

INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VULIA" TI MIȘOARA  
FACULTATEA DE CONSTRUCȚII  
CATEDRA DE ISTON ARHITECTURĂ CLASICE

Ing. STOIAN VALERIU AUGUSTIN

CONTRIBUȚII LA CALCULUL ȘI ALCAȚUIREA STRUCTURILOR

ÎNALTE CU DIAFRAGME DE ISTON ARHITECTURĂ

TEZA DE DOCTORAT

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC

Prof. emerit ing. CONSTANTIN AVRAM  
Membru corespondent al Academiei R.S.R.

- 1 9 8 2

INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIȘOARA
BIBLIOTECA
CENTRALĂ
4464/2
Volumul Nr.
Dulap 13211 D

**C U P R I N S**  
\*\*\*\*\*

<b>INTRODUCERE . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1. METODA SIMPLIFICATA PENTRU CALCULUL STRUCTURILOR CU DIAPHRAGE IN DOMENIUL ELASTIC . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.1. Introducere . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.2. Prezentarea metodei de calcul simplificate . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>2. MODELAREA SI CALCULUL STRUCTURILOR DE BETON ARMAT PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.1. Scurtă retrospectivă a metodei de calcul . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.2. Descriere generală a metodei . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.3. Amplasul procedurii de analiză . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.4. Statica structurilor în starea de tensiune plană . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.4.1. Studiul în domeniul elastic . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.4.1.1. Elementul finit triunghiular . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>2.4.1.2. Vectorii încălzirilor . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2.4.1.3. Discretizarea structurii . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2.4.1.4. Determinarea eforturilor și reacțiunilor . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.4.2. Studiul în domeniul postelastice . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.4.2.1. Modelarea comportării betonului solicitat biaxial . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.4.2.2. Modelarea comportării armăturii . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>2.4.2.3. Modelarea comportării betonului armat . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>2.4.2.4. Modelarea betonului fisurat . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.4.2.5. Matricele rigidităților materialelor . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>    a. rigiditatea betonului armat nefisurat . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>    b. criteriul de fisurare a betonului armat . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>    c. rigiditatea betonului armat fisurat . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>    d. modelarea rugozității și dilatării fisurilor . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>    e. interacțiunea beton - armătură . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>    f. rigiditatea betonului armat plasticizat . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>2.4.2.6. Analiza incrementală . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>    a. formularea problemei . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>    b. forțele de transfer . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>    c. procesul de fisurare . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>    d. procesul de plasticizare . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>2.5. Dinamica structurilor în starea plană de tensiune . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>2.5.1. Studiul în domeniul elastic . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>2.5.1.1. Ecuații de mișcare pentru un sistem cu mai multe     grade de libertate . . . . .</b>	<b>67</b>

BIBLIOTECA  
UNIVERSITĂȚII  
BUCUREȘTI

2.5.1.2. Evaluarea matricii maselor . . . . .	68
2.5.1.3. Matricea de amortizare . . . . .	69
2.5.1.4. Metoda integrării numerice directe . . . . .	70
a. Introducere în metoda integrării numerice . . . . .	70
b. metoda wilson $\theta$ . . . . .	71
2.5.2. Analiza dinamică neliniară . . . . .	73
2.5.2.1. Considerații introductive . . . . .	73
2.5.2.2. Ecuații de echilibru dinamic într-un pas de timp . . . . .	74
2.5.2.3. Variantă biografică de calcul dinamic neliniar . . . . .	74
<b>3. TEORIA ECHIVALENTELOR ÎN CALCULUL DIAFRAGELOR . . . . .</b>	<b>76</b>
3.1. Principiul teoriei echivalențelor . . . . .	76
3.2. Energia de deformație . . . . .	79
3.2.1. Corpul omogen și izotrop . . . . .	79
3.2.2. Elementul de bară . . . . .	79
3.3. Statica structurilor în starea plană de tensiune . . . . .	80
3.3.1. Studiul în domeniul elastic . . . . .	80
3.3.1.1. Energia de deformație într-un corp omogen și izotrop . . . . .	80
3.3.1.2. Modele de elemente echivalente . . . . .	80
a. modele valabile pentru $\nu = 1/3$ . . . . .	80
b. modele valabile pentru $\nu$ generic . . . . .	86
c. modele speciale . . . . .	87
3.3.1.3. Material neomogen și anisotrop . . . . .	90
a. modele din bare cu noduri articulate . . . . .	90
b. modele speciale . . . . .	91
3.3.1.4. Starea de deformație în corpul real . . . . .	93
3.3.1.5. Starea de eforturi în corpul real . . . . .	94
3.3.2. Studiul în domeniul postelastice . . . . .	95
3.4. Precizări privind utilizarea metodei . . . . .	97
3.5. Dinamica structurilor în starea de tensiune plană . . . . .	102
<b>4. PROCEDEE PENTRU REZOLVAREA ECUAȚIILOR ALGEBRICE . . . . .</b>	<b>102</b>
4.1. Sisteme de ecuații algebrice liniare . . . . .	102
4.1.1. Procedee bazate pe eliminarea Gauss . . . . .	102
4.1.2. Procedee prin utilizarea matricelor ortogonale . . . . .	107
4.1.3. Procedee iterative . . . . .	107
4.1.4. Condensarea statică. Substructurarea . . . . .	108
4.2. Sisteme de ecuații algebrice neliniare . . . . .	109
<b>5. PROGRAME PENTRU CALCULUL DIAFRAGELOR . . . . .</b>	<b>112</b>
5.1. Programul DIAPRAGM . . . . .	112
5.2. Programul DIASPA . . . . .	113
5.3. Programul BIOGRAF01 . . . . .	113

5.4. Programul BIOGRAFO2 . . . . .	119
5.5. Programul BIODINO1 . . . . .	122
5.6. Programul METEQ . . . . .	123
5.7. Programul CPCPI . . . . .	123
5.8. Programul BIOALPAT . . . . .	125
6. APLICATII LA CALCULUL DIAFRAGHELOR DE BETON ARMAT . . .	126
6.1. Studiul efectului contracției împiedecate la diafragmele de beton armat . . . . .	126
6.1.1. Oportunitatea studierii efectului contracției . . .	128
6.1.2. Fenomenul împiedecării contracției . . . . .	127
6.1.3. Desfășurarea cercetării . . . . .	128
6.1.3.1. Reținere de tip fundație . . . . .	129
6.1.3.2. Reținere de tip fundație și planșee prefabricate	133
6.1.3.3. Reținere de tip planșeu prefabricat . . . . .	137
6.1.3.4. Efectul turnării succesive a nivelelor. Extindere în domeniul neliniar . . . . .	138
6.1.4. Concluzii privind efectul contracției împiedecate	138
6.2. Studiul efectului încărcărilor exterioare . . . . .	141
6.2.1. Metode de calcul . . . . .	141
6.2.2. Calculul în domeniul elastic . . . . .	143
6.2.2.1. Calculul plan al unei structuri rigide . . . . .	143
6.2.2.2. Calculul spațial al unei structuri rigide . . . . .	143
6.2.2.3. Console încărcate în planul lor . . . . .	143
6.2.2.4. Calculul elastic al unei grinzi perete . . . . .	147
6.2.2.5. Calculul elastic al unei diafragme cu goluri . . .	147
6.2.2.6. Calculul elastic al unei diafragme . . . . .	149
6.2.3. Calculul postelastice . . . . .	149
6.2.3.1. Calculul biografic al unei plăci plane . . . . .	149
6.2.3.2. Calculul biografic al unei diafragme de beton armat încărcată cu sarcini alternante . . . . .	153
6.2.3.3. Calculul neliniar al unei diafragme de beton armat utilizând teoria echivalențelor . . . . .	153
6.2.3.4. Calculul biografic al unui buclandrug din beton armat . . . . .	153
6.2.3.5. Calculul biografic al unei diafragme de beton armat cu un șir de goluri . . . . .	157
6.2.4. Calculul dinamic . . . . .	165
6.2.4.1. Vibrații proprii la o consolă plană . . . . .	165

<b>6.2.4.2. Calculul dinamic biografic al unei diafragme de beton armat . . . . .</b>	<b>165</b>
<b>7. ALTELE SI CONCLUZII . . . . .</b>	<b>166</b>
<b>BIBLIOGRAFIE . . . . .</b>	<b>170</b>

## INTRODUCERE

Proiectarea modernă a structurilor diferitelor tipuri de construcții presupune satisfacerea simultană a trei condiții deosebit de importante în condițiile actualei penurii de energie și caracterii price, dintre care cel puțin prima și ultima sînt contradictorii: rezistență, durabilitate și economicitate. Folosirea betonului armat satisface cel mai bine aceste condiții; așa se explică faptul că betonul armat a devenit și va rămîne pentru încă foarte mult timp principalul material de construcții, folosit cu mare eficiență tehnică și economică stît în țările dezvoltate cît și în cele în care se dezvoltare.

În procesul de rezolvare a unei probleme de mecanica structurilor, trebuie parcurse următoarele etape: obiectul real, modelul fizic, modelul matematic; rezolvarea problemei matematice; interpretarea fizică a rezultatelor matematice. Si aici aspectul dificil îl constituie construirea modelului matematic și rezolvarea problemei matematice. Pe multe ori, pentru structurile bi și tridimensionale de forme oarecare multipele concave, la care ecuațiile problemei sînt reprezentate, în mod obișnuit, de ecuații cu derivate parțiale, modelul matematic nici nu poate fi rezolvat pe cale analitică; în acest caz se face apel la aproximația funcțiilor și la tehnica calculului numeric, care s-a dezvoltat foarte mult în ultimul timp datorită dezvoltării rapide a calculatoarelor electronice.

Robert Royce, deținătorul patentului circuitului integrat monolitic, declară în septembrie 1977 în Scientific American: "Un minicalculator cu aceste sile are capacitatea de calcul cît are decît a primului calculator electronic mare, ENIAC. El este de 20 de ori mai rapid, are o memorie cît mare, este de cîțiva ori mai fiabil, consumă puterea unui bec electric și nu a unei locomotive, ocupă 1/3 din volumul acestuia și costă de 1/100 de ori mai puțin."

În aceste condiții pare firesc să dezvoltăm spectaculosul a metodelor numerice, care utilizează procedee de discretizare matematică sau fizică (metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite, teoria echivalențelor). Procedeele de discretizare fizică este tot mai mult utilizat, deoarece permite folosirea unui model fizic cît mai complet, care să ia în considerare proprietațile reale ale materialelor folosite și comportarea reală sub încălzire a

structurilor de rezistență și a terenurilor de fundare.

Metoda elementelor finite permite determinarea eforturilor și a deformațiilor structurilor hiperstatice. Pentru structurile din beton armat, metoda elementelor finite prezintă și un alt avantaj, și anume permite efectuarea unui calcul biografic al acestor structuri, pas cu pas, de la încărcarea zero pînă la încărcarea limită care produce colapsul total sau parțial al structurii.

Structurile din beton simplu, armat sau precomprimit funcționează în exploatare cu betonul întins nefisurat sau fisurat. Cedarea structurii se produce treptat prin acumulări progresive locale în zonele de solicitate; aceste cedări locale se produc prin fisurarea betonului întins, curgerea armăturii întinse sau comprimată sau strivirea betonului comprimat. Metoda elementelor finite permite o analiză continuă a acestui proces de rupere; urmind treptat încărcarea, extinderea, cedarea se produce prin acumularea treptată a cedurilor elementelor finite individuale (a căror rigiditate se modifică după fiecare cedare), avînd drept consecință o creștere asigurată a deformațiilor structurii sau a unei porțiuni din structură, care apoi se detașează. Astfel, la terminarea calculului se obține, în afara încărcării limită și a eforturilor corespunzătoare, și relieful degradării elementelor finite, adică numărul și dispoziția fisurilor, a elementelor rupte prin compresiune și a elementelor la care a cedat și armătura; acest lucru permite, în afara evaluării încărcării limită, și stabilirea soluției optime de aliniere și armare a elementelor structurii.

Folosirea metodelor numerice de calcul și a calculatoarelor electronice poate fi cu plată, pentru structuri deosebite sau de importanță majoră, cu încercări de laborator pe modele, care au confirmat rezultatele calculului, în special a celor biografice.

Pentru atingerea acestui scop este necesară reconsiderarea ponderilor diferitelor tipuri de cercetări experimentale privind betonul armat. Pînă în prezent majoritatea experimentărilor se referă la obținerea unor rezultate privind comportarea de ansamblu a elementelor de construcții din beton armat, mai ales în ceea ce privește fisurarea și ruperea. În concordanță cu discretizarea geometrică caracteristică metodei elementelor finite este necesară amplificarea cercetărilor experimentale de detaliu în ceea ce privește mecanismul formării și dezvoltării fisurilor, al transmiterii eforturilor prin zona de material fisurat, mecanismul zdrobirii betonului și al coeziunii între armătură și beton. Trebuie să se acorde deci

o atenție mai mare studiului materialelor și a conlucrării dintre acestea, comparativ cu studiul elementelor.

Pe de altă parte, folosirea metodelor numerice de calcul și a calculatoarelor electronice nu trebuie să constituie un scop în sine, nu trebuie să înlocuiască gândirea inginerescă, ci să constituie instrumente de lucru ale inginerului, pentru care experiența, intuiția și înțelegerea fenomenelor fizice rămân elemente de bază.

Metodele de calcul utilizate la determinarea eforturilor secționale în diafragma din beton armat sub acțiunea încălzirilor orizontale, s-au dezvoltat în pas cu procesul de modernizare și perfecționare al mecanicii construcțiilor. Ele s-au dezvoltat de la metodele simplificate, la metodele numerice, de la calculul elastic, la cel postelastice.

Astfel, în domeniul elastic se pot arăta următoarele metode:

- metoda distorsiunilor /98/;
- metoda cadrului înlocuitor /77/, /10/, /43/, /91/;
- metoda structurii continue echivalente /10/, /43/;
- metoda structurii continue echivalente rezolvată prin diferențe finite /144/;
- procedeul grinzii înlocuitoare /75/;
- metoda fișilor /131/;
- metoda deplasărilor în formă matriceală /45/, /143/, /117/;
- metoda elementelor finite /45/, /143/, /69/, /26/;
- metoda relaxării dinamice /126/, /138/.

În domeniul postelastice, s-au dezvoltat în ultimii ani metode și procedee de calcul din ce în ce mai performante. Investigarea acestui domeniu s-a dovedit că nu reprezintă numai o cale de perfecționare a metodelor de calcul, ci poate constitui și o bază pentru îmbunătățirea concepției de alcătuire a structurilor. Se pot arăta următoarele metode:

- metoda structurii continue echivalente rezolvată prin diferențe finite /144/;
- metoda de calcul dinamic neliniar utilizând accelerogramele unor cutremure reale sau simulate /57/, /199/, /104/, /116/;
- metoda de calcul prin acceptarea unui mecanism de colaps /164/;
- metode energetice /134/;
- metoda elementelor finite /77/.



După obținerea eforturilor secționale, pentru calculul arci ei de arcătură în prezent se utilizează fie stadiul de sarcini, fie stadiul limită. Ambele procedee, dezvoltate inițial pentru element liniare, nu fost adoptate cu un vâlt sau cu puțin succes în diafragma, fără a avea însă o acoperire experimentală sau teoretică satisfăcătoare.

Deosebirile neliniare care se produc în diafragmae solici-tate de sarcini orizontale, dintre care fisurarea betonului ocupă pondere însemnată, conduc la o redistribuire a eforturilor în stru tură. Nivelul degradărilor se modifică în conformitate cu mărirea încărcării, așteptul constructiv și caracteristicile fizico-mee-nice ale diafragmei.

Cum materialele uzuale arăutate mai sus nu reușesc să sur prindă exact aspectele menționate, apare firescă orient rea spre metodele biografice de calcul. În această categorie se înscrie și metoda elementelor finite, într-o formă care să permită cu-prinderea cât mai fidelă a legilor de comportare a materialelor de bază (betonul și oțelul) luate atât individual cât și ca mate-rial compus (betonul armat).

Lucrarea de față își propune să ajute la clarificarea unora dintre problemele menționate printr-o analiză de detaliu a comportării betonului armat în starea plasa de tensiune și să pu-nă la dispoziție o serie de programe de calcul automat prin care să poată fi urmărita biografia unui element structural în toate stadiile de încărcare.

Porndul de la metodele simplificante, se trece la cele nu-merice, insistându-se asupra posibilităților acestora de a modela un material anizotrop și neelastic.

Studiul conține și analize comparative între rezultatele oferite de două metode numerice : metoda elementelor finite și teoria echivalențelor, atât în domeniul elastic cât și postelne-tic, static și dinamic.

Lucrarea se extinde pe șapte capitole.

În capitolul 1 se prezintă succint ipotezele și relațiile specifice unei metode simplificate de calcul pentru structurile cu diafragma, care vor constitui baza teoretică a unui program de calcul automat.

Capitolul 2 prezintă posibilitățile pe care le oferă metoda elementelor finite în modelarea betonului armat în starea plasa de tensiune. Se deduc matricile de rigiditate ale betonului și ale

și armat în cele trei stadii majore de comportare : nefisurat, fisurat și plasticizat. În continuare este prezentat un procedeu de analiză incrementală utilizat atât în calculul static cât și dinamic postelastice. Capitolul se încheie cu prezentarea unei metode de calcul dinamic biografic.

Capitolul 3 prezintă teoria echivalențelor pentru starea plană de tensiuni împreună cu relațiile specifice modelelor echivalente. Se fac precizări privind utilizarea metodei și se propune o variantă de calcul postelastice.

În capitolul 4 sînt tratate o serie de metode pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice liniare și neliniare,, metode utilizate în cadrul programelor de calcul.

Capitolul 5 conține descrierea programelor de calcul automat, algoritmele de calcul, performanțele acestora și domeniul de utilizare.

Capitolul 6 conține o serie de aplicații numerice prin care se demonstrează posibilitățile și modalitatea de calcul cu programele elaborate. Aplicațiile se referă la două tipuri de acțiuni specifice diafragmelor de beton armat monolite: efectul construcției împiedecate și cel al încălzirilor exterioare. Se studiază comportarea în domeniul elastic și postelastice, rezultatele calculului se compară cu încercările experimentale efectuate de autor sau preluate din bibliografie încercînd prin aceasta validarea teoriilor și a procedeeilor de analiză conștante în programele de calcul.

Capitolul 7 conține principalele concluzii care se desprind din analiza metodelor numerice, a posibilităților acestora de a modela un element structural în toate stadiile de lucru, precum și recomandări privind încălzirea diafragmelor de beton armat prin prisma unei analize biografice.

X X  
X

Autorul este profund recunoscător conducătorului științific, prof.en.ing. Constantin Avram, m.c. al Academiei R. S.R., pentru sprijinul acordat pe parcursul elaborării acestei lucrări, pentru încurajarea și răbdarea de care a beneficiat din partea domniei sale. De asemenea mulțumește în mod deosebit pentru ideile valoroase și sprijinul nerăzlecut de care a beneficiat din partea șef lucrări dr. ing. Richard Friedrich, de a cărui valoroasă colaborare s-a bucurat pe tot parcursul elaborării lucrării. Autorul mulțumește tuturor

colegilor care prin discuții și sugestii au contribuit la clarificarea unor aspecte ale cercetărilor întreprinse. În mod deosebit mulțumesc tov.ing. Alexandru Purtunescu de la Centrul de Calcul al I.C.P., cât și întregului personal pentru sollicitarea pe care mi-a acordat-o în cadrul colaborării.

## 1. BAZA DE FUNDAMENTALIZAREA METODEI CALCULULUI STRUCTURALILOR CU DIAFRAGME ÎN DOMENIUL ELASTIC

### 1.1. Introducere

Metodele exacte pentru calculul construcțiilor multietajate bazându-se pe rezolvarea unor sisteme de ecuații cu multe necunoscute, aplicarea lor este caracterizată printr-un volum de calcule însemnat /98/. Într-un calcul exact, structurile cu diafragma ar trebui considerate ca structuri spațiale alcătuite din substructuri plane de tip perete. Un astfel de calcul, obiect al teoriei elasticității, este însă dificil chiar și atunci când se dispune de un calculator electronic. Pentru calculele curente, necesare proiectării, se adoptă scheme simplificate, pe care, elaborarea unei teorii de calcul al eforturilor și conducerea la soluții simple, dar care să asigure parametri de rezistență și deformații ceruți construcției /37/.

Din punct de vedere al metodelor de calcul ce pot fi utilizate, structurile cu diafragma se clasifică în trei categorii /43/ :

A.- Structuri de tip curent - care au cel mult P+10...11 niveluri, dispoziție ordonată în plan (tip fațade sau celular) și sînt monotone pe verticală, sau prezintă neregularități neimportante de alcătuire, care nu le îndepărtează de structura monotona. Aceste structuri și se pot aplica metode de calcul simplificate dacă se consideră valabile următoarele ipoteze :

- distribuția înălțimilor orizontale pe înălțimea clădirii se ia uniformă în cazul vîntului și triunghiulară în cazul cutremurelor;

- deformațiile tuturor diafragmelor care compun structura se presupun că sînt egale astfel încît distribuția înălțimilor orizontale la diafragma componente se poate face la un singur

nivel, din condiția de egalitate a deplasărilor horizontale, se presupune că la nivelul 0,8 l diferența între săgețile diferitelor diafragme ce compun structura este minimă, astfel că pentru acest nivel se pune condiția de egalare a deplasărilor horizontale;

- se presupune că rotirea fundațiilor diafragmelor la acțiunea încărcărilor horizontale este accegi.

La structurile de tip curent, avind în vedere ipotezele simplificatoare admise, repartizarea încărcărilor horizontale între diafragme se face proporțional cu rigiditatea lor de ansamblu. În aceste condiții, încărcările horizontale repartizate fiecărei diafragme, păstrează legea de distribuție pe verticală admisă pentru încărcarea în ansamblu a structurii și ca atare fiecare diafragmă poate fi calculată ca o structură monotonă independentă.

B.- Structura cu peste 2-11 niveluri, care au o alcătuire similară cu a structurilor de tip curent și structuri cu puține sau mai multe niveluri, cu dispoziție ordonată în plan dar neregulată pe verticală, în care diafragmele cu goluri pot fi considerate ca sisteme de bare. La aceste structuri distribuția pe verticală a încărcărilor seismice horizontale nu mai poate fi considerată în mod simplificat, liniar, ci în concordanță cu deformația structurii, ceea ce evident nu mai permite aplicarea unor metode de calcul simplificate, fiind necesar un calcul prin metode mai analitice. Pentru repartizarea spațială a încărcărilor horizontale seismice la diafragmele clădirilor din această categorie, este necesară scrierea condițiilor de egalitate a săgeților între diferitele diafragme, nu numai la un singur nivel ci la nivelul fiecărui planșeu.

Sisteme cu un număr foarte mare de ecuații liniare de echilibru elastic care rezultă prin punerea condițiilor de egalitate ale săgeților la fiecare nivel al clădirii este însă inabordabil pentru calculul manual și dificil de rezolvat chiar și cu ajutorul calculatoarelor electronice și de aceea este necesară utilizarea unor metode de calcul de complexitate medie, care cuprind unele aproximații și simplificări.

C.- Structuri de tipuri speciale cu puține sau mai multe niveluri, care ies din cadrul celor specificate la punctele anterioare, acestea avind diafragme de forme neregulate sau goluri dispuse neregulat, dictate de condiții funcționale. În aceste cazuri calculul se poate face prin metode numerice bazate pe teoria elasticității.

### 1.2. Prezentarea metodei de calcul simplificat

Metodele de calcul simplificat se aplică structurilor de tip curent.

Calculul unei structuri cu diafragme la acțiunea încălzirilor verticale (gravitaționale) și orizontale (vânt, seism) cuprinde, în principal, următoarele etape :

- a - descompunerea structurii de ansamblu în substructuri simple (diafragme verticale);
- b - stabilirea caracteristicilor de rigiditate ale diaframelor verticale;
- c - determinarea încălzirilor orizontale totale pe fiecare direcție principală;
- d - repartizarea încălzirilor orizontale între diafragmele care alcătuiesc structura, în funcție de rigiditățile acestora;
- e - determinarea eforturilor secționale ( $M$ ,  $N$ ,  $T$ ) din acțiunea încălzirilor orizontale;
- f - determinarea eforturilor secționale din acțiunea încălzirilor verticale;
- g - însumarea eforturilor secționale din acțiunea combinată a încălzirilor verticale și orizontale;
- h - dimensionarea și armarea diaframelor verticale;
- i - determinarea eforturilor în șubele orizontale formate din plase și verificarea preluării eforturilor.

Este de menționat că etapele a - g fac parte din metoda propriuzisă de calcul a eforturilor secționale, în timp ce punctele h și i conțin în principal dimensionarea secțiunilor diaframelor. În acest context, metoda de calcul a eforturilor este independentă de metoda de dimensionare și va fi tratată ca atare în cele ce urmează.

Etapele b, c, și e sînt specifice metodei de calcul. Ele obligă să se determine metoda de calcul a ansamblului structurii după numele metodei de calcul a eforturilor și deformațiilor diaframelor. După cum este cunoscut, în cadrul procedurilor simplificate calculul diaframelor cu goluri poate fi sistematizat în două moduri :

1.- se face un calcul al diafragmei cu goluri considerată ca un cadru etajat (metoda "cadrelor") (fig.1.b), /37/, /43/, /7/, /15/;

2.- în locul cadrelor cu legături orizontale la intervale finite, se consideră în calcul o structură înlocuitoare continuă, cu legături orizontale echivalente la distanță infinitezimală (metoda "structurii continue echivalente" (fig.1.c)), /12/, /35/.

/137/, /143/, /113/, /115/, /180/, /161/, /182/.

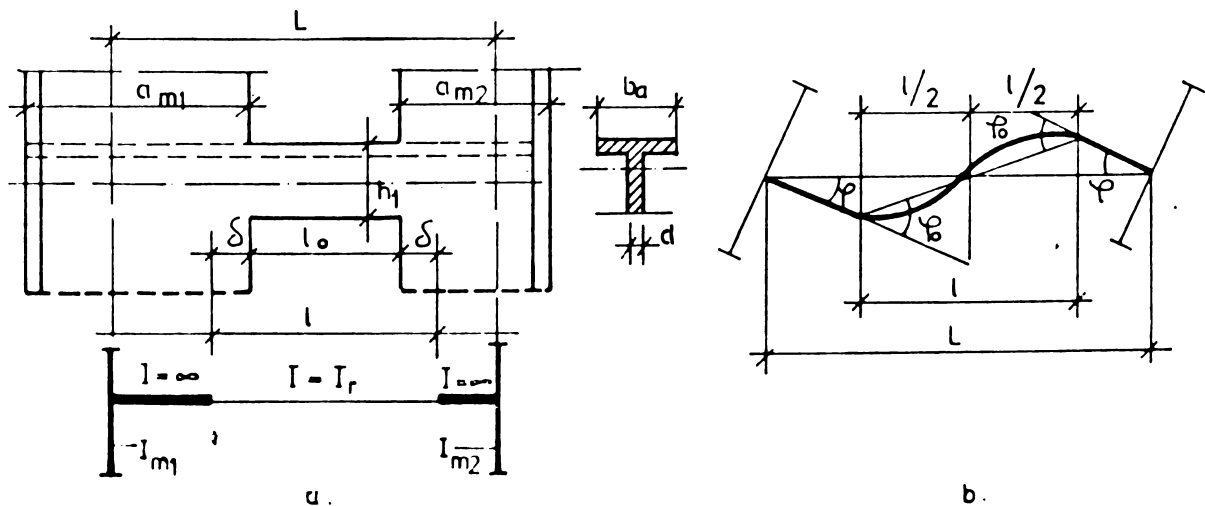
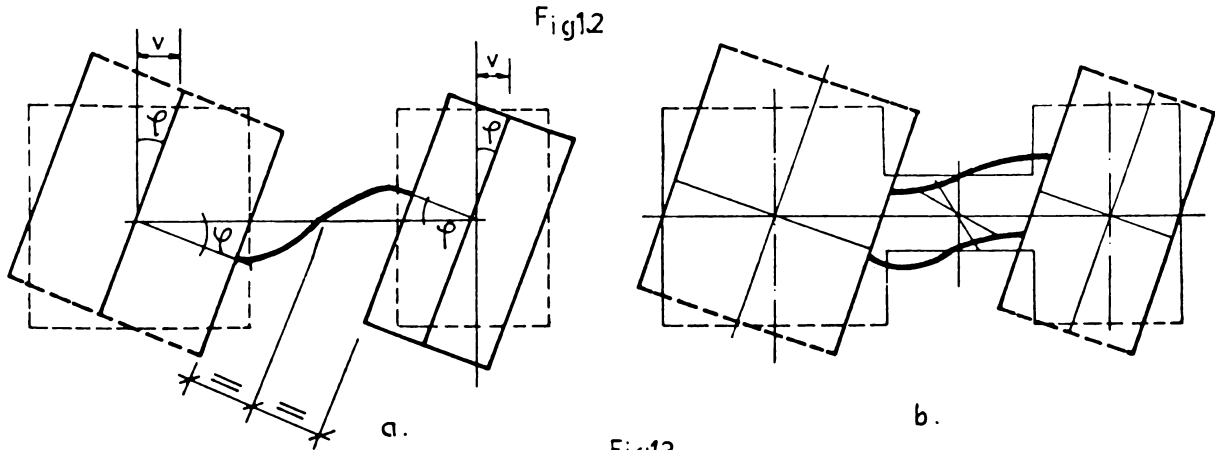
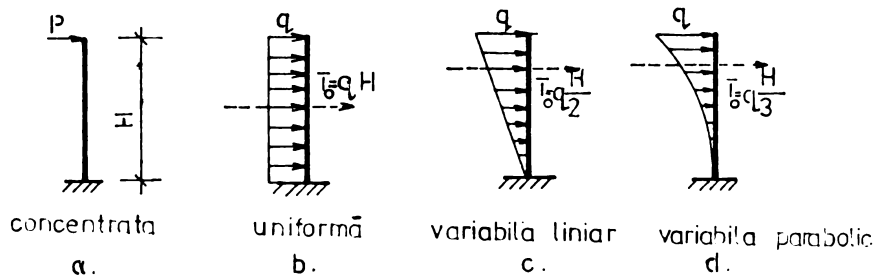
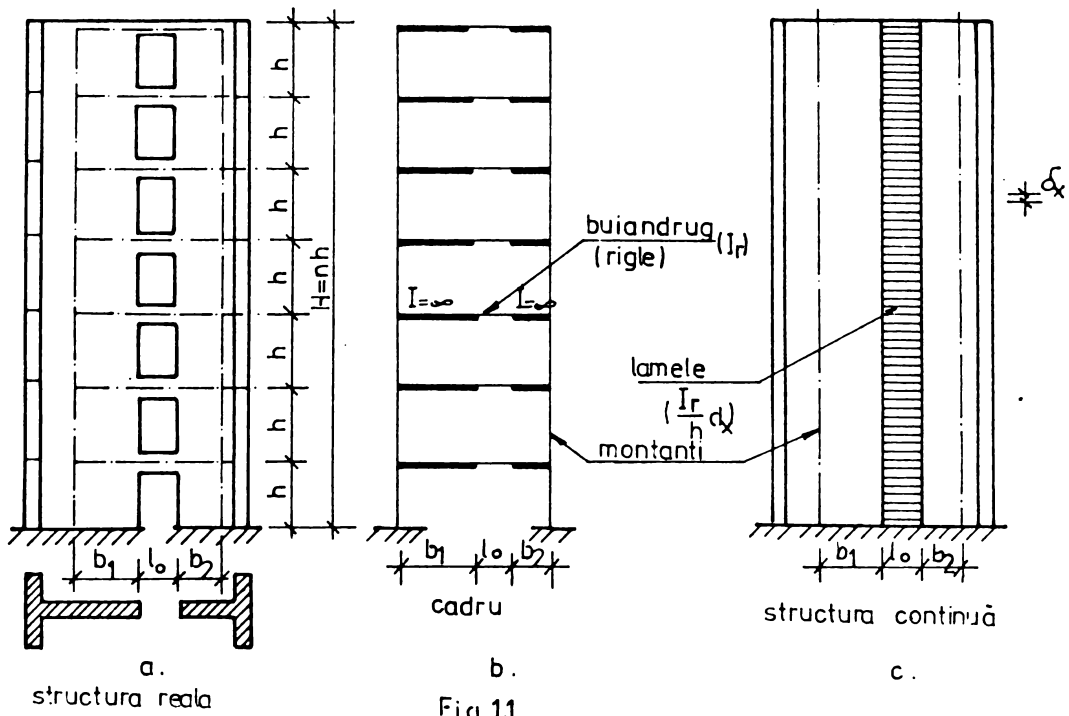
Se menționăm ca cele două variante de mai sus sînt teoretic echivalente între ele, în sensul că între ecuația diferențială din metoda structurii continue echivalente și sistemul de ecuații algebrice liniare care sta la baza tabelului din metoda cadrelor, relația este cea dintre o ecuație diferențială și ecuațiile cu diferențe finite corespunzătoare /7/.

În cele ce urmează sînt prezentate relațiile de calcul specifice metodei structurii continue echivalente, pentru care s-a elaborat algoritmul și programul de calcul automat.

Ipotezele de bază ale metodei structurii continue echivalente sînt următoarele :

- structura (diafragma cu colari) este ne monotoni pe verticală și are cel puțin 7 niveluri ( $> R+6$ ) (fig.1.1.a);
- încadrările exterioare variază după legi simple (fig.1.2);
- structura reală este înlocuită în calcule cu o structură continuă înlocuitoare, în care montanții sînt considerați legați între ei prin lamele distribuite continuu (fig.1.1.c);
- deforșările axiale ale lamelor se consideră nule;
- deforșările liniare ale montanților pe direcția lamelor se consideră nule; în consecință săgețile montanților sînt egale (fig.1.3.a);
- punctul de inflexiune al axei deformată a lamelei se consideră la jumătatea desconsiderii (fig.1.3.a);
- se admite ipoteza secțiunilor plane pentru montanți și lamele luate individual, în și pentru întreaga secțiune transversală a diafragmei (fig.1.3.b);
- eforturile locale transmise de rigle (bulandrugii) se consideră repartizate în lungul fibrei mijlocii a fiecărei ele ent vertical (montant) al diafragmei;
- momentul de inerție al bulandrugilor este mic în comparație cu momentele de inerție ale montanților;
- secțiunile de încastrare ale bulandrugilor în montanți nu se consideră în axa acestora, ci la o distanță  $\delta$  de la fețele lor interioare (fig.1.4.a), deci se admite că bulandrugul se deformează numai pe lungimea  $l$ , porțiunile pînă la axe rămînd indeformabile (fig.1.4.b);
- la nivelul fiecărei rigle rotațiile tuturor nodurilor sînt egale între ele.

Relațiile specifice pentru eforturi secționale și rigidități sînt :



Coeficientul de monolitism (cu notațiile din fig.1.4 și 1.5):

$$\alpha = \omega \Pi = \left[ 12 \gamma \frac{I}{I_0} \cdot \frac{1}{n(I_{L1} + I_{L2} + \dots + I_{Lp})} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{I_{Lk}^2}{I_k} \right]^{1/2} \quad (1.1)$$

$$\gamma = 1 + \frac{\sum_{k=1}^p I_{Lk}}{\left( \sum_{k=1}^p I_k \right)^2} \left( \frac{1}{A_{L1}} + \frac{1}{A_{Lp}} \right) \quad (1.2)$$

$$I_{Lk}^0 = \frac{I_{Lk}}{1 + 20,25 \frac{I_{Lk}^2}{A_{Lk}^2 I_k}} ; \quad A_{Lk}^0 = \frac{A_{Lk}}{k} = \frac{d_{Lk}}{k} \quad (1.3 \text{ și } 1.4)$$

forțuri secționale :

încălzire uniform distribuită ( $T_0 = qz$ ); încălzire distribuită  
liniar ( $T_0 = \frac{q}{2}$ ).

- diafragma plină :

$$u(\bar{z}) = T_0 \frac{(1-\bar{z})^2}{2} ; \quad v(\bar{z}) = T_0 \frac{2-3\bar{z}+\bar{z}^3}{6} \quad (1.5.a,b)$$

$$T(\bar{z}) = T_0(1-\bar{z}) ; \quad R(\bar{z}) = T_0 \frac{(1-\bar{z}^2)}{2} \quad (1.6.a,b)$$

- diafragma cu goluri mici :

$$u(\bar{z}) = T_0 \frac{(1-\bar{z})^2}{2} ; \quad v(\bar{z}) = T_0 \frac{2-3\bar{z}+\bar{z}^3}{6} \quad (1.7.a,b)$$

$$T(\bar{z}) = T_0(1-\bar{z}) ; \quad R(\bar{z}) = T_0 \frac{(1-\bar{z}^2)}{2} \quad (1.8.a,b)$$

$$A_{L1} = \frac{I_{L1} \text{ sau } I_0}{I} ; \quad A_{L1}^0 = A_{L1} \frac{I_0}{2} \quad (1.9. \text{ și } 1.10)$$

- diafragma cu goluri medii :

$$I_{Lk}(\bar{z}) = \frac{I_{Lk}}{\sum_{j=1}^p I_{Lj}} T_0 \left[ k(\bar{z}) - \frac{1}{\gamma} \psi(\alpha, \bar{z}) \right] \quad (1.11)$$

$$k(\bar{z}) = \frac{(1-\bar{z})^2}{2} ; \quad k(\bar{z}) = \frac{2-3\bar{z}+\bar{z}^3}{3} \quad (1.12 \text{ și } 1.13)$$



$$\Psi(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{(1-\bar{\alpha})^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha \cdot \alpha(1-\bar{\alpha})}{\alpha \operatorname{ch} \alpha} - \frac{\alpha \cdot \alpha \bar{\alpha}}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha} \quad (1.14.a)$$

$$\Psi(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{2-3\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^3}{3} + \frac{2\bar{\alpha}}{\alpha^2} - \frac{(\alpha^2-2)\alpha \cdot \alpha(1-\bar{\alpha})}{\alpha^3 \operatorname{ch} \alpha} - \frac{2 \alpha \cdot \alpha \bar{\alpha}}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha} \quad (1.14.b)$$

$$P_{21}(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{I_0^0}{L_1^3} \frac{\sum_{p=1}^{P-1} \frac{I_1^0 L_1}{I_{pk}^0 L_k^2}}{\sum_{k=1}^K} \Phi(\alpha, \bar{\alpha}) \quad (1.15)$$

$$\Phi(\alpha, \bar{\alpha}) = (1-\bar{\alpha}) - \frac{\alpha \operatorname{ch} \alpha (1-\bar{\alpha})}{\operatorname{ch} \alpha} + \frac{\alpha \cdot \alpha \bar{\alpha}}{\alpha \operatorname{ch} \alpha} \quad (1.16.a)$$

$$\Phi(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{2-3\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^3}{3} + \frac{2\bar{\alpha}}{\alpha^2} - \frac{(\alpha^2-2)\alpha \operatorname{ch} \alpha (1-\bar{\alpha})}{\alpha^3 \operatorname{ch} \alpha} - \frac{2\alpha \cdot \alpha \bar{\alpha}}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha} \quad (1.16.b)$$

$$P_{mk}(\bar{\alpha}) = \frac{P_{21}(\alpha, \bar{\alpha})}{b} \left( \frac{1}{2} + b_k \right) - \frac{E_{mk}}{\alpha x} \quad (1.17)$$

$$P_{mk}(\bar{\alpha}) = - \sum_{\bar{\alpha}=3}^1 P_{2k}(\alpha, \bar{\alpha}) + \sum_{\bar{\alpha}=2}^1 P_{2k-1}(\alpha, \bar{\alpha}) \quad (1.18)$$

- diafragma cu goluri mari :

$$P_{mk}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}(\bar{\alpha}) - \frac{I_{mk}}{\sum_{p=1}^P I_{mk}} ; P_{mk}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}(\bar{\alpha}) \frac{I_{mk}}{\sum_{j=1}^P I_{mj}} \quad (1.19 \text{ și } 1.20)$$

Momente de inerție echivalente :

- diafragma plină :

$$I^0 = \frac{I}{1 + \frac{\Phi^2(\bar{\alpha})}{\Phi^1(\bar{\alpha})} \frac{EI}{2GA}} \quad (1.21)$$

$$\Phi^1(\bar{\alpha}) = \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}\right) ; \Phi^2(\bar{\alpha}) = \left(1 - \frac{\bar{\alpha}^2}{3}\right) \quad (1.22.a, b)$$

$$\Phi^3(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}^2(\bar{\alpha}^2 - 4\bar{\alpha} + 6)}{24} ; \Phi^4(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}^2(\bar{\alpha}^3 - 10\bar{\alpha} + 20)}{60} \quad (1.23.a, b)$$

- diafragma cu goluri mici :

$$I^{\circ} = \frac{I}{1 + \frac{\phi^2(\bar{\alpha})}{\phi^2(\bar{\alpha})} \frac{E I_p}{2 G I}} \quad (1.24)$$

$$I^{\circ} = A^{\circ} \left[ 1 - 1,25 \left( \frac{A_{\text{col}}}{A_{\text{diaphragm}}} \right)^{1/2} \right] \quad (1.25)$$

- diafragma cu coluri mici :

$$I^{\circ} = \frac{I}{1 + \frac{\phi^2(\bar{\alpha})}{\phi^2(\bar{\alpha})} \frac{E I_p}{\sum_1^p A_{\text{col}}}} \quad (1.26)$$

$$\bar{I}^{\circ} = \frac{\sum^p I_{\text{col}} \psi(\alpha_j, \alpha) - \psi(\alpha_j, \bar{\alpha})}{\delta \alpha^2 \phi^2(\bar{\alpha})} \quad (1.27)$$

- diafragma cu coluri mari :

$$I_{\text{Lk}}^{\circ} = I^{\circ} \frac{I_{\text{Lk}}}{\sum_1^p I_{\text{Lk}}} \quad (1.28)$$

Descompunerea ansamblului structurii în substructuri simple conține în principal două faze :

- stabilirea direcțiilor principale de rigiditate ale structurii,
- delimitarea diafragmelor pe direcțiile respective cu considerarea conlucrării tălpilor diafragmelor cu secțiuni în formă de T, I, L, U.

În cazurile cele mai frecvente, structurile au diafragmale dispuse după două direcții ortogonale. În aceste situații calculul se conduce separat pe fiecare direcție, ceea ce presupune incompatibilitatea deformațiilor axiale din montajii orizontali ai diafragmelor transversale și longitudinale. Această ipoteză se acceptă în calculul simplificat.

Stabilirea lății de conlucrare a tălpilor cu lățile diafragmelor precum și caracteristicile geometrice de calcul ale buiandrugilor se face în conformitate cu P.85-82, /178/.

Pentru a se ține seama de schimbarea rigidității la încovoire în stadiul II de lucru datorită fisurării zonelor întinse se preconizează reduceri ale modului de elasticitate al buiandrugilor în limitele propuse în P.85-82, (178/).

etermînarea încărcărilor orizontale totale pe fiecare direcție principală se face în următoarele ipoteze :

- întreaga structură, formată din mai multe diafragme pline sau cu goluri, se înlocuiește în calcul printr-o diafragmă unică, avînd ca rigiditate suma rigidităților diafragmelor reale;

- în schema de calcul, această diafragmă înlocuitoare se consideră redusă la axul ei vertical (fig.1.6), deci apare ca o consolă încastrată la bază;

- arciurile verticale totale de nivel (însumate pe întreaga construcție)  $G_i$  sînt aceleași la toate nivelurile;

- forțele orizontale seismice sînt variabile liniar pe înălțimea construcției, ca în fig.1.6, deci forța orizontală  $F_i$  aplicată la nivelul curent ( $i$ ) este proporțională cu ( $i$ ); în consecință, pentru calculul perioadei proprii de vibrație, se poate considera structura încărcată cu forțele orizontale  $F_1 = 1; F_2 = 2; \dots; F_n = n$ , a cărui rezultată este :

$$\sum_{i=1}^n F_i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.29)$$

Pentru calculul perioadei proprii de vibrație se prezintă trei variante :

a.- procedeul simplificat, constînd din adoptarea pentru perioadă  $T$  a formulelor directe recomandate în normativul P.110-81, iar pentru coeficienții de echivalență  $E$  introducerea unor valori aproximative;

b.- utilizarea metodei energetice Rayleigh, conform căreia frecvența vibrațiilor proprii este :

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{i=1}^n P_i f_i}{\sum_{i=1}^n G_i f_i^2} \quad (1.30)$$

Încărcarea distribuită triunghiulară, echivalentă sistemului de forțe concentrate  $F_1 \dots F_n$ , are la vîrf mărimea  $q_g$  cu expresia:

$$q_g = \frac{2n}{n+1} \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{1} = \frac{2n}{n+1} \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n^2}{n} \quad (1.31)$$

Calculînd săgețile din această încărcare și introducîndu-le în (1.30) se obține frecvența unghiulară în funcție de numărul de niveluri ( $n$ ) al construcției, modulul de elasticitate  $E$ , momentul

de inerție echivalent al diafragmăi unice înlocuitoare  $I_g^0$ , masele  $m_1$  și înălțimea totală  $H/3$ .

Periada proprie de vibrație poate fi pusă - pentru calculul practic - sub formă :

$$T = \rho \sqrt{\frac{m_1 \cdot H^3}{B I_g^0}} \quad (1.32)$$

în care coeficienții  $\rho$  sînt dați în tabelul 1.

Tabelul 1.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\rho$	4,12	4,46	4,79	5,10	5,40	5,63	5,96	6,20	6,46

În funcție de aproximațiile acceptate pentru deformațiile dinamice, se pot obține și alte formule ale perioadei de vibrație.

Coefficientul de echivalență  $\epsilon$ , are formula generală dată în normativul P.100-91 :

$$\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n G_i f_i^2}{\sum_{i=1}^n G_i \sum_{i=1}^n G_i f_i^2} \quad (1.33)$$

În ipotezele simplificatoare de mai sus, aceasta se reduce la :

$$\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{n \sum_{i=1}^n f_i^2} \quad (1.34)$$

În tabelul 2 sînt date valorile lui  $\epsilon$  pentru  $n = 3 \dots 11$  niveluri.

Tabelul 2.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\epsilon$	0,73	0,70	0,68	0,67	0,66	0,66	0,65	0,65	0,65

Deoarece se acceptă pentru deformată axei verticale o formă liniară, formula coeficientului de echivalență se reduce la :

$$\epsilon = \frac{2(n+1)}{2(2n+1)} \quad (1.35)$$

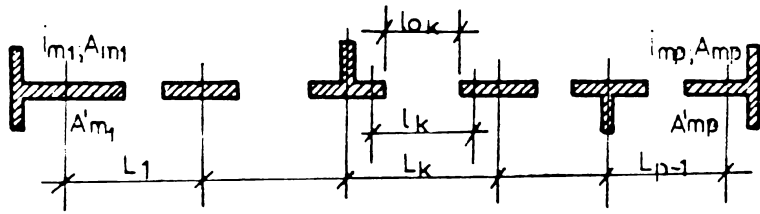
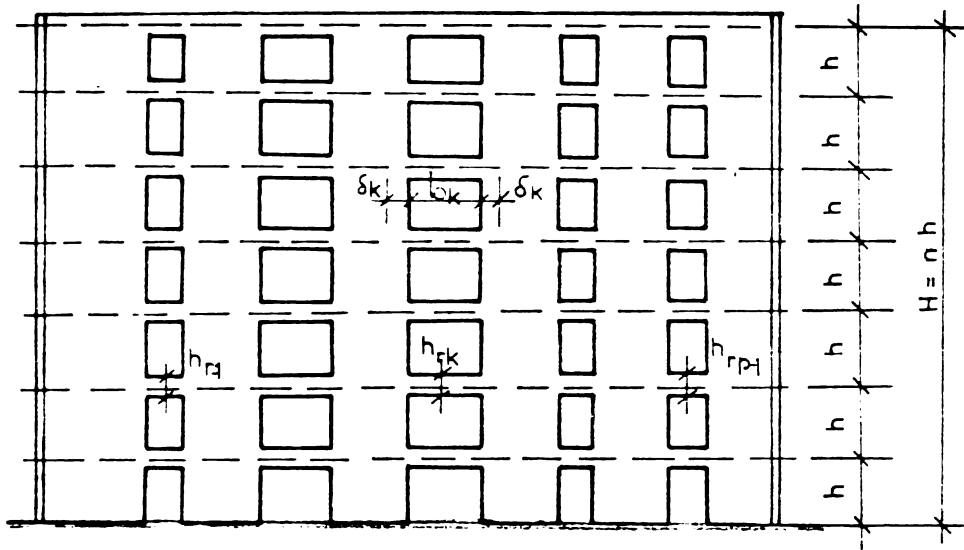


Fig15

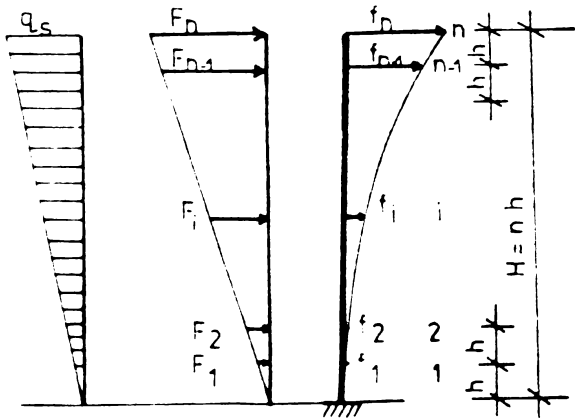


Fig16

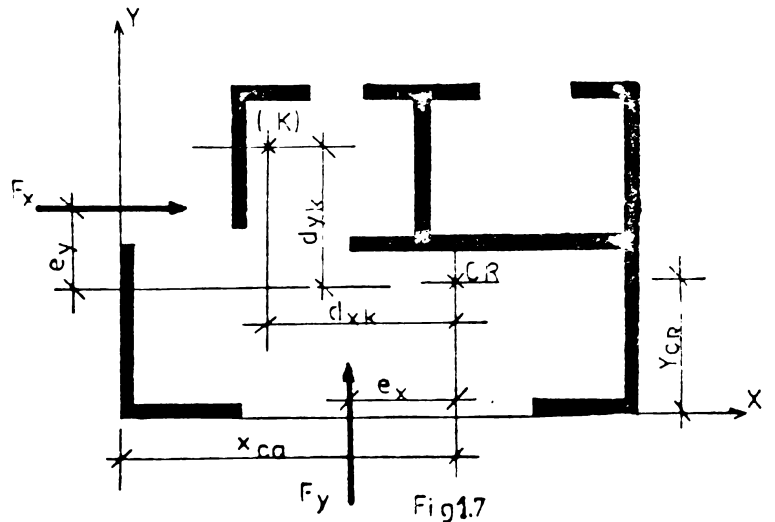


Fig17

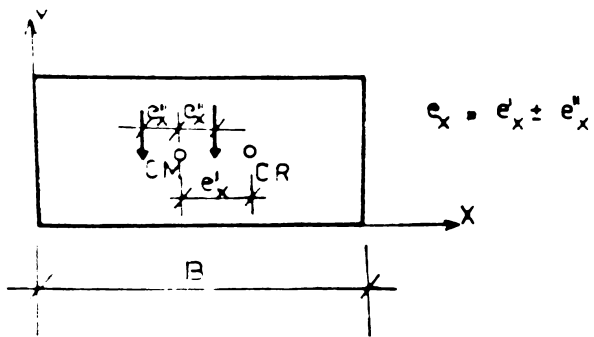


Fig18

a.- utilizarea unor procedee mai riguroase cunoscute din dinamica construcțiilor.

Repartizarea încărcărilor orizontale între elementele portante ale structurii se face ținând cont de conlucrarea lor spațială. Procedeeului simplificat de calcul a diaframelor cu goluri, prezentat anterior, îi este specifică metoda aproximativă în care, condiția de egalitate a deplasărilor orizontale se pune numai la un singur nivel (virful construcției sau 0,8 l). În cadrul acestei metode, admitând că plangeele se comportă ca niște țevi rigide în planul lor, încărcările orizontale se repartizează la diafragmele verticale proporțional cu momentele de inerție echivalente  $I^0$  ale acestora, luând în considerare și efectul tensiunii generale, etocunoscută și sub numele de metoda centrului de rigiditate se aplică la repartizarea resultantei încărcărilor orizontale din vânt sau seism.

Relațiile de calcul, cu notațiile din figura 1.7, sînt :

- centrul de rigiditate :

$$y_{CR} = \frac{\sum_{k=1}^n I_k^0 x_k}{\sum_{k=1}^n I_k^0} ; y_{CR} = \frac{\sum_{k=n+1}^t I_k^0 y_k}{\sum_{k=n+1}^t I_k^0} \quad (1.36)$$

- momentul de inerție polar :

$$J = \sum_{k=1}^n I_k^0 d_{xk}^2 + \sum_{k=n+1}^t I_k^0 d_{yk}^2 \quad (1.37)$$

- momentele de torsiune generală :

$$M_{ty} = F_y e_x ; M_{tx} = F_x e_y \quad (1.38)$$

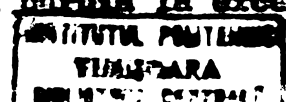
- forțele pe diafragmele 1 - n :

$$(T_0)_k = F_y \frac{I_k^0}{\sum_{k=1}^n I_k^0} \pm \frac{I_k^0 d_{xk}}{J} M_{ty} \quad (1.39)$$

- forțele pe diafragmele n - t :

$$(T_0)_k = F_x \frac{I_k^0}{\sum_{k=n+1}^t I_k^0} \pm \frac{I_k^0 d_{yk}}{J} M_{tx} \quad (1.40)$$

La evaluarea excentricităților  $e_x$  și  $e_y$  se va ține seama și de prevederile normativului P.100-81 /179/, conform cărora la excentricitate



tricitatea centrului maselor se adaugă sau se scade o excentricitate accidentală egală cu  $\frac{1}{2}$  din dimensiunea maximă a construcției măsurată perpendicular pe direcția de acțiune a forței seismice, (figura 1.8.).

Bibliografie : 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 18, 35, 36, 37,  
43, 47, 48, 56, 75, 90, 91, 96, 98, 99,  
105, 107, 108, 113, 119, 120, 121, 131,  
134, 148, 159, 172, 178, 179, 180, 181, 182,

## 2.1. STADIUL SI CADUTUL PERSONILOR DE DEBORA ANI AN

### PRIN STODA SIA ANI LOR FINITE

#### 2.1. Scurtă retrospectivă a metodei de calcul

Metodă elementelor finite s-a dezvoltat simultan cu dezvoltarea calculatoarelor electronice, precum și odată cu pătrunderea tot mai puternică a metodelor numerice în rezolvarea problemelor ingineresti.

Așa cum Southwell a introdus în anii 1940 metoda diferențelor finite, i. contextul elementelor finite un grup de ingineri, lucrând pe la mijlocul anilor 1950 au fost la originea acestui proces.

Progresul cronologic al metodei elementelor finite se poate subîmpărți în trei ere /109/ :

- I - "era medievală" - care caracterizează începuturile metodei;
- II - "renașterea" - perioadă în care modelele clasice au fost recunoscute;
- III - "parocul" - era actuală în care se adaugi decorațiuni dar pe de altă parte sînt gîndite baze noi ale metodei.

(I) Primele încercări de a deduce proprietățile elementelor finite dintr-un continuum datează de dinainte de 1941. Renikoff și McHenry au înlocuit continuumul cu un ansamblu echivalent de bare, care pentru elemente regulate constituie o exprimare acceptabilă.

Adevăratele elemente finite, cu o evaluare a proprietăților unui continuum de formă arbitrară, au apărut mult mai târziu. Turner și alții în 1956 au arătat cum prin "tăind afară" un element dintr-un mediu continuum și presupunînd un model de deplasări și eforturi în interiorul acestuia, se poate stabili o relație între deplasările nodale și forțele nodale (reprezentînd efectul integrat

de legătură între elemente). Ghidat de intuiție acesta a dedus câteva elemente simple, printre care și faimosul "triunghi a lui Turner", care vor fi ulterior validate ca aproximații matematice. Altele ca "dreptunghiul lui Clough" și placa încovoiată a lui Melosh s-au demonstrat a fi aproximații excelente, nodurile de comportare fiind corecte.

(II) Curînd, a apărut evident că aproximațiile intuitive cad atunci cînd elementele au forme complexe. De asemenea, au apărut dificultăți de definire a forțelor nodale echivalente, corespunzătoare multiplelor posibilități de forțe și eforturi. Principiul "lucrului mecanic virtual" a fost invocat cînd acesta a fost interpretat ca o uneltă universală în analiza structurală. Procedul în forma aplicată în prezent a "deplasărilor virtuale", invocă teoria clasică conform căreia, dacă un set de eforturi este în echilibru într-un punct cu un set de forțe externe, atunci suma lucrului mecanic exterior și interior pe parcursul oricărei deplasări virtuale trebuie să fie zero.

Mai tîrziu a apărut ideea că lucrul mecanic virtual aplicat metodei elementelor finite poate fi reprezentat ca o aproximare a minimalizării unei funcționale. Aceasta a condus în mod direct la descoperirea principiului de granită și la extinderea în alte posibile formulări ale problemelor de elasticitate utilizînd funcționale bine definite cu proprietăți staționare. Utilizarea minimumului energiei potențiale complementare, de exemplu, de către Veubeke, precum și a principiului lui Hermann de către Hellinger - Weisner, a avut efecte imediate. De asemenea, au apărut ideea "aproximărilor" Mîrșide a lui Pian.

Importanța principiului variațional a fost mai mare decît cea a unei simple metodologii într-o soluție alternativă a unei probleme elastice. Orice situație matematică sau fizică în care apare o valoare staționară a unei funcționale definite, poate fi imediat aproximată prin elemente finite, iar programele automate de calcul gîndite inițial pentru structură au căpătat o nouă aplicabilitate. Această extindere a procesului de elemente finite la probleme nestructurale au început-o în 1965 Zienkiewicz și Cheung, fiind urmată de un mare număr de lucrări care au consacrat metoda elementelor finite și la problemele de fizică, aspect care constituie una dintre cele mai interesante arii de desfășurare în cercetările recente.

Retrospectiva "clasică" a procesului elementelor finite se-



monstruosă că la baza acestuia stau considerații matematice ca de exemplu procedeu Rayleigh - Ritz. De altfel, așa cum se va arăta în continuare, există și alte baze matematice ale metodei.

S-a observat de multe ori că lucrul mecanic virtual aplicat elasticității lineare dă rezultate identice cu principiul minimului energiei potențiale în cazul special în care funcția de pondere și funcția de formă sînt identice. Se pot sublinia trei concluzii :

a - lucrul mecanic virtual stabilește relațiile mai direct și într-o manieră mai simplă decît principiul variațional în cazul în care amîndouă conduc la aceleași aproximații;

b - dacă se utilizează alte funcții de pondere aceasta oferă o formulare alternativă care nu poate fi obținută printr-un principiu variațional;

c - dacă materialul are proprietăți neliniare, principiul lucrului mecanic virtual rămîne valabil și conduce la un set de ecuații neliniare. Principiul variațional devine în acest caz mai complex, iar funcționala (dacă există) poate înceta să mai aibă un sens fizic clar.

În aplicațiile nestructurale ecuațiile diferențiale care guvernează problemele pot fi formulate în mod usual, însă funcționala care urmează a fi minimizată poate să nu fie atât de simplu de formulat sau chiar să nu existe. În aceste cazuri, lucrul mecanic virtual poate fi înlocuit prin metodele clasice ale reziduurilor ponderale. Avantajele utilizării acestor metode au fost recunoscute numai recent (1969-1970).

(III) Atît în artă cît și în știință era barocă a fost caracterizată printr-amesturare de forme noi, juxtapunerou de figuri și îndepărtarea de la modelele clasice. Tot așa, în metoda elementelor finite au loc în prezent o formidabilă elaborare a detaliilor: elemente cu un mare număr de grade de libertate, elemente isoparametrice cu multe noduri, forme curbilini și funcții de formă elaborate, elemente de ordin superior, formulări mixte, principii variaționale mixte. Toate acestea au condus la necesitatea integrării numerice, proces devenit standard în metoda elementelor finite.

În același timp, tendința de a utiliza metoda la toate problemele fără discernîmînt, determină în mod clar necesitatea combinării și juxtapunerii diferitelor metodele. Astfel, s-a dovedit pe deplin justificată combinarea soluției "exacte" cu aproximațiile numerice, discrete în studiul singularităților produse de încălțările concentrate, de dialecări, colțuri și fisuri, în care soluțiile numerice au o convergență slabă. O atenție particulară se pare că trebuie acordată problemei concentrărilor de eforturi în jurul

fișurilor. Au fost făcute câteva încercări de a genera un element "cu fișură", dar necesitatea menținerii compatibilității dintre elemente pare să limiteze în general succesul. Pian a obținut un carecare succes utilizând o formulare hibridă.

În considerarea metodelor exacte și numerice, utilizarea a două aparent diferite baze de aproximări conduce la anumite complicații. De aceea s-a căutat utilizarea unei alternative de a defini aproximațiile pe aceleași baze, introducând anumite restricții la funcțiile de formă. Astfel, au apărut așa numitele elemente finite local - globale.

În ultimii ani o atenție deosebită a fost acordată atât de către ingineri cât și de către matematicieni problemelor de convergență, rația convergenței și acuratețea soluțiilor, probleme de importanță evidentă în orice metodă numerică de aproximare. De asemenea, multe din lucrările recente se ocupă de formarea unei baze mai largi a aproximării cu elemente finite din punctul de vedere al analizei funcționale.

Successul metodei elementelor finite se pare că se datorează în principal următoarelor motive :

- a) analogia cu tipul de alcătuire discret ingineresc;
- b) capacitatea de a aborda forme complexe prin utilizarea unor forme arbitrare simple ale elementelor;
- c) forma "bandă" a ecuațiilor simultane utilizate la rezolvarea problemei, datorită interconexiunilor.

## 2.2. Descriere generală a metodei

De scurt, baza metodei elementelor finite constă în reprezentarea unui corp sau a unei structuri printr-un ansamblu subdiviziuni numite elemente finite. Aceste elemente se consideră legate între ele la noduri, numite și puncte nodale. Corespondența între deplasările unui punct curent al elementului finit și deplasările nodurilor sale o stabilește cimpul de deplasări. Acesta este alcătuit din funcții de deplasări. Mărimile necunoscute ale acestora în dreptul nodurilor sînt deplasările nodale. De aceea, soluția finală va fi aceea care aproximează deplasările în puncte discrete ale corpului, punctele nodale. Un model de deplasări poate fi exprimat în diferite forme ca polinoame sau funcții trigonometrice. Utilizând diverse procedee se obțin apoi ecuațiile de echilibru pentru fiecare element. Ecuațiile de echilibru pentru corpul întreg se obțin prin combinarea ecuațiilor fiecărui element individual astfel în-

cit să se respecte condițiile de continuitate în nodurile de legătură. Acelor ecuații li se pun condițiile de margine și se rezolvă pentru obținerea deplasărilor necunoscute. Cu aceste deplasări se determină apoi starea de eforturi în fiecare element.

### 2.3. Sumarul procedurii de analiză

Procedul de analiză constă în următorii șase pași :

1. Discretizarea structurii.
2. Alegerea tipului de elemente finite.
3. Alcătuirea matricii de rigiditate a elementului finit.
4. Asamblarea ecuațiilor algebrice pentru întreaga structură.
5. Rezolvarea sistemului de ecuații.
6. Calculul deformațiilor și eforturilor din deplasările nodale.

### 2.4. Statica structurilor în starea de tensiune plană

Notând vectorii tensiunilor, deplasărilor și deformațiilor specifice cu  $\sigma$ ,  $\phi$  și  $\epsilon$ , iar matricea de legătură între ultimii doi cu  $\Delta$ , astfel încât :

$$\Delta \phi = \epsilon \quad (2.1)$$

ecuațiile de echilibru static în absența forțelor masice și ecuația de compatibilitate a deformațiilor pentru un element diferențial (fig.2.1) sînt :

$$\begin{matrix} \Delta^T \\ C \end{matrix} \begin{matrix} \sigma \\ \epsilon \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (2.2)$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuații, ecuației de compatibilitate (2.2) se explicitază în tensiuni, utilizînd legea materialului :

$$\epsilon = D^{-1} \sigma \quad (2.3)$$

fiind matricea rigidităților materialului.

#### 2.4.1. Studiul în domeniul elastic

Teoria de ordinul I a structurilor elastice conduce la relații liniare între eforturi și deplasări. Neliniaritatea poate fi geometrică sau fizică, conducînd la teoria de ordinul II respectiv la calculul țînînd seama de proprietățile neelastice ale materialului.

În calculul elastic de ordinul I succesiunea operațiilor de

calcul este cea prezentată la pct. 2.3.

### 2.4.1.1. Elementul finit triunghiular

După cum proprietățile elementelor finite se determină pornind de la cimpuri de deplasări admise, cimpuri de tensiuni admise respectiv cimpuri de tensiuni și de deplasări se definesc modele de deplasări, modele de tensiuni și modele hibride.

Modelul de deplasări. Acest model se bazează pe conceptul aproximării funcției continue de deplasări printr-o funcție definită pe elementul finit. Cea mai utilizată formă a acestei funcții este polinomul. Numărul coeficienților în polinom este egal cu dimensiunea spațiului de coordonate plus unu. Polinomul :

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.4)$$

este o funcție simplă pentru elementul triunghiular bidimensional. Polinomul este linear în  $x$  și  $y$  și conține trei coeficienți deoarece triunghiul are trei noduri.

Notând cu  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  valorile nodale ale cantității scalare  $\phi$  (Fig.2.2) și punind condițiile de margine :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 \text{ la } x = x_1, y = y_1 \\ \phi &= \phi_2 \text{ la } x = x_2, y = y_2 \\ \phi &= \phi_3 \text{ la } x = x_3, y = y_3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

și înlocuind în (2.4) rezultă sistemul de ecuații :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ \phi_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ \phi_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

care dau :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} \left[ (x_2 y_3 - x_3 y_2) \phi_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \phi_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \phi_3 \right] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} \left[ (y_2 - y_3) \phi_1 + (y_3 - y_1) \phi_2 + (y_1 - y_2) \phi_3 \right] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} \left[ (x_3 - x_2) \phi_1 + (x_1 - x_3) \phi_2 + (x_2 - x_1) \phi_3 \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

care are determinantul :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2\Delta \quad (2.8)$$

$\Delta$  fiind aria triunghiului.

Inlocuind  $x_1, x_2, x_3$  în (2.4) și rearanjând se obține o ecuație cu trei funcții de formă, câte una pentru fiecare nod :

$$\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 \quad (2.9)$$

în care :

$$N_1 = \frac{1}{2\Delta}(a_1 + b_1 x + c_1 y) \quad \text{și} \quad \begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ b_1 = y_2 - y_3 \\ c_1 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$N_2 = \frac{1}{2\Delta}(a_2 + b_2 x + c_2 y) \quad \text{și} \quad \begin{cases} a_2 = x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ b_2 = y_3 - y_1 \\ c_2 = x_1 - x_3 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$N_3 = \frac{1}{2\Delta}(a_3 + b_3 x + c_3 y) \quad \text{și} \quad \begin{cases} a_3 = x_1 y_2 - y_2 x_1 \\ b_3 = y_1 - y_2 \\ c_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Evaluind pe  $N_1$  la nodul 1 - spre exemplu - rezultă :

$$N_1 = \frac{1}{2\Delta}(a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1) = \frac{1}{2\Delta}(x_2 y_3 - x_3 y_2 + y_2 x_1 - y_3 x_1 + x_3 y_1 - x_2 y_1) \quad (2.11)$$

Termenii din paranteză sînt toți valoarea determinantului (2.8), deci :

$$N_1 = \frac{1}{2\Delta}(2\Delta) = 1 \quad (2.12)$$

la nodul 1 :  $N_1$  va fi 0 la nodurile 2 și 3 precum și pe aria liniei care trece prin aceste puncte.

Ecuațiile de interpolare reprezentate mai sus s-au referit la o mărime scalară. O mărime vectorială cum sînt de exemplu deplasările are mărime și direcție deci la un nod sînt mai multe grade de libertate. Procedul usual este de a descompune vectorul în componentele sale și de a trata aceste componente ca măriri necorescunde. Pentru elementul plan triunghiular rezultă :

$$\begin{aligned} u &= H_1 u_1 + H_2 u_2 + H_3 u_3 \\ v &= H_1 v_1 + H_2 v_2 + H_3 v_3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aceste două ecuații pot fi scrise în termenii tuturor valorilor nodale astfel :

$$\begin{aligned} u &= H_1 u_1 + 0 \cdot 0 v_1 + H_2 u_2 + 0 v_2 + H_3 u_3 + 0 v_3 \\ v &= 0 u_1 + H_1 v_1 + 0 u_2 + H_2 v_2 + 0 u_3 + H_3 v_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

sau utilizând notația matricială :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Pentru rezolvarea problemelor de teorie elasticității se recurge la procedeele minimalizării energiei potențiale în sistem.

Energia potențială totală a unui sistem elastic poate fi separată în două componente : una rezultată din energia de deformare și alta dată de încălzirile interne și externe. Deci :

$$\Pi = \Lambda + W_p \quad (2.16)$$

în care  $\Lambda$  este energia de deformare iar  $W_p$  energia potențială a încălzirilor aplicate. Lucrul mecanic al încălzirilor este negativul energiei lor potențiale sau :

$$W_p = - W \quad (2.17)$$

rezultă :  $\Pi = \Lambda - W \quad (2.18)$

Deci corpul este subdivizat în mai multe elemente, se scrie :

$$\Pi = \sum (\Lambda^e - W^e) = \sum \Pi^e \quad (2.19)$$

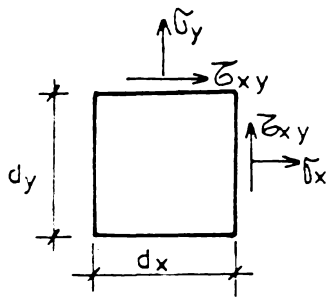
Energia de deformare a unui element de volum  $dV$  este :

$$d\Lambda = \frac{1}{2} \epsilon^T \sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0^T \sigma \quad (2.20)$$

$\epsilon_0$  fiind deformările inițiale.

Pentru volumul  $V$  rezultă :

$$\Lambda = \int_V \frac{1}{2} (\epsilon^T \sigma - \epsilon_0^T \sigma) dV \quad (2.21)$$



$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T$$

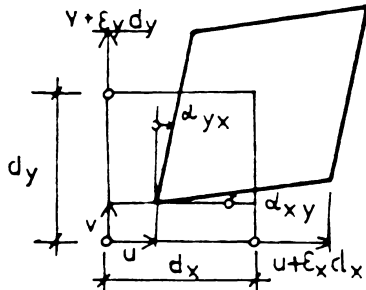
$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

RIGIDITATEA MATERIALULUI

-cazul general:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ D_2 & D_4 & D_5 \\ D_3 & D_5 & D_6 \end{bmatrix}$$

-cazul elastic omogen si izotrop



$$\phi = [u \quad v]^T$$

$$\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T$$

$$C^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Fig. 2.1

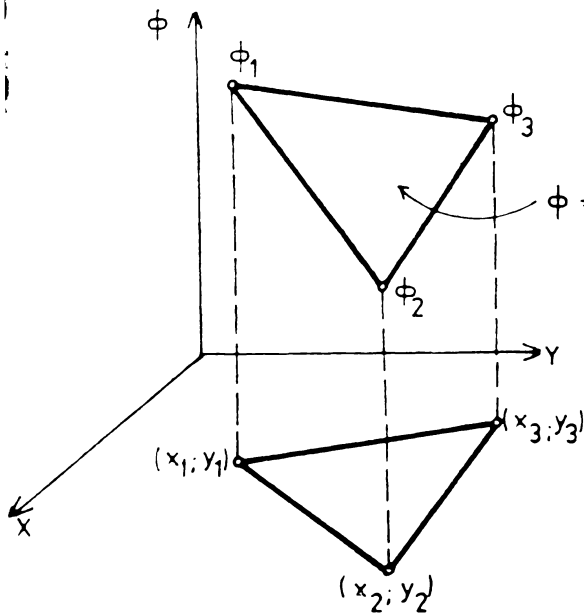


Fig. 2.2

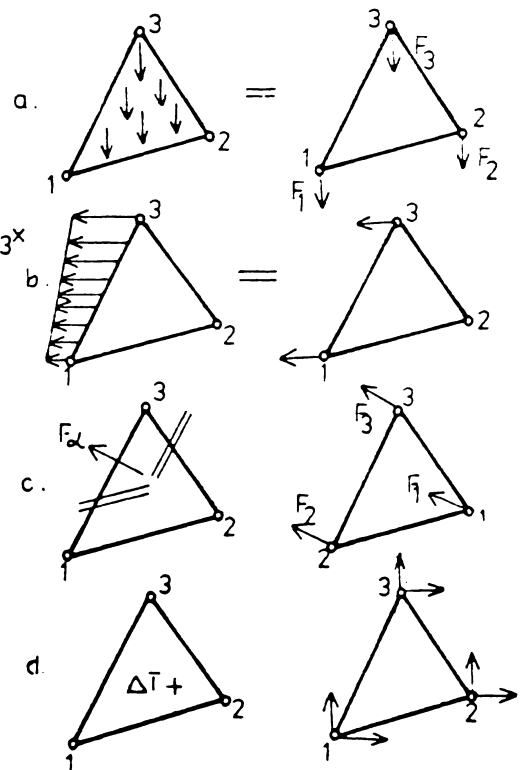


Fig. 2.3

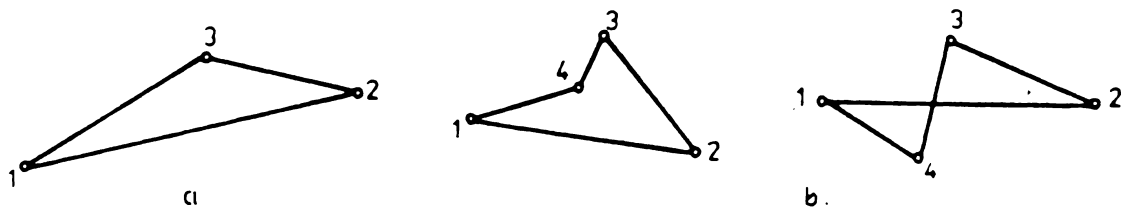


Fig. 2.4

Cunoscind că :  $\sigma = D \epsilon - D \epsilon_0$  (2.22)

și  $u = N \delta$  (2.23)

iar  $\epsilon = B u$  (2.24)

in care  $\delta$  se obține prin diferențierea funcțiilor de forma  $\pi$ , se poate scrie energia de deformație pentru un singur element :

$$\Lambda^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} (\delta^T B^{eT} D^e B^e \delta - 2 \delta^T B^{eT} D^e \epsilon_0^e + \epsilon_0^e T D^e \epsilon_0^e) dV \quad (2.25)$$

Lucrul mecanic al încărcărilor (încărcări concentrate, încărcări de volum, încărcări de suprafață) va fi :

$$L = \delta^T P + \int_{V^e} \delta^T N^{eT} \kappa dV + \int_{S^e} \delta^T N^{eT} p dS \quad (2.26)$$

Inlocuind (2.25) și (2.26) în (2.19) și minimalizând potențialul prin diferențiere în raport cu rezultă pentru fiecare element :

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \delta} = k^e \delta + f^e \quad (2.27)$$

in care :

$$k^e = \int_{V^e} B^{eT} D^e B^e dV \quad (2.28)$$

reprezintă matricea de rigiditate, iar :

$$f^e = -P - \int_{V^e} B^{eT} D^e \Delta r^e dV - \int_{V^e} N^{eT} \kappa^e dV - \int_{S^e} N^{eT} p dS \quad (2.29)$$

Matricea globală de rigiditate  $K$  și vectorul încărcărilor  $F$  în ecuația :

$$K \cdot \delta = F \quad (2.30)$$

rezultă din relațiile :

$$K = \sum k^e \quad (2.31)$$

$$F = \sum f^e \quad (2.32)$$

### 2.4.1.2. Vectorii încărcărilor

Forma consistentă a vectorilor încărcărilor din acțiuni directe în cazul elementelor finite cu câmpuri de deplasări lineare corespunde unor reguli simple pentru concentrarea încărcărilor în nodurile de colț. Astfel, greutatea proprie a elementelor de grosime constantă se distribuie în fracțiuni egale nodurilor, spre exemplu pentru triunghiul din fig.2.3.a, rezultă :

$$F_1 = F_2 = F_3 = \delta A t / 3 \quad (2.33)$$



Încărcările distribuite pe o latură a elementului finit se concentrează în nodurile de la extremități analog determinării reacțiilor unei grinzi static determinată având deschiderea egală cu latura. Astfel, în cazul unei încărcări distribuite liniar se obține (fig.2.3.b) :

$$\begin{aligned} F_4 &= (2p_4 + p_3)l_{34}/6 \\ F_5 &= (p_4 + 2p_3)l_{34}/6 \end{aligned} \quad (2.34)$$

În ceea ce privește forțele concentrate, rețeaua elementelor finite se alege astfel încît în punctele de aplicație ale acestora să existe un nod. Acest lucru nu este posibil întotdeauna în punctele de derivație ale fasciculelor de precomprimare, fig. 2.3.c. Atunci forțele nodale se determină cu relațiile :

$$F_1 = L_1 F_d, \quad F_2 = L_2 F_d, \quad F_3 = L_3 F_d \quad (2.35)$$

În cazul triunghiului,  $L_i$  reprezentînd coordonatele naturale ale punctului de derivație  $i$ .

Acțiunea variației uniforme de temperatură  $\Delta T$  pe un element conduce la un vector al încărcărilor de tipul :

$$F_P^{\bullet} = \int_V B^{\bullet T} D^{\bullet} \epsilon_0 dV \quad (2.36)$$

$$\text{cu } \epsilon_0 = \alpha \Delta T [1 \quad 1 \quad 0]^T$$

Pentru cazul particular al materialului izotrop se obține (fig.2.3.d) în cazul elementului triunghiular :

$$F_{\Delta T}^{\bullet} = \alpha \Delta T \frac{Et}{2(1-\nu)} [y_{23} \quad x_{32} \quad y_{31} \quad x_{13} \quad y_{12} \quad x_{21}]^T \quad (2.37)$$

ordinea componentelor corespunzînd celei din figura 2.2. S-au notat :

$$x_{ij} = x_i - x_j ; \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad (2.38)$$

#### 2.4.1.3. Discretizarea structurii

Aproximarea geometrică unei structuri se asigură cel mai ușor de elemente triunghiulare, iar elementele patrulare reproduc mai corect distribuția tensiunilor. Se caută să se utilizeze elementele cele mai apropiate de triunghiul echilateral respectiv de pătrat. Nu se recomandă utilizarea triunghiurilor cu un unghi foarte obtus (fig.2.4.a) iar elementele patrulare din figura 2.4.b sînt interzise.

La alegerea distribuției elementelor triunghiulare este bine să se țină seama de necesitatea respectării izotropiei geometrice. În fig.2.5 sînt reprezentate trei variante de discretizare cu același număr de elemente finite triunghiulare; ultima asigură izotropia geometrică. Celălți lucru se poate obține prin dublarea numărului de elemente finite, două cîte două fiind suprapuse.

Discretizarea depinde de geometria structurii, de încălziri și de condițiile de margine. O discontinuitate în una din acestea cere o tratare diferită prin sporirea fineții rețelei sau prin utilizarea unor elemente ierarhice superioare.

Găsirea rețelei optime se poate face prin determinarea energiei potențiale pentru mai multe variante de discretizare. Rețelei optime îi corespunde energia potențială minimă. Testul energetic se poate aplica și pentru a aprecia calitatea unor elemente. S-a găsit astfel că solicitarea axială și tăierea sînt reproduse exact atît de elementul triunghiular cît și de cel patrat; încovoierea este reprodusă mai bine de elementul patratic.

Numărul reea nodurilor rețelei de discretizare trebuie ales astfel încît scribunda matricei rigidităților structurii respectiv profilul acesteia să fie minime. În cazuri simple minimizarea lăținii scribenzii se realizează prin numărarea nodurilor pe direcția scurtă a structurii, respectiv pe direcția numărului mai redus de noduri. Dacă această regulă nu poate fi aplicată, după o numărare preliminară a nodurilor, careia îi corespunde o anumită lățime a scribenzii, se caută o reducere a acesteia utilizînd anumii algoritmi de reducere.

#### 2.4.1.4. Determinarea eforturilor și reacțiunilor

Matricea rigidităților și vectorul încălzirilor structurii rezultă din asamblarea mărimilor corespunzătoare ale elementelor finite componente. Această operație poate avea loc principial în două moduri : prin explorarea structurii element cu element sau prin explorarea ei nod cu nod. Prima variantă este caracteristică structurilor idealizate printr-un număr moderat de elemente, cînd există posibilitatea memorării scribenzii matricei complete a rigidităților în memoria centrală. A doua variantă permite alcătuirea matricei rigidităților pe linii sau pe grupe de linii ce se depun în memoria externă în cazul numărului mare de necunoscute.

După introducerea condițiilor de margine și de simetrie urmează rezolvarea sistemului de ecuații de condiție în vederea deter-

minării deplasărilor necunoscute în calculul eforturilor. De aceea se pot calcula și reacțiunile.

În cazul modelului de deplasări sau de tensiuni, eforturile într-un element finit rezultă din relația :

$$\sigma = D \delta^e \quad (2.39)$$

$\delta^e$  reprezentând deplasările nodale ale elementului considerat. De- fiind asigurate compatibilitatea eforturilor în noduri se calculează mediile valorilor corespunzătoare elementelor adiacente.

În cazul eforturilor din variații de temperatură, la eforturile rezultate din deplasările nodurilor se adaugă termenul corespunzător eforturilor termice unitare, spre exemplu :

$$\sigma = D \delta^e - \alpha \Delta T \frac{E}{1-\nu} [1, 1, 0]^T \quad (2.40)$$

#### 2.4.2. Studiul în domeniul postelastice

Neliniaritatea fenomenelor din mecanica solidelor poate fi de două tipuri : fizică sau geometrică.

Neliniaritatea fizică apare când nu mai există proporționalitate între eforturi și deplasări, iar cea geometrică provine din relații deformații - deplasări neliniare și din modificări finite ale geometriei.

Comportării postelastice îi este caracteristică neliniaritatea fizică. La nivelul materialului aceasta este caracterizată prin relația neliniară între tensiuni și deformații :

$$\sigma = D(\epsilon) \epsilon \quad (2.41)$$

Matricea  $D(\epsilon)$  depinde de  $\epsilon$  și reprezintă rigiditatea secantă sau tangentă. În cazul stării de tensiune uniaxială, matricele  $D$  se reduc la modulii de deformație  $E$  secant, sau în cazul rigidității tangente, tangent.

Comportarea fizic neliniară a betonului armat este cauzată de proprietățile neliniare ale betonului, armăturii și a conlucrării între ele, o influență hotărâtoare revenind fisurării betonului întins. Fisurarea betonului influențează de fapt legea de comportare a acestuia ca material, și comportarea de ansamblu a structurii. Cu toate acestea considerarea fisurării la nivelul materialului poate fi de multe ori convenabilă.

În considerațiile următoare nu se ține seama de efectele de durată cum sînt contracția și curgerea lentă a betonului și nici de încălzirile repetate.

### 2.4.2.1. Modelarea comportării betonului solicitat biaxial

Descrierea deformației și ruperii betonului depinde de modul de tratare a problemei : fenomenologic sau atomistic.

Tratarea fenomenologică a ruperii betonului solicitat bi-axial se poate baza pe utilizarea criteriilor clasice de curgere și rupere respectiv a variantelor lor pentru un material cu rezistențe diferite la compresiune și întindere de tipul betonului.

Din teoriile fenomenologice arătam :

- teoria eforturilor unitare maxime (Galilei, Remkine, Lamé, Navier);
- teoria deformațiilor specifice maxime (Mariotte, Saint-Venant, Bach);
- teoria eforturilor unitare tangențiale maxime (Couloumb, Tresca, Mohr);
- teoria lucrului mecanic specific maxim (Beltrami).

Deoarece între teoriile clasice de rupere există neconcordanțe, s-a căutat interpretarea ruperii betonului prin prisma criteriilor de plasticitate, concomitent cu definirea limitelor de comportare în domeniul elastic, elasto-plastic și plastic.

În figura 2.6.a...d sînt reprezentate mai multe criterii ( $\sigma_1^0 = \sigma_1/R_0$ ) cu excepția criteriului lui V. Mises ele țin seama de comportarea diferită la compresiune și întindere, totuși așa cum s-a constatat la compararea cu rezultatele experimentale, fiecare criteriu aproximează multumitor fenomenul real numai în anumite subdomenii. Din acest motiv s-au căutat combinații satisfăcătoare. Combinația Carvenko (fig.2.6.e) este formată din criteriul Navier în subdomeniile întindere-întindere și întindere-compresiune și de criteriul V. Mises în subdomeniul compresiune-compresiune. Ecuațiile corespunzătoare sînt :

$$\sigma_1 = R_0 \quad (2.42)$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = R_0^2 \quad (2.43)$$

Combinația optimă (fig.2.6.f) se obține din criteriile Navier - Mohr și Weigler - Becker. În calculele practice este avantajosă utilizarea unei relații unice pentru curba de rupere în toate subdomeniile. O asemenea relație a fost stabilită de Link /101/, în raport cu sistemul de axe x-y din figura 2.6.g.

În considerațiile următoare se va utiliza combinația Car-

venke. Această combinație corespunde ca teriului rezistenței pentru et rea plană de tensiune.

Betonul nefisurat se presupune un material isotrop.

#### 2.4.2.2. Modelarea comportării armăturii

Relația  $\sigma - \epsilon$  pentru armătură se presupune elastică - perfect plastică atât la întindere cit și la compresiune. Ciclurile cu rezistență mare au însă o comportare cu un pronunțat caracter de scurșare, (fig.2.7.b) care poate fi reprezentată printr-o curbă bi sau triliniară. In cazul solicitărilor alternate apare efectul luncdingoer ceea ce do monstrează că comportarea bilineară elastic - perfect plastică constituie doar un caz particular (fig. 2.7.a).

#### 2.4.2.3. Modelarea comportării betonului armat

Stadiile caracteristice ale comportării betonului armat se cunosc din diferite încercări ale unor elemente de beton armat. Aceste stadii pot fi ilustrate prin intermediul unei diagrame tipice ce forță - deplasare ca cea din fig.2.8. In primul interval, betonul este nefisurat, și atât betonul cit și armătura fiind supuse unor eforturi mici sînt în stadiul elastic. Al doilea interval se caracterizează prin fisuri datorate eforturilor de întindere, fisuri care se propagă în tot elementul, la începutul intervalului armătura este în stadiul elastic. Al treilea interval corespunde unor deformații plastice pronunțate care apar în armătură, precum și unei plasticizări și zdrobiri ale betonului; aceste efecte pot apărea simultan sau succesiv. Se poate concluziona că betonul armat parcurge trei stadii în timpul procesului de încălzire și răzire : stadiul elastic cu betonul nefisurat, propagarea fisurilor și stadiul plastic. Răspunsul neliniar se datorează în principiu la fisurării betonului și plasticizării armăturii respectiv a betonului comprimat.

Cele trei stadii descrise în comportarea betonului armat sînt numai ilustrative. In general, limita dintre stadii este mai puțin sesizabilă în sursele c suri specifice, iar unele stadii pot chiar lipsi (fig.2.8.b,c,d).

Alte efecte neliniare sînt : luncarea armăturii, scurșarea lentă, înădarea imperfectă a fisurilor, "dilatarea" fisurii.

Betonul armat se consideră ca un material compozit. Comportarea lui de ansamblu este un rezultat al combinării comportă-

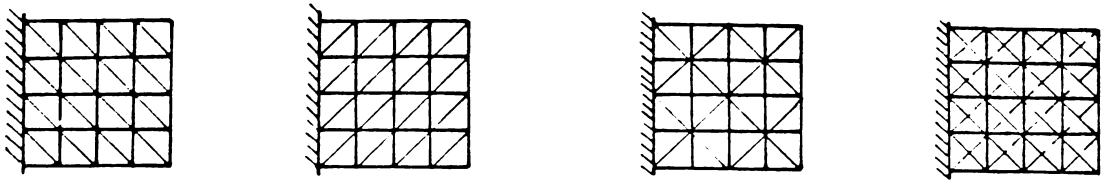


Fig. 2.5

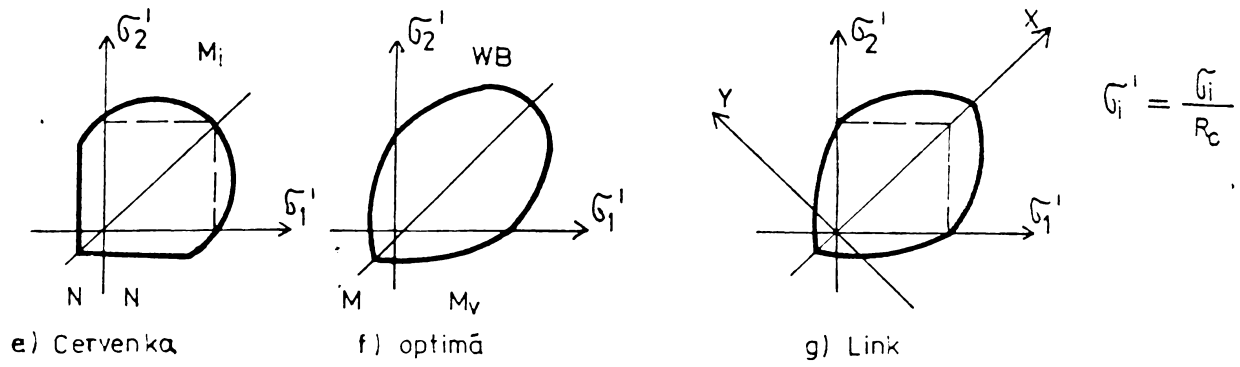
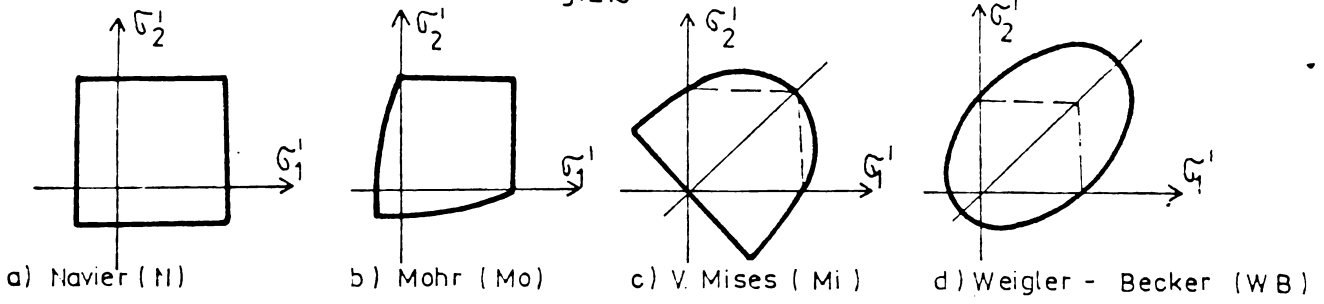


Fig. 2.6

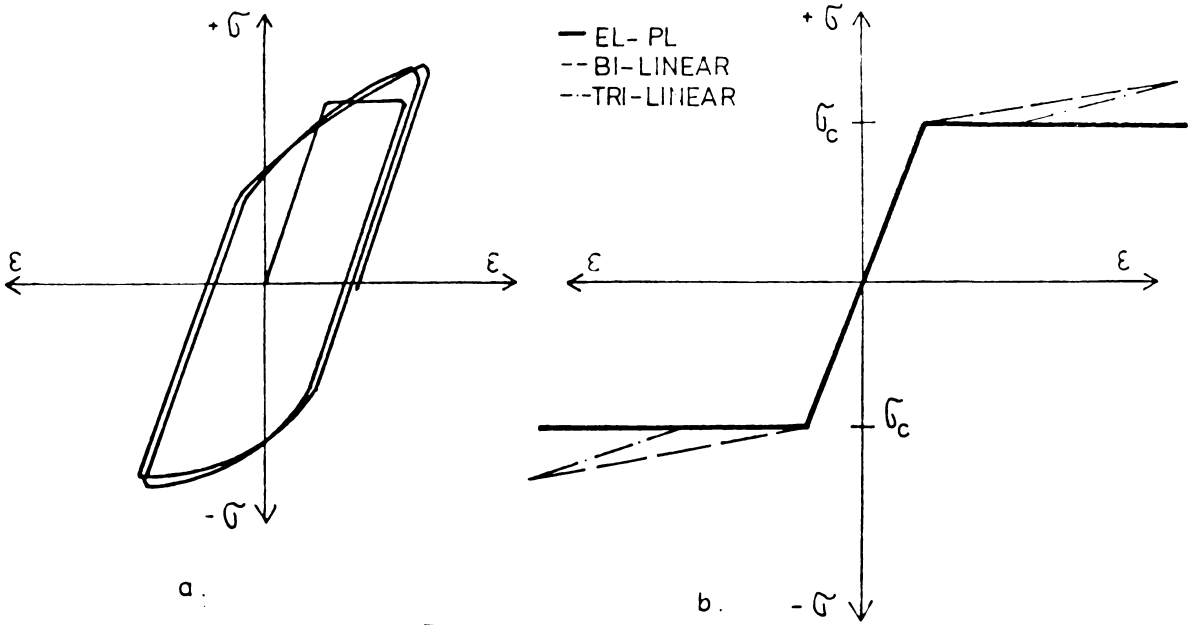
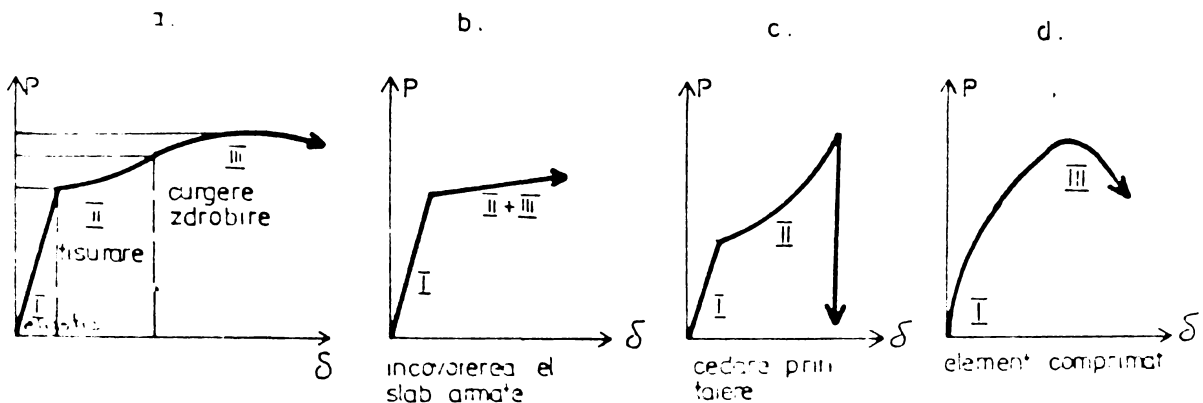


Fig. 2.7



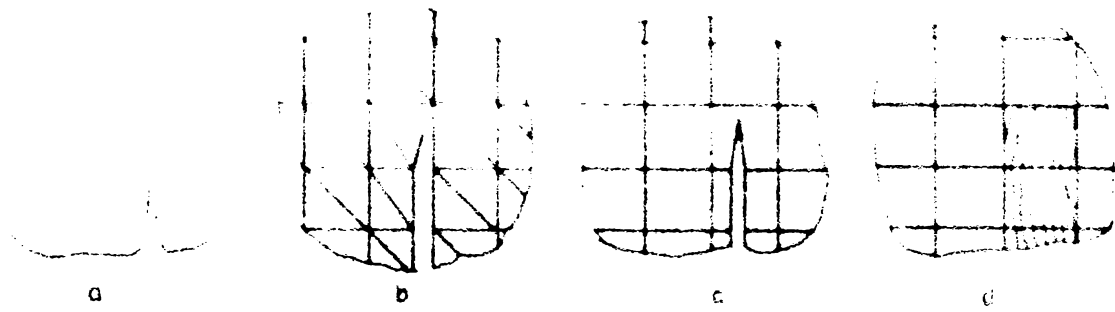


Fig 2.9

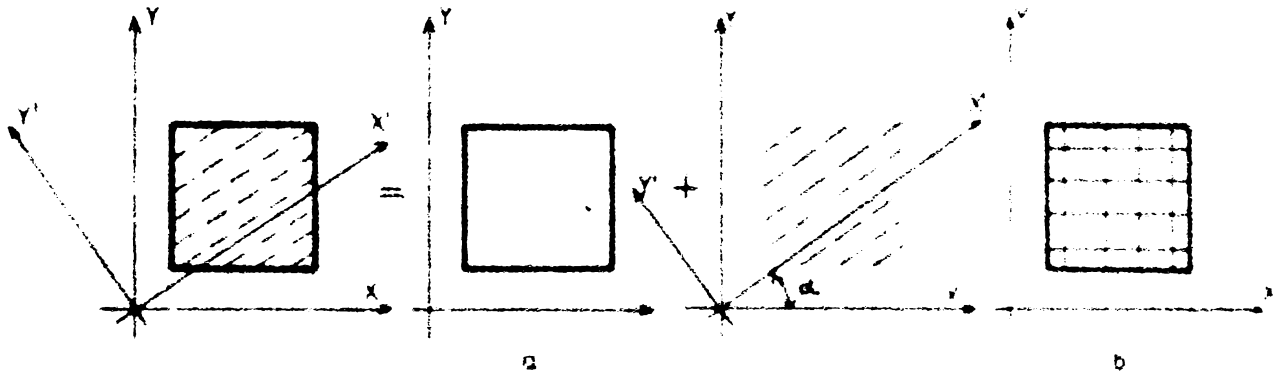


Fig 2.10

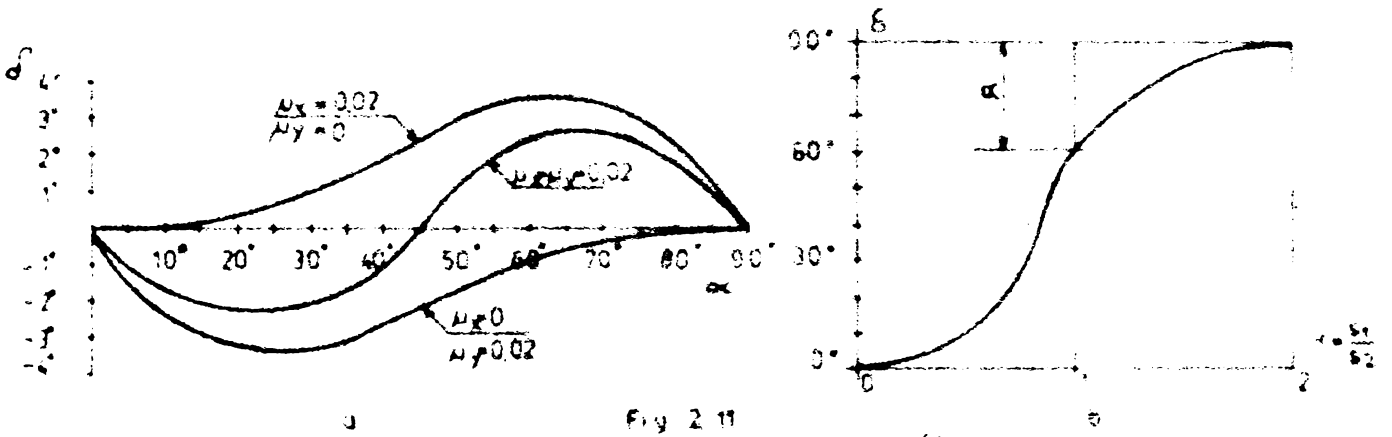


Fig 2.11

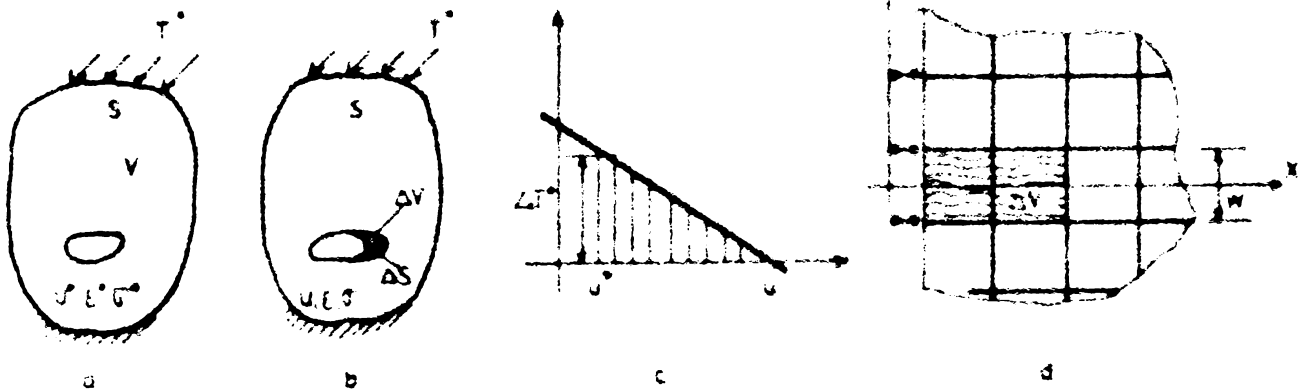


Fig 2.12

rii fiecărui material component, precum și al legăturii dintre acestea.

#### 2.4.2.4. Modelarea betonului fisurat

Ținând seama de posibilitățile metodei elementelor finite, modelarea fisurării poate fi realizată în două moduri. Primul se referă la descrierea fisurilor discrete, izolate, iar cel de al doilea la definirea unor fisuri distribuite pe suprafața elementului.

Fisurile izolate pot fi anticipate între elemente sau în interiorul acestora (fig.2.9.b și c). În primul caz la anumite valori ale eforturilor se desface legătura dintre elemente și deci se modifică topologia și rigiditatea structurii, rigiditățile elementelor finite rămânând neschimbate. În al doilea caz se utilizează elemente finite speciale cu fisură. Concentrarea tensiunilor la rădăcina fisurii este însă hotărâtoare pentru procesul fisurării numai în cazul materialelor omogene. În cazul materialelor eterogene de tipul betonului armat, armătura determină în mare măsură distribuția fisurilor. Din acest motiv se preferă descrierea comportării medii a unui subdomeniu (element finit) fisurat. Fisurile distribuite se consideră amplase uniforme, la distanțe infinitesimale, perpendicular pe direcția efortului unitar principal.

În considerațiile ce urmează se va utiliza aceasta din urmă variantă.

#### 2.4.2.5. Matricele rigidităților materialelor

Relațiile eforturi-deformații care exprimă rigiditatea materialului se stabilesc în funcție de modelul acceptat.

##### a. Rigiditatea betonului armat nefisurat.

La nivelul materialului matricea rigidităților rezultă din suprapunerea matricelor betonului și armăturii, ținând seama de proporția celor două materiale în componența betonului armat (fig.2.10):

$$D = (1 - \mu) D_b + \mu D_a \quad (2.44)$$

fiind coeficientul de armare. Deoarece  $\mu \ll 1$  se poate scrie :

$$D = D_b + \mu D_a \quad (2.45)$$

iar pentru armături pe mai multe direcții  $i$  :

$$D = D_b + \sum \mu_i D_a^i \quad (2.46)$$



În starea de tensiune plană, matricea  $D_0$  a betonului nefi-  
surat și izotrop are formularea în figura 2.1.

Armturile distribuite uniforme preiau numai eforturi aria-  
le, astfel încât ecuația de rigiditate a armăturii elastice poate  
fi scrisă sub formă :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xy}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \varepsilon_y^i \\ \gamma_{xy}^i \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

sau :

$$D_a^i = T^T D_a^i T \quad (2.48)$$

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{array} \quad (2.49)$$

rezultă matricea de rigiditate a armăturii după o direcție  
oarecare :

$$D_a = \mu E_a \begin{bmatrix} c^4 & c^2 s^2 & c^3 s \\ c^2 s^2 & s^4 & cs^3 \\ c^3 s & cs^3 & c^2 s^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Deoarece armarea ortogonală este cea mai frecvent utiliza-  
tă, se dă mai jos matricea de rigiditate a elementului de beton ar-  
mat la care  $\mu_x$  și  $\mu_y$  sînt coeficienții de armare după direcțiile  $x$   
și respectiv  $y$ , iar  $n = n_a$  (fig.2.10.b) :

$$D = E_b \begin{bmatrix} n\mu_x + \frac{1}{1-\nu_b^2} & \frac{\nu_b}{1-\nu_b^2} & 0 \\ \frac{\nu_b}{1-\nu_b^2} & n\mu_y + \frac{1}{1-\nu_b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1-\nu_b)} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Rigiditatea materialului compozit poate fi interpretată ca  
fiind legea lui Hooke generalizată pentru un material anisotrop.  
Gradul de anisotropie depinde de mărimea și proprietățile mecanice



ale armăturii. În general, anisotropia determină deviații între direcțiile eforturilor unitare principale și direcțiile deformațiilor specifice principale. Aceasta implică devierea direcțiilor eforturilor unitare principale în beton, care sînt identice cu cele ale deformațiilor principale, de la direcțiile eforturilor unitare totale. În figura 2.11.a și b este reprezentat efectul direcțiilor armăturii, respectiv raportul  $\sigma_1 / \sigma_2$  asupra devierii direcțiilor principale. Analiza acestor relații arată că devierea poate avea valori între  $0^\circ$  și  $90^\circ$ . Cu toate acestea, deviația este relativ mică pentru o gamă largă de eforturi care apar în mod usual în structuri.

#### b. Criterii de fisurare a betonului armat.

Pentru fisurarea betonului și a betonului armat în analiza cu elemente finite la care fisurile se consideră distribuite, se utilizează de regulă criteriul rezistenței. Conform acestui criteriu se presupune că betonul fisurează cînd eforturile unitare principale ating rezistența la întindere a acestuia. Direcția fisurilor este perpendiculară pe efortul unitar principal de întindere care apare în betonul nefisurat în momentul iminent fisurării.

Așa cum se arată în literatura de specialitate [29], criteriul rezistenței nu este obiectiv și conduce la soluții incorecte. Reducînd dimensiunea elementelor finite de patru ori spre exemplu, în cadrul aceluiași test, se obține o reducere a încălzirii corespunzătoare fisurării de 3,5 ori. Jonglînd cu dimensiunea elementelor, se poate obține orice rezultat se dorește. Dacă dimensiunea elementului tinde spre zero, încălzirea de fisurare converge spre zero. Explicația este simplă : dacă se consideră elemente din ce în ce mai mici, concentrările de eforturi în jurul fisurii cresc, tînsînd la infinit, cînd dimensiunile scad la zero, așa încît o încălzire din ce în ce mai mică poate produce propagarea fisurii deja formate. Singurul motiv pentru care multe elemente calculate au dat rezultate satisfăcătoare a fost, acela că dimensiunea elementului finit era apropiată de cea mai mică dimensiune admisibilă care este dimensiunea agregatelor.

Un criteriu obiectiv și fizic real pentru propagarea fisurilor este criteriul energetic, care apreciază valoarea energiei disipate în timpul apariției fisurii. Obiectivitatea acestui criteriu constă în aceea că energia critică corespunzătoare fisurării este independentă de dimensiunea elementului finit.

Energia care trebuie consumată de frontul fisurii pentru a

se extinde pe o unitate de lungime, este :

$$G = - \frac{dU}{da} \quad (2.52)$$

in care  $U$  este energia potențială a structurii ca funcție de lungimea  $a$  a sfertului fisurii (banda). Criteriul de propagare este  $G = G_{cr}$  in care  $G_{cr}$  este energia critica specifică corespunzătoare fisurării. Pentru betonul simplu se poate demonstra că criteriul rezistenței poate fi obiectivizat, dacă rezistența la întindere  $R_t$  se înlocuiește cu o rezistență echivalentă dată de relația :

$$R_{eq} = \sigma \sqrt{\frac{E_b G_{cr}}{v}} \quad (2.53)$$

in care  $v$  este lățimea benzii fisurii, adică dimensiunea elementului finit, iar  $\sigma$  este un coeficient apropiat de unitate care depinde de tipul elementului.

Rezultatul cu criteriul rezistenței este corect pentru betonul simplu, dacă dimensiunea elementelor se alege așa :

$$v = v_0 = E_b G_{cr} \left( \frac{\sigma}{R_t} \right)^2 \quad (2.54)$$

mărim care in mod normal egalează de cîteva ori dimensiunea agregatelor din beton.

Deoarece, energia  $G$  trebuie să fie prin definiție independentă de lățimea benzii fisurii, se poate scrie aproximativ :

$$G \simeq - \frac{\Delta U}{\Delta a} \quad (2.55)$$

in care  $\Delta a$  este lungimea pe care se va dezvolta fisura sau dimensiunea elementului care va fisura.

Pentru a demonstra propagarea fisurii in betonul simplu, se consideră un corp elastic conținind o cavitate (fig.2.12.a) încălcat cu forțe acționind pe suprafața sa exterioară. Fie  $u^0, \varepsilon^0$  și  $G^0$  deplasările, deformările și eforturile in starea inițială. Se consideră o transformare evazistatică in care, menținind încălzirea exterioară constantă, cavitatea se mărește cu volumul  $\Delta V$  (fig.2.12.b) creind o nouă suprafață superficială  $\Delta S$ . Notind cu  $u, \varepsilon, G$  starea finală, energia potențială totală a sistemului va fi :

$$U = U^0 + \Delta U - \frac{1}{2} \int_{V-\Delta V} \sigma \epsilon \, dV - \int_S T^0 u \, dS \quad (2.56)$$

rezultă :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma^0 \epsilon^0 \, dV + \frac{1}{2} \int_{V-\Delta V} (\sigma \epsilon - \sigma^0 \epsilon^0) \, dV - \int_S T^0 (u-u^0) \, dS \quad (2.57)$$

Considerând acum o stare intermediară în care se înlocuiește materialul din volumul  $\Delta V$  cu forța de tracțiune superficială pe suprafața  $\Delta S$ ,

$$\Delta T^0 = \sigma \eta \quad (2.58)$$

În acest fel rezultă că, variația energiei potențiale se datorează numai energiei elastice conținute în volumul  $V$ , volumul  $V-\Delta V$  rămânând în starea inițială. Deci :

$$\Delta U_{(\Delta V)} = \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma^0 \epsilon^0 \, dV \quad (2.59)$$

Aplicând acum tensiunile superficiale  $\Delta T^0$  pe  $\Delta S$ , energia elastică a volumului  $V-\Delta V$  trebuie să egaleze lucrul mecanic al forțelor  $T^0$  pe  $S$  și  $\Delta T^0$  pe  $\Delta S$ , și ținând seama de teorema lui Clapeyron (fig.2.11.2.c) :

$$\frac{1}{2} \int_{V-\Delta V} (\sigma \epsilon - \sigma^0 \epsilon^0) \, dV = \int_S T^0 (u-u^0) \, dS + \frac{1}{2} \int_{\Delta S} \Delta T^0 (u-u^0) \, dS \quad (2.60)$$

Înlocuind (2.60) în (2.57) și ținând cont de (2.59) se obține :

$$\Delta U = \Delta U_{(\Delta V)} + \frac{1}{2} \int_{\Delta S} \Delta T^0 (u-u^0) \, dS \quad (2.61)$$

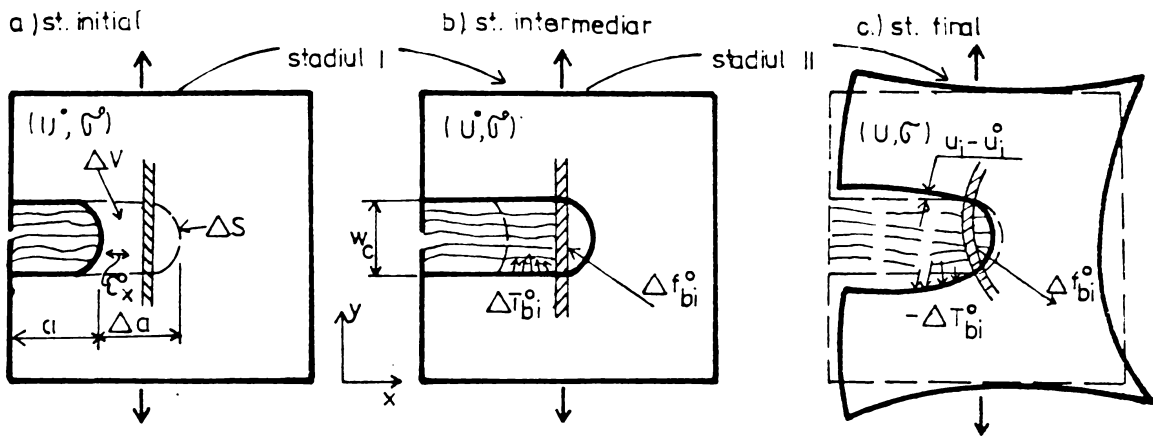
relație ce permite calculul variației energiei potențiale totale necesare propagării fisurii.

Deși fisura se consideră distribuită, volumul  $\Delta V$  se poate considera în mod simplificat că coincide cu volumul unui element finit (fig.2.12.4).

În cazul betonului armat, alcătuit cu un material compozit, volumul  $\Delta V$  nu se înlocuiește ci pierde capacitatea de a transmite eforturi perpendicular pe direcția  $x$ , rămânând capabil de a transmite eforturi normale paralele cu  $x$ .

Propagarea fisurii în regiunea  $\Delta V$  (fig.2.13.a), poate fi considerată ca o succesiune de două faze. Faza I în care se creează





d) forta de suprafata pe S e) forta de legatura in V f) forte nodale V

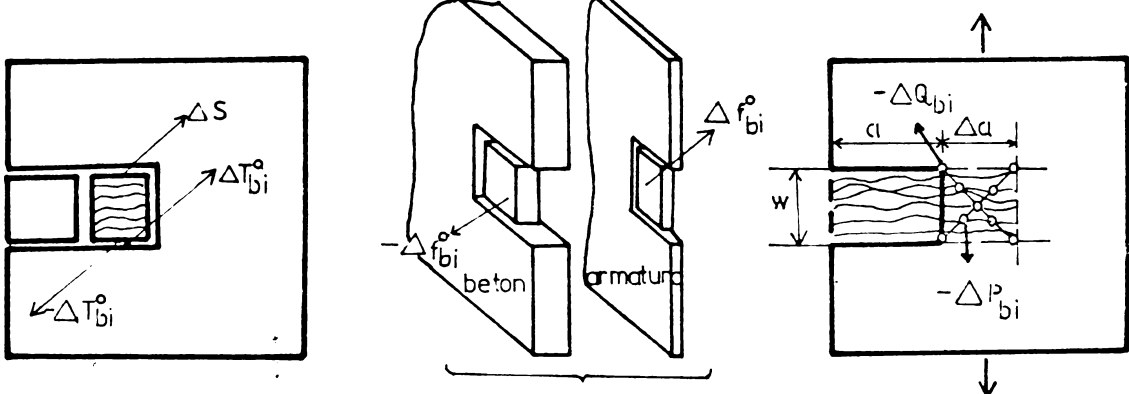


Fig. 2.13

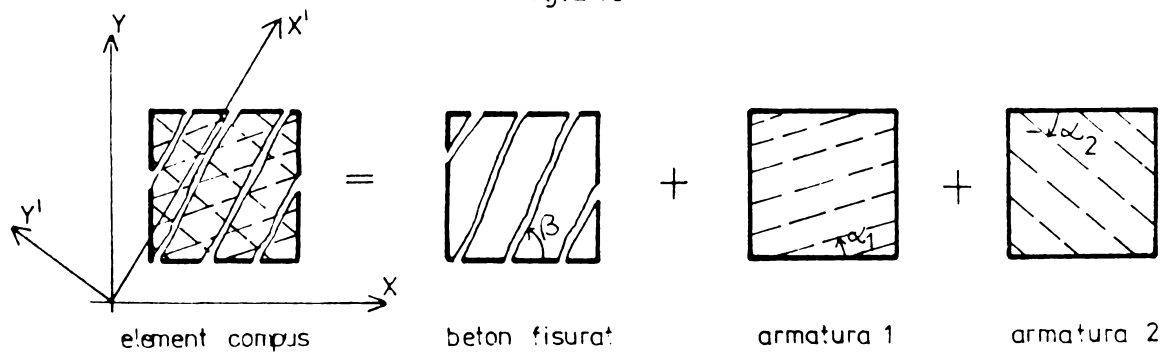


Fig. 2.14

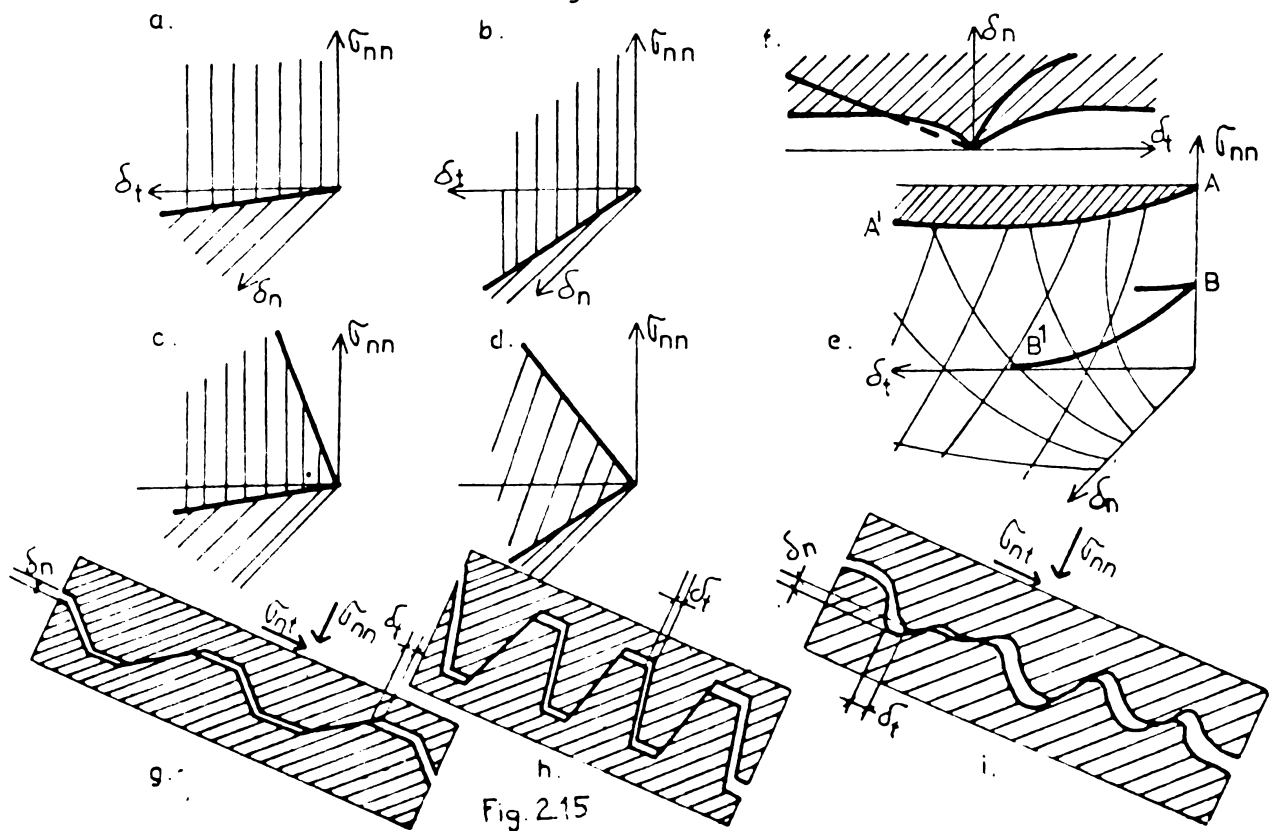


Fig. 2.15

in beton, in interiorul volumului  $\Delta V$ , fisuri distribuite in directia  $x$  (fig.2.13.b) mentinand in același timp forțe de tracțiune superficială  $\Delta T_b^0$  pe frontiera  $\Delta S$  și forțe distribuite  $\Delta f_b^0$  la interfața dintre armături și beton in interiorul volumului  $\Delta V$ , așa încît  $\Delta T_b^0$  și  $\Delta f_b^0$  să înlocuiască acțiunea originală a betonului care fisurează asupra restului corpului, adică asupra volumului  $V-\Delta V$  și asupra armăturii din interiorul volumului  $\Delta V$  (fig.2.13.d și e). Se notează că  $\Delta f_b^0$  sînt forțele de legătură între oțel și beton, dar in modelul cu fisuri distribuite ele apar ca forțe de volum (fig.2.13.e).

In felul acesta se obține o stare intermediară in care echilibrul se menține și toate deplasările (și astfel deformațiile) se păstrează neschimbate in tot corpul. Faza II in care succesiv se relaxează forțele  $\Delta T_b^0$  și  $\Delta f_b^0$  reducîndu-le la zero sau aplicînd gradat forțe opuse  $-\Delta T_b^0$  și  $-\Delta f_b^0$  obținînd in final valorile  $u, \epsilon, \zeta$ .

Presupunînd că deformațiile betonului și armăturii sînt identice starea de eforturi din betonul armat va fi :

$$\zeta = \zeta_b + \zeta_a \quad (2.62)$$

Forțele  $-\Delta T_b^0$  și  $-\Delta f_b^0$  pot fi calculate ca forțe care trebuie aplicate volumului  $\Delta V$  pentru a echilibra variația eforturilor in beton  $\Delta G_b$  datorată apariției fisurilor. Această variație este :

$$\Delta G_{bx} = G_{bx}^0 - E_b \epsilon_x^0 = \frac{E_b}{1-\nu^2} (\epsilon_x^0 + \nu \epsilon_y^0) - E_b \epsilon_x^0 \quad (2.63)$$

$$\Delta G_{by} = G_{by}^0 ; \quad \Delta \tau_{xy} = \tau_{xy}^0$$

Deoarece fisurile in beton trebuie să se propage in direcția eforturilor unitare principale chiar la capătul fisurilor existente, efortul tangențial in direcția  $x$  in elementul de la capătul fisurii trebuie să fie zero. Deci  $\Delta \tau_{xy}^0 = 0$ .

Variația energiei potențiale la sfîrșitul stadiului I va fi :

$$\Delta U(\Delta V) = - \int_{\Delta V} \frac{1}{2} (G_b^0 \epsilon^0 - E_b \epsilon_x^0) dV \quad (2.64)$$

Lucrul mecanic al forțelor negative  $-\Delta T_b^0$  și  $-\Delta f_b^0$  la sfîrșitul stadiului II va fi :

$$U_T = \int_{\Delta S} \frac{1}{2} \Delta T_b^0 (u-u^0) dS + \int_{\Delta V} \frac{1}{2} \Delta f_b^0 (u-u^0) dV \quad (2.65)$$

Energia potențială  $\Delta U$ , consumată pentru propagarea fisurii în volumul  $\Delta V$  va fi :

$$\Delta U = \Delta W(\Delta V) + \Delta W_p \quad (2.66)$$

Relația (2.66) este valabilă atunci când volumul  $V = \Delta V$  se comportă elastic. Pentru cazul când betonul din  $V = \Delta V$ , respectiv armătura din  $V = \Delta V$  și  $\Delta V$  se comportă nelinear, relația lui  $\Delta U$  va fi :

$$\Delta U = - \int_{\Delta V} \frac{1}{2} (\sigma_b^0 \epsilon^0 - E \epsilon_x^0) dV + \int_{\Delta S} \int_{u^0}^u \Delta P_b d_u dS + \int_{\Delta V} \int_{u^0}^u \Delta P_b d_u dV \quad (2.67)$$

În analiza cu elemente finite forțele distribuite  $\Delta P_b^0$  și  $\Delta P_b$  trebuie înlocuite cu forțe nodale echivalente. Ecuația (2.66) devine :

$$\Delta U = - \sum_{el} \int_{\Delta V} \frac{1}{2} (\sigma_b^0 \epsilon^0 - E \epsilon_x^0) dV + \sum_{(1, \Delta S)} \left[ \frac{1}{2} \Delta Q_{b1}^0 (u_1 - u_1^0) \right]_{\Delta S} + \sum_{(1, \Delta V)} \left[ \frac{1}{2} \Delta P_{b1}^0 (u_1 - u_1^0) \right]_{\Delta V} \quad (2.68)$$

În care  $\Delta P_{b1}^0$  sînt forțele nodale echivalente la tensiunea superficială  $\Delta P_{b1}^0$  (Fig. 2.13.f) iar  $\Delta P_{b1}^0$  cele corespunzătoare forțelor de volum  $\Delta P_{b1}^0$ . Acesta din urmă intervină în cazul în care există noduri interne în elementul finit în care se propagă fisurarea.

**c. Rigiditatea betonului armat fisurat.**

Considerînd modelarea prin fisuri distribuite, din figura 2.14 rezultă că  $\sigma_y^0 = 0$ . Armăturile cu fisurile pot fi transmise tensiuni normale  $\sigma_x^0$  și înecări  $\tau_{xy}^0$  dacă se ține seama de rugozitatea fețelor fisurilor. Ecuația de rigiditate este :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^0 \\ \sigma_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha E_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}; \sigma_b^0 = D_{bf}^0 \epsilon^0 \quad (2.69)$$

$$D_{bf} = T^T D_{bf}^0 T \quad (2.70)$$

matricea  $T$  fiind cea din (2.49) în care  $c = \cos \alpha$  și  $s = \sin \alpha$ .

Deci betonul armat fisurat are matricea :

$$D = D_{bf} + \sum \mu_i D_a^i \quad (2.71)$$

In cazul armării ortogonale rezultă :

$$D = E_b \begin{bmatrix} n/\mu_x \sigma^4 & s^2 \sigma^2 & 3\sigma^3 \\ s^2 \sigma^2 & n/\mu_y \sigma^4 & 3\sigma^3 \\ 3\sigma^3 & 3\sigma^3 & s^2 \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Atunci cînd unul dintre componentele materialului depășește limitele sale elastice, rigiditatea materialului pentru elementul fisurat trebuie schimbată, ecuația (2.71) devenind implicabilă; de asemenea, dacă fisurile se închid, betonul se consideră nefisurat. Din aceste motive, comportarea elastică a betonului armat fisurat poate fi limitată de unul din următoarele efecte : plastificarea betonului comprimat, fisurarea betonului întins, curgerea armăturii și închiderea fisurilor. Exprimate în funcție de eforturile principale, aceste criterii vor fi :

- curgerea armăturii întinse după o direcție sau alta (x,y) începe atunci cînd  $\sigma_x^x = \sigma_c$  sau  $\sigma_x^y = \sigma_c$ .  $\sigma_c$  fiind limita de curgere. Criteriul de curgere va fi :

$$\mu_x \sigma_c = \sigma_1 (\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg} \beta \cos \alpha \sin \alpha) + \sigma_2 (\sin^2 \alpha - \operatorname{ctg} \beta \cos \alpha \sin \alpha) \quad (2.73)$$

$$\mu_y \sigma_c = \sigma_1 (\sin^2 \alpha + \operatorname{tg} \beta \cos \alpha \sin \alpha) + \sigma_2 (\cos^2 \alpha - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha \sin \alpha) ;$$

- curgerea armăturii comprimate începe cînd  $\sigma_x^0 = \sigma_c$  deci :

$$\sigma_c \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (2.74)$$

- fisurarea betonului după o direcție perpendiculară pe fisurile existente are loc cînd  $\sigma_y^0 = R_t$ , deci :

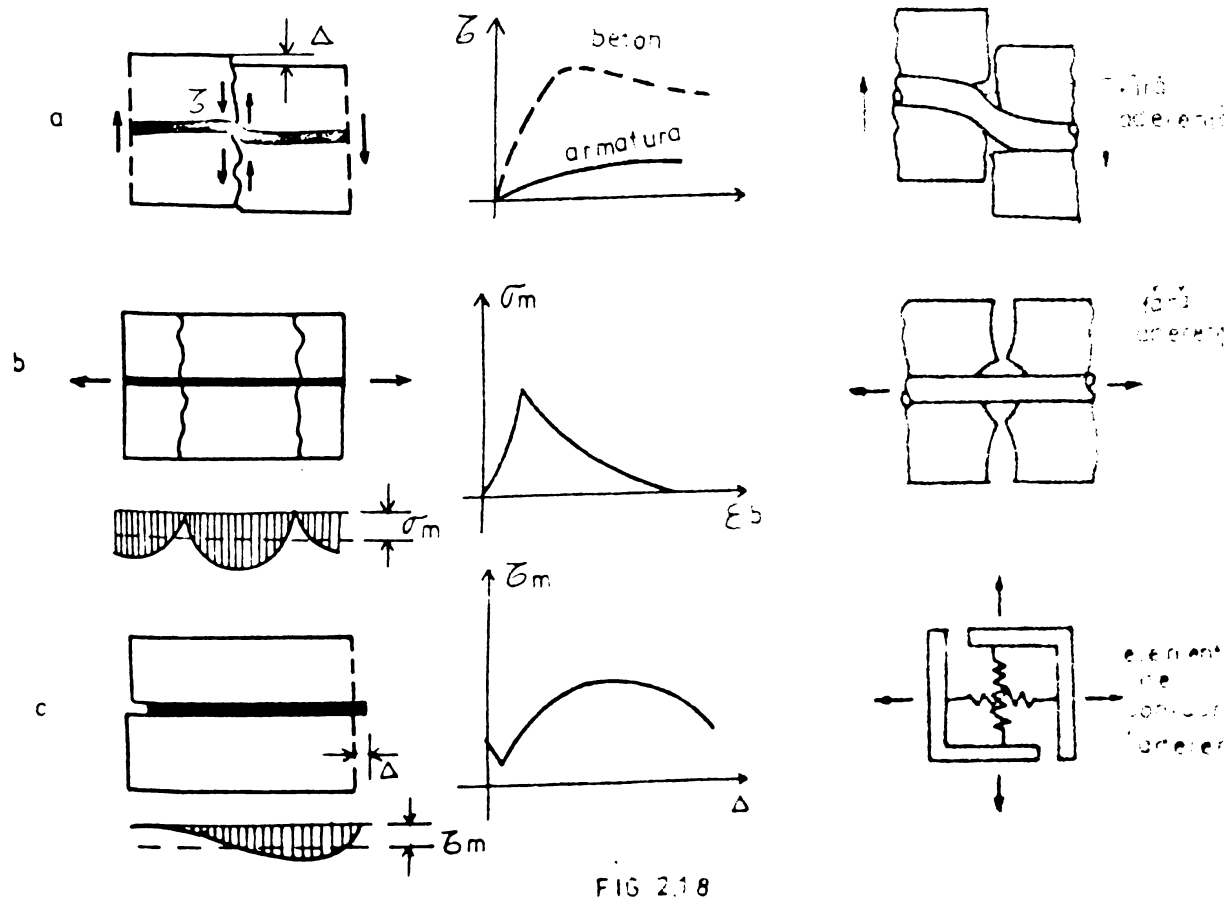
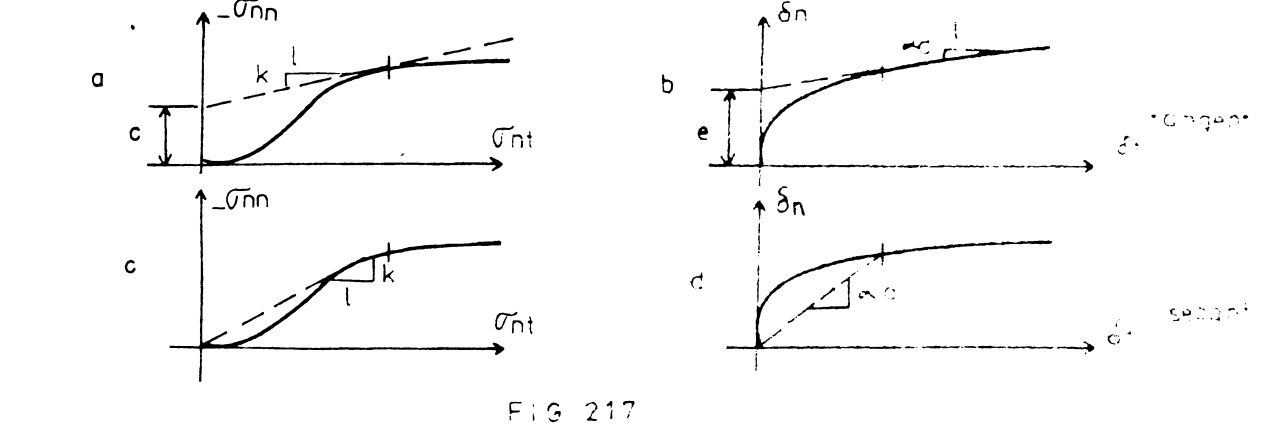
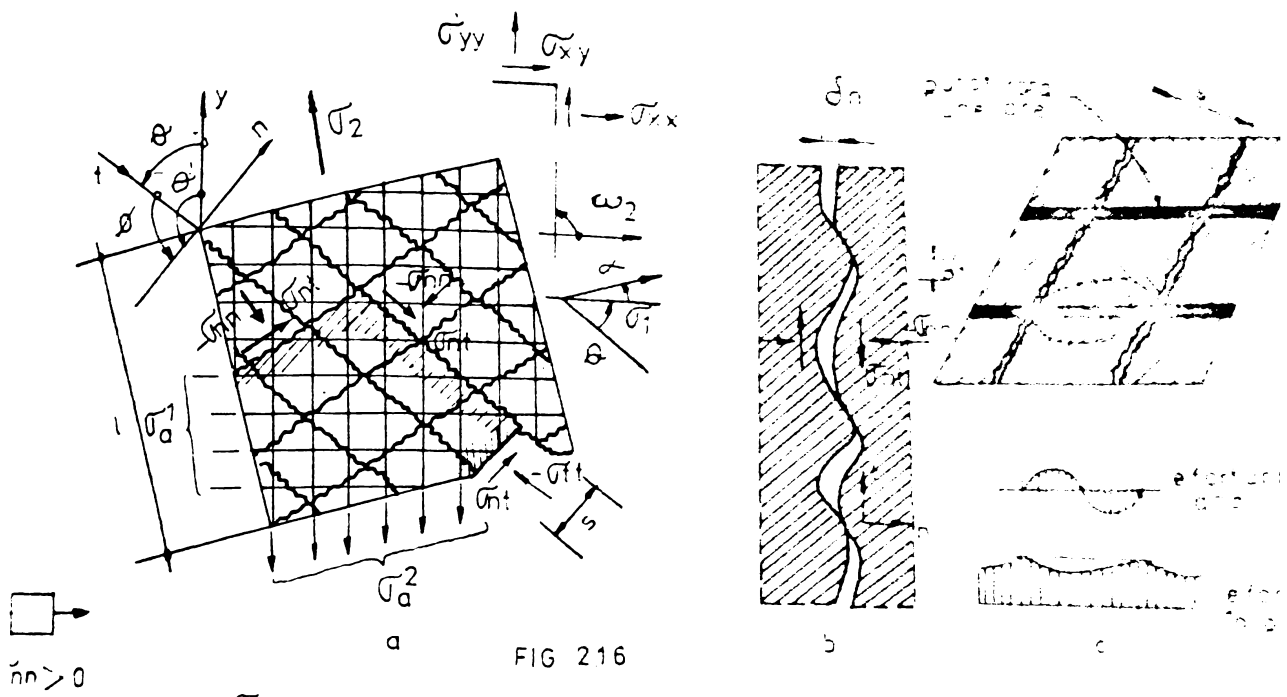
$$R_t \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (2.75)$$

- închiderea fisurilor se presupune că are loc atunci cînd deformația perpendiculară pe fisură  $\varepsilon_y^0$  atinge deformația betonului  $\varepsilon_{yb}^0$ .  $\varepsilon_y^0$  se datorează efortului unitar normal după direcția x', prin coeficientul Poisson :

$$\varepsilon_y^0 = \varepsilon_{yb}^0 = - \frac{\nu}{E_b} \sigma_x^0 \quad (2.76)$$

Condiția de închidere a fisurilor nu impune nici o restricție asupra deformațiilor de alunecare. De aceea, cînd fisurile sînt





închise elementul poate conține deformații de alunecare (și eforturi tangențiale asociate) egale cu cele din momentul închiderii fisurilor.

d. Modelarea rugozității și dilatării fisurilor.

Datorită întrepătrunderii agregatelor de pe suprafețele fisurii, aceasta poate transmite importante forțe de alunecare. Acest fapt, de altfel cunoscut de mult timp, nu a fost considerat în analiza cedării betonului armat, argumentând că frecarea dintre cele două rețele ale fisurii este variabilă, iar pe de altă parte rigidizarea acestui efect are sens acoperitor. Acest argument este fals, datorită dilatării fisurii. Alunecarea nu poate să apară dacă deschiderea fisurii este constantă și dacă efortul normal pe fisură este constant. Mai mult, alunecarea este întotdeauna acompaniată de o creștere a deschiderii fisurii, care dacă este suficientă determină apariția unor importante eforturi de compresie normale pe fisură. Acestea vor trebui echilibrate de eforturi de întindere în armătură. Rezulta deci, că considerarea frecărilor în fisură necesită suprațerea armăturii, iar neglijarea acestora are sens descoperitor.

Modelarea lunecărilor se poate face cu relația (2.69), care însă nu ține seamă de prezența eforturilor normale pe fisură. Date experimentale recente /67/, /129/, /153/, au făcut posibilă dezvoltarea unui model mai apropiat de realitate. Astfel, în lucrările /30/, /31/ se prezintă un model nelinier și unul linear pentru încărcări monotone iar în /73/ pentru încărcări repetate.

Considerând o singură fisură dreaptă care microscopic este rugoasă (fig.2.15),  $\delta_n$  și  $\delta_t$  reprezintă deplasările relative normale și tangențiale la fisură. Acestea le sînt asociate eforturile normale, respectiv tangențiale  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{nt}$  legate de acestea prin relația

$$\begin{Bmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{nn} & L_{nt} \\ L_{tn} & L_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

în care  $L_{nn}$ ,  $L_{nt}$ , ... sînt coeficienții de rigiditate ai fisurii și care depind de  $\delta_n$ ,  $\delta_t$ ,  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{nt}$  și alți parametri posibili. Anumite proprietăți ale relației (2.77) pot fi deduse idealizînd morfologia suprafeței fisurii. Astfel, cel mai simplu, se poate imagina suprafața fisurii ca succesiune de asperități trapezoidale (fig.2.15). Dacă acestea sînt rigide, relația dintre  $\sigma_{nn}$ ,  $\delta_n$  și  $\delta_t$  este repre-

sentată în figurile 2.15.a și b, iar dacă acelea sînt elastice, în figurile 2.15.c și d. Răspunsul unei suprafețe neregulate a fisurii poate fi imaginat ca o suprapunere a cazurilor c și d, rezultînd reprezentarea din figura 2.15.e. Deoarece o suprapunere pe baza unor legi statistice ale asperităților fisurii, cit și a numărului punctelor de contact ar fi prea ipotetică, se fac următoarele observații intuitive :

- cazul  $\delta_n < 0$  este exclus și imposibil, iar  $\sigma_{nn}$  este întotdeauna  $\leq 0$  (compresiune);

- deoarece suprafețele asperităților sînt neregulate și deformabile, aceasta angajează contactul la diferite valori ale deplasărilor și deoarece numărul punctelor de contact se consideră infinit, relația efort-deplasare rezultantă poate fi considerată continuă (fig.2.15.e);

- pentru  $\delta_t = 0$  și  $\delta_n > 0$  trebuie ca  $\sigma_{nn} = 0$  deoarece suprafețele fisurii nu pot fi în contact;

- pentru  $\delta_n = 0$  există continuitate deplină în material, adică nu există fisură. Astfel cazul  $\delta_n = 0$  și  $\delta_t \neq 0$  nu poate fi obținut. Nici cazul foarte apropiat de axa  $\delta_n = 0$  nu poate fi obținut, exceptînd situația cînd  $\delta_t \rightarrow 0$ , așa încît domeniul de explicabilitate se termină la o distanță finită de această axă, în particular la linia unde  $\sigma_{nn}$  egalează rezistența la compresiune a betonului dintre fisuri (linia AA') (în figura 2.15.c). Astfel  $\sigma_{nn}$  trebuie să depășească  $R_c$  la  $\delta_n \rightarrow 0$  ( $\delta_t \neq 0$ ) și în particular poate tînde la  $\infty$ ;

- pentru  $\delta_t = \text{ct.} > 0$  (alunecare constantă) și creșterea lui  $\delta_n$ , numărul de puncte de contact descreește, iar deformația elastică a asperităților reapare. În consecință  $|\sigma_{nn}|$  și  $|\sigma_{nt}|$  trebuie să descreească dacă deschiderea descreește, adică :

$$\frac{0|\sigma_{nn}|}{0\delta_n} = L_{nn} < 0 ; \frac{0|\sigma_{nt}|}{0\delta_n} = L_{nt} < 0 ; \text{ pentru } \delta_t > 0 \quad (2.78)$$

În felul acesta matricea L nu va fi niciodată pozitiv definită, exceptînd cazul  $\delta_t = 0$ . Deci răspunsul detar iniî o tendință de instabilitate; acesta este stabilizat de prezența armăturii și de condițiile de margine;

- dacă mărimea alunecării  $|\delta_t|$  crește la  $\delta_n = \text{constant} > 0$ , asperitățile angrenează contactul gradat și astfel se deformează elastic, așa încît condiția :

$$\frac{\partial |\bar{\sigma}_{mn}|}{\partial \delta_n} = L_{nt} > 0; \quad \frac{\partial |\bar{\sigma}_{nt}|}{\partial \delta_t} = B_{tt} > 0, \text{ pentru } \delta_n = 0 \quad (2.79)$$

poate fi respectată cu toate că  $|\delta_t|$  este atât de mare încât co-  
peritiștile se rup;

- existența singularității necesită impunerea unor restric-  
ții energetice, lucrul mecanic consumat sau eliberat de fisură fiind  
deplasările cresc de la 0 la  $\delta_n$  și  $\delta_t$  trebuie limitat :

$$-\infty < W = \int_0^{\delta_n} \bar{\sigma}_{mn} d\delta_n + \int_0^{\delta_t} \bar{\sigma}_{nt} d\delta_t < \infty \quad (2.80)$$

semnul lui  $\bar{\sigma}_{nt}$  este același ca și semnul lunecării  $\delta_t$ .

Deci :

$$L_{nn} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{mn}}{\partial \delta_n}; \quad L_{nt} = \pm \frac{\partial \bar{\sigma}_{mn}}{\partial |\delta_t|}; \quad L_{tn} = \pm \frac{\partial |\bar{\sigma}_{nt}|}{\partial \delta_n}; \quad L_{tt} = \frac{\partial |\bar{\sigma}_{nt}|}{\partial |\delta_t|} \quad (2.81)$$

în care + și - se aplică pentru  $\delta_t$  pozitiv sau negativ.

Pe baza rezultatelor experimentale specificate și în virtu-  
tea celor prezentate mai sus au fost identificate următoarele func-  
ții :

$$\bar{\sigma}_{mn} = -\frac{a_0}{\delta_n} (a_2 |\bar{\sigma}_{nt}|)^p; \quad \bar{\sigma}_{nt} = \bar{\sigma}_n r \frac{a_3 + a_4 |r|^3}{1 + a_4 r^4} \quad (2.82)$$

$$\text{cu : } r = \delta_t \sqrt{\delta_n}; \quad \bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_0 \frac{a_0}{a_0 + \delta_n^2}; \quad p = 1,30 \left( 1 - \frac{0,231}{1 + 0,185 \delta_n + 5,63 \delta_n^2} \right)$$

$$\text{în care : } \delta_n \geq 0 \text{ și } a_0 = 0,01 \frac{D_n^2}{mm}; \quad a_2 = 0,000534 \frac{H}{mm}; \quad (2.83)$$

$$a_3 = 143 \frac{H^2}{H}; \quad a_4 = \frac{1}{\bar{\sigma}_0} 2,45 \frac{H}{mm^2}; \quad a_4 = 2,44 \left( 1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_0} 4 \frac{H}{mm^2} \right)$$

$$\bar{\sigma}_0 = 0,245 R_0.$$

Pentru  $\delta_n \gg \delta_t$  (lunecare redusă) se obține matricea de  
flexibilitate incrementată :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} + A |\bar{\sigma}_{nt}|^p \bar{\sigma}_{mn}^{-2} & P_{12} & \pm A_p |\bar{\sigma}_{nt}|^p (-\bar{\sigma}_{mn})^{-1} \\ P_{21} & P_{22} & 0 \\ \pm B |\bar{\sigma}_{nt}|^{p-2} \bar{\sigma}_{mn} & 0 & P_{33} = B(p+1) |\bar{\sigma}_{nt}|^p (-\bar{\sigma}_{mn})^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

in care + se ia cind  $\tilde{\delta}_{mm} \geq 0$ , - cind  $\tilde{\delta}_{mm} \leq 0$ .

$$A = A_2^{-p} A_1 / s; \quad B = A_2^{-p-1} A_1 / s \quad (2.85)$$

$$A_1 = a_1(a_2 a_3 \tilde{\sigma}_n)^p; \quad A_2 = a_3 \tilde{\sigma}_n$$

s fiind distanța medie dintre fisuri (fig.2.16).

Acă betonul dintre fisuri este elastic,  $F_{11} = F_{22} = 1/E_b$ ,

$$F_{12} = F_{21} = -\nu/E_b \text{ iar } F_{33} = 1/G.$$

Pentru  $|\delta_t| \gg \delta_n > 0$  (alunecare mare) se obține :

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} + A_0 s^{-1} \tilde{\delta}_{mm}^{-2} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

in care  $F_{33} \rightarrow \infty$ .

Matricele de flexibilitate din (2.84) și (2.86) sînt valabile pentru cazul încărcărilor monotone.

In anumite cazuri, cind se efectuează o analiză gîncură a structurii, este interesant de a utiliza un model liniar. Un astfel de model este reprezentat in /31/ introducînd ideia de coeficient de frecare ( $k$ ) și rația dilatării ( $\alpha_d$ ) (fig.2.16). Se stabilesc următoarele relații :

$$\text{- pentru } \tilde{\delta}_{mm} \leq 0 : |\tilde{\delta}_{mm}| = -k \tilde{\delta}_{mm} + e \text{ (alunecare cu frecare)} \quad (2.87)$$

$$\text{- pentru } \delta_n \geq 0 : \delta_n = \alpha_d |\delta_t| + e \text{ (dilatare)} \quad (2.88)$$

in care  $k$  este coeficient de frecare,  $e$  = coeziunea,  $\alpha_d = \delta_d / \delta_t$

rația dilatării;  $e$  = expansiunea (sau dilatarea inițială) (fig.2.17).

Deoarece pentru valorile  $e$  și  $e$  nu există suficiente date experimentale, în cele ce urmează se va adopta  $e = e = 0$ .

Matricea de rigiditate a betonului in fisuri după o singură direcție vor fi :

$$D_{bf} = E^m \begin{bmatrix} 1 & \nu & \pm \alpha_d \\ \nu & \frac{E^m}{E^m} + \nu^2 & \pm \alpha_d \nu \\ \pm k & \pm k \nu & (\pm \alpha_d)(\pm k) \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$(\bar{\epsilon}^{\alpha})^{-1} = \frac{1 - \gamma^2}{E} + \frac{1}{G} (\pm \alpha_d)(\pm \kappa)$$

In cazul existenței a două direcții de fisuri :

$$D_{\alpha\beta} = E^{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & f_2 & \pm \alpha_d \\ f_1 & f_1 f_2 & \pm \alpha_d f_1 \\ \pm \kappa & \pm \kappa f_2 & (\pm \alpha_d)(\pm \kappa) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

in care :

$$f_1 = \frac{1}{f_0} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\phi \pm \kappa \cos 2\phi \pm \kappa' \cos^2 \phi + (\pm \kappa)(\pm \kappa') \sin 2\phi \right]$$

$$f_2 = \frac{\pm \alpha_d \cos 2\phi \pm \alpha_d \cos^2 \phi + \left[ \frac{1}{2} + (\pm \alpha_d)(\pm \alpha_d') \right] \sin 2\phi}{\pm \alpha_d' \sin^2 \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi}$$

$$f_0 = \frac{1}{2} \sin 2\phi \pm \kappa' \sin^2 \phi$$

Matricile (2.89) și (2.90) pot fi utilizate ca matrici incrementale în analiza cu elemente finite efectuată în trepte de încărcare succesive.

### e. Interacțiunea beton armăturii.

În considerațiile anterioare, asocierea armăturii cu betonul presupune o conlucrare perfectă a acestora. În realitate aceste două materiale nu sînt integral compatibile, lucru de care poate fi ținut seama la nivelul definirii legăturii între materiale sau la cel al concepției discretizării în elemente finite de beton, de armătură și de legătură, fictive.

Principalele fenomene legate de interacțiunea beton și armătură sînt : efectul de pană și arăzugarea armăturii.

Efectul de pană se manifestă cînd armătura traversează o fisură (fig.2.18.a). Din diagrama  $\sigma$ - $\Delta$  rezultă că aportul armăturii la trunchierea lunecărilor peste fisură este de 20% - 35%. Forțele aduse de armătură se manifestă prin eforturi unitare pe suprafața fisurii, notate  $\sigma_{nn}^p, \sigma_{nt}^p$ . Dacă barele sînt normale pe fisură ( $\theta = \alpha_1$ ), atunci  $\sigma_{nt}^p = 0$ ; dacă bara deviază de la normală la fisură cu unghiul ( $\alpha_1 = \theta$ ), atunci  $\sigma_{nn}^p \neq 0$ . Se poate scrie deci /32/ :

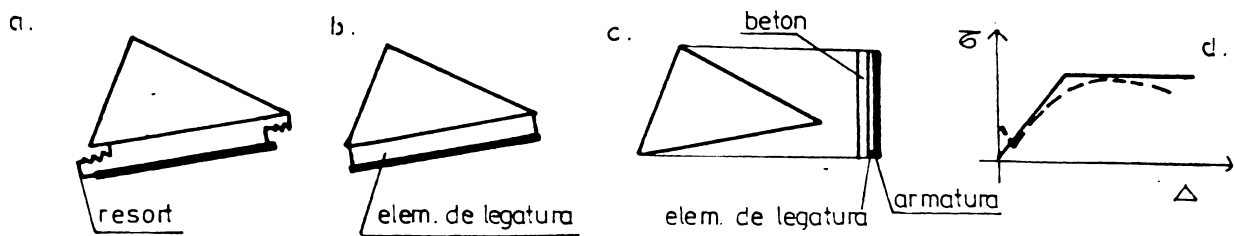


Fig. 2.19

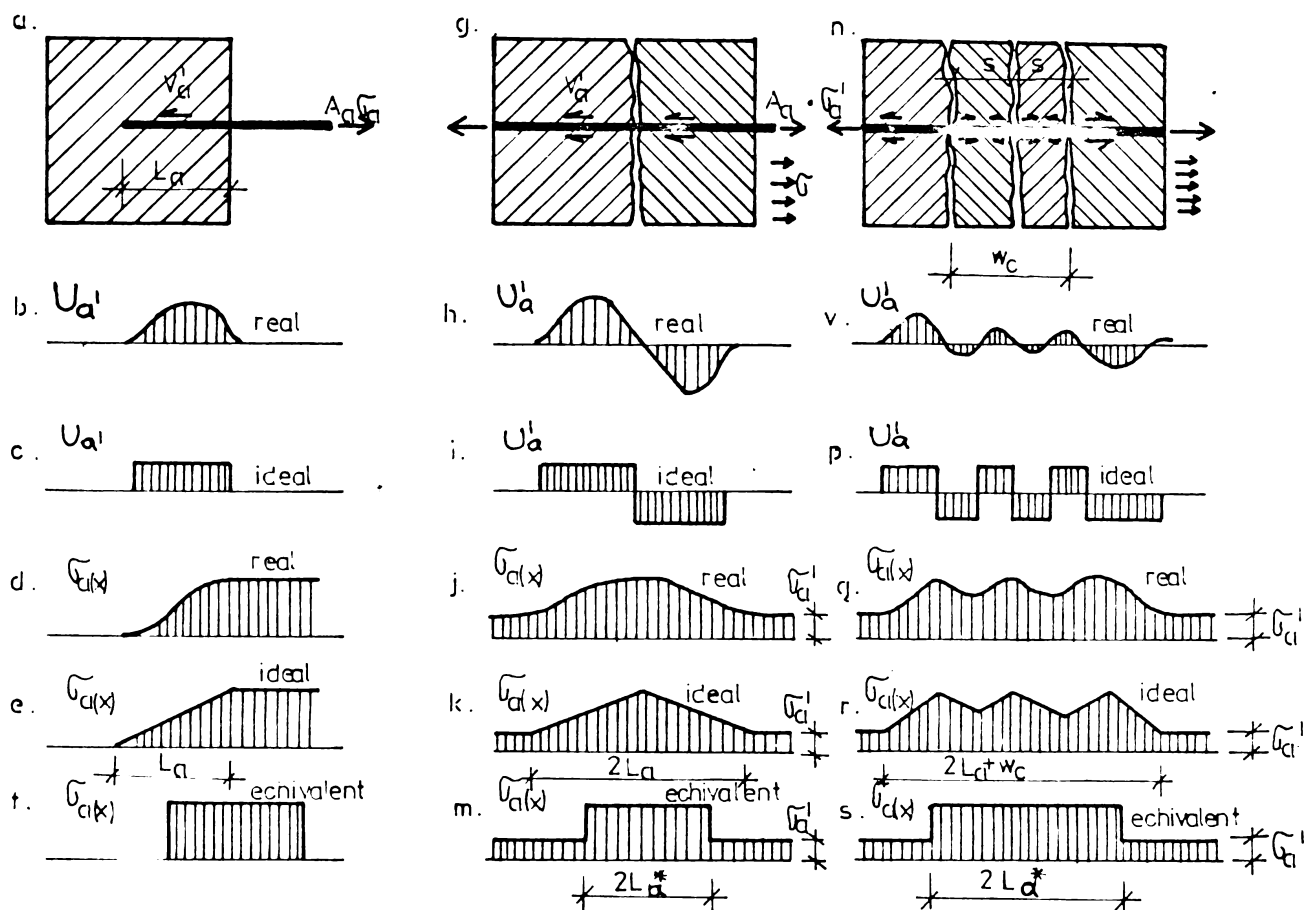


Fig. 2.20

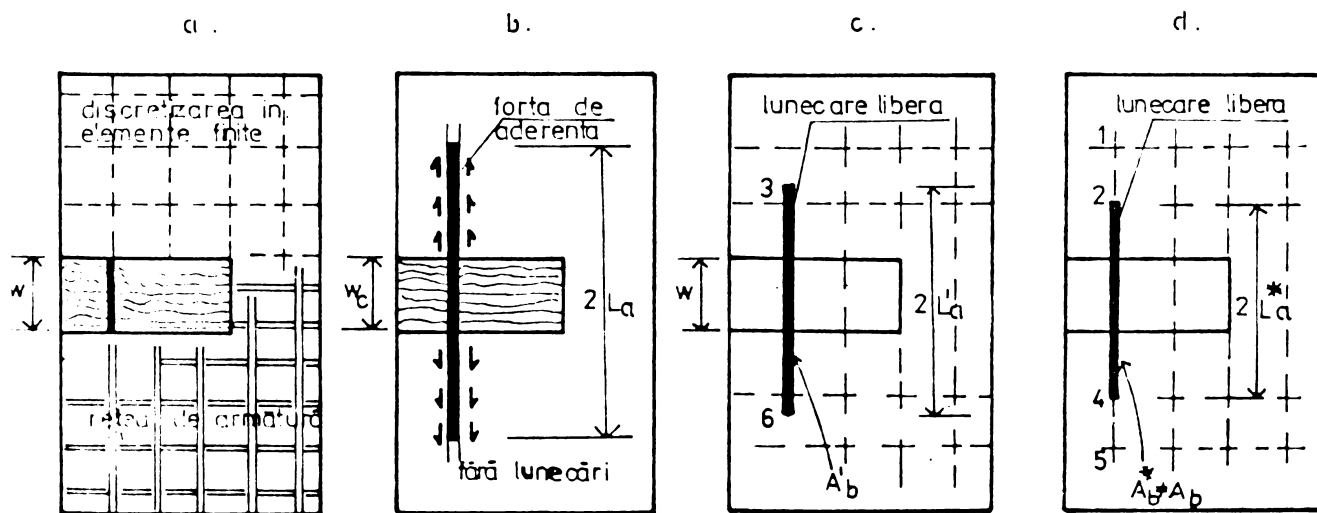


Fig. 2.21

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_m \\ \delta_t \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

Coefficienții  $K_{ij}$  depind de  $E$ , grosime, diametrul barei,  $s$ , unghiul  $w_1 = \theta$ .

Betonul întins între două fisuri conlucrează cu armătura așa cum rezultă din fig.2.18.b. Diagrama  $\sigma_m - \epsilon_b$  (efortul unitar mediu în beton - deformația specifică a betocului) poate fi utilizată ca lege constitutivă a unui material imaginar asociat armăturii, ce o rigidizează.

Amulgera armăturii prin distrugerea aderenței cu betonul este reprezentată în fig.2.18.c. Distrugerii locale ale aderenței au loc și în cele două situații prezentate mai sus, așa cum rezultă din fig.2.18.a și b. Aderența se poate modela prin elemente finite sub formă de resoarte sau prin elemente formate din materiale fictive intercalate între beton și armătură. În figura 2.19.a și b se prezintă legătura cu o bară de armătură dispusă în lungul unei margini a unui element finit de beton, în cele două variante e puse. Legătura între elementele finite de armătură distribuită și elementele finite de beton se poate realiza de asemenea cu elemente imaginare, care spre deosebire de cele lineare utilizate pentru legarea barelor sînt elemente de suprafață (fig.2.19.c).

În mod obișnuit, barele de armătură se consideră legate rigid în beton în toate nodurile. În acest fel rigiditatea unui segment de bară care leagă două noduri de o parte și de alta a unei fisuri distribuite cu lățimea  $w$  (fig.2.21.a) este  $K_g = pt \frac{E_g}{w}$  pe unitate de lungime de fisură ( $f$  = grosimea elementului). Dacă dimensiunea rețelei tinde spre zero, atunci  $w \rightarrow 0$ , și astfel  $K_g \rightarrow \infty$ . Ieși, barele de armătură nu vor putea împiedeca deschiderea fisurii, ceea ce este imposibil.

Din această cauză, trebuie considerat efectul amulgerii armăturii într-o modalitate obiectivă care să nu depindă de dimensiunea rețelei. Ar fi neobiectiv dacă s-ar presupune că lunecarea armăturii s-ar produce, de exemplu, la primul sau la al doilea nod de la suprafața fisurii. Lungimea de lunecare,  $2L_g$  (fig.2.21.b) trebuie să fie o proprietate strictă a materialului compozit.

Problema lunecării armăturii este complicată de faptul că



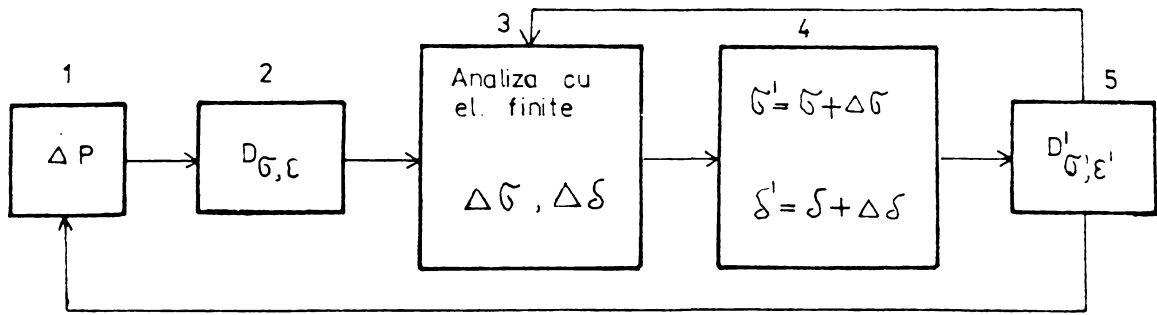


Fig. 2.22

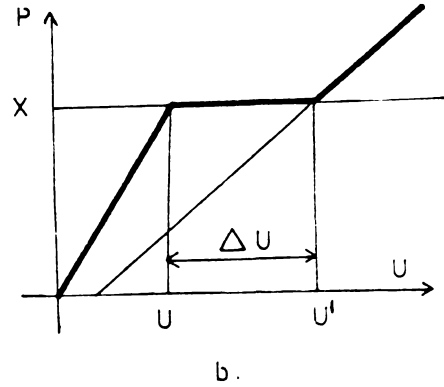
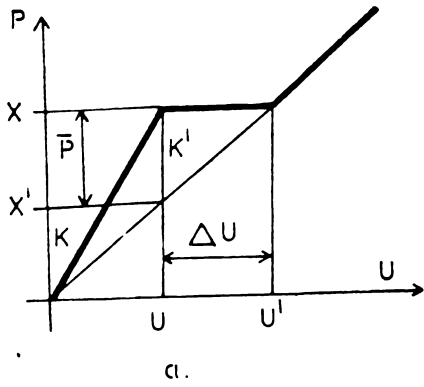


Fig. 2.23

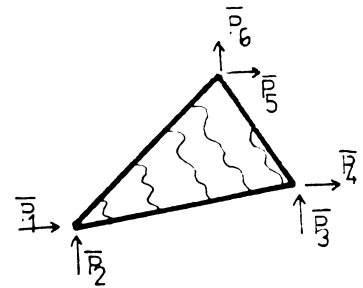
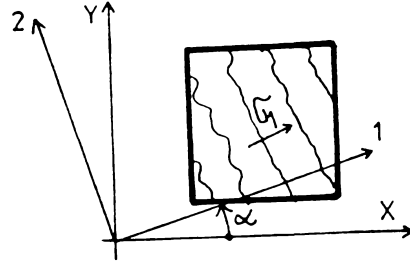
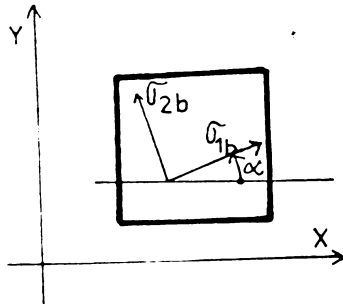


Fig. 2.24

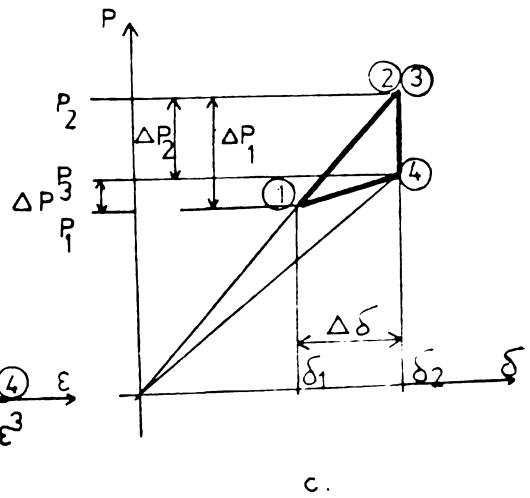
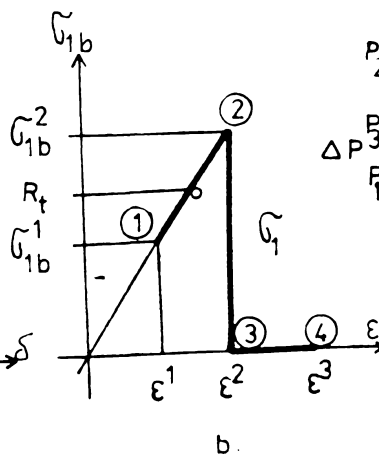
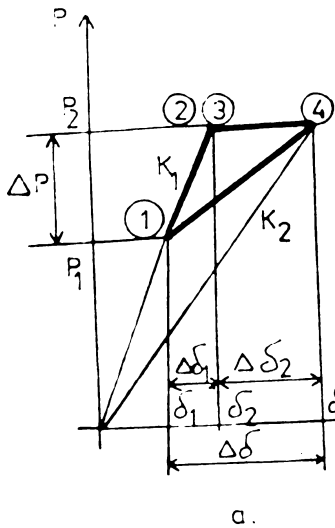


Fig. 2.25

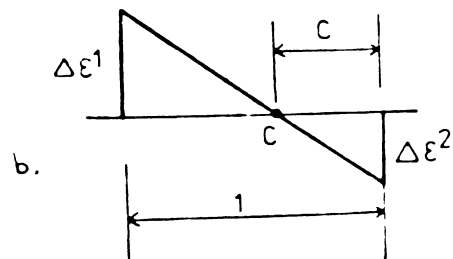
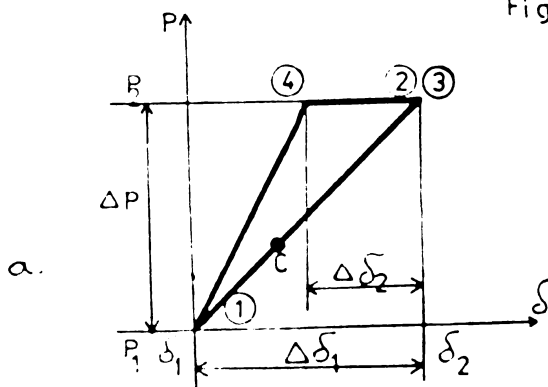


Fig. 2.26

efortul de aderență  $\bar{\sigma}_b$  depinde de efortul normal la interfața dintre beton și armătură și din cauză că alunecarea produce dilatarea betonului în jurul armăturii. În plus,  $\bar{\sigma}_b$  depinde de alunecarea  $\delta_b$ , adică de deplasarea tangențială relativă la interfață. Acestea determină o variație neuniformă a lui  $\bar{\sigma}_b$  de-a lungul armăturii care alunecă (fig.2.20). Pentru a putea stabili o formulă aproximativă se presupune că  $\bar{\sigma}_b$  este uniform. De asemenea, se presupune că forța de smulgere pe lungimea  $L_a$  este aceeași ca și cea determinată prin încercările de smulgere (fig.2.20.a. - 2.20.f). Din aceste încercări rezultă  $L_a$  ca fiind lungimea maximă de ancorare pentru care smulgerea are loc la forța  $P$  (fig.2.20). Aceste încercări au arătat că pentru bare obișnuite  $U_a \approx 35 \sqrt{R_b}$  pentru distanța dintre bare  $\geq 15$  cm și  $U_a \approx 28 \sqrt{R_b}$  pentru distanța între bare  $< 15$  cm în care  $U_a = P/L_a =$  forța maximă de smulgere pe unitate de lungime. Este de observat că în aceste formule  $U_a$  este considerat independent de diametrul  $d$  al barei și astfel  $\bar{\sigma}_a = U_a / \pi d$  depinde de  $d$ .

Considerind că bara traversează o fisură izolată (fig.2.20.g. - m). Deoarece forța în bară în dreptul fisurii,  $A_b \bar{\sigma}_a$ , trebuie să echilibreze forța din bară  $A_b \bar{\sigma}_a'$  plus forța de aderență  $U_a L_a$  (fig.2.20.i. - k), lungimea de alunecare este :

$$L_a = (\bar{\sigma}_a - \bar{\sigma}_a') A_b / U_a \quad (2.92)$$

în care  $A_b$  este aria secțiunii transversale a unei bare (în timp ce  $A_a = \mu t$  este aria de armătură pe unitate de lungime și pe grosimea  $t$  a plăcii),  $\bar{\sigma}_a$  și  $\bar{\sigma}_a'$  sînt eforturile în bară la fisură și la capătul lungimii de alunecare (fig.2.20.k).

Deoarece  $A_b / \bar{\sigma}_a$  trebuie să egaleze forța din armătură și beton la capătul segmentului care alunecă, unde  $\epsilon_a = \bar{\sigma}_a' / E_a$  este același în beton și oțel, rezultă :

$$[E_a \mu + E(1 - \mu)] \bar{\sigma}_a' / E_a = \mu \bar{\sigma}_a \quad (2.93)$$

sau :

$$\bar{\sigma}_a' = \bar{\sigma}_a n \mu / (1 - \mu + n \mu) \quad (2.94)$$

în care :  $n = E_a / E$  și  $\mu = A_a / (A_{\text{beton}} + A_a)$

Astfel, rezultă :

$$L_a = \frac{A_b}{U_a} (\bar{\sigma}_a - \bar{\sigma}_a') \approx \frac{A_b}{U_a} \frac{1 - \mu}{1 - \mu + n \mu} \quad (2.95)$$

Lungimea maximă se obține pentru  $\sigma_a = \sigma_s$ . Lungimea minimă se poate obține presupunând că forța de întindere  $A_a \sigma_a$  în oțel egalează efortul resultant în beton în inte de apariția fisurii, care este  $A_{\text{beton}} R_d$ . Deoarece  $A_a = A_{\text{beton}} \mu / (1 - \mu)$ , rezultă  $\sigma_a \approx R_d (1 - \mu) / \mu$ . În calcule se recomandă utilizarea unei lungimi medii obținute din cele două valori  $\sigma_a$  de mai sus.

În calcule, odată cunoscută lungimea de alunecare, ar trebui considerate moduri separate pentru beton și armătură, ceea ce este neconvenabil. Din acest motiv, alunecarea armăturii se va lua în considerare într-o manieră mai simplă, plecând de la constatarea, confirmată de calcule, că numai alungirea maximă a barei pe lungimea de alunecare  $2L_a$  este esențială în timp ce distribuția deformațiilor pe această lungime este de mică importanță pentru comportarea de ansamblu a corpului. În locul lui  $L_a$ , se poate utiliza un efort unitar  $\sigma_a$  pe lungimea liberă de alunecare  $2L_a$  (fig. 2.21.a) și un efort unitar uniform  $\sigma_a$  pe porțiunea rămasă care nu alunecă ( $2L_a - 2L_a$ ), presupunând că lungimea pe segmentul  $2L_a$ , evaluată în ipoteza legăturii rigide între beton și oțel la capetele segmentului  $2L_a$ , rămâne aceeași. În continuare, în locul lui  $2L_a$ , se poate considera o lungime liberă de alunecare corectată  $2L_a^*$  cu o arie de armătură corectată  $A_a^*$  astfel încât alungirea pe segmentul  $2L_a$  să fie aceeași.

Generalizând considerațiile de mai sus pentru cazul unei fisuri distribuite cu deschiderea  $w_f$  (fig. 2.20.m. - s), alunecarea apare la distanța  $L_a$  de fiecare parte a benzii și în consecință există alunecare între fisurile de pe lungimea acestora. Presupunând că  $s < 2L_a$ , efortul la mijlocul distanței dintre două fisuri paralele nu scade sub  $\sigma_a$  și presupunând același  $U_d$ , acesta egalează  $\sigma_a - \sigma_a - (\sigma_a - \sigma_a)(s/2L_a)$ . Efortul mediu în armătură în dreptul fisurii va fi :

$$\sigma_a = (\sigma_a - \sigma_a) / 2 = \sigma_a - (\sigma_a - \sigma_a) s / 4L_a \quad (2.36)$$

Iar efortul mediu în segmentele  $L_a$  de fiecare parte a benzii va fi :

$$\sigma_a = (\sigma_a + \sigma_a) / 2 \quad (2.37)$$

Din condiția de echilibru la capetele lungirii de alunecare liberă  $2L_a^*$ , care cere ca forța totală în bară în segmentul  $2L_a^*$  de arie  $A_a^*$  să fie aceeași ca și cea pentru arie  $A_a$  ( $\sigma_a^* A_a^* = \sigma_a A_a$ ), rezultă că efortul  $\sigma_a^*$  pe segmentul  $2L_a^*$  este  $\sigma_a^* = \sigma_a A_a / A_a^*$ . Astfel, condiția ca lungimea pe  $2L_a^*$ , pentru o bară cu arie  $A_a^*$ , plus alungirea pe lungimea rămasă ( $2L_a + w_f - 2L_a^*$ ) care nu alunecă să fie egală

cu alungirea pe întreaga lungime actuală de alunecare  $(2L_a + w_e)$ , din, pentru coeficientul de armare :

$$\frac{2L_a^{\text{II}}}{E_a} \zeta_a \frac{A_b}{A_b^{\text{II}}} + \frac{2L_a + w_e - 2L_a^{\text{II}}}{E_a} \zeta_a' = 2L_a \frac{\zeta_a + \zeta_a'}{E_a} + \frac{w_e}{E_a} (\zeta_a - \zeta_a' \frac{A_b - A_b^{\text{II}}}{4L_a}) \quad (2.98)$$

Inlocuind  $\zeta_a' \approx \zeta_a n \mu (1 - \mu + n\mu)$  rezultă lungimea de alunecare liberă echivalentă :

$$L_a^{\text{II}} = \frac{A_b^{\text{II}} (1 - \mu)}{2 A_b (1 - \mu + n\mu) - \mu n A_b^{\text{II}}} \left[ L_a + w_e \left( 1 - \frac{1}{4L_a} \right) \right] \quad (2.99)$$

Dacă se alege  $A_b^{\text{II}} = A_b$  :

$$L_a^{\circ} = \frac{1}{2} \left[ L_a + w_e \left( 1 - \frac{1}{4L_a} \right) \right] \quad (2.100)$$

Iar pentru o singură fisură ( $w_e = 0$ ) :

$$L_a^{\circ} = \frac{1}{2} L_a$$

În calculul numeric, se evaluează mai întâi  $2L_a^{\circ}$  din (2.100) pentru  $A_b^{\text{II}} = A_b$  (distanța 36 în fig. 2.21.c). Apoi corectăm lungimea la  $2L_a^{\text{II}}$  care este între cele mai apropiate două noduri (24 în fig. 2.21.d) și rezultă  $A_b^{\text{II}}$  din (2.99). În continuare în programul de calcul de va considera că barele de arie  $A_b^{\text{II}}$  sînt legate direct între nodurile între care lungimea este  $2L_a^{\text{II}}$ .

Valoarea lui  $L_a^{\circ}$  și deplasările relative  $\gamma_1 = \gamma_2$  de la capetele barei cu lungimea  $L_a^{\circ}$  se unesc la obținerea efortului în armătură în dreptul fisurii :

$$\zeta_a = E_a (\gamma_2 - \gamma_1) / L_a^{\circ} \quad (2.101)$$

## f. Rigiditatea betonului armat plasticizat.

În domeniul plastic componentele rigidității reprezintă incrementele de eforturi datorate unor incremente de deformații. În timp ce unele dintre componentele materialului sînt în domeniul plastic, altele sînt încă în domeniul elastic, astfel încît rigiditatea resultantă este o combinație a rigidităților plastice și plastice.

### f.1. Plasticizarea betonului comprimat nefisurat.

Sedarea plastică a betonului poate fi descrisă aproximativ prin criteriul de curgere V. Lises.

Variația deformației specifice corespunzătoare unei variații

infinitesimale a stării de tensiune poate fi împărțită într-o componentă elastică și una plastică :

$$\delta \epsilon = \delta \epsilon_e + \delta \epsilon_p \quad (2.102)$$

Componentei elastice îi corespunde expresia cunoscută :

$$\delta \epsilon_e = D_b^{-1} \delta \sigma_b \quad (2.103)$$

iar componenta plastică rezultă din legea de curgere :

$$\delta \epsilon_p = \frac{\partial F}{\partial \sigma_b} = \lambda q \quad (2.104)$$

în care  $\lambda$  este o constantă de proporționalitate iar  $F$  este condiția de curgere V. Mises:

$$F(\sigma_b) = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} - R_0 = 0 \quad (2.105)$$

Prin derivare se obține :

$$q^T = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_b} \right]^T = \frac{1}{R_0} \left[ (\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2}) \quad (\sigma_y - \frac{\sigma_x}{2}) \quad 3\tau_{xy} \right] \quad (2.106)$$

Ținând seama de (2.103) și (2.104), relația (2.102) se scrie :

$$\delta \epsilon = D_b^{-1} \delta \sigma_b + \lambda q \quad (2.107)$$

Variația stării de tensiune  $\delta \sigma_b$  este condiționată de condiția de curgere (2.105), care prin diferențiere dă :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} = 0 \quad ($$

respectiv matric al :

$$q^T \delta \sigma_b = 0 \quad (2.108)$$

Ecuațiile (2.107) și (2.108) pot fi scrise împreună sub forma :

$$\begin{Bmatrix} \delta \epsilon \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_b^{-1} & q \\ q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \sigma_b \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (2.109)$$

Pentru eliminarea parametrului  $\lambda$  și inversarea relațiilor (2.109) se poate proceda în modul următor /24/ : din (2.107) rezultă relația :

$$\delta \sigma_b = D_b (\delta \epsilon - q \lambda) \quad (2.110)$$

care introdusă în (2.108) permite explicitarea lui  $\lambda$  :

$$\lambda = (q^T D_b q)^{-1} q^T D_b \delta \epsilon \quad (2.111)$$

astfel încât (2. ) devine forma diferențială a legii fizice :

$$\delta \sigma_b = D_b (I - \Omega) \delta \epsilon \quad (2.112)$$

$$\delta \sigma_b = D_{br} \delta \epsilon \quad (2.112)$$

matricea tangentă a rigidităților finale :

$$D_{br} = D_b (I - \Omega) \quad (2.113)$$

în care I este matricea unitate,  $\Omega = qq^T D_b \Psi^{-1}$  cu  $\Psi = q^T D_b q$ .

Matricea elasto-plastică reprezintă rigiditatea instantanee a betonului în stadiul plastic ca o funcție de eforturile existente  $\sigma_b$ . Ea modelează o comportare perfect plastică în starea plană de tensiuni.

### f.2. Plasticizarea betonului fisurat.

Betonul fisurat este în starea uniaxială de eforturi și deci relațiile acestei stări sînt direct aplicabile. Cînd materialul atinge limita de curgere, se consideră că betonul este perfect plastic și rigiditatea lui este zero pentru un increment de deformații. Deci modulul instantaneu  $E_b = 0$ . În consecință și matricea de rigiditate este nulă :

$$D_b = 0 \quad (2.114)$$

### f.3. Plasticizarea armăturii.

Plasticizarea armăturii este analoagă celeia a betonului fisurat. Deci cînd se obține limita de curgere :

$$D_a = 0 \quad (2.115)$$

## 2.4.2.6. Analiza incrementală

### a. Formularea problemei

Pentru determinarea analitică a distribuției eforturilor și deformațiilor unei structuri supuse unei încărări trebuie satisfăcute condițiile de echilibru și compatibilitatea deformațiilor împreună cu legile constitutive ale materialului.

În general, relațiile eforturi - deformații nu sînt lineare pe parcursul istoriei încărării datorită în principal fisurării și plasticizării. Totuși, se presupune că pentru modificări mici de eforturi acestea sînt liniare. În acest caz relațiile eforturi - deformații pot fi scrise sub formă diferențială :

$$\delta \sigma = D_{\sigma, \epsilon} \delta \epsilon \quad (2.116)$$

in care  $\delta \sigma$  reprezintă vectorul diferențial al eforturilor datorite unei încălcări  $\delta P$ , iar  $\delta \epsilon$  cel al deformațiilor.

Matricea  $D_{\sigma, \epsilon}$  este rigiditatea instantanee a materialului. Elementele acestei matrice sînt constante în raport cu  $\sigma$  și  $\epsilon$ , dar sînt funcții de eforturile  $\sigma$  și deformațiile  $\epsilon$  care variază în structură. În acest motiv  $D_{\sigma, \epsilon}$  este diferit de la punct la punct din cauza neomogenității structurii și expresia ei este funcție de starea materialului în treapta respectivă de încărcare.

Eforturile și deformațiile se obțin prin integrare pe parcursul încălcării  $P$  :

$$\sigma = \int_P \delta \sigma \quad , \quad \epsilon = \int_P \delta \epsilon \quad (2.117)$$

Problema expusă mai sus poate fi clasificată ca o analiză inelastică neliniară a unui corp neomogen anizotrop, a cărei soluții (exceptînd corpurile foarte simple) sînt practic imposibil de obținut. Din acest motiv trebuie utilizată o analiză numerică.

Analiza numerică se realizează prin incremente de încărcare  $\Delta P$  care produc incremente de eforturi  $\Delta \sigma$  și de deformații  $\Delta \epsilon$ . Relația (2.116) este aproximativ valabilă și pentru cazul incremental, deci :

$$\Delta \sigma = D_{\sigma, \epsilon} \Delta \epsilon \quad (2.118)$$

Eforturile și deplasările se obțin prin însumarea valorilor incrementale :

$$\sigma = \sum_P \Delta \sigma \quad , \quad \epsilon = \sum_P \Delta \epsilon \quad (2.119)$$

după care prin diferențiere se obțin deformațiile.

Procedul numeric poate fi rezumat la cinci pași, a căror secvență este reprezentată în fig.2.22 :

1. se specifică incrementul  $\Delta P$ ,
2. se determină  $D_{\sigma, \epsilon}$  pe baza eforturilor și deformațiilor existente,
3. se calculează eforturile și deplasările incrementale  $\Delta \sigma$  și  $\Delta \epsilon$  utilizînd rigiditatea  $D_{\sigma, \epsilon}$  și încălcarea  $\Delta P$ ,
4. se adaugă eforturile și deplasările incrementale la cele existente,  $\sigma' = \sigma + \Delta \sigma$  și  $\epsilon' = \epsilon + \Delta \epsilon$ , apoi se calculează noile deformații  $\epsilon'$ ,
5. se determină noua rigiditate  $D'_{\sigma, \epsilon'}$ . Dacă  $D'_{\sigma, \epsilon'}$  diferă

de  $D_{\xi, \epsilon}$  se reia ciclul de la pasul 3. Pași 3, 4 și 5 se pot repeta pînă ce  $D_{\xi, \epsilon}$  nu se mai modifică.

### b. Forțele de transfer

Metoda forțelor de transfer se poate generaliza și utiliza pentru orice modificări structurale elastice sau inelastice.

În cazul modificărilor elastice, presupunînd că o structură are înainte de modificări, matricea de rigiditate  $K$ , deplasările  $U$  și vectorul încărcărilor  $X$ , acestea sînt legate prin relația :

$$X = KU \quad (2.120)$$

Dacă vectorul deplasărilor  $U$  este fix, iar matricea de rigiditate se modifică la  $K^0$  atunci vectorul forțelor se modifică și el la :

$$X^0 = K^0 U \quad (2.121)$$

așa încît :

$$\begin{aligned} X &= X^0 + \Delta X \\ K &= K^0 + \Delta K \end{aligned} \quad (2.122)$$

Diferența  $\Delta X$  reprezintă aici forțele de transfer  $\bar{F}$  care se pot determina din relația :

$$\bar{F} = \Delta K U \quad (2.123)$$

Deplasările  $\Delta U$  cauzate de  $\bar{F}$  pe structura modificată  $K^0$  se pot determina din ecuația :

$$\bar{F} = K^0 \Delta U \quad (2.124)$$

Vectorul original al forțelor se poate restaura prin adăugarea forțelor de transfer :

$$X = X^0 + \bar{F} \quad (2.125)$$

Înlocuind (2.121) și (2.124) în (2.125) rezultă :

$$X = K^0 U + K^0 \Delta U = K^0 U^0 \quad (2.126)$$

în care :

$$U^0 = U + \Delta U \quad (2.127)$$

reprezintă deplasările după modificarea elastică.

Ecuațiile (2.120), (2.124) și (2.127) reprezintă soluția forțelor de transfer în cadrul unei modificări elastice a matricei de rigiditate a structurii. Procesul poate fi ilustrat de diagrama din fig.2.23.a. Dacă forțele de transfer nu se obțin dintr-o modificare elastică atunci procesul forțelor de transfer este ilustrat de figura 2.23.b.

### c. Procesul de fisurare

#### c.1. Formarea fisurilor.

În capitolul 4 sînt prezentate principalele metode pentru








0	1	2	3	4
				
beton nefisurat	fisuri dupa o directie	primul set de fisuri inchis	primul set inchis al doilea deschis	un set de soluti de fisuri inchise

Fig.2.27

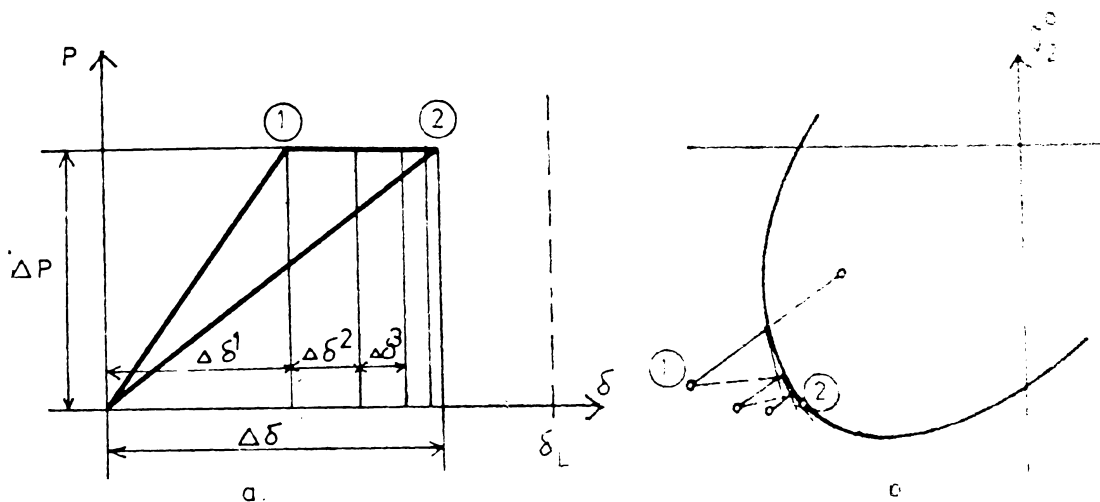


Fig.2.28

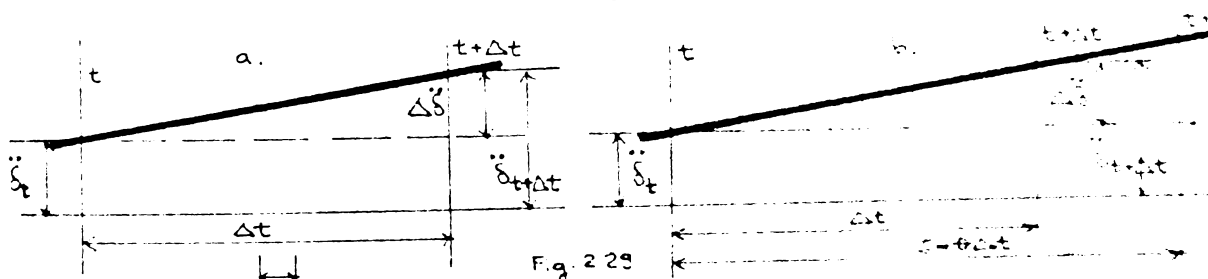


Fig.2.29

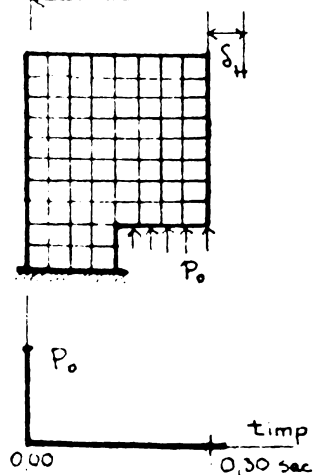


Fig.2.30

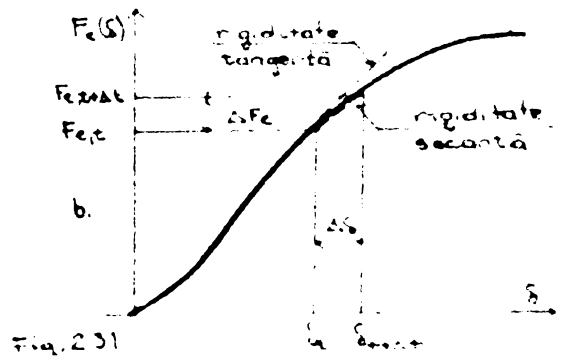
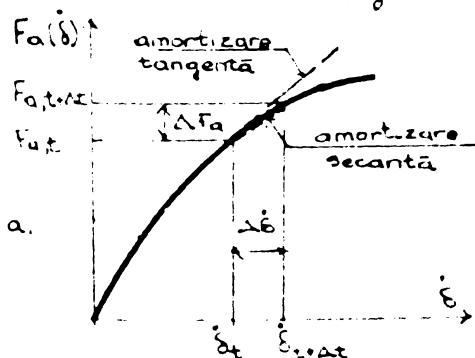
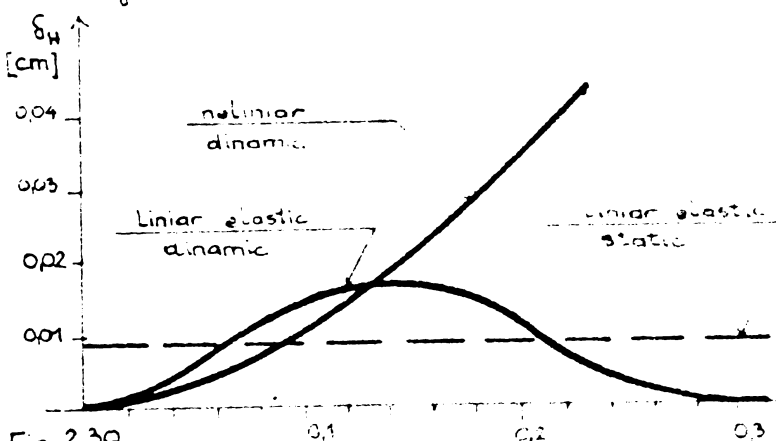


Fig.2.31

rezolvarea problemelor neliniare. Matricile rigidităților materialelor sînt valabile pentru anumite stadii de lucru ale materialului deci pentru a pune în evidență trecerea de la un stadiu de lucru la următorul se impune calculul incremental.

Deoarece fisurarea betonului este descrisă printr-o relație liniară (2.70) aceasta va fi mai bine reprezentată prin metoda tangentelor, obișnuită (Newton) sau simplificată (Newton - modificată):

1. Unui nivel de încărcare  $P_1$  îi corespunde deplasarea  $\delta_1$ , elementul considerat nefiind fisurat, deci efortul unitar în beton  $\sigma_{1b}^1 < R_t$ .

2. Se aplică incrementul de încărcare  $\Delta P$ , găsindu-se creșterea deplasării  $\Delta\delta_1$ . Prin însumare rezultă  $P_2 = P_1 + \Delta P$ ,  $\delta_2 = \delta_1 + \Delta\delta_1$ ,  $\sigma_{1b}^2 = \sigma_{1b}^1 + \sigma_{1b}$ .

3. Dacă această tensiune depășește rezistența la întindere  $\sigma_{1b}^2 > R_t$ , rigiditatea  $K_1$  se reduce la  $K_2$  corespunzător situației fisurate (fig.2.25.a).

4. Tensiunea  $\sigma_{1b}^2 = \sigma_1$  nemaiputînd fi preluată de element, se transferă structurii prin forțele de transfer  $\bar{F}$ , astfel încît echilibrul să fie menținut. Sub acțiunea acestora se obțin deplasarea  $\Delta\delta_2$ , astfel încît  $\delta_3 = \delta_2 + \Delta\delta_2$ , încărcarea  $P_2$  rămînd nemodificată (fig.2.25.b).

5. Dacă nu au apărut fisuri în alte elemente sau eventual în același element, iterația s-a terminat și se aplică un nou increment al încărcării.

Vectorul forțelor de transfer  $\bar{F}$  ale unui element de beton fisurat se obține din eforturile de transfer  $\sigma_1$  care este interpretată ca tensiune inițială, cu componentele (fig.2.24) :

$$\sigma_t = T^T \sigma_1 = \begin{bmatrix} c^2 \sigma_1 & s^2 \sigma_1 & 2cs \sigma_1 \end{bmatrix}^T \quad (2.128)$$

Forțele nodale de transfer vor fi :

$$\bar{F} = \int E^T \sigma_t dV \quad (2.129)$$

O procedură similară se adoptă și în cazul specificării unor incremente de deplasare  $\Delta\delta$  (fig.2.25.c). Diferența caracteristică este în pasul 4 al diagramei în care incrementul de forță  $\Delta P_2$  rezultat din forțele de transfer  $\bar{F}$  este negativ și deci forța finală  $P_3 < P_2$ . Forța în acest caz, poate fi considerată că e reacțiune pentru deplasarea specificată și aceasta se reduce scade rigiditatea datorată fisurării.

Se face observația că criteriul  $\sigma_{yb}^2 \geq R_t$  permite și fisurarea sub tensiuni mai mari decât rezistența la întindere a betonului. Proșura introdusă depinde de mărimea incrementului de încărcare  $\Delta P$ , ales independent de procesul de fisurare. În acest fel se asigură avantajul luării în considerare simultan a tuturor fisurilor ce se dezvoltă la un nivel de încărcare.

Fisurarea este un proces elastic în sensul că nu produce niciun efect rezidual. Fisurarea modifică structura elastică; aceasta este elastică și înainte și după fisurare.

### c.2. Închiderea fisurilor.

Criteriul de închidere a fisurilor este dat în termeni de deformații, așa cum s-a prezentat în subcap. 2.4.2.5.c. Închiderea fisurilor are loc când deformația perpendiculară pe fisură egalează deformația betonului  $\epsilon_{yb}$ . Mărimea incrementării fiind independentă de modificările materialului, schimbarea poate avea loc în cadrul unui increment. Deci criteriul se poate scrie sub forma unei inegalități (fig.2.24) :

$$\epsilon_x^0 \leq \epsilon_{yb}^0 \quad (2.13)$$

Dacă  $\epsilon_x^0 < \epsilon_{yb}^0$  în element apar deformații de compresie incompatibile cu deformația elementului. Dacă fisura se închide în cadrul unui increment, atunci în sfârșitul acestuia apar eforturi la suprafețele de contact ale fisurii. Pentru a determina aceste eforturi și a restabili echilibrul se utilizează metoda forțelor de transfer. Procesul este reprezentat grafic în fig.2.26 și conține următorii pași :

1. În stadiul inițial încărcarea este  $P_1$ , deplasarea  $\delta_1$ , efortul în betonul fisurat  $\sigma_{yb}^1$ , iar deformațiile  $\epsilon^1$ . Fisurile sînt deschise deoarece  $\epsilon_x^1 > \epsilon_{yb}^1$ . Deschiderea fisurilor pe unitate de lungime este  $\Delta \epsilon^1 = \epsilon_x^1 - \epsilon_{yb}^1 > 0$ .

2. Se aplică incrementul de încărcare  $\Delta P$  și se obțin  $\Delta \delta_1$ ,  $\Delta \sigma_{yb}$ ,  $\Delta \epsilon$ . Incrementele se adaugă la valorile inițiale :

$$P_2 = P_1 + \Delta P, \quad \delta_2 = \delta_1 + \Delta \delta_1, \quad \sigma_{yb}^2 = \sigma_{yb}^1 + \Delta \sigma_{yb}, \quad \epsilon^2 = \epsilon^1 + \Delta \epsilon$$

Presupunând că noile deformații satisfac criteriul (2.13)  $\epsilon_x^2 \leq \epsilon_{yb}^2$  și deci deschiderea fisurii va fi negativă  $\Delta \epsilon^2 = \epsilon_x^2 - \epsilon_{yb}^2 < 0$  ceea ce viciază compatibilitatea deformațiilor.

3. Pentru restabilirea compatibilității deformațiilor, trebuie găsit punctul corespunzător închiderii unei fisurii care este ad

tuat undeva între stadiul 1 și 2. Acest punct notat cu C în fig. 2.26 se poate determina ușor deoarece eforturile și deformațiile variază liniar între stadiul 1 și 2 :  $C = \Delta \varepsilon^2 / (\Delta \varepsilon^2 - \Delta \varepsilon^1)$ . Deci partea din incrementalul de deformații incompatibilă cu deformațiile betonului va fi  $\Delta \varepsilon^2 - \Delta \varepsilon \cdot C$ .

Rigiditatea materialului trebuie modificată de la figurat la nefisurat. Când compatibilitatea deformațiilor este satisfăcută, eforturile  $\Delta \sigma_b^2$  datorită lui  $\Delta \varepsilon^2$  sînt  $\Delta \sigma_b^2 = D \Delta \varepsilon^2$ . Aceste eforturi nu sînt echilibrate în sonde înconjurătoare, din cauză că au fost introduse atunci cînd compatibilitatea deformațiilor a fost restabilită.

4. Se restabilește echilibrul cu ajutorul forțelor de transfer  $\bar{F}$  calculate din  $\Delta \sigma_b^2$ . Deplasările și eforturile finale se obțin prin suprapunerea rezultatelor actuale peste cele existente.

O procedură similară se aplică și în cazul incrementalului de deplasare  $\Delta \delta$ .

### c.3. Redeschiderea fisurilor.

Redeschiderea fisurilor este similară procesului de fisurare cu deosebirea că rezistența betonului este zero. Deci deschiderea fisurilor închise are loc cînd efortul normal pe fisură satisface condiția :

$$\sigma_{\perp} \geq 0 \quad (2.131)$$

Cînd fisurile se deschid eforturile normale și tangențiale trebuie redistribuite prin intermediul forțelor de transfer.

### c.4. Moduri de fisurare.

O listă a stărilor de fisurare în elementele finite este prezentată în fig. 2.27. Modificările de la un stadiu la altul sînt:

- 0  $\rightarrow$  1 deschiderea primului set de fisuri
- 1  $\rightarrow$  2 închiderea primului set de fisuri
- 2  $\rightarrow$  3 deschiderea celui de al doilea set de fisuri
- 3  $\rightarrow$  4 închiderea celui de al doilea set de fisuri
- 2  $\rightarrow$  1 redeschiderea primului set de fisuri
- 4  $\rightarrow$  3 redeschiderea celui de al doilea set de fisuri.

Pot fi luate în considerare și alte moduri de fisurare ca de exemplu deschiderea simultană a două seturi de fisuri.

## 4. Procesul de plasticizare

### 4.1. Plasticizarea armăturii și a betonului fisurat.

Atît armătura cît și betonul fisurat sînt în starea de tensiune monoaxială, deci rigiditățile materialelor sînt niște matrici nule după punctul de curgere.

Curgerea armăturii începe când efortul în armătură  $\sigma_1^a$  atinge limite de curgere  $\sigma_0^a$ . Aceasta însă poate să apară în mijlocul unui increment de încărcare așa încît la sfîrșitul incrementului de încărcare să avem :

$$\sigma_1^a > \sigma_0^a \quad (2.131)$$

Limite de curgere este depășită cu :

$$\Delta \sigma_1^a = \sigma_1^a - \sigma_0^a \quad (2.132)$$

Aceste eforturi neputînd fi preluate de armătură trebuie eliminate prin forțele de transfer. Forțele de transfer paralele cu armătura sînt :

$$\sigma_{t1} = \mu \Delta \sigma_1^a \quad (2.133)$$

în care  $\mu$  este coeficientul de ancare.

Elasticizarea betonului fisurat este analogă ceaui armăturilor. Curgerea apare atunci cînd  $\sigma_1^b \geq \sigma_0^b$  iar forțele de transfer în direcția paralelă fisurilor sînt :

$$\sigma_{t1} = \Delta \sigma_1^b = \sigma_1^b - \sigma_0^b \quad (2.134)$$

Trecerea din stadiul plastic în stadiul elastic este determinată de verificarea lucrului mecanic plastic incremental  $\Delta W_p$ . Materialul este plastic numai dacă  $\Delta W_p \geq 0$ . Dacă  $\Delta W_p < 0$ , înseamnă că elementul este descărcat și materialul este elastic. Lucrul mecanic plastic pentru armătură este :

$$\Delta W_p^a = \mu \sigma_1^a \Delta \epsilon_1^{ap} \quad (2.135)$$

în care  $\Delta \epsilon_1^{ap}$  este deformația plastică în oțel. Lucrul mecanic plastic pentru betonul fisurat este :

$$\Delta W_p^b = \sigma_1^b \Delta \epsilon_1^{bp} \quad (2.136)$$

în care  $\sigma_1^b$  este efortul în beton iar  $\Delta \epsilon_1^{bp}$  este deformația plastică în beton pe direcția fisurilor.

#### 4.2. Plasticizarea betonului comprimat binomial.

Rigiditatea betonului plasticizat a fost prezentată în punctul 2.4.2.5.f.1. Pentru luarea în considerare a nolinearității datorite curgerii betonului comprimat biaxial, Sarvenka recomandă schema din figura 2.23. Aceasta aproximează soluția pentru problemă nelineară ca o serie de aproximații. O soluție elasto-plastică trebuie să satisfacă condițiile de elasticitate (echilibrul eforturilor, compatibilitatea deformațiilor, relațiile elastice dintre eforturi și

deformații). Soluția elastică poate fi considerată ca o primă aproximație a soluției elasto-plastice. Apoi eforturile se redistribuie structurii utilizând o serie de soluții elastice pînă ce condițiile de plasticizare sînt satisfăcute. Etapele care se parcurg în cadrul acestui tip de analiză elasto-plastică așa cum sînt descrise în /24/ sînt următoarele :

1. Aplicînd incrementul de încărcare  $\Delta P$  rezultă incrementul de tensiuni  $\Delta \sigma_b^1$  respectiv de deformații  $\Delta \epsilon^1$ . Prin însumare cu valoarea anterioară se obține tensiunea  $\sigma_b^2$ , cu care se verifică condiția de curgere (2.105). Dacă  $F(\sigma_b^2) < 0$  elementul finit este încă elastic.

2. Dacă  $F(\sigma_b^2) > 0$ , iar la nivelul de încărcare  $P_1$  circa i s-a aplicat incrementul încălzirii elementul a curg, deci  $F(\sigma_b^1) = 0$ , incrementul admisibil al tensiunilor care satisfac condiția de plasticitate sînt :

$$\Delta \sigma_b^2 = D_{\sigma \epsilon}^{-1} \Delta \epsilon^1 \quad (2.137)$$

matricea tangentă  $D_{\sigma \epsilon}^{-1}$  fiind calculată cu tensiunile  $\sigma_b^1$ . Tensiunile ce nu pot fi preluate de materialul plasticizat sînt deci :

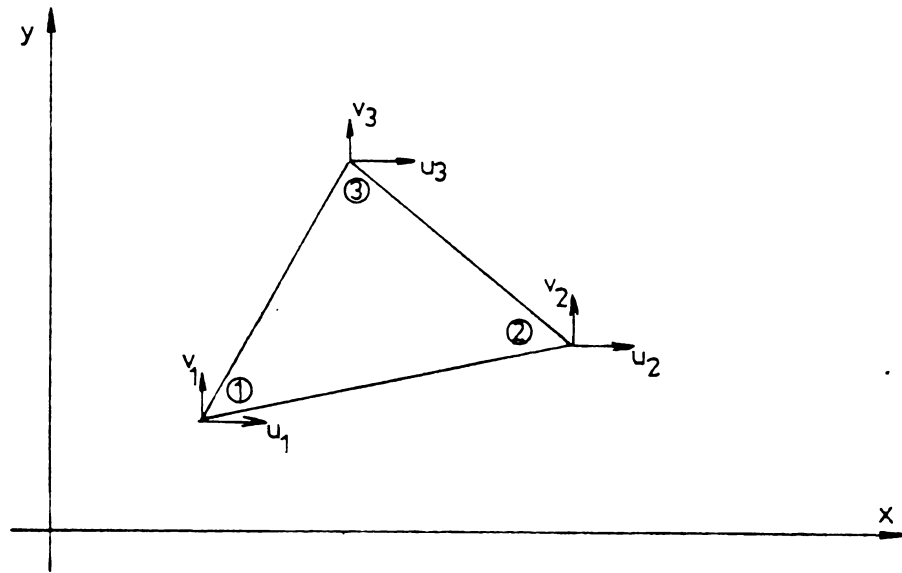
$$\Delta \sigma_b^3 = \Delta \sigma_b^1 - \Delta \sigma_b^2 \quad (2.138)$$

3. Dacă  $F(\sigma_b^2) > 0$ , iar la nivelul de încărcare  $P_1$  de la baza incrementului încălzirii condiția (2.105) a fost de forma  $F(\sigma_b^1) < 0$ , elementul fiind elastic, trebuie găsită valoarea intermediară a tensiunii  $\sigma_b^0$  ce corespunde începutului curgerii, incrementul tensiunii trebuind să pornească din acest punct :  $\Delta \sigma_b^1 = \sigma_b^2 - \sigma_b^0$ . Similar se procedează cu  $\Delta \epsilon^1$ , urmînd pașii de la punctul 2.

4. Cu tensiunile de transfer  $\sigma_b^3 = \Delta \sigma_b^3$ , rezultă forțele de transfer  $\bar{P}$ . Calculînd structura sub acțiunea lui  $\bar{P}$ , matricea rigidităților rămînd nemodificată, se obține un nou set de incrementi  $\Delta \sigma_b^1$  și  $\Delta \epsilon^1$ .

5. Se repetă pașii 1 pînă la 4 pînă ce tensiunile  $\sigma_b^3$  devin suficient de mici.

Soluția iterativă este ilustrată în fig.2.28 prin diagrama forță - deplasare (a), și prin diagrama cantității de curgere (b). Punctul 1 indică prima aproximație elastică care violează condiția de curgere. Punctul 2 este soluția finală elasto-plastică cu eforturile pe suprafața de curgere.



— matricea diagonală a masei

$$m = \frac{\rho V}{3}$$

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

— matricea consistentă a masei

$$m = \frac{\rho V}{12}$$

2	1	1	0	0	0
1	2	1	0	0	0
1	1	2	0	0	0
0	0	0	2	1	1
0	0	0	1	2	1
0	0	0	1	1	2

$\rho$  = densitatea materialului

$V$  = volumul elementului finit

$$\{\delta\}^T = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3\}$$

Fig. 2.32

La atingerea stadiului de colaps, se produce deformări nelimitate iar punctul 2 pe diagrama încărcare - deplasare tinde către infinit. Procesul iterativ în acest caz nu converge. Din acest motiv, se definește o deplasare limită  $\delta_L$  la care iterația se oprește.

Este evident (pasul 2) că dacă elementul este descărcat procesul urmează în mod autonom soluția elastică.

### d.3. Limita plasticizării betonului.

Pentru betonul solicitat uniaxial se definește limita deformațiilor totale  $\epsilon_L$  pînă la care betonul se consideră plasticizat. Aceasta poate fi aplicată direct curgerii betonului fisurat. Dacă deformațiile  $\epsilon_1$  paralele cu fisurile satisfac condiția :

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_L \quad (2.139)$$

atunci betonul este complet zdrobit și se consideră eliminat din lucru.

Pentru betonul solicitat biaxial în stare plană de tensiuni se definește o deformație limită echivalentă  $\epsilon^{eq}$  asociată criteriului V. Mises :

$$\epsilon^{eq} = \left( \epsilon_x^2 - \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y^2 + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^2 \right)^{1/2} \quad (2.140)$$

Condiția limită pentru deformațiile plastice este :

$$\epsilon^{eq} \geq |\epsilon_1| \quad (2.141)$$

Odată cu atingerea deformației plastice limită echivalente rigiditatea betonului se consideră nulă  $D_b = 0$ .

## 2.5. Dinamica structurilor în starea plană de tensiuni

### 2.5.1. Studiul în domeniul elastic

#### 2.5.1.1. Ecuații de mișcare pentru sisteme cu mai multe grade de libertate.

Dinamica constituie o arie largă de aplicabilitate în metoda elementelor finite, deoarece multe probleme de dinamică nu pot fi rezolvate efectiv prin metode analitice.

Se pot deosebi patru tipuri de probleme de analiză dinamică: vibrații libere, răspunsul la o excitație instantanee, răspunsul transform în excitații oarecare și răspunsul la excitații repetate.

În toate cazurile menționate mai sus, forțele aplicate sînt variabile în timp, ceea ce implică variația în timp a deplasărilor



De asemenea, în multe cazuri în care încărcările sînt dependente de timp, trebuie luate în considerare forțele de inerție. Dacă energia disipată în timpul mișcării are valori semnificative, trebuie inclusă în analiză și proprietățile de amortizare ale structurii. În acest caz ecuațiile de echilibru ale sistemului vor fi :

$$\ddot{S} + C\dot{S} + K S = F \quad (2.142)$$

în care  $M$  este matricea maselor,  $C$  matricea de amortizare,  $\ddot{S}$  vectorul accelerațiilor,  $\dot{S}$  vectorul vitezelor; ceilalți termeni avînd semnificațiile din relația (2.30).

Din punct de vedere matematic, (2.142) reprezintă un sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul  $2n$  care, în principiu se rezolvă prin procedeele standard de rezolvare a ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți. De cele mai multe ori însă, această rezolvare este oneroasă datorită numărului mare de ecuații. Din acest motiv, pentru rezolvare se utilizează o serie de metode numerice, care în principal se împart în două categorii și anume : metoda integrării și suprapunerea modală. Aceste două tehnici de calcul în aparență diferite sînt de fapt foarte apropiate și alegerea uneia sau a alteia este determinată numai de eficiența lor numerică.

#### 2.5.1.2. Evaluarea matricei maselor.

În calcule se utilizează două tipuri de matrice a maselor : matricea consistentă și matricea diagonală. Prima se obține prin aplicarea principiului lui Hamilton. Cea de a doua se alcătuiește direct pe baza ipotezei că toate masele aferente unui nod se concentrează în nodul respectiv. În acest sens există o analogie evidentă între cele două matrice ale maselor și cele două tipuri de vectori ai încărcărilor, consistent și diagonal.

În cazul unui element finit, matricea consistentă este definită de relația :

$$M = \int_V \rho \bar{N}^T M \bar{N} dV \quad (2.143)$$

în care  $\rho$  este densitatea materialului, iar  $M$  matricea coeficienților pentru câmpul de deplasări. Matricea se consideră consistentă deoarece se utilizează aceleași funcții de deplasări ca și cele utilizate în alcătuirea matricii de rigiditate. Dacă modelul de deplasări utilizat este complet și conform, frecvențele obținute dintr-o formulare consistentă pot fi privite ca fiind marginile superioare ale frecvențelor reale, iar deplasările ca margini inferioare.

Matricea diagonală a maselor se obține, într-o primă formulare, concentrând masele aferente în nodurile unde s-au definit gradele de libertate ale structurii. Atât rotațiile cât și translațiile pot fi tratate la fel. Se poate scrie o expresie analogă expresiei (2.144) :

$$m = \int_V \rho \Psi^T \Psi dV \quad (2.145)$$

în care  $\Psi$  este matricea funcțiilor  $\Psi_i$ , care are valoare unitară în zona aferență nodului  $i$  și zero în alte zone.

Matricea consistentă supraestimează frecvențele, în timp ce matricea diagonală subestimează frecvențele.

În fig.2.32 sînt reprezentate matricea diagonală și consistentă pentru un element finit triunghiular în starea plană de tensiuni.

### 2.5.1.3. Matricea de amortizare

În practică este deosebit de dificil, dacă nu chiar imposibil, de a determina, pentru un ansamblu de elemente finite, matricea de amortizare, în particular deoarece proprietățile de amortizare sînt dependente de frecvență. În acest motiv, matricea  $C$  nu se evaluează prin asamblarea matricelor elementelor, dar se construiește prin utilizarea lui  $\alpha$  și  $\beta$ . O astfel de formulare este modelul Rayleigh :

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2.146)$$

$\alpha$  și  $\beta$  fiind constante care urmează a fi determinate din două fracțiuni din amortizarea critică date corespunzătoare la două frecvențe negative. În acest sens, spre exemplu, Wilson utilizează următoarea relație :

$$c_1 = \frac{\alpha}{2 \omega_1} + \frac{\beta \bar{\omega}_1}{2} \quad (2.147)$$

în care  $\omega_1$  este frecvența nodului 1. Ecuația (2.147) poate fi scrisă și ca :

$$c_1 = \left( \frac{\bar{\omega}}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\bar{\omega}} \right) \bar{c}/2 \quad (2.148)$$

în care  $\bar{c}$  este valoarea fracțiunii din amortizarea critică, iar  $\bar{\omega}$  frecvența corespunzătoare lui  $\bar{c}$ . Ecuația (2.148) poate fi utilizată pentru a obține curbele  $c_1$  dependente de  $\bar{\omega}/\omega_1$  pentru diferite valori ale lui  $\bar{c}$ . În acest fel, dacă rangul frecvenței și fracțiunea din amortizarea critică sînt selectate,  $\alpha$  și  $\beta$  pot fi calculate prin :

$$\alpha = \frac{\bar{c}}{\bar{m}} \quad (2.149)$$

$$\beta = \frac{\bar{c}}{\bar{m}} \quad (2.150)$$

Wilson a dezvoltat și o altă metodă pentru obținerea lui  $\bar{c}$  dar care implică rezolvarea valorilor proprii în vederea obținerii matricii modale  $\bar{X}$ , respectiv spectrale  $\Lambda$ :

$$\bar{c} = 2 \bar{X} \bar{c} \Lambda^{\frac{1}{2}} \bar{X}^T \quad (2.151)$$

în care  $\bar{c}$  este matricea diagonală a fracțiilor din amortizarea critică iar :

$$\bar{X} = \bar{X}^T \bar{X} \quad (2.152)$$

#### 2.5.1.4. Metoda integrării numerice directe

##### a. Introducere în metoda integrării numerice.

În integrarea directă ecuațiile din (2.142) se integrează utilizând un procedeu pas cu pas, termenul "direct" înseamnă că nu are loc nici o transformare a ecuațiilor într-o altă formă. Durata pasului de timp se alege suficient de mică pentru obținerea unei precizii de calcul corespunzătoare. De asemenea, se aleg legi de variație pentru accelerațiile de răspuns pe durata pasului de timp. Deplasările și vitezele de răspuns se evaluează pe baza relațiilor din mecanică, funcție de accelerațiile de răspuns de la începutul și sfârșitul intervalului de calcul. Valorile de răspuns de la sfârșitul pasului de calcul devin valori inițiale pentru pasul de calcul următor.

Metoda nu necesită antegalerul valorilor și vectorilor proprii, are avantajul că se poate utiliza fără dificultăți la analiza dinamică neliniară a structurilor.

Cele mai utilizate metode de integrare numerică directă sînt : metoda diferenței centrale, Newmark -  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  și Wilson -  $\theta$ .

Aceste metode se împart în principal în două categorii de bază : explicite și implicite. La cele explicite, accelerațiile se obțin din ecuațiile de mișcare și apoi se integrează în vederea obținerii deplasărilor. Metodele implicite combină ecuațiile de mișcare cu o serie de operatori de integrare în timp așa încît deplasările se obțin direct. În general metodele implicite permit un interval de timp  $\Delta t$  mai mare însă necesită rezolvarea ecuațiilor la fiecare pas, în timp ce metodele explicite nu necesită rezolvarea anumitor ecuații dar cer un  $\Delta t$  mic pentru stabilitatea soluției.

Metoda diferenței centrale este numai condiționat stabili-

lită și se utilizează numai în procedeele explicite. În cadrul metodologiei implicite, Newmark  $\beta$  pentru  $\beta \geq 1/4$ , Coulbalt și Wilson -  $\theta$  sînt condiționat stabile.

Un aspect important al acestor metode îl constituie alegerea pasului de calcul  $\Delta t$ . În general se consideră ca o reprezentare bună a celei mai mici perioade proprii care au influență semnificativă în răspuns, se obține dacă  $\Delta t$  este  $\leq 1/10$  din valoarea ei.

În cazul structurilor cu comportare neliniară alegerea pasului de timp  $\Delta t$  trebuie făcută și în funcție de reprezentarea corectă a variațiilor în timp ale proprietăților structurale de rigiditate și amortizare.

De asemenea, trebuie să analizăm tendința acestor metode de a amortiza anumite componente de răspuns. În general, amortizările artificiale sînt mai pronunțate la frecvențele înalte și deci în probleme în care interesează mai ales frecvențele mici, efectul acestora este nesemnificativ.

În ceea ce privește convergența acestor metode în problemele neliniare, se subliniază că în prezent se cunoaște relativ puțin și de aceea semnificația ei în problemele inginerăști este încă nelămurită.

### b. metoda Wilson - $\theta$ .

Metoda Wilson  $\theta$  este în esență o extindere a metodei accelerațiilor liniare în pasul de calcul, în care se presupune că accelerația variază liniar în intervalul de timp de la  $t$  la  $t + \Delta t$ . (fig. 2.29.a). În metoda Wilson  $\theta$ , accelerația de răspuns variază liniar pe un interval de calcul  $\tau$  mai mare decât pasul de calcul  $\Delta t$  (fig. 2.29.b):

$$\tau = \theta \Delta t \quad \text{unde} \quad \theta \geq 1,37 \quad (2.153)$$

Creeșterea accelerației de răspuns  $\Delta \ddot{\delta}$  este calculată prin procedeul standard al accelerațiilor liniare dar aplicat pentru pasul de calcul extins  $\tau$ .

Dacă  $s$  este creeșterea în timp, în care  $0 \leq s \leq \theta \Delta t$ , atunci pentru intervalul de la  $t$  la  $t + \theta \Delta t$ , se presupune că :

$$\ddot{\delta}_{t+s} = \ddot{\delta}_t + \frac{s}{\theta \Delta t} (\ddot{\delta}_{t+\tau} - \ddot{\delta}_t) \quad (2.154)$$

Integrînd (2.154), se obține :

$$\dot{\delta}_{t+s} = \dot{\delta}_t + \ddot{\delta}_t s + \frac{s^2}{2\theta \Delta t} (\ddot{\delta}_{t+\tau} - \ddot{\delta}_t) \quad (2.155)$$

și :

$$\delta_{t+\tau} = \delta_t + \dot{\delta}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{\delta}_t \tau^2 + \frac{1}{60\Delta t} \tau^3 (\ddot{\delta}_{t+\tau} - \ddot{\delta}_t) \quad (2.156)$$

Utilizând (2.155) și (2.156), se obține, la timpul  $t + \tau$  :

$$\dot{\delta}_{t+\tau} = \dot{\delta}_t + \frac{\tau\Delta t}{2} (\ddot{\delta}_{t+\tau} + \ddot{\delta}_t) \quad (2.157)$$

$$\delta_{t+\tau} = \delta_t + \tau\Delta t \dot{\delta}_t + \frac{\tau^2\Delta t^2}{6} (\ddot{\delta}_{t+\tau} + 2\ddot{\delta}_t) \quad (2.158)$$

din care se poate obține  $\ddot{\delta}_{t+\tau}$  și  $\dot{\delta}_{t+\tau}$  în funcție de  $\delta_{t+\tau}$  :

$$\ddot{\delta}_{t+\tau} = \frac{6}{\tau^2\Delta t^2} (\delta_{t+\tau} - \delta_t) - \frac{6}{\tau\Delta t} \dot{\delta}_t - 2\ddot{\delta}_t \quad (2.159)$$

$$\dot{\delta}_{t+\tau} = \frac{3}{\tau\Delta t} (\delta_{t+\tau} - \delta_t) - 2\dot{\delta}_t - \frac{\tau\Delta t}{2} \ddot{\delta}_t \quad (2.160)$$

relațiile (2.159) și (2.160) se introduc în sistemul general de ecuații de mișcare (2.142) considerat la momentul  $t + \tau$  :

$$m \ddot{\delta}_{t+\tau} + c \dot{\delta}_{t+\tau} + K \delta_{t+\tau} = P(t)_{t+\tau} \quad (2.161)$$

În cazul acțiunii seismice membrul drept din (2.161) se scrie :

$$P_{echiv}(t)_{t+\tau} = -m r \ddot{\delta}_s^s \quad (2.162)$$

$r$  fiind vectorul proiecțiilor vectorului unitar al cutremurului pe direcțiile gradelor de libertate dinamice, iar  $\ddot{\delta}_s^s$  accelerația seismică.

După prelucrări se obține sistemul pseudostatic pentru pasul de timp extins  $\tau$  :

$$K_{\tau} \Delta \delta_{\tau} = \Delta P_{\tau} \quad (2.163)$$

unde :

$$K_{\tau} = K + \frac{6}{\tau^2} m - \frac{3}{\tau} c \quad (2.164)$$

$$\Delta P_{\tau} = \Delta P + m \left( \frac{6}{\tau} \dot{\delta}_t + 3\ddot{\delta}_t \right) + c \left( 3\dot{\delta}_t + \frac{\tau}{2} \ddot{\delta}_t \right) \quad (2.165)$$

Sistemul (2.163) furnizează pe  $\Delta \delta_{\tau}$ .

Următoarele criterii asociate cu pasul de timp extins vor fi :

$$\Delta \delta_{\tau} = \tau \dot{\delta}_t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\delta}_t + \frac{\tau^2}{6} \Delta \ddot{\delta}_{\tau} \quad (2.166)$$

$$\Delta \dot{\delta}_\tau = \tau \dot{\delta}_t + \frac{\tau}{2} \Delta \ddot{\delta}_\tau \quad (2.167)$$

$$\Delta \ddot{\delta}_\tau = \frac{6}{\tau^2} \Delta \delta_\tau - \frac{6}{\tau} \dot{\delta}_t - 3 \ddot{\delta}_t \quad (2.168)$$

Creșterea accelerației în pasul de timp normal  $\Delta t$  se obține din (2.168) prin interpolare liniară :

$$\Delta \ddot{\delta} = \frac{1}{\tau} \Delta \ddot{\delta}_\tau \quad (2.169)$$

Creșterile corespunzătoare de deplasări și viteze în pasul de calcul  $\Delta t$  se obțin din (2.166) și (2.167) făcând modificările corespunzătoare.

## 2.5.2. Analiza dinamică neliniară

### 2.5.2.1. Conșiderații introductive

Neliniaritatea răspunsului dinamic se produce ca urmare a schimbării proprietăților fizice ale sistemului care au rămas constante pe durata acțiunii dinamice. Astfel, coeficienții de rigiditate pot suferi modificări prin variația proprietăților materialelor din structură. La fel este posibil ca masele sau coeficienții de amortizare să sufere schimbări pe durata răspunsului dinamic. De exemplu, există de obicei o relație de directă proporționalitate între amortizarea structurală și intensitatea mișcării seismice.

Analiza dinamică neliniară se face prin metoda integrării directe. Sistemul se consideră liniar - elastic pe durata pasului de calcul, păstrându-și caracteristicile sale structurale existente la începutul intervalului de calcul. La sfârșitul pasului de calcul caracteristicile structurale se calculează în funcție de starea de deformații sau eforturi de la momentul respectiv.

Algoritmul de calcul este necesar să fie necondiționat stabil dacă ecuațiile de mișcare sînt exprimate în coordonatele originale ale elementelor finite. Această cerință apare din cauza că perioada de vibrație a modului cel mai înalt a unei discretizări tipice cu elemente finite este atât de mică încît intervalul de calcul ar trebui să fie foarte mic pentru a menține stabilitatea soluției în cazul stabilității condiționate.

O comparație între rezultatele unui calcul efectuat în domeniul elastic și postelastie static și dinamic este reprezentată în fig.2.10. Se remarcă creșterea deplasărilor de răspuns în calculul dinamic neliniar, situație specifică structurii considerate.

### 2.5.2.2. Ecuații de echilibru dinamic într-un pas de timp

Ecuațiile (2.142) sînt valabile în ipoteza comportării liniar - elastice a structurii. În baza ipotezelor enunțate mai sus, rezultă că se pot scrie ecuațiile de echilibru dinamic pentru creșterile forțelor inerțiale, de amortizare, de rigiditate și de excitație. Rezultă ecuațiile de mișcare pentru creșterile de răspuns  $\Delta \ddot{\delta}$ ,  $\Delta \dot{\delta}$  și  $\Delta \delta$  la o creștere a excitației  $\Delta P(t)$  :

$$\Delta \ddot{\delta}(t) + C(t) \Delta \dot{\delta}(t) + K(t) \Delta \delta(t) = \Delta P(t) \quad (2.170)$$

Elementele matricilor de amortizare  $C(t)$  și de rigiditate  $K(t)$  sînt definite pentru un pas de timp, așa cum sînt reprezentate în figura 2.31. Coeficienții de influență se determină de regulă în funcție de parametrii de răspuns de la începutul intervalului de calcul :

$$C_{ij}(t) = \left( \frac{dF_{ij}}{d\dot{\delta}_{ij}} \right)_t \quad K_{ij}(t) = \left( \frac{dF_{ij}}{d\delta_{ij}} \right)_t \quad (2.171)$$

### 2.5.2.3. Varianta biografică de calcul dinamic neliniar

Procedura propusă utilizează elemente finite triunghiulare în starea plană de tensiune. Formularea necesită două tipuri de metode matematice :

- un model de material care să reprezinte comportarea neliniară a betonului armat la sollicitări alterne;
- un model analitic pentru urmărirea curbei caracteristice forță - deplasare a structurii supusă unei încălziri seismice.

Modelul materialului este cel prezentat în paragraful 2.4.2. El poate reproduce comportarea unui element de beton armat în starea plană de tensiune, realizînd fisurarea sau zdrobirea betonului, respectiv curgera armăturii. Este de asemenea încorporată formarea unui al doilea set de fisuri, închiderea primului set, respectiv redeschiderea lui.

Modelul analitic pentru analiza dinamică neliniară se bazează pe o matrice diagonală a maselor și utilizează metodailson 6 - necondiționat stabilă pentru integrarea pas cu pas a ecuațiilor de mișcare.

Ca și în analiza neliniară statică, la sfîrșitul fiecărui pas de timp în model se verifică starea fizică și violarea legilor constitutive. Modificările produse sînt evaluate calculîndu-se forțele de transfer care la rîndul lor se vor aplica pe structură avîndu-se în vedere și schimbările intervenite în rigiditatea acesteia.

Preluând ecuația (2.17) și scriind-o în pasul de timp extins  $\bar{t} = \theta \Delta t$  caracteristic metodei Wilson  $\theta$ , se obține sistemul pseudostatic :

$$\bar{r}(t)_{\bar{t}} \Delta \delta(t)_{\bar{t}} = \Delta F(t)_{\bar{t}} \quad (2.172)$$

în care :

$$\bar{r}(t)_{\bar{t}} = r(t) + \frac{6}{\Delta t^2} u + \frac{3}{\Delta t} \dot{c}(t) \quad (2.173)$$

$$\Delta \delta(t)_{\bar{t}} = \Delta r(t) + u \left( \frac{6}{\Delta t} \dot{\delta}_t + 3 \ddot{\delta}_t \right) + \dot{c}(t) \left( 3 \dot{\delta}_t + \frac{6}{\Delta t} \ddot{\delta}_t \right) \quad (2.174)$$

Calculule se continuă în continuare în mod similar cu algoritmul prezentat în paragraful 2.5.1.4.b.

Aste de reamintit că în sistemul (2.172), matricile de rigiditate și de amortizare  $r(t)$ ,  $c(t)$  variază în timp și trebuie recalulate pentru fiecare pas nou de calcul.

Pentru reprezentarea acțiunii seismice se utilizează relația (2.162) iar matricea de amortizare cea propusă prin relația (2.146).

Efectul forțelor de transfer se aplică în pasul de timp următor. Aceasta înseamnă că pentru fiecare interval de timp, în afară de primul, deplasările nodale se produc datorită a două efecte :

- incrementul de accelerație al solului;
- forțele de transfer generate în pasul anterior.

Matricea de rigiditate și de amortizare se actualizează pentru fiecare pas de timp având în vedere modificările apărute în structură.

Bibliografie : 6, 11, 15, 17, 19, 21, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 38, 41, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 78, 79, 85, 86, 88, 89, 95, 100, 101, 102, 106, 109, 115, 117, 118, 122, 123, 124, 125, 132, 133, 135, 136, 140, 145, 146, 147, 149, 158, 160, 162, 165, 169, 170, 173, 174, 176, 177.



### 3. TEORIA ECHIVALENTELOR ÎN CALCULUL DIAPHRAGMELOR

#### 3.1. Principiul teoriei echivalențelor

Considerând un corp (sistem) deformabil supus unor încălziri care provin dintr-un potențial  $w$  (fig.3.1.a), energia potențială totală  $\pi$  a sistemului (corpul + încălzirile), presupus conservativ este :

$$\pi = U + w, \quad (3.1)$$

unde  $U$  este energia potențială de deformare a corpului considerat.

Dacă se notează cu  $U_0$  densitatea energiei pe unitate de volum (fig.2.17.a), expresia precedentă se poate scrie :

$$\pi = \int_V U_0 dV + w \quad (3.2)$$

Minimizând funcționala  $\pi$ , se va găsi configurația de deformare a corpului care satisface ecuațiile de echilibru și condițiile la limită. Impunând deci condiția :

$$\delta\pi = 0 \quad (3.3)$$

se va găsi soluția sistemului.

Potențialul  $w$  al încălzirilor, în ipoteza că intensitatea acestora este independentă de starea de deformare a corpului asupra căruia acționează, este :

$$w = \oint_S p^i \phi ds - \sum F^i \phi = \int_V \kappa^i \phi dV, \quad (3.4)$$

unde  $S$  este vectorul încălzirilor concentrate aplicate pe suprafața exterioară  $S$  a corpului considerat;  $p$  - matricea încălzirilor repartizate pe suprafață;  $\kappa$  - matricea încălzirilor masice;  $\phi$  - matricea deplasărilor punctelor de aplicație, ale încălzirilor considerate.

Se consideră un al doilea corp (sistem) (fig.3.1.b), care ocupă același volum  $V$  ca și primul și care este supus aceluiași încălziri exterioare și forțe masice. Notând cu  $U_0^E$  densitatea energiei de deformare a acestuia, energia potențială totală  $\pi_E$  a acestui sistem (corpul + încălzirile), presupus conservativ, este :

$$\pi_E = \int_V U_0^E dV + w. \quad (3.5)$$

În mod similar, soluția sistemului se obține minimizând funcționala  $\pi_E$  deci :

$$\delta \Pi_E = 0 \quad (3.6)$$

In cazul in care :

$$\delta \Pi = \delta \Pi_E \quad (3.7)$$

se spune ca cele doua sisteme considerate sînt echivalente, pentru ca adica același colajii, adica același cimp de deformării. Trebuie deci sa fie respectata urmatoarea identitate :

$$\delta \Pi = \delta \Pi_E = 0 \quad (3.8)$$

Pornind de la aceasta constatare, se va putea inlocui analiza unui corp incarcat cu aceea a unui corp echivalent care are legi de comportare diferite.

Echivalența se poate stabili atit in cazul in care densitățile energiilor de deformare ale corpurilor sînt egale :

$$U_0 = U_{0E} \quad (3.9)$$

cit și atunci cînd acestea diferă cu o mărime constantă  $q$  :

$$U_0 = U_{0E} + q \quad (3.10)$$

astfel încît :

$$\int_V q \, dV = \text{constant} \quad (3.11)$$

Rezultă ca :

$$\delta \int_V q \, dV = 0 \quad (3.12)$$

și deci :

$$\delta \int_V U_0 \, dV = \delta \int_V U_{0E} \, dV \quad (3.13)$$

adică :

$$\delta \Pi = \delta \Pi_E \quad (3.14)$$

de asemenea, dacă :

$$\Pi = c \Pi_E \quad (3.15)$$

unde  $c$  este un coeficient oarecare, teoria echivalențelor se poate aplica, deoarece identitatea (3.8) se verifică, chiar și cînd cele două corpuri nu ocupă același volum  $V$ .

Echivalența se poate stabili între : două corpuri continue; două corpuri discrete; un corp continu și un corp discret.

Considerînd acum un volum unitar dintr-un corp real, cu urmatoarea lege de comportare :

$$\mathcal{S} = D \mathcal{E} \quad (3.16)$$

in care  $\mathcal{S}$  este matricea coloană a solicitărilor interne (eforturi, eforturi unitare);  $D$  - matricea de rigiditate;  $\mathcal{E}$  - matricea coloană a rigidităților (deplacări, deformări specifice).

In acest caz, expresia energiei de deformatie pentru un volum unitar, este :

$$U_0 = \frac{1}{2} \epsilon^T \sigma = \frac{1}{2} \epsilon^T D \epsilon \quad (3.17)$$

Presupunind că avem un al doilea corp - sistem echivalent - cu legea lui de comportare dată de relația următoare :

$$\sigma_E = D_E \epsilon \quad (3.18)$$

in care :  $\sigma_E$  este matricea coloană a solicitărilor interne (eforturi, eforturi unitare);  $D_E$  - matricea de rigiditate.

Condiția de echivalență a fost respectată, cele două corpuri avind același câmp de deformații, reprezentat prin matricea .

Expresia energiei de deformatie, pentru un volum unitar din cel de al doilea corp, este :

$$U_{0E} = \frac{1}{2} \epsilon^T D_E \epsilon \quad (3.19)$$

Condiția de echivalență (3.9) se mai poate scrie deci sub forma :

$$\epsilon^T \cdot D \cdot \epsilon = \epsilon^T \cdot D_E \cdot \epsilon \quad (3.20)$$

de unde rezultă :

$$\sigma = D \epsilon = D \cdot D_E^{-1} \cdot \sigma_E \quad (3.21)$$

Relația (3.21) permite determinarea vectorului  $\sigma$  în funcție de  $\sigma_E$ , adică determinarea stării de eforturi din corpul real în funcție de starea de eforturi din corpul echivalent.

Teoria echivalențelor stabilește o identitate între cimpurile de deformații din corpul real și cel echivalent și nu între eforturile sau solicitările dintre cele două corpuri.

Modalitatea de lucru constă în înlocuirea corpului real printr-o rețea plană sau spațială de bare, constituită prin asocierea unor modele echivalente elementare de formă dreptunghiulară, romboidală, triunghiulară, paralelipipedică, etc. Corpul echivalent se va prezenta sub forma unei rețele plane sau spațiale multiple static nedeterminată. Se admite ipoteza conform căreia modelele echivalente elementare sînt presupuse infinite mici și ca astfel se poate considera că cimpul de deformații rămîne uniform în fiecare dintre acestea. Determinarea caracteristicilor acestor modele se face identificînd expresiile energiilor de deformație ale corpurilor reale cu cele ale modelelor echivalente.

Corpul de deformație din corpul echivalent se stabilește pe baza propriilor sale legi de comportare, care nu au în mod ne-

cecar un sens fizic. Astfel, în cazul anumitor modele echivalente, după efectuarea calculului de echivalență, pot rezulta pentru anumite bare ale modelelor arii negative. Acest lucru influențează analogia matematică între original și model, matricea de rigiditate rămânând pozitiv definită.

La majoritatea cazurilor practice, problema cea mai importantă este aceea a echivalenței dintre un corp continuu (placă dreaptă, placă curbă subțire, masiv, etc.) și un corp discret alcătuit dintr-un sistem de bare (articulate sau legate rigid) lucrând la eforturi axiale, la încovoiere sau la sollicitări compuse.

### 3.2. Energia de deformare

#### 3.2.1. Corpul omogen și izotrop

Densitatea energiei de deformare  $U_0$  într-un corp omogen și izotrop (fig.3.2) se definește conform teoriei elasticității, cu relația :

$$U_0 = 0,5 \epsilon^T D \epsilon = 0,5 \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + \mu (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + 2\gamma_{xy}^2 + 2\gamma_{yz}^2 + 2\gamma_{zx}^2) \quad (3.22)$$

în care  $\lambda$  și  $\mu$  sînt coeficienții lui Lamé :

$$\lambda = E/(1-2\nu)(1+\nu) \quad ; \quad \mu = E/2(1+\nu) \quad (2.23)$$

$E$  fiind modulul de elasticitate longitudinal, iar  $\nu$  coeficientul lui Poisson.

Dacă corpul are volumul  $V$ , energia de deformare a corpului respectiv va fi :

$$U = V U_0 \quad (2.24)$$

#### 3.2.2. Momentul de bară

Energia de deformare a unei bare de lungime  $l$  și secțiune  $A$ , sollicitată axial (fig.3.3), este :

$$U^* = V U_0 = A l U_0 = 0,5 A E l \epsilon_x^2 \quad (2.25)$$

sau notînd  $q = EA l$  rezultă :

$$U^* = 0,5 q \epsilon_x^2 \quad (2.26)$$

Energia de deformare a barei încovoiate, încastrată la un capăt (fig.3.4) este :

$$U^* = 0,5 \eta (\nu_B/l)^2 \quad (3.27)$$

cu notația :  $\eta = 3 EI/l$ .

În cazul încastrării parțiale, dacă în încastrare se produce

rotirea  $\theta$  (fig.3.5), energia de deformație va fi :

$$U^* = 0,5 \gamma (v_B - \theta l)^2 / l^2 \quad (3.28)$$

În cazul solicitării combinate de încovoiere cu forță axială (fig.3.6), energia de deformație a barei se obține prin însumarea :

$$U = U^* + U^* \quad (3.29)$$

Exprimiind deformația specifică a barei în funcție de componentele cunoscute  $\varepsilon_{\bar{x}}$ ,  $\varepsilon_{\bar{y}}$ ,  $\gamma_{\bar{x}\bar{y}}$  și de cosinusii directori ai barei (fig.3.7), și cunoscînd distorsiunea unghiului drept (fig.3.8) rezultă :

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{0}{0_{\bar{x}}} = \varepsilon_{\bar{x}} \cos^2 \alpha + 2 \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{\bar{y}} \sin^2 \alpha \quad (3.30)$$

$$\gamma_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{0}{0_{\bar{x}}} = (\varepsilon_{\bar{y}} - \varepsilon_{\bar{x}}) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{0_{\bar{y}}}{0_{\bar{x}}} \cos^2 \alpha - \frac{0_{\bar{y}}}{0_{\bar{y}}} \sin^2 \alpha \quad (3.31)$$

### 3.3. Statica structurilor în starea de tensiune plană

#### 3.3.1. Studiul în domeniul elastic

##### 3.3.1.1. Energia de deformație într-un corp omogen și izotrop.

Fie o placă subțire încăleată în planul său median (x,y) (fig.3.10.a). Repartiția eforturilor în placă este caracterizată de legea lui Hooke generalizată în care s-a făcut particularizarea  $\sigma_{13} = 0$  ( $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ ).

Densitatea energiei de deformație se scrie, conform teoriei elasticității :

$$U_0 = 2\mu \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[ (\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}})^2 + (\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}})^2 \right] + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} + (\gamma_{\bar{x}\bar{y}})^2 \right\} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[ (\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}})^2 + (\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}})^2 + 2\nu \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} + 2(1-\nu)(\gamma_{\bar{x}\bar{y}})^2 \right] \quad (3.32)$$

Dacă considerăm că placa are grosimea  $t$ , densitatea de energie ( $U_0$ ) pe unitate de suprafață este :

$$(U_0)_t = U_0 \cdot t \quad (3.33)$$

##### 3.3.1.2. Modele de elemente echivalente.

###### a. Modele valabile pentru $\nu = 1/3$ .

###### - Modelul dreptunghiular cu noduri articulate.

Considerăm că corpul real a fost discretizat într-o serie de elemente dreptunghiulare de tipul celui notat cu ABCD în figura

3.15.a. Pentru fiecare ole ast s-a ales un model echivalent constituit dintr-un sistem de bare articulate (fig.3.15.c) astfel incit corpul echivalent este constituit dintr-o rețea de bare articulate (fig.3.15.b).

Pentru fiecare model echivalent se pun urmatoarele ipoteze:

$$\begin{aligned} (\epsilon)_{AD} &= (\epsilon)_{CB} ; & (\epsilon)_{AC} &= (\epsilon)_{BD} \\ (A)_{AC} &= (A)_{BD} ; & (A)_{AB} &= (A)_{CD} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Notind cu  $V$  volumul elementului delimitat de conturul ABCD din corpul real, energia de deformatie pe care acest o imaginează va fi ; conform relației (3.32) :

$$U = VU_0 = 2V \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[ (\epsilon_{xx})^2 + (\epsilon_{yy})^2 \right] + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + (\gamma_{xy})^2 \right\} \quad (3.35)$$

Energile de deformatie  $U^0$  ale barelor modelului echivalent se scriu conform relației (3.26) și ținind cont de (3.34) :

$$\begin{aligned} U_{AD}^0 &= U_{CB}^0 = \frac{1}{2} \rho_{AD} (\epsilon_{xx})^2 \\ U_{AC}^0 &= U_{BD}^0 = \frac{1}{2} \rho_{AC} (\epsilon_{yy})^2 \\ U_{AB}^0 &= \frac{1}{2} \rho_{AB} \left[ \epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha + 2 \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 \\ U_{BC}^0 &= \frac{1}{2} \rho_{BC} \left[ \epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha - 2 \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

In consecință, energia de deformatie  $U_0$  a modelului echivalent dreptunghiular va fi :

$$U_0 = 2 U_{AD}^0 + 2 U_{AC}^0 + U_{AB}^0 + U_{BC}^0 \quad (3.37)$$

Condiția de echivalență care se impune este :

$$U = U_0 \quad (3.38)$$

Scris explicit, această condiție va fi :

$$\begin{aligned} 2V \left[ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\epsilon_{xx})^2 + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\epsilon_{yy})^2 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + (\gamma_{xy})^2 \right] = \\ = \int_{AD} \rho_{AD} (\epsilon_{xx})^2 + \int_{AC} \rho_{AC} (\epsilon_{yy})^2 + \\ + \frac{1}{2} \rho_{AB} \left[ \epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha + 2 \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 + \\ + \frac{1}{2} \rho_{BC} \left[ \epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha - 2 \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ținind cont de ipotezele (3.34) și explicitând factorii de-

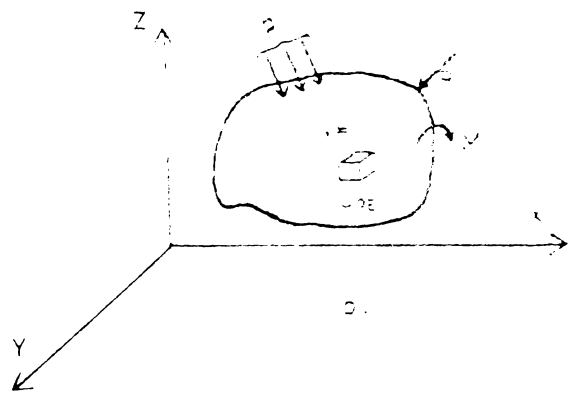
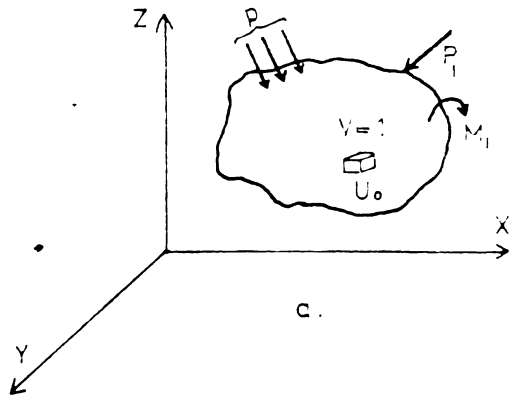


Fig. 3.1

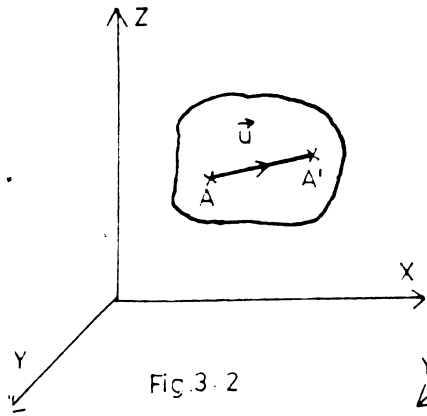


Fig. 3.2

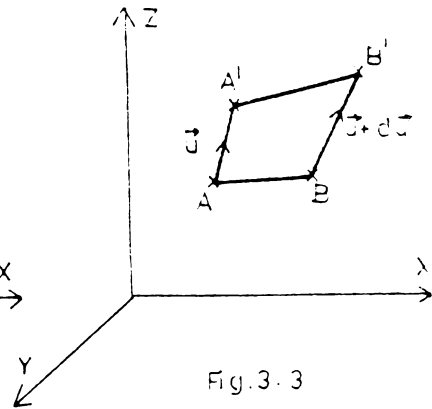


Fig. 3.3

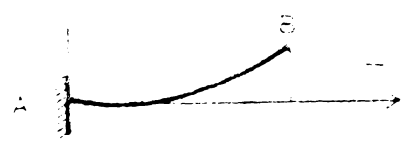


Fig. 3.4

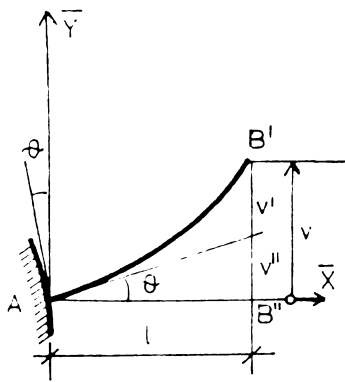


Fig. 3.5

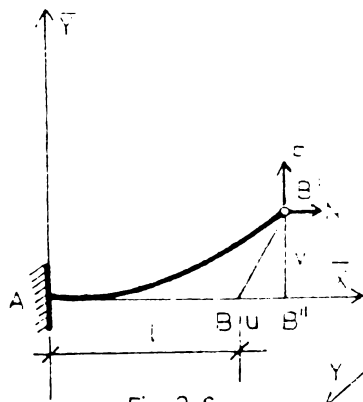


Fig. 3.6

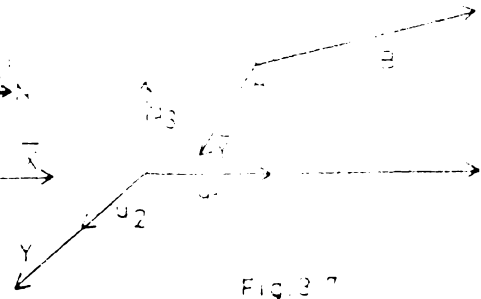


Fig. 3.7

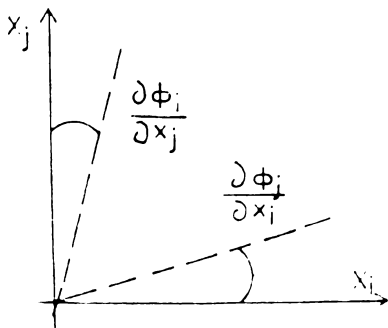


Fig. 3.8

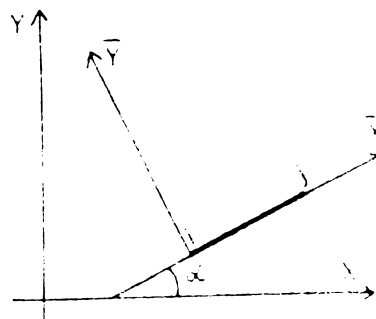
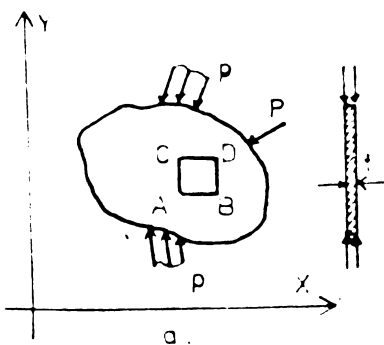
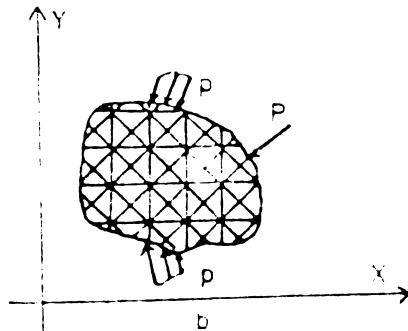


Fig. 3.9

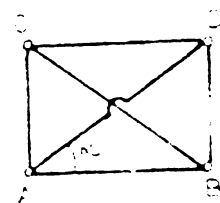


a.



b.

Fig. 3.10



formațiilor ( $\epsilon_{ij}$ ) rezultă :

$$\begin{aligned} & \frac{2\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(\epsilon_{xx})^2 + \frac{2\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(\epsilon_{yy})^2 + \frac{2\nu\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + 2\nu(\gamma_{xy})^2 = \\ & = (\rho_{AB} + \rho_{AD}\cos^4\alpha)(\epsilon_{xx})^2 + (\rho_{AC} + \rho_{AD}\sin^4\alpha)(\epsilon_{yy})^2 + \\ & + 2\rho_{AD}\sin^2\alpha\cos^2\alpha\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + 4\rho_{AD}\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\gamma_{xy})^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Prin identificarea coeficienților rezultă :

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= \rho_{CD} = (\nu\mu/2)(3 - \operatorname{ctg}^2\alpha) \\ \rho_{AC} &= \rho_{BD} = (\nu\mu/2)(3 - \operatorname{tg}^2\alpha) \\ \rho_{AD} &= \rho_{BC} = (\nu\mu)/(2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) \end{aligned} \quad (3.41)$$

cu condiția ca  $\lambda = 2\mu$ .

Intr-adevăr, pentru ca identitatea să se verifice trebuie ca coeficienții termenilor fiecărui membru al identității să se afle în acel și raport. Comparând coeficienții termenilor în  $(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy})$  și  $(\gamma_{xy})^2$  din identitatea (3.40) rezultă :

$$\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = \frac{1}{2} \text{ sau } \lambda = 2\mu \quad (3.42 \text{ și } 3.43)$$

ceea ce dă :

$$\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{2E}{2(1+\nu)} \quad (3.44)$$

$$\text{adică : } \nu = \frac{1}{3} \quad (3.45)$$

e desprinde concluzia conform căreia, după teoria echivalențelor, în cazul stării plane de eforturi, alegerea unui model echivalent format din bare articulate impune un coeficient Poisson egal cu 1/3.

În același timp se observă că, pe parcursul operațiilor de calcul, în membrul drept al identității (3.40), termenii de tipul :

$$4\epsilon_{xy}\sin\alpha\cos\alpha(\epsilon_{xx}\cos^2\alpha + \epsilon_{yy}\sin^2\alpha) \quad (3.46)$$

s-au redus prin simpla dispunere simetrică a barelor diagonale ale modelului echivalent.

În consecință este preferabil să se aleagă întotdeauna modele echivalente având o axă de simetrie.

- Modelul trapez isoscel.

Considerăm un element finit sub formă de trapez isoscel, delimitat de conturul AFCD. Modelul echivalent este constituit dintr-un sistem articulat format din bare de contur și două diagonale



(Fig.3.11). Larele AC și AD au înclinările  $\alpha$  și respectiv față de bara AB. Definind prin V volumul ocultat de elementul de placă delimitat de conturul ABCD și procedând în mod similar ca în cazul elementului dreptunghiular rezultă după efectuarea calculelor:

$$\begin{aligned} \rho_{AB} + \rho_{CD} &= \mu V \left[ 3 - \frac{(tg^2 \alpha - 3)ctg^2 \beta - (tg^2 \beta - 3)ctg^2 \alpha}{tg^2 \alpha - tg^2 \beta} \right]; \\ \rho_{AC} = \rho_{BD} &= \frac{\mu V}{2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}; \\ \rho_{AD} = \rho_{BC} &= \frac{\mu V}{2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{3 \cos^2 \beta - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}; \end{aligned} \quad (3.47)$$

cu respectarea condiției (3.43).

- Modelul patrat.

Fie un element de placă delimitat de un contur patrat ABCD. Modelul echivalent constituit din bare articulate (fig.2.12) se obține prin particularizarea relațiilor (3.41) pentru  $\alpha = \beta = 45^\circ$ :

$$\rho_{AC} = \rho_{BD} = \rho_{AB} = \rho_{CD} = V\mu, \quad (3.48)$$

$$\rho_{AD} = \rho_{BC} = 2V\mu;$$

și fiind volumul de placă delimitat de conturul ABCD.

- Modelul romboidal.

Modelul echivalent al conturului romboidal ABCD (fig.3.13) este constituit din 6 bare articulate. Definind prin V volumul de placă delimitat de conturul ABCD, condiția de echivalență cere ca:

$$U = V \cdot U_0 = U_{AB}^0 + U_{CD}^0 + U_{AD}^0 + U_{CB}^0 + U_{AC}^0 + U_{BD}^0 \quad (3.49)$$

sau :

$$\begin{aligned} 2V\mu \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[ (\epsilon_{xx})^2 + (\epsilon_{yy})^2 \right] + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + (\gamma_{xy})^2 \right\} = \\ = \frac{1}{2} \rho_{AB} (\epsilon_{xx})^2 + \frac{1}{2} \rho_{CD} (\epsilon_{xx})^2 + \rho_{AD} (\epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha + \\ + 2\gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) + \rho_{AC} (\epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha - 2\gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Prin identificarea coeficienților rezultă :

$$\rho_{AB} = V\mu(3 - ctg^2 \alpha); \quad \rho_{CD} = V\mu(3 - tg^2 \alpha); \quad \rho_{AD} = \frac{V\mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad (3.51)$$

cu respectarea condiției (3.43).

- Modelul triunghiular.

Considerăm un contur triunghiular ABC dintr-o placă. Acesta delimitează un volum V.

Modelul echivalent este constituit din trei bare articulate (fig.3.14) care formează un triunghi echilateral. In cele ce urmează se va demonstra că acest model este singurul model posibil.

Energile de deformare  $W^0$  ale barelor modelului echivalent se scriu conform relației (3.26) :

$$\begin{aligned} W_{BC}^0 &= \frac{1}{2} \rho_{BC} (\epsilon_{xx})^2 ; \\ W_{AB}^0 &= \frac{1}{2} \rho_{AB} \left[ \epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha + 2\delta_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 \\ W_{AC}^0 &= \frac{1}{2} \rho_{AC} \left[ \epsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \epsilon_{yy} \sin^2 \alpha - 2\delta_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Avind în vedere observațiile făcute în cazul elementelor dreptunghiulare, se impune ca barele AB și AC să aibă aceeași înclinare față de BC și în plus :

$$\rho_{AB} = \rho_{AC} \quad (3.53)$$

Energia de deformare  $W_E$  a modelului echivalent triunghiular va fi :

$$W_E = W_{BC}^0 + W_{AB}^0 + W_{AC}^0 \quad (3.54)$$

Scriind explicit energia de deformare  $W$  a corpului real și identificind coeficienții egalității :

$$W = W_E \quad (3.55)$$

rezultă următoarele relații :

$$\frac{1}{2} \rho_{BC} + \rho_{AB} \cos^4 \alpha = 2 \nu \mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} ; \quad (3.56)$$

$$\rho_{AB} \sin^4 \alpha = 2 \nu \mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} ; \quad (3.57)$$

$$2 \rho_{AB} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 2 \nu \mu \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \quad (3.58)$$

$$2 \rho_{AC} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 2 \nu \mu. \quad (3.59)$$

Prin compararea relațiilor (3.58) și (3.59) se observă că acestea sînt valabile împreună numai dacă  $\lambda = 2\mu$ , adică  $\nu = 1/3$ . Rezultă că :

$$\rho_{AB} = \frac{\nu \mu}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad (3.60)$$

Introducind (3.60) în (3.57) și aplicind  $\lambda = 2\mu$ , rezultă ecuația trigonometrică :

$$\sin^4 \alpha \frac{\nu \mu}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{3}{2} \nu \mu \quad (3.61)$$

cu soluția :

$$\alpha = \pi/3.$$

Deci :

$$\int_{AB} = \int_{AC} = \frac{3 \sqrt{\mu}}{3} \quad (3.62)$$

Inlocuind (3.62) in (3.56) rezultă :

$$\int_{FC} = \frac{3 \sqrt{\mu}}{3} \quad (3.63)$$

b. Modele variabile pentru ) carecare.

- Modelul dreptunghiular.

Fie un model dreptunghiular forcat din bare articulate la colturile acestuia (A, B, C, D) și avind un nod rigid în centrul E (fig.3.15, 3.16).

Presupunind ca elementul ABCD este infinit mic și are volumul V, condiția de echivalență cere ca :

$$F = U_0 \quad (3.64)$$

în care :

$$U_0 = V U_0 \quad (3.65)$$

$U_0$  fiind densitatea energiei de deformare din corpul real definită de relația (3.32). Energia de deformare a nodului echivalent este :

$$U = U_{AB} + U_{CD} + U_{AC} + U_{BD} + U_A + U_B + U_C + U_D + U_A + U_B + U_C + U_D \quad (3.66)$$

Din condiția de echivalență (3.64) rezultă prin identificare :

$$\begin{aligned} \int_{AB} &= V \sigma_1 = \frac{V \mu}{2(\lambda + 2\mu)} [5\lambda + 2\mu - (\lambda + 2\mu) \operatorname{ctg}^2 \alpha] \\ \int_{AC} &= V \sigma_2 = \frac{V \mu}{2(\lambda + 2\mu)} [5\lambda + 2\mu - (\lambda + 2\mu) \operatorname{tg}^2 \alpha] \\ \int_{EA} &= V \sigma_3 = \frac{V \mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \\ \eta_A &= \frac{1}{2} V \sigma_4 = \frac{V \mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{2\mu - \lambda}{\lambda + 2\mu} \end{aligned} \quad (3.67)$$

- Modelul patrat.

Caracteristicile modelului patrat (fig.3.17) se deduc din cele ale modelului dreptunghiular prin particularizarea relațiilor (3.67) pentru  $\alpha = \pi/4$  :

$$\int_{AB} = \int_{AC} = \frac{2V\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} ; \int_{EA} = V\mu ; \eta_A = V\mu \frac{2\mu - \lambda}{\lambda + 2\mu} \quad (3.68)$$

**- Modelul romboidal.**

Modelului romboidal reprezentat în fig.3.18, îi sînt caracteristice patru noduri articulate corespunzătoare vîrfurilor ABCD și un nod rigid H situat în centru. Barele situate pe contur lucrează numai la eforturi normale, pe cînd barele interioare sînt sollicitate și la încovoiere.

Procedînd în mod similar ca în cazul modelului dreptunghiular, se ajunge la următoarele expresii :

$$\int_{AD} = \frac{V \lambda \mu}{2(\lambda + 2\mu) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} ; \int_{:A} = \frac{V \mu}{\lambda + 2\mu} [2(\lambda + \mu) - \lambda \operatorname{ctg}^2 \alpha] \quad (3.63)$$

$$\int_D = \frac{V}{\lambda + 2\mu} [2(\lambda + \mu) - \lambda \operatorname{ctg}^2 \alpha] ; \frac{\gamma_{:B} \gamma_{:D}}{\gamma_{:B} + \gamma_{:D}} = \frac{V(2\mu - \lambda)}{2(\lambda + 2\mu)}$$

**- Modelul patrat cu bare suplimentare (fig.3.19).**

Acesta diferă de modelul patrat cu bare articulate prin simpla intersecție a diagonalelor de cîte două bare paralele cu laturile avînd lungimea pe jumătate. Deformațiile acestui model se exprimă în funcție de deplasările nodurilor principale, întrucît trebuie să fie aplicate în acestea. Expresiile caracteristicilor barelor sînt :

$$\int_{AB} = \int_{AC} = \int_{CD} = \int_{ED} = \frac{E \cdot V}{2(1 + \nu)} ; \int_{AD} = \int_{BC} = \frac{E \cdot V}{1 + \nu} ;$$

$$\int_{EP} = \int_{EG} = \int_{GH} = \int_{:F} = \frac{E \cdot V(3\nu - 1)}{4(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.70)$$

**c. Modele speciale**

**- Modelul triunghi isoscel - varianta I.**

Modelul elementar triunghi isoscel (fig.3.20) este realizat din barele marginale AB, AC, BC articulate în nodurile A, B, C și o bară suplimentară AD articulată de bara AB. Deoarece numai nodurile A, B și C au deplasările specificate în cadrul structurii echivalente, este necesar ca deplasările nodului D să fie exprimate prin deplasările nodurilor A și B, deci efortul axial din bara AD să fie transmis nodurilor A și B. Aceasta impune barei AB o rigiditate la încărcare și forfecare, ea putînd avea doar deformații axiale.- Punînd condiția de echivalență :

$$w = w_B \quad (3.71)$$

rezultă caracteristicile barelor modelului echivalent :

$$\int_{CD} = V\mu(3 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) ; \int_{AB} = \frac{V\mu}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) ; \int_{AC} = \int_{BC} = \frac{V\mu}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad (3.72)$$

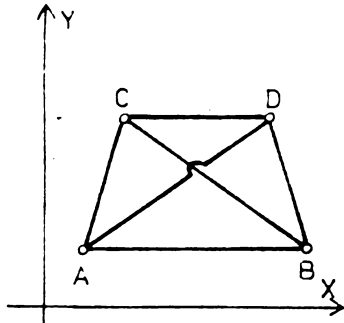


Fig.3.11

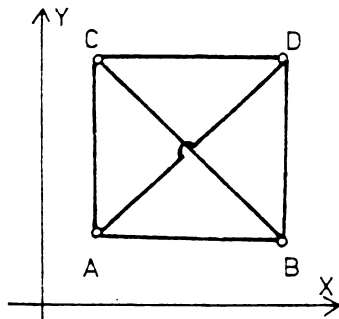


Fig.3.12

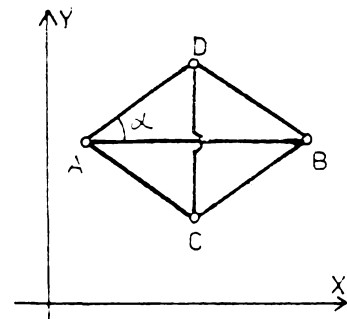


Fig. 3.13

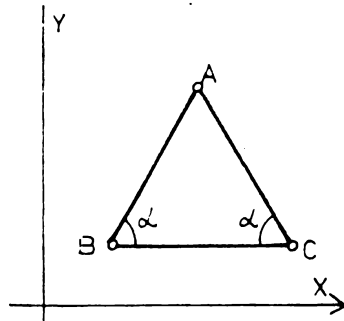


Fig. 3.14

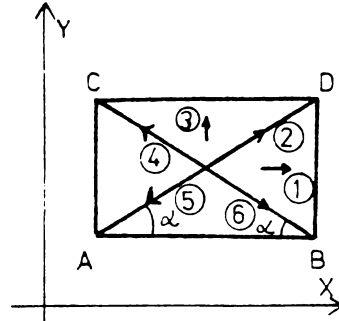


Fig.3.15

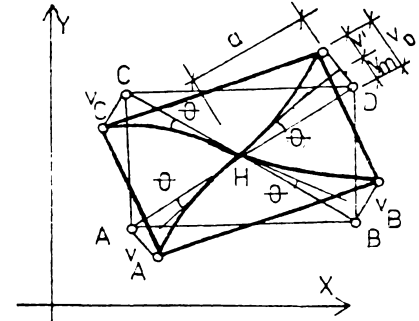


Fig. 3.16

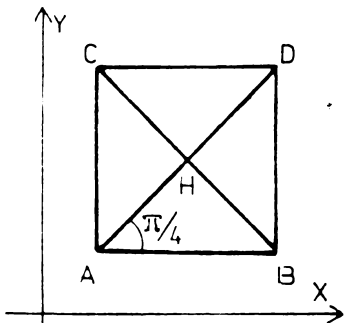


Fig.3.17

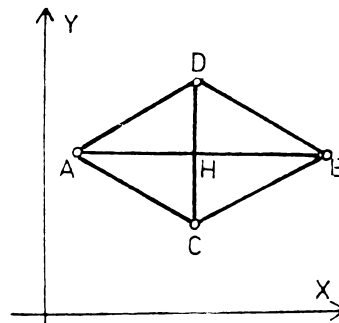


Fig.3.18

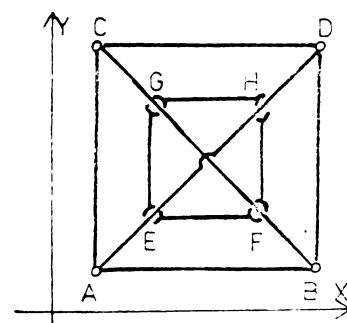


Fig.3.19

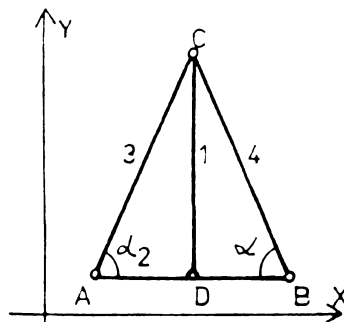


Fig. 3.20

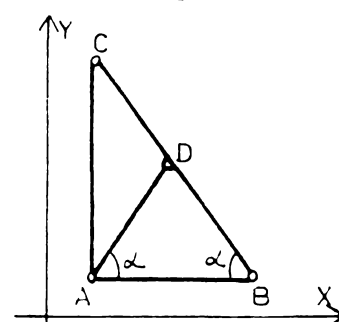


Fig. 3.21

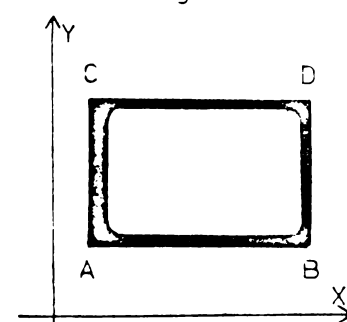


Fig. 3.22

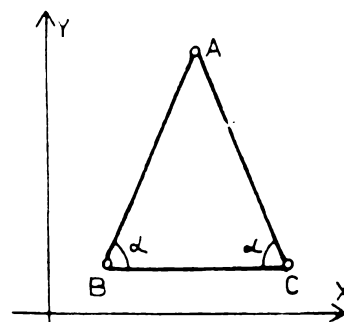
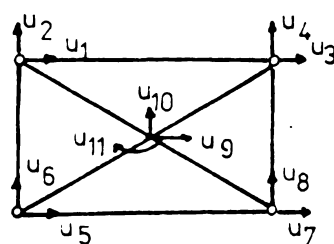


Fig. 3.23



ELEMENT RECTANGULAR  
CU NOD INTERIOR RIGID

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											
2											
3			$K_c$							$K_{c1}$	
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10									$K_{1c}$		$K_1$
11											

Fig. 3.30

cu condiția ca  $\nu = 1/3$ .

La utilizarea acestui model echivalent, în programul de calcul folosit, bara AB se va defini prin componentele sale AD și DB solicitate la încovoiere în planul elementului, cu condițiile de capăt  $M_z = 0$  în punctele A și B și deformații din încovoiere și forfecare nule (neglijabile) în planul xOy.

- Modelul triunghi dreptunghic.

Modelul triunghi dreptunghic (fig.3.21) este format din trei bare marginale AB, BC, AC articulate în noduri și dintr-o bară suplimentară AD articulată la mijlocul barei BC. Asupra barei BC se face ipoteza deformațiilor nule din încovoiere și forfecare în planul elementului.

Acest model elementar se poate realiza în două variante :

- varianta I, în care eforturile axiale din cele două jumătăți ale barei BC nu sînt egale. În acest caz :

$$\int_{BC} = \frac{V \cdot \mu}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} ; \int_{AB} = V \cdot \mu (3 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) ; \quad (3.73)$$

$$\int_{AD} = \frac{V \cdot \mu}{3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} ; \int_{AC} = V \cdot \mu (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha) ;$$

- varianta II, în care eforturile axiale din cele două jumătăți ale barei BC sînt identice. În acest caz :

$$\int_{BC} = \frac{V \cdot \mu}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} ; \int_{AB} = V \cdot \mu (3 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) ; \quad (3.74)$$

$$\int_{AD} = \frac{V \cdot \mu}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} ; \int_{AC} = V \cdot \mu (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha) .$$

Utilizarea acestui model se face în aceleași condiții restrictive ca cele ale modelului triunghi isoscel. ( $\nu = 1/3$  ;  $I_{x0} = \infty$ )

- Modelul dreptunghiular cu noduri rigide.

Modelul elementar dreptunghiular cu noduri rigide (fig.3.22) este alcătuit din patru bare marginale îmbinate rigid în nodurile A, B, C și D. Barele modelului lucrează în acest caz atât la încovoiere cît și la efort axial. Echivalența energiei de deformație ale modelului și ale corpului real de același volum V rezultă :

$$\int_{AB} = \int_{CD} = \frac{V \cdot \mu}{1 - \nu} \left( 1 + \nu \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} \right) ; \int_{AC} = \int_{BD} = \frac{V \cdot \mu}{1 + \nu} \left( 1 + \nu \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{yy}} \right) ;$$

$$\eta_{AB} + \eta_{AC} = \frac{V \cdot \mu}{2} \quad (3.75)$$

Se observă că evaluarea arilor și momentelor de inerție ale

barelor modelului echivalent, implică admiterea unei aproximații de calcul prin neglijarea în relațiile (3.75) a termenilor afectați de rapoartele componentelor deformației specifice, fie adaptarea unui calcul iterativ.

### 3.3.1.3. Material neomogen și anizotrop

În cazul unui corp bidimensional aflat în starea plană de eforturi, realizat dintr-un material anizotrop și neomogen, matrică de elasticitate poate fi scrisă sub forma :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Cunoscând că relația dintre eforturile unitare  $\sigma$  și deformațiile specifice  $\epsilon$  este :

$$\sigma = D \cdot \epsilon \quad (3.77)$$

Densitatea energiei de deformație  $U_0$ , în ipoteza unui câmp de deformații uniform, va fi :

$$U_0 = \frac{1}{2} \epsilon^T \cdot \sigma = \frac{1}{2} \epsilon^T \cdot D \cdot \epsilon \quad (3.78)$$

Înlocuind (3.77) în (3.78) și avînd în vedere că  $d_{1j} = d_{j1}$ , se obține :

$$U_0 = \frac{1}{2} \left[ d_{11}(\epsilon_{xx})^2 + d_{22}(\epsilon_{yy})^2 + 2 d_{12} \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + 2 d_{13} \epsilon_{xx} \epsilon_{xy} + 2 d_{23} \epsilon_{yy} \epsilon_{xy} + d_{33}(\epsilon_{xy})^2 \right] \quad (3.79)$$

Exprimînd energiile de deformație ale diferitelor modele echivalente și punînd condiția de echivalență (3.60) rezultă caracteristicile barelor modelelor echivalente propuse, după cum urmează :

#### a. Modele din bare cu noduri articulate.

##### - Modelul dreptunghiular.

$$\begin{aligned} \int_{AB} &= \int_{CD} = \sqrt{0,5} (d_{11} - d_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha) \\ \int_{AC} &= \int_{BD} = \sqrt{0,5} (d_{22} - d_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha) \\ \int_{AD} &= \frac{\sqrt{V}}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\sin \alpha} + \frac{d_{13}}{\cos \alpha} \right) \\ \int_{BC} &= \frac{\sqrt{V}}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\sin \alpha} - \frac{d_{13}}{\cos \alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.80)$$

##### - Modelul trapez isoscel.

$$f_{AD} + f_{BD} = V \left\{ d_{11} - \operatorname{ctg}^4 \beta \left[ d_{22} - \frac{(d_{22} \cos^2 \beta - d_{12} \sin^2 \beta) \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta} \right] - \frac{\cos^4 \alpha (d_{22} \cos^2 \beta - d_{12} \sin^2 \beta)}{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta)} \right\}$$

$$f_{AC} = f_{BD} = \frac{V}{2 \sin^4 \beta} \left[ d_{22} - \frac{(d_{22} \cos^2 \beta - d_{12} \sin^2 \beta) \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta} \right] \quad (3.31)$$

$$f_{AD} = \frac{V}{2} \left[ \frac{d_{22} \cos^2 \beta - d_{12} \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta)} + \frac{d_{13}}{\sin \alpha \cos^3 \alpha} \right]$$

$$f_{BC} = \frac{V}{2} \left[ \frac{d_{22} \cos^2 \beta - d_{12} \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta)} - \frac{d_{13}}{\sin \alpha \cos^3 \alpha} \right]$$

- Modelul pătrat.

$$f_{AD} = f_{BD} = \frac{V}{2} (d_{11} - d_{12})$$

$$f_{AC} = f_{BC} = \frac{V}{2} (d_{22} - d_{12})$$

$$f_{AD} = 2V (d_{12} + d_{13})$$

$$f_{BC} = 2V (d_{12} - d_{13})$$

(3.32)

- Modelul romboidal.

$$f_{AD} = V (d_{11} - d_{12} \operatorname{ctg}^2 \alpha)$$

$$f_{BD} = V (d_{22} - d_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

$$f_{AD} = f_{BC} = \frac{V}{4 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\sin \alpha} + \frac{d_{13}}{\cos \alpha} \right) \quad (3.33)$$

$$f_{AC} = f_{BD} = \frac{V}{4 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\sin \alpha} - \frac{d_{13}}{\cos \alpha} \right)$$

Modelele prezentate mai sus sînt valabile la respectarea condiției :

$$d_{12} = d_{33} \quad ; \quad d_{13} = d_{23} \operatorname{ctg}^2 \alpha \quad ; \quad (3.34)$$

b. Modele speciale.

- Modelul triunghiular isoscel.

- varianta II (fig.3.23) :

$$f_{BC} = V (d_{11} - d_{12} \operatorname{ctg}^2 \alpha) \quad (3.35)$$



$$\begin{aligned} \int_{AB} &= \frac{V}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\cos \alpha} + \frac{d_{13}}{\sin \alpha} \right) \\ \int_{AC} &= \frac{V}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\cos \alpha} - \frac{d_{13}}{\sin \alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Modelul se utilizează cu condiția :

$$d_{22} = d_{33} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (3.86)$$

- varianta I (fig.3.20) :

$$\begin{aligned} \int_{CD} &= V(d_{22} - d_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha) \\ \int_{AB} &= V(d_{11} - d_{12} \operatorname{ctg}^2 \alpha) \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\int_{AC} = \frac{V}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\sin \alpha} + \frac{d_{13}}{\cos \alpha} \right)$$

$$\int_{BC} = \frac{V}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\sin \alpha} - \frac{d_{13}}{\cos \alpha} \right)$$

- Modelul triunghi dreptunghi (fig.3.21).

- varianta I :

$$\begin{aligned} \int_{BC} &= \frac{V}{2 \sin \alpha \cos^3 \alpha} (d_{12} \operatorname{ctg} \alpha - d_{13}) \\ \int_{AB} &= V (d_{11} - d_{12} \operatorname{ctg}^2 \alpha) \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\int_{AD} = \frac{V}{4 \sin \alpha \cos^3 \alpha} \cdot \frac{d_{12}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - d_{13}^2}{d_{12} \operatorname{ctg} \alpha - (d_{12} \operatorname{ctg} \alpha + d_{13})(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)}$$

$$\int_{AC} = V (d_{22} - d_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

- varianta II :

$$\begin{aligned} \int_{BC} &= \frac{V}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \left( \frac{d_{12}}{\sin \alpha} - \frac{d_{13}}{\cos \alpha} \right) \\ \int_{AB} &= V (d_{11} - d_{12} \operatorname{ctg}^2 \alpha) \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\int_{AD} = \frac{V}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} \left( \frac{d_{13}}{\cos \alpha} + \frac{d_{12}}{\sin \alpha} \right)$$

$$\int_{AC} = V (d_{22} - d_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

Modelele speciale prezentate mai sus sînt valabile cu respectarea condiției (3.84) și în ipotezele prezentate la pct.c.

- Modelul triunghiular cu noduri rigide.

$$\int_{AB} = \int_{CD} = \frac{V}{2} \left( d_{11} + d_{12} \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_{IX}} + d_{13} \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_{IX}} \right) \quad (3.90)$$

$$\rho_{AC} = \rho_{AD} = \frac{V}{2} \left( d_{22} + d_{12} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{yy}} + d_{23} \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_{yy}} \right) \quad (3.90)$$

Utilizarea acestui model se face în condițiile ipotezelor specificate la pct. a.2.3.

- Modelul dreptunghiular sau pătrat cu noduri articulate și cu nod central rigid.

$$\rho_{AB} = \frac{V}{2} \left( d_{11} + d_{12} - \frac{d_{33}}{\sin^2 \alpha} \right)$$

$$\rho_{AC} = \frac{V}{2} \left( d_{22} + d_{12} - \frac{d_{33}}{\cos^2 \alpha} \right) \quad (3.91)$$

$$\rho_A = \frac{V \cdot d_{33}}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad ; \quad \eta_{HA} = \frac{V(d_{33} - d_{12})}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

Modelul se poate utiliza în una din următoarele ipoteze :

$$1. \quad d_{13} = d_{23} = 0 \quad (3.92)$$

$$2. \quad \frac{d_{13}}{d_{23}} = - \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} \quad (3.93)$$

$$3. \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (3.94)$$

#### 3.3.1.4. Starea de deformație în corpul real.

Vectorul deformațiilor specifice se determină în centrul de greutate al modelului echivalent pe baza deplasărilor nodale obținute după rezolvarea structurii echivalente formate din bare. Deformațiile se obțin cu relații specifice modelului elementar adaptat, făcând media aritmetică a deplasărilor nodale ale modelului echivalent. Această modalitate de lucru decurge din ipoteza deformațiilor concentrate pe element.

- Modelul dreptunghiular (pătrat) (fig.3.1 a și 3.12).

Presupunând ca sistemul de referință local  $\bar{x}$  coincide cu sistemul de referință general  $x$  în baza ipotezelor menționate mai sus și a relației (3.30), rezultă :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{2} (\epsilon_{AB} + \epsilon_{CD})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{2} (\epsilon_{AC} + \epsilon_{BD}) \quad (3.95)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} (\epsilon_{AD} - \epsilon_{BC})$$

- Modelul romboidal (fig.3.13).

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{AB} ; & \epsilon_{yy} &= \epsilon_{CD} ; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} (\epsilon_{AD} + \epsilon_{CB} - \epsilon_{AC} - \epsilon_{BD}) \end{aligned} \quad (3.96)$$

- Modelul trapez isoscel (fig.3.11).

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{AB} + \epsilon_{CD}) ; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{2} \left[ (\epsilon_{AC} + \epsilon_{BD}) \frac{1}{\sin^2 \beta} - (\epsilon_{AB} + \epsilon_{CD}) \operatorname{ctg}^2 \beta \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} (\epsilon_{BC} - \epsilon_{AD}) \end{aligned} \quad (3.97)$$

- Model triunghi isoscel - varianta I (fig.3.20).

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{AB} ; \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{CD} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} (\epsilon_{AC} - \epsilon_{BC}) \quad (3.98)$$

- Modelul triunghi dreptunghi (fig.3.21).

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{AB} ; \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{AC} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} (\epsilon_{AD} - \epsilon_{BC}) \quad (3.99)$$

3.3.1.5. Starea de eforturi din corpul real.

Starea de eforturi in corpul real se determina in conformitate cu relatiile (3.77) si (3.27) cunoscind eforturile din barele modelelor echivalente :

- modelul dreptunghiular (patrat)

$$\zeta = -\frac{1}{2} D \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{N}{EA} \right)_{AB} + \left( \frac{N}{EA} \right)_{CD} \\ & \left( \frac{N}{EA} \right)_{AC} + \left( \frac{N}{EA} \right)_{BD} \\ & \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{N}{EA} \right)_{AD} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{N}{EA} \right)_{BC} \end{aligned} \right\} \quad (3.100)$$

- modelul romboidal

$$\zeta = D \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{N}{EA} \right)_{AE} \\ & \left( \frac{N}{EA} \right)_{CD} \\ & \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left[ \left( \frac{N}{EA} \right)_{AD} + \left( \frac{N}{EA} \right)_{BC} - \left( \frac{N}{EA} \right)_{AC} - \left( \frac{N}{EA} \right)_{BD} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.101)$$

- modelul trapez isoscel

$$G = D \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{N}{EA} \right)_{AB} + \left( \frac{N}{EA} \right)_{CD} \\ \left[ \left( \frac{N}{EA} \right)_{AC} + \left( \frac{N}{EA} \right)_{BD} \right] \frac{1}{\sin^2 \beta} - \left[ \left( \frac{N}{EA} \right)_{AB} + \left( \frac{N}{EA} \right)_{CB} \right] \operatorname{ctg}^2 \beta \\ \frac{2}{\sin^2 \alpha} \left[ \left( \frac{N}{EA} \right)_{BC} - \left( \frac{N}{EA} \right)_{AD} \right] \end{array} \right\} \quad (3.102)$$

- modelul triunghi isoscel - varianta I :

$$G = D \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{N}{EA} \right)_{AB} \\ \left( \frac{N}{EA} \right)_{CD} \\ \frac{1}{\sin 2\alpha} \left[ \left( \frac{N}{EA} \right)_{AC} - \left( \frac{N}{EA} \right)_{BC} \right] \end{array} \right\} \quad (3.103)$$

- modelul triunghi dreptunghi :

$$G = D \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{N}{EA} \right)_{AB} \\ \left( \frac{N}{EA} \right)_{CD} \\ \frac{1}{\sin 2\alpha} \left[ \left( \frac{N}{EA} \right)_{AD} - \left( \frac{N}{EA} \right)_{BC} \right] \end{array} \right\} \quad (3.104)$$

- model triunghi isoscel - varianta II :

$$G = D \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{N}{EA} \right)_{BC} \\ \frac{\sin \alpha}{2} \left[ \left( \frac{N}{EA} \right)_{AB} + \left( \frac{N}{EA} \right)_{AC} \right] \\ \frac{1}{\sin 2\alpha} \left[ \left( \frac{N}{EA} \right)_{AB} - \left( \frac{N}{EA} \right)_{AC} \right] \end{array} \right\} \quad (3.105)$$

3.3.2. Studiul în domeniul postelatic

Calculul în domeniul postelatic al unei structuri poate fi condus pe baza unor modele mecanice de comportare. În cazul elementelor din beton armat, în literatura de specialitate se propun diferite moduri de abordare a comportării postelastice. Majoritatea procedurilor aproximează analiza postelastică sub forma unui proces iterativ compus din pași mici elastici, în limita cărora au loc modificări de calitate. Dacă calculul efectiv se realizează printr-o metodă de discretizare, eroarea de aproximare se poate reduce foarte

mult, odată cu majorarea numărului de elemente discrete. În acest context se poate utiliza și teoria echivalențelor la analiza post-elastică a elementelor din beton armat în stare plană de tensiune.

Astfel, utilizând un model mecanic propus în /97/ în lucrarea /80/ se propune un algoritm de calcul în teoria echivalențelor. Modelul mecanic presupune stadiul elastic limitat de inegalitate :

$$\sigma_{\max} \leq 0.5 \sigma_f ; | \sigma_{\min} | \leq 0.4 R_{pr} \quad (3.106)$$

unde  $\sigma_f$  este efortul unitar normal corespunzător formării fisurilor, iar  $R_{pr}$  rezistența prismatică a betonului.

Calculul se conduce prin incremente de încărcare aproximând caracteristicile elastice ale materialului și frecare treptată în conformitate cu starea de solicitare. Iterația se consideră finalizată la depășirea unui raport limită impus între deplasările maxime din două etape succesive de calcul.

O altă modalitate de calcul este varianta biografică, care utilizează elemente finite anizotrope din beton armat, rigiditatea acestora fiind compusă din suma rigidităților celor două materiale, beton și armătură. Neliniaritatea în comportare se datorează fisurării betonului întins și curgerii betonului comprimat, respectiv a armăturii întinse sau comprimate. După fisurare, admitând fisuri uniforme distribuite cu o anumită înclinare față de orizontală, betonul nu poate prelua decât compresii paralele cu aceste fisuri. Urmuind acest model mecanic al corpului real și utilizând matricile de elasticitate ale betonului armat înainte și după fisurare se pot determina caracteristicile barelor modelelor echivalente propuse, în conformitate cu starea fizică a elementelor discrete din corpul real.

Din cauza condițiilor restrictive care se impun modelelor cu bare articulate (vezi pct.3.3.2.3.a), pentru o mai mare exactitate a soluției, se reconizează utilizarea modelelor speciale prezentate la pct.3.3.1.3.b.

Analiza postelastice conform acestei variante, conține următoarele etape de calcul :

- 1) determinarea caracteristicilor modelelor echivalente corespunzătoare stării inițiale a elementului de beton armat, în conformitate cu relațiile stabilite la pct. 3.3.1.3.b.;
- 2) aplicarea unui increment de încărcare structurii echivalente și determinarea stării de eforturi în corpul real;
- 3) modificarea caracteristicilor modelelor echivalente în

conformitate cu starea fizică a corpului real după aplicarea încărcării;

- 4) echilibrarea structurii prin intermediul forțelor de transfer.

Ciclurile de încărcare se reiau până la colapsul structurii sau până la atingerea unei deformații limită impuse.

### 3.4. Precizări privind utilizarea metodei

Cu ajutorul relațiilor prezentate la pct. 3 se stabilesc caracteristicile modelelor echivalente. Rezultă deci arii, momente de inerție și momente de torsiune care se vor utiliza la alcătuirea structurii echivalente, formate din bare. În acest fel se poate aborda prin calcul orice element bidimensional aflat în stare plană de tensiune, indiferent de forma conturului, variația grosimii, modificarea calității materialului în cadrul rețelei de discretizare, condiții de rezonanță, încărcări. Discretizarea structurii și tipul de elemente echivalente utilizate trebuie să modeleze cât mai corect structura reală atât în privința caracteristicilor elasto - geometrice cât și al condițiilor de margine și de încărcare.

În majoritatea cazurilor este de preferat utilizarea modelelor rectangulare. Acestea alcătuiesc o rețea de discretizare ortogonală ale cărei direcții este de preferat a se confunda cu direcțiile unui sistem de coordonate cartesian  $x, y$  (fig.3.24.a,b). Elementele triunghiulare, romboidale, trapezoidale, se utilizează de regulă pentru discretizarea zonelor de contur rectiliniu sau curb, sau pentru modificarea pasului rețelei simultan pe ambele direcții (fig.3.25). Dacă discretizarea determină elemente finite insuficient de mici, în zonele de contur curbiliniu se pot utiliza cu o bună aproximație  $1/3, 1/2, 1/6$  aceleași tipuri de modele echivalente ca și în porțiunea centrală (spre exemplu ele sunt rectangulare ca în fig.3.26). Aproximația constă în determinarea caracteristicilor geometrice ale barelor modelelor echivalente intersectate de conturul curbiliniu, luând în considerare energia de deformare a volumului delimitat de contur și de rețeaua interioară (volumul hățurat în fig.3.26). Din această observație decurge un avantaj important al metodei. Astfel, dat fiind faptul că se pot modela forme deosebit de neregulate prin modele rectangulare se pot organiza rețele de discretizare ortogonale mult mai ușor de calculat atât sub aspectul simplificării forței cât și al generării automate a datelor în cadrul programelor de calcul. De asemenea, în multe cazuri se preferă modelarea golurilor prin elemente cu rigiditate re-

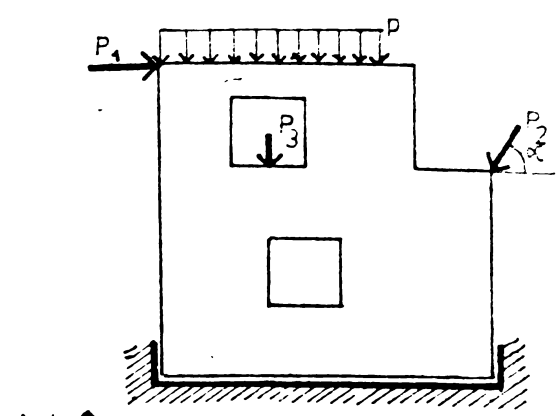


Fig. 3.24

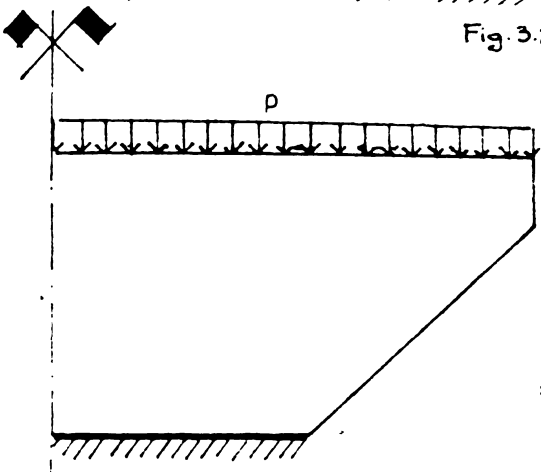
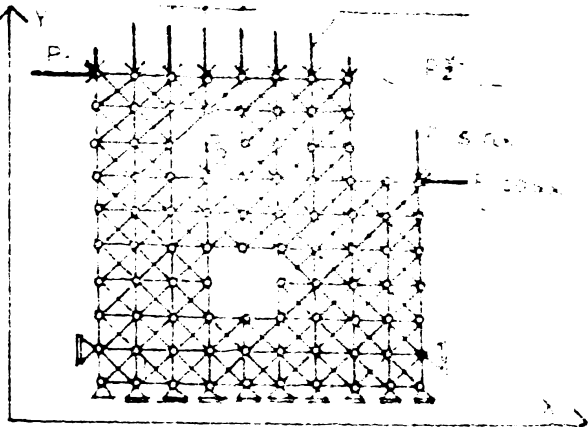


Fig. 3.25

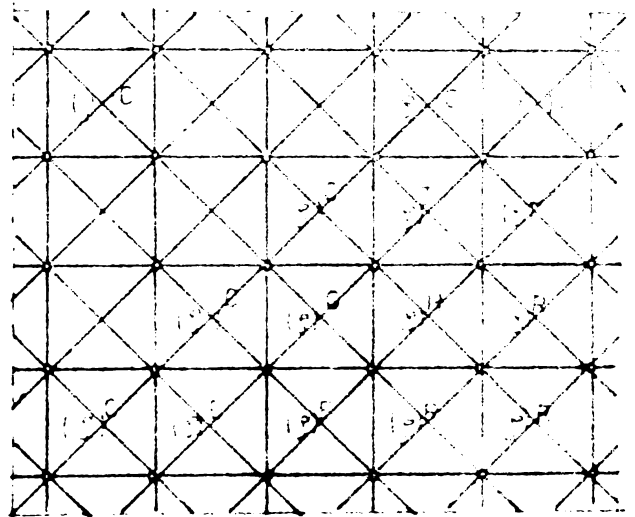
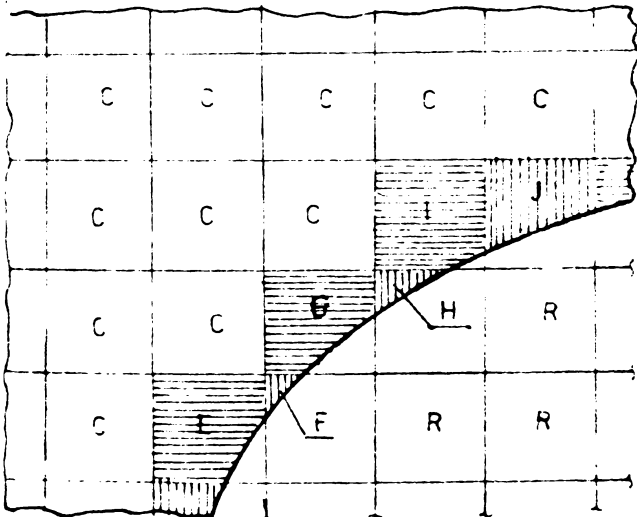
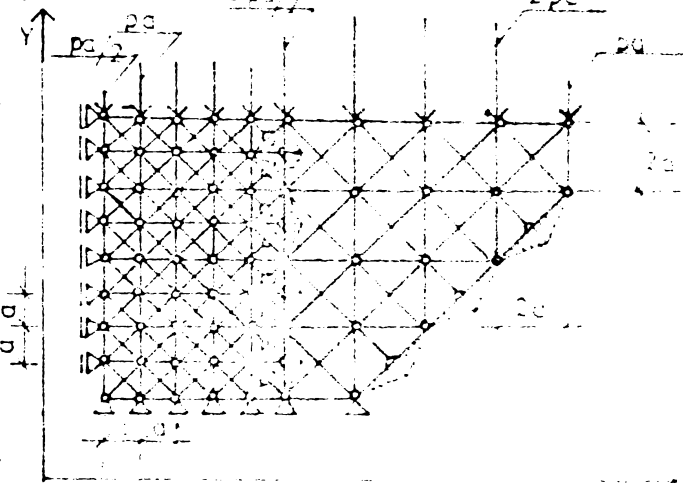


Fig. 3.26

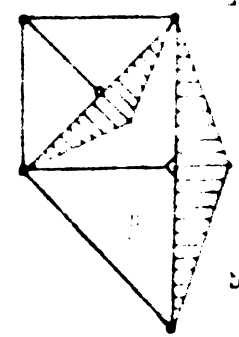
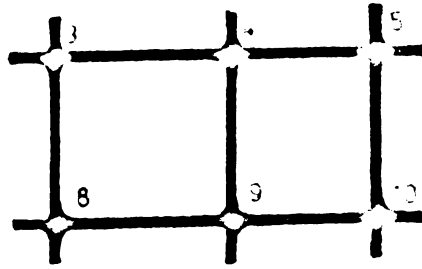
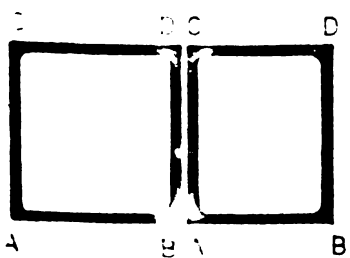
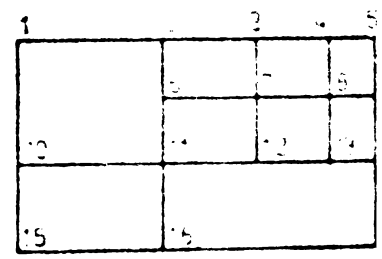
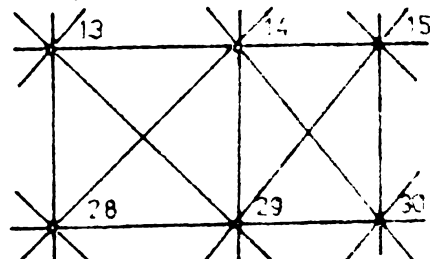
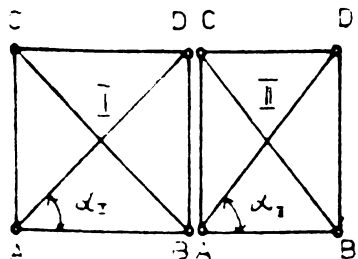


Fig. 3.27

dușă astfel încât generarea coordonatelor nodurilor rețelei de discretizare cit și topologia elementelor să se efectueze automat, evitându-se un important volum de muncă și eliminându-se o sursă suplimentară de erori.

Structura de calcul, alcătuită prin alăturarea și juxtapunerea modelelor echivalente, conține în zona centrală bare care conțin a două sau mai multe modele adiacente. Caracteristicile acestor bare se obțin prin însumarea caracteristicilor însumate din fiecare model luat separat. Astfel, caracteristica barei AC aparținând celor două modele cu noduri articulate notate cu I și II în fig.3.27.a, se obține prin aplicarea relației

$$I_{14-29} = (I_{BD})_I + (I_{AC})_{II} = \frac{M}{3} [V_I(3 - \text{tg}^2 \alpha_I) + V_{II}(3 - \text{tg}^2 \alpha_{II})] \quad (3.107)$$

În cazul caracteristicilor elastice ( $E, G, \nu$ ) ale modelelor adiacente sînt identice, caracteristicile geometrice ale secțiunilor barelor comune ( $A, I$ ), rezultă conform relației (3.107) prin însumarea caracteristicilor specifice fiecărui model (fig.3.27.b):

$$A_{4-9} = (A_{BD})_I + (A_{AC})_{II}; \quad I_{4-9} = (I_{BD})_I + (I_{AC})_{II} \quad (3.108)$$

Utilizarea modelelor din bare cu noduri rigide permite în-  
desirea rețelei (fig.3.28.a) fără a fi necesară o zonă de tranziție.  
Astfel, barele (3-11) și (11-14) vor fi definite prin componentele  
lor (3-6), (6-11) respectiv (11-12), (13-14) ale căror caracte-  
ristici geometrice se vor obține prin însumarea caracteristicilor re-  
sultate din elementele adiacente.

Este de remarcat că, utilizarea acestui model presupune es-  
timarea a priori a raportului deformațiilor specifice  $\epsilon_{yy}/\epsilon_{xx}$ . A-  
ceastă dificultate poate fi înlăturată în condițiile în care se a-  
doptă pentru coeficientul Poisson valoarea zero, ceea ce conduce la  
o eroare asupra energiei de deformare a modelului echivalent. În  
situația cea mai defavorabilă cînd  $\epsilon_{yy}/\epsilon_{xx} = \pm 1$ , eroarea este de  
 $\pm 15\%$  pentru o valoare  $\nu = 0,15$ . Precizia calculului la utiliza-  
rea acestor modele echivalente poate fi îmbunătățită prin adoptarea  
unui calcul iterativ în etape succesive /80/.

La alăturarea elementelor speciale triunghiulare (fig.3.28b)  
trebuie respectate condițiile de lucru impuse acestor modele (rigi-  
ditate infinită în planul elementului pentru barele de care sînt  
prinse articulat barele interioare ale triunghiurilor). Caracteris-  
ticile barelor comune se stabilesc conform relației (3.107).

Este valabilă legea simetriei mecanice, geometrice și de  
încărcare, cu respectarea condițiilor de simetrie.



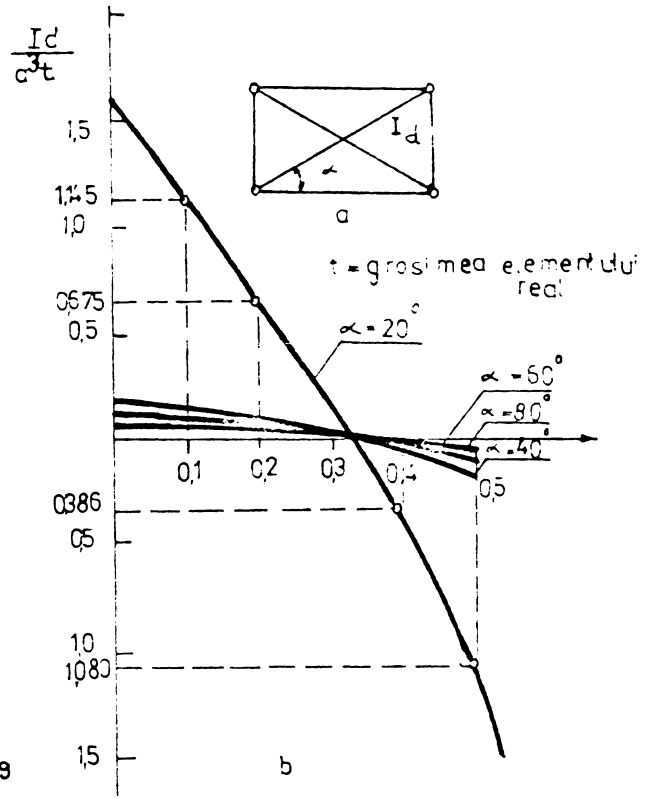
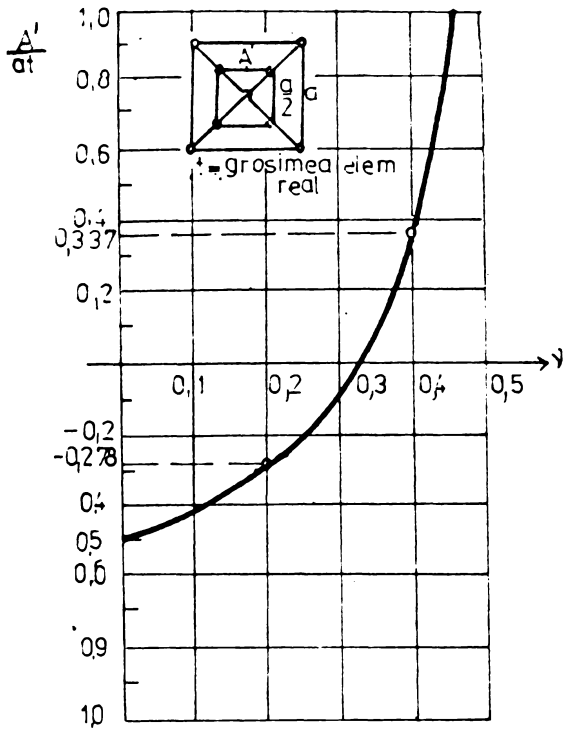


Fig. 3.29

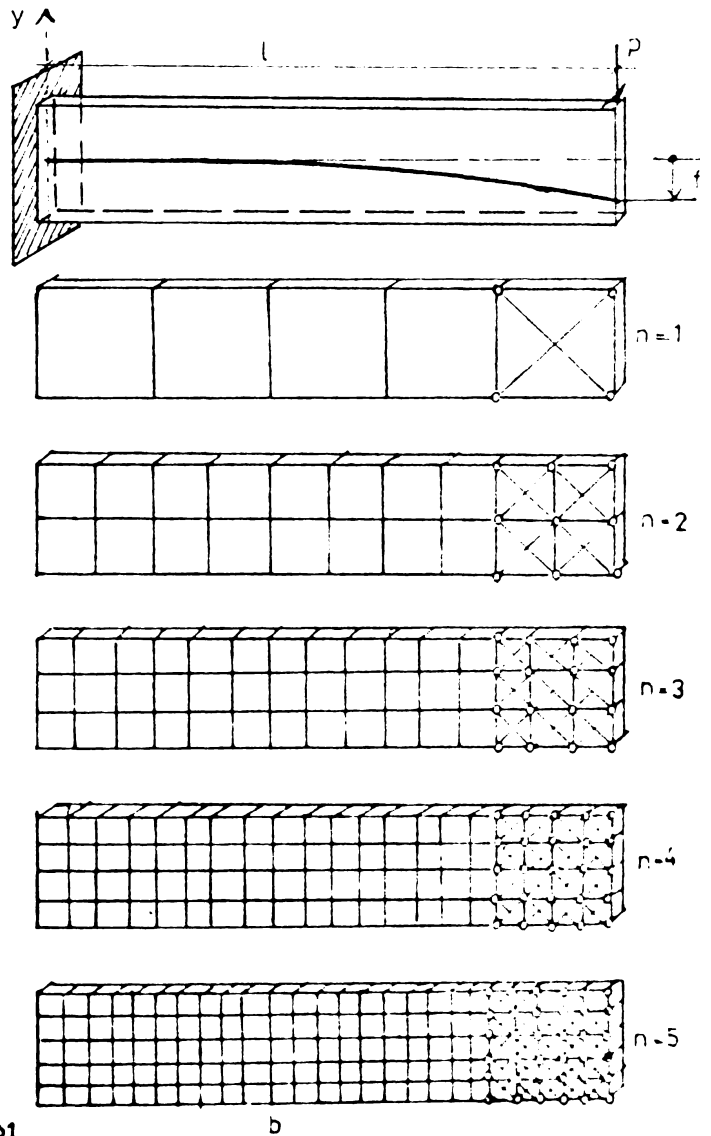
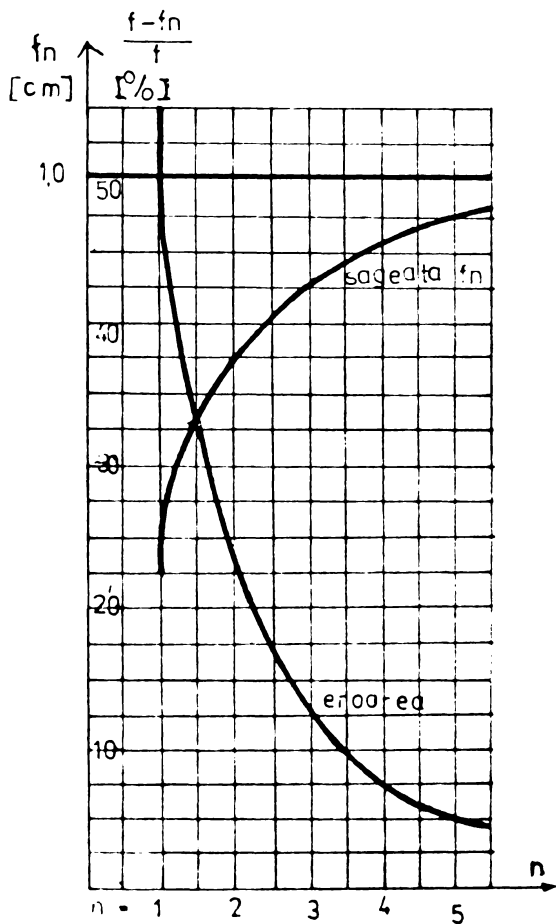


Fig. 3.31

Determina rea cimpului de deformații în corpul echivalent se face pe baze propriilor sale legi de comportare. Acestea nu au în mod necesar un sens fizic. Astfel, în cazul unui model rectangular (fig.3.10), aria secțiunii transversale a barei AC rezultă negativă pentru  $\alpha > \pi/3$ . Aceasta rezultă din relația (3.41) :

$$\int_{AC} = (E A)_AC = \frac{\mu V}{2} (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha) < 0 \quad (3.109)$$

Caracteristici de rigiditate negative pot apărea și la alte modele echivalente. Astfel, în modelul rectangular cu nod rigid (fig.3.15), variația momentului de inerție  $I_d$  al barelor diagonale în raport cu unghiul  $\alpha$  și coeficientul contracției transversale, este reprezentată în fig.3.29. În toate cazurile însă, matricea de rigiditate rămâne pozitivă /6/.

O altă tehnică de calcul în teoria echivalențelor o constituie utilizarea matricelor de rigiditate ale elementelor echivalente. Prin asamblarea acestora se obține matricea de rigiditate a structurii. În anexa s-au alcătuit matricile de rigiditate pentru câteva tipuri de elemente echivalente. Legătura dintre elementele echivalente se efectuează în nodurile comune, prin intermediul rigidităților specificate în nodurile respective. Numărul de grade de libertate ale sistemului structural, se stabilește în funcție de numărul de noduri de conexiune, tipul nodurilor de conexiune (articulate, rigide, etc.) și de numărul și tipul nodurilor interioare. Dimensionarea sistemului de ecuații al structurii se poate reduce, în varianta utilizării unor matrice de rigiditate transformate, în care influența rigidităților din nodurile interioare se transmite prin intermediul rigidităților din nodurile de conexiune ale elementului. Aceasta se obține prin operația de reducere a nodurilor interioare, care constă în efectuarea operației :

$$K_0^R = K_0 - K_{I0}^{-1} \cdot K_{0I} \quad (3.110)$$

în care  $K_0^R$  este matricea de rigiditate redusă corespunzătoare rigidităților din nodurile de conexiune (fig.3.30);  $K_0$  - submatricea corespunzătoare rigidităților din nodurile de conexiune;  $K_I$  - submatricea corespunzătoare rigidităților din nodurile interioare;  $K_{0I}$  și  $K_{I0}$  - submatrice în cadrul matricii de rigiditate a elementului echivalent.

Pasul rețelei de discretizare determină mărimea elementelor echivalente. Aproximarea calculului depinde de dimensiunile acestora. Cînd acestea se reduc progresiv, se tînde spre soluția exactă a problemei. Aceasta este demonstrată și de exemplul prezentat în

/171/, reprodus în figura 3.31.b. Structura de calcul este o consolă înălțată cu o forță concentrată  $P$  la extremitatea liberă. În diagrama din fig.3.31.a sînt reprezentate săgețile maxime calculate în soluția exactă ( $f$ ) și în varianta numerică utilizînd sîi multe grade de discretizare.

### 3.5. Dinamica structurilor în starea de tensiune plană

Calculul dinamic în teoria echivalențelor se efectuează pe structura echivalentă.

După alcătuirea structurii echivalente formate din bare, se concentrează masa structurii reale în nodurile acestora după care calculul se efectuează printr-unul din procedeele specifice analizei dinamice.

**Bibliografie :** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 92, 93, 97, 137, 141, 150, 151, 169, 171, 175, 193, 194, 195.

## 4. PROCEDEE GENERALE DE SOLUȚIA ECUAȚIILOR ALGEBRICE

### 4.1. Ecuații algebrice liniare

Într-o analiză statică liniară timpul pentru rezolvarea ecuațiilor de echilibru poate constitui un procentaj mare din timpul total, în timp ce într-o analiză dinamică sau neliniară acest procent poate fi chiar mai mare. Dimensiunea sistemului de ecuații depinde de tipul și numărul de elemente utilizate în asamblare, precum și de topologia rețelei de elemente finite.

Un sistem liniar de ecuații algebrice care apare în analiza statică este de forma :

$$KU = P \quad (4.1)$$

în care  $K$  este matricea de rigiditate,  $U$  - vectorul deplasărilor, iar  $P$  - vectorul încălzirilor.

În principal, există două clase diferite de metode pentru rezolvarea sistemelor de ecuații : procedee directe de calcul și procedee iterative. La procedeele directe relația (4.1) este rezolvată utilizînd un număr de pași și operații predeterminate în mod exact, în timp ce iterația este utilizată cînd se preconizează metode de soluționare iterative.

#### 4.1.1. Procedee bazate pe eliminarea Gauss

La procedeul de eliminare Gauss matricea coeficienților  $K$

se triunghiularizează ajungând la forma  $b$  (fig.4.1). Pentru eliminarea elementului  $K_{21}$ , primul rând al matricii  $K$  se înmulțește cu  $-K_{21}/K_{11}$  și se adună la cel de-al doilea; aceleași operații se efectuează și asupra termenilor liberi. După terminarea eliminării se calculează succesiv valorile necunoscutele pornind de la ultima

$$u_n = \frac{l_{nn}}{s_{nn}} \quad (4.2)$$

Înlocuind  $u_n$  în ecuația  $(n-1)$  se determină  $u_{n-1}$ . Substituțiile continuează pînă la obținerea necunoscutei  $u_1$ .

La multe aplicații cu elemente finite, sistemele de ecuații de condiție au un caracter special. De regulă coeficienții matricii de rigiditate sînt simetrici și matricea este bandă. În fig.4.2.a numai suprafața haurată a matricii uză conține nenule. Dacă  $2b-1$  este lățimea benzii matricii atunci  $b$  este lățimea scribenzii. În cazul matricilor banded simetrice, operațiile de eliminare se efectuează numai asupra scribenzii și asupra vectorilor termenilor liberi (fig.4.2.b). Din acest motiv este necesară păstrarea în memorie numai a porțiunii uză a matricii (fig.4.2.c). Pentru sisteme și mai mari se poate adopta o procedură de lucru prin care numai câteva din submatricile triunghiulare în care este poziționată semibanda trebuie păstrate în memorie (fig.4.3.a) la un anumit moment dat, în timp ce restul matricii poate fi depus pe memoria periferică.

Deoarece coeficienții matricilor simetrice sînt tipic pozitiv definiți, soluția este posibilă pînă la pivotare. Aceasta constituie un avantaj căci utilizarea pivotilor distruge caracterul de bandă al matricii. În plus, fără pivotare, eliminarea aplicată asupra unei linii afectează numai triunghiul de elemente din interiorul benzii de dedesubtul acesteia. De exemplu, reducerea liniei eg modifică numai triunghiul egh. Aceasta permite efectuarea eliminării numai cu câteva din submatricile din fig.4.3, în memorie.

În general lățimea scribenzii unei matrici este definită de relații puține elemente diferite de zero. Cu ajutorul elementelor extreme diferite de zero ale coloanelor se definește învelișul  $126/$  matricii  $K$ , indicat în fig.4.3.b. Numărul pozițiilor din interiorul învelișului constituie profilul matricii,  $p$ , noțiune ce descrie mai exact mărimea matricii decît noțiunea de scribandă,  $b$ ; învelișul definește mai exact forma.

Se poate arăta că în procesul de rezolvare a sistemelor de ecuații utilizînd procedeele directe sînt necesare numai elemente ce aparțin învelișului, ceea ce determină o reducere a operațiilor de calcul.

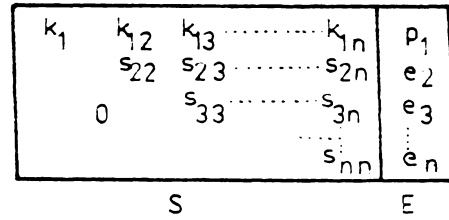
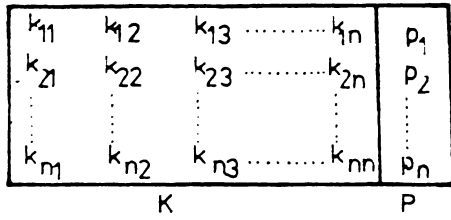


Fig. 4.1

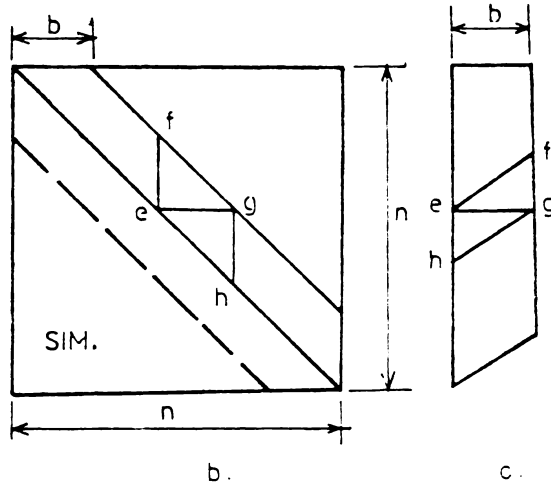
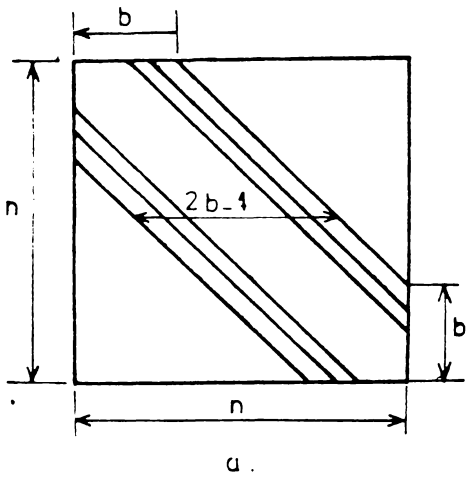


Fig. 4.2

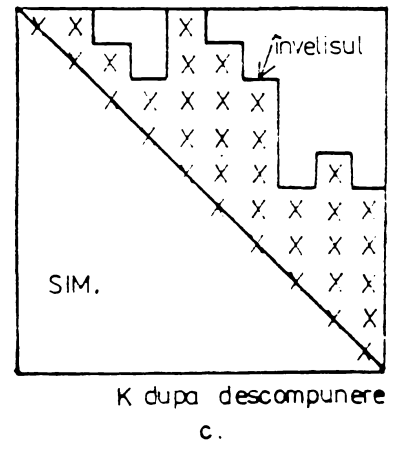
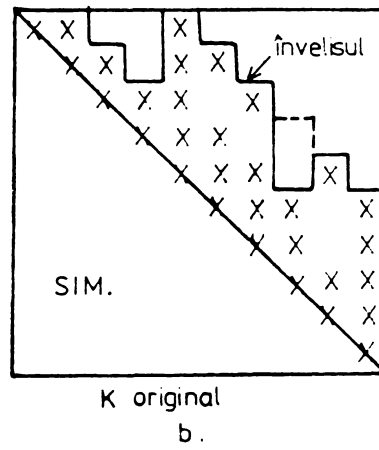
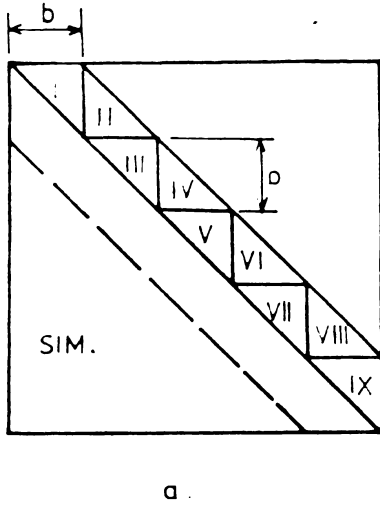


Fig. 4.3

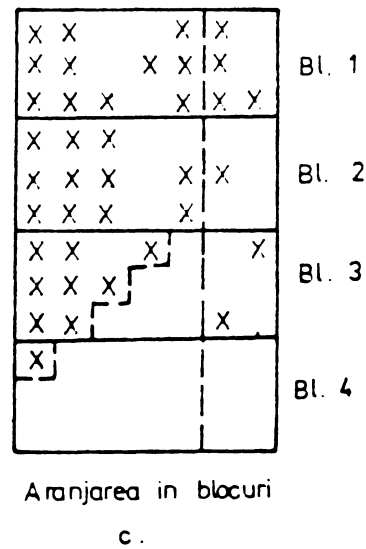
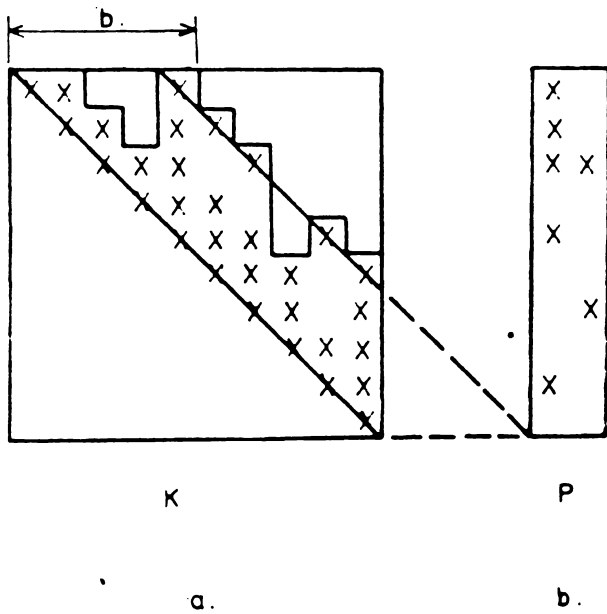


Fig. 4.4

Faza principală în rezolvarea ecuației (4.1) constă în descompunerea lui  $K$  în două matrici triunghiulare :

$$K = L^T G \quad (4.3)$$

în care  $G$  este matricea triunghiulară superioară, iar  $L^T$  este matricea triunghiulară inferioară normalizată astfel încât  $l_{ii} = 1$ . Deoarece  $K$  este simetrică  $d_{ij} = d_{ji} l_{ij}$  și ecuația (4.3) poate fi scrisă :

$$K = L^T DL \quad (4.4)$$

În descompunerea Cholesky standard,  $K$  se scrie :

$$K = \tilde{L}^T \tilde{L} \quad (4.5)$$

în care  $\tilde{l}_{ij} = \sqrt{d_{ij} l_{ij}}$ . În acest caz numărul operațiilor este mai redus.

Utilizând prima variantă de descompunere vom avea :

$$L^T V = -F ; \quad V = -DU \quad (4.6 \text{ și } 4.7)$$

unde soluția lui  $V$  în (4.6) se obține prin reducerea vectorului încărcăturilor, vectorul deplasărilor  $U$  poate fi calculat prin substituție înapoi.

În mod normal algoritmul de descompunere se aplică în ordine coloanelor. Există însă posibilitatea aplicării acestuia pe linii /463/, ceea ce dă posibilitatea efectuării operațiilor pe blocuri de matrice care conțin un anumit număr de ecuații grupate ca în fig.4.4.c. Inițial aceste blocuri sînt depozitate în memoria periferică, după care sînt introduse în memoria centrală câte două blocuri în vederea efectuării operațiilor de reducere. Vectorul încărcăturilor se reduce odată cu descompunerea matricii  $K$ . În acest fel pot fi rezolvate sisteme de ecuații de mărimi nelimitate. Lățimea maximă a scribenzii este determinată de restricția conform căreia numărul minim de ecuații într-un bloc este de două.

Variantele expuse mai sus necesită mai întîi alcătuirea completă a matricii de rigiditate. Există posibilitatea asamblării și reducerii în același timp a ecuațiilor. Această tehnică se numește metoda frontală /94/. Considerînd pentru exemplificare discretizarea din fig.4.5 pentru cazul stării de tensiune plană, se știe că fiecărui nod  $i$  se atașează două ecuații. Ecuațiile se condensează static în ordinea elementelor, adică primele ecuații considerate vor fi acelea corespunzătoare nodurilor 1, 2,  $n$  și  $n+1$ , următoarele vor include nodurile 3 și  $n+2$  și așa mai departe. Pentru a elimina gradele de libertate ale nodului 1 este necesar să asamblăm ecuațiile corespunzătoare nodurilor 1, 2,  $n$  și  $n+1$  deoarece ecuații-

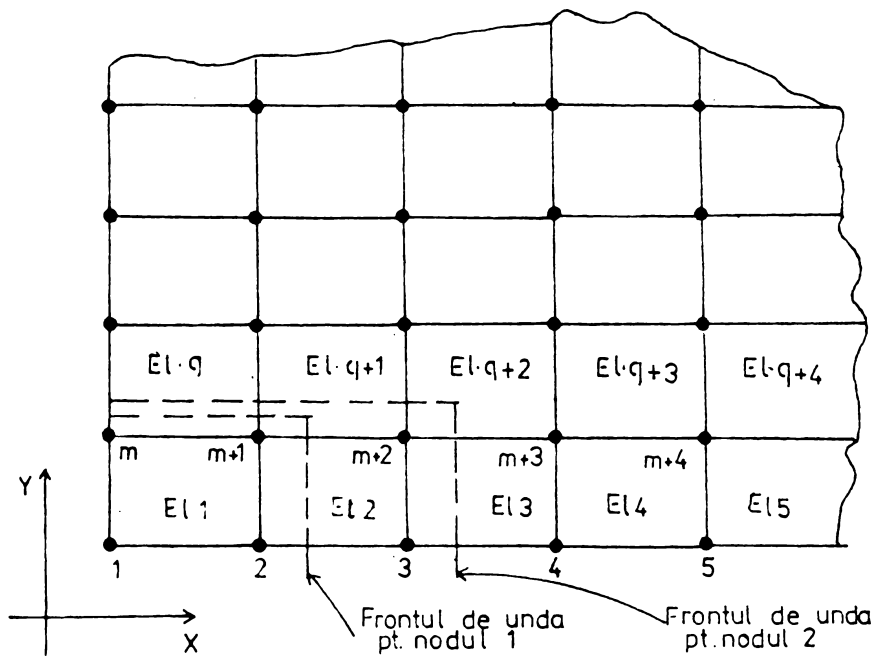


Fig. 4.5

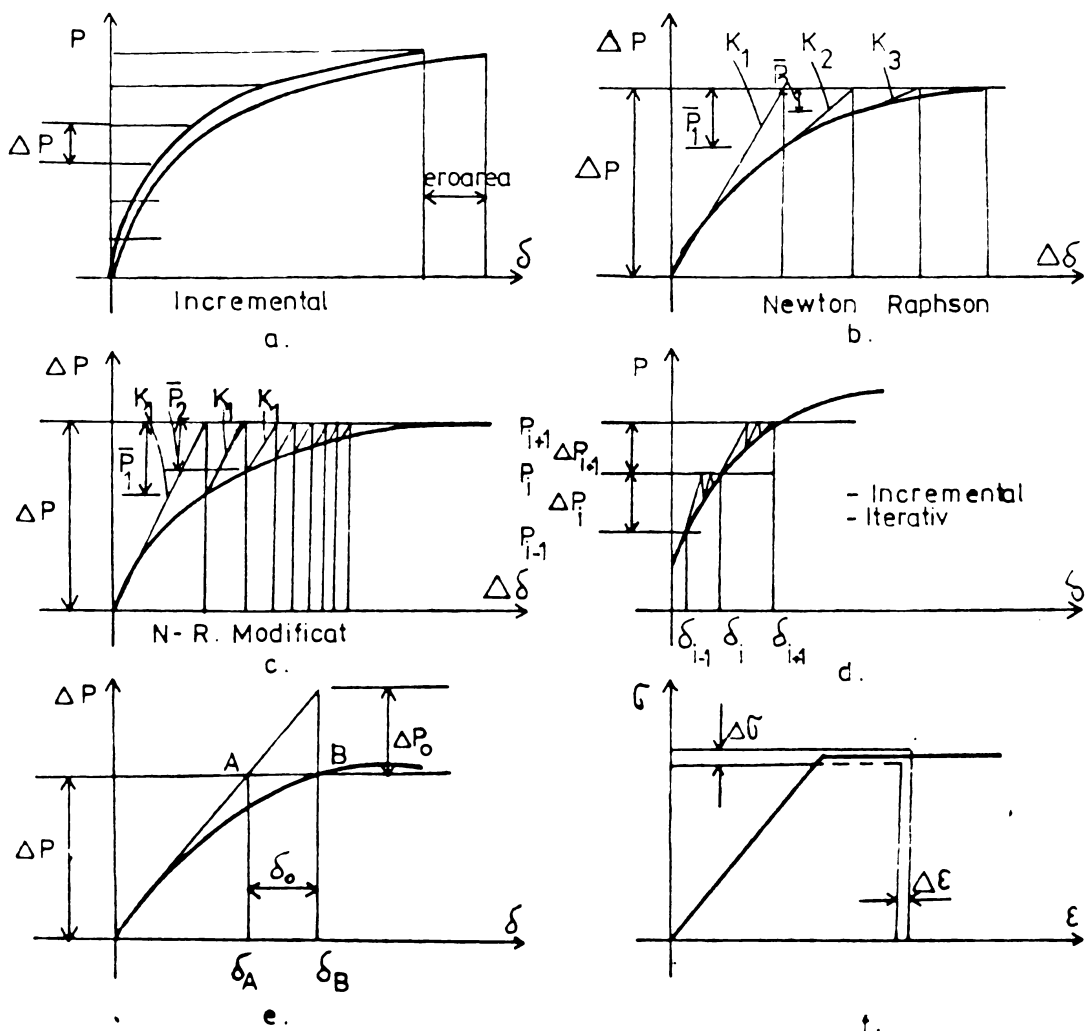


Fig. 4.6

ile asociate nodurilor 2, m și m+1 se cupleşă cu acelea corespunzătoare nodului 1. Aceasta înseamnă că rigiditățile matricelor 1, 2, q și q+1 trebuie mai întâi calculate și asamblate, iar apoi gradele de libertate ale nodului 1 condensate static. Apoi se calculează și assemblează matricile de rigiditate ale elementelor 3 și q+2 urmând a elimina ecuațiile nodului 2 și așa mai departe.

În principiu, soluția frontală este eliminarea Gauss având însă caracteristic faptul că deoarece ecuațiile se assemblează în ordinea elementelor, lungimea frontului de undă este determinat de numărul lor acestora. Din acest motiv este necesară o anumită ordine a elementelor. Avantajul acestei soluții constă în aceea că la un anumit moment dat în memoria centrală sînt prezente numai ecuațiile necesare în mod curent.

#### 4.1.2. Procedee prin utilizarea matricelor ortogonale

În această categorie de procedee intră factorizarea Givens și Householder. Prima utilizează matricile de rotație pentru reducerea lui K într-o matrice triunghiulară superioară. Cea de a doua utilizează matricile reflexivă.

Ambale procedee sînt mai costisitoare decît eliminarea Gauss iar în timpul transferărilor se pierde simetria și caracterul de bandă a matricii coeficienților. Avantajul însă al acestor procedee rezidă însă în stabilitatea mare pe care o au, ceea ce le recomandă în cazurile slab condiționate.

#### 4.1.3. Procedee iterative

În procedeul iterativ pentru obținerea soluției ecuației (7.1) este necesară estimarea inițială a deplasărilor  $U$ , de exemplu pentru  $U^1$ , care, în lipsa unor valori mai bune poate fi un vector nul.

Una dintre cele mai utilizate metode iterative este procedeul Gauss - Seidel. Conform acesteia se evaluatează pentru  $s = 1, 2, \dots$ :

$$U_i^{s+1} = \frac{-1}{K_{ii}} \left\{ P_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} U_j^{s+1} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} U_j^s \right\} \quad (4.8)$$

în care  $U_j^s$  și  $P_i$  sînt componentele  $i$ -ale lui  $U$  și  $P$  în ciclul  $s$ . În formă matricială se scrie :

$$U^{s+1} = \frac{-1}{D} \left\{ P - K_L U^{s+1} - K_U U^s \right\} \quad (4.9)$$



in care  $K_D$  este o matrice diagonală,  $K_D = \text{diag}(K_{1j})$ , iar  $K_L$  matricea triunghiulară inferioară cu elementele  $K_{ij}$  astfel încît :

$$K = K_L + K_D + K_L^T \quad (4.10)$$

Iterația se continuă pînă ce modificarea în vectorul curent al deplasărilor estimate este suficient de mică :

$$\frac{|U^{s+1} - U^s|}{|U^{s+1}|} < \varepsilon \quad (4.11)$$

Numărul de iterații depinde de "calitatea" vectorului de start  $U^1$  și de condiționarea matricii  $K$ . Dacă  $K$  este pozitiv definită soluția converge întotdeauna. Rata convergenței poate fi majorată utilizînd suprarelaxarea, în care caz iterația este :

$$U^{s+1} = U^s + \beta K_D^{-1} \left\{ P - K_L U^{s+1} - K_D U^s - K_L^T U^s \right\} \quad (4.12)$$

în care  $\beta$  este factorul de suprarelaxare. Valoarea optimă a lui depinde de  $K$  dar usual este între 1,3 și 1,9.

Procedeeul Gauss - Seidel se utilizează cu succes în problemele de reanalizare și optimizare. De asemenea în acest procedeu nu este necesară formarea întregii matricii  $K$  în memoria centrală.

#### 4.1.4. Condensarea statică. Substructurarea.

Condensarea statică este utilizată în vederea reducerii numărului de grade de libertate ale elementelor, pentru condensare, matricea de rigiditate  $K$  a structurii se poziționează, gradele de libertate care se rețin de cele care se condensează.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ac} \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a \\ P_c \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Utilizînd a doua ecuație matriceală din (4.13) obținem :

$$U_c = K_{cc}^{-1} (P_c - K_{ca} U_a) \quad (4.14)$$

Relația (4.14) se utilizează pentru substituirea lui  $U_c$  în prima ecuație matriceală din (4.13) în vederea obținerii ecuațiilor condensate :

$$(K_{aa} - K_{ac} K_{cc}^{-1} K_{ca}) U_a = P_a - K_{ac} K_{cc}^{-1} P_c \quad (4.15)$$

Practic, condensarea statică se efectuează utilizând eliminarea Gauss secvențial asupra fiecărui grad de libertate care urmează a fi condensat.

Aplicația frecventă a condensării se realizează în cadrul analizei pe substructuri. Substructurarea poate avea caracter matematic, dacă se referă la partiționarea matricii rigidităților și a vectorului încărcărilor scrise pentru structura întregă, respectiv un caracter fizic dacă fiecare substructură cu un element finit mare, compus dintr-o serie de elemente finite mai reduse ca mărime / 24/.

În funcție de configurația structurii, legătura între substructuri poate fi simplă sau complexă.

Rigiditatea totală a structurii se formează prin asamblarea rigidităților condensate ale substructurilor. Din această cauză, de fapt, substructurarea este utilizată în același fel ca și în cazul unui element finit cu grade de libertate interioare care este condensat înainte de procesul de asamblare.

Avantajul analizei prin substructuri constă în aceea că nu este necesară formarea întregii matrici de rigiditate a structurii. Datele de intrare sînt necesare numai pentru cîte o substructură.

Optimizarea substructurării se poate face printr-o substructurare pe nivele. De exemplu două substructuri se pot combina pentru a forma o altă substructură de nivel superior, și așa mai departe pînă la formarea întregii structurii.

#### 4.2. Ecuații algebrice neliniare

Ecuațiile algebrice neliniare ale unui sistem structural în echilibru static sînt :

$$K(U)U = P \quad (4.16)$$

Neliniaritatea sistemului este indicată de dependența matricii de rigiditate de deplasările nodale. Neliniaritatea își are baza în relațiile eforturi - deformații și în eciteriile de cedare și/sau neliniaritatea geometrică sub forma unor relații neliniare deformații - deplasări. În mod normal aceasta din urmă este mică. Rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare se obține printr-o serie de aproximații liniare pînă ce condițiile de echilibru și de margine ale modelului de material sînt satisficute cu o toleranță acceptabilă. (Un astfel de procedeu este un procedeu incremental. (fig.4.6.a)). Astfel, toate metodele de rezolvare a sistemelor neliniare se bazează pe un proces de soluții liniare și deci metoda

elementelor finite rămâne variabilă și în acest caz.

Cel mai general procedeu de rezolvare a sistemelor neliniare constă în generalizarea metodei clasice Newton - Raphson (fig. 4.6.b). Încărcarea exterioară se aplică în incremente. Numărul și mărimea incrementelor se alege în concordanță cu gradul de neliniaritate a problemei și cu gradul de acuratețe cerut. La fiecare treaptă de încărcare se verifică echilibrul structurii prin compararea încărcării totale aplicate cu forțele nodale echivalente eforturilor din structură. Diferența, numită forțe reziduale, se aplică iterativ structurii până ce echilibrul s-a restabilit în cadrul unei anumite toleranțe. Matricea de rigiditate a structurii este modificată corespunzător fiecărui increment și în timpul procesului iterativ. Metoda se mai numește incremental-iterativă.

Toate celelalte metode constituie cazuri speciale ale metodei Newton - Raphson. Diferitele variante ale metodei implică adăugarea forțelor reziduale la următorul increment de încărcare pentru a reduce diferența de la soluția "exactă". Se mai poate utiliza și rigiditatea tangentă corespunzătoare punctului de la mijlocul incrementului de încărcare. Această medie sau rigiditate se caută este evaluată prin utilizarea unor procedee numerice ca de exemplu metoda Runge - Kutar.

Deoarece procesul de alcătuire a matricii de rigiditate consumă timp, se poate utiliza o variantă care utilizează matricea inițială și realizează relaxări succesive pentru a atinge convergența (fig.4.6.c).

Atât metodele incrementale cât și cele iterative pot fi utilizate în elasticitatea neliniară și în elastoplasticitate. În afara acestora, alte două variante se utilizează în analiza elastoplastică : metoda deformațiilor inițiale și metoda eforturilor inițiale.

Metoda deformațiilor inițiale, utilizează matricea de rigiditate inițială și deci reduce timpul de calcul. Astfel, la încărcarea  $\Delta P$  se obține deplasarea  $\delta_A$  (fig.4.6.e). Diferența dintre deplasarea  $c$  cretă  $\delta_B$  la nivelul de încărcare respectiv și  $\delta_A$  este  $\delta_0$ . Deformațiile inițiale  $\epsilon_0$  corespunzătoare lui  $\delta_0$  pot fi calculate cu relația :

$$\epsilon_0 = B \delta_0 \quad (4.17)$$

astfel încât se poate calcula corecția de încărcare  $P_0$  din relația :

$$\Delta P_0 = \int_V B^T D \epsilon_0 dV \quad (4.18)$$

se pot utiliza trei scheme de calcul în această metodă :  
procedeele incremental tip, procedeele incremental direct și procedeele iterativ.

Metoda deformațiilor inițiale nu este convergentă pentru cazurile perfect plastice din cauza deformațiilor plastice foarte mari care apar în aceste cazuri.

Metoda eforturilor inițiale este mai indicată în analiza sistemelor plastice deoarece oferă o valoare mică a eforturilor pentru un increment de deformație. Figura 4.6.f arată că invers nu este în mod necesar adevărat.

Metoda eforturilor inițiale are la bază o metodă mixtă în care matricea de rigiditate se modifică pentru fiecare increment dar rămâne aceeași în timpul iterațiilor din cadrul acestuia. Eforturile "inițiale" se evaluează din diferența ce rezultă între eforturile corecte și cele calculate. Cu ele se corectează vectorul incălcărilor, după care procesul se repetă până se converge.

Convergența procedeelelor incremental - iterative este intim legată de conceptul de simulare al cedării structurii analizate. În sens fizic, structura începe să cedeze când încărcarea aplicată produce eforturi interne care depășesc capacitatea portantă a materialului în anumite puncte. Structura răspunde prin redistribuirea eforturilor la zonele mai puțin încărcate, rezultând o nouă stare de echilibru. Cedarea începe când redistribuirea declanșează un proces în lanț adică atunci când eforturile redistribuite generează eforturi suplimentare care nu mai pot fi preluate, deformațiile cresc ducând la colapsul structurii prin formarea unui mecanism.

În metoda elementelor finite procesul de cedare începe prin creșterea deformațiilor și continuă până ce acesta devine instabil. Instabilitatea se semnalează prin prezența unor elemente nule pe diagonala principală a matricii de rigiditate care încetează să mai fie pozitiv definită.

Deoarece procedeelele nu face distincție între cedările locale și colapsul general se obișnuiește a se modifica în mod artificial valorile nule în valori nenule apropiate. În acest fel mecanismul de cedare se deduce din secvențele și configurația elementelor care au cedat.

Bibliografie : 24, 26, 94, 114, 163.

## 5. PROGRAME PENTRU CALCULUL DIAFRAGHELOR

### 5.1. Programul DIAPRACK /115/

#### 5.1.1. Domeniul de aplicabilitate

Programul efectuează calculul static al structurilor rigide cu diafragme monotone dispuse după două direcții ortogonale. Încărcarea exterioară asupra structurii poate fi vântul și/sau seismul. Evaluarea acestor încărcări, pe fiecare direcție a structurii, se face în afara programului. Programul calculează caracteristicile elastice și geometrice ale diafragmelor, repartizează încărcările exterioare pe diafragme și determină eforturile secționale.

#### 5.1.2. Structura programului

Schemă logică a programului este redată în fig.5.1. Programul conține un modul principal și patru subrutine pentru calculul eforturilor. Programul este dimensionat pentru 30 K<sub>0</sub> și poate rezolva structuri cu până la 50 de diafragme de diferite tipuri. Diafragmele cu goluri pot avea cel mult 9 șiruri de goluri. Numărul de niveluri nu este limitativ. Programul este prezentat în detaliu în lucrarea /115/.

#### 5.1.3. Rezultatele oferite de program

Programul primește ca date de intrare caracteristicile geometrice ale diafragmelor, precum și caracteristici privind desfășurarea pe verticală a diafragmelor. Structura se descompune în elemente simple (diafragme verticale) după care urmează etapele :

- reprezentarea secțiunilor orizontale active ale diafragmelor într-un sistem de coordonate, astfel încât abscisele și ordonatele să fie strict pozitive;
- secțiunile orizontale se descompun în dreptunghiuri pentru care se declară laturile și poziția centrelor de greutate;
- se analizează încărcările orizontale și poziția acestora;
- se calculează excentricitatea adițională convențională a încărcării seismice.

În urma calculului rezultă pentru fiecare diafragmă :

- lista caracteristicilor geometrice și elastice ale componentelor (aria, aria redusă, centrul de greutate, momentul de inerție);

- caracteristicile buiandrugilor;
- centrul de greutate al diafragmei;
- coeficientul de monolitism;
- momentele de inerție echivalente (la vînt și seismic);
- eforturile secționale la fiecare nivel (M, T);
- forțele tăietoare în buiandrugii.

### 5.2. Programul DIASPA /111/

Programul DIASPA constituie o extindere a programului DIAPHAGM pentru calculul de ansamblu al unei structuri care are diafragme monotone dispuse după două direcții.

Calculul urmează aceleași etape ca cele prezentate la programul DIAPHAGM. Ipoteza de bază este decompunerea structurii în elemente de rezistență după cele două direcții principale, care se presupun orientate pe direcțiile de desfășurare ale acestora.

Modalitatea de introducere a datelor și rezultatele obținute sînt identice cu cele ale programului DIAPHAGM.

### 5.3. Programul BIOGRAF 01 /151/, /194/, /154/

#### 5.3.1. Domeniul de aplicabilitate

Efectuează un calcul biografic pentru elemente de beton armat în starea plană de tensiune. El este destinat să analizeze plăcile de beton în care se produc fisuri și apare plasticizarea. Programul utilizează elemente finite triunghiulare în stare plană de tensiuni.

Betonul armat se modelează prin elemente finite de beton armat ca un material compus. Matricole de rigiditate ale elementelor se stabilesc în funcție de starea tipică a betonului din zona respectivă.

Armătura se consideră distribuită în elementele finite. Se pot considera patru direcții de armare pentru fiecare element. Programul poate analiza și plăci isotrope la care procentul de armare este nul, iar rezistența materialului să fie mai mare decît limita de curgere. Se pot analiza și cazurile de propagare pură a fisurilor, dacă efortul de curgere se adoptă suficient de mare.

Calculul se poate conduce fie prin incrementele de forță propuse, fie prin incrementele de deplasare.

Încălzirile variabile se aplică structurii prin elemente



egale sau neegale succesive, suma acestor incremente determină intensitatea încălzirii la pasul respectiv. Incrementele de încălzire se pot stabili astfel încât să modeleze forțe descrescătoare ca intensitate sau chiar schimbarea direcției de acțiune a acestora (încălziri ciclice sau alternante). În cazul existenței mai multor forțe variabile acționând simultan, intensitatea acestora poate varia proporțional cu mărirea intensității fiecăruia.

Mărirea incrementului de forță are un efect relativ mic asupra rezultatelor. În schimb mărirea incrementului de deplasare influențează sensibil rezultatele. Deplasările obținute pentru incrementele de deplasare mai mari sînt mai reduse decît în caz contrar.

Diagrama forță - deplasare pentru o discretizare grosieră este în general densupra celei obținute pentru o discretizare fină.

### 5.3.2. Structura programului

Structura programului de calcul este reprezentată în fig. 5.2, împreună cu schema apelării modulelor.

Matricea de rigiditate inițială a structurii este asamblată sub formă de matrice bandă. Calculul deplasărilor primului increment de încălzire dat se realizează în blocurile 4 și 5. Se pot utiliza atît incrementele de forță cît și de deplasare. Soluția primului increment, este scalată la limita elastică a structurii (care poate fi prima fisură sau prima curgere) în blocul 6. Deci, primul increment poate fi specificat cu orice valoare, el urînd a fi scalat la limita elastică. Din acest punct soluțiile se vor obține pe baza incrementelor specificate. Această analiză incrementală se realizează în blocul 7.

Matricea de rigiditate a structurii este depusă în memorie sub formă de scribandă. Deplasările necunoscute  $U_a$  se obțin din ecuația :

$$K_{aa} U_a + K_{ab} U_b = X_a \quad (5.1)$$

în care  $U_b$  sînt deplasările cunoscute. Noul vector al forțelor este :

$$X^N = X_a - K_{ab} U_b \quad (5.2)$$

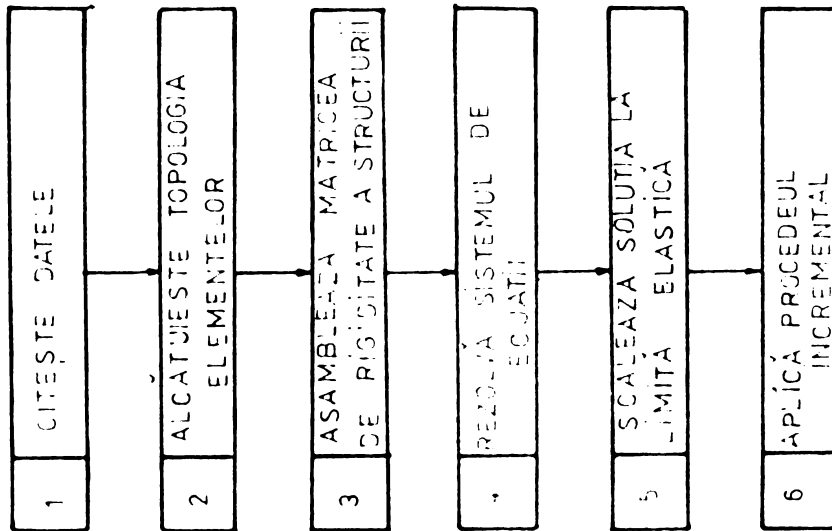
Iar ecuația ( 5.1 ) se reduce la :

$$K_{aa} U_a = X^N \quad (4.3)$$

Acest set de ecuații este rezolvat prin procedeul Choleski prezentat în capitolul 4.



a.



b.

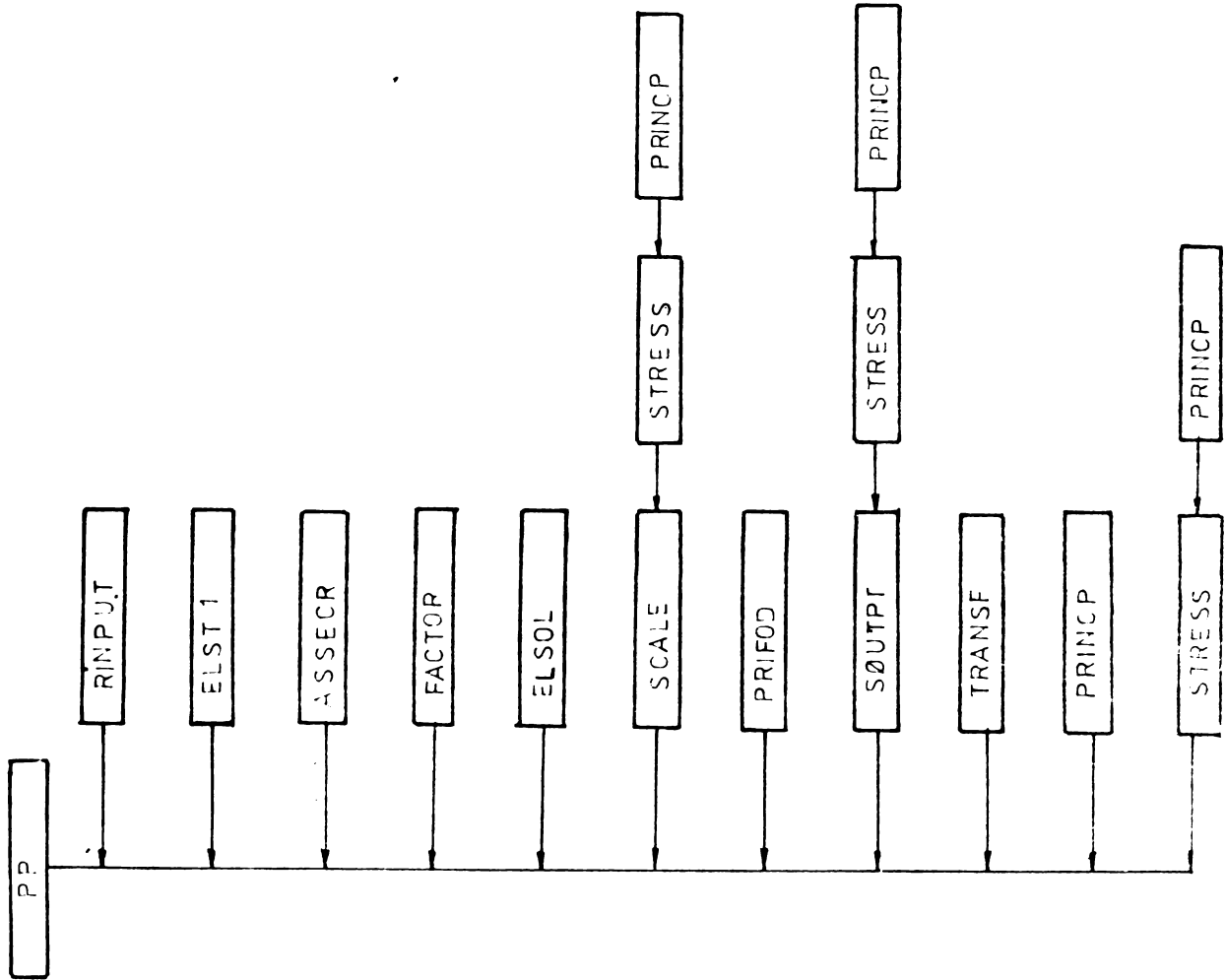


FIG 52

Procedeeul incremental este prezentat în fig.5.3.a. Acest proces conține două cicluri mari. Ciclul exterior se realizează pentru fiecare increment de încărcare. Ciclul interior repetă rezolvarea deplasărilor pentru un increment de încărcare, până când toate forțele de transfer au fost distribuite și echilibrul a fost restabilit. Ciclul forțelor de transfer se poate termina fie în blocul 4 dacă se atinge deformația limită specificată, fie în blocul 5, dacă mărimea forțelor de transfer este comparată cu eroarea admisibilă, de asemenea specificată.

Blocul 5 în care au loc modificările de material și se calculează forțele de transfer este prezentat extins în fig.5.3.b. Fiecare element din structură trebuie să treacă prin această procedură. La început, eforturile și deformațiile elementelor sunt calculate din deplasările incrementale. Apoi fiecare element este dirijat înspre modificarea corespunzătoare a proprietății materialului prin intermediul unui bloc logic, în care codul numerar NCR definește modul de fisurare în conformitate cu fig.2.27. Se studiază toate elementele și se determină eforturile de transfer între punctele 110 și 190. Forțele de transfer se calculează din eforturile de transfer în ultimul bloc.

Se observă că în blocul 5 poate avea loc orice modificare de material. Aceasta denotă că într-un singur increment de încărcare o fisură se poate deschide sau închide, și comportarea plastică poate să apară în orice număr de elemente simultan.

În cadrul programului s-a utilizat metoda rigidității tangente pentru studiul propagării fisurilor și al plasticizării betonului comprimat uniaxial între fisuri iar pentru plasticizarea biaxială a betonului, metoda rigidității inițiale.

Subrutinolele programului sînt următoarele :

- RINPUT - citește datele și generează topologia elementelor.
- ELMFI - calculează matricele de rigiditate ale elementelor.
- ASSEMB - assemblează matricea structurii.
- FACTOR - factorizează matricea structurii.
- ELSOI - calculează deplasările pentru forțele sau deplasările impuse.
- OUTPT - tipărește eforturile și deformațiile elementelor.
- PRIPFD - tipărește încărcările, deplasările și reacțiunile în rezane.
- STRESS - calculează deformațiile și eforturile în elemente.
- SCALE - scalează soluția la limita elastică.

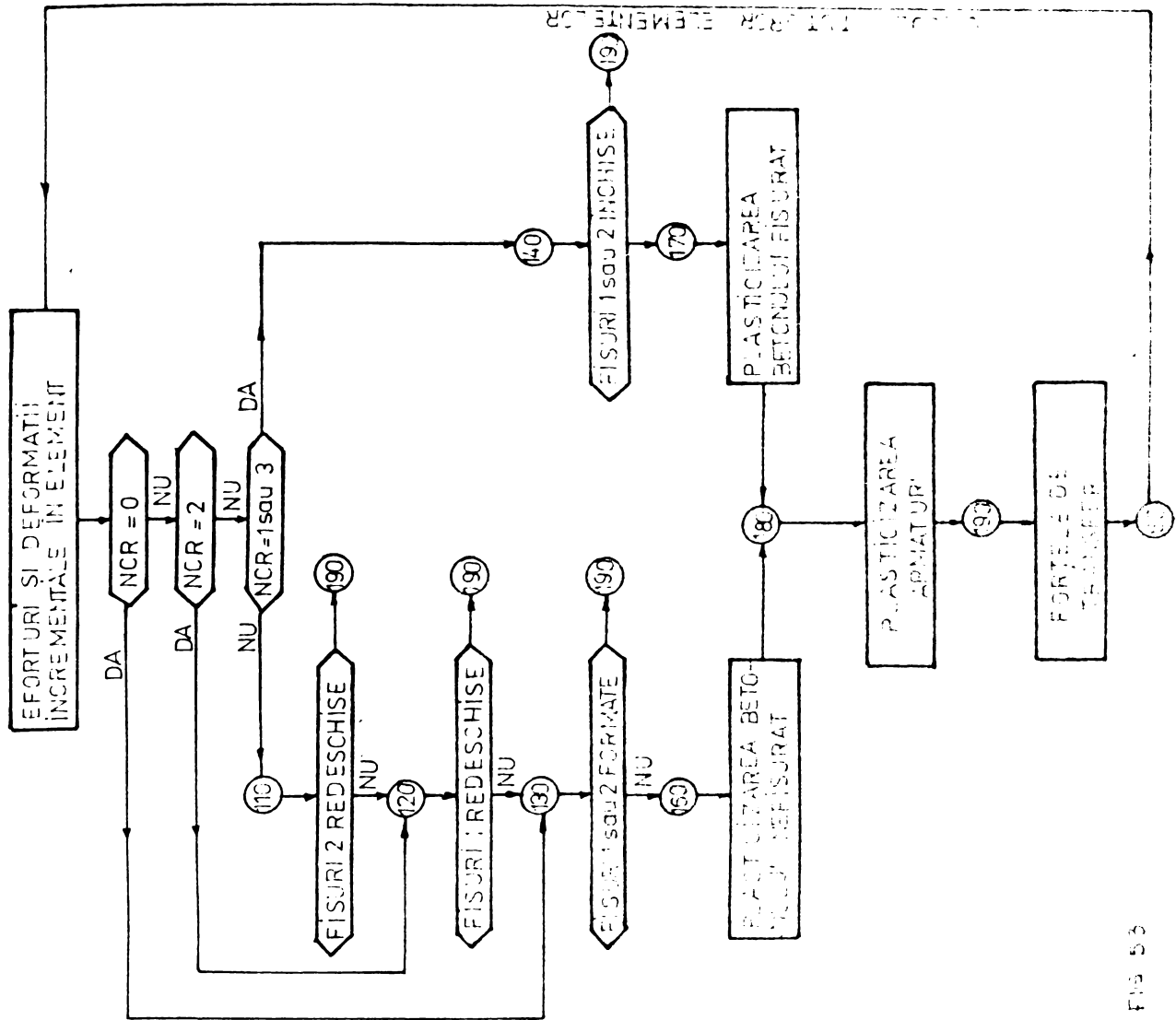
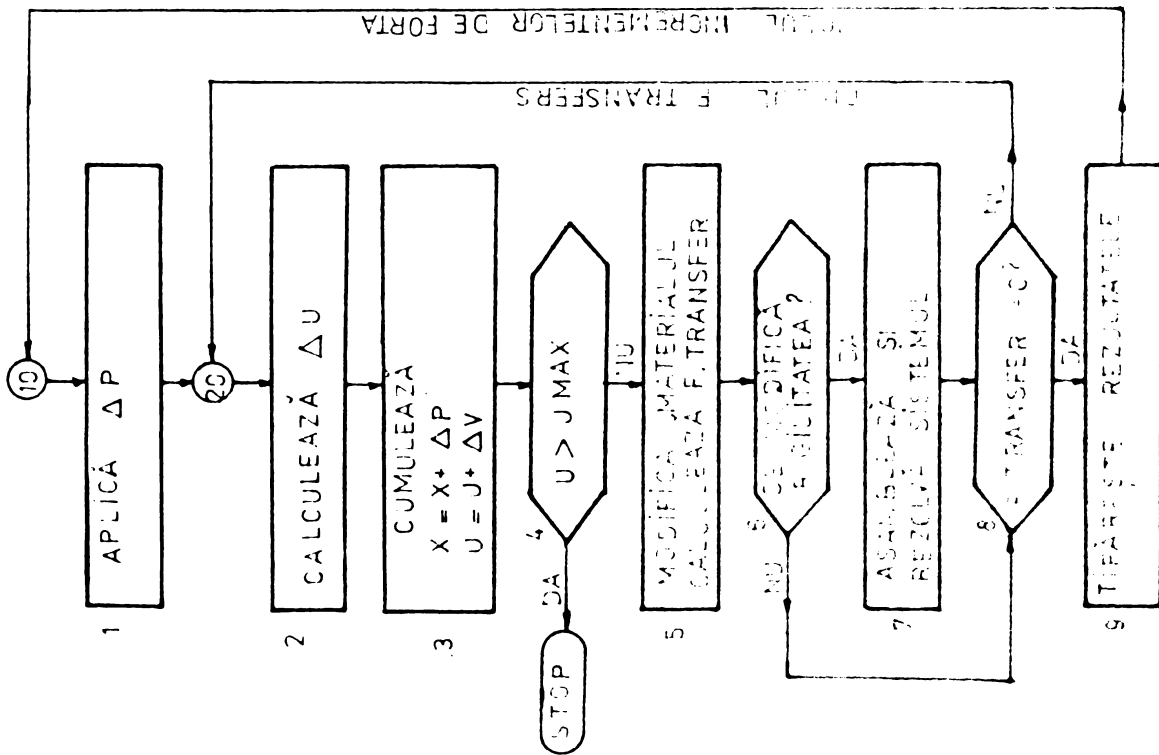


Fig. 5.3

**TRANSF** - transformă vectorul deformațiilor sau eforturilor după rotirea axelor de coordonate.

**PRINCP** - calculează eforturile și direcțiile principale în beton.

### 5.3.3. Rezultatele oferite de program

Deoarece toate variabilele sînt stocate în memoria centrală, programul este predimensionat. Pentru varianta care lucrează cu 60 pagini de memorie numărul maxim de deplasări nodale este 386 pentru o lățime a scribansii de 26. Numărul maxim de elemente al acestei combinații este 302. Se poate specifica un singur caz de încărcare, deoarece în această analiză neliniară soluționarea simultană a mai multor ipoteze de încărcare nu este posibilă.

Programul stabilește limita elastică, iar pentru fiecare increment de încărcare listează :

- deplasările sau încărcările specificate;
- deplasările nodale rezultate;
- reacțiunile;
- tabele cu informații despre elemente conținând eforturile unitare principale în beton, direcțiile lor, eforturile în armături, modul de fisurare sau plasticizare, deformațiile specifice în element.

La sfîrșitul analizei se tipărește relația forță - deplasare într-un nod specificat (de regulă cel cu deplasarea maximă).

### 5.4. Programul BIOGRAF 02 /152/, /153/, /190/, /191/

#### 5.4.1. Domeniul de aplicabilitate

Programul BIOGRAF 02 are domeniul de aplicabilitate identic cu cel al programului BIOGRAF 01. Se deosebește de anteriorul prin:

- capacitate teoretic neliniară;
- posibilitatea specificării numai a incrementelor de forță;
- posibilitatea specificării și a unei încărcări constante (de exemplu sarcinile permanente).

Elementul plan de calcul poate avea grosimi variabile, în limitele respectării ipotezei tensiunilor plane. Armătura se consideră aplicată în planul median.

Acțiunile exterioare aplicabile structurii prin metoda biografică pot fi forțe concentrate sau distribuite provenite dintr-un regim static sau evanescitiv. Ele se aplică în nodurile rețelei de

a.

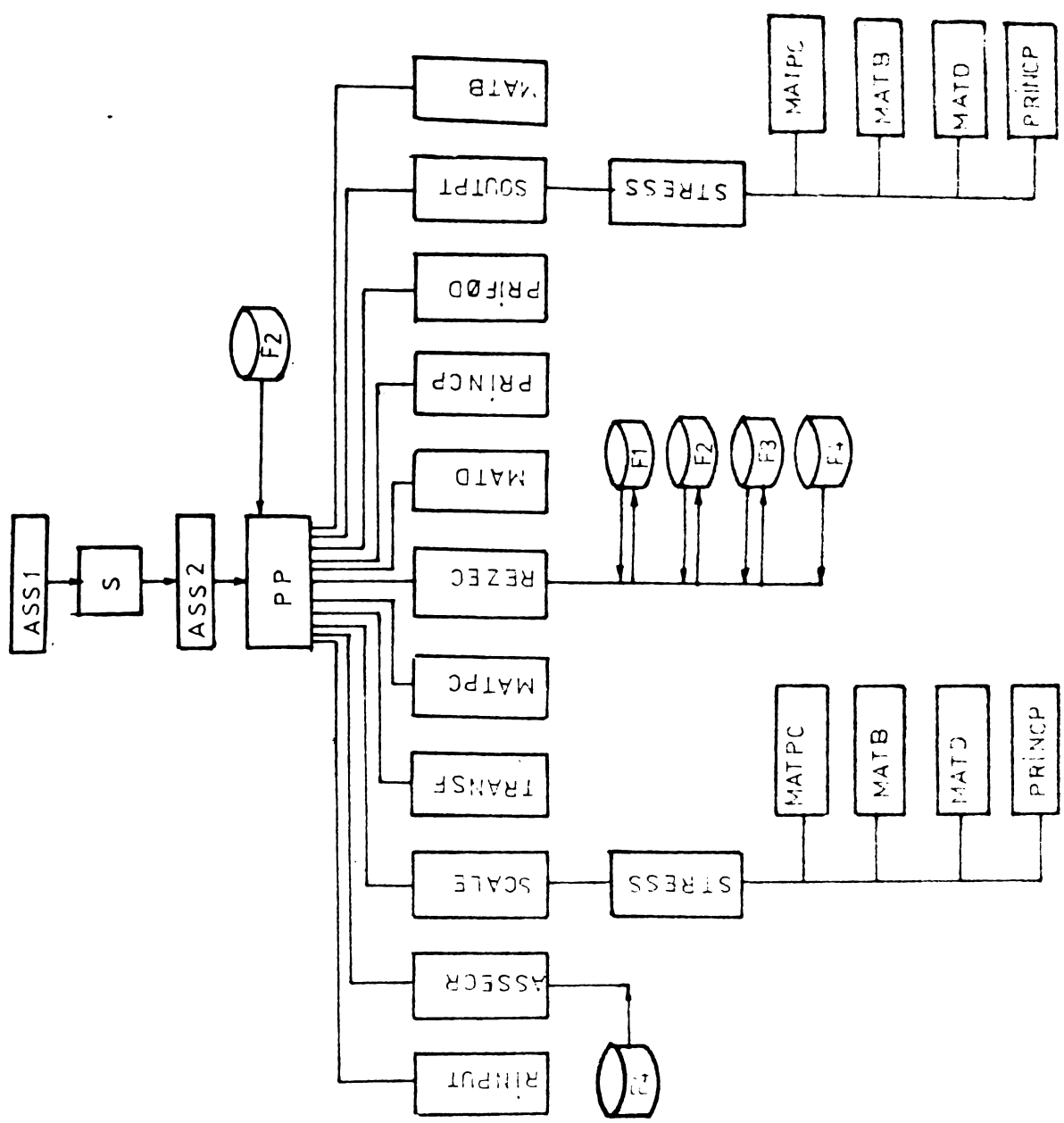
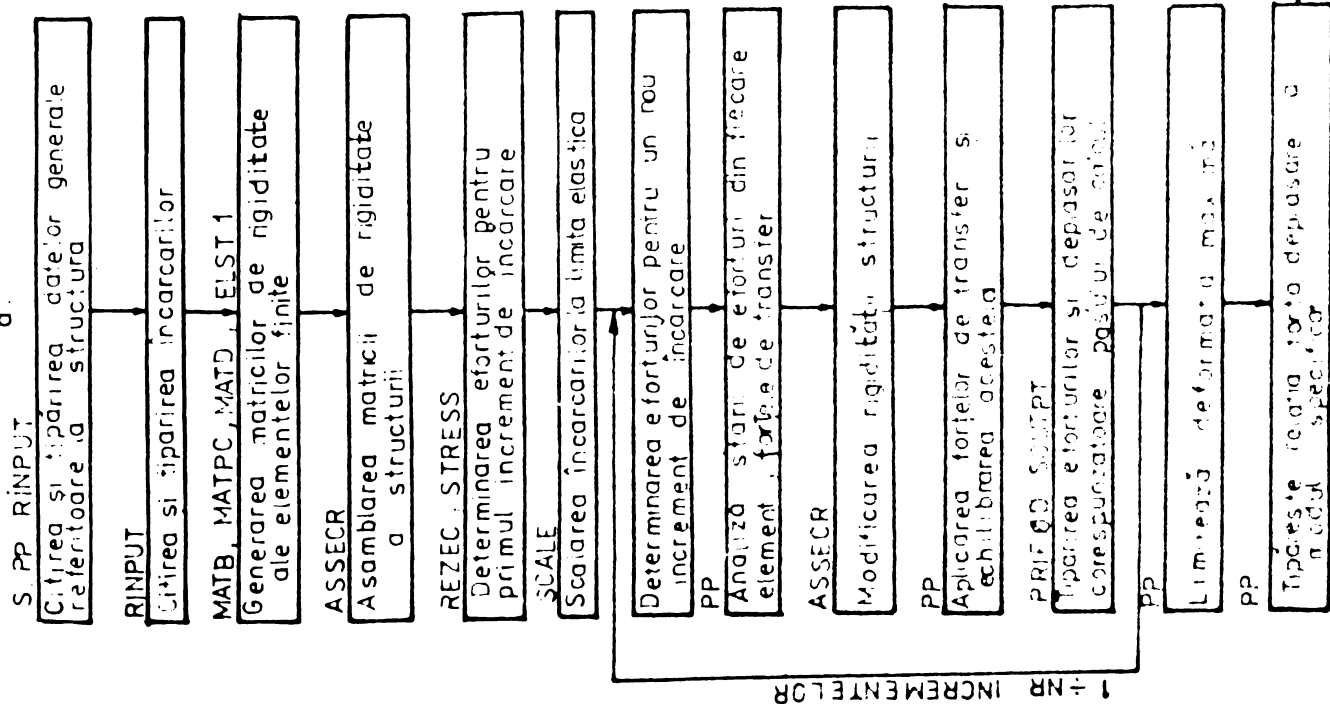


FIG. 54

discretizare și pot avea caracter constant sau variabil în cadrul biografiei elementului.

#### 5.4.2. Structura programului

Scheza bloc a programului și schema aplicării modulelor este reprezentată în fig.5.4.

Funcțiile modulelor în cadrul programului sînt :

- ABS1 - calculează necesarul de memorie pentru abordare.
- ABS2 - calculează necesarul de memorie pentru rezolvare.
- S - calculează lățimea maximă a semibenzii.
- PP - modulul principal de apel al modulelor de lucru; efectuează analiza incrementală.
- ASSEMB - asamblează matricea de rigiditate și vectorii încălzirilor depunîndu-l în blocuri pe memoria periferică.
- INPUT - citește coordonatele nodurilor, caracteristicile materialelor, încălzirile, topologia elementelor.
- KATPC, KATB, KATD - alcătuiesc matricile elasticitate.
- ELMPL - alcătuiește matricea elementului finit de beton armat.
- SCALE - scalează soluția inițială la limita elastică.
- ANALSS - calculează deformații și eforturile în beton și armătură.
- PRINCIP - calculează eforturile principale în beton.
- TRANSF - transformă vectorul deformațiilor sau al eforturilor după rotirea axelor de coordonate.
- OUTPT - tipărește eforturile și deformațiile.
- PRINTD - tipărește încălzirile și deplasările.
- RESOLC - rezolvă sistemul de ecuații pe blocuri.

Programul posedă două module ANIMIS prin care se alocă automat spațiul de memorie necesar măsurilor de lucru interne și strictă concordanță cu dimensiunile fiecărei aplicații.

Memoria ocupată în cursul execuției este compusă din memoria ocupată de instrucțiunile programului  $M_p$  și memoria necesară datelor concrete ale aplicației  $M_p$ .

Se stabilesc notațiile :

- NE - numărul total de elemente finite.
- NJ - numărul total de noduri ale structurii.
- NRAND - lățimea semibenzii sistemului de ecuații.
- NRC - numărul total de ecuații.

Memoria necesară datelor concrete ale aplicației este :

$$M_D = 28 \times NE + 12 \times NJ$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații pe blocuri este necesară alocarea unei arii suplimentare de memorie, echivalente a două blocuri. Deoarece lungimea blocurilor se stabilește automat prin program în funcție de memoria alocată, rezultă ca minim necesar o arie echivalentă pentru cel puțin două ecuații :

$$M_D = 28 \times NE + 12 \times NJ + (N \text{ BAND} + 2) \times 2$$

Memoria necesară unei aplicații va fi :

$$M_T = M_p + (M_D) / 256 \quad [ K_o ]$$

în care  $M_p = 64 K_o$ .

Valoarea  $M_T$  va rezulta în  $K_o$ , particularitățile sistemelor FELIX cerind rotunjirea valorii obținute la întregul par superior.

### 5.4.3. Rezultatele oferite de program

Programul oferă aceleași rezultate ca și BIOGRAF 01. În plus, se pot calcula mai multe ale aceluiași exemplu în cadrul unei singure valori folosind aceeași topologie. Se pot modifica calitățile materialelor, procentele de armare, numărul și/sau mărirea incrementelor de forță.

## 5.5. Programul MODIN 01 /155/, /192/, /193/

### 5.5.1. Domeniul de aplicabilitate

Programul efectuează o analiză dinamică în domeniul neliniar pentru structuri în stare plană de tensiuni. Neliniaritatea este introdusă prin modificările proprietăților materialului în elementele afectate și prin transferarea și distribuirea eforturilor nepreluate la elementele adiacente care le pot prelua.

### 5.5.2. Structura programului

Programul de calcul rezolvă ecuațiile de mișcare pentru seturi de deplasări nodale incrementale.

Se generează matricele de rigiditate ale elementelor finite, se asamblază matricea de rigiditate a structurii în pasul res-

pectiv, precum și matricea maselor și matricea de amortizare. Pentru matricea de amortizare se utilizează modelul Rayleigh simplificat.

Analiza se începe prin aplicarea primului increment de accelerație bazei structurii. În fiecare interval de timp  $\Delta t$ , se calculează deplasările și eforturile în structură, făcându-se o verificare a stării materialului pentru fiecare element. Dacă unele relațiile constitutive ale materialului au fost violate, se regenerează matricea modificată de rigiditate. Se calculează forțele de transfer. Acestea se aplică structurii ca forțe "statice". Efectul lor se consideră în următorul interval de timp. Aceasta înseamnă că pentru fiecare interval, cu excepția primului, deplasările nodale incrementale se produc datorită a două efecte: incrementul de accelerație al bazei și forțele de transfer calculate în pasul anterior.

Schema bloc este reprezentată în fig.5.5. Subrutinele utilizate au domenii și funcțiuni similare cu cele din programul EIO-GRAP 02.

### 5.5.3. Rezultatele oferite de program

Programul calculează caracteristicile de răspuns ale structurii în domeniul postelastice. Pe baza incrementelor de accelerații specificate în intervale de timp finite se calculează accelerațiile, vitezele și deplasările de răspuns. Pe baza acestora se evaluează starea de eforturi în pasul respectiv.

### 5.6. Programul NETEQ /21/

Programul NETEQ efectuează calculul static al unei structuri în starea plană de tensiuni utilizând teoria echivalențelor. Discretizarea structurii se face pe baza modelului rectangular cu noduri articulate, formându-se o rețea de bare. Rezolvarea acestei structuri se face prin metoda deplasărilor în formulare matricială. Calculul se încheie prin determinarea eforturilor și deplasărilor în structura echivalentă.

### 5.7. Programul CRUP 1 /188/, /194/

#### 5.7.1. Domeniul de aplicabilitate

Programul calculează starea de eforturi și defecțiuni în-



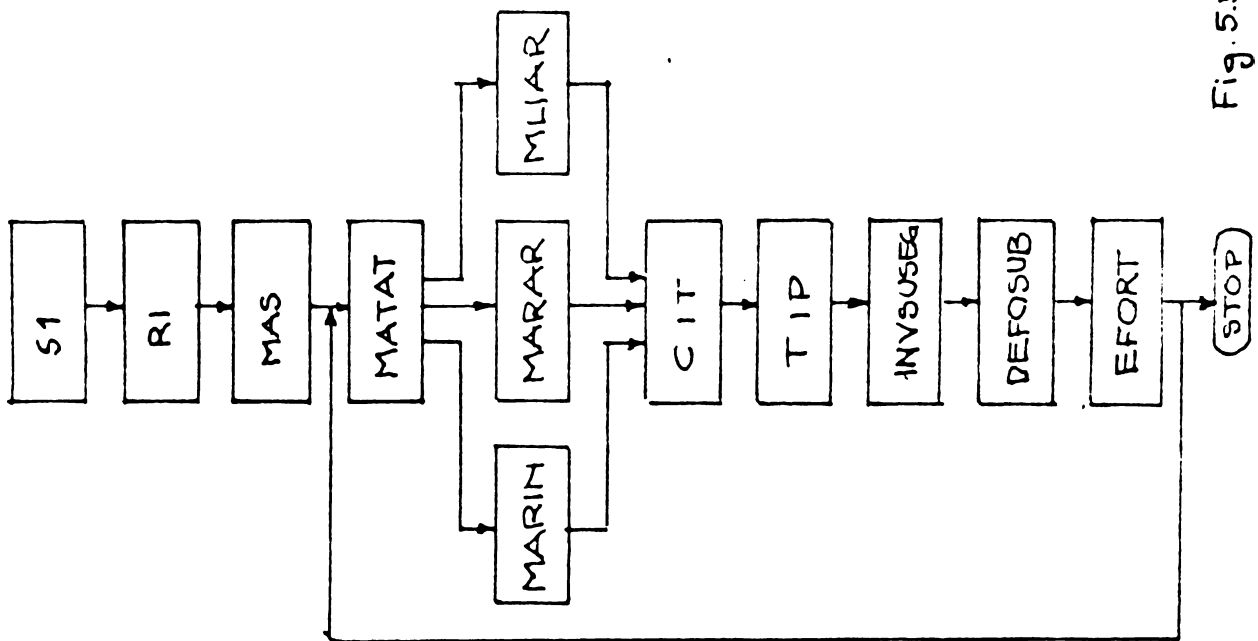


Fig. 5.5

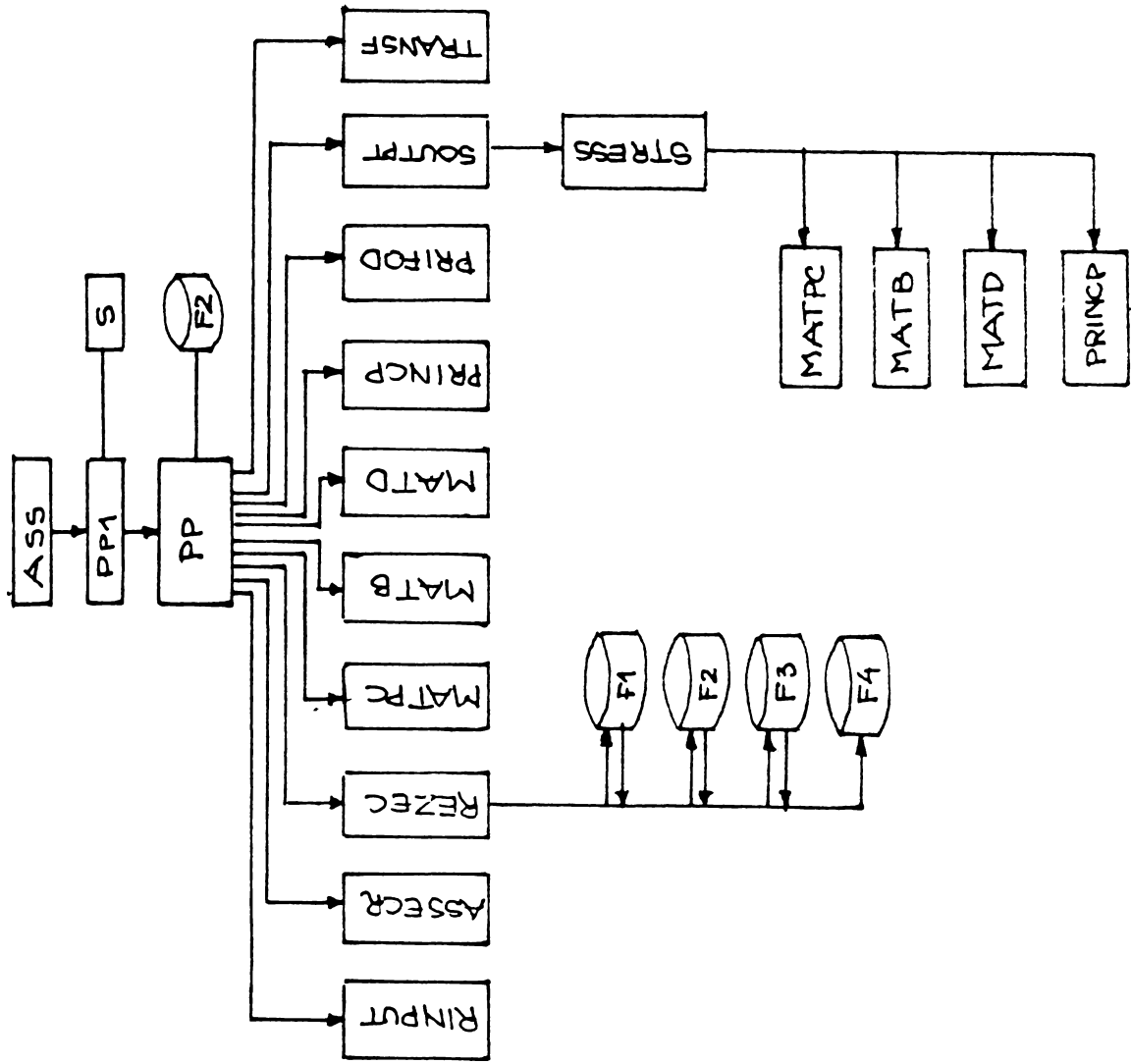


Fig. 5.6

tr-o structură discretizată în elemente finite triunghiulare, grupate în substructuri. Încărcarea care se poate aplica structurii poate fi de tip forță sau variație de temperatură.

### 5.7.2. Structura programului

În fig.5.6 este reprezentată schema bloc a programului. Se utilizează următoarele subrutine :

- RI - alcătuiește matricele de rigiditate ale elementelor.
- MAS - alcătuiește matricea substructurii standard.
- MARAT, MARAH, MARAN, MARIN - alcătuiesc matrice de rigiditate specifice substructurilor.
- CIT - citește datele.
- TIP - tipărește datele.
- DEFOSUB - calculează deformațiile substructurilor.
- EFOSUB - calculează eforturile substructurilor.
- INVERSUB - inversează matricele substructurilor.

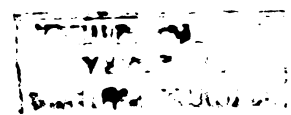
### 5.7.3. Rezultatele oferite de program

Programul calculează deplasările nodale, deformațiile specifice și eforturile unitare în elementele finite.

### 5.8. Programul HIOALPAT /24/

Structura programului HIOALPAT este similară cu cea a programului HIOGRAF 01.

Programul HIOALPAT este însoțit cu o subrutină de calcul a forțelor nodale provenite dintr-un ecart de temperatură  $T$  aplicat uniform pe suprafața elementelor finite. În consecință programul poate efectua o analiză neliniară a plăcilor de beton sau beton armat supuse variațiilor de temperatură sau efectului contracției împiedecate.



## 6. PARTICULARITĂȚI PRIVIND CALCULUL DIAFRAGMELOR

### DE BETON ARMAT

#### 6.1. Studiul efectului contracției la diafragmele din beton armat

##### 6.1.1. Oportunitatea studierii efectului contracției

În literatura tehnică de specialitate există o abundență de articole și lucrări care se referă la calculul și comportarea construcțiilor cu structura de referință din diafragme de beton armat. Aceste surse se ocupă întru totul de problema stării de solicitare în diafragme sub acțiunea încălzirilor exterioare și numai într-o măsură restrinsă se fac referiri la măsurile constructive care trebuie luate în vederea evitării urmărilor nedorite ale contracției. Defecțiunile apărute până în prezent la un număr mare de diafragme - fisuri - se datoresc însă contracției și nu acțiunii forțelor exterioare. De multe ori aceste fisuri apar înainte de aplicarea forțelor exterioare.

Fisurarea modifică rigiditatea diafragmelor, deci schimbă repartizarea încălzirilor din ansamblul spațial al clădirii. Solicitățile suplimentare pot reduce rezerva de rezistență în anumite secțiuni nefavorabil solicitate din acțiunile exterioare, reducând în consecință gradul de siguranță al structurii.

La Catedra de beton armat și clădiri a Institutului Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara, începând din anul 1968, un colectiv de cercetare condus de prof.emerit ing. C. Avram, m.c. al Academiei R.S.R. - colectiv din care a făcut parte și subsemnatul începând din anul 1970, a studiat și experimentat pe baza unui plan sistematic de cercetare, cele mai importante și frecvente aspecte care intervin în practică. Studiile respective au avut ca scop să determine experimental și teoretic comportarea diafragmelor sub acțiunea deformațiilor impuse atât din contracție sau variații de temperatură, pentru a se elucida care este de fapt starea de deformație și de tensiuni înainte și în timpul încălzirilor exterioare. Astfel, au fost studiate :

- extinderea domeniului de influență ("zona de reținere") pe suprafața diafragmei, în funcție de tipul de reținere (fundatie, plangea) și în funcție de dimensiunile geometrice ale diafragmelor;

- vuloarea solicitărilor în diferite puncte ale domeniului de influență;
- procesul de formare și de deschidere a fisurilor;
- influența procentului de armare asupra comportării diafragmei;
- soluții de dispunere a armăturilor în planul diafragmei (uniform repartizată, concentrată);
- conectorarea miezului monolit cu panourile de pereți prefabricați;
- influența golurilor în diafragme și determinarea gradului de fisurare a bușandrugilor în vederea obținerii rigidității de calcul;
- elaborarea unei metode de calcul care să țină seama de comportarea reală neliniară a betonului;
- studiul comportării diafracmelor cu goluri la acțiunea forțelor orizontale în urma apariției fisurilor.

### 6.1.2. Fenomenul împiedecării contracției

Modificarea de volum a betonului nearmat, care se datorează pierderii apei prin uscare este denumită contracția betonului. Mărimea acestei deformații este notată cu  $\epsilon$ . Toate elementele și structurile de beton sînt supuse la modificări de volum de diferite grade, depinzînd de compoziția, forma, dimensiunile elementului de beton precum și de regiunea climatică de păstrare respectiv de exploatare. O modificare uniformă de volum nu produce eforturi, acesta este cazul unui element care este liber de a-și modifica forma în toate direcțiile. Această situație apare destul de rar în practică, orice împiedecare - "reținere" - fie internă sau externă, provoacă o stare de eforturi. Reținerea acționează în sensul limitării modificărilor de dimensiune și produce o deformație specifică cu efort unitar corespunzător în elementul de beton. Cantitatea de deformație specifică depinde de gradul de reținere care există în punctul respectiv ea fiind egală cu schimbarea lungimii unitare ce "s-ar produce dacă betonul nu ar fi reținut".

Toate elementele de beton sînt supuse la o reținere provenită din părțile de construcții cu care acesta este legat sau chiar unele părți însăși ale aceluiași element. Reținerile provoacă eforturi de întindere, compresiune, încovoiere, tăiere, etc., depinzînd de tipul reținerii și de poziția punctului studiat. Interesează

acele rețineri care crează eforturi de întindere, putând provoca fisurarea betonului sau micșorarea rezervei de eforturi, disponibilă pentru încălzirile exterioare.

Reținerile pot fi continue sau discontinue după tipul elementelor legate între ele:

- a - elemente liniare între ele (grinzi, stâlpi - discontinue);
- b - elemente plane între ele (plăci, pereți - continuu);
- c - masive între ele (fundatii, baraje - continuu);
- d, e, f - una combinația între a, b și c (a-b, a-c, b-c).

Reținerea continuă care face obiectul studiului de față se referă numai la grupa b și f, deci este de tipul reținerilor continue care apar la limita suprafețelor în contact sau la limita suprafeței cu un masiv (fundatie), în ambele cazuri aceasta este o linie.

Valearea gradului de reținere depinde de raportul rigidităților elementelor în contact, depinde deci de caracteristicile geometrice și mecanice ale acestora.

Starea de solicitare este evident variabilă pe suprafața elementelor. Solicitățile într-o secțiune depind de valearea gradului de reținere și de poziția secțiunii față de linia de reținere.

Deoarece contracția betonului în elementele reținute provoacă eforturi de lungă durată, curgerea lentă care o însoțește va reduce eforturile. În aceste condiții, când se studiază problema contracției, trebuie tratată împreună cu curgerea lentă. Evidențierea celor două fenomene izolate conduce la dificultăți experimentale, în majoritatea cazurilor, deformațiile înregistrate cuprind ambele efecte.

### 6.1.3. Dezafășurarea cercetării

Cercetarea a urmat o cale mixtă în sensul că s-a lucrat experimental pe modele (la scară redusă și la scară naturală) și prin calcule numerice. Prin corelarea acestora în diferite faze de lucru, se poate obține o eficacitate sporită de lucru cu mijloacele disponibile. Schema logică de dezafășurare a cercetării este prezentată în fig.6.1.

În cele ce urmează sînt prezentate numai aspectele referitoare la comparația dintre modelele experimentale și de calcul.

urmărindu-se validarea metodologiei de calcul în vederea unei generalizări a acesteia.

Modelele experimentale sînt alcătuite sub forma unor pereți din microbeton (100 x 100 x 1 cm) armați cu o plasă de sîrmă. În funcție de tipul de reținere pereții sînt încastrați în fundație, legați cu plase prefabricate sau o combinație dintre acestea.

### 6.1.3.1. Reținere de tip fundație

Impiedecerea contracției peretelui se realizează printr-o fundație rigidă din beton armat (120 x 35 x 25 cm) cu contracție consumată. Elementul experimental este reprezentat în fig.6.2.a și b. În fig.6.2.c și d sînt reprezentate poziția aparatelor de măsurare a deformațiilor din contracție împiedecată, respectiv deformația experimentală.

Utilizînd discretizarea din fig.6.2.e, s-au calculat deformațiile și eforturile sub efectul unui ecart de temperatură negativ aplicat nrui peretelui.

Corespunzător procentului de armare  $\mu = 0,2\%$  și a unui coeficient de echivalență  $n = 12$  a rezultat o grosime echivalentă a peretelui  $t_p = 1,024$  cm, iar pentru fundație  $t_f = 26 t_p$ . A rezultat raportul  $E_f t_f / E_p t_p = 52$ .

Calculul s-a efectuat în domeniul elastic. Din compararea deformației conturului rezultată din balțul cu cea obținută experimental s-a constatat că acestea sînt afine pe întreg perimetrul peretelui. Deoarece cele din armă conțin atât efectul construcției cit și al curgerii lente, prin suprapunerea lor se poate obține un factor de corecție care reflectă tocmai raportul dintre deformațiile calculate și cele obținute experimental. Utilizînd acest factor de corecție se poate stabili starea de solicitare în ansamblul elementului. În acest fel se ține seama de proprietățile reologice ale betonului, în special de efectul de relaxare provocat de curgerea lentă. În fig.6.2.f sînt suprapuse deformația calculată cu cea experimentală de la timpul  $t = t_{final}$ . Rezultă  $\alpha T = -4 \times 10^{-5}$ , care este deformația specifică obținută la elementul experimental.

Figura 6.2.g, redă imaginea rețelei după deformație. Scada deformațiilor nu este la scara lungimilor. Deformația ilustrează poziția secțiunilor transversale după deformare. Se recunoaște curbarea tot mai pronunțată a planurilor verticale din axa de simetrie

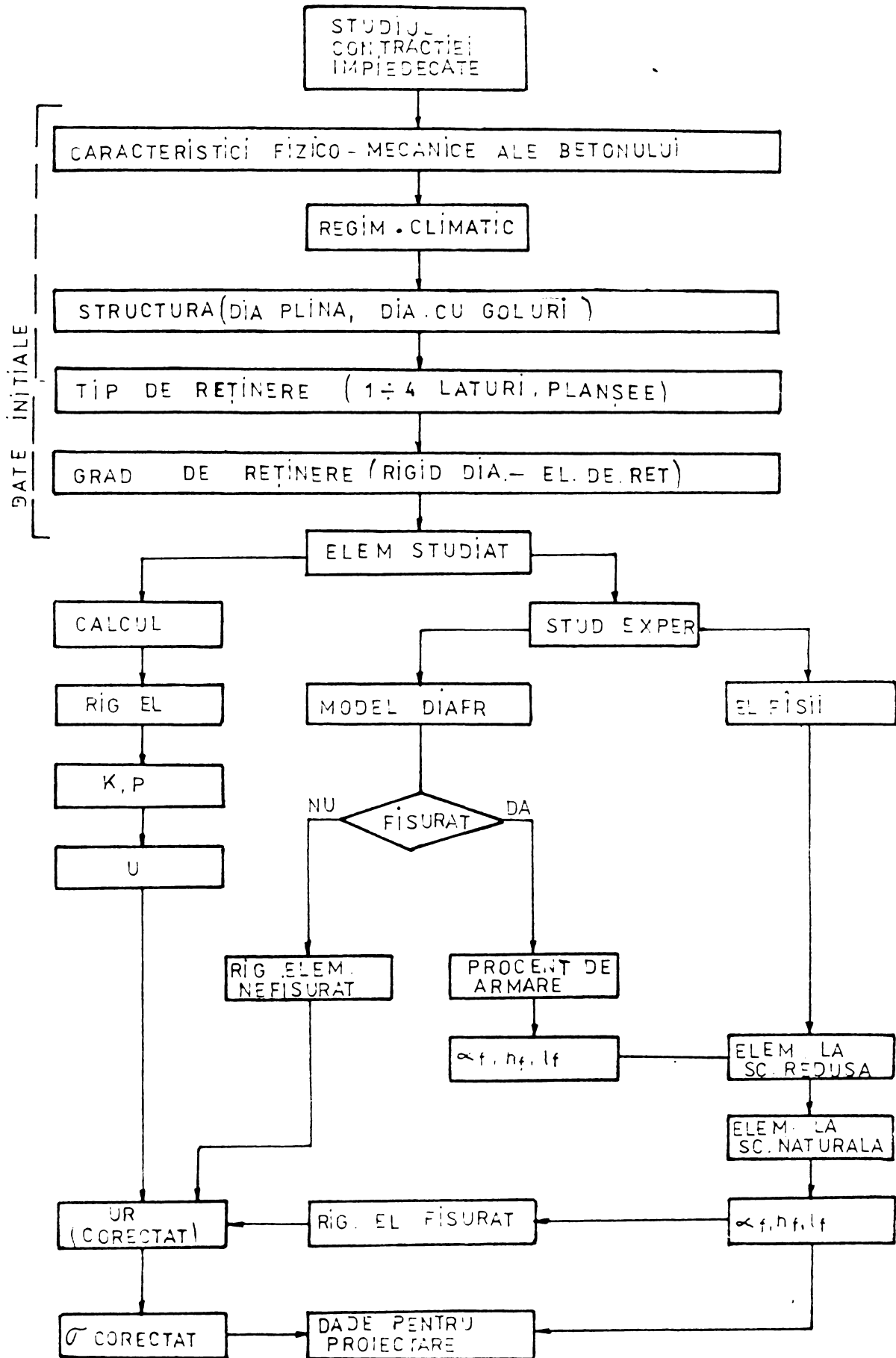


FIG 6.1

înspre margine în zona de reținere. De asemenea, se observă curbarea secțiunilor orizontale.. Cele de la partea superioară se curbează în jos, iar cele de la partea inferioară în sus. Aceasta se datorează curbării axului fundației datorită efectului forțelor ce au naștere din împiedecarea contracției. În calcule se poate ține seama cu asigurată de existența forțelor gravitaționale care împiedecă curbarea fundației.

Figura 6.2.f redă eforturile unitare în structură pentru  $\alpha T = -4 \times 10^{-4}$  și  $E_p = 170.000 \text{ daN/cm}^2$ . Este de remarcă direcția și valoarea eforturilor unitare din colțurile diafragmei în zona de încastrare. Aceste eforturi se suprapun peste cele provocate de sarcinile exterioare.

Structura a fost calculată și cu teoria echivalențelor. Discretizarea structurii și condițiile de margine sînt reprezentate în fig. 6.7.a. Alături (6.7.b) sînt redată deformațiile orizontale și verticale ale rețelei de discretizare.

Calculul a fost efectuat cu programul MTEQ.

Comportarea în domeniul postelastie a modelului experimental (fig.6.8) a fost urmărită cu ajutorul programului HIGALPATE. Structura a fost discretizată în elemente finite de beton armat. Încărcarea s-a aplicat sub forma unor încărări de deformații specifice de contracție  $\epsilon_0$  ( $\epsilon_0 = -\alpha T$ ). Încărările de deformații specifice au fost aplicate murii peretelui considerînd că fundația și-a consumat contracția în momentul turnării peretelui.

În conformitate cu starea fizică a structurii, pentru fiecare pas de calcul s-a stabilit tabloul eforturilor în beton și armături, precum și deplasările nodurilor. În fig.6.9.a, b, c, sînt redată releveele fisurilor apărute în diferite trepte de încărcare, în conformitate cu biografia comportării structurii.



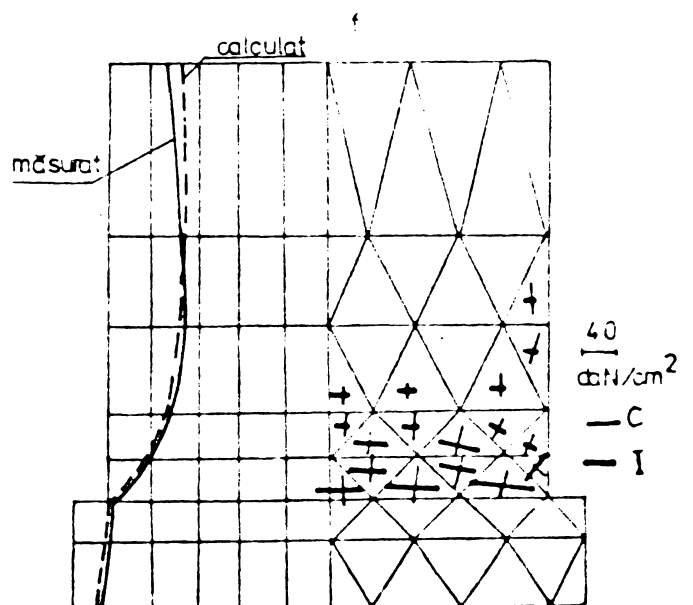
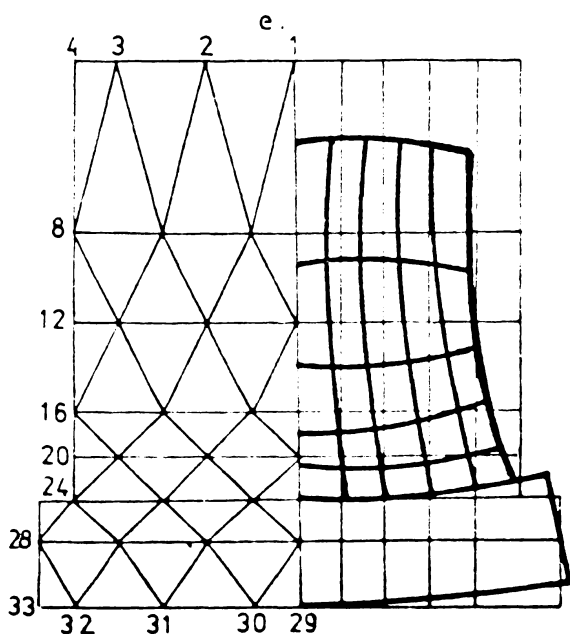
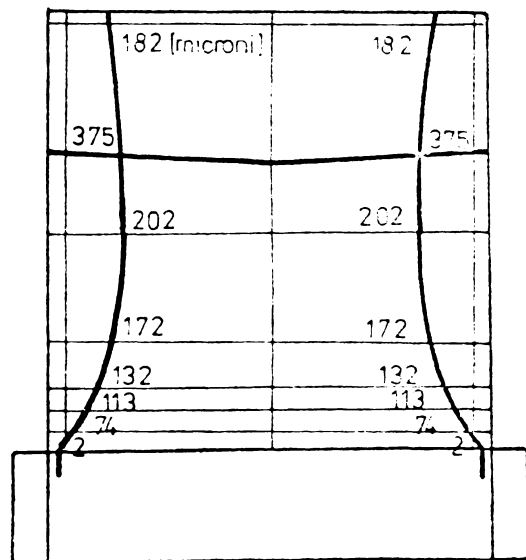
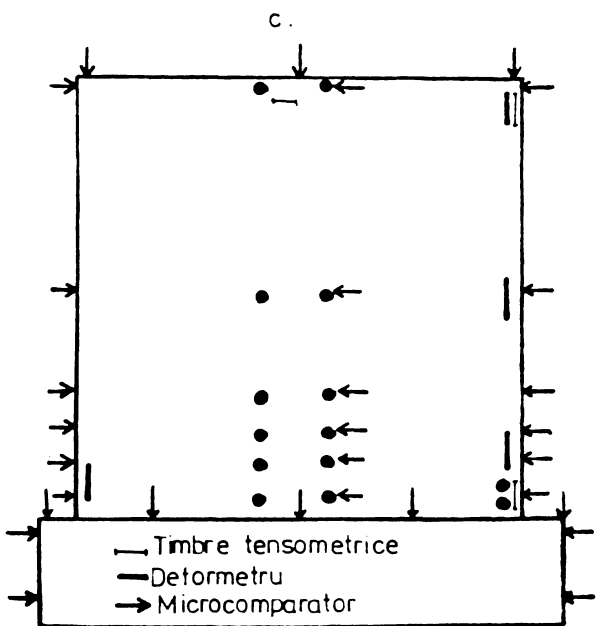
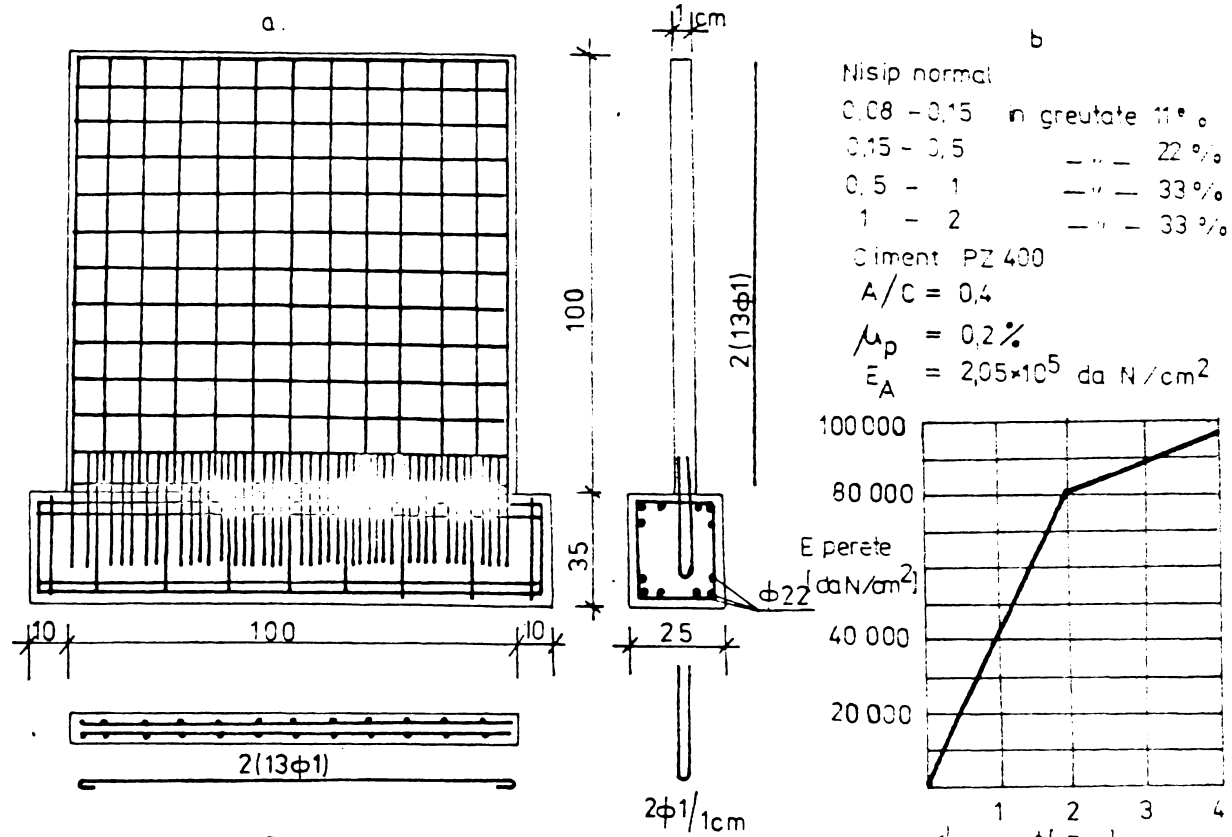


Fig. G.2

### 6.1.3.2. Reținare de tip fundație și planșee prefabricate

S-au calculat două structuri și anume :

- structura A alcătuită dintr-un perete plin turnat monolit, încastrat în fundație și având planșee prefabricate la fiecare nivel (fig.6.3.a);
- structura B identică cu alcătuire dar la care peretele este perforat de un șir de goluri în axul median (fig. 6.3.b).

Calculul s-a efectuat în domeniul elastic. Pentru determinarea modurilor de elasticitate a mortarelor din planșee și perete s-au folosit prize de  $2 \times 2 \times 8$  cm cu aceeași grosime echivalentă  $d_w$  :

$$\text{priza } d_w = \frac{2A}{U} = \frac{2 \times 4}{8} = 1 \text{ cm ;}$$

$$\text{peretele } d_w = d = 1 \text{ cm.}$$

Așa cum recomandă Rusii /139/, grosimea echivalentă este factorul determinat în cazul elementelor de grosime mică deoarece la ele preponderența este curgerea lentă de uscare ( $\epsilon_{sp}$ ). Variația modurilor de elasticitate ai peretelui  $E^{PE}$ , respectiv ai planșeelor  $E^{PL}$  este redată în fig.6.4.d.

Caracteristica de curgere lentă  $\varphi_t$  pentru mortarul pereților s-a determinat pe prize identice folosindu-se o presă specială cu arc spiral din oțel și dosă de presiune. Diagrama de variație a lui  $\varphi_t$  este redată în fig.6.4.e. Se observă că valoarea lui  $\varphi$  este comparativ mai mare decât la betoane datorită virstei și a cantității sporite de liant. S-a obținut un mediu (la două zile după încărcare) de :

$$\overline{\varphi(2)} = 5$$

Valorile de calcul pentru E se stabilesc conform /27/ și /138/ :

$$E_0 = \frac{E}{1 + \varphi_t}$$

Acesta este modulul eficienței, corespunzător unei deformații specifice variabile în timp  $\epsilon(t)$ . În bibliografia citată se recomandă ca în loc de o valoare unică pentru  $\varphi_t$  la sistemele statice să fie considerate două limite :  $0,5 \varphi_t$  și  $\varphi_t$ . În acest mod se ajunge la rezultate mult mai apropiate de realitate în ce privește procesul de curgere lentă și contracție. În luare s-a urmărit acest procedeu folosind prima valoare care asigură o relaxare mai re ușă a eforturilor provocate de deformațiile împiedecate.

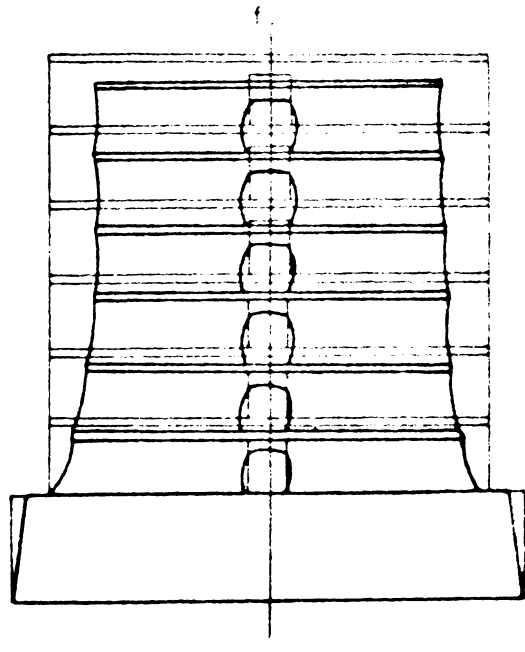
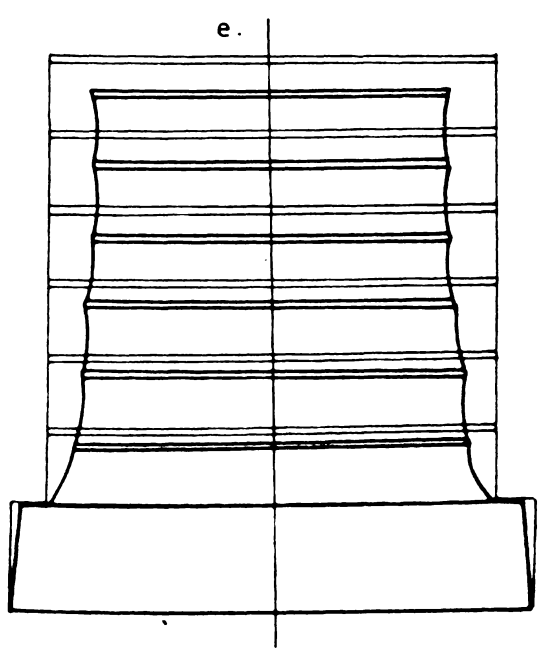
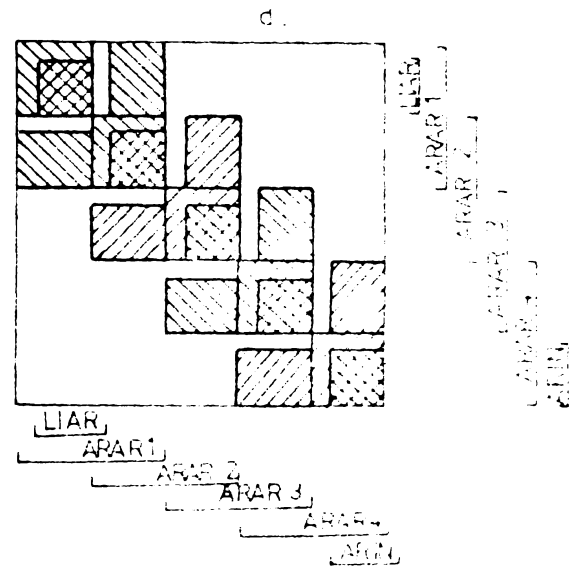
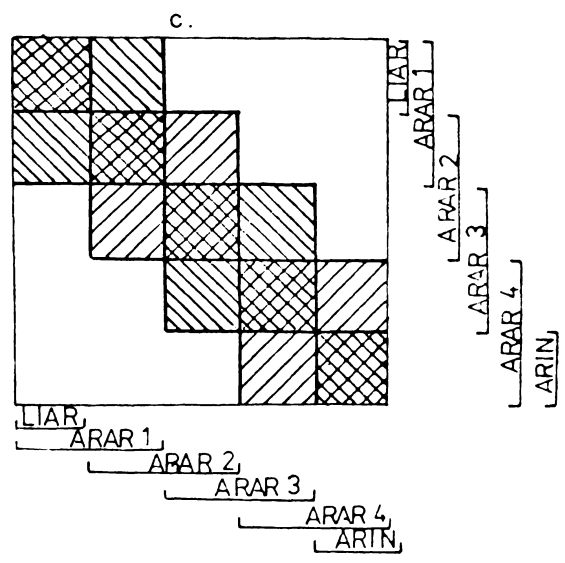
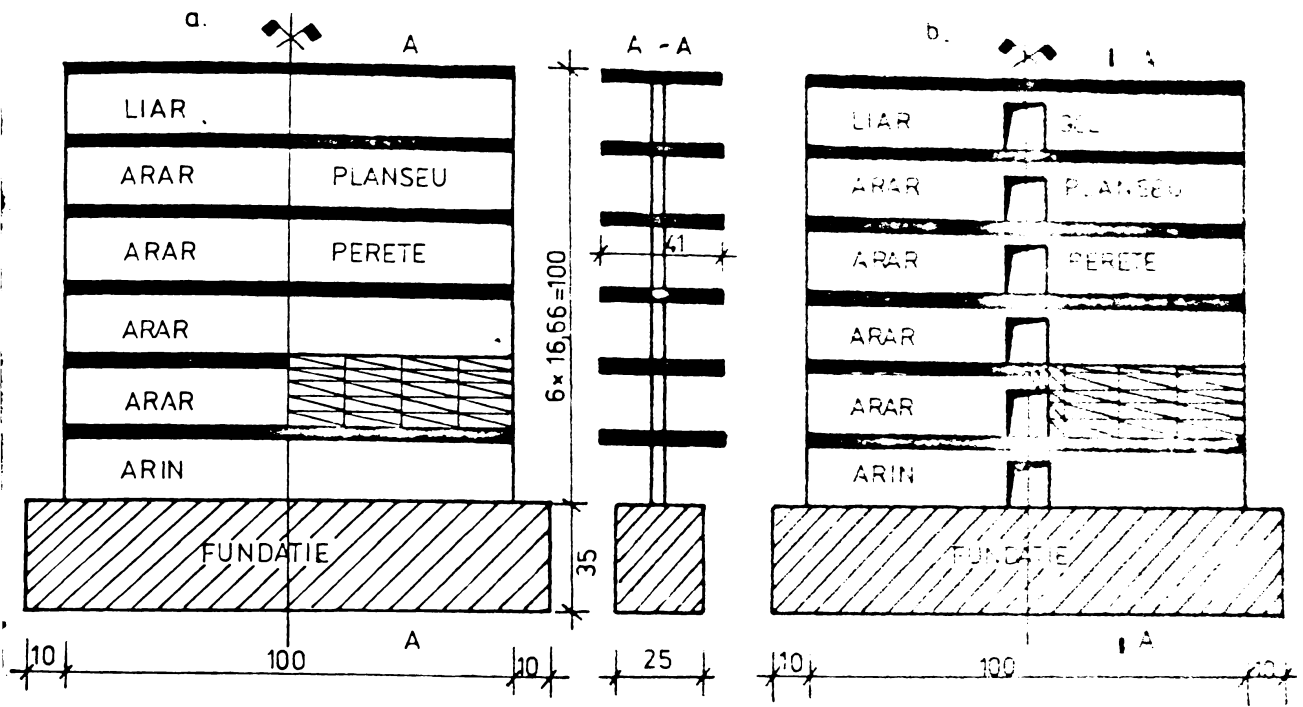
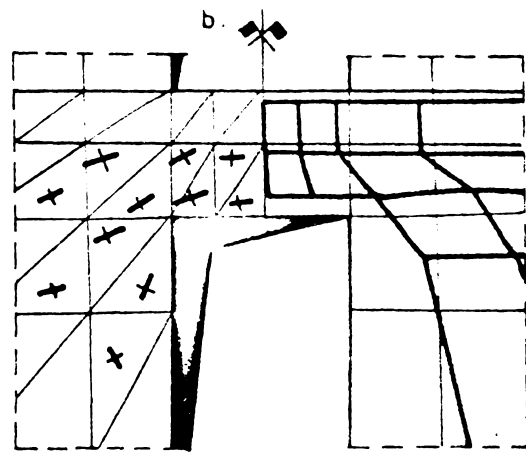
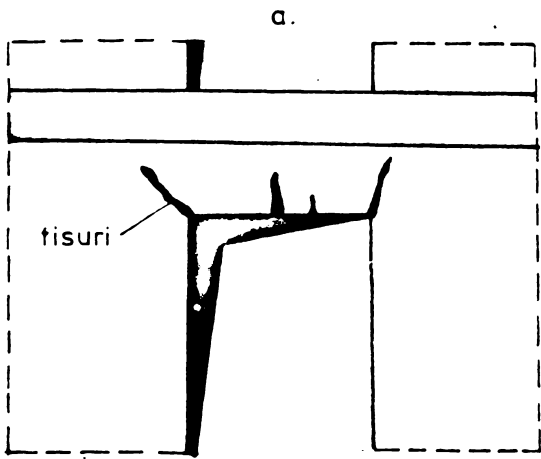


Fig. 63



— Eforturi unitare de intindere  
 - - - Eforturi unitare de compresie  
 \* \* 20 da/N cm<sup>2</sup>

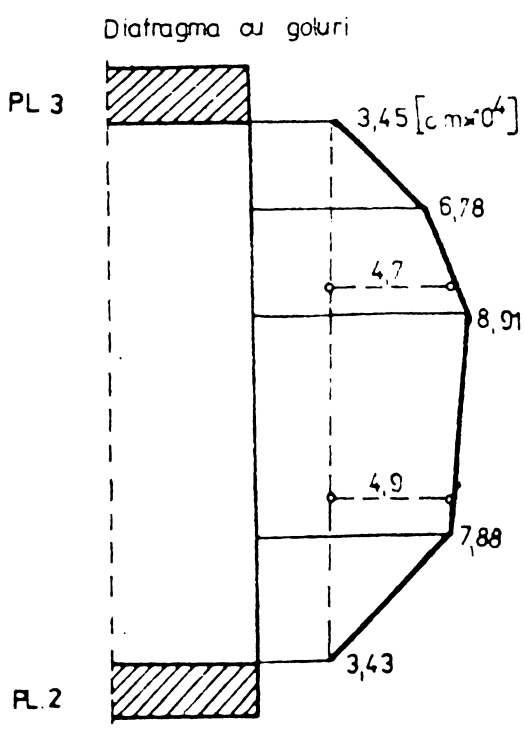
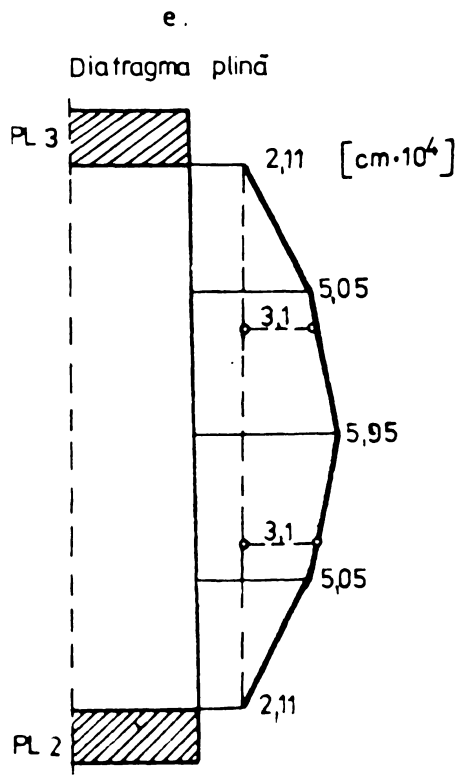
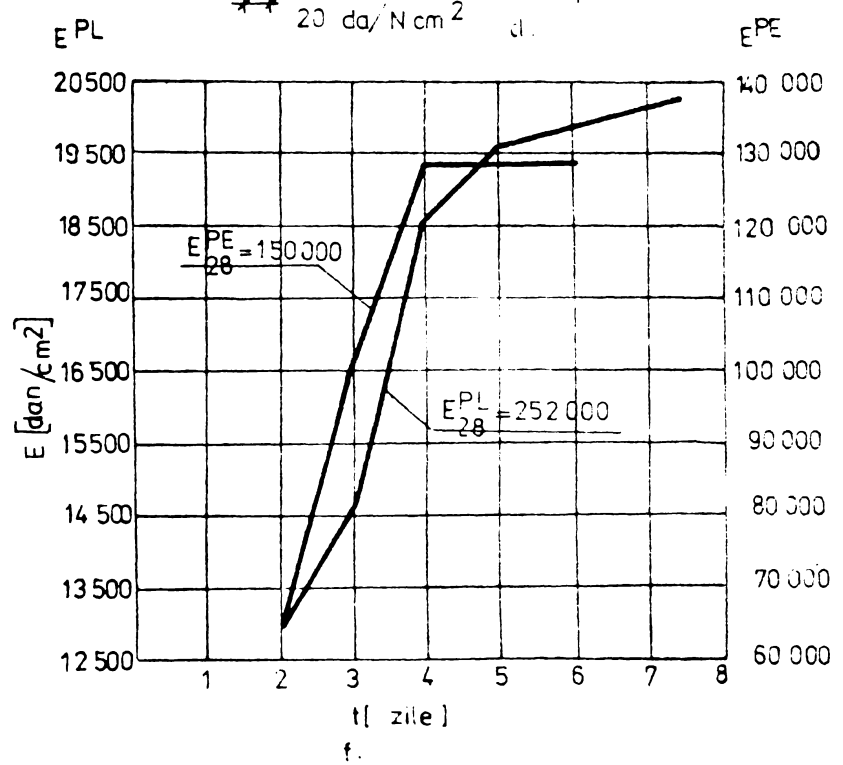
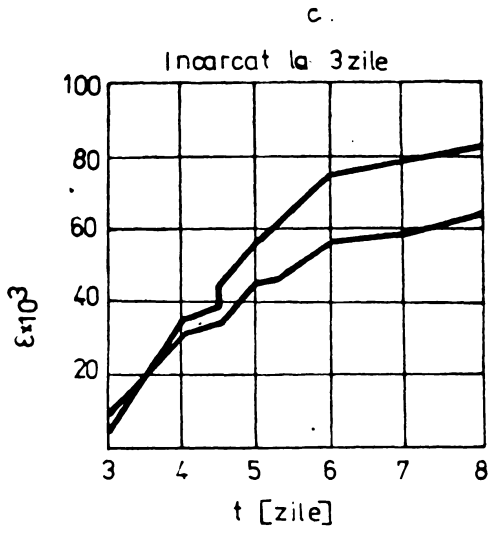


Fig. 6.4

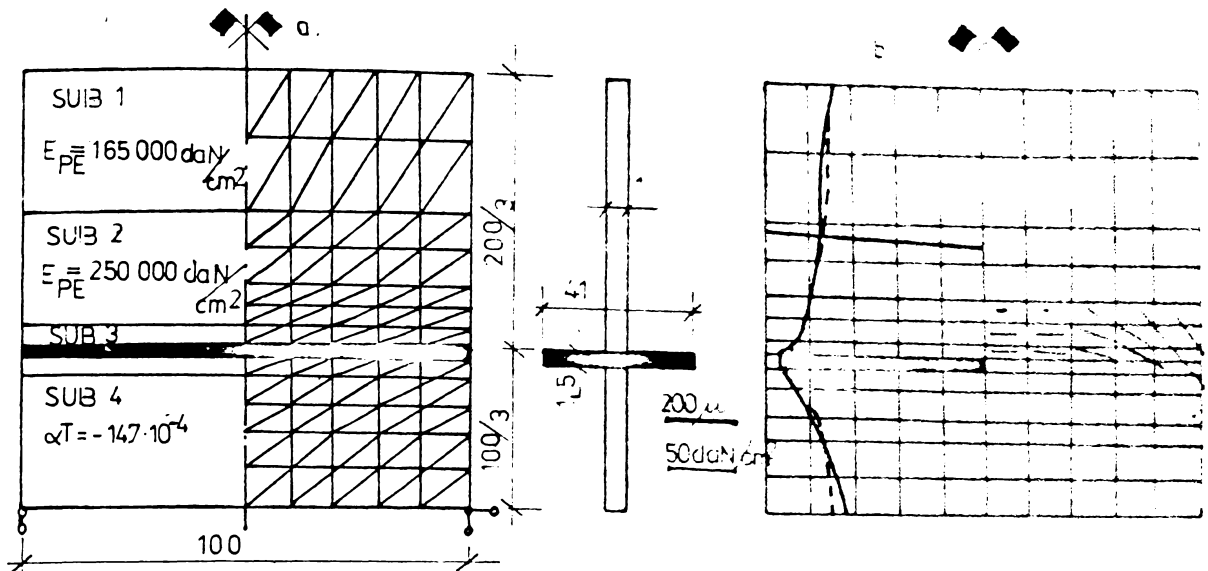


Fig. 6.5

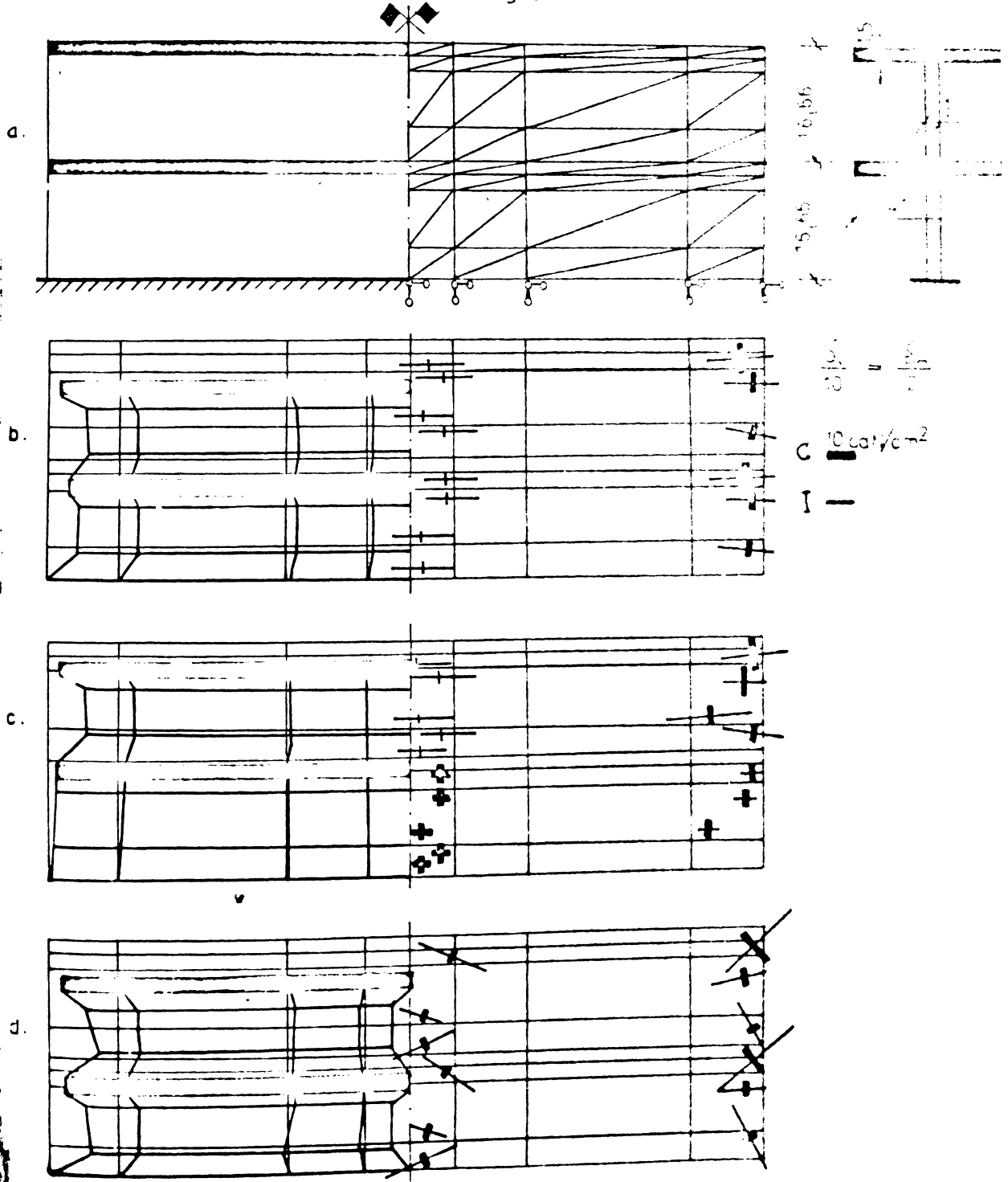


Fig. 6.6

s-a adoptat :

$$E^{PL} = \frac{E}{1 + \varphi_{\frac{H}{t}}} = \frac{250.000}{1 + 1} = 125.000 \text{ daN/cm}^2$$

$$E^{PE} = \frac{E}{1 + \varphi_{\frac{PE}{t}}} = \frac{150.000}{1 + 0,5 \cdot 5} = 42.000 \text{ daN/cm}^2$$

Corelarea calculului cu rezultatele experimentale s-a făcut în baza următoarelor considerații :

- deformațiile conturului sînt curbe afine;
- rapoartele între deformația la nivelul planșei și la mijlocul înălțimii nivelului în cele două cazuri sînt identice;
- s-au admis deformațiile modelului experimental în intervalul 1 la 2 zile;
- corelarea s-a făcut prin egalarea creșterilor deformațiilor între linia planșelor și punctele intermediare pe curbe în care s-au măsurat - respectiv calculat - acestea (fig.6.4.e,f);
- deoarece la modulul de elasticitate s-a utilizat  $\frac{1}{2}$  redus cu 50 %, la determinarea deformației specifice, se va ține seama de același coeficient :

$$\epsilon_0 = \alpha \cdot \sigma = \frac{0,0055 \cdot 0,5}{0,00048} \cdot 10^{-4} = 5,75 \cdot 10^{-4}$$

În ambele cazuri (A și B) s-a adoptat metoda elementelor finite în varianta cu substracții. Așa cum se poate observa din fig.6.3.a și b se disting 3 tipuri de substructuri : LKAL, AKAL și ALAL. În fig. 6.3.e și d este reprezentată schematic modalitatea de alcătuire a matricii de rigiditate a conturului ansamblului substructurilor, iar în fig.6.3.e și f, deformațiile. În fig.6.4.a și b sînt reprezentate relevele fisurilor în modelul experimental, respectiv tabloul eforturilor unitare în buciandrugul nivelului 2.

### 6.1.3.3. Rețineri de tip planșeu prefabricat

Exemplificarea efectului reținerii contracției de către planșeu prefabricat s-a făcut pe structura din fig.6.5.

Peretele este monolit iar planșeu prefabricat are contracție concomită. Caracteristicile fizico-mecanice sînt reprezentate în figură; de asemenea discretizarea în elemente finite.

Calculul s-a făcut prin împărțirea în substructuri. S-a determinat starea de deformații și eforturi în peretele monolit (fig. 6.5.b).

#### 6.1.3.4. Efectul turnării succesive a nivelelor. Extindere în domeniul nelinier

Studiul teoretic condus în paralel cu încercările experimentale s-a axat pe efectul turnării succesive a nivelelor unei diafragme monolite la care contracția era împiedecată de fundație și planșee prefabricate.

Structura a fost alcătuită numai din două nivele, pentru simplitate (fig.6.6.a). Comparând rezultatele obținute pe diafragma cu șase nivele (fig.6.3) și pe cea cu două nivele (fig.6.6.b) se poate afirma că, cazul mai simplu redă cu suficientă exactitate calitativ și cantitativ starea de deformații și eforturi din structura întreagă.

S-au luat în considerare următoarele ipoteze :

- nivelul inferior și superior turnate simultan (fig.6.6.b);
- nivelul superior turnat anterior nivelului inferior (fig.6.6.c);
- ambele variante în prezența unui efort vertical de compresiune care să simuleze forța gravitațională.

S-a încercat și o extindere în domeniul nelinier considerând cele două nivele prefisurate în axul median (mai puțin planșeele și fundația), în fisură lucrând numai armăturile orizontale, concentrate în câte doi penduli orizontali pe nivel. Lungimea acestora a fost apreciată în conformitate cu prevederile din literatura de specialitate /83/ ținând seama de zona pe care aceste armături aluneacă față de microbetonul în care sînt înglobate (fig.6.6.d).

Corelarea deformațiilor calculate cu cele obținute experimental s-a făcut în mod similar cazului diafragmei cu 6 nivele.

S-a adoptat  $\epsilon_g = 5,75 \cdot 10^{-4}$ ,  $E_{pg} = 42.000 \text{ daN/cm}^2$ .

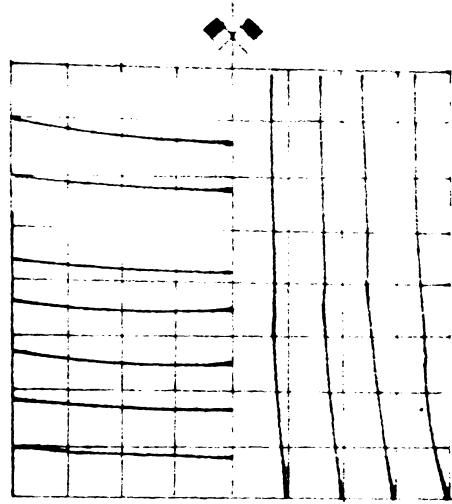
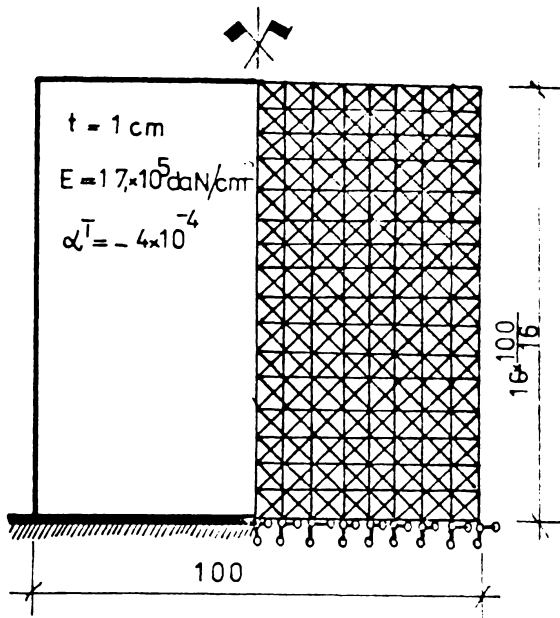
Deformațiile și eforturile unitare sînt reprezentate în fig. 6.6.a - d.

#### 6.1.3.5. Concluzii desprinse din analiza efortului contracției împiedecate la diafragma de beton armat

Încercările privind efectul contracției împiedecate la diafragma de beton armat monolit au fost conduse pe două căi :

- pe modele la scară redusă din mortar armat,
- un calcul de discretizare al structurii la care se folosește calculatorul electronic.

Metoda de studiu folosită pune de acord rezultatele experimentale cu cele obținute prin calcule. Utilizarea în paralel a u-



a. Fig. 6.7

b

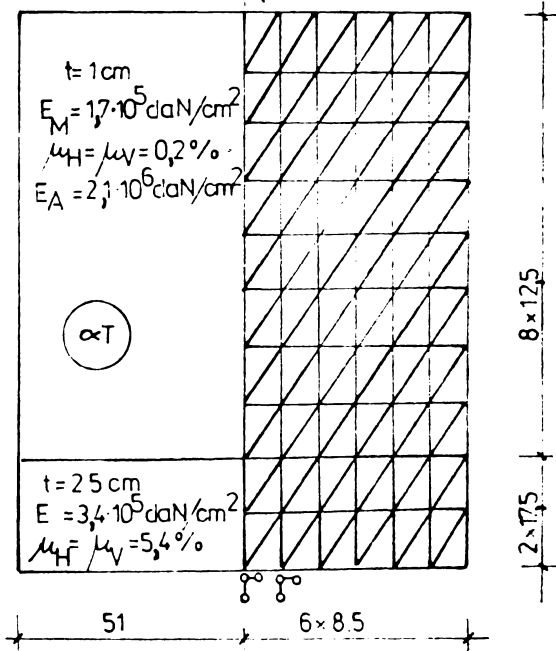
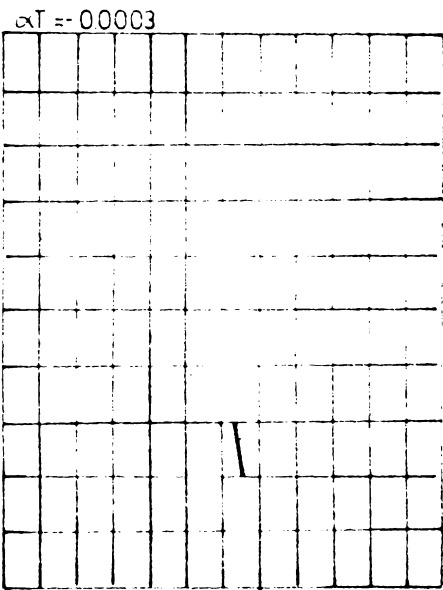
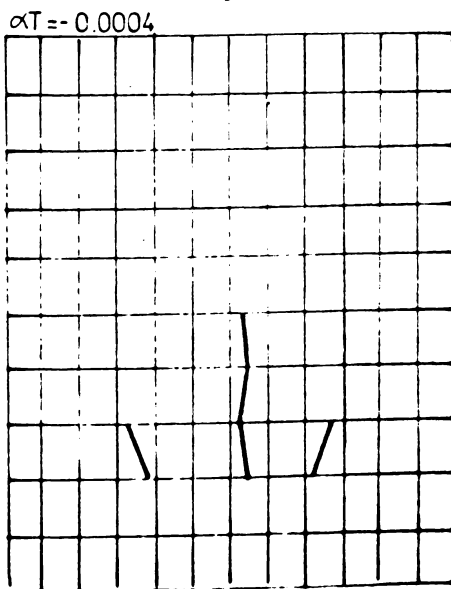


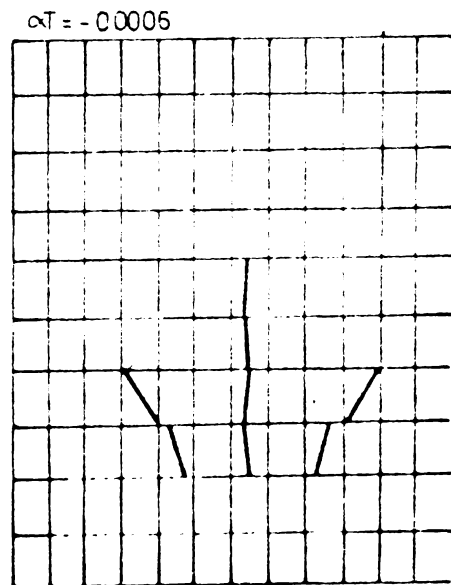
Fig. 6.8



a



b



c

Fig. 6.9



nui calcul automatizat reprogramabil pentru o gamă variată de parametri, cu încercările experimentale pe modele la scară redusă pentru acoperirea unui număr mare de investigații sau o gamă importantă de parametri variabili. În același timp încercările experimentale completează și corectează rezultatele conținând toată complexitatea de fenomene cum este cazul solicitărilor provocate de deformația de durată a betonului.

Calculule și încercările experimentale prezentate, a dovedit o identitate a rezultatelor modelului matematic cu cele obținute pe modelul experimental. Această identitate a rezultatelor a putut fi constatată numai în zonele unde pot fi culese măsurători experimentale certe.

Calculul a extins investigațiile în toate zonele elementului. Astfel, s-au întocmit diagrame de deformații în secțiuni verticale și orizontale din interiorul elementului. S-a studiat starea de deformare în jurul golului și în special în buiandrugi diafrajnei. Aceasta din urmă este foarte utilă deoarece dă o imagine completă asupra modului de comportare a buiandrugilor în cazul contracției betonului din diafragmă. Din deformația buiandrugului (fig. 6.4.b) se poate elucidă fenomenul complex al stării de solicitare la care este supus buiandrugul. Astfel, în timp ce diafragma monolită provoacă eforturi normale de întindere paralele cu axul buiandrugului, planșul de la partea superioară a acestuia, ca element de împiedecare a deformației din contracție, provoacă deformații de sens opus. În această situație buiandrugul este supus la o solicitare similară cu efectul unei forțe excentrice. Se menționează că în calcule se ține seama și de efectul forțelor tăietoare ceea ce este deosebit de important la elementele cu înălțimea comparabilă cu deschiderea. Este foarte important să se cunoască starea de solicitare premergătoare acțiunii forțelor orizontale exterioare în vederea alcătuirii corecte și asigurării unui coeficient de siguranță corespunzător.

Pentru a avea însă o imagine completă în toate stadiile de lucru ale buiandrugului, trebuie ca figura de mai sus să fie analizată împreună cu releveul fisurilor de pe buiandrug. Datorită rotirii în nodurile dintre mantani și buiandrugi se introduce o încovoiere suplimentară în buiandrugi. Această încovoiere poate accentua sau diminua eforturile unitare în fibrele extreme ale buiandrugului.

Deci, peste eforturile generate de contracția montanșilor, în buiandrugi se suprapun eforturi de compresiune sau întindere din încovoierea acestora.

Efectul încovoierii provoacă întinderi suplimentare și la nivelurile superioare, ceea ce ar impune o armare suplimentară a acestora, față de măsurile care se iau numai pentru sarcini orizontale exterioare, care presupun o armare mai redusă la aceste nivele.

Eforturile principale de întindere pe nivel între două planșee consecutive sînt apropiate ca valoare în elementele finite ce alcătuiesc nivelul respectiv, cu o ușoară creștere înspre marginea diafragmei. Direcția eforturilor de întindere este apropiată de orizontală cu o mică înclinație la elementele periferice. În acestea, eforturile de întindere se vor reduce prin prezența eforturilor normale de compresiune datorate încălzirilor gravitaționale.

## 6.2. Studiul efectului încărcărilor exterioare

### 6.2.1. Metode de calcul

Conform /179/ metodele pentru determinarea eforturilor secționale din acțiunea încălzirilor orizontale, domeniul elastic, se grupează în trei categorii :

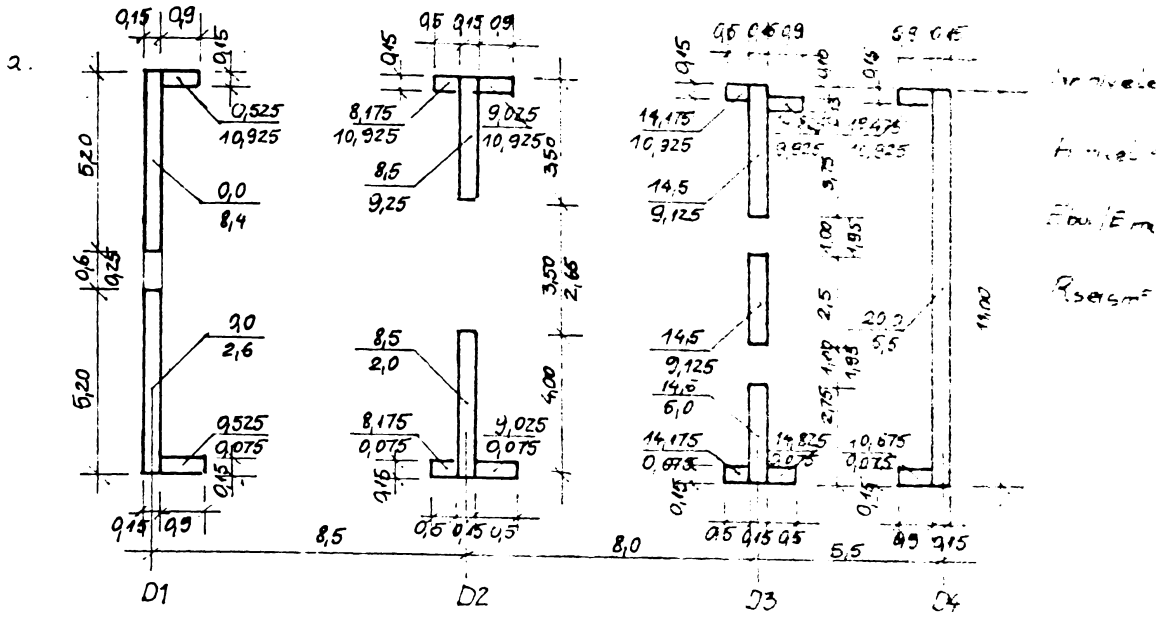
- metode simplificate;
- metode de complexitate medie;
- metode bazate pe considerarea diaframelor cu elemente bidirecționale (de suprafață).

Exemplele de calcul prezentate în acest capitol se conduc după metodele din prima și a treia categorie.

Cu caracter orientativ, Instrucțiunile P.85-82 fac precizări privitoare la calculul în domeniul postelastic al structurilor cu diafragme, și clasifică metodele după cum urmează :

- procedee de primă aproximație, bazate pe stricarea echilibrului limită pe un mecanism de cedare cu articulații plastice formate la capetele tuturor buiandrugilor și la baza montanșilor;
- procedee biografice, bazate pe un calcul pas cu pas al structurii, verificînd compatibilitatea rotirilor în articulațiile plastice de la capetele buiandrugilor și la baza montanșilor;
- procedee de analiză dinamică neliniară, obținute prin adaptarea metodelor de analiză dinamică a structurilor în bare.

În cele ce urmează, exemplele de calcul în domeniul poste-



H<sub>max</sub> = 11.00  
 H<sub>max</sub> = 11.00  
 E<sub>bal</sub> / E<sub>max</sub>  
 R<sub>des</sub> = 1.0  
 R<sub>des</sub> = 1.0

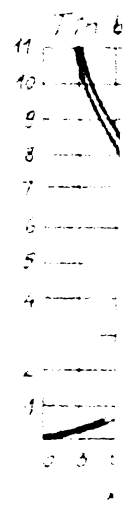
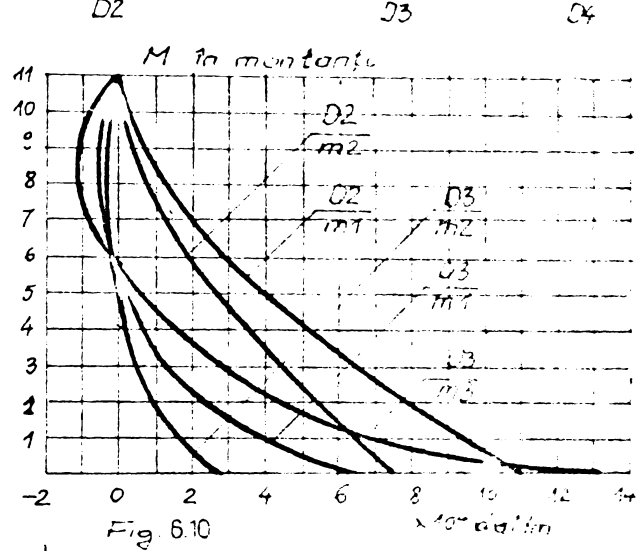
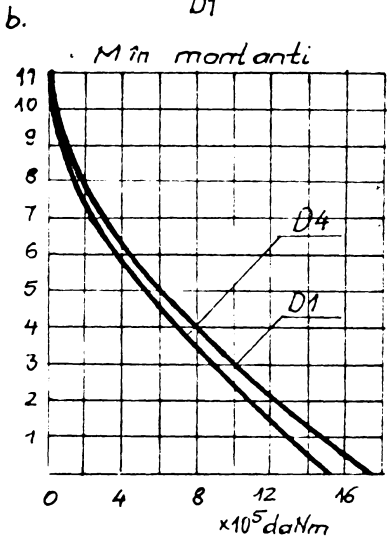
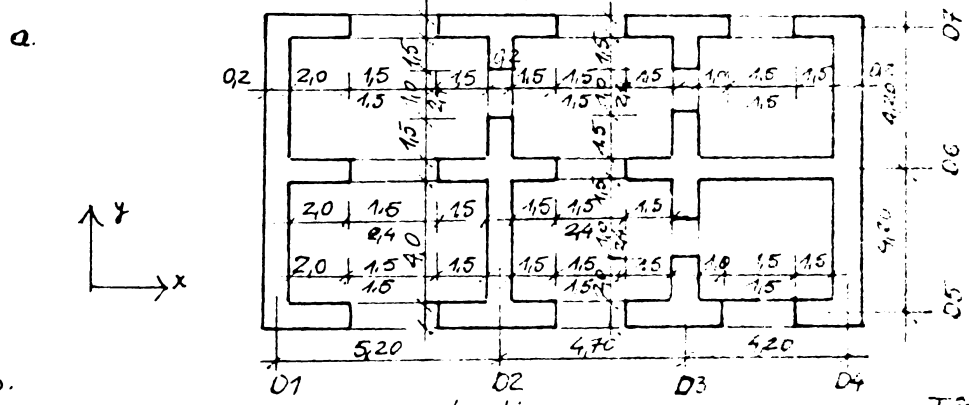


Fig. 6.10



H<sub>max</sub> = 11.00  
 H<sub>max</sub> = 11.00  
 E<sub>bal</sub> / E<sub>max</sub>  
 R<sub>des</sub> = 1.0  
 R<sub>des</sub> = 1.0

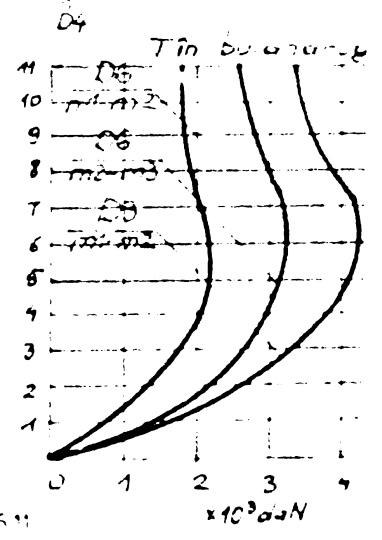
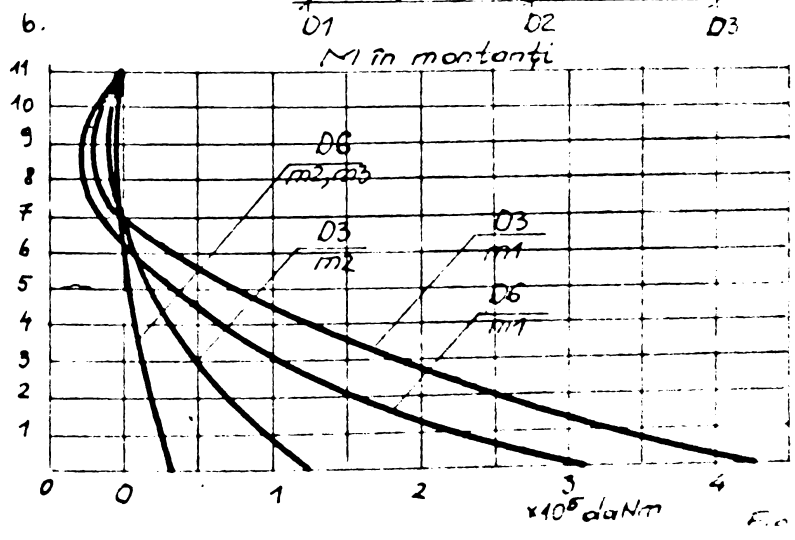


Fig. 6.11

lăstie sînt conduse pe baza considerațiilor teoretice conținute în cap.2, 3 și 4 și cu ajutorul programelor prezentate în cap.5. Exemplele permit comparații cu metodele simplificate și verificarea valabilității modelelor matematice.

### 6.2.2. Calculul în domeniul elastic

#### 6.2.2.1. Calculul plan al unei structuri rigide

În baza ipotezelor menționate la paragraful 1.2, și cu ajutorul programului DIAPRAZ s-au determinat eforturile secționale în diafragma unei structuri rigide monotone, al cărei plan orizontal este reprezentat în fig.6.10.a. Alături de figură sînt notate principalele caracteristici ale structurii precum și valoarea rezultantei încălzirii seismice.

Elementele de rezistență ale structurii - diafragma - sînt dispuse pe o singură direcție. Secțiunile lor orizontale (inclusiv zonele de conlucrare) sînt reprezentate prin dreptunghiuri pentru care sînt precizate dimensiunile și coordonatele centrelor lor de greutate, deci corespunzător modalității de introducere a datelor de intrare pentru programul de calcul.

Figura 6.10.b redă diagramele M și T în montanți, respectiv în buiandrugi unei diafragma.

#### 6.2.2.2. Calculul spațial al unei structuri rigide

Pentru exemplificarea performanțelor programului DIASPA, s-au calculat eforturile secționale în diafragma structurii rigide reprezentate în fig.6.11.a. Utilizînd ipoteza descompunerii structurii spațiale în elemente de rezistență orientate după cele două direcții principale de rigiditate, structura a fost pregătită pentru calcul în mod similar structurii de la pot.6.2.2.1.

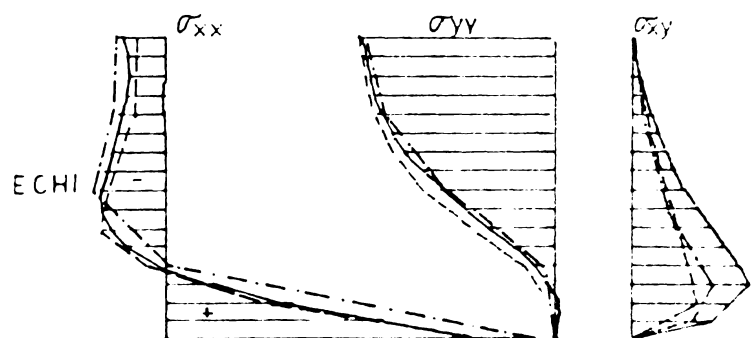
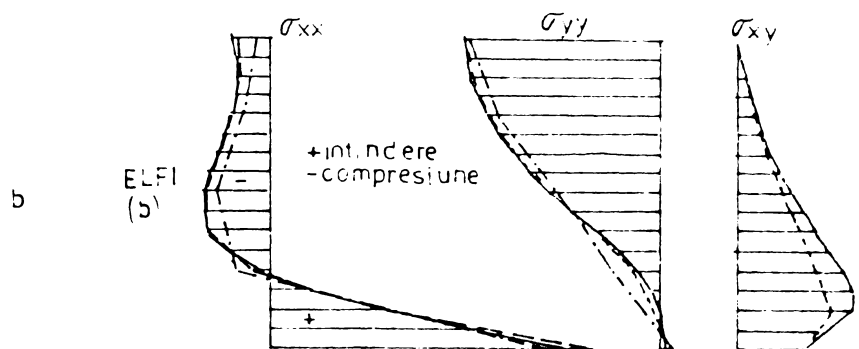
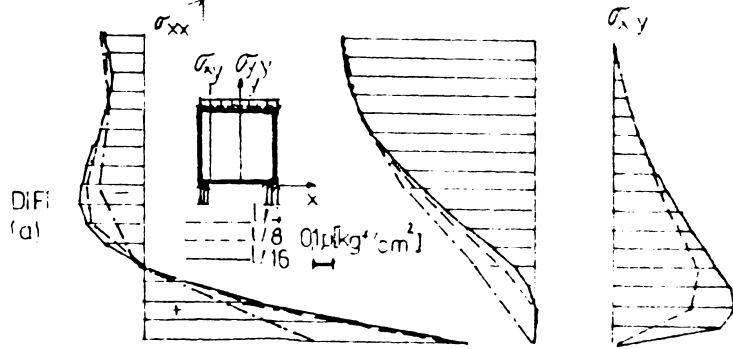
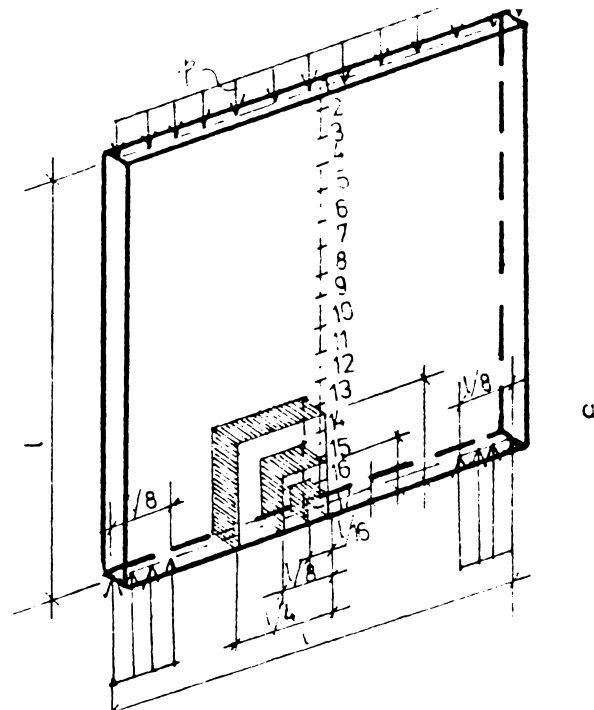
Rezultatele obținute din calcul sînt redată în fig.6.11.b.

#### 6.2.2.3. Console încărcate în planul lor

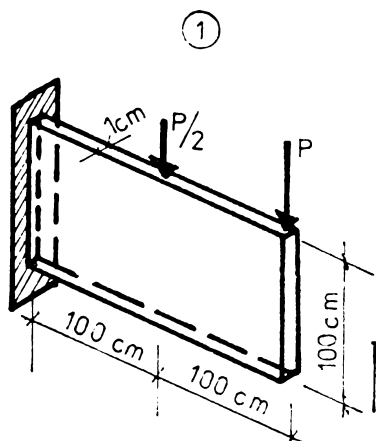
În fig.6.12 sînt reprezentate două console : una cu secțiune constantă (1), a doua cu secțiune variabilă în trepte (2). S-a determinat starea de deformații și eforturi în următoarele cazuri :

- A.- calcul simplificat de bară - corp omogen, izotrop;
- B.- elemente finite dreptunghiulare - corp omogen, izotrop;
- C, D.- elemente finite triunghiulare - corp omogen, izotrop;
- E.- teoria echivalențelor - corp omogen, izotrop;

F.- teoria echivalențelor utilizînd relațiile pentru un corp neomogen anisotrop. Anisotropia se datorează prezenței unor armături

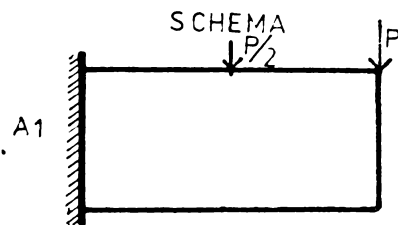
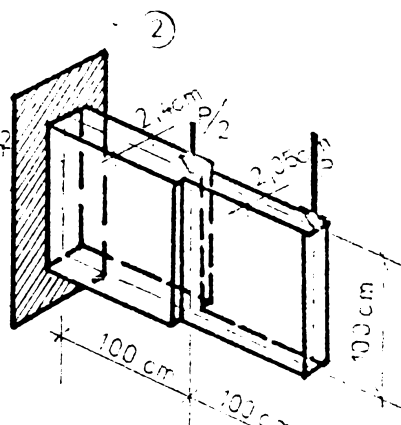


	Multiplot	DIFI			ELFI			ECHI		
		8	1/16	Extra polare	8	1/16	Extra polare	8	1/16	Extra polare
C	pl	0.1529	0.1716	0.1745	0.1666	0.1747	0.1774	0.1688	0.1737	0.1777
I	pl	0.1643	0.1735	0.1758	0.1657	0.1740	0.1762	0.1692	0.1737	0.1749
R	pl	0.1536	0.1726	0.1756	0.1671	0.1754	0.1768	0.1680	0.1722	0.1742
Z	l	0.5304	0.5182	0.5121	0.5106	0.5093	0.5042	0.5143	0.5209	0.5124
M	pl	0.0877	0.0894	0.815	0.0874	0.0874	0.0874	0.0849	0.0838	0.0838
0.495		5.38	-4.55	4.74	-5.75	5.14	5.075	-9.42	-9.18	2.37



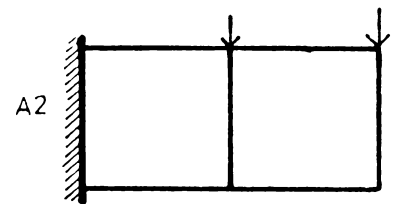
$P = 100 \text{ daN}$   
 $E = 3 \times 10^5 \text{ daN/cm}^2$

	a	b
y	1/5	1/3

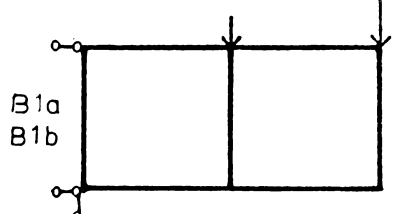


DEPLASARI [cm]  $10^4$

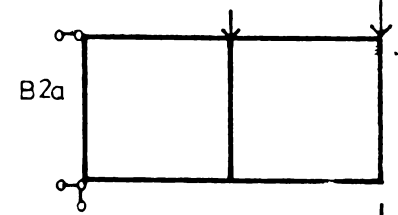
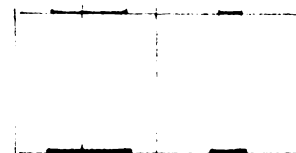
EFOPTURI [daN/cm<sup>2</sup>]



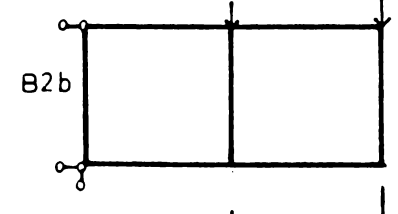
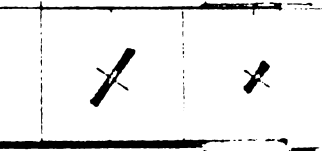
0	35	45
0	48	123
0	-35	-45
0	40	123



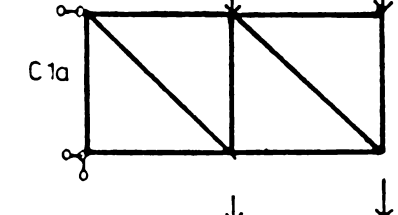
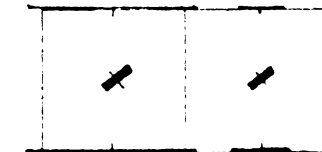
	15	19
	17	52
	-15	-19
	17	52



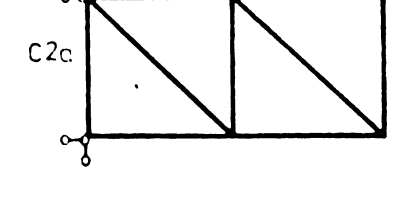
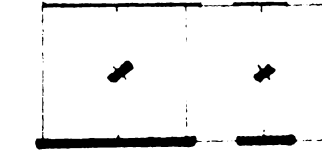
0	35	40
8	48	139
0	-34	-44
0	50	133



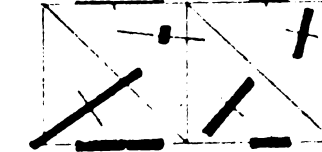
0	14	19
3	20	59
0	-14	-19
0	21	56



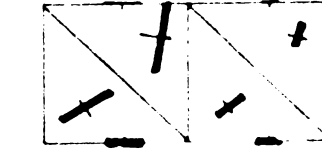
0	15	20
3	21	61
0	-14	-18
0	22	58



0	8	12
0	19	46
	-8	-12
	17	42



	3	5
	8	20
	-3	-5
	7	18



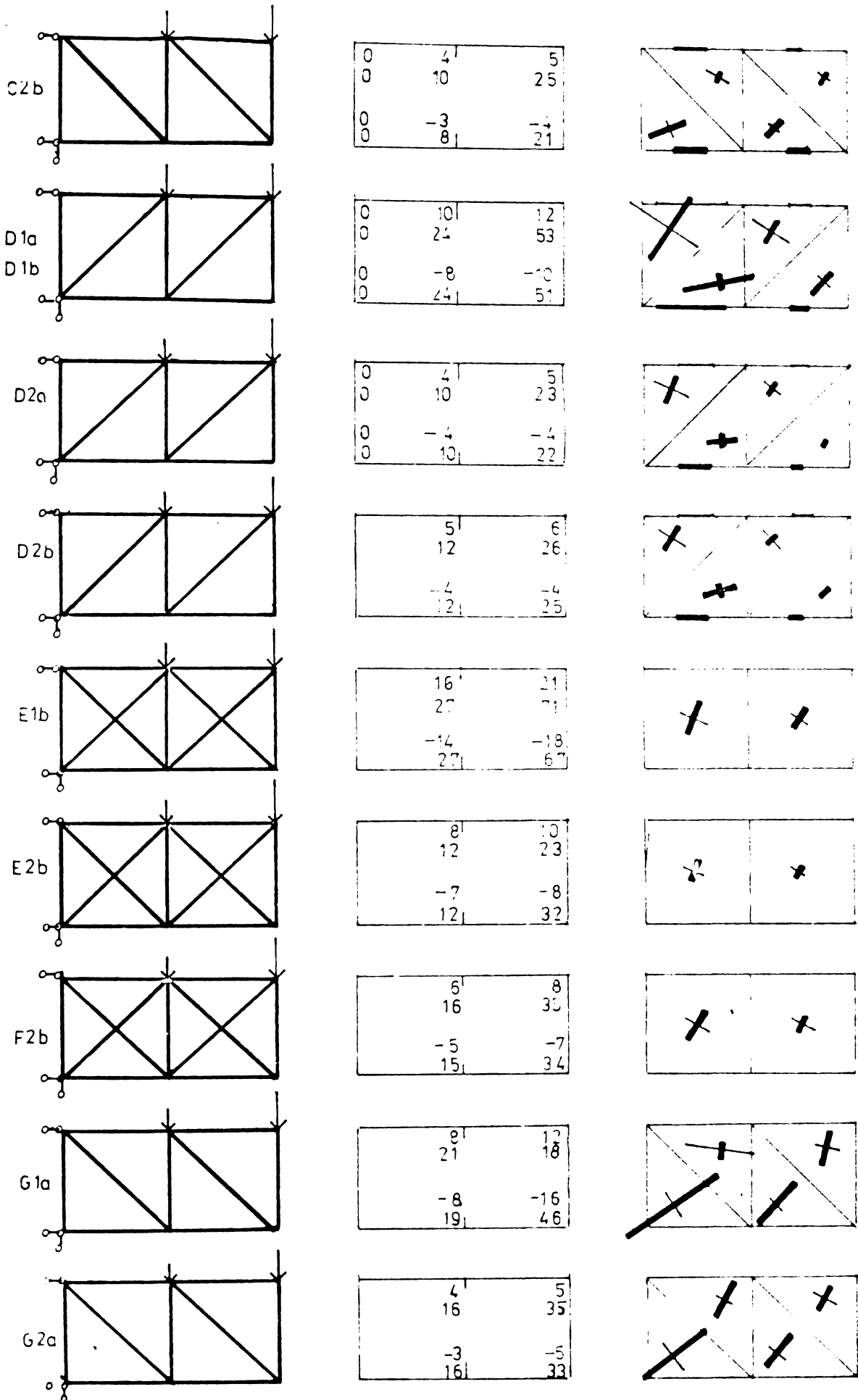


Fig 6.12

uniforma distribuite pe suprafața consolei. Coeficienții de armare determină pentru un coeficient de echivalență  $n = 7$  secțiuni ideale identice cu cele ale consolei 2,

6.- elemente finite triunghiulare, utilizând matricea de elasticitate pentru material neomogen și anizotrop, deoarece consola se consideră armată cu o rețea rectangulară de armături ale cărui procente de armare realizează secțiunile ideale corespunzătoare consolei 2.

Cazurile A, B, C, D, E și F s-au calculat cu programul SAFIV cazul G cu programul BIOGRAFO2.

#### 6.2.2.4. Calculul elastic al unei grinzi perete

S-a calculat starea de eforturi din grinda perete reprezentată în fig.6.13.a, cu trei metode: metoda diferențelor finite (DIFI), metoda elementelor finite (ELFI) și teoria echivalențelor (LCHI) /21/. S-au utilizat trei variante de discretizare în cadrul unor rețele cu ochiuri patrute.

În figura sînt reprezentate diagramele de eforturi unitare în axul median al grinzii precum și eforturile unitare tangențiale la fața interioară a reazemului, în cele trei variante de discretizare.

Tabelul din subsolul figurii reține valorile rezultatelor eforturilor de întindere (I), de compresiune (C), media lor (R) și brațul de pîrghie (Z) în cele trei metode pentru discretizarea 1/8 și 1/16 precum și valorile obținute prin extrapolarea Richardson /42/ aplicată acestor variante de discretizare, rezultînd momentele cuplurilor interioare (M), care se compară cu valoarea momentului exterior:

$$\frac{M_{\text{ext}}}{M_{\text{max}}} = \frac{3}{32} p l^2 = 0,09375 p l^2$$

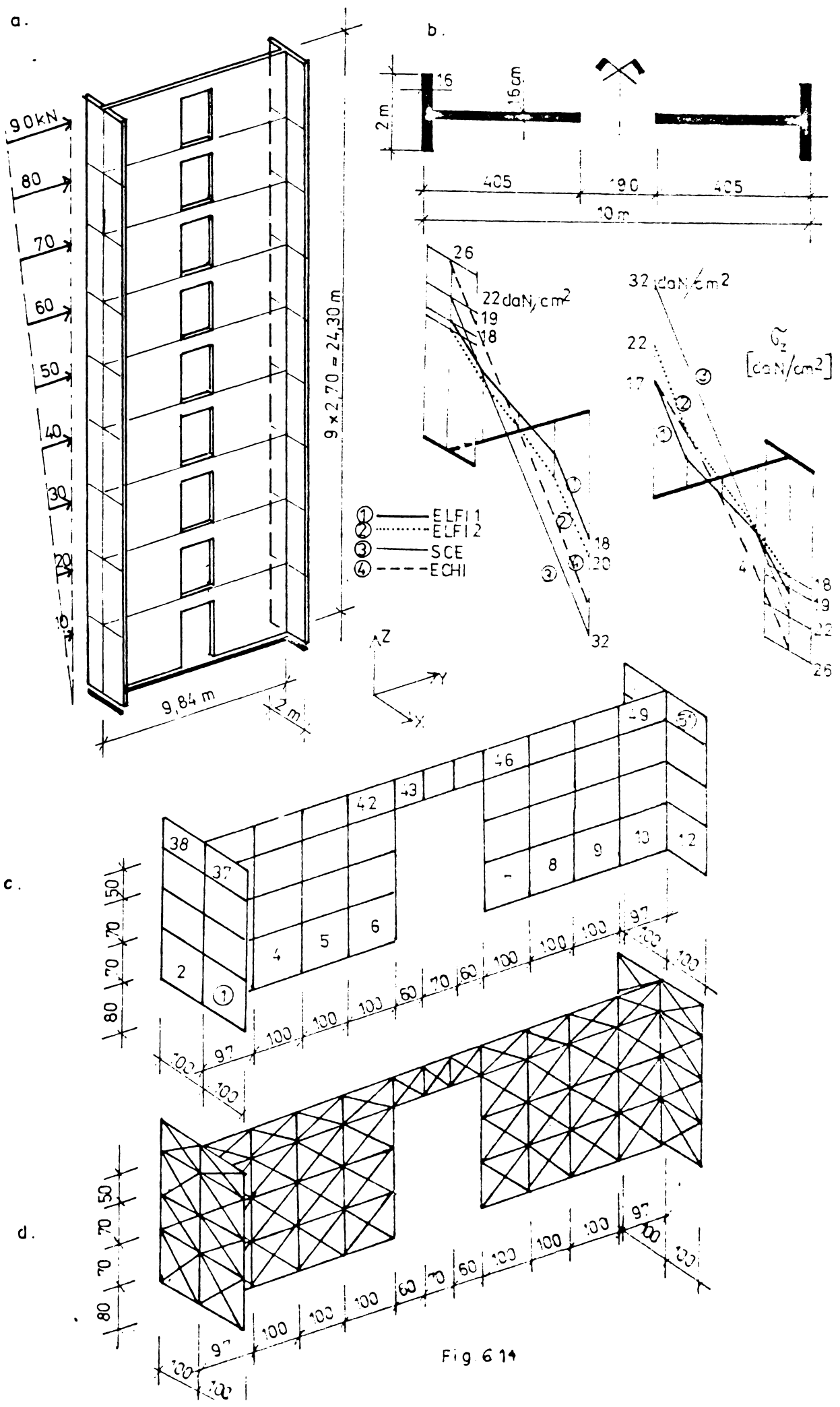
și se calculează diferența procentuală (Dif. %).

Analizînd rezultatele obținute prin cele trei metode de calcul, se constată că acestea sînt de același ordin de precizie. Pentru cazul concret prezentat în exemplul de calcul, verificarea statică este satisfăcută cu o abatere cuprinsă între -4,56 % și +2,97% pentru o discretizare de cel puțin 1/16.

#### 6.2.2.5. Calculul elastic al unei diafragme cu goluri

Diafragma cu goluri din fig.6.14, încadrată perfect la bază, este acționată numai de încălzirea laterală provenită din seism.





Discretizarea fiecăruia din cele 9 niveluri este reprezentată în fig.6.14.e, numărul total de elemente finite fiind deci egal cu  $9 \times 51 = 459$ . Eforturile s-au determinat cu programul SAPIV, în două variante. În prima variantă încărcările orizontale s-au aplicat sub formă uniform distribuită de-a lungul liniilor de intersecție ale diafragmei cu planșeele din dreptul nivelelor, iar cea de a doua, concentrat la marginea din stînga.

Distribuția eforturilor unitare  $\sigma_x$  la baza diafragmei sînt reprezentate în fig.6.14.b. Varianta notată cu 3 corespunde tensiunilor determinate cu metoda structurii continue echivalente, în fiecare montant rezultînd un moment de încovoiere de 2060 kNm și o forță axială de 400 daN. Se observă că această metodă aproximativă a condus la tensiuni mai mari, mai ales la marginile interioare ale montanților. Distribuția liniară a tensiunilor nu este confirmată de calculul de gaibă în metoda elementelor finite.

Aceiași diafragmă s-a calculat și cu ajutorul teoriei echivalențelor. Discretizarea este reprezentată în fig.6.14.d. S-a utilizat modelul rectangular cu bare articulate. Rezultatele sînt comparate cu cele obținute prin metoda structurii continue echivalente. Modelul echivalent a fost realizat cu 1938 de elemente de bară articulată, avînd 554 de noduri. Diagrama de eforturi unitare  $\sigma_x$  la baza diafragmei este reprezentată în fig. 6.14.b.

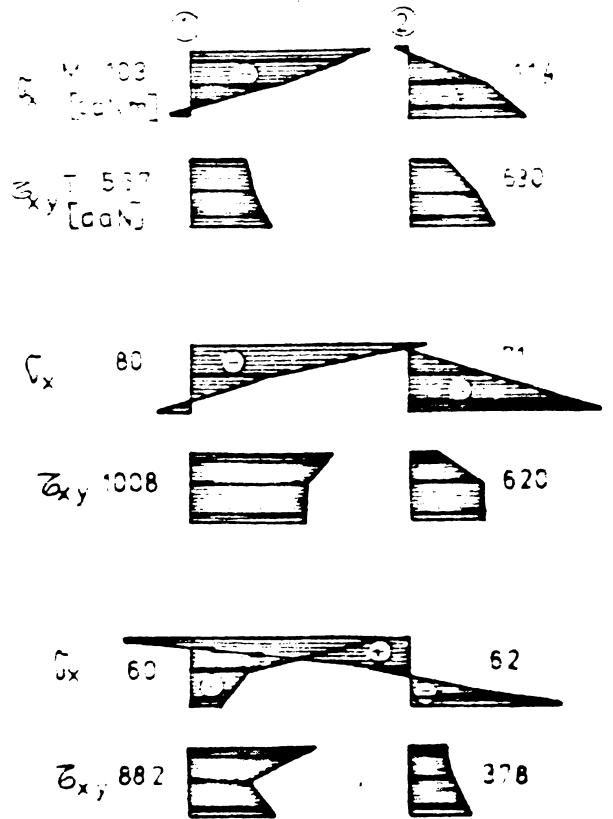
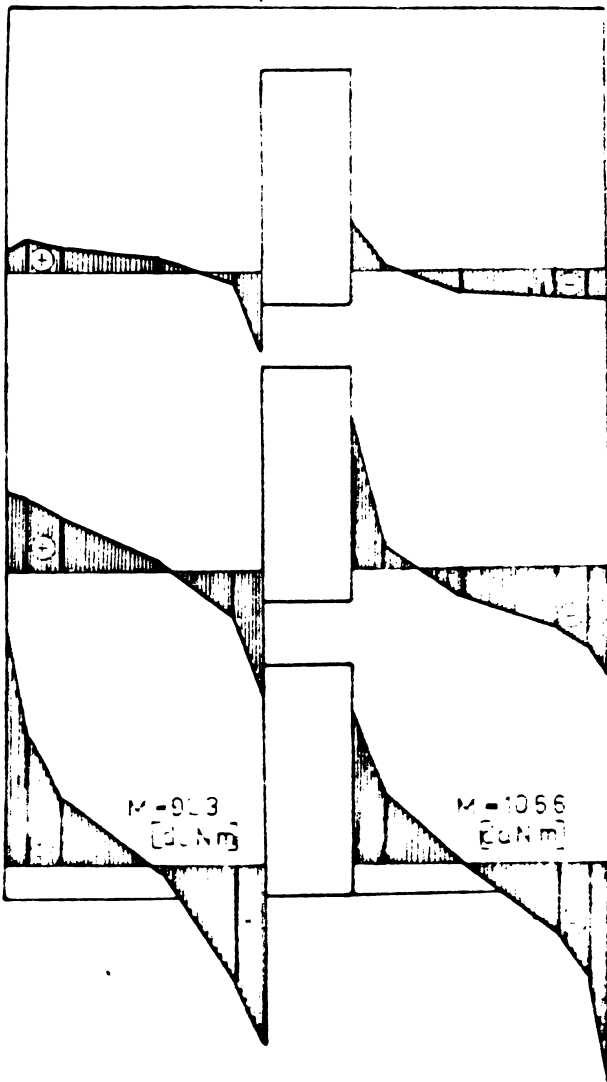
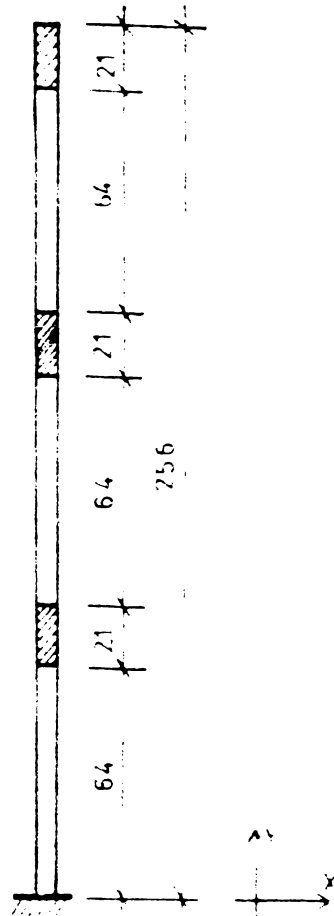
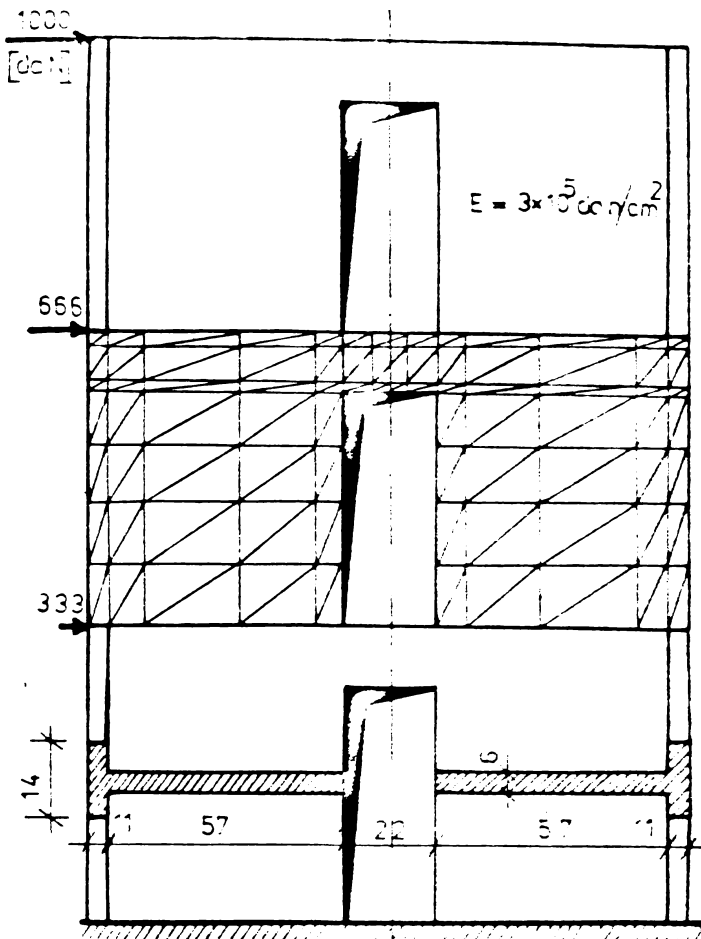
#### 6.2.2.6. Calculul elastic al unei diafragme

Diafragma din fig.6.15, a fost discretizată în 474 elemente finite triunghiulare și încărcate conform schemei. S-au determinat eforturile secționale  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  și  $\tau_{xy}$  în secțiunile orizontale respectiv verticale din dreptul încadrării buiandrugilor în montanți. Din diagramele de eforturi unitare au fost evaluate eforturile  $M$  și  $T$ .

#### 6.2.3. Calculul postelastie

##### 6.2.3.1. Calculul biografie al unei plăci plane

Exemplul de calcul se referă la o placă plană din beton simplă, rezemată și încărcată ca în fig.6.16. Încărcarea se aplică crescător în trepte. Se consideră că la atingerea rezistenței la întindere elementul finit iese din lucru. Se obține astfel o nouă structură cu o rigiditate mai redusă care va fi încărcată în continuare. Pentru a nu pierde efectul degradărilor succesive încărcarea crește în pași mici. Figura 6.16 redă succesiunea degradărilor și



$50 \text{ daN/cm}^2$   
 $\sigma_x, \tau_{xy}$

Fig 6.15

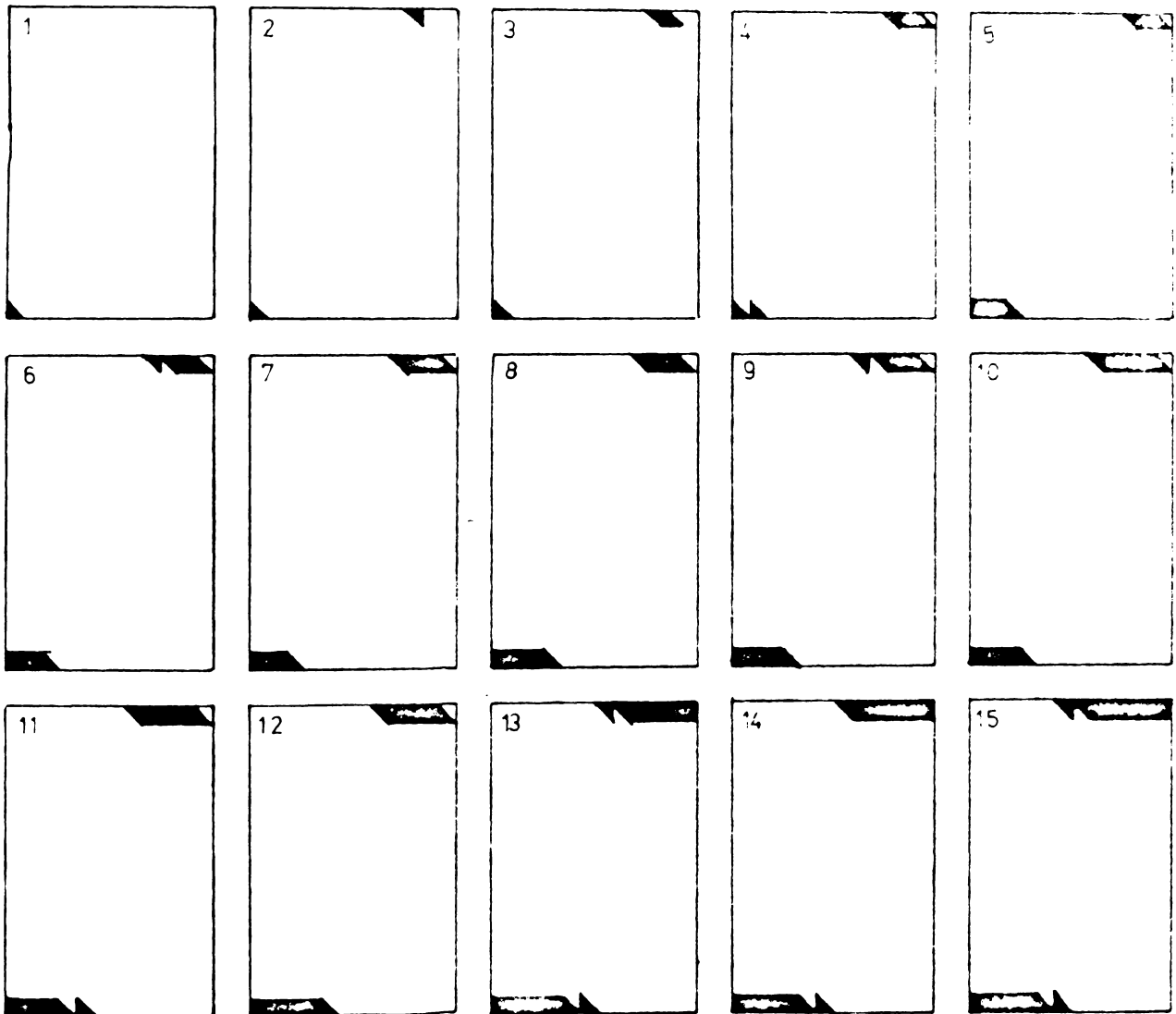
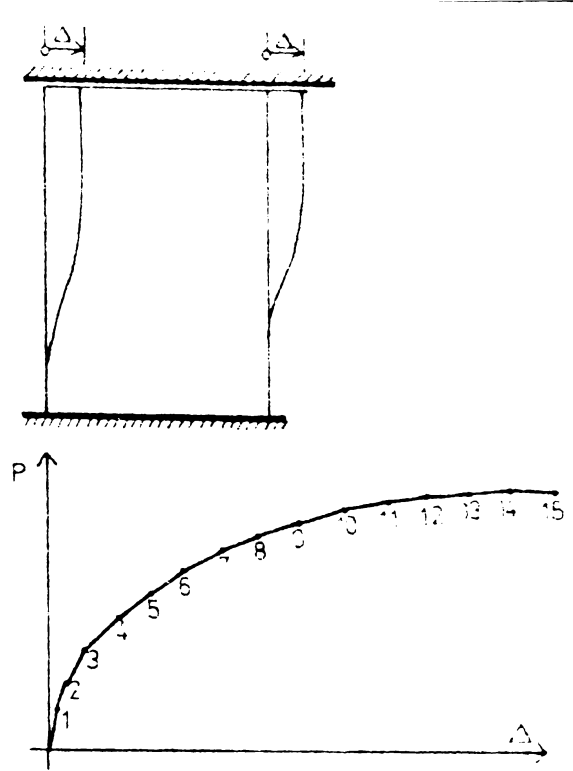
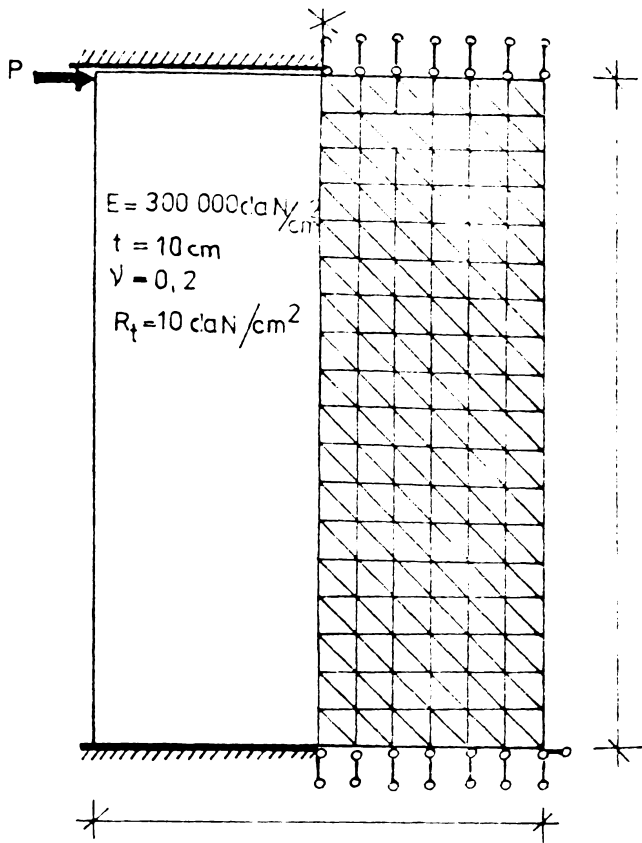
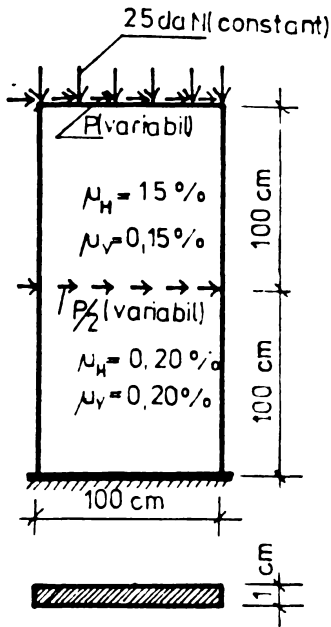
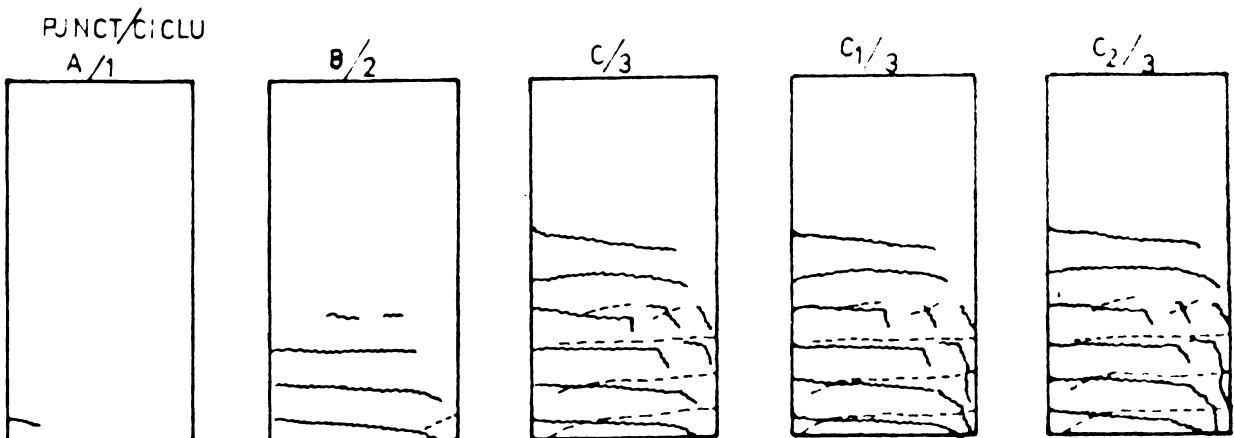
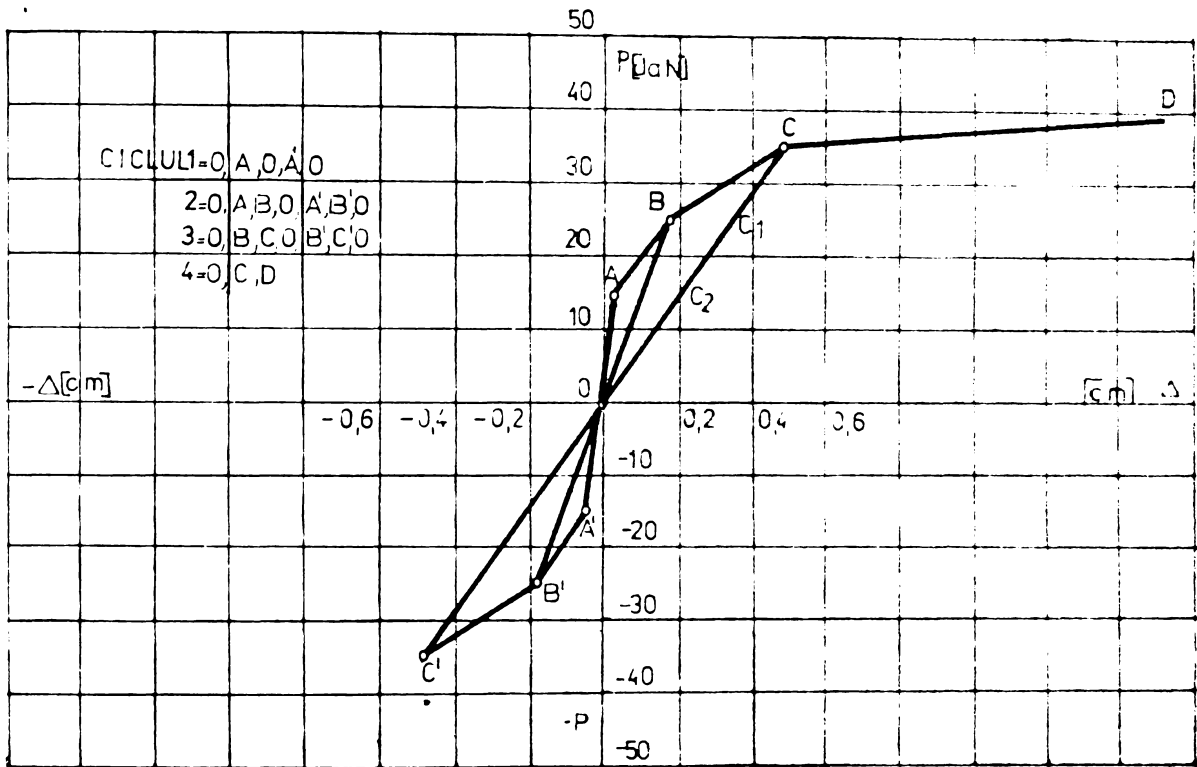
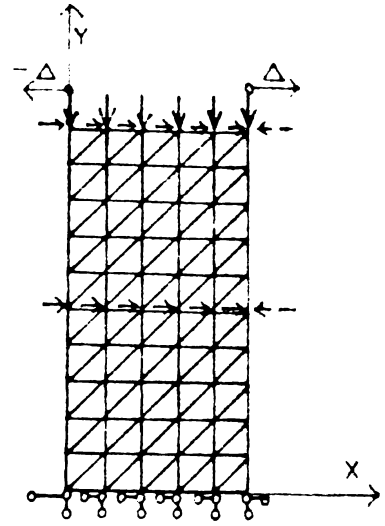


Fig. 6.16



$E_B = 3 \times 10^5 \text{ daN/cm}^2$   
 $E_A = 2,1 \times 10^6 \text{ daN/cm}^2$   
 $R_t = 10 \text{ daN/cm}^2$   
 $R_c = 200 \text{ daN/cm}^2$   
 $\sigma_c = 3600 \text{ daN/cm}^2$   
 $\epsilon_B = -0,002$



— fisuri deschise  
 - - - fisuri inchise

Fig. 6.17

curba  $P -$  obținută. Varianta de calcul constituie o metodă simplificată de calcul și poate fi abordată și cu programele de calcul elastic prin ruli succesive.

#### 6.2.3.2. Calculul biografic al unei diafragme de beton armat încărcată cu sarcini alternante

Pentru calcul s-a ales o diafragmă de grosime unitară armată cu o rețea ortogonală de bare. Caracteristicile fizico-mecanice sînt redată în fig.6.17. În aceeași figură sînt reprezentate coborîșurile și discretizarea în elemente finite. Diafragma este supusă unei sarcini gravitaționale constante, iar pe direcția orizontală este încărcată alternant crescător de forțe acționînd la vîrf și la unghiul înălțimii ei.

Calculul s-a efectuat cu programul BIODIAP02. S-a obținut ciclogram  $P -$  din fig.6.17. În aceeași figură sînt reprezentate și releveul de fisuri la diferite trepte de încărcare. De asemenea este semnalată poziția armăturilor intrate în curgere.

#### 6.2.3.3. Calculul nelinier al unei diafragme de beton armat utilizînd teoria echivalențelor

Pentru exemplificarea calculului nelinier în teoria echivalențelor s-a ales diafragma din fig.6.18. Alături este reprezentat și modelul echivalent format din bare articulate. Acestui model i s-a aplicat încărcarea  $P$  crescător pînă la determinarea limitei stadiului elastic. După apariția fisurii în elementul de la bază s-au recunoscut rigiditățile modelului echivalent, după care acestuia i s-a aplicat un nou increment de încărcare  $\Delta P$ , obținîndu-se o creștere a deplasării. În figură este reprezentat elementul la limita stadiului elastic împreună cu modelul echivalent și a fost trasată diagrama  $P - \Delta$ .

#### 6.2.3.4. Calculul biografic al unui buiandrug din beton armat

Metoda biografică de calcul s-a aplicat unui buiandrug din beton armat, a cărui încercare experimentală este prezentată în lucrarea /76/. Alături și modalitatea de încercare a modelului experimental sînt prezentate în fig.6.19.a, iar în fig.6.19.e, este reprezentată schema de calcul a buiandrugului. Pentru modelul de calcul s-a ales schema din fig.6.20, în care sînt redată caracteristicile fizico-mecanice ale betonului și armăturii, precum și coeficienții de armare realizați în rețeaua de discretizare propusă.

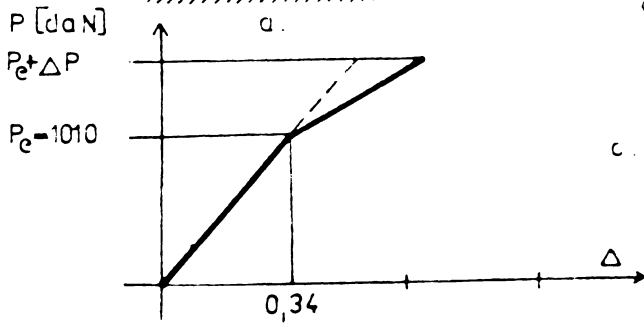
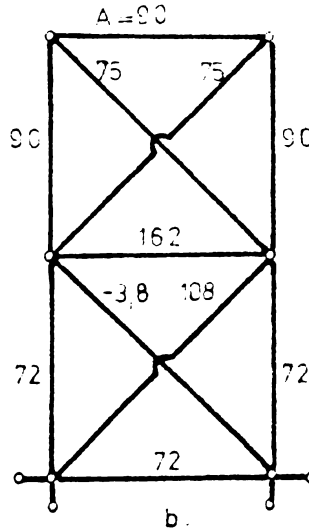
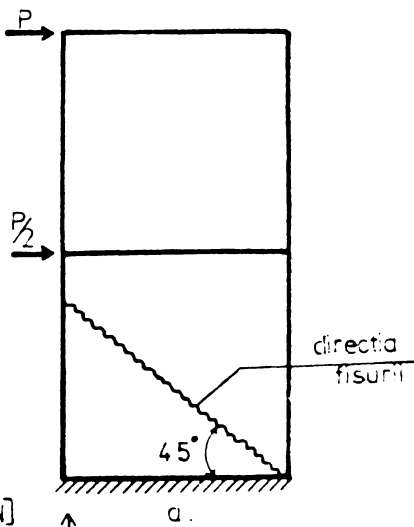
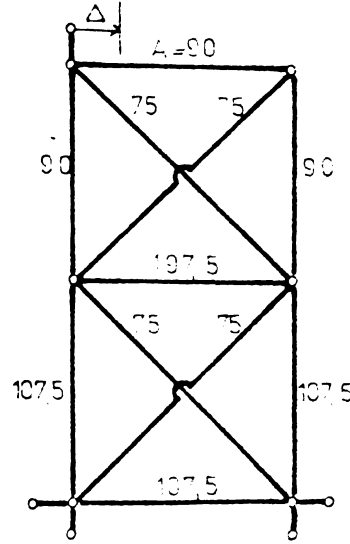
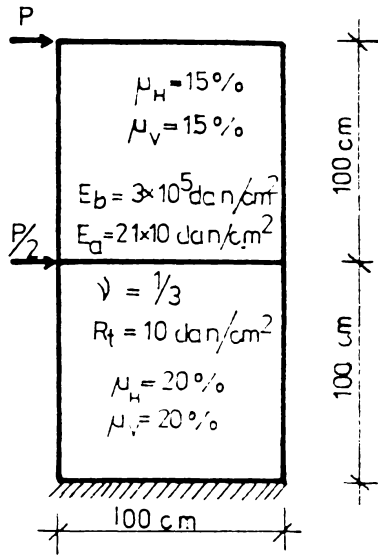
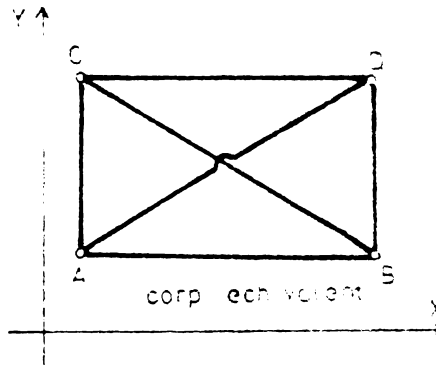
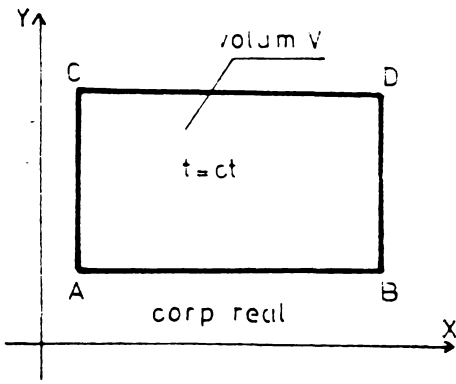
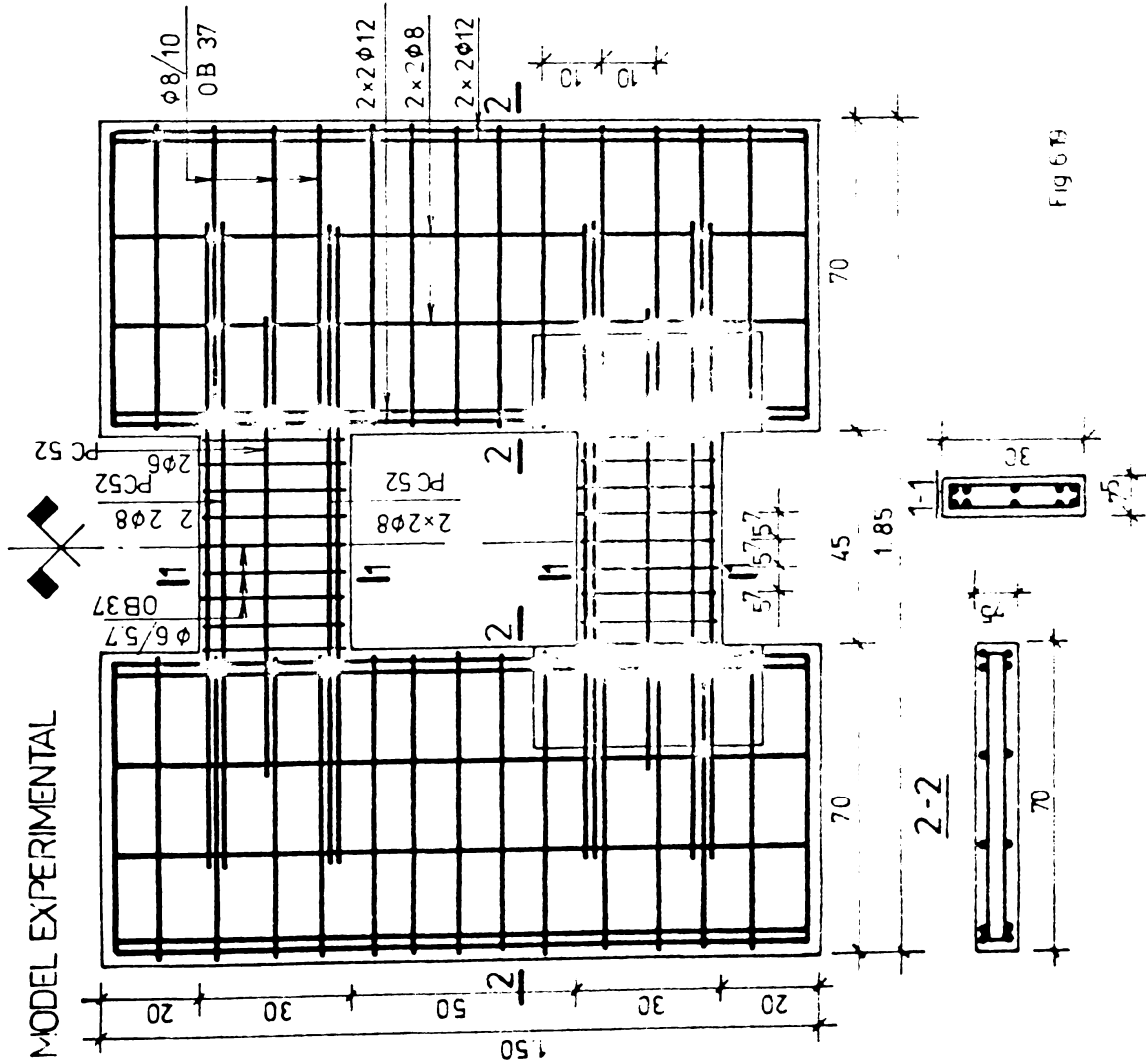
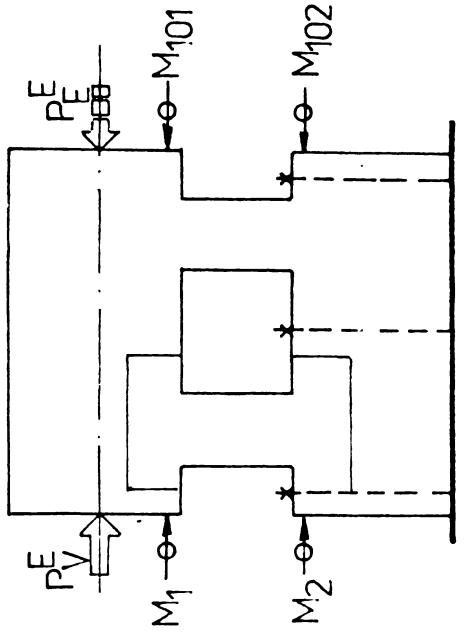


Fig. 6.18

MODEL EXPERIMENTAL



SCHEMA INCERCARII EXPERIMENTALE



$$\Delta^E = \frac{1}{2}(M_1 - M_2 - M_{101} - M_{102}) + \Delta^C$$

SCHEMA DE INCERCARE A MODELULUI DE CALCUL

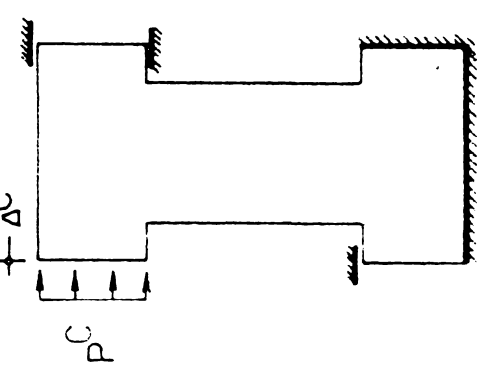
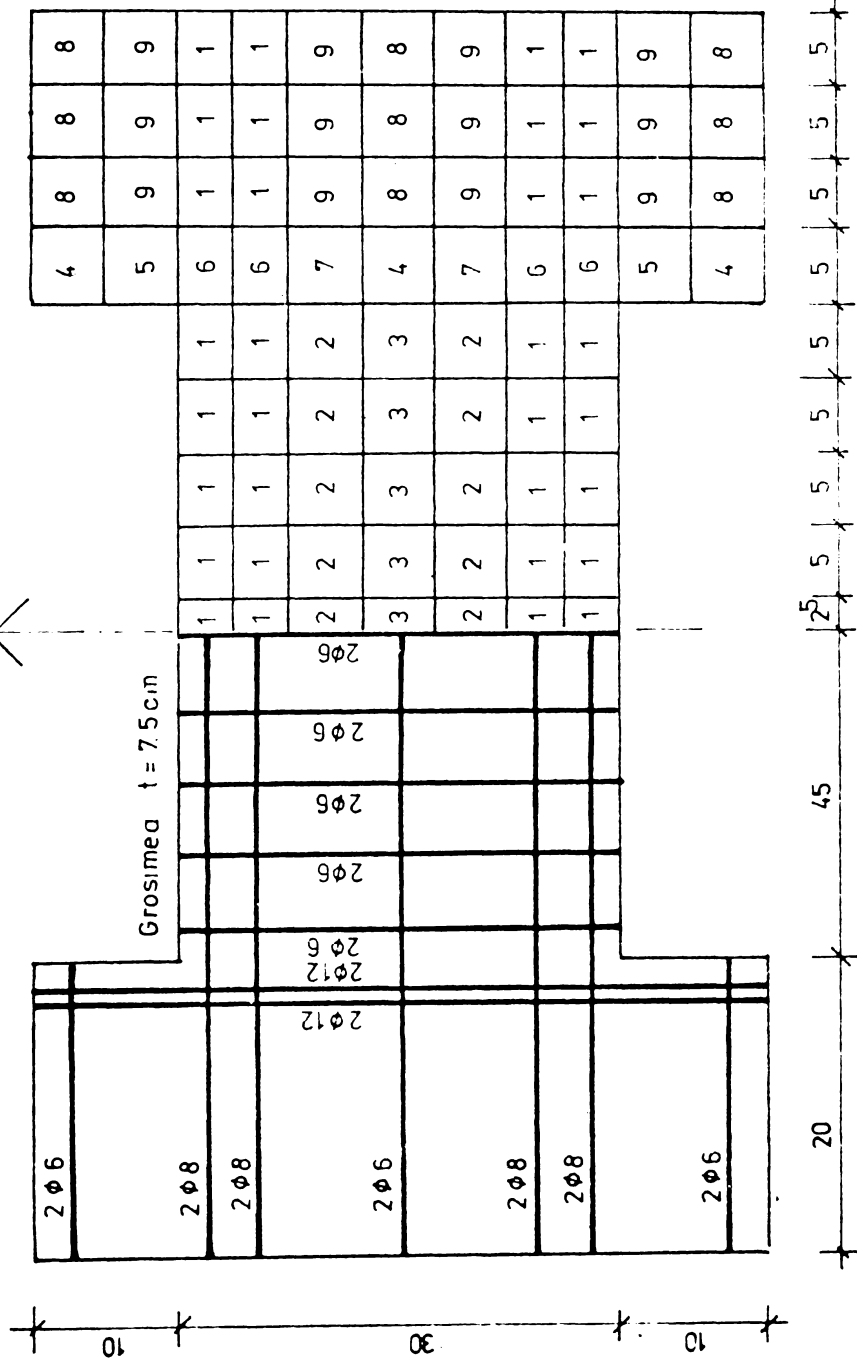


Fig 6.13



# ARMAREA MODELULUI DE CALCUL



Tipul	Coef. arm. oriz.	Coef. arm. vert.
1	0.0358	0.0130
2	0	0.0130
3	0.0268	0.0130
4	0.0268	0.1205
5	0	0.1205
6	0.0358	0.1205
7	0	0.1205
8	0.0268	0
9	0	0
$\nu$	0.2	
$\bar{R}_C$	264 daN/cm <sup>2</sup>	
$R_T$	20 daN/cm <sup>2</sup>	
$\xi_B$	-0.002	
$E_B$	175 000 daN/cm <sup>2</sup>	
$\sigma_C$	3600 daN/cm <sup>2</sup>	
$E_A$	$2.1 \cdot 10^6$ daN/cm <sup>2</sup>	

Fig. 6.20

Modelul de calcul a fost discretizat în 308 elemente finite triunghiulare în stare plană de tensiuni alcătuind o structură rețiculară ale cărei condiții de rezemare și de încărcare sînt reprezentate în fig.6.21. Acestui model i s-au aplicat incremente de încărcare succesive pînă la rupere, urmărindu-se variația eforturilor unitare și a deformațiilor specifice în beton și armătură, deplasarea maximă în fiecare pas, procesul de fisurare, plasticizarea și zdrobirea betonului comprimat, curgerea armăturii.

Rezultatele calculului biografic sînt redată în figurile 6.22 și 6.23. În fig.6.22 sînt reprezentate curbele  $P^E - \Delta^E$  obținute pe modelul experimental, peste care a fost suprapusă curba  $P^C - \Delta^C$  obținută din calcul. Se remarcă buna concordanță dintre experiment și calcul pînă în apropierea rupei. Ruperea s-a produs prin curgerea armăturii întinse atît la experiment cît și în calcul. Deformațiile specifice măsurate și calculate în armătura întinsă de pe primul rînd din secțiunea buiandrugului sînt reprezentate în fig. 6.22.b. Figura 6.23 redă releveul sifurilor din diferite trepte de încărcare. Se remarcă prezența și dezvoltarea fisurilor diagonale, precum și a celor sub formă de arc de cerc dezvoltate în montanți, fisuri sesizate și la încercarea experimentală.

Momentul rupei nu poate constitui element de comparație între experiment și calcul avînd în vedere că s-a modelat un singur buiandrug, iar la modelul experimental, în momentul iminent rupei au loc redistribuiri de eforturi de la un buiandrug la altul, ruperea producîndu-se succesiv la cei doi buiandrugii. Fenomenul se datorează neomogenității materialului și abaterilor de execuție.

Calculul a fost efectuat cu programul BIOGRAF01.

#### 6.2.3.5. Calculul biografic al unei diafragme de beton armat cu un gir de goluri

Diafragma calculată este reprezentată în fig.6.24, împreună cu caracteristicile fizico-mecanice ale betonului și armăturii pe care le conține. În aceeași figură este reprezentată și discretizarea în elemente finite, specificîndu-se tipurile acestora în cadrul discretizării precum și procentele de armare propuse. Încărcarea orizontală are caracter monoton, cea verticală fiind constantă. Pentru încărcarea variabilă s-au propus următoarele trepte de încărcare : LE (limita elastică), LE + 6.000 daN, LE + 9400 daN, LE + 10800 daN. Pentru fiecare treaptă de încărcare s-a stabilit tabloul eforturilor unitare și deformațiilor specifice în armături și beton.

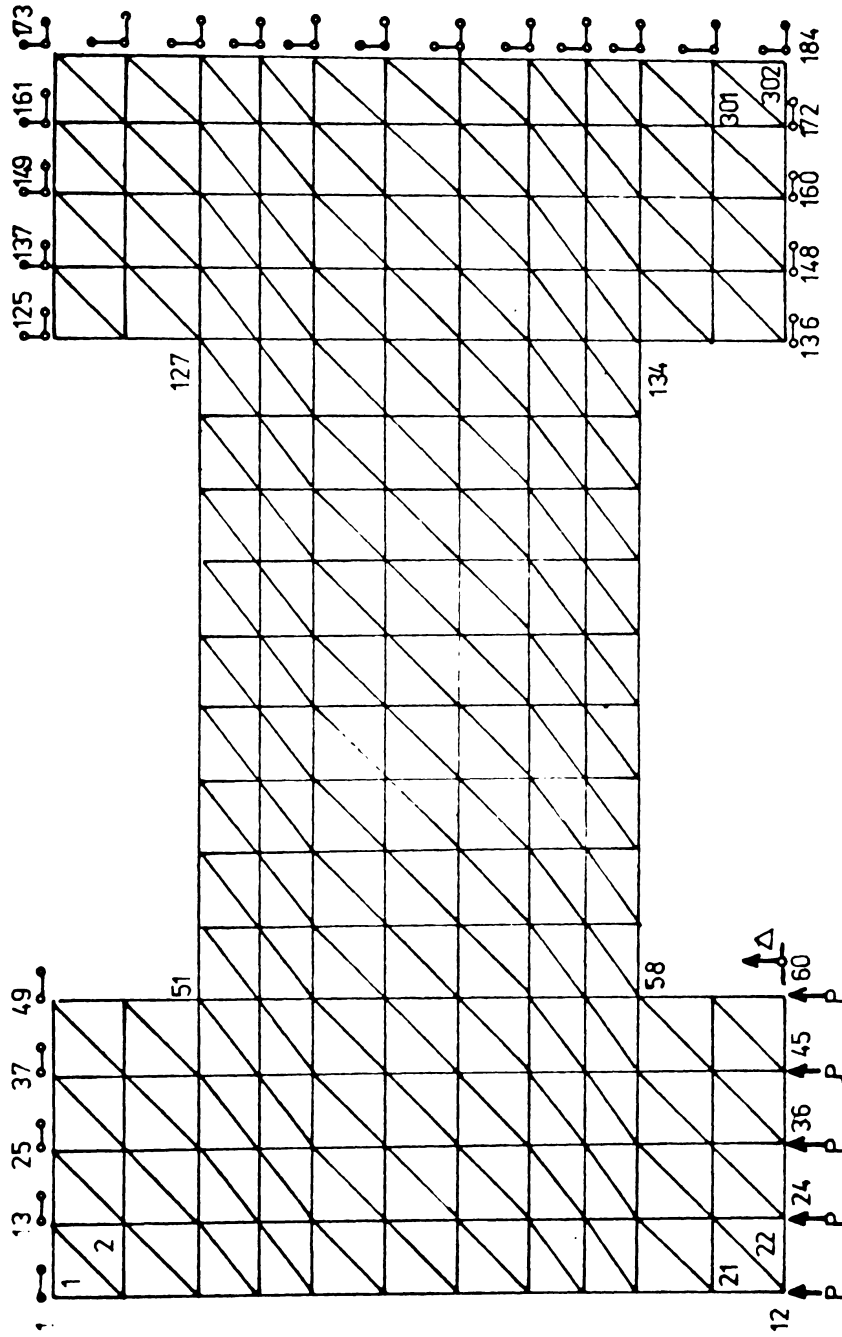


Fig. 6.21

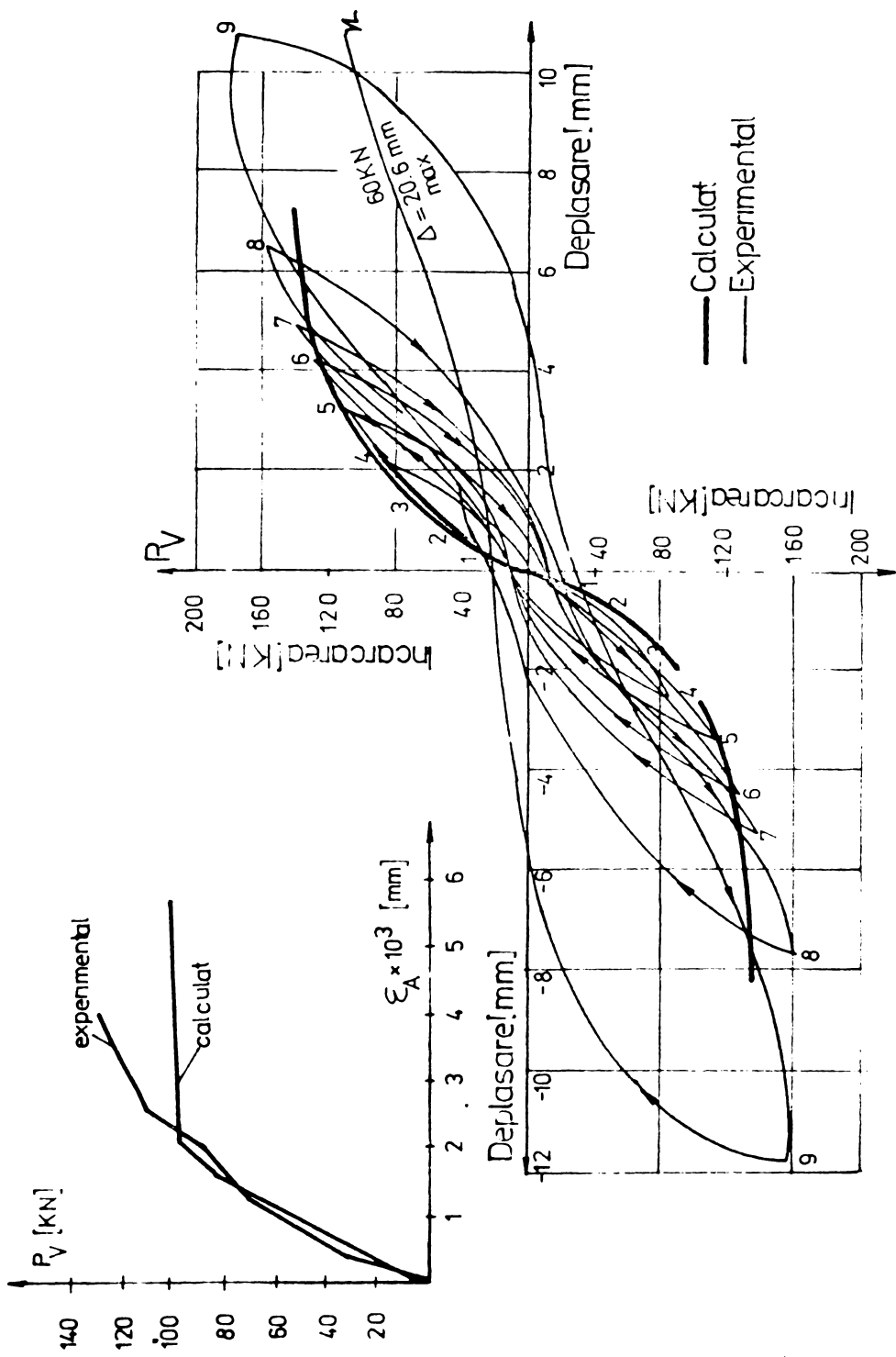


Fig. 6.22

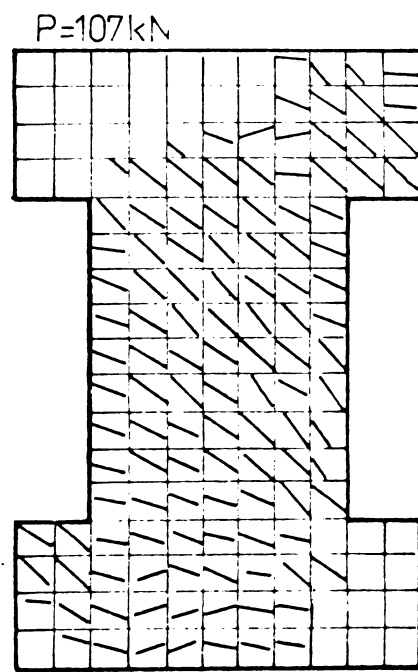
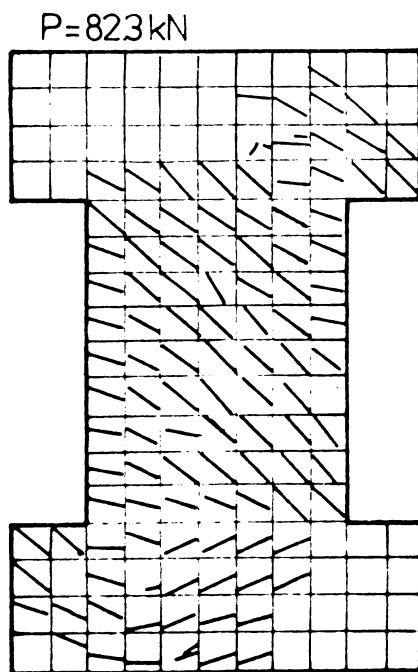
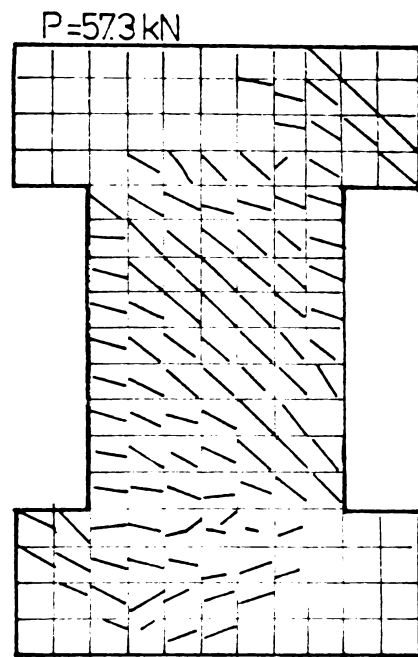
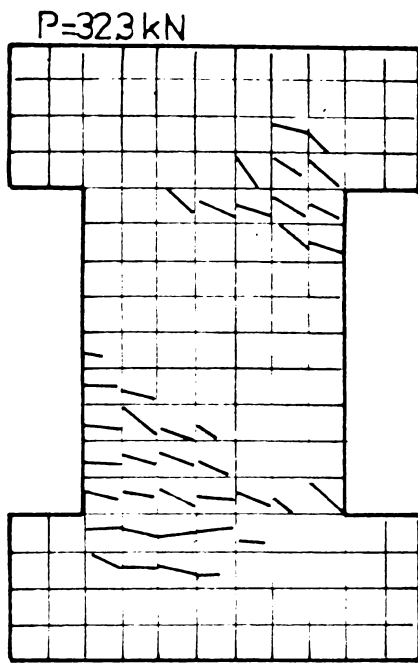
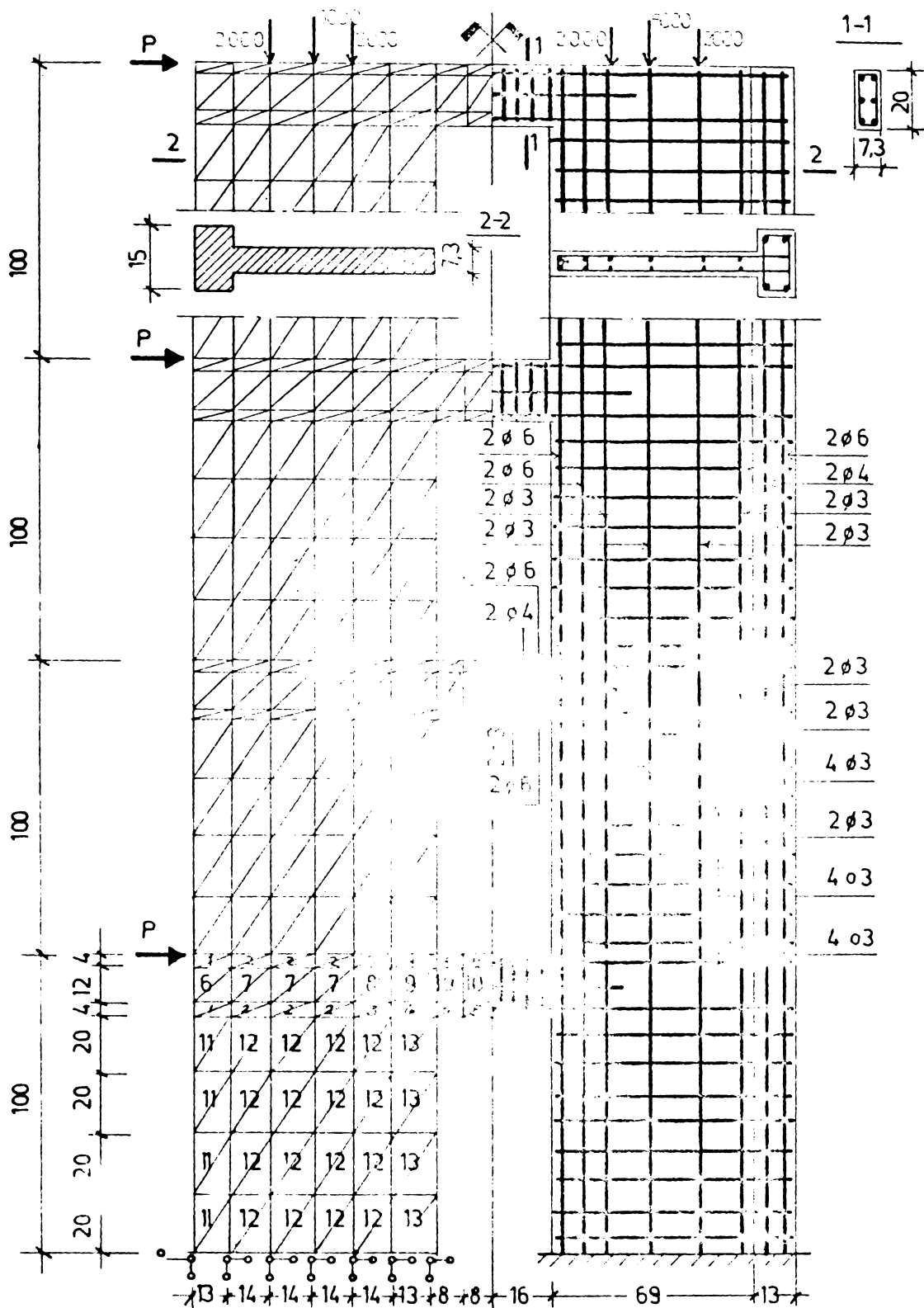
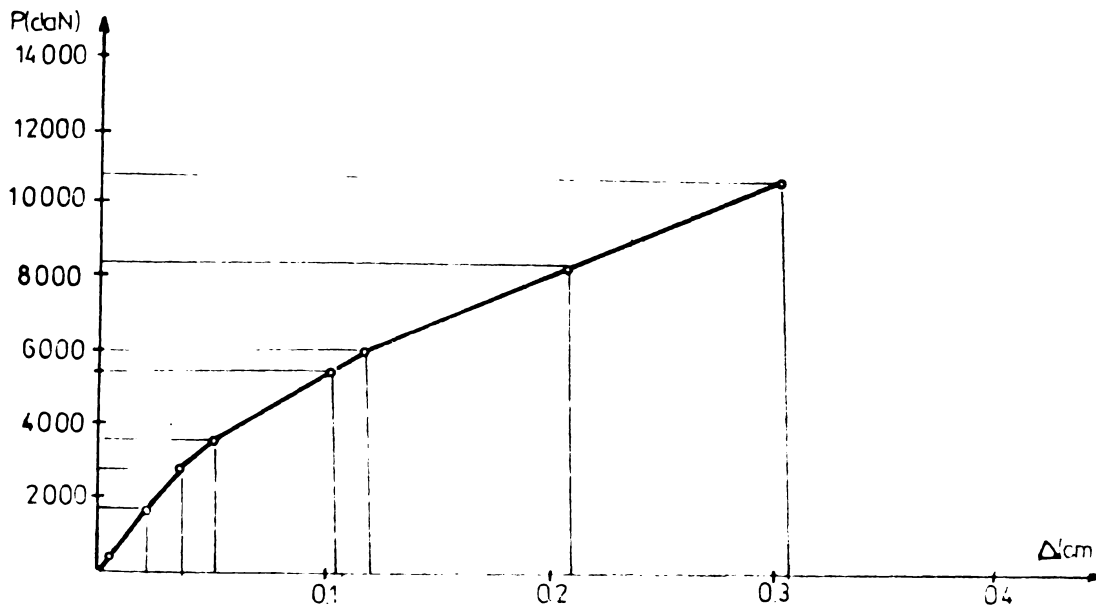


Fig. 6.23

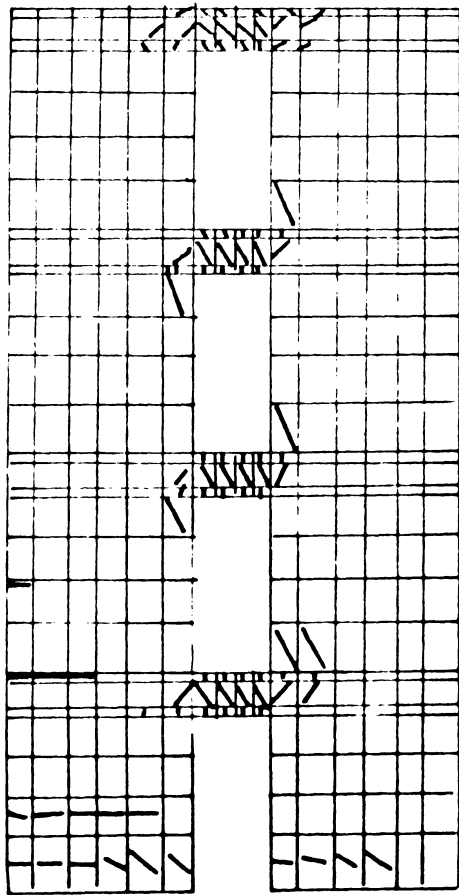


Tipul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu_H\%$	0,28	0,58	2,40	2,40	1,80	0	0	0,28	0,28	0,28	0,11	0,23	0,11
$\mu_V\%$	0,40	0,16	0,16	0,82	0,58	0,40	0,16	0,16	0,82	0,52	0,40	0,16	0,82
$R_C$ [daN/cm <sup>2</sup> ]	200												
$R_T$ [daN/cm <sup>2</sup> ]		20											
$E_B$ [daN/cm <sup>2</sup> ]				3 · 10 <sup>5</sup>									
$\epsilon_b$						- 0,002							
$\gamma$								0,2					
$E_A$ [daN/cm <sup>2</sup> ]										2,1 · 10 <sup>6</sup>			
$\sigma_a$ [daN/cm <sup>2</sup> ]												2600	

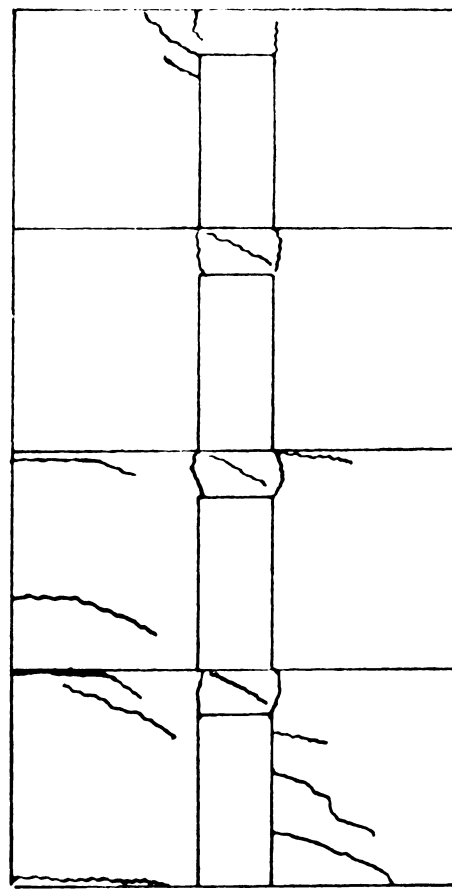
Fig. 6.24



a.

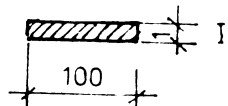
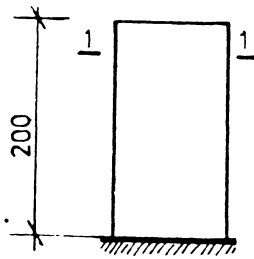


c.



b.

Fig. 6 25



$E = 3 \times 10^5 \text{ daN/cm}^2$   
 $\rho = 254,8 \text{ daN/cm}^2$   
 $\nu = 0,333$

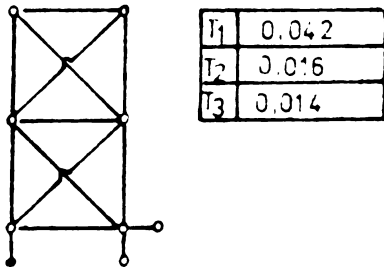
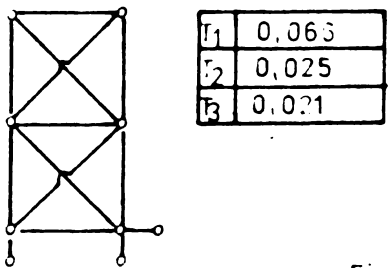
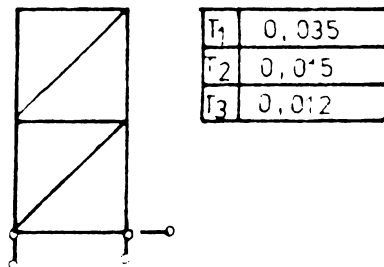
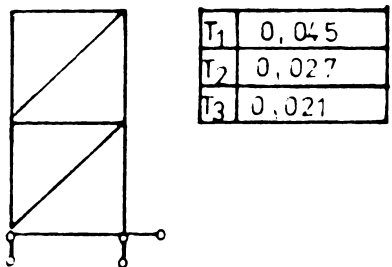
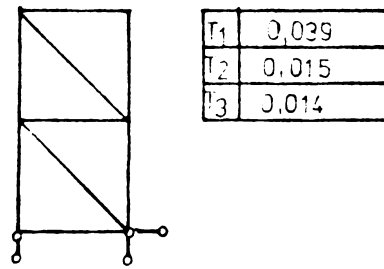
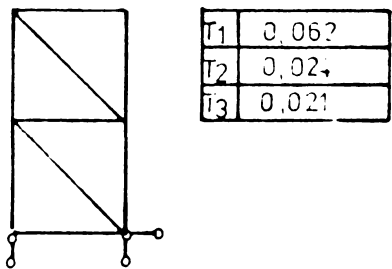
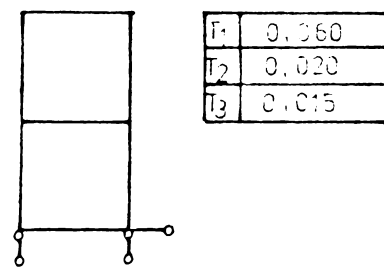
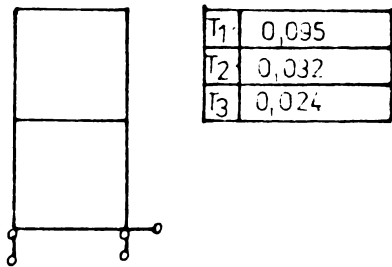
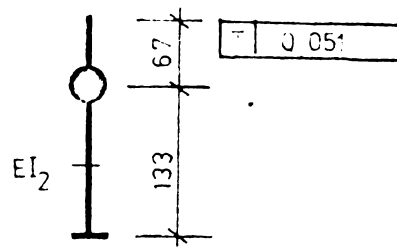
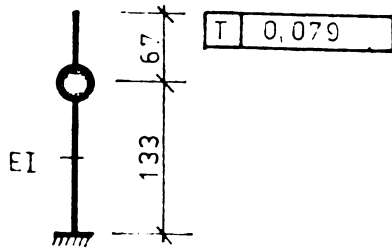
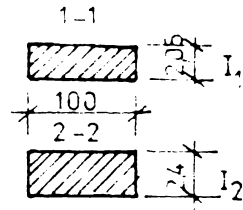
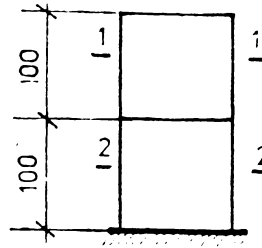
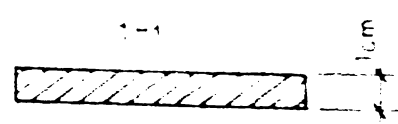
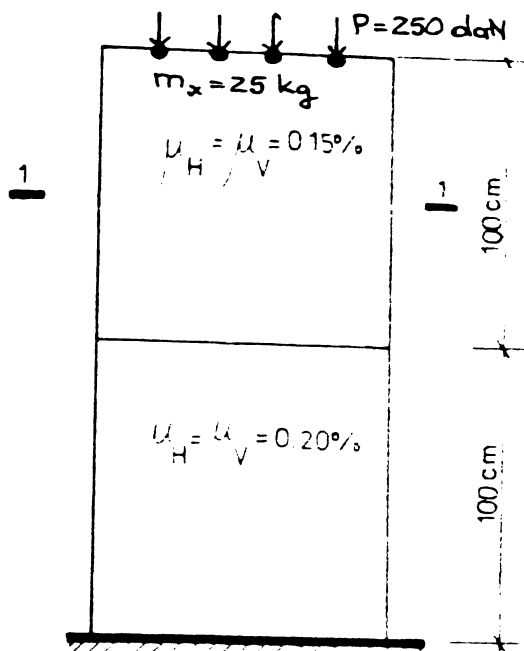


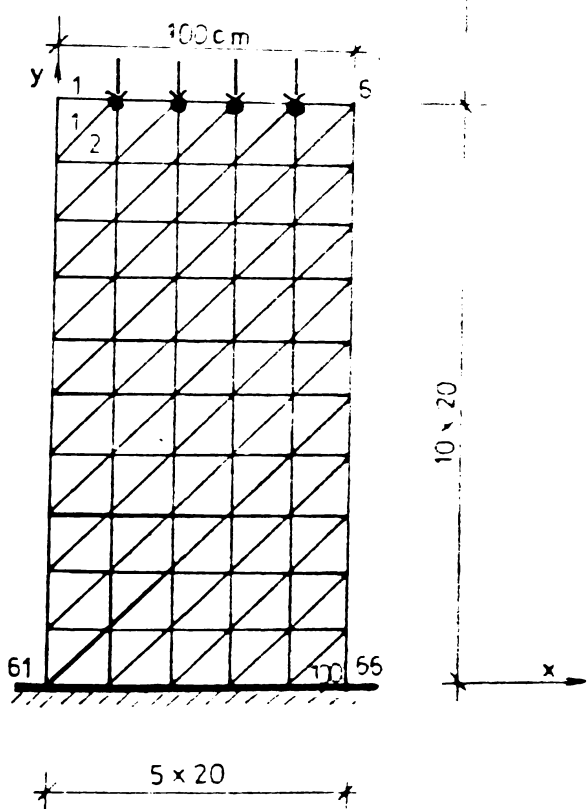
Fig. 6.26





$E_B = 3 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$   
 $E_A = 2,1 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$   
 $R_s = 10 \text{ daN/cm}^2$   
 $R_c = 200 \text{ daN/cm}^2$   
 $\xi_B = -0,002$   
 $\sigma_c = 3600 \text{ daN/cm}^2$

Acc. INCERC 4.0377 N-S  
 $P = 250 \text{ daN}; m_x = 25 \text{ kg}$



t [s]	$\Delta z$ [cm · 10 <sup>-3</sup> ]
0,00	0,163
0,02	0,165
0,04	0,167
0,06	0,176
0,08	0,193
0,10	0,220
0,12	0,25
0,14	0,28
0,16	0,31
0,18	0,32
0,20	0,32
0,22	0,30
0,24	0,25
0,26	0,16
0,28	0,04
0,30	-0,10
0,32	-0,30
0,34	-0,55
0,36	-0,80
0,38	-1,10
0,40	-1,5

$P = 0; m_x = 200 \text{ kg}$

Pasul	$\Delta \text{ accel}$	A accel	$\Delta \text{ vit}$ $\times 10^{-5}$	Viteze $\times 10^{-3}$	$\Delta \text{ depl}$ $\times 10^{-5}$	Deplas $\times 10^{-5}$
1	-0,071	-0,071	-50	-0,5	-0,23	-0,23
2	+0,14	0,0706	-0,7	-0,5	-0,9	-1,1
3	-0,14	-0,07	-1,5	-0,5	-0,48	-1,6
4	-0,0003	-0,073	-102	-1,5	-1,4	-3,1

Fig. 6.27

Calculul s-a făcut în paralel cu încercarea experimentală a diafragmei /186/. A rezultat curba  $P^c - \Delta^c$  din fig.6.25.a. Pentru treapta de încărcare LE + 8400 sînt redată relevele fisurilor de pe modelul încercat (fig.6.25.b) alături de cele obținute din calcul (fig.6.25.c). Mecanismul ruperii diafragmei a fost același atât la modelul experimental cit și la cel calculat : plasticizarea bușandragilor în ordinea 1, 2, 3, 4, iar apoi a montanților. Încărcarea limită de rupere realizată la încercarea experimentală a fost de 10575 daN, în timp ce prin calcul s-a atins valoarea de 10800 daN. Calculul a fost efectuat cu programul BIODRACO2.

#### 6.2.4. Calculul dinamic

##### 6.2.4.1. Vibrații proprii la o consolă plană

În figura 6.26 se prezintă două plăci plane la care au fost studiate vibrațiile proprii în planul lor. Una dintre plăci are grosime constantă, cealaltă are grosimea variabilă în trepte.

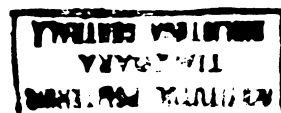
Calcululele au fost făcute prin aplicarea următoarelor metode : metoda analitică cu masă concentrată; metoda elementelor finite prin considerarea a două elemente finite patrute sau patru elemente finite triunghiulare; teoria echivalențelor. Calculul în metoda elementelor finite s-a făcut prin utilizarea programului SAPIV.

Datele numerice din figură se referă la primele trei perioade de vibrație  $T_1$ ,  $T_2$  și  $T_3$ , date în secunde.

Analizînd valorile perioadelor proprii se constată valori destul de apropiate. Totodată prin discretizarea plăcii în două elemente finite dreptunghiulare rezultă cele mai mari perioade proprii de vibrație. Elementele finite triunghiulare și teoria echivalențelor dau valori apropiate și ceva mai mici decît metoda analitică.

Abordarea calculului dinamic al diaframelor prin intermediul metodei elementelor finite s-au și teoriei echivalențelor, modelînd structura cu elemente bidimensionale, permite determinarea mai realistă a caracteristicilor dinamice ale acestora.

În acest sens programele de calcul existente, bazate pe metoda elementelor finite, sînt eficiente și relativ ușor de aplicat. În metoda echivalențelor, cînd se utilizează modele din bare cu noduri articulate, calculul este foarte simplu, determinarea rigidităților făcîndu-se foarte rapid.



#### 6.2.4.2. Calculul dinamic biografic al unei diafragme de beton armat

Analiza răspunsului dinamic neliniar constituie un domeniu mai puțin investigat din cauza dificultăților care trebuie depășite în evaluarea răspunsului postelastice al structurilor. Programul BIODIN01 are capacitatea de a efectua o integrare pas cu pas a ecuațiilor de mișcare ale unei structuri supuse unei acțiuni seismice, utilizând același model de material ca și cel conținut în programele BIOGRAF01 și 02.

Pentru structura din fig.6.27 s-au aplicat bazei incrementele de accelerații, determinându-se vitezele și deplasările de răspuns. Calculul s-a efectuat pentru  $\alpha = 0,1$ ,  $\beta = 0,01$  și  $\theta = 1,4$ . Structura i s-a atașat o masă de 100 Kg. amplasată la partea superioară.

### 7. SINTEZA ȘI CONCLUZII

\*\*\*\*\*

Având o pondere însemnată la clădirile civile multietajate, structurile cu diafragme au suscitat și continuă să intereseze un mare număr de ingineri proiectanți și cercetători. Cercetările teoretice și experimentale legate de alemtuirea și calculul diaframelor din beton armat au cunoscut o dezvoltare deosebită în ultimii ani.

În acest sens, procedeele de calcul pentru determinarea eforturilor și dimensionarea diaframelor s-au dezvoltat în mod deosebit, dată fiind lărgirea utilizării calculatoarelor în proiectarea structurilor de beton armat. S-au conturat două categorii distincte de procedee /10/ :

- procedee simplificate, pentru structuri de tipuri uzinale;
- procedee cu caracter general, care permit abordarea tuturor aspectelor unui calcul static sau dinamic, liniar sau neliniar.

Aceste aspecte au constituit chiar ideea de bază de la care s-a plecat la elaborarea prezentei lucrări.

Astfel, în capitolul I se prezintă o metodă simplificată de calcul, bazată pe procedeul structurii continue echivalente. Deși predebatinată unui calcul manual, prin ipotezele simplificatoare pe care le conține, metoda se pretează și unui calcul automat dată fiind posibilitatea simplificării introducerii datelor de in-

trare. Astfel, au fost elaborate două programe de calcul (vezi cap. 5), pentru structuri rigide cu diafragme, care încep calculul prin citirea directă a planului orizontal al structurii, ceea ce reprezintă pentru proiectant o economie de timp suplimentară, în afara aceleia a calculului propriuzis prevăzute de metodă. Simplitatea introducerii datelor și pronunțatul caracter intuitiv determină o largă accesibilitate și un minim de pregătire prealabilă. De asemenea, remarcabil este și timpul calculator extrem de redus (circa 30 secunde pentru o structură curentă), cât și necesarul de memorie internă (30 K<sub>0</sub>), fără necesități de memorie externă. Acestea recomandă programele ca fiind deosebit de economice.

Capitolele 2 și 3 prezintă două metode din cea de a doua categorie și anume metoda elementelor finite și teoria echivalențelor.

În cadrul metodei elementelor finite se descriu succesorul procedurii de analiză, se determină rigiditatea elementului finit triunghiular, se analizează vectorii încercărilor și modalitățile de discretizare a structurii. O extindere mai mare o are studiul în domeniul postelastice. După descrierea criteriilor de plasticizare și a limitelor de comportare ale betonului solicitat biaxial se prezintă posibilitățile de modelare ale comportării armăturii, betonului armat și a betonului fisurat. Se deduc matricile de rigiditate ale betonului armat nefisurat, respectiv plasticizat pentru un anumit model fizic propus, pentru care elementul infinitesimal de material este compus din beton și o armătură considerată uniform repartizată în planul median al acestuia. Sunt prezentate și comentate criteriile de fisurare ale betonului armat între care și criteriul energetic. În vederea analizării tuturor fenomenelor neliniare care apar în betonul armat în stare plană de tensiuni, se prezintă o posibilitate de modelare a rugozității fisurilor, precum și fenomenul "dilatării" fisurilor, aspecte care pînă în prezent nu s-au fost luate în considerare în studiile analitice.

Interacțiunea beton - armătură, o altă cauză generatoare de efecte neliniare, este lăsată în considerare într-o variantă aplicabilă analizelor prin discretizare fizică.

Urmarirea comportării postelastice a diafragmelor de beton armat se poate face printr-o analiză incrementală, descriindu-se etapele acesteia și procesele majore care au loc: fisurarea, plasticizarea, reechilibrarea structurii.

Calculul cu elemente finite se conduce mai departe în domeniul dinamic, prezentându-se principalele aspecte legate de o analiză prin integrare directă. Se propune apoi un procedeu de analiză dinamică neliniară, utilizând modelul de material propus în calculul postelastice.

Capitolul 3 conține prezentarea teoriei echivalențelor pentru starea plană de tensiuni în cazul materialelor izotrope și anizotrope, în stadiul elastic și postelastice, precum și calculul în domeniul dinamic. Sunt deduse rigiditățile modelelor echivalente și propune un procedeu de calcul biografic postelastice în teoria echivalențelor. În continuare se analizează posibilitățile de modelare a diaframelor prin teoria echivalențelor, precizia metodei și particularitățile de aplicare ale acesteia.

În vederea elaborării subrutinelor pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice, subrutine incluse în programele de calcul întocmite, în capitolul 4 sunt analizate procedeele de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice liniare și neliniare.

Capitolul 5 conține programele de calcul elaborate și care au la bază considerațiile teoretice prezentate în capitolele anterioare. Programele DIEMEP și DIASPA pentru calculul structurilor rigide cu diafragme prin metoda structurii continue echivalente. Programele BIOGRAF01 și 02 pentru calculul biografic al diaframelor de beton armat, utilizând metoda elementelor finite. Programul BIODIN01 pentru calculul dinamic neliniar în varianta biografică a diaframelor de beton armat. Programul METEQ pentru calculul static în domeniul elastic utilizând teoria echivalențelor. Programul CPCPI pentru calculul diaframelor supuse efectului contracției împiedecate prin procedeu substructurării. Programul BICAMPAT care realizează o analiză biografică postelastice a diaframelor de beton armat supuse efectului contracției împiedecate.

Performanțele programelor de calcul și valabilitatea considerațiilor teoretice pe baza cărora au fost elaborate sunt controlate prin intermediul aplicațiilor prezentate în capitolul 6, alături de rezultatele calculelor sunt elaborate sau prezentate încercări experimentale necesare validării acestora. Studiul comparativ se conduce pentru efectul contracției împiedecate și cel al încărcărilor exterioare, atât în domeniul elastic și postelastice, static și dinamic. Sunt prezentate, de asemenea, exemple de calcul care vizează exactitatea soluțiilor obținute prin metoda elementelor finite și teoria echivalențelor.

Principalele contribuții aduse de autor în lucrare sînt :

- sinteza ipotezelor de bază și a etapelor calculului structurilor rigide acționaste de încălziri orizontale;
- elaborarea algoritmilor și a programelor de calcul automat ale structurilor rigide - DIAPRAGH și DIASPA;
- prezentarea modelării comportării betonului armat în starea plană de tensiune în domeniul elastic și postelastice prin intermediul metodei elementelor finite;
- analiza criteriilor de rupere pentru betonul simplu solicitat biaxial;
- studiul modelării rugozității și dilatării fisurilor în ele antele plane din beton armat;
- prezentarea unei variante de modelare a interacțiunii dintre beton și armătură;
- formularea unui procedeu de analiză incrementală în domeniul postelastice prin metoda elementelor finite;
- elaborarea unui procedeu de analiză dinamică în domeniul neliniar prin metoda elementelor finite;
- dezvoltarea teoriei echivalențelor pentru elemente din beton armat;
- prezentarea modelelor de elemente echivalente și deducerea relațiilor pentru evaluarea rigidității acestora;
- alcătuirea matricelor de rigiditate pentru modelele echivalente rectangulare, triunghiulare, romboidale și trapezoidale;
- precizarea modalităților de aplicare ale teoriei echivalențelor;
- elaborarea unui procedeu de analiză postelastice prin teoria echivalențelor a elementelor din beton armat în stare plană de tensiuni;
- propunerea unui procedeu de calcul dinamic în domeniul elastic prin teoria echivalențelor;
- sistematizarea procedeelelor pentru rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare și neliniare;
- elaborarea programului de calcul biografic al elementelor plane din beton armat - BIOGRAF02;
- elaborarea programului de calcul biografic al plăcilor de beton armat supuse efectului contracției împiedecate - BIOALPAT;

- elaborarea programului de calcul dinamic neliniar - HICDINDI;
- elaborarea programului de calcul în domeniul elastic utilizând procedeele substructurării - CPCPI;
- elaborarea programului de calcul în domeniul elastic prin teoria echivalențelor - MPEM;
- analiza teoretică și experimentală a diafragmelor de beton armat supuse efectului contracției împiedecate;
- analiza teoretică și experimentală a buiandrugilor și diafragmelor din beton armat în domeniul postelastice.

x            x  
                  x

Conținutul tezei a făcut obiectul a 11 contracte de cercetare - proiectare. Cercetările experimentale au servit la elaborarea unor instrucțiuni de proiectare și execuție.

Programele de calcul automat au fost incluse în Biblioteca Națională de Programe și se utilizează în proiectare.

#### BIBLIOGRAFIE

\*\*\*\*\*

- 1/ Absi, E. - La théorie des equivalences, CRAS, Vol. 2704, Serie A, p.51 et p.402, Vol.271, Serie A, p.851, Vol. 273, Serie A, p.851, 1970-1971.
- 2/ Absi, E. - Théorie des Equivalences, Annales de l'ITSTP, Supplement au No.289, Janv. 1972.
- 3/ Absi, E. - La théorie des equivalences et son application a l'étude des ouvrages d'art, Annales de l'ITSTP., Paris, Oct. 1972.
- 4/ Absi, E.,-Prager, W. - A comparison of equivalence and finite element methods, Computer methods in Applied Mechanics and engineering, Vol.6, No.1, July 1975.
- 5/ Absi, E. - Theory of equivalences and its application in structural engineering design, Annales de l'ITSTP, No. 325, 1975.
- 6/ Absi, E. - Méthodes de calcul numérique en élasticité, Ed. Eyrelles, Paris, 1978.

- /7/ Agent, R. - Calculul diafragmelor cu goluri după metoda Albigez-Goulet este un calcul de cadru etajat 2, Rev. Construcțiilor și Mat. de Constr., nr.6, 1965.
- /8/ Agent, R., Postelnicu, T., Mager, V., Iarnar, E., - Calculul rigidităților diafragmelor pline și cu goluri la clădiri etajate, I.C. Lucurești, 1975.
- /9/ Agent, R., Radu, N. - Două exemple de utilizare a structurilor cu diafragme la clădiri etajate de tipuri neconvenționale, Construcții nr.3, 1961.
- /10/ Agent, R., Postelnicu, T. - Calculul structurilor cu diafragme din beton armat, I Elastic, Ed. Tehnică, București, 1962.
- /11/ Agrawal, A.B., Jaeger, L.G., Gupta A.A. - Response of R.C. shear wall under ground motions, E. O., Res.C.E., No. 312, Febr. 1981.
- /12/ Albigez, M., Goulet, I. - Contreventement des batiments, Annales de l'ITBFP, mai 1960.
- /13/ Anastasescu, D. - Unele aspecte ale interacțiunii dintre suprastructură, fundație și terenul de fundare la clădirile multietajate, A VII-a Conferință de Betonare, Iași, 1975.
- /14/ Anastasescu, D. - Calculul cadrelor spațiale de beton armat pe reazeme deplasabile, teza de doctorat, Timișoara, 1974.
- /15/ Avram, C., Păcoara, I., Pălimon, I., Virșu, C., Portea, I. - Concrete Strengths and Strains, Elsevier, New York, London, Amsterdam, 1982.
- /16/ Avram, C., Grăner, J., Mihăiescu, A., Prunskă, R., Rotaru, Gr., Stoian, V., Tudor, D. - Efectul contracției împiedecate la clădiri etajate cu diafragme din beton armat, Conferința a VII-a de Betonare, Iași, 1975.
- /17/ Avram, C., Bob, G., Marinov, R. - Studiu privind posibilitățile utilizării calculatoarelor numerice la determinarea stării de eforturi în ouvele centrelor nucleare - electrice, I.P. Timișoara, 1971.



- /18/ Avram, C., Anastasescu, D. - Structuri spațiale, Ed. Academiei R.S.R., București, 1978.
- /19/ Avram, C., Friedrich, R. - Grinzi pe etaj din beton armat, Construcții nr.2, 1979.
- /20/ Avram, C., Deutsch, I., - Proiectarea economică a elementelor de construcții din beton armat, Timișoara, Ed. Facla, 1979.
- /21/ Avram, C., Friedrich, R., Stoian, V. - Metode de discretizare în problema plană a teoriei elasticității, Memoriile Societății Științifice ale Academiei R.S.R., Seria IV, Tom II, 1979.
- /22/ Avram, C. - Méthodes et mécanique des structures, Volume hommage D. Sfintesco, Paris, CTICM, 1980.
- /23/ Avram, C., Firșu, C., Stoian, V. - Metode și programe de calcul neliniar în teoria echivalențelor, STIC 3, Sibiu, mai 1982.
- /24/ Avram, C., Bob, G., Friedrich, R., Stoian, V. - Structuri de beton armat. Metodele elementelor finite. Teoria echivalențelor, Ed. Academiei R. S. R., București (sub tipar).
- /25/ Basu, A.R. - Dynamic characteristics of coupled shear walls, I.S.D., aug. 1979.
- /26/ Bathe, K.J., Wilson, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1976.
- /27/ Bazant, Z.P., - Zeitschrift zu . Beton und Stahlbetonbau, 6/1979.
- /28/ Bazant, Z.P.,-Saknoshich, K.C., Jourdelis, A.C. - Analisi delle strutture in cemento armato mediante il metodo degli elementi finiti, Politecnica di Milano, 1978.
- /29/ Bazant, Z.P., Gambarova, P. - Rough Cracks in Reinforced Concrete, I.S.D., A.S.C.E., Vol. 106, No. ST4, april 1980.
- /30/ Bazant, Z.P., Tsubaki, T. - Slip - Dilatancy Model for Cracked Reinforced Concrete, I.S.D., Vol. 106, No. ST9, sept. 1980.

- 131/ Bazant, Z.P., Tsubaki, T., Belytschko, T.L. - Concrete Reinforcing : Safe Design, I.B.D., A.S.C.E., Vol.106, No.579, sept. 1980.
- 132/ Bazant, Z.P., Cedolin, L. - Fracture Mechanics of Reinforced Concrete, I.B.D., A.S.C.E., No. 126, dec. 1980.
- 133/ Bănuț, V. - Calculul neliniar al structurilor, Ed. Tehnică, București, 1981.
- 134/ Bărsan, G.M. - Dinamica și stabilitatea structurilor, Ed. Didactica și Pedagogică, București, 1979.
- 135/ Beech, I. - Contribution to the Analysis of Coupled Shear Walls, IACI, V. 59, No.8, 1962.
- 136/ Beleg, A., Mihaescu, S. - Calculul construcțiilor pe terenuri deformabile, Ed. Academiei R.S.R., București, 1977.
- 137/ Bia, C. - Metode de calcul a structurilor alcătuite din diafragma, I.P. Cluj-Napoca, 1976.
- 138/ Bob, C., Roșu, V., Jeleleanu, N. - Abordarea matricială a calculului în domeniul plastic al structurilor din beton armat, Buletinul Științ. și Tehn. al I.P.T., fasc.1, 1981.
- 139/ Bob, C. - Incercarea construcțiilor, I.P. Timișoara, 1981.
- 140/ Bob, C., Stoian, V. - Considerații privind calculul unor caracteristici dinamice ale structurilor din beton armat, Conferința a XI-a de Betoane Timișoara, 1982.
- 141/ Bob, C. - Calculul în domeniul plastic și implicațiile lui asupra dimensionării cadrelor de beton armat, Conferința a XI-a de Betoane Timișoara, 1982.
- 142/ Bota, V., Mihaescu, A., Friedrich, R., Stoian, V. - Calculul neliniar al diaframelor supuse la încălziri repetate, ASVICM, mai 1982.
- 143/ Brinzan, I., Barbuianu, N. - Calculul și alcătuirea structurilor etajate cu diafragma, Ed. Tehnică, București, 1976.
- 144/ Bota, V., Subiresanu, S., Stoian, V. - Studiul structurii de rezistență pentru viaductul experimental al "AGNIBUS 82", simpozion tehnico-științific al INTC., 1981.

- /45/ Căpățină, D. - Calculatorul în ajutorul proiectării construcțiilor, Ed. Tehnică București, 1976.
- /46/ Căpățină, D. - Stadiul actual al automatizării calculului structurilor, Rev. Construcții nr.6, 1973.
- /47/ Căpățină, D. - Aspecte ale răspunsului seismic la structuri din beton armat, teză de doctorat, I.C.B., 1981.
- /48/ Căpățină, D. - Evaluarea spațială a forțelor seismice, CHIC-3, Sibiu, mai 1982.
- /49/ Cedalin, L., Seilati, S., Kaprer, V.S. - Finite element analysis of reinforced concrete deep beams, Constr. in cemento armato, Vol. 14, 1977.
- /50/ Cedalin, L., Dei Poli, L. - Finite element studies of shear - critical R/C Beams, I.C.B., No. 243, June 1977.
- /51/ Cedalin, L., Crutzen, V.R.I., Dei Poli, L. - Triaxial stress - strain Relationship for concrete, I.C.B., No. E. 3, June 1977.
- /52/ Cedalin, L. - Nonlinear analysis of Reinforced Concrete plates and Planar Structures, General Report, IASS Symposium, Darmstadt, July, 1978.
- /53/ Cedalin, L., Bazant, M.P. - Effect of finite element choice in blunt crack band analysis, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 24 (1980).
- /54/ Carvenko, V. - Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels Under In - Plane Loads, Ph. D. Thesis, Dept. of Civil Eng., Univ. of Colorado, 1970.
- /55/ Carvenko, V. - Finite Element Model of reinforced Concrete structures with cracks, Stavebnik časopis, no.5, 1976.
- /56/ Ciomgradi, I., Lissir, I. - Utilizarea calculatoarelor la proiectarea structurilor, Inst. Pol. Iași, 1975.
- /57/ Clough, R.W., Penuska, R.S. - PEA Studies of Seismic Design Criteria for High - Rise Buildings, Report NEDTS 3, Washington, D.C. aug. 1966.
- /58/ Clough, R.W., Penzien, I. - Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, 1975.

- /59/ Cohn, M.G. - Nonlinear Design of concrete structures : problems and prospects, Univ. of Waterloo, Waterloo 1979.
- /60/ Constantinescu, D. - Effects of Creep in Slender Concrete Structures, University of London, King's College, 1976.
- /61/ Constantinescu, D., Postelnicu, P. - Rezistența și ductilitatea secțiunilor de diafragme de beton armat, Rev. Construcții nr.1, 1979.
- /62/ Căteanu, E., Marinov, R. - Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor, Ed. Facla Timișoara, 1980.
- /63/ Deutsch, I. - Contributions to the analysis of cracking in reinforced concrete members subjected to the bending and shear, commission "Effort Francais", Paris, 1971.
- /64/ Desai, Ch.S., Abel, I.P. - Introduction of the Finite Elements Method, Van Nostrand Reinhold Comp., New York, 1972.
- /65/ Dumitrescu, D., Constantinescu, D., Postelnicu, P. - Probleme de alcătuire și dimensionării construcțiilor de beton armat în zone seismice, Rev. Construcții nr.8, 1979.
- /66/ Dumitrescu, D., Postelnicu, P. - Precizări privind noțiunea de ductilitate a structurilor de beton armat în regiuni seismice, Rev. Construcții nr.1, 1979.
- /67/ Fenwick, R.C., - The Shear of RCB, Ph. D. Thesis, Cristolurca, 1966.
- /68/ Filimon, I., Mănescu, A., Grăner, I., Bob, C., Furdai, C., Roșu, C. - The measurement in laboratory and in situ of the shrinkage of concrete, Colloque Int. sur les essais in situ des structures en béton, Budapest, 1977.
- /69/ Mintel, R. - Handbook of Concrete engineering, Van Nostrand, 1974.
- /70/ Franchi, A., Cohn, M.G. - Computer analysis of elastic - plastic structures, M.Sc., Univ. of Waterloo, Waterloo 1979.
- /71/ Friedrich, R. - Bazele metodei elementelor finite, Inst. Pol. Timișoara, 1972.

- /172/ Friedrich, R. - Elemente finite dreptunghiulare pentru calculul gabelor, Bul. St. al I.P.T., Seria Constr., nr.1, 1973.
- /173/ Friedrich, R. - Contribuții la studiul grinzilor - pereți din beton armat, teză de doctorat, Sibiu, 1974.
- /174/ Friedrich, R. - Posibilități de utilizare a substructurilor finite, Bul. St., Tehn. al I.P.T., Seria Constr., nr.1, 1973.
- /175/ Friedrich, R. - Procedul grinzii înlocuitoare pentru calculul diafragmelor și cadrelor, Bul. St. și Teh. al I.P.T., Nr.2, 1970.
- /176/ Furdul, G., Mihăescu, A. - Comportarea balandrugilor din beton ușor la încălziri exterioare alternante, Sesiunea științifică jubiliară Iași, octombrie, 1981.
- /177/ Gornack, P.I. - Nonlinear finite element Analysis of shear and two dimensional reinforced concrete structures N.S. Report, Univ. of. Canterbury, Christchurch, New Zealand, febr. 1974.
- /178/ Gamberova, B. - Shear transfer by aggregate interlock in cracked reinforced concrete subject to repeated loads, studii rechere, Vol. 1, Milano, 1979.
- /179/ Gurusamy, B. - Discrete numerical methods in physics and engineering, Academic Press, San Francisco, 1974.
- /180/ Gorbănescu, M. - Grinzi pereți cu rigiditate variabilă, teză de doctorat, Cluj-Napoca, 1981.
- /181/ Gruner, T., Mirșu, O., Mihăescu, A., ș.a. - Efectul contracției asupra structurilor cu diafragme din beton armat, Rev. Construcții nr.12, 1978.
- /182/ Iangan, S., Crainic, L. - Concepte și metode energetice în dinamica construcțiilor, Ed. Acad. R.S.R., București, 1980.
- /183/ Kolnberg, A. - Minimum reinforcement for limiting the width of cracks in walls., PIP Notes 66, ian., febr., 1977.
- /184/ Kolnberg, A. - Minimalbewehrung für Rissbreitenbewehrung in Wänden

- /185/ Solso, G.L. - Free Vibration Analysis Using Substructuring, I.S.D., A.S.C.E., No. ST-12, 1975.
- /186/ Serak, P. - The Methods of Finite Element and its Importance for Static Solutions, of Eng. Constr.
- /187/ Zenkoff, A. - Solutions of problems of elasticity by the framework method, I. Appl. Mech., 8, 1941.
- /188/ Zienkiewicz, R.W. - The Finite Element Method for Engineers, J. Wiley & Sons, New York, 1974.
- /189/ Hughes, P.I.R. - Some current Trends in Finite Element Research, Appl. Mech. Rev. no. 11, 1980.
- /190/ Ibrin, M., Dobrescu, A. - Aplicații în analiza dinamică a structurilor și ingineriei seismice, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974.
- /191/ Ibrin, M. - Analiza dinamică a structurilor și ingineriei seismice, Ed. Did. și Pedag. București, 1973.
- /192/ Iile, V., Gorbănescu, D. - Metodă de calcul prin echivalență în rezolvarea problemelor plane ale teoriei elasticității, Ses. St. Jub. a I.P. Cluj-Napoca, oct. 1978.
- /193/ Iile, V., Gorbănescu, D. - Aspecte ale stării de tensiuni în grinzi pereți pline și cu goluri, Ses. St. Jub. a I.P. Cluj-Napoca, oct., 1978.
- /194/ Irons, B.M. - A Frontal Solution Program for FEA, Intern. J. for Numerical Meth. in Eng., Vol.2, 1970.
- /195/ Irons, B.M. & Ahmad, S. - Techniques of Finite Elements, J. Wiley & Sons, New York, 1980.
- /196/ Ivan, M. - Statica construcțiilor, I.P. Timișoara, 1976.
- /197/ Karpenko, M.I. - Teorijs defornirovanija zalesebetona s trescinami, Strojidat, Moskva, 1976.
- /198/ Keintzel, E. - Metode simplificate pentru calculul construcțiilor multietajate, Ed. Tehnică București, 1969.
- /199/ Kumarapillai, K.N., Coull, A. - Elastoplastic Analysis of Coupled Shear Walls, I.S.D., 9, 1976.
- /200/ Lachance, L. - Stress distribution in R.C. sections subjected to biaxial loading, I.A.C.I., martie-apr.1980.

- /101/ Link, T. - Eine Formulierung des axialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die Wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H. 270, Berlin, 1976.
- /102/ Livesley, R.K. - Matrix methods of Structural Analysis, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- /103/ Loria, U.I.A. - Contribuții la calculul structurilor masive din beton cu metoda elementelor finite și teoria echivalențelor, teză de doctorat, Iași, 1982.
- /104/ Maniu, S., Bartero, V.V. - Nonlinear seismic response of Complex Shear Wall Systems, I.S.E., 9, 1976.
- /105/ Marinov, R. - Considerații privind rigiditatea la înnoviere a nucleelor din beton armat pentru clădiri înalte, Rev. Construcții, nr.11, 1973.
- /106/ Mazonet, Ch. ș.a. - Calculul structurilor la calculatoarele electronice, Ed. Tehnică, București, 1974.
- /107/ Mateescu, D., Anastasescu, D., Cădeanu, L. - Calculul timpinelor rigide cu un șir de goluri, Rev. Constr. și Mut. de Constr., nr.2, 1962.
- /108/ Basila, P., Sandi, M. - Dinamica construcțiilor. Secțiunea IX din S.C.C., Ed. Tehnică, București, 1977.
- /109/ Menditto, G., Donida, G.L., Pasconi, G.I. - Analisi delle pareti forate di irrigidimento con il metodo degli elementi finiti, Parte I - II - III, I.S.I.C., Pol. di Milano, Publ. No.650, 1974.
- /110/ Mihăescu, A., Mirga, O., Grăner, I., Rotaru, Gr., Tudor, D., Stoian, V., Buchman, I. - Studiul efortului contracției împiedecate la diafragme din beton armat monolit, Bul. St. și Teh. al I.P.T., nr.10, 1977.
- /111/ Mihăescu, A., Stoian, V. - Program de calcul automat a structurilor rigide acționante de încălziri orizontale, SUC-3, noi 1982.
- /112/ Mihăescu, A., Friedrich, H., Stoian, V. - Calculul post-elastic al buclărilor, Conferința a XI-a de Re-

tomso, Muzigora, octombrie 1982.

- /113/ Hirşu, O., Vas, L. - Metodă de calcul a diafragelor la acţiuni seismice, rev. Constr. şi Int. de Constr., nr.6, 1963.
- /114/ Hirşu, O., Friedrich, R. - Construcţii industriale speciale din beton armat, Ed. Hid. şi Ped., Bucureşti, 1975.
- /115/ Hirşu, O., Friedrich, R. - Construcţii din beton armat, Ed. Hid. şi Ped. Bucureşti, 1980.
- /116/ Busicheocă, D., Căpăţină, D., Cornea, T. - ANIMATES un nou program de calcul inelastic, Construcţii 2, 1978.
- /117/ Munteanu, I. - Calculul structurilor spaţiale în formulare matricială, Ed. Paola, 1973.
- /118/ Munteanu, I. - Calculul static al structurilor, Ed. Paola, Muzigora, 1976.
- /119/ Negoită, A., Anastasescu, D., Brinsan, I., Marcu, I. - Unele observaţii privind comportarea la cutremure a structurilor multietajate în diafragm, Construcţii nr.11, 1978.
- /120/ Negoită, A. ş.a. - Indrumător pentru proiectarea antisismică a construcţiilor, Iaşi 1980.
- /121/ Negoită, A. ş.a. - Indrumător pentru calculul construcţiilor în zone seismice, I.P. Iaşi, 1979.
- /122/ Ngo, D.H., Scordelis, A.C. - Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, T.A.C.I. nr.3, 1967.
- /123/ Nilsson, L. - Nonlinear Static and dynamic analysis of reinforced concrete plates subjected to in plane loads, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg, 1975.
- /124/ Olteanu, N., Firvu, E. - Metode de discretizare a conţinutului în vederea rezolvării diferitelor probleme de mecanică, Vol.II şi III, IIR, Bucureşti, 1972.
- /125/ Onu, G. - Calculul diafragmelor cu buclenţi subţiri prin metoda ele antelor finite. St. Cerc. Mec. Apl. nr.6, 1977.



- /126/ Otter, T.S. - Comparison for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation, *Nuclear Structural Engineering*, 1, 1975.
- /127/ Park, R., Paulay, T. - Reinforced Concrete Structures, John Wiley, New York, 1975.
- /128/ Paulay, T. - An elasto-plastic analysis of coupled shear-walls, *ACI Journal*, Vol. 67, 1970.
- /129/ Paulay, T. - The design of reinforced concrete ductile shear walls for earthquake resistance, Univ. of Canterbury Christchurch, febr. 1981.
- /130/ Petcu, V. - Calculul structurilor de beton armat în domeniul plastic, Ed. Tehnică, București, 1972.
- /131/ Petersson, M. - Analysis of loadbearing walls in multi-storey buildings, Chalmers Univ. of Technology, Diss. no. 144, Göttingen, 1974.
- /132/ Petrescu, M., Kierholm, G. - Analysis of Deformed Shear Walls Structures, Bearing Walls - C.I.B. Working Commission W 23 A, Institut für Massivbau, Technische Hochschule Darmstadt, 1974.
- /133/ Popovici, A. - Calculul structurilor hidrotehnice - analiza dinamică prin metode numerice, I.C. București, 1978.
- /134/ Postelnicu, T. - Contribuții la proiectarea antisismică a structurilor cu diafragme de beton armat, I.C. București, teză de doctorat, 1980.
- /135/ Ponișcu, R. - Ingineria seismică a marilor baraje, Ed. Acad. R.S.R., București, 1980.
- /136/ Przemieniecki, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1968.
- /137/ Rondreux, I. - Application de la théorie des équivalences au calcul de pièces de mécanique, Thèse de docteur - ingénieur, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.
- /138/ Rosander, G. - Om förtärliggen Sparvings - Dehnungs - Verhalten von Beton, Beton und Stahlbetonbau 9/1976.

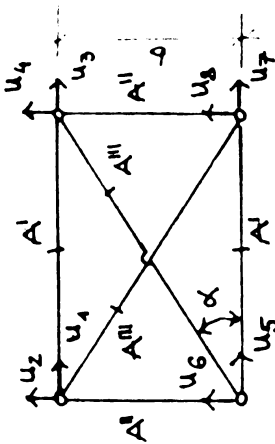
- /139/ Ellesh, H.,-Jungwirth, D., - Stahlbeton, Spannbeton, Werner Verlag, 1975.
- /140/ Seidi, H., Sosen, M.A. - Simple nonlinear seismic analysis of R.C. structures, I.S.D., Vol. 107, No. ST3, mai 1981.
- /141/ Salameh, S. - Theorie des equivalences et methode des elements finis, These de docteur - ingénieur, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 1975.
- /142/ Salvadari, M.G., Baren, M.L. - Metode numerice în tehnică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1976.
- /143/ Sandi, H. - Metode matric ale în mecanica structurilor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1975.
- /144/ Santhakumar, R. - Ductility of Coupled Shear Walls, Univ. of Canterbury Christchurch, New Zealand, 1974.
- /145/ Sagarini, L.I. - Applied Finite Element Analysis, I. Wiley & Sons, New York, 1976.
- /146/ Shian Le- Chung, Yang, H.T.Y. - Elastic Plastic Seismic Response of Chimney, I.S.D., A.S.C.E., Vol. 106, No. ST-4, april, 1980.
- /147/ Stoian, V. - Utilizarea metodei elementelor finite la calculul structurilor cu diafragme, referat documentar, I.P. Timişoara, 1975.
- /148/ Stoian, V. - Utilizarea calculatorului electronic la calculul structurilor, referat documentar, I.P. Timişoara, 1976.
- /149/ Stoian, V. - Comportarea betonului la solicitări maxiale, referat documentar, I.P. Timişoara, 1976.
- /150/ Stoian, V. - Utilizarea teoriei echivalenţelor la calculul structurilor cu elemente plane, Bul. St. şi Teh. al I.P. Timişoara, seria Construcţii, Tom 23(37), f.2, 1978.
- /151/ Stoian, V.,-Friedrich, R., Bota, V., Partunescu, A. - Metodă şi program de calcul biografic al diaframelor din beton armat, SHIC-2, nov. 1980.

- /152/ Stoian, V., Friedrich, R., Purtunescu, A. - Program pentru calculul biografic neliniar al diafragmelor de beton armat - BIOGRAFO2, I.P. Timișoara, 1981, contract nr.213/81.
- /153/ Stoian, V., Friedrich, R., Purtunescu, A. - Manual de utilizare a programului BIOGRAFO2, I.P. Timișoara, 1981.
- /154/ Stoian, V., Friedrich, R. - Program pentru calculul biografic al diafragmelor de beton armat - BIOGRAFO1, contract nr.105/1981, I.P. Timișoara.
- /155/ Stoian, V., Friedrich, R., Purtunescu, A. - Program de calcul dinamic neliniar al diafragmelor de beton armat BIODINO1, I.P. Timișoara, 1982.
- /156/ Stoian, V., Debeleanu, A., Iakab, V. - Calculul structurilor cu diafragme de beton armat cu ajutorul calculatoarelor electronice, Bul. I.P.T. nr.2/1980.
- /157/ Stoian, V. - DIAFHAGE - program pentru calculul eforturilor secționale în diafragmele unei structuri rigide acționate de încălziri orizontale, Construcții din Beton armat, Ed. Did. și Ped., București, 1980.
- /158/ Tereța I. - Betonul precomprimat, Ed. Did. și Ped., București, 1982.
- /159/ Terten, I., Onuț, T., Douran, M., Păcuraru, V. - Proiectarea betonului armat, Ed. Did. și Ped. București, 1977.
- /160/ Titaru, E., Ciugăni, A. - Calculul dinamic și spațial al construcțiilor la cutremur și la alte acțiuni laterale, Rev. Constr. și a Mat. de Constr. nr. 12, 1979.
- /161/ Titaru, E. - Considerente privind problemele actuale în proiectarea antisismică asistată de calculatoarele electronice, SMC-1, Sibiu, 1979.
- /162/ Wang, P.C. - Metode numerice și matriciale în mecanica construcțiilor, Ed. Tehnică București, 1970.
- /163/ Wilson, E.L., Bath, K.J., Doherty, W.P. - Direct solution of large systems of linear equations, Computers & Structures, Vol. 4, 1974.

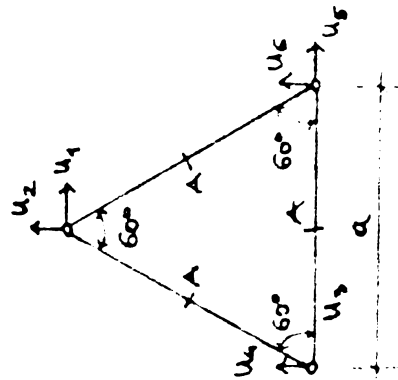
- /164/ Winckur, A., Gluck, I. - Ultimate Strength Analysis of Coupled Shear Walls, ACI Journal, 12, 1968.
- /165/ Whitman, I.R. (ed.) - The Mathematics of Finite Elements and Applications, Academic Press, New York, 1973.
- /166/ Whitman, I.R. (ed.) - Mathematics of Finite Elements and Applications II, NAPELAP 1975, Academic Press, London, 1977.
- /167/ Wilson, E.L., Batho, K.I., Peterson, F.E., SAP IV - A Structural analysis program for static and dynamic response of linear systems, Univ. of California, Berkeley, 1973.
- /168/ Zaleski - Zamenhof, L.C. - Methode du maillage orthogonal, Annales de l'ITHP, No. 331, sept. 1975.
- /169/ Zienkiewicz, O.C. - Finite Elements - The Background Story - NAPELAPI, Academic Press, 1973.
- /170/ Zienkiewicz, O.C. - The Finite Element Method, McGraw Hill Book, Comp. London, 1977.
- /171/ Zimmer, A., Geth, P. - Elementenmethode der Elastostatik Programmierung und Anwendung, Oldenburg V, München, 1970.
- /172/ x x x - Bearing Walls, CIB Working Commission W 23 A Meeting in Darmstadt, 1974.
- /173/ x x x - CSCE - ASCE - ACI - CEB - International Symposium: Nonlinear Design of Concrete Structures, Univ. of Waterloo, Ontario 1979.
- /174/ x x x - International Conference on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Ceito, Newey, 1977.
- /175/ x x x - Théorie des equivalences, Application au Génie Civil, Paris, CEZTP, 1975.
- /176/ x x x - Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato, Studi e ricerche, no.1, Vol. de Milano, 1979.
- /177/ x x x - Inelasticity and Non - Linearity in Structural Concrete, Univ. of Waterloo, 1972.

- /178/ x x x - Instrucțiuni tehnice pentru proiectarea construcțiilor cu diafragme de beton, P.85-82.
- /179/ x x x - Normativ pentru proiectarea antisismică a construcțiilor de locuințe, Doc. Met. Agrossect. și Ind. - P. 100-81.
- /180/ x x x - Indicații provizorii pentru proiectarea structurilor cu diafragme din beton armat la clădiri etajate, Proiect CHEAL - ISART + ICB, nr. PT 916 - 91, oct. 1971.
- /181/ x x x - ISART - ICB, Instrucțiuni tehnice pentru proiectarea construcțiilor cu structură din diafragme de beton, red. II, Proiect ISART nr. N-66-1-1972.
- /182/ x x x - Instrucțiuni tehnice pentru proiectarea construcțiilor cu structură din diafragme de beton, ICCPDC - IPCT, pr.v. 7010, București, 1978.
- /183/ x x x - Sciences experimentales et informatiques. Applications au génie civil, C.E.B.T.P., Paris, 1975.
- /184/ x x x - Théorie des Equivalences, Application au génie civil, C.E.B.T.P., Paris, 1978.
- /185/ x x x - Proceedings of the Seventh World Conference on Earthquake engineering, Sept. 1980, Istanbul, Turkey.
- /186/ x x x - Studia actual asupra comportării structurilor din diafragme de beton armat monolit la încălziri laterale alternante - Contract 877/1981, benef. ICC DC.
- /187/ x x x - Cercetări privind influența procentului de armare asupra comportării la fisurare a diaframelor de beton armat, datorită contracției, Contract 1360/1971, benef. CFCP.
- /188/ x x x - Efectul contracției asupra comportării diaframelor cu coluri, din beton armat, Contract 4/1976, benef. CFCP.
- /189/ x x x - Cercetări privind fundamentarea instrucțiunilor tehnice pentru proiectarea structurilor cu diafragme de beton armat monolit cu considerarea efectului contracției, Contract 23/1977, benef. CFCP.

- /190/ x x x - Programe pentru proiectarea elementelor plane (plăci, diafragme) din beton armat Etapa I, Contract 105/1981, Benef. ICCPDC - IPCT.**
- /191/ x x x - Programe pentru proiectarea elementelor plane (plăci, diafragme) din beton armat, Etapa II, Contr. 213/1981, benef. ICCPDC - IPCT.**
- /192/ x x x - Dezvoltarea programelor pentru proiectarea elementelor plane din beton armat, Etapa I, Contract 79/1982, benef. ICCPDC - IPCT.**
- /193/ x x x - Dezvoltarea programelor pentru proiectarea elementelor plane din beton armat, Etapa II, Contract 179/1982, benef. ICCPDC - IPCT.**
- /194/ x x x - Aplicarea tehnicii moderne de calcul și perfecționarea metodelor de calcul ale construcțiilor, Contr. 10127/1977, benef. ICCPDC.**
- /195/ x x x - Calculul automat al structurilor de construcții, Contract 326/1979, benef. IPCT.**
- /196/ x x x - Studiul structurii de rezistență pentru viaductul experimental al MAGNIEUS-02, Contract 87/1980, benef. IPTe.**



$$\begin{aligned}
 S &= \sin \alpha \\
 C &= \cos \alpha \\
 \rho^I &= EA/a \\
 \rho^{II} &= EA/b \\
 \rho^{III} &= EA \frac{a}{b}
 \end{aligned}$$



$$\rho = EAa$$

Multiplicator  $\frac{1}{a^2}$

1	$\rho^I + \rho^{III} c^4$								
2	$-\rho^{III} s c^3$	$\rho^{II} c^2 + \rho^{III} s^2 c^2$							
3	$-\rho^I$	0	$\rho^I + \rho^{III} c^4$						
4	0	0	$\rho^{III} s c^3$	$\rho^{II} c^2 + \rho^{III} s^2 c^2$					
5	0	0	$-\rho^{III} c^4$	$-\rho^{III} s c^3$	$\rho^I + \rho^{III} c^4$				
6	0	$-\frac{11c^2}{\rho^2}$	$-\rho^{III} s c^3$	$-\rho^{III} s^2 c^2$	$\rho^{III} s c^3$	$\rho^{II} c^2 + \rho^{III} s^2 c^2$			
7	$-\rho^{III} c^4$	$\rho^{III} s c^3$	0	0	$-\rho^I$	0	$\rho^I + \rho^{III} c^4$		
8	$\rho^{III} s c^3$	$-\rho^{III} s^2 c^2$	0	$-\rho^{III} c^4$	0	0	$-\rho^{III} s c^3$	$\rho^{II} c^2 + \rho^{III} s^2 c^2$	

SIM.

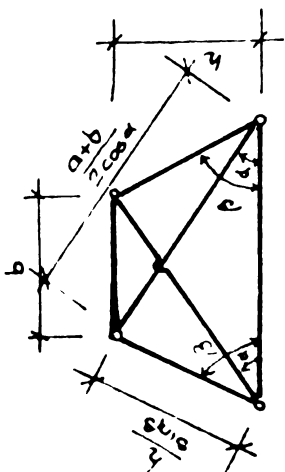
Multiplicator  $\frac{\rho}{4a^2}$

1	2								
2	0	6							
3	-1	$-\sqrt{3}$	5						
4	$-\sqrt{3}$	-3	$\sqrt{3}$	3					
5	-1	$\sqrt{3}$	-4	0	5				
6	$\sqrt{3}$	-3	0	0	$-\sqrt{3}$	3			

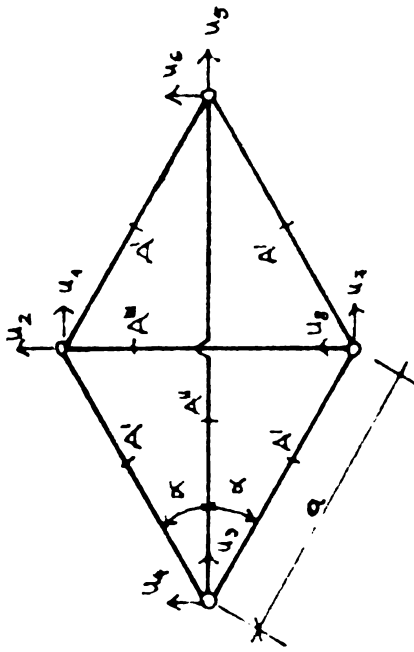
SIM.







$$\begin{aligned}
 S_A &= \sin \alpha \\
 C_A &= \cos \alpha \\
 S_B &= \sin \beta \\
 C_B &= \cos \beta \\
 p^I &= EA' b \\
 p^II &= EA' a \\
 p^III &= EA'' \frac{h}{a+b} \sin \beta \\
 p^IV &= EA'' \frac{h}{a+b} \cos \alpha
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 S &= \sin \alpha \\
 C &= \cos \alpha \\
 p^I &= EA' a \\
 p^II &= EA'' 2ac \\
 p^III &= EA'' 2as
 \end{aligned}$$

SIM.

1	$\frac{p^I}{4} + \frac{p^II}{4} + \frac{p^III}{4} + \frac{p^IV}{4}$								
2	$\frac{p^I}{4} C_A S_B + \frac{p^II}{4} C_B S_A + \frac{p^III}{4} C_A S_B + \frac{p^IV}{4} C_B S_A$	$\frac{p^I}{4} S_B + \frac{p^II}{4} S_A$	$\frac{p^III}{4} S_B + \frac{p^IV}{4} S_A$						
3	$-\frac{p^I}{4} S_B + \frac{p^II}{4} S_A$	$-\frac{p^III}{4} S_B + \frac{p^IV}{4} S_A$							
4	$-\frac{p^I}{4} S_B + \frac{p^II}{4} S_A$	$-\frac{p^III}{4} S_B + \frac{p^IV}{4} S_A$							
5	$-\frac{p^I}{4} S_B + \frac{p^II}{4} S_A$	$-\frac{p^III}{4} S_B + \frac{p^IV}{4} S_A$							
6	$-\frac{p^I}{4} S_B + \frac{p^II}{4} S_A$	$-\frac{p^III}{4} S_B + \frac{p^IV}{4} S_A$							
7	$-\frac{p^I}{4} S_B + \frac{p^II}{4} S_A$	$-\frac{p^III}{4} S_B + \frac{p^IV}{4} S_A$							
8	$\frac{p^I}{4} S_B + \frac{p^II}{4} S_A$	$\frac{p^III}{4} S_B + \frac{p^IV}{4} S_A$							

SIM.

Multiplicator  $\frac{1}{4}$

1	$2p^I C^2$								
2	0	$2p^I S^2 + \frac{p^III}{4 S^2}$							
3	$-p^I C^2$	$-p^I C S$	$2p^I C^2 + \frac{p^III}{4 C^2}$						
4	$-p^I S C$	$-p^I S^2$	0	$2p^I S^2$					
5	$-p^I C^2$	$p^I S C$	$-\frac{p^III}{4 C^2}$	0	$2p^I C^2 + \frac{p^III}{4 C^2}$				
6	$p^I S C$	$-p^I S^2$	0	0	0	$2p^I S^2$			
7	0	0	$-p^I C^2$	$p^I S C$	$-p^I C^2$	$-p^I S C$	$2p^I C^2$		
8	0	$-\frac{p^III}{4 S^2}$	$p^I S C$	$-p^I S^2$	$-p^I S C$	$-p^I S^2$	0	$2p^I S^2 + \frac{p^III}{4 S^2}$	