INSTITUTUL POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

ing. COLTEU ADRIAN

PROPRIETATI ALE LICHIDELOR MAGNETICE IN CIMPURI ELECTROMAGNETICE STATIONARE.

T E Z A D E D O C T O R A T

Conducător ştiinţific
Prof.dr.ing. DE SABATA IOAN

- 1 9 8 0 -

C U P R I N S

INTRODUCERE

Apărute relativ recent în tehnica mondială, lichidele magnetice se caracterizează prin faptul că au permeabilitatea magnetică de ordinul unităţilor sau chiar a zecilor, asupra lor exercitîndu-se forţe atunci cînd sînt plasate în cîmpuri magnetice exterioare. Aceste lichide sînt suspensii coloidale de particule magnetice în diferite lichide de bază (apă, siliconi, fluorocarburi, esteri etc) funcţie de domeniul de utilizare.

Studiul teoretic al comportării lichidelor magnetice este deosebit de important avînd în vedere multiplele aplicaţii tehnice ale acestora.

In teza de doctorat autorul şi-a propus să aducă unele contribuţii la studiul comportării lichidelor magnetice aflate în cîmpuri electrice şi magnetice.

Problemele studiate în teza de doctorat sînt cuprinse în 4 capitole, primul avînd caracter introductiv.

In cap.2 se dezvoltă într-un mod original teoria proprietăţilor de material ale lichidelor magnetice, punînd în evidenţă efecte noi, neîntîlnite la alte materiale şi anume: influenţarea permitivităţii electrice cu ajutorul unui cîmp magnetic, obţinînd relaţii de forma $P = P(E; H)$ şi de asemenea dependenţa permeabilităţii magnetice de intensitatea cîmpului magnetic şi a cîmpului electric, adică $\mu = \mu(H; E)$.

Se prezintă apoi o metodă originală de măsurare a permeabilităţii lichidelor magnetice bazată pe comportarea corpurilor neliniare de formă particulară aflate în cîmp magnetic exterior omogen.

In capitolul 3 se deduce expresia densităţii de volum a forţei ce se exercită asupra lichidelor neliniare introduse în cîmp exterior, precum şi a densităţii forţelor ce se exercită la suprafaţa de separaţie dintre medii fluide neliniare, atunci cînd sînt plasate în cîmp electromagnetic, suprafaţa parcursă de curenţi superficiali de conducţie şi avînd sarcină liberă pe ea. Se tratează apoi în mod unitar problema cîmpurilor electrocinetice repartizate pe suprafeţe.

In ultimul capitol se face un studiu al lichidelor magnetice în regim static, determinînd presiunea în puncte din interiorul acestora, atunci cînd sînt plasate în cîmpuri magnetice exterioare.

Rezultatele obţinute în acest capitol sînt folosite apoi la elaborarea unor metode de măsurare a curenţilor continui intenşi precum şi la explicarea levitaţiei magnetice.

x

x x

Doresc să aduc cele mai respectuoase mulţumiri profesorului De Sabata Ioan căruia îi datorez întreaga mea formare profesională şi care m-a sprijinit şi îndrumat cu generozitate la elaborarea acestei lucrări.

Mulţumesc de asemenea prof. Alain Maiffert - Franţa, pentru iniţierea în domeniul lichidelor magnetice.

In numeroase rînduri am purtat fructuoase discuţii cu membrii colectivului catedrei de Bazele electrotehnicii şi cu grupul de cercetare de la catedra M.H.

Tuturor - calde mulţumiri.

CAPITOLUL 1

LICHIDE MAGNETICE

In acest capitol introductiv se prezintă unele aspecte generale în legătură cu lichidele magnetice, metodele cele mai obişnuite de preparare precum şi unele dintre aplicaţiile tehnice ale acestora. Se face o scurtă referire la rezultatele mai importante obţinute în ţara noastră în studiul lichidelor magnetice.

1.1. Consideraţii generale

Susceptivitatea magnetică a materialelor folosite pînă acum cîţiva ani în tehnică este cuprinsă într-un domeniu larg, avînd însă valori extreme, fie foarte mari pînă la 10^6 (supermaloy) fie valori foarte mici, de ordinul 10^{-6} pentru materiale ca aluminiu, cupru etc. Nu existau materiale care să aibă susceptivitatea magnetică cuprinse între aceste valori extreme.

In ultima perioadă au apărut în tehnică lichide cu proprietăţi magnetice, avînd susceptivitatea magnetică de ordinul unităţilor sau chiar al zecilor [1, 2, 3, ..] Aceste lichide sînt suspensii coloidale de particule magnetice într-un lichid de bază care poate diferi de la un lichid la altul, în funcţie de domeniul de utilizare.

Existenţa suspensiilor coloidale obişnuite, în care particule fine de greutate specifică sensibil mai mare decît a lichidului de bază, pot rămîne în suspensie un timp nedefinit se explică printr-un mecanism datorat mişcării browniene a particulelor. Dacă particulele sînt însă magnetice, atunci există între ele o atracţie care duce la formarea de aglomerări de particule, şi în cele din urmă la separarea particulelor solide de faza lichidă.

Un calcul simplu arată că energia de atracţie magnetică este direct proporţională cu volumul V al particulelor. Prin urmare, micşorînd tot mai mult diametrul particulelor magnetice suspendate, energia magnetică de interacţiune poate fi redusă la valori mai mici, decît energia agitaţiei termice kT, şi deci se poate ajunge la valori ale diametrului particulelor la care agitaţia termică să prevină formarea de aglomerări de particule. Aceste valori ale diametrului particulelor sînt cuprinse între 25 - loo Å. La aceste dimensiuni mici ale particulelor mai apar însă şi forţe de atracţie de tip London care sînt invers proporţionale cu puterea a 6-a a distanţei dintre aprticule. Cînd suprafeţele a două particule sferice se apropie mai mult decît la o distanţă de o rază de particulă, aceste forţe devin importante şi produc aglomerări de particule.

In concluzie, pentru a preveni formarea aglomerărilor de particule trebuie impiedicată apropierea particulelor la distanţe prea mici. In cazul lichidelor magnetice acest deziderat a fost realizat prin acoperirea particulelor cu un strat de molecule adsorbante, dizolvînd un agent tensioactiv în lichidul de bază.

Stratul adsorbit pe suprafaţa particulelor se comportă ca o peliculă elastică care împiedică apropierea nelimitată a particulelor, substanţa tensioactivă avînd deci rolul de stabilizator. Aceste suspensii coloidale se comportă ca un lichid omogen şi prezintă avantajul de a avea o susceptivitate magnetică considerabilă, care le face să interacţioneze cu cîmpuri magnetice. Forţa magnetică exercitată asupra acestor lichide se datoreşte prezenţei particulelor magnetice în suspensie, avînd densitatea de ordinul 10^{17} particule pe cm^3.

Deoarece aceste particule au dimensiuni ceva mai mici decît cea a domeniilor Weiss, fiecare constituie un magnet permanent,individual, Sub influenţa unui cîmp magnetic ele se orientează după direcţia cîmpului, iar dacă există un gradient al cîmpului, particulele se vor deplasa, antrenînd întreg volumul de lichid. Această proprietate a suspensiilor coloidale magnetice le face deosebit de utile în aplicaţii.

1.2. Metode de preparare

Metodele de preparare a lichidelor magnetice sînt legate de metodele de obţinere a particulelor magnetice de dimensiuni mici care trebuie dispersate într-un lichid de bază şi stabilizate.

a) Metoda mecanică de dispersare

Această metodă constă în introducerea unui amestec compus din pulbere magnetică (Fe, Cr, Ni, Fe_3O_4), lichid de bază şi agent stabilizant într-o moară de oţel cu bile. Moara de o construcţie specială, are o formă cilindrică şi este încărcată cu 3 kg bile de oţel inoxidabil cu diametrul în jur de 12 mm. Ea se roteşte cu 48 rot/min timp de cîteva zile, scoţîndu-se soluţia coloidală şi decantîndu-se, Se adaugă din nou la partea de material magnetic decantat lichid de bază şi agent stabilizant şi se reîncepe operaţia de măcinare. Procesul se repetă prin separarea de fiecare dată a suspensiei coloidale stabile, pînă ce cantitatea de magnetită rămasă în cupă nu mai oferă eficienţă pentru măcinare. Această metodă (metoda Papell) de obţinere a ferofluidelor necesită un timp lung de măcinare, de cele mai multe ori depăşind looo ore.

Măcinarea particulelor feromagnetice este dificilă, în special datorită forţelor dintre particule, Această interacţiune, de natură magnetică, se suprapune peste obişnuita interacţiune moleculară cauzată de forţele Van der Waals.

S.E.Khalafalla şi G.W.Reimers au stabilit că timpul de măcinare necesar pentru a prepara un ferofluid poate fi redus foarte mult prin utilizarea potrivită a unor compuşi precursori nemagnetici. Compusul precursor nemagnetic, de preferinţă un suboxid de fier, este măcinat la dimensiuni coloidale şi dispersat într-un lichid de bază, fiind apoi transformat în forma feromagnetică chiar în suspensie, obţinîndu-se astfel un lichid magnetic stabil.

Această tehnică reduce timpul de măcinare necesar pentru a produce suspensii coloidale magnetice stabile la mai puţin de 5% din timpul necesar prin măcinarea directă a materialului feromagnetic.

b) Metoda electrocondensării

Această metodă constă în trecerea unui curent continuu prin doi electrozi formaţi din metalul care se dispersează, scufundaţi în lichidul de bază al suspensiei, astfel încît între electrozi să se formeze un arc electric continuu, la o densitate mare de curent. Arcul electric se obţine prin depărtarea treptată a electrozilor care la începutul procesului erau în contact direct. Dispersarea are loc prin acţiunea mecanică a arcului electric asupra catodului, acesta fiind singurul electrod care se consumă, generînd particulele dispersate. Această metodă are şi alte variante cum ar fi înlocuirea electrozilor confecţionaţi anterior din metalul care urma să fie dispersat, cu electrozi din Fe sau Al şi introducerea metalului care urmează a fi dispersat sub formă de granule sau şpan pe fundul vasului de electroliză. De asemenea curentul continuu poate fi înlocuit cu curent alternativ, de frecvenţă mai înaltă realizat cu un inductor special de alimentare.[7, 8]

c) Metoda descompunerii termice [9]

Această metodă constă în descompunerea termică a dicobalt octacarbonilului, dizolvat într-o hidrocarbură, solvent al unui polimer bine ales, conţinut în soluţie. Prin variaţia concentraţiei reactivului, a compoziţiei materialului polimeric şi a temperaturii, se poate varia mărimea medie a particulelor de la 1o Å pînă la 1ooo Å.

Hess şi Parker [1o] au făcut un studiu aprofundat al polimerilor şi solvenţilor pentru obţinerea soluţiilor coloidale stabilizate de cobalt, studiind şi proprietăţile magnetice ale acestor soluţii coloidale.

d) Metoda precipitării chimice.

Pentru obţinerea unei dispersii de magnetită se poate urma calea precipitării chimice propusă de Elmore în 1938.

Aceasta constă în precipitarea magnetitei din soluţii de săruri bi şi trivalente de fier prin acţiunea hidroxidului de sodiu în exces. In literatură se dau reţete pentru obţinerea lichidelor magnetice prin această metodă [11].

Avînd în vedere posibilităţile largi de aplicabilitate ale lichidelor magnetice în cele mai diverse ramuri ale tehnicii au apărut firme industriale specializate în producerea pe scară industrială a lichidelor magnetice (ex.: Ferrofluidics Corporation din S.U.A.).

Alegerea lichidului de bază se face în funcţie de natura condiţiilor în care suspensia magnetică va fi utilizată. Astfel suspensiile pe bază de fluorocarbon sînt chimic inerte şi pot fi folosite în medii agresive ; cele pe bază de polifenilelor, au presiune de vapori extrem de mică şi rezistă la radiaţii, iar cele pe bază de diesteri au vîscozitate redusă. Suspensiile pe bază de esteri pot lucra la temperaturi joase (-5o^{o}C).

1.3. Aplicaţii tehnice ale lichidelor magnetice

Preparate pentru prima dată în anul 1960, în cadrul cercetărilor de tehnologie spaţială pentru a pune la punct un sistem de curgere controlată a combustibililor fluizi în condiţii de imponderabilitate, lichidele magnetice sînt astăzi comercializate într-o bogată varietate de produse.

Cercetările tehnologice au în vedere realizarea unor suspensii ultrastabile de particule solide magnetice într-o gamă largă de lichide de bază, satisfăcîndu-se astfel cerinţele diverselor aplicaţii în ceea ce priveşte proprietăţile fizico-chimice ale lichidelor magnetice utilizate. Din punct de vedere mecanic şi chimic lichidere magnetice păstrează caracteristicile lichidelor de bază. Deoarece ele sînt ultracentrifugate în timpul preparării, pot suporta acceleraţii enorme fără să devină instabile. Din punct de vedere electric, lichidele magnetice păstrează caracteristicile lichidelor de bază, neconductoare pentru lichide de bază cum sînt hidrocarburile, fluorocarburile, esterii, diesterii, apa, şi conductoare pentru lichide de bază cum sînt mercurul, aliajele de galiu şi alte metale lichide.

/

Lichidele magnetice răspund aproape instantaneu la aplicarea unui cîmp magnetic prin curgere, repoziţionare sau modificarea distribuţiei presiunilor interne. Aceste manifestări sînt exploatate pentru soluţionarea unor serii de probleme tehnice. Majoritatea aplicaţiilor curente ale lichidelor magnetice se bazează pe posibilitatea de a le poziţiona şi controla magnetic.

1.3.1. Etanşare cu lichide magnetice

Una dintre aplicaţiile importante ale lichidelor magnetice o constituie etamşarea dinamică. Se ştie că dacă un dispozitiv de etanşare utilizează drept garnitură o nervură lichidă, rezultatul este o aderenţă perfectă atît la suprafeţele în mişcare cît şi la cele staţionare. Nu mai este necesară o finisare superioară a suprafeţelor, iar excentricităţile, inclusiv cele datorate încovoierilor nu mai sînt critice. Ideea a stat la baza etanşoarelor centrifugale în care un fluid esteacţionat de către forţe centrifuge pentru a se poziţiona între suprafeţele mobile şi cele statice. Aceste etanşoare sînt utilizabile peste un anumit nivel al vitezei de rotaţie, sub care apar curgeri ale fluidului de lucru şi scăpări în zona de etanşat.

Lichidele magnetice oferă posibilitatea înlocuirii forţelor centrifuge din etanşoarele centrifugale cu forţe magnetice. In etanşoarele cu lichide magnetice, etanşarea este perfectă independent de viteza de rotaţie a pieselor mobile. In figura 1 se prezintă două configuraţii de bază ale etanşorului cu lichid magnetic.

In mod practic etanşorul cu lichid magnetic este alcătuit dintr-un ansamblu de trepte etanşoare, fiecare fiind capabilă de a rezista la o diferenţă de presiune de cîteva atmosfere. Cînd presiunea maximă suportată de o treaptă este depăşită, undeva pe circumferinţa acesteia se produce o spargere, un orificiu prin care se presurizează treapta imediat vecină. Spargerea nu are efect de pulverizare a treptei, lichidul magnetic fiind în continuare reţinut de către cîmpul magnetic, astfel că după înlăturarea suprapresiunii, treapta se autoformează.

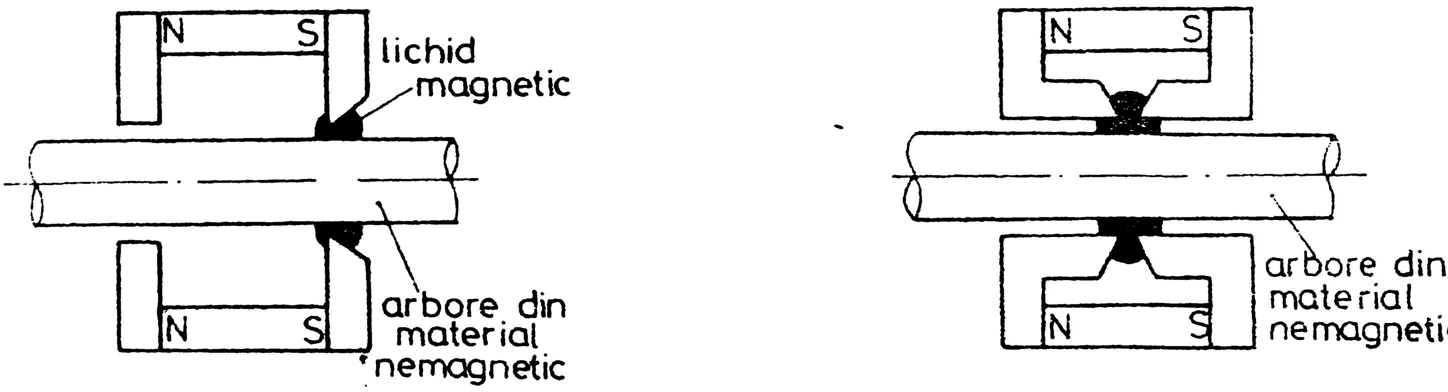


Fig.1

1.3.2. Lagăre cu lichid magnetic

Construcţia de lagăre şi tehnica lubrifierii exploatează posibilitatea poziţionării lichidelor magnetice în cîmpuri de structură potrivită. Completa izolare fluidică a axului face ca cuplul de frînare să fie complet vîscos şi independent de sarcină. Un astfel de lagăr îşi găseşte aplicaţii în instalaţiile care necesită izolare electrică, acustică şi de vibraţii. Cu toate că aceste concepţii sînt noi şi interesante ele oferă capacităţi joase de suportare a sarcinilor.

Funcţia de lubrifiere a lichidelor magnetice a fost făcută posibilă odată cu realizarea de suspensii magnetice ultrastabile în mai multe sortimente de uleiuri. In cadrul lucrărilor de testare a oncozităţii şi uzurii s-a constatat echivalenţa lichidului magnetic cu lichidul de bază. Menţinerea gradului de uzură se datoreşte în primul rînd, dimensiunilor foarte mici ale particulelor suspendate şi în al doilea rînd reducerii uzurii prin menţinerea pe cale magnetică a ferolubrifianţilor exact în punctele de contact ale pieselor în mişcare relativă. In literatură se prezintă pe larg problema etanşării şi a lubrifierii cu lichide magnetice [12...21]

Printre alte aplicații care exploatează capacitatea de poziționare a lichidelor magnetice, tratate în literatură se întîlnesc : comutatoare electrice fără uzură, pistonul ferofluidic, supape și valve ferofluidice etc.

1.3.3. Conversia energiei termice în energie mecanică

In fig.2 se prezintă schema de principiu a unui altfel de convertor.

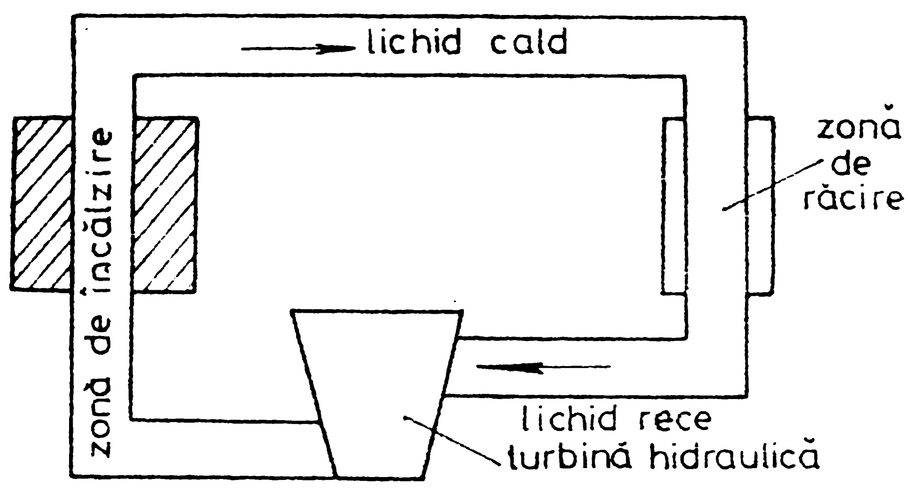


Fig.2

Dacă în interiorul zonei de cîmp magnetic lichidul e încălzit pînă în apropierea temperaturii Curie, apare o diferență de presiune între capetele zonei de cîmp magnetic, care produce o mișcare a lichidului magnetic, fiind posibilă acționarea unei turbine hidraulice.

Utilizînd cîmpuri magnetice foarte intense și lichide magnetice pe bază de fier, randamentul unui asemenea generator poate fi apropiat de randamentul limită (Carnot).

In perioada de timp care a trecut de la primele experiențe ale lui Loskowitz și Rosensweig (1967) problema rotirii lichidelor magnetice a fost relativ mult cercetată, detorită multiplelor posibilităţi de aplicare în fluidică ("dioda cu vîrtej", "trioda cu vîrtej", etc) şi în alte domenii.

Se preconizează şi utilizarea giroscoapelor magnetofluidice pentru stabilizare în tehnica navală, aeronautică şi spaţială.

In medicină lichidele magnetice pot fi folosite pentru tratarea aneurismelor. In literatură se prezintă numeroase alte aplicaţii ale lichidelor magnetice [22 ... 31].

1.4. Vîscozitatea lichidelor magnetice

Inainte de a trece la studiul teoretic al comportării ferofluidelor în cîmp magnetic şi electric, se vor face cîteva referiri la vîscozitatea fluidelor magnetice.

Vîscozitatea suspensiei coloidale η se poate calcula în absenţa unui cîmp magnetic exterior cu ajutorul formulei lui Einstein :

$$\eta = \eta_0(1 + \frac{5}{2}\varphi)$$

η_0 fiind vîscozitatea fluidului de bază, iar φ volumul total al particulelor dispersate în unitatea de volum.

Un efect interesant se observă în cazul suspensiilor magnetice aflate sub influenţa unui cîmp magnetic exterior. După cum se arată în literatură [35, 44, 45] vîscozitatea lichidelor magnetice creşte în cîmp magnetic, depinzînd şi de orientarea cîmpului magnetic faţă de direcţia curgerii. Creşterea datorită cîmpului magnetic e mai mare, dacă cîmpul magnetic e orientat paralel cu direcţia curgerii, faţă de situaţia cînd e perpendicular pe aceasta.

In [46] sînt date rezultate privind influenţa unui cîmp magnetic paralel cu direcţia curgerii, în cazul unor suspensii coloidale de magnetită, avînd proprietăţile de bază date în tabelul de mai jos.

Notăm cu $\eta(\parallel)$ vîscozitatea suspensiei în cîmp magnetic longitudinal. In cazul lichidului I raportul $\eta(\parallel)/\eta$

ajunge chiar pînă la 3 deja la $H = 36 \cdot 10^3$ A/m.

Nr.	Lichid de bază	ρ_l g/cm^3	ρ	d(A)	χ_i	M_s A/m	η_0	η (N.s.m^{-2})
I	Ulei mineral	0,88	-	-	0,86	$33{,}5 \cdot 10^3$	$122 \cdot 10^{-3}$	$5610 \cdot 10^{-3}$
II	Kerosen	0,78	0,90	136	0,37	$8{,}2 \cdot 10^3$	$2{,}2 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9 \cdot 10^{-3}$
III	Fluoro-carbon	1,73	1,81	100	0,19	$7 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
IV	Fluoro-carbon	1,73	1,82	72	0,09	$6{,}6 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$

In cazul lichidului II raportul $\frac{\eta(H)}{\eta}$ creşte de la 1 la 2 dacă H variază între zero şi $1{,}7 \cdot 10^6$ A/m. Lichidul III are o comportare asemănătoare, iar în cazul lichidului IV creşterea vîscozităţii este ceva mai redusă.

Dependenţa vîscozităţii de cîmpul magnetic H a fost analizată teoretic de mai mulţi autori [47, 48]. Pentru a îngloba influenţa cîmpului magnetic formula vîscozităţii devine

$$\eta(\xi) = \eta_0\left[1 + \frac{\varphi}{2}\left(5 + 3\,\frac{\xi - \operatorname{th}\xi}{\xi + \operatorname{th}\xi}\,\sin^2\alpha\right)\right]$$

unde

$$\xi = \mu_0 \frac{mH}{kT}$$

Deşi într-o aproximaţie mai bună reiese că lichidele magnetice au un caracter nenewtonian, cu o bună aproximaţie ele se pot considera lichide newtoniene.

1.5. Cercetări privind lichidele magnetice în ţara noastră

In ţara noastră primele cercetări privind lichidele magnetice au fost efectuate la Iaşi în 1973 în cadrul centrului de fizică tehnică, iar apoi la catedra de fizică a

Facultăţii de electrotehnică. Cercetările efectuate în cadrul catedrei de fizică au condus la obţinerea de noi tipuri de lichide magnetice pe bază de uleiuri speciale ca : ulei de transformator şi ulei de mecanisme fine. Se obţin de asemenea lichide magnetice concentrate pe bază de apă care să poată fi folosite la depistarea fisurilor de suprafaţă a arborilor de maşini şi tractoare în instalaţiile feroflux. Tot în cadrul tehnologiei de preparare, colectivul din Iaşi a furnizat în 1978, pe bază de comandă, Institutului politehnic din Timişoara o cantitate de 10 ℓ de lichid magnetic cu caracteristici speciale, necesare pentru cercetări privind funcţionarea turbotransformatoarelor magnetohidrodinamice cu lichid magnetic.

Cercetările colectivului de la Iaşi se fac şi în direcţia aplicării lichidelor magnetice în practică. In acest sens s-a proiectat şi construit un etanşor cu lichid magnetic pentru gaze, care însă nu etanşează presiuni prea mari. Există de asemenea preocupări, în vederea folosirii lichidelor magnetice drept lubrifianţi.

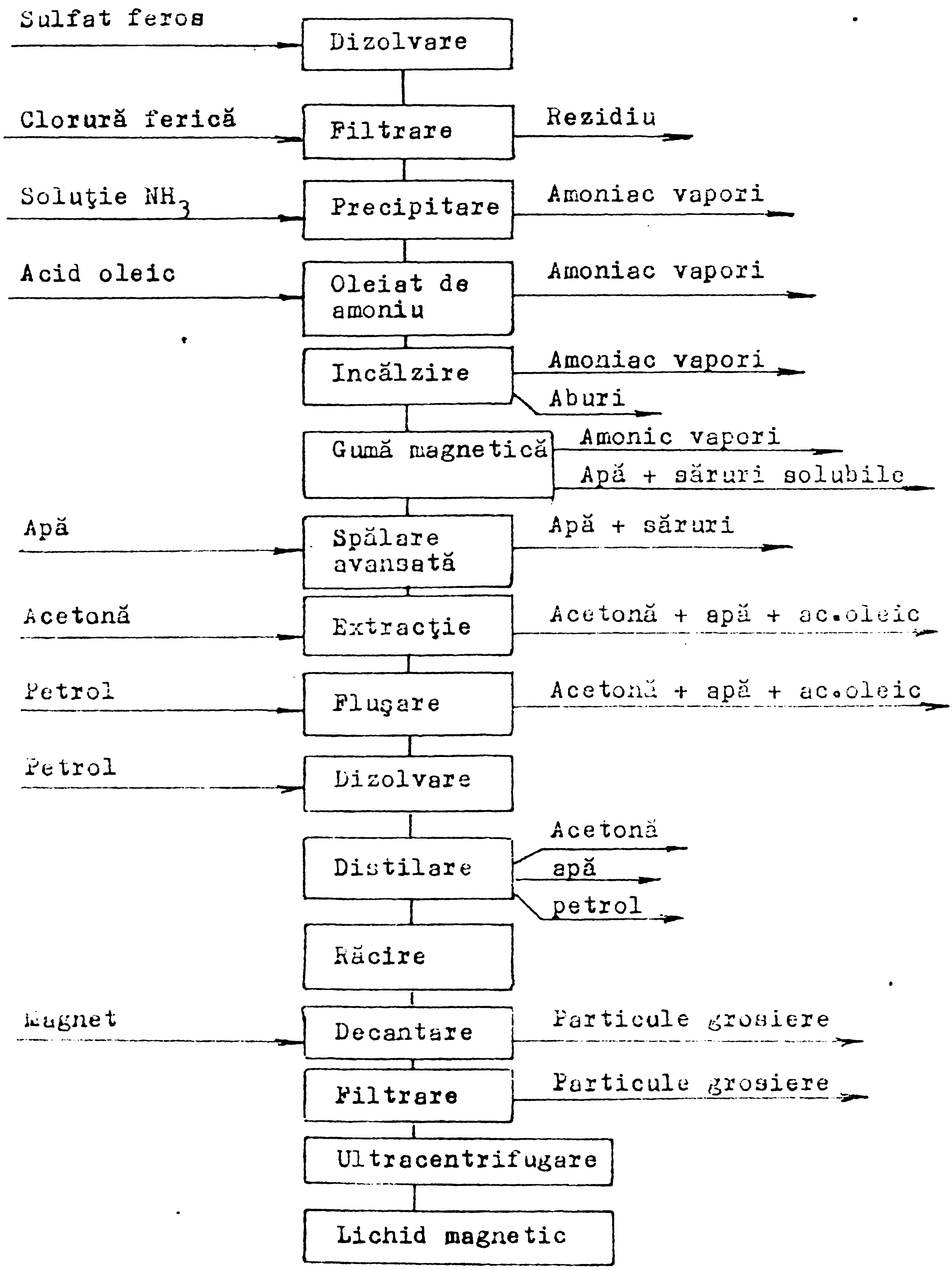
Din 1977 la Institutul politehnic din Timişoara se formează un colectiv, condus de acad.I.Anton care se ocupă la început cu aplicaţiile lichidelor magnetice, iar mai apoi, din 1978 şi cu producerea lor.

In vederea folosirii lichidelor magnetice pentru turbotransformator magnetohidrodinamic, care reprezintă brevet de invenţie, se fac studii şi cercetări privind rotaţia lichidelor magnetice cu ajutorul cîmpurilor magnetice.

Se proiectează şi se construieşte un arbore de turaţie ridicată pentru reactor chimix, etanşat cu lichid magnetic avînd următoarele caracteristici :

- diferenţa de presiune etanşată max 1,5 at
- turaţia maximă 15000 rot/min
- durata de funcţionare limitată doar la performanţele rulmenţilor
- etanşeitatea : scăpări nule.

Din 1978 încep cercetări şi în vederea obţinerii lichidelor magnetice. Schema de principiu pentru prepararea lichidelor magnetice pe bază de hidrocarburi aplicată la IPT e următoarea :



După această schemă s-au obţinut probe de lichid mag-netic avînd $\mu_0 M_s$ cuprins între 300 şi 800 G_s folosite pentru rotații în cîmp magnetic și probe avînd $\mu_0 M_s$ cuprins între 200 și 600 G_s folosite pentru etanșare.

Ca rezultat al cercetărilor efectuate, s-au publicat o serie de lucrări [32 ... 43].

Lichidele obținute la noi în țară sînt competitive cu cele produse de firme cu renume pe plan mondial, cum ar fi Ferrofluidic Corporation SUA.

CAPITOLUL 2

STUDIUL PROPRIETĂTILOR ELECTRICE SI MAGNETICE ALE LICHIDELOR MAGNETICE

In acest capitol se tratează într-un mod original teoria proprietăţilor de material ale lichidelor magnetice, punînd în evidenţă dependenţa permitivităţii electrice de intensitatea cîmpului electric avînd ca parametru intensitatea cîmpului magnetic, respectiv a permeabilităţii magnetice de intensitatea cîmpului magnetic avînd intensitatea cîmpului electric drept parametru.

Se prezintă apoi o metodă originală de determinare experimentală a susceptivităţii magnetice a lichidelor magnetice, bazată pe comportarea unor corpuri neliniare în cîmp exterior omogen.

2.1. Lichide magnetice în cîmp electric static. Particule conductoare în suspensie coloidală

In etapa actuală firmele producătoare au elaborat tehnologii pentru obţinerea lichidelor magnetice pe bază de fier sau magnetită în suspensie coloidală. Pentru studiul teoretic al proprietăţilor electrice şi magnetice, în literatură se consideră că particulele în suspensie sînt identice şi au o formă sferică.

Din fotografiile obţinute cu ajutorul microscopului electronic prezentate în literatură, reiese că forma particulelor suspendate diferă în general de cea sferică nefiind exclusă nici posibilitatea obţinerii unor lichide magnetice în care particulele să aibă în mod intenţionat formă alungită. Abaterea de la forma sferică are drept urmare apariţia unor efecte noi, studiate de autor în acest capitol : dependenţa permeabilităţii magnetice de un cîmp electric exterior şi a permitivităţii electrice de un cîmp magnetic. Pentru studiul teoretic al acestor efecte noi se va presupune că particulele aflate în suspensie au forma unor elipsoizi de semiaxe a, b, c.

Studiul polarizaţiei temporare a lichidului magnetic se va face în următoarele ipoteze :

- fludul de bază are permitivitatea electrică $\varepsilon_f = \varepsilon_o$ şi conductivitatea electrică $\sigma_f = o$, fiind deci un dielectric ideal.

- particulele în suspensie sînt conductoare.

In principiu pentru determinarea relaţiei P = P(E) se va face suma statistică a momentelor electrice din unitatea de volum a lichidului magnetic.

In unitatea de volum a lichidului se află atît fluid de bază avînd permitivitatea electrică ε_f, cît şi N particule în suspensie care vor contribui la polarizarea electrică macroscopică, deoarece, aşa cum se va arăta în continuare, aceste particule se comportă ca dipoli electrici de moment $\overline{p}$, (moment indus realizat prin separarea sarcinilor în particula neutră din punct de vedere electric), asupra cărora se exercită acţiunea de orientare a cîmpului electric activ $\overline{E}_o$. Cîmpul activ $\overline{E}_o$ nu coincide cu cîmpul electric macroscopic $\overline{E}$, deoarece acesta din urmă e obţinut prin medierea cîmpului microscopic pe un volum fininit mic fizic care e ocupat de foarte multe particule, inclusiv de particula asupra căreia se exercită acţiunea, pe cînd cîmpul activ se obţine prin medierea efectuată numai pe volumul particulei considerate şi în lipsa acesteia.

Polarizarea lichidului magnetic se va calcula deci cu relaţia

$$P = \lim_{\Delta V \to o} \frac{(\widetilde{\Sigma \overline{p}})_f + (\widetilde{\Sigma \overline{p}})_p}{\Delta V} \qquad (1)$$

unde $\frac{(\widetilde{\Sigma \overline{p}})_f}{V}$ reprezintă suma statistică a momentelor electrice ale fluidului de bază din unitatea de volum polarizat uniform, iar $\frac{(\widetilde{\Sigma \overline{p}})_p}{V}$ - suma statistică a momentelor electrice corespunzătoare particulelor suspendate din unitatea de volum. Dar $(\widetilde{\Sigma p})_f = P_f \cdot \Delta V_f = P_f[\Delta V - (NV)\cdot\Delta V]$, V fiind volumul particulei, astfel încît relaţia (1) devine

$$P = (1-NV)(\varepsilon_f - \varepsilon_0)E + \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\widetilde{\Sigma(p)}_p}{\Delta V} \tag{1'}$$

Se va calcula în continuare contribuţia particulelor suspendate la polarizarea macroscopică a lichidului magnetic. In acest scop e necesară determinarea momentului electric echivalent unei particule avînd forma de elipsoid de semiaxe a,b,c plasat în cîmp exterior $\overline{E}_0$ dirijat după axa x.

Potenţialul electric în exteriorul elipsoidului, aflat în condiţiile de mai sus satisface ecuaţia lui Laplace, care în coordonate eliptice are forma [49]:

$$\Delta\varphi = \frac{4}{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)}\left[h_\xi(\eta-\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(h_\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + h_\eta(\zeta-\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h_\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + h_\zeta(\xi-\eta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(h_\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)\right] \tag{2}$$

unde, corespunzător sistemului de coordonate eliptic ales

$$\begin{cases} x = \pm\left[\dfrac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2} \\[2ex] y = \pm\left[\dfrac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{1/2} \\[2ex] z = \pm\left[\dfrac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{1/2} \end{cases}$$

parametrii lui Lamé se calculează cu relaţiile

$$h_\xi = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi}, \quad h_\eta = \frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R_\eta}; \quad h_\zeta = \frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R_\zeta}$$

iar $R_u = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}$ $\quad u = \xi, \eta, \zeta.$

Soluţia ecuaţiei (1) se caută sub forma [49]:

$$\varphi = \varphi_o + \varphi' = \varphi_o\left[1 + F(\xi)\right] \tag{3}$$

unde φ_o reprezintă potenţialul cîmpului exterior, iar $\varphi_o F(\xi) = \varphi'$ modificarea potenţialului datorită prezenţei elipsoidului conductor. Introducînd încercarea de soluţie (3) în ecuaţia (2) rezultă ecuaţia pe care o satisface $F(\xi)$:

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\ln\left[R_\xi(\xi+a^2)\right] = o \tag{4}$$

Din ecuaţia (4) rezultă

$$F(\xi) = \text{const.} \int_\xi^\infty \frac{ds}{R_s(s+a^2)}$$

limitele de integrare fiind astfel alese încît $\varphi' = o$ pentru $\xi = \infty$. Pentru $\xi = o$ se consideră $\varphi = o$ şi deci relaţia (3) ia forma

$$\varphi = \varphi_o \left\{ 1 - \frac{\displaystyle\int_\xi^\infty \frac{ds}{R_s(s+a^2)}}{\displaystyle\int_o^\infty \frac{ds}{R_s(s+a^2)}} \right\}$$

La distanţă mare de elipsoid (ξ mare)

$$\int_\xi^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s} \simeq \frac{2}{2r^3} \quad \text{iar}$$

$$\varphi' = \frac{E_o x}{r^3} \frac{V}{4\pi \frac{abc}{2} \displaystyle\int_o^\infty \frac{ds}{R_s(s+a^2)}} = \frac{E_o x\ V}{4\pi\, r^3 A_1(o)},$$

V reprezentînd volumul elipsoidului.

Rezultă că elipsoidul conductor aflat în cîmp exterior omogen $\overline{E}_o$ se comportă ca un dipol electric de moment:

$$\overline{p} = \frac{\varepsilon_o \overline{E}_o V}{A_1(o)} \quad \text{sau} \quad \overline{p} = \frac{\varepsilon \overline{E}_o V}{A_1(o)} \quad \text{dacă mediul exterior}$$

are permitivitatea ε.

In cazul cînd elipsoidul conductor se află într-un cîmp electric exterior E_o care face cu una din axele elipsoidului unghiul θ , şi se află în planul format de semiaxele a şi b, mediul din exteriorul lui avînd permitivitatea ε_f,

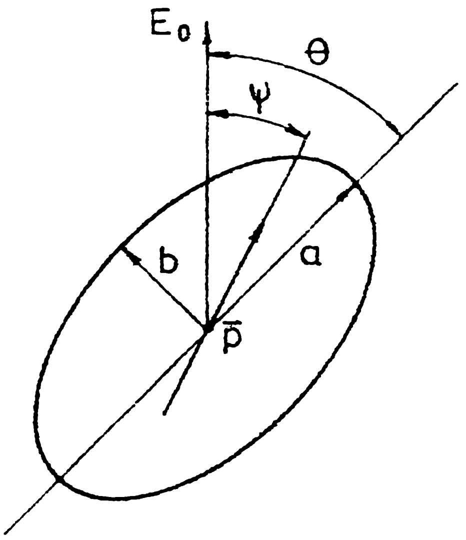


Fig.3

ca în fig.3, momentul electric $\overline{p}$, echivalent elipsoidului are expresia

$$\overline{p} = V\varepsilon_f E_o\left(\frac{\cos\theta}{A_1(o)}\overline{i} + \frac{\sin\theta}{A_2(o)}\overline{j}\right) \tag{5}$$

Pentru un elipsoid de revoluţie alungit

$$A_1(o) = \frac{1-e^2}{2e^3}\left(\ln\frac{1+e}{1-e} - 2e\right) \qquad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$A_2(o) = \frac{1}{2}\left[1 - A_1(o)\right]$$

In prezenţa cîmpului exterior, particulele tind să se orienteze sub acţiunea cuplului

$$\overline{C} = \overline{p} \times \overline{E}_o = \varepsilon_f V.E_o^2\left(\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right)\sin\theta\cos\theta\,\overline{k}$$

astfel încît momentele lor electrice să devină omoparalele cu intensitatea cîmpului, a cărui direcţie constituie o direcţie privilegiată în corp. La această ordonare a orientării particulelor, determinată de cuplul exercitat de cîmpul activ E_o

asupra lor, se opune agitaţia termică astfel încît momentele electrice ale particulelor formează diferite unghiuri cu direcţia cîmpului, fiind mai frecventă realizarea unghiurilor ascuţite cu această direcţie privilegiată. In această situaţie suma momentelor din unitatea de volum e diferită de zero şi deci corpul rezultă polarizat în sensul intensităţii cîmpului. In continuare se aplică teoria lui Langevin considerînd particule identice.

In absenţa unui cîmp exterior, toate direcţiile din spaţiu sînt în mod egal îndreptăţite şi de aceea numărul de paeticule ce au axa mare cuprinsă între θ şi $\theta+d\theta$, φ şi $\varphi+d\varphi$ e proporţional cu unghiul solid elementar corespunzător, adică probabilitatea ca particula să aibă axa mare cuprinsă în unghiul elementar considerat este :

$$dP = \text{const} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

In prezenţa cîmpului exterior E_0, în care fiecare particulă are energia potenţială :

$$W = \int c d\theta = -\frac{\varepsilon_f V E_0^2}{2}\left[\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right]\cos^2\theta + C_1 \ (\text{const}) \tag{6}$$

această probabilitate în acord cu repartiţia Maxwell Boltzmann devine

$$dP = \text{const.}\ e^{-\frac{W}{kT}} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \tag{7}$$

unde constanta din relaţia (7) se determină din condiţia de normare, care în cazul unei mulţimi continue de stări se exprimă prin integrala

$$\int dP = 1$$

luată asupra tuturor valorilor posibile ale variabilelor independente.

Se obţine

$$\text{const} = \frac{1}{2\pi \int_0^{\pi} e^{-\frac{W}{kT}} d(\cos\theta)}$$

Momentul electric mediu al unei particule se calculează cu formula mediei statistice

$$\tilde{\overline{p}} = \int \overline{p}\, dP = \text{const} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{p}\, e^{-\frac{W}{kT}}\, d(\cos\theta)\, d\varphi$$

Singura componentă nenulă a momentului mediu e aceea în lungul direcţiei cîmpului exterior. De aceea momentul mediu coincide în modul cu proiecţia lui după direcţia cîmpului

$$\tilde{p} = \int (p \cos\varphi)\, dP = \text{const} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (p \cos\varphi)\, e^{-\frac{W}{kT}}\, d(\cos\theta)\, d\varphi$$

Contribuţia la polarizarea lichidului magnetic datorită prezenţei particulelor, după simplificarea cu factorul constant $e^{-C_1/kT}$, va fi

$$P_{part} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \tilde{\overline{p}}_p}{\Delta V} =$$

$$= N E_0 \varepsilon_f V \frac{\int_0^{\pi} \left[\frac{\cos^2\theta}{A_1(o)} + \frac{\sin^2\theta}{A_2(o)}\right] e^{\frac{\varepsilon_f V E_0^2}{2kT}\left(\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right)\cos^2\theta}\, d(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{\frac{\varepsilon_f V E_0}{2kT}\left[\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right]\cos^2\theta}\, d(\cos\theta)} \qquad (8)$$

Notînd cu $\alpha = \left[\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right] \frac{\varepsilon_f \cdot V E_0^2}{2kT}$ relaţia (8) devine

$$P_{part} = N V E_0 \varepsilon_f \left[\frac{1}{A_2(o)} + \left(\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right) \underbrace{\frac{\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, e^{\alpha\cos^2\theta}\, d(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{\alpha\cos^2\theta}\, d(\cos\theta)}}_{I(\alpha)}\right] \qquad (8')$$

Expresia care depinde de α, adică de intensitatea cîmpului activ E_0 din relaţia (8') şi notată cu $I(\alpha)$ se poate pune sub forma raportului a două funcţii factorial incomplete :

$$I(\alpha) = \frac{\int_0^{\alpha} t^{1/2} e^{-t}\, dt}{\int_0^{\alpha} t^{-1/2} e^{-t}\, dt} = -\frac{1}{\alpha} \frac{(\frac{1}{2}, -\alpha)!}{(-\frac{1}{2}, -\alpha)!}$$

unde

$$\int_0^{y} e^{-t}\, t^{x} dt = (x,y)!$$

fiind valabile următoarele relaţii :

$$(x, \infty)! = x!$$

$$\frac{(x,y)!}{(x,\infty)!} = \frac{y^{x+1}}{(x+1)!} \left(1 - \frac{y}{1!} \frac{x+1}{x+2} + \frac{y^2}{2!} \frac{x+1}{x+3} - \frac{y^3}{3!} \frac{x+1}{x+4} + \ldots\right)$$

Sub formă dezvoltată

$$I(\ ) = \frac{\frac{1}{3} + \alpha \frac{1}{5} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{1}{7} + \ldots + \frac{\alpha^k}{K!} \frac{1}{(2k+3)} + \ldots}{1 + \alpha \frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{1}{5} + \ldots \frac{\alpha^k}{K!} \frac{1}{(2k+1)} + \ldots} \qquad (9)$$

Pentru valori mici ale parametrului α , expresia (9) ia forma

$$I(\alpha) = \frac{1}{3} + \frac{1}{45}\alpha + \frac{29}{21.45}\alpha^2 + \ldots \qquad (9')$$

Expresia (9) nu poate fi folosită pentru cazul valorilor mari ale parametrului α , adică în cazul cîmpurilor mari, motiv pentru care se va căuta o dezvoltare asimptotică a funcţiei $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = \frac{\int_{-1}^{1} u^2 e^{\alpha u^2}\, du}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha u^2} du} = \frac{\int_0^1 u^2 e^{\alpha u^2} du}{\int_0^1 e^{\alpha u^2} du} = \frac{F(\alpha)}{G(\alpha)}$$

Se observă vă $\frac{dG}{d\alpha} = F(\alpha)$ şi

$$F(\alpha) = \int_0^1 u^2 e^{\alpha u^2} du = \frac{1}{2\alpha}\left[e^{\alpha} - G(\alpha)\right]$$

adică

$$\frac{dG}{d\alpha} + \frac{G}{2\alpha} = \frac{e^{\alpha}}{2\alpha} \tag{lo}$$

Soluţia ecuaţiei (lo) e de forma

$$G = e^{\alpha}\left(a_0 + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \dots + \frac{a_n}{\alpha^n} + \dots\right)$$

Coeficienţii avînd valorile

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2^2}, \quad a_3 = \frac{1.3}{2^3}, \quad \dots \quad a_n = \frac{1.3.5.(2n-3)}{2^n}$$

In final

$$G(\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{2\alpha}\left(1 + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1.3}{2^2\alpha^2} + \dots + \frac{1.3.5. \dots (2n+1)}{2^n \alpha^n} + \dots\right)$$

$$F(\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{2\alpha}\left(1 - \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2^2\alpha^2} - \dots - \frac{1.3.5. \dots (2n-3)}{2^n \alpha^n} - \dots\right)$$

astfel încît dezvoltarea lui $I(\alpha)$ pentru valori mari ale lui α ia forma

$$I(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} - \dots$$

Se observă deci că

$$\lim_{\alpha \to \infty} I(\alpha) = 1$$

adică din punct de vedere fizic aceasta corespunde faptului că toate particulele sînt orientate după direcţia cîmpului iar din relaţia (8') rezultă

$$P_{part} = Np$$

Sistemul de ecuaţii, care determină în mod implicit legătura dintre polarizaţia P şi intensitatea cîmpului electric se scrie în forma

$$\begin{cases} P = (1-NV)(\varepsilon_f-\varepsilon_o)E + NV\varepsilon_f E_o f(\alpha) \\ E_o = E_o(E,P) \end{cases} \quad (11)$$

unde s-a folosit notaţia

$$f(\alpha) = \frac{1}{A_2(o)} + \left[\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right] I(\alpha),$$

fiind specificat anterior.

Dacă se cunoaşte dependenţa cîmpului efectiv de E şi P, sistemul (11) va putea fi rezolvat cu uşurinţă grafic, pentru a obţine curba P= P(E).

2.2. Cîmpul efectiv $\overline{E}_o$

Prin cîmp efectiv se înţelege cîmpul care se exercită asupra particulei considerate, diferind de cîmpul macroscopic $\overline{E}$. Pentru a pune în legătură cîmpul efectiv $\overline{E}_o$ cu mărimile macroscopice $\overline{E}$ şi $\overline{P}$, se ia o suprafaţă sferică Σ de rază "a" - infinit mic fizic - centrată pe particula (dipolul) considerată. In aceste condiţii se poate scrie :

$$\overline{E}_o = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$$

unde :

$\overline{E}_1$ reprezintă cîmpul produs în centrul sferei de toate particulele din exteriorul ei, iar $\overline{E}_2$ cîmpul electric produs de toate particulele din interiorul suprafeţei Σ, cu excepţia sarcinii dipolului considerat [50].

Dacă toate particulele din interiorul suprafeţei Σ le considerăm echivalente cu un dipol $\overline{\pi}$ (toate particulele avînd momentul electric orientat la fel) rezultă $\overline{E}_2$= o. Cîmpul $\overline{E}_1$ se poate calcula prin suma dintre cîmpul electric din interiorul unei cavităţi sferice de raza "a" şi un "cîmp de reacţie" ce ţine cont de influenţa particulelor din interiorul suprafeţei Σ asupra exteriorului ei, adică

$$\overline{E}_0 = \overline{E}\,\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0} + \frac{\overline{\pi}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,\frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon+\varepsilon_0} \tag{12}$$

In general, particulele pot avea un moment electric indus și unul permanent, adică $\overline{\pi} = \overline{\pi}_p + \overline{\pi}_i$.

Asupra unei particule de moment electric $(\overline{p}_p+\overline{p}_i)$ se va exercita cuplul

$$\overline{C} = (\overline{p}_p+\overline{p}_i) \times \overline{E}_0 = \overline{p}_p \times \overline{E}_0 =$$

$$= \overline{p}_p \times \left[\overline{E}\,\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0} + \frac{\overline{\pi}_p+\overline{\pi}_i}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,\frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2 + {}_0}\right]$$

$$= \overline{p}_p \times \left[\overline{E}\cdot\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0} + \frac{\overline{\pi}_i}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,\frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\right] \tag{13}$$

Deci în calculul energiei potențiale care intervine în statistica Boltzman, se poate considera drept cîmp efectiv cîmpul dat de relația (13) în locul celui dat de relația (12).

Dacă influențele reciproce ale particulelor nu sînt prea însemnate, relația (13) se poate particulariza și se obține

$$\overline{E}_0 = \overline{E} + \frac{\overline{P}}{3\varepsilon_0} \tag{14}$$

adică tocmai cîmpul efectiv calculat de Lorentz.

In cazul în care particulele se influențează foarte puternic reciproc, scoaterea dipolilor din interiorul suprafeței Σ nu modifică prea mult particulele din exteriorul suprafeței Σ și cîmpul efectiv va fi identic cu cel calculat de Onsager :

$$\overline{E}_0 = \overline{E}\cdot\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0} \tag{15}$$

In cazul lichidelor magnetice cîmpul efectiv care se exercită asupra particulelor va fi cîmpul Lorentz dat de relația (14), putîndu-se neglija interacțiunea reciprocă a particulelor. Cu (14) legătura neliniară dintre P și E pentru lichide magnetice va fi dată de

$$P = \frac{(1-NV)(\varepsilon_f-\varepsilon_o) + NV\varepsilon_f f(\alpha)}{1 - \frac{NV\varepsilon_f}{3\varepsilon_o} f(\alpha)} E \quad . (16)$$

unde $f(\alpha)$ şi α au fost specificate anterior.

In cazul cîmpurilor foarte mici, susceptivitatea electică a lichidului magnetic tinde către

$$X_e = \frac{(1-NV)(\varepsilon_{fr}-1)+NV\varepsilon_{fr}\left[\frac{1}{A_2(o)}+\left(\frac{1}{A_1(o)}-\frac{1}{A_2(o)}\right)\frac{1}{3}\right]}{1-\frac{NV}{3}\varepsilon_{fr}\left[\frac{1}{A_2(o)}+\left(\frac{1}{A_1(o)}-\frac{1}{A_2(o)}\right)\frac{1}{3}\right]} \quad (17)$$

iar pentru cîmpuri intense

$$X_e = \frac{(1-NV)(\varepsilon_{fr}-1)+NV\varepsilon_{fr}\frac{1}{A_1(o)}}{1-\frac{NV}{3}\varepsilon_{fr}\frac{1}{A_1(o)}} \quad (18)$$

Din relaţia (18) se observă că şi în cîmpuri foarte intense, deşi toate particulele în suspensie s-au orientat după direcţia cîmpului exterior polarizarea P nu tinde către o valoare de saturaţie. Acest lucru e posibil, deoarece momentul echivalent particulei în suspensie depinde de intensitatea cîmpului, crescînd odată cu ea.

2.3. Lichide magnetice în cîmp magnetic

Determinarea dependenţei magnetizaţiei macroscopice a lichidului magnetic, M, de intensitatea cîmpului magnetic H, se va face considerînd că particulele în suspensie au un moment magnetic permanent $\overline{m}$ dirijat după axa mare.

Se consideră de asemenea că permeabilitatea magnetică a fluidului de bază este μ_o şi se neglijează vîscozitatea fluidului de bază.

Magnetizarea lichidului în prezenţa unui cîmp exterior $\overline{H}$, va fi prin orientare, suma statistică a momentelor magnetice din unitatea de volum, conform statisticii Boltzmann conduce la expresia

$$M = N.m \frac{\int_0^{\pi} \cos\theta \, e^{\frac{\mu_0 m H_0}{kT}\cos\theta} d(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{\frac{\mu_0 m H_0}{kT}\cos\theta} d(\cos\theta)} \qquad (17)$$

sau

$$M = N.m(c\,th\gamma - \frac{1}{\gamma}) = N.m.L(\gamma)$$

unde : $L(\gamma) = c\,th\gamma - \frac{1}{\gamma}$ reprezintă funcţia lui Langevin.

$$\gamma = \frac{\mu_0 m}{kT} H_0(H,M)$$

iar H_0 - cîmpul efectiv care se exercită asupra particulei. Neglijînd interacţiunea reciprocă a particulelor suspendate, cîmpul efectiv va fi de tip Lorentz şi sistemul de ecuaţii ce determină dependenţa M(H) se va scrie

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M_s} = L(\gamma) \\ \gamma = \dfrac{\mu_0 m}{kT}\left(H + \dfrac{M}{3}\right) \end{cases} \qquad (18)$$

Sistemul (18) poate fi rezolvat grafic cum indică fig.4, după ce în prealabil a fost pus sub forma (18')

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M_s} = L(\gamma) \\ \dfrac{M}{M_s} = \dfrac{3kT}{\mu_0 m^2 N}\gamma - \dfrac{3H}{N.m} \end{cases} \qquad (18')$$

cunoscută în literatură.

In cîmpuri magnetice slabe, $L(\gamma) = \frac{\gamma}{3}$ şi magnetizaţia devine o funcţie liniară de H

$$M = \frac{N\mu_0 m^2}{3kT} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N\mu_0 m^2}{9kT}} H \qquad (19)$$

Relaţia (19) dă posibilitatea aprecierii numărului de particule din unitatea de volum, precum şi a dimensiunii me-

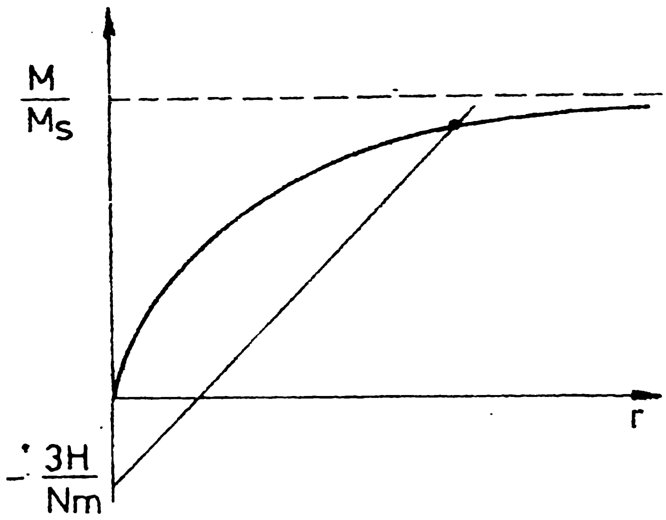


Fig.4

dii ale lor (un lichid echivalent avînd particule identice, sferice) prin măsurarea magnetizaţiei de saturaţie M_s şi a susceptivităţii iniţiale X_i. Astfel :

$$\frac{Nm^2\mu_o}{3kT} = \frac{X_i}{1+\frac{X_i}{3}}$$

Cu $M_s = N.m$ rezultă momentul magnetic al particulei în forma:

$$m = \frac{3kT}{\mu_o}\,\frac{X_i}{1+\frac{X_i}{3}}\,\frac{1}{M_s} \qquad (20)$$

şi

$$N = \frac{\mu_o M_s^2\left(1+\frac{X_i}{3}\right)}{X_i} \qquad (21)$$

Notînd cu ρ, ρ_ℓ şi ρ_m densităţile lichidului magnetic, a lichidului de bază şi a particulelor magnetice, diametrul mediu al acestora se poate calcula cu relaţia

$$D = \sqrt[3]{\frac{18\,X_i kT(\rho-\rho_\ell)}{\mu_o\pi M_s^2(1+X_i/3)(\rho_m-\rho_\ell)}} \qquad (22)$$

unde s-a ţinut cont de faptul că raportul între volumul particulelor şi volumul lichidului e dat de

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\rho - \rho_\ell}{\rho_m - \rho_\ell} ,$$

adică

$$NV_{part} = \frac{\rho - \rho_\ell}{\rho_m - \rho_\ell} .$$

In concluzie se observă că lichidele magnetice au proprietăţile mediilor paramagnetice. Din cauza permeabilităţii lor magnetice de ordinul unităţilor sau chiar a zecilor, deci mult mai mare decît cea a substanţelor paramagnetice obişnuite, lichidele magnetice se mai numesc şi „superparamagnetice".

2.4. Relaţie de tip Clausius-Mossotti pentru lichide magnetice

In expresiile densităţilor de forţă ce se exercită asupra lichidelor magnetice apare derivata magnetizaţiei în raport cu densitatea lichidului, motiv pentru care se va stabili relaţia $M = M(\rho)$.

Numărul de particule din unitatea de volum poate fi exprimat în funcţie de densităţi, în forma

$$N = \frac{\rho}{V(\rho_m - \rho_\ell)} - \frac{\rho_\ell}{V(\rho_m - \rho_\ell)} , \qquad (23)$$

unde V reprezintă volumul particulei.

Introducînd relaţia (23) în sistemul (18), şi considerînd momentul magnetic al particulei $m = M_s^* V$, M_s^* fiind magnetizarea de saturaţie a materialului din care sînt făcute particulele, rezultă :

$$\begin{cases} M = \dfrac{M_s^* L(\gamma)}{(\rho_m - \rho_\ell)} (\rho - \rho_\ell) \\[2ex] \gamma = \dfrac{\mu_0 M_s^* V}{kT} \left(H + \dfrac{M}{3}\right) \end{cases} . \qquad (24)$$

Sistemul (24) scoate în evidenţă dependenţa lui M de ρ . Derivata $\frac{\partial M}{\partial \rho}$ se calculează uşor, şi rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial \rho} = \dfrac{\dfrac{M_s^*}{\rho_m-\rho_l} L(\gamma)}{1 - \dfrac{M_s^*}{(\rho_m-\rho_l)} \dfrac{\mu_o M_s^* V}{3kT} \cdot \dfrac{\partial L}{\partial \gamma}(\rho-\rho_l)} \\ \gamma = \dfrac{\mu_o M_s^* V}{kT} \left(H + \dfrac{M}{3}\right) \end{cases} \tag{25}$$

In sistemul (25) derivata funcţiei lui Langevin în raport cu se poate pune sub forma

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{sh^2\gamma} = 1 - \left(cth^2\gamma - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

sau

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - L(\gamma)\left[L(\gamma) + \frac{2}{\gamma}\right]$$

funcţia $L(\gamma)$ fiind dată în tabelul de mai jos :

γ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	∞
$L(\gamma)$	0	0,31	0,53	0,67	0,75	0,8	0,83	0,85	0,87	0,89	0,9	0,95	0,966	0,975	0,98	1

Pentru valori mici ale cîmpului magnetic, $L(\gamma) = \frac{\gamma}{3}$ şi $\left(\frac{\partial L}{\partial \gamma}\right) = \frac{1}{3}$ iar din sistemele (24) şi (25) rezultă

$$M = \frac{(\rho-\rho_l)a}{1 - \dfrac{(\rho-\rho_l)a}{3}} H \tag{26}$$

şi

$$\frac{\partial M}{\partial \rho} = \frac{a}{\left[1 - \dfrac{\rho-\rho_l}{3} a\right]^2} H \tag{27}$$

unde

$$a = \frac{\mu_o M_s^{*2} V}{3kT(\rho_m-\rho_l)}$$

Legătura dintre permeabilitatea magnetică şi densitatea lichidului magnetic se stabileşte uşor şi rezultă

$$\rho = \rho_l + \frac{3}{a}\,\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \tag{28}$$

In cîmpuri magnetice intense, $L(\gamma) \cong 1$, $\left(\frac{\partial L}{\partial \gamma}\right) = 0$ şi din (24) şi (25) rezultă

$$M = \frac{M_s^*}{\rho_m - \rho_l}\,(\rho - \rho_l) \tag{29}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \rho} = \frac{M_s^*}{\rho_m - \rho_l} \tag{30}$$

Rezolvarea sistemelor (24) şi (25) se poate face grafic ca în fig.5 şi rezultă că pentru cîmp magnetic constant magnetizaţia creşte cu creşterea densităţii lichidului magnetic (la acelaşi lichid de bază).

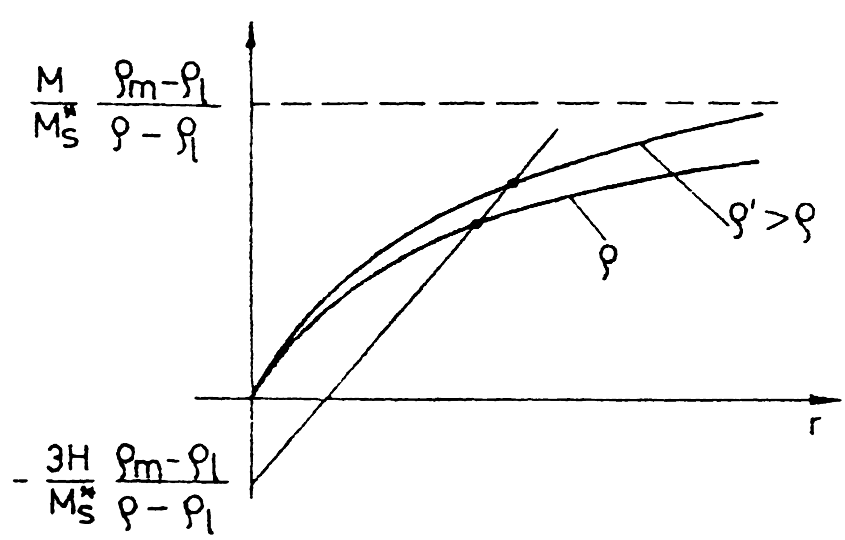


Fig.5

In toate relaţiile de mai sus magnetizaţia lichidului devine zero cînd $\rho = \rho_l$, lucru evident, deoarece în acest caz nu mai există particule suspendate în lichidul de bază.

2.5. Lichide magnetice în cîmpuri electrice şi magnetice statice

In cazul lichidelor magnetice a căror particule în suspensie au o formă diferită de cea sferică, există posibilitatea ca magnetizaţia lichidului să fie influenţată de prozența unui cîmp electric, avînd în vedere acțiunea de orientare a particulelor de către cîmpul electric. De asemenea și polarizația lichidului va putea fi influențată de prezența unui cîmp magnetic. La astfel de lichide, deci permitivitatea electrică și permeabilitatea magnetică vor fi funcție de intensitățile cîmpurilor electric și magnetic.

2.5.1. Cazul $E \parallel H$

Se vor stabili dependențele menționate mai sus în următoarele ipoteze : particulele în suspensie au forma de elipsoizi caracterizați prin momentul lor magnetic $\overline{m}$ și prin momentul electric echivalent $\overline{p}$ determinat în paragraful 2.1. Lichidul de bază are proprietățile $\varepsilon_f \neq \varepsilon_0$ și $\mu_f = \mu_0$. Considerăm de asemenea că intensitățile cîmpurilor efective $\overline{E}_0$ și $\overline{H}_0$ sînt paralele (fig.6).

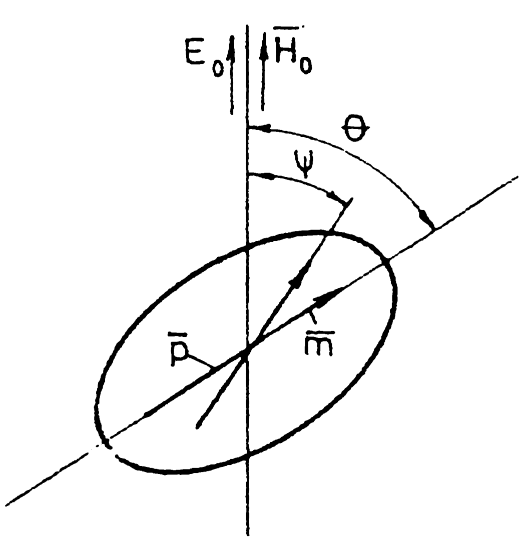


Fig.6

In aceste ipoteze, la un același cîmp magnetic exterior, magnetizația trebuie să fie mai mare în prezența cîmpului electric care exercită o acțiune de orientare asupra particulelor după direcția lui și care coincid cu cea a lui $\overline{H}_0$. Polarizația electrică ar trebui să crească și ea în prezența cîmpului magnetic.

Energia potențială a particulelor din lichidul magnetic este dată de relația:

$$W = -\frac{\mathcal{E}_f V E_o^2}{2}\left(\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right)\cos^2\theta - \mu_o m H_o \cos\theta \qquad (31)$$

şi intervine în expresia probabilităţii statistice Maxwell Boltzmann în forma

$$e^{-\frac{W}{kT}} = e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\cos\theta}$$

Probabilitatea ca axa mare a elipsoidului să fie cuprinsă în unghiul solid determinat de θ, $\theta + d\theta$ şi φ, $\varphi + d\varphi$ conţine un factor constant care se calculează din condiţia de normare şi are expresia :

$$C = \frac{1}{2\pi\int_0^{\pi} e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\cos\theta}\, d(\cos\theta)}$$

Efectuînd suma statistică a momentelor magnetice din unitatea de volum se obţine magnetizaţia M în forma

$$M = N.m\,\frac{\int_0^{\pi}\cos\theta\; e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\cos\theta}\, d(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\cos\theta}\, d(\cos\theta)} = N.m.F(\alpha,\gamma) \qquad (32)$$

In mod analog se poate calcula polarizaţia P

$$P = (1-NV)(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_o)E +$$

$$+NVE_o\mathcal{E}_f\left[\frac{1}{A_2(o)} + \left(\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right)\frac{\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\cos\theta}\, d(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\cos\theta}\, d(\cos\theta)}\right] \qquad (33)$$

Sistemul de ecuaţii care va determina deci dependenţele $P = P(E;H)$ şi $M = M(H;E)$ se va scrie :

$$\begin{cases} M = N \cdot m\, F(\alpha,\gamma) \\ P = (1-NV)(\varepsilon_f-\varepsilon_o)E + NVE_o\varepsilon_f G(\alpha,\gamma) \\ \alpha = \dfrac{\varepsilon_f V}{2kT}\left(\dfrac{1}{A_1(o)} - \dfrac{1}{A_2(o)}\right)E_o^2 \\ \gamma = \dfrac{\mu_o m}{kT} H_o \end{cases} \qquad (34)$$

Mărimile α şi γ din sistemul (34) depind de intensitatea cîmpurilor efective E_o, H_o şi se măresc odată cu creşterea acestora, respectiv cu creşterea cînpurilor exterioare E, H.

2.5.2. Influenţa cîmpului electric asupra magnetizaţiei M

In cîmpuri efectrice slabe, adică atunci cînd $\alpha \ll 1$ relaţia (32) devine

$$\frac{M}{M_s} = F(\alpha,\gamma) = F(o,\gamma) + \alpha\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=o}$$

unde în dezvoltarea în serie a funcţiei F în jurul lui $\alpha = 0$ am reţinut doar primii doi termeni. Considerînd cîmpul efectiv H_o de tip Lorentz sistemul de ecuaţii care determină $M = M[H,\alpha(E)]$ se scrie :

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M_s} = L(\gamma) + \alpha\Big[\underbrace{\dfrac{2}{\gamma} L^2(\gamma) + \dfrac{6}{\gamma^2} L(\gamma) - \dfrac{2}{\gamma}}_{\phi(\gamma)}\Big] \\ \dfrac{M}{M_s} = \dfrac{3kT}{\mu_o m^2 N}\gamma - \dfrac{3H}{N \cdot m} \end{cases} \qquad (35)$$

Valoarea funcţiei $\phi(\gamma)$ e dată în tabelul de mai jos.

γ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞
$\phi(\gamma)$	0,074	0,094	0,09	0,063	0,048	0,038	0,029	0,024	0,021	0

Comparînd sistemul (35) cu (17) rezultă că termenul $\alpha\phi(\gamma)$ reprezintă corecţia magnetizaţiei datorită prezenţei cîmpului electric. Din fig.7 se vede că magnetizaţia creşte atunci cînd α creşte adică atunci cînd cîmpul electric E creşte, intensitatea cîmpului magnetic rămînînd aceeaşi.

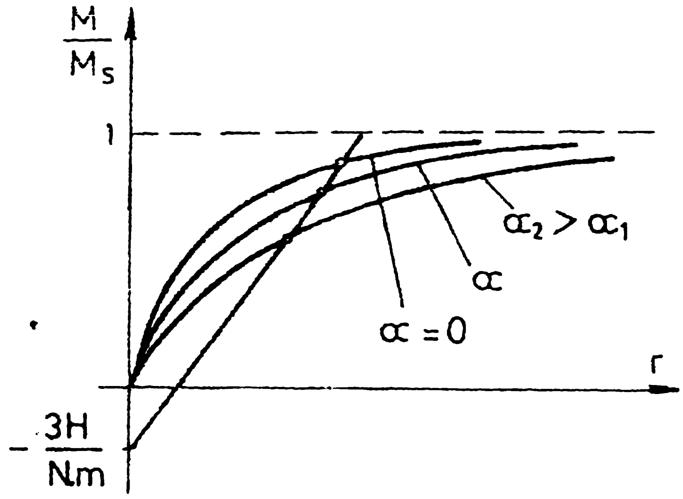


Fig.7

In cîmpuri electrice şi magnetice slabe, adică atunci cînd $\alpha \cong \gamma \ll 1$ ecuaţia (32) devine

$$\frac{M}{M_s} = F(o,o) + \alpha\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_{o,o} + \gamma\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)_{o,o} = \gamma\frac{1}{3}$$

In acest caz se observă că influenţa cîmpului electric asupra magnetizaţiei este neglijabilă în raport cu cea a cîmpului magnetic.

Pentru cîmpuri magnetice slabe, $\gamma \ll 1$ vom avea

$$\frac{M}{M_s} = F(\alpha,o) + \gamma\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=o} \quad \text{sau}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{M}{M_s} &= \frac{\int_{-1}^{1} u\, e^{\alpha u^2} du}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha u^2} du} + \gamma\Bigg[\underbrace{\frac{\int_{-1}^{1} u^2 e^{\alpha u^2} du}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha u^2} du} - \left(\frac{\int_{-1}^{1} u\, e^{\alpha u^2} du}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha u^2} du}\right)^2}_{h(\alpha)}\Bigg] = \gamma h(\alpha) \\ \frac{M}{M_s} &= \frac{3kT}{\mu_o m^2 N}\gamma - \frac{3H}{N\cdot m} \end{aligned}\right. \qquad (36)$$

In prima ecuaţie a sistemului de mai sus, termenul întîi din sumă, este nul, adică nu se poate obţine o magnetizaţie diferită de zero doar prin influenţa cîmpului electric, atunci cînd cîmpul magnetic ar fi zero. Aceasta este în concordanţă cu faptul că influenţa cîmpului electric asupra par-

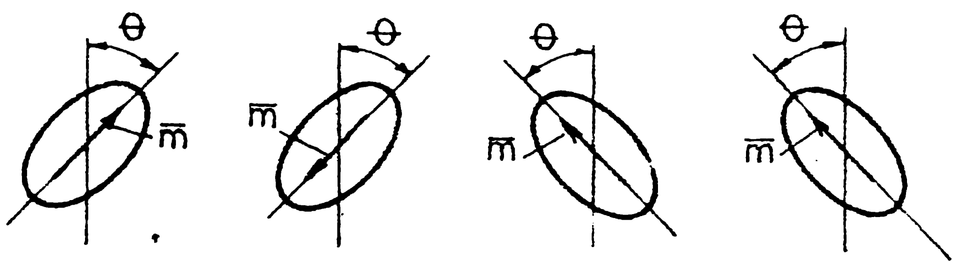


Fig.8

ticulelor din fig.8 este aceeaşi, factorul din probabilitatea elementară ce depinde de cîmpul electric, fiind funcţie pară de $\cos\theta$.

Din sistemul (36) rezultă

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\mu_0 m\, h(\alpha)}{kT\left(1 - \frac{\mu_0 m^2 N}{3kT} h(\alpha)\right)} H \qquad (37)$$

Pentru $\alpha = 0$ rezultă $h(\alpha) = \frac{1}{3}$ şi expresia (37) devine identică cu (19).

In cîmpuri electrice slabe $h(\alpha) = \frac{1}{3} + \alpha\frac{4}{45}$, şi magnetizaţia devine

$$\frac{M}{M_s} = \frac{h(\alpha)}{a+b\,h(\alpha)} H = \frac{h(o)}{a+b\,h(o)} H + \alpha\frac{ah'(o)}{[a+bh(o)]^2} H$$

sau identificînd constantele a şi b,

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\mu_0 m}{3kT}\,\frac{1}{1-\frac{\mu_0 m^2 N}{9kT}}\left[1 + \frac{4}{15}\alpha\frac{1}{1-\frac{\mu_0 m^2 N}{9kT}}\right] H \qquad (38)$$

Corecţia asupra magnetizaţiei datorată cîmpului electric este dată de termenul : $x = \frac{4}{15}\,\frac{1}{1-\frac{\mu_0 m^2 N}{9kT}}\,\alpha$

Pentru $\alpha = o$ avem

$$\frac{\mu_o m^2 N}{9kT} = \frac{\mu_{ro}-1}{\mu_{ro}+2}$$

şi deci termenul de corecţie se poate scrie în forma :

$$x = \alpha \frac{4}{45}(\mu_{ro}+2) \qquad (39)$$

μ_{ro} reprezentînd permeabilitatea magnetică a lichidului în absenţa cîmpului electric.

2.5.3. Influenţa cîmpului magnetic asupra polarizaţiei electrice

Pentru a studia influenţa cîmpului magnetic asupra polarizaţiei electrice vom considera din ecuaţiile sistemului (34) doar pe cele relative la polarizaţia P, scrise sub o formă asemănătoare sistemului (16)

$$\left\{\begin{aligned} P &= \frac{(1-NV)(\mathcal{E}_f-\mathcal{E}_o)+NV\mathcal{E}_f G(\alpha,\gamma)}{1-\frac{NV}{3\mathcal{E}_o}\mathcal{E}_f G(\alpha,\gamma)}\,E \\ G(\alpha,\gamma) &= \frac{1}{A_2}+\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)\frac{\int_{-1}^{1}\overbrace{u^2 e^{\alpha u^2+\gamma u}}^{T(\alpha,\gamma)}\,du}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha u^2+\gamma u}\,du} \\ P &= 3\mathcal{E}_o\sqrt{\frac{\alpha}{\frac{\mathcal{E}_f V}{2kT}\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)}}-3\mathcal{E}_o E \end{aligned}\right. \qquad (40)$$

Vom dezvolta în serie funcţia $T(\alpha,\gamma)$ pentru valori mici ale lui γ

$$T(\alpha,\gamma) = T(\alpha,o) + \gamma\left(\frac{\partial T}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=o} + \frac{\gamma^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2}\right)_{\gamma=o} + \dots$$

Dar

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=0}=\frac{\int_{-1}^{1}u^3e^{\alpha u^2}du\cdot\int_{-1}^{1}e^{\alpha u^2}du-\int_{-1}^{1}u^2e^{\alpha u^2}du\int_{-1}^{1}ue^{\alpha u^2}du}{\left[\int_{-1}^{1}e^{\alpha u^2}du\right]^2}=$$

deoarece termenii de la numărătorul expresiei de mai sus conţin factori ce sînt integrale ale unor funcţii impare pe domeniu / -1,1/, deci egali cu zero.

Pentru valori mici ale lui α, dezvoltarea lui $T(\alpha,\gamma)$ ia forma

$$T(\alpha,\gamma)=\frac{1}{3}+\alpha\frac{4}{45}+\gamma^2\left(\frac{2}{45}+\alpha\frac{8}{15.63}\right)$$

Cu aceste dezvoltări sistemul (4o) se scrie :

$$\begin{cases} P=\dfrac{(1-NV)(\varepsilon_f-\varepsilon_o)+NV\varepsilon_f\left[f(\alpha)+\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)\frac{\gamma^2}{2!}\left(\frac{\partial^2T}{\partial\gamma^2}\right)_{\gamma=0}\right]}{1-\frac{NV}{3\varepsilon_o}\varepsilon_f\left[f(\alpha)+\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)\frac{\gamma^2}{2!}\left(\frac{\partial^2T}{\partial\gamma^2}\right)_{\gamma=0}\right]}E \\ P=3\varepsilon_o\sqrt{\dfrac{\alpha}{\frac{\varepsilon_f V}{2kT}\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)}}-3\varepsilon_oE \end{cases} \qquad (4o')$$

şi se pretează la o rezolvare grafică întocmai ca sistemul (16). Din prima ecuaţie a sistemului (4o') rezultă că în prezenţa cîmpului magnetic, coeficientul unghiular al acestei drepte creşte faţă de coeficientul unghiular al dreptei reprezentată de prima ecuaţie a sistemului (16). Rezultă deci că şi polarizarea electrică va creşte în prezenţa cîmpului magnetic (fig.9)

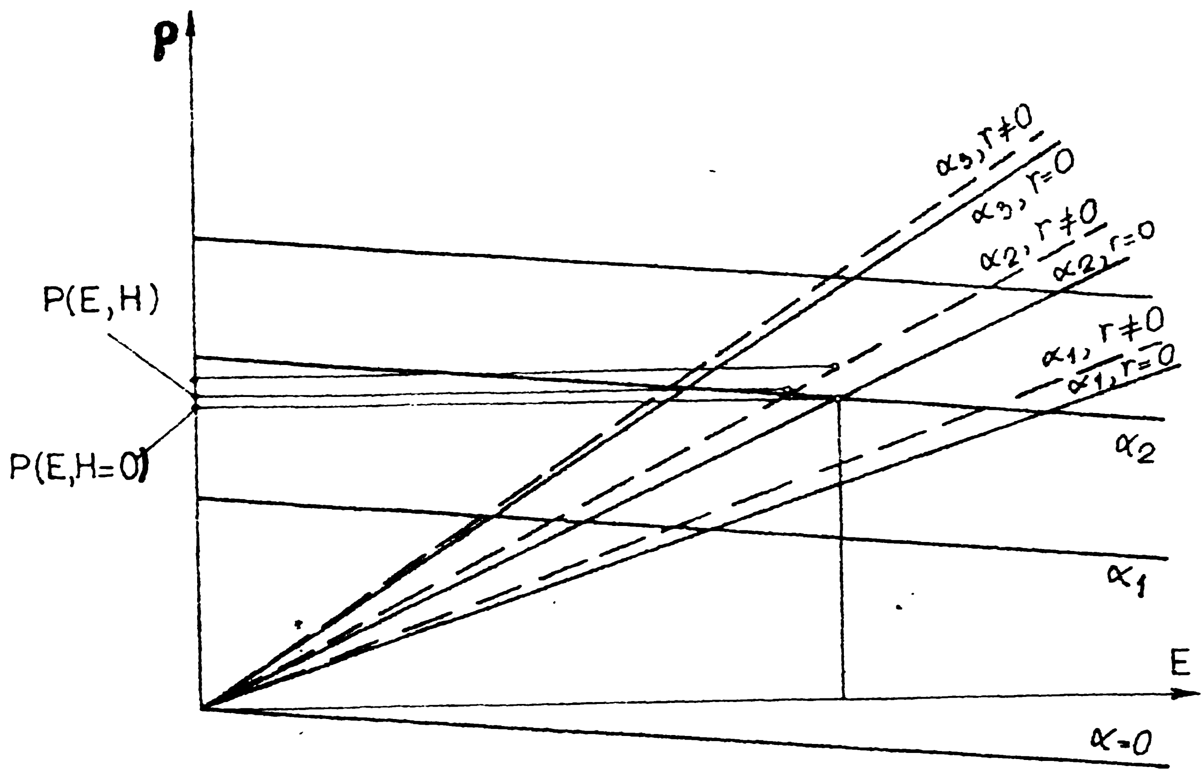


Fig.9

2.5.4. Cazul E ⊥ H

Calculul magnetizației și a polarizației electrice a fluidelor magnetice se poate face și considerînd cîmpurile $\overline{E}_o$ și $\overline{H}_o$ perpendiculare, ca în fig.lo, celelalte ipoteze menționate la începutul paragrafului rămînînd aceleași.

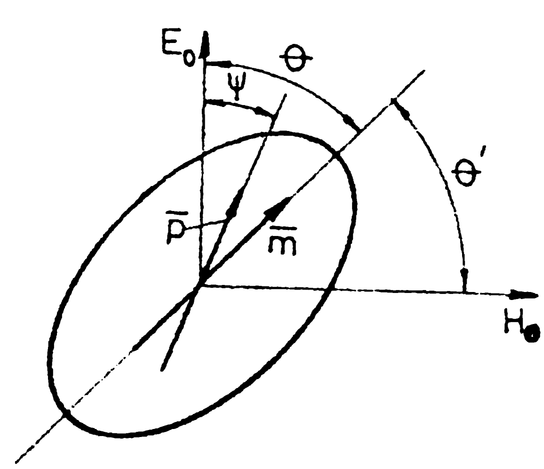


Fig.lo

In această situaţie prezenţa cîmpului electric trebuie să ducă la micşorarea magnetizaţiei şi în mod asemănător, prezenţa cîmpului magnetic ca micşora polarizaţia electrică.

Energia potenţială a particulelor din lichidul de bază va fi :

$$W = -\frac{\varepsilon_f V E_o^2}{2}\left(\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right)\cos^2\theta - \mu_o m H_o \sin\theta$$

şi

$$e^{-\frac{W}{kT}} = e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin\theta}$$

α şi γ fiind specificaţi la începutul paragrafului.

Prin însumarea statistică a momentelor magnetice şi electrice din unitatea de volum, se obţine magnetizarea respectiv polarizarea electrică. Astfel

$$M = N\cdot m\,\frac{\int_0^{\pi}\cos\theta'\; e^{\alpha\sin^2\theta' + \cos\theta'}\, d(\cos\theta')}{\int_0^{\pi} e^{\alpha\sin^2\theta' + \gamma\cos\theta'}\, d(\cos\theta')} \tag{41}$$

După simplificarea cu e^{α} , relaţia (41) devine

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\int_{-1}^{1} u\, e^{-\alpha u^2 + \gamma u}\, du}{\int_{-1}^{1} e^{-\alpha u^2 + \gamma u}\, du} = F_1(\alpha,\gamma) \tag{42}$$

Analog

$$P = (1-NV)(\varepsilon_f - \varepsilon_o)E + NVE_o\varepsilon_f G_1(\alpha,\gamma) \tag{43}$$

unde

$$G_1(\alpha,\gamma) = \frac{1}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)\frac{\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin\theta}\, d(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin\theta}\, d(\cos\theta)} \tag{44}$$

Pentru a vedea influenţa cîmpului electric asupra magnetizaţiei se observă cp : $F_1(o,\gamma) = L(\gamma)$

$$F_1(\alpha,o) = \frac{\int_{-1}^{1} u\, e^{-\alpha u^2}\, du}{\int_{-1}^{1} e^{-\alpha u^2}\, du} = o$$

$$\lim_{\gamma\to\infty} F_1(\alpha,\gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} L(\gamma) = 1$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=o} = \frac{\int_{-1}^{1} u^2 e^{-\alpha u^2}\, du}{\int_{-1}^{1} e^{-\alpha u^2}\, du} = \frac{1}{3} - \frac{4}{45}\alpha + \dots$$

Determinarea magnetizaţiei M se poate face grafic ca în fig.11.

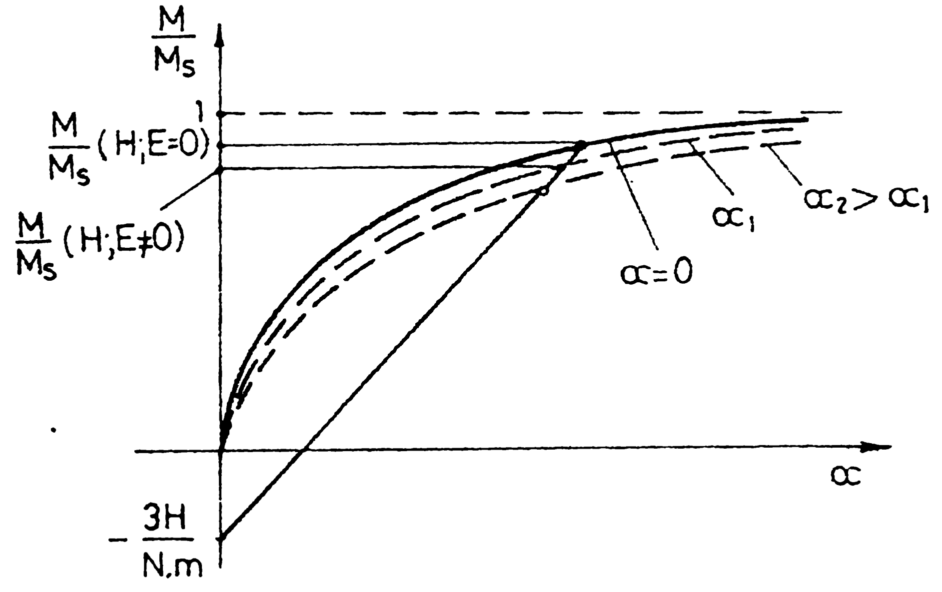


Fig.11

de unde rezultă faptul că întradevăr, prezenţa cîmpului electric duce la micşorarea magnetizaţiei.

Pentru valori mici ale cîmpului magnetic $\gamma << 1$ va rezulta

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M_s} = \gamma \dfrac{\int_{-1}^{1} u^2 e^{-\alpha u^2}\, du}{\int_{-1}^{1} e^{-\alpha u^2}\, du} = \gamma h_1(\alpha) \\ \\ \dfrac{M}{M_s} = \dfrac{3kT}{\mu_o m^2 N}\gamma - \dfrac{3H}{N.m} \end{cases} \tag{45}$$

relaţia între magnetizaţia şi intensitatea cîmpului magnetic devenind

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\mu_0 m\, h_1(\alpha)}{kT\left[1 - \frac{\mu_0 m^2 N}{3kT} h(\alpha)\right]} H$$

cu

$$h_1(\alpha) = \frac{1}{3} - \frac{4}{45}\alpha + \dots$$

sau

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\mu_0 m}{3kT} \frac{1}{1 - \frac{\mu_0 m^2 N}{9kT}} \left[1 - \frac{4}{15}\alpha \frac{1}{1 - \frac{\mu_0 m^2 N}{9kT}}\right] H \tag{46}$$

Termenul de corecţie este deci acelaşi cu cel dat de relaţia (39). Pentru a studia influenţa cîmpului magnetic asupra polarizaţiei electrice se va observa că integrala din relaţia (44) tinde spre 1 cînd $\alpha \to \infty$, iar pentru $\alpha = 0$ şi γ avînd valori mici se dezvoltă în serie rezultînd :

$$G_1(0,\gamma) = \frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{48}\gamma + \dots\right)$$

astfel încît funcţiile $G_1(\alpha,\gamma)$ şi $G(\alpha,\gamma)$ vor arăta ca în fig.12.

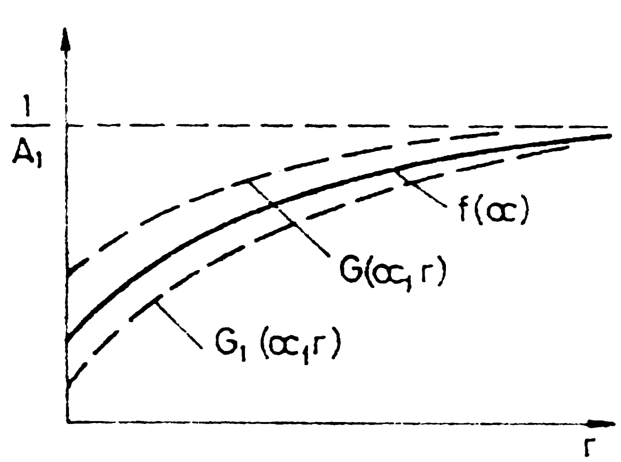


Fig.12

Determinarea polarizaţiei electrice se face grafic rezolvînd un sistem asemănător cu (40'), în care însă prezența cîmpului magnetic determină micşorarea coeficientului unghiular al dreptei reprezentată de prima ecuație, în timp ce ecuația a doua rămîne neschimbată. Rezultă deci o micşorare a polarizației electrice în prezența cîmpului magnetic.

2.5.5. Particule dielectrice în suspensie coloidală

La începutul cap.2 s-a presupus faptul că particulele în suspensie din lichidul de bază ar fi metalice. Există lichide magnetice la care particulele în suspensie, avînd momentul magnetic m, se comportă ca nişte dielectrici din punct de vedere electric.

Si în acest caz, datorită formei alungite a particulelor polarizația electrică şi magnetizația vor depinde atît de intensitatea cîmpului magnetic cît şi de cea a cîmpului electric. Momentul electric echivalent particulei din fig.13 se determină după ce în prealabil se rezolvă problema cîmpului electric în interiorul şi exteriorul unui elipsoid dielectric plasat într-un cîmp electric exterior, şi are expresia [50]:

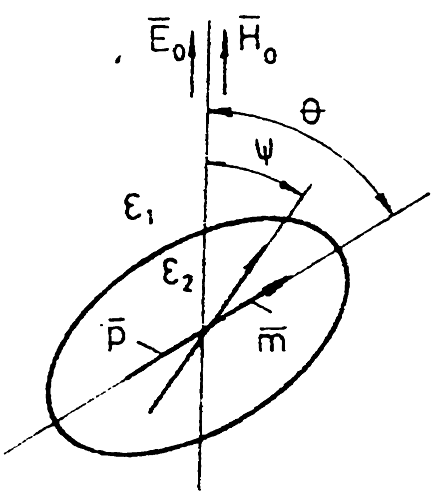


Fig.13

$$\bar{p} = V(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left[\frac{\cos\theta}{1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_1(o)}\bar{I} + \frac{\sin\theta}{1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_2(o)}\bar{J}\right]E_0 \tag{47}$$

Relația (47) este foarte asemănătoare cu (5), astfel încît concluziile în cele două cazuri nu vor diferi prea mult. De altfel pentru $\varepsilon_2 \to \infty$ şi $\varepsilon_1 = \varepsilon_f$ din relaţia (47) se obţine relaţia (5).

Raportul dintre energia potenţială a particulelor în câmpurile E_0, H_0 şi energia de agitaţie termică kT are expresia :

$$-\frac{W}{kT} = \frac{V}{2kT}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1}\frac{A_2(o)-A_1(o)}{\left[1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_2(o)\right]\left[1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_1(o)\right]}E^2\cos^2\theta +$$

$$+\frac{\mu_0 m}{kT}H_0\cos\theta = \alpha'\cos^2\theta + \gamma\cos\theta$$

Procedînd ca în paragrafele anterioare se obţine sistemul de ecuaţii care determină în mod implicit dependenţele $M = M(H,E)$ şi $P = P(E,H)$ în forma

$$\left\{\begin{aligned} & M = N\cdot m\, F(\alpha',\gamma) \\ & P = (1-NV)(\varepsilon_1-\varepsilon_0)E + NV(\varepsilon_2-\varepsilon_0)E_0G_2(\alpha',\gamma) \\ & \alpha' = \frac{V}{2kT}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1}\frac{A_2(o)-A_1(o)}{\left(1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_1\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_2\right)}E_0^2 = \beta E_0^2 \\ & \gamma = \frac{\mu_0 m}{kT}H_0 \end{aligned}\right. \tag{48}$$

unde funcţia F e dată de relaţia (32) iar G_2 are expresia :

$$G_2(\alpha',\gamma) = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_2(o)} +$$

$$+\left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_1} - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}A_2}\right)\frac{\int_{-1}^{1}u^2e^{\alpha' u^2+\gamma u}\,du}{\int_{-1}^{1}e^{\alpha' u^2+\gamma u}\,du}$$

Din compararea sistemelor (48) şi (34) rezultă că prezenţa unui cîmp electric paralel cu cîmpul magnetic duce la mărirea magnetizaţiei. Prezenţa cîmpului magnetic însă poate să mărească sau să micşoreze polarizaţia electrică, după cum $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ sau $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Pentru justificarea acestei afirmaţii se va prezenta o rezolvare grafică calitativă a ecuaţiilor din sistemul (48) care determină dependenţa $P=P(E,\gamma)$, ţinînd cont de influenţa cîmpului magnetic.

Ecuaţiile respective le vom scrie în forma :

$$\begin{cases} P - a_1 E = a_2\sqrt{\alpha'}\,G_1(\alpha',\gamma) \\ \alpha' = \beta\left(E + \dfrac{P}{3\varepsilon_0}\right)^2 \end{cases} \tag{49}$$

unde mărimile constante a_1 şi a_2 se determină uşor prin identificare. In fig.14 se prezintă rezolvarea grafică a sistemului (49) pentru cele două cazuri amintite : $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ şi $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Concluziile de mai sus rezultă şi dacă rezolvarea sistemului (48) se făcea în modul prezentat în paragraful 1.1, adică scriind în prealabil ecuaţiile (48) în forma :

$$\begin{cases} P = \dfrac{(1-NV)(\varepsilon_1-\varepsilon_0) + NV(\varepsilon_2-\varepsilon_0)G_1(\alpha',\gamma)}{1 - \dfrac{NV}{3\varepsilon_0}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)G_1(\alpha',\gamma)}\,E \\ P = \mathrm{const}\sqrt{\alpha'} - 3\varepsilon_0 E \end{cases}$$

Din fig.15 rezultă că la aceeaşi valoare a cîmpului electric prezenţa cîmpului magnetic produce micşorarea polarizaţiei electrice cînd $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Drept concluzie generală se poate afirma că în cazul lichidelor magnetice ale căror particule suspendate au formă ce se abate de cea sferică, permeabilitatea magnetică şi permitivitatea electrică sînt funcţie atît de intensitatea cîm-

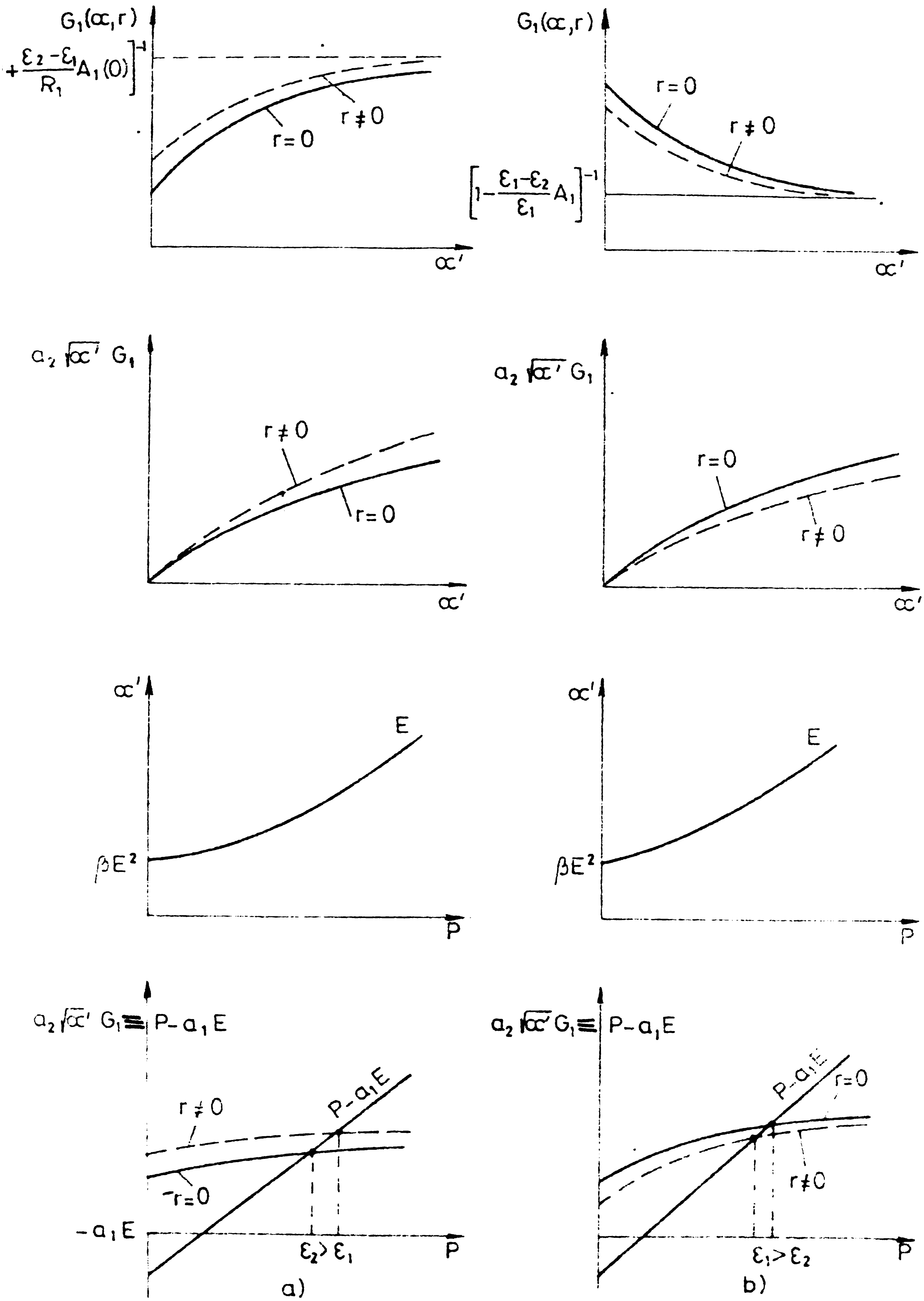

$G_1(\alpha, r)$
$+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_1}A_1(0)]^{-1}$
$r \neq 0$
$r = 0$
α'
$G_1(\alpha, r)$
$r = 0$
$r \neq 0$
$\left[1-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}A_1\right]^{-1}$
α'
$a_2\sqrt{\alpha'}\,G_1$
$r \neq 0$
$r = 0$
α'
$a_2\sqrt{\alpha'}\,G_1$
$r = 0$
$r \neq 0$
α'
α'
E
βE^2
P
α'
E
βE^2
P
$a_2\sqrt{\alpha'}\,G_1 \equiv P-a_1E$
$r \neq 0$
$P-a_1E$
$r = 0$
$-a_1E$
$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$
P
a)
$a_2\sqrt{\alpha'}\,G_1 \equiv P-a_1E$
$P-a_1E$
$r = 0$
$r \neq 0$
$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$
P
b)

Fig.14

pului magnetic cît şi de cea a cîmpului electric adică $\varepsilon=\varepsilon(E;H)$ şi $\mu=\mu(H;E)$.

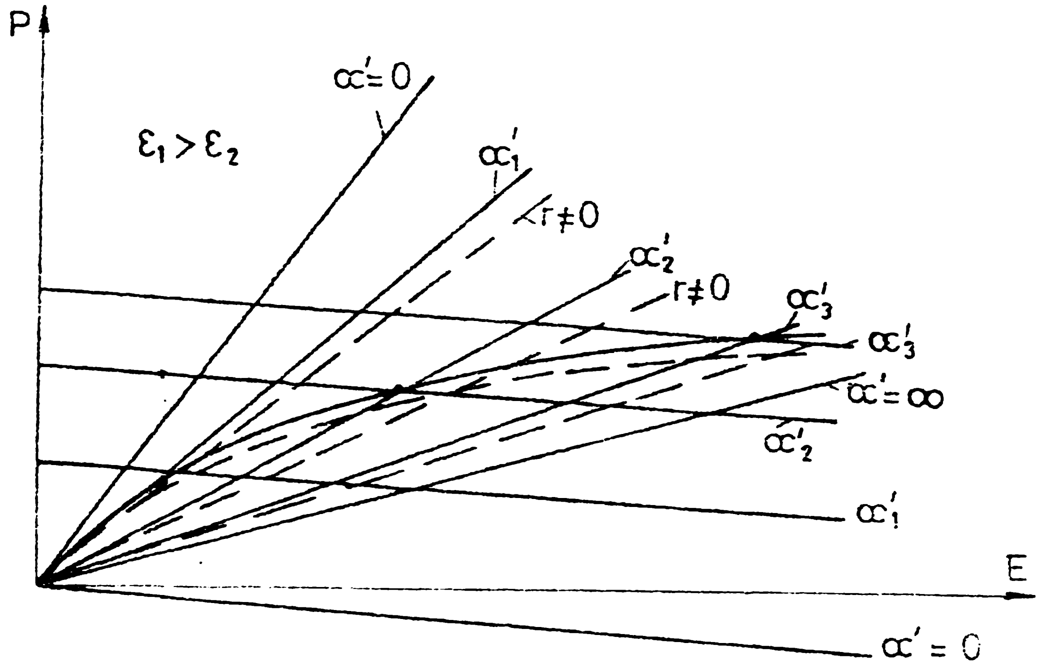


Fig.15

2.6. Măsurarea permeabilităţii lichidelor magnetice

Modificările produse de un cilindru de secţiune circulară, infinit de lung şi de un elipsoid, ambele avînd permeabilitatea magnetică constantă, asupra unui cîmp magnetic exterior sînt studiate în literatură [51 - 53].

In cele ce urmează se vor determina cîmpurile magnetice staţionare din interiorul şi exteriorul acestor corpuri în ipoteza că ele au permeabilitate magnetică neliniară dar magnetizaţie reversibilă. Condiţiile de unicitate ale cîmpurilor staţionare în astfel de medii sînt date în [54].

Rezultatele obţinute au fost folosite la determinarea curbelor de magnetizare ale fluidelor magnetice [41]

2.6.1. Cilindru neliniar în cîmp magnetic exterior uniform

Fie $\bar{H}_0$ intensitatea cîmpului magnetic în care este introdus, transversal, un cilindru de rază a, infinit de lung şi avînd curba de magnetizare dată, fig.16.b.

Curba de magnetizare se aproximează liniar pe porţiuni. Pe dreapta OP' permeabilitatea magnetică este constantă, iar

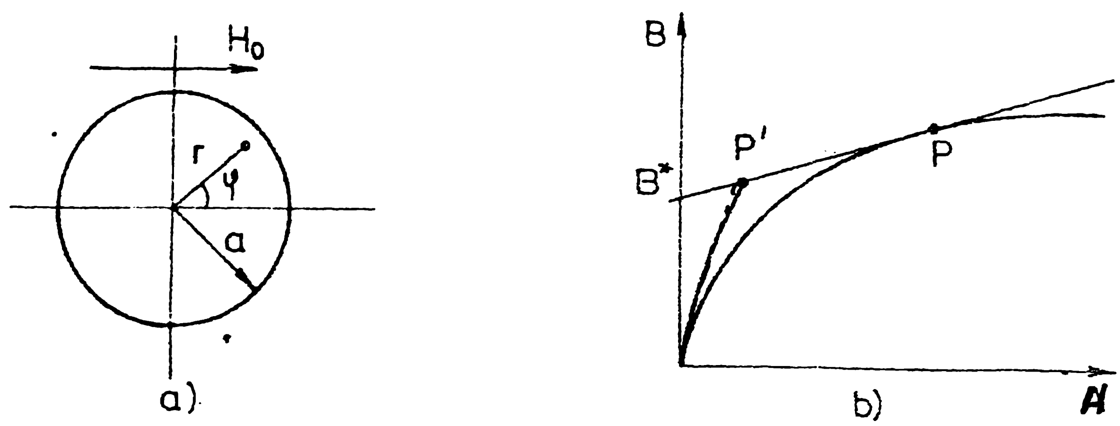


Fig.16

calculele arată că în interiorul cilindrului se stabileşte un cîmp uniform de intensitate $\overline{H}_i$, iar în exterior un cîmp neuniform de intensitate $\overline{H}_e$ [13 - 16]. Fie acum o stare magnetică reprezentată de dreapta P'P fig.16.b. In substanţă legătura dintre $\overline{B}$ şi $\overline{H}$ va fi dată de :

$$\overline{B}_i = \mu_d \overline{H}_i + \overline{B}^* \tag{5o}$$

în care $\overline{B}^*$ se presupune un cîmp uniform avînd orientarea lui $\overline{B}_o$, deoarece în punctul P', ce aparţine dreptei OP, vectorii $\overline{B}$ şi $\overline{H}$ au această orientare. Permeabilitatea diferenţială μ_d este calculată în punctul P.

Cu această observaţie din (5o) şi din legerea fluxului magnetic rezultă din $\overline{H}_i = o$, iar din relaţia lui Ampère rot $\overline{H}_i = o$ avem $\overline{H}_i = -\nabla V_{Hi}$; $\nabla^2 V_{Hi} = o$.

Pentru potenţialul magnetic din exterior aceleaşi legi ne conduc la $\overline{H}_e = -\nabla V_{He}$ şi $\nabla^2 V_{He} = o$.

Condiţiile de limită se referă la relaţiile pe care le satisfac funcţiile scalare V_{Hi} şi V_{He} la suprafaţa cilindrului (r = a). Acestea sînt : continuitatea componentelor tangenţiale ale vectorilor $\overline{H}_e$ şi $\overline{H}_i$ adică $V_{Hi} = V_{He}$ şi continuitatea componentelor normale ale vectorilor $\overline{B}_i$ şi $\overline{B}_e$. Ultima se scrie în coordonate cilindrice pornind de la relaţiile :

$$\overline{B}_e = -\mu_o \nabla V_{He} = -\mu_o\left(\frac{\partial V_{He}}{\partial r}\,\overline{u}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_{He}}{\partial \varphi}\,\overline{u}_\varphi\right)$$

$$\overline{B}_i = -\mu_d \nabla V_{Hi} + \overline{B}^* = -\mu_d\left(\frac{\partial V_{Hi}}{\partial r}\,\overline{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_{Hi}}{\partial \varphi}\,\overline{u}_\varphi\right) + B^*\,\overline{u}_{Bo} \qquad (51)$$

Rezultă

$$\left(-\mu_d\,\frac{\partial V_{Hi}}{\partial r} + B^*\,\overline{u}_B\cdot\overline{u}_r\right)_{r=a} = -\mu_o\,\frac{\partial V_{He}}{\partial r}\Big)_{r=a} \qquad (51)$$

Aşadar condiţiile de limită sînt :

$$V_{Hi} = V_{He}\ ;\ \mu_d\left(\frac{\partial V_{Hi}}{\partial r}\right)_{r=a} - B^*\cos\varphi = \mu_o\left(\frac{\partial V_{He}}{\partial r}\right)_{r=a} \qquad (52)$$

Folosind metoda separării variabilelor, se obţin pentru ecuaţiile lui Laplace soluţii de forma :

$$V_{He} = -H_o r\cos\varphi + \sum_1^\infty A_k r^{-k}\cos k\varphi$$

$$V_{Hi} = \sum_1^\infty C_k r^k \cos k\varphi$$

unde s-a ţinut seama că pentru $r\to\infty$, potenţialul V_{He} trebuie să tindă spre $V_{Ho} = -H_o r\cos\varphi$, iar în interiorul cilindrului V_{Hi} este o funcţie finită.

Condiţiile (52) conduc la :

$$A_2 = A_3 = \dots = o \quad C_2 = C_3 = \dots = o$$

$$A_1 = a^2\,\frac{B + \mu_o(\mu_d - \mu_o)}{\mu_d + \mu_o}\ , \qquad C_1 = \frac{B^* - 2\mu_o H_o}{\mu_d + \mu_o} \qquad (53)$$

de unde rezultă :

$$V_{He} = -H_o r\cos\varphi + \frac{a^2}{r}\,\frac{B^* + H_o(\mu_d - \mu_o)}{\mu_d + \mu_o}\cos\varphi \qquad (54)$$

$$V_{Hi} = \frac{B^* - 2\mu_o H_o}{\mu_d + \mu_o}\cos\varphi$$

şi deci vectorul intensitate a cîmpului magnetic în interiorul cilindrului are expresia

$$H_i = -\frac{B^* - 2\mu_o H_o}{\mu_d + \mu_o}\cos\varphi\,\overline{u}_r + \frac{B^* - 2\mu_o H_o}{\mu_d + \mu_o}\sin\varphi\,\overline{u}_\varphi =$$

$$= \frac{2\mu_o H_o - B^*}{\mu_d + \mu_o}\,\overline{u}_z \qquad (55)$$

iar în exterior

$$\overline{H}_e = -\nabla V_{He} = \left(H_o + \frac{a^2}{r^2}\,\frac{[B^* + H_o(\mu_d - \mu_o)]}{\mu_d + \mu_o}\right)\cos\varphi\,\overline{u}_r -$$

$$-\left(H_o - \frac{a^2}{r^2}\,\frac{B^* + H_o(\mu_d - \mu_o)}{\mu_d + \mu_o}\right)\sin\varphi\,\overline{u}_\varphi$$

Ţinînd seama de (5o) se poate scrie

$$B_i - B^* + \mu_o H_i = 2B_o - B^*$$

şi deoarece în punctul P : $\overline{B}_i = \mu \overline{H}_i$ rezultă

$$\frac{B_i}{B_o} = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \qquad (56)$$

relaţie identică cu cea obţinută în ipoteza cilindrului magnetic liniar.

2.6.2. Elipsoid neliniar în cîmp magnetic exterior uniform

Fie un elipsoid avînd semiaxele a, b, c, introdus într-un cîmp magnetic exterior uniform (fig.17).

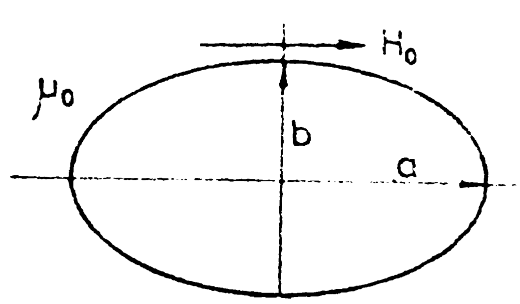


Fig.17

Curba de magnetizare a mediului se presupune reversibilă şi se liniarizează pe porţiuni (fig.16.b) . Cu un raţionament identic cu precedentul se determină ecuaţiile pe care le satisfac potenţialele magnetice în puncte interioare şi exterioare elipsoidului :

$$\nabla^2 V_{Hi} = 0 \;, \qquad \nabla^2 V_{He} = 0$$

precum şi condiţiile la limită.

In coordonate elipsoidale ultimele se scriu :

$V_{Hi} = V_{He}$ pentru $\xi = 0$ şi

$$-\mu_d\left(\frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial V_{Hi}}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} + B^*(\bar{u}_B\cdot\bar{u}_\xi)_{\xi=0} = -\mu_0\left(\frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial V_{He}}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} \qquad (57)$$

Pentru ecuaţiile lui Laplace se încearcă soluţii de forma :

$$V_{He} = V_{Ho} + V_{Ho}\,F(\xi) \qquad V_{Hi} = C\,V_{Ho} \qquad (58)$$

unde :

$$V_{Ho} = -H_0 X = \mp H_0\sqrt{\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \qquad (59)$$

reprezintă potenţialul magnetic al cîmpului magnetic presupus uniform. Introducînd încercarea de soluţie (58) în ecuaţia lui Laplace se obţine funcţia $F(\xi)$:

$$F(\xi) = A\int_{\xi}^{\infty}\frac{d\xi}{R_\xi(\xi+a^2)} \qquad (60)$$

în care $R_\xi = \sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)}$ iar A reprezintă o constantă de integrare.

Deoarece $\overline{U}_B = \bar{i}$, iar $\overline{B}_i = \mu_d H_i + \overline{B}^*$, a doua condiţie la limită cu forma (58) a soluţiilor, devine :

$$\mu_d\left[C\,\frac{\partial V_{Ho}}{\partial \xi}\right]_{\xi=0} - B^* h_\xi(\bar{i}\;\bar{u}_\varphi) = \mu_0\left[C\,\frac{\partial V_{He}}{\partial \xi} - A\,\frac{V_{Ho}}{R_\xi(\xi+a^2)}\right]_{\xi=0}$$

sau cu (59) şi (60) avem :

$$\left[C(\mu_d-\mu_o)\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,\frac{R_\xi(\xi+a^2)}{X}+\frac{B^*}{H_o}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,\frac{R_\xi(\xi+a^2)}{X}\right]_{\xi=o}=-A\mu_o$$

în care s-a ţinut cont că $h_\xi(\overline{i}\cdot\overline{u}_\xi)=\frac{\partial\chi}{\partial\xi}$.

Calculînd derivata $\frac{\partial\chi}{\partial\xi}$ şi folosind expresia lui h se obţin în final condiţiile la limită (57) în forma :

$$C = 1 + A\int_o^\infty \frac{ds}{R_s(s+a^2)}\,, \qquad (61)$$
$$C(\mu_d-\mu_o)\,\frac{abc}{2}+\frac{B^*}{H_o}\,\frac{abs}{2}=-A\mu_o$$

din care se calculează constantele A şi C :

$$C=\frac{\mu_o-\frac{B^*}{H_o}A_1(o)}{\mu_o+(\mu_d-\mu_o)A_1(o)}\,, \qquad (62)$$
$$A=-\frac{abc}{2}\,\frac{(\mu_d-\mu_o)H_o+B^*}{H_o\mu_o+(\mu_d-\mu_o)A_1(o)}$$

unde s-a făcut notaţia

$$A_1(o)=\frac{abc}{2}\int_o^\infty\frac{ds}{R_s(s+a^2)} \qquad (63)$$

Intensitatea cîmpului magnetic în interiorul elipsoidului rezultă sub forma

$$\overline{H}_i=-\nabla V_{Hi}=\frac{\mu_oH_o-B^*A_1(o)}{\mu_o+(\mu_d-\mu_o)A_1(o)}\,\overline{i} \qquad (64)$$

Ţinînd cont de (5o) şi că în punctul P, $\overline{B}_i=\mu\overline{H}_i$, din (64) rezultă

$$A_1(o)\left[\mu_dH_i+B^*\right]+\left[\mu_o-\mu_oA_1(o)\right]H_i=\mu_oH_o$$

sau

$$\frac{B_i}{B_o}=\frac{\mu_r}{1+(\mu_r-1)A_1(o)} \qquad (65)$$

relaţie identică cu cea cunoscută pentru medii liniare. Un caz particular important în aplicaţiile practice îl constituie elipsoidul de revoluţie alungit : b=c, pentru care avem:

$$A_1(o)=\frac{abc}{2}\int_0^{\infty}\frac{ds}{(b^2+s)(a^2+s)^{3/2}}=\frac{1-e^2}{2e^3}(\ln\frac{1+e}{1-e}-2e) \qquad (66)$$

unde
$$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$$

2.6.3. Măsurarea permeabilităţii magnetice a mediilor neliniare. Rezultate experimentale

Relaţiile (56) şi (65) sugerează posibilitatea măsurării permeabilităţilor magnetice ale mediilor neliniare, în particular ale fluidelor magnetice, folosind probe cilindrice situate transversal respectiv longitudinal în cîmpuri magnetice exterioare omogene. Deoarece fluidele magnetice au conductivitate nulă egalităţile (56) şi (65) îşi menţin valabilitatea şi în cîmpuri magnetice exterioare variabile, dacă fenomenele pot fi considerate cuasistaţionare.

Cilindru situat longitudinal

Cilindrul se aproximează cu un elipsoid de revoluţie alungit. Dacă ℓ respectiv d reprezintă lungimea, respectiv diametrul cilindrului. elipsoidul ce-l aproximează se obţine fie din condiţia $b=\frac{d}{2}$ şi $c=\frac{\ell}{2}$, fie din $b=\frac{d}{2}$ şi $a=\frac{\ell}{2}$. Valorile lui e sînt :

$$e=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{d}{\ell})^2}} \qquad \text{respectiv} \qquad e'=\sqrt{1-(\frac{d}{\ell})^2}$$

adică

$$e'=\frac{e}{\sqrt{1-(\frac{d}{\ell})^4}} \qquad (67)$$

Se constată că pentru $\frac{d}{\ell}\ll 1$ $e\cong e'$, de unde rezultă că din punct de vedere al calculului mărimii $A_1(o)$ cele două aproximări sînt echivalente. Prima construcţie asigură pe o lungime mai mare coincidenţa între elipsoid şi cilindru (fig.18).

Pentru măsurarea inducţiei magnetice din fluidul magnetic aflat în interiorul unui tub de sticlă avînd dimensiunile

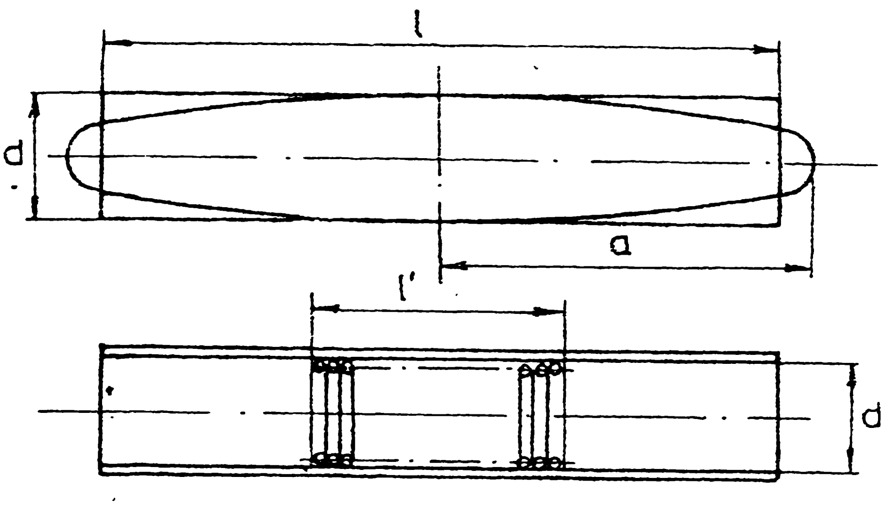


Fig.18

d= 7,1 mm, ℓ = 1oo mm, s-a introdus o bobină cu N= 2oo spire de lungime ℓ' = 5o mm avînd diametrul 7 mm care cuprinde porţiunea de coincidenţă între cilindru şi elipsoid, fig.18.

Cilindrul a fost introdus într-o bobină lungă alimentată cu tensiune sinusoidală pentru a creea un cîmp exterior uniform şi variabil în timp. Prin calcule s-a determinat $B_o = \mu_o H_o$ iar din valoarea tensiunii electromotoare induse în bobina cu N= 2oo spire, inducţia magnetică B_i cu (65) şi (66) s-a calculat μ_r , rezultatele fiind reprezentate în fig.19.

Metoda este indicată pentru studiul proprietăţilor magnetice ale fluidelor în cîmpuri magnetice slabe.

<u>Cilindru lung situat transversal în cîmp magnetic</u>

Din egalitatea (56) rezultă

$$\mu_r = \frac{B_i}{2B_o - B_i} \qquad (68)$$

expresie ce permite determinarea experimentală a permeabilităţii relative prin măsurarea mărimilor B_i şi $2B_o - B_i$. Aceasta s-a realizat folosind două sonde Hall legate ca în fig.2o. Înainte de efectuarea măsurătorilor cele două sonde au fost etalonate, iar curenţii de comandă astfel aleşi încît la aceeaşi inducţie magnetică, tensiunile lor să fie egale. Apoi pentru sonda I plasată în cîmpul de inducţie B_o, curentul ei de co-

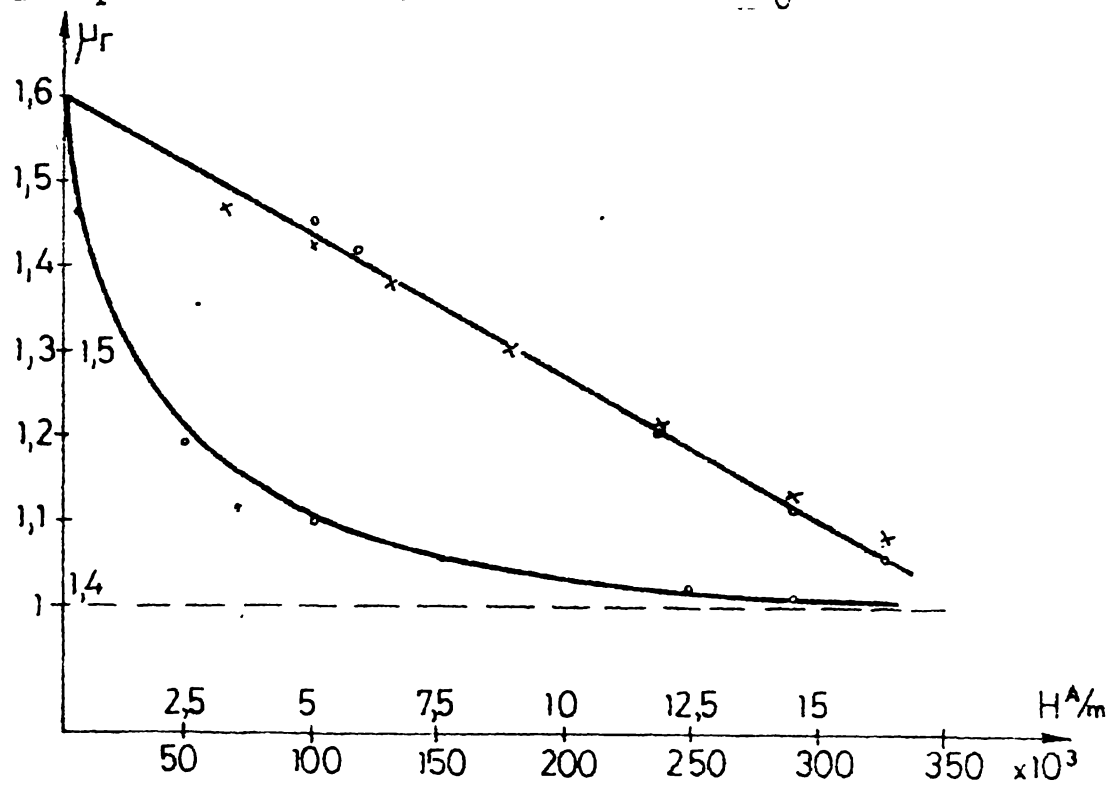


Fig.19

mandă s-a dublat. Cînd întrerupătoarele k_1 este închis şi k_2 deschis, milivoltmetrul măsoară tensiunea

$$U' = U_{ho} - U_{hi} = 2CB_o - CB_i$$

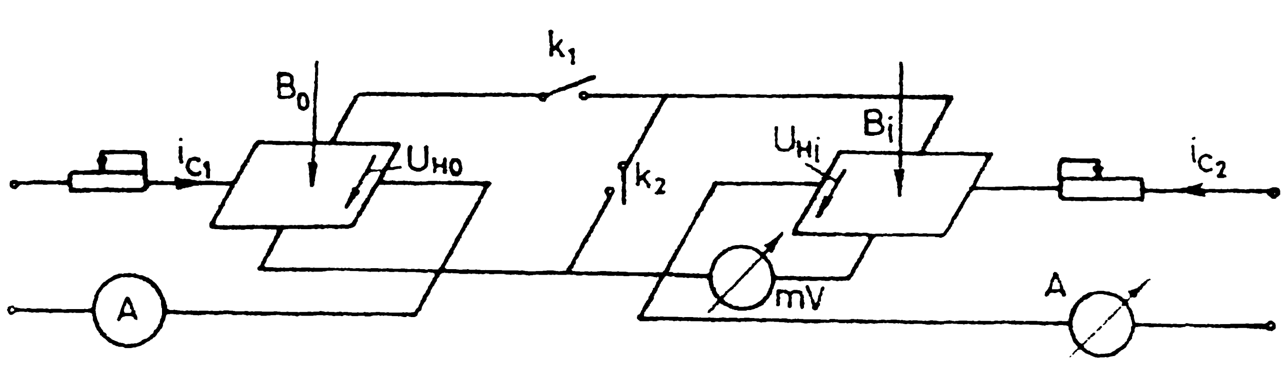


Fig.2o

La k_2 închis şi k_1 deschis, acelaşi instrument dă $U=CB_i$. Rezultă deci din (68) şi din cele două măsurători relaţia de calcul

$$\mu_r = \frac{U}{U'}$$

Pentru a realiza inducţia B_o la prima sondă s-a calculat distanţa minimă, r, de pe axa cilindrului astfel ca

$B_o' = \mu_o H_o \cong B_o$. Din (56) rezultă pentru puncte situate pe axa ce coincide cu direcţia lui B_o, intensitatea cîmpului magnetic sub forma

$$H_o' = H_o + \frac{a^2}{r^2} \frac{B^* + H_o(\mu_d - \mu_o)}{\mu_d + \mu_o}$$

adică

$$\frac{B_o' - B_o}{B_o} = \frac{a^2}{r^2}\left[\frac{B^*}{H_o(\mu_d+\mu_o)} + \frac{\mu_d - \mu_o}{\mu_d + \mu_o}\right] =$$

$$= \frac{a^2}{r^2}\left[\frac{B_i - \mu_d H_i}{H_i \frac{\mu}{\mu_o} \frac{\mu_r+1}{2\mu_r}(\mu_d+\mu_o)} + \frac{\mu_d - \mu_o}{\mu_d + \mu_o}\right]$$

şi cum $B_i = \mu H_i$, avem în final :

$$\mathcal{E} = \frac{B_o' - B_o}{B_o} = \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}$$

S-au calculat pentru $\mu_r = 2$ valorile lui $\mathcal{E}$ în funcţie de raportul $\frac{r}{a}$. S-a ales $\frac{r}{a} > 4$ pentru că $\mathcal{E} < 0,02$.

Pentru determinarea corectă a inducţiei B_i, sonda II a fost introdusă în interiorul fluidului magnetic.

Rezultatele experimentale sînt indicate în fig.19.

Metoda este avantajoasă pentru determinarea permeabilităţilor magnetice ale fluidelor în cîmpuri magnetice intense.

Determinarea permeabilităţii lichidelor magnetice cu ajutorul galvanometrului balistic

Determinarea permeabilităţii magnetice a lichidelor magnetice cu ajutorul galvanometrului balistic se poate face măsurînd variaţia înlănţuirii magnetice a unei bobine în interiorul căreia se află lichid magnetic (fig.21).

La scoaterea bobinei de măsură din cîmpul magnetic al electromagnetului Weiss, variază înlănţuirea magnetică a bobinei de măsură şi deci, de-a lungul circuitului apare o tensiune electromotoare egală cu $-\frac{d\Psi}{dt}$. Considerînd rezistenţa totală a circuitului egală cu R, va rezulta :

$$-\frac{d\Psi}{dt} = iR = \frac{dQ}{dt}R \tag{69}$$

Integrînd relaţia (69) între limitele Ψ şi zero, rezultă

$$\Psi = QR \tag{7o}$$

Sarcina electrică măsurată de galvanometrul balistic este proporţională cu prima deviaţie maximă a acestuia, $Q = k\alpha_m$, k fiind constanta galvanometrului. Aproximînd tubul cu lichid magnetic,

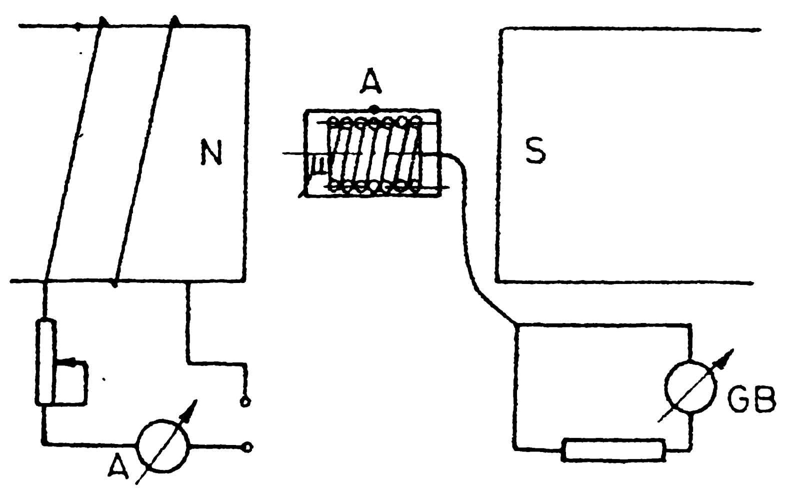


Fig.21

în care se introduce bobina cu N spire, drept un elipsoid de rotaţie alungit, rezultă că în interiorul tubului cîmpul magnetic este omogen, şi relaţia (7o) devine

$$N.B.S = k\alpha_m R$$

sau

$$B = \frac{kR}{N.S}\alpha_m \tag{71}$$

unde $S = \frac{\pi d^2}{4}$, d fiind diametrul mijlociu al bobinei.

Pentru determinarea intensităţii cîmpului magnetic în interiorul lichidului se va măsura inducţia magnetică în prezenţa lichidului în punctul A_o. Admiţînd că intensitatea cîmpului magnetic e omogenă între polii electromagnetului, din conservarea componentelor tangente a lui H rezultă

$$H = \frac{B_o}{\mu_o} \tag{72}$$

Din relaţiile (71) şi (72) rezultă formula de calcul pentru permeabilitatea relativă în forma :

$$\mu_r = \frac{kR}{N.S} \frac{\alpha_m}{B_o} \tag{73}$$

Pentru măsurarea sarcinii electrice, galvanometrul balistic trebuie etalonat în prealabil, măsurînd o sarcină electrică cunoscută şi observînd deviaţia maximă a acestuia.

Etalonarea se face încărcînd un condensator la o anumită tensiune şi apoi descărcîndu-l peste galvanometru ca în fig.22. Considerînd condensatorul ideal, rezultă că rezistenţa exterioară a galvanometrului,astfel aleasă încît să fie egală cu cea critică, este R_1+R_2.

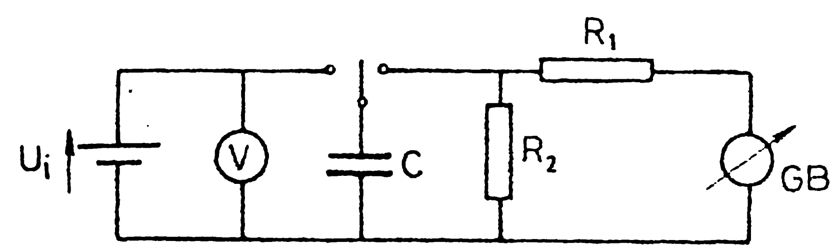


Fig.22

Sarcina electrică ce trece prin galvanometru balistic se va calcula cu relaţia

$$Q_1 = Q \frac{R_2}{R_1+R_2+R_g} = CU \frac{R_2}{R_1+R_2+R_g} = k\alpha_m$$

de unde rezultă constanta galvanometrului

$$k = \frac{CR_2}{R_1+R_2+R_g} \frac{U}{\alpha_m} \tag{74}$$

Calculul numărului de spire al bobinei de măsură se face cu uşurinţă considerînd cunoscute : numărul maxim de diviziuni pe scara galvanometrului a_m, secţiunea unei spire, constanta k, şi inducţia magnetică maximă B_m, cu formula

$$N = \frac{k a_m \cdot R}{S\ B_m} \tag{75}$$

Cunoscînd numărul de spire al bobinei de măsură se poate verifica dacă prin bobina galvanometrului curentul electric trece într-un timp mult mai mic decît constanta proprie a galvanometrului T_o.

Astfel timpul în care curentul electric scade la o anumită fracțiune din valoarea sa inițială e

$$t^* = \frac{L}{R} \ln \frac{I_o}{I} \tag{76}$$

Pentru $\frac{I_o}{I} = 100$ $t^* = 4,6 \frac{L}{R}$, L fiind inductivitatea circuitului, iar R rezistența sa.

Rezultatele experimentale pentru etalonarea galvanometrului sînt date în tabelul de mai jos.

Nr.crt.	U V	α_m cm	k cb/cm
1	5	5,8	$13,303.10^{-8}$
2	7,5	8,8	$13,152.10^{-8}$
3	10	11,9	$12,968.10^{-8}$
4	15	17,2	$13,458.10^{-8}$

$R_1=15$
$R_2=10$
$R_g=7,4$
$C=0,5\mu F$

Cu relația (74) avem

$$k = \frac{0,5.10^{-6}.10}{10+15+7,4} \frac{U}{\alpha_m} = \frac{5}{32,4} .10^{-6} \frac{U}{\alpha_m},$$

valoarea medie obținută pentru constanta k fiind

$$k = 13,22.10^{-8}\ Cb/cm$$

Pentru $B_m = 0,1$ Te, $a_m = 25$ cm, $S = 1$ cm^2 și $R = 32,4$ se obține pentru numărul de spire al bobinei de măsură, valoarea

$$N = \frac{13,22.10^{-8}.25.32,4}{10^{-4}.0,1} = 10,7 \text{ spire.}$$

Pentru măsurători s-au folosit trei bobine avînd N_1=1o spire, N_2=4 spire şi N_3=2 spire. Datorită faptului că suprafeţele reâle ale spirelòr introduse în lichid nu pot fi cunoscute cu precizie s-a mai făcut o etalonare, determinînd deviaţia α_m a galvanometrului, pentru scoaterea din cîmp, a bobinelor cu N_1, N_2 şi N_3 spire, cîmpul magnetic fiind determinat cu teslametrul Hall. Rezultă următoarele relaţii :

$$B_{(N1)} = 4,77\alpha_m \ ; \ B_{(N2)} = 11,75\alpha_m ; \ B_{(N3)} = 24,73\alpha_m \ .$$

Pentru bobina cu N= 1o spire se verifică, cu uşurinţă că $t^* \ll T_o$= 9 sec, inductivitatea L avînd valori de ordinul mH. S-au efectuat măsurători pentru trei tipuri de lichide magnetice obţinute de colectivul de cercetare al Facultăţii de inginerie chimică al IPTVT.

Rezultatele măsurătorilor sînt trecute în tabelele 1 - 3, iar corespondentele $\mu_r = \mu_r(H)$ şi $\mu_o M = f(H)$ în fig.23.

Lichidul nr.1 Tab.1

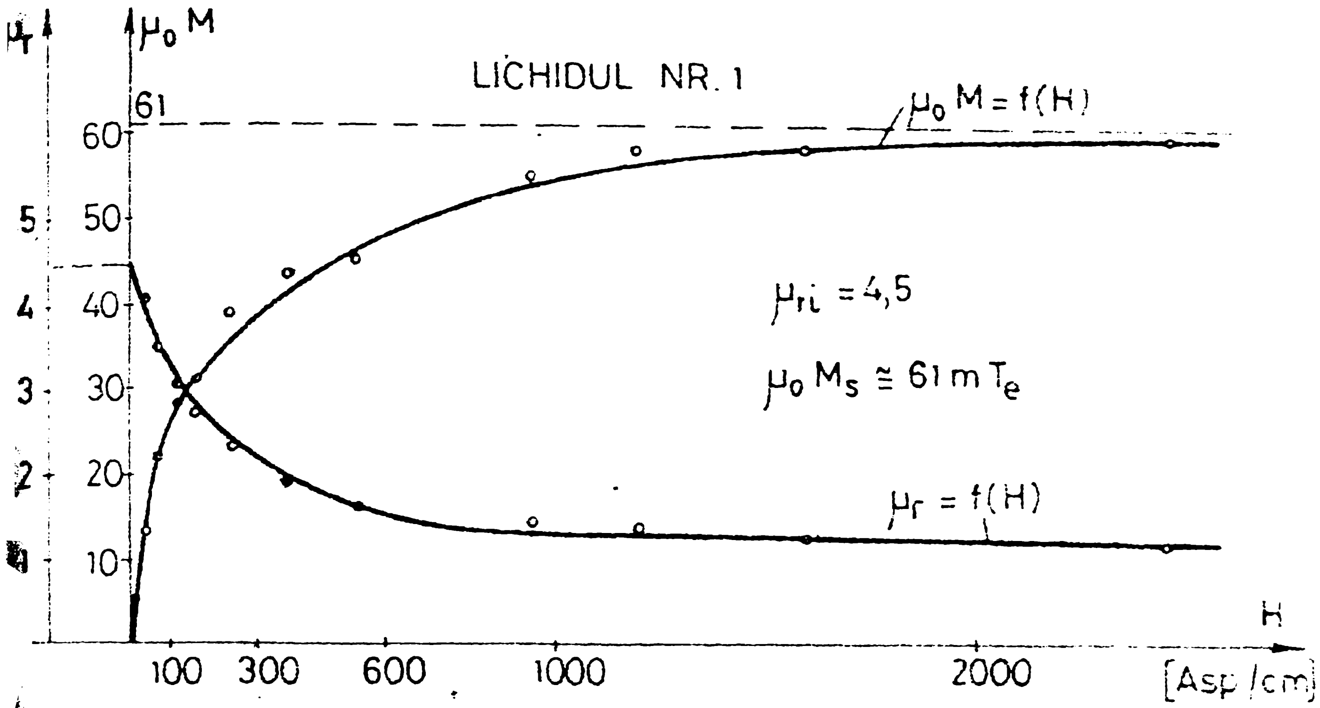
Nr. crt.	B_o mTe	α_m cm	B mTe	μ_r	$H = \frac{B}{\mu_o \mu_r}$	$\mu_o M = B \frac{\mu_r - 1}{\mu_r}$
1	1,7	1,5	7,15	4,2o	135o	5,45
2	4,3	3,7	17,64	4,1o	3421	13,34
3	9	6,6	31,48	3,49	7161	22,48
4	13,6	8,8	41,97	3,o8	1o322	28,37
5	18,5	1o,5	5o,o8	2,7o	14721	31,58
6	3o	14,5	69,16	2,3o	23873	39,16
7	47	19	9o,63	1,92	374o1	43,63
8	68	23,7	113,o5	1,66	54112	45,o5
9	12o	14,9	175,o7	1,45	95492	55,o7
1o	15o	17,7	2o7,97	1,38	119366	57,97
11	2oo	22	258,5	1,29	159154	58,5
12	31o	15	37o,95	1,19	24669o	6o,95
13	4o9	19	469,87	1,14	325471	6o,87
14	51o	23,1	571,26	1,12	4o5845	61,26

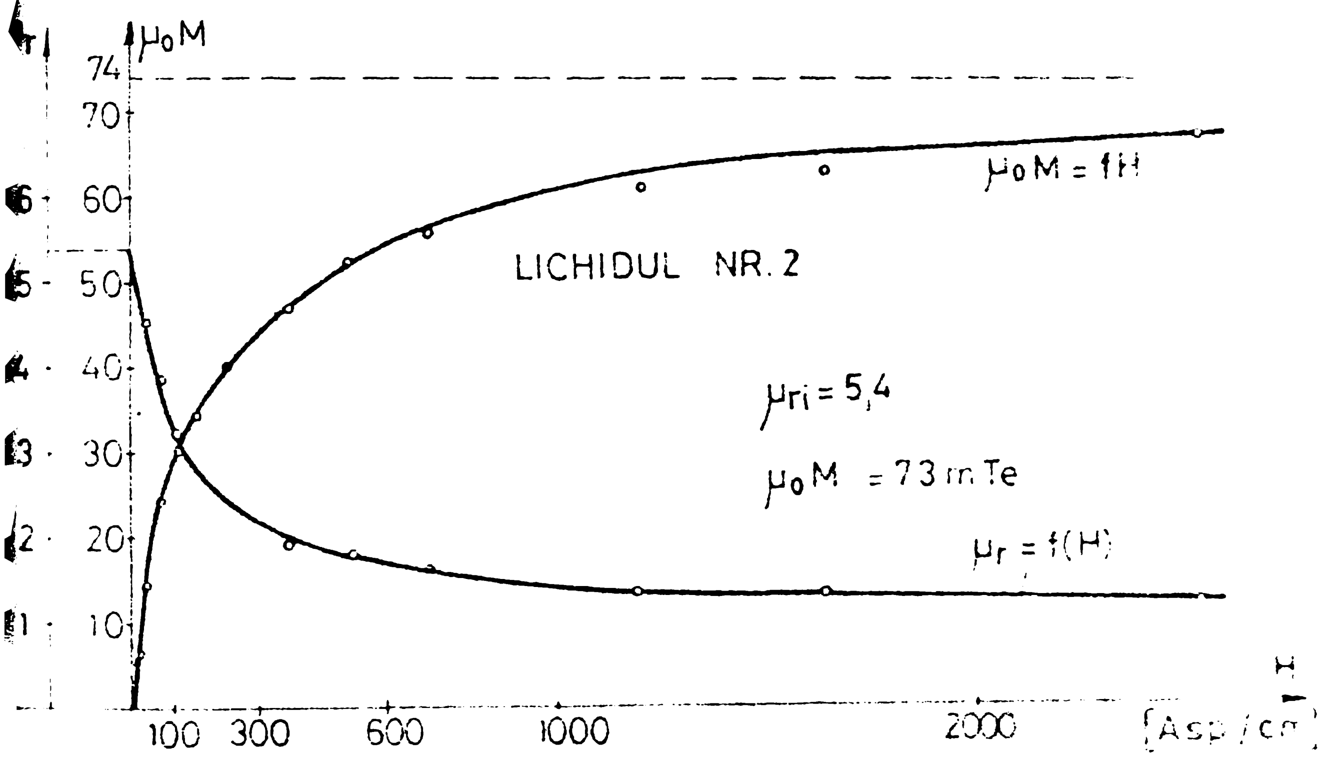
Lichidul nr.2 Tab.2

Nr. crt.	B_o mTe	α_m cm	B mTe	μ_r	$H=\frac{B}{\mu_o\mu_r}$	$\mu_o M = B\frac{\mu_r-1}{\mu_r}$
1	1,7	1,8	8,58	5,05	1352	6,88
2	4,2	4	19,08	4,54	3342	14,88
3	8,5	6,9	32,91	3,87	6764	24,41
4	13,5	9,2	43,88	3,25	10742	30,38
5	19	11,2	53,42	2,81	15119	34,42
6	27,5	14,2	67,73	2,46	21883	40,23
7	47	19,7	93,96	1,99	37401	46,96
8	65	24,8	118,29	1,81	51725	53,29
9	87	12,2	143,35	1,64	69232	56,35
10	150	17,9	210,32	1,40	119366	60,32
11	205	22,8	268	1,30	163133	63,00
12	320	15,6	383,26	1,21	254647	68,26
13	435	20,5	506,96	1,16	346162	71,96
14	521	24	593,52	1,13	414598	72,5

Lichidul nr.3 Tab.3

Nr. crt.	B_o mTe	α_m cm	B mTe	μ_r	$H=\frac{B}{\mu_o\mu_r}$	$\mu_o M = B\frac{\mu_r-1}{\mu_r}$
1	1,75	1,1	5,24	2,99	1392	3,49
2	4,8	2,9	13,83	2,88	3319	9,03
3	11	5,6	26,71	2,42	8753	15,71
4	14,4	6,9	32,91	2,28	11459	18,51
5	19,3	8,2	39,11	2,02	15358	20,19
6	29,5	11	52,47	1,77	23475	22,97
7	50	16,3	77,75	1,55	39788	27,75
8	69	20,8	99,21	1,43	54908	30,21
9	125	13,8	163,32	1,30	99471	38,32
10	160	17,1	200,92	1,25	127323	40,92
11	235	23,6	277,3	1,18	187007	42,[illegible]
12	325	14,9	368,47	1,13	253626	43,47
13	423	18,9	467,39	1,10	336612	44,55
14	550	24	593,52	1,07	437676	43,52


LICHIDUL NR. 1
$\mu_0 M = f(H)$
$\mu_{ri} = 4,5$
$\mu_0 M_s \cong 61\ mT_e$
$\mu_r = f(H)$
61
H
[Asp/cm]


LICHIDUL NR. 2
$\mu_0 M = fH$
$\mu_{ri} = 5,4$
$\mu_0 M = 73\ mTe$
$\mu_r = f(H)$
74
H
[Asp/cm]

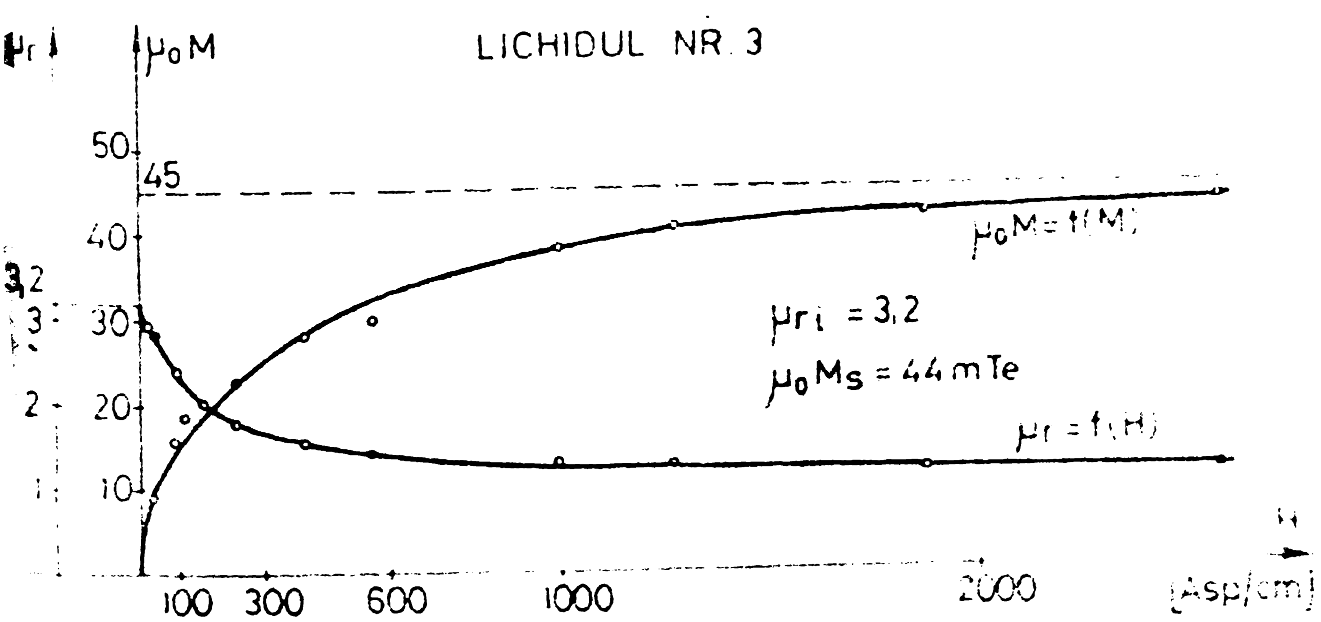

LICHIDUL NR. 3
$\mu_0 M = f(M)$
$\mu_{ri} = 3,2$
$\mu_0 M_s = 44\ mTe$
$\mu_r = f(H)$
45
H
[Asp/cm]

Fig.23

2.8. Determinarea numărului de particule din unitatea de volum şi a diametrului lor mediu

Datele primite de la producătorul lichidelor sînt cuprinse în tabelul 4.

Tab.4

Denumire caract. \ Cod	1	2	3
Lichid de bază	Petrol	Petrol	White spirt
Densitate la 20°C	1,133	1,52	1,08
Concentraţie -volumică cm^3/cm^3 -în greutate gr/cm^3	 0,0822 0,410	 0,16 0,8	 0,067 0,339
Compoziţia particulelor γFe_2O_3 % Fe_3O_4 %	 72,6 27,4		 43,8 56,2

Obs. Pentru Fe_2O_3 $\mu_o M_s^* = 5150\ G_{ss}$

Fe_3O_4 $\mu_o M_s^* = 5900\ G_{ss}$.

Din datele de mai sus rezultă densităţile lichidului de bază ρ_ℓ şi ale materialului particulelor în suspensie. Astfel pentru lichidul nr.1

$$\rho_m = \frac{0,41}{0,082} = 5\ gr/cm^3$$

$$\frac{\rho - \rho_\ell}{\rho_m - \rho_\ell} = 0,[illegible]$$

$$\rho_\ell = \frac{1,13-0,41}{1-0,082} = 0,78\ gr/cm^3$$

Pentru lichidul nr.2

$$\rho_m = 5\ gr/cm^3$$

$$\rho_\ell = 0,85\ gr/cm^3 \qquad \frac{\rho - \rho_\ell}{\rho_m - \rho_\ell} = 0,161$$

Pentru lichidul nr.3

$$\rho_m = 5\ gr/cm^3 \qquad \frac{\rho-\rho_\ell}{\rho_m-\rho_\ell} = 0,068$$

$$\rho_\ell = 0,79\ gr/cm^3$$

Cunoscînd susceptivitatea magnetică inițială și magnetizația de saturație, din rezultatele experimentale, se poate determina numărul de particule din unitatea de volum N și diametrul mediu al particulelor cu relațiile (21) și (22)

$$N = \frac{\mu_0 M_s^2}{3kT}\,\frac{1+\frac{x_i}{3}}{x_i}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{18\ x_i kT}{\mu_0 \pi M_s^2}\,\frac{1}{1+\frac{x_i}{3}}\,\frac{\rho-\rho_\ell}{\rho_m-\rho_\ell}}$$

Pentru lichidul nr.1, $x_i = 3,5$ şi $\mu_0 M_s \cong 61$ mTe, deci

$$N = \frac{0,061^2(1+\frac{3,5}{3}}{3\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 300\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 3,5} \qquad N = 1,47\cdot 10^{17}\ \frac{part}{cm^3}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{18\cdot 300\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 4\cdot 10^{-7}\cdot 0,032\cdot 3,5}{0,061^2(1+\frac{3,5}{3})}} \qquad D = 1[illegible]\cdot 10^{-10}\,m$$

Pentru lichidul nr.2 $x_i = 4,4$ şi $\mu_0 M_s \cong 73$ mTe

$$N = \frac{0,073^2\cdot(1+\frac{4,4}{3})}{3\cdot 4\ \cdot 10^{-7}\cdot 300\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 4,4} \qquad N = 1,[illegible]\cdot 10^{17}/cm^3$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{18\cdot 300\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 4\cdot 10^{-7}\cdot 0,061\cdot 4,4}{0,073^2\ (1+\frac{4,4}{3})}} \qquad D = 117\cdot 10^{-10}\,m$$

Pentru lichidul nr.3 $x_i = 2,2$ şi $\mu_0 M_s \cong 44$ mTe

$$N = \frac{0{,}044^2 \cdot (1 + \frac{2{,}2}{3})}{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 2{,}2} \qquad N = 0{,}95 \cdot 10^{-17}/cm^3$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 300 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}068 \cdot 2{,}2}{0{,}044^2 \cdot (1 + \frac{2{,}2}{3})}} \qquad D = 110 \cdot 10^{-10} m$$

Din măsurătorile şi din calculele efectuate rezultă că atît numărul de particule din unitatea de volum N, cît şi diametrul mediu D, corespund datelor furnizate de producători cu renume pe plan mondial, fapt ce constituie un rezultat remarcabil al grupului de cercetare de la Facultatea de inginerie chimică a IPTVT.

2.9. Determinarea experimentală a dependenţei permitivităţii electrice de intensitatea cîmpului magnetic

Pentru determinarea experimentală a permitivităţii electrice a lichidului magnetic, precum şi a dependenţei acesteia de intensitatea cîmpului magnetic s-a introdus un condensator plan avînd între armături lichid magnetic între polii unui electromagnet Weiss. Capacitatea condensatorului a fost măsurată cu o punte de tip BM 400G iar inducţia magnetică între polii electromagnetului cu un teslametru Hall. Capacitatea condensatorului fără lichid între armături avea valoarea C_0 = 44,6 pF.

S-au făcut măsurători asupra a trei tipuri de lichide, avînd caracteristicile date în tabelul 4.

Rezultatele obţinute sînt prezentate în tabelele 5 - 7, iar reprezentarea lor grafică în fig.24.

Valoarea permitivităţii relative pentru white spirt şi pentru petrol au fost măsurate rezultînd

$$\varepsilon_{fr\ petrol} = 2{,}5 \quad \text{şi} \quad \varepsilon_{fr\ ws} = 1{,}85.$$

In absenţa cîmpului magnetic permitivităţile relative ale celor trei lichide au avut valorile

$$\varepsilon_{r1} = 3,7 \qquad \varepsilon_{r2} = 5,12 \qquad \varepsilon_{r3} = 2,35$$

sau

$$\chi_{e1} = 2,7 \qquad \chi_{e2} = 4,12 \qquad \chi_{e3} = 1,35$$

Lichidul nr.1

Tab.5

B mTe	H Asp/cm	C pF	ε_r
2o	159	17o,8	3,83
3o	238	171,2	3,84
7o	557	173,7	3,895
1oo	796	174,8	3,919
18o	1432	175,4	3,933
255	2o29	176	3,946
31o	2466	176,2	3,951

Lichidul nr.2

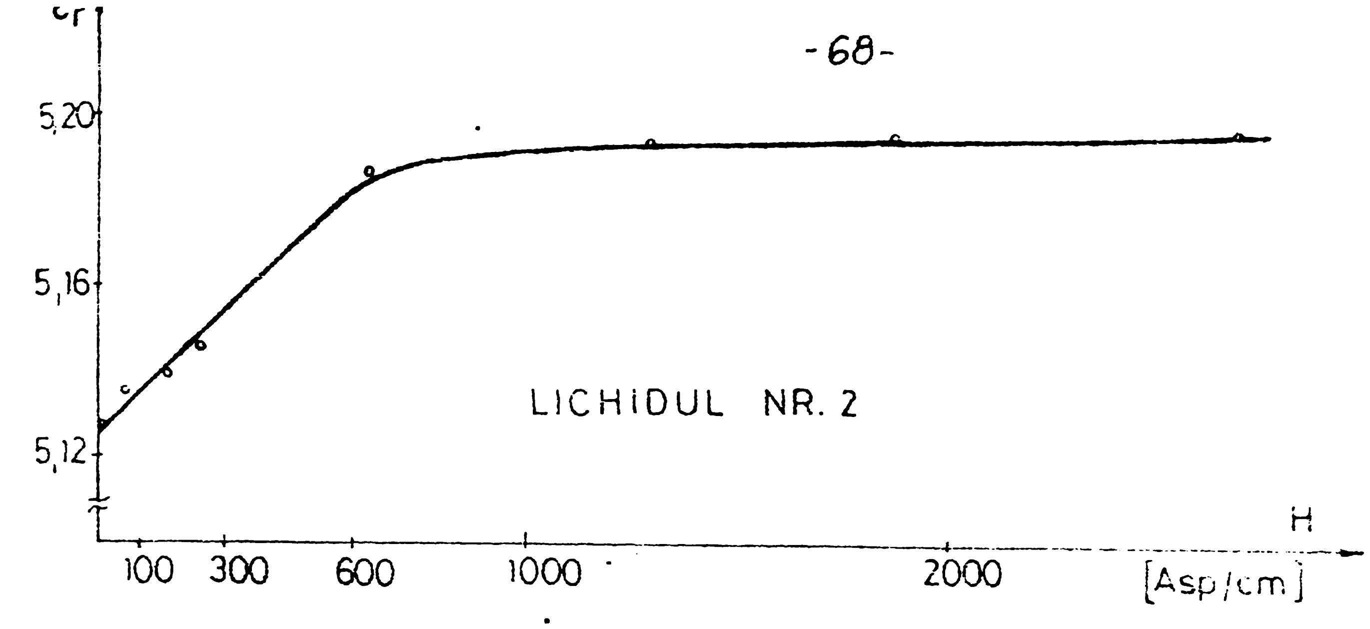
Tab.6

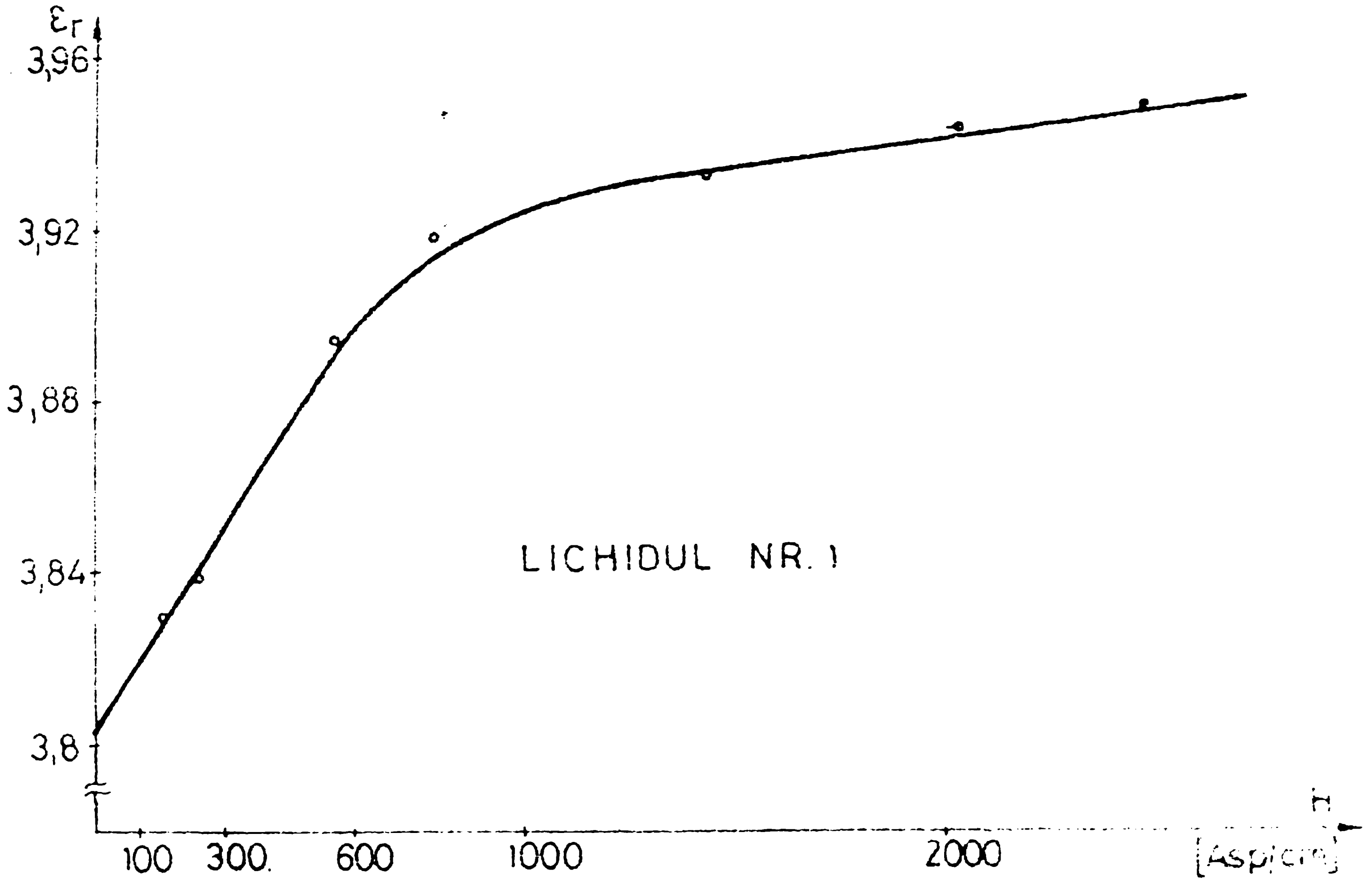
B mTe	H Asp/cm	C pF	ε_r
1,5	12	2[illegible],7	[illegible]
8	64	229	5,[illegible]
21	147	229,2	5,13[illegible]
3o	239	229,5	[illegible]
8o	637	231,3	[illegible]
163	1297	231,6	[illegible]
235	1[illegible]7o	231,7	5,1[illegible]
24o	27o5	231,8	5,[illegible]7

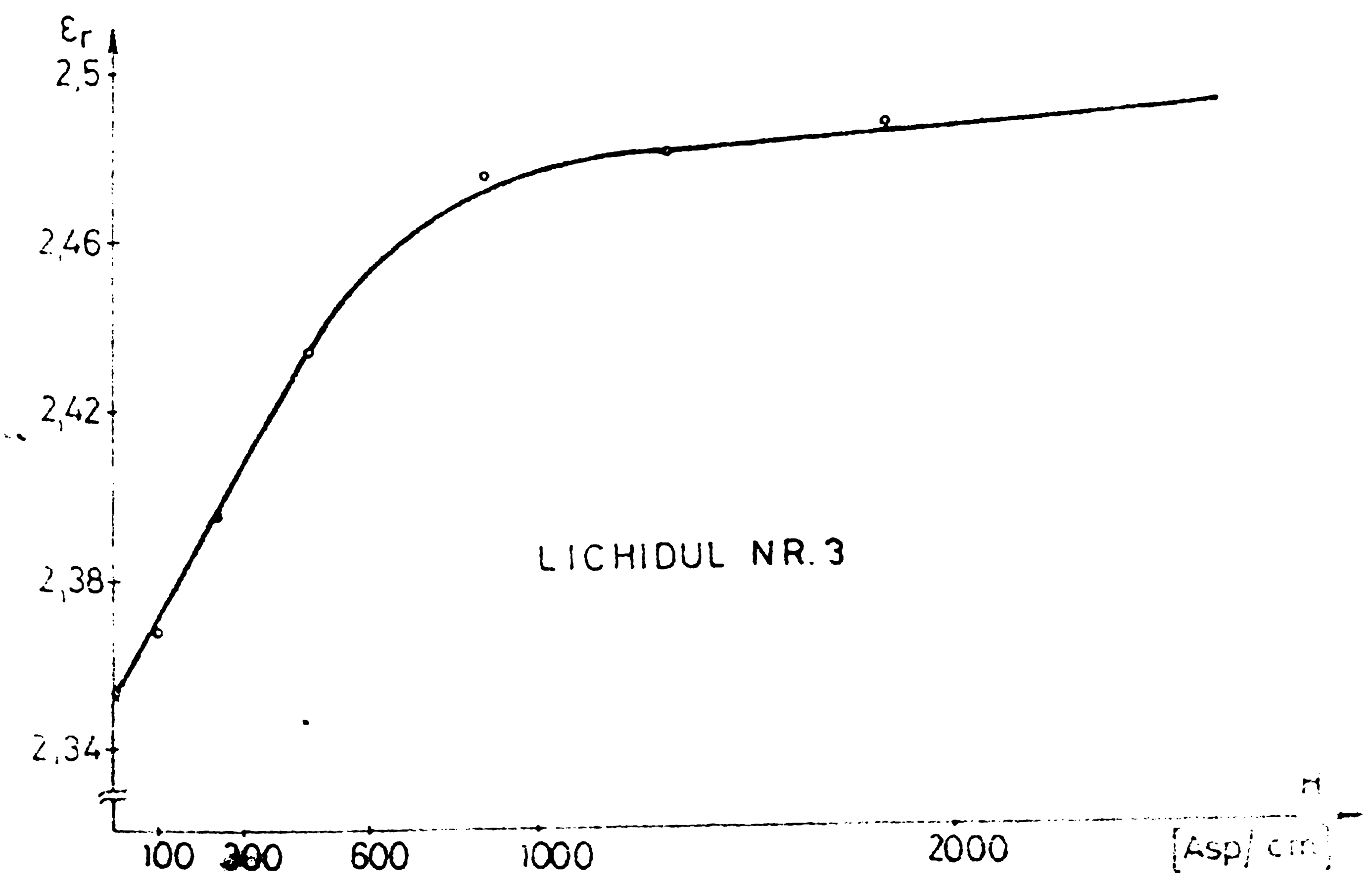
Lichidul nr.3

Tab.7

B mTe	H Asp/cm	C pF	ε_r
o,5	4	1o5	[illegible]
13	1o3	1o5,[illegible]	[illegible]
1[illegible]	[illegible]	1o[illegible],8	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11o	[illegible]75	[illegible],4	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible],5	[illegible]
2[illegible]	[illegible]o	[illegible]	[illegible]


εr
5,20
5,16
5,12
LICHIDUL NR. 2
H
100
300
600
1000
2000
[Asp/cm]


εr
3,96
3,92
3,88
3,84
3,8
LICHIDUL NR. 1
H
100
300
600
1000
2000


εr
2,5
2,46
2,42
2,38
2,34
LICHIDUL NR. 3
100
600
1000
2000

Verificarea teoriei prezentate în cap.I ar fi posibilă dacă s-ar cunoaşte dimensiunile a şi b din fotografie obţinute cu un microscop electronic.

Vom presupune teoria corectă şi vom determina valorile a şi b pentru cele trei lichide.

Din relaţia (16) se obţine

$$f(\alpha) = \frac{\chi_e - (1-NV)(\varepsilon_{fr} - 1)}{NV\varepsilon_{fr}\left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)} \tag{77}$$

χ_e reprezentînd susceptivitatea electrică a lichidului magnetic în absenţa cîmpului magnetic. Pentru valori mici ale cîmpului electric, din relaţiile

$$f(\alpha) = \frac{1}{A_2(o)} + \left(\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right)\frac{1}{3}$$

$$A_2(o) = \frac{1}{2}\left[1 - A_1(o)\right]$$

rezultă ecuaţia pe care o satisface $A_1(o)$ în forma

$$A_1^2(o) - \frac{f(\alpha)-1}{f(\alpha)}A_1(o) + \frac{1}{3f(\alpha)} = o \tag{78}$$

După calcularea constantei $A_1(o)$ se poate determina excentricitatea e ţinînd cont de rezultatele din tabelul de mai jos.

e	$A_1(o)$	e	$A_1(o)$	e	$A_1(o)$
o,1	o,33	o,6	o,27[illegible]	o,9[illegible]	[illegible]
o,2	o,328	o,7	o,248	o,94	[illegible]
o,3	o,32	o,8	o,20[illegible]	o,96	[illegible]
o,4	o,31	o,85	o,133	o,9[illegible]	[illegible]
o,5	o,295	o,9	o,149		

Cunoscînd excentricitatea e şi volumul mediu al particulelor, obţinut din măsurători magnetice, unde forma particulei nu are importanţă, sistemul de ecuaţii care determină pe a şi b se scrie în forma

$$\begin{cases} e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} \\ \dfrac{D^3}{8} = ab^2 \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} a = \dfrac{D}{2\sqrt[3]{1-e^2}} \\ b = \dfrac{D}{2}\sqrt[6]{1-e^2} \end{cases} \qquad (79)$$

Lichidul nr.1

$$f(\ ) = \frac{2,7-(1-o,o822)(2,5-1)}{o,o822.2,5(1+\frac{2,7}{3})} = 3,39$$

$$A_1(o)^2 - o,7o5\ A_1(o)) + o,o98 = o$$

Soluţia corespunzătoare este $A_1(o) =$ o,[illegible], [illegible]
care rezultă e = o,8.

Cu relaţiile (81) avînd $D_1 = 1o2.1o^{-1o}$ [illegible]

$$a_1 = 71.1o^{-1o}\ m$$

$$b_1 = 43.1o^{-1o}\ m$$

Lichidul nr.2

$$f(\ ) = \frac{4,12 - o,84.1,5}{o,16-2,5(1+\frac{4,12}{3})} = 3,o12$$

$$A_1^2(o) - o,6o8\ A_1(o) + o,11 = o$$

de unde $A_1(o) = o{,}294$, iar $e = o{,}5$.

Pentru $D_2 = 117.1o^{-1o}$ m se obţine

$$a_2 = 65.1o^{-1o}\ \mathrm{m}, \qquad b_2 = 55.1o^{-1o}\ \mathrm{m}$$

Lichidul nr.3

$$f(\ ) = \frac{1{,}35-(1-o{,}o67)(1{,}85-1)}{o{,}o67.1{,}85(1+\frac{1{,}35}{3})} = 3{,}1$$

$$A_1^2(o) - o{,}677\,A_1(o) + o{,}1o7 = o$$

$$A_1(o) = o{,}251 \text{ iar } e = o{,}69$$

Pentru $D_3 = 11o.1o^{-1o}$ m rezultă

$$a_3 = 68.1o^{-1o}\ \mathrm{m} \quad \text{şi} \quad b_3 = 49.1o^{-1o}$$

Influenţa cîmpului magnetic asupra permitivităţii dielectrice

Pentru calculul susceptivităţii electrice a lichidelor magnetice în prezenţa cîmpului magnetic vom folosi relaţia (40)

$$X_e = \frac{(1-NV)(\varepsilon_{fr}-1) + NV\varepsilon_{fr}G(\alpha,\gamma)}{1 - \frac{NV}{3}\varepsilon_{fr}\,G(\alpha,\gamma)} \qquad (8o)$$

unde expresia $G(\alpha,\gamma)$ o vom particulariza pentru cazul $\alpha \to o$ şi $\gamma \gg 1$, adică o vom considera în cîmpuri magnetice intense şi cîmpuri electrice slabe, şi obţinem

$$G(\alpha,\gamma) = \frac{1}{A_2(o)} + \left(\frac{1}{A_1(o)} - \frac{1}{A_2(o)}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\ [illegible]\right) \qquad (81)$$

Pentru $\gamma \to \infty$, adică $H_o \to \infty$, rezultă

$G(\alpha,\gamma) = \dfrac{1}{A_1(o)}$, susceptivitatea lichidului are în acest caz valoarea maximă.

Ordinul de mărime al parametrilor α şi γ este, pentru lichidul nr.1, spre exemplu

$$\alpha = \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)\frac{\varepsilon_f \cdot V}{2kT} E_0^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{0,2} - \frac{1}{0,4}\right)\frac{2,5\cdot 4\pi \cdot 102^3 \cdot 10^{-30} E_0^2}{4\pi \cdot 9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 2\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 300} =$$

$$\cong 3\cdot 10^{-14} E_0^2$$

şi

$$\gamma = \frac{\mu_0 M_s V}{kT} H_0 = \frac{0,5\cdot 4 \cdot 1,02^3 10^{-24}}{3\cdot 3\cdot 10^2 \cdot 1,38\cdot 10^{-23}} H_0 = 5\cdot 10^{-4} H_0$$

relaţia (80) putînd deci fi folosită cu bună aproximaţie pentru $H_0 > 10^4$ A/m.

Valorile maxime calculate, ale susceptivităţii electrice ale celor trei lichide sînt

$$X_{e1max} = 3,64 \qquad X_{e2max} = 4,66 \qquad X_{e3max} = 1,[illegible]4.$$

Vom calcula susceptivităţile celor trei lichide pentru $\gamma = 5$.

<u>Lichidul nr.1</u>

$$A_1(0) = 0,198 \qquad A_2(0) = \frac{1}{2}(1 - 0,198) = 0,40[illegible]$$

$$G(\alpha,\gamma) = \frac{1}{0,401} + \left(\frac{1}{0,198} - \frac{1}{0,401}\right)0,6 = 4,02$$

$$X_e = \frac{(1-0,082)1,5+0,082\cdot 2,5\cdot 4,02}{1 - \frac{0,082}{3}2,5\cdot 4,02} = 3,03$$

<u>Lichidul nr.2</u>

$$A_1(0) = 0,294 \qquad A_2(0) = 0,353$$

$$G(\alpha,\gamma) = 3,11$$

$$X_e = \frac{(1-0,16)1,5+0,16 \cdot 2,5 \cdot 3,11}{1 - \frac{0,16}{3} \cdot 2,5 \cdot 3,11} = 4,27$$

Lichidul nr.3

$$A_1(0) = 0,251 \qquad A_2(0) = 0,374$$

$$G(\; , \;) = 3,459$$

$$X_e = \frac{(1-0,067) \cdot 0,85+0,067 \cdot 1,85 \cdot 3,459}{1 + \frac{0,067}{3} \cdot 1,85 \cdot 3,459} = 1,42$$

Rezultatele experimentale sînt apropiate de cele calculate, unele abateri explicîndu-se prin faptul că în calcule am considerat particulele în suspensie drept medii conductoare (adică $\varepsilon_2 \to \infty$). Pentru ε_2 finit, rezultatele calculate s-ar fi apropiat mai mult de cele măsurate.

O verificare teoretică corectă ar fi posibilă doar după cunoaşterea dimensiunilor particulelor, obţinută cu ajutorul unui microscop electronic.

In concluzie, experienţele confirmă faptul că în prezenţa unui cîmp magnetic paralel cu cel electric susceptivitatea electrică a lichidelor magnetice creşte, rezultatele fiind asemănătoare cu cele întîlnite în [55].

CAPITOLUL 3

FORȚE ÎN MEDII NELINIARE

Problema determinării forțelor ce se exercită asupra fluidelor neliniare introduse în cîmp electromagnetic este deosebit de importantă în aplicații.

In acest capitol se deduce expresia densității efective a forței de volum ce se exercită asupra fluidelor neliniare introduse în cîmp magnetic. Se vor deduce apoi forțele ce se exercită la suprafața de separație dintre medii fluide neliniare atunci cînd sînt plasate în cîmp electromagnetic, suprafața parcursă de curenți superficiali de conducție și avînd sarcina liberă pe ea.

In scopul determinării forțelor la suprafața de separație dintre medii neliniare avînd $J_s \neq 0$ și $\rho_s \neq 0$ este necesar să se trateze în mod unitar problema cîmpurilor electrocinetice repartizate pe suprafețe.

3.1. Forțe în medii fluide neliniare

In literatură densitatea forței de volum ce se exercită asupra mediilor neliniare se determină după ce în prealabil se stabilește expresia tensorului tensiunilor exercitate de cîmpul magnetic asupra acestora. Ipoteza acestor demonstrații constă în echivalarea oricărui cîmp electromagnetic din medii masive cu cîmpul care s-ar stabili între conductoare filiforme parcurse de curenți de conducție [56]...[illegible].

In cele ce urmează se va stabili în mod direct densitatea efectivă a forței de volum exercitată de cîmpul electromagnetic asupra mediilor fluide fără isterează, izotrope și omogene pe porțiuni fără a face ipoteza menționată, pornind de la teorema generalizată a forțelor lagrangeene care se enunță astfel :

La deformații ale corpurilor cu polarizare reversibilă din interiorul unei suprafețe închise Σ care păstrează fixe punctele acestei suprafețe și în rest sînt arbitrare, lucrul mecanic elementar cedat de cîmp este egal și de sens contrar cu variația energiei electromagnetice localizate în V_Σ, dacă în decursul variației elementare considerate fluxurile magnetice și electrice prin orice suprafață atașată S conținută în V_Σ sînt constante [60]. Adică :

$$\int_{V_\Sigma} \overline{f}_m \, \overline{v} \, dv = - \frac{d}{dt} \int_{V_\Sigma} w_m dv \tag{32}$$

dacă
$$\frac{d_f \overline{B}}{dt} = \frac{d_f \overline{D}}{dt} = 0$$

unde

$\overline{f}_m$ = densitatea efectivă a forței de volum

$\overline{v}$ = viteza punctelor materiale din interiorul suprafeței

w_m = densitatea de volum a energiei magnetice libere.

Pentru medii neliniare, fără histereză densitatea de energie magnetică liberă are expresia :

$$w_m = w_m(H, \rho, T) = HB - \int_0^H B dH$$

unde $B = \mu(H, \rho, T)H$ reprezintă inducția magnetică.

Ținînd cont că în decursul deplasării elementare considerate punctele suprafeței Σ rămîn fixe, expresia ([illegible]) a bilanțului energetic se poate scrie sub forma :

$$\int_{V_\Sigma} \overline{f}_m \overline{v} \, dv = - \int_{V_\Sigma} \frac{\partial w_m}{\partial t} dv \tag{33}$$

Pentru calculul variației locale a densității de energie magnetică liberă datorată deplasării elementare și variației în raport cu timpul a intensității cîmpului magnetic și a densității de masă se va ține cont că

$$w_m = w_m[H(r,t)\rho(r,t)] = w_m(r,t)$$

Derivata substanţială a densităţii de energie magnetică liberă are expresia

$$\frac{d_s w_m}{dt} = \frac{\partial w_m}{\partial t} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\,w_m = \frac{\partial w_m}{\partial H}\frac{d_s H}{dt} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\frac{d_s \rho}{\partial t} \qquad (84)$$

Cum însă $\frac{d_v \rho}{dt} = 0$ din legea conservării masei, şi avînd în vedere relaţia

$$\frac{d_v \rho}{dt} = \frac{d_s \rho}{dt} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\rho + \mathrm{div}(\rho\bar{v}) = \frac{d_s \rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\bar{v}$$

rezultă pentru variaţia locală a densităţii de energie expresia

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = -\bar{v}\,\mathrm{grad}\,w_m - \rho\frac{\partial w_m}{\partial \rho}\mathrm{div}\,\bar{v} + \frac{\partial w_m}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\,H\right) \qquad (85)$$

sau

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_m}{\partial t} &= -\bar{v}\,\mathrm{grad}\,HB + \bar{v}\,\mathrm{grad}\int_0^H B\,dH - \mathrm{div}\left(\bar{v}\rho\frac{\partial w_m}{\partial \rho}\right) + \\ &+ \bar{v}\,\mathrm{grad}\left(\rho\frac{\partial w_m}{\partial \rho}\right) + H\frac{\partial B}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\,H\right) = \\ &= -\bar{v}\,\mathrm{grad}\,HB + \bar{v}\,\mathrm{grad}\int_0^H B\,dH - \mathrm{div}\left(\bar{v}\rho\frac{\partial w_m}{\partial \rho}\right) + \\ &+ \bar{v}\,\mathrm{grad}\left(\rho H\frac{\partial B}{\partial \rho} - \int_0^H \rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\,dH\right) + H\frac{\partial B}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\,H\right) \qquad (86)\end{aligned}$$

Variaţia locală a inducţiei magnetice, $B = B(H(r,t),\rho(r,t))$ se poate scrie în acelaşi mod :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\bar{v}\,\mathrm{grad}\,B - \rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\mathrm{div}\,\bar{v} + \frac{\partial B}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\,H\right) \qquad (87)$$

Inmulţind relaţia (87) cu H rezultă :

$$\begin{aligned}H\frac{\partial B}{\partial t} &= \bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \bar{H}.\frac{d_f\bar{B}}{dt} - \bar{H}\,\mathrm{rot}(\bar{B}\times\bar{v}) = -\bar{v}H\,\mathrm{grad}\,B - \\ &- H\rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\mathrm{div}\,\bar{v} + H\frac{\partial B}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\,H\right) =\end{aligned}$$

$$= -\overline{v}H \text{ grad } B - \text{div}\left[\overline{v}H\rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\right] + \overline{v} \text{ grad}\left(H\rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\right) +$$

$$+ H\frac{\partial B}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \overline{v} \text{ grad } H\right).$$

Din ultima egalitate, cu $\frac{d_f\overline{B}}{dt} = o$, prin ipoteză şi avînd în vedere egalitatea

$$+\overline{H} \text{ rot}(\overline{B}x\overline{v}) = \text{div}\left[(\overline{B}x\overline{v})x\overline{H}\right] + \overline{J}(\overline{B}x\overline{v})$$

se obţine :

$$\overline{v} \text{ grad}\left(H\rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\right) = -\text{div}\left[(\overline{B}x\overline{v})x\overline{H}\right] - \overline{J}(\overline{B}x\overline{v}) + \overline{v}H \text{ grad } B +$$

$$+ \text{div}\left(\overline{v}H\rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\right) - H\frac{\partial B}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \overline{v} \text{ grad } H\right) \qquad (88)$$

Introducînd expresia (88) în (86), avem :

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = -\overline{v}(H \text{ grad } B + B \text{ grad } H) + \overline{v} \text{ grad}\int_0^H BdH - \text{div}\left(\overline{v}\rho\frac{\partial w_m}{\partial \rho}\right) -$$

$$- \overline{v} \text{ grad}\int_0^H \rho\frac{\partial B}{\partial \rho} dH + H\frac{\partial B}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \overline{v} \text{ grad } H\right) - \text{div}\left[(\overline{B}x\overline{v})x\overline{H}\right] -$$

$$-\overline{v}(\overline{J}x\overline{B}) + \overline{v}H \text{ grad } B + \text{div}\left(\overline{v}H\rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\right) - H\frac{\partial B}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \overline{v} \text{ grad } H\right) \qquad (89)$$

Din bilanţul energetic, după aplicarea relaţiei lui Gauss-Ostrogradski termenilor de tip divergenţă, şi avînd în vedere faptul că pe suprafaţa Σ, $\overline{v}=o$, rezultă expresia densităţii efective a forţei de volum

$$\overline{f}_m = \overline{J}x\overline{B} + B \text{ grad } H - \text{grad}\int_0^H BdH + \text{grad}\int_0^H \rho\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,T} dH \qquad (90)$$

Indicii H,T în expresia (90) scot în evidenţă că derivata se consideră la intensitate a cîmpului magnetic, şi la temperatură constantă.

Cum însă B grad H= grad $\frac{BH}{2} - \frac{H^2}{2}$ gradμ, expresia (90) devine

$$\overline{f}_m = \overline{J}\times\overline{B} - \frac{H^2}{2}\mathrm{grad}\,\mu + \mathrm{grad}\left(\frac{BH}{2} - \int_0^H B\,dH\right) +$$

$$+ \mathrm{grad}\left(\int_0^H \rho H \left.\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right|_{H,T} dH\right) \tag{91}$$

Densitatea de forţă $\overline{f}_m$ poate fi exprimată în funcţie de vectorii $\overline{M}$ şi $\overline{H}$, ţinînd cont de legea legăturii între $\overline{B}$, $\overline{M}$ şi $\overline{H}$. Astfel expresia (91) ia forma

$$\overline{f}_m = \overline{J}\times\overline{B} + \mu_0(H+M)\,\mathrm{grad}\,H - \mathrm{grad}\int_0^H \mu_0(H+M)\,dH +$$

$$+ \mathrm{grad}\int_0^H \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\mu_0 H + \mu_0 M)\,dH$$

sau

$$\overline{f}_m = \overline{J}\times\overline{B} + \mu_0 M\,\mathrm{grad}\,H - \mathrm{grad}\int_0^H \mu_0 M\,dH + \mathrm{grad}\int_0^H \rho\mu_0 \left.\frac{\partial M}{\partial\rho}\right|_{H,T} dH \tag{92}$$

Notînd $\frac{1}{\rho} = v$, volumul unităţii de masă, rezultă

$$\overline{f}_m = \overline{J}\times\overline{B} - \mathrm{grad}\int_0^H \mu_0 \left.\frac{\partial(vM)}{\partial v}\right|_{H,T} dH + \mu_0 M\,\mathrm{grad}\,H \tag{93}$$

expresie identică cu cea întîlnită în literatură.

3.1.1. Tensorul tensiunilor

Forţa rezultantă ce se exercită asupra unui volum din mediu are expresiile echivalente

$$\overline{F} = \int_{V_\Sigma} \overline{f}\,dv = \oint_\Sigma \overline{T}_n\,ds \tag{94}$$

unde $\overline{T}_n$ reprezintă vectorul stare de tensiune locală definit prin relaţia

$$\overline{T}_n = \frac{d\overline{F}_n}{ds} \tag{95}$$

$d\overline{F}_n$ fiind forța ce se exercită prin elementul de suprafață ds avînd orientarea normală n asupra punctelor din vecinătatea suprafeței spre care e îndreptată normala $\overline{n}$. Deoarece vectorul $\overline{T}n$ depinde de orientarea normalei $\overline{n}$, relația (95) definește o infinitate de vectori. Mulțimea tuturor vectorilor $\overline{T}_n$ reprezintă un tensor de ordinul al doilea $\overline{\overline{T}}$, numit tensorul stare de tensiune. Folosind transformarea Gauss-Ostrogradski referitoare la tensori, relația (94) devine :

$$\overline{F} = \oint_{\Sigma} \overline{T}_n ds = \int_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \overline{\overline{T}} \, dv$$

Pentru V_{Σ} arbitrar rezultă

$$\overline{f}_v = \operatorname{div} \overline{\overline{T}}$$

sau în coordonate carteziene

$$f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}$$

$$f_y = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}$$

$$f_z = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}$$

Se poate demonstra că există o infinitate de stări de tensiune fictive, echivalente cu densitatea de forță dată [61]. Pentru a găsi una dintre ele, în expresia (90) se ține cont de următoarele egalități

$$\operatorname{grad} (\overline{H} \cdot \overline{H}) = 2[\overline{H} \times \operatorname{rot} \overline{H} + (\overline{H} \operatorname{grad})\overline{H}]$$

Mediul fiind considerat izotrop, rezultă :

$$B \operatorname{grad} H = \overline{B} \times \operatorname{rot} \overline{H} + (\overline{B} \operatorname{grad})\overline{H}$$

iar expresia densității de forță devine :

$$\overline{f}_m = (\overline{B} \operatorname{grad})\overline{H} - \operatorname{grad} \int_0^H B dH + \operatorname{grad} \int_0^H H \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH \qquad (96)$$

Componenta după direcția x a forței $\overline{f}_m$ are expresia :

$$f_x = B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^H B dH + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \rho H \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH$$

Avînd în vedere că div $\overline{B}$=o se poate scrie :

$$T_{xx} = H_x B_x - \int_0^H B dH + \int_0^H H\rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH$$

$$T_{xy} = H_x B_y$$

$$T_{xz} = H_x B_z$$

Calculînd în mod analog f_y şi f_z, rezultă expresia finală a componentelor tensorului tensiunilor sub forma

$$T_{ij} = \left\{ -\int_0^H B dH + \int_0^H \rho H \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH \right\} \delta_{ij} + H_i B_j \qquad (97)$$

Componentele tensorului tensiunilor pot fi scrise şi sub forma

$$T_{ij} = \left\{ -\mu_0 \frac{H^2}{2} + \int_0^H \mu_0 \frac{\partial (vM)}{\partial v}\Big|_{H,T} dH \right\} \delta_{ij} + H_i B_j \qquad (98)$$

corespunzătoare expresiei (92) a densităţii de volum a forţei.

3.1.2. Calculul vectorului $\overline{T}_n$

Descompunem vectorul T_n în coordonate carteziene

$$\overline{T}_n = T_{xx}\overline{i} + T_{yx}\overline{j} + T_{zx}\overline{k}$$

şi se au în vedere relaţiile

$$\overline{T}_n = \overline{T}_x \cos(\overline{n}\overline{i}) + \overline{T}_y \cos(\overline{n},\overline{j}) + \overline{T}_z \cos(\overline{n}\overline{k})$$

unde $\overline{T}_x$, $\overline{T}_y$ şi $\overline{T}_z$ sînt tensiunile corespunzătoare [illegible] axelor, fiecare avînd trei componente scalare :

$$\overline{T}_x = T_{xx}\overline{i} + T_{yx}\overline{j} + T_{zx}\overline{k}$$

$$\overline{T}_y = T_{xy}\overline{i} + T_{yy}\overline{j} + T_{zy}\overline{k}$$

$$\overline{T}_z = T_{xz}\overline{i} + T_{yz}\overline{j} + T_{zz}\overline{k}$$

Pentru T_{ij} corespunzător relaţiei (97) se obţine :

$$\overline{T}_n = \Big[H_xB_x\cos(\overline{n}\,\overline{i}) + \Big(-\int_0^H B\,dH + \int_0^H H\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big|_{H,T} dH\Big)\cos(\overline{n},\overline{i}) + H_xB_y\cos(\overline{n}\overline{j}) +$$

$$+ H_xB_z\cos(\overline{n}\overline{k})\Big]\overline{i} + \Big[H_yB_x\cos(\overline{n}\overline{i}) + H_yB_y\cos(\overline{n}\overline{j}) + A\cos(\overline{n}\overline{j}) +$$

$$+ H_yB_z\cos(\overline{n}\overline{k})\Big]\overline{j} + H_zB_x\cos(\overline{n}\overline{i}) + H_zB_y\cos(\overline{n}\overline{j}) + H_zB_z\cos(\overline{n}\overline{k}) +$$

$$+ A\cos(\overline{n}\overline{k})\Big]\overline{k}$$

$$\overline{T}_n = \overline{H}(\overline{B}\cdot\overline{n}) + \Big\{-\int_0^H B\,dH + \int_0^H H\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big|_{H,T} dH\Big\}\overline{n}$$ ([illegible])

Valoarea vectorială a tensorului $\overline{\overline{T}}$ este deci cuprinsă în planul format de vectorii $\overline{H}$ şi $\overline{n}$ (fig.25).

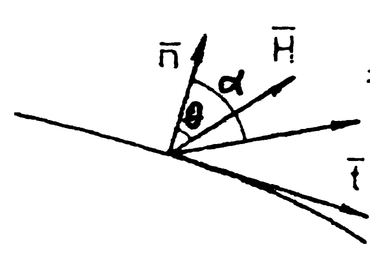


Fig.25

Componenta normală şi tangentă a vectorului $\overline{T}_n$ într-un punct la suprafaţa S se poate scrie :

$$T_{nn} = \overline{T}_n\cdot\overline{n} = HB\cos^2\theta + \Big(-\int_0^H B\,dH + \int_0^H H\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big|_{H,T} dH\Big)$$

$$T_{nt} = \overline{T}_n\cdot\overline{t} = \frac{HB}{2}\sin 2\theta.$$

Vectorul T_n are modulul egal cu

$$T_n = \sqrt{\frac{H^2B^2}{4}\sin^2 2\theta + \left[HB\cos^2\theta + \int_0^H \rho H \frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big|_{H,T} dH - \int_0^H BdH\right]^2}$$

şi face cu normala $\bar{n}$ un unghi α dat de relaţia

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{HB\sin 2\theta}{HB\cos^2\theta + \int_0^H H\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big|_{H,T} dH - \int_0^H BdH}$$

Pentru medii liniare, şi dacă suprafaţa trece prin puncte în care $\frac{\partial\mu}{\partial\rho} = 0$, avem $\alpha = 2\theta$ şi $|\bar{T}_n| = \frac{HB}{2}$.

3.1.3. Forţe superficiale

Se consideră un cîmp magnetic staţionar stabilit în-tr-un mediu fluid neliniar şi neomogen. Fie S_{12} suprafaţa de separaţie între cele două medii diferite, presupusă neparcursă de curenţi superficiali de conducţie (fig.26).

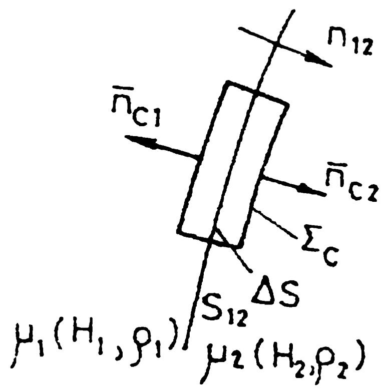


Fig.26

Expresia (91) a densităţii echivalente a [illegible] vo-lum nu poate fi folosită în punctele suprafeţei S_{12}, [illegible] ce această reprezintă o suprafaţă de discontinuitate pentru mări-mile μ, B, H, expresia (91) fiind dedusă în ipoteza conti-nuităţii acestor mărimi. Presupunînd că trecerea [illegible] la valo-rile μ_1, H_1, B_1 din primul mediu, la valorile μ_2, H_2, [illegible] al doilea mediu se face continuu, pe un strat [illegible] te mic h, se poate calcula expresia forţei ce se [illegible] asupra ariei unitare de pe suprafaţa S_{12}. Considerăm în acest scop un cilindru elementar Σ_c, a cărui bază de arie ΔS e paralelă cu S_{12} şi are înălţimea h. In ipoteza enunţată, forţa rezultantă ce se exercită asupra mediului din interiorul lui Σ_c este :

$$\Delta\overline{F} = \int_{V_{\Sigma c}} dv\, \overline{f}_m = -\frac{1}{2}\int_{V_{\Sigma c}} H^2 \operatorname{grad}\mu\, dv + \int_{V_{\Sigma c}} \operatorname{grad}\left(\frac{BH}{2} - \int_0^H B\,dH\right)dv +$$

$$+\int_{V_{\Sigma c}} \operatorname{grad}\left(\int_0^H H\rho \left.\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right|_{H,T} dH\right)dv \qquad (100)$$

Deoarece la suprafaţa de separaţie S_{12}, $\operatorname{div}_s\overline{B} = 0$ şi $\operatorname{rot}_s\overline{H}=0$, este avantajos să se exprime H^2 în forma

$$H^2 = H_n^2 + H_t^2 = H_t^2 + \frac{B_n^2}{\mu^2}$$

Relaţia (100) se va transforma în

$$\Delta F = -\frac{H_t^2}{2}\int_{V_{\Sigma c}} \operatorname{grad}\mu\, dv + \frac{B_n^2}{2}\int_{V_{\Sigma c}} \frac{1}{\mu^2} \operatorname{grad}\mu\, dv +$$

$$+\int_{V_{\Sigma c}} \operatorname{grad}\left(\frac{BH}{2} - \int_0^H B\,dH\right)dv + \int_{V_{\Sigma c}} \operatorname{grad}\left(\int_0^H H\rho \left.\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right|_{H,T} dH\right)dv$$

Ţinînd cont de transformarea lui Gauss Ostrogradski referitoare la gradient rezultă :

$$\Delta F = -\frac{H_t^2}{2}\left[\mu_1\overline{n}_{c1} + \mu_2\overline{n}_{c2}\right]\Delta S_c + \frac{B_n^2}{2}\left[\frac{1}{\mu_1}\overline{n}_{c1} + \frac{1}{\mu_2}\overline{n}_{c2}\right]\Delta S_c +$$

$$+\left(\frac{B_2H_2}{2} - \int_0^{H_2} B_2\,dH_2\right)\overline{n}_{c2}\Delta S_c + \left(\frac{B_1H_1}{2} - \int_0^{H_1} B_1\,dH_1\right)\overline{n}_{c1}\Delta S_c +$$

$$+\left(\int_0^{H_2} H_2\rho_2\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_2 dH_2\right)\overline{n}_{c2}\Delta S_c + \left(\int_0^{H_1} H_1\rho_1\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_1 dH_1\right)\overline{n}_{c1}\Delta S_c$$

Densitatea superficială a forţei e definită prin relaţia :

$$\overline{f}_{sm} = \lim_{\substack{\Delta h \to 0 \\ \Delta S \to 0}} \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta S} \tag{101}$$

La limita $\Delta S_c \to \Delta S$, $\overline{n}_{c1} \to -\overline{n}_{12}$, $\overline{n}_{c2} \to \overline{n}_{12}$ şi deci $\overline{f}_{sm}$ va fi

$$\overline{f}_{sm} = \frac{B_n^2}{\mu_1 \mu_2}(\mu_1 - \mu_2)\overline{n}_{12} + \mathrm{grad}_s\left(-\int_0^H B\,dH + \int_0^H H\rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH\right) \tag{102}$$

Pentru medii liniare, termenul al doilea devine

$$\mathrm{grad}_s\left(-\int_0^H B\,dH + \int_0^H H\rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH\right) =$$

$$= -\mathrm{grad}_s \frac{\mu H^2}{2} + \mathrm{grad}_s\left(\frac{H^2}{2}\rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right) =$$

$$= \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} H_t^2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1 \mu_2} B_n^2\right)\overline{n}_{12} + \mathrm{grad}_s\left(\frac{H^2}{2}\rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)$$

iar forţa superficială se scrie :

$$\overline{f}_{sm} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}\left(H_t^2 + \frac{B_n^2}{\mu_1 \mu_2}\right)\overline{n}_{12} + \mathrm{grad}_s\left(\frac{H^2}{2}\rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)$$

expresie cunoscută în literatură.

Forţa rezultantă ce se exercită asupra volumului închis de Σ_c putea fi calculată şi cu ajutorul tensiunilor fictive

$$\Delta \overline{F} = \int_{\Sigma_c} \overline{T}_n\,dS \tag{103}$$

Dacă se neglijează integrala efectuată pe suprafaţa laterală a cilindrului în raport cu cele de pe suprafeţele bazelor, rezultă

$$\overline{f}_{sm}\Delta S = \overline{T}_{n1}\Delta S + \overline{T}_{n2}\Delta S$$

sau

$$\overline{f}_{sm} = -\overline{H}_1(\overline{B}_1\overline{n}_{12}) + \overline{H}_2(\overline{B}_2\overline{n}_{12}) + \mathrm{grad}_s\left(-\int_0^H B\,dH + \int_0^H \rho H \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH\right) \tag{104}$$

Suma primilor doi termeni ai relației (1o4) se poate transforma după cum urmează

$$(\overline{H}_{2t} + \overline{H}_{2n})B_{2n} - (\overline{H}_{1t} + \overline{H}_{1n})B_{1n} =$$

$$= (H_{2n}B_{2n} - H_{1n}B_{1n})\overline{n}_{12} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} B_n^2 \overline{n}_{12} \qquad (1o5)$$

deoarece $H_{1t} = H_{2t} = H_t$ şi $B_n = B_{1n} = B_{2n}$.

Introducînd expresia (1o5) în (1o4) se obține expresia (1o2).

Deducerea expresiei forței ce se exercită asupra fluidelor neliniare aflate în cîmp magnetic staționar s-a făcut pornind de la teorema generalizată a forțelor lagrangeene.

Dacă în decursul deformațiilor elementare ale corpurilor din interiorul suprafeței închise Σ , care păstrează fixe punctele acestei suprafețe, fluxul magnetic printr-o suprafață ataşată conținută în V_Σ nu ar fi constant, atunci bilanțul energetic pentru domeniul V_Σ s-ar scrie [56]:

$$\int_{V_\Sigma} \overline{f}_m \cdot \overline{v}\, dv = -\frac{d}{dt}\int_{V_\Sigma} w_m dv + \int_{V_\Sigma} \overline{H} \frac{d_f \overline{B}}{dt} dv \qquad (1o6)$$

Procedînd ca la începutul paragrafului (3.1) rezultă

$$-\frac{\partial w_m}{\partial t} = \overline{v}\,\mathrm{grad}(HB - \int_0^H B dH) + \mathrm{div}(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho}\Big|_{H,T} \overline{v}) -$$

$$- \overline{v}\cdot\mathrm{grad}(H\rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\Big|_{H,T} - \int_0^H H\rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH) + H\frac{\partial B}{\partial H}(\frac{\partial H}{\partial t} + \overline{v}\,\mathrm{grad}\, H)$$

şi

$$\overline{H}\frac{d_f \overline{B}}{dt} = \overline{H}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{H}\,\mathrm{rot}(\overline{B}x\overline{v}) = H\frac{B}{t} + \mathrm{div}[\overline{H}x(\overline{B}x\overline{v})] + \overline{v}(\overline{J}x\overline{B}) =$$

$$= \overline{H}[-\overline{v}\,\mathrm{grad}\, B - \rho\frac{\partial B}{\partial \rho}\,\mathrm{div}\,\overline{v} + \frac{\partial B}{\partial H}(\frac{\partial H}{\partial t} + \overline{v}\,\mathrm{grad}\, H)] +$$

$$+ \mathrm{div}[\overline{H}\, x(\overline{B}x\overline{v})] + \overline{v}(\overline{J}x\overline{B})$$

Inlocuind expresiile de mai sus în (1o6), [illegible] cont de transformarea Gauss Ostrogradski, se obține [illegible] pentru densitatea forţei $\overline{f}_m$ relaţia (91), densitate ce nu trebuie să depindă de modul în care se efectuează deplasările elementare.

Asupra fluidelor neliniare introduse în cîmp electric se exercită forţe, a căror densitate poate fi calculată în modul prezentat, considerînd bilanţul energetic dat de o relaţie de tipul (82) în care intervine densitatea de energie electrică liberă în forma

$$w_c(E,\rho,T) = ED - \int_0^E DdE \qquad (107)$$

iar densitatea de forţă se va nota cu $\overline{f}_e$.

Fără a mai repeta calculele, vom prezenta doar rezultatele finale. Pentru densitatea de forţă $\overline{f}_e$ se obţine expresia :

$$\overline{f}_e=\rho_v\overline{E} + D\ \mathrm{grad}\ E + \mathrm{grad}\left(-\int_0^E DdE + \int_0^E \rho E \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right|_{E,T} dE\right) \qquad (108)$$

unde ρ_v reprezintă densitatea sarcinii libere. Expresia (108) poate fi pusă sub formele echivalente :

$$\overline{f}_e=\rho_v\overline{E}- \frac{E^2}{2}\ \mathrm{grad}\varepsilon + \mathrm{grad}\left(ED-\int_0^E DdE\right)+ \mathrm{grad}\left(\int_0^E E\rho\left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right|_{E,T} dE\right) \qquad (109)$$

$$\overline{f}_e=\rho_v\overline{E}+P\ \mathrm{grad}\ E - \mathrm{grad}\int_0^E PdE + \mathrm{grad}\int_0^E \rho \left.\frac{\partial P}{\partial\rho}\right|_{E,T} dE \qquad (110)$$

$$\overline{f}_e = \rho_v\overline{E} + P\ \mathrm{grad}\ E - \mathrm{grad}\int_0^E \left.\frac{\partial(vP)}{\partial v}\right|_{E,T} dE \qquad (111)$$

Pentru vectorul stare de tensiune se obţine expresia :

$$\overline{T}_{ne} = \overline{E}(\overline{D}\cdot\overline{n}) +\left\{-\int_0^E DdE + \int_0^E \rho E \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right|_{E,T} dE\right\}\overline{n} \qquad (112)$$

Componentele tensorului tensiunilor vor fi

$$T_{eij} = \left\{ - \int_0^E D dE + \int_0^E E\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\Big|_{E,T} dE \right\} \delta_{ij} + E_i D_j \qquad (113)$$

unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

3.2. Cîmpuri electrocinetice repartizate pe suprafețe

Pentru studiul comportării lichidelor magnetice conductoare aflate în cîmp electromagnetic este necesară deducerea densității forțelor de volum și de suprafață ce se exercită asupra acestora. Suprafața de separație dintre medii fluide neliniare poate fi parcursă de curenți superfeiciali de conducție. Pentru determinarea densităților de forță ce se exercită asupra unor astfel de suprafețe, e necesar să se facă în prealabil o prezentare a teoriei macroscopice a cîmpurilor electrocinetice repartizate pe suprafețe[73].

In acest paragraf se prezintă un studiu al cîmpurilor cu repartiție pe suprafețe de configurație arbitrară introducîndu-se în acest scop concepte matematice adecvate și se stabilesc formele pe care le iau legile diferențiale ale cîmpului electromagnetic în puncte situate pe astfel de suprafețe. De asemenea se prezintă în detaliu proprietățile cîmpurilor electrocinetice staționare cu repartiție pe suprafețe. Noțiunile ce urmează sînt inspirate din definiția dată în [..] divergenței plane, mărime introdusă pentru studiul cîmpurilor plan paralele. Fie o suprafață S, pe care s-a definit un cîmp scalar V_s. Se numește gradient pe suprafață mărimea :

$$\mathrm{grad}^* V_s = \lim_{\Delta S_\Gamma \to 0} \frac{\oint_\Gamma V_s \, dl \, \bar{a}}{\Delta S_\Gamma} \qquad (114)$$

în care $\bar{a}$ este versorul normalei tangențiale, iar Γ o curbă ce mărginește suprafața elementară ΔS_Γ de pe suprafața S (fig.27). Vectorul tangențial a e orientat spre exteriorul suprafeţei ΔS_{Γ}. Prin procedeele folosite la studiul gradientului unei funcţii scalare, se poate arăta că şi gradientul pe suprafaţă are următoarele proprietăţi

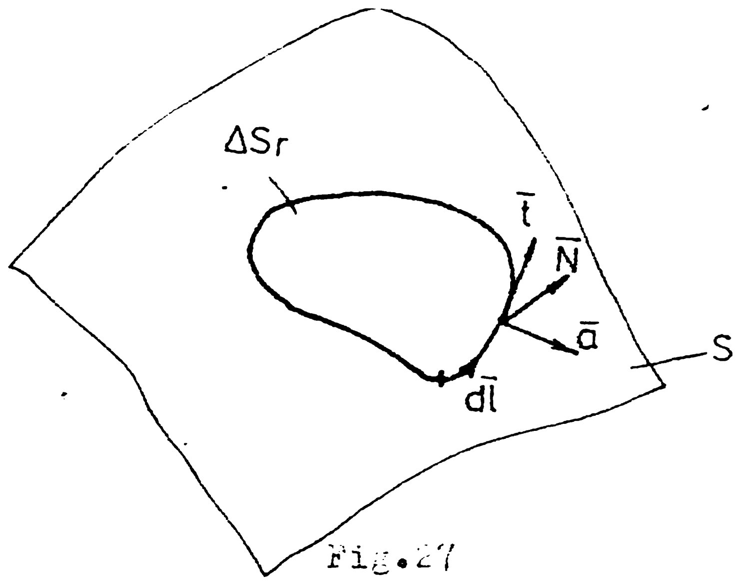


Fig.27

- este perpendicular pe curbele echiscalare : V_s=cst

şi

$$d\ell \cdot \mathrm{grad}^* V_s = dV_s$$

sau

$$\int_1^2 \mathrm{grad}^* V_s \overline{d\ell} = V_{s2} - V_{s1} \qquad (115)$$

iar dacă V_s împreună cu derivatele sale este o funcţie continuă, teorema lui Gauss-Ostrogradski referitoare la gradient obţine forma :

$$\oint_{\Gamma} V_s \overline{a}\, d\ell = \int_{S_{\Gamma}} \mathrm{grad}^* V_s ds \qquad (116)$$

Fie acum un cîmp vectorial definit pe suprafaţa S şi $\overline{F}_s$ vectorul cîmpului. Se numeşte divergenţa pe suprafaţă a vectorului $\overline{F}_s$ expresia :

$$\mathrm{div}^* \overline{F}_s = \lim_{\Delta S_{\Gamma} \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \overline{F}_s \cdot \overline{a}\, d\ell}{\Delta S_{\Gamma}} \qquad (117)$$

Dacă la trecerea prin curba C_d, ce separă două medii diferite, componentele $(\overline{F}_s \cdot \overline{a})$ suferă un salt, expresia (117) obţine valori infinite în orice punct situat pe C_d. În astfel de puncte se operează cu divergenţa lineică a vectorului $\overline{F}_s$, dată de :

$$\mathrm{div}_{\ell}^{*}\,\overline{F}_s = (\overline{F}_{s2} - \overline{F}_{s1})\overline{a}_{12} \qquad (118)$$

în care $\overline{a}_{12}$ este normala tangențială orientată spre mediul al doilea, iar F_{s1} și F_{s2} reprezintă vectorii cîmpului în cele două medii. Cu (117) și (118) se obține transformarea lui Gauss-Ostrogradski referitoare la divergența pe suprafață sub forma:

$$\oint_{\Gamma}\overline{F}_s\cdot\overline{a}\,d\ell = \int_{S_\Gamma}\mathrm{div}^{*}\overline{F}_s ds + \int_{C_d}\mathrm{div}_{\ell}^{*}\,\overline{F}_s\,d\ell \qquad (119)$$

Prezintă interes în teoria cîmpurilor cu repartiție pe suprafețe identitatea :

$$\mathrm{div}^{*}\,V_s\overline{F}_s = V_s\mathrm{div}^{*}\overline{F}_s + \overline{F}_s\cdot\mathrm{grad}^{*}V_s \qquad (120)$$

care se demonstrează prin procedee obișnuite.

Se numește vectorul pe suprafață a vectorului F_s mărimea :

$$\mathrm{rot}^{*}\overline{F}_s = \lim_{\Delta S_\Gamma\to 0}\frac{\oint_{\Gamma}\overline{F}_s\times\overline{a}\,d\ell}{\Delta S_\Gamma} = \overline{N}\lim_{\Delta S_\Gamma\to 0}\frac{\oint_{\Gamma}\overline{F}_s\cdot\overline{d\ell}}{\Delta S_\Gamma} \qquad (121)$$

în care $\overline{N}$ reprezintă normala la suprafață, iar $\overline{d\ell}$ un element orientat al curbei Γ. Orientarea pe normală la suprafață corespunde triedrului Darboux determinat de versorii $\overline{t}$, $\overline{a}$, $\overline{N}$.

Ultima egalitate din relația (121) rezultă observînd că

$$\overline{F}_s\times\overline{a} = \overline{F}_s\times(\overline{N}\times\overline{t}) = \overline{N}\cdot(\overline{F}_s\cdot\overline{t})$$

și $\qquad \overline{d\ell} = \overline{t}\,d\ell$

Din definiția dată (121) rezultă că în cazul cîmpurilor pe suprafață eminamente potențiale : $\overline{F}_s = \mathrm{grad}^{*}V_s$, rotorul acestora fiind nul deoarece $\oint_{\Gamma}\mathrm{grad}\,V_s d\ell = 0$ cum rezultă din (115).

Cînd există curbe C_d la care componentele tangente ale vectorului $\overline{F}_s$ sînt dicontinue, definiția (121) conduce la valori infinite în puncte situate pe C_d. În acest caz se operează cu rotorul lineic dat de

$$\mathrm{rot}_{\ell}^{*} \overline{F}_{s} = (F_{st2} - F_{st1})\overline{N} \tag{122}$$

în care F_{st2} respectiv F_{st1} sînt componentele tangente ale vectorilor $\overline{F}_{s1}$ respectiv $\overline{F}_{s2}$ la curba C_d, iar $\overline{t}$ este vectorul tangent la această curbă luat în sens trigonometric.

Ţinînd seama de (121) şi (122) teorema lui Stokes devine :

$$\oint_{\Gamma} \overline{F}_{s} \overline{d\ell} = \int_{S_{\Gamma}} \mathrm{rot}^{*} \overline{F}_{s} ds + \int_{C_d} \mathrm{rot}_{\ell}^{*} \overline{F}_{s} \cdot \overline{N} d\ell \tag{123}$$

In continuare se vor stabili ecuaţiile cîmpurilor electrocinetice cu repartiţie pe suprafeţe, fig.28, numite şi pînze de curent. Fie o curbă C situată pe această suprafaţă şi $\overline{d\ell}$ un element al curbei.

Se numeşte intensitatea lineică a curentului de conducţie prin curba C mărimea

$$i_{\ell c} = \int_{C} \overline{J}_{s} \cdot \overline{a} \, d\ell \tag{124}$$

în care $\overline{a}$ reprezintă sensul de referinţă al curentului, iar $\overline{J}_s$ densitatea sa pe suprafaţă.

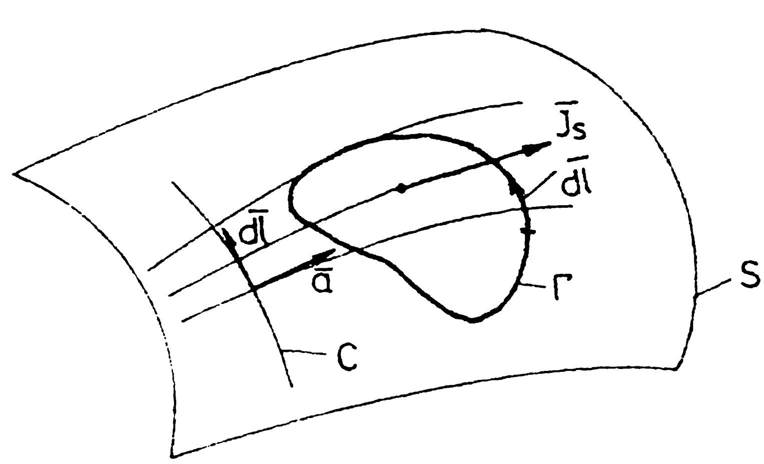


Fig.28

Se consideră o suprafaţă închisă Σ a cărei intersecţie cu S este curba Γ, astfel concepută încît normalele pe Σ în punctele curbei Γ coincid cu versorii normalelor tangenţiale pe Γ, exterioare lui S_{Γ}. Mai presupunem că suprafaţa Σ nu intersectează alte medii conductoare. Aplicînd legea conservării sarcinii electrice libere pe suprafaţa Σ avem :

$$i_{\Sigma} = i_{\Gamma} = -\frac{dQ}{dt} \tag{125}$$

în care Q reprezintă sarcina liberă închisă de Σ .

In ipoteza că sarcina din Σ este repartizată numai pe S cu densitatea ρ_s şi că suprafaţa S este în repaos, din (124) şi (125) rezultă :

$$\oint_{\Gamma} \overline{J}_s \overline{a} \cdot d\ell = -\int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} ds \tag{126}$$

care reprezintă forma integrală a legii conservării sarcinii libere în cazul pînzelor de curent. Forma diferenţială se obţine din definiţiile operaţiilor $\mathrm{div}^* \overline{J}_s$ şi $\mathrm{div}_{\ell}^* \overline{J}_s$:

$$\mathrm{div}^* \overline{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad \text{şi} \quad \mathrm{div}_{\ell}^* \overline{J}_s = -\frac{\partial \rho_{\ell}}{\partial t} \tag{127}$$

în care ρ_{ℓ} reprezintă densitatea lineică a sarcinii libere repartizată pe curba C.

Menţionăm că prima egalitate din (127) diferă de cunoscuta formă diferenţială a legii continuităţii exprimată cu ajutorul divergenţei de suprafaţă.

In cazul mediilor liniare şi izotrope legea conducţiei exprimă proporţionalitatea între densitatea de suprafaţă a curentului de conducţie şi intensitatea cîmpului în sens larg $\overline{E}_s + \overline{E}_{is}$, factorul de proporţionalitate fiind conductivitatea de suprafaţă, σ_s, a mediului :

$$\overline{J}_s = \sigma_s(\overline{E}_s + \overline{E}_{is}) \tag{128}$$

Legea inducţiei electromagnetice conduce la relaţia :

$$\mathrm{rot}^* \overline{E}_s = \frac{\partial \overline{B}_N}{\partial t} \tag{129}$$

unde $\overline{B}_N = (\overline{B} \cdot \overline{N}) \cdot \overline{N}$ reprezintă componenta normală a vectorului inducţiei magnetice iar legea circuitului magnetic se scrie cu forma obişnuită

$$\mathrm{rot}_s \overline{H} = \overline{J}_s \tag{130}$$

Pentru a stabili expresia legii transformării energiei electromagnetice prin curent de conducţie în cazul pînzelor de curent se va folosi legea conservării energiei care se va aplica energiei cîmpului electromagnetic din volumul închis de o suprafaţă Σ în interiorul căreia există pînze de curent iar corpurile sînt imobile şi nu există surse de energie (fig.29). Presupunem că în exteriorul lui Σ nu avem curenţi de conducţie repartizaţi pe suprafeţe. In aceste condiţii, legea conservării energiei se scrie în forma :

$$-\oint_{\Sigma}(\overline{E} \times \overline{H})d\overline{S} = \frac{\partial W_{elm}}{\partial t} + P \tag{131}$$

în care primul membru reprezintă curentul de energie care intră prin Σ , iar P este energia care în unitatea de timp se transformă în energie interioară prin degajare de căldură.

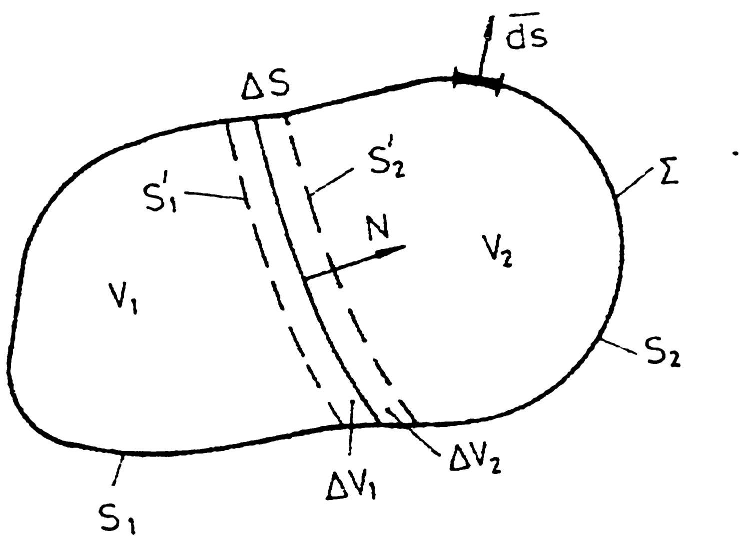


Fig.29

Suprafaţa S care conţine pînze de curent se va izola cu ajutorul suprafeţelor S_1', S_2' şi ΔS, fig.29. Folosind notaţiile din fig.29, se poate scrie succesiv :

$$\int_{S_1 \cup S_1'} (\overline{E} \times \overline{H})\, d\overline{S} = \int_{V_1-\Delta V_1} \mathrm{div}(\overline{E} \times \overline{H})dv =$$

$$= \int_{V_1-\Delta V_1} (\overline{H}\cdot\mathrm{rot}\, \overline{E} - \overline{E}\, \mathrm{rot}\, \overline{H})dv = -\int_{V_1-\Delta V_1}\left(\overline{H} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{E}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\right) dv - \int_{V_1-\Delta V_1} \overline{J}\cdot\overline{E}\, dv \tag{132}$$

$$\int_{S_2 U S_2'} (\overline{E}x\overline{H})d\overline{s} = -\int_{V_2-\Delta V_2} (\overline{H}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{E}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t})dv - \int_{V_2-\Delta V_2} \overline{J}.\overline{E}\, dv \qquad (133)$$

în care s-au folosit ecuaţiile lui Maxwell. Insumînd egalităţile (132) şi (133) se obţine :

$$\int_{S_1 U S_2} (\overline{E}x\overline{H})d\overline{s} + \int_{S_1' U S_2'} (\overline{E}x\overline{H})d\overline{s} = -\int_{V_1+V_2-\Delta V} (\overline{H}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{E}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t})dv - \int_{V_1+V_2-\Delta V} \overline{J}\overline{E}\, dv \qquad (134)$$

Prin trecerea la limită a relaţiei (134) cînd $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \to 0$, reuniunea $S_1 U S_2$ tinde spre suprafaţa Σ şi (134) devine :

$$\oint_{\Sigma}(\overline{E} \times \overline{H})d\overline{s} + \int_S \overline{N}_{12}(\overline{E}_1 x\overline{H}_1 - \overline{E}_2 x\overline{H}_2)ds =$$

$$= -\int_{V_\Sigma} (\overline{H}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{E}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t})dv - \int_{V_\Sigma} \overline{J}.\overline{E}\, dv \qquad (135)$$

Pe de altă parte se poate scrie :

$$\overline{N}_{12}(\overline{E}_1 x\overline{H}_1 - \overline{E}_2 x\overline{H}_2) = \overline{H}_1 E_{1t}\overline{a} - \overline{H}_2 E_{2t}\overline{a} = E_t(\overline{H}_1 - \overline{H}_2).\overline{a} =$$

$$= \overline{N}_{12}\left[\overline{E}_t x(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)\right] = \overline{E}_t\ \mathrm{rot}_s\overline{H} = \overline{E}_t.\overline{J}_s = \overline{E}_s.\overline{J}_s$$

în care s-a ţinut seama de continuitatea componentelor tangente ale vectorului E, de (130) şi de egalitatea evidentă

$$\overline{E}_t = \overline{E}_s$$

Cu acestea, bilanţul energetic (135) devine :

$$-\oint_{\Sigma}(\overline{E}x\overline{H})d\overline{s} = \int_{V_\Sigma} (\overline{H}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{E}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t})dv - \int_{V_\Sigma} \overline{J}.\overline{E}\, dv - \int_S \overline{E}_s\overline{J}_s\, ds \qquad (136)$$

Comparînd (131) cu (136) rezultă nemijlocit că efectul Joule-Lenz în puncte situate pe suprafaţa S are expresia :

$$p_{Js} = \overline{E}_s.\overline{J}_s \qquad (137)$$

şi reprezintă puterea cedată de cîmpul electromagnetic prin curent de conducţie repartizat pe suprafaţă.

Prezintă interes proprietăţile pînzelor de curent în regim electrocinetic staţionar. Legile scrise anterior obţin, în cîmpuri electrocinetice staţionare cu repartiţie pe suprafeţe şi fără cîmpuri imprimate, formele :

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}^{*}\overline{J}_{s} = 0 \\
&\operatorname{div}_{\ell}^{*}\overline{J}_{s} = 0 \\
&\overline{J}_{s} = \sigma_{s}\overline{E}_{s} \\
&\operatorname{rot}^{*}\overline{E}_{s} = 0 \\
&p_{Js} = \overline{E}_{s}\cdot\overline{J}_{s}
\end{aligned}
\qquad (138)
$$

Din penultima egalitate din (138) rezultă că $\overline{E}_s$ este un cîmp eminamente potenţial $\overline{E}_s = -\operatorname{grad}^{*}V_s$, fiind potenţialul scalar al intensităţii cîmpului electrocinetic.

Deoarece egalităţile (138) sînt identice cu cele ale unui cîmp electrocinetic staţionar cu repartiţie de volum rezultă că formele teoremelor de unicitate, de refracţie, de superpoziţie, etc. îşi menţin valabilitatea şi pentru pînze de curent.

Cum teorema reciprocităţii stă la baza conceptului de rezistenţă, va fi demonstrată în cele ce urmează.

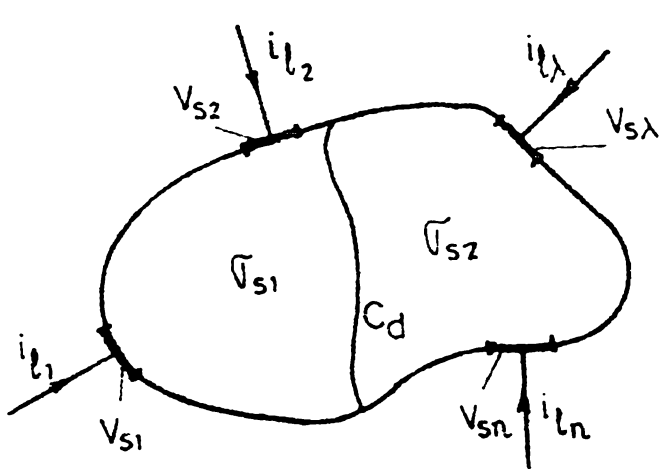


Fig.30

Fie suprafaţa conductoare S_Γ, eventual [illegible] dar izotropă şi fără cîmp imprimat, mărginită de curba Γ [illegible]-

mentată prin n electrozi sub potențialele $V_{s1},\dots V_{sn}$, cu intensitățile lineice i_{l1}, $i_{l2}\dots i_{ln}$ (fig.3o).

Considerăm o altă stare a cîmpului cu repartiție de suprafață în care electrozii au potențialele V'_{s1}, $V'_{s2}\dots V'_{sn}$ iar curenții valorile i'_{l1}, $i'_{l2}\dots i'_{ln}$.

Se arată ușor că cele două stări satisfac relația :

$$\mathrm{div}^*(V'_s\bar{J}_s - V_s\bar{J}'_s) = -\bar{E}'_s\bar{J}_s + \bar{E}_s\bar{J}'_s = 0 \qquad (139)$$

Aplicînd teorema (119) vectorului $V'_s\bar{J}_s - V_s\bar{J}'_s$ referitor la suprafața S_Γ avem :

$$\oint_\Gamma V'_s\bar{J}_s\bar{a}\, dl = \oint_\Gamma V_s\bar{J}'_s\,\bar{a}\, dl \qquad (140)$$

deoarece pe curba C_d de separație între cele două medii, se poate scrie

$$\left[(V'_s\bar{J}_s)_2 - (V'_s\bar{J}_s)_1\right]\bar{a} = V'_s\,\mathrm{div}^*_l\,\bar{J}_s = 0$$

$$\left[(V_s J'_s)_2 - (V_s J'_s)_1\right]\bar{a} = V_s\,\mathrm{div}^*_l\,\bar{J}'_s = 0$$

potențialele V_s și V'_s fiind funcții continue.

Dezvoltînd integralele din (14o) și observînd că în puncte pe curba Γ, cu excepția electrozilor $\bar{J}_s\cdot\bar{n} = \bar{J}'_s\cdot\bar{n} = 0$ se obține :

$$\sum_1^n V'_{s\lambda} i_{l\lambda} = \sum_1^n V_{s\lambda} i'_{l\lambda} \qquad (141)$$

care reprezintă forma integrală a teoremei reciprocității.

In sumele ce intervin în (141) intensitățile de curent $i_{l\lambda}$ și $i'_{l\lambda}$ sînt contate pozitive dacă sensurile lor de referință sînt îndreptate spre mediu și negative în caz contrar.

Fie acum un rezistor (fig.31.a) format din doi electrozi lineici ce stau sub potențialele V_{s1} și V_{s2} prin care trec în sensuri opuse curenți egali :

$$i_{l1} = i_{l2} = i_l$$

Suprafaţa conductoare poate fi neomogenă, dar izotropă şi fără cîmp imprimat.

Se consideră o altă stare a sistemului dar care păstrează proprietatea de rezistor, reprezentată prin V'_{s1}, V'_{s2} şi i'_{ℓ}.

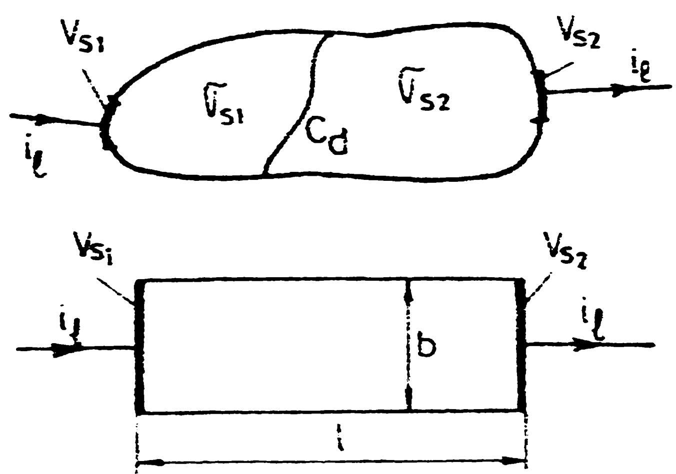


Fig.31

Cu teorema reciprocităţii avem :

$$\frac{V_{s1}-V_{s1}}{i_{\ell}} = \frac{V'_{s1}-V'_{s2}}{i'_{\ell}} = R_s \qquad (142)$$

care demonstrează că raportul între diferenţa de potenţial dintre electrozi şi intensitatea curentului liniic este o mărime independentă de stările electrocinetice ale [illegible]-lui. El se numeşte rezistenţa de suprafaţă a rezistorului.

Dacă se consideră un rezistor uniform, fig.31.b, rezistenţa devine

$$R_s = \frac{L_s}{\sigma_s L_s b} = \frac{\ell}{\sigma_s b} \qquad (143)$$

expresie ce justifică metoda de măsurare a lui σ_s [illegible] [illegible]. Căldura dezvoltată în unitatea de timp într-un rezistor avînd o formă oarecare, în baza relaţiei (137) şi a legii conducţiei e dată de relaţia :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_S \overline{J}_s \overline{E}_s ds = \int_S \frac{J_s^2}{\sigma_s} ds$$

Ultima integrală se evoluează uşor observînd că pentru regimul electrocinetic staţionar

$$\mathrm{div}^* V_s \overline{J}_s = - \frac{J_s^2}{\sigma_s}$$

şi

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{S_\Gamma} \mathrm{div}^* \, V_s \overline{J}_s ds = - \oint_\Gamma V_s \overline{J}_s \cdot \overline{s} \, d\ell =$$

$$= (V_{s1} - V_{s2}) i_\ell = i_\ell^2 R_s = \frac{(V_{s1} - V_{s2})^2}{R_s} . \qquad (144)$$

Se vede deci că rezistenţa unui rezistor de suprafaţă are proprietăţi identice cu cele ale rezistenţei mediilor definite pentru cîmpuri electrocinetice staţionare distribuite în volum [64].

3.3. Forţe la suprafaţa de separaţie dintre medii neliniare în cîmp electromagnetic

In literatură expresia densităţii forţei ce se exercită la suprafaţa de separaţie dintre medii fluide diferite, în prezenţa cîmpului electromagnetic se face presupunînd mediile liniare, fie cu ajutorul vectorului stare de tensiune, fie calculînd limita forţei de volum ce se exercită asupra unui cilindru plat cînd înălţimea acestuia tinde spre zero [65, 66, 67]. A doua metodă a fost folosită în paragraful 3.1, lucru posibil datorită faptului că densităţile superficiale ale curentului de conducţie şi ale sarcinii libere erau nule,

In acest paragraf se stabileşte expresia densităţii forţei ce se exercită la suprafaţa de separaţie dintre medii fluide, neliniare, parcurse de curenţi superficiali cu densitatea $\overline{J}_s$ şi încărcată cu sarcina liberă avînd densitatea ρ_s.

După cum s-a arătat în paragraful (3.1) forţa de suprafaţă se calculează cu relaţia

$$\overline{f}_s = \lim_{\substack{\Delta h \to o \\ \Delta S \to o}} \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta S}$$

unde $\Delta \overline{F}$ reprezintă forţa ce exercită asupra unui cilindru plat avînd aria bazei ΔS şi înălţimea Δh. Pentru calculul forţei ΔF, va trebui să demonstrăm că dacă într-un domeniu V_Σ din cîmp există suprafeţe S_d pentru care componentele tangente ale intensităţii cîmpului magnetic şi componentele normale ale inducţiei electrice nu sînt continue, expresia tensorului tensiunilor (respectiv vectorul stare de tensiune) pentru puncte aparţinînd suprafeţei ce limitează domeniul considerat este formal identică cu expresia ce se obţine dacă în interiorul suprafeţei Σ n-ar exista astfel de suprafeţe de discontinuitate.

In acest scop, considerăm suprafaţa Σ ce limitează domeniul V_Σ în interiorul căreia există suprafeţe S_d cu $\overline{J}_s \neq o$ şi $\rho_s \neq o$. Expresia bilanţului energetic pentru domeniul limitat de suprafaţa Σ, în care se ţine cont şi de pierderile prin efect Joule datorate curenţilor superficiali (123) se scrie :

$$\frac{dW}{dt} + P_m + \int_{V_\Sigma} \overline{J}\overline{E}\, dv + \int_{S_d'} \overline{J}_s\overline{E}\, ds + \oint_{\Sigma} \overline{S}\, d\overline{s} = o \qquad (145)$$

unde

W = energia electromagnetică liberă înmagazinată în V_Σ

P_m' = puterea mecanică dezvoltată în sistem

$\overline{J}, \overline{J}_s'$ - densitatea de volum, respectiv de suprafaţă a curenţilor de conducţie

$\overline{S}$ - densitatea curentului de energie

In [68] se arată că expresia $\overline{S} = \overline{E}\times\overline{H}$ rămîne valabilă şi în medii neliniare. Tinînd cont că pe suprafeţele de discontinuitate S_d,

$$\mathrm{div}_s(\overline{E}x\overline{H}) = \overline{n}_{12}(\overline{E}_2 x\overline{H}_2 - \overline{E}_1 x\overline{H}_1) = \overline{n}_{12}\left[(\overline{E}_t+\overline{E}_{2n})x\overline{H}_2 - \right.$$

$$\left. -(\overline{E}_t+\overline{E}_{1n})x\overline{H}_1\right] = \overline{E}_t\left[\overline{n}_{12}x(\overline{H}_1-\overline{H}_2)\right] =$$

$$= -\overline{E}\ \mathrm{rot}_s\ \overline{H} = -\overline{E}\overline{J}_s.$$

ultimul termen al expresiei (145) se transformă după cum urmează

$$\oint_{\Sigma}(ExH)ds = \int_{V_{\Sigma}} \mathrm{div}(\overline{E}x\overline{H})dv + \int_{S_d} \mathrm{div}_s(\overline{E}x\overline{H})ds =$$

$$= \int_{V_{\Sigma}} \mathrm{div}(\overline{E}x\overline{H})dv - \int_{S_d} \overline{J}_s\cdot\overline{E}ds$$

Relaţia (145) capătă deci forma :

$$\frac{dW}{dt} + P_m + \int_{V_{\Sigma}} \overline{J}\cdot\overline{E}\ dv + \int_{V_{\Sigma}} \mathrm{div}(\overline{E}x\overline{H})dv = 0$$

Egalitatea obţinută este identică cu forma folosită în literatură pentru a determina tensorul tensiunilor într-un punct al suprafeţei Σ , ce nu conţin e în interior suprafeţele de discontinuitate S_d, fapt ce asigură invarianţa formală a tensorului tensiunilor.

Vectorul stare de tensiune $\overline{T}_n$ va fi egal cu suma vectorilor $\overline{T}_{nm}$ şi $\overline{T}_{ne}$ date de relaţiile (99) şi (112).

Densitatea forţei f_s va fi

$$\overline{f}_s = \overline{f}_{se} + \overline{f}_{sm} = \overline{T}_{n'1} + \overline{T}_{n'2}$$

unde cei doi termeni se calculează cu relaţiile :

$$\overline{f}_{se} = \overline{E}_2(\overline{D}_2\cdot\overline{n}_{12}) - \overline{E}_1(\overline{D}_1\cdot\overline{n}_{12}) +$$

$$\mathrm{grad}_s\left(-\int_0^E D\ dE + \int_0^E E\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\Big|_{E\varphi} dE\right) \qquad (146)$$

respectiv (104) pentru $\overline{f}_{sm}$.

Vom transforma termenii $\overline{f}_{se}$ şi $\overline{f}_{sm}$ în aşa fel încît să apară în mod explicit densitatea de curent $\overline{J}_s$ şi densitatea de sarcină ρ_s.

3.3.1. Calculul densităţii $\overline{f}_{sm}$

Ţinînd cont de identitatea

$$\overline{B} \times (\overline{H} \times \overline{n}) = \overline{H}(\overline{B},\overline{n}) - \overline{n}(\overline{B}.\overline{H})$$

vom exprima vectorul $\overline{T}_{nm}$ în forma

$$\overline{T}_{nm} = \overline{B}x(\overline{H}x\overline{n}) + \overline{n}(\overline{H}.\overline{B}) + \left\{ -\int_0^H B\, dH + \int_0^H H\rho \frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big|_{H,T} dH \right\} \overline{n}$$

şi deci relaţia (1o4) devine :

$$\overline{f}_{sm} = \overline{B}_2 x(\overline{H}_2 x\overline{n}_{12}) - \overline{B}_1 x(\overline{H}_1 x\overline{n}_{12}) + \overline{n}_{12}(\overline{B}_2\overline{H}_2 - \overline{B}_1\overline{H}_1) +$$
$$+ \operatorname{grad}_s\left(-\int_0^H B dH + \int_0^H H\rho \frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big|_{H,T} dH\right) \qquad (147)$$

Suma primilor termeni ai relaţiei (147) ţinînd cont de egalităţile

$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{n}_{12} \times (\overline{H}_2 - \overline{H}_1) = \overline{J}_s & (148) \\ B_{1n} = B_{2n} = B_n & \end{array}\right. \qquad (148)$$

devine :

$$\overline{B}_2\ x(\overline{H}_2 x\overline{n}_{12}) - \overline{B}_1 x(\overline{H}_1 x\overline{n}_{12}) + \overline{n}_{12}(\overline{B}_2.\overline{H}_2 - \overline{B}_1.\overline{H}_1) =$$
$$= \overline{B}_n x\left[(\overline{H}_2 - \overline{H}_1) x\ \overline{n}_{12}\right] + \overline{B}_{2t} x(\overline{H}_{2t} x\ \overline{n}_{12}) - \overline{B}_{1t} x(\overline{H}_{1t} x\overline{n}_{12}) +$$
$$+ \overline{n}_{12}(B_{2n}H_{2n} + B_{2t}H_{2t} - B_{1n}H_{1n} - B_{1t}H_{1t}) =$$
$$= \overline{J}_s x\overline{B}_n + \overline{n}_{12} B_n^2 \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)$$

Se obţine, în final, densitatea $\overline{f}_{sm}$ în forma :

$$\overline{f}_{sm} = \overline{J}_s \times \overline{B}_n + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} B_n^2 \overline{n}_{12} + \mathrm{grad}_s\left(-\int_0^H B\,dH + \int_0^H \rho H \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH\right) \tag{149}$$

3.3.2. Calculul densității $\overline{f}_{se}$

Vom transforma relația (146) astfel încît să apară densitatea de sarcină în mod explicit ținînd cont de

$$\begin{cases} \overline{n}_{12}(\overline{D}_2 - \overline{D}_1) = \rho_s \\ \overline{E}_{t1} = \overline{E}_{t2} = \overline{E}_t \end{cases} \tag{150}$$

Primii doi termeni din relația (146) devin :

$$\overline{E}_2(\overline{D}_2 \cdot \overline{n}_{12}) - \overline{E}_1(\overline{D}_1 \cdot \overline{n}_{12}) = (\overline{E}_t + \overline{E}_{2n})(\overline{D}_2 \cdot \overline{n}_{12}) - (\overline{E}_t + \overline{E}_{1n})(\overline{D}_1 \cdot \overline{n}_{12}) =$$

$$= \overline{E}_t\left[(\overline{D}_2 - \overline{D}_1) \cdot \overline{n}_{12}\right] + \overline{E}_{2n}(\overline{D}_2 \cdot \overline{n}_{12}) - \overline{E}_{1n}(\overline{D}_1 \cdot \overline{n}_{12}) =$$

$$= \rho_s \overline{E}_t + \frac{\overline{E}_{2n}(\overline{D}_2 \cdot \overline{n}_{12}) - \overline{E}_{1n}(\overline{D}_1 \cdot \overline{n}_{12})}{2} + \overline{n}_{12} \frac{1}{2}\left(\frac{D_{2n}^2}{\varepsilon_2} - \frac{D_{1n}^2}{\varepsilon_1}\right)$$

Cu relațiile (150), expresia de mai sus se transformă în :

$$\rho_s E_t + \frac{\overline{E}_{2n}(\rho_s + \overline{D}_1 \cdot \overline{n}_{12}) - \overline{E}_{1n}(\overline{D}_2 \cdot \overline{n}_{12} - \rho_s)}{2} + \overline{n}_{12} \frac{1}{2}\left(\frac{D_{2n}^2}{\varepsilon_2} - \frac{D_{1n}^2}{\varepsilon_1}\right) =$$

$$= \rho_s \frac{\overline{E}_1 + \overline{E}_2}{2} + \overline{n}_{12} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) D_{1n} D_{2n} + \overline{n}_{12} \frac{1}{2}\left(\frac{D_{2n}^2}{\varepsilon_2} - \frac{D_{1n}^2}{\varepsilon_1}\right)$$

In final se obține pentru $\overline{f}_{se}$ expresia

$$\overline{f}_{se} = \rho_s \frac{\overline{E}_1 + \overline{E}_2}{2} + \overline{n}_{12} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} D_{1n} \cdot D_{2n} + \overline{n}_{12} \frac{1}{2}\left(\frac{D_{2n}^2}{\varepsilon_2} - \frac{D_{1n}^2}{\varepsilon_1}\right) +$$

$$+ \mathrm{grad}_s\left(-\int_0^E D\,dE + \int_0^E \rho E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\Big|_{E,T} dE\right) \tag{151}$$

In continuare se vor particulariza relaţii (149) şi (151) pentru medii liniare fără polarizare permanentă unde $\overline{B}=\mu\overline{H}$ şi $\overline{D}=\varepsilon\overline{E}$, iar ε şi μ sînt independente de intensitatea cîmpului electric, respectiv magnetic.

Relaţia (149) se va scrie, în acest caz

$$\overline{f}_{sm}=\overline{J}_s x\overline{B}_n+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1\mu_2}B_n^2\,\overline{n}_{12}+\overline{n}_{12}\frac{\mu_1H_1^2-\mu_2H_2^2}{2}+$$
$$+\operatorname{grad}_s\left(\frac{H^2}{2}\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right) \qquad (152)$$

Termenul al treilea al relaţiei (152) se poate transforma astfel :

$$\overline{n}_{12}\frac{\mu_1H_1^2-\mu_2H_2^2}{2}=\overline{n}_{12}\frac{\mu_1H_{1n}^2-\mu_2H_{2n}^2}{2}+\overline{n}_{12}\frac{\mu_1H_{1t}^2-\mu_2H_{2t}^2}{2}=$$

$$=\overline{n}_{12}\frac{B_n^2}{2}\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)+\frac{\mu_1\overline{H}_{1t}x(\overline{n}_{12}x\overline{H}_{1t})-\mu_2\overline{H}_{2t}x(\overline{n}_{12}x\overline{H}_{2t})}{2}=$$

$$=-\frac{\mu_1-\mu_2}{2\mu_1\mu_2}B_n^2\overline{n}_{12}+\frac{\mu_1\overline{H}_{1t}x\left[\overline{n}_{12}x(\overline{H}_{2t}+\overline{n}_{12}x\overline{J}_s)\right]}{2}-$$

$$-\frac{\mu_2\overline{H}_{2t}x\left[\overline{n}_{12}x(\overline{H}_{1t}-\overline{n}_{12}x\overline{J}_s)\right]}{2}=\frac{\mu_1-\mu_2}{2\mu_1\mu_2}B_n^2\overline{n}_{12}+$$

$$+\frac{\mu_1\overline{H}_{1t}x(\overline{n}_{12}x\overline{H}_{2t})-\mu_2\overline{H}_{2t}x(\overline{n}_{12}x\overline{H}_{1t})}{2}+\frac{(\overline{B}_{1t}+\overline{B}_{2t})x\left[\overline{n}_{12}x(\overline{n}_{12}x\overline{J}_s)\right]}{2}$$

$$=-\frac{(\mu_1-\mu_2)}{2\mu_1\mu_2}B_n^2\overline{n}_{12}+\frac{\overline{B}_{1t}+\overline{B}_{2t}}{2}x(-\overline{J}_s)+\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\overline{H}_{1t}\cdot\overline{H}_{2t}\overline{n}_{12}$$

Pentru medii liniare se obţine deci expresia densităţii de forţă $\overline{f}_{sm}$ în forma

$$\bar{f}_{sm} = \bar{J}_s \times \frac{\bar{B}_1+\bar{B}_2}{2} + \frac{\mu_1-\mu_2}{2}\left(\frac{B_n^2}{\mu_1\mu_2} + H_{1t}\cdot H_{2t}\right)\bar{n}_{12} + grad_s\left(\frac{H^2}{2}\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right) \tag{153}$$

Pentru a obţine expresia densităţii $\bar{f}_{se}$ în cazul mediilor liniare vom observa că

$$\bar{n}_{12}\,\frac{\varepsilon_1 E_1^2-\varepsilon_2 E_2^2}{2} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\,E_t^2\bar{n}_{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{D_{1n}^2}{\varepsilon_1} - \frac{D_{2n}^2}{\varepsilon_2}\right)\bar{n}_{12}$$

astfel încît $\bar{f}_{se}$ ia forma finală :

$$\bar{f}_{se} = \rho_s\,\frac{\bar{E}_1+\bar{E}_2}{2} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\left(\frac{D_{1n}\cdot D_{2n}}{1\;2} + E_t^2\right)\bar{n}_{12} + grad_s\left(\frac{E^2}{2}\rho\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right) \tag{154}$$

La suprafaţa de separaţie metal dielectric, cîmpul electric nu are decît componentă normală în mediul dielectric şi din relaţia (154) rezultă

$$\bar{f}_s = \rho_s\,\frac{\bar{E}_2}{2} = \rho_s\,\frac{\bar{E}}{2}$$

sau

$$\bar{f}_s = \frac{\bar{E}\bar{D}}{2}$$

în concordanţă cu rezultatul cunoscut din literatură.

Se observă deci că în expresia densităţii de forţă $\bar{f}_s$, apar în mod firesc termenii $\rho_s\frac{\bar{E}_1+\bar{E}_2}{2}$ şi $\bar{J}_s\,\frac{\bar{B}_1+\bar{B}_2}{2}$, adică densităţile $\bar{J}_s$ şi ρ_s se înmulţesc cu cîmpurile corespunzătoare calculate ca semisuma cîmpurilor de pe cele două feţe ale suprafeţei de discontinuitate.

Toate relaţiile de mai sus se reduc la cele cunoscute, în cazul cînd $\rho_s = 0$ şi $\bar{J}_s = 0$.

CAPITOLUL 4

LICHIDE MAGNETICE IN REGIM STATIC

In acest capitol se face un studiu al fluidelor magnetice în regim static prin determinarea presiunii în puncte din interiorul acestora atunci cînd sînt plasate în cîmpuri magnetice exterioare. Rezultatele obţinute se folosesc la elaborarea unei metode de măsurare a curenţilor intenşi [74] şi la studiul levitaţiei magnetice. -

4.1. Presiunea în lichide magnetice

In literatură pentru determinarea presiunii în lichide magnetice se foloseşte în general relaţia lui Bernoulli generalizată [69], [7o] termenul considerat drept "presiune magnetică" incluzînd, în mod nejustificat doar o parte din mărimile magnetice.

In acest capitol se determină în mod direct presiunea magnetică pe baza condiţiei de echilibru static a fluidului.

Considerăm un fluid magnetic aflat în cîmp exterior (fig.32).

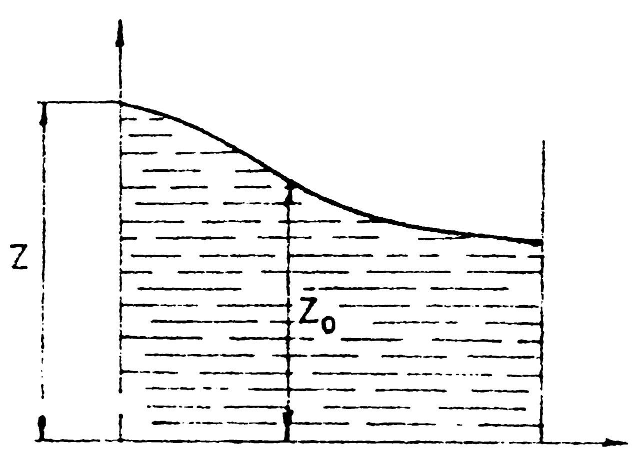


Fig.32

Condiţia de echilibru a lichidului se exprimă prin relaţia

$$\mathrm{grad}\ p - \overline{f}_v = 0 \tag{155}$$

unde

p = presiunea într-un punct din fluid

$\overline{f}_v$ = densitatea de volum a forţelor ce se exercită asupra fluidului.

Cum lichidul se află în cîmpul gravitaţional şi în cîmpul magnetic, densitatea de volum $\overline{f}_v$ va fi :

$$\overline{f}_v = -\mathrm{grad}\ \rho g z + \overline{J \times B} + \mu_0 M\ \mathrm{grad}\ H - \mathrm{grad}\int_0^H \mu_0 M\ dH + \\ + \mathrm{grad}\int_0^H \mu_0 \rho \frac{\partial M}{\partial \rho}\Big|_{H,T}\ dH \tag{156}$$

Considerînd conductivitatea lichidului nulă, rezultă $\overline{J \times B} = 0$. Termenul al treilea al relaţiei (156) se poate scrie

$$\mu_0 M\ \mathrm{grad}\ H = \mathrm{grad}\int_0^H \mu_0 M\, dH - \left(\int_0^H \mu_0 \frac{\partial M}{\partial T}\ dH\right)\ \mathrm{grad}\ T$$

In ipoteza că nu există variaţii de temperatură, grad T=0, introducînd relaţia de mai sus în (156) şi efectuînd o integrare, se obţine presiunea p în forma

$$p + \rho g z - \int_0^H \mu_0 \rho \frac{\partial M}{\partial \rho}\Big|_{H,T}\ dH = A \tag{157}$$

unde A este o constantă de integrare. Pentru a o determina se pune condiţia $p(P_0) = p_0 - f_{s0}$ unde f_{s0} reprezintă densitatea de suprafaţă a forţei de natură magnetică ce se exercită asupra lichidului şi este dată de relaţia (1[illegible]). Deci

$$A - \rho g z_0 + \int_0^{H_s} \mu_0 \rho \frac{\partial M}{\partial \rho}\Big|_{H,T}\ dH = p_0 - \frac{B_n^2(\mu - \mu_0)}{\mu \mu_0} - \\ - \left[\int_0^{H(z_0)} B\,dH - \frac{\mu_0 H_0^2}{2}\right] + \int_0^{H(z_0)} H \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T}\ dH$$

Introducînd constanta A în (157) presiunea p devine

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) + \int_0^H \mu_0 \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} \cancel{dH} \frac{B_n^2(\mu - \mu_0)}{\mu \mu_0} -$$

$$- \int_0^{H(z_0)} \mu_0 M \, dH + \frac{\mu_0 H_{z0}^2}{2} - \mu_0 \frac{H_0^2}{2}$$

sau după unele calcule

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) + \int_0^H \rho \mu_0 \frac{\partial M}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH -$$

$$- \left\{ \frac{B_{n(z0)}^2 (\mu - \mu_0)^2}{2 \mu_0 \mu^2} + \int_0^{H(z_0)} \mu_0 M \, dH \right\} \qquad (158)$$

cu precizarea faptului că mărimile $B_n(z_0)$ şi $H(z_0)$ din relaţia de mai sus sînt calculate în punctul P_0.

In cazul cînd punctul de referinţă ales P_0, este situat undeva în afara cîmpului magnetic, relaţia (158) ia forma :

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) + \int_0^H \mu_0 \rho \frac{\partial M}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH \qquad (159)$$

Ecuaţia suprafeţei libere a lichidului, aflat în cîmp magnetic se obţine punînd condiţia ca într-un punct oarecare pe suprafaţă să existe relaţia

$$p = p_0 - f_s$$

deci

$$p_0 + \rho g(z_0 - z) + \int_0^{H(z)} \rho \mu_0 \frac{\partial M}{\partial \rho}\Big|_{H,T} dH - \left\{ \frac{B^2(\mu' - \mu_0)^2}{2 \mu_0 \mu'^2} + \int_0^{H(z_0)} \mu_0 M dH \right. =$$

$$= p_0 - \frac{B_n^2(\mu - \mu_0)}{\mu \mu_0} - \left[\int_0^{H(z)} B dH - \mu_0 \frac{H_{0z}^2}{2} \right] + \int_0^{H(z)} \mu \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big|_{H,T} \ldots$$

unde μ' este valoarea pe care o ia permeabilitatea magnetică atunci cînd intensitatea cîmpului magnetic este cea din punctul de referință.

In final se obține :

$$\rho g(z-z_o) = \frac{B_n^2(z)\,(\mu-\mu_o)^2}{2\mu_o\mu^2} + \int_0^{H(z)} \mu_o M\,dH - \left\{\frac{B_n^2(z_o)(\mu'-\mu_o)^2}{2\mu_o\mu'^2} + \int_0^{H(zo)} \mu_o M\,dH\right\} \qquad (160)$$

Dacă punctul de referință s-ar afla în afara cîmpului, ecuația suprafeței ar fi dată de

$$\rho g(z-z_o) = \frac{B_n^2(z)(\mu-\mu_o)^2}{2\mu_o\mu^2} + \int_0^{H(z)} \mu_o M\,dH \qquad (161)$$

Avînd în vedere că la suprafața de separație lichid aer este satisfăcută relația $B_n = \mu_o H_{no} = \mu_o(H_{nf}+M_n)$, primul termen al relației (160) se poate scrie :

$$\frac{B_n^2}{2}\left[\frac{1}{\mu_o} - \frac{2}{\mu} + \frac{\mu_o}{\mu^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\mu_o H_{no}^2 - 2\mu_o H_{nf}(H_{nf}+M_n) + \mu_o H_{nf}^2\right] =$$

$$= \frac{\mu_o}{2}\,(2M_n H_{nf}^2 + M_n^2) - \mu_o H_{nf} M_n = \mu_o \frac{M_n^2}{2}$$

relațiile (160) și (161) pot fi scrise doar în funcție de M_n

$$\rho g(z-z_o) = \frac{\mu_o M_n^2(z)}{2} + \int_0^{H(z)} \mu_o M\,dH - \left\{\frac{\mu_o M_n^2(z_o)}{2} + \int_0^{H(z_o)} \mu_o M\,dH\right\} \qquad (160')$$

$$\rho g(z-z_o) = \frac{\mu_o M_n^2(z)}{2} + \int_0^{H(z)} \mu_o M\,dH \qquad (161')$$

Drept exemplu simplu de folosire al relației (160) sau (161) vom considera aranjamentul experimental întîlnit ... literatură [1], [2] (fig.33) unde firul conductor e parcurs de curentul continuu I. Datorită simetriei cilindrice intensi-

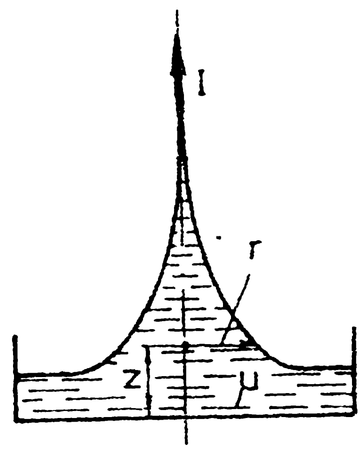


Fig.33

tatea cîmpului magnetic într-un punct la distanţa r se calculează cu relaţia

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Forma suprafeţei lichidului va fi dată de relaţia ([illegible]) în care se ţine cont că $B_n = 0$ deci

$$z - z_0 = \frac{1}{\rho g} \int_0^{H(z)} \mu_0 M \, dH$$

Pentru valori mici ale cîmpului, adică la distanţe mari de fir, considerînd porţiunea liniară a caracteristicii de magnetizare $M = (\mu_r - 1)H$ şi rezultă

$$z - z_0 = \frac{(\mu - \mu_0)}{8\pi^2 \rho g} \frac{I^2}{r^2}$$

Pentru valori mari ale cîmpului - la distanţe mici de fir - $M = M_s$ şi vom avea

$$z - z_0 = \frac{\mu_0 M_s}{2\pi \rho g} \frac{I}{r}$$

în concordanţă cu rezultatele din literatură.

Relaţia (160) ar putea fi folosită pentru determinarea experimentală a permeabilităţii lichidelor magnetice folosind aranjamentul experimental din fig.34.

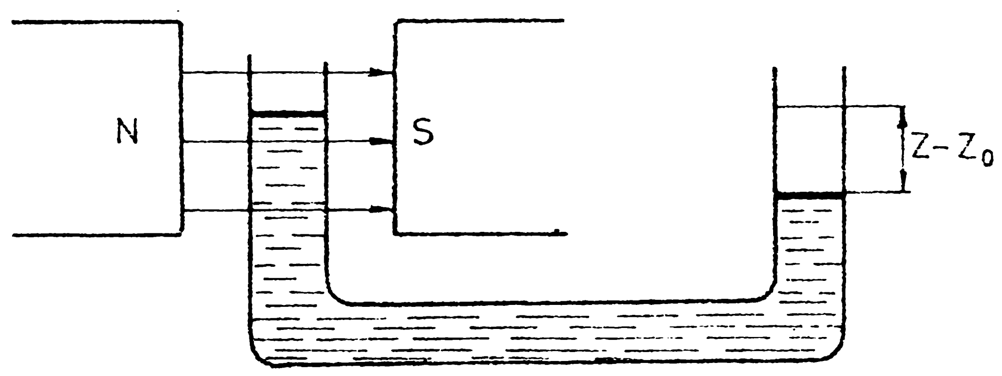


Fig.34

Considerînd cîmpul între polii electromagnetului ca avînd doar componentă tangentă la suprafaţa lichidului, relaţia (160) devine

$$z-z_o = \frac{1}{\rho g}\int_0^H \mu_o L\,dH = F(H) \qquad (162)$$

Experimental se poate trada caracteristica $z-z_o = F(H)$, după care susceptivitatea magnetică a lichidului se va calcula cu relaţia

$$X_n = \frac{\rho g}{\mu_o H}\,\frac{dF}{dH}$$

derivînd grafic funcţia F(H).

Cînd raportul $\frac{z-z_o}{H}$ devine constant, relaţia (162) scoate în evidenţă faptul că lichidul magnetic a ajuns la saturaţie

$$L_s = \frac{(z-z_o)}{H}\,\frac{\rho g}{\mu_o}$$

4.2. Măsurarea curenţilor continui intenşi. Rezultate experimentale

Măsurarea curenţilor continui intenşi reprezint problemă majoră în transportul, distribuţia şi utilizarea energiei cînd acestea se realizează cu curent continuu. Metodele obişnuite cunoscute în literatura de specialitate, prezintă dezavantaje atît din punct de vedere al complexităţii (transformatoare sau amplificatoare de c.c.) cît şi a preciziei de măsurare (shunturi) cu excepţia schemelor care folosesc sonde Hall.

4.2.1. Principiul metodei de măsurare a curenţilor continui intenşi constă în denivelarea fluidelor magnetice sub acţiunea forţelor ce se exercită asupra lor cînd sînt introduse într-un cîmp magnetic (fig.35) [74]

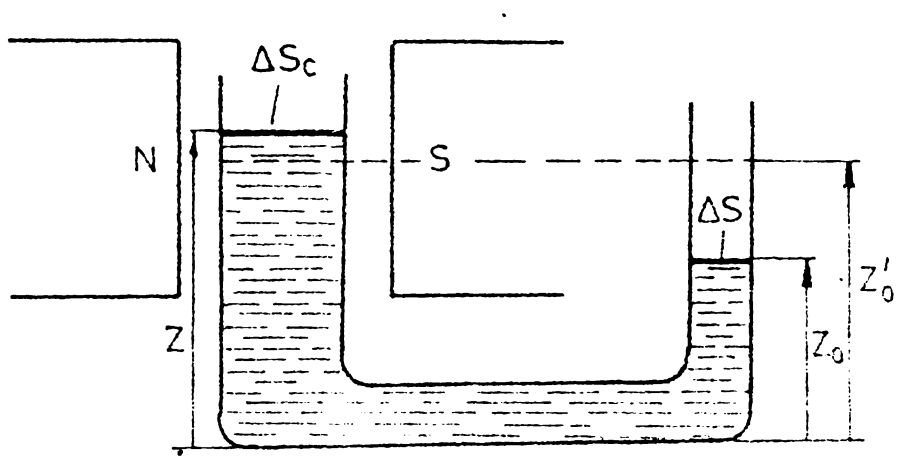


Fig.35

Cele două braţe ale tubului avînd secţiuni neegale, conservarea volumului de lichid ne conduce la relaţia

$$(z-z_0')\,\Delta S_c = (z_0'-z_0)\,\Delta S$$

Notînd denivelarea $z_0'-z_0 = \Delta h_0$, mărime ce va fi măsurată experimental avem

$$\Delta h_0 \pm (z-z_0')\frac{\Delta S_c}{\Delta S} = \Delta h\frac{\Delta S_c}{\Delta S}$$

în care $\Delta h = z-z_0'$ reprezintă denivelarea lichidului din braţul aflat în cîmp magnetic.

Ca urmare diferenţa de nivel $(z-z_0)$ care apare în relaţia (161) se scrie

$$z-z_o = z-z_o'+z_o'-z_o = \Delta h_o \frac{\Delta S+\Delta S_c}{\Delta S_c}$$

Rezultă deci

$$\Delta h_o = \frac{1}{\rho g} \int_0^{H(z)} \mu_o M dH \frac{1}{1+\frac{\Delta S}{\Delta S_c}} \tag{163}$$

Dacă $\Delta S=\Delta S_c$, egalitatea anterioară devine

$$\Delta h_o' = \frac{1}{2\rho g} \int_0^{H(z)} \mu_o M dH \tag{164}$$

Relaţia (163) scoate în evidenţă faptul că denivelarea este o funcţie de intensitatea cîmpului magnetic care, la rîndul ei, depinde de intensitatea curentului electric care o produce.

In felul acesta s-a stabilit o relaţie între curentul electric şi denivelarea fluidului magnetic. Evident că relaţia este neliniară, dar prin intermediul unui traductor adecvat, în anumite limite se poate obţine o relaţie liniară între indicaţia instrumentului la care e conectat traductorul şi intensitatea curentului electric.

Din cele prezentate rezultă deci posibilitatea de a măsura curenţi intenşi chiar dacă aceştia sînt staţionari.

4.2.2. <u>Traductorul</u> de denivelare folosit a fost un traductor inductiv, variaţiile de denivelare fiind transformate în variaţii ale inductivităţii bobinei.

Variaţia inductivităţii traductorului a fost măsurată cu o punte IEMI - folosind montajul din fig.36.

Un braţ al tubului a fost introdus între polii unui magnet Weiss, iar pe celălalt braţ aflat în afara cîmpului magnetic s-au bobinat 200 spire.

S-a procedat în acest mod deoarece permeabilitatea magnetică relativă a fluidului e maximă la B=o, cum rezultă din măsurătorile efectuate şi deci traductorul dă variaţii maxime în cîmpuri magnetice mici.

In absenţa cîmpului magnetic, puntea a fost echilibrată montînd în alt braţ al ei o bobină cu acelaşi număr de spire.

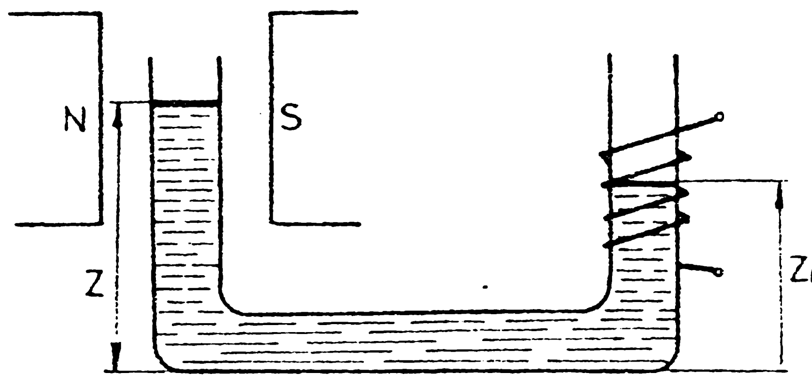


Fig.36

Cu ajutorul electromagnetului s-au stabilit cîmpuri magnetice de diverse inducţii, măsurate cu un teslametru Hall, iar denivelarea lichidului a fost determinată prin variaţia inductivităţii, aceasta fiind proporţională cu indicaţia punţii. Rezultatele experimentale obţinute sînt date în fig.37.

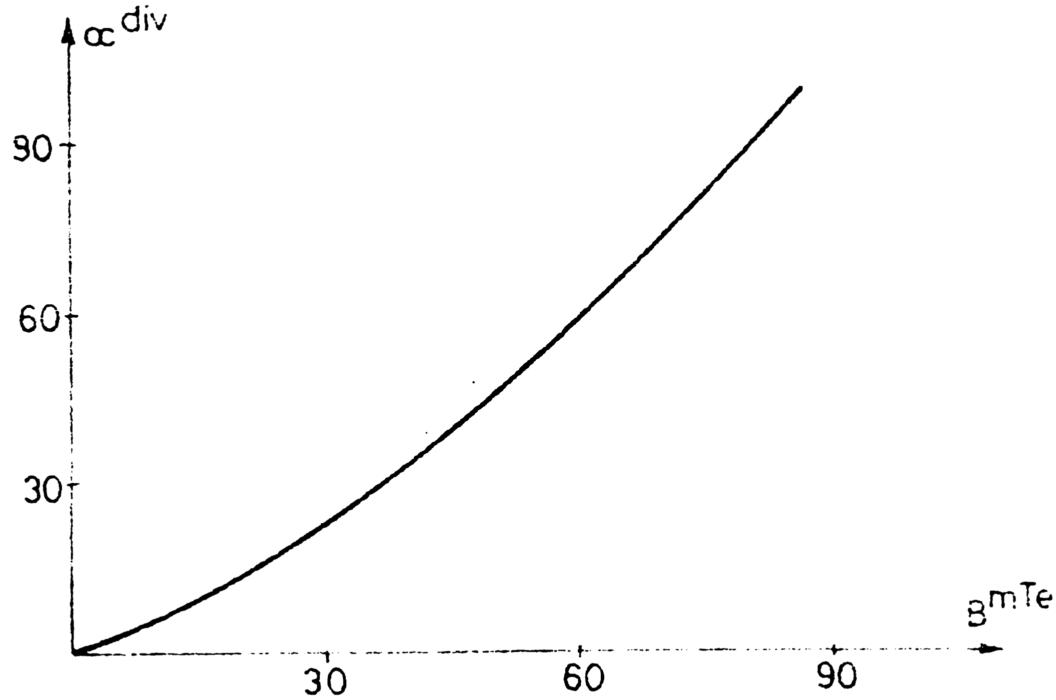


Fig.37

Se constată că între 3o mTe şi 9o mTe, $\alpha = f(B)$, reprezintă o dreaptă ceea ce face traductorul foarte util în montajul de măsurare a curenţilor continui intenşi.

Pentru determinarea analitică a variației inductivității traductorului cu denivelarea, va trebui considerată o bobină de lungime finită, avînd în interior mediu neomogen (fig.38). Bobina are N spire bobinate uniform, parcurse de curentul i. Vom considera mediul din interiorul bobinei liniar (curentul i din brațul punții de măsură este foarte mic, așa încît putem considera porțiunea liniară a caracteristicii $B = B(H)$ a lichidului).

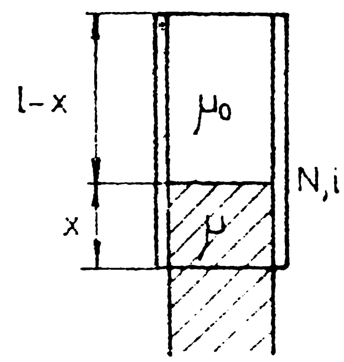


Fig.38

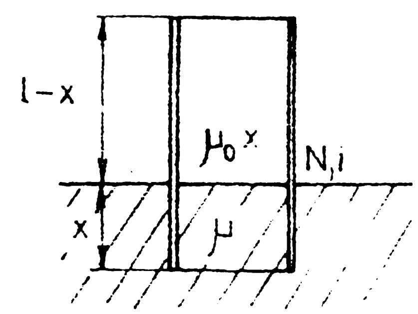


Fig.39

Ținînd cont că în exteriorul bobinei intensitatea cîmpului magnetic e mult mai mică decît în interiorul ei, bobina din fig.38 o vom înlocui cu cea din fig.39, și a cărei inductivitate poate fi calculată cu metoda imaginilor magnetice. In [71] este rezolvată problema determinării cîmpului magnetic produs de un circuit filiform de formă arbitrară aflat într-un mediu neomogen, suprafața de separație dintre cele două medii fiind un plan, prin metoda imaginilor magnetice.

Modul de aplicare a metodei imaginilor magnetice pentru cazul bobinei considerate este ilustrat în fig.40.

Cîmpul magnetic produs de bobina cufundată parțial în fluid, pe înălțimea x va fi, conform principiului superpoziției egal cu suma dintre cîmpul produs de bobina de lungime $(\ell-x)$ avînd $\frac{N}{\ell}(\ell-x)$ spire parcurse de curentul i aflată în întregime în mediul de permeabilitate μ_0 și cîmpul produs de bobina de lungime x, avînd $\frac{N}{\ell}x$ spire parcurse de același curent i și aflată în întregime în mediul de permeabilitate μ.

Pentru calculul cîmpului magnetic produs de bobina aflată în mediul cu permeabilitatea magnetică μ_0 vom proceda astfel :

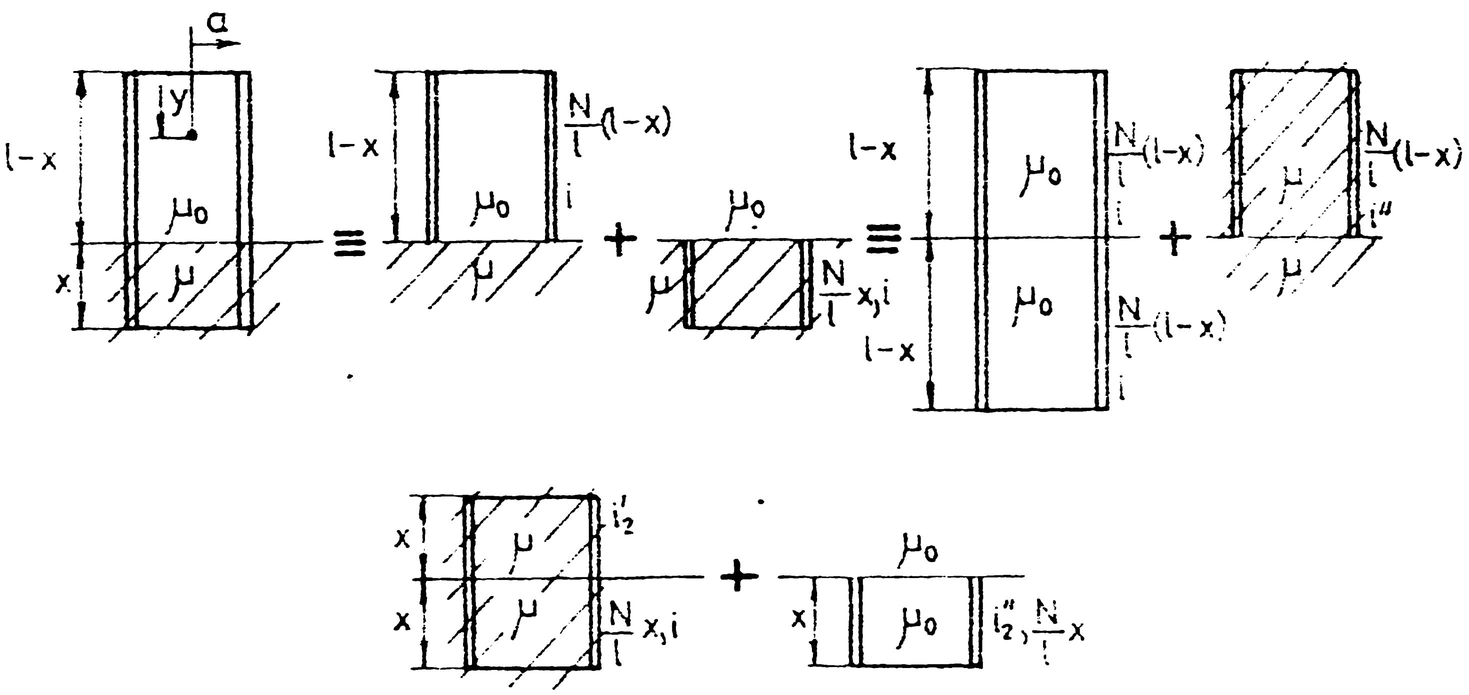


Fig.40

- In orice punct deasupra suprafeţei de separaţie dintre cele două medii, cîmpul magnetic va fi egal cu suma dintre cîmpul produs de bobina parcursă de curentul i şi aflată deasupra suprafeţei de separaţie şi cîmpul produs de o bobină identică cu ea (avînd acelaşi număr de spire şi aceleaşi dimensiuni), simetric aşezate faţă de suprafaţa de separaţie, parcursă de un curent i' necunoscut, mediul în care se află acum cele două bobine fiind omogen şi avînd permeabilitatea μ_0.

- In orice punct sub suprafaţa de separaţie cîmpul magnetic va fi egal cu cîmpul produs de o bobină identică cu cele de mai sus, aflată deasupra suprafeţei şi parcursă de curentul necunoscut i''_1, mediul întreg fiind presupus omogen, avînd permeabilitatea .

Curenţii necunoscuţi se determină în aşa fel încît să fie îndeplinite condiţiile de continuitate a componentelor tangente ale intensităţii cîmpului magnetic şi ale componentelor normale ale inducţiei magnetice la suprafaţa de separaţie dintre cele două medii.

Calculul cîmpului în felul prezentat mai sus e posibil deoarece sînt îndeplinite condiţiile teoremei de unicitate adică distribuţia curenţilor liberi şi proprietăţile de material rămîn neschimbate în fiecare domeniu, păstrîndu-se şi condiţiile de trece la suprafaţa de separaţie dintre cele două medii.

In mod analog se calculează cîmpul produs de bobina aflată în mediul de permeabilitate magnetică . (fig.40.c).

Curenţii necunoscuţi au expresiile :

$$i_1' = \frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\, i \qquad\qquad i_2' = \frac{\mu_0-\mu}{\mu_0+\mu}\, i \tag{165}$$

$$i_1'' = \frac{2\mu_0}{\mu+\mu_0}\, i \qquad\qquad i_2'' = \frac{2\mu}{\mu+\mu_0}\, i$$

Cu relaţiile (165) cîmpul magnetic într-un punct pe axa de simetrie a bobinei, aflat la distanţa y de marginea superioară va fi dat de relaţia :

$$H_1(y) = \frac{ni}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} + \frac{l-x-y}{\sqrt{(l-x-y)^2+a^2}}\right) +$$

$$+ \frac{ni}{2}\left(-\frac{l-x-y}{\sqrt{(l-x-y)^2+a^2}} + \frac{2(l-x)-y}{\sqrt{[2(l-x)-y]^2+a^2}}\right)\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0} +$$

$$+ \frac{ni}{2}\left(-\frac{l-x-y}{\sqrt{(l-x-y)^2+a^2}} + \frac{l-y}{\sqrt{(l-y)^2+a^2}}\right)\frac{2\mu}{\mu+\mu_0}$$

sau

$$H_1(y) = \frac{ni}{2}\left\{\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} + 2\,\frac{\mu_0-\mu}{\mu+\mu_0}\,\frac{l-x-y}{\sqrt{(l-x-y)^2+a^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\,\frac{2(l-x)-y}{\sqrt{[2(l-x)-y]^2+a^2}} + \frac{2\mu}{\mu+\mu_0}\,\frac{l-y}{\sqrt{(l-y)^2+a^2}}\right\} \tag{166}$$

unde

$$n = \frac{N}{\ell}$$

In mod analog cîmpul într-un punct situat în mediu de permeabilitate μ are expresia :

$$H_2(y) = \frac{ni}{2}\left\{ \frac{\ell - y}{\sqrt{(\ell-y)^2+a^2}} + \frac{\mu_0-\mu}{\mu_0+\mu}\,\frac{y+2x-\ell}{\sqrt{(y+2x-\ell)^2+a^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu}\,\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} + 2\,\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\,\frac{y-\ell+x}{\sqrt{(y-\ell+x)^2+a^2}} \right\} \qquad (167)$$

Pentru calculul inductivităţii bobinei de lungime ℓ , vom considera cîmpul într-o secţiune oarecare egal cu cîmpul corespunzător de pe axa de simetrie. In acest fel înlănţuirea magnetică a bobinei va fi

$$\Psi = \left[\mu_0 \int_0^{\ell-x} H_1(y)\cdot n\,dy + \mu \int_{\ell-x}^{\ell} H_2(y)\,n\,dy\right] \pi a^2$$

şi deci inductivitatea L se calculează cu relaţia

$$L = \frac{\pi a^2 n}{i}\left(\mu_0 \int_0^{\ell-x} H_1(y)\,dy + \mu \int_{\ell-x}^{\ell} H_2(y)\,dy\right) \qquad . \qquad (168)$$

Introducînd relaţiile (166) şi (169) în (168) şi efectuînd calculele se obţine în final pentru inductivitate expresia :

$$L = \pi a^2 n^2 \frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\left\{ 2\left(\mu\sqrt{x^2+a^2} - \mu_0\sqrt{(\ell-x)^2+a^2}\right) + \frac{2\mu\mu_0}{\mu-\mu_0}\sqrt{\ell^2+a^2} + \right.$$

$$\left. + \mu_0\sqrt{(\ell-x)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \mu\sqrt{x^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} - a\,\frac{3(\mu^2+\mu_0^2)-2\mu\mu_0}{2(\mu-\mu_0)} \right\} \qquad (169)$$

Pentru x=0, adică atunci cînd bobina se află în întregime în mediul de permeabilitate μ_0, inductivitatea va deveni :

$$L = \pi a^2 \frac{N^2}{\ell}\mu \left\{ \frac{2\mu_o}{\mu+\mu_o}\sqrt{1+\left(\frac{a}{\ell}\right)^2} + \frac{\mu-\mu_o}{\mu+\mu_o}\sqrt{1+\left(\frac{a}{2\ell}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{\ell}\,\frac{3\mu_o+\mu}{2(\mu+\mu_o)} \right] \qquad (170)$$

Pentru $\mu \gg \mu_o$ relaţia (17o) devine

$$L = \pi a^2 \frac{N^2}{\ell}\mu_o \left[\sqrt{1+\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2\ell} \right]$$

iar pentru $\mu = \mu_o$ avem

$$L = \pi a^2 \frac{N^2}{\ell}\mu_o \left[\sqrt{1+\left(\frac{a}{\ell}\right)^2} - \frac{a}{\ell} \right]$$

Pentru $\ell \gg a$ şi $x \gg a$ expresia (169) a inductivităţii se transformă în

$$L = \pi a^2 \frac{N^2}{\ell}\left\{ \mu_o + \frac{x}{\ell}(\mu-\mu_o) \right\} \qquad (171)$$

In relaţiile de mai sus, făcînd schimbarea de variabilă $x = \ell - x_o - \Delta h_o$, x_o caracterizînd poziţia lichidului faţă de marginea superioară a bobinei în absenţa vreunei denivelări, se va obţine variaţia inductivităţii bobinei cu denivelarea Δh_o definită de relaţia (163). Astfel relaţia simplificată (171) devine :

$$L = \pi a^2 \frac{N^2}{\ell}\left\{ \mu - \frac{x_o}{\ell}(\mu-\mu_o) - \frac{\Delta h_o}{\ell}(\mu-\mu_o) \right\}$$

iar în absenţa denivelării Δh_o,

$$L_o = \pi a^2 \frac{N^2}{\ell}\left\{ \mu - \frac{x_o}{\ell}(\mu-\mu_o) \right\}$$

Indicaţia α a aparatului de măsură folosit - puntea tensometrică - este proporţională cu variaţia inductivităţii traductorului datorită denivelării Δh_o, adică :

$$\alpha = const(L_o - L) = const.\ \frac{\pi a^2 N^2}{\ell^2}(\mu-\mu_o)\Delta h_o = k\Delta h_o \qquad (172)$$

Introducînd relaţia (163) în (172) obţinem

$$\alpha = \frac{k}{\rho g\left(1 + \frac{\Delta S_c}{\Delta S}\right)} \int_0^{H(z)} \mu_0 M \, dH \qquad (173)$$

În fig.4. se reprezintă variaţia $\alpha = \alpha(H)$ şi se constată că există o porţiune în care relaţia $\alpha = \alpha(H)$ este liniară $(H > H^*)$. Pentru ca H să fie cît mai mic ar trebui ca lichidul magnetic să se satureze cît mai repede.

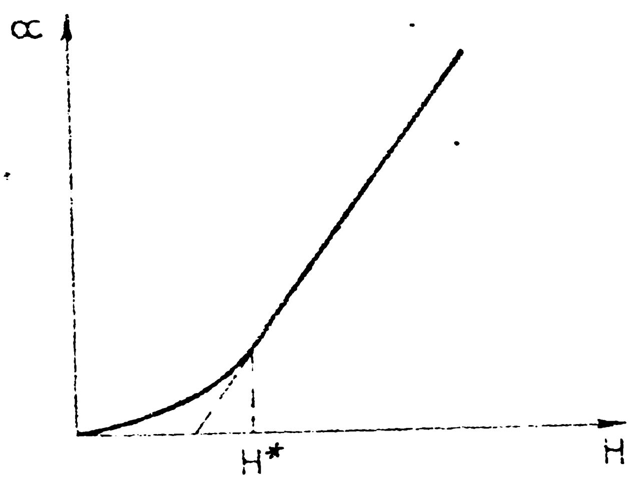


Fig.41

Intensitatea cîmpului magnetic, H, poate fi [illegible] [illegible]tă proporţională cu intensitatea curentului electric de [illegible]rat.

4.2.3. <u>Circuitul feromagnetic</u> în interiorul căruia se va plasa un braţ al tubului cu fluid magnetic, a fost conceput şi dimensionat astfel încît inducţia magnetică din întrefier să fie o funcţie liniară de amperspirele de magnetizare.

Dimensiunile circuitului feromagnetic sînt date în fig.42. Pe cele trei coloane s-au plasat bobine [illegible] totai [illegible] spire ceea ce pentru 5 A conduce la [illegible] As. În acest fel se modelează o intensitate de curent de 1000 A.

După realizare circuitul magnetic a fost testat, rezultatele măsurătorilor fiind date în fig.43, [illegible]. Fig.43 arată că inducţia magnetică măsurată în centrul întrefierului variază liniar în funcţie de amperspirele de magnetizare, iar fig.44,a,b scot în evidenţă că în regiunea centrală [illegible] cîmpul magnetic e practic omogen.

In întrefier inducția magnetică remanentă nu a depășit 1,5 mT pentru orice valoare a amperspirelor de magnetizare.

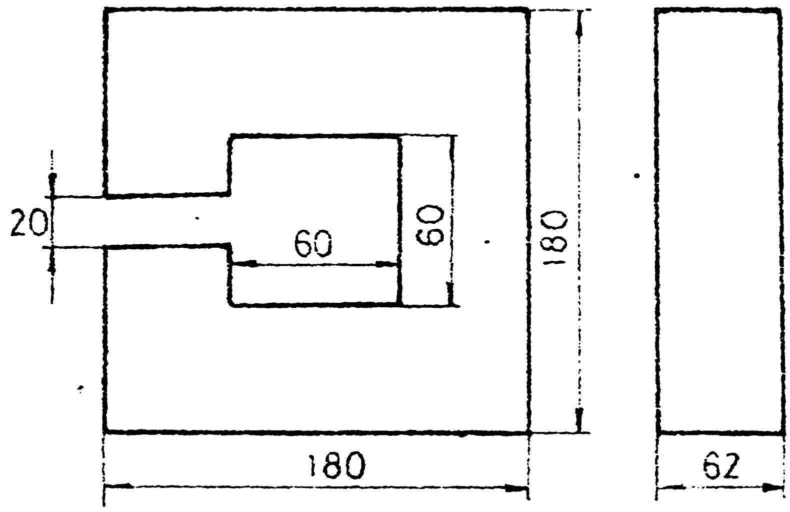


Fig.42

Pentru măsurarea curenților continui intenși, traductorul împreună cu puntea s-au etalonat folosind montajul din fig.45.

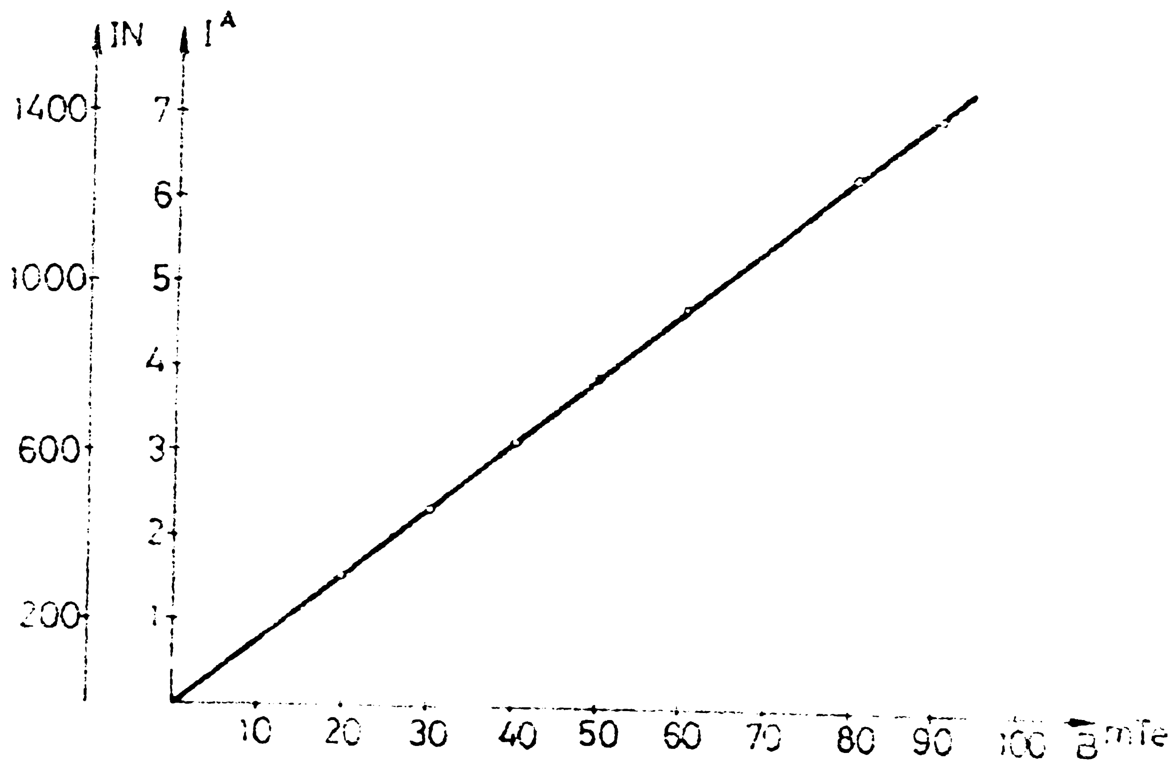


Fig.45

Rezultatele măsurătorilor sînt prezentate în fig.46. Fig.46.a reprezintă deviația punții în funcție de amperspirele de magnetizare pînă la valoarea de 600 Asp, iar fig.46.b [illegible] arată dependența acestor deviații în intervalul 600 [illegible] [illegible] la 1500 Asp.

Se constată că în ultimul interval dependența e practic liniară. Se verifică faptul că această porțiune coincide

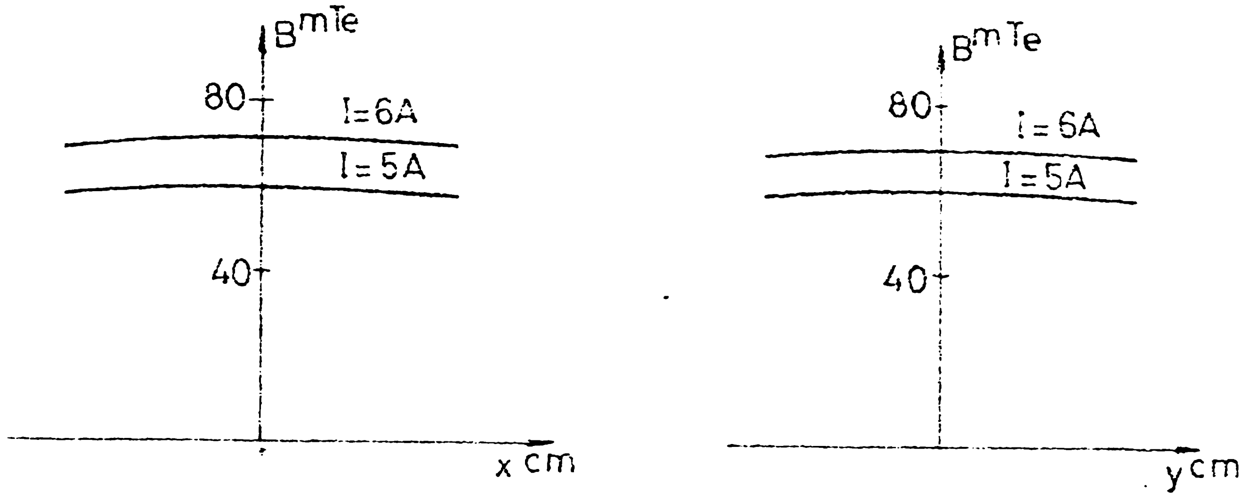


Fig.44

cu domeniul inducției magnetice în care deviația în funcție de inducția magnetică este liniară.

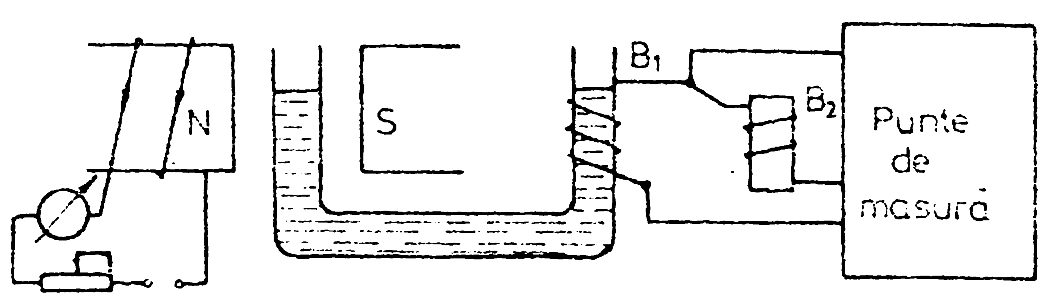
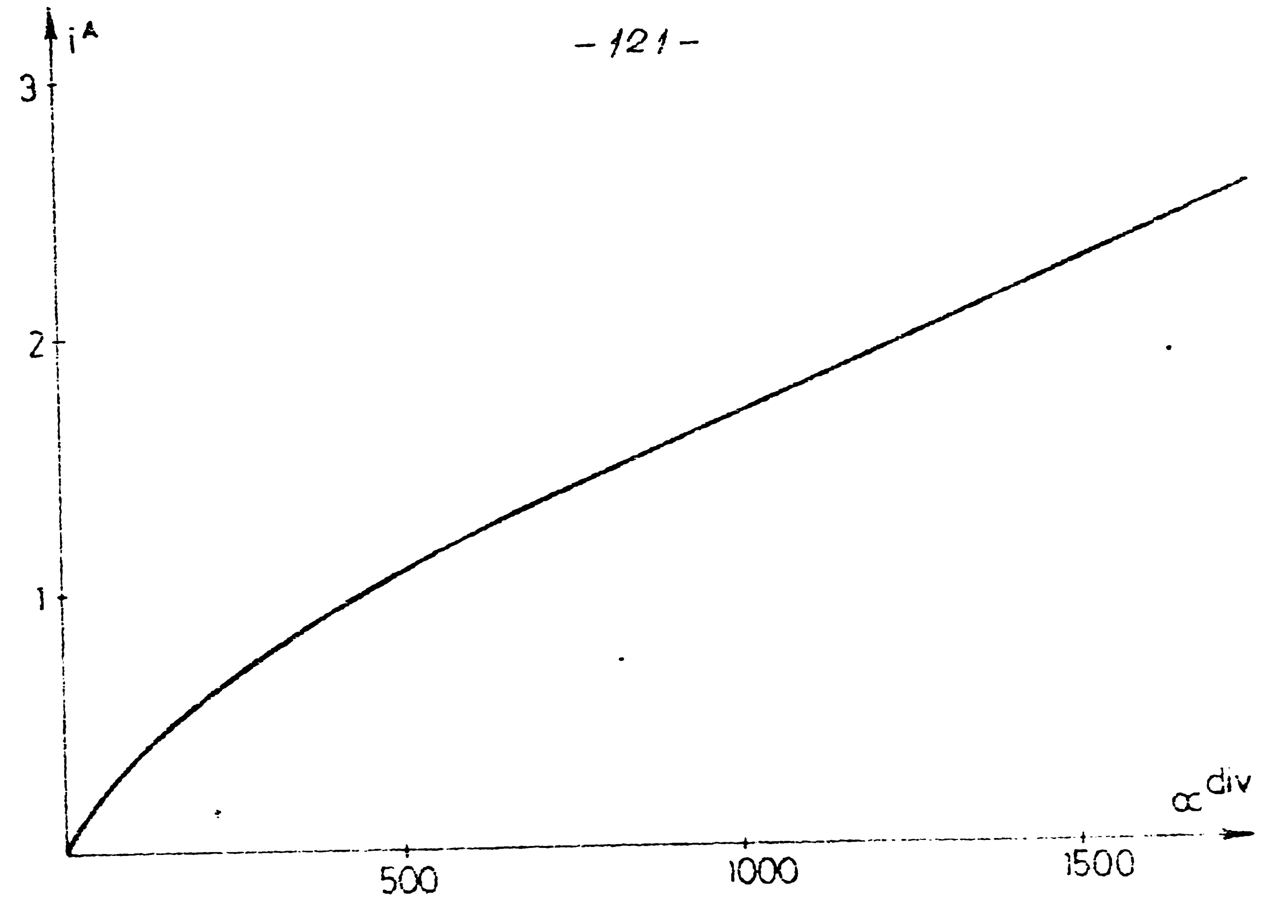


Fig.45

S-a mai verificat influența pe care o are apropierea corpurilor feromagnetice de întrefierul circuitului magnetic. Experiențele au arătat că aceste influențe încep să se manifeste cînd distanța între circuit și corpul feromagnetic este sub 1,5 cm (Fig.46).

- Montajul prezentat lărgește gama montajelor folosite în măsurarea curenților continui intenși fiind mai simplu decît cele care utilizează șunturi sau transformatoare de curent continuu. El nu poate concura însă cu metoda în care se folosesc sonde Hall, deoarece acestea indică valoarea intensi-



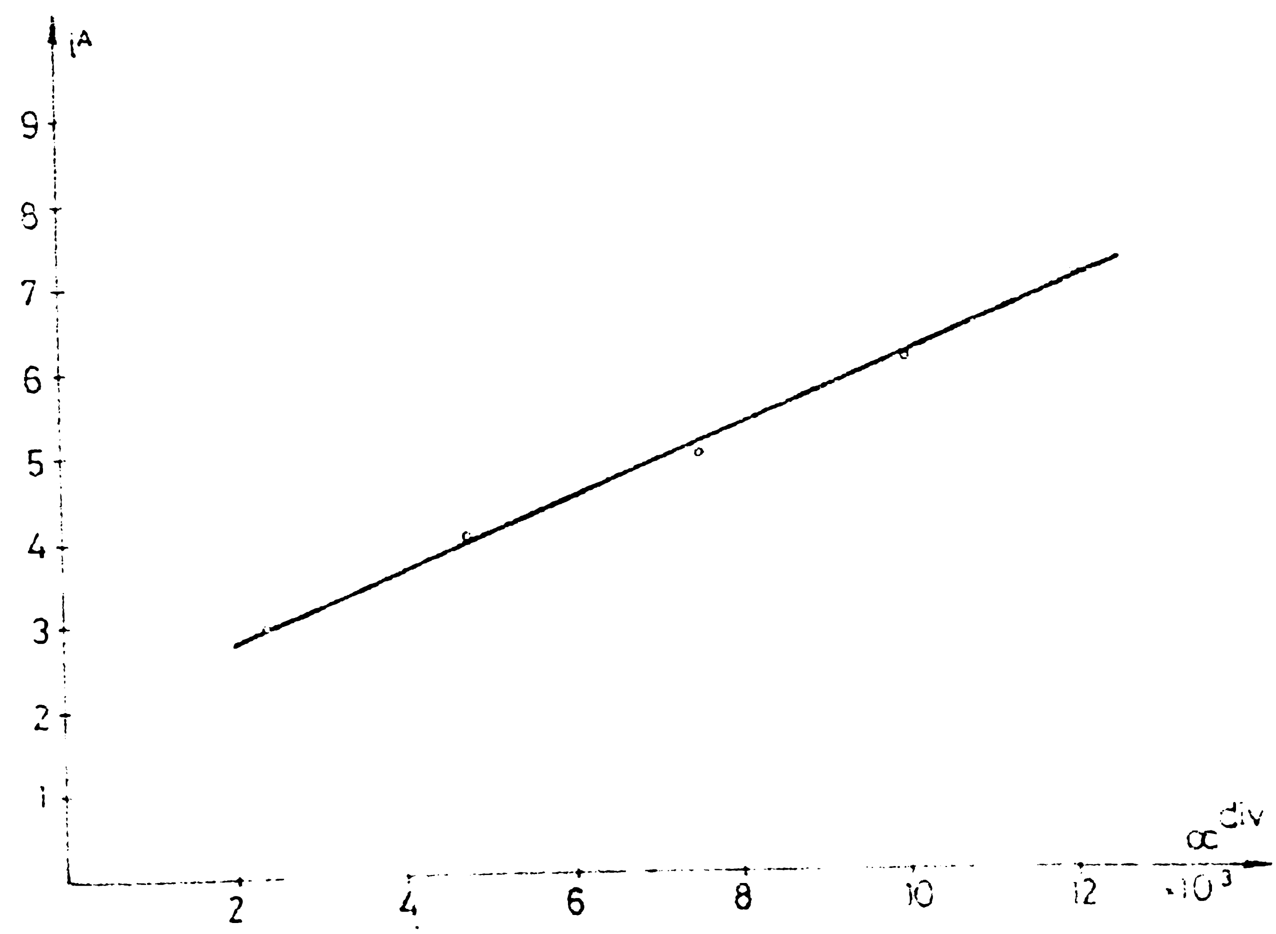


Fig. 46

tăţii curentului continuu prin intermediul tensiunii Hall care se măsoară simplu cu un milivoltmetru.

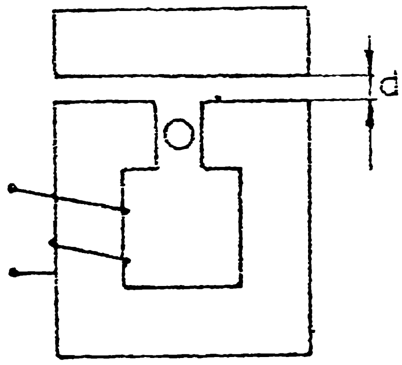


Fig.47

Respectarea poziţiei tubului în care se află fluidul magnetic cu cea corespunzătoare în care traductorul a fost etalonat reprezintă o condiţie suplimentară faţă de montajele care folosesc sonde Hall.

- Lărgirea domeniului de măsură se poate face înfăşurînd conducta în jurul miezului astfel ca $I_h \geq$ [illegible] mA. Dacă se satisface această condiţie atunci deviaţia acului indicator al punţii este liniară.

4.3. Levitaţia magnetică

In literatură se prezintă levitaţia corpurilor nemagnetice introduse într-un lichid magnetic în prezenţa unui cîmp magnetic (levitaţia de ordinul 1) precum şi levitaţia unui magnet permanent aflat în lichid magnetic, în cîmpul propriu (levitaţia de ordinul 2). Problema levitaţiei de ordinul 1 este uneori tratată în literatură nu îndeajuns de [illegible]. Astfel în [59], [79], [72] se introduce o mărime $\widetilde{M}_r$ numită magnetizare medie prin relaţia $\widetilde{M}_r = \frac{1}{V}\int_V M_r\, dV$ unde V este volumul ocupat de corpul nemagnetic, adică $M_r = 0$ şi deci $\widetilde{M}_r$ negăsindu-şi o justificare fizică.

Levitaţia de ordinul 1. In această lucrare [illegible] levitaţiei de ordinul 1 va fi tratată într-un mod [illegible], considerînd un corp de formă oarecare chiar [illegible], [illegible] magnetizare permanentă, care [illegible] tică μ_2 diferită de cea a fluidului magnetic, μ_1, şi cufundat în el, în prezenţa cîmpului magnetic (fig.48).

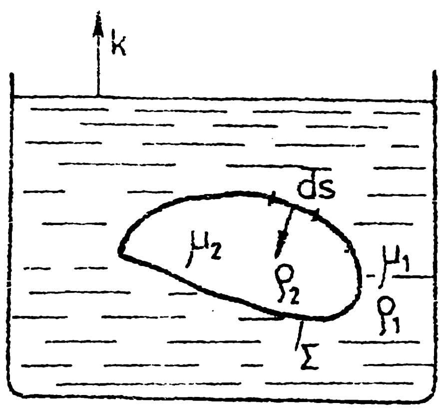


Fig.48

Tratarea va fi unitară, în sensul că se vor folosi, pentru calculul forţei rezultante ce se exercită asupra corpului cufundat în fluid, expresiile densităţilor de forţă deduse în paragrafele anterioare, fără a face apel la ecuaţia lui Bernoulli, cum se procedează de obicei în literatură.

Forţa rezultantă care se exercită asupra corpului este:

$$\bar{F}_{rez} = -\rho_2 V g\bar{k} + \oint_{\Sigma} (p + f_s) d\bar{s} + \int_{V_\Sigma} \bar{f}_{vm}\, dv \qquad (174)$$

unde : V reprezintă volumul corpului limitat de suprafaţa Σ

$\bar{f}_s$ - densitatea de forţă ce se exercită la suprafaţă

$\bar{f}_{vm}$ - densitatea de volum a forţei de natură magnetică ce se exercită asupra corpului

p - presiunea hidrostatică la suprafaţa Σ

Introducînd relaţiile (149), (96) şi (159) în (174) se obţine

$$\bar{F}_{rez} = -\rho_2 g V\bar{k} + \oint_{\Sigma} \Big\{ p_0 - \rho_1 g z + \int_0^{H_1} \rho_1 H_1 \Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_1 dH_1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} B_n^2 + \int_0^{H_1} B_1 dH_1 - \int_0^{H_2} B_2 dH_2 \text{ [illegible] } - \int_0^{H_1} H_1 \rho_1 \Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_1 dH_1 \Big\} d\bar{s} + \int_{V_\Sigma} \Big(\mathrm{grad} \int_0^{H_2} H_2 \rho_2 \Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_2 dH_2\Big) dv$$

Ţinînd cont de transformarea Gauss-Ostrogradski referitoare la integrala de volum a unei funcţii scalare şi făcînd unele reduceri, forţa rezultantă se va scrie în forma

$$\overline{F}_{rez}=(\rho_1-\rho_2)Vg\overline{k}+\oint_{\Sigma}\left\{\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1\mu_2}B_n^2+\int_0^{H_1}B_1\,dH_1-\int_0^{H_2}B_2\,dH_2\right\}d\overline{S} \quad (175)$$

Cu legea legăturii $\overline{B}=\mu_0(\overline{M}+\overline{H})$, egalitatea componentelor normale ale inducţiei magnetice şi a componentelor tangente ale lui $\overline{H}$, după unele transformări relaţia (175) devine

$$\overline{F}_{rez}=(\rho_1-\rho_2)gV\overline{k}+\oint_{\Sigma}\left\{\frac{\mu_0}{2}(M_{n1}^2-M_{n2}^2)+\int_0^{H_1}\mu_0M_1\,dH_1-\int_0^{H_2}\mu_0M_2\,dH_2\right\}d\overline{S}$$

(176)

În cazul în care corpul cufundat în lichid este nemagnetic, notînd cu μ permeabilitatea magnetică a fluidului, relaţia (176) se scrie în forma particulară :

$$\overline{F}_{rez}=(\rho_1-\rho_2)gV\overline{k}+\oint_{\Sigma}\left\{\mu_0\frac{M_n^2}{2}+\int_0^{H}\mu_0M\,dH\right\}d\overline{S} \quad (177)$$

cunoscută în literatură [50].

Se observă că în afară de forţa arhimedică obişnuită, orientată după direcţia $\overline{k}$, mai apare o forţă de natură magnetică, forţa diferită de zero doar în cîmpuri neomogene.

BUPT

C O N C L U Z I I

Lucrarea conţine în principal rezultatele noi obţinute de autor în legătură cu problemele abordate.

Principalele contribuţii originale cuprinse în lucrare sînt :

- determinarea dependenţei polarizării electrice de intensitatea cîmpului electric, echivalînd particulele în suspensie cu elipsoizi conductori ;

- stabilirea unei relaţii de tip Clausius-Mossotti pentru lichide magnetice ;

- determinarea influenţei cîmpului magnetic asupra polarizării electrice şi a influenţei cîmpului electric asupra magnetizării lichidelor magnetice aflate în cîmpuri electrice şi magnetice paralele.

Se arată că prezenţa cîmpului magnetic duce la creşterea permitivităţii electrice relative, iar prezenţa cîmpului electric duce la creşterea permeabilităţii magnetice relative. Rezultatele experimentale efectuate sînt în concordanţă cu tratarea teoretică prezentată.

Dependenţele P = P(E;H) şi M=M(H;E) sînt tratate şi în cazul cînd cîmpurile electrice şi magnetice sînt perpendiculare.

Se stabilesc relaţiile P = P(E;H) şi M=M(H;E) pentru cazul în care particulele în suspensie coloidală sînt dielectrice.

- prezentarea unei noi metode de măsurare a permeabilităţii lichidelor magnetice pe baza comportării unor corpuri neliniare aflate în cîmp exterior omogen;

- prezentarea unei demonstraţii originale pentru determinarea densităţii de volum a forţelor de natură electromagnetică ce se exercită în fluide neliniare [illegible], cu polarizare reversibilă ;

- studierea cîmpurilor electrocinetice repartizate pe suprafeţe arbitrare, punînd în evidenţă pierderile [illegible]

- deducerea expresiilor pentru densitățile de forță ce se exercită la suprafața de separație între fluide neliniare, suprafață parcursă de curenți superficiali de conducție și avînd pe ea sarcină liberă, punînd în evidență în mod explicit termenii $\overline{J}_s$ și ρ_s.

- determinarea în mod direct a presiunii în lichide magnetice, stabilind sistemul ce determină forma suprafeței dintre două fluide nemiscibile ;

- prezentarea unei noi metode de măsurare a curenților continui intenși folosind traductoare inductive cu lichid magnetic.

BILBIOGRAFIE

1. Rosensweig,R.E. Magnetic fluids, Int.Sci.and Technology, july 1966
2. Neuringer,J.L. and Rosensweig,R.E. Ferrohydrodynamics. The Physics of fluids, vol.7, nr.12 dec.1964
3. Harle,L.O. and Thomas,R.J., Dispersions of Ferromagnetic cobalt particles, U.S.Patent 3.228.882 11 ian 1966
4. Papell,S.S., Low viscosity magnetic fluid obtained by the suspension of magnetic particles, U.S.Patent 3.215.572 nov.1969
5. Shepherd,P.G., Popplewell,J., Ferrofluids containing Ni-Fe alloy particles, Phil.Mag., nr.23, 1971 p.239
6. Ferrofluidics Corporation, A catalog of magnetic fluids 1972.
7. Lunina,A.M., Novojilov,A.Iu., Electriceskii kondensatio-nii sposob polucenila organodispersii metallov, Koloidnii Jurnal vol.XXXI, nr.3, 1969, p.467
8. Mozgovoi,E.N., Blum,E.Ia., Magnitnîe svoistva melkodisper-sii ferrosuspenzii sintezirue nîh electrocondensationîm sposobom. Magnitnaia Ghidrodinamica, Nr.4, 1971, p.18
9. Thomas,J.R., Preparation and Magnetic Properties of Colloidal Particles, J.Appl.Phys., 37, 1966, p.2914
10. Hess,H.F. and Parker,P.H.jr. Polymers for Stabilization of Colloidal Particles, J.Appl.Polymer Science, vol.10, 1966, p.1915
11. Bibik,E.E., Lavrov,L.S., Izmerenie sil sţeplenia c...ţ v ogreghirovannîh dispersnîh sistemah, kolloidnîi jurnal XXXII, nr.4, 1970, p.307
12. Rosensweig,R.E., Miskolczy,G. and Ezekiel,F.D., Magnetic fluid seals, Machine Design, march 1968
13. Kaiser,R. and Miskolczy,G., Some applications of Ferro-fluid Magnetic Colloids, IEEE Transactions of Magnetics, MAG-6, Nr.3 sept.1970 p.694

14. Rosensweig,R.E., Progress in Ferrohydrodynamics, Industr. Res., 12, 1970
15. Ferrofluidics Corporation, Magnetic Fluids, Machine Design, June 1972
16. Ferrofluidics Corporation, A catalog of Magnetic Fluids 1972
17. The Broad New Applications of Ferrofluids - Ferrolubricants, ASME. Paper nr.74-DE-2, 1974
18. Moskowitz,R., Dynamic Sealing with Magnetic Fluids, ASLE Transactions, 18, nr.2, 1974, p.135
19. Ezekiel,D.F., Uses of Magnetic Fluids in Bearings Lubrication and Damping, ASME Publication, Nr.75-DE-5, 1975
20. Moskowitz,R. and Ezekiel,D.F., Non-Wearing Ferrofluidic Seals, Off-Highway Vehicle Meeting, Milwaukee Wisconsin, september 8-11, 1975
21. Perry,P.M., and Jones B.T., Hydrostatic Loading of Magnetic Liquid Seals, IEEE Trans. on Magnetics MAG-12, nr.6, 1976, p.798
22. Rosensweig,R.E., Theory of an improved thermomagnetic generator, Proc., IEEE, 114, nr.3, march 1967, p.405
23. Boyd,E.C.jr, and Fenlon,H.F., On the Utilisation of Ferrofluids for Transducer Applications, The Journal of the Acoustical Society of America, 45, nr.5, 1969, p.1216
24. Bertrand,A.R.V., Les Ferrofluides, Rev.Inst.Franc.Petrole, XXV, nr.1, janvier, 1970, p.16
25. Rosensweig,R.E., Means for and Method of Moving Objects by Ferrohydrodynamics, U.S.Patent 3.483.531, Jan.1970
26. Kaiser,R., Process for Cleaning up Oil spills, U.S.Patent 3635819 Jan.1970
27. Reeman,J.J., Reconditioning of suspensions used in the separation of minerals, U.S.Patent 3.637.284 Aug.1972
. Rosensweig,R.E., Resnick,J. and Berger,L., Magnetic Fluid Display Device, U.S.Patent 3.648.269, march, 1972
29. Newbower,S.R., Magnetic Fluids in the Blood, IEEE Trans.on Magnetics MAG-9, nr.3, sept.1973, p.447
30. Moskowitz,R. and Ezekiel,D.F., Magnetic Fluids: something to consider, Instruments control systems, october, 1975

31. Bădescu,R., Călugăru,Gh., Magnetovîscozimetru automat pentru studiul ferofluidelor, EEA, Automatică şi Electronică, 2o, nr.3, 1976, p.144

32. Călugăru,Gh., Contribution à l'etude du mécanisme de l'effect Procopiu, C.R.Acad.Paris 268, 1969, p.328

33. Călugăru,Gh., Bădescu,R., Magnetovîscozitatea coloizilor magnetici de Fe_3O_4, Lucrările primei conferinţe naţionale de magnetism, 27, dec. Iaşi 1974, p.218

34. Călugăru,Gh., Cotae,C., Bădescu,R., Bădescu V., Luca,E., Annew aspect of the movement of ferrofluids in a rotating magnetic field, Rev.Roum.Phys.21, nr.4, 1976,p.439

35. Călugăru,Gh., Bădescu,R., Luca,E., Magnetoviscoziti of the ferrofluids, Rev.Roum.Phys., 21, nr.3, 1976, p.305

36. Cotae,E., Bădescu,V., Călugăru,Gh., Mişcarea ferofluidelor într-un cîmp magnetic rotitor, Colocviul naţional al tineretului de probleme de fizică şi domenii conexe, Bucureşti 9-11 sept.1976

37. Luca,E., Cotae,C., Călugăru,Gh., L'effet Procopiu aux ferrofluids, Buletinul Institutului politehnic Iaşi, Secţia I, Fasc.3-4, 1976, p.97

38. Anton,I., Vikés,L., Potencz,I., Suciu,E., Mişcarea ferofluidelor sub acţiunea unui cîmp magnetic rotitor.

39. Anton,I., Vékàs,L., Potencz,I., Suciu,E., Cercetări experimentale de Ferohidrodinamică.

4o. Anton,I., ş.a. Protocol, contract CNST Nr.35E (1976)

41. De Sabata I., Colţeu,A., Frangos,N., Cilindru şi elipsoid neliniar în cîmp magnetic uniform. Măsurarea permeabilităţii fluidelor magnetice. Bul.St.al IPTV, ediţia omagială "Cîntarea României"

42. De Sabata,I., Asupra stărilor hidrostatice ale lichidelor magnetice, Lucrări ştiinţifice, seria A, Oradea, 1976-197

43. Colţeu,A., Forţe în medii fluide neliniare, Bul.St. şi tehnic al IPTVT tom 22(36), Fasc.1 - 1977.

44. Mc Tague,J.P., Magnetoviscozity of Magnetic Colloids, The Journal of Chemical Physics, 51, nr.1, July 1969, p.133

45. Hall,W.F., and Busenberg,N.S., Viscosity of Magnetic Suspensions, The Journal of Chemical Physics 51, nr.1, july 1969, p.137

46. Rosensweig,R.E., Kaiser,R, and Miskolczy,G., Viscosity of Magnetic Fluid in a Magnetic Field, Journal of Colloid and Interface Science, 29, nr.4, april 1969, p.680

47. Sliomis,M.I., Effectivnaia viazkosti magnitnîh suspenzii, Jurnal experimentalnoi i teoreticeskoi fiziki, 61, nr.6 (12), 1971, p.2411

48. Mozgovoi,E., Blum,E., Tebers,A., Tecenie ferromagnitnoi jidkosti v magnitnom pole, Magnitnaia Ghidrodinamica, Nr.1, 1973, p.61

49. Landau,L., Lifchitz,E., Électrodynamique des milieux continus, Éditions Mir, Moskou, 1969, p.35

50. Durand,E., Electrostatique et magnetostatique, Masson &Co, Paris 1953

51. Răduleţ,R., Bazele teoretice ale electrotehnicii, Bucureşti Litografia învăţământului, 1955, vol.1 p.355

52. Andronescu,P., Bazele electrotehnicii, Bucureşti, Ed.didactică şi pedagogică, vol.I, p.111

53. Stratton, Théorie de l'éléctromagnetisme, Paris, Ed.Dunod 1961

54. Ţugulea A., Timotin,A., Condiţiile de unicitate în determinarea câmpurilor electrostatice şi magnetice cuasistaţionare în materiale neliniare cu polarizare reversibilă şi magnetizare reversibilă, Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică, Tom 53, nr.3, p-531-537

55. Kaiffert,A., Bobono,N., Dielectric behaviour of a ferrofluid subjected to a uniform magnetic field, Second International Conference on Magnetic Fluids 1980

56. Landau, L., Lifchitz,E., Electrodynamique des milieux continus, Editions Mir, Moscou, 1969, p.139

57. Cowley,M.D., Rosensweig,R.E., The interfacial stability of a ferromagnetic fluid, J.of Fluid Mech. Cambridge University Press, 1967, V.30 part 4, p.671

58. Rosensweig,R.E.,"Ferrohydrodynamics" The Encyclopedic Dictionary of Physics (Pergamon 1970), [illegible]

59. Brown,N.F., Electric and Magnetic Forces : A Direct calculation, Am.J.of Phys., 19, p.290-304, 1951

6o. Timotin,A., Generalizarea teoremelor forţelor Lagrangiene, Electrotehnica Bucureşti nr.4, 1958, p.119

61. De Sabata,I., Bazele electrotehnicii, Timişoara Ed.IPT, 1974, V.I, p.144

62. Răduleţ,R., Bazele teoretice ale electrotehnicii, vol.I, Bucureşti, Litografia învăţămîntului, 1955, p.435

63. Popescu,C., Curs de materiale electrotehnice, Bucureşti, Ed.de Stat didactică şi pedagogică, 1960, p.298

64. De Sabata,I., Bazele electrotehnicii, vol.I, Timişoara Centrul de multiplicare IPTVT 1972, p.278-293

65. De Sabata,I., Bazele electrotehnicii, vol.I, Timişoara Centrul de multiplicare a IPTVT, 1972 p.145

66. Babe,B., Unele consideraţii privind forţele efective şi echivalente exercitate de cîmpul electromagnetic macroscopic asupra mediilor fluide. Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică, Tom.21 [illegible]

67. Tamm,I.E., Bazele teoriei electricităţii, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1957, p.2o6

68. Timotin,A., Teză de doctorat, Bucureşti, [illegible]

69. Krueger,A.B., Jones,T.B., Hydrostatic profile of ferrofluid around a vertical curent-carry wire. The Physics of Fluids, 17, nr.1o, 1974, p.1831

70. Moskowitz,R., What is new in ferrofluidic applications, Research Development, May 1974 vol.25, nr.5, p.[illegible]

71. De Sabata,I., Bazele electrotehnicii vol.I, Centrul de multiplicare IPTVT, 1974 p.95

72. Rosensweig,R.E., Progress in ferrohydrodynamics, Industr. Res.[illegible], 1970, p.36.

73. De Sabata I. A.Colteu, Sur la théorie des champs électrocinétiques distribués sur des surfaces, Bul.St. si Tehn al IPTVT, Tom 23(37) fasc 2 - 1978.

74. De Sabata I. A.Colteu, N.Frangos, Masurarea curenţilor continui intensi folosind lichide magnetice, Metrologie aplicata, vol XXVII 1980 nr 3.