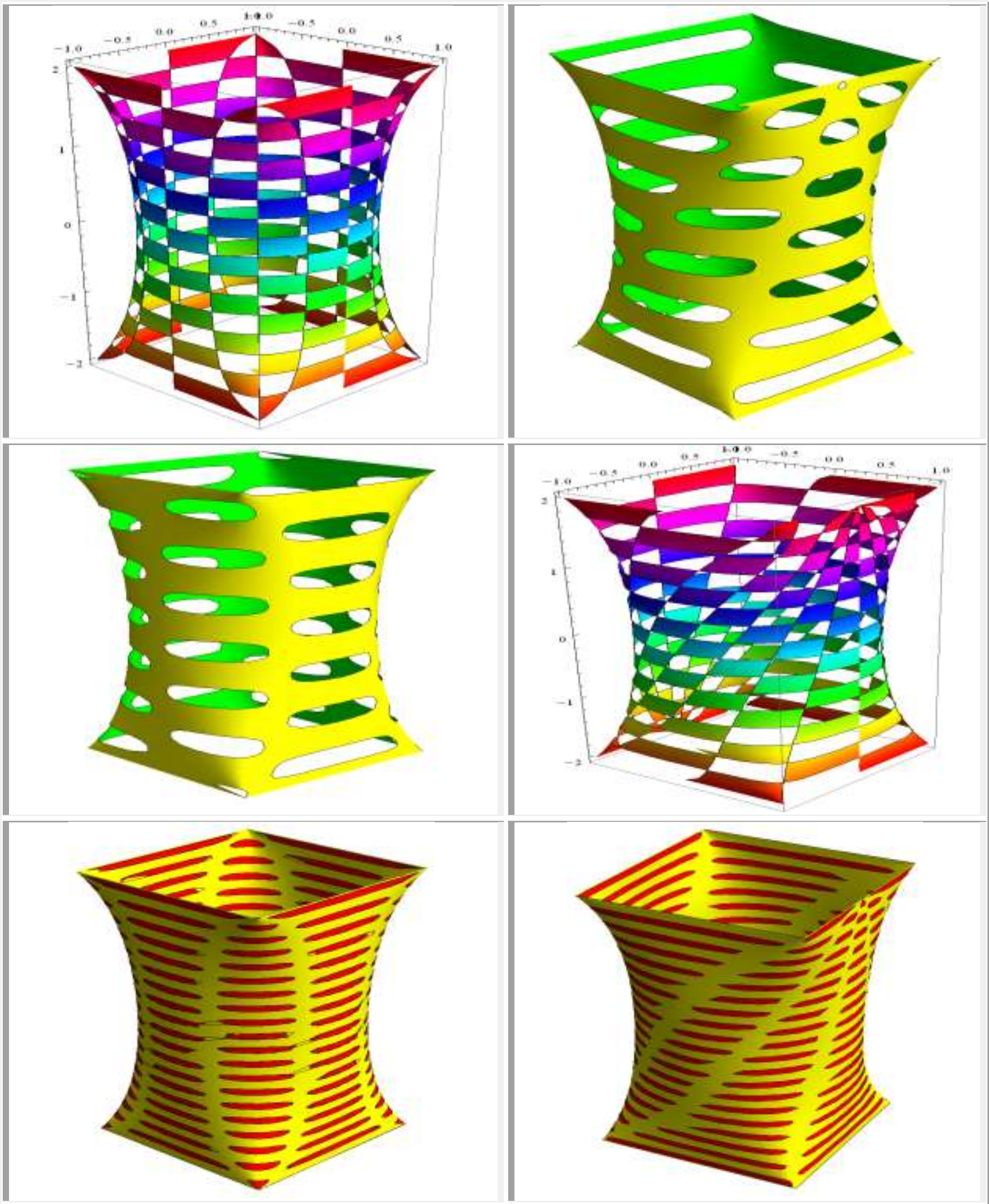


Fig.16 Qudriloboizi în 3D divers redate

Motto:” Supermatematica, multiplicând la infinit toate entităţile matematice,
a deschis nu numai noi căi spre infinit, ci şi **cutia Pandorei matematice**.
Pandora însemnând în limba greacă ***cu toate darurile.*** Sperăm să fie cele bune,
deşi **speranţa** a rămas singură în **cutia Pandorei**”
Autorul Supermatematicii

CAPITOLUL XVII

TRILOBE

0. REZUMAT

Trilobele ca şi quadrilobele (cvadrilobele) sunt curbe **supermatematice** (**FSM**) închise, obţinute cu ajutorul funcţiilor **supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE).**

Prin combinarea **FSM-CE cosinus excentric** **X** = **$cex_{1,2}$[θ, S(± s, 0)]** de excentricitate liniară numerică **± s** cu **sinus excentrice** **Y** = **$sex_{1,2}$[θ, S(∓s, 0)]** de excentru cu semne schimbate **∓ s**, dar de aceeaşi excentricitate unghiulară $\varepsilon_{cos} = \varepsilon_{sin}$, sau, ceea ce este acelaşi lucru, de aceeaşi excentricitate liniară numerică **± s**, dar de excentricitate unghiulară diferită ca, de exemplu, $\varepsilon_{cos} = 0$ şi $\varepsilon_{sin} = \pi$ sau invers $\varepsilon_{cos} = \pi$ şi $\varepsilon_{sin} = 0$.

1. TRILOBE CENTRICE DE EXCENTRE PUNCTE FIXE ÎN PLAN

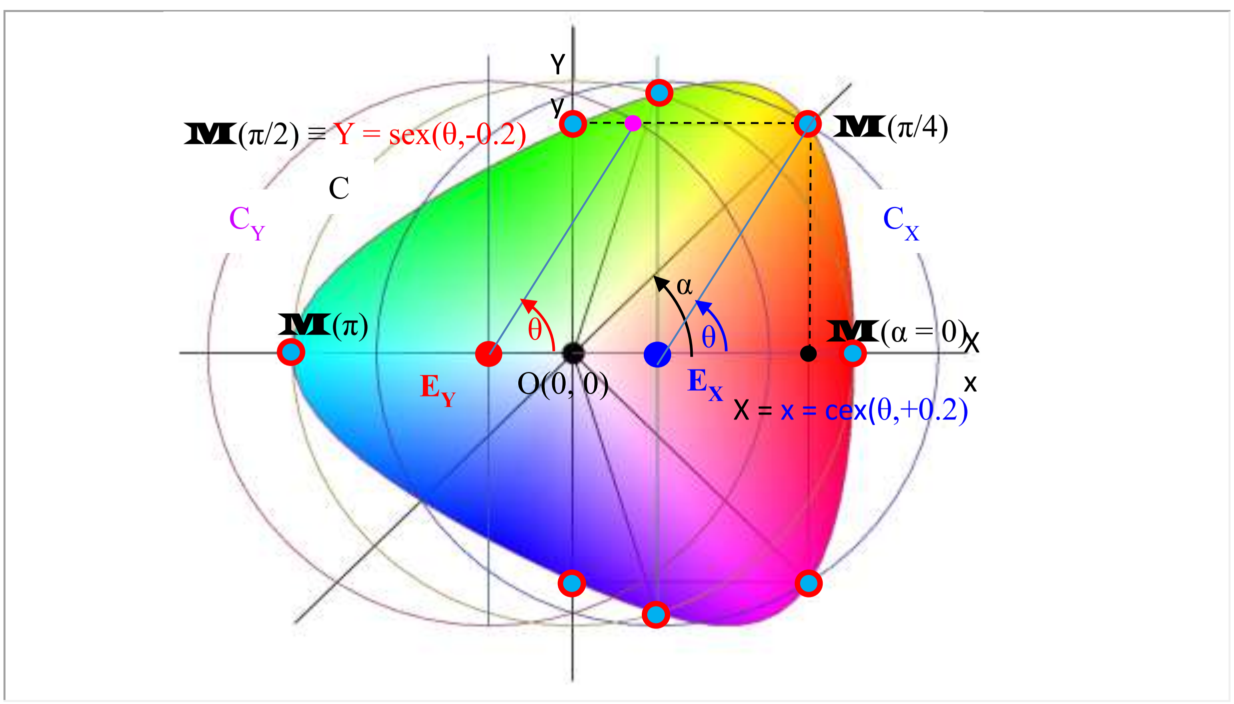
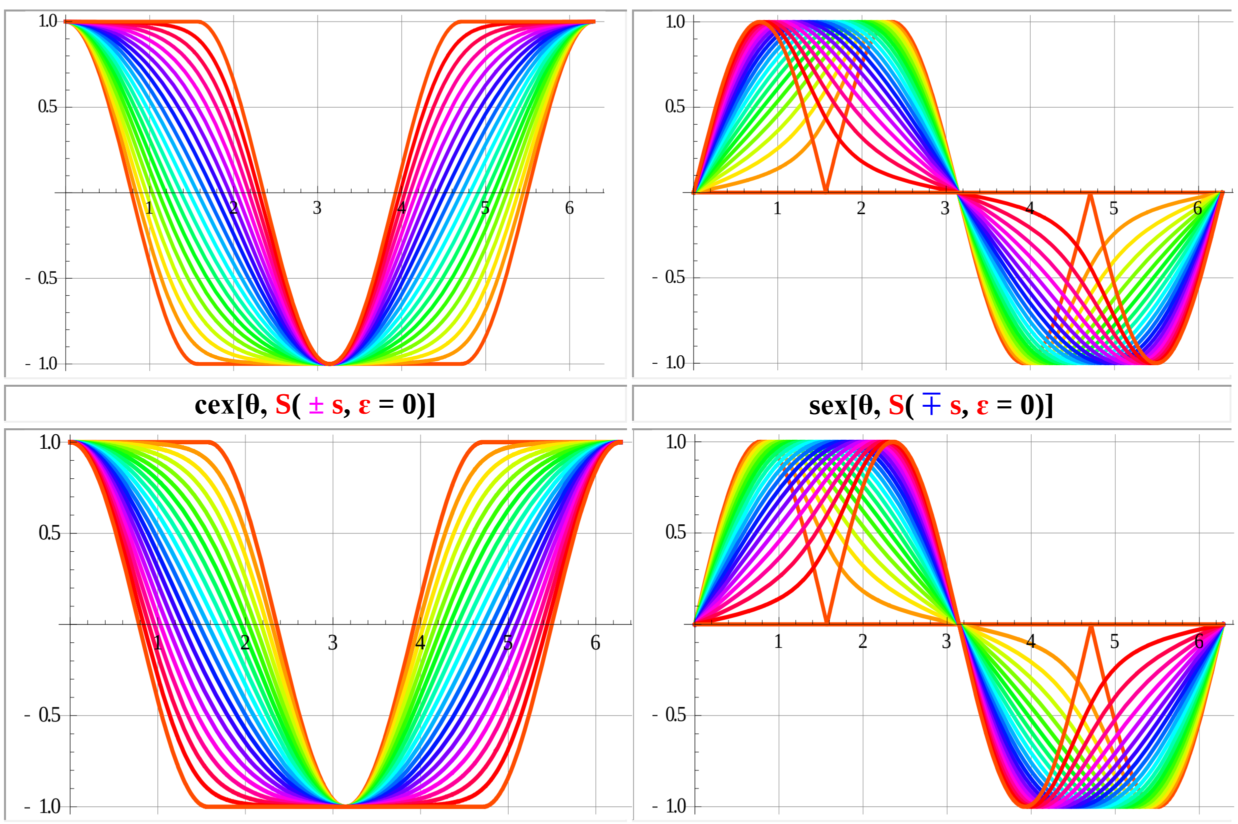


Fig.1,a Triloba centrică (**TC**) de ecuaţii parametrice **M** $\begin{cases} X(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{S}) = cex(\theta, s = +0{,}2) \\ Y(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{S}) = cex(\theta, s = -0{,}2) \end{cases}$

O trilobă centrică de excentricitate **s = ± 0,2** este prezentată în **figura 1,a**, iar în **figura 1,b** sunt prezentate familii de **funcţii supermatematice** circulare excentrice (**FSM-CE**) de excentre interioare discului **cercului unitate centric** C[O(0, 0), R = 1], adică, de excentricităţi **s^2 <1,** sau **s ∈ ± [-1, 1]** de semne contrarii, care stau la baza definirii funcţiilor supermatematice trilobe centrice (**FSM-TC**).



cex[θ, S(± s, ε = 0)] | **sex[θ, S(∓ s, ε = 0)]**

cex[θ, S(∓ s, ε = 0)] | **sex[θ, S(± s, ε = 0)]**

Fig 1,b Funcţiile supermatematice circulare excentrice **(FSM-CE)** care sunt coordonatele

$$\mathbf{M}\begin{cases} X(\alpha,S) = cex[\theta, S(\pm s, \varepsilon = 0)] \\ Y(\alpha,S) = sex[\theta, S(\pm s, \varepsilon = 0)] \end{cases}$$

trilobelor şi, totodată, ale **funcţiile supermatematice trilobice centrice FSM-TE**

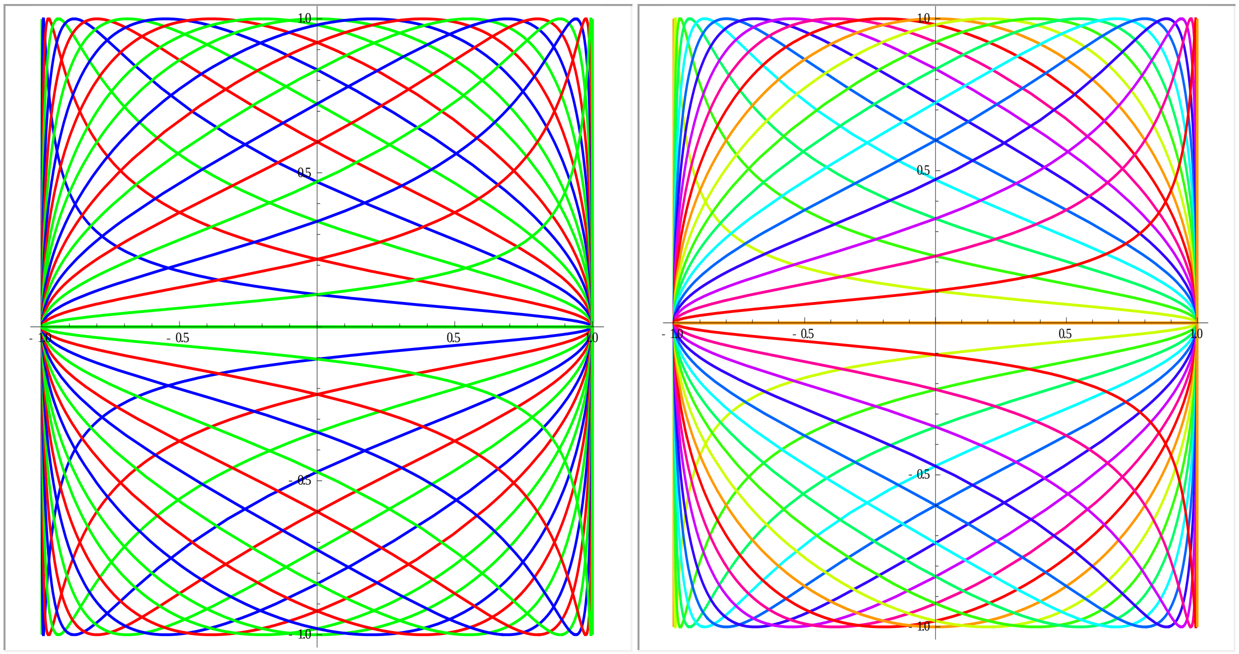
www.SuperMathematica.org | www.SuperMathematica.com | www.SuperMathematica.Ro

Familii de **trilobe centrice** pentru excentricităţi de module subunitare şi de semne opuse, pentru coordonatele lor **X(α)** = $\boldsymbol{cex}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{S}(\pm\, \boldsymbol{s}, \varepsilon = \mathbf{0})]$ şi, respectiv **Y(α)** = $\boldsymbol{sex}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{S}(\pm\, \boldsymbol{s}, \varepsilon = \mathbf{0})$ sunt prezentate în **figura 2**. Unghiul **α** este unghiul la centrul O(0, 0) iar unghiurile $\boldsymbol{\theta}$ sunt unghiurile la excentrele $\mathbf{S_x}$, şi respectiv, $\mathbf{S_y}$ adică a acelor excentre, aici simetric dispuse pe axa Ox faţă de originea **O(0,0),** care determină coordonatele **X(α)** şi, respectiv, **Y(α)** ale trilobelor.

Există şi posibilitatea definirii trilobelor pe cercuri de raze diferite ca şi a trilobelor de excentre nesimetrice faţă de originea **O**.

Pentru a obţine grafice ale **FSM-TC** cât mai clare, în **figura 3** acestea sunt prezentate individual.

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]], Sin[x + ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}, PlotStyle → Table[{AbsoluteThickness[2], Hue[n/m]}, {n, 1,10}, {m, 1,10}]]]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]], Sin[x + ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10, 0}], {x, 0,2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]], Sin[x + ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, 0, 10}], {x, 0,2Pi}]]

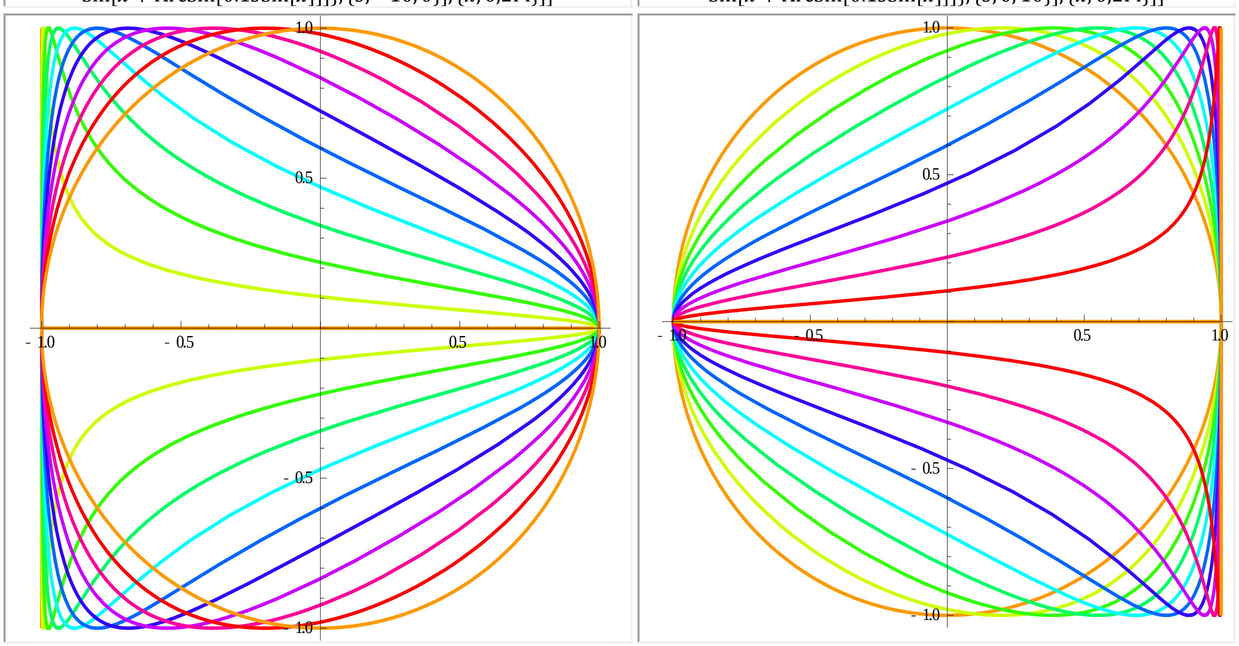


Fig. 2 **Trilobe** centrice de ecuaţii parametrice **M** $\begin{cases} X = cex[\theta, \boldsymbol{S}(\text{s} \in \pm[-1,1]; \varepsilon = 0)] \\ Y = cex[\theta, \boldsymbol{S}(\text{s} \in \mp[-1,1]; \varepsilon = 0)] \end{cases}$

www.SuperMathematica.org | www.SuperMathematica.com | www.SuperMathematica.Ro

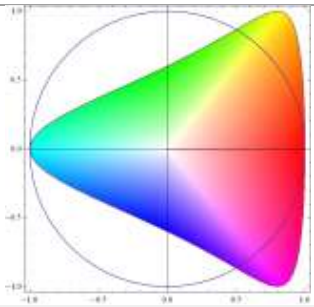
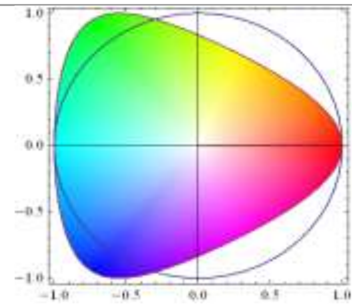
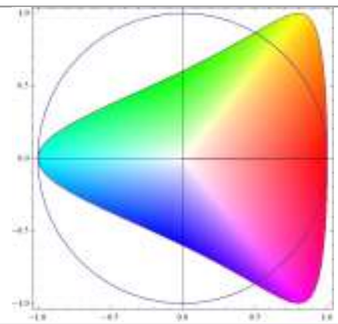
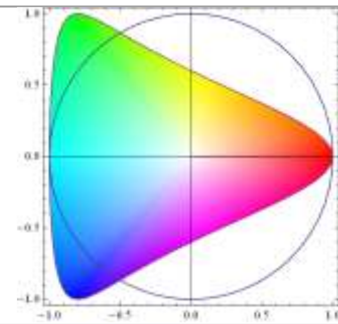
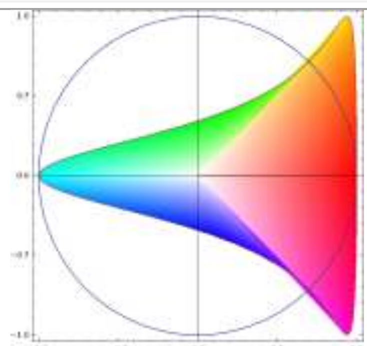
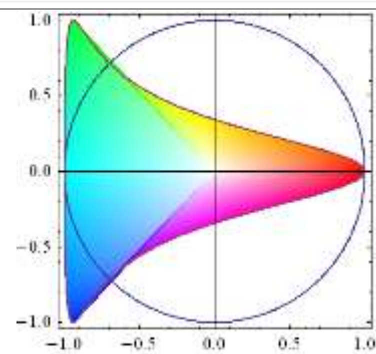
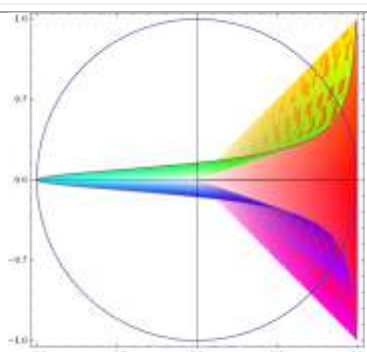
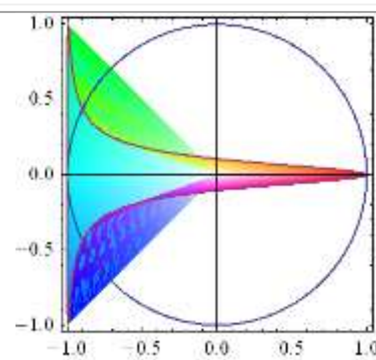
s = ± 0.3	s = ∓ 0.3
	
s = ± 0.5	s = ∓ 0.5
	
s = ± 0.7	s = ∓ 0.7
	
s = ± 0.9	s = ∓ 0.9
	

Fig. 3 Graficele individuale ale **trilobelor** centrice

ParametricPlot[{{u, 3}, {3, u}, {u, 3Cos[u − ArcSin[0.3Sin[u]]] + 3}, {3Sin[u + ArcSin[0.3Sin[u]]] + 3, u}, {3vCos[u − ArcSin[0.3Sin[u]]] + 3,3vSin[u + ArcSin[0.3Sin[u]]] + 3}}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,1}]

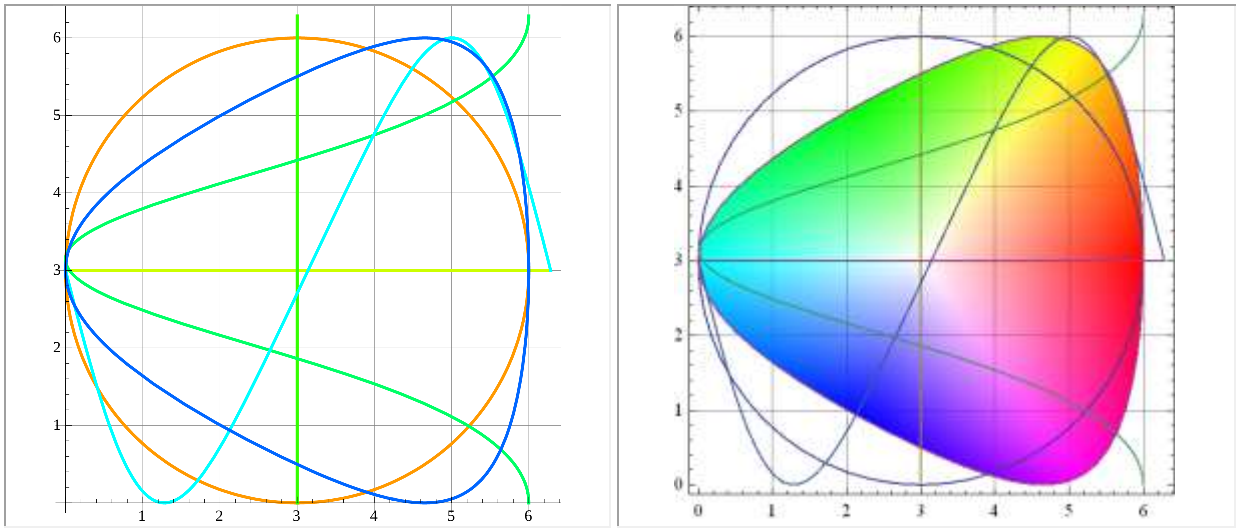
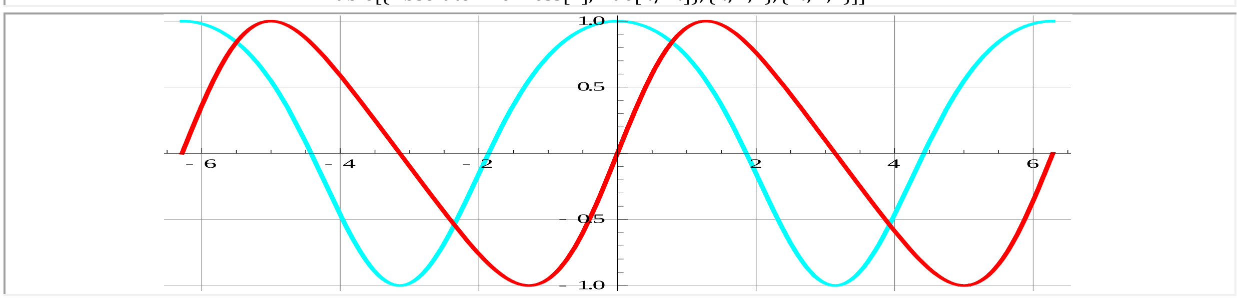


Fig. 4,a **Triloba centrică** de **s = ± 0,3** şi graficele **FSM-CE** **X = cex[θ, S(s = + 0,3, ε = 0)]** (rotită) şi **Y = sex**[θ, S(s = – 0,3, ε = 0)] (cu semn schimbat) care o generează

Plot[{{Cos[u − ArcSin[0.3Sin[u]]]}, {Sin[u + ArcSin[0.3Sin[u]]]}}, {u, −2Pi, 2Pi}, GridLines → Automatic, PlotStyle → Table[{AbsoluteThickness[2], Hue[n/m]}, {n, 1,2}, {m, 1,2}]]



Plot[{{Cos[u − ArcSin[0.6Sin[u]]]}, {Sin[u + ArcSin[0.6Sin[u]]]}}, {u, −2Pi, 2Pi}, GridLines → Automatic, PlotStyle → Table[{AbsoluteThickness[2], Hue[n/m]}, {n, 1,8}, {m, 1,8}]]

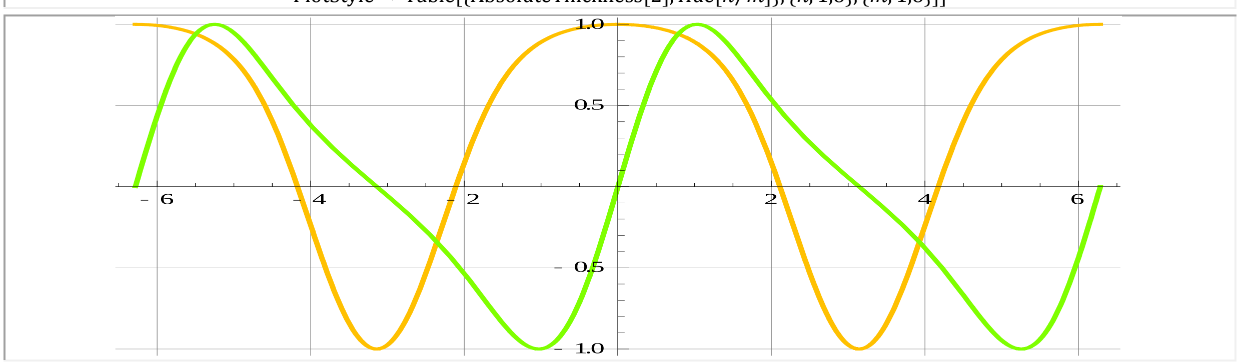


Fig. 4,b **Funcţii trilobe centrice** de **s = ± 0,3** şi graficele **FSM-CE** **X = cex[θ, S(s = + 0,3, ε = 0)]** şi **Y = sex**[θ, S(s = – 0,3, ε = 0)] care o generează

Pentru a se putea urmări şi verifica generarea unei **trilobe** oarecare, aceasta a fost prezentată împreună cu coordonatele sale în **figura 4,a**. Deoarece coordonata sau abscisa **X** a trilobei este dată de **FSM-CE X = cex[θ, S(s = + 0,3, ε = 0)]**, aceasta a fost prezentată rotită cu – π/2, pentru ca valoarea lui **X** sa fie orientată pe direcţia abscisei **x**.

Ordonata **Y** este prezentată cu semn schimbat **Y = – sex**[θ, S(s = – 0,3, ε = 0)]. În acest mod, se observă în cadranul I, că cele două funcţii X şi Y, sunt coordonatele trilobei centrice, deoarece se intersectează între ele chiar pe curba sau pe conturul / graficului **trilobei centrice**.

În aceleaşi figuri a fost prezentat şi cercul unitate / trigonometric. Deoarece el este cel care generează coordonatele acestei trilobe, care sunt în acelaşi timp / totodată **funcţii trilobe centrice** şi **FSM-CE** cosinus şi **sinus circulare excentrice**, ea ar putea fi denumită şi **trilobă centrică unitate**.

În **figura 4,b** sus ▲ sunt prezentate **funcţiile trilobe centrice** care au determinat **triloba centrică** de **s = ± 0,3** din **figura 4,a** şi de excentricităţi **s = ± 0,6** jos ▼.

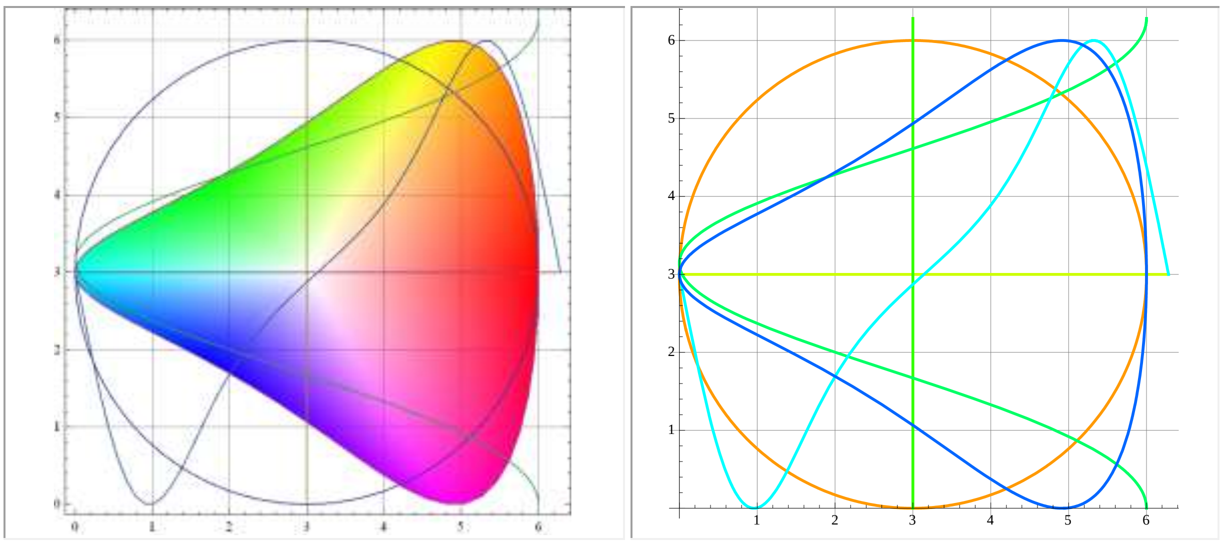


Fig. 5,a **Triloba centrică** de s_x =+ **0,1** şi graficele **FSM-CE X = cex[θ, S(s_x = + 0,1, ε = 0)]** (rotită) şi s_y **=– 0,7→ Y = sex**[θ, S(s = – 0,7, ε = 0)] (cu semn schimbat) care o generează

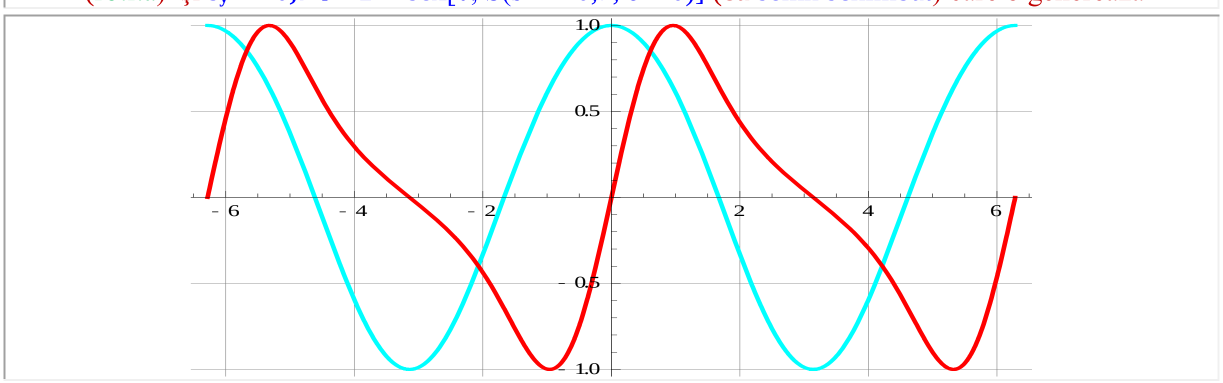


Fig. 5,b **Funcţii trilobe centrice** de s_x = **+ 0,1** şi graficele **FSM-CE X = cex[θ, S(s = + 0,1, ε = 0)]** şi **Y = sex**[θ, S(s = – 0,7, ε = 0)] care o generează

www.SuperMathematica.org | www.SuperMathematica.com | www.SuperMathematica.Ro

Trilobele centrice cât şi cele excentrice pot fi şi de excentricităţi diferite, nu numai ca semn ci şi ca valoare. Astfel, în **figura 5,a** sunt prezentate trilobe centrice de $s_x = + 0{,}1$ şi $s_y = – 0{,}7$, iar în **figura 5,b** **FSM–CE** şi, totodată, funcţii trilobe centrice care le generează.

Interesant este faptul că **funcţiile supermatematice circulare excentrice** generează cercuri, dacă în ecuaţiile parametrice ale lui X şi Y au aceeaşi excentricitate liniară numerică **s** şi aceeaşi excentricitate unghiulară ε, sau, altfel spus, dacă sunt de acelaşi excentru **S**(**s**, ε), aşa cum se poate observa în **figura 6**, în care s-a dat o deplasare a cercurilor pe direcţia x pentru a se evita suprapunerea lor.

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.1s, Sin[−ArcSin[0.1sSin[t]]]}}, {s, −10,0}], {t, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.1s, Sin[−ArcSin[0.1sSin[t]]]}}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]

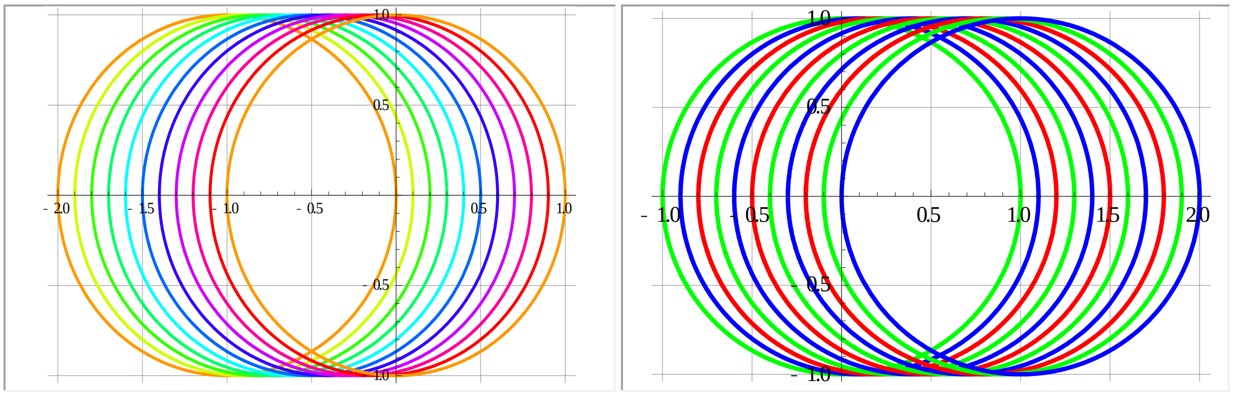
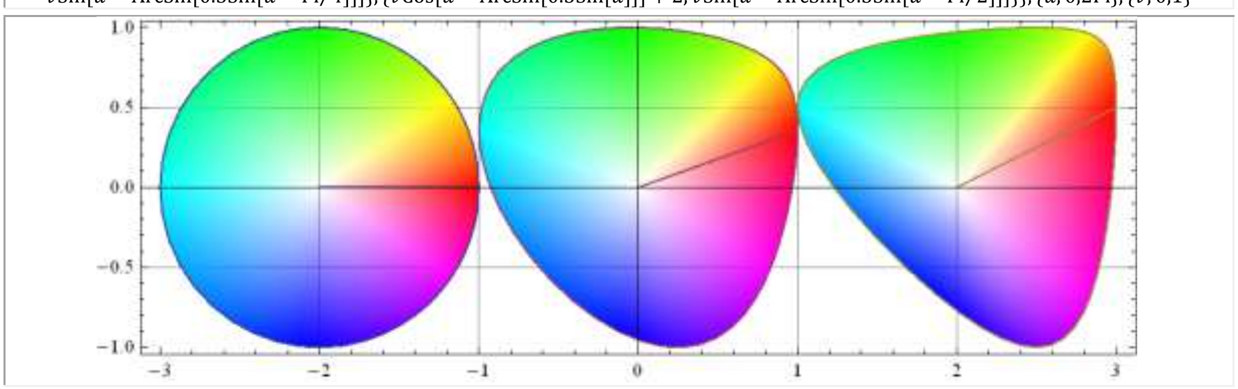


Fig. 6 **Trilobe degenerate in cercuri** de aceleaşi excentre
Sx ≡ Sy: $s_x = s_y$ şi $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, pentru **s ∈ [0, 1]**

Forma trilobelor se modifica şi în funcţie de valoarea excentricităţii unghiulare ε, a unui sau a ambelor excentre. Astfel, în **figura 7,a** excentrul $S_y(s_y; \varepsilon_y)$ oscilează pe axa y,în intervalul (+ 0,5; – 0.5) şi sunt prezentate trilobe de $s_x = s_y = 0{,}5$ cu diverse excentricităţi unghiulare $e_x = 0$ şi $\varepsilon_y \in [0, 3Pi/2]$.

Variaţia excentricităţii pe axa x este prezentată în **figura 7,b**.

ParametricPlot[{{vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]] − 2, vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u]]]}, {vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]], vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u − Pi/4]]]}, {vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]] + 2, vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u − Pi/2]]]}}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,1}]



BUPT

ParametricPlot[{{vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]] − 2, vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u − 3 Pi/2]]]}, {vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]], vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u − Pi]]]}, {vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]] + 2, vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u − 3 Pi/2]]]}}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,1}]

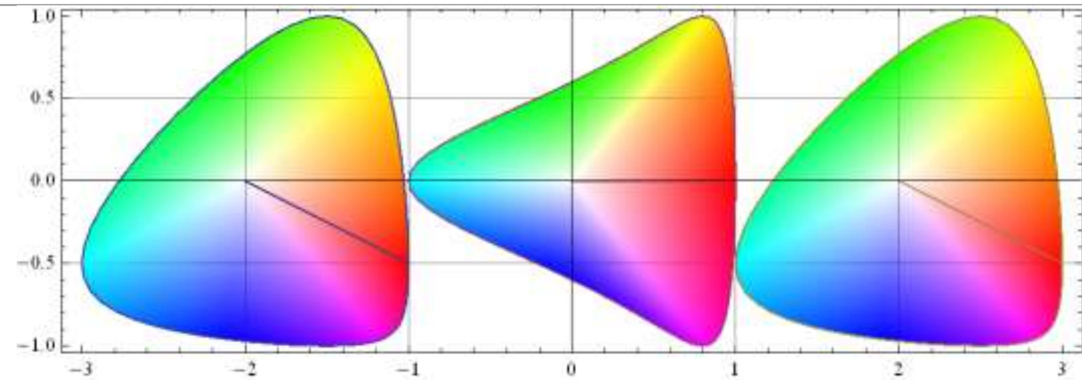
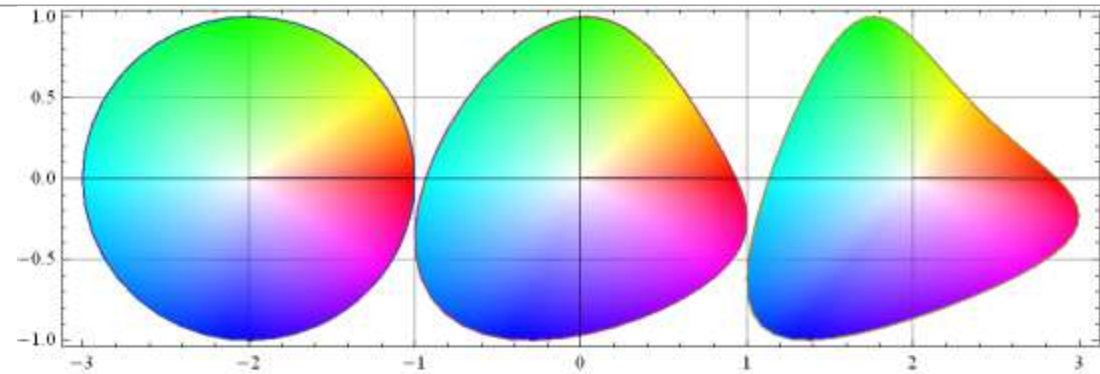


Fig. 7,a Trilobe de acelaşi excentru liniar numeric $s_x = s_y = 0,5$
şi de excentricităţi unghiulare diverse: $\boldsymbol{\varepsilon_x = 0}$ **şi** $\boldsymbol{e_y \in [0, 3\pi/2]}$

ParametricPlot[{{vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]] − 2, vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u]]]}, {vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u − Pi/4]]], vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u]]]}, {vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u − Pi/2]]] + 2, vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u]]]}}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,1}]



ParametricPlot[{{vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u − 3 Pi/4]]] − 2, vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u]]]}, {vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u − Pi]]], vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u]]]}, {vCos[u − ArcSin[0.5Sin[u − 3 Pi/2]]] + 2, vSin[u − ArcSin[0.5Sin[u]]]}}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,1}]

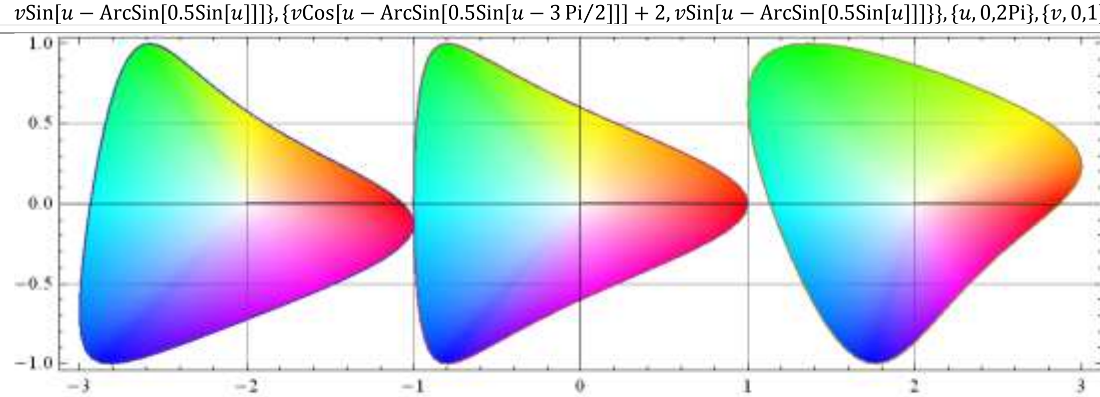


Fig. 7,b Trilobe de acelaşi excentru liniar numeric $s_x = s_y = 0,5$
şi de excentricităţi unghiulare diverse: $\boldsymbol{\varepsilon_y = 0}$ **şi** $\boldsymbol{e_x \in [0, 3\pi/2]}$

www.SuperMathematica.org	www.SuperMathematica.com	www.SuperMathematica.Ro

2.TRILOBELE CENTRICE DE EXCENTRE PUNCTE MOBILE ÎN PLAN

Aşa cum s-a putut observa, **trilobele** sunt curbe plane noi, închise, dependente de două puncte din plan, denumite **excentre** (ex-centre): primul **S_x** care determină abscisa X a trilobei şi al doilea **S_y** care determină ordonata Y a trilobei. În exemplele anterioare, aceste puncte erau fixe în plan. Dacă unul sau ambele excentre evoluează în plan după anumite legi, adică sunt puncte mobile, atunci trilobele sunt de excentre mobile. Un astfel de exemplu este prezentat în **figura 7,a** şi **7,b**.

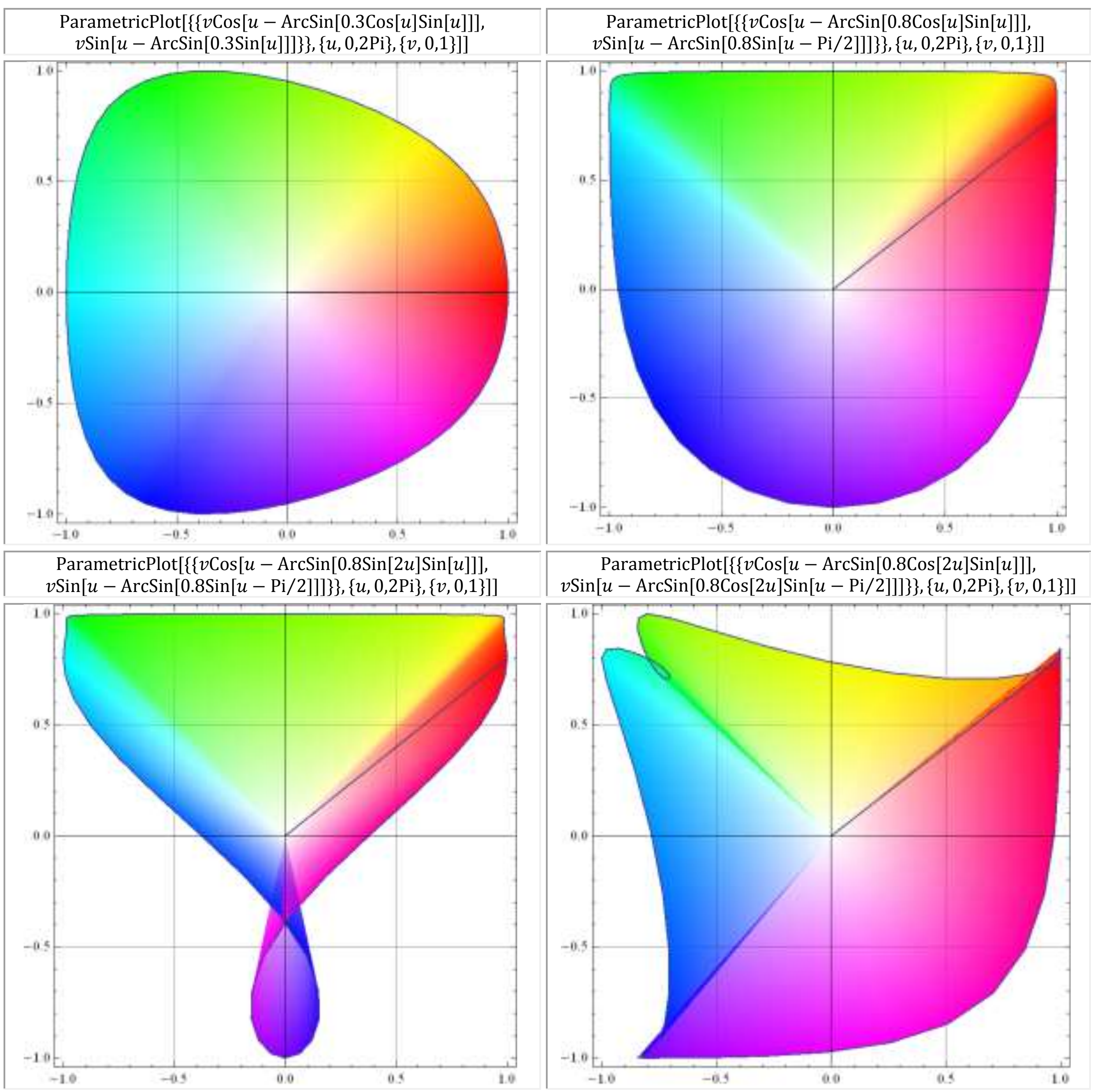


Fig.7,a Trilobe de excentre mobile

ParametricPlot[{{vCos[u − ArcSin[0.8Sin[u]]], vSin[u − ArcSin[0.8Cos[2u]Sin[u]]]}}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,1}]]	ParametricPlot[{{vCos[u − ArcSin[0.2Sin[u]^2]], vSin[u − ArcSin[0.9Cos[u]Sin[u − Pi/2]]]}}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,1}]]

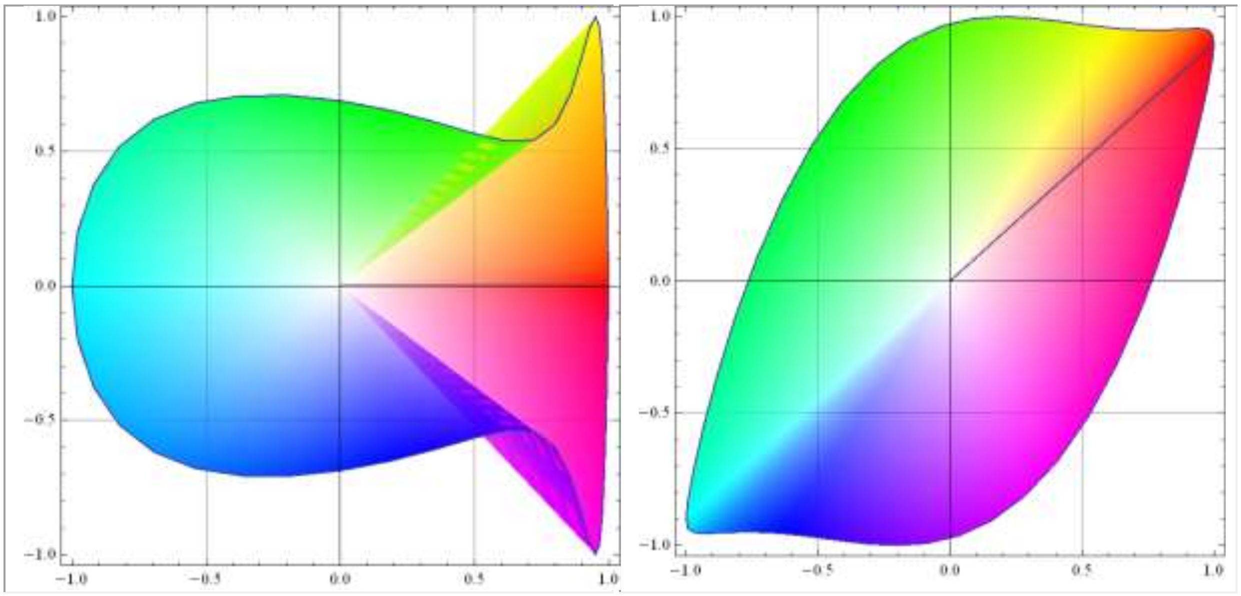


Fig. 7,b Trilobe de excentre mobile

www.SuperMathematica.org www.SuperMathematica.com www.SuperMathematica.Ro

Dacă funcţiile beta excentrice bex(θ) = β(θ) = arcsin[s.sin(θ–ε)] sunt de arce multiple în ecuaţiile parametrice ale trilobelor se obţin curbele **trilobe** închise reprezentate în **figura 8**.

ParametricPlot[{{Cos[u − ArcSin[0.6Sin[3u]]], Sin[u + ArcSin[0.3Sin[u]]]}, {Cos[u + ArcSin[0.5Sin[3u]]], −Sin[u + ArcSin[0.7Sin[u]]]}, {Cos[u − ArcSin[0.1Sin[2u]]], Sin[u + ArcSin[0.3Sin[4u]]]}}, {u, 0,2Pi}	ParametricPlot[{{Cos[u − ArcSin[0.1Sin[3u]]], Sin[u + ArcSin[0.4Sin[u]]]}, {Cos[u + ArcSin[0.9Sin[3u]]], −Sin[u + ArcSin[0.4Sin[u]]]}, {Cos[u − ArcSin[0.1Sin[2u]]], Sin[u + ArcSin[0.8Sin[4u]]]}}, {u, 0,2Pi}

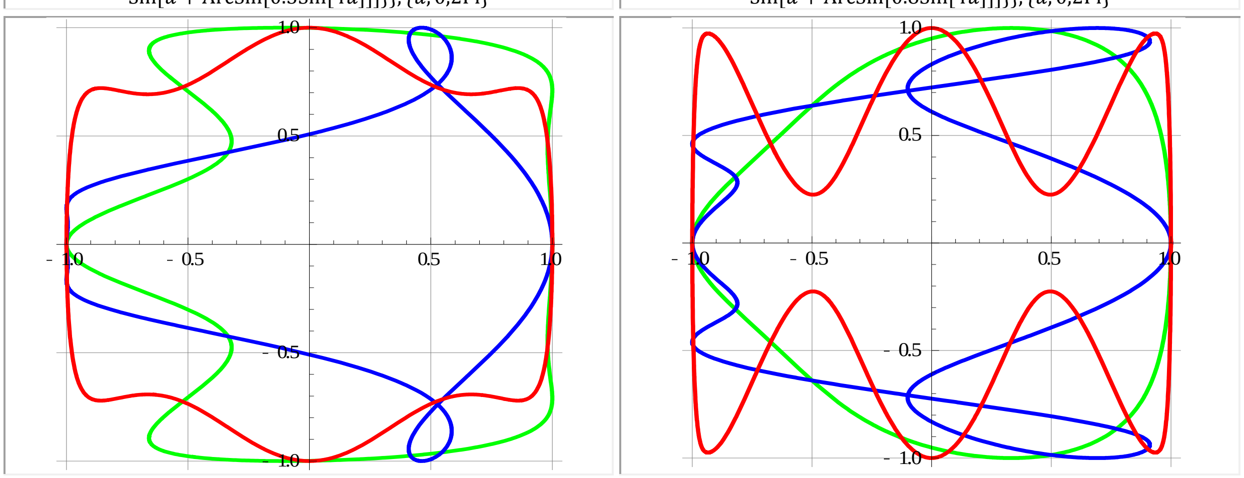


Fig. 8 Trilobe de arce multiple

www.SuperMathematica.org www.SuperMathematica.com www.SuperMathematica.Ro

3 TRILOBE IN 3D DE EXCENTRE FIXE

Trilobele se obţin adăugând la ecuaţiile parametrice ale trilobelor **2D** pe **Z = s_x** sau **Z = s_y** sau combinaţii ale acestora. Astfel, ele pot constitui şi o imagine a transformării continue a unui cerc (triloba de s_x= 0 şi / sau s_y = 0) într-o altă figură geometrică, de obicei alcătuită din segmente de linii drepte, care pot fi diverse poligoane normale sau degenerate, ultimul caz formând o figură geometrică în formă de **T**, aşa cum se poate observa în **figura 8**, fiecare obiect **3D** fiind reprezentat în câte 2 poziţii.

ParametricPlot3D[{Cos[u − ArcSin[0.1sSin[u]]], Sin[u + ArcSin[0.1sSin[u]]],0.2s}, {s, 0,10}, {u, 0,2Pi}

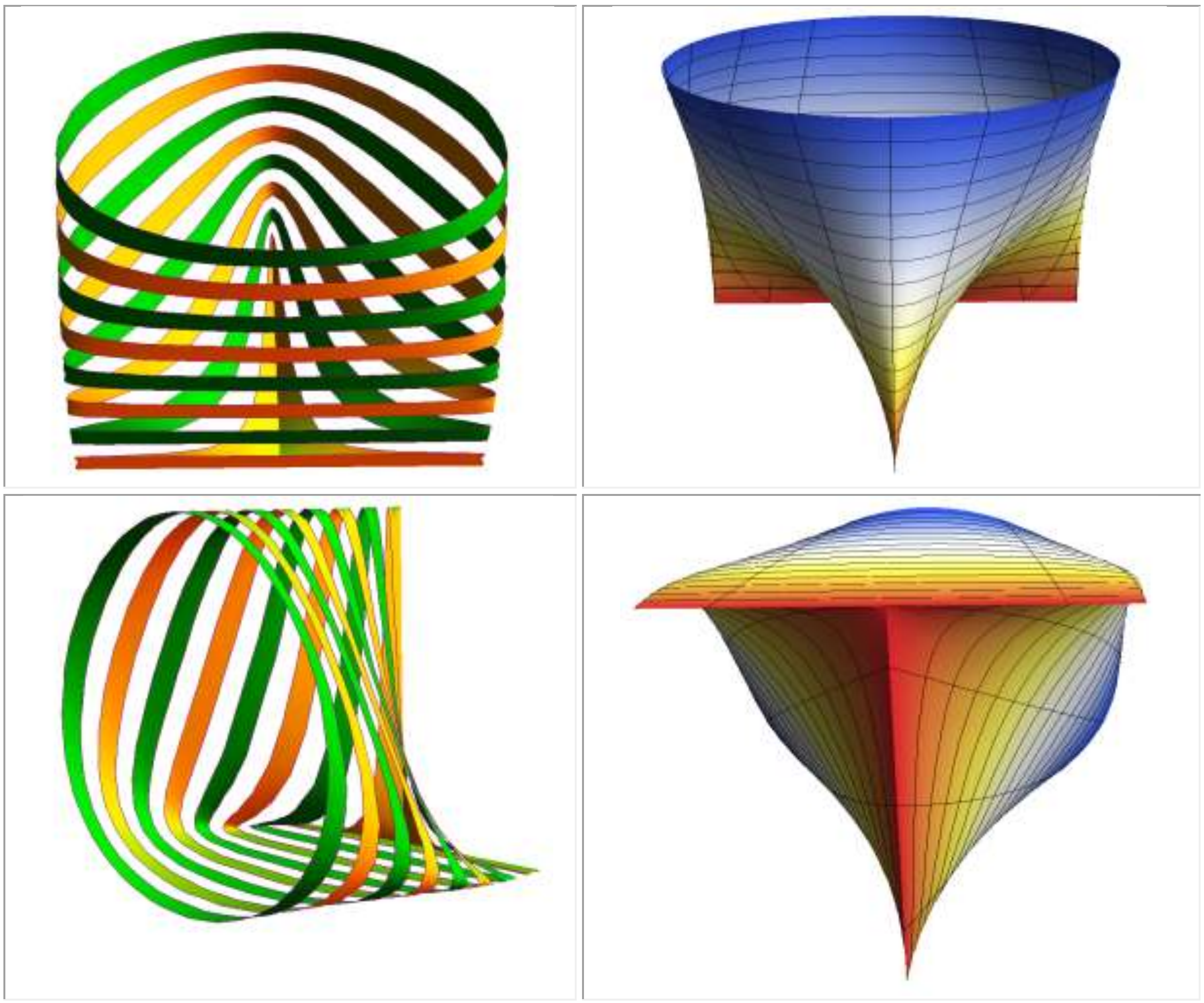
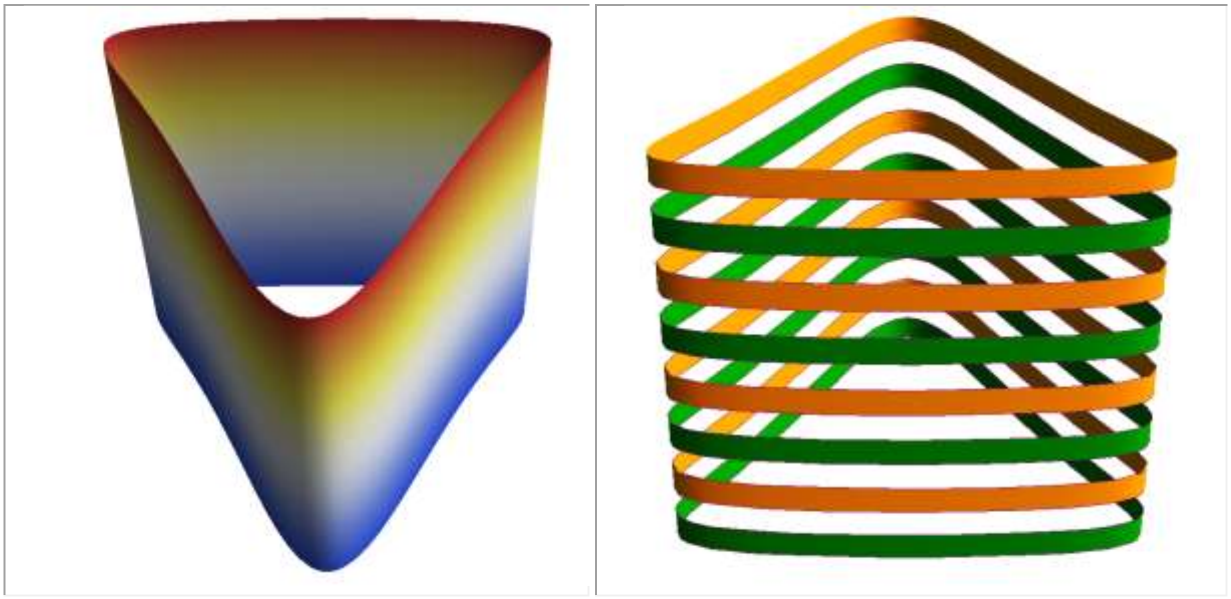


Fig. 8 **Trilobe centrice în 3D** de **s_x = + 0,1s** şi **s_y = – 0,1s,** pentru **s ∈ [0, 1]**
sau **transformarea continuă** a cercului în **T**

www.SuperMathematica.org | www.SuperMathematica.com | www.SuperMathematica.Ro

```
ParametricPlot3D[{Cos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]], Sin[u + ArcSin[0.5Sin[u]]], 0.2s}, {s, 0,10}, {u, 0,2Pi}]]
```



```
ParametricPlot3D[{(1 − 0.1s)Cos[u − ArcSin[0.5Sin[u]]], (1 − 0.1s)Sin[u
    + ArcSin[0.5Sin[u]]], 0.2s}, {s, 0,10}, {u, 0,2Pi}]]
```

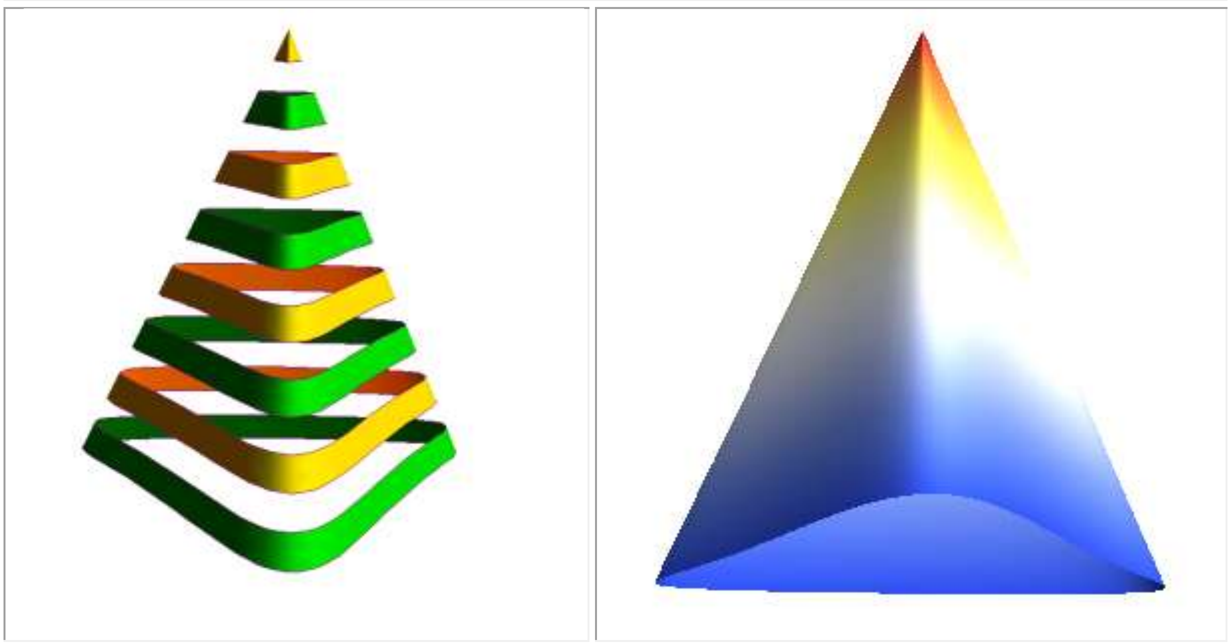


Fig. 9 **Cilindri trilobi centrici ▲** şi **piramide trilobe centrice▼**
de s_x **= + 0,3** şi s_y **= – 0,3,** pentru **s ∈ [0, 1]**

În **figura 10** sunt prezentate în 3D şi în 3 vederi trilobe speciale de arce multiple. Ecuaţiile tuturor trilobelor sunt trecute deasupra figurilor prezentate.

ParametricPlot3D[{(1 − 0.1s)Cos[u − Cos[u]ArcSin[0.5Sin[2u]]], (1 − 0.1s)Sin[u + Sin[u]ArcSin[0.5Sin[2u]]],0.2s}]]	ParametricPlot3D[{(1 − 0.1s)Cos[u − Cos[2u]ArcSin[0.5Sin[2u]]], (1 − 0.1s)Sin[u + Sin[2u]ArcSin[0.5Sin[2u]]],0.2s}, {s, 0,10}, {u, 0,2Pi}

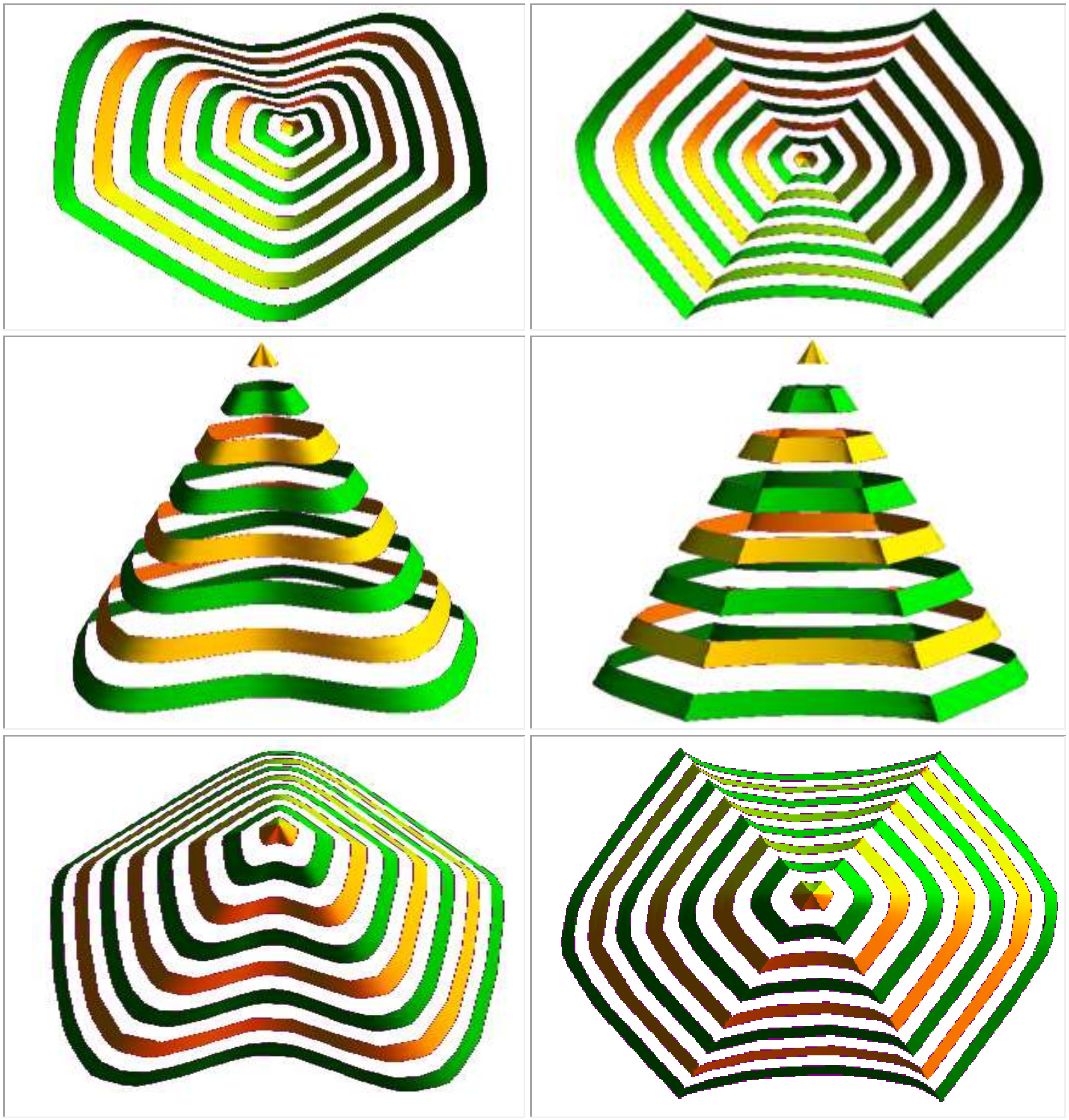


Fig. 10 **Piramide** trilobe centrice de arce multiple în 3 vederi

www.SuperMathematica.org	www.SuperMathematica.com	www.SuperMathematica.Ro

A N E X Ă LA MOTTO : Pandora, Cutia Pandorei

(Dupa : http://ro.wikipedia.org/wiki/Pandora)

Pandora (în limba greacă Πανδώρα) a fost în mitologia greacă prima femeie de pe pământ. Ea a fost creată de zeii care, geloși pe Zeus care crease bărbații, au hotarât să creeze o femeie perfectă.

Hefaistos, zeul meșteșugăritului, folosind apă și pământ, i-a dat corp și chip. Ceilalți zei au înzestrat-o cu multe talente:Afrodita i-a dat frumusețea, Minerva înțelepciunea, Apollo talentul muzical, Hermes puterea de convingere.

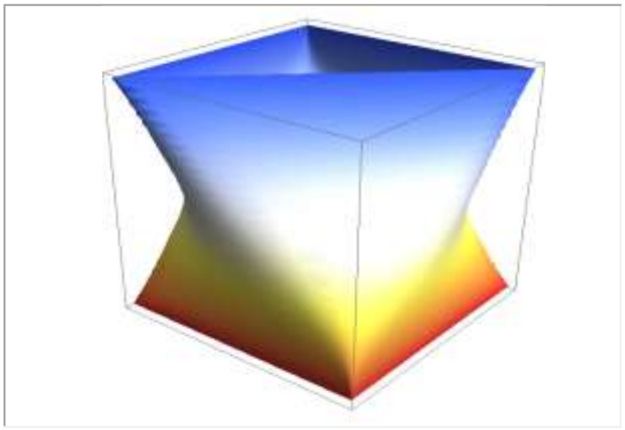
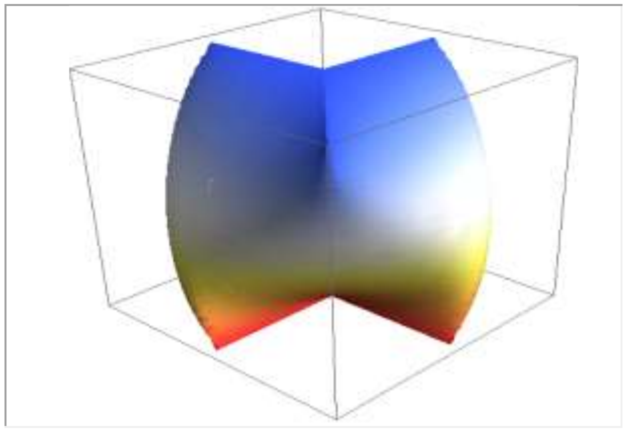
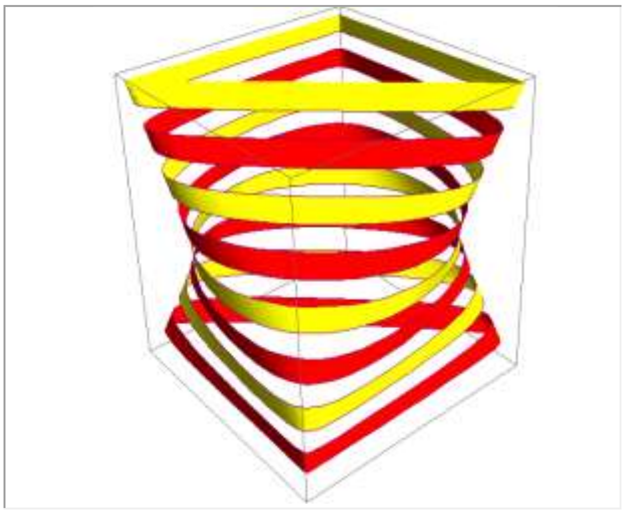
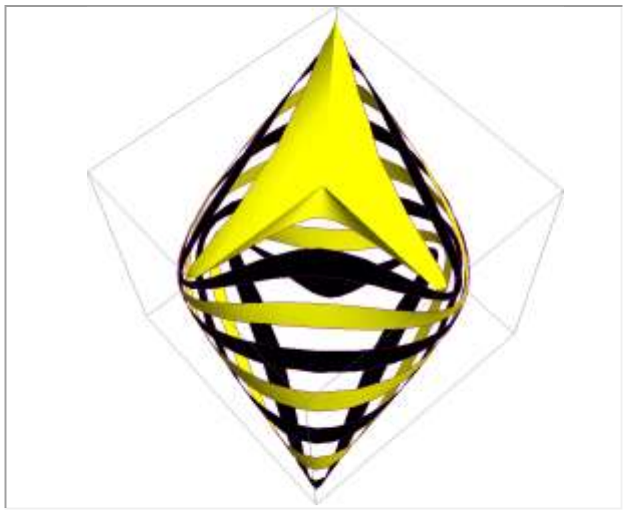
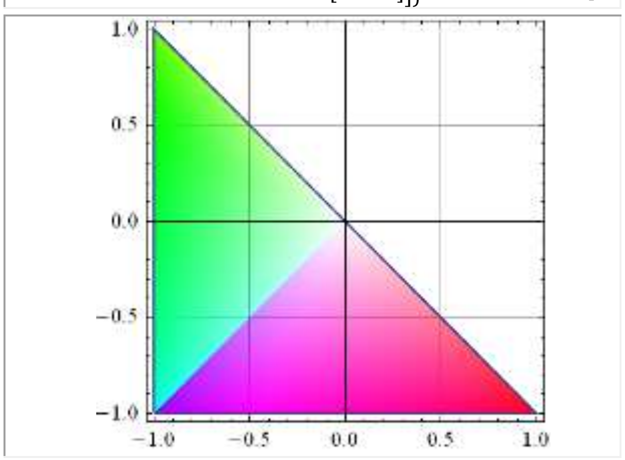
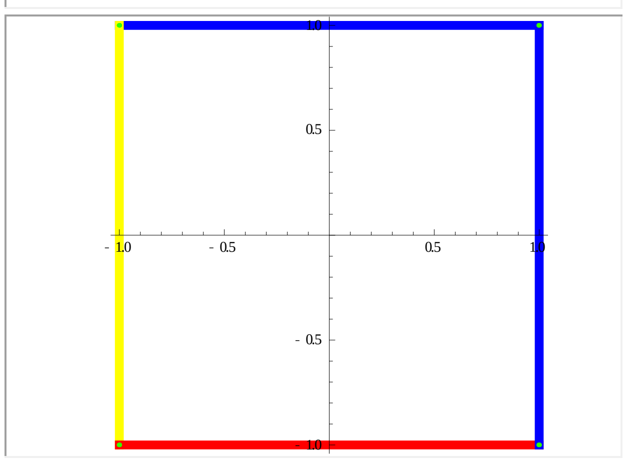
De aici și numele său, **Pandora** însemnând în limba greacă ***cu toate darurile.***

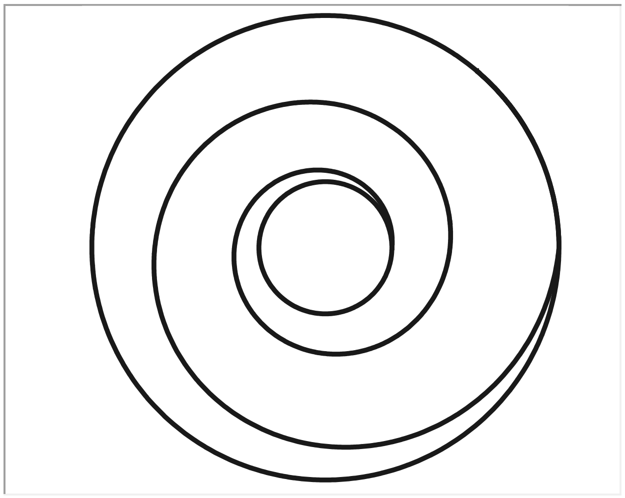
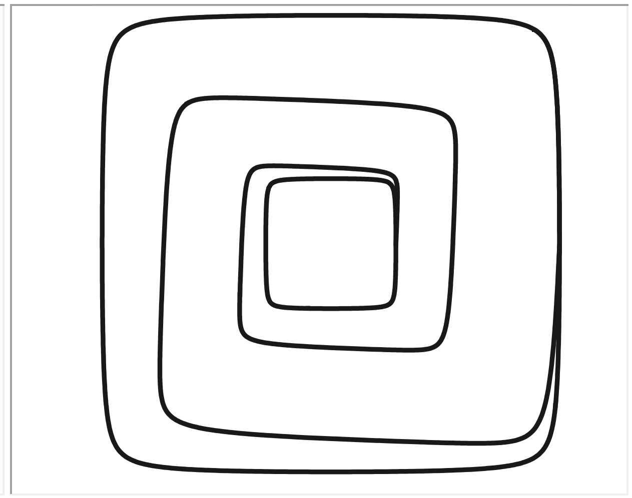
PANDORA

(tablou de Jules Joseph Lefebvre, 1882)

După ce Prometeu l-a imitat pe **Zeus** creând el însuși oameni perfecți din lut, oameni cărora le-a dat viață cu razele soarelui și cărora le-a oferit focul furat de pe Olimp, **Zeus** s-a simțit jignit de îndrăzneala acestuia și a decis să se răzbune. El l-a pus pe Hefaistos să creeze o cutie în care zeii au depus toate relele: cruzimea (Ares), aroganța (Poseidon), suferința/durerea (Hefaistos), vanitatea (Hermes), lăcomia și gelozia Herei, pofta trupească (Afrodita), ura (Artemis), lăcomia (Atena), bolile (Apollo), lenea (Dionis), tristețea (Demetra), teama, înșelăciunea și subjugarea muritorilor de către zei (**Zeus**) și, nu în cele din urmă, suferința și moartea (Hades). Doar Hestia (sau poate mai probabil **Atena**, zeița **înțelepciunii**) s-a deosebit de ceilalți zei depunând în această cutie **Speranța**.

Într-un fals acces de bunătate, **Zeus** i-a oferit-o lui **Prometeu** pe **Pandora** drept soție și cutia (***Cutia Pandorei***) drept cadou. Simțind că la mijloc este un șiretlic, **Prometeu** a refuzat cadourile. **Zeus** s-a îndreptat apoi către Epimeteu, fratele lui Prometeu, care, subjugat de frumusețea **Pandorei**, a acceptat-o de soție. Împins de firea sa curioasă, Epimeteu a deschis cutia și astfel ***toate relele*** din interior au scăpat și s-au împrăștiat pe pământ. Înfricoșat, s-a grăbit să închidă capacul, neobservând că singurul lucru care rămăsese pe fundul cutiei era ***Speranța***.

ParametricPlot3D[{Cos[u + ArcSin[0.1sSin[u]]], Sin[u − ArcSin[0.1sCos[u]]], 0.1s}, {u, 0,2Pi}, {s, −10,10}]	ParametricPlot3D[{Cos[u − ArcSin[0.1sCos[u]]], Sin[u − ArcSin[0.1sSin[u]]],0.1s}, {u, 0,2Pi}, {s, −10,10}]
	
	
ParametricPlot[{vCos[u + ArcSin[Sin[u]]], vSin[u − ArcSin[Cos[u]]]}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,1}]	ParametricPlot[{Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2], Sin[t]/Sqrt[1 − (Cos[t])^2]}, {t, 0,2.01Pi}]
	

ParametricPlot[{{0.3Cos[t]Exp[0.2(0.25t − ArcSin[1Sin[0.25t]])] 0.3Sin[t]Exp[0.2(0.25t − ArcSin[1Sin[0.25t]])]}}, {t, 0,26}]	ParametricPlot[{{(0.3 Cos[t]/Sqrt[1 − (0.9Sin[t])^2])Exp[0.2(0.25t − ArcSin[1Sin[0.25t]])], (0.3 Sin[t]/Sqrt[1 − (0.9 Cos[t])^2])Exp[0.2(0.25t − ArcSin[1Sin[0.25t]])]}}, {t, 0,26}]
	

www.SuperMatematica.Ro www.SuperMathematica.org www.SuperMathematica.com

4. BIBLIOGRAFIE LA CAP. XVII

1	**Şelariu Mircea Eugen**	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**	Editura POLITEHNICA Timişoara, 2007
2	**Şelariu Mircea Eugen**	**SUPERMATEMATICA.FUNDAMENTE Editia a 2-a Vol. I**	Editura POLITEHNICA Timişoara, 2012
3	**Şelariu Mircea Eugen**	**SUPERMATEMATICA.FUNDAMENTE Editia a 2-a Vol. II**	Editura POLITEHNICA Timişoara, 2012
4	**Şelariu Mircea Eugen**	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE**	Com. I Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, Timişoara , 1978, pag.101...108.
5	**Şelariu Mircea Eugen**	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE ŞI EXTENSIA LOR**	Bul .St.şi Tehn. al I.P. ”TV” Timişoara, Seria Mecanică, Tomul 25(39), Fasc. 1-1980, pag. 189...196
6	**Şelariu Mircea Eugen**	**SUPERMATEMATICA**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn.,TEHNO'95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematica Aplicată,. pag.41...64
7	**Şelariu Mircea Eugen**	**INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ**	Lucr. Simp. Naţional “Zilele Universităţii Gh. Anghel” Ed. II-a, Drobeta Turnu Severin, 16-17 mai 2003, pag. 171 … 178
8	**Şelariu Mircea Eugen**	**QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
9	**Şelariu Mircea Eugen**	**TEHNO ART OF ŞELARIU SUPERMATHEMATICS FUNCTIONS**	(ISBN-10):1-59973-037-5 (ISBN-13):974-1-59973-037-0 (EAN): 9781599730370

Motto:" ***Daţi-ne aripi! Să ne târâm prin spaţiu*** " aforism de **Valeriu Butulescu** "
Prin spaţiul **matematicii centrice**.
Luaţi **supermatematica** şi veţi călători cu viteza luminii.
Autorul

CAPITOLUL XVIII

MULTIPLICAREA DIMENSIONALĂ A SPAŢIILOR

Capitol dedicat Doamnei Ziaristicii Maria Diana Popescu, redactor la Revista AGERO Stuttgart, pentru dezinvoltura, claritatea, oportunitatea şi precizia supermatematică prin care descrie situaţia politică multidimensională din România de după loviluţia din decembrie. Cea care a remarcat că excentricitatea este cel puţin a 4-a dimensiune a spaţiului tridimensional (3D).

1. INTRODUCERE

În filozofie şi în fizică, **spațiul** exprimă poziția (***localizarea*** **→*[x, y, z]*** şi ***orientarea*** **→ *[θ, φ, ψ]***, distanța, mărimea, forma, întinderea şi ordinea **obiectelor** coexistente în lumea reală.

Concepția atomistă despre spațiu şi timp (care stă şi la baza geometriei lui **Euclid**) a fost dezvoltată în filozofia modernă de către **Newton**. Pentru **Newton** spațiul şi timpul sunt absolute, obiective şi universale, deci independente de materia în mişcare. Dacă se înlocuieşte cuvântul **obiect** cu **obiect virtual** sau **entitate**, atunci definiţia devine valabilă şi în matematică. În **matematica centrică** (**MC**).

Teoria relativității lui **Einstein** (numită şi teoria fizică a spațiului şi timpului) a demonstrat că proprietățile spațio-temporale (lungimea corpurilor şi durata evenimentelor) depind de viteza de deplasare a sistemelor materiale şi că structura sau proprietățile continuului spațio-temporal variază în funcție de concentrarea maselor substanței şi de intensitatea câmpului gravitațional generat de către acestea.

Adică, obiectele virtuale îşi modifică forma şi dimensiunile în funcţie de un nou parametru sau dimensiune a spaţiului. Această dimensiune nouă, sau, mai precis, nou introdusă în ştiinţă, este **excentricitatea**.

Filozofi ca **Berkeley, Hume, Mach, Bergson** neagă obiectivitatea spațiului şi timpului, punându-le în dependență de conștiința omului sau ca forme subiective ale trăirilor sale subiective.

Hegel consideră spaţiul şi timpul ca fiind două categorii ale ideii absolute. Adică, noţiuni matematice. Mai precis, ale ***matematicii excentrice*** (**ME**), deoarece, numai în acest domeniu, obiectele îşi modifică forma şi dimensiunile în funcţie de noua dimensiune a spaţiului, **excentricitatea**. Şi, mai precis, un obiect, ca de exemplu, sfera, care, prin adăugarea unui parametru în plus (**excentricitatea)** la ecuaţiile sale parametrice

$$(1)\qquad \begin{cases} x = R.cos\alpha.cos\beta \\ y = R.\sin\alpha.cos\beta\,, pentru\ \alpha\ \in [0, 2\pi] şi\ \beta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \\ \quad z = R.sin\beta \end{cases}$$

ele devin ecuaţiile parametrice ale **excentricelor sferice**, care transformă continuu sfera perfectă în cubul perfect, dacă **excentricitatea liniară reală e ∈ [0, R].** Şi devine cub perfect când **e** este egală cu raza **R** a sferei sau când **excentricitatea liniară <u>numerică</u> s**, definită de raportul **s** = $\frac{e}{R}$ ia valoarea 1.

Între aceste două valori extreme, adică pentru **s** ∈ (**0, 1**) sau **e** ∈ (0, R), se obţin obiecte de alte forme, intermediare între sferă şi cub **(Fig.1)**, obiecte specifice **matematicii excentrice**, denumite şi **obiecte hibride**, printre care se numără şi **sfero-cubul**, **cono-piramida**, **tubul cilindro-pătratic**, **cilindrii de secţiuni variabile** ş.m.a. **(Fig.2)**.

Aceste ecuaţii ale **excentricelor sferice** sunt

$$(2)\qquad \begin{cases} x = R.\cos(\alpha, e).\cos(\beta, e) \\ y = R.\sin(\alpha, e).\cos(\beta, e)\ , pentru\ \alpha\ \in [0, 2\pi]\ \text{şi}\ \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], iar\ \boldsymbol{e} \in [0, R], \\ \quad z = R.\sin(\beta, e) \end{cases}$$

în care, funcţiile **circulare centrice cos**(α, e) şi **sin**(α, e) de variabile centrice α şi β trec în **funcţii circulare excentrice** corespondente **cex**θ şi **sex**θ, denumite cosinus şi sinus excentrice.

Adică

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos(\alpha, e) = cex[\theta(\alpha), e] \rightarrow \cos[\theta(\beta), e] = cex[\theta(\beta), e] \\ \sin(\alpha, e) = sex[\theta(\alpha), e] \rightarrow \sin[\theta(\beta), e] = sex[\theta(\beta), e] \end{cases}$$

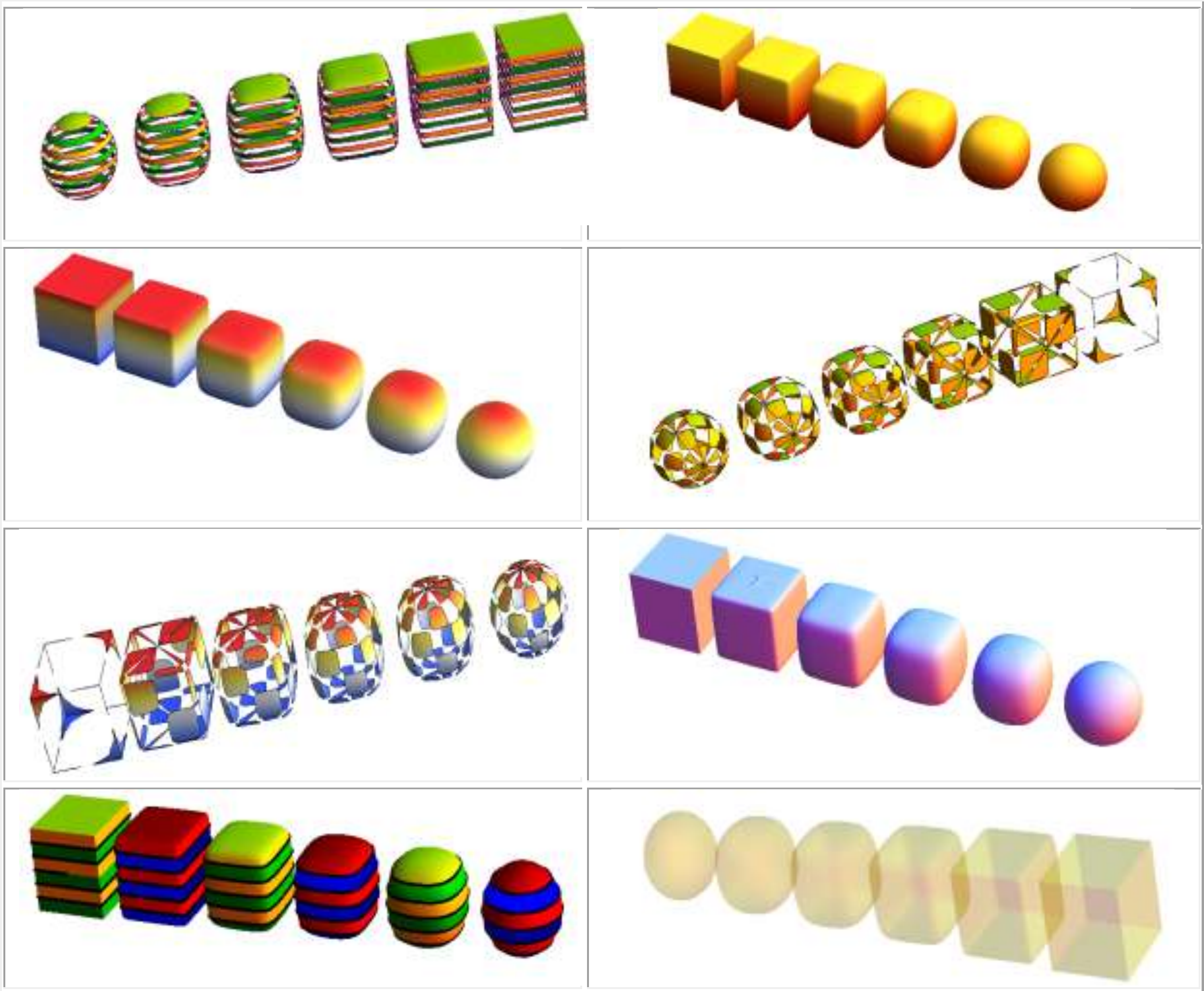


Fig.1 Exprimarea matematică diversă a transformării continue a sferei în cub sau invers

Evident că, în acelaşi mod, în 2D, cercul se transformă continuu în pătratul perfect, de latură L = 2R. Dacă **unicele** curbe închise, cercul şi pătratul, rezultate pentru **s** = 0 şi, respectiv, **s** = ± 1 sunt arhicunoscute în domeniul matematicii centrice (**MC**), nu acelaşi lucru se întâmplă pentru **infinitatea** de curbe închise, din domeniul **matematicii excentrice** (**ME**), obţinute pentru **s** ∈ (-1, 1)\0, denumite **excentrice circulare**.

Acum, se poate observa că pentru a trece de la cerc şi sferă, la pătrat şi cub, sau invers, obiecte virtuale proprii **MC,** este neapărat necesar să se treacă prin domeniul **ME** al **supermatematicii** (**SM**), astfel că se afirmă că **SM** este o reuniune a celor două matematici, adică **SM = MC ∪ ME.**

Deoarece, **MC** este proprie sistemelor **liniare, perfecte, ideale**, iar **ME** celor **neliniare, imperfecte, reale** se observă facil că, prin reuniunea lor, într-un singur tot (**SM**), graniţele dintre liniar şi neliniar, dintre perfect şi imperfect, dintre ideal şi real se şterg şi dispar. Spre bucuria inginerilor care, s-au confruntat în permanenţă cu necesitatea soluţionării unor ecuaţii şi / sau sisteme neliniare, nevoiţi să apeleze la fel de fel de metode de aproximare. Apropo, **Matematica Atomică** a rezolvat şi problema ecuaţiilor de orice grad !

Totodată, în **MC** nu există decât câte **o singură entitate** din fiecare entitate matematică centrică, pe când, în **ME** numărul lor este **infinit**. Pentru fiecare punct dintr-un plan, în care poate fi plasat un punct, denumit **ex-centru**, sau **excentru,** există câte o matematică excentrică (**ME**). A fost numit astfel, pentru că a fost expulzat din centrul cercului **C**(0,0) şi originea **O(0,0)** a unui reper, unde l-a plasat **Euler,** împreună cu un pol **P**(0, 0), a unei semidrepte, deci **3 puncte suprapuse**, sau în coincidente, suprapunere care a **sărăcit** enorm matematica peste 300 de ani.

Excentrul **E**(**e, ε**) este corespunzător unui cerc de rază oarecare **R** şi **S**(s, ε) este corespunzător unui cerc de raza **R = 1**, adică cercul unitate sau trigonometric. Coordonatele polare unghiulare **ε**, ale excentrelor **E** şi **S** reprezintă **excentricitatea unghiulară**, fiind aceeaşi în ambele situaţii / cazuri.

Există o transformare (h)omotetică, transformare care suprapune cercul de raza R oarecare, concentric cu cercul unitate de raza R =1, peste cel unitate. Aceasta este o transformare ce scalează obiectele în funcţie de un centru de omotetie **H** şi un raport k.

Un punct P(x, y) transformat după o homotetie H[O(x_0,y_0),k] (de centru O şi raport k) va avea imaginea P'(x_0 + k(x - x_0), y_0 + k(y - y_0)).

Pentru un centru de homotetie O(0, 0) punctul excentric **E**(e, ε) ≡ **E** (x_e = e.cosε, y_e = e.sinε) se transformă în punctul **S**(s, ε) ≡ **S** (x_s = s.cosε, y_s = s.sinε), printr-un raport de homotetie k = $\frac{1}{R}$, deoarece **E**(**e, ε**) ≡ P'(kx , ky) → P'($\frac{1}{R}$x , $\frac{1}{R}$y) → P'($\frac{1}{R}e_x$, $\frac{1}{R}e_y$) → P'($\frac{1}{R}$ e.cosε , $\frac{1}{R}$ e.sinε) → P'(s.cosε, s.sinε) → P'(s, ε) ≡ **S**(s, ε).

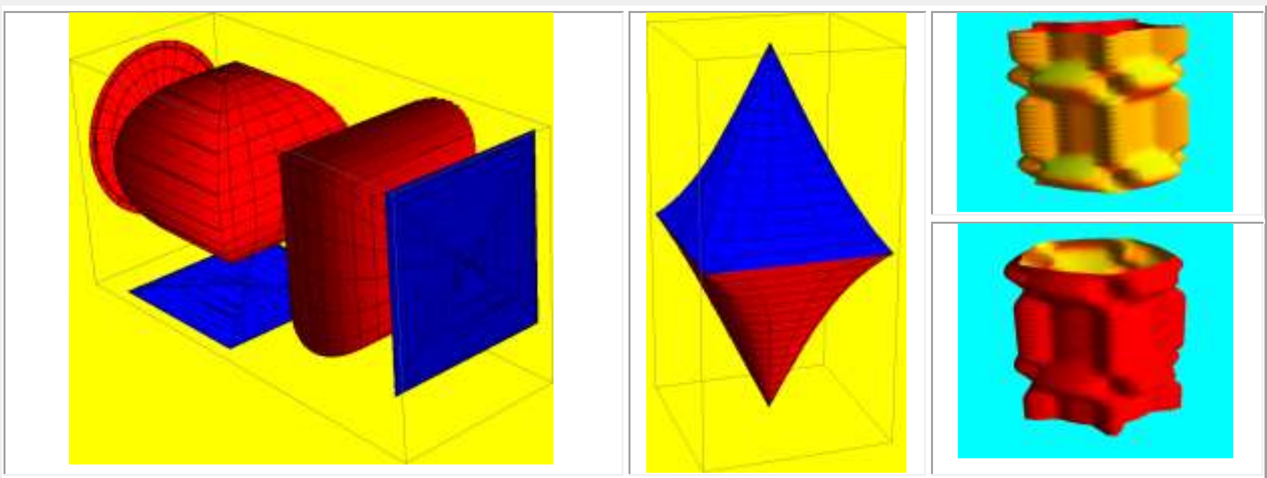


Fig.2 Sfero-cubul ◄, cono-piramida ▲ şi tuburi speciale excentrice ►

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.Ro

Rezultă că excentricitatea liniară numerică **s** este, totodată, şi raportul de homotetie k, adică, **s** = $\frac{e}{R}$ = k. Alte proprietăţi ale homotetiei sunt:

- **nu păstrează distanţele s ≠ e, r = 1 ≠ R**, aşa cum s-a demonstrat anterior;
- păstrează orientarea poligoanelor;
- **păstrează unghiurile → ε** acelaşi**,** ca şi unghiurile la centru **α** sau la excentru **θ ;**
- drepte paralele vor fi transformate în drepte paralele, iar transformata unei drepte va fi paralelă cu dreapta;
- are ca punct fix denumit centrul de homotetie;
- două homotetii succesive $H_1(O_1, k_1)$ şi $H_2(O_2, k_2)$ se compun într-o translaţie sau homotetie $H_3(O_3, k_1 + k_2)$;
- homotetiile nu comută, în general;

2. O NOUĂ DIMENSIUNE A SPAŢIULUI. HIBRIDAREA MATEMATICĂ

Câteva idei despre spaţiu, culese de pe diverse website-uri, sunt următoarele.

"***Spaţiul*** *este o entitate abstractă care reflectă o formă obiectivă de existenţă a materiei. Apare ca o generalizare şi abstractizare a ansamblului de parametri prin care se realizează* ***deosebirea între diferite sisteme*** *ce constituie o stare a universului.*

SPAŢIUL*, este o formă obiectivă și universală a existenței materiei, inseparabilă de materie, care are aspectul unui întreg neîntrerupt cu trei dimensiuni și exprimă ordinea coexistenței obiectelor lumii reale,* poziţia, distanţa, mărimea, forma, întinderea lor.

În concluzie, se poate afirma că spaţiul apare ca o sinteză, ca o generalizare şi abstractizare a constatărilor cu privire la o stare, la un moment dat, a universului.

În cadrul mecanicii clasice, noţiunea de spaţiu este aceea a modelului spaţiului euclidian tridimensional (E3) omogen, izotrop, infinit.

Când discutăm despre spaţiu, primul gând este îndreptat spre ***poziţie****, adică noţiunea de poziţie este direct asociată noţiunii de spaţiu.* ***Poziţia*** *este exprimatã în raport cu un sistem de referinţã (reper) sau mai scurt printr-un sistem de coordonate.*"

Să fie oare complete aceste definiţii ?

Un obiect tridimensional are în spaţiu E^3 **6 grade de libertate**, constituite din cele **3 translaţii**, pe direcţiile **X**, Y şi **Z** şi din **3 rotaţii,** notate, respectiv, cu **A, B** şi **C,** în tehnologie şi în robotică, în jurul axelor **X**, Y şi **Z**.

Un obiect poate fi "realizat" sau, mai precis, reprodusă imaginea lui în spaţiul virtual, când apare în **3D**, pe ecranul monitorului unui computer, prin folosirea unor programe tehnice (CAD) sau matematice comerciale (MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, MAPLE, DERIVE, ş,a.) sau speciale, care folosesc **FSM-Excentrice, Elevate** sau / şi **Exotice -** la descrierea obiectelor, cum este **SM-CAD-CAM**.

Prin **modificarea excentricităţii**, obiectele cunoscute şi formate în domeniul centric al super-matematicii **(SM)**, adică, în matematica centrică (**MC**), pot fi deformate în domeniul excentric al **SM**, adică, în matematica excentrică **(ME)** şi transformate iniţial în obiecte hibride, proprii **ME**, ca, apoi, să fie re-transformate în obiecte de alt gen, cunoscute în **MC**. Ca de exemplu, deformarea unui **con** perfect (e = 0) în **cono-piramide** [e ∈ (0, 1)] cu baza un pătrat perfect şi vârful conic, care constituie obiectele hibride, situate între con şi piramidă, până la transformarea ei într-o **piramidă** perfectă (e = ± 1) cu baza un pătrat perfect (**Fig.2**).

Obiectul poate fi realizat, în fapt, prin diversele metode de prelucrare mecanice [v. **Mircea Şelariu**, Cap.17 **Dispozitive de prelucrare**, **PROIECTAREA DISPOZITIVELOR**, EDP, Bucureşti, 1982, coordonator **Sanda-Vasii Roşculeţ**] de **formare** (turnare, sinterizare), **deformare** (la cald şi la rece), **dislocare** (decupare, aşchiere, eroziune, netezire) şi **agregare** (sudare şi lipire).

În toate cazurile, sunt necesare **mişcări** ale sculei şi / sau ale piesei, respectiv ale spotului luminos care delimiteaza pe ecran un pixel şi trece de la un pixel la altul.

Mişcarea este strâns legată de spaţiu şi de timp.

Mişcarea mecanică poate fi **de**

- **formare** în timp a corpurilor şi, implicit, a obiectelor ;
- **schimbarea** în timp a **poziţiei** obiectelor, sau a părţior sale, denumite corpuri, în raport cu alte corpuri, alese drept sisteme de referinţă;
- **schimbarea** în timp a **formei** corpurilor şi, implicit, a formei obiectelor, prin **deformarea** lor .

Spaţiul reflectă raportul de coexistenţă dintre obiecte şi fenomene, sau părţi ale acestora, indicând:

- **întinderea** / mărimea lor, denumită **dimensiune de gabarit;**
- **locul** obiectelor, prin coordonatele **liniare X**, **Y**, **Z**, în spatiul 3D, denumite **dimensiuni de localizare**
- **orientarea** obiectelor, în spaţiul **3D**, prin coordonatele **unghiulare** ψ, φ, θ, denumite dimensiuni de orientare (**rotaţie** ψ, **precesie** φ şi **nutaţie** θ)
- **poziţiile** relative sau distanţele dintre obiecte, denumite **dimensiuni de poziţionare**, dacă se referă la localizarea şi orientarea absolută şi / sau relatiă a obiectelor, iar dacă se referă la părţi ale acestora, numite ***corpuri***, atunci sunt denumite **dimensiuni de coordonare;**
- **forma** obiectelor şi, respectiv, evoluţia fenomenelor, denumite **dimensiuni de formare**, care definesc, totodată, şi ecuaţiile de definire a obiectelor;
- **deformarea** obiectelor şi modificarea evoluţiei fenomenelor, denumite **dimensiuni de deformare** sau **excentricităţi.**

Ultima dimensiune a spaţiului, **excentricitatea**, făcând posibilă apariţia **matematicii excentrice** (**ME**) şi realizând trecerea din domeniul **matematicii centrice** (**MC**) în cel al **matematicii excentrice**, precum şi saltul de la o singură entitate matematică, existentă în matematica şi domeniul **centric**, la o **infinitate** de entităţi, de acelaşi gen, dar deformate din ce în ce mai pronunţat, odată cu creşterea valorii excentricităţii numerice, până la transformarea lor în alte genuri de obiecte, din nou existente, în domeniul centric.

Un exemplu, care merită repetat (*repetiţia e mama învăţăturii*), devenit deja clasic, este deformarea continuă a unei sfere până la transformarea ei într-un cub, prin utilizarea aceloraşi **dimensiuni de formare** (ecuaţii parametrice), atât pentru sferă cât şi pentru cub, doar excentricitatea modificându-se: fiind e = 0 pentru **sferă** şi **e** = ± R sau **s** = $\frac{e}{R}$ = ± 1 pentru **cub**; pentru e $\in$ [(– R, + R) \ 0] sau s $\in$ [(-1, 1) \0] obţinându-se **obiecte hibride**, proprii matematicii excentriec (**ME**), anterior inexistente în matematică, sau, mai precis, în matematica centrică (**MC**).

Aşa cum s-a mai prezentat, **dreapta** este un **spaţiu unidimensional** şi, totodată, în **super-matematică (SM)**, o **strâmbă** de excentricitate zero.

Creşterea excentricităţii, de la zero la unu, transformă **linia dreaptă** într-o **linie frântă,** ambele existând şi sunt cunoscute în matematica centrică, nu şi restul strâmbelor, care sunt proprii **matematicii excentrice**, putând fi generate de **FSM-CE** amplitudine excentrică

y = k.x, → y[x, S(s, ε)] = k.aex [θ, S(s, ε)] + C, pentru M_0 (0, 0).

Linia frântă este cunoscută în matematica centrică (**MC**), dar fără să i se cunoască ecuaţiile ei ! Ceea ce nu mai este cazul în **SM** şi, evident, şi în **ME**.

Un fenomen asemănător este considerat că ar avea loc şi în fizică: din vid apar continuu particule de un anumit tip şi se reîntorc din nou în vidul cosmic. ***Aceleaşi sau altele*** ?

Cosmologia are o teorie ce se aplică întregului Univers, formulată de **Einstein** în 1916: **relativitatea generală**. Ea afirmă că forţa de gravitaţie, ce se exercită asupra obiectelor, acţionează şi asupra structurii spaţiului, care îşi pierde cadrul rigid şi imuabil, devenind maleabil şi curb, în funcţie de materia sau energia pe care le conţine. Adică, **spaţiul se deformează (!** Acest lucru vă spune / sugereaza ceva ? **)**.

Continuum-ul spaţiu-timp, al relativităţii generale, nu este conceput fără conţinut, deci nu admite vidul! Cum spunea şi **Einstein** ziariştilor, care îl rugau să le rezume teoria sa: "*Înainte, **se credea că**, dacă toate lucrurile ar dispărea din Univers, timpul şi spaţiul **ar rămâne** totuşi. În teoria relativităţii, timpul şi spaţiul dispar odată cu dispariţia celorlalte lucruri din univers.*"

Ceea ce susţine teoria autorului din SUPERMATEMATICA. Fundamente. Vol. I Editura POLITEHNICA, Timişoara, 2007, **Cap. 1 Introducere**, prin care expansiunea universului este un proces de dezvoltare a ordinii în haosul absolut, o trecere progresivă a spaţiului haotic în ordine din ce în ce mai pronunţată şi ***sau învers***, transformarea progresivă a ordinii în haos; **ordinea perfectă** şi **haosul perfect** fiind una şi aceeaşi entitate; o sferă absolut transparenta, deci invizibilă şi, ca urmare, de rază nedeterminată / nedefinită. În măsura în care, pornind dintr-un centru, sau mai precis dintr-un **excentru**, dintr-un punct oarecare, haosul absolut (absolut **transparent**, invizibil şi de dimensiuni nedeterminate, care-i universul invizibil), începe să se transforme progresiv în ordine, sau ***dezordine***, din ce în ce mai pronunţată, într-un **univers vizibil**, din ce în ce mai ordonat, mai vast şi mai complex, moment care poate fi denumit oricum: **moment iniţial**, **moment de amorsare** etc., dar pe care savanţii l-au denumit **Big Bang**.

Altfel spus, universul vizibil se propagă în cel invizibil, sau şi mai precis, universul invizibil se transformă în cel vizibil, pierde din invizibilitate, pe seama ordonării sau a dezordinii lui progresive.Tot aşa cum un cristal invizibil care nu-i altceva decât **nisip** într-o anumită formă de organizare / ordonare, acelaşi nisip precum cel din oala de lut, devine parţial vizibil, în zonele în care este puternic agresat / lovit.

Este evident că în universul invizibil, oricât de mare / întins ar fi el, nu există nici timp şi nici spaţiu. Deoarece sfera universului invizibil are un caracter anfoter, ***fiind şi haos şi ordine absolute în acelaşi timp***, în el spaţiul nu exista din cauza haosului şi timpul nu poate exista din cauza ordinii perfecte; timpul fiind perceput numai dacă spaţiul ***este ocupat*** (**vizibil** ocupat) şi scurgerea lui este sesizabilă numai prin schimbarea a ceea ce îl ocupă. Această sferă nevăzută, absolut transparentă pare a fi un “**nimic**”. Dar, din acest “**nimic**” s-a născut intregul univers vizibil. Acest “**nimic**” este, de fapt, “**totul**”.

În concluzie, spaţiul, ca şi timpul, se **formează** şi se **deformează**, adică, **excentricitatea** spaţiului, de o anumită valoare, duce la **formare**a spaţiului, apoi, prin modificarea valorii ei, spaţiul se **deformează** / modifică. Pe scurt, se “trage vălul” de pe spaţiul invizibil şi ***apar***, în timp, obiectele incipiente dar vizibile în “noul” spaţiu, care prind viaţă şi se dezvoltă.

Forma modificată a spaţiului este dependentă de valoarea excentricităţii, care devine o nouă dimensiune a spaţiului: **dimensiunea de deformare**.

Energia şi masa materiei să crească odată cu creşterea excentricităţii ?

Sau invers ? Excentricitatea să determine valoarea masei şi a energiei prezente / localizate într-un anumit loc în spaţiu ?

Instalarea unei piese de prelucrat (obiect de prelucrat) în spaţiul de lucru a unei maşini-unelte moderne, cu comenzi numerice de conturare (**CNC**), este foarte asemănătoare cu “**instalarea**“ unui obiect matematic în spaţiul euclidian tridimensional R^3. De aceea, vom folosi unele noţiuni din domeniul tehnologic.

În **tehnologie**, **instalarea** este operaţia premergătoare prelucrării; numai un obiect / piesă instalat/ă poate fi prelucrat/ă. Ea presupune următoarele faze sau operaţii tehnologice, în această succesiune / ordine; numai înfăptuirea unei faze, facând posibilă trecerea la realizarea fazei următoare:

1. **ORIENTAREA** este acţiunea, sau operaţia, prin care elementele geometrice ale obiectului de lucru (semifabricat sau piesă), care sunt baze de referinţă tehnologică de orientare, prescurtat, **baze de orientare (BO)**, primesc o **direcţie** bine determinată, faţă de direcţiile unui sistem de referinţă. În tehnologie, faţă de direcţiile unor mişcări principale şi / sau secundare de lucru, şi / sau faţă de direcţiile mişcărilor de reglare diemnsională a sistemului tehnologic.

Drept **baze de orientare (BO)** pot servi :

3) **Un plan** al obiectului, respectiv o suprafaţă plană a piesei, dacă ea există, caz în care, această suprafaţă, determinată de trei puncte de contact dintre obiect şi dispozitiv, este denumită bază de referinţă

tehnologică de orientare de **aşezare (BOA)**, sau, pe scurt, **bază de aşezare (BA)**, fiind determinată, teoretic, de cele trei puncte comune de contact ale piesei cu dispozitivul, care are sarcina de a realiza instalarea piese în cadrul maşinii de lucru.

Drept **BA**, în principiu, se alege suprafaţa plană cea mai întinsă a piesei, dacă nu există altfel de raţiuni / condiţii de poziţie, sau de la care suprafaţa rezultată în urma prelucrării are impusă precizia cea mai înaltă, sau condiţii de paralelism a **BA** cu **baza de cotare sau de proiectare** (elementul geometric al piesei de la care se dă cota / dimensiunea, pe desenul de execuţie al piesei, pentru suprafaţa de prelucrat).

Punând condiţia păstrării contactului piesă / dispozitiv pe **BA**, obiectul / piesa pierde 3 grade de libertate, dintre care, **o translaţie** pe direcţia, s-o numim **Z**, perependiculară pe **BA** (plană) şi două rotaţii: în jurul axelor **X**, notată în tehnologie cu **A** şi în jurul axei **Y**, notată în tehnologie cu **B**.

Obiectul / piesa se mai poate roti în jurul axei **Z** perpendiculară pe **BA,** rotaţie notată cu **C** şi se poate translata pe **BA** pe direcţiile **X** şi Y, păstrând în permanenţă contactul cu **BA**.

De la această suprafaţă se stabileşte, în tehnologie, coordonata **z**, de exemplu, ca distanţă dintre **BOA** şi **baza tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**, adică planul pe care îl va genera scula de prelucrat pe piesă.

Dacă o suprafaţă se prelucrează integral / complet (prin frezare, de exemplu, cu freze de mari dimensiuni, printr-o singură trecere), atunci celelalte coodonate / dimensiuni **y** şi **x** pot fi stabilite cu foarte mare aproximaţie, întrucât ele nu influentează precizia realizării suprefeţei plane, la distanţa **z** de **BA**, rezultate în urma prelucrării piesei şi denumită **bază tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**. A cărei cerinţă tehnologică este să fie paralelă cu **BOA** şi să fie situată la distanţa **z** de aceasta.

Dimensiunea **z** fiind, în acest caz, o **dimensiune de formare** a piesei, pe de o parte şi **dimensiune de coordonare**, în acelaşi timp, pentru poziţia relativă sculă-piesă, iar, d.p.d.v. tehnologic, una dintre **dimensiunile de reglare dimensională** a sistemului tehnologic **MDPS** (**M**aşină-**D**ispozitiv-**P**iesă-**S**culă). Matematic exprimat, două suprafeţe plane situate la distanţa **z**, ca urmare, paralele între ele.

2) **O dreaptă** aparţinând obiectului, dacă aceasta există, ca axe şi / sau muchii, ca intersecţie de suprafeţe plane în matematică.

În tehnologie, muchiile se evită, datorită neregularităţii lor, adică, a abaterilor de la forma geometrică liniară, a semifabricatelor, ca şi a pieselor, în urma prelucrarii semifabricatelor lor.

În tehnologie, această dreaptă este determinată de cele două puncte de pe o suprafaţă a piesei, alta decât BA, comună piesei şi dispozitivului, care realizează ***baza de orientare de dirijare a piesei*** şi a dispozitivului, ca elemente dedublate, dreaptă denumită bază de orientare de dirijare (**BOD**), sau pe scurt baza de dirijare (**BD**). Denumire care derivă din faptul că, aceste două elemente de dirijare, dirijează / ghidează mişcarea obiectului / piesei, într-o mişcare liniară de translaţie, în vederea localizării lui, dacă în tot timpul mişcării, se menţine contactul piesă-dispozitiv pe BOA şi pe BD.

În acest fel **BD** preia 2 grade de libertate ale obiectului: translaţia pe o direcţie perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte de contact piesă /dispozitiv, ce materializează **BD**, translaţie pe direcţia **Y**, de exemplu, dacă **BD** este paralelă, întotdeauna, cu **BA** din planul **XOY** şi rotaţia în jurul axei **Z**, notată în tehnologie cu **C**.

Drept **BOD** se alege, în principiu, din motive lesne de înţeles, suprafaţa cea mai lungă a piesei, dacă nu există alte raţiuni impuse, prin desenul de execuţie al piesei.

De la **BOD** poate fi stabilită / măsurată cota / dimensiunea **y**, paralelă cu **BOA** şi perpendiculară pe **BOD**, ca de exemplu, perpendiculară pe **z**, fiindcă **BOD** este paralelă cu **BOA.**

Astfel, dacă cele două puncte aparţin unui obiect paralelipipedic, mărginit, deci, de suprafeţe plane, şi **BOD** este paralelă cu **BOA**, păstrând contactul piesă-dispozitiv pe cele două baze, printr-o mişcare de translaţie, piesa mai poate fi doar translatată, în dispozitiv, pe direcţia **X**, până când tamponează un **element de localizare**.

3) De la acesta, denumit element de localizare, respectiv **baza tehnologică de localizare** (**BTL**), sau, pe scurt **baza de localizare** (**BL**), poate fi stabilită coordonata / dimensiunea **x** perpendiculară simultan pe **y** şi **z**. Dar fără să fie coordonate / dimensiuni / segmente concurente într-un punct comun **O(x,y,z)** ca în matematică, decât, dacă **BOD** şi **BTL** coboară la nivelul **BOA** şi, în plus, **BTL** se deplaseaza spre **BOD** şi va fi conţinută şi în ea, ambele urmând să fie conţinute în **BOA**, astfel că, punctul **O(x,y,z)** ca şi **BTL** va fi un vârf al piesei paralelipipedice, conţinut simultan în planul **BOA**, dreapta **BD** în punctul **BL**, rezultând, în acest caz că **O(x,y,z)** ≡ **BL**.

Dacă, localizarea se realizează printr-o mişcare de translaţie, aşa cum s-a presupus anterior, ea mai poartă denumirea de **localizare prin translaţie (LT)**.

Dacă, localizarea se realizează printr-o mişcare de rotaţie a obiectului, în cazul obiectelor cilindrice, atunci este denumită **localizare prin rotaţie** (**LR**). În acest caz **BD** poate fi, sau este, de obicei, o axă a unei suprafeţe de rotaţie (cilindrice sau sferice) a obiectului, denumită **baza de orientare de centrare** (**BOC**) în jurul căreia, obiectul se roteşte, până când, un alt corp al piesei, tamponează elementul de localizare prin rotaţie. Sau, până când un fixator pătrunde într-un orificiu perpendicular pe **BOC** sau într-un canal paralel cu **BOC**.

Se remarcă faptul că există două ***tipuri de orientari*** ale obiectelor în dispozitive:

1) Prin ***POZIŢIONARE P :***
    1.1) semipoziţionare SP: (numai asezare A), 1.2) poziţionare P (A plus ghidare G), 1.3) poziţionare completă (A ∪ G plus rezemare sau localizare L)
2) ***Prin CENTRARE C :***
    2.1) semicentrare SC (un plan de simetrie PS al piesei), 2.1) centrare C (axă de simetrie AS invariante în spaţiu), 2.3) centrare completă CC (C plus PS reciproc perpendiculare).

Obiectele care nu prezintă **elemente / baze de orientare**, cum ar fi sfera în matematică şi bilele de rulment în tehnologie, de exemplu, sunt **obiecte neorientabile.**

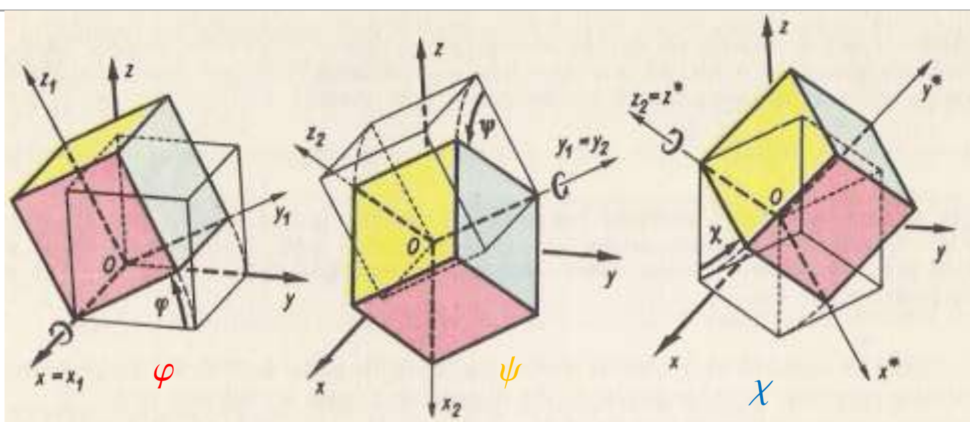


Fig. 3 Schimbarea prin rotaţii succesive a orientării unui obiect în **3D**.
Reproducere din "MICA ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ" Ed.Tehnica, Buc., 1980

4 LOCALIZAREA este operaţia sau acţiunea de stabilire a **locului**, în spaţiul euclidian tri-dimensional E^3, al unui punct **O(x,y,z)** caracteristic al obiectului, ce aparţine unui element de referinţă de orientare al acestuia, de la care se stabilesc coordonatele / dimensiunile liniare **x, y, z** faţă de un sistem de referinţă dat, sau, în tehnologie, faţă de scula de prelucrare.

Punctul **O(x,y,z)** al obiectelor **neorientabile** este centrul de simetrie al acestora, iar al pieselor orientabile, precum cele paralelipipedice, în tehnologie, de exemplu, punctul **O(x,y,z)** este **diseminat** în trei puncte distincte, pentru fiecare coordonată în parte **Ox ⊂ BL** pentru **x** , **Oy ⊂ BD** pentru y şi **Oz ⊂ BA** pentru **z**, aşa cum s-a explicat anterior.

In tehnologie, succesiunea orientare → localizare este obligatorie; numai un obiect orientat poate fi apoi localizat. Ca şi în matematică, de altfel. Întâi se alege un sistem de referinţă solidar cu obiectul (O, x, y, z) apoi, unul invariant (O, X, Y, Z) ce coincide, iniţial, cu celălalt, în spaţiul **3D** sau euclidian tridimensional E^3 şi apoi se operează diverse transformări de translaţii şi / sau de rotaţii aşa cum se poate observa cu rotaţiile unui cub, prezentate în **figura 3.**

Reuniunea dintre **orientare** şi **localizare** reprezintă cea mai importantă acţiune / operaţie tehnologică, denumită **poziţionare**, adică:

ORIENTAREA ∪ LOCALIZAREA = POZIŢIONARE

Dacă **poziţionarea** obiectului este realizată / desăvârşită / implinită, atunci, poate fi menţinută poziţia relativă piesă / dispozitiv prin operaţia de **fixare** a piesei în dispozitiv.

În continuare pot fi stabilite cotele / dimensiunile dintre sculă şi piesă, astfel, încât să se obţină piesa la dimensiunile şi preciziile impuse prin desenul de execuţie a piesei.

Această operaţie tehnologică este denumita **reglare dimensională.** Cu aceasta, operaţia de instalare este incheiată şi prelucrarea piesei poate să înceapă.

Ca urmare, **instalarea** unui obiect este o reuniune a **poziţionării** cu **fixarea** şi cu **reglarea dimensională**, adică:

INSTALARE = POZIŢIONARE ∪ FIXARE ∪ REGLARE (dimensională)

În tehnologie, **fixarea** se poate realiza prin **forţă** (de fixare) sau prin **formă** (care impiedică deplasarea piesei în timpul preucrării).

În matematică, fixarea se "realizează" prin **convenţie**. **Zicând** că sistemul (**O, x, y, z**) este legat de piesă el nu se mai poate deplasa relativ faţă de ea (dezlega), ci numai împreună cu obiectul, deci sunt "fixate" unele de altele (*Uşor le e lor, matematicienilor* !).

Astfel, în matematică, fixarea obiectelor, faţă de sistemele de referinţă, se subînţelege, sau se realizează de la sine, ea nu mai există, pentru că în matematică nu există "**forţe matematice**"; ele fiind proprii mecanicii, în speţă dinamicii ei şi nici scule de prelucrare, nici diverse dimensiuni de coordonare, de reglare dimensională, de prelucrare ş.a.

De aceea, în matematica centrică (**MC**) există doar 3 dimensiuni liniare **x**, **y**, şi **z** care sunt, totodată, şi dimensiuni de formare a obiectelor **3D**, prin ecuaţiile lor parametrice, de exemplu.

Ca urmare, în această matematica centrică (**MC**), entităţi ca dreapta, pătratul, cercul, sfera, cubul ş.a. sunt unice, pe când, în matematica excentrică (**ME**) şi, implicit în supermatematică (**SM**), ele sunt multiplicate la infinit prin **hibridare**, hibridare posibilă prin introducerea noii dimensiuni a spaţiului **excentricitatea liniară e** şi cea **unghiulară ε.**

Hibridarea matematică poate fi definită ca procesul matematic de **încrucişare** a două entităţi matematice din **MC**. Adică, de trecere continuă de la o entitate oarecare, existentă în **MC**, la o altă entitate, existentă în **MC**, printr-o infinitate de entităţi hibride, proprii doar **ME**.

Altfel spus, o transformare a unei entităţi matematice centrice în altă entitate matematică centrică, acţiune devenită posibilă în cadrul matematicii excentrice prin utilizarea funcţiilor **supermatematice**.

3.MULTIPLICAREA SPAŢIULUI UNIDIMENSIONAL 1D → 2D, 3D, …, nD

Dreapta, sau strâmba ([18]→ **Şelariu, M. E**. "INTRODUCEREA STRAMBEI ÎN MATEMATICĂ") de excentricitate nulă (s = e =0) are, după cum este arhicunoscut, dimensiunea 1; dreapta având exclusiv lungime. Ea nu poate fi reprezentată decât într-un spaţiu superior ei, de exemplu în planul (x, y) sau în (**2D**) (**Fig.3,a ▲◄**), sau în **3D**.

Ecuaţia acestei drepte, care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0) = M_0(2, 1)$ şi are panta, sau coeficientul unghiular, $k = \tan\alpha = 1{,}5$ este

(4) $y - y_0 = k(x - x_0)$ → $y = 1+1{,}5(x - 2)$

Dacă punctul M_0 se consideră sau devine un **excentru** $M_0(x_0, y_0)$ → **S(s, ε)**, atunci, ecuaţiile (4) devin

(4') y – **s**.sin **ε** = k(x – s.cos **ε**) → y = **s**.sin **ε** +1,5(x – s.cos **ε**), pentru **S(** s ∈ [-1, 1], ε = constant).

Se obţine astfel o familie de drepte de aceeaşi pantă, deci paralele între ele, fiecare trecând prin punctul **S(s, ε)** (**Fig. 4,a ►**).

◄ **DREAPTA D = 1**; → **DREPTELE D = 2** , k = tanα = 1,5		
$y = 1 + 1{,}5(x - 2)$, **M₀ (2, 1),** x ∈ [− π, 2π]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{ {x, sSin[0] + 2(x − sCos[0])}, {Cos[x] + sCos[0], Sin[x] + sSin[0]}}, {s, −2, 2}], {x, −Pi, 2Pi}]]; **M₀ → S(s∈[-2, 2], ε =0)**	ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, sSin[0.5] + 2(x − sCos[0.5])}, {Cos[x] + sCos[0.5], Sin[x] + sSin[0.5]}}, {s, −2, 2}], {x, −Pi, 2Pi}]]; **M₀ → S(s∈[-2, 2], ε = 0,5)**

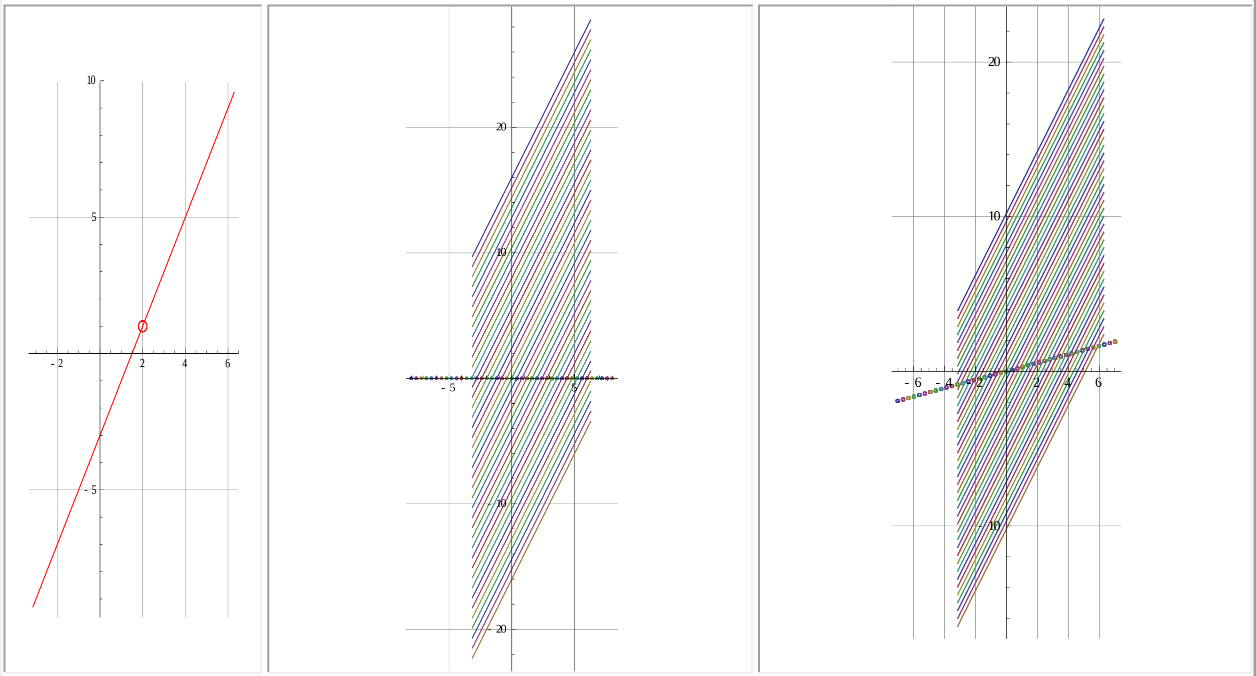


Fig. 4,a Exemple de multiplicare a spaţiului unidimensional **1D,** în spaţiu bidimensional **2D, în cazul dreptei** prin transformarea punctului **M₀** în **excentrul S**(**s**, ε)

Pasul excentricităţii **s** a fost ales intenţionat mai mare, pentru ca două drepte, din imediată apropiere, să nu apară ca fiind suprapuse. Oricât de mic s-ar alege pasul excentricităţii liniare numeice **s**, sau reale **e**, două drepte nu se vor suprapune niciodată, dar pot fi aduse oricât de aproape una de cealaltă, dacă pasul $\mathbf{p_s}$ → **0**. În acest caz, familia de drepte mătură o fâşie, sau o bandă, înclinată cu **k**, din plan (spaţiul **2D**), care este tot un spaţiu **2D**, deoarece o parte / porţiune a unui spaţiu oarecare are aceeaşi dimensiune cu restul spaţiului, sau cu spaţiul în care este scufundat. Semiplanul, cadranul ş.m.a. sunt zone / porţiuni ale planului şi sunt tot plane, deci au tot dimensiunea **2D**.

În aceeaşi **figură 4,b** sunt reprezentate graficele **strâmbelor**, care, aşa cum s-a remarcat anterior, pentru excentricitatea numerică **s** = **e** = 0 devine o **dreaptă**, singura din figură care trece prin M_0.

Punctul **M₀** putea fi astfel ales, ca de exemplu **M₀** (x_0 = π, $y_0 = 2{,}7123889803846897$), încât toată familia de strâmbe, inclusiv dreapta, să trecă prin el (**Fig. 4,b**).

În **figura 4,b** sunt reprezentate strâmbele de **variabilă excentrică** x ≡ **θ**. Ele sunt curbe continue, doar în domeniul excentricităţii liniare numerice s ∈ [−1, +1], domeniu în care excentrul **S** este interior /

aparţine discului cercului unitate. Deoarece **ε = 0**, excentrul **S** se află pe semiaxa x pozitivă pentru **s** > **0** şi pe cea negativă pentru **s** < **0**. Ca şi pentru **s** > 0, dar cu ε = π.

Ecuaţiile strâmbelor, ce trec printr-un punct M_0 (x_0, y_0), se obţin din ecuaţia dreptei respective, prin înlocuirea abscisei x ≡ α, unghiul la centrul O(0, 0) sau variabila centrică, cu **funcţia supermatematică circulară excentrică (FSM-CE) amplitudine excentrică** de variabilă excentrică y ≡ **θ**.

Funcţie asemănătoare, din foarte multe puncte de vedere, cu **funcţia eliptică amlitudine / amplitudinus am**[u, K(k,0)]) a lui **Jacobi**, în care **K (k, 0)** este un punct pe semiaxa **Ox** pozitivă, asemănător excentrului **S**(**s**, ε = 0) situat la distanţă / excentricitatea k de originea unui reper O(0, 0), pe direcţia **ε = 0**.

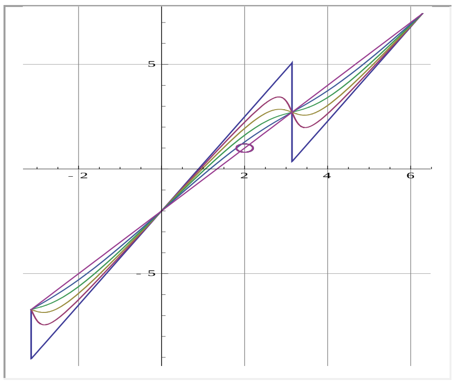
x → f(x) ≡ **aex[θ** ≡ x, **S(s,ε)] → XCENTRICELE2**
$y = 1 + 1.5(x - \mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[x]] - \mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[x]] - 2)$

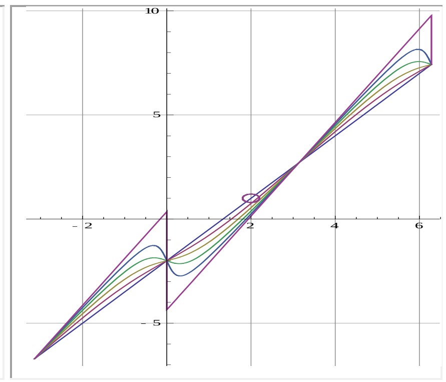
S(s,ε) pentru s ∈ [− 1, + 1], ε = 0 cu pasul 0,2

x → f(x) ≡ **aex[θ** ≡ x, **S(s,ε)] → EXCENTRICELE2**
$y = 1 + 1.5(x - \mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[x]] - \mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[x]] - 2)$

M_0 (2, 1), k = tanα = 1,5

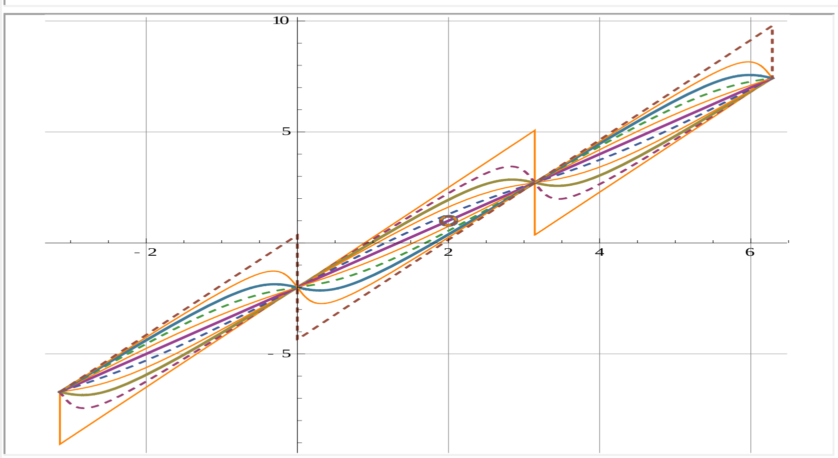
S(s,ε) cu s ∈ [−1, 0], ε = 0, şi cu pasul 0,2





M_0 (2, 1), k = tanα = 1,5

S(s,ε) cu s ∈ [0, + 1], ε = 0, şi cu pasul 0,2



M_0 (2, 1), k = tanα = 1,5

S(s,ε) cu s ∈ [0, + 1], ε = 0, şi cu pasul 0,2

Fig. 4,b Exemple de multiplicare a spaţiului unidimensional **1D** în spaţiu bidimensional **2D,** în spaţiu **în cazul strâmbei** prin existenţa / considerarea **excentrului S**(**s**, ε)

Ecuaţiile **funcţiilor supermatematice circulare excentrice FSM-CE aplitudine excentrică aexθ** sunt

(5) x ≡ α → α(**θ**) = aex[**θ**, S(s, ε)] = **θ – β = θ – arcsin[s.sin(θ – ε)]**

astfel că, ecuaţiile strâmbelor vor fi

(6) y = y_0 + k(x-x_0) → y = y_0 + k(**θ – arcsin[s.sin(θ – ε)]**-x_0).

Spaţiul plan (**2D**), cuprins între cele două strâmbe ale valorilor extreme **± 1** ale excentricităţii liniare numerice **s**, este **continuu** umplut de strâmbe.

În **figura 3**, între strâmbe sunt şi goluri, deoarece pasul $\mathbf{p_s}$ al excentricităţii liniare numerice a fost ales arbitrar, astfel încât, curbele din familie să mai fie lizibile / distincte ($\mathbf{p_s}$ = 0,2), dar el poate fi făcut oricât de mic dorim, astfel ca strâmbă lângă strâmbă să mături şi să umple complet această zona a planului.

Care sunt dimensiunile strâmbelor în acest caz ? Înainte de toate trebuie să aflăm ce este dimensiunea ?

Dimensiunea unui obiect (matematic: curbă, suprafaţă, corp) este o măsură a gradului în care acesta "umple spaţiul". Ştim că o curbă are dimensiunea 1, că o suprafaţă are dimensiunea 2 şi că un corp ("solid") are dimensiunea 3. Această clasificare se numeşte **dimensiune topologică** şi a fost observată prima dată de **Euclid**, cu numai **23** (!) de secole în urmă. Dimensiunea topologică reprezintă, totodată, numărul de grade de libertate al obiectului respectiv.

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x − ArcSin[0.2sSin[x]]}, {0.2Cos[x] + Pi, 0.2Sin[x] + Pi}}, {s, −5,5}], {x, −Pi, 2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x − ArcSin[0.2sSin[x]], 1 + 1.5(x − ArcSin[0.2sSin[x] − ArcSin[0.2sSin[x]] − 2)}, {0.1Cos[x] + Pi, 0.2Sin[x] + 2.71239}}, {s, −5,5}], {x, −Pi, 2Pi}]]

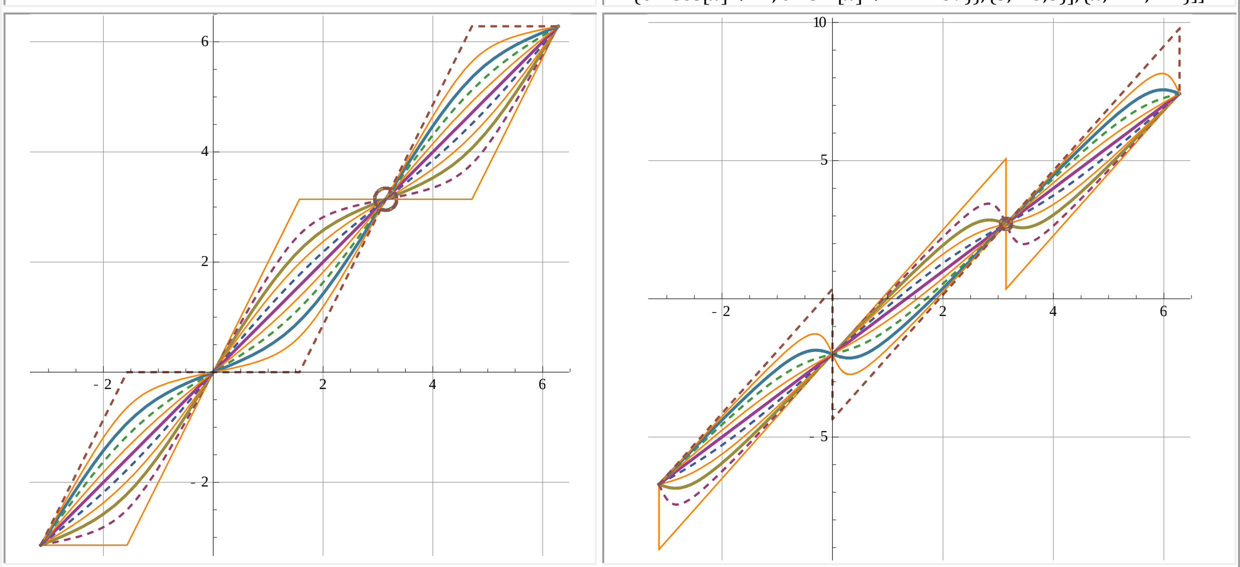


Fig. 5 Exemple de multiplicare a spaţiului unidimensional 1D în spaţiu bidimensional 2D, cu ajutorul **FSM-CE amplitudine excentrică aexθ**

Astfel, din această clasă se va lua câte un reprezentant pentru fiecare dimensiune întreagă, până la 3 (**3D**).

1) Un segment, de lungime L = l, poate fi împărţit în **n** segmente mai mici, fiecare de lungime l =$\frac{1}{n}$.
2) Un pătrat, de latură L = l, poate fi împărţit în $\mathbf{n^2}$ patrate de latură l = $\frac{1}{n}$
3) Un cub, de latură L = l, poate fi împărţit în $\mathbf{n^3}$ cuburi de latură l = $\frac{L}{n}$ = $\frac{1}{n}$.

Ca urmare, un obiect ce are dimensiunea D, compus din elemente asemenea cu el, poate fi împărţit în $\mathbf{n^D}$ elemente de n ori mai mici, astfel că

(7) $$\mathbf{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\textit{Numărul componentelor})}{\log(n)}$$

În website-ul http://www.geocities.ws/cili_12/academic/dimensiunefractala/slide_06.html sunt date metodele de determinare concreta a dimensiunilor unor fractale. Ele sunt:

1) **METODA COMPASULUI**
Pentru determinarea dimensiunii fractale a curbelor plane se foloseşte **metoda compasului**. Aceasta se bazeaza pe faptul că o curbă fractală işi pastrează aspectul dantelat când este privită la o scară / scala mai mică. A fost descoperită în urma încercărilor geografilor de a măsura lungimea ţărmului Marii Britanii. Ei au observat ca valoarea măsurată creşte foarte mult atunci când măsurarea se efectuează cu un compas mai mic.Metoda este foarte asemănătoare cu ***box-counting*** (numărarea din cutie). Curba se aproximează cu o linie poligonală formată din N(r) segmente de lungime r, pentru valori din ce în ce mai mici ale lui r. Se trasează graficul log(rN(r)) log(r). Punctele de coordonate (log(rN(r)), log(r)) se vor afla pe o dreaptă. Pe baza pantei graficului se poate calcula dimensiunea fractală a curbei (practic **dimensiunea-compas**).

2) **METODA DILATĂRII PIXELILOR**
Se bazeaza pe **dimensiunea Minkowski-Boulingand.**
Metoda înlocuieşte fiecare pixel al figurii cu un cerc de rază mică r, în aşa fel încât sunt eliminate toate părţile izolate mai mici decât diametrul cercului. Se determină aria din interiorul cercurilor. Lungimea curbei se calculează împărţind această arie la dimetrul 2r. Dimensiunea fractală se **estimează** din panta graficului log (lungime) la log (diametru).

3) **METODA RAPORTULUI MASĂ-RAZĂ**
Dimensiunea masică defineşte relaţia dintre suprafaţa "utilă" din interiorul unui cerc şi raza acestuia (aria intersecţiei obiectului studiat cu interiorul cercului). Metoda calculează această suprafaţă "utilă" pentru valori diferite ale razei şi pentru diferite puncte-centru. Dimensiune masică se **estimează** tot din graficul logaritm-logaritm al ariei în funcţie de rază. Metoda masică este uşor de implementat în programele rulate pe calculatoare numerice.

ParametricPlot3D[{x, sSin[2sPi] − 2(x − sCos[2sPi]), 5s}, {s, −1, 1}, {x, 0, 2Pi}]

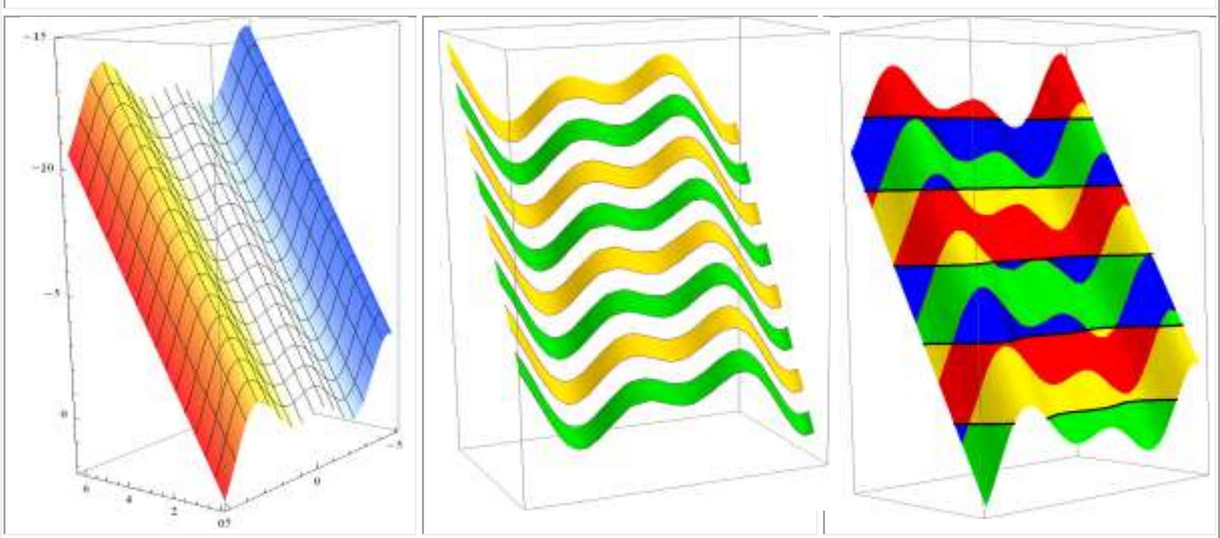


Fig 6 Transformarea spaţiului 1D în spaţiul 3D, cu ecuaţia dreptei, reprezentată în 3 moduri diferite

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.Ro

O singură strâmbă, adică pentru o singura valoare a excentricităţii **s** sau **e** şi **o singură poziţie** a **excentrului S** sau **E**, ca şi pentru o singură dreaptă, un singur cerc şi o singura altă curbă continuă, oricare din **2D**, are dimensiunea topologică **D = 1**.Tot aşa cum, pentru **o singură** şi o anumită valoare dată lui **x,** în ecuaţia dreptei (**D = 1**), se va obţine un singur punct al acesteia, adică de la dimensiunea dreptei / curbei **D = 1** se trece la dimensiunea punctului **D = 0**. Nu şi computaţional, deoarece punctul, neavând dimensiune, nu poate fi marcat computaţional.

S-a văzut cum poate fi multiplicat spaţiul unidimensional **D = 1** în spaţiu bidimensional **D = 2**. Dacă şi **excentricitatea unghiulara ε,** din **constantă,** devine **variabilă**, atunci spaţiul **1D** se transformă în spaţiul **3D** (**Fig. 6**).

În acest caz, ecuaţia dreptelor este aceeaşi cu (4'), cu deosebirea că ε = variabil, adică

(4") y – **s**.sin **ε** = k(x – s.cos **ε**) → y = **s**.sin **ε** +1,5(x – s.cos **ε**), pentru **S(** s ∈ [-1, 1], ε = ∈ [-2π, 2π]).

Multiplicarea nedefinită în continuare a spaţiului **1D** este posibilă prin utilizarea **FSM-CE amplitudine excentrică** sau a oricărei alte **funcţii supermatematice circulare excentrice**, de **dublă**, **triplă** şi/sau **multiplă excentricitate**, excentricităţi variabile multiple, în care excentricitaţile sunt, la rândul lor, funcţii circulare excentrice, de aceeaşi excentricitate sau de o altă valoare, dar variabile (!).

4 MULTIPLICAREA SPAŢIULUI BIDIMENSIONAL 2D

Oricare curbă reprezentată în **2D**, ca şi curbele **FSM-CE** de <u>o singura valoare</u> **s** şi **ε**, are dimensiunea **D = 1**. Dar cu **s** şi e variabile, ele sunt a **3-a** dimensiune a spaţiului **2D** şi, respectiv a **4-a** dimensiune a lui. Rezultă cu claritate că pentru **ε ≠ constantă,** ele sunt **a 4-a** dimensiune a acestuia, cu condiţia ca **S** şi, respectiv, **E** să fie puncte mobile în plan, dar care se deplaseaza liniar pe direcţia **ε = constantă**.

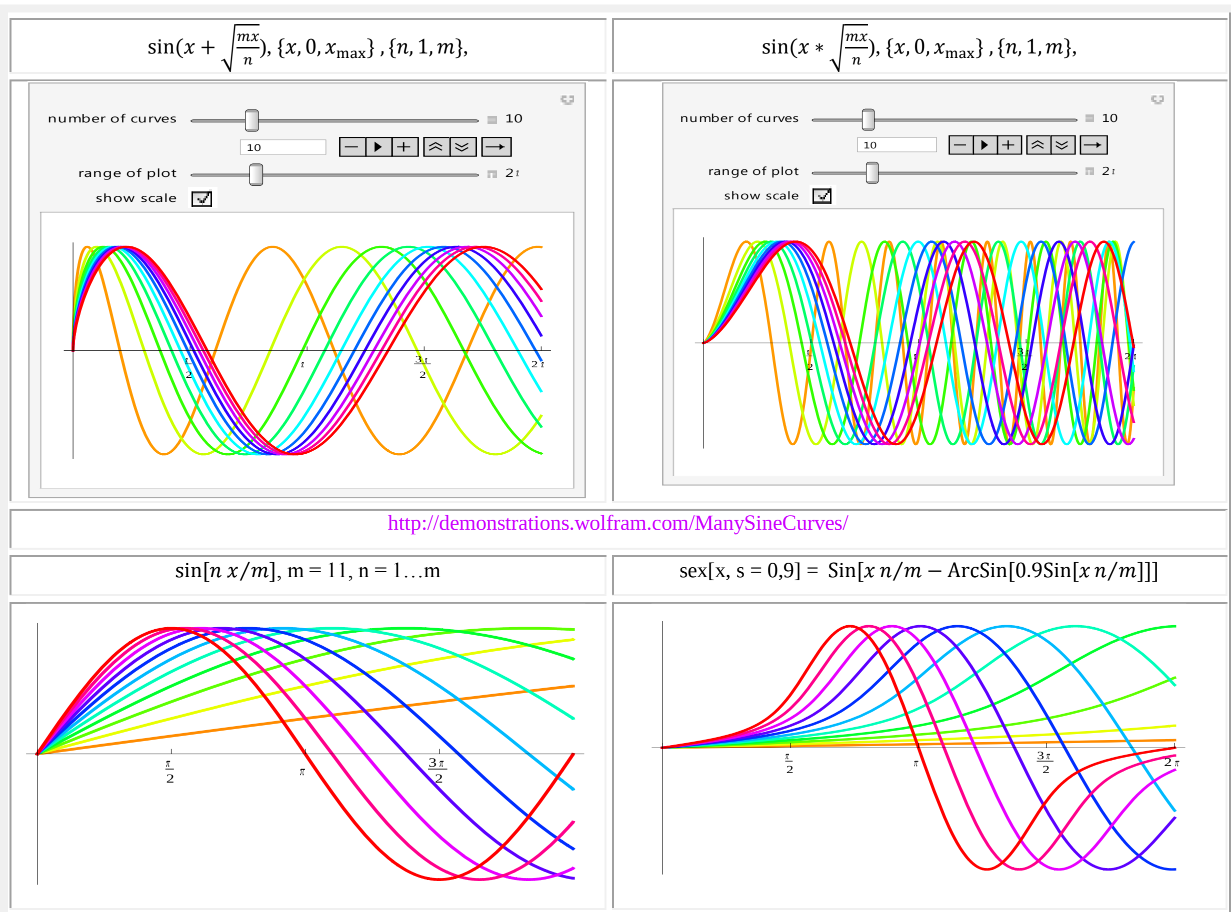


Fig.7 Funcţiile centrice $\sin(\frac{n}{m}x)$ 1D → 2D şi funcţiile excentrice $\text{sex}[\frac{n}{m}x, \mathbf{S}(\mathbf{0}, \mathbf{9}; 0)]$ de 2D

Pentru cazul în care **e**, **s** şi **ε** sunt toate variabile, spaţiul **2 D** se multiplică în spaţiul **4D**.

Dacă un excentru se roteşte uniform, pe o orbită circulară, în jurul centrului **O(0, 0),** atunci **s** şi / sau **e = constante** sunt razele constante ale orbitei circulare şi **ε** = **Ω.θ**, în care viteza unghiulară **Ω** este constantă şi **excentricitatea unghiulară** variabilă **ε** este a **3-a** dimensiune a spaţiului **2D**.

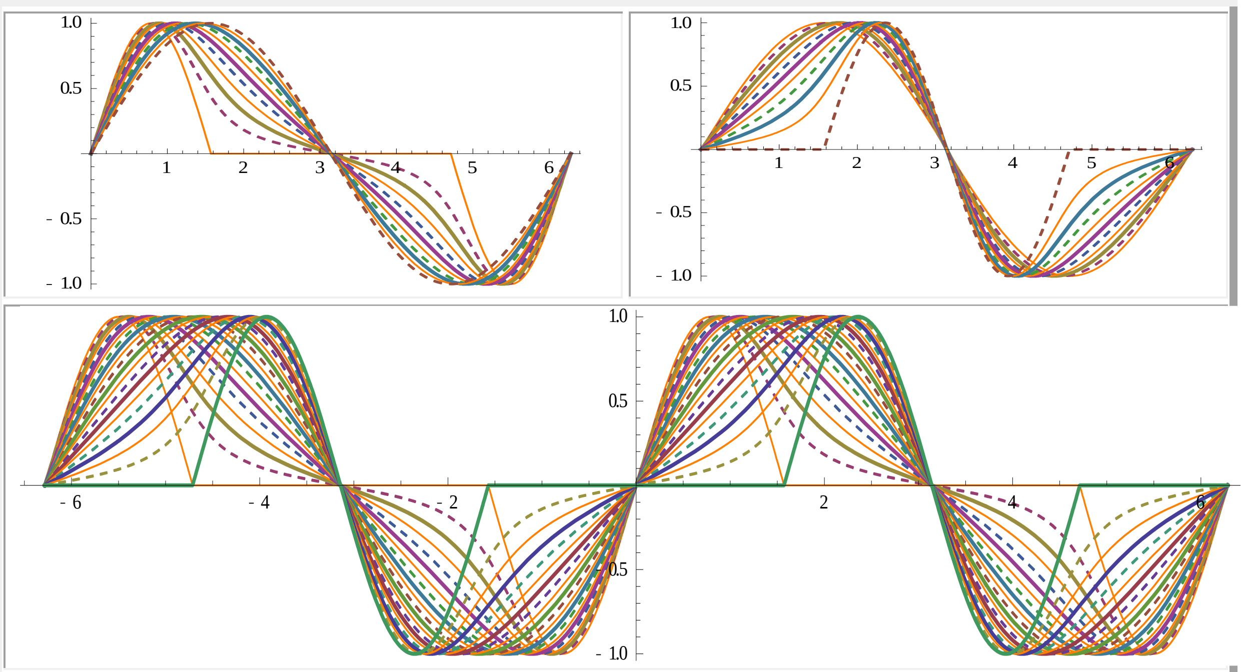


Fig 8 Funcţiile SM circulare excentrice sex [x ≡ **θ**, **S**(**s** ∈ [-1,+1], **ε** = 0), reprezintând trecerea funcţiei matematice centrice **(MC)** **sinx** din **1D** în **2D** ca **FSM-CE sexθ** dacă **s ∈ [-1, +1]** → variabil

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.Ro

Şi funcţiile sinus şi / sau cosinus centrice unidimensionale pot deveni bidimensionale (**Fig. 7**), dacă variabila centrică x este combinată cu o excentricitate variabilă **s**. Relaţiile sunt date în figură.

Dacă orbita lui **S** şi / sau **E** nu este concentrică cu originea **O**(0, 0) şi centrul cercului unitate **C**(0,0), atunci şi **s** şi **e** devin variabile, astfel că excentricitatea liniară variabilă va constitui **a 3-a** şi **a 4-a** dimensiune a spaţiului **2D**.

Dacă **S** şi / sau **E** sunt puncte fixe în planul cercurilor, iar **variabila excentrică θ** este variabilă (**θ = Ω.t**), atunci orbitele circulare, de raza R = 1 şi R oarecare, cu centrul în O(0, 0), generează o mişcare circulară pe cercuri, denumită ***mişcare circulară excentrică*** (**MCE-fix**) de **excentru punct fix**.[12].

Dacă, în timp ce dreapta generatoare excentrică **d** se roteşte în jurul excentrului **E** şi / sau **S** cu **θ = Ω.t,** aceste excentre se deplasează şi ele la rândul lor, pe anumite curbe, după anumite legi, se obţine, ceea ce a fost denumită, ***mişcare circulară excentrică*** (**MCE-mobil**) de ***excentru punct mobil*** [v. www.cartiAZ.ro], mişcare frecvent întâlnită în **universul vizibil**.

5 CURBAREA SPAŢIULUI MULTIDIMENSIONAL

Mişcarea relativă a două sisteme este ilustrată în **figura 9,a**. Dacă e_z, $\boldsymbol{\varepsilon_z}$ şi ε_x sunt nule, atunci vectorul deplasare relativă $\vec{e} = \vec{v}.t$ a sistemului cu originea în **E**, faţă de cel cu originea în **O (0, 0)** este pe direcţia axei **x** > **0** şi acest caz este denumit **aranjement standard**[60] **(Fig. 9,b).** Viteza $\vec{v}$ este considerată constantă şi toate rotaţiile sunt nule, ca sistemele să fie inerţiale.

Coordonatele spaţio-temporale considerate a fi (x, y, z şi **t**), acum se observă clar (**Fig.9,b**) că ele sunt, de fapt, (x, y , z şi **e**), adică, ***excentricitatea variabilă este a 4-a dimensiune a spaţiului tridimensional (3D)*** şi nu mai este necesar să se afirme că timpul este spaţiu.

Din **figura 9,b** se deduce clar că toate mărimile din sistemul **O**(0, 0) şi din sistemul **E(e = v.t, ε = 0)** se pot exprima facil cu **FSM-CE**, ca şi toate mărimile din **figura 9,a**, cu condiţia ca toate excentricitaţile unghiulare ($\boldsymbol{\varepsilon_x}$ şi ε_z) să fie constante şi **e** = **v**.t, în care, **v** = constant.

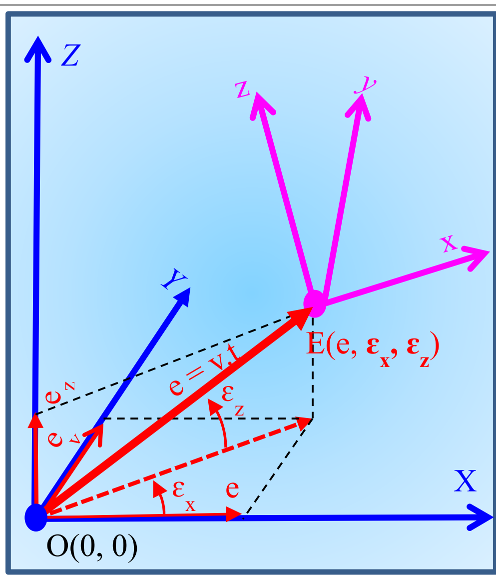


Fig. 9,a Schiţă explicativă la deformarea spaţiului

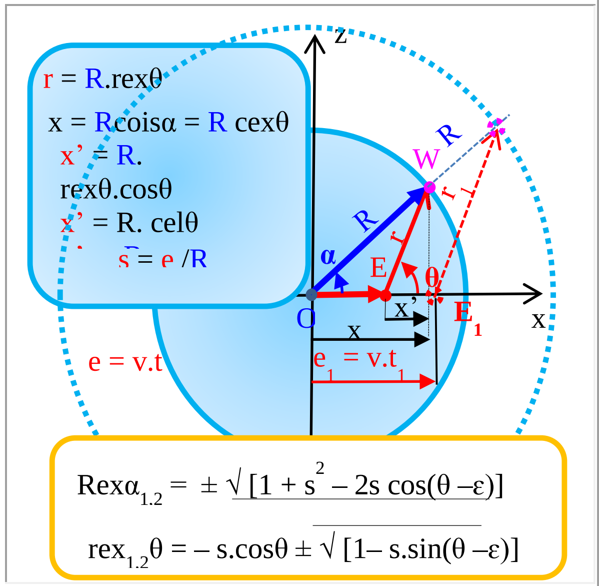


Fig. 9,b Schiţă explicativă a **aranjamentului standard**

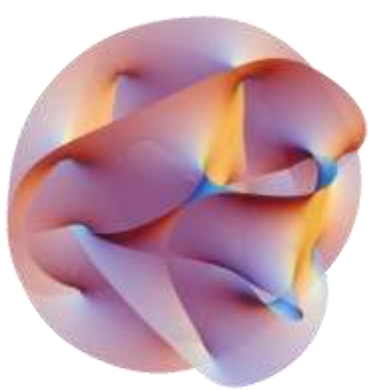
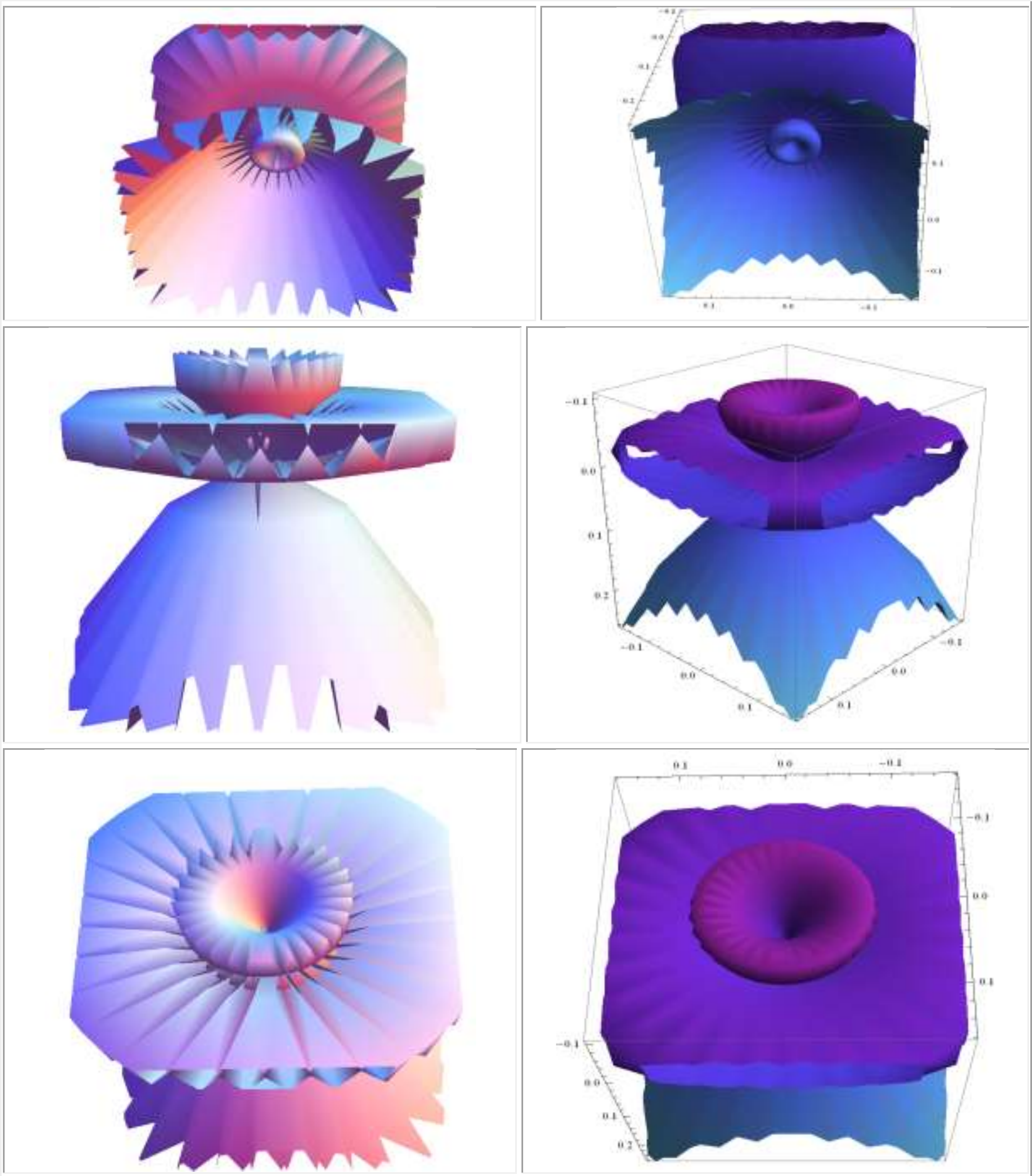


Fig. 9,c Spaţiul Calabi-Yau - O reprezentare grafică ipotetică a aranjării extradimensiunilor.
Proiecţia unei varietăţi Calabi-Yau, una din modurile de compactare a dimensiunilor suplimentare propuse de teoria corzilor (http://ro.wikipedia.org/wiki/Teoria_M

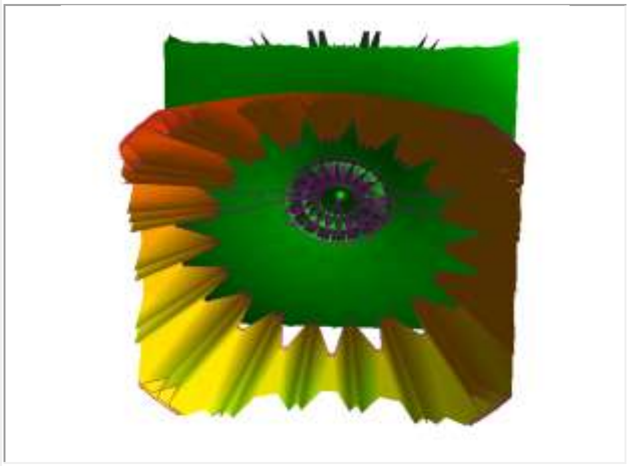
Fig. 9,d
Dar toate obiectele din univers se învârt,
sunt într-o continuă rotaţie.
Cine nu se învârte în univers, dispare.

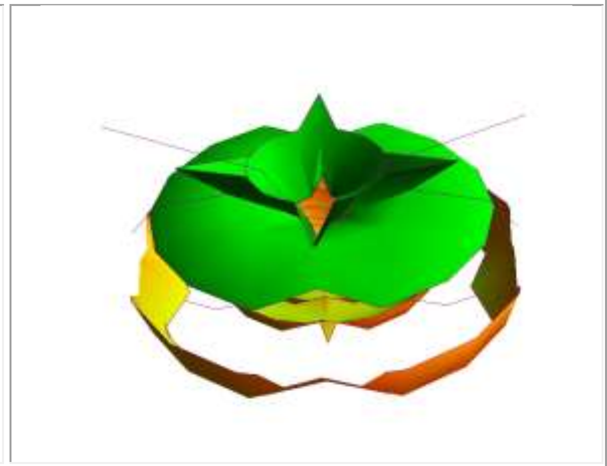
www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.Ro

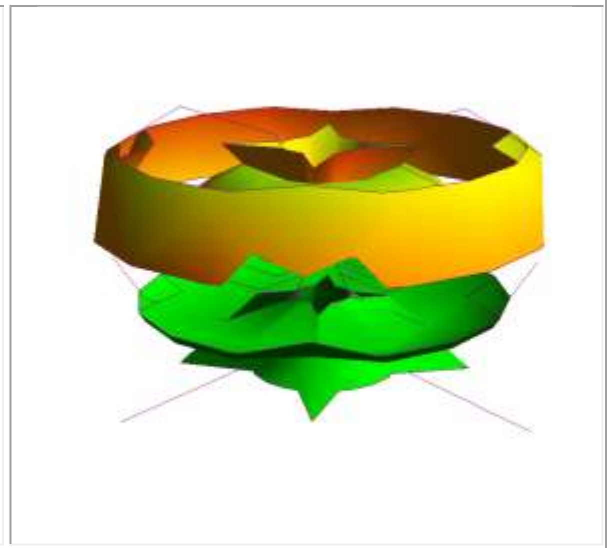
6 OBIECTE DIN "ALTE SPAŢII": DIN SPAŢIUL SUPERMATEMATICII

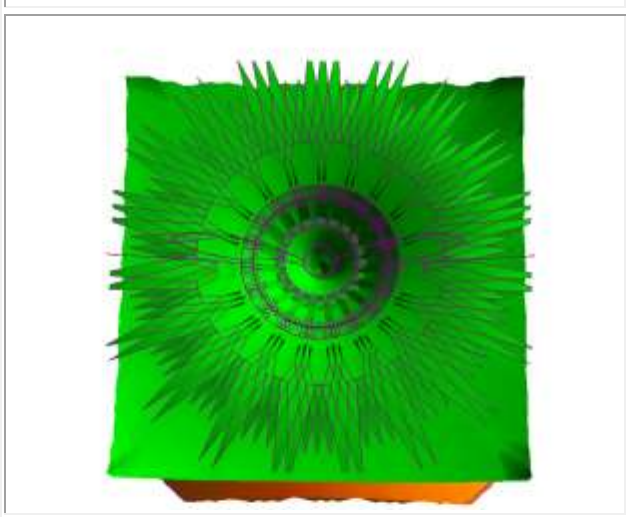


www.SuperMathematica.com

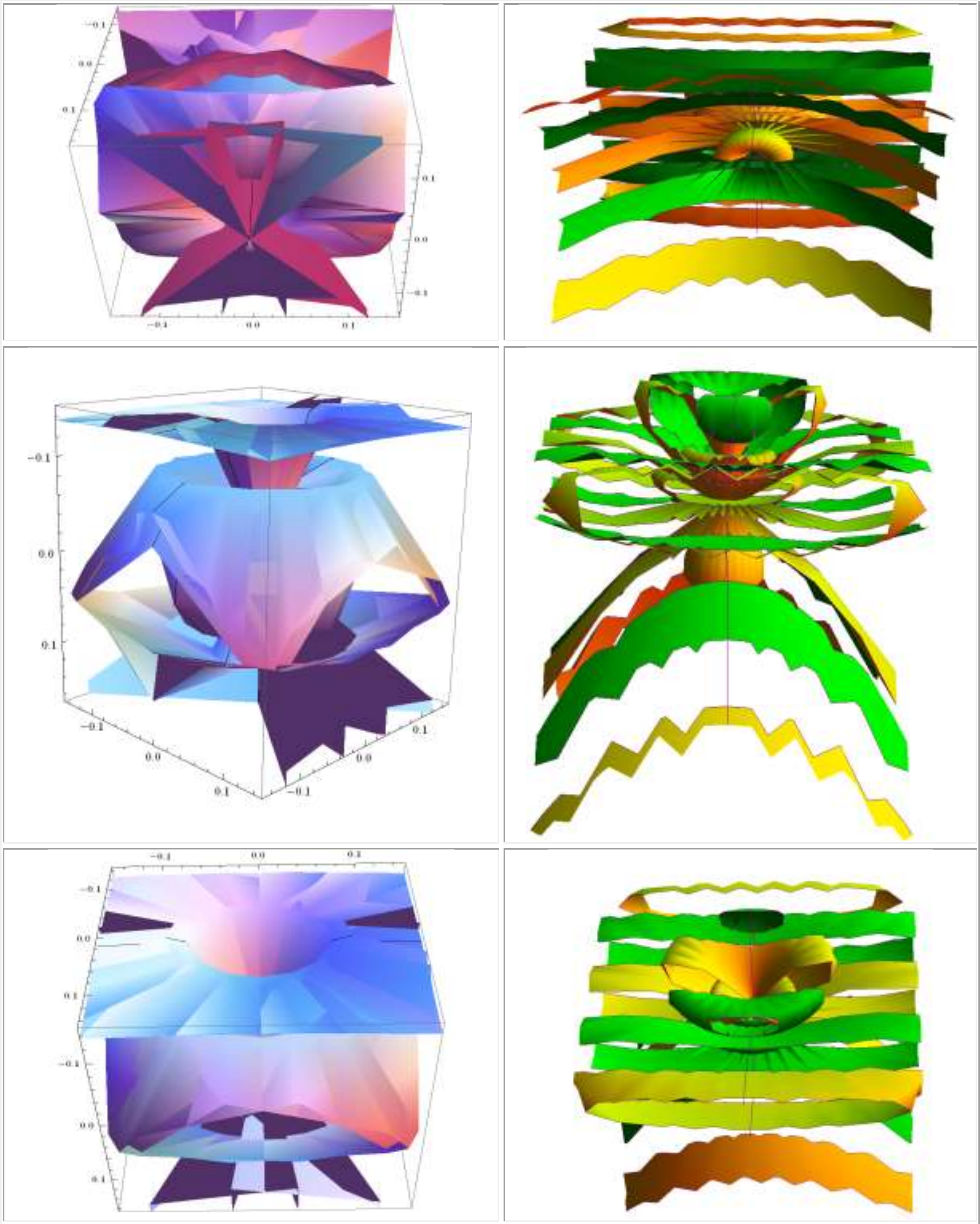




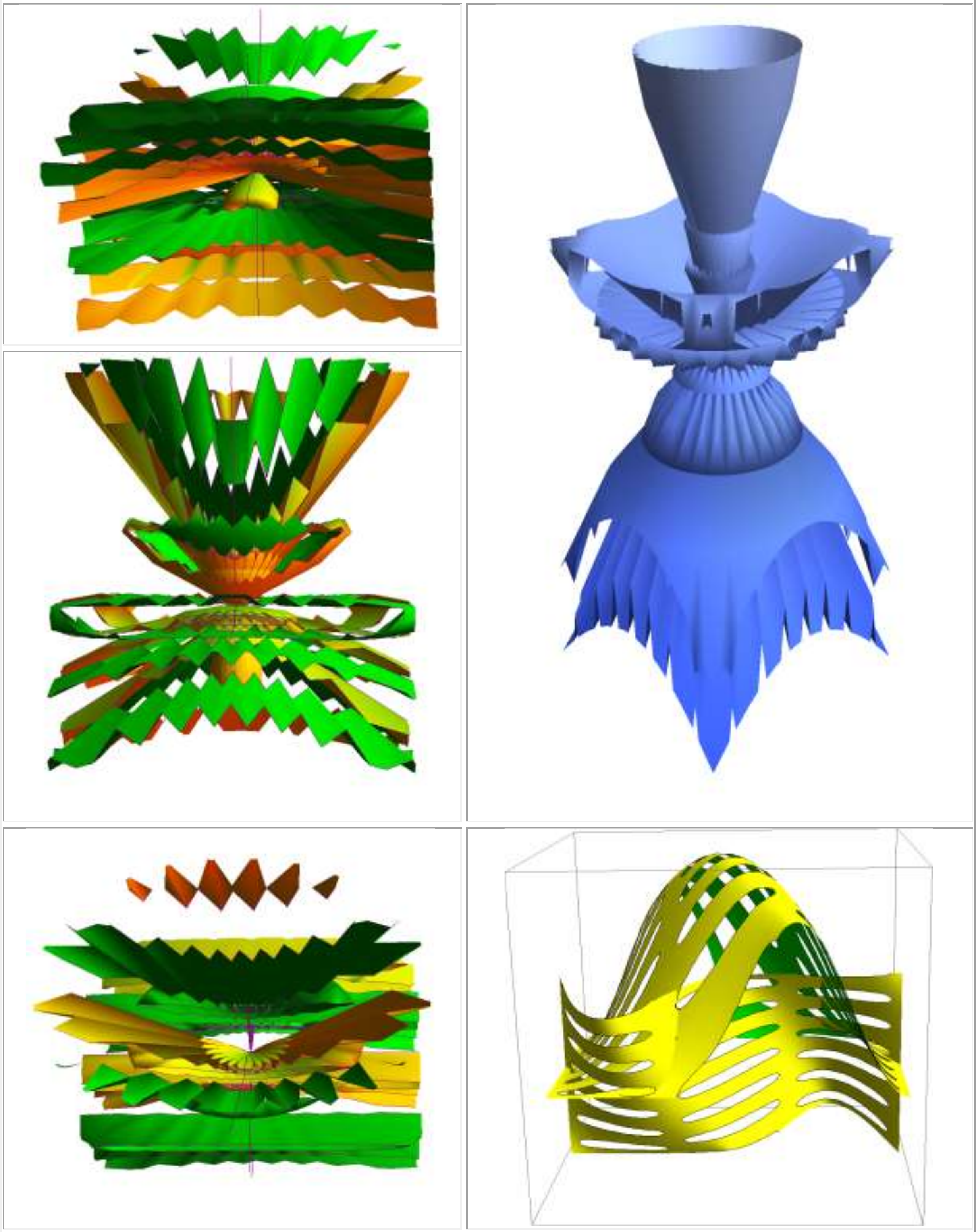




www.SuperMathematica.com



www.SuperMathematica.com

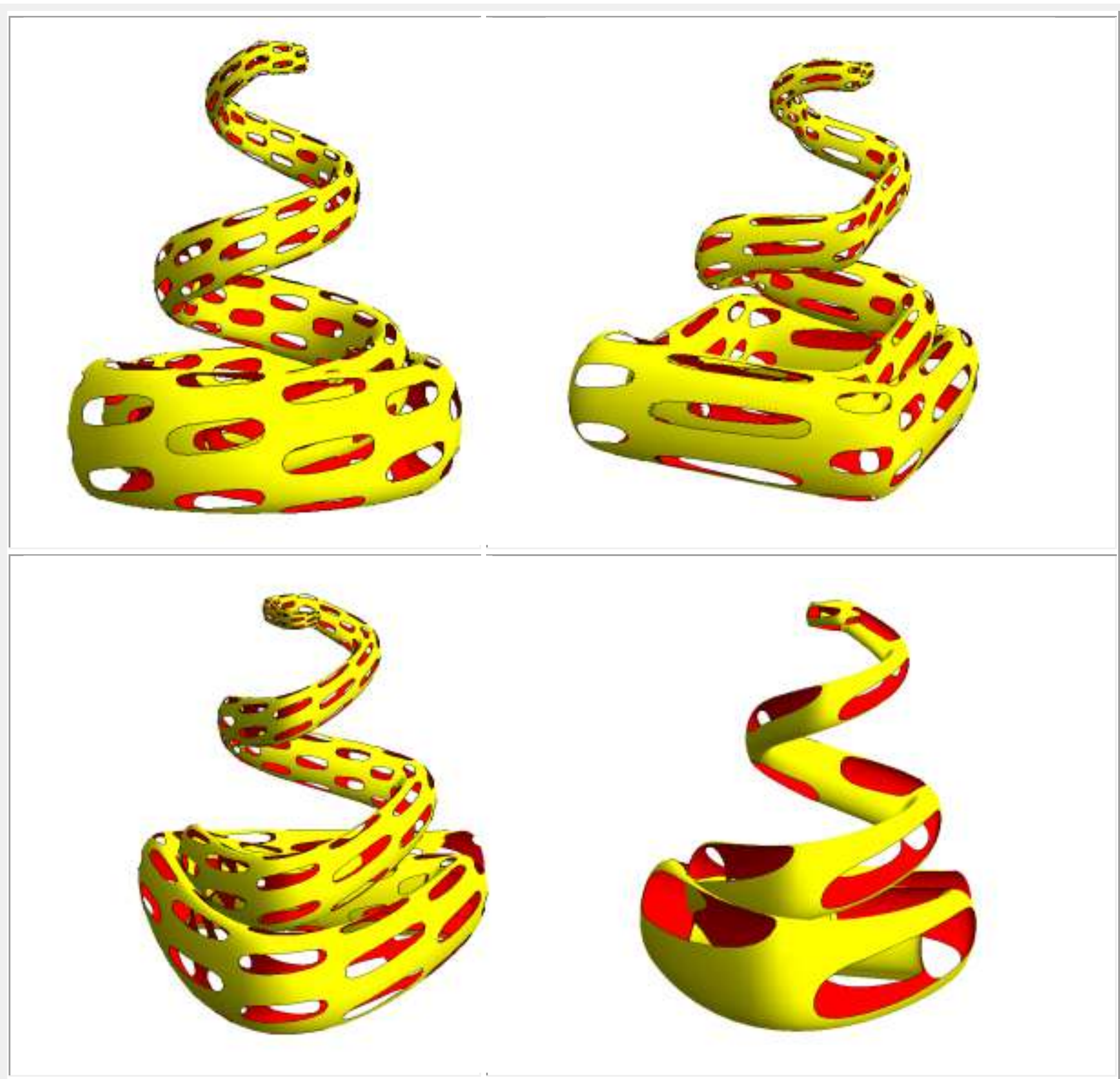


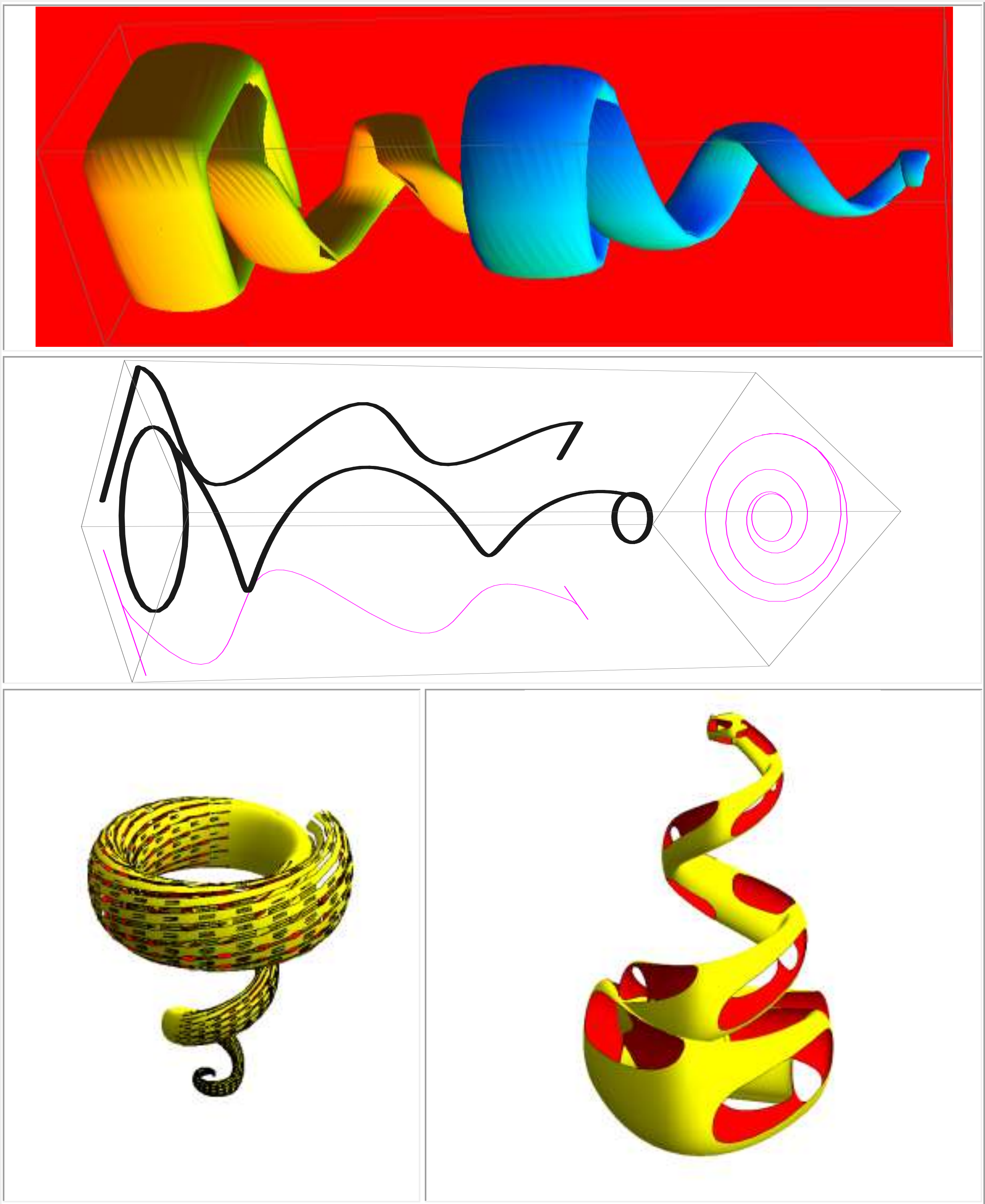
www.SuperMathematica.com

Faptul că în **figura 9,a** apar 3 excentricitaţi liniare variabile **e_x**, **e_y** şi **e_z** nu înseamnă că sunt tot atâtea dimensiuni suplimentare (mai multe) ale spaţiului, deoarece ele sunt toate dependente de una şi aceeaşi variabilă **e** = **v**.t. Ca urmare şi sitemul din **figura 9,a** este cvadridimensional (x, y, z, **e**) şi sistemul **E** se **deplasează rectiliniu** în direcţia vectorului $\vec{e}$ cu viteză uniformă **v**.

Dar, dacă una dintre excentricitătile unghiulare **ε_x** sau ε_z devine **variabilă**, după o lege oarecare, atunci ea va constitui o a **5-a** dimensiune a spaţiului, **spaţiu care se va curba**, deoarece traiectoria originii sistemului **E** va fi o curbă, într-un plan al spaţiul **3D**$^+$, măturat de rotaţia vectorului **e** în acest plan, ca şi toate traiectorile tuturor elementelor acestui sistem **E**.

Dacă ambele excentricităţi unghiulare sunt variabile, atunci apare şi a **6-a** dimensiune a spaţiului **3D**, iar **E** se va deplasa pe o **curbă strâmbă în spaţiul** **3D**$^+$ (**Fig. 9,c**).





ELICE SUPERMATEMATICE

www.SuperMathematica.com

Motto:” . . . Prin ***al treilea*** (termen) se slăbeşte opoziţia, scade caracterul de antinomie (contradicţie categorică, nn), ***triumfă principiul armoniei***”

Mircea Florian

CAPITOLUL XIX

TRILOBE. FUNCTII TRILOBICE

1: DE VARIABILE EXCENTRICE θ

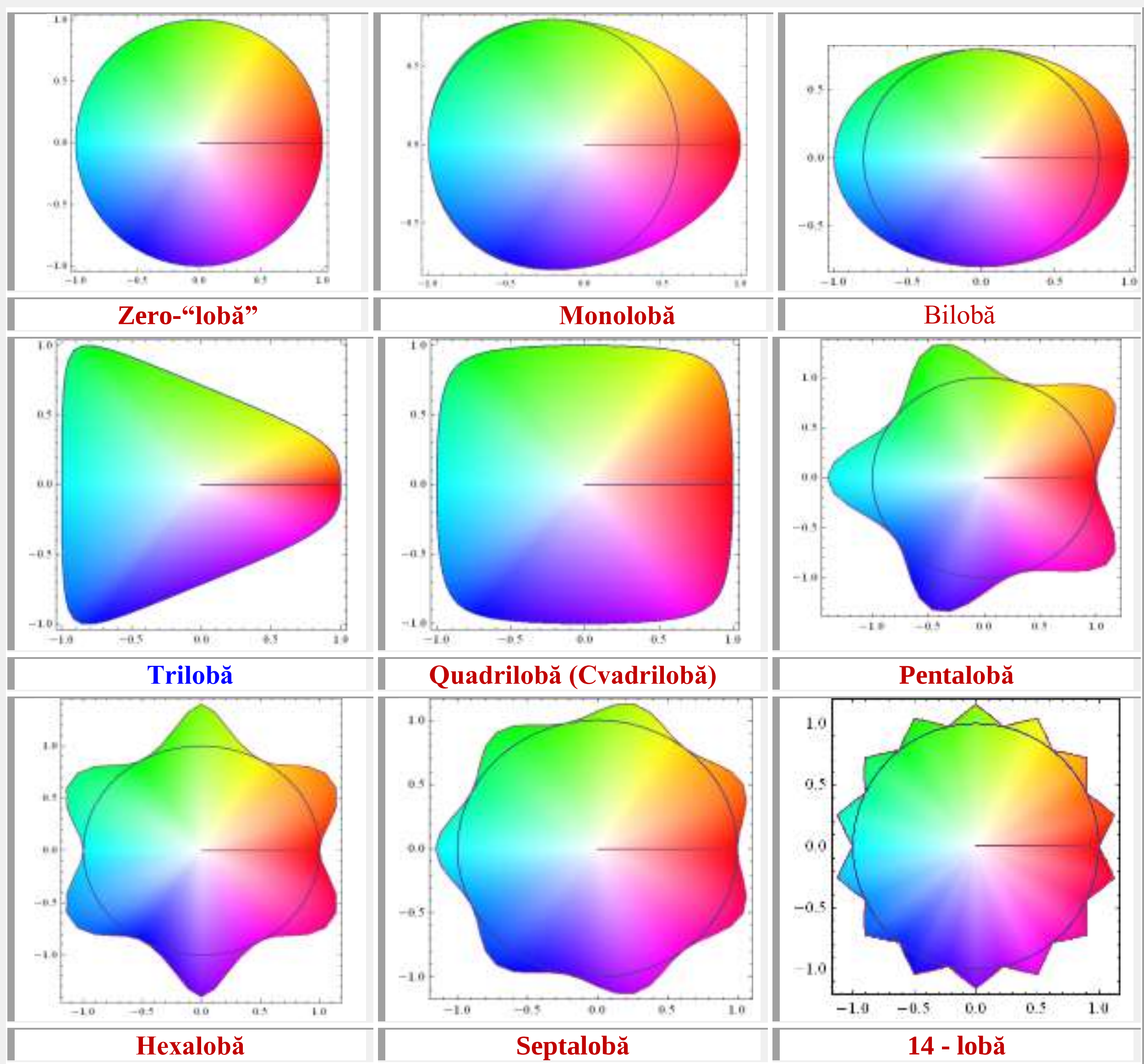


Fig.1 **DISCURI L O B I C E** diverse

Lobele sunt funcţii supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) plane, închise, având un număr oarecare de lobi. Cercul, sau centrica circulară şi, respectiv, discul circular sunt singurele figuri geometrice plane lipsite de lobi, care pot fi denumite **zero**lobe. Există monolobe, bilobe, trilobe, quadrilobe (cvadrilobe), pentalobe, hexalobe … , n-lobe sau multilobe, cu **discurile** lor prezentate în **figura 1**

Trilobele sunt curbe **supermatematice** (**SM**) **circulare excentrice** (**CE**), plane (**2D**), închise, apărute graţie descoperirii **supermatematicii,** în anul 1970, care fac parte din **marea familie a lobelor**. Ele se exprimă prin ecuaţii parametrice cu **FSM-CE cosinus excentric cexθ** şi **sinus excentric sexθ normale**, în care funcţiile **beta excentrice S** (de sinus) $\boldsymbol{bex_S\theta}$ sunt exprimate cu funcţia sinus (indice **S**)

(1) $$\begin{cases} \boldsymbol{cex\theta} = \cos[\theta - \beta_S(\theta)] = \cos[\theta - bex_S\theta] = \cos[\theta - \arcsin[s.\,\mathbf{sin}(\theta - \varepsilon)] \\ \boldsymbol{sex\theta} = \sin[\theta - \beta_S(\theta)] = \sin[\theta - bex_S\theta] = \sin[\theta - \arcsin[s.\,\boldsymbol{sin}(\theta - \varepsilon)] \end{cases},$$

cu graficele din **figura 2** şi prin cele modificate, în care funcţiile **beta excentrice (exprimate cu cosinus→** “de cosinus”) $\boldsymbol{bex_C\theta}$ sunt denumite şi **FSM-CE trilobice (Fig.3).**

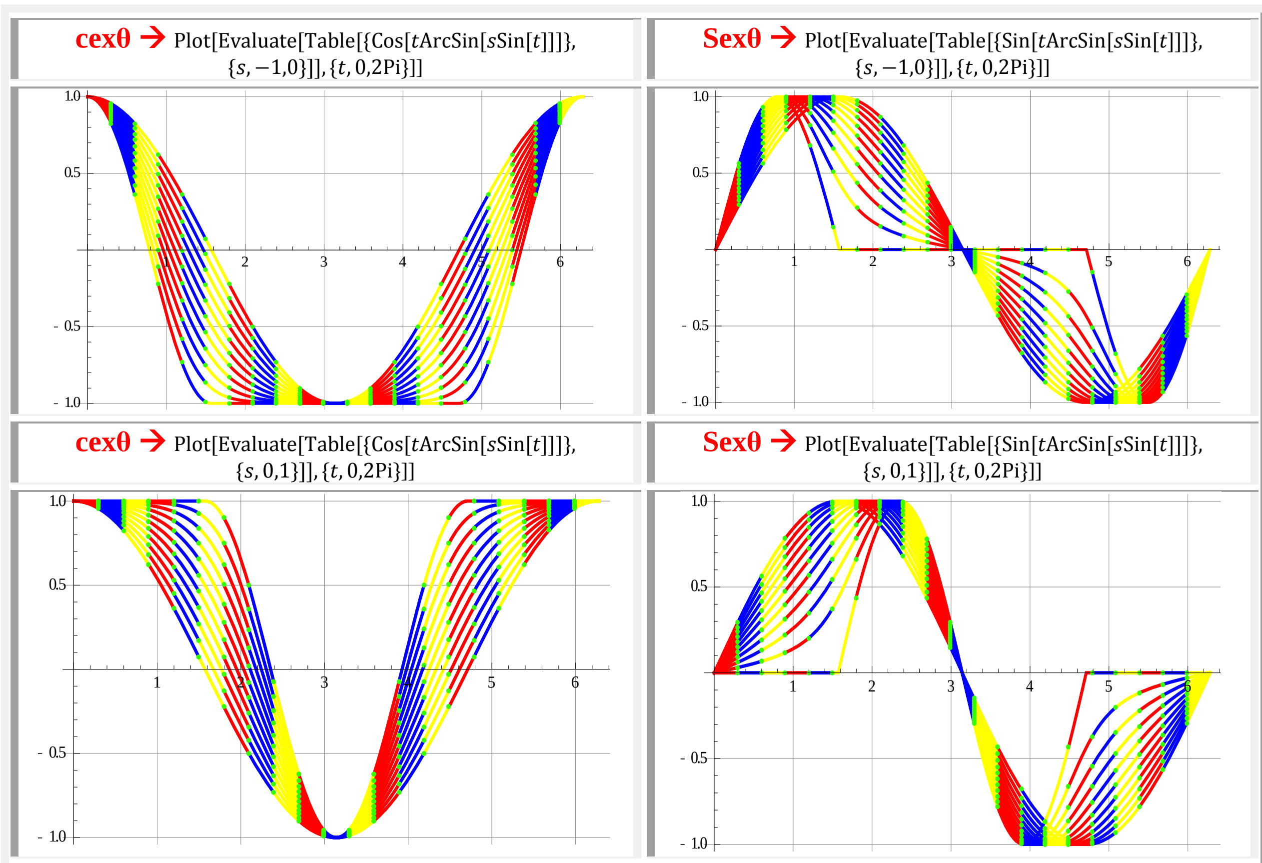
Funcţiile trilobice au expresiile

(2) $$\begin{cases} \boldsymbol{ctr\theta} = \cos[\theta - \beta_C(\theta)] = \cos[\theta - bex_C\theta] = \cos[\theta - \arcsin[s\,\mathbf{cos}(\theta - \varepsilon)] \\ \boldsymbol{str\theta} = \sin[\theta - \beta_C(\theta)] = \sin[\theta - bex_C\theta] = \sin[\theta - \arcsin[s.\,\boldsymbol{cos}(\theta - \varepsilon)] \end{cases}$$

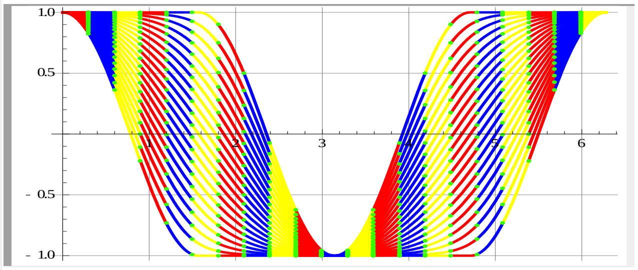
care sunt aceleaşi cu cele ale **FSM-CE** (1), dar de excentricitate unghiulară **ε** = $-\frac{\pi}{2}$ deoarece

(3) $\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$

şi au graficele din **figura 3.**



cexθ → s ∈ [-1, +1]	sexθ → s ∈ [-1, +1]



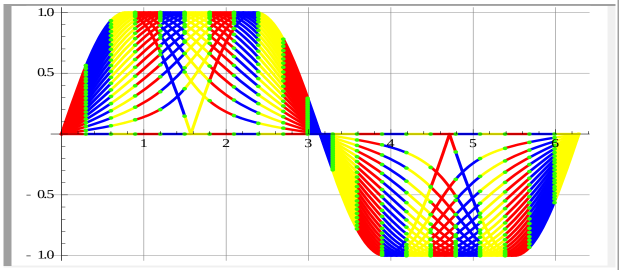
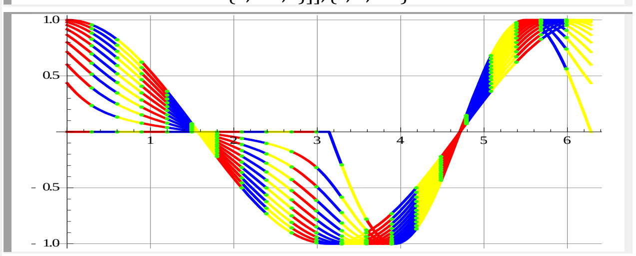


Fig.2 FSM circulare centrice

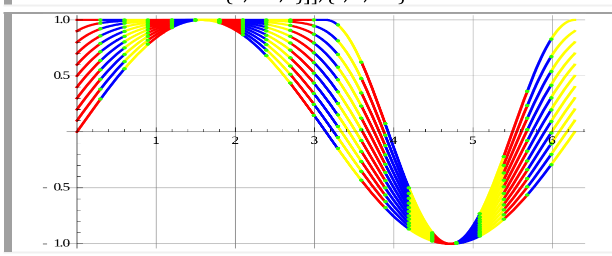
www.supermathematica.com **www.supermatematica.ro** **www.supermathematica.org**

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

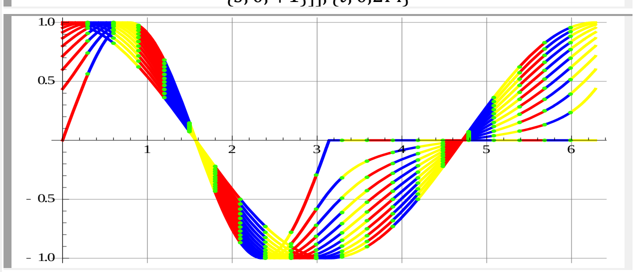
ctrθ → Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]}, {s, −1,0}]], {t, 0,2Pi}]



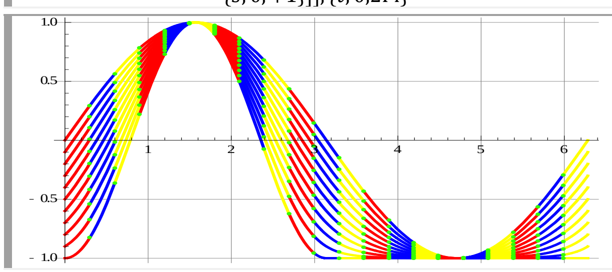
strθ → Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]}, {s, −1,0}]], {t, 0,2Pi}]



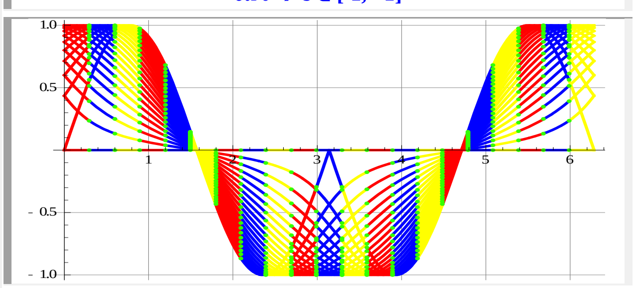
ctrθ → Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]}, {s, 0, +1}]], {t, 0,2Pi}]



strθ → Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]}, {s, 0, +1}]], {t, 0,2Pi}]



ctrθ → s ∈ [-1, +1]



strθ → s ∈ [-1, +1]

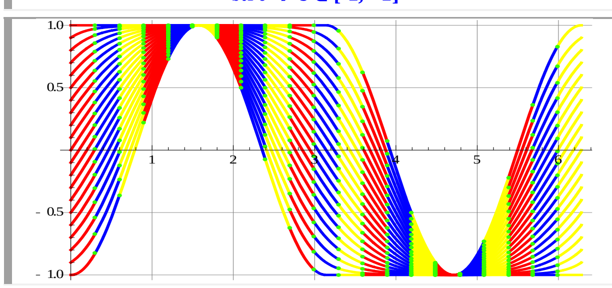


Fig. 3 FSM circulare trilobice

www.supermathematica.com **www.supermatematica.ro** **www.supermathematica.org**

ParametricPlot[{Cos[u + ArcSin[s Sin[u]]], Sin[u − ArcSin[s **Cos[u]**]]}, {u, 0,2Pi}, {s, 0,1}]]

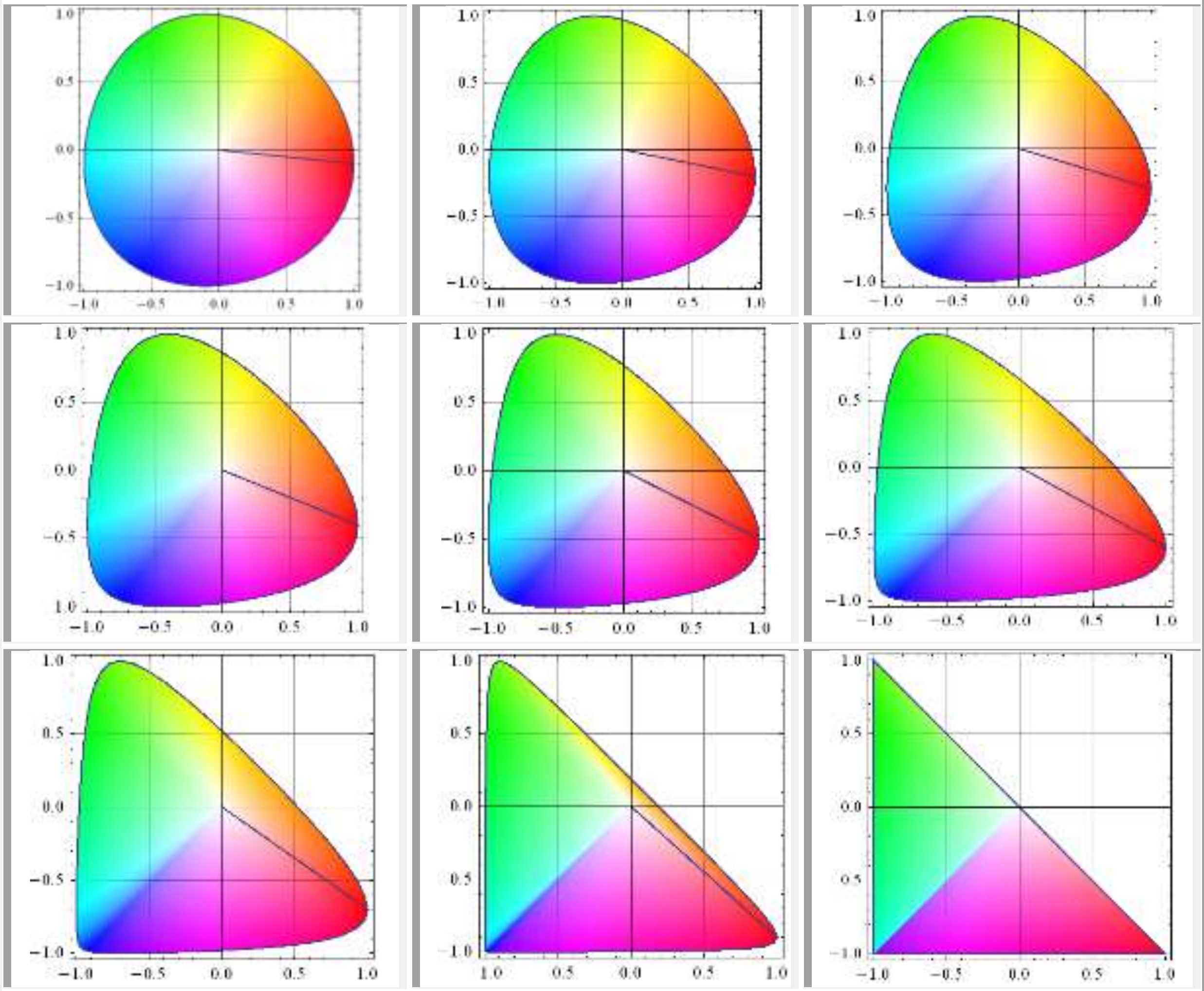


Fig.4,a **DISCURI T R I L O B I C E S** **de** variabilă **excentrică θ**, cu **R = 1**
şi excentricitate numerică s ∈ (0; 1) cu pasul **0,1**

www.supermathematica.com **www.supermatematica.ro**

Ca să aspire la denumirea de lobă, curbele trebuie să fie închise şi la cele două capete ale excentricităţii liniare numerice **s**, adică pentru **s = 0** şi s = ± 1 să degenereze în cerc, respectiv într-un poligon perfect, regulat sau neregulat. Trilobele de sinus, **TRILOBELE S** **(Fig.4,a)**, degenerează în **triunghi echilateral** iar **TRILOBELE C** **(Fig.4,b)**, în **trident** ca în **figura 4,c**.

Diversele poziţii ale triunghiurilor isoscele din **figura 3**, de exemplu, depind de semnele expresiilor din ecuaţiile parametrice (4) :

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \pm\, \mathrm{R}.\cos[\theta - \arcsin(\mathrm{s}.\sin\theta)] = \boldsymbol{cex\theta}, \\ \mathrm{y} = \pm\, \mathrm{R}.\sin[\theta - \arcsin(\mathrm{s}.\cos\theta)] = \boldsymbol{str\theta} \end{cases}$$

cu graficele din **figura 5**, denumite **trilobe S** de y, sau de **sinus trilobic strθ**, deoarece x = **cexθ** şi **y = strθ.**

Trilobele C de x sau de cosinus trilobic au ecuaţiile parametrice următoare:

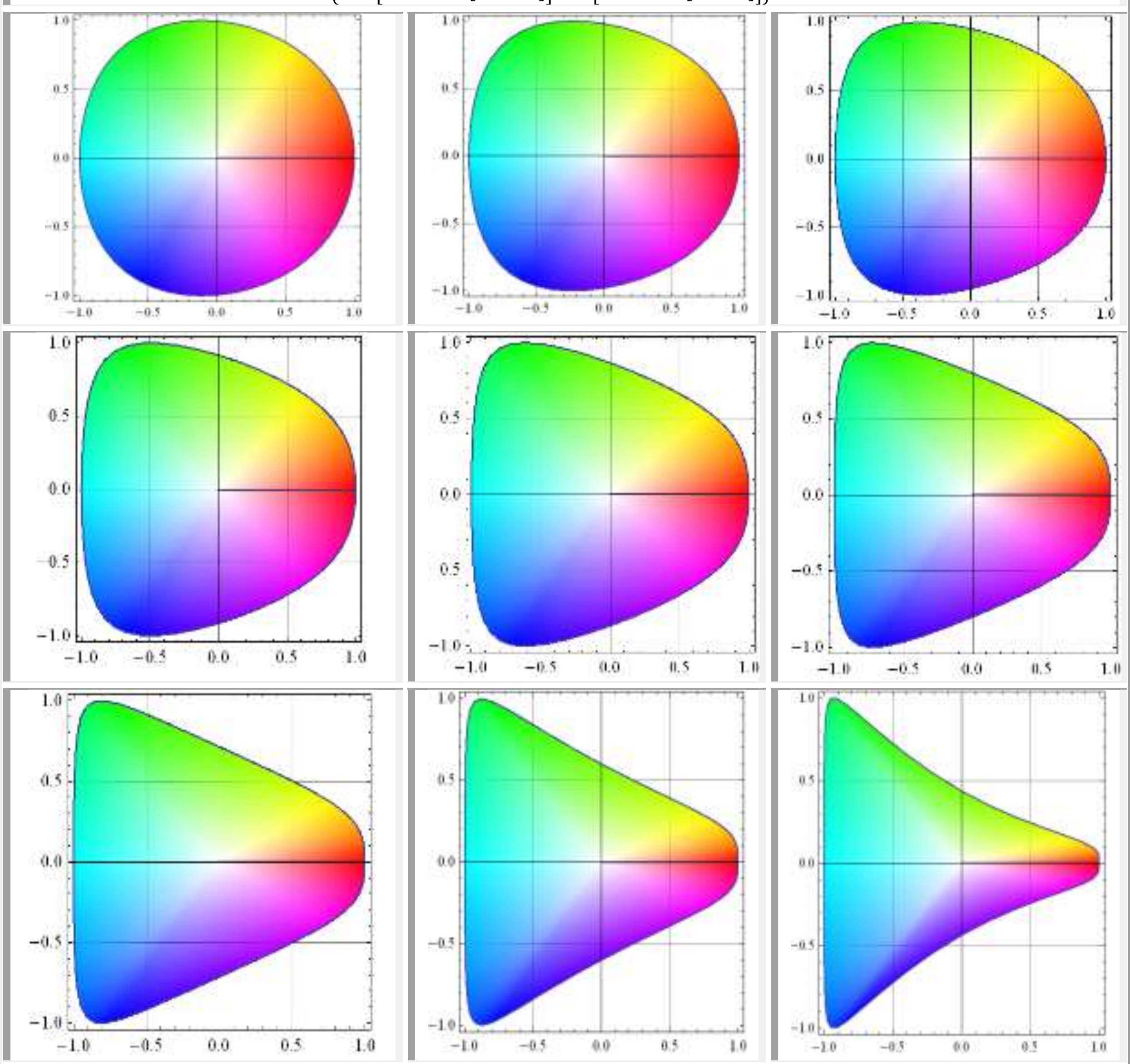
(5) $$\begin{cases} x = R.\cos[\theta - \arcsin(s.cos\theta)] = \boldsymbol{ctr\theta} \\ y = R.\sin[t - \arcsin[s.\sin\theta]] = \boldsymbol{sex\theta} \end{cases}$$

şi graficele din **figura 6**.

În **figurile 5** şi **6** au fost reprezentate, imaginile trilobelor în **3D** pentru întregirea aspectului acestora.

Dacă ecuaţiile parametrice sunt de acelaşi tip circulare (1) sau trilobice (2), atunci oricare ar fi **excentricitatea liniară numerică s**, aceeaşi în ambele ecuaţii, curbele plane obţinute sunt toate cercuri, **densitatea punctelor** fiind diferită în funcţie de valoarea lui **s** (**Fig.7**); diferenţe mai evidente / pregnante sunt în jurul originii **A(1,0)** pentru **excentricitatea unghiulară ε** = 0 şi în B(0, -1) pentru **ε** = - $\frac{\pi}{2}$ **.**

ParametricPlot[{ Cos [t − ArcSin[sCos[t]]], Sin [t − ArcSin[sSin[t]]]}, {t, 0,2Pi}, {s, 0,1}]]



BUPT

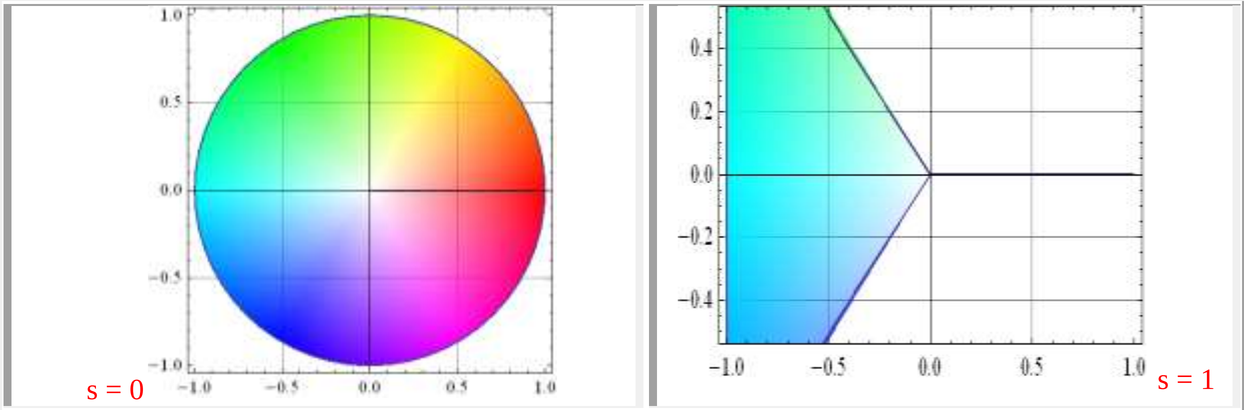


Fig. 4,b DISCURI T R I L O B I C E C
de variabilă **excentrică θ**, cu **R = 1** de **funcţia trilobică x =** ctrθ **şi y = sexθ**

www.supermathematica.com **www.supermatematica.ro**

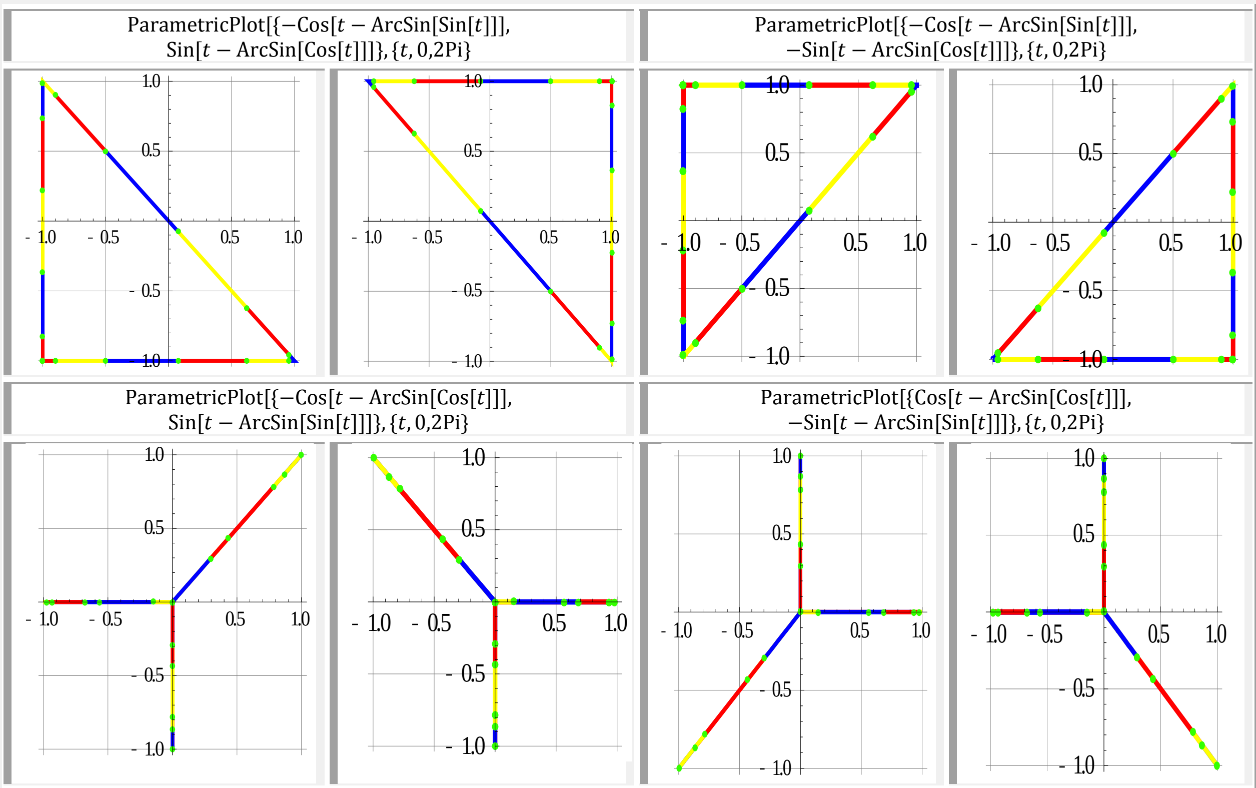
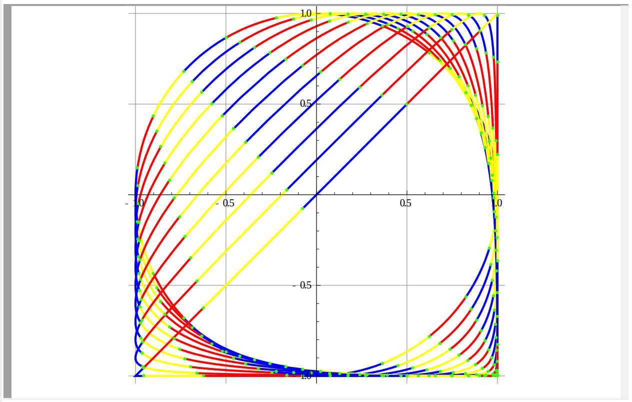
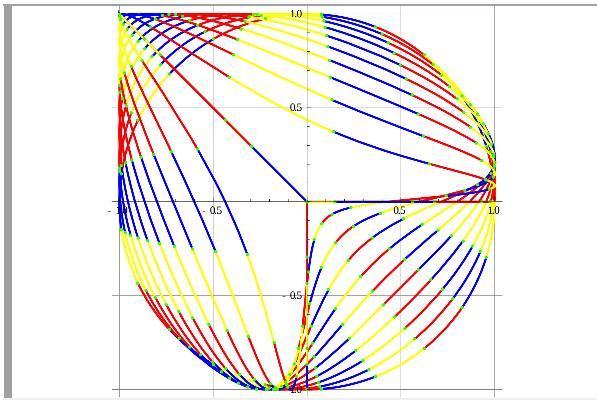


Fig. 4,c Trilobe de **s = 1,** degenerate în **triunghi isoscel** şi în **trident**

www.supermathematica.com **www.supermatematica.ro** **www.supermathematica.org**

A fost aleasă o familie de cercuri de **R ∈ [0; 0,5]** pentru a pune mai bine în evidenţă acest fenomen.

Dacă, în ecuaţiile parametrice (1), se **schimbă semnul** excentricităţii **s** din x faţă de **s** din y, sau invers, atunci se obţin trilobele din **figura 8**.

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]}, {s, 0,10}]], {t, 0,2Pi}	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, 0,10}]], {t, 0,2Pi}
	
ParametricPlot3D[{Cos[u + ArcSin[0.1sSin[u]]], Sin[u − ArcSin[0.1sCos[u]]],0.1s}, {u, 0,2Pi}, {s, −10,10}	ParametricPlot3D[{Cos[u − ArcSin[0.1sCos[u]]], Sin[u − ArcSin[0.1sSin[u]]],0.1s}, {u, 0,2Pi}, {s, −10,10}

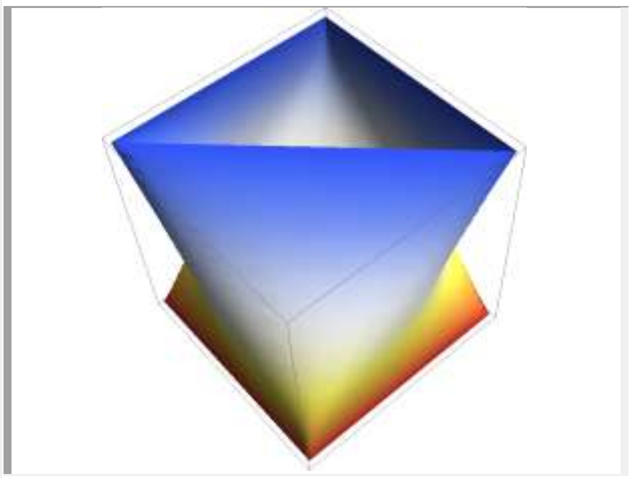
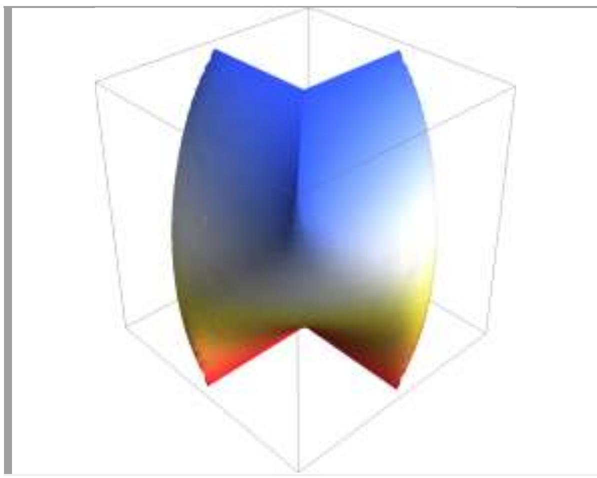
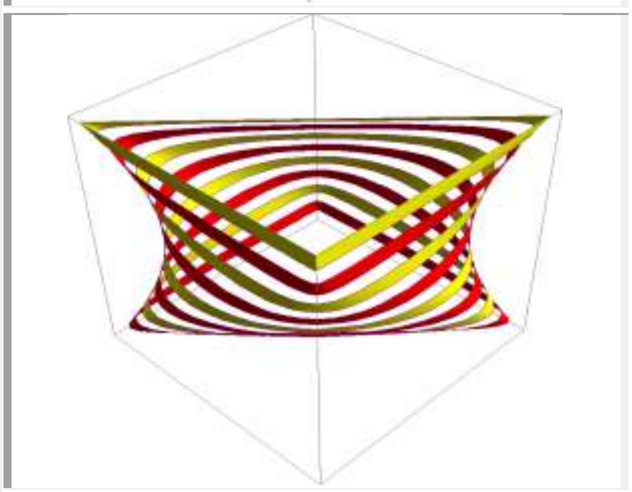

	


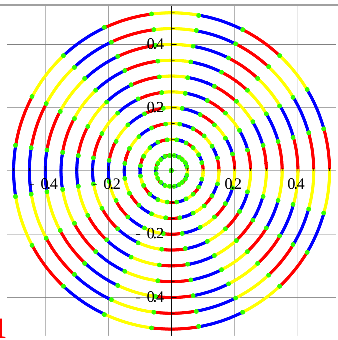
Fig.5 Trilobe S	**Fig.6 Trilobe C**

de **s ∈ [0, 1]** cu pasul 0,1

www.supermathematica.com **www.supermatematica.ro** **www.supermathematica.org**

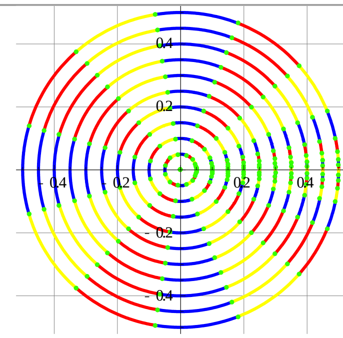
Trilobele din **figura 8** au fost obţinute numai prin schimbarea semnului excentricităţii **s** în una din cele două ecuaţii parametrice: în funcţia **sexθ** în stânga ◄ şi în **cexθ** în partea dreaptă ►.Pentru s = ± 1 se obţin poligoanele degenerate în forma de **T** din **figura 9**.

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.5sCos[t − ArcSin[**0. 1**Sin[t]]], 0.5sSin[t − ArcSin[**0. 1**Sin[t]]]}, {s, 0,1}]], {t, 0,2Pi}]



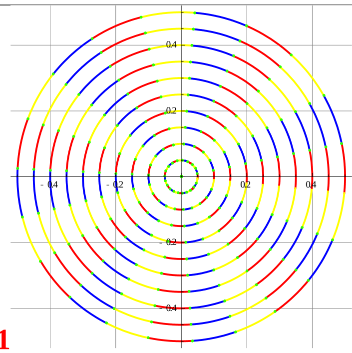
s = 0,1

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.5sCos[t − ArcSin[**0. 9**Sin[t]]], 0.5sSin[t − ArcSin[**0. 9**Sin[t]]]}, {s, 0,1}]], {t, 0,2Pi}]



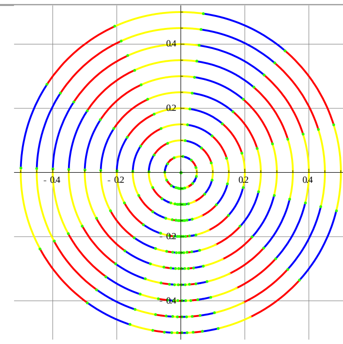
s = 0,9

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.05sCos[t − ArcSin[0.1Cos[t]]], 0.05sSin[t − ArcSin[0.1Cos[t]]]}, {s, 0,10}]], {t, 0,2Pi}]



s = 0,1

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.05sCos[t − ArcSin[0.9Cos[t]]], 0.05sSin[t − ArcSin[0.9Cos[t]]]}, {s, 0,10}]], {t, 0,2Pi}]

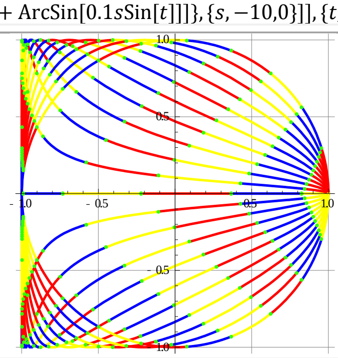


s = 0,9

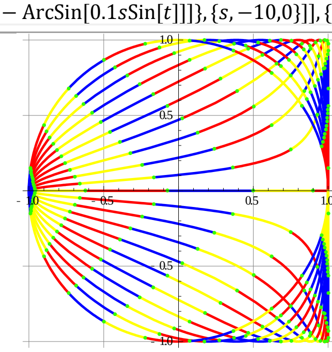
Fig.7 Dispersia diferită a densităţii punctelor pe cercuri în funcţie de valoarea excentricităţii **s** cu **R** ∈ **[0; 0,5]** pentru ecuaţiile parametrice **circulare excentrice** (**1**) sus ▲ şi **trilobice** (**2**) jos ▼

www.supermathematica.com **www.supermathematica.ro** **www.supermathematica.org**

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,0}]], {t, 0,2Pi}]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sSin[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,0}]], {t, 0,2Pi}]

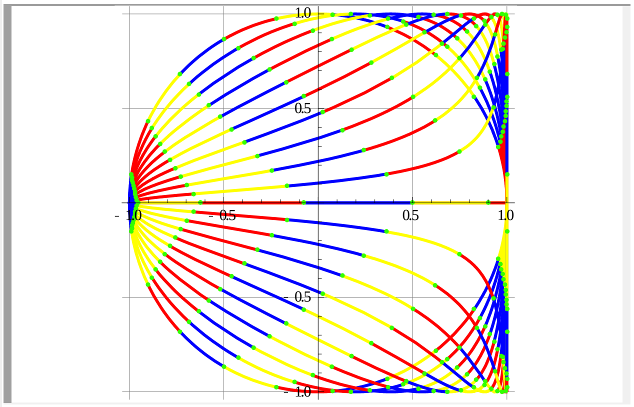


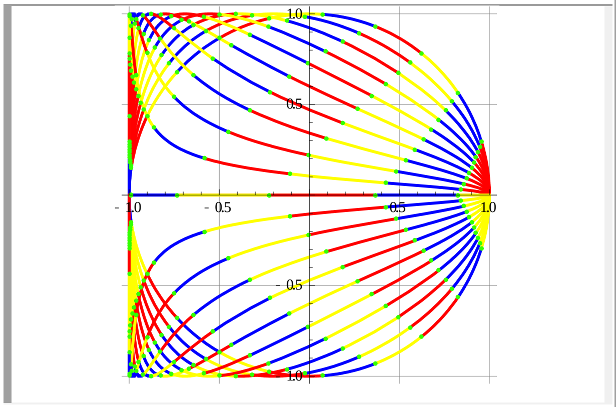
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sSin[t]]],

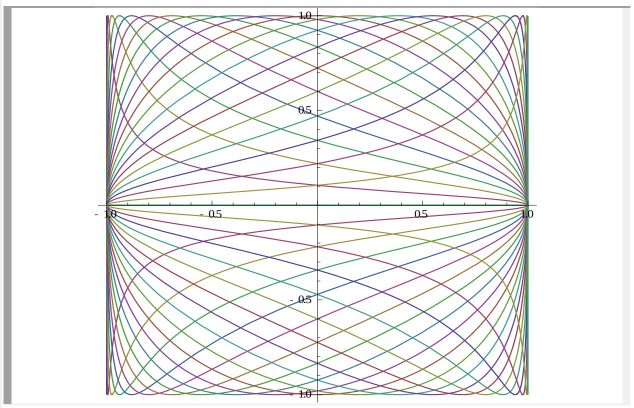
BUPT

Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, 0,10}]], {t, 0,2Pi}	Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, 0,10}]], {t, 0,2Pi}





ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[sSin[t]]], Sin[t + ArcSin[sSin[t]]]}, {s, −1,1}]], {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sSin[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}]], {t, 0,2Pi}]



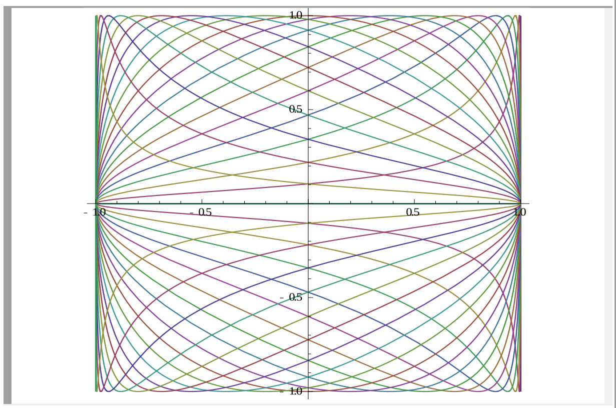
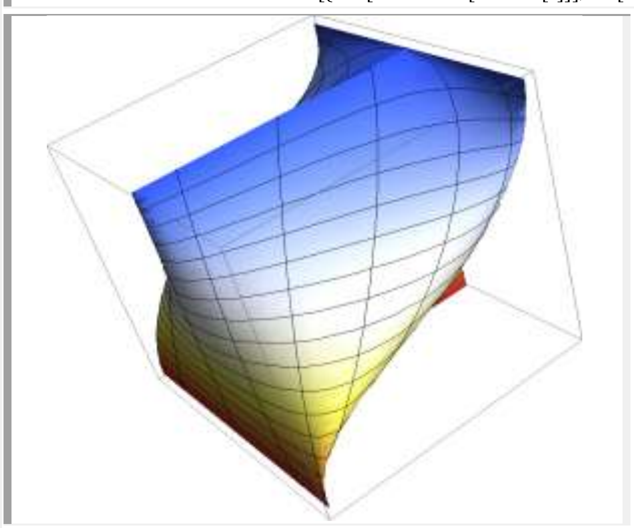
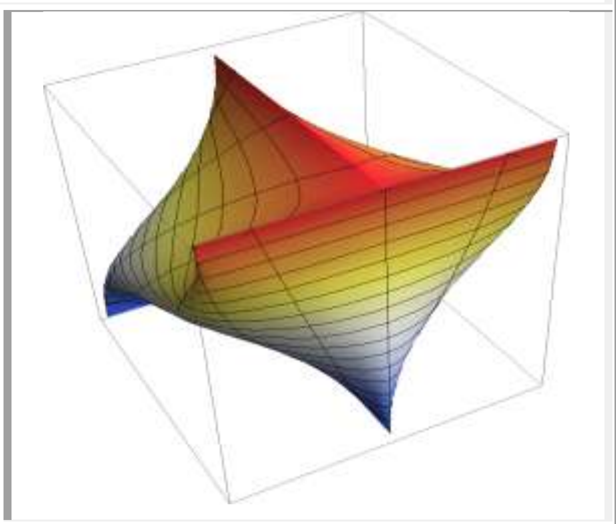


Fig.8,a Trilobe de **FSM-CE** excentrice de x = cex(θ, + s) şi y = sex(θ,− s) în **2D**

ParametricPlot3D[{Cos[t + ArcSin[0.1sSin[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],0.1s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]]





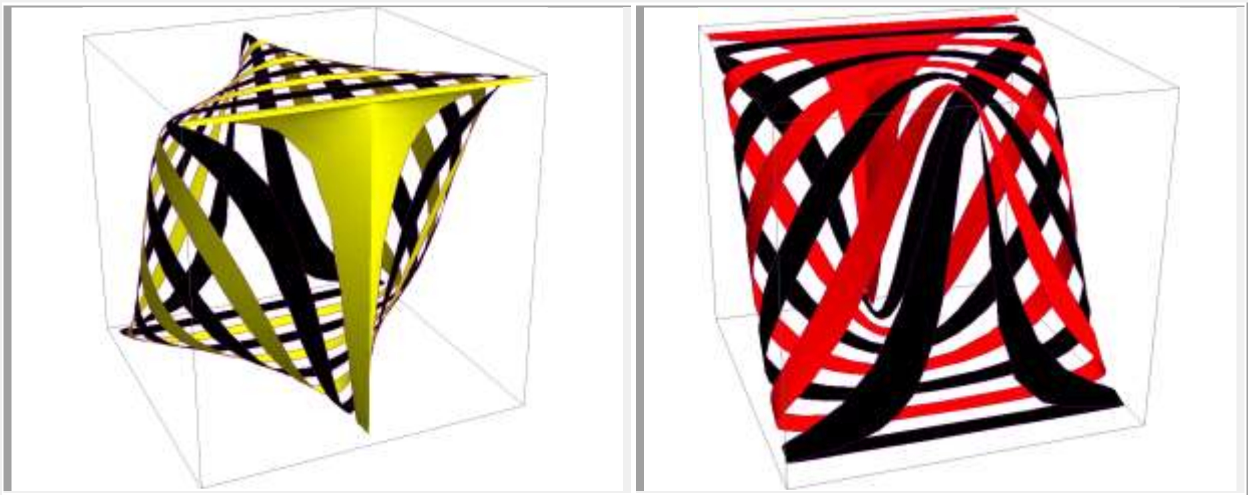


Fig.8,b Trilobe de **FSM-CE** excentrice de x = cex(θ, **- s**) şi y = sex(θ, **+ s**) în **3D**

ParametricPlot[{−Sin[t + ArcSin[Sin[t]]], Cos[t − ArcSin[Sin[t]]]}, {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot[{Sin[t + ArcSin[Sin[t]]], −Cos[t − ArcSin[Sin[t]]]}, {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot[{Cos[t + ArcSin[Sin[t]]], Sin[t − ArcSin[Sin[t]]]}, {t, 0,2Pi}]	ParametricPlot[{Cos[t − ArcSin[Sin[t]]], Sin[t + ArcSin[Sin[t]]]}, {t, 0,2Pi}]

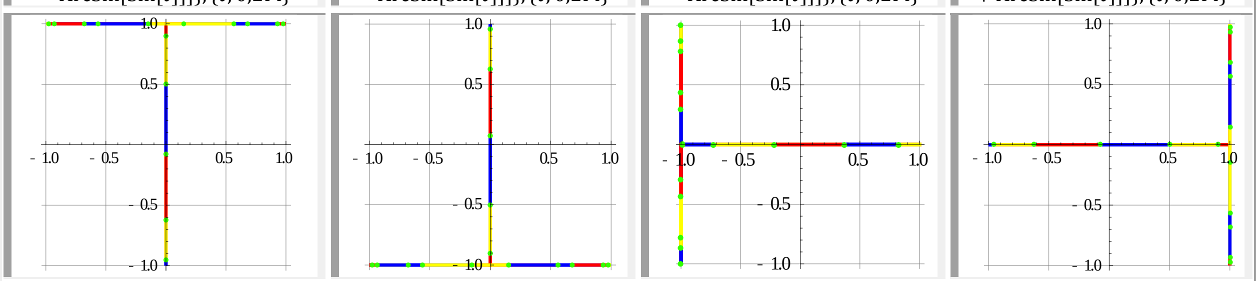
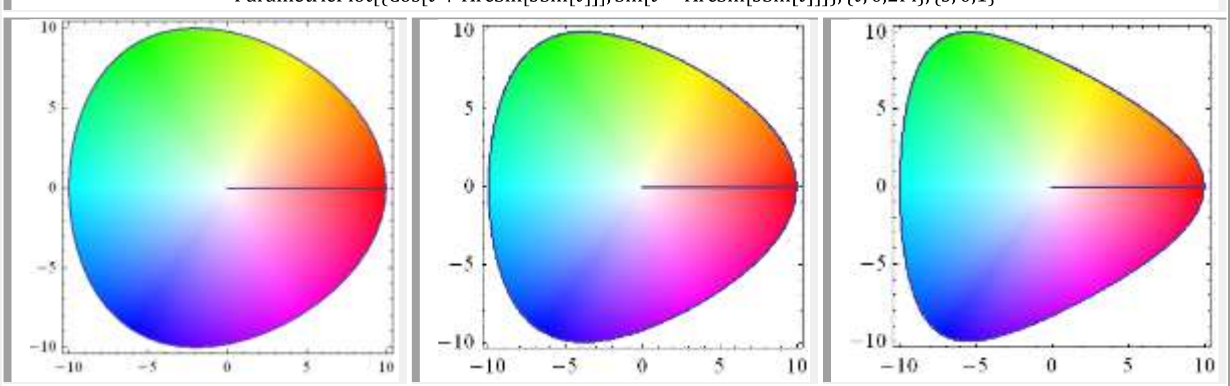


Fig.8,c Trilobe de **FSM-CE** excentrice de cexθ şi sexθ
şi de excentricităţi de semne schimbate / contrare de valoare **s = ±1**

www.supermathematica.com	**www.supermatematica.ro**	**www.supermathematica.org**

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

ParametricPlot[{Cos[t + ArcSin[sSin[t]]], Sin[t − ArcSin[sSin[t]]]}, {t, 0,2Pi}, {s, 0,1}]



BUPT

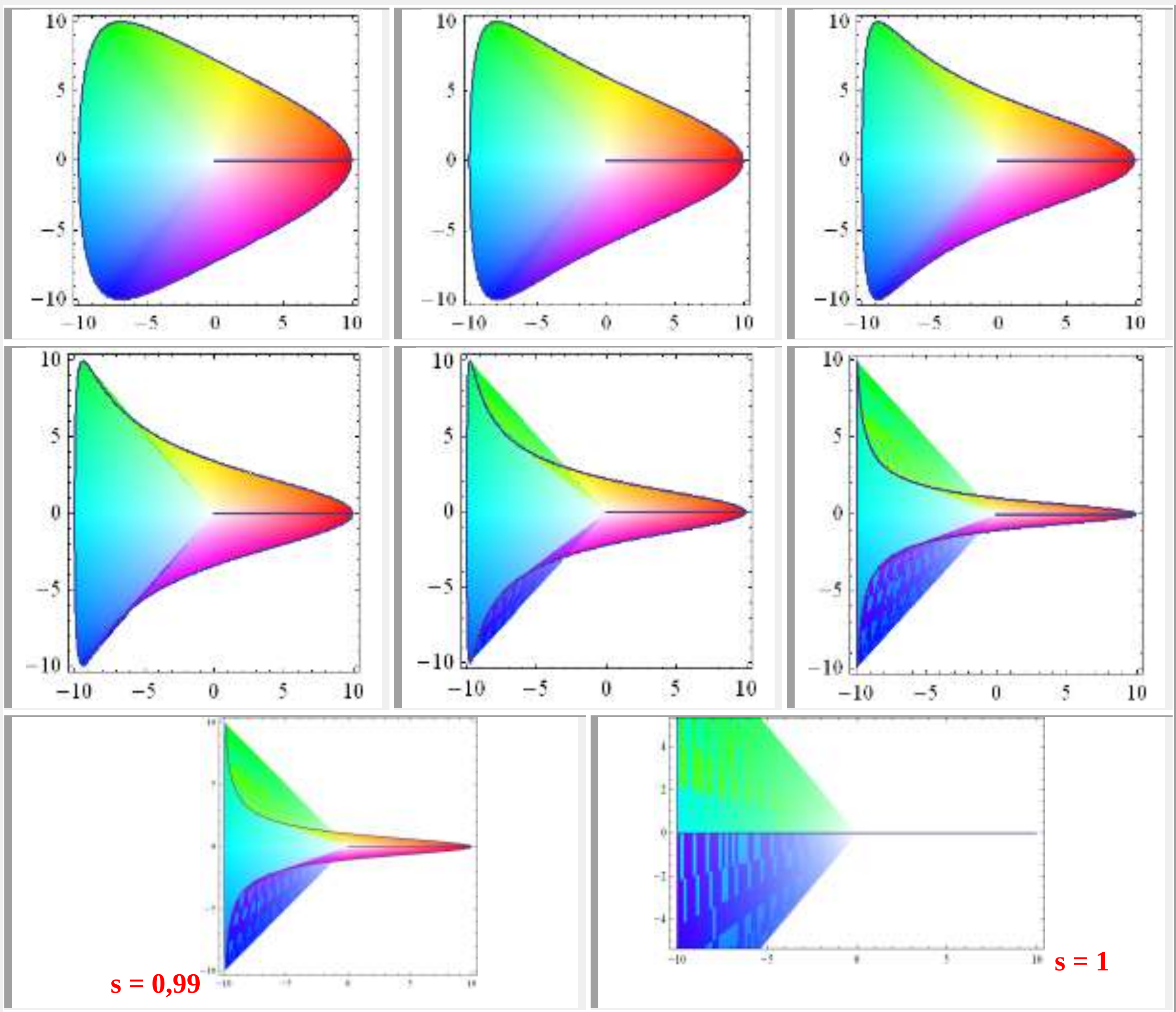


Fig.9 DISCURI TRILOBICE de FSM-CE excentrice de cex(θ, -s) şi sex(θ, +s) şi de excentricităţi de semne schimbate / contrare de valoare s = ±1

www.supermathematica.com **www.supermatematica.ro** **www.supermathematica.org**

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

Există foarte multe posibilităţi de obţinere a unor curbe închise de forma unor trilobe. Astfel, ele pot fi obţinute şi cu ajutorul funcţiilor quadrilobe (cvadrilobe) modificate .

Ecuaţiile parametrice ale quadrilobelor (cvadrilobelor) sunt

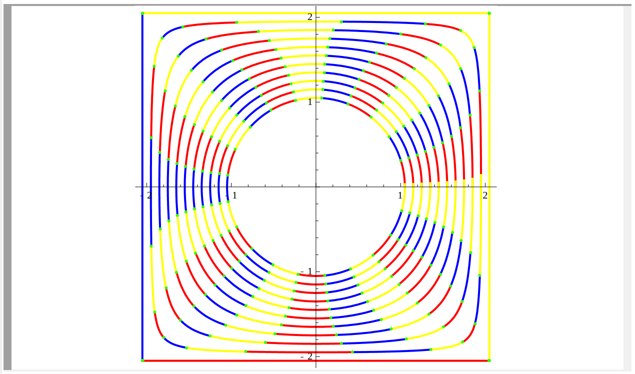
(6) $$\begin{cases} x = \dfrac{R.cos\theta}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ y = \dfrac{R.sin\theta}{\sqrt{1-s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases}$$

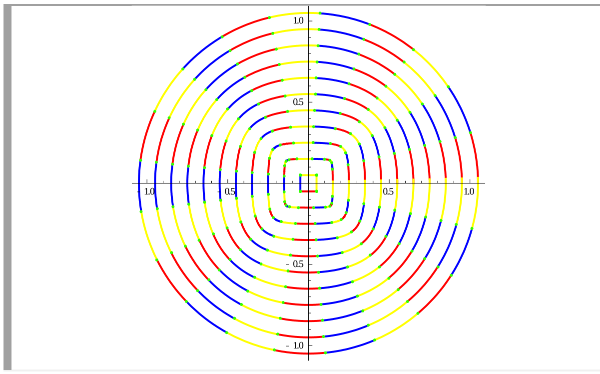
cu graficele din **figura 10**.

Discurile denumite **quasitrilobice**, deoarece pentru ecuaţiile parametrice:

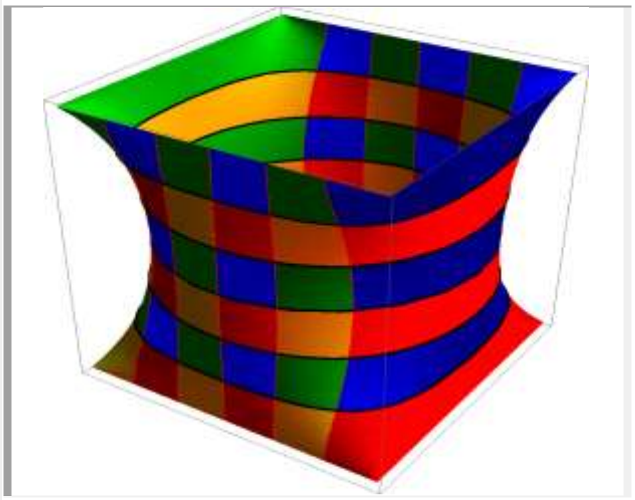
(7) $$\begin{cases} x = \mathrm{coq}(\theta, s\,) \\ y = siq(\theta, 1-s) \end{cases}$$

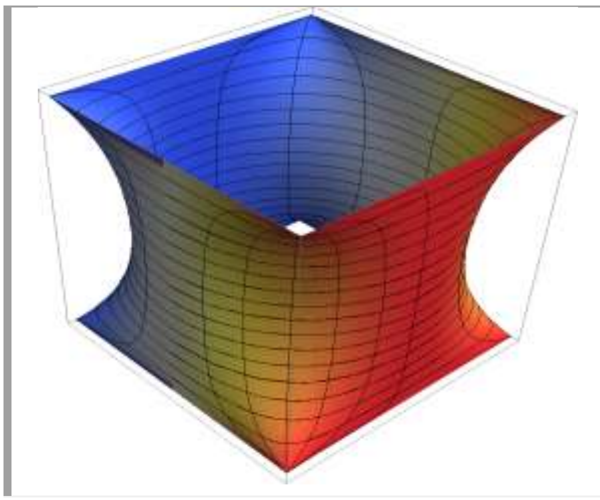
ParametricPlot[Evaluate[Table[{(1.05 − 0.1s)Cos[t] /Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2], (1.05 − 0.1s)Sin[t] /Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}, {s, −10,0}], {t, 0,2.01Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{(1.05 − 0.1s)Cos[t] /Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2], (1.05 − 0.1s)Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi}

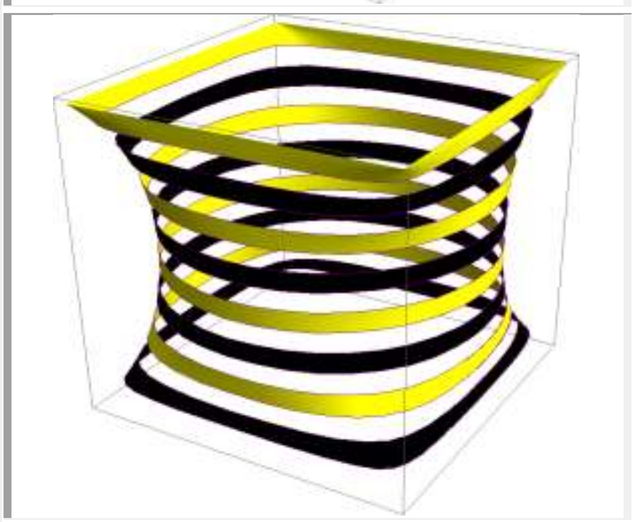




ParametricPlot3D[{Cos[u]/Sqrt[1 − (0.1vSin[u])^2] , Sin[u]/Sqrt[1 − (0.1vCos[u])^2] , 0.1v}, {u, −0.2,2.5Pi}, {v, −10,10}]]







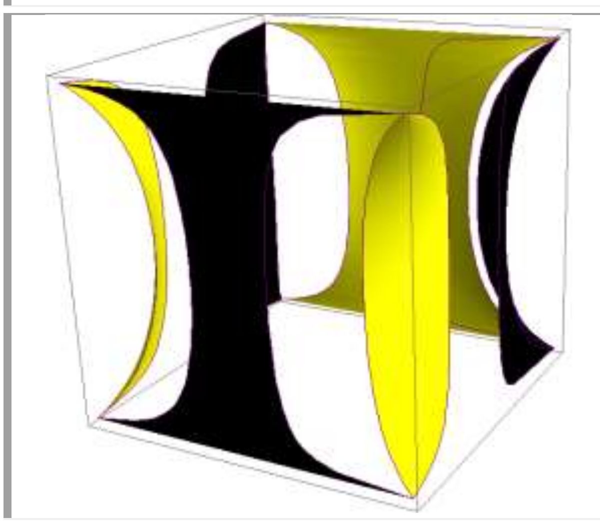


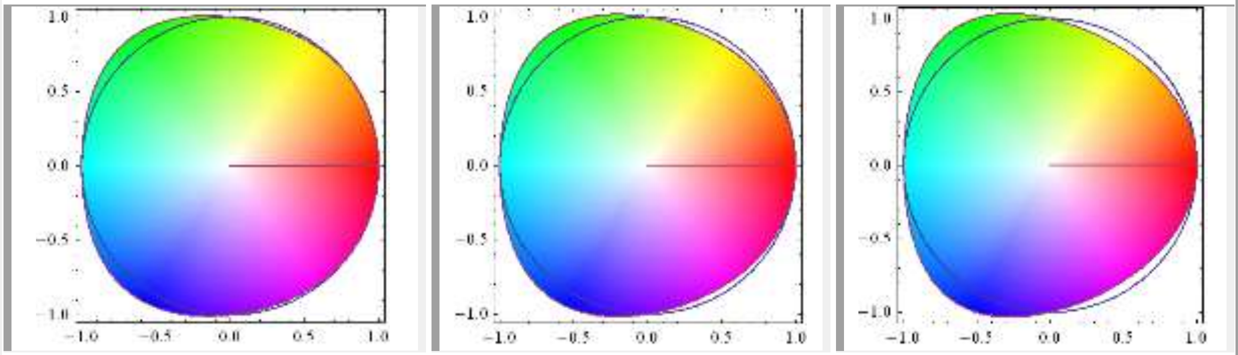
Fig. 10 **FSM-CE** quadrilobice (cvadrilobice) de s ∈ [-1, +1] în 2D şi în 3D

www.supermathematica.com	**www.supermatematica.ro**	**www.supermathematica.org**

şi pentru s = 0, **respectiv s** = 1, discul nu mai este un poligon perfect (**Fig.11**), având doar două laturi rectilinii / liniare şi una sub formă de parabolă.

$\text{ParametricPlot}\left[\left\{\{\text{Cos}[t],\text{Sin}[t]\},\left\{\text{Cos}[t]/\text{Sqrt}[1-(s\text{Sin}[t])^2],\text{Sin}[t]/\text{Sqrt}\left[1+\left((1-s)\text{Cos}[t]^{0.5}\right)^2\right]\right\}\right\},\{t,0,2\text{Pi}\},\{s,0,1\}]]$

s = 0,5; 1-s = 0,5	s = 0,4; 1- s = 0,6	s = 0,3; 1- s = 0,7



s = 0,2; 1-s = 0,8	s = 0,1; 1- s = 0,9	s = 0; 1- s = 1

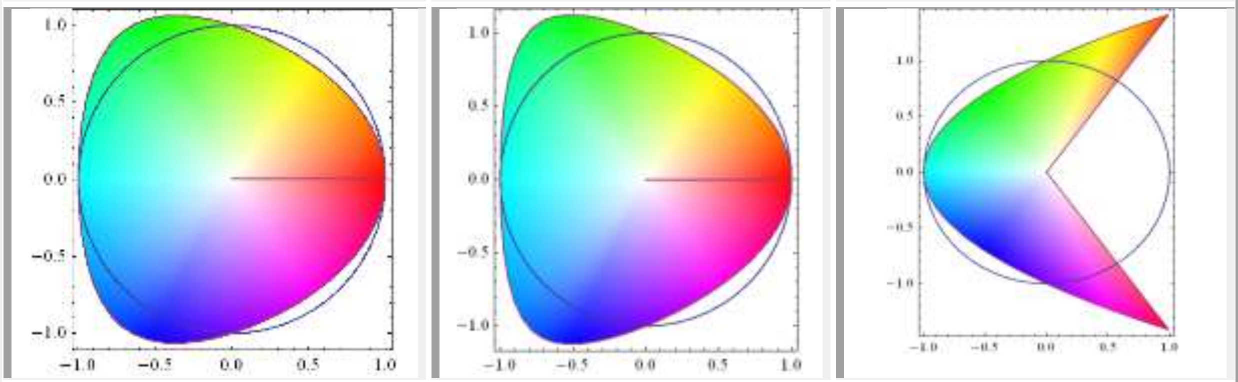
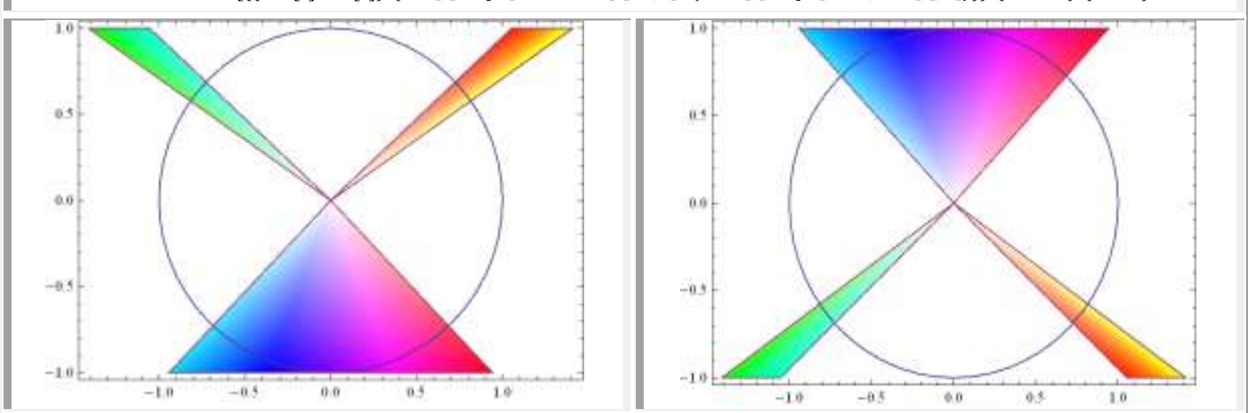


Fig.11,a DISCURI QUASITRILOBICE de FSM-CE quadrilobe (cvadrilobe) de coq(θ, s) şi siq(θ, 1-s), de excentricitate s = ∈ [0,5; 1]

$\text{ParametricPlot}[\{\{\text{Cos}[t],\text{Sin}[t]\},\{\text{Cos}[t]/\text{Sqrt}[1-(s\ \mathbf{Sin}[t]^{0.5})^2],(-\text{Sin}[t]/\text{Sqrt}[1-(s\text{Cos}[t])^2])\}\},\{t,0,2\text{Pi}\},\{s=1\}$



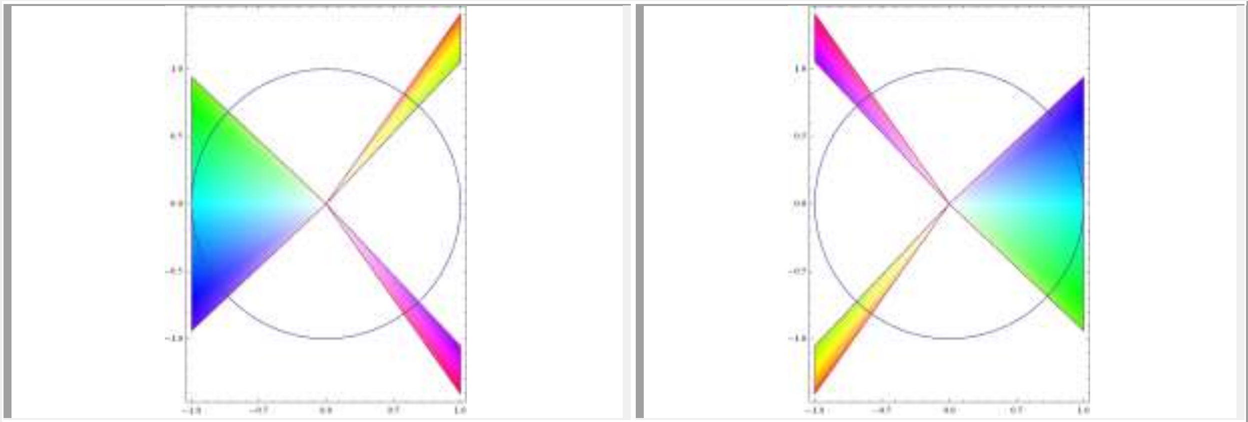


Fig. 11,b "DISCURI" QUASITRILOBICE de FSM-CE quadrilobe (cvadrilobe) de excentricitate s = ∈ [0,5; 1]

www.supermathematica.com | **www.supermatematica.ro** | **www.supermathematica.org**

```
ParametricPlot[{{Cos[t], Sin[t]}, {Sin[t]/Sqrt[1 − (s Sin[t]^0.5)^2], Cos[t]/Sqrt[1 − (sSin[t]^2)]}}, {t, 0,2Pi}, {s, 0,1}
```

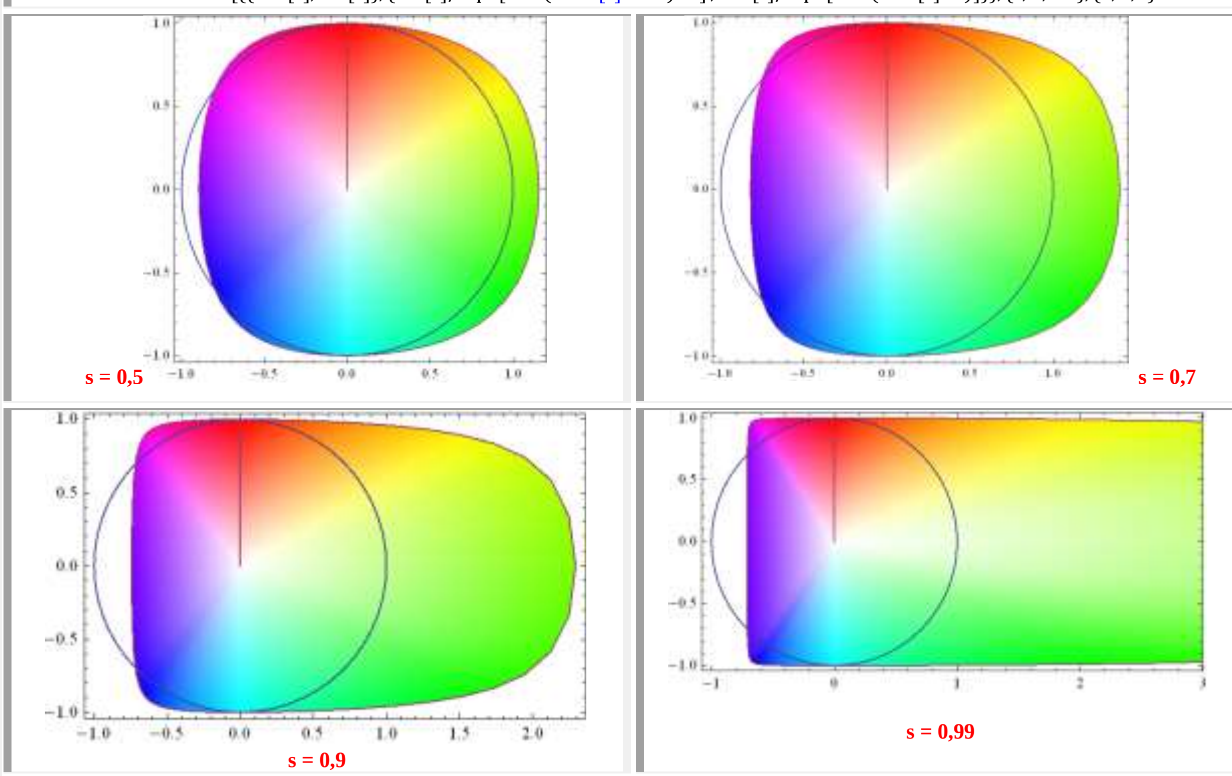


Fig. 11,c Alte "DISCURI" QUASITRILOBICE de FSM-CE quadrilobe (cvadrilobe) de excentricitate s = ∈ [0,5; 1]

www.supermathematica.com | **www.supermatematica.ro** | **www.supermathematica.org**

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

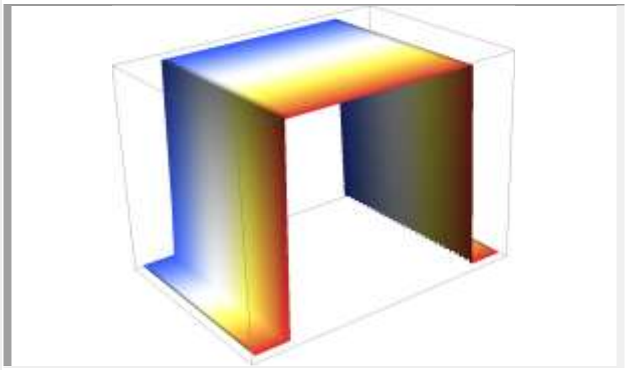
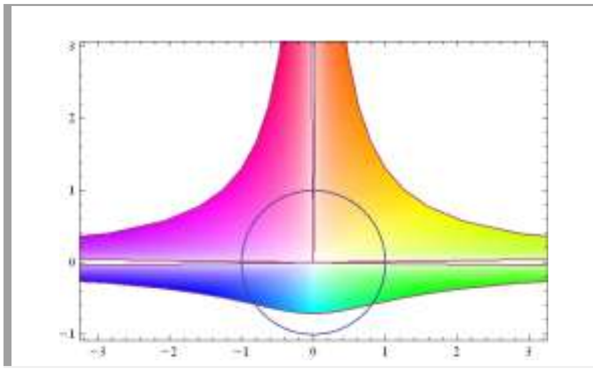
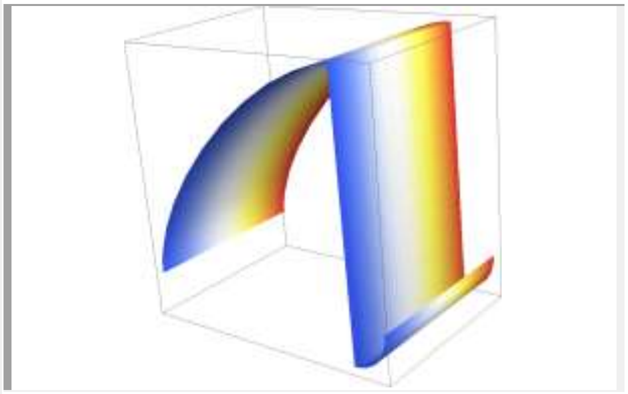
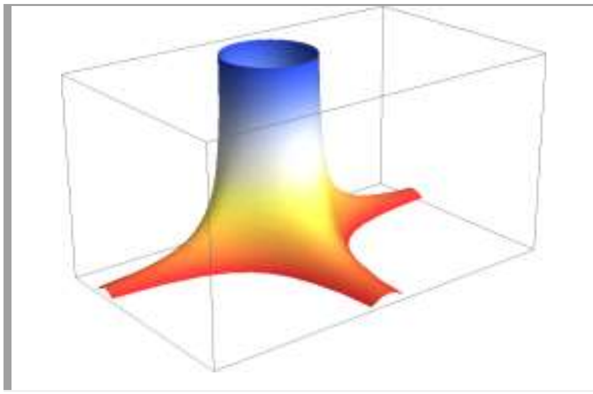
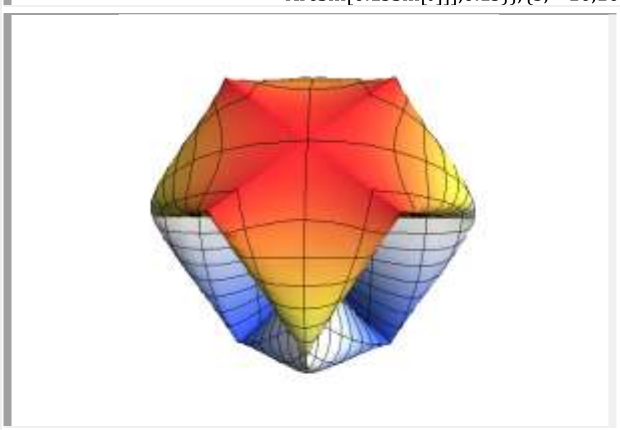
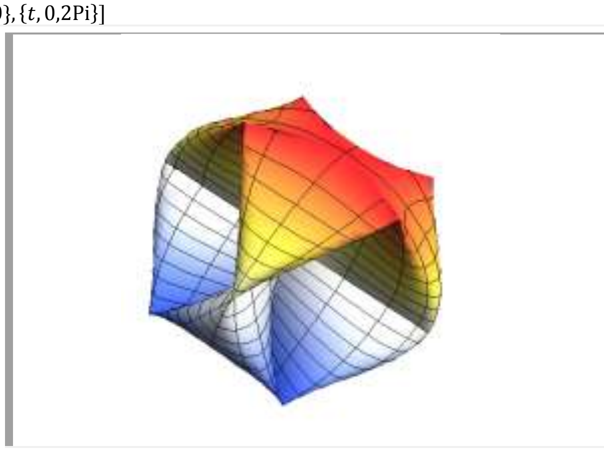
ParametricPlot3D[{Cos[u]/Sqrt[1 − (Sin[u])^2], Sin[u]/Sqrt[1 − (Cos[u]^0.5)^2] , 0.2v}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,10}]]	ParametricPlot[{Sin[u]/Sqrt[1 − (Sin[u])^2], C os[u]/Sqrt[1 − (Cos[u]^0.5)^2]}, {u, 0,2Pi}, {v, 0,10}
	
ParametricPlot3D[{Sin[u]/Sqrt[1 − (Cos[u]$^{0.5}$)^2], Cos[u]/Sqrt[1 − (Sin[u]^0.5)^2] , 0.2s}, {u, 0,2Pi}, {s, 0,10}]]	ParametricPlot3D[{Sin[u]/Sqrt[1 − (0.1sSin[u])^2], Cos[u]/Sqrt[1 − (0.1sCos[u]^0.5)^2] , 0.3s}, {u, 0,2Pi}, {s, 0,10}
	

Fig. 11,d Alte "DISCURI" QUASITRILOBICE TEHNICE de FSM-QL quadrilobe (cvadrilobe) de excentricitate s = ∈ [0,5; 1]

www.supermathematica.com	**www.supermatematica.ro**	**www.supermathematica.org**

www.supermatematicaonline.blogspot.ro

ParametricPlot3D[{{−Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],0.1s}, {−Sin[t + ArcSin[0.1sSin[t]]], −Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],0.1s}}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

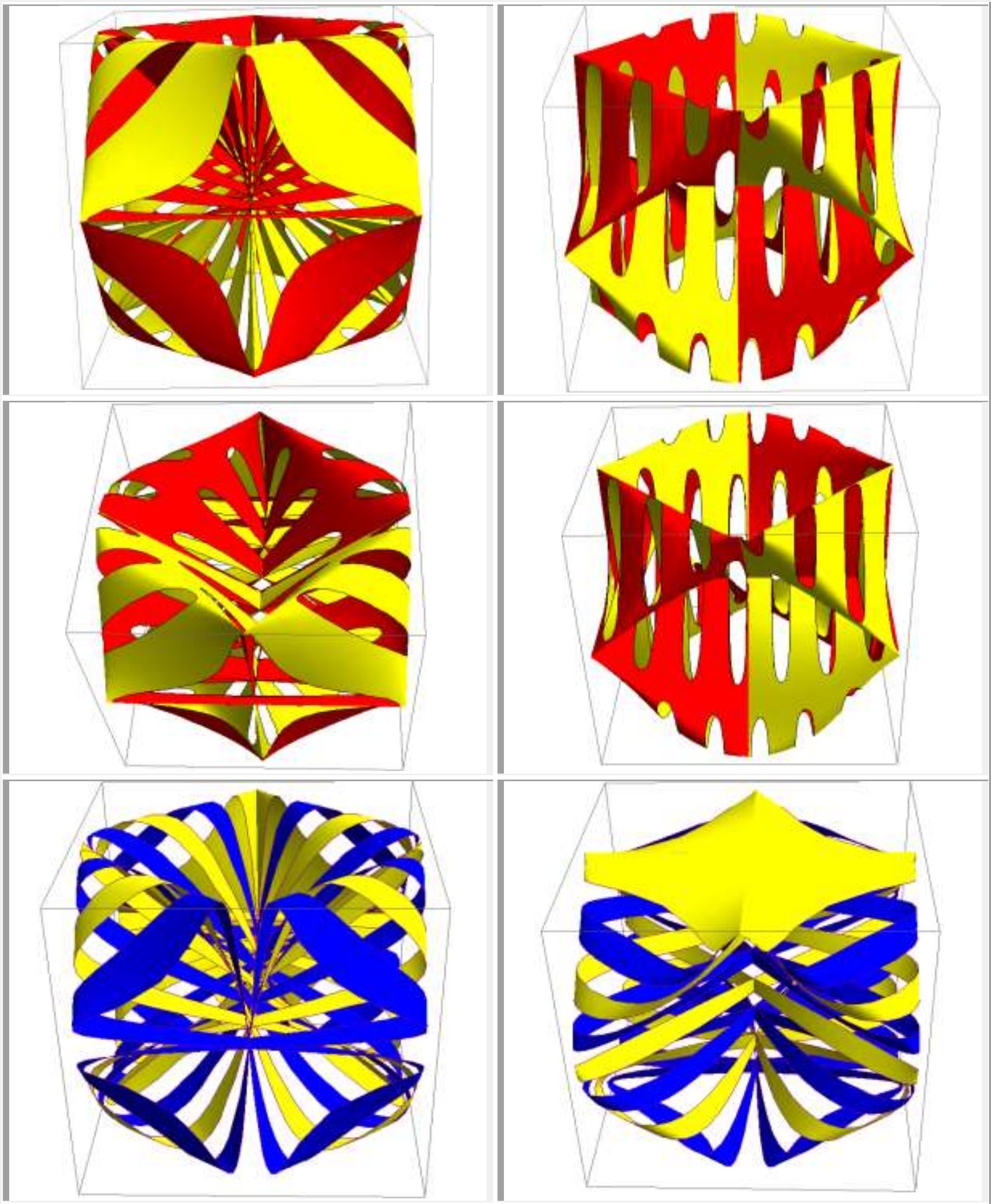


Fig. 12 Trilobe 3D în mai multe vederi

Motto: ”Înfrânt nu eşti atunci când sângeri
Şi nici când ochii-n lacrimi ţi-s.
Cele mai crâncene înfrângeri
Sunt renunţările la vis”
Radu Gyr

CAPITOLUL XX

DETERMINAREA PULSAŢIILOR PROPRII ALE SISTEMELOR OSCILANTE LIBERE, CONSERVATIVE CU CARACTERISTICĂ ELASTICĂ STATICĂ (CES) NELINIARĂ, DE TIP DUFFING

1. INTRODUCERE

Această metodă a fost prezentată de autor la prima Conferinţă Naţională de “**VIBRAŢII ÎN CONSTRUCŢIA DE MAŞINI**” din Timişoara, în anul 1975 şi este publicată în lucrările acesteia.

Lucrările au fost conduse de eminenţii profesori Prof. Univ. Em Dr. Doc. Ing. **Gheorgehe Silaş** şi Prof. Univ. Dr. Doc. Ing. **Petre P. Teodorescu**.

Mă aşteptam să fiu contrazis, să trebuiască să dau explicaţii şi justificări suplimentare… Nimic. Nicio discuţie. Linişte mormântală. Ca să fiu sincer, mă aşteptam la cu totul altceva, de aceea m-am simţit nu prost ci descumpănit ! Figurile plictisite ale ascultătorilor, dar mai ales ale prezidiului, care mă privea duios, ***îmi sugerau*** ceva de genul: “*Tinere ai impresia că ai rezolvat ceea ce nu s-a rezolvat până în prezent pe plan mondial: Expresia exactă a pulsaţiei proprii a unui sistem neliniar **Duffing ?**. Dar nu ne pierdem vremea să-ţi arătăm unde ai greşit. Zici că $\frac{3}{4}$ în relaţia lui* **Ω** *e aproximativ şi că $\frac{3}{5}$ e **exact** ? Şi cine o zice, un **ing. TCM**-ist, un necunoscut, un “neica nimeni” în domeniul **Mecanicii Teoretice**”.(Deşi, la acea oră avea deja publicată o nouă metodă de soluţionare a problemelor de mecanică, mult mai simplă şi mult mai rapidă decât arhicunoscuta şi universal aplicata metodă lui* **Jean Le Rond d’Alember**, întitulată “***METODA SEPARĂRII FORŢELOR ŞI A MOMENTELOR***” *n.n, prezentată în Vol. I al **Supermatematicii,** Cap. 8, pag.257 ...286, Ed. MatrixRom, Buc. 2016).*

M-a consolat observaţia Dl. Prof. **Gh. Silaş,** la prezentarea primelor lucrări din domeniul **supermatematicii**, care a exclamat: ”***Tinere, dumneata n-ai inventat numai nişte funcţii, ci o nouă matematică, o supermatematică***”. Aşa s-a născut denumirea noii matematici, “***matematica mileniului III”*** cum au denumit-o şi alţi matematicieni de prestigiu, profesori universitari din USA. Referenţi ai lucrării “**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**, vol. I şi vol. II., lucrare distinsă cu “**DIPLOMA AGIR**” în domeniul “**Tehnologia Informaţiei** (**IT**)” în anul 2013.

Ce diferenţă enormă !… La a 2-a Conferinţă Naţională de “**VIBRAŢII ÎN CONSTRUCŢIA DE MAŞINI**” din Timişoara, în anul 1978, am prezentat în limba română patru lucrări cu denumirea de **funcţii circulare excentrice**, drept extensii şi aplicaţii ale acestora, traduse (*aproximativ* de o “expertă”) în limba engleză.

Şi totuşi, satisfacţia maximă a survenit la a V-a Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, din anul 1985, unde au fost prezentate trei lucrări din acest domeniu, în secţia condusă de Prof. Dr. M.C. al Academiei României **Dimitrie Ion Mangeron,** care i-a spus D-lui **Gh. Silaş: ”*Dumneata ştii ce-a făcut copilul acesta ? Aceste lucruri trebuie imediat publicate* ”.** La care profesorul **Silaş** s-a făcur roşu la faţă ca un rac, deoarece numai el ştia cu câtă greutate a reuşit să facă rost de hârtie de la Palas-Constanţa ca să publice lucrările şi să nu se amâne **Conferinţa** din această cauză; criza de hârtie fiind atunci extremă.

M-am ales, totuşi, cu trei dedicaţii elogioase pe cele 3 volume ale ”**MECANICII RIGIDULUI CU APLICAŢII ÎN INGINERIE**”. Exemplificăm cu dedicaţiile de pe Vol.I ”***Scumpului coleg Mircea Şelariu cu urări de succes în continuare***. Mangeron, 6 XII 1985” şi Vol. II : ”***Talentatului coleg cu rugămintea să publice volumul de curbe noi descoperite de dânsul***. 6 XII 1985”. A reuşit să le publice în 2007, pe cont propriu, **după 22 de ani** !! Cu această lucrare vreau să exprim faptul că n-am renunţat la visul de-a face cunoscută această ***metodă absolut originală***, chiar dacă de atunci, când mă aşteptam să fie recunoscută ca atare, a trecut foarte mult timp pentru autor şi extrem de puţin timp pentru univers.

2. METODA

Se consideră simultan, în paralel, **trei sisteme oscilante conservative**, având aceeaşi masă **m**, aceeaşi amplitudine **A** şi aceeaşi perioadă **T** de oscilaţie. Şi, ca urmare, aceeaşi pulsaţie proprie **Ω** dar cu viteze unghiulare ω variabile, ale sistemelor neliniare, de rotaţie a unui punct reprezentativ **M** pe cercul **C**[O(0,0), R =A] ale cărui proiecţii, pe oricare dintre axele x şi / sau y, reproduc mişcările celor trei sisteme. Primele două sisteme sunt pentru comparaţie şi ultimul pentru exemplificarea metodei.

Primul **sistem liniar elastic** (**SLE**) are **caracteristica elastică statică** (**CES**) **liniară** (**Fig.1**) :

(1) $\mathbf{F_L = K.x}$,

în care, **K** = constant este panta dreptei ce reprezintă **CES** liniară.

Al doilea sistem, **sistem neliniar** (**SNL**), are **CES** reprezentată de funcţia / curba (mai precis: **excentră** sau **curbă excentrică** (noţiune introdusă în matematică de regretatul matematician **Anton Hadnagy**) → v. **SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**, Vol I, Ed. Politehnica, 2007, Timişoara, §.9.3.1 **INTRODUCEREA NOŢIUNII DE STRÂMBĂ ÎN MATEMATICĂ**), denumită **funcţie supermatematică circulară excentrică** (**FSM─CE**) de ***variabilă excentrică θ*** (**Fig.2,b**) şi **FSM─CE** amplitudine excentrică de variabilă ***centrică α*** (**Fig. 2,c**); fiind inverse una alteia:

(2) $\mathbf{F_N = F(x)}$

FSM─CE ***amplitudine excentrică*** de ***variabilă excentrică θ***, simetrică faţă de origine, din **figura 2,a.**

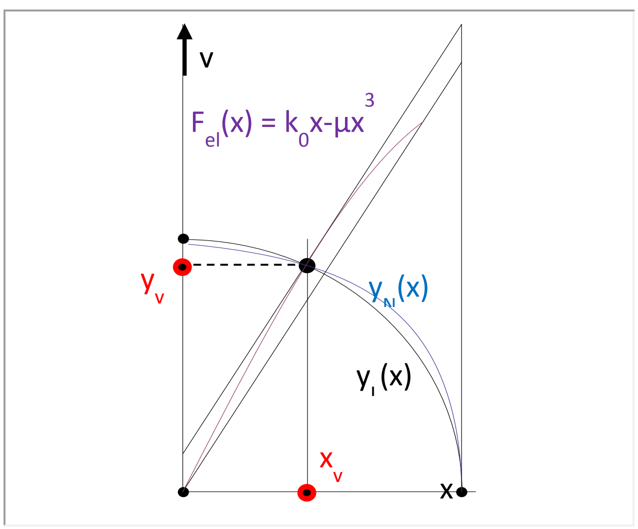


Fig. 1 Forţele elastice ale sistemelor neliniare (**SNL**) şi liniare echivalente (**SLE**) precum şi vitezele lor ***în funcţie de deplasarea x***

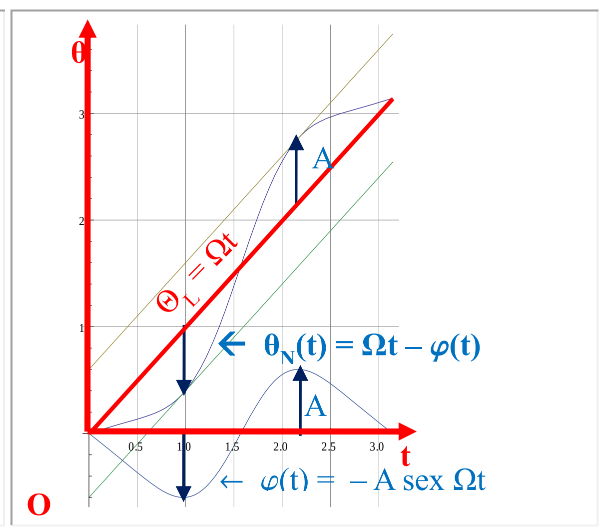


Fig. 2,a Variabilele unghiulare ale **SNL** (θ_N) şi **SLE** (θ_L) ***ca funcţii de timpul t***

Pentru exemplificare se mai consideră un al treilea sistem vibrant, **sistem neliniar Duffing** (**SND**), de **CES** a **sistemului vibrant neliniar liber** (**SVNL**) de tip **Duffing** având forţa elastică exprimată de relaţia

(3) **F(z) = k_0x – μ.x^3**

Constanta elastică **K** a **sistemului liniar echivalent** (**SLE**) se alege astfel, încât, cele două mase identice **m,** pornind simultan la timpul **t_0 = 0** din poziţia **x_0 = A,** să ajungă simultan, după un sfert de perioadă, **t = T/4**, în poziţia **x(T/4) = 0.**

Ca urmare, pulsaţiile proprii, sau **viteza unghiulară constantă Ω,** pentru sistemul liniar şi viteză **unghiulară medie Ω,** care se consideră pulsaţie proprie a **SNL**, ale primelor două sisteme să fie egale între ele. Pulsaţia proprie constantă a sistemului liniar este, după cum se ştie, arhicunoscuta relaţie

(4) $$\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}},$$

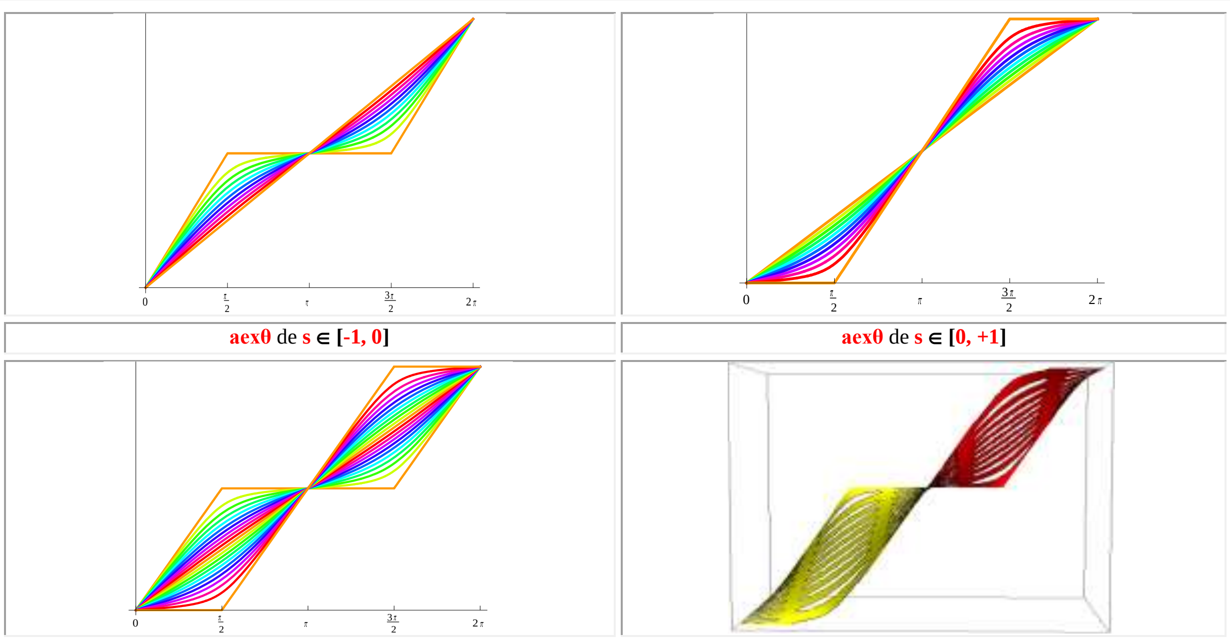
iar sistemul oscilant liniar este denumit **echivalent** sistemului neliniar de mase **m**, amplitudini **A** dacă cele două sisteme au pulsaţiile proprii **Ω** egale, adică, dacă pornesc, în acelaşi timp, din **x = A**, ajung în acelaşi timp în **x = 0**. Ecuaţiile diferenţiale ale mişcărilor pentru cele trei sisteme comparate sunt:

(5) $$\begin{cases} \boldsymbol{SLE}: & m\ddot{x} + Kx = 0 \\ \boldsymbol{SNL}: & m\ddot{x} + F(x) = 0 \\ \boldsymbol{SND}: & m\ddot{x} + k_0 x - \mu x^3 = 0 \end{cases}$$

Pentru sistemul liniar echivalent (**SLE**), cu condiţiile iniţiale amintite, lege de mişcare, deplasarea sau elongaţia, viteza şi accelerţia pot fi

(6) **SLE:** $$\begin{cases} x = A.cos\theta = A.cos\Omega t \\ \dot{x} = -A\,\Omega \sin\theta = -A \sin\Omega t = -\Omega\sqrt{A^2 - x^2} = -\Omega.y \\ \ddot{x} = -A\,\Omega^2 cos\theta = -A\,\Omega^2 cos\Omega t = -\Omega^2 x \end{cases}$$

Acceleraţia **SLE,** exprimată în funcţie de ***deplasarea x***, verifică identic nul ecuaţia diferenţială liniară a **SLE** din (5).

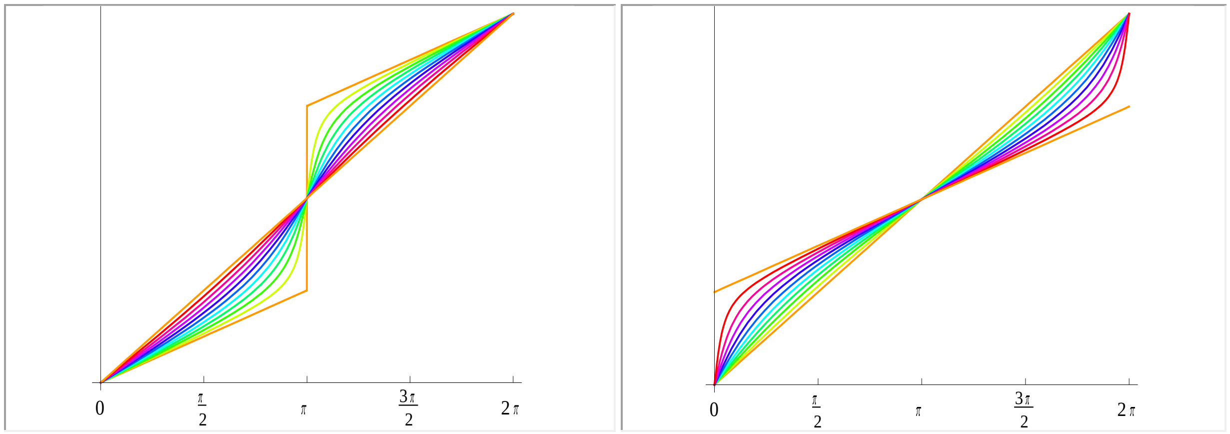


aexθ de **s** ∈ **[-1, 0]**

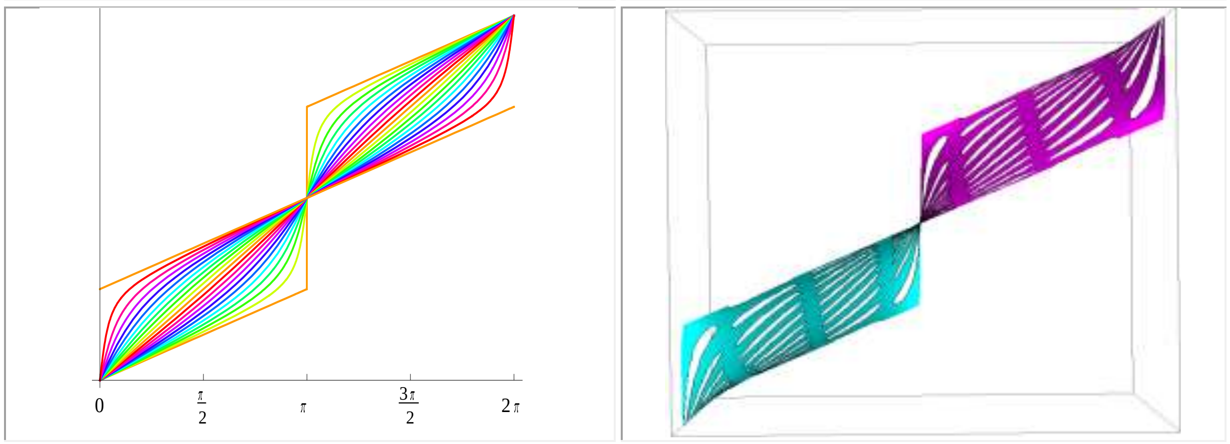
aexθ de **s** ∈ **[0, +1]**

← 2D   **aexθ** de **s** ∈ **[-1, +1]**   **3D →**

Fig. 2,b Funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM─CE**) **amplitudine excentrică** de **θ**



Aexα de **s** ∈ **[-1, 0]** | **Aexα** de **s** ∈ **[0,+10]**



← 2D **Aexα** de **s** ∈ **[-10, +10]** **3D →**

Fig. 2,c Funcţia supermatematică circulară excentrică (FSM—CE) amplitudine centrică de **α**

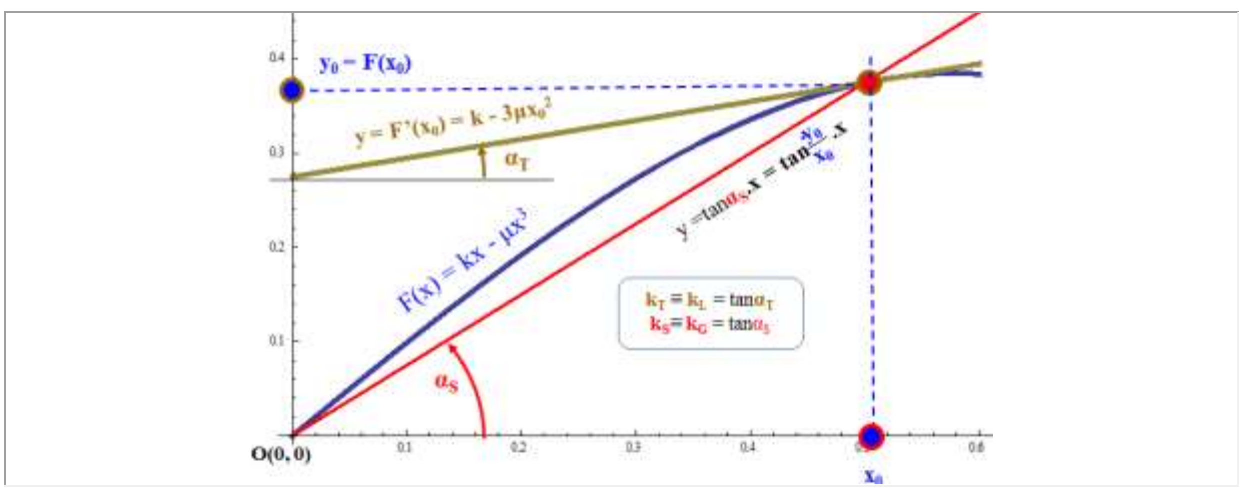


Fig. 2,d Rigiditate tangentă sau locală şi rigiditate **secantă sau globală**

În mod analog, acceleraţia sistemului neliniar (**SNL**) trebuie să poată să se exprime în funcţie de ***deplasarea x*** şi, **sub această formă**, să verifice identic ecuaţia sa diferenţială **SNL** din (5).

Forţa elastică **F(x),** fiind o funcţie de deplasarea x se poate exprima şi sub forma

(7) $\mathbf{F(x) = k_a(x).x}$,

în care ***rigiditatea variabilă*** $k_a(x)$, în funcţie de x, are expresia

(8) $k_a(x) = F(x)/x$

şi reprezintă **rigiditatea globală** sau, cum este cunoscută în literatură [**Gheorghiu, Al**. "**CONCEPŢII MODERNE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR**", Ed. Tehnică, Buc. 1966], **rigiditatea secantă**.

Împărţind această rigiditate, cu masa **m,** obţinem pătratul ***pulsaţiei variabile*** sau ***instantanee*** a acceleraţiei care se va nota cu $\boldsymbol{\omega_a}$

(9) $$\boldsymbol{\omega_a^2(x) = \frac{k_a(x)}{m} = \frac{F(x)}{m.x} \rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{k_a(x)}{m}} = \sqrt{\frac{F(x)}{m.x}}}$$

Înlocuind expresia forţei elastice, ca funcţie de ***deplasarea x*** (7), în ecuaţia diferenţială (5), se obţine expresia acceleraţiei **SNL** ca funcţie de deplasare:

(10) $$\boldsymbol{\ddot{x}(x) = -\,\omega_a^2\,(x).x}$$

Pentru exemplul considerat, rezultă $\mathbf{k_a} = \boldsymbol{\frac{dF(x)}{dx}}$

(11) $$\mathbf{k_a} = \boldsymbol{\frac{dF(x)}{dx}} = \mathbf{k_0} - \boldsymbol{\mu.x^2}$$

şi pulsaţia instantanee a acceleraţiei

(12) $$\boldsymbol{\omega_a^2 = \frac{k_0}{m} - \frac{\mu}{m}x^2 = \omega_0^2 - \frac{\mu}{m}x^2 \quad \rightarrow \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_0}{m} - \frac{\mu}{m}x^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu}{m}x^2}}$$

Expresia vitezei **SNL** $\boldsymbol{\dot{x}(x)}$ se poate determina pornind de la ecuaţia diferenţială (5) sau prin integrarea acceleraţiei **SNL** (10). Se obţine aceeaşi expresie a vitezei **SNL** în funcţie de ***deplasarea x*** sub formele

(13) $$\boldsymbol{\dot{x}^2(x) = 2\int_x^A \omega_a^2(x).x.dx = \frac{2}{m}\int_x^A F(x).dx}$$

care pot fi scrise şi sub formele

(14) $\boldsymbol{\dot{x}^2(x) = \omega_v^2(x)(A^2 - x^2) = \omega_v^2(x).y^2}$, în care

(15) $$\boldsymbol{\omega_v^2(x) = \frac{\dot{x}^2(x)}{A^2 - x^2} = \left[\frac{\dot{x}\,(x)}{y}\right]^2}$$

reprezintă ***pulsaţia instantanee a vitezei*** **SNL** în funcţie de ***deplasarea x***.

Din a treia relaţie (6) rezultă

(16) $$\mathbf{y^2} = \boldsymbol{\left[\frac{\dot{x}}{\Omega}\right]^2}$$

în care $y^2 = A^2 - x^2$ reprezintă ordonata traiectoriei de fază a **SLE**, traiectorie care este un cerc.

Prin egalarea relaţiilor anterioare, rezultă că pentru oricare $x \in [0, A]$ se respectă egalitatea

(17) $$\boldsymbol{\frac{\dot{x}}{\Omega} = \frac{\dot{x}(x)}{\omega_v(x)}} \quad \text{sau} \quad \boldsymbol{\dot{x}(x) = \dot{x}\frac{\omega_v(x)}{\Omega}}$$

care reprezintă o dependenţă între vitezele **SLE** şi a **SNL** şi pulsaţiile vitezelor lor corespunzătoare.

Pentru exemplul considerat se obţine

(18) $$\boldsymbol{\dot{x}^2 = \frac{1}{m}[k_0(A^2 - x^2) - \frac{\mu}{2}(A^4 - x^4)] = \omega_0^2 - \frac{\mu}{2m}\,(A^2 + x^2)]\,(A^2 - x^2)}$$

şi

(19) $$\boldsymbol{\omega_v^2 = \omega_0^2 - \frac{\mu}{2m}(A^2 + x^2) \;\rightarrow\; \omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu}{2m}(A^2 + x^2)}}$$

Viteza **SLE** variază în funcţie de deplasarea **x** după o elipsă care se intersectează cu curba de variaţie a vitezei **SNL** în funcţie de deplasarea **x**, în intervalul $\mathbf{x \in [\,0, A]}$**,** în trei puncte, în care, deci, vitezele celor două sisteme sunt egale. Primul punct are abscisa **x = A**, în care vitezele sunt egale între ele şi egale cu **zero**. Celelalte două puncte, sunt simetrice faţă de axa **x** şi au abscisa notată cu $\mathbf{x = x_v}$

Egalitatea vitezelor, cu semn pozitiv, se produce pentru deplasarea masei **m** de la x = 0 la x = A, iar egalitatea lor, cu semn negativ, la sensul invers de deplasare. Rezultă că, în punctul $\mathbf{x = x_v}$, pătratele vitezelor celor două sisteme, **liniar** şi **neliniar**, sunt egale, adică

(20) $\dot{x}^2 = \dot{x}^2\ (x)$

Egalând cele două viteze, exprimate de relaţiile (6), rezultă că, **în** $\mathbf{x = x_v}$, funcţia $\omega_v^2(x)$ intersectează dreapta paralelă cu axa x, care exprimă constanţa pulsaţiei sistemului liniar (**Ω**) în funcţie de deplasarea x, adică

(21) $\Omega^2 = \omega_v^2(x_v)$, ceea ce rezultă şi din relaţia (17).

Notând cu $\mathbf{k_x(x)}$ coeficientul unghiular al dreptei tangente la **CES** neliniară **F(x),** denumit în literatură **rigiditate locală** sau **rigiditate tangentă**, se obţine

(22) $k_x\ (x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Împărţind (2) cu masa m se obţine pulsaţia

(23) $\omega_x^2(x) = \frac{k_x(x)}{m} = \frac{1}{m}\frac{dF(x)}{dx}$,

denumită ***pulsaţie instantanee a deplasării x***.

Pentru exemplul considerat, ea este

(24) $\omega_x^2(x) = \omega_0^2 - 3\frac{\mu}{m}x^2 \rightarrow \omega_x(x) = \sqrt{\omega_0^2 - 3\frac{\mu}{m}x^2}$

Cu ajutorul pulsaţiei instantanee a deplasării (23), forţa elastică **F(x)** se poate exprima prin

(25) $F(x) = \int_0^x \frac{dF}{dx}dx = m\int_0^x \omega_x^2 dx,$

cu condiţiile iniţiale F(0) = 0.

Prin înlocuirea expresiei anterioare în relaţia (13) se obţine

(26) $\dot{x}^2(x) = 2\int_x^A (\int_0^x \omega_x^2(x)dx)\, dx$

În punctul în care $\mathbf{\omega_x(x)}$ intersectează dreapta, care exprimă constanţa pulsaţiei (**Ω** = ct) a **SL,** se obţine

(27) $\omega_x(x_v) = \Omega$.

Considerând **CES** a **SNL,** liniară pe porţiuni infinit mici **dx**, fiecare porţiune având pulsaţia ω_x (x), traiectoria acesteia **y(x)** în planul fazelor este o curbă închisă pentru care [v. Harris,C şi Crede,C."**ŞOCURI ŞI VIBRAŢII** ", Ed. Tehnicâ, Buc. 1968]

(28) $y^2\ (x) = (\frac{\dot{x}(x)}{\omega_v(x)})^2$

Egalând viteza **SNL** din relaţia anterioară (28), cu cea exprimată de relaţia (15) rezultă că, pentru oricare $\mathbf{x \in [\ 0, A],}$ se respectă egalitatea

(29) $y(x) = y\,\frac{\omega_v(x)}{\omega_x(x)}$

care reprezintă o dependenţă între ordonata traiectoriei de fază a **SNL** şi a **SLE** în funcţie de deplasarea **x**.

Intersectarea vitezei **SLE** cu a **SNL** în $\mathbf{x = x_v}$ impune şi intersectarea traiectoriilor de fază ale celor două sisteme în acelaşi punct – abscisă şi ordonată - pentru care şi cele două ordonate ale celor două sisteme (**Fig. 3** şi **4**), liniar şi neliniar, sunt egale, adică **y(x) = y**. Rezultă, pe de o parte, că

(30) $\omega_v(x_v) = \omega_x(x_v)$

şi, pe de altă parte, ţinând cont de relaţia (21) şi (26) că

(31) $\omega_v(x_v) = \Omega = \omega_x(x_v)$.

S-a demonstrat, în acest mod, că ordonata punctelor de intersecţie ale pulsaţiilor instantanee ale deplasării $\mathbf{\omega_v(x)}$ cu ale vitezei $\mathbf{\omega_x(x)}$ are valoarea pulsaţiei proprii **Ω** a **SLE** echivalent care este şi pulsaţia proprie a **SNL**.

ÎN CONCLUZIE: metoda de determinare a pulsaţiei proprii **Ω** a unui **SNL** ca cel **SND - Dűffing**, constă în următoarele etape:

1) Determinarea pulsaţiilor instantanee ale deplasării **$\omega_x(x)$,** cu relaţia (23), precum şi a pulsaţiei instantanee a vitezei **$\omega_v(x)$,** cu relaţia (15);
2) Determinarea abscisei punctului de intersecţie a celor trei pulsaţii (31);
3) Determinarea relaţiei de calcul a pulsaţiei proprii **Ω**, prin introducerea valorii **$x = x_v$** în una dintre relaţiile (21) sau (27).

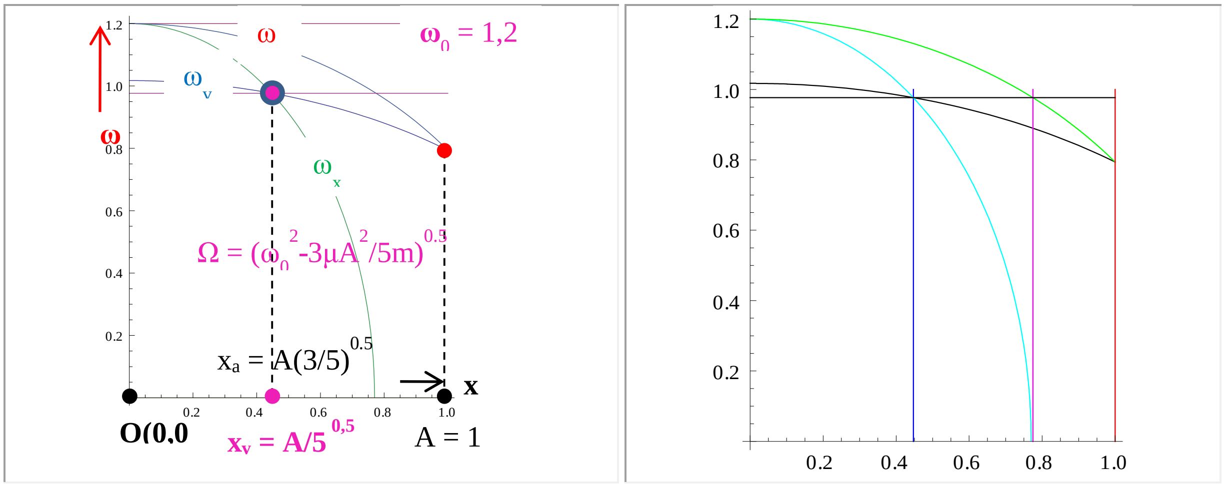


Fig. 3 Pulsaţiile instantanee ω_x, ω_v, ω_a şi intersecţia lui **ω_x** cu **ω_v** în punctul de abscisă **x_v** şi de ordonată egală cu pulsaţia proprie **Ω** a **SN**. ($\omega_0 = 1,2$; $\mu \frac{A^2}{m} = 0,9$; A = 1)

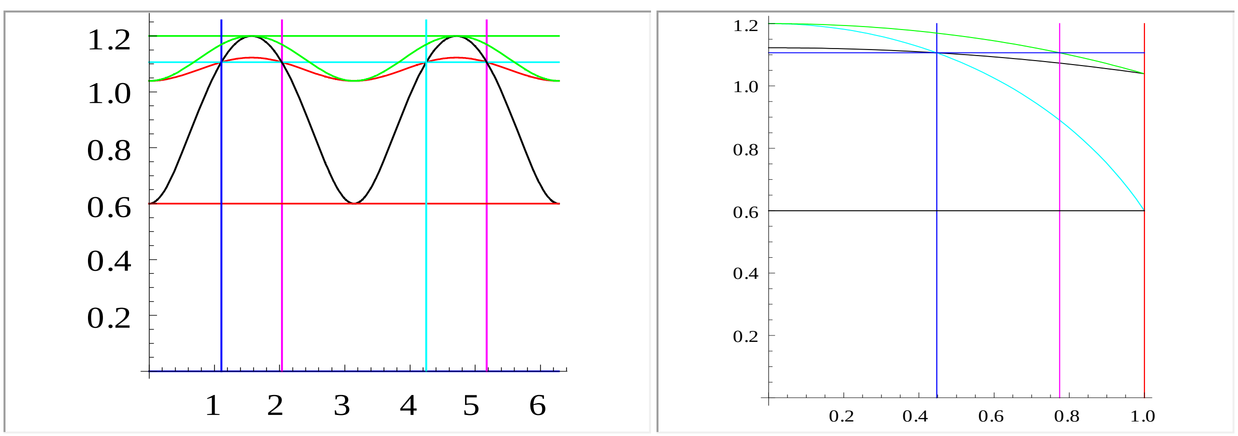


Fig. 4 Pulsaţii ca funcţii de θ – stânga- şi în funcţie de x –dreapta pentru A = m = 1; $\omega_0 = 1,2$; $\mu = 0,6$

Pentru exemplul considerat, egalând cele două pulsaţii instantanee, a deplasării (24) cu cea a vitezei (19), rezultă

(33) $\mathbf{x_v} = \frac{A}{\sqrt{5}}$ pentru care, din (21) sau (28) se obţine

(34) $$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3}{5}\frac{\mu}{m}A^2}$$

Pulsaţia instantanee a acceleraţiei devine egală cu pulsaţia proprie **Ω**, sau curba **y = ω_a(x)** se intersectează cu dreapta **y = Ω** = ct, în punctul de abscisă

(35) $x_a = A\sqrt{\frac{3}{5}}$

în care acceleraţiile, sistemului neliniar (**SNL)** şi a celui liniar echivalent (**SLE**), sunt egale.

Aşa cum se poate observa în **figura 5,** pulsaţia deplasării **$\omega_v(x_v)$** şi pulsaţia vitezei **$\omega_x(x_v)$** se intersectează la abscisa **x_v** = $\frac{A}{\sqrt{5}}$ ca funcţii de deplasare şi intersecţiile curbelor pulsaţiilor $\omega_v(\theta)$ cu $\omega_x(\theta)$

(36) $\theta = \theta_v = \omega_v(\theta) \cap \omega_x(\theta) \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{5} \rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \rightarrow \theta v = \arccos(\pm\sqrt{\frac{1}{5}})$

ca funcţii de θ, au loc în punctele de pe cercul R = A, centrat în originea O(0,0) pentru valorile lui θ

(36') $\theta = \theta_v = \arccos x_v = \arccos \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{cases} 1,10715 \\ 2,03444 \end{cases} \pm n.\pi$, n = 0, 1, 2, …

pentru A = m = 1, μ = 0,6 şi ω_0 = 1,2, valori adoptate în figură.

3. PULSAŢIA INSTANTANEE, CA VITEZĂ UNGHIULARĂ DE ROTAŢIE A PUNCTULUI M(*θ*, A) PE CERCUL DE RAZĂ R = A

În acest paragraf se va considera **SND-Duffing** şi ecuaţia diferenţială a acestui sistem oscilant neliniar, liber şi neamortizat.

Expresia pulsaţiei instantanee a vitezei, ca funcţie de deplasarea x → $\omega_v(x)$, a acestui **SND** este dată de relaţia (19).

Se va demonstra în continuare că

(37) **x = cosθ(t)**

este o soluţie exactă a ecuaţiei de mişcare, dacă şi numai dacă

(38) $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega(t) = \omega_v(t)$

şi relaţia de dependenţa lui $\omega_v = \omega_v(x)$ este cea dată de relaţia (17).

Introducând (36) în (19) pulsaţia instantanee şi, acum, viteza unghiulară $\omega_v(\theta)$ poate fi adusă la forma

(39) $\omega[\theta(t)] = \sqrt{\omega_c^2 - \frac{\mu a^2}{4m}\cos 2\theta}$,

relaţie asemănătoare, ca formă şi prin prezenţa **funcţiei circulare centrice** (**FCE)** cosinus de arc dublu ($\cos 2\theta$), cu relaţia vitezei unghiulare de la **SNLD** fazoriale.

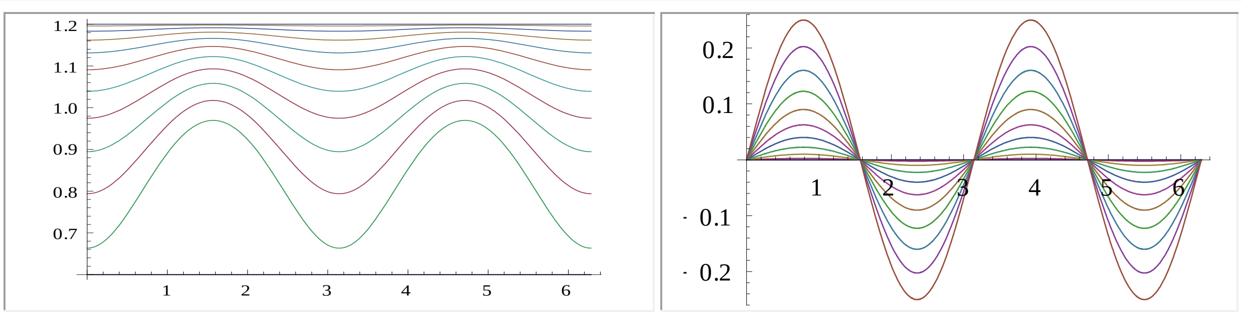


Fig.5 Vitezele unghiulare ω_v şi **acceleraţiile unghiulare ϵ** ale **SNDűffing**
pentru A = 1, ω_0 = 1,2 şi $\frac{\mu}{m} \in [0, 1]$

În relaţia anterioară s-a notat cu

(40) $\omega_C^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\frac{\mu}{m}A^2 \quad \rightarrow \quad \omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3}{4}\frac{\mu}{m}A^2}$

pulsaţia denumită **pulsaţie de calcul ω_C.**

Este interesant faptul că, ***majoritatea metodelor aproximative, de determinare a pulsaţiei proprii a sistemelor neliniare, dau expresia pulsaţiei de calcul (40), în jurul căreia oscilează valorile pulsaţiei instantanee (v. 39), ca pulsaţie proprie a acestor sisteme.***

Funcţia

(41) $\theta(t) = \int_0^t \omega(t)dt$

reprezintă unghiul de poziţie al punctului **M(θ,A),** pe cercul **C[O(0,0), R=A],** de rază **R=A**, centrat în originea **O(0,0),** la momentul **t**.

Pentru simplificarea scrierii relaţiilor care urmează, determinarea explicită a funcţiei **θ(t)** se va realiza în finalul acestui paragraf.

Prin derivarea soluţiei (37) şi ţinând cont de relaţia (41), se obţin viteza şi acceleraţia **SVNL Duffing** ecuaţii identice, ca formă, cu cele ale **SVNL** fazoriale:

(42) $\begin{cases} x = A.\cos\theta(t) \\ \dot{x} = -A.\omega.\sin\theta(t) \\ \ddot{x} = -A[\epsilon.\sin\theta(t) + \omega^2(t).\cos\theta(t)] \end{cases}$

În relaţiile anterioare, acceleraţia unghiulară **ϵ [θ(t)]** este

(43) $\epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}(t)$

şi expresia ei se obţine prin derivarea lui ω_v din (19) sau (39), adică

(44) $\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d(\omega^2)}{d\theta}$ şi rezultă

(45) $\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\mu}{m}A^2\cos\theta.\sin\theta = \frac{\mu A^2}{4.m}\sin 2\theta$

relaţie, ca şi cea a vitezei unghiulare ω_v, asemanătoare cu cea de la **SVNL** fazoriale; diferenţa fiind dată de constanta ¼ faţă de **1** de al **SVNL** fazoriale, ceea ce arată că acceleraţia unghiulară, în acest caz, este de **4 ori** mai mică decât în cazul **SVNL** fazoriale.

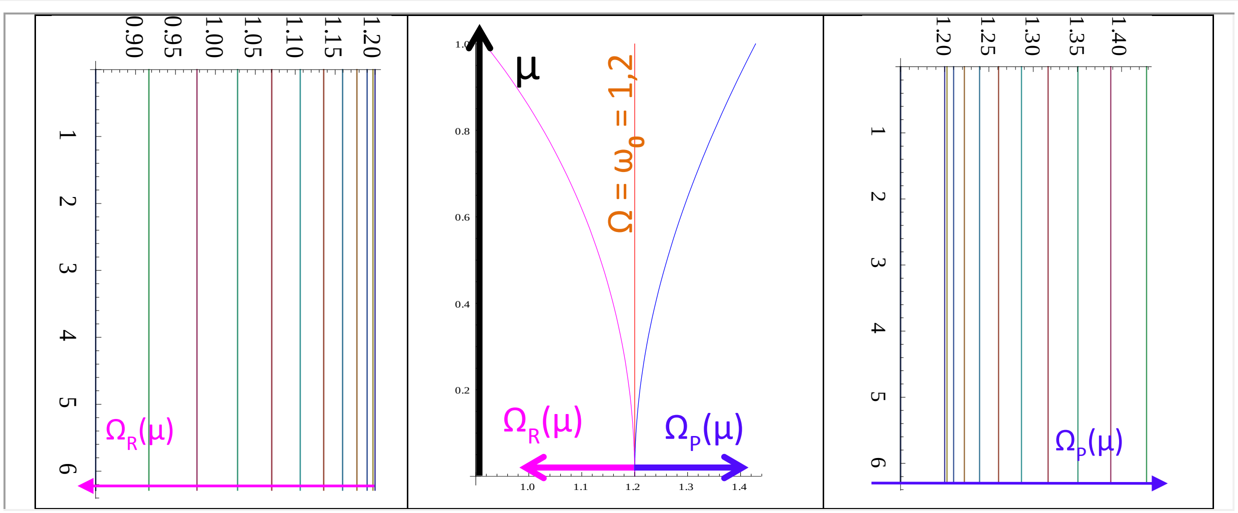


Fig.6 Variaţia pulsaţiei proprii Ω(μ) a SND pentru μ ∈ [0, 1], A = 1 şi ω_0 = 1,2

Înlocuind în expresia acceleraţiei din (42), expresiile obţinute pentru **ϵ** şi **ω** rezultă acceleraţia

(46) $\ddot{x} = -(A.\omega_v^2 \cos\theta - \frac{\mu}{m} A^3 \cos^3\theta)$

în care, înlocuind expresia lui ω(θ) din (39) rezultă

(47) $\ddot{x} = -\left(\omega_0^2 x - \frac{\mu}{m} x^3\right) = -\frac{F(x)}{m}$

Se observă că acceleraţia, astfel obţinută, verifică identic ecuaţia diferenţială a **SND**.

(48) $m\ddot{x} + k_0 x - \mu x^3 = 0$

sau împărţind ecuaţia cu masa **m** > 0, constantă, rezultă

(48') $\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\mu}{m} x^3 = 0$

S-a demonstrat, astfel, că soluţiile preconizate pentru **ω, x,** $\dot{x}$ şi $\ddot{x}$ sunt viabile şi sunt soluţii care ***verifică exact*** **SNL Duffing**, libere, neamortizate, iar acceleraţia unghiulară **ϵ** este derivata vitezei unghiulare **ω_v(x),** pentru că ea a fost obţinută tocmai prin derivarea lui **ω_v(x),** aşa cum se poate vedea din (11).

Din graficele prezentate în **figura 5**, rezultă că acceleraţiile unghiulare ale **SNL** cresc cu creşterea valorii termenului pur neliniar, adică cu valoarea lui **μ**, fiind nule pentru **SL** de **μ = 0.**

Vitezele unghiulare au amplitudini de oscilaţie, faţă de valoarea lui **ω_C**, cu atât mai mari cu cât creşte **μ** şi devin nule pentru **μ = 0**. Iar **ω_C** se apropie de **ω_0** prin scaderea lui **μ**; **ω_0** ales arbitrar de **1,2** în figură.

Figura 6 prezintă, în centru, deviaţiile valorilor pulsaţiilor proprii **Ω(A, μ)** ale **SNL** în funcţie de **μ** ∈ [0, 1], pentru A = 1 şi ω_0 = 1,2 pentru **SNL** progresive şi regresive, adică pentru **μ** → $\pm\mu$.

În figura din stânga, se observă scăderea valorilor lui **Ω**, de la **Ω** (μ=0) = **ω_0** = 1,2, la **Ω**(μ = - 1) = 0.9; valoare **ω_0 =1,2** fiind aleasă arbitrar, odată cu creşterea valorilor negative a lui - μ, iar, în figura din dreapta, se observă creşterile lui **Ω**, de la **Ω** (μ = 0) = ω_0 = 1,2, odată cu creşterea lui + μ la [**Ω**(+μ = + 1) = 1,5].

4. COMPLETARE LA LUCRAREA INIŢIALĂ: SOLUŢII ÎN FUNCŢIE DE TIMPUL t

Sunt obţinute cu ajutorul ***integralelor şi a funcţiilor eliptice***. Integrala eliptică completă de prima speţă **K(k)** dă perioada **4K(k)** a funcţiilor eliptice (**cn(u,k), sn(u,k), dn(u,k**), iar cea de speţa a doua **E(k)** exprimă lungimea sfertului de elipsă.

Elipsa din **figura 7** are axa mare a = 1 şi axa mică b = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ > a, fiind prezentată şi în lucrarea lui **Cebe László** "Elliptikus függvének" din revista Hiradástechnika XXV , 1974, pag. 176 .. 189, impreună cu o serie de funcţii periodice remarcabile, printre care şi cele eliptice. Mai puţin **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) care sunt prezentate numai în lucrările autorului şi în această figură.

Ea are a = 1 şi b = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ şi, deci, ecuaţia

(49) $x^2 + \frac{y^2}{1-k^2} = 1$

şi ecuaţiile parametrice

(50) $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \sin\theta \end{cases}$.

Raza polară a elipsei poate fi dată din centrul O(0, 0) de relaţia

(51) ρ = r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ → ρ = r = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\theta}}$

cu notaţiile din figură, sau din focarele, dispuse, în cazul elipsei rotite cu - π/2, pe axa y, fiind, totodată şi excentrele $E_1 = E^+(e, \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2})$ şi $E_2 = E^-(e, \varepsilon_2 = \frac{3\pi}{2})$ ce corspund dispunerii lor pe semiaxa y > 0 şi, respectiv, pe y < 0 şi de relaţii

(52) $r_{1,2} = \sqrt{x^2 + (e \mp y)^2}$

şi a căror sumă, în cazul de faţă, şi în toate cazurile în care se exprimă una dintre proprietăţile de bază ale unei elipse, care stipulează că suma distanţelor de la focarele elipsei la un punct curent de pe elipsă este constantă şi egală cu lungimea axei celei mai mari a elipsei, în cazul de faţă cu b > a, adică

(53) $r_1 + r_2 = 2b = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}}$.

Excentricitatea liniară e a elipsei, acum pe direcţia axei y, adică de $\varepsilon = \pm\,\frac{\pi}{2}$, este dată de cunoscuta relaţie, aici modificată datorită rotirii elipsei

(54.) $e = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} = b.k$

iar ***excentricitatea liniară numerică***, notată acum cu **s**, este

(55) $s = \frac{e}{b} = k$.

Rezultă că ***excentricitatea liniară numerică*** **s** a elipsei este şi ***modulul k*** al integralelor şi al funcţiilor eliptice **Jacobi**.

Deoarece, cercul unitate, reprezentat în **figura 7** are raza R = a = 1, rezultă că excentricitatea reală e_{cerc} este egală cu excentricitatea numerică $s_{cerc} = e_{cerc}/a = e_{cerc}$.

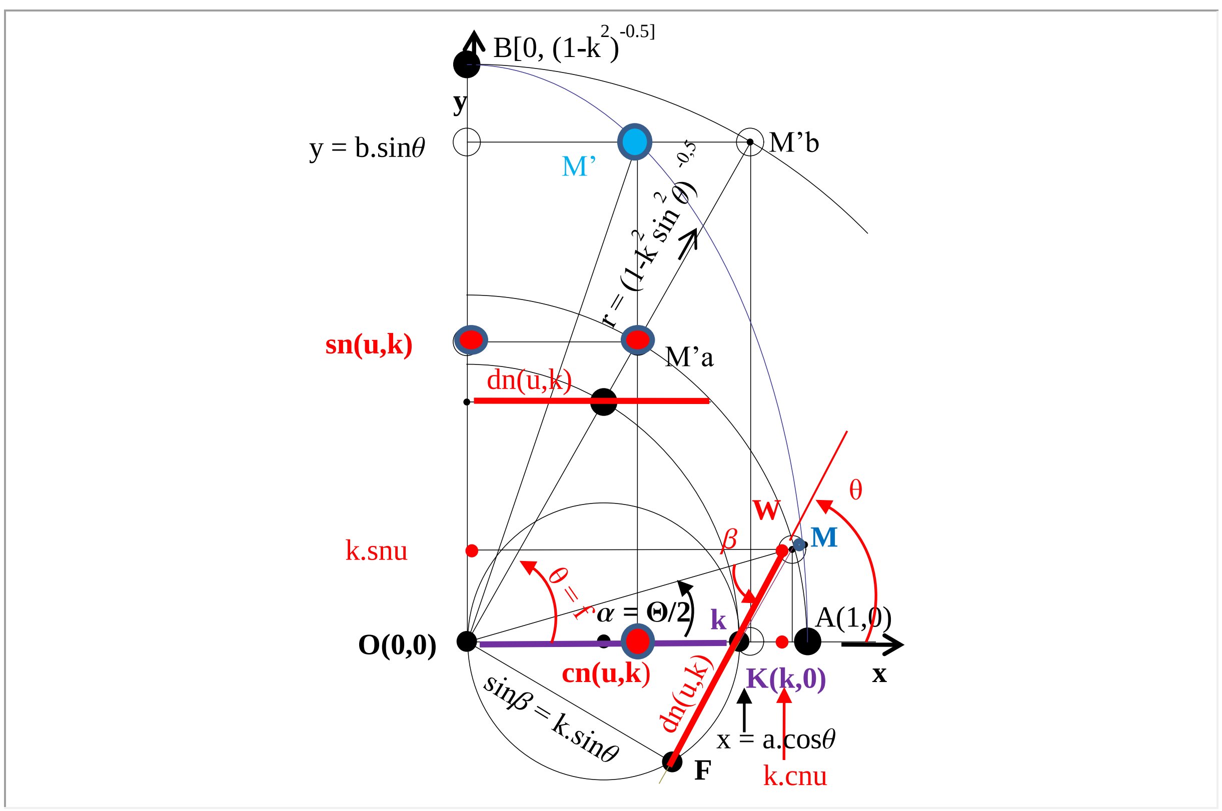


Fig. 7 Reprezentarea funcţiilor eliptice **Jacobi** pe **elipsa unitate** şi pe **cercul unitate**

Dacă modulul funcţiilor eliptice este **k**, se alege excentricitatea numerică, egală cu cea reală a **FSM-CE** pentru R = 1, atunci **e** = **s** = **k**.

Adică, excentricităţile numerice ale elipsei şi ale cercului sunt aceleaşi; diferă doar excentricităţile reale ale celor două curbe închise. Diferenţă care face şi distincţia dintre **elipsa**, s-o numim **unitate,** deoarece are **a** = 1 şi ***cercul unitate*** de **R = 1**.

În rezumat: ***cercul unitate*** are ambele excentricităţi liniare egale între ele şi egale cu **k**, iar **elipsa unitate** le are diferite; dar excentricităţile numerice ale celor două curbe închise sunt egale între ele şi egale cu modulul **k** al integralelor şi al funcţiilor eliptice **Jacobi**.

Sunt denumite funcţii eliptice, pe de o parte, pentru că sunt legate de integralele eliptice, de determinare a perimetrului elipsei - **E(u,k)** – şi, pe de altă parte, pentru că pe această curbă inchisă pot fi definite aceste funcţii şi, cu precădere, ***arcul de elipsă u***, de la originea arcului elipsei unitate A(1,0) la un punct curent P(θ, ρ = 5) de pe elipsă.

Deoarece satisfac exact ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul doi, au o multitudine de aplicaţii în matematică, fizică şi în special în tehnică şi în tehnologie.

Fie integrala

(56) $\int \boldsymbol{R}\,[\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{P(x)}}]\boldsymbol{dx}$

în care R(x, y) este o funcţie raţională de argument x, iar P(x) – un polinom.

Dacă P(x) este un polinom de ordinul doi, atunci integrala (56) se exprimă prin funcţii elementare.

În cazurile excepţionale, când integrala poate fi exprimată prin funcţii elementare, aceasta se numeşte **integrală pseudoeliptică**.

În cazul când P(x) este o funcţie de ordinul trei sau patru, integrala (56) se numeşte ***integrală eliptică*** şi, în general, nu poate fi dată în formă finită, sub forma unei relaţii simple de calcul.

Pentru integrala eliptică completă de prima speţă **K(k)**, s-a prezentat, în lucrarea [“**Super-matematica.Fundamente”**, Cap.5 Aplicaţii matematice ale **FSM-CE** radial excentric **rexθ**, pag. 152 … 167], o metodă hibridă – numerico-analitică, bazată pe / (plecând de la) metoda **Landen-** prin care s-a reuşit obţinerea unei relaţii simple, cu numai doi termeni (5.55, 5.56 şi 5.57), care oferă o precizie de calcul incredibil de ridicată, cu **15** zecimale exacte !

La fel de bine, ea poate fi calculată cu ajutorul unei serii hipergeometrice, dezvoltată după **k** având raza de convergenţă egală cu unitatea.

Se numeşte serie hipergeometrică seria (v. **Râjic I.M**. şi **Gradştein I.S**. “**TABELE DE INTEGRALE, SUME, SERII ŞI PRODUSE**” Ed. Tehnică, Buc. 1955, pag. 415]

(57)

$$F(\alpha;\beta;\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.1}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1.2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\propto+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}z^3 + \cdots$$

Cu ajutorul acestei serii, expresia care poate exprima, cu orice grad de precizie, valoarea integralei **K(k)** este

(58) $$\mathbf{K(k)} = \frac{\pi}{2}\mathrm{F}(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2};1;\mathrm{k}^2) = \frac{\pi}{2}\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{k}^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\mathrm{k}^4 + \cdots + \left[\frac{(2\mathrm{n}-1)!!}{2^{\mathrm{n}}.\mathrm{n}!}\right]^2\mathrm{k}^{2\mathrm{n}} + \cdots\},$$

în care simbolul **!!** exprimă produsul numai a numerelor impare sau namai a celor pare, de la caz la caz, în funcţie de indicaţiile / ***continutul parantezei*** care precede simbolul. Astfel

(59) $$\begin{cases}(\mathbf{2n-1})!! = 1^{n/2} = 1.3.5\ldots(2n-1)\\ \boldsymbol{2n}\,!! = 2^{n/2} = 2.4.5\ldots 2n = 2^n\,n!\end{cases}$$

şi, ca simbolurile să fie complete, n ! se mai simbolizează şi astfel

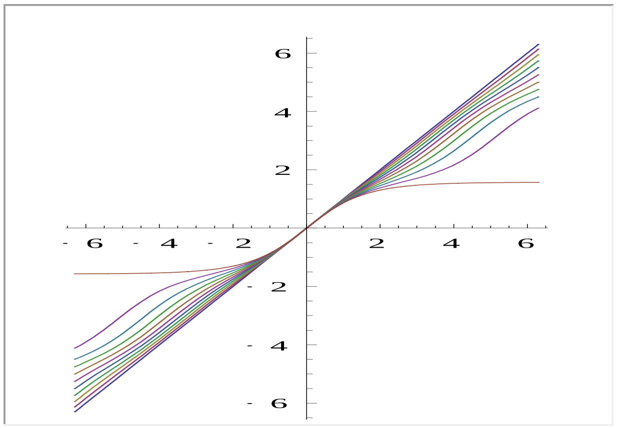
(59’) $\mathbf{n\,!} = 1^{n/1} = 1.2.3\ldots n$

Integrala eliptică de prima speţă **K(k)** din forma normală **Legendre**

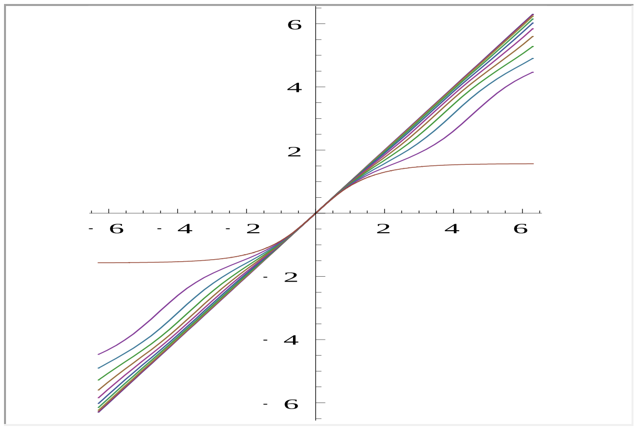
(60) $K(k) = \int \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$

poate fi adusă sub forma trigonometrica normală prin substituţia

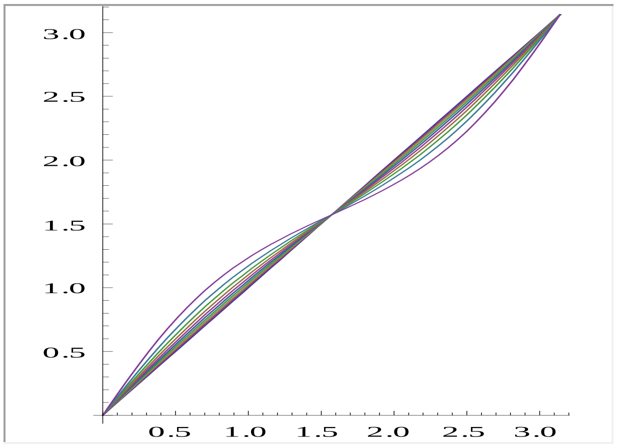
(61) x = sinθ.



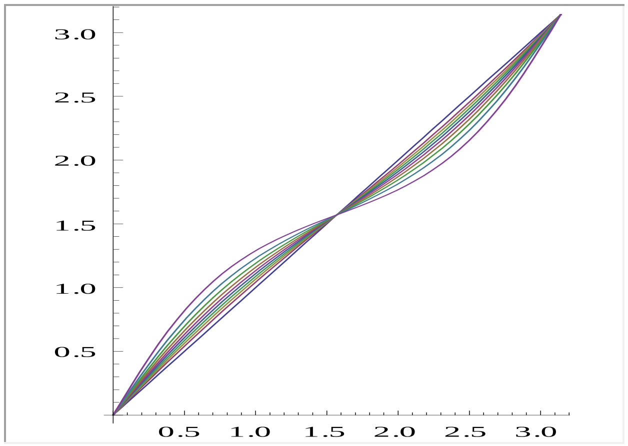
a) Funcţia eliptică **Jacobi** am(u, m = $\sqrt{k}$)



b) Funcţia eliptică **Jacobi** am(u,k)



c) Funcţia eliptică **Jacobi** am(θ,m = $\sqrt{k}$)



d) Funcţia eliptică **Jacobi** am(θ,k)

Fig.8 Funcţii eliptice **Jacobi** amplitudine (amplitudinus) de **u** ⇦ şi de **θ** ⇨

Expresia lui **K(k)** poate fi scrisa, mai concentrat, astfel
[v.→ http://sfm.asm.md/vol1/fizica%20matematica.html]

(61') **K(k)** = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 sin^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!} sin^{2n}\theta\right] d\theta =$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 k^{2n}\right\}$$

Aşa cum rezultă şi din "Tabelele" lui Râjic [pag. 174, rel(3.413)], dublul integralelor eliptice de prima şi a doua speţă, sunt date şi de **FSM-CE,** de variabilă **centrică α**, ***radial excentrică***
Rexα$_{1,2}$ = $\pm\sqrt{\mathbf{1+k^2-2k.cos\alpha}}$ de **excentricitate numerică s** = **k**, → $k^2 < 1$

(62) **K(k)** = $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{Rex_{1,2}\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1+k^2\mp 2k.cos\alpha}}$ şi

(63) ± **E(k)** = $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} Rex_{1,2}\,\alpha.d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+k^2\mp 2kcos\alpha}\ d\alpha.$

Lungimea unui arc de elipsă este **u**, variabila funcţiilor eliptice cn(u,k), sn(u,k) şi dn(u,k) şi se poate determina cu integrala

(64) u = **E(θ, k)** = $\int_0^{\theta}\sqrt{x^2(\theta)+y^2(\theta)}\ d\theta = \int_0^{\theta}\sqrt{1-k^2 sin^2\theta}\ d\theta$

5. INFINIŢII MICI (DIFERENŢIALELE), FSM-CE ŞI FUNCŢIILE ELIPTICE Jacobi

Istoria confirmă că **Fourier** i-a acuzat pe **Jacobi** şi pe **Abel** ca-şi risipesc / pierd timpul cu funcţii eliptice, când sunt atâtea probleme mai utile care ar putea fi rezolvate. Răspunsul se găseşte pe site-ul (V.**Google**→” Zâmbetul ştiinţei”).

Ca istoria să nu se mai repete, (deşi, tot istoria, ne învaţă că nu se învaţă nimic din istorie, din moment ce ea se repetă, deci, fără prea multe speranţe şi fără să ne facem iluzii că vom pune punctul pe i), inserăm în acest capitol unele dependenţe dintre infiniţii mici, sub forma diferenţialelor, funcţiile eliptice **Jacobi** şi noile, introduse în matematică, **FSM-CE,** cu speranţa că, în acest mod, se simplifică înţelegerea funcţiilor eliptice **Jacobi,** din moment ce, ele, pot fi vizualizate şi pe cercul trigonometric / unitate cu care suntem mai familiarizaţi (**Fig. 7**).

Elementului de arc al elipsei ds = du din **figurile 7** şi **9** este

(65) $ds = du = \rho d\theta = \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 sin^2\theta}}$,

în care raza polară **ρ** a unui punct al elipsei, măsurată din originea O(0,0), este dată de relaţia (65).

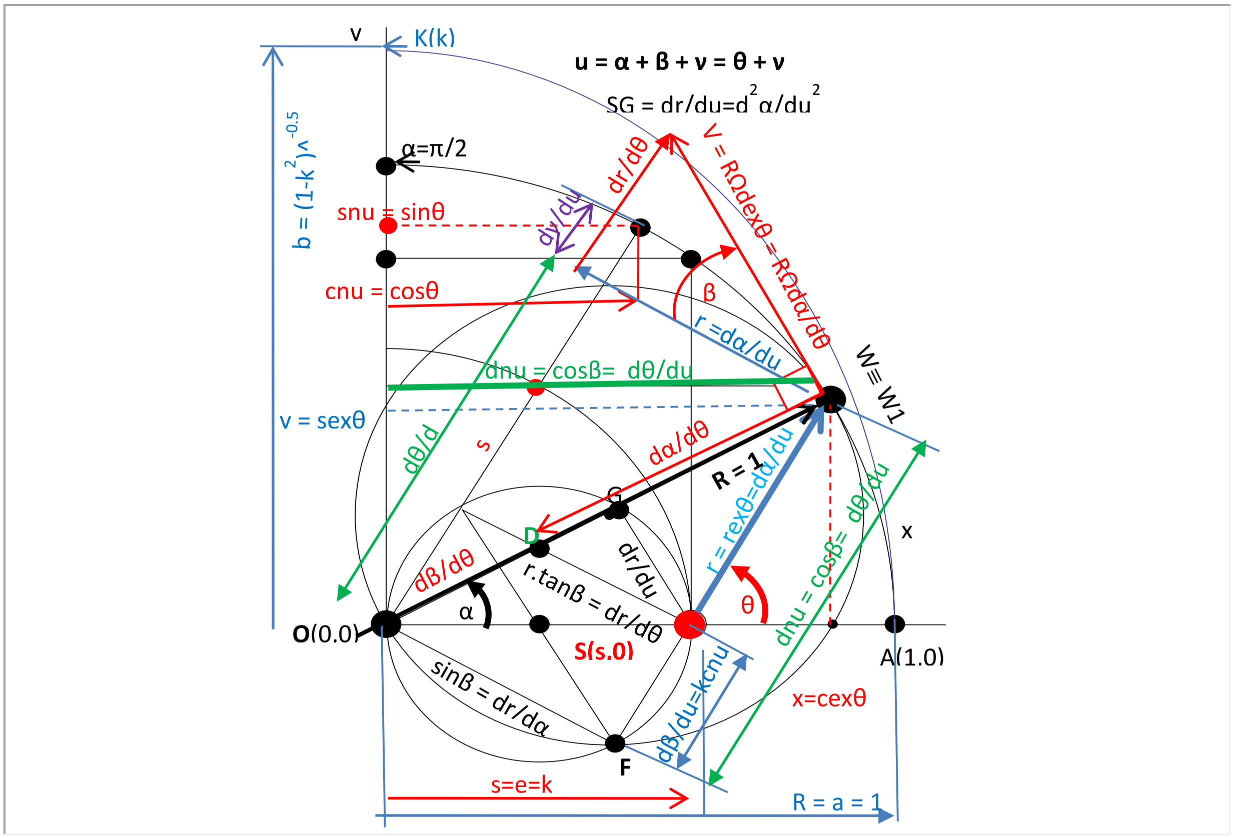


Fig.9 Infiniţi mici (diferenţiale), **FSM-CE** şi **funcţii eliptice Jacobi**

Lungimea **u** a arcului de elipsă (**Fig.7**), corespunzător arcului **θ** a unui punct W(R=1, θ) de pe cercul unitate, se determină prin integrarea elementului de arc al elipsei, adică, este integrala eliptică de speţa a 2-a, incompletă, notată şi cu ***F(u,k)***

(66) ***F(u,k)*** $= \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 sin^2\theta}}$

Lungimea arcului unui sfert de elipsă, corespunzătoare lui θ = π/2, pe cercul unitate, este **K(k)** .

Se observă că integrala eliptică de prima speţă, ***F(u,k)*** este dată de diferenţiala $\frac{du}{d\theta}$, care, aşa cum s-a indicat în **figura 8** reprezintă inversul segmentului

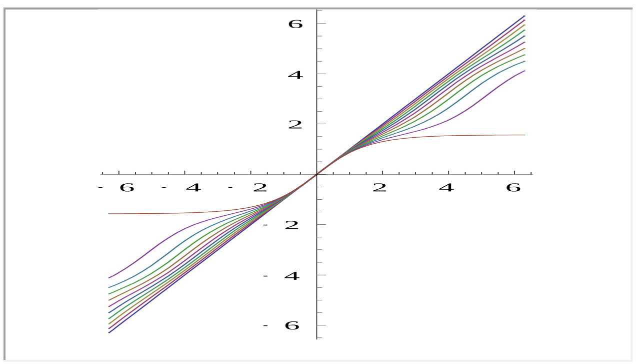
(67) FW = dn(u,k) = cos β = $\sqrt{1- \ k^2 sin^2\theta}$

Din figură mai rezultă, fără să insistăm asupra deducerii acestor relaţii, că

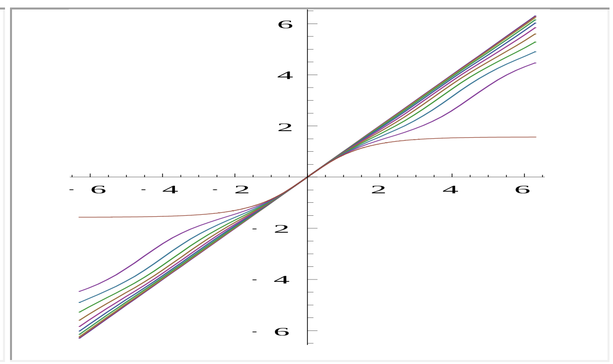
68) $$\begin{cases} r = EW = rex\theta = Rex\alpha = \frac{d\alpha}{du} \\ FE = k.cos\theta = \frac{d\beta}{du} \\ FW = dnu = \frac{d\theta}{du} = \frac{d(\alpha+\beta)}{du} = \frac{d\alpha}{du}\frac{d\beta}{du} \\ 1 - FW = \frac{d\gamma}{du} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\alpha}{du} + \frac{d\beta}{du} + \frac{d\gamma}{du} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\alpha + d\beta + d\gamma = du \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = u = \theta + \gamma$$

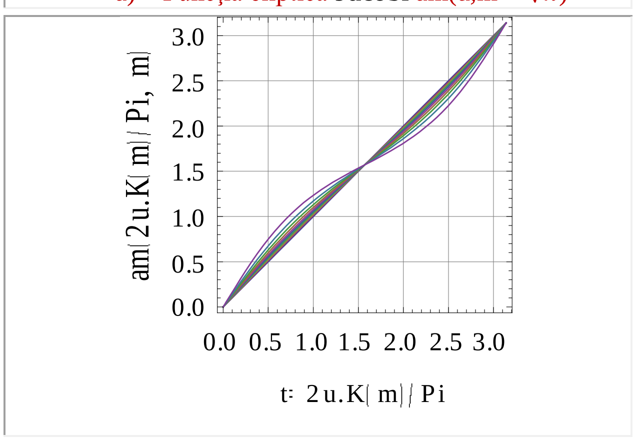
Rezultă că unghiul γ = u – θ este, deci, diferenţa dintre cele două argumente, cele ale funcţiilor eliptice **Jacobi** (u) şi ale **FSM-CE** de variabilă excentrică (**θ**).



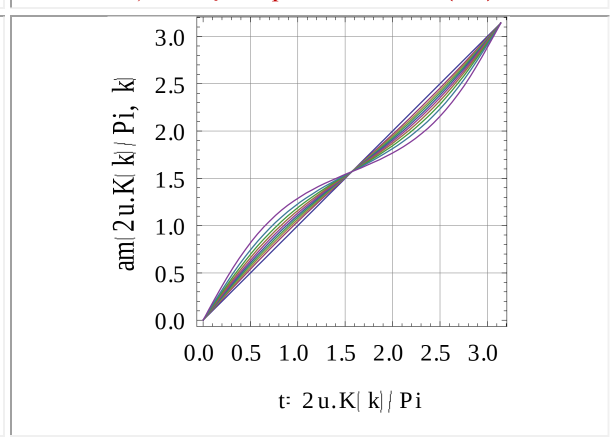
a) Funcţia eliptică **Jacobi** am(u,m = $\sqrt{k}$)



b) Funcţia eliptică **Jacobi** am(u,k)



b) Functia eliptică Jacobi am($\frac{2uK}{\pi}$, m = $\sqrt{k}$)

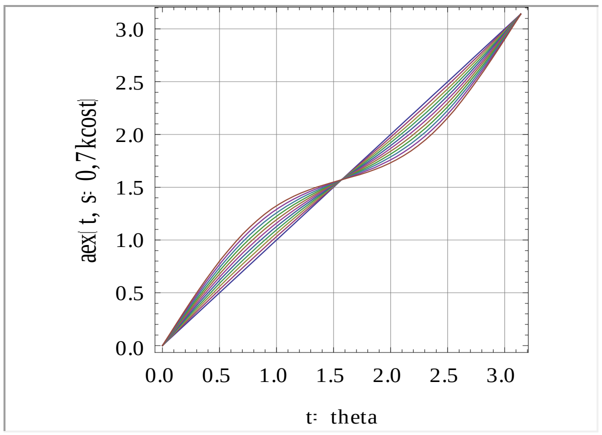


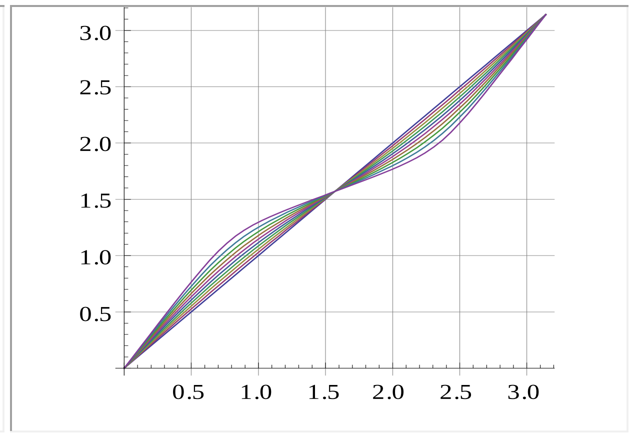
c) Functia eliptică Jacobi am($\frac{2uK}{\pi}$, k)

Fig. 10 Funcţii eliptice **Jacobi** de parametru **m** şi **k** şi de argumente u ⇦ şi de **θ** = $\frac{2uK(k)}{\pi}$ ⇨

Transversal pe segmentul **FW,** apar segmente de drepte care pot fi exprimate prin diverse diferenţiale, cum sunt

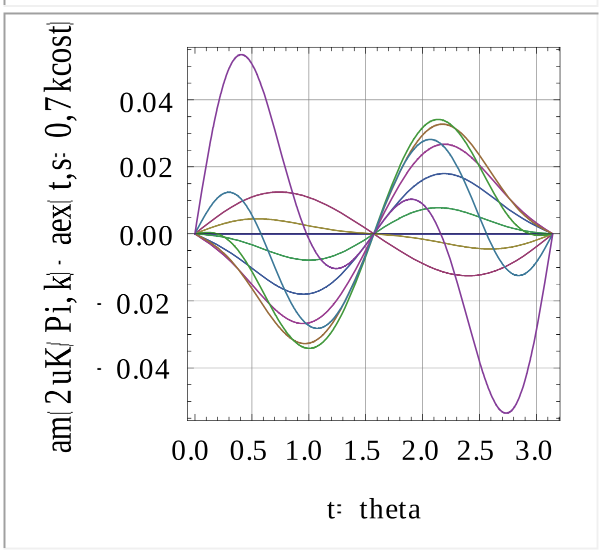
$$(69)\quad \begin{cases} \boldsymbol{OF} = k.sin\beta = \dfrac{dr}{d\alpha} = \dfrac{d}{d\alpha}Rex\alpha = \dfrac{k.\sin\alpha}{Rex\alpha} = \dfrac{k.\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2-2k.\cos\alpha}} \\ \boldsymbol{FP} = \dfrac{dr}{du}\dfrac{d\theta}{d\alpha} = \dfrac{dr}{du}Dex\alpha = \dfrac{dr}{du}\dfrac{1}{dex\theta} = \dfrac{d}{d\theta}(dex\theta) \rightarrow FP \perp OW \\ \boldsymbol{SD} = r.tan\beta = dex\theta.sin\beta = \dfrac{dr}{d\theta} = k\dfrac{sex\theta}{cos\beta} \\ \boldsymbol{SG} = r.sin\beta = \dfrac{dr}{du} = rex\theta.sin\beta \end{cases}$$

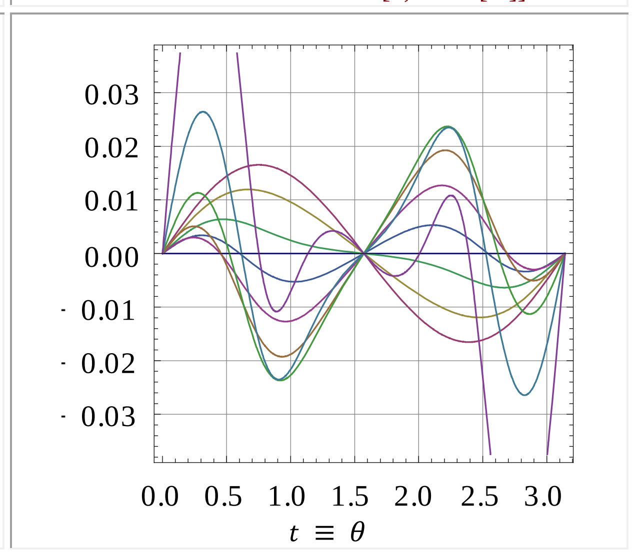




FSM-CE aex[θ, S(s→0.7kcost, ε = 0)]

FSM-CE aexm[θ, S(s→0,5kcosθ, ε = 0)], aexm θ = θ + 0.309arcsin[0,5k Sin[2t]]





Diferenţa am(2uK/π ,k) – aex(θ, s=0,7 cosθ)

Diferenţa am(2uK/π,k) – aex(t, s = - 0.5kcost)

Fig. 11 Funcţii amplitudine excentrică **aex θ** şi diferenţele faţă de **am(2uK/π, k)**

Pe direcţia dreptei OW, înclinată cu unghiul α faţă de axa x, apar două segmente a căror sumă este raza cercului unitate R = 1. Aceste segmente sunt

(70) $$\begin{cases} OD = \frac{d\beta}{d\theta} = \frac{k.cos\theta}{\sqrt{1-k^2 sin^2\theta}} \\ DW = \frac{d\alpha}{d\theta} = dex\theta \\ GW = r\frac{d\theta}{du} = \frac{d\alpha}{du}\frac{d\theta}{du} = 1 - k.sin\alpha \end{cases}$$

Aşa cum s-a mai afirmat şi cum se cunoaşte, de fapt, derivata vectorului de poziţie $\vec{r}$ (θ) = R.rexθ, a punctului W în mişcarea lui pe cerc (v. Supermatematica, Fundamente ,Ed. Politehnica,Timişoara, **Vol.I**, Cap. 6.4 **MCE**, pag 197 … 202), este viteza $\vec{v}(\theta = \Omega t) = R.\Omega.dex\theta$. Pentru R = Ω = 1 rezultă $\frac{d}{d\theta}[\vec{r}\,(\theta)] = \dot{\vec{r}}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(rex\theta.rad\theta) = \frac{dr}{d\theta}rad\theta + r.der\theta =$

$= \frac{dr}{d\theta}rad\theta + \frac{d\alpha}{du}der\theta = \frac{d\alpha}{du}\,der\alpha$ = $\vec{v}$ = dexθ.**radα**

în care se evidenţiază cele două componente ale vitezei: una pe direcţia ***fazorului*** **radθ**, adică pe direcţia radială centrică (**radθ**), a razei vectoare $\vec{r}$, care exprimă derivata în modul a lui $\vec{r}$ şi o a doua componentă, perpendiculară pe prima, pe direcţia ***fazorului*** derivată centrică (**derθ**), care reprezintă derivata în direcţie a vectorului turnant $\vec{r}$ = rexθ ***radθ***.

Derivata în direcţie este proiecţia lui $\vec{v}$ pe direcţia derθ, adică

(71) $\frac{d\propto}{du} = dex\theta.cos\beta = \frac{d\alpha}{d\theta}\frac{d\theta}{du}$

iar derivata în modul este proiecţia lui $\vec{v}$ pe direcţia fazorului radθ

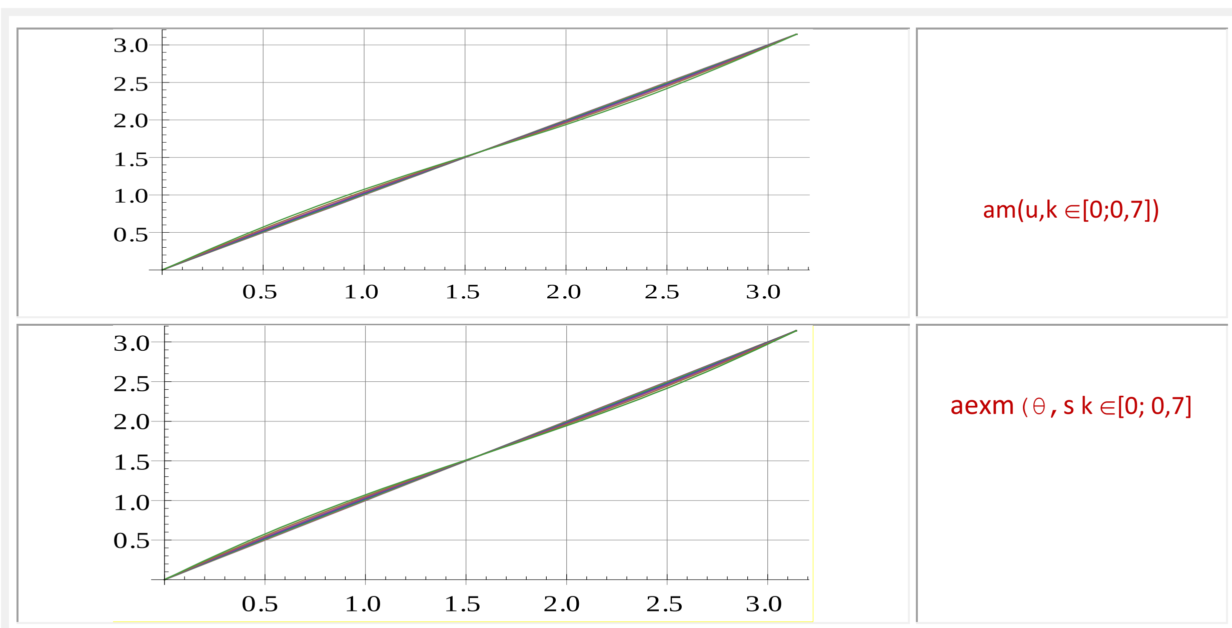
(72) $\frac{dr}{d\theta} = dex\theta.sin\beta = \frac{d\alpha}{d\theta}\frac{dr}{d\alpha}$

ceea ce indică corectitudinea asocierii diferenţialelor, respectiv a diverşilor infiniţi mici, cu aceste segmente de dreapte, reprezentate în **figura 8**.

Dacă (64) dă pe u(θ), inversul ei θ(u) este dată de funcţia eliptică **Jacobi** amplitudinus / amplitudine **am(u,k)** — şi, adăugăm noi, **centrică**, pentru a evita confuziile cu amplitudinea excentrică **aex(θ, s)** —

(73) θ(u) = am(u,k)

Aceste funcţii au alura din **figura10**.



BUPT

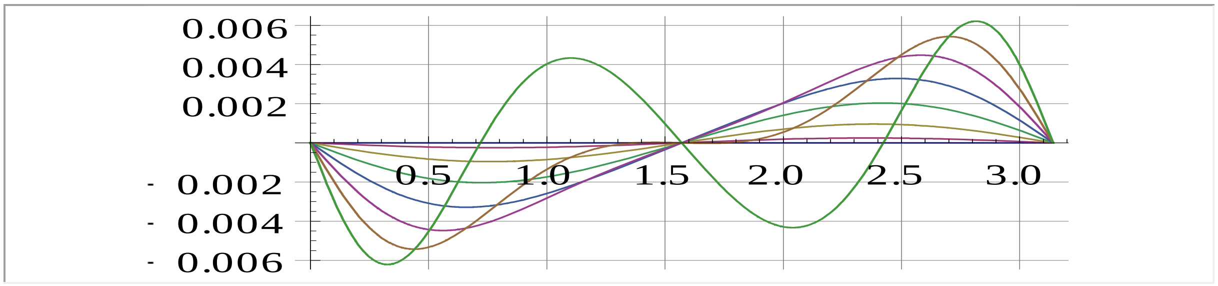


Fig. 12 Diferenţa ΔM = am(2uK/π, k) – aexm(θ,s) în domeniul k ∈ [0; 0,7]
aexm(θ, s) = θ + 0,3 arctan[s²cos²θ.sinq(θ,s)], s = k ∈[0;0,7]

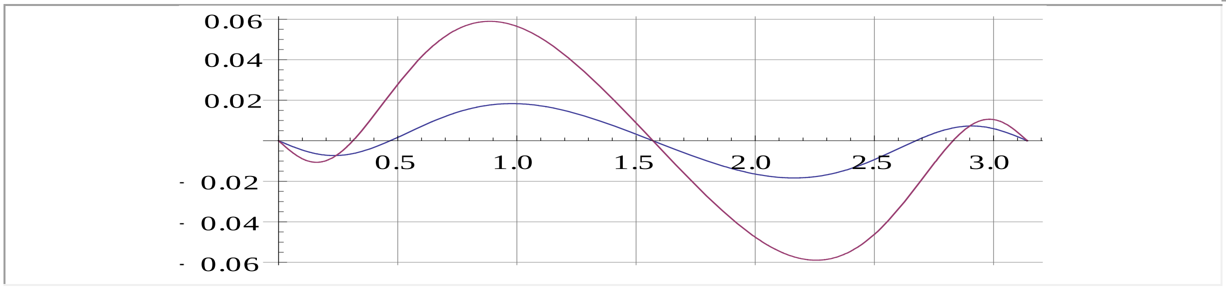
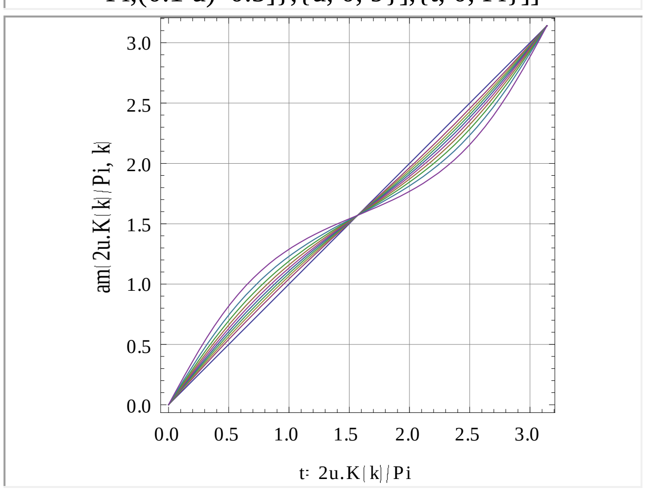
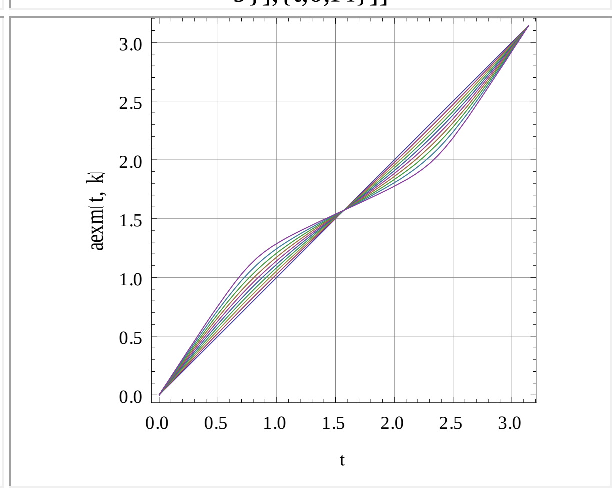


Fig. 13 Diferenţa ΔM = am(2uK/π, k) – aexm(θ,s) în domeniul k ∈ [0,7; 0,9]
aexm(θ,s) = θ + 0,3 arctan[s²cos²θ.sinq(θ,s)], s = k ∈[0,7; 0,9]

În partea de sus şi în stânga figurii, sunt reprezentate funcţiile am(u, m = √k), de modul **m = √k**, care sunt funcţii eliptice **Jacobi** de perioadă 4K(k), iar în dreapta figurii sunt prezentate aceleşi funcţii dar de modul **k = m²** şi de aceeaşi perioadă 4K(k).

În partea de jos sunt prezentate aceleaşi funcţii de aceiaşi parametri **m** şi, respectiv, **k**, dar de aceleaşi argumente vor fi utilizate şi pentru reprezentarea celorlalte funcţii eliptice Jacobi: cn u, snu, dnu.
argument modificat prin t = 2uK(k)/π.

Plot[Evaluate[Table[{JacobiAmplitude[2 t EllipticK[(0.1 u)^0.5] / Pi,(0.1 u)^0.5]},{u, 0, 9}],{t, 0, Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{(t + 0.3 ArcSin[0.1 u Sin[2 t]])},{u, 0, 9}],{t,0,Pi}]]
	

```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiAmplitude[ 2 t EllipticK[(0.1 u)^0.5]/Pi,(0.1 u)^0.5] -
(t + 0.3 ArcSin[0.1 u Sin[2 t] ])},{u, 0, 9}],{t, 0, Pi},
Frame→True, FrameLabel→{"t","amt-aexmt"}, GridLines→Automatic, AspectRatio→0.5]]
```

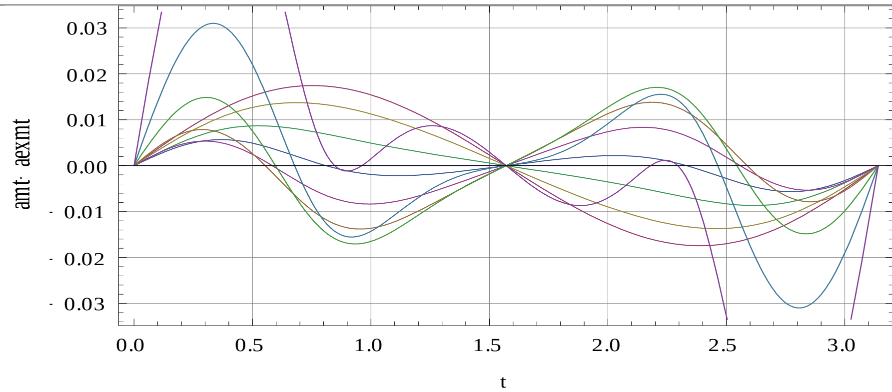


Fig.14 Funcţii amplitudine excentrică $aex_m\ \theta$ şi diferenţele faţă de $am(2uK/\pi, k)$

Pentru comparaţie şi pentru evidenţierea asemănării lot cu funcţiile amplitudine **Jacobi** şi, prin aceasta, a justificării denumirii date acestor funcţii, sunt prezentate **FSM-CE** amplitudine **excentrică** (**aexθ**) de variabilă excentrică θ cât şi **FSM-CE** **aex$_m$θ** –aex **modificate-** în sensul că **FCC** inversă arc**sin** a fost înlocuită cu arc**tan**, aşa cum se indică în **figura 11**– sus. Jos, sunt prezentate diferenţele dintre funcţiile eliptice **Jacobi** şi **FSM-CE**

(74) $\Delta \ = \ am(u, k) - aex\ (\theta,s)$

sau

(75) $\Delta M = am(u, k) - aexm\ (\theta,s)$.

Precizii de aproximare mult mai ridicate, pentru $k \in [0; 0,7]$ sunt reprezentate în **figura 12** fiind date de $aex_m\ (\theta, s = k)$.

Modificarea constă în următoarele : arcsin → 0,3arctan, s → $(s.\cos\theta)^2$ şi sinθ → sinq(θ, s), în care, reamintim că **sinq** sau **siq** este sinusul cvadrilob/quadrilob (v.**SM.Fundamente** pag. 32, 53 .. 56).

Aşa cum se poate observa în **figura 12** – jos diferenţele maxime sunt foarte mici şi nu depăşesc valoarea de ± 0,006, iar cele minime (k = 0) sunt, evident, nule.

Pentru domeniul $k \in [0,7; 0,9]$ diferenţele aceloraşi funcţii sunt prezentate în **figura 13** şi nu depăşesc valoarea de 0,06, fiind astfel de 10 ori mai imprecise decât în domeniul k = 0 … 0,7 ($k \in [0; 0,7]$).

O altă funcţie de aproximare, cu trei termeni, este

(76) $aex_m(\theta,s) = \theta+\arctan[0,05\ s^2\cos\theta.\ \sin t/(1-0.05\ s^2 \cos^2\theta)]+(0,1\ s +0.023)\ \sin 2\ \theta$

Cel de-al treilea termen a rezultat din diferenţa cu numai 2 termeni, diferenţă care era reprezentată de o familie de funcţii sinus.

Privind funcţiile diferenţă, simetrice faţă de axa θ, se observă că o îmbunătăţire globală a aproximării, în tot domeniul $k \in [0; 0,9]$, nu mai este posibilă. În schimb, este posibilă o imbunătăţire pe cele două grupe de funcţii, care prezintă diferenţe de semne opuse.

O astfel de metodă este prezentată mai pe larg în lucrarea **Mircea Şelariu** şi dr.ing. **Dumitru Bălă** "**Ways of presenting the delta function and amplitude function Jacobi**" Contemporary Science Association New York, Denbridge Press, Academic Division, New York, ISBN:978-973-88931-1-5 şi într-o lucrare cu privire la " Un sistem supermatematic cu baza continua de aproximare a funcţiilor" ca şi în lucrarea lui Dr. ing. **Dumitru Bălă** " Supermathematical-**Selariu** Functions Beta Eccentric bexθ" publicată în lucrarile "Proceedings of the 2nd World Congress on Science, Economics and Culture 25-29 August 2008, New York, ISBN: 78-973-88931-1-5(063).

Cu siguranţă, pot fi găsite şi alte funcţii care să aproximeze şi mai bine funcţiile eliptice **Jacobi** **am(u,k)** şi, prin aceasta, şi funcţiile **sn, cn dn**, care se pot exprima, la rândul lor, cu ajutorul lui **am(u,k).**

Rezultă, din stânga **figurii 11**, că diferenţa maximă absolută nu depaşeşte valoarea de 0,06 – pentru k = 0.9 şi este sub 0.03 pentru k ∈ [0; 0,8].

Pentru k∈ [0; 0,4] diferenţele sunt sub 0,02. Programul de calcul WOLFRAM-MATHEMATICA 8 nu a reprezentat / dat curba pentru k = 1.

Preciziile obţinute, de aproximare a funcţiilor **am(u,k)** prin **aex(θ,s)** de excentru variabil (s = 0,7.k.cosθ), sunt acceptabile pentru multe aplicaţii tehnice.

O aproximare satisfăcătoare a funcţiei **am(u,m)** este dată de următoarea relaţie a funcţiei **SM aexθ** modificată

(77) **$aex_m(\theta,s)$** = $\theta/2 + \arctan[0.05\ s^2 \cos[\theta/2].\ \sin[\theta/2] /$
$(1\text{-}0.05\ s^2 \cos[\theta/2]^2)] + 0.0075 \cos[\theta/4] / \mathrm{Sqrt}[1\text{-} \sin[\theta/4]^2] - 0.0075 + 0.015 \sin[\theta]$.

In fine, o aproximare foarte bună, cu diferenţe sub 0,03 până la k = 0,8, inclusiv, este prezentată în **figura 14**, împreună cu expresiile funcţiei de aproximare **$aex_m\theta$** modificată:

(78) $aex_m\theta = \theta + 0.3 \arcsin[s \sin[2\theta]]$

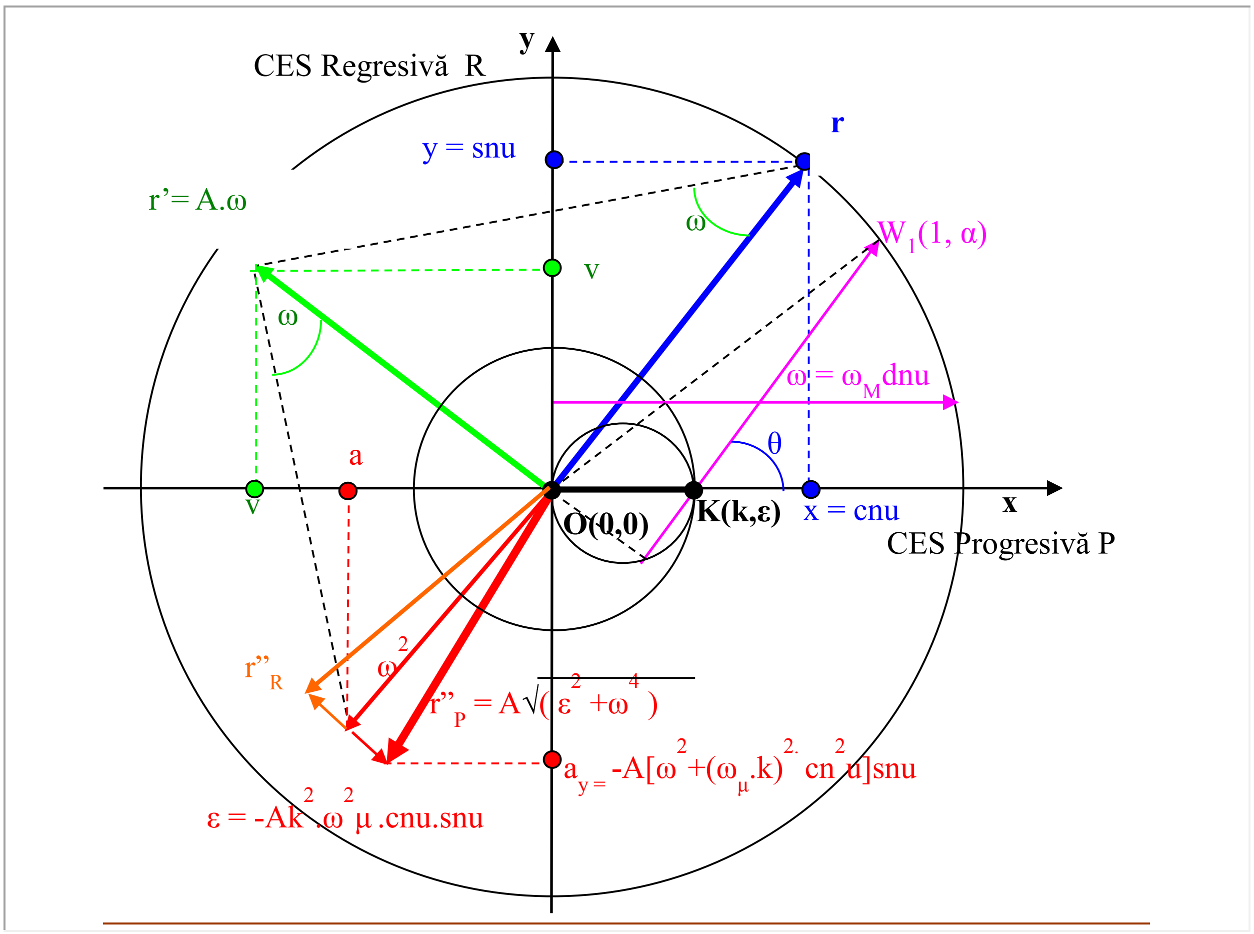


Fig. 15 Vibraţii neliniare şi liniare libere neamortizate (Sinteză)

Motto: "Vibraţiile sunt fenomene dinamice întâlnite în activitatea curentă, de la bătăile inimii, alergatul şi mersul pe jos, legănatul copacilor în bătaia vântului şi trepidaţiile clădirilor la cutremure, la vibraţiile instrumentelor muzicale, ale perforatoarelor pneumatice şi ale transportoarelor vibrante.**"**

Mircea Radeş:" Vibraţii mecanice", Editura Printech

CAPITOLUL XXI

VIBRAŢII MECANICE TRILOBICE
1. INTRODUCERE

Importanţa vibraţiilor mecanice a fost redată, într-o singură frază, în **INTRODUCEREA** lucrării Prof. Dr. Ing**. Mircea Radeş, VIBRAŢII MECANICE,** frază prezentată în **Motto**. Valabilă pentru macrocosmos. În microcosmos, ţinând cont de faptul că electronii sunt într-o perpetuă mişcare, în raport cu nucleul atomic şi că atomul este cărămida de bază a tuturor lucrurilor, rezultă că, în natură, totul este în continuă mişcare şi că, aceasta, este o vibraţie. Deoarece, oricare mişcare de rotaţie continuă pe o curbă plană sau spaţială, deobicei închisă, proiectată pe oricare două sau trei axe, reciproc perpendiculare, naşte vibraţii pe axele respective.

Se zice că vibraţia este pâinea omului de ştiinţă: o vibraţie → o ecuaţie, o nouă vibraţie o altă ecuaţie, o nouă ecuaţie o altă vibraţie şi … tot aşa. Dar nu numai a oamenilor de ştiinţă. Un inginer, a tratat deja problemele **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM**-**CE**) de variabilă excentrică **θ**, cosinus excentric **cexθ** şi sinus excentric **sexθ**, ca soluţii ale unor sisteme vibrante de **caracteristică elastică statică** (**CES**) ***neliniară*** în lucrarea [1] şi [2], a celor de variabilă centrică α**,** **Cex**α şi **Sex**α**,** în lucrarea [3] şi a vibraţiilor mecanice **quadrilobice / cvadrilobice** (cosinus **coqθ** şi sinus quadrilobice **siqθ**) în lucrarea [4]. Iar acum, aici, la **trilobe**.

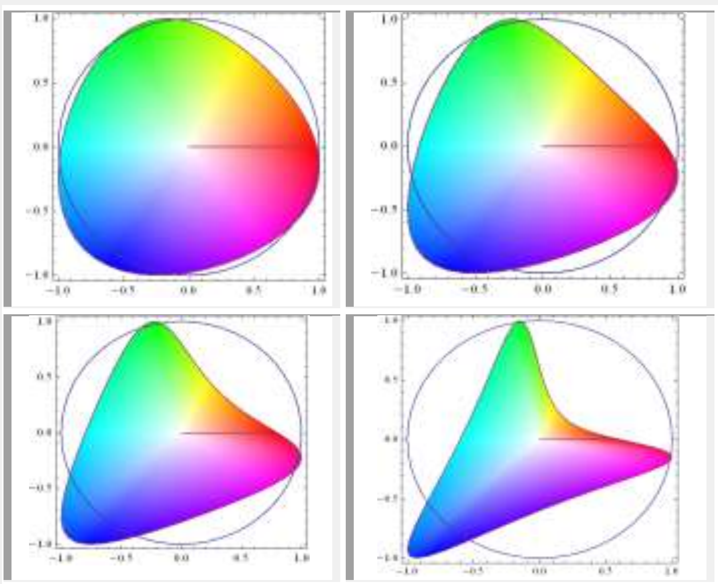


Fig.1,a Trilobe C $\begin{cases} x = cet\theta \\ y = sex\theta \end{cases}$ de **s = 0,2…0,8**

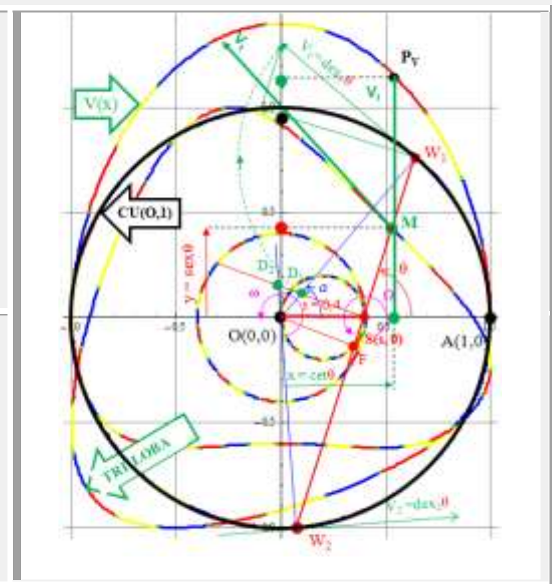


Fig.1,b **Triloba C** de **s = 0,4**
şi curba integrală în planul fazelor **V(x)**

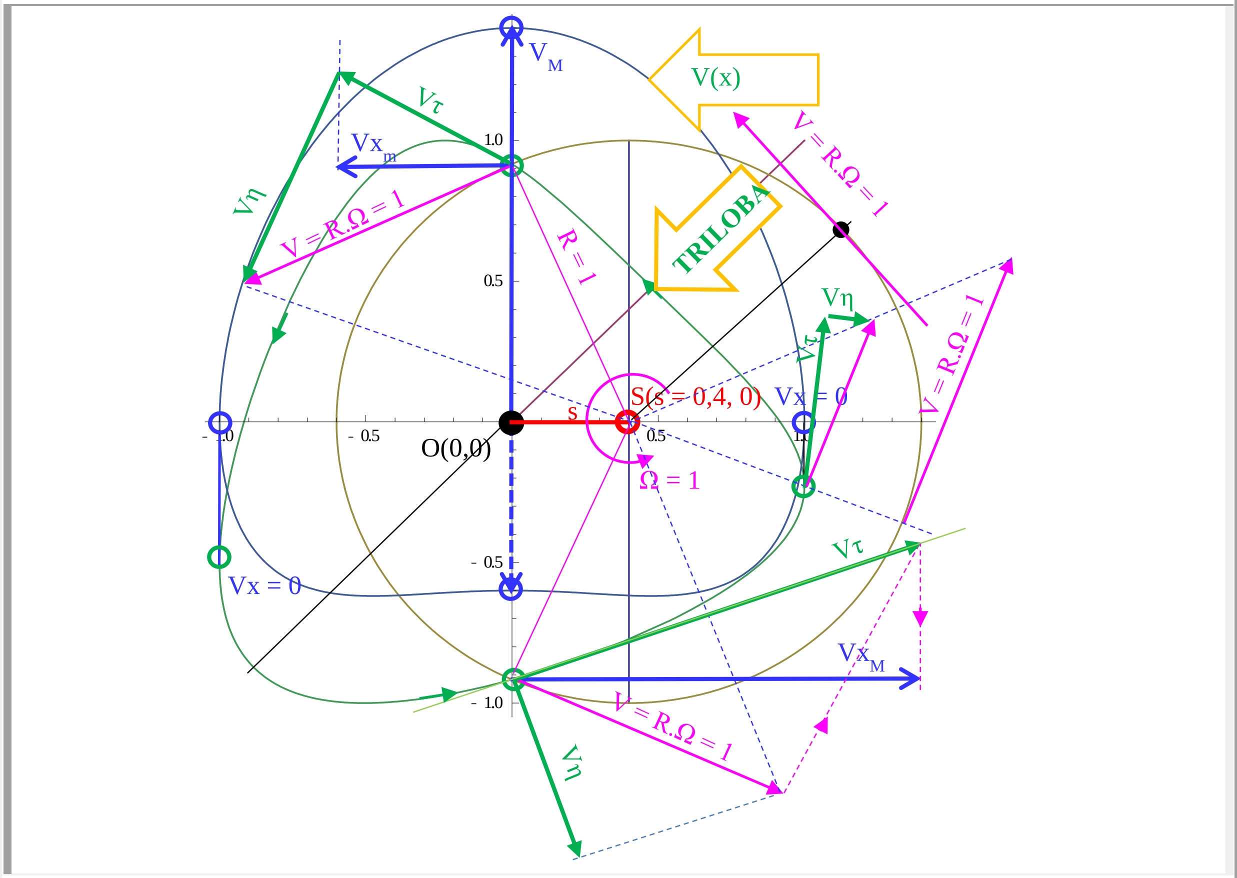


Fig. 1,c Schiţă explicativă pentru determinarea **vitezelor** în diverse puncte pe **triloba C** de **s = 0,4**
V(x) – curba integrală în planul fazelor

Monolobele, bilobele, **trilobele** (**Fig.1,a**), quadrilobele, … n-lobe ş.a.m.d. sunt curbe închise, cu un număr oarecare **n** de lobi, exprimabile cu ajutorul **FSM-CE** şi a celor **trilobice** (**FSM-T**) care, pentru o excentricitate liniară, reală **e** sau numerică **s** nule, degenerează într-un **cerc (zero lobă)**, iar pentru **s = ± 1,** degenerează într-un poligon perfect, nu neapărat regulat, cu **n** laturi.

În **figura 1,a ➔ şi 1,c** este prezentată o trilobă de **s** = 0,4, împreună cu cercul unitate **CU(O,1)** şi curba integrală în planul fazelor **V(x).**

Un punct, ***fără masă***, care se roteşte pe aceste curbe închise cu **n** lobi, se proiectează pe cele două axe, din planul mişcării, sub forma unor funcţii n-lobice: cosinus n-lobic proiecţia pe axa **Ox** şi sinus n-lobic, proiecţia pe axa **Oy**. Rezultă, de aici, că pentru **s = 0**, toate funcţiile n-lobice sunt **funcţiile matematice centrice (FMC) :** cosinusul **θ** = α ➔ cos**θ** = cosα pe axa Ox şi, respectiv, sinusul sin**θ** = sinα pe axa Oy, caz în care, variabila **excentrică θ** (în jurul lui **S**) devine egală / identică cu variabila **centrică** α, în jurul originii **O(0, 0).**

Totodată, un punct de **masă m**, care se roteşte cu o viteză unghiulară **ω** variabilă în raport cu originea **O(0,0)** şi cu o viteză unghiulară **Ω** ***constantă*** în jurul **excentrului E (e, ε)** al cercului **C(O,R)** sau în jurul excentrului **S(s,ε)** al cercului unitate CU(O,1), reprezintă tot atâtea **vibraţii libere şi neamortizate n-lobice**.

La viteza unghiulară ω, a unui punct pe **n-lobă**, imaginile lui oscilează pe axe cu vitezele liniare v_x şi, respectiv, v_y, viteze care sunt ale unor mişcări vibrante **n-lobice**.

În **figura 1,c** este prezentată **triloba C** de excentru **S**(**s** = 0,4; **ε** = 0) şi curba integrală în planul fazelor **V(x)**. În punctele de pe **triloba C** în care tangenta este verticală, paralelă cu axa y, vitezele **V(x)** sunt nule.Viteza maximă $V_M > 0$ apare în **partea inferioară** a **trilobei C**, într-un punct pe axa **Ox** (x = 0) în care deplasarea unui punct **M** pe **triloba C** se face aproape paralel cu axa **Ox**, în sensul pozitiv al axei, iar viteza minimă, negativă, **Vm** < 0 apare în partea superioară a curbei **trilobice C**, tot pentru x = 0, puncte în care **triloba C** traversează axa **Oy**.

2. FUNCŢII SUPERMATEMATICE TRILOBICE (FSM-T)

Funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) cosinus şi sinus **excentrice**, notate, cu **cexθ** şi **sexθ**, descoperite de autor cu cca. 45 de ani în urmă [1], [2], [3], [4], [5], au ecuaţiile

(1) $$\begin{cases} \mathbf{cex\theta} = \mathrm{cex}\,[\theta, S(s,\varepsilon)] = \cos\{t - \arcsin[s.\sin(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon})]\} \\ \mathbf{sex\theta} = \mathrm{sex}[\theta, S(s,\varepsilon)] = \sin\{t - \arcsin[s.\sin(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon})]\} \end{cases}$$

Pentru o excentricitate unghiulară $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$ ele devin

(2) $$\begin{cases} \mathrm{cex}\,[\theta, S(s,0)] = \cos\{t - \arcsin[s.\sin(\boldsymbol{\theta})]\} = \mathrm{cex}\theta \\ \mathrm{sex}[\theta, S(s,0)] = \sin\{t - \arcsin[s.\sin(\boldsymbol{\theta})]\} = \mathrm{sex}\theta \end{cases}$$

iar pentru $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$ **funcţiile supermatematice FSM-CE** au ecuaţiile:

(3) $$\begin{cases} \mathbf{cex}\left[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left\{t - \arcsin\left[s.\sin\left(\boldsymbol{\theta} - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \cos[t + \arcsin(s.\cos\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{cot\theta} \\ \mathbf{sex}[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}] = \sin\{t - \arcsin[s.\sin(\boldsymbol{\theta} - \frac{\pi}{2})]\} = \sin[t + \arcsin(s.\cos\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{sit\theta} \end{cases}$$

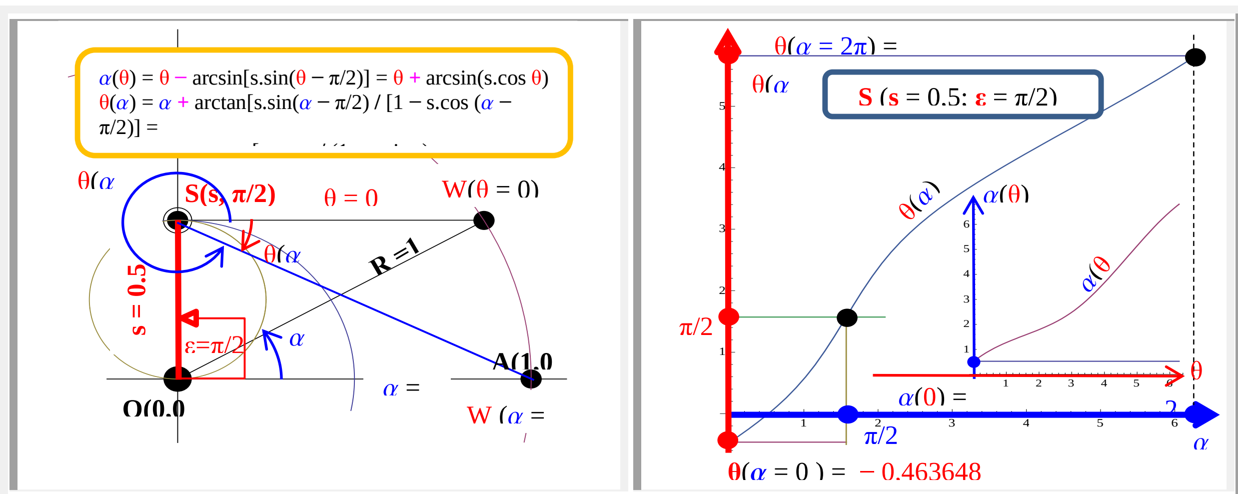


Fig.2,a Schiţă explicativă pentru schimbarea semnelor în ecuaţiile **(3)** 🡐
şi graficele acestora pentru un **excentru S** plasat pe axa **y > 0** la **s = 0,5** 🡒

deoarece $\mathbf{sin}(\boldsymbol{\theta} - \frac{\pi}{2}) = -\cos\boldsymbol{\theta}$ şi $-\arcsin(-\mathbf{s.cos}\boldsymbol{\theta}) = +\mathbf{arcsin(s.cos}\boldsymbol{\theta}\mathbf{)}$.

Folosind ecuaţiile (1) şi/sau (2) drept sistem de ecuaţii parametrice se obţin cercurile din **figura 3.**

Se ştie din **SM** că, trecerea de la funcţiile (**SM**) **circulare centrice** (**FSM-CC** sau, pe scurt, **FCC**) **cos**α şi **sin**α la **FSM-CE cex θ** şi **sexθ** sau, din **domeniul circular centric** (**CC**), în **domeniul circular excentric** (**CE**), este asemănătoare trecerii din domeniul **circular** în domeniul **eliptic** 🡒 cnu = cos[am(u,k)];

snu = sin[am(u,k)] −, adică, prin înlocuirea **variabilei centrice** α cu funcţia **amplitudine am(u,k)** şi, respectiv, **amplitudine excentrică aexθ** de variabilă excentrică **θ:**

(4) α(**θ**) = **aexθ** = **θ** – β(**θ**) = **θ** – **bexθ** = **θ** – **arcsin[s.sin(θ – ε)]**,

în care, **FSM-CE beta** excentrică are expresia:

(5) **bexθ = arcsin[s.sin(θ – ε)] = bex$_S$θ**,

denumită şi beta de **S** (**sinus**), notate **bex$_S$θ**, iar prin înlocuirea funcţiei **sin** cu **cos** în (5) se obţin **FSM-CE beta excentrice** de **cosinus**, notată **bex$_C$θ**, sau **beta trilobică betθ** cu expresia:

(6) **bex$_C$θ = arcsin[s.sin(θ –** $\frac{\pi}{2}$**)]** = − **arcsin(s.cosθ) = betθ** ≡ **bet[θ, S(s,ε)]**

(7) Astfel, ecuaţiile (2) sunt, totodată, ecuaţiile:

(2') $\begin{cases} \text{cex}\theta = \cos(\text{aex}\boldsymbol{\theta}) = \cos\{t - \textbf{bex}\boldsymbol{\theta}\} = \cos\{t - \arcsin[s.\sin(\boldsymbol{\theta})]\} \\ \text{sex}\theta = \sin(\text{aex}\boldsymbol{\theta}) = \sin\{t - \textbf{bex}\boldsymbol{\theta}\} = \sin\{t - \arcsin[s.\sin(\boldsymbol{\theta})]\} \end{cases}$

Graficele **FSM-T** sunt prezentate în **figura 2,a** pentru **s ∈ [0, +1]** şi în **figura 2,b** pentru **s ∈ [−1,+1]** şi, pentru comparaţie, în partea superioară au fost prezentate şi **FSM-CE cosinus cexθ** şi **sinus sexθ.**

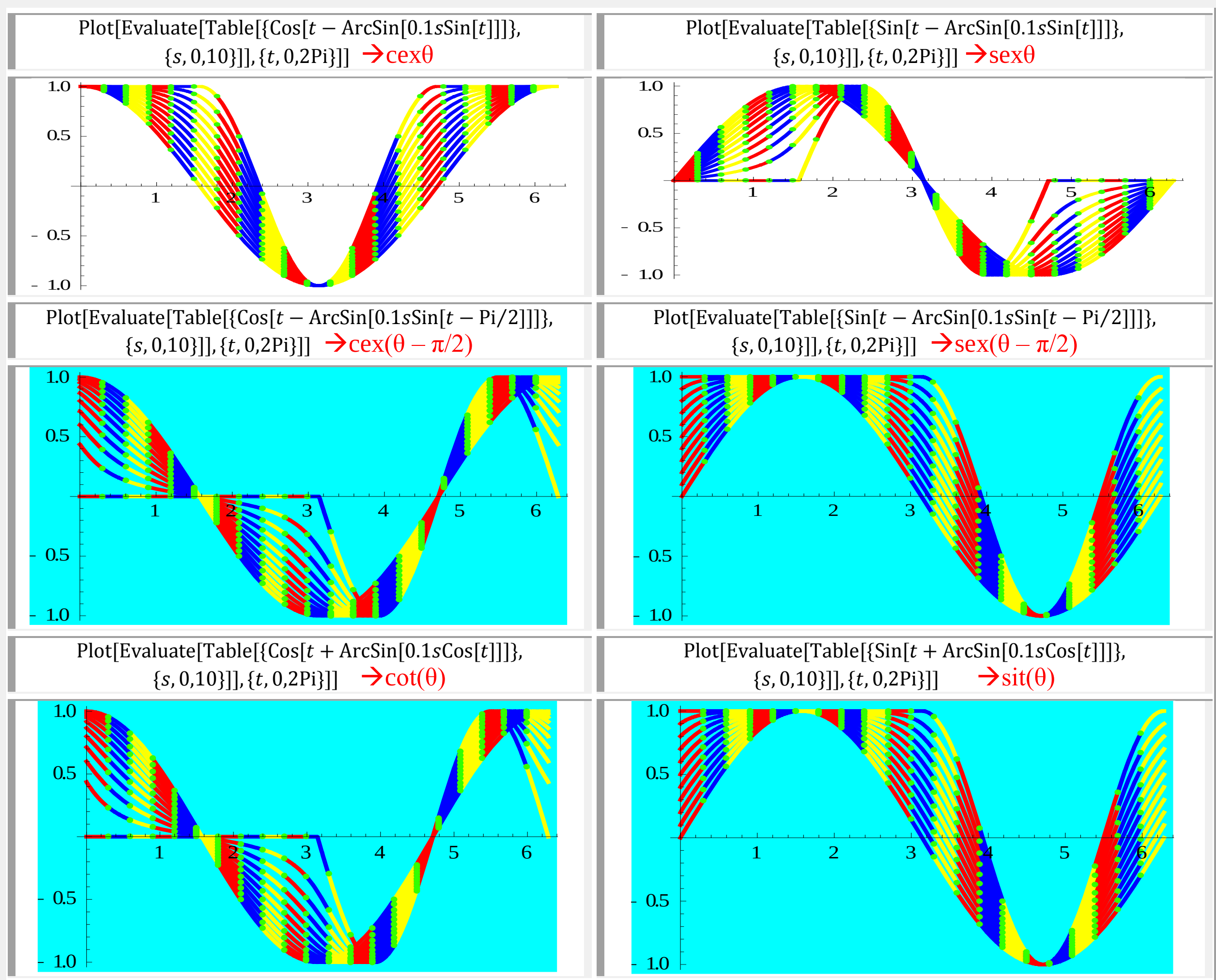


Fig.2,b Grafice **FSM-CE cexθ** şi **cexθ** (**sus** ⮙) precum şi graficele **FSM-T cotθ** şi **sitθ,** pe fond **cian,** pentru un **excentru S** (**s**∈**[0, 1]; ε = π/2)** plasat pe axa **y > 0**

Dacă, în ecuaţiile parametrice (2) şi /sau (3), se utilizează numai funcţii **beta** excentrice de sinus (bexθ) (**Fig. 2,b** şi **2,c**) sau numai **beta** excentrice de cosinus (**bex$_c$θ**) (**Fig. 2,c**), atunci se obţin cercuri (**Fig.3**).

Tot cercuri se obţin şi în cazul **C** (**Fig.3,c**) ca şi în cazul **funcţiilor supermatematice circulare centrice** (**FSM-CC) : x = cosα, y = sinα (Fig.3,a).**

Pentru evitarea suprapunerii cercurilor, raza cercurilor s-a ales variabilă (**R** = 0,1**s**).

Deşi, în toate aceste cazuri, se obţin cercuri **<u>ele nu sunt identice</u>** (**Fig.3**), decât în cazul **funcţiilor circulare centrice** (**FCC: cosα, sinα ş.a.m.d.**), deoarece, un punct curent, parcurge aceste cercuri cu viteze diferite, în funcţie de valoarea excentricităţii **s** $\in$ [-1, +1]. Numai în cazul din **figura 3,a,** toate cercurile familiei sunt parcurse cu aceeaşi viteză unghiulară, ceea ce se poate observa urmărind o anumită distribuţie a unei culori pe diverse intervale unghiulare.

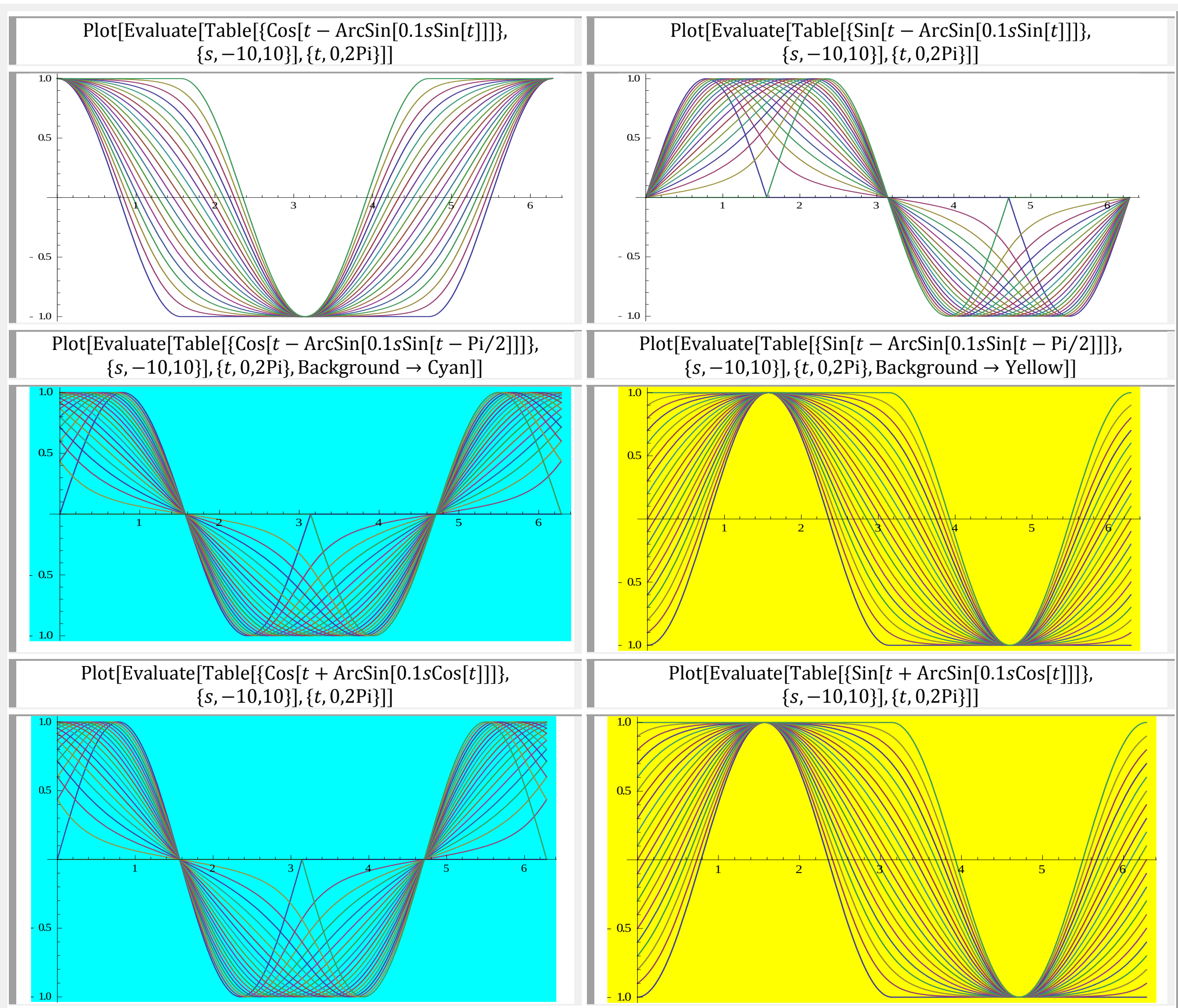


Fig.2,c Grafice **FSM-CE cexθ** şi **cexθ** (**sus ⮙**) precum şi graficele **FSM-T cotθ** şi **sitθ,** pe fond **cian, respectiv, galben,** pentru un **excentru S** (**s**∈**[-1, 1]; ε = π/2) plasat pe axa y > 0.**

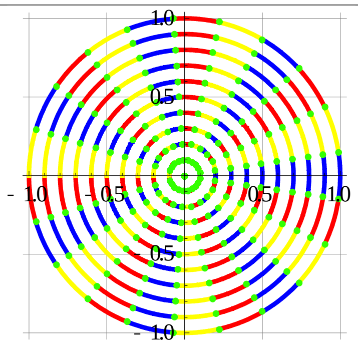
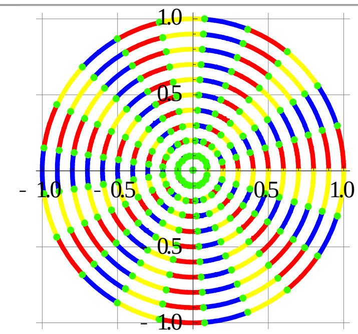
ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t*],0.1*s*Sin[*t*]}, {*s*, −10,0}]], {*t*, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t*], 0.1*s*Sin[*t*]}, {*s*, 0,10}]], {*t*, 0,2Pi}]]
	

Fig.3,a Cercuri centrice de ecuaţii: **x = cosθ; y = sinθ**

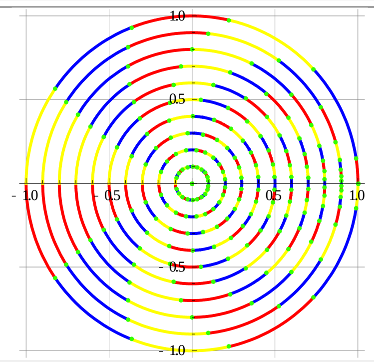
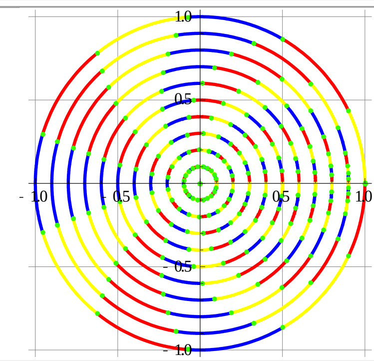
ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]], 0.1*s*Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]]}, {*s*, −10,0}]], {*t*, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]], 0.1*s*Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]]}, {*s*, 0,10}, {*t*, 0,2Pi}]]
	

Fig.3,b Cercuri excentrice (de sinus) exprimate cu ecuaţiile (2)

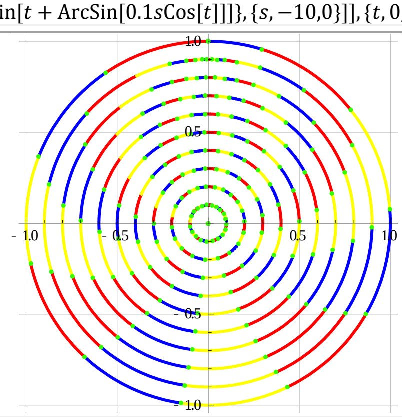
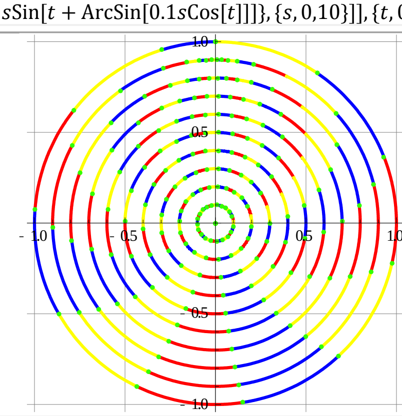
ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t* + ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]], 0.1*s*Sin[*t* + ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]]}, {*s*, −10,0}]], {*t*, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t* + ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]],]]0.1*s*Sin[*t* + ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]]}, {*s*, 0,10}]], {*t*, 0,2Pi}]]
	

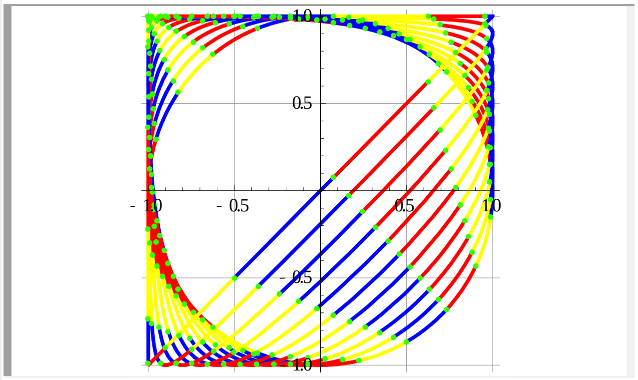
Fig.3,c Cercuri trilobice de **C (cosinius)** exprimate cu ecuaţiile (3)

Funcţiile

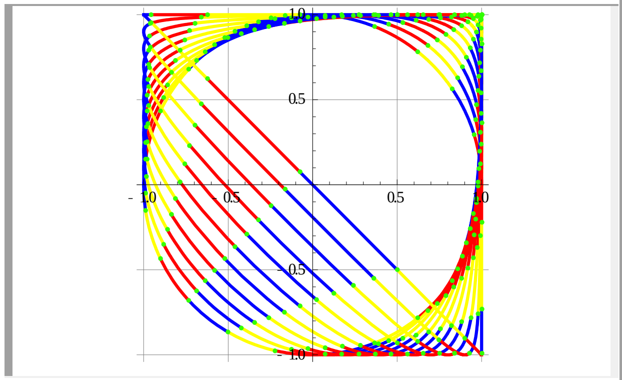
(3’) $$\begin{cases} \mathbf{cex}[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}] = \mathbf{cot\theta} = \mathbf{cot}[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{S}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon})] = \mathbf{cos}\{\mathbf{t} + \mathbf{arcsin}[\mathbf{s}.\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon})]\} \\ \mathbf{sex}[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}] = \mathbf{sit\theta} = \mathbf{sit}[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{S}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon})] = \mathbf{sin}\{\mathbf{t} + \mathbf{arcsin}[\mathbf{s}.\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon})]\} \end{cases}$$

deşi sunt **FSM-CE cex θ** şi **sexθ**, de **ε** = $\frac{\pi}{2}$, au fost (supra)denumite **trilobice** (**FSM-T**), **cosinus şi sinus trilobice**, notate, respectiv, **cotθ** = **cot[θ,S(s, ε)]** şi **sitθ = sit[θ,S(s, ε)]**, deoarece cu ajutorul lor pot fi descrise curbele plane închise denumite **trilobe** [9], [11] (**Fig.4** şi **Fig.5**).

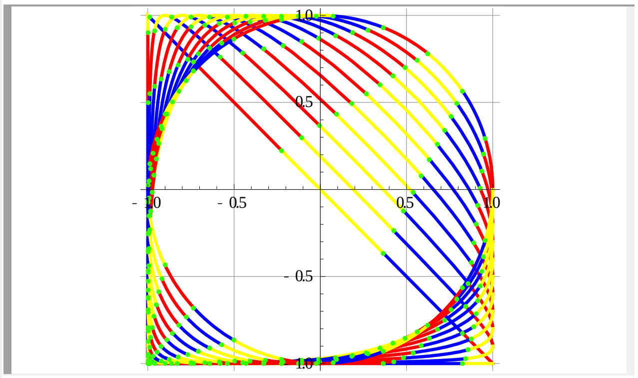
ParametricPlot[Evaluate[Table[{−Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], **Sin[t + ArcSin[0. 1sCos[t]]]}**], {s, 0,10}, {t, 0,2Pi}]]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], **Sin[t + ArcSin[0. 1sCos[t]]]}**], {s, 0,10}, {t, 0,2Pi}]]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], **Sin[t + ArcSin[0. 1sCos[t]]]}**], {s, −10,0}, {t, 0,2Pi}]]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{−Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], **Sin[t + ArcSin[0. 1sCos[t]]]}**], {s, −10,0}, {t, 0,2Pi}]]

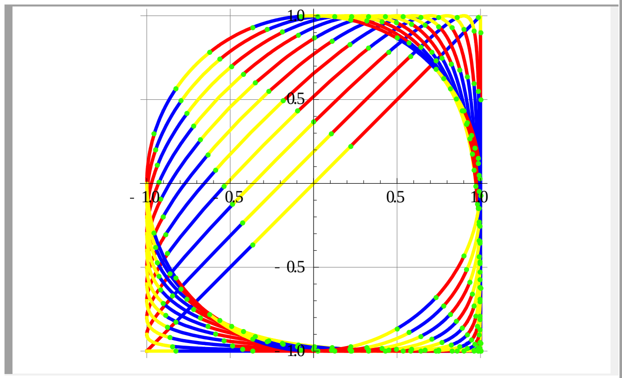
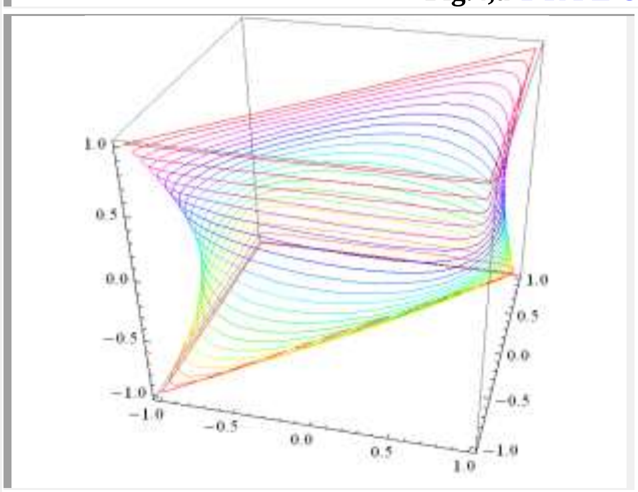


Fig.4,a T R I L O B E S (sinus)



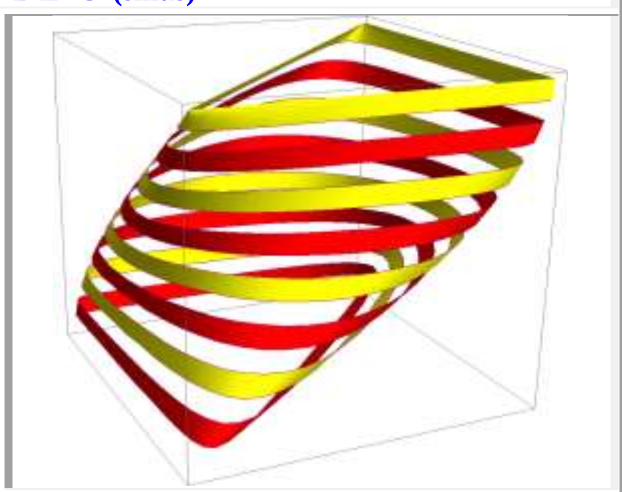
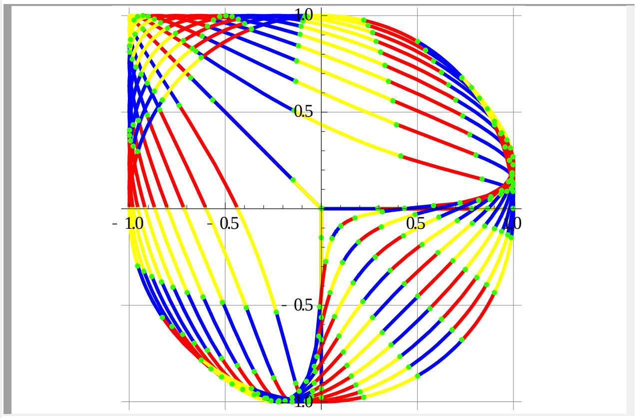
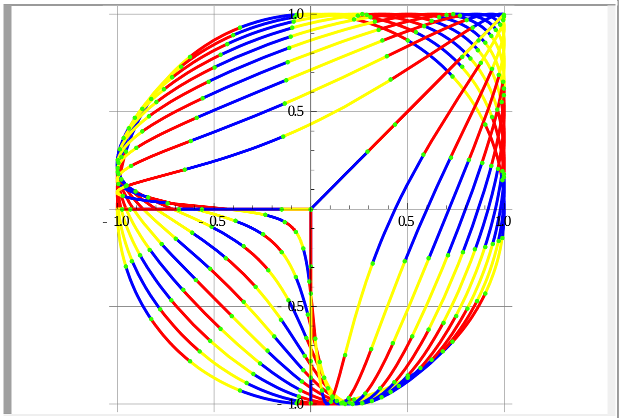


Fig.4,b T R I L O B E S în 3D

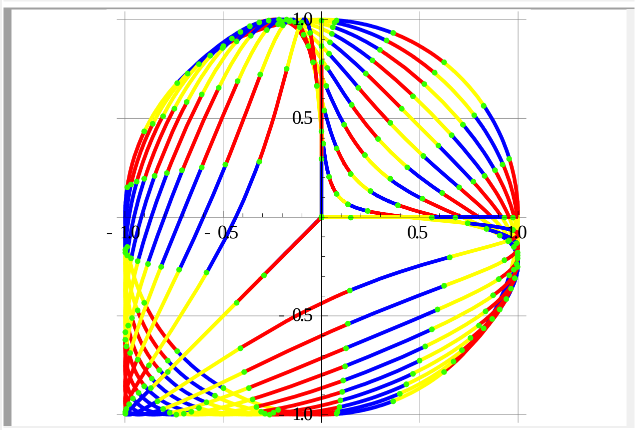
ParametricPlot[Evaluate[Table[{−Cos[t + ArcSin[0.1sCos[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,0}]], {t, 0,2Pi}]



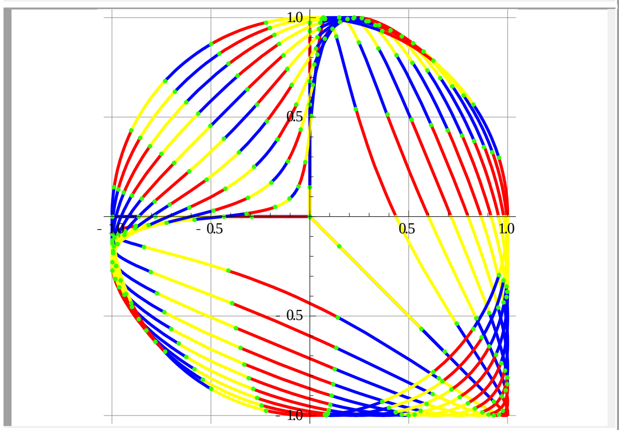
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], Sin[t + ArcSin[0.1sCos[t]]]}, {s, 0,10}]], {t, 0,2Pi}]]



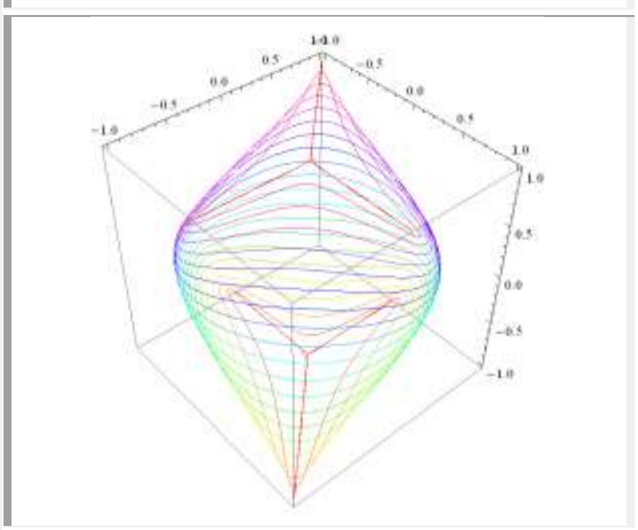
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sCos[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, 0,10}]], {t, 0,2Pi}]]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1sCos[t]]], −Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,0}], {t, 0,2Pi}]]



ParametricPlot3D[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],0.1s}, {s, −10,10}]], {t, 0,2Pi}]



ParametricPlot3D[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]],0.1s, Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}]], {t, 0,2Pi}]

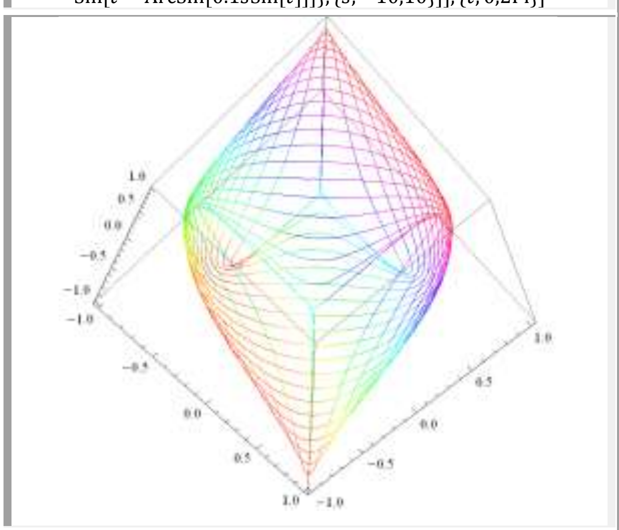
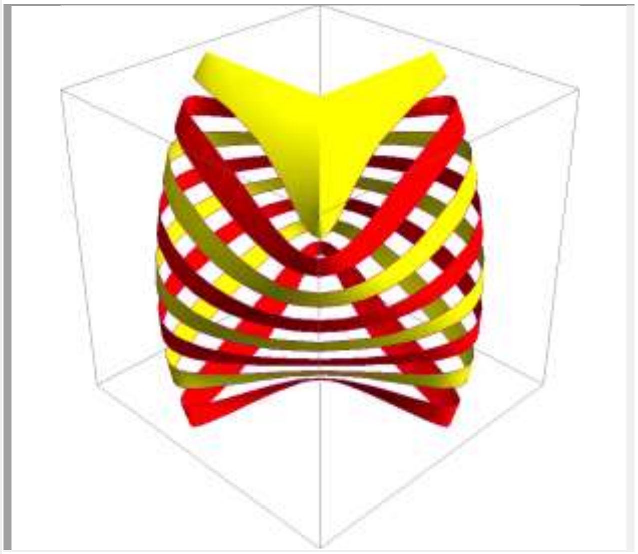
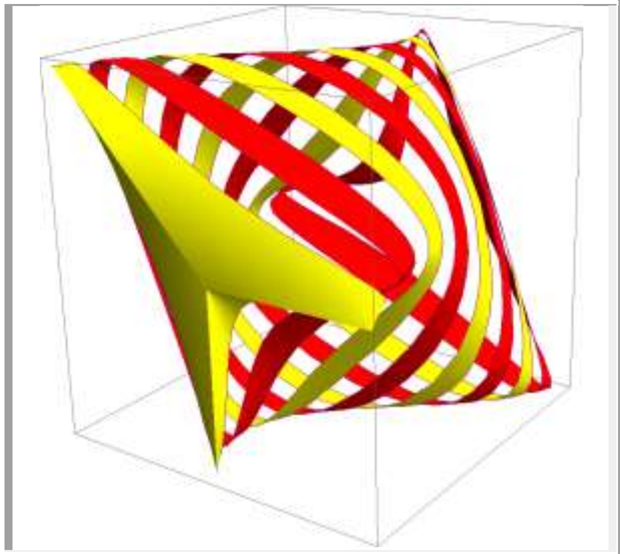


Fig.5,a T R I L O B E C (cosinius)

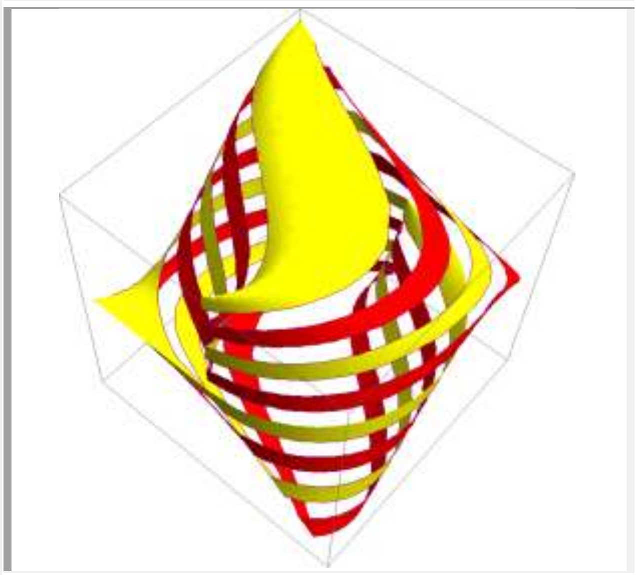
ParametricPlot3D[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], 0.1s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}





ParametricPlot3D[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]],0.1s, Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

ParametricPlot3D[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],0.1s, Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]



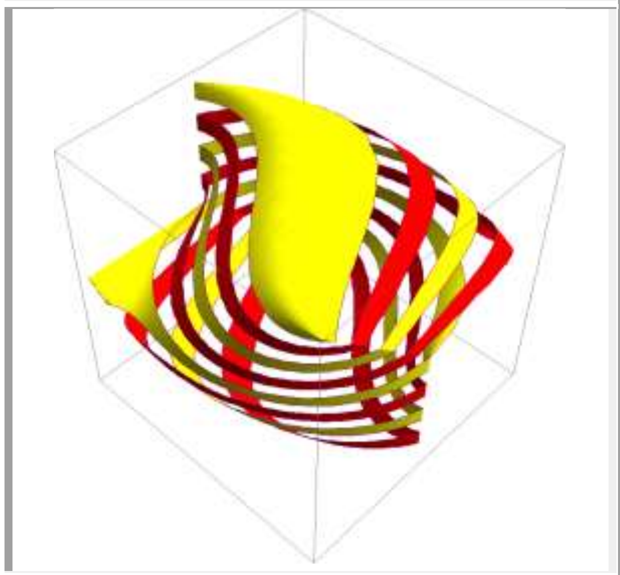


Fig5,b T R I L O B E C (cosinius) în 3D

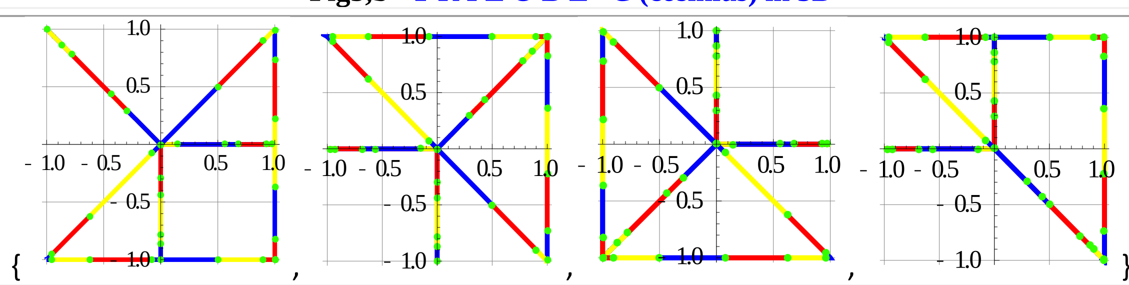
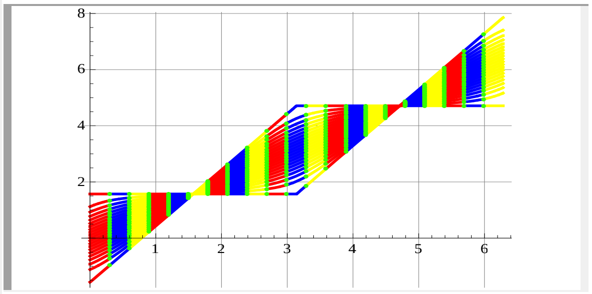
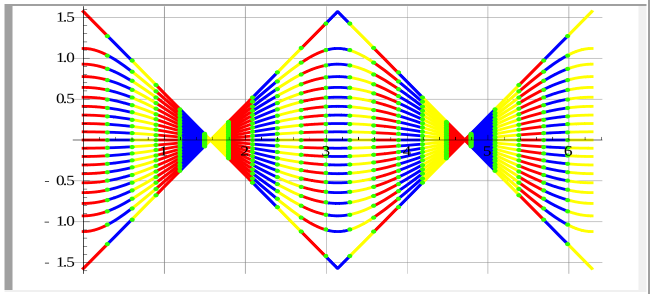


Fig.5,c T R I L O B E S (sinus) şi T R I L O B E C (cosinius) de s = ± 1

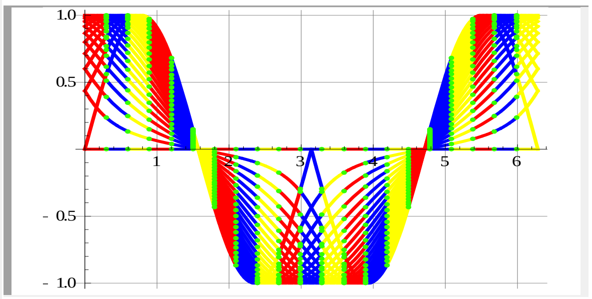
aetθ → $\text{Plot}[\text{Evaluate}\left[\text{Table}\left[\begin{matrix}\{t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]\}, \\ \{s, -10, 10\}\end{matrix}\right]\right], \{t, 0, 2\text{Pi}\}]]$



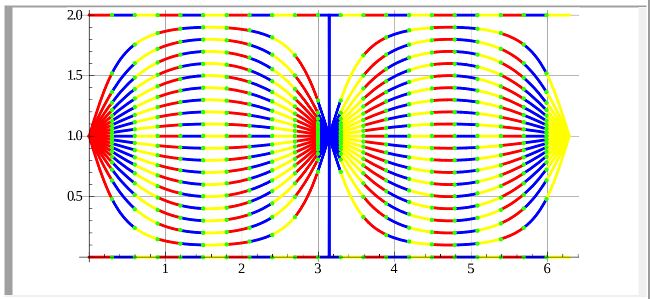
betθ → $\text{Plot}[\text{Evaluate}\left[\text{Table}[\{\text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]\}, \{s, -10, 10\}]\right], \{t, 0, 2\text{Pi}\}]]$



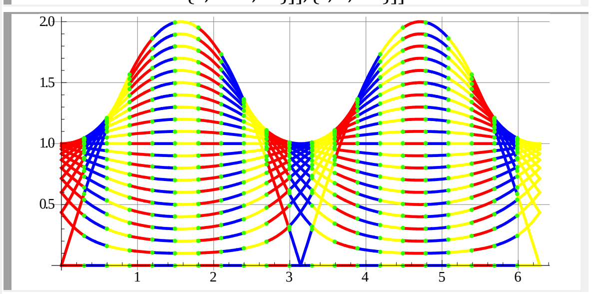
cetθ → $\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\{\text{Cos}[t - \text{ArcSin}[0.1s\ \text{Cos}[t]]]\}, \{s, -10, 10\}]], \{t, 0, 2\text{Pi}\}]]$



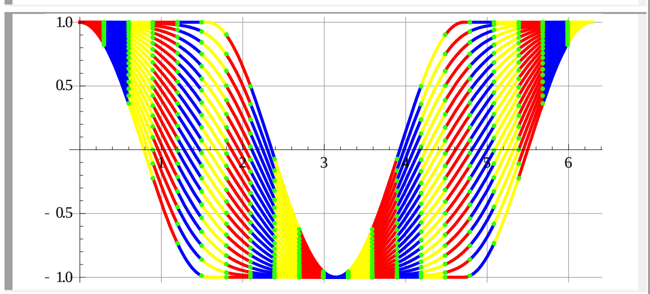
detθ → $\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\{1 + \frac{0.1s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1 - 0.01s^2\text{Cos}[t]^2}}\}, \{s, -10, 10\}]], \{t, 0, 2\text{Pi}\}]]$



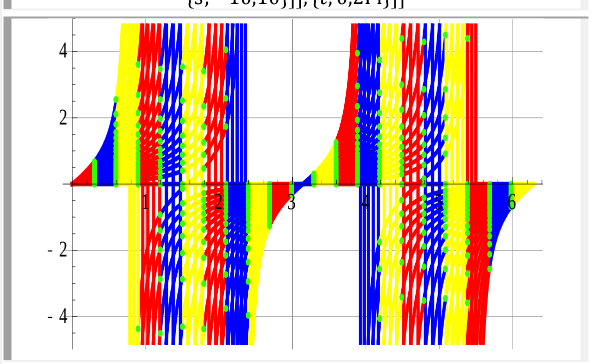
retθ → $\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\{0.1s\text{Sin}[t] + \sqrt{1 - 0.01s^2\text{Cos}[t]^2}\}, \{s, -10, 10\}]], \{t, 0, 2\text{Pi}\}]]$



setθ → $\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\{\text{Sin}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]]\}, \{s, -10, 10\}]], \{t, 0, 2\text{Pi}\}]]$



tetθ → $\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\{\text{Tan}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]]\}, \{s, -10, 10\}]], \{t, 0, 2\text{Pi}\}]]$



tetvθ → $\frac{\text{set}\theta}{\text{Abs}[\text{cet}\theta]}$

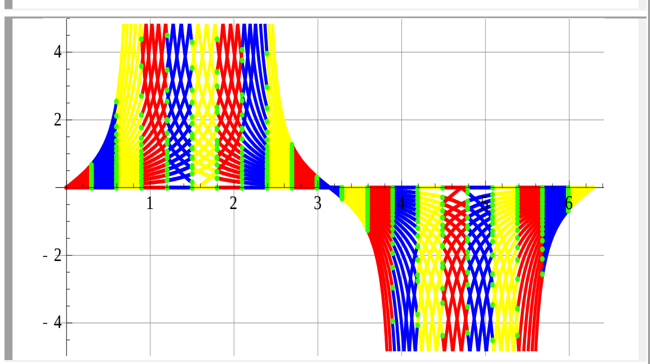
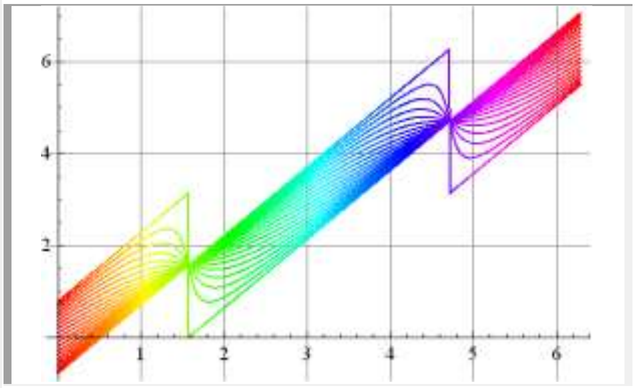
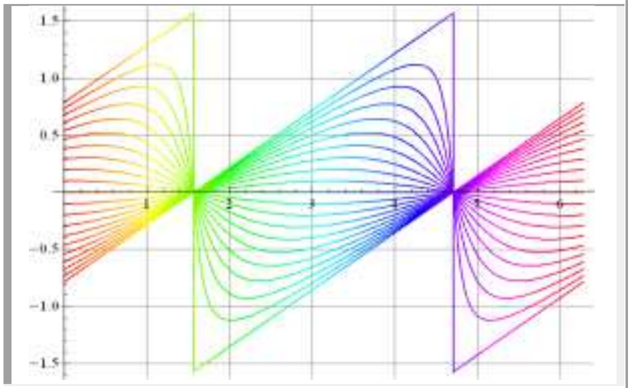


Fig.6 Câteva familii de funcţii trilobice de variabilă excentrică θ pentru s ∈ [− 1, +1]

Plot[Evaluate[Table[{t + ArcSin[0.1s Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 −0.2sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] **Aetα →** Plot[Evaluate[Table[{t + ArcTan[0.1s Cos[t]/(1 − 0.1sSin[t])]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

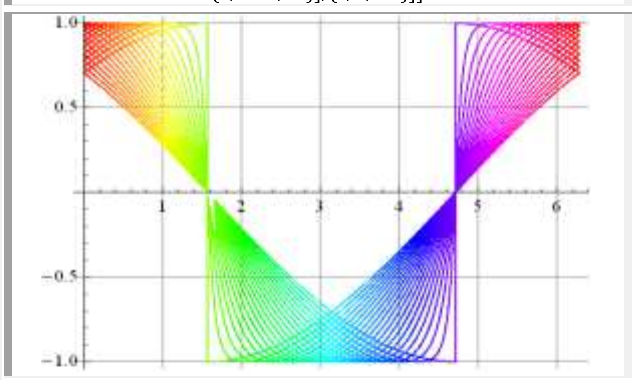
Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1s Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 −0.2sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] **Betα →** Plot[Evaluate[Table[{ArcTan[0.1s Cos[t]/(1 − 0.1sSin[t])]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}

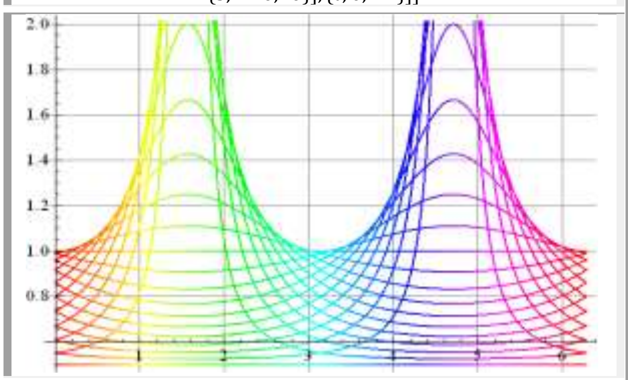




Plot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcSin[0.1s Sin[t − Pi/2]/ Sqrt[1 + (0.1s)^2 −0.2sCos[t − Pi/2]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]] **Cetα →** Plot[Evaluate[Table[{Cos[t + ArcTan[0.1s Sin[t − Pi/2]/(1 − 0.1sCos[t − Pi/2])]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

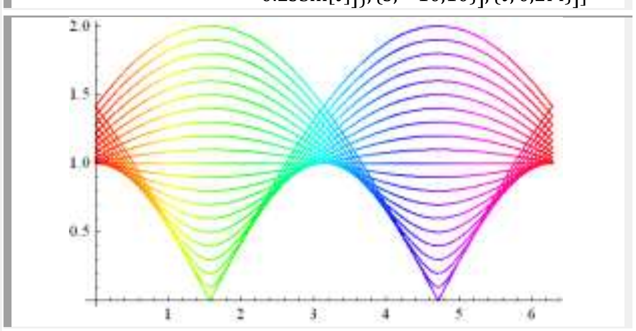
Plot[Evaluate[Table[{(1 − 0.1sSin[t])/(1 + (0.1s)^2 −0.2sSin[t])}, {s, −10,10} {t, 0,2Pi} **Cetα →** Plot[Evaluate[Table[{(1 − 0.1sCos[t − Pi/2])/ (1 + (0.1s)^2 −0.2sCos[t − Pi/2 {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

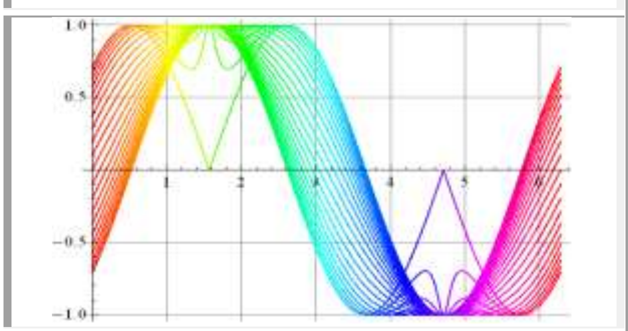




Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t − Pi/2]]}, {s, −10,10} {t, 0,2Pi}]]] **Retα →** Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sSin[t]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t + ArcSin[0.1s Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sSin[t]]]]}, {s, −10,10 {t, 0,2Pi}]] **Setα →** Plot[Evaluate[Table[{Sin[t + ArcTan[0.1s Cos[t]/(1 − 0.1sSin[t])]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]





BUPT

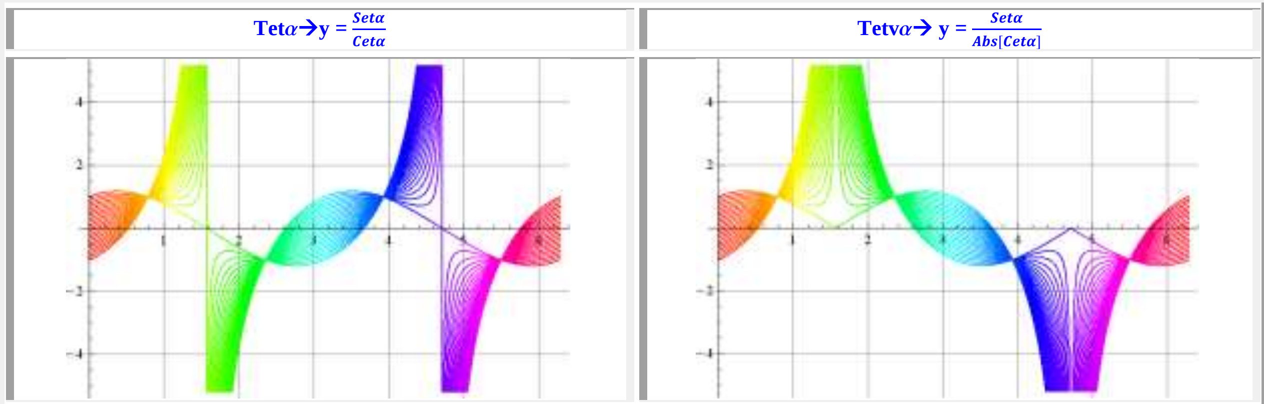


Fig.7 Câteva familii de funcţii trilobice de variabilă centrică α pentru s $\in [-1, +1]$

Se deduce, de aici, că pleiadei de **FSM-CE: aexθ, bexθ, cexθ, ctexθ, ctexvθ, dexθ, … rexθ, sexθ, texθ, texvθ,** ş.a, îi corespund **funcţiile supermatematice trilobice** (**FSM-T**): **aexθ, bexθ, cexθ, ctexθ, ctexvθ dexθ, … rexθ, sexθ, texθ, texvθ** ş.a (**Fig.6**), ca să ne referim doar la cele de variabilă excentrică **θ**, dar există şi cele de variabilă centrică α: **Aetα, Betα, Cetα, Ctetα, Ctetvα Detα, … Retθ, Setθ, Tetθ, Tetvθ** ş.a.(**Fig.7**).

3. VIBRAŢII LIBERE, NEAMORTIZATE, TRILOBICE

Derivatele **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) **cosinus** şi **sinus excentrice** (1) de variabilă excentrică θ sunt

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\theta}\, cex\boldsymbol{\theta} = -dex\boldsymbol{\theta}.sin\boldsymbol{\theta} = -\left[1 - \dfrac{s.\cos(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2.sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right].sin\boldsymbol{\theta} \\ \dfrac{d}{d\theta} sex\boldsymbol{\theta} = dex\boldsymbol{\theta}.cex\boldsymbol{\theta} = \left[1 - \dfrac{s.\cos(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2.sin^2(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)}}\right].cos\boldsymbol{\theta} \end{cases}$$

Derivatele funcţiilor trilobice (3) sunt

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\theta}\, cot\boldsymbol{\theta} = -det\boldsymbol{\theta}.sit\boldsymbol{\theta} = -\left(1 - \dfrac{s.\sin(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)^2}}\right)\sin[\boldsymbol{\theta} + \arcsin[s.\cos(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)]] \\ \dfrac{d}{d\theta} sit\boldsymbol{\theta} = det\boldsymbol{\theta}.cot\boldsymbol{\theta} = \left(1 - \dfrac{s.\mathrm{Sin}(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)^2}}\right)\cos[\boldsymbol{\theta} + \arcsin[s.\cos(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)]] \end{cases}$$

cu graficele din **figura 8**.

Înmulţind aceste derivate cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\Omega} = \dfrac{d\theta}{dt}$, considerată constantă şi egală cu unitatea, se vor obţine, cu aceleaşi ecuaţii (8), vitezele **trilobice C** şi, respectiv, S.

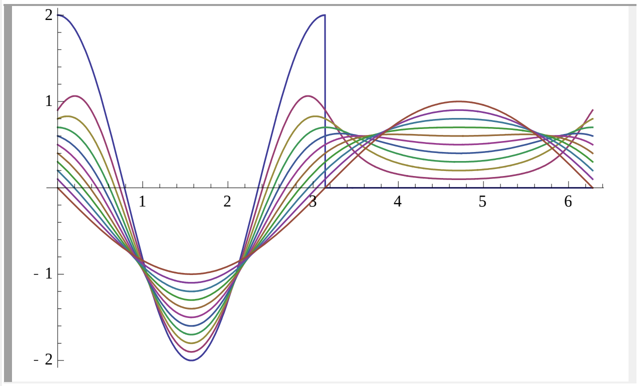
În stânga ◄**figurii 8** sunt prezentate derivatele funcţiilor **trilobe C**, iar în partea dreaptă► a trilobelor S.

Prin repetarea derivatelor se vor obţine derivatele de ordinul doi şi pentru $\boldsymbol{\Omega} = \dfrac{d\theta}{dt} = 1$ acceleraţiile trilobice:

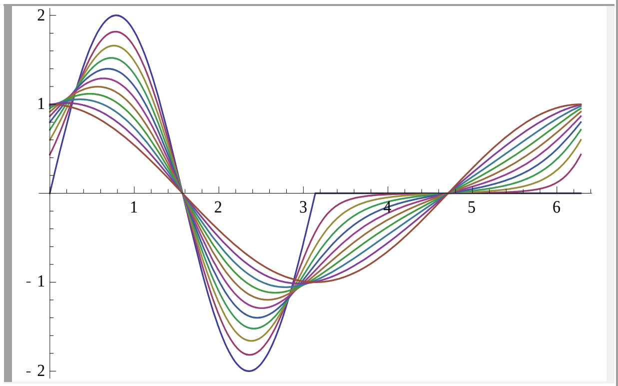
$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{d\theta^2}(cot\boldsymbol{\theta}) = \cos[\boldsymbol{\theta} + \arcsin[scos\boldsymbol{\theta}]](-1 + s.\sin\boldsymbol{\theta}(\frac{0.2}{\sqrt{1-s^2\cos\boldsymbol{\theta}^2}} - \frac{s.\sin\boldsymbol{\theta}}{1-s^2\cos\boldsymbol{\theta}^2})) + \\ \qquad \dfrac{(s-s^3)\cos[t]\sqrt{1-s^2\cos\boldsymbol{\theta}^2}\,\mathrm{Sin}[t+\mathrm{ArcSin}[scos\boldsymbol{\theta}]]}{(1.-s^2\cos\boldsymbol{\theta}^2)^2} \\ \dfrac{d^2}{d\theta^2}(sit\boldsymbol{\theta}) = \dfrac{s(-1+s^2)\cos\boldsymbol{\theta}\cos[\boldsymbol{\theta}+\arcsin[s.\cos\boldsymbol{\theta}]]}{(1-s^2\cos\boldsymbol{\theta}^2)^{3/2}} - \left(-1 + \dfrac{s.\sin\boldsymbol{\theta}}{\sqrt{1-s^2\cos\boldsymbol{\theta}^2}}\right)^2 \sin[\boldsymbol{\theta} + \arcsin[s.\cos\boldsymbol{\theta}]] \end{cases}$$

Graficele acestora sunt prezentate în **figura 9**, în stânga pentru **trilobele C** şi în dreapta pentru **trilobele S**.

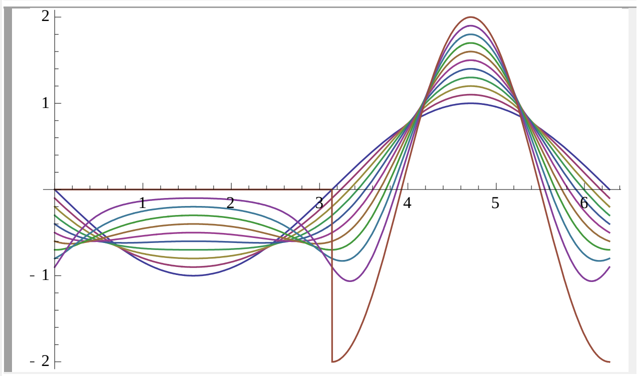
$\text{Plot[Evaluate[Table[}\{-(1-\frac{0.1s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1-0.01s^2\text{Cos}[t]^2}})$
$\text{Sin}[t+\text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]]\}, \{s,-10,0\}], \{t,0,2\text{Pi}\}]]$



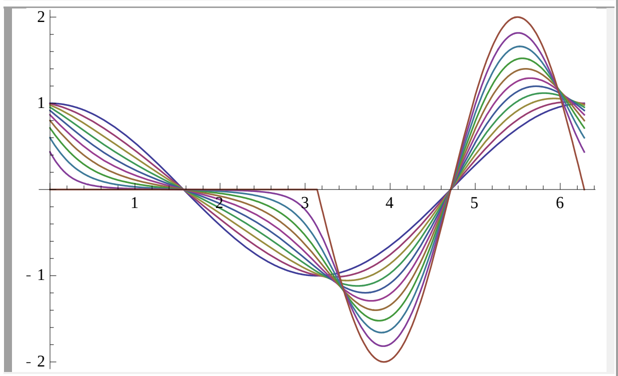
$\text{Plot[Evaluate[Table[}\{\text{Cos}[t+\text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]]$
$(1-\frac{0.1s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1-0.01s^2\text{Cos}[t]^2}})\}, \{s,-10,0\}], \{t,0,2\text{Pi}\}]]$



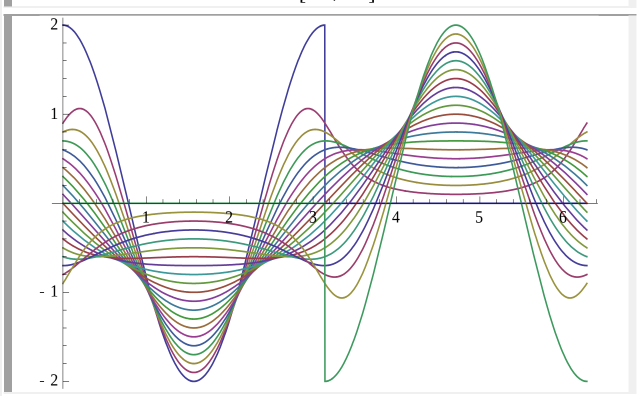
$\text{Plot[Evaluate[Table[}\{-(1-\frac{0.1s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1-0.01s^2\text{Cos}[t]^2}})$
$\text{Sin}[t+\text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]]\}, \{s,0,10\}], \{t,0,2\text{Pi}\}]]$



$\text{Plot[Evaluate[Table[}\{\text{Cos}[t+\text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]]$
$(1-\frac{0.1s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1-0.01s^2\text{Cos}[t]^2}})\}, \{s,0,10\}], \{t,0,2\text{Pi}\}]]$



$s \in [-1,+1]$



$s \in [-1,+1]$

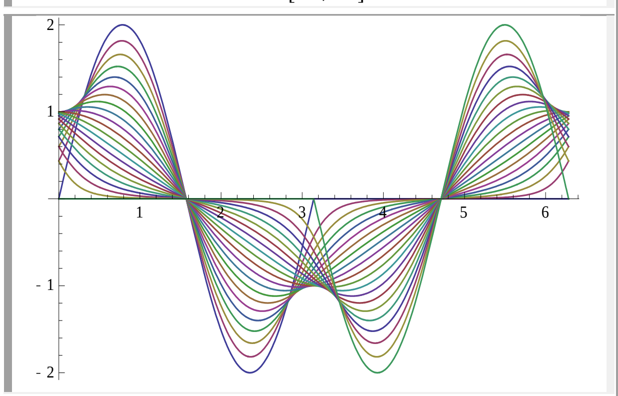


Fig.8 Graficele derivatelor funcţiilor trilobice C ◄ şi S ► de variabilă **excentrică θ şi ,totodată, vitezele pentru Ω** = $\frac{d\theta}{dt}$ **= 1 şi de excentru S(s ∈ [− 1, +1], ε = 0)**

BUPT

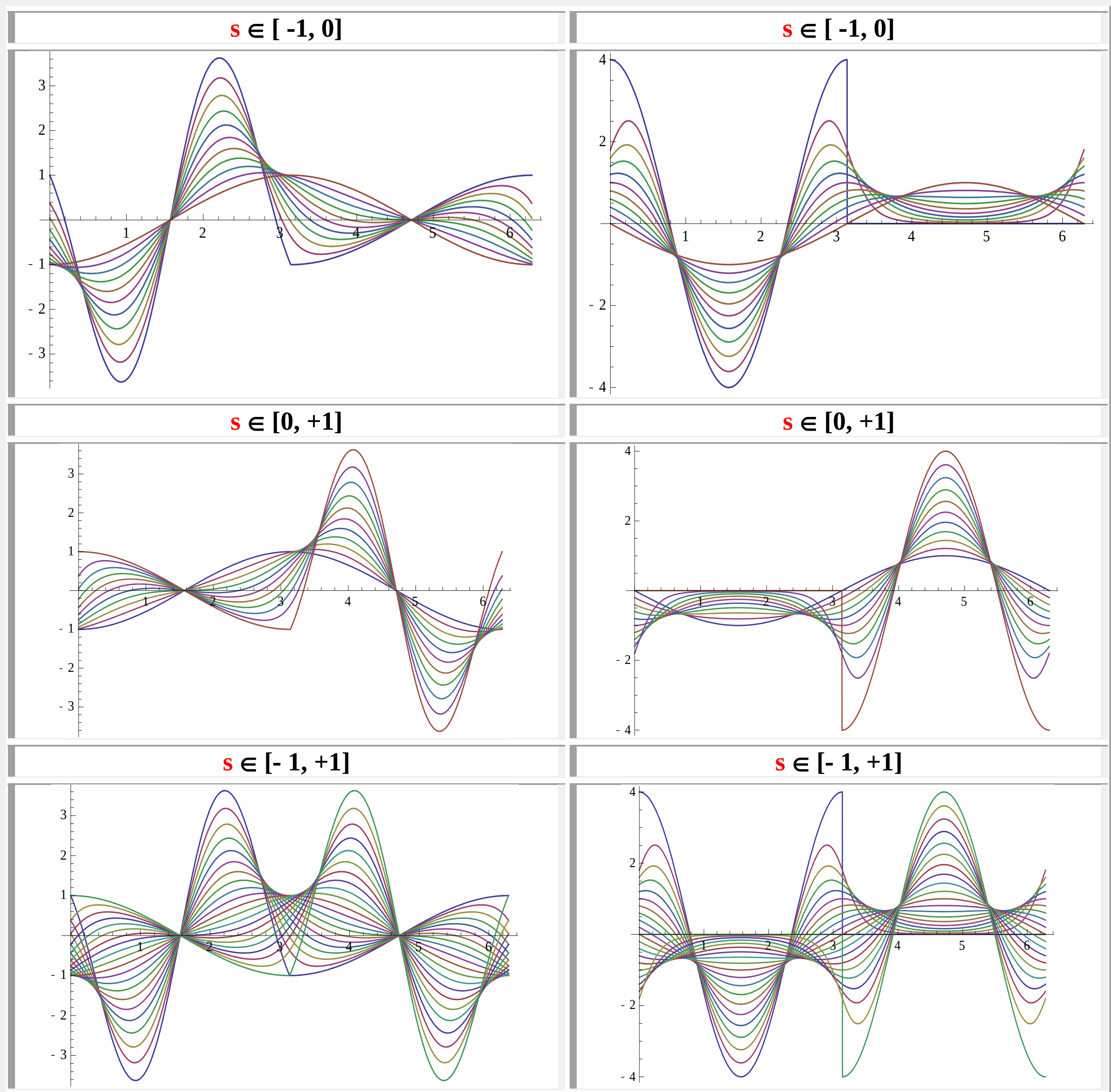


Fig.9 Graficele derivatelor de ordinul 2 ale funcţiilor trilobice C ◄ şi S ► de variabilă **excentrică θ şi, totodată, acceleraţiile pentru Ω** $= \frac{d\theta}{dt}$ **= 1 şi de excentru S(s ∈ [− 1, +1], ε = 0)**

Pentru o **masă** a unui **sistem vibrant trilobic** egală cu unitatea (**m = 1**), în lipsa altor forţe din sistem, forţa de acceleraţie se echilibrează în permanenţă cu forţa elastică, astfel că graficele forţelor de acceleraţie, cu semn schimbat, vor reprezenta forţele elastice în raport cu deplasarea / deformaţia elementului elastic x, ceea ce reprezintă tocmai **caracteristica elastică statică** (**CES**) a acestui **sistem mecanic trilobic**. Aceste caracteristici sunt prezentate in **figura 10,a** şi **10,b**, pentru **sistemele mecanice trilobice C** şi în **figura10,c** pentru **sistemele trilobice S.**

4 CARACTERISTICI ELASTICE STATICE (CES) ALE SISTEMELOR TRILOBICE

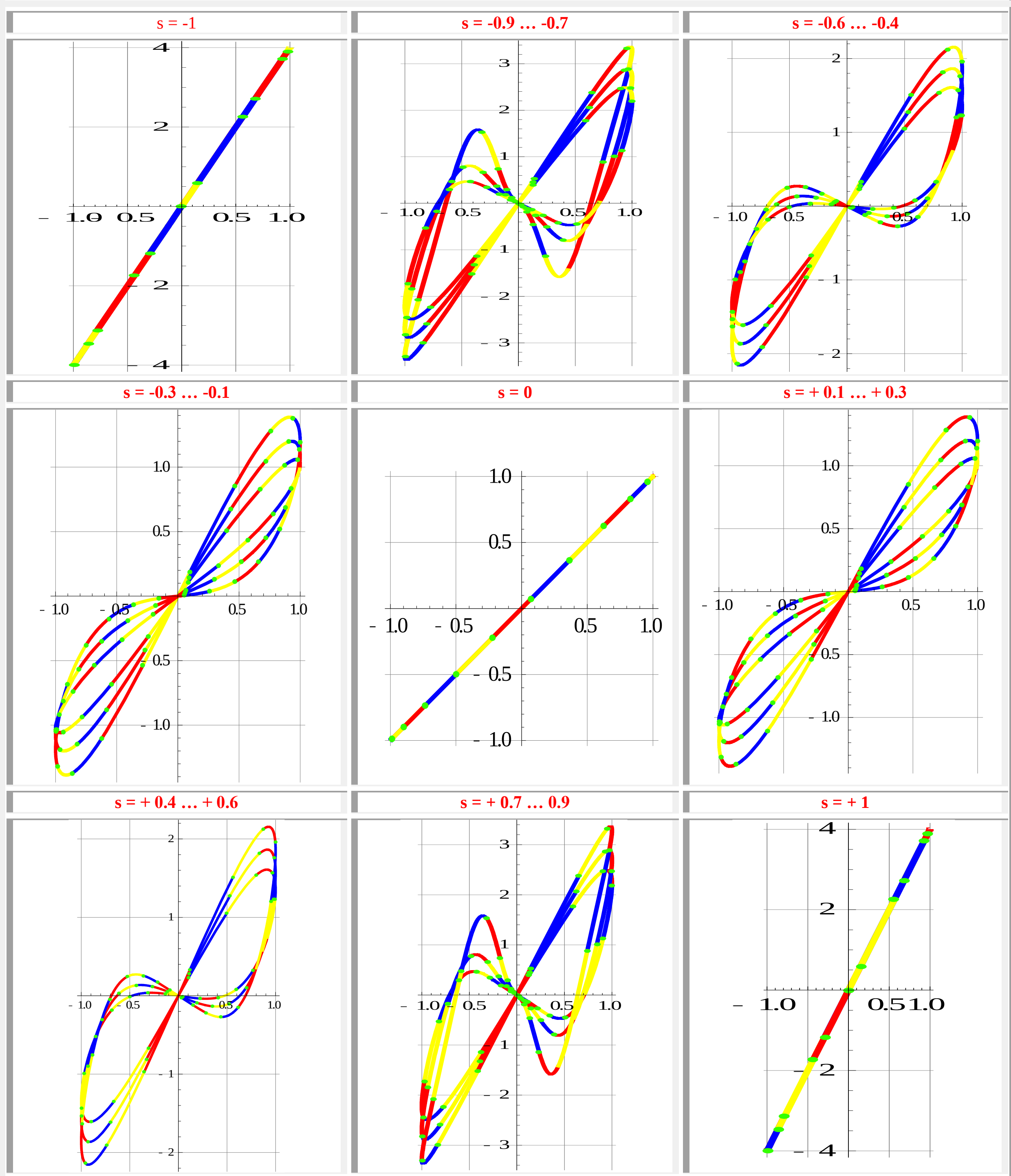


Fig.10, a Caracteristici elastice statice (**CES**) ale vibraţiilor **trilobe de C**

$$\text{ParametricPlot3D}\Big[\Big\{\text{Cos}\big[t+\text{ArcSin}[s\text{Cos}[t]]\big], -\Big(\text{Cos}\big[t+\text{ArcSin}[s\text{Cos}[t]]\big]\Big(1-\frac{s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}}\Big)\Big(-1+\frac{s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}}\Big) + \Big(\frac{s\text{Cos}[t]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}}-\frac{s^3\text{Cos}[t]\text{Sin}[t]^2}{(1-s^2\text{Cos}[t]^2)^{3/2}}\Big)\text{Sin}\big[t+\text{ArcSin}[s\text{Cos}[t]]\big]\Big), s\Big\}, \{s,-1,1\}, \{t,0,2\text{Pi}\}\Big]$$

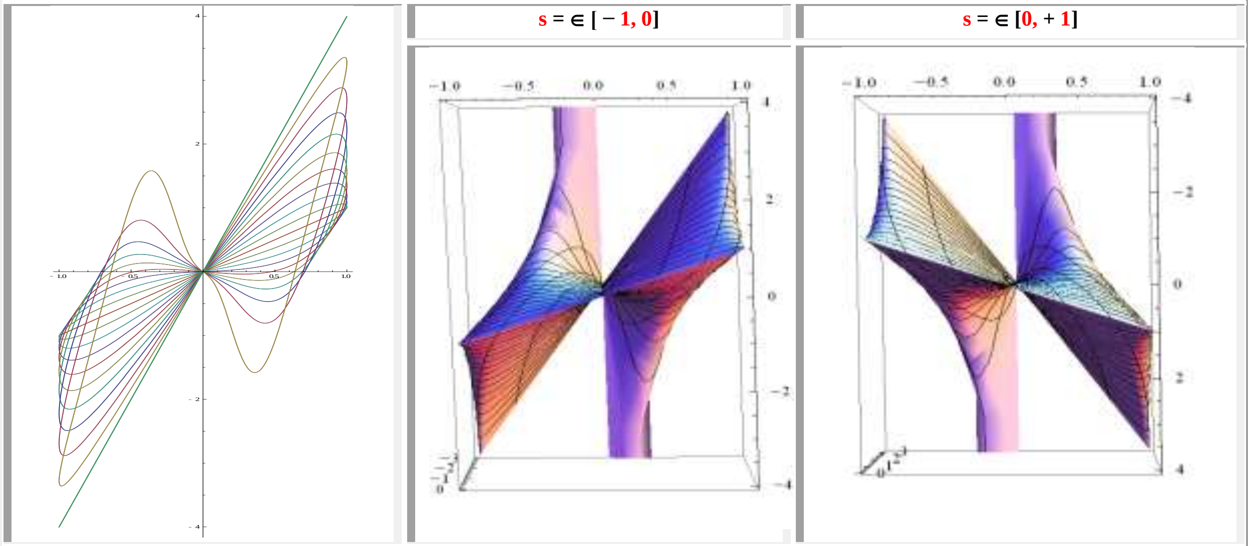
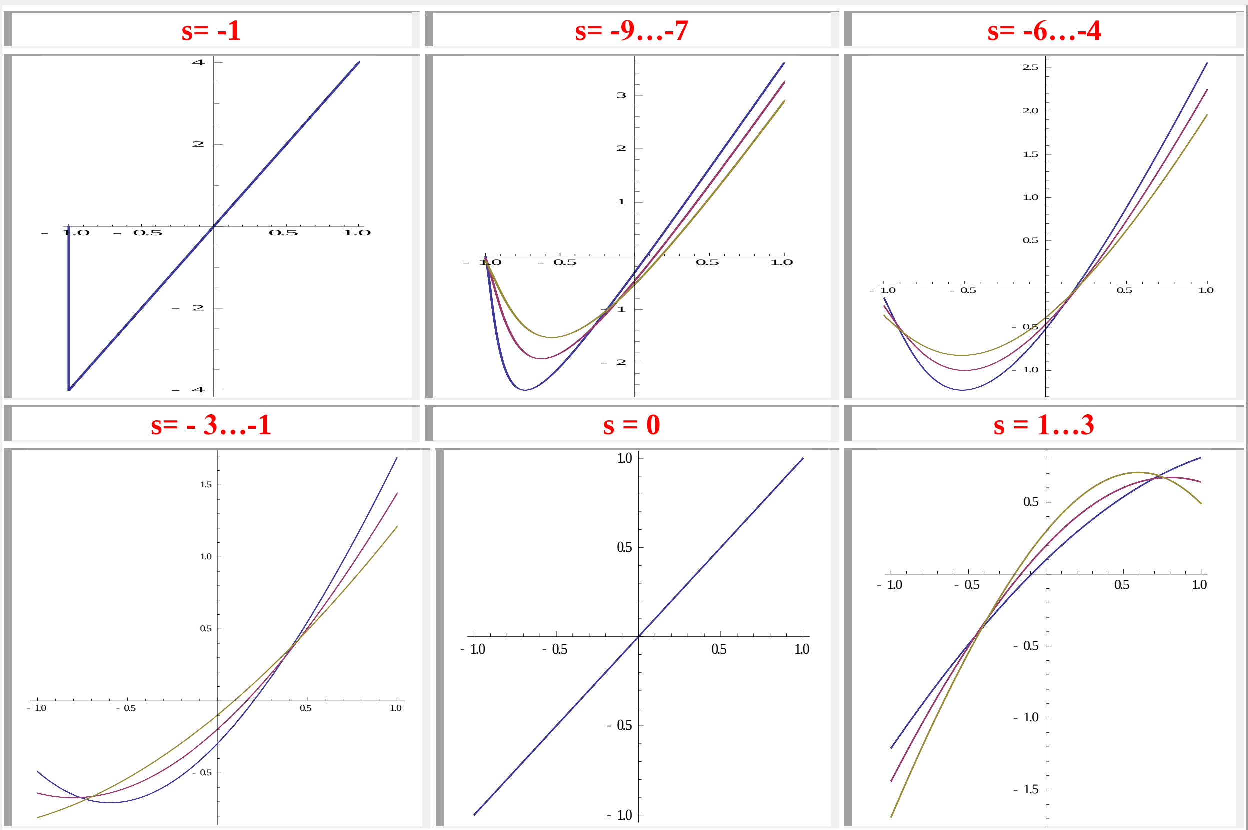
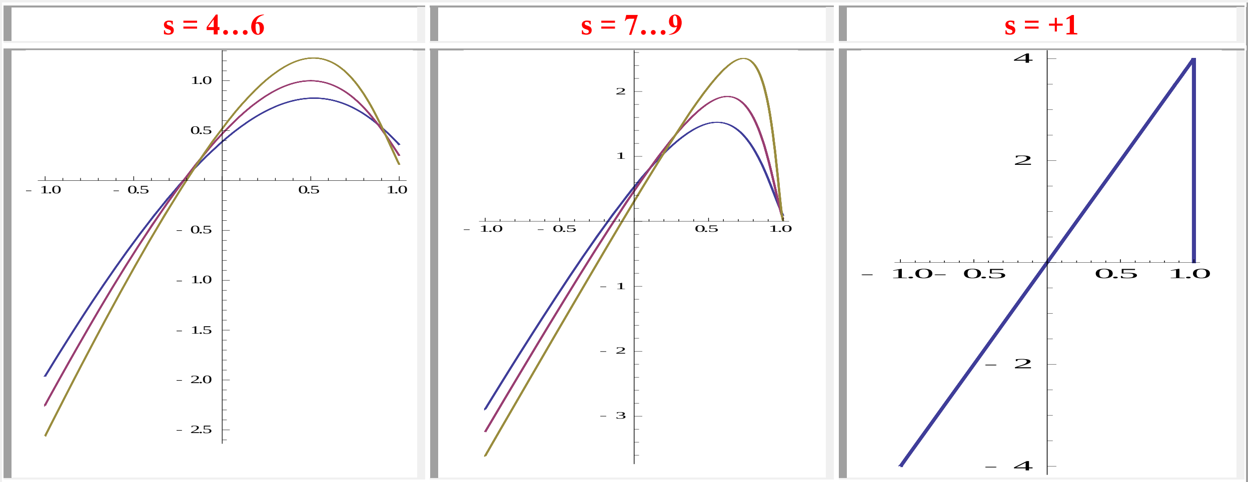


Fig. 10,b Caracteristici elastice statice (**CES**) ale vibraţilor **trilobe de C**



BUPT



$$\text{ParametricPlot[Evaluate[Table[\{Sin}[t+\text{ArcSin}[s\text{Cos}[t]]], -(\text{Cos}[t+\text{ArcSin}[s\text{Cos}[t]]](-\frac{s\text{Cos}[t]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}}+\frac{s^3\text{Cos}[t]\text{Sin}[t]^2}{(1-s^2\text{Cos}[t]^2)^{3/2}}) - (1-\frac{s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1-s^2\text{Cos}[t]^2}})^2\text{Sin}[t+\text{ArcSin}[s\text{Cos}[t]]])\}, \{s,-1,+1\}], \{t, 0, 2\text{Pi}\}]]$$

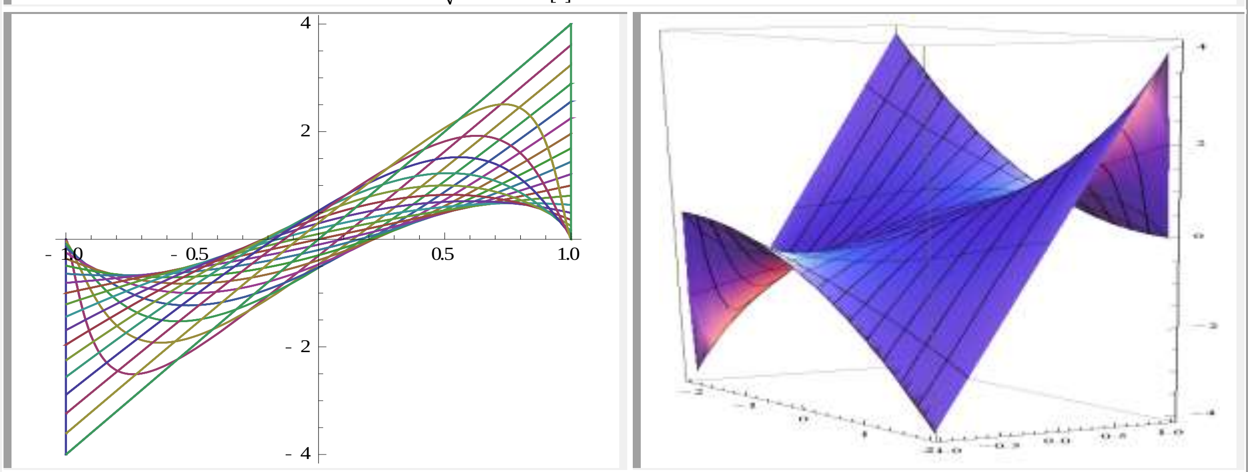


Fig.10,c Caracteristici elastice statice (**CES**) ale vibraţilor **trilobe de S**

4. ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ A SISTEMELOR VIBRANTE TRILOBICE

Fie funcţiile x, y : R → [-1,+1]

(11) $$\begin{cases} x(t) = \mathbf{cot}[\Omega t, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] \\ y(t) = \boldsymbol{sex}[\Omega t, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] \end{cases}$$

de acelaşi excentru $\boldsymbol{S}(s,\varepsilon)$în care **s** este raza polară şi **ε** –unghiul polar, într-un cerc de rază R = 1→ CU(O,R).

Derivatele acestora pentru $\boldsymbol{\theta}$ = $\boldsymbol{\Omega}$.t şi $\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{1}$ sunt :

(12) $$\begin{cases} x'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{co\ t}[\Omega t, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\boldsymbol{\theta}}\mathbf{cot}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] = \Omega.\frac{d}{d\boldsymbol{\theta}}\mathbf{cot}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] = -\Omega.\boldsymbol{det\theta}.\boldsymbol{sit\theta} \\ y'(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{sex}[\Omega t, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\boldsymbol{sex}[\theta, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] = \Omega.\frac{d}{d\boldsymbol{\theta}}\mathbf{sex}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] = +\Omega.dex\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{sex\theta} \end{cases}$$

şi explicit:

$$(13)\quad \begin{cases} x'(t) = \Omega.\left(1 + \dfrac{s.\sin[t]}{\sqrt{1-s^2\mathrm{Cos}[t]^2}}\right)\cos[\boldsymbol{\theta} + \arcsin(s.cos\boldsymbol{\theta})] \\ y'(t) = +\,\Omega.\left(1 - \dfrac{s.\cos\boldsymbol{\theta}}{\sqrt{1-s^2.\ sin^2\boldsymbol{\theta}}}\right)\sin[\boldsymbol{\theta} - \arcsin(s.sin\boldsymbol{\theta})] \end{cases}$$

Matricea lor **Wronskiană** este :

$$(14)\quad \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{cot}[\Omega t, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] & \boldsymbol{sex}[\Omega t, \boldsymbol{S}(s,\varepsilon)] \\ -\Omega.\,\boldsymbol{det\theta}.\,\boldsymbol{sit\theta} & +\,\Omega.\,dex\boldsymbol{\theta}.\,\boldsymbol{sex\theta} \end{vmatrix} = \Omega[\mathbf{cot\theta}.\,dex\boldsymbol{\theta}.\,\boldsymbol{sex\theta} - \boldsymbol{sex\theta}.\,\boldsymbol{det\theta}.\,\boldsymbol{sit\theta}\,].$$

$$\mathrm{Plot}[\mathrm{Evaluate}[\mathrm{Table}[\{\mathrm{Cos}[t - \mathrm{ArcSin}[0.1s\mathrm{Sin}[t - \mathrm{Pi}/2]]] * \mathrm{Cos}[t + \mathrm{ArcSin}[0.1s\mathrm{Cos}[t]]](1 - \frac{0.1s\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{1 - 0.01s^2\mathrm{Cos}[t]^2}}) + \mathrm{Sin}[t - \mathrm{ArcSin}[0.1s\mathrm{Sin}[t - \mathrm{Pi}/2]]] * (1 - \frac{0.1s\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{1 - 0.01s^2\mathrm{Cos}[t]^2}})\mathrm{Sin}[t + \mathrm{ArcSin}[0.1s\mathrm{Cos}[t]]]\}, \{s - 10,10\}], \{t, 0,2\mathrm{Pi}\}]]$$

s ∈ [-1, 0]　　　　s ∈ [0, +1]

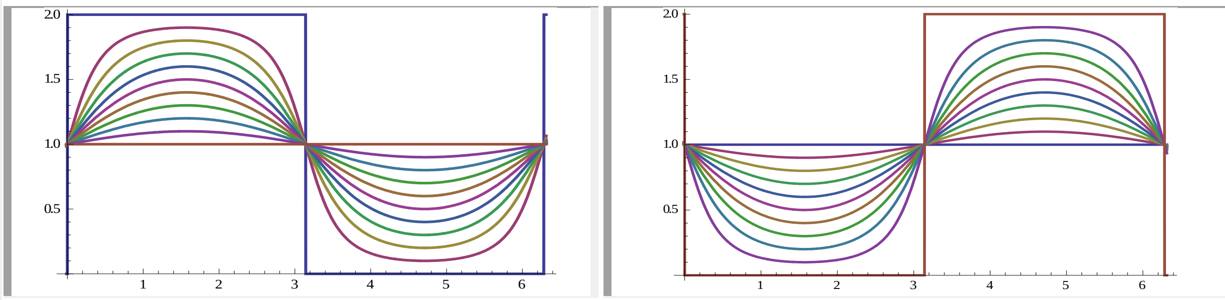


Fig.11 Graficele cu valorile matricii **Wronskiene** pentru vibraţii **trilobice**

5. BIBLIOGRAFIE

1	Şelariu Mircea Eugen	**STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ALE UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV CU AJUTORUL FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE**	Com. I Conf. Naţ. Vibr.în C.M. Timişoara,1978, pag. 95...100
2	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE cex ŞI sex - SOLUŢIILE UNOR SISTEME MECANICE NELINIARE**	Com. A VII-a Conf.Naţ. V.C.M., Timişoara,1993, pag. 275…284.
3	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ CA SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE**	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Managerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 557…572
4	Şelariu Mircea Eugen	**QUADRILOBIC VIBRATION YSTEMS**	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
5	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAENTE**	Editura Politehnica, Timişoara, 2013
6	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA**	Editura MatrixRom,Buc. 2016

Motto"*Obiectul Matematicii este atât de serios, încât este util să nu pierdem ocazia pentru a-l face puţin mai distractiv*"
Blaise Pascal

CAPITOLUL XXII

CERCURILE LUI APOLLONIUS din Perga

1. INTRODUCERE.
DESPRE IMPORTANŢA INTERNETULUI

Extras de pe Internet:" ***Radko Kolev**, un tânăr de 19 ani din Bulgaria, a rezolvat o problemă de geometrie veche de 2.000 de ani (problema lui Apoloniu), printr-o metodă nouă şi unică, informează Novinite."*

Problema lui Apollonius din Perga (pentru că există şi **Apollonius din Tyana**, discipol a lui **Pitagora** şi încă alţii) consta în a construi cercuri tangente la alte trei cercuri date într-un plan.

Ultima soluţie cunoscută la această problemă matematică datează din secolul al XIX-lea şi îi aparţine lui **Joseph Gergonne**, matematician şi logician francez.

Apollonius din Perga (aprox. 262 I.Hr. - aprox. 190 I.Hr.) a formulat şi rezolvat această problemă faimoasă în lucrarea "**Tangente**" prin inversiunea a două cercuri.

Soluţia lui **Radko Kolev** este **a cincea rezolvare** **despre care se ştie** a acestei probleme.Cei ce ştiu rezolvarea, n-o dau aşa de uşor în vileag. Cu toate strădaniile noastre, ea, rezolvarea, n-a fost găsită pe motoarele de căutare. Cu mare greutate au fost găsite lapidar şi unele din celelalte patru soluţii. Pe motorul de căutare **GOOGLE**, cu specificaţia "Problema lui Apollonius din Perga". Dacă se caută, în schimb, "Apollonius' Problem" atunci încep să apară, fără discriminare, şi soluţiile (v. [10], [11], [12], ş.m.a).

S-a subliniat "***despre care se ştie***" deoarece sunt şi alte rezolări "***despre care nu se ştie***", deşi ***au fost susţinute în Conferinţe şi publicate în Lucrările lor*** [2], [3]. Dar nu exista pe atunci **INTERNETUL**!

Conferinţele fiind din domeniul tehnic, ingineresc şi tehnologic, lucrări cu titlul " **NOI SOLUŢII, GEOMETRICĂ ŞI ANALITICĂ, A PROBLEMEI LUI APOLLONIUS DIN PERGA"** evident că n-ar fi fost acceptate. De aceea, **cercurile date** au fost înlocuite cu **patru roţi dinţate una conducătoare şi trei conduse**, cele 3 pe arborii port-sculă, sau de ieşire, şi una centrală pe arborele conducător, de intrare, a unui cap multiax de burghiat / (găurit cu burghiul), iar mărimea şi poziţia **cercului căutat** / **soluţie** a fost reprezentată de **roata dinţată intermediară**, de pe arborele intermediar, care distribuie mişcarea de la roata conducătoare la cele 3 roţi conduse, de pe arborii port-sculă. De aceea, cele două lucrări susţinute şi publicate [2]/[3] au fost intitulate **"DETERMINAREA GRAFICĂ / ANALITICĂ A MĂRIMII ŞI A POZIŢIEI ROŢII INTERMEDIARE LA PROIECTAREA CAPETELOR MULTIAXE".**

Această determinare grafică, a poziţiei - centrului $C_0(x_0,y_0)$ - şi a mărimii (razei / diametrului de divizare R_d / D_d) a roţii intermediare, a fost şi o dorinţă expres exprimată a Filialei din Timişoare a Institutului **ICSIT "Titan"** Bucureşti, pentru a nu mai perfora / ciurui hârtia de calc cu acul compasului, până la găsirea, prin încercări repetate, a acestor mărimi. De proiectare asistată de calculator, CAD-CAM-CAE, la acea vreme, nu exista. **SM**-CAD-CAM, nici atât **SM → supermatematica**.

În anii publicării celor două lucrări în discuţie (1978/1981) nici **INTERNETUL** nu era inventat !

În anii apariţiei celui mai performant calculator electronic românesc "**CORAL**" a fost rulat primul program de proiectare pe calculator a capetelor multiaxe, program realizat de specialistii Institutului de Tehnică de Calcul (ITC) din Bucureşti, după o metodă de proiectare concepută şi utilizată de autorul prezentei lucrări şi solicitată de institut. In final, programul elabora desenul de ansamblu, cu traseul secţiunilor indicat de proiectant, precum şi desenele reperelor alese din cele standardizate / tipizate - [6]-.

Aţi auzit de aceste realizări ? Răspunsul este evident: **NU** ! Dar dacă ar fi existat încă de atunci INTERNETUL …. **Apollonius** a rezolvat problema prin inversiunea a **două** din cele **trei cercuri date**, noi prin inversarea **unuia singur**. Dar dacă şi **Radko Colev** a procedat la fel ? Cum putem afla ?

2. PRELIMINARII

(Extras din [1], [7] Mircea Eugen Şelariu "**SUPERMATEMATICA**.Fundamente", Ed."POLITEHNICA", Timişoara, 2007, Cap.4.§ 4.2, pag.125 … 138)

2.1 TEOREMA LUI APOLLONIUS din Perga

Locul geometric al vârfurilor W_i ale tuturor triunghiurilor $E\,E'W_i$ (**Fig. 1**) cu latura $\overline{EE'}$ dată**,** având celelalte două laturi într-o proporţie constantă $EW_i : E'W_i = \lambda$, este **cercul lui Thales** de diametru **AA'**.

Punctele **A** şi **A'** împart segmentul **EE'** în raportul λ, interior şi exterior. Sau, mai simplu, dacă două puncte (**E** şi **E'**) sunt inverse în raport cu un cerc, distanţele lor la un punct de pe cerc (W_i) sunt într-un raport constant (**Fig.1**). Pentru $\theta = \theta' = \pi$, $EW_1 = R + e$ şi $E'W_1 = R + e'$.

<u>În această lucrare se va determina expresia şi valoarea acestei constante</u>, iar **teorema lui Apollonius** se va putea denumi şi teorema **rexθ** sau **Rexα**.

Se ştie, din domeniul **supermatematicii** (**SM**), că distanţa de la un punct <u>oarecare</u> din plan, denumit **excentru E(e,ε),** la un punct oarecare **W** de pe / arţinând cercul/ui unitate **CU** [**O(0,0), 1**] este, <u>**prin definiţie**</u>, **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM-CE**) R.**rexθ**, de variabilă excentrică **θ**, pentru modulele aceloraşi vectori de poziţie $\vec{r}$ cât şi $\vec{r'}$ din **E**, al unui punct **W** de pe **CU**.

Rezultă că raportul λ este raportul **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) radial excentric – **R. rex (θ, s) -** de excentricitate liniară numerică **s = e/R** şi de variabilă excentrică **θ** şi a celei de excentricitate numerică **s'** şi de variabila **θ' → R.rex (θ', s')** şi că, este acelaşi cu raportul aceloraşi **FSM-CE**, dar de aceeaşi **variabilă centrică** α_1, adică **R.** Rex (α_1, **s**) şi **R. Rex** (α_1, **s'**)**,** deoarece W_i este acelaşi (comun) şi α_1 va fi acelaşi pentru cele două funcţii.

2.2 RAPOARTE ARMONICE ŞI RAPOARTE ANARMONICE

Raportul anarmonic sau **biraportul** este o noţiune fundamentală a geometriei proiective şi se referă la modul cum sunt situate patru puncte coliniare, mai precis, modul în care două din acestea împart segmentul determinat de celelalte două.

Raportul anarmonic, numit şi **biraport** (pentru patru <u>puncte</u> A, B, C, D <u>coliniare</u>) este câtul <u>rapoartelor</u> în care punctele **C** şi **D** împart <u>segmentul</u> **[AB],** sau, cu notaţiile din **figura 1**, este câtul rapoartelor în care punctele denumite în **SM excentre S** şi **S'** împart segmentul **A'A**, care este diametrul unui cerc de rază **R**:

Fiind date punctele coliniare **A, B, C, D,** se notează cu **(A, B; C, D)** şi se numeşte **biraport** sau **raport anarmonic** numărul:

(A, B; C, D) = $\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}}$ şi, cu notaţiile din **figura 1, (A'A; EE')** = $\frac{\overrightarrow{A'E}.\ \overrightarrow{A'E'}}{\overrightarrow{AE}\ .\ \overrightarrow{AE'}} = \frac{(R+e)(R+\bar{e}')}{(e-R).(e'-R)}$ < 0, deoarece, în cazul din figură, **e < R →(e - R) < 0,** restul parantezelor având valori pozitive.

Segmentele fiind orientate, <u>ordinea</u> punctelor **A, B, C, D** <u>este esenţială</u> în definirea raportului anarmonic **(A,B; C,D)**. Cu patru litere **A, B, C, D** se pot face 4! = 24 <u>permutări</u>, ceea ce conduce la 24 de rapoarte anarmonice, din care, însă, numai şase au valori distincte.

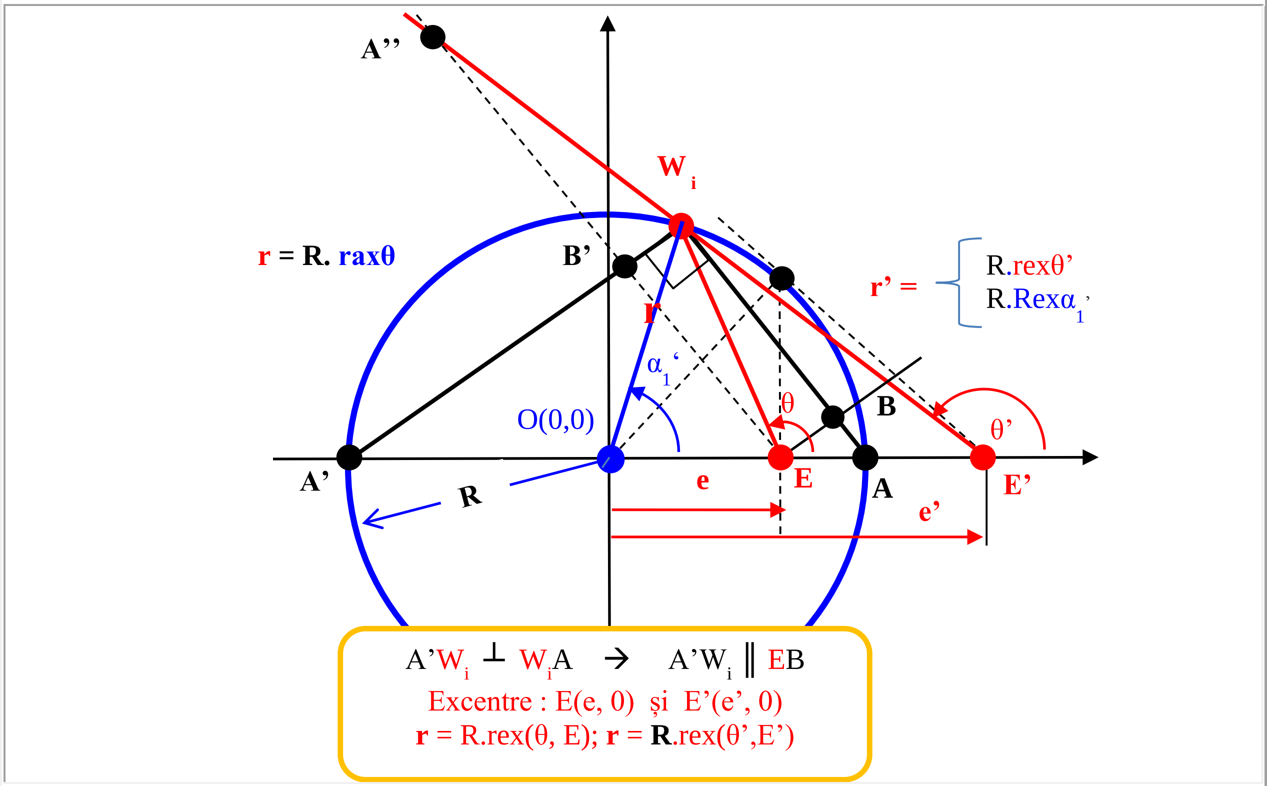


Fig. 1 Schiţă explicativă pentru **teorema lui Apollonius → teorema REX**

Dacă **(A, B ; C, D)** = k cele şase valori sunt: $k; \frac{1}{k}; 1-k; \frac{1}{1-k}; \frac{k}{k-1}; \frac{k-1}{k}$.

Astfel, dacă punctele au coordonatele a, b, c, d, atunci **biraportul** are valoarea:

(A, B ; C, D) $= \frac{(a-c).(b-d)}{(a-d).(b-c)}$

În consecinţă, rezultă că ***raportul a două funcţii radiale excentrice de excentricităţi diferite*** **(E şi E')** ***este acelaşi şi egal cu*** **raportul anarmonic** sau cu **biraportul (EE' ; AA')**.

Raportul **interior**, notat (**SS'**A), în care punctul **A(R = 1,0)** împarte segmentul **EE'** este

(1) (**EE'**A) $= \lambda_i = \frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{E'A}} = \frac{1-e}{1-e'} < 0$

şi raportul **exterior**, notat (**ES'A'**), în care punctul **A'(- R= -1, 0)** împarte segmentul **EE'** este

(2) (**EE'A'**) $= \lambda_e = \frac{\overrightarrow{EA'}}{\overrightarrow{E'A'}} = \frac{-(1+e)}{-(1+e')} > 0$

iar **biraportul**, sau raportul **anarmonic**, este

(3) (**EE'AA'**) $= \lambda = \lambda_i / \lambda_e = \frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{E'A}} \frac{\overrightarrow{EA'}}{\overrightarrow{E'A'}} = \frac{(1-e)}{-(e'-1)} \frac{-(1+e)}{-(1+e')} = \frac{rex_1(0,E)}{rex_2(\pi,\ E')} \frac{rex_2(0,\ E)}{rex_1(\pi,E')} < 0$,

deoarece doar $rex_2(0,\ S) < 0$, restul **FSM-CE** radial excentrice fiind pozitive.

Sau, λ este raportul dintre **maximul** $\mathbf{rex_{1,2}(\pi, S)}$ şi **minimul** $\mathbf{rex_{1,2}(0, S)}$ funcţiilor radial excentrice de variabila **θ** sau **α** şi de cele două excentricităţi numerice **s = e/R** < **1** şi **s'=e'/R** > **1**, ţinând cont de faptul că, pentru o excentricitate unghiulară **ε** = 0, **maximele** sunt date de prima determinare, de indice **1** şi minimele de cea de a doua determinare, de indice **2**, ale acestor funcţii, dacă excentrele **S** şi **S'** sunt situate pe axa **x** > **0**, ca în **figura 1**.

Deoarece, cele două determinări ale funcţiei **Rex**$\alpha_{1,2}$ de **s' > 1** sunt ambele pozitive (**1**→ α_1 şi **2** → α_2) şi, respectiv, ($\alpha_3 = \alpha_1 + 2\pi$, $\alpha_4 = \alpha_2 + 2\pi$, care sunt r_1 şi r_2 din **Figura 2** pentru $\theta' = \theta + \pi$) sunt ambele negative, iar cele două determinări pentru **s** < 1 sunt de semne contrare, rezultă că **raportul anarmonic** este negativ ($\lambda < 0$).

Se poate scrie

(4) $$\lambda = (EE' ; AA') = \frac{r_1(0)}{r_2(0)} \bullet \frac{r'_1(0)}{r'_2(0)} = \frac{r_M}{r_m} \bullet \frac{r'_M}{r'_{rm}} < 0$$

cu notaţiile din figură şi cu indicii inferiori simbolizând **M** ⇒ **maximum** şi **m** ⇒ **minimum FSM-CE** radiale excentrice şi, pentru **s'** > **1** sau **e** > **R**, **r'(π)** de indici 1 şi 2 au aceleaşi valori, dar de semne contrare, cu determinările 3 şi 4 ale funcţiei **r'**(0), astfel că, dacă în (2) o singura funcţie este negativă, în (4) trei din cele patru funcţii sunt negative, semnul **(bi)raportului** ramânând negativ.

Dacă cele patru puncte au biraportul $\lambda = 1$, atunci ele sunt **conjugate armonic** şi cele patru puncte coliniare **E, E'**, **A, A'** sunt într-un **raport armonic.**

Dacă excentricităţiile sunt inverse, una alteia, adică **s' = 1 / s**, atunci, din (1) rezultă raportul $\lambda_1 = s$ şi din (4) $\lambda_2 = -s$, astfel că raportul $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2 = -1$ şi cele patru puncte sunt **conjugate armonic**.

Se zice că **EE'** este **medie armonica** a lui **EA** şi **EA'**.

Dacă raportul este **armonic**, atunci unghiul interior şi cel exterior din $W_1 \equiv W_i$ al triunghiului EW_iE' sunt injumătăţite de dreptele AW_i şi, respectiv, $A'W_i$.

Se mai observă că, dacă punctele $W_i \equiv W_1 \equiv W'_1$ sunt identice, în consecinţă, $\alpha_1 = \alpha'_1$,şi $\theta_1 \neq \theta'_1$.

Nu acelaşi lucru se întâmplă cu celalalte puncte, deoarece $W_2 \neq W'_2$. De aceea, relaţiile anterioare sunt valabile numai în punctul $W_i \equiv W_1 \equiv W'_1$.

Dacă excentrele sunt simetrice faţă de originea **O**, atunci **s** = — s' şi rezultă

$\lambda = (1 - s)^2 : (1 + s)^2 = (R - e)^2 : (R + e)^2$

În final, poate fi enunţată urmă toarea teoremă:

2.3. TEOREMA REX

Raportul primelor determinari ale **FSM—CE** radial excentrice de aceeaşi variabilă (argument) centrică ($\alpha_1 = \alpha'_1$) şi de excentricităţi diferite **s** şi **s'** (sau **e** şi **e'** pe acelaşi cerc de rază **R**) este egal cu **raportul anarmonic** (biraportul) λ, în care segmentul **SS'** sau **EE'** este împărţit de punctele **A** şi **A'** (pentru $\varepsilon = 0$) :

(5) $$\lambda = \frac{\operatorname{Re}x(\alpha_1, s)}{\operatorname{Re}x(\alpha_1, s')} = \frac{(1-s)(1+s')}{(1+s)(1-s')} = \frac{rex_1(0,s) \bullet rex_1(\pi,s')}{rex_2(0,s) \bullet rex_2(\pi,s')} = \frac{rex_1(0,s) \bullet rex_3(0,s')}{rex_2(0,s) \bullet rex_4(0,s')}.$$

Ecuaţia cercului, faţă de un pol **E** [Lexicon Tehnic Român nr. 4, pag. 190], cu notaţiile din **figura 2**, în care polul are coordonatele **E(e, ε)** şi cercul **C(R,O)** are raza **R** şi originea în **O**(0,0), este

(6) $$r^2 - 2.r.e.\cos(\theta - \varepsilon) + e^2 - R^2 = 0$$, sau

(7) $$\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R} \bullet \frac{e}{R}\right).\cos(\theta - \varepsilon) + \left(\frac{e}{R}\right)^2 - 1 = 0$$

o ecuaţie algebrică de gradul II, în care, notând **s = e / R** şi $rex_{1,2}(\theta) = r_{1,2} // R$ rezultă rădacinile / soluţiile ecuaţiei

(8) $$r_{1,2} = rex_{1,2}(\theta, s) = -s\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{s^2.\cos^2(\theta-\varepsilon) - (s^2 - 1)}$$ sau

(9) $$r_{1,2} = rex_{1,2}(\theta, s) = -s\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2.\sin^2(\theta - \varepsilon)}$$

şi se recunoaşte imediat expresia analitică invariantă a **FSM—CE rex** $_{1,2}\,\theta$.

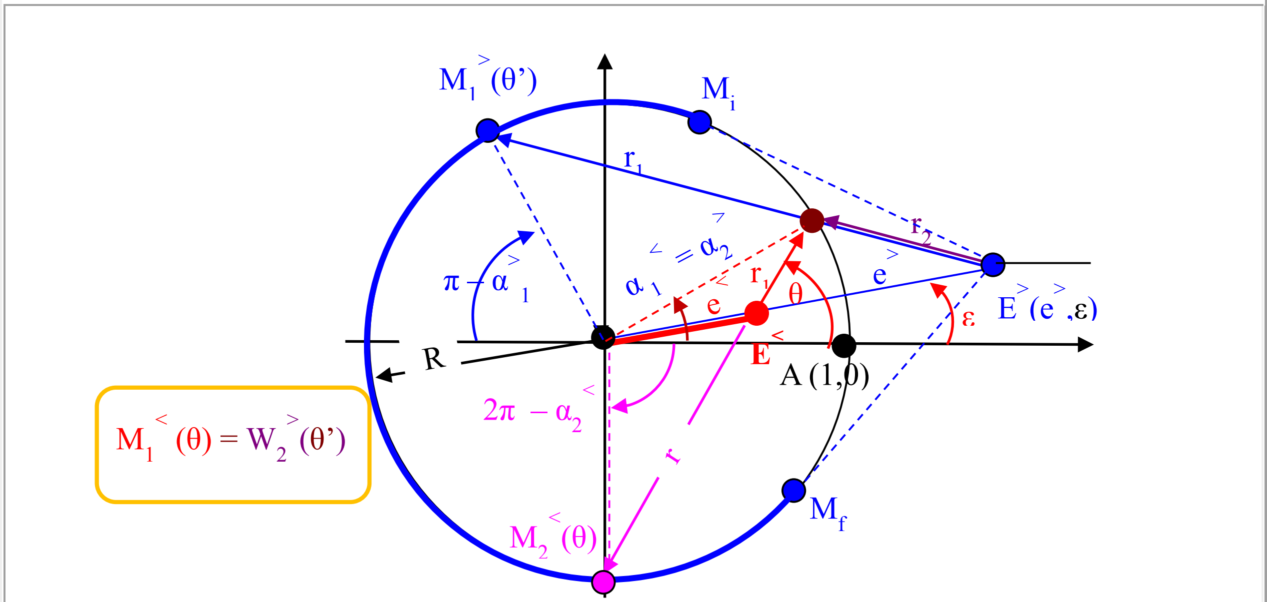


Fig. 2 Ecuaţia cercului faţă de polul **E** exprimată cu **FSM-CE rex θ** sau **Rex α**

Întotdeauna, semnul plus (+) este pentru prima determinare, ***principală***, de indice **1**, iar minus (-) pentru a doua determinare, ***secundară,*** de indice **2**.

Se deduce că ambele determinări ale funcţiei **rex$_{1,2}$θ** descriu cercul **C (O,R)** şi că, indiferent de poziţia polului, în acest caz al excentrului **E$^<$(e$^<$, θ)** sau **E$^>$(e$^>$, θ')**, **FSM-CE *rexθ descriu cercul.***

Observaţia este deosebit de importantă pentru ***programarea roboţilor industriali*** de sudare, în cazul sudării unui cordon circular, al cărui centru **O** se află la distanţa **e** de centrul de rotaţie **E** al braţului robotului pe direcţia **ε**. În plus, pentru **e** > **R**, se ştie precis punctul **M$_i$** de început / iniţial θ_i în care începe operaţia şi punctul final **θ$_f$** în care încetează programarea cu **rex$_1$θ**, care sunt punctele de tangenţa ale tangentelor din **E** la cercul **C** şi din care începe programarea cu funcţia **rex$_2$θ**, parcurgând intervalul **θ$_i$ …θ$_f$** în acelaşi sens, sau revenind în **M$_i$** şi parcurgându-l în sens invers (dextrorum), de la **M$_i$** spre **M$_f$**.

Din relaţia (6) mai rezultă că raza **R** a unui cerc **C** este

(10) $$\mathbf{R} = \pm\sqrt{r^2 + e^2 - 2er\cos(\theta - \varepsilon)},$$

în care se recunoaşte forma funcţiei **R** = **Rexα$_{1,2}$**.

Se deduce că, dacă în relaţia **FSM-CE Rexα$_{1,2}$** se înlocuieşte variabila **centrică α** cu valoarea variabilei **excentrice θ**, în locul razei **excentrice r**, se obţine raza **centrică R**, cu precizarea că, în timp ce, dacă **R** este o **constanta**, **r** este variabilă. Altfel spus, convertirea variabilelor conduce la convertirea razelor, pentru acelaşi **excentru real E(e**,ε), deoarece excentricităţile numerice diferă: în primul caz **s** = **e** / **R** şi în cel din urmă este **s'**= **e** / **r.**

Intre variabilele centrice **α$_{1,2}$** şi variabila centrică **θ** există următoarele dependenţe.

În toate cazurile, independent de mărimea excentricităţii numerice **s**,

(11) $\boldsymbol{\theta = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}}$,

ceea ce arată că, la **θ = constant, α$_{1,2}$** şi **β$_{1,2}$** au variaţii de semn opus la creşterea excentricităţii **s** sau **e** şi

(12) $\boldsymbol{\beta_1 + \beta_2 = \pi}$

din care rezultă

(13) **$\alpha_{1,2} = \theta - \beta_{1,2}(\theta) =$** $\begin{cases} \alpha_1(\theta) = \theta - \beta_1 = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha_2(\theta) = \theta - \beta_2 = \theta - (\pi - \beta_1) = -\pi + (\theta + \beta_1) \end{cases}$

Relaţii se pot deduce, fără dificultate, din figurile ce conţin punctele **$W_{1,2}$**, ţinând cont de sensul de creştere al unghiurilor **$\beta_{1,2}$**, formate de direcţiile **$SW_{1,2}$** cu direcţiile **$OW_{1,2}$** din punctele **$W_{1,2}$**, la creşterea excentricităţii numerice **s** şi / sau reale **e**, pentru un unghi **θ** dat.

Astfel, pentru **e** < **R** ⇒ **s** < **1**, ca şi pentru **e** > **R** ⇒ **s** > **1**, rezultă ⇒ **β_1 > 0** şi **β_2** > 0, iar suma lor este constanta şi egală cu **π,** oricare ar fi **θ, s** şi **ε.**

În schimb, dacă pentru **s** < **1**, o creştere a unghiului **θ** induce o creştere simultana a unghiurilor **α_1** şi **α_2**, pentru **s** > **1**, la creşterea lui **θ**, unghiul **α_1** creşte, iar unghiul **α_2** scade, întrucât, prin definiţie, **W_1** a fost ales punctul care se roteşte pe cercul unitate <u>în acelaşi sens</u> cu rotaţia dreptei excentrice **d**, turnantă în jurul lui **E** sau **S**, adică cu creşterea lui **θ**, iar **W_2** este punctul care se roteşte pe cerc <u>în sens invers</u> rotaţiei dreptei **d**, deci **α_2** scade, ceea ce rezultă şi din relaţiile (12) şi (13).

3. DEMONSTRAREA UNOR TEOREME CU AJUTORUL FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) RADIAL EXCENTRIC

3.1 TEOREMA LUI PITAGORA.

Se consideră un triunghi dreptunghic $E_P W\pi\ W_0$ ≡ **ABC** înscris în cercul **C(R, O)** din **figura 3,a** şi un excentru **E_P** (R, ε) ≡ **A** situat chiar pe cercul **C**, având, deci, excentricitatea numerică **s** = e/**R** = **1**.

Laturile triunghiului **b** şi **c** pot fi exprimate ca **FSM-CE** de variabile **θ,** dar aceste unghiuri sunt mai greu de precizat. De aceea, se utilizeaza ***variabilele centrice $\alpha_{1,2}$*** care sunt zero şi, respectiv **π**, astfel că, utilizând relaţia (4.47,[1],pag 120: Rex$\alpha_{1,2}$ = $\pm\sqrt{1 + s^2 - 2s\cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}$), de definire a acestor funcţii, rezultă, în final, expresiile laturilor b şi c :

(14) $\begin{cases} b = AC \equiv E_P W_0 = r_1(0) = R\,\mathrm{Re}\,x(\alpha_1 = 0, s = 1, \varepsilon) = R\sqrt{2 - 2\cos\varepsilon} \\ c = AB \equiv E_P W_\pi = r_1(\pi) = R.\mathrm{Re}\,x(\alpha_1 = \pi, s = 1, \varepsilon) = R\sqrt{2 + 2\cos\varepsilon} \end{cases}$

Suma pătratelor acestora este $b^2 + c^2 = 4R^2$, adică tocmai a^2, astfel că **$a^2 = b^2 + c^2$**, care reprezintă chiar expresia algebrică a **teoremei lui Pitagora**.

Se mai deduce că, nedepinzând de **ε**, punctul **E_P** poate ocupa orice poziţie pe cercul **C** şi, ne depinzând de **R**, marimea triunghiului poate fi oricât de mare. S-ar parea ca aceste precizari ar fi de prisos, dar nu e chiar aşa.

3.2 TEOREMA ÎNĂLŢIMII 1

Pentru demonstrarea ei, se alege un excentru **E_I (s, 0)** pe axa x (⇒ **ε** = 0). De această dată, vom folosi **FSM-CE** de variabila **θ,** deoarece valoarea pentru inalţimea **h**, perpendiculară pe ipotenuză, este uşor de dedus, pentru că este **π/2**, iar pentru celelalte două vârfuri ale triunghiului dreptunghic sunt **0** şi respectiv **π**, fiind aceleaşi cu **α_1,** întrucât în aceste puncte razelor centrice şi excentrice se suprapun, astfel că unghiurile **β_1** sunt nule : **$\beta_1(0) = \beta_1(\pi$**) = 0. Utilizând relaţia (4.26,[1], pag. 111:

$rex_{1,2}\theta = -s\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2\sin^2(\theta - \varepsilon)}$) rezultă

h = $E_I E_P$ = R.rex **(π/2, s, ε= 0)** = $R.\sqrt{1 - s^2}$,

iar cele două segmente determinate de înălţimea **h** pe ipotenuză sunt

(15) $\begin{cases} r_1(0) = E_I W_0 = R.rex_1(0, E_I) = R(-s+1) \\ r_1(\pi) = E_I W_\pi = R.rex_1(\pi, E_I) = R(s+1) \end{cases}$ astfel că produsul lor este

(16) **r(0)•**r(**π**) **= R²**(1-s²) = **h²**, adică, tocmai expresia algebrica a

3.3 TEOREMEI ÎNĂLŢIMII 2

Ea afirmă că, ***într-un triunghi dreptunghic, înălţimea, corespunzatoare ipotenuzei, este medie între segmentele determinate de ea pe ipotenuză***. Adică, relaţia (18)

(16') $h^2 = R^2\,\mathrm{rex}_1(0) \bullet \mathrm{rex}_2(0) = R^2\,\mathrm{rex}_1(0) \bullet \mathrm{rex}_1(\pi) = R^2\,\mathrm{rex}_1(\pi/2)$,

din care rezultă dependenţa dintre funcţiile rex de 0, π/2 şi π

(16") $\mathrm{rex}_1(\pi/2) = \mathrm{rex}_1 0 \bullet \mathrm{rex}_1 \pi$,

relaţie ce va sta la baza unei metode hibride, de mare precizie, de determinare a unei relaţii de calcul oricât de exacte / precise (dorim), a integralei eliptice de prima speţă **K(k)**, prezentata în [9], ca şi în [1], [7], [8].

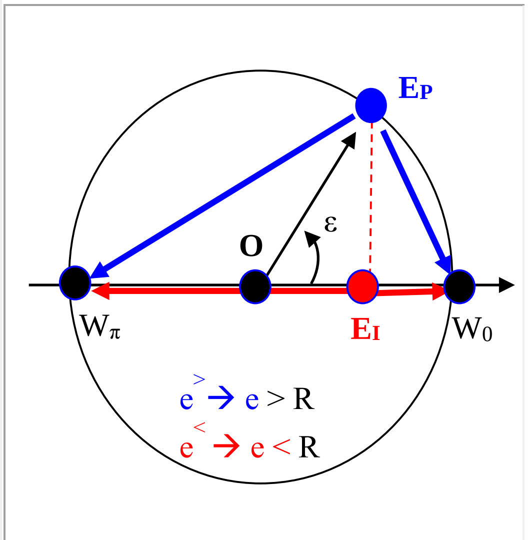


Fig. 3,a Desen explicativ pentru teoremele **Pitagora** şi a înălţimii.

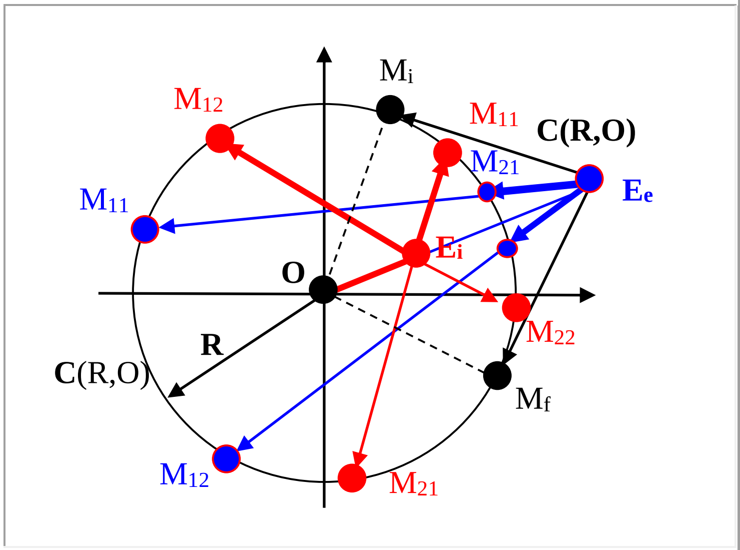


Fig. 3,b Desen explicativ pentru teoremele coardelor, secantelor şi a tangentelor

3.4 TEOREMA CATETEI SAU TEOREMA LUI EUCLID

Această teoremă afirma că***, într-un triunghi dreptunghic, o catetă este medie proporţională între ipotenuză şi proiecţia ei pe ipotenuză***. Ceea ce algebric, cu notaţiile anterioare, se exprima astfel

$$(17)\quad \begin{cases} b^2 = a \bullet r(0) = 2R \bullet R(1-s) = 2R^2(1-s) \\ c^2 = a \bullet r(\pi) = 2R \bullet R(1+s) = 2R^2(1+s) \end{cases}$$

Ţinând cont de faptul că

(18) R.cos **ε = e = R.s ⇒ cosε = s**,

excentricitatea reală **e** corespunzatoare excentrului $\mathbf{E_I}$ ca produs dintre excentricitatea numerică **s** şi raza **R** a cercului (v. **Fig. 3.a**), relaţiile (9) devin

$$(19)\quad \begin{cases} b = R\sqrt{2(1-s)} \\ c = R\sqrt{2(1+s)} \end{cases} \text{şi} \begin{cases} b^2 = 2R^2(1-s) \\ c^2 = 2.R^2(1+s) \end{cases},$$

astfel că teorema este demonstrată (**QED**).

3.5 SINTEZA / UNIFICAREA TEOREMELOR COARDELOR, SECANTELOR ŞI A TANGENTELOR

In **figura 3.b** sunt schiţate o pereche de **coarde** ($M_{11}M_{21}$ şi $M_{12}M_{22}$). Pentru **s** < **1** sau **e** < **R**, punctul comun **E_i**, interior cercului **C (R,O)**, le secţionează, pe fiecare, în două.

Alte două secante (E_eW_{11} şi E_eW_{12}), sunt reprezentate pentru **s** > **1** sau **e** > **R** precum şi două tangentele (E_eW_i şi E_eW_f) în punctele **W_i** şi în punctul **W_f** duse din excentrul **E_e**, evident, exterior cercului **C (R,O)**.

Relaţiile (4.39) din [7]

$$\mathbf{rex_1\theta.rex_2\theta} = \begin{cases} k^2 < 0 \leftrightarrow \mathbf{s} < 1 \leftrightarrow e < \mathbf{R} \Rightarrow \text{TEOREMA COARDELOR} \\ k^2 = 0 \leftrightarrow \mathbf{s} = 1 \leftrightarrow e = \mathbf{R} \Rightarrow \text{TEOREMA INALŢIMILOR ş.a.} \\ k^2 > 0 \leftrightarrow \mathbf{s} > 1 \leftrightarrow e > \mathbf{R} \Rightarrow \text{TEOREMA SECANTELOR} \end{cases}$$

exprimă produsul celor două determinări (principală 1 şi secundară 2) dintre două funcţii radial excentrice, produs independent de unghiul **θ**.

Prima relaţie din [7] (4.39), pentru **s** < **1** şi două poziţii **θ** şi **θ'** ale dreptei d, exprimă tocmai

3.6 TEOREMA COARDELOR

Care afirmă că ***" Produsul segmentelor în care se taie două coarde este constant "***.

Acum se poate merge mai departe şi se poate determina valoarea acestei constante, considerând segmentele ca segmente orientate (cu semn).

Produsul segmentelor (**r_{11}** şi **r_{21}** pentru prima coardă şi **r_{12}** şi **r_{22}** pentru cea de a doua coardă) în care sunt împărţite două coarde oarecare, de punctul lor de intersectie (**E_i**), este constant şi egal cu diferenţa pătratelor razei vectoare şi a punctului de intersecţie (**e**) şi raza cercului **R**, adică

(20) $\mathbf{r_{11} \bullet r_{21} = r_{12} \bullet r_{22}} = e^2 - \mathbf{R^2 < 0}$ sau $rex_1\boldsymbol{\theta}.rex_2\boldsymbol{\theta} = rex_1\boldsymbol{\theta}'.rex_2\boldsymbol{\theta}' = (\mathbf{s^2 - 1})$

În ultima relaţie s-a simplificat cu R^2.

A treia relaţie din [7](4.39), pentru **s** > **1** şi două poziţii distincte (**θ** şi **θ'**) ale dreptei d^+ exprimă tocmai

3.7 TEOREMA SECANTELOR

"Produsul segmentelor a două secante, care se intersectează, este constant ".

Sau, după **N.N.Mihaileanu** [**COMPLEMENTE DE GEOMETRIE SINTETICA, EDP, BUC. 1965, PAG.24**] ***"O secantă mobilă, dusă dintr-un punct E, taie un cerc în punctele M_1 şi M_2. Produsul $EM_1 \bullet EM_2$ este constant"***.

Şi în acest caz, se poate merge mai departe, determinând valoarea acestui produs care este dat de a treia relaţie [7](4.39), deoarece **s** > **1** sau **e** > **R**. Deoarece, ambele puncte de intersecţie sunt pe aceeaşi semidreaptă, produsul lor este pozitiv şi egal cu

(21) $\mathbf{r_{11} \bullet r_{21} = r_{12} \bullet r_{22} = e^2 - R^2 > 0}$ sau $\mathbf{rex_1\,\theta.rex_2\,\theta = rex_1\,\theta'.rex_2\,\theta' = (s^2 - 1)}$

Aceeaşi relaţie din[7] (4.39), dar pentru $\boldsymbol{\theta = \theta_i}$ şi dreapta de unghi **θ' care** intersectează cercul în două puncte distincte, exprimă

3.8 TEOREMA SECANTĂ-TANGENTĂ

("**KLEINE ENZYKLOPÄDIE. MATHEMATIK**." Ed. Enciclopedica Leipzig, pag. 205)

"Oricare tangentă, dusă dintr-un punct la un cerc, este medie proporţională cu segmentele unei secante dusă din acelaşi punct ($t^2 = a \bullet b$)".

Acum se poate afirma că această medie proporţională este pozitivă şi are valoarea $\mathbf{e^2 - R^2}$, în care **R** este raza cercului şi **e** distanţa de la centrul **O** al cercului la punctul din care se duce tangenta şi secanta, adică **E_e**.

În fine, tot din a treia relaţie [7](4.39) dar pentru $\boldsymbol{\theta = \theta_i}$ şi $\boldsymbol{\theta = \theta_f}$, rezultă

3.9 TEOREMA TANGENTELOR

Care afirma că ***"Cele două tangente duse dintr-un punct la cerc sunt de lungimi egale ".***

Acum se poate adauga că, lungimea acestor tangente este $\mathbf{t^2 = e^2 - R^2}$, în care, deşi se poate deduce, **R** este raza cercului şi **e** distanţa de la punctul, din care s-au dus cele doua tangente ($\mathbf{E_e}$), la centrul **O** al cercului, adică

(22) $\mathbf{t_i = t_f = t}$ şi $\mathbf{t^2 = e^2 - R^2}$

Astfel, prin una şi aceeaşi **teoremă**, ***a produselor celor două determinari ale functiei REX***, *sunt* ***condensate / concentrate*** *sau* ***unificate*** *4 teoreme* şi, mai important, toate aceste teoreme sunt **completate** ***cu expresii cantitative care dau valoarea egalităţilor enunţate în cele 4 teoreme.***

Dacă cele două determinări ale funcţiei radial excentric **rex** sau Rex se iau în valoare absolută, adică nu se ţine seama de sensul / semnul determinarilor pe dreapta **d**, atunci, atât pentru **s** < **1** cât şi pentru **s** > **1**, expresia produsului este aceeaşi şi egală cu Abs[$1-s^2$], deoarece Abs[$e^2 - R^2$] = R^2 •Abs[$s^2 - 1$] şi, evident, valoarea este întotdeauna pozitivă.

4. PUTEREA PUNCTULUI FAŢĂ DE CERC

Se va nota constanta pozitivă cu $\mathbf{p^2}$, ea fiind denumita **puterea punctului E**(e,ε) în raport cu cercul **C(R,O)**

(23) $\mathbf{p}^2 = \mathbf{e}^2 - \mathbf{R}^{2.}$

Axa determinată de punctele **O** şi **E**, adică de centrul **O** şi excentrul **E**, este denumită **axă centrală**, deoarece împarte coarda $\mathbf{W_iW_f}$ în părţi egale [**MICA ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ (MEM),** Ed, Enciclopedică, Buc. pag. 207].

5. INVERSIUNE DE CENTRU DAT

Rezultă că inversul cercului **C**, în inversiunea de centru (de inversiune) sau pol **E** şi de raport sau modul **k** şi putere de inversiune $\mathbf{k^2 = e^2 - R^2}$, este cercul însuşi şi că $\mathbf{M_1}$ şi $\mathbf{M_2}$ sunt inverse unul altuia.

O inversiune de centru (pol) **E** şi de modul **k** se noteaza $\mathbf{i_E}^k$ sau **I(E, k)** sau se poate scrie că $\mathbf{M_2}$ este inversul punctului $\mathbf{M_1}$, în inversiunea dată, adică $\mathbf{M_2}$ = **I**($\mathbf{M_1}$).

Proprietatea de **idempotenţă** a unei inversiuni **I** arată că **I(I(M)) = M,** ∀ **M** ∈ $\mathbf{E^2}$, adică, inversul inversului unui punct **M** este punctul însuşi.

Daca k > 0 sau **e** > **R** , atunci se poate alege **E**(**e** ,**ε**), drept centru al cercului $\mathbf{C_i(E,R_i)}$ - de raza $\mathbf{R_i}$ $= k = \sqrt{e^2 - R^2}$, egală cu lungimea tangentei din **E(e,ε)**, la cercul C(O,R).

În acest fel, toate punctele acestui cerc coincid cu transformatele lor, deoarece, puterea de inversiune k^2 este aceeaşi cu puterea p^2 (E) a punctului **E** faţă de cercul $\mathbf{C_1}$(E,R_i) şi, ca urmare, modulul de homotetie **k** = **1**,-vezi relaţia (4.42.[1].pag.118:

$$\boldsymbol{rex_{1,2}\theta - rex_{2,1}\theta = \pm 2\sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}} = \mathbf{2.del_{1,2}\theta}).$$

Astfel că punctele acestui cerc ramân fixe în inversiunea dată. Acest cerc poarta denumirea de **cerc de inversiune** sau **cerc fundamental**.

Două puncte inverse sunt conjugate în raport cu cercul de inversiune şi sunt situate pe acelaşi diametru al cercului. Cercul de inversiune este **invariant**, punct cu punct, în inversiunea **I**(E, k).

Se deduce că, cercul de inversiune este locul geometric al punctelor care coincid cu inversele lor. El este un cerc cu centrul în polul **E(e, ε)** al inversiunii şi de rază **R'**= k = $\sqrt{e^2 - R^2} = R.\sqrt{s^2 - 1}$ = p(**E**), adică este cercul $\mathbf{C_i}$**[E(e, ε)**, **R'**= **k**].

Modulul de inversiune **k** şi $\mathbf{p^2(E)}$ **-** puterea punctului / **excentrului E** faţă de cercul **C(O,R),** are dimensiunea lungimii [**L**] şi se exprimă în aceleaşi unităţi de lungime în care se exprimă şi segmentele figurii şi are expresia **$p^2(E)$ =** $\overrightarrow{EM_1} \bullet \overrightarrow{EM_2}$ **=** **e**^{2} – **R**^{2}, în care **M₁** şi **M₂** sunt punctele de intersecţie ale unei secante, duse prin **E**, cu cercul **C**(O,R).

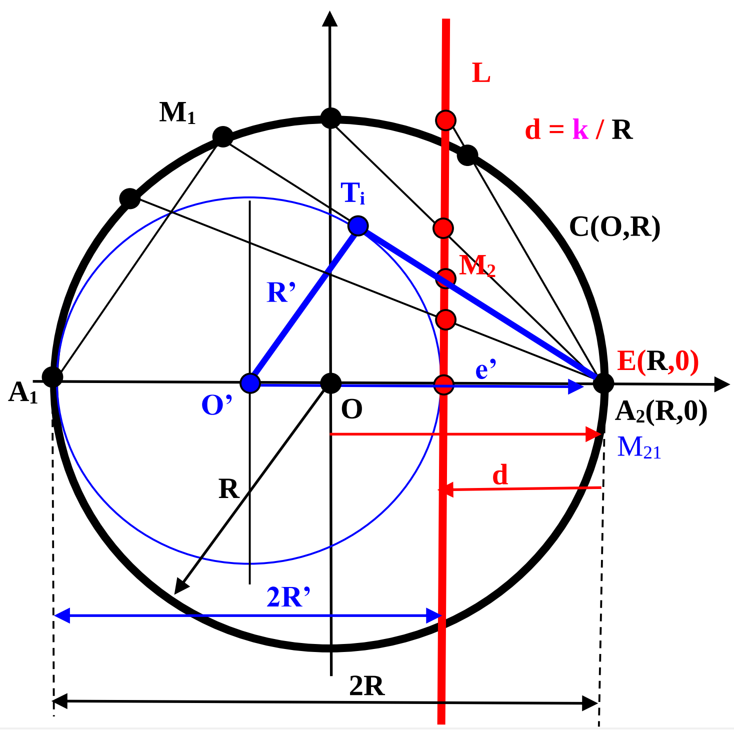


Fig. 4 Dreapta L ca inversă a **cercului C(O,R)** şi **M_2 = I(M_1)**

Putem presupune, întotdeauna, punctele **M_1** şi **M_2** de aceeaşi parte a centrului (de inversiune) **E,** deoarece cealaltă situaţie (**e** < **R**), revine la precedenta, printr-o simetrie de centru **E,** aplicată punctului **M_2,** de exemplu.

Fie o a doua secantă, dusă din **E,** care intersectează acelaşi cerc **C** în punctele **N_1** şi **N_2**, astfel că

(24) $EM_1 \bullet EM_2 = EN_1 \bullet EN_2 = k^2$, care arată că triunghiurile EM_1N_1 şi EM_2N_2, cu un unghi comun (din **E**) şi două perechi de laturi proporţionale sunt asemenea, de unde rezulta egalitatea unghiurilor

(25) **$\angle\ EN_1\ M_1 = \ \angle\ EM_2\ N_2$,**

care arată că patrulaterul $M_1\ N_1\ N_2\ M_2$, cu unghiurile opuse din M_2 şi din N_1 suplementare este inscriptibil, ceea ce este evident.

Rezultă că două perechi de puncte omoloage într-o inverisune sunt **conciclice.**

O dreaptă mobilă din **E** este tangentă la cercul **C** în punctele **T_i** şi **T_f**, în care cele două puncte foste secante sunt confundate **$M_1 \equiv M_2$**. Deoarece

(26) $ET_i^2 = ET_f^2 = \mathbf{e}^2 - R^2 = k^2$,

rezultă semnificaţia geometrică a modulului de inversiune **k**, ca fiind tocmai lungimea tangentei, adică a segmentului **$ET_{i,f}$.**

$T_{i,f}$ sunt punctele de tangenta din **E** la cercul de raza **R**, echivalentele punctelor de tangenta din **S** la cercul de raza **R** = **1**, iar $M_{1,2} \subset C(R,O)$ sunt echivalentele punctelor **$W_{1,2} \subset C_1$** (R = 1,O).

În timp ce punctele $\mathbf{M_1}$ şi $\mathbf{N_1}$ parcurg arcul $\mathbf{T_iT_f}$ în sens sinistrorum / levogin, punctele $\mathbf{M_2}$ şi $\mathbf{N_2}$ îl parcurg în sens dextrorum / dextrogin.

Dacă **E** este situat pe cerc, atunci $EM_2 = EN_2 = 0$ şi în **E** se confundă şi punctele de tangenta $\mathbf{T_{i,f}}$, tangentele confundandu-se (în una singură, tangentă în **E** la cercul **C**).

În acest caz, dacă dreapta **d** se roteşte în jurul excentrului **E** (cu **e** = **R** sau **s** = **1**), de la $\boldsymbol{\theta = \pi/2}$ la $\boldsymbol{\theta = 3\pi/2}$, numai punctul $\mathbf{M_1}$, aparţinând semidreptei $\mathbf{d^+}$, care se confundă cu tangenta $\mathbf{EM_i}$, intersectează cercul **C** şi descrie complet cercul **C,** în timp ce punctul $\mathbf{M_2}$ staţionează în **E.**

În continuarea rotaţiei dreptei **d**, de la $\boldsymbol{\theta = 3\pi/2}$ la $\boldsymbol{\theta = 2\pi}$, numai semidreapta negativa $\mathbf{d^-}$, care se confundă cu tangenta $\mathbf{EM_f}$, intersectează cercul, într-un punct mobil $\mathbf{M_2}$, care va parcurge o rotaţie completă pe cercul **C**, în timp ce punctul $\mathbf{M_1}$ va staţiona în **E**, apoi situaţiile se repetă.

Aceste observaţii sunt deosebit de importante, pentru intelegerea comportării **FSM-CE**, în condiţiile particulare, ale excentricităţii numerice $\mathbf{s = \pm 1}$.

Dacă excentrul **E** se află pe cerc $[\mathbf{E \subset C(R,O) \Rightarrow s = 1}]$, lungimea tangentei este nulă (k = 0, e = R), astfel că $\mathbf{EM_1 \bullet EM_2 = 0}$ şi, în timp ce $\mathbf{M_1}$ parcurge integral cercul **C**, $\mathbf{M_2}$ stationează în **E**, o semiperioadă, apoi staţioneaza $\mathbf{M_1}$ în **E** o semiperioadă şi $\mathbf{M_2}$ parcurge integral cercul **C**.

Dacă punctul $\mathbf{M_{1,2}}$ parcurge o linie **L** (coarda $\mathbf{M_1\ M_2}$ de exemplu), locul geometric al punctelor $\mathbf{N_{1,2}}$ va fi linia L', inversa liniei L. Inversa unei secante (raze) dusă prin **E** este secanta însăşi.

Dacă polul $\mathbf{E \equiv O}$, coincide cu centrul cercului **C(O, R)**, atunci $\mathbf{e = 0}$ şi $\mathbf{p^2(O) = - R^2}$ astfel că inversiunea $\mathbf{I_O^k}$ invariază punct cu punct cercul **C(O, R)** şi transforma interiorul lui (discul circular) în exteriorul lui şi exteriorul cercului **C** în interiorul lui.

Inversiunea de pol $\mathbf{E \equiv O}$ şi de modul **k** este o transformare a planului **Π,** prin care, fiecărui punct $M_1 \subset \mathbf{\Pi} - \{O\}$ din plan i se asociază punctul $\mathbf{M_2}$ de pe dreapta $OM_1 \equiv EM_1$ astfel încât $\mathbf{EM_1 \bullet EM_2 = OM_1 \bullet OM_2 = k}$, iar polului **O** i se asociază însăşi punctul **O**. Punctul **O** fiind un punct invariant al inversiunii $\mathbf{I_O}^k$, rezultă că toate dreptele care trec prin $\mathbf{E \equiv O}$ sunt invariante în inversiunea $\mathbf{I_O}^k$.

Dacă punctul $\mathbf{M_1}$ aparţine unui cerc **C(O, R)**, atunci punctul invers $\mathbf{M_2}$ va fi diametral opus, adică $R.rex_1(\theta = \alpha, s = 0) = - R.rex_2(\theta = \alpha, s = 0)$, astfel că $OM_1 \bullet OM_2 = k^2 = - R^2$.

Transformatul prin inversiunea $\mathbf{i_E^k}$ de putere $\mathbf{k^2}$ a unui cerc **C,** care trece prin polul **E** (**Fig. 4.**), dacă $\mathbf{E \subset C(O,R)}$ aparţine cercului C(O,R), sau **e** = R şi **s** = 1, este o dreapta **L** perpendiculară pe diametrul cercului dus prin **E**.

În cele ce urmează, se va indica şi poziţia (**d**) dreptei **L**, în raport cu cercul de centru **O** şi raza **R** ca şi puterea de inversiune **k**, considerate ca date / cunoscute.

Alegând cercul **C(O,R)** şi **E** (R, **O**) ⊂ **C(O,R)** rezultă că inversul lui **C** este dreapta **L** care trece la distanţa **d** = e' – R' de **E** şi este perpendiculară pe **OE**. Ştiind că lungimea tangentei **ET** este **k**, rezultă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} k = \sqrt{e'^2 - R'^2} \\ e' + r' = 2R \end{cases}$$

din care, fară dificultate, rezultă că dreapta **L** se află la distanţa

$$d = \frac{k^2}{2R} \tag{28}$$

de excentrul **E**, care a fost ales drept centru / pol de inversiune de raport / modul **k**. Rezultă că, pentru $\mathbf{k = 1 \Rightarrow d = 1 / R}$ şi dreapta **L** se afla la o distanţă egală cu inversul razei **R** a cercului **C(O, R)**.

Dacă şi **R** = 1, atunci şi d = 1 şi **L** trece prin centrul **O** al cercului **C**. Pentru $\mathbf{R = 0} \Rightarrow$ un cerc **C**, de dimensiune 0, plasat în **O(0,0)** şi pol **E(e,ε)** puterea de inversiune este $\mathbf{k^2 = p^2\ (E) = e^2}$.

Dacă şi polul, sau centrul de inversiune **E,** se suprapune cu centrul **O** şi, inversele acestor puncte, în inversiunea de putere diferită de zero ($k \neq 0$), se află aruncate pe o dreapta la infinit !.

E deosebit de interesant, că o infinitate de puncte, M_{1i} suprapuse unele peste altele în acelaşi loc [**E** ≡ **O(0,0)**], deoarece **R = 0**, din spaţiu plan E^2, au inversele lor M_{2i} distribuite pe o dreaptă de la infinit, aşa cum rezultă din relaţia (24), astfel că distanţele dintre ele, iniţial 0 ($\|M_{1i}M_{1j}\| = 0$), devin infinite ($\|M_{2i}M_{2j}\| = \infty$).

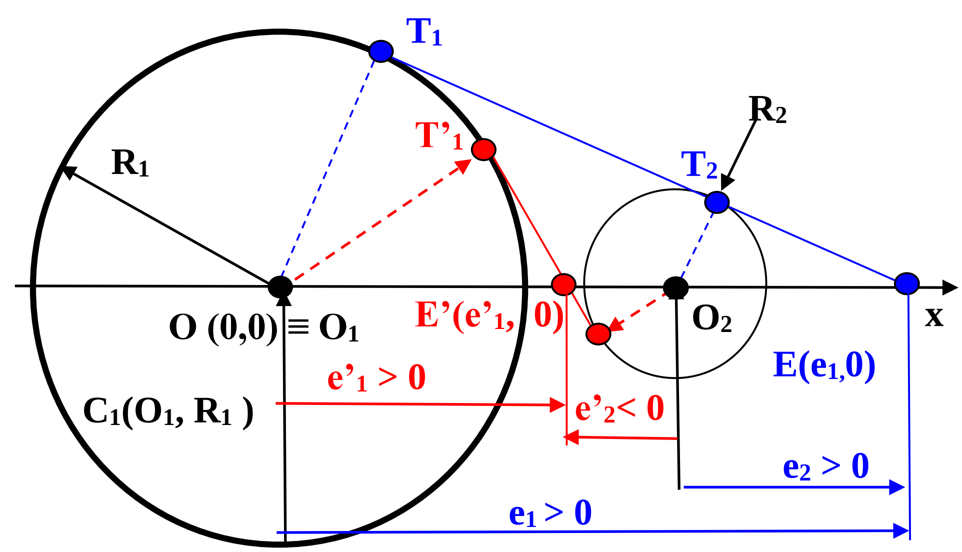


Fig. 5 Cercul C_2 **(O_2, R_2)** ca transformare homotetică, de module $k = R_2 / R_1 > 0$ şi $\mathbf{k = R_2 / R_1 < 0}$ şi centru de homotetie excentrul **E** ($e = e_1$, $\varepsilon = 0$) , a cercului C_1

Se deduce că, transformarea prin inversiunea de putere k^2 a unei drepte, ce nu trece prin polul de inversiune, sau, mai precis, care trece la distanta **d** de polul **E** de inversiune, este un cerc care trece prin centrul **E** de inversiune şi are raza **R**, obţinută din relaţia (24)

(29) $\quad \mathbf{R = k / d}$

Transformarea prin inversiunea de putere k^2 a unui cerc **C(O,R)**, care nu trece prin centrul / polul **E** de inversiune, este un cerc **C'(O',R')** care nu trece, nici el, prin polul de inversiune.

<u>Să incercăm să determinăm poziţia şi mărimea cercului inversat **C'**.</u>

Există două inversiuni în plan, una de putere $p^2(E) > 0$ pozitivă şi una de putere $p^2(E') < 0$ negativă, având polurile în **E** şi, respectiv, în **E**', care transformă un cerc în celălalt.

Polii **E** şi **E'** corespund intersecţiilor tangentelor exterioare şi, respectiv, interioare la cele două cercuri.

Considerând cercul C_2 ca transformatul prin homotetia de modul **k** a cercului C_1, atunci, pentru **k > 0** se obţine o asemănare de **genul unu** şi pentru **k < 0** o asemănare de **genul doi**.

O asemănare $A_k : \Pi \to \Pi$ se numeste de **genul unu** dacă A_k **păstrează orientarea** oricărui triunghi din **planul Π**. Dacă A_k <u>**schimba orientarea**</u> oricărui triunghi din planul Π, atunci asemănarea este de **genul doi**. Homotetia, de centru **E,** este de genul unu, iar cea de centru **E'** este de genul doi.

Dacă cercurile C_1 şi C_2 sunt **congruente**, atunci există o singură homotetie ($H_{E'}^{k=-1}$) care transformă cercul C_1 în C_2 ; homotetie de modul **k** = — 1 şi de centru **E'**, astfel că $R_2 = R_1$ şi $e'_1 = O_1E'.\text{rad}0 = e = -e'_2/2 = O_2E'.\ \text{rad}\pi$.

Dacă cercurile C_1 şi C_2 sunt **concentrice**, atunci, de asemenea, există o singură homotetie $H^k_{O1} \equiv H^k_{O2}$ modulul **k** fiind egal cu raportul razelor $\mathbf{k = R_2 / R_1}$.

Două cercuri **tangente**, interior sau exterior, sunt homotetice în raport cu punctul lor de tangenţă.

Dacă sunt tangente interioare, în excentrul **E**, atunci **k** > **0**, pentru că cele două cercuri sunt la fel orientate: au aceeaşi origine **W**(0) şi punctele $\mathbf{M_{11}}$ şi $\mathbf{M_{21}}$ se rotesc pe cerc în acelaşi sens (trigonometric) şi pe aceleaşi semicercuri ale celor două cercuri, în timp ce, punctele $\mathbf{M_{21}}$ şi $\mathbf{M_{22}}$ stationează în **E**.

Dacă cercurile sunt tangente exterior, atunci **k** < 0 şi punctele $M_{12} \subset C_2$ şi $M_{21} \subset C_1$ se rotesc pe semicercuri diferite, primul pe semicercul superior al cercului C_2 cu $y_2 > 0$, iar al doilea pe semicercul inferior al cercului C_1 cu $y_1 < 0$, ceea ce arată o schimbare a orientării.

Se mai ştie că, dacă $|\mathbf{k}| < \mathbf{1}$, asemănarea figurilor conduce la o reducere a dimensiunilor figurii, rezultate prin transformarea homotetică respectivă şi la o majorare a dimensiunilor, dacă $|\mathbf{k}| > \mathbf{1}$, ştiind că **EM' = k.EM**, **M'** fiind transformatul prin homotetia $\mathbf{H_E^k}$ al lui **M**.

La putere pozitivă, punctele M_1 şi $M_2 = I_E(M_1)$ se află pe aceeaşi semidreaptă, dusă prin **E(e, ε)**, astfel că rezultă $\mathbf{k^2 = r_1 \bullet r_2 = R^2.rex_1\theta \bullet rex_2\theta = e^2 - R^2 > 0}$, de unde mai rezultă că cele două cercuri se află cu centrele de aceeaşi parte a excentrului **E**, iar dacă cele două puncte $\mathbf{M_1}$ şi $\mathbf{M_2} = I_{E'}(M_1)$ se situează pe semidrepte diferite, atunci, de exemplu $r_1 = R.$ $\mathbf{rex_1\theta} > 0$ şi $r_2 = R.$ $\mathbf{rex_2\theta} < 0$, astfel că cele două cercuri se află de o parte şi de cealaltă a excentrului **E'**.

6 APLICAŢIE

Se consideră cercul $\boldsymbol{C(O_1, R_1)}$ *şi inversiunea* $\boldsymbol{I_E^k}$ *cunoscute, adică coordonatele punctelor polul* ***E(e, ε)*** *şi centrul cercului* $\boldsymbol{O_1}(0,0)$*, precum şi raza* $\boldsymbol{R_1}$ *a acestuia ca date, urmând să se determine centrul* $\boldsymbol{O_2}(c, \varepsilon)$ *al cercului transformat precum şi raza acestuia* $\boldsymbol{R_2}$*.*

Evident că $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ şi **E** sunt pe aceeaşi dreaptă (axa centrelor), înclinată cu **ε** = 0 , în **figura 5**, faţă de axa x, pentru că tangentele la cele două cercuri se intersectează pe axa centrelor.

Se mai ştie că două cercuri, care nu sunt concentrice şi nici congruente, se pot transforma unul în celălalt prin două homotetii, una de centru **E** şi alta de centru **E'**; cele două homotetii sunt $\mathbf{H_E^k}$ şi $\mathbf{H_{E'}^{-k}}$ având modulele de semne diferite.

Daca $\mathbf{k^2 > 0}$, $\mathbf{O_2}$ se află între $\mathbf{O_1}$ şi **E** şi din **E** sunt două tangente exterioare comune la cele două cercuri, astfel că, din cele două triunghiuri dreptunghice asemenea Δ $\mathbf{E\,T_1O_1}$ şi Δ $\mathbf{E\,T_2O_2}$, cu unghiurile drepte în $\mathbf{T_1}$ şi $\mathbf{T_2}$, rezultă proportionalitatea laturilor şi o primă constatare :

$$(30) \qquad \frac{O_1T_1}{O_1E} = \frac{O_2T_2}{O_2E} = \sin\theta_e \Rightarrow \frac{e_1}{R_1} = \frac{e_2}{R_2} = \frac{1}{\sin\theta_e} \Leftrightarrow s_1 = s_2$$

şi anume, că ***excentricităţile*** ***<u>numerice</u>*** ale lui **E**, faţă de cele două cercuri, sunt aceleaşi, chiar dacă excentricităţile <u>reale</u> $\mathbf{e_1}$ şi $\mathbf{e_1}$ sunt diferite.

Deoarece, cercul $\mathbf{C_2}$ este transformatul prin homotetia de modul **k** a cercului $\mathbf{C_1}$ şi presupunând $\mathbf{R_1 > R_2}$, rezultă proporţionalitatea razelor cercurilor $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$ şi a distanţelor de la centrele cercurilor la centrul **E** de homotetie, care sunt tocmai ***excentricităţile reale***, ambele pozitive $\mathbf{e_1} = O_1E$ şi $\mathbf{e_2} = O_2E$, deoarece centrele $\mathbf{O_1}$ şi $\mathbf{O_2}$ se află de eceeaşi parte (stânga, de exemplu) a excentrului **E**$(e_1,0)$

$$(31) \qquad k = \frac{R_1}{R_2} > 1 \qquad \text{şi} \qquad k = \frac{\|EO_1\|}{\|EO_2\|} = k = \frac{R_1}{R_2}$$

Rezultă imediat că

$$(32) \qquad R_2 = R_1 / k \quad \text{şi} \quad R_2 < R_1, \text{ iar } e_2 = \frac{R_2}{R_1}e_1 = \frac{e_1}{k} < e_1,$$ ceea ce arată că cercul $\mathbf{C_2}$ se află între **E** şi $\mathbf{O_1}$.

Dacă **k** < 0, centrul de homotetie **E'**$(e_1',0)$ este plasat între centrele celor două cercuri şi relaţiile anterioare se păstrează, cu observaţia că la o rază $\mathbf{R_1}$ orientată în direcţia **+ α** rezultă o rază $\mathbf{R_2}$ orientata în sens invers, adică pe aceeaşi direcţie dar în sens invers $(\alpha + \pi)$.

Dacă excentricităţile numerice s_1 şi s_2 sunt aceleaşi, atunci toate valorile **FSM-CE**, definite pe cele două cercuri C_1 şi C_2, sunt de asemenea egale, adică **$rex_{1,2}(\theta, s_1) = rex_{1,2}(\theta, s_2)$**, precum şi **$\alpha_{1,2}(\theta, s_1) = \alpha_{1,2}(\theta, s_1)$** , astfel că şi **$Rex[\alpha_{1,2}(\theta, s_1), s_1] = Rex[\alpha_{1,2}(\theta, s_2), s_2]$.**

Deoarece

(33) $s.\sin\alpha = r_1.\sin\beta = rex_1\,\theta.\sin\beta$, din care, $\sin\beta = \dfrac{e}{r_1}\sin\varepsilon$, astfel că

(34) **$del_1\,\theta$** $= \sqrt{1-e^2\sin^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{e^2}{r_1^2}\sin^2\alpha} = \sqrt{1-e^2\left(\dfrac{\sin\alpha}{rex_1\theta}\right)^2}$

rezultă că funcţiile radial excentric pot fi exprimate şi de raportul funcţiilor sinus, atât centrice (**$\sin\alpha$**) cât şi excentrice (**$sex\theta$**), ţinând cont că **$\sin\alpha_{1,2} = sex_{1,2}\theta$**, unde s-a considerat excentrul plasat pe axa x, adică pentru **$\varepsilon = 0$** . Aşadar

(35) $rex_{1,2}\theta = \dfrac{\sin\alpha_{1,2}}{\sin\theta} = \dfrac{sex_{1,2}\theta}{\sin\theta}$.

In final, se mai poate arata că, ţinând cont de o **SM** din care rezultă

(36) $rex_{1,2}\theta = \cos\beta\,.\,dex_{1,2}\,\theta = \dfrac{d\theta}{du}\,.\,dex_{1,2}\,\theta$ şi, în care, prin definiţie,

(37) $dex_{1,2}\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{d\,\alpha_{1,2} / d\,\theta}$,

astfel că se obţin expresiile funcţiilor radial excentric sub forma raportului unor infiniţi mici

(38) $rex_{1,2}\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Rex}\,\boldsymbol{\alpha}_{1,2} = \dfrac{d\alpha_{1,2}}{du}$

7. PROBLEMA RACORDĂRII A DOUĂ CERCURI

7.1 CÂND SE CUNOAŞTE UN PUNCT DE RACORDARE **T_1**

În literatura de specialitate, ea este prezentată în felul următor. Problema are o infinitate de soluţii.

Prima, de rază minimă de racordare, corespunde centrul O_7 al arcului / cercului de racordare cu centrul O_7 situat pe linia **O_1O_2** a centrelor celor două cercuri date **C'** şi **C"** din **figura 6, b** şi tangent celor două cercuri.

Ultima posibilitate, a unui cerc, de raza maximă, infinită, adică o dreaptă, corespunde tangentei exterioare la cele două cercuri date, care este o problemă cunoscută.

Cele două soluţii extreme, amintite anterior, sunt prezentate cu **verde** în **figura 6, b**.
Dacă nu se fac referiri la **racordări**, ci la **cercuri tangente**, atunci există **4 familii** de cercuri soluţie, fiecare cu o infinitate de soluţii cu privire la cercuri tangente la cele două cercuri:

1) **Două familii**, din care fac parte cercurile C_1 şi C_2, tangente în exterior, de-o parte şi de alta a liniei centrelor **O'O"** şi de raze variabile $R_1 \in$ **[R_{7m}, R_{7m} → ∞]**, iar $R_2 \in [R_{8m}, R_{8M}$ → **∞]**, dar şi **C_7** şi C_8, cu centrele O_7 şi, respectiv, O_8, la limită, pe linia centrelor O'O", de raze egale cu

(39) **$R_{7,8\,m}$** $= \dfrac{O'O'' \pm (R' + R'')}{2}$.

Pentru **$R_{1,2}$** → ∞, cercurile C_1 şi C_2 degenereaza în dreptele **tangente exterioare** la cele două cercuri.

2) Două familii de cercuri, din care fac parte cercurile C_3, C_4, tangente combinat la cele două cercuri date, au razele cuprinse în domeniul **R_3** [R_{3m}; R_{3M} → ∞], **R_4** [**R_{4m}, R_{4M}** →∞], în care, razele minime sunt ale cercului **C_6** şi sunt

(40) $R_{3,4\,m} = \frac{O'O'' \pm (R'-R'')}{2}$,
iar cele maxime tind spre infinit, $R_{34M} \rightarrow \infty$, astfel că, cercurile degenerează în două tangente interioare la cele două cercuri date, tangente care se intersectează, după cum este cunoscut, în interiorul liniei centrelor.

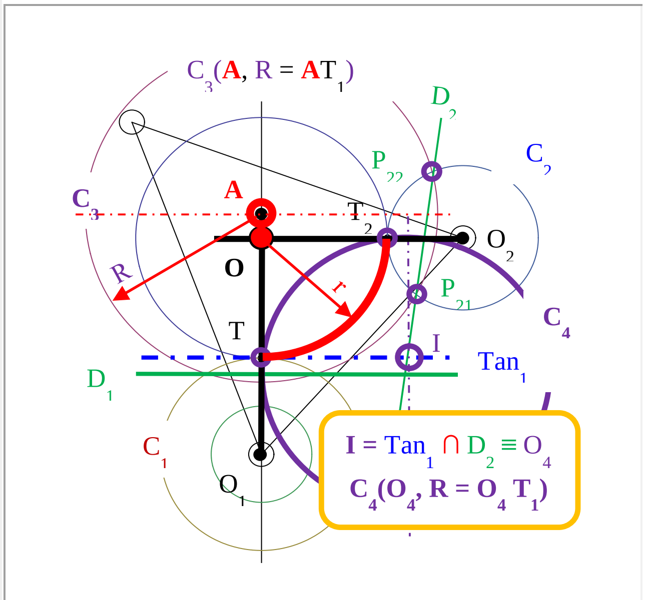


Fig. 6, a Racordarea a două cercuri date (C_1 şi C_2) cu un arc de cerc **AC**(**O**,**r**) tangent în punctul $\mathbf{T_1}$

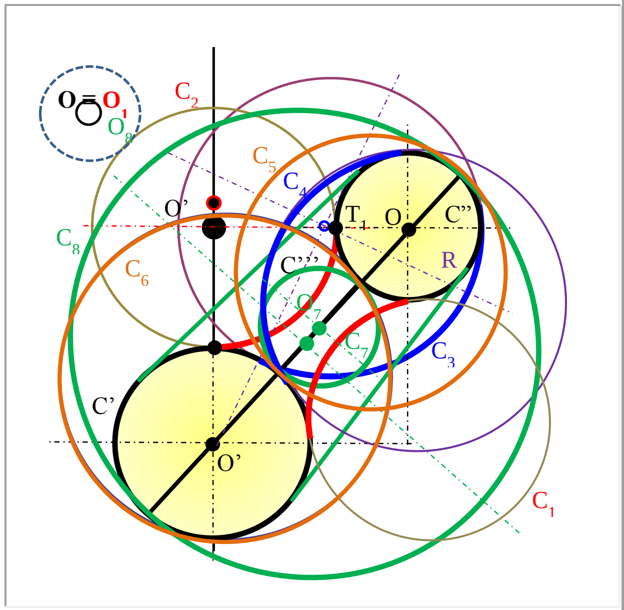


Fig. 6, b Variante de soluţii ale racordării a două cercuri date (**C'** şi **C"**) cu arce de cerc **C**(**O**,**r**)

Cercurile C'_3, C'_4, ne prezentate în **figura 6, b**, care au ca cerc de rază minimă cercul C_5, iar pentru raza lor maximă infinită degenerează şi ele în două tangente interioare la cele două cercuri date.

3) Acestea 4 tipuri de familii de cercuri. Cercuri tangente de aceeaşi parte, ambele puncte de tangenţă în exteriorul cercului soluţie 1→ (C_1, C_2, C_7,), sau ambele în interiorul cercului soluţie 2 → (C_8) şi combinat, în interior cu C' şi în exterior cu C" 3 → (C_3, C_6) şi invers 4 →(**C'_3 C_5**).

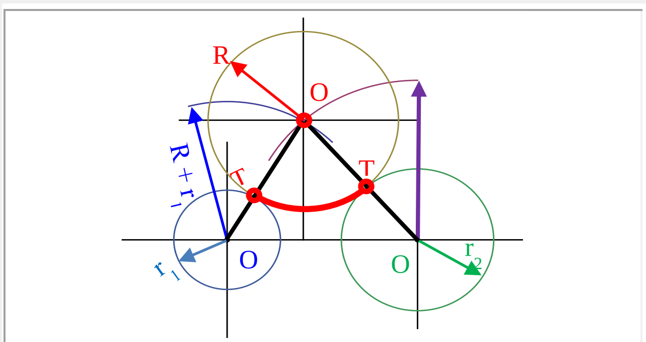


Fig.7,a Racordarea cercurilor $\mathbf{C_1}$ şi C_2 cu un arc de cerc de rază **R dată**, arc tangent exterior la cele două cercuri

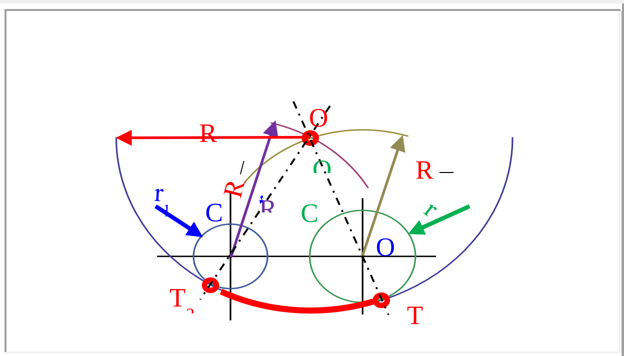


Fig.7,b Racordarea a două cercuri date (**C_1** şi **C_2**) cu un arc de cerc tangent exterior la cele două cercuri şi de rază **R dată**

Dacă unuia dintre cele două cercuri li se impune un punct de racordare $\mathbf{T_1}$, atunci numărul de soluţii ale problemei scade considerabil, fiind / rămânând doar **4** soluţii, dintre care una este prezentată în **figura 6, a**. Iar dacă se impun două puncte de tangenţă, câte unul pe fiecare cerc, evident, atunci soluţia este unică.

7.2 CÂND SE CUNOAŞTE RAZA R A ARCULUI DE RACORDARE TANGENT EXTERIOR LA CELE DOUĂ CERCURI DATE

Fie $\mathbf{C_1(O_1, r_1)}$ şi $\mathbf{C_2(O_2, r_2)}$ cele două cercuri date de racordat şi **R** raza arcului /cercului cu care se racordează, cerc tangent exterior la cele două cercuri date (**Fig. 7,a**).

Din $\mathbf{O_1}$ şi din $\mathbf{O_2}$ se duc două arce de cerc, de raze egale cu sumele $\mathbf{R + r_1}$ şi, respectiv, $\mathbf{R + r_2}$. La intersecţia lor se află centrul cercului / arcului căutat $\mathbf{O(x_O, y_O)}$. Soluţia este evidentă, deoarece, distanţele OO_1 şi OO_2 sunt tocmai sumele razelor cercurilor tangente în punctele $\mathbf{T_1}$ şi, respectiv, $\mathbf{T_2}$.

7.3 CÂND SE CUNOAŞTE RAZA R A ARCULUI DE RACORDARE TANGENT INTERIOR LA CELE DOUĂ CERCURI DATE

Soluţia este asemănătoare cazului precedent, cu deosebirea că arcurile de cerc sunt egale cu diferenţa razelor, adică $\mathbf{R - r_1}$ şi, respectiv, $\mathbf{R - r_2}$ (**Fig. 7, b**), din aceleaşi motive:

$\mathbf{OT_1} = \mathbf{R} - r_1$ şi $\mathbf{OT_2} = \mathbf{R} - r_2$.

7.4 CÂND SE CUNOAŞTE RAZA R A ARCULUI DE RACORDARE TANGENT INTERIOR LA UN CERC ŞI TANGENT EXTERIOR LA AL DOILEA CERC.

Soluţia, facil de determinat, reprezintă o combinaţie a celor două cazuri anterior tratate.

Din O_1 (Fig. **7,c**) se duce arcul de cerc $R_1 = \mathbf{R} + r_1$, deoarece în $\mathbf{T_1}$ cercurile sunt dorite a fi tangente exterioare, iar din O_2 se duce arcul de rază $R_2 = \mathbf{R} - r_2$, deoarece în $\mathbf{T_2}$ cercul căutat este tangent interior la cercul C_2 dat.

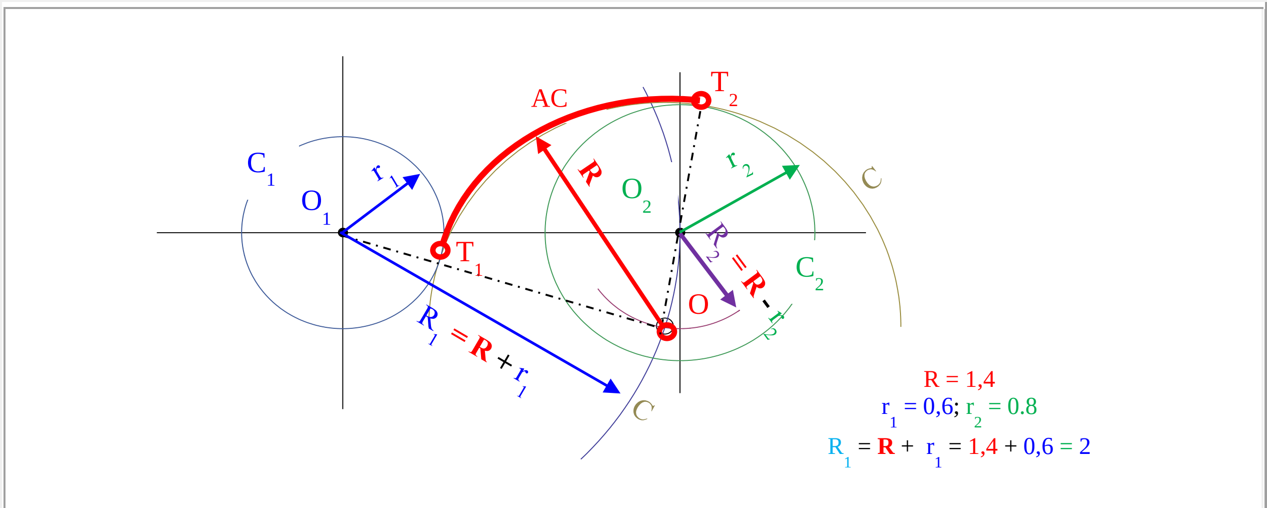
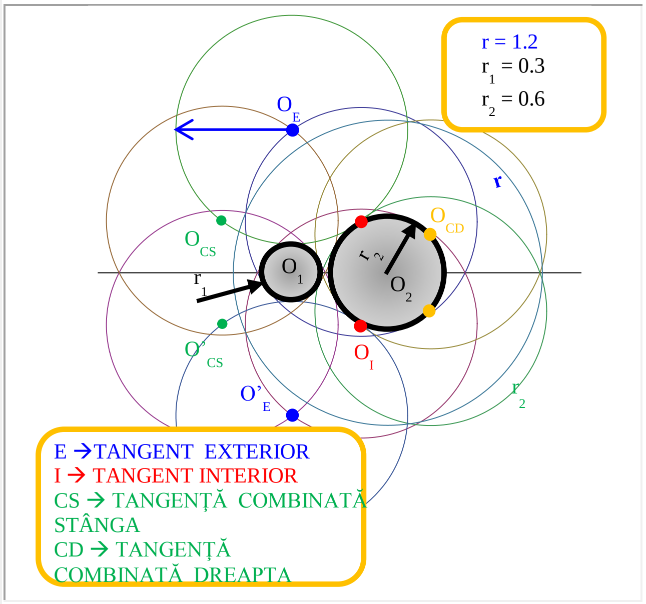


Fig.7,c Racordarea cercurilor $\mathbf{C_1}$ şi C_2 cu un arc de cerc (**AC**) de rază **R dată**, arc tangent exterior la un cerc şi tangent interior la al doilea cerc

www.supermathematica.com | **www.eng.upt.ro/~mselariu** | www.supermatematica.ro




```
r = 1.2;  r1 = 0.3, r2 = 0.6
R1E = 1.5
R2E = 1.8
NSolve[{x^2+y^2= =1.5^2,(x-1)^2+y^2= =1.8^2},{x,y}]
      {{x→0.005,y→-1.49999},{x→0.005,y→1.49999}}
R1I =0.9
R2E = 1.8
NSolve[{x^2+y^2= =0.9^2,(x-1)^2+y^2= =1.8^2},{x,y}]
      {{x→-0.715,y→0.546603},{x→-0.715,y→-0.546603}}
R1E = 1.5
R2I = 0.6
      NSolve[{x^2+y^2= =1.5^2,(x-1)^2+y^2= =0.6^2},{x,y}]
    {{x → 1.445, y → −0.4024611782520147}, {x → 1.445, y
                 → 0.4024611782520148}}
R1I= 0.7
R2I = 0.8
NSolve[{x^2+y^2= =0.9^2,(x-1)^2+y^2= =0.6^2},{x,y}]
      {{x→0.725,y→-0.533268},{x→0.725,y→0.533268}}
```

Calculul coordonatelor celor 8 centre **O$_i$** ale cercurilor soluţii **C$_i$**

Fig.7,d Cele **8** cercuri - soluţii de aceeaşi rază **r** dată, tangente la două cercuri **C$_1$**(O_1,r_1) şi **C$_2$** (O_2,r_2) cunoscute / date / fixe

La intersecţia celor două arce de cerc se află centrul cercului **C** şi centrul arcului de cerc **AC** căutat. Pentru tangenta interioară la R_1 şi tangentă exterioară la R_2, arcele de cerc vor fi R'_1 = **R** - r_1 şi R'_2 = **R** + r_2.

Dacă nu se face referire la un arc de racordare, ci la un cerc tangent celor două cercuri date, atunci exista **8** soluţii, prezentate în **figura 7,d**. Dintre acestea, câte două soluţii, simetrice faţă de axa x, sunt pentru cercurile tangente interior şi, respectiv exterior la cele două cercuri date.

Combinaţiile anterioare de cerc tangent interior la unul dintre cercuri şi exterior la celălalt, are **4** soluţii de indici S→stânga şi **D → dreapta**, ambele simetrice şi ele faţă de axa **Ox**, determinată de centrele **O$_1$** şi **O$_2$** ale celor două cercuri date. Determinarea centrelor cercurilor tangente în cele 8 soluţii / cazuri au fost realizate ca intersecţie a arcelor de cerc $\mathbf{R_{1E} = r + r_1}$ cu $\mathbf{R_{2E} = r + r_2}$; $\mathbf{R_{1I} = r - r_1}$ cu $\mathbf{R_{2I} = r - r_2}$; şi a celorlalte combinaţii, intersecţii soluţionate cu programul **MATHEMATICA 8** a lui **Stephan Wolfram** şi prezentat în dreapta figurii **7,d**.

8. CERC TANGENT LA DOUĂ CERCURI DATE ŞI TRECÂND PRINTR-UN PUNCT EXTERIOR A

Această operaţie matematică, realizată prin diverse transformari matematice în plan, este un pas hotarâtor spre soluţionarea problemei lui **Apollonius**, de ***determinare a cercurilor tangente la 3 cercuri date***. Odată rezolvată aceasta problemă **8**, pasul următor, şi ultim, este extrem de simplu, de a trasa cercuri concentrice cu cele anterior obţinute.

Transformările geometrice **T** pot fi închipuite ca un plan **Π**, materializat printr-o placă plană rigidă, peste care s-a suprapus o folie rigidă sau una elastică transparente. Oricărui punct **M,** marcat pe placa rigidă, din planul Π, îi corespunde, sau este marcat, şi pe folia transparentă.

Orice mişcare dată foliei **rigide**, în raport cu placa rigidă, este o ***transformare geometrică* TG** denumită **izometrie** (isos → " egal ", morphe → "formă"), adică, ***care păstrează forma şi dimensiunile*** entitaţilor geometrice ale plăcii cât şi ale foliei rigide, ***nu şi poziţia lor relativă***. Astfel, se disting :

- **Translaţia T**, dacă mişcarea foliei rigide este singulară, paralelă cu placa rigidă (**Π**) , pe o direcţie, sens şi mărime date de vectorul de translaţie $\vec{\mathbf{t}}$;
- **Rotaţia R,** faţă de un centru (de rotaţie) **O** şi cu un unghil orientat $< (aOb)$, dacă mişcarea foliei rigide este singulară şi dacă folia rigidă se roteşte într-un plan paralel cu placa rigidă (**Π**), faţă de punct fix **O** a placii rigide**;**
- **Roto-translaţia R-T**, obţinută prin două mişcări ale foliei rigide: de translaţie cu vectorul $\vec{\mathbf{t}}$, urmată de o rotaţie în jurul centrului **O** cu unghiul orientat $< (aOb)$, sau întâi rotaţia şi apoi translaţia;
- **Oglindirea** sau **simetria** faţă de o axă (de simetrie **X** sau **Y** sau o dreaptă **d** oarecare din **Π**), când folia se roteşte faţă de o dreaptă **d',** paralelă cu dreapta **d** dată şi apoi este reaşezată peste placa rigidă (**Π**). Altfel / altminteri folia loveşte placa rigidă !
- **Simetria faţă de un punct** sau centru de simetrie, când se realizează două rotaţii ale foliei rigide, faţă de două axe reciproc perpendiculare, care sunt concurente în centrul de simetrie: una poate fi axa **Ox**, iar a doua axa **Oy**, caz în care, originea **O(0,0)** este / devine centrul de simetrie.

  Rezultă că orice ***izometrie*** **T** transformă în planul **Π :**
  - Un segment **[MN]** într-un segment **[M'N']** de aceeaşi lungime ;
  - O semidreaptă **[Ox** într-o semidreaptă **[O'x** ;
  - O dreapta **d** într-o dreaptă **d'** ;
  - Un semiplan **[S** într-un semiplan **[S'.**

  Orice ***izometrie*** TI a planului **Π** este o **transformare injectivă**, deoarece **TI**(M) = **TI**(N)

$\Rightarrow M = N$ şi o **transformare surjectivă**, deoarece $\forall\, \boldsymbol{Y} \in \Pi \;\; \exists\, \boldsymbol{X} \in \Pi \;\; \rightarrow$ **TI**(**X**) = **Y**

Deoarece o ***izometrie*** **TI** este ***bijecţie***, se poate pune în evidenţă transformarea $\mathbf{TI}^{-1}$, numită inversa transformării **TI**, caracterizată prin **TI**(M) = M' $\Leftrightarrow$ $\mathbf{TI}^{-1}$ (M') = M

Înainte de a denumi prima transformare geometrică de alt gen, suntem datori să justificăm de ce utilizăm denumirea veche şi aproape universală de **homotetie** (homothetic, homothéticque, homothetisch în limbile engleză, franceză şi germană) şi de **hiperbolă**, **hiperboloid** şi nu cele caraghioase de **omotetie**, **iperbolă**, **iperboloid** ş.m.a.

Există un popor slav, care deşi are în alfabet litera **H**→X vorbeşte de **G**hitler, de **g**omotetie → **ГОМОТЕТЍЯ** (MATEMATICESKII ENŢICLOPEDICESKII SLOVARI, Moskva, SOVETSKAIA ENŢICLOPEDIA, 1988, pag. 160), şi multe altele de acest gen. Şi un alt popor, care este de părere că ”***capul plecat sabia nu-l taie***” şi mergând cu el aşa (***cu capul***) încă de pe vremea principatelor, cei cu sabia, au uitat să mai privească măcar înainte, dacă în sus li se părea prea mult. Unora. Şi au acceptat, nu chiar toţi, ci cei docili, să–şi modifice limba lor latină, moştenită / lăsată de la moşi-strămoşi, ca să pară că-i o limbă slavă şi să facă pe placul ”***fratelui cel mare şi tare de la răsărit*** ”. Aşa a dispărut î din a (â), q, **w** şi au apărut fel de fel de noutăţi caraghioase printre care şi **omotetia, *iperbola, iperboloidul,*** ş.m.a., chiar prea multe, **cuasi** (DICTIONAR POLIGLOT DE MATEMATICA, MECANICA SI ASTRONOMIE, Ed.Tehnică , Buc. 1978) sau **cvasi** (DOOM, 2005), dar s-a păstrat **Watt**. Mă uit cu uimire în minunatele cărţi ale lui **Nicolae N. Mihăileanu**, pentru care am o stimă deosebită, în care **omotetia** este notată cu **H**. ***Am înţeles foarte clar aluzia*** şi n-am vrut să rămân la "iluzie". E totuşi ”ceva”, mai mult decât ”nimicul” întreprins de Academia României după..După ce ? După ***loviluţie*** !

Pentru alte tipuri de transformări geometrice care nu mai păstrează mărimea figurilor geomtrice, şi care interesează în mod deosebit în lucrarea de faţă, trebuie utilizată **folia super-elastică**, sau, mai precis, cu elasticitate controlată.

Transformările geometrice care reclamă o folie ***super-elastică*** sunt :

- **Homotetia** de centru sau pol **O** şi de modul sau raport **k**, număr real, notată $\mathrm{H_O}^{k}$, care se obţine când folia ***supe-elastică*** se fixeaza de placa rigidă intr-un punctul **O**, cu un ac, apoi folia se dilată uniform, dacă **k > 0**. Dacă k < 0, folia se contractă uniform, după care folia astfel contractată suferă o simetrie faţă de punctul / centrul **O**.

Pentru **k = 1 homotetia** devine şi ea o transformare **izometrică identică**, iar pentru **k = – 1** se interpretează **simetria faţa de un punct** ca **homotetie.** Într-o transformare **homotetică** de centru **O**, un punct oarecare **M** şi transformatul acestuia **M'**= H_O^k(**M**) sunt puncte coliniare şi, în plus,

k = $\frac{OM'}{OM}$, sau OM'= **k**· **OM.**

- **Inversiunea** de pol / centru de inversiune **O** şi putere / modul de inversiune $k \cdot u^2 \neq 0$, în care **u** este unitatea de măsură a lungimilor, este o transformare **I** ce asociază fiecărui punct **M** ≠ **O** punctul **M' = I(M)** cu proprietatea $\overline{OM}.\overline{OM'} = k.u^2$, ce include şi coliniaritatea punctelor **M**, **O** şi **M'.**

Există o serie de **proprietăţi** ale inversiunii care interesază în continuare. Acestea sunt :

P1) O dreaptă care trece prin centrul de inversiune **O** se transformă în ea însăsi, iar un plan, care trece prin centrul de inversiune **O** se transformă în el însuşi ;

P2) Produsul a două **inversiuni** de acelaşi centru **O** este o **homotetie** de centru **O** şi de modul egal cu raportul modulelor celor două inversiuni ;

P3) O dreaptă **d** care **nu trece** prin ***centrul O*** se transformă, printr-o inversiune dată, într-un cerc care **trece** prin centrul de inversiune **O** şi are raza R = $\frac{|k|}{2.OA}$, în care **A** este proiecţia centrului **O** de inversiune pe dreapta **d**, sau piciorul perpendicularei coborâtă din **O** pe dreapta **d**;

P4) Reciproc, un cerc care **trece** prin centrul de inversiune **O** se transformă, printr-o inversiune dată, într-o dreaptă perpendiculară pe diametrul care **trece** prin centrul de inversiune **O** ;

P5) În planul Π există o inversiune care transformă un cerc **C(Ω, r),** care **nu trece** prin centrul de inversiune **O** în el însuşi. Această inversiune, notată I_1, are modulul ρ egal cu puterea centrului **O** faţă de cerc; $\rho = \sqrt{d^2 - r^2}$, adică, cu lungimea tangentei dusă din **O** la cercul **C(Ω, r),** în care **d** este distanţa de la **O** la centrul **Ω** alcercului **C**, iar **r** este raza acestui cerc.

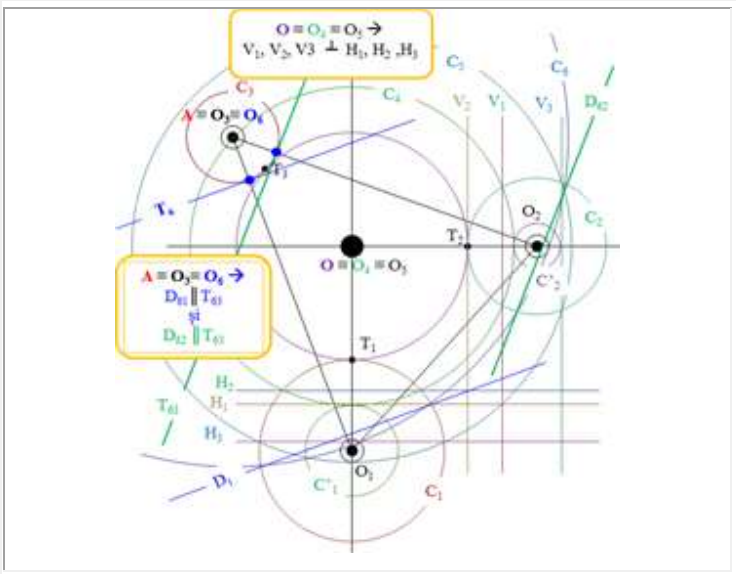


Fig. 8,a Cerc tangent exterior în spaţiul interiorul al celor trei cercuri date.
Paralelismul coardelor şi al tangentelor

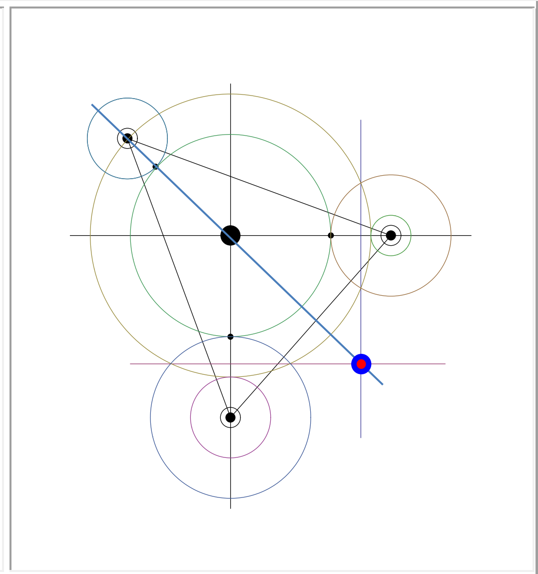


Fig. 8,b Cerc tangent exterior în spaţiul interiorul al celor trei cercuri date.
Punctul **I** de intersecţie al coardelor.

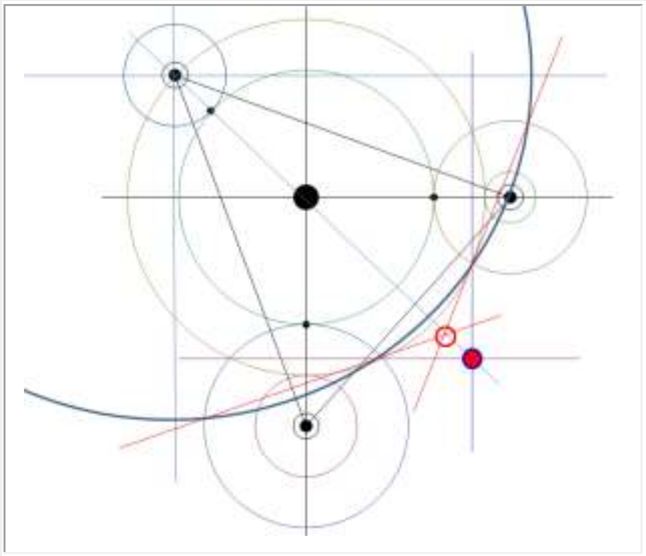


Fig. 8,c Cerc tangent exterior în spaţiul interior al celor trei cercuri date.
Menţinerea pe mediatoarea segmentului $\mathbf{O_1O_2}$ a punctul **I** de intersecţie al coardelor.

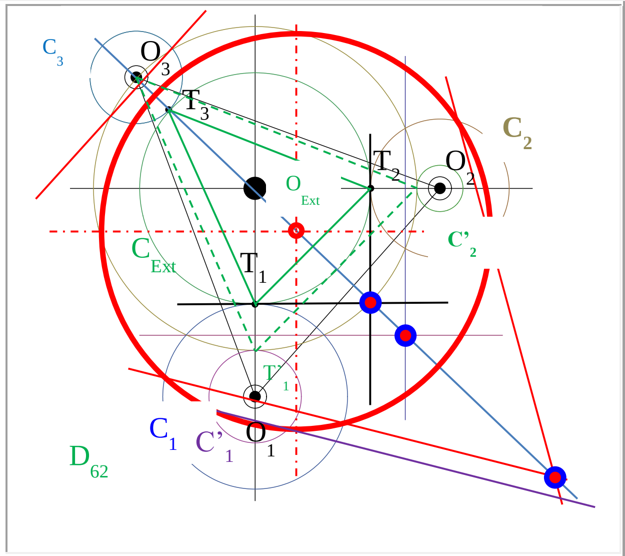


Fig. 8,d Cerc tangent exterior în spaţiul interior al celor trei cercuri date.
Paralelismul laturilor triunghiului $\Delta \mathbf{O_3T'_2T'_1}$ cu laturile triunghiului $\Delta \mathbf{T_1T_2T_3}$

P6) În planul Π, un cerc **C**, care nu trece prin centrul de inversiune, se transformă prin inversiunea **I**, de centru **O** şi modul ***k***, într-un cerc **C'**. Centrele celor două cercuri sunt transformatele prin homotetia de centru O şi modul $\frac{k}{\rho}$;

P7) Unghiul a două curbe se pastrează prin inversiune;

Vor fi folosite în continuare, în ordine, proprietaţile **P5), P4)** şi **P6)**.

Cazul 9.1 PUNCTUL EXTERIOR ESTE A ≡ O, ESTE CENTRUL CERCULUI LUI Apollonius din Perga C(O,R), CERC TANGENT LA TREI CERCURI DATE (C_1, C_2, C_3)

Cele două cercuri date sunt $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$, iar punctul exterior ales "arbitrar", în primul caz, este $\mathbf{A \equiv O_3 \equiv O_6}$. Un cerc intersectează un alt cerc în două puncte $\mathbf{P_1}$ şi $\mathbf{P_2}$. Dacă cercurile sunt tangente, atunci punctul de tangenţa **T** este un **punct dedublat**, adică $\mathbf{P_{1,2} \rightarrow T}$ în **T** sunt, deci, două puncte suprapuse, aşa cum se afirmă şi în [12].

Cele două puncte de intersecţie a două cercuri determină o dreaptă secantă a acestora. Un alt cerc, de raza diferită, dar de acelaşi centru, va intersecta acelaşi cerc, evident, în alte două puncte care, la rândul lor vor determina o a doua secantă, care va fi paralela cu prima, **dacă** centrele celor două cercuri sânt în coincidere, cazuri ilustrate în **figurile 8,a** prin liniile secante paralele $H_1 \parallel H_2 \parallel H_3$ şi $V_1 \parallel V_2 \parallel V_3$.

Din intersecţia unui cerc cu alte două cercuri, când aceasta există, rezultă 4 puncte şi două secante, care se pot intersecta într-un punct de intersecţie **I** (**Fig.8,b**), care se află pe o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor (mediatoarea segmentului $\mathbf{O_1O_2}$) celor două cercuri $\mathbf{O_1O_2}$, perpendiculară dusă / coborâtă din centrul cercului ($\mathbf{O \equiv O_4 \equiv O_5}$) care intersectează cele două cercuri date.

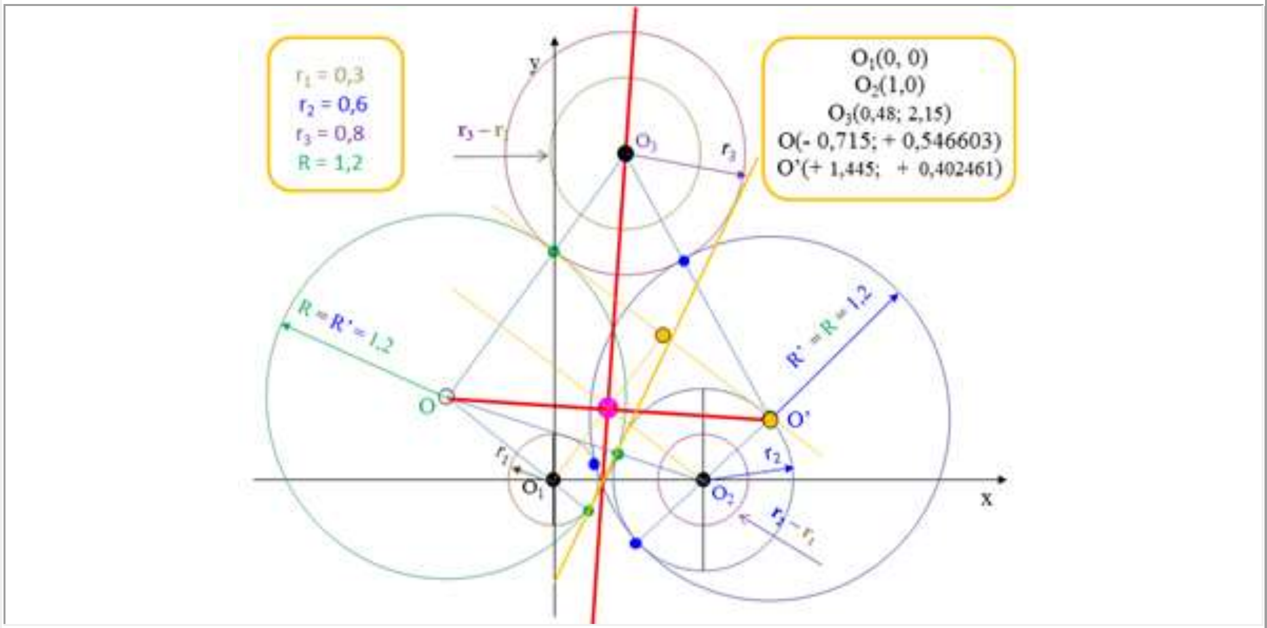


Fig. 8,e Cercuri de aceeaşi raza **R** = **R'** tangente la trei cercuri date

Acelaşi lucru se întâmplă şi dacă centrul cercului rămâne pe mediatoarea segmentului $\mathbf{O_1O_2}$, aşa cum se ilustrează, cu roşu, în **figura 8,c**; cercul de culoare albastru-închis, de rază foarte mare, având centrul în punctul superior $\mathbf{O_3}$, centrul celui de al treilea cerc $\mathbf{C_3}$.

În **figura 8,e** apare un caz mai interesant, în care cele două cercuri tangente combinat la cele două şi respectiv la cele trei cercuri au razele de aceeaşi dimensiune **R** = **R'** = **1,2**. Desenul poate fi considerat ca un extras din desenul din **figura 7,d**, în care toate cele **8** cercuri soluţie sunt de aceeaşi dimensiune

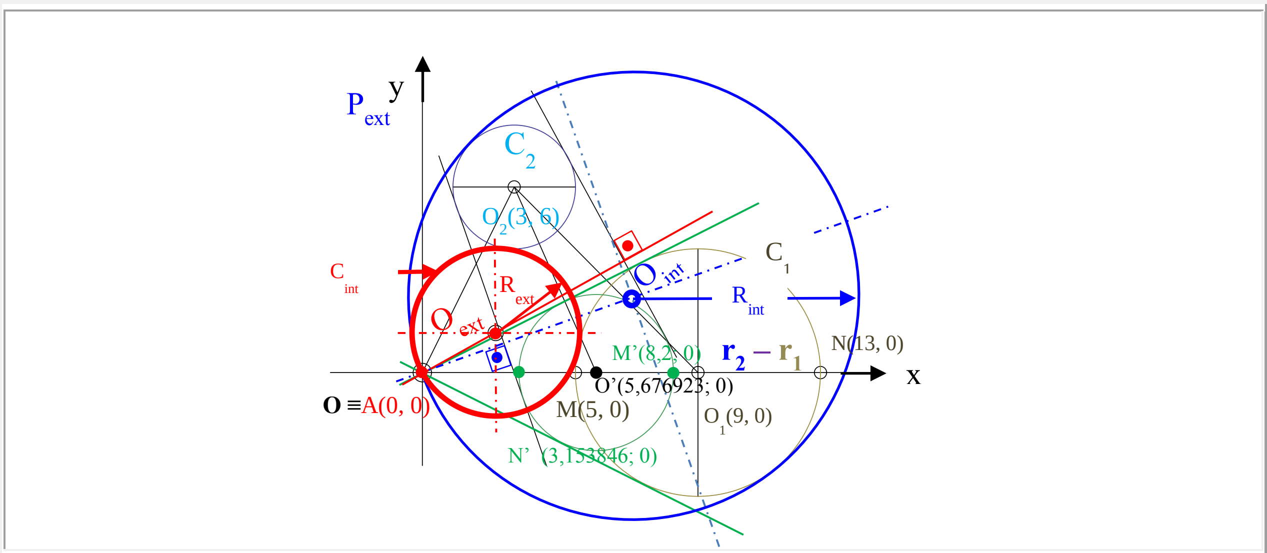


Fig. 9,a Desen explicativ la metoda grafică, grafo-analitică şi analitică **Şelariu**

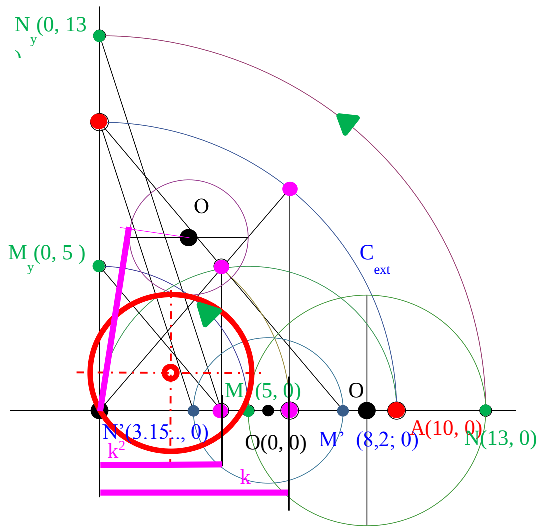
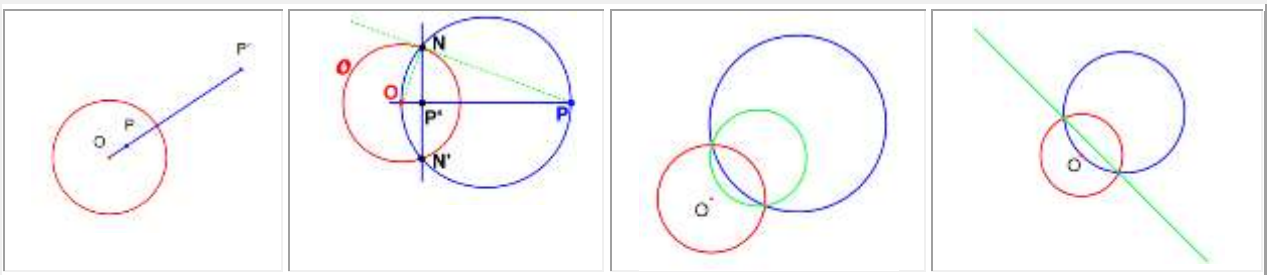


Fig.9,b Desen la metoda grafică **Şelariu**

Cazul 9.2 METODA Şelariu [2] A INVERSIUNII UNUI SINGUR CERC

Inversiunea în plan este o transformare extrem de utilă în rezolvarea problemelor de geometrie, inclusiv a acesteia. Ea se bazează pe mai multe teoreme simple. Prima este puterea unui punct faţa de un cerc, tratată la pag.9 din [21].

` Fie **C(O, r)** un cerc în planul **Π**. Oricare ar fi punctele **A**, **B**, **A'**, **B'** ∈ **C**, astfel ca dreptele **AB** şi **A'B'** să se intersectezeb în **P**, are loc egalitatea **PA·PB** = **PA'·PB'**, proprietate care se poate demonsta uşor şi din asemănarea triunghiurilor Δ **PAB** cu Δ **PA'B'** şi prin proporţionalitatea laturilor lor



P' este inversul lui **P** faţa de cerc şi invers / viceversa	**P'** este inversul lui **P** faţă de cercul C(O, R). Şi invers / viceversa, **P** este inversul lui **P'** faţă de cercul C(O, R).	Invers, faţă de cercul roşu, un cerc care nu trece prin O (albastru) este un cerc ce nu trece prin O (verde) şi invers / viceversa.	Inversul, faţă de cercul roşu, a unui cerc care trece prin O (albastru) este o linie care nu trece prin O (verde) şi invers / viceversa.

Fig.10 Inversiuni diverse faţă de un cerc (roşu)
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Inversion_in_circle_2.png

(v.şi **3.9** TEOREMA TANGENTELOR: (23) $p^2(E) = \overrightarrow{EM_1} \bullet \overrightarrow{EM_2} = e^2 - R^2$, **M₁** şi **M₂** $\in$ **C**)
şi, cu notaţiile din **figura 9,a**,

(41) $k^2 = A_2^2 - R_2^2 = (3^2 + 6^2) - 2^2 = 41$.

O alta teorema de bază este **3.7.** TEOREMA SECANTELOR care afirmă că ”O secantă mobilă, dusă dintr-un punct **E**, taie un cerc în punctele M_1 şi M_2. Şi că produsul $EM_1 \bullet EM_2$ este constant”.

Anterior a fost dedusă această constantă ca fiind

(21) $k^2 = \mathbf{r_{11} \bullet r_{21} = r_{12} \bullet r_{22} = e^2 - R^2 > 0}$ sau $rex_1\,\theta . rex_2\,\theta = rex_1\theta' . rex_2\theta' = (s^2 - 1)$, $e \equiv A_2$,

Fiind aceeaşi cu cea dedusă / calculata anterior pentru cazul din **figura 9,a** şi **9,b**.

Acestea fiind reamintite, se poate definii inversiunea în plan ca fiind o transformare a planului **Π** prin care fiecărui punct **M** $\in$ **Π – {O}** i se asociază un punct **M’** pe dreapta **OM,** astfel încât **OM · OM’ = k**, iar punctului **O**, denumit polul inversiunii, i se asociază punctul **O** însuşi, adică polul inversiunii este invariant şi toate dreptele care trec prin polul **O** al inversiunii sunt invariante.

Inversul cercului **C₂**, în inversiunea de centru (de inversiune) **A** şi de modul **k** şi putere de inversiune $\mathbf{k^2 = A_2^{\,2}} - r_2^2$, este cercul $C_2(O_2, r_2 = 2)$ însuşi şi punctele de pe aceste cercuri **M** şi **M’** sunt inverse unul altuia.

Inversul cercului $\mathbf{C_1(O_1(9,0), r_1 = 4)}$ în inversiunea de centru **A** şi de modul **k** este cercul $\mathbf{C'_1(O_1, r'_1 = 2{,}523076923076923)}$ cu centrul în $\mathbf{O'_1(5{,}676923076923076;\ 0)}$.

Situaţia este prezentată în **figura 9,a** şi în **figura 9,b** este prezentată determinarea grafică a unor mărimi necesare de transformare prin inversiune.

Punctul **A** ≡ O(0, 0) s-a ales drept origine a unui reper cartezian drept **xOy**, iar cercul $\mathbf{C_1(O_1, r_1 = 4)}$ are centrul în $\mathbf{O_1(9, 0)}$ pe axa Ox, aşa cum simplu se poate observa.

Cercul $C_2(O_2, r_2 = 2)$ are centrul O_2 (3, 6) la distanţă $\mathbf{A_2}$ de punctul **A** şi O(0, 0), distanţă dată de

(41’) $A_2 = \left\|\overrightarrow{AO_2}\right\| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6{,}708203932499369$

Apollonius din Perga a rezolvat problema prin inversiunea celor **<u>două cercuri</u>**.

Soluţia se simplifică mult dacă se alege drept pol de inversiune punctul dat **A(0, 0)** şi drept modul **k** al inversiunii lungimea **k** a tangentei din **A** la cercul **C₂**. În acest caz, transformatul prin inversiune a cercului **C₂** se zice că este cercul **C₂** însuşi, dar mai corect, este un cerc **C’₂**, aparent identic cu **C₂**, suprapus peste acesta (**C₂**), deoarece punctele $\mathbf{M_i} \in \mathbf{C'_2}$ sunt inversele punctelor $M_i \in \mathbf{C_2}$.

Rezultă semnificaţia geometrică a modulului de inversiune **k**, ca fiind tocmai lungimea tangentei, adică a segmentului $\mathbf{AT_2}$ şi **figura 9,b**.

Inversiunea cercului **C₁** se determină facil prin inversiunea a doauă puncte **M(5, 0)** şi **N(13, 0)**, <u>diametral opuse</u>, în cazul considerat, de pe axa **Ox**. Inversele lor sunt punctele **M’(8,2 ; 0)** şi **N’(3,135.. ; 0)**, evident, plasate tot pe axa **Ox**. Ca urmare

(42) **OM’ ≡ AM’** $= \frac{k^2}{OM} = \frac{41}{5} = 8{,}2$ şi

(43) **ON’ ≡ AN’** $= \frac{k^2}{ON} = \frac{41}{13} = 3{,}1538461538461537$

Semisuma acestor abscise va exprima abscisa centrului **O’₁** a cercului inversat

(44) $x_{O'1} = \frac{1}{2}(x_{M'} + x_{N'}) = \frac{1}{2}(8{,}2 + 3.1538461538461537) = 5{,}676923076923076$,

iar semidiferenţa, raza acestuia **r’₁**

(45) $r'_1 = \frac{1}{2}(x_{M'} - x_{N'}) = \frac{1}{2}(8{,}2 - 3.1538461538461537) = 2{,}523076923076923$.

Printr-o inversiune i_O^k oricare 4 puncte situate pe un cerc, care conţine şi el polul inversiunii, se transformă în patru puncte de pe o dreapta care nu conţine polul inversiunii (**Fig. 10**). Sau, inversul, faţă de cercul roşu, a unui cerc care trece prin O (albastru) este o linie care nu trece prin O (verde) şi viceversa.

Apelând la experimentele imaginare, atât de cunoscute, ale lui **Einstein**, să anticipăm şi să ne inchipuim că cercurile tangente la cele două cercuri există deja, pentru că, în final, ele vor fi determinate.

Prin transformarea i_O^k considerată şi efectuată cu cele 2 cercuri date, în ce se vor fi transformat cercurile tangente acestora ?

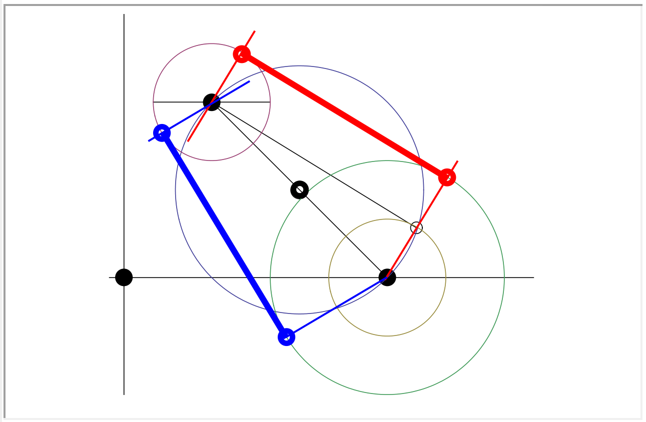


Fig. 11,a Construcţia grafică a tangentei exterioare la două cercuri

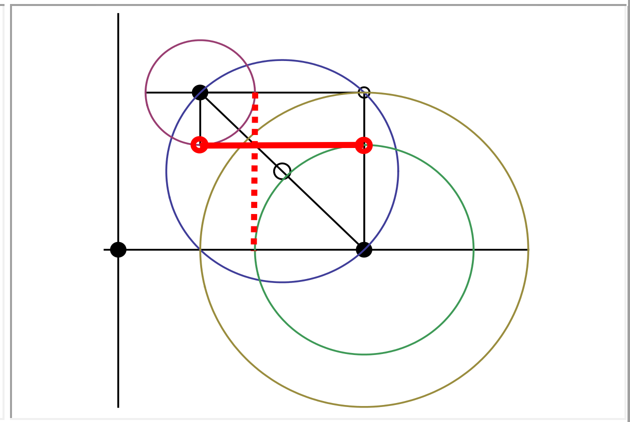


Fig. 11,b Construcţia grafică a tangentei interioare la două cercuri

Cercurile C_i, care urmeaza a fi determinate, unul tangent interior, altul tangent exterior şi alte două tangente combinat la cele două cercuri date $\mathbf{C_{Ext}}$ şi $\mathbf{C_{Int}}$, trecând prin polul **A** ≡ **O** / centrul de inversiune, sunt drepte, mai precis, sunt cele **4 drepte tangente** la cele două cercuri transformate
$\mathbf{C'_2} \rightarrow \mathbf{C_2}$ şi $C'_1 = i_O^k(\mathbf{C_1})$.

Inversele acestor drepte, adică inversele inversatelor, sunt tocmai cele 4 cercuri soluţie ale problemei, tangente la $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$ şi trecând prin polul dat **A** ≡ **O(0, 0)**.

Centrele $\mathbf{O_i(x_i, y_i)}$ ale cercurilor căutate $\mathbf{C_i(O_i, R_i)}$ sunt, pe de o parte, situate pe perpendicularele duse din **A** ≡ **O** pe aceste drepte, iar, pe de altă parte, poziţia lor pe aceste perpendiculare este în punctul de inversiune al picioarelor $\mathbf{P_i}$ ale acestor perpendiculare, adică $\mathbf{O_i(x_i, y_i) = i_O^k(P_i)}$.

Este evident că, dacă **A** ≡ **O** ∈ $\mathbf{C_i(O_i, R_i)}$, adică aparţine tuturor cercurilor, iar $\mathbf{O_i(x_i, y_i)}$ sunt centrele acestora, razele lor $\mathbf{R_i}$, vor fi reprezentate de distanţele $\mathbf{R_i} = \| \overrightarrow{AOi} \|$.

Modul de determinare grafică a tangentelor exterioare şi a celor interioare la două cercuri, aici e vorba de cercul $\mathbf{C_2}$ sau, mai precis, $\mathbf{C'_2}$ şi de cercul transformat $\mathbf{C'_1}$ prin inversiunea $\mathbf{C'_1} = i_O^k(\mathbf{C_1})$, este ilustrat în **figura 11,a** şi **10,b** şi nu necesită, cred, explicaţii.

Evident că tangentele $\mathbf{t_i}$, punctele de tangenţă $\mathbf{T_{1i}}$ şi $\mathbf{T_{2i}}$, perpendicularele duse din **A** ≡ **O** pe aceste tangente şi coordonatele punctelor / picioarele $\mathbf{P_i}$ ale acestor perpendiculare pot fi determinate analitic [3], grafic [2] sau grafoanalitic. În **figura 9,b** ca şi în lucrarea [1, Cap. 3, §3.8 **"Forma geometrică a expresiilor exponenţiale de forma $\mathbf{x^n}$ si $\mathbf{x^{1/n}}$"**, pag. 87] sunt indicate modurile de determinare grafică a unor mărimi geometrice la exponenţi de diverse valori şi tipuri.

Deoarece, la proiectarea capetelor multiaxe de burghiere, filetare ş.a. din componenţa liniilor de transfer automat şi a maşinilor-unelte agregate de prelucrare mecanică prin aşchiere a pieselor nu interesează decât soluţiile tehnice acceptabile, cu roată dinţată exterior şi / sau cu coroană dinţată interior, în **figura 8,c** au fost prezentate doar aceste două variante. De aceea sunt prezentate doar cele două tangente exterioare la $C'_1(O'_1, r'_1)$ şi cercurile $\mathbf{C_2}(O_2, r_2) \rightarrow \mathbf{C'_2}\ (O_2, r_2)$, dar <u>numai</u> de acelaşi centru $\mathbf{O_2}$ şi aceeaşi rază $\mathbf{r_2}$; repartizarea punctelor pe aceste două cercuri, aparent identice, fiind diferită !

Cercul tangent la cele două cercuri, ce trece prin **A,** este $\mathbf{C_{Ext}(O_{Ext}, R_{Ext})}$ cu centrul în inversul punctului $\mathbf{P_{ext}}$, adică $O_{Ext} = \mathbf{I_O^k(P_{Ext})}$, iar centrul cercului tangent interior $\mathbf{C_{int}(O_{int}, R_{Int})}$ este inversul punctului $\mathbf{P_{Int}}$, piciorul perpendicularei din **A** pe tangenta din stânga la cele două cercuri inversate.

Razele acestor cercuri se determina facil, ca modul al distanţelor de la **A** la centrele cercurilor soluţie, adică **R**$_{Ext}$ = $\|(\overline{AO_{Ext}})\|$ şi **R**$_{Int}$ = $\|(\overline{AO_{Int}})\|$.

9.3 ANEXA 1: ECUAŢIA UNEI DREPTE TANGENTĂ LA UN CERC DUSĂ DINTR-UN PUNC EXTERIOR CERCULUI

Extras din lucrarea autorului

DETERMINAREA PUNCTELOR DE INTERSECŢIE DIN TEOREMA LINIILOR CONCURENTE A LUI FLORENTIN SMARANDACHE (Smarandache's Concurrent Lines Theorem)

Sunt cunoscute, în literatura matematică, următoarele ecuaţii ale dreptelor în plan:

1) Care trece prin două puncte $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$, sau care este determinată de cele două puncte:

(1) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

2) De coeficient unghiular m = tanα, sau de orientare de unghi α, care trece prin P_0 (x_0, y_0):

(2) $y - y_0 = m(x - x_0)$; sau $y - y_0 = tan\alpha(x - x_0)$;

3) De coeficient unghiular m şi ordonată la origine n:

(3) $y = mx + n,$ sau $y = x.tan\alpha + n$;

4) Cu tăieturile a şi b pe axele de coordonate:

(4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, b → ∞ → x = a → D ‖Oy; a → ∞ → y = b → D ‖Ox .

5) Ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul P_0 (x_0, y_0) şi face un unghi α cu axa Ox:

(5) $\begin{cases} x = x_0 + r.cos\alpha \\ y = y_0 + r.sin\alpha \end{cases}$;

6) Ecuaţia generală a dreptei:

(6) Ax + By + C = 0, → m = tanα = $-\frac{A}{B}$; b = $-\frac{C}{A}$; C = 0 → O(0,0) ⊂ D; B = 0 → D ‖Oy, A = 0 → D ‖Ox.

Ecuaţia generală a dreptei poate fi redusă la forma normală prin înmulţirea cu **factorul de normare** $\mathbf{M} = \pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2}}$**,** semnul lui **M** fiind opus semnului lui **C.**

Între coeficienţii A, B şi C şi parametrii α şi p există următoarele relaţii

$cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = A.\boldsymbol{M}$; sin$\alpha$ =$\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = B.\boldsymbol{M}$; p = $\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = C.\boldsymbol{M}$

7) Ecuaţia normală a dreptei (**Hesse**):

(7) x.cosα + y.sinα - p = 0,

în care, unghiul α este unghiul direcţiei normalei din O(0, 0) la dreapta D şi p este lungimea acestei normale, sau distanţa de la originea O(0, 0) la dreaptă.

8) Ecuaţia tangenţei la cercul C(O,R) în **$P_0(x_0, y_0)$ ⊂ C(O,R)** obţinută prin dedublarea ecuaţiilor cercului:

(8.1) $x_0.x + y_0.y - R = 0$,

(8.2) $x_0.x + y_0.y + a(x_0 + x) + b(y_0 + y) + c = 0,$

(8.3) $\vec{r}.\vec{r}_1 - R^2 = 0$, sau $\vec{r}.\vec{r}_1 = R^2$ ecuaţiile vectoriale ale tangentei în $P_1 \subset C(O, R)$, la cercul centrat în originea O(0, 0), în care $\vec{r}_1$ este vectorul de poziţie din O(0,0) al punctului de tangenţă al cercului P_1, iar $P(\vec{r})$ este punctul curent al dreptei tangente.

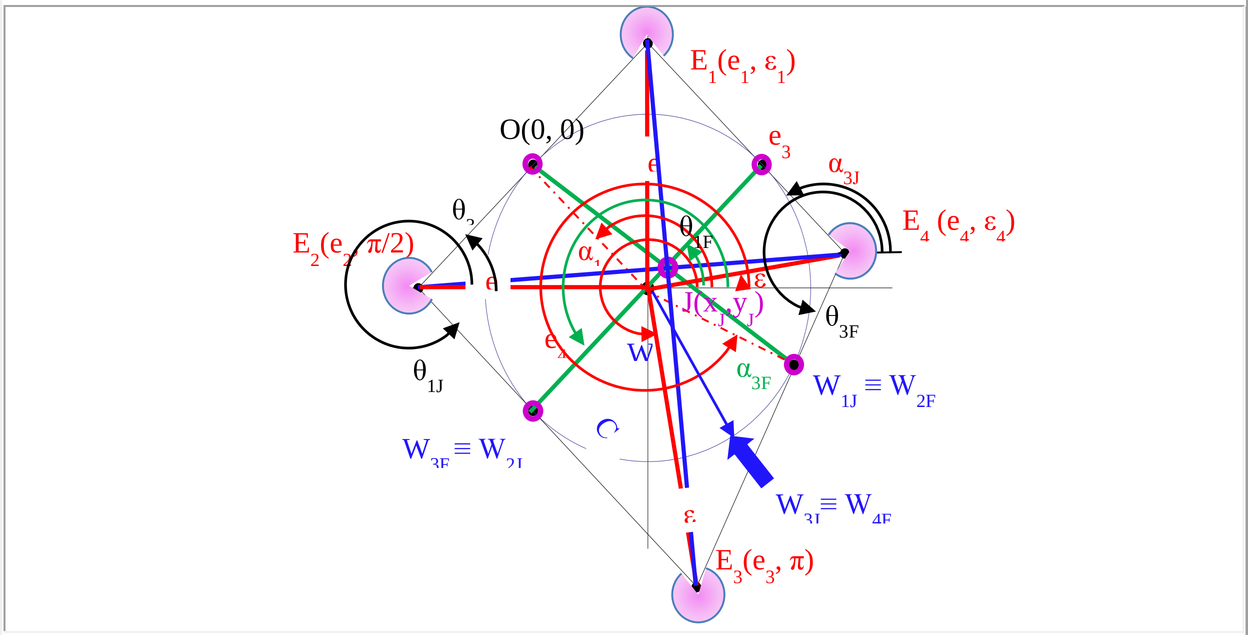


Fig.12, Vârfurile patrulaterului, ca puncte excentre **E_i**, **i** = 1, 2,… , 4

Ca urmare a tangenţei drepta D şi vectorul $\vec{r}_1$ sunt perpendiculari, astfel că produsul scalar $\vec{r}_1 . \overrightarrow{P_1P} = 0$.

9) Ecuaţia tangentei de direcţie m la cercul cu centrul în origine C(O,R):

(9.1) $y = mx \pm R\sqrt{1+m^2}$ şi

(9.2) $y = m(x - a) + b \pm R\sqrt{1+m^2}$, la cercul de raza R cu centrul în punctul M (a, b).

10) Ecuaţia în coordonate polare a dreptei ce nu trece prin pol este

(10) $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$, în care p este lungimea (raza polară sau modulul) polarei normală pe D din pol, a cărei direcţie este de orientare/unghi α, faţa de axa polară, iar φ este unhiul polar al razei polare ρ a punctului curent M al dreptei D.

Fie cercul **C**(O,R) şi dreapta D(**E**, /C), prin care, în paranteză, s-a specificat faptul că dreapta **D** conţine punctul **E** (E ⊂ **D**), sau că e dusă prin punctul **E (e_x, e_y)**, denumit şi excentru şi este tangentă la **C.** Excentrul **E** are coordonatele polare **E(e, ε)**. Între acestea şi coordonatele carteziene există relaţiile:

(11) **E** $\begin{cases} e_x = e.cos\varepsilon \\ e_y = e.sin\varepsilon \end{cases}$

Din matematica excentrică (**ME**) se cunoaşte că **FSM-CE** există şi sunt continue, în cazul **e** > R, doar în domeniul (12) **θ** ∈ [θ_i, θ_f], în care dreapta excentrică **d ≡ D** din **E** intersectează cercul **C(O,R)** pentru **θ_i** şi **θ_f**, care sunt, deci, tocmai unghiurile pentru care semidreapta pozitivă a dreptei **d^+** este tangenta la cerc în punctele **W_i** şi, respectiv, **W_f**, aşa cum s-a mai afirmat anterior.

Dacă unghiurile θ_i şi θ_f sunt cunoscute, atunci prin cazul 9) se poate determina ecuaţia tangentei de direcţie $\mathbf{m_{i,f} = \tan\theta_{i,f}}$ la cercul cu centrul în origine **C(O,R).** Ele sunt [6], aşa cum se poate observa şi în **figura 2**

(13) $\theta_{i,f} = \boldsymbol{\varepsilon} + \pi \mp \gamma$,

în care γ este unghiul format de tangenta $\mathbf{d^+}$ din **E** la C(O, R) cu raza vectoare $\vec{e}$ a excentrului **E**. şi are expresia

(14) $\gamma = arcsin\frac{R}{e}$.

În acest fel rezultă:

(15) $\theta_{i,f} = \varepsilon + \pi \mp arcsin\frac{R}{e}$, şi ecuaţia dreptei din **E** tangentă la C(O,R) dată de ecuaţia

(16) $y = mx \pm R\sqrt{1+m^2}$, în care

(17) $m = \tan\theta_{i,f} = \tan(\varepsilon + \pi \mp arcsin\frac{R}{e}) = \tan[(\varepsilon + \pi) \mp (arcsin\frac{R}{e})] = \dfrac{tan(\varepsilon+\pi) \mp \tan(arcsin\frac{R}{e})}{1 \pm tan(\varepsilon+\pi).\tan(arcsin\frac{R}{e})}$

Se ştie că

(18) $\tan(\arcsin\frac{R}{e}) = \dfrac{\frac{R}{e}}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{e}\right)^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{e^2-R^2}}$, iar $\tan(\varepsilon + \pi) = \tan\varepsilon$, astfel că (17) devine

(17') $m = \dfrac{tan\varepsilon \mp \frac{R}{\sqrt{e^2-R^2}}}{1 \pm tan\varepsilon.\frac{R}{\sqrt{e^2-R^2}}} = \dfrac{tan\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2} \mp R}{\sqrt{e^2-R^2} \pm R.tan\varepsilon}$, iar

(18') $m^2 = \left(\dfrac{tan\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2} \mp R}{\sqrt{e^2-R^2} \pm R.tan\varepsilon}\right)^2$, care înlocuite în (16) dau o expresie a ecuaţiei tangentei căutate.

(19) $y = \dfrac{tan\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2} \mp R}{\sqrt{e^2-R^2} \pm R.tan\varepsilon}\, x \pm R\sqrt{1+\left(\dfrac{tan\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2} \mp R}{\sqrt{e^2-R^2} \pm R.tan\varepsilon}\right)^2}$

Cunoscându-se unghiul γ dat de (14), pot fi determinate unghiurile $\alpha_{i,f}$ la centrul **O**, de poziţie pe cerc a punctelor de tangentă $\mathbf{W_{i,f}}$ şi, totodată, punctele iniţial şi final al domeniului de existenţă al **FSM-CE** corespunzătoare punctului $\mathbf{E_1}$ din **figura 12**, care sunt

(20) $\alpha_{i,f} = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \pm \varepsilon = (\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon) - arcsin\frac{R}{e}$

Coordonatele carteziene ale punctelor $\mathbf{W_{i,f}}$ vor fi

(21) $$\mathbf{W_{i,f}}\begin{cases} x_{i,f} = R.\cos\alpha_{i,f} = R.\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right) - arcsin\frac{R}{e}\right] = \\ = R[cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right).\cos\left(arcsin\frac{R}{e}\right) + sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right).\sin\left(arcsin\frac{R}{e}\right)] = \\ = R\left[\mp sin\varepsilon.\sqrt{1-\left(\frac{R}{e}\right)^2} + \frac{R}{e}.cos\varepsilon\right] = \frac{R}{e}(R.cos\varepsilon \mp sin\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2}) \\ y_{i,f} = R.sin\alpha_{i,f} = Rsin\left[\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right) - arcsin\frac{R}{e}\right] = \\ = R\left[sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right).\cos\left(arcsin\frac{R}{e}\right) - cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right).\sin\left(arcsin\frac{R}{e}\right)\right] = \\ = R\left[cos\varepsilon.\sqrt{1-\left(\frac{R}{e}\right)^2} \pm \frac{R}{e}\, sin\varepsilon\right] = \frac{R}{e}(cos\varepsilon\sqrt{e^2-R^2} \pm R\, sin\varepsilon) \end{cases}$$

Astfel că, ecuaţiile celor două tangente la cerc, în punctele $\mathbf{W_{i,f}}$, conform ecuaţiei (1), după divizarea ecuaţiei cu $\frac{R}{e}$, vor fi

(22) $(R.cos\varepsilon \mp sin\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2})$ x + $(cos\varepsilon\sqrt{e^2-R^2} \pm R\ sin\varepsilon)$ y – e = 0

Dacă punctul **E**(**e**, 0) este situat pe axa x > 0, atunci cosε = 1 şi sinε = 0, astfel că (22) devine

(22') R.e.x +e .y $\sqrt{e^2-R^2}$ – e = 0, sau R.x + y $\sqrt{e^2-R^2}$ –1 = 0

Comparând cele doua ecuaţii obţinute, (22) şi (19), se poate constata că prima, (22), este cu mult mai simplă şi, în consecinţă, mai facil de utilizat. ***Ea este suficient de simplă pentru a putea fi adăugată celorlalte ecuaţii clasice cunoscute în literatură, pentru a umple un gol altfel existent în literatura matematică.***

Cunoscându-se coordonatele punctului **E(e_x, e_y)** – date iniţial – şi fiind determinate coordonatele carteziene ale punctelor **$W_{i,f}$**, prin utilizarea ecuaţiei dreptei dată prin doua puncte (1) rezultă

(23) $y - R.sin\varepsilon = \dfrac{\frac{R}{e}(cos\varepsilon\sqrt{e^2-R^2} \pm R\ sin\varepsilon) - R.sin\varepsilon}{\frac{R}{e}(R.cos\varepsilon \mp sin\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2}) - R.cos\varepsilon}\ (x - R.cos\varepsilon)$ sau

(24) $y - R.sin\varepsilon = \dfrac{(cos\varepsilon\sqrt{e^2-R^2} \pm R\ sin\varepsilon) - e.sin\varepsilon}{(R.cos\varepsilon \mp sin\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2}) - e.cos\varepsilon}(x - R.cos\varepsilon)$

ecuaţii care sunt puţin mai complicate decât ecuaţiile (4.22), dar şi mai simple decât (19).

10. CE SE GĂSEŞTE PE INTERNET

Singurul web-site de pe Internet (**Google**) care dă soluţii mai clare este
http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius#Solution_methods

În **figura 13** sunt prezentate, pe acest web site, cele 8 soluţii clasice ale problemei lui **Apollonius**. Singura contribuţie a autorului a fost să separe soluţiile clasice ***tehnic posibile*** (cu angrenare exterioara şi cu angrenare interioara) de soluţiile care sunt ***posibile***, într-un singur plan, doar ***geometric***.

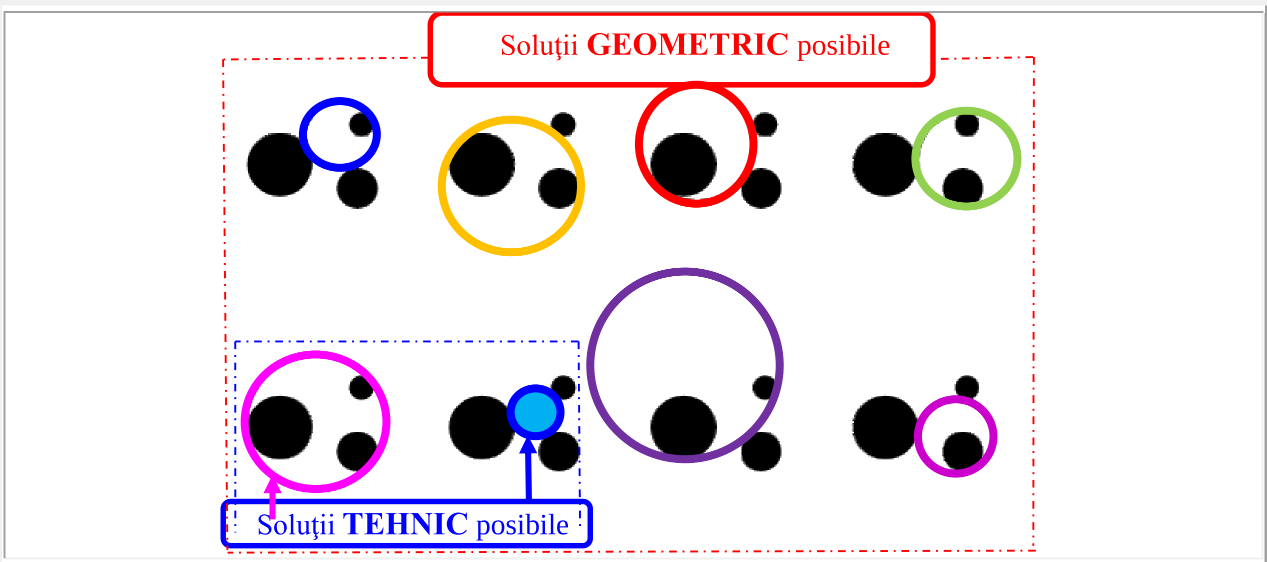


Fig.13 Cele **8 cercuri** tangente la trei **cercuri date**

Şi acestea pot deveni tehnic posibile dacă angrenarea roţilor dinţate sau cu fricţiune se realizeaza în cel puţin două etaje: într-un etaj se angreneaza roţile dintate exterior şi în alt etaj cele cu angrenare interioară, caz în care, roata conducătoare, care transmite mişcarea, trebuie să fie o roată dublu danturată; exterior într-un etaj şi interior în cel de-al doilea etaj.

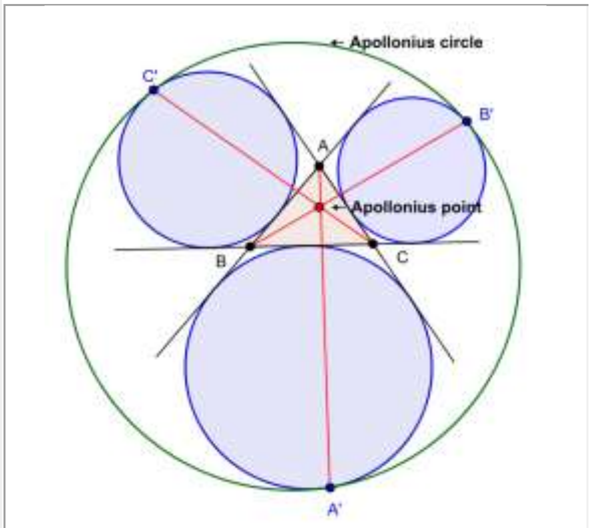


Fig.14 Cercul lui Apollonius **tangent exterior** celor trei cercuri exîscrise unui triunghi

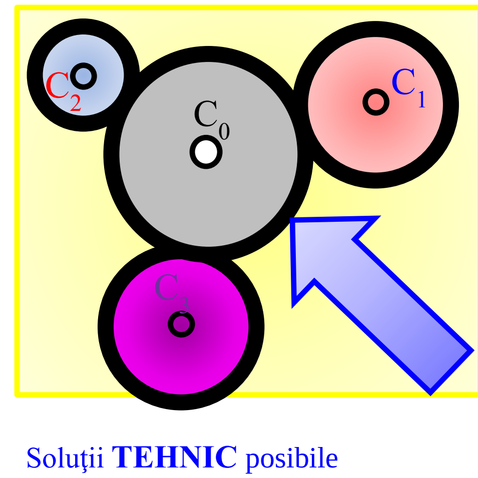


Fig.15 Cercul lui Apollonius **tangent interior** celor trei cercuri date

Figura 14 şi **figura 15** indică cele două soluţii ***tehnice posibile*** de angrenare, într-un singur plan, a roţilor dinţate din construcţia unui cap multiax.

Un program de matematică, care poate fi rulat pe un calculator electronic numeric şi care poate soluţiona şi determina toate cele ***8 soluţii posibile*** este indicat în **figura 16**, împreună cu sursa şi modul de iniţiere al programului.

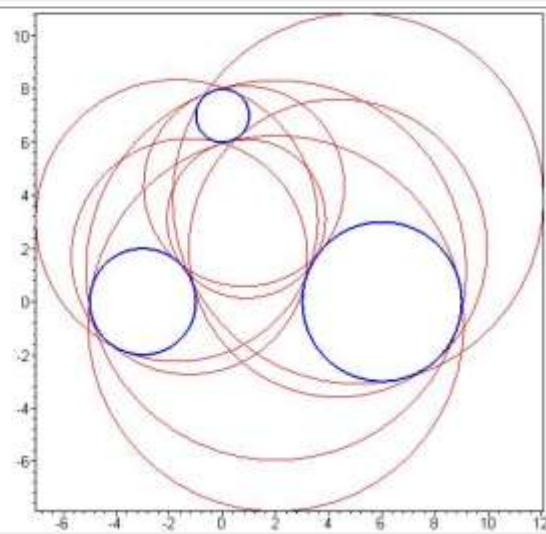


Fig.16 Cele 8 soluţii (cercuri tangente) ale problemei lui **Apollonius din Perga** oferite de program de calcul asistat de calculator de mai jos.

Cele 8 soluţii (cercuri tangente) ale problemei lui **Apollonius din Perga** oferite de program de calcul asistat de calculator http://orimath.com/oritutorial/Maple_Tutorial/Geometry2db.html#Apollonius

> circle(c1, (x+3)^2 + y^2 = 4, [x,y]): circle(c2, [point(O1,6,0),3], [x,y]); circle(c3, x^2 + (y-7)^2 = 1, [x,y]): A := Apollonius(c1, c2, c3); display(draw([c1,c2,c3],color=blue),draw(A));

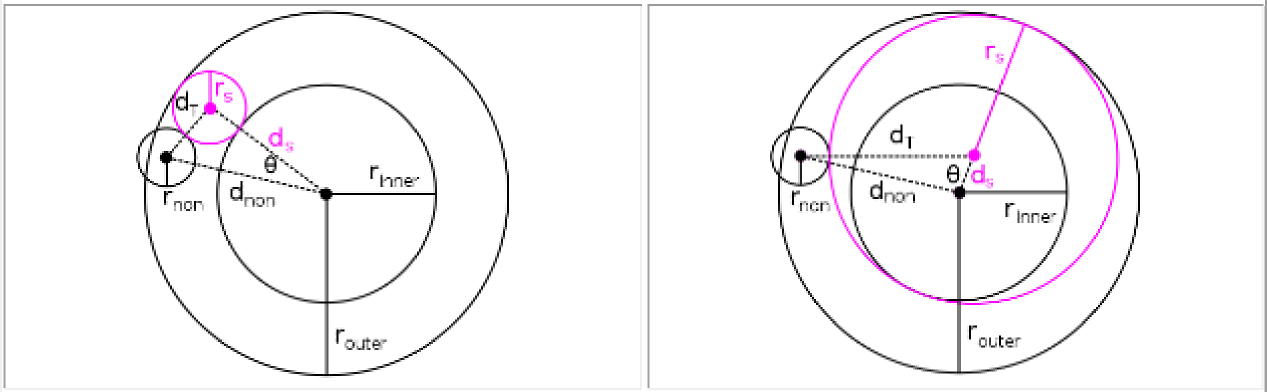


Fig17 **Cercul** lui Apollonius tangent celor trei cercuri dintre care două sunt concentrice

Dupa http://ro.math.wikia.com/wiki/Cercul_lui_Apollonius

Figura 17 indică două soluţii de tangenţă la 3 cercuri când două dintre ele sunt concentrice. Soluţii viu colorate ale cercurilor lui **Apollonius** sunt prezentate în **figura 18**, impreună cu schiţa de determinare a soluţiilor. Liniile albastre tangente la cercuri, în punctele mici albastre, se intersectează pe axa radicală (roşu) din cele două soluţii conjugate (magenta) ale problemei lui Apollonius, cele trei cercuri date fiind cele negre.

Variante ale schiţei din **figura 18** sunt date în **figura 19**

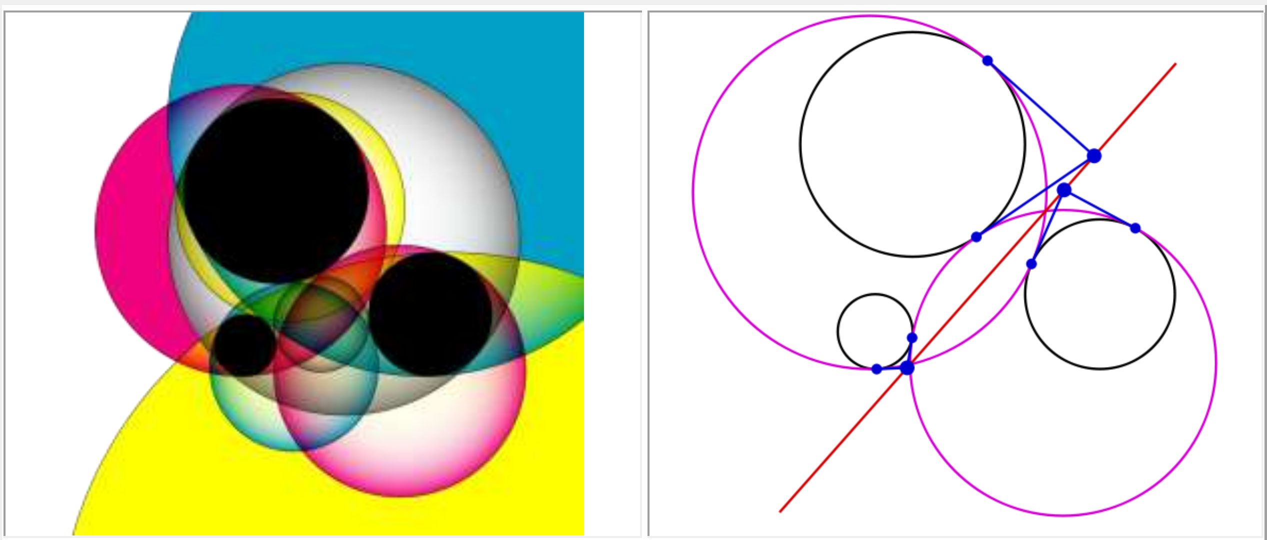


Fig.18

Apollonius' problem may have up to eight solutions. The three given circles are shown in black, whereas the solution circles are colored.

http://en.wikipedia.org/wiki/Circles_of_Apollonius

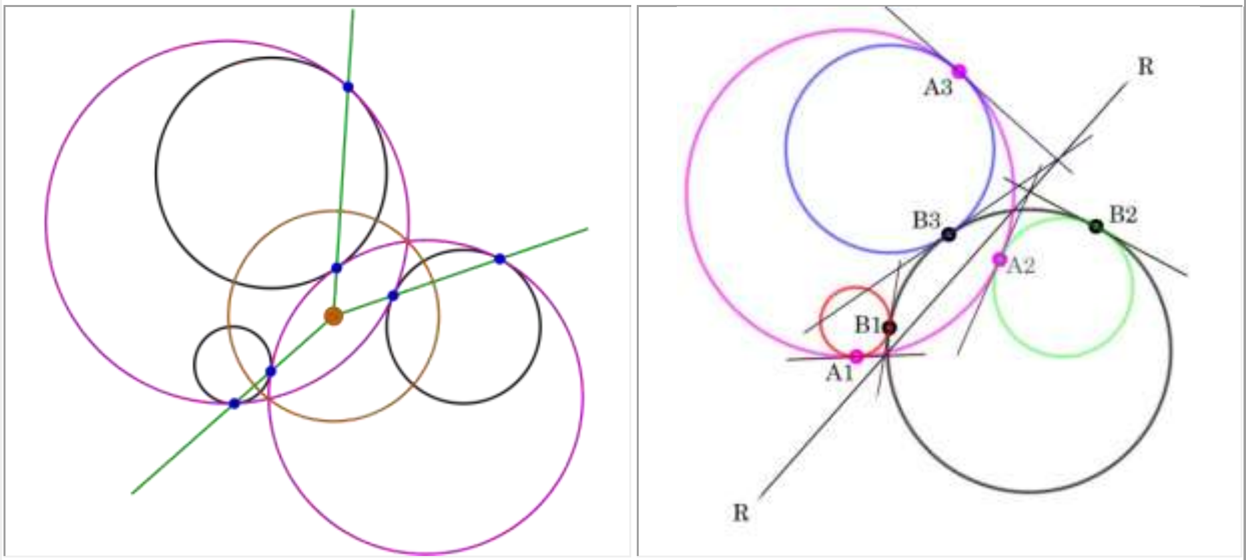


Fig. 19 http://en.wikipedia.org/wiki/File:Apollonius_problem_Gergonne_tangent_lines.svg

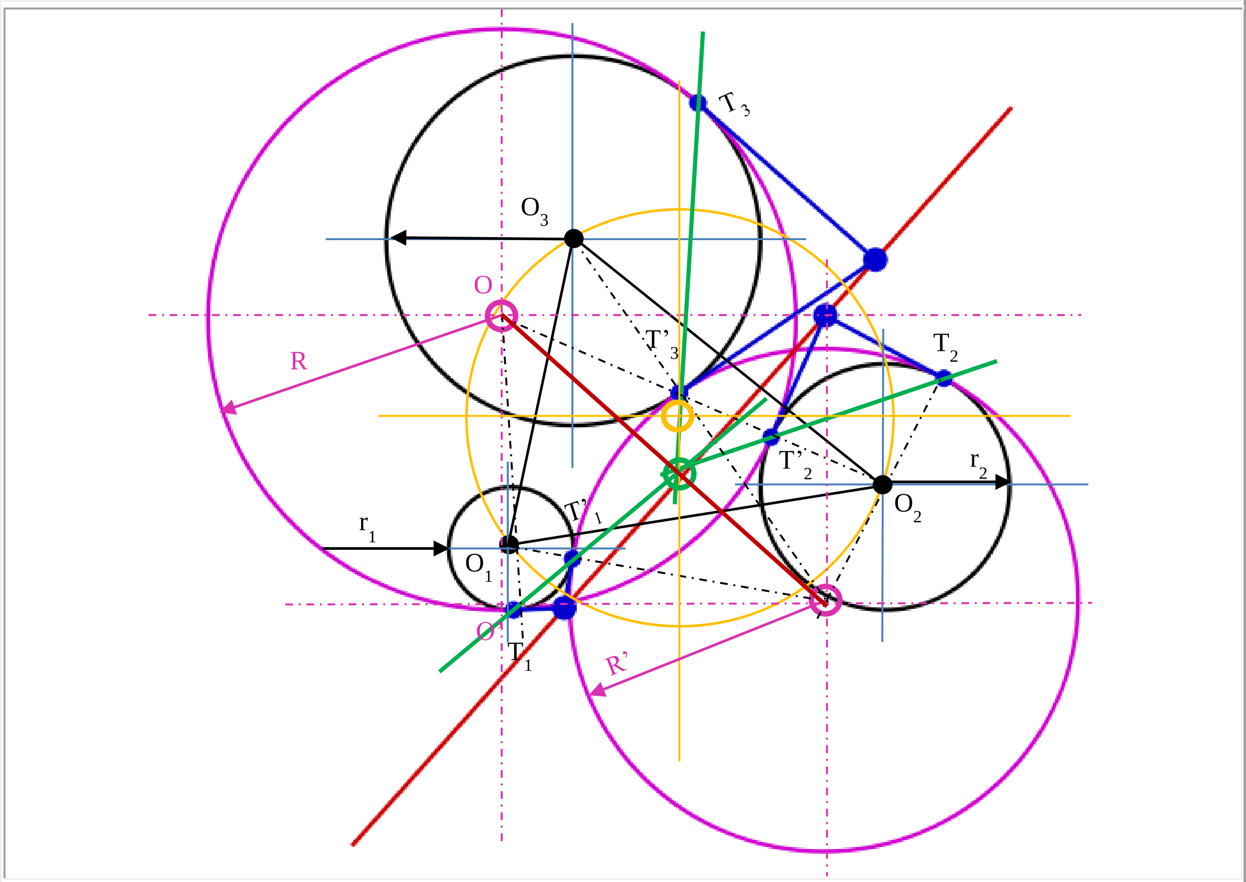


Fig.20 Completari ale autorului la schiţele **din figura 19**

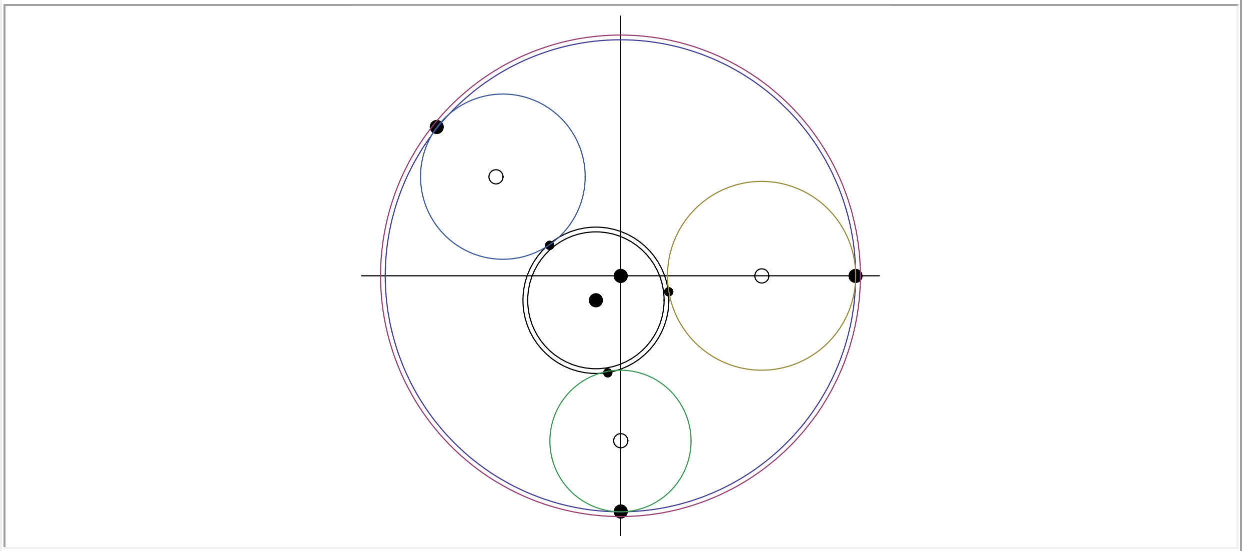


Fig. 21 Cele două soluţii tehnice posibile: **angrenare inerioara** şi angrenare exterioară

11. PROBLEMA LUI APOLLONIUS DIN PERGA: DETERMINAREA CERCURILOR TANGENTE LA TREI CERCURI DATE

Această soluţie este clasică, arhicunoscută şi se bazează, în continuare, pe determinarea cercurilor tangente la două cercuri date şi un punct exterior **A**. Dacă cele 3 cercuri sunt $\mathbf{C_1}$,$\mathbf{C_2}$, şi $\mathbf{C_3}$, de raze, în ordine crescătoare, $\mathbf{r_1} < \mathbf{r_2} < \mathbf{r_3}$, atunci scăzând din acestea valoarea razei minime $\mathbf{r_1}$, rezultă razele noilor cercuri, $\mathbf{C'_1}$, $\mathbf{C'_2}$ şi $\mathbf{C'_3}$, concentrice cu cercurile date, $\mathbf{r'_1} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{r'_2} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ şi $\mathbf{r'_3} = \mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}$.

Ca urmare, problema s-a redus la cea anterioară, cercul $\mathbf{C'_1}$ reducându-se la un punct, punctul **A**, din problema anterioară. Astfel că e necesar să se determine cercul tangent la cele două cercuri date $\mathbf{C'_2}$ şi $\mathbf{C'_3}$, care conţine / trece prin punctul **A**.

Odată determinate aceste soluţii, de exemplu, a cercului tangent exterior $C'_{Ext}(\mathbf{O'_{Ext}}, \mathbf{R'_{Ect}})$ de rază $\mathbf{R'_{Ect}}$ cu centrul în punctul $\mathbf{O'_{Ext}}$, la cele două cercuri $\mathbf{C'_2}$ şi $\mathbf{C'_3}$, cercul tangent la cele trei cercuri va fi cercul cu centrul în $\mathbf{O_{Ext}} \equiv \mathbf{O'_{Ext}}$ şi de rază $\mathbf{R_{Ect}} = \mathbf{R'_{Ect}} - \mathbf{r_1}$.

Iar cercul tangent **interior** va avea centrul $\mathbf{C_{Int}}$ în centrul cercului $C'_{Int}(\mathbf{O'_{Int}}, \mathbf{R'_{Int}})$, adică $\mathbf{O_{Int}} \equiv \mathbf{O'_{Int}}$ şi va avea rază $\mathbf{R_{Int}} = \mathbf{R'_{Int}} + \mathbf{r_1}$.

În acest fel, din punctul de vedere al unui inginer mecanic proiectant, problema cercurilor lui **Apollonius din Perga** este considerată soluţionată / rezolvată.

Las cititorilor placerea sa găseasca celelalte 6 soluţii.

O altă soluţie posibilă, prin utilizarea **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) radial excentrice **rexθ** şi / sau **Rexα** este schiţată în **figura 22**, pentru cazul **cercului lui Apollonius** tanget exterior la cele trei cercuri date.

Fiind date cele trei centre $\mathbf{O_i}$ ale celor 3 cercuri $C_i(\mathbf{O_i}, \mathbf{r_i})$, i = 1, 2, 3, ele determină un cerc de raza **R** cu centrul în O. Unul dintre cercurile soluţie căutate, cel tangent exterior la cele 3 cercuri date, are raza **r** şi centrul în excentrul **E(e,ε)** încă nedeterminate.

Exprimând / scriind că distanţele $\mathbf{EO_i}$ sunt modulele razelor excentrice, exprimabile prin **FSM-CE** radial excentrice $\mathbf{Rex\alpha_i}$ de variabile centrice $\boldsymbol{\alpha_i}$, rezultă sistemul de trei ecuaţii $\mathbf{R_i}$ = R. $\mathbf{Rex\alpha_i}$ cu trei necunoscute: **r**, **s** sau **e** = sR şi **ε**.

Acestea sunt

$$(46)\quad \begin{cases} R_1 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_1} = R \cdot Rex\alpha_1 = R\sqrt{1 + s - 2s\cos(\alpha_1 - \boldsymbol{\varepsilon})} \\ R_2 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_2} = R \cdot Rex\alpha_2 = R\sqrt{1 + s - 2s\cos(\alpha_2 - \boldsymbol{\varepsilon})} \\ R_3 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_3} = R \cdot Rex\alpha_3 = R\sqrt{1 + s - 2s\cos(\alpha_3 - \boldsymbol{\varepsilon})} \end{cases}, \text{ în care } s = \frac{e}{R} \rightarrow e = s.\mathbf{R}$$

În acest sistem de ecuaţii sunt cunoscute /calculabile unghiurile α_1, razele cercurilor date $\mathbf{r_i}$, centrul **O** , determinat de cele trei puncte / centre $\mathbf{O_i}$ şi raza cercului **R**.

Sistemul (46) poate fi scris şi astfel

$$(47)\quad \begin{cases} R_1 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_1} = R \cdot Rex\alpha_1 = \sqrt{R^2 + e^2 - 2e\cos(\alpha_1 - \boldsymbol{\varepsilon})} \\ R_2 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_2} = R \cdot Rex\alpha_2 = \sqrt{R^2 + e^2 - 2e\cos(\alpha_2 - \boldsymbol{\varepsilon})} \\ R_3 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_3} = R \cdot Rex\alpha_3 = \sqrt{R^2 + e^2 - 2e\cos(\alpha_3 - \boldsymbol{\varepsilon})} \end{cases}$$

$$(48)\quad \begin{cases} (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_1})^2 = R^2 + e^2 - 2e\cos(\alpha_1 - \boldsymbol{\varepsilon}) \\ (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_2})^2 = R^2 + e^2 - 2e\cos(\alpha_2 - \boldsymbol{\varepsilon}) \\ (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_3})^2 = R^2 + e^2 - 2e\cos(\alpha_3 - \boldsymbol{\varepsilon}) \end{cases}$$

Din a treia ecuaţie a sistemului (48) se obţine expresia excentricităţii unghiulare $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$(49)\quad \cos(\alpha_3 - \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{R^2 + e^2 - (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_3})^2}{2e} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \alpha_3 - arccos\frac{R^2 + e^2 - (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r_3})^2}{2e}$$

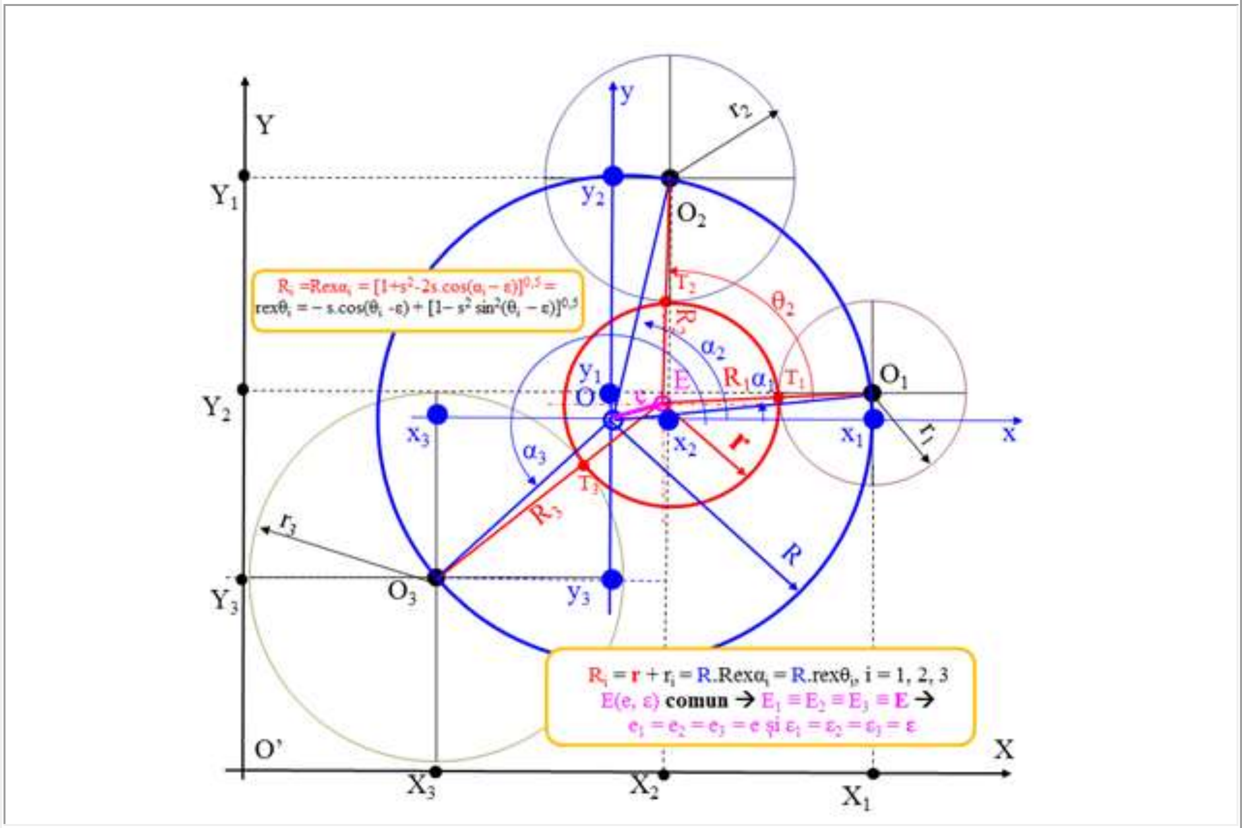


Fig.22 Schiţă de calcul a razei **r** şi a poziţiei E (e, ε) a centrului cercului tangent la cele trei cercuri date

Din a doua ecuaţie a sistemului (48), prin înlocuirea lui ε cu relatia (49) se poate obţine expresia ecuaţiei algebrice de gradul II din care se obţine expresia excentricitaţii liniare **e**

(50) $e^2 - 2e\cos\left(\alpha_2 - \alpha_3 + arccos\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}\right) + R^2 - (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_2})^2 = \mathbf{0},$ sau

(50') $e^2 - 2e\{\cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e} - \sin(\alpha_2-\alpha_3).\sin[\,arccos\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e})]\} + R^2 - (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_2})^2 = \mathbf{0}$

(50") $e^2 - 2e\{\cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e} - \sin(\alpha_2-\alpha_3).\sqrt{1-\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}}\Big)\} +$

$+ R^2 - (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_2})^2 = \mathbf{0}$, care este

(51) $e_{1,2} = \left[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e} - \sin(\alpha_2-\alpha_3).\sqrt{1-\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}}\right] \pm$

$$\sqrt{\left[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e} - \sin(\alpha_2-\alpha_3).\sqrt{1-\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}}\right]^2 - [R^2 - (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_2})^2]}$$

Deoarece în ecuaţia următoare avem nevoie şi de e^2 expresia lui va fi

(52) $e_{1,2}{}^2 = \left[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e} - \sin(\alpha_2-\alpha_3).\sqrt{1-\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}}\right]^2 +$

$$\left\{\left[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e} - \sin(\alpha_2-\alpha_3).\sqrt{1-\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}}\right]\right\} \pm$$

$$2\left[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e} - \sin(\alpha_2-\alpha_3).\sqrt{1-\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}}\right] *$$

$$\sqrt{\left[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e} - \sin(\alpha_2-\alpha_3).\sqrt{1-\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}}\right]^2 - [R^2 - (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_2})^2]}$$

Deoarece excentricitatea liniară poate fi şi negativă, se acceptă ambele soluţii / semne din faţa radicalului, cu observaţia că **e < 0** este echivalentă cu **e > 0** şi cu schimbarea a semnului / sensului excentricităţii unghiulare, adică **ε → – ε**

Din prima ecuaţie a sistemului (48) rezultă o altă ecuaţie algebrică de gradul II din care se poate obţine o relaţie pentru raza **r** a **cercului C(r, E(e, ε))** a **lui Apollonius**

(52) $\boldsymbol{r^2} + \mathbf{2}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_1^2} - [\,R^2 + e^2 - 2e\cos(\alpha_1 - \boldsymbol{\varepsilon})] = 0$

în care se înlocuieşte excentricitatea unghiulara **ε** din expresia (49)

(53) $\boldsymbol{r}_{1,2} = -\boldsymbol{r_1} \pm \sqrt{\boldsymbol{r_1^2} - [\,R^2 + e^2 - 2e\cos(\alpha_1 - \boldsymbol{\varepsilon})]} =$

$$= -\boldsymbol{r_1} \pm \sqrt{\boldsymbol{r_1^2} - \left[\,R^2 + e^2 - 2e\cos\left(\alpha_1 - \alpha_3 + arccos\frac{R^2+e^2-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_3})^2}{2e}\right)\right]}$$

Acum, sistemul de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, prin eliminarea lui $\boldsymbol{\varepsilon}$ s-a redus la un sistem de 2 ecuaţii cu numai 2 necunoscute excentricitatea liniară **e** şi raza **cercului lui Apollonius r**.

Acest sistem este format din ecuaţiile (52) şi (53).

Înlocuind expresia lui $\mathbf{e}_{1,2}$ din (52) în (53) se obţin cela 8 valori ale razei acestor cercuri soluţie, care înlocuite în (52) dau valorile unei coordonate polare ale poziţiei centrelor acestor cercuri şi, mai departe, înlocuind toate aceste valori în (49) se obţine şi a doua coordonată polară, de direcţie, a centrelor celor 8 cercuri soluţie ale **problemei lui Apollonius din Perga**.

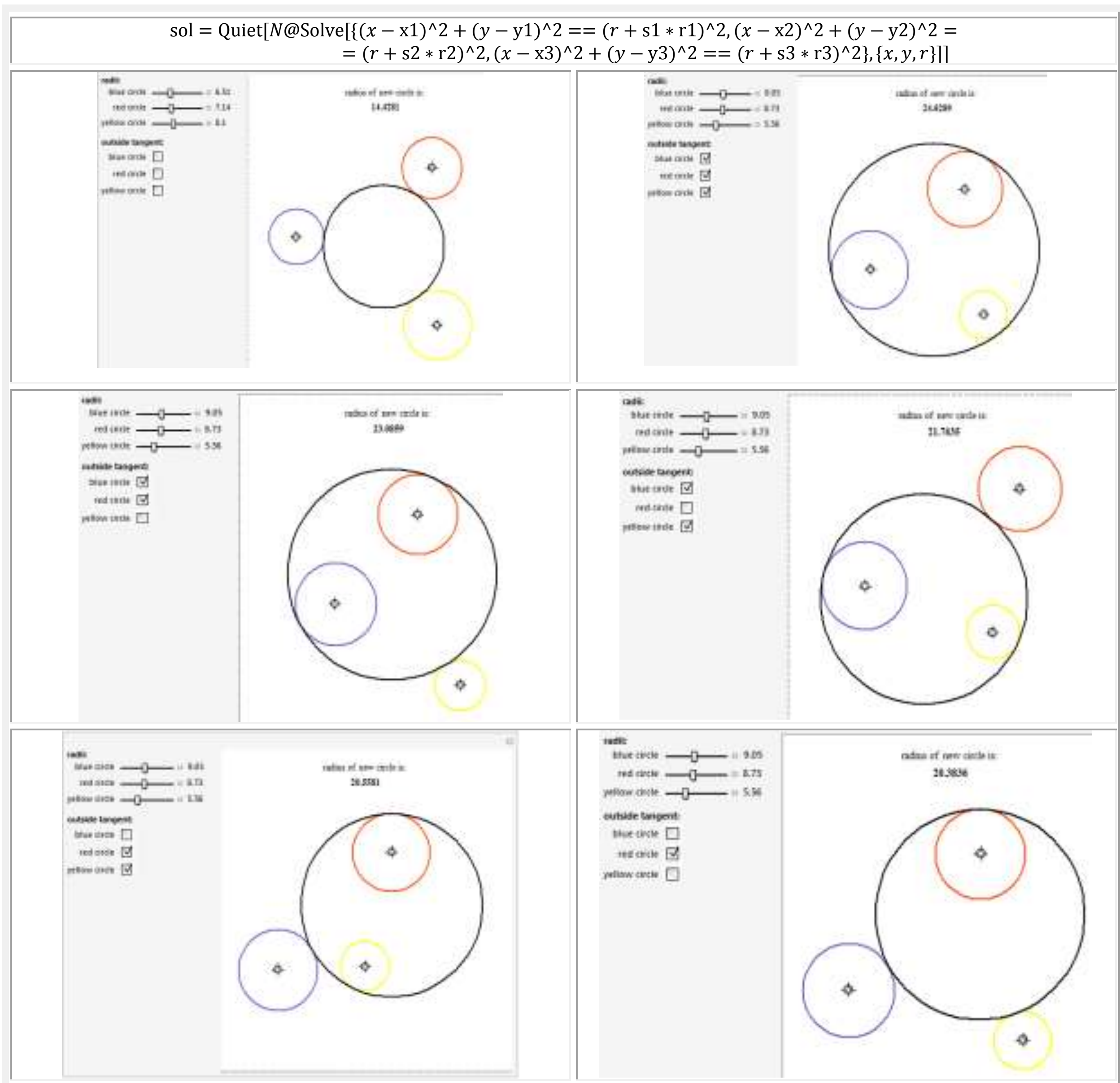
Lăsăm această plăcere cititorului de a continua aceste calcule.

Vă multumim anticipat pentru această înţelegere şi vă dorim vizionare plăcuta în continuare.

Nici soluţiile oferite de cele mai performante programe de matematică, cum este **Mathematica 8** a lui **Stephan Wolfram**, nu pot fi prezentate, deoarece au un volum exagerat de mare.

Rezultatele concrete ale acestui program, însă, cercurile soluţie **(negre)** însăşi, pentru diverse posibilităţi **(cercurile albastre, galbene şi roşii)** sunt prezentate în continuare şi cititorul poate să folosească programul prezentat pentru alte poziţionări relative şi marimi ale celor 3 cercuri date.

12. REZOLVAREA PROBLEMEI LUI APOLLONIU DIN PERGA CU PROGRAMUL MATHEMATICA 8 A LUI Stephan Wolfram



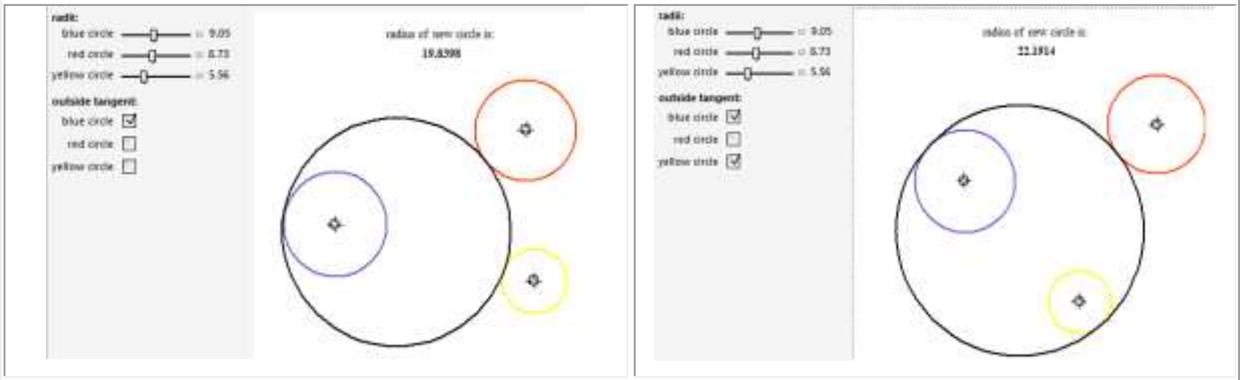


Fig. 23 Cele 8 soluţii oferite de programul demonstrativ MATHEMATICA 8 a lui **Stephan Wolfram**
http://demonstrations.wolfram.com/CirclesOfApollonius/

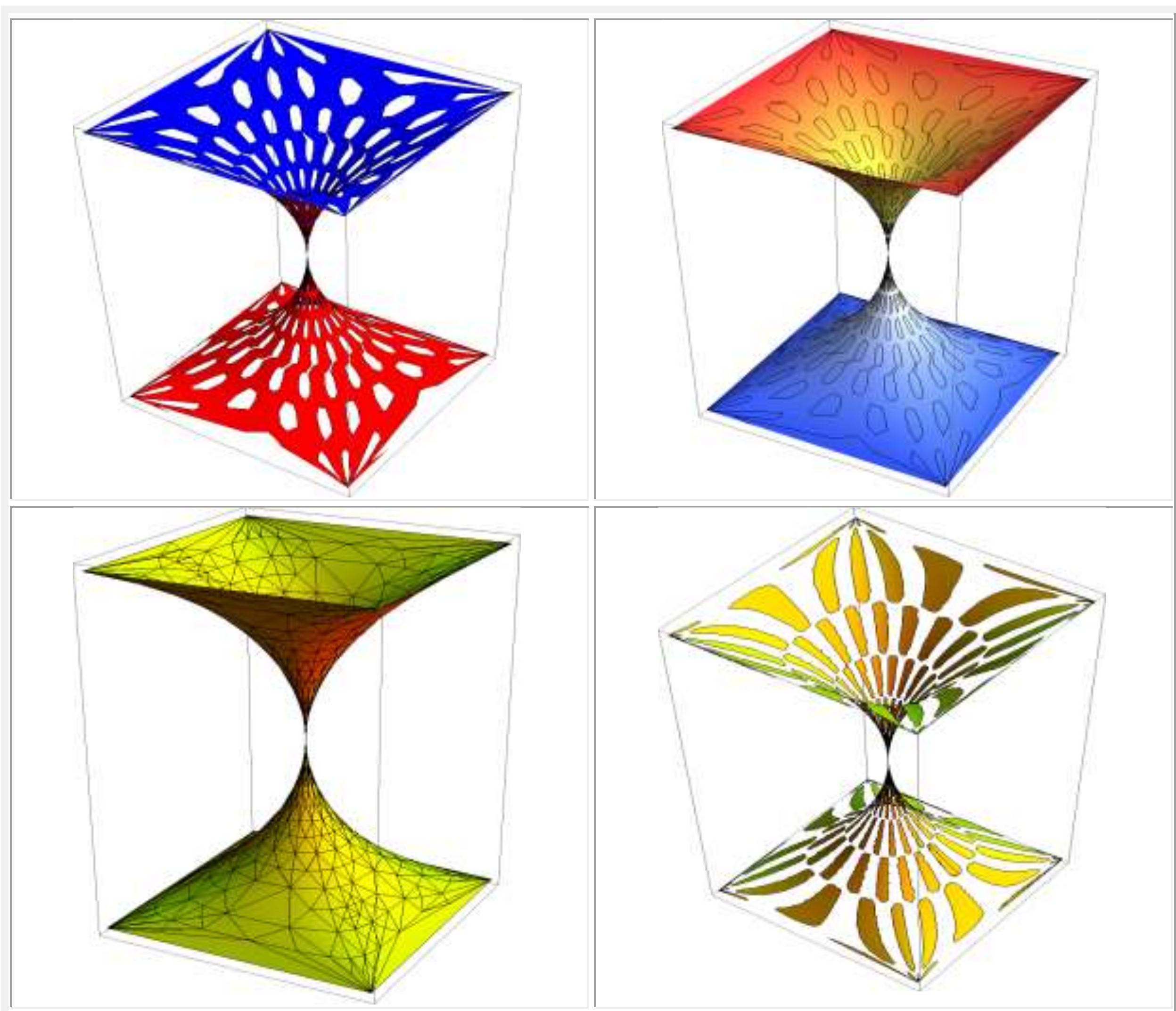
11. B I B L I O G R A F I E LA Cap. XXII

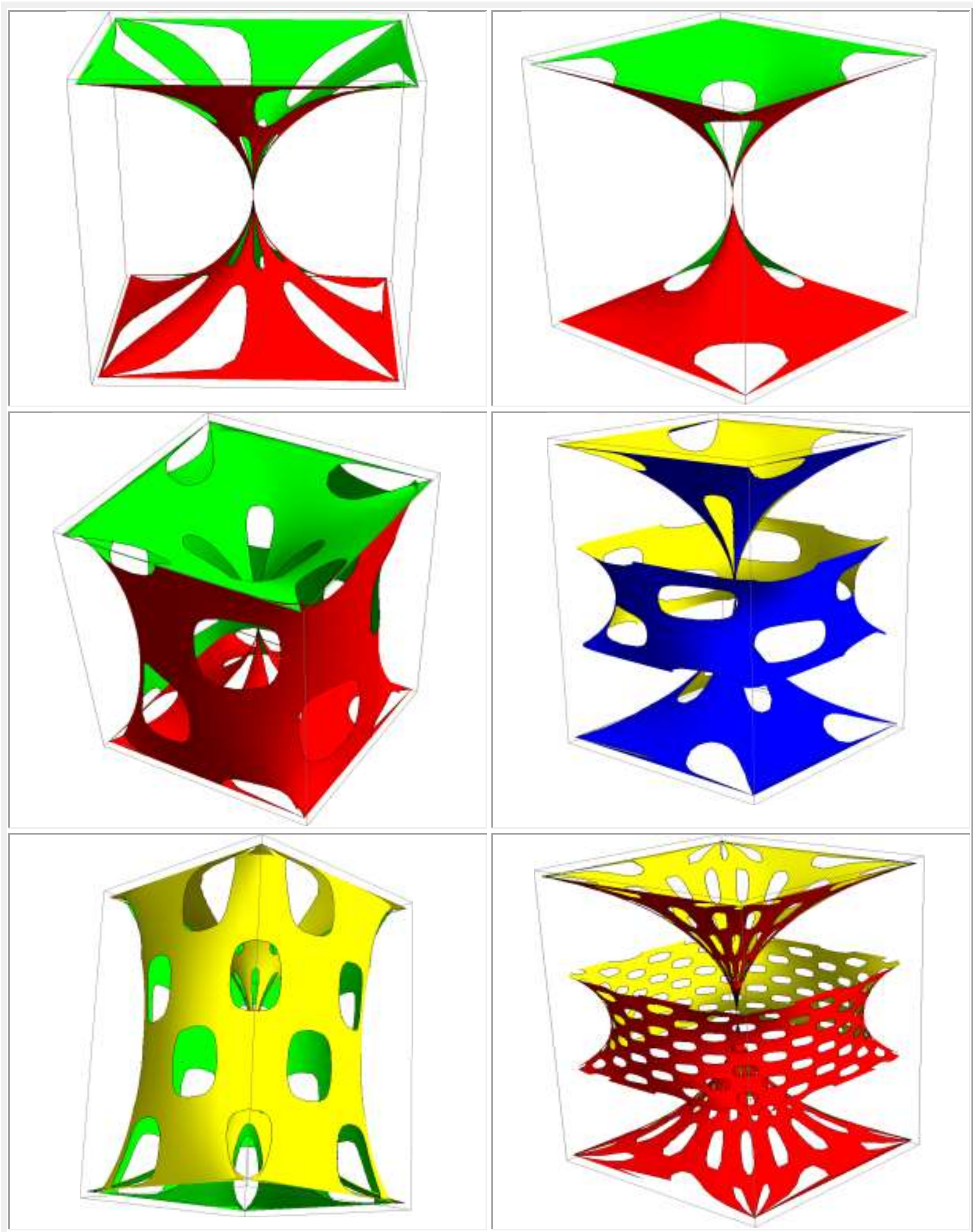
Nr. Crt.	Autor	DENUMIREA LUCRĂRII	EDITURA
1	ŞELARIU, M.E.	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**	Ed. "POLITEHNICA", Timişoare, 2007
2	ŞELARIU, M.E., GROZAV, I.	**DETERMINAREA GRAFICĂ A MĂRIMII ŞI A POZIŢIEI ROŢII INTERMEDIARE LA PROIECTAREA CAPETELOR MULTIAXE**	Com. III-a Conf. P.U.P.R., Timisoara,1978 pag.169...174
3	GROZAV, I. PIRCEA, I. Şelariu,M.E.	**DETERMINAREA ANALITICĂ A MĂRIMII ŞI A POZIŢIEI ROŢII INTERMEDIARE LA PROIECTAREA CAPETELOR MULTIAXE**	Com. IV Conf. PUPR, Timisoara, 1981, pag. 239...244
4	Buzdugan Gh., Nanu A., Tache Gheorghe **Şelariu Mircea** , ş.a	**MANUALUL INGINERULUI MECANIC**. Vol.III TEHNOLOGIA CONSTRUCTIILOR de MAŞINI. **Cap.18.** PROIECTAREA DISPOZITIVELOR	Editura Tehnica, Bucuresti, 1972, Pag..899...984
5	Vasii -Rosculet S, **Şelariu Mircea,** s.a.	**PROIECTAREA DISPOZITIVELOR**. **Cap.17**. DISPOZITIVE DE PRELUCRARE şi **Cap.20.** DISPOZITIVE DE AUTOMATIZARE A PROCESELOR DE PRODUCTIE.	Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982. Pag. 474...542 şi pag. 573...664
6	**Şelariu Mircea,** Konig M., Szekeres Fr	PROIECTAREA DISPOZITIVELOR. CAPETE MULTIAXE. PARTEA 1 : CONSTRUCŢIE ŞI EXPLOATARE	Centrul de Multiplicare al Institutului Politehnic "Tr Vuia" din Timişoara, 1980.
7	ŞELARIU, M.E.	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE. Vol 1, ediţia a 2-a**	Ed. "POLITEHNICA", Timişoare, 2007
8	ŞELARIU, M.E.	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE Vol 2, ediţia a 2-a**	Ed. "POLITEHNICA", Timişoare, 2007
9	ŞELARIU, M.E.	**DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAŢIIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPEŢA ÎNTÂIA – K(k) -**	Buletinul celei de a VIII-a Conferinţe de Vibraţii Mecanice, Vol.III, Timişoara, 1996. Pag. 15...24

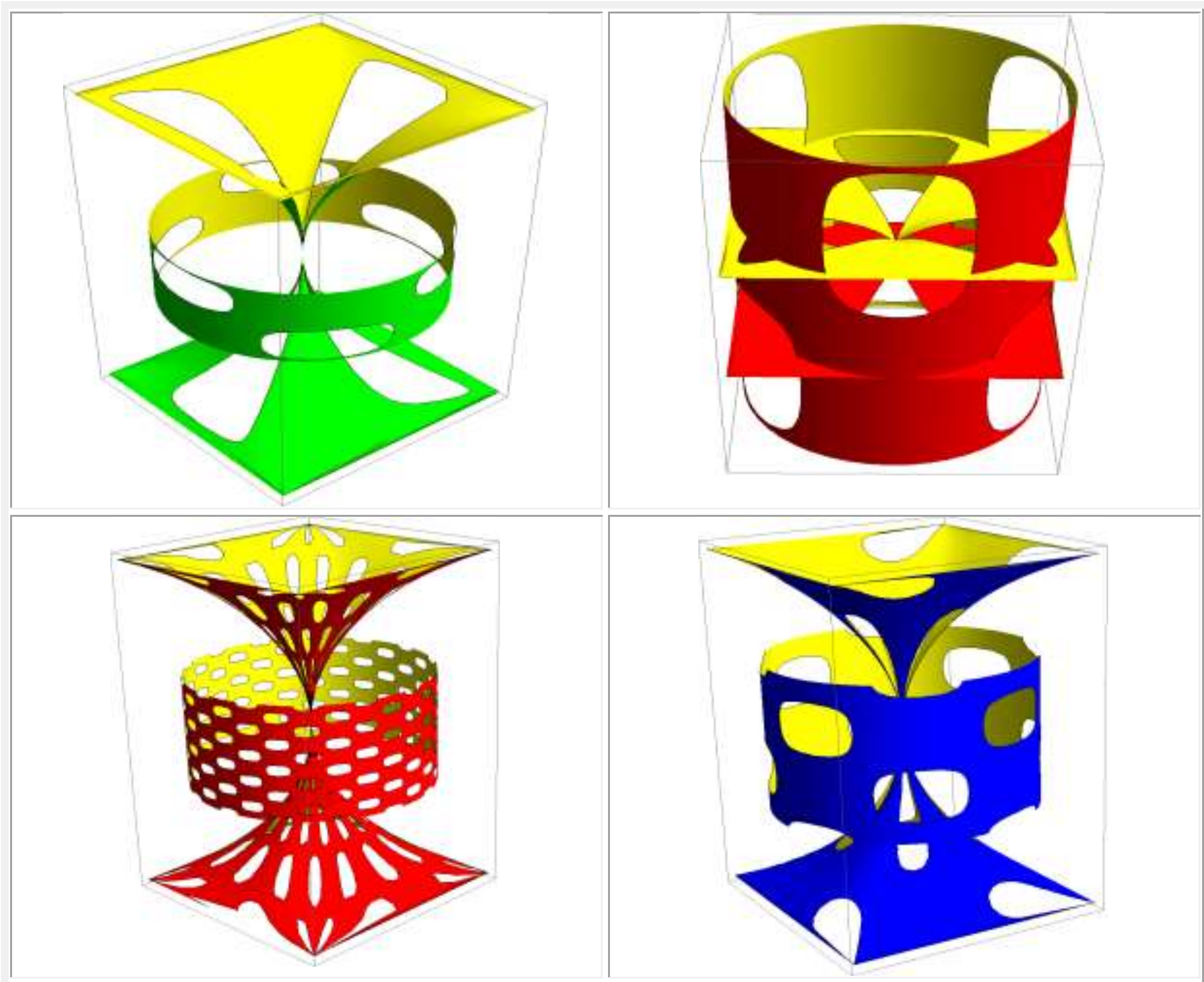
10	Vivian Feig	"CIRCLES OF APOLLONIUS" FROM THE WOLFRAM DEMONSTRATIONS PROJECT	http://demonstrations.wolfram.com/CirclesOfApollonius/
11	Kirk McDonald	A SOLUTIONTON THE problem of apollonius	http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/papers/apollonius_051964.pdf
12	Moscovici, M	O INTERPRETARE GEOMETRICĂ NATURALĂ A SOLUŢIILOR COMPLEXE REZULTATE DIN UNELE PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ	Ed. Tehnica, Buc. 1956

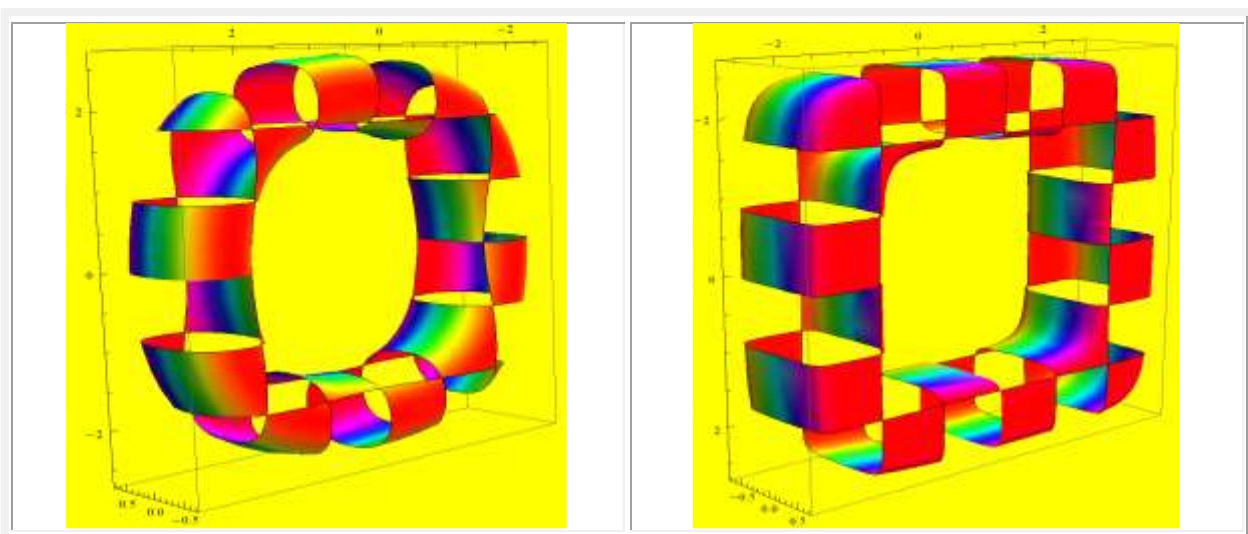
Pentru îmbunătăţirea esteticii acestui capitol şi pentru a începe capitolul următor pe o pagină împară, prezentăm în continuare câteva cuburi româneşti, ***cele mai uşoare cuburi din lume*** deoarece au volumul şi, în consecinţă, şi masa nule. Ele sunt realizate cu ***funcţii supermatematice*** circulare excentrice prin descrierea a 6 piramide cu vârful comun, în centrul de simetrie al cubului, fără suprafeţele lor de bază pătrate.

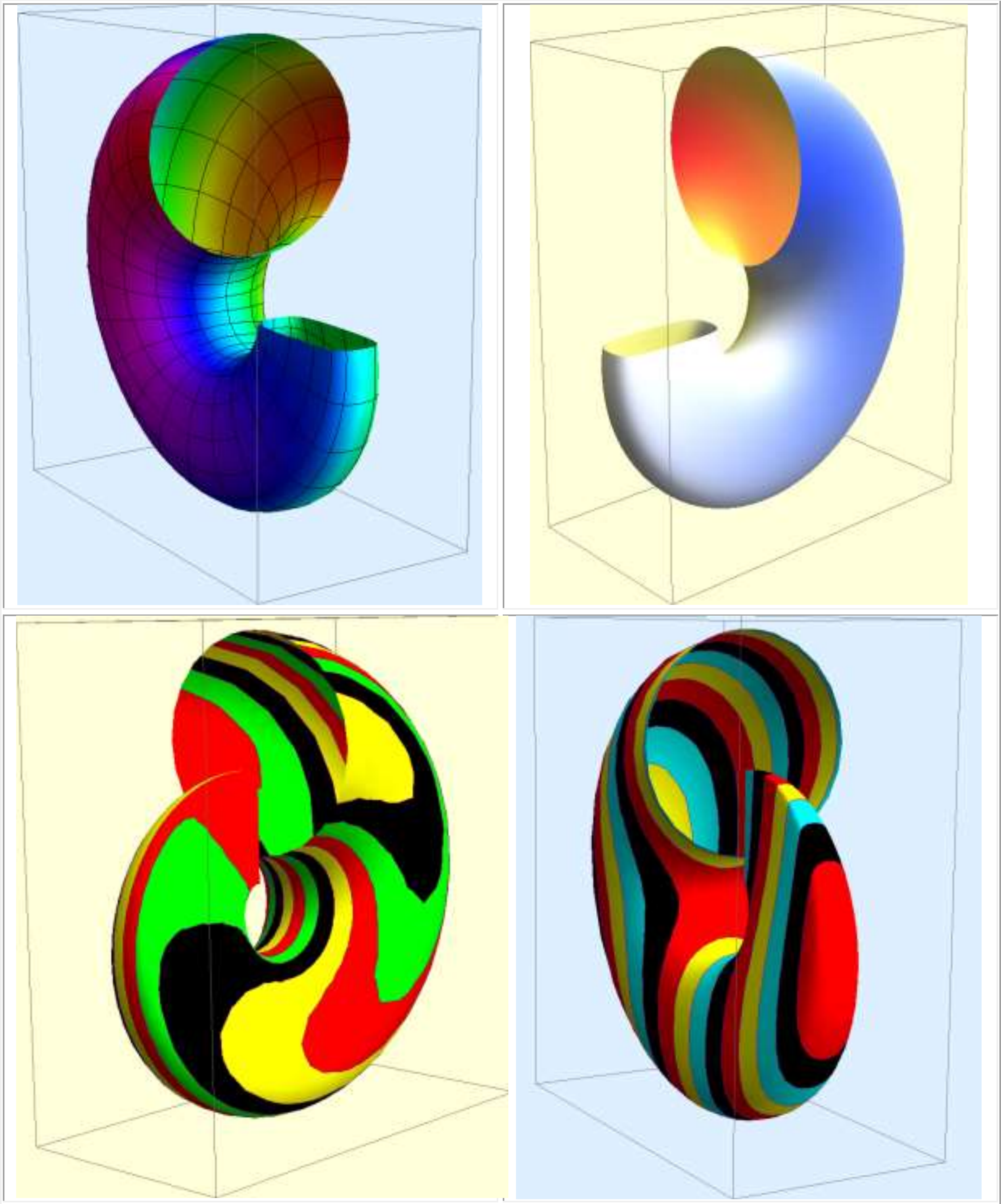
CLEPSIDRE CIURUITE











Toruri supermatematice

Motto:” *Politica e un pendul ale cărui balansuri între anarhie şi tiranie sunt întreţinute de iluzii revigorate în permanenţă.”*

Albert Einstein 

CAPITOLUL XXIII

PENDULE SUPERMATEMATICE

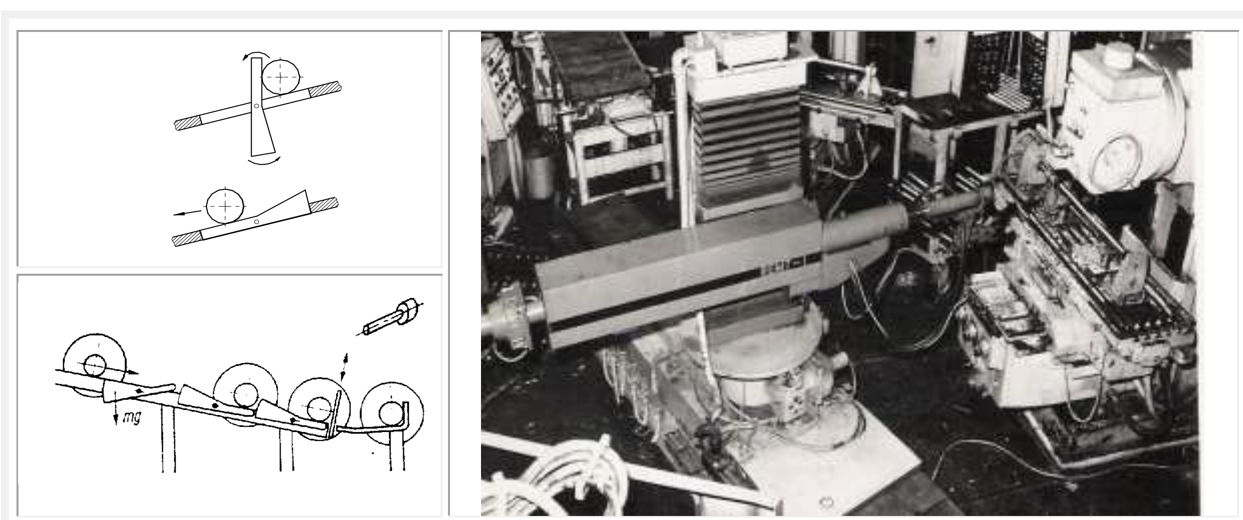
1. INTRODUCERE

Majoritatea studiilor referitoare la vibraţiile unor sisteme neliniare abordează problemele pendulului simplu sau a pendulului matematic (denumire neinspirată) în cele două ipostaze: liniar sau cu amplitudini mici şi neliniar sau cu amplitudini mari. Ultimul fiind numit **pendul gravitaţional neliniar** (**PGNL**).

Mai sunt studiate pendulul cu frecare sau pendulul **Froud**, care a scos în evidenţă vibraţiile autoexcitate şi pendulul labil sau invers, pendulul cicloidal sau **Huygens**, pendulul **Foucault** ş.m.a.

Studiul diverselor pendule nu este numai de interes pur fizic sau matematic, ci şi tehnic; în afara tehnicilor depăşite cu privire la orologiile cu pendule. Astfel, în domeniul tehnologiei construcţiilor de maşini (**TCM**), studiul pendulului este util cu privire la determinarea timpului de cădere / deplasare a unor semifabricate şi / sau piese în jgheaburi circulare de transport gravitaţionale, la determinarea şocurilor şi a reacţiunilor care apar la livrarea automată prin cadere liberă, din zona de evacuare a acumulatorului de semifabricate şi / sau piese şi până în zona de lucru a dispozitivului de instalare pentru prelucrarea pe maşini-unelte sau, mai general, pe maşini de lucru. Astfel, putându-se determina tactul de lucru şi, respectiv, capacitatea de producţie şi, în final, productivitatea de lucru / muncii a unor sisteme tehnice.

Multe componente ale maşinii de lucru sau ale dispozitivelor devin dinamic instabile şi oscilează asemănător cu unele pendule, precum **transportorul gravitaţional liber cu mişcare intermitentă** (**Fig.1**), utilizat ca dispozitiv de livrare a pieselor / semifabricatelor cilindrice, cu rostogolire, utilizat şi în construcţia liniei tehnologice (celulei robotizate) de prelucrare a arborilor motoarelor electrice de gabarit 6, 7 şi 8 de la Electromotor din Timişoara, lucrare distinsă cu **premiul “Traian Vuia” al ACADEMIEI ROMÂNIEI**, în anul 1983 pentru anul 1981.



2. PENDULUL SUPERMATEMATIC (PSM) CU UN SINGUR EXCENTRU SAU MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ OSCILANTĂ

Denumirea de **pendul matematic**, atribuită **pendulului simplu, gravitaţional**, este improprie deoarece **matematica** nu operează cu **masa m**, **gravitaţia g**, **forţa F**, **momentul M**, **lucru mecanic L**, **putere P**, **energie E** etc. De aceea, adevăratul pendul matematic este cel prezentat în lucrarea [18] şi, mult mai extins şi mai diversificat, în continuare, din care prezentăm unele concluzii şi pe adevăratul pendul matematic, denumit, pentru evitarea confuziilor, **pendul supermatematic** (**PSM**).

De fapt, sunt o familie de **pendule** de **masă nulă** (**m** = 0). Au fost denumite **supermatematice (PSM)** deoarece mărimile de oscilaţie ca **elongaţia**, **viteza unghiulară** şi **acceleraţia unghiulară** ale unui punct **M fără masă**, pe un **cerc** sau **arc de cerc** oarecare, se exprimă cu ajutorul **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) de excentre **E**(**e**, **ε**) şi **S**(**s**, **ε**) fixe, în acest capitol şi /sau variabile, în cel următor.

Din prima familie de **PSM** fac parte cele ale cărui punct **W** oscilează pe un arc de cerc de rază **R**.

În desenul din **figura 2, a** s-a ales **R = 1,** astfel că arcul de cerc aparţine unui cerc unitate **CU(O, R = 1)**. Oscilaţiea este cauzată de proiecţia **mişcării circulare centrice** (**MCC**) a punctului **S_v**, de pe cercul excentrului mobil **C_E**(O, r = **s** = 0,6), turnant în jurul centrului **O,** pe direcţia axa **Ox**. În **figura 2,a** s-a ales chiar **O(0, 0)** drept centru al cercului excentrului **C_E** şi, totodată, a cercului unitate **CU**, dar rezultatul este acelaşi, oriunde ar fi centrul **cercului excentricului C_E** (O, r = **s**), pe axa **Ox**, al unui punct **Sv**(**s** = r, **ε_v** = **Ω**.t), turnant pe acest cerc.

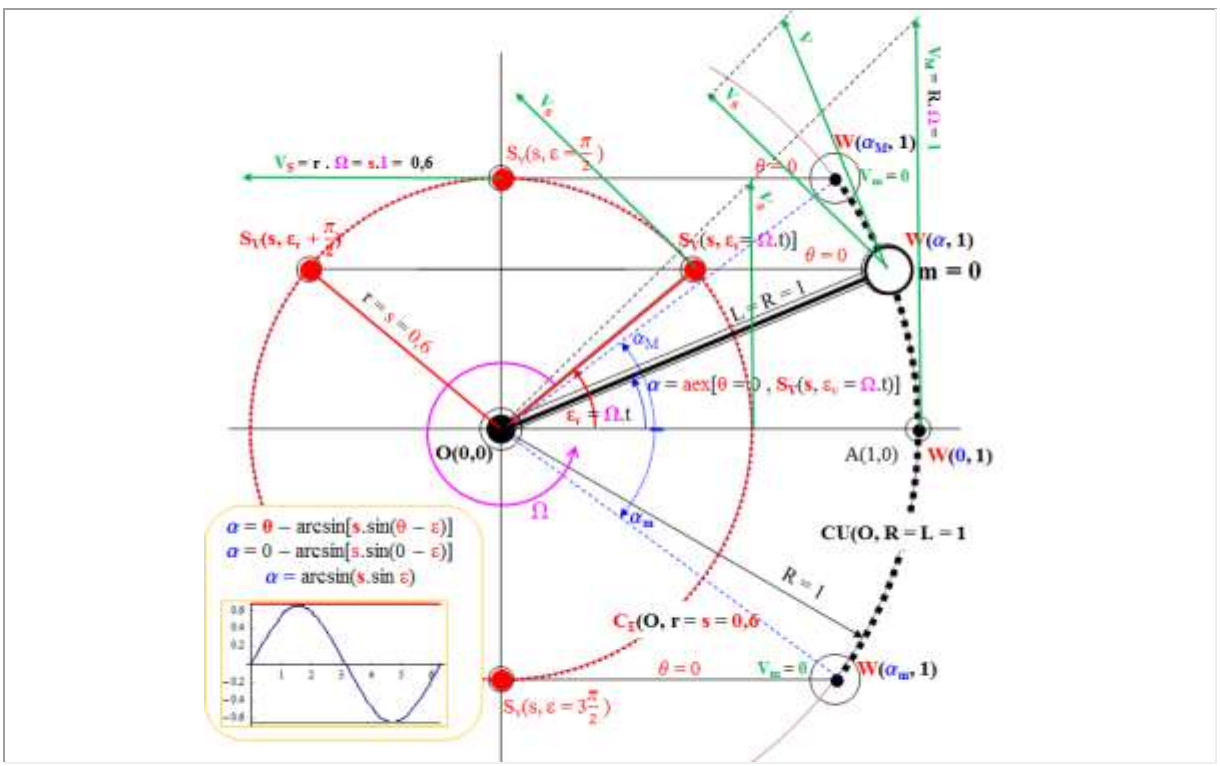


Fig. 2,a. Pendulul supermatematic, numai de **excentru turnant (variabil) Sv(s = r = ct, εv = Ω.t)** punct variabil pe **cercul C_E**. Schiţă explicativă

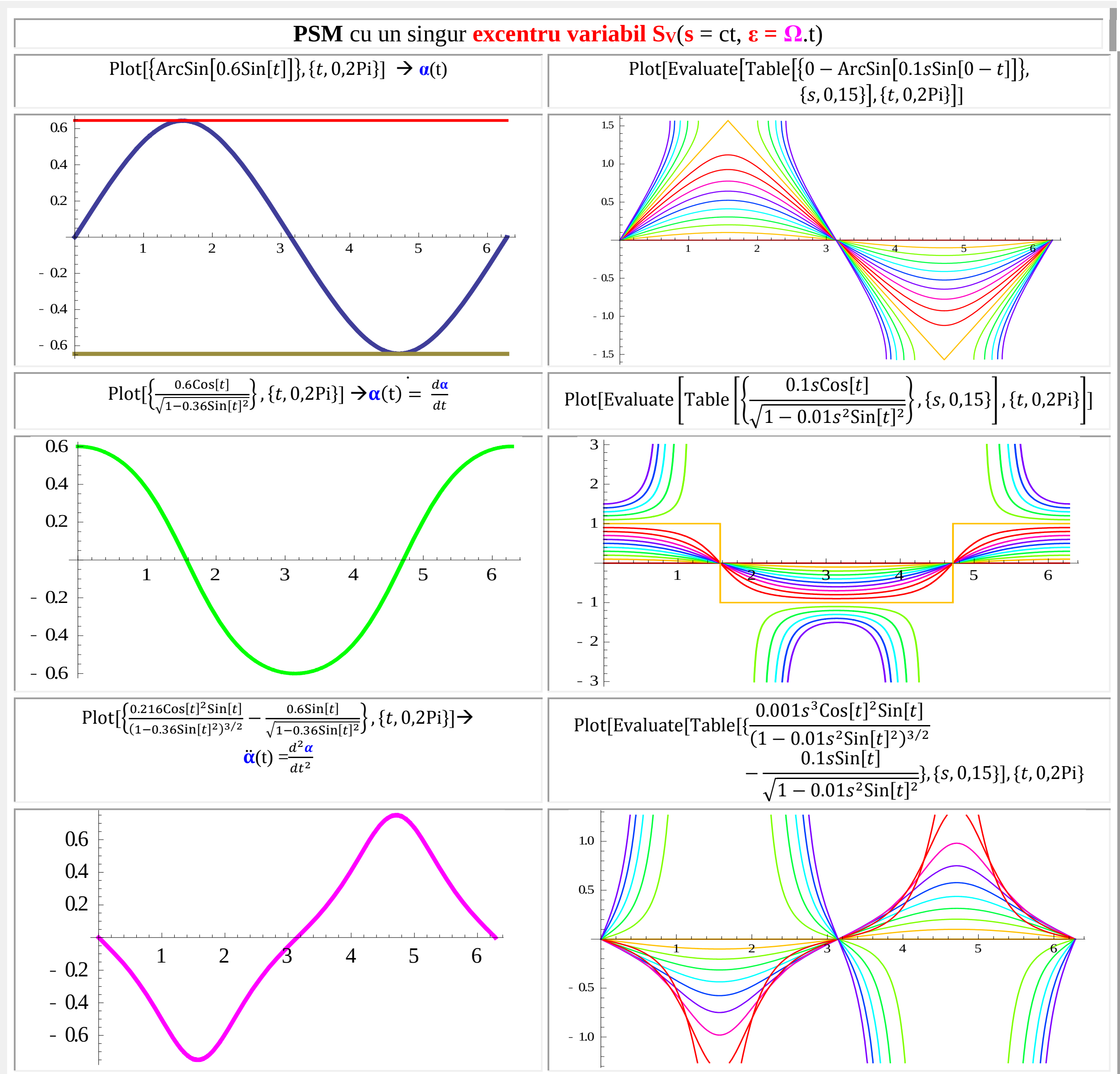


Fig. 2,b Pendulul **supermatematic: mărimile mişcării circulare excentrice** pe cercul **unitate CU poziţia α'(t) = Ω.t** ▲ ▶, **viteza unghiulară** ▼◀ şi **acceleraţia** ▼▶ punctului **W** ∈ **CU (O, R = 1)**

Mişcarea circulară excentrică (**MCE**) este definită ca o mişcare variabilă a unui punct pe cerc, dirijată dintr-un **excentru E**(**e,** ε) sau **S**(**s,** ε), puncte fixe sau variabile, de excentricitate liniară **reală e,** pentru un cerc oarecare **C(O, R)** şi **numerică s = e** /**R**, pentru cercul unitate **CU(O, 1),** precum şi cu **excentricitate unghiulară ε**, în care **variabila excentrică** θ = **Ω**.t la excentrul **E** sau **S** este denumită **variabilă motoare**.

MCE-oscilantă (**MCE-O**) este de excentre **Ev**(e_v, ε_v) şi **Sv**(s_v, ε_v) puncte **mobile**, de obicei turnante în jurul altor excentre E_F(e_F, ε_F) şi S_F(s_F, ε_F) **fixe**, iar locul variabilei motoare θ este preluat de **variabila excentrică** $\varepsilon_v \equiv \varepsilon_v$ = **Ω**.t, care devine ea variabila motoare, mişcare prezentată în lucrarea autorului [1], ca o mişcare oscilantă variabilă pe cerc, de unghi θ = **const. = 0** la excentrul variabil **Sv**(s_v,ε_v).

Din **figura 2,a** rezultă că punctul **W** oscilează pe cercul unitate între limitele $\mathbf{W_D}$ şi $\mathbf{W_S}$. Din graficele prezentate, în **figura 2 b**, rezultă că **viteza** punctului $\mathbf{E_V}$ pe cercul **CU(O, R = 1)** oscilează simetric faţă de viteza medie **Vmed = R. Ω = 1.1 = 1**.

Poziţia, de unghi α(t), a punctului oscilant **W**(α, 1), pe cercul unitate **CU(O,1),** este dată de proiecţia în direcţia axei **Ox** (adică de unghi **θ = 0** la excentrul **S**) a punctului **S(s, ε),** care se roteşte pe cercul $\mathbf{C_E}$(O,s) al excentrului **S(s, ε)** cu **viteza unghiulară** constantă - aleasă **Ω = 1** - (**Fig. 2,a**).

În funcţie de raportul **r / R** sau de **excentricitatea numerică s**, apar următoarele cazuri :

1) Dacă **r < R**, rezultă o **oscilaţie** a **PSM** între limitele $\boldsymbol{\alpha_{m,M}} = \pm \boldsymbol{\pi/2}$, caz indicat în **figura 2,a** ;
2) Dacă **R = r**, rezultă o **mişcare circulară de viteză unghiulară constantă**, în cazul din figură, **ω = Ω = 1**, care pentru $\boldsymbol{\varepsilon_V} = \pm \boldsymbol{\pi/2}$ în punctele $\mathbf{W_{mM}}$ ($\alpha_{m,M} = \pm \pi/2$, **R)** <u>**schimbă de sens**</u>, astfel că mişcarea rămâne oscilantă şi are loc doar pe un singur semicerc de rază **R**. În punctele amintite acceleraţia unghiulară tinde la infinit (**Fig. 2,b ▶**), diferenţiindu-se, astfel, de cazul pendulelor **cu masa m**.
3) Dacă **r > R**, şi cele două cercuri sunt concentrice, rezultă o **MCC** <u>**discontinuă**</u> de **ω = ± Ω**. În punctele de $\boldsymbol{\alpha_{Sup}} = \frac{\pi}{2}$ şi de $\boldsymbol{\alpha_{Inf}} = 3\,\frac{\pi}{2}$ punctul **W** staţionează o perioadă, cu atât mai lungă cu cât diferenţa dintre **r** şi **R** este mai mare, adică **s >>1** ; pentru **r = 0,** cât şi pentru **R = 0**, mişcarea **PSM** încetează, adică nu mai există, aşa cum se poate observa în **figura 2,b ▶**.

Ca urmare, valorile elongaţiei, vitezei unghiulare şi ale acceleraţiei unghiulare de oscilaţie ale punctului **W**, în primul caz, sunt :

(1) $\alpha(t) = \mathbf{aex\theta} = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]$ şi pentru **θ = 0** rezultă :

(1') $\alpha(t) = \arcsin(s.\sin\varepsilon)$, cu graficul din **figura 2,b ▲◀** pentru **s = 0,6**.

Prin derivarea relaţiei (1) se obţine viteza unghiulară, exprimată de **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM- CE**) derivată excentrică **dexθ**, de variabilă excentrică **θ:**

(2) $\dot{\alpha}(t) = 1 - \frac{s.\cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2.\sin^2(\theta - \varepsilon)}} = \mathbf{dex\theta}$

şi pentru **θ = 0** rezultă :

(2') $\dot{\alpha}(t) = 1 - \frac{s.\cos\varepsilon}{\sqrt{1 - s^2.\sin^2\varepsilon}} = \mathbf{dex}[0^0, S(s, \Omega,.t)]$,

cu graficele din **figura 2,b ●◀**.

Prin derivarea lui **dexθ** se va obţine acceleraţia unghiulară € **:**

(3) $€(t) = \frac{s^3\mathrm{Cos}[\varepsilon - \boldsymbol{\theta}]^2\mathrm{Sin}[\varepsilon - t]}{(1 - s^2\mathrm{Sin}[\varepsilon - \boldsymbol{\theta}]^2)^{3/2}} - \frac{s\mathrm{Sin}[\varepsilon - \boldsymbol{\theta}]}{\sqrt{1 - s^2\mathrm{Sin}[\varepsilon - \boldsymbol{\theta}]^2}}$

şi pentru **θ = 0** rezultă :

(3') $€(t) = \frac{0.216\mathrm{Cos}[\varepsilon]^2\mathrm{Sin}[\varepsilon]}{(1 - 0.36\mathrm{Sin}[\varepsilon]^2)^{3/2}} - \frac{0.6\mathrm{Sin}[\varepsilon]}{\sqrt{1 - 0.36\mathrm{Sin}[\varepsilon]^2}}$, cu graficele din **figura 2,b ▼◀**.

Graficele pentru cazul din **figura 2,a** de **s = 0,6** sunt prezentate în **figura 2,c** în partea stângă ◀, iar cele de **s** ∈ [0, 1,5] în partea dreaptă ▶, unde se observă că pentru **s** > 1 mişcarea încetează, într-un anumit interval, simetric, din jurul valorilor **π/2** şi **3π/2**.

Din **figura 2,a** rezultă că aceleaşi puncte pot fi, în acelaşi timp, **centre** şi **excentre**, ceea ce face ca înţelegerea fenomenelor **supermatematice** şi mecanice să devină mai coplicată. De exemplu, punctul **O'(0,3 ; 0) ≡** $\mathbf{S_F(s_F, \varepsilon_F = 0)}$ este **centru** pentru cercul **C(O', r = e**$\mathbf{_V}$ **)** şi **excentru** punct **fix** $\mathbf{S_F(- s_F, \varepsilon_F = 0))}$ pentru cercul unitate **CU(O, R = 1**), pentru care **O(0,0)** devine **centrul CU şi excentru punct fix** pentru **C(O', r = e**$\mathbf{_V}$ **)**.

Din **figura 2,b ●▶** cât şi din **figura 3,c ▲▶** se observă că pentru **s = 1**, adică cele două cercuri C_E şi **CU** de aceeaşi rază (r = R), viteza unghiulară de oscilaţie a punctului **W** este **ω = ± 1,** egală în modul cu viteza de ascilaţie Ω = 1 şi este constantă. Se observă, de asemenea, că în punctele S_V = W, de α = **π/2** şi α = **3π/2** funcţia schimbă de semn, ceea ce arată că mişcarea de oscilaţie a lui **W** schimbă de sens şi mişcarea se face numai pe un singur semicerc **CU**, cel cuprins între punctele W_m(**− π/2** sau **3π/2**) şi W_M(+ **π/2**), adică pentru $\alpha_{m,M}$ = ± π/2 şi nu este o mişcare continuă pe **CU**, cum se consideră mişcarea pendulului gravitaţional neliniar de **masă m** în acest caz.

Din aceleaşi grafice, rezultă că acelaşi lucru se întâmplă şi pentru **s** > 1, cu deosebirea că, între momentul schimbării sensului de oscilaţie pe **CU**, există o pauză / stagnare în care **ω = 0.**

Un fenomen asemănător a fost relevat şi în lucrarea autorului [16: **”TRANSFORMAREA RIGUROASĂ ÎN CERC A COMPLIANŢEI”]** în care se arată că răspunsul în frecvenţă sau complianţa A_1 este dată şi de **funcţia supermatematică circulara excentrică** (**FSM— CE**) de **variabilă centrică Rexα_1**:

(4) $$A_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\chi^4-2\chi^2(1-2\varsigma^2)}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+s^2-2s\cos\alpha_1}} = \frac{1}{\boldsymbol{Rex}[\alpha_1, S(s=\chi^2, \varepsilon=0)]}$$, care, pentru **s < 1** este pozitivă, iar pentru

s > 1 schimbă de semn, deoarece, pentru un excentru **S,** care este totodată şi originea dreaptei excentrice **d**, interior discului unitate, **Rexα_1** = $\overrightarrow{SW}_1$, **W_1** este la dreapta excentrului **S** şi **Rexα_1** > 0 pe semidreapta pozitivă **d^+**, a dreptei excentrice **d** = $d^+ \cup d^-$, iar pentru **s > 1**, **W_1** este dispus la stânga excentrului, pe semidreapta negativă **d^-** şi segmentul **Rexα_1** = $\overrightarrow{SW}_1$ < 0 este orientat în sensul semidreptei **d^-,** negatival al dreptei excentrice **d,** astfel, nu mai sunt necesare explicaţii pe o întreagă pagină cu privire la schimbarea semnului, aşa cum este cazul în mecanica clasică.

3.PENDULUL SUPERMATEMATIC (PSM) CU DOUĂ EXCENTRE UNUL FIX ŞI AL DOILEA VARIABIL PE UN CERC

Din a doua familie fac parte **PSM** cu două **excentre** (**Fig. 3,a**): **unul fix $S_F(s_F, \varepsilon_F = 0)$** care este, acum, centrul cercului **C(O’, r = s_F)** pe care se roteşte, cu **Ω = ct. = 1,** excentrul variabil **$E_V(s_v, \varepsilon_v$** = **Ω**.t), a cărui excentru **E_V** se proiectează pe direcţia axei **Ox** pe cercul **CU(O, R = L = 1)** în punctul **W** de pe cercul unitate **CU(O, R)** generând, astfel, un nou tip de oscilaţie a **PSM**.

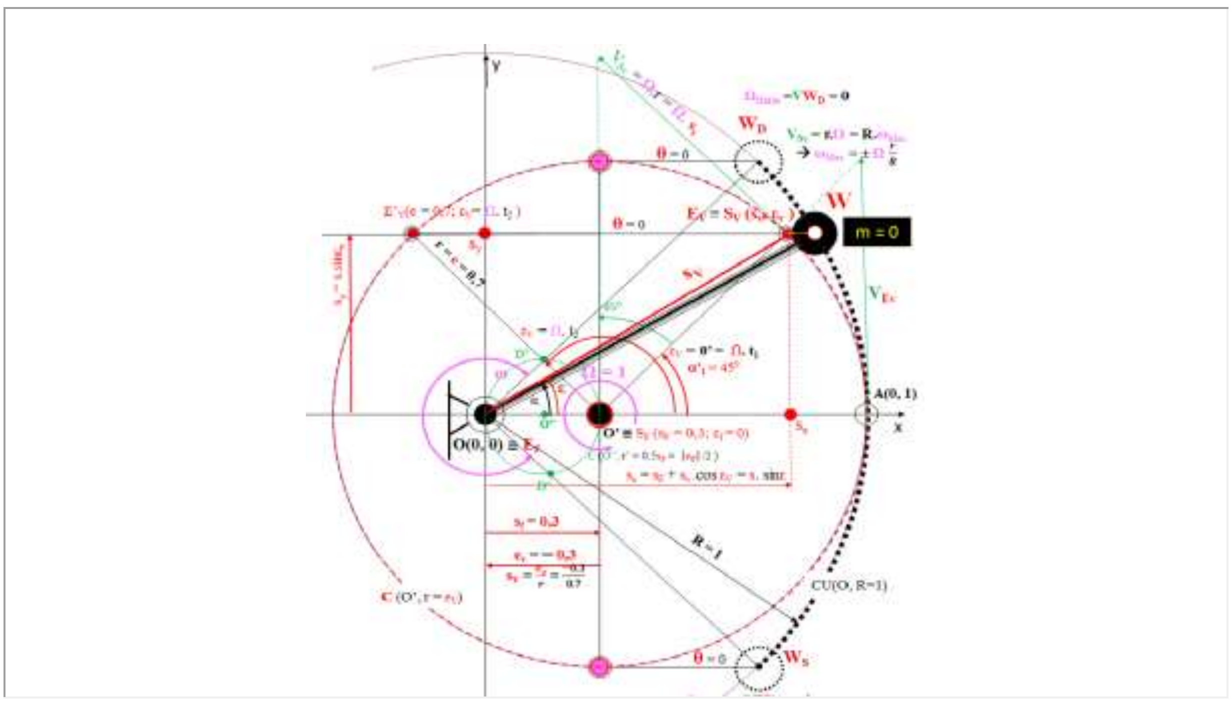


Fig.3,a Pendulul **supermatematic** cu două **excentre** **S_F** şi **S_V**. Schiţă explicativă şi de lucru a mărimilor de rotaţie pe cercul C(O’, r = **e_V**) şi de oscilaţie pe cercul unitate **CU(O, R = 1)**

În acest caz, oscilaţia punctului **W**, de masă nulă **m = 0**, pe cercul unitate **CU(O, R=1)** este generată de proiecţia orizontală, de **θ = 0**, adică pe direcţia axei **Ox**, a excentrului variabil **S**$_V$ pe acest cerc.

Din **figurile 3,a** şi **3,b** rezultă imediat că excentricitatea liniară numerică variabilă **s**$_v$ variază între limitele:

(5) $\begin{cases} \mathbf{s_{vM}} = 1, \text{pentru } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \\ \mathbf{s_{vM}} = 0{,}4, \text{pentru } \boldsymbol{\alpha} = \pi \end{cases}$,

adică coordonatele polare limită ale excentrului variabil al cercului unitate **CU(O, R = 1)** sunt:

(5') **S**$_V$(**s**$_v$ ∈ **[0,4; 1], ε**$_v$ = **Ω**.t], în care, raza polară **s**$_v$ este distanţa de la excentrul fix **O(0,0)** ≡ **E**$_F$, pentru cercul **C**(O', r = **e** = 0,7), la punctul de pe cercul **C**(O', r = **e** = 0,7), dată, după cum este cunoscut, de **FSM— CE radial excentric rexθ** de variabilă **excentrică θ**.

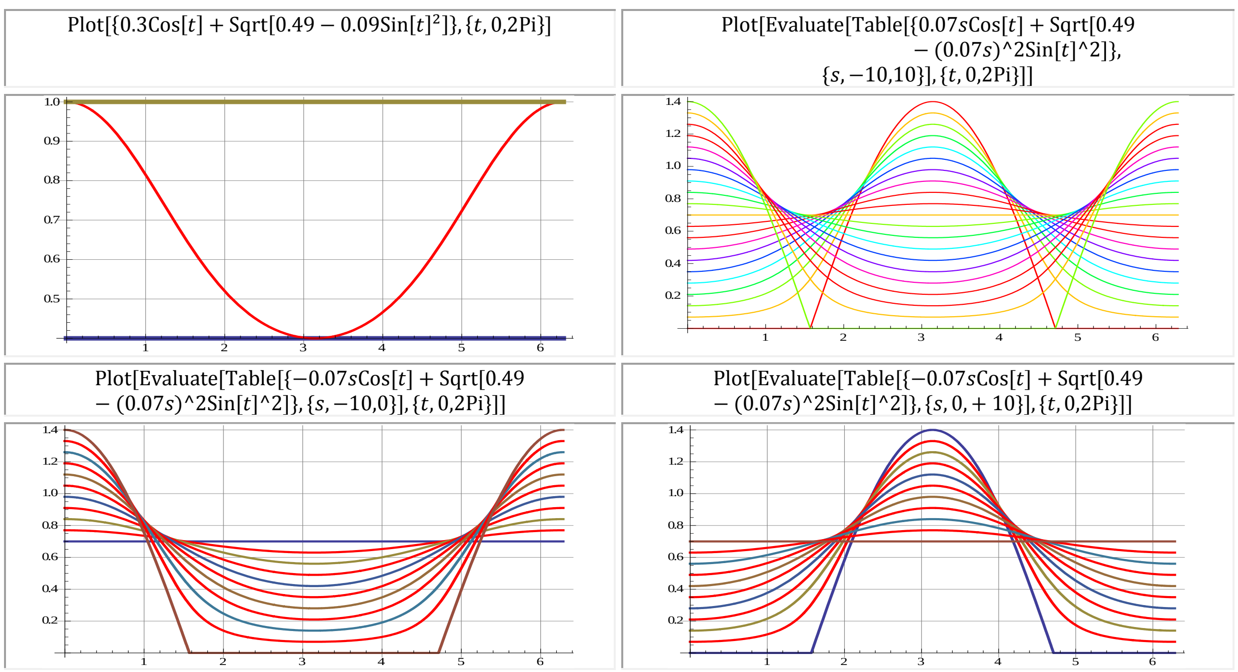


Fig. 3,b Variaţia excentricităţii variabile (raza polară) **s**$_v$ pe cercul **C**(O, r), pentru **e**$_v$**= — 0,3** **(Fig.2,b)▲◀** şi pentru un excentru fix **S**$_F$ pe axa **Ox▲▶**, în interiorul discului unitate, mărginit de cercul unitate **CU** şi defalcat pentru **s < 0▼◀** şi **s** > 0 **▼▶**

Pentru soluţionarea problemei, sunt necesare coordonatele polare ale excentrului mobil **S**$_V$ (**s**$_v$, **ε**$_v$ = **Ω**.t).

Unghiul polar, de rotaţie, este **ε**$_V$ = **Ω**.t din **O'**≡ **S**$_F$ al punctului **Ev** (excentrul variabil / turnant) pe cercul **C**(O', r = **e**$_F$), care este totodată şi excentricitatea unghiulară variabilă **ε**$_V$ = **Ω.t** a excentrului variabil **Ev** din **figura 3,a** şi se exprimă cu **FSM — CE amplitudine excentrică** **s**$_v$ = **r.rex[θ'** = **ε**$_v$ = **Ω**.t, **E**$_F$(-0,3; **ε**$_v$ = **Ω**.t)] de ecuaţie:

(6) $\mathbf{s_v} = \mathbf{r.rex\theta} = \mathbf{r}(-\mathbf{s}.\cos(\theta-\varepsilon) + \sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)})$

şi, în condiţiile date:

(6') $r = 0{,}7,\ \mathbf{s} = \frac{e}{r} = \frac{-0{,}3}{0{,}7} = -0.42857142857142855 \cong -0.42857,\ \mathbf{\Omega} = 1$

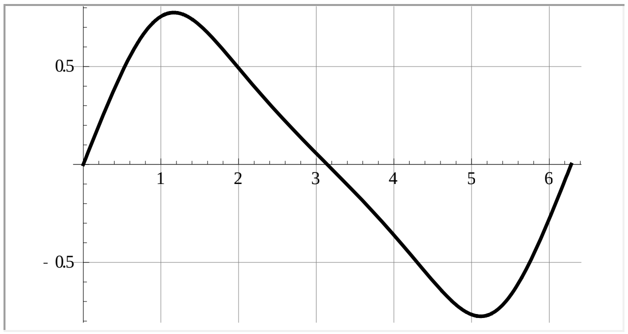
(7) $\mathbf{s_v} = \mathbf{7.rex\ \Omega}.t = \mathbf{7}[\,0{,}42857.\cos(\mathbf{\Omega}.t) + \sqrt{1 - 0{,}42857^2 sin^2(\mathbf{\Omega}.t)}\,] = 0{,}3.\cos t + \sqrt{0.7^2 - 0.3^2.sint}$

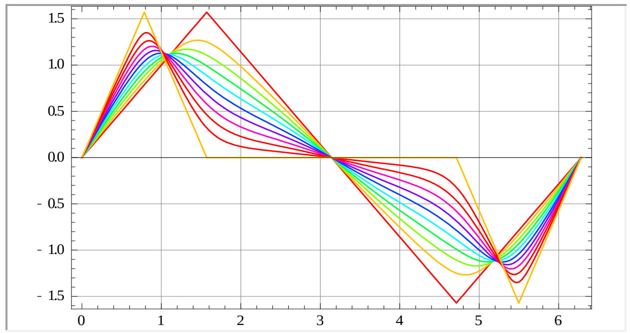
cu graficele din **figura 3,c**.

PSM cu două **excentre**: unul **fix** $S_F(e_F, \varepsilon_F = 0)$ şi unul **variabil** $S_V(s_V, \varepsilon_v)$

Plot[{ArcSin[(0.3Cos[t] + Sqrt[0.49 − 0.09Sin[t]^2])Sin[t]]}, {t, 0,2Pi}] → α(θ) = (Ω.t), s = r.rex(Ω.t),

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[(0.1sCos[t] + Sqrt[1 − 0.1sSin[t]^2])Sin[t]]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]] → α(θ) = (Ω.t), s ∈[0,1], L = R = 1





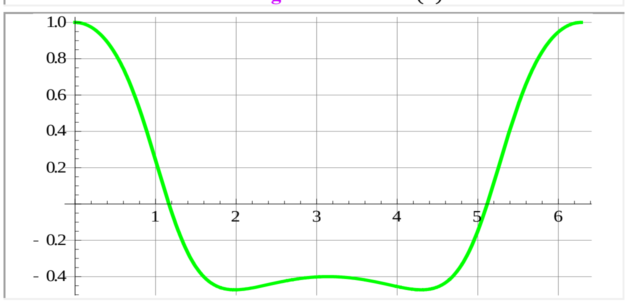
$$\text{Plot}[\{\text{Sin}[t](-0.3\text{Sin}[t] - \frac{0.09\text{Cos}[t]\text{Sin}[t]}{\sqrt{0.49 - 0.09\text{Sin}[t]^2}}) + \text{Cos}[t](0.3\text{Cos}[t] + \sqrt{0.49 - 0.09\text{Sin}[t]^2})\}/ \sqrt{1 - \text{Sin}[t]^2\left(0.3\text{Cos}[t] + \sqrt{0.49 - 0.09\text{Sin}[t]^2}\right)^2}$$

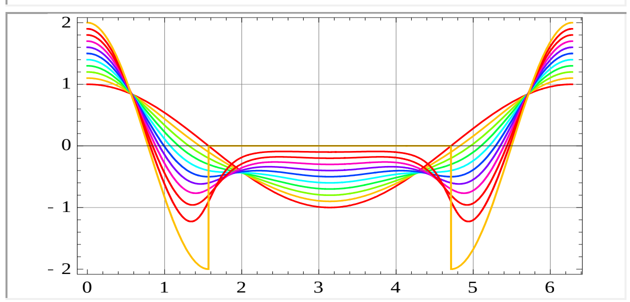
Viteza unghiulară ω = α̇ (θ)

$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\{\text{Sin}[t](-0.1s\text{Sin}[t] - \frac{0.1s\text{Cos}[t]\text{Sin}[t]}{\sqrt{1 - 0.1s\text{Sin}[t]^2}}) + \text{Cos}[t](0.1s\text{Cos}[t] + \sqrt{1 - 0.1s\text{Sin}[t]^2})\}, \{s, 0,10\}], \{t, 0,2\text{Pi}\}]]$$

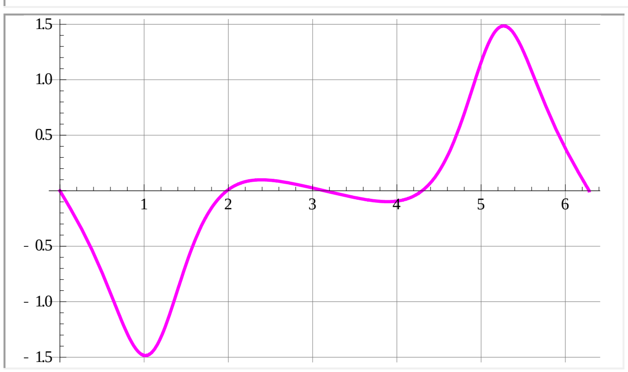
Viteza unghiulară ω = α̇ (θ)

s ∈[0, 1], L = R = 1





ω = α̇ (θ) **Acceleraţia unghiulară** ω̇ = α̈ (θ) ω = α̇ (θ)s ∈[0, 1], **L = R = 1**



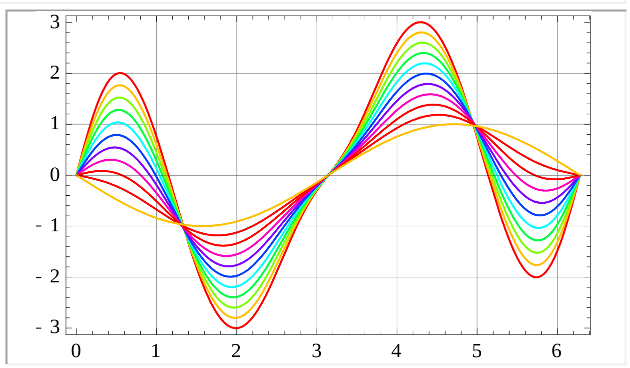


Fig.3,c Pendulul **supermatematic: elongaţia ▲▶**, **viteza unghiulară▼◀** şi **acceleraţia unghiulară ▼▶** pe cercul unitate **CU** (**O, R = 1**), în stânga◀, cazul din **figura 2,b** şi cazul general în dreapta ▶

Dacă, pentru cazul din **figura 3,a,** limitele excentricităţii variabile sunt cele amintite (5), pentru un excentru **O'** = S_F plasat pe axa **Ox**, în interiorul cercului **C**, valorile extreme cresc simţitor, ajungând în domneiul $s_v \in [0; 1,4]$, **figura 3,b** ▶▲, pentru $s_F = -1$ → $e_F = r.s_F = 0,7$, adică **O'** = S_F în originea **A**(**0,7; 0**) a cercului **C** (**O'**, r = **e**) şi pentru **s > 0** în punctul **A'**(**− 0,7; 0**).

4. PENDULUL SUPERMATEMATIC
CU UN EXCENTRU VARIABIL PE ELIPSĂ

Schiţa de principiu a acestui **pendul supermatematic**, **figura 4**, a cărui mişcare de oscilaţie, pe un cerc, în acest caz s-a ales cercul unitate **CU(O, R = 1)**, este dată de proiecţia paralelă cu axa **Ox**, adică de **θ = 0**, a unui singur excentru variabil **S_V,** care evoluează pe o elipsă cu semiaxa mare **a = 1** şi semiaxa mică **b = 0,7**.

Coordonatele excentrului variabil **$S_V(s_v, \varepsilon_v)$**, sunt:

- **Excentricitatea liniară numerică s_v**, care este chiar **raza polară r** a elipsei cu polul în centrul de simetrie **O(0, 0**), este exprimată de relaţia:

(7) $\mathbf{r} = s_v = \frac{b}{\sqrt{1-\epsilon^2 cos^2\varphi}} = \frac{a\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2 cos^2\varphi}} = \frac{ak'}{\sqrt{1-k^2 cos^2\varphi}}$, în care, excentricitatea reală **e** a elipsei este

(8) $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1-0.7^2} = \sqrt{0{,}51} = 7{,}14142842854285$, iar excentricitatea numerică $\boldsymbol{\epsilon}$ este :

(9) $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{e}{\boldsymbol{a}} = \mathbf{e} = 7{,}14142842854285$ şi, pentru cazul din **figura 4**, în care $\varphi = \varepsilon_v = \mathbf{\Omega.t} = 47^0 \leftrightarrow$ 0.8203047484373349 rad. este

(8') $s_v = \frac{0{,}7}{\sqrt{1-0{,}51.cos^2\varphi}} = \frac{0{,}7}{\sqrt{1-0{,}51.cos^2(47^0)}} = 0{,}80$ $(\cong 80\ mm\ in\ desenul\ original\ cu\ R = 100\ mm)$, iar

- **Excentricitatea unghiulară ε_v** care este chiar coordonata polară **φ** fiind exprimată de:

(10) $\varphi = \varepsilon_v = \mathbf{\Omega.t}$

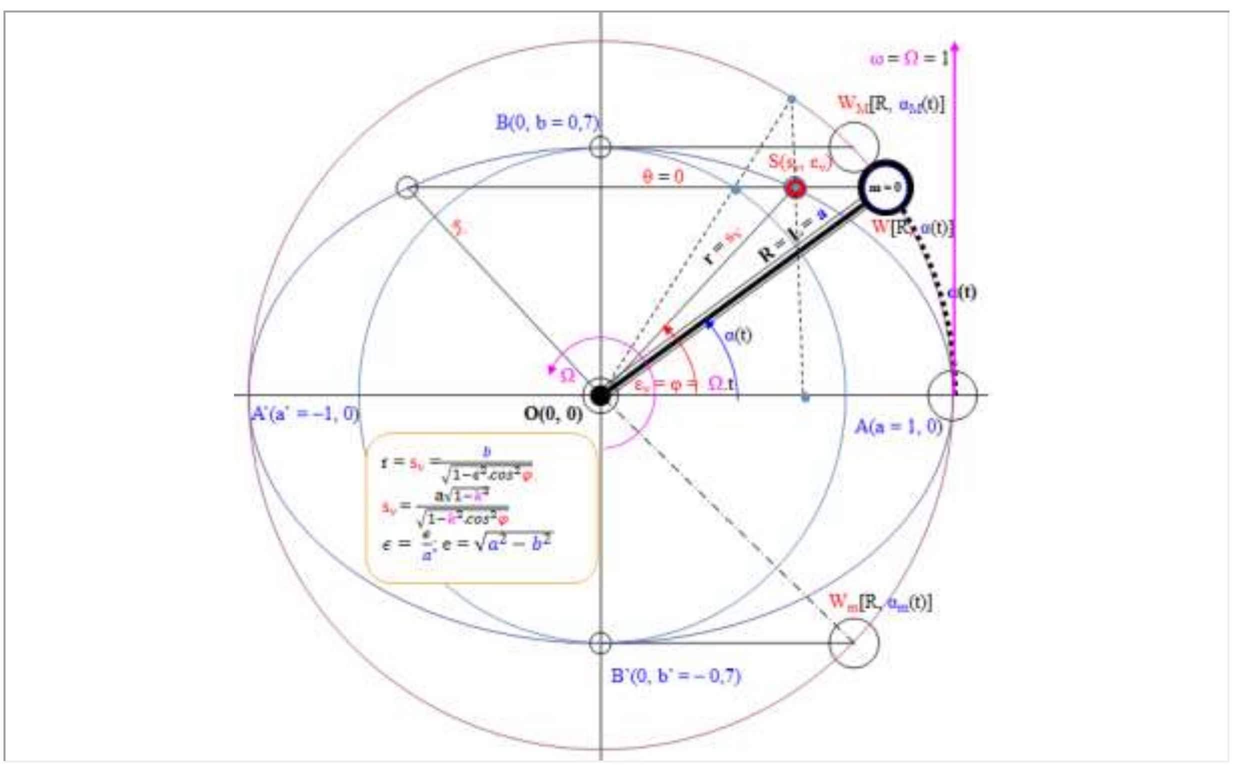


Fig. 4 Schiţă explicativă a **pendulului supermatematic** (**PSM**) cu un excentru variabil pe o **elipsă**

Cunoscându-se aceste mărimi, poziţia pendulului **α(t)** pentru R = **Ω** = 1, pe cercul unitate **CU**, va fi dată de **FSM — CE** amplitudine excentrică (1), de variabilă excentrică **θ**,

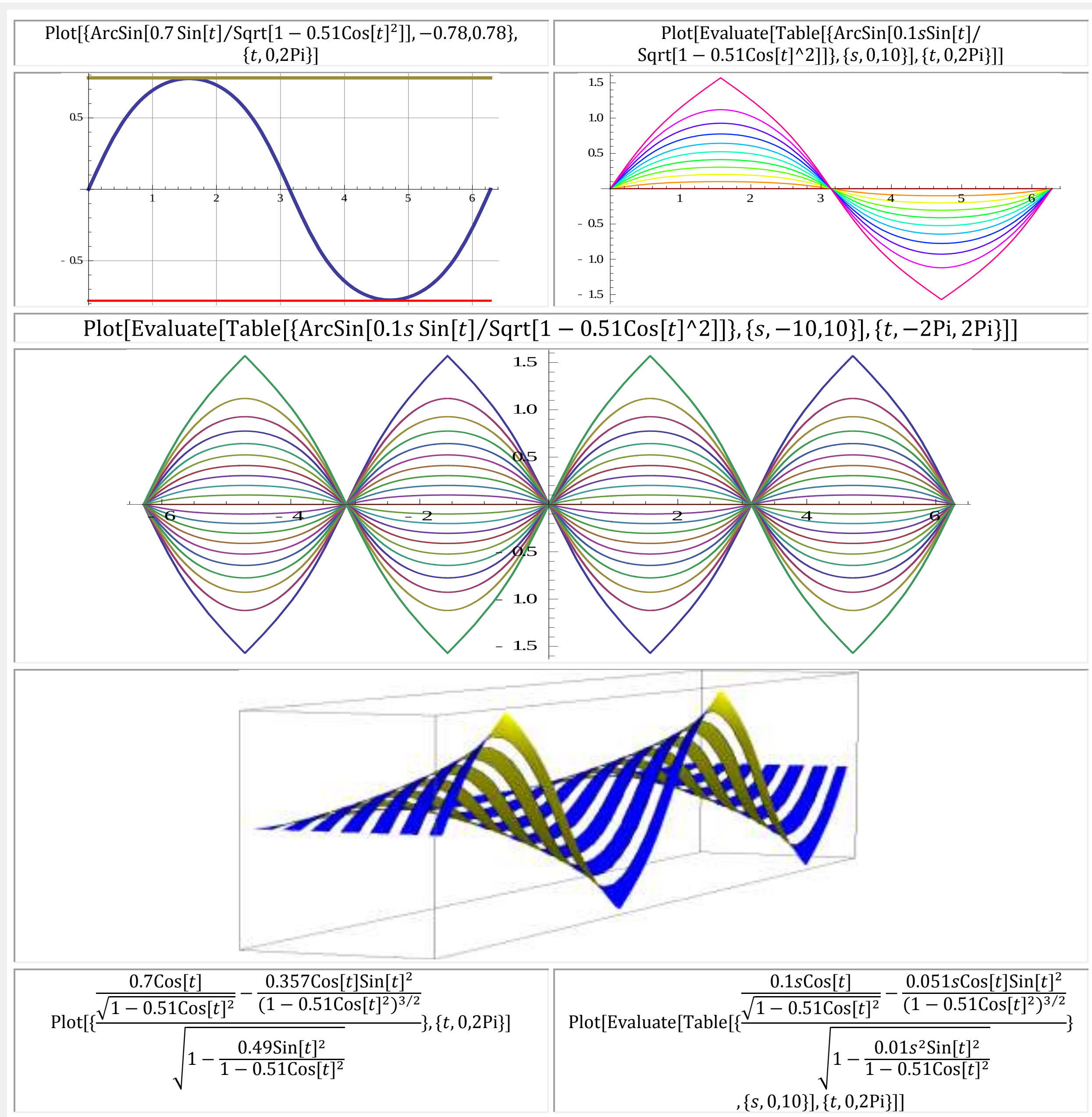
(11) $\alpha(\theta)$ = **aexθ** = θ – arcsin[**s**.sin(θ — ε)]

şi, pentru **θ** = 0, s_v dat de (8) şi ε_v = Ω.t = **t** rezultă:

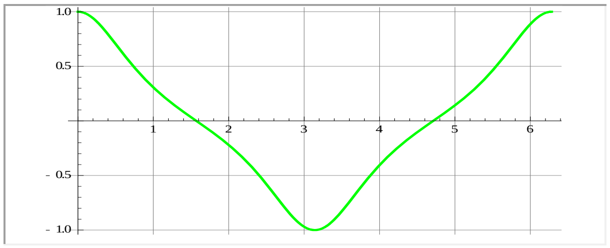
(12) $\alpha(t)$ = **aex(0, Sv**(s_v, ε_v) = 0 – arcsin[$\frac{b}{\sqrt{1-\epsilon^2 cos^2\varphi}}$.sin(0 — ε)] = arcsin[$\frac{b}{\sqrt{1-\epsilon^2 cos^2\varphi}}$.sin(t)] =

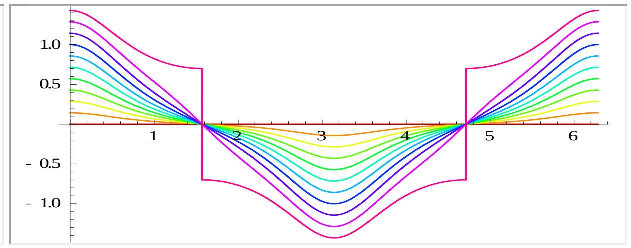
$$= \arcsin[\frac{0,7}{\sqrt{1-0,51.cos^2\varphi}}\ sint],$$

cu graficele din **figura 5** stânga ◀ pentru datele din **figura 4** cu **b = 0,7** şi, în dreapta ▶, pentru **b ∈ [0, 1].**

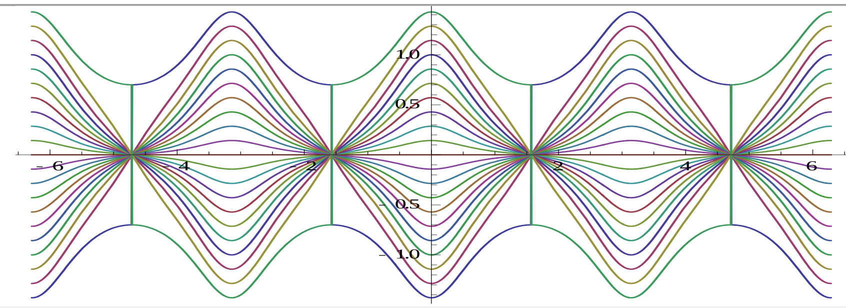


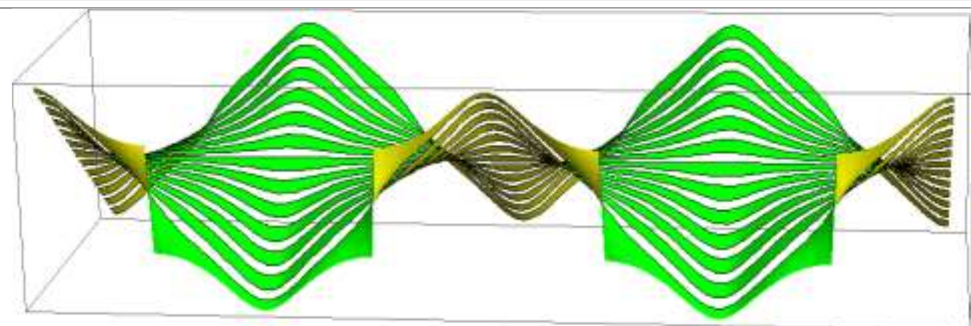
BUPT





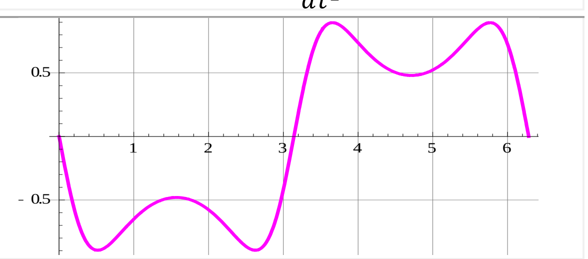
$$\text{Plot[Evaluate[Table[}\{\frac{\frac{0.1s\text{Cos}[t]}{\sqrt{1-0.51\text{Cos}[t]^2}}-\frac{0.051s\text{Cos}[t]\text{Sin}[t]^2}{(1-0.51\text{Cos}[t]^2)^{3/2}}}{\sqrt{1-\frac{0.01s^2\text{Sin}[t]^2}{1-0.51\text{Cos}[t]^2}}}\},\{s,-10{,}10\}],\{t,-2\text{Pi},2\text{Pi}\}]]$$

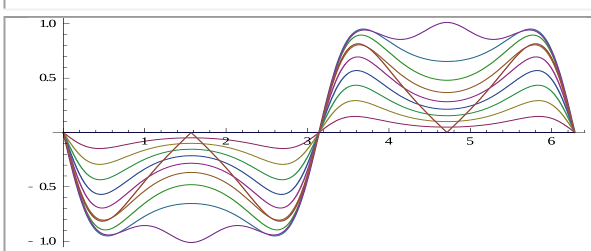




$$\ddot{\alpha}(t)=\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\ddot{\alpha}(t)=\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$ → **b ∈ [0, 1].**





$$\text{Plot[Evaluate[Table[}\{-\frac{\left(\frac{0.1s\text{Cos}[t]}{\sqrt{1-0.51\text{Cos}[t]^2}}-\frac{0.051s\text{Cos}[t]\text{Sin}[t]^2}{(1-0.51\text{Cos}[t]^2)^{3/2}}\right)\left(-\frac{0.02s^2\text{Cos}[t]\text{Sin}[t]}{1-0.51\text{Cos}[t]^2}+\frac{0.0102s^2\text{Cos}[t]\text{Sin}[t]^3}{(1-0.51\text{Cos}[t]^2)^2}\right)}{2\left(1-\frac{0.01s^2\text{Sin}[t]^2}{1-0.51\text{Cos}[t]^2}\right)^{3/2}}$$
$$+\frac{-\frac{0.153s\text{Cos}[t]^2\text{Sin}[t]}{(1-0.51\text{Cos}[t]^2)^{3/2}}-\frac{0.1s\text{Sin}[t]}{\sqrt{1-0.51\text{Cos}[t]^2}}+\frac{0.07803s\text{Cos}[t]^2\text{Sin}[t]^3}{(1-0.51\text{Cos}[t]^2)^{5/2}}+\frac{0.051s\text{Sin}[t]^3}{(1-0.51\text{Cos}[t]^2)^{3/2}}}{\sqrt{1-\frac{0.01s^2\text{Sin}[t]^2}{1-0.51\text{Cos}[t]^2}}}\},\{s,-10{,}10\}],\{t,-2\text{Pi},2\text{Pi}\}]]$$

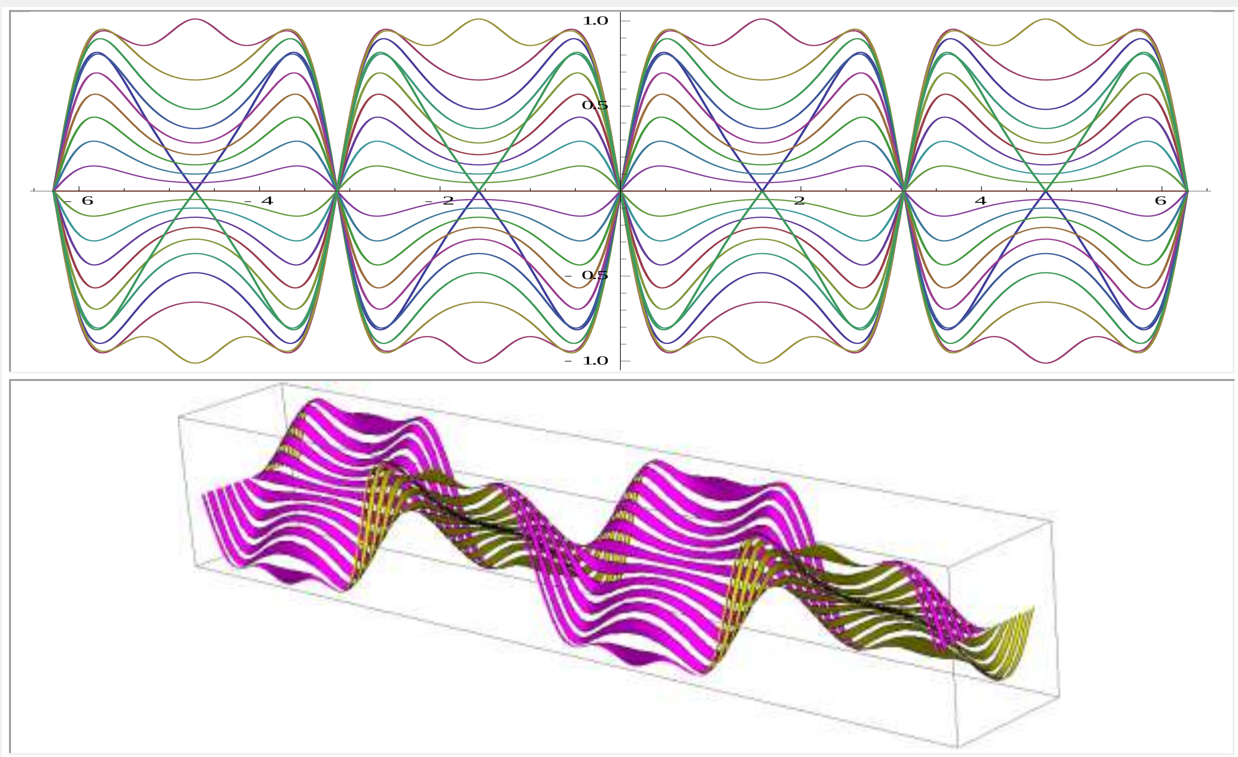


Fig. 4 Graficele poziţiei, vitezei unghiulare si a acceleraţiei unghiulare ale pendulului supermatematic (**PSM**) cu un excentru variabil pe o elipsă

Dacă s-ar alege, pentru excentrul variabil **E_V**, în locul cercului o **quadrilobă** / cvadrilobă, atunci, pentru o excentricitate **$s = 0$**, traiectoria lui **E_V** ar fi un **cerc**, iar pentru **$s = \pm 1$** un **pătrat**; între aceste două valori traiectoriile lui **S_V** fiind curbe închise, cu patru lobi. De asemenea, odată cu descoperirea **supermatematicii**, pot fi considerate o mulţime de alte curbe închise, apărute în consecinţă, cum sunt bilobele, trilobele, …, multilobele.

5. B I B L I O G R A F I E

1	ŞELARIU Mircea Eugen	**MIŞCAREA CRCULARĂ EXCENTRICĂ**	*Com. VII Conf. Internaţ. de Ing. Man. şi Tehn.* ***Tehno'95***, Vol. 7/ II : Mecatronica, dispozitive, roboţi industriali, pag. 85 ... 102
2	ŞELARIU Mircea Eugen	**FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ**	Lucrările Conf. Internaţ. ***Tehno'95***, Vol.2 , Pag.531 ... 548
3	ŞELARIU Mircea Eugen	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE**	1-a *Conf. Naţ. Vibr.în Constr. de Maşini*,Timişoara, 1978, pag. 101 ...108.
4	ŞELARIU Mircea Eugen	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE ŞI EXTENSIA LOR**	Bul.St.şiTehn. al Inst. Pol. "Tr. Vuia" Tim. Seria mec.,Tom25(39), Fasc1-1980, pag.189 ... 196
5	ŞELARIU Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA**	*Com. VII Conf. Internaţ. de Ing. Man. şi Tehn.* ***Tehno'95***, Timişoara, Vol.9. Matem. aplic. pag. 41 ... 64

6	ŞELARIU Mircea Eugen	**RIGIDITATEA DINAMICĂ EXPRIMATĂ CU FUNCŢII SUPERMATEMATICE**	*Com. VII Conf. Internaţ. de Ing. Man. şi Tehn. **Tehno'95***, Timişoara, Vol.7: Mecatr., Dispoz. şi Roboţi Industriali, pag. 185 ... 194.
7	Suslov G. K.	**MECANICĂ RAŢIONALĂ Vol. I şi Vol. II,** BAZELE CALCULULUI VECTORIAL, CINEMATICĂ ŞI DINAMICĂ	Editura Tehnică, Bucureşti, 1954
8	ŞELARIU Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**	Editura "POLITEHNICA, Timişoara, 2007
9	ŞELARIU Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE, Vol I şi Vol II Ediţia a 2-a**	Editura "POLITEHNICA, Timişoara, 2012
10	ŞELARIU Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. Vol I şi Vol II Ediţia a 3-a revizuită şi îmbogăţită**	Editura **MatrixRom,** Bucureşti, 2015
11	ŞELARIU Mircea Eugen	**MIŞCAREA OSCILANTĂ EXCENTRICĂ PENDULE SUPERMATEMATICE**	Com. celei de a V-a Conf. de Vibr. Mec. Timişoara, 1999
12	ŞELARIU Mircea Eugen	**MIŞCAREA CRCULARĂ EXCENTRICĂ**	LUCR CONF. INTERNAT. TEHNO'95, Vol. 7/ II : Mecatronică, dispozitive, roboţi industriali, pag. 85 ... 102
13	ŞELARIU Mircea Eugen	**FUNCTII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ**	LUCR CONF. INTERNAŢ. TEHNO'98' VOL.2, Pag. 531 ... 548
14	ŞELARIU Mircea Eugen	**FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE**	1-a Conf. Nat. Vibr. în Constr. de Maşini, Timişoara, 1978, pag. 101 ...108.
18	ŞELARIU Mircea Eugen	**MIŞCAREA OSCILANTĂ EXCENTRICĂ. PENDULUL SUPERMATEMATIC EXCENTRIC**	Com. celei de a V-a Conf. de Vibr. Mec., Timişoara 1985

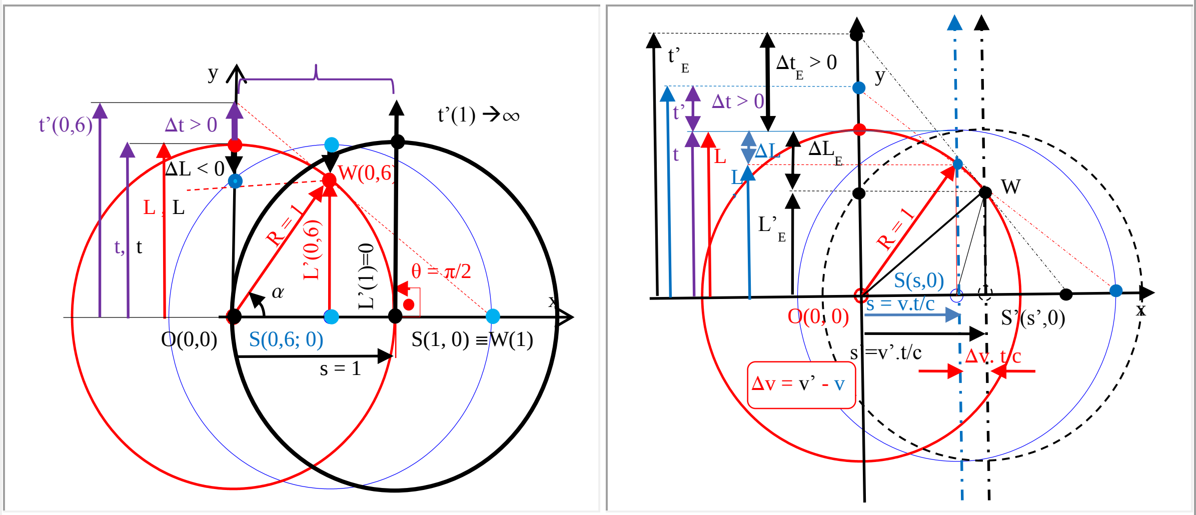
Motto: "**Mecanica** este paradisul ştiinţelor matematice, deoarece prin ea se ajunge la fructele matematicii "
Leonardo da Vinci

"Ori de câte ori aud de "cvadridimensional" matematicienii sunt scuturaţi de un frison mistic.."
Albert Einstein

CAPITOLUL XXIV

1 SPAŢIUL MATEMATICII CENTRICE (ME) ŞI SPAŢIUL MATEMATICII EXCENTRICE (ME)

Spaţiul este o categorie filozofică ce desemnează **forme** obiective şi universale de existenţă a materiei în mişcare. Spaţiului exprimă ordinea, **poziţia** (**localizarea** şi **orientarea**), distanţa, mărimea, **forma** şi întinderea obiectelor coexistente în lumea reală ca şi a corpurilor sau părţilor ce formează aceste obiecte. Pentru **Newton**, spaţiul şi timpul sunt **absolute**, **obiective** şi **universale**, deci independente de materia în mişcare. Acesta ar putea fi numit **spaţiul matematicii centrice** (**MC**).



$s = \frac{v}{c} = 0,6$ şi **s = 1**

v' > v → s' > s

Fig. 1 Contracţia spaţiului (ΔL) şi dilatarea temporală (Δt) ← stânga şi variaţia lor cu creşterea vitezei → dreapta.

www.SuperMathematica.ro

Constituirea geometriilor neeuclidiene de către **Lobacevski**, **Bolyai**, **Gauss**, **Riemann** ş.a. a contribuit la formarea concepţiei, conform căreia, proprietăţile geometrice spaţiale nu sunt pretutindeni aceleaşi, fiind determinate de proprietăţile lui fizice. Spaţiul este deci **neomogen şi anizotrop**. Teoria relativităţii lui **Einstein** a demonstrat că proprietăţile spaţio-temporale (lungimea corpurilor şi durata fenomenelor → v. **Fig.1**) depind de viteza de deplasare a sistemelor materiale şi că structura sau proprietăţile continuului spaţio-temporal variază în funcţie de concentrarea **maselor substanţei** şi de **intensitatea câmpului** gravitaţional generat de către acestea. De aceea, ea a fost numită şi **teoria fizică** a spaţiului şi timpului. Dacă acesta ar fi spaţiul **matematicii excentrice** (**ME**), atunci se poate **adăuga** că în acest spaţiu toate entităţile sau figurile geometrice se pot **metamorfoza**, prin existenţa **excentricităţii ca o nouă dimensiune a acestui spaţiu**, sau, mai precis, ca **noi** dimensiuni ale lui.

Excentricitate pote fi considerată un amănunt, dar nu este ! Şi, chiar dacă ar fi, “Nu neglijaţi amănuntele. Amănuntele creează perfecţiunea şi perfecţiunea nu-i un amănunt !” ne-a îndemnat, cu aproape 500 de ani înainte, **Michelangelo Buonarroti**.

Excentricitate reală poate fi distanţa de la punctul **E(e,ε)** până la un punct **O(0,0)**, considerat centru, ca în matematica excentrică (**ME**). O diferenţă de potenţial în electricitate, o diferenţă de presiune, în hidraulică, datorită căreia fluidul se deplasează într-un sens sau altul într-o conductă. Fără această ***excentricitate***- diferenţă de presiune, mişcarea nefiind posibilă; fluidul staţionând. Diferenţa dintre originile a două sisteme inerţiale, sau spaţiu deplasării relative a acestora (e = **s.t**), aşa cum se consideră în continuare, caz în care excentricitatea este o mărime variabilă care creşte continuu, în care raportul **s** = $\frac{v}{c}$ a fost denumit **excentricitate numerică variabilă** .

Fără existenţa unei excentricităţi originare oarecare, apariţia şi mişcarea în univers n-ar fi fost posibilă. “Amănutele crează perfecţiunea şi perfecţiunea nu-i un amănunt !” Cât de mult adevăr în spusele lui **Michelangelo Buonarroti !**.

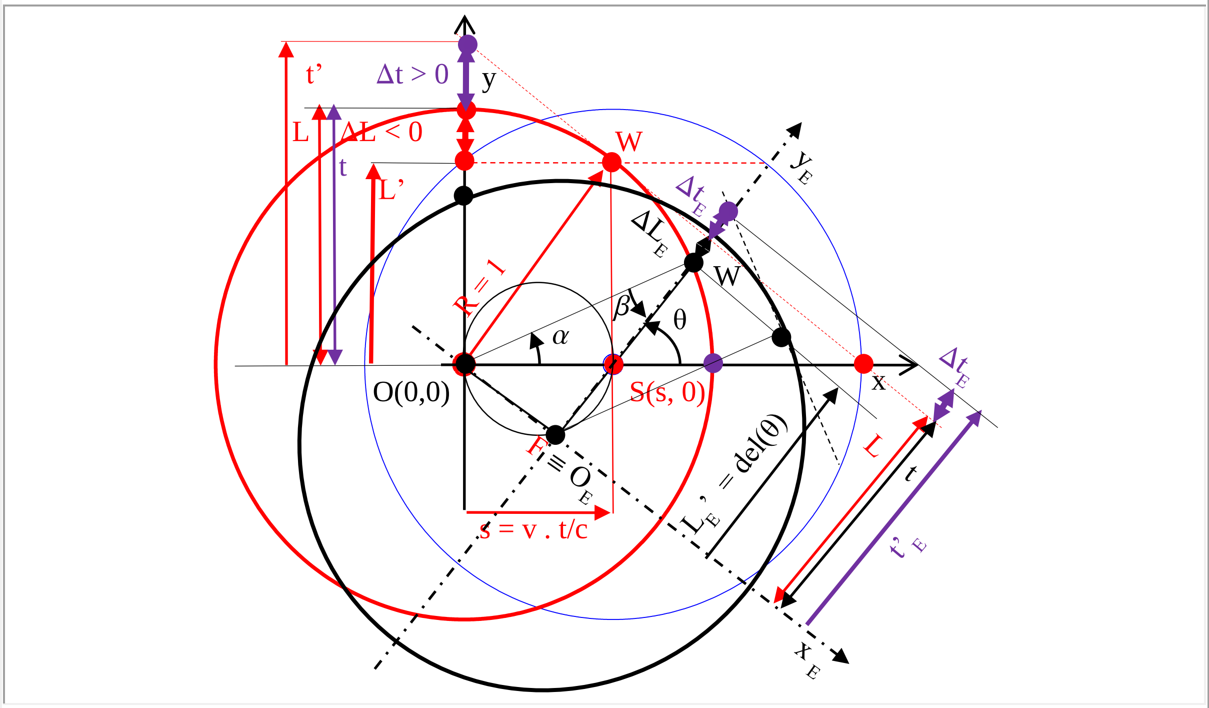


Fig. 2 Contracţia spaţiului (ΔL_E) şi dilatarea temporală(Δt_E)
în cazul factorului **Lorentz** excentric, pe direcţia θ < $\frac{\pi}{2}$

www.SuperMathematica.com | www.SuperMathematica.org

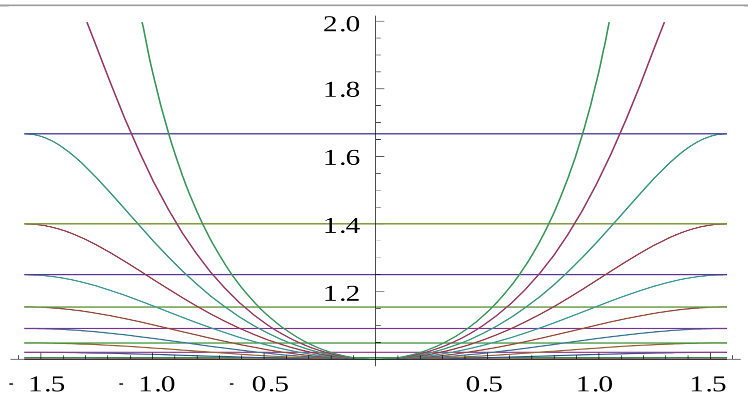
În **figura 1** este schiţată situaţia a două sisteme inerţiale, iniţial suprapuse în O(0, 0), sau a unui sistem considerat fix în originea O(0, 0) şi al doilea, care se deplasează, pe direcţia axei x (**ε = 0**), cu viteza **v**, o fracţiune (0,6 în **figura 1**) din viteza **c** a luminii în vid, astfel că, deplasarea relativă a celor doua sisteme **s** = $\|OS\|$, este dată de o nouă dimensiune a spaţiului **e**, adică e = **s.t** = $\frac{v}{c}t$, care este ***excentricitatea liniară reală variabilă* e** iar **s** este ***excentricitatea liniară numerică***, ambele, aici, considerate variabile. Acesta este spaţiul 2 D **excentric**, notat **2DE** sau **2D**$^+$ cu **3** dimensiuni: x, y şi e = $\frac{v}{c}t$, în care **e** variază uniform, în raport cu timpul **t**. Dacă **E** se deplasează pe o direcţie de orientare **ε** faţă de axa x, **ε = ct,** situaţia nu se schimbă**,** decât dacă deplasarea se realizează şi pe direcţia **z**, caz în care ne situăm în spatiul **3D** excentric, spaţiu **3D**$^+$ cu **patru** dimensiuni: x, y, z şi **e**, notat **3DE** sau **3D**$^+$, dacă **ε** = ct şi cu 5 dimensiuni dacă **ε** este variabil **ε** = ε (t) . Excentricitatea unghiulară fiind **ε**.

În **figura 1** sunt reprezentate contracţia spaţiului (**ΔL < 0**) şi dilatarea temporală (**Δt > 0**) pentru un unghi la excentrul **S** de θ = π/2 şi pentru unitatea de lungime L = R = 1 şi respectiv, unitatea de timp t = R = 1 → **e** = **s**. Acestea sunt

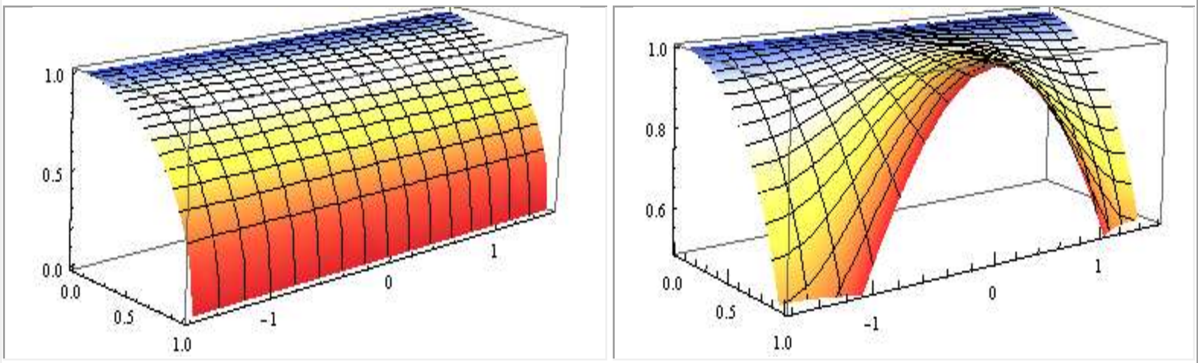
$$(1)\quad \begin{cases} \Delta L = L' - L = L\left(\sqrt{1 - s^2 sin^2\frac{\pi}{2}} - 1\right) = L\left(del\frac{\pi}{2} - 1\right) = L(\sqrt{1-s^2} - 1) < 0 \\ \Delta t = t' - t = t\left(\frac{1}{\sqrt{1-s^2 sin^2\frac{\pi}{2}}} - 1\right) = t\left(\frac{1}{del\frac{\pi}{2}} - 1\right) = t\left(\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} - 1\right) > 0 \end{cases}.$$

Factorul **Lorentz** **centric** **Λ(s),** constant pentru un anumit **s** şi
factorul **Lorentz** **excentric** **Λ_E** (s, θ), variabil în funcţie de θ pentru un anumit **s**

$\boldsymbol{\Lambda_E \leq \Lambda,\ \theta = \pm\frac{\pi}{2} \rightarrow \Lambda_E = \Lambda}$



Variaţia unităţii de lungime **L** datorită contracţiei, în cele două cazuri



$\Lambda(s = \frac{v}{c})$ | **Λ_E (s, θ)**

Fig. 3 Factorii **Lorentz** centric **Λ** şi excentric **Λ_E**

În aceeaşi figură, în partea dreptă, este prezentată accentuarea dilatării timpului şi a contracţie temporale la o creştere a viteze de la **v** la **v'**.

Se observă şi din figură că pentru **v = c** → **s = 1** şi ΔL → – L lungimea se reduce la zero (L'→ 0, ΔL = L' - L = 1) şi timpul se dilată nemărginit t' = Δt → ∞.

În relaţiile anterioare, factorul **Lorentz**, notat în mod obişnuit cu γ, aici a fost notat cu Λ (litera grecească **Λ** fiind mai apropiată de iniţiala numelui lui **Lorentz** decât gama - γ) şi are expresia

$$(2)\qquad \Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} > 1$$

Pentru o anumită valoare a vitezei **v = ct.,** rezultă o excentricitate numerică **s** = ct. şi, ca urmare, şi un factorul **Lorentz** constant, pentru care contracţia spaţiului şi, mai precis, a unitaţii de lungime L pe direcţia **y** (**Fig. 1**) este $\boldsymbol{L' = L/\Lambda}$ şi dilatarea temporală a unitaţii de timp t va fi **t' = Λ.t**. Se poate deduce că aceste valori sunt invariante la sensul de deplasarea (pozitiv pe semiaxa x^+ sau negativ pe direcţia semiaxei negativa x^-, şi, evident, nici la unitaţi de lungime şi timp **orientate** pe x, dar **marcate** pe sensurile pozitive sau negative ale direcţiei **y**, aşa cum se observă şi în **figura 4**.

Pentru $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\Lambda = \Lambda_E$ astfel că $\Delta L = L' - L \rightarrow$ minim şi $\Delta t = t' - t \rightarrow$ maxim posibil, pentru o anumita valoare a lui **s** $\in [0, 1]$.

$\Delta L = L' - L$ şi ΔL_E, pentru L = 1	$\Delta t = t' - t$ şi ΔL_E, pentru t = 1

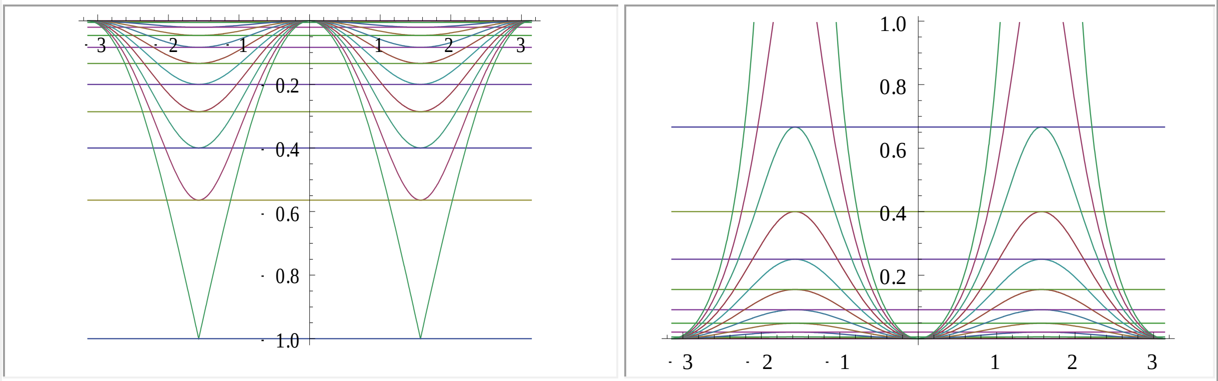


Fig. 4 Contracţiile lungimilor şi dilatarea temporală pentru cei doi factori **Lorentz** centric Λ şi **excentric** Λ_E, pentru s$\in$ [0, 1] cu pasul 0,1

www.SuperMathematica.ro

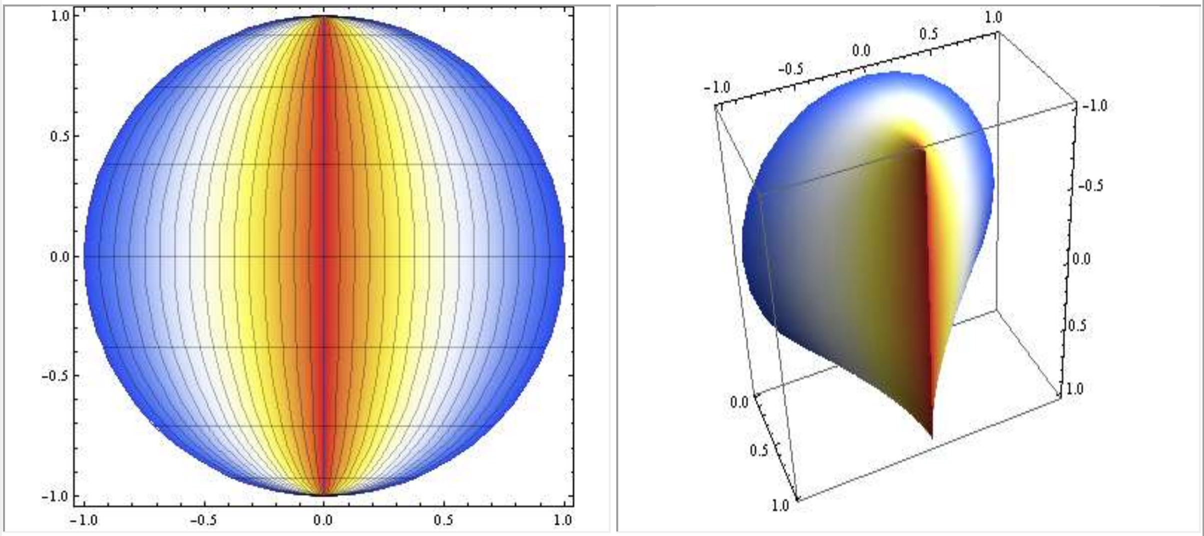


Fig. 5 Deformaţiile unui disc circular la deplasarea lui pe direcţia x cu viteza **v**, o fracţiune **s** din viteza **c** a luminii în vid **s** $\in [0, 1]$, cu pasul 0,1, e = $\frac{v}{c}$ t,
← în **2D** stânga şi în **3D** în dreapta →

www.SuperMathematica.ro

Deşi mărimile **L, L', t, t'** sunt reprezentate pe direcţia **y**, ele corspund deplasării relative ale sistemelor inerţiale pe direcţia axei **x**. Ca urmare, contracţia ΔL şi dilatarea Δt au loc pentru lungimi **L** şi lungimi de undă sau frecvenţe, care măsoară timpul, orientate tot pe direcţia de mişcare x.

Dacă, în relaţiile anterioare, unghiul θ este diferit de un unghi drept, atunci fenomenul de dilatare a timpului se accentuează, iar cel de contracţie a spaţiului se atenuează, odată cu scăderea lui θ (**Fig. 2** şi **3**). Pentru direcţia de $\theta = 0$, lungime **L**, care este orientată pe direcţia de deplasare **x**, nu-şi modifică lungimea, oricarear fi raportul **s** al vitezelor (**Fig. 3**), astfel că **L' = L** şi atenuarea contracţiei lungimii este completă → **Δl = 0**, iar dilatarea temporală este maximă posibilă, deoarece **t' → ∞.**

Dacă unghiul θ = $\frac{\pi}{2}$ însemnă mărimi **reprezentate** pe axa **y** dar **orientate** pe direcţia **x**, atunci θ = 0 poate înseamna aceleaşi marimi reprezentate pe direcţia **x**, dar orientate pe direcţia transversală **y**.

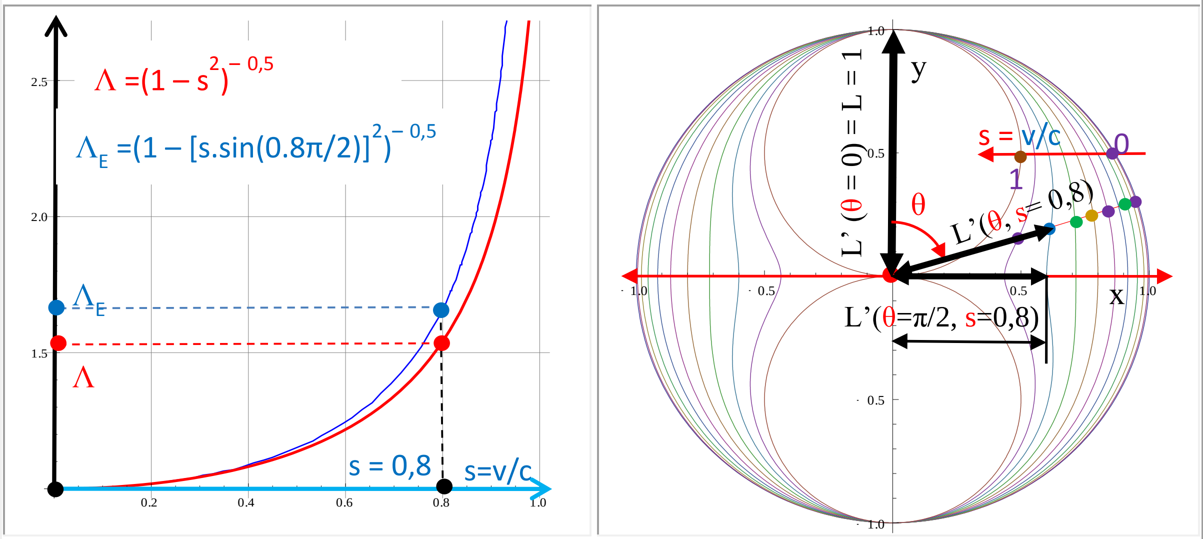


Fig. 6 Factorii **Lorentz** Λ şi **Λ**$_E$ = **Λ**$_E$(θ = 0,8$\frac{\pi}{2}$) ← stânga, precum şi variaţia lungimii **L = 1** în funcţie de **s** = $\frac{v}{c}$ şi θ ∈ [0, π] → dreapta

www.SuperMathematica.Ro

Se poate obţine astfel un factor **Lorentz** variabil **Λ**$_E$, denumit **factor Lorentz excentric**, variabil cu direcţia **θ** de orientare a mărimii, pentru a se deosebi de cel constant centric **Λ**. Expresie lui **Λ**$_E$ este

(3) $\Lambda_E = \frac{1}{\sqrt{1-s^2 sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}sin\theta\right)^2}} \in [\Lambda, 1]$, pentru $\theta \in [\frac{\pi}{2}, 0]$, $\forall s = \frac{v}{c}$ $[-1, 1]$

În consecinţă, fenomenul de contracţie a lungimilor depinde de direcţia θ, de orientare în spaţiu a lungimii etalon, fiind **maximă** pe direcţia de mişcare relativă **x** de deplasare a sistemului inerţial mobil, adică **θ** = $\frac{\pi}{2}$ → Λ$_E$(**θ**) = Λ şi **minimă** (zero) pe direcţia transversală y (**θ** = 0). Ca urmare, un disc circular, care se deplasează pe direcţia **x** cu viteza v, fracţiune **s** = $\frac{v}{c}$ din viteza **c** a luminii în vid (**Fig. 5**), se va turti pe direcţia **x**, astfel că, la atingerea vitezei absolute a luminii în vid, viteză **v = c → s = 1**, va deveni o bară de lungime **L**$_y$ **= 2R**, pe direcţia transversală de mişcare **y** şi de dimensiune **L**$_x$ **= 0** pe direcţia de mişcare **x**. Pierzându-şi una dintre cele două dimensiuni, de fapt discul circular va dispărea.

Ecuaţia polară a obiectului de lungime **L = 1**, care se deformează, contractându-se la **L'**, odată cu creşterea vitezei relative **s**, de deplasare a sistemului inerţiale pe direcţia x (v↗ → s ↗), în aceste situaţii, este

(4) $\rho = \sqrt{1 - s^2 sin^2\theta}$,

iar în coordonate parametrice este

(5) $\begin{cases} x = cos\theta\sqrt{1 - s^2 sin^2\theta} \\ y = sin\theta\sqrt{1 - s^2 sin^2\theta} \end{cases}$, $s \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, cu graficelor din figurile **4**, **5** şi **6**.

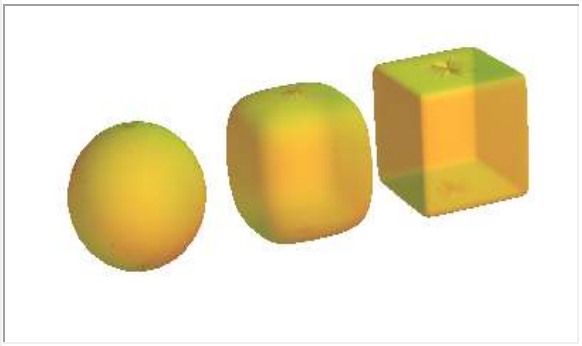
2 NOI DIMENSIUNI ALE SPAŢIULUI ŞI CONSECINŢELE LOR :
HIBRIDAREA ŞI METAMORFOZAREA MATEMATICĂ

Spaţiul este o entitate abstractă care reflectă o formă obiectivă de existenţă a materiei. Apare ca o generalizare şi abstractizare a ansamblului de parametri prin care se realizează **deosebirea între diferite sisteme** ce constituie o stare a universului.

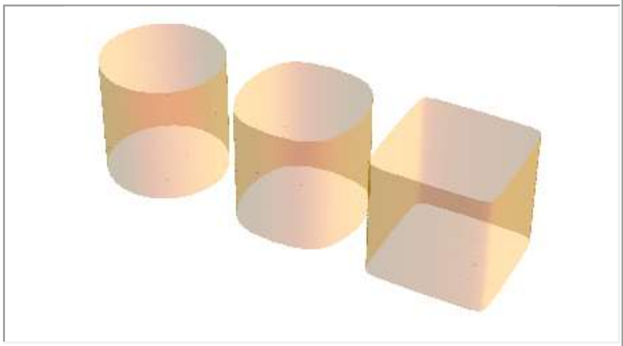
El este o formă obiectivă şi universală a existenței materiei, inseparabilă de materie, care are aspectul unui întreg neîntrerupt cu trei dimensiuni și exprimă ordinea coexistenței obiectelor lumii reale, poziţia, distanţa, mărimea, forma, întinderea lor.

În concluzie, se poate afirma că spaţiul apare ca o sinteză, ca o generalizare şi abstractizare a constatărilor cu privire la o stare, la un moment dat, a universului.

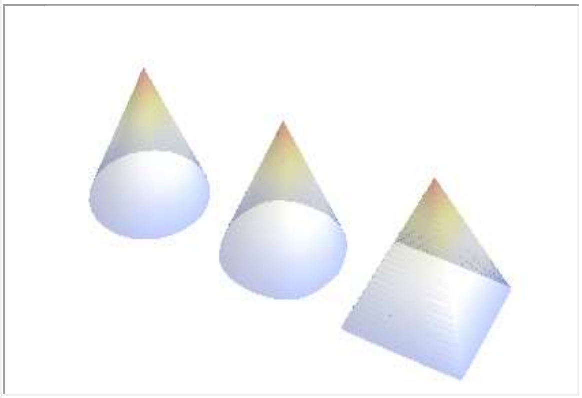
În cadrul mecanicii clasice, noţiunea de spaţiu este aceea a modelului spaţiului euclidian tridimensional (**E3**) omogen, izotrop, infinit.



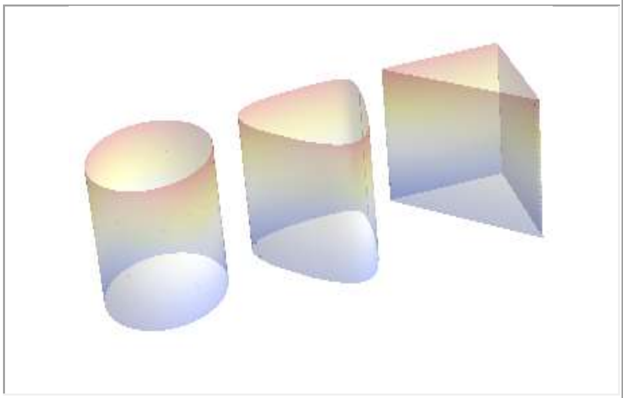
Transformarea sferei în cub



Transformarea cilindrului circular în cilindru pătrat



Transformarea conului în piramidă



Transformarea cilindrului în prismă

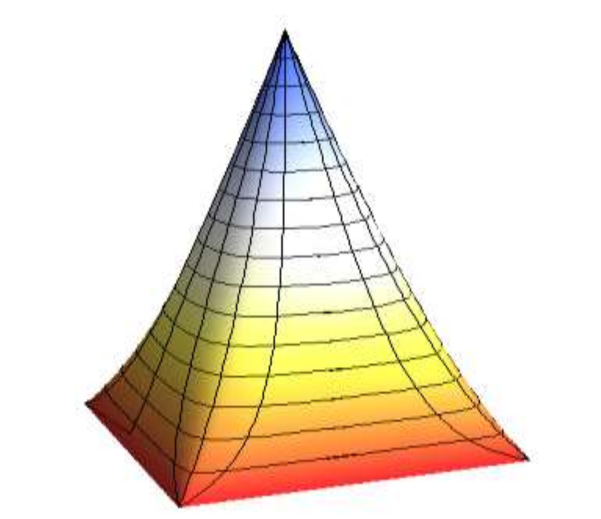
Fig. 7 Metamorfozarea obiectelor matematice

www.SuperMathematica.Ro

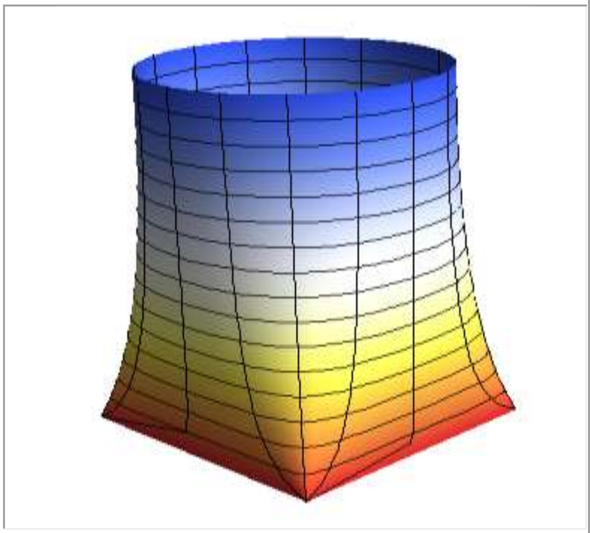
Când se discută despre spaţiu, primul gând este îndreptat spre **poziţie**, adică noţiunea de poziţie este direct asociată noţiunii de spaţiu. **Poziţia** este exprimată în raport cu un sistem de referinţă (reper) sau, mai scurt, printr-un sistem de coordonate.

Un obiect tridimensional are în spaţiu E^3 **6 grade de libertate**, constituite din cele **3 translaţii,** pe direcţiile **X**, **Y** şi **Z** şi din **3 rotaţii,** în jurul axelor **X**, **Y** şi **Z**, notate, respectiv, cu **A, B** şi **C,** în tehnologie şi în robotică.

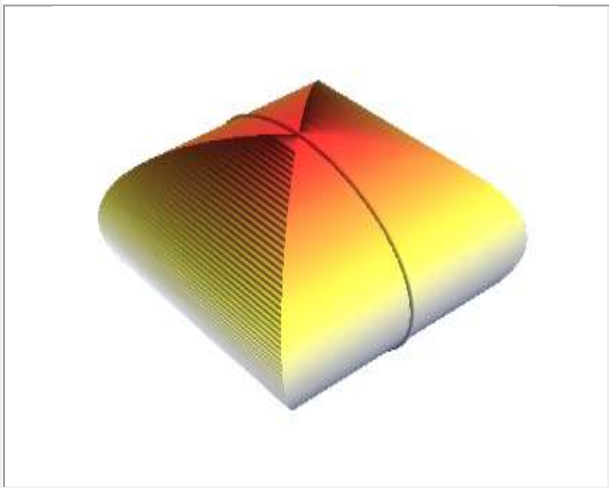
Un obiect poate fi "realizat" sau, mai precis, poate fi reprodusă imaginea lui în spaţiul virtual, când apare în **3D** pe ecranul monitorului unui computer, prin folosirea unor programe tehnice (CAD) sau matematice comerciale (MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, MAPLE, DERIVE, ş,a.) sau speciale, care folosesc **FSM-Excentrice, Elevate** sau / şi **Exotice -** la descrierea obiectelor, cum este **SM-CAD-CAM**.



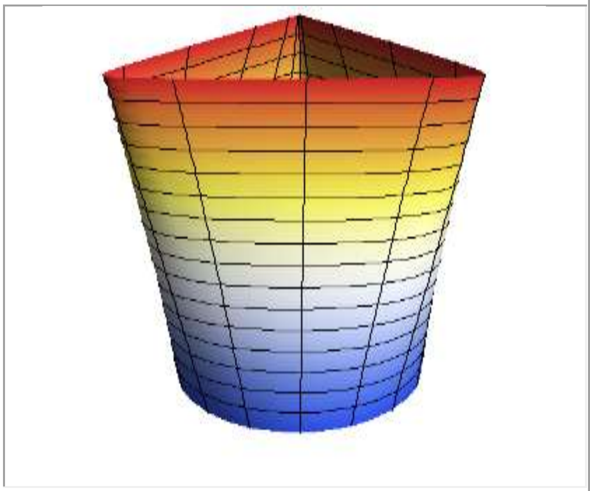
Conopiramidă



Cilindrul cilindricopătrat (C/P)



Sferocub



Cilindrul cilindricotriunghiular (C/T)

Fig .8 Obiecte matematice **hibride**

www.SuperMathematica.Ro

Prin **modificarea excentricitaţii**, obiectele cunoscute şi formate în domeniul centric al supermatematicii (**SM**), adică, în matematica centrică (**MC**), pot fi deformate în domeniul excentric al **SM**, adică, în matematica excentrică (**ME**) şi transformate iniţial în obiecte hibride, proprii **ME**, ca, apoi, să fie retransformate în obiecte de alt gen, cunoscute în **MC**. Ca de exemplu, deformarea unui **con** perfect ($s = 0$) în **conopiramide** [$s \in (0, 1)$] cu baza un pătrat perfect şi vârful conic, care constitue obiectele hibride, situate între con şi piramidă, pâna la transformarea ei într-o **piramidă** perfectă (pentru $s = \pm 1$) cu baza un pătrat perfect.

Obiectul poate fi realizat, în fapt, prin diversele metode de prelucrare mecanice [v. **Mircea Şelariu**, Cap.17 **Dispozitive de prelucrare**, **PROIECTAREA DISPOZITIVELOR**, EDP, Bucureşti, 1982, coordonator **Sanda-Vasii Roşculeţ**] de **formare** (turnare, sinterizare), **deformare** (la cald şi la rece), **dislocare** (decupare, aşchiere, eroziune, netezire) şi **agregare** (sudare şi lipire).

În toate cazurile, sunt necesare **mişcări** ale sculei şi / sau ale piesei, respectiv, ale spotului luminos care delimitează pe ecran un pixel şi trece de la un pixel la altul.

Mişcarea este strâns legată de spaţiu şi de timp.

Mişcarea mecanică poate fi **de**

- **formare** în timp a corpurilor şi, implicit, a obiectelor ;
- **schimbarea** în timp a **poziţiei** obiectelor, sau a părţior sale, denumite corpuri, în raport cu alte corpuri, alese drept sisteme de referinţă;
- **schimbarea** în timp a **formei** corpurilor şi, implicit, a formei obiectelor, prin **deformarea** lor .

Spaţiul reflectă raportul de coexistenţă dintre obiecte şi fenomene, sau părţi ale acestora, indicând:

- **întinderea** / mărimea lor, denumită **dimensiune de gabarit;**
- **locul** obiectelor, prin coordonatele **liniare X**, **Y**, **Z**, în spatiul **3D**, denumite **dimensiuni de localizare;**
- **orientarea** obiectelor, în spaţiul **3D**, prin coordonatele **unghiulare** $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\theta}$, sau A, B ,C, denumite dimensiuni de orientare;
- **poziţiile** relative sau distanţele dintre obiecte, denumite **dimensiuni de poziţionare**, dacă se refera la localizarea şi orientarea absolută şi / sau relativă a obiectelor, iar dacă se referă la părţi ale acestora, numite corpuri, atunci sunt denumite **dimensiuni de coordonare;**
- forma obiectelor şi, respectiv, evoluţia fenomenelor, denumite **dimensiuni de formare**, sau **excentricitaţi de formare** care definesc, totodată, şi ecuaţiile de definire a obectelor;
- deformarea obiectelor şi modificarea evoluţiei fenomenelor, denumite **dimensiuni de deformare** sau **excentricităţi.**

Ultima dimensiune a spaţiului, **excentricitatea**, făcând posibilă apariţia **matematicii excentrice (ME)** şi realizând trecerea din domeniul matematicii centrice în cel al matematicii excentrice, precum şi saltul de la o singură entitate matematică, existentă în matematica şi domeniul **centric**, la o infinitate de entităţi, de acelaşi gen, dar deformate din ce în ce mai pronunţat, odată cu creşterea valorii excentricităţii numerice **s**, până la transformarea lor în alte genuri de obiecte, existente în domeniul centric. Un exemplu, devenit deja clasic, este deformarea continuă a unei sfere până la transformarea ei într-un cub (**Fig. 9**), - ceea ce, pentru matematicieni, devine o absurditate - prin utilizarea aceloraşi **dimensiuni de formare** (ecuaţii parametrice), atât pentru sferă cât şi pentru cub, doar excentricitatea modificându-se: fiind **s** = **e** = 0 pentru sferă de rază R şi **s** = ± 1, sau e = R, pentru cubul de latură **L = 2R**; pentru **s** ∈ [(-1, 1) \ 0] obţinându-se **obiecte hibride**, proprii matematicii excentriec (**ME**), anterior inexistente în matematică, sau, mai precis, în matematica centrică (**MC**).

Aşa cum s-a mai prezentat, **dreapta** este un **spaţiu unidimensional** şi, totodată, în **super-matematică** (**SM**), o **strâmbă** de excentricitate zero (**Fig. 19**).

Creşterea excentricităţii de la zero la unu transformă **linia dreaptă** într-o **linie frântă**, ambele existând şi sunt cunoscute în matematica **centrică**, nu şi restul strâmbelor, care sunt proprii matematicii **excentrice**, fiind generate de **FSM—CE** amplitudine excentrică **aexθ** sau **Aexα**. Astfel, dreapta de coeficient unghiular m = tanα = tan$\frac{\pi}{4}$ = 1 care trece prin punctul **P(2, 3)** are ecuaţia

(6) $y - 3 = x - 2$,

iar familia de strâmbe, din aceeaşi familie cu dreapta, au ecuaţiile

(7) $y\,[x, S(s, \varepsilon)] - y_0 = m\,\{aex\,[\theta, S(s, \varepsilon)] - x_0\}$,

(8) $y - y_0 = m\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]\} - x_0$, m = tanα = 1, P(2, 3), s ∈ [-1, +1],

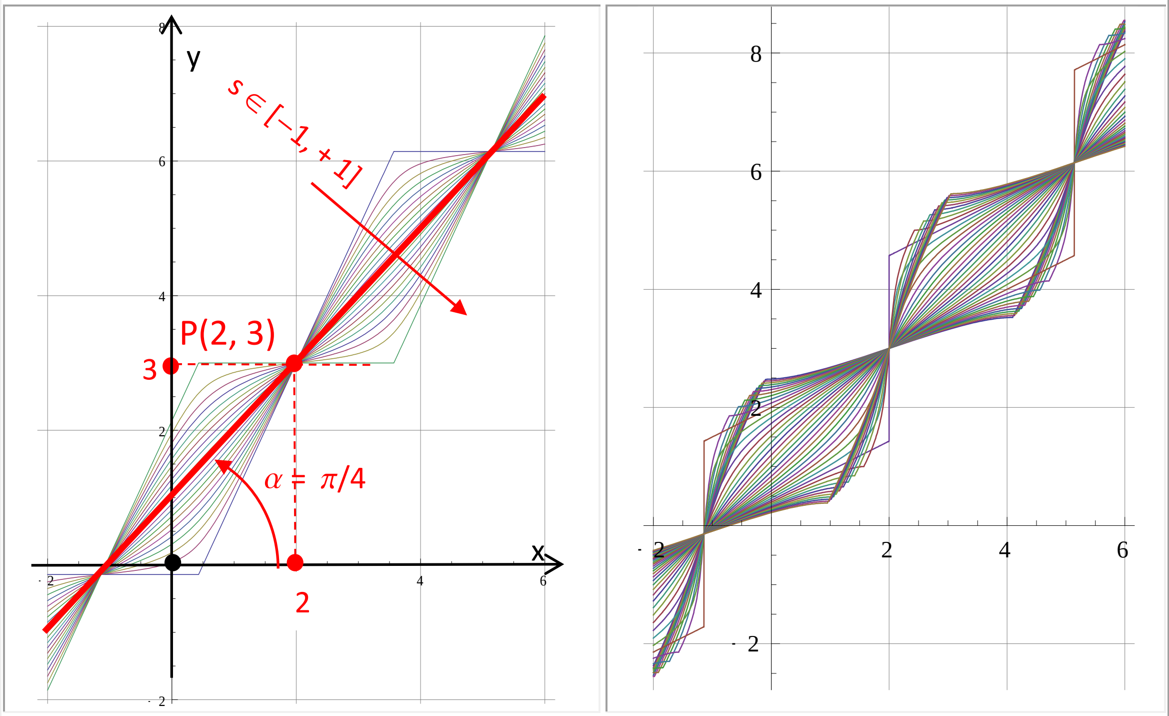
în **coordonate excentrice θ** (**Fig. 19** ← stânga) şi, în **coordonate centrice** $\boldsymbol{\alpha}$**,** ecuaţia este

(9) $y[x, \mathbf{S(s, \varepsilon)}] - y_0 = m\,(\mathbf{Aex}\,[\boldsymbol{\alpha}, S(s, \varepsilon)] - x_0)$,

(10) $y - y_0 = m\,\{\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\propto - \varepsilon)}{Rex\alpha} - x_0\}$, m = tan$\alpha$ = 1, P(2, 3), s ∈ [-1, +1],

(11) $y - y_0 = m\,\{\propto + arcsin\frac{s.\sin(\propto - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\propto - \varepsilon)}} - x_0\}$.

Diferenţa, dintre cele două tipuri de strâmbe, de θ şi de α, este aceea, că cele de θ sunt continue numai pentru excentricitatea numerică din domeniul s ∈ [-1, 1], pe când cele de α sunt continue pentru toate valorile posibile a lui **s**, adică s ∈ [- ∞ , +∞].



Strâmbe de variabilă excentrică θ	Strâmbe de variabilă centrică α

Fig. 9 Strâmbele ce trec prin punctul P(2, 3) ca o generalizare a dreptei

www.SuperMathematica.Ro

Linia frântă este cunoscută în matematica centrică (**MC**) dar fără să i se cunoască ecuaţiile ei ! Ceea ce nu mai este cazul în **SM** şi, evident, şi în **ME** ea se obţine pentru valoarea **s** = 1 a excentricităţii numerice (**Fig. 9**).

Un fenomen asemănător metamorfozării matematice, prin care din **MC** un obiect cunoscut trece prin matematica excentrică (**ME**) luând forme hibride şi se reîntoarce în matematica centrică (**MC**) ca un alt tip de obiect (**Fig.7**), este considerat că ar avea loc şi în fizică: din vid apar continuu particule de un anumit tip şi se reîntorc în vidul cosmic. Aceleaşi sau altele ?

Cosmologia are o teorie ce se aplică întregului Univers, formulată de **Einstein** în 1916: **relativitatea generală**. Ea afirmă că forţa de gravitaţie, ce se exercită asupra obiectelor, acţionează şi asupra structurii spaţiului, care îşi pierde cadrul rigid şi imuabil, devenind maleabil şi curb, în funcţie de materia sau energia pe care le conţine. Adică, **spaţiul se deformează**.

Continuum-ul spaţiu-timp, al relativităţii generale, nu este conceput fără conţinut, deci nu admite vidul! Cum spunea şi **Einstein** ziariştilor, care îl rugau să le rezume teoria sa: "Înainte, **se credea** că, dacă toate lucrurile ar dispărea din Univers, timpul şi spaţiul ar rămîne, totuşi. În teoria relativităţii, timpul şi spaţiul dispar, odată cu dispariţia celorlalte lucruri din univers."

Aşa cum s-a mai afirmat, **s** = **e** = 0 este lumea MC a liniarului, a entităţilor perfecte, ideale, în timp ce infinitatea de valori posibile atribuite excentricităţiilor **s** şi **e**, nasc **ME** şi, totodată, lumi ce aparţin realului, lumii imperfecte, tot mai indepărtată de lumea ideală cu cât **s** şi **e** sunt mai îndepărtate de zero.

Ce se întâmpla dacă **e** = s → 0 ? Lumea reală, ca şi **ME** dispar şi cum lume ideală nu exista, dispare totul !

Ceea ce susţine teoria autorului din SUPERMATEMATICA. Fundamente. Vol. I Editura POLITEHNICA, Timişoara, Cap. 1 INTRODUCERE prin care expansiunea universului este un proces de desvoltare a ordinii în haosul absolut, o trecere progresivă a spaţiului haotic în ordine din ce în ce mai pronunţată, sau invers: din ordine absoluta în haos.

În concluzie, spaţiul, ca şi timpul, se **formează** şi se **deformează**, adică, **excentricitatea** spaţiului, de o anumită valoare, duce la **formare**a spaţiului, apoi, prin modificare valorii ei, spaţiul se **deformează** / modifică.

Forma modificată a spaţiului este dependentă de valoarea excentricităţii, care devine o nouă dimensiune a spaţiului: **dimensiunea de deformare**.

Energia şi masa materiei să crească odată cu creşterea excentricităţii ?

Sau invers? Excentricitatea să determine valoarea masei şi a energiei prezente / localizate într-un anumit loc în spaţiu ?

Instalarea unei piese de prelucrat (obiect de prelucrat) în spaţiul de lucru a unei maşini-unelte moderne, cu comenzi numerice de conturare (**CNC**), este foarte asemănătoare cu "instalarea " unui obiect matematic în spaţiul euclidian tridimensional R^3. De aceea, vom folosi unele noţiuni din domeniul tehnologic.

În tehnologie, **instalarea** este operaţia premergătoare prelucrării; numai un obiect / piesă instalată poate fi prelucrată. Ea presupune următoarele faze sau operaţii tehnologice, în această succesiune / ordine; numai înfăptuirea unei faze, facând posibilă trecerea la realizarea fazei următoare:

1. **ORIENTAREA** este acţiunea sau operaţia prin care elementele geometrice ale obiectului, care sunt baze de referinţă tehnologică de orientare, prescurtat baze de orientare (**BO**), primesc o **direcţie** bine determinată, faţă de direcţiile unui sistem de referinţă. În tehnologie, faţă de direcţiile unor mişcări principale şi / sau secundare de lucru, sau / şi faţă de direcţiile mişcărilor de reglare diemensională a sistemului tehnologic.

Drept **baze de orientare (BO)** pot servi :

1)Un plan al obiectului, respectiv o suprafaţă plană a piesei, dacă ea există, caz în care, această suprafaţă, determinată de trei puncte de contact dintre obiect şi dispozitiv, este denumită bază de referinţă tehnologică de orientare de **aşezare (BOA)**, sau, pe scurt, **bază de aşezare (BA)**, fiind determinată, teoretic, de cele trei puncte comune de contact ale piesei cu dispozitivul, care are sarcina de a realiza instalarea piese în cadrul maşinii de lucru. Drept **BA**, în principiu, se alege suprafaţa cea mai întinsă a piesei, dacă nu există altfel de condiţii de poziţie, sau de la care suprafaţa rezultată în urma prelucrării are impusă precizia cea mai înaltă, sau condiţii de paralelism cu **BA**.

Punând condiţia păstrării contactului piesă / dispozitiv pe **BA**, obiectul / piesa pierde 3 grade de libertate, dintre care, **o translaţie** pe direcţia, s-o numim **Z**, perependiculară pe **BA** (plan) şi două rotaţii: în jurul axelor **X**, notată în tehnologie cu **A** şi în jurul axei **Y**, notată în tehnologie cu **B.**

Obiectul / piesa se mai poate roti în jurul axei **Z,** rotaţie notată cu **C** şi se poate translata pe **BA** pe direcţiile **X** şi **Y** păstrând în permanenţă contactul cu **BA (Plană)**.

De la această suprafaţă se stabileşte, în tehnologie, coordonata **z**, de exemplu, ca distanţă dintre **BOA** şi **baza tehnologică de prelucrare** (**BTP**), sau, pe scurt, **bază de prelucrare** (**BP**), adică planul pe care îl va genera pe piesă scula de prelucrat. Dacă o suprafaţă se prelucrează integral / complet (prin frezare, de exemplu, cu freze de mari dimensiuni, pentru o singură trecere), atunci celelalte coodonate / dimensiuni **y** şi **x** pot fi stabilite cu foarte mare aproximaţie, întrucât ele nu influenţează precizia realizării suprefeţei plane, la distanţa **z** de **BA**, rezultate în urma prelucrării piesei şi denumită **bază tehnologică de prelucrare** (**BTP**), sau, pe scurt, **bază de prelucrare** (**BP**). A cărei cerinţă tehnologică este să fie paralelă cu **BOA** şi să fie situată la distanţa **z** de aceasta. Dimensiunea **z** fiind, în acest caz, o **dimensiune de formare** a piesei, pe de o parte şi **dimensiune de coordonare**, în acelaşi timp, pentru poziţia relativă scula-piesă, iar, d.p.d.v. tehnologic, una dintre **dimensiunile de reglare dimensională** a sistemului tehnologic **MDPS** (**M**aşină-**D**ispozitiv-**P**iesă-**S**culă). Matematic exprimat, două suprafeţe plane situate la distanţa **z**, ca urmare, paralele între ele.

2) O dreaptă aparţinând obiectului, dacă aceasta există, ca axe şi / sau muchii, ca intersecţie de -suprafeţe- plane în matematică.

În tehnologie, muchiile se evită, datorită neregularităţii lor, adică, a abaterilor de la forma geometrică liniară, a semifabricatelor, ca şi a pieselor, în urma prelucrarii semifabricatelor lor.

În tehnologie, această dreaptă este determinată de cele două puncte de pe o suprafaţă a piesei, alta decât **BA**, comună piesei şi dispozitivului, care realizează baza de orientare a piesei şi a dispozitivului, ca elemente dedublate, dreaptă denumită bază de orientare de dirijare (**BOD**), sau pe scurt baza de dirijare (**BD**), denumire care derivă din faptul că aceste două elemente de dirijare dirijează / ghidează mişcarea obiectului / piesei în vederea localizarii lui, dacă în tot timpul mişcării se menţine contactul piesă-dispozitiv. În acest fel **BD** preia 2 grade de libertate ale obiectului: translaţia pe o direcţie perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte de contact piesa / dispozitiv, ce materializează **BD**, translaţie pe direcţia **Y**, de exemplu, dacă **BD** este paralelă, întotdeauna, cu **BA** din planul **XOY** şi rotaţia în jurul axei **Z**, notată în tehnologie cu **C**.

Drept **BOD** se alege, în principiu, din motive lesen de înţeles, care vizează precizia de ghidare, suprafaţa cea mai lungă a piesei, dacă nu există alte raţiuni impuse, prin desenul de execuţie al piesei.

De la **BOD** poate fi stabilită / măsurată cota / dimensiunea **y**, paralelă cu **BOA** şi perpendiculară pe **BOD**, ca de exemplu, perpendiculară pe **z**, fiindcă **BOD** este paralelă cu **BOA.**

Astfel, dacă cele două puncte aparţin unei obiect paralelipipedic, mărginit, deci, de suprafeţe plane, şi **BOD** este paralelă cu **BOA**, păstrând contactul piesă / dispozitiv pe cele două baze, printr-o mişcare de translaţie, piesa mai poate fi doar translatată, în dispozitiv, pe direcţia **X**, până când tamponează un **element de localizare**.

3) De la acesta, denumit element de localizare, respectiv **baza tehnologică de localizare** (**BTL**), sau, pe scurt, **baza de localizare** (**BL**) poate fi stabilită coordonata / dimensiunea **x** perpendiculară simultan pe **y** şi **z**. Dar fără să fie coordonate / dimensiuni / segmente concurente într-un punct comun **O(x,y,z)** ca în matematică, decât, dacă **BOD** şi **BTL** coboară la nivelul **BOA** şi, în plus, **BTL** se deplaseaza spre **BOD** şi va fi conţinută şi în ea, ambele urmând să fie conţinute în **BOA**, astfel că, punctul **O(x,y,z)** ca şi **BTL** va fi un vârf al piesei paralelipipedice, conţinut simultan în planul **BOA**, dreapta **BD** în punnctul **BL**, rezultând, în acest caz că **O(x,y,z)** ≡ **BL** .

Dacă, localizarea se realizează printr-o mişcare de translaţie, aşa cum s-a presupus anterior, ea mai poartă denumirea de **localizare prin translaţie (LT**).

Dacă, localizarea se realizează printr-o mişcare de rotaţie a obiectului, atunci este denumită **localizare prin rotaţie** (**LR**). În acest caz **BD** poate fi, sau este, de obicei, o axă a unei suprafeţe de rotaţie (cilindrice sau sferice) a obiectului, denumită **bază de orientare de centrare** (**BOC**) în jurul căreia, obiectul se roteşte, până când, un alt corp al piesei, tamponează elementul de localizare prin rotaţie. Sau, până când un fixator pătrunde într-un orificiu perpendicular pe **BOC** sau într-un canal paralel cu **BOC.**

Obiectele care nu prezintă **elemente / baze de orientare**, cum ar fi sfera în matematică şi bilele de rulment în tehnologie, de exemplu, sunt obiecte neorientabile.

2) **LOCALIZAREA** este operaţia sau acţiunea de stabilire a **locul**, în spaţiul euclidian tridimensional E^3, a unui punct **O(x,y,z)** caracteristic al obiectului, ce aparţine unui element de referinţă de orientare al acestuia, de la care se stabilesc coordonatele / dimensiunie liniare **x, y, z** faţă de un sistem de referinţă dat, sau, în tehnologie, faţă de scula de prelucrare.

Punctul **O(x,y,z)** al obiectelor **neorientabile** este centrul de simetrie al acestora, iar al pieselor orientabile, ca cele paralelipipedice, în tehnologie, de exemplu, punctul **O(x,y,z)** este **diseminat** în trei puncte distincte, pentru fiecare coordonată în parte **Ox ⊂ BL** pentru **x** , **Oy ⊂ BD** pentru y şi **Oz ⊂ BA** pentru **z**, aşa cum s-a explicat anterior.

In tehnologie, succesiunea orientare → localizare este obligatorie; numai un obiect orientat poate fi apoi localizat. Ca şi în matematică, dealtfel. Intâi se alege un sistem de referinţă solidar cu obiectul (O, x, y, z) apoi, unul invariant (O, X, Y, Z) ce coincide, iniţial, cu celălalt, în spaţiul **3D** sau euclidian tridimensional $\mathbf{E^3}$ şi apoi se operează diverse transformări de translaţii şi / sau de rotaţii aşa cum se poate observa cu rotaţiile unui cub, prezentate în **figura 10.**

Reuniunea dintre **orientare** şi **localizare** reprezintă cea mai importantă acţiune / operaţie tehnologică, denumită **poziţionare**, adică:

orientarea ∪ **localizarea** = **poziţionare**

Dacă **poziţionarea** obiectului este realizată / desăvârşită / implinită, atunci, poate fi menţinută poziţia relativă piesă / dispozitiv prin operţia de **fixare** a piesei în dispozitiv.

În continuare pot fi stabilite cotele / dimensiunile dintre scula şi piesă, astfel, încât să se obţină piesa la dimensiunile şi preciziile impuse prin desenul de execuţie al piesei.

Această operaţie tehnologică este denumita **reglare dimensională.** Cu ea, operaţia de instalare este incheiată şi prelucrarea piesei poate să înceapă.

Ca urmare, **istalarea** unui obiect este o reuniune a **poziţionarii** cu **fixarea** şi cu **reglarea dimensională** a sistemului tehnologic, adică:

instalare = **poziţionare** ∪ **fixare** ∪ **reglare (dimensională)**

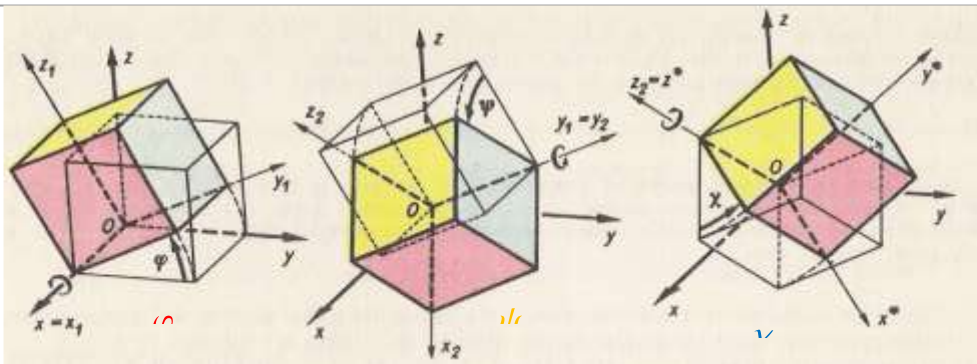


Fig. 10 Schimbarea prin rotaţii succesive a orientării unui obiect în **3D**.
Reproducere din "Mica enciclopedie matematica" Ed.Tehnica, Buc., 1980

În tehnologie, **fixarea** se poate realiza prin **forţă** (de fixare) sau prin **formă** (care impiedică deplasarea piesei în timpul preucrării).

În matematică, fixarea se "realizeaza" prin **convenţie**. **Zicând** că sistemul (**O, x, y, z**) este legat de piesă el nu se mai poate deplasa relativ faţă de ea (dezlega), ci numai împreună cu obiectul, deci sunt "fixate" unele de altele (**Fig. 10**).

Astfel, în matematică, fixarea obiectelor, faţă de sistemele de referinţa, se subînţelege, sau se realizează de la sine, ea nu mai există, pentru că în matematică nu există "forţe matematice"; ele fiind proprii mecanicii, în speţă dinamicii ei şi nici scule de prelucrare, nici diverse dimensiuni de coordonare, de reglare dimensionala, de prelucrare ş.a. Ce simplă este fixarea în Matematică !!

De aceea, în matematica centrică (**MC**), există doar 3 dimensiuni liniare **x**, **y**, şi **z** care sunt, totodată, şi dimensiuni de formare a obiectelor **3D**, prin ecuaţiile lor parametrice, de exemplu.

Ca urmare, în această matematica centrică (**MC**) entităţi ca dreapta, pătratul, cercul, sfera, cubul ş.a. sunt unice, pe când, în matematica excentrică (**ME**) şi, implicit în supermatematică (**SM**), ele sunt multiplicate la infinit prin **hibridare**, hibridare posibilă prin introducerea noii dimensiuni a spaţiului **excentricitatea.**

Hibridarea matematică poate fi definită ca procesul matematic de **încrucişare** a două entităţi matematice din **MC**. Adică, de trecere continuă de la o entitate oarecare, existentă în **MC**, la o altă entitate, existentă în **MC**, printr-o infinitate de entităţi hibride, proprii doar **ME**. Altfel spus, o transformare a unei entităţi matematice centrice în altă entitate matematică centrică, acţiune devenită posibilă în cadrul matematicii excentrice prin utilizarea funcţiilor supermatematice.

Prin **metamorfozare** se obţin entităţi noi, anterior inexistente în **MC**, denumite **entităţi hibride**, ca şi entităţi **excentrice** sau **supermatematice** (**SM**), pentru a se deosebi de cele **centrice**, şi prin denumire, pentru că, **prin formă**, diferă esenţial.

Primul corp obţinut prin **hibridare matematică** a fost **conopiramida**: un obiect super-matematic cu baza pătrată a unei piramide şi cu vârful unui con circular drept, rezultat din transformarea continuă a pătratului unitate de L = 2 în cercul unitate de R = 1, şi / sau invers (**Fig. 8** şi **21**). Ecuaţiile parametrice ale conopiramidei se obţin din ecuaţiile parametrice ale conului circular drept, în care **FCC** sunt înlocuite / convertite cu funcţiile supermatematice cvadrilobe (**FSM-Q)** corespondente:

$$(12)\quad \begin{cases} x = u.coq\theta = u.\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-s^2.\sin^2\theta}} \\ y = u.siq\theta = u.\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-s^2.\cos^2\theta}} \\ z = u \end{cases}, pentru \begin{cases} s = 0,\ u \in [-1, 0] \rightarrow CON \\ s = 1,\ u \in [-1, 0] \rightarrow PIRAMIDĂ \\ s = u \in [-1, 0] \rightarrow CONOPIRAMIDĂ \end{cases},$$ (**Fig. 8** şi **11**),

deoarece **FSM-Q** pot realiza transformarea continua a cercului în pătrat şi invers, ca şi **FSM-CE** derivate excentrice **dex$_{1,2}$θ**.

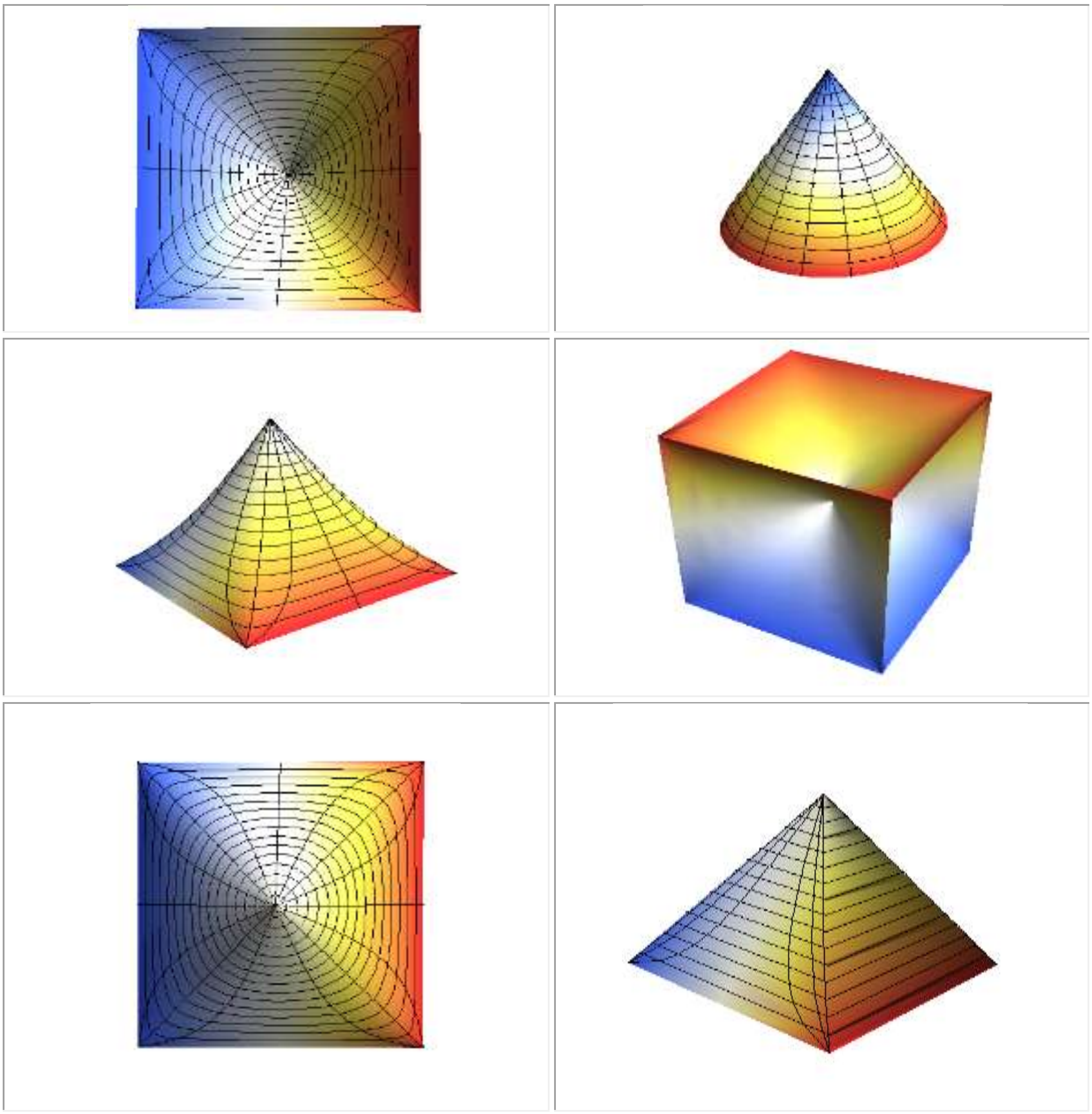


Fig. 11 Conopiramida în stânga ←,
conul, cubul românesc de volum nul şi piramida în dreapta→

www.SuperMathematica.Ro

Cubul românesc din **figura 11** – dreapta - mijloc, "**cel mai uşor cub din lume**", este cubul de volum nul, obţinut din 6 piramide, fără suprafeţele lor de bază pătrate, cu vârful comun în centrul de simetrie al cubului. El poate fi generat şi cu ajutorul altor funcţii parametrice SM, ca de exemplu:

$$(13)\quad \begin{cases} x = \cos[t - \arcsin(\sin t)]\cos[u - \arcsin(sinu)] \\ y = \sin[t - \arcsin(\sin t)]\,.\cos[u - \arcsin(sinu)] \\ z = \sin[u - \arcsin(sinu)] \end{cases}$$

sinusul (**sexθ** = $\sin[\boldsymbol{\theta} - \arcsin(\boldsymbol{s}.\sin\boldsymbol{\theta})]$) şi cosinusul (cexθ = $\cos[\boldsymbol{\theta} - \arcsin(\boldsymbol{s}.\sin\boldsymbol{\theta})]$ **SM** de excentricitate numerică s = 1. Dar şi în alte moduri, aşa cum se poate deduce din **figura 12**.

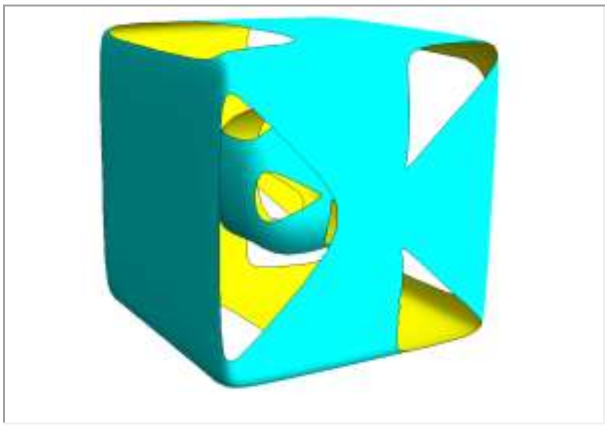
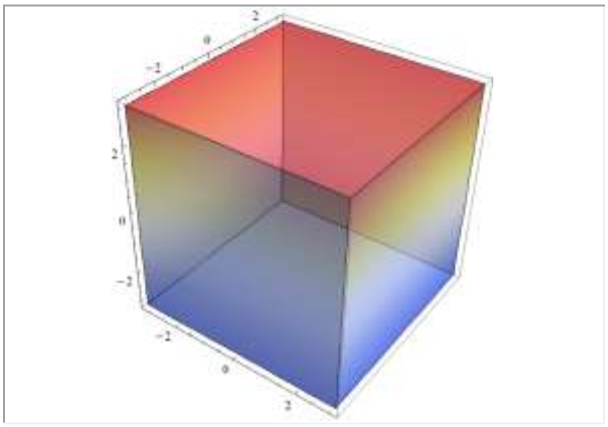
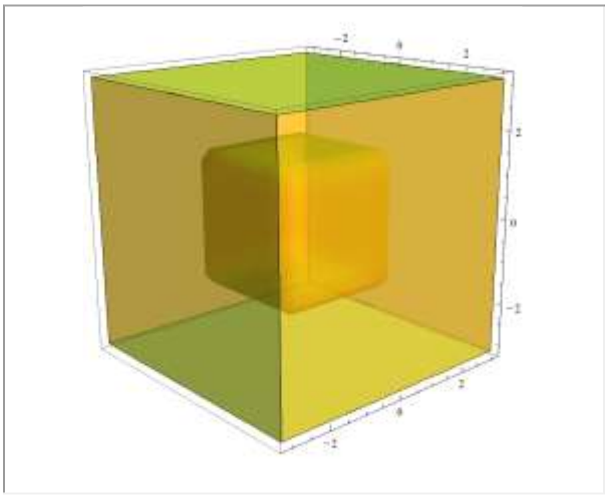
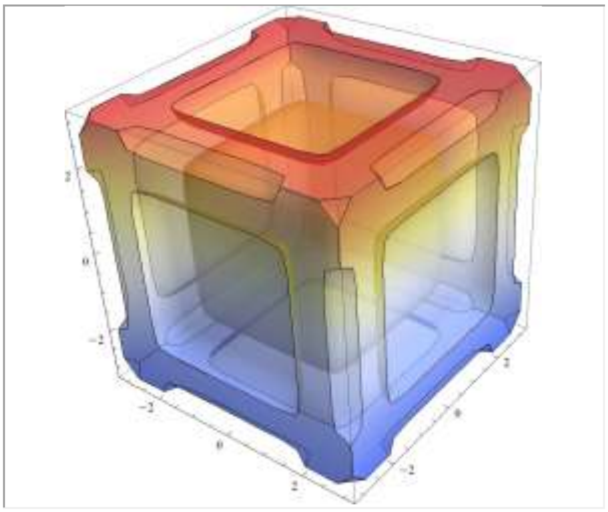
ParametricPlot3D $\begin{cases} x = \cos[t - \arcsin(\sin t)]\cos[u - \arcsin(\sin u)] \\ y = \sin[t - \arcsin(\sin t)].\cos[u - \arcsin(\sin u)] \\ z = \sin[u - \arcsin(\sin u)] \end{cases}$	**RegionPlot3D**[Sin[x − ArcSin[0.98Sin[x]]] Sin[y − ArcSin[0.98Sin[y]]] Sin[z − ArcSin[0.98Sin[z]]] < 1, {x, −Pi, Pi}, {y, −Pi, Pi}, {z, −Pi, Pi}]
	
	
	

Fig. 12 Cuburi ciuruite descrise cu ecuaţiile (13)← şi prin alte moduri →

www.SuperMathematica.Ro

Motto: " ***Je me détourne avec horreur de ces functions continues sans dérivées"***.
Charles Hermite

CAPITOLUL XXV

WEIERSTRASS Ş.M.A. S-AU INŞELAT

0. REZUMAT

Lucrarea demonstrează clar că funcţiile lui **Weierstrass,** primele **considerate** nederivabile, precum şi cele ale mai multor alţi autori, "***continue peste tot şi nicăieri derivabile***", sunt derivabile.

Greşeala esenţiala a lui **Weierstrass** constă în confuzia dintre graficul funcţiei şi ecuaţia care o exprimă. Dacă ecuaţia (1) şi graficele ei (**Fig.1**) sunt **ambele continue**, nu acelaşi lucru se poate afirma relativ la **ecuaţia modificată** (2), care este, evident, **discontinuă** (**ecuaţiile** nu şi graficele ! cele **două ecuaţii** de determinare a câte unei laturi ale triunghiului fiind net diferite), în timp ce **graficele** acestora sunt **continue**, aşa cum rezultă şi din **figura 2,a**.

Prin funcţia **W(x)** din ecuaţia (1) cu graficele din **figurile 1**, **Weierstrass** a dorit să exprime graficul unei funcţii în "***dinţi simetrici de ferestrău***" sau "***lamă de ferestrău cu dinţi triunghiulari simetrici***" pentru **n** → ∞, ca cele exprimate prin **ecuaţiile discontinue**, modificate, (2) cu **graficele continue** din **figura 2,a** [24, pag.107, Cap. 11 "***DESPRE CURBE PEANO ŞI NEDIFERENŢIABILITATEA LOR***", **Fig. 11.2**].

Diferenţiabilitatea a devenit evidentă în urma descoperirii **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) **beta excentrice** bexθ = β(θ) = θ – α(θ) = arcsin[**s**.sin(θ - **ε**)] de **excentru S** (în cercul unitate) şi **E(e, ε)** într-un cerc de rază oarecare R şi de coordonete polare **S(s, ε)**, cu graficele din **figura 2,b** pentru **s = ± 1** şi din **figura 3** pentru **s ∈ [-1, +1]**.

Cu ajutorul **FSM-CE** pot fi **exprimate exact,** cu maximum **doi** termeni, **toate graficele** / semnalelor triunghiulare (simetrice şi asimetrice), dreptunghiulare, trapezoidale, precum şi funcţiile în trepte **Smarandache** ş.m.a., aşa cu sunt prezentate în cuprinsul lucrării.

1. INTRODUCERE

Cine este **Weierstrass** ? Redăm de pe https://ro.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass:

*"**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (**Weierstraß**) a fost un matematician german, considerat **părintele analizei matematice**.*

A continuat lucrările lui Cauchy privind numerele iraționale redându-le o nouă abordare.

Cele mai celebre lucrări ale sale sunt cele din domeniul funcțiilor eliptice.

Weierstrass *este primul care a dat un exemplu de funcție continuă care* ***nu este derivabilă în niciun punct."***

Prima funcţie continuă şi nicăieri derivabilă a fost găsită de **Karl Weierstrass** în anul 1872 sub forma seriei de funcţii (1).

Ecuaţia funcţiei lui **Weierstrass**, continuă peste tot şi nicăieri derivabilă, este dată de suma / egalitatea

(1) $\mathbf{W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n . \cos(b^n \pi x)}$, pentru orice x ∈ R.

Parametrii a şi b **vor fi fixaţi**, astfel încât, **0 < a < 1** şi **ab > 1 + 3π/2**, adică a.b > 5,7123.. cu **b** număr natural impar.

Graficele funcţiilor **W(x),** pentru diverşi parametri **a** şi **b,** în condiţiile anterior stipulate, sunt prezentate în **figurile 1,** pentru **a = 0,5**; **b =15**; a.b =7,5 > $(a.b)_{min}$ =5,7124, pentru i ≡ n = **10, 20, 30** şi **40**.

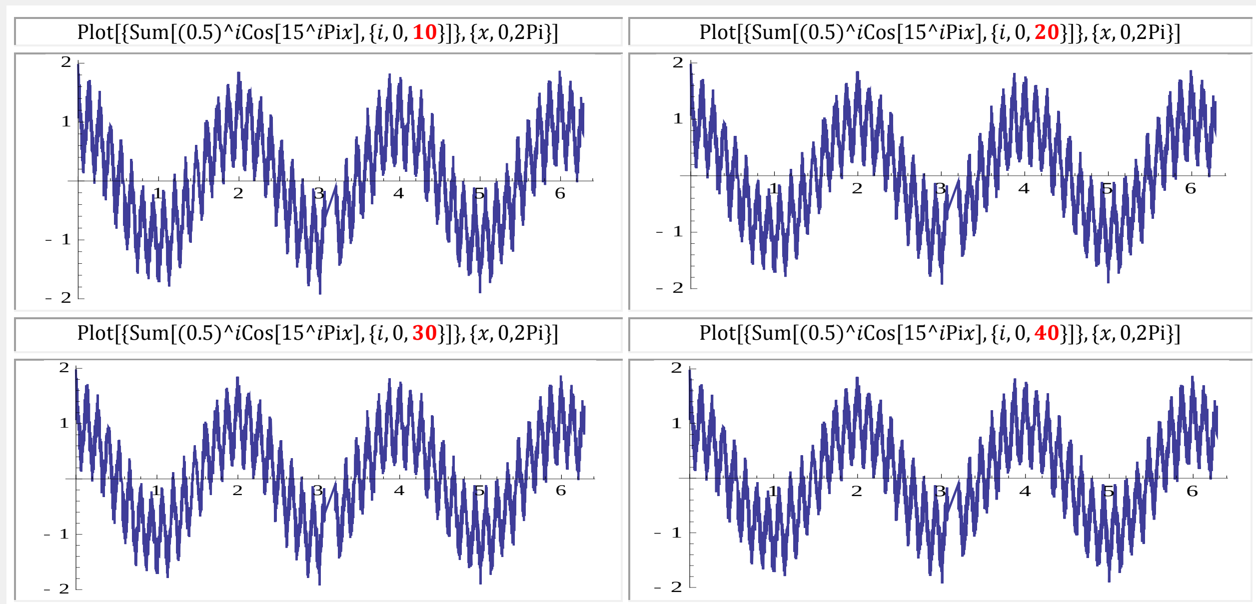


Fig.1,a Graficele funcţiilor (1) ale lui **Weierstrass** de a = 0,5; b = 12; ab = 6 ;
de i ≡ **n = 10, 20, 30** şi **40**

Rezultă că numărul **n** de termeni nu influenţează prea mult forma graficelor.

Exemplul dat în anul 1903 de matematicianul japonez **Teiji Takagi** are graficul acestei funcţii numit în continuare **curba lui Takagi** din **figura 1,b**.

Definiţia analitică a funcţiei F : R → R a lui **Takagi** începe prin a defini pe intervalul [0, 2) funcţia "***dinte simetric de ferăstrău***":

(2) $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \in [0,1) \\ 2 - x, & \text{pentru } x \in [1,2) \end{cases},$$

care se prelungeşte, prin periodicitate, pe întreaga axă a numerelor reale, astfel încât f(x + 2) = f(x), pentru orice x ∈ R să se obţină funcţia "***lamă de ferăstrău cu dinţi triunghiulari simetrici***" cu graficele din **figura 2** ▲ şi **2** ▼.

Cu ajutorul funcţiei f(x) dată de relaţia (2) se construieşte funcţia F(x)

(3) $$F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x),$$

care, prelungită prin periodicitate pe întreaga axă a numerelor reale, cu perioada principală T = 2, exprimă funcţia lui **Takagi**, reprezentată parţial în **figura 1,b** .

În lucrarea [24, Cap.11 **DESPRE CURBE PEANO ŞI NEDIFERENŢIABILITATEA LOR**, §2 "***O identitate pe mulţimea Γ a lui Cantor***", pag.106, Fig.11.1] este prezentat graficul "funcţiei trapezoidale" din **figura 1,c** ▼, iar în [24, figura 11.3] sunt prezentate garficele funcţiilor în "dinţi simetrici de ferăstrău" şi un mod de obţinere prin diferenţa lor (2) a unei funcţii trepezoidale definită de [24] inegalităţile

(4) $$f(t) = \begin{cases} 0, \ dacă \to \ 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ 3t - 1, dacă \to \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ 1, dacă \to \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

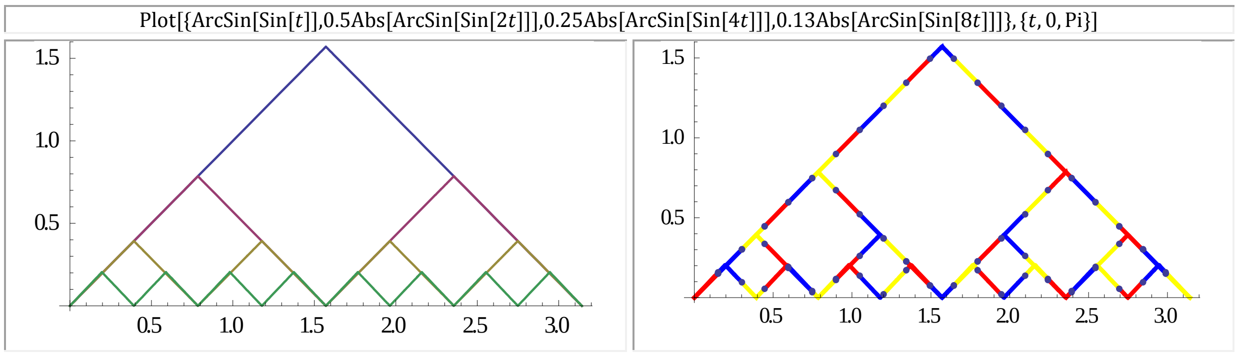


Fig.1,b Graficele parţiale ale funcţiilor (3) lui **Takagi** exprimate cu **FSM-CE** $\frac{1}{2^n}$**bex(2ⁿθ)**

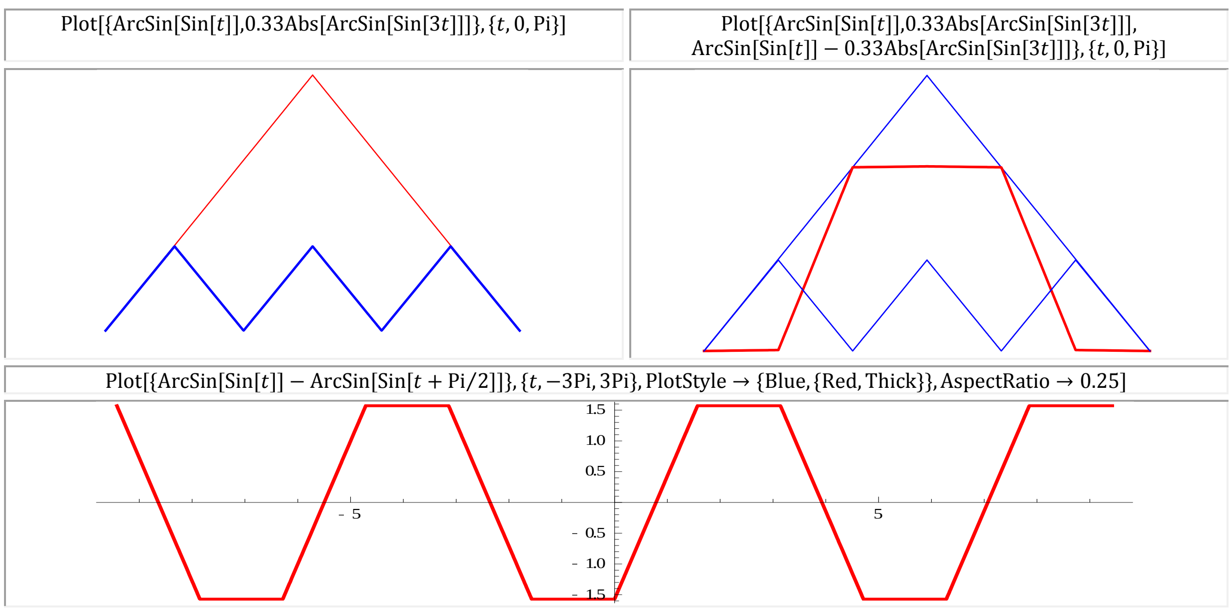


Fig.1,c Graficele funcţiilor trapezoidale exprimate cu **FSM-CE**

Aşa cum rezultă din ecuaţiile prezentate în cadrul figurilor, graficele au fost exprimate cu ajutorul **FSM-CE beta excentrice bexθ** de ecuaţii

(5) $$\begin{cases} \mathrm{bex}\theta = \beta(\theta) = \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ Bex\alpha = \beta(\alpha) = arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} = arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}} \end{cases},$$ în care *bexθ* = β(θ) este funcţie de **variabila excentrică θ** şi Bexα = β(α) este funcţie de **variabila centrică α**.

Funcţia lui **Darboux** D(x) definită de

(6) $D(x) = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n!}\sin((n+1)!\,x)$,

pentru orice x ∈ R, este un alt exemplu de funcţie continuă peste tot şi "***nicăieri derivabilă***" dată de **Jean-Gaston Darboux** în 1875, cu graficele din **figura 1,c**.

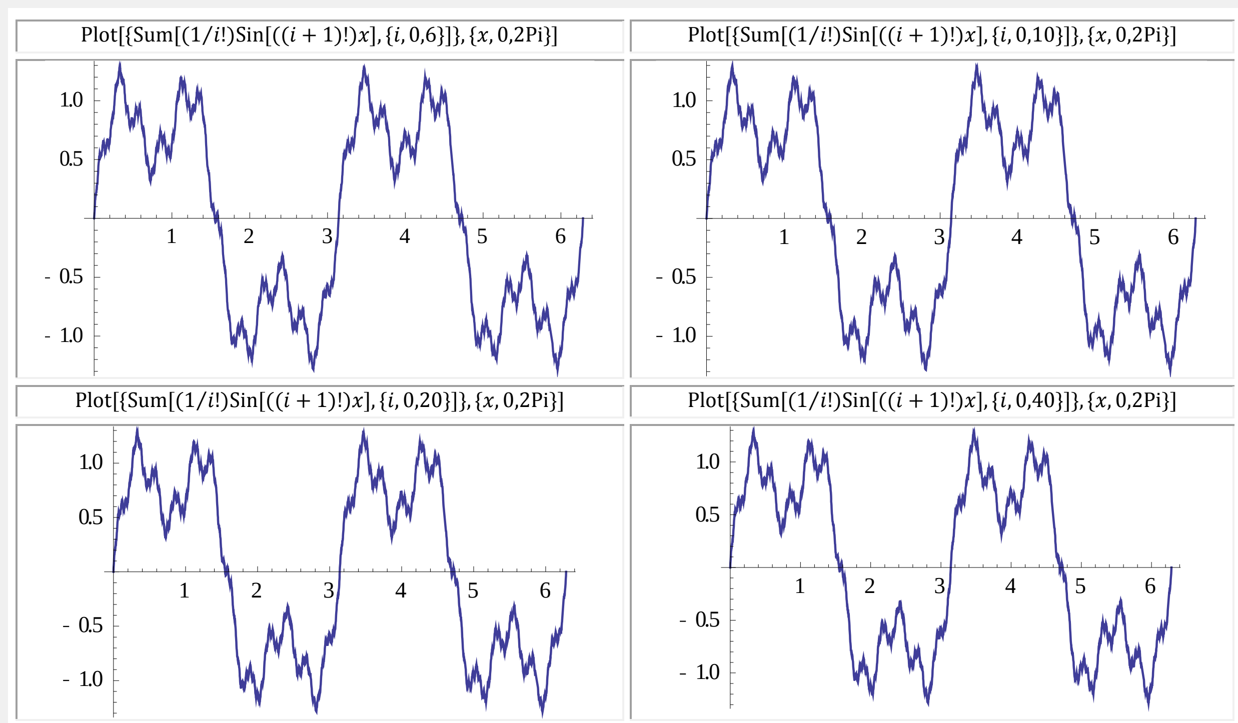


Fig.1,c Graficele parţiale ale funcţiilor (4) lui **Darboux** exprimate de relaţia (7)

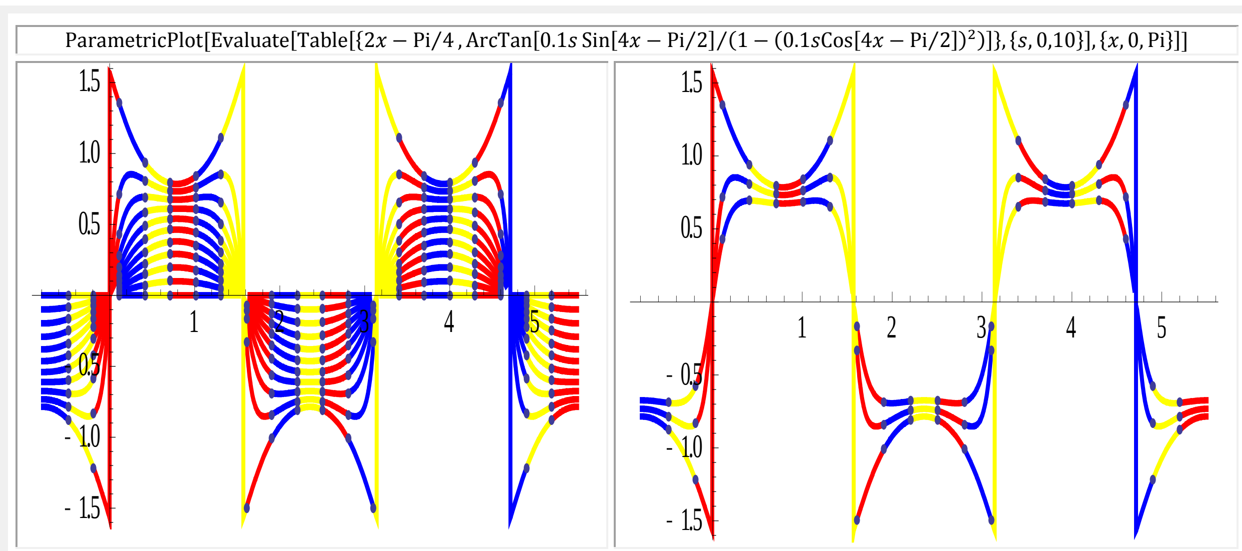


Fig.1,d Graficele unor **FSM-CE** care, pentru **s = 1**, pot imita ”groso-modo” funcţiile **Darboux**

Comparând **figura 2,a** cu **figurile 2,b,** “***lamă de ferăstrău cu dinţi triunghiulari simetrici***” rezultă că se poate obţine şi cu ajutorul **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) **beta excentrice** de variabilă excentrică **θ**, pentru o excentricitate liniară numerică **s = ± 1**. Pentru alte valori A, B, şi **s** ∈ [-1, +1] graficele sunt redate în **figura 2,c**.

ParametricPlot[{{x, x − 2Pi}, {x + Pi, −x + 2Pi}, {x + 2Pi, x − 2Pi}, {x + 3Pi, −x + 2Pi}}, {x, 3 Pi/2 , 5 Pi/2}]

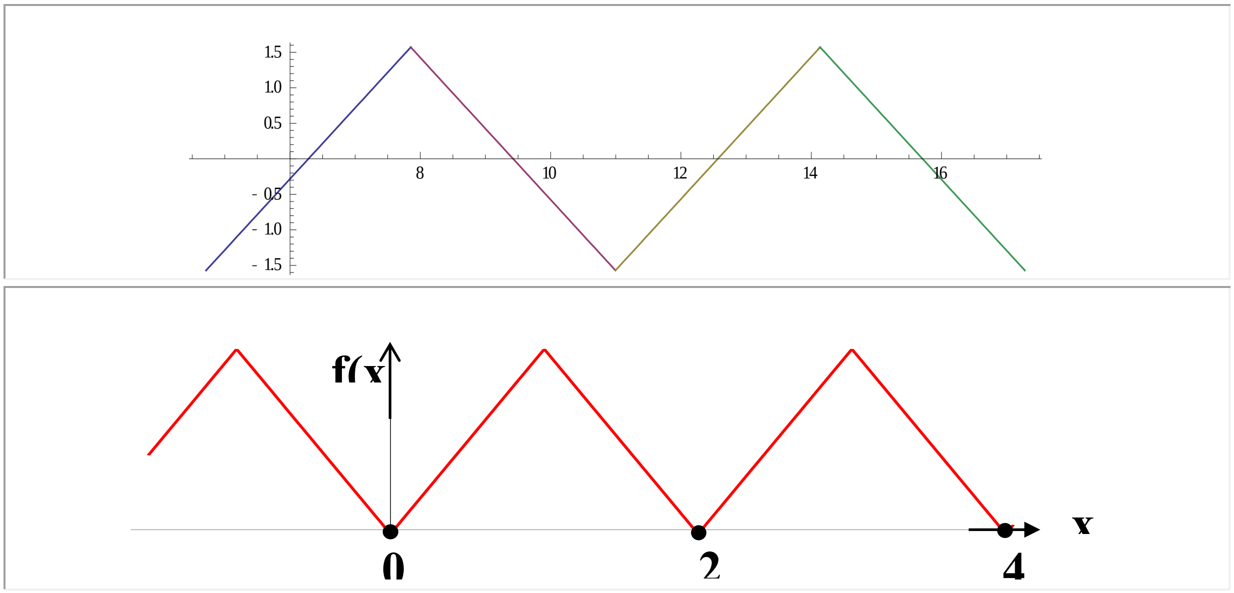
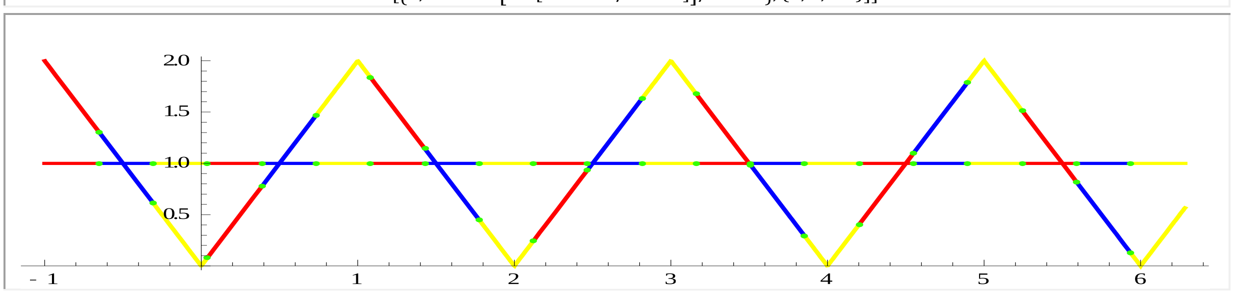


Fig.2,a Lamă de ferăstrău cu dinţi triunghiulari simetrici exprimată cu ecuaţia (2) ▲
şi cea prezentată în literatura de specialitate ▼

Plot[{1,2 ArcSin[Sin[Pix + Pi/2 − Pi]]/Pi + 1}, {x, 0,2Pi}]]



Plot[{1,2 ArcSin[Sin[Pix + Pi/2]]/Pi + 1}, {x, −1,2Pi}

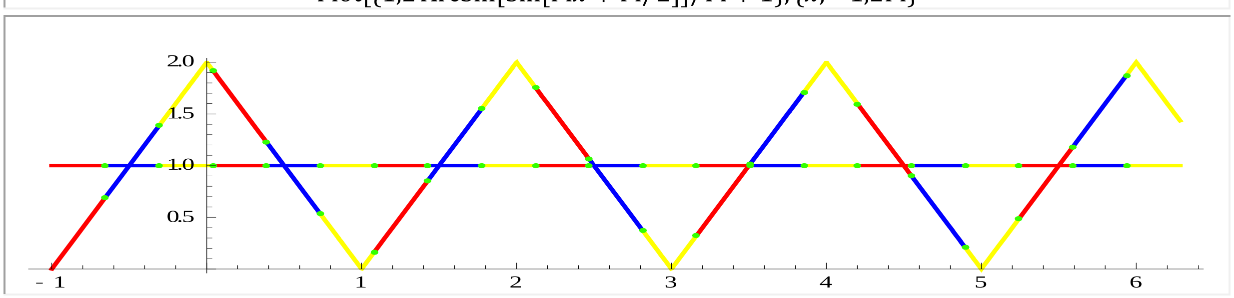


Fig.2,b Lamă de ferăstrău cu dinţi triunghiulari simetrici exprimată cu ecuaţia **FSM-CE**
beta excentrice de variabilă excentrică θ: **β(θ)** = arcsin[s.sin(θ − ε)]
de excentru **S(s = 1 ; ε = π/2)**

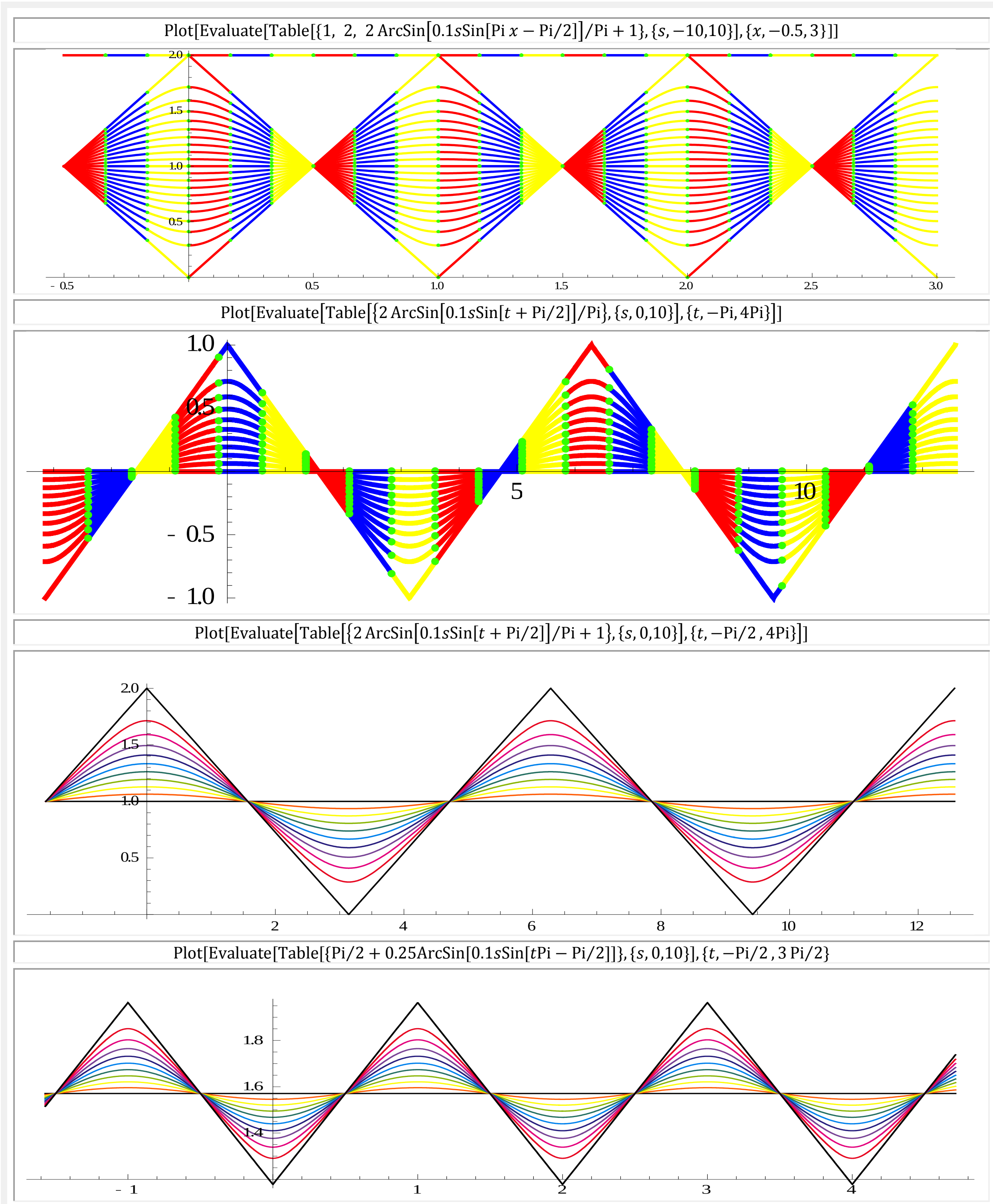


Fig. 2,c Graficele FSM-CE bexθ de excentru **S(s, ε)** sub forma de lamă de ferăstrău cu dinţi triunghiulari simetrici **A.bexθ + B**, pentru **A = 2** ▲ şi **A = 0,25** ▼; **B = 0** ▲ şi **B =** $\frac{\pi}{2}$ ▼ de **excentru S**(s ∈[0; 1]), ε = ± π/2) şi **θ ≡ t** ▲ şi θ = π t ▼

```
ParametricPlot[{{2Cos[t] Cos[4t + Pi/4]/Sqrt[1 − (Sin[4t + Pi/4])^2], 2Sin[t] Sin[4t + Pi/4]/Sqrt[1 − (Cos[4t + Pi/4])^2]},
{2Cos[t] Cos[8t]/Sqrt[1 − (Sin[8t])^2], 2Sin[t] Sin[8t]/Sqrt[1 − (Cos[8t])^2]}}, {t, 0, 2Pi}]
```

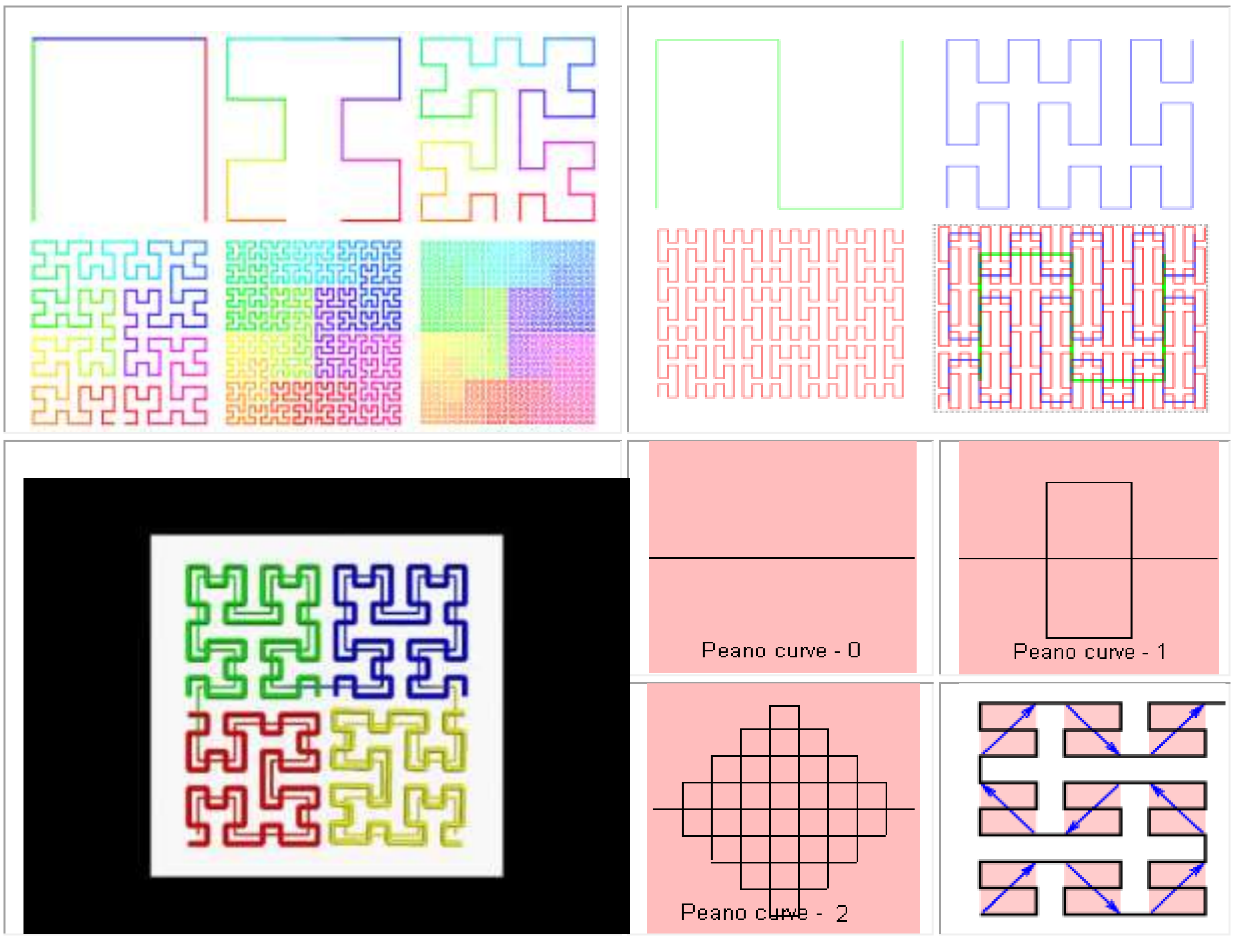


Fig.3,a Curbe **Peano**

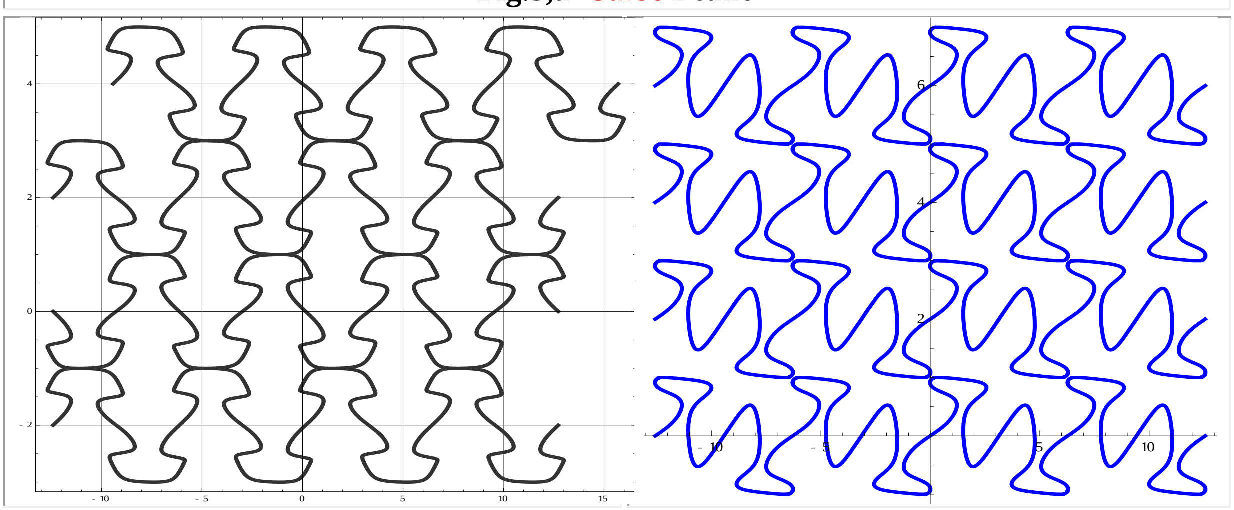
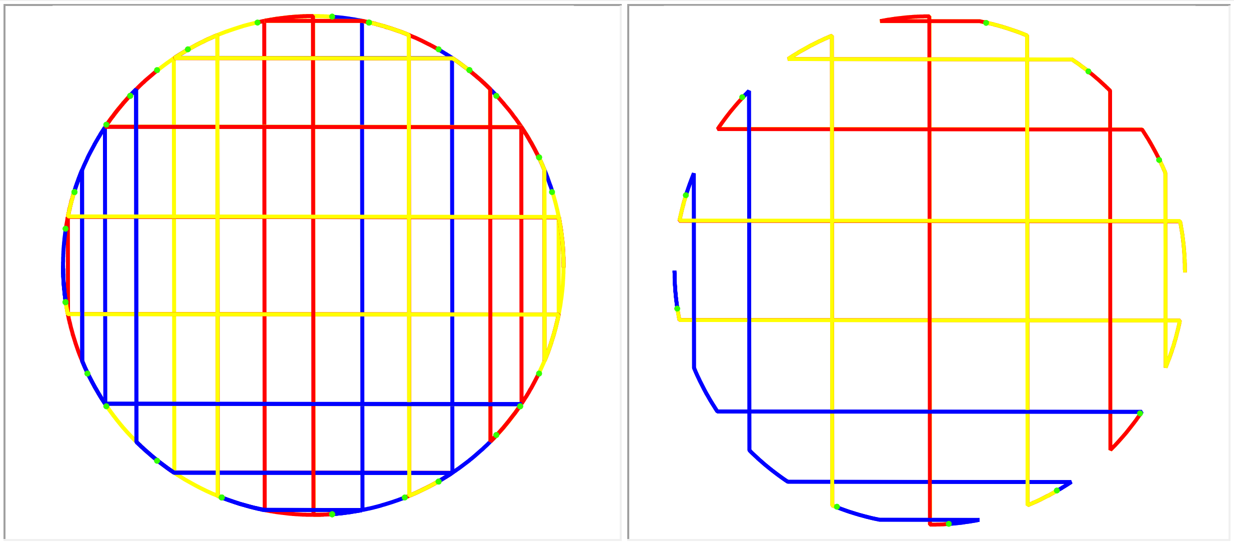


Fig. 3,b Puzle cu FSM-CE



ParametricPlot[Evaluate[Table[{2Cos[t] Cos[8t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[8t])^2], 2Sin[t] Sin[8t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[8t])^2]}, {s, 10,10}], {t, 0,2Pi}, Axes → None, PlotStyle → Table[{AbsoluteThickness[2], Hue[n/m]}, {n, 3,10}, {m, 3,10}] ▶

Fig. 3,c Funcţii **SM** unicursale în 2D

2. CONSECINŢELE ÎNLOCUIRII FUNCŢIEI CU DEZVOLTAREA EI ÎN SERIE

S-a ales, în acest scop, derivata **FSM-CE** derivată excentrică **Dexα** de **variabilă centrică α(θ)**. Funcţiile $\alpha(\theta)$ şi $\theta(\alpha)$, de **excentru S(s, ε),** au ecuaţiile

(7) $$\begin{cases} \alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}}, \end{cases}$$

ale căror derivate sunt **FSM-CE derivată excentrică dexθ**, de variabilă **excentrică θ** şi. respectiv, **Dexα,** de variabilă **centrică α**

(8) $$\begin{cases} Dex\alpha = \frac{d[\theta(\alpha)]}{d\alpha} = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} \\ dex\theta = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{del\theta} \end{cases}$$

Derivata **FSM-CE** derivată excentrică **Dexα** este

(9) $$\frac{d(Dex\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}}\right] = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k.\cos[k.\alpha]$$

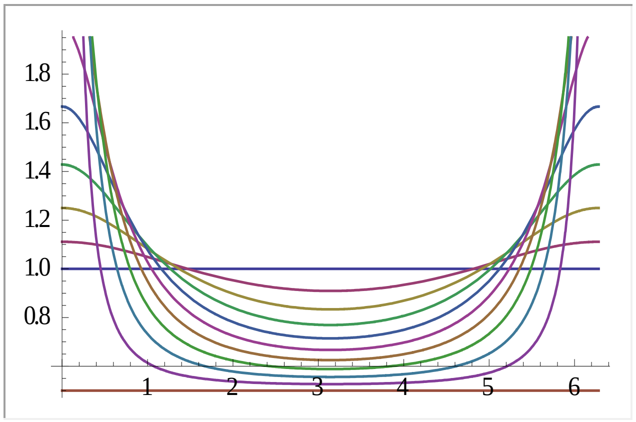
Dezvoltarea în serie trigonometrică din (4) este dată explicit în Rîjik, I.M. şi Gradstein I.S. "***TABELE DE INTEGRALE, SERII SUME ŞI PRODUSE***", Ed. Tehnică, Buc., 1955, pag.54, Cap. **Serii trigonometrice**, pag.54, ecuaţia 1.447-F II 599 m.

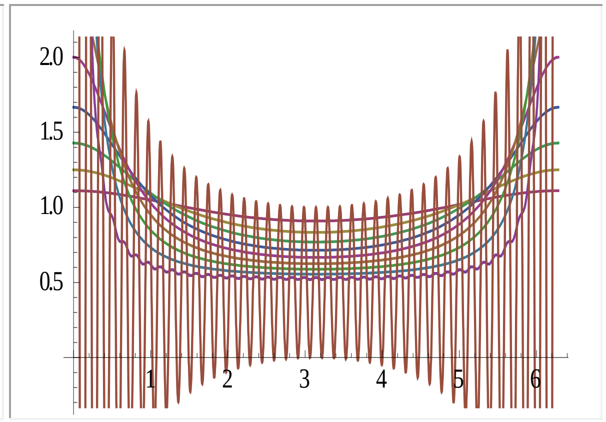
În **figura 3,a** sunt redate graficele aceleiaşi funcţii (4), exprimată în cele două moduri diferite.

Se observă, mai bine în **figurile 3,b,** că pentru valori mici ale excentricităţii liniare numerice **s** → pentru **s** ∈ [0; 0,7) - graficele nu diferă prea mult între ele însă, odată cu creşterea excentricităţii numerice **s** peste valoarea **s > 0,7** ele diferă semnificativ, astfel că, pentru **s > 0.8** şi în special pentru **s = 1** graficele lor sunt net diferite.

În **figurile 3,b** graficele sunt separate pe domenii de valori ale excentricităţii liniare numerice **s**, iar în **figura 3,c** s-au utilizat valorile dezvoltării în serie: **n = 10** în stânga ◄ şi **n = 40** în dreapta ►.

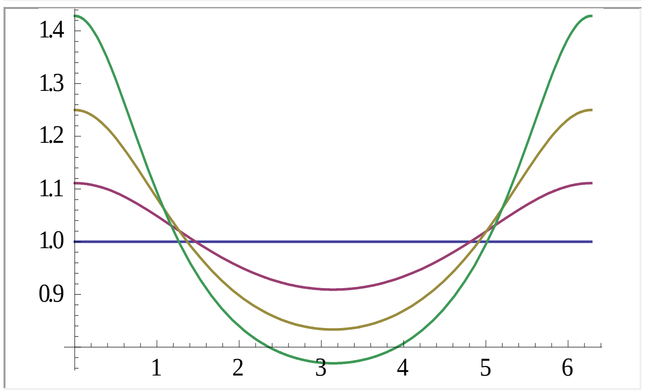
Plot[Evaluate[Table[{(1 − 0.1sCos[t])/(1 + (0.1s)² − 0.2sCos[t])}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{Sum[(0.1s)^iCos[it], {i, 0,40}]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]

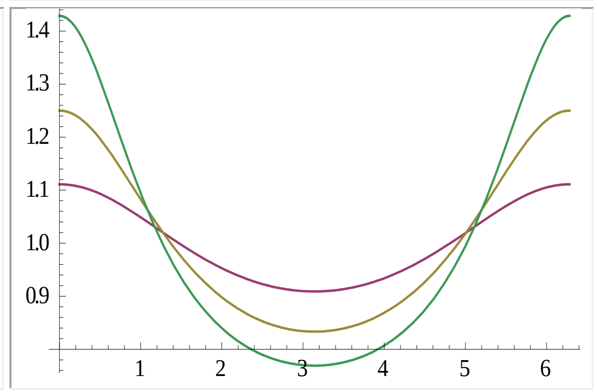




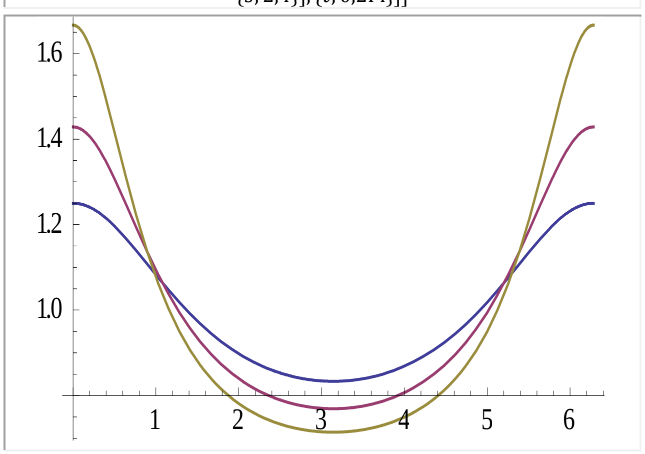
Fid. 3,a Comparaţie între graficele funcţiei **Dexα** şi dezvltarea sa în serie

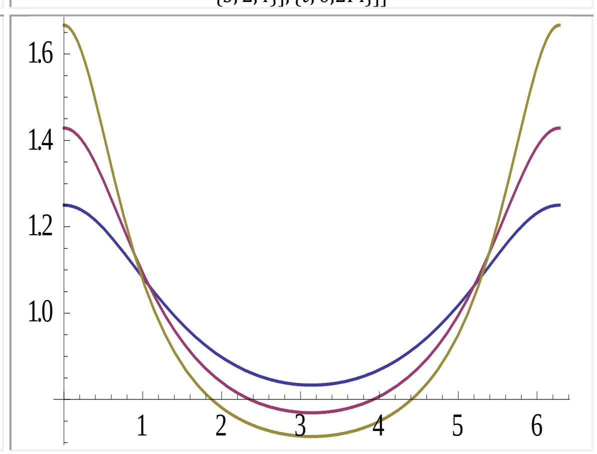
Plot[Evaluate[Table[{(1 − 0.1sCos[t])/(1 + (0.1s)² − 0.2sCos[t])}, {s, 0,3}], {t, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{Sum[(0.1s)^iCos[it], {i, 0,40}]}, {s, 0,3}], {t, 0,2Pi}]]

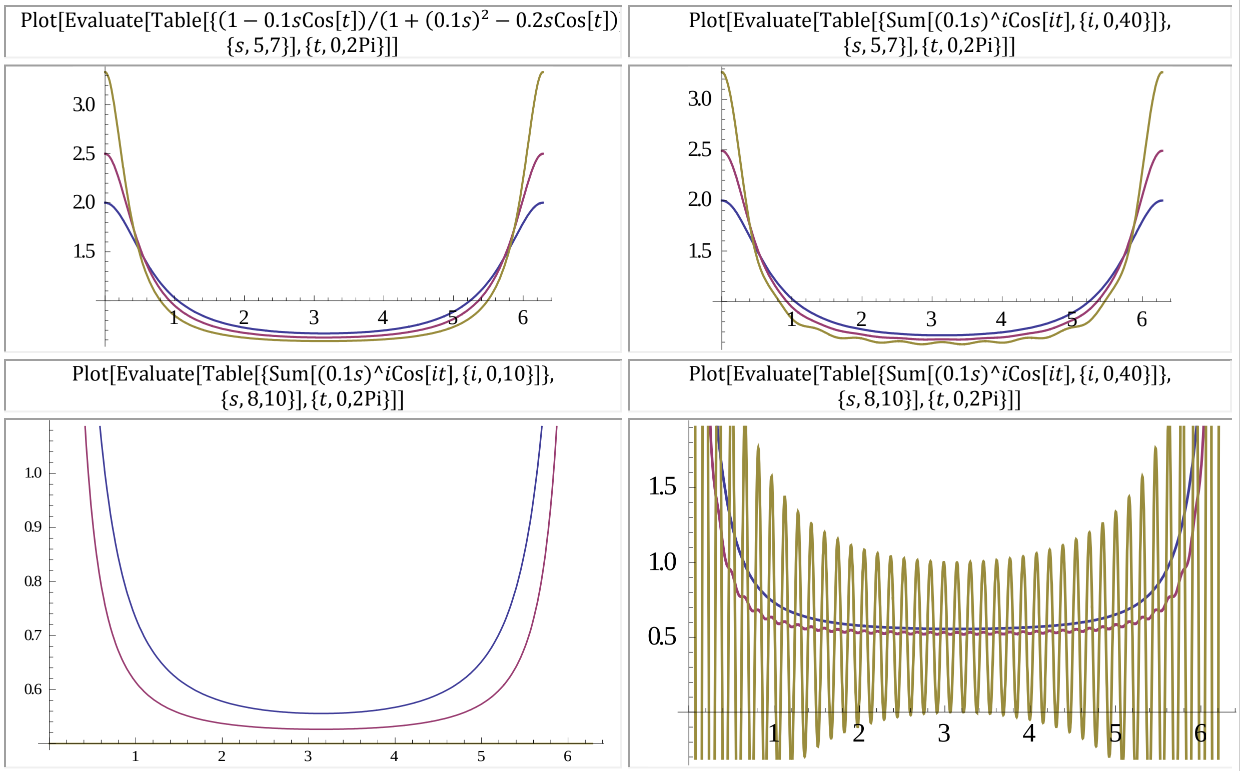




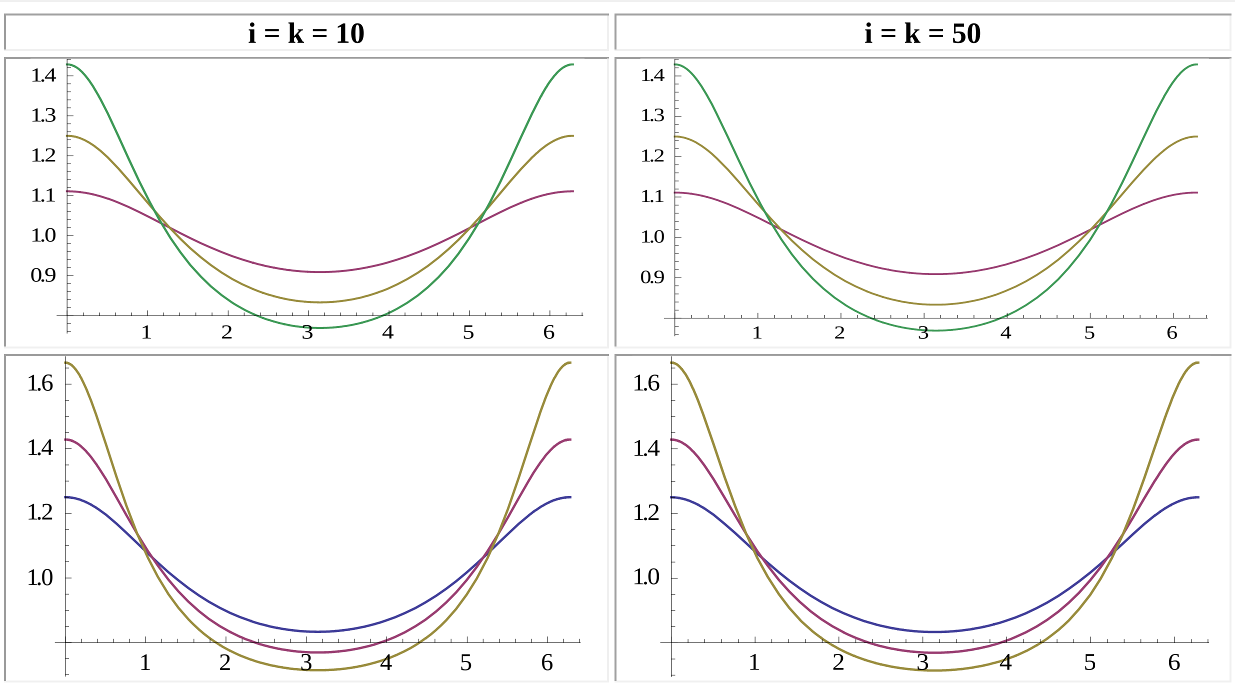
Plot[Evaluate[Table[{(1 − 0.1sCos[t])/(1 + (0.1s)² − 0.2sCos[t])}, {s, 2,4}], {t, 0,2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{Sum[(0.1s)^iCos[it], {i, 0,40}]}, {s, 2,4}], {t, 0,2Pi}]]

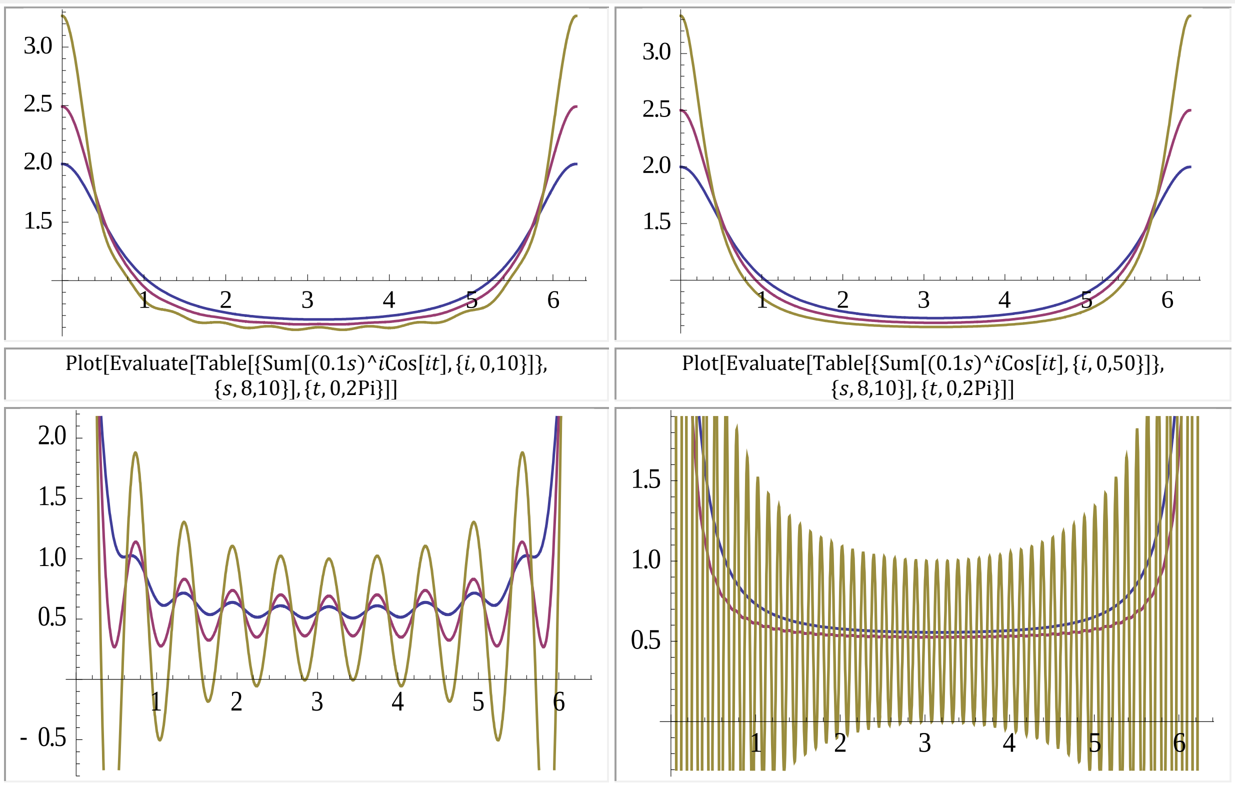






Fid. 3,b Comparaţie, defalcată pe domenii ale **excentricităţii numerice s,**
între graficele funcţiei **Dexα** şi dezvoltarea sa în serie pentru **n = 10** ◄ şi **n = 40** ►





Fid. 3,c Comparaţie, defalcată pe domenii ale **excentricităţii numerice s şi** pentru **i = k = 10** ◄ precum şi **i = k = 50** ► în cazul dezvoltării funcţiei **Dexα** în serie

3. REDAREA DERIVATELOR UNOR FUNCŢII

Verbul a reda are trei înţelesuri în limba română. Primul înţeles "a da din nou", în sensul de "a restitui" este cel la care ne referim şi nu "a descrie, a exprima" sau "a reproduce".

Ce restituim ?

Restituim unor funcţii (de parametru sau **excentricitate liniară numerică s = ± 1**, dintr-o familie de funcţii, de **s ∈ [− ∞, + ∞]**), de exemplu, **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) **amplitudine excentrică** $\mathbf{aex_{1,2}\theta}$ şi **beta excentrică** $\mathbf{bex_{1,2}\theta}$ de **variabile excentrice θ şi** de excentricitate liniară numerică **s = ± 1**

(10) $$\begin{cases} \mathbf{aex_{1,2}\theta} = \alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \mathbf{bex_{1,2}\theta} = \theta - \arcsin[s\sin(\theta-\varepsilon)] \\ \qquad\qquad\qquad \mathbf{bex_{1,2}\theta} = \arcsin[s\sin(\theta-\varepsilon)], \end{cases}, \quad s \in [-\infty, +\infty],$$

derivatele lor, care sunt **FSM-CE** de **derivată excentrică** $\mathbf{dex_{1,2}\theta}$ şi, respectiv, cosinusul quadrilob / cvadrilob **coq**

(11) $$\begin{cases} \dfrac{d[\mathbf{aex_{1,2}}(\theta)]}{d\theta} = \dfrac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} = \dfrac{d[\theta-\beta_{1,2}(\theta)]}{d\theta} = \mathbf{1} - \mathbf{dex_{1,2}\theta}. \\ \dfrac{d[\mathbf{bex_{1,2}\theta}]}{d\theta} = \dfrac{d[\arcsin[s\sin(\theta-\varepsilon)]]}{d\theta} = \dfrac{s.\cos[t]}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}} = coq_{1,2}\theta \end{cases}$$

Derivată care există şi pentru **s = ± 1**, dar pe care **Weierstrass** le-a negat, pentru că el <u>întâi a dat valoarea **s = ± 1** familiei de funcţii</u> (1) şi **apoi a derivat**, pe când succesiunea acestor operaţii este inversă: întâi se derivează familia de funcţii şi, **<u>apoi</u>**, derivata se particularizează pentru valoarea **s = ± 1**.

Eroare scuzabilă, pentru că, la acea dată, nu se ştia că cercul şi pătratul au aceleaşi ecuaţii parametrice; pentru **s = 0** obţinându-se un **cerc perfect**, iar pentru **s = ± 1** un **pătrat perfect** (**Fig.1**).

Această relaţie **SM** simplă, în care, prin modificarea excentricităţii numerice **s** de la 0 la 1 se obţine o transformare / metamorfozare continuă a cercului în pătrat, este o mişcare internă a **SM.**

Henri Bergson, un mare gânditor, admitea că [“***GÂNDIRE ŞI MIŞCARE***. ***Eseuri şi conferinţe***”, Polirom, Iaşi, 1995, pag. 209] ***“ Matematica modernă este tocmai un efort de a înlocui ceea ce este gata făcut cu ceea ce se face, pentru a urmări generarea mărimilor, pentru a surprinde mişcarea nu din exterior şi prin prisma urmărilor ei evidente, ci din interior şi prin tendinţa ei de a schimba, pentru a adopta continuitatea mobilă a desenului lucrurilor “.***

Dar, cu toate acestea, “***i se parea absurdă ideea că cercul şi pătratul pot să facă parte din aceeaşi familie”***. Cităm din [**H. Bergson** “ ***EVOLUŢIA CREATOARE***. ***Eseuri de ieri şi de azi***”, Institutul European, 1998, pag. 258] ***“Când am definit cercul mi-am reprezentat fără probleme un cerc negru sau alb, de carton, fier sau cupru, un cerc transparent sau opac – dar nu un cerc pătrat, pentru că legea generării cercului exclude (?) posibilitatea ca să delimitezi această figură prin linii drepte.”***

Să delimitezi, da, dar să curbezi o dreaptă şi s-o transformi într-un cerc o ştie toată tagma tehnologilor ! Acum o află şi tagma matematicienilor, deoarece, pornind de la pătrat, care este cercul de **s = ± 1** şi micşorând progresiv, continuu, valoarea excentricităţii numerice de la **s = + 1** spre **s → 0**, colţurile pătratului încep să se rotunjească cu raze de racordare R din ce în ce mai mari, iar când raza **de racordare R** ajunge la valoarea **+ 1**, pentru **s = 0**, cele patru raze de racordare ale colţurilor pătratului vor forma cercul perfect de rază **R = 1**, care este **cercul unitate** sau **cercul trigonometric**.

Este “**exact**” ce se întâmplă la transformarea, prin strunjire din mai multe treceri, a unei bare pătrate în una circulară, cu diferenţa că la strunjire raza R nu poate să rămână constantă, ci din ce în ce mai mică pe când în matematică ea rămâne constantă.

Modul în care porţiunile / segmentele de dreaptă alternează cu arce de cerc sunt mult mai evidente în **transformarea excentrică**, prezentată în [1, Vol I, §5.1, **Fig. 5.6**, pag. 166], ca inversă a transformării de centrare. Astfel de transformări sunt prezentate în **figura 4,b** şi sunt realizate cu ajutorul **FSM cvadrilobe**, cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ** prin ecuaţiile parametrice

(12) $$\begin{cases} x = R.siq\theta = R\frac{cos\theta}{\sqrt{1-s^2sin^2\theta}} \\ y = R.coq\theta = R\frac{sin\theta}{\sqrt{1-s^2cos^2\theta}} \end{cases}.$$

Curbele plane închise, exprimate de aceste ecuaţii parametrice (3) sunt ilustrate în **figura 1,b**.

Aceleaşi curbe închise se pot obţine şi cu **FSM-CE derivată excentrică** şi cu ecuaţiile parametrice

(13) $$\begin{cases} x = R\ dex\theta \\ y = R.dex(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases},$$ cu graficele din **figura 1.a.**

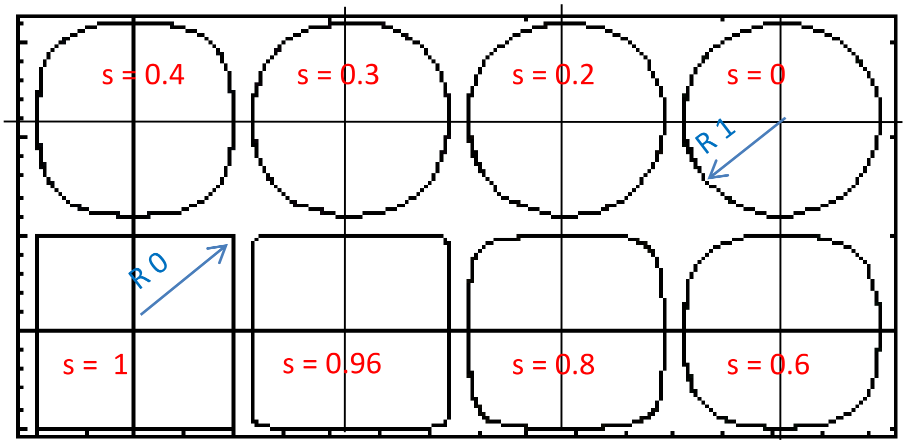
Prin compararea graficelor, rezultă că excentricele din **figura 4,a ◀** au centrele în punctele Ce($\frac{s}{2}, \frac{s}{2}$), iar cele exprimate prin funcţii quadrilobe / cvadrilobe **(Fig.4,a ▶)** sunt centrate în originea sistemului de axe O(0, 0).

De fapt, aşa cum s-a arătat într-o lucrare [***Mircea Şelariu***, “***INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATIC***Ă”, Lucr. Simp. Naţ. al Univ. Gh. Anghel, Drobeta-Tr. Severin, 2003, pag. 171…178] **dreapta** nu **este** altceva decât **o strâmbă** de excentricitate numerică **s = 0**, iar **o linie frântă** este o strâmbă de **s = ± 1**. Ca urmare, se poate afirma că transformarea pătratului în cerc este o strâmbare / încovoiere a patru segmente de dreaptă, reciproc perpendiculare, în patru arce de cerc.

Şi invers, pătratul se obţine prin îndreptarea, continuă şi progresivă, a patru arce de cerc, fiecare arc de cerc de $\frac{\pi}{2}$ fiind rotit cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de cel precedent, în patru segmente de dreaptă.

Faptul că nu oricare funcţie continuă este derivabilă, având drept consecinţă neexistenţa vitezei unui punct material, în fiecare moment al mişcării sale, ceea ce, ***evident, nu corespunde realităţii***, constituie un neajuns sever al **MC**, care afectează unitatea şi generalizarea rezultatelor, ceea ce nu este cazul în **ME**.

În 1872 a apărut o funcţie al cărei grafic este considerat azi **fractal**, când **Karl Weierstrass** a dat un exemplu de funcţie cu proprietatea că este continuă, dar ***nediferenţiabilă***, constatare care i-a oripilat pe matematicieni. **Charles Hermite** declara “ ***Je me détourne avec horreur de ces functions continues sans dérivées”.***



ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.05s(1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]),0.05s(1 − Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2])}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.05s(Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]),0.05s(Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2])}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi}]]

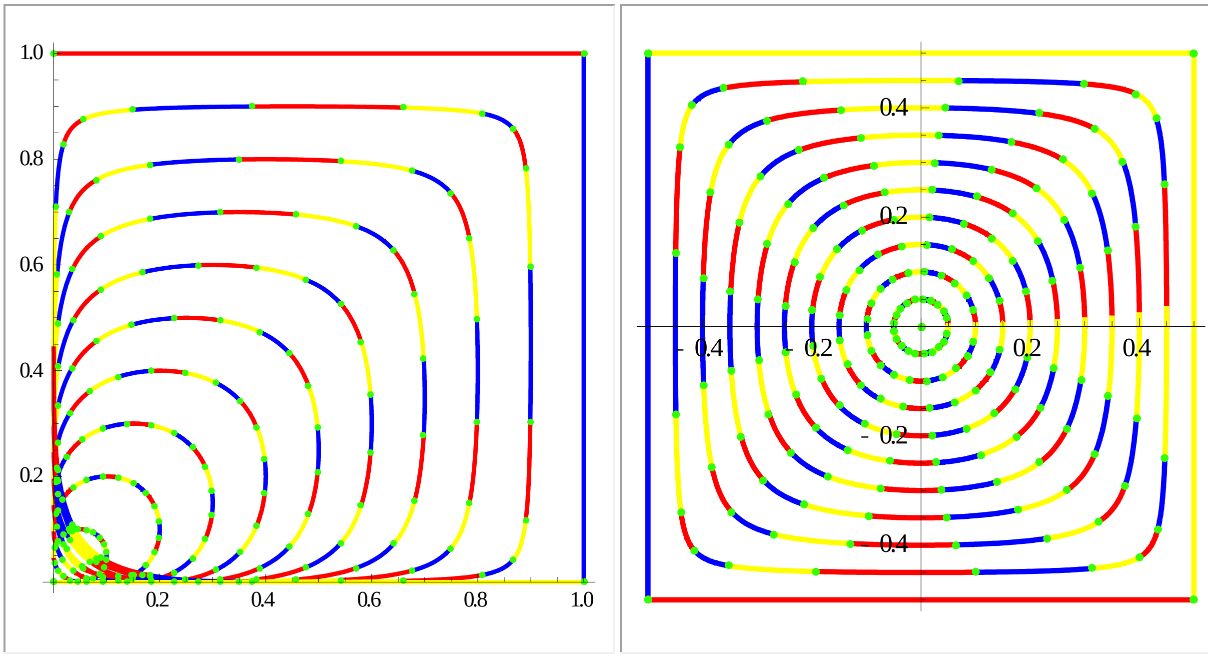


Fig. 4,a Transformarea continuă a **cercului** în **pătrat** şi invers, a **pătratului** în cerc cu **FSM-CE** derivată excentrică **dexθ** **{x = dexθ, y = dex(θ $\pm\frac{\pi}{2}$)}**

ParametricPlot[Evaluate[Table[{(Cos[t]/ Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]), (Sin[t]/ Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi }]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.05s(Cos[t]/ Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]),0.05s(Sin[t]/ Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2])}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi}]]

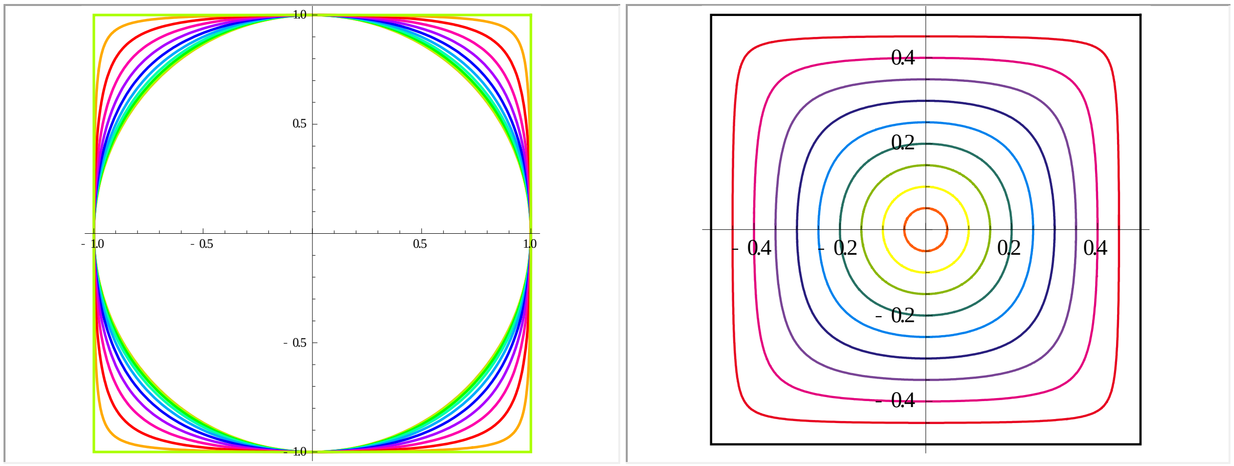


Fig. 4,b Transformarea continuă a **cercului** în **pătrat** şi invers, a **pătratului** în **cerc**, cu **FSM** - **Quadrilobă / cvadrilobă (Q)** **{x = coqθ ; y = siqθ}**

Pentru exemplificare, se va alege prima funcţie **nicăieri derivabilă**, prezentată de **Weierstrass** ([25] **Schoenberg, J. Isaac**, "**PRIVELIŞTI MATEMATICE**", Editura Tehnică, Bucureşti, 1989, pag.105…115, Cap.11 «Despre curbe **Peano** şi nediferenţiabilitatea lor », **Fig. 11.2**) :

(14) $$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi . t)$$, 0 < **a** < 1 şi **b** = 1,3,5 …, (2n-1),

un întreg impar, astfel ca a.b > 1 + 3π/2 = 5,712.

În aceeaşi lucrare este demonstrată ca fiind nediferenţiabilă şi funcţia trapezoidală (**Fig. 15.8**) dată de expresia (15.15) care reprezintă o diferenţă a funcţiilor beta excentrice de θ şi de θ + $\frac{\pi}{2}$, ambele de **excentricitate numerică s = 1**.

Familia acestor funcţii, pentru **s ∈ [-1, 0]** şi s ∈ [0, 1] au graficele din **figura 2.**

Va deveni evident faptul că funcţia (15.15) este derivabilă, dacă întâi se derivează familia de funcţii, deci pentru **s ∈ [-1, 1]** şi în derivată, sau după derivare, se dă valoarea particulară de **s = ±1** !!

Graficele derivatelor acestor funcţii sunt prezentate în **figura 3**, iar în **figura 4** sunt prezentate aceleaşi grafice pentru **s = ±1**.

O modificare a exemplului lui **Weierstrass** se obţine prin înlocuirea în (14) a lui **cosπ.t** prin splineul **Euler** liniar **E (t),** care interpolează pe **cosπ.t** în toate valorile întregi ale lui t şi se obţine graficul din **figura 5,a**. Alăturat, s-a prezentat familia de **funcţii supermatematice excentrice**, de variabilă excentrică θ ≡ t, denumită **bext** şi care este o componentă / termen a/al funcţiei amplitudine excentrica (**aexθ**), funcţie definită prin relaţia

(15) α(θ) = aex θ = θ - β(θ) = θ – bex θ = θ - arc sin [s.sin(θ - ε)],

în care **θ este variabila excentrică** sau unghiul pe care o semidreaptă pozitivă, turnantă în jurul excentrului **E(e, ε)** – sau în jurul punctului solar **S(s,ε),** îl face cu axa Ox. (**V.I.Arnold**: « ***Kepler a afirmat că planetele se rotesc în jurul soarelui, pe orbite circulare, însă soarele nu se află în centrul cercurilor*** »). De aici a rezultat denumirea **excentrului S** de **punct solar**. Iar α este variabila centrică sau arcul de cerc, al cercului unitate (R = 1) de la originea arcului A(1,0) la un punct curent pe cerc **W**(1,α) ≡ **W** (r = **rexθ**, θ).

Excentricitatea unitară este s = e/R, sau distanţa dintre S şi O, iar excentrul **S** şi **E** sunt expulzate din **centrul O** pe direcţia **ε**.

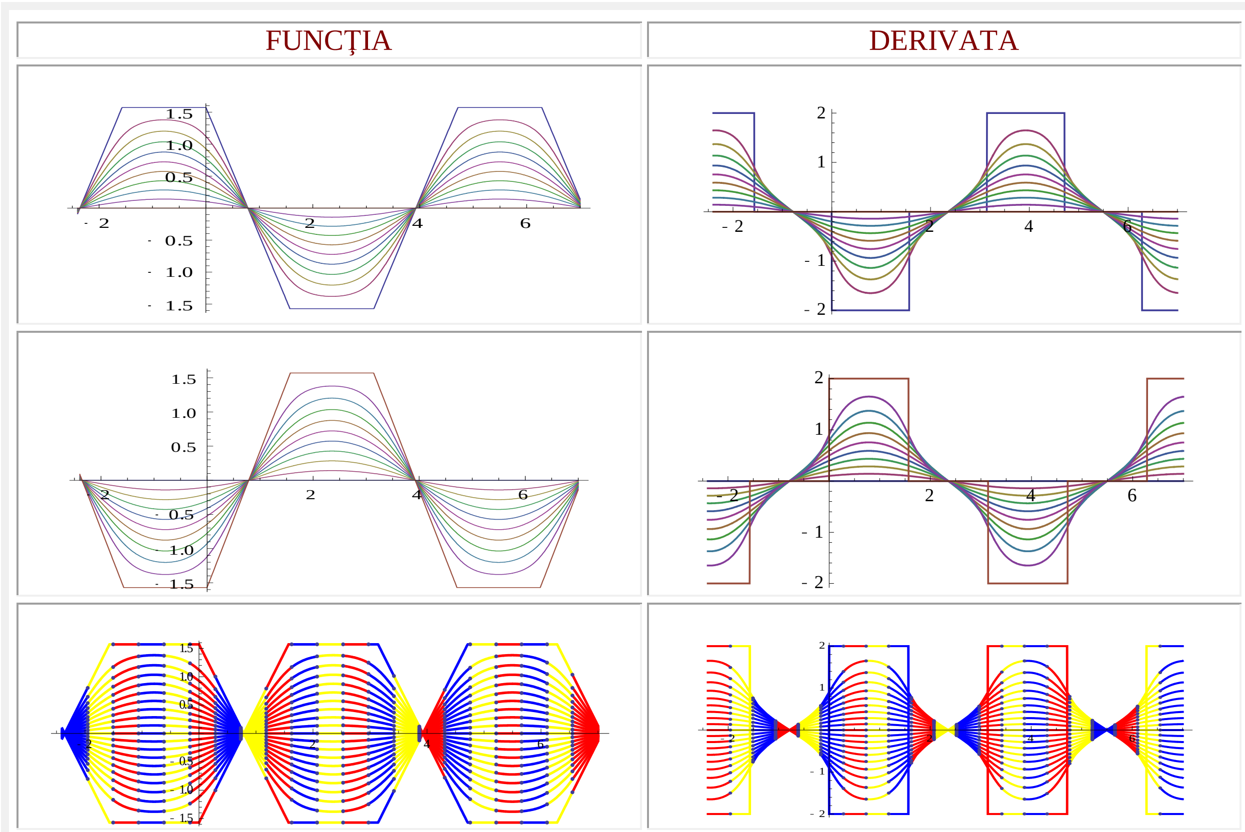


Fig. 5 Graficele funcţiilor bexθ – bex(θ + π/2)
pentru **s** ∈[-1,0] –sus ⮝ - şi **s** ∈[0,1] – jos ⮟ - cu pasul 0,1 şi ε = 0

Pentru θ → π.t şi un defazaj ε = - π/2 se obţine funcţia sau, mai precis, familia de funcţii beta excentrice

(16) bex t = arcsin[s sin(π.t + π/2)],

a căror grafice, de excentricitatea numerica **s ∈ [0, 1]**, cu pasul 0.1, sunt prezentate în **figura 5**.

Se observă, fară dificultate, că pentru s = 0 → aex t = 0 şi pentru **s = ±1**, limitele extreme (în grafice) a lui **s**, se obţine graficul unei funcţii în « **dinţi triunghiulari simetrici** » (**Fig.2**).

Deoarece, derivata funcţiei **aexθ** este funcţia derivată excentrică **dexθ** :

(17) d(aext)/dt = dα/dθ =dex θ = $1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$,

rezultă că, cel de al doilea termen din relaţia (17), este tocmai derivata funcţie **bexθ**, adică:

(18) d(bex θ)/dθ = $\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ = s.coq (π.t + π/2) = - s.(siqπ.t),

care este produsul **excentricităţii numerice s** cu funcţia **cosinus cuadrilob coqθ** [Vol. I, Cap.2, §2.3, pag. 50 .. 56] defazată cu ε = - π/2, astfel că rezultă –s.siqθ, ale cărei familii de grafice sunt prezentate în **figura 9,b**, pentru s ∈ [0, 1], cu pasul 0,1 şi, în **figura 9,a**, o singură funcţie, pentru s = 1.

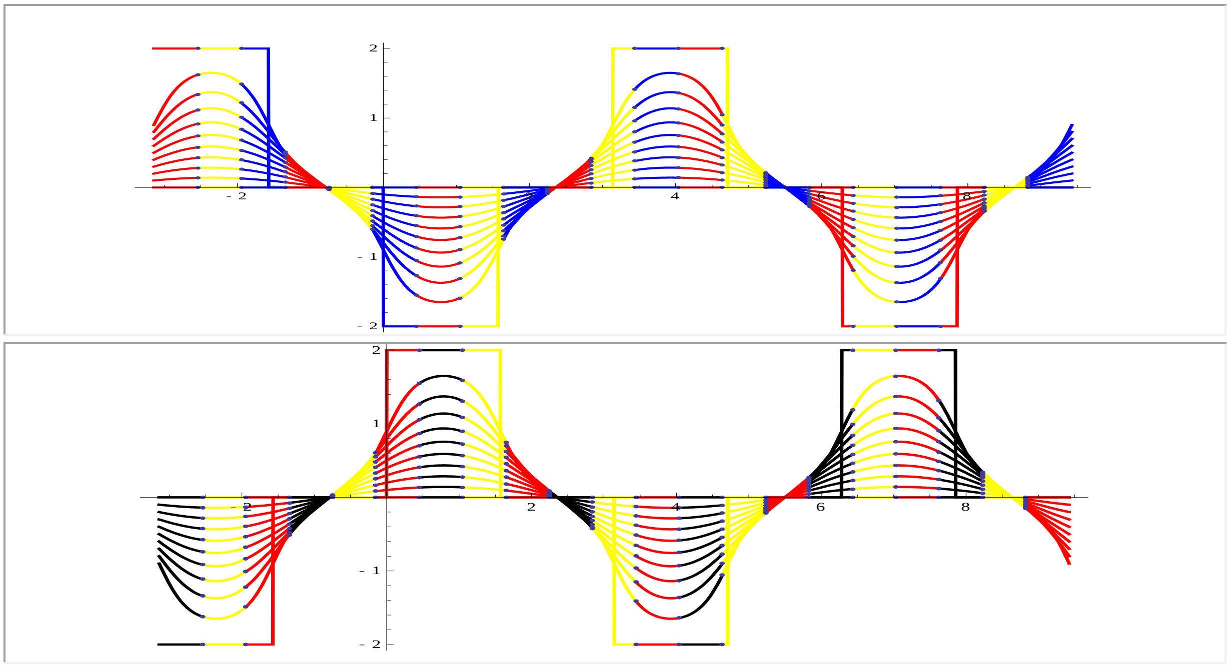
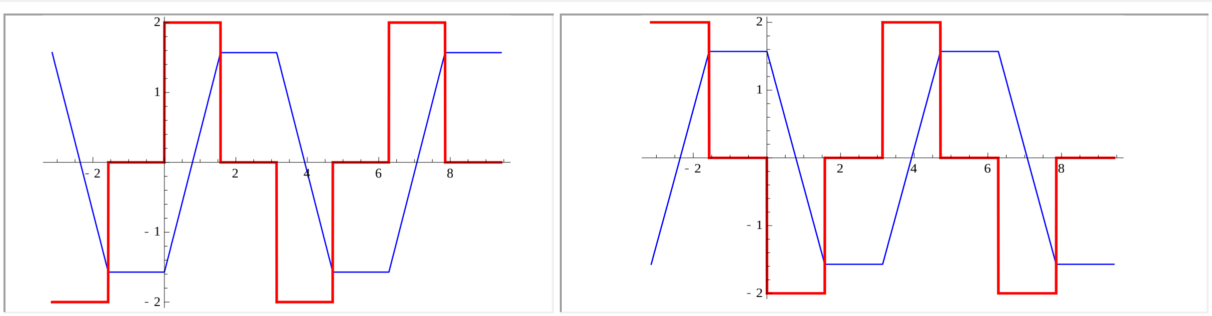


Fig. 6 Graficele derivatelor funcţiilor **bexθ – bex(θ + π/2),**
pentru **s ∈[-1, 0]** – sus 🡅- şi **s ∈[0, 1]** – jos ▼- cu pasul 0,1 şi ε = 0

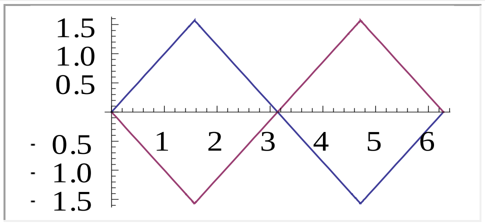
Funcţia **sinus cuadrilob** (**siqθ**), pentru excentricitatea numerică **s = 1**, reprezintă, în teoria semnalelor, răspunsul unui releu la un semnal sinusoidal, funcţie denumită şi **sinus pătrat** [**Săvescu, M.**, **Constantin, I.**, **Petrescu, T.**, **METODE DE APROXIMARE ÎN ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRONICE**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982, pag. 31], fiind chiar funcţia trigonometrică excentrică **sinus excentric**, de excentricitate numerică **s = 1**, definită pe un pătrat, nerotit cu π/4 ca în cazul funcţiilor pătratice **Alaci,** funcţie introdusă de autor în matematică sub denumirea de sinus cvadrilob / quadrilob – **siqθ** sau **sinqθ** -, alături de funcţia cosinus cvadrilob / cosinus quadrilob – **coqθ** sau **cosqθ** - .

Coroborând funcţiile şi derivatele lor, se observă că ele se identifică. Astfel, funcţia **Weierstrass** modificată, din **figura 8**,**a,** privită ca o funcţie **bext** de excentricitate numerică s = 1, **<u>devine complet derivabilă !</u>.**



s = -1 | **s = + 1**

Fig. 7 Graficele funcţiei **bexθ – bex(θ + π/2)** şi ale **derivatelor** ei



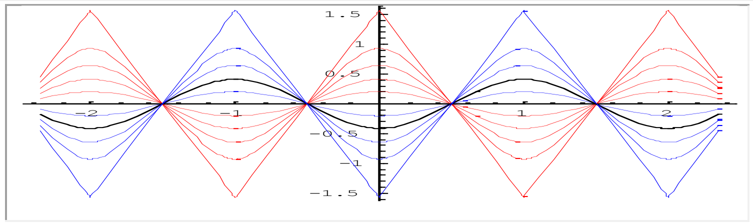
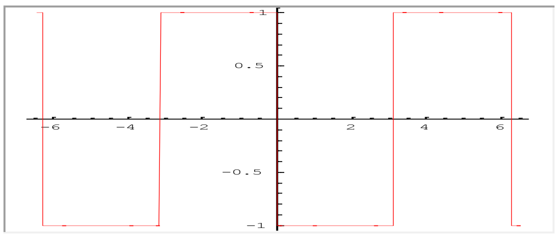


Fig. 8,a Funcţia **Weierstrass** modificată

Fig. 8,b Funcţii SM excentrice bex_1t şi bex_2t



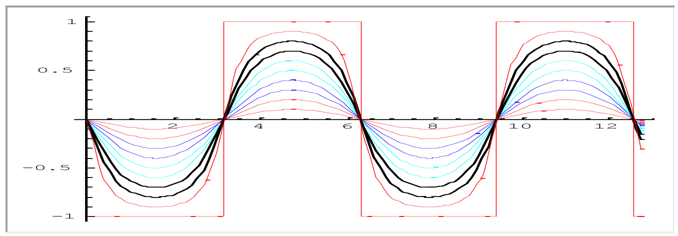


Fig. 9,a. Derivata funcţiei **Weierstrass** modificată

Fig. 9,b Derivatele funcţiei **bex_1t**

4. FUNCŢII SUPERMATEMATICE (FSM) SMARANDACHE ÎN TREPTE ŞI DERIVATELE LOR

Prin combinarea funcţiilor **rampă excentrice**, de execentricitate numerică **s = 1**, cu funcţii **dreptunghiulare excentrice,** rezultă **funcţii în trepte**, denumite **funcţii în trepte Smarandache**, în onoarea matematicianului român Dr. Math. **Florentin Smarandache** şeful Departamentului de Mathematică de la Universitatea New Mexico, USA.

Câteva funcţii de acest gen, împreună cu relaţiile lor de definiţie sunt prezentate în **figurile 7** şi **8.**

FUNCŢIILE **SMARANDACHE** ÎN TREPTE şi **DERIVATELE** LOR

$\mathbf{f(t) = (t - arcsin[sin[t]])\, cos[t]/Sqrt[1 - (sint)^{\wedge}2];}$

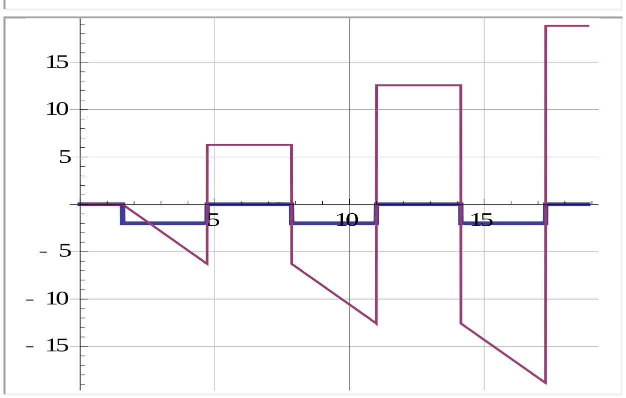
f'(t) = ((t-arcsin[sint]) $cost^2$ Sin[t]) / $(1-sin^2 t)^{3/2}$ - ((t-arcsin[sint]) sin[t]) / $\sqrt{1-sin^2 t}$ +

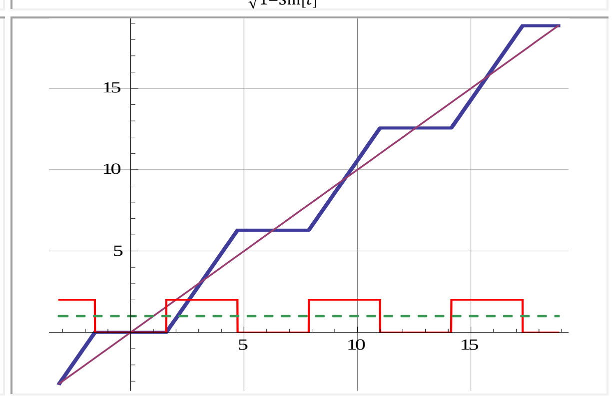
\+ ((cos[t] (1-cos[t]/ $\sqrt{\mathbf{1-sin^2 t}}$))/ $\sqrt{\mathbf{1-sin^2 t}}$)

F(t) = $t - \mathrm{arcsin}[\mathrm{sin}t] = bex(t, s = 1)$,

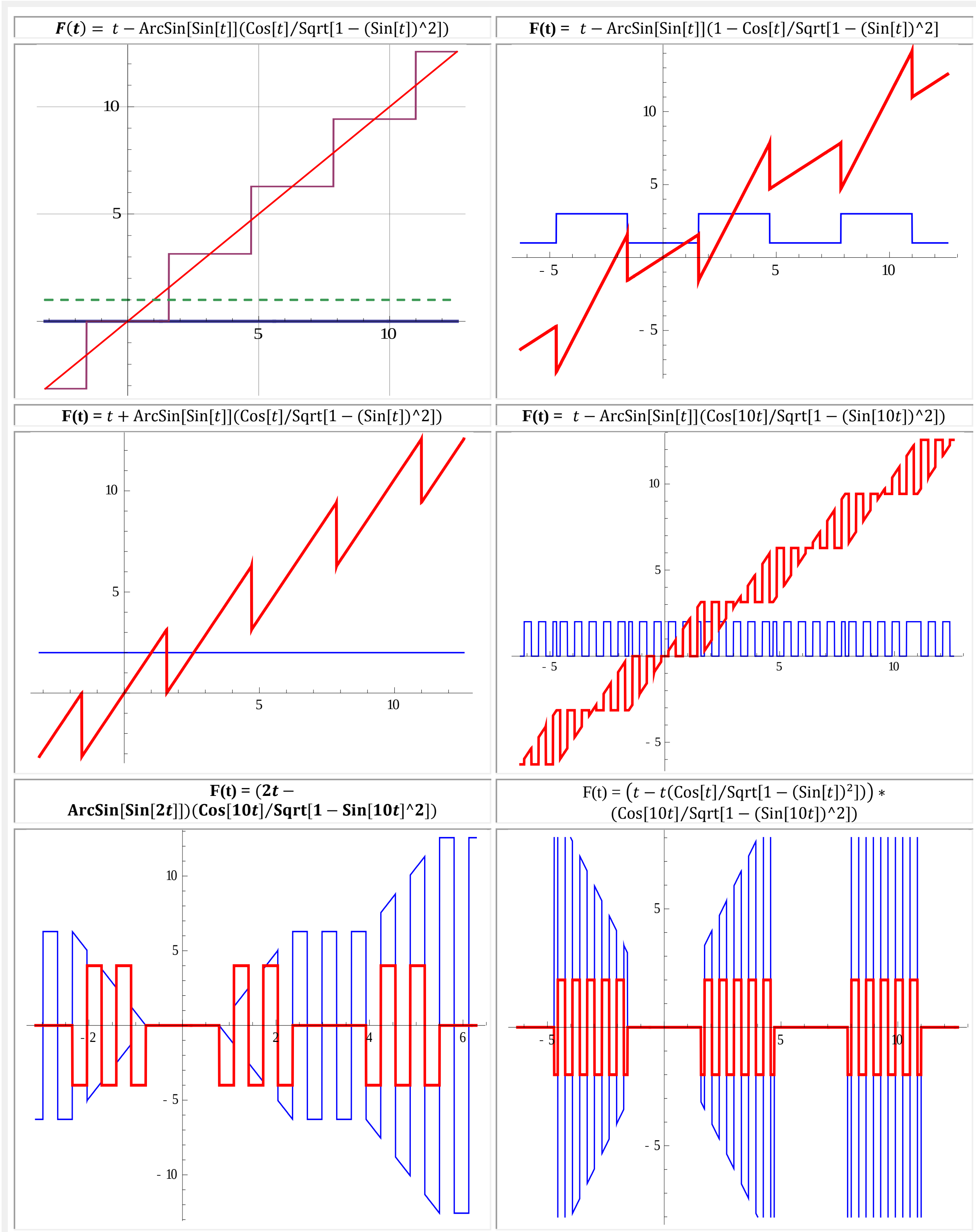
$\mathrm{Plot}[\{t - \mathrm{ArcSin}[\mathrm{Sin}[t]], t, 1 - \frac{\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}[t]^2}}, 1\}, \{t, -\mathrm{Pi}, 6\mathrm{Pi}\}]$

F'(t) = $1 - \frac{\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}[t]^2}} = \mathrm{dex}[t, s = 1]$,





BUPT


F(t) = t − ArcSin[Sin[t]](Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2])
F(t) = t − ArcSin[Sin[t]](1 − Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2]
F(t) = t + ArcSin[Sin[t]](Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2])
F(t) = t − ArcSin[Sin[t]](Cos[10t]/Sqrt[1 − (Sin[10t])^2])
F(t) = (2t − ArcSin[Sin[2t]])(Cos[10t]/Sqrt[1 − Sin[10t]^2])
F(t) = (t − t(Cos[t]/Sqrt[1 − (Sin[t])^2])) * (Cos[10t]/Sqrt[1 − (Sin[10t])^2])

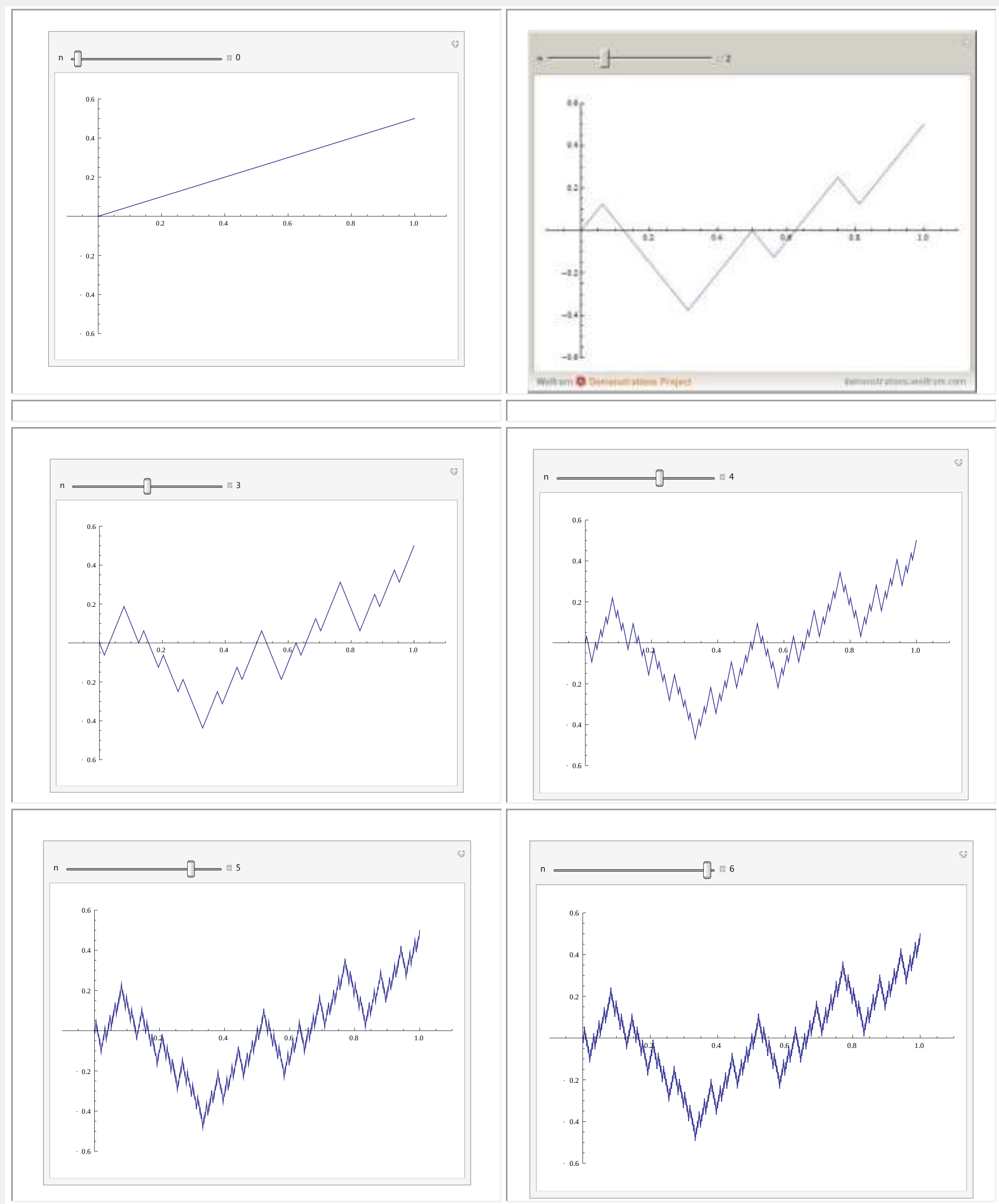
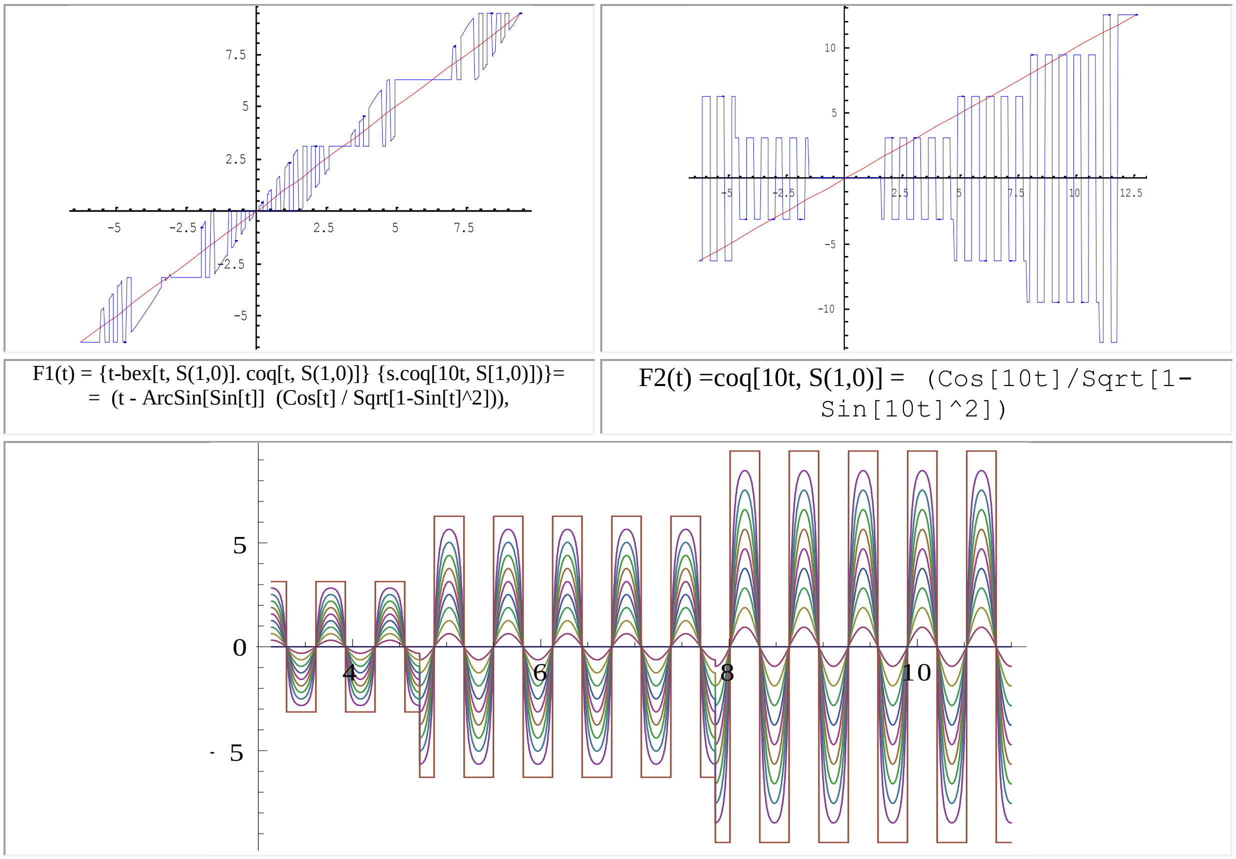


Fig. 7 Funcţii Smarandache în trepte



F1(t) = {t-bex[t, S(1,0)]. coq[t, S(1,0)]} {s.coq[10t, S[1,0)])}=
= (t - ArcSin[Sin[t]] (Cos[t] / Sqrt[1-Sin[t]^2])),

F2(t) =coq[10t, S(1,0)] = (Cos[10t]/Sqrt[1-Sin[10t]^2])

f(t) = {t-bex[t, S(1,0)]. coq[t, S(1,0)]} (s.coq[10t, S[s,0)])) = (t - ArcSin[Sin[t]] (Cos[t] / Sqrt[1-(Sin[t])^2]))
= (0.1 u Cos[10 t]/Sqrt[1-(0.1 u Sin[10 t])^2])

Fig.8 FSM Smarandache în trepte.

5. B I B L I O G R A F I E la Cap. XXIV

1	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conferinţa Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, Timişoara , 1978, pag.101...108.
2	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE şi EXTENSIA LOR	Bul. Şt.şi Tehn. al I.P. ”TV” Timişoara, Seria Mecanică, Tomul 25(39), Fasc. 1-1980, pag. 189...196
3	Şelariu Mircea Eugen	STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ale UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV cu AJUTORUL FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conf. Naţ. Vibr.în C.M. Timişoara,1978, pag. 95...100
4	Şelariu Mircea Eugen	APLICAŢII TEHNICE ale FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE	Com.a IV-a Conf. PUPR, Timişoara, 1981, Vol.1. pag. 142...150

5	Şelariu Mircea Eugen	THE DEFINITION of the ELLIPTIC ECCENTRIC with FIXED ECCENTER	A V-a Conf. Naţ. de Vibr. în Constr. de Maşini,Timişoara, 1985, pag. 175...182
6	Şelariu Mircea	ELLIPTIC ECCENTRICS with MOBILE ECCENTER	IDEM pag. 183...188
7	Şelariu Mircea Eugen	CIRCULAR ECCENTRICS and HYPERBOLICS ECCENTRICS	Com. a V-a Conf. Naţ. V. C. M. Timişoara, 1985, pag. 189...194.
8	Şelariu Mircea Eugen	ECCENTRIC LISSAJOUS FIGURES	IDEM, pag. 195...202
9	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CEX şi SEX- SOLUŢIILE UNOR SISTEME MECANICE NELINIARE	Com. a VII-a Conf. Naţ. V.C.M., Timişoara,1993, pag. 275...284.
10	Şelariu Mircea Eugen	SUPERMATEMATICA	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn.,TEHNO'95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematica Aplicată,. pag.41...64
11	Şelariu Mircea Eugen	FORMA TRIGONOMETRICA a SUMEI şi a DIFERENŢEI NUMERELOR COMPLEXE	Com.VII Conf. Internat. de Ing. Manag. şi Tehn., TEHNO'95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematica Aplicată, pag. 65...72
12	Şelariu Mircea Eugen	MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO'95., Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronică, Dispozitive şi Rob. Ind.,pag. 85...102
13	Şelariu Mircea Eugen	RIGIDITATEA DINAMICĂ EXPRIMATĂ CU FUNCŢII SUPERMATEMATICE	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn., TEHNO'95 Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronică, Dispoz. şi Rob. Ind.,pag. 185...194
14	Şelariu Mircea Eugen	DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAŢIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPETA INTAIA K(k)	Bul. VIII-a Conf. de Vibr. Mec., Timişoara, 1996, Vol III, pag.15 ... 24.
15	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de inginerie managerială şi tehnologică, Timişoara 1998, pag 531..548
16	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII DE TRANZIŢIE INFORMAŢIONALĂ	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de inginerie managerială şi tehnologică, Timişoara 1998, pag 549… 556
17	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ CA SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de inginerie manageriala si tehnologică, Timişoara 1998, pag 557…572
18	Şelariu Mircea Eugen	INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ	Lucr. Simp. Naţional "Zilele Universităţii Gh. Anghel" Ed. II-a, Drobeta-Turnu Severin, 16-17 msai 2003, pag. 171 … 178
19	Şelariu Mircea Eugen	QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
20	Şelariu Mircea	SMARANDACHE STEPPED FUNCTIONS	Revista: "Scienta grande" Nr.

	Eugen		
21	Şelariu Mircea Eugen	TEHNO ART OF ŞELARIU SUPERMATHEMATICS FUNCTIONS	(ISBN-10):1-59973-037-5 (ISBN-13):974-1-59973-037-0 (EAN): 9781599730370
22	Şelariu Mircea Eugen	PROIECTAREA DISPOZITIVELOR DE PRELUCRARE, Cap. 17 din PROIECTAREA DISPOZITIVELOR	Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982, pag. 474 … 543
23	Şelariu Mircea Eugen	SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE Ediţia a 2-a Vol I şi Vol. II	Editura Politehnica din Timişoara, 2012 Distinsă cu "DIPLOMA AGIR" în domeniul "Tehnologia Informaţieie- IT"
24	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA.** Ediţia a 3-a, Vol I şi Vol. II	Editura Matrix Rom , Bucureşti, 2015
25	Schoenberg J. Isaac	PRIVELIŞTI MATEMATICE	Editura Tehnică , Bucureşti, 1989

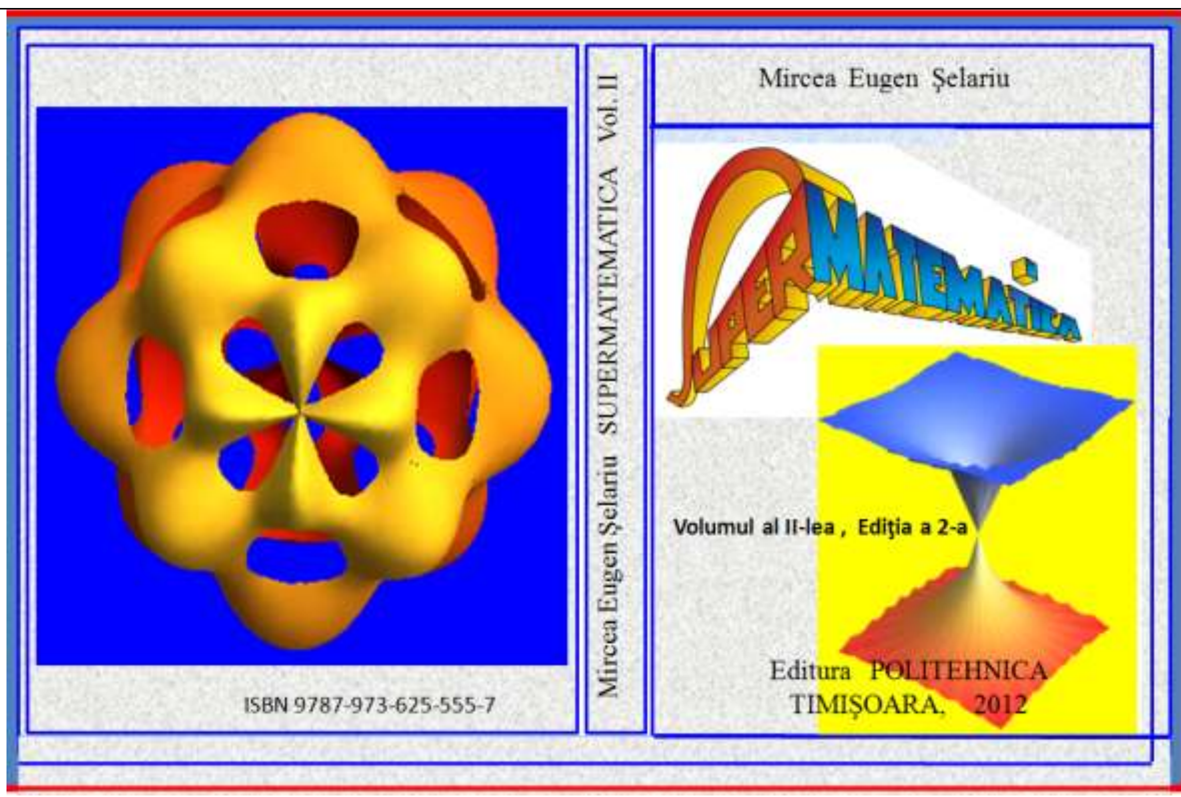
Motto:” După ce a descoperit celebra sa teoremă, **Pythagoras** a sacrificat o sută de boi.
De atunci, de fiecare dată, când se descoperă vreun **adevăr nou**,
vitele cornute mari au puternice palpitaţii.”
Ludwig Björne

CAPITOLUL XXVI

FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE CENTRICE TRANSLATATE

1. LAUDATIO în loc de ÎNTRODUCERE

Cu ocazia decernării **DIPLOMEI AGIR** din domeniul **“TEHNOLOGIEI INFORMAŢIEI”,** pe anul 2012, lucrării **“SUPERMATEMATICA FUNDAMENTE”.** Vol.I şi Vol. II, Editura “POLITEHNICA“ din Timişoara, 2012, Asociaţia Generlă a Inginerilor din Romania (**AGIR**) a prezentat şi următorul laudatio, cu mici corectări şi completări ale autorului şi cu prezentarea copertei.



COPERTA

Supermatematica (SM) este considerată, fără exagerare, de susţinătorii şi admiratorii ei, şi nu sunt puţini, unii fiind matematicieni şi profesori universitari americani, ca o nouă **“matematică a meleniului III”**, sau ca **“matematica viitorului“** aşa cum se poate uşor constata.

Cele **914** pagini ale lucrării - 486 pagini în vol.I şi 428 pagini în vol.II – exprimă vastitatea lucrării, dar atributele ei esenţiale cosistă în simplitatea şi surprinzătoarea ei apariţie, ca urmare a deplasarii din centrul **O(0,0)** a unui singur punct, denumit, din aceasta cauză **excentru E(e,ε),** în originalitatea şi în unicitatea ei în literatura mondială.

Supermatematica (**SM**) este o reuniune a matematicii cunoscute, ordinare, care în lucrare a fost denumită **matematică centrică (MC)** – obţinută din **SM** pentru unicul caz particular **e = 0** pentru a se deosebi de noua matematică, denumită **matematică excentrică** (**ME**).

Adică **SM = MC** ∪ **ME.**

Pentru fiecare punct din plan, în care poate fi plasat un excentru **E**(**e, ε**), se poate spune că există o nouă **ME**. Astfel, la o singură **MC** îi corespund o infinitate de **ME.** Pe de altă parte, **MC = SM(e = 0).**

În consecinţă, **SM** multiplică la infinit **toate entităţile** şi funcţiile circulare / trigonometrice cunoscute şi introduce o pleiadă de funcţii circulare noi (**aex, bex, dex, rex**, ş.a), mult mai importante şi mai elementare decât cele vechi şi, prin acestea, în final, multiplică la infinit toate entităţile matematice cunoscute (cos→**cex**, sin→**sex**, tan/tg→**tex**, ş.m.a.) şi introduce multe alte entităţi noi.

S-a constatat că **MC** este proprie sistemelor **liniare, perfecte, ideale**, iar **ME** este proprie sitemelor **neliniare, reale, imperfecte**. Ca urmare, odată cu apariţia **SM** a dispărut graniţa dintre liniar şi neliniar, dintre ideal şi real, dintre perfecţiune şi imperfecţiune, ceea ce constituie visul de veacuri al inginerilor şi o unică performanţă matematică de seamă.

SM evidenţiază excentricitatea liniară **e** şi pe cea unghiulară **ε**, coordonatele polare ale excentrului **E**(**e,ε**), ca noi dimensiuni ale spaţiului: dimensiuni de **formare** şi de **deformare** ale acestuia; numite şi ***dimensiunile ascunse ale spaţiului.***

SM putea să apară cu peste 300 de ani în urmă, dacă **Euler**, la definirea funcţiilor trigonometrice ca funcţii circulare directe, n-ar fi ales **trei puncte confundate, suprapunere care a sărăcit matematica**:

- **Originea O**(0, 0) a unui reper / sistem de coordonate
- **Polul P ≡ E** sau **S** al unei semidrepte,
- **Centrul C** al cercului trigonometric (unitate) .

SM a apărut atunci când polul **E** şi /sau **S** au fost expulzate din centrul cecului şi din originea reperului şi au fost denumite **excentre.**

Din combinarea celor trei puncte(**O, C, E** sau **S**) au apărut următoarele familii / domenii de funcţii **SM**:

1) **FCC - circulare centrice-** (**FSM-CC**)→ dacă **C** ≡ **O** ≡ **E** sau **S;**
2) **FSM circulare excentrice** (**FSM-CE**) → dacă **C** ≡ **O** ≠**E** sau **S;**
3) **FSM circulare elevate** (**FSM-CEL**) → dacă **C** ≠ **O** ≡ **E** sau **S** şi
4) **FSM circulare exotice** (**FSM-CEX**) → dacă **C** ≠ **O** ≠ **E** sau **S.**

Pentru a aduce de acord trigonometria cu geometria, intersecţia cercului unitate nu s-a mai făcut cu o semidreaptă (**Euler → MC**) ci cu o dreaptă, astfel că există două determinări: una principală, de indice **1** şi una secundară de indice **2**, la propunerea matematicianului Prof. Univ. Dr. **Horst Klepp**

De asemenea, existând două unghiuri: la centrul **O(0,0) α** şi la excentru **S(s, ε) θ,** vor exista două tipuri de funcţii **SM :** de variabilă excentrică **θ** , notate **cex, sex, rex, dex,** şi de **variabilă centrică α**, notate cu majuscule **Cex, Sex, Rex, Dex**, ş.a.m.d. dintre care **dex** = $\frac{d\alpha}{d\theta}$, iar Dex = $\frac{d\theta}{d\alpha}$, astfel că **dexθ** = $\frac{1}{Dex\alpha}$.

Dintre **entităţile noi apărute** sunt şi o pleiadă de noi curbe închise, care apar la **transformarea continuă** a cercului în pătrat (denumite **quadrilobe** / **cvadrilobe**), a cercului în triunghi (**trilobe**) ş.a.

În **3D**, aceste transformari continue sunt a **sferei în cub**, a **sferei în prismă**, a **conului în piramidă** ş.m.a. Aceste transformări continue au făcut posibilă apariţia unor noi corpuri **3D hibride** ca: ***sferocub; conopiramida, piramidocon*** ş.m.a, precum şi a unor noi transformări matematice, cum este **hibridarea matematică** care, dintr-un cerc şi un pătrat rezultă o quadrilobă (cvadrilobă), din cerc şi triunghi o trilobă ş.a.m.d.

Prin înlocuirea cercului cu o quadrilobă au fost definite funcţiile quadrilobe, iar prin înlocuirea cu o trilobă au fost definite în lucrare şi **funcţiile trilobe** sau trilobice.

În domeniul **hiperbolic** au apărut funcţiile hiperbolice excentrice, elevate şi exotice.

În **eliptic**, integralele şi funcţiile eliptice **Jacobi** centrice sau multiplicat la infinit prin funcţiile eliptice excentrice şi prin alte funcţii pe conice.

În lucrare sunt evidenţiate şi noi metode matematice, dintre care se amintesc

1) Determinarea unui <u>relaţiei</u> de calcul, oricât de exacte, a integralei eliptice complete de prima speţă **K(k)** şi transformarea, totodată, a metodei **<u>numerice</u>**, a mediei aritmetico-geometrice **Landen,** într-o metodă **<u>analitică,</u>** care a permis determinarea, cu ***<u>minimum 15 zecimale exacte</u>*** (!), a **<u>relaţiei</u>** de calcul **K(k)** după numai 5 paşi.

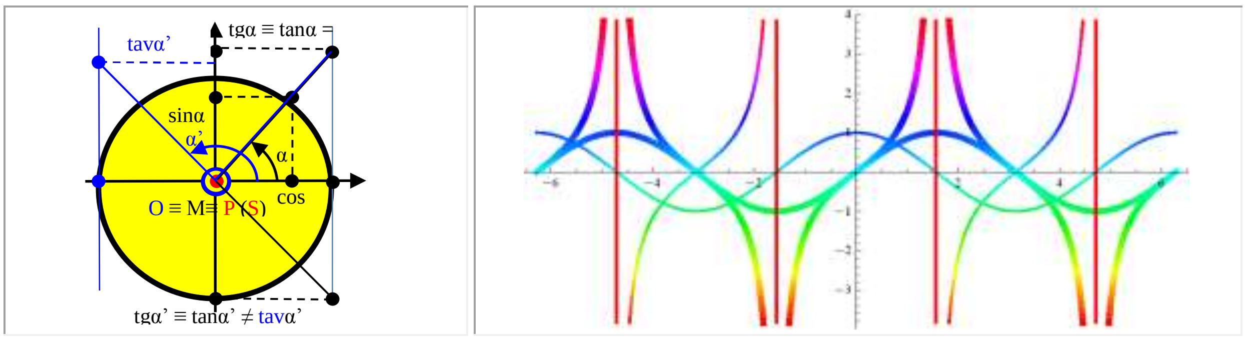


Fig. 1,a Schiţă explicativă ◄ şi graficele funcţiilor circulare centrice (**FSM-CC**) **cos**, **sin**, **tan** şi **tav**

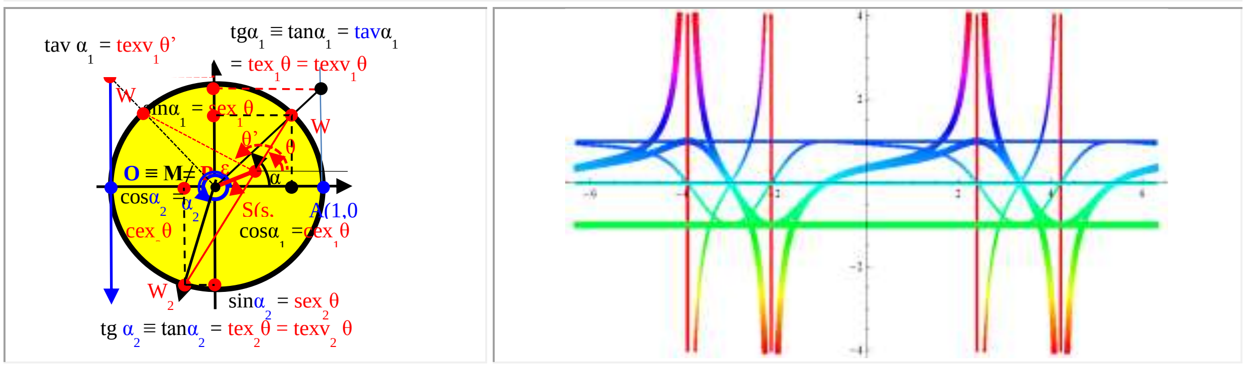


Fig. 1,b Schiţă explicativă ◄ şi graficele **funcţiilor circulare excentrice** (**FSM-CE**) cex, sex, tex şi **texv** ► de **S(s = 0,8; ε = π/7)** interior discului unitate (R = 1)

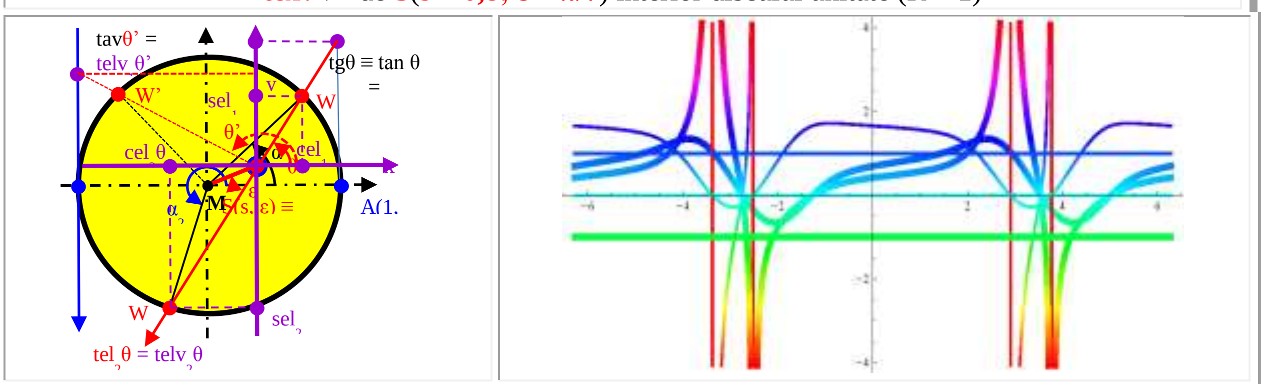


Fig. 1,c Schiţă explicativă ◄ şi graficele **funcţiilor circulare elevate** (**FSM-CEL**) **cel, sel, tel şi telv** ► de **S(s = 0,8; ε = π/7)** interior discului unitate (R = 1)

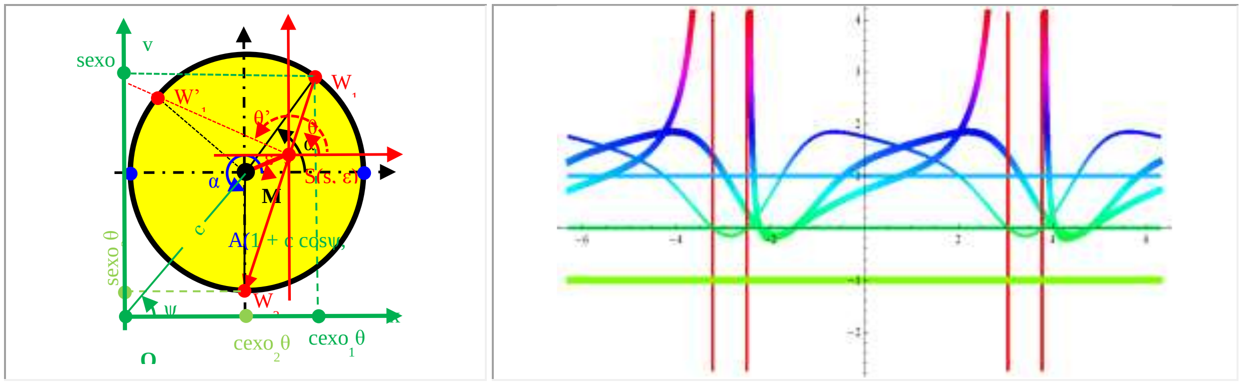


Fig. 1,d Schiţă explicativă ◄ şi graficele **funcţiilor circulare (excentrice) exotice** (**FSM-CEX**) **cexo, sexo, texo şi texov** ► de **S**(**s = 0,6; ε = π/7**), interior discului unitate (R = 1), OM = 1,2 şi ψ = π/4

2) **Metoda divizării diferenţialei**- o nouă metodă de integrare, care evită integrarea în spaţiul complex.

3) **SM-CAD-CAM** pentru descrierea obiectelor tehnice ş.m.a.

Nu putem încheia fără să subliniem bogăţia de desene explicative şi de grafice, care întregesc înţelegerea lucrării şi calitatea acestora, asigurată de Editura "POLITEHNICA" din Timişoara, chiar dacă sunt tipărite doar în alb-negru, pentru reducerea cheltuielilor şi nu color, cum s-a intenţionat iniţial şi cum a fost elaborat manuscrisul.

Principalele **FSM** directe, de bază şi derivate, centrice şi excentrice, primele arhicunoscute şi celelalte studiate mai în detaliu până în prezent, sunt trecute în revistă în **tabelul 1** şi prezentate / exprimate grafic în **figura 1**. În **tabelul 1** au fost marcate şi noile funcţii tangenta şi cotangenta, secanta şi cosecanta **Voinoiu,** pentru ca subiectul să fie complet / intergit, iar în **figura 2** este reprezentată grafic şi funcţia tangentei **Voinoiu**.

2. TIPURI / FAMILII DE FUNCŢII SUPERMATEMATICE

Cele 4 tipurile sau familiile **FSM** prezentate anterior (**centrice, excentrice, elevate** şi **exotice**) şi în **figura 1,a … 1,d** sunt incomplete, deoarece, cele trei puncte pot fi combinate astfel:

1) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 3 → $C_3^3 = 1$→ **FSM**-CC ;
2) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 2 → $C_3^2 = 3$ → **FSM** -**CE**, **FSM** -**CEl**; (**FSM**-**CEx**);
3) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 1 → $C_3^1 = 1$ → **FSM** -CCT; (**FSM**-**CEx**);

Familia lipsă este cea a **FSM** circulare ***centrice translatate sau elevate*** (**FSM**-**CCT**).

Dintre aceste familii, **funcţiile circulare centrice** (**FCC**) sunt pe larg dezbătute şi arhi-cunoscute, iar cele excentrice sunt doar puţin cunoscute, în raport cu **FCC**, dar mult mai cunoscute decât celelalte funcţii supermatematuice **elevate** şi **exotice**.

Pentru compararea noilor **FSM-CE** cu cele circulare centrice (**FCC**) s-a alcătuit **tabelul 1,** iar pentru definirea **FSM-CE,** de variabilă excentrică **θ** şi centrice **α_1**, s-a alcătuit schiţa din **figura 2**.

Din tabel au fost omise combinaţiile care au fost prezentate în primele capitole ale acsetei lucrări **FSM**:

- **centricoexcentrice, centricoelevate, centricoexotice;**
- **excentricocentric, excentricoelevate, excentricoexotice;**
- **elevatocentrice, elevatoexcentrice,** elevatoexotice ş.m.a. combinaţii

Tabel 1 Funcţii circulare **centrice** şi **excentrice,** directe, de **bază** şi **derivate**				
FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (**FSM-CE**) **DIRECTE DE BAZĂ**				
FUNCŢII MATEMNATICE CENTRICE (FMC)		**FUNCŢII SUPERMATEMNATICE EXCENTRICE (FME)**		
Cosinus	$\cos\alpha$	Cosinus excentric	$cex_{1,2}\theta$	$Cex\alpha_{1,2}$
Sinus	$\sin\alpha$	Sinus excentric	$\mathbf{sex}_{1,2}\theta$	$Sex\alpha_{1,2}$
Tangenta	$\tan\alpha$	Tangenta excentrică	$\mathbf{tex}_{1,2}\theta$	$Tex\alpha_{1,2}$
Tangenta Voinoiu	$tav\alpha$	Tangenta Voinoiu excentrică	$\mathbf{texv}_{1,2}\theta$	$Texv\alpha_{1,2}$
Cotangenta	$cot\alpha$	Cotangenta excentrică	$\mathbf{ctex}_{1,2}\theta$	$Ctex\alpha_{1,2}$
Cotangenta Voinoiu	$cov\alpha$	Cotangenta Voinoiu excentrică	$\mathbf{ctgv}_{1,2}\ \theta$	$Ctex\alpha_{1,2}$
Secanta	$sec\alpha$	Secanta excentrică	$scex_{1,2}\alpha$	$Scex\alpha_{1,2}$
Secanta Voinoiu	$sev\alpha$	Secanta excentrică Voinoiu	$scexv_{1,2}\alpha$	$Stexv\alpha_{1,2}$
ŞI FCC precum şi FSM-CE DIRECTE DERIVATE				
Versinus	$versin\alpha$	Versinus excentrică	$versex\alpha$	
Coversinus	$coversin\alpha$	Coversinus excentrică	$coversex\alpha$	
Exsecantă	$exsec\alpha$	Exsecantă excentrică	$exscex\alpha$	
Excosecanta	$excsc\alpha$	Excosecanta excentrică	$excsex\alpha$	

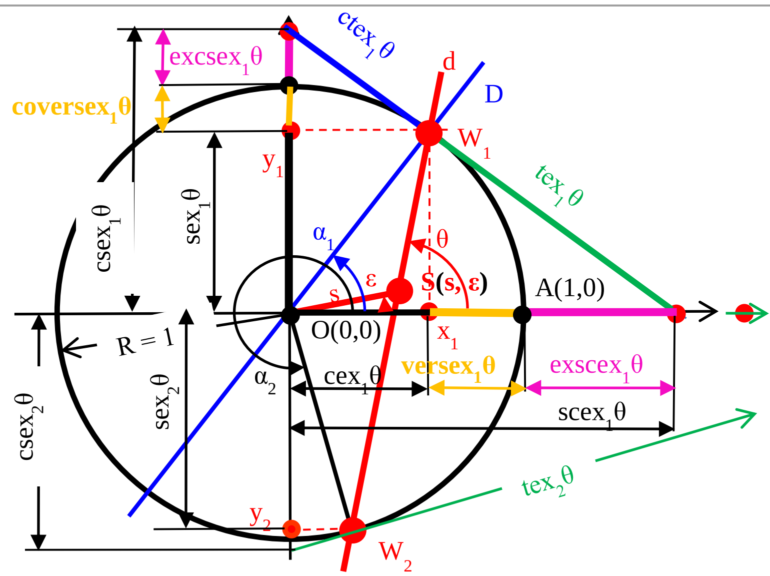



Fig.2 Schemă explicativă pentru **FSM-CE** directe, de bază şi **derivate**				

Pentru ca subiectul **SM** să fie epuizat şi funcţiile **FSM** să fie în formaţie completă, s-au considerat şi **FSM circulare centrice translatate** (**FSM – CCT**) sau elevate a căror definire este prezentată schematic în **figura 3**.

Au fost denumite şi **FSM NOI (FSMN),** deoarece sunt descoperite doar de câteva zile, în timp ce, celelalte 4 familii sunt descoperite de peste 30 de ani !

Aşa cum le spune şi numele, ele sunt **FCC** care suferă o translaţie de t_x = **m**.cosψ pe direcţia x, cum este de exemplu cosinusul şi de t_y = **m**.sinψ pe direcţia y, ca de exemplu sinusul **Fig.4,a** şi au două determinări atât cele centrice cât şi cele excentrice, de indice **1** şi, respectiv, de indice **2** (**Fig. 3**).

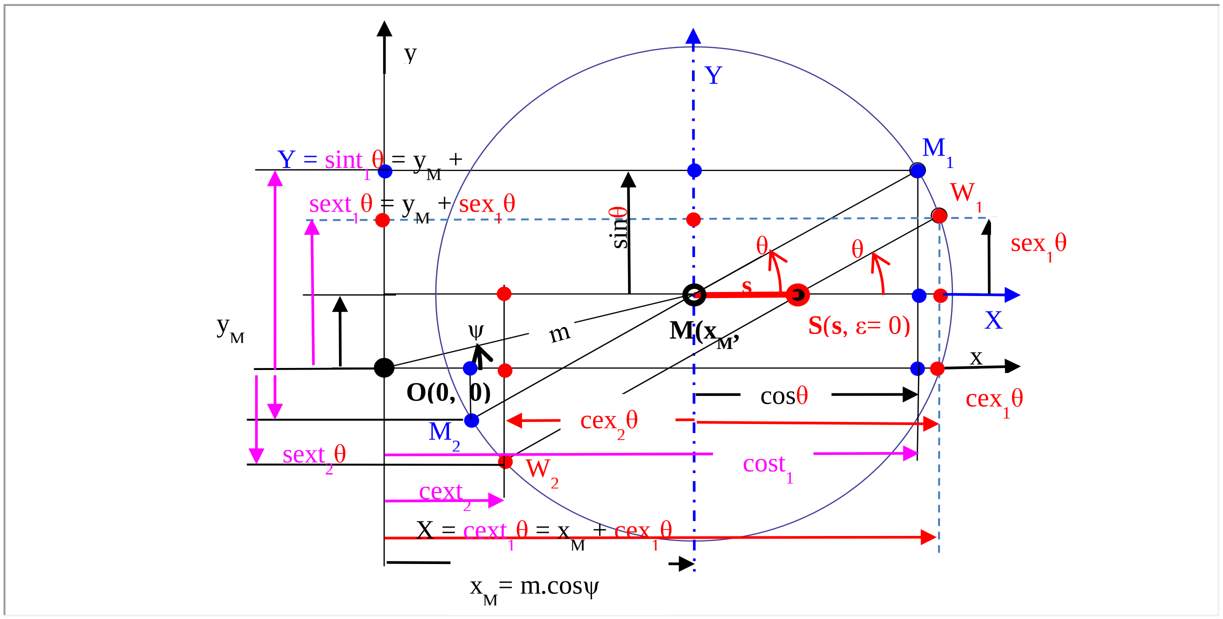
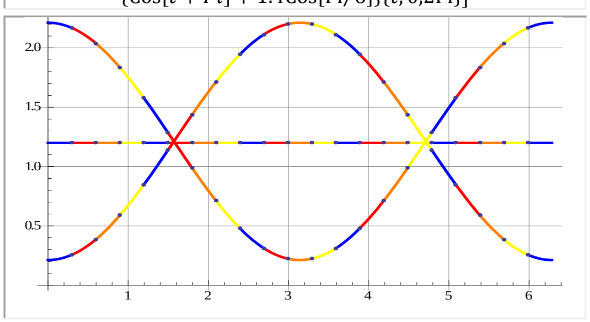


Fig.3 Funcţii supermatematice circulare centrice translatate. (**FSM-CCT**)

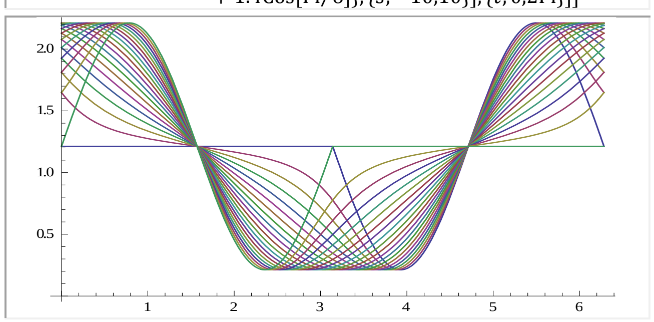
www.SuperMathematica.com | www.SuperMatematica.Ro

Şi **funcţiile supermatematice circulare exotice** (**FSM-CEX**) pot fi considerate ca **funcţii supermatematice excentrice** translatate (**FSM-CET**) pentru că şi ele suferă aceleaşi valori de translaţie t_x = **c**.cosψ şi t_y = **c**.sinψ, faţă de **FSM-CE**. De aceea, ele vor fi prezentate în paralel pentru **c = m = 1,4** şi $\psi = \frac{\pi}{6}$: cele centrice în partea stângă, uşor de recunoscut pentru că sunt unice şi cele excentrice, în familie de curbe, pentru **s** ∈ [-1, +1] cu pasul 0,1 şi **ε = 0**, în partea dreaptă a **figurii 4.**

Plot[{Cos[t] + 1.4Cos[Pi/6]},
{Cos[t + Pi] + 1.4Cos[Pi/6]}{t, 0,2Pi}]



Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]
+ 1.4Cos[Pi/6]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



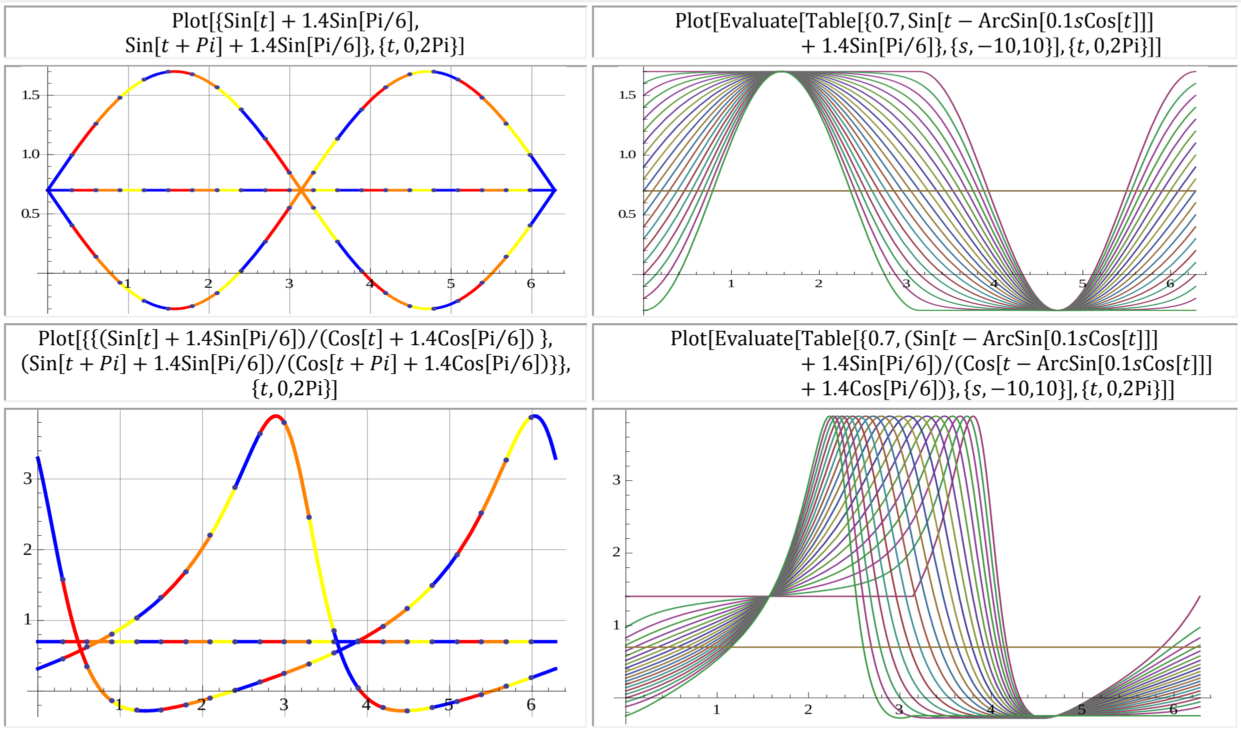
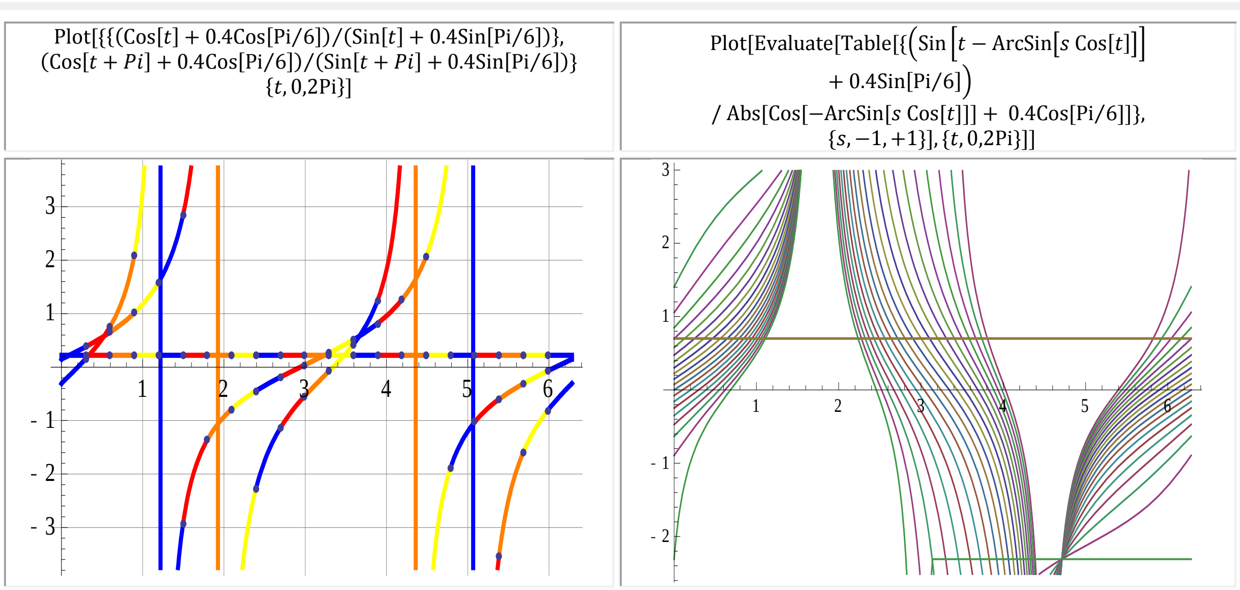


Fig. 4,a FSM-CCT : cot, sit ,tgt ≡ tant ◄ şi FSM-CET ►cext, sext, text ► (c = m = 1,4; ψ = π/6**)**

www.SuperMathematica.com

www.SuperMatematica.Ro

Pentru **c = m = 1,4** se observă din **figura 4,a** că tangentele sunt strict pozitive în tot domeniul de 2π şi, ca uramare, tangenta **Euler** şi tangenta **Voinoiu** sunt identice. Pentru o valoare mai redusă, de **c = m = 0,4**, tangenta **Euler** şi tangentele **Voinoiu** sunt diferite şi sunt prezentate în **figura 4,b**.



BUPT

Plot[{(Sin[t] + 0.4Sin[Pi/6])/Abs[Cos[t] + 0.4Cos[Pi/6]], (Sin[t + Pi] + 0.4Sin[Pi/6])/Abs[Cos[t + Pi] + 0.4Cos[Pi/6]]}, {t,0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{(Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]] + 0.4Cos[Pi/6])/ Abs[Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]] + 0.4Sin[Pi/6]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

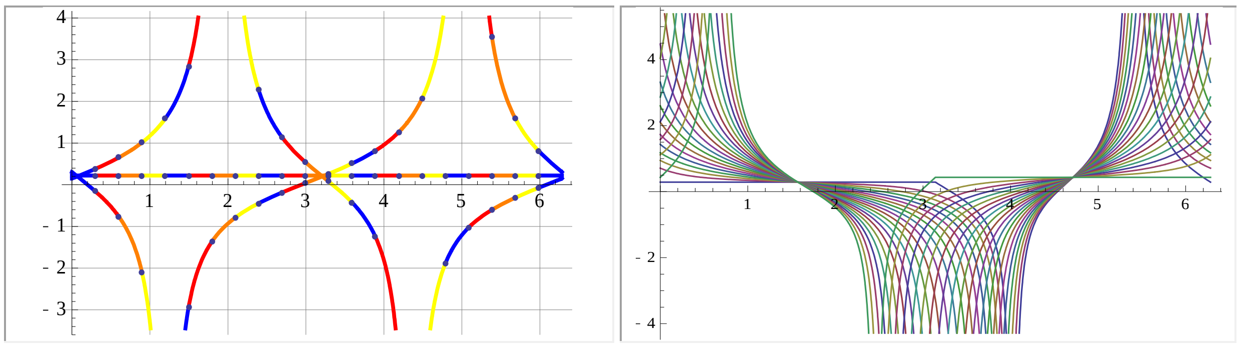


Fig. 4,b FSM-CCT : tantv, cottv ◄ şi FSM-CET ► textv ctextv (c = m = 0,4; ψ = π/6)

În **figurile 4,a** şi **4,b** au fost reprezentate suprapuse ambele determinări ale **FSM-CCT**, iar în figurile următoare, în care **FSM-CCT** sunt multiple, reprezentate în partea stângă doar graficele primei determinări, principale, iar în partea dreaptă sunt prezentate, datorita dantelăriei lor, suprapuse, ambele determinari.

Prin considerarea lui **c = m ∈ [-1,+1]** drept parametru, se obţin şi pentru **FSM-CCT** familii de funcţii paralele între ele (**Fig,4,c**), dacă **c** şi **m** sunt constante, iar **FSM-CET** îşi schimbă complet alura.

Oricare din aceşti parametri constanţi poate fi considerat variabil **ca direcţie** dacă unghiul ψ nu este constant, ci este o funcţie de **α** pentru **FSM-CCT** şi, respectiv de **θ** pentru **FSM-CET**, aşa cum este cazul din **figura 4,d**. Astfel, în **figura 4,e**, s-a ales $\psi = \frac{\pi}{6} \rightarrow$ **cost**, iar în **figura 4,f** s-a ales $\psi = \frac{\pi}{6} \rightarrow$ **sint.**

O serie de alte funcţii **excentrice** translatate, printre care şi radial excentric de variabilă excentrică θ şi / sau centrică

(1) rex**θ** $= -\,s\cos t + \sqrt{1 - s^2 sin^2\theta}$ şi de variavila ***centrică α = α₁***

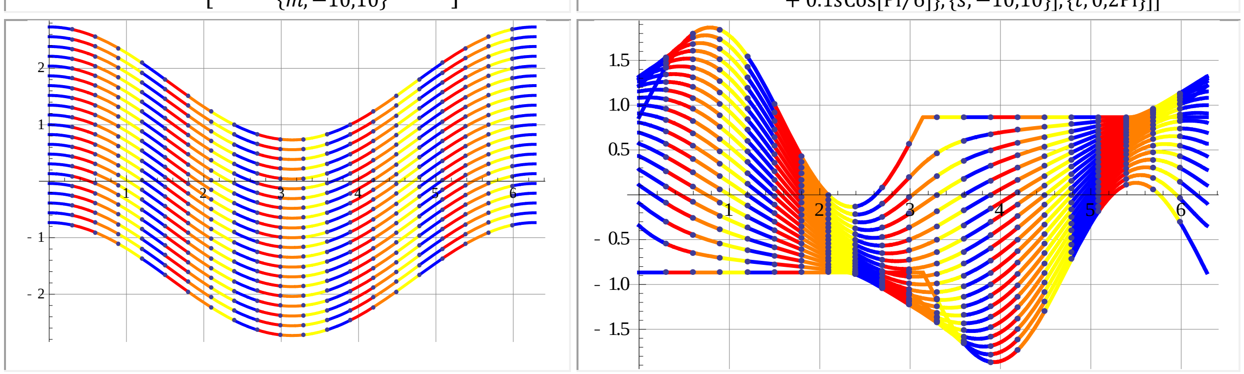
(2) Rexα $= \sqrt{1 + s^2 - 2scos\alpha}$, precum şi funcţia derivată ***excentrică de θ***

(3) dex**θ** $= 1 - \frac{s.cos\theta}{\sqrt{1 - s^2 sin^2\theta}}$

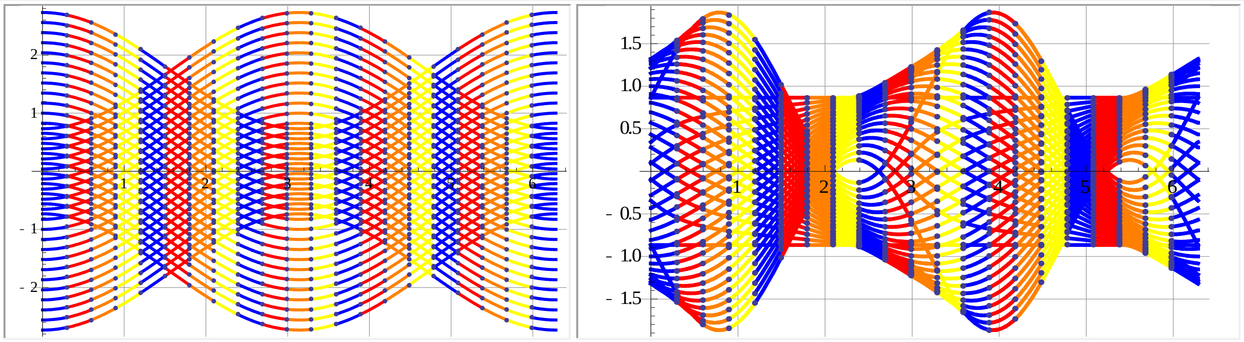
sunt prezentate în **figura 6** cu ecuaţiile lor de definire, din considerente estetice, în două moduri de colorare individuală şi în grup, pe zone.

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t] + 0.2mCos[Pi/6]}, {m, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]] + 0.1sCos[Pi/6]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



BUPT



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] + 0.2sSin[Pi/6]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]] + 0.1sSin[Pi/6]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

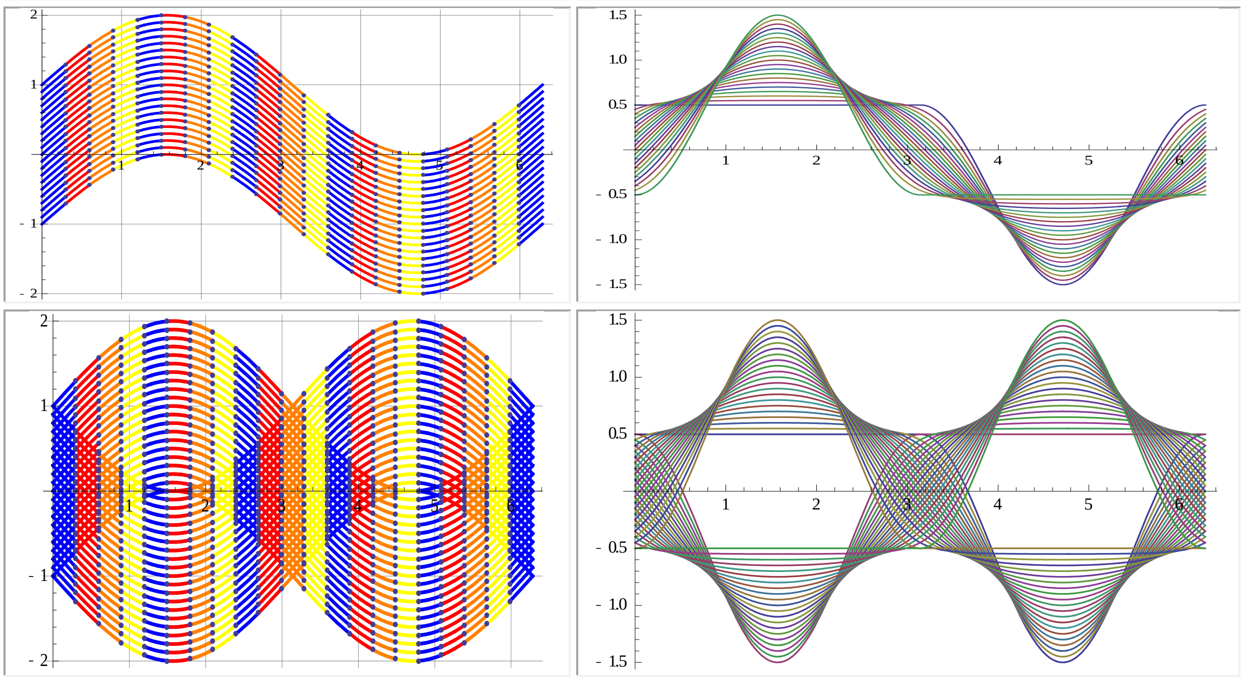
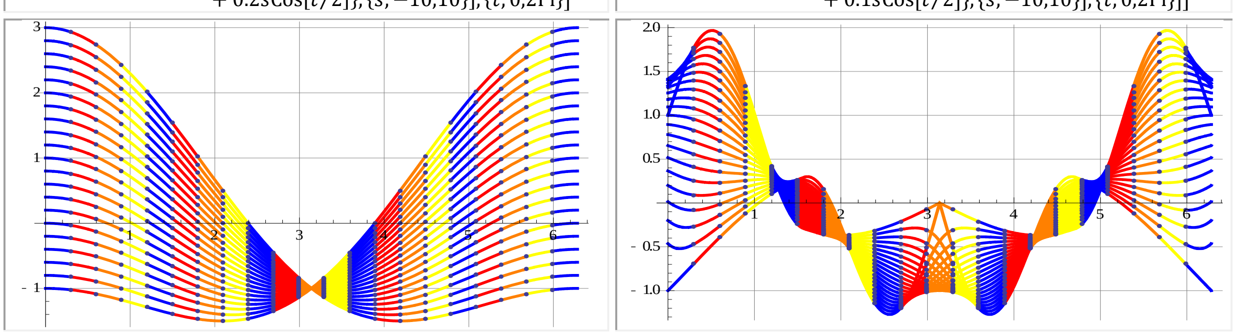
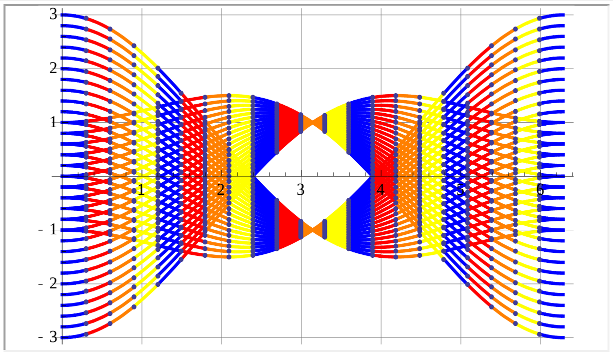
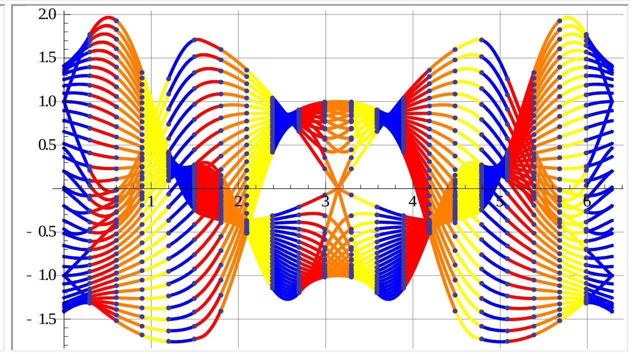


Fig. 4,c **FSM** translatate de doi parametri constanţi S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi
c = m ∈ [-1+1] cu ψ= $\pi/6$

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t] + 0.2sCos[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[2t]]] + 0.1sCos[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] + 0.2sSin[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]] + 0.1sSin[3t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

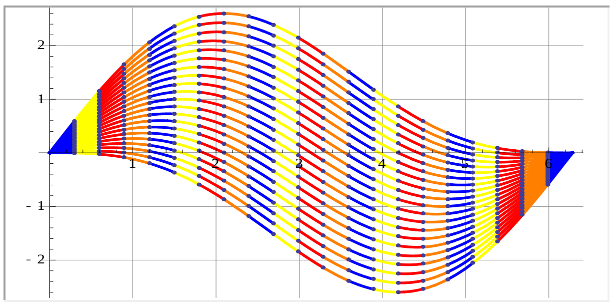
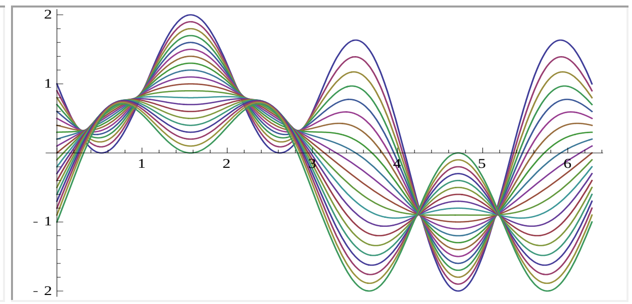
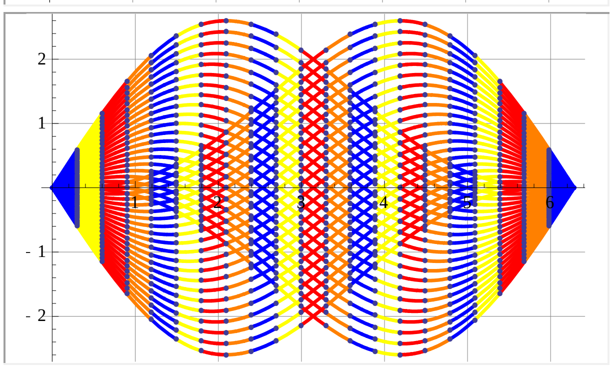
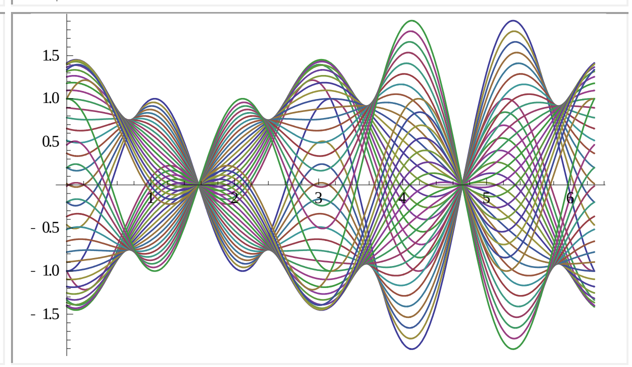
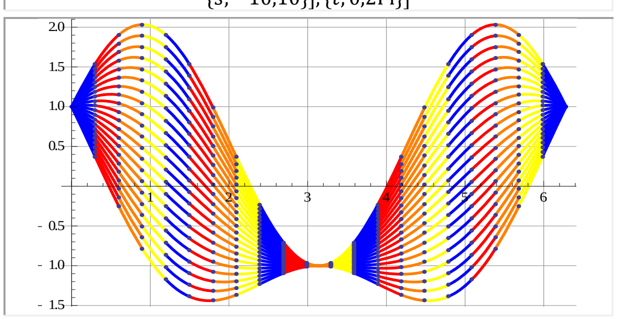
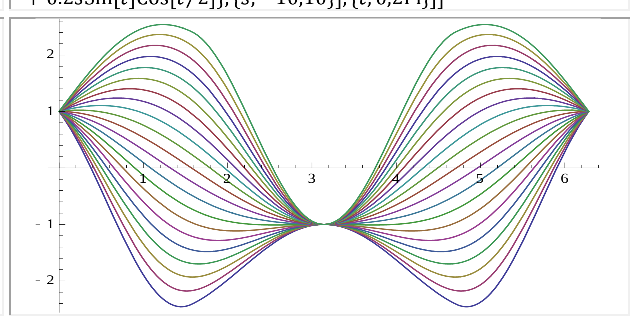





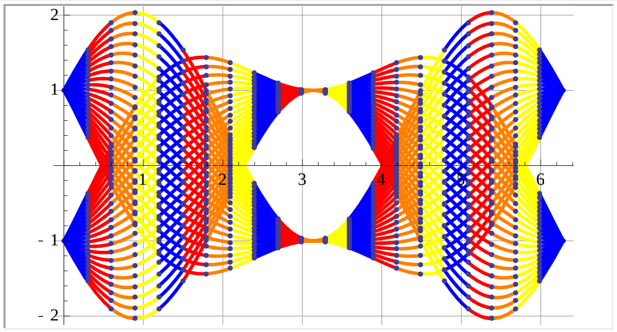
Fig. 4,d FSM translatate de doi parametri S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= $\pi/6$**

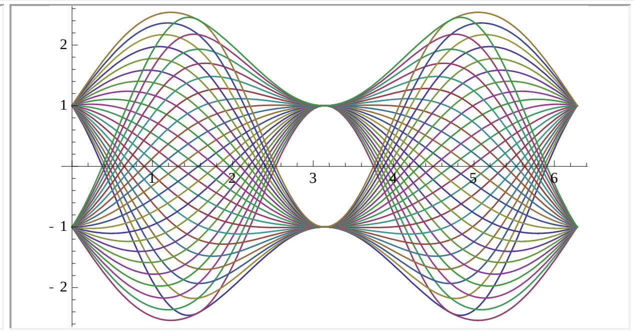
www.SuperMathematica.com | www.SuperMatematica.Ro

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t + 0.2sSin[t]Cos[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sSin[t]Cos[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]

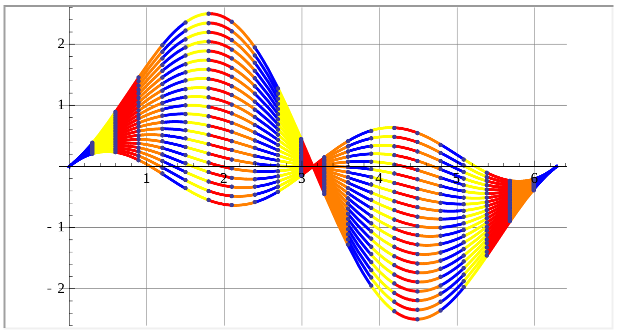



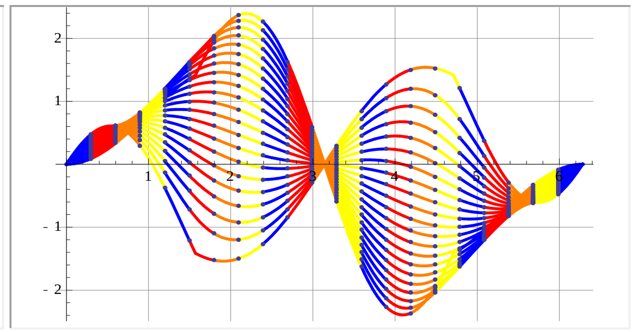


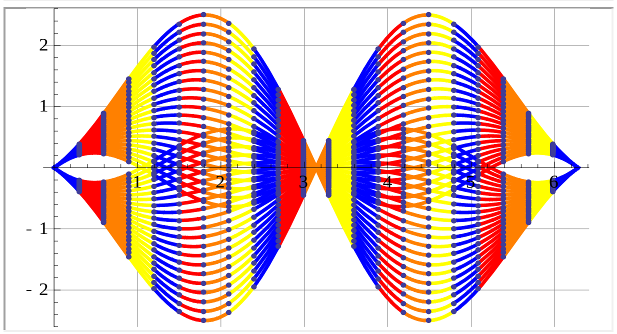


Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] + 0.2sSin[t]Sin[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sSin[t]Sin[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]







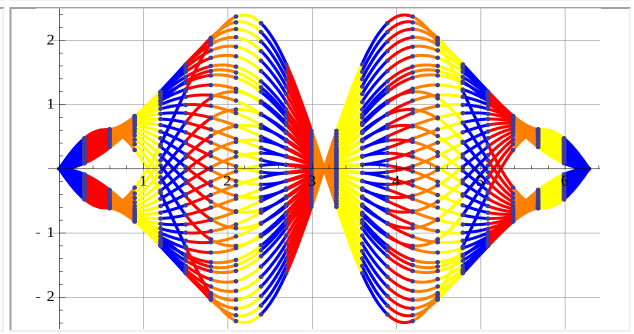


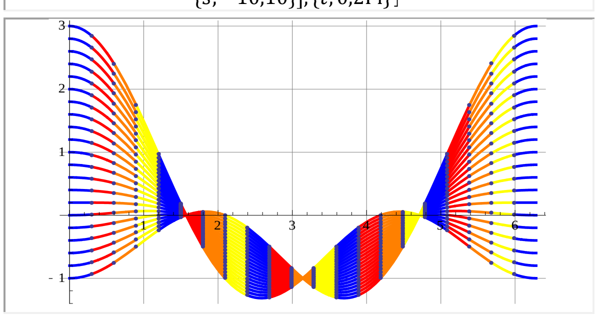
Fig. 4,e FSM translatate de doi parametri dintre care s = constant şi c = m = variabili: c.sin[t/2] şi c.sin[t/2] S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= $\pi/6$**

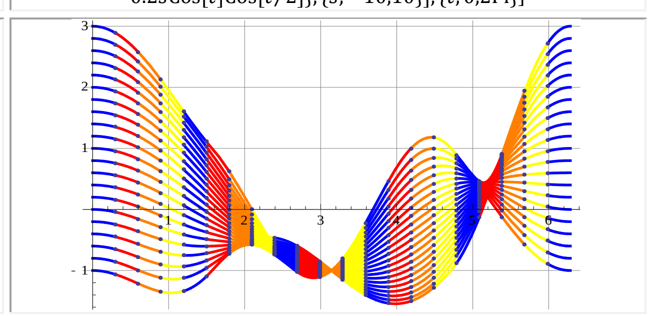
www.SuperMathematica.com

www.SuperMatematica.Ro

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t] + 0.2sCos[t]Cos[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sCos[t]Cos[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]





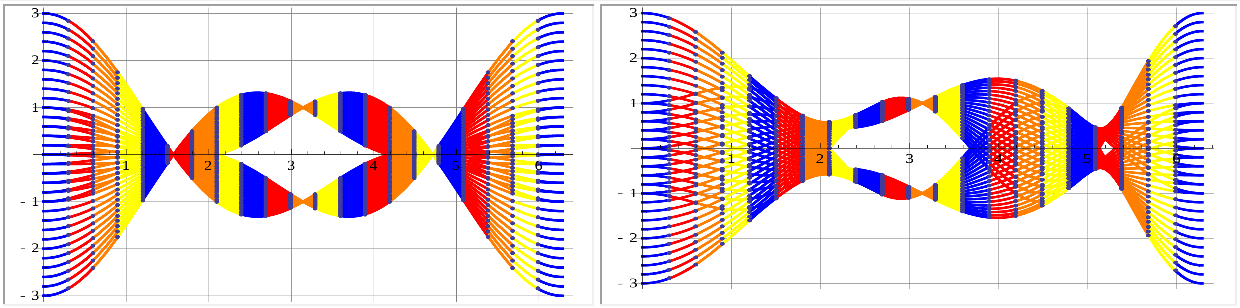


Fig. 4,e FSM translatate de doi parametri S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= π/6**

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] + 0.2sCos[t]Sin[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sSin[t]Sin[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

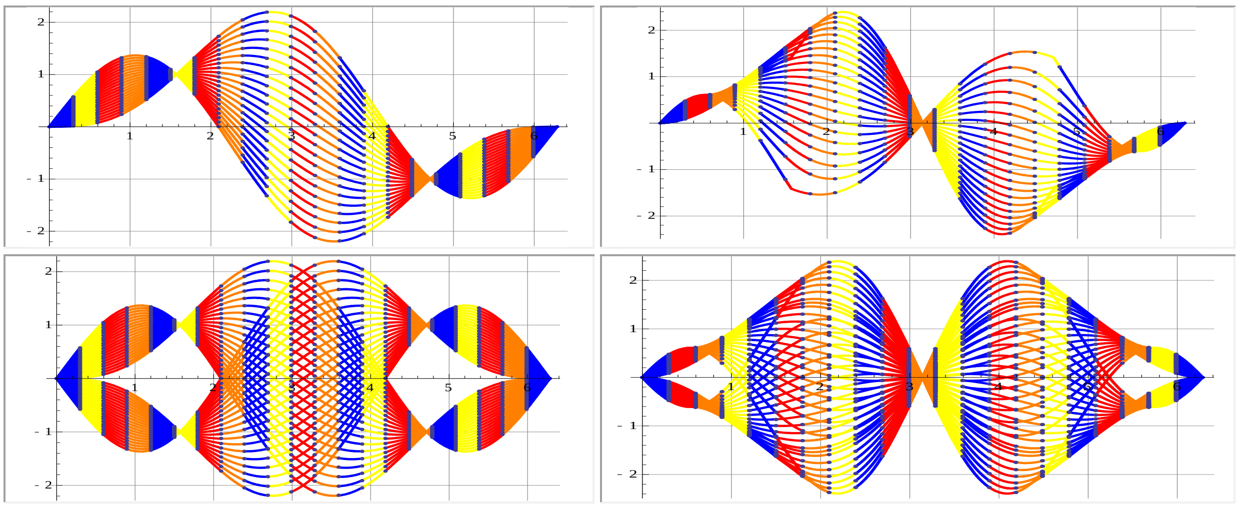


Fig. 4, f FSM translatate de doi parametri S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= π/6**

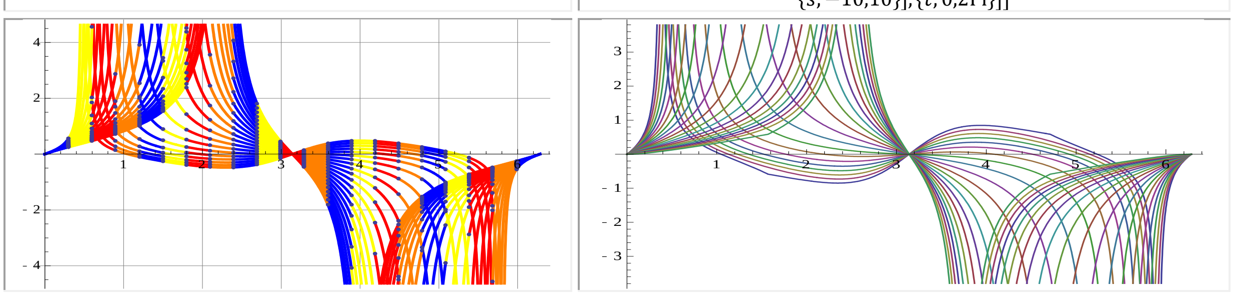
www.SuperMathematica.com

www.SuperMatematica.Ro

Tangenta **Voinoiu** centrică translatată ◄ şi tangenta **Voinoiu** excentrică translatată►

Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t] + 0.2sSin[t]Sin[t/2])/ Abs[Cos[t] + 0.2sSin[t]Cos[t/2]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sSin[t]Sin[t/2])/ Abs[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sSin[t]Cos[t/2]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]



BUPT

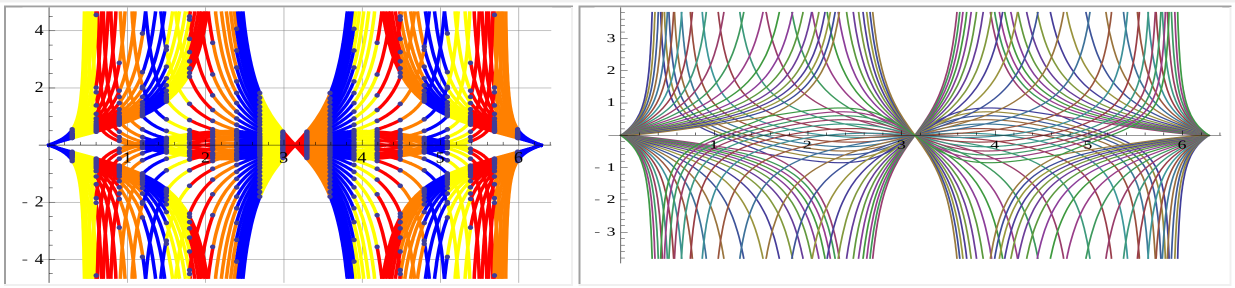
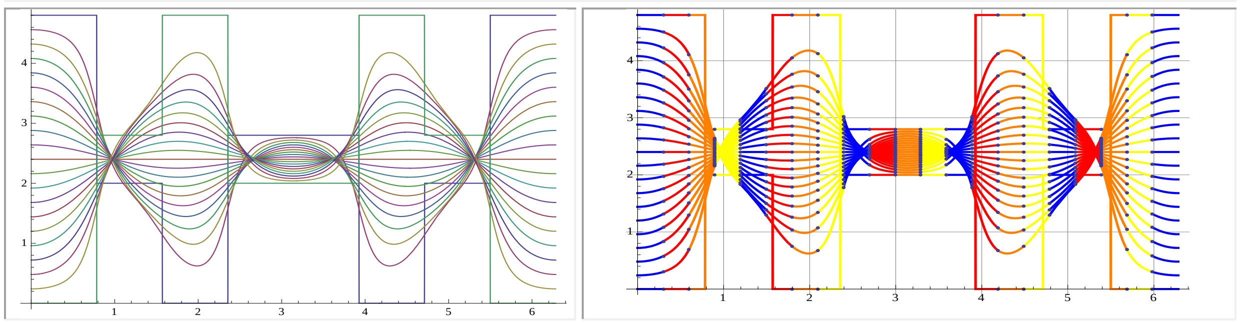
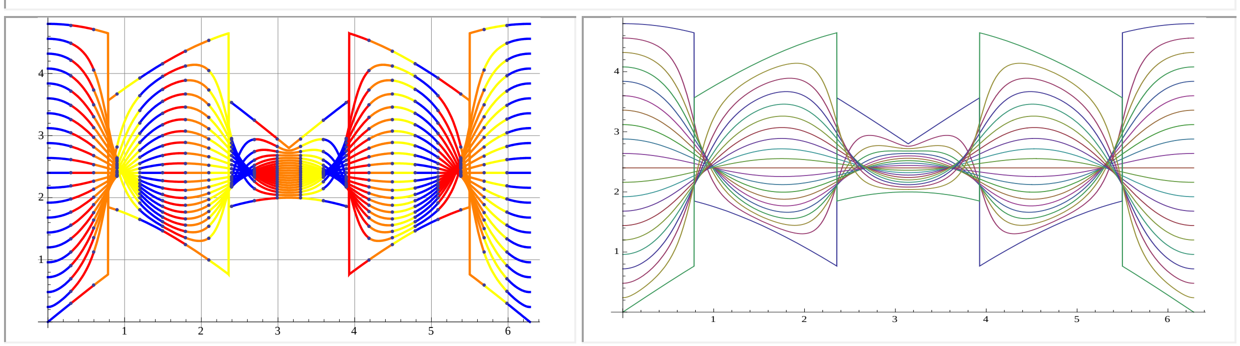


Fig. 5 Tangenta **Voinoiu** centrică translatată ◄ şi tangenta **Voinoiu** excentrică translatată►

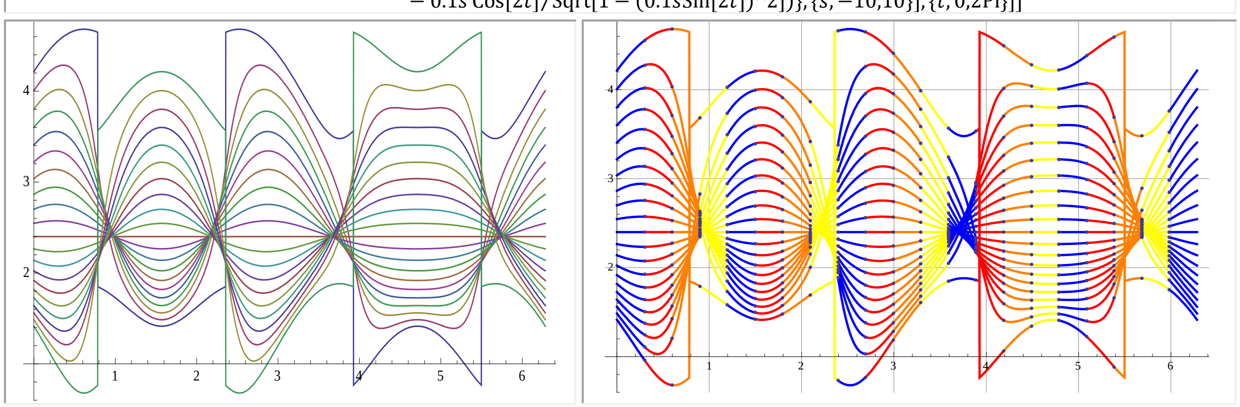
```
Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] + 1.4(1
               − 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])^2])},{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```



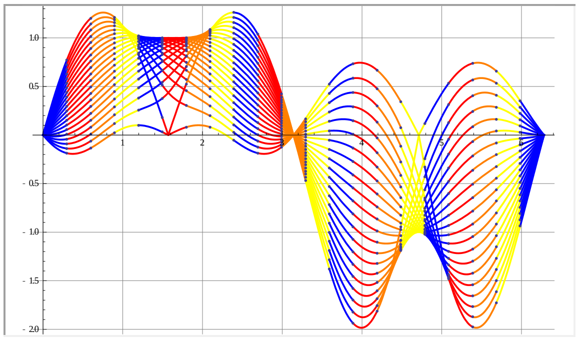
```
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]] + 1.4(1 − 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])^2])},{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```

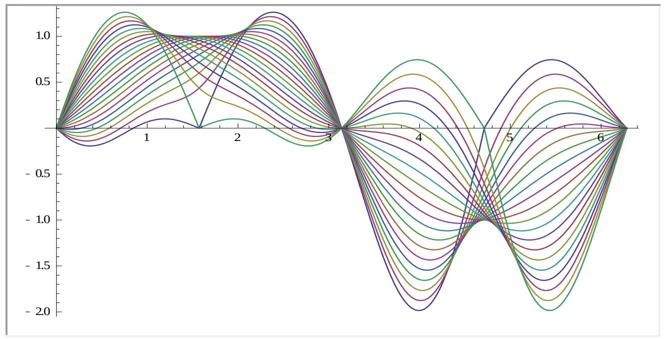


```
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sSin[2t]Cos[t]] + 1.4(1
               − 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])^2])},{s,−10,10}],{t,0,2Pi}]]
```

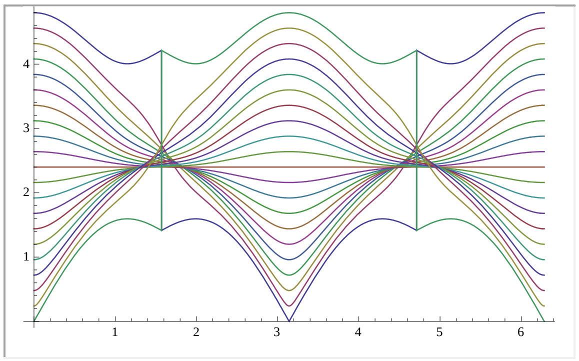


Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]Sin[t]]] + 0.2sCos[t]Sin[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]





Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]Cos[t]] + 1.4(1
− 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



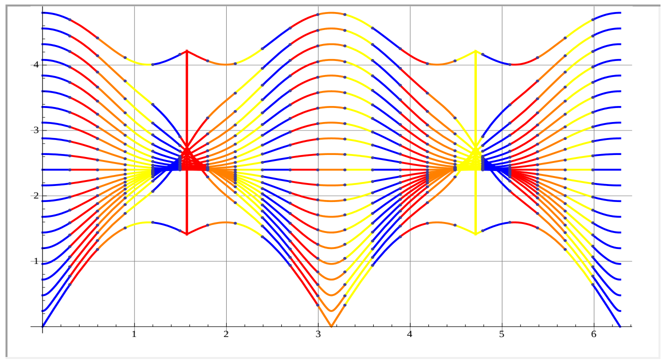
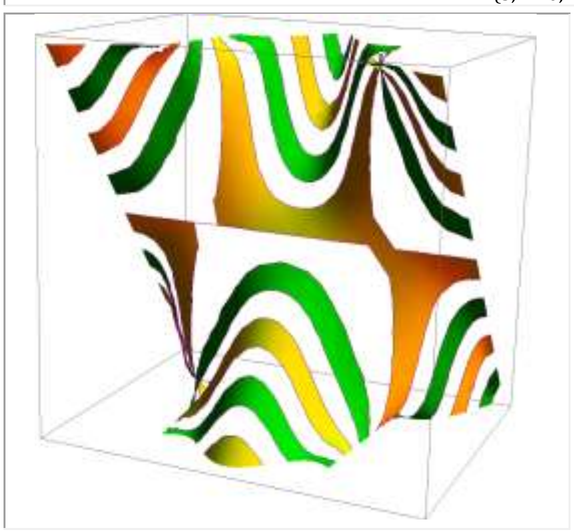
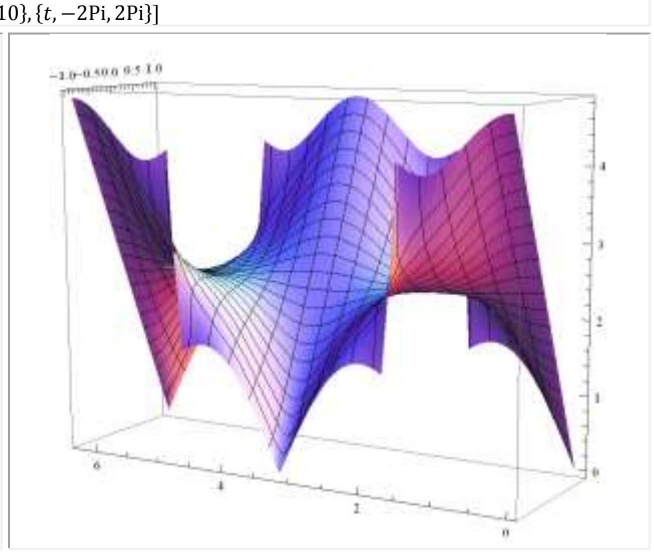


Fig. 6, a FSM-CETranslatate având la bază **FSM-CE rexθ** şi **dexθ**

www.SuperMathematica.com | www.SuperMatematica.Ro

ParametricPlot3D[{t, Sqrt[1 + (0.1s)² − 0.2sCos[2t]Cos[t]] + 1.4(1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²]), 0.2s},
{s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]





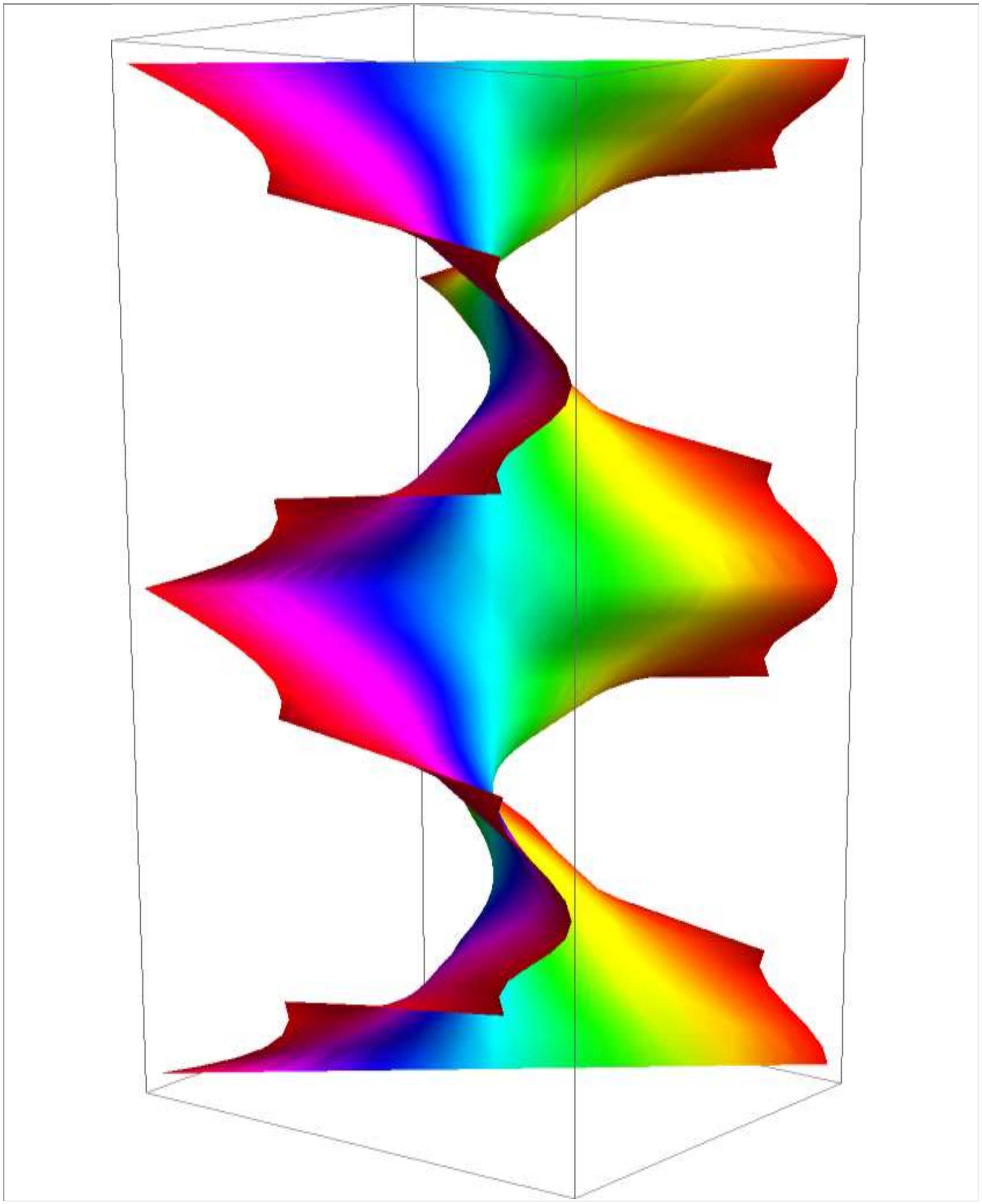
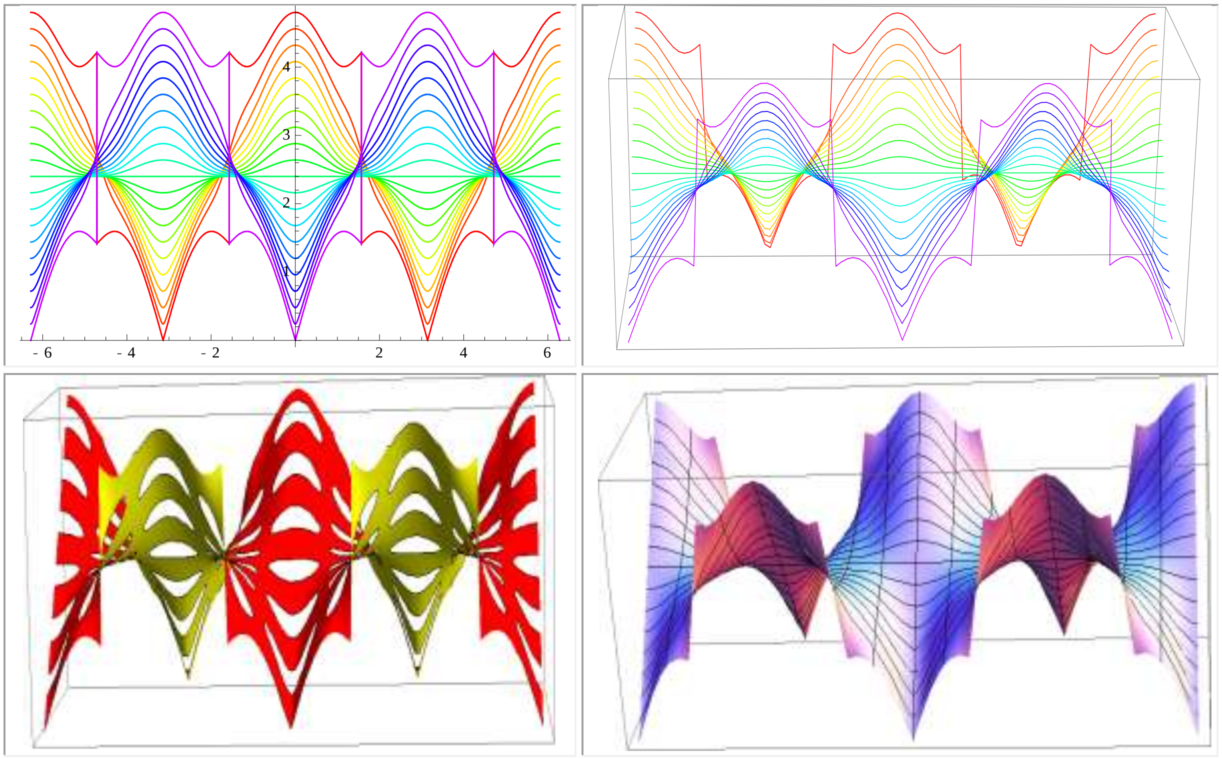


Fig. 6, b. FSM-CETranslatate având la bază **FSM-CE Rexθ** reprezentată în 3 D

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]Cos[t]] + 1.4(1 − 0.1sCos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2])}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{t, −2(Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]Cos[t]] − 1.4(1 − 0.1sCos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2])),0.3s}, {s, −10,10}, {t, −3Pi, 3Pi}, Axes → None, ColorFunction → (ColorData["TemperatureMap"][#3]&), MeshFunctions → {Function[{x, y, z, t, u}, Sin[2t]Cos[2u]]}, Mesh → {{1/4}}, PlotPoints → 50, MeshShading → {FaceForm[Red, Yellow], None}]

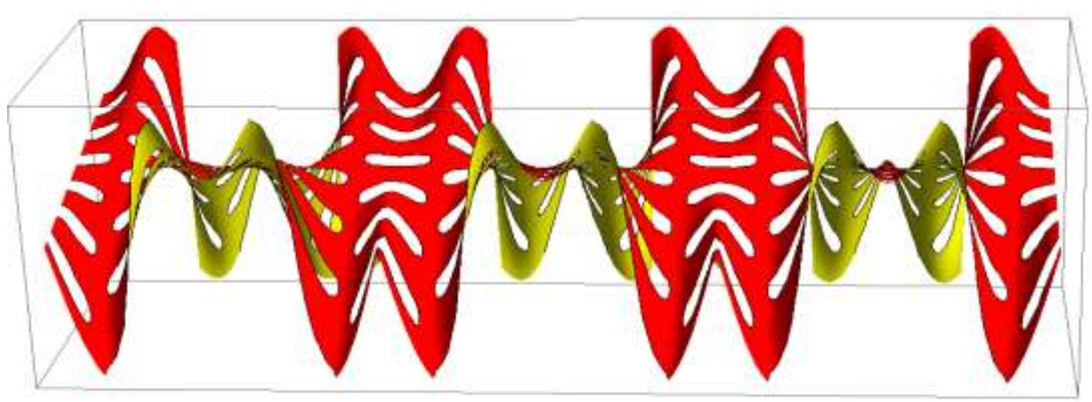


Fig. 6,c Alte FSM- CETranslatate

www.SuperMathematica.org | www.SuperMathematicaonline.blogspot.Ro

Motto: *„Când spun o prostie, toata lumea mă tolerează,*
când spun un adevăr, toată lumea mă urăşte”
*Johann Wolfgang von **Goethe***

CAPITOLUL XXVII

NIMIC DESPRE SUPERMATEMATICĂ
- TOTUL DESPRE PROSTIE -

*Grafica **Ion Măldărescu**, Agero Stuttgart*

De ce despre prostie ? A spus-o Goethe în motto. Am scris cândva despre supermatematică. O carte şi un eseu. Şi nu m-a citit nimeni. Sau aproape nimeni. Eu m-am citit şi m-am recitit. Adevărul, adevărat, este că-mi plăcea de mine şi de ce-am scris. În permanenţă, adică de fiecare dată, găseam erori, erori de diverse tipuri şi din varii cauze. Toate mi se datorau. Mie ! Dacă zic şi redacţiei, nu-mi mai publică volumul al treilea. Nimeni nu mi-a semnalat măcar erorile ortografice. De aceea, deduc, că nimeni, în afară de mine, n-a citit complet eseul de patru pagini. De carte, care are 268 de pagini (Vol. I) şi de cele două volume din ediţia a 2-a, cu cca 1200 pagini, ce să mai vorbim.

Prietenii mei, care din complezanţă s-au făcut că mă citesc, exclamau după scurt timp: la ce foloseşte supermatematica dacă, în final, funcţiile supermatematice se exprimă cu funcţii matematice clasice ? E o prostie !

Un matematician, care a tradus în engleză un articol de supermatematică, chiar mi-a spus de la obraz*: „Pe mine nu mă mai interesează supermatematica, aşa cum nu mă mai interesează nici cos(a+b). Pentru mine, adică pentru el, acestea nu prezintă interes. Este un capitol incheiat şi nu mai traduc nicio lucrare!”*. Fiindcă plata traducerii a fost generoasă, am rămas… prost. Vorba lui **Ion Creangă** *„Ştiu că sunt prost. Dar când mă uit în jur, prind curaj”.* Mare povestitor Creangă ăsta! De unde ştia el că poţi prinde curaj în oricare direcţie te uiţi de jur-imprejur? Aşa se întâmplă întotdeauna când nu duci lucrurile până la sfârşit. Până la bun sfârşit. După apariţia primului volum al cărţii „Supermatematica” s-a razgândit. Mi-a cerut o carte, pe care i-am dat-o cu dedicaţie şi şi-a exprimat dorinţa să colaboreze… Nu i-am amintit nimic despre… actualul titlu, în dedicaţie, bineînteles !

Acum doresc să vă vorbesc despre prostie. Aşa cum cred eu. Sau cum mi se pare mie că stă treaba. Altceva decât răspunsul matematic, pur, dat în constatarea, de la pag. 44, cap.1: Introducere, a cărţii SUPERMATEMATICA. Fundamente. Vol. I, Timişoara, Ed. Politehnica, 2007. Asta-i cea cu 268 de pagini. Volumul al treilea are 550 de pagini. Cine să-l tipărească şi dacă se va găsi cine, cine să-l citească ? Istoria confirmă faptul că **Fourier** i-a acuzat pe **Jacobi** şi pe **Abel** că-şi pierd / risipesc timpul cu funcţiile eliptice, când sunt atâtea probleme mai utile care ar putea fi rezolvate. N-a spus că-s proşti. Mai clar, funcţiile eliptice Jacobi (**FEJ**), cosinusul eliptic cn(u,k) şi sinusul eliptic sn(u,k), se exprimă cu ajutorul funcţiilor circulare centrice (**FCC) cos[am(u,k)] şi sin[am(u,k)]]** aşa le zice acum, ca să se deosebească de cele supermatematice (**SM**) excentrice (**FSM—CE**). Care sunt sinusul şi cosinusul arhicunoscute. Printr-o funcţie indusă, care este funcţia amplitudine excentrică am(u,k). Astfel, cn (u,k) = cos[am(u,k)] şi sn(u,k) = sin [am(u,k)]. Tot astfel, funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM—CE**), cosinusul excentric **cex(θ,S)** şi sinusul excentric **sex(θ,S)**, se exprimă prin intermediul funcţiei **amplitudine excentrică aex(θ,S),** deci prin inducţie, tot prin funcţiile circulare centrice **cos** şi **sin** astfel: **cex(θ,S)** = cos[aex(θ,S)], iar **sex(θ,S)** = sin[aex(θ,S)].

Jacobi şi **Abel** numai de prostie nu pot fi bănuiţi sau acuzaţi ! Faptul că istoria se repetă, insemnă ca nimeni n-a invăţat nimic din istorie ? Ăsta, da, un ***exemplu de prostie***! Ce coincidenţă şi ce mare diferenţă ! Dacă **FEJ** necesită tabelarea lor, deoarece **FEJ** am(u,k) nu se exprimă simplu, prin funcţii **FCC, FSM—CE** nu necesită tabelarea lor, deoarece, spre deosebire de am(u,k), expresia **FSM—CE** **aexθ** este deoasebit de simplă **:**

(1) **aexθ** = θ – arcsin[s.sin[θ–ε], astfel că

(2) $$\begin{cases} \text{cex}\theta = \cos[\theta - \arcsin[s.\sin[\theta - \varepsilon]] \\ \text{sex}\theta = \sin[\theta - \arcsin[s.\sin[\theta - \varepsilon]] \end{cases}$$

Ce simplu ! Şi avem, acum, o infinitate de sinusuri, tot atâtea cosinusuri precum şi celelalte funcţii trigonometrice directe. Atâtea, câte puncte există într-un plan, în care poate fi plasat un punct, dat afară din centru, unde l-a plasat **Euler** şi, din aceasta cauză, denumit **ex-**centru S(s, ε).

Nu numai câte o singură funcţie, cum sunt cele centrice sau ordinare **cos** şi **sin**.

Nu numai cele directe, ci şi cele indirecte.

Nu numai cele circulare, ci şi cele hiperbolice.

Toate acestea ca argument **excentric de θ,** dar şi de argument **centric de α**, care au avantajul că sunt funcţii continue şi dacă excentrul **S(s, ε)** este exterior discului circular, marginit de cercul unitate C(O,1). Şi nu numai circulare şi hiperbolice ci şi altele definite pe alte curbe.

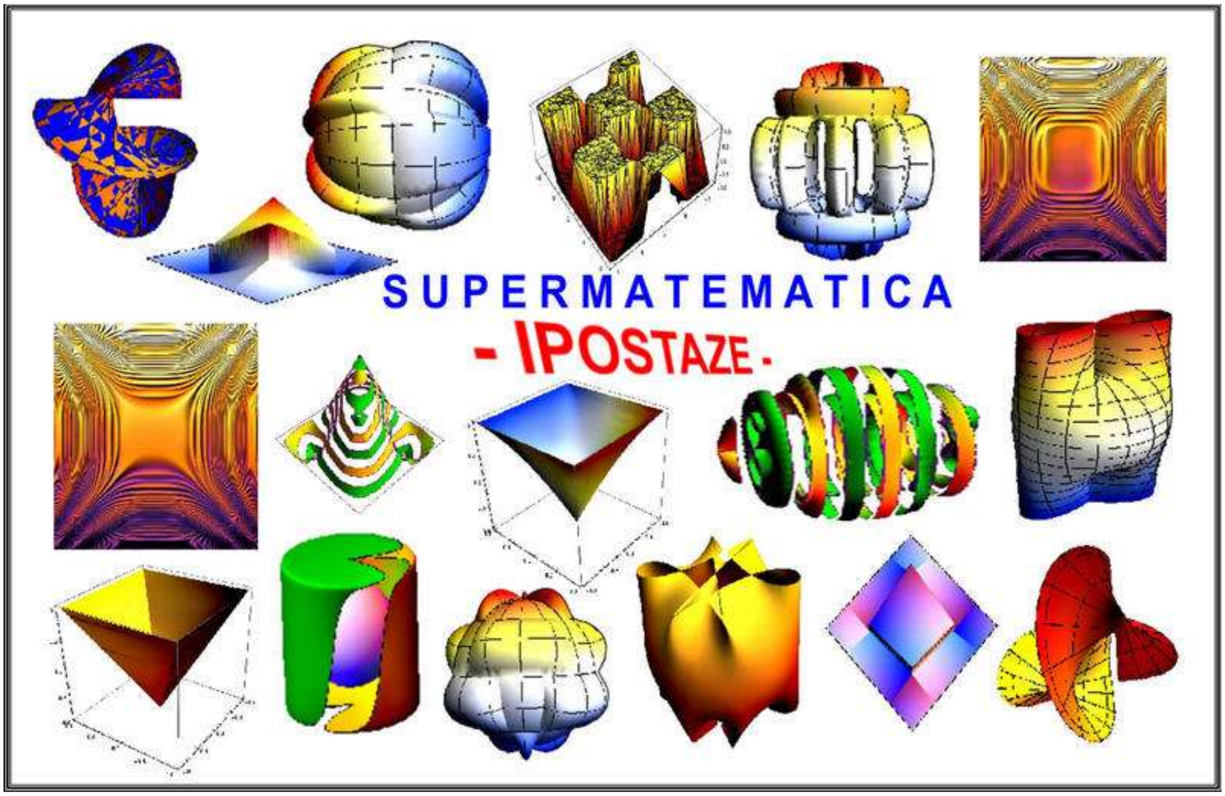
Pentru funcţii periodice, pe curbe inchise, ca pătrat, romb, elipsă, trilobă, cvadrilobă, polilobă, astroidă ş.a., iar pe cele deschise, ca evolventă, parabolă ş.a.. Asta încă nu-i nimic, faţă de noile funcţii **supermatematice** întroduse cu această ocazie în matematică şi care, ca funcţii centrice, nu-şi aveau rostul, fiind nişte constante.

FSM–CE radial excentric **rexθ** este numai una dintre ele.

Derivata excentrică, **dexθ**, care exprimă funcţia de trensfer, sau funcţia de transmitere de ordinul unu, a vitezelor şi a turaţiilor, tuturor mecanismelor plane cunoscute în tehnica, este a doua.

Mai sunt şi altele.

Funcţia **rexθ** exprimă distanţa dintre două puncte, în coordonate polare. Aceste puncte sunt **excentrul S(s, ε),** - pe care **Euler** l-a plasat peste centrul **C(0,0)** al cercului unitate şi peste originea **O(0, 0)** a unui sistem de referinţă / reper şi pe care noi l-am expulzat oriunde în planul cercului - şi punctele de pe cercul unitate în care o dreapta turnantă, în jurul lui **S**, intersectează cercul unitate.



Marele matematician român profesorul dr. matematician **Octav Em. Gheorgiu** a numit-o ***„o adevărata funcţie rege, cu ea pot fi exprimate toate curbele plane cunoscute şi multe alte curbe noi, extrem de multe curbe noi”.***

În **2 D**$^+$ au fost denumite rexoide, iar în **3 D**$^+$ rexoizi.

Să fi ales, marele **Leonhard Euler**, trei puncte confundate, care au sărăcit atât de mult matematica, încât au lasat-o într-un singur rând de funcţii, din prostie ?

Noi credem că nu, ci de bucurie că a reuşit, ceea ce nimeni până la el n-a reuşit: să exprime funcţiile trigonometrice pe un cerc trigonometric / unitate, ca funcţii circulare. Nu s-a mai gândit dacă sunt posibile şi alte exprimări, mult mai benefice pentru matematică şi, în ultimă instanţă, pentru omenire.

Omenire, ce cuvânt infiorător !, pentru că-ţi dă fiori când te gândeştii la soarta ei, la soarta omenirii. Oare se mai gândeşte cineva ? Dar la soarta matematicii ? Mă gândesc duios la cel care spunea că Academia Angliei nu-şi mai are rostul, deoarece tot ce se putea inventa s-a inventat deja. Dacă în ultima lui zi din viaţă, în 1783, **Euler** ar fi observat posibilitate multiplicării la infinit a tuturor funcţilor circulare - ca să nu-i spunem greşeală, pentru că greşeala e soră cu prostia - unde ar fi fost astăzi matematica după 227 de ani de aplicare a **supermatematicii** ?

Parafrazându-l pe **Philip Davis** şi pe matematicianul american de origine română, **Isaac J. Schoenberg**, **supermatematica** ***„conţine paradoxul delicios al Simfoniei Clasice a lui Procofiev: pare ca şi cum ar fi putut fi descoperită în urmă cu multe secole, dar, fireşte, nu ar fi putut”.***

Fără calculator şi fără computer, cine putea să ridice graficele atâtor funcţii, atât de variate ? Proştii, cei autentici, nici măcar n-au auzit de funcţiile trigonometrice. De cele centrice, **sin** şi de **cos**, că de cele excentrice, **cex** şi **sex**, încă n-au auzit nici deştepţii, pentru că cei care le hotărăsc soarta, soarta funcţiilor, sunt… aşa cum sunt, nu mă pronunţ. Dar ştiu că, din cele peste şase granturi întocmite, niciunul nu a fost admis. Cuvântul „**supermatematică**” repugnă. Ce-i aia **s u p e m a t e m a t i c ă** ?

Unele granturi urmăreau utilizarea noilor funcţii **supermatematice** pentru ***descriere exactă a unor semnale electrice, dreptunghiulare, trapezoidale, triunghiulare ş.a.m.d.*** cu numai doi termeni matematici (subliniere exactă, faţă de dezvoltările clasice cu diverse serii care nu reuşesc acest lucru nici cu 100 de termeni). Ei şi ?

În **supermatematică** (**SM**) nu mai există diferenţe între liniar şi neliniar. Şi?

Liniarul, idealul, sunt proprii matematicii centrice, ordinare, clasice, vechi, pe când neliniarul, realul sunt proprii matematicii excentrice. **Supermatematica**, fiind o reuniune a celor două matematici, centrică şi excentrică, şterge graniţa dintre liniar şi neliniar. No, şi ?

În **SM**, cercul şi pătratul, elipsa şi dreptunghiul, cercul şi triunghiul şi multe altele au aceleaşi ecuaţii parametrice. Cu aceleaşi ecuaţii parametrice, pentru excentricitate numerică **s = 0**, se obţine sfera. Sfera perfectă, ceea ce nu-i aşa de mare lucru. Dar, pentru **s = ± 1**, ***se obţine cubul*** ! Cubul perfect ! Ceea ce-i mare lucru ! O fi. Şi ?

Cu ajutorul **FSM─CE rexθ** s-a reuşit, ca după numai 5 paşi, bazat pe ***metoda numerică Landen, a mediei aritmetico-geometrice***, să se obţină, o ***relaţie de calcul*** simplă, cu numai doi termeni, a valorii integralei complete de prima speţă **K(k)** cu incredibila precizie de ***15 zecimale exacte*** !! Continuând cu alti paşi, se pot obţine relaţii de calcul şi mai precise. Dar cârcotaşii, pardon, evaluatorii granturilor exclamă : Ei, şi ? La ce foloseşte ?

Nimic, din toate cele enumerate, nu i-au putut îndupleca să sprijine cerectările din domeniul **supermatematicii** !

E oare o prostie să studiezi un nou domeniu stiinţific timp de peste patruzeci de ani, chiar dacă n-ai nici o speranţă şi niciun sprijin în acest domeniu ?

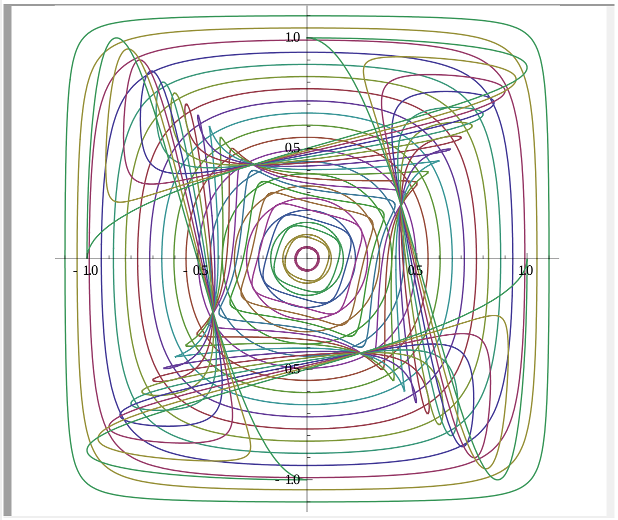
Nu, dar vorbim. Pentru că, altfel, după părerea lui **Molier**, ***„un savant care tace, nu se deosebeşte cu nimic de un prost care nu spune nimic!*** *”*. Am zis !

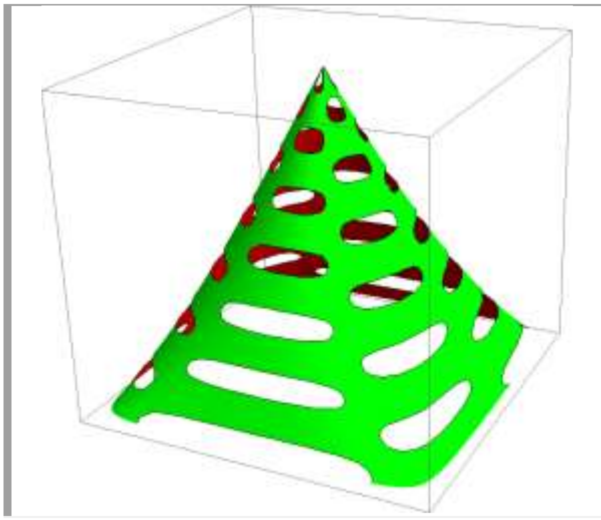
Am zis că **supermatematica** a făcut un pas mic… parcă a mai zis cineva asta, dar era pe Lună. Noi suntem pe **Pământ**, pe **Terra** mai sunt multi paşi de facut. În **supermatematică** la fel.

Cine-i face, cine-i sprijină ? Cine…? Cine…?

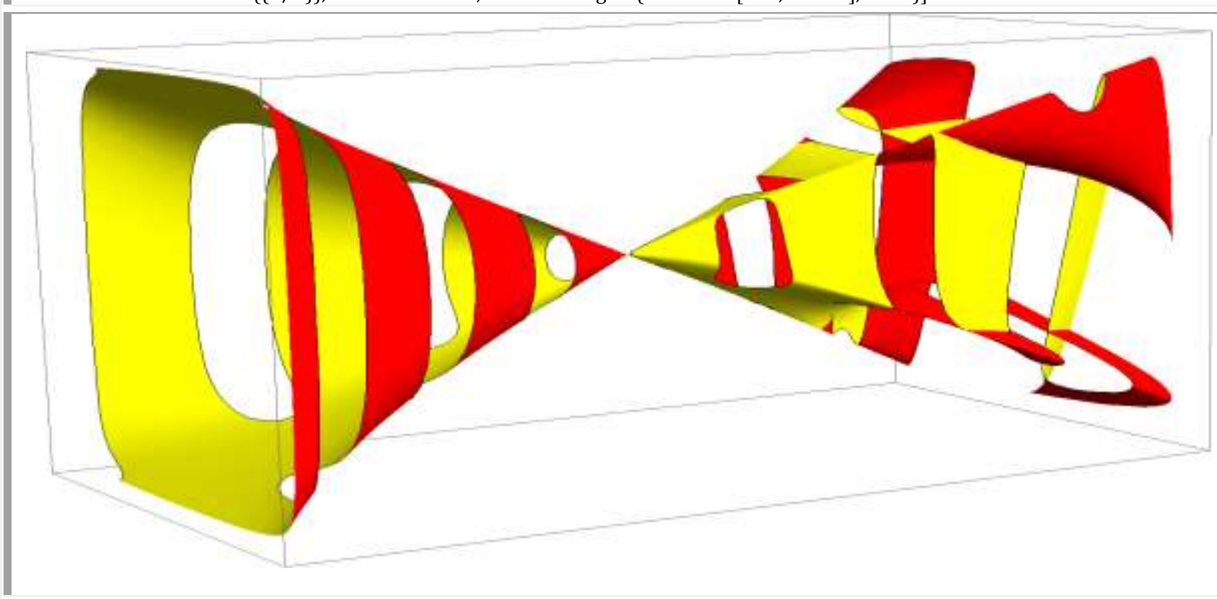
Dă-ne Doamne mintea noastră cea de pe urmă şi ne izbăveşte de cel … prost. Amin !

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{1.1 ∗ 0.05s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.9 ∗ 0.05sSin[t])^2] , 1.1
        ∗ 0.05s Sin[t]   /Sqrt[1 − (0.9 ∗ 0.05sCos[t])^2]}, {0.05sCos[t + ArcSin[0.05sSin[2t − Pi/2]]], 0.05sSin[t
        − ArcSin[0.05sSin[2t − Pi/2]]]}}, {s, 0,20}], {t, 0,2Pi}]]
```

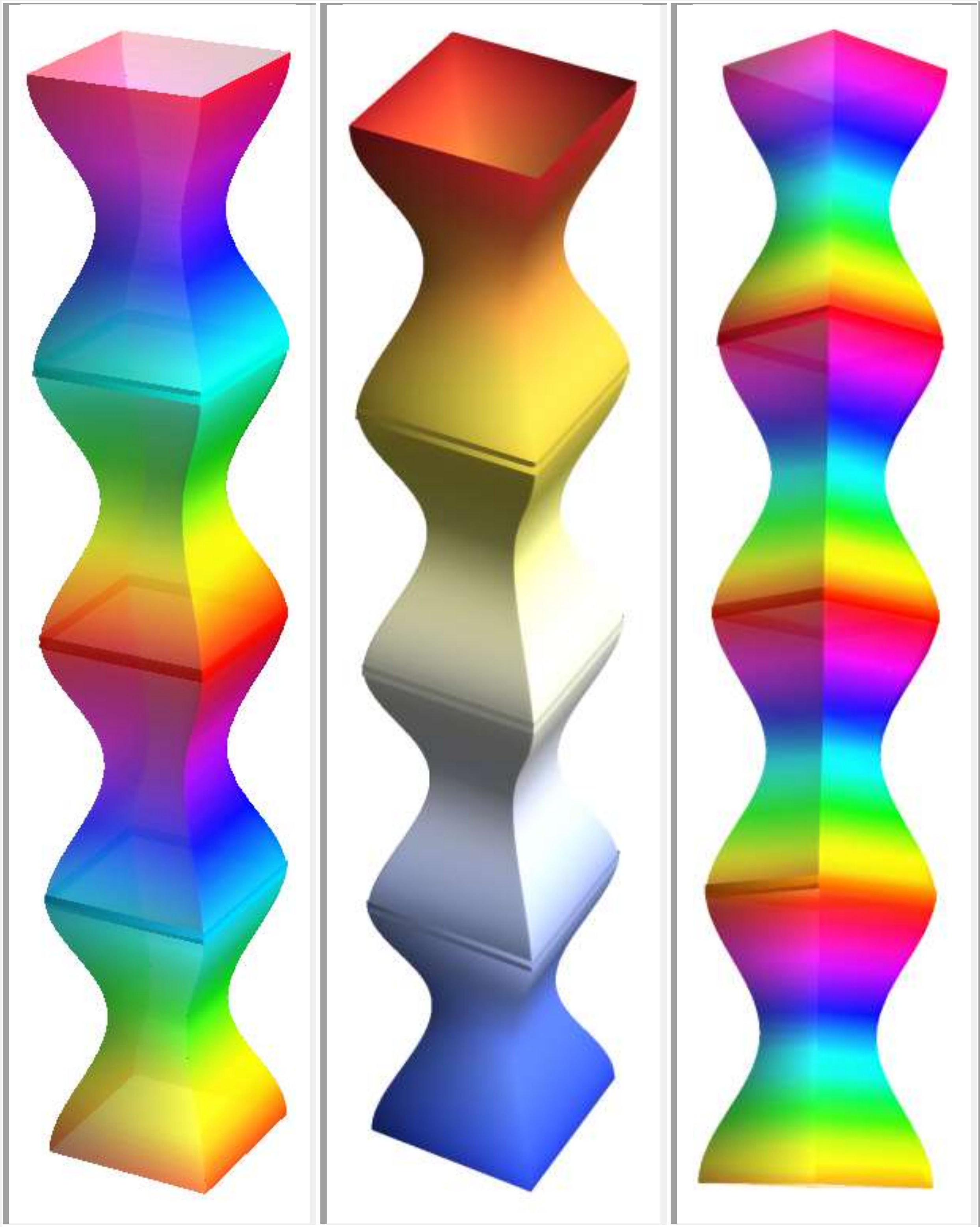




```
ParametricPlot3D[{{1.1 ∗ 0.05s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.9 ∗ 0.05sSin[t])^2] , 1.1
        ∗ 0.05s Sin[t]/Sqrt[1 − (0.9 ∗ 0.05sCos[t])^2] , −0.1s}, {0.05sCos[t + ArcSin[0.05sSin[2t
        − Pi/2]]], 0.05sSin[t − ArcSin[0.05sSin[2t − Pi/2]]], 0.1s}}, {s, 0,20}, {t, 0,2Pi}, Axes → None, ColorFunction
        → (ColorData["TemperatureMap"][#3]&), MeshFunctions → {Function[{x, y, z, t, u}, Sin[t]Cos[u]]}, Mesh
        → {{1/4}}, PlotPoints → 50, MeshShading → {FaceForm[Red, Yellow], None}]
```



OBIECTE SUPERMATEMATICE



COLOANELE NEMURIRII NEAMULUI

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.ro

Motto:” Dacă cineva vrea să determine cu un cuvânt, laconic şi expresiv, esenţa matematicii, acela trebuie să spună că este o ştiinţă despre infinit. ”
Henri Poincaré

Ca urmare :
“Matematica pură este ştiinţa în care noi nu ştim despre ce vorbim şi nici dacă este adevărat ceea ce spunem.”
Bertrand Russell

CAPITOLUL XXVIII

FUNCŢIA GAMMA CENTRICĂ şi FUNCŢII GAMMA EXCENTRICE

1.INTRODUCERE

În matematică, o **ecuație diferențială** este o relație sau ecuaţie dintre o **funcție necunoscută** de una sau mai multe variabile, o relație dintre funcția însăşi şi un număr de derivate ale sale, derivate de diferite ordine. Ecuațiile diferențiale au un rol important în formularea cantitativă a problemelor din știință și tehnică. O ecuație diferențială ordinară determină dependența funcției necunoscute de o singură variabilă și conține doar derivate în raport cu această variabilă.

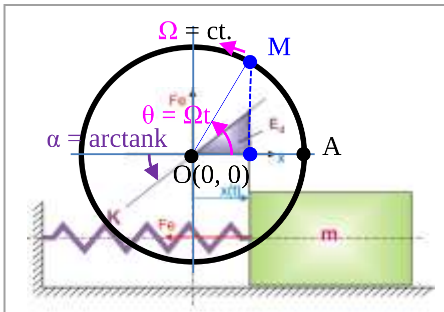
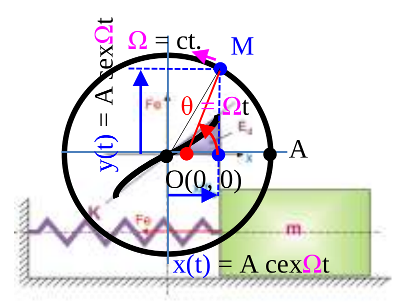
FUNCŢII	**ELEMENTARE**	**S P E C I A L E** (**Supermatematice**)
Schiţa modelului		
Denumirea 1	Model vibrant **liniar** conservativ cu un singur grad de libertate	Model vibrant **neliniar** conservativ cu un singur grad de libertate
Denumirea 2	Mişcarea circulară **centrică** cu viteză unghiulară Ω constantă	Mişcarea circulară **excentrică** cu viteză unghiulară Ω constantă
Ecuaţia	$m\ddot{x} + kx = 0$	$m\ddot{x} + \frac{\epsilon}{\omega}\dot{x} + \omega^2 x = 0$
Soluţia	x(t) = A cos Ω t x_0 = A;	x(t) = x_0 cexΩt Ω = constant; $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ = **Ω**.dexΩt; $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$

Fig. 1 Exemple de sisteme vibrante sau de mişcare circulară centrică (**MCC**) şi, respectv, excentrică (**MCE**), guvernate de ecuaţii diferenţiale ordinare cu coeficienţi constante (stânga ◄) şi cu coeficienţi variabile (dreapta ►)

www.SuperMatematica.ro; www.SuperMathematica.org; www.SuperMathematica.com

Ea poate fi cu coeficienţi constante sau cu coeficienţi care sunt funcţii, adică variabile.

Să exemplificăm:

Arhicunoscuta ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul doi cu coeficienţi constanţi

(1) $m\ddot{x} + k.x = 0$

cu soluţia exprimată de **funcţia elementară** trigonometrică sau **circulară centrică** cosinus x(t) = cosα = cosΩt, la proiectarea mişcării circulare centrice pe axa x şi cu sinus y (t) = sinα = sinΩt la proiectarea mişcării pe axa y, adică

(2) $s_x = x_0.\cos\Omega t$ şi / sau $s_y = x_0.\sin \Omega t$

poate reprezenta **mişcarea liniară alternativă** pe direcţia axei x ≡ s_x, a punctului $\mathbf{M_x}$ de masă **m,** sub acţiunea elementului elastic de **caracteristică elastică statică** liniară (**CES**$_L$) şi de rigiditate k = tanα = constantă, denumită şi mişcare de vibraţie sau vibratorie.

Fie proiecţia pe axa **x** a mişcarii unui punct **M** de masă **m** pe cercul de rază R = A = x_0 cu o viteză unghiulară **Ω** constantă, denumită şi **mişcare circulară centrică** (**MCC**). Denumirea provine din faptul că **mişcarea circulară centrică** este condusă din centrul **O**(**0**, **0**), prin **semidreapta centrică D**$^+$, centrică fiindcă trece prin **centrul O(0, 0),** sau de rază **OM** aşa cum se prezintă situaţia în stânga ◄ **figurii 1**.

Odată cu apariţia **supermatematicii** (**SM**) şi, totodată, a funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM**-**CE**) a apărut şi **mişcarea circulară excentrică** (**MCE**) prin care punctul **M** de masă **m** se roteşte tot pe cercul de rază R = A = x_0, dar cu o viteză v = A. **Ω.dex Ωt** variabilă ca şi viteza unghiulară ω = **Ω.dexΩt,** evident, tot variabilă, deoarece conducerea mişcării punctului **M,** de masă **m,** se face din punctul denumit excentru **E**(**e**,ε), în jurul căruia **semidreapta excentrică** generatoare $\mathbf{d^+} = |\boldsymbol{EM}|$ se roteşte cu viteza unghiulară **Ω** constantă, aşa cum se prezintă situaţia în dreapta ► **figurii 1**.

Precum în cazul anterior, proiecţia **mişcarii circulare excentrice** (**MCE**) pe orice direcţie **x**, **y** sau oarecare **r**, reprezintă o mişcare oscilantă sau de vibraţie liberă, neliniară, de caracterictică elastică neliniară (**CES**$_N$), mişcări studiate de autor şi publicate în lucrările [2], [3], [4] şi [5].

Acum şi aici apare o problemă ! Se zice că sistemele oscilante de **CES**$_N$ neliniare sunt soluţionabile ("exact") doar cu **funcţii speciale** cum ar fi funcţiile eliptice **Jacobi**, consacrate în acest sens. Or, sistemele neliniare, tratate în lucrările anterior amintite, se soluţionează cu **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM**-**CE**) **cexΩt** şi / sau **sexΩt,** cu **funcţiile** supermatematice **qudrilobe** (cvadrilobe) **coqΩt şi / sau siqΩt** ş.a., funcţii **echivalente** şi **la fel de elementare** ca şi funcţiile **circulare centrice** cos**Ωt** şi sin**Ωt** pe care le generalizează, multiplicându-le la infinit !.

Toate **FCC** se pot obţine din **FSM**-**CE** pentru o excentricitate liniară **e** = **s** = 0, ceea ce arată că ambele funcţii circulare, **centrice** şi **excentrice**, sunt la fel de **elementare** ! E simplu de dovedit că şi cele două ecuaţii diferenţiale din **figura 1**, pentru **e** = s = 0 sunt echivalente, deoarece în **CES**$_N$ are tangenta în origine aleasă de pantă **k** = 1. Încă un mit tinde să se spulbere !

O ecuaţie cu derivate parţiale se referă la o funcţie de mai multe variabile şi conţine derivate parţiale.

Leonhard Euler a dat o primă definiţie clară a ecuaţiei diferenţiale, explicând şi în ce constă rezolvarea unei astfel de ecuaţii. După **Euler**, o ecuaţie diferenţială este o relaţie între x, y şi $\boldsymbol{p = \frac{dy}{dx}}$ şi rezolvarea ei constă în găsirea unei relaţii între **x** şi **y** care **nu-l mai conţine** pe **p**.

Dintre numeroasele rezultate obţinute de **Euler** în domeniul ecuaţiilor diferenţiale, amintim metoda de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul **n** cu coeficienţi constanţi, cu numeroase aplicaţii în mecanică şi fizică.

Profesorul **Ioan I. Vrabie** de la Universitatea "**Al. I. Cuza**" din Iaşi sintetizează foarte bine ce reprezintă pentru un inginer, şi nu numai pentru el, ecuaţiile diferenţiale: "*Pe lângă rezultatele fundamentale proprii acestei discipline, în ideea de a scoate în evidenţă **forţa aplicativă** a acesteia, am prezentat mai multe **modele** matematice ce descriu evoluţia unor fenomene din diverse domenii din afara matematicii. Am încercat să convingem cititorul cum, din analiza acestor modele, prin mijloacele proprii ecuaţiilor diferenţiale, se pot obţine **informaţii de substanţă** cu privire la **evoluţia fenomenelor** corespunzătoare. Totodată ne-am străduit să reliefăm o trăsătură de loc neglijabilă a acestei discipline¸ şi anume, marea ei **putere de abstractizare**. Este vorba aici de faptul că numeroase fenomene distincte admit modele* *diferenţiale formal identice şi, drept urmare, din studiul unui singur astfel de model, se pot trage concluzii despre modul de evoluţie a mai multor sisteme reale*." Şi chiar mai mult !

Nu sunt singurul, şi nu pentru ca sunt inginer, care afirmă că multe funcţii speciale au apărut ca o necesitate a soluţionării unor probleme **inginereşti**, cum sunt aceste ecuaţii diferenţiale. La fel a apărut şi **matematica excentrică** (**ME**) şi, odată cu ea, **supermatematica** (**SM**).

Dacă ecuaţiile diferenţiale liniare având nişte constante drept coeficienţi au soluţii care pot fi scrise prin **funcţii elementare**, ca trigonometrice, exponenţiale ş.m.a. ecuaţiile diferenţiale cu coeficienţi variabile au soluţii exprimabile prin serii de puteri, care fie pot fi denumite prin numele celui care le-a descoperit (funcţii **Legendre**, funţii **Bessel**, funcţii **Mathe** ş.m.a.), fie într-un alt mod sau cu o anumită literă grecească.

Alfa (**α**), beta (β), gamma (**γ**), delta (**δ**), epsilon (**ε**), dzetha (ζ), eta (**ϵ**), theta (**θ**) ş.a.m.d. sunt câteva litere de la început, din cele 24 de litere ale alfabetului grec. Din Wikipedia aflăm că "*alfabetul grec își are originile în alfabetul fenician și nu este legat de scrierea liniară B sau alfabetul silabic cipriot, sistemele* ***folosite anterior*** *pentru a reprezenta limba greacă în scris. Literele grecești sunt folosite deseori în notația științifică, mai ales în algebră, geometrie și fizică.*"

Câteva funcţii speciale din matematică, ce sunt denumite cu astfel de litere, sunt prezentate în continuare. Se vor prezenta în ordinea alfabetului grec:

- FUNCŢIA **alfa (alpha)**

(3)
$$\begin{cases} \left\{\begin{matrix} aex_{1,2}(\theta, S) \\ \equiv \\ aex_{1,2}\theta \end{matrix}\right\} = \alpha(\theta) = \theta - \beta_{1,2}(\theta) = \theta - \begin{cases} \beta_1(\theta) = \begin{cases} \arcsin[\,s.\sin(\theta - \varepsilon)\,] \\ \arctan\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases} \\ \beta_2(\theta) = \pi - \begin{cases} \arcsin[\,s.\sin(\theta - \varepsilon)\,] \\ \arctan\frac{s.\sin(\alpha_1-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases} \end{cases} \\ \left\{\begin{matrix} Aex(\alpha_{1,2}, S) \\ \equiv \\ Aex\alpha_{1,2} \end{matrix}\right\} = \theta(\alpha) = \alpha_{1,2} + \beta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \begin{cases} \beta(\alpha_1) = \begin{cases} \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_1-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 2s.\cos(\alpha_1-\varepsilon)}} \\ \arctan\frac{s.\sin(\alpha_1-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} \end{cases} \\ \beta(\alpha_2) = \pi - \begin{cases} \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_1-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 2s.\cos(\alpha_1-\varepsilon)}} \\ \arctan\frac{s.\sin(\alpha_1-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha_1-\varepsilon)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Este **funcţia esenţială** a supermatematicii (**FSM**), care face trecerea din domeniul vechii **matematici centrice** (**MC**) în cel al noii **matematici excentrice** (**ME**), fiind asemănătoare funcţiei eliptice **Jacobi am(u,k),** care face trecerea dela **MC** la matematica eliptică (**MEL**).

Aşa după cum este cunoscut cos[**am(u,k)**] = cn(**u, k**), iar sin[**am(u,k)**] = sn(**u, k**) şi, tot aşa, în **SM**, cos[**aex(θ,S)**] = cex[**θ,S(s, ε)**], iar sin[**aex(θ,S)**] = sex[**θ,S(s, ε)**].

În partea superioară a relaţiilor (3) sunt **FSM-CE** (alfa) de variabilă **excentrică θ**, având două moduri de exprimare **echivalente**, prin arc sinus şi prin arc tangentă, ca şi cele de variabilă **centrică α**, din partea inferioara a relaţiilor (3).

Din relaţiile (3) mai rezultă un fapt deosebit de important, şi anume, că funcţiile **α**(**θ**) = aexθ şi **θ**(**α**) = **Aexα sunt funcţii inverse una alteia** ! (v. [14],[15]).

- FUNCŢIA **beta**

În matematică, funcția beta numită, de asemenea, integrala **Euler** de primul tip, este considerată ca o funcţie specială definita de integrala

(4) $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$ pentru $\mathrm{Re}(x), \mathrm{Re}(y) > 0$.

Funcția **beta** a fost studiată de către **Euler** şi **Legendre** şi i-a fost dată notația **B** de către **Jacques Binet,** iar simbolul ei este un **β** grecesc, mai degrabă decât litera latină similară B.

Cu toate acestea, nu are nimic de-a face cu litera **β** din alfabetul grecesc, ci cu **B** de la **Binet**, spre deosebire de **FSM-CE beta excentrică**, ca de exemplu **bex**[θ, **S**(**s**, ε)] ≡ **β**(**θ**) = arc sin[s sin(θ− ε), extrasă din relaţiile (3) şi care, aşa cum se poate deduce din relaţiile (3), întră în expresia funcţiilor **alfa**.

- FUNCŢIA **gamma**

Funcţia **Gamma** este introdusă în matematică de **Leonhard Euler** în momentul când acesta pune problema extinderii factorialului obişnuit **n!** pentru valori naturale ale lui **n**, la toate valorile reale sau complexe ale lui **n.** Dar problema este, se pare, sugerată întâi de **Bernoulli** şi de **Goldbach**.

Tratarea mai pe larg a funcţiei **gamma centrice** se face, în continuare, în paragraful **§2**, iar a funcţiilor **gamma excentice** în **§3.**

- FUNCŢIA **delta** .

Aflăm de pe Wikipedia:

"Funcția lui Dirac δ(x) *nu este o funcție obișnuită, ci o funcție generalizată (sau o distribuție). Poartă numele fizicianului englez P.A.M.Dirac care a utilizat-o extensiv în formularea sa a mecanicii cuantice, dar prezența ei în matematică este mai veche și e de exemplu implicită în folosirea integralei Stieltjes. Introducerea ei simplifică considerabil prezentările diferitelor capitole ale fizicii matematice.*

Descrierea matematică riguroasă a statutului funcției lui ***Dirac*** *(și a altor funcții generalizate) este datorită lui Laurent Schwartz*

Calitativ, ea poate fi concepută ca o funcție care este egală cu zero peste tot, cu excepția lui x = 0 unde este infinită, dar astfel încât

(5) $\int_I \delta(x')\,dx' = 1$

pentru orice interval ***I*** *care-l conține pe x = 0. De aceea, se poate afirma că integrala indefinită a funcției* ***Dirac*** *este treapta unitate Heaviside."*

Funcţie treaptă ce poate fi descrisă, aşa cum s-a mai arătat şi cu **FSM-CE** derivata excentrică **dexθ** ca şi cu funcţiile quadrilobe (cvadrilobe) **coqθ** şi siqθ [12], [13], toate pentru o valoare a excentricităţii numerice **s** = 1.

- FUNCŢIA **epsilon**.

Autorul nu cunoaşte o funcţie cu această denumire. El a notat cu **ε excentricitatea unghiulară** a excentrelor **E**(e, ε) şi **S**(s, ε), din cercurile de raza R oarecare şi, respectiv, R = 1 în cercul unitate, în care **e** şi **s** sunt excentricitaţile liniare **reale e** şi, respectiv, **numerice s** = $\frac{e}{R}$, în care **R** este raza unui cerc oarecare, astfel că, pentru cercul unitate / trigonometric, de R = 1, cele două excentricităţi liniare sunt numeric egale **e** = **s**.

Aşa cum s-a mai afirmat, dacă excentrul **E** şi **S** sunt puncte mobile în planul cercurilor lor, atunci **e** şi **s** ca şi / sau **ε** nu mai sunt constante, ci **variabile**, adică **reprezinţă funcţiile** după care are loc mişcarea excentrelor **E** şi **S** în planul cercurilor lor. Un astfel de caz este prezentat în lucrarea [**Şelariu Mircea Eugen**,"**MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ (MCE) DE EXCENTRU PUNCT MOBIL / VARIABIL**", www.cartiaz.ro].

- FUNCŢIA **dzeta / (zeta).** Funcţia **dzeta / (zeta)** a lui **Riemann** ζ(z) este o funcție de variabilă complexă ***s***, inițial definită prin următoarea serie infinită:

(6) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

pentru anumite valori ale lui ***s*** și apoi continuată analitic la toate numerele complexe ***s*** ≠ 1. Această serie Dirichlet converge pentru toate valorile reale ale lui ***s*** mai mari ca 1.

Problemele matematice formulate de **David Hilbert** la Congresul Internaţional de Matematică de la Paris din 1900 a cuprins în **Lista lui Hilber**, la punctul 8, o cerinţă încă nerezolvată integral:

Să se demonstreze **ipoteza lui Riemann** conform căreia funcţia zeta a lui **Riemann**

(7) $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$

are toate zerourile din semiplanul drept situate pe dreapta verticală Re(s) > 0, Re(s) = 1 / 2.

Utilizându-se o abordare experimentală, această ipoteză a fost confirmată prin calculul primelor câtorva **milioane de zerouri**. **Bompieri** a arătat că ipoteza are loc cu probabilitatea 1, în raport cu un anumit câmp de evenimente. Problema este importantă, rezolvarea ei permiţând soluţionarea şi a altor probleme ca aceea a lui **Goldbach**.

2. FUNCŢIA GAMMA CENTRICĂ

Funcţia **gamma centrică** este notată cu **Γ**, iar cele excentrice cu **Γ_E**.

Funcţia **gamma centrică** a fost introdusă în matematică de **Leonhard Euler** (1720) când acesta încearca să rezolve problema extinderii factorialului (!) la numere reale şi complexe.

Pentru z ∈ C \ {0, −1, −2, . . .}, funcţia gamma, Γ(z), se defineşte prin

(8) $$\Gamma(z) = \lim_{k \to \infty} \frac{k!k^{z-1}}{(z)k}$$

în care (z) k = z(z + 1) . . . (z + k − 1), k > 0, (z) 0 = 1, z ∈ ℝ sau ℂ

Notația Γ(z) i se datorează lui Adrien-Marie Legendre.

Dacă partea reală a numărului complex *z* este pozitivă (Re[*z*] > 0), atunci integrala

(9) $$\int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t} dt$$

este absolut convergentă. Folosind integrarea prin părți, se poate arăta că

Γ(z + 1) = z Γ(z)

Această ecuație funcțională generalizează relația *n*! = *n*×(*n*-1)! a funcției factorial. Se poate evalua Γ(1) analitic:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{k \to \infty} -e^{-t} \Big|_0^k = -0 - 1 = 1$$

Combinând aceste două relații, rezultă că **funcția factorial** este un caz particular al funcției **gamma centrică** :

Γ(n + 1) = n Γ(*n*) = … = n! Γ(1) = n !

pentru orice număr natural *n*.

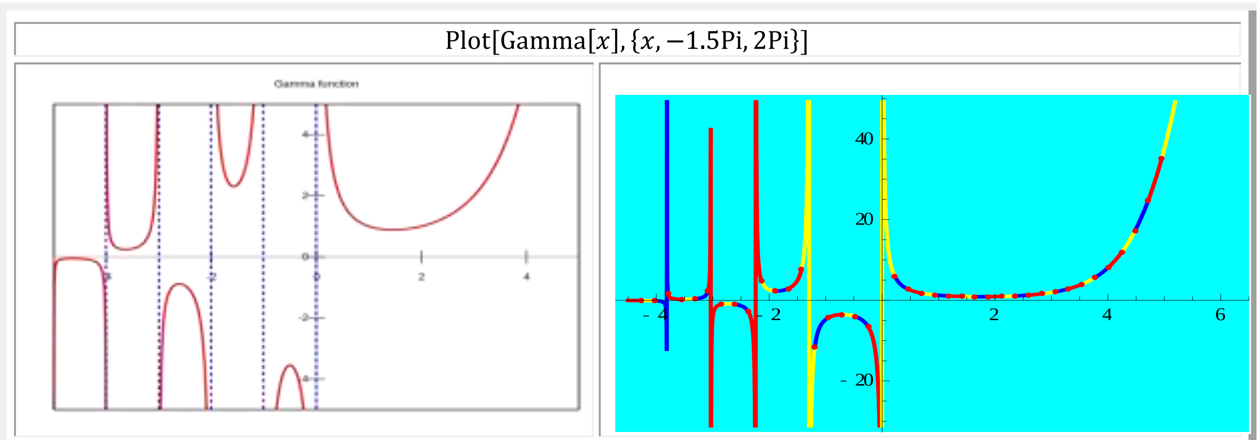


Fig. 2 Funcţia **gamma centrică** de variabilă reala x în 2D

Din această definiţie rezultă imediat

(8') Γ(z + 1) = z Γ(z) → Γ(z + 1) = z!, z ∈ ℕ → Γ(1) = 1 .

Încercând să calculeze aria unui sfert de cerc, arie dată de integrala (9), **Wallis** a obţinut o expresie pentru **numărul *π*** prin intermediul funcţiei **gamma**

(10) $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-z^2}\mathrm{dz} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-z)(1+z)}\,dz = \left[\Gamma(\frac{3}{2})\right]^2$

Pentru un număr complex z, cu partea reală pozitivă, funcția **gamma** se definește prin integrala

(11) $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{dt}$

Funcția **gamma centrică** este o componentă a mai multor distribuții de probabilitate, și deci are aplicații în domeniile probabilităților, statisticii și combinatoricii.

Dacă n este un număr întreg pozitiv, atunci

(12) Γ(n) = (n – 1) !

ceea ce arată legătura funcției **gamma** cu factorialul numerelor întregi pozitive.

În **figurile 2** şi **3** sunt prezentate graficele funcţiilor **gamma centrice** de variabilă reală **x** şi, respectiv, de variabilă complexă **z = x + i y**.

O mare parte din cele relatate anterior sunt luate de pe **Wikipedia**, web site de pe care se pot obţine informaţii şi despre "**Supermatematica**".

```
Plot3D[Abs[Gamma[x + Iy]], {x, −4.5,5}, {y, −5,5}, PlotPoints → 50, PlotRange → {0,6}, ViewPoint → {−2, −2.5,1}, Boxe → False,
        BoxRatios → Automatic, AxesEdge → {{−1, −1}, {−1, −1}, {1, −1}}, Mesh → {9,9,5}, MeshSt → {Black, Black,
        Opacity[0.4]}, MeshFunctions → {Min[#1,2 ∗ (#1 + 2)]&, #2&, #3&}, RegionFunction → Function[{x, y, z},
   Abs[Gamma[x + Iy] ≤ 6], AxesLabel → {Re[z], Im[z]}, PlotLabel → Style[Abs[Gamma[z]], 20]]
```

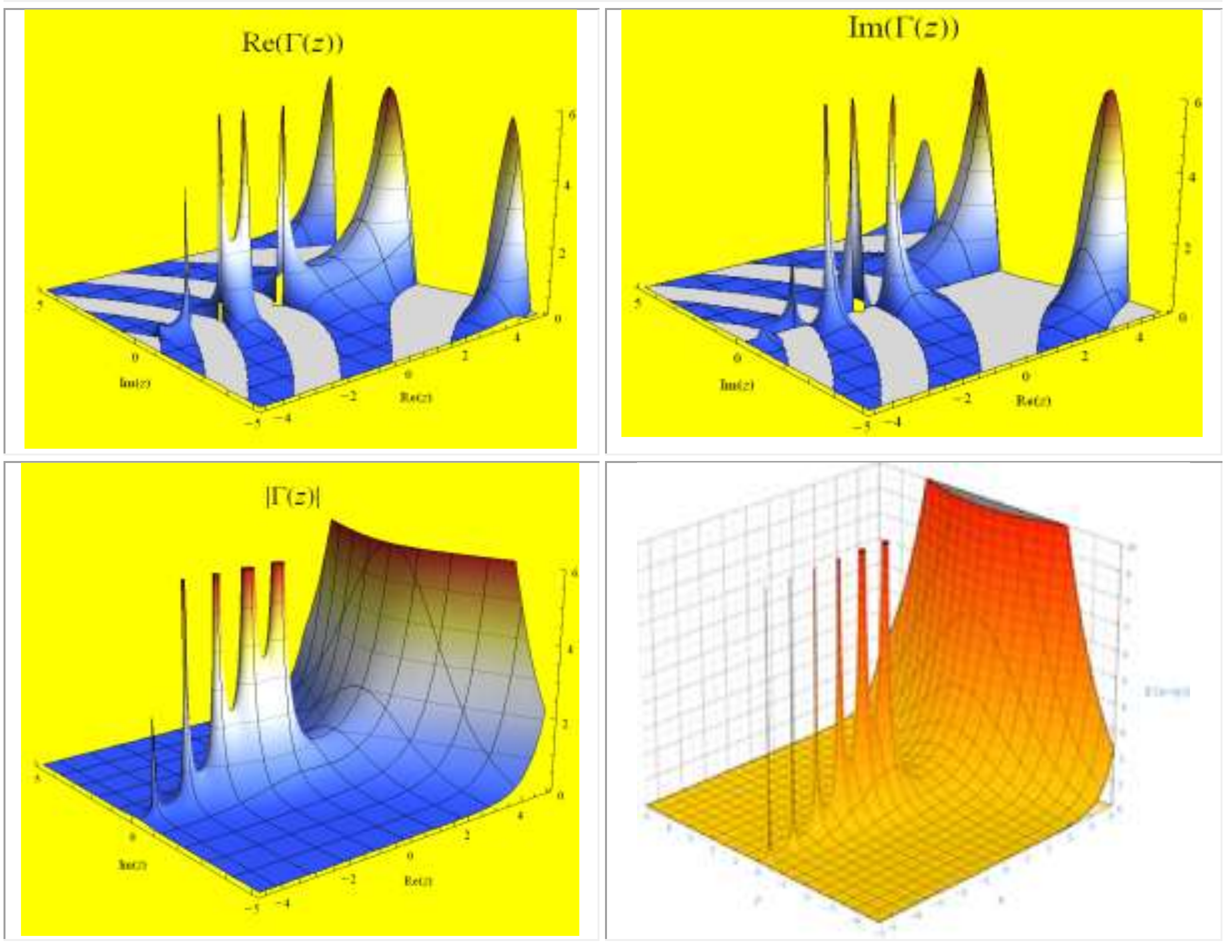


Fig. 3 Funcţia **gamma centrică** de variabila complexă în 3D

3. FUNCŢII GAMMA EXCENTRICE

Trecerea din domneiul matematicii centrice (**MC**) în cel al matematicii excentrice (**ME**) se realizează, aşa cum s-a mai afirmat, aidoma trecerii de la **matematica circulară centrică** la **matematica eliptică centrică**. Dacă funcţiile trigonometrice / circulare centrice cosinus **cosx** şi sinus **sinx** trec în funcţii eliptice corespondente **cn(u,k)** şi **sn(u,k)** prin înlocuirea variabilei x cu funcţia amplitudine centrică **am(k,u)** atunci

$$(13)\qquad \begin{cases} cn(u,k) = \cos[am(u.k))] \\ sn(u,k) = \sin[am(u.k))] \end{cases}$$

Tot aşa, trecerea din **MC** în **ME**, de la funcţii **gamma centrice** la funcţii **gamma excentrice** se face prin înlocuirea variabilelor **x** şi, respectiv, **z = x + i.y** cu funcţia amplitudine excentrică **aex[θ, S(S, ε)]** pentru a obţine funcţii **gamma excentrice** de variabilă excentrică **θ** şi respectiv cu funcţia **Aex(α, S)** pentru a obţine **funcţii gamma excentrice de variabilă centrică α**.

Reamintim că cele două tipuri de funcţii amplitudine excentrică au ecuaţiile date de relaţiile (3).

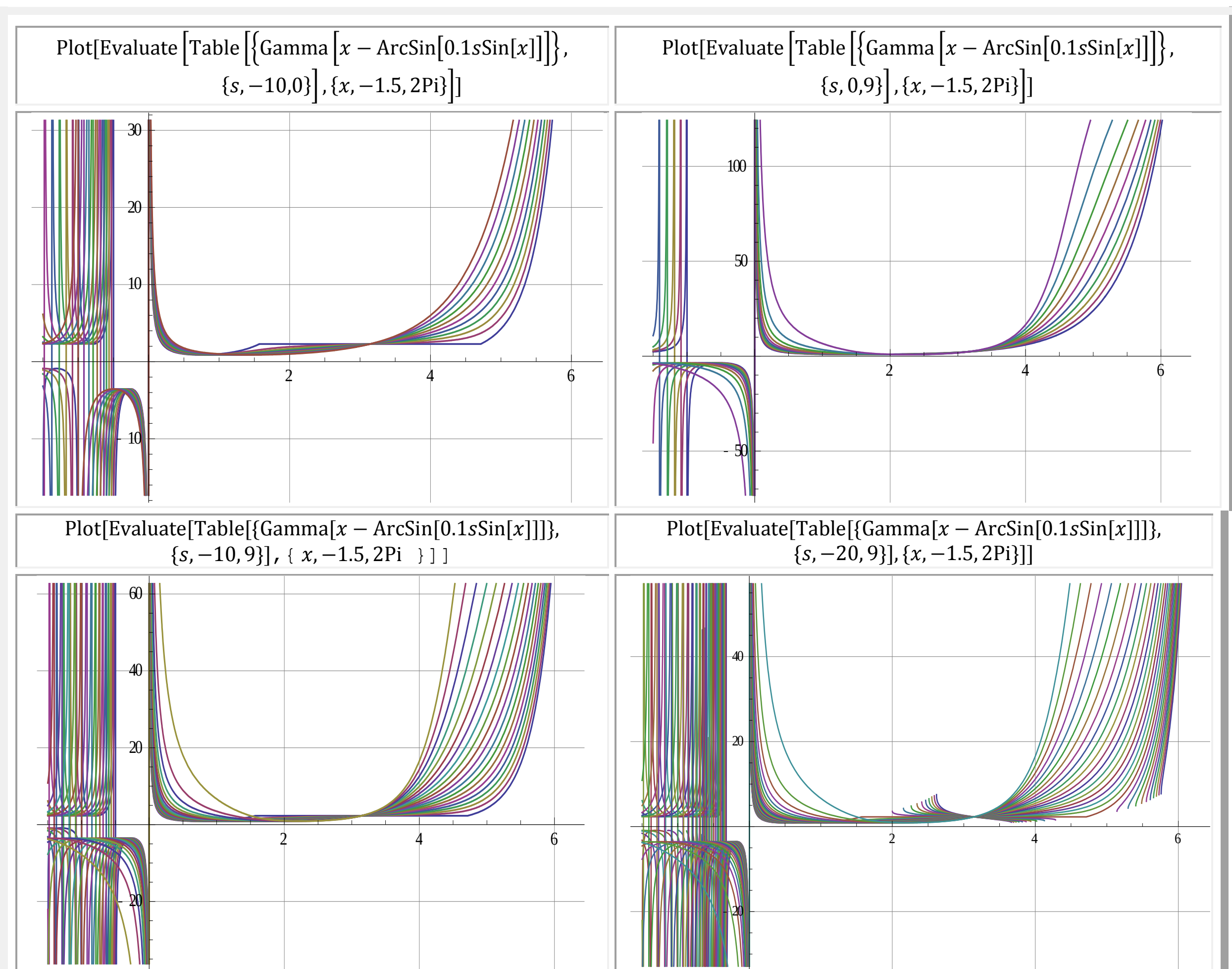
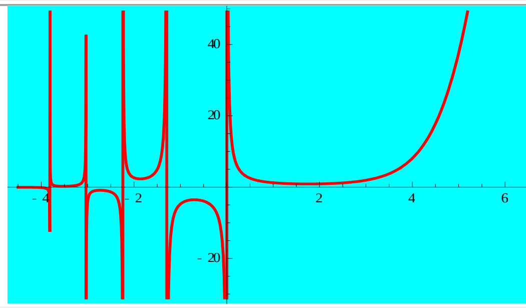
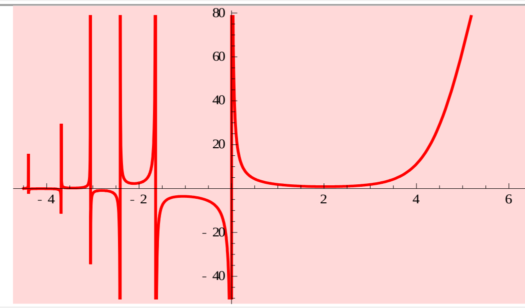


Fig. 4,a Graficele funcţiilor **gamma excentrice** de variabilă reală excentrică θ, în 2D, în funcţie de **excentricitatea liniară** s, pentru **S**(s ∈ [-1, 0,9]; ε = 0)

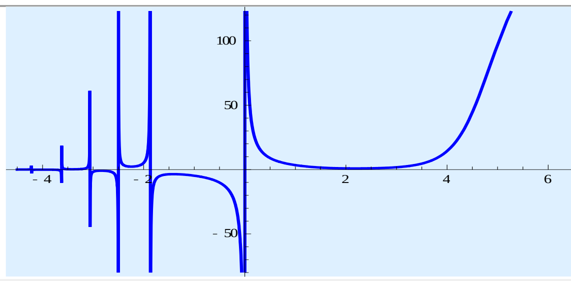
BUPT



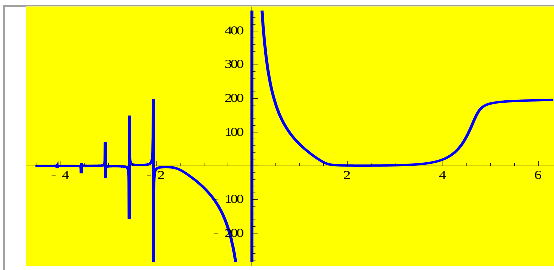
S(s = 0,3; ε = 0)



S(s = 0,6; ε = 0)

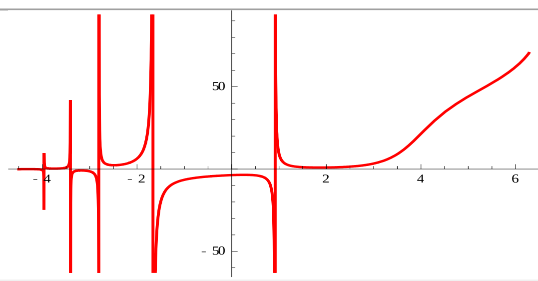


S(s = 0,8; ε = 0)

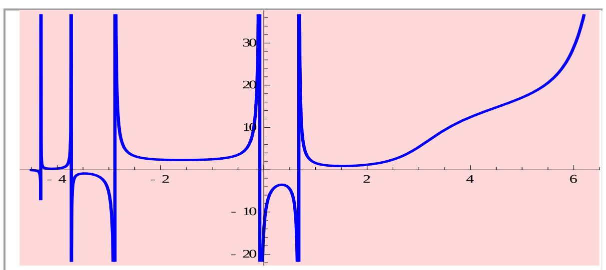


S(s = 0,99; ε = 0)

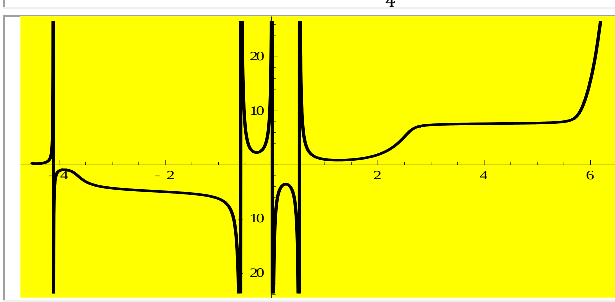
Fig. 4,b Graficele funcţiilor **gamma excentrice** de variabilă reală excentrică θ, în 2D, în funcţie de **excentricitatea liniară** **s**, pentru 4 valori ale lui **s**



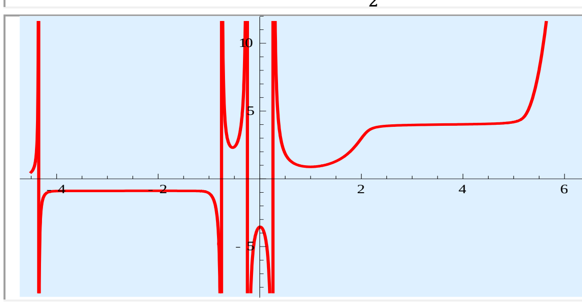
S(s = 0,8; ε = $\frac{\pi}{4}$)



S(s = 0,6; ε = $\frac{\pi}{2}$)



S(s = 0,8; ε = $\frac{5\pi}{6}$)



S(s = 0,6; ε = $\frac{\pi}{2}$)

Fig. 4,c Graficele funcţiilor **gamma excentrice** de variabilă reală excentrică θ, în 2D, în funcţie de excentricitatea **unghiulară ε**, pentru **S**(s = 0,8; **ε** ∈ [0; 2P])

BUPT

Reuniunea celor două domenii matematice **centric** (**MC**) şi excentric (**ME**) a oferit posibilitatea obţinerii unui nou şi deosebit de important domeniu matematic, cel al **super-matematicii** (**SM**), adică **MC** ∪ **ME** = **SM.**

În **figura 4,a** sunt prezentate graficele funcţiilor **gamma excentrice** de variabilă excentrică **θ**, în funcţie de excentricitatea liniară numerică **s**, în domeniul **s** ∈ [-1; 0,9] pentru excentricitatea unghiulară ε menţinută la valoarea nulă, adica ε = 0. În **figura 4,b** s-au extras patru grafice din **figura 4,a** cu menţinerea constantă a excentricităţii unghiulare **ε**. În **figura 4,c** s-a urmărit modificarea graficelor funcţiilor **gamma excentrice** prin varierea excentricităţii unghiulare ε la valorile $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$ şi $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ şi $\frac{5\pi}{6}$.

$$\text{Plot[Evaluate[Table[}\frac{\text{Gamma}\left[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]\right]}{\text{Sqrt}[1 + 0.01s - 0.2s\text{Cos}[t]]}, \{s, -10{,}0\}], \{t, -4.5{,}2\text{Pi}\}$$

$$\text{Plot[Evaluate[Table[}\frac{\text{Gamma}\left[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]\right]}{\text{Sqrt}[1 + 0.01s - 0.2s\text{Cos}[t]]}, \{s, 0{,}9\}], \{t, -4.5{,}2\text{Pi}\}$$

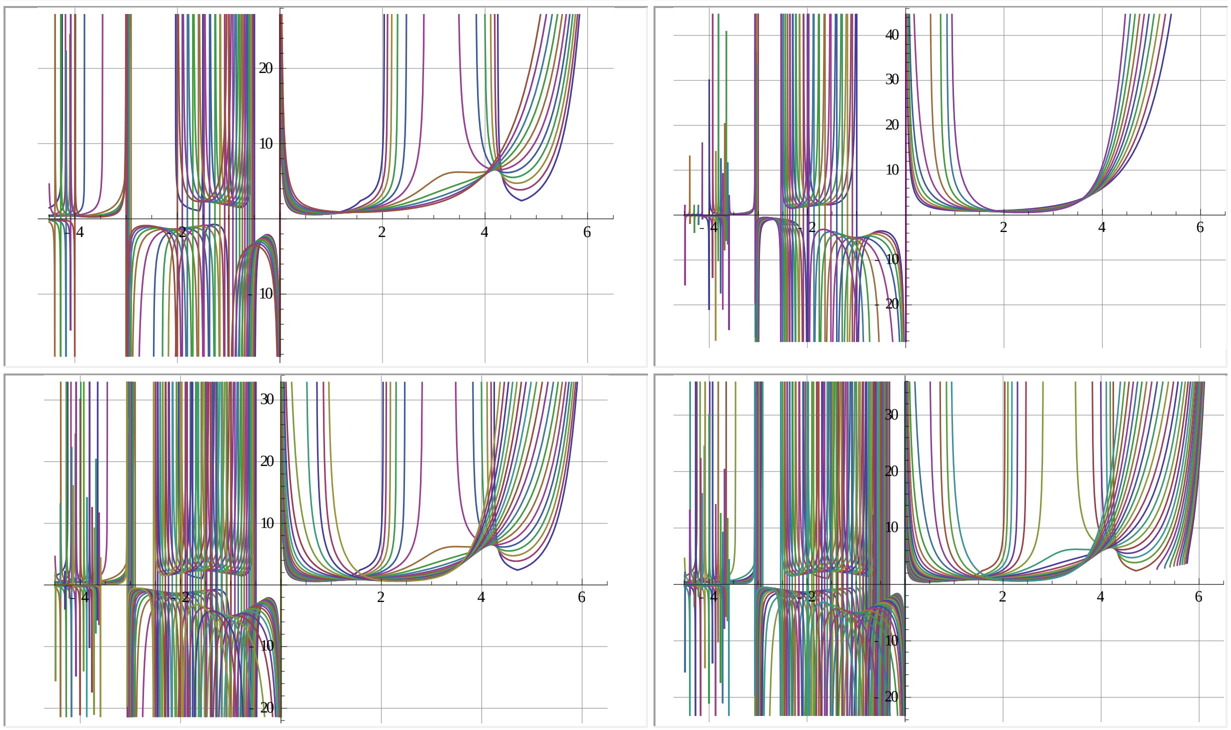


Fig. 5,a Graficele funcţiilor **gamma excentrice** de variabilă reală **centrică α**, în 2D, în funcţie de **excentricitatea liniară s**, pentru S(s ∈ (0, 1]; ε = 0)

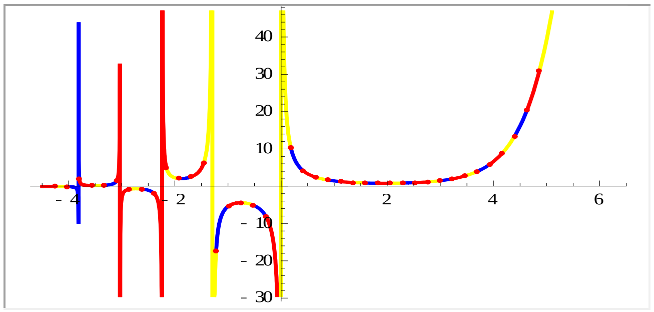
În spaţiul complex, funcţiile gamma de variabilă complexă se obţin prin înlocuirea variabilei complexe centrice **z = x + i y** cu funcţia de **variabilă excentrică θ**

(14) $z = aex(\mathbf{x}(\theta), S_x) + i\, aex(\mathbf{y}(\theta), S_y)$

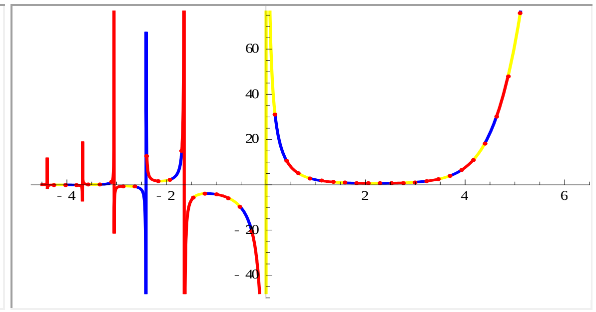
pentru funcţiile **gamma excentrice** de **variabilă complexă excentrică** şi cu

(15) $\mathbf{Z} = Aex(X(\alpha), S_x) + i\, Aex(Y(\alpha), S_y)$

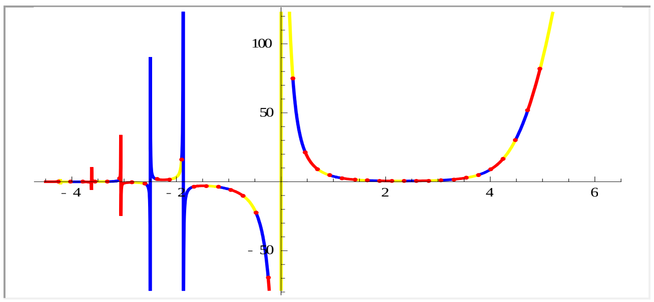
în cazul funcţiilor **gamma excentrice** de **variabilă complexă centrică α.**



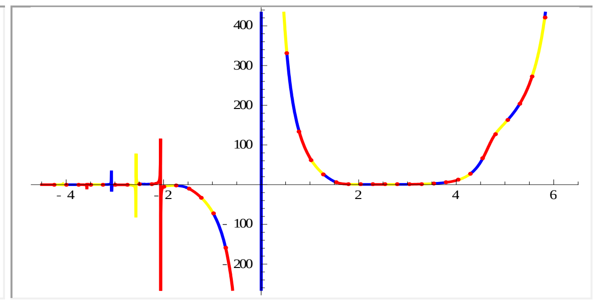
S(s = 0,3; ε = 0)



S(s = 0,6; ε = 0)

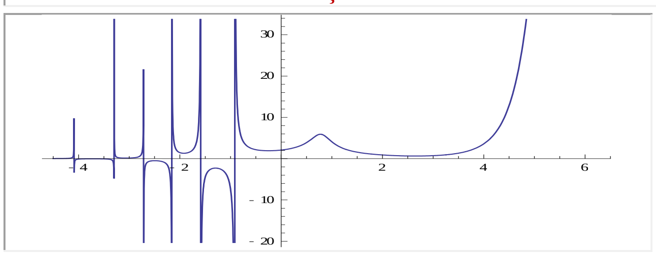


S(s = 0,8; ε = 0)

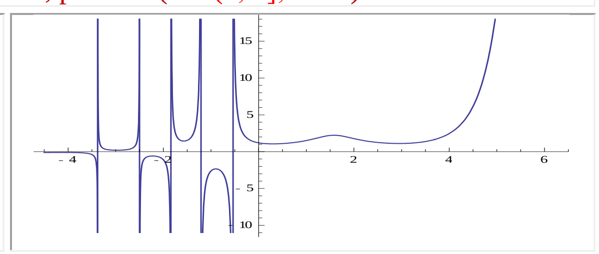


S(s = 0,99; ε = 0)

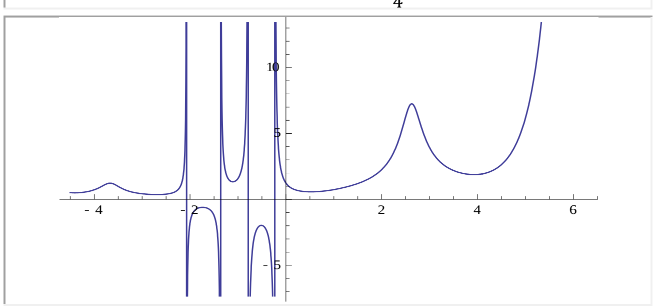
Fig. 5,b Graficele funcţiilor **gamma excentrice** de variabilă **reală centrică α**, în 2D, în funcţie de **excentricitatea liniară s**, pentru **S**(s ∈ (0, 1]; ε = 0)



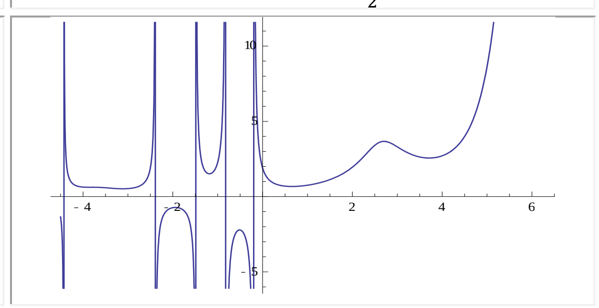
S(s = 0,8; $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$)



S(s = 0,6; $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$)



S(s = 0,8; $\varepsilon = \frac{5\pi}{6}$)



S(s = 0,6; $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$)

Fig. 5,c Graficele funcţiilor **gamma excentrice** de variabilă **reală centrică α**, în 2D, în funcţie de **excentricitatea unghiulară ε**, pentru **S**(s ∈ (0, 1]; ε = 0)

Plot3D[Abs[Gamma[x − ArcSin[0.4Sin[x]] + I(y − ArcSin[0.4Sin[y]])]], {x, −4.5,5}, {y, −5,5}]

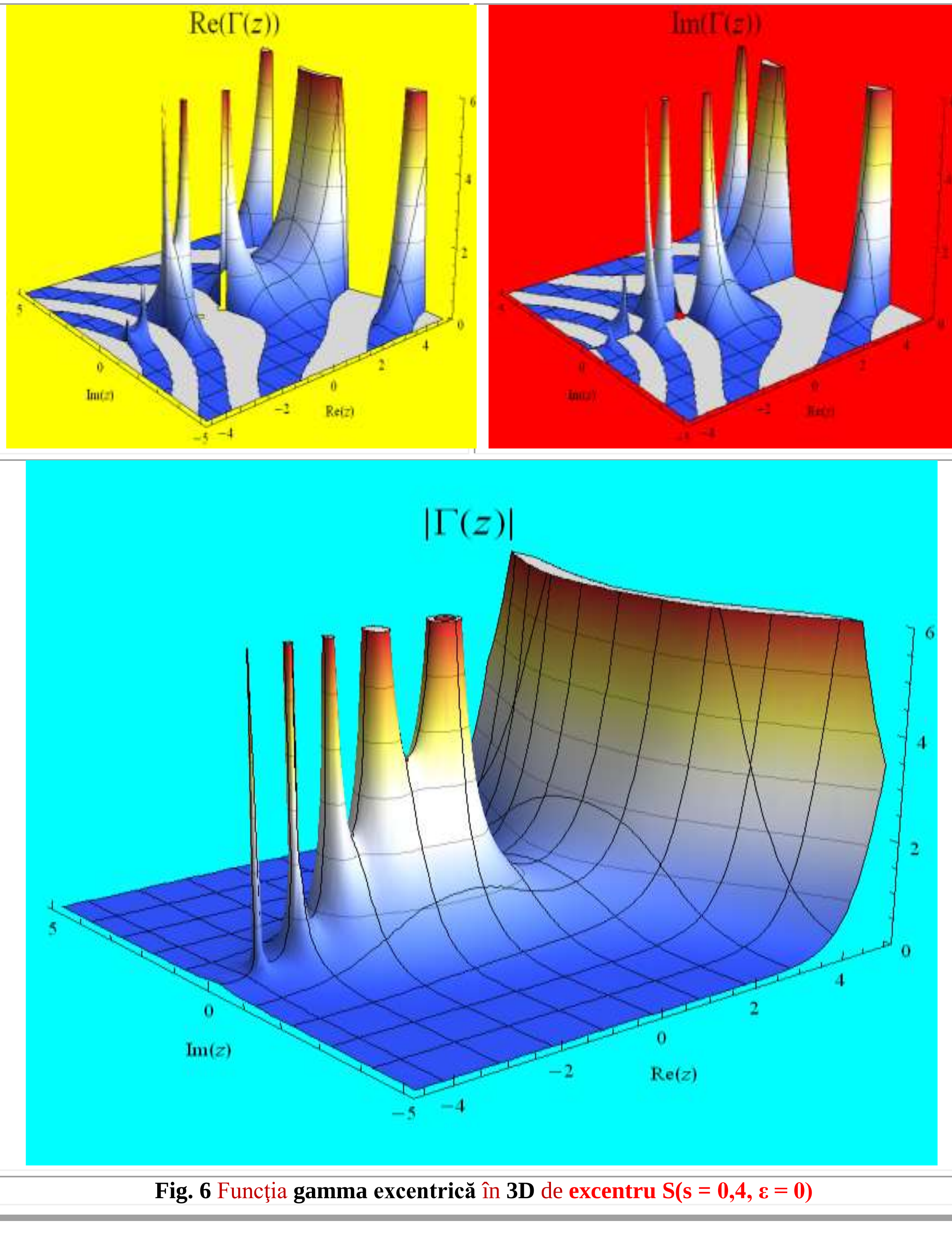


Fig. 6 Funcţia **gamma excentrică** în **3D** de **excentru S(s = 0,4, ε = 0)**

In **figurile 4** sunt prezentate funcţiile **gama excentrice de variabilă reală excentrică θ**, iar în **figurile 5** cele de **variabilă reală centrică α**.

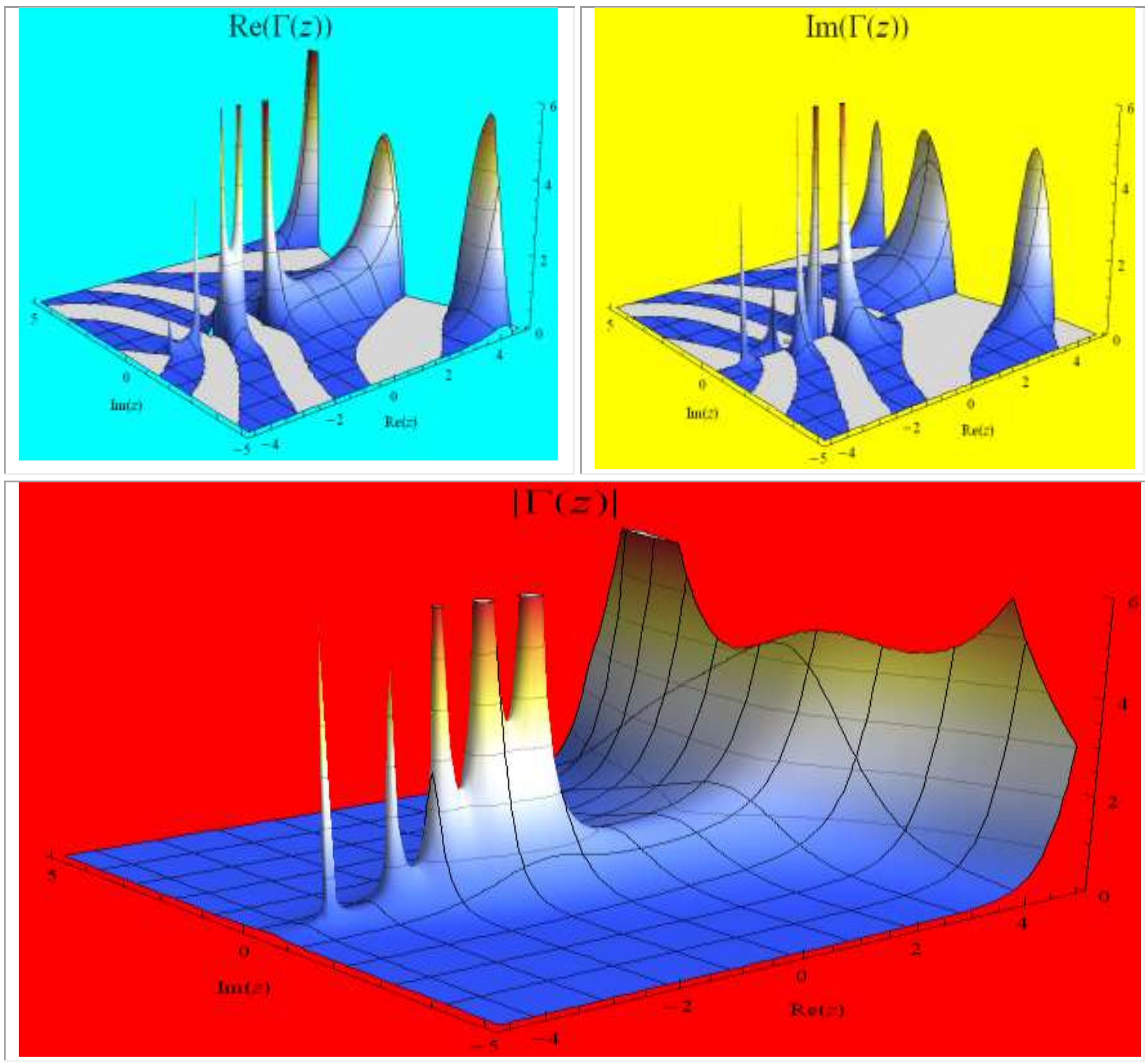
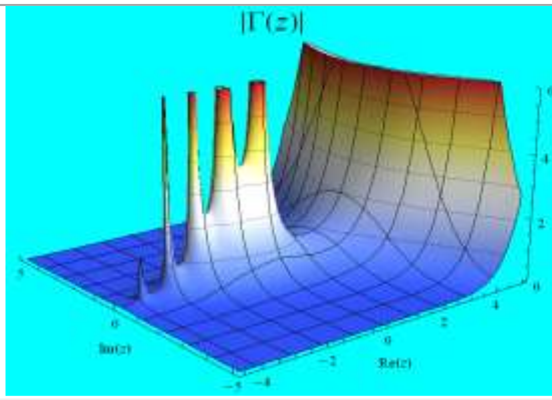


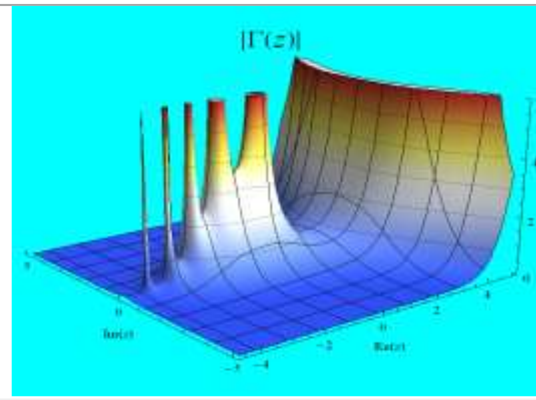
Fig. 7 Funcţia **gamma excentrică** în 3D de variabilă complexă şi de excentru S(s = 0,4, ε = $\frac{\pi}{2}$)

Figurile 6 şi **figurile 7** redau graficele în 3D ale funcţiilor **gama excentrice de variabilă complexă excentrică θ**, pentru un excentru **S**(s = 0,4; ε = 0) şi respectiv, pentru **S**(s = 0,4; ε = $\frac{\pi}{2}$). Sunt prezentate partea imaginară, partea reală, precum şi valoarea absolută a funcţiilor.

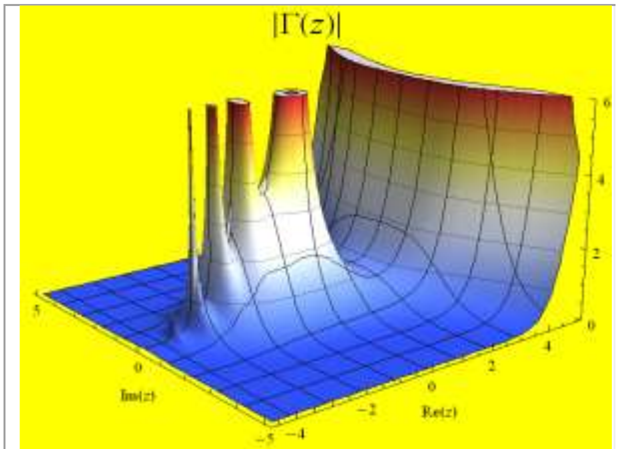
În **figura 8** sunt prezentate **funcţiile gamma excentrice** de variabile complexe excentrice pentru mai multe valori ale excentricitatii liniare numerice **s** şi anume: S(s ∈ [0,2, 0,98] **ε** = 0), numai pentru valoarea lor absolută $|\Gamma(\theta)_E| \equiv |\Gamma(z)|$.



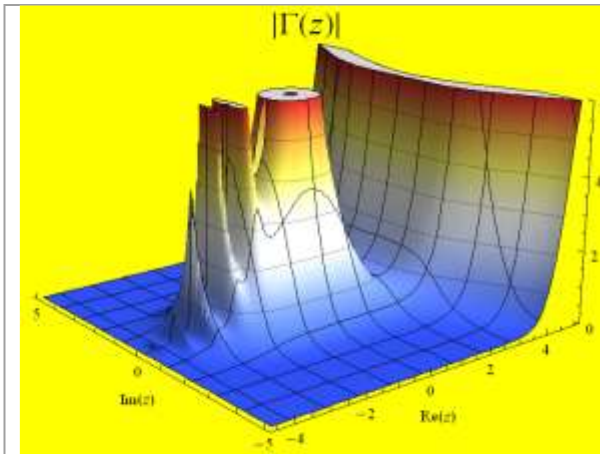
S(s = 0,2; ε = 0)



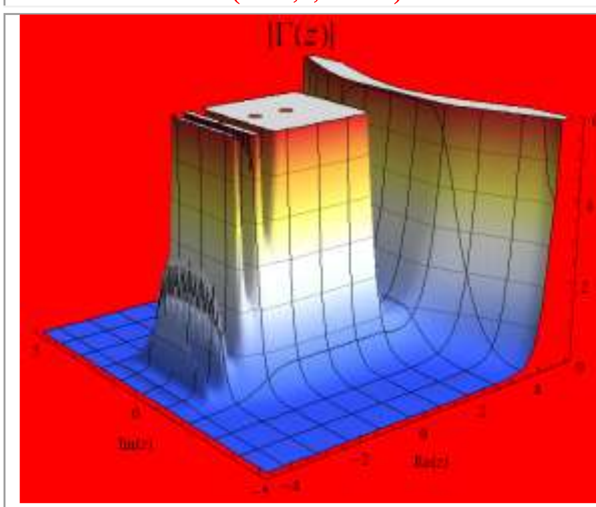
S(s = 0,4; ε = 0)

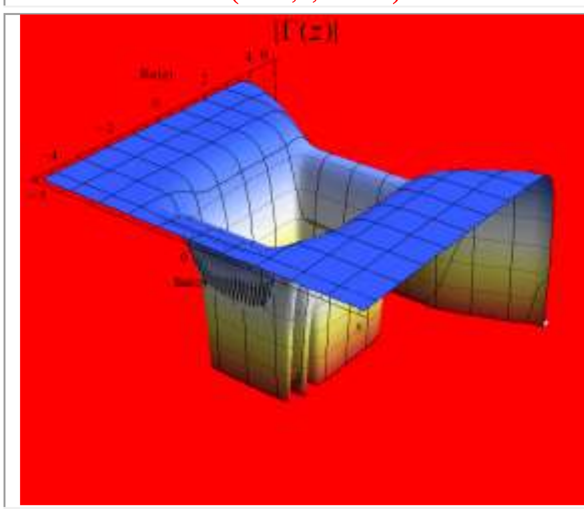


S(s = 0,6; ε = 0)



S(s = 0,8; ε = 0)





S(s = 0,98; ε = 0)

Fig. 8 Graficele funcţiei **gamma excentrică** în 3D de variabilă complexă
si de excentru S(s ∈ [0,2, 0,98] ε = 0)

4. BIBLIOGRAFIE

1	Şelariu Mircea	**MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ**	Com.VII Conf. Internat. de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO'95., Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronica, Dispozitive şi Rob. Ind., pag. 85...102
2	Şelariu Mircea	**STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ALE UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV CU AJUTORUL FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE cexθ ŞI sexθ**	Lucrarile Primei Conferinţe Naţionale de Vibraţii în Construcţia de Maşini, Timişoara 1978
3	Şelariu Mircea	**FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE cex ŞI sex- SOLUŢIILE UNOR SISTEME MECANICE NELINIARE**	Com. a VII-a Conf. Naţ. V.C.M., Timişoara, 1993, pag. 275...284.
4	Şelariu Mircea	**FUNCŢII SUPERMATEMATICE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ CA SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE**	A VIII_a Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO'98, Timişoara, 1998, pag. 557..572
4	Şelariu Mircea	**QUQDRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
6	Şelariu Mircea	**TRANSFORMAREA RIGUROASĂ ÎN CERC A DIAGRAMEI POLARE A COMPLIANŢEI**	Bul. X Conf. VCM ,Bul Şt. şi Tehn. al Univ. Poli. Timişoara, Seria Mec. Tom. 47 (61) mai 2002, Vol II pag. 247…260
7	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE Ediţia 1-a**	Editura POLITEHNICA, Timişoara, 2007
8	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE VOL I, Editia a 2-a**	Editura POLITEHNICA, Timişoara, 2012
9	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE VOL II, Editia a 2-a**	Editura POLITEHNICA, Timişoara, 2012
10	Şelariu Mircea Eugen	**MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ DE EXCENTRU PUNCT FIX**	WWW.CARTIAZ.RO Pag. 5/din8
11	Şelariu Mircea Eugen	**MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ DE EXCENTRU PUNCT MOBIL**	WWW.CARTIAZ.RO Pag. 5/din 8
12	Şelariu Mircea Eugen	**APROXIMAREA FUNCŢIILOR: UN SISTEM SUPERMATEMATIC CU BAZA CONTINUA DE APROXIMARE A FUNCTIILOR**	WWW.CARTIAZ.RO Pag. 1/din 8
13	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII ÎN TREPTE SMARANDACHE**	WWW.CARTIAZ.RO Pag. 2/din 8
14	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. VOL I şi II, Ediţia a 3-a**	Ed. MatrixRom, Buc. 2015

Motto:” *M-au urmărit multe gânduri profunde,*
dar numai în tinereţe am fost mai iute decât ele.”

CAPITOLUL XXIX

FUNCŢII SUPERMATEMATICE BESSEL CENTRICE

1. INTRODUCERE

După http://ro.wikipedia.org/wiki/Func “Prin **funcții Bessel** se înțeleg soluțiile canonice ***Z(z)*** ale ecuației diferențiale a lui **Bessel** (cu ***z*** real sau complex):

(1) $$\frac{z^2 . d^2 \mathbf{Z}}{dz^2} + \frac{z . d\mathbf{Z}}{dz} + (z^2 - \alpha^2)\,\mathbf{Z} = 0$$

pentru o valoare arbitrară $\boldsymbol{\alpha}$, reală sau complexă, numită ***ordinul*** funcției **Bessel**. Cele mai comune și mai importante cazuri fiind acelea în care $\boldsymbol{\alpha}$ are o valoare întreagă ***n***.

De altfel, $\boldsymbol{\alpha}$ și $-\boldsymbol{\alpha}$ produc aceeași ecuație diferențială, convențional definindu-se funcții **Bessel** diferite pentru cele două ordine, dar, cel mai adesea, sunt alese ca funcții netede de $\boldsymbol{\alpha}$. De asemenea, funcțiile **Bessel** sunt cunoscute ca **funcții cilindrice** sau **cilindrice armonice** deoarece ele se regăsesc în soluția ecuației Laplace în coordonate cilindrice.

Ele au fost definite prima dată de Daniel Bernoulli și generalizate de Friderich Bessel, de unde și denumirea lor. Prin aplicarea metodei separării variabilelor, pentru soluționarea ecuației Laplace și a ecuației Helmholz, în coordonate cilindrice sau coordonate sferice, se obține ecuația lui **Bessel**, din care se obțin funcțiile **Bessel**.

Rezolvând ecuația în sistemul de ***coordonate cilindrice***, se obțin **funcții Bessel** de ***ordin întreg*** ***(α = n)***; rezolvând ecuația în sistemul de ***coordonate sferice***, se obțin **funcții Bessel** de ***ordin fracționar*** ***(α = n +1/2)***.

Importanța funcțiilor **Bessel** rezultă din faptul că soluționează multe probleme de potențial static și de propagare a undelor, de exemplu:

- unde electromagnetice în ghiduri de undă cilindrice,
- transferul de căldură în obiecte cilindrice,
- modurile de vibrații ale unei membrane circulare subțiri,
- probleme de difuzie,
- soluția ecuației Schrödinger radială pentru o particulă liberă, în coordinate sferice,
- soluționarea unor probleme de divergentă aeroelastică și flutter în Aeroelasticitate,
- semnale de proces în electronică precum sinteza FM sau filtre Bessel.

Deoarece ecuația lui **Bessel** este o ecuație diferențială ordinară, de ordinul doi, aceasta va avea două soluții liniar independente, iar datorită diverselor formulări ale funcției **Bessel**, în serie sau integrală, se alege forma cea mai convenabilă pentru problema care se soluționează.”

În lucrarea **Mireca Eugen Şelariu “FUNCŢIILE cexθ ŞI sexθ CA SOLUŢII ALE UNOR ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDINUL DOI CU COEFICIENŢI VARIABILI**” Cap **11** din [12] şi [13] soluţiile sunt ale următoarei ecuaţii diferenţiale

$$\boxed{\ddot{z}_{1,2} - \frac{\epsilon_{1,2}}{\omega_{1,2}}\,\dot{z}_{1,2} + \omega_{1,2}^2 = 0}$$

(2)

care poate fi scrisă şi sub o formă asemănătoare ecuaţiei (1), dar având cu totul alte semnificaţii

(2') $\frac{\omega.d^2\mathbf{Z}}{dt^2} - \frac{\varepsilon.d\mathbf{Z}}{dt} + \omega\,\mathbf{Z} = 0$ sau $\dot{\theta}.\ddot{Z} - \ddot{\theta}.\dot{Z} + \dot{\theta}.Z = 0$

în care: $Z_{1,2} = C_1 cex_{1,2}\theta + C_2 sex_{1,2}\theta$; $\omega_{1,2} = A\ \Omega\ dex_{1,2}\theta$; $\varepsilon_{1,2} = \frac{d\omega 1,2}{dt}$; $cex_{1,2}\theta$ şi $sex_{1,2}\theta$ fiind cele două determinări (principală **1** şi secundară **2**) ale **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**), de variabilă **excentrică θ**, **cosinus (cex)** şi **sinus (sex)** **excentrice**, iar $\omega_{1,2}$ şi $\varepsilon_{1,2}$ sunt exprimabile prin **FSM-CE** derivată excentrică **$dex_{1,2}\theta$**, care reprezintă viteza unghiulară variabilă $\omega_{1,2}$ pe cercul unitate (R = 1), cu **θ = Ω.t,** când un punct se roteşte pe cerc cu viteza unghiulară constantă Ω = 1, faţă de un punct excentric **S(s, ε)** din planul cercului unitate – denumit **excentru** - şi, respectiv, derivata acesteia ca funcţie de **timpul t**, deci acceleraţia unghiulară variabilă pe cercul unitate.

Şi alte **funcţii supermatematice** (**FSM)** precum cele **circulare elevate** (**FSM-CEL**), ca şi **FSM circulare exotice** sunt soluţii ale unor sisteme de **caracteristici elastice statice neliniare** (CES -NL).

Prin apariţia **funcţiilor supermatematice** **Bessel** **excentrice** (**FSM-CE**), **Bessel** **elevate** (**FSM-BEL**), ca şi a celor **Bessel** **exotice** (**FSM-BEx**), funcţiile **Bessel** ***ordinare*** suntem nevoiţi să le denumim şi "***centrice***" (**FBC**), justificând, astfel, denumirile în cele ce urmează.

2.1 FUNCȚII Bessel CENTRICE (FBC) DE SPEȚA I-a : $J_\alpha(z)$

Funcțiile Bessel **centrice** de speța I-a, notate $J_\alpha(z)$, sunt soluții ale ecuației diferențiale a lui **Bessel**, care au valoare finită în origine $z = 0$ pentru valori α întregi nenegative și valoare infinită în origine pentru valori α negative diferite de întregi.

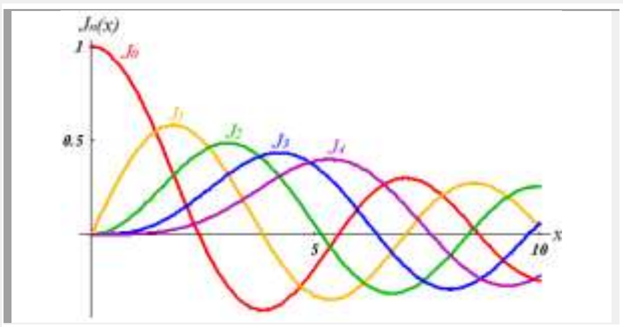


Fig.1,a Graficele funcţiilor **Bessel** de speţa I-a, $J_\alpha(z)$ şi ordin întreg α = 0, 1, 2, 3 şi 4

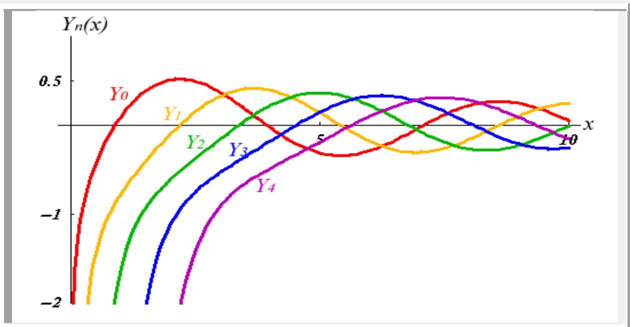


Fig.2,a Graficele funcţiilor **Bessel** de speţa II-a, $Y_\alpha(z)$ şi ordin întreg α = 0, 1, 2, 3 şi 4

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin[sSin[t]]/t}, {s, −1,0}], {t, 0,4Pi}]]

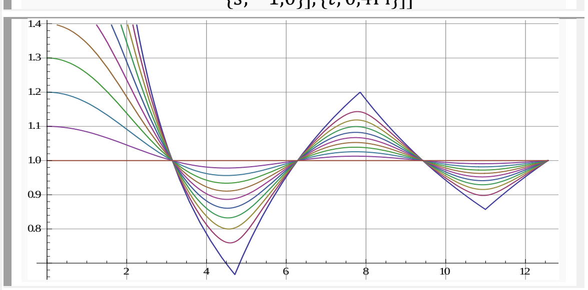


Fig. 3,a **FSM-CE** $\frac{\boldsymbol{aex\theta}}{\boldsymbol{\theta}} =$ **uexθ**,de **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin[sSin[t]]/t}, {s, 0,1}], {t, 0,4Pi}]]

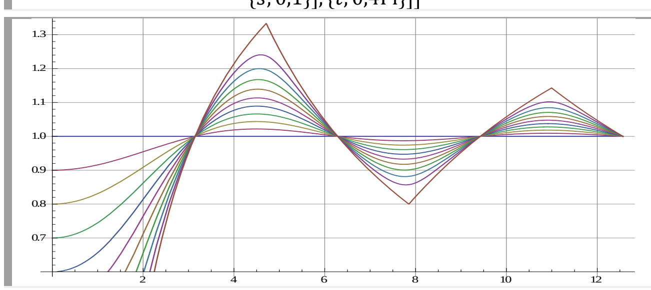


Fig. 4,a **FSM-CE** $\frac{\boldsymbol{aex\theta}}{\boldsymbol{\theta}} =$ **uexθ**, de **s ∈ [0, +1]**

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin[sSin[tSqrt[t]]]/t}, {s, −1,0}], {t, 0,2Pi} cu pasul 0,2	Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin[sSin[tSqrt[t]]]/t}, {s, 0,1}], {t, 0,2Pi}, pasul 0,2

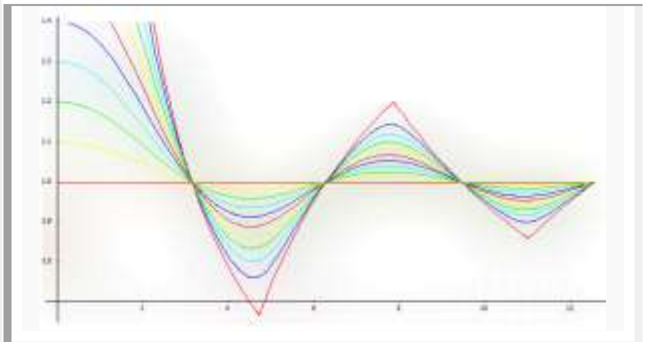
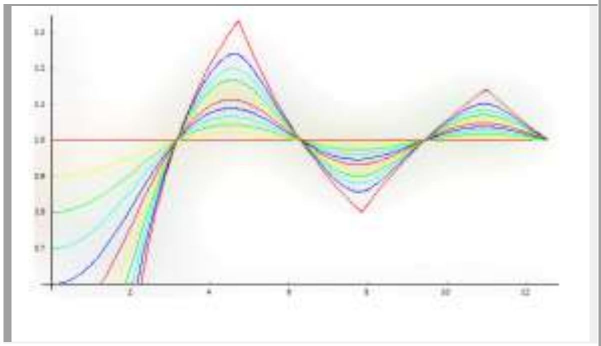

	

Fig. 3,b FSM-CE $1-\frac{bex(\theta\sqrt{\theta})}{\theta}$, pentru **s ∈ [-1,0]**	**Fig. 4,b FSM-CE** $1-\frac{bex(\theta\sqrt{\theta})}{\theta}$, pentru **s ∈ [0, +1]**

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin[sSin[tSqrt[t]]]/tSqrt[t]}, {s, −1,0}], {t, 0,2Pi}	Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin[sSin[tSqrt[t]]]/(tSqrt[t])}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}

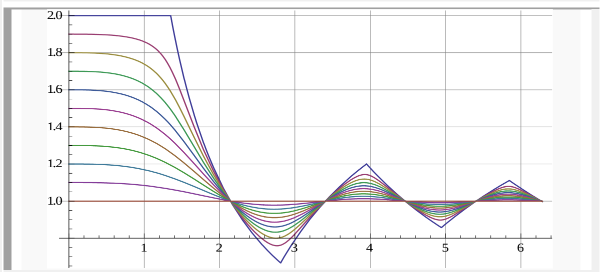
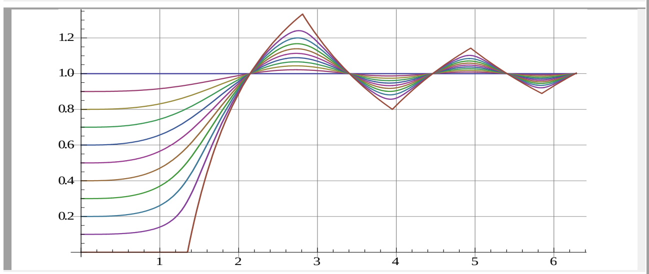

	

Fig. 3,c FSM-CE $1-\frac{bex(\theta\sqrt{\theta})}{\theta\sqrt{\theta}}$, pentru **s ∈ [-1,0]**	**Fig. 4,c FSM-CE** $1-\frac{bex(\theta\sqrt{\theta})}{\theta\sqrt{\theta}}$, pentru **s ∈ [0, +1]**

Funcția **Bessel** de speța I-a este definită de următoarea serie Taylor în jurul originii ***z = 0***:

(3) $J_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\alpha}$

în care ***Γ(z)*** este funcția Gamma a lui Euler, care reprezinta generalizarea funcției factorial pentru valori ***z*** diferite de întregi.

Graficul funcției **Bessel** (**Fig.1,a** şi **Fig.2,a**) oscilează precum cel al funcției sinus sau cosinus, diferența fiind aceea că funcția **Bessel** descrește proporțional cu $\frac{1}{\sqrt{z}}$ spre infinit, precum și faptul că rădăcinile nu sunt în general periodice, cu excepția celor asimptotice pentru valori mari ale lui ***z***.

Funcţii asemănătoare, dar strict periodice, de perioadă 2π, sunt **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) amplitudine excentrică **aexθ** raportate la variabila lor excentrică **θ**, notate cu **uexθ**, cu graficele prezentate în **figurile 3,a şi 4,a**, de ecuaţii

(4) F[**θ**, S(s,ε)] = $\frac{aex\theta}{\theta} = \frac{\theta-\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]}{\theta} = 1-\frac{\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]}{\theta} = 1-\frac{bex\theta}{\theta}$ = **uexθ**

sau de variabilă centrică Aexα, raportate la variabila lor centrică **α**, notate cu **Uexα**, cu graficele prezentate în **figurile 5,a şi 6,a**, de ecuaţii

(5) $\quad F[\alpha,\ S(s,\varepsilon)] = \frac{Aex\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha + \arcsin[s.\sin(\alpha-\varepsilon)]}{\alpha\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = 1 + \frac{\arcsin[s.\sin(\alpha-\varepsilon)]}{\alpha.Rex\alpha} = 1 + \frac{Bex\alpha}{\alpha} = \mathbf{Uex\alpha}$

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[1sSin[t]]/(tSqrt[1 + (s)^2 − 2sCos[t]])}, {s, −1,0}], {t, 0,4Pi}

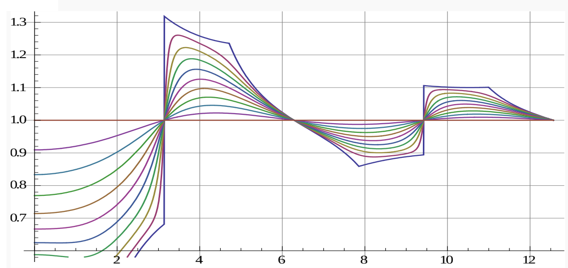


Fig. 5,a FSM-CE $\frac{\boldsymbol{Aex\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{Uex\alpha}$**,**
de **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[1sSin[t]]/(tSqrt[1 + (s)^2 − 2sCos[t]])}, {s, 0, +1}], {t, 0,4Pi}

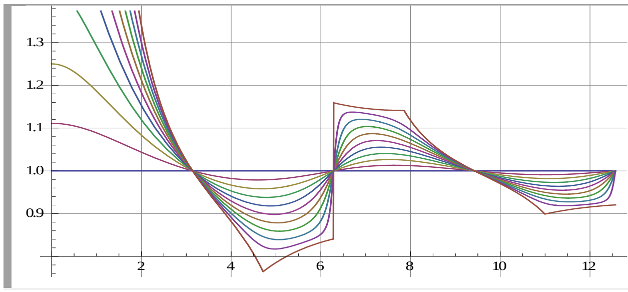


Fig. 6,a FSM-CE $\frac{\boldsymbol{Aex\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{Uex\alpha}$**,**
de **s ∈ [0, +1]**

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[sSin[tSqrt[t]/(t. Sqrt[1 + (s)^2 − 2sCos[tSqrt[t]]])},
{s, −1,0}], {t, 0,2Pi}]]

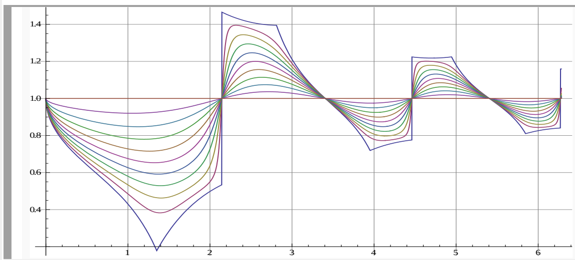


Fig. 5,b FSM-CE 1 $-\ \frac{\boldsymbol{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}}{\boldsymbol{\alpha}}$,
pentru **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[sSin[tSqrt[t]/(t. Sqrt[1 + (s)^2 − 2sCos[tSqrt[t]]])},
{s, 0, +1}], {t, 0,2Pi}]]

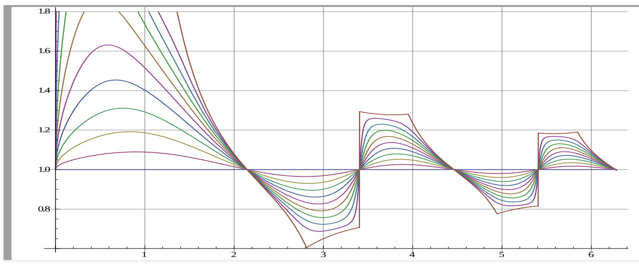


Fig. 6,b FSM-CE $1 - \frac{\boldsymbol{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}}{\boldsymbol{\alpha}}$,
pentru **s ∈ [0, +1]**

Plot[Evaluate[Table[{+ArcSin[sSin[tSqrt[t]]]/(tSqrt[t] Sqrt[1 + (s)^ − 2sCos[tSqrt[t]]]])},
{s, −1,0}], {t, 0,2Pi}]]

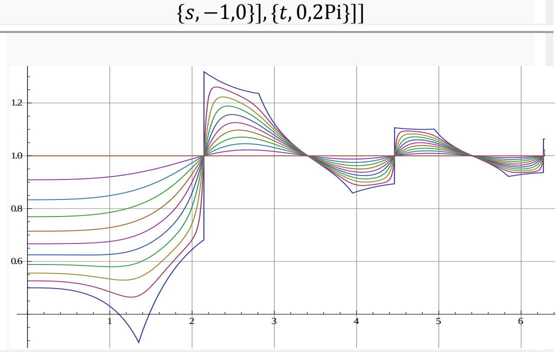


Fig. 5,c FSM-CE 1 $- \frac{\boldsymbol{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}}{\boldsymbol{\alpha\sqrt{\alpha}}}$,
pentru **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{+ArcSin[sSin[tSqrt[t]]]/(tSqrt[t] Sqrt[1 + (s)^ − 2sCos[tSqrt[t]]]])},
{s, 0, +1}], {t, 0,2Pi}]]

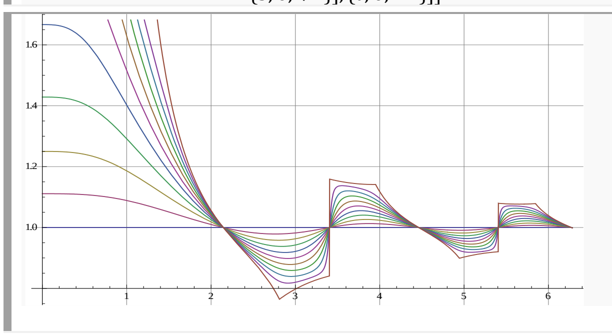


Fig. 6,c FSM-CE 1 $- \frac{\boldsymbol{bex(\alpha\sqrt{\alpha})}}{\boldsymbol{\alpha\sqrt{\alpha}}}$,
pentru **s ∈ [0, +1]**

Dacă, în ecuaţiile (4) şi (5), variabilele **θ** şi **α** se înmulţesc cu $\sqrt{\theta}$ şi, respectiv, cu $\sqrt{\alpha}$, ***numai*** cele din **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) beta excentrice **bexθ** şi **Bexα,** se obţin funcţii de perioadă variabilă, aşa cum se prezită graficele din **figura 3,b** şi **4,b** şi, respectiv, **figura 5,b** şi **6,b.**

Dacă, aceste înlocuiri se fac în funcţiile **bexθ** şi **Bexα** cât şi în împărţitor, din ecuaţiile (4) şi (5), atunci se obţin funcţiile de perioadă variabilă, prezentate în **figurile 3,c** şi **4,c** şi, respectiv, **5c** şi **6,c**.

S-au prezentat aceste **FSM-CE** denumite **"funcţii unitate excentrică (FUE)",** deoarece conţin cifra **1** şi sunt notate cu **uexθ** şi, respectiv, **Uexα** în eventualitatea că cineva, cândva, va avea nevoie de ele. Dacă de acestea nu, atunci, cu siguranţă, de cele prezentate în **figura 7,a** şi **8,a** care sunt **FSM-CE beta excentrică bexθ** şi **derivata excentrică dexθ**, de variabile excentrice **θ**, vor avea nevoie de ele la reprezentarea vibraţiilor libere neamortizate şi amortizate de caracteristică elastică statică (**CES**) liniară şi / sau neliniară (**Fig. 7,b** şi **Fig.8,b**).

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[sSin[t]]},{s,0,1}],{t,0,4Pi}]]

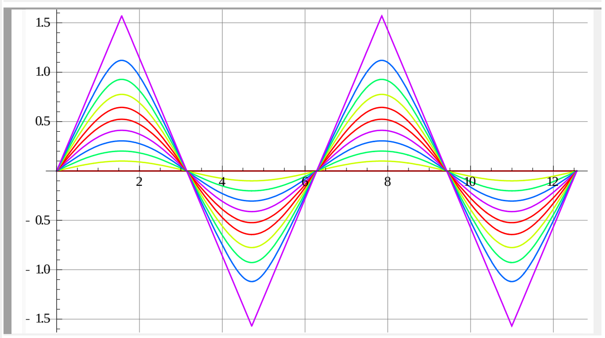


Fig. 7,a FSM-CE beta excentrice

Plot[Evaluate[Table[{1 − s Cos[t]/(Sqrt[1 − (sSin[t])²])}, {s,−1,0}],{t,0,4Pi}]

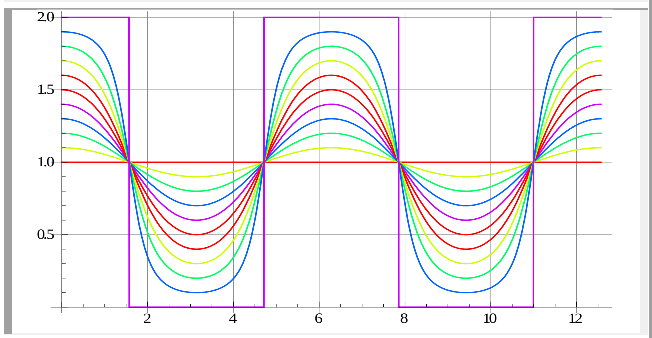


Fig. 8,a FSM-CE derivate excentrice

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[sSin[t]]/t},{s,0,1}],{t,0,4Pi}]]

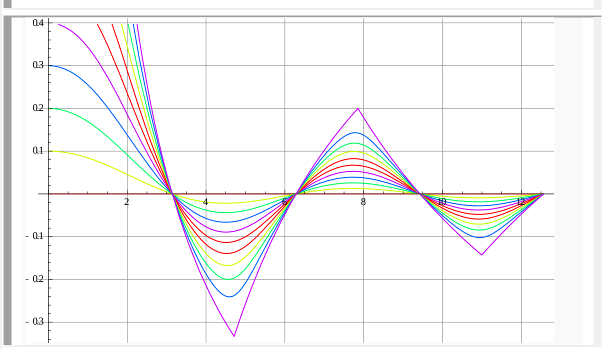


Fig. 7,b FSM-CE beta excentrice

Plot[Evaluate[Table[{1 − s Cos[t]/(tSqrt[1 − (sSin[t])²])}, {s,−1,0}],{t,0,4Pi}]

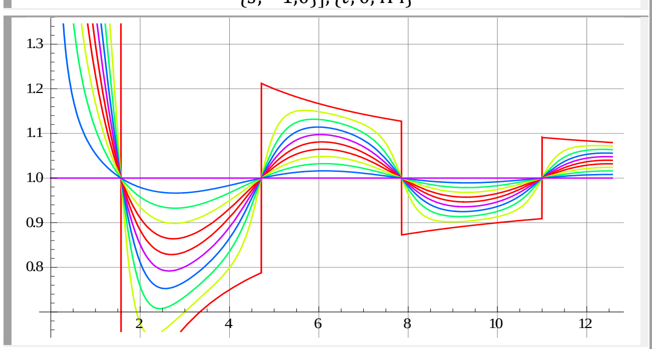


Fig. 8,b FSM-CE derivate excentrice

Pentru **s = 1**, funcţia **bexθ** exprimă, în cel mai simplu mod, o funcţie **triunghiulară** (**Fig. 7,a**), iar funcţia **dexθ** o funcţie **dreptunghiulară** (**Fig. 8,a**).

Pentru alte valori ale excentricităţii numerice **s**, se pot obţine funcţii care să exprime vibraţii libere amortizate, de **caracteristică elastică statică** (**CES**) liniară sau neliniară (**Fig.7,b** şi **Fig. 8,b**), **semnale de bază**, deosebit de importante în mecanică cât şi în electrotehnică, ele putând fi reproduse şi fizic, aşa cum rezultă în continuare.

Spicuim din http://www.scritub.com/tehnica-mecanica/SEMNALE-ELECTRICE93336.php :

„În general, un generator de funcţii este un aparat ce poate să furnizeze cel puţin trei forme de undă de bază: **sinusoidală**, **dreptunghiulară** şi **triunghiulară**.

Plecând de la aceste funcţii de bază, generatoarele mai perfecţionate sunt capabile să furnizeze şi alte funcţii (semnale): **rampe liniare**, **rampe în trepte**, **trapez**, **semnale dreptunghiulare** cu factor de umplere variabil sau chiar şi semnale de zgomot (**Fig. 9,a**).”

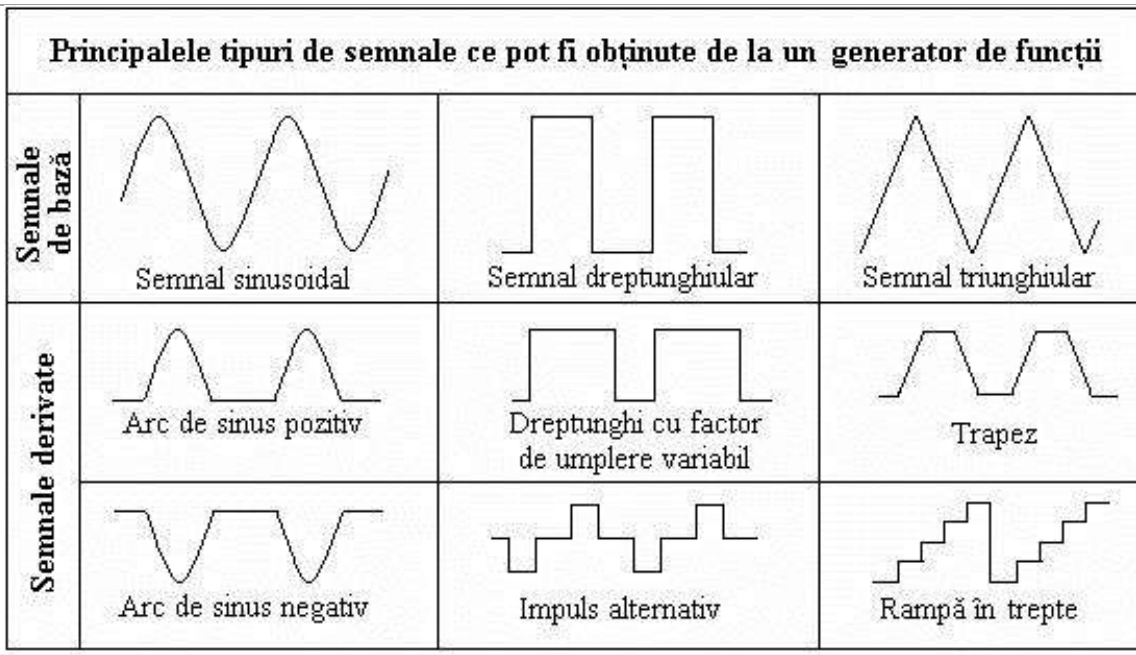


Fig.9,a Generarea electronică a semnalelor

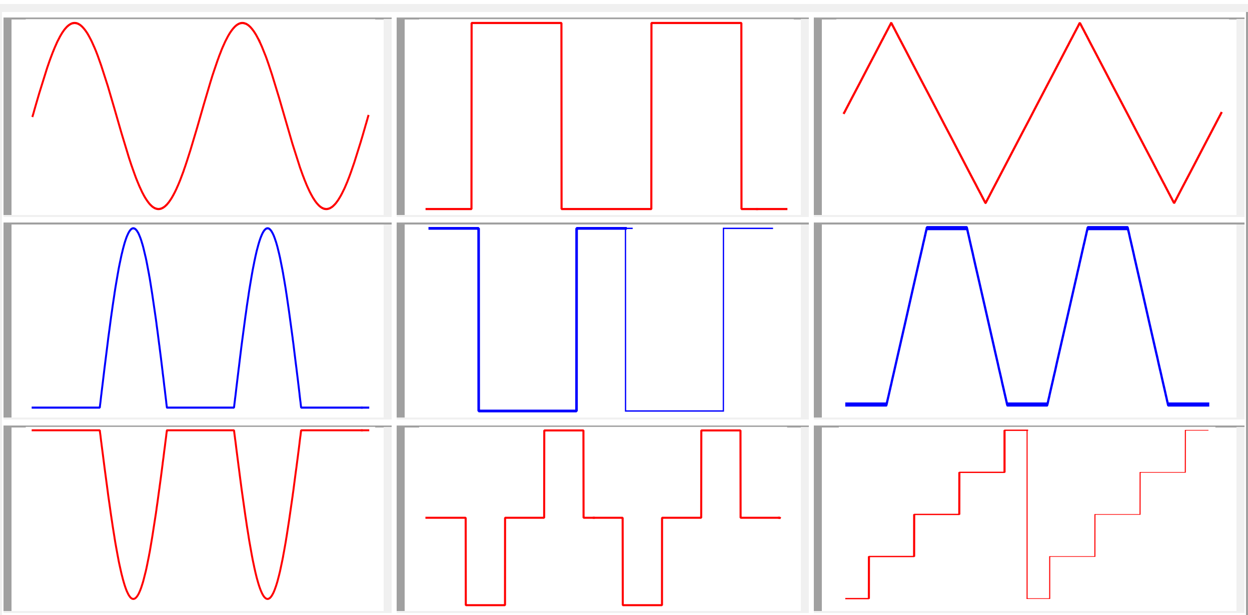


Fig.9,b Generarea supermatematică a semnalelor din figura 9,a

Figura 9,b demonstrează, dacă mai era necesar, că **FSM-CE** pot, cel mai bine şi mai simplu, să genereze diverse semnale utile, precum cele generate electronic, din **figura 9,a** şi cu mult mai multe şi mult mai complexe, precum cele prezentate în **figura 9,c**.

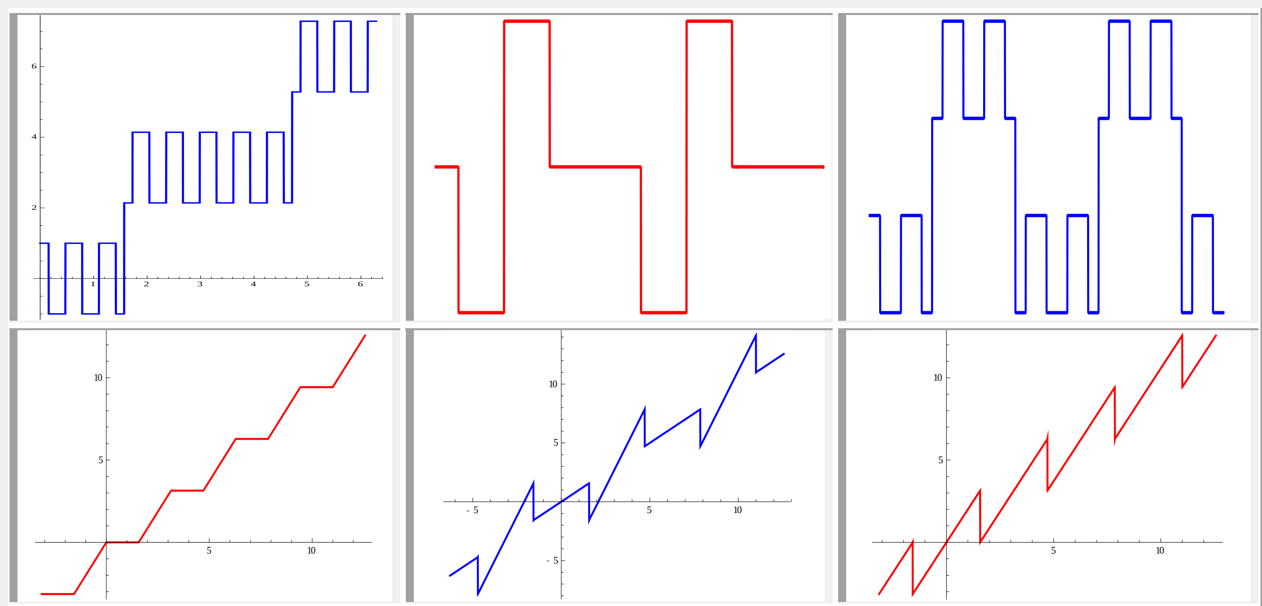


Fig. 9,c Generarea supermatematică a semnalelor

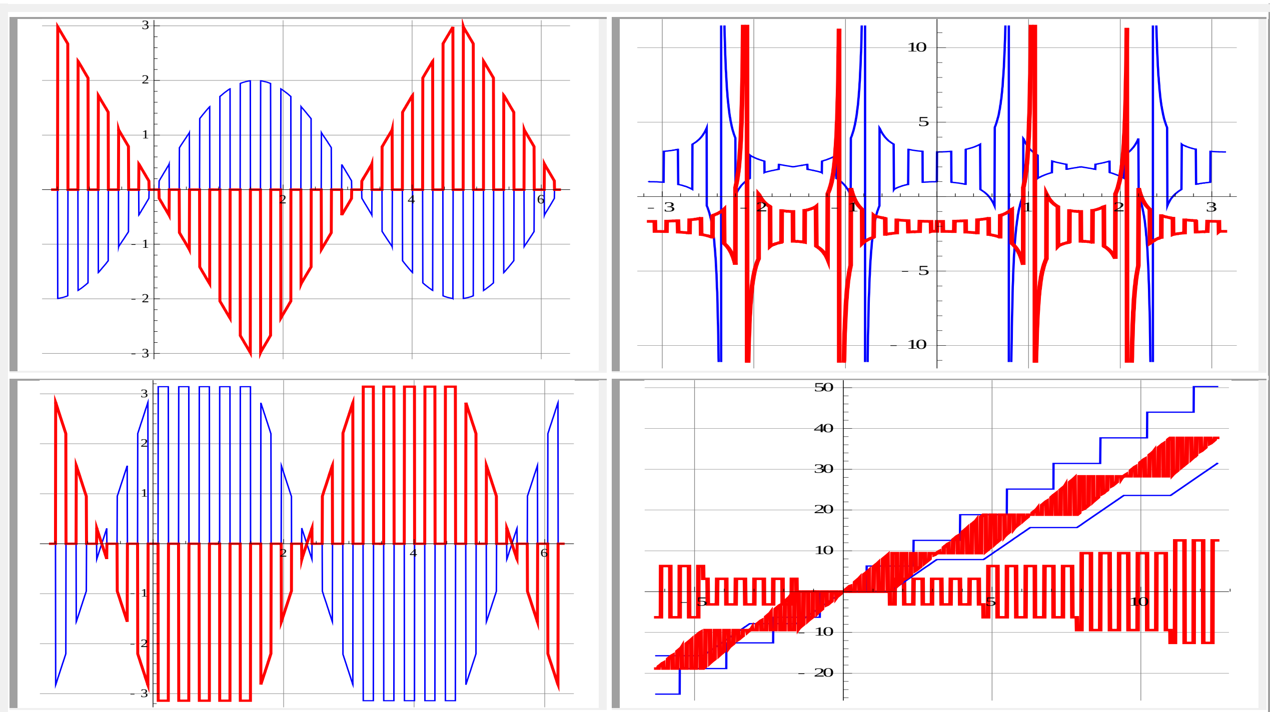


Fig.9,d Generarea supermatematică a semnalelor eşantionate

În **figura 9,d** se prezintă modul de **eşantionare**, sau procesarea de semnal, a semnalelor **sinusoidale**, **dreptunghiulare**, **triunghiulare** ş.a. prin utilizarea **FSM-CE dex**(10.**θ**) de excentricitate numerică **s = 1**.

Graficele **funcţiilor Bessel** de prima speţă şi de ordin întreg α = 0, 1, 2, 3 şi 4 sunt prezentate în **figura 1.**

Pentru valori ***α*** diferite de întregi, funcțiile $J_\alpha(z)$ și $J_{-\alpha}(z)$ sunt liniar independente, reprezentând cele două soluții ale ecuației diferențiale. Pe de altă parte, pentru ***α*** de ordin întreg, este valabilă următoarea relație (de notat că **funcția Gamma** devine infinită pentru argumente întregi negative):

(6) $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$

acest lucru arătând că cele două soluții nu sunt liniar independente. În acest caz, a doua soluție liniar independentă este dată de funcția Bessel de speța a II-a.

http://demonstrations. wolfram. com / Bessel Functions In The Complex Plane/

```
Manipulate[Plot3D[Re[fn[n, x + I y]], {x, -3,2}, {y, -3,2}, ImageSize → {500,400}, ColorFunction → (ColorData["TemperatureMap"]),
    MaxRecursion → 2], {{n, 0, "n"}, -5,5,1}, {{fn, BesselI, "function"}, {BesselI → TraditionalForm[In], BesselJ
        → TraditionalForm[Jn], BesselK → TraditionalForm[Kn], BesselY → TraditionalForm[Yn]}}]
```

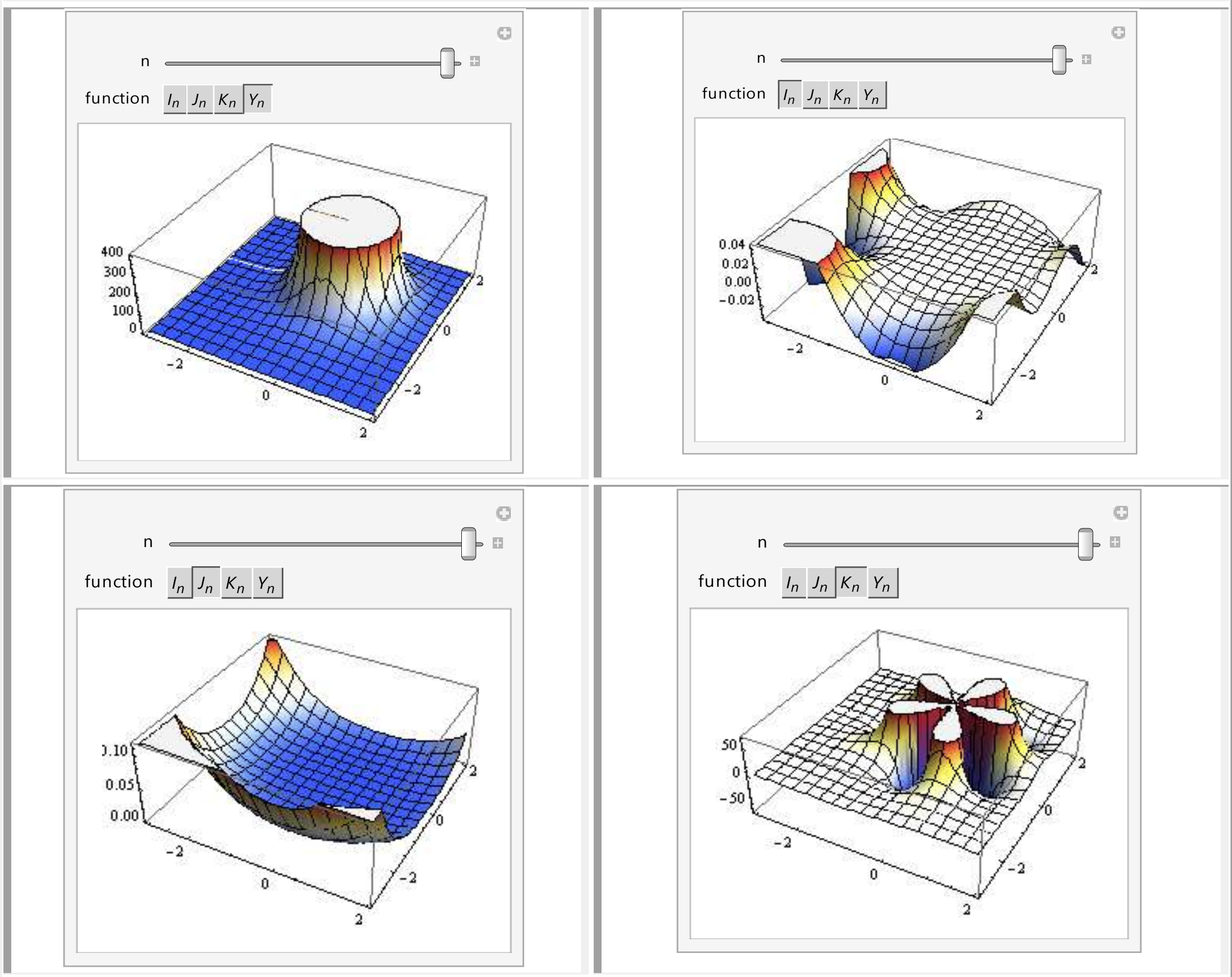


Fig.10,a Prezentarea programului: partea reală Yn ◤ şi Kn ◢, **imaginară** In ◥ şi **absolută** Jn ◣ a funcţiilor **Bessel** centrice în planul complex (n ≡ α)

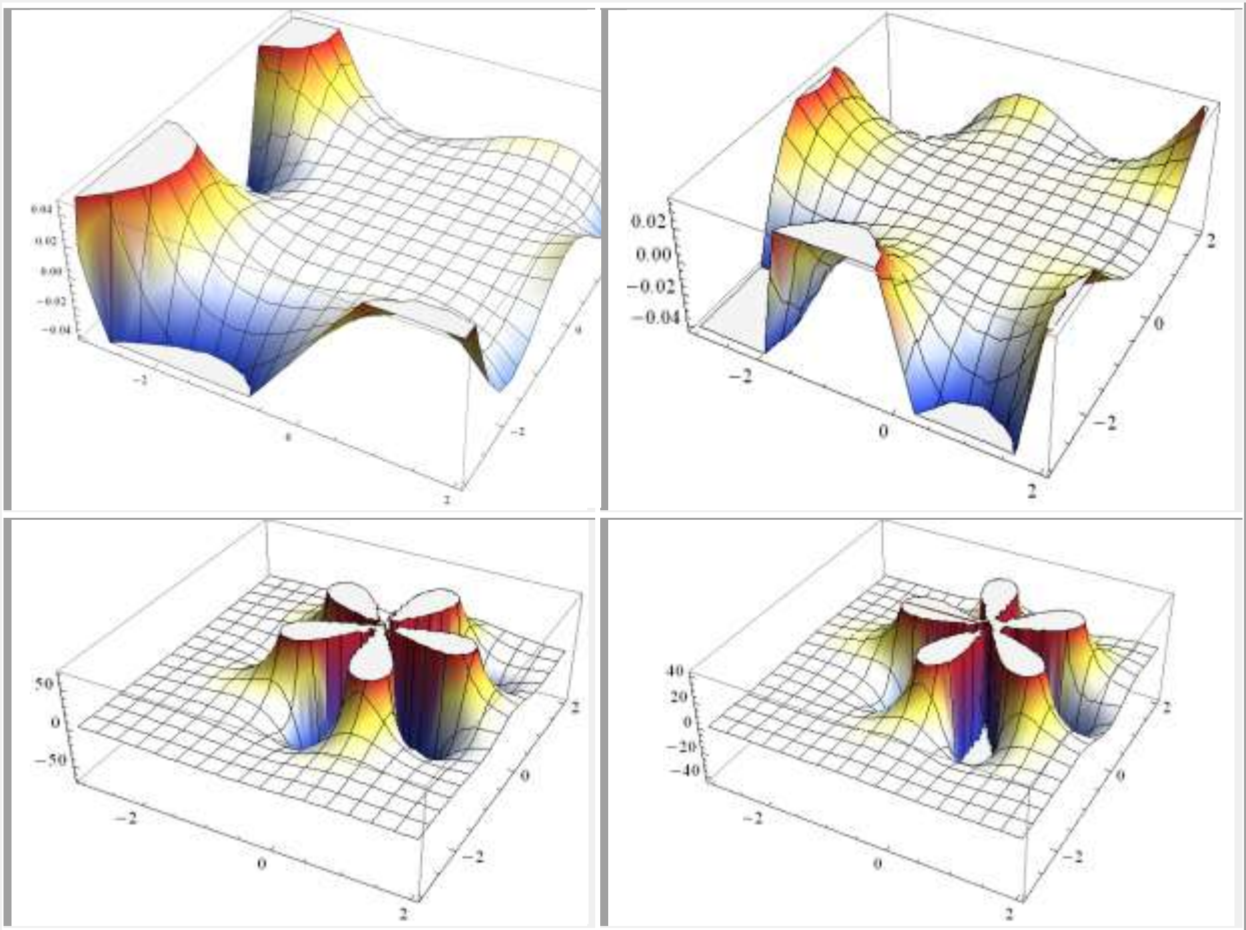
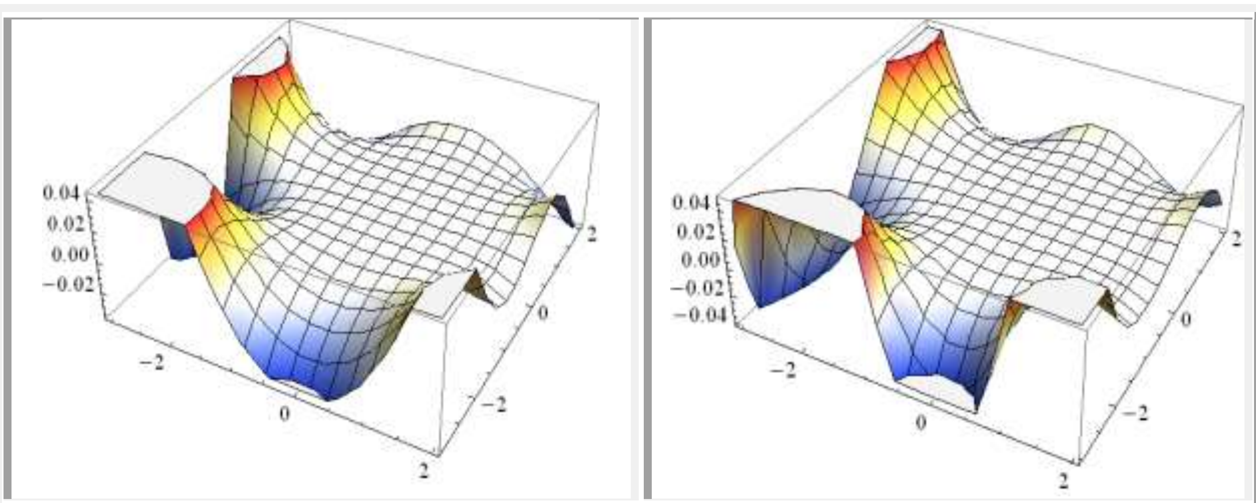


Fig.10,b Partea reală a funcţiilor **Bessel** centrice în planul complex.
În ordine: **In, Jn, Kn, Yn** (n ≡ α)



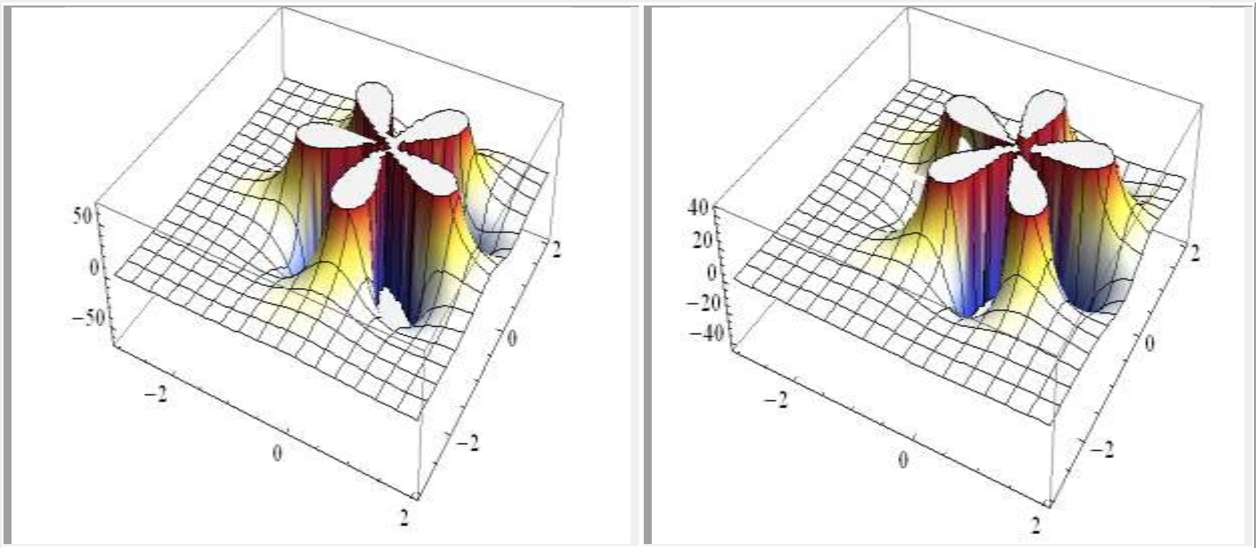


Fig.10,c Partea imaginară a funcţiilor **Bessel** centrice în planul complex.
În ordine: **In, Jn, Kn, Yn** (n ≡ α)

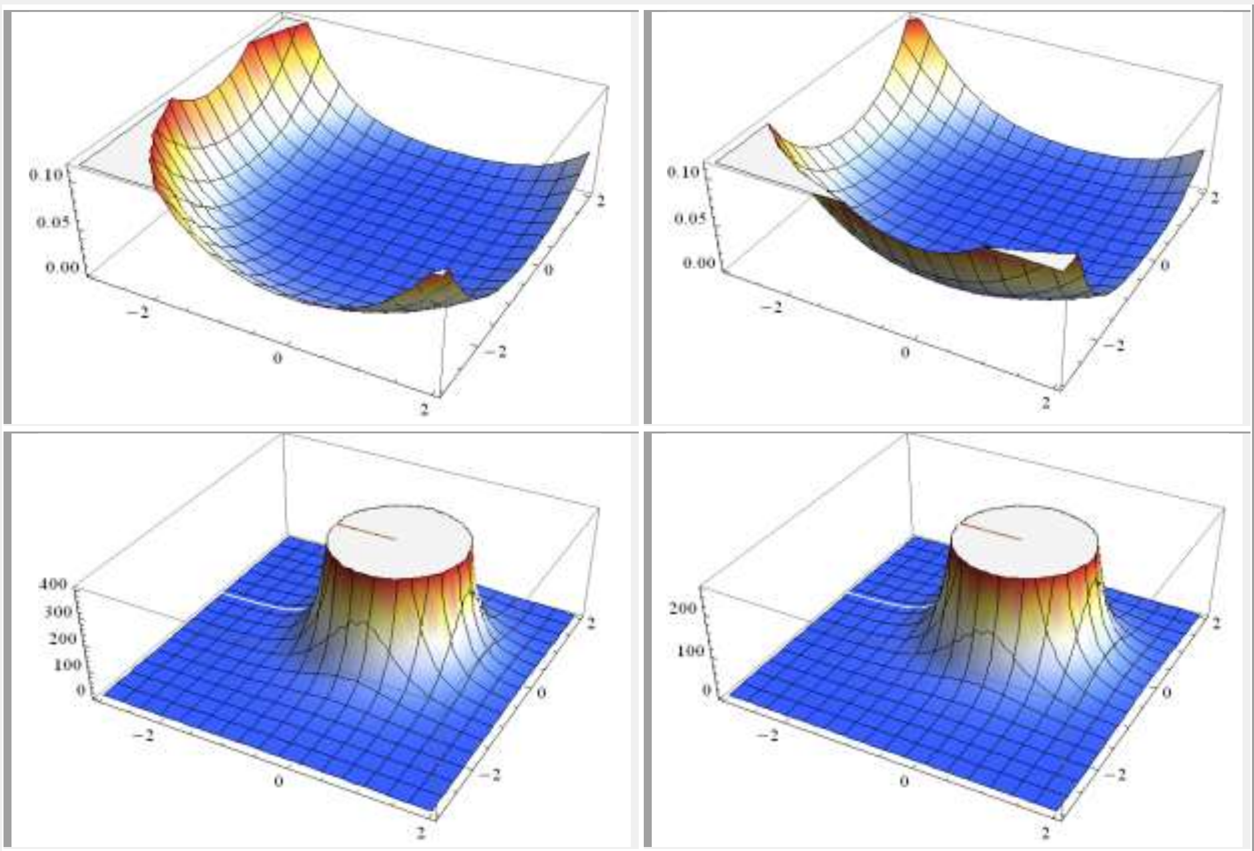


Fig.10,d Partea absolută a funcţiilor **Bessel** centrice în planul complex.
În ordine: **In, Jn, Kn, Yn** (n ≡ α)

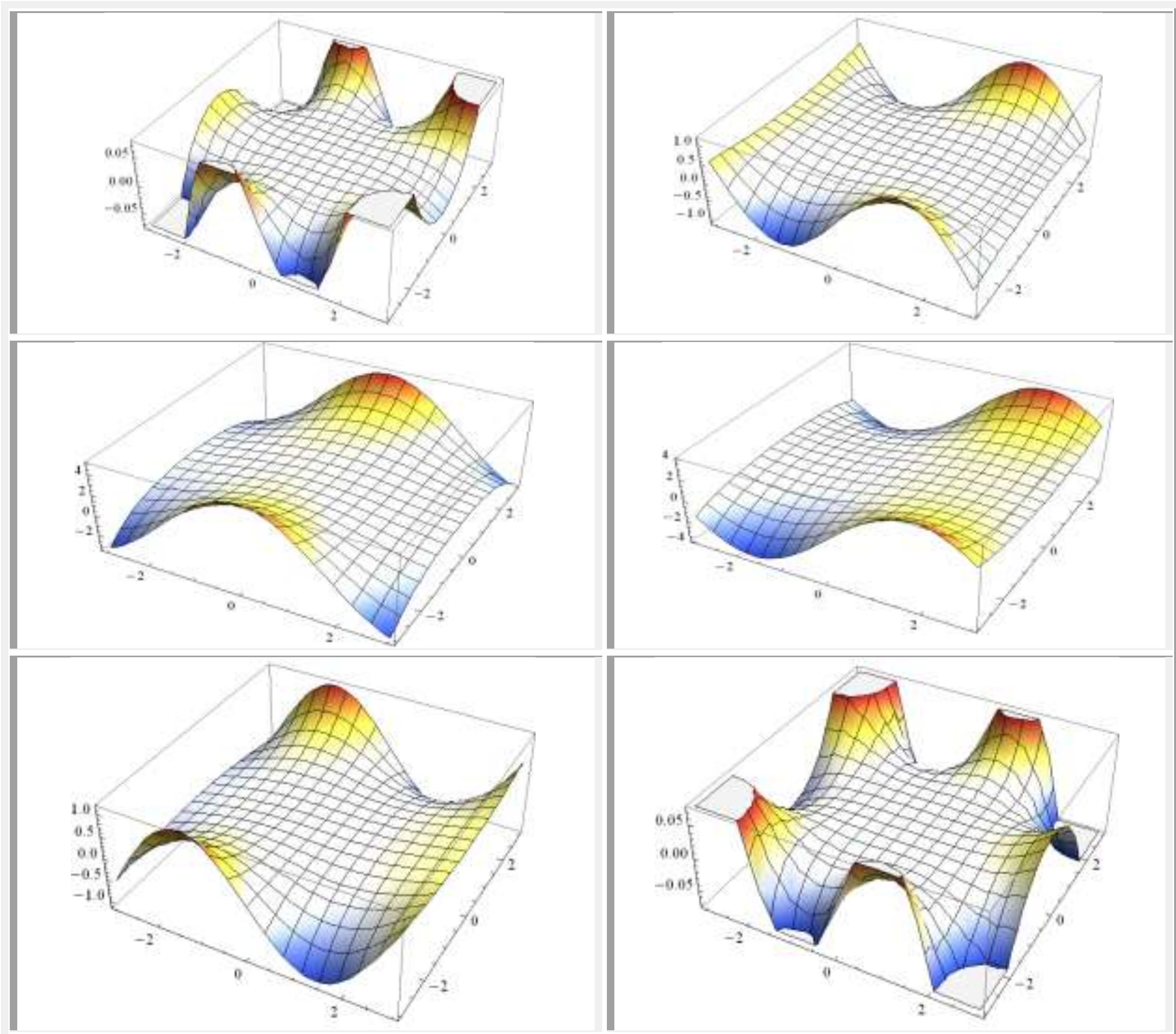
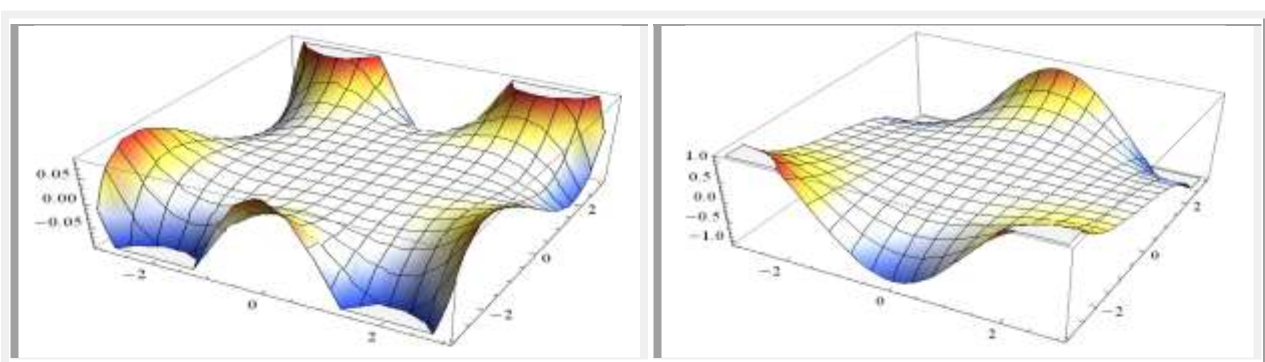


Fig.11,a Funcţii **Bessel centrice** de prima speţă **Jn** în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 partea reală



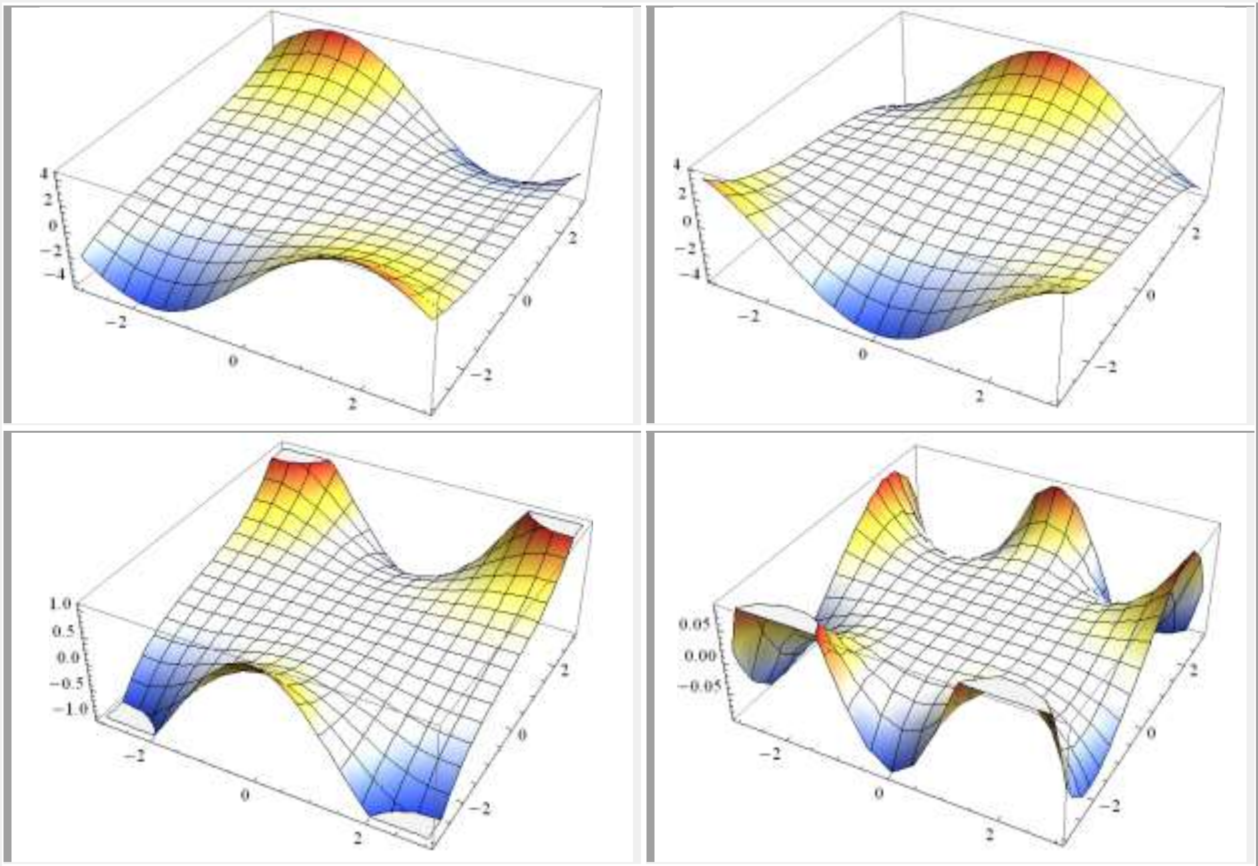
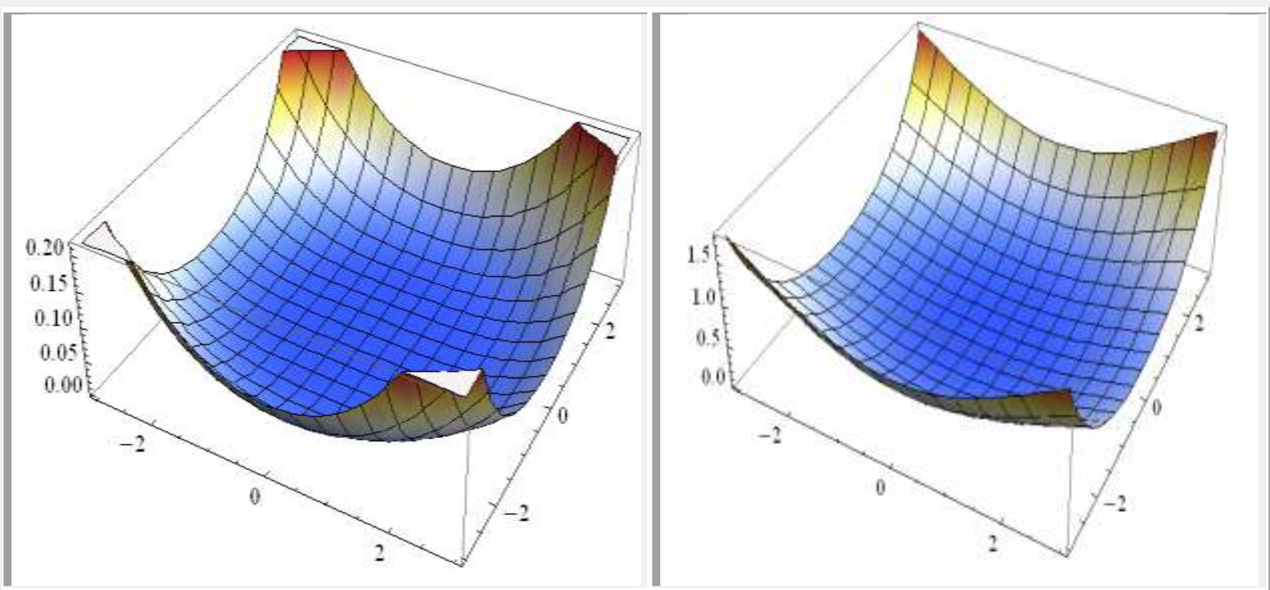


Fig.11,b Funcţii **Bessel centrice** de prima speţă **Jn** în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 , partea imaginară



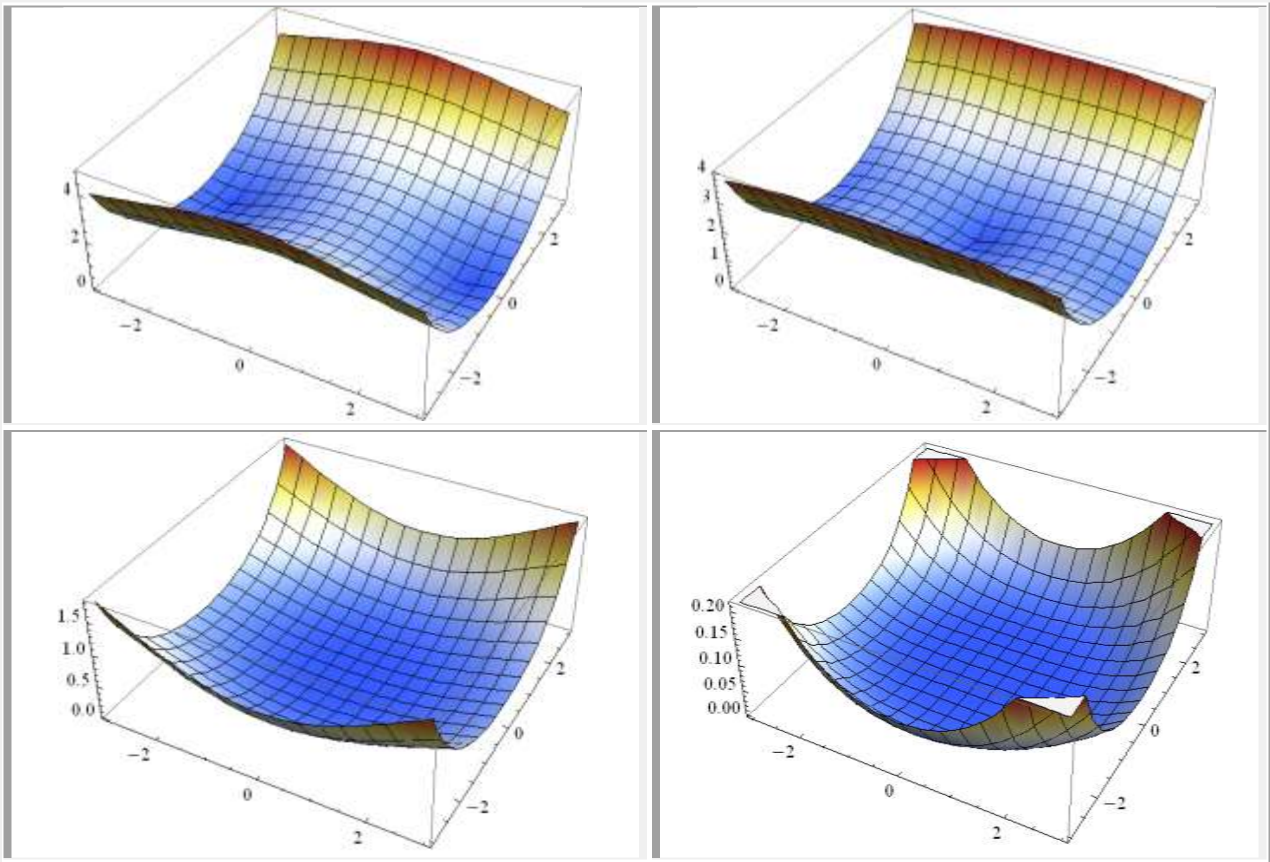


Fig.11,c Funcţii **Bessel centrice** de prima speţă **Jn** în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 , partea absolută

Graficele **funcţiilor Bessel** în planul complex sunt redate în **figura 10**, prin programul realizat de **Jeff Bryant** şi **Michael Trott** prezentat mai sus

2.2 FUNCȚII Bessel CENTRICE (FBC) DE SPEȚA A II-a: Y_α

Funcțiile **Bessel centrice** de speța a II-a, notate prin $Y_\alpha(z)$ sau $Y_n(z)$, sunt de asemenea soluții ale ecuației diferențiale a lui **Bessel centrice**. Ele au o singularitate infinită în origine ***(z = 0)***.

Graficul funcţiilor **Bessel centrice** de speţa a II-a, $Y_\alpha(z)$ şi ordin întreg sunt prezentate în **figura 2**, iar în **figura 12** sunt prezentate şi pentru ordine întregi negative, adică pentru α = - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 şi 5.

Funcția $Y_\alpha(z)$ **centrică** este denumită și **funcția Neumann**, ocazional fiind notată și cu $N_\alpha(z)$.

Pentru valori α diferite de întregi, funcția **Bessel centrică** de speța a II-a se scrie în funcție de $J_\alpha(z)$ sub forma:

(7) $$Y_\alpha(z) = \frac{J_\alpha(z).\cos(\alpha.\pi) - J_{-\alpha}(z)}{\sin(\alpha.\pi)}$$

În cazul în care α are o valoare întreagă n, funcția se defineşte ca limită de $\alpha \to n$:

(8) $$Y_n(z) = \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(z)$$

scriindu-se sub formă integrală:

(9) $Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\{ \int_0^{\pi} \sin(z.sin\theta - n\theta)\, d\theta - \int_0^{\infty} [e^{nt} + (-1)e^{-nt}] e^{-z\, sinht} dt \}$

iar sub formă de serie este:

(10) $Y_n(z) = \frac{2}{\pi} ln \frac{z}{2} J_n(z) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \{\psi(n+k+1)\} \frac{\left(\frac{-z}{2}\right)}{k!(n+k)!}$

în care ψ este funcţia digamma.

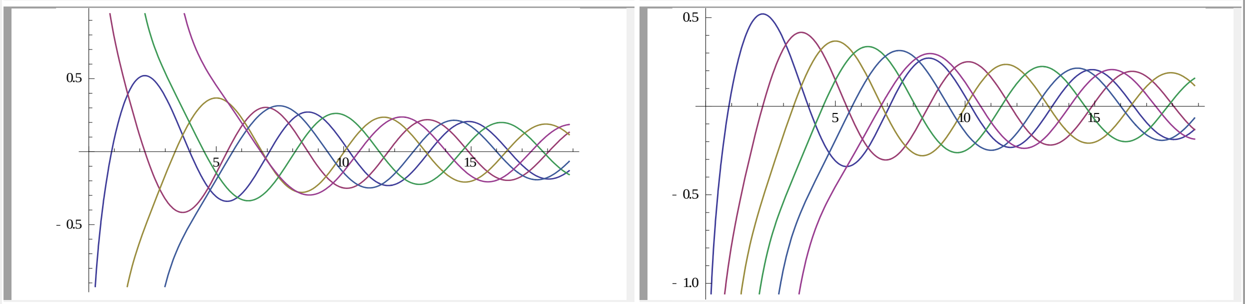
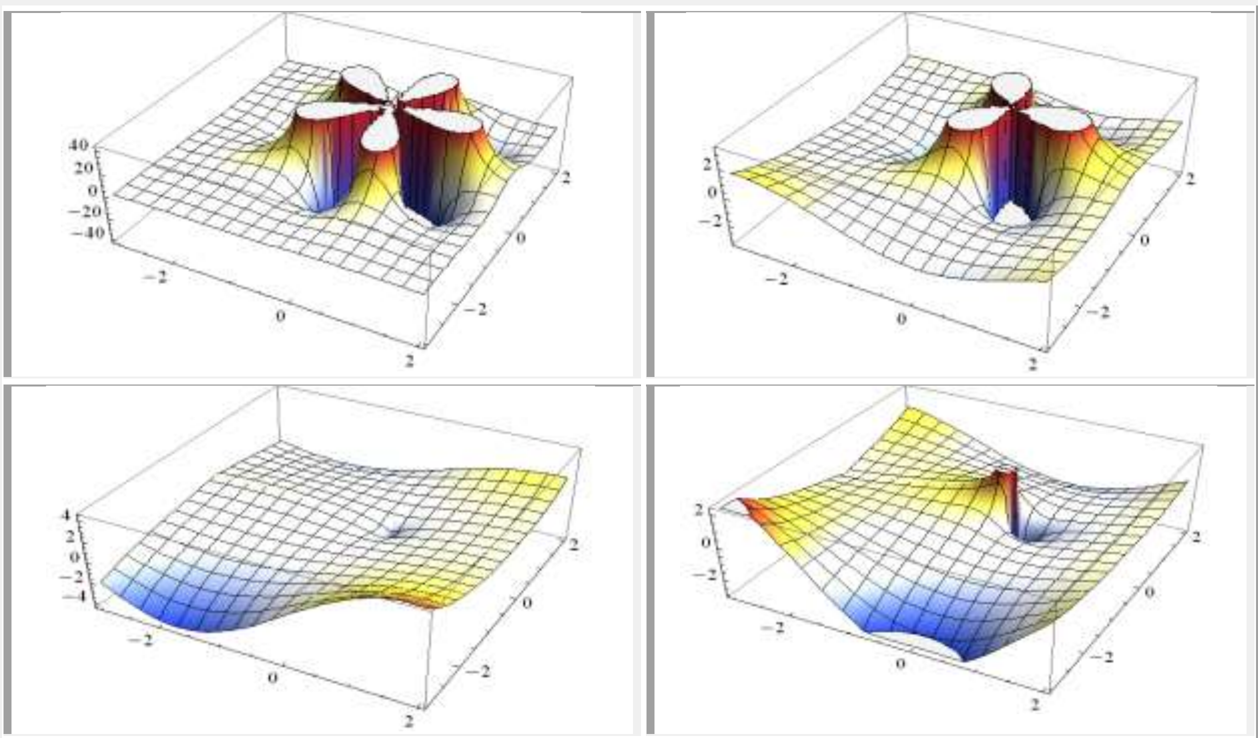


Fig.12 Graficele funcţiilor **Bessel centrice** de speţa a doua **Yn** de ordin întreg **α ∈ [-5, +5]**

În cazul în care α are o valoare diferită de întreg, funcția $Y_{\alpha}(z)$ este inutilă (putând fi înlocuită oricând cu $J_{-\alpha}(z)$). Pe de altă parte, când α este un întreg n, $Y_n(z)$ este a doua soluție liniar independentă a ecuației lui **Bessel**. Mai mult, este valabilă o relație similară cu cea pentru funcția de speța I-a, adică:

(11) $Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$



BUPT

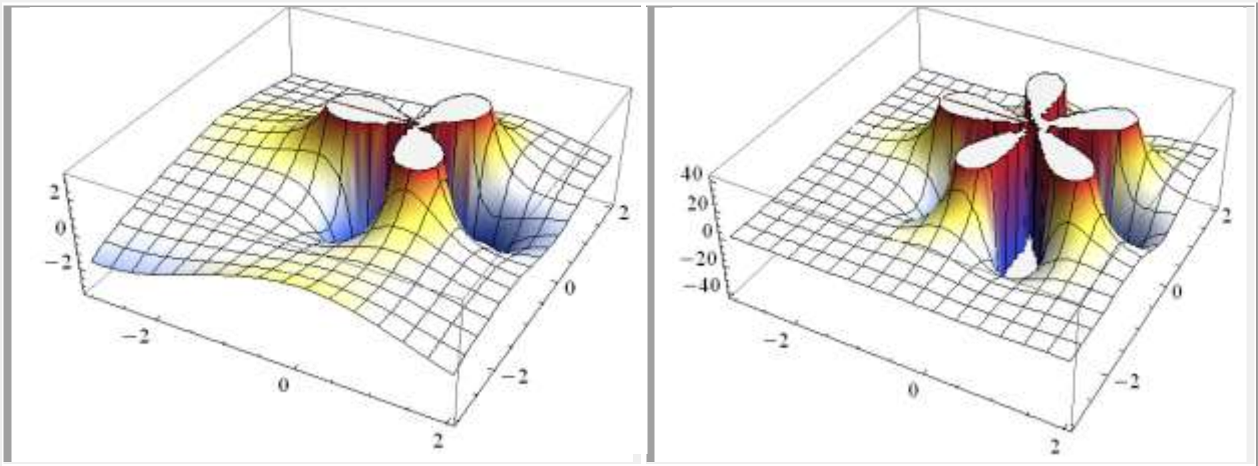
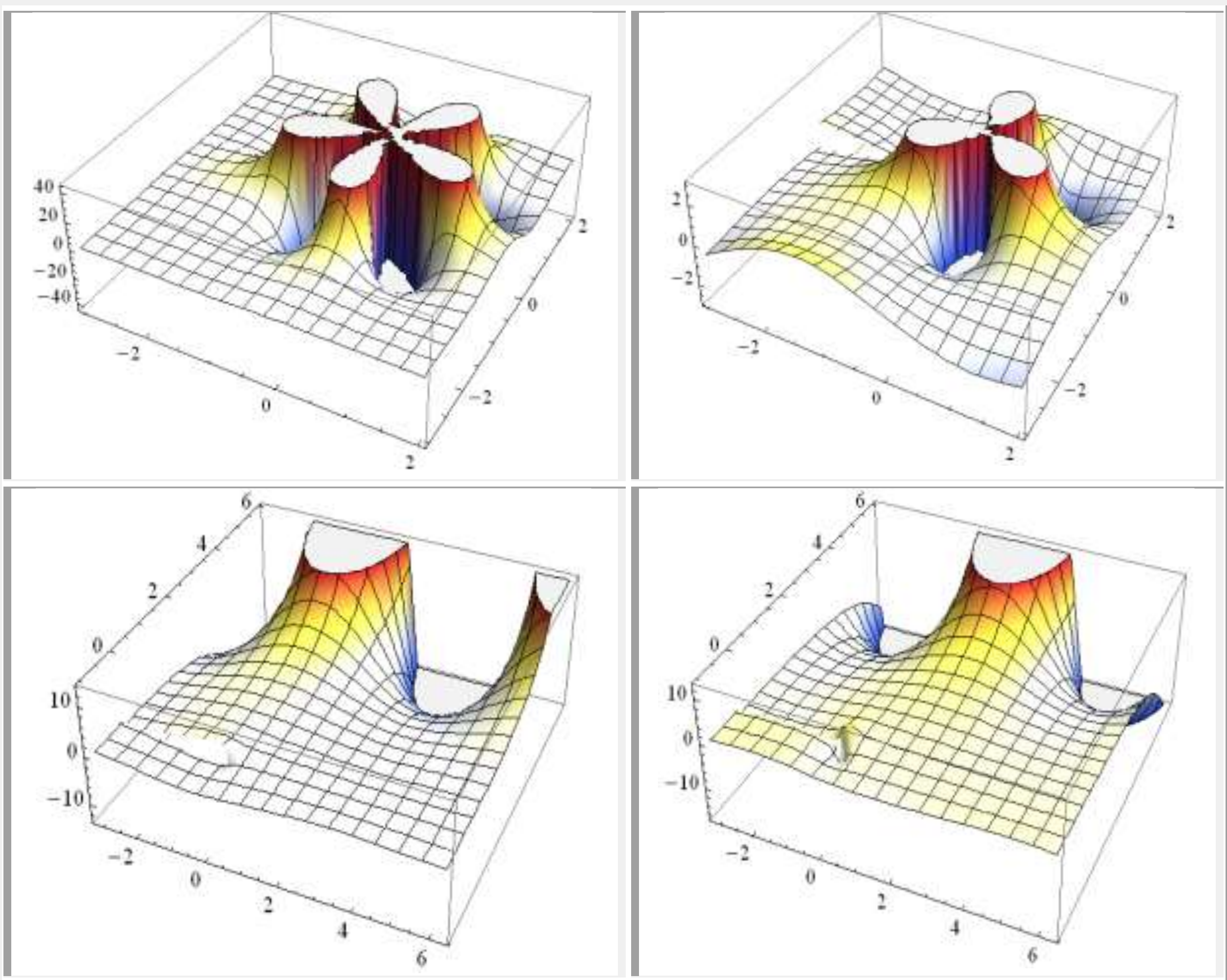


Fig.12,a Funcţii **Bessel centrice** de speţa a douaYn în planul complex de ordin întreg

α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 partea reală



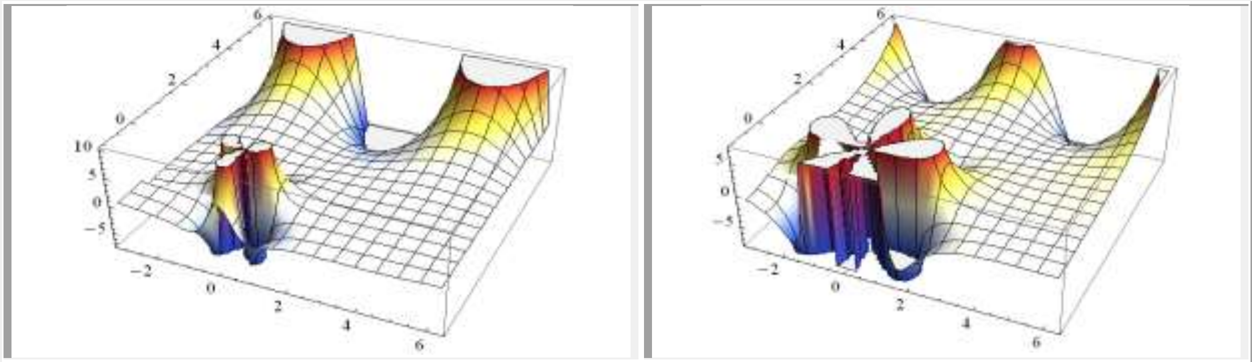


Fig.12,b Funcţii **Bessel centrice** de speţa a doua Yn în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 partea imaginară

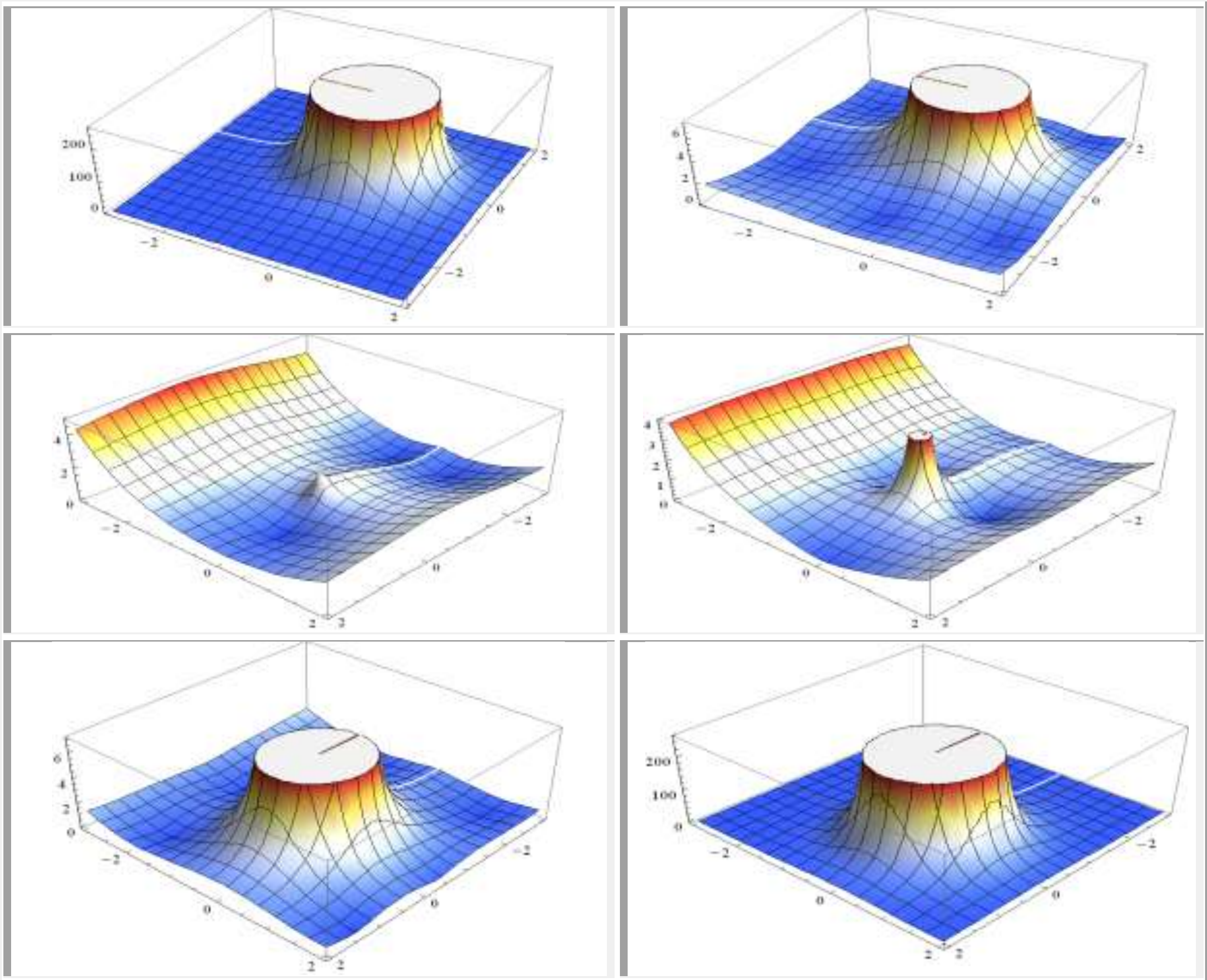
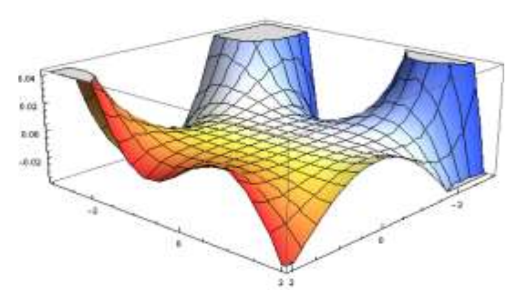
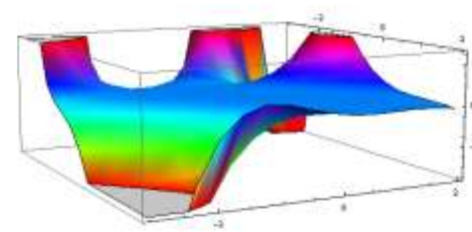
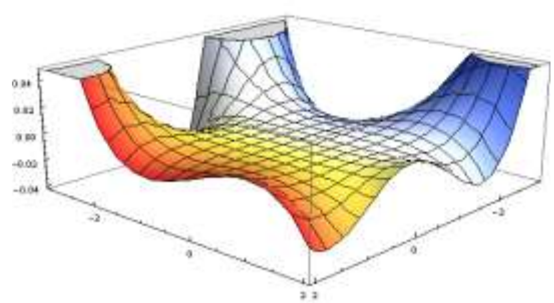
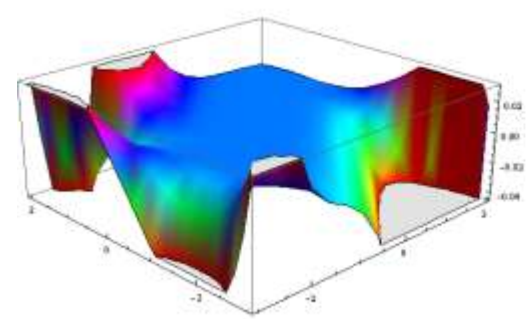
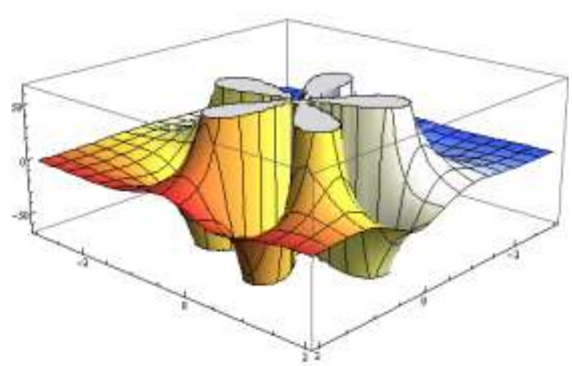
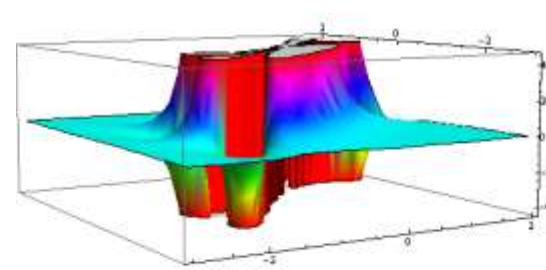
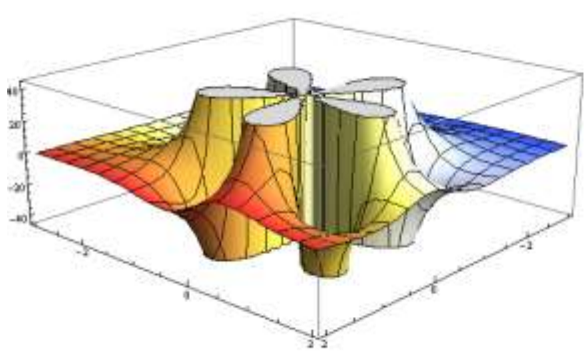
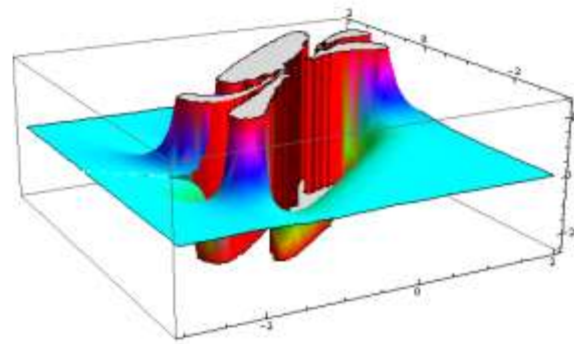


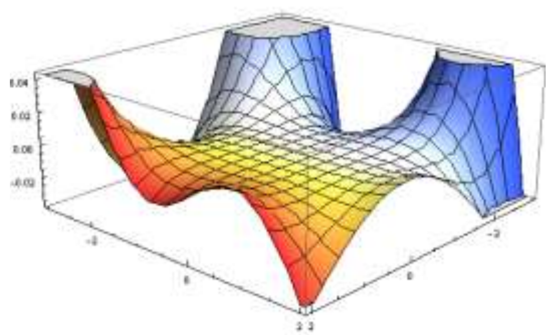
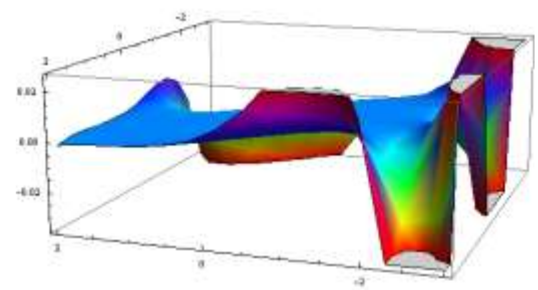
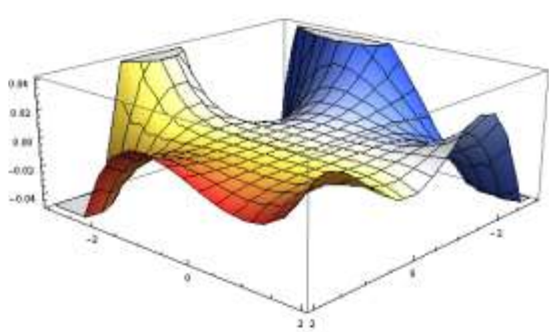
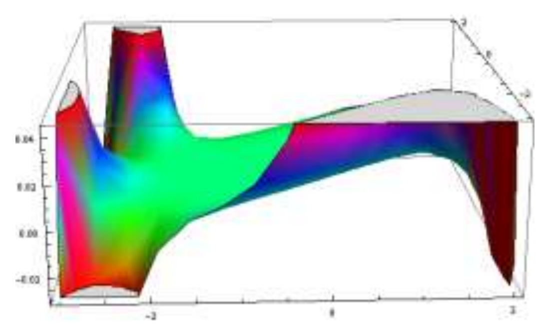
Fig.12,c Funcţii **Bessel centrice** de speţa a doua **Yn** în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 partea absolută

Ambele funcții, $J_\alpha(z)$ și $Y_\alpha(z)$, sunt funcții olomorfe de z în planul complex cu tăietură de-a lungul axei reale negative. Când α este un întreg, funcțiile **Bessel** J sunt funcții întregi de z. Dacă z este fixat, atunci funcțiile **Bessel** sunt funcții întregi de α.

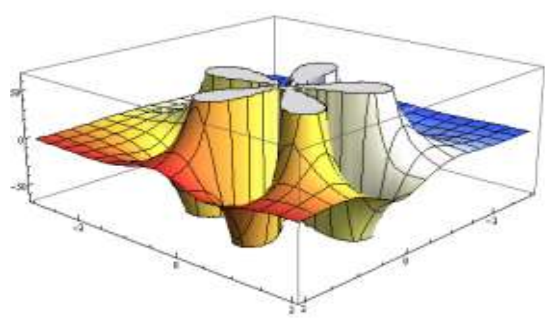
FUNCŢII BESSEL CENTRICE (I, J, K, Y) ŞI EXCENTRICE (IE, JE, KE, YE) (COMPARAŢIE)

I5	Ie5, s = 0.9
	
J5	Je5, s = 0,9
	
K5	Ke5, s = 0,9
	

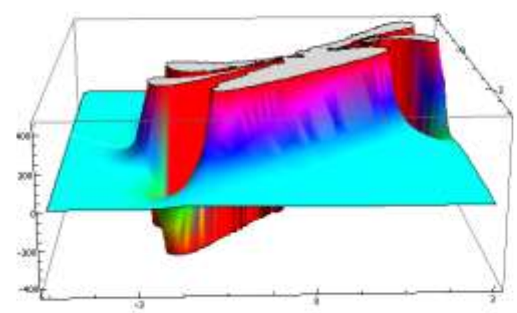
Y5	Ye5
	
Partea reală	
www.SuperMatematica.ro	

I-5	Ie-5
	
J-5	Je-5
	

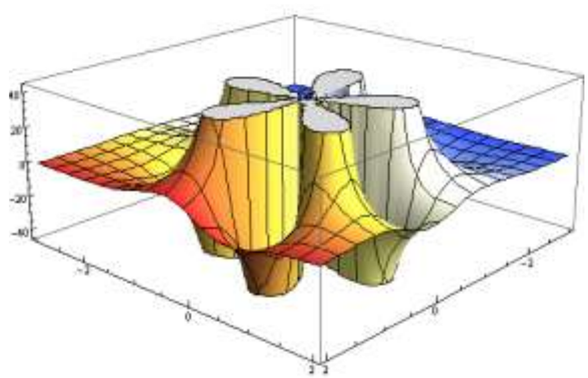
K-5



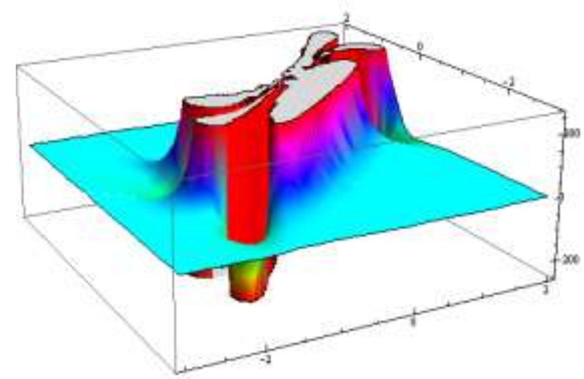
Ke-5



Y-5

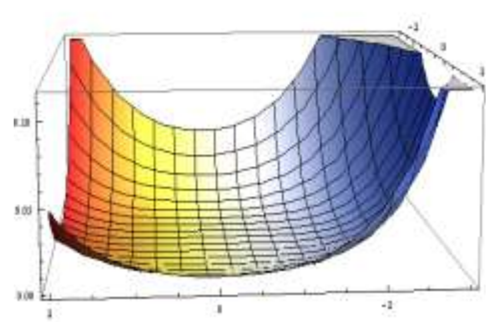


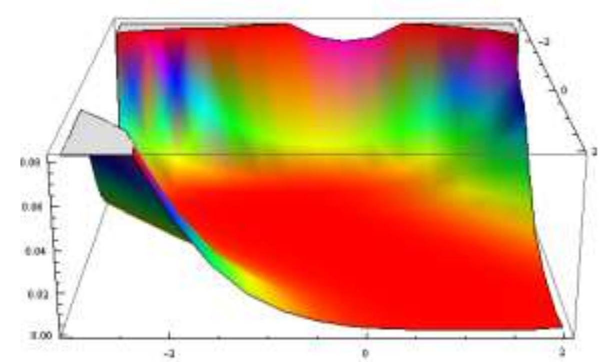
Ye-5

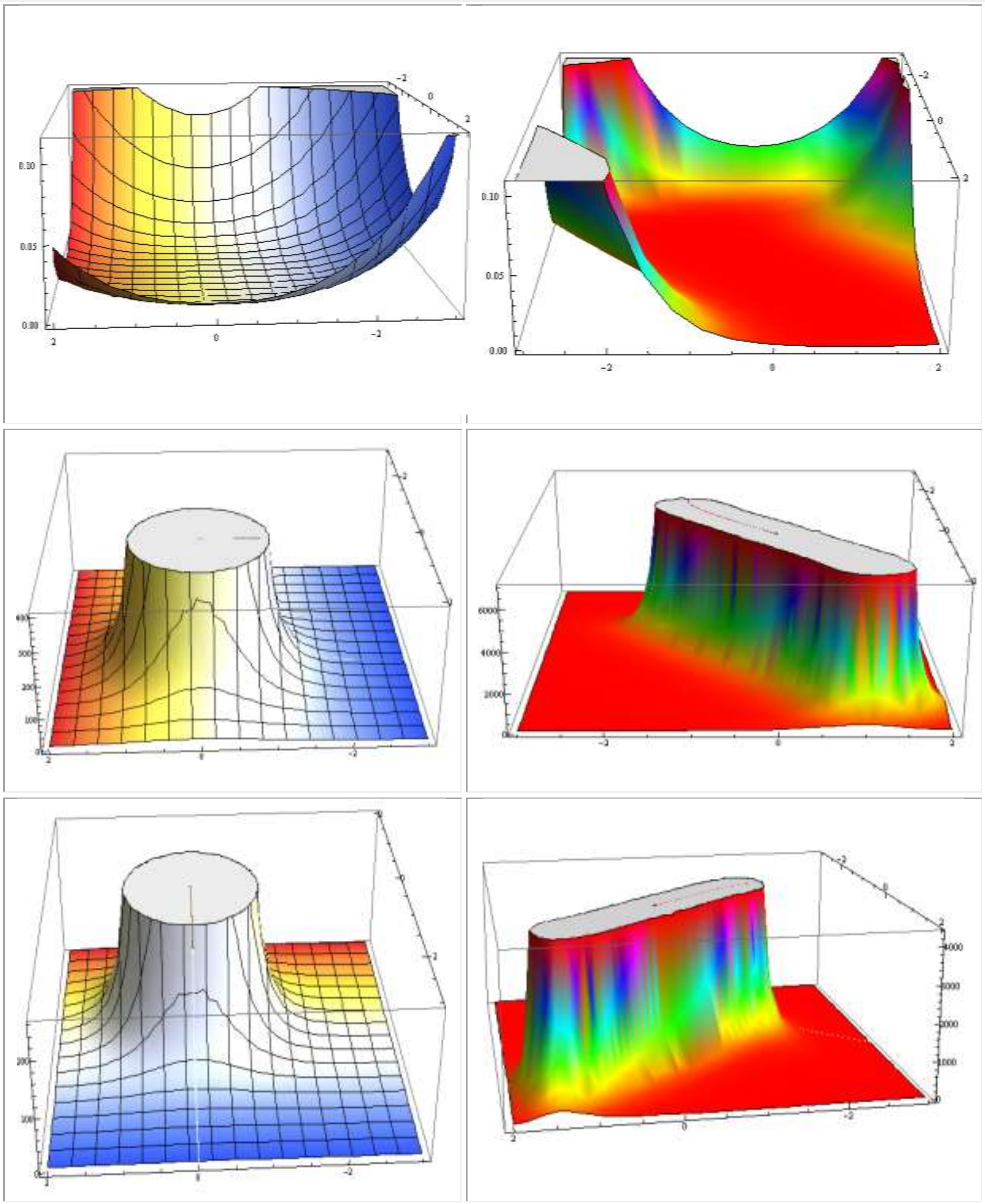


Partea imaginară

www.SuperMatematica.ro







Partea absolută

www.SuperMatematica.ro

2. B I B L I O G R A F I E

1	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, Timişoara, 1978, pag.101...108.
2	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE şi EXTENSIA LOR	Bul .St.şi Tehn. al I.P. ”TV” Timişoara, Seria Mecanică, Tomul 25(39), Fasc. 1-1980, pag. 189...196
3	Şelariu Mircea Eugen	STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ale UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV cu AJUTORUL FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conf. Naţ. Vibr.în C.M. Timişoara,1978, pag. 95...100
4	Şelariu Mircea Eugen	APLICAŢII TEHNICE ale FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE	Com.a IV-a Conf. PUPR, Timişoara, 1981, Vol.1. pag. 142...150
5	Şelariu Mircea Eugen	THE DEFINITION of the ELLIPTIC ECCENTRIC with FIXED ECCENTER	A V-a Conf. Naţ. de Vibr. în Constr. de Maşini,Timişoara, 1985, pag. 175...182
6	Şelariu Mircea	ELLIPTIC ECCENTRICS with MOBILE ECCENTER	IDEM pag. 183...188
7	Şelariu Mircea Eugen	CIRCULAR ECCENTRICS and HYPERBOLICS ECCENTRICS	Com. a V-a Conf. Naţ. V. C. M. Timişoara, 1985, pag. 189...194.
8	Şelariu Mircea Eugen	ECCENTRIC LISSAJOUS FIGURES	IDEM, pag. 195...202
9	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CEX şi SEX- SOLUŢIILE UNOR SISTEME MECANICE NELINIARE	Com. a VII-a Conf.Naţ. V.C.M., Timişoara,1993, pag. 275...284.
10	Şelariu Mircea Eugen	<u>SUPERMATEMATICA</u>	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn.,TEHNO’95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematica Aplicată,. pag.41...64
11	Şelariu Mircea Eugen	SUPERMATEMATICA.FUNDAMENTE	Editura ” Politehnica ”, Timişoara, 2007
12	Şelariu Mircea Eugen	SUPERMATEMATICA.FUNDAMENTE Vol. I ediţia a 2-a	Editura ” Politehnica ”, Timişoara, 2012
13	Şelariu Mircea Eugen	SUPERMATEMATICA.FUNDAMENTE Vol. II ediţia a 2-a	Editura ” Politehnica ”, Timişoara, 2007
14	Şelariu Mircea Eugen	FORMA TRIGONOMETRICĂ a SUMEI şi a DIFERENŢEI NUMERELOR COMPLEXE	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn., TEHNO’95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematică Aplicată, pag. 65...72
15	Şelariu Mircea Eugen	MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO’95., Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronică, Dispozitive şi Rob.Ind.,pag. 85...102

16	Şelariu Mircea Eugen	RIGIDITATEA DINAMICĂ EXPRIMATĂ CU FUNCŢII SUPERMATEMATICE	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn., TEHNO'95 Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronică, Dispoz. şi Rob.Ind.,pag. 185...194
17	Şelariu Mircea Eugen	DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAŢIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPETA INTAIA K(k)	Bul. VIII-a Conf. de Vibr. Mec., Timişoara,1996, Vol III, pag.15 ... 24.
18	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Menagerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 531..548
19	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII DE TRANZIŢIE INFORMAŢIONALĂ	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Managerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 549… 556
20	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ CA SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Managerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 557…572
21	Şelariu Mircea Eugen	INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ	Lucr. Simp. Naţional "Zilele Universităţii Gh. Anghel" Ed. II-a, Drobeta Turnu Severin, 16-17 mai 2003, pag. 171 … 178
22	Şelariu Mircea Eugen	QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
23	Şelariu Mircea Eugen	SMARANDACHE STEPPED FUNCTIONS	Revista: "Scienta Magna" Vol. 3, No. 1, 2007, ISSN 1556-6706
24	Şelariu Mircea Eugen	TEHNO ART OF ŞELARIU SUPERMATHEMATICS FUNCTIONS	(ISBN-10):1-59973-037-5 (ISBN-13):974-1-59973-037-0 (EAN): 9781599730370

Motto: "Creatorule în metal, degeaba ai 10 dulapuri de scule şi dispozitive, din cele mai sofisticate şi utile posibil, dacă le ţii ascunse şi nu le utilizezi. De aceea mă străduiesc să fac cunoscută **supermatematica**, care oferă infinit mai multe posibilitaţi decât cred ignoranţii"

Dar, te poţi pune cu ei ?

"Cu prostul neşcolarizat
Te lupţi un pic, şi l-ai gătat.
Dar când prostul are şcoală
Lupta devine… colosală! "

CAPITOLUL XXX

Nota 2: FUNCŢII SUPERMATEMATICE BESSEL EXCENTRICE

2.1 INTRODUCERE

În primul rând, **motto**-ul, prezentat mai sus, reclamă unele lămuriri. El ilustrează un caz concret, întâmplat acum câţiva ani. Am accesat, cred că nu mă înşel, Wikipedia.ro şi la ***caută*** am scris "Supermatematica".

Răspunsul a fost "**Creați pagina Functii supermatematice circulare excentrice".**

Zis şi făcut. Am înşirat pe câteva pagini, nu mai multe decât două-trei, ce este şi la ce ar putea servi supermatematica. Am verificat, apoi, dacă a apărut micul articol şi răspunsul a fost afirmativ. După câteva zile, primesc de la administratorul român al website-ului un e-mail în care mă anunţă că a şters articolul şi mai spune "***Să vă fie ruşine ca l-aţi copiat pe Mircea Şelariu***". Stupefiant ! Eu m-am copiat pe mine ! O fi prostie ? Nu, e viclenie !

Am povestit cele întâmplate unui profesor universitar american, de origine română, care m-a liniştit spunându-mi că tot ce se publică pe Wikipedia şi în oricare altă publicaţie de largă circulaţie este supervizat, ştiţi Dvs. de cine. Şi că deschizători de drumuri, în oricare domeniu, nu pot fi alţii decât ce-i agreaţi / preferaţi de ei ! Şi aceştia nu pot fi în niciun caz români ! Românii nu pot fii deshizători de drumuri, ei pot deschide doar seifuri, apartamente ş.m.a., fiind multilateral dezvoltaţi. Ca urmare articolul **trebuia şters** cu riscul de a deveni ridicoli, prin inventarea unui motiv absurd şi hilar.

Revoltat, într-un articol de supermatematica, am criticat, printre altele, această atitudine, articol care a fost publicat pe un website, alături de alte 80 de articole de-ale mele, dintre care, supermatematica a fost accesată, acolo, de peste 6.000 de ori, situându-se, din acest punct de vedere, pe locul 2 în top.

Criticile aduse n-au scăpat ochiului vigilent, probabil programat electronic, astfel că respectivul website a fost şters / închis. După un proces (pobabil), a fost redeschis pentru o scurtă perioadă de timp, apoi închis din nou definitiv şi transformat într-un website care n-are nicio legătură cu titulatura lui. Ca şi cum s-ar întitula "***ştiinţă pentru toţi***" şi ar vinde "***sicrie pentru morţi***" !

Oare, cui ar trebui să-i fie ruşine ?

În capitolul anterior au fost prezentate, cu multe spicuiri culese de pe internet, **funcţiile Bessel centrice** (**FBC**) şi unele **funcţii supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**), în ideea că ar putea completa cu succes funcţiile Bessel centrice (**FBC)**.

Pentru realizarea graficelor în **2D** şi în **3D** au fost utilizate programele din **Matehamtica 8** al lui **Stephan Wolfram** iar, în planul complex, programele demonstrative prezentate pe website-ul acestuia şi realizate de diverşi autori. Unele vor fi utilizate şi în continuare.

Deoarece cele 80 de articole despre supermatematică au dispărut, odată cu website-ul amintit anterior, este necesar să fie prezentate, pe scurt, noile complemente de matematică, reunite sub denumirea de suprmatematică. În acest scop, prezentăm **LAUDATIO**, alcătuită de **AGIR** cu ocazie decernării **DIPLOMEI AGIR** în domeniul "**TEHNOLOGIA INFORMAŢIEI**" (**IT**), în anul 2013, lucrării în două volume a cca. 1200 pagini, din Editura POLITEHNICA, Timişoara, 2012 “**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**”.

„SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE" vol. I şi vol. II
Ediţia a 2-a, Ed. POLITEHNICA Timişoara, 2012
Autor ing. **Mircea Eugen Şelariu**

Supermatematica (SM) este considerată, fără exagerare, de susţinătorii şi admiratorii ei, şi nu sunt puţini, unii fiind matematicieni şi profesori universitari americani, ca **noua matematică a mileniului III**, aşa cum se poate uşor constata.

Cele **914** pagini ale lucrării - 486 pagini în vol. I şi 428 pagini în vol. II – exprimă vastitatea lucrării, dar atributele ei esenţiale consistă în simplitatea şi surprinzătoarea ei apariţie, ca urmare a deplasării din centrul O(0,0) a unui singur punct, denumit, din această cauză **excentru E(e,ε)**, în originalitatea şi în unicitatea ei în literatura mondială.

Supermatematica (SM) este o reuniune a matematicii cunoscute, ordinare, care în lucrare a fost denumită **matematică centrică (MC) - de** e = 0 - pentru a se deosebi de noua matematică, denumită **matematică excentrică** (**ME**). Adică **SM = MC** ∪ **ME.** Pentru fiecare punct din plan, în care poate fi plasat un excentru **E(e, ε)**, se poate spune că există o nouă **ME**. Astfel, la o singură **MC** îi corespund o infinitate de **ME**. Pe de altă parte, **MC = SM(e = 0).**

În consecinţă, **SM** multiplică la infinit toate funcţiile circulare / trigonometrice cunoscute şi introduce o pleiadă de funcţii circulare noi (aex, bex, dex, rex, s.a), mult mai importante şi mai elementare decât cele vechi şi, prin acestea, în final, multiplică la infinit toate entităţile matematice cunoscute (cos→cex, sin→sex, tan/tg→tex, ş.m.a.) şi introduce multe alte entităţi noi. S-a constatat ca **MC** este proprie sistemelor **liniare, perfecte, ideale**, iar **ME** este proprie sistemelor **neliniare, reale, imperfecte**. Ca urmare, odată cu apariţia **SM** a dispărut graniţa dintre liniar şi neliniar, dintre ideal şi real, dintre perfecţiune şi imperfecţiune, ceea ce constituie visul de veacuri al inginerilor şi o performanţă matematică de seamă.

SM evidenţiază excentricitatea liniară **e** şi pe cea unghiulară ε, coordonatele polare ale excentrului **E(e, ε)**, ca noi dimensiuni ale spaţiului: dimensiuni de **formare** şi de **deformare** ale acestuia; numite şi dimensiunile ascunse ale spaţiului.

SM putea să apară cu peste 300 de ani în urmă, dacă **Euler**, la definirea funcţiilor trigonometrice ca funcţii circulare directe, n-ar fi ales **trei puncte confundate, suprapunere care a sărăcit matematica**: **Polul E** al unei semidrepte, **centrul C** al cercului trigonometric (unitate) şi **originea O**(0,0) a unui reper rectangular drept. **SM** a apărut atunci când polul **E** a fost expulzat din centru şi a fost denumit **excentru.** Din combinarea celor trei puncte apar următoarele funcţii / domenii:

1) **FCC -circulare centrice-** (**FSM**-CC)→ dacă C≡ O ≡ E; 2) **FSM circulare excentrice (FSM-CE)**→ dacă C ≡ O ≠E; 3) **FSM circulare elevate (FSM-CEL)**→ dacă C ≠ O ≡ E şi 4) **FSM circulare elevate (FSM-CEX)**→ dacă C ≠ O ≠ E.

Dintre **entităţile noi apărute** sunt şi o pleiadă de noi curbe închise, care apar la **transformarea continuă** a cercului în pătrat (denumite **quadrilobe / cvadrilobe**), a cercului în triunghi (**trilobe**). În 3D aceste transformări continue sunt a **sferei în cub**, a **sferei în prismă**, a conului în piramida ş.m.a. Aceste transformări continue au făcut posibilă apariţia unor noi corpuri **3D hibride** ca: sfera-cub; cono-piramida, piramida-con ş.m.a, precum şi a unor noi transformări matematice, cum este **hibridarea matematică**, care dintr-un cerc şi un pătrat rezultă o quadrilobă (cvadrilobă), din cerc şi triunghi o trilobă, ş.a.m.d.

Prin înlocuirea cercului cu o quadrilobă au fost definite funcţiile quadrilobe, iar prin înlocuirea cu o trilobă au fost definite în lucrare şi funcţiile trilobe. In domeniul hiperbolic au apărut funcţiile hiperbolice excentrice. În eliptic, integralele şi funcţiile eliptice **Jacobi** centrice sau multiplicat la infinit prin funcţiile eliptice excentrice şi prin alte funcţii pe conice.

În lucrare sunt evidenţiate şi noi metode matematice, dintre care amintim 1) Transformarea metodei numerice a mediei aritmetico-geometrice **Landen** într-o metodă analitică şi determinarea oricât de exactă a **relaţiei** de calcul a integralei eliptice complete de prima speţă K(k); după numai 5 paşi cu 15 zecimale exacte. 2) Metoda divizării diferenţialei - o nouă metodă de integrare, care evită integrarea în spaţiul complex. 3) SM-CAD-CAM pt. descrierea obiectelor tehnice.

Nu putem încheia fără să subliniem bogăţia de desene explicative şi de grafice, care întregesc înţelegerea lucrării şi calitatea acestora, asigurată de Editura "POLITEHNICA" din Timişoara, chiar dacă sunt tipărite doar în alb-negru, pentru reducerea cheltuielilor şi nu color, cum s-a intenţionat iniţial şi a fost elaborat manuscrisul.

O eroare s-a strecurat în **LAUDATIO**, numindu-se repetat funcţiile supermatematice circulare **elevate** (3 şi 4) în dauna celor **exotice** (4) omise.

2.2 FUNCŢII BESSEL EXCENTRICE DE PRIMA SPEŢĂ $JE_\alpha(x)$

Se ştie că, trecerea de la **centric** la **excentric** se face asemănator trecerii din **circular** în **eliptic**. **Funcţiile eliptice Jacobi** se obţin prin înlocuirea variabilei **x** cu funcţia **am(u,k).** Astfel rezultă

(1) **cn(u,k)** = cosφ(u,k) = cos[**am(u,k)**]

(2) **sn(u,k)** = sinφ(u,k) = sin[**am(u,k)**] şi

(3) **dn(u,k)** = $\frac{d\varphi}{du} = \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi} = \sqrt{1-k^2\sin^2[\mathbf{am(u,k)}]} = \sqrt{1-k^2\mathbf{sn}^2\mathbf{(u,k)}}$

Prin înlocuirea variabilei centrice **α,** sau **φ,** cu **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM-CE**) <u>amplitudine excentrică **aex**</u>[**θ, S**(**s, ε**)], denumită astfel deoarece joacă acelaşi rol ca şi funcţia **amplitudine Jacobi**, sau aplitudinus **am(u,k)**, de variabilă **excentrică θ**, unghi definit în jurul **excentrului S** rezultă →

(4) **α(θ)** = **aex**[**θ**, **S** (**s, ε**)] = **θ** - **β(θ)** = **θ** - bex**θ** = **θ** - arcsin[**s**.sin(**θ** – **ε**),

şi se obţin asemănător **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**)

(5) **cex(θ, S)** = cos**α(θ, S)** = cos[**aex(θ, S),**]

(6) **sex(θ, S)** = sin**α(θ, S)** = sin[**aex(θ, S),**]

(7) **dex(θ, S)** = $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 - \frac{\mathbf{s}.cos(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\varepsilon})}{\sqrt{1-\mathbf{s}^2 sin^2(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\varepsilon})}} = \frac{rex\boldsymbol{\theta}}{\sqrt{1-\mathbf{s}^2 sin^2(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\varepsilon})}} = \frac{rex\boldsymbol{\theta}}{del\boldsymbol{\theta}}$

în care **α** este coordonata sau variabila **centrică**, faţă de centrul **O(0,0)**, iar coordonatele polare ale **excentrului** sau polului **S** sunt:

- coordonata radială sau raza polară, denumită în **supermatematică** (**SM**) şi **excentricitatea liniară numerică s** şi **e** = **s** R este excentricitatea liniara **reală**, într-un cerc de rază oarecare **R**;
- **ε** unghiul polar sau azimutul polului **S**, denumit în **SM excentricitatea unghiulară.**

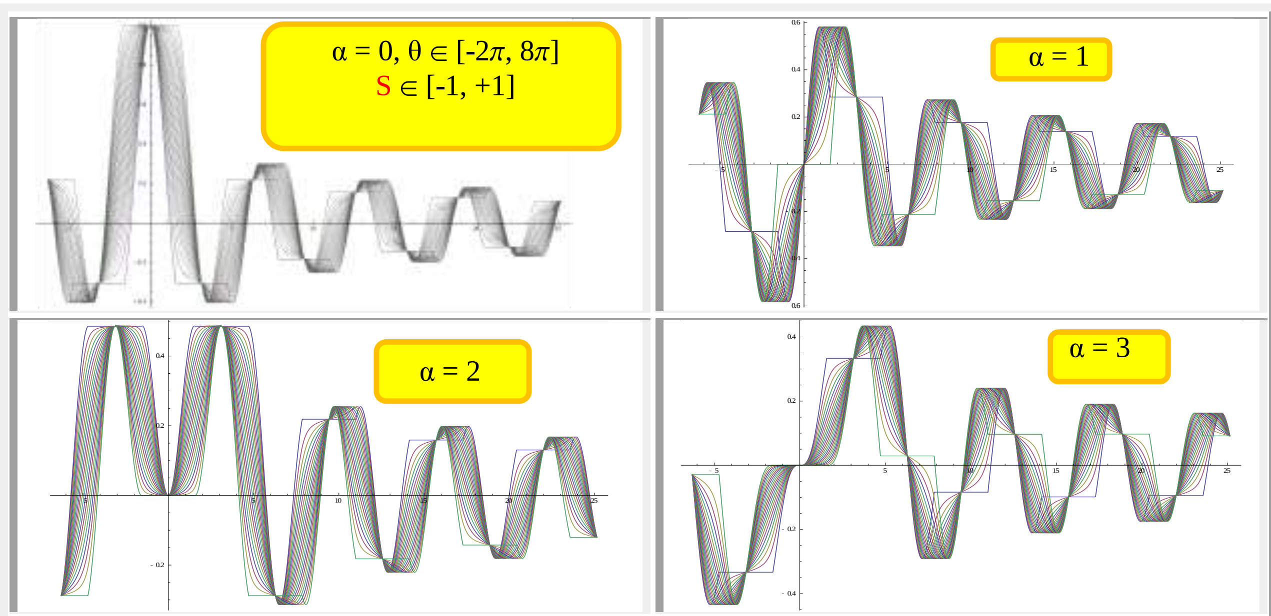


Fig.1,a Graficele funcţiilor <u>**Bessel excentrice**</u> de speţa I-a, ***JE*$_\alpha$*(z)*** şi de variabilă excentrică θ, de ordin întreg α = 0 ◤, 1 ◥, 2 ◣, 3 ◢ şi de **excentricitate numerică s** ∈ [**-1, +1**]

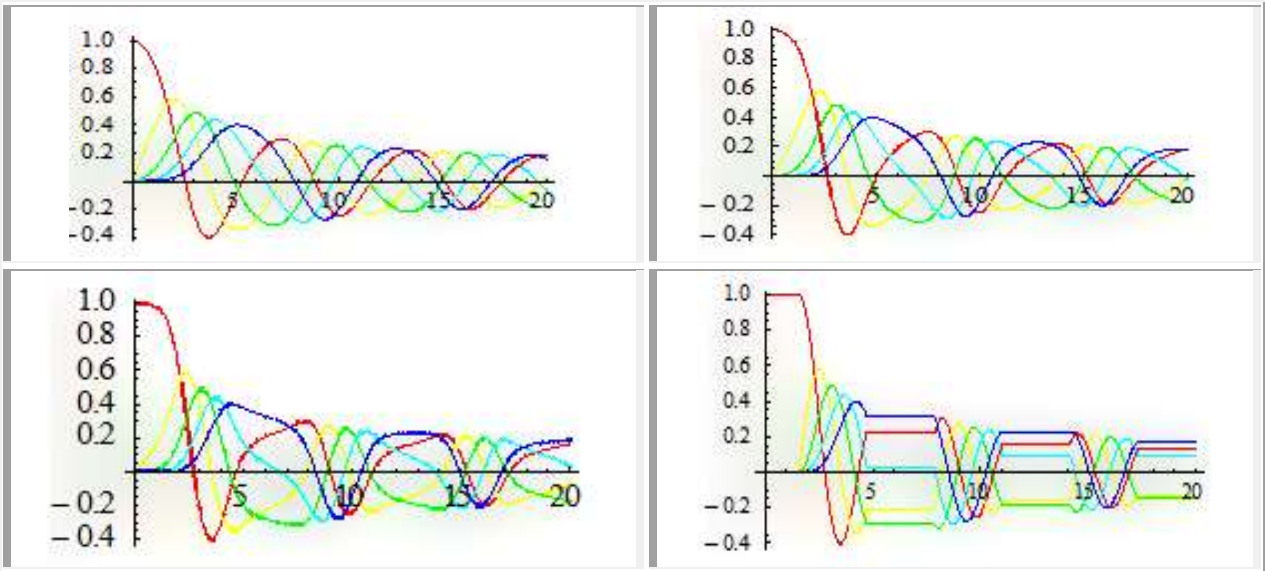


Fig.1,b Graficele funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa I-a, ***JE$_\alpha$(z)*** şi de variabilă excentrică θ, de ordin întreg **α = 0, 1, 2, 3 şi 4** şi **s = 0,25 ◤; 0,5 ◥; 0,75 ◣ şi 1◢**

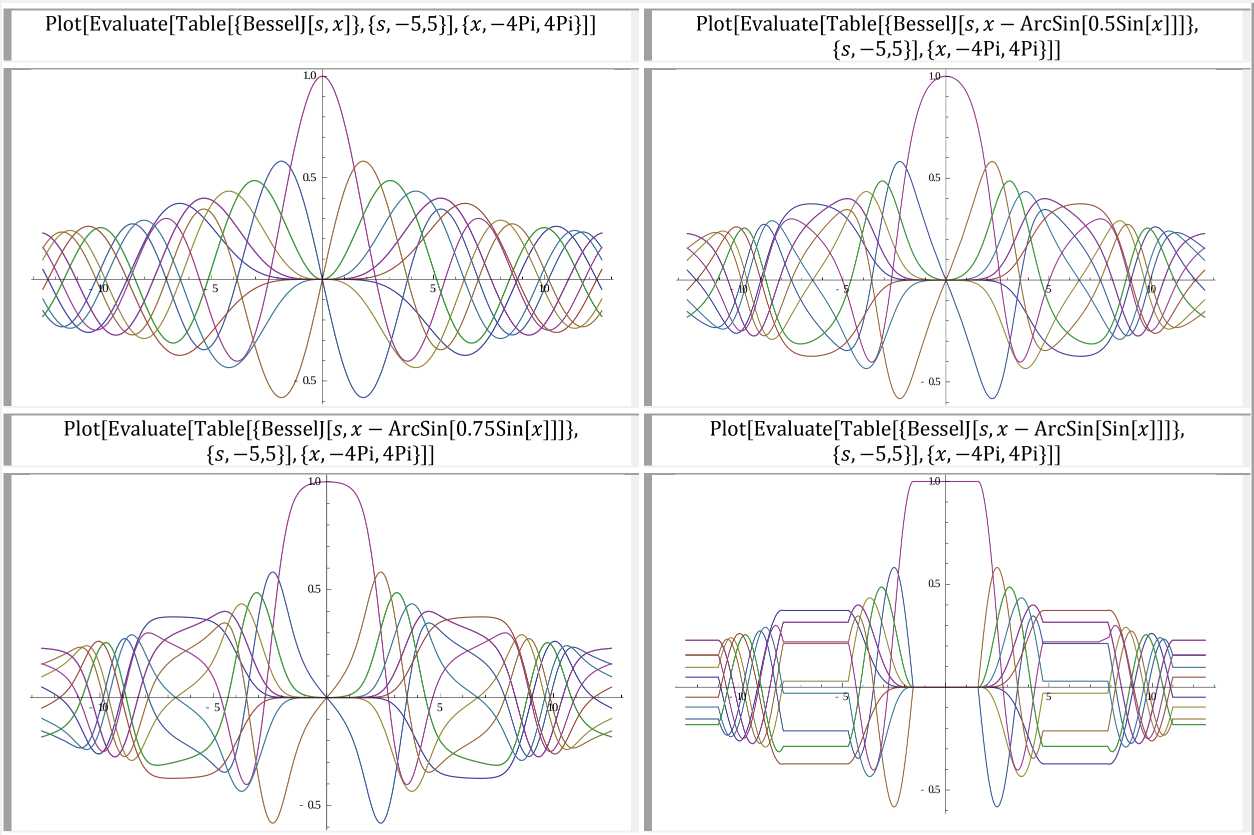


Fig.1,c Graficele funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa I-a, ***JE$_\alpha$(z)*** şi de variabilă excentrică θ, de ordin întreg **α ∈ [-5,+5]** şi **s ∈ [0, 1]** cu pasul **0,2**

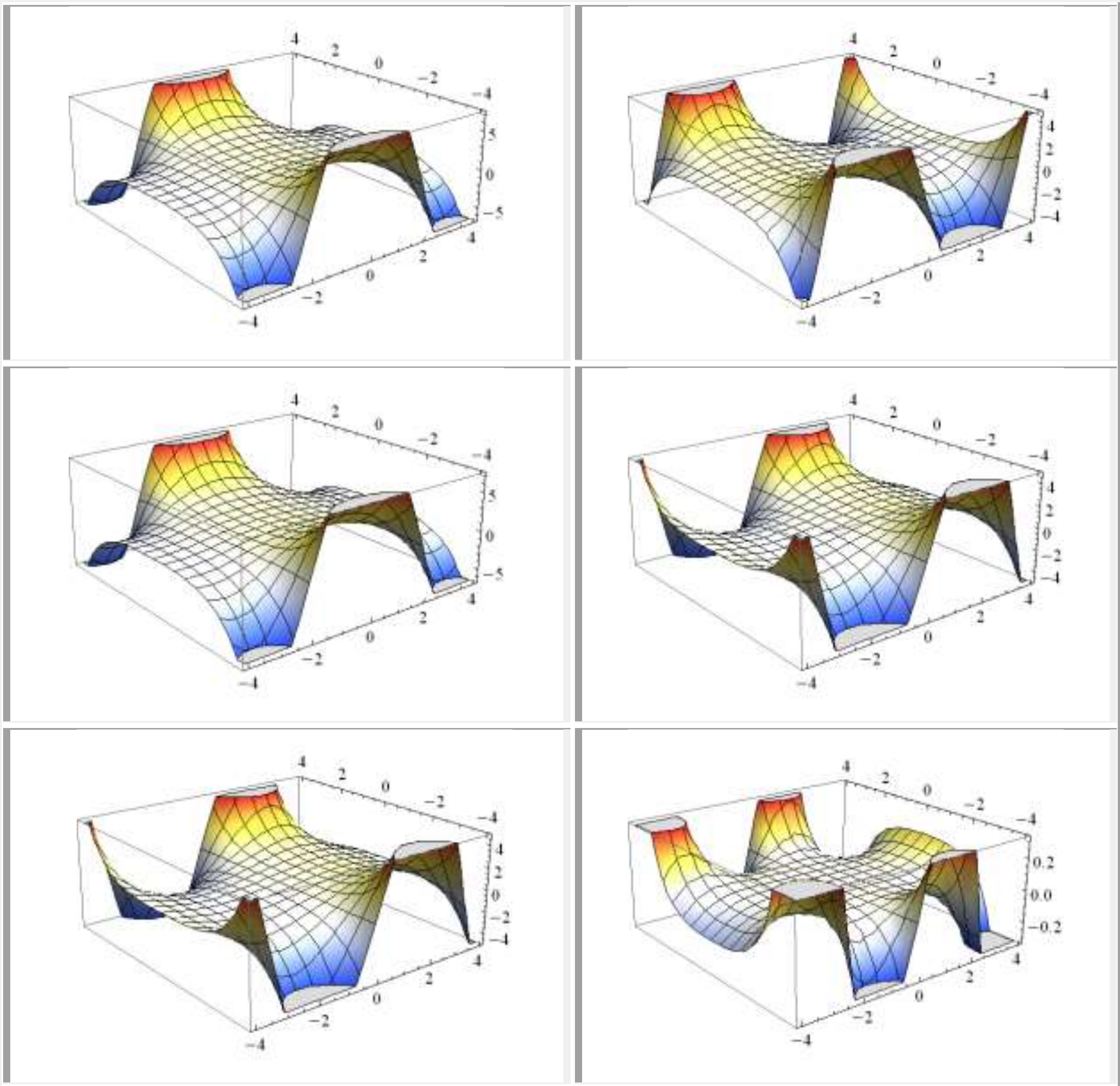


Fig.2,a Graficele funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa I-a, ***JEα(z)*** şi de variabilă excentrică θ, de ordin întreg **α = -5, -1, 0, 1, 3 şi 5** pentru **s = 0,25** în complex, **partea reală**

Ecuaţia **FSM-CE aexθ** este dată de expresia (4 şi 8), iar cea de variabilă centrică **α** de relţia (9)

(8) $\boldsymbol{\alpha(\theta)} = \mathbf{aex}[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{S}\ (\mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon})] \equiv \mathbf{aex}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta(\theta)} = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{bex}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{arcsin}[\mathbf{s}.\mathbf{sin}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon})]$

(9) $\boldsymbol{\theta(\alpha)} = \mathbf{Aex}[\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{S}\ (\mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon})] \equiv \mathbf{Aex}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta(\alpha)} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{Bex}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{arcsin}[\frac{s.sin(\alpha-\varepsilon)]}{Rex\alpha}] =$

$= \boldsymbol{\alpha} + \arctan\frac{s.sin\alpha}{1-scos(\alpha-\varepsilon)}.$

În consecinţă, **funcţiile Besel excentrice de speţa I-a J** de **variabilă excentrică θ** sunt

(10) $J_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right)^{2m+\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{\theta - \mathbf{arcsin}[s.\mathbf{sin}(\theta-\varepsilon)]}{2}\right)^{2m+\alpha},$

iar cele de variabilă centrică vor fi

$$(11) \qquad J_\alpha(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\alpha})) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\alpha})}{2}\right)^{2m+\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{arcsin}[\mathbf{s}.\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\varepsilon})]}{2\boldsymbol{Rex\alpha}}\right)^{2m+\alpha}$$

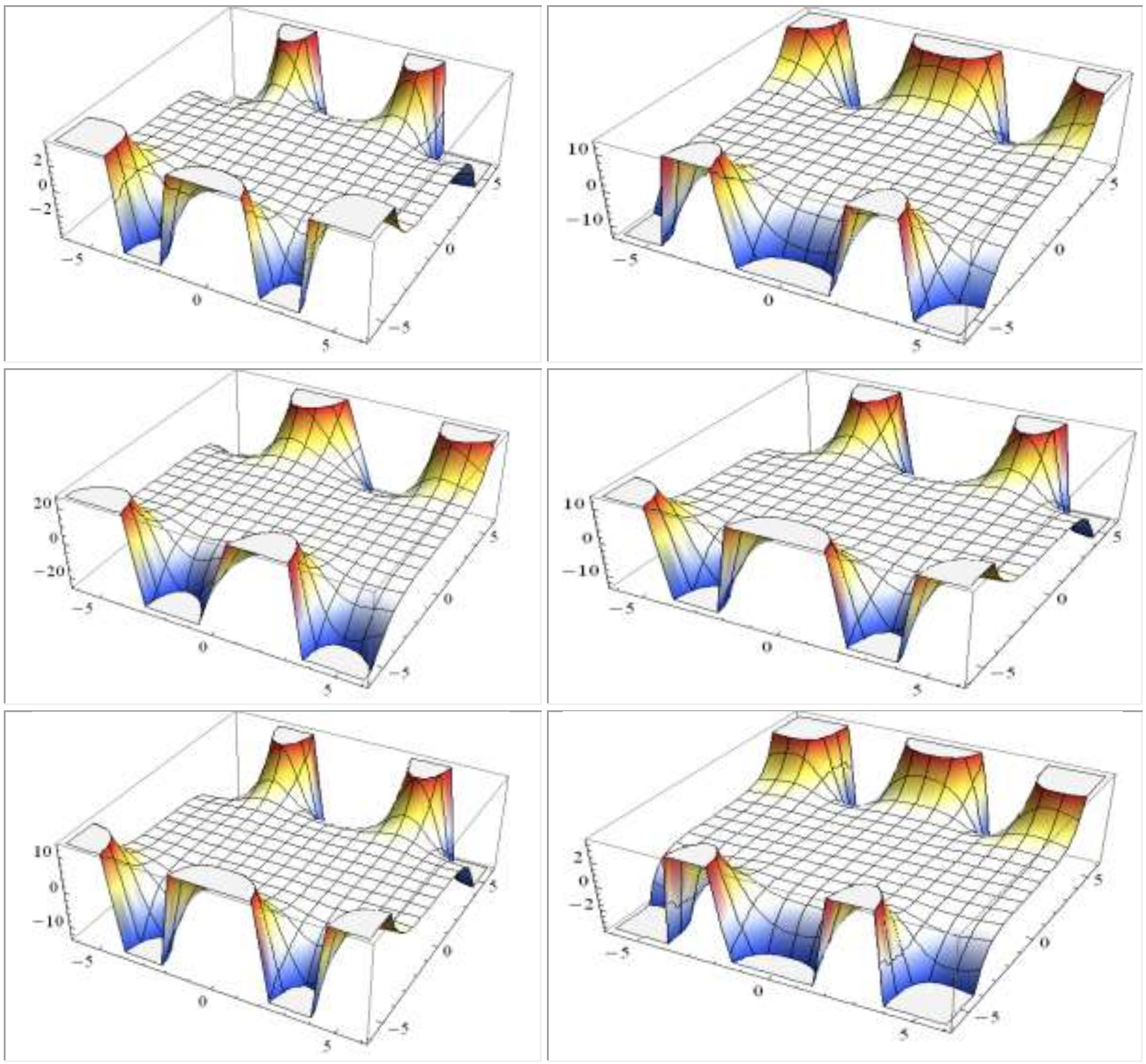


Fig.2,b Graficele funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa I-a, ***JE*$_\alpha$*(z)*** şi de variabilă excentrică θ, de ordin întreg **α = -5, -1, 0, 1, 3 şi 5** pentru **s = 0,5; partea imaginară**

Graficele acestora, în comparaţie cu ale celor centrice [***Nota I***: **Fig.1** şi **Fig.2**], sunt prezentate, în plan, în **figura 1,a**, ca funcţii de α ∈ [0, 3] cu pasul 1 şi de excentricitate numerică **s** ∈ [-1, +1] cu pasul 0,1.

Se poate observa că fiecare **funcţie Bessel** centrică este unică, în timp ce **funcţiile supermatematice Bessel excentrice** (**FSM-BE**) au ***câte o infinitate*** de membri / funţii.

În **figura 1,b** sunt prezentate suprapus cele cinci tipuri de **FSM-BE** pentru **α = 0, 1, 2, 3 şi 4** şi de excentricitate numerică **s = 0,25; 0,5; 0,75; 1**.

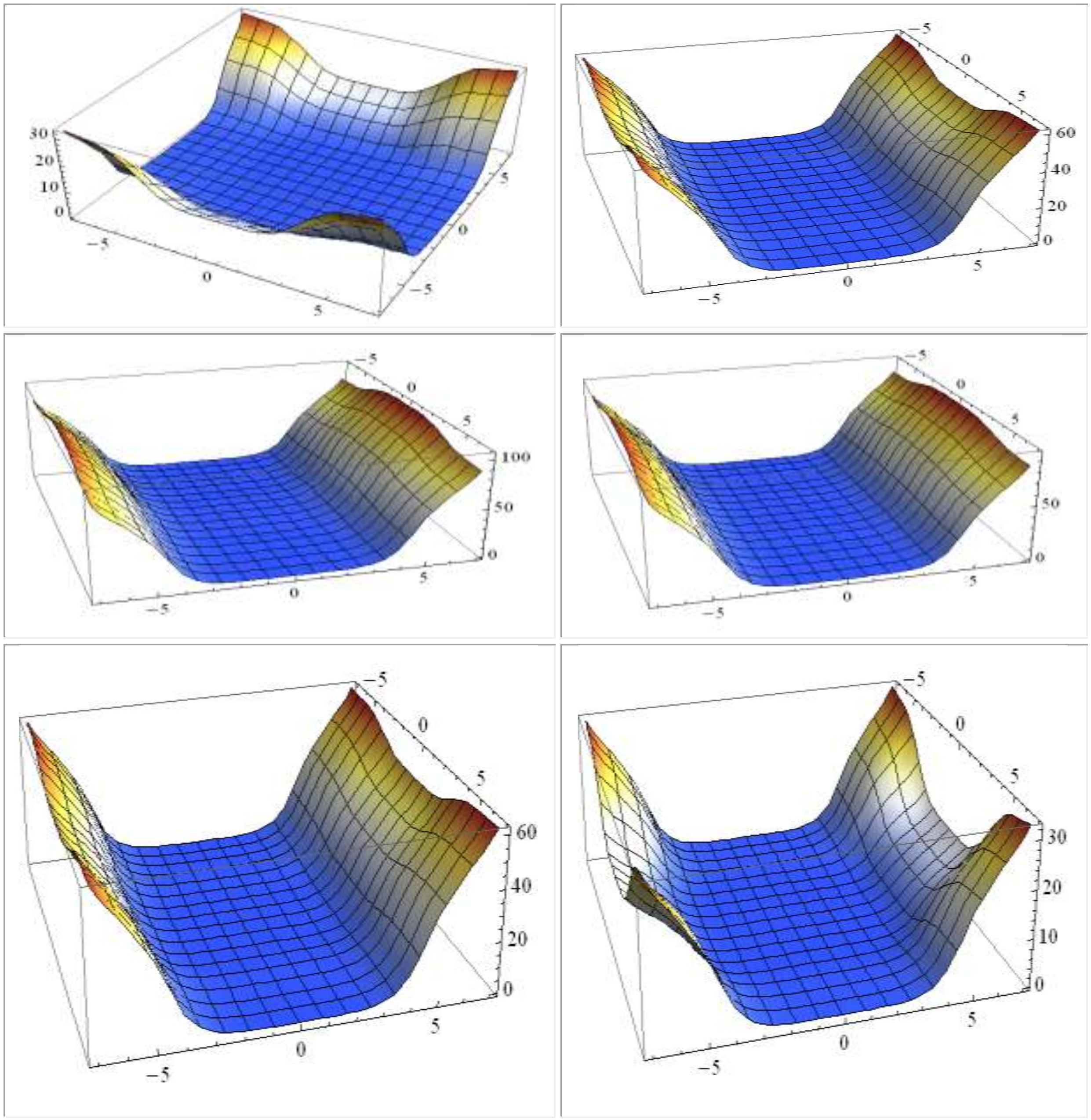


Fig.2,c Graficele funcţiilor **Bessel** **excentrice** de speţa I-a, ***JE$_\alpha$(z)*** şi de variabilă excentrică θ, de ordin întreg **α = -5, -1, 0, 1, 3 şi 5** , pentru **s = 0,75** în complex, **partea absolută**

www.SuperMathematica.com	**www.SuperMatematica.ro**

În **figura 1,c** sunt prezentate, tot în **2D** şi funcţiile **Bessel** de ordin întreg negativ, adică pentru ordinele întregi **α ∈ [-5, +5]**, cu pasul p = 1.

FSM-BE în planul complex sunt prezentate în **figurile 2,a→Re , 2,b →Im** şi **2,c→Abs**.

2.3 FUNCŢII BESSEL EXCENTRICE DE SPEŢA A DOUA YE_α

Graficele **funcţiilor Bessel** excentrice (**FSM-BE**) de speţa a doua **YE_α** sau **YE_n** sunt prezentate în **figura 2,a** pentru ordin întreg α = 0 ◤, 1 ◥, 2 ◣ şi 3 ◢ şi pentru excentricităţi numerice **s ∈ [-1,+1]** cu pasul 0,2.

În **figura 2,b** sunt prezentate **FSM-BE** de speţa a doua **YE_n** şi ordin întreg α ∈ [-5, +5] cu pasul 1 şi de **excentricitate numerică s ∈ [-5, +5]** cu pasul 0,2, aşa cum rezultă şi din ecuaţiile prezentate în figură, iar **funcţiile Bessel excentrice** de speţa II-a, ***$Ye_\alpha(z)$*** şi ordin întreg α ∈ [-5, +5] cu pasul **1** şi de **excentricitate numerică s** = +1 ◀ şi **s** = -1 ▶ precum şi de **excentricitate unghiulară ε = 0** sunt prezentate în **figura 2,c sus** ▲, iar cele de alte valori ale excentricitaţii unghiulare (**$\varepsilon = \frac{\pi}{6}$**) jos▼.

În **figura 3** sunt prezentate **FSM-BE** de speţa a doua **YE_n** în planul complex: **Re** în **Fig.3.a**, **Im** în **Fig.3,b** şi **Abs** în **Fig.3,c.**

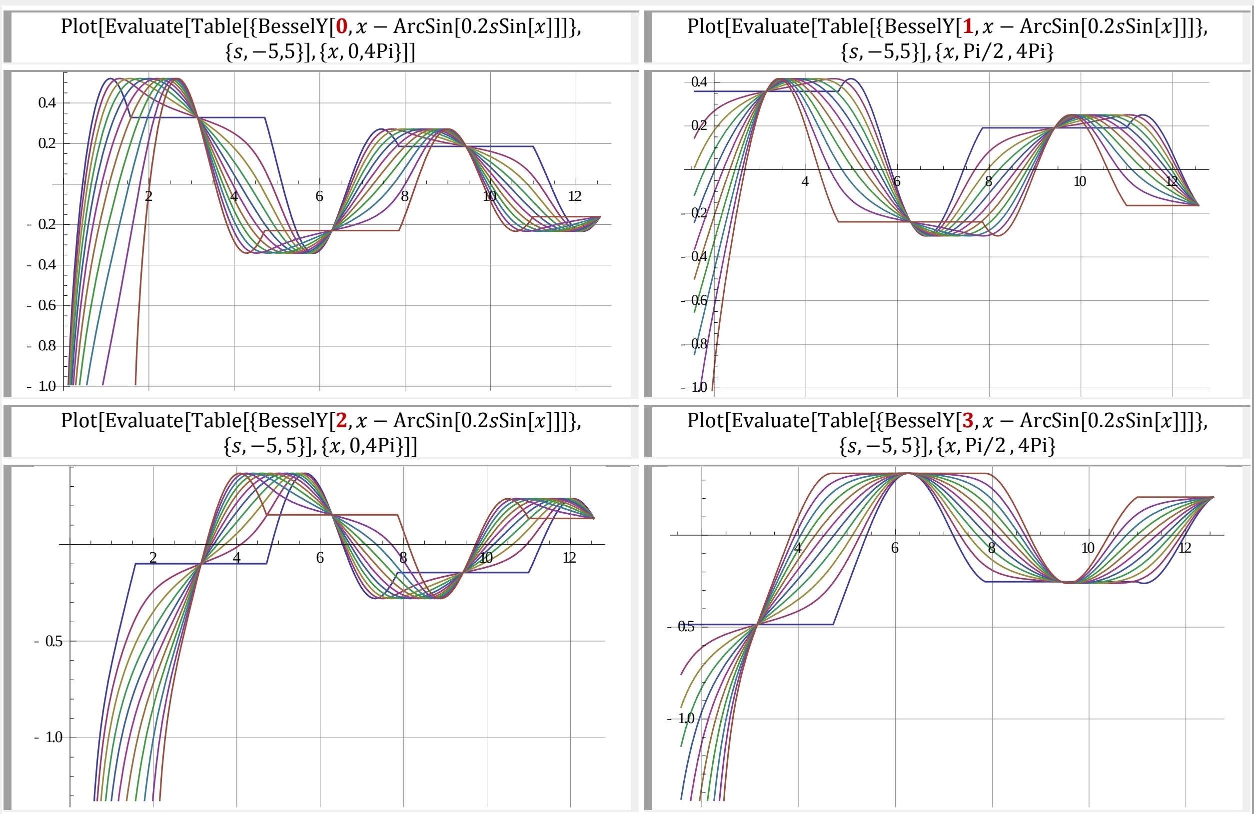


Fig. 3,a Funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa II-a, ***$Ye_\alpha(z)$*** şi ordin întreg α = 0 ◤, 1 ◥, 2 ◣ şi 3 ◢ **s∈ [-1, +1]** cu pasul 0,2

www.supermatematicaonline.blogspot.ro	**www.supermatematica.ro**
www.supermaematica.ro	**www.supermathematica.org**

Pasul a fost mărit de la 0,1 la 0,2 pentru ca graficele individuale ale fiecărei curbe să devină mai lizibile în detrimentul reducerii numărului de curbe de la 21 la 11. Sunt prezentate, în planul complex **2D**, în graficele din **figura 4,a** de ordin întreg α = 0 ◤, 1◥, 2 ◣ şi 3◢, iar cele 5 de ordin întreg **α = 0, 1, 2, 3 şi 4** şi excentricitate numerică **s = 0,25 ◤; 0,5 ◥; 0,75 ◣ şi 0.98◢** în **figura 4,b**.

```
Plot[Evaluate[Table[{BesselY[s, x − ArcSin[0.2sSin[x]]]}, {s, −5, 0}], {x, Pi/2, 4Pi}]]
```

```
Plot[Evaluate[Table[{BesselY[s, x − ArcSin[0.2sSin[x]]]}, {s, 0,5}], {x, Pi/2, 4Pi}]]
```

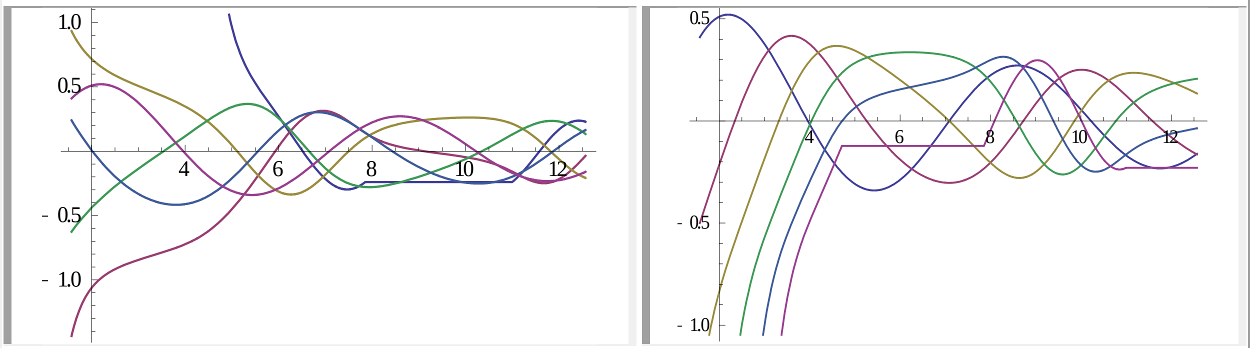
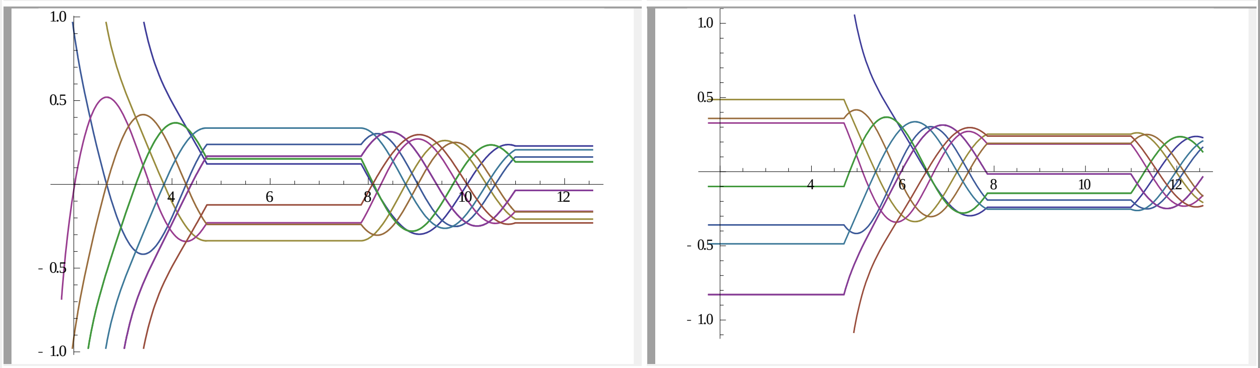


Fig. 3,b Funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa II-a, ***Ye$_\alpha$(z)*** şi ordin întreg α ∈ [-5, +5] cu pasul 1 şi de excentricitate numerică de **α ∈ [-5, +5]** cu pasul 0,2

```
Plot[Evaluate[Table[{BesselY[s, x − ArcSin[Sin[x]]]}, {s, −5,5}], {x, 1.75,4Pi}]]
```

```
Plot[Evaluate[Table[{BesselY[s, x + ArcSin[Sin[x]]]}, {s, −5,5}], {x, 1.75,4Pi}]]
```




```
Plot[Evaluate[Table[{BesselY[s, x − ArcSin[0.2sCos[x]Sin[x − Pi/6]]]}, {s, −5,5}], {x, 1.75,4Pi}]]
```

```
Plot[Evaluate[Table[{BesselY[s, x − ArcSin[0.2sCos[x]Sin[x − Pi/4]]]}, {s, −5,5}], {x, 1.75,4Pi}]]
```

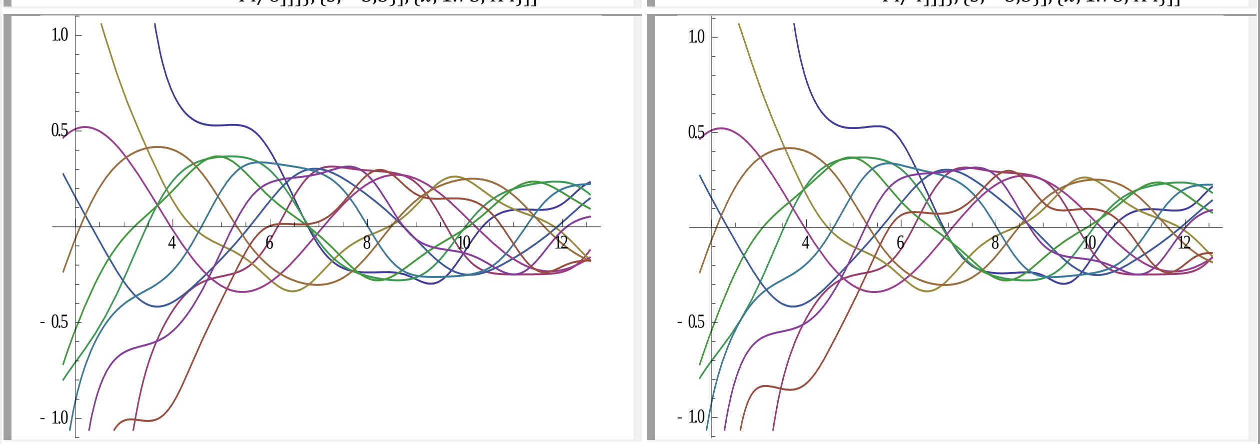


Fig. 3,c Funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa II-a, ***Ye$_\alpha$(z)*** şi ordin întreg α ∈ [-5, +5] cu pasul 1 şi excentricitate numerică s = +1 ◄ şi s = -1 ► sus ▲ şi de excentricitate variabilă s = s cosx şi excentricitate unghiulară **ε = π / 6** jos▼

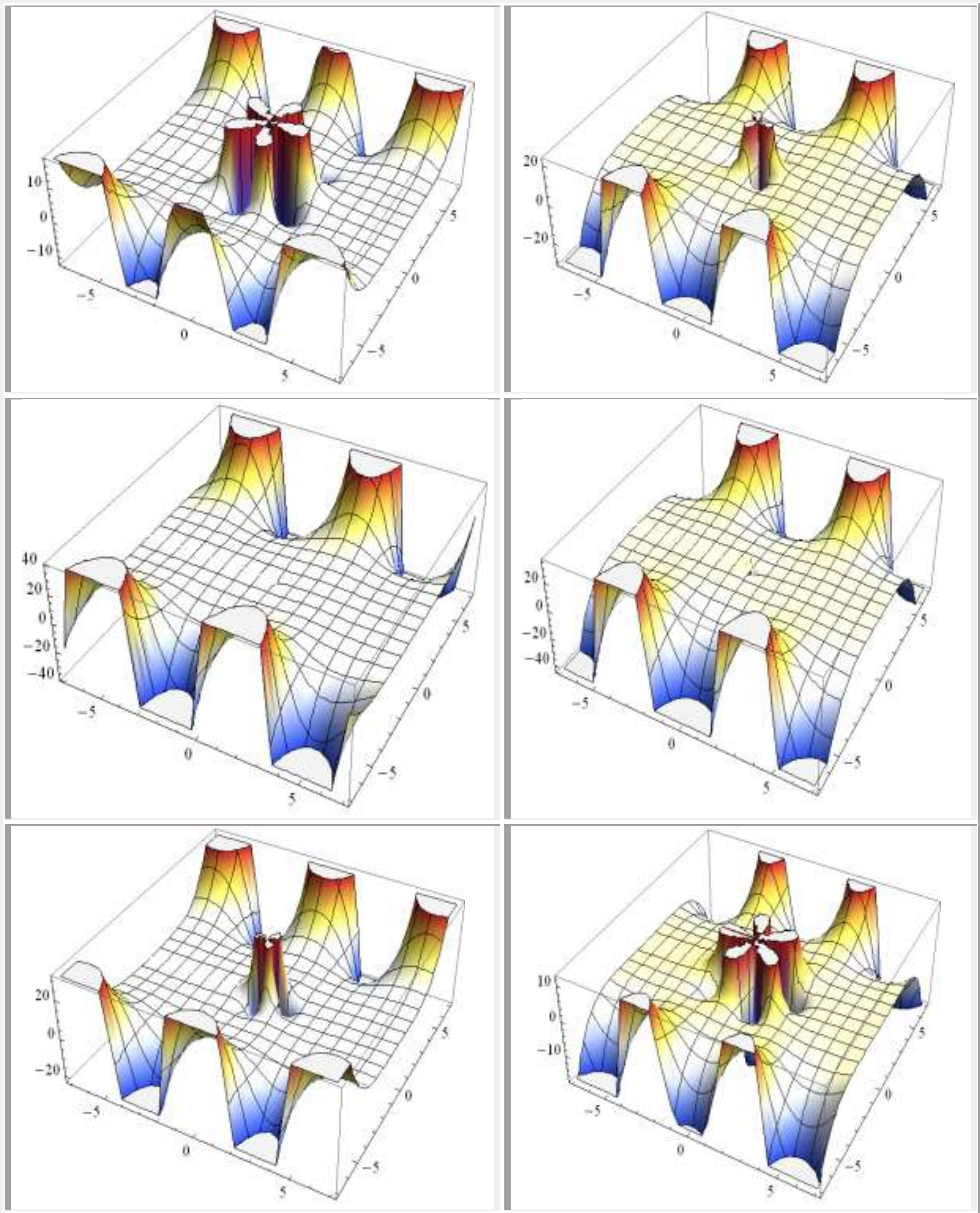


Fig. 4,a Funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa II-a, ***$Ye_{\alpha}(z)$*** şi ordin întreg in planul complex, **partea reală**, ordin întreg **α = -5, -1, 0, 1, 3 şi 5** , pentru **s = 0,25 ◤; 0,5 ◥; 0,75 ◣; 0,998 ◢**

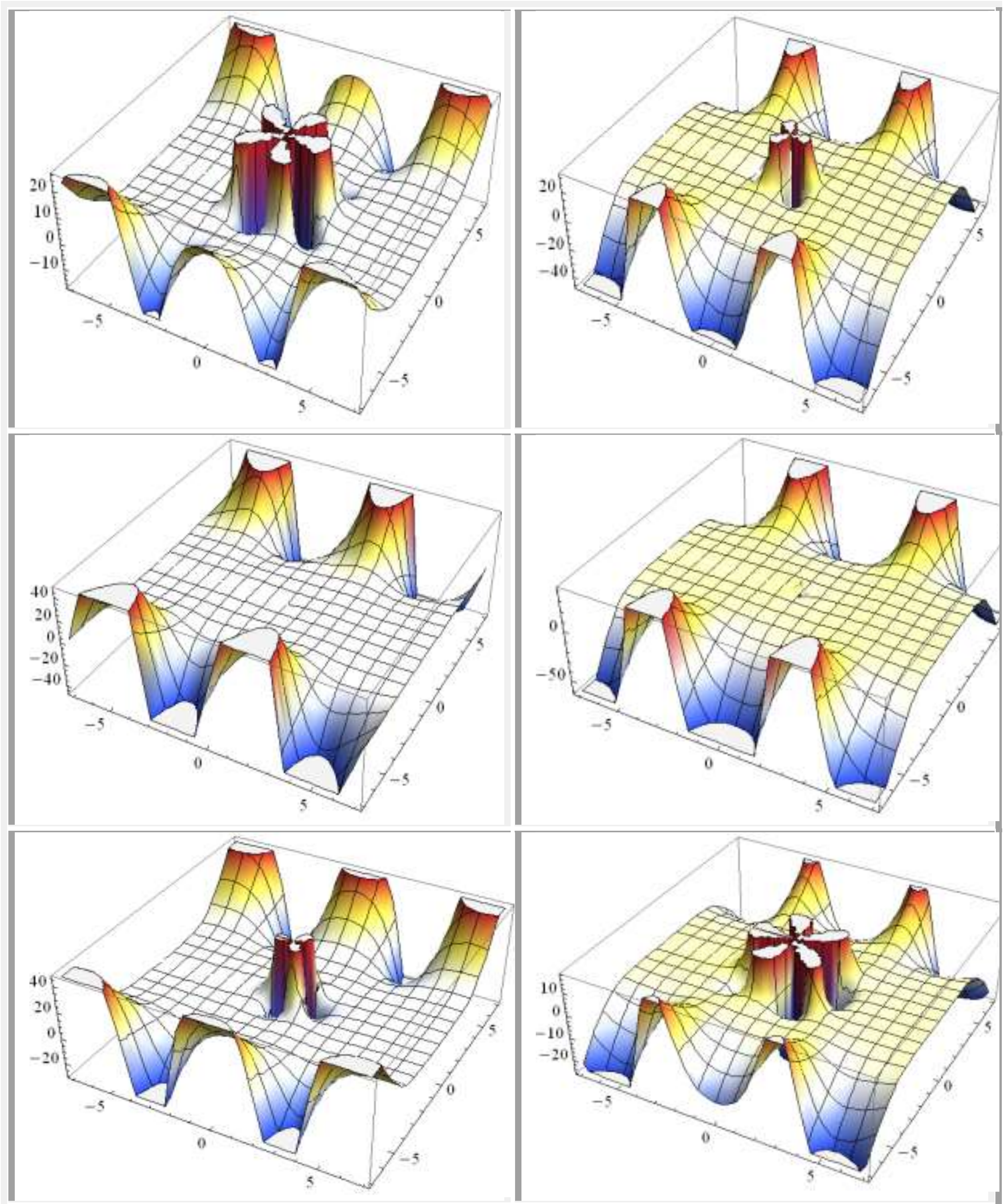


Fig. 4,b Funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa II-a, ***Ye$_{\alpha}$(z)*** şi ordin întreg in planul complex, **partea reală**, ordin întreg **α = -5, -1, 0, 1, 3 şi 5 ,** pentru s = **0,5**

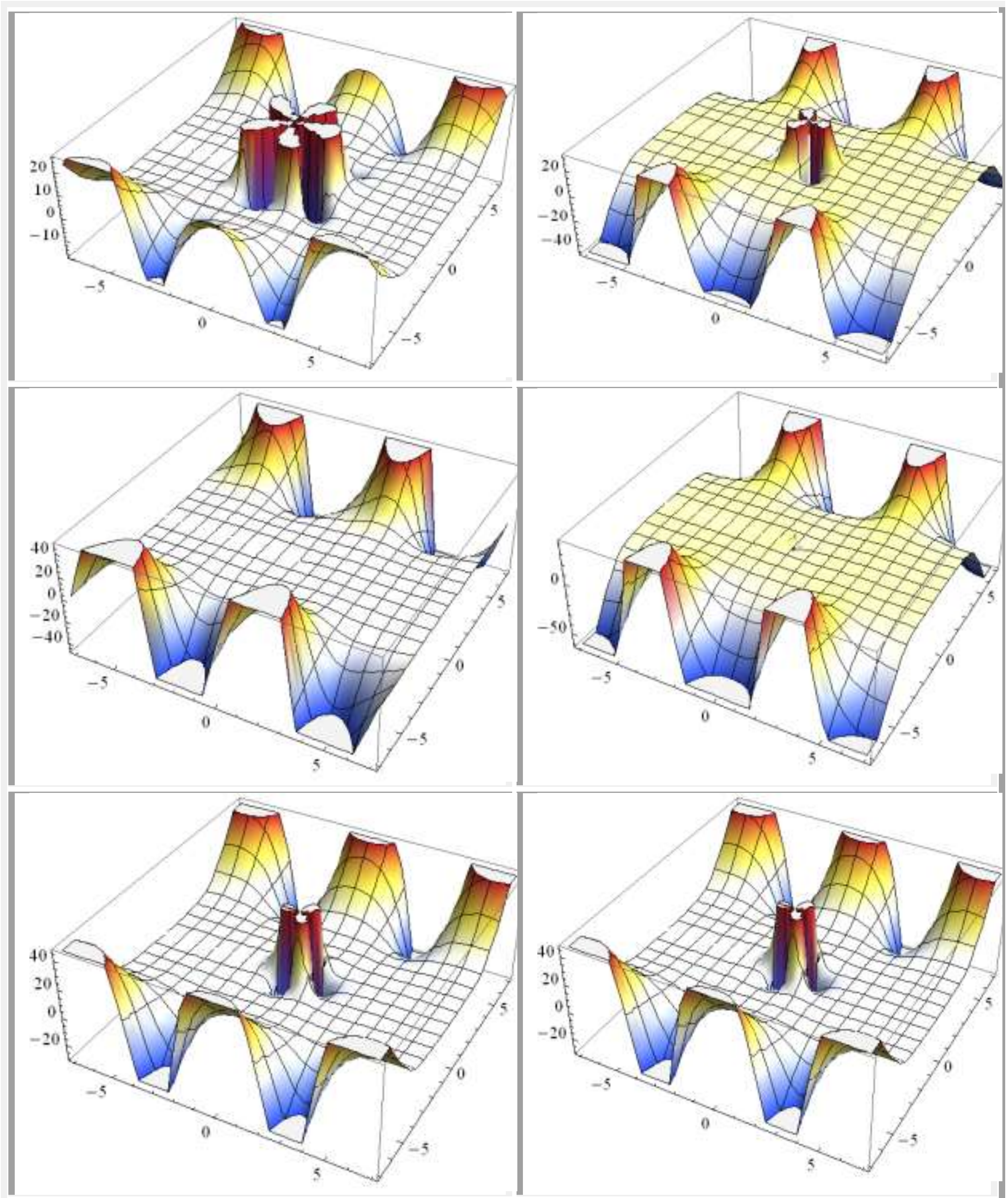


Fig. 4,c Funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa II-a, ***$Ye_{\alpha}(z)$*** şi ordin întreg în planul complex, **partea reală**, ordin întreg **α = -5, -1, 0, 1, 3 şi 5** , pentru s = **0,75**

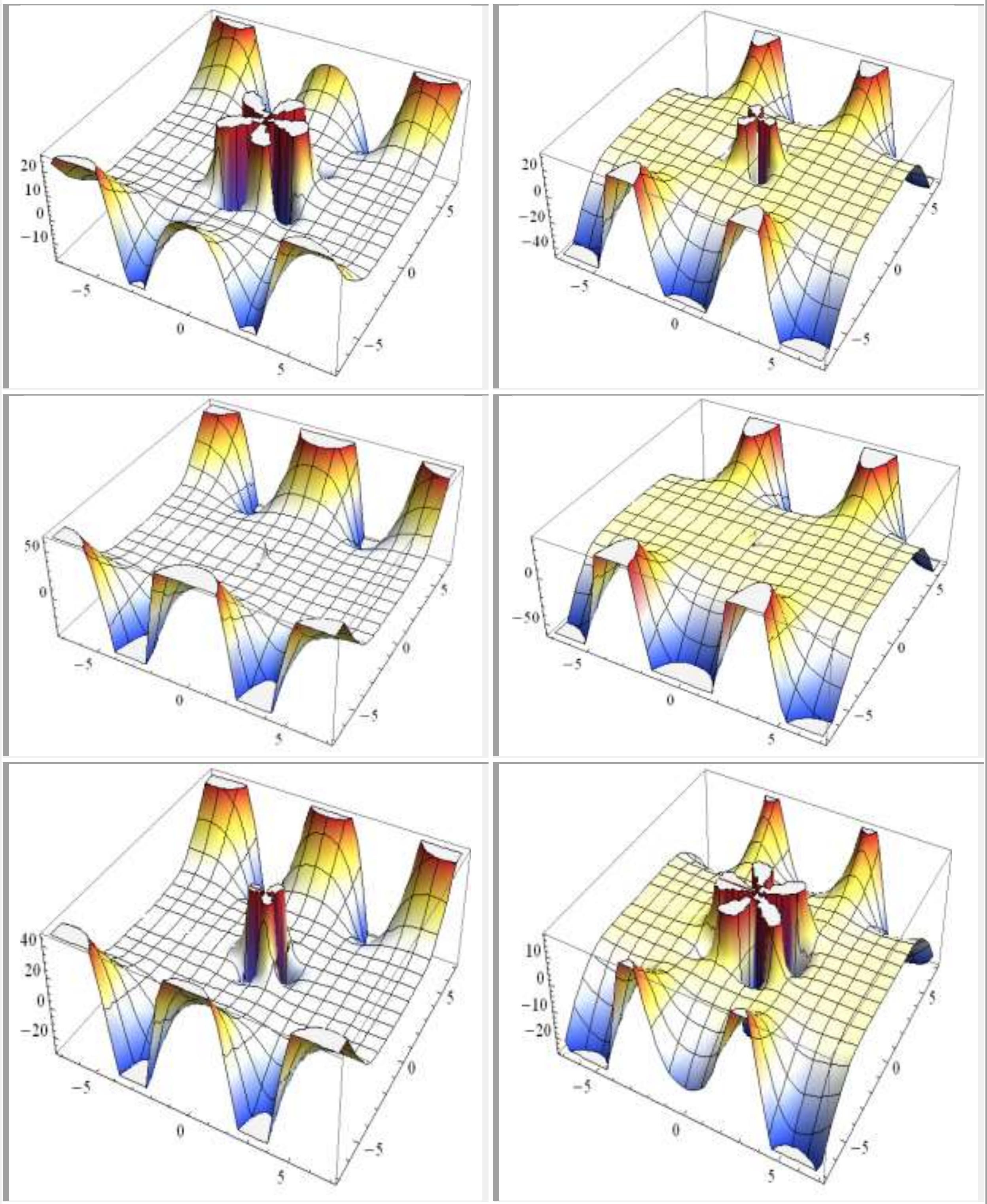
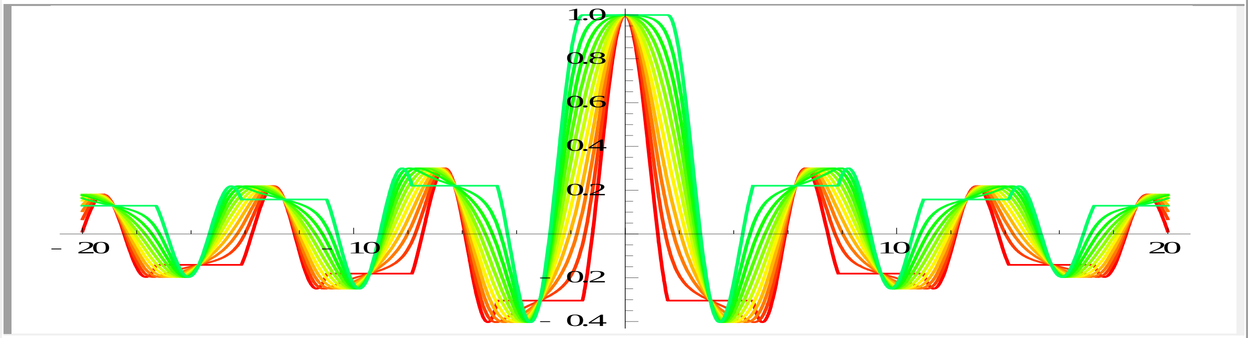
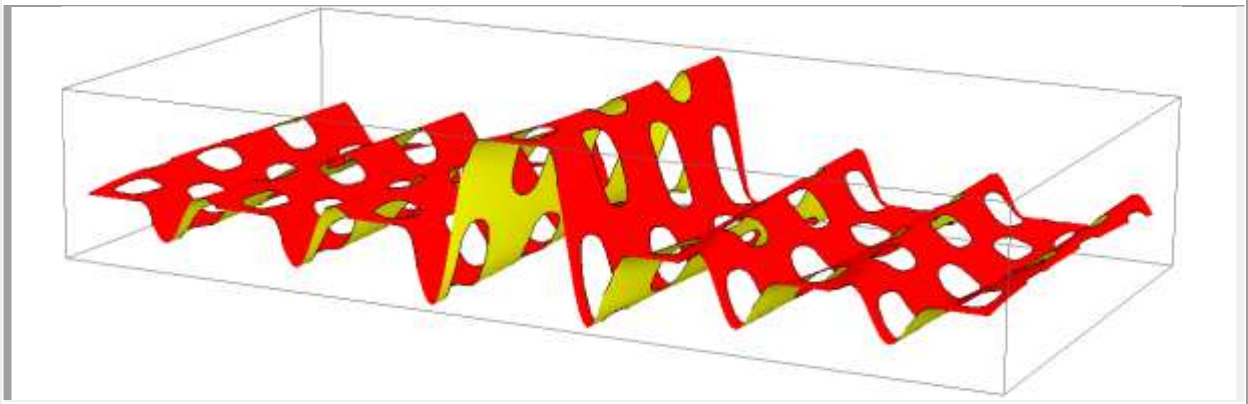


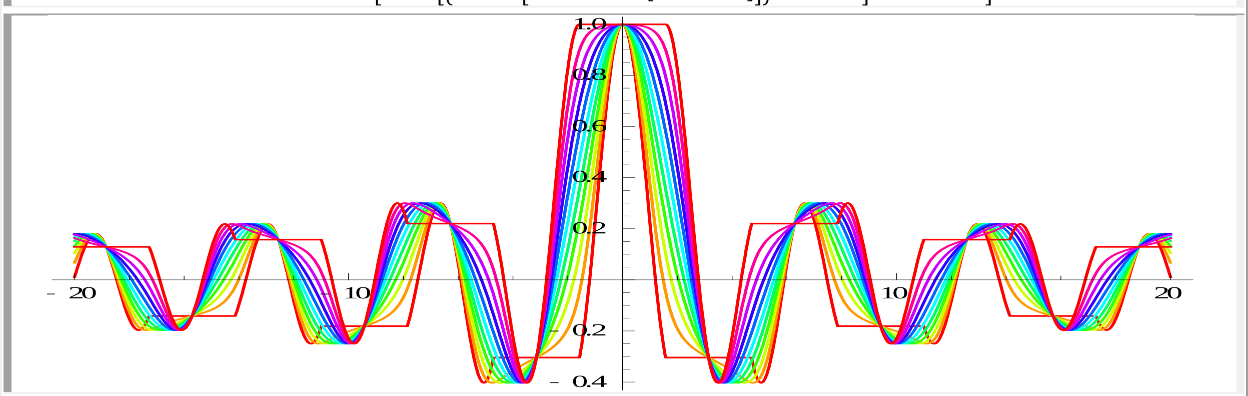
Fig. 4,d Funcţiilor **Bessel excentrice** de speţa II-a, ***Ye****α****(z)*** şi ordin întreg în planul complex, **partea reală**, ordin întreg **α = - 5, -1, 0, 1, 3 şi 5** , pentru **s = 0,95**

Plot[Evaluate[Table[{BesselJ[0, x − ArcSin[0.2sSin[x]]]}, {s, −5,5}], {x, −20,20},]]





Plot[Evaluate[Table[{BesselJ[0, x − ArcSin[0.2sSin[x]]]}, {s, −5,5}], {x, −20,20}]]



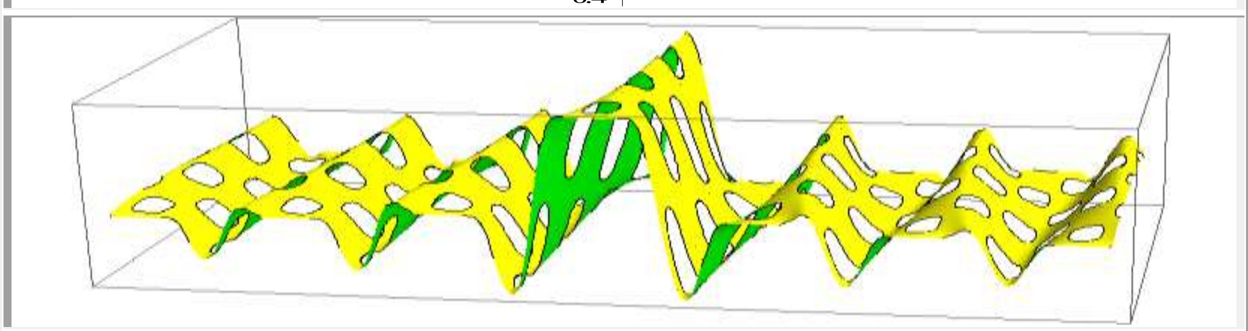


Fig. 5 Funcţii Bessel excentrice în 2D şi în 3D ciuruite

B I B L I O G R A F I E

1	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE**	Com. I Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, Timişoara , 1978, pag.101...108.
2	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE şi EXTENSIA LOR.**	Bul .St.şi Tehn. al I.P. ”TV” Timişoara, Seria Mecanică, Tomul 25(39), Fasc. 1-1980, pag. 189...196
3	Şelariu Mircea Eugen	**STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ale UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV cu AJUTORUL FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE**	Com. I Conf. Naţ. Vibr.în C.M. Timişoara,1978, pag. 95...100
4	Şelariu Mircea Eugen	**APLICAŢII TEHNICE ale FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE**	Com.a IV-a Conf. PUPR, Timişoara, 1981, Vol.1. pag. 142...150
5	Şelariu Mircea Eugen	**THE DEFINITION of the ELLIPTIC ECCENTRIC with FIXED ECCENTER**	A V-a Conf. Naţ. de Vibr. în Constr. de Maşini,Timişoara, 1985, pag. 175...182
6	Şelariu Mircea	**ELLIPTIC ECCENTRICS with MOBILE ECCENTER**	IDEM , pag. 183...188
7	Şelariu Mircea Eugen	**CIRCULAR ECCENTRICS and HYPERBOLICS ECCENTRICS**	Com. a V-a Conf. Naţ. V. C. M. Timişoara, 1985, pag. 189...194.
8	Şelariu Mircea Eugen	**ECCENTRIC LISSAJOUS FIGURES**	IDEM, pag. 195...202
9	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE cex şi sex- SOLUŢIILE UNOR SISTEME MECANICE OSCILANTE NELINIARE**	Com. a VII-a Conf.Naţ. V.C.M., Timişoara,1993, pag. 275...284.
10	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn.,TEHNO’95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematica Aplicată, pag.41...64
11	Şelariu Mircea Eugen	**FORMA TRIGONOMETRICĂ a SUMEI şi a DIFERENŢEI NUMERELOR COMPLEXE**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn., TEHNO’95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematică Aplicată, pag. 65...72
12	Şelariu Mircea Eugen	**MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO’95., Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronică, Dispozitive şi Rob.Ind.,pag. 85...102
13	Şelariu Mircea Eugen	**RIGIDITATEA DINAMICĂ EXPRIMATĂ CU FUNCŢII SUPERMATEMATICE**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn., TEHNO’95 Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronică, Dispoz. şi Rob.Ind.,pag. 185...194

14	Şelariu Mircea Eugen	**DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAŢIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPEŢA INTÂIA K(k)**	Bul. VIII-a Conf. de Vibr. Mec., Timişoara,1996, Vol III, pag.15 ... 24.
15	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ**	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Menagerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 531..548
16	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII DE TRANZIŢIE INFORMAŢIONALĂ**	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Managerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, Pag. 549… 556
17	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ CA SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE**	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Managerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, Pag. 557…572
18	Şelariu Mircea Eugen	**INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ**	Lucr. Simp. Naţional "Zilele Universităţii Gh. Anghel" Ed. II-a, Drobeta Turnu Severin, 16-17 mai 2003, pag. 171 … 178
19	Şelariu Mircea Eugen	**QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
20	Şelariu Mircea Eugen	**SMARANDACHE STEPPED FUNCTIONS**	Revista: "Scienta Magna" Vol. 3, No. 1, 2007, ISSN 1556-6706
21	Şelariu Mircea Eugen	**TEHNO ART OF ŞELARIU SUPERMATHEMATICS FUNCTIONS**	(ISBN-10):1-59973-037-5 (ISBN-13):974-1-59973-037-0 (EAN): 9781599730370
22	Şelariu Mircea Eugen	**PROIECTAREA DISPOZITIVELOR DE PRELUCRARE, Cap. 17 din PROIECTAREA DISPOZITIVELOR**	Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982, pag. 474 … 543
23	Petrişor Emilia	**ON THE DYNAMICS OF THE DEFORMED STANDARD MAP**	Workshop Dynamicas Days'94, Budapest, si Analele Univ.din Timisoara, Vol.XXXIII, Fasc.1-1995, Seria Mat.-Inf.,pag. 91…105
24	Petrişor Emilia	**SISTEME DINAMICE HAOTICE**	Seria Monografii matematice, Tipografia Univ. de Vest din Timişoara, 1992
25	Petrişor Emilia	**RECONNECTION SCENARIOS AND THE THERESHOLD OF RECONNECTION IN THE DYNAMICS OF NONTWIST MAPS**	Chaos, Solitons and Fractals, 14 (2002) 117…127
27	Cioara Romeo	**FORME CLASICE PENTRU FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE**	Proceedings of the Scientific Communications Meetings of "Aurel Vlaicu" University, Third Edition, Arad, 1996, pg.61 ..65
28	Preda Horea	**REPREZENTAREA ASISTATĂ A TRAIECTORILOR ÎN PLANUL FAZELOR A VIBRAŢIILOR NELINIARE**	Com. VI-a Conf.Naţ.Vibr. în C.M. Timişoara, 1993

29	Filipescu Avram	**APLICAREA FUNCŢIILOR (ExPH) EXCENTRICE PSEUDOHIPERBOLICE ÎN TEHNICA**	Com.VII-a Conf. Internat.de Ing. Manag. Şi Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematica aplicată., pag. 181 … 185
30	Dragomir Lucian (Toronto - Canada)	**UTILIZAREA FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE ÎN CAD / CAM : SM-CAD / CAM. Nota I-a: REPREZENTARE ÎN 2D**	Com.VII-a Conf. Internaţ.de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematică aplicată., pag. 83 … 90
31	Şelariu Şerban	**UTILIZAREA FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE ÎN CAD / CAM : SM-CAD / CAM. Nota I I –a: REPREZENTARE ÎN 3D**	Com.VII-a Conf. Internaţ.de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematică Aplicată., pag. 91 … 96
32	Staicu Florentiu	**DISPOZITIVE UNIVERSALE de PRELUCRARE a SUPRAFEŢELOR COMPLEXE de TIPUL EXCENTRICELOR ELIPTICE**	Com. Ses. Anuale de Com.Şt. Oradea, 1994
33	George LeMac	**THE ECCENTRIC TRIGONOMETRIC FUNCTIONS: AN EXTENTION OF CLASSICAL TRIGONOMETRIC FUNCTIONS.**	The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada Depertment of Applied Mathematics May 18, 2001
34	Şelariu Mircea Ajiduah Cristoph Bozântan Emil (USA) Filipescu Avram	**INTEGRALELE UNOR FUNCŢII SUPERMATEMATICE**	Com. VII Conf.Internaţ.de Ing.Manag. şi Tehn. TEHNO'95 Timişoara. 1995,Vol.IX: Matem.Aplic. pag.73…82
35	Şelariu Mircea Fritz Georg (G) Meszaros A.(G)	**ANALIZA CALITĂŢII MIŞCĂRILOR PROGRAMATE cu FUNCŢII SUPERMATEMATICE**	IDEM, Vol.7: Mecatronică, Dispozitive şi Rob.Ind., pag. 163…184
36	Şelariu Mircea Szekely Barna (Ungaria)	**ALTALANOS SIKMECHANIZMUSOK FORDULATSZAMAINAK ATVITELI FUGGVENYEI MAGASFOKU MATEMATIKAVAL**	Bul.Şt al Lucr. Prem.IV,Universitatea din Budapesta, nov. 1992
37	Şelariu Mircea Popovici Maria	**A FELSOFOKU MATEMATIKA ALKALMAZASAI**	Bul.Şt al Lucr. Prem.IV, Universitatea din Budapesta, nov. 1994
38	Smarandache Florentin Şelariu Mircea Eugen	**IMMEDIATE CALCULATION OF SOME POISSON TYPE INTEGRALS USING SUPERMATHEMATICS CIRCULAR EXCENTRIC FUNCTIONS**	http://arxiv.org/abs/0706.4238 Archiv arXiv (United States) viXra.org > Functions and Analysis > viXra:1004.0053
39	Konig Mariana Şelariu Mircea	**PROGRAMAREA MIŞCĂRII DE CONTURARE A ROBOŢILOR INDUSTRIALI cu AJUTORUL FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE CIRCULARE EXCENTRICE**	MEROTEHNICA, Al V-lea Simp. Naţ.de Rob.Ind.cu Part .Internaţ. Bucuresti, 1985, pag.419…425
40	Konig Mariana Şelariu Mircea	**PROGRAMAREA MIŞCĂRII de CONTURARE ale R I cu AJUTORUL FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE CIRCULARE EXCENTRICE,**	Merotehnica, V-lea Simp. Naţ.de RI cu participare internaţională, Buc.,1985, pag. 419 … 425.
41	Konig Mariana Şelariu Mircea	**THE STUDY OF THE UNIVERSAL PLUNGER IN CONSOLE USING THE ECCENTRIC CIRCULAR FUNCTIONS**	Com. V-a Conf. PUPR, Timişoara, 1986, pag.37…42

42	Staicu Florenţiu Şelariu Mircea	**CICLOIDELE EXPRIMATE CU AJUTORUL FUNCŢIEI SUPERMATEMATICE rexθ**	Com. VII Conf. Internaţională de Ing.Manag. şi Tehn, Timişoara “TEHNO’95”pag.195-204
43	Gheorghiu Em. Octav Şelariu Mircea Bozantan Emil	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE DE SUMA DE ARCE**	Ses.de com.st.stud.,Secţia Matematică,Timişoara, Premiul II la Secţia matematică pe 1983
44	Gheorghiu Emilian Octav Selariu Mircea Cojerean Ovidiu	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE. DEFINIŢII, PROPRIETĂŢI, APLICAŢII TEHNICE**	Ses. De com.şt.stud. Secţia Matematică, premiul II la Secţia Matematică pe 1985.
45	Şelariu Mircea Eugen	**CINETOSTATICĂ GEOMETRICĂ (METODA SEPARĂRII MOMENTELOR)**	Com. Primului Simpozion de Roboţi Industriali, Buc. 1981, pag. 378…384
46	Şelariu Mircea Eugen Mădăraş Lucian	**ANALIZA AUTOFRÂNĂRII MECANISMELOR DE PREHENSIUNE PRIN METODA SEPARARII MOMENTELOR**	Com.I Simp. Naţ.de Rob.Ind., Buc., 1981
47	Savii Gh. Şelariu Mircea Vucu I.,Pop I. Demian Ioan	**STUDIUL RIGIDITĂŢII ANSAMBLULUI CĂRUCIOR AL STRUNGULUI SN-400,**	Bul.Şt.şi Tehn.al IP Timişoara, Tom.11 (25) Fasc.2, 1966, pag. 731…740
48	Savii Gh. Pop Ion Şelariu Mircea	**CONTRIBUŢII la DETERMINAREA RIGIDITĂŢII STRUNGURILOR NORMALE, CU REFERIRE LA STRUNGUL SN-400**	Bul. Şt. şi Tehn. Al IPT,1971 Tom 16(30), Fasc.1, Seria Mec. Pag.129…143
49	Savii Gh. Pop Ion Şelariu Mircea Micsa Ion	**INFLUENŢA RIGIDITĂŢII ASUPRA PRECIZIEI FORMEI GEOMETRICE la PRELUCRAREA pe STRUNG**	C.S.L.C.P. al IPTimişoara,1970, pag. 76 ... 77
50	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE EDIŢIA 1-a**	Editura ” POLITEHNICA” Timişoara 2007
51	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE Vol I şi Vol. II, EDIŢIA a 2-a**	Editura ” POLITEHNICA” Timişoara 2012

Lucrari publicate de www.cartiaz.ro

LUCRARI EXISTENTE LA www.CARTIAZ.ro IN 13 ianuarie 2013

Pagina 1-a

Aplicarea metodei separarii momentelor (MSM) la mecanisme si sisteme in ansamblul lor [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
157 Stiinta si Tehnica 0.66MB ★ (Carte donata de autor)

Aplicatii ale metodei separarii momentelor (MSM) la sisteme industriale concrete [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
104 Stiinta si Tehnica 0.67MB ★ (Carte donata de autor)
Aproximarea functiilor: Un sistem supermatematic cu baza continua de aproximare a functiilor [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
164 Stiinta si Tehnica 1.09MB ★ (Carte donata de autor)
Bucla centrica si versierele excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
141 Stiinta si Tehnica 0.83MB ★ (Carte donata de autor)
Cardinal functions and integral functions [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu, Florentin Smarandache, Marian Nitu
44 Stiinta si Tehnica 1.23MB ★ (Carte donata de autor)
Cercurile lui Apollonius din Perga [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
117 Stiinta si Tehnica 1.78MB ★ (Carte donata de autor)
Cercurile lui Apollonius si cercurile olimpice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
152 Stiinta si Tehnica 0.97MB ★ (Carte donata de autor)
Cifrele, particulele elementare ale Matematicii [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
117 Stiinta si Tehnica 0.71MB ★ (Carte donata de autor)
De la rezolvarea triunghiurilor la functii supermatematice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
191 Stiinta si Tehnica 1.59MB ★ (Carte donata de autor)
Definirea FSM-CE hipoelementare de variabila excentrica theta si centrica alpha [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
131 Stiinta si Tehnica 3.94MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 2-a

Derivatele si integralele unor functii supermatematice circulare excentrice (FSM-CE) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
158 Stiinta si Tehnica 1.82MB ★ (Carte donata de autor)
Despre lobe si cvazilobe: Lobe exterioare si cvazilobe interioare cercului unitate [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
156 Stiinta si Tehnica 1.31MB ★ (Carte donata de autor)
Determinarea oricat de exacta a relatiei de calcul a integralei eliptice complete de speta I (Rom) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
111 Stiinta si Tehnica 0.21MB ★ (Carte donata de autor)
Determinarea oricat de exacta a relatiei de calcul a integralei eliptice complete de speta intaia (Engleza)[PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
116 Stiinta si Tehnica 0.34MB ★ (Carte donata de autor)
Determinarea punctelor de intersectie din Teorema Liniilor Concurente a lui Florentin Smarandache [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
88 Stiinta si Tehnica 0.88MB ★ (Carte donata de autor)

Dispozitive de acumulare si de transport (dat) prin vibratii [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
269 Stiinta si Tehnica 1.24MB ★ (Carte donata de autor)
Elemente neliniare legate in serie [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
107 Stiinta si Tehnica 1.3MB ★ (Carte donata de autor)
Esantionarea semnalelor [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
114 Stiinta si Tehnica 1.18MB ★ (Carte donata de autor)
Functia supermatematica (FSM) radial excentrica cvadriloba [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
119 Stiinta si Tehnica 1.67MB ★ (Carte donata de autor)
Functii cardinale si functii integrale circulare excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu, Florentin Smarandache, Marian Nitu
112 Stiinta si Tehnica 2.2MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 3-a

Functii hiperbolice excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
417 Stiinta si Tehnica 2.55MB ★ (Carte donata de autor)
Functii in trepte Smarandache [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
123 Stiinta si Tehnica 0.18MB ★ (Carte donata de autor)
Functii signadforasice Voinoiu [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
114 Stiinta si Tehnica 2.66MB ★ (Carte donata de autor)
Functii supermatematice (FSM) inverse (FSM-I) rexθ, Rexα, dexθ şi Dexα [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
114 Stiinta si Tehnica 3.39MB ★ (Carte donata de autor)
Functii supermatematice circulare excentrice inverse (FSM-CEI) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
107 Stiinta si Tehnica 2.75MB ★ (Carte donata de autor)
Functii supermatematice circulare excentrice inverse (FSM-CEI) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
167 Stiinta si Tehnica 2.43MB ★ (Carte donata de autor)
Functiile supermatematice circulare cosinus si sinus excentrice. Derivatele si integralele lor. [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
224 Stiinta si Tehnica 1.13MB ★ (Carte donata de autor)
Intamplarea in matematica: Jocul dragostei fata de matematica si al intamplarii [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
108 Stiinta si Tehnica 1.46MB ★ (Carte donata de autor)
Integrale si functii eliptice excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
160 Stiinta si Tehnica 6.29MB ★ (Carte donata de autor)
Integrale si functii eliptice excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
128 Stiinta si Tehnica 1.85MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 4-a

Intersectii in plan [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
113 Stiinta si Tehnica 0.98MB ★ (Carte donata de autor)
Introducerea strambei in matematica [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
156 Stiinta si Tehnica 1.29MB ★ (Carte donata de autor)
Liniile concurente si punctele lor de intersectie intr-un triunghi [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
113 Stiinta si Tehnica 0.99MB ★ (Carte donata de autor)
Lobele - curbe matematice noi [DOC]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
141 Stiinta si Tehnica 19.65MB ★ (Carte donata de autor)
Matematica atomica. Metoda determinarii succesive a cifrelor consecutive ale unui numar [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
252 Stiinta si Tehnica 0.95MB ★ (Carte donata de autor)
Metoda pentru determinarea relatiei exacte de calcul a pulsatiei proprii a unui sistem oscilant liber, conservativ, cu caracteristica elastica neliniara [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
106 Stiinta si Tehnica 0.72MB ★ (Carte donata de autor)
Metoda separarii momentelor (partea I) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
103 Stiinta si Tehnica 0.3MB ★ (Carte donata de autor)
Metoda separarii momentelor (partea II-a) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
110 Stiinta si Tehnica 0.79MB ★ (Carte donata de autor)
Miscarea circulara excentrica de excentru punct fix [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
169 Stiinta si Tehnica 1.23MB ★ (Carte donata de autor)
Miscarea circulara excentrica de excentru punct mobil [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
148 Stiinta si Tehnica 1.28MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 5-a

Miscarea oscilanta excentrica: Pendulul Supermatematic [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
104 Stiinta si Tehnica 0.99MB ★ (Carte donata de autor)
Multiplicarea dimensionala a spatiilor [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
115 Stiinta si Tehnica 1.89MB ★ (Carte donata de autor)
Noi posibilitati de generare a suprafetelor complexe [PPT]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
131 Stiinta si Tehnica 7.05MB ★ (Carte donata de autor)
O metoda noua de integrare: Metoda de integrare prin divizarea diferentialei [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
145 Stiinta si Tehnica 0.33MB ★ (Carte donata de autor)
Obiecte geometrice supermatematice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
173 Stiinta si Tehnica 0.3MB ★ (Carte donata de autor)

Optimizarea conceptiei sistemelor tehnologice utilizand metoda separarii momentelor (MSM) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
106 Stiinta si Tehnica 0.19MB ★ (Carte donata de autor)
Optimizarea transportului vibrational cu ajutorul FSM-CE [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
176 Stiinta si Tehnica 0.72MB ★ (Carte donata de autor)
Optimization of workholding design using moments separation method (MSM) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu, Ion Grozav
52 Stiinta si Tehnica 0.14MB ★ (Carte donata de autor)
Optimization of workholding design using moments separation method (MSM) - lb. maghiara [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu, Kravecz Robert
51 Stiinta si Tehnica 0.14MB ★ (Carte donata de autor)
Polinoame ortogonale excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
121 Stiinta si Tehnica 0.37MB ★ (Carte donata de autor)

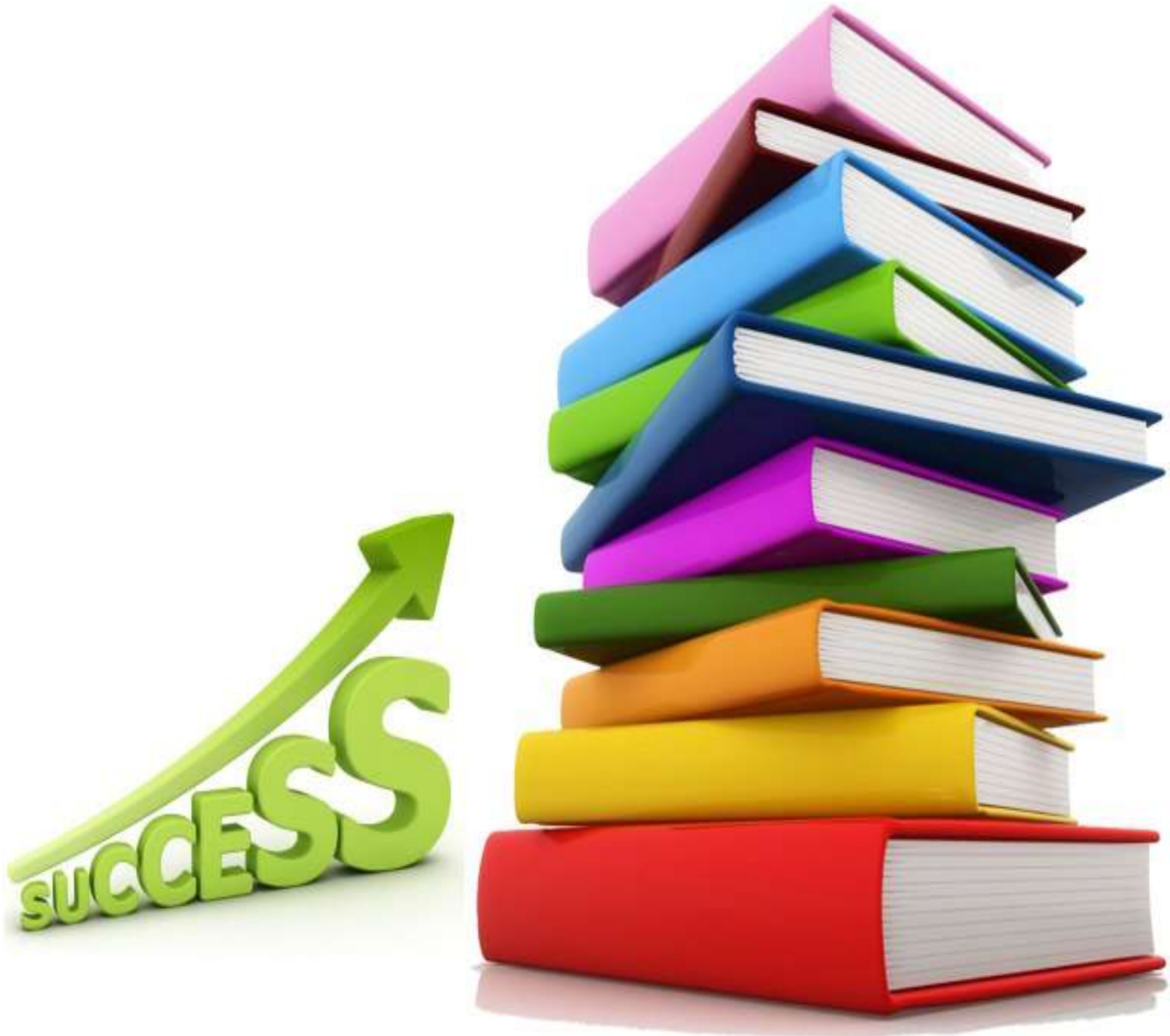
Pagina a 6-a

Punctul, liniile, triunghiurile si cercurile [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
124 Stiinta si Tehnica 0.31MB ★ (Carte donata de autor)
Rigiditatea dinamica exprimata cu functii supermatematice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
193 Stiinta si Tehnica 0.2MB ★ (Carte donata de autor)
Sisteme vibrante cuadrilobe [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
216 Stiinta si Tehnica 0.69MB ★ (Carte donata de autor)
Smarandache stepped functions [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
71 Stiinta si Tehnica 0.15MB ★ (Carte donata de autor)
Solutia simbolica exacta a unei ecuatii trigonometrice neliniare [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★
102 Stiinta si Tehnica 0.63MB ★ (Carte donata de autor)
Spatiul matematicii centrice si spatiul matematicii excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
102 Stiinta si Tehnica 1.08MB ★ (Carte donata de autor)
Super-mathematics functions [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
119 Stiinta si Tehnica 0.3MB ★ (Carte donata de autor)
Supermatematica (vol. I) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
3148 Stiinta si Tehnica 10.52MB ★ (Carte donata de autor)
Supermatematica (vol. II, partea a II-a) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
260 Stiinta si Tehnica 22.33MB ★ (Carte donata de autor)

Supermatematica (vol. II, partea a III-a) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
265 Stiinta si Tehnica 21.61MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 7-a

Supermatematica (vol. II, partea I) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
259 Stiinta si Tehnica 13.29MB ★ (Carte donata de autor)
Techno-Art of Selariu SuperMathematics Functions [PDF]
Autori: Florentin Smarandache ★★★★★
43 Stiinta si Tehnica 12.89MB ★ (Carte donata de autor)
Teorema S a bisectoarelor unui patrulater inscriptibil si teoremele S ale triunghiului [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
152 Stiinta si Tehnica 1.43MB ★ (Carte donata de autor)
Teoremele poligoanelor. Patrate, dreptunghiuri si trapeze isoscele [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
391 Stiinta si Tehnica 0.63MB ★ (Carte donata de autor)
Transformarea riguroasa in cerc a diagramei polare a compilantei [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
72 Stiinta si Tehnica 1.02MB ★ (Carte donata de autor)
Un discurs cu tema impusa, tinut absolventilor despre ... Supermatematica [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
46 Stiinta si Tehnica 1.7MB ★ (Carte donata de autor)
Un discurs despre Supermatematica [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
229 Stiinta si Tehnica 0.99MB ★ (Carte donata de autor)
Vibratii [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
70 Stiinta si Tehnica 4.48MB ★ (Carte donata de autor)


SUCCESS

Motto:" *Matematica (centrică n.n) e o ştiinţă interminabilă, ea evoluează permanent cu un pas înaintea altor ştiinţe***"**
David Boia
*O dovedeşte şi **supermatematica** care este ea însăşi nemărginită, din mai multe puncte de vedere, unul prezentata în continuare*
Autorul SM

CAPITOLUL XXXI

FUNCŢII SUPERMATEMATICE DEFINITE SIMULTAN PE DOUĂ CURBE DIFERITE

1. INTRODUCERE.

Perechile de funcţiile supermatematice (**FSM**) utilizate şi prezentate în capitolele anterioare erau definite / reprezentate pe ***cercul*** trigonometric sau unitate, deci pot fi denumite ***funcţii circulare centrice*** (**FCC**), respectiv ***funcţii circulare***: **excentrice**, **elevate** sau **exotice**. Ele au fost denumite funcţii **centrico**excentrice**, **centrico**elevate**, **centrico**exotice**, **excentrico**elevate**, **elevato**exotice** ş.a.m.d.

În prezentul capitol se vor studia succint ***combinaţii de funcţii*** defnite pe ***diverse curbe*** precum **cerc**, **hiperbolă**, **elipsă**, **parabolă**, **trilobă**, **quadrilobă** / cvadrilobă ş.m.a.

Problemele greu de surmontat consistă în ***denumirea*** noilor funcţii obţinute prin astfel de combinaţii. De exemplu, dacă imparţim sinusul circular centric cu sinusul centric eliptic sn(u,k), modificat la perioada de 2π [sn(u,k) → K(k).sn(u,k) $\frac{\pi}{2}$], se obţin funcţiile supermatematice (**FSM**) ***raport de sinusuri circularoeliptice*** [**sinx/sn(u.k)]**cu graficele din **figura 1**, sau ***raportul amplitudinilor elipticoexcentric*** [**am(u,k)** /**aex(s,θ)]** cu graficele din **figura 2**.

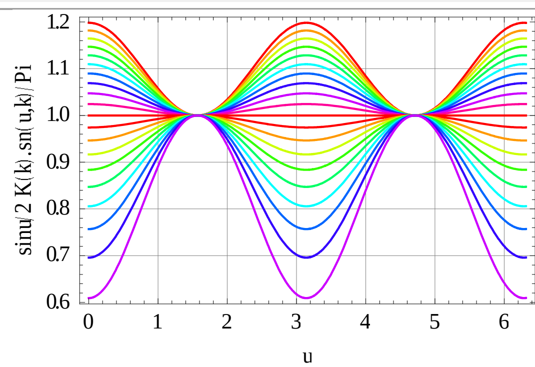
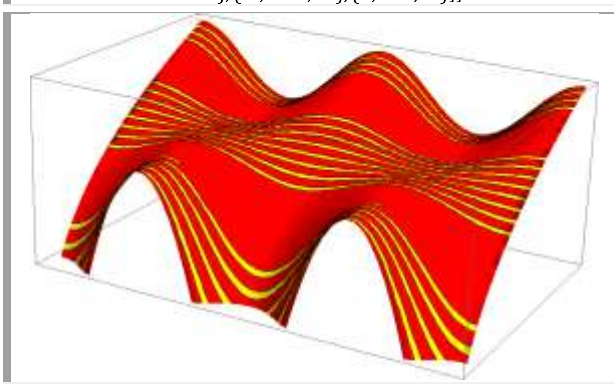
Plot[Evaluate[Table[{Sin[x]/JacobiSN[2xEllipticK[0.1m] {m,0,10}],{x,0,2.01Pi}]]	ParametricPlot3D[{x, 5 Sin[x]/JacobiSN[2x EllipticK[0.1m]/Pi, 0.1m], 0.4m},{m,−10,10},{x,−Pi,Pi}]]
	

Fig. 1 Graficele FSM raport de sinusuri circularoeliptice (sinx / sn(u,k) * K(k) $\frac{\pi}{2}$)

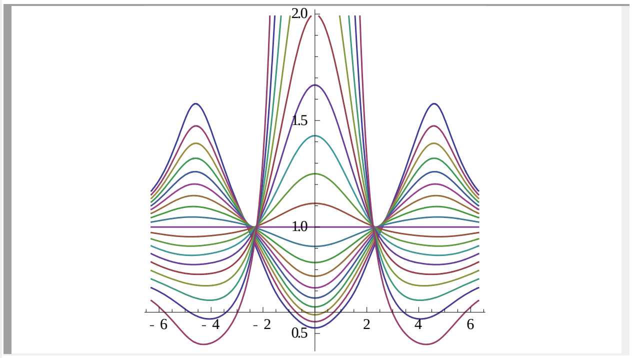
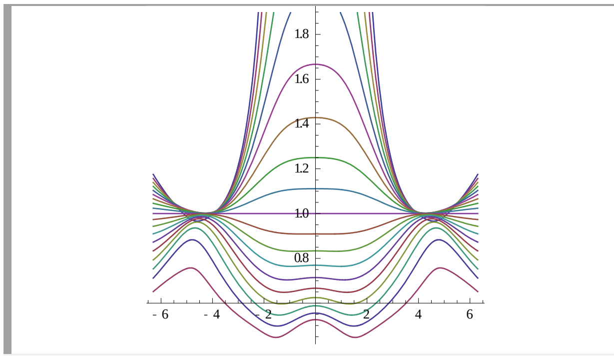
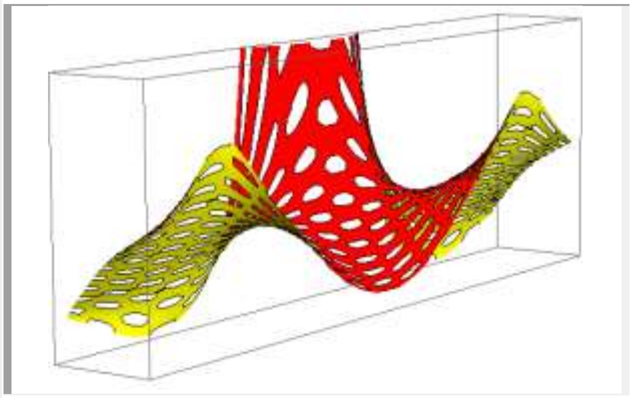
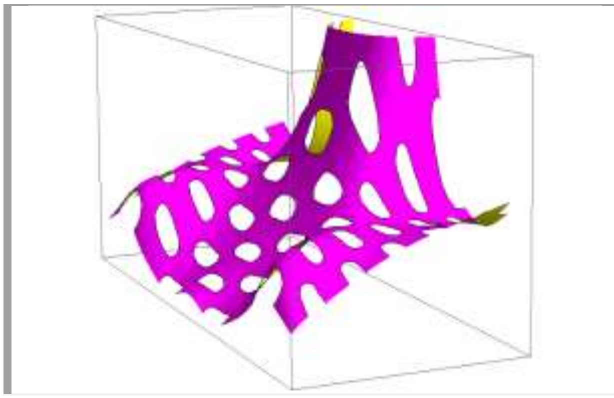
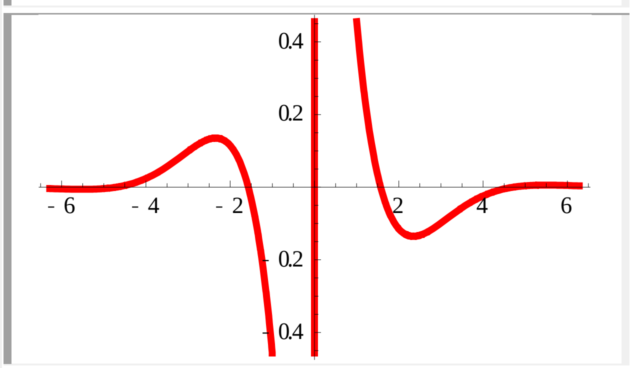
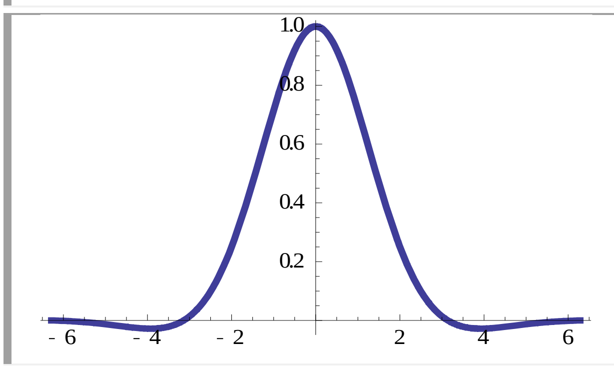
Plot[Evaluate[Table[{JacobiAmplitude[t, 0.1u]/($t-$ ArcSin[0.1uSin[t]])}, {u, −9,9}], {t, −6.3, 6.3}]]	Plot[Evaluate[Table[{JacobiAmplitude[t, 0.1u]/($t+$ ArcSin[0.1uSin[t]])}, {u, −9,9}], {t, −6.3, 6.3}]]
	
ParametricPlot3D[{t, 3JacobiAmplitude[t, 0.1u]/($t-$ ArcSin[0.1uSin[t]]),0.1u}, {u, −9,9}, {t, −2Pi, 2Pi}]]	ParametricPlot3D[{t, 4JacobiAmplitude[t, 0.1u]/($t+$ ArcSin[0.1uSin[t]]),0.3u}, {u, −9,9}, {t, −2Pi, 2Pi}]]
	

Fig. 2 Graficele FSM raport de amplitudini elipticoexcentric [am(u,k) / aex(s,θ)]

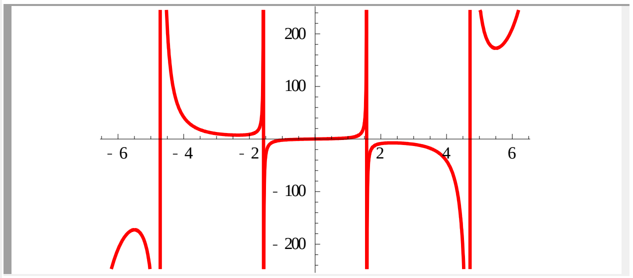
2. FSM CIRCULAROHIPERBOLICE ŞI HIPERBOLICOCIRCULARE

FSM definite pe cercul unitate şi, respectiv, pe hiperbola echilaterală [**hiperbolicocirculare]** (**Fig.3**) sau pe cercul unitate şi hiperbola excentrică [**circularohiperbolice**] sunt unice / unicate (**Fig.4**), aşa cum rezultă şi din figurile anterior prezentate, dacă hiperbolele sunt ***centrice***.

Plot[{Cos[t]/Sinh[t]}, {t, −2Pi, 2Pi}]]	Plot[{Sin[t]/Sinh[t]}, {t, −2Pi, 2Pi}]]
	

BUPT

Plot[{Sinh[t]/Cos[t]}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[{Sin[t]/Sinh[t]/Sin[t]}, {t, −2Pi, 2Pi}]]

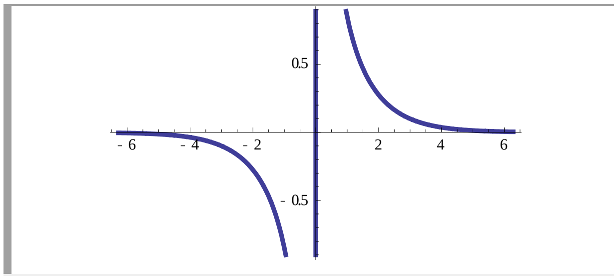
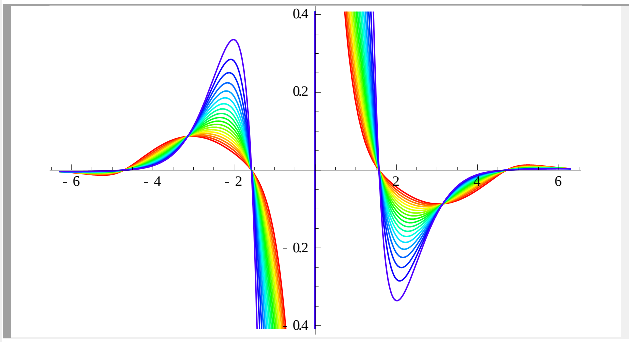
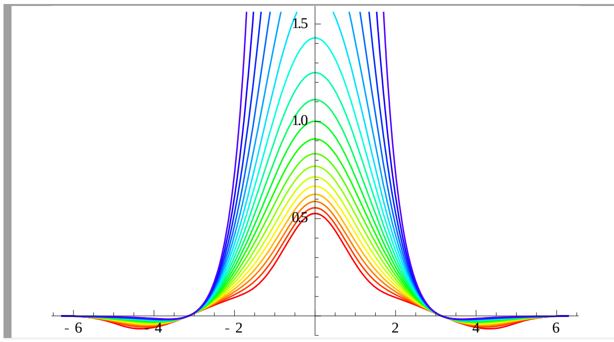


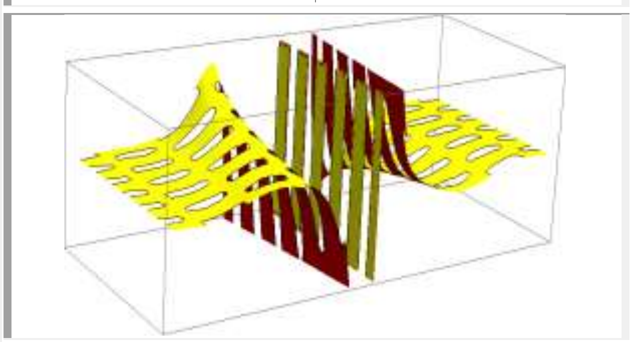
Fig. 3 Graficele FSM raport circularo**hiperbolice** de cosα / sinhα ◀ şi de sinusuri ▶

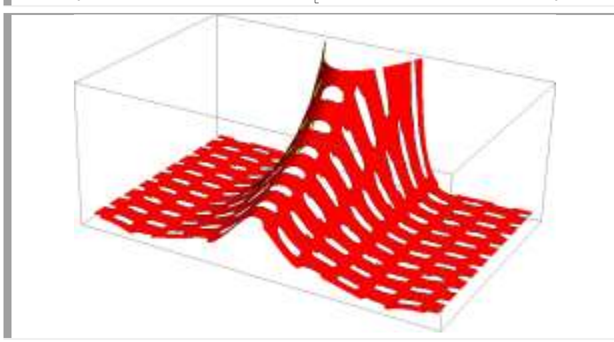
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −9, +9}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



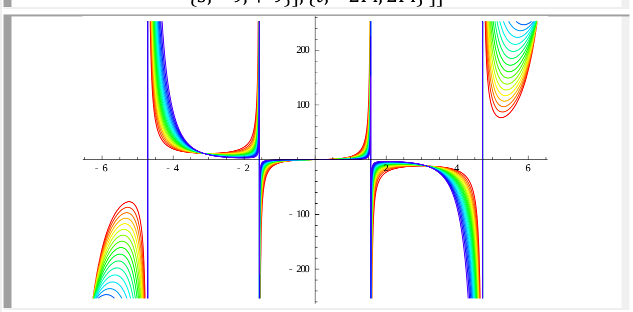
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −9, +9}], {t, −2Pi, 2Pi}]]







Plot[Evaluate[Table[{Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/Cos[t]}, {s, −9, + 9}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/Sin[t]}, {s, −9, +9}], {t, −2Pi, 2Pi}]]

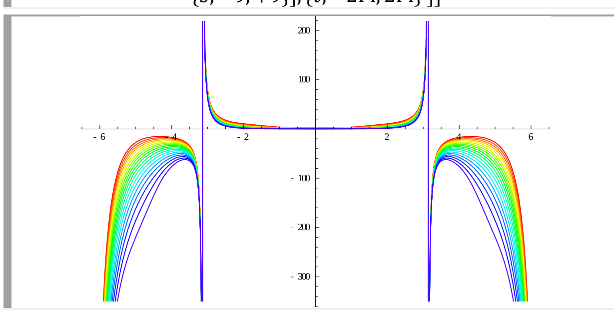


Fig. 4 Graficele FSM raport circularo**hiperbolice excentrice** de cosα / sexhα ◀ şi de sinusuri ▶

În **figura 3** graficele sunt unice, deoarece atât funcţiile circulare ***centrice*** (**FCC**) cât şi cele hiperbolice ***centrice*** (**FHC**) sunt unice. Funcţiile hiperbolice ***excentrice*** (**FHE**) fiind multiple, în funcţie de excentricitatea numerică $s \in [-0{,}9; +0{,}9]$ sau $s \in [-\infty, +\infty]$ şi graficele acestora sunt multiplicate de la unu la infinit (**Fig. 4** şi **Fig.5**), precum şi la toate celelalte **FSM excentrice**, **elevate** şi **exotice**.

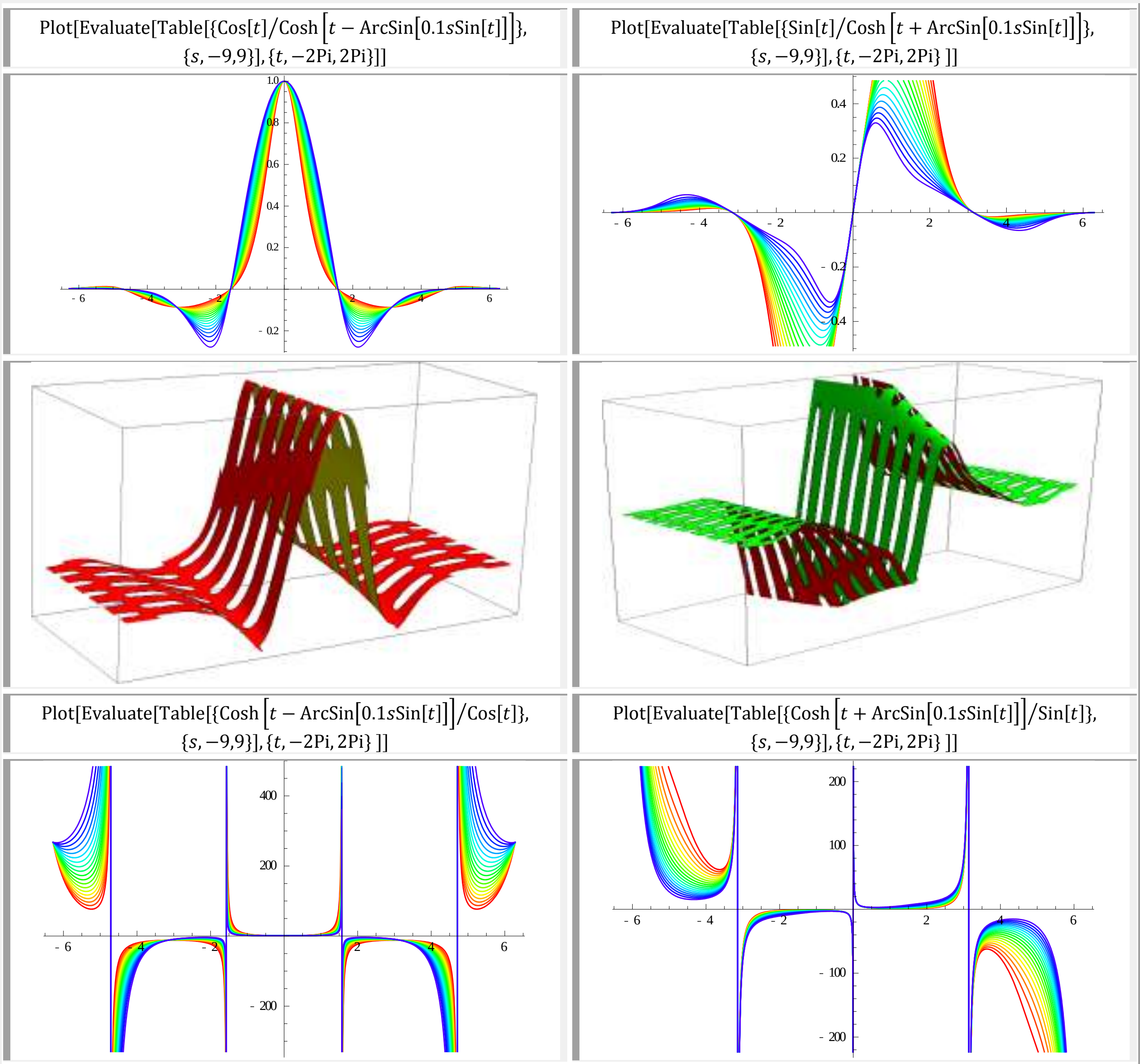


Fig. 5 Graficele FSM raport circularo**hiperbolice excentrice** de cosinusuri ◀ şi de sinα / coshα ▶

Până aici au fost prezentate doar produse şi rapoarte ale acestor funcţii. În continuare se vor prezenta şi sume şi diferenţe ale acestora.Deoarece funcţiile hiperbolice iau valori foarte mari în domeniul $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ iar cele circulare pe cercul unitate au maximele pozitive şi negative de ± 1, acestea din urma au fost multiplicate pentru ca influenţa lor în cuplu să fie mai evidentă.

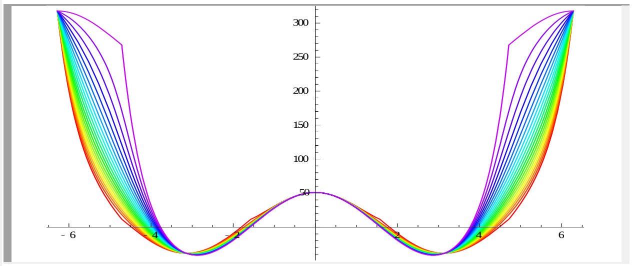
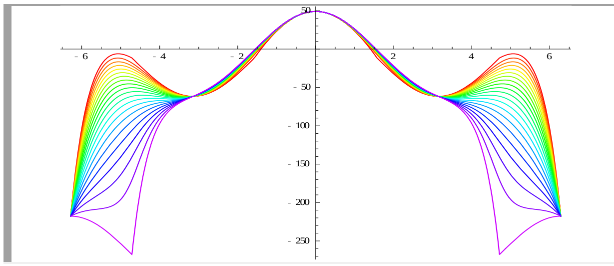
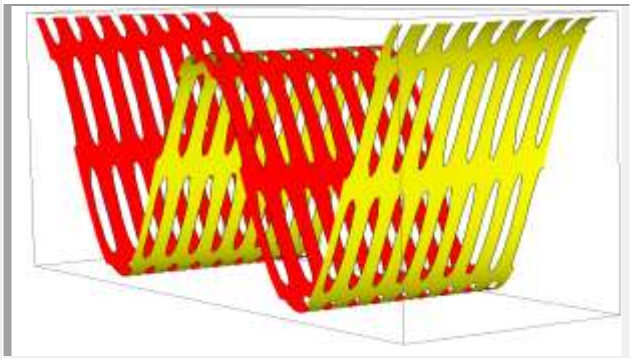
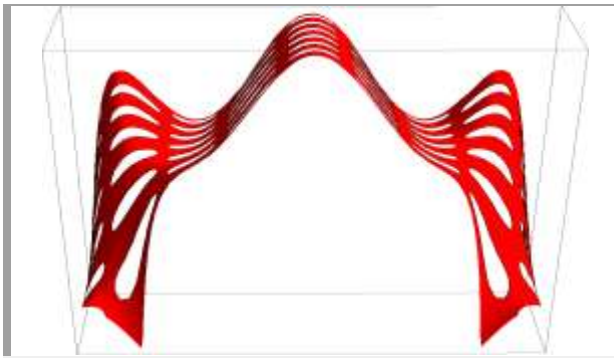
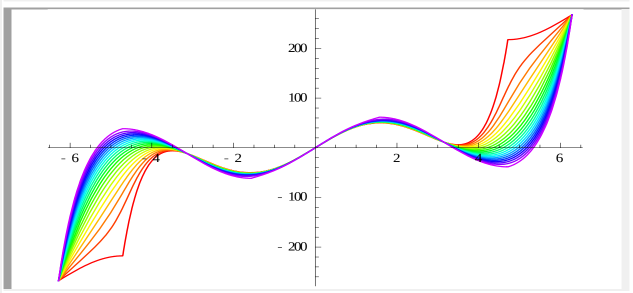
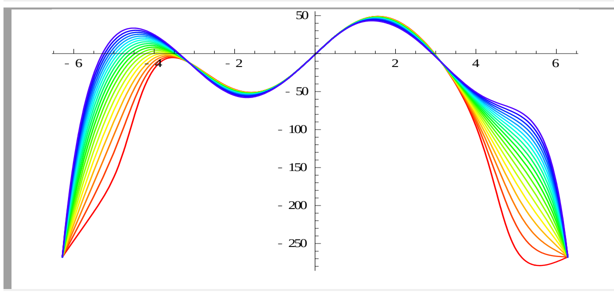
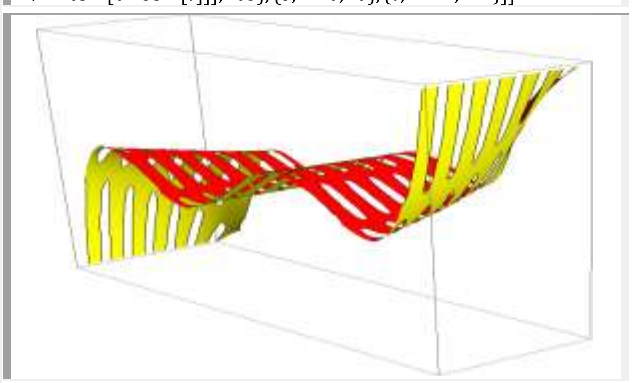
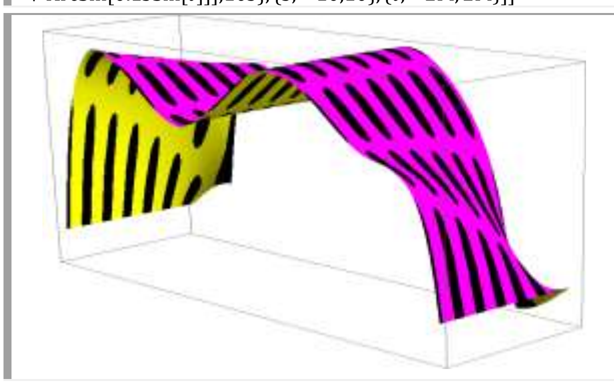
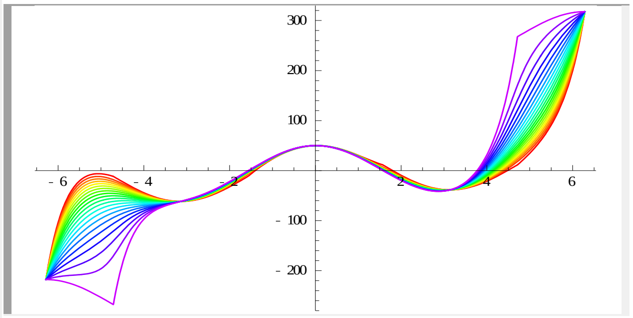
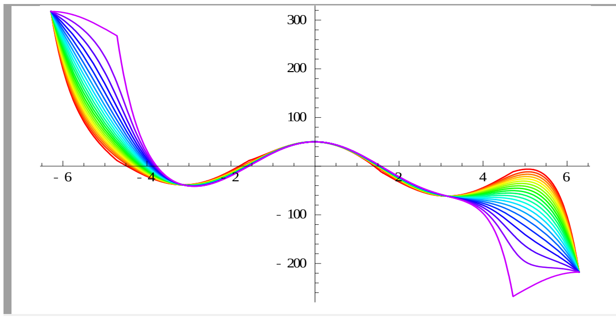
Plot[Evaluate[Table[{50Cos[t] + Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{50Cos[t] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]
	
ParametricPlot3D[{20t, 50Cos[t] + 0.05Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], s}, {s, −9,9}, {t, −Pi, Pi}]]	ParametricPlot3D[{20t, 50Cos[t] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],5s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}
	
Plot[Evaluate[Table[{50Sin[t] + Sinh[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{50Sin[t] − Sinh[t + ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −9,9}], {t, −2Pi, 2Pi}]]
	
ParametricPlot3D[{50t, 50Sin[t] + Sinh[t + ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]	ParametricPlot3D[{50t, 50Sin[t] − Cosh[t + ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]
	

Fig. 6 Graficele FSM suma şi diferenţă circularohiperbolice excentrice
de cosinusuri ◀ şi de cosα ± coshα, sinα ± sinhα ▶

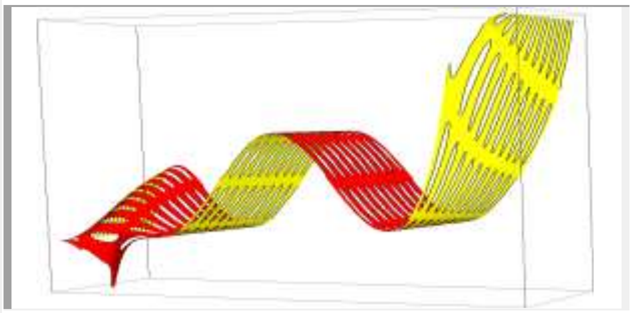
Plot[Evaluate[Table[{50Cos[t] + Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



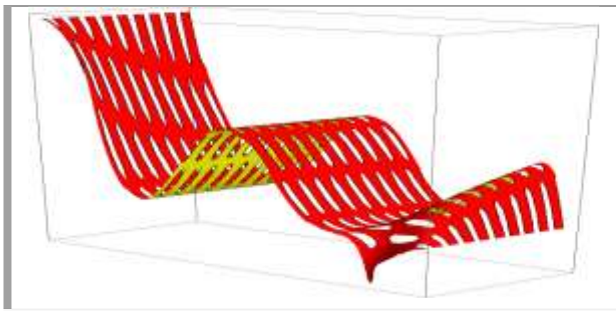
Plot[Evaluate[Table[{50Cos[t] − Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



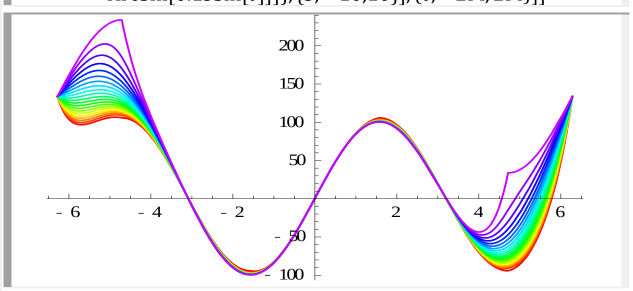
ParametricPlot3D[{20t, 60Cos[t] + 0.5Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],5s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



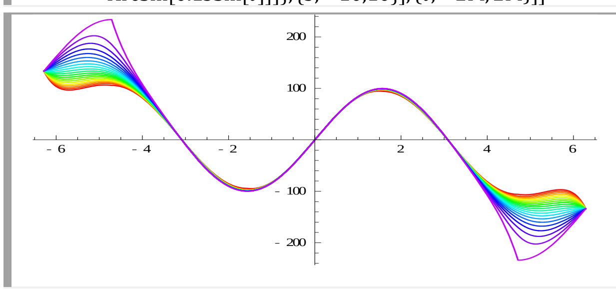
ParametricPlot3D[{20t, 60Cos[t] − 0.5Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],5s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



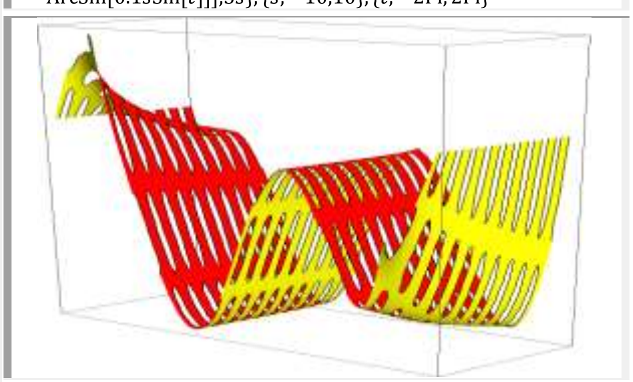
Plot[Evaluate[Table[{100Sin[t] + 0.5Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{150Sin[t] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{20t, 150Sin[t] + 0.5Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],5s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}



ParametricPlot3D[{20t, 150Sin[t] − 0.5Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],5s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]

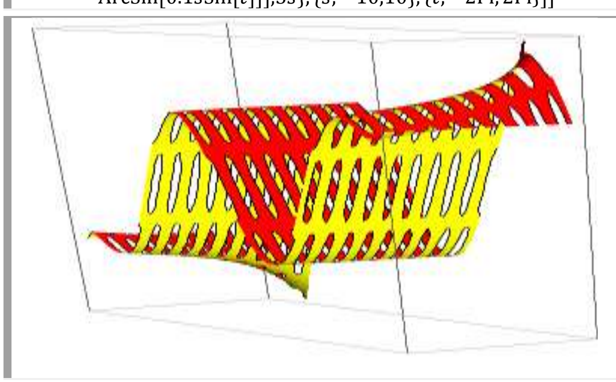


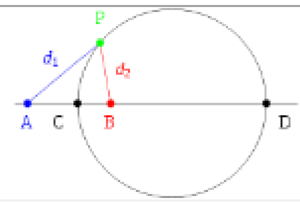
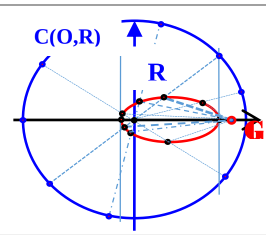
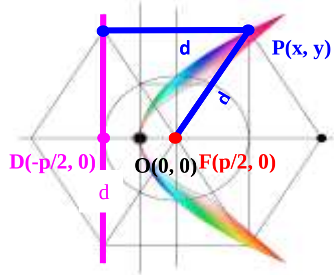
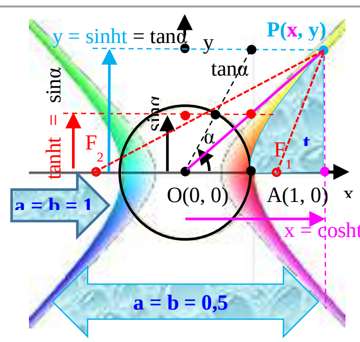
Fig. 7 Graficele FSM sume şi diferenţe circularohiperbolice excentrice
de sinusuri sinα ± sinhα ◀ şi de cosα ± sinhα, ▶

Dintre funcţiile ***centrice*** numai cele ***eliptice*** [cn, sn, dn] sunt multiple, în funcţie de ***modulul k*** care este aceeaşi / tocmai ***excentricitatea numerică s*** a **funcţiilor supermatematice *excentrice*** (**FSM—E**).

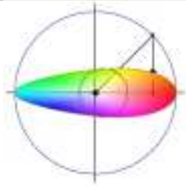
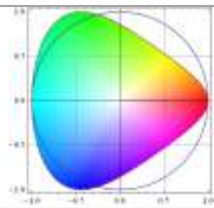
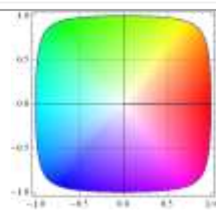
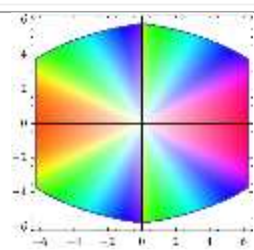
Se vor prezenta în continuare **FSM** ca o combinaţie dintre funcţiile hiperbolice ***centrice*** şi cele ***eliptice centrice***.

3. FSM HIPERBOLICOELIPTICE ŞI ELIPTICOHIPERBOLICE

În acest paragraf sunt prezentatela început **funcţiile *hiperbolice centrice*** (cosh / ch, sinh / sh) în combinaţie (de sume, diferenţe, produse şi rapoarte) cu ***funcţiile eliptice centrice*** **Jacobi** (cn, sn, dn), iar în paragraful următor vor fi prezentate aceleaşi funcţii dar ***excentrice***. Cele două tipuri de funcţii sunt prezentate comparativ în **figurile 8** şi **9.**

<table>
<tr><td colspan="3">Tabelul 1 ISTORIA UNOR CURBE</td></tr>
<tr><td colspan="3">C U R B E G R E C E Ş T I</td></tr>
<tr><td>CERCUL LUI APOLLONIUS</td><td>
</td><td>Se consideră segmentul $|AB|$ şi un număr real pozitiv k = $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$
Atunci mulţimea punctelor:
$C_A = \{P \backslash \overline{AP} : \overline{PB} = k\}$
este cercul lui Apollonius.</td></tr>
<tr><td>ELIPSA LUI APOLLONIUS</td><td>
</td><td>Se dau: cercul C(M,r) şi punctul G în interiorul cercului.
Atunci, locul geometric al punctelor aflate la aceeaşi distanţă de cercul C(M,r) şi de punctul fix G este o elipsă.</td></tr>
<tr><td>PARABOLA LUI APOLLONIUS</td><td>
</td><td>Parabola este locul geometric al punctelor, din planul euclidian , egal depărtate de un punct fix F (focar) şi o dreaptă fixă D (directoare).</td></tr>
<tr><td>HIPERBOLA LUI APOLLONIUS VĂZUTA DE UN ROMÂN</td><td>
</td><td>Se dau: cercul unitate C(O, r = 1) şi punctul A(1,0) pe cercul unitate şi tangenta τ în acest punct.
Atunci, locul geometric al punctelor P(x, y) pentru care
$\frac{x}{a} = \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha \rightarrow x = \frac{a}{\cos\alpha}$
şi $y = b.\tan\alpha$= sinht, adică
P(x, y) $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos\alpha} \\ y = b.\tan\alpha \end{cases}$ este o hiperbolă.</td></tr>
</table>

În prealabil se va prezenta succint istoricul unor curbe vechi denumite greceşti şi a unora noi întitulate româneşti, în Tabelul **1** şiîn **Tabelul 2**.

	Tabelul 2	**ISTORIA UNOR CURBE**
	C U R B E R O M Â N E Ş T I	
BILOBA ROMÂNILOR		$\begin{cases} x = R.\cos\{\theta - \arcsin[s_x.\sin(\theta - \varepsilon)]\} \\ y = R.\sin\{\theta - \arcsin[s_y.\sin(\theta - \varepsilon)]\} \end{cases}$
TRILOBA ROMÂNILOR		$\begin{cases} x = R.\cos\{\theta - \arcsin[s_x.\sin(\theta - \varepsilon)]\} \\ y = R.\sin\{\theta - \arcsin[s_y.\sin(\theta - \varepsilon)]\} \end{cases}$
QUADRILOBA ROMÂNILOR		$\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{R}.\cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - {s_x}^2.sin^2(\theta - \varepsilon)}} \\ y = \dfrac{\mathrm{R}.\sin(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - {s_y}^2.cos^2(\theta - \varepsilon)}} \end{cases}$
POLILOBA ROMÂNILOR		ParametricPlot[Evaluate[Table[{ $\{v(x - \mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[x]]), v\mathrm{Sqrt}[36 - x\text{^}2]\},$ $\{v(x - \mathrm{ArcSin}[0.2s\mathrm{Sin}[x]]), -v\mathrm{Sqrt}[36 - x\text{^}2]\}\},$ $\{s, 5, 5\}], \{x, -6, 6\}, \{v, 0, 1\}$
www.SuperMathematica.org	www.SuperMathematica.com	www.SuperMathematica.Ro

Studiul conicelor nu a mai evoluat timp de un mileniu şi jumătate, până la Renaştere, când s-a reluat studiul acestora. La grecii antici, **cercul** era **simbolul perfecţiunii**. De aceea l-au hulit pe **Apollonius,** când din cerc a "făcut" conicele, pentru că a distrus imaginea perfecţiunii cu aceste noi curbe urâte şi l-au lovit cu pietre, confirmă istoria.

Ce va păţi românul care le-a multiplicat pe fiecare dintre ele la infinit şi a mai introdus în matematică o infinitate de alte entităţi matematice noi ? E greu de închipuit ! Deocamdată este linişte mormântală.

Ca să-l parafrazez pe **Mahatma Gandhi: "**Mai întâi ***te ignoră***, apoi ***râd de tine***, apoi ***se luptă cu tine*** şi apoi ***tu invingi*** ". Prima etapă pare că s-a epuizat, urmează a doua, cea cu ... râsul…

Din cerc, **Apolonius** a inventat / descoperit o infinitate de alte curbe, iar din acestea, din fiecare în parte, un român a descoperit o altă infinitate de curbe ! Şi procesul ar putea continua.

Cum ? Înlocuind, în ecuaţia oricărei centrice, abscisa sau variabila (**x, t, α, u,** etc) cu o funcţie denumită, prin similitudine cu funcţia eliptică, amplitudine (amplitudinus) **am(u,k)**, **amplitudine excentrică aexθ** şi /sau **Aexα**, deoarece cos[**am(u,k)**] = cn(u,k) iar sin[**am(u,k)**] = sn(u,k).

Astfel, **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM-CE**) **amplitudine excentrică aexθ** de variabilă **excentrică θ** şi **Aexα**, de variabilă **centrică α**, devin cele mai importante **funcţii supermatematice**, deoarece ele fac trecerea din domeniul **MC** în cel al domeniului mult mai vast, chiar infinit, al **ME**.

În astronomie, **Apollonius** a introdus şi dezvoltat teoria mişcării circulare uniforme a corpurilor cereşti în jurul Pământului considerat imobil.

Un **român** a generalizat această mişcare şi a introdus, a studiat şi a dezvoltat **mişcarea circulară excentrică** (**MCE**) de **excentru E(e, ε)** punct fix, apoi şi pe cea de **excentru** punct mobil, adică **e** şi **ε** sunt funcţii şi nu constante, ca în **MCE** de **E** fix [**Mircea Eugen Şelariu**, MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ DE EXCENTRU PUNCT MOBIL**, www.cartiaz.ro**].

De asemenea, **Apollonius** a introdus noţiunile de ***excentric*** şi ***epiciclu*** pentru a explica mersul planetelor.

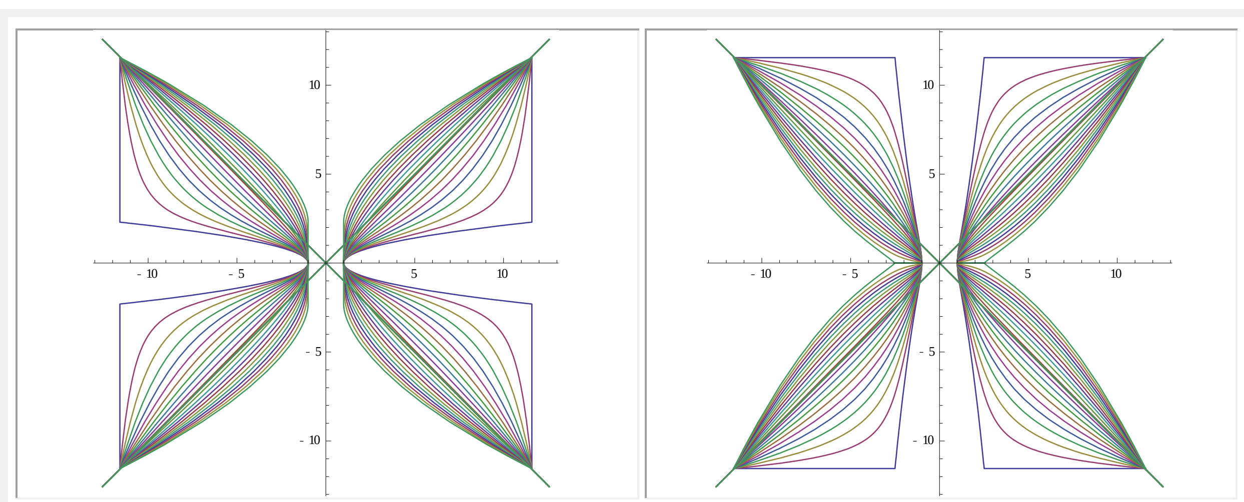
A lăsat pentru posteritate, adică pentru **român şi români**, introducerea noţiunilor de **excentru E(e, ε)** şi/sau **S(s, ε)**, **excentricitate** (**liniară reală e** şi **liniară numerică s**, **unghiulară ε**, excentricităţi constante sau variabile / funcţii), "**excentricizare**" (v. în continuare), **excentrice** (curbe provenite din curbele centrice, ordinare, cunoscute), permiţându-i **românului** să afirme şi să demonstreze [**Mircea Eugen Şelariu**, **MULTIPLICAREA DIMENSIONALĂ A SPAŢIILOR**, **www.cartiaz.ro**, pag.5] că excentricitatea este o nouă dimensiune a spaţiului, ***dimensiunea de formare şi de deformare a acestuia*** (a spaţiului) şi, totodată, a obiectelor cuprinse / circumscrise în acesta. Am spus-o şi am scris-o de nenumărate ori şi ..? Silentium !

Funcţiile supermatematice hiperbolice excentrice (**FSM-HE**) se exprimă prin cele hiperbolice centrice (**HC**) în care variabila t se înlocuieşte cu funcţia **aex**t, adică

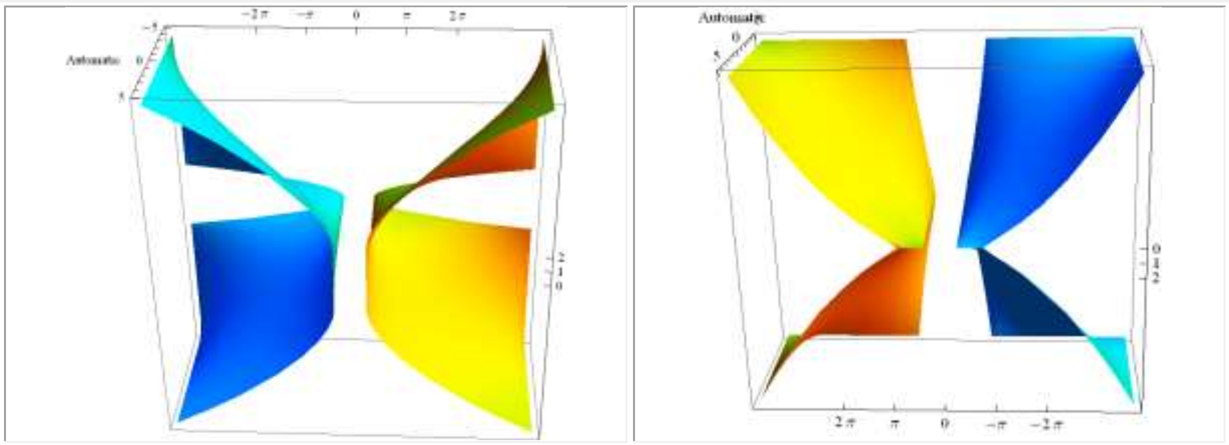
$$(1)\qquad \begin{cases} cosht = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \\ sinht = \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ tanht = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \\ \quad ş.a.m.d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cexht = \cosh[\boldsymbol{aext}] = \frac{e^{\boldsymbol{aext}}+e^{-\boldsymbol{aext}}}{2} \\ sexht = \sinh[\boldsymbol{aext}] = \frac{e^{\boldsymbol{aext}}-e^{-\boldsymbol{aext}}}{2} \\ texht = \tanh[\boldsymbol{aext}] = \frac{e^{\boldsymbol{aext}}-e^{-\boldsymbol{aext}}}{e^{\boldsymbol{aext}}+e^{-\boldsymbol{aext}}} \\ \quad ş.a.m.d \end{cases}$$

Ecuaţii parametrice ale hiperborelor **excentrice** (**HE**) sunt

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \boldsymbol{cexht} = cexh[t = \theta, \boldsymbol{S_x}(s_x, \varepsilon_x)] \\ y = \boldsymbol{sexht} = sexht[t = \theta, \boldsymbol{S_y}(s_y, \varepsilon_y)] \end{cases}$$



BUPT



M $\begin{cases} x = cexht \\ y = sinht \end{cases}$, t∈[-π , π], **$S_x$($s_x$∈[-1, 1], ε_x = 0), S_y** ≡ O(0, 0)	**M** $\begin{cases} x = cosht \\ y = sexht \end{cases}$, t ∈ [-π , π], S_x ≡ O(0, 0), **S_y(s_y∈[-1, 1], ε_y = 0)**

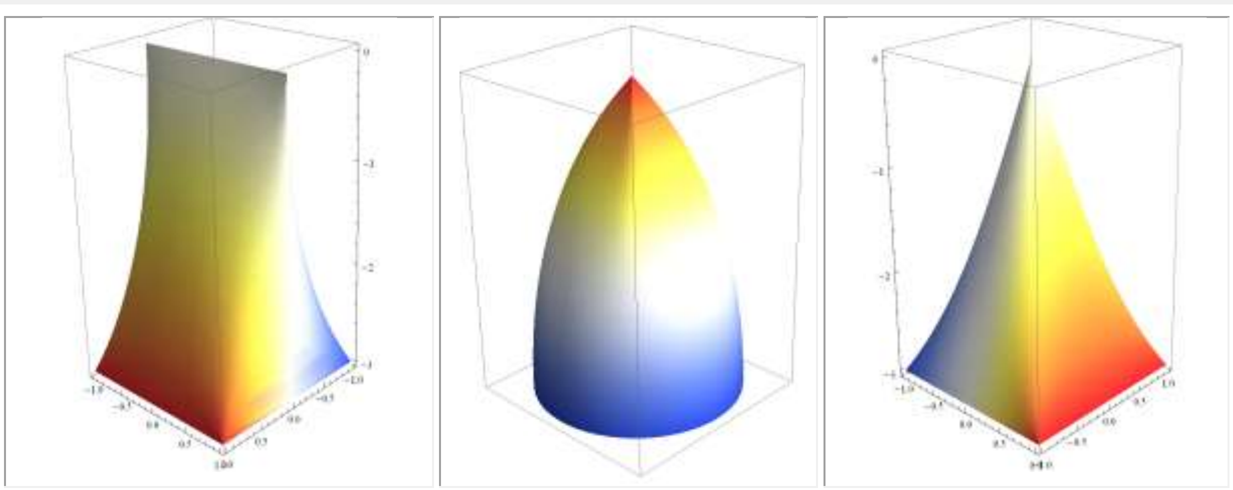
Fig. 8 Hiperbole excentrice, în 2D şi în 3D, pe direcţia x ◄în stânga, şi, respectiv, pe directa y ►în dreapta, pentru t ∈ [-π , π]. Pentru **s = 0** se obţin **hiperbolele centrice**

O altă posibilitate de reprezentare a hiperbolelor centrice şi, respectiv, excentrice, constă în utilizarea ecuaţiilor parametrice (3)

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b\frac{2t}{1-t^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b\frac{2t}{1-t^2} \end{cases} \rightarrow t = \text{aext} = t - \arcsin[s.\sin t] \rightarrow \begin{cases} x = a\frac{1+(t-\arcsin[s.sint])^2}{(1-(t-\arcsin[s.sint])^2} \\ y = b\frac{2(t-\arcsin[s.sint])}{1-(t-\arcsin[s.sint])^2} \end{cases}$$

În **figura 8** sunt prezentate graficele unor hiperbole excentrice pe direcţia **x** (**HEx**), denumite astfel, deoarece, în ecuaţiile parametrice ale unei hiperbole centrice (**HC**), doar în parametrul / variabila / coordonata **x** s-a făcut trecerea din centric în excentric, în sensul că, funcţia hiperbolică **centrică** (**FHC**) **cosht** a fost înlocuită cu funcţia hiperbolică **excentrică** (**FHE**), adică **cosht** → **cexht**. Altfel spus, excentrul **S_x** ≠ O(0,0), iar S_y ≡ O(0, 0) în ecuaţiile parametrice (2) **(Fig. 8** ◄).

În cazul în care **S_y** ≠ O(0,0) şi S_y ≡ O(0, 0) → **s_y** = 0 se obţin hiperbole excentrice doar pe direcţia y (**HEy**), ca cele prezentate în **figura 8**►dreapta.



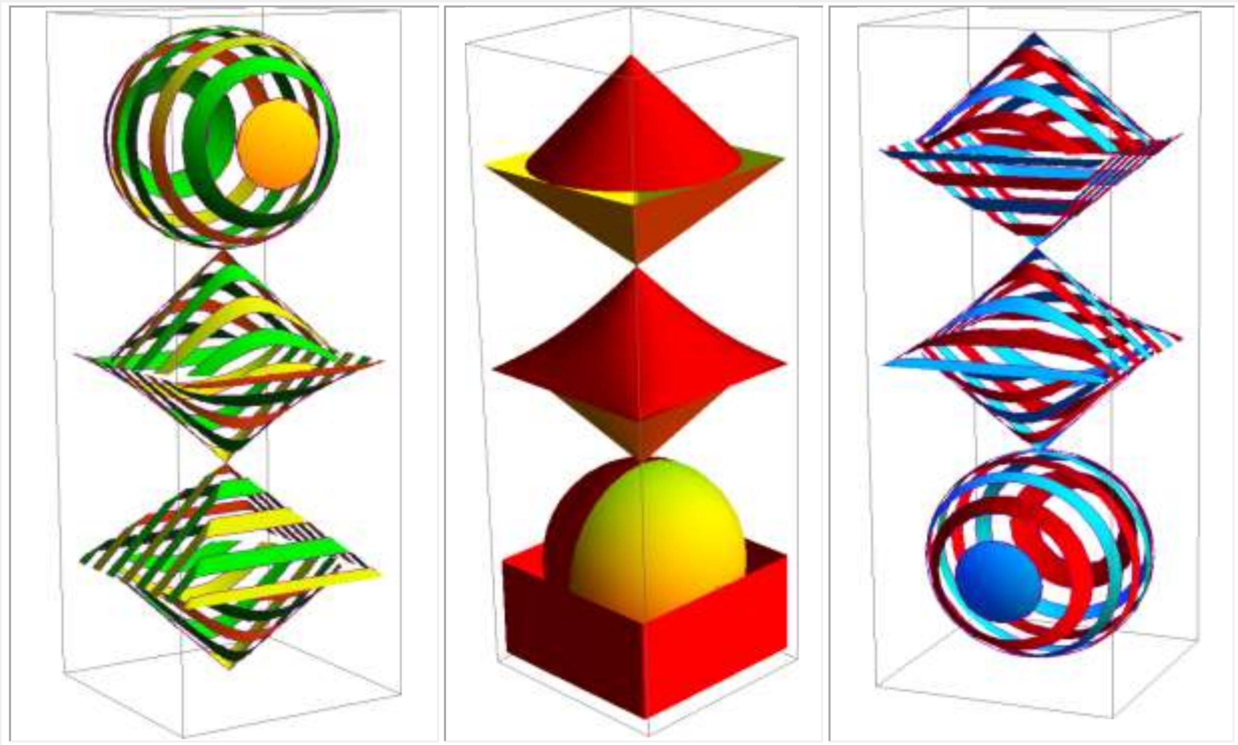
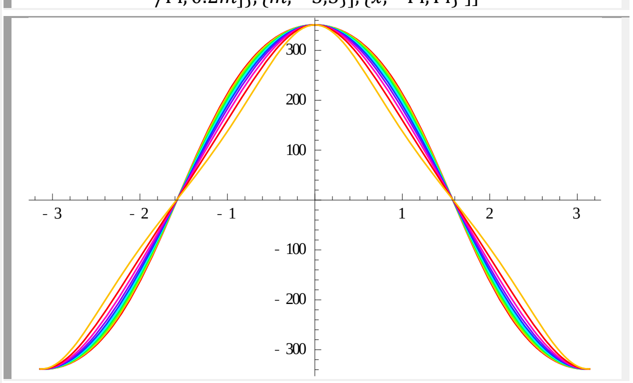


Fig. 9 Diverse obiecte geometrice hibride, sus ▲şi spaţii modificate de **s** pe verticală, jos ▼

www.SuperMathematica.org | www.SuperMathematica.com | www.SuperMathematica.Ro

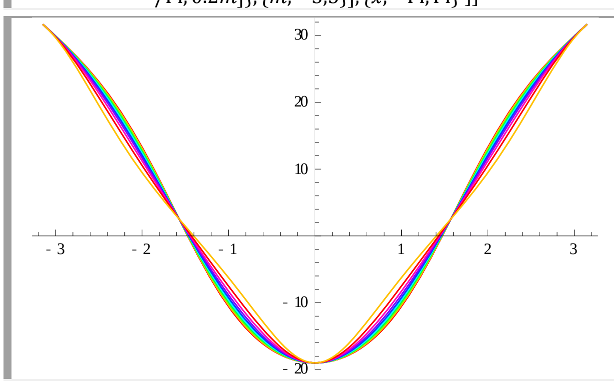
Câteva exemple de obiecte geometrice noi, hibride, datorate variaţiei excentricităţii în limitele **s ∈ [0, 1],** sunt prezenate în **figura 9**. Ele au fost denumite **conopiramidă**, piramidocon, **sferocub**, **sferoprisma** ş.m.a. pentru care autorul lor, un **român**, a fost admis ca MEMBRU DE ONOARE cu diplomă de PARADOXIST al clubului exclusivist **INTERNATIONAL ASSOCIASION OF PARADOXISM**.

Plot[Evaluate[Table[{Cosh[x] + 350JacobiCN[2xEllipticK[0.2m]/Pi, 0.2m]}, {m, −5,5}], {x, −Pi, Pi}]]

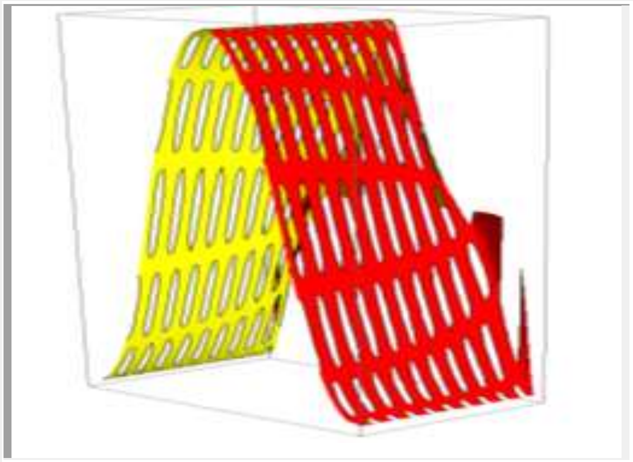


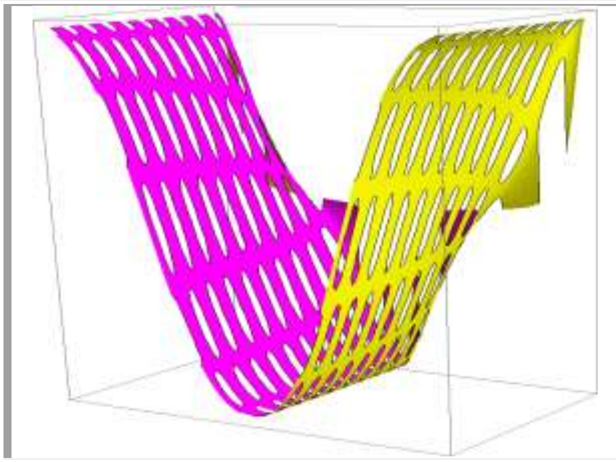
ParametricPlot3D[{50x, 0.25Cosh[x] + 350JacobiCN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m],20m}, {m, −5,5}, {x, −Pi, Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Cosh[x] − 20JacobiCN[2xEllipticK[0.2m]/Pi, 0.2m]}, {m, −5,5}], {x, −Pi, Pi}]]



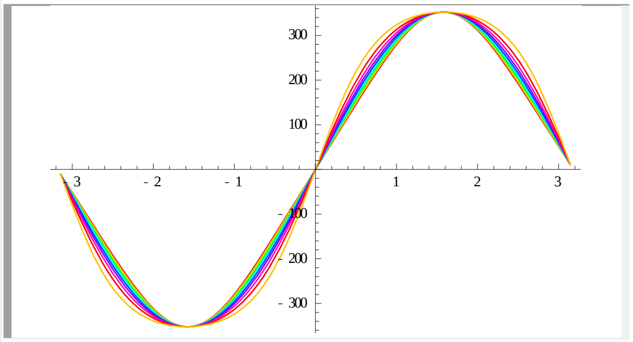
ParametricPlot3D[{50x, 10(0.25Cosh[x] − 20JacobiCN [2xEllipticK[0.2m] /Pi, 0.2m]),20m}, {m, −5,5}, {x, −Pi, Pi}]]

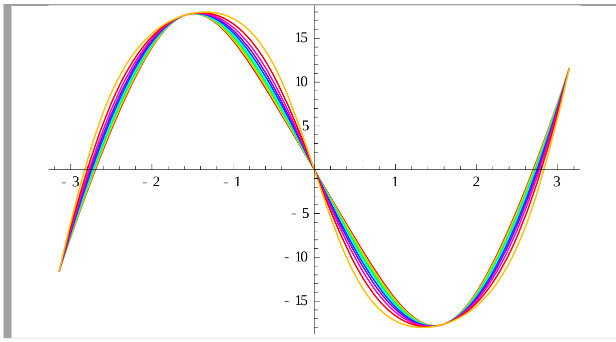




Plot[Evaluate[Table[{Sinh[x]
+ 350JacobiSN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m]},
{m, −5,5}], {x, −Pi, Pi}]]

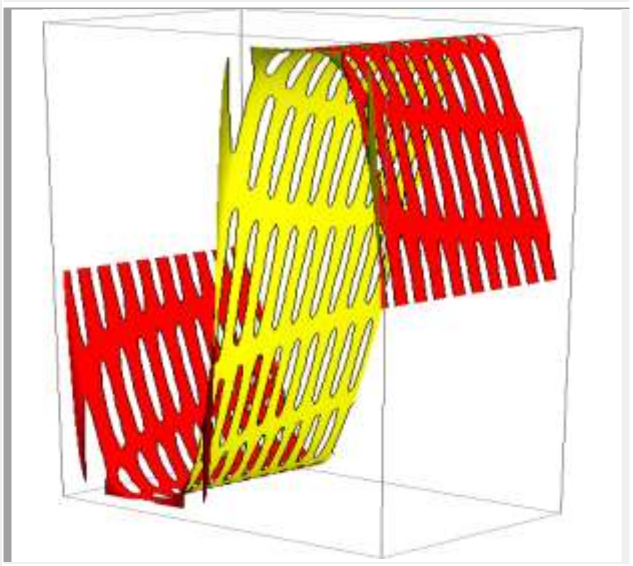
Plot[Evaluate[Table[{Sinh[x] −
20JacobiSN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m]},
{m, −5,5}], {x, −Pi, Pi}]]





ParametricPlot3D[{50x, 0.25Sinh[x]
+ 350JacobiSN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m],20m},
{m, −5,5}, {x, −Pi, Pi}]]

ParametricPlot3D[{50x, 10(0.25Sinh[x]
− 20JacobiSN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m]),20m},
{m, −5,5}, {x, −Pi, Pi}]]



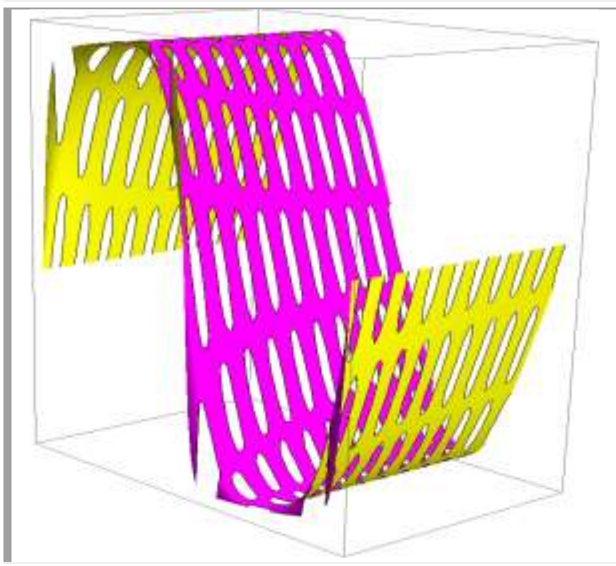
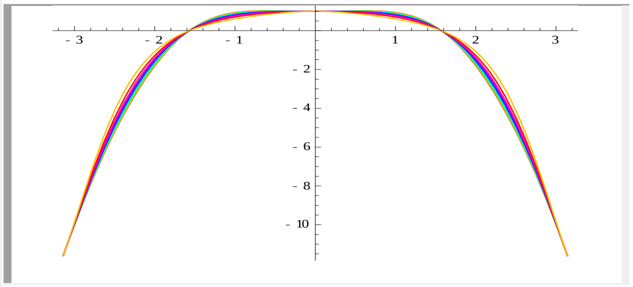
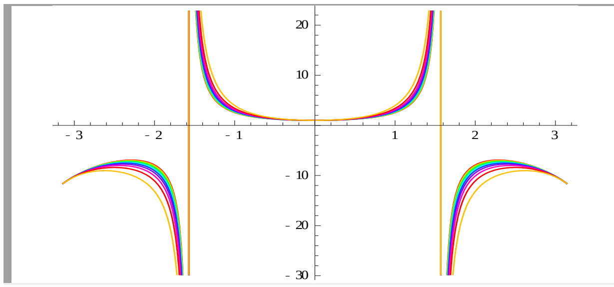


Fig. 10 Graficele FSM sume şi diferenţe hiperbolicoeliptice **excentrice**
de sinusuri coshα ± cnα ◀ şi de sinhα ± snα, ▶

Plot[Evaluate[Table[{Cosh[x] * JacobiCN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m]}, {m, −5,5}], {x, −Pi, Pi}]]

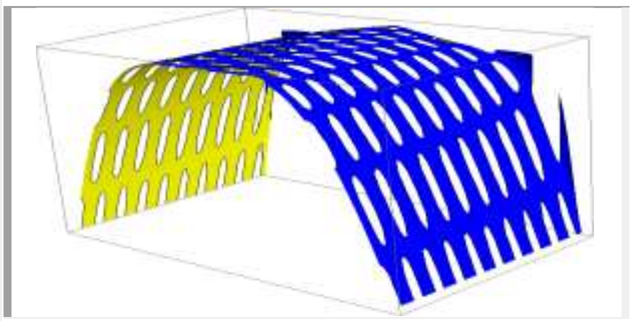
Plot[Evaluate[Table[{Cosh[x]/JacobiCN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m]}, {m, −5,5}], {x, −Pi, Pi}]]

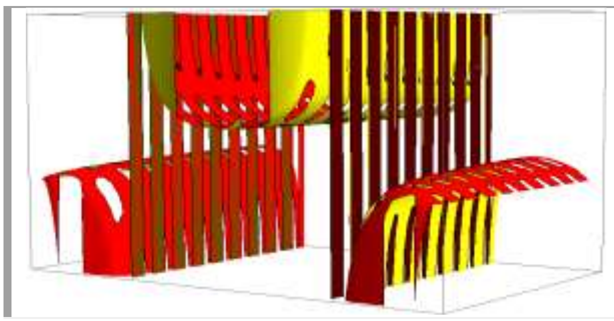




ParametricPlot3D[{50x, 15Cosh[x] * JacobiCN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m],20m}, {m, −5,5}, {x, −Pi, Pi}]]

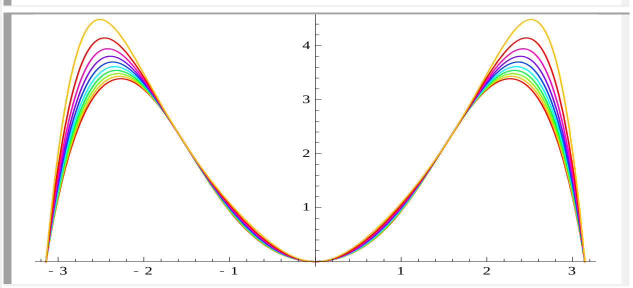
ParametricPlot3D[{50x, 4 Cosh[x]/JacobiCN[2xEllipticK[0.2m] /Pi, 0.2m], 20m}, {m, −5, +5}, {x, −Pi, +Pi}]]

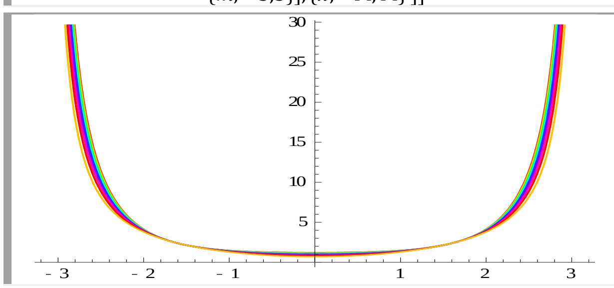


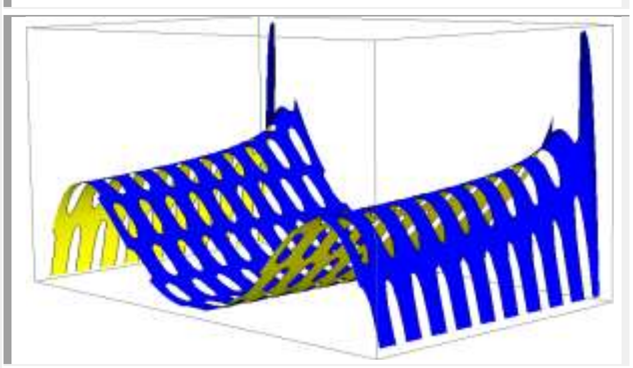


Plot[Evaluate[Table[{Sinh[x] * JacobiSN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m]}, {m, −5,5}], {x, −Pi, Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sinh[x]/JacobiSN[2x EllipticK[0.2m]/Pi , 0.2m]}, {m, −5,5}], {x, −Pi, Pi}]]







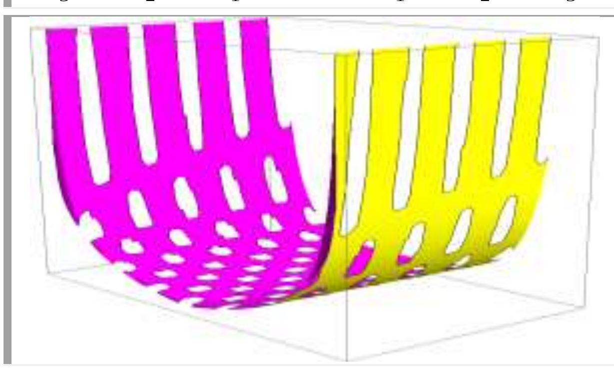
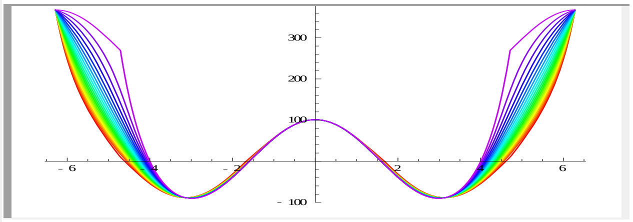


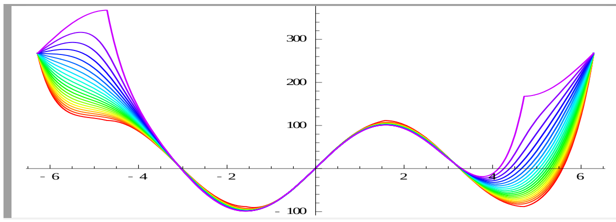
Fig. 11 Graficele FSM produse şi rapoarte hiperbolicoeliptice **excentrice**
de sinusuri coshα */ cnα ◀ şi de sinhα */ snα, ▶

4. FSM CIRCULAROHIPERBOLICE EXCENTRICE

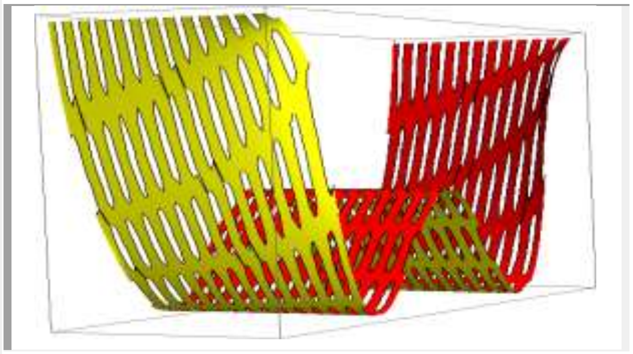
Plot[Evaluate[Table[{100Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] + Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



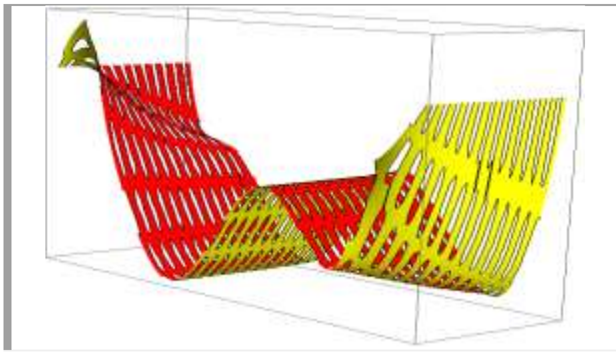
Plot[Evaluate[Table[{100Sin[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] + Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



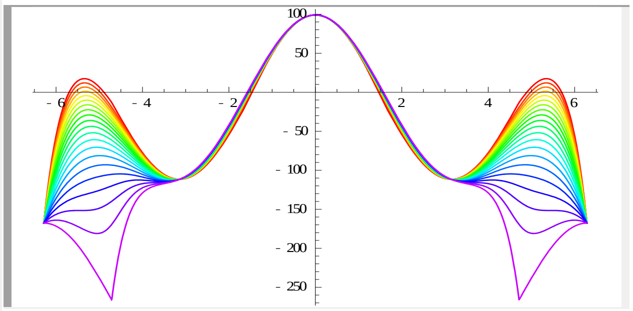
ParametricPlot3D[{50t, 100Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] + Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



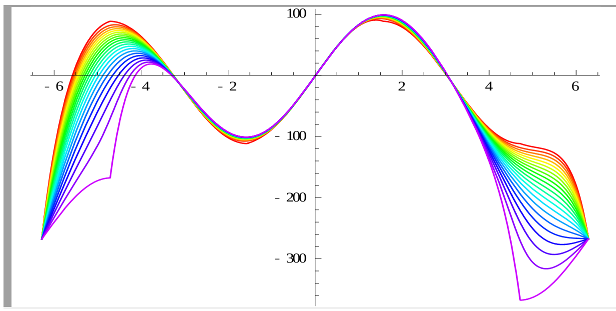
ParametricPlot3D[{50t, 100Sin[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] + Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



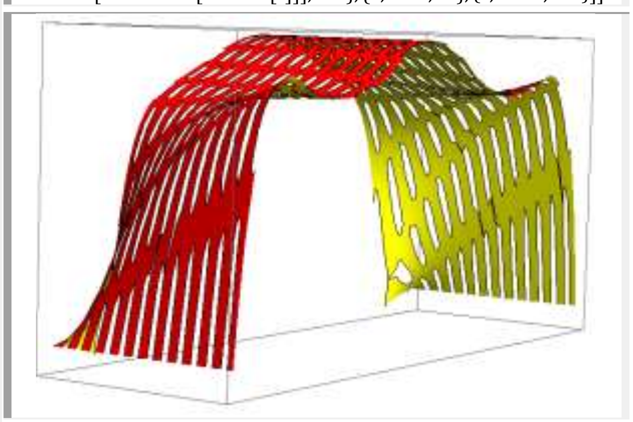
Plot[Evaluate[Table[{100Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



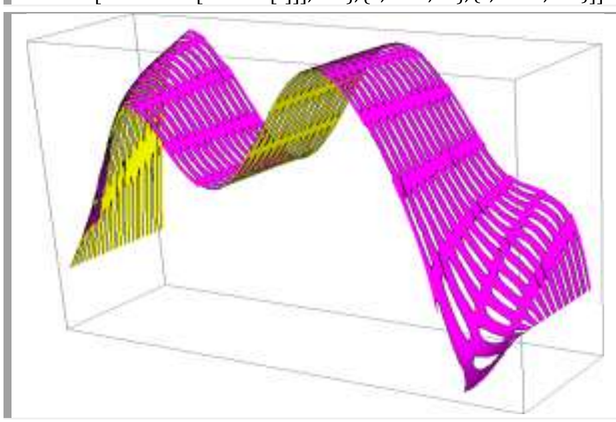
Plot[Evaluate[Table[{100Sin[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi }]]



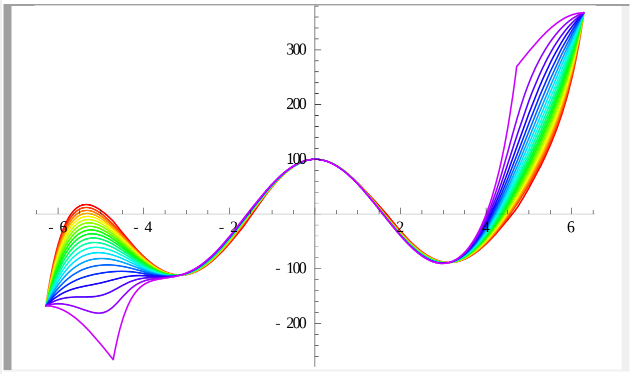
ParametricPlot3D[{50t, 20Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



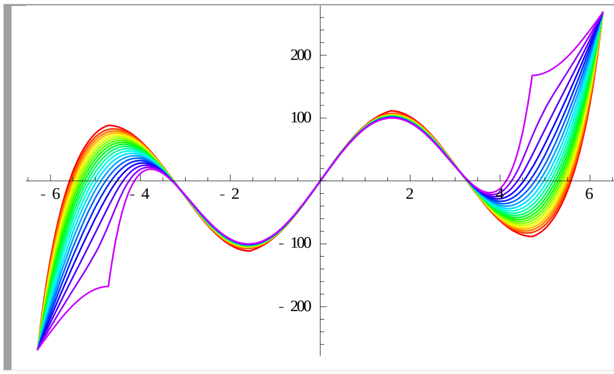
ParametricPlot3D[{50t, 100Sin[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



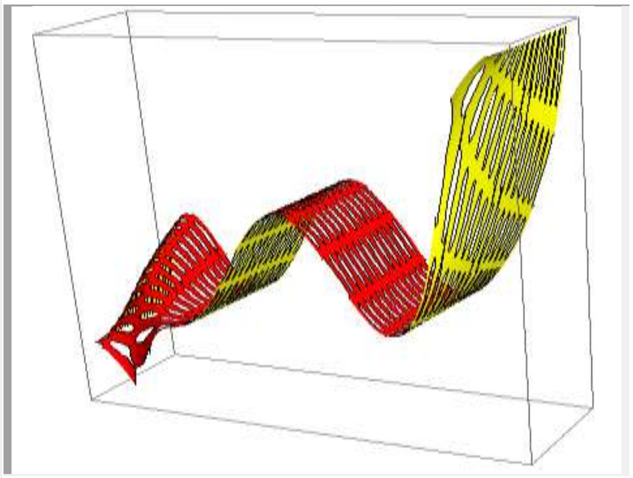
Plot[Evaluate[Table[{100Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] + Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{100Sin[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] + Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{50t, 100Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] + Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{50t, 100Sin[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] + Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]

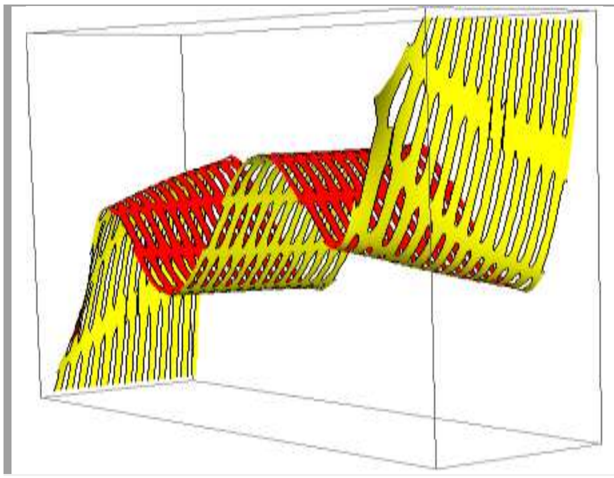
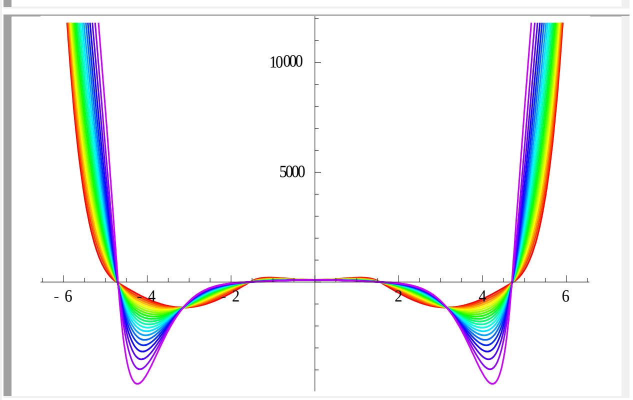
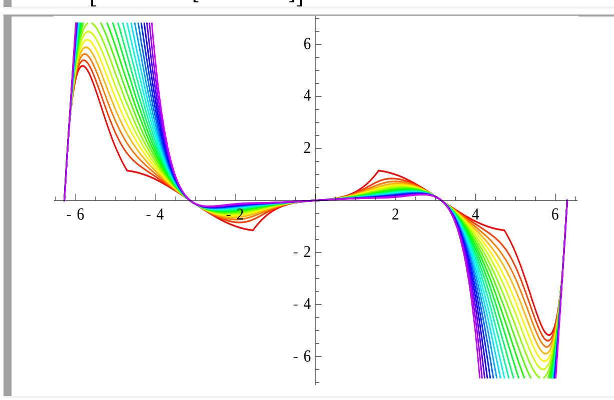


Fig. 12 Graficele FSM excentrice centricohiperbolice
de cosinusuri **cexθ ± cexhθ** ◀ şi de sinusuri **sexθ ± sexhθ** ▶ şi alte combinaţii

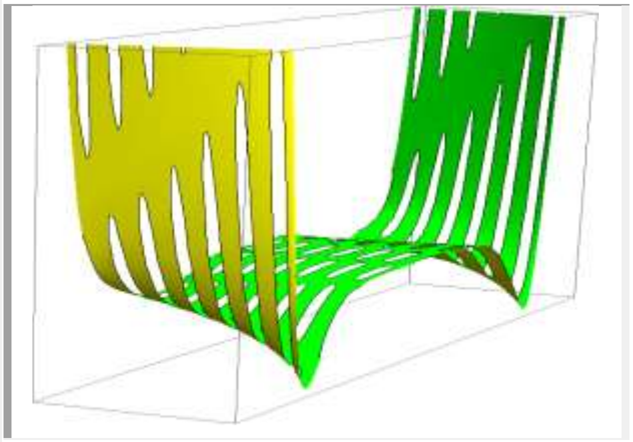
Plot[Evaluate[Table[{100Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] ∗ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



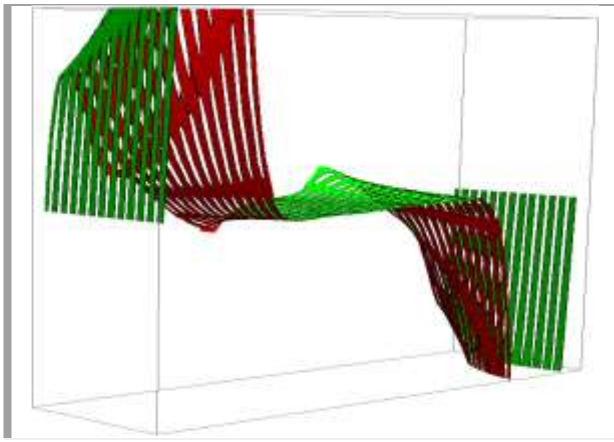
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − 0.1ArcSin[0.1sSin[t]]] ∗ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/10}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



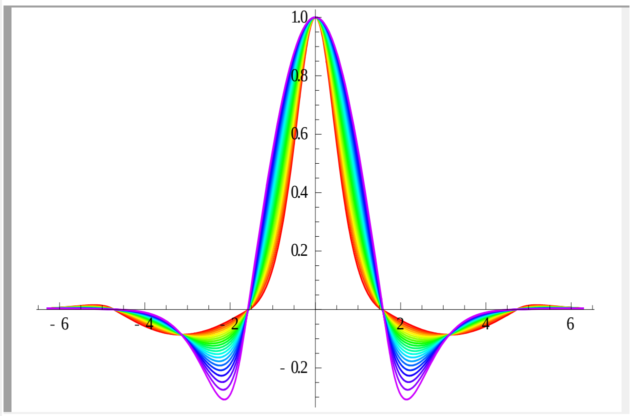
ParametricPlot3D[{200t, 10Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] ∗ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],30s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



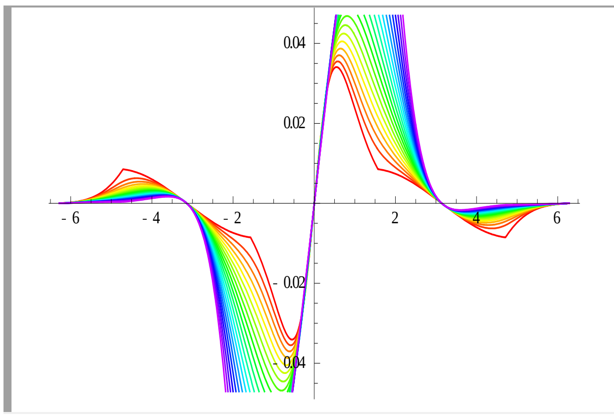
ParametricPlot3D[{50t, 5Sin[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]] ∗ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



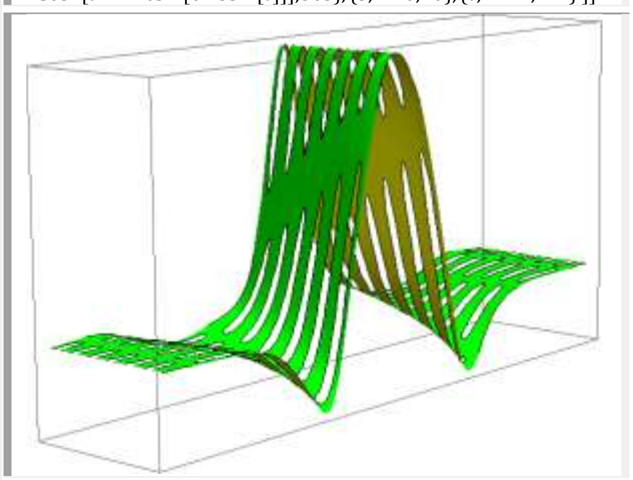
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]]/ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi }]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − 0.1ArcSin[0.1sSin[t]]]/ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/10}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{200t, 1000Cos[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]]/ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],30s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{30t, 200Sin[t − 0.01ArcSin[0.1sSin[t]]]/ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],10s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]

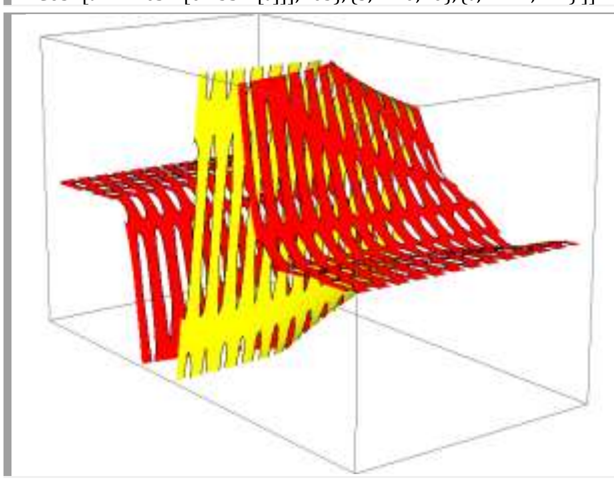
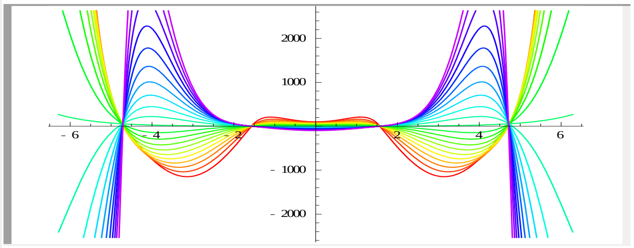


Fig. 13 Graficele FSM excentrice centricohiperbolice
de cosinusuri **cexθ */ cexhθ** ◀ şi de sinusuri **sexθ */ sexhθ** ▶ şi alte combinaţii

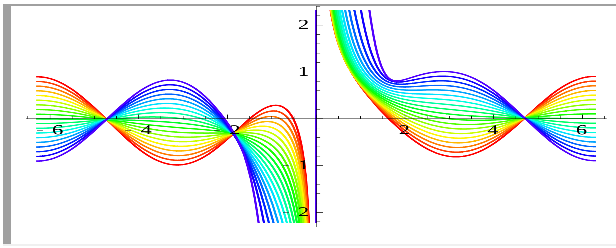
Fig. 13 Graficele FSM excentrice centricohiperbolice
de rexuri **rexθ */ cexhθ** ◄ şi de sinusuri **rexθ */ sexhθ** ► şi alte combinaţii

5. FSM CENTRICOHIPERBOLICE

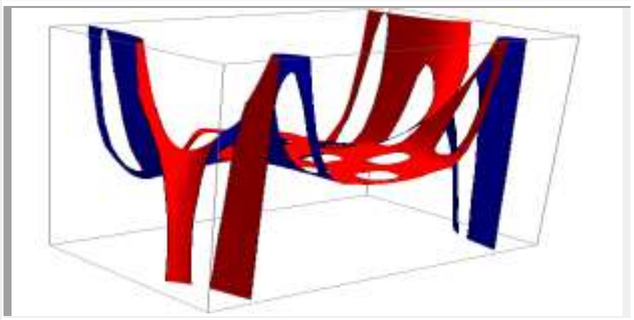
Plot[Evaluate[Table[{(−10sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) ∗ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



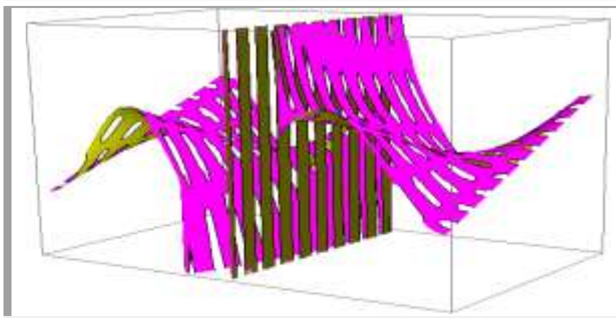
Plot[Evaluate[Table[{(−0.1sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]/ Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])}, {s, −9,9}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



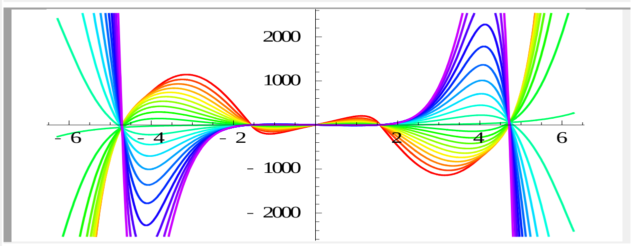
ParametricPlot3D[{50t, (−sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) ∗ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],20s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



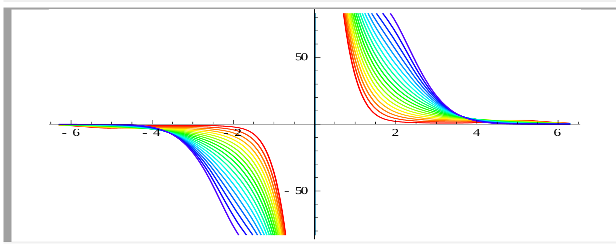
ParametricPlot3D[{50t, 100(−0.1sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]/Sinh [t − ArcSin[0.1sSin[t]]]),20s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}



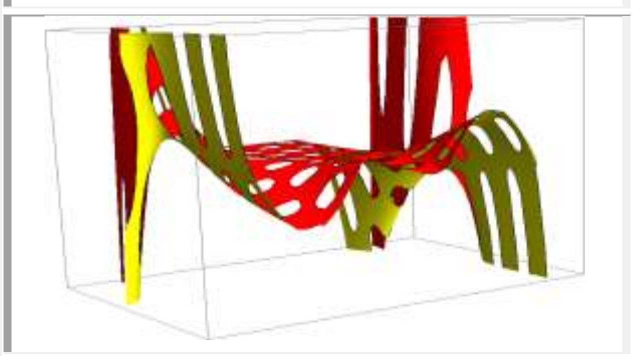
Plot[Evaluate[Table[{(−10sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) ∗ Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{(100(−0.1sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2])/Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]])} , {s, −9,9}], {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{50t, (−sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) ∗ Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],20s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{50t, 1.5(−0.1sCos[t] + Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) ∗ Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],20s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]

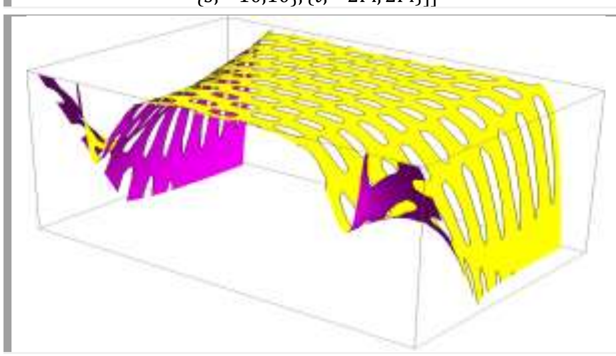


Fig. 13 Graficele FSM excentrice centricohiperbolice : rexθ */ cexhθ ◀ ▶ rexθ */ sexhθ ◀ ▶

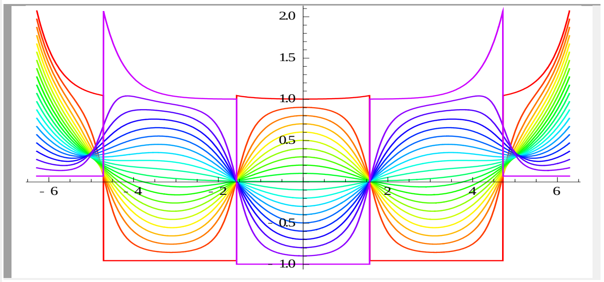
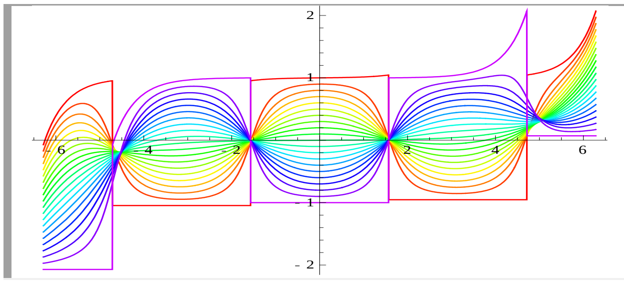
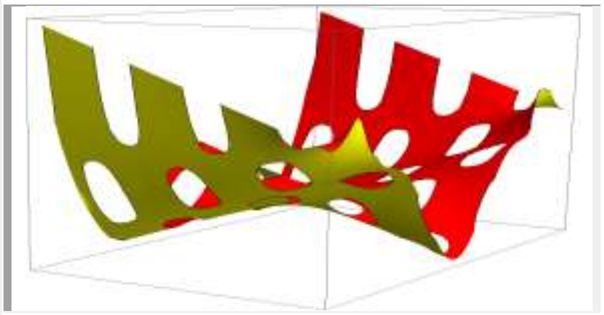
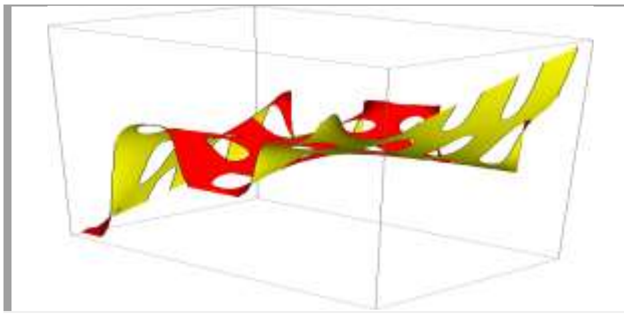
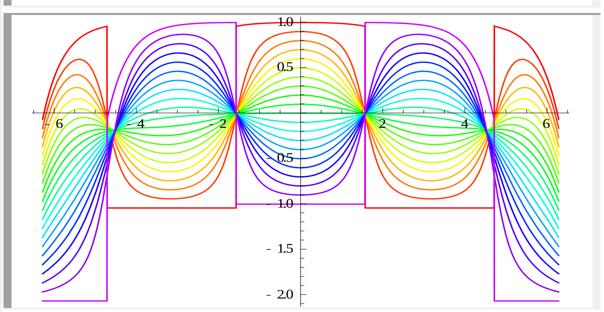
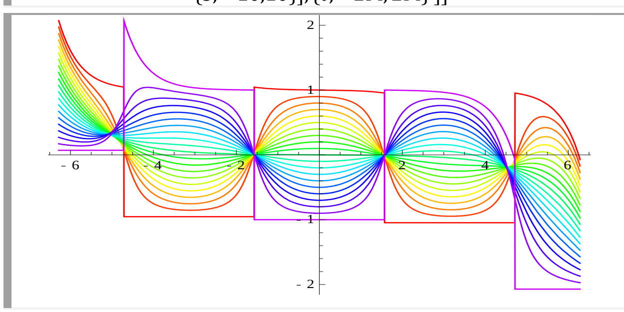
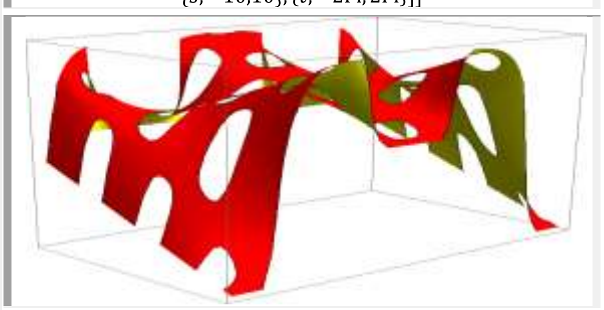
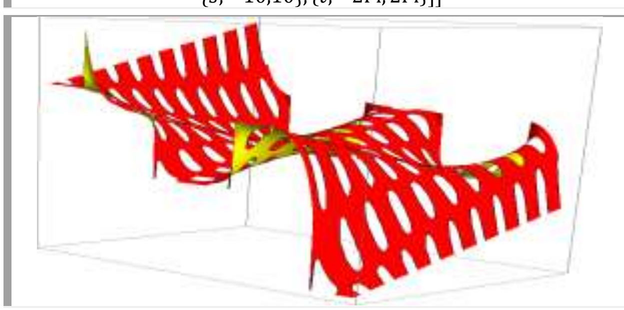
Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] + Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/250}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi	Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²] + Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/250}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]
	
ParametricPlot3D[{50t, 100(−0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) + Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],20s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]	ParametricPlot3D[{50t, 100(−0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) + Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],20s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]
	
Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])²] − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/250}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2P	Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] − Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]/250}, {s, −10,10}], {t, −2Pi, 2Pi}]]
	
ParametricPlot3D[{50t, 100(−0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) − Cosh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],20s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]	ParametricPlot3D[{50t, 100(−0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]) − Sinh[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],20s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]]
	

Fig. 14 Graficele FSM excentrice centricohiperbolice : dexθ ± cexhθ ◀ ▶ dexθ ± sexhθ ◀ ▶

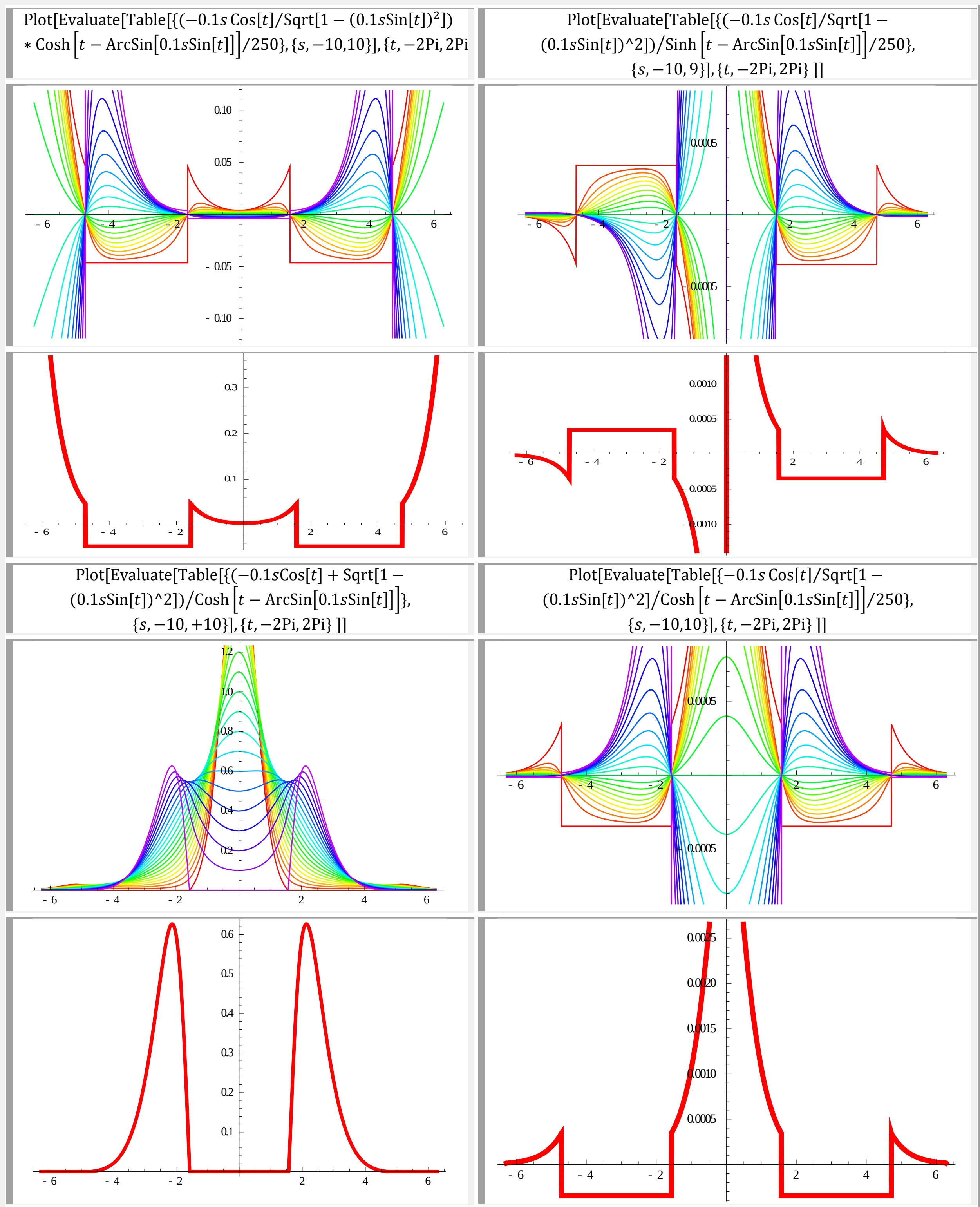
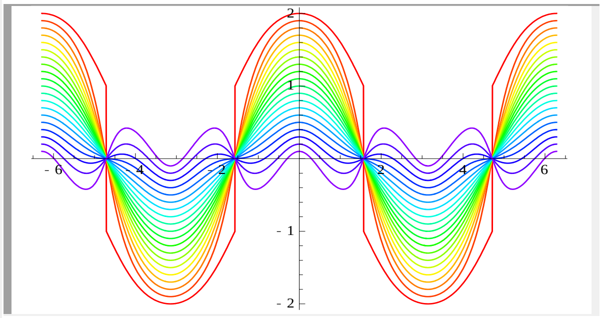
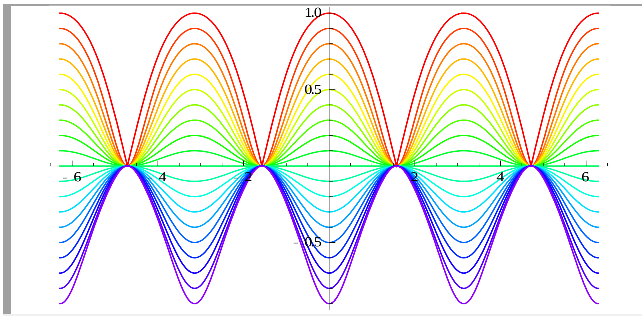
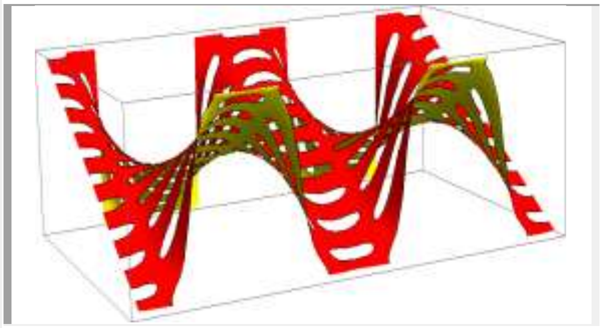
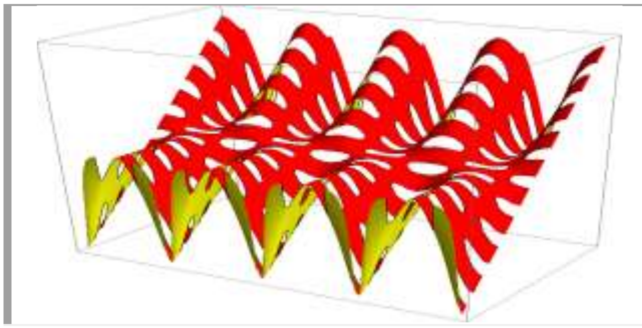
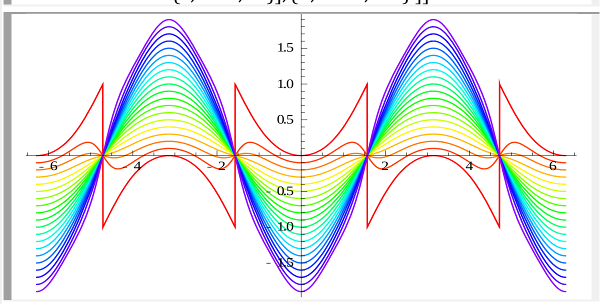
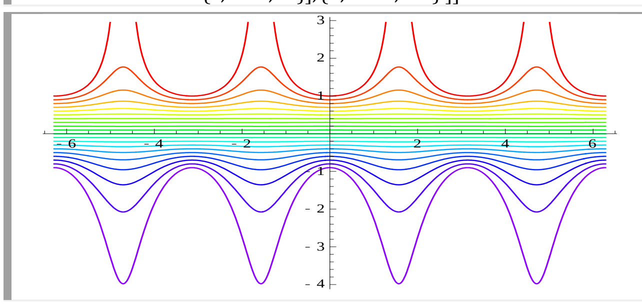
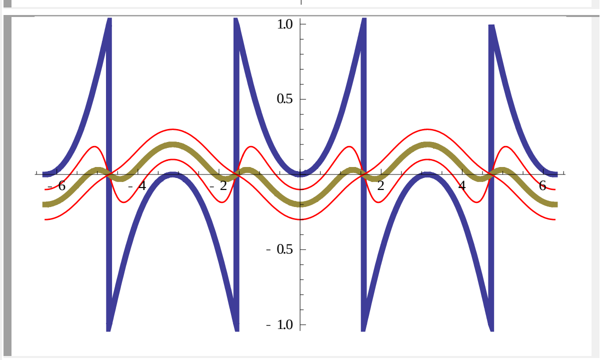
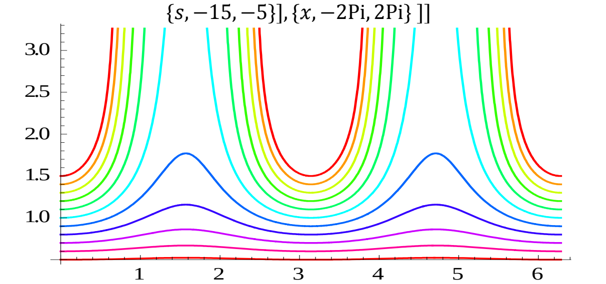


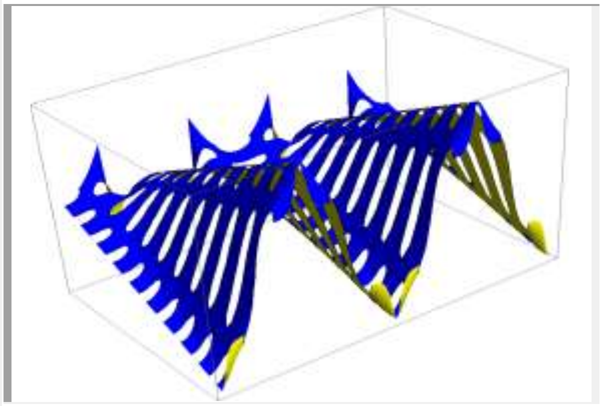
Fig. 15 Graficele FSM excentrice centricohiperbolice : dexθ */ cexhθ ◀ ▶ dexθ */ sexhθ ◀ ▶

6. FSM CENTRICOELIPTICE

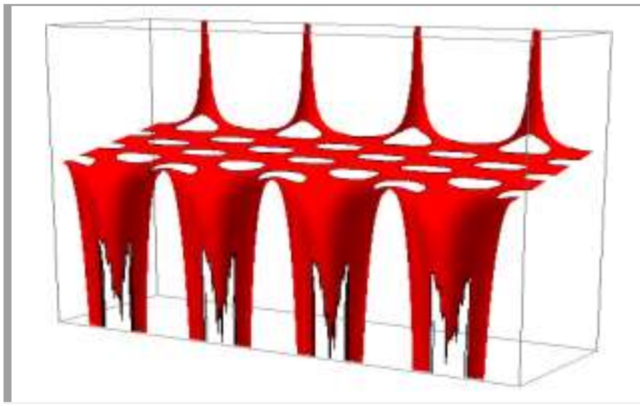
Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] + JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2P}]]	Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] ∗ JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]
	
ParametricPlot3D[{50x, −10s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] + JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s],20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]	ParametricPlot3D[{50x, 3(−10s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2]) ∗ JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s],20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]
	
Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] − JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] /JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]
	
	Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] /JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]}, {s, −15, −5}], {x, −2Pi, 2Pi}]] 

BUPT

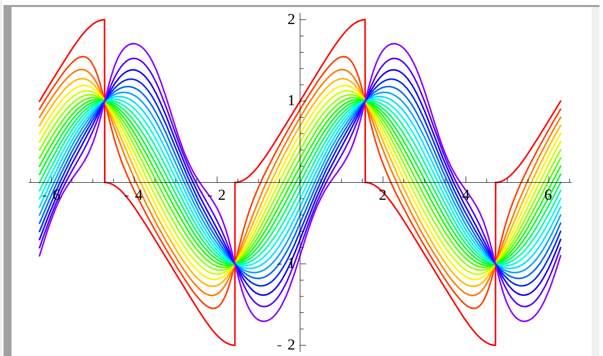
ParametricPlot3D[{50x, 100(−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] − JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]),20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



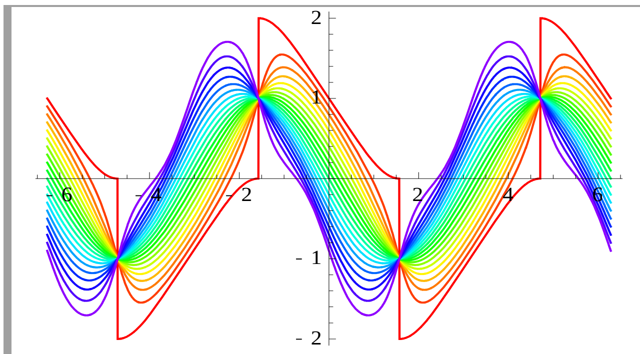
ParametricPlot3D[{10x, 5(−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2])/(JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]) , 2s}, {s, −10,20}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



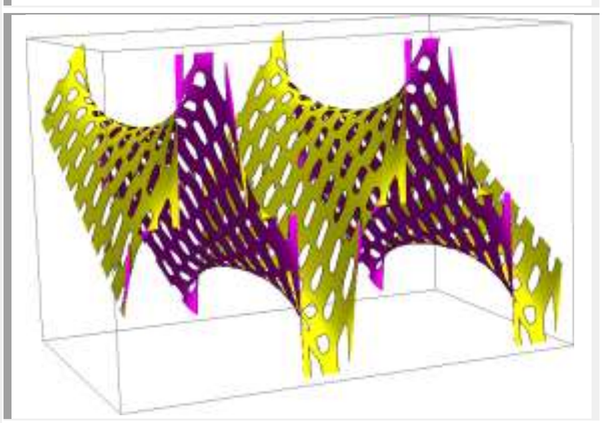
Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] + JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] − JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{50x, 100(−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^ + JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]), 20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot3D[{50x, 100(−0.1s Cos[x]/Sqrt[1 − (0.1sSin[x])^2] − JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s]),20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]

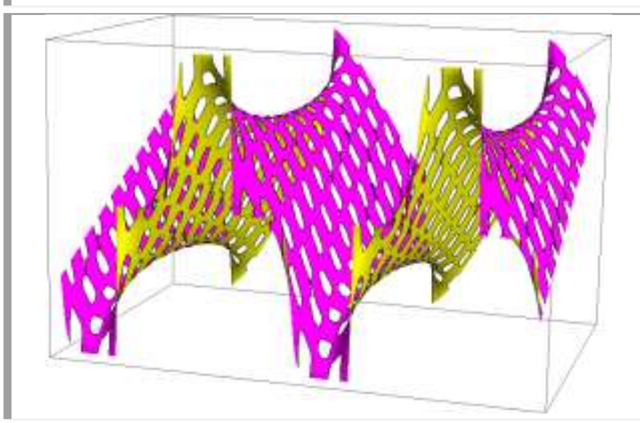
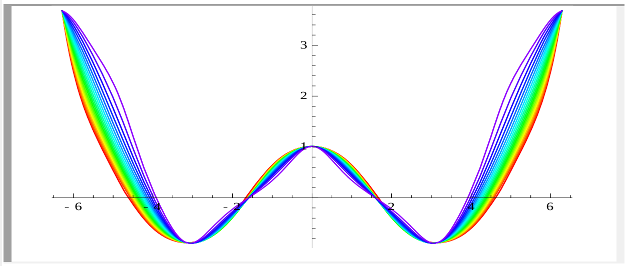


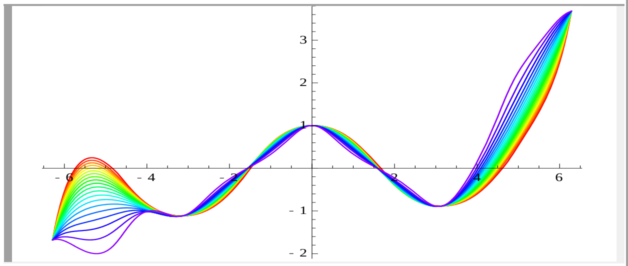
Fig. 16 Graficele FSM excentrice centricoeliptice : dexθ ± cnθ, dexθ ± snθ ş.a.

7. FSM ELIPTICOHIPERBOLICE

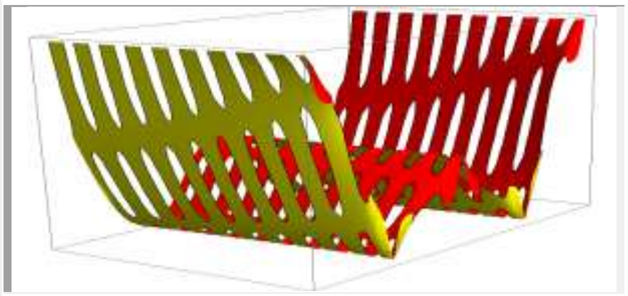
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + 0.01Cosh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



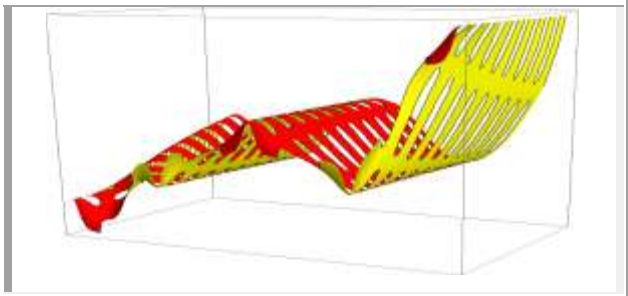
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s + 0.01Sinh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



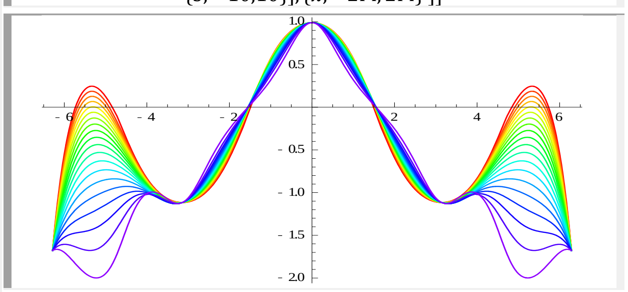
ParametricPlot3D[{50x, 100(JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi, 0.1s] + 0.01Cosh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]),20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



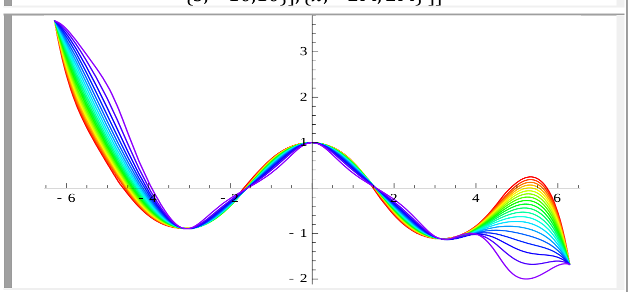
ParametricPlot3D[{50x, 100(JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi, 0.1s] + 0.01Sinh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]),20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



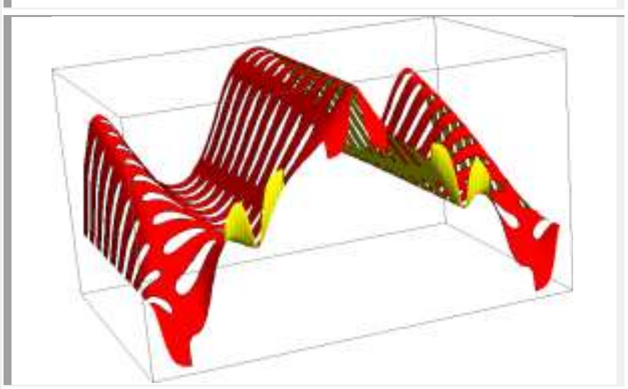
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] − 0.01Cosh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



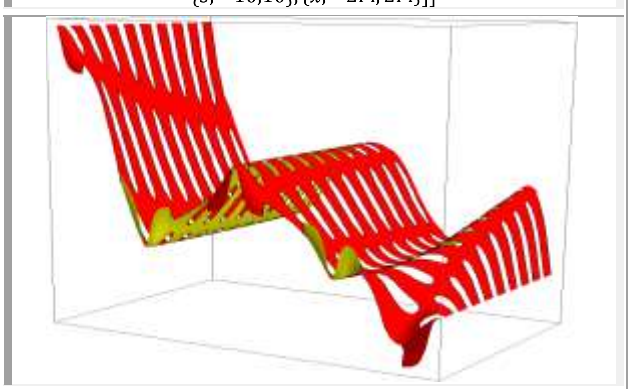
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] − 0.01Sinh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



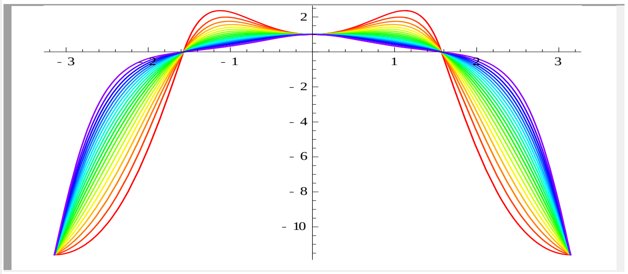
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Cosh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −Pi, Pi}]]



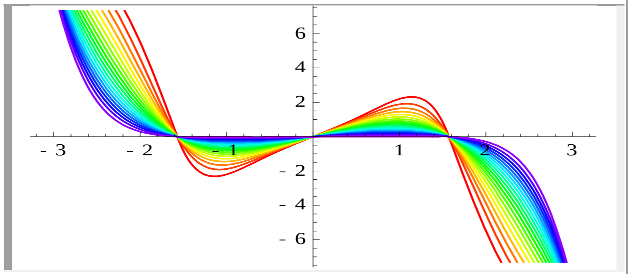
ParametricPlot3D[{50x, 100(JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s − 0.01Sinh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]),20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



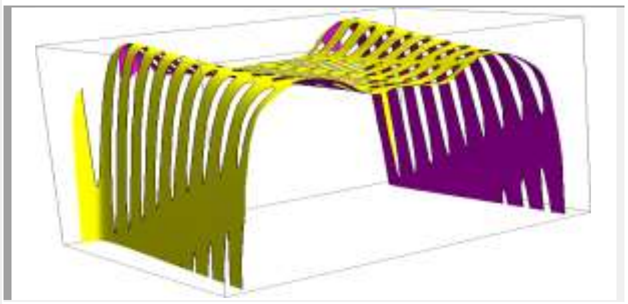
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Cosh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −Pi, Pi}]]



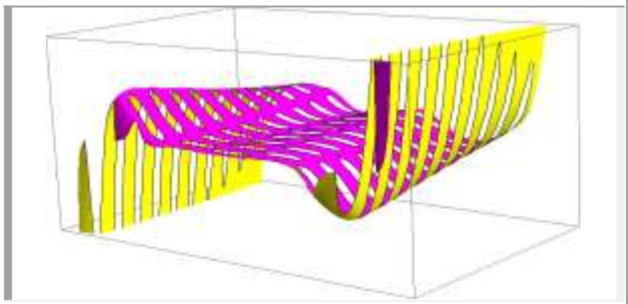
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ □Sinh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −Pi, Pi}]]



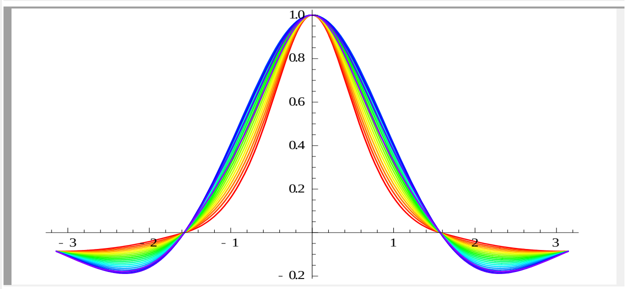
ParametricPlot3D[{50x, 3(100(JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi, 0.1s] ∗ 0.01Cosh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]])),20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



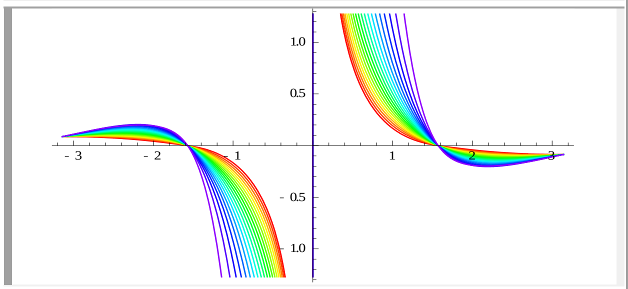
ParametricPlot3D[{50x, 3(100(JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0. ∗ 0.01Sinh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]])),20s}, {s, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}]]



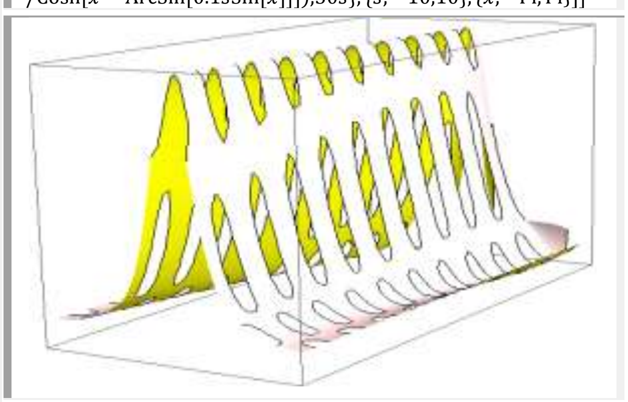
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] /Cosh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −Pi, Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] /□Sinh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −Pi, Pi]}]



ParametricPlot3D[{75x, 500(JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s /Cosh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]),50s}, {s, −10,10}, {x, −Pi, Pi}]]



ParametricPlot3D[{300x, 400(JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1 /Sinh[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]),50s}, {s, −10,10}, {x, −Pi, Pi}]]

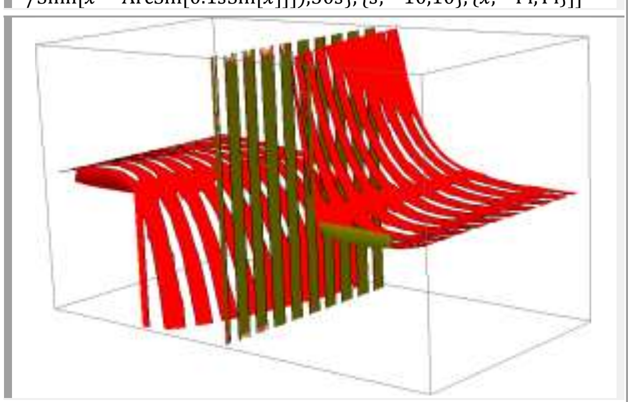
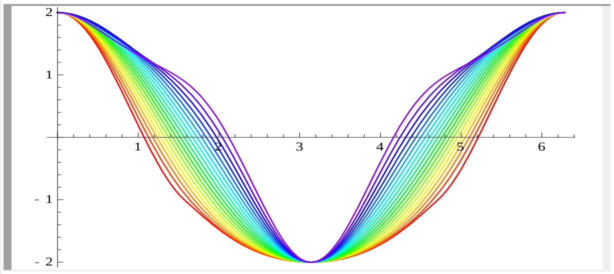


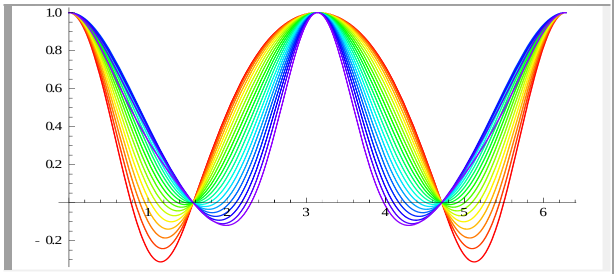
Fig. 17 Graficele FSM excentrice elipticohiperbolice : cnθ ± ,*/coshθ, cnθ ±,*/ sinhθ ş.a.

7. FSM ELIPTICOCIRCULARE EXCENTRICE

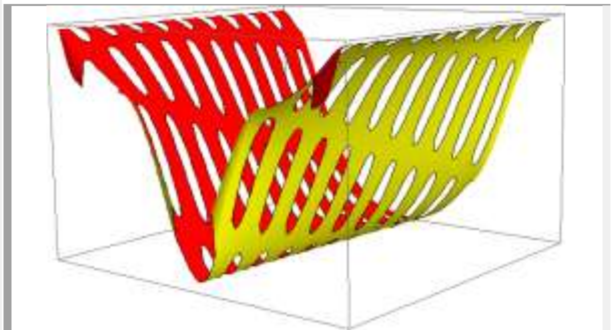
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



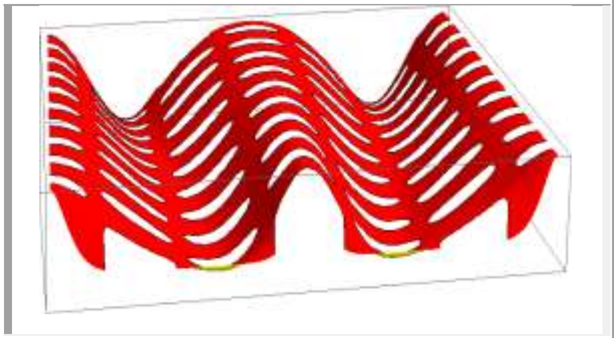
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}



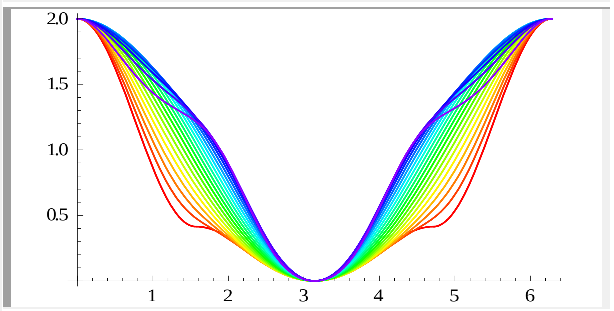
ParametricPlot3D[{x, JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]



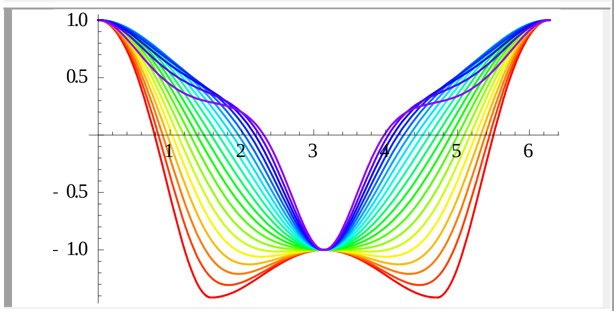
ParametricPlot3D[{x, JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]



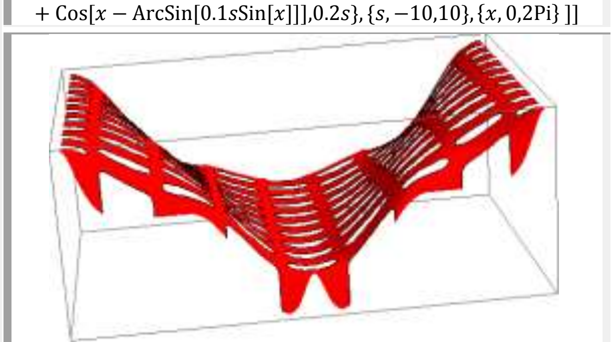
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



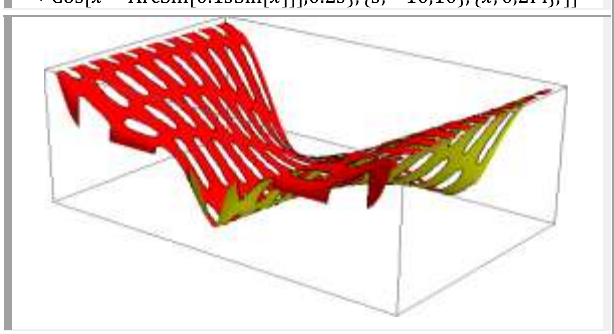
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



ParametricPlot3D[{x, JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.2s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]

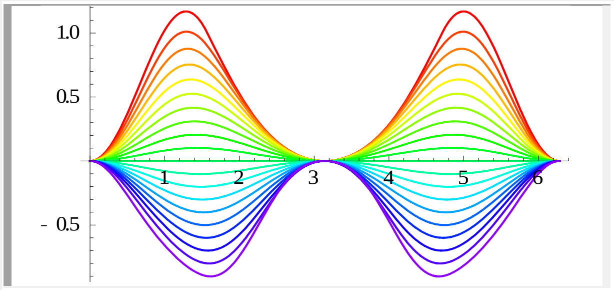


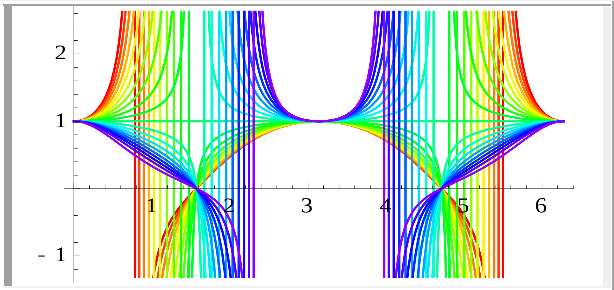
ParametricPlot3D[{x, JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.2s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi},]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] − Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}

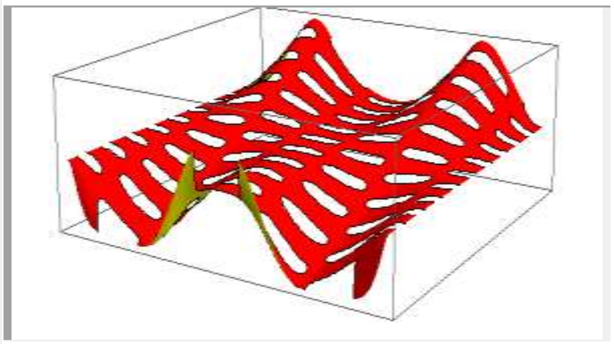
Plot[Evaluate[Table[{JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]

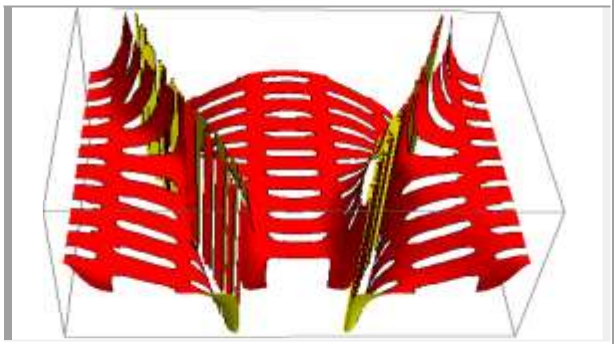




ParametricPlot3D[{x, JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi, 0.1s] − Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]

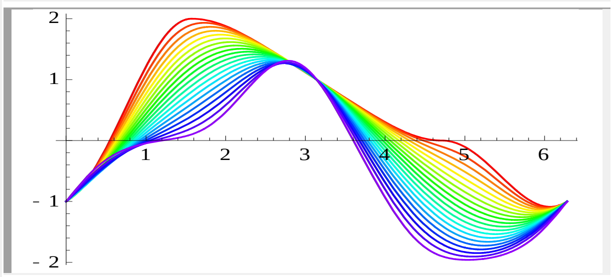
ParametricPlot3D[{x, JacobiCN[2x EllipticK[0.1s]/Pi, 0.1s]/Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]], 0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]

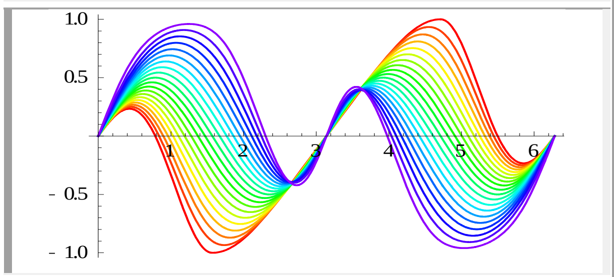




Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] − Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]

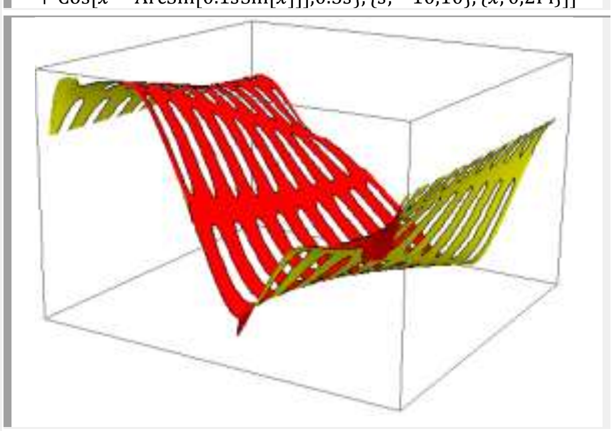
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]

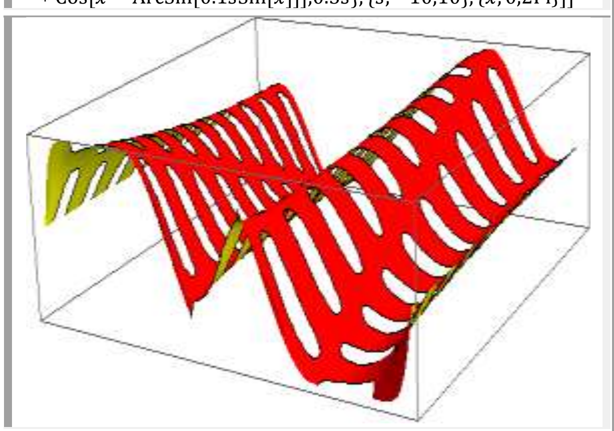




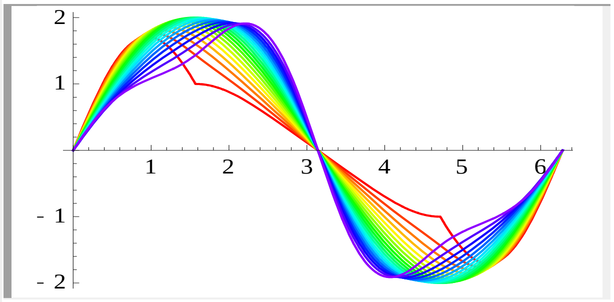
ParametricPlot3D[{x, JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]

ParametricPlot3D[{x, JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Cos[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]

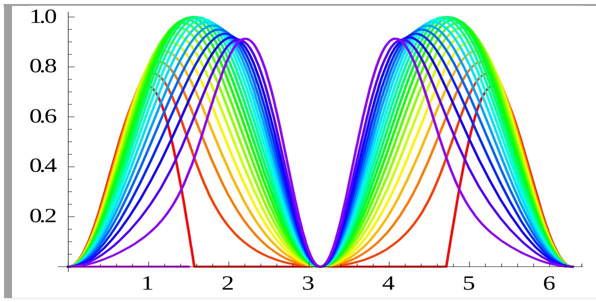




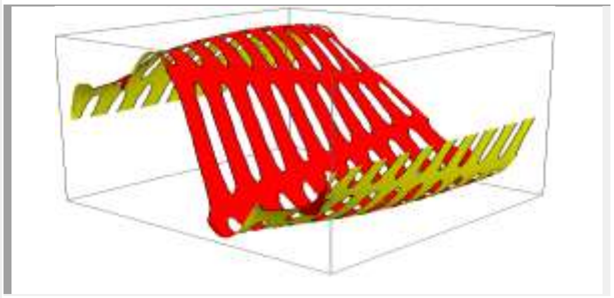
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



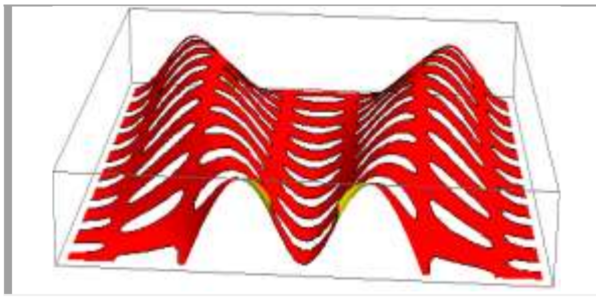
Plot[Evaluate[Table[{JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



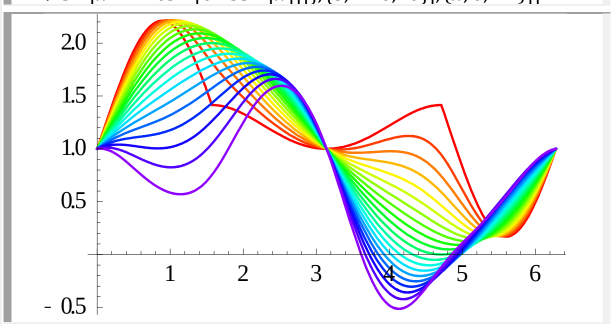
ParametricPlot3D[{x, JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]



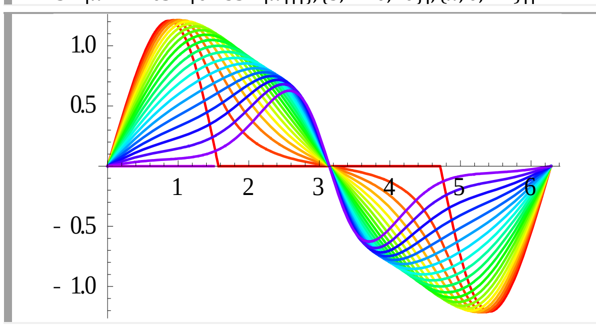
ParametricPlot3D[{x, JacobiSN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]



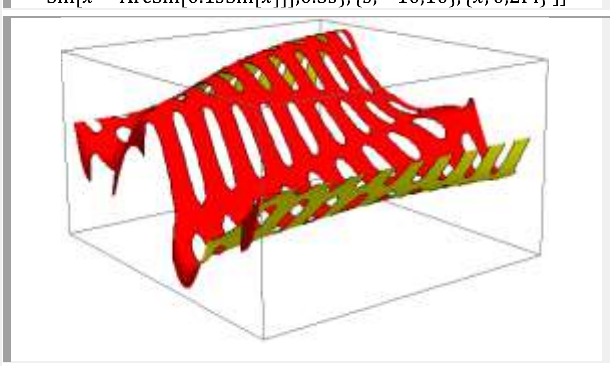
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



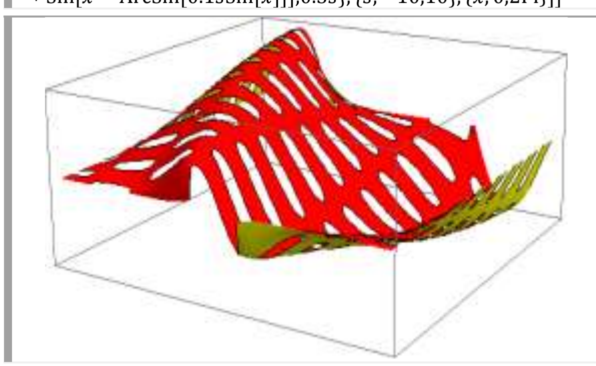
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



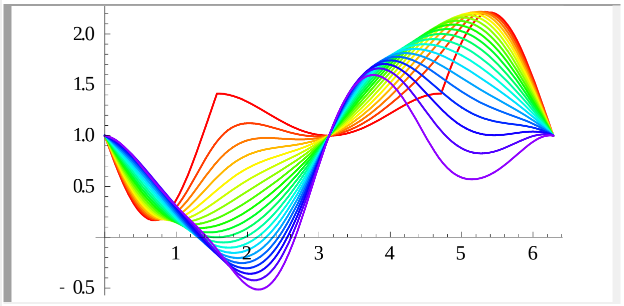
ParametricPlot3D[{x, JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] + Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]



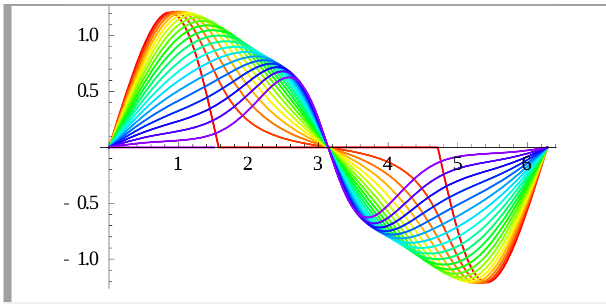
□ParametricPlot3D[{x, JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]



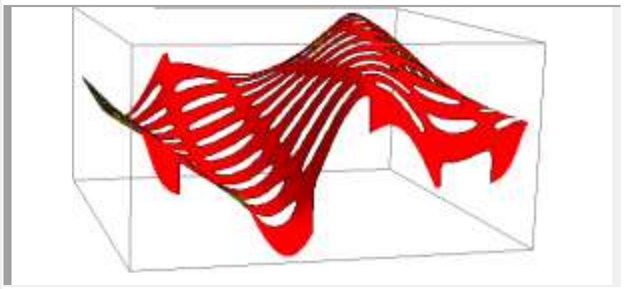
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] − Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, 0,2Pi}]]



ParametricPlot3D[{x, JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] − Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]



ParametricPlot3D[{x, JacobiDN[2x EllipticK[0.1s]/Pi , 0.1s] ∗ Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]],0.3s}, {s, −10,10}, {x, 0,2Pi}]]

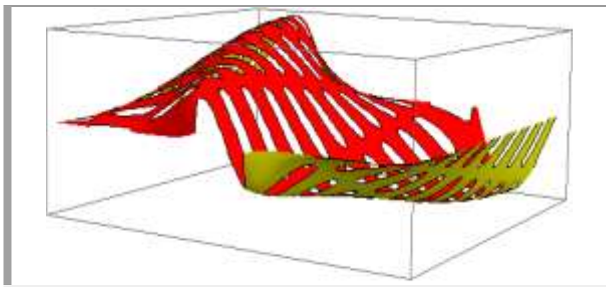


Fig. 18 Graficele FSM excentrice elipticoexcentrice

C U P R I N S