

INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA"
FACULTATEA DE CONSTRUCTII
CATEDRA DE BETON ARMAT SI CLADIRI

Ing. Juan Alfonso LORIA URIBE

CONTRIBUTII LA CALCULUL STRUCTURILOR
MASIVE DIN BETON CU METODA ELEMENTELOR
FINITE SI TEORIA ECHIVALENTILOR.

TEZA DE DOCTORAT

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

CONDUCATOR ȘTIINȚIFIC
PROF. EMIL ING. Costantin AVRAM
M.C. AL ACADEMIEI R.S.R.

TIMIȘOARA 1962

INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIȘOARA	
BIBLIOTECA	
CENTRALĂ	
Volume Nr.	554560
Dulap	332 III. H

DEDICATORIA

Esta tesis la quiero dedicar a la memoria de esa gran mujer que para mí fue mi abuela la Profa. María Lucila Sabido B. vda. de U. (q. e. p. d.) quien con tanto cariño, trabajos y sacrificios me ayudó en mi realización como profesional y como hombre.

Igualmente dedico esta tesis a mi querida madre la Sra. Elda María Uribe de Loria, quien con mucho esfuerzo, abnegación y amor me ha ayudado para llegar a esta meta propuesta, a quien le debo todo lo que ahora soy y a quien quiero mucho.

Quisiera igualmente agradecerles con todo mi corazón a mi asesor científico el Sr. prof. emérito ing. Constantin Avram y a su esposa Sra. Emilia Avram, por tantas amabilidades que han tenido conmigo, por los consejos, la estima y el cariño que me han ofrecido.

Con mucho cariño para todos ellos.

Alfonsu
C.

Timișoara iunie 1982
R. S. România.

TABLA DE MATERII

Cap. I. INTRODUCERE

1.1. Generalități.	1
1.2. Metoda Elementelor Finite.	3
1.2.1. Descrierea generală a metodei	7
a.) discretizarea structurii	
b.) alegerea tipului de elemente finite	
c.) alcătuirea matricii de rigiditate sau flexibilitate a elementului finit	
d.) asamblarea	
e.) rezolvarea sistemului de ecuații	
f.) calcule auxiliare	
1.2.2. Tipuri de elemente finite	9
1.2.2.1. Caracteristici geometrice	10
1.2.2.2. Caracteristici fizice	13
1.2.2.3. Caracteristică topologică	
1.2.2.4. Caracteristică cinematică	
1.2.2.5. Caracteristicile de inerție	
1.2.3. Elemente de bară	14
1.2.4. Elemente finite triunghiulare pentru problema plană de elasticitate	15
1.2.4.1. Derivarea matricii de rigiditate a elementului triunghiular	16
I. Alegerea sistemului de coordonate și numerotarea nodurilor	16
II. Alegerea funcției de deplasare $f(x,y)$ care definește deplasarea (x,y) în fiecare punct al elementului	18
III. Expresiile stărilor de deformății (x,y) în orice punct din element, în termenii deplasărilor nodale	18
IV. Relațiile dintre deformațiile specifice (x,y) în orice punct din element, deplasările (x,y) și deplasările nodale	21

V. Relații între eforturile unitare cu deformațiile specifice (x, y) și deplasările nodale e	22
VI. Înlocuirea tensiunilor interne (x, y) cu forțe nodale echivalente F^e , relații între forțele nodale și deplasările e și obținerea elementelor matricii de rigiditate K^e .	24
VII. Stabilirea matricii tensiuni-deplasări H	25
1.2.5. Elementul finit dreptunghiular pentru problema plană de elasticitate	26
1.2.5.1. Derivarea matricii de rigiditate a elementului dreptunghiular	26
I. Alegerea sistemului de coordonate și numerotarea nodurilor	26
II. Alegerea funcției de deplasări $f(x, y)$ care definește deplasarea (x, y) în fiecare punct al elementului.	28
III. Expresiile stărilor de deformații (x, y) în orice punct din element, în termenii deplasărilor nodale e	31
IV. Relațiile dintre deformațiile specifice (x, y) în orice punct din element, deplasările (x, y) și deplasările nodale e	31
V. Stabilirea relațiilor între tensiunile interne (x, y) , deformațiile (x, y) și deplasările nodale e	33
VI. Înlocuirea tensiunilor interne (x, y) cu forțele nodale, deplasările nodale e și obținerea matricii de rigiditate K^e a elementului	34
VII. Stabilirea matricii tensiuni-deplasări H	35

1.2.6. Elemente masive	37
1.2.6.1. Tetraedrul	38
a.) Tetraedrul liniar	
b.) Tetraedrul patratic	
c.) Tetraedrul cubic	
1.2.6.2. Paralelipipedul	40
1.2.6.3. Prisma triunghiulară	42
1.2.7. Elemente izoparametrice	43
1.2.8. Simetria axială	48
1.2.8.1. Solide de revoluție	49
I. Alegerea sistemului de coordonate și numerotarea nodurilor	50
II. Alegerea funcției de deplasări $f(r,z)$ ce definește deplasarea (r,z) în fiecare punct din element	50
III. Exprimarea stării deplasării în element (r,z) în funcție de deplasările nodale e	51
IV. Stabilirea relației între deformațiile specifice (r,z) în orice punct din element, deplasări (r,z) și apar deplasările nodale e	52
V. Relații între tensiunile interne (r,z) , deformațiile și deplasările nodale	54
VI. Înlocuirea tensiunilor interne (r,z) cu forțele nodale statice echivalente F^e , stabilirea relațiilor între forțele nodale, deplasările e , iar apoi obținerea matricii de rigiditate a elementului	55
VII. Stabilirea matricii tensiuni-deplasări H	56
1.3. Teoria echivalențelor	56
1.3.1. Energia de deformație elastică	59
1.3.1.1. Probleme de tensiune plană	62

1.3.1.2. Probleme de deformație plană	62
a.) bare articulate	
b.) bare încovoiate	
c.) bare supuse la torsiune	
1.3.2. Starea plană de deformație	64
1.3.2.1. Modelul dreptunghiular	64
1.3.2.2. Modelul romboidal	67
1.3.2.3. Modelul triunghiular	70
1.3.2.4. Modelul pătrat	70
1.3.2.5. Modelul trapezoidal	71
1.3.3. Starea plană de tensiune	71
1.3.3.1. Modelul dreptunghiular	72
1.3.3.2. Modelul romboidal	72
1.3.3.3. Modelul pătrat	73
1.3.4. Elasticitate tridimensională	73
1.3.4.1. Modelul paralelipipedic	73
1.3.4.2. Modelul cubic	74
1.4. Subiectul tezei de doctorat	74
1.4.1. Structuri masive lungi	74
1.4.2. Alte structuri masive	75
Cap. II. PROBLEME PLANE DE DEFORMAȚII	
2.1. Generalități	
2.1.1. Problema elasticității spațiale	78
2.1.2. Problema elasticității plane	79
2.1.2.1. Starea plană de tensiune	79
2.1.2.2. Starea plană de deformație	81
2.2. Fundații	
2.2.1. Generalități	84
2.2.2. Clasificarea fundațiilor	84
2.2.3. Fundații continue sub ziduri	85
2.2.4. Fundație continuă din beton simplu sub un zid de cărămidă	86
2.2.4.1. Problema propusă	86
2.2.4.2. Soluții cu metoda elementelor finite	88
a.) FUCOMEF 1	
b.) FUCOMEF 2	
2.2.4.3. Soluția cu tecria echivalențelor	95

2.2.5. Fundație continuă și masivul de pământ	105
2.2.5.1. Problema propusă	106
2.2.5.2. Soluții cu metoda elementelor finite	106
a.) FUCO-IZO	
b.) FUCOMATI	
2.2.5.3. Soluția cu teoria echivalențelor	108
2.3. Ziduri de sprijin	
2.3.1. Generalități	117
2.3.2. Problema propusă	119
2.3.2.1. Soluția cu metoda elementelor finite	122
2.3.2.2. Soluția cu teoria echivalențelor	122
2.3.3. Zid de sprijin și zona de alunecare	129
2.3.3.1. Generalități	129
2.3.3.2. Stabilitatea zidului de sprijin luând și pământul înconjurător	129
2.3.3.3. Problema propusă	133
2.3.3.4. Soluția cu metoda elementelor finite	133
2.3.3.5. Soluția cu teoria echivalențelor	151
Cap. III. PROBLEME SPAȚIALE	
3.1. Generalități	153
3.2. Fundație izolată sub stâlpi din beton armat	153
3.2.1. Fundații cu bloc de beton simplu și cuzinet de beton armat	153
3.2.2.1. Alcătuirea generală	153
3.2.1.2. Dimensionarea blocului de beton simplu	154
3.2.2. Problema propusă	154
3.2.3. Soluția cu metoda elementelor finite	154
3.2.4. Soluția cu teoria echivalențelor	157
3.3. Cilindru din beton simplu	164
3.3.1. Generalități	164
3.3.2. Starea de eforturi axial simetric	165
3.3.3. Ipoteze propuse	172
3.3.4. Ipoteza nr.1	172
3.3.4.1. Soluții cu metoda elementelor finite	172

a.) Programul CIMEFAS 1	177
b.) Programul CIMEFAS 2	182
c.) Programul CIMEFVO	182
3.3.4.2. Soluția cu teoria echivalențelor	187
3.3.5. Ipoteza a doua	187
a.) Programul CIMEFAFV	
3.3.6. Incercări de laborator	195
3.3.6.1. Generalități	195
3.3.6.2. Incercarea epruvetelor	195
a.) Cilindru nr.0	195
b.) Cilindru nr.1	196
c.) Cilindru nr.2	197
Cap. IV. ANALIZA REZULTATELOR SI COMPARATIE INTRE CELE DOUA METODE DE CALCUL.	
4.1. Generalități	198
4.2. Rezolvarea problemei	198
4.2.1. Aspecte legate de scrierea și rezolvarea sistemului	198
4.2.1.1. Determinarea matricii de rigidita- te	199
4.2.1.2. Numărul necunoscutelor	199
4.2.1.3. Incercări nodale	199
4.2.1.4. Timpul execuției	199
4.2.2. Aspecte legate de interpretarea rezultate- lor	199
4.3. Analiza rezultatelor	200
4.3.1. Comparații între două variante ale metodei elementelor finite	200
4.3.2. Comparații între metoda elementelor finite și teoria echivalențelor	200
4.4. Fundație continuă sub un zid de cărămidă	201
4.5. Fundație continuă și masivul de pământ	208
4.6. Zid de sprijin	215
4.7. Zid de sprijin și zona de alunecare	218
4.8. Fundație izolată	222
4.9. Cilindru din beton simplu	230
Cap. V. CONCLUZII	244
5.1. Introducere	244
5.2. Probleme plane de deformație	244

5.3. Probleme spațiale	245
5.4. Concluzii generale	245
5.5. Contribuții personale	246
BIBLIOGRAFIE.	247

ANEXA: 17 programe de calcul (volum separat)

Capitolul 1

INTRODUCERE

1.1. Generalități. Omul construiește încă din neolitic; multe milenii însă, pînă în secolele XVII - XVIII, proiectarea construcțiilor s-a făcut fără calcul, pe baza regulilor empirice, a aplicării intuitive a legilor mecanicii și a gîndirii creatoare. Dezvoltarea teoriei elasticității și a rezistenței materialelor au permis ca în primele decenii ale secolului XIX să se treacă la calculul structurilor de rezistență ale construcțiilor pe baza metodei rezistențelor admisibile ; în ultimele actuale decenii, în urma acumulării unui mare volum de cunoștințe teoretice și experimentale, metoda de calcul a rezistențelor admisibile a fost înlocuită cu metoda la rupere și apoi cu metoda semiprobabilistă la stări limită, trecîndu-se de la conceptul determinist de calcul la conceptul probabilist.

Proiectarea unei structuri de rezistență înseamnă alegerea tipului de structură și a materialului, potrivite scopului propus, determinarea acțiunilor (directe, adică încărcări și indirecte, adică deformații impuse) care solicită structura, calculul eforturilor secționale (M, N, Q, M_t) sau al eforturilor unitare (σ, τ) și al deplasărilor în secțiunile sau punctele caracteristice ale structurii și în fine dimensionarea și alcătuirea elementelor structurii, așa încît să satisfacă condițiile de rezistență, stabilitate, oboseală, deformații, fisurare, durabilitate etc., cu un cost minim.

În procesul de proiectare este necesară parcurgerea următoarelor etape : obiectul real (structură reală) ; modelul fizic (ipotezele simplificatoare) ; modelul matematic (ecuațiile problemei) ; rezolvarea problemei matematice ; interpretarea fizică a rezultatelor matematice (eforturi și deplasări) ; calculul și alcătuirea elementelor de rezistență ale structurii.

Construirea modelului matematic și rezolvarea sistemului de ecuații care rezultă, constituie, de multe ori, partea cea mai dificilă a problemei. Acest lucru este în mod deosebit adevărat pentru structurile bi și tridimensionale, cum sînt plăcile plane sau curbe și structurile masive, la

care modelul matematic este constituit, în mod obișnuit, dintr-un sistem de ecuații cu derivate parțiale, care uneori este greu de integrat ; pentru asemenea structuri, de formă oarecare multiplu conexă, de multe ori modelul matematic nici nu poate fi construit.

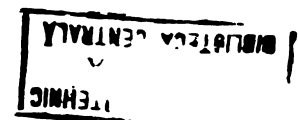
Plecînd de la aceste greutăți și pentru a le ocoli, au apărut și s-au dezvoltat aproximația funcțiilor și tehnica calculului numeric, care au luat în ultimile decenii o mare amploare cauzată de apariția și dezvoltarea rapidă a calculatoarelor electronice numerice. Se pot folosi cu succes procedeele de discretizare matematică (metoda diferențelor finite) sau fizică (metoda elementelor finite și mai recent teoria echivalențelor), care duc în final la sisteme de ecuații algebrice liniare, ușor programabile la calculator, folosind scrierea matriceală.

Metoda elementelor finite, apărută ulterior metodei diferențelor finite, a cîpătat în ultimile două decenii o foarte mare dezvoltare, deoarece permite folosirea unui model fizic cît mai complet, care să ia în considerație proprietățile reale ale materialului folosit, comportarea reală a structurii sub încălziri, conlucrarea dintre structură și terenul de fundare etc. ; practic, nu există structură care să nu poată fi analizată cu această metodă de discretizare fizică.

Metoda elementelor finite, elaborată de Turner, Clough, Martin, Topp (1956), Zienkiewicz (1962), Argyris (1968) etc., a fost formulată la început pe baze intuitive, ulterior fiind fundamentată din punct de vedere matematic cu ajutorul calculului variațional.

Structura care se studiază se consideră alcătuită din mai multe părți mici, discrete, numite elemente finite, care pot fi liniare, de suprafață sau de volum ; elementele finite sînt continue în cuprinsul lor și legate între ele în anumite puncte numite noduri, în care se obțin soluțiile problemei.

Teoria echivalentelor a devenit operațională în ultimul deceniu datorită lucrărilor lui K. Absi, deși încercări pentru elaborarea acestei teorii au fost făcute încă de mult timp (Euler - 1766, Bernoulli - 1774, Timoshenko -



1920, Hrennikoff - 1941, Rjanitzin, Marcus etc.). Teoria echivalențelor constituie o metodă generală, aplicabilă structurilor bi și tridimensionale, care permite înlocuirea studiului unui corp încărcat cu studiul unui corp fictiv, denumit echivalent, mult mai ușor de calculat (în general, sisteme de bare articulate, rețele de grinzi etc., familiare inginerului constructor). Corpul fictiv poate avea caracteristici și legi de comportare care nu au în mod necesar un sens fizic.

Condiția de echivalență între corpul real și corpul fictiv este egalitatea energiei de deformație. Echivalența poate avea loc între două corpuri care pot fi continue sau discrete.

În studiul structurilor masive din beton armat, în cadrul acestei teze de doctorat, se vor folosi metoda elementelor finite și teoria echivalențelor, comparându-se rezultatele obținute și analizându-se critic avantajele fiecărei metode.

1.2. Metoda elementelor finite. Apariția calculatoarelor a revoluționat, la fel ca multe alte domenii de activitate umană, calculul structurilor. În cele peste două decenii, de existență și utilizare, calculatoarele au permis abordarea unor probleme care înainte de jumătatea secolului erau în afara posibilităților tehnice și au adus profunde mutații în concepția despre calculul structurilor. În prezent, este într-adevăr posibil să se determine, prin metodele matriceale, eforturile și deplasările pentru cea mai mare parte a structurilor realizate dintr-un material elastic, plastic sau viscoelastic.

Utilizarea calculatoarelor electronice a adus modificări esențiale în modul de a considera metodele de calculul structurilor. Vechea orientare, favorizată de specificul calculului manual, spre procedee particulare - privite deseori ca metode izolate - adaptate diferitelor categorii de structuri, care a caracterizat până recent literatura de specialitate din multe țări a fost înlocuită prin așezarea pe primul plan a metodelor generale de calcul - metoda eforturilor și metoda deplasărilor - , în care structurile apar caracterizate prin matricele lor de flexibilitate și respectiv de rigiditate, conducând la o abordare unitară a întregului do-

menin al calculului structurilor.

Metodele de calcul bazate pe ipoteze simplificatoare ingineresti tind să fie înlocuite de metode care au la bază modele matematice de un nivel superior, care reprezintă aproximații controlate ale comportării reale. Metoda elementelor finite are la bază procedeul discretizării, adică folosește un model prin care este reprezentată structura reală. Modelul acesta trebuie să îndeplinească, printre altele, următoarele două condiții esențiale : să aproximeze cât mai precis proprietățile geometrice și deformativă ale structurii reale și să permită într-o cât mai mare măsură eliminarea dificultăților matematice pe care le comportă analiza.

Astfel, metoda consideră structura continuă care se cercetează ca fiind alcătuită din mai multe părți mici, discrete, numite elemente finite.

Elementele finite pot avea diverse forme geometrice, iar proprietățile lor elastice pot fi diferite de la unul la altul.

Aplicată la început în domeniul structurilor aeronautice, metoda elementelor finite și-a găsit utilizarea și în proiectarea structurilor de rezistență ale construcțiilor, datorită multiplelor avantaje pe care le are.

Astfel, formularea metodei prezintă o generalitate care permite abordarea analizei oricărui tip de structură, asigurând totodată obținerea unor rezultate cantitative și calitative întotdeauna susceptibile la îmbunătățiri, în funcție de modul de discretizare, ce se adoptă ; de asemenea, în baza formulării integral matriceale, metode se prezintă optim prelucrării automate.

Prin discretizare se realizează substituția unui continuum elastic compus dintr-o infinitate de puncte, printr-o structură formată dintr-un anumit număr de elemente finite interconectate într-un număr finit de noduri.

Datorită acestei substituiri, în studiul stărilor de eforturi și de deformații ale continuumului considerat, vor trebui definite și analizate numai un număr finit de mărimi caracteristice și ca atare nu mai este necesară folosirea funcțiilor pe care le utilizează mecanica mediilor continue pentru a putea reprezenta aceste mărimi în toate punctele

corpului considerat.

Metoda elementelor finite are la bază două principii variaționale generale :

1. - Principiul minimului energiei totale de deformație.
2. - Principiul minimului energiei complementare de deformație.

Pe baza acestor două principii, se folosesc următoarele modele pentru a idealiza structura reală studiată :

1. - Modelul deplasărilor pure, care are ca mod fundamental un câmp de deplasări care trebuie să fie compatibil în interiorul fiecărui element și să fie conformabil pe frontierele elementelor finite adiacente.

2. - Modelul tensiunilor pure, care are ca mod fundamental un câmp de tensiuni care trebuie să satisfacă condițiile de echilibru în interiorul fiecărui element finit și să asigure identitatea tensiunilor pe frontiere comune ale elementelor finite adiacente.

Un model devine hidrid adică nu este nici de tipul deplasării pure nici de tipul tensiunii pure, în cazul când una dintre condițiile menționate nu este perfect îndeplinită. Acest model se bazează pe principiul variațional al lui Reissner și este o combinație a modelului deplasării și cel al tensiunii pure, datorită faptului că el nu satisface integral nici condițiile de compatibilitate și nici condițiile de echilibru.

În toate cele trei grupe de modele, funcțiile de interpolare ale variabilelor câmpului în interiorul elementului au fost alese astfel ca să asigure continuitatea în fiecare punct de frontieră, nu numai la noduri.

Acest fapt este un avantaj al metodei elementelor finite față de modelele variaționale tradiționale (cum ar fi metoda lui Ritz), permițând rezolvarea problemelor la care marginile geometrice sînt complexe.

Determinarea deplasărilor, eforturilor sau deformațiilor în nodurile structurii create de rețeaua fictivă, de discretizare se poate face acum cu ajutorul metodelor matriceale de calcul a structurilor, care, față de cele clasice, prezintă avantajul unei exprimări deosebit de simple și com-

peste și a unui mod de organizare a calculului efectiv extrem de eficient, cu ajutorul calculatoarelor electronice.

În analiza cu ajutorul metodei elementelor finite a interacțiunii construcție -teren, structura, fundația, terenul la sub fundație și o parte din terenul din imediata vecinătate a structurii sînt studiate ca un tot unitar, alcătuit dintr-un ansamblu de elemente finite și tratat ca atare.

Utilizarea metodei elementelor finite la calculul interacțiunii prezintă o serie de avantaje față de metodele tradiționale, din care trebuie în special reținute următoarele :

1. - Discretizarea ansamblului se poate face fără nici o dificultate, adoptîndu-se pentru fiecare porțiune a sa, elementele finite cu formele și proprietățile fizico-mecanice ale fiecărei porțiuni sau elemente finite din componența sa.

2. - Rezolvarea condițiilor la limită nu mai comportă nici un fel de dificultate, problema rezumîndu-se la adoptarea în nodurile respective a aceluiași deplasări necunoscute în toate elementele convergente. Marele avantaj al acestui fapt constă în acela că forma suprafeței de contact între fundație și teren poate fi oricît de neregulată. Acest tip de probleme cu suprafețe de contact complicate nu pot fi abordate prin metodele clasice tradiționale.

3. - Discretizarea masivului de pămînt în elemente plane sau spațiale, permite ca prin utilizarea unor elemente finite elastic-liniare, omogene și ortotrope, dar a căror proprietăți pot varia de la un element la altul, să se modeleze structura pămîntului mult mai apropiată de cea reală, decît s-ar putea obține prin oricare altă metodă analitică de calcul. Astfel, terenuri cu o stratificație variată, cu proprietăți diferite de la un strat la altul, terenuri cu straturi înclinate sau alcătuite dintr-un strat compresibil rezemat pe o bază rigidă, pot fi cuprinse în această analiză fără complicații de calcul importante.

4. - Metoda permite abordarea unor structuri complexe, cu configurație geometrică oarecare, singura dificultate fiind aceea care rezidă din necesitatea unei riguroase transpuneri a matricelor de rigiditate elementară, în sistemul global de axe, pentru obținerea unei interconectări corecte a elementelor ; acestea se concretizează prin determinarea aportului

tuturor deplasărilor necunoscute ale elementelor convergente într-un nod, asupra deplasărilor globale ale acestuia.

Metodele clasice de calcul nu permit decât abordarea unor tipuri de probleme simple, a unor construcții cu formă regulată, introducându-se ipoteze simplificatoare importante atât pentru structuri, cât și pentru masivul de pământ.

5. - Metoda permite soluționarea într-un mod unitar a unei mari diversități de probleme, pornind de la clasicele grinzi pe mediu elastic, continuând cu construcții ingineresti subterane, și sfârșind cu ansambluri de structuri complexe, cum sînt construcțiile multietajate cu structuri pe cadre, diafragme, mixte sau din panouri mari, cu sau fără subsol, cu fundații izolate, continue sau radiere.

Pe lângă aceste avantaje, trebuie însă menționat dezavantajul volumului mare de date ce trebuie pregătite de către utilizator, precum și cantitatea însemnată de informații furnizate, care urmează a fi interpretate ; o automatizare a acestor operații atenuează însă dezavantajele mai sus amintite.

1.2.1. Descrierea generală a metodei. Analiza stării de eforturi și deformații a unei structuri cu metoda elementelor finite comportă următoarele șase etape importante :

a.-) Discretizarea structurii

Structura dată se subîmparte în elemente finite, numerotate de la 1 la n, precizîndu-se apartenența fiecărui element la mulțimea nodurilor sale de conexiune. Se definește astfel topologia modelului pe care se conduce calculul (fig. 1.1).

b.-) Alegerea tipului de elemente finite.

Elementele finite diferă între ele prin forma lor geometrică, caracteristicile fizice ale materialului din care sînt alcătuite și numărul, respectiv tipul, deplasărilor independente care se atașează nodurilor. Alegerea tipului de element finit se corelează cu modul în care se face discretizarea structurii ; se va avea în vedere următoarele aspecte :

- Alegerea unui model de element constitutiv sau altul trebuie făcută ținînd seama că o precizie mărită a rezultatelor se recuperează în augmentarea cantității de calcule.

- Avînd în vedere varietatea mare a tipurilor de elemente finite, alegerea unui anumit tip trebuie făcută în co-

relare cu soluția de discretizare care a fost adoptată.

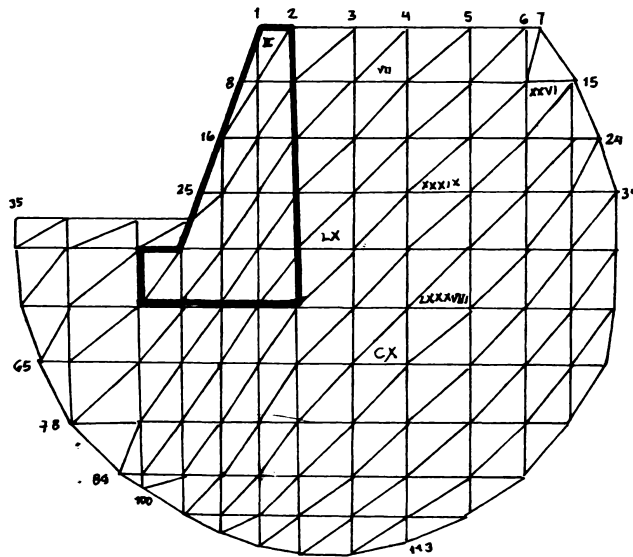


FIG 1.1

- Procedeu de investigație cu metoda elementelor finite permite renanșarea la modelele clasice de calcul, familiare inginerilor, structura putându-se idealiza cu grade de eroare diferite, în funcție de posibilități și de efortul acceptat în realizarea fiecăreia din ele.

c.-) Alcătuirea matricei de rigiditate sau flexibilitate a elementului finit.

Odată ce tipul elementului finit a fost precizat și câmpul de deplasări sau tensiuni definit, se poate trece la alcătuirea ecuației matriceale care exprimă proprietățile statice sau cinematice ale elementului. Pentru determinarea elementelor de rigiditate, pot fi folosite următoarele procedee:

- Procedeu direct, având la bază metoda clasică a deplasărilor.

- Procedeu variațional, care comportă minimizarea energiei potențiale totale a solidului elastic, în baza principiului valorii staționare a energiei potențiale.

- Procedeu valorilor reziduale (metoda Galerkin).

care avînd la bază o tehnică de obținere a unor soluții aproximative a ecuațiilor diferențiale liniare sau neliniare, este indicat în situațiile cînd funcționala de minimizat se obține cu dificultăți sau cînd aceasta nu există.

- Procedul bilanțului energetic, care bazîndu-se pe prima lege a termodinamicii, extinde considerabil gama de probleme ce pot fi investigate cu metoda elementelor finite.

d.-) Asamblarea.

Înșirile de comportare mecanică a structurii întregi rezultă din aportul fiecărui element finit. Astfel, rigiditatea structurii se obține prin asamblarea rigidităților elementelor finite, ceea ce matematic revine în a combina ecuațiile matriceale care exprimă comportarea elementelor finite în parte și a obține ecuația matriceală care exprimă comportarea structurii întregi.

e.-) Rezolvarea sistemului de ecuații.

Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin valorile nodale ale variabilelor câmpului și anume, deplasările nodurilor sau forțelor de legătură din acestea, după cum problema s-a rezolvat cu metoda deplasărilor sau eforturilor.

f.-) Calculul auxiliare.

Uneori soluțiile sistemului de ecuații sînt folosite pentru a obține alte mărimi derivate din necunoscutele primare. Așa de exemplu, deplasările nodurilor servesc în continuare la calculul deformațiilor specifice și al tensiunilor.

1.2.2. Tipuri de elemente finite. Caracterul de largă generalitate a metodei elementului finit derivă din faptul că nu este necesar să se impună restricții referitoare la tipul structurii analizate, algoritmele de calcul fiind identice pentru structuri plane sau spațiale avînd nodurile articulate sau rigide.

Parametrii de bază care caracterizează o structură din punct de vedere al acestui model sînt numărul și tipul gradelor de libertate ale unui nod. Dispar deci, vecinile delimitări ale structurilor analizate în plane sau spațiale, de tip cadru, rețea sau structură articulată, static determinate, sau nedeterminate, etc.

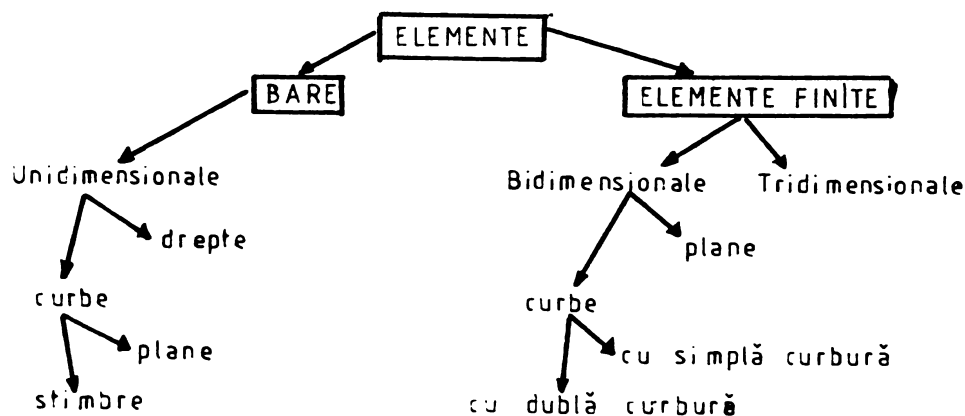
Ca urmare a discretizării unui solid elastic continuu,

se pune problema modului cum trebuie să fie realizată legătura dintre elementele finite componente pentru a modela cât mai fidel structura unitară inițială. Se consideră astfel că legătura dintre elementele finite adiacente nu se realizează de-a lungul întregii frontiere comune, ci numai în anumite puncte ale acestora, denumite puncte nodale sau noduri.

Pentru definirea unui tip de element finit propriu unei anumite probleme (de exemplu, mecanica mediului continuu în două dimensiuni, mecanica plăcilor plane etc.), este necesar să se rezolve câteva probleme de bază : definirea caracteristicilor geometrice, fizice, topologice, cinematice și de inerție.

1.2.2.I. Caracteristici geometrice. Definirea caracteristicilor geometrice, derivate din forma inițială, ridică probleme diferite în funcție de forma adoptată pentru tipul de element finit. În cazul elementelor în formă de triunghi sau dreptunghi cu laturi drepte, respectiv de tetraedru sau paralelipiped rectangular cu muchii drepte, este posibilă utilizarea practic exclusivă a coordonatelor carteziane ortogonale drept sistem de referință, iar acest fapt aduce mari avantaje în calcul. În caz l altor forme de elemente finite (triunghiuri cu laturi curbe, patrulatere oarecare etc.) este necesară utilizarea, cel puțin în anumite limite, a unor coordonate curbilinii, care implică o anumită complicație a relațiilor de calcul.

Caracteristicile geometrice definesc dimensiunile elementului. Din acest punct de vedere, elementele pot fi definite astfel :



Pentru o aceeași formă geometrică pot exista mai multe tipuri de elemente finite, după numărul nodurilor cu care sînt prevăzute și poziția acestor noduri în cadrul elementului finit. Astfel, la tipul de elemente finite liniare, nodurile sînt amplasate numai la vîrfurile (colțurile) elementelor finite, astfel că fiecare dintre laturile acestora este prevăzută cu cîte două noduri.

La tipul de elemente finite pătratice apare cîte un nod în plus pentru fiecare latură (muchie), nod amplasat în mod obișnuit la jumătatea laturii (muchiei), dar putînd avea oricare altă poziție. Așadar, fiecare muchie a unui element finit pătratic este prevăzută cu cîte trei noduri. De remarcat că la elementele finite liniare și pătratice nodurile sînt situate numai pe muchiile lor. Această amplasare a nodurilor este suficientă pentru ca elementele finite adiacente să fie conformabile pe frontierele lor cu condiția ca funcțiile polinomiale care alcătuiesc câmpul de deplasări să fie complete, adică să nu li se negligeze nici un termen.

Se poate continua în același fel clasificarea tipurilor de elemente finite după numărul nodurilor cu care sînt prevăzute. Astfel, tipul de elemente finite cubice are cîte patru noduri pentru fiecare muchie a unui element finit etc. Se impune că începînd cu elementele finite cubice nodurile să fie amplasate nu numai pe muchiile elementelor finite, ci și pe suprafețele laterale adiacente ale acestora, într-un număr bine determinat pentru fiecare tip.

Definirea caracteristicilor geometrice presupune, la rîndul ei :

a.-) Adoptarea unui sistem de coordonate generale, notate generic (α, β) în cazul elementelor finite bidimensionale, respectiv (α, β, γ) în cazul elementelor finite tridimensionale (aceste coordonate pot să coincidă cu coordonatele carteziene ortogonale (x, y) , respectiv (x, y, z) , sau să aibă semnificația de coordonate oarecare) ; aceste coordonate alcătuiesc un vector $x = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$ în probleme bidimensionale, respectiv $x = \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$ în probleme tridimensionale.

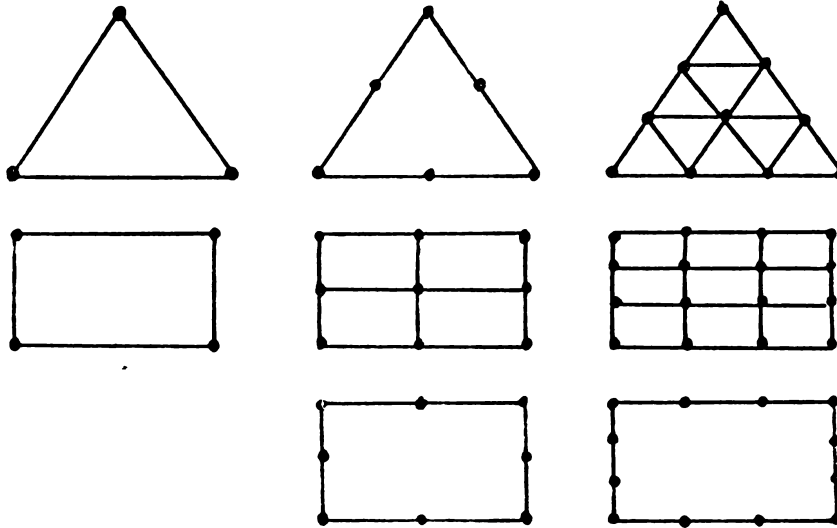
b.-) Adoptarea unui sistem de coordonate locale, definite în interiorul elementului finit ; vectorul x se va

FAMILIA DE ELEMENTE FINITE

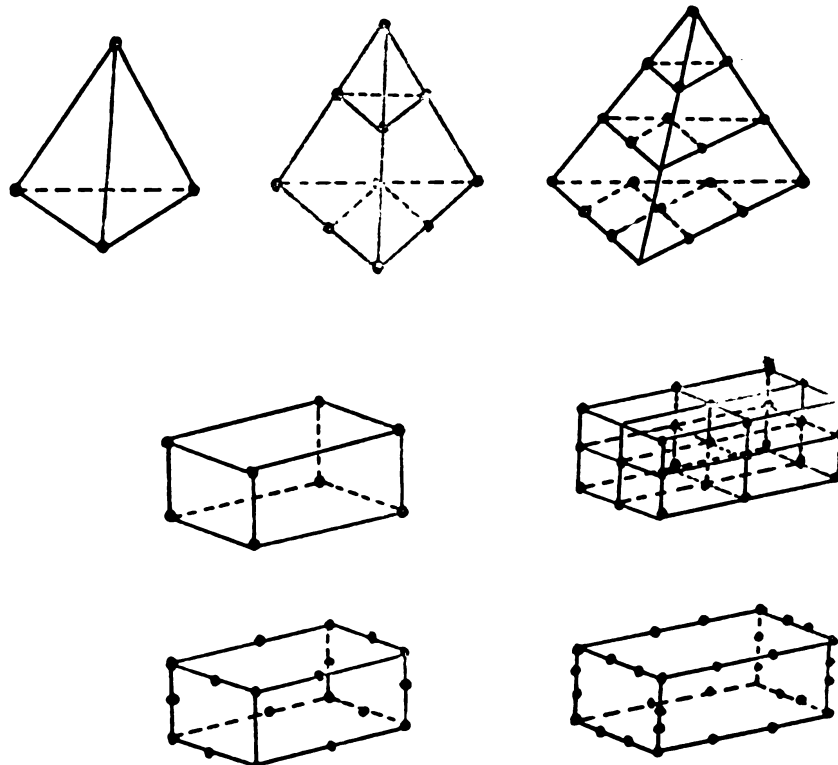
1D Dimensional:



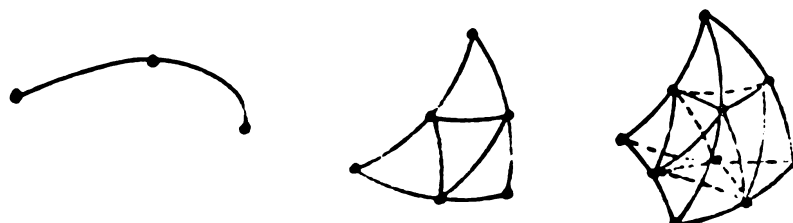
2D Dimensional:



3D Dimensional:



Curved



considera n funcție de aceste coordonate locale.

c.-) Definirea unui vector-colonă $x^{(e)}$, ale cărui elemente sînt coordonate (în sistemul de referință general), care permit definirea completă a formei elementului finit.

d.-) Definirea matricii de interpolare $A_x^{(e)}$, care permite determinarea vectorului x prin relația :

$$x = A_x^{(e)}x^{(e)}$$

1.2.2.2. Caracteristici fizice. Caracteristicile fizice ale unui element precizează constantele fizico-mecanice ale materialului din care este alcătuit elementul, respectiv :

- Modulii de elasticitate E și G .
- Coeficientul de contracție transversală, μ .
- Coeficientul de dilatare termică α .

1.2.2.3. Caracteristica topologică. Caracteristica topologică a unui tip de element precizează aparența lui la mulțimea nodurilor sale de conexiune.

1.2.2.4. Caracteristica cinematică. Caracteristica cinematică a unui element definește numărul și tipul deplasărilor independente care se pot dezvolta la nodurile sale. Mărea lor diversitate se datorează multiplelor posibilități oferite în alegerea formei geometrice, a funcției de deplasări, precum și a numărului și tipurilor gradelor de libertate ale elementului.

1.2.2.5. Caracteristicile de inerție. Caracteristicile de inerție precizează distribuția în interiorul elementului a maselor sau a momentelor de inerție masice. Ambele se pot defini cu ajutorul unei funcții de poziție $\rho = \rho(x, y, z)$ unde ρ este densitatea corespunzătoare maselor care aparțin elementului. Aceste mase corespund fie materialului din care este alcătuit elementul, fie unor supraîncărcări pe care le suportă.

În cazul structurilor formate din bare, calculul cu metoda deplasărilor pornește de la studiul rigidității barelor componente, ce pot fi considerate ca fiind elemente finite unidimensionale.

Forma elementelor finite depinde de tipul și forma structurii ce se studiază. La studiul structurilor din suprafețe plane se folosesc elemente cu trei sau patru laturi.

Suprafețele curbe subțiri pot fi studiate tot cu elemente finite plane sau cu elemente finite curbe. Elementele finite pentru calculul structurilor masive sînt limitate de patru sau șase suprafețe plane.

In continuare sînt prezentate cîteva tipuri de elemente finite utilizate frecvent, cu indicarea caracteristicilor principale.

1.2.3. Elemente de bară. Sînt elemente finite unidimensionale a căror stare de deformație și efort depinde de modul de prindere la capete. Ele au fost pentru prima oară abordate în cadrul analizei structurilor și au constituit modelul a cărui generalizare a condus la elementele finite plane și spațiale.

Însăși noțiunea de rigiditate provine din studiul barelor, unde aceasta reprezintă forța necesară pentru a produce o deplasare unitară corespunzătoare, pe direcția acesteia :

$$F = K\delta.$$

Elementul finit unidimensional cel mai simplu este bara dublu articulată caracteristică grinzilor cu zăbrele. Matricea ei de rigiditate leagă cele două forțe de continuitate S_p și S_q din noduri de cele două deplasări nodale U_p și U_q (fig. 1.2).

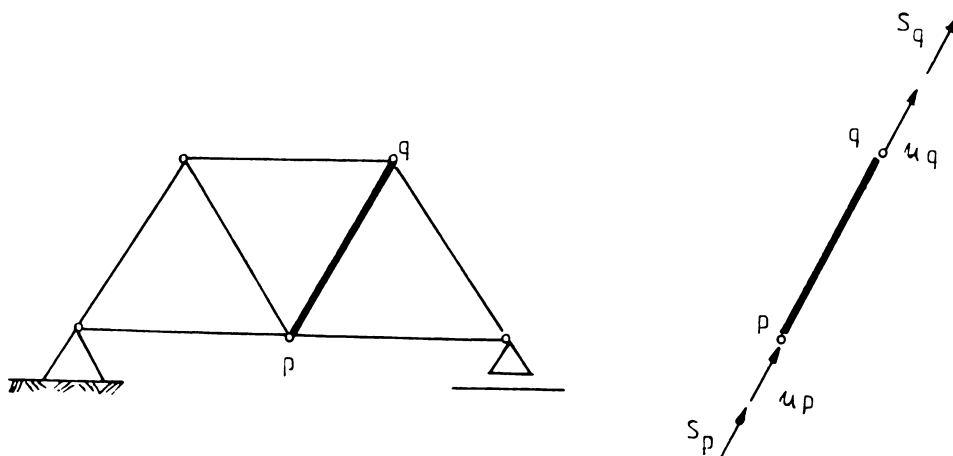


FIG 1.2

In cazul barelor care constituie elemente finite al căror cîmp de deplasări este unic definit și pentru care soluția ce se obține este exactă, modul cel mai simplu de formare

a matricei de rigiditate este cel ce utilizează metoda rezolvării ecuației diferențiale. Dimensiunile și alcătuirea ei efectivă depind de tipul de structură din care face parte bara.

1.2.4. Elementul finit triunghiular pentru problema plană de elasticitate. Problemele plane de elasticitate presupun continuumul ca fiind încărcat în planul său. Problemele de elasticitate plană pot fi separate în două categorii, care sînt : probleme plane de tensiuni și probleme plane de deformații.

În probleme plane de tensiune, continuumul (ca o placă) este îngust în relație cu celelalte dimensiuni și tensiunile normale pe plan sînt neglijabile. În problemele plane de deformație, deformațiile normale pe planul încărcărilor sînt presupuse nule. Atunci eforturile și deplasările la un zid de sprijin pot fi analizate considerînd o secțiune transversală a zidului și presupunînd că deformațiile normale pe planul secțiunii sînt zero. Figura 1.3 arată un exemplu de deformație plană.

E-a spus înainte că diferența esențială între analiza unui cadru (structură) și o structură continuă prin metode matriceale constă în faptul că continuumul poate fi considerat ca un număr finit de elemente interconectate numai în nodurile lor. Deplasările acestor noduri sînt parametri necunoscuți ai problemei, în același mod cum sînt deplasările necunoscute ale legăturilor în analiza cadrului.

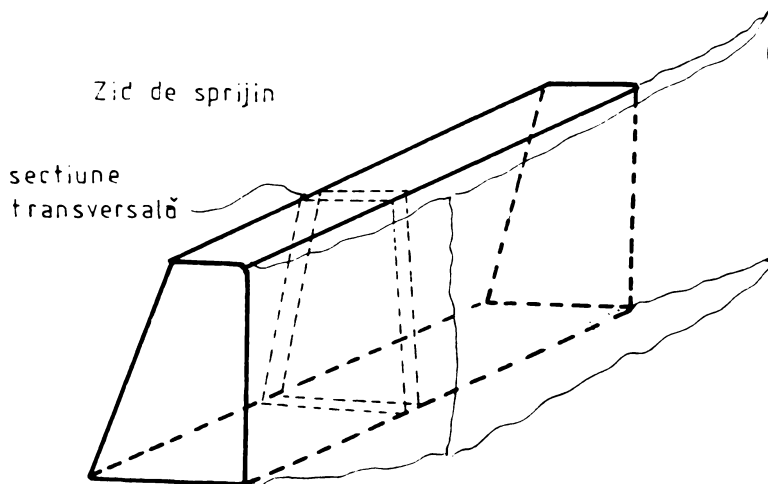


FIG. 1.3

Tipul de element finit triunghiular liniar a fost creat odată cu nașterea de drept a metodelor elementelor finite în anul 1956. Acest tip se bucură, pînă în prezent, de cea mai largă întrebuințare.

Aceste elemente au fost primele abordate datorită faptului că ele pot aproxima cel mai bine zonele unui corp în preajma unui contur variabil ; în afară de aceasta ele constituie părți componente ale unor elemente mai dezvoltate (dreptunghiuri, patrulatere etc.) care, prin urmare, pot fi compuse din asemenea triunghiuri.

1.2.4.1. Derivarea matricii de rigiditate a elementului triunghiular. Principalele etape în derivarea matricii de rigiditate a elementului în tensiuni și deformații plane sînt:

I.- Alegerea sistemului de coordonate și numerotarea nodurilor.

Sistemul de coordonate carteziene este arătat în figura 1.4 și cele trei noduri sînt numerotate în sens antiorar. Coordonatele celor trei noduri sînt : $1(x_1, y_1)$, $2(x_2, y_2)$, $3(x_3, y_3)$.

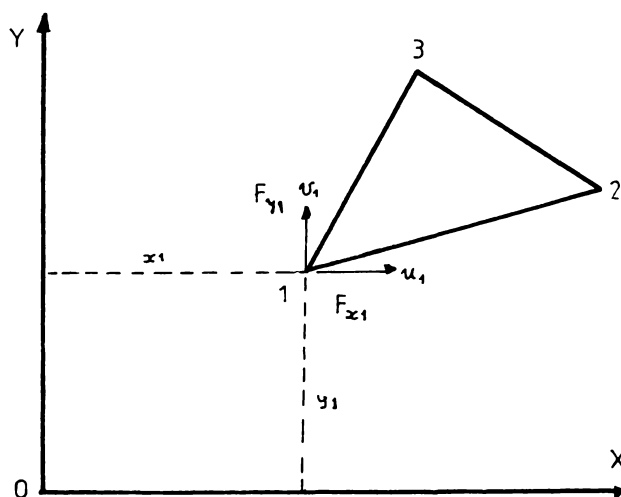


FIG 1.4

Pentru problema plană de elasticitate, unde toate deplasările sînt în același plan, elementul are două grade de libertate pentru fiecare nod, așa cum se arată în figura 1.4, astfel încît elementul triunghiular are 6 grade de libertate ($u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$). Forțele corespunzătoare sînt ($F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}$).

Folosind notațiile matriciale, vectorul deplasărilor în nodul 1 poate fi scris ca :

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

și forțele corespunzătoare în nodul 1 sunt respectiv :

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix}$$

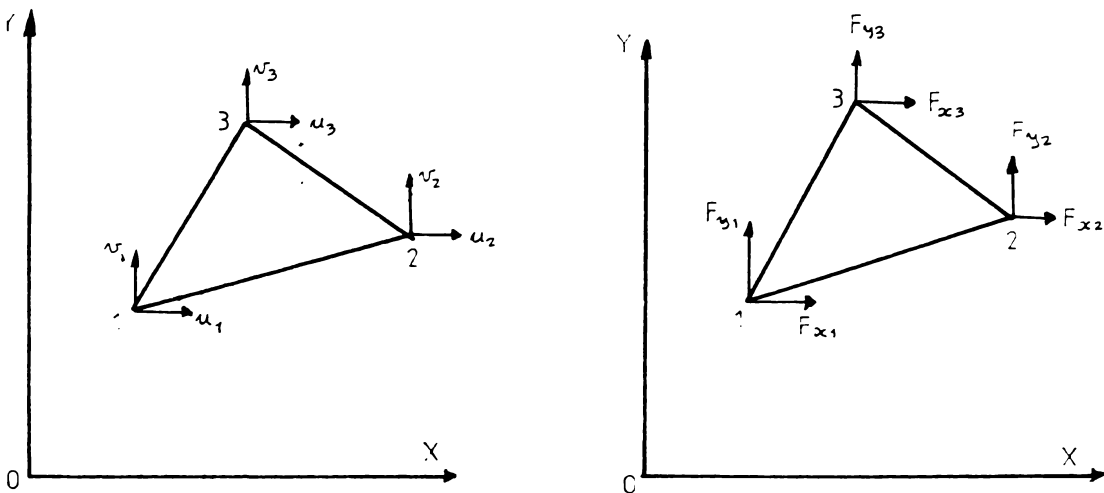


FIG. 1.5

În notațiile matriciale și vectoriale forțelor nodurilor elementului triunghiular, valorile pot fi scrise ca :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

55 45 60
33 2 H

Fiecare vector conține șase componente, matricea de rigiditate a elementului, $[K^e]$, este o matrice de 6x6 elemente, pentru starea de elasticitate plană a triunghiului :

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (I)$$

II.- Alegerea funcției de deplasare $[f(x,y)]$ care definește deplasarea $\{\delta(x,y)\}$ în fiecare punct al elementului. Pentru problema elasticității plane, deplasarea pentru fiecare punct poate fi obținută considerând deplasările u și v respectiv după direcțiile x și y . Dacă sînt șase grade de libertate în acest caz, șase coeficienți necunoscuți ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$) sînt indispensabili în reprezentarea polinomială a nodului de deplasare permis.

Reprezentarea simplă este dată de două ecuații polinomiale :

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (3)$$

Dacă ambele deplasări sînt liniare în x și y , deplasarea continuă este asigurată în lungul laturilor între elemente vecine pentru oricare deplasare nodală. Ecuațiile (3) pot fi scrise sub formă matriceală, astfel :

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

sau : $\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] \{\alpha\} \quad (II)$

III.- Expresiile stărilor de deformării $\{\delta(x,y)\}$ în orice punct din element, în termenii deplasărilor nodale $\{\delta^e\}$. Această etapă se realizează substituind valorile coordonatelor nodurilor în ecuația (II) și prin urmare obținînd expresiile pentru coeficienții necunoscuți.

Ca exemplu în nodul 1 :

$$\{\delta_1\} = \{\delta(x_1, y_1)\} = [f(x_1, y_1)] \{\alpha\}$$

unde $[f(x_1, y_1)]$ este dat în relația (5.a) :

$$\{\delta_1\} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (5.a)$$

Similar pentru nodurile 2 și 3 relațiile sînt (5.b) și (5.c) :

$$\{\delta_2\} = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (5.b)$$

$$\{\delta_3\} = \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (5.c)$$

Combinînd vectorul deplasărilor pentru element, relați (5.d) se obține în termeni generali astfel :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta(x_1, y_1)\} \\ \{\delta(x_2, y_2)\} \\ \{\delta(x_3, y_3)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (5.d)$$

Substituind relațiile (5.a.b.c) în relația (5.d), se obține relația :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Atunci relația (6) poate fi scrisă :

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\} \quad (7)$$

unde

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Elementele matricii $[A]$ sînt cunoscute fiind coordonatele nodurilor elementului.

Coefficienții polinomiali necunoscuți $\{\alpha\}$ sînt acum determinați din relația (7), scriind matricea transpusă a coeficienților $[A]$; rezultă:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (9)$$

Pentru a obține relația (9) din relația (7), trebuie să se obțină matricea transpusă $[A]^{-1}$. Pentru matricea mică din acest exemplu, acest lucru poate fi făcut algebric, dar pentru matrici mari trebuie să fie făcută pe calculator. Pentru a obține matricea $[A]^{-1}$, matricea $[A]$ poate fi aranjată în două blocuri de 3×3 ; transpunînd blocul 3×3 și rearanjînd din nou $[A]^{-1}$ va fi:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \times \quad (10)$$

$$\times \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & -x_1 y_3 + y_3 y_1 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & -x_1 y_3 + x_3 y_1 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

unde $2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (10.a)$$

= 2 x aria elementului triunghiular.

Atunci, în ecuația (9) a fost obținută relația dorită între coeficienții necunoscuți $\{\alpha\}$ și deplasările $\{\delta^e\}$.

Folosind relația (II), deplasările $\{\delta(x,y)\}$ în oricare punct (x,y) în element pot fi acum determinate în funcție de deplasările nodale $\{\delta^e\}$. Relația (II) arată că $\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)]\{\alpha\}$. De aici, substituind $\{\alpha\}$ relația (9), rezultă:

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (III)$$

IV.- Relațiile dintre deformațiile specifice $\{\varepsilon(x,y)\}$ în orice punct din element, deplasările $\{\delta(x,x)\}$ și deplasările nodale $\{\delta^e\}$. Pentru probleme plane de tensiuni și deformații, vectorul deformațiilor specifice $\{\varepsilon(x,y)\}$ este dat de relația:

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

unde ε_x și ε_y sînt deplasări și γ_{xy} este o rotație.

Din teoria elasticității sînt cunoscute următoarele relații între deformațiile ε și deplasările u și v :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (12)$$

Inlocuind pe u și v din ecuația (3), se obține :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y) = \alpha_2$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y) = \alpha_6$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y) = \alpha_3 + \alpha_5$$

De unde :

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{Bmatrix}$$

sau :

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{sau într-o formă simplă : } \{\varepsilon(x,y)\} = [C] \{\alpha\} \quad (14)$$

$$\text{unde : } [C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.a)$$

Substituind $\{\alpha\}$ cu $[A]^{-1} \{\delta^e\}$ din relația(9), vom avea :

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [C][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (15)$$

$$\text{care poate fi scrisă ca : } \{\varepsilon(x,y)\} = [B] \{\delta^e\} \quad (IV)$$

unde : $[B] = [C][A]^{-1}$ (16)

Atunci relația (IV) face legătura între deformațiile $\{\varepsilon(x,y)\}$ în orice punct din element cu deplasările nodale $\{\delta^e\}$.

Matricea $[B]$ poate fi obținută explicit prin multiplicarea matricei $[C]$ din relația (13) cu $[A]^{-1}$, așa cum a fost obținută în relația (10) :

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

unde 2Δ s-a definit în relația (10.a).

V.- Relații între eforturile unitare cu deformațiile specifice $\{\varepsilon(x,y)\}$ și deplasările nodale $\{\delta^e\}$. Pentru probleme plane de elasticitate, starea de eforturi $\{\sigma(x,y)\}$ în oricare punct poate fi reprezentată prin trei eforturi componente $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

unde σ_x și σ_y sînt tensiunile normale și τ_{xy} este tensiunea tangențială.

Componentele corespunzătoare ale deformațiilor specifice sînt date de relația (11). Între aceste tensiuni și componentele deformațiilor există o legătură care este dată de matricea $[D]$, unde $\{\sigma(x,y)\} = [D]\{\varepsilon(x,y)\}$.

Pentru probleme plane de elasticitate, D este o matrice de 3×3 termeni, care depinde de felul problemei, adică este problemă plană de deformații sau problemă plană de tensiuni.

Pentru probleme plane de tensiuni (cu $\sigma_z = 0$, normal pe plan), există următoarele relații între deformații și tensiuni :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad , \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

unde E este modulul lui Young, G este elasticitate transversală și ν este coeficientul lui Poisson.

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Rearanjind relația (19), se poate scrie că :

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

sau : $\{\sigma(x,y)\} = [D] \{\varepsilon(x,y)\}$ (21)

Substituind $\{\varepsilon(x,y)\}$ din relația (IV), se obțin următoarele relații între tensiunile elementului și deplasările nodale.

Tensiune plană : $\{\sigma(x,y)\} = [D][B] \{\delta^e\}$ (Va)

Pentru deformații plane (cu deformația $\varepsilon_{13} = 0$, normal pe plan), în teoria elasticității există următoarele relații între tensiuni și deformații :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (22)$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = 0 \quad (\text{deformație plană})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

Eliminând σ_z și rezolvând pentru σ_x , σ_y , τ_{xy}

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

sau : $\{\sigma(x,y)\} = [D] \{\varepsilon(x,y)\}$ (24)

Substituind din nou $\{\varepsilon(x,y)\}$ din relația (IV), deformația plană este :

$$\{\sigma(x,y)\} = [D][B] \{\delta^e\} \quad (Vb)$$

Se vede imediat că matricea $[D]$ în relațiile (Va) și (Vb) este diferită pentru cazul tensiunilor plane și cazul deformațiilor plane.

Oricum, pentru a conveni cu problema plană de elasticitate, matricea $[D]$ poate fi exprimată ca :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

unde, pentru starea plană de tensiuni (ecuația 20) :

$$d_{11} = d_{22} = E/(1 - \nu^2)$$

$$d_{12} = d_{21} = \nu E/(1 - \nu^2)$$

$$d_{33} = E/2(1 + \nu)$$

și pentru starea plană de deformații (ecuația 23) :

$$d_{11} = d_{22} = E(1 - \nu)/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$$

$$d_{12} = d_{21} = \nu E/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$$

$$d_{33} = E/2(1 + \nu)$$

VI.- Înlocuirea tensiunilor interne $\{\sigma(x,y)\}$ cu forțe nodale echivalente $\{F^e\}$, relații între forțele nodale și deplasările $\{\delta^e\}$ și obținerea elementelor matricei de rigiditate $[K^e]$.

$$\text{Din relația : } \{F^e\} = \left[\int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right] \{\delta^e\} \quad (\text{VI})$$

pentru problema plană de elasticitate, $[B]$ s-a obținut explicit pentru triunghi și e dat în relația (17). Matricea $[D]$ depinde de cum e considerată problema, adică pentru starea plană de eforturi sau starea plană de deformații.

Trebuie să observăm că matricele $[B]$ și $[D]$ conțin numai termeni constanți și ele pot fi scoase în fața integralei în relația (VI) ; rămâne sub integrală numai $d(\text{vol})$ care, în cazul elementelor cu grosime constantă, este egală cu aria triunghiului înmulțită cu grosimea lui.

Atunci pentru un element cu grosime constantă :

$$\{F^e\} = [B]^T [D] [B] \Delta t \{\delta^e\} \quad (25)$$

unde Δt = aria triunghiului x grosimea t .

$$\text{și} \quad 2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (26)$$

Atunci matricea de rigiditate a elementelor este :

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] \Delta t \quad (27)$$

Termenii lui $[K^e]$ pot fi obținuți explicit din relația (27) prin înmulțirea matricelor $[B]^T$, $[D]$ și $[B]$, pentru problema plană de elasticitate.

Din înmulțirea lui $[D]$ cu $[B]$ se obține :

$$[D][B] = \frac{1}{2\Delta} \mathbf{x} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} d_{11}(y_2-y_3) & d_{12}(x_3-x_2) & d_{11}(y_3-y_1) & d_{12}(x_1-x_3) & d_{11}(y_1-y_2) & d_{12}(x_2-x_1) \\ d_{21}(y_2-y_3) & d_{22}(x_3-x_2) & d_{21}(y_3-y_1) & d_{22}(x_1-x_3) & d_{21}(y_1-y_2) & d_{22}(x_2-x_1) \\ d_{31}(x_3-x_2) & d_{32}(y_2-y_3) & d_{31}(x_1-x_3) & d_{33}(y_3-y_1) & d_{31}(x_2-x_1) & d_{33}(y_1-y_2) \end{bmatrix}$$

unde Δ este aria triunghiului și este dată de relația (26). Pentru a obține elementele matricii de rigiditate $[K^e]$, așa cum este dată în relația (27), acest produs trebuie înmulțit cu transpusa matricii $[B]$ din relația (17) și cu Δt , volumul elementului.

$$[B]^T = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2-y_3 & 0 & x_3-x_2 \\ 0 & x_3-x_2 & y_2-y_3 \\ y_3-y_1 & 0 & x_1-x_3 \\ 0 & x_1-x_3 & y_3-y_1 \\ y_1-y_2 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_2-y_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Atunci $[K^e] = [B]^T [D] [B] \Delta t$ sau cum se arată în relația (30), unde t este grosimea elementului finit.

VII.- Stabilirea matricii tensiuni-deplasări $[H]$.

Etapa finală este determinarea eforturilor unitare ale elementului din deplasările nodale. Relația din ecuația (V) permite această determinare :

sau : $\{\sigma(x,y)\} = [D][B] \{\delta^e\}$ (V)

$\{\sigma(x,y)\} = [K] \{\delta^e\}$ (VII)

Pentru problema plană de elasticitate, produsul $[K] = [D][B]$ este dat explicit în relația (26).

1.2.5. Elementul finit dreptunghiular pentru problema plană de elasticitate. Tot așa ca la punctul anterior, se vor analiza cele 7 etape pentru a găsi caracteristicile de rigiditate pentru elementul dreptunghiular în deformare plană sau tensiune plană.

1.2.5.1. Derivarea matricii de rigiditate a elementului dreptunghiular.

I.- Alegerea sistemului de coordonate și numerotarea nodurilor.

Luăm un element dreptunghiular cu laturile a și b și grosimea t, cum se arată în figura 1.6.a. Cel mai convenabil sistem de numerotare al nodurilor e cel utilizat în figura 1.6.a, dar pot fi folosite și alte sisteme.

Pentru elasticitatea plană, elementul are două grade de libertate în fiecare nod, adică fiecare element are 8 grade de libertate. Figura 1.6.b arată cele opt deplasări necunoscute și figura 1.6.c forțele nodale corespunzătoare.

Folosind notarea matricială, deplasarea în nodul 1 poate fi scrisă ca :

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

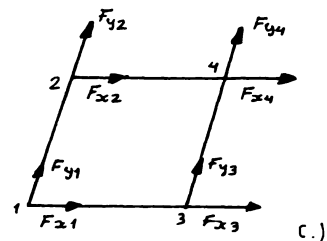
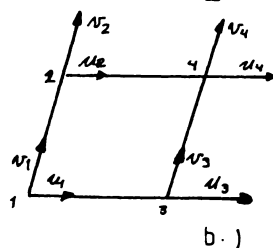
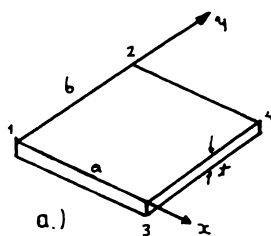
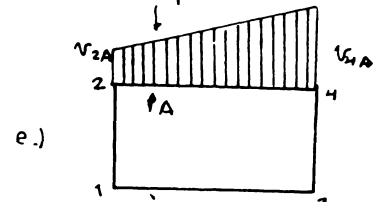
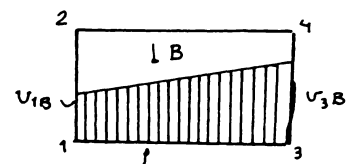
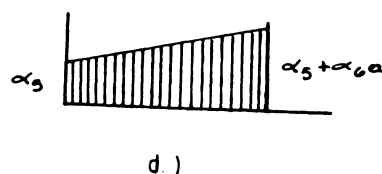
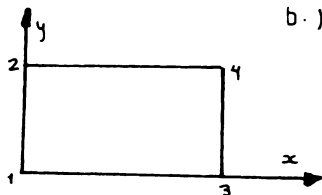


FIG 1.6



$$[K^e] = \frac{k}{4\Delta} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$d_{11}(y_2 - y_3)^2 + d_{33}(x_2 - x_3)^2$	$d_{12}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) + d_{11}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + d_{12}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$	$d_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2)$
$d_{21}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)$	$d_{12}(y_3 - y_1)(x_3 - x_2) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3)$	$d_{22}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$
$d_{11}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)$	$d_{12}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) + d_{11}(y_3 - y_1)^2 + d_{33}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_1 - x_3)^2$	$d_{12}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)$
$d_{21}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$	$d_{12}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + d_{22}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1)^2 + d_{33}(y_3 - y_1)^2$	$d_{22}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1)$
$d_{11}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3)$	$d_{12}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) + d_{11}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)$	$d_{12}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$
$d_{21}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2)$	$d_{22}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$	$d_{22}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + d_{33}(y_1 - y_2)^2 + d_{33}(x_2 - x_1)^2$

(30)

și forțele în nodul 1 pot fi scrise ca : $\{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix}$

Toate deplasările și vectorul forțelor pentru element vor fi :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Fiecare vector conține opt termeni și de aceea matricea rigidității $[K^e]$ este o matrice 8×8 .

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (I)$$

II.- Alegerea funcției de deplasări $[f(x,y)]$ care definește deplasarea $\{\delta(x,y)\}$ în orice punct din element. În probleme plane de elasticitate starea de deplasare în orice punct (x,y) , este dată de : $\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$

Dacă elementul are 8 grade de libertate, în polinomul ce reprezintă deplasările totale apar 8 coeficienți necunoscuți.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (33)$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

Trebuie să observăm că : dacă x este constant atunci: u și v variază liniar cu y și, similar, când y este constant ambele deplasări variază liniar cu x . Deci deplasările variază liniar de-a lungul fiecărei laturi a elementului dreptunghiular.

De exemplu : de-a lungul laturii 1 - 3 $y = 0$, adică $u = \alpha_1 + \alpha_2 x$ și $v = \alpha_5 + \alpha_6 x$.

Deplasarea v variază liniar de-a lungul acestei laturi de la o valoare α_5 în nodul 1 (unde $x = 0$) până la valoarea $\alpha_5 + \alpha_6 \cdot a$ în nodul 2 (unde $x = a$) fig. 1.6.d. Deci deplasările sînt identice în elementul adiacent, de-a lungul laturii. Acest fapt poate fi ilustrat considerînd elementele adiacente A și B, fig. 1.6.e.

Pe parcursul soluției se specifică :

$$v_{2A} = v_{1B} \quad \text{și} \quad v_{1A} = v_{3B}$$

de unde $v_{CA} = v_{CB}$.

Adică se arată deplasarea continuă.

Scrînd relația (33) în formă matriceală

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

ea se poate scrie ca : $\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)]\{\alpha\}$ (II)

III.- Expresiile stărilor de deformății $\{\delta(x,y)\}$ în orice punct din element, în termenii deplasărilor nodale $\{\delta^e\}$. Această etapă se caracterizează prin substituirea valorilor coordonatelor în relația (II) și determinarea lui $\{\alpha\}$.

Substituind coordonatele nodurilor în $[f(x,y)]$, în nodul 1, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ atunci :

$$[f(x_1, y_1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

în nodul 2, $x_2 = 0$, $y_2 = b$

$$[f(x_2, y_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

în nodul 3, $x_3 = a$, $y_3 = 0$

$$[f(x_3, y_3)] = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

în nodul 4, $x_4 = a$, $y_4 = b$

$$[f(x_4, y_4)] = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix}$$

Folosind relație (34), vom obține :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta(x_1, y_1)\} \\ \{\delta(x_2, y_2)\} \\ \{\delta(x_3, y_3)\} \\ \{\delta(x_4, y_4)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{Bmatrix}$$

Substituind în $[f(x, y)]$ relația (35), rezultă :

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (36)$$

și poate fi exprimată ca $\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$, (37)

unde $\{\alpha\}$ este vectorul coeficienților necunoscuți ai expresiilor polinomiale în relația (33).

Atunci relația (37) definește matricea $[A]$ pentru cazul particular al elementului dreptunghiular în probleme plane de elasticitate. Coeficienții necunoscuți $\{\alpha\}$ pot fi obținuți prin înmulțirea ambelor părți ale relației (37) cu matricea inversă a lui $[A]$. Se obține :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (38)$$

Matricea inversă a lui $[A]$ poate fi obținută într-o formă numerică pe calculator sau într-o formă algebrică. Procesul de inversare este calea simplă și convenabilă pentru rezolvarea celor 8 ecuații, astfel încât valorile celor 8 coeficienți necunoscuți α pot fi exprimați în funcție de deplasările nodale u și v .

Ecuațiile sînt :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 \\ v_1 &= \alpha_5 \\ u_2 &= \alpha_1 + b\alpha_3 \\ v_2 &= \alpha_5 + b\alpha_7 \\ u_3 &= \alpha_1 + a\alpha_2 \\ v_3 &= \alpha_5 + a\alpha_6 \\ u_4 &= \alpha_1 + a\alpha_2 + b\alpha_3 + ab\alpha_4 \\ v_4 &= \alpha_5 + a\alpha_6 + b\alpha_7 + ab\alpha_8 \end{aligned}$$

Soluția algebrică a acestei ecuații este foarte simplă.

Obținind soluția, relația (38) poate fi scrisă ca :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/a & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ -1/b & 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & -1/ab & 0 & 1/ab & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & -1/b & 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & -1/ab & 0 & 1/ab \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_5 \\ \alpha_3 \\ \alpha_7 \\ \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_4 \\ \alpha_8 \end{pmatrix}$$

definindu-se astfel matricea inversă a lui $[A]$.

Substituind relația (38) în relația generală (II), poate fi scrisă din nou expresia $\{\delta(x,y)\}$ în funcție de $\{\delta^e\}$, ca :

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (III)$$

IV.- Relații între deformațiile specifice $\{\epsilon(x,y)\}$ în orice punct din element, deplasările $\{\delta(x,y)\}$ și deplasările nodale $\{\delta^e\}$. Acum relațiile între deformațiile $\{\epsilon(x,y)\}$

în orice punct în elasticitatea plană sînt independente de configurația elementului ales.

Atunci relațiile (11) și (12) pentru elementul triunghiular sînt valabile și pentru elementul dreptunghiular considerat acum.

$$\text{Atunci } \{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{și} \quad \varepsilon_x &= \partial u / \partial x \\ \varepsilon_y &= \partial v / \partial y \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{aligned} \quad (12)$$

Înlocuind pe u și v din relația (33), se obțin următoarele expresii pentru deformații în orice punct din element :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) = \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{aligned}$$

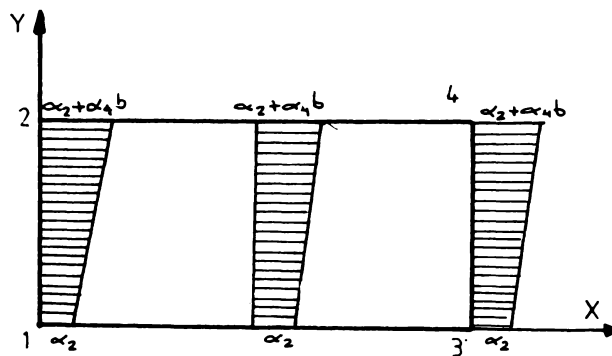


FIG. 1.7

Este interesant de observat că deformațiile variază liniar pe element. Considerînd variația lui ε_x ca un exemplu, se vede că ε_x este independentă de x și depinde liniar de y , astfel încît variația lui ε_x în element este exemplificată în figura 1.7. Similar ε_y este independent de y și depinde liniar de x , în timp ce γ_{xy} variază liniar în funcție de x și y .

Inlocuind aceste expresii ale deformațiilor în relația (11), se obține :

$$\{ \varepsilon(x,y) \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_6 y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

astfel încît $\{ \varepsilon(x,y) \} = [C] \{ \alpha \}$ (40)

Inlocuind $\{ \alpha \}$, prin folosirea relației (38) :

$$\{ \varepsilon(x,y) \} = [C][A]^{-1} \{ \delta^e \} \quad (41)$$

sau $\{ \varepsilon(x,y) \} = [B] \{ \delta^e \}$ (IV)

unde $[B] = [C][A]^{-1}$ (42)

Relația (IV) este relația căutată între deformațiile din orice punct și deplasările nodale.

Considerînd matricea [C] definită în relația (39), și $[A]^{-1}$ definită în (38), matricea [B] se obține ca :

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

V.- Stabilirea relațiilor între tensiunile interne $\{ \sigma(x,y) \}$, deformațiile $\{ \varepsilon(x,y) \}$ și deplasările nodale $\{ \delta^e \}$.
 Relația între tensiuni și deformații date în ecuația (21) este independentă de configurația elementului considerat, astfel că relațiile (18) pînă la (24) sînt valabile și pentru elementele rectangulare.

In relația (V) : $\{ \sigma(x,y) \} = [D][B] \{ \delta^e \}$ (V)

este dată relația căutată între tensiunile din orice punct și deplasările nodale. Matricea $[D]$ cerută în relația (V) este :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (43)$$

unde pentru starea plană de tensiune

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$d_{21} = d_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

și de deformație

$$d_{11} = d_{22} = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (44)$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

VI.- Înlocuirea tensiunilor interne $\{\sigma(x, y)\}$ cu forțele nodale static echivalente $\{F^e\}$; stabilirea relațiilor între forțele nodale, deplasările nodale $\{\delta^e\}$ și obținerea matricei de rigiditate $[K^e]$ a elementului. Ecuația generală ce rezultă anterior poate fi scrisă ca :

$$\{F^e\} = \int [B]^T [D][B] d(\text{vol}) \{\delta^e\} \quad (VI)$$

matricea $[B]$ fiind definită în relația (42), iar matricea $[D]$, în relația (43).

În timp ce pentru elementul triunghiular, ambele matrici, $[B]$ și $[D]$ conțin numai termeni constanți și pot fi astfel scoase în afara semnelui de integrare, în ecuația (VI), în acest caz, pentru elementul dreptunghiular matricea $[B]$ conține termeni în x și y .

În evoluarea matricei de rigiditate $[K^e]$, dată de relația :

$$[K^e] = \int [B]^T [D][B] d(\text{vol}) \quad (45)$$

unde, pentru un element cu grosime constantă devine

$$[s^e] = t \int [B]^T [D][B] dx dy$$

trebuie sa fie evolut in fii produsul $[B]^T [D][B]$, iar termenii matricii rezultante trebuie sa fie integrati, inte rarea fiind pe aria elementului.

Calcularea lui $[K^e]$ este astfel considerata ca simplu ecit decit in cazul elementului triunghiular, entru ca aici include celelalte standard. Valoarea finala a matricii $[K^e]$ obtinuta prin aceste calcule e data in relatie (48), unde $p = a/b$.

$$[K^e] = \frac{t}{12} x$$

$4 d_{11} p^{-1} +$	$4 d_{33} p$					
$3 d_{21} +$	$4 d_{22} p +$					
$3 d_{33}$	$4 d_{33} p^{-1}$					
$2 d_{11} p^{-1} -$	$3 d_{21} -$	$4 d_{11} p^{-1} +$				SIMETRIC
$4 d_{33} p$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p$				
$-3 d_{21} +$	$-4 d_{22} p +$	$-3 d_{21} -$	$4 d_{22} p +$			
$3 d_{33}$	$2 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p^{-1}$			
$-4 d_{11} p^{-1} +$	$-3 d_{21} +$	$-2 d_{11} p^{-1} -$	$3 d_{21} +$	$4 d_{11} p^{-1} +$		
$2 d_{33} p$	$3 d_{33}$	$2 d_{33} p$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p$		
$3 d_{21} -$	$2 d_{22} p -$	$3 d_{21} +$	$-2 d_{22} p -$	$-3 d_{21} -$		
$3 d_{33}$	$4 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$	$2 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$	$4 d_{22} p +$	
$-2 d_{11} p^{-1} -$	$-3 d_{21} -$	$-4 d_{11} p^{-1} +$	$3 d_{21} -$	$2 d_{11} p^{-1} -$	$-3 d_{21} +$	$4 d_{11} p^{-1} +$
$2 d_{33} p$	$3 d_{33}$	$2 d_{33} p$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p$
$-3 d_{21} -$	$-2 d_{22} p -$	$-3 d_{21} +$	$2 d_{22} p -$	$3 d_{21} -$	$-4 d_{22} p +$	$3 d_{21} +$
$3 d_{33}$	$2 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$	$2 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$
$4 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{33}$	$4 d_{33} p^{-1}$

III.- Stabilirea matricii tensiuni-de laurii $[s]$.

Relatie corata este data in relatie generala (7) :

cu :

$$\{\sigma(x,y)\} = [s][B]\{\delta^e\} \quad (1)$$

$$\{\sigma(x,y)\} = [s]\{\delta^e\} \quad (1')$$

unde $[s] = [D][B]$ este matricea corata.

$$[] = (1/3b)x \quad (1'')$$

$$\begin{bmatrix} -d_{11}(b-y) & -d_{21}(a-x) & -d_{11}y & d_{21}(a-x) & d_{11}(b-y) & -d_{21}x & d_{11}y & d_{21}x \\ -d_{21}(b-y) & -d_{22}(a-x) & -d_{21}y & d_{22}(a-x) & d_{22}(b-y) & -d_{22}x & d_{21}y & d_{22}x \\ -d_{33}(a-x) & -d_{33}(b-y) & d_{33}(a-x) & -d_{33}y & -d_{33}x & d_{33}(b-y) & d_{33}x & d_{33}y \end{bmatrix}$$

Considerând matricea $[D]$ definită în relația (43) și matricea $[B]$ definită în relația (42), produsul $[D][B]$ poate fi calculat ca în relația (47), unde d_{11} , d_{22} , d_{12} și d_{33} au valorile definite în relația (44) pentru starea plană de tensiune și deformații.

Calcularea ecuației (VII), folosind valoarea lui $[H]$ definită în relația (47), dă tensiunile $\{\sigma(x,y)\}$ în orice punct (x,y) din element. Tensiunile astfel obținute conțin termeni în x și y cu care calculatorul nu poate lucra.

Pentru a obține tensiunile într-un anumit punct, coordonatele acestui punct se introduc în termenii matricii $[H]$. Se pot astfel determina tensiunile în fiecare din cele 4 noduri ale elementului. Aceste tensiuni în noduri pot fi reprezentate prin $\{\sigma^0\}$, unde :

$$\{\sigma^0\} = \begin{Bmatrix} \{\sigma(x_1, y_1)\} \\ \{\sigma(x_2, y_2)\} \\ \{\sigma(x_3, y_3)\} \\ \{\sigma(x_4, y_4)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H(x_1, y_1)] \\ [H(x_2, y_2)] \\ [H(x_3, y_3)] \\ [H(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{\delta^0\} \quad (48)$$

valoarea lui $[H(x_1, y_1)]$, de exemplu, fiind obținută prin simplă înlocuire a coordonatelor nodului 1 în expresia lui $[H]$ din relația (47). Procedul este similar pentru celelalte trei noduri. Relația (48) poate fi astfel scrisă sub forma (49) :

$$\{\sigma^0\} = (1/ab) x$$

$\begin{matrix} -d_{11}^b & -d_{21}^a & 0 & d_{21}^a & d_{11}^b & 0 & 0 & 0 \\ -d_{21}^b & -d_{22}^a & 0 & d_{22}^a & d_{21}^b & 0 & 0 & 0 \\ -d_{33}^a & -d_{33}^b & d_{33}^a & 0 & 0 & d_{33}^b & 0 & 0 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \text{nodul 1} \\ x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right\}$
$\begin{matrix} 0 & -d_{21}^a & -d_{11}^b & d_{21}^a & 0 & 0 & d_{11}^b & 0 \\ 0 & -d_{22}^a & -d_{21}^b & d_{22}^a & 0 & 0 & d_{21}^b & 0 \\ -d_{33}^a & 0 & d_{33}^b & -d_{33}^b & 0 & 0 & 0 & d_{33}^b \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \text{nodul 2} \\ x=0 \\ y=b \end{matrix} \right\}$
$\begin{matrix} -d_{11}^b & 0 & 0 & 0 & d_{11}^b & -d_{21}^a & 0 & d_{21}^a \\ -d_{21}^b & 0 & 0 & 0 & d_{21}^b & -d_{22}^a & 0 & d_{22}^a \\ 0 & -d_{33}^b & 0 & 0 & -d_{33}^a & d_{33}^b & d_{33}^a & 0 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \text{nodul 3} \\ x=a \\ y=0 \end{matrix} \right\} \quad (49)$
$\begin{matrix} 0 & 0 & -d_{11}^b & 0 & 0 & -d_{21}^a & d_{11}^b & d_{21}^a \\ 0 & 0 & -d_{21}^b & 0 & 0 & -d_{22}^a & d_{21}^b & d_{22}^a \\ 0 & 0 & 0 & -d_{33}^b & -d_{33}^a & 0 & d_{33}^a & d_{33}^b \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \text{nodul 4} \\ x=a \\ y=b \end{matrix} \right\}$

Această relație se poate rezuma :

$$\{\sigma^e\} = [H^e] \{\delta^e\} \quad (50)$$

definind astfel matricea $[H^e]$ pentru un element dreptunghiular în elasticitatea plană după cum deformațiile variază liniar în elementul dreptunghiular, tensiunile variază de asemenea liniar pentru valori constante ale lui x și y , definit față de distribuția uniformă a tensiunilor în elementul triunghiular.

În general, această variație liniară nu este strict corectă și tensiunile calculate pentru elemente^{*A} comune ale elementelor. Mărimea acestor discontinuități este, oricum, de obicei, foarte mică, iar dacă e folosită o discretizare cât mai fină, se poate obține o aproximație bună considerând valoarea medie a tensiunilor calculate în nodurile particulare.

1.2.6. Elemente masive. Acestea pot fi generate pe baza aceluiași premise ca și în cazul bidimensional. Va trebui însă asigurată continuitatea suprafețelor^{vB} elementelor sînt plane, variația funcțiilor de interpolare corespunzătoare acestora este în raport numai cu două din cele trei variabile ; prin urmare, practic, rar se vor putea găsi polinoame complete pentru câmpul deplasărilor, deoarece nu există o regulă de nume-rotare convenabilă a nodurilor elementului care să asigure succesiunea perfectă a acestora. De aceea va trebui să se ur-

mărească ca funcțiile de interpolare să fie definite numai în raport cu nodurile suprafețelor respective.

1.2.6.1. Tetraedrul. Este corespondentul în spațiu al triunghiului. Câmpurile de deplasări pentru elementul finit tetraedric sînt :

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ u_y(x,y,z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ u_z(x,y,z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned}$$

Sistemul coordonatelor baricentrice este echivalent cu unul al "coordonatelor de volum", (fig. 1.8).

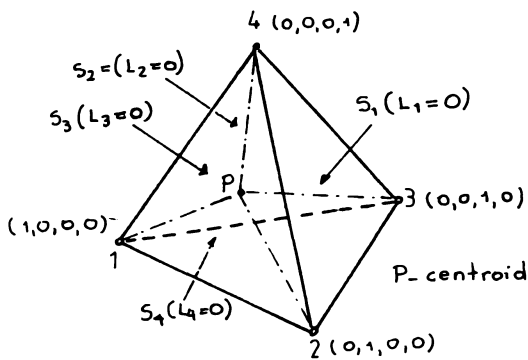


FIG. 1.8

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{x}_1} & \frac{1}{\bar{x}_2} & \frac{1}{\bar{x}_3} & \frac{1}{\bar{x}_4} \\ \frac{1}{\bar{y}_1} & \frac{1}{\bar{y}_2} & \frac{1}{\bar{y}_3} & \frac{1}{\bar{y}_4} \\ \frac{1}{\bar{z}_1} & \frac{1}{\bar{z}_2} & \frac{1}{\bar{z}_3} & \frac{1}{\bar{z}_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}$$

unde \bar{x}_i ; \bar{y}_i ; \bar{z}_i sînt coordonatelor punctelor ($i=1, 2, 3, 4$) și x, y, z ale punctului P.

În care $L_1 = \frac{\text{vol } P234}{\text{vol } 1234}$ și celelalte similare, iar

$$\text{vol } 1234 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & \bar{z}_3 \\ 1 & \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & \bar{z}_4 \end{vmatrix}$$

El permite calculul direct al integralelor ce intervin după formula principală :

$$\int_{L_1^a}^{L_1^b} \int_{L_2^c}^{L_2^d} \int_{L_3^e}^{L_3^f} \int_{L_4^g}^{L_4^h} dx dy dz = \frac{a! b! c! d!}{(a+b+c+d+3)!} \Omega V$$

unde a,b,c,d sînt respectiv ariile perpendiculare pe L_1, L_2, L_3, L_4 . Această relație este foarte importantă deoarece ea permite să se calculeze în mod exact integralele ce intervin în determinarea matricelor de rigiditate și existența ei este un even-

taj al introducerii coordonatelor baricentrice, întrucît se elimină necesitatea evaluării prin metode numerice (aproximative și laborioase) a acestor integrale.

Schema intuitivă din figura 1.9.d indică numărul nodurilor necesare ale elementelor pentru a putea fi asigurată completitudinea polinomului de aproximare a câmpului deplasărilor.

Așadar pentru :

a.-) Tetraedrul liniar (fig. 1.9.a) avînd noduri numai în colțuri, funcțiile de interpolare sînt :

$$N_i = L_i$$

unde N_i = funcțiile de interpolare și $L_i = \frac{\Lambda_i}{A}$.

b.-) Tetraedrul pătratic (fig. 1.9.b) are zece noduri din care șase la mijlocul muchiilor. Funcțiile de interpolare se determină pornind de la observația că fiecare față triunghiulară a elementului este divizată exact ca în cazul triunghiului și prin urmare se vor putea aplica aceleași formule, cu observația că trebuie puse în concordanță variabilele ce apar cu cele reale ale suprafeței respective.

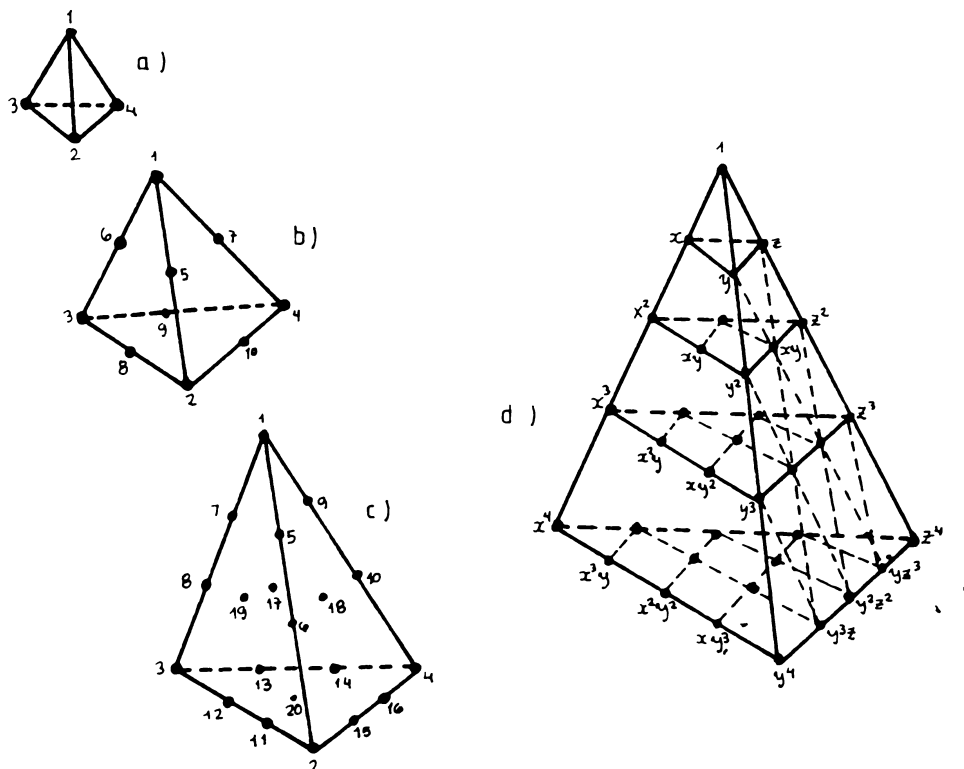


FIG. 1.9

De exemplu : Pentru fața 123, a cărei ecuație este $L_4 = 0$, funcțiile de interpolare corespunzătoare nodurilor 1, 2, 3, 8, 6, 5 sînt identice cu cele date de relația $\{N\} = \{L_1(2L_1 - 1) \quad L_2(2L_2 - 1) \quad L_3(2L_3 - 1) \quad 4L_1L_2 \quad 4L_2L_3 \quad 4L_3L_1\}$. Pentru celelalte noduri se procedează prin permutări circulare.

$$\begin{aligned} N_4 &= (2L_4 - 1) L_4 \\ N_7 &= 4L_1L_4 \text{ pe muchia 1-4} \\ N_9 &= 4L_3L_4 \text{ pe muchia 3-4} \\ N_{10} &= 4L_2L_4 \text{ pe muchia 2-4.} \end{aligned}$$

c.-) Tetraedrul cubic (fig. 1.9.c) cu 20 de noduri (din care cîte unul pe fiecare față) se rezolvă, pe baza celor indicate anterior, cu formulele :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{21} L_1 (3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \\ N_4 &= \frac{3^2}{21} L_1L_2(3L_1 - 1) \\ N_5 &= \frac{3^2}{2} L_2L_1(3L_2 - 1) \end{aligned}$$

pentru punctele feței 123 și cu cele similare obținute prin înlocuirea variabilelor ce dispar pe celelalte (L_2 cu L_4 de exemplu pe fața 134).

1.2.6.2. Paralelipipedul. Ca și dreptunghiul, poate fi conceput ca :

a.-) Elemente de tip Lagrange sau Hermite, care conțin și noduri interioare volumului (fig. 1.10.a, b și c) și pentru care funcțiile de interpolare se determină ca și în cazul planului prin formule de formă :

$$N_{ijk} = l_i^1(\xi) l_j^m(\eta) l_k^n(\zeta)$$

sau unele similare pentru cazul polinoamelor Hermite.

b.-) Elemente cu noduri numai pe contur (fig. 1.10 d și e). Pe baza principiului enunțat la început, conform căruia funcțiile de interpolare urmează a fi definite numai în raport cu nodurile corespunzătoare feței pe care se află nodul analizat, în acest caz se vor aplica formulele $N_{ij} = l_i^m(x)l_j^n(y)$ extinse la spațiul tridimensional prin adăugarea la produsul funcțiilor a polinomului Lagrange de ordinal 1 după direcția z :

$$N_{1jk} = l_1^{\frac{1}{2}}(\xi) l_j(\eta) l_k(\zeta)$$

pentru muchiile $\xi = \pm 1$ și cele similare pentru muchiile $\eta = \pm 1$ sau $\zeta = \pm 1$.

Așadar pentru :

- elemente liniare : $N_1 = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$
- elemente pătratice :

$$N_1 = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(1 - \xi^2 \eta_1^2 \zeta_1^2 - \eta^2 \zeta_1^2 \xi_1^2 - \zeta^2 \xi_1^2 \eta_1^2)$$

pentru colțuri, respectiv, muchii.

- elemente cubice

$$N_1 = \frac{1}{64} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \left[9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19 \right]$$

$$N_1 = \frac{9}{64} (1 + \xi_0)(1 + \zeta_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0)$$

pentru colțuri, respectiv, nodurile situate pe muchiile fețelor $\xi_0 = \pm 1$ și $\zeta_0 = \pm 1$, avînd $\eta = \pm 1/3$, altele similare pentru celelalte muchii.

Si aceste elemente pot fi erarhice, sau degenerate (fig. 1.11), iar funcțiile de interpolare se generează pe aceleași principii ca și în cazul elementelor plane.

Pentru elementul din fig. 1.11.c de exemplu avem :

$$\begin{aligned} N_3^{\#} &= N_3 + \Delta N_3 & N_4^{\#} &= N_4 + \Delta N_3 \\ N_5^{\#} &= N_5 + \Delta N_5 & N_6^{\#} &= N_6 + \Delta N_5 \\ N_7^{\#} &= N_7 + N_8 + N_{19} & N_{11}^{\#} &= N_{11} - 2\Delta N_3 \\ N_{17}^{\#} &= N_{17} - 2\Delta N_5 \end{aligned}$$

iar celelalte $N_1^{\#} = N_1$ în care : $\Delta N_3 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 + \eta)/16$
 $N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 + \zeta)/16$

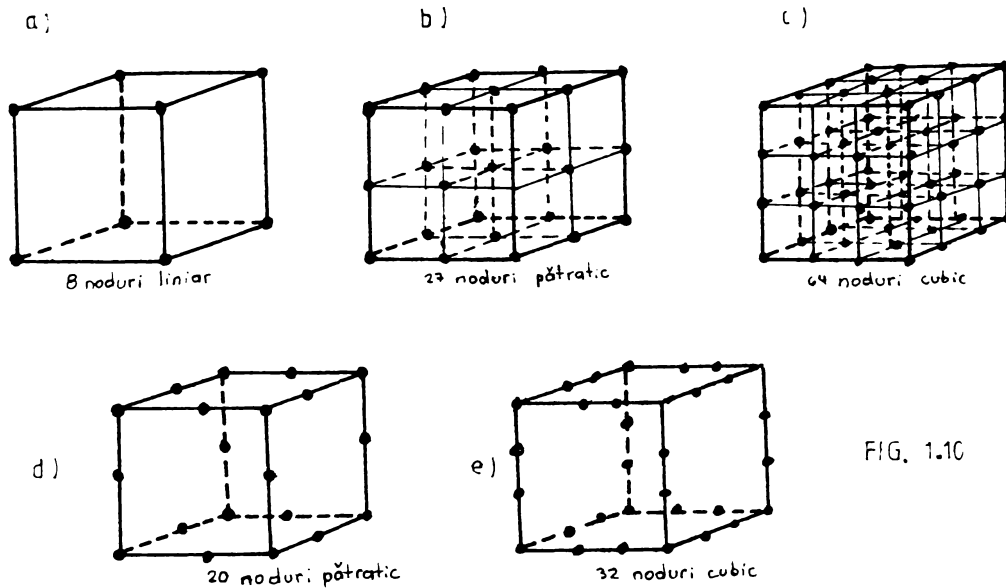


FIG. 1.10

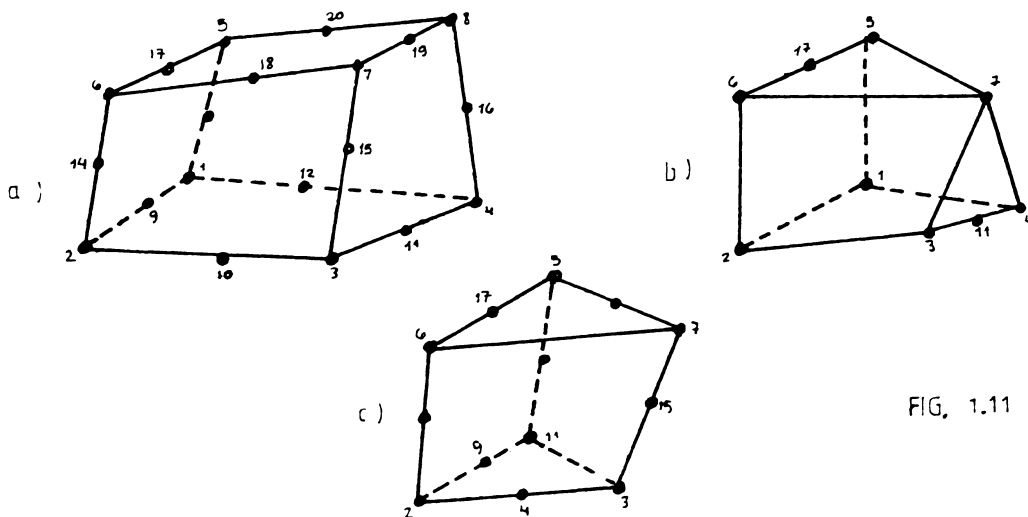


FIG. 1.11

1.2.6.3. Prisma triunghiulară. Prisma triunghiulară (fig. 1.12) este o combinație de triunghiuri cu dreptunghiuri (deci un element de recordare), iar funcțiile de interpolare rezultă ca niște combinații convenabile între L_1, L_2, L_3 și polinomul Lagrange în direcția ξ .

Astfel, de exemplu, pentru :

- elemente liniare (fig. 12.a) : $N_1 = \frac{1}{2}L_1(1 + \xi_0)$

- elemente pătratice (fig. 12.b) :

$$N_1 = \frac{1}{2}L_1(1 + \xi)(2L_1 - 2 + \xi)$$

$$N_{10} = 2L_1L_2(1 + \xi), \quad N_7 = L_1(1 - \xi^2)$$

în colțuri, la mijlocul laturilor triunghiului și, respectiv,

a dreptunghiului.

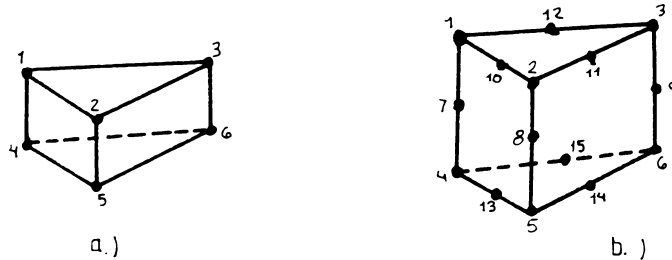


FIG 1.12

1.2.7. Elemente izoparametrice. Au apărut ca urmare a necesității extinderii tipurilor de elemente finite pentru cazul problemelor ce nu puteau fi soluționate numai cu cele cîteva forme analizate anterior. Aceste elemente, așa numite "elemente de bază", au totdeauna laturile drepte, iar sistemul lor de coordonate locale $-\xi, \eta, \zeta$ sau L_1, L_2, L_3, L_4 - este totdeauna un sistem cartezian, în timp ce, uneori, sînt necesare și elemente cu marginile curbe. Pentru a obține aceste elemente noi, s-a imaginat un mod de a transforma punct cu punct elementele de bază în elementele curbe căutate. Din figura (1.13), care indică modul în care se efectuează această operație, se vede că rezultă și o transformare a sistemului de coordonate, ce devin curbilini.

Așa după cum s-a văzut, variațiile unei funcții necunoscute pot fi prezentate cu ajutorul funcțiilor de interpolare și a valorilor ei (și uneori și a derivatelor sale) în nodurile elementului. Această observație a generat ideea că relația de transformare dintre coordonatele carteziene x_1 și cele curbilini ale noilor elemente ξ_1 poate fi pusă sub formă :

$$\begin{aligned} x_1 = x &= [N^0] \{ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_5 \}^T \\ x_2 = y &= [N^0] \{ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_5 \}^T \\ x_3 = z &= [N^0] \{ \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_5 \}^T \end{aligned}$$

în care funcțiile de interpolare trebuie să fie exprimate în sistemul de coordonate local ξ_1 , $N = N(\xi_1)$ pentru a rezulta întotdeauna relația formală necesară : $x_1 = f(\xi_1)$.

În unele cazuri, pentru exprimarea geometriei elemen-

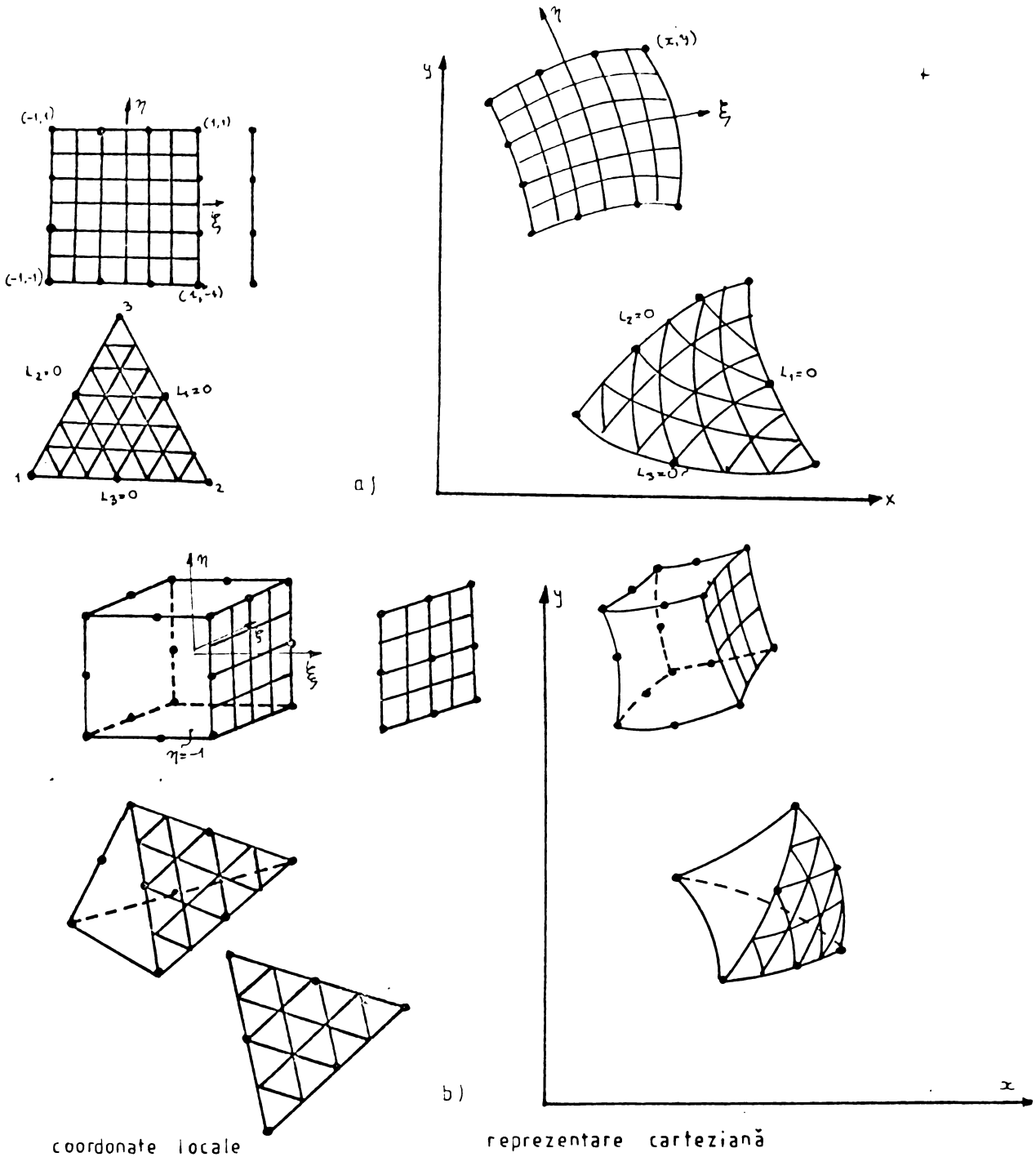


FIG. 1.13

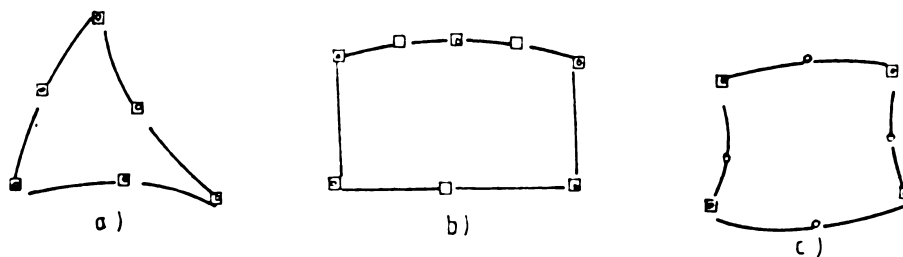


FIG. 1.14

o punct de definire a geometriei
 punct de definire a variației câmpului deplasărilor

mentului se folosesc parametrii (respectiv coordonatele) nodurilor care se utilizează și pentru a exprima câmpul deplasărilor (fig. 1.14). Având deci aceiași parametri, funcțiile de interpolare sînt egale :

$$N^*(\xi) = N(\xi)$$

iar elemente se numesc izoparametrice. În figura 1.14.a, se vede că elementul are marginile parabole definite de cele trei puncte, iar câmpul deplasărilor este tot pătratic.

Dacă pentru definirea geometriei elementului sînt utilizate mai puține noduri decît sînt necesare pentru exprimarea câmpului deplasărilor, atunci elementele sînt subparametrice. Acesta este cazul cel mai des întîlnit în aplicațiile practice, întrucît de obicei, numai una dintre laturi trebuie să fie eventual curbă, celelalte putînd fi linii drepte. Cum în acest caz numărul parametrilor se rezumă la coordonatele colțurilor sale, un astfel de element (fig. 1.14.b) este de preferat unuia care ar avea toate laturile curbe, chiar dacă acest lucru nu este neapărat necesar, întrucît numărul gradelor de libertate se micșorează substanțial pe ansamblul structurii.

În situația inversă, cînd geometria e mai complexă decît câmpul deplasărilor, fiind deci necesare pentru determinarea ei de mai mulți parametri - și prin urmare de mai multe noduri - elementele se numesc supraparametrice (fig. 1.14.c). Acesta este un caz mult mai rar întîlnit.

În literatura de specialitate toate aceste trei tipuri de elemente se cunosc sub denumirea generică de elemente izoparametrice, chiar dacă - așa cum se întîmplă cel mai frecvent - este vorba de fapt de elemente subparametrice sau chiar supraparametrice.

De asemenea, în cazul elementelor izoparametrice propriu-zis funcțiile de interpolare utilizate pentru exprimarea câmpului deplasărilor în element - pe de o parte - și a geometriei acestuia - pe de alta - sînt identice, funcțiile de interpolare mai sînt cunoscute și sub denumirea de funcții izoparametrice.

Marele avantaj al elementelor izoparametrice - în accepțiunea lor generală - este posibilitatea pe care ele o creează de a se determina toate proprietățile lor pe "elementele de bază" (adică cele a căror laturi sau suprafețe coincid cu

axele, sau suprafețele, de coordonate ale sistemului local omogen $L_1 = 0$ - în cazul triunghiului sau tetraedrului - sau ale sistemului de coordonate normalizat $\xi_1 = \eta_1$ - în cazul dreptunghiului sau paralelipipedului) urmînd ca apoi, cu ajutorul relațiilor de transformare, să fie transpuse în spațiul real.

În cele ce urmează, nu se vor lua toate tipurile de elemente generate, de tipul celor analizate anterior, căci prevalîndu-se de teoremele care arată că dacă elementele de bază sînt conforme, conforme sînt și elementele derivate, se poate trage concluzia că totalitatea formulelor anterioare este valabilă atît pentru exprimarea formei elementelor, cît și pentru cea a deplasărilor lor interioare în toate cazurile.

Ca exemplu, redăm formulele pentru cazul triunghiului cubic rectiliniu subparametric ($N' < N$) (fig. 1.15a) sau curbiliniu, izoparametric, ($N' = N$) deci laturile sînt parabole cubice, (fig. 1.15b) al cărui câmp al deplasărilor poate fi exprimat în funcție de valorile sale în cele zece noduri ale elementului.

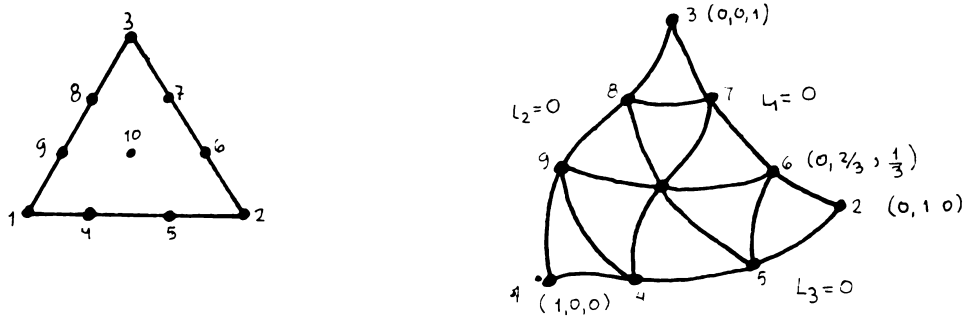


FIG.1.15

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ \dots \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_9 & x_{10} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_9 & y_{10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & & u_9 & u_{10} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1(3L_1-1)(3L_1-2)/2 \\ L_2(3L_2-1)(3L_2-2)/2 \\ L_3(3L_3-1)(3L_3-2)/2 \\ 9L_1L_2(3L_1-1)/2 \\ 9L_1L_2(3L_2-1)/2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 27 L_1 L_2 L_3 \end{pmatrix}$$

Trebuie remarcat că, așa cum se poate demonstra și pentru cazul general :

$$\sum N_1 = \frac{2}{2} \left[(L_1+L_2+L_3)^3 - (L_1+L_2+L_3)^2 \right] + (L_1+L_2+L_3) = 1$$

iar pentru elementele subparametrice funcțiile de interpolare ce determină geometria pot fi exprimate ca o combinație liniară a celor definite pentru câmpul deplasărilor, adică :

$$N_i = \sum C_{ij} N_j$$

Modul de construcție a elementelor izoparametrice obișnuite în care intervin drept parametri necunoscuți numai valorile funcției în nodurile elementului, conferă acestui tip de element dezavantajul de-a nu putea asigura continuitatea primelor derivate de-a lungul laturilor (suprafețelor) dintre elemente și ca atare nici a eforturilor ce se produc. Comoditatea și în același timp corectitudinea modulului de calcul a volumului (sau ariei) elementare, care, intervenind, după cum vom vedea, în toate formulele de evaluare a proprietăților elementare, constituie factorul determinant al convergenței, a făcut însă ca acest tip de elemente - și în special cele liniare cu unele amendamente - să capete o extindere extrem de mare în aplicațiile practice.

Pentru cazul patrulaterului corecția introdusă constă din adăugarea unor grade de libertate suplimentare care să permită o reprezentare exactă a deformației sale din încovoiere pe care elementul normal nu-l poate asigura (fig. 1.16).

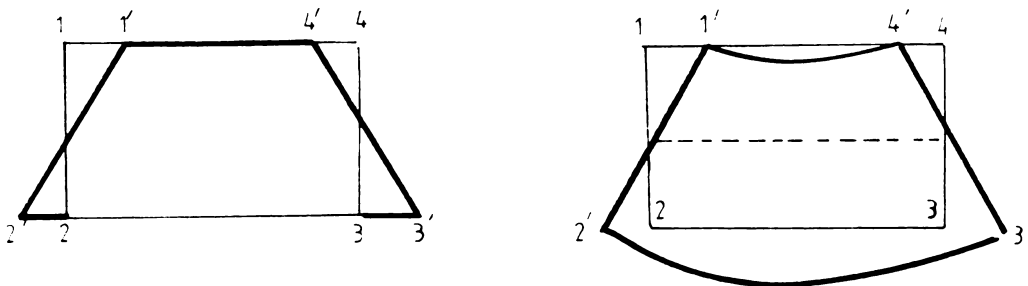


FIG. 1.16

Atunci $u_i = [N] \{ \delta_i \}$ devine :

$$u = \sum_1^4 N_1 u_1 + (1 - \xi^2) \alpha_1 + (1 - \eta^2) \alpha_2$$

$$v = \sum_1^4 N_1 v_1 + (1 - \xi^2) \alpha_3 + (1 - \eta^2) \alpha_4$$

Iar pentru cazul dreptunghiului se poate vedea că nu va mai trebui introdus și termenul cu $(1 - \xi^2)$.

Noile grade de libertate constituie de fapt niște moduri de deformare incompatibile ; cum însă energia de deformare asociată lor este practic identică cu cea produsă de o deformare constantă este evident că ele nu modifică într-un mod esențial eforturile determinate prin intermediul elementelor conform și ca stare nu aduc decât o îmbunătățire evidentă a câmpului deplasărilor (fig. 1.15.b).

1.2.8. Simetria axială. Sînt multe probleme de analiză a tensiunilor de o considerabilă importanță practică legate de

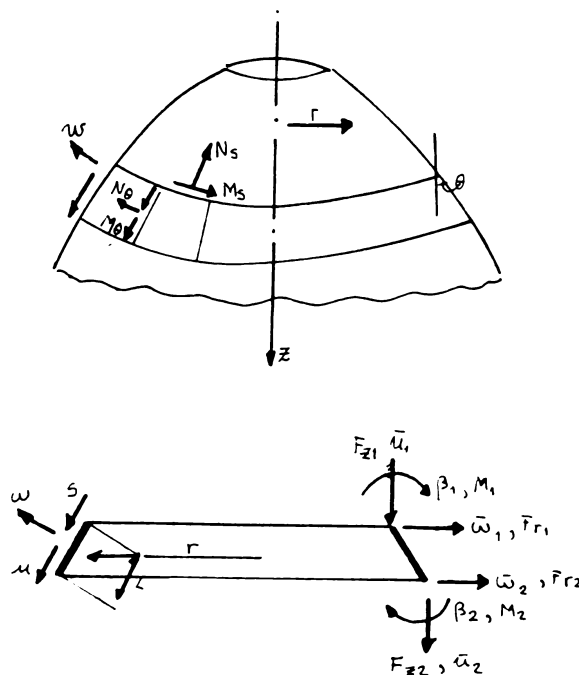


FIG. 1.17

structurile ce prezintă simetrie axială, cum sînt : vasele de presiune, virfuri de rachete, turmuri de răcire, părți de mașini ce pistoane, cupole, casele de apă, și altele, unde stit

forma, cît și sarcinile aplicate sînt axial simetrice. Folosind elemente de revoluție, ca cele arătate în figura 1.17, aceste probleme pot fi analizate folosind metoda elementelor finite.

Astfel de probleme axial simetrice pot fi separate în două categorii principale : plăci de revoluție în care grosimea structurii este mică comparativ cu diametrul și corpuri solide de revoluție unde structura e groasă în comparație cu diametrul ei.

1.2.8.1. Solide de revoluție. Solidele axial simetrice și corpurile de revoluție cu pereți groși pot fi idealizate prin elemente finite de revoluție. Fiecare element constituie un inel solid, a cărui secțiune transversală este configurația elementului particular ales. Au fost adoptate configurații rectangulare, triunghiulare și patrulaterale.

Deoarece simplității și adaptabilității lui, atenția e concentrată asupra triunghiului de revoluție. Acest element a fost inițial introdus de Clough și Rashid și aplicat de Wilson la soluția vîrfului de rachetă supus unor sarcini de presiune și temperatură.

Figura 1.18 arată o secțiune printr-un solid axial simetric cu un element finit tipic, un inel cu trei noduri. Urmează derivarea matricei de tensiune și deformații și se vede că acest lucru se face la fel ca pentru elasticitatea plană a triunghiului. Deosebirea principală constă în numărul compo-

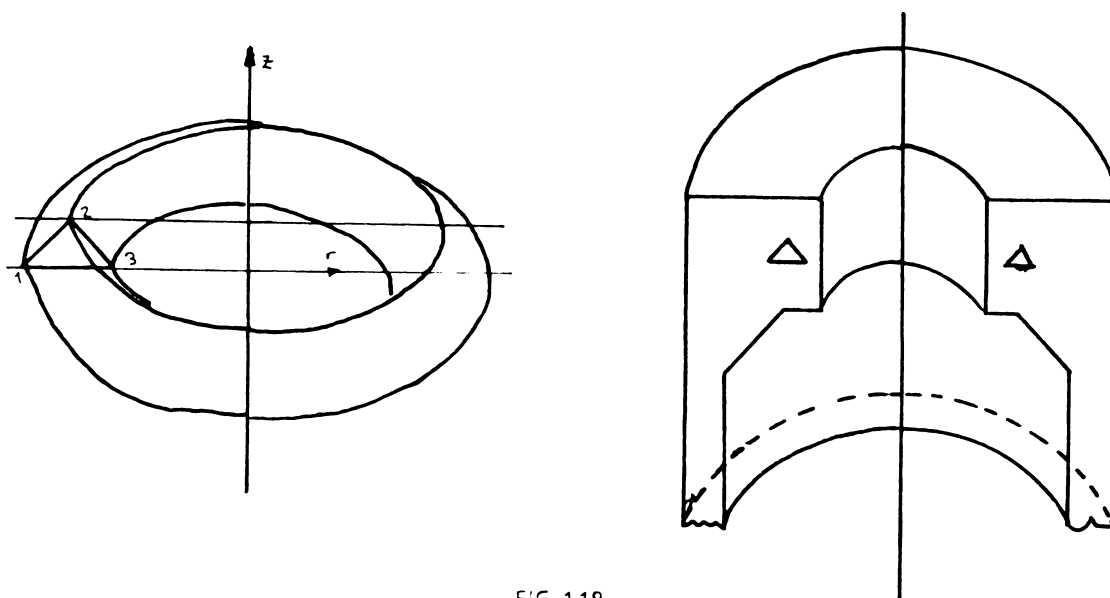


FIG. 1.18

mentelor tensiunilor : o componentă adițională, tensiunea tangențială, ce trebuie introdusă.

I.- Alegerea sistemului de coordonate și numerotarea nodurilor

Este convenabil să se utilizeze sistemul de coordonate cilindrice (r, z) și numerotarea nodurilor, 1, 2, 3, în sens antiorar. Deplasările nodale și vectorul forțelor sînt scriși:

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad F_1 = \begin{Bmatrix} F_{r1} \\ F_{z1} \end{Bmatrix}$$

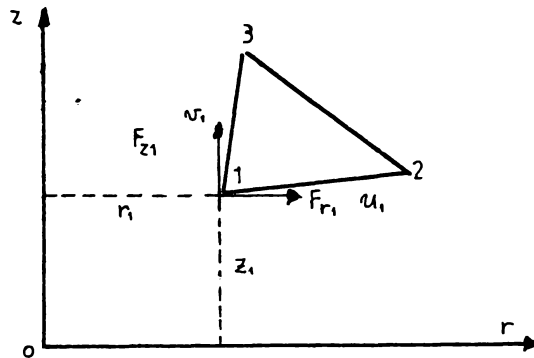


FIG. 1.19

unde F_r și u sînt în direcție radială, iar F_z și v sînt în direcția axială.

Deplasarea completă și vectorul forțelor pentru element pot fi scrise :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad F^e = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{r1} \\ F_{z1} \\ F_{r2} \\ F_{z2} \\ F_{r3} \\ F_{z3} \end{Bmatrix}$$

Fiecare din acest vector conține șase termeni, iar matricea de rigiditate $[K^e]$ este de 6×6 :

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (I)$$

II.- Alegerea funcției de deplasări $[f(r,z)]$ ce definește deplasarea $\{\delta(r,z)\}$ în fiecare punct din element. Pentru un solid axial simetric, deplasarea fiecărui punct poate fi obținută considerînd deplasările radiale și axiale (u, v); nu există deplasări pe direcția tangențială. Acest element, ca și

elasticitatea plană a triunghiului, are 6 grade de libertate, deci avem 6 coeficienți necunoscuți ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$) în reprezentarea polinomială a deplasărilor permise.

Cea mai simplă reprezentare este dată de două polinoame liniare :

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \end{aligned} \quad (51)$$

Pentru că ele sînt liniare în r și z este asigurată continuitatea deplasărilor de-a lungul interfețelor dintre elementele alăturate.

Transcriind ecuația (51) într-o formă matriceală :

$$\{\delta(r,z)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

$$\text{sau : } \{\delta(r,z)\} = [f(r,z)] \{\alpha\} \quad (II)$$

III.- Exprimarea stării deplasării în element $\{\delta(r,z)\}$ în funcție de deplasările nodale $\{\delta^e\}$. Această etapă se realizează prin înlocuirea valorilor coordonatelor nodurilor în relația (II), și, rezolvînd pentru $\{\alpha\}$ necunoscute :

$$\begin{aligned} \text{Pentru nodul 1, } \{\delta_1\} &= \{\delta(r_1, z_1)\} = [f(r_1, z_1)] \{\alpha\} \\ \text{Înlocuind pentru } [f(r_1, z_1)] &\text{ din relația (52) :} \end{aligned}$$

$$\{\delta_1\} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_1 & z_1 \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (53a)$$

similar pentru nodurile 2 și 3

$$\{\delta_2\} = \begin{bmatrix} 1 & r_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_2 & z_2 \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (53b)$$

$$\{\delta_3\} = \begin{bmatrix} 1 & r_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (53c)$$

Pentru element, ca întreg, aceste matrice pot fi combinate pentru a da :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

care pot fi scrise ca :

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\} \quad (55)$$

Coefficienții necunoscuți ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$) sînt acum determinați din relația (54) prin inversarea matricii [A], pentru a obține :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (56)$$

Inversarea matricii [A] este prezentată în relația (57), fiind obținută în același mod ca pentru elementul triunghiular. S-a obținut astfel o relație între coeficienții necunoscutei $\{\alpha\}$ și deplasările nodale $\{\delta^e\}$.

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \times \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} r_2 z_3 - r_3 z_2 & 0 & -r_1 z_3 + r_3 z_1 & 0 & r_1 z_2 - r_2 z_1 & 0 \\ z_2 - z_3 & 0 & z_3 - z_1 & 0 & z_1 - z_2 & 0 \\ r_3 - r_2 & 0 & r_1 - r_3 & 0 & r_2 - r_1 & 0 \\ 0 & r_2 z_3 - r_3 z_2 & 0 & -r_1 z_3 + r_3 z_1 & 0 & r_1 z_2 - r_2 z_1 \\ 0 & z_2 - z_3 & 0 & z_3 - z_1 & 0 & z_1 - z_2 \\ 0 & r_3 - r_2 & 0 & r_1 - r_3 & 0 & r_2 - r_1 \end{bmatrix}$$

unde $2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2 \times \text{aria triunghiului.}$

Folosind relația (II), pot fi acum determinate deplasările în orice punct din element în funcție de deplasările nodale $\{\delta^e\}$:

$$\begin{aligned} \{\delta(r, z)\} &= [f(r, z)] \{\alpha\} \\ \{\delta(r, z)\} &= [f(r, z)] [A]^{-1} \{\delta^e\} \end{aligned} \quad (III)$$

IV.- Stabilirea relației între deformațiile specifice $\{\epsilon(r, z)\}$ în orice punct din element, deplasările $\{\delta(r, z)\}$ și apoi

deplasările nodale $\{\delta^e\}$. Folosind teoria elasticității, cele patru componente ale deformațiilor pentru un solid axial simetric sînt :

$$\{\varepsilon(r,z)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

unde ε_r (radială), ε_z (axială), ε_θ (circumferențială) sînt deformațiile liniare, și γ_{rz} este deformația unghiulară. Teoria elasticității dă următoarele relații între deformațiile ε și deplasările u și v :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad , \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad (59)$$

Înlocuind u, v din relația (51), rezultă :

$$\varepsilon_r = \alpha_2 \quad , \quad \varepsilon_z = \alpha_6 \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{\alpha_1}{r} + \alpha_2 + \alpha_3 \frac{z}{r} \quad , \quad \gamma_{rz} = \alpha_3 + \alpha_5$$

Astfel, sub forma matriceală :

$$\{\varepsilon(r,z)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 1 & z/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (60)$$

sau simplu : $\{\varepsilon(r,z)\} = [C] \{\alpha\}$ (61)

Înlocuind $\{\alpha\}$ din relația (56), rezultă :

$$\{\varepsilon(r,z)\} = [C][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (62)$$

sau $\{\varepsilon(r,z)\} = [B] \{\delta^e\}$ (IV)

unde $[B] = [C][A]^{-1}$. Matricea $[B]$ este o matrice de dimensiune 4×6 și este prezentată în relația (63) :

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} z_2 - z_3 & 0 & z_3 - z_1 & 0 & z_1 - z_2 & 0 \\ 0 & r_3 - r_2 & 0 & r_1 - r_3 & 0 & r_2 - r_1 \\ \frac{r_2 z_3 - r_3 z_2}{r} & & \frac{-r_1 z_3 + r_3 z_1}{r} & & \frac{r_1 z_2 - r_2 z_1}{r} & \\ + (z_2 - z_3) & 0 & + (z_3 - z_1) & 0 & + (z_1 - z_2) & 0 \\ + \frac{z}{r}(r_3 - r_2) & & + \frac{z}{r}(r_1 - r_3) & & + \frac{z}{r}(r_2 - r_1) & \\ r_3 - r_2 & z_2 - z_3 & r_1 - r_3 & z_3 - z_1 & r_2 - r_1 & z_1 - z_2 \end{bmatrix}$$

(63)

unde $2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}$

V.- Relații între tensiunile interne $\{\sigma(r, z)\}$, deformațiile $\{\epsilon\}$ și deplasările nodale. Componentele tensiunii pentru solidul axial simetric sînt

$$\{\sigma(r, z)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (64)$$

unde σ_r (radial), σ_z (axial), σ_θ (circumferențial) sînt tensiunile normale, iar τ_{rz} este tensiunea tangențială.

Teoria elasticității arată că deformațiile sînt legate de tensiuni astfel :

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_\theta}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_r}{E} + \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_\theta}{E} \\ \epsilon_\theta &= -\nu \frac{\sigma_r}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_\theta}{E} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{G} \end{aligned} \quad (65)$$

Observînd c\u0103 $G = 2G(1 + \nu)$, ecuația (65) poate fi rezolvată pentru a da tensiunile în funcție de deformații în relația (66) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (66)$$

sau, mai simplu : $\{\sigma(r,z)\} = [D] \{\epsilon(r,z)\}$ (67)
unde $[D]$ este matricea de elasticitate pentru acest caz particular.

Inlocuind in relația (66) expresiile lui $\{\epsilon(r,z)\}$ din relația (IV), relația dintre tensiuni și deplasările nodale este :

$$\{\sigma(r,z)\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (V)$$

VI.- Inlocuirea tensiunilor interne $\{\sigma(r,z)\}$ cu forțele nodale static echivalente $\{F^e\}$, stabilirea relațiilor între forțele nodale, deplasările $\{\delta^e\}$, iar apoi obținerea matricii de rigiditate a elementului.

$\{F^e\} = \left[\int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right] \{\delta^e\}$ (VI)
unde : $\left[\int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right]$ este matricea de rigiditate $[K^e]$.
Integrarea se face pe volumul elementului, iar pentru un corp de revoluție :

$$d(\text{vol}) = 2\pi r dr dz$$

$$\text{de urmă } [K^e] = \iint [B]^T [D] [B] 2\pi r d_r d_z \quad (68)$$

Matricele $[B]$ și $[D]$ în acest caz au fost deja obținute. Spre deosebire de cazul elasticității plane, matricea $[B]$ depinde de coordonatele r și z . Trebuie apoi obținute operațiile matricelor din relația (68), iar fiecare termen integrat, pentru a obține $[K^e]$. Pentru a evita acest procedeu greoi, s-a obișnuit să se folosească o aproximație simplă ce dă rezultate bune. Aceasta înseamnă determinarea matricii $[B]$ pentru un punct centroidal din element, definit de coordonatele (\bar{r}, \bar{z}) , unde $\bar{r} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$ și $\bar{z} = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

Astfel, matricea de rigiditate devine simplă :

$$[K^e] = 2\pi [B]^T [D] [B] \bar{r} \Delta \quad (69)$$

unde Δ este aria triunghiului. In matricea $[B]$, valorile \bar{r} și

\bar{x} și \bar{z} sunt înlocuite prin r și z , care dau matricea constantă pentru orice element particular.

Tripul produs $[B]^T[D][B]$ în relația (69) nu a fost efectuat algebric ca în cazul problemelor de elasticitate plană.

VII.- Stabilirea matricei tensiuni-deplasări $[H]$. Etapa finală este determinarea tensiunilor în orice punct din element în funcție de deplasările nodale a elementului. Acest lucru este permis de relația dată în relația (V).

$$\{\sigma(r,z)\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (V)$$

sau
$$\{\sigma(r,z)\} = [H]\{\delta^e\} \quad (VII)$$

Ca în pasul (VI), dacă valorile centroidale (\bar{r}, \bar{z}) sunt substituite în matricea $[B]$, sunt obținute cele patru componente ale tensiunii în centrul elementului.

1.3. Teoria echivalențelor. Ideea înlocuirii structurii reale cu o structură echivalentă nu este, desigur, nouă. Deja în secolul al XVIII-lea, Euler a propus înlocuirea unei membrane printr-un sistem de fire flexibile ortogonale. După aceea, în anul 1774 Bernoulli a extins analogia lui Euler la problemele plăcilor, introducând analogia rețelelor de grinzi, ortogonale.

În anul 1920, Timoshenko a prezentat metoda lui pentru calculul barelor cu modelul format din arce și console. În anul 1941 Hrennikoff a aproximat un corp elastic printr-o structură articulată spațială. În anul 1956 Rjonițin a modelat medii continue printr-un sistem de bare coplanare și spațiale și a găsit condițiile de echivalență între corpurile reale și modelele înlocuitoare.

Mai târziu, după aproape un deceniu de studiu și verificare, în anul 1970 L. Absi a publicat rezultatele lui sub titlul "Teoria echivalențelor și aplicarea ei la diverse probleme de elasticitate".

Teoria echivalențelor introdusă de Absi a condus la un procedeu de calcul intrând în cadrul metodelor generale și familiare de rezolvare a problemelor de elasticitate bi și tri-dimensionale. Aplicarea eficientă a analizei rețelelor de bare echivalente este foarte sigură, datorită funcțiilor exacte de deplasări sau tensiuni ale elementelor de bare, ce sunt bine-

cunoscute.

Principala dificultate în teoria echivalențelor este datorită efectului coeficientului lui Poisson, care nu influențează au nimic calculul sistemului de bare unidirecționate, dar influențează considerabil calculul rețelei de bare, care simulează corpul studiat. Datorită posibilităților mari pe care ni le oferă tehnica modernă a calculatoarelor, teoria echivalențelor ne permite să rezolvăm mai ușor problemele ca pînă acum, deoarece nu au avut soluție analitică.

Teoria echivalențelor constă în a înlocui domeniul studiat cu un domeniu echivalent, cu aceleași condiții de legături și de sarcini, la care studiul este foarte ușor și se deduce soluția din primul plecînd din rezultate găsite în al doilea. Tensiunile și deformațiile dintr-un corp continuu oarecare pot fi determinate plecînd de la un model echivalent mult mai accesibil pentru calcul și care se pretează pe calculator.

Teoria echivalențelor, ca metodă de calcul a mecanicii construcțiilor, permite studierea unui corp supus unei încărcări, prin înlocuirea acestuia cu un alt corp fictiv mai ușor de calculat.

Singura condiție de echivalență între corpul fictiv și cel real este aceea a energiei de deformație.

Considerînd un domeniu D elastic ocupînd parte din spațiu V , supus unei încărcări provenite dintr-un potențial ϑ , potențialul total π al sistemului (corpul + încărcările), presupus conservativ, este :

$$\pi = U + \vartheta$$

unde U este potențialul de deformație al corpului considerat. Notînd prin U_0 (fig. 1.20) densitatea de potențial pe unitate de volum, expresia de mai sus se scrie :

$$\pi = \int_V U_0 dV + \vartheta$$

Rezolvarea acestui sistem revine la determinarea unui câmp de deformație compatibil cu legăturile corpului și minimizînd funcția π ($\delta \pi = 0$). Se observă că dacă corpul este supus la o încărcare a cărei intensitate este independentă de starea de deformație a corpului, funcția ϑ se scrie :

$$\vartheta = - \int_S \bar{p} \cdot \vec{u} \, d_s - \Sigma \vec{F} \cdot \vec{u} - \int_V \vec{F} \cdot \vec{u} \, d_v$$

- unde :
- \vec{F} : sînt sarcini concentrate aplicate pe suprafața exterioară S a corpului considerat.
 - \bar{p} : sarcini distribuite pe suprafață.
 - \vec{F} : sarcini pe unitatea de volum.
 - \vec{u} : deplasarea punctului de aplicație a sarcinii considerate.

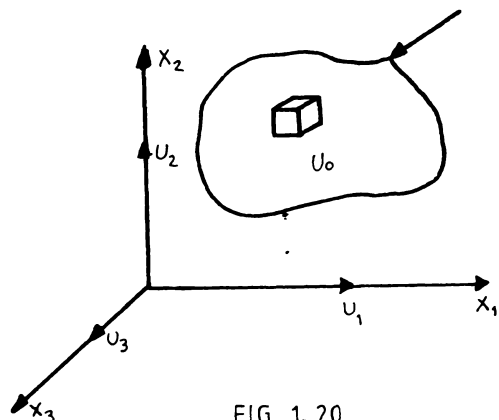


FIG. 1.20

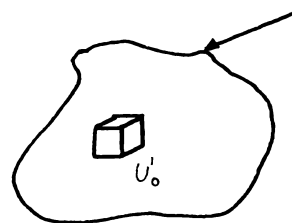


FIG. 1.21

Fie unul din cele două corp ocupînd același volum ca și primul, supus aceleiași încărcări (fig. 1.21). Notînd cu π' potențialul total, vom găsi cîmpul de deformație minimalizînd π' ($\delta\pi' = 0$). Notînd cu U_0 densitatea de energie de deformație, potențialul total π' al sistemului se scrie :

$$\pi' = \int_V U_0' \, d_v + \vartheta$$

Se presupune că $\delta\pi = \delta\pi'$

În acest caz, cele două sisteme sînt echivalente. Ele admit același cîmp de deformație. Într-adevăr, cîmpul de deformație din primul sistem e același pentru al doilea sistem :

$$\delta\pi = \delta\pi' = 0$$

Așa se poate reduce studiul unui corp încărcat, la cel al unui corp echivalent avînd legi de comportare diferite.

Iată, în particular, echivalența în cele două cazuri următoare :

- Cele două densități de deformație sînt egale :

$$U_0 = U_0'$$

- Cele două densități diferă cu o anumită cantitate :

$$U_0 = U_0' + u_0$$

$$\text{Astfel c\^a : } \int_V u_0 \, dv = 0 \text{ sau } \delta \int_V u_0 \, dv = 0$$

$$\text{In acest caz, avem : } \delta \int_V U_0 \, dv = \delta \int_V U_0' \, dv$$

$$\text{sau : } \delta \pi = \delta \pi'$$

Teoria echivalen\^telor se aplic\^a tot a\^sa \^si cu : $\pi = ka\pi'$, unde "a" este un coeficient de echivalen\^ta, acela\^si dac\^a cele dou\^a corpuri nu ocup\^a acela\^si volum. Intr-adev\^ar, identitatea $\delta\pi = \delta\pi' = 0$ este verificat\^a.

1.3.1. Energia de deforma\^tie elastic\^a. In teoria echivalen\^telor energia de deforma\^tie presupune inlocuirea studiului corpului continuu (cum ar fi pl\^aci plane, pl\^aci curbe sau corpuri masive), print-run corp discret (re\^tea de bare, sistem de grinzi). Modelele echivalente alese s\^int presupuse c\^at mici. Se poate deci considera c\^a c\^ampul deforma\^tiilor alese r\^am\^ine uniform in interiorul modelului de baz\^a.

Caracteristicile de rigiditate ale modelului studiat s\^int determinate pe baza identific\^arii expresiilor poten\^tialelor deforma\^tiilor inmagazinate in cele dou\^a corpuri : real \^si fictiv. De aceea, se vor studia, in cele ce urmeaz\^a, diferite expresii pentru energia deforma\^tiilor corpurilor elastice.

Abord\^and problema echivalen\^tei dintre un corp continuu \^si unul discret, in cadrul elasticit\^atii liniare \^si presupun\^d modele echivalente elementare infinite mici, determinarea caracteristicilor acestora se face identific\^and expresiile poten\^tialelor ($U_0 = U_0'$).

Fie un corp continuu inc\^arc\^at (fig. 1.22). Not\^am prin, U_K componenta deplas\^arii \vec{u} dintr-un sistem de referin\^ta arbitrar $x_K(x_1, x_2, x_3)$. Tensorul de deforma\^tie "e_{ij}" este definit prin expresia :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right)$$

Densitatea de energie de deforma\^tie U_0 este dat\^a din teoria elasticit\^atii prin rela\^tia :

$$U_0 = \frac{1}{2} \lambda (\epsilon_{ij})^2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2} \lambda \left[\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \right]^2 + \mu \left[(\epsilon_{11})^2 + (\epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{33})^2 + 2(\epsilon_{23})^2 + 2(\epsilon_{12})^2 + 2(\epsilon_{13})^2 \right] \quad (70)$$

unde λ și μ sînt coeficienții lui Lamé.

Se exprimă relațiile dintre modulul de elasticitate "E" și coeficientul lui Poisson "ν" în expresiile :

$$\mu = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{2(1+\nu)}$$

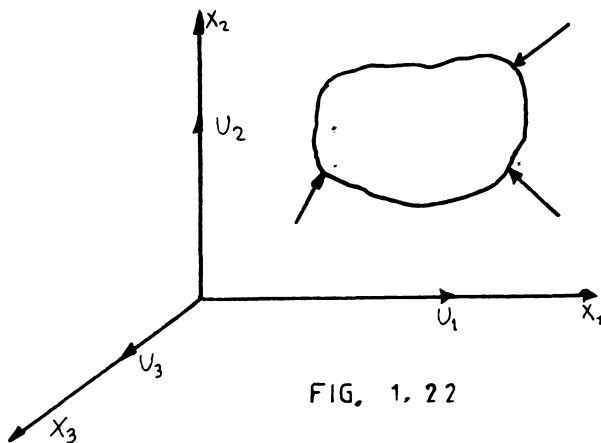


FIG. 1. 22

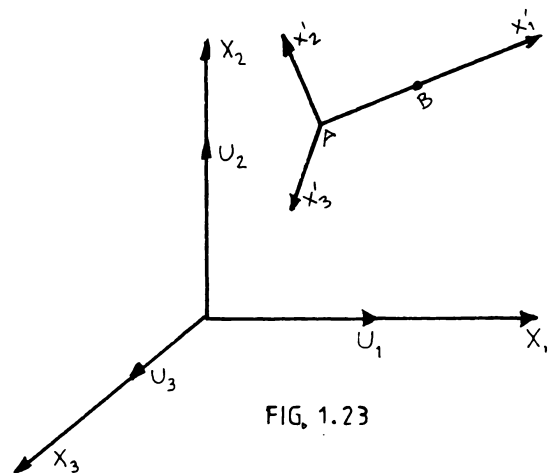


FIG. 1. 23

Pentru analiza problemelor elasticității plane sau tridimensionale se pot adopta diferite modele echivalente. Pentru a ușura expunerea, s-a considerat cel dintâi un sistem constituit numai de bare articulate.

Fie o bară AB de lungimea l supusă la un efort normal N.

$$N = ES \frac{\Delta}{l} = ES\epsilon$$

unde : Δ este lungimea totală,
 ϵ este deformația specifică.

Energia de deformație W' corespunzătoare se scrie sub forma :

$$W' = \frac{1}{2} N \Delta = \frac{1}{2} ES l \epsilon^2 = \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 \quad (71)$$

unde parametrul caracteristic ρ este prin definiție

$$\rho = ES l$$

Notăm prin α_K cosinuzii directori ai barei AB în re-

$$\varepsilon = \alpha_i \alpha_j e_{ij}$$

Atunci expresia (71) se scrie

$$W^* = \frac{1}{2} \rho (\alpha_i \alpha_j e_{ij})^2 \quad (72)$$

Fie o bară AB de lungime l , căreia îi asociem un sistem de coordonate proprii X_K^i , unde X_1^i este dirijat după AB (fig. 1.23). Notăm prin u_1^i componenta lui \vec{u} după X_1^i și prin α_j cosinașii directori ai lui X_1^i . De unde : $u_1^i = \alpha_j u_j^i$.

Alungirea unitară ε a barei AB se scrie :

$$\varepsilon = \frac{\delta u_1^i}{\delta x_1^i} = \alpha_i \frac{\delta u_1^i}{\delta x_j^i} \cdot \frac{\delta x_j^i}{\delta x_1^i} = \alpha_i \alpha_j \frac{\delta u_1^i}{\delta x_j^i} = \alpha_i \alpha_j e_{ij} \quad (73)$$

Efortul normal N în AB este evident $N = ES\varepsilon$, de unde $N = ES\alpha_i \alpha_j e_{ij}$ și energia de deformare corespunzătoare este :

$$W^* = \frac{1}{2} N\varepsilon l = \frac{1}{2} ES l \varepsilon^2 \quad (74)$$

Dacă $\rho = ES l$ expresia devine :

$$W^* = \frac{1}{2} \rho \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \rho (\alpha_i \alpha_j e_{ij})^2$$

Presupunem ca bara AB este încastrată în A și că eplieăm în extremitatea liberă B o forță transversală F conținută în planul (X_1^i, X_2^i) . (fig. 1.24).

Deplasarea Δ care rezultă, este definită, după legile rezistenței materialelor prin :

$$F = \frac{3EI}{l^3} \Delta$$

unde I este momentul de inerție al barei AB după direcția X_3^i .

Energia de deformare cor spunzătoare este atunci :

$$W^* = \frac{1}{2} F\Delta = \frac{1}{2} \frac{3EI}{l} \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 \quad (75)$$

unde η este un parametru caracterizat de valoarea $\eta = \frac{3EI}{l}$.

Dacă secțiunea α suferă o rotație θ (fig. 1.25) conform relației (73) și presupunând că lungimea l este mică, avem :

$$BB^* = \frac{\delta u_2^i}{\delta x_2^i} l = \Delta + \theta l = \alpha_j \beta_i \frac{\delta u_1^i}{\delta x_j^i} l$$

unde
$$\frac{\Delta}{l} + \theta = \alpha_j \beta_i \frac{\delta u_i}{\delta x_j}$$

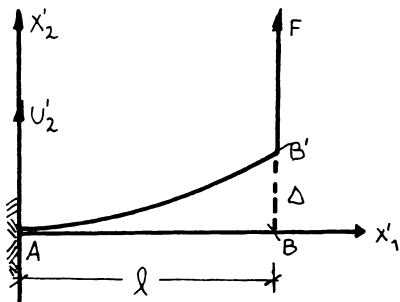


FIG. 1.24

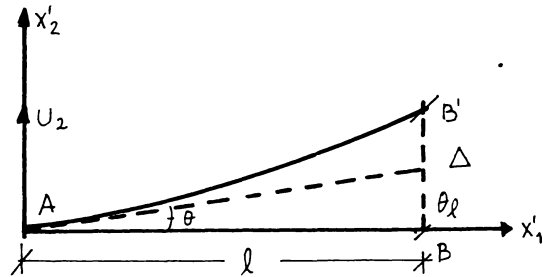


FIG. 1.25

atunci relația (75) devine :

$$W'' = \frac{1}{2} \eta (\alpha_i \beta_j \frac{\delta u_i}{\delta x_j} - \theta)^2 \quad (76)$$

Energia totală de deformare din bara AB va fi :

$$W_{AB} = W' + W''$$

Particularizându-se expresia (70) pentru câteva cazuri curent întâlnite, se obține :

*A

1.3.1.2. - Probleme de deformare plană :

$$U_0 = \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) \left[(e_{11})^2 + (e_{22})^2 \right] + \lambda e_{11} e_{22} + 2\mu (e_{12})^2$$

Energia deformațiilor modelului echivalent se determină prin suma energiilor deformațiilor barelor componente. De aceea, în cele ce urmează, se vor prezenta expresiile energiilor citorva tipuri de bare.

a.-) Bare articulate

$$W_{AB} = \frac{1}{2} P_{AB} (\alpha_i \alpha_j e_{ij})^2$$

în care : α_i, α_j - cosinusurile directe ale barei AB în raport cu sistemul de referință considerat.

$P_{AB} = ES l_{AB}$ - este caracteristica de rigiditate la întindere sau compresiune a barei AB și

unde :

S.- suprafața secțiunii transversale a barei

1.3.1.1. Probleme de tensiune plană:

$$U_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(e_{11})^2 + (e_{22})^2 + 2\nu e_{11} e_{22} + 2(1-\nu)(e_{12})^2 \right]$$

*A.

l_{AB} .- lungimea barei AB
 E .- modelul de elasticitate.

B.-) Bare încovoiate. Pornind de la relația bine cunoscută între momentele încovoietoare și curburile barelor supuse la încovoiere :

$$M_1 = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

în care : I.- momentul de inerție al secțiunii transversale a barei

w.- săgeata barei

X.- axa de referință locală a barei raportată la sistemul de referință general prin următoarele relații (fig. 1.26) :

$$\frac{\partial w}{\partial X} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha$$

energia de încovoiere a barei i-j rezultă :

$$\begin{aligned} U_1^{ij} &= \frac{1}{2} EI_1 \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \rho_{ij} = \frac{1}{2} EI l_{ij} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \rho_{ij} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right]^2 \end{aligned}$$

unde : l_{ij} = lungimea barei

ρ_{ij} = $EI l_{ij}$ este caracteristica de rigiditate la încovoiere a barei ij.

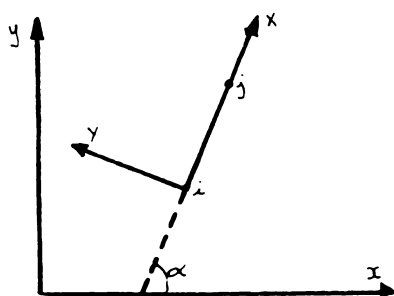


FIG. 1.26

C.-) Bare supuse la torsiune. Momentul de torsiune este exprimat prin relația :

$$M_t = \mu J \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (77)$$

vom avea :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} \right) \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (78)$$

Substituindu-se (78) în relația (77) rezultă :

$$\begin{aligned} w_{ij}^t &= \frac{1}{2} \mu J M_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right]^2 \end{aligned}$$

în care : J - momentul de inerție la torsiune al secțiunii transversale a barei :

$$\mu = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$P_{ij} = \mu J l_{ij}$ este caracteristica de rigiditate la torsiune a barei ij.

1.3.2. Starea plană de deformare. Presupunând că deformările sînt nule după direcția X_3 ($\epsilon_{13} = 0$), densitatea de energie de deformare U_0 devine :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})^2 + \mu \left[(\epsilon_{11})^2 + (\epsilon_{12})^2 + 2(\epsilon_{12})^2 \right] = \\ &= \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) \left[(\epsilon_{11})^2 + (\epsilon_{22})^2 \right] + \lambda \epsilon_{11} \epsilon_{22} + 2\mu (\epsilon_{12})^2 \end{aligned}$$

1.3.2.1. - Modelul dreptunghiular. Modelul dreptunghiular ABCD este constituit dintr-un sistem de bare articulate, iar centrul H este un nod rigid (fig. 1.27). Atunci asupra barelor situate pe conturul ABCD lucrează numai eforturi normale.

Energia de deformare în acest caz se scrie :

$$W_{AB}^0 = W_{CD}^0 = \frac{1}{2} P_{AB} (\epsilon_{11})^2$$

$$W_{AC}^0 = W_{BD}^0 = \frac{1}{2} P_{AC} (\epsilon_{22})^2$$

$$W_{AD}^0 = \frac{1}{2} P_{AD} \left[\epsilon_{11} \cos^2 \alpha + \epsilon_{22} \sin^2 \alpha + 2\epsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

$$U_{BC}^i = \frac{1}{2} P_{BD} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha - 2e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

In schimb elementele diagonale (HA, HB, HC, HD) sînt supuse la încovoiere. Cosinusii directori au valorile :

- Pentru HD	$\alpha_1 = \cos \alpha$	$\alpha_2 = \sin \alpha$
	$\beta_1 = -\sin \alpha$	$\beta_2 = \cos \alpha$
- Pentru HA	$\alpha_1 = -\cos \alpha$	$\alpha_2 = -\sin \alpha$
	$\beta_1 = \sin \alpha$	$\beta_2 = -\cos \alpha$
- Pentru HC	$\alpha_1 = -\cos \alpha$	$\alpha_2 = \sin \alpha$
	$\beta_1 = -\sin \alpha$	$\beta_2 = -\cos \alpha$

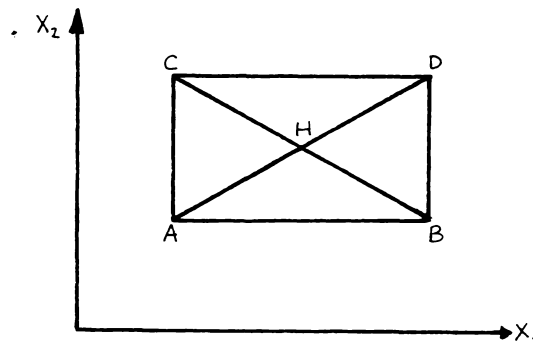


FIG. 1.27

Atunci energia de compresiune este egala cu :

$$U_{HA,HD}^i = \frac{1}{2} P_{AH} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha + e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2$$

$$U_{HB,AC}^i = \frac{1}{2} P_{HB} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha - e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2$$

La calculul energiei de flexiune la elementele diagonale echilibrul momentelor este (fig. 1.28) :

$$F_B : F_D = 0$$

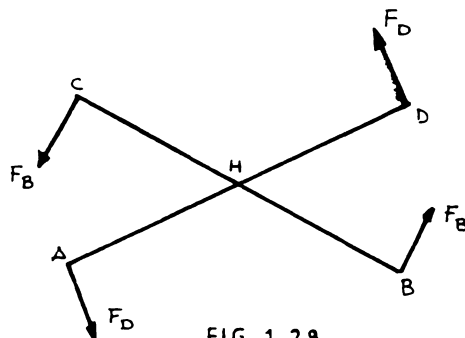


FIG. 1.28

unde după ecuația $F = \frac{3EI}{l^3} \Delta$ $\Delta_B + \Delta_D = 0$ (79)

sau din relația $(\frac{\Delta}{l} + \theta)_{HD} = (\alpha_j \beta_i \frac{\delta u_i}{\delta x_j})_{HD} =$
 $= \cos \alpha \left[- \sin \alpha \frac{\delta u_1}{\delta x_1} + \cos \alpha \frac{\delta u_2}{\delta x_1} \right] + \sin \alpha \left[- \sin \alpha \frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \cos \alpha \frac{\delta u_2}{\delta x_2} \right]$

$(\frac{\Delta}{l} + \theta)_{HB} = (\alpha_j \beta_i \frac{\delta u_i}{\delta x_j})_{HB} =$
 $= \cos \alpha \left[\sin \alpha \frac{\delta u_1}{\delta x_1} + \cos \alpha \frac{\delta u_2}{\delta x_1} \right] - \sin \alpha \left[\sin \alpha \frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \cos \alpha \frac{\delta u_2}{\delta x_2} \right]$

Luând în considerare elongațiile specifice ale barelor HD și HB obținem :

$(\frac{\Delta}{l})_{HD} - (\frac{\Delta}{l})_{HB} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\delta u_2}{\delta x_2} - \frac{\delta u_1}{\delta x_1} \right) =$
 $= 2 \sin \alpha \cos \alpha (e_{22} - e_{11})$ (80)

Combinând ecuațiile (79) (80), rezultă :

$(\frac{\Delta}{l})_{HD} = - (\frac{\Delta}{l})_{HB} = \sin \alpha \cos \alpha (e_{22} - e_{11})$

În consecință, energia de flexiune la elementele diagonale se scrie, conform cu ecuațiile (75) și (76)

$U_{HA,HC,HB,HD} = \frac{1}{2} \eta_{HA} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (e_{22} - e_{11})^2$

Notînd cu Δ elementul de volum (suprafață x grosime), delimitat de conturul ABCD, energia de deformare înmagazinată de acesta este :

$U = \Delta U_0 = 2 U_B + 2 U_{AC} + U_{AD} + U_{DC}$

Înlocuind valoarea lui U_0 , se obține :

$\Delta \left\{ \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) \left[(e_{11})^2 + (e_{22})^2 \right] + \lambda e_{11} e_{22} + 2 \mu (e_{12})^2 \right\} =$
 $= P_{AB} (e_{11})^2 + P_{AC} (e_{22})^2 + \frac{1}{2} P_{AD} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha + \right.$
 $\left. + 2 e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right] + \frac{1}{2} P_{BD} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha - \right.$

$$- 2 \sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha]^2$$

unde P_{AB} , P_{AC} , P_{HA} și η_{HA} au valorile :

$$P_{AB} = \frac{A}{2} (2\lambda + \mu - \mu \cot^2 \alpha)$$

$$P_{AC} = \frac{A}{2} (2\lambda + \mu - \mu \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

$$P_{HA} = \frac{A \mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$\eta_{HA} = \frac{A (\mu - \lambda)}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

Decă $\lambda = \mu$ adică $\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+\nu)}$ unde $\nu = 0,25$

In aceste condiții avem avea :

$$P_{AB} = P_{CD} = \frac{A}{2} \mu [3 - \cot^2 \alpha]$$

$$P_{AC} = P_{BD} = \frac{A}{2} \mu [3 - \operatorname{tg}^2 \alpha]$$

$$P_{AD} = P_{BC} = \frac{A \mu}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

1.3.2.2. Modelul romboidel. Cele patru noduri ale rombului ABCD (fig. 1.29) sînt articulate și centrul H este un nod rigid. Elemente aflate pe contur sînt supuse numai la eforturi normale.

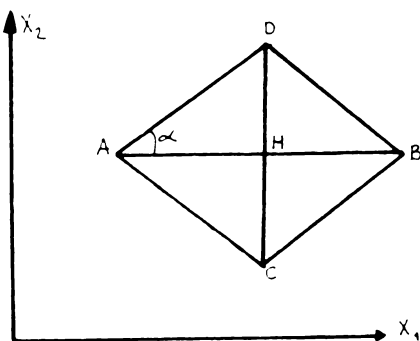


FIG. 1.29

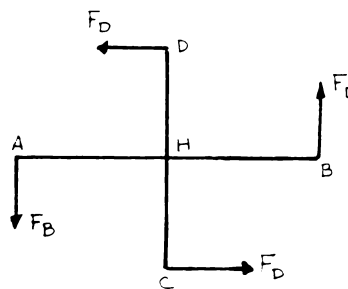


FIG. 1.30

Atunci energia de deformație este dată de relația (74).

$$U_{AD, BD}^* = \frac{1}{2} P_{AD} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha + 2e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2$$

$$U_{AC, BC}^* = \frac{1}{2} P_{AC} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha - 2e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2.$$

Elementele de pe diagonale sînt supuse la încovoiere oblică. De unde energia de compresiune se scrie :

$$U_{HA, HB}^* = \frac{1}{2} P_{HA} (e_{11})^2$$

$$U_{HC, HD}^* = \frac{1}{2} P_{HC} (e_{22})^2$$

Determinînd energia lor de flexiune. echilibrul de momente ne conduce la relația (1.30) :

$$1_{HB} F_B + 1_{HD} F_D = 0.$$

Schimbînd forțele F cu valorile lor date în relația :

$$F = \frac{3EI}{l^3} \Delta \text{ vom avea :}$$

$$\left(\frac{3EI}{l} \cdot \frac{\Delta}{l} \right)_{HB} + \left(\frac{3EI}{l} \cdot \frac{\Delta}{l} \right)_{HD} = 0$$

$$\text{sau :} \quad \left(\eta \frac{\Delta}{l} \right)_{HB} + \left(\eta \frac{\Delta}{l} \right)_{HD} = 0 \quad (81)$$

$$\text{din ecuația} \quad \frac{\Delta}{l} + \theta = \alpha_j \beta_1 \frac{\delta u_1}{\delta x_j}$$

$$\left(\frac{\Delta}{l} + \theta \right)_{HB} = \left(\alpha_j \beta_1 \frac{\delta u_1}{\delta x_j} \right)_{HB} = \frac{\delta u_1}{\delta x_2}$$

$$\left(\frac{\Delta}{l} + \theta \right)_{HD} = \left(\alpha_j \beta_1 \frac{\delta u_1}{\delta x_j} \right)_{HD} = \frac{\delta u_2}{\delta x_1} \quad (82)$$

Înlocuind : $\left(\frac{\Delta}{l} \right)_{HB} - \left(\frac{\Delta}{l} \right)_{HD} = 2 e_{12}$ și combinînd relațiile (81) și (82) vom obține :

$$\left(1 + \frac{\eta_{HB}}{\eta_{HD}} \right) \left(\frac{\Delta}{l} \right)_{HB} = - \left(1 + \frac{\eta_{HD}}{\eta_{HB}} \right) \left(\frac{\Delta}{l} \right)_{HD} = 2 e_{12}$$

Din relația (75) energia de flexiune va fi egală de :

$$W_{HA,HB}^* = 2 \eta_{HB} \left(\frac{\eta_{HD}}{\eta_{HD} + \eta_{HB}} \right)^2 (e_{12})^2$$

$$W_{HC,HD}^* = 2 \eta_{HD} \left(\frac{\eta_{HB}}{\eta_{HD} + \eta_{HB}} \right)^2 (e_{12})^2$$

Notăm prin A volumul definit de conturul ABCD, echivalența energiilor de deformație W dă, ce și în cazul dreptunghiului :

$$\begin{aligned} W &= AU_0 = W_{AB}^* + W_{CD}^* + W_{AD}^* + W_{CB}^* + W_{AC}^* + W_{BD}^* \\ &= A \left\{ \left(\frac{\lambda + \mu}{2} \right) \left[(e_{11})^2 + (e_{22})^2 \right] + \lambda e_{11} e_{22} + 2\mu (e_{12})^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} P_{AB} (e_{11})^2 + \frac{1}{2} P_{CD} (e_{22})^2 + \\ &\quad + P_{AD} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha + 2e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 + \\ &\quad + P_{AC} \left[e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha - 2e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 \end{aligned}$$

Schimbând termenii prin valorile lor și identificându-i în funcție de e_{ij} , vom avea :

$$P_{AD} = \frac{\lambda A}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$P_{HA} = \frac{A}{2} \left[\lambda + 2\mu - \lambda \cot^2 \alpha \right]$$

$$P_{HD} = \frac{A}{2} \left[\lambda + 2\mu - \lambda \tan^2 \alpha \right]$$

$$\frac{\eta_{HB} \eta_{HD}}{\eta_{HB} + \eta_{HD}} = \frac{A (\mu - \lambda)}{2}$$

Deci $\lambda = \mu$ adică $\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+\nu)}$ cu $\nu = \frac{1}{4}$

$$P_{AB} = A\mu [3 - \cot^2 \alpha]$$

$$P_{CD} = A\mu [3 - \tan^2 \alpha]$$

$$P_{AD} = \frac{A\mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

1.3.2.3.- Modelul triunghiular. Dacă se procedează ca în cazul precedent, vom vedea că triunghiul echilateral (fig. 1.31) este singurul model triunghiular posibil. Parametrul caracteristic ρ al unei din laturi poate fi obținut direct pornind din ecuațiile :

$$\rho_{AB} = A\mu [3 - \cot^2 \alpha]$$

$$\rho_{CB} = A\mu [3 - \tan^2 \alpha]$$

$$\rho_{AD} = \frac{A\mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

și numai când $\alpha = \pi/3$, vom avea $\rho_{AB} = \rho_{CB} = \rho_{AD} = \frac{8A\mu}{3}$ unde A este volumul delimitat de triunghiul ΔABC .

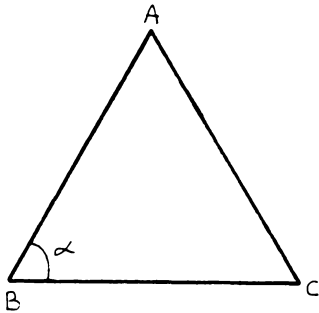


FIG. 1.31

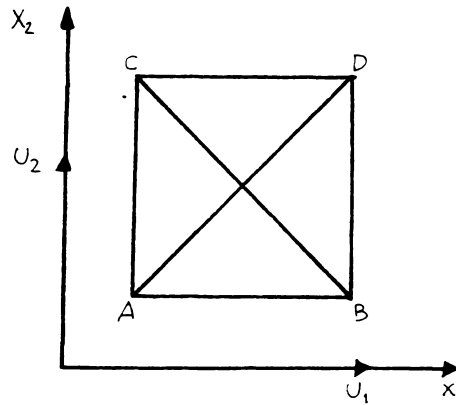


FIG. 1.32

1.3.2.4. Modelul pătrat. Din modelul pătrat (fig. 1.32) se deduce din modelul dreptunghiular făcând $\alpha = \frac{\pi}{4}$ în ecuațiile :

$$\rho_{AB} = \frac{A}{2} (2\lambda + \mu - \mu \cot^2 \alpha)$$

$$\rho_{AC} = \frac{A}{2} (2\lambda + \mu - \mu \tan^2 \alpha)$$

$$\rho_{HA} = \frac{A\mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$\eta_{HA} = \frac{A(\mu - \lambda)}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

De unde vom avea :

$$\rho_{HA} = 4\lambda$$

$$\rho_{12} = \lambda \mu$$

$$\eta_{12} = \mu - \lambda$$

1.2.3.5. Modelul trapezoidal. Acesta este un model de calcul limitat de costuri a 2D (fig. 1.33).

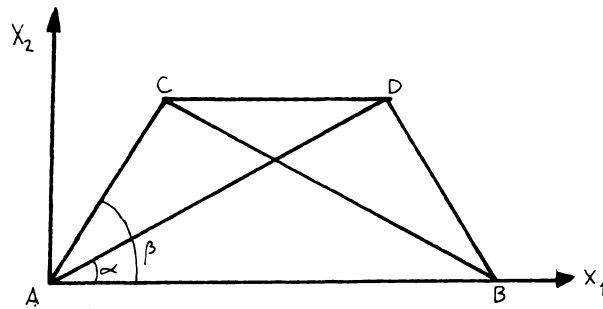


FIG. 1.33

$$\lambda = \mu = 0.5 \quad \text{și} \quad \nu = 0.5$$

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \mu \left[\frac{(\cos^2 \alpha - 1) \cos^2 \beta - (\sin^2 \beta - 1) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \right]$$

$$\rho_{12} = \frac{\mu}{2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin \beta \cos^2 \alpha}$$

1.2.3.6. Modelul plan de densitate. Acesta este un model de calcul limitat de costuri a 2D (fig. 1.34) care recreează un plan de densitate (x_1, x_2) . Acest model este un model de calcul limitat de costuri a 2D (fig. 1.34) care recreează un plan de densitate (x_1, x_2) . Acest model este un model de calcul limitat de costuri a 2D (fig. 1.34) care recreează un plan de densitate (x_1, x_2) .

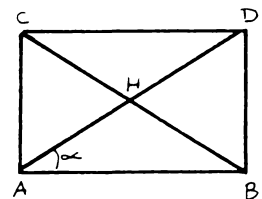
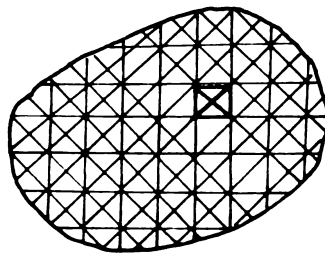
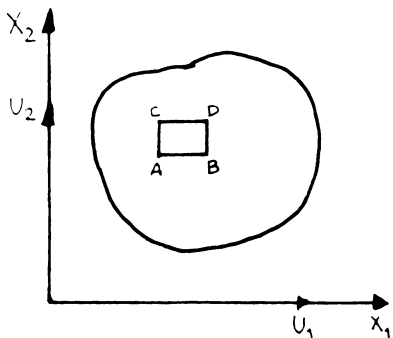


FIG. 1.34

$$U_0 = 2\mu \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} [(e_{11})^2 + (e_{22})^2] + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{11}e_{22} + (e_{12})^2 \right\} =$$

$$= \frac{\lambda}{2(1-\nu^2)} [(e_{11})^2 + (e_{22})^2 + 2\nu e_{11}e_{22} + 2(1-\nu)(e_{12})^2]$$

Se consideră o placă de grosime h , densitatea de energie $(U_0)_h$ pe unitate de suprafață se scrie $(U_0)_h = U_0 h$.
 Urzând același raționament ca și în cazul de deformare plană pentru modelele anterioare vom avea :

1.3.3.1.- Modelul dreptunghiului. (fig. 1.35)

$$P_{AD} = \frac{\lambda \mu}{2(\lambda + 2\mu)} [5\lambda + 2\mu - (\lambda + 2\mu) \cot^2 \alpha]$$

$$P_{AB} = \frac{\lambda \mu}{2(\lambda + 2\mu)} [5\lambda + 2\mu - (\lambda + 2\mu) \tan^2 \alpha]$$

$$P_{HA} = \frac{\lambda \mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad \eta_{AD} = \frac{\lambda \mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{2(\mu - \lambda)}{\lambda + 2\mu}$$

fiind η parametrul caracteristic de încovoiere, unde $2\mu = \lambda$ și $\nu = \frac{1}{3}$.

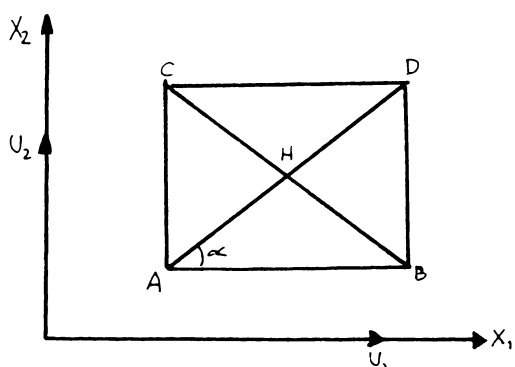


FIG. 1.35

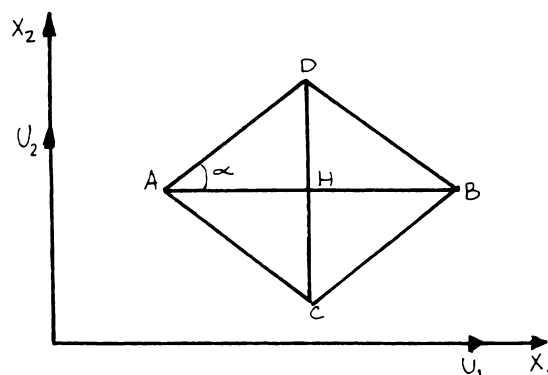


FIG. 1.36

1.3.3.2. Modelul romboidului. (fig. 1.36)

$$P_{AD} = \frac{\lambda \mu}{2(\lambda + 2\mu) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$P_{HA} = \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} [2(\lambda + \mu) - \lambda \cot^2 \alpha]$$

$$P_{HD} = \frac{A\mu}{\lambda+2\mu} [2(\lambda+\mu) - \lambda \tan^2 \alpha]$$

$$\frac{\eta_{HB} \eta_{HD}}{\eta_{HB} + \eta_{HD}} = \frac{A(2\mu - \lambda)}{2(\lambda+2\mu)} \mu$$

1.3.3.3. Modelul pătrat. (fig. 1.37)

$$P_{AB} = \frac{A\mu}{2(\lambda+2\mu)} [5\lambda+2\mu - (\lambda+2\mu) \cot^2 \alpha]$$

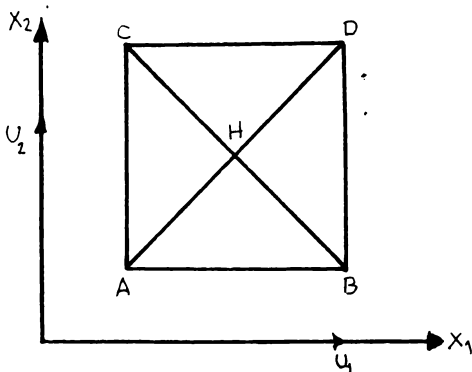


FIG. 1.37

$$P_{AC} = \frac{A\mu}{2(\lambda+2\mu)} [B\lambda+2\mu - (\lambda+2\mu) \tan^2 \alpha]$$

$$P_{HA} = \frac{A\mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$\eta_{HA} = \frac{A\mu}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{2\mu - \lambda}{\lambda + 2\mu}$$

De unde : $P_{AB} = P_{AC} = \frac{2\mu - \lambda}{(\lambda+2\mu)} A\mu$

$$P_{HA} = A\mu$$

$$\eta_{HA} = \mu \frac{2\mu - \lambda}{\lambda + 2\mu}$$

1.3.4. Elasticitate tridimensională. Putem considera diferite tipuri de modele echivalente. Modelul paralelipipedic cu bare articulate este foarte comod pentru aplicații practice.

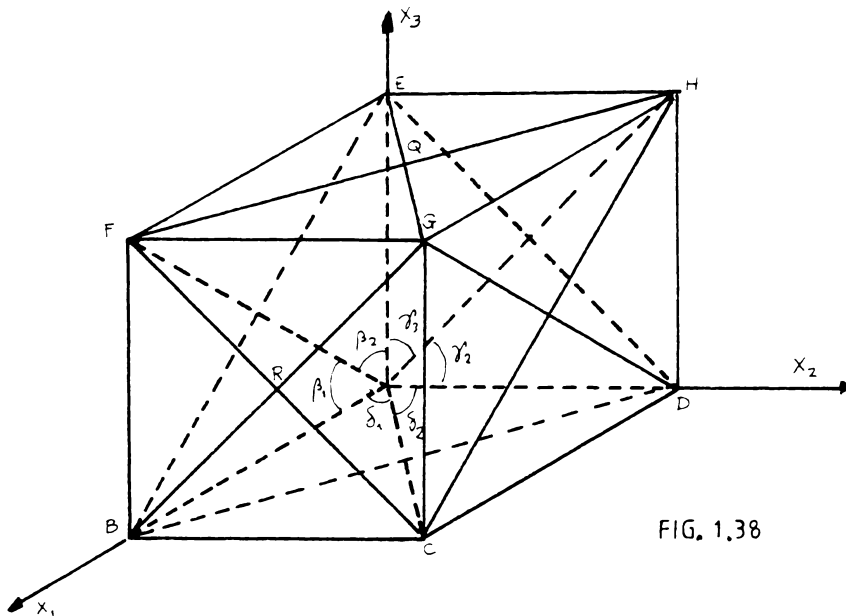
1.3.4.1. Modelul paralelipipedic. Considerăm paralelipipedul ABCDEFGH compus din 12 diagonale pe fețele respective. (fig. 1.30).

Caracteristicile diferitelor bare care formează paralelipipedul pot fi determinate cu relația :

$$AU_0 = 2P_{AB} + 2P_{AD} + 2P_{AL} + P_{AC} + P_{BD} + P_{AF} + P_{BE} + P_{AH} + P_{DE}$$

unde : A = volumul paralelipipedului

U_0 = densitatea de energie de deformare



• =

$$P_{12}(\beta_1 \beta_2)^2 = P_{12}(\delta_1 \delta_2)^2 = P_{12}(\gamma_1 \gamma_2)^2 = \dots \mu$$

$$P_{12} = \frac{\mu}{4} \left[\dots - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \right] \text{ cu } \lambda = \mu, \nu = \frac{1}{\delta}$$

And intersectiile

v ... :

$$P_{12}(\beta_1 \beta_2)^2 = P_{12}(\delta_1 \delta_2)^2 = P_{12}(\gamma_1 \gamma_2)^2 = \dots \mu$$

$$\eta_{12}(\beta_1 \beta_2)^2 = \eta_{12}(\delta_1 \delta_2)^2 = \eta_{12}(\gamma_1 \gamma_2)^2 = \frac{\mu - \lambda}{4}$$

$$= \left\{ \lambda - \mu \left[\dots - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \right] \right\} \frac{1}{4}$$

in a $\beta_1, \delta_1, \gamma_1$

1.2.4.6. Unghiuri acute.

- Pentru laturile cubului $\rho_{AB} = \frac{A\mu}{4}$
- Pentru diagonalele cubului $\rho_{AF} = A\mu$.

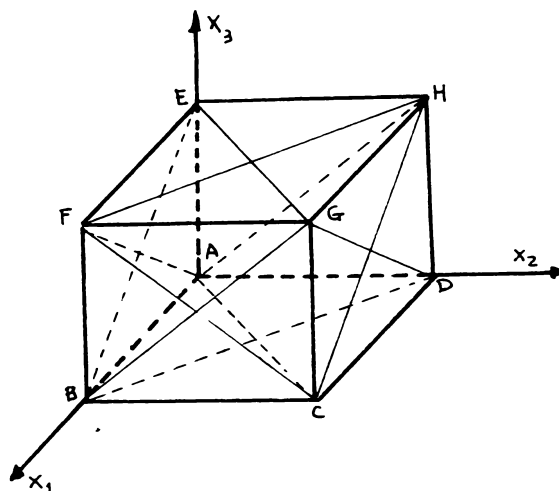


FIG. 1.39

1.4. Obiectul tezei de doctorat.

Se propune studiul stării de tensiuni și deformații în structurile masive din beton. Pentru aceasta se folosesc metodele numerice de discretizare fizică, analizate în subcapitolele 1.2 și 1.3, și anume metoda elementelor finite (M.E.F.) și teoria echivalențelor (T.E.).

Rezolvarea problemei se poate pune în două feluri, după forma structurilor masive.

1.4.1. Structuri masive lungi. Acesta este cazul structurilor masive de lungime mare, cu axa dreaptă și secțiune constantă, cum ar fi fundații continue sub ziduri, în construcții, ziduri de sprijin, bazele de ecluze, baraje de greutate etc.

În acest caz, problema spațială de deformații poate fi redusă la o problemă plană de deformații, deci mult mai simplă. Într-adevăr, dacă decupăm din structură o "felie" de grosime unitară perpendiculară pe axa ei, care cuprinde secțiunea transversală a structurii (cu axele de coordonate x-y), deformația "feliei" în direcția z, perpendiculară pe suprafața ei, este împiedicată de restul structurii din stânga și dreapta ($\epsilon_z = 0$); este de la sine înțeles că starea de tensiuni este spațială ($\sigma_z \neq 0$).

În teză se analizează o fundăție continuă din beton simplu, în trepte, sub un zid de cărămidă și un zid de sprijin din beton (capitolul 2). Cele două structuri se studiază în paralel cu cele două metode, pentru a se compara rezultatele (în metoda elementelor finite coeficientul lui Poisson se poate lua cu valoarea prescrisă pentru beton $\nu = 0,20$, în timp ce în teoria echivalențelor, din echivalarea energiei de deformare a corpului real cu cel fictiv rezultă obligatoriu $\nu = 0,25$) ; s-a folosit metoda elementelor finite și cu $\nu = 0,25$, pentru a vedea ce diferențe rezultă față de $\nu = 0,20$ (fundăție continuă).

De asemenea cele două structuri au fost studiate, în primul rând, în ipoteze simplistă clasică a rezemării pe teren, și în al doilea rând s-a ținut seama de interacțiunea lor cu terenul de fundare ; un bulb activ de teren sub fundăția continuă și zona de alunecare a terenului pentru zidul de sprijin. Analiza și compararea rezultatelor se fac în capitolul 4.

1.4.2. Alte structuri masive. Pentru structurile masive care nu pot fi încadrate în cazul de mai sus (fundății izolate sub stâlpi, culmi de poduri, capete de ecluze etc.) soluția se obține studiind starea spațială de deformării ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) sau starea spațială de tensiuni ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$), putându-se după aceea trece ușor de la una la alta, pe baza relațiilor din teoria elasticității. Se folosește starea spațială de ~~tensiuni~~ *deformații*.

În teză se analizează o fundăție izolată sub un stâlp de beton armat, și epruveta cilindrică ($D = 15$ cm $h = 30$ cm) din beton simplu, folosită în laborator pentru determinarea rezistenței la compresiune R_{cil} (capitolul 3).

Pentru a nu mări prea mult volumul tezei de doctorat, fundăția izolată este studiată numai în ipoteza rezemării pe teren, fără a se lua în considerare interacțiunea dintre fundăție și terenul de fundare. Pentru metoda elementelor finite s-a luat $\nu = 0,20$, iar pentru teoria echivalențelor $\nu = 0,25$. Rezultatele se analizează și se compară în capitolul 4.

Epruveta cilindrică de beton se analizează, în primul rând, în ipoteza că suprafața circulară de contact cu platforma preseii hidraulice nu se dilată ; valorile numerice obținute cu cele două metode de calcul folosite (metoda elementelor

finite și teoria echivalențelor) se compară cu rezultatele analitice stabilite într-un studiu al dr.ing. Radu Marinov (capitolul 4).

În al doilea rând, epruveta este studiată în ipoteza reală că suprafața circulară de contact cu platenul preseii hidraulice se dilată, datorită umflării transversale a betonului sub acțiunea forței de compresiune ; în această ipoteză, în afară de presiunile normale pe suprafața de contact, apar și forțe tangențiale de frecare, dispuse radial și orientate spre interior. Rezultatele obținute cu cele două metode numerice de calcul (metoda elementelor finite și teoria echivalențelor) sînt comparate cu cele obținute experimental de doctorand pe cilindri cu dimensiuni normale însă realizați din microbeton, pentru a avea o structură cît mai omogenă.

Pentru o comparație directă între cele două metode numerice de calcul, la studii cilindrici s-a admis aceeași valoare pentru coeficientul lui Poisson ($\nu = 0,25$).

În capitolul IV se trag **A** concluzii generale.

Doctorandul aduce mulțumirile sale conducătorului său științific, prof.emerit ing. Constantin AVRAM, membru corespondent al Academiei R.S.România, pentru îndrumarea permanentă pe care i-a acordat-o pe tot parcursul celor trei ani de studii.

Mulțumesc de asemenea conf.dr.ing. Corneliu BOB, ș.l. dr.ing. Richard FRIEDRICH și ș.l.ing. Valeriu STOIAN, care l-au ajutat la elaborarea programelor de calcul necesare realizării tezei de doctorat.

Aduce totodată mulțumiri colectivului catedrei de Beton armat și clădiri, în sinul căreia și-a desfășurat activitatea timp de trei ani, personalului laboratorului de beton armat, care l-a ajutat la efectuarea lucrărilor experimentale, cum și personalului Centrului de Calcul, al Institutului Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara, unde a primit ajutor pentru rularea programelor de calcul.

Capitolul 2

PROBLEME PLANE DE DEFORMAȚII

2.1. Generalități.

O ramură a mecanicii construcțiilor o constituie teoria elasticității, care se ocupă cu studiul stării de tensiune, al deplasărilor și deformațiilor corpurilor solide, supuse acțiunii unui sistem de forțe în echilibru.

Elasticitatea plană este teoria stării de tensiune, a stării de deformare și a deplasărilor aplicabilă elementelor care, datorită particularităților de alcătuire geometrică și de încărcare, se află în stare plană de tensiune sau în starea plană de deformare.

Principiul de rezolvare constă în exprimarea condiției de echilibru sub forma sa completă : echilibrul mecanic + condiția de continuitate a deformațiilor.

2.1.1. Problema elasticității spațiale. Starea de tensiune, starea de deformare și deplasările dintr-un punct al unui corp oarecare în spațiu ; aflat în echilibru sînt determinate de componentele tensorilor respectivi după un sistem de axe triortogonale XYZ :

- Tensorul tensiunilor.	- Tensorul deformațiilor specifice.
$T_{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$	$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2 \cdot \gamma_{yx} & 1/2 \cdot \gamma_{zx} \\ 1/2 \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 1/2 \cdot \gamma_{zy} \\ 1/2 \cdot \gamma_{xz} & 1/2 \cdot \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$
- Tensorul deplasărilor.	
$T_{\Delta} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$	$\begin{array}{l} u = \text{deplasarea liniară după axa X.} \\ v = \text{deplasarea liniară după axa Y.} \\ w = \text{deplasarea liniară după axa Z.} \end{array}$

Dacă avem în vedere dualitatea tensiunilor tangențiale $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, tensorii T_{Σ} și T_{ε} devin tensori simetrici în raport cu diagonala principală.

$$T_{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \text{simetric} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ & & \sigma_y \end{bmatrix} ; \quad T_{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \sqrt{2} \cdot \gamma_{yx} & \sqrt{2} \cdot \gamma_{zx} \\ \text{simetric} & \epsilon_y & \sqrt{2} \cdot \gamma_{zy} \\ & & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

2.1.2. Problema elasticității plane. Determinarea soluției elasticității spațiale ridică mari dificultăți matematice. În numeroase cazuri practice, datorită particularităților de alcătuire geometrică a corpurilor și de încărcare exterioară, problema se poate simplifica reducându-se la o așa numită problemă plană. Sînt cunoscute două cazuri :

- Starea plană de tensiune.
- Starea plană de deformare.

2.1.2.1. Starea plană de tensiune. Starea de tensiuni a unui corp este denumită plană dacă vectorul tensiune, din orice punct, are componentele situate într-un singur plan. Acest caz se întâlnește practic la elementele cu plan median la care două dimensiuni sînt mari în raport cu a treia iar forțele sînt aplicate pe contur fiind constante pe grosime. Ele se pot reduce la un sistem plan de încărcare situat în planul median al elementului (figura 2.1.).

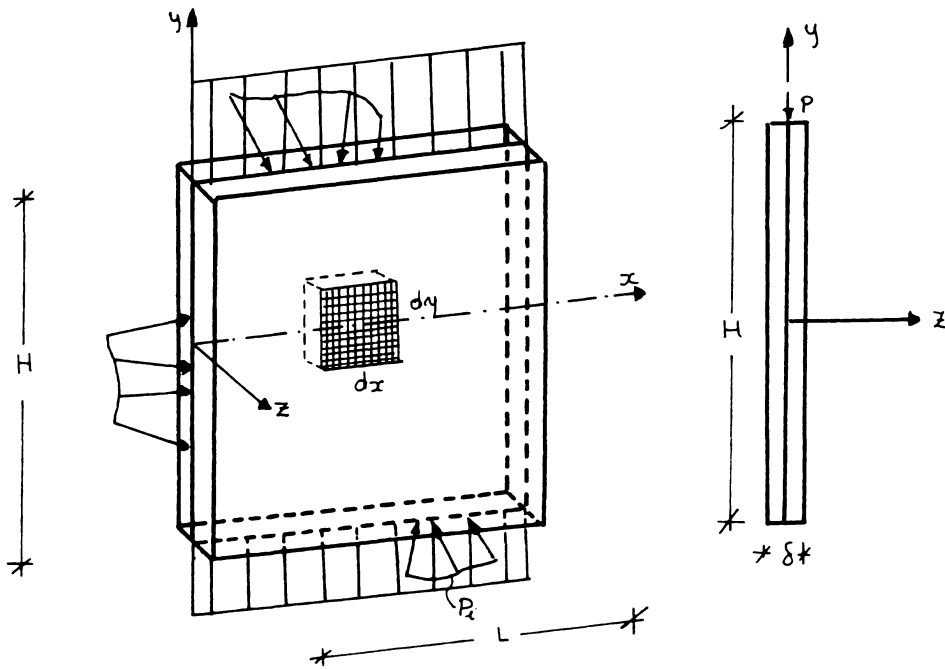


FIG. 2.1

In această categorie intră grinzile pereți, diafragmele construcțiilor, planșeele clădirilor solicitate de forțe orizontale, dalele podurilor sub acțiunea vântului sau frînării, colțurile cadrelor plane, etc. Acestea sînt denumite pe scurt, șaibe.

Așadar, prin definiție :

$$\sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (33)$$

Deoarece grosimea mică ($\delta \ll L, H$) deformațiile și deplasările după normala la planul median, sînt neglijabile :

$$\varepsilon_z = 0 \quad ; \quad \delta = 0$$

De asemenea, în virtutea relației a două din (33)

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

ceea ce înseamnă că între două secțiuni vecine paralele cu planul median nu există alunecări.

Ca urmare, tensorii stării plane de tensiune ajung sub formă :

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} ; \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2 \cdot \gamma_{yx} \\ 1/2 \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad T_\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Deci avem în vedere că la tensorii T_ε și T_δ pot fi adăugate deformația specifică ε_z și respectiv deplasarea δ (deși ca mărimi sînt neglijabile) rezultă că în starea plană de tensiune deformațiile specifice și deplasările determină stări spațiale.

Dependențele dintre deformațiile specifice și tensiuni, în ipoteza comportării liniar elastice a materialului se exprimă prin :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (35)$$

ssu, sub formă matriceală :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Rearanjînd relația anterioară, se poate arăta că :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Analiza stării de tensiune, a stării de deformație și a deplasărilor se reduce la analiza din planul median. Cele 8 necunoscute ale problemei (tensiunile : $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$, deformațiile specifice : $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, deplasările : u, v) se determină din următoarele 6 ecuații :

- două ecuații de echilibru mecanic,
- trei ecuații geometrice (dependența dintre deformații specifice și deplasări),
- trei ecuații fizice (dependența dintre deformații specifice și tensiuni).

2.1.2.2. Starea plană de deformație. Cores de deformație se numește plană dacă deplasarea oricărui punct al corpului este paralelă cu un plan, denumit planul deformației, și este independentă de distanța de la punctul considerat la acest plan. În practică acest caz se întâlnește la elemente care au o dimensiune (lungimea l) mare în raport cu celelalte, secțiunea constantă în lung și încălzirea uniformă distribuită după lungime.

Orfele exterioare pot să varieze în planul de deformație (planul XOY din fig. 2.2). Este încă evident că deplasările au loc numai după direcțiile x și y, deci într-un singur plan.

Din categoria elemente lor aflate în stare plană de deformație fac parte : zidurile de sprijin, barajele, conductele, tuburile, fundațiile continue sub ziduri etc.

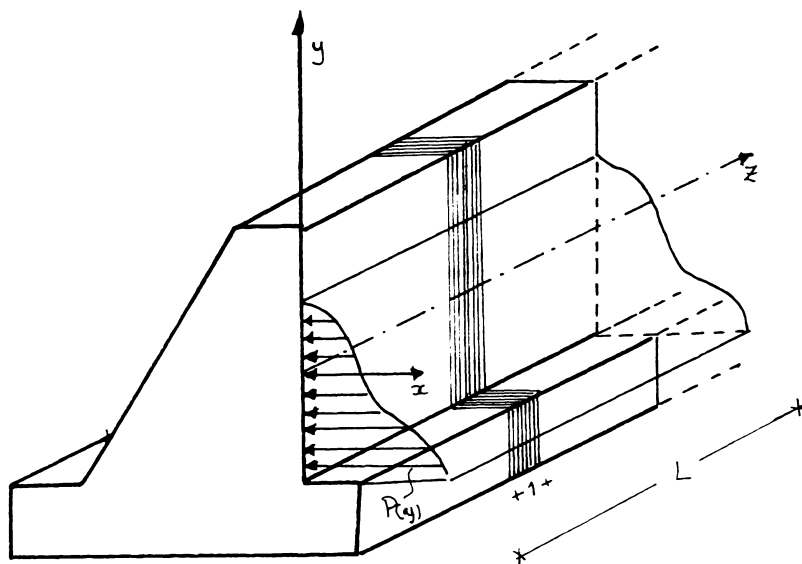


FIG. 2.2

deform, prin definiție $\epsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$ (56)

deoarece $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ rezultă $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

de asemenea, lungimile dintre două secțiuni vecine se-
relația cu momentul de forță și cu distanța :

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = \gamma \quad \text{și deci} \quad \tau_{zx} = \tau_{zy}$$

În ideea de deformabilitate, se știe că la poziția
de la distanța σ_z . Într-adevăr, folosind legea generalizată
de la distanța de la distanța :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) = \dots$$

$$\sigma_x = \mu(\sigma_y + \sigma_z) \quad (57)$$

În cazul de artărilor de forță $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ și deci la
distanța de la distanța de la distanța de la distanța de la distanța
lungime de deformare devin :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{yx} \\ -\gamma_{xy} & \epsilon_y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad -\gamma = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (58)$$

Referința dintre aceste două matrici și condiții
de la legea lui Hooke :

*A starea de tensiune este spațială. În consecință,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}\end{aligned}$$

ținînd cont de (87) ajunge sub forma :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{\bar{E}} (\sigma_x - \bar{\mu}\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{\bar{E}} (\sigma_y - \bar{\mu}\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\bar{\mu})}{\bar{E}} \tau_{xy}\end{aligned} \tag{89}$$

unde $\bar{E} = \frac{E}{1-\mu^2}$ și $\bar{\mu} = \frac{\mu}{1-\mu}$ (90)

Folosind exprimarea matriceală relația (89) se poate scrie sub forma :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\bar{E}} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{\mu} & 0 \\ -\bar{\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\bar{\mu}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Rearanjînd relația anterioară, se poate arăta că :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\mu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mu} & 0 \\ \bar{\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\bar{\mu}^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Starea de tensiune, fiind aceeași în orice secțiune transversală (situată la o anumită distanță de capăt) calculul elementului se reduce la calculul unei fișii de lungime unitară.

Comparînd ecuațiile (85) cu (89) este ușor de constatat că orice grup din ele poate fi obținut din celălalt făcînd corespondența $E \rightarrow \bar{E}$ și $\mu \rightarrow \bar{\mu}$.

Totodată să subliniem că în timp ce în starea plană de tensiune $\sigma_z = 0$ cu $\varepsilon_z \neq 0$, în starea plană de deformare

situația este inversă ($\sigma_z \neq 0$, $\varepsilon_z = 0$).

2.2. Fundații

2.2.1. Generalități. Prin fundație se înțelege partea inferioară a unei construcții, aflată în general sub suprafața terenului și în contact direct cu acesta, și a cărei funcție constă în transmiterea și repartizarea încărcărilor aduse de construcție (suprastructură) la terenul de fundare.

Rolul fundației, ca parte integrantă a construcției, este deosebit de important, rezistența și stabilitatea fundației pot condiționa comportarea întregii construcții.

2.2.2. Clasificarea fundațiilor. Sistemele de fundare se pot clasifica după mai multe criterii care sînt expuse mai jos :

a - După adîncirea de fundare, deosebit :

- Fundații de suprafață (de mică adîncime), numite și fundații directe, așezate direct pe terenul de fundare, a căror săpătură se poate executa cu sau fără sprijiniri, funcție de natura straturilor parcurse.
- Fundații de adîncime, numite și fundații indirecte la care transmiterea sarcinilor la teren se face prin intermediul unor elemente speciale, sub formă de piloți sau chesoane.

b - După forma lor în plan avem :

- Fundații continue sub ziduri portante.
- Fundații continue sub stâlpi.
- Fundații izolate, specifice construcțiilor pe schelet alcătuite din stâlpi și rigle.
- Fundații formate din rețele de grinzi continue, tip grătar, executate sub șiruri de stâlpi.
- Fundații tip radier, realizate sub formă de planșee inverse, înfilnate stît la clădirile pe schelet est și la clădirile pe ziduri portante.

c - După materialele din care sînt executate deosebit:

- Fundații din piatră naturală și artificială.
- Fundații din beton simplu.
- Fundații din beton armat.

d - După starea de eforturi din elementul de fundație, distingem :

- Fundații rigide, în care se consideră că apar numai eforturi de compresiune, cele de întindere și forfecare fiind foarte mici. Se execută de obicei din piatră și beton simplu.
- Fundații elastice, în care eforturile din încovoiere și forfecare sînt preponderante. Se execută în mod obișnuit din beton armat.

Betonul reprezintă materialul de bază folosit pentru fundații. Betonul simplu se utilizează în general la fundațiile masive, cu volume mari, fiind tipice pentru construcțiile hidrotehnice, portuare, de poduri etc. La construcțiile de clădiri este folosit în fundațiile rigide, întrucît nu poate prelua eforturi de întindere. La unele cazuri se adoptă betonul ciclopian, în alcătuirea căruia intră și piatra brută.

2.2.3. Fundații continue sub ziduri. Se realizează în mod curent din beton simplu sau beton armat (foarte rar din zidărie de piatră). În unele condiții speciale de teren, fundațiile continue pot fi prevăzute cu descărcări pe reazeme izolate.

Fundațiile din beton simplu sau beton ciclopian sînt rigide, adică nu pot prelua eforturi de încovoiere. Tipurile cele mai frecvent utilizate au secțiunea transversală reprezentată în figura 2.3.

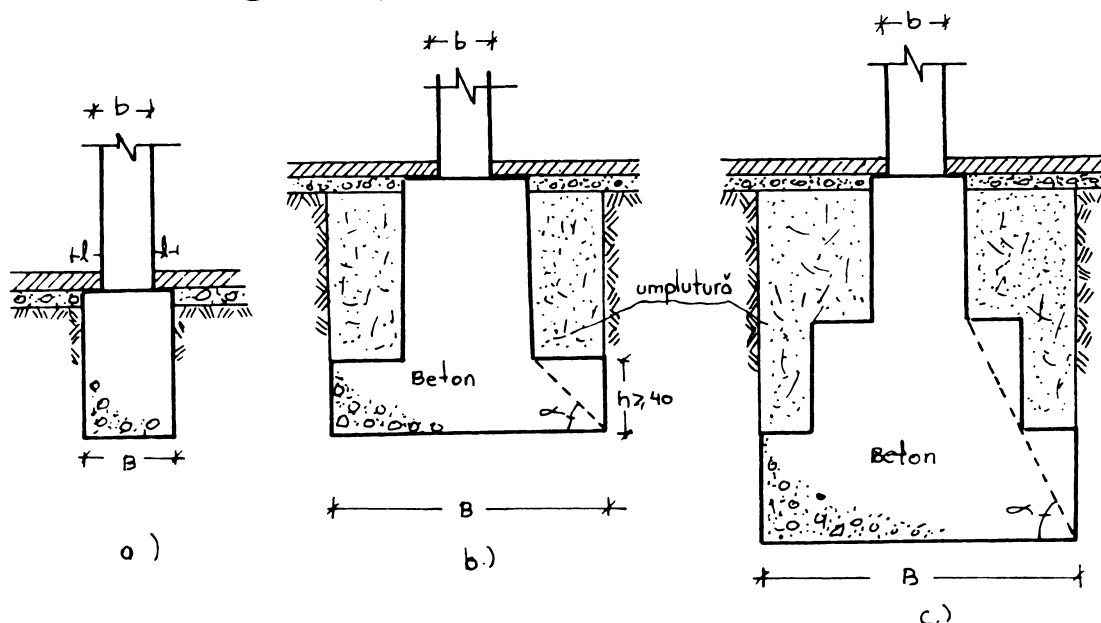


FIG. 2.3

Partea din fundație care depășește lateral zidul sau secolul lucrează ca o consolă, acționată de presiunea reactivă a terenului. Valoarea $Tg\alpha$ (fig. 2.3.b.c.), respectiv raportul între înălțimea și lățimea unei trepte a fundației, nu trebuie să fie mai mică decât se indică în tabelul 2.I., pentru ca eforturile de întindere din încovoiere care se dezvoltă în corpul fundației să nu depășească rezistența betonului simplu.

Tabelul 2.I.

Presiune maximă pe teren (daN/cm ²)	Valori minime ale $tg\alpha$ pentru beton de marcă			
	B.50	B.75	B.100	B.150
P ≤ 2	1,3	1,2	1,1	1,0
P = 3	1,6	1,4	1,3	1,1
P = 4	1,8	1,6	1,5	1,3
P = 6	-	-	1,8	1,6

2.2.4. Fundație continuă din beton simplu sub un zid de cărămidă. Fundațiile continue de diverse tipuri, descrise mai înainte, se utilizează în mod curent la toate categoriile de pereți, pentru clădiri de locuit și social-culturale, precum și pentru construcții industriale și agro-zootehnice când stratul bun de fundare nu se găsește la adâncimi prea mari.

2.2.4.1. Problema propusă. Având în vedere cele expuse mai sus, pentru această lucrare s-a ales o fundație continuă, directă sau de suprafață, din beton simplu, rigidă sub un perete la care solicitarea principală o constituie încărcarea verticală.

În figura 2.4. se arată dimensiunile structurii propuse. Betonul este de marcă B.100, cu un modul de elasticitate $E = 160\ 000\ daN/cm^2$, coeficientul lui Poisson este $\nu = 0,20$ și o greutate specifică de $\gamma_b = 2400\ kgf/m^3$. Fundația este compusă din două trepte cu $h = 30\ cm$, și lățimea $20\ cm$, de unde $tg\alpha = 1/5$, îndeplinind condițiile din tabelul 2.I.

Această structură s-a rezolvat folosind metoda elementelor finite și teoria echivalentelor. Această structură fiind în starea plană de deformare, s-a cerut să se determine de-

FUNDATIE CONTINUA DIN BETON SIMPLU SUB UN ZID DE CARAMIDA

Metoda Elementelor Finite

Model pătrat.

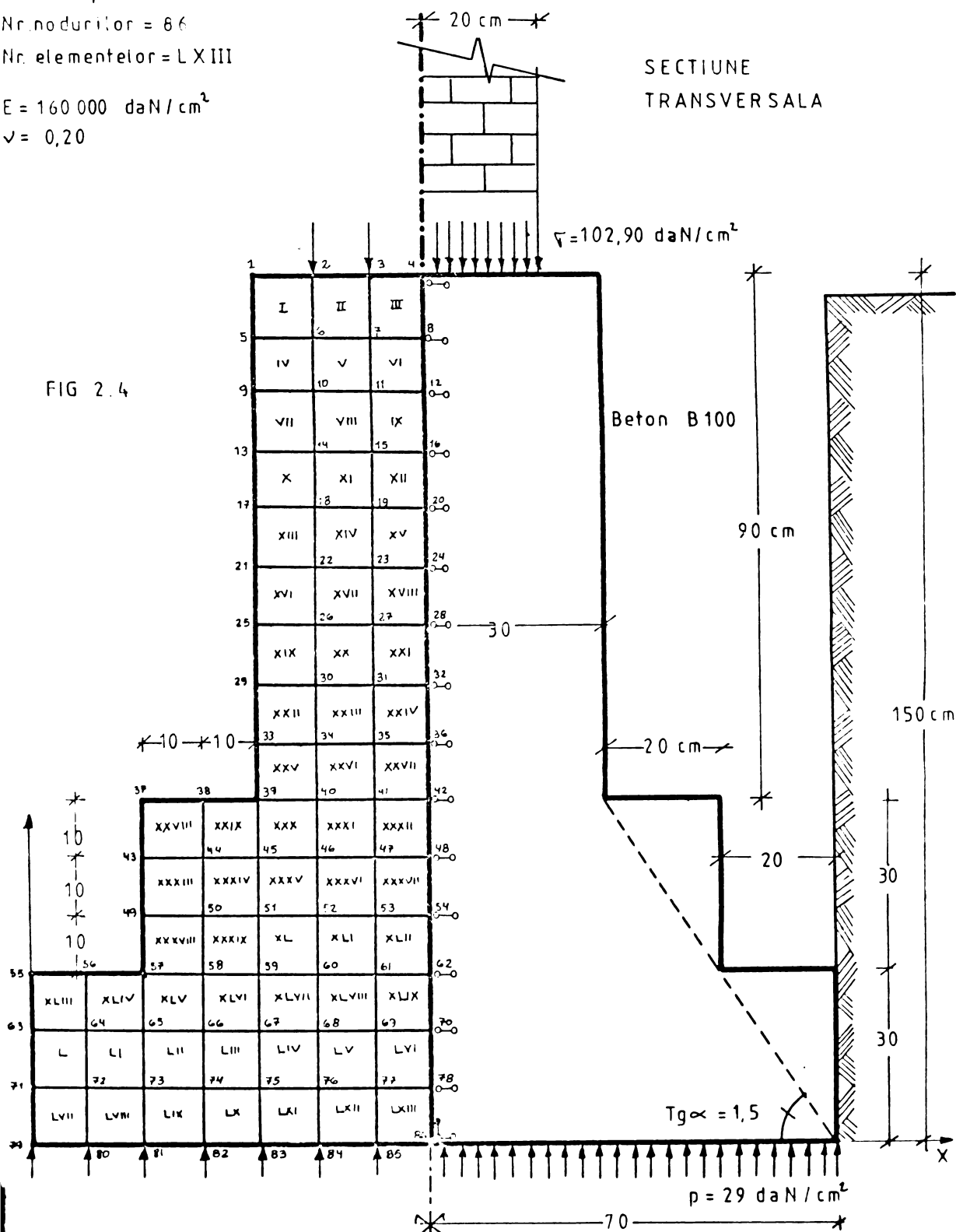
Nr. nodurilor = 86

Nr. elementelor = LXIII

$E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$

$\nu = 0,20$

FIG 2.4



plasările nodurilor, eforturile unitare normale orizontale (σ_x), eforturile unitare normale verticale (σ_y), eforturile unitare tangențiale (τ_{xy}) și eforturile unitare principale.

2.2.4.2. Soluții cu metoda elementelor finite. În cele ce urmează se prezintă un exemplu practic de calcul, cu ajutorul metodei elementelor finite. Pentru rezolvarea acestei fundații, s-a folosit un program de calcul scris în limbajul Fortran IV și s-a bazat pe schema logică prezentată în figura 2.5.

În program s-a folosit un număr de notații care sînt explicate în continuare :

- NE - numărul elementelor finite,
- NO - numărul nodurilor structurii,
- NOD(N_e, 4) - tablou cuprinzînd pentru fiecare element finit numerele celor patru noduri,
- T(NE) - tabloul grosimilor elementelor finite,
- KOD(NE) - codul materialului
 - KOD = - 1 - primul tip de material,
 - KOD = 0 - al doilea tip de material,
 - KOD = 1 - al treilea tip de material,
- MCL - numărul gradelor de libertate eliminate (legăturile exterioare și condițiile de simetrie),
- IGL(MCL) - tabloul gradelor de libertate eliminate,
- NINC - numărul ipotezelor de încărcare,
- UE(8, NINC) - matricea deplasărilor nodale ale unui element finit,
- SIG(3, NINC) - tablou ce conține eforturile unitare ale unui element finit în toate ipotezele de încărcare,
- RI(3, 3) - matricea rigidităților primului material,
- K(8) - tabloul gradelor de libertate ale unui element finit (parametrilor nodale),
- SI1(NINC), SI2(NINC) - tablouri ce conțin eforturile unitare principale în centrul unui element finit în toate ipotezele de încărcare,
- PI(NINC) - tablou cu înclinările eforturilor unitare principale,
- RM(3, 3) - matricea rigidităților materialului curent,

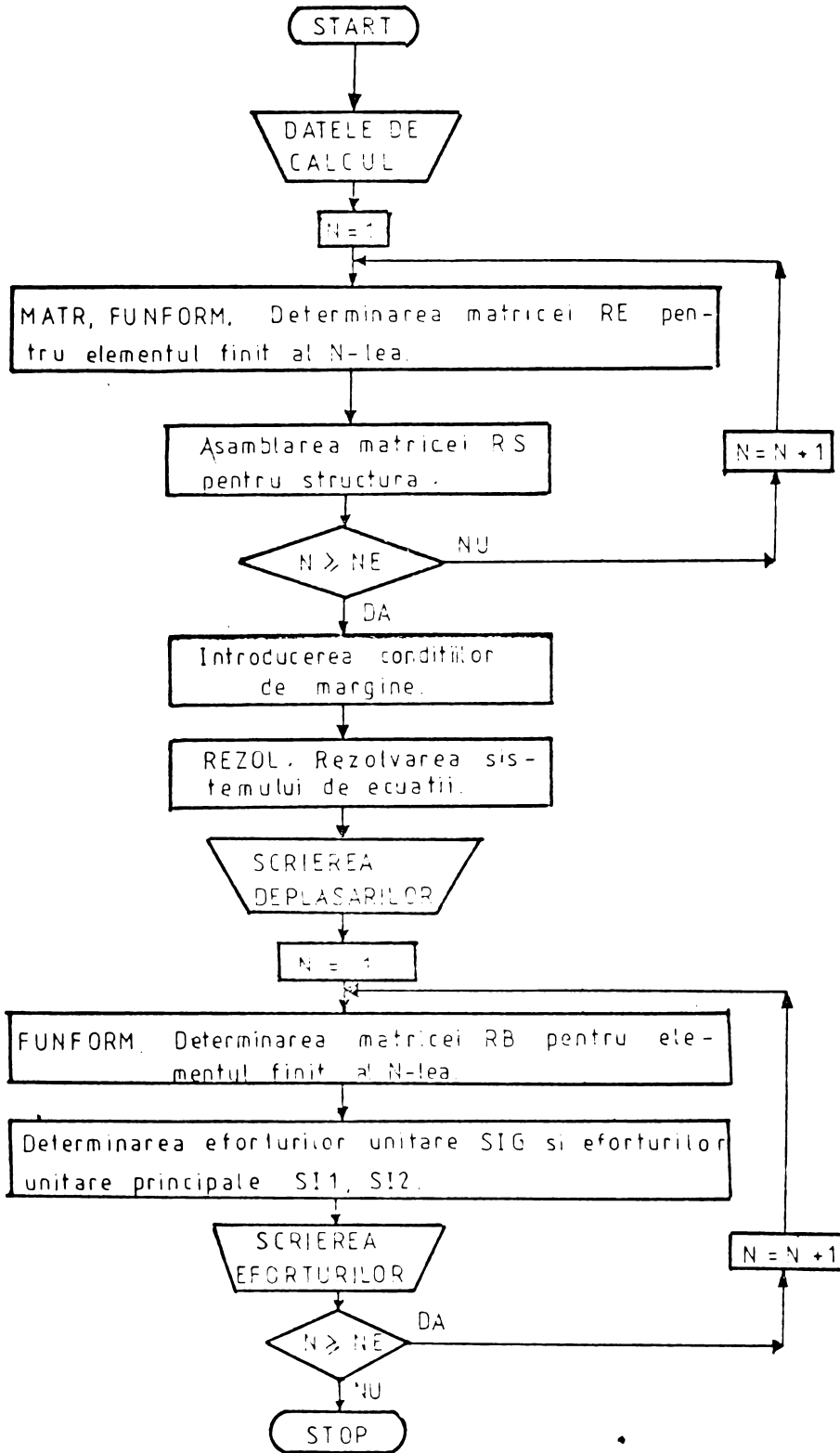


FIG. 2 5

- B(3, 8)** - matricea deformațiilor specifice,
- RE(3,8)** - matricea rigidităților unui element finit,
- RB(3,8)** - submatricea produs $RM * B$,
- #(2)** - tabloul coeficienților de pondere pentru integrarea numerică,
- XII(4), XTI(4)** - tablourile coordonatelor adimensionale ale nodurilor unui element finit,
- A(3)** - tabloul coordonatelor adimensionale ale punctelor de integrare respectiv ale punctelor în care se determină eforturile unitare,
- XB(4), XT(4)** - tablourile coordonatelor nodurilor unui element finit,
- XS(NC), YS(NC)** - tablourile coordonatelor nodurilor structurii,
- U(NLIN, NINC)** - matricea deplasărilor nodale ale structurii,
- RS(NLIN, IS)** - matricea de rigiditate a structurii,
- IS** - lățimea semibenziilor matricii,
- NLIN** - numărul deplasărilor nodale ale structurii.

Capacitatea de calcul a programelor elaborate, adică numărul maxim de elemente finite pe care le pot rezolva programele, depinde de modul împărțirii rețelei discretizate. Relație dintre modul de împărțire a rețelei discretizate și numărul maxim admisibil este definită cu ajutorul graficului prezentat în figura 2.6.

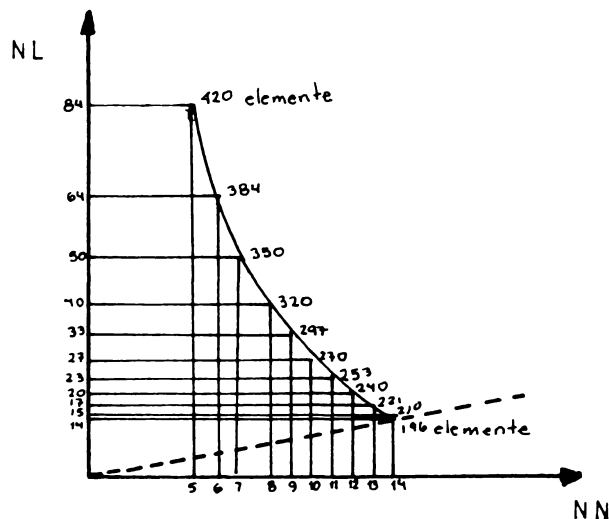


FIG. 2.6

a - FUCOMEF 1. Pentru a rezolva această structură în care este vorba despre o problemă plană de deformare s-a ales un element finit tip pătrat. Discretizarea structurii este rețeaua de elemente finite prezentată în figura 2.4.

Structura discretizată este compusă dintr-un număr de 63 de elemente notate cu cifre romane de la I până la LXIII. Nodurile sînt în număr de 86, originea sistemului de coordonate se află în nodul 79.

Fiind o structură simetrică, s-a discretizat numai o jumătate din structură și din această cauză nodurile de pe axa de simetrie sînt blocate după direcția x (adică deplasarea orizontală $u = 0$), așa cum se arată în figura 2.4.

Pentru această structură s-a luat un modul de elasticitate egal cu : $E = 160\ 000\ \text{daN/cm}^2$ iar coeficientul lui Poisson este $\nu = 0,20$.

În continuare se prezintă formularele pentru introducerea datelor ; programul cu toate instrucțiunile este dat în anexă.

Ca în orice program, întîi trebuie să discretizăm structura generală în elemente finite, ca să cunoaștem numărul elementelor (NE) și numărul nodurilor (NO). Aceste date se vor scrie într-o singură cartelă așa cum se arată în figura 2.8.a.

După aceasta se introduce numărul fiecărui element finit (N), urmat de numerele celor 4 noduri ale elementului finit (P) în sensul arătat în figura 2.7 ; se scrie imediat grosimea elementului (T) și respectiv tipul materialului (KOD), așa cum se poate vedea în figura 2.8.b.

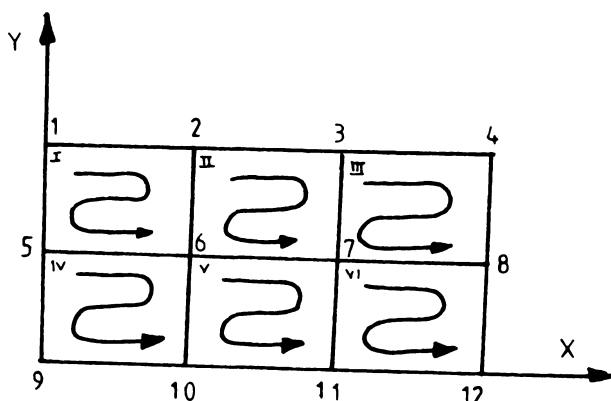
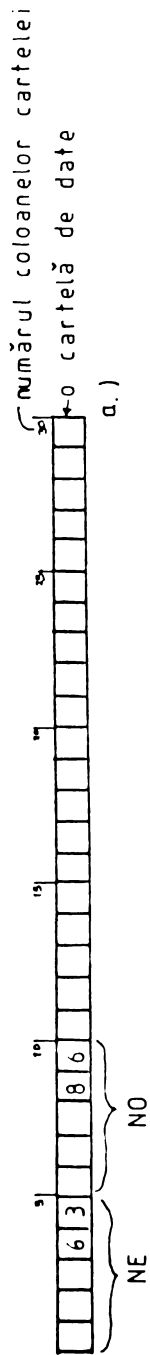
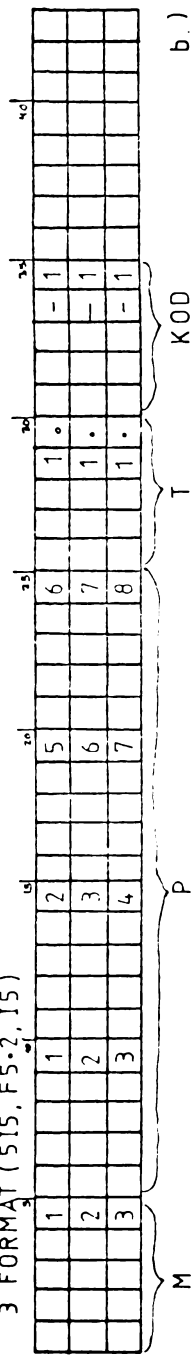


FIG. 2.7

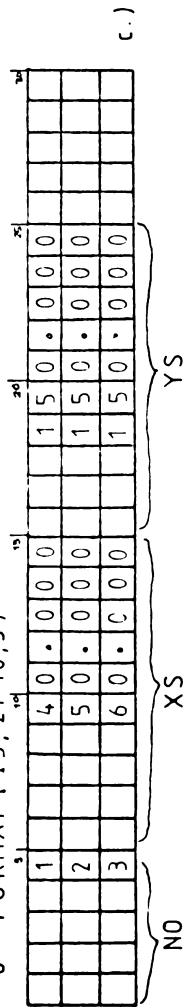
1 FORMAT (2I5)



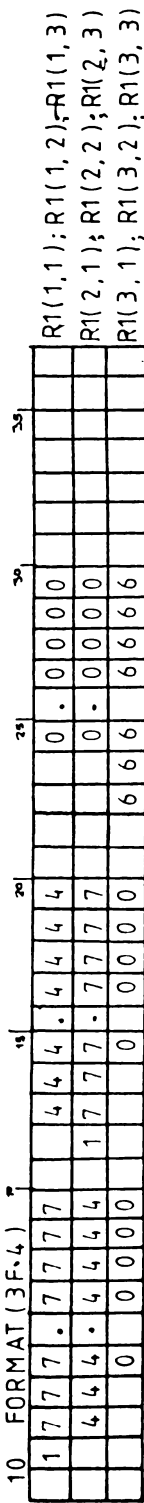
3 FORMAT (5I5, F5.2, I5)



6 FORMAT (I5, 2F10, 3)



10 FORMAT (3F.4)



d.)

FIG 2.8

Următoarele date sînt : numerele, nodurilor structurii (NO) și coordonatele nodurilor (XN)(YN), aceste date se scriu în forma cum se prezintă figura 2.8.c.

Ceea ce urmează sînt datele matricii de rigiditate a materialului $R(3, 3)$, care în acest caz (starea plană de deformare), are forma următoare :

$$[K] = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu) & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix}$$

În figura 2.8.d. se arată cum sînt dispuse elementele matricii. În continuare se introduce tabloul coeficienților de pondere pentru integrarea numerică (W), tablourile coordonatelor adimensionale ale nodurilor unui element finit (XII, NTI) și tabloul coordonatelor adimensionale ale punctelor de integrare respectiv ale punctelor în care se determină eforturile unitare (A). Aceste date sînt prezentate în figura 2.9.a.

După aceasta se introduce tabloul gradelor de libertate eliminate ICL (MCL), așa cum se poate vedea în figura 2.9.b. În figura 2.4. condițiile de margine sau de simetrie s-au reprezentat, pentru blocajele orizontale (după x), cu semnul \rightarrow , și pentru blocajele verticale (după y), cu semnul \updownarrow .

Cartela următoare conține numărul total al blocajelor (MCL) și numărul tipurilor de încărcări (MENC), așa cum se vede în figura 2.9.c.

Ultimele cartele sînt cele care conțin datele încărcărilor, acestea se vor plasa în fiecare nod al elementelor finite. De remarcat că în acest program se introduce în fiecare nod forțele exterioare care acționează asupra structurii cît și greutatea sferentă a nodurilor. În figura 2.9.d., se prezintă un exemplu de cartelă pentru încărcări.

Primele rezultate tipărite sînt deplasările nodale, care sînt imprimare în două coloane, prima coloană este pentru deplasările orizontale, adică după axa x și cea de a doua coloană sînt deplasările verticale, adică după axa y. După aceea se imprimă numărul elementelor și eforturile unitare normale orizontale notate cu SX (σ_x), eforturile unitare normale verticale SY (σ_y), și eforturile unitare tangențiale

SXY (τ_{xy}).

Rezultatele obținute din programul FUNCORBF 1, pentru fundația continuă sub un zid de cărămidă sînt prezentate grafic cum urmează : în figura 2.10 sînt reprezentate deplasările nodale, în figura 2.11 sînt prezentate grafic eforturile unitare normale orizontale (σ_x), în figura 2.12 se dau eforturile unitare normale verticale (σ_y) ; eforturile unitare tangențiale (τ_{xy}) sînt prezentate în figura 2.13, iar în figura 2.14 sînt reprezentate eforturile unitare principale. Toate aceste date se prezintă și în anexă, în programul respectiv, FUNCORBF 1.

b - FUCORBF 2. Acest program este același ca precedentul cu o singură deosebire, și anume coeficientul lui Poisson în această problemă capătă valoarea egală cu : $\nu = 0,25$. Rezultatele obținute se vor discuta în capitolul IV. La fel ca în programul FUNCORBF 1, rezultatele se găsesc în anexă în programul FUNCORBF 2.

2.2.4.3. Soluția cu teoria echivalențelor. În continuare se prezintă un exemplu de calcul pentru aceeași fundație, dar de data aceasta cu teoria echivalențelor. În această problemă s-a folosit programul SAP, care se găsește înregistrat pe discuri în biblioteca centrului de calcul al Institutului Politehnic din Timișoara.

Structura studiată a fost discretizată în aceeași formă ca în metoda elementelor finite, pentru a fi comparate ambele metode în capitolul IV. Structura va fi formată de 63 de elemente numerotate tot cu cifre romane, are 86 de noduri și 274 de bare (fig. 2.15). În acest caz s-a luat modului de elasticitate egal cu $E = 160\ 000\ \text{daN/cm}^2$ și coeficientul lui Poisson va fi obligatoriu egal cu $\nu = 0,25$.

În anexa la programul FUNCOTEK se prezintă instrucțiunile principale pentru rezolvarea acestui tip de problemă. Introducerea datelor în program se face conform regulilor stabilite pentru programele de tip SAP, care sînt cunoscute.

O mică problemă a programului este calcularea ariei barelor și determinarea tipului de bare. Pentru a înțelege mai ușor acest lucru se prezintă un exemplu de calcul al barelor unui element echivalent pătrat, din structură.

FUCOMEF 1

Fundatie continuă
 Metoda Elementelor Finite
 Model pătrat

$$E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$$

$$\nu = 0,20$$

DEPLASARI NODALE

Structură nedeformată

Structură deformată

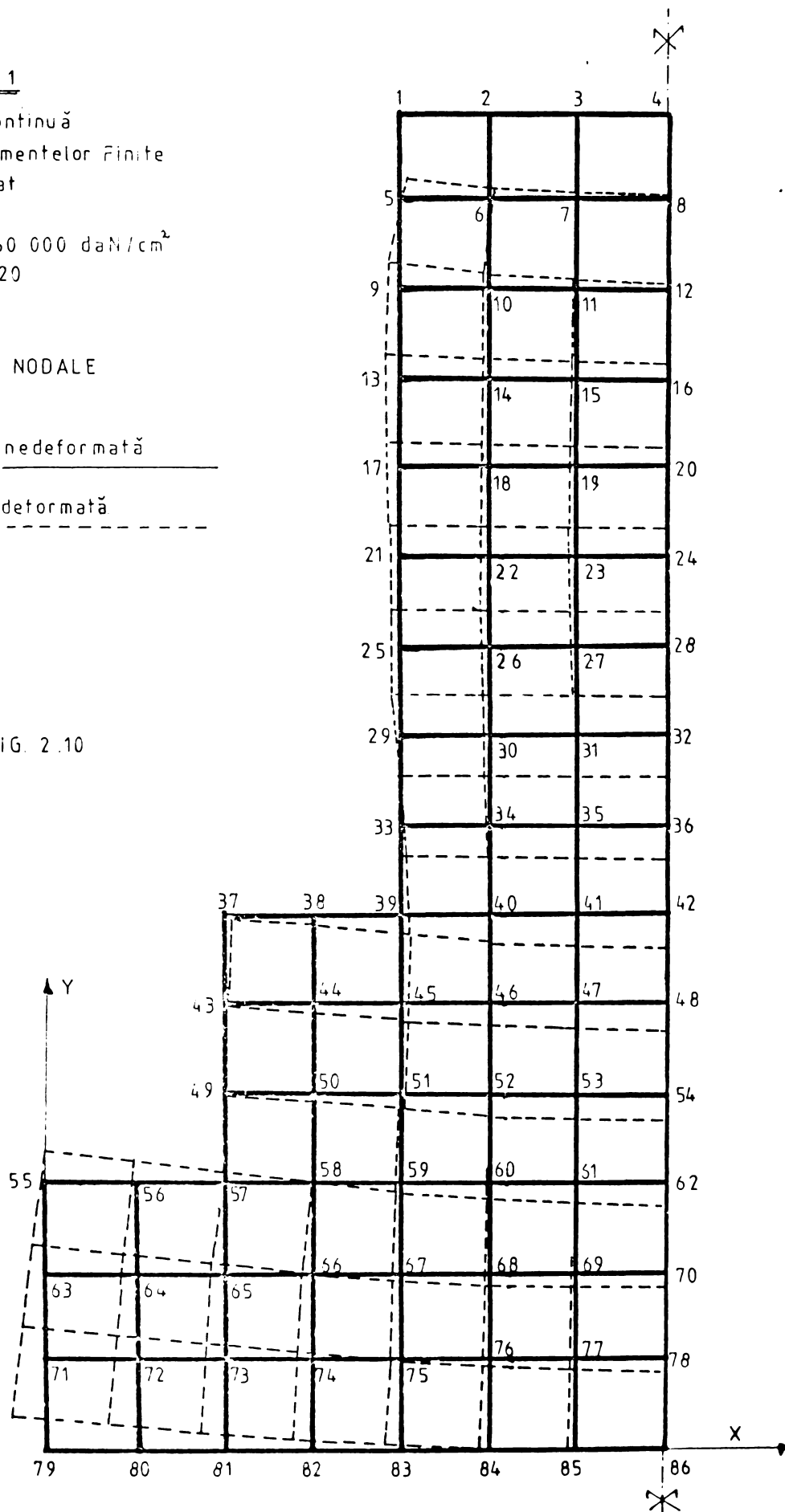


FIG. 2.10

FUCOMEF 1

Fundație continuă
 Metoda Elementelor Finite
 Model pătrat.
 $E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$
 $J = 0,20$

EFORTURI UNITARE NORMALE
 ORIZONTALE σ_x - (daN/cm²)

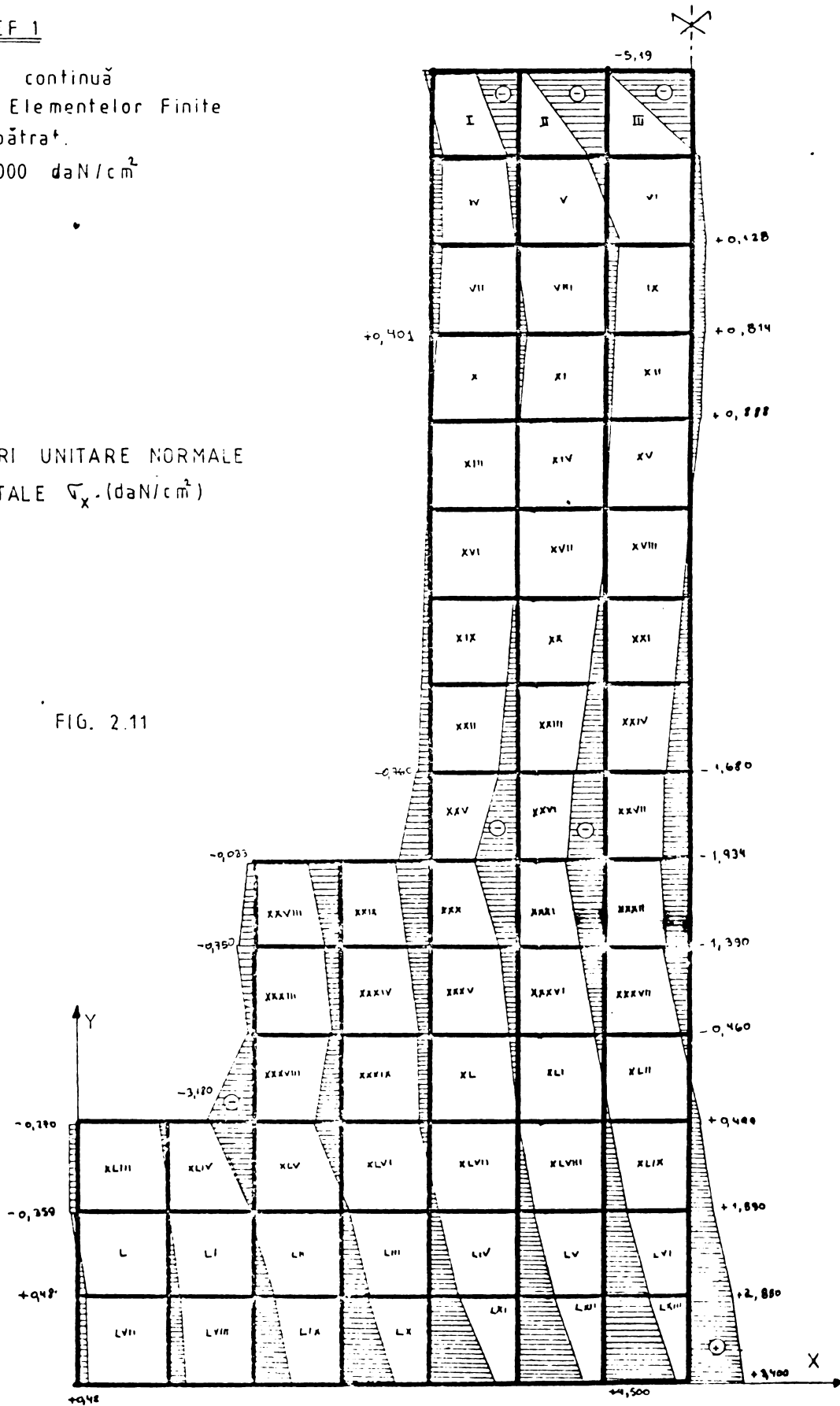


FIG. 2.11

FUCOMEF 1

Fundație continuă
 Metodă Elementelor Finite.
 Model pătrat
 $E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,20$

EFORTURI UNITARE NORMALE
 VERTICALE σ_y (daN/cm²)

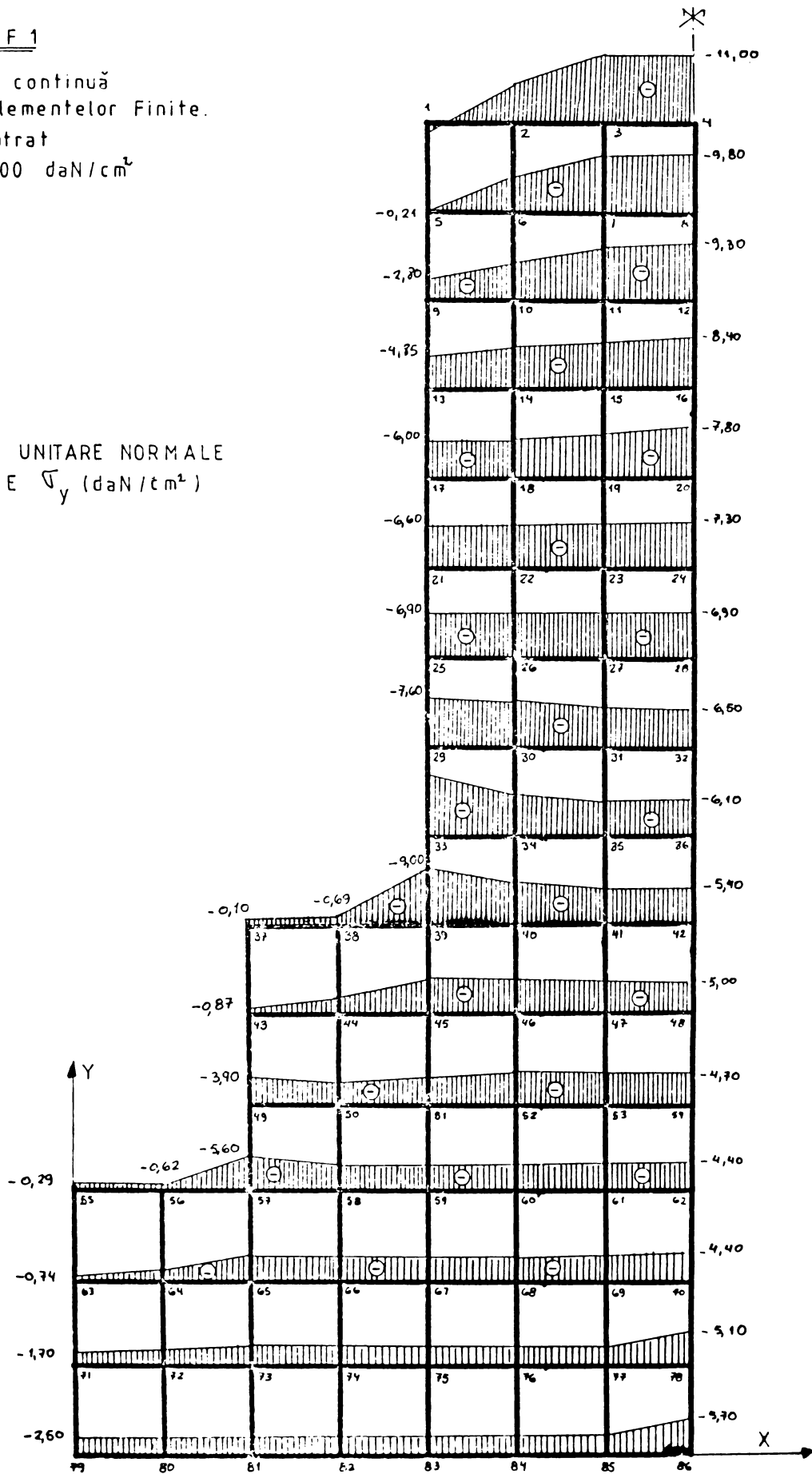


FIG. 2.12

FUCOMEF 1

Fundație continuă
Metoda Elementelor Finite
Model pătrat
 $E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,20$

EFORTURI UNITARE TANGENTIALE
 $\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ (daN/cm}^2\text{)}$

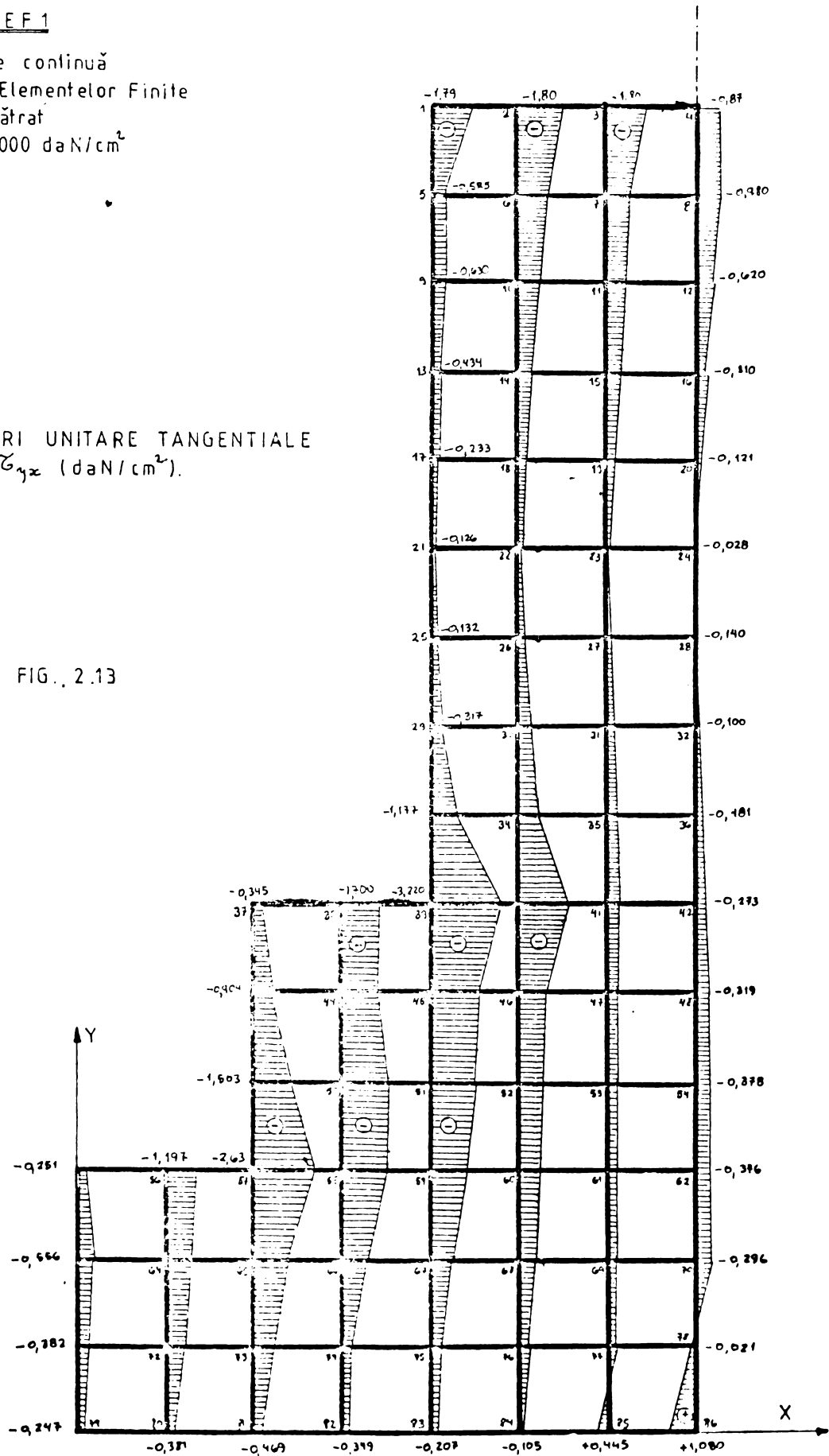


FIG. 2.13

FUCOME F 1

Fundație continuă
 Metoda Elementelor Finite
 Model pătrat.
 $E = 160\ 000$
 $J = 0,20$

EFORTURI UNITARE
 PRINCIPALE σ_1, σ_2

σ_1 - - - - -
 σ_2 ————
 Intindere $\langle \cdot \rangle$
 Compresiune $\rangle \cdot \langle$
 ———— 10 daN/cm²

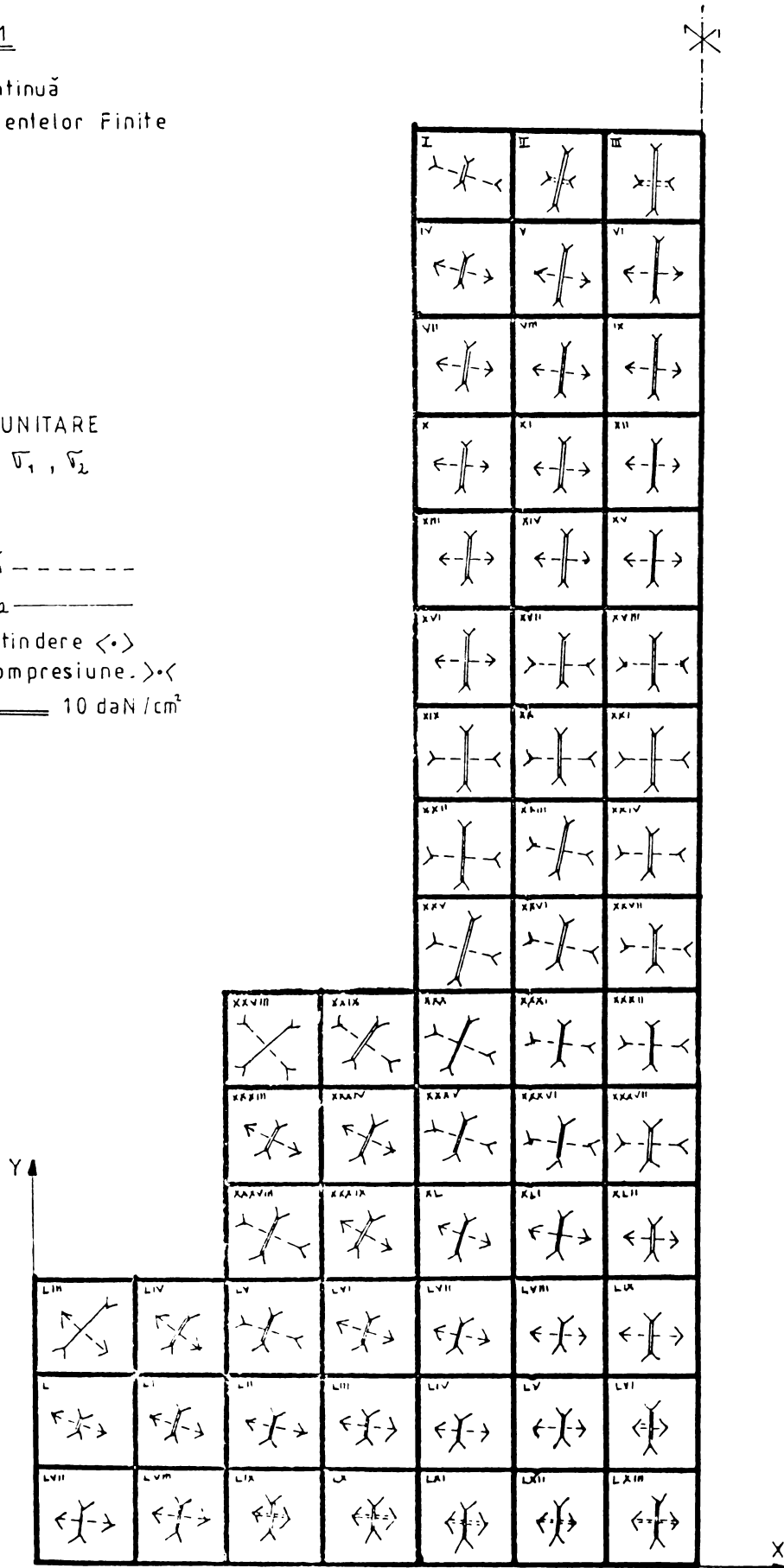


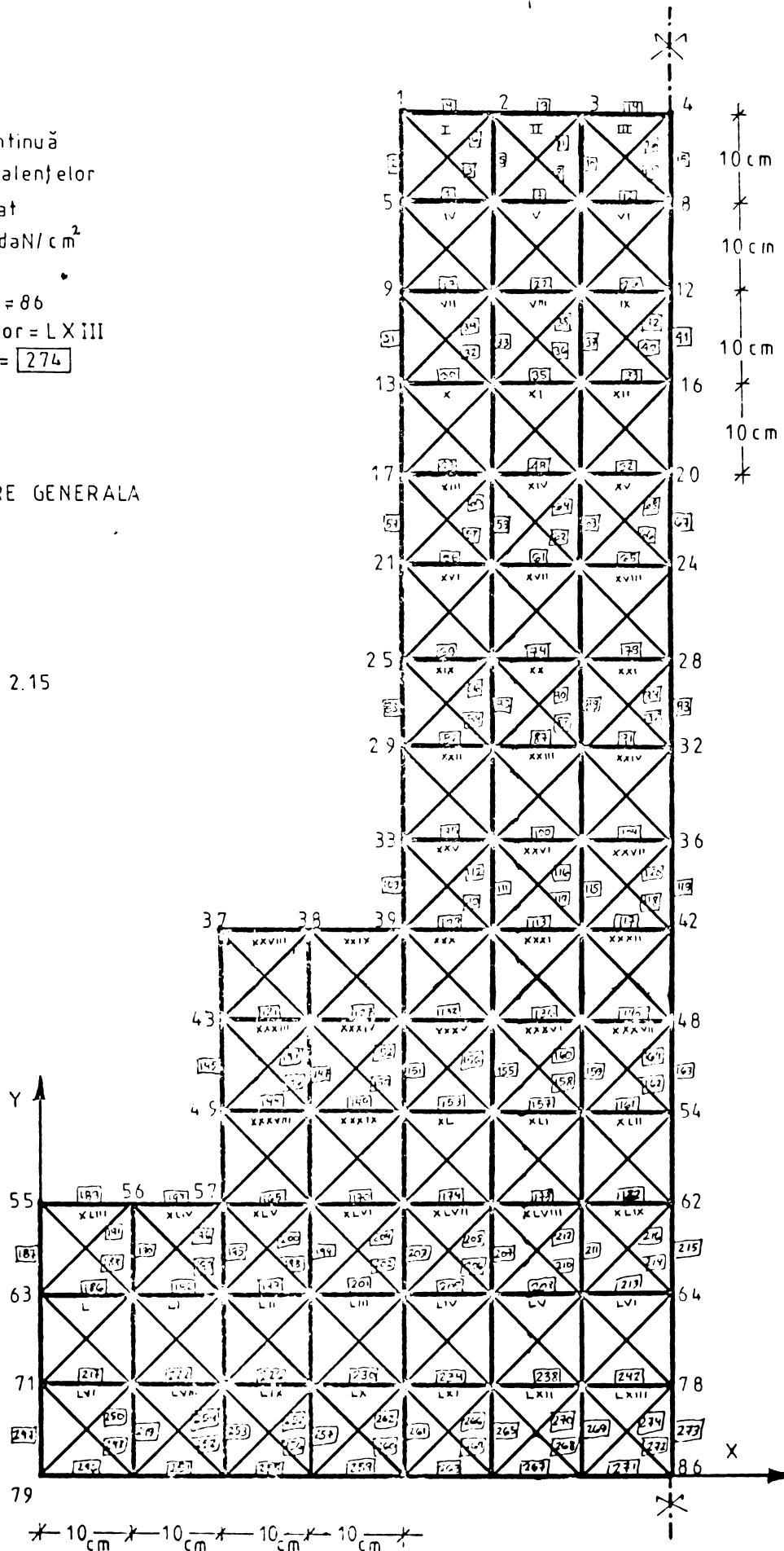
FIG. 2.14

FUCONTEC

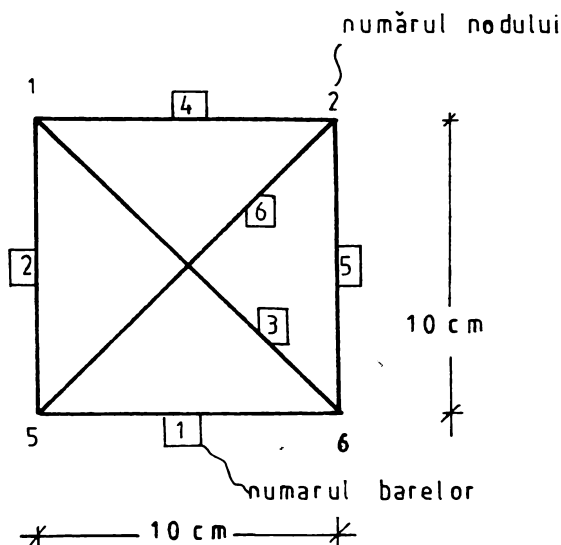
Fundație continuă
 Teoria Echivalențelor
 Model pătrat
 $E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,25$
 Nr. nodurilor = 86
 Nr. elementelor = LXIII
 Nr. barelor = 274

DISCRETIZARE GENERALA

FIG. 2.15



Elementul I



$$\nu = 0,25$$

$$E = 160\ 000\ \text{daN/cm}^2$$

$$V = (10\ \text{cm} \times 10\ \text{cm} \times 1\ \text{cm}) = 100\ \text{cm}^3$$

Intii se calculează coeficienții lui Lamé λ și μ , μ este dat de relație :

$$\mu = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{0,25 \cdot 160\ 000}{(1-0,25)(1,25)} = 640000\ \text{daN/cm}^2$$

Fiind un element patrat și un caz de stare lamé de deformăție coeficienții lui Lamé sînt identici, $\lambda = \mu$. Rigiditatea barelor este $P_b = \nu \lambda$, de unde

$$P_b = \nu \lambda = 100\ \text{cm}^3 \times 64000\ \text{daN/cm}^2 = 6400000\ \text{daN.cm}$$

dar

$$S_b = \frac{P_b}{E \times l_b} = \frac{6400000}{160\ 000 \times 10} = 4\ \text{cm}^2$$

- unde : P_b = rigiditatea barei
- S_b = aria barei
- l_b = lungimea barei.

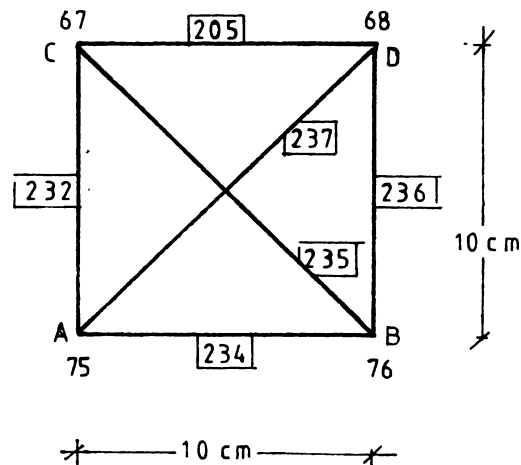
Pentru diagonale se procedează la fel, numai că în acest caz P_d (rigiditatea diagonalelor) este :

$$P_d = 2 \nu \mu = 2(100\ \text{cm}^3) \cdot 64000\ \text{daN/cm}^2 = 12800000\ \text{daN.cm}$$

de unde aria va fi : $S_d = \frac{P_d}{E \times l_d} = \frac{12800000}{160000 \times 14,14} = 5,66\ \text{cm}^2$

Rezultatele obținute în acest tip de program sînt numai eforturi în fiecare bară a elementului trebuind să se calculeze apoi deformațiile specifice și eforturile unitare ale elementelor echivalente. În continuare se prezintă un model de calcul al deformațiilor specifice și al eforturilor unitare.

Elementul LIV



Eforturile barelor
luate din program

N_{205}	=	14,242
N_{232}	=	- 27,225
N_{234}	=	22,715
N_{235}	=	2,019
N_{236}	=	- 30,508
N_{237}	=	- 5,331

Aria barelor și a
diagonalelor

S_{205}	=	0,00
S_{232}	=	0,00
S_{234}	=	0,00
S_{235}	=	5,06
S_{236}	=	0,00
S_{237}	=	5,06

Deformațiile specifice se calculează cu formulele :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{N_{AB}}{E \cdot S_{AB}} + \frac{N_{CD}}{E \cdot S_{CD}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{N_{234}}{E \cdot S_{234}} + \frac{N_{205}}{E \cdot S_{205}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{22,715}{160000 \cdot 0,00} + \frac{14,242}{160000 \cdot 0,00} \right) = 0,0000144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{N_{AC}}{E \cdot S_{AC}} + \frac{N_{BD}}{E \cdot S_{BD}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{N_{232}}{E \cdot S_{232}} + \frac{N_{236}}{E \cdot S_{236}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-27,225}{2 \cdot 160000 \cdot 8,00} + \frac{-30,508}{160000 \cdot 8,00} \right) = -0,0000225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{N_{AD} - N_{BC}}{2 \cdot E \cdot S_{(AD)} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{N_{237} - N_{235}}{2 \cdot E \cdot S_{(237)} \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-5,331 - 2,019}{2 \cdot 2(160000)(5,60)(0,707)(0,707)} \right) = 0,000004 \end{aligned}$$

Din relațiile teoriei elasticității dependența între eforturi și deformațiile specifice se exprimă cu :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu) & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

De unde :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 170666,66 & 42666,66 & 0 \\ 42666,66 & 170666,66 & 0 \\ 0 & 0 & 127999,99 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,0000144 \\ -0,0000225 \\ -0,000004 \end{Bmatrix}$$

Rezolvând acest sistem avem :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (170666,66)(0,0000144) + (42666,66)(-0,0000225) = \\ &= 1,491 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= (42666,66)(0,0000144) + (170666,66)(-0,0000225) = \\ &= -3,225 \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = (127999,99)(-0,000004) = -0,5119$$

Valorile eforturilor în toate elementele sînt date sub formă de tabele, în capitolul IV.

2.2.5. - Fundație continuă și masivul de pământ. Intre fundație și terenul de fundare există o interacțiune de tip dialectic : aceste două elemente se influențează reciproc, determinând funcționalitatea construcției în ansamblu.

Atât terenul de fundare cât și fundația trebuie să îndeplinească anumite condiții spre a asigura integritatea și exploatarea normală a construcției. Astfel, terenul trebuie să fie suficient de rezistent încât să nu cedeze (să nu se rupă) sub fundație, adică să aibă o capacitate portantă suficientă, în afară de această, este necesar ca deformațiile terenului să rămână în limitele admisibile pentru construcție. La rândul său, fundația trebuie astfel alcătuită încât să repartizeze și să transmită în deplină siguranță încărcările preluate de la structură.

Fundații de suprafață sînt adoptate cînd terenul bun de fundare se află la adîncimi relativ reduse. Dimensiunile tălpii fundației se aleg, așa fel ca presiunea transmisă terenului să fie mai mică decît presiunea maximă pe care o poate suporta terenul de fundare, fără a exista pericolul ruperii lui sau a apariției unor tasări incompatibile cu construcția respectivă. Valoarea presiunii transmise de construcție este maximă la suprafața de contact între teren și fundație, scăzînd apoi cu adîncimea, deoarece suprafața de repartizare a sarcinii devine din ce în ce mai mare.

Repartiția presiunilor la suprafața de rezemare poate avea diferite forme, depinzînd de mai mulți factori, dintre care amintim :

- proprietățile fizico-mecanice ale terenului și comportarea lui sub sarcină ;
- dimensiunile și rigiditatea tălpii fundației ;
- modul de deformare al terenului de fundare, prin continuarea deformațiilor și în afara suprafeței de rezemare.

Cu alte cuvinte, deformațiile nu se limitează numai la suprafața de contact între teren și fundație, ci se extind și în afara ei. Cu cît terenul este mai coeziv, deformațiile împiedecate ale terenului la extremitățile tălpii de fundare, dau naștere la presiuni mai mari în aceste puncte. În terenurile necoezive (nisipuri, pietrișuri etc.) se produc la extre-

nitățile fundației anumite refulări locale, care fac ca presiunile la margine să scadă.

Deoarece rezistența terenului de fundare este cu mult inferioară rezistenței materialului din care este alcătuită fundația, suprafața de rezemare a acesteia pe pământ, rezultă mai mare decât dimensiunile elementului de construcție care transmite sarcina fundației. Considerând presiunile pe teren drept forțe exterioare de calcul, dimensiunile tălpii de fundare trebuie astfel alese, încât eforturile unitare interioare să fie inferioare limitelor de rezistență ale materialului din care este confecționată fundația.

2.2.5.1. Problema propusă. Luând în considerare fundația continuă propusă în punctul 2.2.4. s-a găsit bulbul de presiune care conține curbele de egală presiune (izobare) (fig. 2.16).

Fundația a rămas cu aceleași dimensiuni ca în cazul anterior, având ca teren de fundare nisip mare și mijlociu cu un modul de elasticitate $E = 300 \text{ daN/cm}^2$, o greutate specifică de $\gamma_{p1} = 19,0 \text{ KN/m}^3$, și o adâncime de 2,50 m. Cel de al doilea strat este o argilă consistentă modulul ei de elasticitate este de $E = 180 \text{ daN/cm}^2$ și greutatea specifică este $\gamma_{p2} = 18,5 \text{ KN/m}^3$.

Dimensiunile generale ale structurii (fundația + stratul 1 + stratul 2) sînt prezentate în figura 2.17. Această structură s-a rezolvat stît cu metoda elementelor finite cît și cu teoria echivalențelor.

2.2.5.2. Soluții cu metoda elementelor finite. Avantajul programului de calcul care s-a folosit în această lucrare este că el se poate modifica pentru diferite tipuri de elemente finite. Această structură a fost calculată, în primul caz cu elemente finite izoparametrice și în al doilea caz cu elemente finite triunghiulare.

a) **FUCOMIZO.** În acest caz, structura a fost discretizată în rețeaua de elemente izoparametrice arătată în figura 2.17, alcătuită din 49(XLIX) de elemente numerotate tot ca în cazul anterior, cu cifre romane, numărul nodurilor este de 68.

S-a discretizat numai jumătate din structura totală,

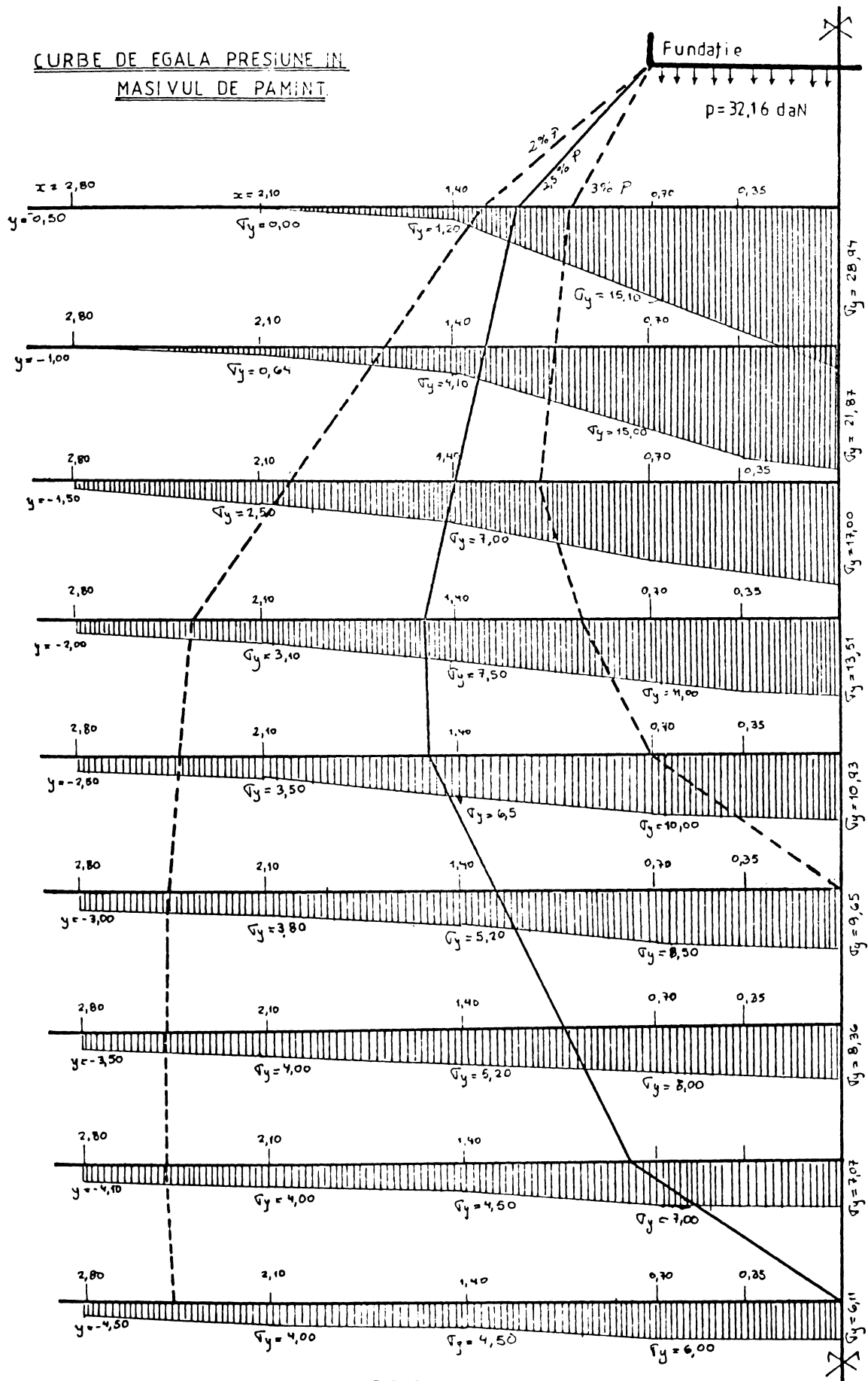


FIG. 2.16

fiindcă este o structură simetrică ; condițiile de blocaje (simetrice) sînt arătate în figura 2.17.

Rezultatele obținute cu acest program sînt prezentate cum urmează : deplasările nodurilor sînt reprezentate în figura 2.18 ; eforturile unitare normale orizontale (σ_x) sînt arătate în figura e.19, eforturile unitare normale verticale (σ_y) sînt desenate în figura 2.20 ; iar eforturi unitare tangențiale (τ_{xy}), sînt în figura 2.21. Eforturile unitare principale sînt prezentate în figura 2.22.

Toate aceste date sînt imprimate în aceeași formă ca și în programul FUCOMEF 1.

b) FUCOMEFII. Programul este același ca cel de la fundație continuă simplă (FUCOMEF 1). În acest caz s-au folosit elemente finite de tip triunghiular. Discretizarea generală a structurii este prezentată în figura 2.23, structura este compusă din 97 (XCVII) de elemente și 67 de noduri. Condițiile de margine (blocajele nule) au rămas aceleași. Introducerea datelor se face în același fel ca în programul FUCOMEF 1.

Rezultatele se află în anexă, la programul respectiv, și se vor analiza la fel ca celelalte programe în capitolul IV.

2.2.5.3. Soluția cu teoria echivalentelor. În acest caz nu s-a putut discretiza structura la fel ca în metoda elementelor finite, fiindcă e foarte greu să se calculeze elementele de forme oarecare, fiind discretizată în modulul prezentat în figura 2.24. Pentru a ușura munca s-au ales elementele echivalente în formă pătrată.

Numărul elementelor este de 49 (numerotate tot cu cifre romane), care coincide cu numărul elementelor programului FUCOMEF20, astfel încît să se poată compara cu celelalte două programe precedente în capitolul IV.

La fel ca în programul FUSCOTAC, valorile eforturilor din elemente sînt calculate luînd formulele de la punctul 2.2.4.3. Eforturile barelor sînt luate din programul respectiv FUCOBUTE, valorile eforturilor din elemente sînt date în tabele în capitolul IV.

FUNDATIE CONTINUA CU MASIVUL DE PAMINT.

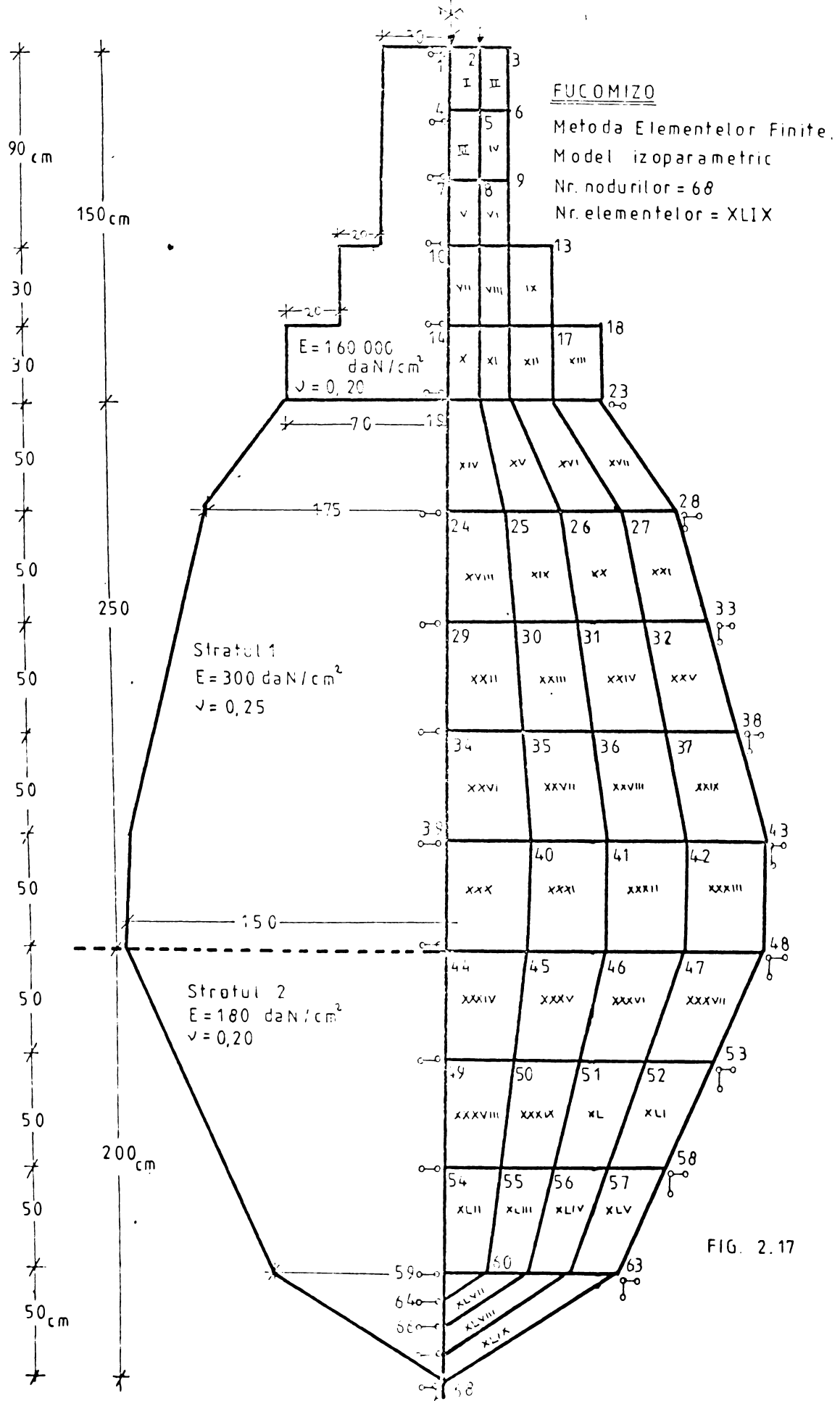
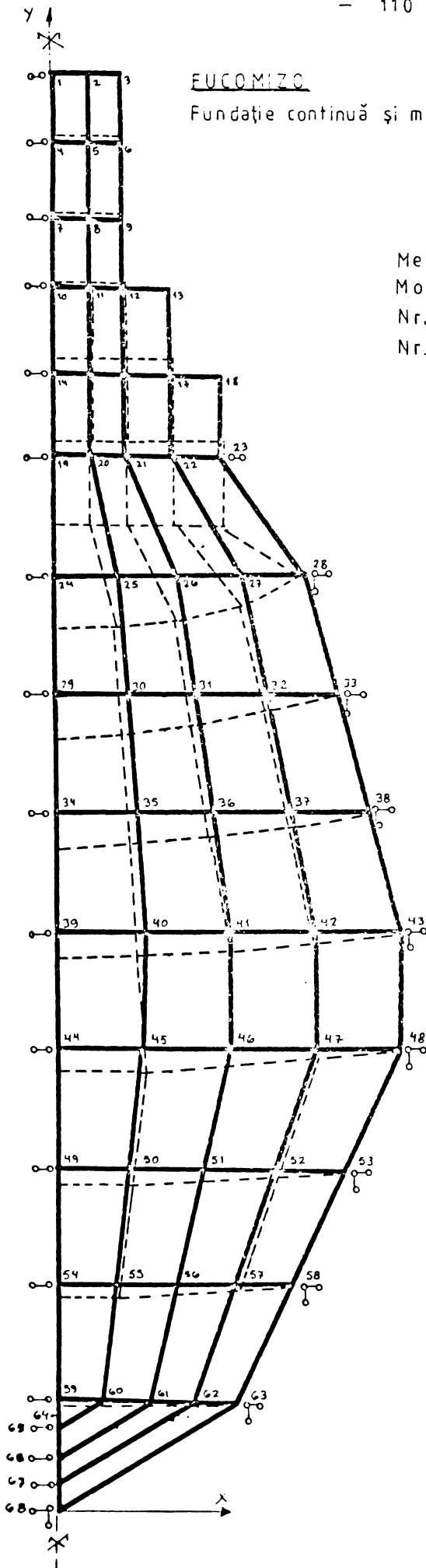


FIG. 2.17



FUCOMIZO

Fundație continuă și masivul de pământ.

Metoda Elementelor Finite.

Model izoparametric

Nr. nodurilor = 68

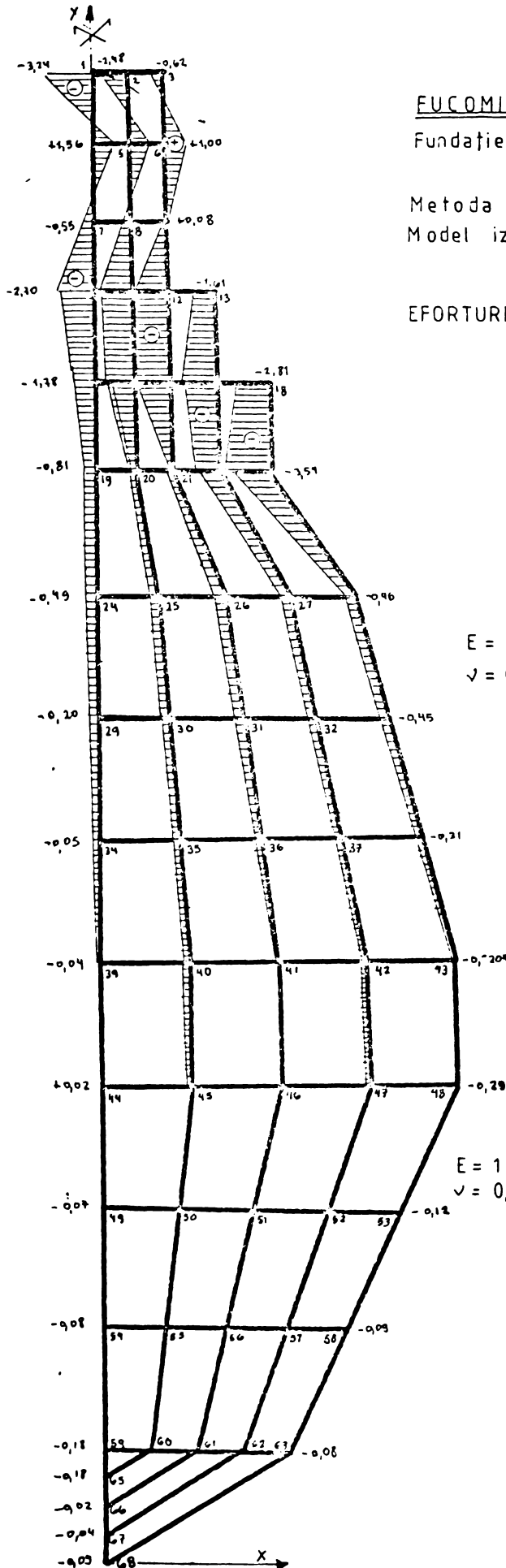
Nr. elementelor = XLIX

DEPLASARI NODALE

Structură nedeformată

Structură deformată

FIG. 2.18



FUCOMIZO

Fundație continuă și masivul de
pământ.

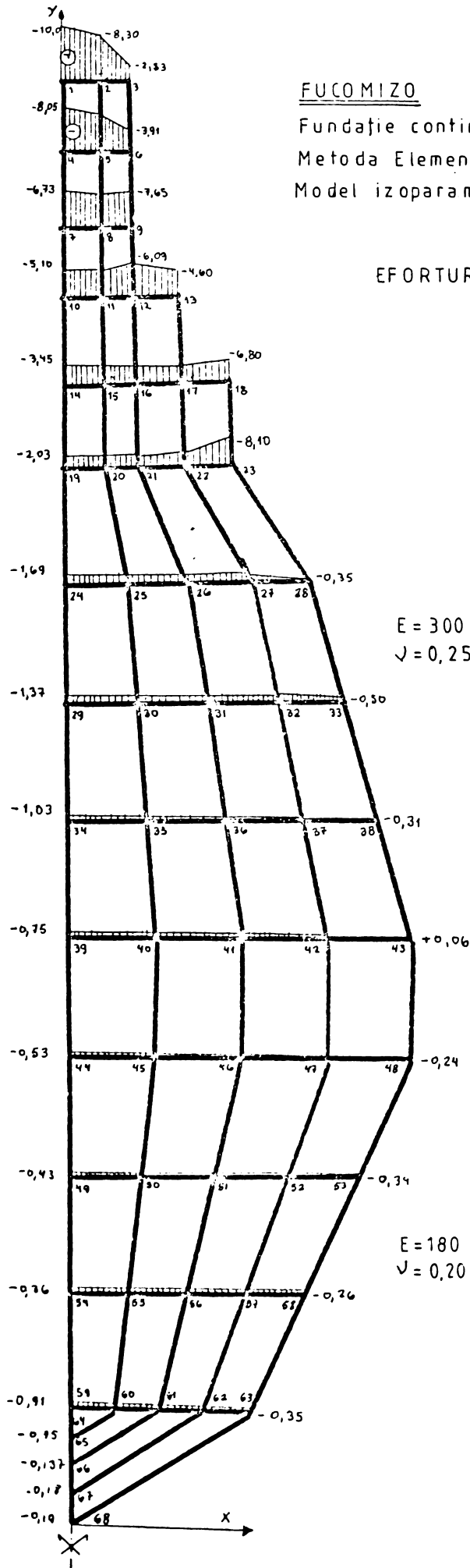
Metoda Elementelor Finite
Model izoparametric.

EFORTURI UNITARE NORMALE
ORIZONTALE σ_x (daN/cm²)

$E = 300 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,25$

$E = 180 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,20$

FIG. 2.19



FUCOMIZO

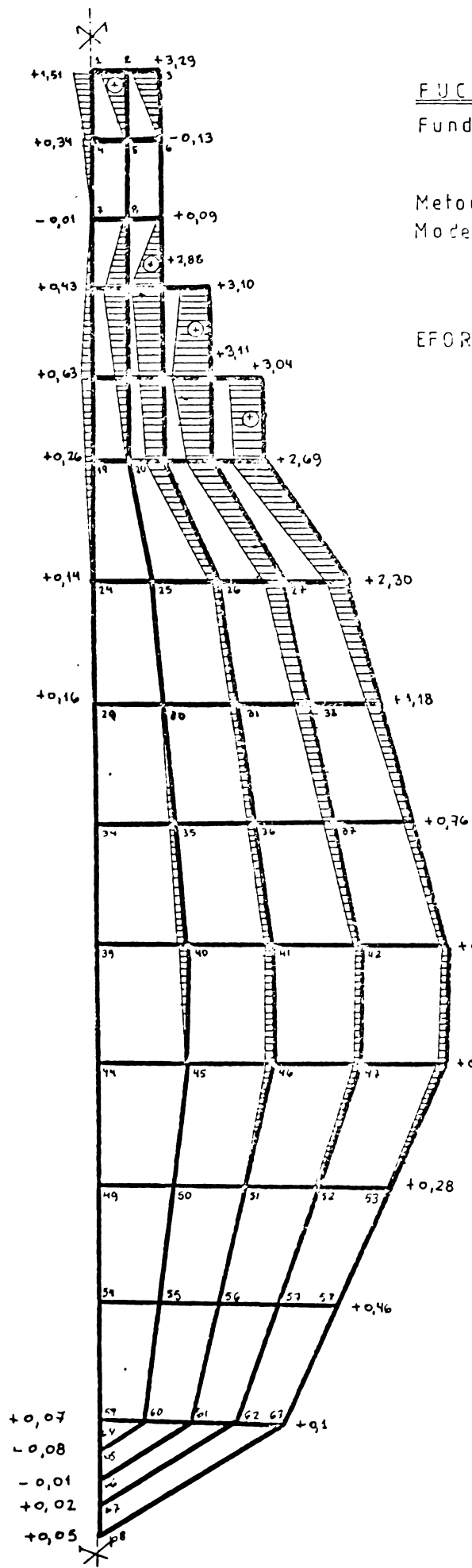
Fundație continuă și masivul de pământ.
Metoda Elementelor Finite
Model izoparametric.

EFORTURI UNITARE NORMALE
VĂRTICALE σ_y (daN/cm²)

$E = 300 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,25$

$E = 180 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,20$

FIG 2.20



FUCOMIZO

Fundație continuă și masivul de pământ.

Metoda Elementelor Finite Model izoparametric.

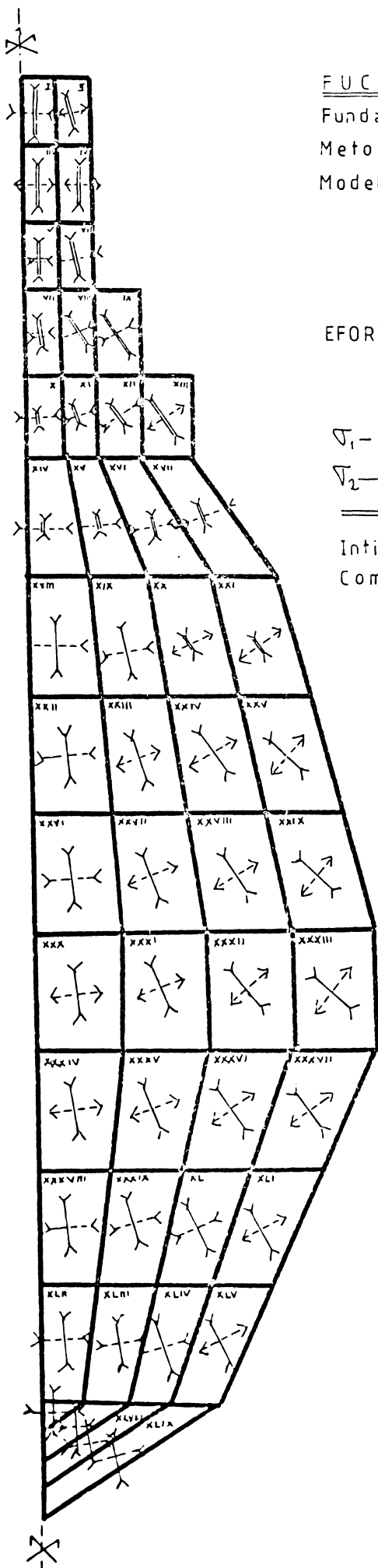
EFORTURI UNITARE TANGENTIALE.

τ_{xy} (daN/cm²)

$E = 300 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,25$

$E = 180 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,20$

FIG. 2.21



FUCOMIZO

Fundație continuă și masivul de pământ.

Metoda Elementelor Finite

Model izoparametric

EFORTURI UNITARE PRINCIPALE
 σ_1, σ_2 (daN/cm²)

σ_1 - - - - -

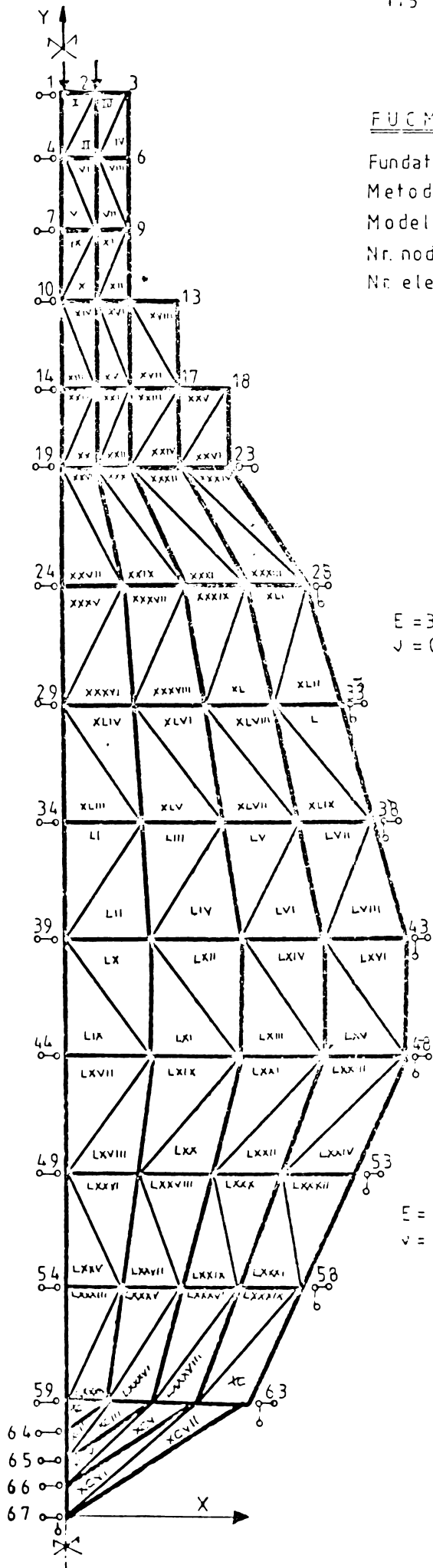
σ_2 ————

==== 10 daN/cm².

Intindere <•>

Compresiune >•<

FIG. 2.22



FUNDAMENTI

Fundatie continuă și masivul de pământ.

Metoda Elementelor Finite

Model triunghiular

Nr. nodurilor = 67

Nr. elementelor = XCVII

$E = 300 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,25$

$E = 160 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,20$

FIG. 2.23

FUCOBUTE

Fundație continuă și masivul de pământ.

Teoria Echivalentelor

Modeli pătrat

Nr. nodurilor = 68

Nr. elementelor = XLIX

Nr. barelor = 222

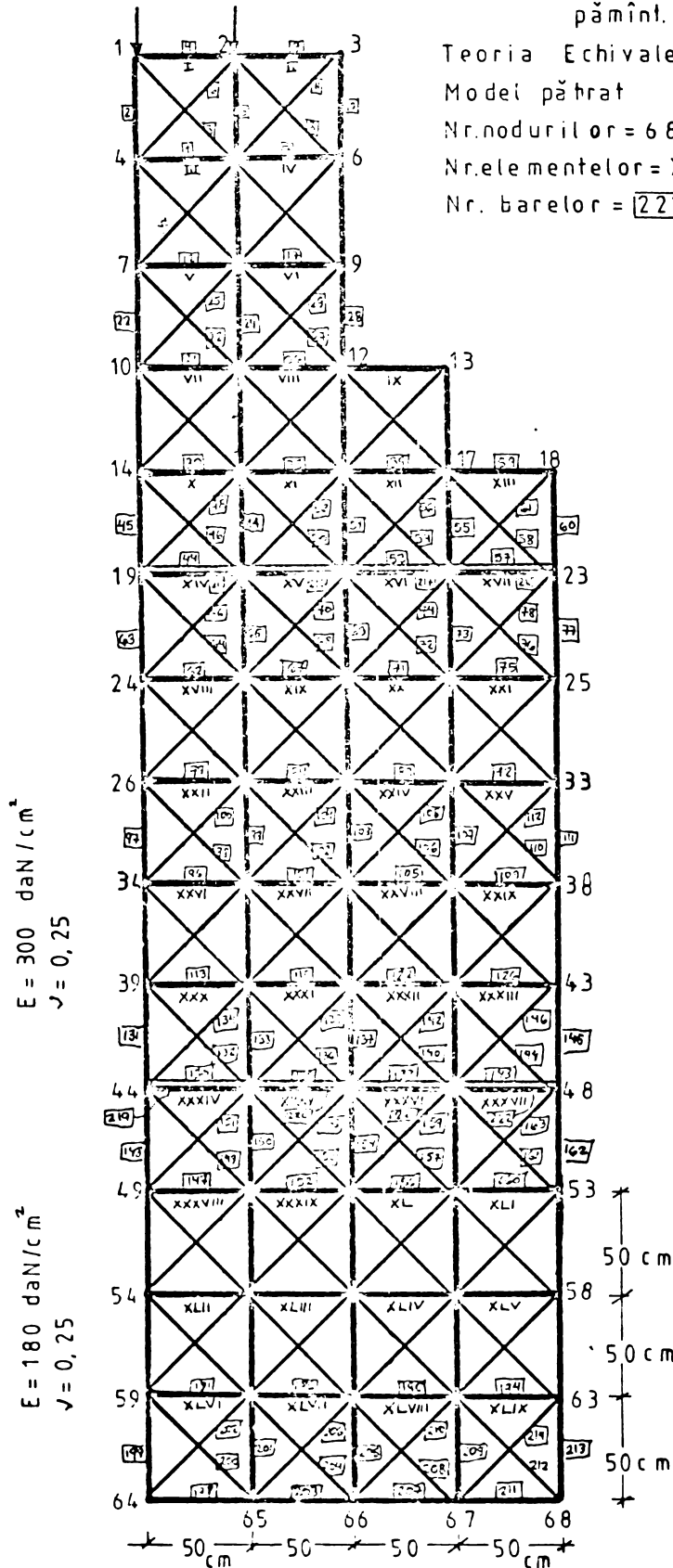


FIG. 2.24

2.3. Ziduri de sprijin

2.3.1. Generalități. Zidurile de sprijin sînt construcții care au ca scop susținerea unui masiv de pămînt situat între două platforme aflate la înălțimi diferite, preluînd împingerea activă a pămîntului și eventual presiunea apei situate în spatele lor. Zidurile de sprijin constituie lucrări definitive, larg utilizate în construcțiile hidrotehnice și în cele rutiere. Ele reprezintă formula clasică a construcțiilor de susținere și s-au executat încă din antichitate.

Zidurile de sprijin se realizează în prezent din beton monolit sau prefabricat, din beton armat, mai rar din zidărie de piatră uscată sau cu mortar.

Solicitarea asupra zidului de sprijin, respectiv împingerea pămîntului, are ca efect un moment de răsturnare. Dacă stabilitatea lucrării este asigurată de greutatea proprie a zidului, acesta se numește zid de greutate.

Construcțiile din această categorie au un caracter masiv, voluminos și implică un mare consum de material (beton sau zidărie), fiind uneori neeconomice. Pentru a reduce volumul de beton, zidurile pot fi realizate și în alte variante, fiind prevăzute cu elemente de descărcare, cu diafragme etc. În astfel de cazuri, ele trebuie însă executate din beton armat.

Zidurile de greutate pot avea secțiuni transversale de diferite forme, așa cum se arată ca exemplu în figura 2.25: cu perament amonte vertical (a), înclinat (b, c) sau în trepte (d).

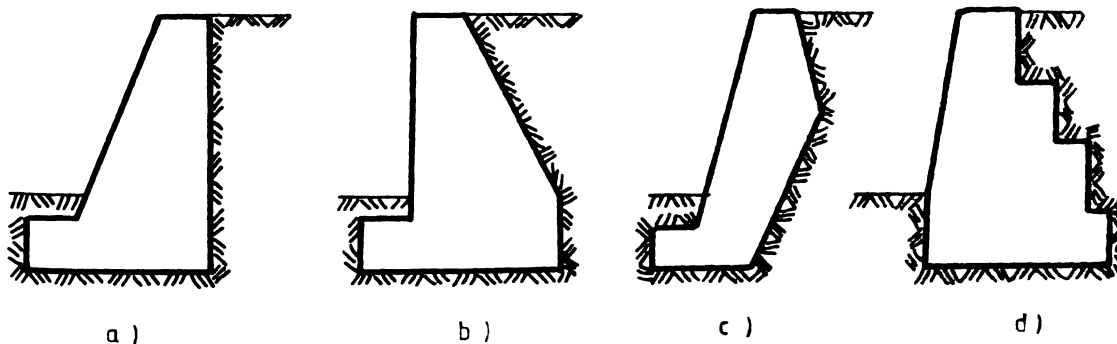


FIG. 2.25

La rândul lor, zidurile cu descărcare, din care unele variante sînt schițate în figura 2.36, pot fi prevăzute cu o placă sau talpă la bază (a) și atunci se numesc ziduri tip cornier, sau uneori și cu una sau mai multe console (b) precum și eventual cu diafragme transversale sau contraforti la anumite distanțe.

În asemenea cazuri, stabilitatea este asigurată de greutatea pămîntului aflat deasupra consolelor și talpii, greutate care în calcul se adaugă la cea a zidului.

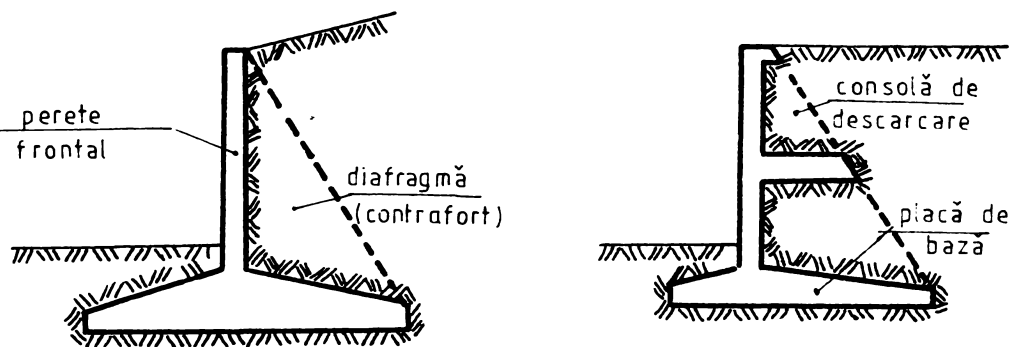


FIG. 2.26

Pentru calculul unui zid de sprijin se ține seama de următoarele solicitări :

- greutatea proprie a zidului G ,
- reacțiunea terenului pe talpa fundației,
- împingerea activă a pămîntului în spatele zidului,
- rezistența pasivă a pămîntului din fața zidului la bază. Întrucît pentru mobilizarea acesteia ar fi necesare deplasări relativ mari ale zidului, iar umplutura din fața zidului este uneori lipsă, efectul rezistenței pasive nu se ia, de regulă, în considerare,
- suprasarcina utilă de pe platforma superioară din spatele zidului, al cărui efect majorează împingerea activă.

Proiectarea unui zid de sprijin cuprinde următoarele faze :

- stabilirea condițiilor naturale de teren, pe baza

- unei prospecțiuni geotehnice ;
- stabilirea materialului și alegerea preliminară a secțiunii transversale, ținând seama de înălțimea de sprijin și de situația locală,
- calculul împingerii active și eventual al presiunii apei din spatele zidului.

2.3.2. Problema propusă. Pentru problema noastră s-a ales un zid de sprijin din beton simplu. Caracteristicile geometrice s-au ales în funcție de înălțimea de sprijin (h) și terenul de fundație (figura 2.27 a). Pământul înconjurător este format în primul strat de nisip argilos plastic consistent și în stratul doi de pietriș în amestec cu nisip (balast).

- Caracteristicile sînt :

$$h = 3,50 \text{ m}$$

$$D = 1,50 \text{ m}$$

$$H = h + D = 3,50 + 1,50 = 5,00 \text{ m}$$

$$B > \frac{H}{2} = \frac{5,00}{2} = 2,50 \text{ ml.} \quad \text{impunem } B = 3,00$$

$$\text{și } b = 0,70$$

- Verificarea la rigiditate $\text{tg} \alpha > \text{tg} \alpha_{\text{admis}} = 1,20$

$$\text{tg} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{100}{80} = 1,25 > 1,2$$

- Se determină diagrame de presiuni (fig. 2.27b).

Stratul I

Se transformă suprasarcina q într-un strat de pământ echivalent γ_1 , și înălțimea i .

$$q = i \gamma_1 \quad i = \frac{q}{\gamma_1} \quad \begin{array}{l} \gamma_1 = 18,7 \text{ KN/m}^3 \\ q = 15,00 \text{ KN/m}^2 \end{array}$$

$$i = \frac{15,00}{18,70} = 0,8021 \text{ m.}$$

$$P_B = \gamma_1 \cdot i \cdot K_{a1} = 18,70 \cdot 0,8021 \cdot 0,351$$

$$P_B = 5,26 \text{ KN/m}^2$$

$$P_1 = \gamma_1 (i + h_1) \cdot K_{a1}$$

ZID DE SPRIJIN

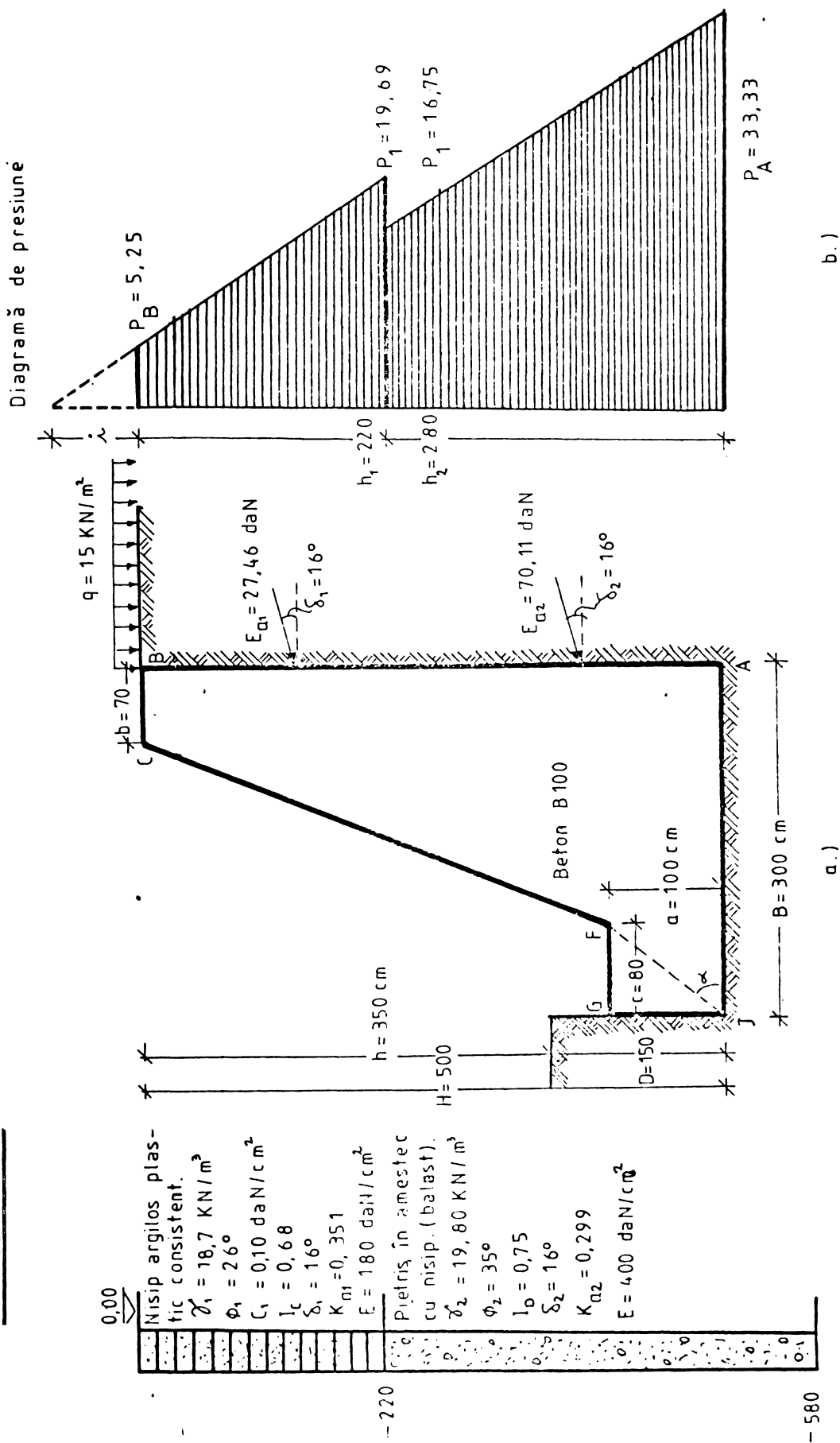


FIG. 2.27

$$P_1 = 18,70 (0,8021 + 2,20) \cdot 0,351$$

$$P_1 = 19,70$$

$$E_{a1} = \frac{P_B + P_1}{2} \cdot h_1 = \frac{5,26 + 19,70}{2} \cdot 2,20 = 27,46 \text{ KN.}$$

Stratul II.

$$\gamma_1 (h_1 + 1) = h_0 \gamma_2$$

$$h_0 = \frac{\gamma_1 (h_1 + 1)}{2} = \frac{18,70(0,8021 + 2,20)}{19,80} = 2,83 \text{ m.}$$

$$P_1^* = \gamma_2 \cdot h_0 \cdot K_{a2}$$

$$P_1^* = 19,80 \cdot 2,83 \cdot 0,299 = 16,75$$

$$P_A = \gamma_2 \cdot (h_0 + h_2) \cdot K_{a2}$$

$$P_A = 19,80 (2,83 + 2,80) \cdot 0,299 = 33,33$$

$$E_{a2} = \frac{P_1^* + P_A}{2} \cdot h_2 = \frac{16,75 + 33,33}{2} \cdot 2,80 = 70,11 \text{ KN}$$

2.3.2.1. Soluția cu metoda elementelor finite. Pentru a rezolva acest zid s-a folosit elementul finit izoperametric. Programul rămâne cu aceleași caracteristici citate în punctul 2.2.4.2, atât pentru introducerea datelor cât și tipărirea rezultatelor.

Rezultatele sînt date în programul ZIDOMEF 1 în anexă. În figurile (2.29 - 2.33) se prezintă grafic, respectiv : deplasările totale ale nodurilor, efortul unitar normal orizontal (σ_x), efortul unitar normal vertical (σ_y), efortul unitar tangențial și eforturile unitare principale.

2.3.2.2. Soluția cu teoria echivalentelor. Ne putîndu-se discretiza în aceeași formă ca în cazul metodei elementelor finite, s-a ales o structură echivalentă (fig. 2.34). Structura aceasta este formată din 70 de elemente, numerotate tot cu cifre romane, are 92 de noduri și 301 de bare. Modulul de elasticitate este la fel $E = 160\ 000 \text{ daN/cm}^2$ și coeficientul

ZiDSMEF1

Metoda Elementelor Finite

Model izoparametric

$E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$

$\nu = 0,25$

DEPLASARI NODALE

Structură nedeformată

Structură deformată

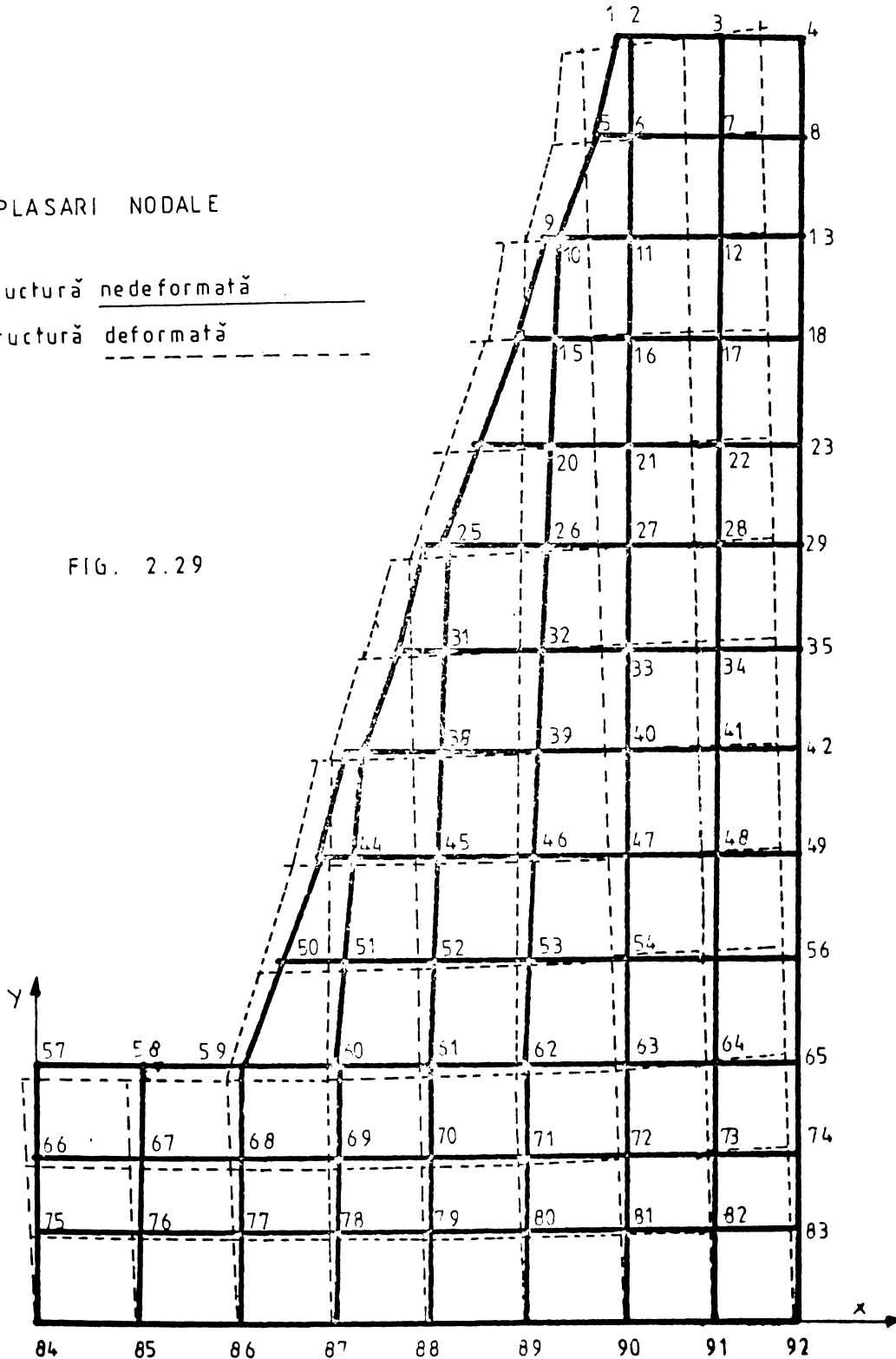


FIG. 2.29

ZID SMEF 1

Zid de sprijin

Metoda Elementelor Finite

Model izoparametric

$E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$

$\nu = 0,25$

EFORTURI UNITARE NORMALE
ORIZONTALE σ_x (daN/cm²)

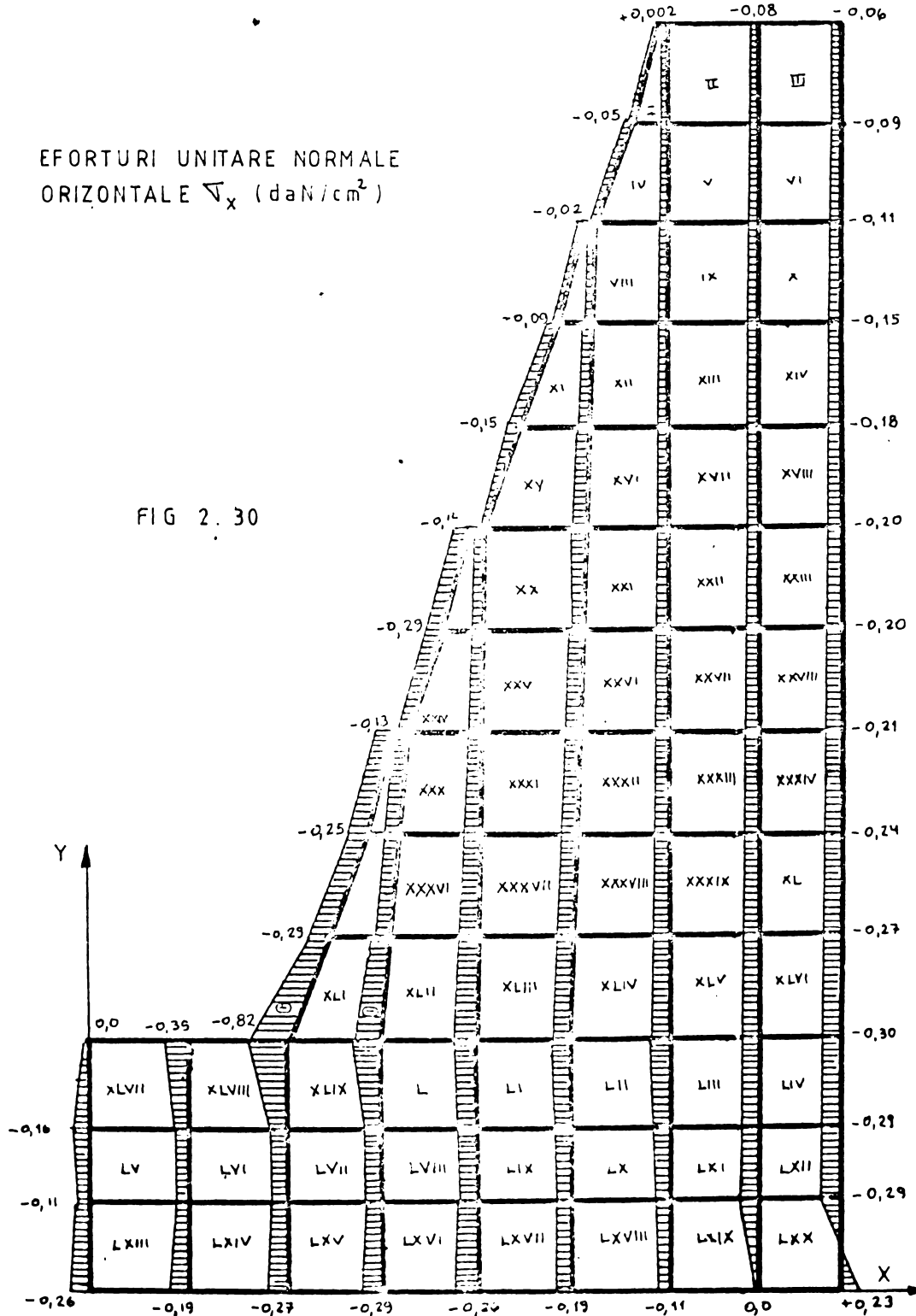


FIG 2. 30

ZIDSMEF 1

Zid de sprijin

Metoda Elementelor Finite

Model izoparametric

$E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$

$\nu = 0,25$

EFORTURI UNITARE NORMALE
VERTICALE σ_y (daN/cm²)

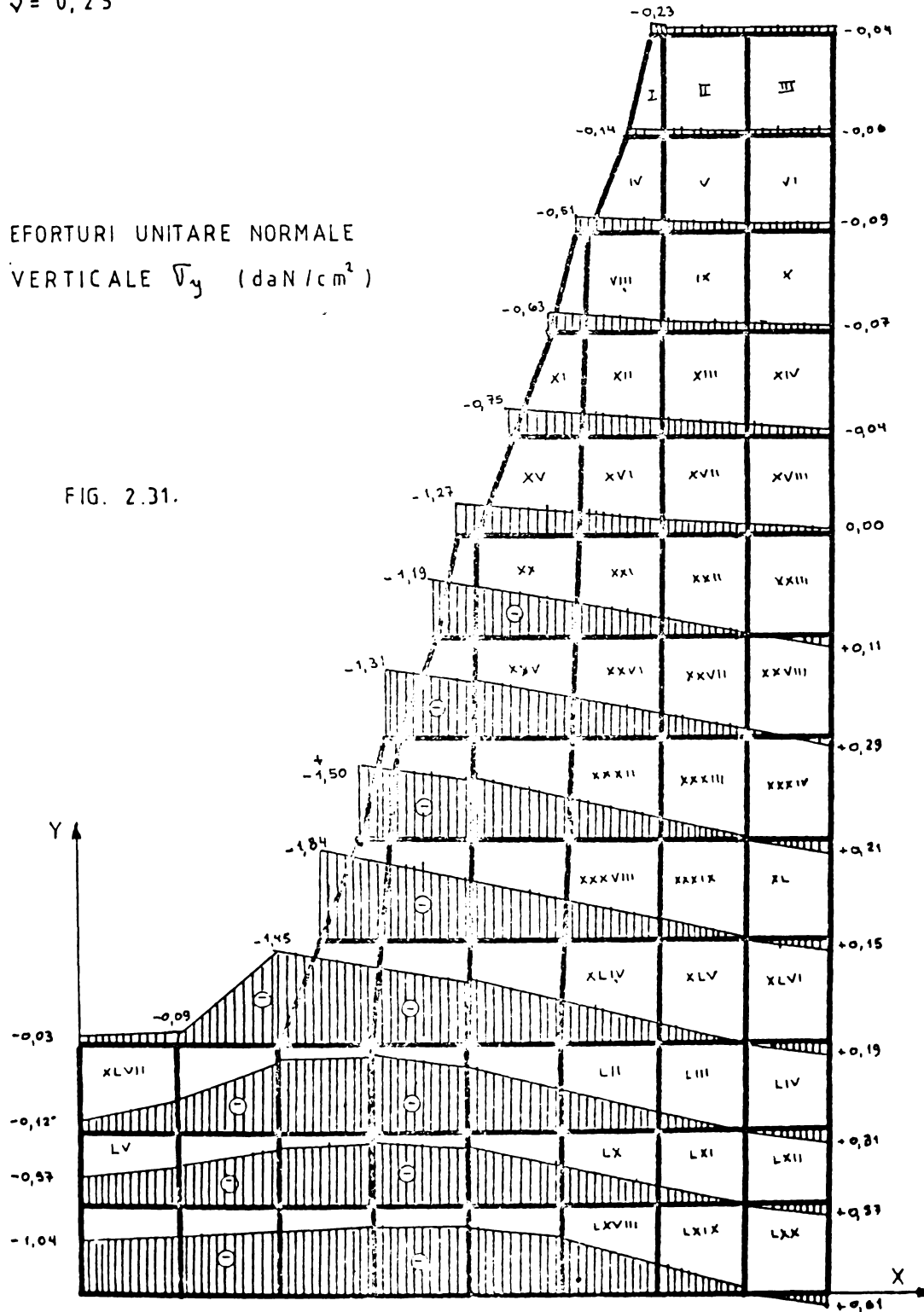
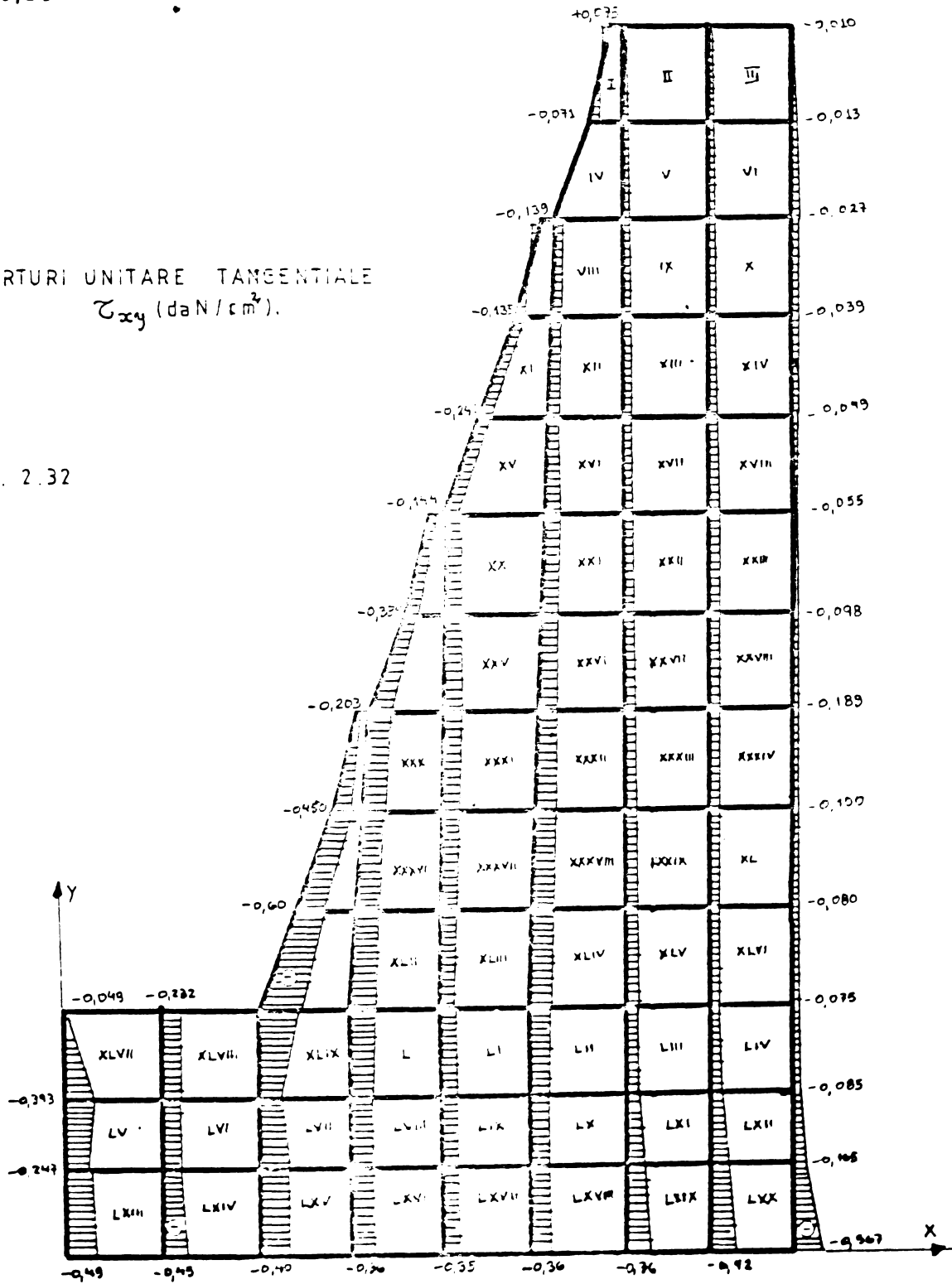


FIG. 2.31.

Metoda Elementelor Finite
 utilizând elemente parametric
 $E = 150\,000 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,25$

EFORTURI UNITARE TANGENTIALE
 $\tau_{xy} \text{ (daN/cm}^2\text{)}$

FIG. 2.32



ZIDSMEF 1

Zid de sprijin

Metoda Elementelor Finite

Model izoparametric

$E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$

$\nu = 0,25$

EFORTURI UNITARE PRINCIPALE.

$\sigma_1, \sigma_2 \text{ (daN/cm}^2\text{)}$

σ_1 - - - - -

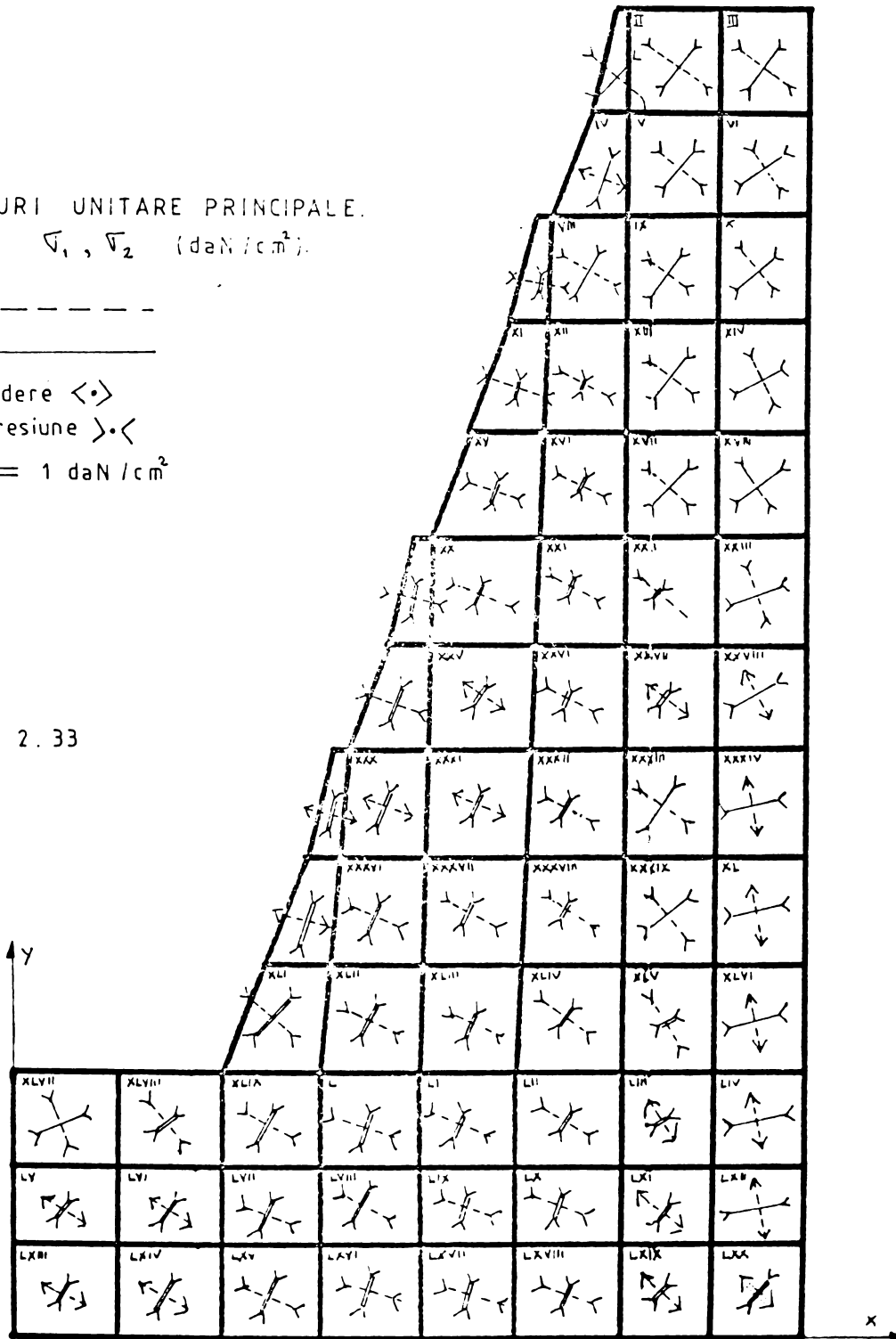
σ_2 —————

Intindere $\langle \cdot \rangle$

Compresiune $\rangle \cdot \langle$

==== 1 daN/cm²

FIG. 2.33



ZIDSSTEC

Zid de sprijin

Teoria Echivalențelor

Model pătrat

Nr nodurilor = 92

Nr. elementelor = LXX

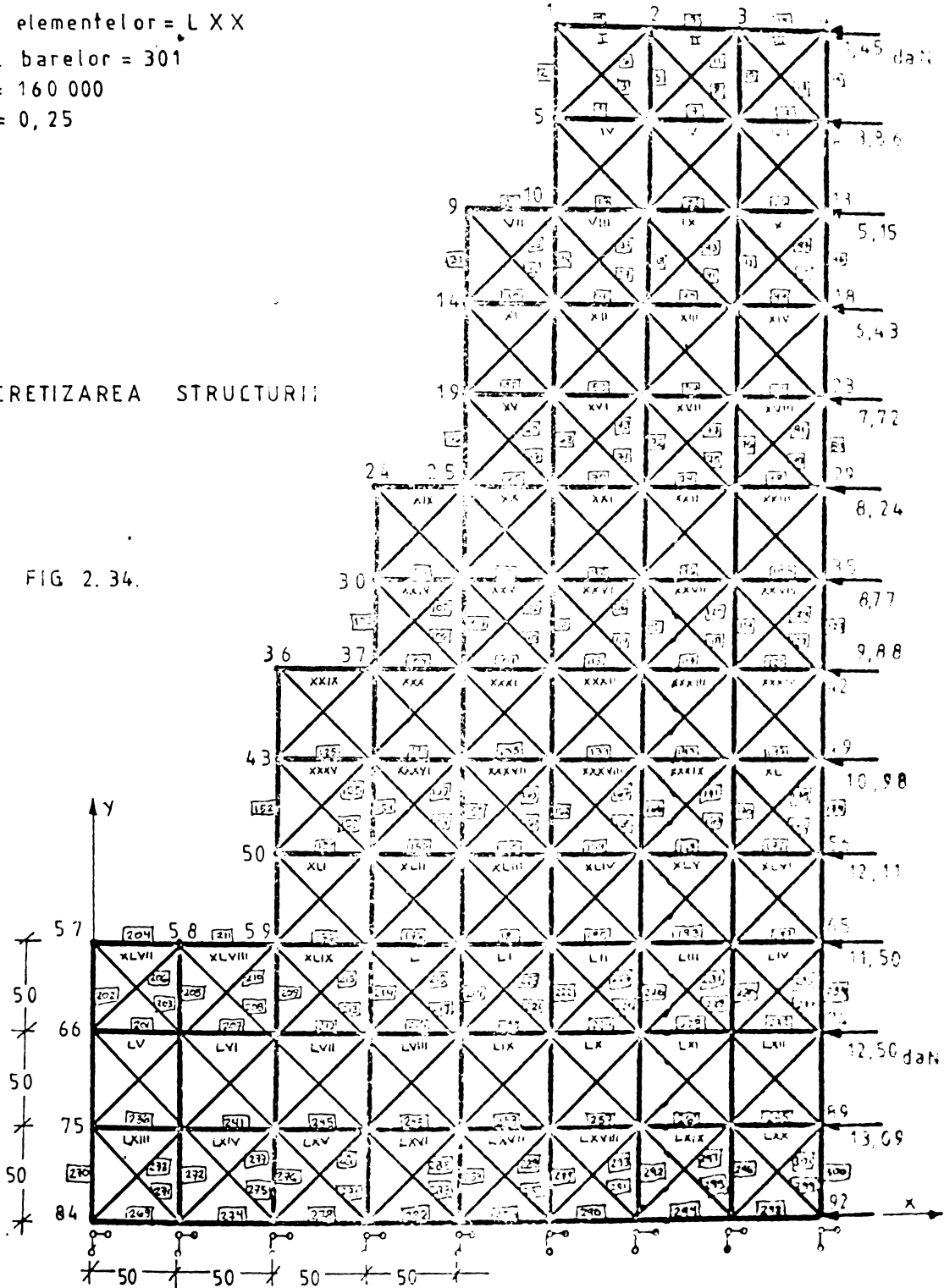
Nr. barelor = 301

$E = 160\ 000$

$\nu = 0,25$

DISCRETIZAREA STRUCTURII

FIG 2.34.



lui Poisson, în cazul impus, va fi $\nu = 0,25$.

Încărcările sînt identice, la fel și condițiile de margine (blocajele). Programul acesta, ZIDSSTEC, este prezentat în anexă, iar rezultatele calculate adică, eforturile unitare sînt date în tabele, la capitolul IV.

2.3.3. Zid de sprijin și zona de alunecare

2.3.3.1. Generalități. În anumite cazuri apare necesară verificarea stabilității zidului, luînd în considerare posibilitatea alunecării acestuia împreună cu masivul înconjurător, fie pe suprafețe ce trec prin baza zidului, fie pe suprafețe care angajează o porțiune mai mare din masivul de teren.

2.3.3.2. Stabilitatea zidului de sprijin luînd în considerare și terenul înconjurător. În multe cazuri s-a constatat că zidurile de sprijin își pierd stabilitatea concomitent cu terenul înconjurător, de regulă după suprafețe cilindrice de alunecare CAM, care în practică se admit suprafețe plane de rupere cum ar fi $C_1AL_1M_1$, (figura 2.35).

Terenul din spatele zidului de sprijin are următoarele caracteristici :

- greutatea volumică a pămîntului

$$\gamma = \frac{\gamma_1 \cdot h_1 + 2 \cdot \gamma_2 \cdot h_2}{H} = \frac{18,7 \cdot 2,20 + 19,0 \cdot 2,80}{2,20 + 2,80}$$

$$\gamma = 18,89 \text{ KN/m}^3$$

- unghiul de frecare interioară : $\phi = 31^\circ$

- unghiul de frecare dintre zid și teren

$$\delta = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) \phi = 18^\circ$$

- unghiul de inclinare al terenului din spatele zidului cu orizontală : $\beta = 0$;

- terenul din spatele zidului este încărcat cu o sarcină uniform distribuită de valoare :

$$Q = 15 \text{ KN/m}^2$$

Se examinează echilibrul pe planul vertical ce trece prin fața fundației zidului de sprijin HJL_1 , (fig. 2.35).

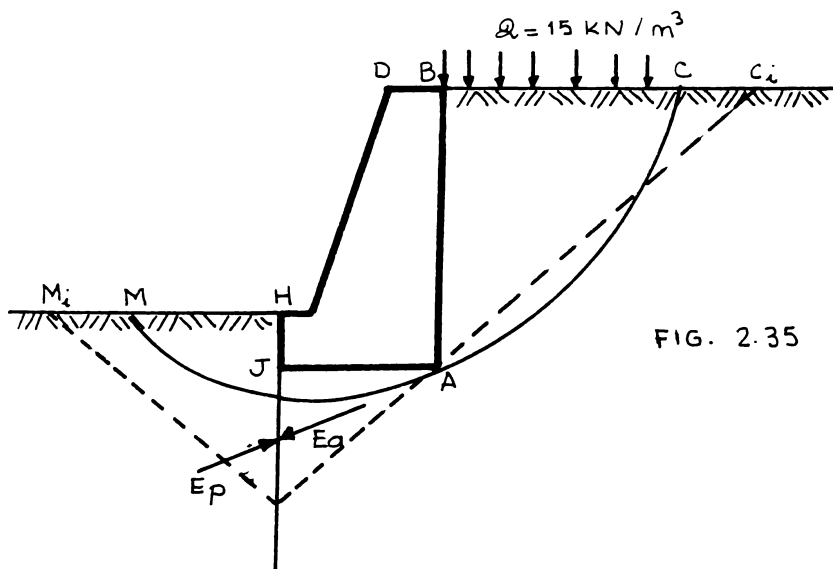


FIG. 2.35

Pe această suprafață acționează împingerea activă E_a , din cauza luncării pe planul C_1AL_1 a prismelor de pământ ABC_1 și AJL_1 și a zidului de sprijin. Se opune luncării rezistența pasivă E_p .

Problema se rezolvă considerînd mai multe plane de luncare ce trec prin punctul A al zidului de sprijin C_1AL_1 , C_2AL_2 , C_3AL_3 și C_4AL_4 (figura 2.36.a).

Se stabilește pentru fiecare plan de luncare valorile E_{a1} , E_{a2} , E_{a3} , E_{a4} cu ajutorul triunghiului forțelor (fig. 2.36.b) considerînd echilibrul dintre forțele ΣG_1 ; E_{a1} reacțiunea pe suprafața HL_1 și E_p reacțiunea pe suprafața L_1C_1 .

Directiile acestor forțe sînt date de condiția de echilibru la limită, cînd reacțiunea face cu normala la suprafața de luncare unghi θ (figura 2.36.a).

Calcululele necesare sînt trecute sistematizat în tabelul care urmează :

- în coloana 2 se trec înălțimile delimitate de nivelul terenului din fața zidului și punctele L_1 ,
- coloana 3 conține greutatea prismelor de sub talpa zidului AJL_1 , calculate pe o lungime de 1 m perpendicular pe zid,

De exemplu :

ZID DE SPEIJN SI ZONA DE ALUNECARE

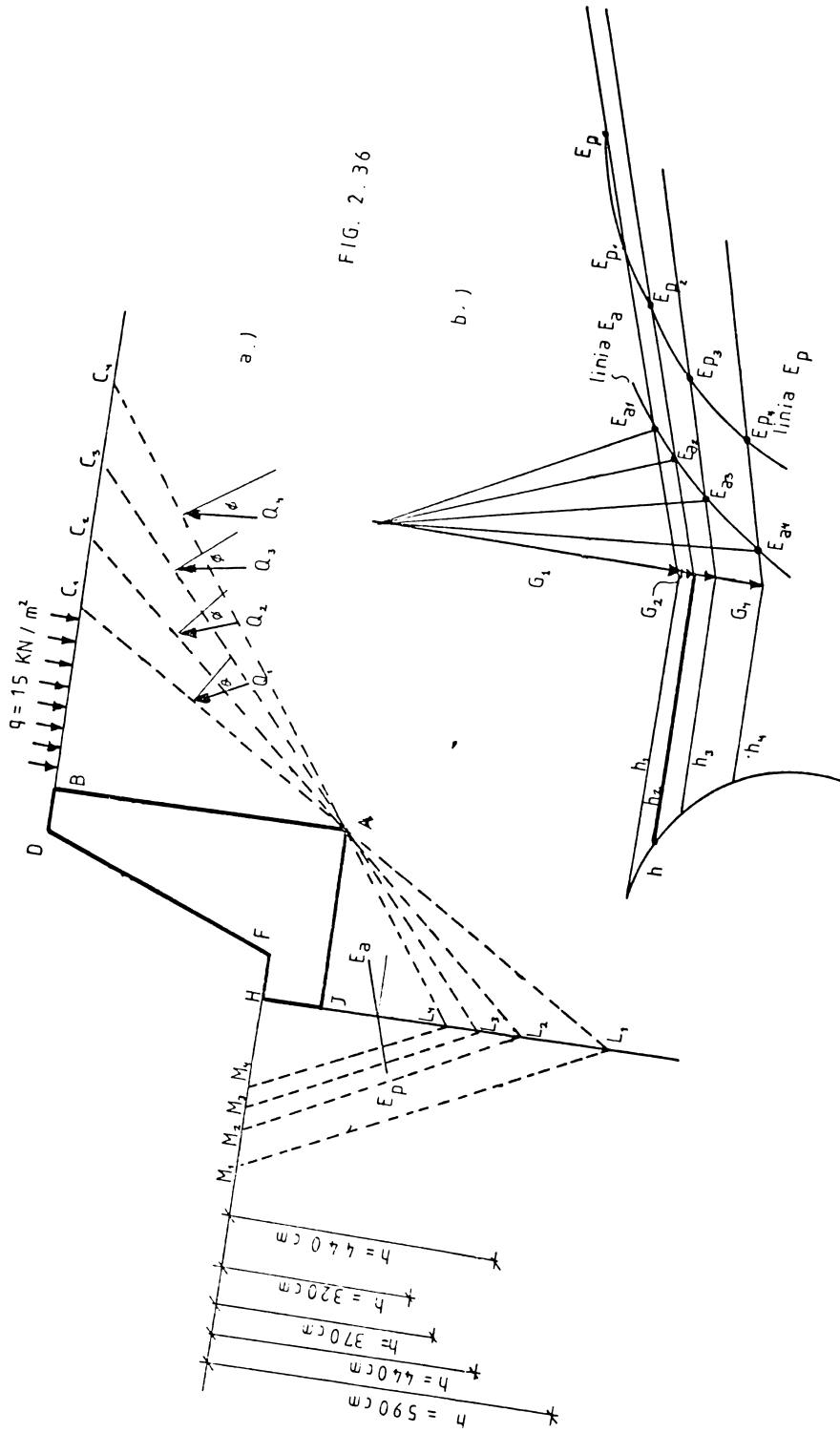


FIG. 2.36

$$G_1 = \frac{AJ \cdot J_{L_1}}{2} \cdot 1,0 \cdot \gamma = \frac{3,0 \cdot 5,0}{2} \cdot 1 \cdot 19,0$$

$$G_1 = 142,50 \text{ KN}$$

Tabelul 2.II

Plan ru- pere	h_1 (m)	Greu- tatea pris- melor AJL_1 (KN)	Greu- tatea pris- melor ABC_1 (KN)	Supra- sarci- na pe prism. (KN)	G + (col.+ 3+4+5+ G_{sid}) (KN)	E_a (KN)	E_p (KN)	$= \frac{E_p}{E_a}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5,90	142,50	146,24	45,00	532,84	250	603,66	2,41
2	4,40	99,75	202,85	67,50	566,20	200	335,73	1,68
3	3,70	76,95	259,46	82,50	618,01	120	237,40	1,97
4	3,20	61,27	320,79	102,00	638,16	65	177,58	2,73

- in coloana 4 se trece greutatea prismelor ABC_1 cal-
culate in același mod,
- in coloana 5 se trece suprassarcina (2) ce revine
fiecărei prismă de pământ ABC_1 ,
- coloana 6 conține suma greutateților G_t .

$$G_T = G_{sid} + G_{AJL_1} + G_{ABC_1}$$

- calculul împingerii active E_a se face grafic cu po-
ligonul forțelor (forțele G_{T_i} , Q_i și E_{a_i}) (figura
2.36.b) rezultatele fiind trecute in coloana 7,
- rezistențele pasive E_p se calculează analitic cu
expresia :

$$E_p = \frac{\gamma \cdot h^2}{2} k_p$$

$k_p = 1,838$ pentru $\beta = 0$, $\theta = 31^\circ$ și $\alpha = 18^\circ$, rezultate-
le sînt trecute in coloana 8.

$$E_{p1} = \frac{18,87 \cdot (5,90)^2}{2} \cdot 1,838 = 603,66 \text{ KN}$$

$$E_{p2} = \frac{18,87 \cdot (4,40)^2}{2} \cdot 1,838 = 335,73 \text{ KN}$$

$$E_{p3} = \frac{18,87 \cdot (3,20)^2}{2} \cdot 1,838 = 237,40 \text{ KN}$$

$$E_{p4} = \frac{18,87 \cdot (3,20)^2}{2} \cdot 1,838 = 177,58 \text{ KN}$$

Peste forțele E_{a1} , E_{a2} , E_{a3} și E_{a4} , la aceeași seară (figura 2.36.b), se măsoară rezistențele pasive E_{p1} , E_{p2} , E_{p3} și E_{p4} corespunzătoare obținându-se diagrama de variație a lui E_p .

Coeficientul de siguranță η se determină din raportul E_p/E_a . Valoarea minimă a acestuia se determină din curbele de variație a împingerilor E_{a1} și E_{p1} și se obține pentru planul de alunecare C_2AL_2 .

$$\eta_{\min} = 1,68 > \eta_{\text{adm}} = 1,5$$

Raportului minim $\eta_{\min} = E_{p2}/E_{a2}$ îi corespunde înălțimea $h = 4,40$ m și cel mai periculos plan de alunecare CAL (figura 2.36.a).

2.3.3.3. Problema propusă. Se ia în considerare zona CAL din figura 2.36.a, ca fiind zonă de alunecare pentru problema noastră. Pe treptele ML și LC se ridică două medietoare, locul lor de intersecție devine centrul zonei de alunecare care angajează o porțiune mai mare din masivul de teren (figura 2.37).

Zidul are caracteristicile, ce la punctul 2.6.2.1, adică aceleași dimensiuni.

2.3.3.4. Soluția cu metoda elementelor finite. Structura aceasta a fost calculată cu același tip de program folosit la punctul 2.2.5.2.b, elementul finit este de formă triunghiulară, discretizarea structurii este prezentată în figura 2.38. Constă din 188 de elemente numerotate cu cifre romane, și 113 de noduri.

Condițiile de margine se arată tot în figura 2.38. În anexă, la programul ZISMEFTI se găsesc toate rezultatele obținute. În figurile (2.39 - 2.43) se prezintă, deplasările nodurilor, eforturile unitare normale orizontale (σ_x), eforturile unitare normale verticale (σ_y), eforturile unitare tangențiale (τ_{xy}) și eforturile unitare principale. Toate aceste date sînt prezentate sub formă tabelară la capitolul IV.

ZID DE SPRIJIN SI ZONA DE ALUNECARE

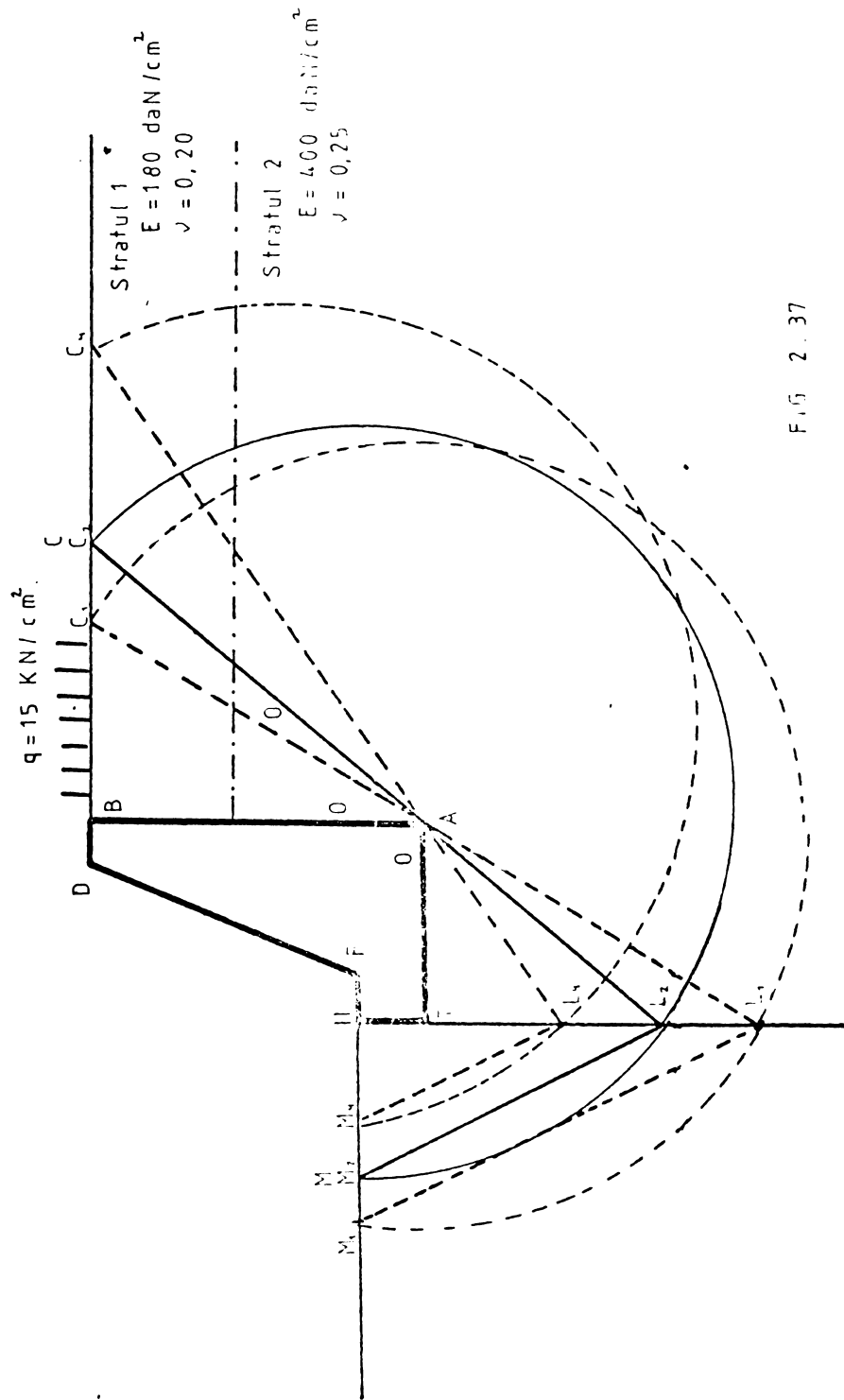


FIG. 2.37

ZID DE SPRIN SI ZONA DE ALUNECARE

ZISMEFTI

Metoda Elementelor Finite

Model triunghiular

Nr. nodurilor= 113

Nr elementelor= CLXXXVIII

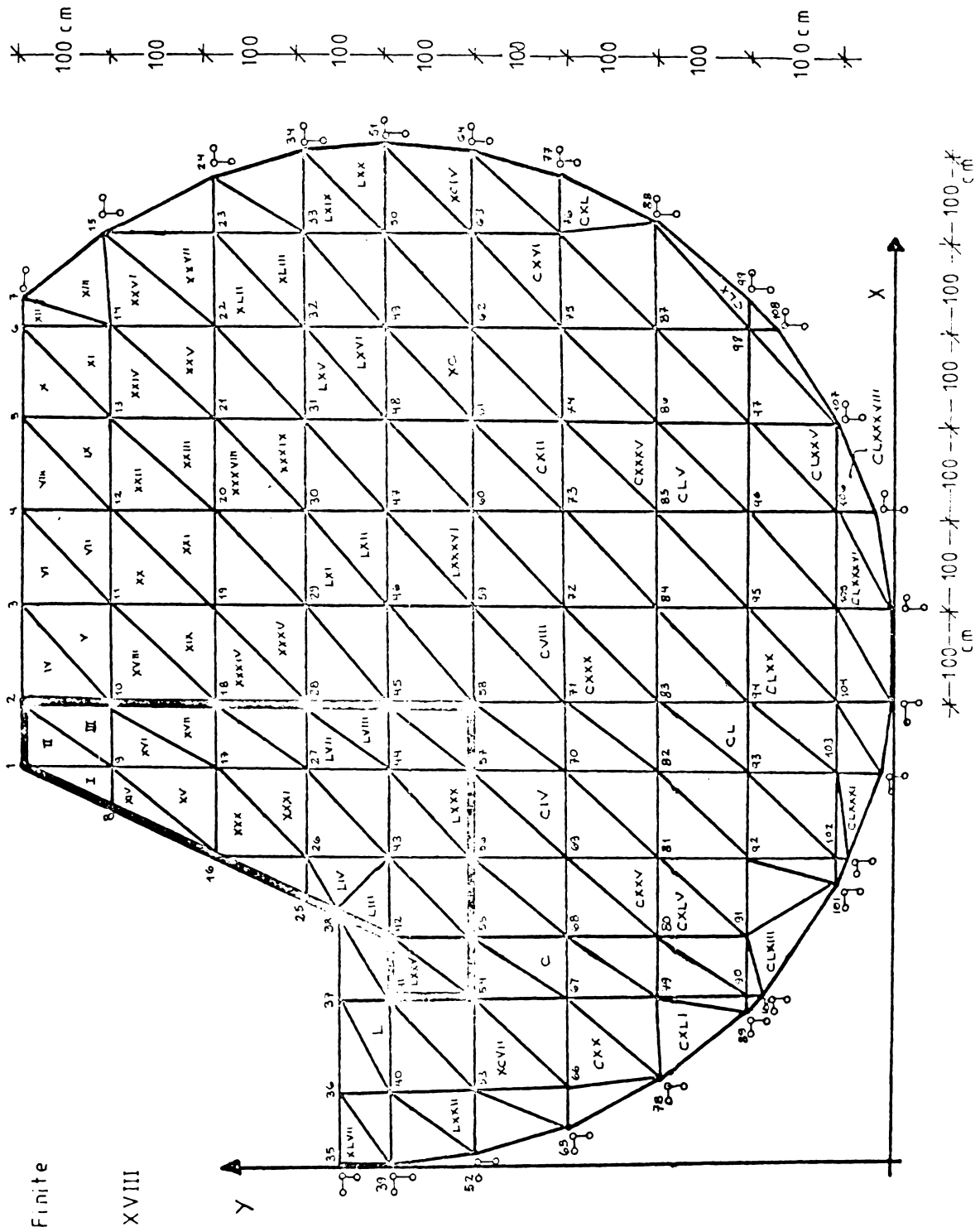


FIG. 2.38

ZISMEFTI

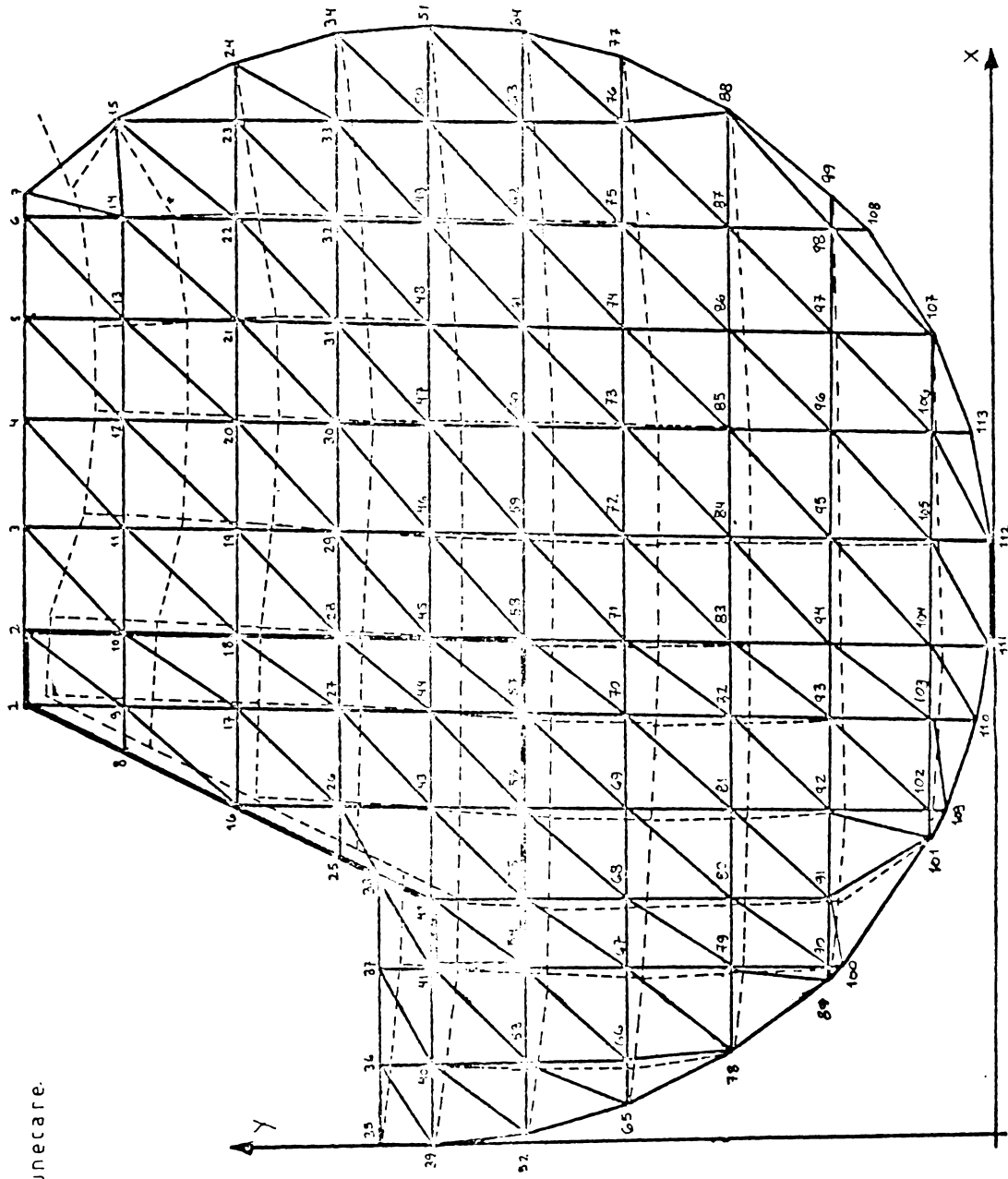
Zid de sprijin cu zona de alunecare.

Metoda Elementelor Finite

Model triunghiular

Nr. nodurilor = 113

Nr. elementelor = CLXXXVIII



DEPLASARI NODALE

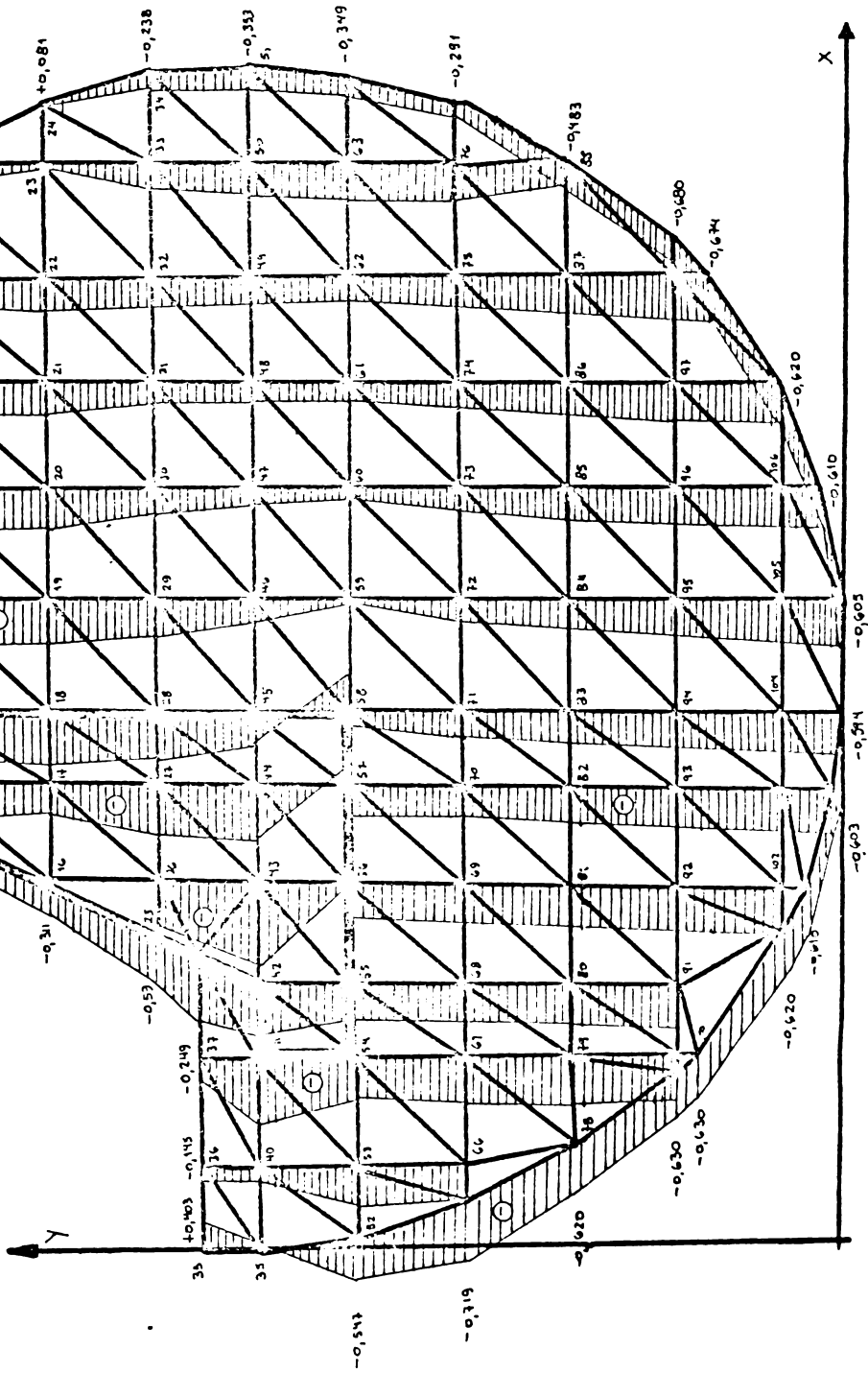
Structură nedeformată

Structură deformată

FIG. 2.39

ZISMEEFI

Zid de sprijin cu zona de alunecare.
 Metoda Elementelor Finite
 Model triunghiular.



EFORTURI UNITARE
 NORMALE ORIZONTALE.
 σ_x (daN/cm²)

FIG. 2.40

ZISMEFTI

Zid de sprijin si zona de alunecare
 Metoda Elementelor Finite
 Model triunghiular

EFORTURI UNITARE
 NORMALE VERTICALE
 σ_y (daN/cm²)

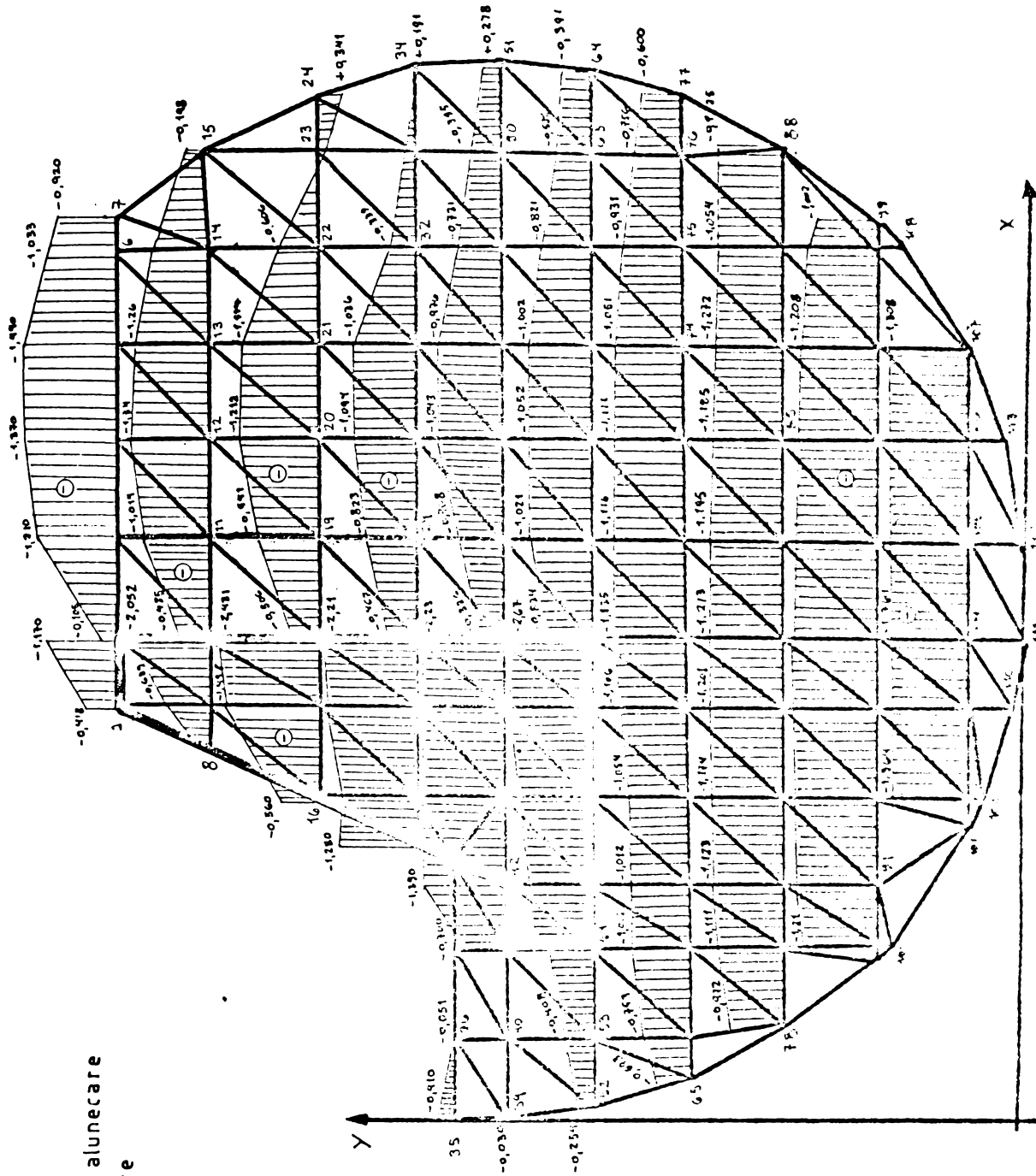
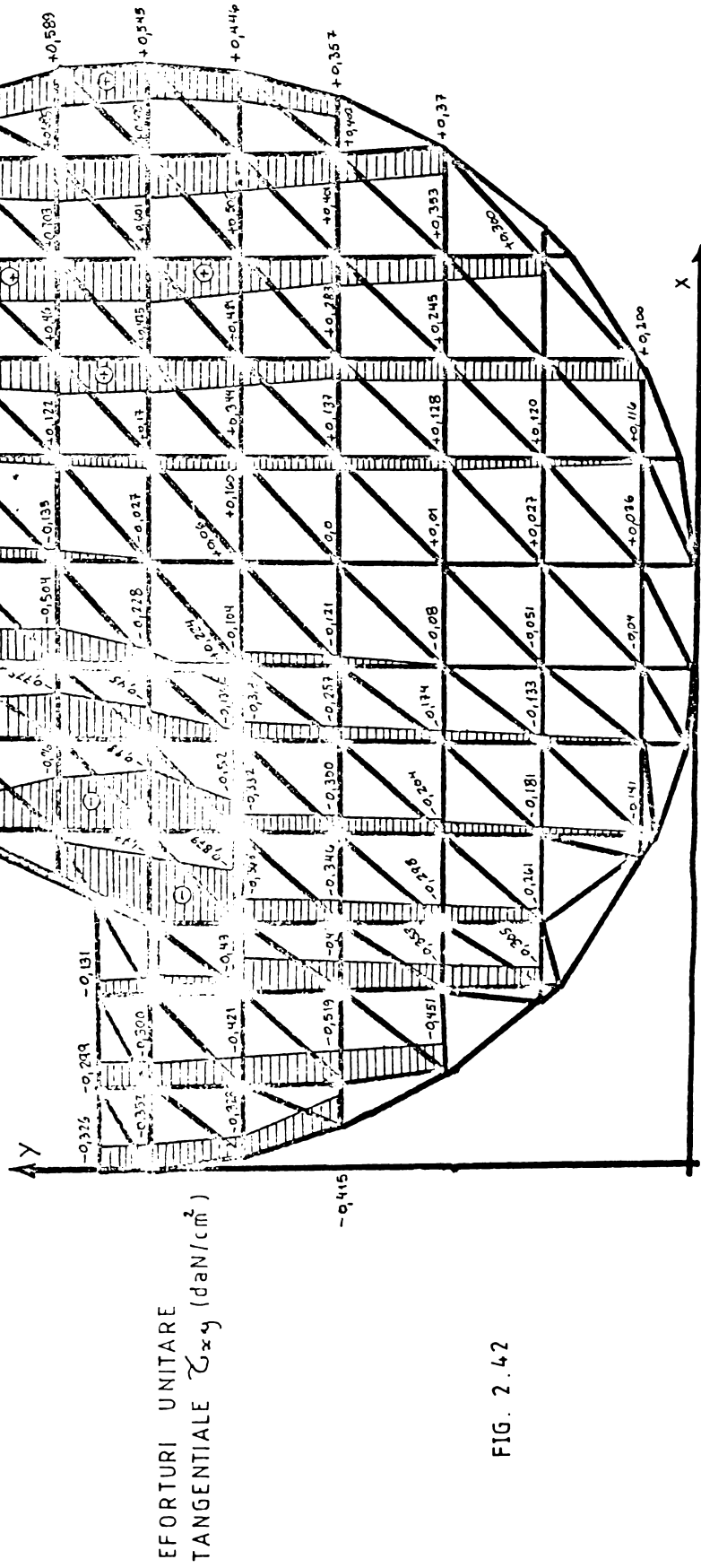


FIG. 2.41

ZISMEFTI

Zid de sprin cu zona de alunecare
Metoda Elementelor Finite
Model triunghiular.

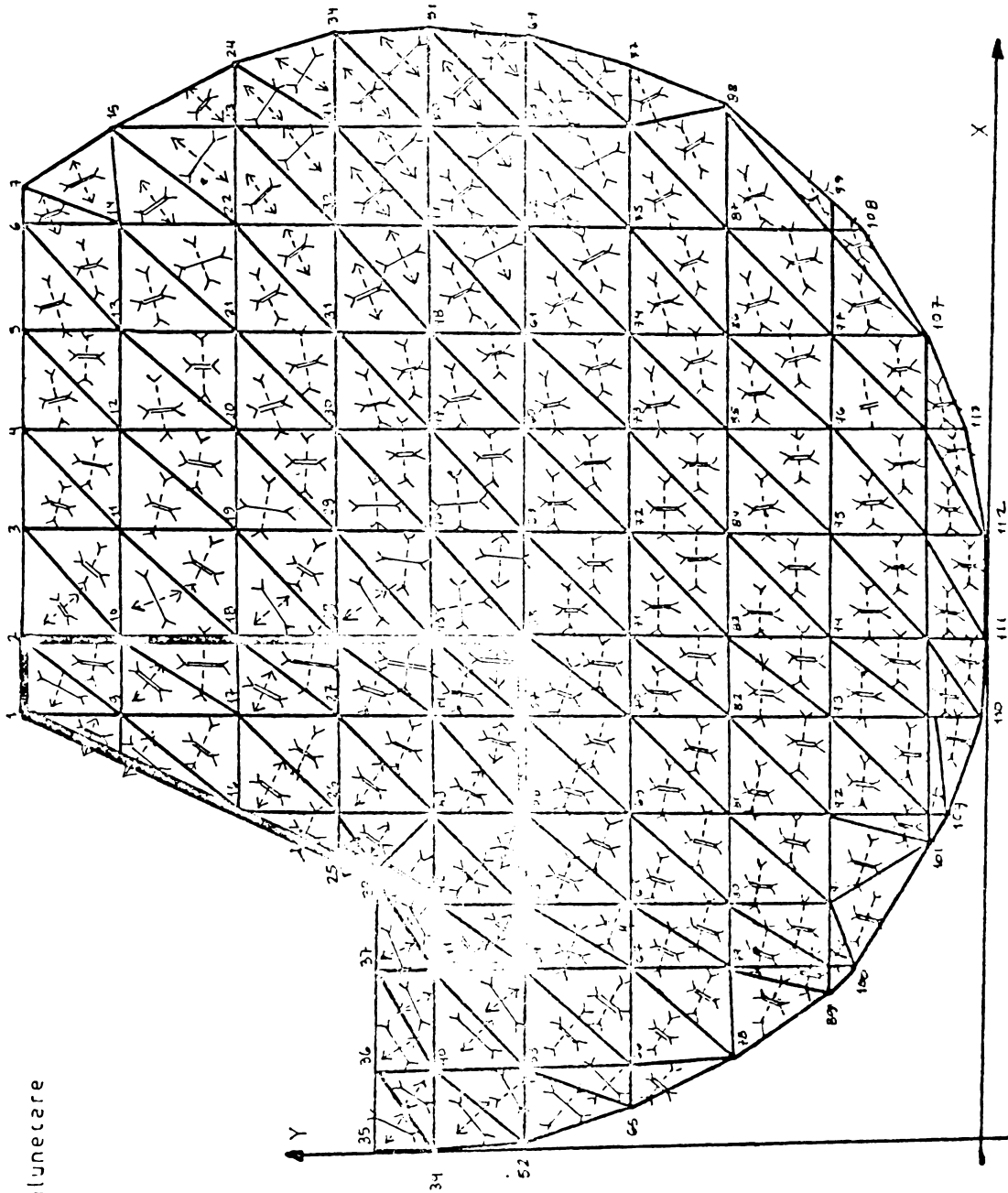


EFORTURI UNITARE
TANGENTIALE τ_{xy} (daN/cm²)

FIG. 2.42

ZISMETTI

Zid de sprijin și zona de alunecare
Metoda Elementelor Finite
Model triunghiular.



EFORTURI UNITARE
PRINCIPALE σ_1 SI σ_2

σ_1 - - - - -
 σ_2 - - - - -
5 daN/cm².

FIG. 2 4 3.

2.3.3.5. - Soluția cu teoria echivalentelor. Nici în acest caz nu s-a putut discretiza structura la fel ca în metoda elementelor finite, așa că s-a ales o structură echivalentă, ca cea din figura 2.44. S-a ales un element pătrat, numărul total al elementelor este de 95 (XCV), numărul nodurilor 118, iar numărul barelor este de 420.

În programul ZISZALTE, în anexă, se găsesc valorile eforturilor barelor, iar eforturile elementelor sînt date în tabele, în capitolul IV.

Z: SZ ALTE

Zid de sprijin și zona de alunețare.

Teoria echivalențelor

Nr. nodurilor = 118

Nr. elementelor = XCV

Nr. barelor = 420

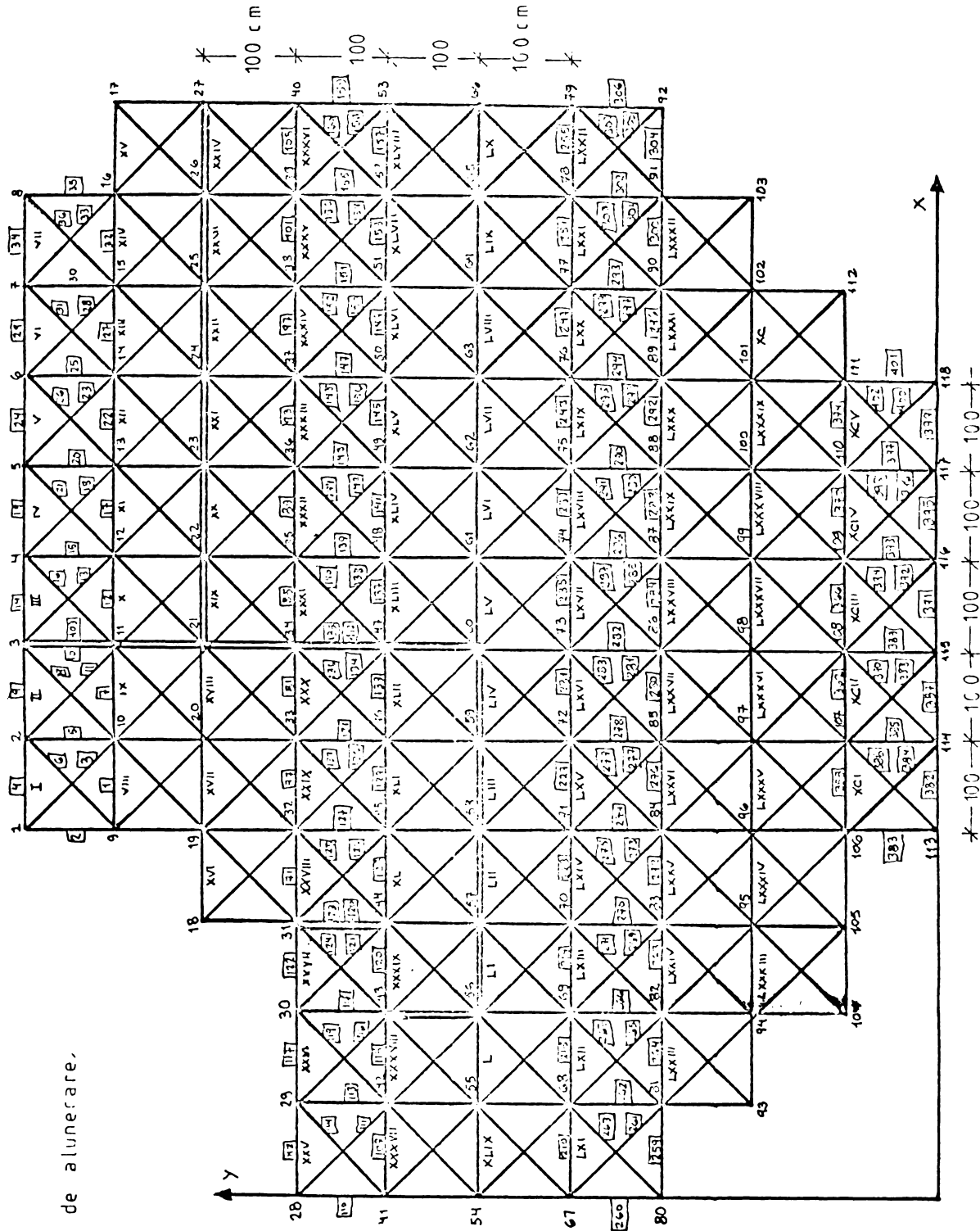


FIG 2.44

Capitolul 3

PROBLEME SPATIALE

3.1. Generalități. În capitolul anterior s-au studiat diverse tipuri de structuri în starea plană de deformație, atât cu metoda elementelor finite cât și cu teoria echivalențelor. În acest capitol se vor studia două cazuri de stare spațiale de deformație tot cu metoda elementelor finite și teoria echivalențelor.

Primul element studiat este o fundație izolată care este studiată în ipoteza rezemării pe teren, fără a se lua în considerare interacțiunea dintre fundație și terenul de fundare.

Cel de al doilea element este o epruvetă cilindrică de beton studiată în două ipoteze. Prima ipoteză este ca suprafața circulară de contact cu platanul presei hidraulice^{*A} se dilată, datorită umflării transversale a betonului sub acțiunea forței de compresiune.

3.2. Fundație izolată sub stâlpii din beton armat. Ca și fundațiile continue sub ziduri, fundațiile directe izolate pe care se rezemă stâlpii pot fi rigide (alcătuite dintr-un bloc de beton simplu, având deasupra un bloc de beton armat denumit cuzinet), sau elastice (sub forma unui bloc, denumit uneori tulpă, din beton armat).

3.2.1. Fundații cu bloc de beton simplu și cuzinet de beton armat

3.2.1.1. Alcătuirea generală. La alcătuirea generală se va ține seama de următoarele :

a) Fundațiile de acest tip sînt alcătuite dintr-un bloc de beton simplu, pe care stîlpul se rezemă prin intermediul unui cuzinet de beton armat (figura 3.1). Rolul cuzinetului care acționează ca un element intermediar între stîlp și blocul de bază, constă în asigurarea unei bune transmitere a încărcărilor, avînd o secțiune mai mare decît cea a stîlpului.

b) Blocul de beton simplu este alcătuit din 1-3 trep-

nu se dilată și a doua ipoteza (reală), este că suprafața circulară de contact cu platanul presei hidraulice

*A

te ; astfel aiese încît să se asigure o repartiție a presiunilor exercitate de talpa fundației.

c) Cuzinetul are în mod obișnuit formă prismatică.

d) Lățimea b a cuzinetului, aleasă pe considerente economice trebuie să satisfacă următoarele valori ale raportului b/B (în care B este lățimea blocului de beton simplu) :

$b/B = 0,55 - 0,65$ pt.bloc cu o singură treaptă.

$b/B = 0,40 - 0,50$ pt.bloc cu 2-3 trepte.

3.2.1.2. Dimensionarea blocului de beton simplu. Dimensionarea blocului de beton simplu se va face astfel :

a) Înălțimea totală H a blocului cu o singură treaptă va fi cel puțin 40 cm. Dacă blocul este format din două sau trei trepte, înălțimile H_1, H_2, H_3 , ale fiecărei trepte vor fi de cel puțin 30 cm (figura 3.1.a).

b) Raportul $tg\alpha$, dintre înălțimile H_1, H_2, H_3 ale treptelor și lungimile în consolă l_1, l_2, l_3 considerate pe ambele direcții se trebui să respecte valorile indicate în tabelul 2.1.

3.2.2. Problema procusă. Avînd în vedere normele prezentate anterior, pentru problema noastră s-a ales o fundație izolată, formată dintr-un bloc de beton simplu cu trei trepte. Stîlpul se reazemă pe bloc prin intermediul unui cuzinet armat așa cum se poate vedea în figura 3.1. Înălțimile treptelor, H_1, H_2, H_3 sînt de 60 cm, lungimile l_1, l_2, l_3 vor fi 40 cm, ceea ce înseamnă că $tg\alpha = H_1/l_1 = 1,25$.

3.2.3. Soluția cu metoda elementelor finite. Fiind o structură simetrică, pentru rezolvarea acestor probleme s-a luat în considerare numai un sfert din structură, așa cum se arată în figura 3.1.b.

În figura 3.2 se prezintă discretizarea structurii în elemente finite paralelipipedice. Structura este alcătuită din 58 elemente, cu 125 noduri, originea sistemului triortogonal se află în nodul 25. Structura este făcută din beton tip B100, modulul lui de elasticitate este $E = 160\ 000\ daN/cm^2$ și coeficientul lui Poisson este $\nu = 0,25$.

În acest caz de elemente finite paralelipipedice (volum) s-a folosit programul SAP ; de remarcat că acest tip

FUNDATIE IZOLATA DIN BETON SIMPLU, SUPUSA LA COMPRESIUNE CENTRICA.

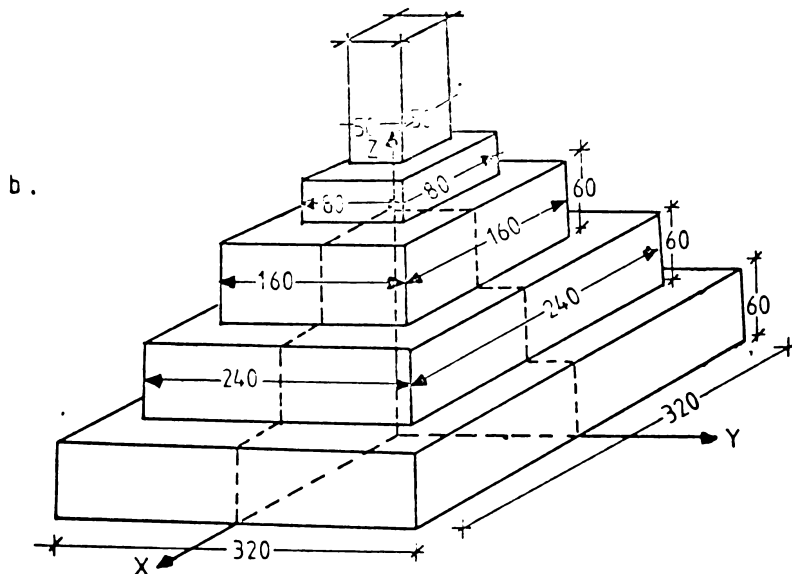
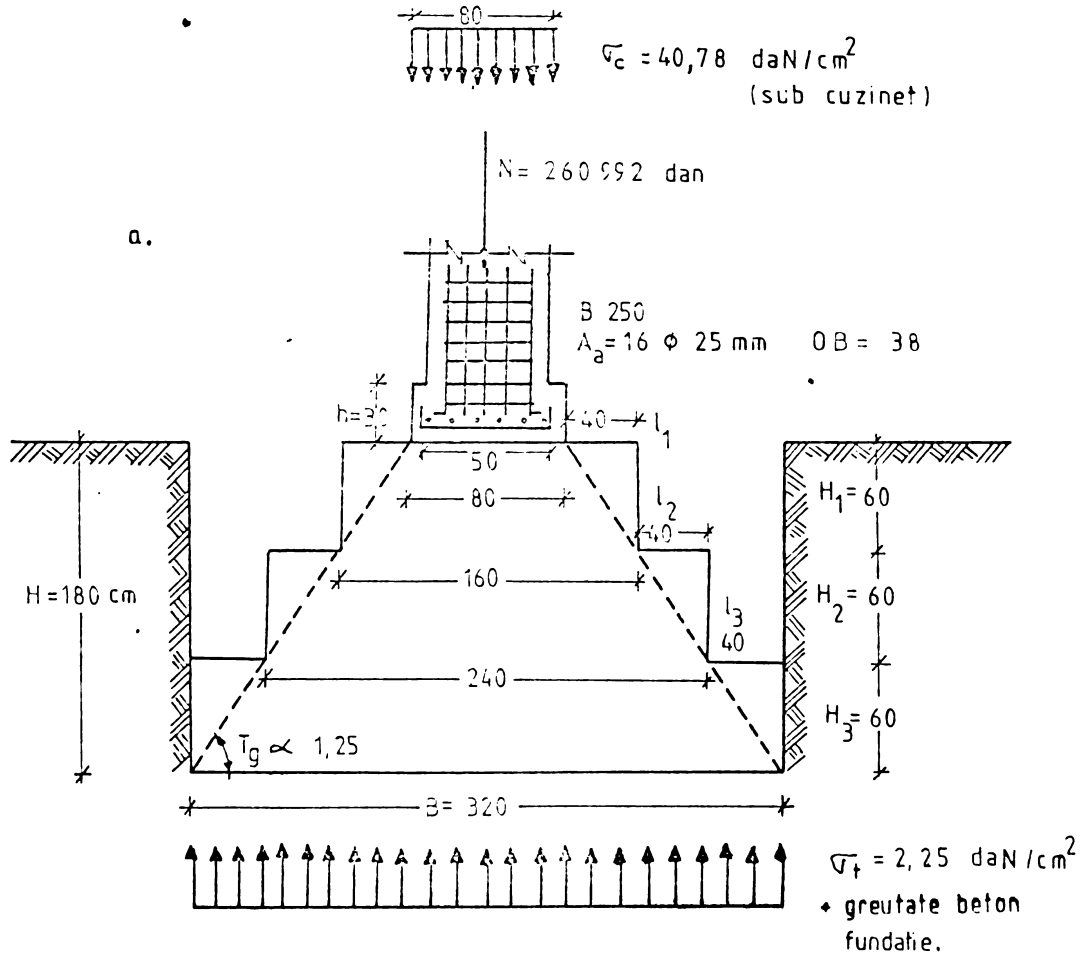


FIG. 3.1

FUIZOME F

Fundație izolată din beton simplu,
supusă la compresiune centrică.

Metoda Elementelor Finite.
Model paralelipipedic.
Nr. nodurilor = 125
Nr. elementelor = LVIII

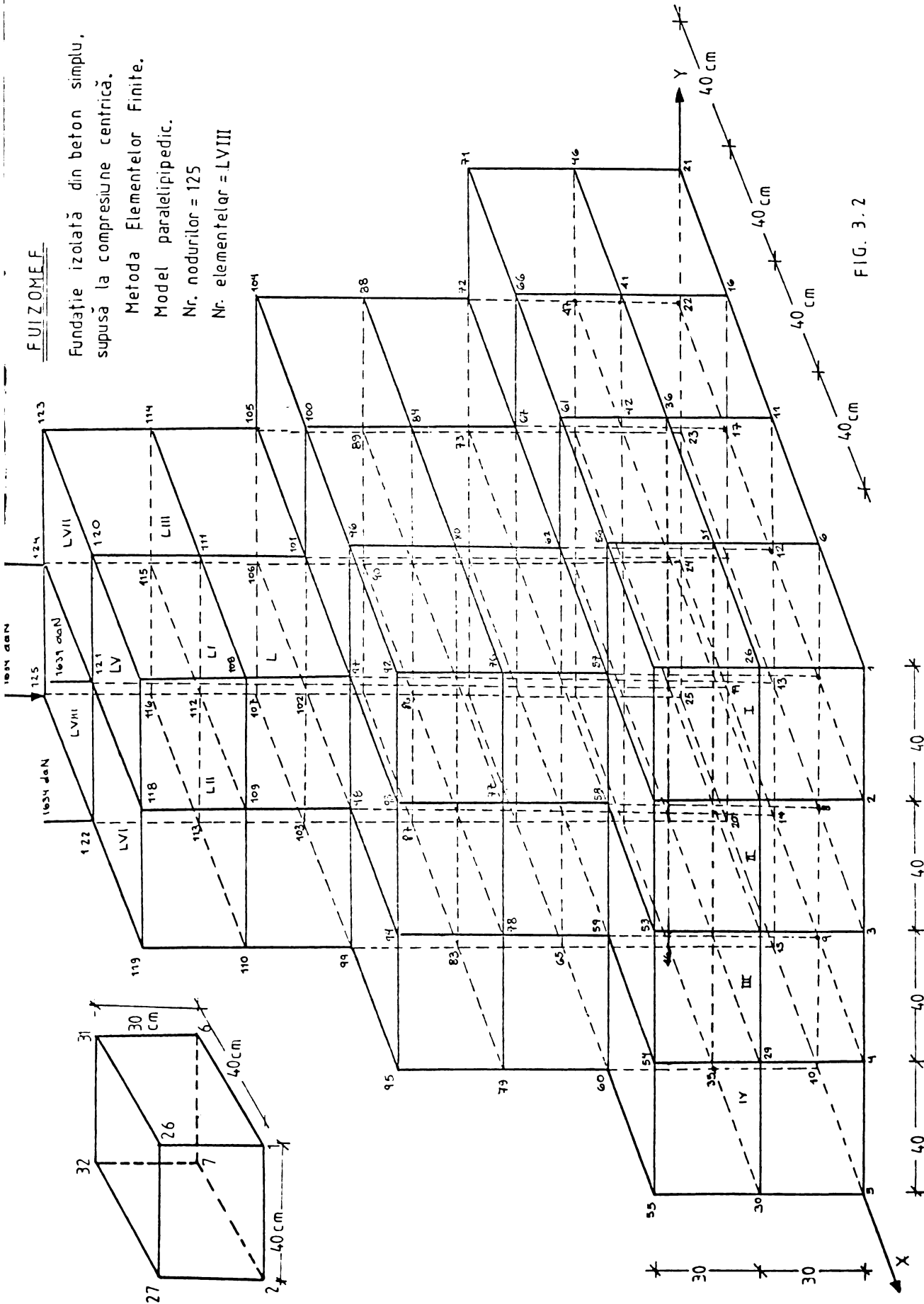


FIG. 3.2

de program se află la biblioteca centrului de calcul al Institutului. Rezultatele obținute ($\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) sînt prezentate în programul **TRIZOR** în anexă.

În figura 3.3 se prezintă numai deplasările nodurilor din ultima felie a discretizării, portea corespunzătoare acestei felii pe direcția perpendiculară are aceeași deplasări. În figura 3.4 s-au prezentat : eforturile unitare normale după x (σ_x) în centrul elementelor finite, (care sînt aceleași elemente pentru care s-au desenat deplasările) și eforturile unitare normale după y (σ_y).

În figura 3.5 s-au prezentat : eforturile unitare normale după z (σ_z) și eforturile unitare tangențiale τ_{xy} . Eforturile unitare tangențiale τ_{yz} și eforturile unitare tangențiale τ_{zx} sînt date grafic în figurile 3.6a și b.

În figura 3.7 se prezintă : eforturile unitare normale după x și y (σ_x, σ_y) în centrul elementelor care sînt în plan diagonal, și eforturile unitare normale după z (σ_z) tot din centrul elementelor care sînt în plan diagonal.

3.2.4. Soluția cu teoria echivalențelor. Pentru rezolvarea acestei fundații s-a discretizat structura în aceleași elemente ca la metoda elementelor finite, numai că în cazul teoriei echivalențelor aceste elemente sînt formate și de diagonalele de fiecare față a elementului echivalent (Fig. 3.8).

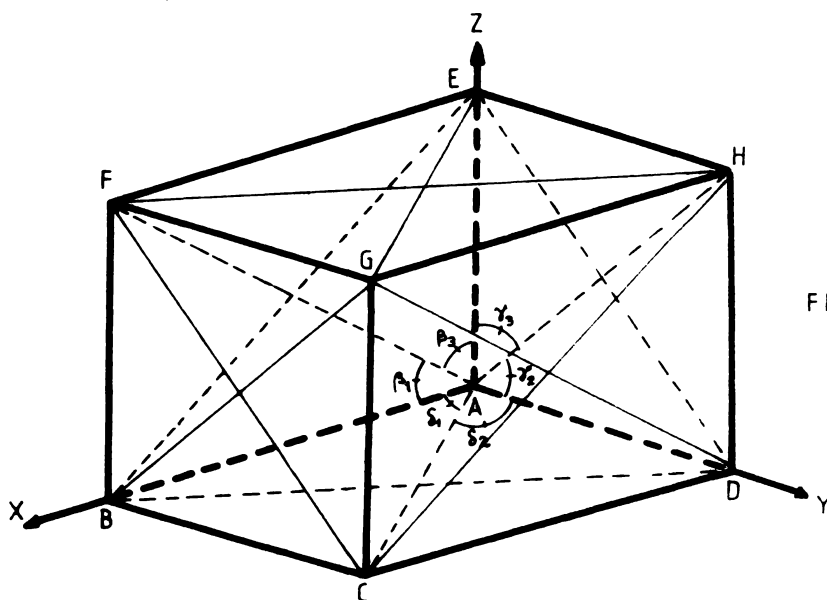


FIG. 3.8

FUIZOME F

Fundație izolată din beton simplu
supusă la compresiune centrică

Metoda Elementelor Finite
Model paralelipedic
Nr nodurilor = 125
Nr elementelor = LVIII

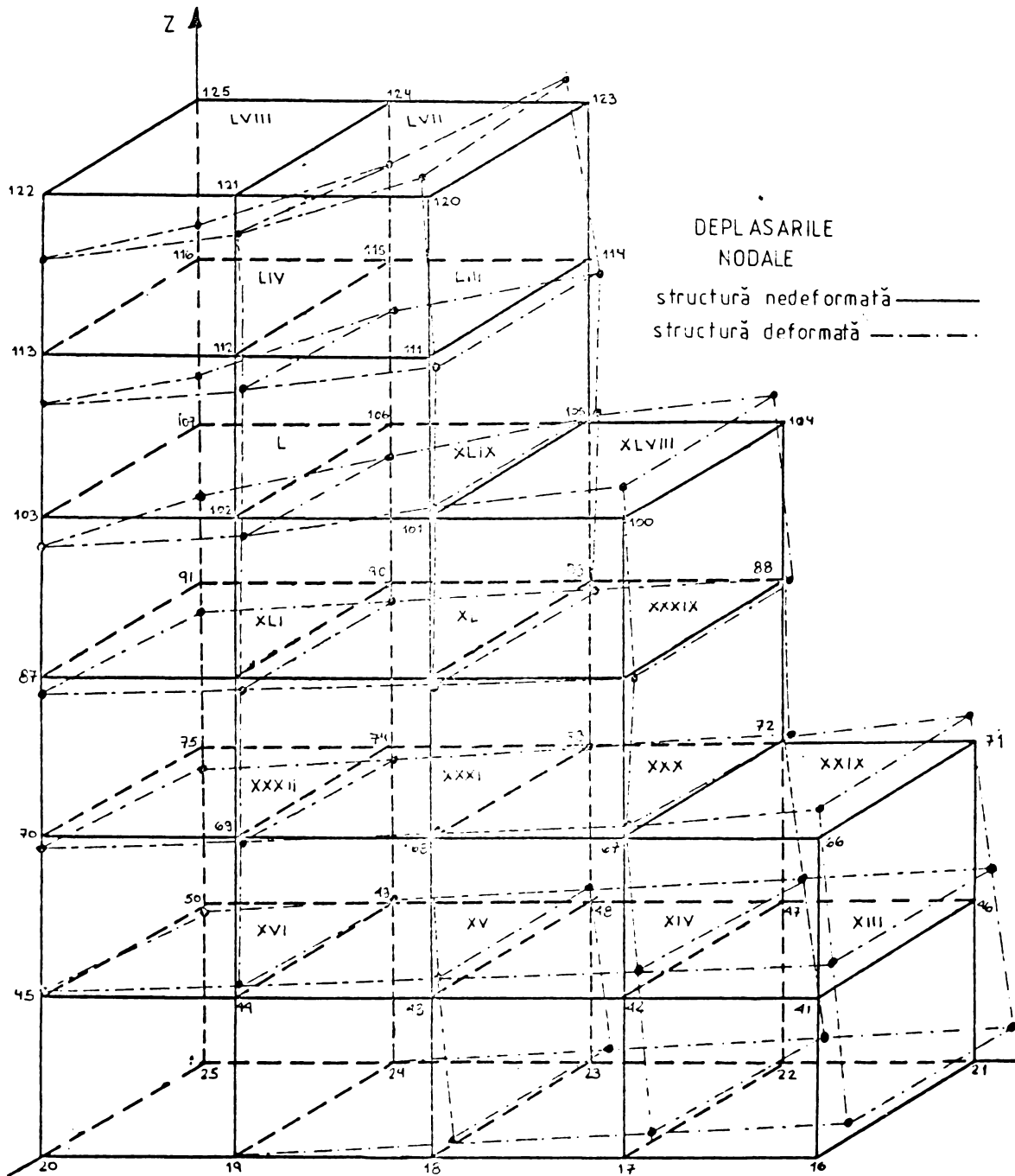
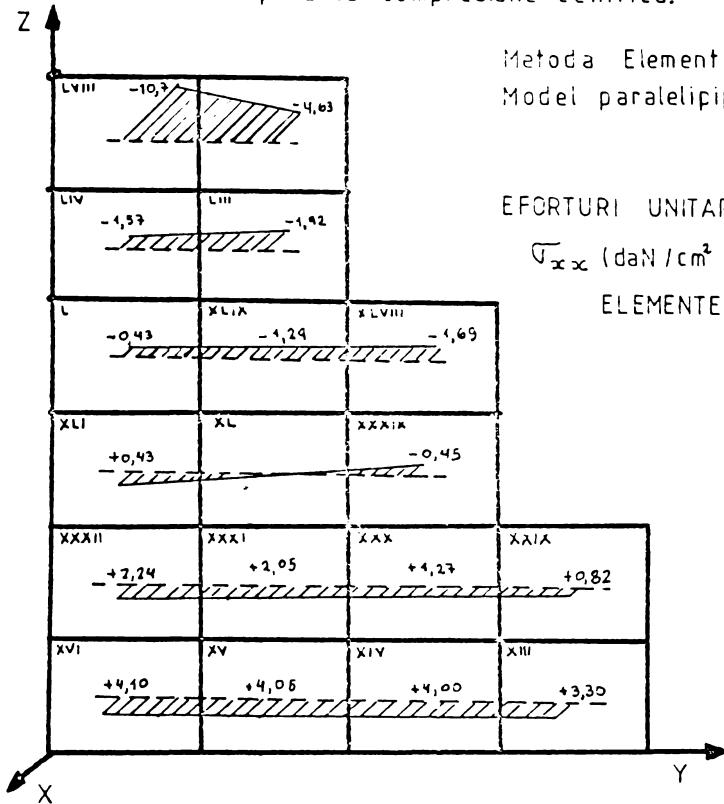


FIG 3.3

FUIZOMEF

Fundație izolată din beton simplu
supusă la compresiune centrică.



FUIZOMEF

Fundație izolată din beton simplu
supusă la compresiune centrică.

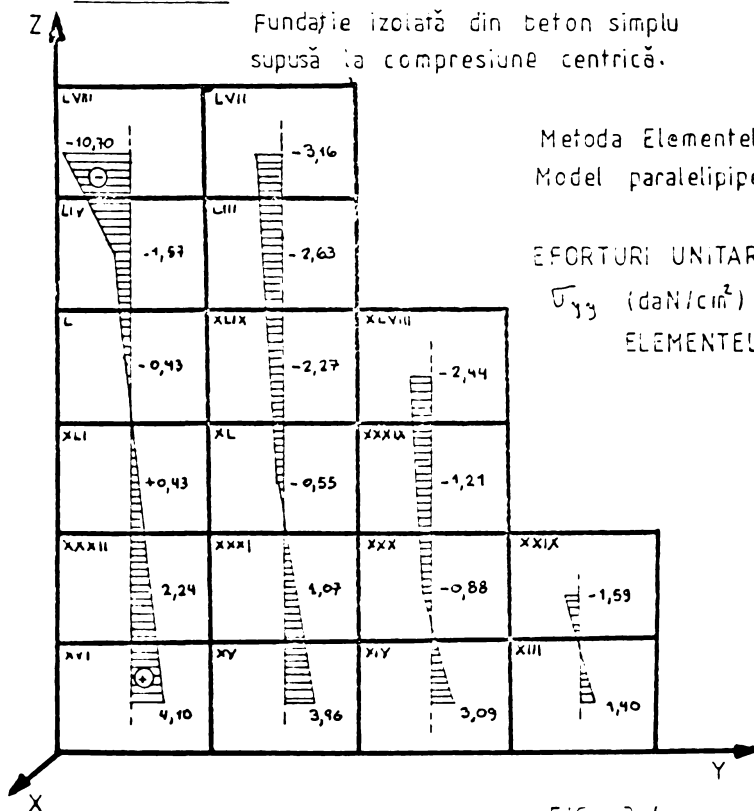


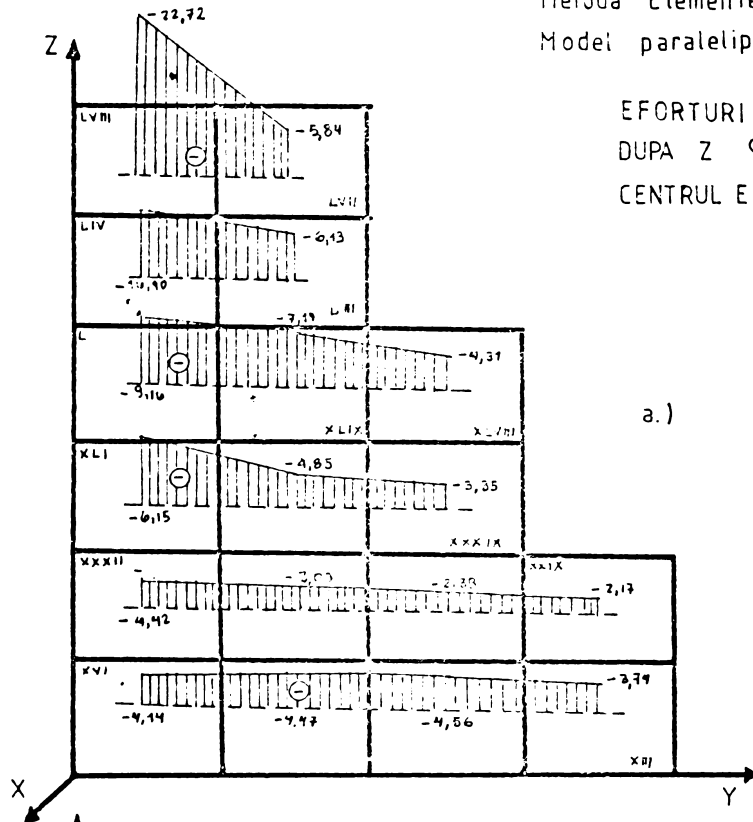
FIG. 3.4

FUIZOME F

Fundație izolată, din beton simplu
supusă la compresiune centrică.

Metoda Elementelor Finite
Model paralelipipedic

EFORTURI UNITARE NORMALE
DUPA Z σ_{zz} (daN/cm²), IN
CENTRUL ELEMENTELOR



FUIZOME F

Fundație izolată, din beton simplu
supusă la compresiune centrică.

Metoda Elementelor Finite
Model paralelipipedic

EFORTURI UNITARE TANGENTIALE
 σ_{xy} (daN/cm²) IN CENTRUL
ELEMENTELOR.

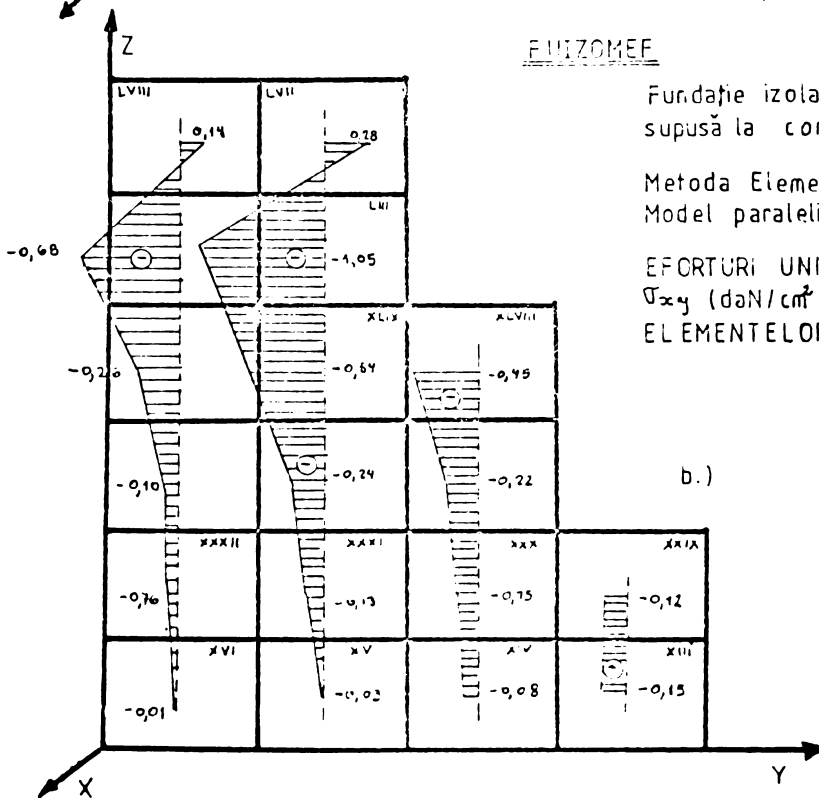


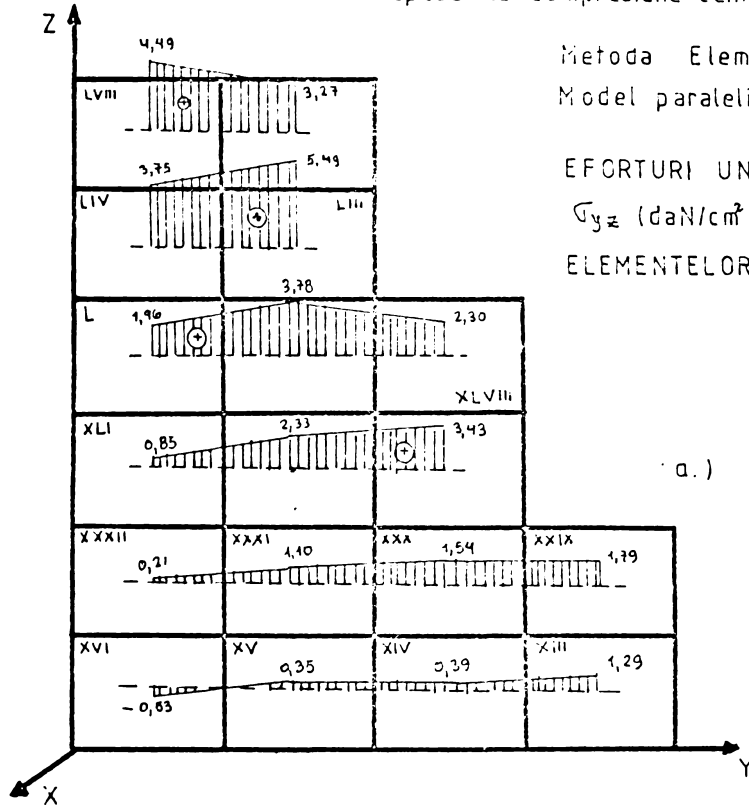
FIG. 3.5

FUIZOMEF

Fundație izolată, din beton simplu
supusă la compresiune centrică.

Metoda Elementelor Finite
Model paralelipipedic

EFORTURI UNITARE TANGENTIALE
 σ_{yz} (daN/cm²) IN CENTRUL
ELEMENTELOR.



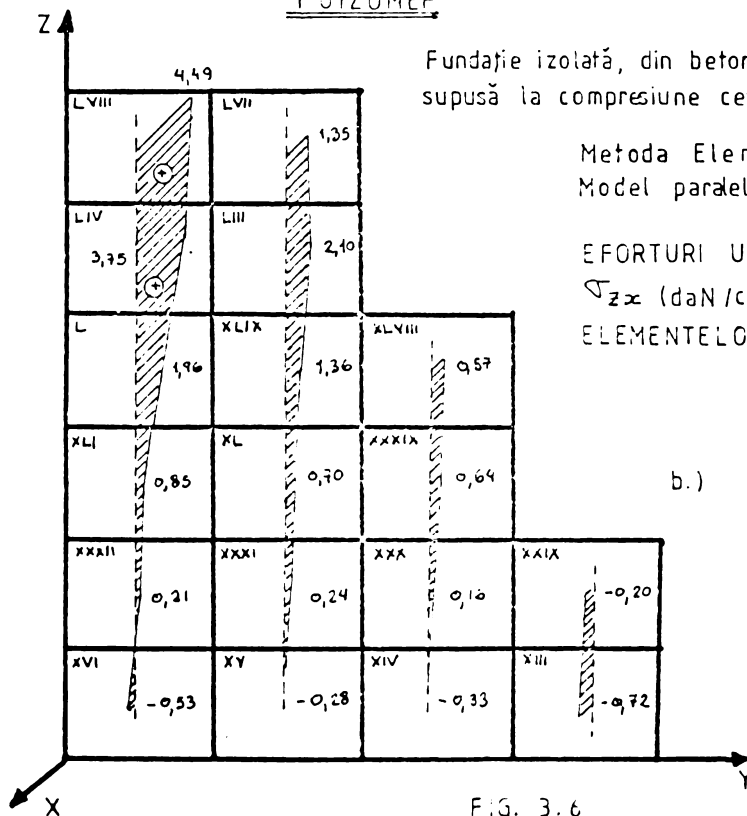
a.)

FUIZOMEF

Fundație izolată, din beton simplu
supusă la compresiune centrică.

Metoda Elementelor Finite
Model paralelipipedic

EFORTURI UNITARE TANGENTIALE.
 σ_{zx} (daN/cm²) IN CENTRUL
ELEMENTELOR



b.)

FIG. 3.6

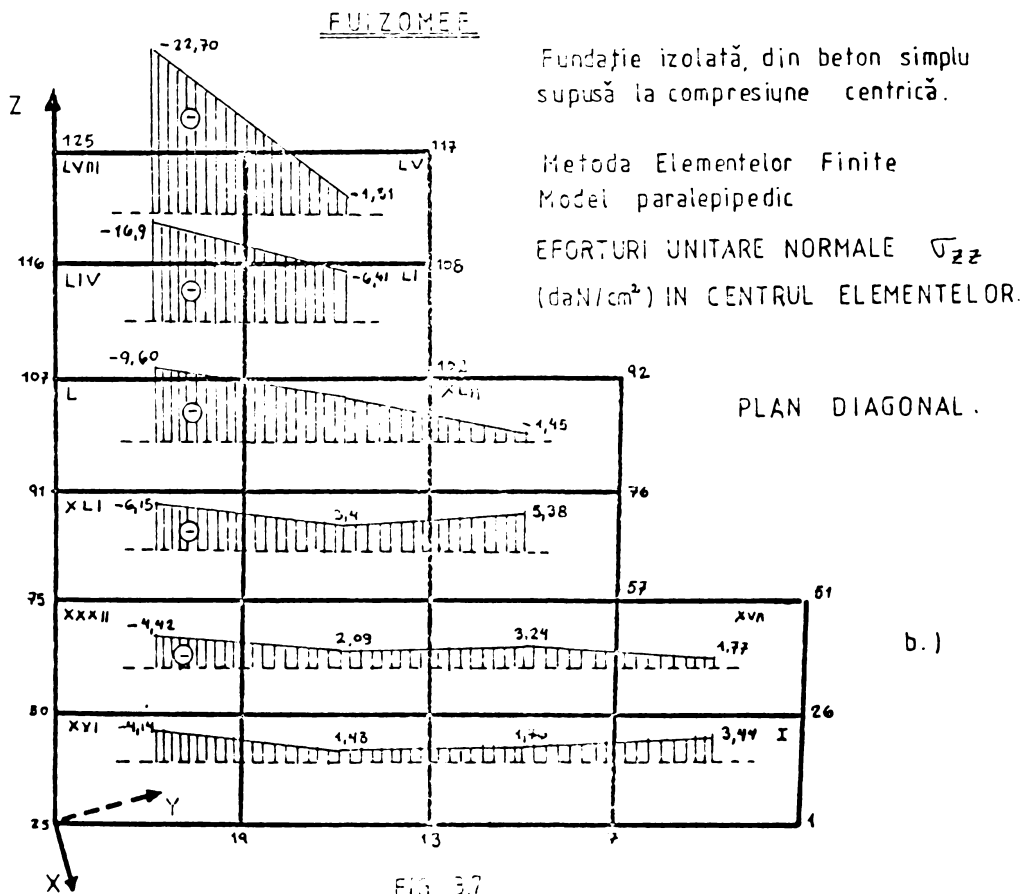
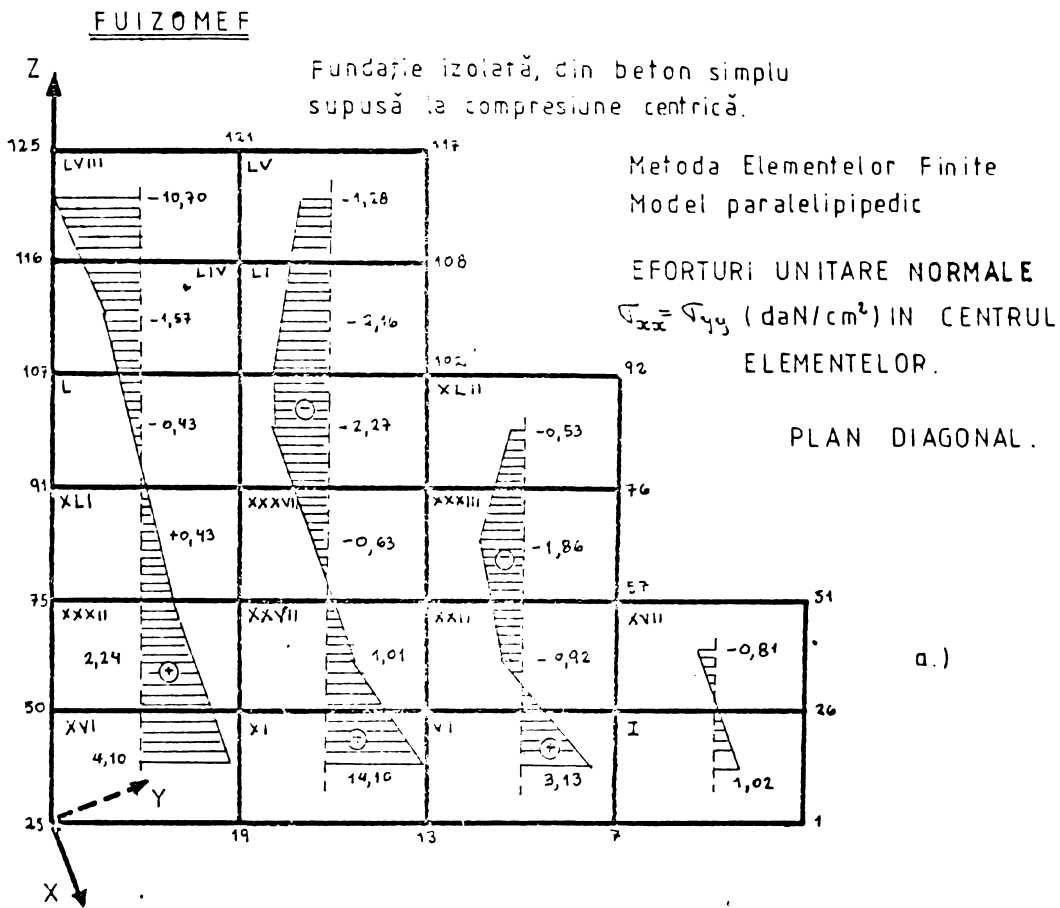


FIG. 3.7

Structura constă tot din 68 de elemente paralelipipedice, cu 125 de noduri și 744 de bare.

De asemenea pentru această structură s-a folosit un program de tip SAP, asemănător cu celelalte programe folosite pentru a rezolva o structură cu teoria echivalențelor. De aceea trebuie să calculăm ariile barelor elementului. În continuare se prezintă formulele necesare pentru calculul ariilor barelor.

Pentru o bară de tip AB (fig. 3.8), rigiditatea este dată de :

$$\rho_{AB} = \frac{\nu \mu}{4} \left[3 - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^2 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \right)^2 \right]$$

unde :
 ρ_{AB} = rigiditatea barei

$$\rho_{AB} = E \cdot S_{AB} \cdot l_{AB}$$

V = volumul elementului

de unde :

$$S_{AB} = \frac{\rho_{AB}}{E \cdot l_{AB}}$$

$\delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3$ = cosinșii directori

S_{AB} = aria barei

l_{AB} = lungimea barei

Pentru o bară de tip AB.

$$\rho_{AE} = \frac{\nu \mu}{4} \left[3 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \right)^2 - \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_2} \right)^2 \right]$$

În acest caz, pentru diagonale se calculează astfel :

$$l_{AF} (\beta_1 - \beta_3)^2 = 0,25 \mu V$$

$$l_{AH} (\gamma_2 - \gamma_3)^2 = 0,25 \mu V$$

Ariile respective se calculează cu formula generală :

$$\rho = E \cdot S \cdot l$$

Așa cum s-a explicat la punctul 2.2.4.3. (cu eforturile din bare (N), determinate în programul folosit), se calculează deformațiile specifice și eforturile unitare cu formulele :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\left(\frac{N}{ES}\right)_{CD} + \left(\frac{N}{ES}\right)_{AB}}{2} \\ \varepsilon_z &= \frac{\left(\frac{N}{ES}\right)_{CG} + \left(\frac{N}{ES}\right)_{BF}}{2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\left(\frac{N}{ES}\right)_{AD} + \left(\frac{N}{ES}\right)_{BC}}{2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\frac{N_{CH} - N_{GD}}{4(ES)_{GD}} + \frac{N_{BE} - N_{AF}}{4(ES)_{AF}}}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \end{aligned}$$

Eforturile în bare sînt date în programul FUIZOTAC, iar rezultate le finale (eforturi unitare) sînt prezentate în tabel din capitolul IV.

3.3. Cilindru din beton simplu

3.3.1. Generalități. Marca betonului exprimată prin rezistența la compresiune pe cuburi, sau rezistența caracteristică la compresiune pe cilindri, este folosită drept criteriu de calitate a betonului, dar ea nu intervine direct în calculul elementelor de construcție întrucît aceasta se prezintă fie sub formă de bare, fie sub formă de plăci plane sau curbe.

În calculul elementelor de beton simplu, beton armat sau beton precomprimat, solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică se folosește rezistența prismatică R_{pr} determinată pe prisme supuse la compresiune centrică.

În ceea ce privește determinarea rezistențelor betonului la compresiune, metodele folosite pe plan mondial au un caracter unitar, ele deosebindu-se doar prin forma și dimensiunile epruvetelor ce îngreunează compararea rezultatelor obținute în diferite țări în studierea unei anumite probleme.

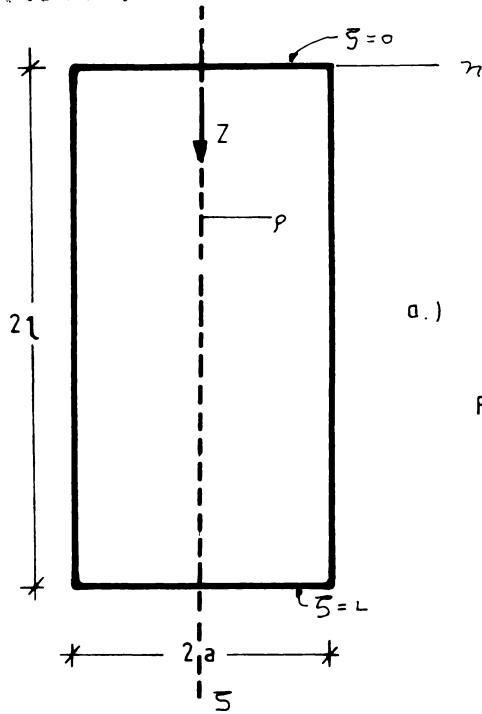
Există la ora actuală tendința de a se uniformiza epruvetele și condițiile de determinare a rezistențelor, multe instituții de profil fiind de părere să se adopte epruvete de formă cilindrică cu diametrul de 15 cm și lungimea $l = 30$ cm pe motivul că aceste epruvete pot fi folosite atât pentru determinarea rezistenței la compresiune cit și pentru determi-

narea rezistenței la întindere.

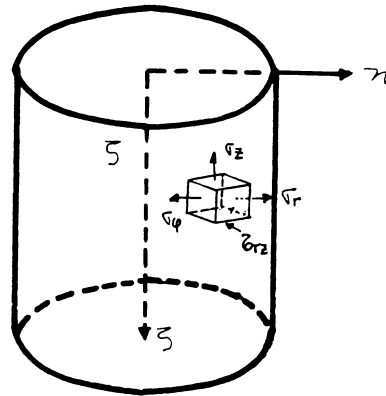
In continuare se prezintă o soluție analitică (a unei epruvete cilindrice de beton simplu) stabilită într-un studiu al dr.ing. Radu MARINOV.

3.3.2. Soluție analitică

solicitare



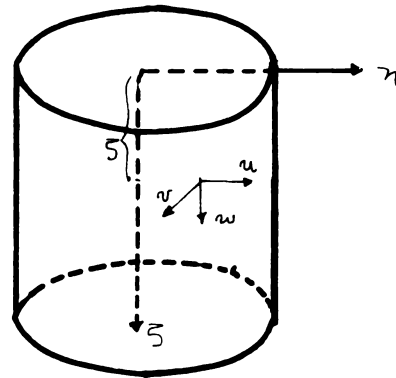
a.)



b.)

FIG. 3.9

c.)



Coordonate adimensionale:

$$\chi = \frac{\rho}{a} \quad \xi = \frac{z}{a} \quad L = \frac{l}{a}$$

Pentru scara axial-simetrică : $\epsilon_{\rho\rho} = \epsilon_{pz} = 0$, pentru o încărcare oarecare, dar axial simetrică pe fețele $\xi = 0$ și $\xi = L$, problema are o soluție alcătuită din două părți :

soluția = soluția particulară + soluția omogenă,

adică

$$\begin{aligned} u &= u^0 + u^H \\ w &= w^0 + w^H \\ \sigma_p &= \sigma_p^0 + \sigma_p^H \\ \sigma_r &= \sigma_r^0 + \sigma_r^H \end{aligned}$$

ș.a.m.d.

unde u^0 = soluția particulară.

u^H = soluția omogenă.

De exemplu : Cilindru solicitat pe fețele $\xi = 0$ și $\xi = L$.

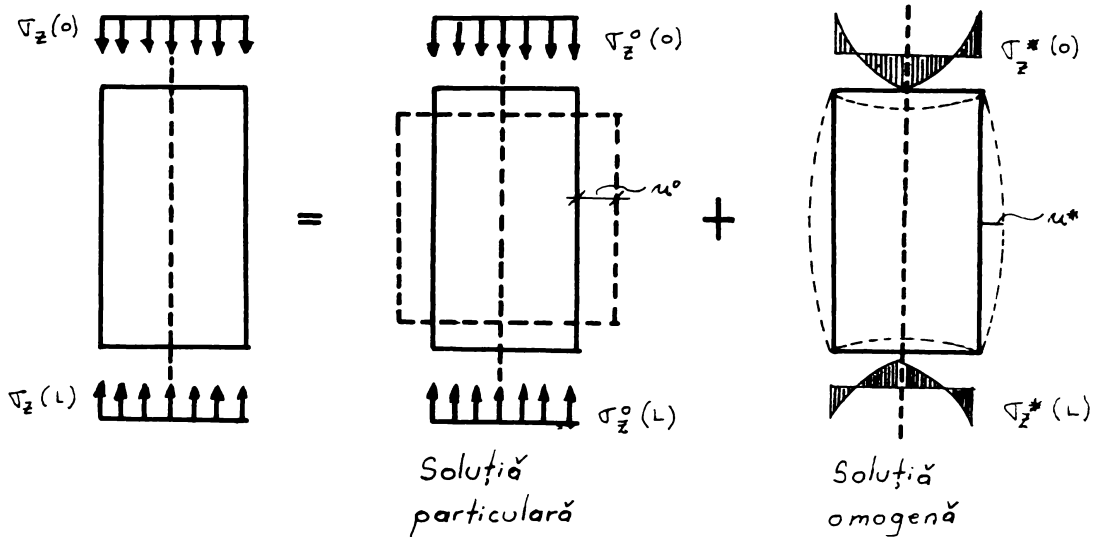


FIG. 3.10

Fig. 3.10

Pentru soluția omogenă eforturile unitare normale $\sigma_z^*(0)$ și $\tau_{rz}^*(0)$ pe fețele frontale au rezultantă nulă adică

$$\int_0^1 \sigma_z^*(\eta, 0) \eta \, d\eta = 0 ; \quad \int_0^1 \tau_{rz}^*(\eta, 0) \eta \, d\eta = 0$$

Pentru un cilindru solicitat pe fețele frontale la eforturi normale constante pe secțiune $\sigma_z^0(\eta, 0) = \text{const.}$ și $\tau_{rz}^0(\eta, 0) = 0$, soluția este :

$$u^0(\eta, z) = \frac{\sigma_z^0}{E} \cdot \nu \cdot \eta$$

$$w^0(\eta, z) = \frac{-\sigma_z^0}{E} \cdot a \cdot z = 0$$

$$\sigma_z^0(\eta, z) = \sigma_z^0 = \text{const.}$$

Pentru aflarea soluției omogene problema se pune în două feluri :

1^o - Problema DIRICHLET : Se dau expresiile eforturilor σ_z și τ_{rz} pe fețele $\xi = 0$ și $\xi = L$

$$\sigma_z^*(\eta, 0) = -\sigma_z^*(\eta, L) = F(\eta)$$

$$\tau_{rz}^*(\eta, 0) = -\tau_{rz}^*(\eta, L) = \theta(\eta)$$

cu condițiile

$$\int_0^1 F(\eta) \eta d\eta = 0$$

$$\int_0^1 \vartheta(\eta) \eta d\eta = 0$$

2^o Problema NEUMAN : Se dau expresiile deplasărilor punctelor pe fețele frontale

$$\xi = 0 \quad \text{și} \quad \xi = L$$

$$\left. \begin{array}{l} u_{\xi}(\eta, 0) \\ u_{\xi}(\eta, L) \end{array} \right\} = h(\eta) \quad \left. \begin{array}{l} w_{\xi}(\eta, 0) \\ w_{\xi}(\eta, L) \end{array} \right\} = k(\eta)$$

În funcție de punerea problemei în cele două moduri vor rezulta valorile lui C_1 și D_1 .

Determinarea valorii lui β este independentă de formularea problemei (Dirichlet sau Neuman).

Astfel, din condiția ca pe mantaua cilindriului eforturile unitare $\tau_{rz}^{\xi}(1,5)$ și $\tau_{rz}^{\eta}(1,5)$ să fie nule se obține sistemul :

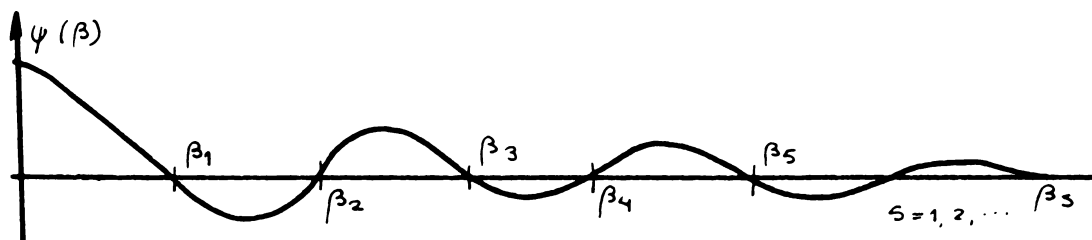
$$C_1 \left\{ (3-2\nu) \beta I_0(\beta) - [4(1-\nu) + \beta^2] I_1(\beta) \right\} + D_1 \beta [I_1(\beta) - \beta I_0(\beta)] = 0$$

$$C_1 [\beta I_0(\beta) - 2(1-\nu) I_1(\beta)] + D_1 \beta I_1(\beta) = 0$$

Pentru ca $C_1 \neq 0$ și $D_1 \neq 0$, determinantul sistemului $\psi(\beta) = 0$ sau :

$$\psi(\beta) = \beta^2 [I_0^2(\beta) - I_1^2(\beta)] - 2(1-\nu) I_1^2(\beta) = 0$$

Ecuația de mai sus are o infinitate de soluții complexe.



Rădăcinile β_1 sînt de forma : $\beta_s = \gamma_s + i \delta_s$.

Pentru cilindru încărcat pe fețe.

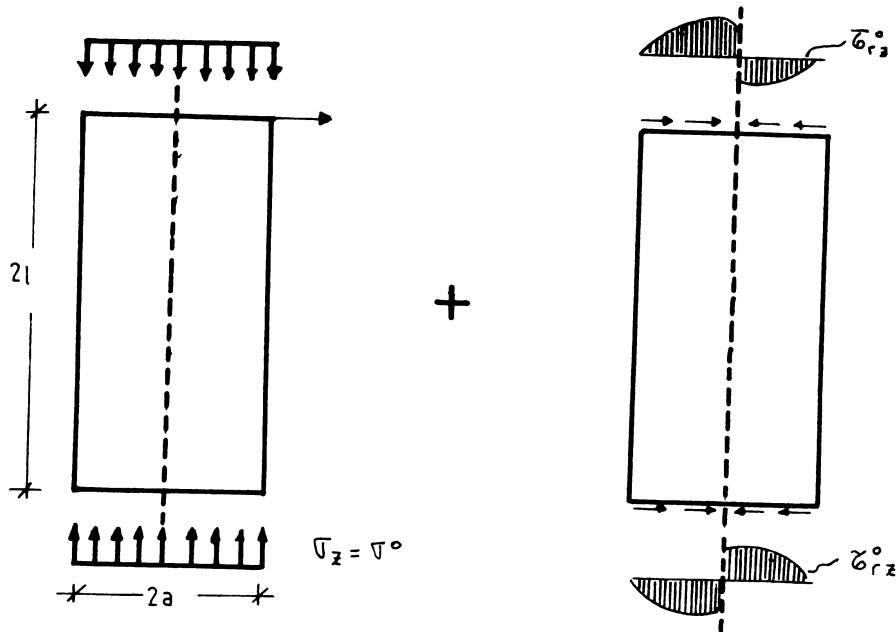


FIG. 3.11

Deoarece soluția particulară corespunde pentru $\sigma_z = \sigma^0$ și $(\tau_{rz})^0 = 0$, soluția omogenă va fi : $(\sigma_z)^H = F(\eta) = 0$.

Pentru alura tensiunilor $(\tau_{rz})_0$ alegem 5 funcții $\phi(\eta) = -(C_1 + C_2) + C_1\eta + C_2\eta^2$ ($\phi(\eta) = 0$ pt. $\eta = 1$)

Din această condiție ca $(\tau_{rz})_{\eta=0} = 0$ pt. $\eta = 1$

rezultă
$$\int_0^1 \phi(\eta) \tau_{rz}^K(\eta, \beta) \eta d\eta = 0$$

și deci implicit
$$\rho_n = 0 \quad \psi_n = 0$$

Astfel sistemul de ecuații cu necunoscutele M_s și N_s devine omogen, adică, în afară de soluția banală $M_s = N_s = 0$ care corespunde soluției particulare, pentru o valoare arbitrară lui M_1 , rezultă valori pentru M_2 , N_1 și N_2 .

Alegerea lui M_1 se face în funcție de mărimea efortului τ_{rz} pe fețele cilindrului.

$$(\tilde{\tau}_{rz}^H)_{\eta=0} = M_1 \tau_{rz}^{1,F} - N_1 \tau_{rz}^{1,I} + M_2 \tau_{rz}^{2,F} - N_2 \tau_{rz}^{2,I}$$

Pentru studiul stării de tensiune într-un cilindru solicitat la compresiune între două platane rigide cu "fre-

care", deci condițiile de încărcare ale epruvetelor la piesa de încercat, formularea tip Dirichlet nu este adevărată deoarece nu impune condiții referitoare la modul de deformare a fețelor referitoare la modul de deformare a fețelor cilindrului în contact cu platanele preseii.

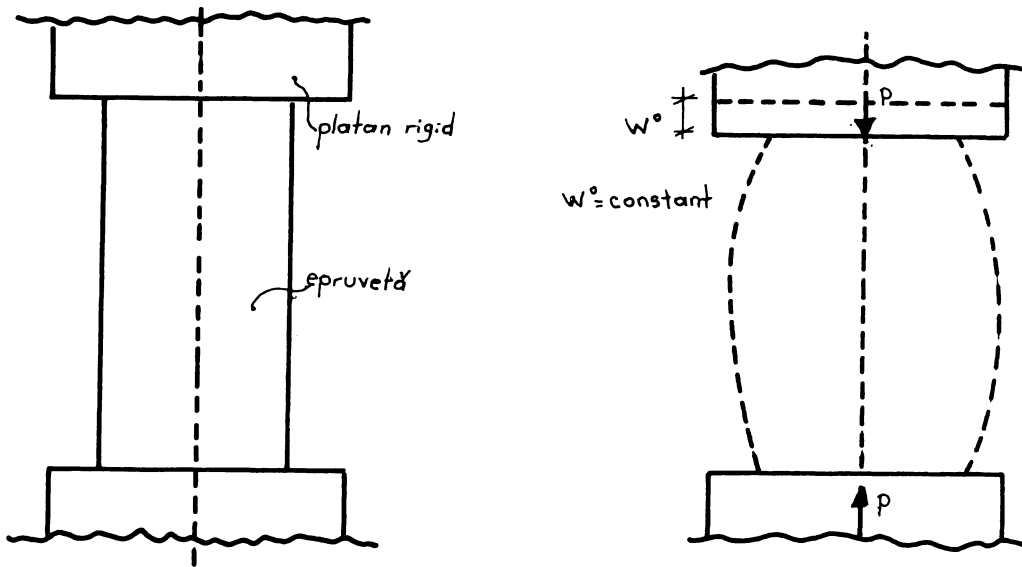


FIG. 3.12

In opoziție, formularea Neuman este corectă pentru că se impune cilindrului ca la fețele $z = 0$ și $z = L$ să existe :

$$\left. \begin{matrix} () \\ z=0 \\ z=L \end{matrix} \right\} w = 0 \quad \left. \begin{matrix} (w) \\ z=0 \\ z=L \end{matrix} \right\} w = \text{const} \quad (\text{indiferent de } z)$$

Distribuția eforturilor unitare σ_z și τ_{rz} pe fețele cilindrului este necunoscută inițial, dar se cunoaște rezultante eforturilor normale :

$$2 \int_0^a \sigma_z(r, 0) r dr = P$$

Deplasările totale pe fețele $z = 0$ și $z = L$, $w(r, 0)$, $w(r, L)$ și $w(r, L)$ se compun din doi termeni, corespunzători soluției particulare și soluției omogene.

Condiția de solicitare a cilindrului între platanele rigide ale preseii se va exprima astfel :

$$u^0(\gamma, 0) + u^{\text{II}}(\gamma, 0) = 0 \quad ; \quad w^0(\gamma, 0) + w^{\text{II}}(\gamma, 0) = \text{const.}$$

Pentru a determina valorile constantelor M_1, M_2, N_1, N_2 se vor exprima condițiile de mai sus, pentru deplasarea $(\gamma, 0)$ în patru puncte : $\gamma = 0,3$; $\gamma = 0,6$; $\gamma = 0,8$; $\gamma = 1,00$.

Astfel se obține sistemul de ecuații :

$$\begin{aligned} M_1 u^{1, \text{I}}(0,3) - N_1 u^{1, \text{I}}(0,3) + M_2 u^{2, \text{I}}(0,3) - N_2 u^{2, \text{I}}(0,3) &= -u^0(0,3) \\ M_1 u^{1, \text{I}}(0,6) - N_1 u^{1, \text{I}}(0,6) + M_2 u^{2, \text{I}}(0,6) - N_2 u^{2, \text{I}}(0,6) &= -u^0(0,6) \\ M_1 u^{1, \text{I}}(0,8) - N_1 u^{1, \text{I}}(0,8) + M_2 u^{2, \text{I}}(0,8) - N_2 u^{2, \text{I}}(0,8) &= -u^0(0,8) \\ M_1 u^{1, \text{I}}(1,0) - N_1 u^{1, \text{I}}(1,0) + M_2 u^{2, \text{I}}(1,0) - N_2 u^{2, \text{I}}(1,0) &= -u^0(1,00) \end{aligned}$$

Rezolvări mai exacte se obțin luând $s > 2$, astfel pentru $s = 3$ se obțin 6 constante M_s și N_s punând condiții în 6 puncte.

Dar, din cele arătate mai sus pentru $s > 2$ coeficienții δ_s devin mari, respectiv amortizarea prin coeficienții $e^{-\delta_s}$ crește, diferențele față de $s=2$ fiind neglijabile.

Din soluția particulară, pentru ∇_0 efort de întindere rezultă :

$$u^0(\gamma) = - \frac{\nabla_0}{E} \cdot \nu \cdot \gamma$$

Înlocuind aceste valori și rezolvând sistemul se obțin valorile constantelor :

$$\begin{aligned} M_1 &= - 4,4495 \frac{\nabla_0}{E} \cdot \nu & M_2 &= 0,91923 \frac{\nabla_0}{E} \cdot \nu \\ N_1 &= 4,575 \frac{\nabla_0}{E} \cdot \nu & N_2 &= - 0,34912 \frac{\nabla_0}{E} \cdot \nu \end{aligned}$$

Cu aceste valori, se obțin eforturile unitare în orice punct al cilindrului. Astfel pentru fețele frontale ale cilindrului sînt ($L = 2,0$) : $\bar{r} = 0, \bar{z} = 2$ se obțin eforturile omogene.

Pentru secțiunea $\xi = 0, \xi_1 = 2,00$

η	$\sigma_{\xi}^{\#}$	$\sigma_{\varphi}^{\#}$	$\sigma_{\xi}^{\#}$	$\tau_{\xi, \xi}^{\#}$	Multiplicator
0,0	-1,656	7,943	4,758	0,00	$\sigma_0 \frac{\sqrt{\nu}}{1+\nu}$
0,2	1,011	7,380	4,543	0,853	"
0,3	3,488	6,702	4,015	1,2267	"
0,6	5,636	3,305	0,944	1,1560	"
0,8	-1,628	0,623	0,623	0,4342	"
1,0	-10,702	-1,987	0,000	0,000	"

Pentru secțiunea $\xi = 0,25 ; \xi_1 = 1,25$

η	$\sigma_{\xi}^{\#}$	$\sigma_{\varphi}^{\#}$	$\sigma_{\xi}^{\#}$	Multiplicator
0,0	4,708	1,316	0,330	$\sigma_0 \frac{\sqrt{\nu}}{1+\nu} = 0,14 \sigma_0$
0,2	4,645	1,168	0,743	"
0,3	4,454	0,991	0,728	"
0,6	1,996	0,027	0,479	"
0,8	-1,702	-0,793	0,302	"
1,0	-5,661	-1,461	0,00	"

Pentru secțiunea $\xi = 0,5 \quad \xi_1 = 1,50$

η	$\sigma_{\xi}^{\#}$	$\sigma_{\varphi}^{\#}$	$\sigma_{\xi}^{\#}$	Multiplicator
0,0	4,081	-0,585	-0,717	0,140 σ_0
0,2	3,689	-0,621	-0,497	0,140 σ_0
0,3	3,207	-0,660	-0,518	0,140 σ_0
0,6	0,803	-0,877	-0,157	0,140 σ_0
0,8	-1,251	-1,044	0,001	0,140 σ_0
1,0	-2,898	-0,778	0,000	0,140 σ_0

η	$\sigma_{\xi}^{\#}$	$\sigma_{\rho}^{\#}$	$\sigma_{\xi}^{\#}$	Multiplicator
0,0	2,404	-1,107	-1,109	0,140 σ_0
0,2	2,100	-1,095	-0,9818	0,140 σ_0
0,3	1,7440	-1,349	-0,8702	0,140 σ_0
0,6	0,2152	-1,130	-0,3340	0,140 σ_0

(continuare tabel)

γ	σ_z	σ_φ	σ_r	Multiplicator
0,8	-0,720	-0,875	-0,0431	0,140 · σ
3,0	-1,076	-0,724	0,000	0,140 · σ

In figurile 3.13, 3.14a, 3.14b se dau aceste valori într-o formă grafică.

3.3.3. Ipoteze propuse. La acest punct se analizează epruveta cilindrică în două ipoteze, prima ipoteză este când suprafața circulară de contact cu platanul preseii hidraulice nu se dilată și a doua ipoteză fiind aceea ca suprafața circulară de contact cu platanul preseii hidraulice se dilată, datorită umflării transversale a betonului sub acțiunea forței de compresiune.

3.3.4. Ipoteza nr.1. Această primă ipoteză presupune că suprafețele circulare nu se dilată. Această structură a fost rezolvată cu metoda elementelor finite axial simetrice, elemente finite de volum și cu teoria echivalențelor.

3.3.4.1. Soluții cu metoda elementelor finite

In continuare se prezintă schema logică pentru programul metodei elementelor finite axial-simetrice.

In acest program s-au folosit un număr de notații care sînt explicate în continuare :

NE = numărul elementelor finite,

NO = numărul nodurilor structurii,

NOD(NE,3) - tablou cuprinzînd pentru fiecare element finit cele trei noduri,

XS(NO), YS(NO) - tablourile coordonatelor nodurilor structurii,

ICL(MCL) - tabloul gradelor de libertate eliminate,

MCL - numărul gradelor de libertate eliminate,

UF(6, NINC) - matricea deplasărilor nodale ale unui element finit,

SIG(4, NINC) - tablou ce conține eforturile unitare ale unui element finit în toate ipotezele de încărcare,

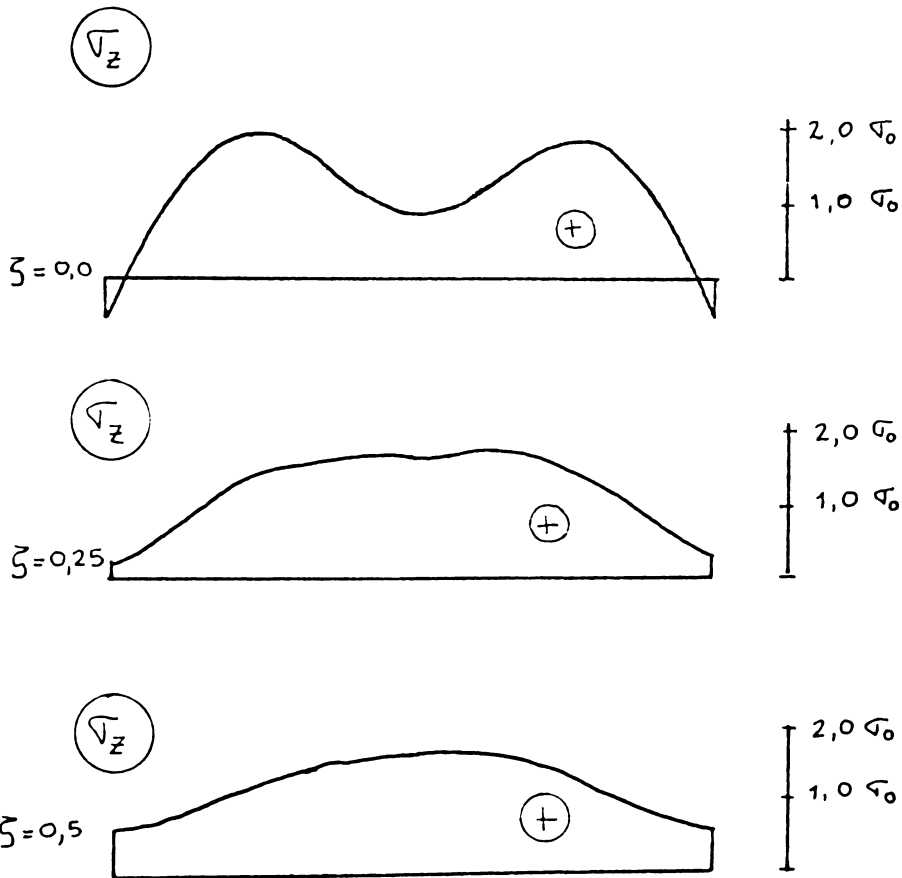
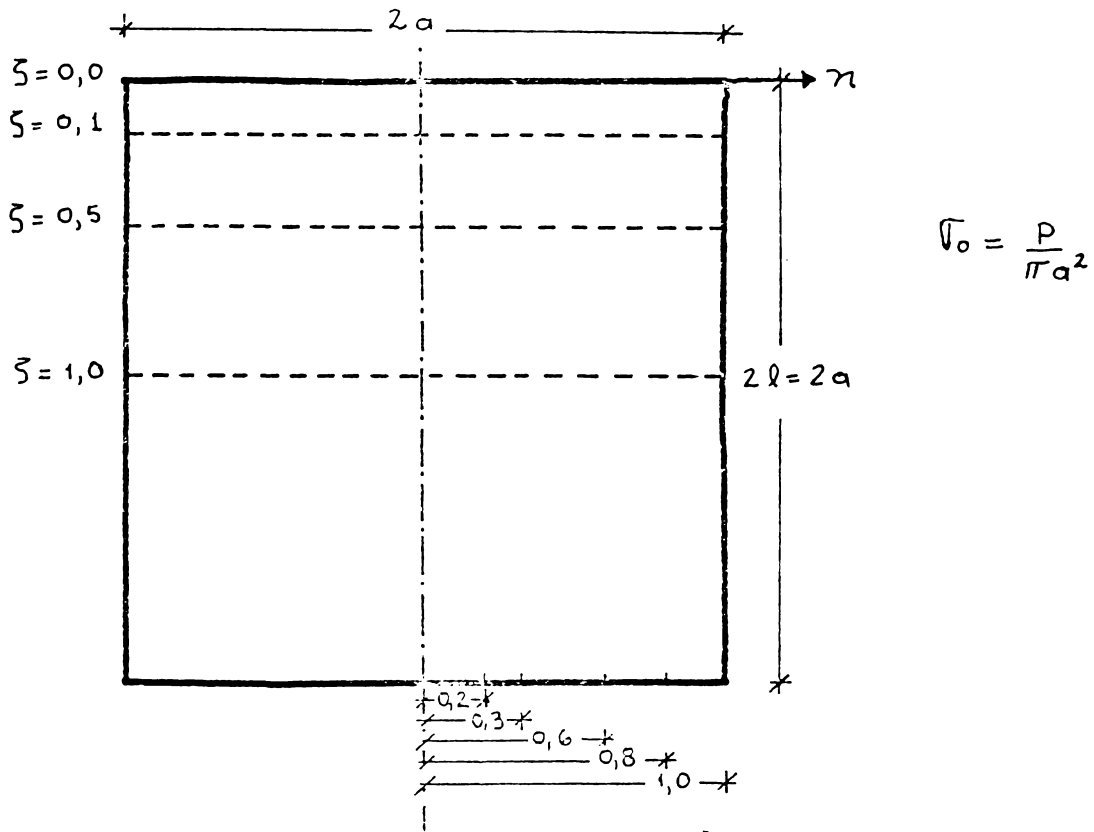


FIG. 3.13

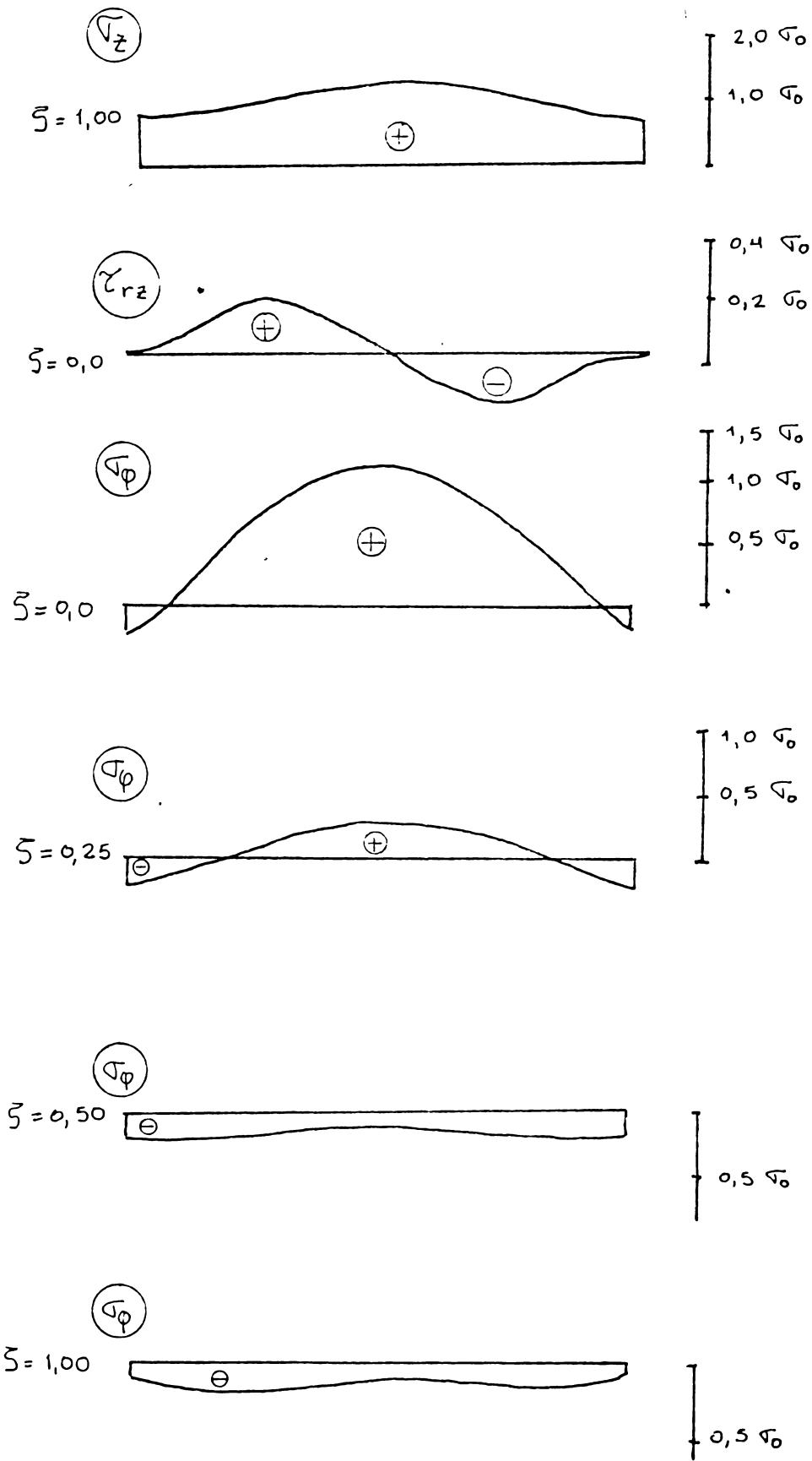


FIG. 3.14 a

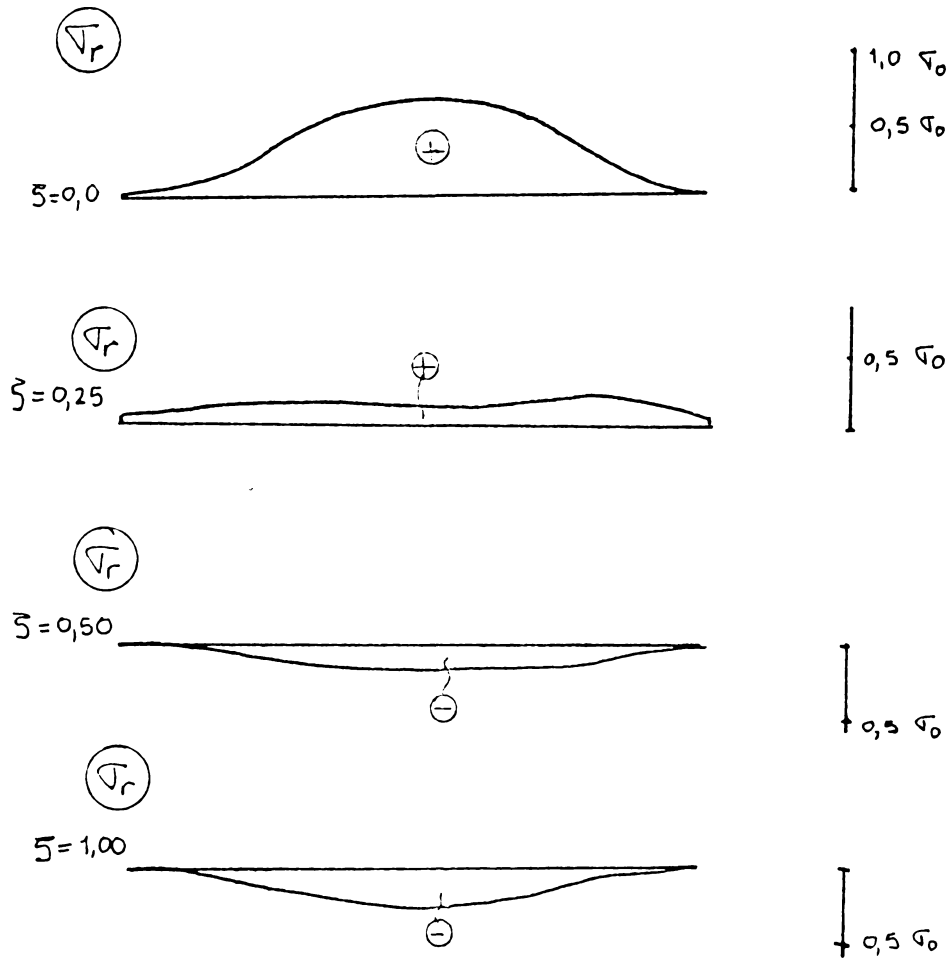
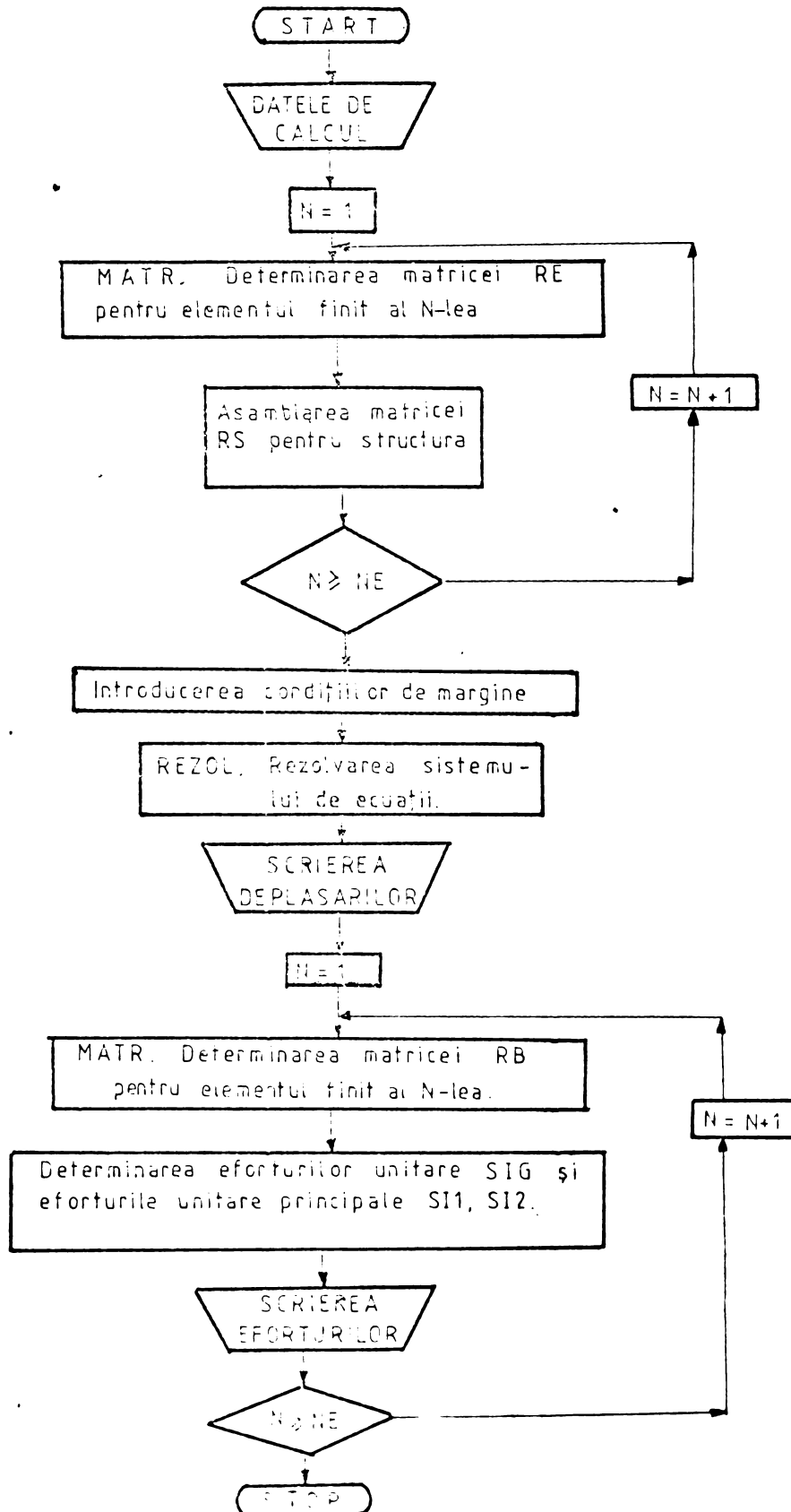


FIG. 3.14b



K(6) - tabloul gradelor de libertate ale unui element finit (parametrilor nodale),
SI1(NINC), SI2(NINC) - tablouri ce conțin eforturile unitare principale în centrul unui element finit în toate ipotezele de încărcări,
FI(NINC) - tablou cu înclinațiile eforturilor unitare principale,
RM(4,4) - matricea rigidităților materialului,
B(4,6) - matricea deformațiilor specifice,
RE(6,6) - matricea rigidităților unui element finit,
RB(4,6) - submatricea produs $RM \cdot B$,
E = modulul de elasticitate,
GN - valoarea coeficientului lui Poisson,
NINC - numărul ipotezelor de încărcare,
U(NLIN,NINC) - matricea deplasărilor nodale ale structurii,
RS(NLIN, IS) - matricea de rigiditate a structurii,
IS - lățimea semibenzii matricei,
NLIN - numărul deplasărilor nodale ale structurii.

Introducerea datelor și tipărirea eforturilor obținute este aceeași ca la punctul 2.2.4.2, cu o singură deosebire: nu se mai introduce matricea de rigiditate a elementului, în schimb trebuie să se introducă modulul de elasticitate E și coeficientul lui Poisson ν .

a). Programul CIMEFAS 1. Pentru acest program s-au folosit elemente finite de tip axial simetric triunghiular. Cilindrul, având o structură simetrică, s-a luat jumătatea ABCD (fig. 3.15a). Discretizarea structurii este dată în figura 3.15b.

Structura este compusă din 64 de elemente, numerotate cu cifre romane, și 45 de noduri. Numărul gradelor de libertate eliminate din condițiile de simetrie sînt 13, în nodurile 1, 2, 3, 4, 5, deplasările orizontale au fost eliminate pentru a îndeplini condiția din prima ipoteză.

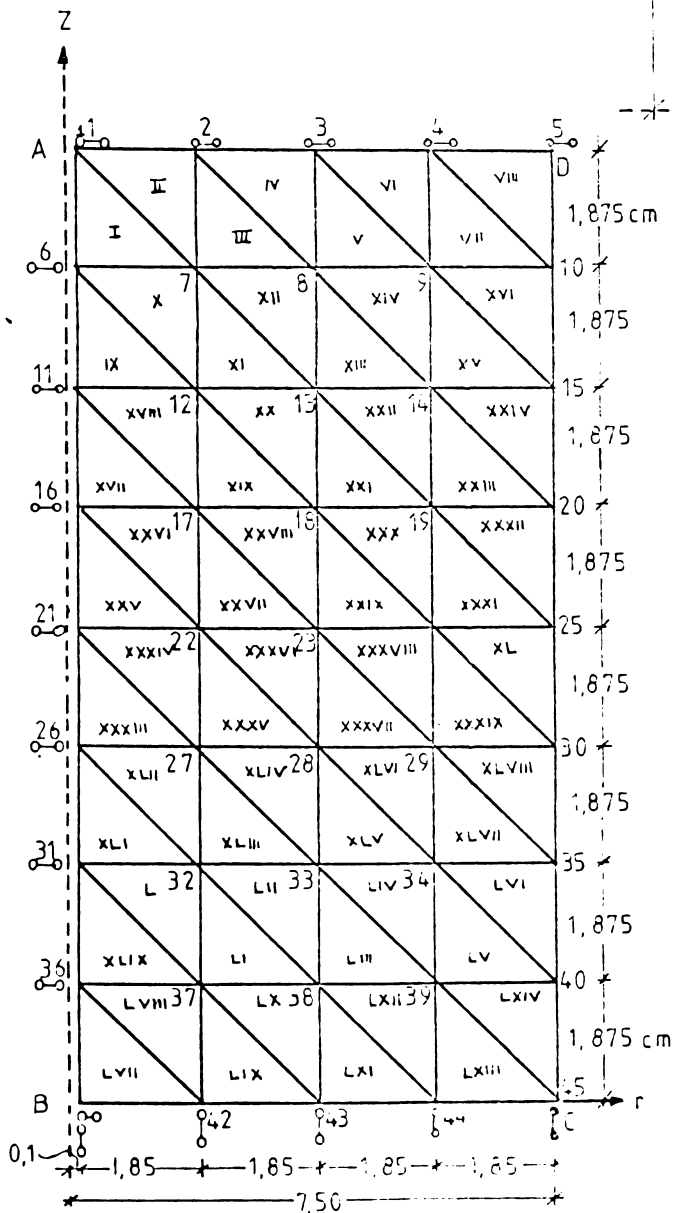
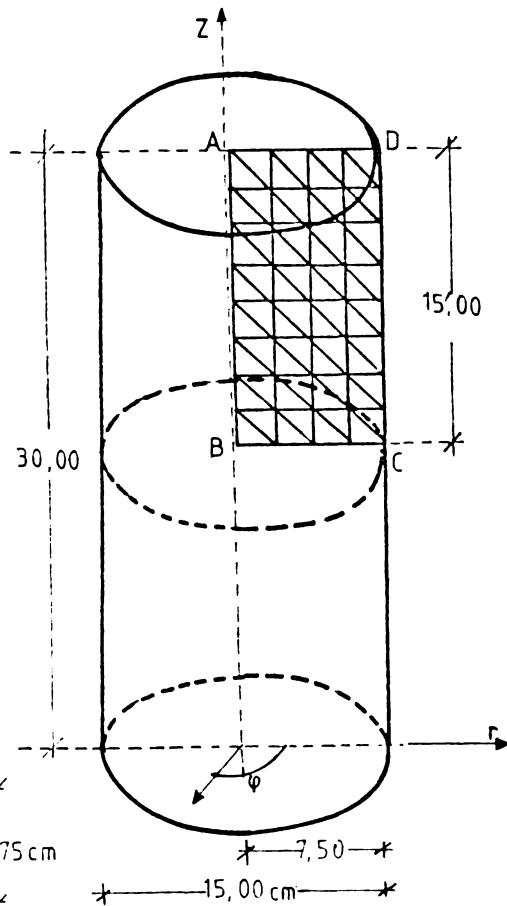
Eforturile elementelor sînt date în anexă, la programul respectiv, CIMEFAS 1. În figurile 3.16-3.21, s-au prezentat: deplasările nodurilor, eforturile unitare normale radiale σ_r , care corespunde cu eforturile date cu simbolul SX în programul, eforturile unitare normale axiale σ_x (SY), efortu-

CILINDRU SUPUS LA COMPRESIUNE

CENTRICA

CIMEFAS

Metoda Elementelor Finite
 Model axial simetric triunghiular.
 Nr. nodurilor = 45
 Nr. elementelor = LXIV



b.)

$E = 160\,000 \text{ daN/cm}^2$
 $\nu = 0,25$

b.)

FIG. 3.15

CIMEFAS 1

Cilindru supus la compresiune centrica.
Metoda Elementelor Finite
Model axial simetric triunghiular

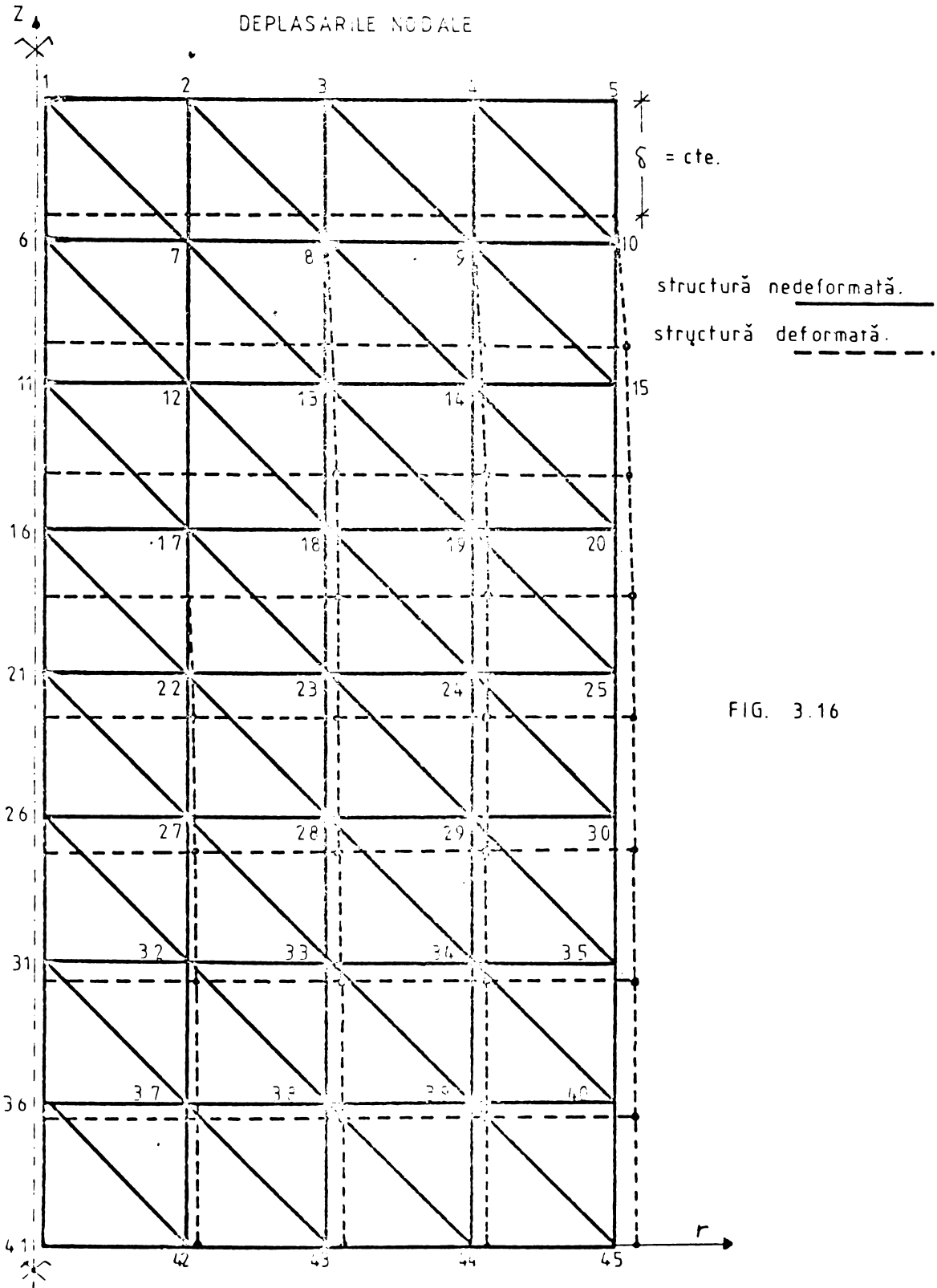


FIG. 3.16

CIMEFAS 1

Cilindru supus la compresiune centrică
Metoda Elementelor Finite
Model axial simetric triunghiular.

EFORTURI UNITARE NORMALE RADIALE σ_r (daN/cm²).

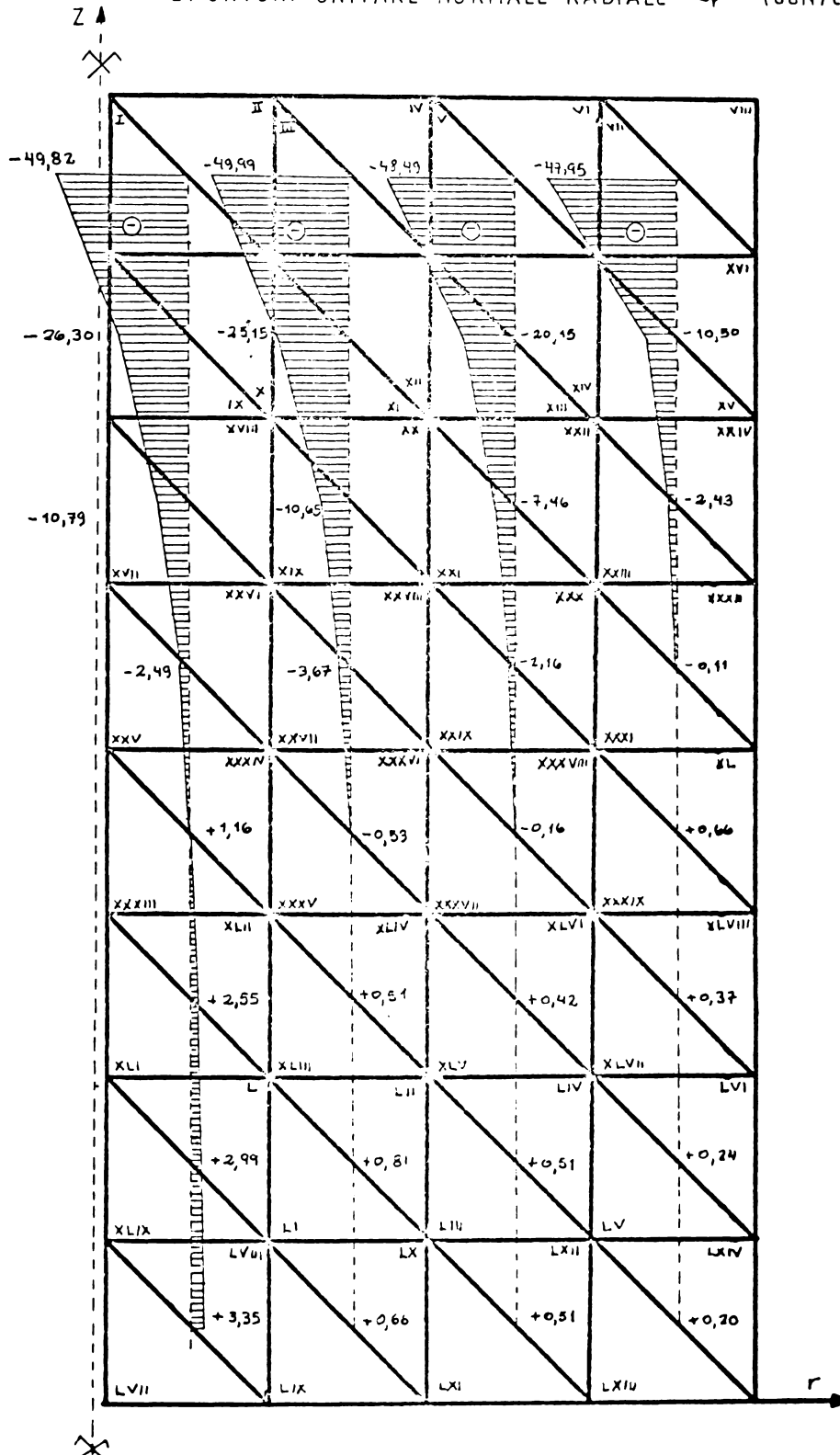


FIG. 3.17

CIMFEFAS 1

Cilindru supus la compresiune centrică
 Metoda Elementelor Finite
 Model axial simetric triunghiular.

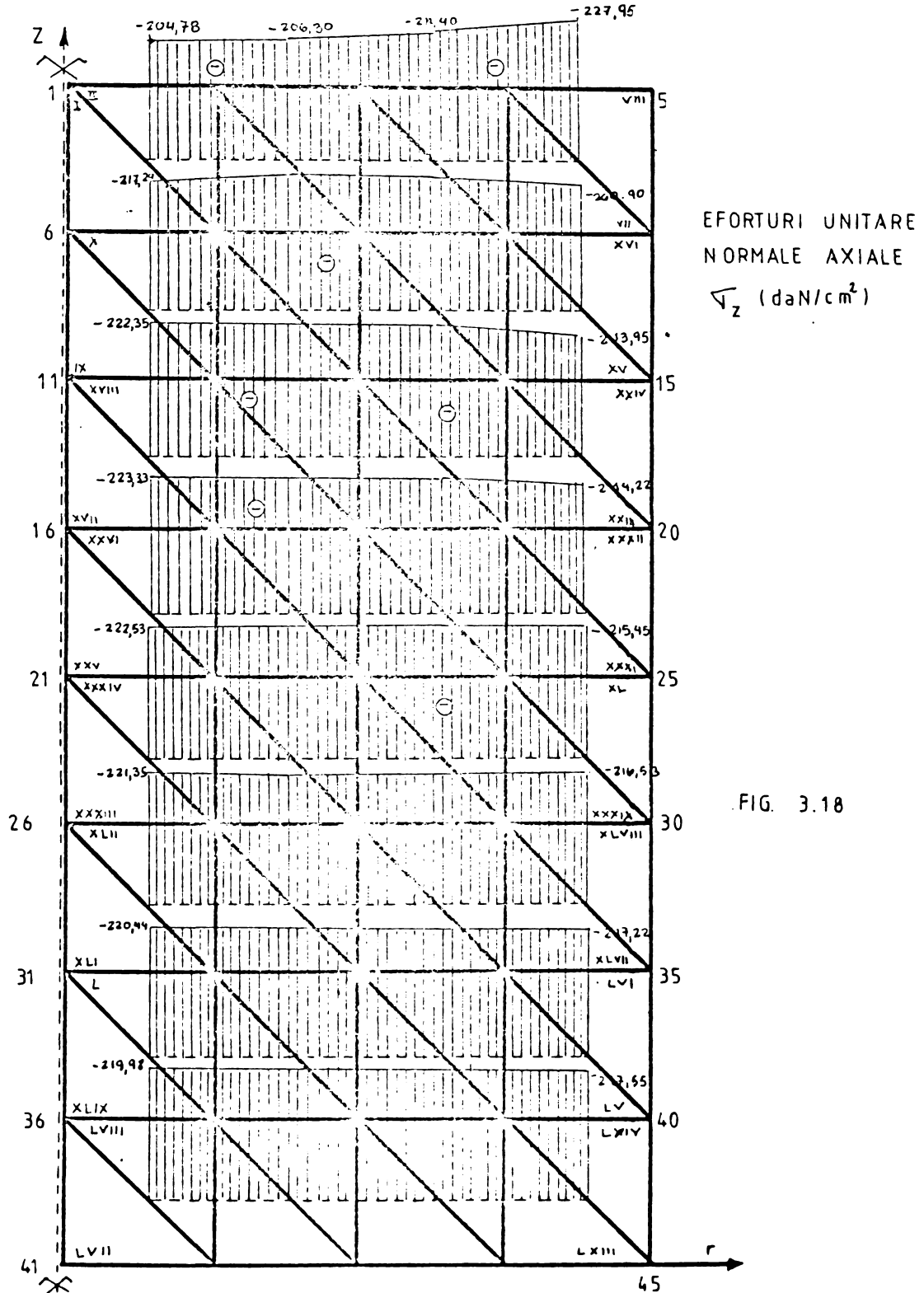


FIG. 3.18

șirurile unitare normale circumferențiale $\sigma_\varphi(sz)$ și eforturile unitare principale 1 și 2°

În figura 3.21 se prezintă o mică schemă a stării de eforturi unitare spațiale, în coordonate cilindrice.

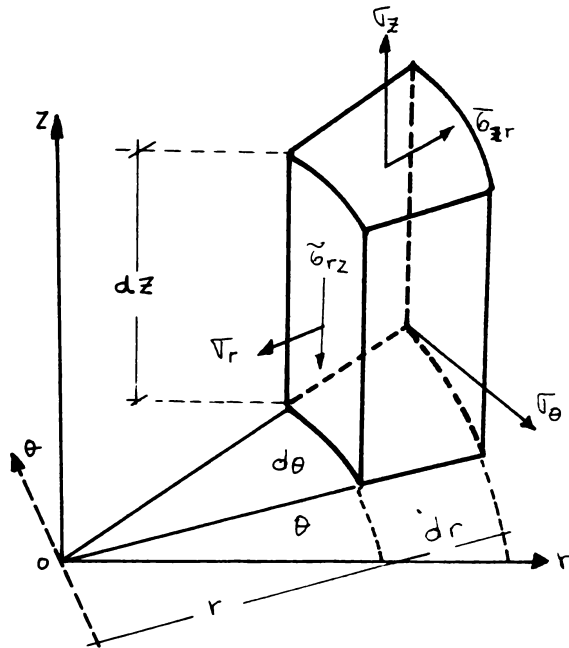


FIG. 3. 21

b.) Programul CIMEFAS 2. Acest program este același ca precedentul cu o singură deosebire, și anume că în acest caz, numărul gradelor de libertate este egal cu 10. Condițiile de blocaje în nodurile 1-5 rămân aceleași. Numai blocajele de pe axa de simetrie s-a modificat.

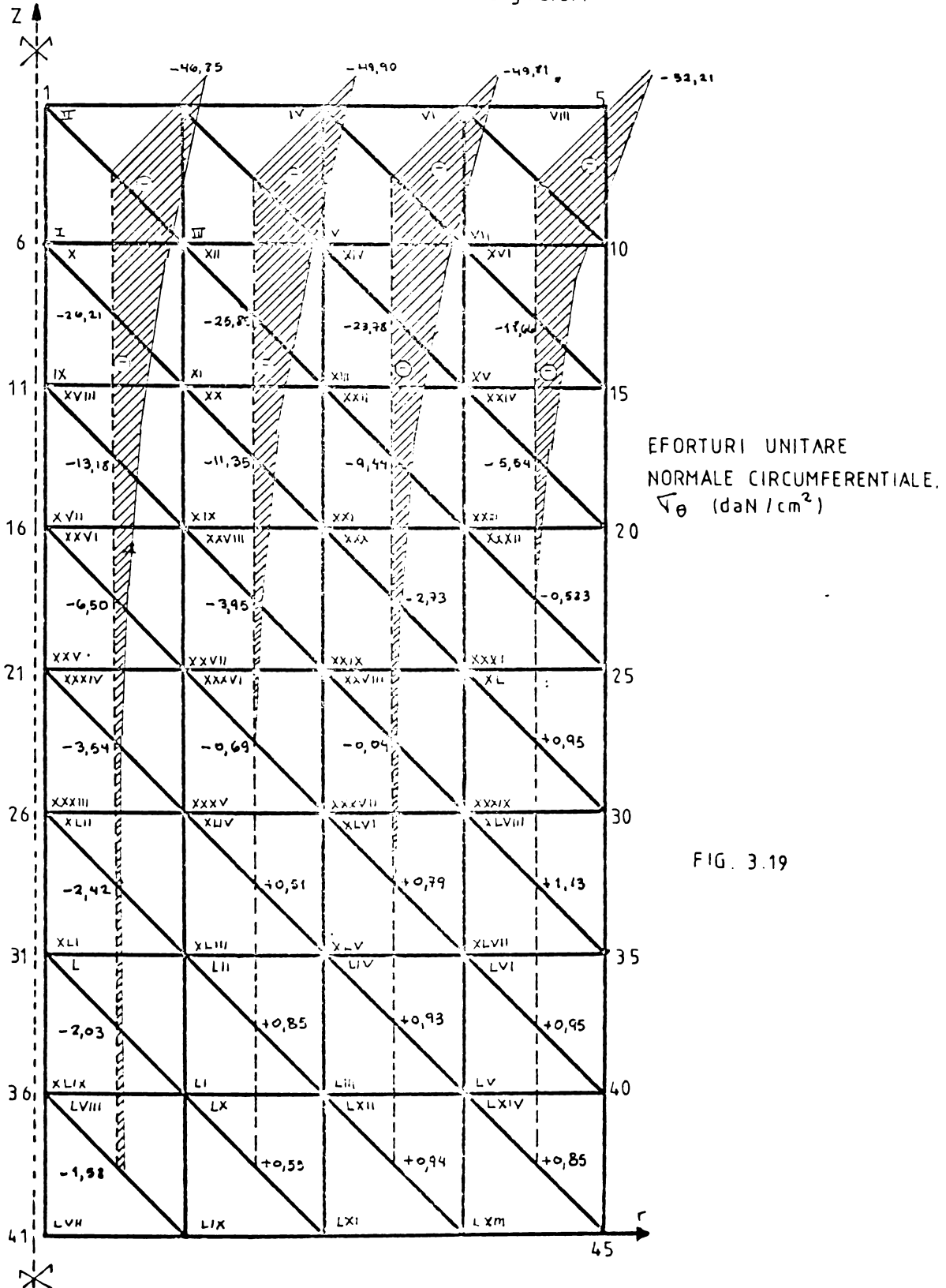
c.) Programul CIMEFVO. În acest program s-a luat în considerare un element de volum $ABC-A'B'C'$, cât mai mic posibil (fig. 3.22a), astfel încât segmentul $BC \approx 1,00$ cm (figura 3.22a), cu $\varphi = 7^\circ$ și $r = 7,5$ cm.

Pentru acest caz s-a discretizat partea corespunzătoare în elemente finite de volum, așa cum se arată în figura 3.22.c. În figura 3.23 se prezintă discretizarea întregii structuri. Această structură a fost împărțită în 32 de elemente finite volumetrice, cu 75 de noduri, de remarcat că în program s-au introdus un număr de 50 de noduri suplimentare pentru a respecta condiția de dilatare orizontală.

Programul folosit este de tip SAP pentru elemente finite de volum, același ca pentru fundația izolată. Rezultatele obținute sînt în programul respectiv CIMEFVO, în anexă.

ȚIMEFAS 1

Cilindru supus la compresiune centrică.
 Metoda Elementelor Finite.
 Model axial simetric triunghiular.



CIMEFAS 1

Cilindru supus la compresione centrică
 Metoda Elementelor Finite
 Model axial simetric triunghiular.

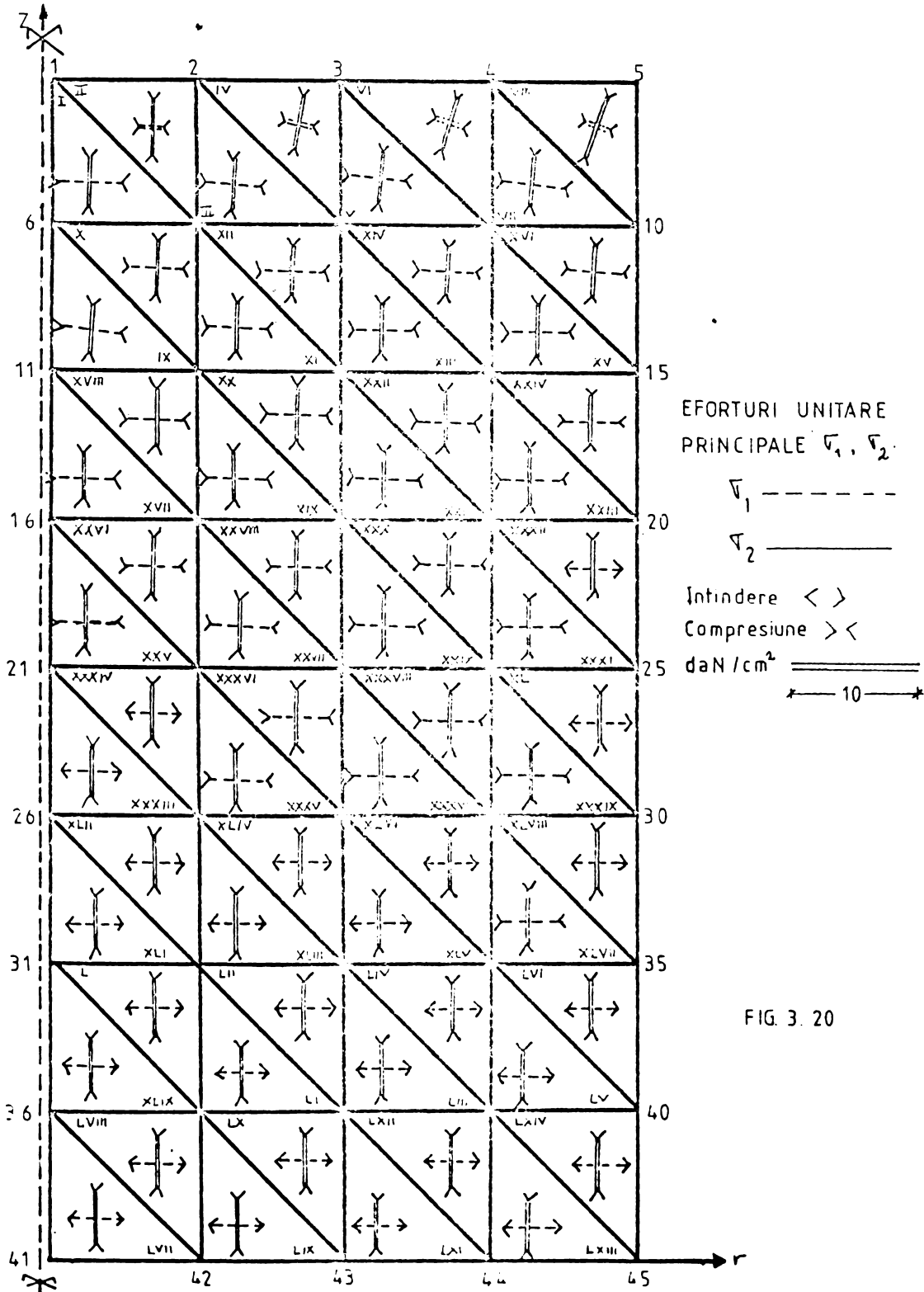


FIG. 3. 20

CILINDRU SUPUS LA COMPRESIUNE CENTRICA.

CIMEFVO

Metoda Elementelor Finite.

Model volumetric.

Nr. nodurilor = 75

Nr. elementelor = XXXii

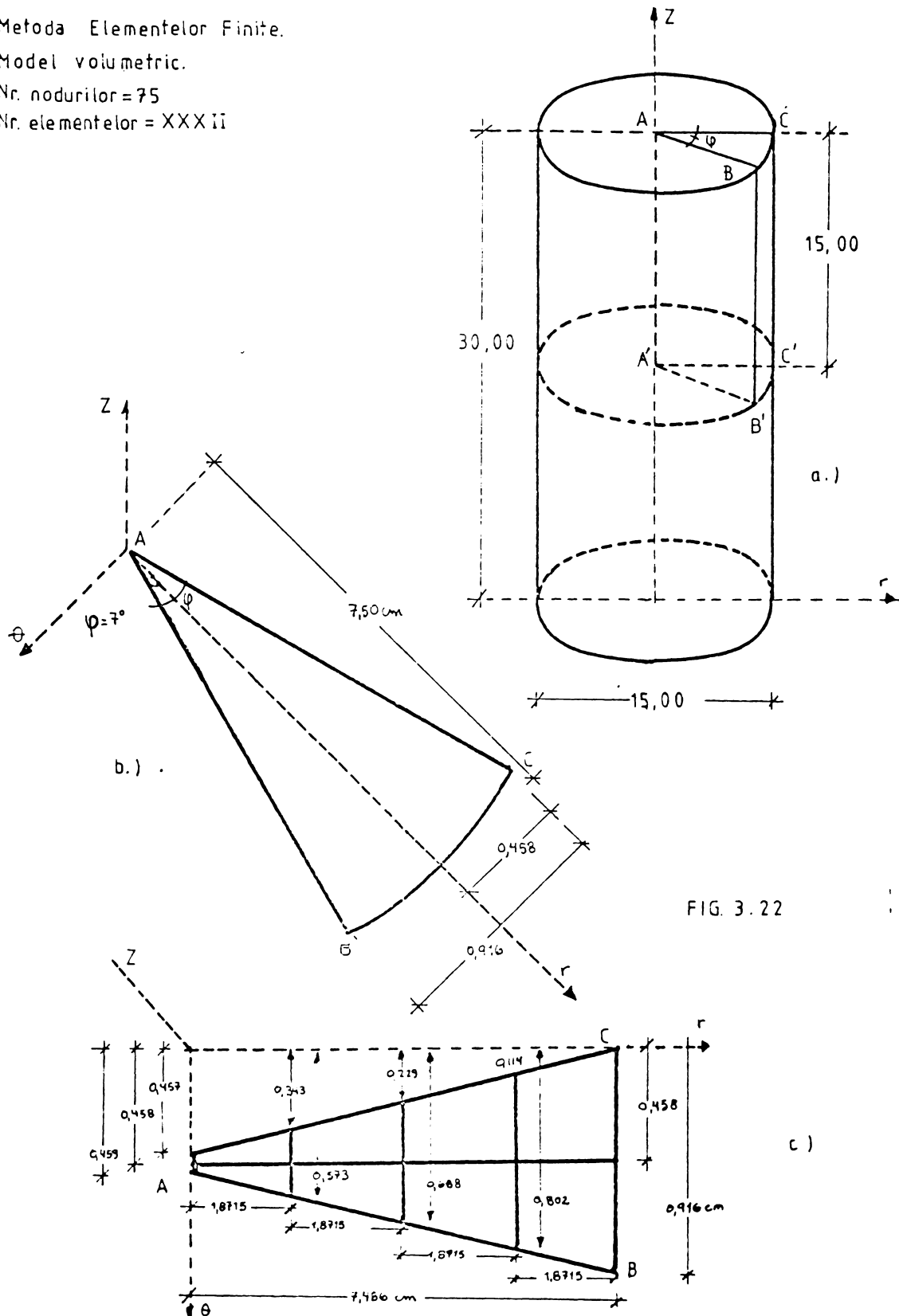


FIG. 3.22

C M E F V O

Cilindru supus la compresiune centrică.
Metoda Elementelor Finite
Model volumetric
Nr. nodurilor = 75
Nr. elementelor = XXXII

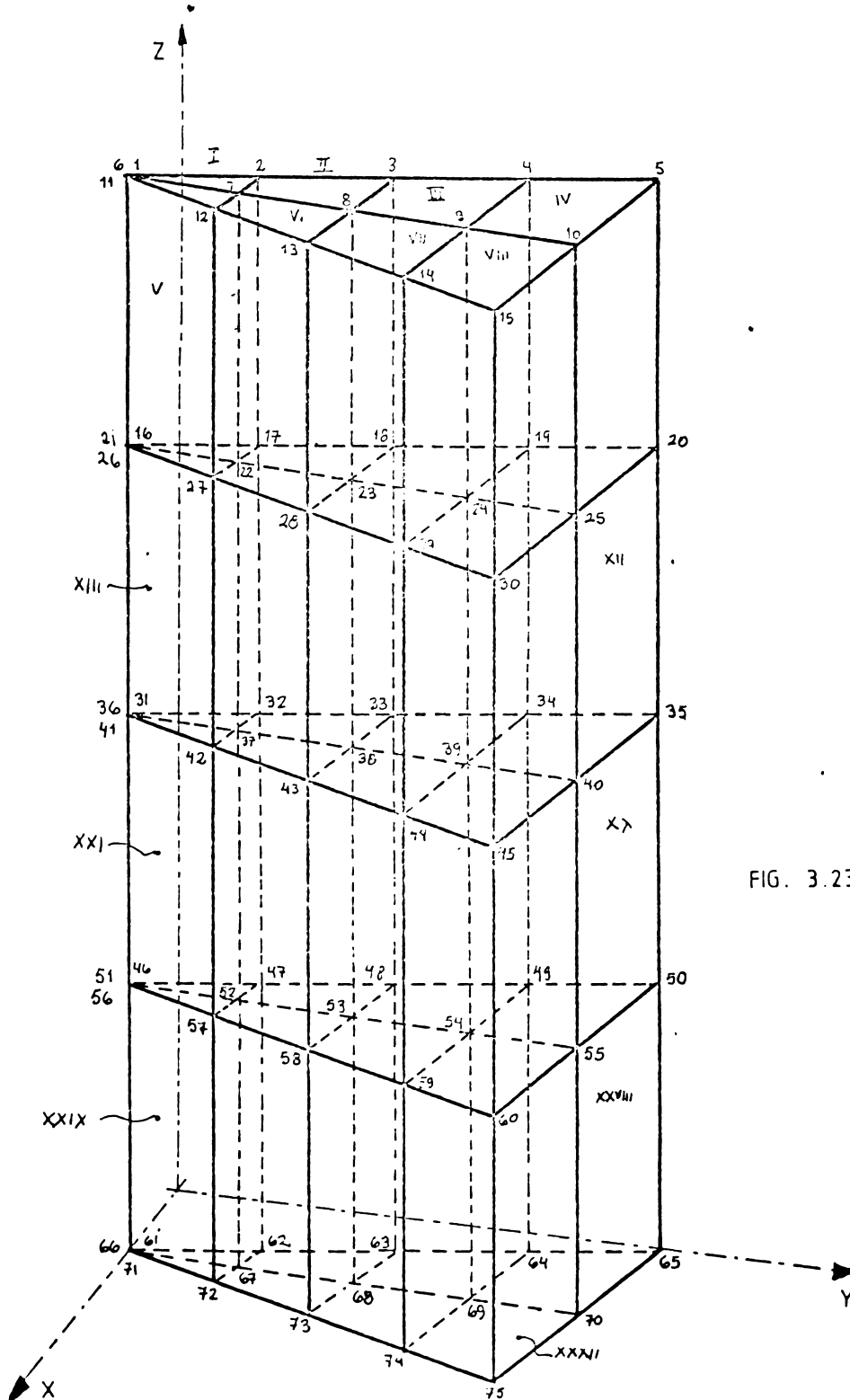


FIG. 3.23

3.3.4.2. Soluția cu teoria echivalențelor. Pentru această problemă s-a considerat aceeași parte a structurii ca în programul CIMEFVC, adică segmentul \overline{BC} rămâne aproape de 1 cm, cu $\varphi = 7^\circ$ și $r = 7,5$ cm. Dar discretizarea s-a făcut cu o structură echivalentă ca cea din figura 3.24.

Structura este formată din 160 de elemente dispuse în 8 nivele, în figura 3.25 se prezintă discretizarea ultimului nivel. Numărul nodurilor este de 297. Elementele echivalente din acest caz sînt din forma paralelipipedică și sînt formate și din diagonalele fețelor elementului, numărul barelor este de 924.

Programul folosit este de tip SAP pentru elemente de forma paralelipipedică formate de bare. Ca în problema prezentată pentru fundația izolată, cu aceleași formule se calculează rigiditatea barelor și aria lor respectivă. Rezultatele (eforturile barelor) sînt prezentate în programul CITEMPA. Eforturile elementelor sînt prezentate în formă tabelară în capitolul IV.

3.3.5. Ipoteza a doua. La acest punct, epruveta a fost studiată în ipoteza reală, adică, suprafața circulară de contact cu platanul preseii hidraulice se dilată adică, nu se mai împiedică dilatarea în punctele de contact cu platanul preseii.

În această ipoteză, în afara presiunilor normale pe suprafațe de contact, apar și forțe tangențiale de frecare, dispuse radial și orientate spre interior.

Pentru rezolvarea acestei probleme s-a folosit același program de calcul, folosit în ipoteza I, în programul CIMEFAS 1. Adică structura are același număr de elemente și de noduri, numai că în acest caz, numărul blocajelor va fi : 14, adică se lasă libere nodurile 1-5, dar apar forțele P și forțele de frecare care vor avea valoarea $FF_n = 0,25 P_n$.

Rezultatele obținute sînt în programul CIMEFAFV. În figura 3.26 se prezintă grafic, deplasările nodurilor ; în figurile 3.27 - 3.3b se arată : eforturile unitare normale radiale σ_r , eforturi unitare normale axiale σ_z , eforturile unitare normale circumferențiale σ_θ și eforturile unitare principale σ_1 și σ_2 .

Toate aceste rezultate sînt prezentate și discutate

CITEMPA

Cilindru supus la compresiune centrică

Teoria Echivalențelor.

Model paralelipipedic

Nr. nodurilor = 297

Nr. elementelor = CLX

Nr. barelor = 924

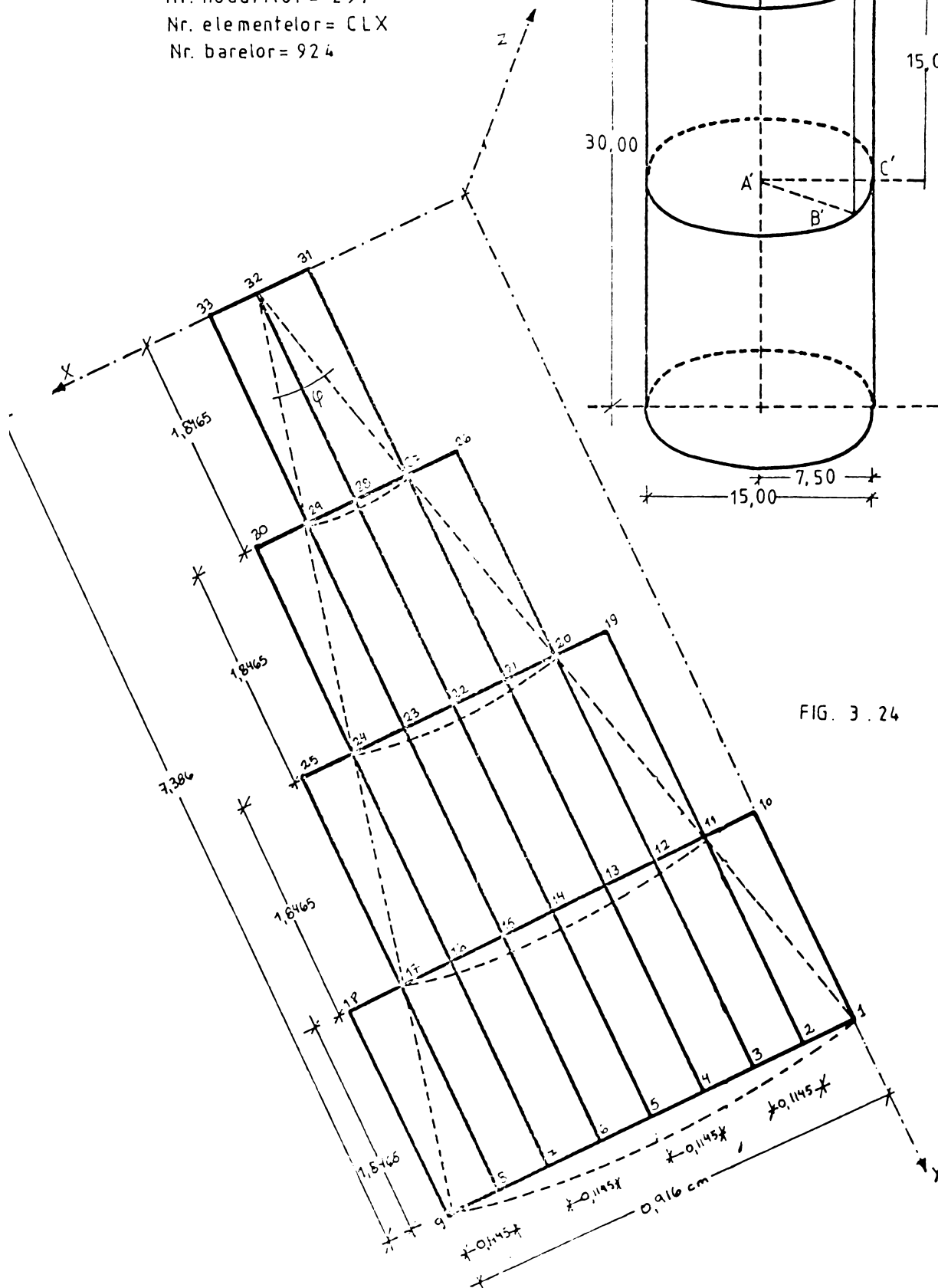
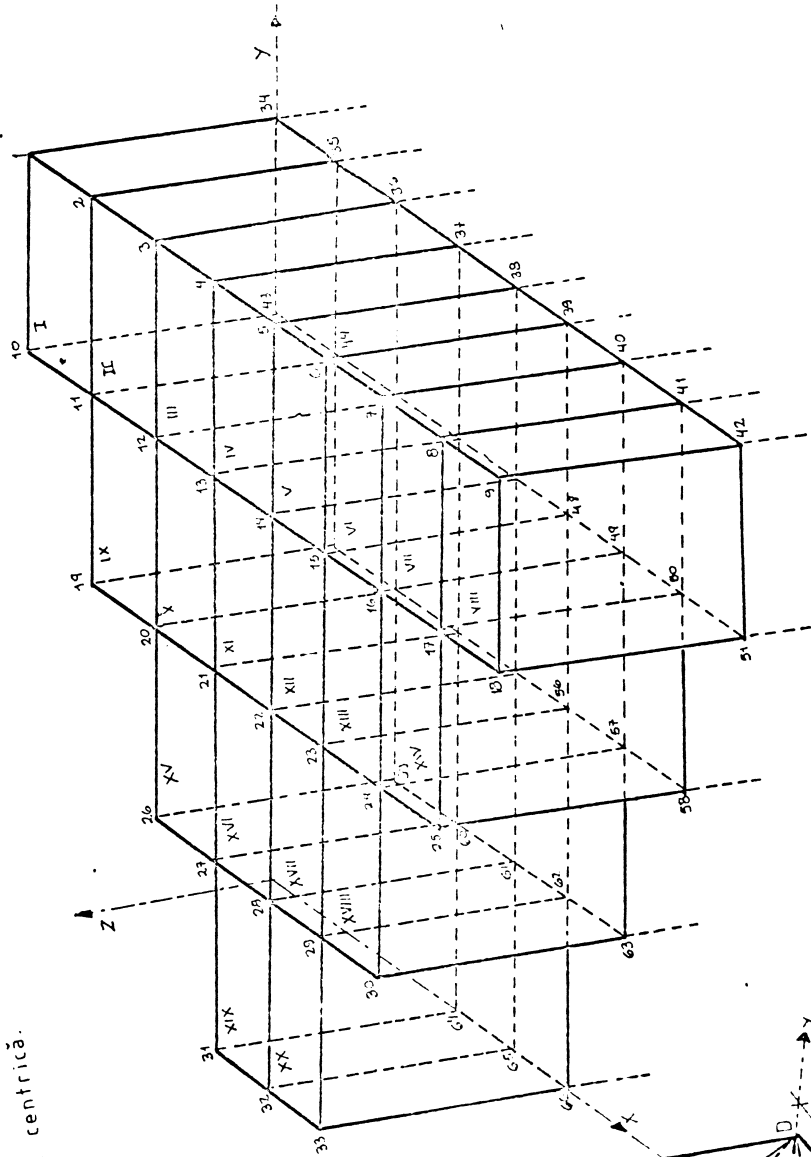


FIG. 3.24



CITEMPA
 Cilindru supus la compresiune centrică.
 Teoria Echivalentelor
 Model paralelipipedic
 Nr. elementelor = CLX
 Nr. nodurilor = 297
 Nr. barelor = 924

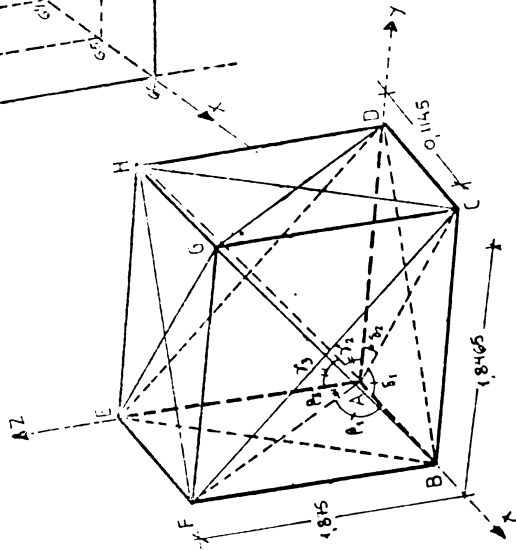


FIG. 3.25

CILINDRU SUPUS LA COMPRESIUNE CENTRICA

CIMEFAFV

Metoda Elementelor Finite.

Model axial simetric triunghiular.

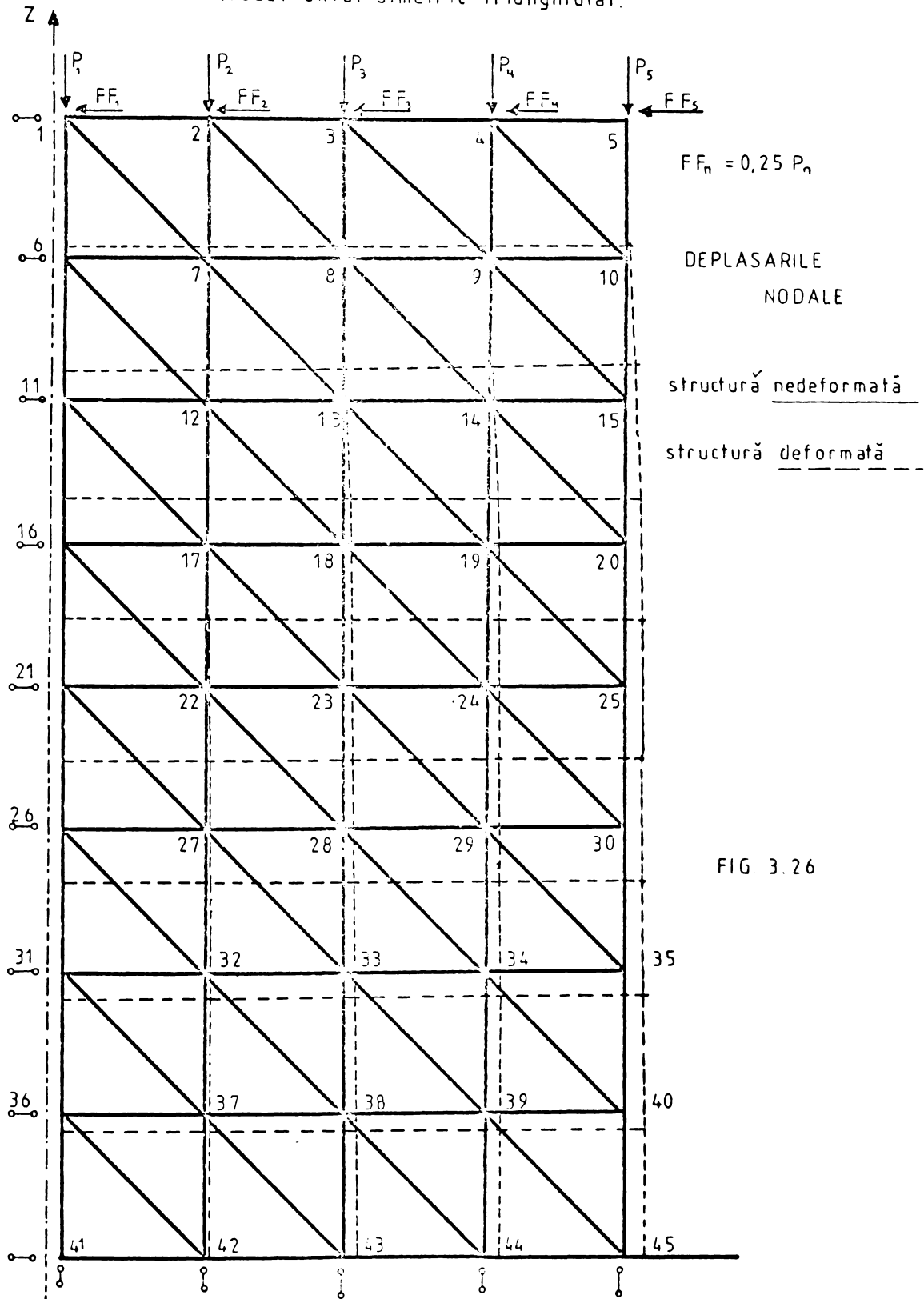


FIG. 3.26

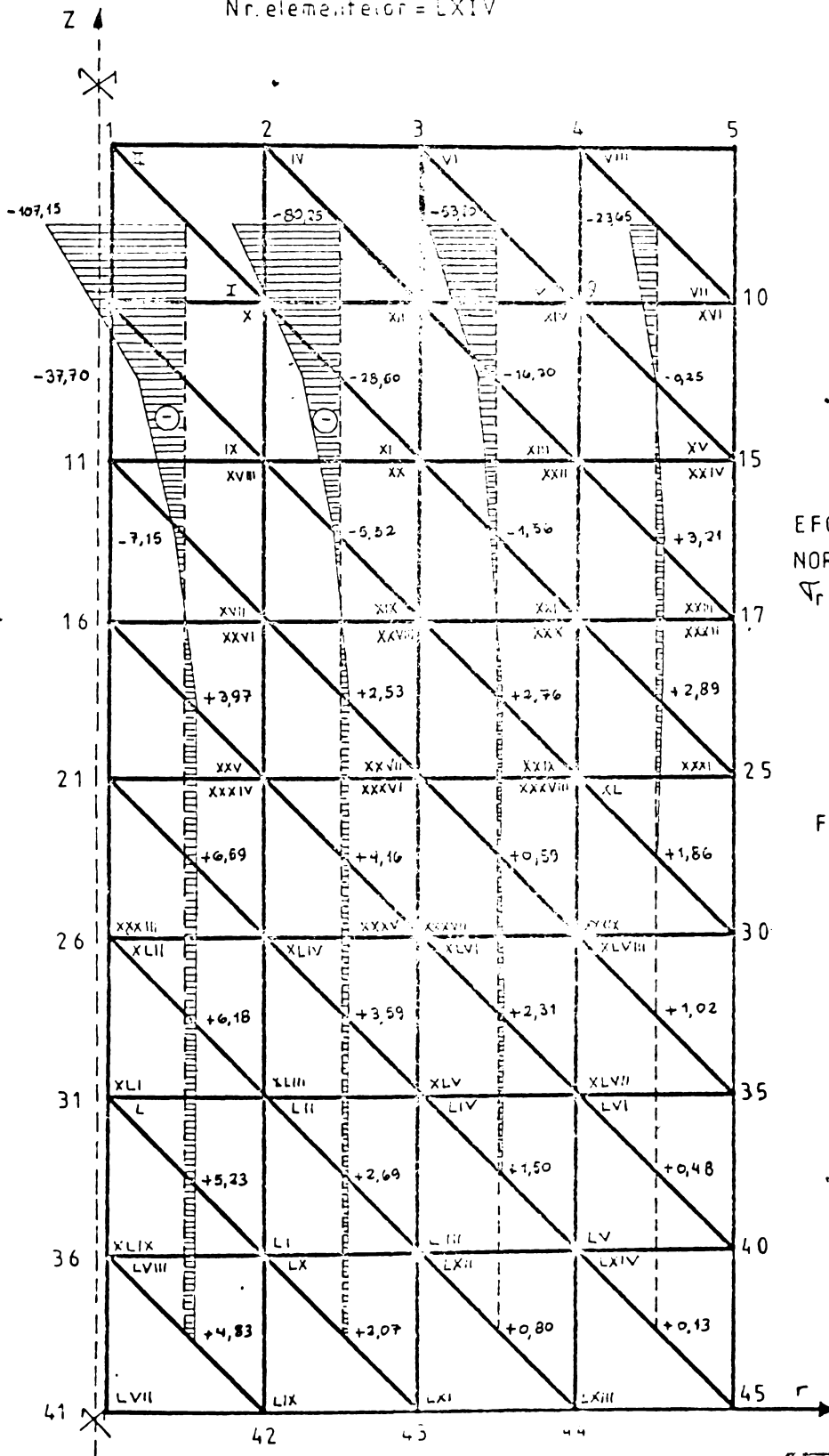
CIMEFAFV

Cilindru supus la compresie centrică.

Metoda Elementelor Finite.

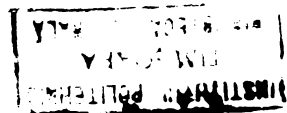
Nr. nodurilor = 45

Nr. elementelor = LXIV



EFORTURI UNITARE
NORMALE RADIALE
 σ_r (daN/cm²).

FIG. 3.27



CIMEFAFV

Cilindru supus la compresiune centrică
Metodă Elementelor Finite
Model axial simetric triunghiular.

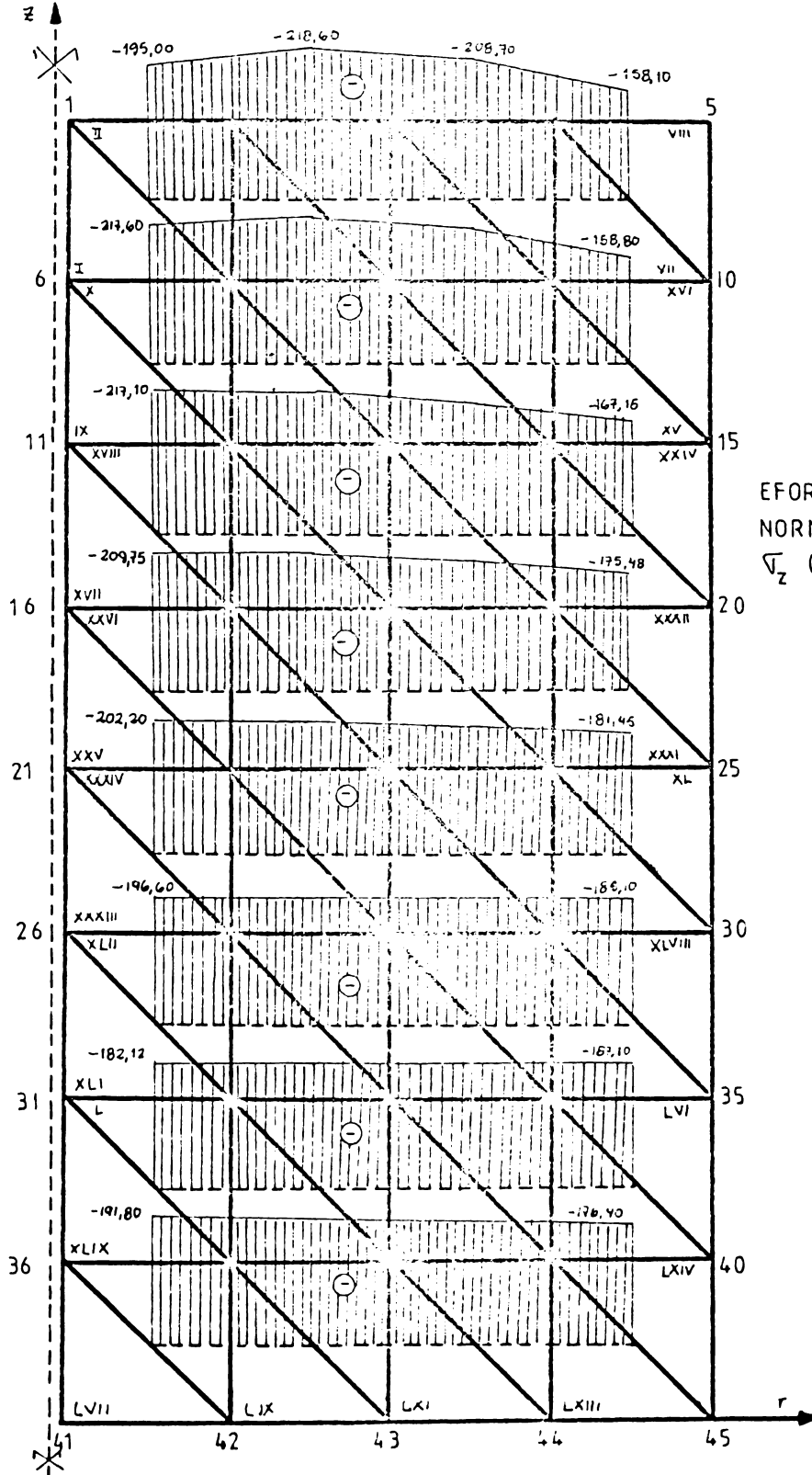


FIG. 3.28

CIME FAFV

Cilindru supus la compresiune centrică.
 Metoda Elementelor Finite
 Model axial simetric triunghiular.

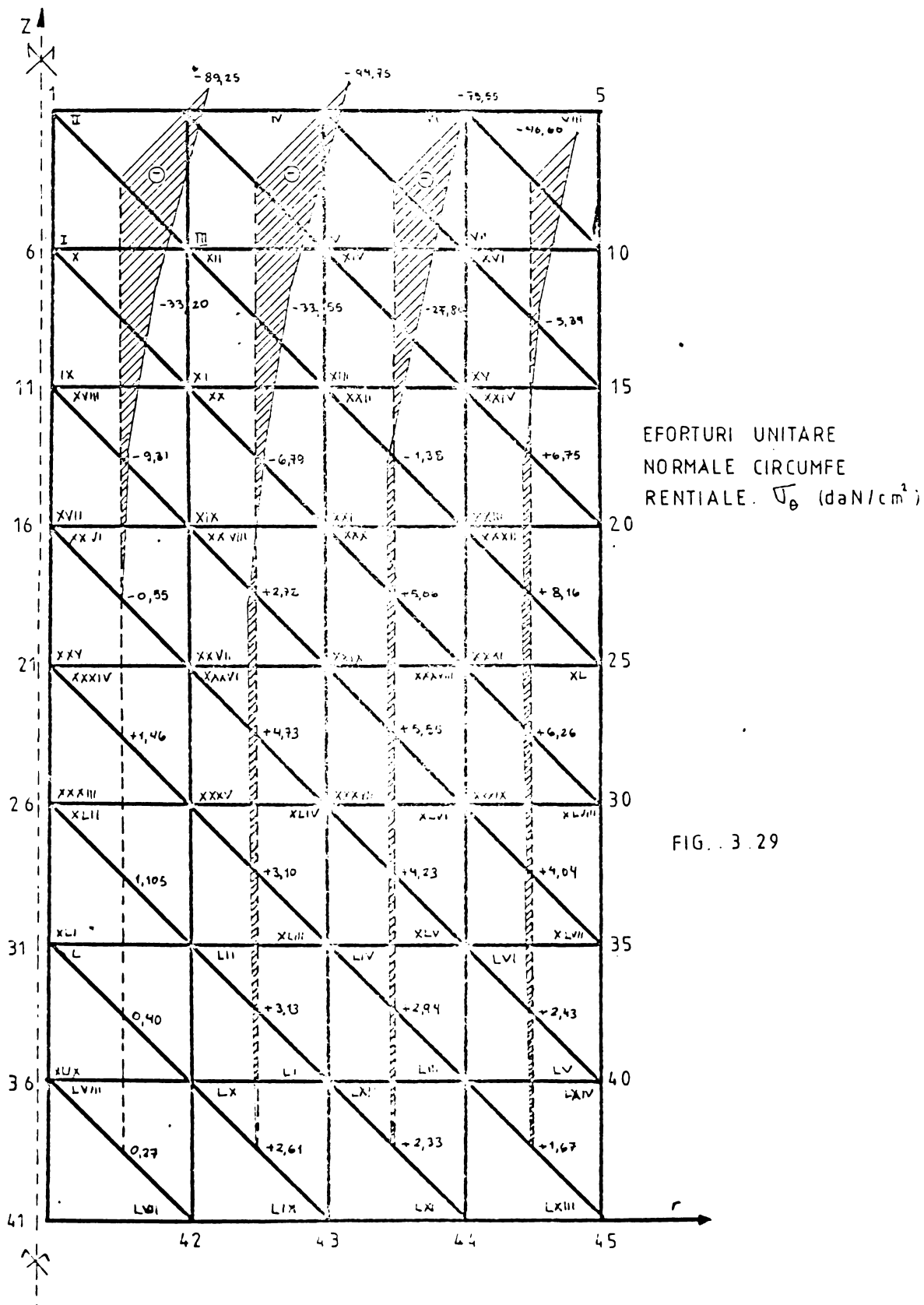


FIG. 3.29

CIMEFAFV

Cilindru supus la compresiune centrică
Metoda Elementelor Finite
Model axial simetric triunghiular.

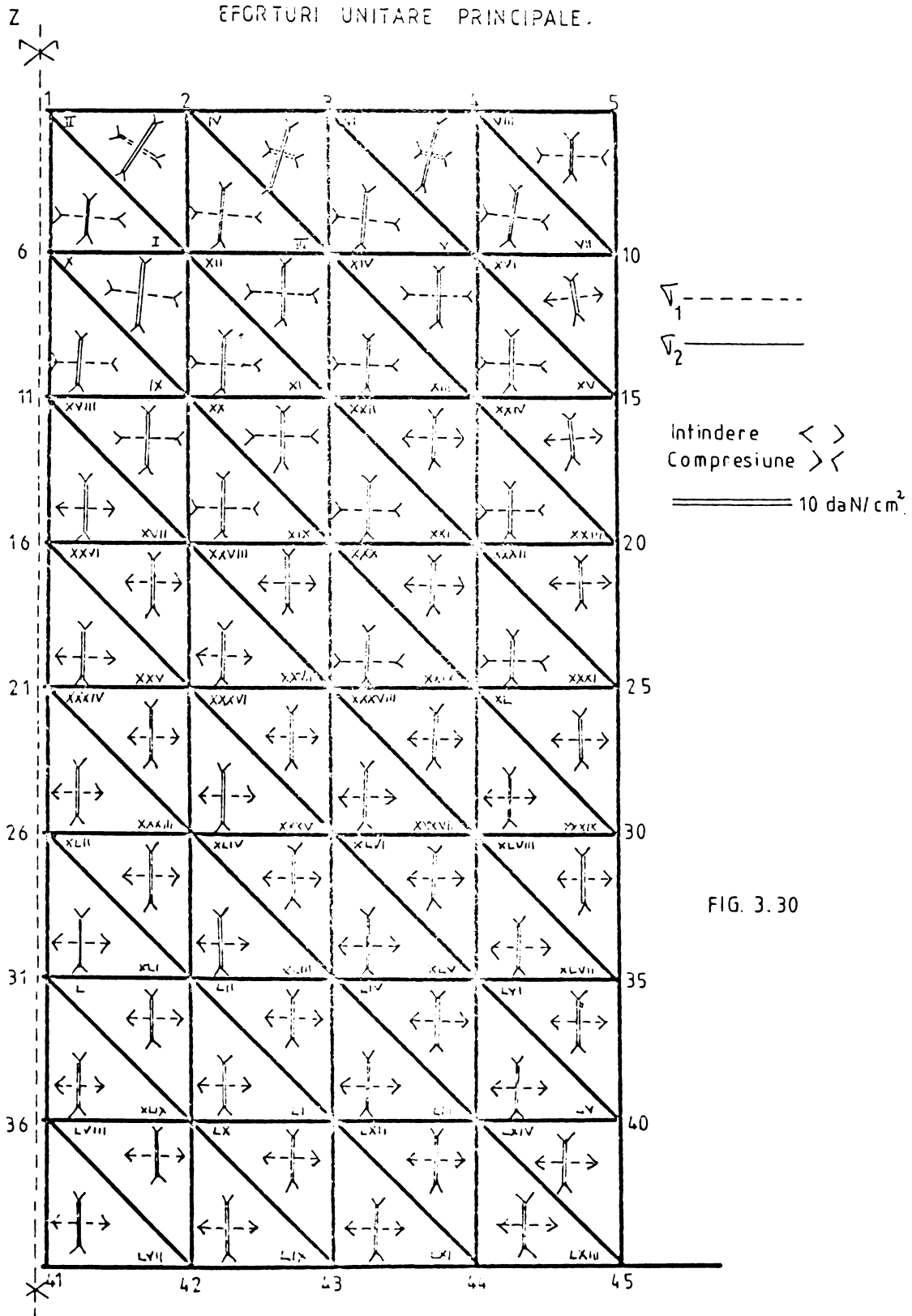


FIG. 3.30

în capitolul IV.

3.3.6. Încercări de laborator

3.3.6.1. Generalități. La proiectarea, execuția și exploatarea construcțiilor, încercarea unor elemente, părți sau structuri în ansamblu, a devenit, în ultimele decenii, de o importanță deosebită, fiind chiar indispensabilă în activitatea de construcții.

Încercările construcțiilor se face în scopul stabilirii :

- Parametrilor ce caracterizează construcțiile din punct de vedere fizico-mecanic, cum sînt : constantele elastice (E, G, ν), rezistențele la acțiuni statice, dinamice, ciclice ; deformațiile elastice, plastice, vîscoase puse în evidență prin măsurarea de deformații specifice, săgeți, rotații, deschideri de fisuri.

- Valorile nominale ale acțiunilor (solicitărilor) asupra elementelor de construcții și a construcțiilor. Determinarea acțiunilor este extrem de dificilă, aceasta făcîndu-se indirect.

- Precizării caracteristicilor globale ale unei construcții (sau elemente de construcție), sub forma unor coeficienți, care să caracterizeze comportarea în anumite condiții de solicitare (exploatare, stadii limită).

Parametrii ce rezultă în urma încercării construcțiilor sînt :

- Mărimile direct măsurabile se deduc din citirile la aparatele montate și solidarizate pe elemente de construcții studiate. Astfel de mărimi sînt : deformațiile specifice, deplasări relative, săgeți, rotații, etc.

- Mărimile deductibile se bazează pe relații matematice ce exprimă legi fizice între aceste mărimi și mărimile direct măsurabile. În această categorie intră, spre exemplu, eforturile unitare (care caracterizează rezistențele).

Metodologia încercărilor în construcții este dictată între altele, de natura elementelor supuse încercărilor, care se pot face asupra :

- epruvetelor de materiale pentru stabilirea caracteristicilor fizico-mecanice cum ar fi caracteristicii mecanice,

rezistențe, deformații etc.,

- elementelor de construcție cum sînt grinzi, stâlpi, plăci plane și curbe etc., caz în care se deduc caracteristici de rezistență și deformații la diverse stadii limită,

- părților din construcții sau pe construcții întregi în scopul stabilirii coeficienților globali de siguranță.

Din punctul de vedere al metodologiilor, încercările pot fi :

- prin încărcare pînă la diverse stări limită (deformații exagerate, rupere),

- prin metode fizice - încercări nedistructive.

3.3.6.2. Incercarea epruvetelor. În laboratorul de beton armat al facultății de construcții, (prin încărcare repetate pînă la rupere) s-au încercat trei epruvete cilindrice cu dimensiunile approximate de $D = 15 \text{ cm}$ și $H = 30 \text{ cm}$, cu ajutorul tensometriei s-au determinat deformațiile specifice și eforturile unitare.

a.) Cilindrul nr."0". Înainte de a încerca cei trei cilindri s-au rupt trei cuburi pentru cunoașterea R_c (rezistența cubică). Folosind presa hidraulică de 200 de tone, rezistența cubică medie a celor trei cuburi a fost $R_c = 220,86 \text{ kgf/cm}^2$.

$$\text{lufnd } \frac{1}{3} R_c = \frac{220,86}{3} = 73,42 = 75 \text{ kgf/cm}^2$$

De unde treptele vor fi :

trepte	=	1	2	3	4	5
∇	=	0	20	40	60	80

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14159 \times (15,01)^2}{4} = 176,7 \text{ cm}^2$$

$$F_{\max} = 176,7 \times 75 = 13252,5 \text{ kgf} \approx 13300 \text{ kgf.}$$

S-au luat valorile următoare pentru treptele corespunzătoare

trepte	=	1	2	3	4	5
F	=	0	3325	6650	9975	13300

Această încercare s-a făcut în felul următor :

Încercarea constă din 5 cicluri (încărcări-descărcări), primul ciclu corespunde unei forțe ce crește de la valoarea 0 la $F_{1 \max}$, și de aici revine pînă la $F_{\min} \neq 0$ (fig. 3.31).

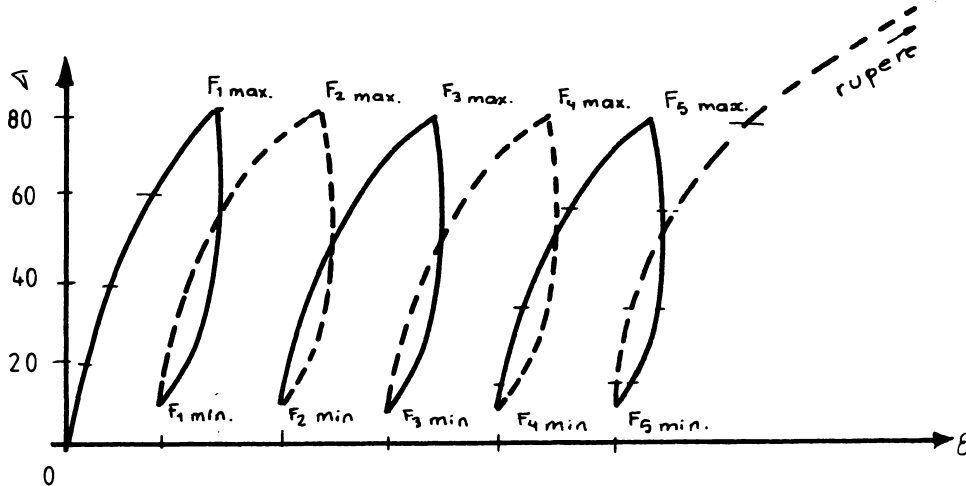


FIG. 3.31

În acest ciclu s-au citit deformațiile specifice la fiecare treaptă pînă la $F_{1 \max}$, după aceasta s-au făcut 3 cicluri (încărcare-descărcare) numai cu citirea deformațiilor pentru F_{\max} și F_{\min} . Cînd s-a terminat cel de-al patrulea ciclu, s-au citit deformațiile în fiecare treaptă ($F_{4 \min}$ - $F_{5 \max}$) pînă la $F_{5 \max}$; la fel s-a procedat pînă la $F_{5 \min}$; și după aceasta s-au luat valorile deformațiilor treptat pînă la rupere.

În acest prim caz, ruperea s-a produs la 50,5 de tone.

Timbrele tensometrice în număr de 32 (numerotate de la 1-31) au fost distribuite pe epravete, așa cum se poate vedea în figura 3.32. Fiind epraveta un corp simetric, timbrele tensometrice s-au pus numai pe jumătatea superioară. Deformațiile specifice corespunzătoare sînt date în tabele în capitolul IV.

b.) Cilindrul nr. 1. În acest caz s-a procedat la fel ca pentru cilindrul nr.0, cu singura deosebire că $R_c = 200 \text{ kg/cm}^2$, de unde valorile treptelor vor fi :

$$\frac{1}{3} R_c = \frac{200}{3} = 93 \text{ } 100 \text{ kgf/cm}^2$$

trepte 1 2 3 4 5

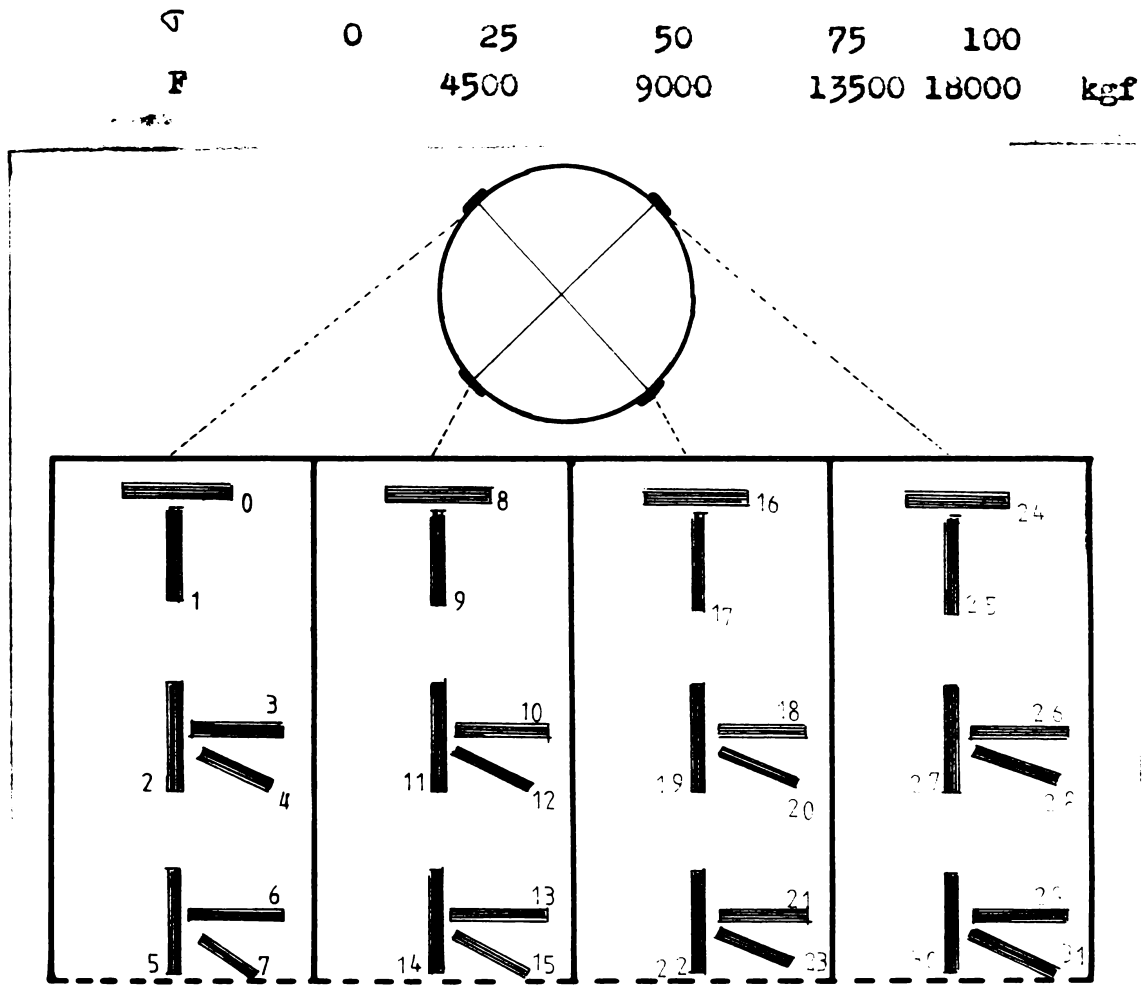


FIG 3.32

La fel ca în cazul anterior, valorile deformațiilor specifice sînt în tabele la capitolul IV.

c). Cilindrul nr.2. Incercarea s-a făcut la fel ca în cazul anterior, valorile R_c și F au fost aceleași. Ruperea s-a produs la 47 de tone. In capitolul IV sînt prezentate valorile deformațiilor specifice respective.

Capitolul IV

ANALIZA REZULTATELOR SI COMPARAREA INTRER CALE DOUA METODE DE CALCUL

4.1. Generalități. Bazându-se pe o discretizare fizică a structurilor din bare, plăci sau elemente masice, metoda elementelor finite și teoria echivalențelor utilizează calculul matriceal pentru determinarea eforturilor și deplasărilor acestor structuri.

Folosirea metodelor matriceale a fost impulsionată de dezvoltarea posibilităților calculatoarelor electronice digitale. Aplicarea practică a celor două metode este condiționată de existența acestor calculatoare.

Prin rezultatele foarte bune care s-au obținut, metoda elementelor finite a devenit familiară inginerilor constructori care lucrează în domeniul cercetării științifice și proiectării.

Utilizarea ei permite abordarea calculului unor structuri complexe ca alcătuire, și care în trecut se puteau calcula doar prin simplificări importante.

Teoria echivalențelor oferă inginerului proiectant un instrument de calcul tot atât de exact, iar în anumite situații mai ușor de aplicat. Teoria echivalențelor utilizează transformarea structurii reale într-un model echivalent format din bare, model foarte familiar inginerilor constructori prin tradiție.

Lucrarea de față a utilizat cele două metode sus prezentate, la calculul elementelor masive din beton.

4.2. Rezolvarea problemei. La rezolvarea problemei s-a ținut seama de aspectele legate de scrierea și rezolvarea sistemului, cum sînt : determinarea matricei de rigiditate, numărul necunoscutelor, încărcările nodurilor, timpul execuției, de asemenea s-au luat în considerare aspectele legate de interpretarea rezultatelor.

4.2.1. Aspecte legate de scrierea și rezolvarea sistemului

4.2.1.1. Determinarea matricii de rigiditate. In metoda elementelor finite determinarea matricii de rigiditate este mai dificilă decât la bare dublu articulată caracteristică din teoria echivalențelor, însă numărul elementelor la metoda elementelor finite este mai mic decât numărul barelor în teoria echivalențelor.

Totuși în teoria echivalențelor, lucrând cu programul SAP, nu sînt diferențe mari.

4.2.1.2. Numărul necunoscutelor. Numărul necunoscutelor în metoda elementelor finite este de două pentru fiecare nod. In teoria echivalențelor, fiindcă barele sistemului echivalent sînt articulate, numărul necunoscutelor este același, două pentru fiecare nod.

4.2.1.3. Încărcări nodale. In acest punct încărcările nodale se fac în același fel, unica deosebire este că în metoda elementelor finite, în anumite programe, în fiecare nod trebuie să se adauge greutatea aferentă nodului, iar în schimb, în teoria echivalențelor, în noduri se pun numai încărcările care acționează pe structură.

4.2.1.4. Timpul execuției. Timpul execuției nu poate fi comparat, pentru cele două metode, numai în cazul elementelor de volum (Fundatie izolată, programele FUIZO AF și FUIZO.BC) unde s-a lucrat cu același program SAP. In acest caz durata programului SAP la teoria echivalențelor este de 4'44" și la metoda elementelor finite a durat 6'10".

De remarcă că programul SAP folosit la teoria echivalențelor este mult mai complex, însă numărul elementelor la metoda elementelor finite este mai mic decât la teoria echivalențelor.

La teoria echivalențelor, definirea topologiei este mult mai dificilă (mai ales la elemente de volum) și consumul de timp este mult mai mare în comparație cu timpul cheltuit la definirea elementelor în metoda elementelor finite.

4.2.2. Aspecte legate de interpretarea rezultatelor. Cu metoda elementelor finite, se determină direct eforturile unitare și eforturile unitare principale, în timp ce cu teo-

ria echivalențelor, folosind programul SAP, se obțin numai eforturile în bare, trebuindu-se să se calculeze apoi, deformațiile specifice, și eforturile unitare în centrul elementelor. De aceea, pentru a ajunge la eforturile unitare principale trebuie mult timp și erorile umane intervin mai des.

4.3. Analiza rezultatelor. În urma analizei rezultatelor obținute prin metoda elementelor finite și teoria echivalențelor se pot face următoarele comparații : a) Între două variante ale metodei elementelor finite și b) Între metoda elementelor finite și teoria echivalențelor.

4.3.1. Comparații între două variante ale metodei elementelor finite. În această lucrare se compară rezultatele între două variante ale metodei elementelor finite, în programele făcute pentru fundația continuă cu masivul de pământ (programe FUCMEFI - FUCOMIZD). Rezultatele obținute sînt foarte bune, atît pentru deplasările nodurilor cît și pentru eforturile unitare.

De asemenea s-au comparat rezultatele, folosind coeficientul lui Poisson diferit, la fundația continuă sub un zid de cărămidă (programele FUCOMEF 1 și FUCOMEF 2). S-a constatat încă o dată că în metoda elementelor finite folosirea coeficientului lui Poisson la valoarea corespunzătoare, duce la obținerea mult mai exactă a rezultatelor cerute.

În această lucrare s-a făcut și o comparație cu diferite condiții de margine, cum a fost în cazul elementelor cu simetrie axială (CIMEFAS 1, CIMEFAS 2) unde în primul caz s-a rezolvat structura cu blocaje orizontale la marginea unitară cea mai apropiată de axe de rotație, în cel de al doilea caz structura s-a rezolvat fără blocaje acestea.

4.3.2. Comparații între Metoda elementelor Finite și Teoria echivalențelor. La rezolvarea structurilor cu metoda elementelor finite și cu teoria echivalențelor, în unele situații se pot compara deplasările nodurilor, așa cum s-a spus în capitolul II, la fundație continuă cu programele FUCONTEC și FUCOMEF 2.

Dar cînd structura reală nu se discretizează într-o structură echivalentă cu aceleași dimensiuni, cum e cazul cu zidul de sprijin, (programele ZIDSMEF 1 și ZIDSSTHC), atunci

pot fi comparate numai eforturile unitare.

In continuare se prezintă comparații între diferite programe făcute pentru structurile date.

4.4. Fundație continuă sub un zid de cărămidă. La rezolvarea acestei structuri s-au folosit trei programe, două sînt cu metoda elementelor finite și un program este cu teoria echivalențelor.

Programele sînt :

- P1- FUCOMEF 1 : Fundație continuă sub un zid de cărămidă, calculată cu Metoda Elementelor Finite, model pătrat, folosind coeficientul lui Poisson = 0,20.
- P2- FUCOMEF 2 : Fundație continuă sub un zid de cărămidă, calculată cu Metodele Elementelor Finite, model pătrat, folosind coeficientul lui Poisson = 0,25.
- P3- FUCONTEC : Fundație continuă sub un zid de cărămidă, calculată cu teoria echivalențelor, model pătrat, folosind coeficientul (impus) lui Poisson = 0,25.

Fiindcă structura este încărcată numai cu sarcini verticale, deplasările cele mai caracteristice sînt pe direcție verticală (y). Se prezintă acum cîteva tabele cu deplasările nodurilor mai solicitate (Vezi fig.2.10).

Nr. nodului direc- ția	P1	P2	Diferența P1-P2		P3	Diferența P2-P3	
			valoare	%		valoare	%
1 V	-0,0043	-0,0042	-0,0001	-2,32	-0,0052	0,0010	23,60
4 V	-0,0059	-0,0058	-0,0001	-1,69	-0,0067	0,0009	15,51
42 V	-0,0018	-0,0018	-	-	-0,0016	-0,0002	-11,11
55 V	-0,0021	0,0020	0,0001	4,76	+0,0018	+0,0002	7,5
62 V	-0,0009	-0,0009	-	-	-0,0010	0,0001	5,15
79 V	0,0023	0,0023	-	-	0,0019	0,0004	17,39
79 Ø	-0,0016	-0,0017	+0,0001	6,25	-0,0015	-0,0002	-11,76

V = vertical

Ø = orizontal

Eforturi unitare normale orizontale σ_x (daN/cm²)

No- dul	P1	P2	Diferența P1-P2		P3	Diferența P2-P3	
			valoare	%		valoare	%
3	-4,7800	-4,9650	0,1850	3,87	-5,3420	-0,3770	-7,59
4	-5,1900	-5,2500	0,0600	1,15	-5,6290	-0,3790	-7,49
39	-4,1800	-4,4630	0,2830	6,77	-5,0100	-0,2550	-12,43
40	-2,6600	-2,6600	-0,0200	-0,75	-2,4460	-0,214	-6,05
57	-3,1800	-3,4000	-0,2200	-6,91	-3,2700	-0,1300	-3,02
58	-1,5400	-1,5000	-0,0032	-0,21	-1,1600	-0,0320	-21,75
85	+4,5000	4,6150	-0,1150	-2,55	5,3000	-0,6050	-14,04
86	+3,4000	3,3100	+0,0900	2,64	4,5400	-1,2300	-37,16

Eforturi unitare verticale σ_y (daN/cm²)

Nod	P1	P2	Diferență P1-P2		P3	Diferență P2-P3	
			valoare	%		valoare	%
3	-11,0000	-11,1850	+0,1850	1,68	-12,6400	1,4550	13,00
4	-11,0000	-10,2700	+0,7300	-6,63	-11,3800	1,1000	10,80
39	-9,0000	-9,2089	+0,2089	2,32	-10,0100	0,0000	0,69
40	-6,4000	-6,4614	+0,0614	0,90	-6,7440	0,2800	4,37
57	-5,6000	-5,7911	+0,1911	3,41	-6,3800	0,5000	10,16
58	-3,5000	-3,5181	+0,0181	0,51	-3,0700	0,3519	10,20
85	-2,7000	-2,5620	-0,1380	-5,11	-3,1500	0,5000	22,95
86	-5,7000	-5,7527	+0,0527	0,473	-6,1300	0,3773	6,55

Eforturi unitare tangențiale (daN/cm²)

Nod	P1	P2	Diferență P1-P2		P3	Diferență P2-P3	
			valoare	%		valoare	%
3	-1,0050	-1,7184	-0,0066	-4,79	-1,9150	0,1960	11,40
4	-0,8700	-0,8080	-0,0620	-7,12	-0,9200	0,1120	13,06
39	-3,2200	-3,1600	-0,0600	-1,86	-3,4100	0,2500	7,91
40	-2,1025	-2,0560	-0,0465	-2,21	-2,1060	0,1300	6,32
57	-2,6333	-2,5831	-0,0502	-1,91	-2,6900	0,1060	4,14
58	-2,5258	-2,4640	-0,0618	-2,44	-2,6400	-0,1700	-7,14
85	0,4450	0,4373	0,0077	1,73	0,4930	-0,0500	-12,73
80	1,0000	1,0345	0,0345	3,75	1,1100	-0,0700	-6,70

În tabelele următoare se prezintă deplasările nodurilor întregii structuri și eforturile unitare în centrul elementelor.

a.) Deplasări

No- dul el.	Deplasări horizontale x (cm)			Deplasări verticale y (cm)		
	P1	P2	P3	P1	P2	P3
1	0,00027	0,00016	0,00011	-0,0043	-0,0042	-0,0052
2	0,00024	0,00015	0,00011	-0,0051	-0,0050	-0,0059
3	0,00014	0,0	0,0	-0,0058	-0,0057	-0,0066
4	0,0	0,0	0,0	-0,0059	-0,0058	-0,0067
5	-0,00026	-0,00035	-0,00035	-0,0043	-0,0043	-0,0052
6	-0,00022	-0,00030	-0,00029	-0,0048	-0,0047	-0,0056
7	-0,00012	-0,00016	-0,00016	-0,0052	-0,0051	-0,0060

(continuare)

No- dul nr.	Deplasări horizontale x (cm)			Deplasări verticale y (cm)		
	P1	P2	P3	P1	P2	P3
8	0,0	0,0	0,0	-0,0054	-0,0052	-0,0061
9	-0,00042	-0,00050	-0,00050	-0,0043	-0,0042	-0,0051
10	-0,00034	-0,00040	-0,00039	-0,0044	-0,0043	-0,0053
11	-0,00019	-0,00022	-0,00022	-0,0047	-0,0046	-0,0055
12	0,0	0,0	0,0	-0,0048	-0,0047	-0,0056
13	-0,00042	-0,00050	-0,00051	-0,0040	-0,0039	-0,0048
14	-0,00032	-0,00039	-0,00037	-0,0041	-0,0040	-0,0049
15	-0,00018	-0,00021	-0,00021	-0,0042	-0,0041	-0,0050
16	0,0	0,0	0,0	-0,0042	-0,0041	-0,0050
17	-0,00038	-0,00047	-0,00048	-0,0037	-0,0036	-0,0045
18	-0,00028	-0,00034	-0,00035	-0,0037	-0,0036	-0,0045
19	-0,00015	-0,00018	-0,00018	-0,0037	-0,0036	-0,0045
20	0,0	0,0	0,0	-0,0037	-0,0036	-0,0045
21	-0,00034	-0,00043	-0,00045	-0,0033	-0,0032	-0,0041
22	-0,00023	-0,00029	-0,00030	-0,0033	-0,0032	-0,0041
23	-0,00012	-0,00015	-0,00016	-0,0033	-0,0032	-0,0041
24	0,0	0,0	0,0	-0,0033	-0,0032	-0,0041
25	-0,00028	-0,00038	-0,00040	-0,0029	-0,0028	-0,0037
26	-0,00018	-0,00025	-0,00026	-0,0028	-0,0028	-0,0036
27	0,0	-0,00012	-0,00013	-0,0028	-0,0028	-0,0036
28	0,0	0,0	0,0	-0,0028	-0,0028	-0,0036
29	-0,00021	-0,00030	-0,00034	-0,0025	-0,0024	-0,0033
30	-0,00011	-0,00017	-0,00019	-0,0024	-0,0024	-0,0033
31	0,0	0,0	0,0	-0,0024	-0,0024	-0,0033
32	0,0	0,0	0,0	-0,0024	-0,0024	-0,0033
33	0,0	-0,00019	-0,00024	-0,0020	-0,0019	-0,0027
34	0,0	0,0	0,0	-0,0020	-0,0019	-0,0027
35	0,0	0,0	0,0	-0,0021	-0,0020	-0,0028
36	0,0	0,0	0,0	-0,0021	-0,0021	-0,0029
37	0,00035	0,00024	0,00011	0,0	0,0	-0,0008
38	0,00036	0,00024	0,00011	-0,00040	-0,00039	-0,0012
39	0,00016	0,0	0,0	-0,0013	-0,0013	-0,0021
40	0,0	0,0	0,0	-0,0016	-0,0016	-0,0024
41	0,0	0,0	0,0	-0,0017	-0,0017	-0,0026
42	0,0	0,0	0,0	-0,0018	-0,0018	-0,0026

(continuare)

No- dul nr.	Deplasări orizontale x (cm)			Deplasări verticale y (cm)		
	P1	P2	P2	P1	P2	P3
43	0,0	-0,00010	-0,00020	0,0	0,0	-0,00086
44	0,0	-0,00010	-0,00020	-0,00039	-0,00038	-0,0012
45	0,0	-0,00010	-0,00020	-0,00092	-0,00092	-0,0017
46	0,0	0,0	-0,00010	-0,0013	-0,0013	-0,0020
47	0,0	0,0	0,0	-0,0015	-0,0015	-0,0022
48	0,0	0,0	0,0	-0,0015	-0,0015	-0,0022
49	-0,00018	-0,00028	-0,00027	-0,0	0,0	-0,00076
50	-0,00015	-0,00022	-0,00032	-0,0002	-0,00020	-0,001
51	-0,00013	-0,00019	-0,00026	-0,00065	-0,00066	-0,0014
52	-0,0	-0,00013	-0,00020	-0,00099	-0,00099	-0,0017
53	0,0	0,0	-0,00010	-0,0012	-0,0012	-0,0018
54	0,0	0,0	0,0	-0,0012	-0,0012	-0,0019
55	0,0	0,0	-0,00020	0,0021	0,0020	0,00085
56	0,0	0,0	-0,00020	0,0014	0,0014	0,00052
57	-0,00015	-0,00024	-0,00035	0,00048	0,00046	-0,00045
58	-0,00022	-0,00028	-0,00058	0,0	0,0	-0,0008
59	-0,00023	-0,00028	-0,00059	-0,00042	-0,00044	-0,0012
60	-0,00018	-0,00021	-0,00028	-0,00073	-0,00074	-0,0014
61	0,0	-0,00010	-0,00016	-0,00091	-0,00092	-0,0015
62	0,0	0,0	0,0	-0,00096	-0,00097	-0,0015
63	-0,00058	-0,00067	-0,00070	-0,0021	0,0020	0,0008
64	-0,00059	-0,00061	-0,00069	0,0014	0,0014	0,0005
65	-0,00054	-0,00060	-0,00065	0,00072	0,00068	-0,00025
66	-0,00047	-0,00053	-0,00057	0,00017	0,00015	-0,0006
67	-0,00040	-0,00044	-0,00047	-0,00022	-0,00024	-0,001
68	-0,00030	-0,00032	-0,00037	-0,00050	-0,00051	-0,0011
69	-0,00016	-0,00017	-0,00022	-0,00065	-0,00066	-0,0012
70	0,0	0,0	0,0	-0,00069	-0,00071	-0,0012
71	-0,0011	-0,0012	-0,00110	0,0021	0,0021	0,00094
72	-0,0011	-0,00110	-0,00110	0,0016	0,0015	0,00096
73	-0,00095	-0,00100	-0,00094	0,00093	0,00092	0,0
74	-0,00081	-0,00086	-0,00081	0,00039	0,00037	-0,00049
75	-0,00064	-0,00067	-0,00064	-0,00001	0,0	-0,0007
76	-0,00047	-0,00047	-0,00047	-0,00028	-0,00029	-0,0009
77	-0,00025	-0,00026	-0,00029	-0,00039	-0,00040	-0,0008

(continuare)

T. 5

No- dul nr.	Deplasări orizontale x (cm)			Deplasări verticale y (cm)		
	P1	P2	P3	P1	P2	P3
78	0,0	0,0	0,0	-0,00039	-0,0004	-0,0007
79	-0,0016	-0,0017	-0,0015	0,0023	0,0023	0,0011
80	-0,0016	-0,0016	-0,0015	0,0017	0,0017	0,00063
81	-0,0014	-0,0015	-0,0014	0,00114	0,0011	0,00015
82	-0,0012	-0,0013	-0,0011	0,00062	0,00061	-0,00026
83	-0,00094	-0,00096	-0,00085	-0,00021	-0,0002	-0,00056
84	-0,00062	-0,00064	-0,00052	0,0	0,0	-0,00071
85	-0,0029	-0,00031	-0,00021	-0,00016	-0,00016	-0,00064
86	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

b.) Eforturi unitare

T. 6

Elemente	Eforturi unitare normale orizontale σ_x (daN/cm ²)			Eforturi unitare normale verticale σ_y (daN/cm ²)			Eforturi unitare tangențiale τ_{xy} (daN/cm ²)		
	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3
1	-0,502	-0,478	-0,139	-2,301	-2,299	-2,459	-0,778	-0,776	-0,771
2	-1,912	-1,907	-0,954	-7,981	-7,981	-7,000	-1,175	-1,174	-1,254
3	-2,853	-2,849	-1,557	-10,324	-10,324	-9,120	-0,037	-0,045	-0,115
4	-0,053	-0,046	0,330	-3,773	-3,725	-3,790	-1,127	-1,121	-1,075
5	0,246	0,238	0,800	-7,446	-7,435	-6,840	-1,498	-1,497	-1,430
6	0,184	0,179	0,850	-9,456	-9,451	-8,563	-0,563	-0,556	-0,499
7	0,188	0,179	0,920	-5,170	-5,176	-5,049	-0,771	-0,771	-0,836
8	0,634	0,629	1,100	-7,126	-7,126	-6,700	-1,155	-1,151	-1,660
9	0,953	0,947	1,470	-8,451	-8,445	-7,840	-0,497	-0,494	-0,422
10	0,136	0,131	0,100	-6,077	-6,078	-5,880	-0,409	-0,411	-0,397
11	0,514	0,512	1,030	-7,000	-7,002	-6,650	-0,685	-0,685	-0,461
12	0,817	0,813	1,545	-7,736	-7,734	-7,250	-0,312	-0,312	-0,268
13	0,070	0,067	0,628	-6,567	-6,565	-6,256	-0,182	-0,185	-0,192
14	0,269	0,268	0,760	-6,982	-6,983	-6,672	-0,355	-0,358	-0,371
15	0,432	0,431	1,264	-7,332	-7,332	-6,880	-0,174	-0,175	-0,179
16	0,005	0,005	0,580	-6,332	-6,333	-6,577	-0,100	-0,104	-0,127
17	-0,011	-0,012	0,574	-7,014	-7,015	-6,700	-0,250	-0,255	-0,294
18	-0,032	-0,033	0,557	-7,098	-7,098	-6,769	-0,131	-0,132	-0,141
19	-0,114	-0,116	0,510	-7,119	-7,121	-6,895	-0,191	-0,197	-0,243
20	-0,373	-0,373	0,247	-7,059	-7,055	-6,754	-0,421	-0,424	-0,435
21	-0,639	-0,639	0,060	-6,833	-6,836	-6,540	-0,217	-0,216	-0,191
22	-0,249	-0,223	0,200	-7,746	-7,733	-7,488	-0,607	-0,616	-0,701
23	-1,172	-1,180	-0,370	-7,011	-7,018	-6,699	-0,939	-0,933	-0,819
24	-1,345	-1,339	-0,655	-6,319	-6,322	-6,680	-0,316	-0,315	-0,280
25	-2,114	-2,191	-0,620	-9,300	-9,305	-8,618	-2,189	-2,179	-2,060
26	-1,958	-1,946	-1,061	-6,114	-6,109	-5,990	-1,009	-1,016	-0,908
27	-1,821	-1,819	-0,894	-5,729	-5,729	-5,649	-0,303	-0,305	-0,255
28	-0,335	-0,315	-0,615	-2,594	-2,405	-2,123	-0,207	-0,225	-0,180
29	-2,377	-2,377	-1,612	-3,744	-3,786	-3,374	-2,815	-2,807	-2,670
30	-2,018	-1,974	-0,921	-6,333	-6,311	-6,006	-1,464	-1,463	-1,250

continuare.

T. 6

elementul	Eforturi unitare normale orizontale σ_x (daN/cm ²)			Eforturi unitare normale verticale σ_y (daN/cm ²)			Eforturi unitare tangen- țiale τ_{xy} (daN/cm ²)		
	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3
31	-1,816	-1,819	-0,994	-5,687	-5,638	-5,600	-0,597	-0,592	-0,435
32	-1,665	-1,659	-0,838	-5,209	-5,207	-5,342	-0,210	-0,208	-0,128
33	-0,432	-0,410	-0,183	-2,330	-2,336	-2,142	-1,435	-1,432	-1,306
34	-0,797	-0,798	-0,336	-4,071	-4,067	-3,676	-2,642	-2,644	-2,368
35	-0,706	-0,702	-0,190	-5,006	-5,006	-4,890	-1,682	-1,676	-1,380
36	-0,865	-0,856	0,215	-5,087	-5,083	-5,200	-0,692	-0,695	-0,511
37	-0,939	-0,934	0,327	-4,843	-4,851	-4,941	-0,181	-0,181	-0,115
38	-1,457	-1,519	-0,879	-4,975	-4,986	-4,092	-2,479	-2,465	-2,200
39	-0,856	-0,849	-0,397	-3,535	-3,534	-3,372	-2,191	-2,198	-1,919
40	-0,282	-0,279	-0,193	-4,101	-4,099	-4,151	-1,499	-1,499	-1,139
41	-0,030	-0,029	0,581	-4,395	-4,382	-4,769	-0,734	-0,734	-0,420
42	-0,026	0,030	0,806	-4,454	-4,450	-5,159	-0,198	-0,198	-0,030
43	-0,257	-0,237	-0,128	-0,260	-0,250	-0,215	-0,265	-0,274	-0,118
44	-1,732	-1,724	-1,117	-2,537	-2,571	-2,032	-2,097	-2,090	-1,907
45	-1,021	-0,998	-1,518	-3,919	-3,904	-3,452	-1,338	-1,341	-1,203
46	-0,261	-0,264	0,042	-3,391	-3,399	-3,159	-1,248	-1,242	-1,034
47	+0,400	0,402	0,589	-3,505	-3,504	-3,644	-0,974	-0,971	-0,576
48	+0,855	0,854	1,120	-3,553	-3,549	-3,788	-0,481	-0,479	-0,380
49	1,101	1,101	1,080	-4,111	-4,109	-5,279	-0,119	-0,116	-0,218
50	-0,051	-0,055	-0,052	-1,679	-1,691	-1,688	-0,832	-0,824	-0,716
51	0,503	0,502	0,542	-2,785	-2,778	-2,433	-1,522	-1,529	-1,434
52	0,947	0,944	0,983	-3,374	-3,373	-2,980	-1,133	-1,132	-1,060
53	1,250	1,253	1,239	-3,254	-3,253	-3,030	-0,745	-0,748	-0,691
54	1,653	1,656	1,491	-3,149	-3,152	-3,225	-0,507	-0,506	-0,512
55	1,938	1,935	1,656	-3,473	-3,472	-4,136	-0,088	-0,092	+0,575
56	2,385	2,383	2,600	-4,024	-4,022	-5,883	0,130	0,138	0,909
57	0,309	0,293	0,427	-2,672	-2,685	-2,460	-0,339	-0,339	-0,307
58	1,229	1,222	0,936	-2,388	-2,389	-2,184	-0,690	-0,692	-0,691
59	2,299	2,297	2,160	-3,033	-3,027	-2,890	-0,557	-0,557	-0,563
60	3,040	3,035	2,773	-3,015	-3,011	-2,978	-0,318	-0,318	-0,358
61	3,479	3,475	3,160	-2,944	-2,944	-3,033	-0,179	-0,180	-0,166
62	3,686	3,688	3,107	-2,943	-2,936	-3,175	-0,045	-0,041	0,282
63	3,396	3,389	2,991	-4,347	-4,351	-4,100	0,682	0,679	0,394

4.5. Fundație continuă și masivul de pământ. La rezolvarea acestei probleme s-au folosit două programe cu metoda elementelor finite (model izoparametric și model triunghiular) și un program cu teoria echivalențelor.

- P4 = FUCOMIZO : Fundație continuă și masivul de pământ calculate cu metoda elementelor finite, model izoparametric.
- P5 = FUCOMEFTI : Fundație continuă și masivul de pământ calculate cu metoda elementelor finite, model triunghiular.
- P6 = FUCOBUTE : Fundație continuă și masivul de pământ, calculate cu teoria echivalențelor, model pătrat.

De remarcat că numărul nodurilor în programul FUCOMIZO a rămas același ca în programul FUCOMEFTI având și aceleași coordonate. În continuare se prezintă dintr-o formă identică deplasările nodurilor și, eforturile unitare.

4.5.1. Deplasări. În acest caz se poate face numai o comparație între programele FUCOMIZO și FUCOMEFTI unde caracteristicile materialelor (α și ν) au valori diferite pentru fiecare parte a structurii. Nodurile și încărcarea nodurilor sînt aceleași, numai numărul elementelor și forma lor s-a schimbat.

NOD	P4	P5	Diferență P4-P5	
			valoare	u
1 V	-1,2782	-1,1159	-0,1622	-12,69
3 V	-1,2768	-1,1151	-0,1617	-12,66
19 V	-1,2731	-1,1117	-0,1613	-12,67
23 V	-1,2696	-1,1049	-0,1648	-12,97
24 V	-1,0212	-0,8857	-0,1355	-13,26
27 V	-0,6032	-0,4595	-0,1437	-23,82
39 V	-0,4782	-0,3945	-0,0837	-17,50
42 V	-0,1637	-0,1445	-0,0192	-11,72

In acest caz deplasările nodurilor obținute în programul FUDOBUTE nu se pot compara fiindcă structura echivalență nu are aceeași formă nici aceeași dimensiune cu structura reală. In continuare se prezintă tabelar toate valorile deplasărilor.

a.) Deplasări

NOD NR.	Deplasări horizontale x (cm)		Deplasări verticale y (cm)	
	P4	P5	P4	P5
1	0,0	0,0	-1,27816	-4,11592
2	-0,000067	-0,000069	-1,27782	-1,11570
3	-0,00007	+0,00022	-1,27679	-1,11513
4	0,0	0,0	-1,27650	-1,11447
5	0,00032	0,000183	-1,27642	-1,11439
6	0,0005	0,0003	-1,27636	-1,11429
7	0,0	0,0	-1,27511	-1,11320
8	0,0001	0,00008	-1,27511	-1,11314
9	0,00028	0,0002	-1,27527	-1,11312
10	0,0	0,0	-1,27413	-1,11211
11	-0,00013	-0,00019	-1,27403	-1,11204
12	-0,00022	-0,00032	-1,27360	-1,11170
13	-0,00029	-0,00041	-1,27277	-1,11090
14	0,0	0,0	-1,27349	-1,11174
15	-0,00008	-0,00031	-1,27335	-1,11161
16	-0,00019	-0,00065	-1,27295	-1,11113
17	-0,00043	-0,0012	-1,27201	-1,110985
18	-0,00057	-0,0019	-1,27071	-1,10672
19	-0,0	0,0	-1,27305	-1,11173
20	0,00014	0,0	-1,27293	-1,11156
21	0,00024	0,00026	-1,27257	-1,11109
22	0,00027	0,00010	-1,27161	-1,10938
23	0,0	0,0	-1,26962	-1,10485
24	0,0	0,0	-1,02122	-0,68573
25	0,0064	0,028	-0,986261	-0,64865
26	0,01827	0,047	-0,66698	-0,71573
27	0,03032	0,042	-0,60322	-0,45951
28	0,0	0,0	0,0	0,0
29	0,0	0,0	-0,79663	-0,71561

a.) deplasări continuere

NCD nr.	Deplasări horizontale x (cm)		Deplasări verticale y (cm)	
	P4	P5	P4	P5
30	0,0283	0,068	-0,75163	-0,67418
31	0,05298	0,117	-0,60584	-0,56629
32	0,06290	0,087	-0,3323	-0,35860
33	0,00	0,00	0,00	0,00
34	0,00	0,00	-0,61311	-0,53993
35	0,0319	0,0561	-0,56741	-0,50801
36	0,0538	0,0202	-0,43243	-0,456992
37	0,04824	0,0351	-0,53125	-0,5077
38	0,00	0,00	0,00	0,00
39	0,00	0,00	-0,47816	-0,39448
40	0,02531	0,0102	-0,43764	-0,37029
41	0,0362	0,0043	-0,3247	-0,30703
42	0,0308	-0,0086	-0,16367	-0,14448
43	0,00	0,00	0,00	0,00
44	0,00	0,00	-0,30116	-0,33321
45	0,02644	0,0104	-0,34975	-0,31257
46	0,04055	0,0184	-0,26102	-0,24537
47	0,03278	0,0197	-0,13265	-0,12344
48	0,00	0,00	0,00	0,00
49	0,00	0,00	-0,25707	-0,23999
50	0,00714	0,0038	-0,24264	-0,22729
51	0,00953	0,0043	-0,19419	-0,18277
52	0,00549	0,00	-0,11449	-0,10349
53	0,00	0,00	0,00	0,00
54	0,00	0,00	-0,15908	-0,16195
55	0,00122	0,0022	-0,15020	-0,14697
56	0,00399	0,001	-0,12104	-0,11442
57	0,00386	0,001	-0,07337	-0,06582
58	0,00	0,00	0,00	0,00
59	0,00	0,00	-0,07665	-0,10093
60	0,00333	0,00164	-0,05789	-0,07362
61	0,00202	0,00250	-0,04582	-0,05045
62	0,00161	0,00228	-0,02518	-0,02595
63	0,00	0,00	0,00	0,00
64	0,00	0,00	0,00	0,00

a.) deplasări, continuare.

NOD nr.	Deplasări orizontale x (cm)		Deplasări verticale y (cm)	
	P4	P5	P4	P5
65	0,00	0,00	-0,02975	-0,07096
66	0,00	0,00	-0,02303	-0,04629
67	0,00	0,00	-0,01229	-0,02307
68	0,00	0,00	0,00	0,00

În continuare se prezintă eforturile unitare în nodurile mai semnificative, se compară cele trei programe făcute.

Eforturi unitare normale orizontale x (daN/cm²)

NOD	P4	P5	Diferență P4-P5		P6	Diferență P5-P6	
			valoare	%		valoare	%
1	-1,3200	-1,2750	-0,0450	-3,41	-1,4190	-0,1440	-11,29
9	-1,2435	-1,1160	-0,1275	-10,25	-1,2270	-0,1110	9,94
13	-2,3900	-2,3100	-0,0800	-2,77	-2,7530	-0,0570	2,02
19	-1,1558	-0,8100	-0,3450	-29,91	-0,9260	0,1160	14,32
23	-2,1555	-0,5400	-0,3040	-12,18	-2,4160	-0,1220	-3,44

Eforturi unitare normale verticale y (daN/cm²)

NOD	P4	P5	Diferență P4-P5		P6	Diferență P5-P6	
			valoare	%		valoare	%
1	-9,4000	-10,0000	1,6000	19,04	-9,2650	-0,7350	-7,35
9	-7,7750	-7,6500	0,4750	6,62	-7,3490	-0,3010	-3,93
13	-6,5500	-4,6000	-1,9500	-29,77	-5,4180	0,8180	17,78
19	-1,1575	-1,0300	-0,1275	-11,02	-1,2170	0,1870	18,15
23	-9,5745	-0,1000	-1,4750	-15,40	-8,7260	0,6260	7,22

Eforturi unitare tangențiale xy (daN/cm²)

NOD	P4	P5	Diferență P4-P5		P6	Diferență P5-P6	
			valoare	%		valoare	%
1	+1,5100	1,1552	0,3548	23,49	1,4190	-0,2638	-22,83
9	0,0900	0,1120	-0,0220	-24,44	0,1180	-0,0960	-5,36
13	3,1000	3,3450	-0,2450	-7,90	3,7150	-0,3700	-11,06
19	0,2600	0,2789	-0,0189	-7,25	0,8340	-0,0050	-1,83
23	2,6900	2,4170	0,2730	10,14	2,7160	-0,2290	-12,37

În continuare se prezintă, în tabele, valorile eforturilor unitare în centrul elementelor.

elem.	Eforturi unitare normale orizontale			Eforturi unitare normale verticale			
	P4	P5	P6	P4	P5	P6	
1	-0,74205	1-2	-0,545	-1,540	-8,676	-7,8187	-11,220
2	-0,26874	3-4	-0,138	-0,670	-3,129	-5,977	-6,790
3	+0,51296	5-6	+0,245	+0,214	-7,394	-7,055	-11,850
4	+0,38126	7-8	+0,480	+0,800	-6,589	-6,867	-9,790
5	-1,69850	9-10	-2,199	-3,215	-6,140	-6,616	-6,800
6	-1,53600	11-12	-2,007	-3,022	-6,034	-7,471	-6,930
7	-2,21890	13-14	-3,565	-4,580	-4,198	-3,143	-2,585
8	-2,22610	15-16	-3,540	-4,560	-4,237	-3,669	-3,194
9	-2,36170	17-18	-4,410	-5,430	-4,491	-4,599	-4,043
10	-0,29650	19-20	-1,895	-1,915	-2,505	-2,612	-2,173
11	-0,64325	21-22	-1,920	-2,014	-2,397	-2,736	-2,204
12	-1,50930	23-24	-2,560	-2,634	-2,531	-2,092	-1,871
13	-2,94790	25-26	-2,425	-2,519	-4,879	-4,853	-4,326
14	-0,58000	27-28	-0,417	-0,511	-1,864	-1,702	-1,242
15	-0,60709	29-30	-0,591	-0,635	-2,034	-2,087	-1,729
16	-0,73698	31-32	-0,968	-1,058	-2,481	-2,836	-2,633
17	-1,25860	33-34	-1,612	-1,702	-3,128	-4,156	-3,824
18	-0,35670	35-36	-0,209	-0,299	-1,589	-1,046	-0,932
19	-0,34911	37-38	+0,027	+0,067	-1,608	-0,939	-0,759
20	-0,37550	39-40	-0,381	-0,474	-1,489	-0,638	-0,428
21	-0,54782	41-42	-0,593	-0,685	-0,164	+0,201	+0,158
22	-0,12640	43-44	+0,469	-0,623	-1,203	-0,927	-0,793
23	-0,13297	45-46	+0,509	-0,664	-1,089	-0,646	-0,584
24	-0,21121	47-48	+0,696	-0,849	-0,667	+0,489	+0,434
25	-0,52799	49-50	-0,849	-0,695	-0,032	+0,562	+0,529
26	-0,02989	51-52	-0,215	-0,060	-0,848	-0,805	-0,798
27	-0,08155	53-54	+0,200	+0,354	-0,705	-0,786	-0,741
28	-0,20969	55-56	-0,113	-0,042	-0,431	-1,524	-1,365
29	-0,34933	57-58	-0,222	-0,952	-0,023	-1,365	-1,112
30	+0,02650	59-60	-0,052	+0,018	-0,583	-0,423	-0,394
31	-0,05239	61-62	-0,142	-0,071	-0,503	-0,454	-0,408
32	-0,18034	63-64	-0,156	-0,085	-0,365	-0,316	-0,295
33	-0,34246	65-66	-0,275	-0,207	-0,213	-0,093	-0,083
34	-0,04989	67-68	-0,050	-0,020	-0,445	-0,350	-0,331
35	-0,05708	69-70	-0,059	-0,012	-0,407	-0,344	-0,328
36	-0,12186	71-72	-0,086	-0,039	-0,359	-0,334	-0,314
37	-0,19324	73-74	-0,146	-0,098	-0,364	-0,333	-0,291
38	-0,06777	75-76	-0,076	-0,029	-0,379	-0,320	-0,286
39	-0,07540	77-78	-0,042	-0,025	-0,369	-0,336	-0,300
40	-0,10640	79-80	-0,083	-0,036	-0,347	-0,330	-0,308
41	-0,11275	81-82	-0,089	-0,043	-0,329	-0,155	-0,127
42	-0,06656	83-84	-0,072	-0,025	-0,352	-0,286	-0,257
43	-0,08581	85-86	-0,069	-0,023	-0,366	-0,317	-0,316
44	-0,08709	87-88	-0,070	-0,023	-0,339	-0,298	-0,264
45	-0,09439	89-90	-0,074	-0,024	-0,288	-0,242	-0,201
46	-0,15259	91-92	-0,093	-0,046	-0,742	-0,433	-0,415
47	-0,06917	93-94	-0,086	-0,039	-0,286	-0,385	-0,363
48	-0,07543	95-96	-0,094	-0,047	-0,308	-0,388	-0,321
49	-0,08532	97	-0,128	-0,082	-0,316	-0,458	-0,370

Eforturi unitare tangențiale τ_{xy}			
elem	P4	P5	P6
1	+0,489	+0,517	+0,973
2	+1,338	+1,283	+1,530
3	+0,410	+0,413	+0,640
4	+0,272	+0,495	+0,790
5	+0,461	+0,609	+0,820
6	+1,411	+1,632	+1,780
7	+0,478	+0,582	+0,623
8	+1,778	+2,324	+2,590
9	+3,087	+4,676	+4,960
10	+0,323	+0,317	+0,341
11	+0,939	+1,047	+1,115
12	+1,874	+2,744	+2,890
13	+4,065	+3,998	+4,160
14	+0,089	+0,081	+0,100
15	+0,299	+0,189	+0,259
16	+0,608	+0,404	+0,440
17	+1,350	+0,812	+0,836
18	+0,131	+0,108	+0,212
19	+0,442	+0,394	+0,433
20	+0,958	+0,749	+0,778
21	+1,723	+1,482	+1,536
22	+0,153	+0,104	+0,201
23	+0,498	+0,416	+0,439
24	+0,864	+0,705	+0,747
25	+0,988	+1,094	+1,378
26	+0,153	+0,134	+0,215
27	+0,441	+0,550	+0,574
28	+0,634	+0,865	+0,896
29	+0,649	+0,446	+0,478
30	+0,114	+0,158	+0,216
31	+0,319	+0,205	+0,239
32	+0,458	+0,404	+0,420
33	+0,472	+0,394	+0,401
34	+0,063	+0,059	+0,070
35	+0,183	+0,132	+0,182
36	+0,273	+0,287	+0,276
37	+0,306	+0,267	+0,315
38	+0,035	+0,040	+0,062
39	+0,108	+0,109	+0,126
40	+0,172	+0,172	+0,185
41	+0,249	+0,223	+0,247
42	+0,043	+0,069	+0,076
43	+0,066	+0,084	+0,093
44	+0,114	+0,111	+0,210
45	+0,165	+0,144	+0,230
46	+0,080	+0,093	+0,115
47	+0,013	+0,034	+0,101
48	+0,048	+0,040	+0,110
49	+0,072	+0,111	+0,200

4.6. Zid de sprijin. Această structură s-a rezolvat în metoda elementelor finite folosind elemente izoparametrice (programul ZIDSMEFI), iar în teoria echivalențelor s-a rezolvat cu elemente de tip pătrat (programul ZIDSSTEC). Structura folosită pentru teoria echivalențelor nu este la fel ca structura discretizată în metoda elementelor finite, așa că din nou nu se pot compara deplasările nodurilor.

P7 = ZIDSMEFI - Zid de sprijin, calculat cu metoda Elementelor finite, Model Izoparametric.

P8 = ZIDSSTEC = Zid de sprijin, calculat cu Teoria echivalențelor. Model pătrat.

Eforturi unitare normale horizontale σ_x (daN/cm²)

NOD	P7	P8	DIFERENȚA P7-P8	
			Valoare	%
59	- 0,824	-0,796	- 0,028	- 3,39
60	- 0,553	-0,591	+ 0,038	+ 6,87

Eforturi unitare normale verticale σ_y (daN/cm²)

NOD	P7	P8	DIFERENȚA P7-P8	
			Valoare	%
<u>24+25</u> 2	-1,070	-1,196	0,126	11,72
26	-0,569	-0,603	0,034	5,97
59	-1,447	-1,499	0,052	3,59
60	-1,260	-1,315	0,055	4,36
68	-1,080	-1,127	0,047	4,35
69	-1,223	-1,274	0,051	4,17
92	+0,910	1,030	-0,120	13,18

Eforturi unitare tangențiale τ_{xy} (daN/cm²)

NOD	P7	P8	DIFERENȚA P7-P8	
			Valoare	%
<u>24+25</u> 2	-0,807	-0,132	0,025	23,71
26	-0,263	-0,285	0,022	8,36
59	-0,750	-0,614	-0,136	-10,13
60	-0,576	-0,592	0,016	2,77
68	-0,232	-0,257	0,025	10,77

(continuare)

NOD	P7	P8	DIFERENTA	
			Valoare	P7-P8 %
69	-0,427	-0,464	0,037	8,79
92	-0,567	-0,625	0,058	10,22

In continuare se prezintă, în tabele, valorile eforturilor unitare în centrul elementelor.

ZID DE SFRIJIN

Eforturi unitare în centrul elementului (daN/cm²)

elem.	Orizontale σ_x		Verticale σ_y		Tangențiale τ_{xy}	
	M.E.F.	T.E.	M.E.F.	T.E.	M.E.F.	T.E.
1	-0,0226	-0,0275	-0,119	-0,230	-0,0339	+ 0,01
2	-0,04211	-0,0484	-0,0586	-0,0715	-0,0218	+ 0,01
3	-0,06996	-0,0713	-0,03764	+0,010	-0,0089	-0,004
4	-0,036	+0,047	-0,157	-0,111	-0,0755	-0,051
5	-0,079	+0,091	-0,13404	-0,070	-0,06589	-0,047
6	-0,10569	-0,123	-0,09605	-0,080	-0,0277	-0,036
7	-0,0254	-0,036	-0,42014	-0,514	-0,06044	-0,071
8	-0,0798	-0,0819	-0,291	-0,329	-0,135	-0,159
9	-0,1175	-0,1293	-0,177	-0,243	-0,103	-0,138
10	-0,0826	-0,0876	-0,120	-0,201	-0,04624	+0,02
11	-0,10028	-0,112	-0,5926	-0,637	-0,2286	-0,316
12	-0,1396	-0,153	-0,4248	-0,459	-0,1854	-0,219
13	-0,16813	-0,182	-0,2492	-0,315	-0,12675	-0,141
14	-0,17618	-0,197	-0,11182	-0,147	-0,0537	-0,038
15	-0,12805	-0,135	-0,669	-0,720	-0,2864	-0,205
16	-0,16259	-0,186	-0,454	-0,493	-0,2276	-0,190
17	-0,1930	-0,217	-0,2551	-0,284	-0,1534	-0,171
18	-0,2078	-0,220	-0,0946	-0,076	-0,05364	+0,02
19	-0,0929	-0,103	-1,0116	-1,105	-0,32095	-0,359
20	-0,1821	-0,194	-0,78453	-0,923	-0,31786	-0,368
21	-0,1608	-0,188	-0,4805	-0,516	-0,2542	-0,272
22	-0,18103	-0,205	-0,24447	-0,279	-0,1908	-0,220
23	-0,22568	-0,241	-0,05421	-0,023	-0,0707	-0,054
24	-0,22589	-0,242	-1,091	-1,140	-0,41793	-0,438
25	-0,10838	-0,123	-0,00264	-0,919	-0,3033	-0,357
26	-0,14034	-0,167	-0,5248	-0,556	-0,2627	-0,294

(continuare)

elem.	Orizontale σ_x		Verticale σ_y		Tangțiale τ_{xy}	
	M.E.F.	T.E.	M.E.F.	T.E.	M.E.F.	T.E.
27	-0,13466	-0,158	-0,26221	-0,278	-0,20249	-0,253
28	-0,10154	-0,132	+0,0351	+0,0501	-0,1318	-0,157
29	-0,14059	-0,161	-1,1408	-1,229	-0,41538	-0,442
30	-0,21144	-0,233	-1,0402	-1,118	-0,51616	-0,583
31	-0,1344	-0,159	-0,81607	-0,915	-0,41705	-0,456
32	-0,1658	-0,181	-0,5244	-0,571	-0,2786	-0,318
33	-0,1594	-0,174	-0,2471	-0,296	-0,15694	-0,184
34	-0,12617	-0,141	+0,08686	+0,0927	-0,01056	+0,0142
35	-0,21059	-0,229	-1,4731	-1,71	-0,589	-0,329
36	-0,28752	-0,301	-1,1506	-1,56	-0,5225	-0,300
37	-0,26767	-0,284	-0,78452	-0,916	-0,39910	-0,218
38	-0,24728	-0,271	-0,49129	-0,528	-0,28228	-0,252
39	-0,25512	-0,231	-0,1957	-0,241	-0,16186	-0,230
40	-0,2938	-0,274	+0,0472	+0,087	-0,0818	-0,037
41	-0,5463	-0,569	-1,624	-1,826	-0,7832	-0,625
42	-0,3732	-0,390	-1,076	-1,114	-0,46818	-0,390
43	-0,3069	-0,273	-0,79007	-0,823	-0,36072	-0,315
44	-0,28947	-0,261	-0,47649	-0,529	-0,28046	-0,220
45	-0,30702	-0,285	-0,17725	-0,1936	-0,19254	-0,157
46	-0,3189	-0,291	+0,05	+0,10	-0,0807	-0,036
47	-0,0598	-0,063	-0,03713	-0,060	-0,0084	+0,006
48	-0,5316	-0,059	-0,637	-0,89	-0,52084	-0,431
49	-0,4551	-0,510	-1,1898	-1,39	-0,49366	-0,383
50	-0,32678	-0,374	-1,0994	-1,56	-0,3566	-0,329
51	-0,27102	-0,312	-0,80982	-0,76	-0,32374	-0,286
52	-0,26583	-0,303	-0,4924	-0,61	-0,2926	-0,265
53	-0,30299	-0,323	-0,16119	-0,194	-0,22311	-0,197
54	-0,32919	-0,356	+0,12169	+0,152	-0,08488	-0,038
55	-0,1171	-0,1227	-0,37945	-0,396	-0,22651	-0,241
56	-0,23091	-0,256	-0,84945	-0,615	-0,53579	-0,576
57	-0,20968	-0,239	-1,1467	-1,03	-0,45774	-0,484
58	-0,21276	-0,266	-1,1164	-0,97	-0,3448	-0,379
59	-0,21563	-0,274	-0,87469	-0,64	-0,31042	-0,358
60	-0,21321	-0,270	-0,55201	-0,50	-0,303	-0,371
61	-0,23858	-0,256	-0,155	-0,10	-0,2809	-0,299
62	-0,35233	-0,371	+0,19228	+0,16	-0,11511	-0,134

(continuare)

elem.	Orizontale σ_x		Verticale σ_y		Tangențiale τ_{xy}	
	M.E.F.	T.E.	M.E.F.	T.E.	M.E.F.	T.E.
63	-0,17931	-0,194	-0,893	-0,65	-0,42321	-0,467
64	-0,21929	-0,241	-0,92198	-0,71	-0,51119	-0,536
65	-0,2233	-0,238	-1,1246	-0,95	-0,45016	-0,472
66	-0,22637	-0,271	-1,1183	-0,99	-0,35888	-0,373
67	-0,21245	-0,260	-0,927	-0,85	-0,3031	-0,398
68	-0,17412	-0,200	-0,622	-0,54	-0,28596	-0,316
69	-0,13185	-0,170	-0,235	-0,15	-0,2955	-0,329
70	-0,11772	-0,139	+0,399	+0,19	-0,29767	-0,41

4.7. Zid de sprijin și zona de alunecare. Această problemă în metoda elementelor finite a fost discretizată cu elemente finite triunghiulare (programul ZISMEFTI), iar cu teoria echivalențelor, structura echivalentă este formată din elemente pătrate (programul ZISZALTE). De aceea ca și în cazul anterior, se vor compara numai eforturile unitare.

P9 = ZISMEFTI . Zid de sprijin și zona de alunecare calculate cu Metoda Elementelor Finite, Model triunghiular.

P10 = ZISZALTE . Zid de sprijin și zona de alunecare calculate cu Teoria Echivalențelor, Model pătrat.

Eforturi unitare normale orizontale σ_x (daN/cm²)

NOD	P9	P10	Diferența P9-P10	
			Valoare	%
4	-0,845	-0,875	0,030	3,55
10b	-0,621	-0,653	0,032	5,15
10P	-0,529	-0,601	0,072	13,61
21	-0,396	-0,415	0,019	4,79
28b	-0,682	-0,704	0,022	3,22
28P	-0,565	-0,583	0,018	3,18
38b	-1,060	-1,110	0,050	4,71
38P	-0,127	-0,159	0,032	25,19
58b	-0,850	0,740	0,110	12,94
58P	-0,188	-0,178	-0,010	-5,31

(continuare)

NOD	P9	P10	Diferență P9-P10	
			Valoare	%
61	-0,249	-0,263	0,014	5,62
84	-0,405	-0,431	0,026	6,41

b = beton

p = pământ

Eforturi unitare normale verticale σ_y (daN/cm²)

NOD	P9	P10	Diferență P9-P10	
			Valoare	%
4	-1,377	-1,420	0,043	3,12
10b	-2,057	-2,175	0,118	5,73
10P	-0,506	-0,586	0,080	15,81
21	-1,114	-1,215	0,101	9,06
28b	-2,217	-2,391	0,174	7,84
28P	0,468	-0,479	-0,011	-2,35
38b	-1,823	0,031	0,031	1,70
38P	0,010	0,000	0,001	9,09
58b	-2,670	-2,733	0,063	2,35
58P	-0,834	-0,871	0,037	4,43
61	-1,000	-0,985	-0,015	-1,50
84	-1,195	-1,215	0,020	1,67

Eforturi unitare tangențiale τ_{xy} (daN/cm²)

NOD	P9	P10	Diferență P9-P10	
			Valoare	%
4	-0,059	-0,071	0,012	20,33
10b	-2,248	-2,481	0,233	10,36
10P	-0,316	-0,379	0,063	19,93
21	+0,381	+0,396	-0,015	-3,93
28b	-0,503	-0,547	0,044	8,74
28P	-0,346	-0,364	0,018	5,20
38b	-1,270	-1,315	0,045	3,54
38P	-0,088	-0,081	-0,007	-7,35
58b	+0,225	+0,253	-0,028	-12,44
58P	-0,105	-0,132	0,027	25,71
61	-0,344	-0,321	-0,023	-6,68
84	0,018	0,017	0,00	5,55

In continuare se prezintă în tabele, valorile eforturilor unitare în centrul elementelor.

element nr.	Eforturi unitare normale horizontale σ_x (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale verticale σ_y (daN/cm ²)			Eforturi unitare tangențiale τ_{xy} (daN/cm ²)	
1	-0,340	1	-0,605	-0,479	-0,530	+1,03	+0,98
2/3	-0,269	2	-0,430	-1,179	-0,970	-0,157	-0,211
4/5	-0,561	3	-0,728	-0,648	-0,535	-0,694	-0,591
6/7	-0,777	4	-0,911	-1,310	-1,078	-0,167	-0,192
8/9	-0,739	5	-0,816	-1,465	-1,205	+0,087	+0,115
10/11	-0,404	6	-0,622	-1,175	-0,986	+0,459	+0,520
12/13	-0,112	7	+0,02	-0,920	-0,769	+0,534	+0,915
14/15	-0,239	8	-0,375	-0,485	-0,382	-0,248	-0,352
16/17	-0,595	9	-0,803	-2,085	-1,753	-0,114	-0,206
18/19	-0,524	10	-0,898	-0,6195	-0,516	-0,420	-0,475
20/21	-0,519	11	-0,675	-1,200	-0,982	-0,126	-0,208
22/23	-0,437	12	-0,654	-1,275	-1,068	+0,165	-0,210
24/25	-0,335	13	-0,597	-0,957	-0,7738	0,431	+0,454
26/27	-0,155	14	+0,060	-0,116	-0,0948	0,003	0,739
28/29	+0,081	15	+0,104	+0,529	+0,506	0,359	0,397
29	-0,360	16	+0,09	-0,820	0,686	-0,463	-0,494
30/31	-0,536	17	-0,681	-1,195	-0,986	-0,769	-0,783
32/33	-0,601	18	-0,812	-2,085	-1,823	-0,753	-0,7876
34/35	-0,670	19	-0,694	-0,623	-0,530	-0,397	-0,361
36/37	-0,517	20	-0,729	-1,060	-1,005	-0,054	-0,215
38/39	-0,402	21	-0,615	-1,175	-1,059	+0,291	+0,110
40/41	-0,328	22	-0,510	-0,935	-0,922	+0,608	+0,516
42/43	-0,382	23	-0,508	-0,388	+0,8511	+851	+0,804
44/45	-0,114	24	-0,127	+0,248	+0,259	+0,641	+0,617
47/48	+0,221	25	+0,105	-0,0865	+0,054	-0,336	-0,349
49/50	-0,157	26	+0,025	+0,0	+0,096	-0,208	-0,253
51/52	-0,127	27	-0,088	+0,0112	+0,003	-0,078	-0,125
46, 54 53	-1,06	28	-0,97	-1,823	-1,729	-1,270	-1,066
55/56	-0,788	29	-0,730	-1,315	-1,275	-0,877	-0,724
57/58	-0,598	30	-0,615	-1,975	-1,936	-0,561	-0,530
59/60	-0,397	31	-0,432	-0,519	-0,620	-0,162	-0,215
61/62	-0,219	32	-0,254	-0,948	-0,989	-0,079	-0,141

(continuare)

element nr.	Eforturi unitare normale orizontale σ_x (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale verticale σ_y (daN/cm ²)		Eforturi unitare tangențiale τ_{xy} (daN/cm ²)		
63/64	-0,209	33	-0,233	-1,0745	-1,041	+0,331	+0,320
65/66	-0,253	34	+0,097	-0,390	-0,82	+0,576	+0,539
67/68	-0,376	35	+0,006	-0,498	-0,45	+0,739	+0,713
69/70	-0,447	36	+0,075	-0,185	-0,176	+0,599	+0,538
71/72	-0,159	37	-0,09	-0,0785	-0,0699	-0,301	-0,374
73/74	-0,434	38	-0,315	-0,226	-0,201	-0,433	-0,485
75/76	-1,040	39	-0,830	-0,385	-0,362	-1,335	-1,379
77/78	-0,443	40	-0,470	-1,060	-0,994	-0,608	-0,653
79/80	-0,030	41	-0,096	-1,205	-1,113	-0,333	-0,371
81/82	+0,2105	42	-0,030	-2,035	-1,966	+0,021175	+0,051
83/84	-0,439	43	-0,02	-0,451	-0,409	+0,065	+0,076
85/86	-0,121	44	-0,08	-1,035	-0,975	+0,096	+0,112
87/88	-0,173	45	-0,105	-1,000	-0,980	+0,286	+0,304
89/90	-0,259	46	-0,212	-0,910	-0,874	+0,476	+0,506
91/92	-0,394	47	-0,318	-0,650	-0,547	+0,587	+0,609
93/94	-0,453	48	-0,390	-0,382	-0,326	+0,540	+0,585
95/96	-0,553	49	-0,420	-0,575	-0,534	+0,398	-0,2116
97/98	-0,70	50	-0,566	-0,865	-0,841	-0,611	-0,629
99/100	-0,482	51	-0,320	-1,00	-0,975	-0,382	-0,391
101-102	-0,429	52	-0,311	-0,962	-0,931	-0,333	-0,376
103-104	-0,419	53	-0,306	-1,012	-0,984	-0,310	-0,376
105-106	-0,427	54	-0,306	-1,055	-1,006	-0,292	-0,277
107-108	-0,178	55	-0,225	-1,125	-1,079	-0,0525	-0,071
109-110	-0,197	56	-0,200	-1,070	-1,038	+0,0445	+0,066
111-112	-0,239	57	-0,206	-1,060	-1,007	+0,2178	+0,238
113-114	-0,315	58	-0,251	-0,965	-0,933	+0,379	+0,394
115-116	-0,404	59	-0,314	-0,795	-0,740	+0,474	+0,450
117-118	-0,436	60	-0,316	-0,483	-0,461	+0,425	+0,410
119	-0,719	61	-0,522	-0,903	-0,816	+0,451	+0,432
120-121	-0,569	62	-0,343	-0,941	-0,924	-0,475	-0,436
122-123	-0,526	63	-0,319	-0,1060	-0,987	-0,340	-0,321
124-125	-0,504	64	-0,285	-1,095	-1,033	-0,292	-0,315
126-127	-0,459	65	-0,411	-1,15	-1,085	-0,243	-0,226
128-129	-0,382	66	-0,316	-1,175	-1,092	-0,166	-0,202

(continuare)

element nr.	eforturi unitare normale orizontale σ_x (daN/cm ²)			eforturi unitare normale verticale σ_y (daN/cm ²)		eforturi unitare tangențiale τ_{xy} (daN/cm ²)	
130-131	-0,365	67	-0,297	-1,175	-1,090	-0,036	-0,094
132-133	-0,341	68	-0,317	-1,140	-1,068	+0,062	+0,081
134-135	-0,355	69	-0,296	-1,118	-1,073	+0,193	+0,215
136-137	-0,407	70	-0,320	-1,070	-1,029	+0,329	+0,351
138-139	-0,483	71	-0,158	-0,97	-0,850	+0,434	+0,486
140	-0,630	72	-0,223	-0,99	-0,850	+0,389	+0,909
141-142	-0,605	73	-0,419	-1,14	-1,030	-0,362	-0,398
143-144	-0,578	74	-0,400	-1,145	-1,050	-0,408	-0,351
145-146	-0,555	75	-0,375	-1,209	-1,159	-0,241	-0,273
147-148	-0,501	76	-0,360	-1,230	-1,211	-0,178	-0,170
149-150	-0,475	77	-0,318	-1,235	-1,215	-0,118	-0,106
151-152	-0,462	78	-0,306	-1,245	-1,220	-0,023	-0,100
153-154	-0,448	79	-0,299	-1,235	-1,221	+0,069	+0,103
155-156	-0,451	80	-0,311	-1,19	-1,098	+0,166	+0,196
157-158	-0,485	81	-0,317	-1,125	-1,074	+0,274	+0,291
159-160	-0,467	82	-0,317	-0,895	-0,836	+0,333	+0,374
161-162 163	-0,621	83	-0,543	-1,280	-1,248	-0,291	-0,315
164-165	-0,587	84	-0,519	-1,377	-1,351	-0,184	-0,197
166-167	-0,570	85	-0,508	-1,340	-1,322	-0,148	-0,215
168-169	-0,553	86	-0,527	-1,340	-1,320	-0,090	-0,101
170-171	-0,543	87	-0,496	-1,34	-1,320	-0,012	-0,84
172-173	-0,535	88	-0,477	-1,33	-1,320	+0,077	+0,113
174-175	-0,541	89	-0,490	-1,29	-1,300	+0,153	+0,172
78 176-177	-0,636	90	-0,516	-1,30	-1,300	+0,293	+0,285
179 180-181	-0,610	91	-0,509	-1,58	-1,30	-0,140	-0,097
182-183	-0,591	92	-0,498	-1,39	-1,29	-0,073	-0,118
184-185	-0,588	93	-0,524	-1,385	-1,26	-0,004	-0,096
186-187	-0,610	94	-0,442	-1,390	-1,26	+0,084	+0,105
188	-0,610	95	-0,442	-1,390	-1,26	+0,134	+0,159

4.8. Fundație izolată. Această structură a fost calculată în metoda elementelor finite cu elemente paralelipipedice la fel ca în teoria echivalențelor. Numai că elementele para-

lelipedice din teoria echivalențelor au pe fețe câte două diagonale. De aceea topologia programului devine mult mai complicat.

În această problemă discretizarea structurii cu elemente finite este identică cu discretizarea în teoria echivalențelor. Rezolvarea structurii s-a făcut în cele două metode folosind programe de tip SAP. De data aceasta s-a constatat că timpul de calcul al programului cu elemente finite este mai mare decât cel necesar pentru rezolvarea programului pentru teoria echivalențelor. În programul cu metoda elementelor finite rezultatele (deplasările și eforturile) sunt imprimare imediat, iar în programul cu teoria echivalențelor se dau numai eforturile în bare. În acest caz calcularea ulterioară a eforturilor unitare necesită foarte mult timp.

În continuare se compară deplasările nodale și eforturile unitare în centrul elementelor, obținute cu cele două metode.

P11 = FUIZOMEF - Fundație izolată, calculată cu Metoda elementelor finite, Model paralelipedic.

P12 = FUIZOTEC - Fundație izolată, calculată cu Teoria echivalențelor.

Deplasări după x

NOD	P11	P12	Diferența P11-P12	
			valoare	%
1	+0,004437	+0,003261	0,001176	26,50
5	+0,004233	+0,003428	0,000805	19,01
26	+0,001576	+0,001446	0,000130	8,24
30	+0,001918	+0,002229	-0,000311	-16,21
51	-0,000988	-0,001237	+0,000249	25,20
57	-0,000248	-0,000340	0,000092	37,09
60	+0,001241	+0,001255	-0,000014	- 1,12
92	-0,000838	-0,000673	-0,000165	-19,68
97	-0,000407	-0,000387	-0,000020	- 4,91
112	+0,000286	+0,000330	-0,000044	-15,38
117	-0,001489	-0,001150	-0,000339	-22,76

Deplasări după y

NOD	P11	P12	Diferența P11-P12	
			Valoare	%
1	+0,004437	+0,004196	0,000241	5,43
21	+0,004232	+0,004837	-0,000605	-14,29
26	+0,001576	+0,001201	0,000375	2,38
46	+0,001916	+0,002270	-0,000354	-18,48
51	-0,000788	-0,000785	-0,000003	- 0,38
57	-0,000248	-0,000284	0,000036	14,52
72	+0,000241	-0,000270	-0,000029	-12,03
92	-0,000838	+0,000821	-0,0000170	- 2,02
97	+0,000406	+0,000594	-0,000188	-46,30
112	+0,000286	+0,000332	-0,000046	-16,08
117	-0,001469	-0,001987	0,000518	35,26

Deplasări după z

NOD	P11	P12	Diferența P11-P12	
			Valoare	%
1	+0,015027	+0,013055	0,001972	13,12
5	+0,006891	+0,006902	-0,000011	0,16
21	+0,006891	+0,007640	-0,000749	-10,86
26	+0,015519	+0,012040	0,003479	22,41
30	+0,005319	+0,004545	0,000774	14,55
46	+0,005319	+0,004653	0,000666	12,52
51	+0,013066	+0,012000	0,001066	8,15
57	+0,005507	+0,005416	0,000091	1,65
60	+0,001018	+0,001126	-0,000108	-10,60
72	+0,001018	+0,000953	0,000065	6,38
92	+0,003364	+0,003166	0,000198	5,88
97	-0,000209	-0,000162	-0,000047	-22,48
112	-0,006045	-0,005925	-0,000120	- 1,98
117	-0,001389	-0,001647	0,000258	18,57
125	-0,019964	-0,018993	-0,000971	- 4,86

In continuare se prezintă, în tabele, valorile deplasărilor nodale.

Deplasari.

T. 24

NODUL	După "X"		După "Y"		După "Z"	
	P11	P12	P11	P12	P11	P12
1	+0,004437	+0,003261	+0,004437	+0,007197	+0,015027	+0,023055
2	+0,004119	+0,003050	+0,003741	+0,006333	+0,010276	+0,015810
3	+0,003916	+0,002932	+0,002391	+0,004949	+0,007558	+0,010100
4	+0,003935	+0,003297	+0,001177	+0,002635	+0,006035	+0,006434
5	+0,004233	+0,003428	0,0	0,0	+0,006891	+0,005902
6	+0,003741	+0,002773	+0,004119	+0,006753	+0,010275	+0,019786
7	+0,003694	+0,002818	+0,003694	+0,006409	+0,006662	+0,015253
8	+0,003586	+0,002944	+0,002573	+0,005010	+0,004076	+0,007695
9	+0,003592	+0,003305	+0,001102	+0,002700	+0,002688	+0,005558
10	+0,003645	+0,003375	0,0	0,0	+0,002728	+0,002944
11	+0,002591	+0,001822	+0,003916	+0,006570	+0,007558	+0,017872
12	+0,002575	+0,001987	+0,003386	+0,006235	+0,004076	+0,011505
13	+0,002536	+0,002231	+0,002536	+0,004940	+0,001666	+0,005947
14	+0,002525	+0,002330	+0,001215	+0,002736	+0,000341	+0,001980
15	+0,002524	+0,002637	0,0	0,0	+0,049076	+0,000960
16	+0,001178	+0,000853	+0,003935	+0,006567	+0,006035	+0,007082
17	+0,001182	+0,000929	+0,003392	+0,006200	+0,002688	+0,001061
18	+0,001213	+0,001108	+0,002525	+0,004937	+0,000342	+0,004938
19	+0,001211	+0,001234	+0,001211	+0,002789	-0,000895	+0,000855
20	+0,001172	+0,001312	0,0	0,0	-0,000816	-0,000272
21	0,0	0,0	+0,004232	+0,006837	+0,006891	+0,017640
22	0,0	0,0	+0,003045	+0,006306	+0,002728	+0,010754
23	0,0	0,0	+0,002524	+0,005034	+0,000491	+0,004978
24	0,0	0,0	+0,001172	+0,002794	-0,000816	+0,000860
25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
26	+0,001576	+0,001446	+0,001576	+0,002201	+0,015519	+0,022040
27	+0,001774	+0,001603	+0,001721	+0,002073	+0,009775	+0,015160
28	+0,001870	+0,001813	+0,001135	+0,001503	+0,006791	+0,009362
29	+0,001895	+0,002431	+0,000706	+0,001641	+0,005452	+0,005737
30	+0,001918	+0,002229	0,0	0,0	+0,005319	+0,004545
31	+0,001421	+0,001009	+0,001174	+0,002570	+0,009775	+0,019150
32	+0,001531	+0,001583	+0,001531	+0,002065	+0,006212	+0,012741
33	+0,001579	+0,001651	+0,001167	+0,001894	+0,003489	+0,007101
34	+0,001629	+0,001278	+0,000702	+0,000908	+0,002175	+0,002565
35	+0,001627	+0,002081	0,0	0,0	+0,001887	+0,001983
36	+0,001135	+0,009481	+0,001870	+0,002279	+0,006791	+0,017257
37	+0,001167	+0,001062	+0,001579	+0,002064	+0,003489	+0,019440
38	+0,001256	+0,001305	+0,001256	+0,001117	+0,001028	+0,005226
39	+0,001311	+0,001381	+0,000790	+0,001061	-0,000235	+0,001136
40	+0,001328	+0,001659	0,0	0,0	-0,000564	-0,000306
41	+0,000706	+0,000555	+0,001645	+0,002226	+0,005450	+0,016441
42	+0,000702	+0,000619	+0,001629	+0,002056	+0,002175	+0,010046
43	+0,000790	+0,000775	+0,001311	+0,001749	-0,000235	+0,004169
44	+0,000836	+0,000921	+0,000836	+0,001055	-0,001445	-0,000150
45	+0,000887	+0,001019	0,0	0,0	-0,001735	-0,001650
46	0,0	0,0	+0,001916	+0,002270	+0,005319	+0,001653
47	0,0	0,0	+0,001007	+0,002067	+0,001887	+0,009449

Deplasări (continuare).

T. 24

NODUL	După "X"		După "Y"		După "Z"	
	P11	P12	P11	P12	P11	P12
48	0,0	0,0	+0,001328	+0,001737	-0,000564	+0,003960
49	0,0	0,0	+0,000867	+0,001096	-0,001736	-0,000423
50	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,001944	-0,001859
51	-0,000788	+0,001237	-0,000788	-0,002785	+0,013066	+0,012100
52	-0,000901	+0,000100	-0,000853	-0,002298	+0,009905	+0,015050
53	-0,000745	+0,000460	-0,000442	-0,001512	+0,006991	+0,009308
54	-0,000698	+0,000410	-0,000649	-0,007699	+0,005562	+0,005537
55	-0,000734	+0,000820	0,0	0,0	+0,005264	+0,004343
56	-0,008430	-0,000109	-0,000901	-0,002309	+0,009905	+0,019074
57	-0,000248	+0,000340	-0,000248	-0,001584	+0,005507	+0,012416
58	+0,000121	+0,000741	+0,000158	-0,001222	+0,002884	+0,006641
59	+0,000202	+0,001105	+0,000215	-0,000529	+0,001478	+0,002276
60	+0,000241	+0,001255	0,0	0,0	+0,001018	+0,001126
61	-0,000442	-0,000021	-0,000745	-0,002204	+0,006991	+0,017180
62	+0,000159	+0,000368	+0,000121	-0,001578	+0,002884	+0,010665
63	+0,000489	+0,000862	+0,000488	-0,000981	+0,000790	+0,004885
64	+0,000629	+0,001304	+0,000573	-0,000490	-0,000676	+0,000824
65	+0,000692	+0,001456	0,0	0,0	-0,001181	-0,001185
66	-0,000049	+0,000163	-0,000697	-0,002263	+0,005562	+0,016293
67	+0,002156	+0,000259	+0,000203	-0,001070	+0,001478	+0,009745
68	+0,000373	+0,000524	+0,000628	-0,001039	-0,000676	+0,003690
69	+0,000456	+0,000703	+0,000456	-0,000490	-0,002196	-0,001019
70	+0,000497	+0,000864	0,0	0,0	-0,002713	-0,002818
71	0,0	0,0	-0,000734	-0,002320	+0,005265	+0,018240
72	0,0	0,0	+0,000241	-0,001670	+0,001018	+0,000954
73	0,0	0,0	+0,000692	-0,001057	-0,001180	+0,003540
74	0,0	0,0	+0,000497	-0,000498	-0,002713	-0,001491
75	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,003233	-0,003327
76	-0,000005	+0,000310	-0,000005	-0,004550	+0,003638	+0,011710
77	+0,000203	+0,001186	-0,000150	-0,003640	+0,002219	+0,006309
78	+0,000574	+0,002095	+0,000043	-0,002144	+0,000588	+0,002037
79	+0,000701	+0,002517	0,0	0,0	+0,000009	+0,000575
80	-0,000151	+0,000100	+0,000203	-0,004786	+0,002219	+0,010548
81	-0,000014	+0,000663	-0,000014	-0,004236	+0,000513	+0,004590
82	+0,000252	+0,001196	+0,000069	-0,002458	-0,001251	-0,000170
83	+0,000354	+0,001463	0,0	0,0	-0,001867	-0,002000
84	+0,000043	+0,000063	-0,000574	-0,005054	+0,000588	+0,009700
85	+0,000069	+0,000432	+0,000232	-0,004472	-0,001251	+0,003312
86	+0,000267	+0,000790	+0,000267	-0,002823	-0,003183	-0,001830
87	+0,000351	+0,001000	0,0	0,0	-0,003887	-0,003949
88	0,0	0,0	+0,000701	-0,005170	+0,000009	+0,009454
89	0,0	0,0	+0,000353	-0,004604	-0,001867	+0,002854
90	0,0	0,0	+0,000351	-0,002708	-0,003887	-0,002472
91	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,004641	-0,004719
92	-0,000838	-0,000673	-0,000838	+0,004321	+0,003364	+0,011662
93	-0,000975	-0,000635	-0,000907	+0,003033	+0,002254	+0,006543
94	-0,000958	-0,000801	-0,000701	+0,002121	+0,000926	+0,002200

Deplasări (continuare).

T. 24

Nodul	După "X"		După "Y"		După "Z"	
	P11	P12	P11	P12	P11	P12
95	-0,000920	-0,000932	0,0	0,0	+0,000326	+0,000805
96	-0,000907	-0,000433	-0,000915	+0,004244	+0,002254	+0,010500
97	-0,000407	-0,000027	-0,000407	+0,003694	-0,000209	+0,004062
98	+0,000099	+0,000247	-0,000109	+0,002510	-0,002112	-0,001162
99	+0,000296	+0,000399	0,0	0,0	-0,002922	-0,003164
100	-0,000701	-0,000129	-0,000938	+0,004591	+0,000926	+0,009789
101	-0,000109	+0,000037	+0,000099	+0,004344	-0,002112	+0,002555
102	+0,000370	+0,000316	+0,000370	+0,002989	-0,004375	-0,003214
103	+0,000600	+0,000481	0,0	0,0	-0,005599	-0,005775
104	0,0	0,0	-0,000920	+0,004400	-0,000327	+0,009510
105	0,0	0,0	+0,000296	+0,004622	-0,002922	+0,001870
106	0,0	0,0	+0,000601	+0,003393	-0,005599	-0,004360
107	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,007141	-0,007256
108	-0,000120	+0,000523	-0,000121	+0,000716	-0,001378	+0,002795
109	+0,000336	+0,000505	-0,000195	+0,000460	-0,002770	-0,002291
110	+0,000890	+0,000397	0,0	0,0	-0,003630	-0,004730
111	-0,000195	+0,000153	+0,000530	+0,011600	-0,002774	+0,001270
112	+0,000286	+0,000430	+0,000286	+0,000832	-0,006044	-0,005025
113	+0,000867	+0,000829	0,0	0,0	-0,008426	-0,008499
114	0,0	0,0	+0,000296	+0,001080	-0,003631	-0,000302
115	0,0	0,0	+0,000867	+0,001266	-0,008420	-0,007083
116	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,012025	-0,011490
117	-0,001489	-0,000750	-0,001469	-0,002987	-0,001389	+0,002646
118	-0,002239	-0,000856	-0,001122	-0,002185	-0,002202	-0,002322
119	-0,003141	-0,000851	0,0	0,0	-0,002002	-0,004679
120	-0,001123	-0,000704	-0,002233	-0,003059	-0,002202	+0,001070
121	-0,001761	-0,001060	-0,001761	-0,002438	-0,007929	-0,006495
122	-0,002515	-0,001534	0,0	0,0	-0,012106	-0,011275
123	0,0	0,0	-0,003141	-0,003111	-0,002002	+0,000163
124	0,0	0,0	-0,002515	-0,002841	-0,012106	-0,009916
125	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,019964	-0,018993

Eforturile unitare în ambele programe s-au obținut numai în centrul elementelor, de aceea nu se vor prezenta eforturile unitare în nodurile elementelor.

Eforturi unitare normale σ_x (daN/cm²) = σ_y (daN/cm²)

element	P11	P12	Diferența	
			Valoarea	%
1	1,02	1,15	-0,13	-12,75
16	4,10	4,41	-0,31	- 7,56
17	-0,61	-0,65	0,04	6,55
32	2,24	2,08	0,16	7,14
33	-1,86	-1,97	0,11	5,91
41	0,43	0,44	-0,01	- 2,32
42	-0,53	-0,56	0,03	5,66
50	-0,43	-0,41	-0,02	- 4,65
51	-2,16	-2,08	0,02	0,93
54	-1,57	-1,69	0,12	7,64
55	-1,28	-1,51	0,23	17,97
58	-10,70	-11,02	0,32	2,99

Eforturi unitare normale σ_z (daN/cm²)

element	P11	P12	Diferența	
			Valoarea	%
1	-3,34	-3,81	0,47	14,07
16	-4,14	-4,53	0,39	9,42
17	-1,44	-1,70	0,26	18,05
32	-4,43	-4,61	0,18	4,06
33	-5,38	-5,73	0,35	6,30
41	-6,15	-6,79	0,64	10,40
42	-1,45	-1,70	0,25	17,24
50	-9,66	-10,15	0,49	5,08
51	-6,41	-6,96	0,55	8,58
54	-16,90	-15,80	-1,10	-6,50
55	-1,51	-1,93	0,42	27,81
58	-27,20	-26,58	-0,62	-2,27

În continuare se prezintă în tabele, valorile eforturilor unitare în fiecare element.

element nr.	Eforturi unitare normale σ_x (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale σ_y (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale σ_z (daN/cm ²)	
	M.S.F.	T.E.	M.S.F.	T.E.	M.S.F.	T.E.
1	1,02	1,15	1,02	1,15	-3,34	-3,81
2	1,39	1,45	2,75	2,93	-2,24	-2,86
3	1,49	1,54	3,55	3,69	-2,26	-2,93
4	1,40	1,62	3,30	3,52	-3,74	-3,51
5	2,75	2,93	1,39	1,45	-2,24	-2,86
6	3,13	3,54	3,13	3,54	-1,76	-2,02
7	3,22	3,63	3,96	3,71	-1,65	-1,94
8	3,09	3,17	4,00	4,35	-2,56	-2,99
9	3,55	3,69	1,49	1,54	-2,26	-2,93
10	3,96	3,71	3,22	3,63	-1,65	-1,94
11	4,10	4,41	4,10	4,41	-1,48	-1,75
12	3,96	3,71	4,35	4,49	-2,47	-2,68
13	3,30	3,32	1,40	1,62	-3,74	-3,51
14	4,00	4,35	3,09	3,17	-2,56	-2,99
15	4,35	4,49	3,96	3,71	-2,47	-2,68
16	4,10	4,41	4,10	4,41	-4,14	-4,53
17	-0,609	-0,654	-0,609	-0,654	-1,44	-1,70
18	-1,50	-1,73	-0,813	-0,901	-1,77	-2,02
19	-1,59	-1,84	-0,209	-0,234	-1,68	-1,99
20	-1,59	-1,84	0,822	+0,906	-2,17	-2,30
21	-0,813	-0,901	-1,50	-1,73	-1,77	-2,02
22	-0,920	-1,11	-0,920	-1,11	-3,24	-3,36
23	-0,627	-0,702	-0,325	0,376	-2,70	-3,01
24	-0,681	-0,736	+1,27	1,43	-3,38	-3,92
25	-0,209	-0,254	-1,59	-1,68	-1,68	-1,99
26	0,325	+0,376	-0,627	-0,702	-2,70	-3,01
27	1,01	1,15	1,01	1,15	-2,09	-2,26
28	1,07	1,24	2,05	2,00	-3,09	-3,24
29	0,882	+0,906	-1,59	1,84	-2,17	-2,30
30	1,27	+1,43	-0,681	-0,736	-3,38	-3,92
31	2,05	+2,00	1,07	1,24	-3,09	-3,24
32	2,24	+2,08	2,24	2,08	-4,43	-4,61
33	-1,86	-1,97	-1,86	-1,97	-5,38	-5,73
34	-1,23	-1,36	-1,21	-1,34	-3,70	-3,40
35	-1,21	-1,34	-0,449	-0,457	-4,55	-5,11

(continuare)

element nr.	Eforturi unitare normale σ_x (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale σ_y (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale σ_z (daN/cm ²)	
	36	-1,21	-1,34	-1,23	-1,36	-3,70
37	-0,631	-0,686	-0,631	-0,686	-3,47	-3,96
38	-0,549	-0,605	0,127	0,141	-4,63	-5,16
39	-0,449	-0,457	-1,21	-1,34	-4,53	-5,11
40	0,127	+0,141	-0,549	-0,605	-4,65	-5,16
41	0,427	0,439	0,427	0,439	-6,15	-6,79
42	-0,533	-0,562	-0,533	-0,562	-1,45	-1,70
43	-1,87	-1,70	-1,62	-1,73	-2,31	-2,42
44	-2,44	-2,56	-1,69	-1,54	-2,51	-2,90
45	-1,62	-1,75	-1,87	-1,70	-2,31	-2,42
46	-2,27	-2,03	-2,27	-2,03	-5,76	-6,20
47	-2,27	-2,03	-1,29	-1,36	-7,14	-7,39
48	-1,69	-1,54	-2,44	-2,56	-2,51	-2,84
49	-1,29	-1,27	-2,27	-2,03	-7,14	-7,39
50	-0,430	-0,410	-0,430	-0,410	-9,66	-10,15
51	-2,16	-2,08	-2,16	-2,08	-6,41	-6,96
52	-2,83	-2,70	-1,92	-1,81	-8,73	-9,12
53	-1,92	-1,81	-2,83	-2,70	-8,73	-9,12
54	-1,57	-1,69	-1,57	-1,69	-16,90	-15,80
55	-1,28	-1,51	-1,28	-1,51	-1,51	-1,93
56	-3,16	-3,36	-4,63	-4,82	-6,04	-6,39
57	-4,63	-4,82	-3,16	3,36	-6,04	-6,39
58	-10,70	-11,02	-10,70	-11,02	-27,20	-28,58

4.9. Cilindru din beton simplu. Cilindrul a fost calculat utilizând mai multe ipoteze. In prima ipoteză s-au folosit elemente finite axial simetrice triunghiulare (programele CIMEFAS 1 și CIMEFAS 2), elemente finite volumetrice (programul CIMEFVO), și teoria echivalențelor folosind elemente echivalente de formă paralelipipedică (programul CIMEFPA).

Intre programele CIMEFAS 1 și CIMEFAS 2 unica deosebire este blocajul orizontal la marginea interioară, cea mai apropiată de axa de rotație.

P.13 = CIMEFAS 1 Cilindru din beton simplu calculat cu Metoda elementelor Finite, model axial simetric

P.14 = CIMEFAS 2

triunghiular. ICL = 18.

Cilindru din beton simplu calculat cu Metoda Elementelor Finite, model axial simetric triunghiular ICL = 10.

Deplasări radiale

nodul	P13	P14	Diferența	
			Valoare	P13-P14 %
10	0,001524	0,001523	0,000001	0,06
15	0,002155	0,002155	-	-
20	0,002430	0,002434	-0,000004	-0,16
25	0,002540	0,002544	-0,000004	-0,16
30	0,002570	0,002579	-0,000009	-0,35
35	0,002580	0,002584	-0,000004	-0,16
40	0,002581	0,002582	-0,000001	-0,04
45	0,002580	0,002580	-	-

Deplasări verticale

nodul	P13	P14	Diferența	
			Valoare	P13-P14 %
10	-0,017480	-0,017480	-	-
15	-0,015029	-0,015028	-0,000001	-0,01
20	-0,012589	-0,012589	-	-
25	-0,010121	-0,010121	-	-
30	-0,007618	-0,007618	-	-
35	-0,005091	-0,005091	-	-
40	-0,002548	-0,002548	-	-

In continuare se prezintă în tabele, deplasările tuturor nodurilor.

CILINDRU DIN BETON SIMPLU

CIMEFAS 1

CIMEFAS 2

NOD nr.	Deplasările orizontale după r		Deplasările verticale după s	
1	0,0	0,0	-0,02	-0,02
2	0,0	0,0	-0,02	-0,02
3	0,0	0,0	-0,02	-0,02
4	0,0	0,0	-0,02	-0,02

(continuare)

NOD nr.	Deplasările orizontale după x		Deplasările verticale după z	
5	0,0	0,0	-0,02	-0,02
6	0,0	0,0	-0,01788	-0,0178738
7	0,000295	0,000287442	-0,01788	-0,0178904
8	0,000617	0,00061562	-0,01786	-0,0178582
9	0,001007	0,00100654	-0,01776	-0,0177627
10	0,001524	0,00152367	-0,01748	-0,01748
11	0,0	0,0	-0,0154897	-0,0155051
12	0,000503	0,000505168	-0,0154948	-0,0154954
13	0,001009	0,00101085	-0,0154379	-0,0154375
14	0,001558	0,00155911	-0,0153027	-0,0153022
15	0,002155	0,00215543	-0,0150266	-0,0150278
16	0,0	0,0	-0,0129576	-0,0129712
17	0,000612	0,00001609	-0,0129516	-0,0129544
18	0,001208	0,00120942	-0,0128944	-0,012894
19	0,001816	0,0018179	-0,0127735	-0,012773
20	0,00243	0,00243407	-0,0125897	-0,0125891
21	0,0	0,00	-0,0103691	-0,0103759
22	0,000659	0,00663107	-0,0103611	-0,0103605
23	0,001289	0,00129202	-0,0103113	-0,0103109
24	0,001919	0,00192132	-0,0102241	-0,0102238
25	0,00254	0,00254414	-0,0101209	-0,0101206
26	0,0	0,00	-0,00776850	-0,00777140
27	0,000657	0,000678	-0,00775937	-0,00775552
28	0,00131	0,00131804	-0,00772405	-0,00772383
29	0,00195	0,00195223	-0,00766930	-0,00766905
30	0,00257	0,00257062	-0,00761825	-0,00761818
31	0,0	0,0	-0,00517327	-0,00517276
32	0,00067	0,000680395	-0,00516526	-0,00516434
33	0,00132	0,000132153	-0,00514355	-0,00514314
34	0,00195	0,00195637	-0,00511313	-0,00511296
35	0,00258	0,00258393	-0,00509067	-0,0050908
36	0,0	0,00	-0,00258630	-0,0025832
37	0,000677	0,000679038	-0,00258008	-0,00257949
38	0,001318	0,00131923	-0,00257002	-0,00256983
39	0,001953	0,00195341	-0,00255674	-0,00255666

(continuare)

NOD nr.	Deplasările orizontale după x		Deplasările verticale după z	
40	0,002581	0,00258165	-0,00254832	-0,00254851
41	0,0	0,0	+0,0	0,0
42	0,0006818	0,000676777	+0,0	0,0
43	0,00131	0,00131729	+0,0	0,0
44	0,00195	0,00195267	+0,0	0,0
45	0,00258	0,00258	+0,0	0,0

Eforturi unitare normale radiale σ_r (daN/cm²)

element	P13	P14	Diferența P13-P14		Teoretic (T)	Diferența P14-T	
			val.	%		val.	%
7/8	-47,699	47,688	-0,01	-0,02	-54,270	6,58	13,80
15/16	-10,765	-10,765	-	-			
23/24	-2,435	-2,440	0,01	-0,21	-3,360	0,92	37,70
31/32	-0,095	-0,115	0,02	21,05			
39/40	+0,405	+0,390	0,02	3,70			
47/48	0,370	+0,365	0,01	1,35			
55/56	0,235	+0,235	-	-			
63/64	0,195	+0,190	0,01	2,56	-0,245	10,06	-26,94

Eforturi unitare normale axiale σ_z (daN/cm²)

element	P13	P14	Diferența P13-P14		Teoretic (T)	Diferența P14-T	
			val.	%		val.	%
7/8	-227,945	-227,960	0,02	0,01	-260,150	32,19	14,12
15/16	-216,605	-216,975	0,37	0,17			
23/24	-213,975	-213,965	-0,01	-0,01	-240,250	26,29	12,28
31/32	-214,275	-214,255	-0,02	-0,01			
39/40	-215,450	-215,430	-0,02	-0,01			
55/48	-216,530	-216,515	-0,02	-0,01			
55/56	-217,240	-217,240	-	-			
63/64	-217,555	-217,565	0,01	0,01	-250,30	32,74	15,04

Eforturi unitare normale circumferențiale σ_{φ} (daN/cm²)

element	P13	P14	Diferența P13-P14		Teoretic	Diferența P14-T	
			val.	%		val.	%
7/8	-52,230	-52,245	-0,06	-0,11	-60,45	8,21	15,70
15/16	-18,675	-18,690	0,02	0,08			
23/24	- 5,570	- 5,550	-0,02	-0,35	- 7,30	1,75	31,53
31/32	- 0,570	- 0,520	-0,05	-0,77			
39/40	+ 0,955	0,965	-0,03	-3,14			
47/48	+1,125	1,155	-0,03	-2,67			
55/56	+0,950	0,960	-0,01	-1,05			
63/64	+0,845	0,840	0,01	0,59	+ 0,99	- ,11	-13,09

element nr.	Eforturi unitare normale radiale σ_x (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale axiale σ_z (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale circumferențiale σ_{φ} (daN/cm ²)	
1	-39,936	-28,91	-198,10	-198,88	-35,79	-40,05
2	-67,342	-67,41	-211,47	-211,43	-57,09	-58,21
3	-31,013	-30,49	-197,46	-197,19	-30,14	-30,17
4	-68,974	-68,98	-215,20	-215,20	-60,69	-60,74
5	-24,805	-24,85	-198,00	-197,95	-36,06	-36,07
6	-72,093	-72,10	-224,82	-224,84	-63,55	-63,57
7	-14,117	-14,065	-202,60	-202,60	-32,63	-32,63
8	-61,281	-61,29	-253,29	-253,32	-71,83	-71,85
9	-14,40	-14,36	-212,37	-212,09	-19,26	-25,82
10	-38,29	-32,98	-222,14	-221,30	-33,17	-34,71
11	-14,07	-14,27	-212,57	-212,76	-19,08	-19,28
12	-36,256	-35,79	-223,78	-223,72	-32,79	-32,82
13	-10,281	-10,34	-213,45	-213,53	-17,46	-17,50
14	-30,02	-29,88	-224,93	-224,93	-30,00	-29,99
15	-06,00	- 6,02	-215,21	-215,25	-15,12	- 15,14
16	-15,53	-15,51	-218,00	-218,70	-22,23	-22,24
17	- 4,69	- 5,79	-219,50	-220,03	-10,59	-10,40
18	-16,66	-15,24	-224,68	-224,54	-15,78	-15,61
19	- 5,62	- 5,78	-220,22	-220,30	- 8,20	- 8,09
20	-15,98	-16,07	-224,69	-224,69	-14,59	-14,53
21	- 4,11	- 4,18	-219,90	-219,89	- 7,29	- 7,25
22	-10,01	-221,43	-221,42	-11,59	-11,59	-11,57

(continuare)

element nr.	Sfaturile unitare nor- male radiale σ_r (daN/cm ²)		Sfaturile unitare normale axiale σ_x (daN/cm ²)		Sfaturile u- nitare normale circumferen- țiale σ_θ (daN/cm ²)	
23	-2,58	-2,59	-217,90	-217,89	-2,68	-5,66
24	-2,29	-2,29	-210,05	-210,04	-5,46	-5,44
25	-0,31	-1,72	-222,63	-222,63	-6,67	-3,30
26	-4,66	-5,55	-224,06	-224,14	-0,32	-5,60
27	-1,79	-1,09	-222,47	-222,49	-2,84	-2,65
28	-5,55	-5,70	-223,08	-223,09	-5,06	-4,96
29	-1,46	-1,49	-221,38	-221,38	-2,37	-2,31
30	-2,84	-2,85	-219,03	-219,02	-3,56	-3,04
31	-0,97	-0,98	-218,12	-218,11	-1,34	-1,29
32	+0,78	+0,75	-210,43	-210,40	+0,20	+0,25
33	+1,38	-0,06	-222,85	-222,43	-5,13	-0,30
34	+0,96	-1,13	-222,26	-222,60	-1,95	-1,08
35	-0,22	-0,30	-222,20	-222,20	-0,53	-0,37
36	-0,97	-1,10	-221,23	-221,24	-0,84	-0,75
37	-0,38	-0,40	-220,94	-220,94	-0,29	-0,24
38	+0,00	0,0	-217,93	-217,94	+0,21	+0,25
39	-0,27	-0,27	-218,00	-217,99	+0,32	0,35
40	+1,08	+1,05	-212,90	-212,87	+1,59	1,62
41	+1,95	0,51	-222,12	-221,45	-4,59	0,72
42	+3,16	0,49	-220,64	-221,10	-0,25	0,59
43	+0,34	0,26	-221,19	-221,19	+0,34	0,46
44	+0,66	0,55	-219,87	-219,87	+0,68	0,75
45	+0,03	0,0	-220,09	-220,08	+0,43	0,47
46	+0,01	0,77	-217,64	-217,63	+1,14	1,17
47	-0,01	-0,01	-217,94	-217,93	+0,74	0,77
48	+0,75	0,74	-215,12	-215,10	+1,51	1,54
49	+2,19	0,67	-221,30	-220,56	-4,35	0,98
50	+3,80	0,93	-219,58	-220,08	+0,28	1,04
51	+0,54	0,47	-220,31	-220,28	+0,63	0,71
52	+1,06	0,96	-219,07	-219,07	+1,07	1,11
53	+0,182	0,17	-219,40	-219,38	+0,65	0,67
54	+0,83	0,80	-217,63	-217,63	+1,21	1,22
55	+0,04	0,04	-217,93	-217,93	+0,76	0,77
56	+0,43	0,43	-216,55	-216,55	+1,14	1,15

(continuare)

element nr.	Eforturi unitare normale radiale σ_r (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale axiale σ_z (daN/cm ²)		Eforturi unitare normale circumferențiale σ_{θ} (daN/cm ²)	
	57	+2,79	0,69	-220,95	-220,04	-3,79
58	+4,01	0,91	-219,01	-219,63	+0,63	1,01
59	+0,31	0,64	-219,90	-219,76	+0,76	0,76
60	+1,05	0,94	-218,77	-218,78	+1,12	1,08
61	+0,30	0,39	-219,04	-219,0	+0,75	,75
62	+0,72	0,69	-217,71	-217,72	+1,12	1,11
63	+0,11	0,12	-217,95	-217,95	+0,76	0,76
64	+0,28	0,26	-217,16	-217,18	+0,93	0,92

În programele CITMPA și CILFVO, s-a luat o felie d din cilindru pentru a fi calculată, așa cum s-a explicat în capitolul III. Nici în acest caz structura nu s-a putut discretiza în aceleași elemente pentru cele două metode, putându-se compara numai eforturile unitare.

P15 = CILFVO - Cilindru din beton simplu supus la compresiune centrică, calculat cu Metoda elementelor finite columetrice.

P16 = CITMPA - Cilindru din beton simplu supus la compresiune centrică, calculat cu teoria echivalențelor, model paralelipipedic.

Eforturi unitare normale σ_x (daN/cm²)

P15		P16		Diferența P15-P16	
elem	σ_x	elem	σ_x	valoare	%
4	3,10	1	2,39	0,71	22,90
8	3,14	2	2,52	0,62	19,74
12	55,00	3	46,20	8,80	16,00
16	54,40	4	42,39	12,01	22,07
20	51,00	5	40,68	10,32	20,23
24	50,40	6	37,45	12,95	25,69
28	25,40	7	30,16	-4,76	-18,74
32	25,40	8	30,16	-4,76	-18,74

Eforturi unitare normale σ_y (daN/cm²)

P15		P16		Diferența P15-16	
elem	y	elem	x	valoare	%
4	0,73		+0,45	0,33	42,30
8	1,45		+0,86	0,58	40,68
12	-24,10		-29,30	5,20	21,57
16	-30,13		-37,15	7,05	23,42
20	-10,00		-14,20	3,40	31,48
24	-16,50		-18,16	1,66	10,06
28	-7,66		-9,24	1,58	20,62
32	-10,00		-11,13	1,13	11,30

Eforturi unitare normale σ_z (daN/cm²)

P15		P16		Diferența P15-P16	
elem	zz	elem	z	valoare	%
4	-318,00	1	-353,00	35	11,00
8	-318,00	2	-353,00	35	11,00
12	-359,00	3	-370,00	11	3,06
16	-360,00	4	-370,00	10	2,77
20	-410,00	5	-396,00	-14	-3,41
24	-412,00	6	-396,00	-16	-3,88
28	-436,00	7	-402,00	-34	-7,79
32	-436,00	8	-405,00	-31	-7,11

In programul 16, elementele 1-8 vor fi următoarele sume :

Elem 1 = elem 1+elem 2+elem 3+elem 4+elem 21+elem 22+elem 23+elem 24

Elem 2 = 5 + 6 + 7 + 8 + 25 + 26 + 27 + 28

Elem 3 = 41 + 42 + 43 + 44 + 61 + 62 + 63 + 64

Elem 4 = 45 + 46 + 47 + 48 + 65 + 66 + 67 + 68

Elem 5 = 81 + 82 + 83 + 84 + 101+102 +103 + 104

Elem 6 = 85 + 86 + 87 + 88 + 105+106 +107 + 108

Elem 7 = 121+122+123+124+141+142+143+144

Elem 8 = 125+126+127+128+145+146+147+148

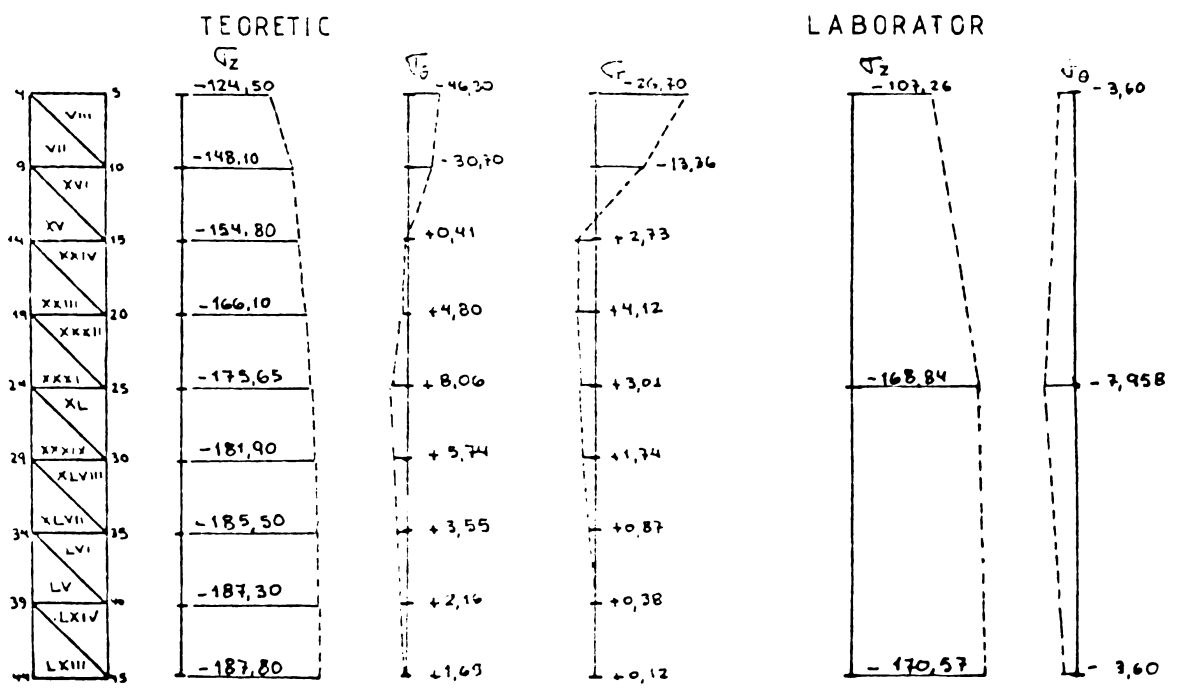
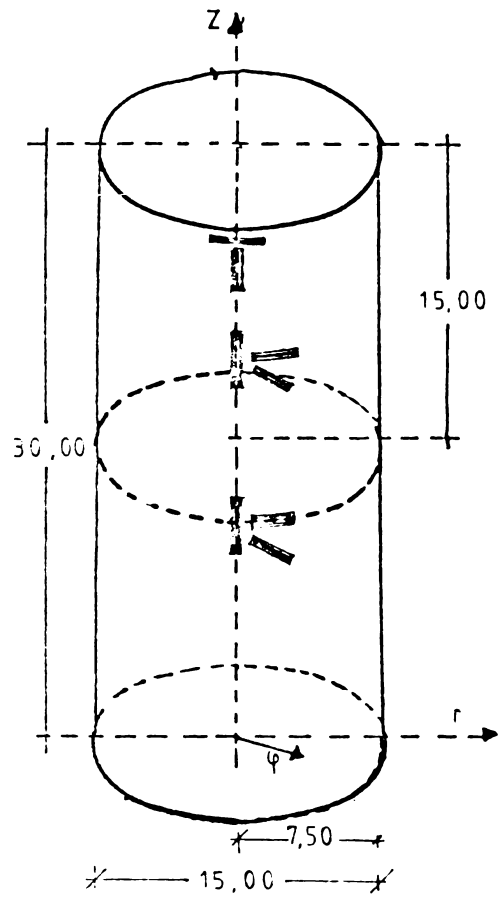
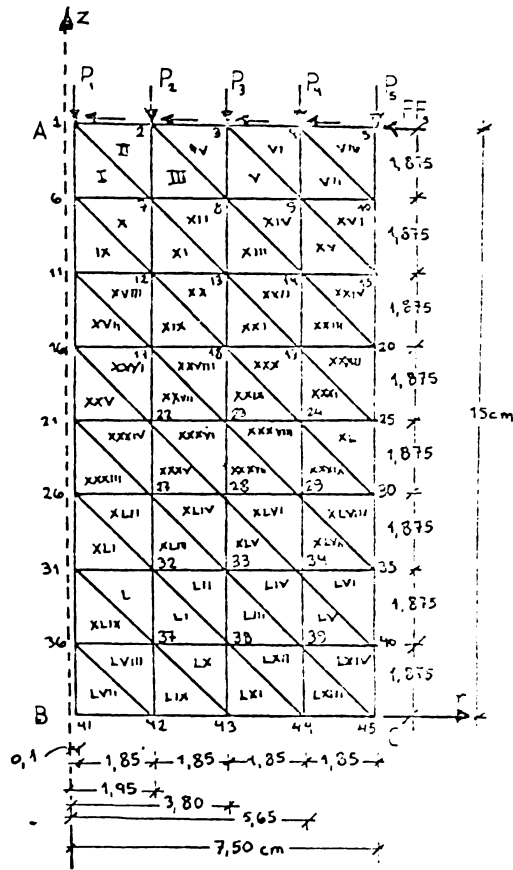
Ultimul program făcut în această lucrare este programul CI EFAFV unde s-a rezolvat cilindrul în a doua ipoteză, adică în noduri, care înainte erau fixe, apare o forță de forfecare. Acest program utilizează metoda elementelor finite axial

simetric triunghiulare, aceleași care s-a folosit în programele CITERAS 1 și 2.

Rezultatele obținute în acest program s-au comparat cu încercările din laborator făcute de doctorand, obținându-se rezultate foarte apropiate.

Încercarea de laborator s-a explicat în capitolul anterior. De aceea acum se prezintă grafic rezultatele obținute pentru cilindru folosind timbrele tensometrice și valorile obținute în program de calcul pentru elemente mai apropiate de mentaua exterioară a cilindrului (fig. 4.1).

CILINDRU SUPUS LA COMPRESIUNE
CENTRICA



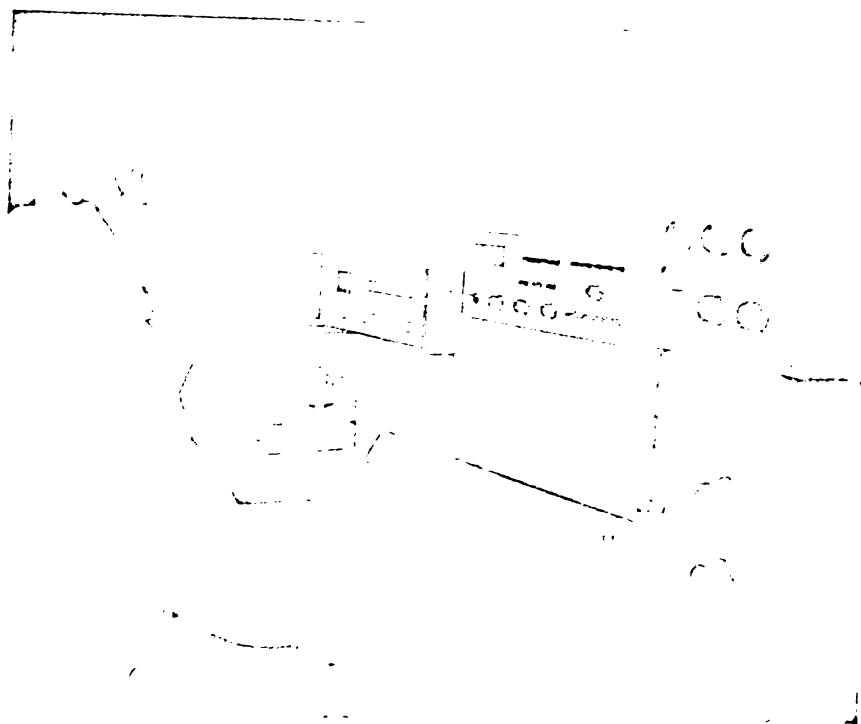


Foto 1.

Aparatura folosită în laborator pentru determinarea eforturilor unitare în epruvetele cilindrice cu ajutorul timbrei tensometrice.

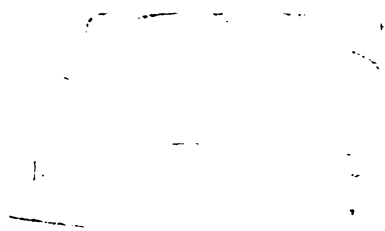
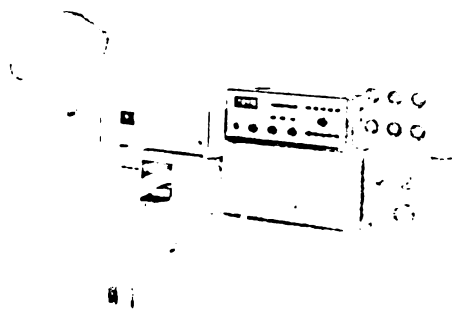


Foto 2.

Aparatura și una din epruvetele încercate în laboratorul catedrei de beton armat.



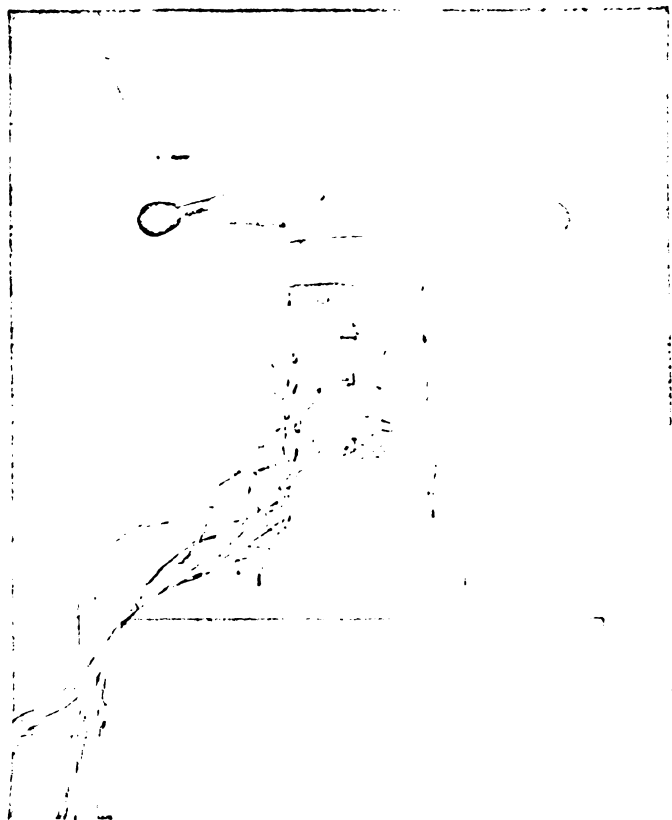
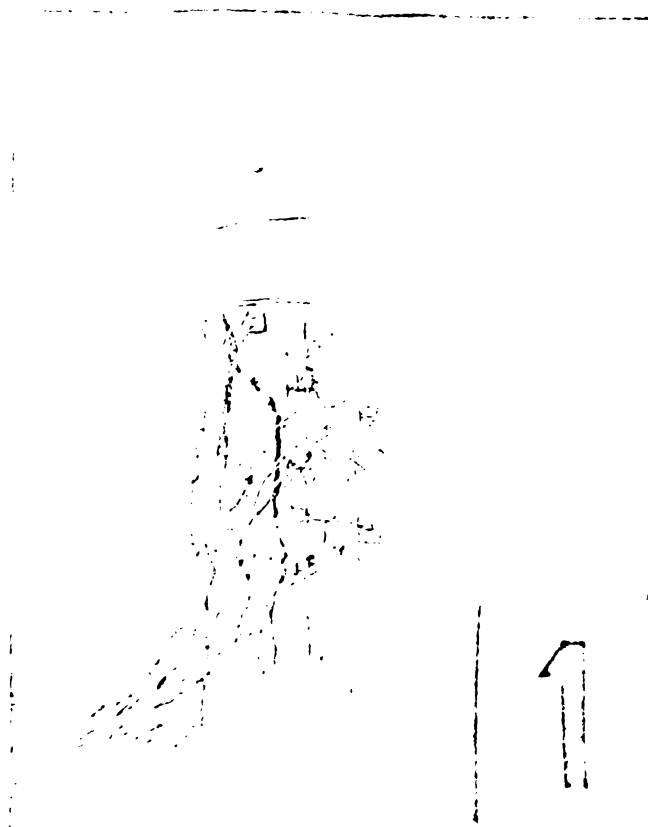


FOTO 3.

Epruveta nr. 0
în timpul încercării

FOTO 4.
Epruveta nr 1
după încercare.



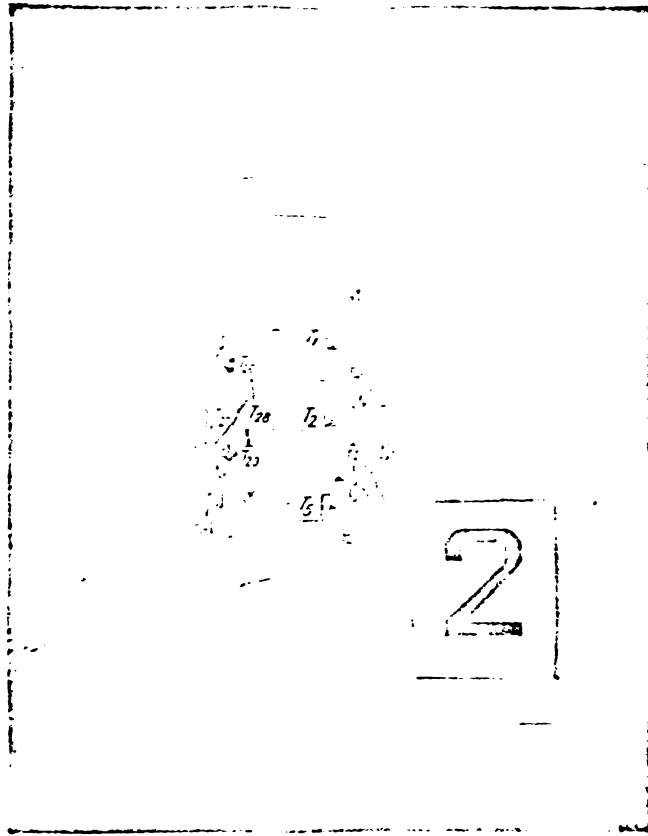


FOTO 5. Epruveta nr. 2.
după ruperea.

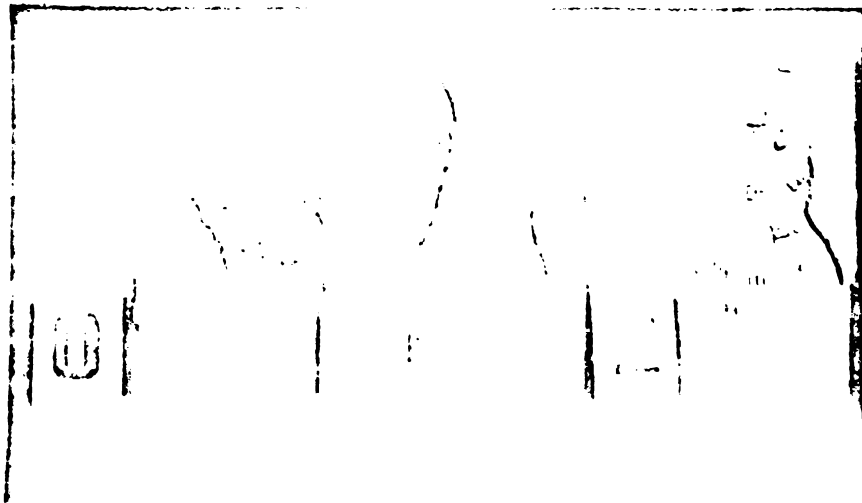




FOTO 7. Doctorandul ing. Juan Alfonso LORÍA URIBE, Prof. emerit ing. Constantin AVRAM conducator științific, Conf. dr. ing. Corneliu BOB după încercarea epruvetei nr. 2.

Capitolul 5

C O N C L U Z I I

5.1. Introducere. Lucrarea reprezintă un studiu de sinteză asupra aplicațiilor metodelor numerice moderne, metoda elementelor finite și teoria echivalențelor, la calculul structurilor masive din beton.

În capitolul I se prezintă o descriere generală a metodei elementelor finite, se dau în detaliu diferite tipuri de elemente finite și caracteristicile lor geometrice, fizice, topologice. Totodată s-a efectuat asamblarea matricii de rigiditate a diferitelor elemente pentru problema plană de elasticitate.

Deasemenea se efectuează analiza tensiunilor din structurile cu simetrie axială, analiză de o considerabilă importanță practică. Formulele prezentate în acest capitol sînt folosite la alcătuirea cîtorva programe pentru metoda elementelor finite.

În partea a doua a acestui capitol se explică caracteristicile principale ale teoriei echivalențelor ; se prezintă deasemenea formulele generale pentru probleme de elasticitate plană și spațială.

5.2. Probleme plane de deformăție. Din rezolvarea structurilor prezentate în capitolul II, secțiune din fundație continuă și zidul de sprijin cu și fără considerarea interacțiunii cu terenul de fundații, putem trage următoarele concluzii :

- Pentru oricare tip de structură masivă (starea plană de deformăție) metoda elementelor finite prezintă mai multe avantaje față de teoria echivalențelor, fiindcă se pot folosi valori prescrise pentru beton.

- Rezultatele obținute cu metoda elementelor finite (eforturi unitare normale, tangențiale și principale) sînt date în program, în timp ce în teoria echivalențelor obținerea eforturilor unitare este complicată.

- Condițiile de margine în metoda elementelor finite sînt mult mai apropiate de realitate.

- Discretizarea structurii în elemente finite se face fără nici un fel de dificultate, în timp ce în teoria echivalențelor cînd structura echivalentă nu este la fel ca cea rea-

lă, apar probleme de tip topologic și de simetrie.

- Oricum ar fi discretizată structura impedimentul principal în teoria echivalențelor este calcularea ariei barelor și clasificarea lor, iar obținerea eforturilor în elementele respective este foarte dificilă.

5.3. Probleme spațiale. Din calculul unei fundații izolate (cap.III) cu cele două metode și folosind același tip de program SAP putem spune că :

- În cazul metodei elementelor finite, discretizarea structurii este ușoară, în timp ce în teoria echivalențelor este dificilă din cauza diagonalelor care apar pe fețele elementelor.

- În teoria echivalențelor, numerotarea barelor și determinarea nodurilor corespunzătoare fiecărei bare este greoaie și durează un timp îndelungat.

Din calculul epruvetei cilindrice folosită la determinarea mărcii betonului se deduc următoarele concluzii privind cele două metode :

În metoda elementelor finite folosirea medelelor axiale simetrice este cea mai eficientă, fiindcă discretizarea structurii este simplă iar rezolvarea structurii nu e afectată de condițiile de margine (blocaje) pe axa de simetrie. La folosirea elementelor finite volumetrice, discretizarea structurii este puțin mai complicată și condițiile de margine prezintă câteva dificultăți.

În teoria echivalențelor structura volumetrică echivalentă a fost discretizată cu dificultate, în ceea ce privește numerotarea barelor, definirea nodurilor, calcularea ariilor barelor etc.

Dacă este vorba de o structură cu mai multe elemente, rularea programului și calcularea eforturilor care apar în fiecare element cere o durată destul de mare.

Încercările de laborator (cap.III) au dovedit că între valorile eforturilor determinate experimental și cele calculate nu există diferențe esențiale.

5.4. Concluzii generale. Din studiul făcut se pot desprinde următoarele concluzii generale privind comparația între cele două metode studiate :

1. Ambele metode au rezultate satisfăcătoare ; metoda

elementelor finite este mai simplu de aplicat, iar rezultatele au o precizie mai mare.

2. Modificarea condițiilor de margine și a valorilor coeficientului lui Poisson influențează mai mult rezultatele obținute în teoria echivalențelor.

3. Topologia structurii pentru teoria echivalențelor este complicată, mai ales când este o structură spațială.

4. Calcularea ariilor barelor și clasificarea tipurilor lor, sînt complicate în teoria echivalențelor, dărează mult timp și aduc mai multe erori.

5.5. Contribuții personale. Programele de calcul folosite la rezolvarea structurilor cu metoda elementelor finite, în afară de programul pentru fundația izolată și pentru cilindru cu modelul volumetric, au fost întocmite de autor.

În lucrarea se aduc contribuții importante la folosirea paralelă a celor două metode, din care una foarte puțin cunoscută și folosită, analizîndu-se comparativ avantajele și dezavantajele acestora, în cazul structurilor masive din beton.

Pentru prima dată în literatura de specialitate se studiază starea de tensiuni și deformații în epruveta cilindrică de beton supusă la compresiune centrică, care tinde să fie generalizată în lumea întreagă ca epruvetă pentru determinarea rezistențelor betonului la compresiune întindere și a modulului de elasticitate.

Rezultatele calculelor analitice au fost confirmate de încercările de laborator.

- BIBLIOGRAFIE -

- 1.- ABSI E. - Théorie des équivalences. Application au Génie Civil. Centre expérimental de Recherches et d'études du Batiment et de Travaux Publics (C.E.B.T.P.) Paris. 1972.
- 2.- ABSI E. - La théorie des équivalences et son application a l'étude des ouvrages d'art. Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. Supplement au No- 28 octobre 1972.
- 3.- ABSI E., PHAUGH W. - A comparison of equivalences and Finite element Methods, Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.6, No 1, July 1975.
- 4.- ABSI E. - Diferențe finite - Elemente finite et équivalences dans le cas de l'élasticité linéaire. Communication au Colloque Franco-Bresilien d'Analyse Numérique du 10-13/8/1976 a Rio de Janeiro.
- 5.- ABSI E. - Méthodes de calcul numérique en élasticité. Editions Eyrolles. Paris 1978.
- 6.- ANDREI S., ANTONESCU I. - Geotehnică și fundații. vol. II. Institutul de construcții București. Facultatea de Hidrotehnică. Catedra de Geotehnică și fundații. București 1981.
- 7.- AVRAM Constantin - Cours de beton armat, părțile I și II, Timișoara Litografia Învățământului 1955 și 1957.
- 8.- AVRAM Constantin, FILIPON Ion - Cours de beton armat. Partie a III-a. Elemente de construcții din beton slab armat în construcții masive. Editura de Ștate Didactică și Pedagogică. București 1962.
- 9.- AVRAM Constantin, ANASTASESCU Decibel - Structuri spațiale. Editura Academiei Republicii Socialiste România. București 1978.
- 10.-AVRAM C., PACAGIURU I., MIRSU O, - Rezistențele și deformările betonului. Editura Tehnică. București 1971.
- 11.-AVRAM C., FRIEDRICH R., STOIAN V. - Metode de discretizare în problema plană a teoriei elasticității.

- Memoriile secțiilor științifice, seria IV, Tomul II 1979. Editura Academiei Republicii Socialiste România.
- 12.- AVRAM C., FĂCĂCĂRU I., MÎRSU C. și alții - Concrete strength and strains. A Lsevier Amsterdam 1981.
 - 13.- AVRAM C., BOB C., - Noi tipuri de betoane speciale. Editura tehnică. București 1981.
 - 14.- AVRAM C., DRUȘCĂ I., - Proiectarea economică a elementelor de construcții din beton armat. Editura Eccla. Timișoara 1979.
 - 15.- AVRAM C., FILIBAN I., - Curs de beton armat. Vol. I și II. Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara 1976.
 - 16.- BRĂNES Aurel, MIRALĂSCU C., MIRALĂSCU C., - Calculul construcțiilor amplasate pe terenuri deformabile. Editura Academiei Republicii Socialiste România. București 1977.
 - 17.- BRZUNOV N.I., - Teoria elasticității și plasticității. Editura Tehnică. București 1957.
 - 18.- BOB Cornelia - Incercarea construcțiilor. Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara. Facultatea de construcții. Catedra de Beton armat și Clădiri. Timișoara 1981.
 - 19.- BOB Cornelia, VĂLICA Paraschiva - Materiale de construcții. Editura Didactică și Pedagogică. București 1978.
 - 20.- BRĂBIA C.A., FERRANTE A.J., - The Finite Element Technique. editura de Urgență. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre - 1975.
 - 21.- Buletinul construcțiilor. Institutul Central de Cercetare, Proiectare și Directivare în Construcții. (INCERC). Volumul 3. București 1978.
 - 22.- CARATINA Dan - Calculatorul în ajutorul proiectării. Editura Tehnică. București.
 - 23.- CARUOT Albert - Elasticité, théorie des équivalences. Examen de quelques éléments types. C.R.Acad. Sc.Paris, 271, p.851-854. Serie A.
 - 24.- CARACOSTEA D. - Manual pentru calculul construcțiilor. Editura Tehnică. București 1977.

- 25.- CASTILLO Heberto - Analisis y diseno estructural. Representaciones y servicios de ingenieria, S.A. México 1973.
- 26.- CRETU G., LUPSA C. - Programarea la calculatorul FXLIX C-256. Editura Tehnică. București 1973.
- 27.- CUTEANU Eugen, MARINOV Radu. "Metoda elementelor finite in proiectarea structurilor. Editura Facult. Timișoara 1980.
- 28.- DEUTSCH Iosif - Rezistența materialelor. Editura Didactică și Pedagogică. București 1979.
- 29.- DIMO Petre. Programarea în Fortran. Editura Didactică și Pedagogică. București 1971.
- 30.- DORN W.S., MCCracken D. - Metode numerice cu programe în Fortran IV. (Traducere din limba engleză). Editura Tehnică. București 1975.
- 31.- DALDAIRY Antoine. - Theorie des equivalences en élasticité linéaire plane. These de docteur. Faculte des Sciences de Paris. Paris 1971.
- 32.- FRIEDRICH Richard - Bazele metodei elementelor finite. Curs postuniversitar, construcții speciale de beton armat. Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara. Facultatea de Construcții. Timișoara 1972.
- 33.- GARE James, WEAVER William - Análisis de estructuras reticulares. Compania Editorial Continental, S.A. México 1976.
- 34.- GHEORGHIU Alexandru - Statica construcțiilor. Vol.III. Editura Tehnică. București 1980.
- 35.- GHEORGHIU Alexandra - Concepții moderne în calculul structurilor. Editura Tehnică București 1976.
- 36.- GIRMANN Karl - Flächentragwerke. Wien Springer - Verlag 1954.
- 37.- HONEYWELL Bull, WAR IER J.D. - Instruire în programare (Traducere din limba franceză). Editura Tehnică. București 1973.
- 38.- HORBA Lendi - Metode matriceale în mecanica structurilor. Editura Tehnică, București.
- 39.- IRONS Bruce - Techniques of finite elements. Department of Civil Engineering. University of Calgary.

Ellis Horwood Limited Publishers.

- 40.- **WHR Hugo** - Fundații exemple de calcul. Editura Tehnică București 1967.
- 41.- **LUTHE GARCIA Rodolfo** - Análisis estructural. Representaciones y servicios de ingeniería, S.A. México 1976.
- 42.- **LOREI Nestor** - Curs de geologie tehnică. Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara. Facultatea de Construcții. Timișoara 1967.
- 43.- **MANOLIU Iacint** - Fundații și procedee de fundare. Curs pentru suvingineri. Editura Didactică și Pedagogică. București.
- 44.- **MASSENET Ch., DEMREZ G., MAJUDI R. și alții** - Calculul structurilor la calculatoare electronice. (Traducere din limba franceză). Editura Tehnică. București. 1974
- 45.- **MIRSU Ovidiu, FRIEDRICH Richard** - Construcții din beton armat. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1980.
46. **MIRSU Ovidiu, FRIEDRICH Richard** - Construcții speciale de beton armat. Institutul Politehnic Timișoara. Facultatea de Construcții. Catedra de Beton armat și Clădiri. Timișoara 1969.
- 47.- **MOCANU D.R.** - Analiza experimentală a tensiunilor. Vol. I și II. Editura Tehnică București.
- 48.- **MUNTEANU Ioan** - Calculul structurilor spațiale în formulare matricială. Editura Facla. Timișoara 1973.
- 49.- **MUNTEANU Ioan** - Calculul static al structurilor. Editura Facla 1976.
- 50.- **MUNTEANU Ioan, CARABA Ioan** - Calculul practic al structurilor de construcții. Editura Facla. Timișoara 1980.
- 51.- **MUNTEANU Mircea** - Aplicarea pe calculator a metodei elementelor finite. Topografia Universității Brașov 1979.
- 52.- **NEVILLE Adam** - Proprietățile betonului. (Traducere din limba engleză). Editura Tehnică. București 1979.

- 53.- NGUYEN Manh Yen - Contribuții la calculul structurilor din plăci de beton armat prin metoda elementelor finite și teoria echivalențelor. Teza de doctora. Institutul Politehnic "Traian Vuia". Facultatea de Construcții. Catedra de Beton armat și Clădiri. Timișoara 1979.
- 54.- NICOLAU V. - Betonul armat. Editura Tehnică. București 1962.
- 55.- NORRIS Douglas, DE VRIES Gerard - The Finite Element Method. Academic Press. New York 1973.
- 56.- OLTEANU N., PIRVU Gh. - Metode de discretizare a continuului în vederea rezolvării diferitelor tipuri de probleme de mecanică, III. C.N.S.T.I.N.I.D. 1972.
- 57.- PAUNELCU M., IZDRILA V. - Seotehnica și Fundații. exemple de calcul și proiectare. Institutul Politehnic Timișoara. Facultatea de Construcții. 1970.
- 58.- LAURIESCU Marin, HAIDA Virgil, GRUIA Agneta - Fundații. Curs pentru subingineri. Editura didactică și Pedagogică.
- 59.- PETRUS Octavian - Programarea în Fortran. Editura Junimea. Iași 1960.
- 60.- POP S., TOLOGEA S. - Indrumătorul constructorului. Editura Tehnică. București 1965.
- 61.- PRECUPANU Dan - Teoria elasticității. Institutul Politehnic Iași. Facultatea de Construcții. Iași 1980.
- 62.- ROBINSON John - Integrated Theory of Finite Element Methods. John Wiley and Sons. New York. Copyright 1973.
- 63.- ROCHEY K.C., EVANS H.K. - The Finite Element Method. Grosby Lockwood Staples. Granada Publishing 1980.
- 64.- RONDRONUX Jean - Application de la theorie des equivalences au calcul des pieces de mecanique. These de docteur. Universite Pierre et Marie Curie. Paris 1976.

- 65.- ROSCA Nicolae - Contribuții la calculul și dimensionarea sistemului Bajosier - medier al ecluzelor cu goluri pentru alimentare. Teza de doctorat. Institutul de construcții București. Facultatea de construcții hidrotehnice. București 1980.
- 66.- RUSU Gheorghe - Tehnica măsurătorilor în construcțiile masive. Editura Academiei Republicii Populare Române. 1958.
- 67.- SALAMEN Salameh - Theorie des equivalences et methode des elements finis. These de docteur. Universitate Pierre et Marie Curie. Paris 1975.
- 68.- STANCOULESCU I., APANARIU G. - Calculul eforturilor și deformațiilor în masivele de pământ în jurul excavațiilor deschise cu metoda elementului finit. A III-a conferință de Geotehnică și fundații. Probleme actuale în proiectarea și execuția fundațiilor și lucrărilor de pământ. Timișoara 1975.
- 69.- STREBUTIU Dan - Calculul structurilor hidrotehnice, analiza statică prin metoda elementului finit. Institutul de construcții București. Facultatea de construcții hidrotehnice. București 1977.
- 70.- STOIAN Valeriu - Utilizarea metodei elementelor finite la calculul structurilor cu diafragme. Referat documentar. Institutul Politehnic Traian Vuia Timișoara. Căminul de beton armat și clădiri. Timișoara 1975.
- 71.- STOIAN V. - Utilizarea teoriei echivalențelor la calculul structurilor cu elemente plane. Buletinul științific și tehnic al Institutului Politehnic "Traian Vuia" Timișoara. Tomo 23 (37) Fascicula 2. 1978.
- 72.- STEFANESCU-GOANGA Aurel - Determinarea rezistenței betonului prin metode nedistructive. Exemple de calcul. Editura Tehnică București.
- 73.- TROBORDESCU P.P., ILIE P. - Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile vol. I și II. Editura Dacia. Cluj-Napoca 1979.

- 74.- **TRTEBA Igor, ONET Traian și alții - Proiectarea betonului armat. Editura Didactică și Pedagogică. Ediția a doua 1977.**
- 75.- **TRTEBA Igor, ONET Traian - Verificarea calității construcțiilor de beton armat și beton precomprimat. Editura Decis. Cluj-Napoca 1979.**
- 76.- **TIMOSHENKO S.P., GOODIER J.N. - Theory of elasticity. New York, McGraw-Hill Book Co. 1951.**
- 77.- **TIMOSHENKO S.P. - GURIN J. - Theorie of elastic Stability McGraw-Hill Book Co. Inc. New York 1961.**
- 78.- **VACARUSCU Daniela - Contribuții la calculul în funcție de conformarea constructivă a guseelor, folosind metoda elementelor finite. Teza de doctorat. Cond.șt.acad. Dan Mateescu. Timișoara 1981.**
- 79.- **VERES Alexandru - Construcții. Partea I (fundații, hidroizolații). Institutul Politehnic "Gh. Asachi". Facultatea de construcții. Iași 1976.**
- 80.- **ZILBERSTEIN O.C. - The Finite Element Method in structural and continuum Mechanics. McGraw-Hill, New York 1971.**
- 81.- **ZILBERSTEIN O.C. - Introductory lectures on the Finite Element Method. Course held at the Department of Mechanics of solids. London 1962.**