INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA
- FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ -

Ing. IOAN FEŢIŢĂ

CONTRIBUŢII LA ANALIZA CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC AL SISTEMELOR CU CONDUCTOARE MASIVE PRIN MODELARE

Teză de doctorat

Conducător ştiinţific,
Prof.dr.ing. CONSTANTIN ŞORA

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIŞOARA

- 1978 -

INSTI... TIMIŞOARA
348.035
Volum
Dulap 111 Lit. F

BUPT

CUPRINS :

Pag.

BUPT

BUPT

Pag.

BUPT

INTRODUCERE

ABORDAREA TEMATICII ȘI OPORTUNITATEA LUCRĂRII

Abordarea tematicii tezei de doctorat a fost determinată, în mare măsură, de necesitățile impuse de practica de proiectare și încercări experimentale din Uzina Electroputere din Craiova, unde subsemnatul mi-am desfășurat activitatea în perioada 1965-1969. In cadrul acestei uzine am fost pus în situația de a rezolva cîteva probleme de cîmp electromagnetic mai deosebite.

Astfel, în anul 1967 am primit însărcinarea din partea conducerii Laboratorului central al U.E.P.C. de a studia cîmpul electromagnetic al unor configurații de bare colectoare, necesare conectării generatoarelor de mare putere pentru încercări la scurtcircuit brusc. O altă problemă care trebuia rezolvată a fost efectul de refulare al curentului pentru cîteva tipuri de conductoare masive ecranate feromagnetic, în scopul studierii posibilității asimilării lor în fabricarea unor rotoare de mașini asincrone. De asemenea, mi s-a sugerat ideea unei preocupări de perspectivă privind posibilitatea determinării fluxurilor magnetice de dispersie din transformatoarele de putere și a cîmpului magnetic în medii neliniare și anizotrope.

Pe lîngă studiul cîmpului electromagnetic cvasistaționar și staționar al conductoarelor, s-a impus determinarea cîmpului electric transversal al barelor colectoare în ipoteza plasării lor în rășini epoxidice (la distanțe mici una față de alta), în scopul estimării capacităților parazite ale acestora. Ultimul deziderat a decurs din necesitatea unei corecte evaluări a impedanțelor barelor pentru schemele de încercare.

Cerințele problemelor menționate au condus la necesitatea unei atente analize a posibilităților de abordare și rezolvare a acestora. Am ajuns la concluzia că pentru sistemele considerate și regimurile electromagnetice în care se cerea studiul cîmpului electric și magnetic, metoda capabilă să dea soluții cel puțin rezonabile ca precizie este metoda modelării; s-a avut în vedere faptul că la problema barelor colectoare cîmpul trebuie considerat extins pînă la infinit și că structura geometrică și fizică a ansamblului crestătură - între fier - conductor, la mașinile asincrone vizate nu erau din cele mai simple.

BUPT

In adevăr, dintr-o succintă trecere în revistă a caracteristicilor metodelor de determinare a cîmpului electromagentic rezultă că această observație este întemeiată. Cîmpurile electrice și magnetice corespunzătoare regimurilor luate în discuție sînt descrise de ecuații diferențiale cu derivate parțiale de tip Laplace, Poisson, Helmholtz și Fourier. Aceste ecuații sînt satisfăcute de potențialele : electrice și magnetice (scalare sau vectoriale), sau de componentele spațiale ale vectorilor intensitate de cîmp electric sau magnetic și a densității de curent [1], - [7].

Ecuația lui Laplace apare în toate regimurile, în domenii lipsite de distribuții de sarcini electrice volumetrice și de curenți, ecuația lui Poisson caracterizează regimurile curenților și sarcinilor distribuite cu condiția ca influența vitezei de variație a cîmpului magnetic să fie neglijabilă, iar ecuațiile de tip Helmholtz și Fourier descriu cîmpurile însoțite de curenți turbionari.

Toate ecuațiile enumerate mai sus precum și ecuațiile integrale din care derivă acestea, admit soluții care se pot obține principial cu una din metodele : analitică, de calcul numeric, de modelare sau de aproximare a liniilor de cîmp. Precizia ultimei metode depinde în mare măsură de operator și gama de probleme rezolvabile cu ea este prea limitată (doar la cîmpuri laplaciene) pentru discutarea utilizării ei.

a. <u>Metodele analitice</u>. Soluțiile obținute cu aceste metode iau forma unor expresii în care parametrii definind cîmpul pot fi substituiți, fapt care determină generalitatea soluției respective.

Aceste metode implică de multe ori în mod esențial, determinarea unei funcții potențiale care satisface condițiile de unicitate în domeniul în care se studiază cîmpul. În felul acesta funcția respectivă este suma mai multor părți (fiecare separat reprezintă o soluție); o parte de obicei sub forma unei serii, descrie efectul influenței frontierei domeniului, iar celelalte descriu efectul surselor de cîmp cum ar fi curenții sau sarcinile electrice.

Trebuie remarcat că funcția potențial nu poate fi determinată pentru orice problemă dată și asta nu din cauza dificultății de a găsi soluții care să satisfacă ecuația, ci din cauza dificultății în alegerea soluțiilor potrivite pentru structuri fizice și geometrice diferite cu condiții reale de unicitate ale cîmpului.

BUPT

Există un număr infinit de funcţii soluţii şi oricare combinaţie liniară a acestora, dar deseori este imposibil de a găsi combinaţii care să satisfacă condiţiile de frontieră pe suprafeţele limită de o formă oarecare.

Metoda analitică se poate aplica sub mai multe forme şi anume : metoda elementară, metoda imaginilor, metoda separării variabilelor şi metoda reprezentării conforme. Aceste metode fiind în general cunoscute din Electrotehnica teoretică, vom releva cîteva elemente caracteristice ale ultimelor două metode, care sînt de interes mai mare pentru rezolvarea problemelor considerate în lucrare.

- Metoda separării variabilelor se aplică atunci cînd există un sistem de coordonate în care forma limitei se exprimă printr-o valoare constantă a unei coordonate.

In principiu metoda constă în a încerca soluţii sub forma unui produs de funcţii, fiecare din acestea depinzînd de cîte o variabilă independentă : coordonată spaţială sau timp. În acest mod în locul unei ecuaţii cu derivate parţiale se ajunge la trei ecuaţii diferenţiale ordinare (în cazul cîmpului bidimensional caracterizat de ecuaţia lui Fourier). Ecuaţiile obţinute admit ca soluţii netriviale funcţiile lor proprii. Funcţiile proprii depind de condiţiile de integrare ale problemei care în general sînt : condiţii de limită, iniţiale şi de surse. Determinarea acestor funcţii proprii în condiţii de unicitate prescrise se loveşte adesea de dificultăţi foarte mari, aşa încît în general problemele nu sînt rezolvabile exact cu această metodă decît pentru un număr relativ restrîns de probleme [3] , [7] .

- Metoda reprezentării conforme permite reprezentarea conformă a figurilor din planul $z = x + j y$ cu ajutorul unor funcţii analitice în planul $W = U + jV$.

Metoda se aplică în două moduri :

- pentru o funcţie analitică dată se află sistemul corespunzător din planul z căruia îi corespunde sistemul cunoscut din W;
- se află funcţia de transformare a figurii din planul z, căruia îi corespunde sistemul cunoscut din planul W.

Mulţimea rezultatelor primului mod de aplicare a funcţiilor analitice, de interes în electrotehnică sînt cunoscute

BUPT

şi tabelate [7].

Al doilea mod de aplicare a transformărilor conforme utilizează teorema lui Schwarz - Christoffel, teoremă care se aplică simplu în special în următoarele cazuri : sistemul are o singură suprafaţă echipotenţială cunoscută alcătuită din linii frînte (în secţiunea planului cîmpului); sistemul are două armături la distanţe frînte între care se află cîmpul laplacian [2].

Cu creşterea numărului unghiurilor liniilor frînte care urmăresc în planul cîmpului suprafeţele echipotenţiale, se accentuează dificultatea efectuării integralelor aferente metodei şi sub aspectul acestei dificultăţi se întîlnesc trei tipuri de integrale [7].

- Integrale care se pot exprima prin funcţii simple, integrale care formează o soluţie exprimabilă pe de-a-ntregul prin funcţii simple şi majoritatea acestora sînt deja tabelate.
- Integrale exprimabile prin funcţii eliptice.
- Integrale care cer evaluarea lor numerică.

Metoda transformărilor conforme este importantă întrucît permite rezolvarea unor probleme de cîmp plan-paralel cu forme ale forntierelor mai complicate decît cele din problemele rezolvabile analitic cu celelalte metode. Cu toate acestea numărul problemelor la care se dau soluţii cu această metodă este limitat şi mediile în care se aplică trebuie să fie omogene electric respectiv magnetic.

Un alt inconvenient care apare la aplicarea transformărilor conforme constă în faptul că pentru majoritatea problemelor, limitele trebuie să fie considerate infinit permeabile (în problemele de cîmp magnetic) sau conductoare (în problemele de cîmp electric) sau să coincidă cu o linie de cîmp (de fapt cu o suprafaţă de cîmp), sau combinaţia acestor două tipuri de limite [7].

b. Metoda de calcul numeric constă în a aproxima ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale sau ecuaţiile integrale din care se obţin acestea, sau condiţiile de minimizare ale unor funcţionale printr-un sistem algebric de ecuaţii, sistem satisfăcut de valorile mărimii de calcul aleasă (de obicei un potenţial) în cîteva puncte convenabile alese în interiorul domeniului spaţiu sau spaţiu-timp al problemei de cîmp. Condiţiile de unicitate sînt adecvate procedeului de trunchiere pe care îl implică această înlocuire [8],.....,[16].

Cu această metodă se poate rezolva o gamă foarte largă

BUPT

de probleme atît pentru medii neomogene cît şi pentru medii cu neliniarităţi şi anizotropii idealizate. Precizia lor este suficient de bună în raport cu necesităţile practice.

Dezavantajele principale ale acestei metode constau în faptul că procesul de obţinere a soluţiei trebuie repetat pentru fiecare set de parametri ai problemei şi în imposibilitatea mijloacelor de calcul obişnuite de a rezolva sisteme mari de ecuaţii algebrice.

c. Metoda modelării. Soluţia ecuaţiilor cîmpului corespunzătoare acestei metode se obţine indirect din valorile măsurate pe un model a mărimii analoge celei care descrie cîmpul [16], ..., [30].

Metoda modelării (în medii rezistive şi rezistiv-capacitive continui, pe reţele analizoare, probabilistică) a potenţialelor din care derivă cîmpul electric şi cîmpul magnetic este uneori greoi utilizabilă şi presupune erori pe care celelalte metode nu le implică, însă au calitatea de a permite rezolvarea cîmpurilor pentru configuraţii din cele mai complicate, în medii neomogene, neliniare şi cu anumite tipuri de anizotropii, pentru cîmpuri care se extind pînă la infinit.

Întrucît modelarea poate avea la bază fie ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale fie pe cele algebrice de la calculul numeric şi faţă de oricare din celelalte metode poate rezolva simplu problemele de cîmpuri care se extind la infinit, sub aspectul posibilităţilor ea are un înalt grad de generalitate faţă de celelalte metode.

Dezavantajul esenţial de ordin principial faţă de metodele analitice, constă în faptul că procesul de obţinere a soluţiei trebuie repetat, ca şi la metoda de calcul numeric, pentru fiecare set de parametri ai problemei.

Se remarcă din cele prezentate că metodele calculului numeric şi a modelării oferă cele mai largi posibilităţi de analiză a cîmpurilor electrice şi magnetice.

Faţă de calculul numeric, modelarea prezintă cîteva avantaje de care trebuie să se ţină seama în alegerea uneia sau alteia, şi anume, ea dă posibilitatea analizei cîmpurilor care se extind în domenii mari şi este deocamdată mai economicoasă. De asemenea, prin modelare se rezolvă cu mare uşurinţă problemele de curenţi turbionari, chiar şi pentru sisteme foarte complicate repartizate în domenii întinse şi pentru viteze

BUPT

de variație a cîmpului magnetic corespunzătoare efectului pelicular mediu.

În rezolvarea problemelor propuse s-a impus luarea în considerare a posibilităților și avantajelor metodei modelării și ca atare s-a optat pentru ea.

Metoda modelării se aplică ușor pentru sisteme care îndeplinesc cîteva condiții:

- Corpurile sistemului electromagnetic sînt fixe; în această situație expresia legii inducției electromagnetice se simplifică. Trebuie remarcat că sînt situații cînd pentru sisteme de corpuri mobile analiza cîmpului se poate efectua cu ecuațiile cîmpului corespunzătoare corpurilor fixe dacă sistemul de referință la care se raportează aceste ecuații se fixează de corpul respectiv, influența restului sistemului luîndu-se în considerare prin condiții de frontieră adecvate, variabile în timp.
- Se neglijează contribuția curenților de deplasare în legea circuitului magnetic, cu alte cuvinte se limitează gama de probleme la cele corespunzătoare regimurilor static, staționar și cvasistaționar.
- Cîmpurile sînt bidimensionale. În general cîmpurile sînt tridimensionale dar pentru o mulțime de cazuri de interes practic obținerea soluțiilor implică calcule prohibitive.

Se pot obține soluții de o exactitate suficient de mare folosind o aproximare bidimensională a acestor cîmpuri, adică o analiză a cîmpului cu neglijarea lui într-o anumită direcție.

În lucrarea de față se va acorda atenție doar problemelor de cîmp bidimensional și din motive de simplitate și unitate în prezentare se au în vedere doar cîmpurile plan-paralele în condițiile menționate anterior.

Dintre ecuațiile care descriu cîmpurile electrice și magnetice, ecuațiile cîmpului electromagnetic în conductoare masive în regim cvasistaționar sînt cele mai generale, așa încît la tratarea modelării se vor avea în vedere în primul rînd acestea, mai ales că aplicațiile practice sînt rezolvări de astfel de probleme. Rezultatele pentru celelalte forme ale cîmpului sînt obținute prin particularizări.

Trebuie justificată absența din lucrare a ecuațiilor cu derivate parțiale pe care le satisfac : densitatea locală de curent $\bar{J}$, intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$, intensitatea cîmpului

BUPT

magnetic $\bar{H}$ şi inducţia magnetică $\bar{B}$. Motivul principal constă în faptul că ecuaţiile respective sînt satisfăcute de vectori şi rezolvarea lor ar presupune un volum de lucru în general mai mare decît la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale pe care o satisface potenţialele. În plus, pentru ecuaţiile în $\bar{J}$ şi $\bar{E}$ nu se cunosc de obicei condiţiile de unicitate [27].

S-a evitat de asemenea tratarea cîmpurilor plane din plăcuţele semiconductoare în care se manifestă efectul Hall, întrucît lucrarea vizează în principal cîmpurile care apar în problemele de curenţi tari. Pentru informarea în acest sens se indică lucrarea [28].

Lucrarea nu îşi propune analiza modelării maşinilor şi aparatelor electrice sub aspectul comportării lor la unda de impulsie şi în general în regimul tranzitoriu, dar unul din scopurile fundamentale a analizei cîmpului electromagnetic este de a da informaţii preţioase acestui tip de modelare [29].

CONTÎNUTUL LUCRĂRII

Optarea pentru tipul de model utilizat la rezolvarea problemelor propuse s-a făcut în urma unei analize atente a diferitelor metode de modelare care s-au impus în timp.

Pe parcursul documentării, construirii modelelor (în diverse variante şi de diferite tipuri) şi a măsurătorilor efectuate pe ele, au apărut o seamă de probleme de principiu, de alimentare şi măsurare, care pe măsura clarificării lor au fost sistematizate şi în felul acesta au apărut părţile A şi B ale prezentei lucrări.

Cîteva din rezultatele experimentale publicate parţial sau comunicate alcătuiesc partea C a lucrării.

În afară de INTRODUCERE şi cele trei părţi lucrarea conţine cîteva ANEXE de calcule.

În prima parte (A) se prezintă ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale (Cap.I) şi sistemele de ecuaţii algebrice şi diferenţiale (Cap.II) pe care le satisfac potenţialele scalar şi cel vectoral, din care derivă intensităţile cîmpurilor electrice şi magnetice respectiv inducţia magnetică şi se precizează condiţiile de unicitate (Cap.III).

BUPT

Partea a doua (B) cuprinde tratarea unitară a modelării cîmpurilor plan-paralele integrînd-o în teoria generală a analogiei şi modelării pe baza analizei criteriale care utilizează teoremele analogiei (Cap.I). Modelarea în medii rezistive şi capacitive e cuprinsă în Cap.II, cea pe reţele analizoare în Cap. III, iar cea probabilistică în Cap.IV al acestei părţi. Fiecare tip de modelare este analizat critic avîndu-se în vedere posibilităţile de realizare, de măsurare şi de interpretare a rezultatelor obţinute cu ele. În baza acestei analize tratarea problemelor propuse s-a efectuat cu reţele analizoare pasive.

În partea a treia, (C), se rezolvă trei probleme de cîmp electromagnetice cvasistaţionar în conductoare masive : problema barelor colectoare în laboratorul de mare putere (Cap.I), a conductorului cilindric de secţiune transversale trapezoidală, plasat într-o crestătură efectuată în material feromagnetic liniar, nesaturat (Cap.II), şi a conductorului de secţiune dreptunghiulară, ecranat feromagnetic (Cap.III). Rezolvarea ultimei probleme a avut drept scop confruntarea posibilităţilor de modelare cu cele ale calculului numeric. În CONCLUZII sînt enumerate principalele contribuţii personale şi observaţiile finale. În linii mari contribuţiile se referă la fundamentarea şi dezvoltarea metodelor de modelare, precum şi la rezolvarea concretă a unor cazuri de interes deosebit pentru aplicaţiile practice.

În ANEXE sînt prezentate : discretizarea cu pas constant la limitele de separaţie a două medii magnetice diferite (Anexa 1), soluţia analitică aproximativă (acoperitoare) pentru problema II-C (Anexa 2), soluţia exactă pentru problema tratată în III-C (Anexa 3) şi programul scris în FORTRAN corespunzător analizei numerice cu calculatorul a cîmpului din problema III-C (Anexa 4).

Teza a fost elaborată sub îndrumarea de excepţie, competentă şi deosebit de atentă a tov.prof.dr.ing. CONSTANTIN SORA, căruia îi mulţumesc şi pe această cale pentru indicaţiile şi sugestiile pe care mi le-a dat întotdeauna cu condescendenţă.

BUPT

A. ECUAȚIILE CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC

În această parte a lucrării se prezintă formele ecuațiilor diferențiale și algebrice pe care le satisfac potențialele scalare și vectoriale din care derivă vectorii cîmpului electric respectiv magnetic, ecuații utilizate obișnuit în analiza acestor cîmpuri în diferite regimuri electromagnetice și care stau și la baza analizei prin modelare.

I. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE CU DERIVATE PARȚIALE

1.1. Cîmpul electrostatic

Pentru regimul electrostatic legea inducției electromagnetice în formă locală (rot $\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$) devine :

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0 \tag{1.1}$$

Relația (1.1) arată că intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$, se poate exprima sub forma

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} V, \tag{1.2}$$

(forma locală a teoremei potențialului electrostatic), unde V este potențialul electrostatic.

Pentru dielectrici izotropi, fără polarizație permanentă, ($\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$), legea fluxului electric sub formă locală devine

$$\operatorname{div} (\varepsilon \bar{E}) = \rho_V, \tag{1.3}$$

ε fiind permitivitatea și ρ_V - densitatea volumetrică de sarcină electrică.

Ecuațiile (1.2) cu (1.3) dau :

$$\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} V) = -\rho_V \tag{1.4}$$

Într-un sistem de axe cartezian, ecuația (1.4) va lua forma :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\rho_V \tag{1.5}$$

Pentru cîmpul electrostatic plan-paralel $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

și deci, ecuația (1.5) se reduce la

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\rho_V \tag{1.6}$$

Dacă sistemul electrostatic considerat nu posedă sar-

BUPT

cini volumetrice ($\rho_v = 0$), ecuaţia (1.6) se scrie sub forma :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}\right)=0 \qquad (1.7)$$

Pentru medii dielectrice liniare şi omogene ecuaţia (1.7) se simplifică, obţinîndu-se ecuaţia lui Laplace în plan :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.8)$$

Pentru medii anizotrope permitivitatea este un tensor de ordinul doi, deci produsul $\bar{E}$ nu mai dă un vector colinear cu $\bar{E}$.

In cazul anizotropiei plane cînd există o diferenţă accentuată a lui ε după două direcţii ortogonale, x şi y, exprimînd inducţia după aceste direcţii în funcţie de $\bar{E}$, la o reprezentare simplificatoare a anizotropiei, se obţine [31], [32] :

$$D_x = \varepsilon_x E_x ; \; D_y = \varepsilon_y E_y \qquad (1.9)$$

În acest caz, pentru $\rho_v = 0$ şi $\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} = 0$, din div $\bar{D} = 0$, rezultă :

$$\varepsilon_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.10)$$

1.2. Cîmpul magnetic în regim staţionar

Pentru deducerea ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale care trebuie rezolvată în scopul determinării cîmpului magnetic staţionar (şi a cîmpului cvasistaţionar) se utilizează legea circuitului magnetic (rot $\bar{H} = \bar{J}$) şi legea fluxului magnetic care sugerează introducerea unei funcţii vectorale auxiliare, $\bar{A}$, numită vector potenţial magnetic, din care să derive $\bar{B}$,

$$\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}\,, \qquad (1.11)$$

Prin relaţia (1.11) potenţialul vector nu este însă univoc determinat. I se poate adăuga, fără a infirma relaţia (1.11), orice vector de tip grad φ. Datorită acestei neunivocităţi i se poate impune lui $\bar{A}$ o condiţie suplimentară; de exemplu se alege div $\bar{A} = 0$.

Cu (1.11) din legea circuitului magnetic se obţine :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,\text{rot}\,\bar{A}\right) = \bar{J} \qquad (1.12)$$

Ecuaţia (1.12) este valabilă pentru orice mediu neomogen şi

BUPT

neliniar (cînd B(H) este curba de primă magnetizare).

Într-un mediu liniar şi omogen (μ = const.), ecuaţia (1.12) ia forma :

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J} \tag{1.13}$$

deoarece : $\mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\ \bar{A}) = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \bar{A} - \Delta \bar{A}$ (1.14)

Dacă în domeniul D există două sau mai multe medii diferite în contact, fiecare avînd o anumită permeabilitate magnetică, pentru fiecare subdomeniu se poate scrie o ecuaţie de forma (1.13), iar la suprafeţele de separaţie a mediilor trebuie să fie verificată condiţia de continuitate a componentelor tangenţiale ale vectorului $\bar{A}$, [33] .

Pentru cîmpul magnetic plan-paralel, $\bar{J} = \bar{k}\, J(x,y)$ şi $\bar{A} = \bar{k}\, A\,(x,y)$, [19] , $\bar{k}$ fiind versorul lui z. Se va obţine deci :

$$\bar{B} = \mathrm{rot}\ \bar{A} = \mathrm{rot}\ (A\,\bar{k}) = (\mathrm{grad}\ A \times \bar{k}) = \frac{\partial A}{\partial y}\,\bar{i} - \frac{\partial A}{\partial x}\,\bar{j} \tag{1.15}$$

şi de asemenea, dacă $\bar{B} = \mu \bar{H}$ ($\mu = \frac{1}{\nu}$ - scalar),

$$\mathrm{rot}\ \bar{H} = \mathrm{rot}\ (\nu \bar{B}) = \mathrm{rot}\ (\nu\, \mathrm{grad}\ A \times \bar{k}) =$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y}\right)\right) \bar{k} = \bar{J} \tag{1.16}$$

în care ν este reluctivitatea.

Ecuaţia pe care o satisface A în medii izotrope, pentru cîmpul magnetic staţionar este

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial y}\right) = -J \tag{1.17}$$

Pentru medii omogene şi liniare (μ = const.) ecuaţia (1.17) devine :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu J \tag{1.18}$$

adică o ecuaţie este de tip Poisson (ca şi ecuaţia (1.6) pentru ε = const.). Pentru subdomeniile în care J = 0 ea devine c ecuaţie de tip Laplace.

În tehnică se utilizează deseori tablă electrotehnică care posedă o orientare magnetică preferenţială în sensul de laminare. In această tablă, componentele inducţiei $\bar{B}$, presupunînd de exemplu axa y paralelă cu direcţia de laminare, sînt după cum urmează[31]:

$$B_y = \mu_y\, H_y \ ;\ B_x = \mu_x\, H_x \tag{1.19}$$

Corespunzător cu cele două permeabilităţi există pentru această tablă două caracteristici diferite de magnetizare, care

BUPT

cu condiţia reprezentării simplificatoare a unei anizotropii ideale, [32] ,descriu cu suficientă exactitate proprietăţile tablei.

Ecuaţiile pentru calculul cîmpului în medii anizotrope lipsite de curenţi electrici sînt :

$\operatorname{div} \bar{B} = 0$; $\operatorname{rot} \bar{H} = 0$

Pentru cîmpul $\bar{H}$, din $\operatorname{div} \bar{B} = 0$, rezultă :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu_x H_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_y H_y) = 0 \tag{1.20}$$

Dacă, $\frac{\partial \mu_x}{\partial x} = 0$ şi $\frac{\partial \mu_y}{\partial y} = 0$, cu (1.20), ecuaţia (1.21),devine :

$$\mu_x \frac{\partial^2 V_H}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 V_H}{\partial y^2} = 0 \tag{1.22}$$

Pentru cîmpul $\bar{B}$, din $\operatorname{rot} \bar{H} = 0$, rezultă :

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_x \frac{\partial A}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_y \frac{\partial A}{\partial x}\right)\right) = 0 \tag{1.23}$$

Dacă ν_x = const.pe direcţia y şi ν_y = const. pe direcţia x, din ecuaţia (1.23) se obţine :

$$\nu_x \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0 \tag{1.24}$$

1.3. Cîmpul magnetic în regim cvasistaţionar

Rezolvarea ecuaţiilor cîmpului electromagnetic corespunzător regimului cvasistaţionar se face prin introducerea potenţialului vector magnetic, $\bar{A}$, în aceleaşi condiţii ca şi în cazul cîmpului magnetic staţionar.

Ecuaţiile deduse pentru $\bar{A}$ sînt aceleaşi, doar că densitatea de curent $\bar{J} = J\,\bar{k}$, care are de data aceasta şi o componentă ce derivă din $\bar{A}$, se exprimă sub forma :

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} = -\sigma\left(\frac{\partial A}{\partial t} + K\right)\bar{k}; \tag{1.25}$$

unde K este componenta potenţială a intensităţii cîmpului electric, constantă în planul cîmpului pe secţiunea fiecărui conductor [19].

Ecuaţiile (1.17) şi (1.18) devin în acest caz

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial y}\right) = -\sigma\left(\frac{\partial A}{\partial t} + K\right) \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu \sigma\left(\frac{\partial A}{\partial t} + K\right) \tag{1.27}$$

BUPT

În lipsa unor curenţi impuşi, din (1.21) rezultă ecuaţia

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu\,\sigma\,\frac{\partial A}{\partial t}\,, \tag{1.28}$$

care este de tip difuzie.

Ecuaţia (1.21) este de tip combinat (Fourier).

În ecuaţia (1.21) : $-\sigma K$ reprezintă densitatea de curent medie pe secţiunea unui conductor alimentat cu curentul $i = -S\sigma K$, iar $-\sigma\frac{\partial A}{\partial t}$ este densitatea locală a curenţilor turbionari.

1.4. O ecuaţie generală cu derivate parţiale

Ecuaţiile cu derivate parţiale prezentate pentru medii neliniare, neomogene, izotrope, şi cîmpuri plan-paralele, derivă prin particularizări din ecuaţia de tip Fourier.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + e\right)\,, \tag{1.29}$$

în care α, β, e, pot fi în caz general funcţii de punct.

Dacă prin φ s-a notat mărimea A, α reprezintă reluctivitatea magnetică ν, β - conductivitatea electrică σ, iar e are semnificaţia intensităţii de cîmp electric potenţial (cu semn schimbat) adică a lui K.

Pentru cîmpurile electrice potenţiale $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \equiv 0$ şi φ reprezintă pe V, α pe ε, $\beta = -1$ şi e are semnificaţia densităţii de volum de sarcină adevărată ρ_v.

Notarea potenţialelor prin φ se va utiliza în continuare acolo unde tratarea cîmpurilor enumerate se poate face simultan evitîndu-se astfel referirile repetate şi la un potenţial sau altul, la un cîmp sau altul.

II. SISTEME DE ECUAŢII CU VALORI ALE POTENŢIALELOR ÎN PUNCTE FINITE

Fie că este vorba de metoda parabolelor sau de aceea a diferenţelor finite, de metoda care are la bază discretizarea tip "celulă", sau de metoda elementelor finite, obţinerea sistemelor de ecuaţii algebrice liniare sau neliniare pe care le satisfac valorile potenţialelor într-un număr finit, N_s, de puncte interioare domeniului plan S, are la bază aproximarea unei variaţii simple a potenţialelor pe anumite segmente de dreapta, sau în interiorul unor elemente de suprafaţă.

BUPT

La oricare din metodele numerice de calcul al cîmpului, pe lîngă poziţionarea celor N_s puncte interioare cărora li se asociază valorile finite ale potenţialelor, este necesară unirea punctelor vecine cu segmente de dreapta. Reţeaua de segmente obţinută astfel se numeşte reţea de discretizare (fig.2.1.)

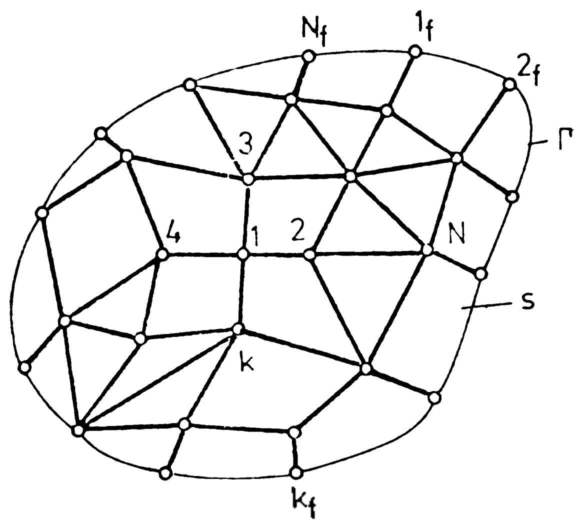


Fig.2.1. - Un exemplu de discretizare a domeniului plan S.

Pentru a obţine valorile soluţiei unei probleme de cîmp în punctele N_s alese prin metoda parabolelor, derivatele din ecuaţiile cu derivate parţiale sînt aproximative prin derivatele unor parabole de gradul "n" care trec printr-un număr de "m" puncte ($m \in N_s$). Atunci cînd aceste aproximări se fac prin desvoltări în serie Taylor rezultatele sînt identice cu cele date de metoda parabolelor [34], obţinîndu-se în plus expresiile în diferenţe finite centrale, regresive, progresive, ale erorilor de trunchiere.

Metoda care are la bază discretizarea tip "celulă",[18], utilizează legea fluxului electric şi legea circuitului magnetic [35] ,sub formă integrală, admiţînd o variaţie liniară a potenţialelor pe elemente de suprafaţă cu contur patrulateric.

Metoda elementelor finite, prezentată aici doar pentru cîmpurile magnetice, are la bază minimizarea funcţionalei corespunzătoare (pe unitatea de lungime în direcţia normală planului cîmpului), cu condiţia aproximării unei variaţii liniare a potenţialului pe un element de suprafaţă triunghiular (elemente finite de ordinul unu).

Sistemele de ecuaţii pe care le satisfac valorile lui în cele N_s puncte, au forma generală :

$$[\alpha] \cdot [\varphi] = [\beta]_t \cdot \{[\dot{\varphi}] + [e]\} + [f] \tag{2.1}$$

în care :

BUPT

$[\alpha]$ - este o matrice pătratică cu N_s x N_s elemente depinzînd de dispoziția spațială a celor N_s puncte și de structura fizică a diviziunilor domeniului S;

$[\varphi]$ - matricea coloană a valorilor finite φ_k ($k \in E\ [1,2,3,...N_s]$)

$[\beta]_t$ - transpusă unei matrici-coloană ai căror termeni depind de structura fizică și geometrică a discretizării domeniului plan;

$[\dot{\varphi}]$ - matricea coloană conținînd derivatele în raport cu timpul ale componentelor matricii;

$[e]$ - matricea coloană conținînd N_s elemente depinzînd de excitație (ρ_v, J);

$[f]$ - matrice coloană depinzînd de condițiile de frontieră.

Pentru cîmpurile potențiale matricea $[\dot{\varphi}]$ nu apare în ecuația (2.1).

În regim sinusoidal $[\dot{\varphi}] = j\omega[\varphi]$ (la reprezentarea complexă a mărimilor electromagnetice).

Datorită identității rezultatelor și a modulurilor de discretizare corespunzătoare metodei parabolelor și aceleia utilizînd dezvoltările în serie Taylor, asupra primei metode nu se va mai insista, iar a doua se va numi "metoda diferențelor finite" (de fapt ambele utilizează diferențele finite).

2.1. Metoda diferențelor finite

Transformarea unei ecuații cu derivate parțiale în ecuația cu diferențe finite parțiale corespunzătoare, se obține dezvoltînd în serii Taylor valorile potențialelor în nodurile unei rețele geometrice, obținută prin intersecția unor familii de curbe ortogonale (sau neortogonale) care divizează domeniul S în elemente de suprafață poligonale (triunghiulare, patrulaterice etc.). Din dezvoltările respective se exprimă derivatele parțiale în funcție de valorile potențialelor în cîteva "noduri" ale rețelei de discretizare și de derivatele parțiale de ordin superior celor din ecuație. Neglijînd aceste derivate în expresiile astfel obținute rezultă un sistem de N_s ecuații algebrice pe care le satisfac valorile potențialului în cele N_s puncte-noduri interioare domeniului S.

Erorile de trunchiere incluse prin aproximarea prin diferențe finite a derivatelor parțiale, provoacă erori de trunchiere fiecărei mărimi care se calculează din soluția numerică a sistemului N_s x N_s. Punerea în evidență a unora dintre aceste

BUPT

erori a fost motivul pentru care se prezintă această metodă.

Din motive subliniate la sfîrşitul paragrafului, se tratează diferenţele finite doar pentru medii liniare izotrope şi omogene.

Se consideră, pentru simplitate, o discretizare a domeniului S efectuată de două familii de drepte echidistante în cadrul aceleiaşi familii, ortogonale : una paralelă cu direcţia x, cealaltă paralelă cu y.

Intersecţiile interioare lui S sînt în număr de N_s şi indexarea lor se face cu indicii (i,j), i variind după x, iar j după y.

Se consideră de asemenea cîteva puncte interioare repartizate ca în fig. 2.2.

Seriile Taylor ale funcţiei φ în cele patru puncte vecine lui (i,j) sînt :

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi_{i,j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_1^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right)_{i,j} \tag{2.2 a}$$

$$\varphi_{i,j-1} = \varphi_{i,j} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h_2^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} \right)_{i,j} \tag{2.2 b}$$

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi_{i,j} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h_1^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right)_{i,j} \tag{2.2 c}$$

$$\varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_2^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right)_{i,j} \tag{2.2 d}$$

Exprimînd laplacianul lui φ în punctul (i,j), din aceste expresii rezultă :

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{1}{h_1^2} (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) +$$

$$+ \frac{1}{h_2^2} (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}) + \frac{\varepsilon_{2x}}{h_1^2} + \frac{\varepsilon_{2y}}{h_2^2} \tag{2.3}$$

Utilizînd exprimarea derivatelor prin diferenţe centrale

$$\delta_y^n \varphi_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_n^k \varphi_{i+\frac{n}{2}-k,j} ; \tag{2.4 a}$$

$$\delta_y^n \varphi_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \varphi_{i,j+\frac{n}{2}-k} , \qquad (2.4b)$$

cantitățile

$$\varepsilon_{2x} = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_1^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial x^{2n}}\right)_{i,j} , \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon_{2y} = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_2^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial y^{2n}}\right)_{i,j} , \qquad (2.6)$$

primesc formele :

$$\varepsilon_{2x} = \left(-\frac{\delta_x^4}{12} + \frac{\delta_x^6}{90} - \dots\right) \varphi_{i,j} , \qquad (2.7)$$

$$\varepsilon_{2y} = \left(-\frac{\delta_y^4}{12} + \frac{\delta_y^6}{90} - \dots\right) \varphi_{i,j} , \qquad (2.8)$$

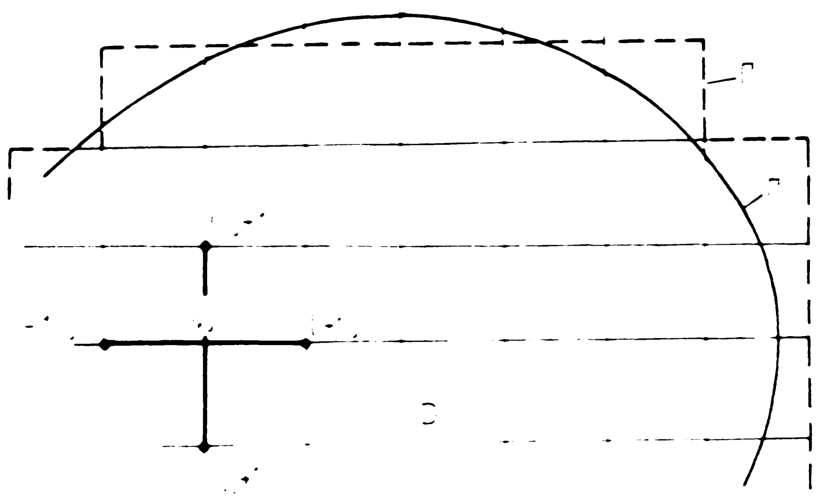


Fig.2.2.

La neglijarea acestor cantități (erorile de trunchiere ale laplacianului), expresia în diferențe finite a lui $(\nabla^2\varphi)_{i,j}$ va fi :

$$(\nabla^2\varphi)_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h_2^2} \qquad (2.9)$$

Pentru discretizarea cu pas constant, $(h_1 = h_2 = h)$, expresia (2.9) ia forma :

348035
111 F

$$(\nabla^2\varphi)_{i,j} = \frac{1}{h^2}(\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i,j-1}-4\varphi_{i,j}) \qquad (2.10)$$

Pentru discretizările adecvate transcrierii laplacianului în coordonate oblice, polare, triunghiulare sînt prezentate dezvoltări asemănătoare în [34].

Evident aproximările se fac în oricare puncte - nod interior domeniului plan, obţinîndu-se N_s valori în diferenţe finite ale laplacianului $\nabla^2\varphi$. Schimbînd notaţiile : $\varphi_{i,j}=\varphi_e$; $\varphi_{i,j+1}=\varphi_{e'}$, ş.a.m.d.p., $(e,e'\in N_s)$, ecuaţiile cîmpului electric sau magnetic laplacean, vor avea forma :

$$\sum_{e'}\frac{\varphi_{e'}-\varphi_e}{L_{ee'}} = 0 \; ; \qquad (2.11)$$

cu $L_{ee'}$ - distanţa dintre e şi e' sau în forma matricială :

$$[\alpha]\cdot[\varphi] = [f] \qquad (2.12)$$

Matricea coloană [f] include condiţiile de frontieră care apar în ecuaţiile corespunzătoare nodurilor vecine frontierei Γ.

Sistemul (2.11) este diagonal şi ca urmare se pretează la o rezolvare numerică iterativă [8], [9], [34] etc..

În cazul cîmpurilor poissoniene, la care

$$\nabla^2\varphi = \beta\, e\,(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}, \text{ pentru cîmpurile electrice } (\varphi\equiv V)\; ; \\ -\mu J, \text{ pentru cîmpurile magnetice } (\varphi\equiv A)\; ; \end{cases}$$

funcţiile de excitaţie e (x,y), (ρ_v sau J) iau valorile e_k astfel că pentru cele N_s puncte se poate scrie sistemul de ecuaţii:

$$[\alpha]\cdot[\varphi] = [\beta]\cdot[e] + [f] \qquad (2.13)$$

În tehnica curenţilor tari se întîlnesc de prea puţine ori cîmpuri electrice cu distribuţie volumetrică de sarcină electrică, astfel încît ecuaţia (2.12) vizează în primul rînd cîmpurile magnetice şi în acest caz ea are forma :

$$[\alpha]\cdot[A] = -\mu\,[J] + [\alpha]\cdot[A_f] \qquad (2.14)$$

Matricea $[A_f]$ conţine condiţiile de frontieră, de obicei de tip Neumann.

În condiţiile acceptate, ecuaţia de tip Fourier se întîlneşte la cîmpurile magnetice în care contribuţia variaţiei în timp a inducţiei magnetice este apreciabilă, adică la proble-

BUPT

mele cu efect de refulare, şi în aceste cazuri, pentru medii liniare, în regim sinusoidal, cu (1.19) sistemul de ecuaţii algebrice scris în complex, ia forma :

$$[\alpha][\underline{A}] = \mu\,\sigma\left\{[j\omega\,\underline{A}] + [e']\right\} \tag{2.15}$$

Matricea e are termenii de forma :

$$\underline{e}'_k = \underline{K}_k + \underline{A}_{fk}$$

în care $\underline{A}_{fk}$ sînt termeni conţinînd condiţiile de frontieră impuse pentru $\underline{A}$.

Ecuaţiile deduse se utilizează foarte comod în analiza cîmpurilor pe reţele analizoare de tip R şi RC.

In cadrul celorlalte metode se va trata problema obţinerii sistemelor pornindu-se de la cazul cîmpurilor în medii cu un anumit tip de neliniaritate, sistemele de ecuaţii algebrice pentru medii liniare obţinîndu-se prin particularizare.

De asemenea, modul de introducere a condiţiilor de frontieră pentru diferite tipuri de frontieră, se va discuta comparativ în ultimul paragraf al capitolului.

2.2. Discretizarea tip "celulă" (Metoda lui Gafr)

Această metodă a fost tratată unitar pentru toate cîmpurile fizice de tip poissonian în [18] şi particularizată pentru cîmpuri magnetice în [35] .

Metoda are la bază utilizarea legii fluxului electric (pentru cîmpurile electrice) şi legea circuitului magnetic (pentru cîmpurile magnetice) în formele lor integrale, pentru subdomenii plane suficient de mici, subdomenii denumite "celule", limitate de contururi poligonale.

Pentru tratarea metodei e necesară deci, prezentarea formelor integrale ale acelor legi, pentru cîmpurile plan-paralele.

a. Legea fluxului electric. Forma integrală a legii fluxului electric pentru medii izotrope liniare şi neomogene,

$$\int_{\Sigma}(\overline{D}\cdot\overline{ds}) = q_{\Sigma}, \tag{2.16}$$

ia pe baza explicativei din fig.2.3 următoarele expresii pentru cîmpul plan-paralel :

BUPT

$$\int_{\Sigma}(\overline{D}.\overline{ds}) = \int_{Se}(\overline{D}.\overline{ds_e}) = -\int_{Se}(\varepsilon\,\mathrm{grad}\ V).(\overline{n}\ h_c dl) =$$

$$= -h_c\oint_{\Gamma}\varepsilon\frac{\partial V}{\partial n}dl = q = \int_{V}\rho_v dv = h_c\int_{S_\Gamma}\rho_v ds \qquad (2.17)$$

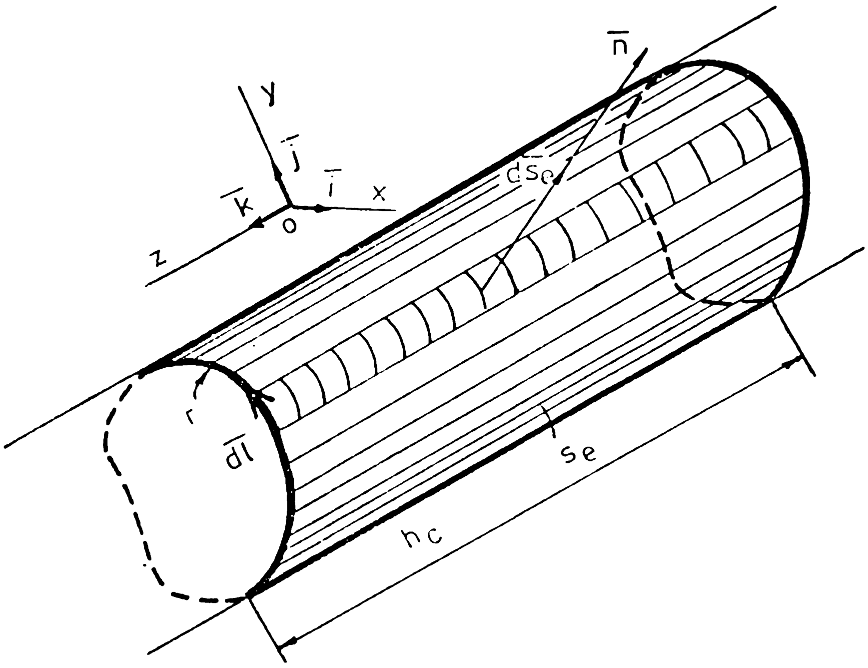


Fig.2.3. Explicativă la relațiile (2.17)

în care : s_e este suprafața generatoare a unui volum cilindric de înălțime h_c (în direcția z, normală pe planul cîmpului); ds_e -elementul de suprafață pe s_e :

$$\overline{ds_e} = \overline{n}\ ds_e = \overline{n}\ h_c\ dl;$$

$\overline{n}$ - normala exterioară lui s_e ,respectiv curbei (care reprezintă intersecția lui s_e cu planul cîmpului);

Σ - suprafața închisă compusă din s_e și suprafețele-baze s_Γ ;

$\frac{\partial V}{\partial n}$ - derivata potențialului V după normala $\overline{n}$.

Menționînd ultima egalitate, pentru mediile neomogene se poate scrie :

$$\oint_{\Gamma}\varepsilon\frac{\partial V}{\partial n}dl = \begin{cases} -\int_{S}\rho_v ds & ;\ \rho_v \neq 0\ ; \\ 0 & ;\ \rho_v = 0\ . \end{cases} \qquad (2.18)$$

Pentru medii omogene (ε = const.pe Γ),

$$\oint_{\Gamma}\frac{\partial V}{\partial n}dl = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon}\int_{S}\rho_v ds\ ; \\ 0 \end{cases} \qquad (2.19)$$

BUPT

Ecuaţiile (2.18) şi (2.19) se pretează la o aproximare a integralelor conţinute de ele prin valori finite în urma discretizării planului cîmpului prin elemente tip "celulă",

b. Legea circuitului magnetic. La neglijarea curentului de deplasare, legea circuitului magnetic sub formă integrală are expresia :

$$\oint_{\Gamma} (\bar{H}.\overline{dl}) = \int_{S} (\bar{J}.\overline{ds}) \qquad (2.20)$$

cu semnificaţiile lui Γ, $\overline{dl}$, S_{Γ}, $\overline{ds}$ prezentate în fig.2.4.

Cum $\bar{B}$ se poate exprima :

$$\bar{B} = rot(A\bar{k}) = \frac{\partial A}{\partial y}\,\bar{i} - \frac{\partial A}{\partial x}\,\bar{j} = (grad\ A \times \bar{k}) = \mu\,\bar{H}\ , \qquad (2.21)$$

prin înlocuirea lui $\bar{H}$ în prima parte a egalităţii (2.20), aceasta ia forma :

$$\oint_{\Gamma} (\bar{H}.\overline{dl}) = \oint \nu (grad\ A x\bar{k}).\overline{dl} = -\oint_{\Gamma} \nu (grad\ A.\bar{n})dl =$$
$$= -\oint_{\Gamma} \nu \frac{\partial A}{\partial n}\, dl \qquad (2.22)$$

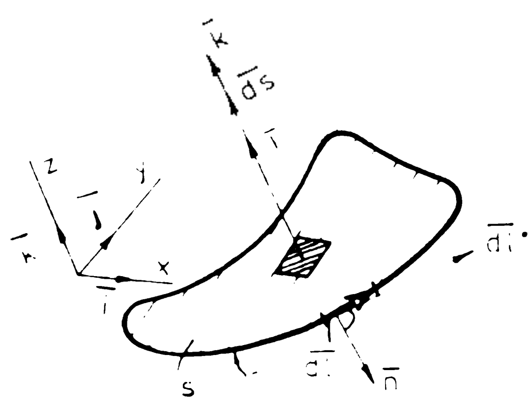


Fig.3.4. Explicativă la (2.20) şi (2.22).

Ecuaţia (2.20) pentru cîmpurile magnetice plan-paralele în medii neomogene se mai poate deci scrie cu (2.22) :

$$\oint_{\Gamma} \nu \frac{\partial A}{\partial n}\, dl = -\int_{S_{\Gamma}} J\ ds \qquad (2.23)$$

ştiind că :

$$\bar{J} = J\,\bar{k} \quad şi \quad \overline{ds} = \bar{k}\,ds \qquad (2.24)$$

BUPT

Pentru medii omogene din punct de vedere magnetic (ν = = const. pe Γ) ecuaţia (2.24) se rescrie astfel :

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial A}{\partial n} dl = - \mu \int_{S} J \, ds \qquad (2.25)$$

Si expresiile (2.23) şi (2.25) se pretează la aproximări prin valori finite la o discretizare tip "celulă".

Ecuaţiile sînt adevărate şi pentru neliniarităţile la care se neglijează histerezisul, adică pentru situaţiile în care B = = $\mu . H$, μ fiind un scalar.

Se aleg în domeniul S al problemei de cîmp electric sau magnetic, un număr N_s' de elemente de suprafaţă, suficient de mici, numite celule şi delimitate de linii poligonale închise. Acestea celule nu au nici un punct comun cu frontiera Γ şi au, fiecare, cîte o latură comună cu fiecare din celulele vecine. Se divizează apoi aria rămasă între curba şi celulele trasate în N_s'' celule astfel alese încît fiecare dintre ele are cîte o latură comună cu cele vecine aparţinînd mulţimii N_s' şi mulţimii N_s'' şi cîte o latură aproximînd o porţiune dintre lungimea lui Γ . Se obţin în modul acesta $N_s = N_s' + N_s''$ celule care cuprind aria suprafeţei S.

Se aleg apoi N_s' puncte interioare, cîte unul de fiecare din cele N_s' celule, astfel încît segmentele care unesc cîte două din punctele vecine să intersecteze normal latura comună celulelor cărora aceste puncte le aparţin. Se mai alege cîte un punct interior fiecărui element din cele N_s'' elemente de arie care au o latură pe (sau aproximînd o porţiune din Γ) respectîndu-se condiţia pentru cele aparţinînd mulţimei N_s' şi în plus ţinîndu-se seama de următoarele condiţii :

- dacă condiţiile de frontieră pentru problema de cîmp sînt de tip Dirichlet cele N_s'' puncte semnificative se plasează la o anumită distanţă de latura care urmăreşte frontiera;
- dacă condiţiile sînt de tip Neumann ele pot fi interioare sau pe curba Γ.

Respectarea acestor condiţii se realizează prin modificarea laturilor comune celor două grupe N_s' şi N_s'' de elemente şi a laturilor comune elementelor vecine aparţinînd mulţimii N_s.

În figura 2.5 este prezentată o divizare cu alegerea celor N_s puncte semnificative, pentru condiţii de frontieră de tip Neumann.

Se va prezenta spre exemplificare modul de aproximare pentru ecuaţia (2.23), respectiv pentru cîmpul magnetic.

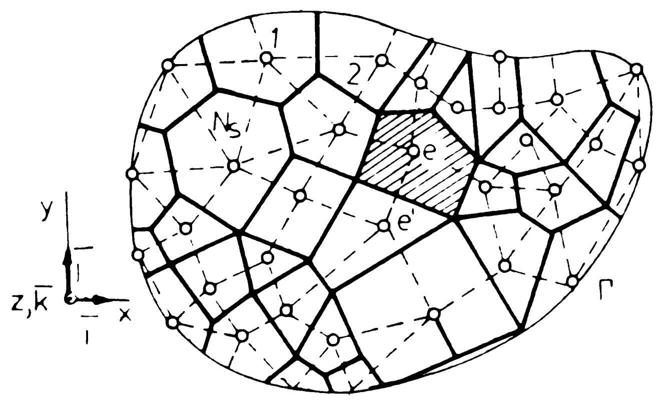


Fig.2.5 - Discretizarea tip celulă pentru condiţii de frontieră Neumann

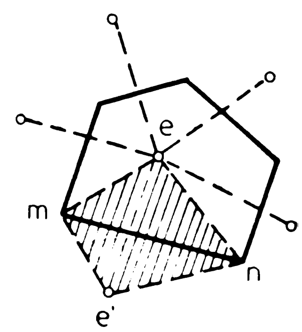


Fig.2.5' Celula "e" din fig.2.5 (mărită)

Admiţînd o variaţie liniară pentru A (x,y) pe fiecare element patrulateric eme'n şi ν = constant în interiorul acestuia, (fig.2.5'), valoarea integralei din prima parte a egalităţii (2.23) pe conturul celulei „e" va fi :

$$\oint_{\Gamma_e} \nu \frac{\partial A}{\partial n} \, dl = \sum_P \frac{A_{e'} - A_e}{L_{ee'}} L_{mn} \, , \tag{2.26}$$

în care : Γ_e este perimetrul celulei "e" ,

P - numărul patrulaterelor corespunzătoare celulei "e";

A_e; $A_{e'}$ - valorile potenţialelor în "e" respectiv în punctul vecin "e' " ;

$L_{ee'}$; L_{mn} - lungimile segmentelor normale ee' şi mn

$$L_{mn}^2 = (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 \tag{2.27}$$

$$L^2_{ee'} = (x_{e'} - x_e)^2 + (y_{e'} - y_e)^2$$

A doua parte a egalităţii (2.23) se poate evalua astfel :

$$-\int_{S_c} J \, ds = -\sum_T J_{med} \, S_\Delta \tag{2.28}$$

BUPT

J_{med} fiind valoarea medie a densității de curent pe un element de arie triunghiular S_Δ (aria triunghiului emn), iar S_c - aria celulei "e".

Cum, în cazul cel mai general tratat aici, J are expresia :

$$J = - \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + K. \right),$$

acceptînd și pentru J o variație liniară pe fiecare triunghi lmn de arie S_Δ, rezultă

$$- \int_{S_c} J \, ds = \frac{1}{3} \sum_T \sigma \left[\frac{\partial}{\partial t} (A_e + A_m + A_n) + K_e + K_m + K_n \right] S_\Delta \quad (2.29)$$

care cu (2.26) și (2.29), relația (2.23) devine :

$$\sum_P \nu \frac{A_{e'} - A_e}{L_{ee'}} L_{mn} = \frac{1}{3} \sum_T \sigma \left[\frac{\partial}{\partial t} (A_e + A_m + A_n) + K_e + K_m + K_n \right] S_\Delta \quad (2.30)$$

în care :

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_e & y_e \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

iar T indexează triunghiurile lmn (în număr egal cu patrulaterele e'men).

Întrucît numărul de celule pentru care putem scrie (pentru S) ecuații algebrice de tipul (2.30) este N_s, iar valorile semnificative care trebuie să intervină în (2.30) sînt A_e și $A_{e'}$, sau dacă se vrea A_m și A_n , este necesară eliminarea unei perechi de valori, de exemplu a lui A_m și A_n, din ecuația respectivă.

Punînd condiția ca cele patru puncte A_e, $A_{e'}$, A_m și A_n să fie coplanare în sistemul (A,x,y), (fig.2.6), rezultă :

$$A_e \frac{L_{ep}}{L_{ee'}} + A_{e'} \frac{L_{ep}}{L_{ee'}} = A_m \frac{L_{np}}{L_{mn}} + A_n \frac{L_{mp}}{L_{mn}} \quad (2.32)$$

Deci chiar dacă s-ar exprima A_m sau A_n în funcție de celelalte trei valori cu relația (2.32), la o aproximație liniară a lui J pe triunghiurile elementare lmn, sistemul N_s ecuație de tipul (2.30) are mai multe necunoscute decît sînt necesare în caz general.

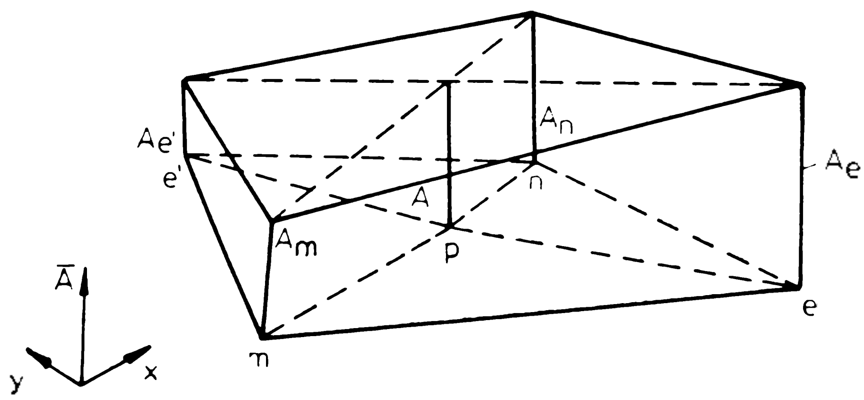


Fig.2.6. Explicativă la relația (2.32)

S-ar părea că există două situații în care se poate elimina această dificultate. În primul rînd, în cazul că e' se confundă cu p, respectiv $L_{e'p} = 0$, A_e s-ar exprima în funcție de A_m și A_n și luînd ca puncte semnificative ale domeniului S, vîrfurile poligoanelor celulelor ar rezulta un sistem determinat de ecuații în A_e , A_m , A_n (cu m,n,e aparținînd mulțimii vîrfurilor poligoanelor cuprinse în S). În acest caz în ecuațiile (2.30) nu ar mai fi corecte întrucît de-a lungul segmentului mn intensitatea cîmpului magnetic prezintă o discontinuitate de speța a I-a. În adevăr, pentru :

$$A(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \text{ pe un triunghi emn,}$$

$$\bar{H} = \nu \operatorname{rot}(A\bar{k}) = \nu(\operatorname{grad} A \times \bar{k}) = \nu(\alpha_3 \bar{i} - \alpha_2 \bar{j}) = \text{const.}$$

Deci, la acceptarea variației liniare a lui A(x,y) pe un triunghi se admite automat o repartiție strict superficială a densității de curent și anume de-a lungul fețelor prismelor de secțiune transversală S_A . Tratarea corectă a acestui caz, astfel încît să fie respectată legea circuitului magnetic, se poate face fără dificultate cu metoda elementelor finite, fără a utiliza densități superficiale de curenți.

Al doilea caz, în care apariția lui A_m și A_n în ecuația (2.30) nu deranjează, este acela în care :

$$A_m + A_n = A_e + A_{e'} \qquad (2.33)$$

adică situația în care paralelogramele e m e'n sînt romburi.

Cu această condiție restrictivă pentru cîmpurile cu curenți turbionari, ecuația (2.30) primește forma :

$$\sum_{P}\left[\frac{A_{e'}-A_e}{L^2_{ee'}} - \frac{\sigma}{12}\ \frac{\partial}{\partial t}\,(A_{e'}-A_e)\right]\nu\, L_{ee'}\, L_{mn} = \frac{1}{4}\sum_{P}\sigma\Big(\frac{\partial A_e}{\partial t} +$$

$$+ \frac{K_e+K_m+K_n}{3}\Big)\, L_{ee'} \cdot L_{mn} \tag{2.34}$$

observînd că : $L_{ee'} \cdot L_{mn} = 4S_\Delta$

Pentru P = 4 (fig.2.7b), ecuaţia (2.34) se poate compara cu ecuaţia obţinută prin metoda diferenţelor finite la discretizarea din fig.2.7a :

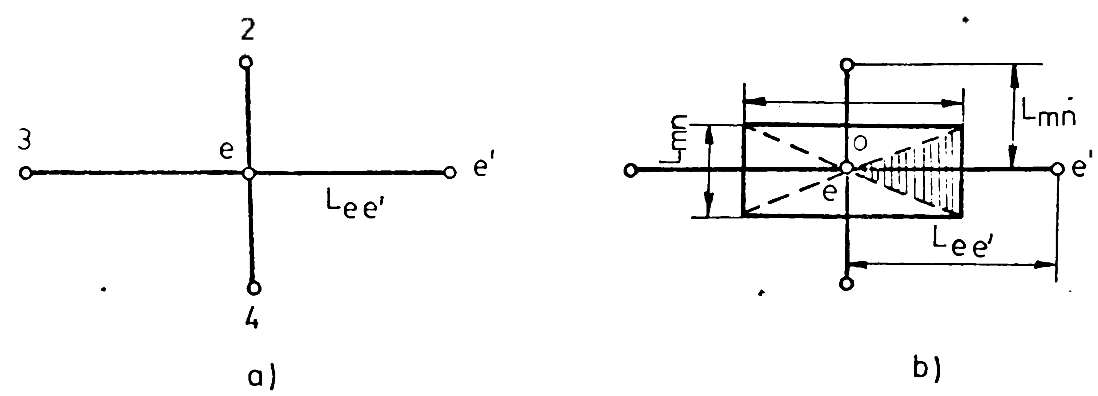


Fig.2.7.

Prin metoda diferenţelor finite se obţine :

$$\sum_{P}\nu\,\frac{A_{e'}-A_e}{L^2_{ee'}} = \sigma_e\Big(\frac{\partial A_e}{\partial t} + K_e\Big) \tag{2.35}$$

iar din (2.34) :

$$\sum_{P=1}^{4}\nu\left[\frac{A_{e'}-A_e}{L^2_{ee'}} - \frac{\sigma}{12}\frac{\partial}{\partial t}\,(A_{e'}- A_e)\right] = \sigma\Big(\frac{\partial A_e}{\partial t} +$$

$$+\sum_{P=1}^{4}\frac{K_e+K_m+K_n}{12}\Big) \tag{2.36}$$

Deci faţă de metoda diferenţelor finite, metoda de faţă dă rezultate îmbunătăţite atît în ce priveşte structura matricilor $[\beta]_t$ şi $[\alpha]$ (v.sistemul (2.1) şi (2.15)) pentru cîmpuri sinusoidale cît şi în ceea ce priveşte evaluarea lui K, respectiv a ma-

BUPT

tricilor de excitaţie.

La neglijarea vitezei de variaţie a lui A ecuaţiile (2.35) şi (2.36) diferă doar cînd pe interiorul celulei k = f(x,y) dacă se ia o discretizare cu patrulatere rombice. În acest caz discretizarea tip celulă se poate aplica foarte elastic.

Pentru cîmpurile electrice rezultatul se poate scrie direct :

$$\sum_{P} \varepsilon \frac{V_{e'}-V_{e}}{L_{ee'}} L_{mn} = \frac{1}{12}\sum_{P}(\rho_e+\rho_m+\rho_n)\, L_{ee'}\cdot L_{mn} \tag{2.37}$$

Pentru cîmpuri laplaciene ecuaţia (2.37) se reduce la :

$$\sum_{P} \varepsilon \frac{V_{e'}-V_{e}}{L_{ee'}} L_{mn} = 0$$

care pentru medii omogene devine :

$$\sum_{P} \frac{V_{e'}-V_{e}}{L_{ee'}} L_{mn} = 0 \tag{2.38}$$

2.3. Metoda elementelor finite

Metoda elementelor finite are la bază aplicarea unor principii variţionale şi constă în obţinerea unor sisteme de ecuaţii algebrice satisfăcute de un număr finit de valori ale potenţialelor, prin minimizarea unei anumite funcţionale [36], [37].

Pentru cîmpul electric în medii izotrope, fără polarizaţie permanentă, funcţionala are forma :

$$F_e = \int_S \left(\int_0^E e\,de - \rho_V V \right) ds \tag{2.39}$$

$$F_m = \int_S \left(\int_0^B b\,db - JA \right) ds \tag{2.40}$$

F_e şi F_m sînt funcţionale-energie.

Condiţia de extremum impusă integranzilor , care este dată de ecuaţia lui Euler :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}\right] - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \tag{2.41}$$

în care φ reprezintă pe V, respectiv A, împreună cu expresiile :

BUPT

$$E^2 = (\frac{\partial V}{\partial x})^2 + (\frac{\partial V}{\partial y})^2 \text{ și } B^2 = (\frac{\partial A}{\partial x})^2 + (\frac{\partial A}{\partial y})^2 ,$$

devine

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}) = -\rho_V , \qquad (2.43)$$

respectiv

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nu \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial A}{\partial y}) = - J \qquad (2.44)$$

Ecuațiile (2.43) și (2.44) reprezintă formele locale în V, respectiv în A, a legii fluxului electric, respectiv, a legii circuitului magnetic.

Se aleg în domeniul S, N_s puncte interioare "potrivit repartizate" și un număr N_f de puncte pe frontiera Γ (fig.2.8).

Aflarea sistemelor de ecuații algebrice pe care le satisfac potențialele V respectiv A, prin această metodă, se efectuează prin minimizarea funcționalelor (2.39) respectiv (2.40), în anumite condiții de aproximare a variației acestor potențiale în subdomenii delimitate de linii poligonale obținute prin unirea unor puncte vecine. Expresia "potrivit repartizate" se interpretează prin "eroare de trunchiere acceptabilă".

Se vor utiliza în cele ce urmează elementele finite de ordinul 1, cu alte cuvinte aproximații liniare pentru V și A și se va admite constanța lui ε și ν, în interiorul fiecăruia din triunghiurile elementare în care se divizează S (fig.2.8) [36] , [37] , [38] ; se pot face și exprimări prin polinoame de ordin superior, însă expresiile obținute astfel, sînt mai complicate.

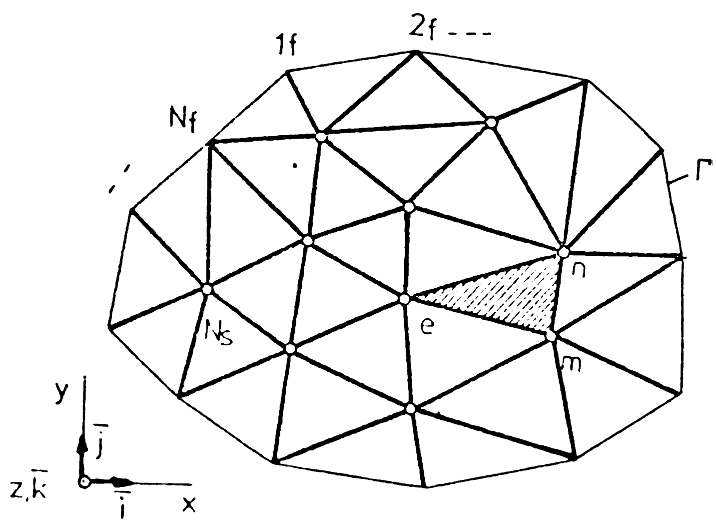


Fig.2.8. Discretizarea domeniului S (delimitat de frontieră) pentru elementele finite de ordinul 1.

Pentru un triunghi elementar oarecare, emn, în cazul problemei de cîmp electric, se aproximează deci :

BUPT

$$V\ (x,y) = \alpha_{V1} + \alpha_{V2}x + \alpha_{V3}y \qquad (2.45)$$

iar pentru problema de cîmp magnetic,

$$A\ (x,y) = \alpha_{A1} + \alpha_{A2}x + \alpha_{A3}y \qquad (2.46)$$

În continuare se deduc relațiile între valorile finite doar pentru cîmpul magnetic, relațiile pentru problema de cîmp electric obținîndu-se prin înlocuirea mărimilor : A cu V, ν cu ε și J cu ρ_V .

Expresiile coeficienților α_{Ai} (i = 1,2,3) se deduc impunînd condițiile ca A să ia valorile A_e în punctul e, A_m în m și A_n în n :

$$\begin{aligned} A_e &= \alpha_{A1} + \alpha_{A2}\, x_e + \alpha_{A3} y_e \\ A_m &= \alpha_{A1} + \alpha_{A2}\, x_m + \alpha_{A3} y_m \\ A_n &= \alpha_{A1} + \alpha_{A2}\, x_n + \alpha_{A3} y_n \end{aligned} \qquad (2.47)$$

Din sistemul (2.49) rezultă :

$$\begin{aligned} \alpha_{A2} &= \frac{1}{D}\left[(y_m-y_n)\ A_e+(y_n-y_e)A_m+(y_e-y_m)\right] A_n \quad , \\ \alpha_{A3} &= \frac{1}{D}\left[(x_n-x_m)\ A_e+(x_e-x_n)A_m+(x_m-x_e)\right] A_n \quad , \end{aligned} \qquad (2.48)$$

$$D = (x_m y_n - x_n y_m) + (x_n y_e - x_e y_n) + (x_e y_n - x_m y_e).$$

D fiind dublul ariei triunghiului emn ($D = 2S_\Delta$).

În interiorul triunghiului elementar inducția magnetică are expresia :

$$\bar{B} = \alpha_{A3}\bar{i} - \alpha_{A2}\bar{j} \qquad (2.49)$$

și deci

$$B^2 = \alpha_{A2}^2 + \alpha_{A3}^2 \qquad (2.50)$$

La o distribuție dată a lui J, (în cazul problemelor în care $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$), se poate echivala pentru orice triunghi elementar o valoare medie care înmulțită cu aria $\frac{D}{2}$ a triunghiului respectiv, dă curentul elementar corespunzător acestuia. Astfel, în condițiile acceptate (ν = const. pe triunghi și A - funcție liniară de x și y), funcționala (2.39) este o funcție de valorile A_e($e \in [1,2,\ldots,N_s]$) și condiția de extremum este echivalentă cu N_s condiții :

BUPT

$$\frac{\partial F_m}{\partial A_e} = 0 \tag{2.51}$$

Ţinînd seama de (2.40), (2.46) şi (2.50), după calcule simple rezultă din condiţiile (2.51) rezultă N_s ecuaţii de tipul :

$$A_e \sum_T \nu k_{1T} + \sum_T (A_m \nu k_{2T} + A_n \nu k_{3T}) = \frac{1}{6} \sum_T JD \tag{2.52}$$

unde :

$$k_{1T} = \frac{1}{2D}\left[(y_m - y_n)^2 + (x_n - x_m)^2\right]$$

$$k_{2T} = \frac{1}{2D}\left[(y_m - y_n)(y_n - y_e) + (x_n - x_m)(x_e - x_n)\right] \tag{2.53}$$

$$k_{3T} = \frac{1}{2D}\left[(y_m - y_n)(y_e - y_m) + (x_n - x_m)(x_m - x_e)\right]$$

Indicele "T" indică un triunghi care are unul din vîrfuri în „e" : însumarea se face deci pentru toate triunghiurile cu vîrful comun „e" .

Dacă excitaţia J este o funcţie de timp, se împarte domeniul timp, t, în care se studiază cîmpul, în intervale Δt_k, suficient de mici şi se rezolvă sistemul alcătuit din cele N_s ecuaţii de tipul (2.52) la finalul fiecărui interval Δt_k, utilizînd valorile corespunzătoare pentru ν din curba B(H).

În lipsa densităţii de curent, pentru medii liniare ecuaţia (2.52) devine :

$$A_e \sum_T \nu k_{1T} + \sum_T (A_m \nu k_{2T} + A_n \nu k_{3T}) = 0 \tag{2.54}$$

Pentru probleme de cîmp electric ecuaţia (2.52) se transcrie astfel :

$$V_e \sum_T \varepsilon k_{1T} + \sum_T (V_m \varepsilon k_{2T} + V_n \varepsilon k_{3T}) = \frac{1}{6} \sum_T \rho_V D \tag{2.55}$$

Cîmpurile electrice laplaciene în medii neomogene şi omogene, vor fi descrise de cîte N_s ecuaţii de forma :

$$V_e \sum_T \varepsilon k_{1T} + \sum_T (V_m \varepsilon k_{2T} + V_n \varepsilon k_{3T}) = 0 \tag{2.56}$$

BUPT

respectiv

$$V_e \sum_T k_{1T} + \sum_T (V_n\ k_{2T} + V_n\ k_{3T}) = 0 \qquad (2.57)$$

Revenind la problema de cîmp magnetic şi cunoscînd importanţa curenţilor turbionari în tehnică, se impune precizarea modului de obţinere variţională a ecuaţiilor algebrice şi pentru acest tip de probleme.

S-ar părea că întrucît în expresia lui J (v.rel.(1.19) intră derivata în raport cu timpul a lui $A(x,y,t)$, problema minimizării se complică ştiut fiind că în regim sinusoidal, la transcrierea în complex a mărimilor electromagnetice, J depinde liniar de A. Dificultatea este doar aparentă făcînd observaţia că deducerea formei locale a legii circuitului magnetic pentru cîmpul cvasistaţionar în conductoare masive (1.19) se obţine introducînd pe J dat de (1.19) după procesul de minimizare, aşa încît în procesul de minimizare această mărime poate fi considerată specificată. Ţinînd seama de faptul că în acest caz ea nu mai este constantă pe secţiunea unui conductor, se poate admite o variaţie aproximativă, liniară, pentru ea, pe fiecare element triunghiular, de forma :

$$J\ (x,y) = \alpha_{J1} + \alpha_{J2}x + \alpha_{J3}y \qquad (2.58)$$

constantele $\alpha_{Jk} (k = 1,2,3)$ obţinîndu-se din valorile α_{Ak} în care se înlocuiesc A_e, A_m, A_n cu J_e, J_m, J_n.

Introducînd expresiile (2.46) şi (2.58) în (2.40), din condiţia (2.51) rezultă cele N_e ecuaţii de forma :

$$A_e \sum_T \nu k_{1T} + \sum_T (A_m \nu k_{2T} + A_n\ \nu\ k_{3T}) = \frac{1}{24} \sum_T (2J_e + J_m + J_n) D \qquad (2.59)$$

Relaţia (1.19) rescrisă aici :

$$J = -\sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) + K) \qquad (2.60)$$

primeşte în e,m,n, formele :

$$J_e = -\sigma_e \left(\frac{\partial A_e}{\partial t} + K_e\right),$$

$$J_m = -\sigma_m \left(\frac{\partial A_m}{\partial t} + K_m\right), \qquad (2.61)$$

$$J_n = -\sigma_n \left(\frac{\partial A_n}{\partial t} + K_n\right),$$

BUPT

şi dacă se notează :

$$\frac{2K_e + K_m + K_n}{4} = K$$

din ecuaţia (2.59) rezultă :

$$A_e \sum_T \nu k_{1T} + \sum_T (A_m \, \nu k_{2T} + A_n \, \nu k_{3T}) = \frac{1}{24} \sum_T \sigma \frac{\partial}{\partial t} (A_e + A_m + A_n) D -$$

$$- \frac{1}{24} \sum_T \frac{\partial A_e}{\partial t} D - \frac{1}{6} \sum_T KD \tag{2.62}$$

Pentru regimul sinusoidal în medii omogene la reprezentarea în complex a mărimilor electromagnetice, (2.62) ia forma :

$$\underline{A}_e \sum_T (k_{1T} + j \frac{\mu \sigma \omega}{24} D) + \sum_T \underline{A}_m (k_{2T} + j \frac{\mu \sigma \omega}{24} D) + \underline{A}_n (k_{3T} + j \frac{\mu \sigma \omega}{24} D) =$$

$$= - j \frac{\mu \sigma \omega}{24} \underline{A}_e \sum_T D - \frac{\mu}{6} \sum_T KD \tag{2.63}$$

Ecuaţiile care descriu cîmpul magnetic pentru regimul staţionar, sau cvasistaţionar cu neglijarea vitezei de variaţie a lui A, pentru medii omogene cu repartiţii de densităţi de curent constante pe secţiunile conductoarelor, sau funcţie de punct, se obţin din (2.62), prin particularizări.

2.4. Precizări referitoare la metodele descrise

Metodele descrise au la bază legile fluxului electric şi a circuitului magnetic în formele lor integrale şi locale, sau funcţionale din care se obţin printr-un proces de minimizare, ecuaţiile care exprimă aceste legi, aşa încît e firesc ca în aceleaşi condiţii de aproximare pentru potenţialele φ, sistemele de ecuaţii algebrice care se obţin cu aceste metode, să fie identice.

În fond evaluarea laplacianului funcţiei φ prin diferenţele din expresia (2.9) este identică cu evaluarea lui în condiţiile unor variaţii parabolice de gradul doi a lui φ între trei puncte consecutive de pe fiecare din direcţiile de discretizare sau cu a unor variaţii lineare între două puncte vecine (fig.2.9).

Deci dacă discretizările la ultimele două metode se aleg astfel încît punctele semnificative (nodurile N_s) să se suprapună în mod constant la cele trei metode, rezultatele obţinute prin

BUPT

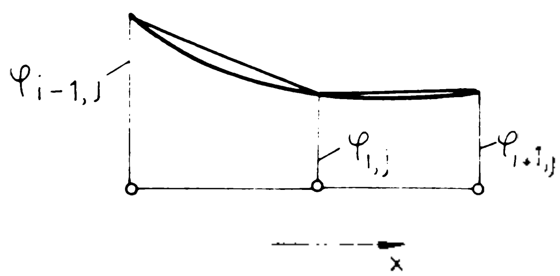


Fig.2.9

aceste metode, în condițiile acceptate pentru potențiale, ar trebui să fie identice.

Pentru exemplificare se consideră discretizarea de la diferențele finite cu $h_1=h_2=h$ (cu pas constant) (fig.2.10) în cazul problemei de cîmp magnetic sinusoidal.

Ecuația (2.35) referitoare la figura 2.10 a se scrie :

$$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 + \underline{A}_4 - 4\underline{A}_e = j\mu\sigma\omega h^2(\underline{A}_e-\underline{A}_s). \qquad (2.64)$$

S-a notat aici : $\underline{A}_s = -\frac{\underline{K}}{j\omega}$

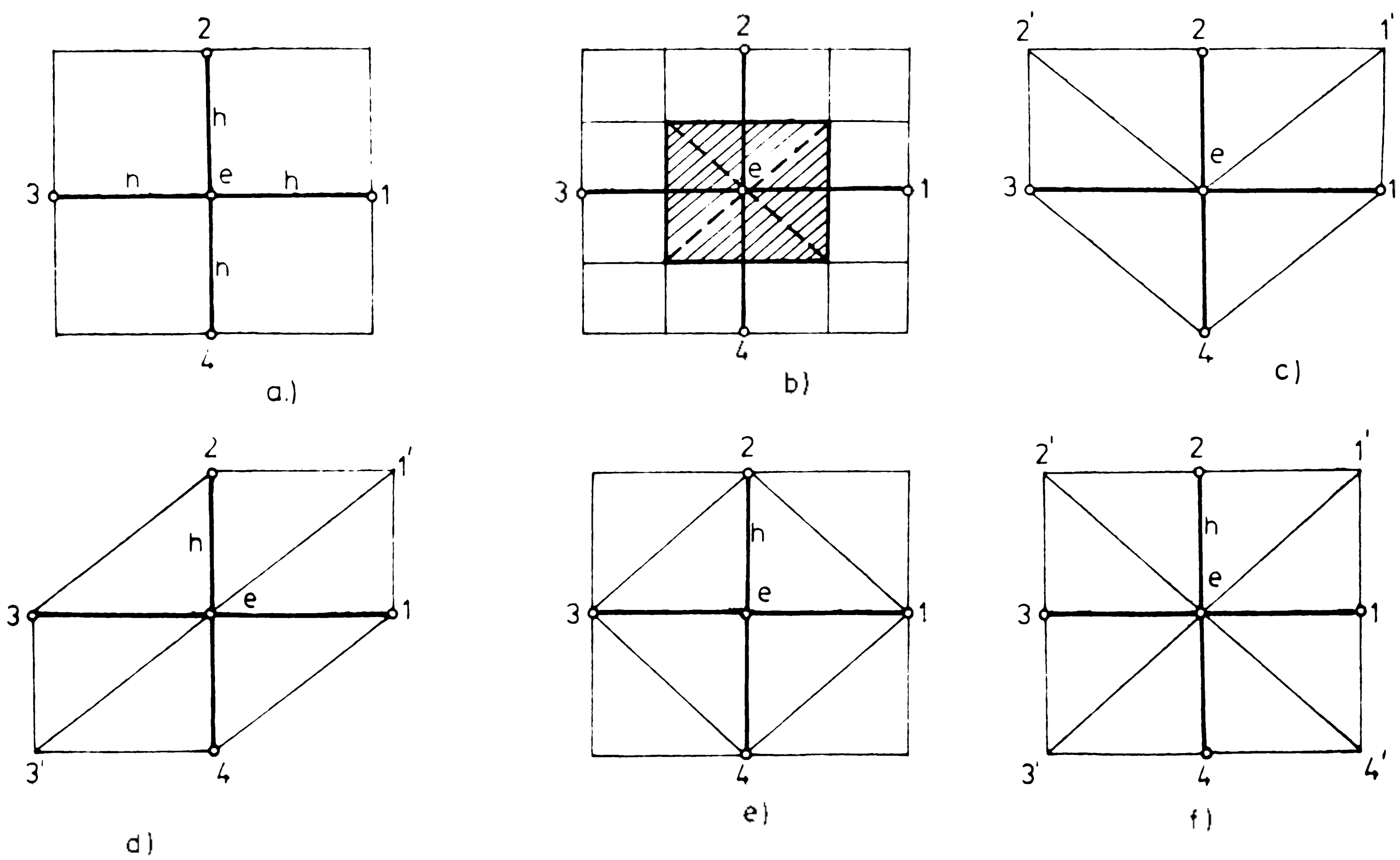


Fig.2.10

Ecuația (2.36) pentru o divizare ca cea din fig.2.10 b primește forma :

$$(\underline{A}_1+\underline{A}_2+\underline{A}_3+\underline{A}_4-4\underline{A}_e)(1-j\frac{\mu\sigma\omega h^2}{12})=j\mu\sigma\omega\, h^2(\underline{A}_e-\underline{A}_s) \qquad (2.65)$$

Ecuația (2.62) pentru discretizările din fig.2.10 c și d se reduce la (2.65).

Pentru discretizările din fig.2.10 e și fig.2.10 f, prima parte a ecuației (2.65) se reproduce în ambele cazuri, dar

BUPT

partea a doua se înmulţeşte cu $\frac{2}{3}$, pentru primul din aceste două cazuri, şi cu $\frac{4}{3}$ pentru al doilea caz. Aceste două discretizări nu corespund individual condiţiilor cerute pentru comparaţia care se face aici dar pot fi utilizate împreună pentru acoperirea completă a lui S întrucît respectă legea circuitului magnetic.

Se observă că ecuaţiile (2.64) şi (2.65) se deosebesc numai prin factorul $(1-j\frac{\mu\sigma\omega h^2}{12})$ care intervine în (2.65) şi care se datorează aproximării mai bune a repartiţiei densităţii de curent pe suprafaţa unui triunghi elementar emn în cadrul metodelor care dau ecuaţia (2.65).

Se cuvin cîteva precizări referitoare la utilizarea rezultatelor obţinute. In primul rînd pentru cîmpurile general variabile, mărimea $\frac{\partial A_k}{\partial t}$ trebuie exprimată la utilizarea calculatorului şi ea prin valori discrete în raport cu timpul, problema respectivă de cîmp fiind cu valori la limită şi iniţiale. Ca atare este utilă aproximarea acestei cantităţi prin diferenţe progresive sub forma :

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} = \frac{A_{k_{\Delta t}} - A_{k_o}}{\Delta t} \tag{2.66}$$

Notînd cu h_t pe Δt (pasul de discretizare a domeniului timp t) rezultă :

$$2h_t \frac{\partial A}{\partial t} = A_{k_{h_t}} - A_{k_o} + 2\varepsilon_{1t} , \tag{2.67}$$

cu :

$$\varepsilon_{1t} = \left(-\frac{\delta^3 t}{6} + \frac{\delta^5 t}{30} \ldots\right) A_k, \tag{2.68}$$

între operatoriile α şi δ (de la diferenţele centrale) fiind relaţia[34] :

$$\alpha^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} . \tag{2.69}$$

În astfel de probleme trebuie rezolvate succesiv N_t sisteme de N_s ecuaţii cu N_s necunoscute, pentru a determina soluţiile problemei de cîmp în fiecare din cele N_t momente finite ale domeniului t. Pentru problemele de cîmp în medii neliniare, pentru rezolvarea unui sistem de ecuaţii se utilizează metoda aproximaţiilor succesive.

Analog exprimarea valorilor lui $\bar{B}$ sau $\bar{E}$ în funcţie de valorile discrete ale potenţialelor, este afectată de erori simi-

BUPT

lare cu cea dată de (2.68) ţinînd bineînţeles seama că $\bar{B}$ şi $\bar{E}$ depind de derivatele parţiale în raport cu spaţiul.

O altă precizare se referă la elasticitatea discretizărilor pe care le oferă cele trei metode.

Discretizarea corespunzătoare metodei diferenţelor finite este relativ rigidă, trecerile de la un pas de discretizare la altul efectuîndu-se greoi, urmărirea frontierei cu segmente paralele cu cele două direcţii de discretizare fiind uneori imposibilă pentru anumiţi paşi de divizare a domeniului.

Discretizarea tip "celulă" este extrem de elastică în privinţa formelor celulelor însă presupune o atenţie deosebită în fixarea geometriilor prin lungimi şi unghiuri.

Metoda elementelor finite oferă comoditate maximă în fixarea geometriilor triunghiurilor elementare şi, în general, eforturi minime în alegerea discretizării potrivite.

În privinţa erorilor de trunchiere se poate aprecia că întrucît pentru discretizările fundamentale (cu paşi constanţi) relaţiile între valorile discrete sînt identice cu cele ale metodei diferenţelor finite, evaluarea acestor erori în caz general poate fi efectuată cu expresiile aferente acestei metode.

Sistemele de ecuaţii date de cele trei metode pot fi rezolvate cu calculatorul cifric [39], [40], [18], [36], etc., sau modelate prin reţele analizoare : acest ultim mod de rezolvare se are în vedere în continuare.

III. CONDIŢII DE UNICITATE

Pentru unicitatea soluţiilor ecuaţiilor lui Laplace, Poisson şi Fourier şi respectiv a sistemelor de ecuaţii algebrice la rezolvarea cărora se reduce analiza numerică a cîmpurilor electrice şi magnetice, e necesar să se impună una, două sau toate trei tipurile de condiţii [41], [42], [43], [44] :

a. Condiţii de frontieră;

b. Condiţii impuse surselor (ρ_v, $\bar{J}$) ;

c. Condiţii iniţiale.

Pentru fiecare problemă concretă, pe lîngă geometria sistemului studiat sînt necesare şi funcţiile $\sigma(x,y,T)$, $\varepsilon(x,y,E)$, $\mu(x,y,H)$.

Conductivitatea electrică este cu bună aproximaţie, în multe probleme de cîmp, funcţie doar de punct şi doar în cazul conductoarelor masive se pare că e necesară şi dependenţa ei de temperatură, T, [35] (în măsura în care T este o funcție de J, și σ este funcția de J).

Permitivitatea ε este pentru materialele izolante utilizate în tehnica curenților tari, o funcție independentă de intensitatea cîmpului electric, E, dar variază funcție de punct (izolația mașinilor și aparatelor electrice este neomogenă).

Permeabilitatea magnetică, μ, este aproximativ egală cu constanta μ_0 pentru foarte multe materiale utilizate în construcția sistemelor electrotehnice [46] și este funcție de punct și intensitatea cîmpului magnetic doar în miezurile feromagnetice saturate. La utilizarea materialelor feromagnetice în domeniul caracteristicii de magnetizare pentru care $\mu \gg \mu_0$ și inducția B se poate exprima ca o funcție liniară de H, iar în unele calcule se poate introduce valoarea infinită pentru μ, [3] , [6] etc.

Ca urmare a acestor observații condițiile de unicitate vor fi prezentate în general pentru mediile liniare, precizîndu-se la locul potrivit modul de utilizare a acestora pentru mediile neliniare la neglijarea histerezisului, în lipsa magnetizației permanente.

Condițiile de frontieră întîlnite în electrotehnică, pentru potențiale, sînt de următoarele tipuri [2] :

1. Condiții de tip Dirichlet

$$\varphi_\Gamma = f_1(x_\Gamma , y_\Gamma) \tag{3.1}$$

unde φ_Γ reprezintă potențialele V_Γ , $V_{H\Gamma}$ sau A_Γ , după cum studiul se referă la cîmpul electric sau la cel magnetic.

Fucnția $f_1(x_\Gamma , y_\Gamma)$ este cunoscută în fiecare punct (x_Γ , y_Γ) de pe conturul Γ.

2. Condiții de tip Neumann.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_\Gamma = f_2(x_\Gamma , y_\Gamma) \tag{3.2}$$

cu $f_2(x_\Gamma , y_\Gamma)$ cunoscută.

Derivata normală $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ reprezintă pentru cîmpul electric, componenta normală a intensității cîmpului electric la curba Γ, pentru cîmpul magnetic, componenta normală a intensității cîmpului magnetic sau componenta tangențială a inducției magnetice (după cum se lucrează cu mărimea V_H sau A).

3. Condiții de tip omogen (în cazurile în care curba se extinde la infinit), [46] :

BUPT

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to \infty} \left[(x^2+y^2)\, H\right] = \text{finită} \qquad (3.3)$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to \infty} \left[(x^2+y^2)\, E\right] = \text{finită}$$

sau referitor la potenţiale V şi A,

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to \infty} \left(\sqrt{x^2+y^2}\,.V\right) = \text{finită}$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to \infty} \left(\sqrt{x^2+y^2}\,.A\right) = \text{finită} \qquad (3.4)$$

Condiţiile (3.3), (3.4) presupun automat anularea funcţiilor f_1 şi f_2 la infinit.

Pentru un sistem complet de n conductoare suma curenţilor, $i_k(t)$, este nulă şi de asemenea suma sarcinilor lineice, q_k, este nulă :

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0 \; ; \quad \sum_{k=1}^{n} q_k(t) = 0. \qquad (3.5)$$

În regim cvasistaţionar, pentru corpuri liniare, cilindrice, paralele, în repaus, cîmpul electric poate fi analizat prin intermediul componentelor sale : longitudinală (în direcţia generatoarelor suprafeţelor cilindrice care delimitează corpurile) şi transversală (conţinută în planul normal) suprafeţelor cilindrice.

Cîmpul electric longitudinal este în interdependenţă cu cîmpul magnetic al sistemului electromagnetic, iar cel transversal se poate studia independent, pentru determinarea celui din urmă fiind valabilă următoarea teoremă de unicitate [44] ,[46] : în dielectricul foarte slab conductor în fiecare moment şi în fiecare plan transversal, potenţialul electric transversal este univoc determinat de repartiţia sarcinii în dielectric şi de potenţialele celor n conductoare ale sistemului, prin aceleaşi relaţii ca în problema electrostatică corespunzătoare.

Cum în afara unor probleme speciale nu există repartiţie de sarcină în dielectric, rezultă că pentru cîmpurile electrice transversale trebuie rezolvată doar o ecuaţie de tip Laplace.

Pentru cîmpul magnetic plan-paralel, transversal al sis-

BUPT

temului considerat în [44] și [46] este demonstrată următoarea teoremă de unicitate : cîmpul magnetic plan-paralel, transversal al unui sistem complet de "n" conductoare, potențialul magnetic vector, repartiția de curent și căderile de potențial sînt univoc determinate în regim cvasistaționar, pentru $t > 0$, de funcțiile de timp $i_k(t)$ din n-1 conductoare și de repartiția inițială a curenților, dacă se adoptă la infinit condițiile (3.4).

Pentru regimul sinusoidal permanent condițiile se restrîng : se cere doar cunoașterea valorilor curenților din n-1 conductoare [46].

Ipoteza existenței sistemelor complete de conductoare este întotdeauna realizată în practică. În cazul unor probleme idealizate în care această condiție nu este satisfăcută, formularea corectă a condițiilor la infinit trebuie studiată separat [47] , de exemplu ca un caz-limită al sistemului complet, cînd unul dintre conductoare se îndepărtează infinit de mult de celelalte.

Condițiile de unicitate prezentate aici pentru cîmpul plan-paralel sînt adevărate și pentru cîmpul plan al sistemelor axial-simetrice [48] .

Cînd domeniul spațial al problemei de cîmp este limitat de curba Γ finită, (Γ nu se extinde la infinit), pe frontieră se impun una din condițiile de frontieră : de tip Dirichlet sau Neumann (dacă e cazul și valorilor lor inițiale).

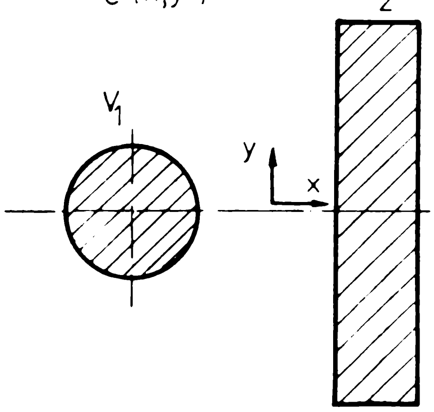
3.1. Condițiile de frontieră pentru cîmpul electric transversal

În problemele de cîmp electric plan-paralel (mai general, bidimensional) condițiile de frontieră sînt de obicei de tip Dirichlet cărora li se asociază pe porțiuni condiții Neumann nule [6] .

Condițiile de tip Dirichlet sînt reprezentate de potențialele pe care le au corpurile încărcate cu sarcini electrice, iar condițiile Neumann-nule intervin pe porțiunile de frontieră care coincid cu linii de cîmp electric.

Există o serie de probleme în care sistemul prezintă una sau mai multe axe de simetrie, axe care coincid cu o linie echipotențială, cu o linie de cîmp, sau segmentată de astfel de linii, alternativ.

BUPT



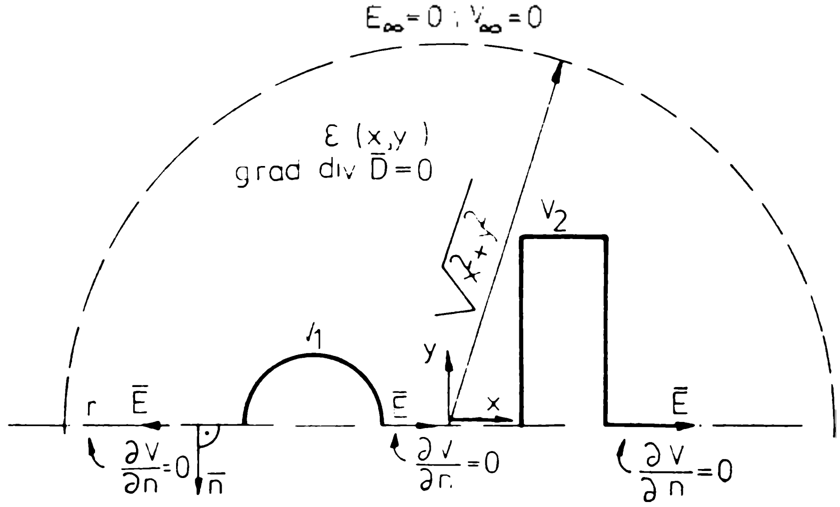


Fig.3.1 a. Sistem de două conductoare încărcate cu sarcini electrice, cu o axă (xx) de simetrie.

Fig.3.1 b. Frontiera şi condiţiile de frontieră pentru sistemul din fig.3.1 a.

În fig.3.1 a, se prezintă un astfel de sistem de două corpuri care prezintă în planul cîmpului o simetrie faţă de o axă. Datorită simetriei respective e necesară analiza cîmpului doar într-un semiplan (fig.3.1 b).

Uneori pentru un sistem de corpuri cilindrice se cunoaşte o suprafaţă echipotenţială S_Γ (cu urma în planul cîmpului, Γ) care cuprinde doar o parte din conductoarele sistemului. Forma acestei suprafeţe şi valoarea potenţialului corespunzător (cunoscut) reprezintă condiţia de separabilitate a celor două subdomenii în care este împărţit domeniul spaţial al problemei de către S_Γ, în baza principiului de echivalenţă.

Suprafeţele de separaţie ale corpurilor cilindrice, metalice sau izolante de permitivităţi diferite, reprezintă suprafeţe de discontinuitate a cîmpului şi pentru acestea se utilizează :

- teorema conservării componentelor tangenţiale ale intensităţii cîmpului electric,

$$\left[\bar{n} \times (\bar{E}_{ex} - \bar{E}_{in})\right] = 0 \qquad (3.6)$$

- teorema saltului componentelor normale ale inducţiei electrice,

$$\left\{\bar{n} \cdot \left[(\varepsilon\bar{E})_{ex} - (\varepsilon\bar{E})_{in}\right]\right\} = \rho_s, \qquad (3.7)$$

unde : $\bar{n}$ este normala exterioară a corpului la care se referă indicii ex (exterior) şi in (interior);

ρ_s - densitatea superficială de sarcină electrică (diferită de zero pe suprafeţele conductoarelor).

3.2. Condiţiile de frontieră pentru cîmpul magnetic plan-paralel

Condiţiile de frontieră pe care trebuie să le satisfacă potenţialul magnetic vector sînt de tip Neumann şi Dirichlet.

Condiţiile de tip Neumann cer cunoaşterea repartiţiei pe conturul Γ a componentei tangenţiale H_τ, a intensităţii cîmpului magnetic :

$$H_\tau = \nu \frac{\partial A}{\partial n} \qquad (3.8)$$

respectiv a derivatei normale a potenţialului magnetic vector. $\bar{\tau}$ este versorul tangentei la conturul Γ şi deci este ortogonal cu $\bar{n}$. Aceste condiţii sînt în general greu de manipulat în analiza cîmpului şi introducerea lor se face comod doar în calculul sau modelarea, care au la bază ecuaţiile obţinute la discretizarea tip celulă.

Atunci cînd sistemul electromagnetic prezintă simetrii, linia de simetrie intersectînd normal liniile de cîmp magnetic, sau în cazurile cînd în sistem există elemente confecţionate din material feromagnetic nesaturat, în probleme respective intervin condiţii Neumann omogene.

În cazul simetriilor domeniul plan al problemei este împărţit în atîtea subdomenii (în care cîmpul se reproduce identic), cîte semiaxe de simetrie există. În aceste cazuri este economic să se analizeze cîmpul doar în unul din subdomenii, introducîndu-se astfel pe semiaxele de simetrie condiţia $H_\tau = 0$.

O condiţie Dirichlet apare în problemele de cîmp magnetic bidimensional, cînd se cunoaşte o linie de cîmp $\bar{B}$ (respectiv $\bar{H}$).

Observînd că

$$(\bar{B} \cdot \mathrm{grad}\ A) = [(\mathrm{grad}\ A \times \bar{k}) \cdot \mathrm{grad}\ A] = 0 \qquad (3.9)$$

rezultă că o linie de cîmp B reprezintă în cazul cîmpurilor bidimensionale o linie

$$A\ (x,y) = \mathrm{constant} \qquad (3.10)$$

Dată fiind importanţa acestei condiţii în analiza cîmpului magnetic, se va prezenta în detaliu cum se exploatează observaţia cît şi cîteva exemple de probleme la care se utilizează

BUPT

această teoremă.

Teorema se poate formula astfel :

Dacă într-un domeniu plan S al cîmpului magnetic se cunoaşte o linie de cîmp magnetic, Γ_B, care înlănţuie un subdomeniu S_Γ, cîmpul magnetic din acest subdomeniu poate fi studiat pe un sistem fictiv alcătuit din conţinutul lui S şi o pînză de curent distribuită pe suprafaţa cilindrică a cărei intersecţie cu planul cîmpului este Γ_B. Valoarea curentului este egală cu suma algebrică cu semn schimbat a curenţilor conductoarelor înlănţuite de linia de cîmp cunoscută.

Teorema este valabilă pentru medii liniare şi izotrope, în regim electromagnetic staţionar şi cvasistaţionar.

Se va demonstra teorema pentru cîmpul electromagnetic cvasistaţionar sinusoidal.

Se consideră pentru simplitate un singur conductor cilindric, parcurs de curentul i şi avînd calea de întoarcere pe la infinit sau divizată prin alte (n-1) conductoare aflate la distanţe finite sau, parţial, infinite, de conductorul considerat, înlănţuit de linia de cîmp Γ_B(situată în planul cîmpului) (fig.3.2 a).

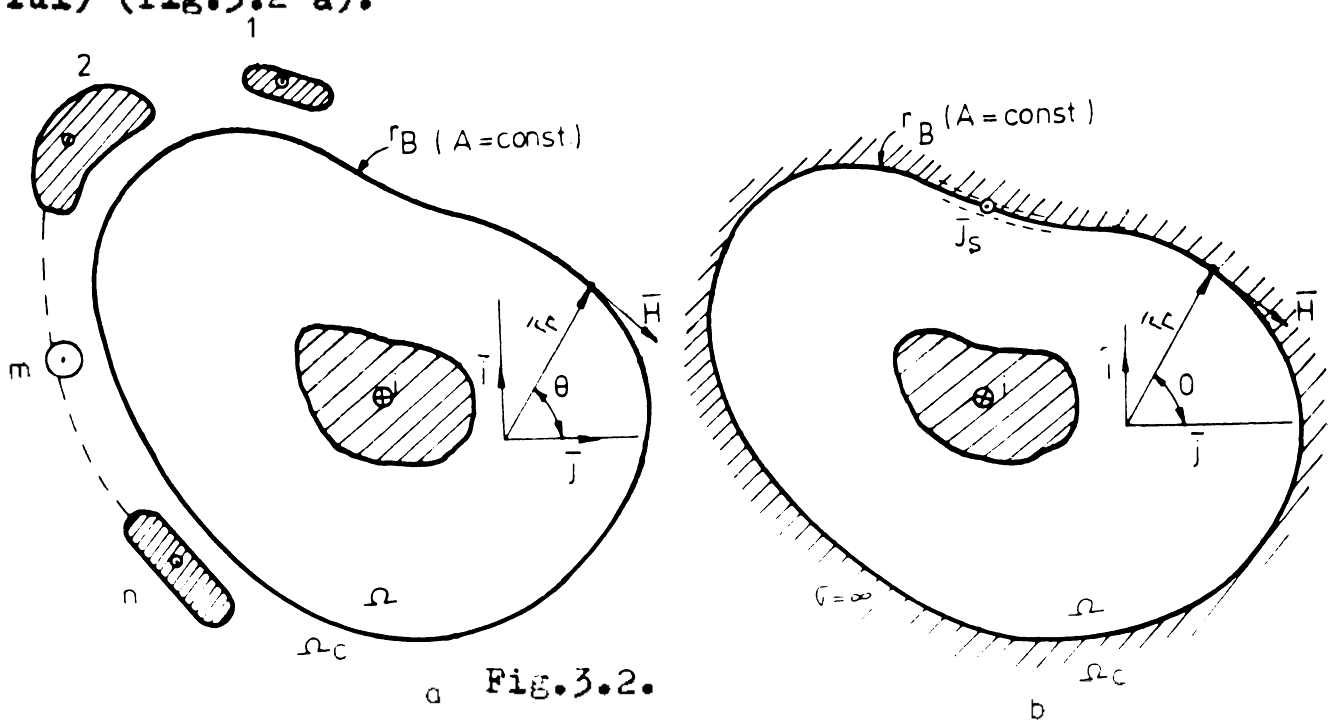


Fig.3.2.

Curba Γ_B împarte planul cîmpului în două subdomenii : unul notat cu Ω, în care este conţinut secţiunea transversală a conductorului considerat şi, altul, Ω_c, complementarul lui Ω, în care se află secţiunile celorlalte conductoare ale sistemului. Se consideră apoi un sistem cu structura lui Ω identică cu a primului sistem (fig.3.2 b), Ω_c fiind umplut cu un conductor perfect ($\sigma = \infty$).

Identitatea soluţiilor H(x,y,t), pentru cele două sisteme, în Ω, presupune ca pe lîngă condiţia

$$\oint (\bar{H}\, \bar{dl}) = i \,, \qquad (3.11)$$

componenta tangenţială a lui $\bar{H}$, identică cu H, să fie aceiaşi pentru toate perechile de puncte de pe Γ_B (identice), la aceleaşi valori ale lui r şi θ.

Cum în Ω_c, din sistemul "de calcul" se află un conductor perfect, în acest conductor va apare o repartiţie strict superficială de curent, în interiorul lui, $\bar{H}$, $\bar{E}$, $\bar{J}$ avînd valori nule [46] (fig.3.3).

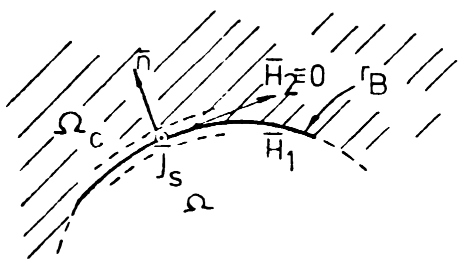


Fig.3.3. Explicativă la relaţia (3.12)

Valoarea densităţii de curent va fi:

$$\bar{J}_s = [\bar{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1)] = -(\bar{n} \times \bar{H}_1) =$$

$$= -(\bar{n} \times \bar{H}) = -H_{\Gamma_B}\, \bar{k} \qquad (3.12)$$

Expresia curentului superficial este:

$$i_s = \oint_B [(\bar{H}_2 - \bar{H}_1)\cdot \bar{dl}] =$$

$$= -\oint_B (\bar{H}\, \bar{dl}) = -i \qquad (3.13)$$

În cazul cînd Γ_B înlănţuie $n_1 \leq n$ conductoare parcurse de n_1 curenţi de diferite sensuri, diferiţi de zero sau parţial identici nuli,

$$i_s = -\sum_{k=1}^{n_1} i_k \,, \qquad (3.14)$$

adică ceea ce se vroia demonstrat.

Această teoremă se poate utiliza cu succes, la analiza cîmpurilor prin modelare, pentru cîteva tipuri de probleme des întîlnite în tehnică.

De exemplu, cînd Γ_B este o linie de simetrie în spectrul cîmpului, închizîndu-se pe la infinit (fig.3.4), analiza cîmpului se poate efectua doar pentru un semiplan, considerînd că prin suprafaţa plană de simetrie, (a cărei urmă în planul cîmpului este Γ_B), se întoarce un curent egal cu suma cu semn schimbat curenţilor dintr-o parte sau alta a acestei suprafeţe.

Sînt situaţii cînd pe porţiuni Γ_B cunoscute, $H \neq 0$, iar pe restul curbei Γ_B, $\bar{H} \approx 0$, respectiv probleme pentru care toată tensiunea

BUPT

magnetomotoare este repartizată pe segmente $\Delta\Gamma_B$ cunoscute : cazul conductoarelor plasate în crestături efectuate în material feromagnetic nesaturat ($\mu_{Fe} \gg \mu_o$).

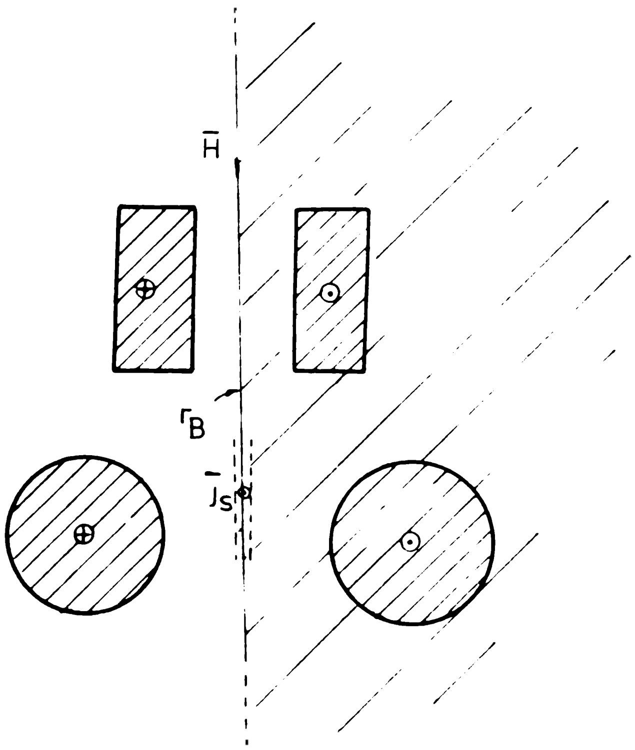


Fig.3.4. Exemplu de simetrie față de o suprafață de cîmp magnetic.

În astfel de probleme curentul i_s circulă prin benzile longitudinale cu urmele Γ_B în planul cîmpului. În fig.3.5 sînt prezentate cîteva exemple tipice.

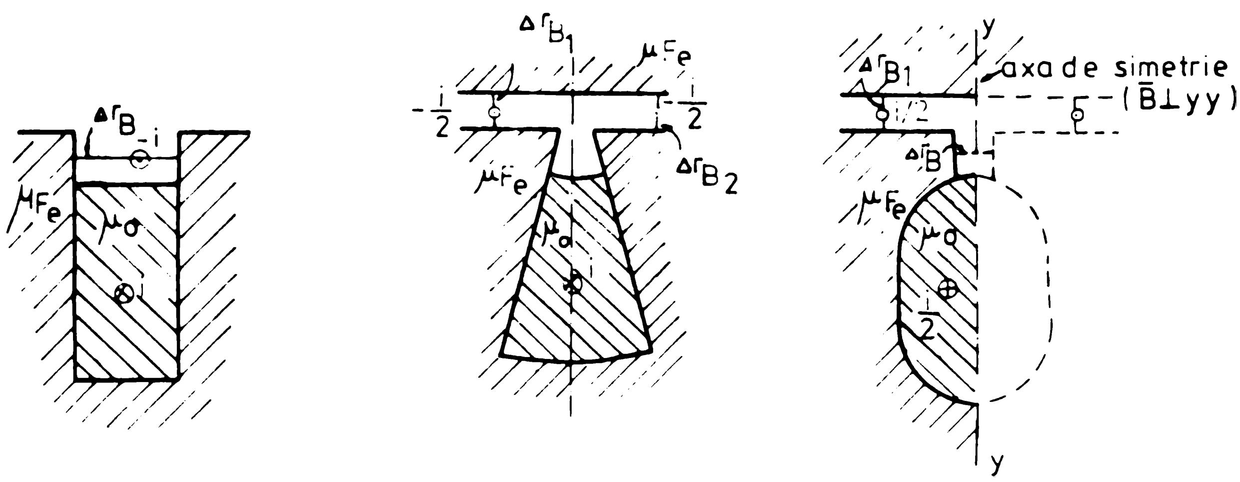


Fig.3.5.

Dacă printr-o metodă oarecare, de exemplu printr-o modelare grosieră, se poate determina o linie de cîmp în bobinajul unui sistem a cărui cîmp magnetic poate fi asimilat cu un cîmp plan-paralel (cazul tratării idealizate a cîmpului de dispersie a unui transformator de mare putere [49]),analiza fină a cîmpului și a interacțiunilor electromagnetice a conductoarelor

BUPT

înlănţuite de Γ_B (sau $\Delta\Gamma_B$) se poate face pe un anumit tip de model utilizîndu-se o scară de modelare corespunzătoare fineţii de determinare dorită utilizînd condiţia de frontieră A = constant pentru noua frontieră Γ_B (fig.3.6)

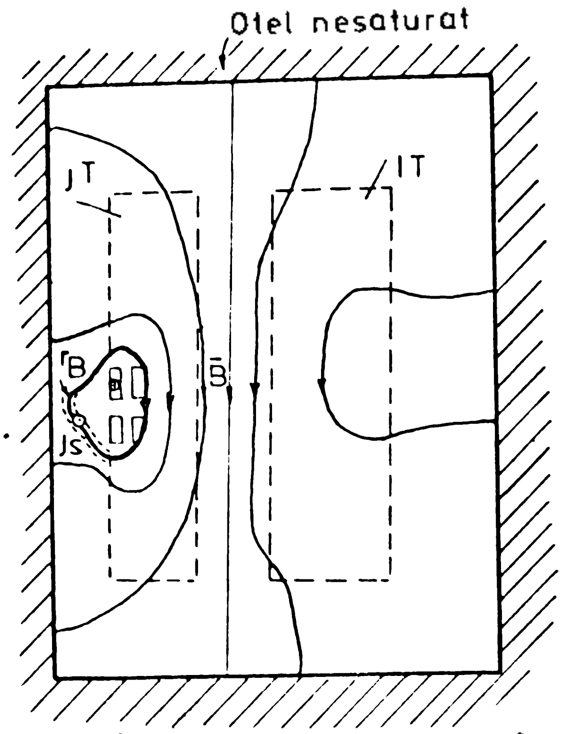


Fig.3.6 - Secţiunea transversală a unui sistem de conductoare drepte,paralele, plasate într-o carcasă feromagnetică.(Modelul idealizat a ferestrei unui transformator de mare putere, pentru calculul cîmpului magnetic de dispersie).

Deseori, în problemele de cîmp magnetic intervin suprafeţe de discontinuitate pentru cîmp, suprafeţe pentru care se utilizează teorema privind saltul componentelor tangenţiale ale intensităţii cîmpului magnetic

$$\left[\bar{n} \times (\bar{H}_{ex} - \bar{H}_{in})\right] = \bar{J}_s \tag{3.15}$$

şi teorema conservării componentelor normale ale inducţiei magnetice :

$$\left\{\bar{n} \cdot \left[(\mu\,\bar{H})_{ex} - (\mu\,\bar{H})_{in}\right]\right\} = 0 \tag{3.16}$$

Pentru o seamă de probleme frontiera domeniului coincide total sau parţial, cu limita de separaţie a două medii dintre care unul este neliniar (oţel saturabil).

În aceste probleme singurele informaţii referitoare la frontieră sînt relaţiile (3.15), (3.16), valabile pentru $\bar{B} = \mu\,\bar{H}$,(μ - scalar) şi tensiunea magnetomotoare de-a lungul conturului frontierei. Se mai cunoaşte şi caracteristica magnetică B(H) ale mediului neliniar.

În aceste cazuri, pe baza caracteristicii B(H), se determină cu metoda aproximaţiilor succesive H_τ (x_Γ , y_Γ) şi în final soluţia pentru A din interiorul domeniului care conţine medii liniare.

În analiza numerică a cîmpurilor condiţiile de frontieră se introduc cu oarecare atenţie mai ales atunci cînd ele sînt de tip

BUPT

Neumann.

Condiţiile Dirichlet se manipulează simplu : în ecuaţiile corespunzătoare nodurilor vecine frontierei, în care apar şi valorile potenţialelor punctelor de pe frontieră, se introduc valorile date $\varphi = f_1(x_\Gamma, y_\Gamma)$ în general fără nici-o dificultate. Dificultăţile care pot apărea privesc metoda diferenţelor finite şi constau în aproximările care se fac din cauza unei imposibilităţi practice de a discretiza corect zona vecină frontierei.

Introducerea condiţiilor Neumann la utilizarea metodei diferenţelor finite cere deseori eforturi considerabile, avînd în vedere că metoda are la bază forme locale ale legilor electromagnetismului. Dat fiind faptul că metoda lui Gaîr utilizează ecuaţii integrale în care intervin direct derivatele normale ale potenţialelor, ea permite introducerea extrem de uşoară a condiţiilor Neumann prin simple medieri a derivatelor normale pe laturile celulelor, aflate pe frontieră. Pentru cîmpul magnetic, de exemplu, pentru o latură mn, se obţine :

$$\int_m^n \bar{H}.\bar{dl} = -\int_m^n \nu \frac{\partial A}{\partial n} dl \approx -\left(\nu \frac{\partial A}{\partial n}\right) L_{mn} = -\nu_{med} \frac{\partial A}{\partial n} L_{mn} \qquad (3.17).$$

La metoda elementelor finite introducerea acestor condiţii se efectuează în general mai greu şi pe o cale mai ocolită. Intre două puncte m şi n

$$\int_m^n (\bar{H}.\bar{dl}) = \int_m^n (\nu \bar{B}\ \bar{dl}) = \nu\left[(x_n - x_m)\alpha_{A3} + (y_m - y_n)\alpha_{A2}\right] =$$

$$= -\nu \frac{\partial A}{\partial n} L_{mn} \qquad (3.18).$$

Trebuie remarcat că în (3.18) circulaţia lui $\bar{H}$ pe L_{mn} s-a efectuat prin interiorul triunghiului vecin frontierei şi expresia obţinută este adevărată cu aproximarea (2.46) numai atunci cînd în celulele vecine frontierei (din interiorul sau exteriorul domeniului S), densitatea de curent are valoare nulă. În caz contrar trebuie să se ţină seama de echivalarea curenţilor ce străbat aceste celule, cu pînze de curent potrivit repartizate pe feţele laterale ale prismelor determinate de celule în direcţia axei z, astfel încît să se respecte legea cir-

BUPT

cuitului magnetic.

Revenind la ultima egalitate (3.18), construind expresia derivatei normale a lui A (dată de această egalitate), în (2.54) şi ţinînd seama că în celulele, rot $\bar{\bar{H}} = 0$, din ecuaţiile (2.54) dispar valorile potenţialului din punctele de pe frontieră şi în termenii liberi apar valorile derivatei normale.

BUPT

B. MODELAREA CÎMPURILOR PLAN - PARALELE

I. GENERALITĂȚI ASUPRA MODELĂRII

Utilizarea teoremelor modelării în deducerea relațiilor între coeficienții de analogie este necesară pentru fundamentarea integrării teoriei modelării cîmpurilor electrice și magnetice în teoria generală a similitudinii, analogiei și modelării. Relațiile se pot deduce mai simplu prin substituția mărimilor unei ecuații cu produsele coeficienților de analogie cu mărimile analoage din ecuația care descrie fenomenul analog celui descris de prima [51],[52] .Acest mod, firesc dealtfel, este susținut mai degrabă de bunul simț decît de un suport teoretic adecvat: din acest motiv, pentru modelele discutate relațiile între coeficienții de asemănare se deduc în baza analizei criteriale.

De obicei, în ecuațiile fizicii matematice intră un număr apreciabil de mărimi fizice complexe (parametri, constante dimensionale etc.) care evident pot fi exprimate prin mărimi fundamentale. O transformare a unităților acestor mărimi nu lasă în genere neschimbat sistemul de ecuații decît în cazul cînd între coeficienții de transformare există o serie de condiții adecvate de compatibilitate.

Condițiile de compatibilitate se obțin pe baza omogenității ecuațiilor ale căror termeni trebuie să fie echidimensionali. Aceste condiții determină așa-numitele criterii de similitudine.

În existența acestor criterii stă deosebirea dintre similitudinea geometrică și cea fizică.

O transformare admisă în sistemul de ecuații împarte totalitatea fenomenelor clasei simile corespunzătoare în grupe de fenomene simile, caracterizate prin proprietatea că oricare ar fi proprietățile fenomenelor grupului se zic asemenea (simile) iar transformarea admisă poartă numele de similitudine.

Analogiile se aplică la fenomene din domenii diferite ale fizicii. Legile asemănătoare ca formă, dar diferite ca parametri care intră în componența lor, determină clasa de analogie.

Ca și la similitudine, în grupa de analogie oricare

BUPT

ar fi particularitățile fenomenelor cercetate, ele pot fi determinate într-un fenomen cunoscut grupului.

Experimentarea în cazul analogiilor diferă de cea de la similitudine prin faptul că fenomenul ales pentru experimentare, ai cărui parametri pot fi ușor măsurați în condițiile de lucru ale laboratorului, face parte din alt domeniu al fizicii decît fenomenul pentru care se aplică rezultatul.

Teoria modelării indică cum trebuie ales fenomenul experimentat din grupa de similitudine sau de analogie atunci cînd, în locul fenomenului dat, imposibil sau greu de explorat, se analizează un altul aparținînd grupului de similitudine sau de analogie din care fac parte ambele.

Astfel, se alege un alt fenomen de aceeași natură cu primul sau de natură diferită, la care variația diferiților parametri identici sau analogi să fie în limitele rezonabile posibilităților de măsurare sau intențiilor experimentatorului. Pentru că rezultatele cercetării fenomenului ales pentru experimentare se poate folosi la determinarea tuturor condițiilor în care se desfășoară cel dintîi, este necesar ca cele două fenomene să aibă condiții de unicitate corespunzătoare, criterii de similitudine sau analogie identice, deci ca fenomenele să facă parte din același grup de similitudine sau analogie; în felul acesta fenomenul al doilea constituie modelul primului fenomen care se numește original.

Condițiile enumerate mai sus decurg din cele trei teoreme ale similitudinii [50], [51], [52] :

1. Teorema produselor (sau teorema π) spune că o ecuație poate fi scrisă doar cu n-k termeni complecși adimensionali, n fiind numărul mărimilor care intră în ecuația respectivă, iar k, numărul de mărimi fundamentale din această ecuație.

Fiind dată deci ecuația :

$$f(a_1, a_2), \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n) = 0 \qquad (1.1)$$

care conține k mărimi dimensionale primare $a_1, a_2, \ldots, a_k$ și n-k mărimi secundare $b_{k+1}, \ldots, b_n$, conform teoremei π aceasta se mai poate scrie :

$$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-k}) = 0 \qquad (1.2)$$

în care

BUPT

$$\pi_j = \frac{b_{k+j}}{\prod_{i=1}^{k}(a_i)^{r_i}} \qquad (1.3)$$

sînt termeni adimensionali numiţi criterii.

Pentru aplicarea teoremei π se impune, în prima instanţă, ca din rîndul mărimilor fizice care determină fenomenul să se aleagă mărimile care pot fi considerate fundamentale.

Trebuie subliniat că forma în care apare legătura dintre mărimile fizice depinde în mare măsură de modul cum s-a făcut alegerea mărimilor fundamentale. Ca mărimi fundamentale pot fi alese fie mărimile fundamentale universal admise ale sistemului de unităţi de măsură în care se lucrează, (SI, de exemplu), fie un număr oarecare de mărimi fizice care intervin în fenomenul studiat, alese independent de mărimile fundamentale ale sistemului de unităţi în care se lucrează. În acest ultim caz ele trebuie să îndeplinească următoarele condiţii :

- să fie independente dimensional;
- dimensiunile lor să permită exprimarea dimensională a tuturor mărimilor derivate de care depinde fenomenul.

2. Pornind de la condiţiile de similitudine ale fenomenelor fizice, şi anume scriind identitatea formală a ecuaţiilor la similitudine, se poate scrie pentru două fenomene A şi V cu mărimile esenţiale deduse din legea de conduită :

$$f(a_1^A,\ a_2^A,\ldots,\ a_k^A,\ b_{k+1}^A,\ldots,\ b_n^A) = 0 \qquad (1.4)$$

$$f(a_1^V,\ a_2^V,\ldots,\ a_k,\ b_{k+1}^V,\ldots,b_n^V) = 0$$

în care f este o funcţie necunoscută, însă unică, iar a_i^A ,b_i^A şi a_i^V, b_i^V, sînt mărimile corespunzătoare din cele două ecuaţii asemănătoare.

Utilizînd teorema produselor şi introducînd în formele adimensionale relaţiile dintre A şi V, rezultă :

$$\pi_j^A = \pi_j^V \qquad (1.5)$$

Adică un şir de fenomene corespunzătoare unui sistem de ecuaţii formează un grup de fenomene asemenea, fiecare dintre criteriile respective de similitudine are o valoare unică pentru toate fenomenele grupului.

Această teoremă permite extinderea imediată a rezultatelor unei singure experienţe în întregul grup de fenomene sim-

BUPT

ple sau analoage, care este determinat prin invariaţia (egalitatea valorilor) criteriilor de similitudine.

3. Mulţimea fenomenelor determinate din sisteme de ecuaţii şi condiţii de unicitate date, alcătuieşte un grup de fenomene numai dacă mărimile care intră în condiţiile de unicitate formează un grup de similitudine şi criteriile de similitudine care se deduc din ecuaţii, fiind alcătuite cu mărimile acestora, au valori unice.

Necesitatea condiţiilor indicate de această teoremă decurge direct din teorema întîia.

Pentru această teoremă nu se poate da o demonstraţie generală, deoarece o formulare completă a condiţiilor de unicitate nu e cunoscută.

Teoremele similitudinii se aplică sub aceeaşi formă şi la analogie. Astfel, pentru toate fenomenele grupului de analogie, criteriile care corespund au aceeaşi valoare. Sînt fenomene analoage acelea ale căror condiţii de unicitate sînt corespunzătoare şi ale căror criterii corespunzătoare au aceeaşi valoare.

La analogie şi mai mult la similitudine, corespondenţele biunivoce care se pot stabili între diversele mărimi fizice ale originalului şi ale modelului se observă imediat. În modelarea cîmpului electromagnetic ele se pun în evidenţă prin factorii de similitudine sau de analogie. Aceşti factori sînt definiţi de rapoartele dintre mărimile din original şi corespondentele lor din model. De exemplu, notînd o mărime din original cu A şi pe cea corespunzătoare din model V_m factorul de analogie al acestora va fi:

$$k_A = \frac{A}{V_m} \qquad (1.6)$$

Cu precizările făcute, de altfel foarte utile pentru a putea încadra corect sub aspect teoretic modelarea cîmpurilor electromagnetice în teoria generală a modelării, se pot deduce fără nici-o dificultate condiţiile de asemănare original-model şi corespondenţele optime şi corecte între diversele mărimi care descriu cele două fenomene aparţinînd aceleiaşi grupe de similitudine sau analogie.

Ţinînd seama de cele două tipuri de ecuaţii care trebuie rezolvate (1.29-A şi 2.1-A) se vor căuta fenomene caracterizate prin ecuaţii asemănătoare ca formă, se vor analiza dimensional reducîndu-se la formele lor criteriale şi din condiţiile impuse de teoremele a II-a şi a III-a se vor obţine relaţiile între

BUPT

coeficienţii de corespondenţe, relaţii cu care apoi, în fiecare problemă concretă, se proiectează modelul optim indicat simularea cîmpului.

Trebuie remarcate trei tipuri de modelări care s-au impus în practica analizei cîmpului electric şi respectiv magnetic şi anume : modelarea în medii rezistive şi capacitive (mediul rezistiv fiind un electrolit, hîrtia electroconductoare sau în general un strat electroconductor de rezistivitate mare, în raport cu cea a metalelor : Cu, Ag etc.), modelare pe reţele analizoare RC şi modelarea probabilistică.

II. MODELAREA ÎN MEDII REZISTIVE ŞI CAPACITIVE

Acest tip de modelare are la bază ecuaţiile cu derivate parţiale pe care le satisfac potenţialele V şi A.

Se cuvine remarcat faptul că în electrotehnică se găsesc rareori probleme de cîmp electric cu distribuţie volumetrică de sarcina electrică aşa încît problema generală a modelării se va prezenta doar pentru cîmpul magnetic, insistîndu-se la locul cuvenit asupra acelui electric fără surse volumetrice de sarcină (în medii diectrice, omogene, neomogene şi cu anizotropie idealizată).

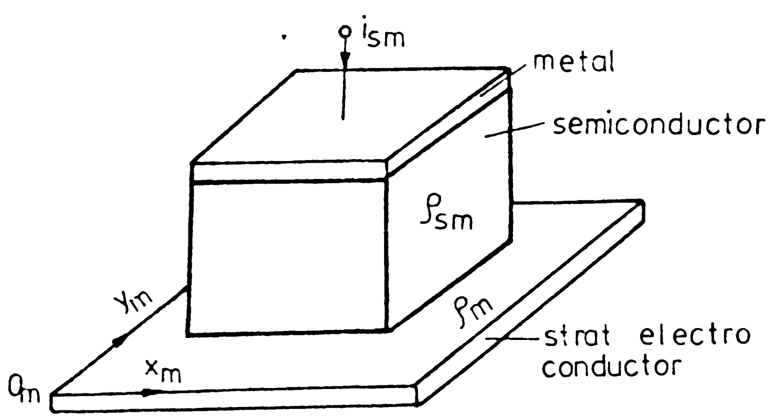
Se va căuta deci un fenomen uşor determinabil experimental aparţinînd clasei de analogie descrisă de ecuaţia (1.24-A).

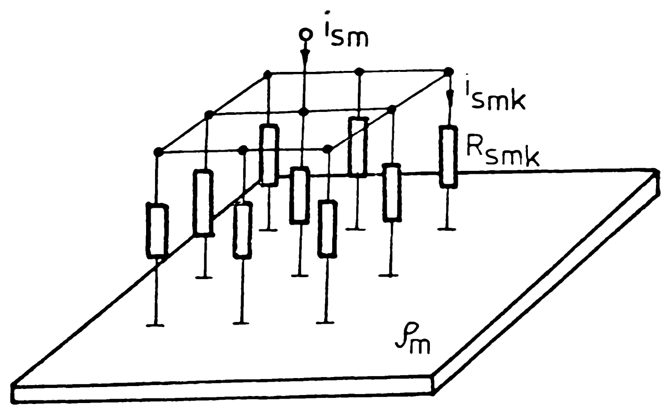
2.1. Principiul metodei

Se consideră în acest scop un strat electroconductor de electrolit, hîrtie grafitată etc., avînd grosimea h_m funcţie de două coordonate x_m şi y_m ale unui sistem cartezian ortogonal (x_m , y_m, z_m), una din feţele stratului fiind conţinută într-un plan paralel cu planul $z_m = 0$. În acest strat de rezistivitate ρ_m cu mult mai mare decît rezistivităţile metalelor sau aliajelor obişnuite (Al, Cu, Am), se injectează prin una din feţele lui, curenţii electrici i_{mak} ($k=1,\dots,N_s$; N_s este numărul curenţilor). Injectarea poate fi făcută prin piese semiconductoare (fig.2.1 a) de rezistivităţi $\rho_{ms} \gg \rho_m$, sau prin rezistenţe de valori adecvate (fig.2-1 b) astfel încît valorile acestor curenţi să poată fi fixate independent de stratul cu care sînt în contact. La alimentarea ansamblului cu curenţi alternativi, curenţii pot fi injectaţi prin condensatoare în număr şi de valori ale capacităţilor potrivite.

BUPT

La injectarea distribuită (prin rezistențe sau capacități) se poate echivala o repartiție medie de densitate de curent $\bar{J}_{ms}$ pentru fiecare zonă S_{ms} de injecție, $\bar{J}_{ms}$ avînd direcția (nesemnificativă de altfel) și sensul dorit și bine determinat. Ansamblul de elemente de injecție pentru un curent poate fi identificat sub acest aspect cu o piesă semiconductoare (fig.2.1 c),bineînțeles cu condiția ca elementele pasive de injecție R_{ms} sau C_{ms} să fie implantate în mediul electroconductor la distanțe suficient de mici încît $J_{ms}(x_m,y_m)$ - densitatea medie de "calcul" corespunzătoare elementului de suprafață din jurul punctului de injecție - să fie echivalentă cu densitatea de curent medie din același element de suprafață din piesa semiconductoare.





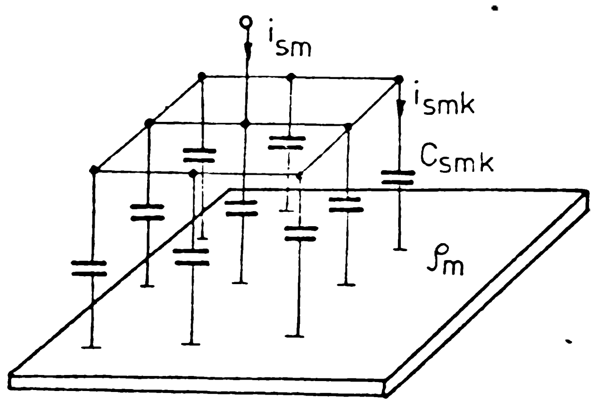
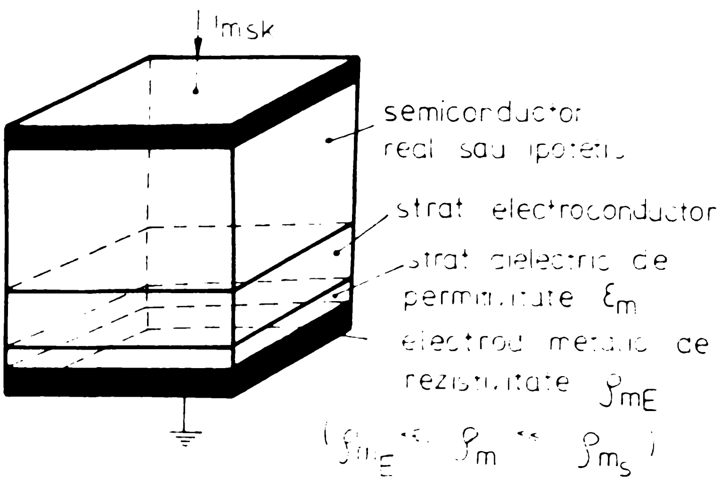


Fig.2.1. Moduri de injecție a curenților în model :

a. printr-o piesă semiconductoare;
b. prin rezistori;
c. prin condensatoare.

Sistemul se consideră ipotetic (sub aspectul existenței lui J_{ms}) dacă injecția se efectuează prin elemente distribuite R_{ms} (fig. 2.1 b) sau C_{ms} (fig.2.1.c).

Se mai admite ca pe cealaltă față a stratului electroconductor se află dispus un strat condensator, uniform repartizat pe proiecția S_{ms} a bazei piesei semiconductoare, pe această față;se crează astfel un sistem de capacități uniform distribuite,una din armăturile unui condensator fiind comună, alcătuită dintr-un electrod metalic legat la masă, iar celelalte în număr infinit de mare fiind determinate de porţiunea corespunzătoare din stratul electroconductor (fig.2.2).



(fig.2.2.)

Din acest ansamblu se detaşează un element de volum paralelipipedic a cărui bază inferioară se află conţinută în planul electrodului metalic al stratului condensator, iar feţele laterale sînt normale pe baza inferioară, baza superioară fiind paralelă cu cea inferioară şi la înălţime arbitrară prin materialul semiconductor. Se admite ca direcţia densităţii de curent J_{ms} este paralelă cu muchiile laterale ale elementului de volum considerat şi evident, cu această condiţie semiconductorul nu poate fi decît ipotetic.

Bazele au ariile infinit mici $dx_m\ dy_m$. Elementul de volum este prezentat în fig.2.3.

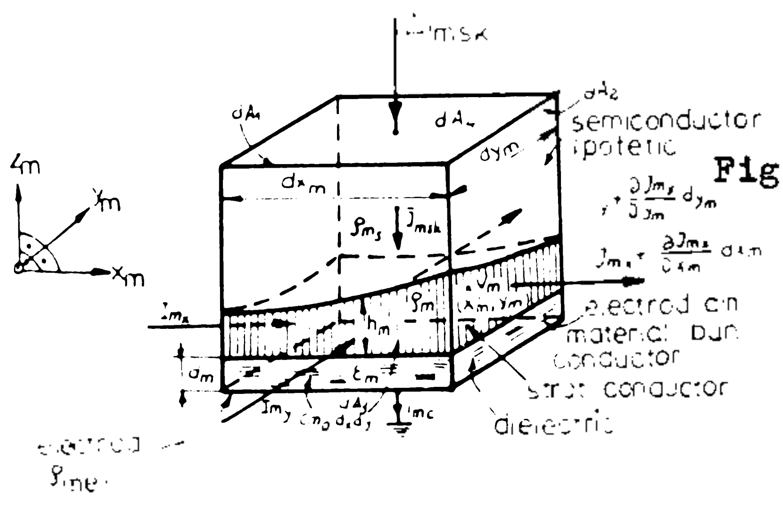


Fig.2.3. Explicativă la relaţiile (2.7), (2.8) şi (2.9).

Densitatea de curent $\bar{J}_m$ într-un punct din stratul electroconductor are trei componente

$$\bar{J}_m = J_{mx}\bar{i} + J_{my}\bar{j} + J_{mz}\bar{k} \qquad (2.7)$$

Ţinînd sema că $\rho_{ms} \gg \rho_m$, la aplicarea legii conservării sarcinii

$$i_m = - \frac{dq_m}{dt_m} , \qquad (2.8)$$

pentru volumul elementar considerat în fig.2.1 (mai puţin volumul electrodului conectat la pămînt), neglijînd infiniţii mici de ordin superior lui 2, se obţine :

$$\frac{\partial}{\partial x_m} (h_m \frac{\partial J_{mx}}{\partial x_m}) + \frac{\partial}{\partial y_m} (h_m \frac{\partial J_{my}}{\partial y_m}) - J_{ms} = - C_{mo} \frac{dV_m}{dt_m} \qquad (2.9)$$

cu : C_{mo} - capacitatea corespunzătoare stratului dielectric pe unitatea de suprafaţă de electrod ;

V_m - potenţialul electrocinetic al punctului de coordonate (x_m, y_m) din stratul electroconductor;

J_{ms} - densitatea curentului (reală sau de calcul) din piesa semiconductoare (reală sau ipotetică).

Cu legea lui Ohm în forma locală

$$\bar{J}_m = \sigma_m \bar{E}_m, \ (\sigma_m = \frac{1}{\rho_m}) \qquad (2.10)$$

şi expresia intensităţii cîmpului electric $\bar{E}_m$ în funcţie de potenţialul V_m

$$\bar{E}_m = - \text{grad } V_m , \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m} (\frac{h_m}{\rho_m} \frac{\partial V_m}{\partial x_m}) + \frac{\partial}{\partial y_m} (\frac{h_m}{\rho_m} \frac{\partial V_m}{\partial y_m}) = C_{mc} \frac{dV_m}{dt_m} - J_{ms} ; \qquad (2.12)$$

aceasta în ipoteza că şi V_m este o funcţie de punct.

În lipsa curentului de injecţie, din ecuaţia (2.12) ar lipsi J_{ms} iar în absenţa stratului condensator din această ecuaţie se suprimă primul termen al membrului doi. Pentru porţiunile din pătura electroconductoare lipsite de injecţii de curent şi de scurgeri de sarcină la pămînt, ecuaţia satisfăcută de potenţialul V_m va menţine din ecuaţia (2.12) primul membru, membrul al doilea fiind identic nul.

Ecuaţiile cu derivate parţiale pe care le satisface V_m (x_m, y_m) în diferitele zone ale sale vor fi deci :

$$\frac{\partial}{\partial x_m} (\frac{1}{\rho'_m} \frac{\partial V_m}{\partial x_m}) + \frac{\partial}{\partial y_m} (\frac{1}{\rho'_m} \frac{\partial V_m}{\partial y_m}) =$$

BUPT

$$= \begin{cases} C_{mo}\dfrac{dV_m}{dt_m} - J_{ms}\ , \text{ pentru cazul general prezentat;} & (2.13a) \\ C_{mo}\dfrac{dV_m}{dt_m}\ , \text{ pentru zonele lipsite de curenţi } i_{ms}; & (2.13b) \\ - J_{ms}\ , \text{ pentru zonele lipsite de strat condensator;} & (2.13c) \\ 0\ , \text{ pentru zonele fără curenţi } i_{ms} \text{ şi fără strat condensator} & (2.13d) \end{cases}$$

În ecuaţiile de mai sus s-a notat prin ρ'_m, expresia :

$$\rho'_m = \frac{\rho_m}{h_m} = \frac{1}{h_m \sigma_m} \qquad (2.14)$$

Ecuaţiile care descriu cîmpul magnetic în medii neomogene, se pot grupa într-un mod asemănător ecuaţiilor (2.13) :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right) =$$

$$= \begin{cases} \sigma\dfrac{\partial A}{\partial t} - J_s\ , \text{ pentru zonele corespunzătoare secţiunilor conductoarelor alimentate cu curenţii } i_k \text{ în care nu se neglijează curenţii turbionari ;} & (2.15a) \\ \sigma\dfrac{\partial A}{\partial t}\ , \text{ în conductoare parcurse doar de curenţi turbionari } (i_k = 0); & (2.15b) \\ - J_s, \text{ în conductoare alimentate în curent continuu sau în curent alternativ (cu neglijarea curenţilor turbionari);} & (2.15c) \\ - 0\ , \text{ în spaţiile dintre conductoare} & (2.15d) \end{cases}$$

$J_s = -\sigma K$ este densitatea medie de curent dintr-un conductor.

Din compararea ecuaţiilor (2.13) cu (2.15) rezultă că fenomenele descrise de ele aparţin aceleiaşi clase de analogie astfel încît prin fenomenul descris (2.13) se poate analiza cîmpul magnetic plan-paralel în diversele regimuri electromagnetice.

Fenomenul caracterizat de (2.13), indicat prin litera "V_m" apare în "model" iar cel descris de (2.15) se indică prin litera "A" şi apare în original, adică în sistemul electromagnetic de studiat sub aspectul cîmpului magnetic (direct) şi a cîmpului electric (indirect prin relaţiile dintre aceste cîmpuri).

Relaţiile de analogie se vor obţine pentru ecuaţiile mai generale (2.13a şi 2.15a), pentru celelalte, prin particularizări.

...

BUPT

Ecuaţiile (2.13a) şi (2.15a) în formele lor implicite se pot scrie pe baza asemănării lor :

$$f\,(J_s,\ l,\ t,\ \sigma,\ \mu,\ A) = 0 \qquad (2.15a')$$

$$f\,(J_{ms},\ l_m,\ t_m,\ C_{mo},\ \rho'_m,\ V_m) = 0 \qquad (2.13a')$$

Alegînd pe J_s, l (lungimea), t, σ şi respectiv pe J_{ms}, l_m, t_m, C_{mo}, ca mărimi independente (fundamentale) în cele două ecuaţii şi pe μ, A, şi respectiv ρ'_m şi V_m ca mărimi derivate din primele, ecuaţiile (2.15a') şi (2.13a') se pot scrie în formele lor criteriale :

$$F\,(\pi_1^A,\ \pi_2^A) = 0\ , \qquad (2.15a'')$$

$$F\,(\pi_1^V,\ \pi_2^V) = 0\ , \qquad (2.13a'')$$

în care :

$$\pi_1^A = \frac{\mu}{J_s^{x_1^A}\cdot \ell^{y_1^A}\cdot t^{z_1^A}\cdot \sigma^{w_1^A}}\ , \quad \pi_2^A = \frac{A}{J_s^{x_2^A}\cdot \ell^{y_2^A}\cdot t^{z_2^A}\cdot \sigma^{w_2^A}} \qquad (2.16)$$

$$\pi_1^V = \frac{m}{J_{ms}^{x_1^V}\cdot \ell_m^{y_1^V}\cdot t_m^{z_1^V}\cdot C_{mo}^{w_1^V}}\ ; \quad {}^V_2 = \frac{V_m}{J_{ms}^{x_2^V}\cdot \ell_m^{y_2^V}\cdot t_m^{z_2^V}\cdot C_{mo}^{w_2^V}}\ ,$$

sînt criteriile celor două fenomene descrise de A şi respectiv de V.

În urma analizei dimensionale se determină necunoscutele $x_1^{A,V}$, $_2$, $J_1^{A,V}$, $_2$, ş.a.m.d.p., şi din egalarea criteriilor corespunzătoare analogiei $A \rightleftharpoons V_m$

$$\pi_1^A = \pi_1^V\ ; \quad \pi_2^A = \pi_2^V\ , \qquad (2.17)$$

rezultă :

$$\frac{\mu\,\sigma\, l^2}{t} = \frac{C_{mo}\,\rho'_m\, l_m^2}{t_m}\ , \qquad (2.18)$$

$$\frac{A}{J_s t} = \frac{V_m}{J_{ms}}\,\frac{C_{mo}}{t_m} \qquad (2.19)$$

Definind coeficienţii de analogie.

$$k_A = \frac{A}{V_m}\ ,\ k_l = \frac{l}{l_m}\ ,\ k_{Js} = \frac{J_s}{J_{ms}}\ ,\ k_\mu = \frac{\mu}{\rho_m'}$$

$$k_t = \frac{t}{t_m}\ ,\ k_\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_{mo}}\ , \qquad (2.20)$$

relațiile criteriale (2.18) și (2.19) se transformă, la înlocuirea valorilor unui fenomen în funcție de cele analoage, în relații între acești coeficienți :

$$\frac{k_\mu\ k_\sigma k_l^2}{k_t} = 1 \qquad (2.18')$$

$$\frac{k_A\ k_\sigma}{k_{Js}\ k_t} = 1 \qquad (2.19')$$

Se observă că relația (2.18') conține toți coeficienții de analogie în afară de k_A care apare în (2.19'). Ca urmare relația (2.18') se consideră relație de bază în modelare și dacă scopul rezolvării problemei de cîmp constă doar în a determina valori raportate ale mărimilor R și L, nu se mai apelează la relația (2.19'). Dacă problema impune determinarea valorilor absolute ale mărimilor electromagnetice se utilizează și expresia (2.19') din care se determină,

$$k_A = k_{Js}\ \frac{k_t}{k_\sigma} = \frac{k_i}{k_\ell^2}\ \frac{k_t}{k_\sigma} \qquad (2.20)$$

unde $k_i = \frac{i}{i_m}$ este raportul curenților din original și a celor corespunzători absorbției de model.

Exprimînd pe k_t din (2.18'), (2.20) se mai poate scrie

$$k_A = k_\mu\ k_i \qquad (2.20')$$

Modelul se proiectează astfel : se aleg k_μ, k_σ , k_ℓ și rezultă k_t, respectiv timpul din model. Alegîndu-se corespunzător necesităților impuse de măsurare corectă și consum minim de energie în model, valoarea raportului k_i, rezultă valoarea lui k_A și deci posibilitatea determinării complete a cîmpului prin modelare.

Analog, pentru ecuații (2.13b) și (2.15b) se obțin :

$$k_\mu\ k_\sigma\ k_\ell^2 = k_t \qquad (2.18")$$

$$k_A\ k_\sigma = k_t \qquad (2.19")$$

Aceste relații se pot obține din (2.18) și (2.19') observînd că:

BUPT

$x_1^A = x_1^V = x_2^A = x_2^V = 0$

Din (2.18") şi (2.19") rezultă :

$$k_A = k_\mu \, k_\ell^2 \tag{2.20"}$$

La modelarea cîmpurilor descrise de (2.13c) timpul nu intervine în proces chiar dacă procesele sînt variabile în timp şi de asemenea capacitatea C_{mo} şi σ nu mai apar în expresiile criteriilor. Ca urmare :

$$z_1^A = z_1^V = z_2^A = z_2^V = 0$$

şi relaţiile (2.18') şi (2.19") devin

$$k_\mu \, k_\ell^2 = 1 \tag{2.18"}$$

$$\frac{k_A}{k_{Js}} = 1 \tag{2.18"'}$$

din care rezultă

$$k_A = k_\mu \, k^2 \, k_{Js} = k_\mu \, k_i \tag{2.20"}$$

Condiţiile de analogie se simplifică şi mai mult pentru cîmpurile laplaciene (ec.2.15d), observînd că cele trei mărimi din fiecare grup de analogie (A şi V_m) pot fi considerate independente dimensiunile lui A şi fiind legate prin unitatea de măsură a curentului mărime ce nu apare în ecuaţia care descrie cîmpul. Ca urmare rezultă :

$$\frac{k_A}{k_\mu k_\ell^2} = \text{o constantă arbitrară} \tag{2.21}$$

In fiecare din condiţiile de compatibilitate s-a presupus constanţa coeficienţilor de similitudine. Dacă pentru k , k , k_{Js} se poate asigura uşor această constantă, pentru coeficientul k_u ea se asigură mai dificil. Din

$$k_\mu = \text{constant} \tag{2.22}$$

rezultă $$\frac{\mu}{\rho' m} = \frac{\mu h_m}{\rho' m} = \text{constant} \tag{2.22'}$$

Cum mediile electroconductoare sînt de obicei omogene sub aspectul rezistivităţii, (2.22') se reduce la condiţia :

$$h_m = \text{constant} \tag{2.22"}$$

BUPT

adică neomogenitatea magnetică din original se transpune pe model prin variere inversproporțională a grosimii stratului electroconductor.

În cazul cîmpurilor electrice plan-paralele, descrise de ecuații de tipul (A.1.6) sau (A.1.7) se poate scrie

$$k_{\varepsilon} = \text{constant}$$

adică

$$\frac{\varepsilon}{h_m} = \text{constant} \qquad (2.22^{IV})$$

adică grosimea stratului electroconductor se variază proporțional cu ε.

In fig.2.4. sînt prezentate modurile de realizare a condiției (2.22^{IV}) cu electrolit (b) și cu hîrtie electroconductoare (c), pentru structura unui sistem electrostatic prezentată în fig.2.4a; firele conductoare de corectare a cîmpului sînt implantate în materialele electroconductoare, pe curbele corespunzătoare suprafețelor de discontinuitate a funcției $\varepsilon(x,y)$ în scopul echipotențializării pe verticală a punctelor de pe aceste curbe [53] .

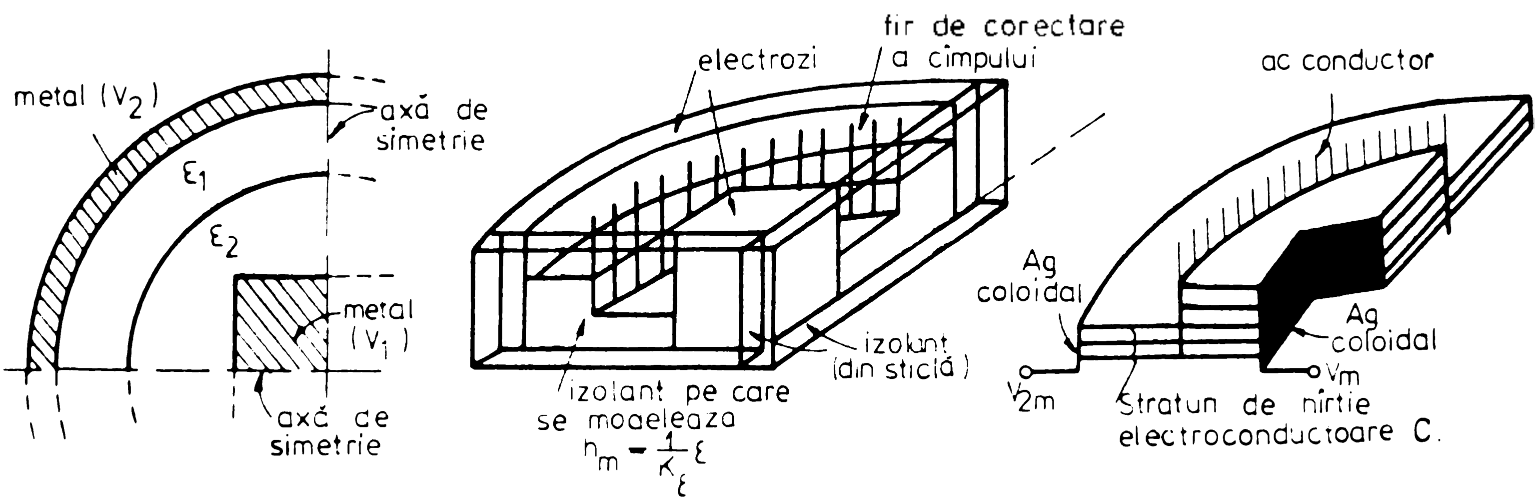


Fig.2.4. Exemplu de transpunere pe model a funcției $\varepsilon(x,y)$: a. sistemul original; b. modelul electrolitic; c. modelul pe hîrtie electroconductoare.

Caracteristicile permibilității magnetice neliniare (sau a permitivității dielectrice) pot fi reprezentate într-o cuvă electrolitică (un vas izolant cu electrolit) sau pe hîrtie electroconductoare printr-un proces iterativ [54] . Se presupune la început o permeabilitate constantă. Corespunză-

BUPT

tor acestei situaţii se construieşte un model cu stratul electroconductor va fi de grosime h_m constantă. Pentru cîmpul determinat pe acest model se calculează valori noi ale permeabilităţii în fiecare punct iar grosimea stratului electroconductor este reprofilat corespunzător. Apoi distribuţia cîmpului în noile condiţii se determină din nou, se recalculează μ, ş.a.m.d. În mod normal două sau trei etape sînt suficiente pentru a se determina repartiţia reală a cîmpului.

Simularea anizotropiei magnetice sau electrice, pe model se poate trata pornind de la ecuaţiile (2.13) şi în acest scop se reaminteşte ecuaţia (A.1.31) ecuaţie care descrie cîmpul magnetic într-un mediu anizotrop idealizat, în lipsa curenţilor electrici şi de asemenea ecuaţia (2.13.d):

$$\nu_x \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \qquad (A.1.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(h_m \sigma_m \frac{\partial V_m}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial}{\partial y_m}\left(h_m \sigma_m \frac{\partial V_m}{\partial x_m}\right) = 0 \qquad (2.13.d)$$

Cum $_m$ nu se poate realiza ca funcţie dorită de punct, se consideră stratul electroconductor omogen ($\sigma_m(x_m,y_m)$ = const.) astfel încît ecuaţia (2.13d) se mai poate scrie :

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(h_m \frac{\partial V_m}{\partial x_m}\right) + \frac{\partial}{\partial y_m}\left(h_m \frac{\partial V_m}{\partial x_m}\right) = 0 \qquad (2.13'd)$$

Dacă se imaginează ca la o deplasare după x_m, grosimea h_m a stratului electroconductor are o valoare medie constantă h_{mx} iar la o deplasare după y_m o valoare medie constantă h_{my}, ecuaţia (2.13'd) devine :

$$h_{mx} \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + h_{my} \frac{\partial^2 V_m}{\partial y_m^2} = 0 \qquad (2.13''d)$$

şi deci în sistemul imaginat se pot modela cîmpurile din medii anizotrope.

Comparînd ecuaţiile (A.1.31) admiţînd proporţionalităţile între ν_x şi h_{mx} şi ν_y şi h_{my} cu (2.13"d) ţinînd seama de independenţa dimensională a mărimilor A, ν, l şi respectiv V_m, h_m, l_m, cu notaţiile :

BUPT

$$k_{\nu x} = \frac{\nu_x}{k_{mx}} \; ; \; k_{\nu y} = \frac{\nu_y}{h_{my}} \; ;$$

şi condiţia rezohabilă

$$k_{\nu x} = k_{\nu y} = k_\nu \, ,$$

rezultă

$$k_\nu \frac{k_A}{k_\ell^2} = \text{constantă arbitrară} \qquad (2.23)$$

Modul de realizare a valorilor h_{mx} şi h_{my} este indicată în fig.2.5.

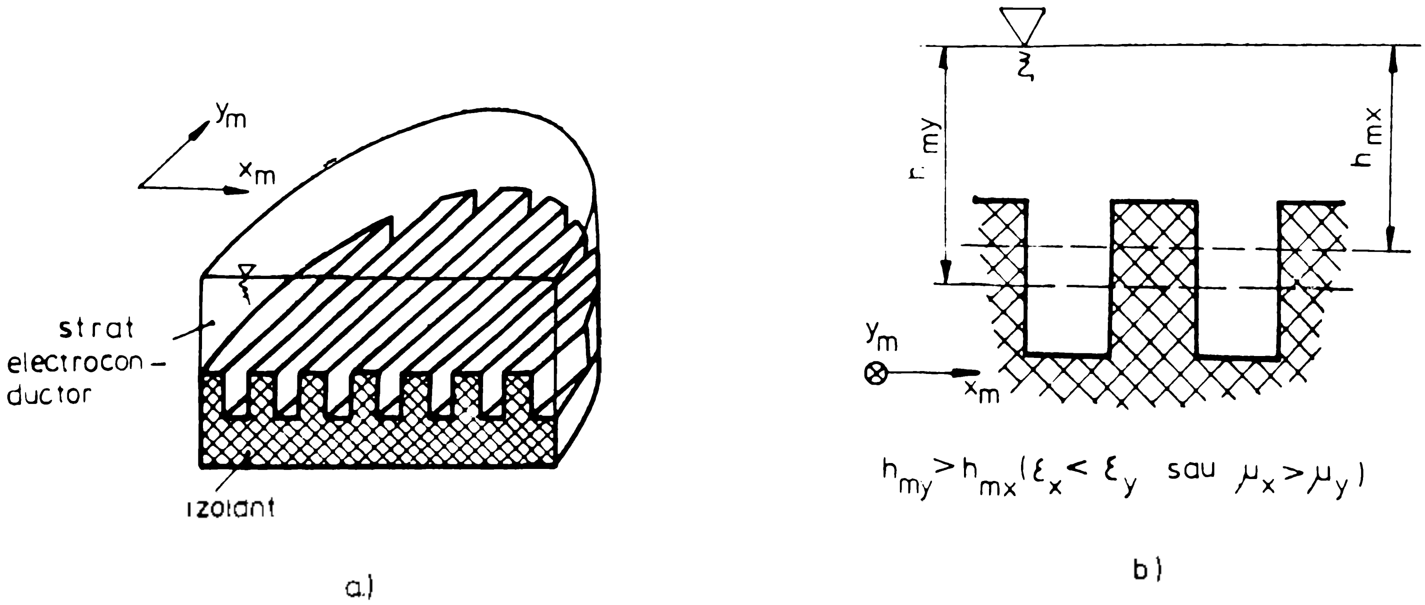


Fig.2.5. Mod de simulare a anizotropiei

2.2. Posibilităţi practice. Modelarea condiţiilor de frontieră

Reveind la modelarea cîmpului magnetic descris de ecuaţia 2.15), se pot face cîteva observaţii practice referitoare la posibilităţile cîmpurilor magnetice în medii neliniare în condiţiile existenţei în aceste medii a unor curenţi electrici.

Ştiind că

$$C_{mo} = \frac{\varepsilon}{d_m} \, , \qquad (2.24)$$

din relaţia (2.18) rezultă :

$$\varepsilon_m = \frac{\mu \sigma}{\rho'_m} \frac{k_\ell^2}{k_t} d_m \, , \qquad (2.25)$$

BUPT

d_m fiind grosimea dielectricului (a stratului condensator) din ansamblul-model.

Expresia (3.25) arată că dacă neomogenitatea lui μ se poate modela prin ρ'_m, neliniaritatea magnetică poate fi analoagă neliniarității electrice a dielectricului de permitivitate ε_m din stratul condensator. Pentru calitățile obișnuite de hîrtie electroconductoare pentru care ρ'_m este de ordinul ($3 \div 5$ kΩ), o frecvență de alimentare a modelului (corespunzătoare regimului sinusoidal), f_m=2000 Hz, scara timpului $k_t \approx 40$, scara uzuală a lungimilor $k_\ell = 3 \div 4$ și permeabilitatea medie a materialului neliniar $\mu \approx 1,256 \cdot 10^{-3}$ H/m, rezultă $C_{mo} \approx (400 + 500) \cdot 10^{-6}$ F/m^2. Asemenea valoare se poate atinge utilizînd pelicule dielectrice foarte subțiri sau folosind plăcuțe metalice oxidate pe una din fețe.

Reproducerea dependenței $\mu(H)$ prin funcția $\varepsilon_m(E_m)$ prin folosirea peliculelor de seignettodieletrici este foarte greu de realizat, practic imposibilă, din cauza lipsei unor materiale cu caracteristici adecvate [54].

Procedeul iterativ descris în § 2.1 introduce, în caz general, mari complicații constructive care adăugate celorlalte dezavantaje de metodă, îl fac de multe ori neutilizabil.

Există totuși probleme cu medii neliniare în care cîmpul se poate analiza relativ ușor utilizînd un procedeu iterativ, și anume acelea în care se cere cîmpul în afara mediilor neliniare (în aer, în cupru etc.), zone pentru care permeabilitatea magnetică se poate identifica cu cea a vidului ($\mu = \mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ H/m).

Evident, pentru zonele cu $\mu = \mu_0$, grosimea stratului electroconductor h_m va fi constantă iar pelicula de dielectric va avea permitivitatea independentă de cîmp.

Pe suprafețele unor medii feromagnetice, care vor fi considerate frontiere în astfel de probleme, în regim sinusoidal, pentru frecvența industrială, în fiecare punct de pe suprafață, între componentele tangențiale $\underline{E}$ și $\underline{H}_\tau$ (scrise în complex) ale vectorilor intensitate de cîmp electric $\underline{E}$ și intensitate de cîmp magnetic $\underline{H}$, există o legătură pe deplin determinată care reprezintă condiția la limita necesară de realizat la modelare.

Pentru cîmpurile magnetice uzuale, ($H > 20$A/cm), în cazul semispațiului conductor feromagnetic, relația dintre $\underline{E}_\tau$ și $\underline{H}_\tau$ este [54] :

$$\underline{E}_\tau = (1+0,6\,j)\sqrt{\frac{\mu e \omega}{\sigma}}\;\underline{H}_\tau \qquad (2.26)$$

BUPT

în care μ_e este modulul permeabilității magnetice complexe pe suprafața corpului feromagnetic și este o funcție de H_{τ}.

Pentru intuirea modului de utilizare a relației (2.26) la modelarea pe hîrtie electroconductoare se consideră un sistem de conductoare alimentate cu curenți sinusoidali, sistem care în secțiune transversală are forma din fig.2.6.

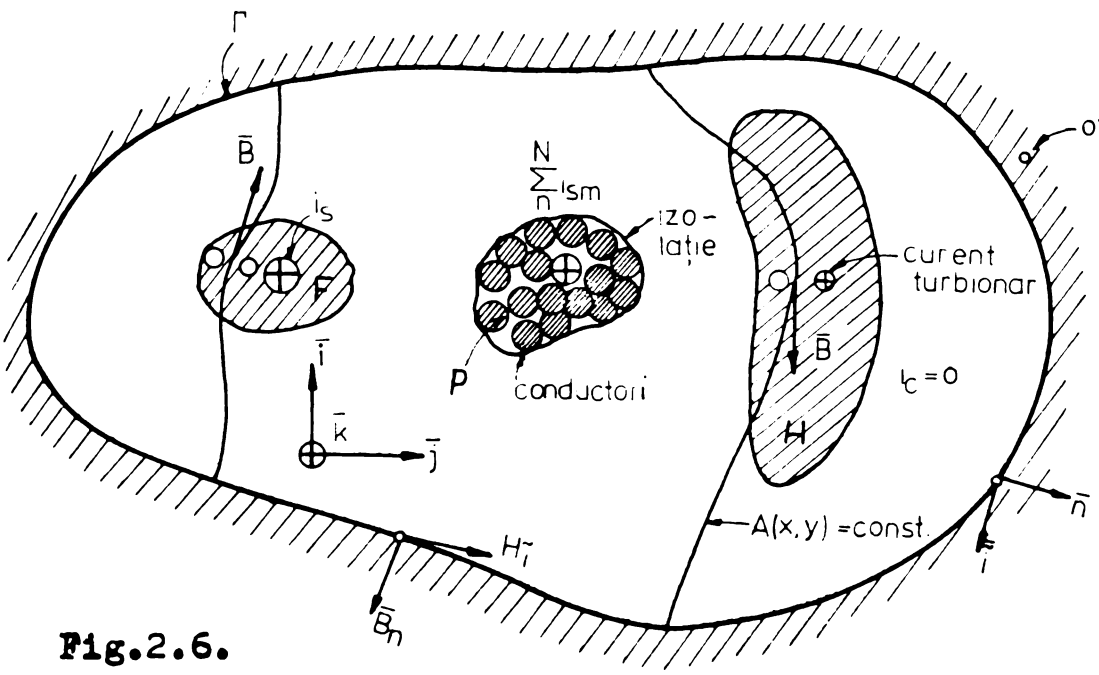


Fig.2.6.

S-au prezentat aici trei tipuri de conductoare : conductorul masiv parcurs de curentul $i_s \neq 0$ (notat cu F), conductorul masiv - mediu de curenți turbionari ($i_s = 0$, notat cu H) și un fascicol de conductoare subțiri în care se poate neglija componenta solenoidală $-\gamma\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ a cîmpului electric și avînd curentul i_{sk} prin fiecare conductor k diferit de zero.

Sistemul se află plasat într-o cavitate efectuată în oțel electrotehnic de grosime și cu raze de curbură suficient de mare pentru a putea fi tratat ca un semispațiu conductor.

Pentru interiorul cavității, potențialul vector magnetic $\bar{A}$ satisface pe porțiuni : ecuația lui Fourier (în conductorul F), ecuația lui Helmholtz (în conductorul H) și în fier ecuația lui Poisson (în interiorul fascicolului P) și ecuația lui Laplace (în spațiul L dintre conductoare).

Se observă că de-a lungul curbei Γ (urma suprafeței cilindrice interioare a ecranului feromagnetic sînt valabile: o ecuație Helmholtz pentru interiorul oțelului și o ecuație Laplace pentru cavitate.

Condițiile de frontieră, de tip neliniar, sînt date de proprietățile de conservare a componentei normale a induc-

BUPT

ţiei magnetice şi a componenţei tangenţiale a intensităţii cîmpului magnetic :

$$\underline{B}_{nFe} = \underline{B}_{n\ aer} \quad \text{sau} \quad \left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial \tau}\right)_{Fe} = \left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial \tau}\right)_{aer} \tag{2.27}$$

$$\underline{H}_{\ Fe} = H_{\tau\ aer} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\mu_{Fe}}\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial n}\right)_{Fe} = \frac{1}{\mu_o}\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial n}\right)_{aer} \tag{2.28}$$

După substituirea în (2.28) a expresiei (2.26), ştiind că:

$$\underline{E} = - j\omega \underline{A}\ , \tag{2.29}$$

indexînd cu "1" spaţiul cavităţii şi cu "2" mediul-oţel, se obţine:

$$\underline{A}_2 + \frac{1}{\mu_o}\sqrt{\frac{\mu_e}{\sigma\omega}}\,(0{,}6-j)\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial n}\right)_1 = 0\ . \tag{2.30}$$

Condiţia la limită corespunzătoare pentru model se va obţine înlocuind în (2.30) :

$$\underline{A} = k_A \underline{V}_m;\ \partial n = k_1\,\partial n_m;\ \underline{J}_{mn} = -\sigma_m \frac{\partial V_{m1}}{\partial n_m} \tag{2.31}$$

după care rezultă :

$$\underline{V}_{m2} = \frac{1}{\mu_o}\sqrt{\frac{\mu_e}{\sigma\omega}}\,(0{,}6-j)\,\frac{\underline{J}_{mns}}{K_1\,\sigma_m} \tag{2.32}$$

unde $\underline{J}_{mns}$ este densitatea de curent, normală la frontiera Γ_m din model, într-un punct "s" pe frontiera Γ_m corespunzătoare frontierei din original.

Se împarte limita Γ_m în sectoare Δl_{ms} şi pentru fiecare sector se obţine o valoare medie $\underline{V}_{ms2}$ a potenţialului $\underline{V}_{m2}$, egală cu :

$$\underline{V}_{ms2} = \Delta l_{ms}\ h_m\ \underline{J}_{mns}\ \underline{z}_{ms} = \underline{I}_{mns}\ \underline{z}_{ms} \tag{2.33}$$

Din identificarea relaţiei (2.32) cu (2.33) rezultă :

$$\underline{z}_{ms} = R_{ms} + j\,X_{ms} = (0{,}6-j)\sqrt{\frac{\mu_e}{\sigma\omega}} \cdot \frac{1}{\mu_o\,k_1\,\Delta l_{ms}\,\sigma_m\,h_m} =$$

$$= \beta\,(0{,}6-j)\sqrt{\mu_e}$$

cu β = constant.

Rezultă că $\underline{z}_{ms}$ este impedanţa unui circuit serie R_{ms}, C_{ms}, avînd valorile parametrilor

$$R_{ms} = 0{,}6\beta\sqrt{\mu_e}\ ;\ C_{ms} = \frac{1}{\omega_m\,\beta\sqrt{\mu_e}} \tag{2.35}$$

BUPT

Dacă se potrivesc rezistenţele R_{ms} neliniare şi capacităţile C_{ms} la care dependenţa de curent este funcţie de μ_e, respectiv de $\underline{H}_{\tau}$, atunci se pot crea pe model condiţiile la limită neliniare.

Se poate obţine o precizie mai mare utilizînd impedanţele $\underline{z}_{ms}$ liniare şi folosind şi metoda aproximaţiilor succesive.

Curentul care deviază în $\underline{z}_{ms}$ (cuplată între şine s de dimensiune Δl_{ms} şi masă) este proporţional cu valoarea lui $\underline{H}_{\tau s}$:

$$\underline{H}_{s} = \frac{1}{\mu_o}\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial n}\right)_{1s} = - \frac{k_A}{k_1 \mu_o \sigma_m h_m \Delta l_{ms}} \Delta \underline{I}_{ms} =$$

$$= - \frac{k_A}{k_\mu k_1} \frac{\underline{I}_{ms}}{\Delta l_{ms}} = - k_1 \frac{\underline{I}_{ms}}{\Delta l_{ms}} \qquad (2.36)$$

S-a ţinut aici seama de relaţiile (2.18") şi (2.19").

Cu această observaţie rezultă urmptorul mod de construire a modelului. Mai întîi se alege o foaie de hîrtie electroconductoare de grosime h_m constantă, pe care se trasează curba Γ_m. În interiorul frontierei se injectează acolo unde e nevoie curenţii i_{ms} (în zonele F şi P) şi pe porţiunile corespunzătoare prezenţei în original a curenţilor turbionari se lipesc straturi condensatoare. Cu mijloace obişnuite se măsoară valoarea lui H_{is} prin mărimea $\underline{I}_{ms}$ admiţînd iniţial $\mu = \mu_o$. Din curba fundamentală de magnetizare a oţelului se află $\mu_{es}(H_{\tau s})$. Cu relaţia (2.34) se calculează $\underline{z}_{ms}$. Hîrtia se taie după conturul Γ_m şi pe şinele de cupru cu dimensiunile Δl_{ms} se cuplează R_{ms} şi X_{ms}. Se măsoară $\underline{I}_{ms}$ care deviază în fiecare şină, se calculează $\underline{H}_{\tau s}$ şi se corectează $\underline{z}_{ms}$. Măsurile se repetă de 3÷4 ori pînă cînd corectarea nu mai este necesară; atunci valoarea măsurată a lui $\underline{H}_{s}$ va corespunde lui μ_e teoretic. Modelul corespunzător sistemului din fig.2.4 este prezentat în fig.2.7.

O dată fixate ultimele valori $\underline{z}_{ms}$ în urma procesului de iteraţie modelul este pregătit pentru măsurările necesitate de analiza problemei de cîmp.

Condiţiile de frontieră de tip Dirichlet şi Neumann - nule se transpun pe model extrem de simplu :

- pentru condiţiile Dirichlet, potenţializarea la scara k_A(k_V sau k_{VH}) a punctelor de pe marginea Γ_m a modelului se face prin ace metalice suficient de apropiate unul de altul încît

BUPT

funcţia potenţial din original să fie reprodusă cît mai fidel de funcţia $V_m(x_m, y_m)$; dacă potenţialul din original este o constantă pe un anumit segment din frontieră, atunci segmentul corespunzător din model conţine o foiţă metalică potenţializaţă corespunzător (la modelul cu electrolit) sau, se pensulează marginea obţinută prin decuparea modelului pe porţiunea respectivă, cu argint coloidal (pentru modelul din hîrtie electroconductoare) [55].

- pentru porţiunile de graniţă cu condiţii Neumann-nule forţarea direcţiei liniei de cîmp $\bar{E}_m$ tangenţial pe porţiunile corespunzătoare din model, se face izolînd de-a lungul acestor porţiuni domeniul D_m de exteriorul său, cu piese de pertinax, lemn lustruit etc., dacă pătura conductoare este electrolitul; dacă modelul se confecţionează din hîrtii electroconductoare condiţia se realizează simplu prin decuparea hîrtiei din exteriorul lui D_m.

Exemplul din fig.2.8, 2.9 şi 2.10 ilustrează cele expuse mai sus.

Există o multitudine de probleme la care domeniul D este infinit şi pentru care oricît de mare ar fi scara lungimilor, pentru a modela cîmpul acestor sisteme, ar fi necesară întinderea nelimitată a păturii rezistive :

- de obicei sistemele electromagnetice sînt complete, adică sînt îndeplinite condiţiile (3.5-A);
- sursele cîmpurilor sînt concentrate în spaţii cilindrice de rază $< r_o (r_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2})$;
- ecuaţia lui Laplace, satisfăcută de orice potenţial (A, V, V_H) pentru $r \geqslant r_o$, este invariantă faţă de inversiunea [33] :

$$r' = \frac{r_o^2}{r_m} \text{ respectiv } r'_m = \frac{r_{om}^2}{r_m} \tag{2.37}$$

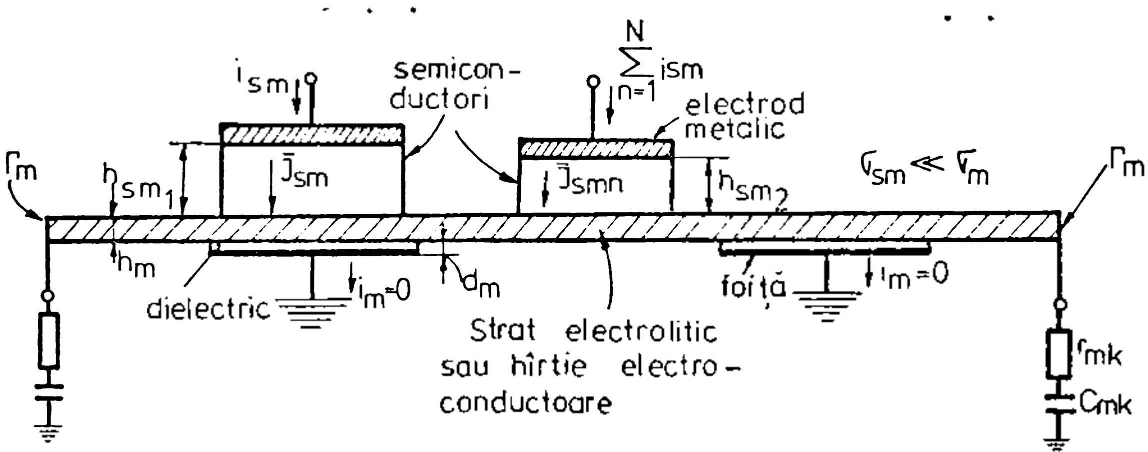


Fig.2.7. Modelul sistemului din fig.2.6.

Aplicînd subdomeniului $r_m \gg r_{om}$ inversiunea (2.37) se obține un simulator în dublu strat [56], [57], [58], în care se poate modela punctul de la infinit ($r = \infty$, $r'_m = 0$); primul strat (I) cuprinde zona interioară cercului de rază r_{om} și se obține din zona $r < r_o$ simplu, prin similitudinea geometrică determinată de k_ρ. În acest strat se modelează normal din original. În al doilea strat, de aceleași dimensiuni plane cu primul, se modelează zona $r > r_o$. Punctele celor două margini $r_m = r_{om}$ se echipotențializează ca în figura 2.11 a,b.

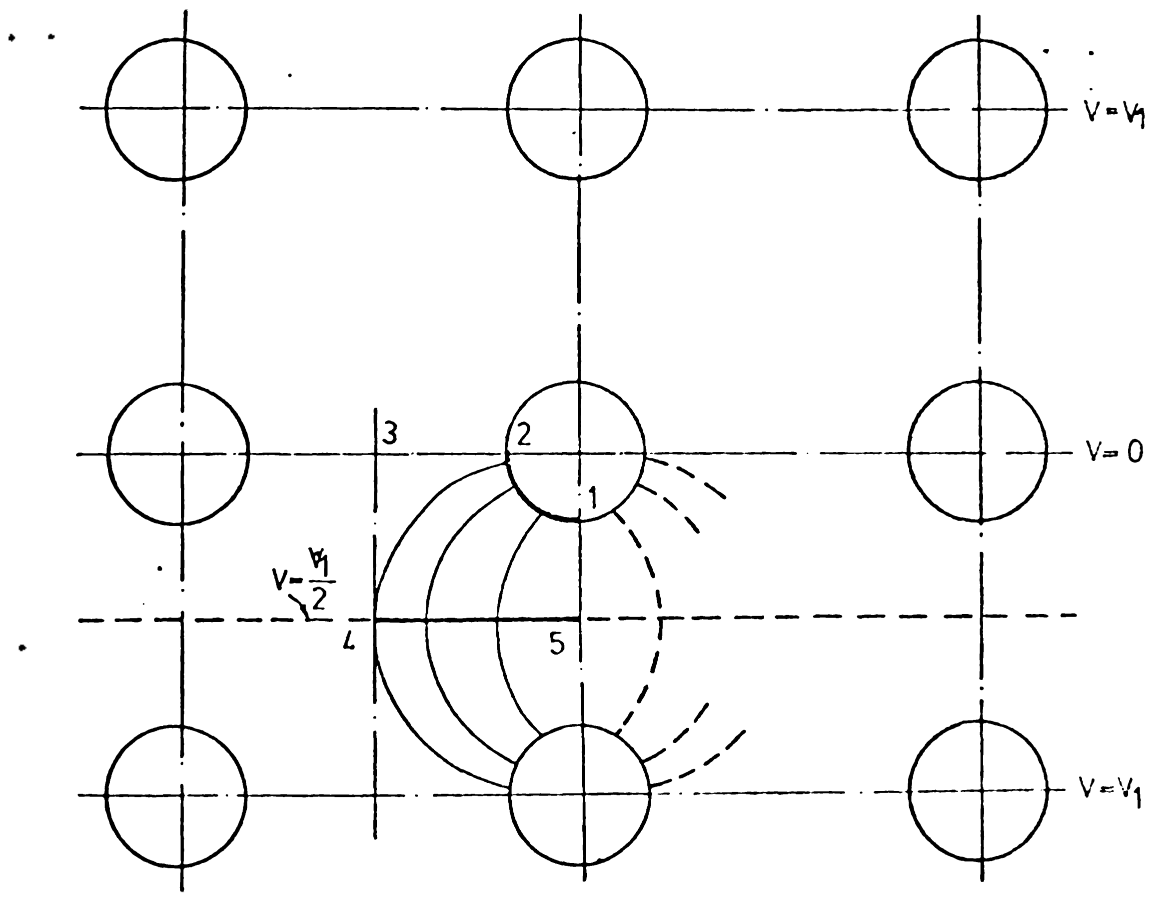


Fig.2.8. Alegerea domeniului D dintr-un sistem cu mai multe simetrii.

De obicei, modelele electrolitice se execută într-un vas din material izolant, plin cu electrolit, numit cuva electrolitică.

Pătura conductoare electrolitică poate fi o soluție apoasă a uneia din sărurile : N_aCl, KI, KNO_3, A_gNO_3 etc., dar de cele mai multe ori, apă de conductă. Cuva propriu-zisă (vasul în care se pune electrolitul și se plasează electrozii, se construiește de obicei din pertinax, cu volum paralelipipedic, obiș-

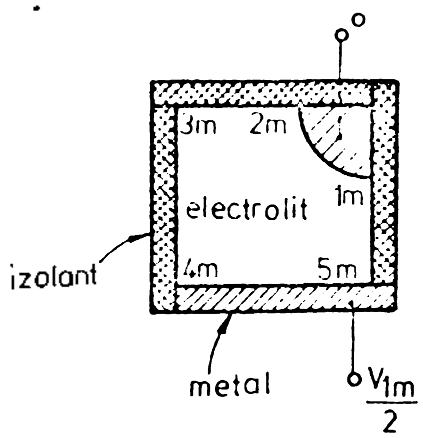


Fig.2.9.Transpunerea pe modelul electrolitic al domeniului D din fig.2.8 (delimitat de 1,2,3,4,5).

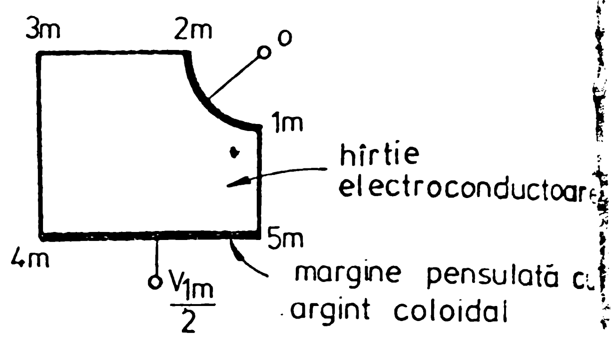
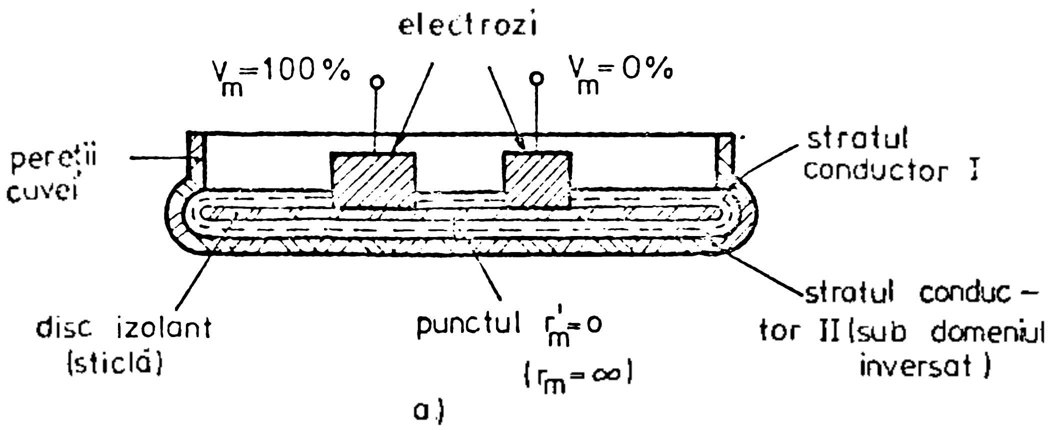


Fig.2.10. Modelul pe hîrtie electroconductoare,corespunzător domeniului D (fig.2.8) din original.



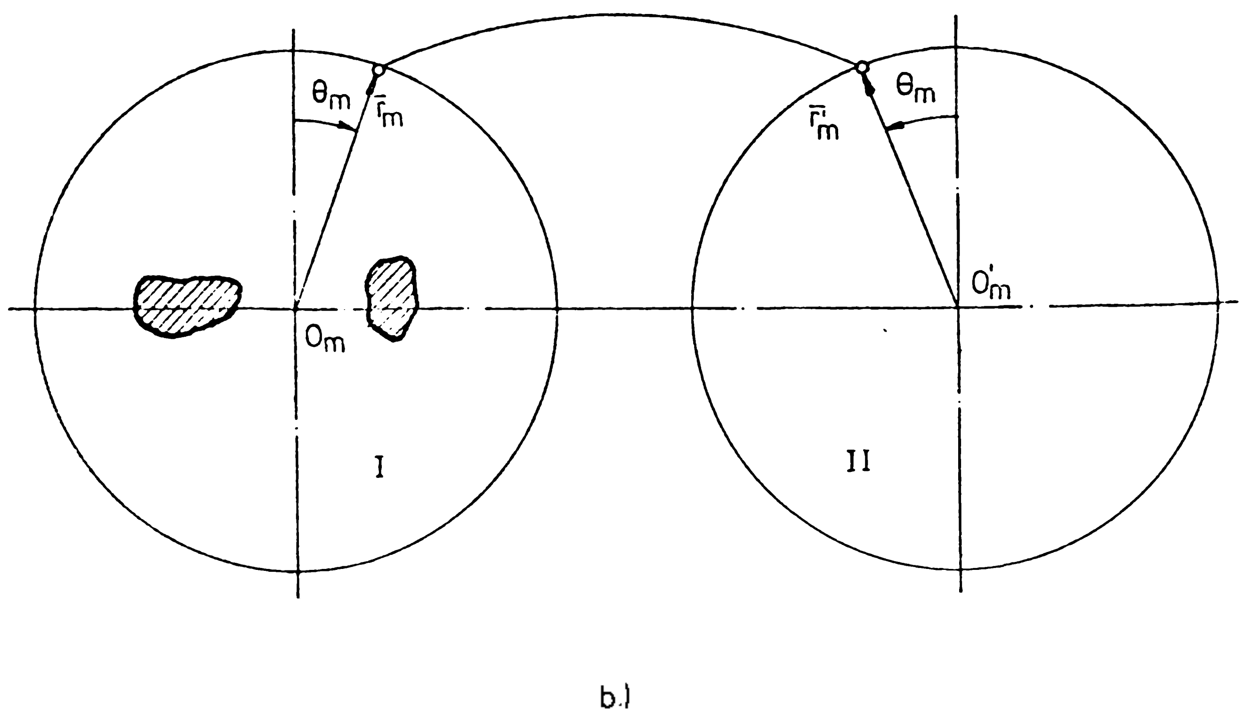


Fig.2.11. Simulator în dublu strat.
a) cuva electrolitică; b) modul de echipotențializare a punctelor $r_m = r_{om}$.

BUPT

nuit de dimensiunile 1x1x0,1 m^3.

Pentru domenii infinite se folosește cuva cu dublu strat de electrolit (fig.2.11 a) iar pentru frontiere de tipul celei din fig.2,8, se pot construi modele individuale.

Hîrtia electroconductoare cea mai utilizată este hîrtia grafitată [55] , avînd conductivitate, pe cît posibil, independentă de direcție, care se fixează pe o planșetă de lemn. Valoarea rezistenței superficiale este cuprinsă între $10^3 ... 10^5 \Omega$, deci mai reduse de cel puțin 90 ori decît cea a lemnului.

2.3. <u>Tehnica măsurării pe modele</u>

a. <u>Determinarea cîmpurilor laplaciene prin modelare</u> în cuva electrolitică sau pe hîrtie electroconductoare se poate face în urma trasării unui spectru de linii echipotențiale, suficient de dens, între electrozi, cu ajutorul unei scheme de măsurare în punte conform fig.2.12.

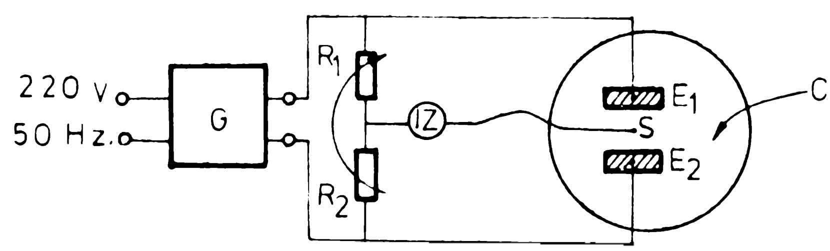


Fig.2.12. Schema de măsurare în punte.

S-a notat cu : G - generator de audeofrecvență; R_1 și R_2 - rezistențe complementare ($R_1 + R_2$ = const.); IZ-indicator de tensiune zero; E_1 și E_2 - electrozii model; C- cuva electrolitică (sau simulator din hîrtie electroconductoare); S - sonda de detectare a punctelor echipotențiale (la cuva electrolitică - un ac conductor, la hîrtia electroconductoare - un creion special care la echilibrul punții lasă o urmă colorată pe hîrtie).

În cazul cuvei electrolitice, avînd în vedere efectul polarizării electrozilor la o alimentare în curent continuu, se alege ca tensiune de alimentare o tensiune alternativă sinusoidală de frecvență limitată superior de condiția rot $\bar{E}_m$= 0, și în cazul măsurărilor în punte avînd ca indicator de zero casca telefonică, şi de sensibilitatea organului de auz pentru frecvenţele audeo. Limitarea inferioară a frecvenţei este determinată de atenuarea polarizării. Frecvenţele optime care răspund acestor necesităţi pentru cuvele electrolitice cu strat dublu (cu un diametru de 0,5 m) sînt cuprinse între 1000 $\div$ 2000 Hz.

Modelele din hîrtie electroconductoare se pot alimenta atît în curent continuu cît şi în curent alternativ.

Pentru măsurări de precizie în cuva electrolitică, trebuie ţinută seama că puntea din fig.2.12, nu permite înlăturarea influenţei capacităţilor parazite dintre componentele schemei de măsurare şi masă şi compensarea totală a impedanţei echivalente corespunzătoare polarizării în cuvă. Pentru a satisface aceste deziderate, la fel ca la o punte obişnuită de curent alternativ, se conectează în derivaţie cu R_1 şi R_2 capacităţile reglabile C_1 şi C_2 (fig.2.13) şi se prevede pămîntarea Wagner cu un divizor alcătuit din rezistenţele R_{w1} şi R_{w2} şi capacităţile C_{w1} şi C_{w2} (în schemă nu sînt firgurate capacităţile a căror influenţă trebuie compensată) [6].

Cu schema din fig.2.13, punctele de potenţial egal se determină alegînd un anumit raport al rezistenţelor R_1 şi R_2 şi căutînd cu sonda în cuvă pe hîrtie poziţiile pentru care se obţine echilibrarea puntii.

De obicei, la sistemele de doi electrozi echipotenţiali, se trasează un spectru de 11 linii echipotenţiale : două corespunzătoare profilurilor electrozilor şi nouă linii corespunzătoare potenţielelor obţinute prin diferenţierea liniilor învecinate cu cîte 10% din tensiune V_m de alimentare a electrozilor. Se vor alege în consecinţă următoarele rapoarte între R_2 şi R_1 :

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{100}{900} ; \frac{200}{800} ; \dots ; \frac{900}{100}$$

Fiecare linie echipotenţială se trasează înregistrînd la scară pe o hîrtie, punctele detectate în cuvă cu detectorul S, pentru un anumit raport $\frac{R_2}{R_1}$. Numărul de puncte înregistrate este determinat de precizia cu care se doreşte să se traseze linia respectivă.

BUPT

Cu schema din fig.2.13 se lucrează astfel : cu cursorul de la divizorul $R_1 + R_2$ pus la poziţia corespunzătoare raportului $\frac{R_2}{R_1}$ ales pentru a se ridica o linie echipotenţială dorită, şi cu comutatorul k în poziţia 1, se deplasează sonda pînă la aflarea unui minim relativ la indicatorul de zero IZ se corectează minimul prin reglarea lui C_1 şi C_2, se trece comutatorul în poziţia 2 şi se aduce IZ la potenţialul pămîntului prin reglarea braţelor de la pămîntarea Wagner, se revine la poziţia 1 şi se perfectează echilibrul prin reglarea sondei şi capacităţile C_1 şi C_2. Se procedează astfel la determinarea fiecărui punct al liniei echipotenţiale care se determină.

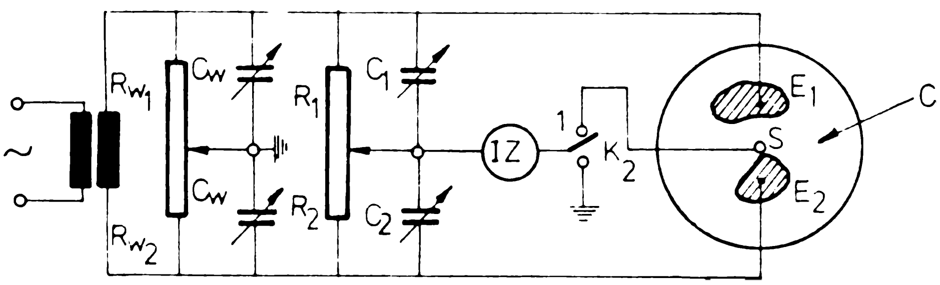


Fig.2.13. Schema în punte cu împămîntare Wagner.

După trasarea spectrului liniilor echipotenţiale restul mărimilor de cîmp, funcţii de punct sau integrale, se determină uşor cu ajutorul constantelor k_A, k_V, k_{VH} alese la proiectare : pentru mărimile intensităţii de cîmpuri sau inducţii, se fac aproximări de ordinul I, iar pentru mărimile integrale se utilizează regulile de aproximare numerică (regula trapezului, a lui Simphson etc.) [34] ,[39],[40].

b. <u>Determinarea cîmpurilor poissoniene</u> prin modelare în cuva electrolitică este dificilă. Încercările modelării pe hîrtie electroconductoare au dat rezultate mulţumitoare [59]. Schema de principiu a instalaţiei de alimentare şi măsurare la modelarea pe hîrtie electroconductoare are structura celei din fig. 2.14.

In fig.2.14 se prezintă o schemă tipică de alimentare şi măsurarea pe modelul din hîrtie electroconductoare pentru cîmpuri poissoniene cu condiţii de frontieră nelineare [59].

BUPT

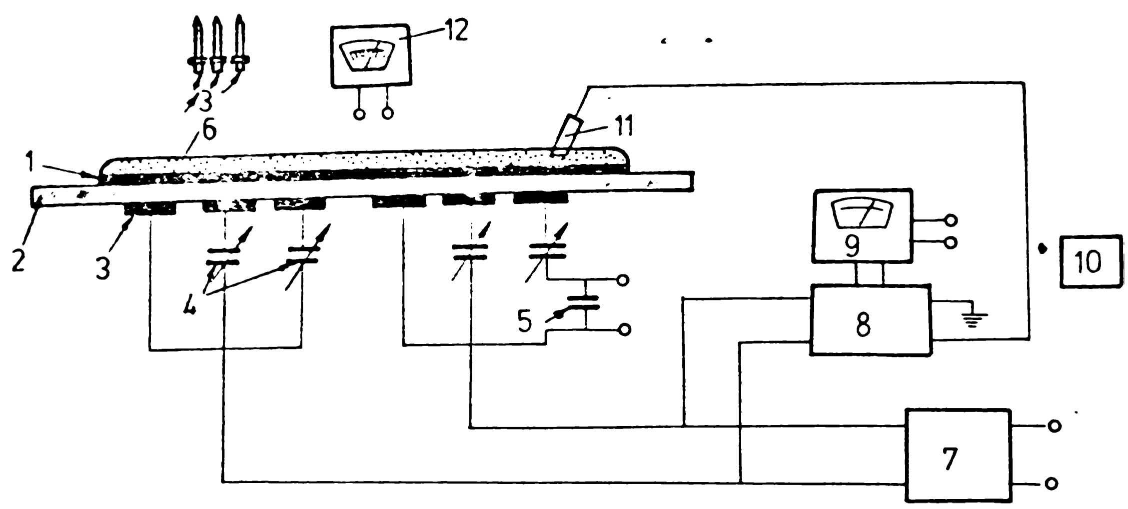


Fig.2.14. Schema de principiu a instalației de alimentare și măsurare pentru un model din hîrtie electroconductoare.

O foaie de hîrtie electroconductoare 1, are dimensiunile la scară k_1 în concordanță cu secțiunea transversală a domeniului D. Marginile foii corespund marginilor suprafețelor feromagnetice. Hîrtia se așează pe o suprafață de geam 2, de grosime de 2-2,5 mm geamul avînd rol de dielectric. Pe partea inferioară a geamului sînt lipiți electrozi din foile de aluminiu,3. Dimensiunile electrozilor corespund dimensiunilor secțiunilor conductoarelor parcurse de curenții din original. Aducerea curenților de la sursă se realizează cu capacitățile de alimentare 4, alese astfel încît curenții electrozilor să fie proporționali cu tensiunile magnetomotoare a zonelor respective.

Pentru verificarea valorii curenților se utilizează condensatorul de măsurare 5, cu capacitate cu mult mai mare decît capacitățile electrozilor și a celor de alimentare. Tensiunea pe condensatorul 5 se măsoară cu un voltmetru electronic.

Hîrtia electroconductoare trebuie să adere strîns de sticlă. Lipirea hîrtiei nu este rațională datorită neomogenizării grosolane a hîrtiei sub aspectul conductivității σ_m în urma procesului de lipire [56] .

Atașarea hîrtiei de sticlă se realizează prin intermediul unui strat de material friabil, neconductor de exemplu praful de porțelan 6. In cazul modificărilor, praful se îndepărtează ușor cu ajutorul unei pensule moi și sonda de măsurare se instalează în locul necesar.

Ca sursă de alimentare a modelului se utilizează un generator de audeo-frecvență 7, cu intrare simetrică.

BUPT

În schema instalației intră blocul de deconectare de la reglarea capacitivă 8, și voltmetrul electronic 9 de măsurare a tensiunii. Verificarea potențialului zero pe model se face cu ajutorul voltmetrului 9, sau a osciloscopului 10; Această tensiune se culege de pe model cu sonda 11, nivelul "zero" este menținut cu blocul 8. Măsurătorile pe model se realizează cu milivoltmetrul 12 și garnitura de sonde 13. Cele trei sonde sînt plasate cîte două în planuri ortogonale.

Din expresiile (1.2-A) și (1.15-A) rezultă că E și B au expresiile

$$E = \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial x})^2 + (\frac{\partial V}{\partial y})^2} \approx \frac{1}{h}\sqrt{(V_1-V_2)^2 + (V_3-V_2)^2}$$

$$B = \sqrt{(\frac{\partial A}{\partial x})^2 + (\frac{\partial A}{\partial y})^2} \approx \frac{1}{h}\sqrt{(A_1-A_2)^2 + (A_3-A_2)^2}$$

așa încît măsurarea succesivă a diferențelor $(V_{1m}-V_{2m})$ și $(V_{3m}-V_{3m})$ dă la scara $\frac{k_V}{k_1}$ respectiv $\frac{k_A}{k_1}$, componentele mărimilor E sau B.

Dacă înaintea voltmetrului 9 se conectează un dispozitiv care ridică la patrat tensiunile U_{31m}, le însumează și din rezultat extrage rădăcina patratică, voltmetrul va măsura direct pe E respectiv pe B.

2.4. Precizia metodelor de modelare

2.4.1. Precizia modelării în cuva electrolitică

Eroarea metodei de măsurare este determinată de precizia elementelor din schema de măsurare și de erorile sistematice care depind de metoda de măsurare.

Eroarea globală include erorile mecanice, pe cele determinate de tensiunea superficială a lichidului electrolit, de neomogenizarea electrolitului, erorile cauzate de polarizare, de perturbarea din timpul investigării și efectele de frontieră.

Contribuția la eroarea totulă a preciziei tensiunii de alimentare și a circuitelor de măsurare poate fi făcută neglijabilă dacă se acordă atenția cuvenită unui sistem de pămîntare a instalației măsurare și stabilizării tensiunii de alimentare.

BUPT

Circuitul de măsurare a gradientului care implică măsurarea unor tensiuni mici între două puncte dintre care nici unul nu este la potențial nul cere un mai mare grad de precizie decît cele pentru măsurarea potențialului și în acest caz sînt necesare circuite de urmărire catodică și amplificatoare stabile.

Erorile mecanice includ atît inexactitățile constructive ale analogului cît și interpretarea falsă care se datorește jocurilor excesive ale părților mecanice și a impreciziilor în aproximarea frontierei.

Erorile care se datoresc tensiunii superficiale a electrolitului sînt importante în special cînd măsurătorile de potențial sînt făcute lîngă frontieră.

La orice interfață electrod-electrolit trebuie să existe un oarecare grad de polarizare. Cu frecvențe de ordinul a 1 kHz și electrozi de alamă grafitată, polarizația este redusă suficient ca rezultatele obținute să fie acceptabile.

Reducerea influenței polarizației este importantă în special cînd se folosesc dispuneri multi-electrozi pentru care se măsoară gradienții și în aceste situații sînt indicați electrozi din platină sau platinizați [60].

La analogia bidimensională se realizează precizii în măsurarea potențialului, de ordinul 0,1-0,2% dar numai dacă se acordă mare grijă minimalizării tuturor erorilor posibile [7]. Precizia corespunzătoare măsurărilor de gradient este de aproximativ de 0,5%. Pentru analogii complicate e greu de obținut precizii de măsurare a potențialului, mai mari decît $\pm$ 1%. Eroarea permisă este determinată de problema studiată și de precizia cu care pot fi stabiliți parametrii cîmpului original și în majoritatea aplicațiilor inginerești o precizie totală de 1-2% în măsurarea potențialelor este cu totul acceptabilă [17].

2.4.2. <u>Precizia modelării cu hîrtie electroconductoare</u>

Cauzele principale ale erorilor care apar la modelarea cîmpurilor electrice și magnetice pe hîrtie electroconductoare constau în imperfecțiunea mediului rezistiv - hîrtie în ceea ce privește omogenitatea, stabilitatea la temperatură și umiditate și izotropia lui.

Ordinul de mărime al dispersiei într-un rulou de hîrtie grafitată este de $\pm$ 6%. Pe suprafața limitată de un contur

BUPT

mai mic decît lăţimea ruloului ea este net mai slabă (de ordinul a 2-3%) [55].

Variaţia rezistivităţii hîrtiei electroconductoare numai cu temperatura este foarte mică ea fiind de ordinul a - 0,2%/°C.

Variaţia cu umiditatea este mai importantă şi poate produce modificări fie prin schimbarea condiţiilor atmosferice, fie prin uscarea locală a hîrtiei datorită încălzirii interne cauzată de o încărcare cu curent excesiv. Efectul din urmă poate fi uşor evitat avînd grijă ca disiparea în hîrtie să nu depăşească nicăieri aproximativ 100 mW/cm^2, echivalentă variaţiei potenţialului cu aproximativ 8 V/cm.

Hîrtia prezintă o anizotropie destul de evidentă, rezistivitatea în sensul rulării fiind cu aproximativ 10% inferioară celei în sens transversal rulării. Erorile introduse de anizotropie sînt admise ca atare, construirea unor modele distorsionate care să ţină seama de ea fiind dificilă.

Ca şi în cazul modelelor electrolitice şi chiar mai mult, eroarea totală este greu de aproximat datorită complexităţii ei. E greu de trecut de la o discuţie despre tipurile de surse de erori, la o afirmaţie generală a ordinului de mărime a preciziei care e de aşteptat la o problemă oarecare de cîmp.

Problemele variază ca structură foarte mult dar pot fi recunoscute două mari categorii.

Prima categorie cuprinde problemele la care informaţiile cerute se referă la configuraţia generală a cîmpului, de exemplu capacitatea sau permeanţa dintre anumite frontiere specificate, În problemele de acest gen o precizie de 1-2% se atinge destul de uşor.

Problemele de a doua categorie sînt acelea în care se cer informaţii despre detaliile locale ale modelului de cîmp, de exemplu gradientul de-a lungul unei frontiere specificate sau intensitatea cîmpului electric lîngă un colţ ascuţit. Depinzînd de geometria problemei precizia poate fi oricare, de la nivelul ± 1 - 2% pînă la ± 10-20% sau chiar mai slabă în cazuri deosebit de dificile şi la aplicarea unei tehnici greşite de execuţie a modelului. Ultima observaţie se referă la faptul că dacă electrozii de injectare a curenţilor, la modelarea unei ecuaţii Poisson, se lipesc, datorită procesului de lipire pot apare erori inadmisibile de 20-30% şi chiar mai

BUPT

mult, de aceea atașarea acestor electrozi pe hîrtie trebuie făcută cu mare atenție și prin presarea cu un strat izolator de strîngere (granule de porțelan cu diametrele de 2-3 mm) [20].

Dacă modelarea cîmpurilor poissoniene se poate efectua obținîndu-se în mod obișnuit o precizie de 10% (în determinarea intensităților de cîmp, a fluxurilor și a forțelor), [54] posibilitatea modelării cu precizie rezonabilă, a cîmpurilor magnetice variabile în timp, nu se întrevede din motive tehnologice.

2.4.3. Precizia modelării pe modele din tablă

Modelele din tabșă (de oțel de exemplu) dau rezultate cu mult mai bune decît cele din hîrtie grafitată putîndu-se atinge precizii de determinare a intensităților cîmpurilor de pînă la O 0,5% [61] . Aceste modele pot fi utilizate cu succes la analiza cîmpurilor laplaciene și poissoniene aproape cu aceleași precizii. Trebuie remarcat însă, că pentru precizii ridicate este nevoie ca în procesul de fabricare a tablei să se urmărească o abatere de la grosimea presorisă foarte mică (sub 1%).

Pentru tabla din fier se impune atenție în privința dependenței de temperatură a rezistenței electrice și a tensiunii termice. La o sarcină de 1 A/mm^2 creșterea temperaturii este de 1,7^{o}C. La valori ale tensiunilor de măsurat de 0,5 mV se face observată căldura mîinii operatorului încît trebuie utilizate "vîrfuri de măsurare" speciale a căror construcție este pretențioasă.

Exemple de utilizare a unor modele de tablă pentru determinarea cîmpurilor magnetice se găsesc în [62] - [66].

Utilizarea acestui tip de model la analiza cîmpurilor în conductoare masive e greu de întrevăzut (ca și în cazul celorlalte modele cu strat electroconductor) datorită dificultăților de fabricare a stratului condensator care implică o grosime foarte mică pentru dielectricul dintre foaia electroconductoate și electrodul conectat la masă.

III. MODELAREA PE REȚELE ANALIZOARE R ȘI RC

Acest tip de modelare are la bază ecuațiile obținute prin metoda diferențelor finite, elementelor finite și utilizînd discretizarea tip "celulă". Referirile se vor face în principal, la ultima metodă. Opțiunea are la bază și faptul că operațiile de

BUPT

îmbunătăţire a acestor ecuaţii sînt extrem de simple în comparaţie cu cele corespunzătoare metodei elementelor finite (v.2.2-A).

Din motivele expuse în 3.1-A se prezintă aici numai modelarea cîmpului magnetic.

3.1. <u>Tipurile de modele</u>

Pentru o celulă "e" (care include nodul "e") (fig.3.1.a) ecuaţia pe care o satisface A, în condiţiile aproximării unei densităţi medii de curent pe celulă egale cu cea din nodul "e", este:

$$\sum \nu_{mn} \frac{A_{e'}-A_e}{L_{ee'}} L_{mn} = \sigma_e\left(\frac{\partial A_e}{\partial t} + K\right) \tag{3.1}$$

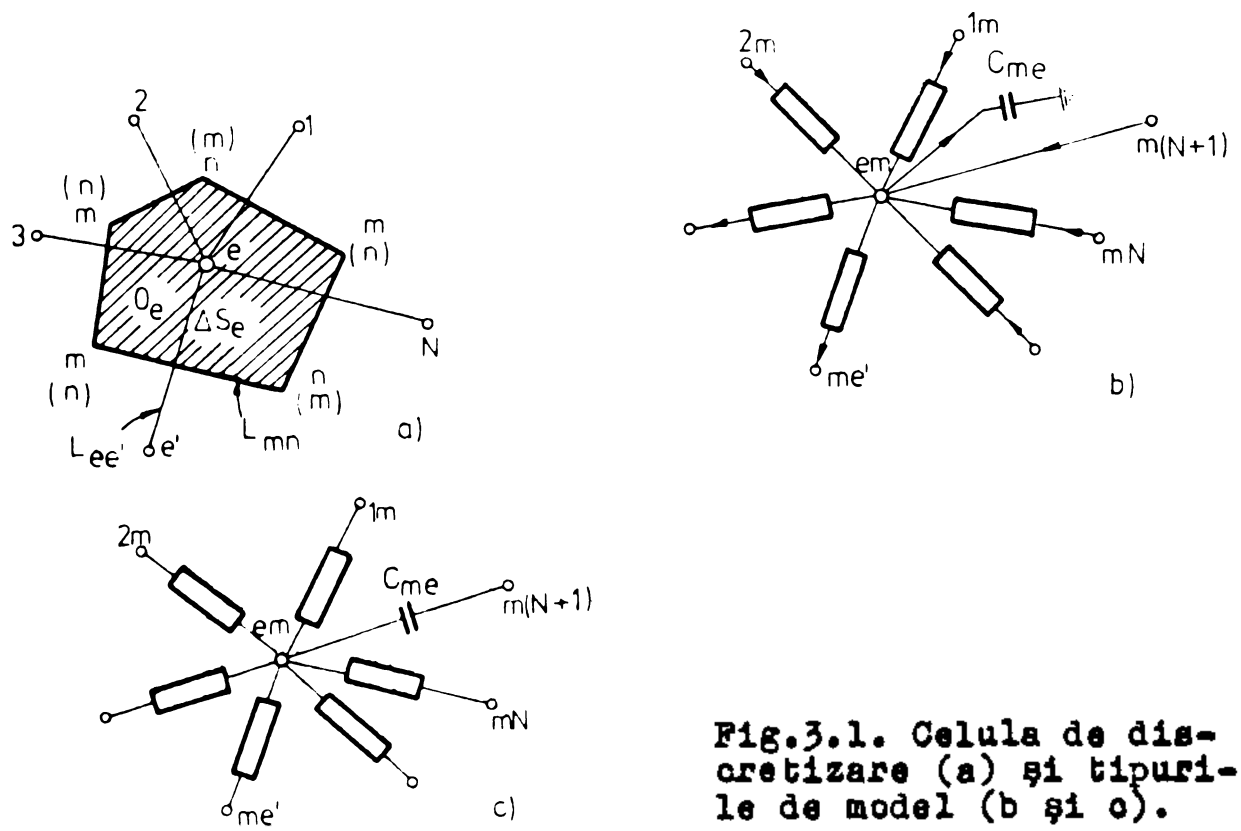


Fig.3.1. Celula de discretizare (a) şi tipurile de model (b şi c).

Există două tipuri de reţele electrice pe care se poate modela o astfel de ecuaţie (fig.3.1.b şi c).

Teorema I a lui Kirchhoff aplicată în jurul nodului "e" al reţelei din fig.3.1.b, se poate scrie astfel :

$$\sum_{e'=1}^{N} \frac{V_{me'}-V_{me}}{R_{me'}} = C_{me}\frac{dV_{me}}{dt_m} - i_{me} \tag{3.2}$$

BUPT

Pentru nodul "e" al rețelei din fig.3.1.c ea primește forma :

$$\sum_{e'=1}^{N} \frac{V_{me'}-V_{me}}{R_{me'}} = C_{me}\frac{dV_{me}}{dt_m} - C_{me}\frac{dV_{m,N+1}}{dt_m} . \qquad (3.3)$$

Se observă că ecuațiile (3.1) și (3.2) se mai pot scrie:

$$f(t,K,\Delta s_e,\sigma_e,\mu_e\frac{L_{ee'}}{L_{mn}}, A) = 0 \qquad (3.1')$$

$$f(t_m, i_{me}, C_{me}, R_{me'}, V_m) = 0 \qquad (3.2')$$

Alegînd pe $t, K, \Delta s_e\ \sigma_e$ respectiv pe t_m, i_{me}, C_{me}, ca mărimi fundamentale și pe μ_e, $\frac{L_{ee'}}{L_{mn}}$, A, respectiv pe $R_{me'}$, V_m ca mărimi derivate din primele, ecuațiile (3.1') și (3.2') se pot scrie sub formele lor criteriale :

$$F(\pi_1^A, \pi_2^A) = 0 \qquad (3.1'')$$

$$F(\pi_1^V, \pi_2^V) = 0 \qquad (3.2'')$$

în care :

$$\pi_1^A = \frac{\mu_{e'}\frac{L_{ee'}}{L_{mn}}}{t^{x_1^A}\cdot K^{y_1^A}\cdot(\Delta s_e\ \sigma_e)^{z_1^A}} ; \quad \pi_2^A = \frac{A}{t^{x_2^A}\cdot K^{y_1^A}\cdot(\Delta s_e\ \sigma_e)^{z_2^A}} ;$$

$$\pi_1^V = \frac{R_{me'}}{t_m^{x_1^V}\cdot i_{me}^{y_1^V}\cdot C_{me}^{z_1^V}} ; \quad \pi_2^V = \frac{V_m}{t_m^{x_2^V}\cdot i_{me}^{y_2^V}\cdot C_{me}^{x_2^V}}$$

Impunînd condițiile de adimensionalitate criteriilor, prin egalitățile :

$$\pi_1^A = \pi_1^V ; \quad \pi_2^A = \pi_2^V ,$$

se obțin condițiile care trebuie satisfăcute la modelarea ecuației (3.1) pe modelul din fig.3.1 b :

BUPT

$$\frac{\mu_e \frac{L_{ee'}}{L_{mn}} \cdot \Delta s_e, \sigma_e}{t} = \frac{C_{me}\ R_{me'}}{t_m} \qquad (3.4)$$

$$\frac{A}{t.K} = - \frac{V_m \cdot C_{me}}{t_m \cdot i_{me}} \qquad (3.5)$$

Introducînd în aceste relații coeficienții de analogie :

$$k_A = \frac{A}{V_m} \ ; \ k_\mu = \frac{\mu_e \frac{L_{ee'}}{L_{mn}}}{R_{me}} \ ; \ k_K = - \frac{K}{i_{me}} C_{me} \ ;$$

$$k = \frac{\Delta s_e \sigma_e}{C_{me}} \ ; \ k_t = \frac{t}{t_m}, \qquad (3.6)$$

rezultă :

$$k_t = k_\sigma k_u \qquad (3.4')$$

$$k_K = k_A\ k_t^{-1} \qquad (3.5')$$

Dintr-o analiză similară a corespondentelor ecuațiile (3.1) și (3.3) se obțin condițiile care trebuie respectate la modelare între mărimile fizice din original și model :

$$\mu_e \frac{L_{ee'}}{L_{mn}} \Delta s_e\ \sigma_e = \frac{t}{t_m}\ C_{me}\ R_{me'} \qquad (3.7)$$

$$\frac{A}{tK} = \frac{V_m}{t_m \frac{dV_{m,N+1}}{dtm}} \qquad (3.8)$$

respectiv relațiile (3.4') și (3.5') cu observația că de data aceasta

$$k_K = - \frac{K}{\frac{dV_{m,N+1}}{dt_m}} \qquad (3.9)$$

Pentru medii magnetice neliniare R_{me} trebuie să fie o funcție de curent analoagă lui μ (H), lucru practic imposibil de realizat datorită inexistenței unor astfel de dependențe pentru rezistențe.

In [67] se indică simularea neliniarității pentru cîm-

BUPT

puri unidimensionale prin circuite active în punte. Utilizarea acestei metode pentru cîmpuri bidimensionale duce la scheme mult prea complexe. Metoda nu ţine seama de pierderile prin histereză.

Se pot utiliza în acest caz modele cu elemente R şi C liniare şi variabile, problema de cîmp rezolvîndu-se prin metoda aproximaţiilor succesive (V.Cap.III-A). La fiecare iteraţie valorile rezistenţelor R_{me}, se vor schimba proporţional cu noile valori recalculate ale lui μ din caracteristica de magnetizare a materialului.

Tratarea prin modelare a problemei mediilor neliniare în general este în orice caz greoaie. E preferabil acestei rezolvări, soluţionarea ei cu calculatorul cifric, bineînţeles pentru domenii care reduc problema la un număr de ecuaţii acceptat de către acesta.

În consecinţă discuţia se va limita doar la mediile liniare indicîndu-se la locul potrivit cum poate fi modificat modelul corespunzător acestor situaţii pentru a putea fi folosit pentru condiţii de graniţă neliniare (în problemele cîmpurilor de dispersie).

Pentru medii liniare şi omogene, cel puţin pe zone, la paşi de discretizare constanţi şi egali cu h, (fig.3.2.a),

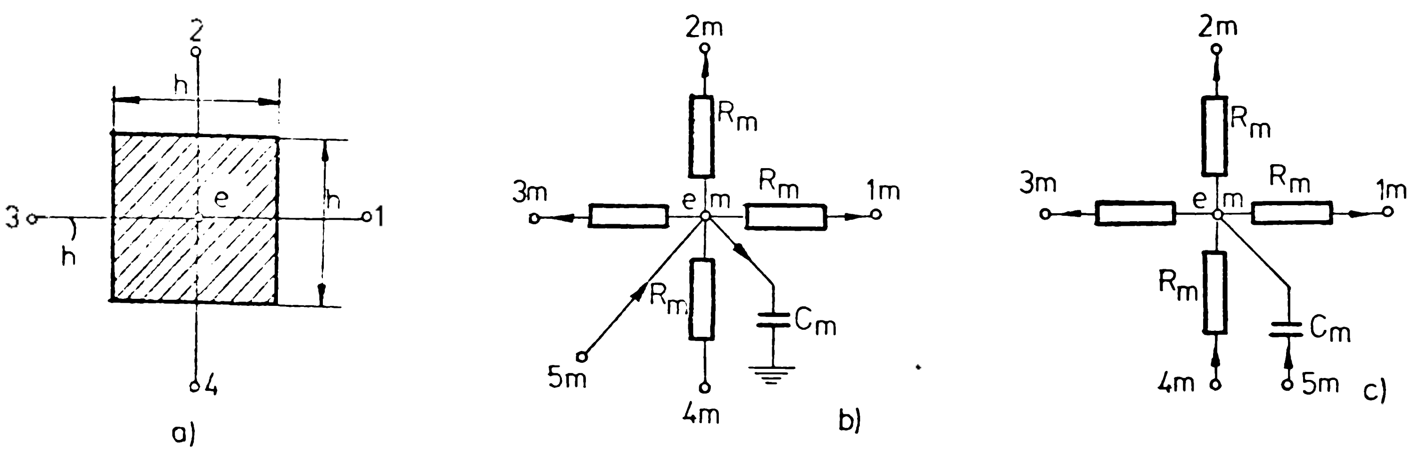


Fig.3.2.a. Celulă pătratică corespunzătoare discretizării cu pas constant ($L_{ee'} = L_{mn}$); b) reţeaua RC alimentată de la surse de curenţi i_{me}; b)analogul electric cu alimentare doar prin condensatori.

Ecuaţiile (3.1), (3.2), (3.3) vor primi formele :

$$A_1+A_2+A_3+A_4 - 4A_e = \mu\sigma h^2\left(\frac{\partial A_e}{\partial t} + K_i\right), \qquad (3.10)$$

BUPT

$$V_{m1}+V_{m2}+V_{m3}+V_{m4}-4V_{me}= R_mC_m\left(\frac{dV_{me}}{dt_m}-\frac{i_m}{C_m}\right), \qquad (3.11)$$

$$V_{m1}+V_{m2}+V_{m3}+V_{m4}-4V_{me} = R_mC_m\left(\frac{dV_{me}}{dt_m}-\frac{dV_{m5}}{dt_m}\right), \qquad (3.12)$$

condiţiile (3.4) şi (3.7) care sînt identice şi în caz general, devin :

$$\mu\sigma h^2 = R_m C_m k_t , \qquad (3.13)$$

iar condiţiile (3.5) şi (3.8) se pot scrie în ordine :

$$K = -\frac{k_A}{k_t}\,\frac{i_{me}}{C_m} \qquad (3.14)$$

$$K = -\frac{k_A}{k_t}\,\frac{dV_{m5}}{dt_m} \qquad (3.15)$$

Condiţia (3.14) se poate realiza injectînd curenţii i_{me} de la o sursă de curenţi sau de la surse obişnuite prin rezistenţe de injecţie de valori cu mult mai mari decît valori R_m.

Condiţia (3.15) se realizează mai simplu făcînd observaţia că pe secţiunea unui conductor componenta longitudinală K a cîmpului electric, este o constantă. Acest lucru sugerează legarea punctelor "m5" din model la acelaşi potenţial.

Rezultă deci două cele două moduri de alimentare a celor două tipuri de modele, prezentate în fig.3.3.a,b.

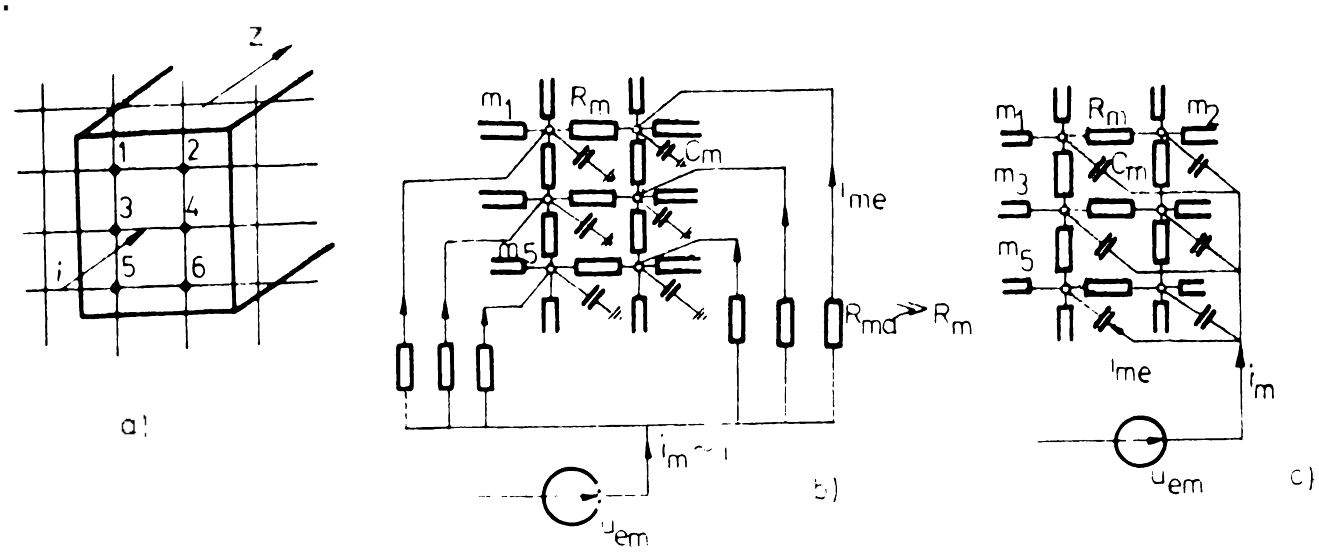


Fig.3.3. a)- Original cu planul cîmpului discretizat;
b)- Model RC (primul tip);
c)- Model RC (al doilea tip).

Primul tip de model (fig.3.3.b) are posibilităţi mai largi de utilizare putînd fi uşor modificat în scopul modelării

BUPT

cîmpurilor cu distribuţii poissoniene de curenţi (respectiv de sarcini, în cazul cîmpurilor electrice), prin simpla deconectare a condensatoarelor de la nodurile reţelei de rezistenţe, rămînînd astfel conectaţi doar rezistorii R_{ma} prin care se injectează curenţii i_{me} proporţional cu densitatea de curent $J = -K\sigma$ (sau cu densitatea volumetrică de sarcină electrică).

De asemenea acest model permite seprarea componentelor potenţiale şi rotaţionale ale cîmpului electric, respectiv a densităţilor medii de curent de cele turbionare:

$$J_{med} = -\sigma K = \frac{k_A}{k_t}\sigma i_{me} \tag{3.16}$$

$$J_{turb} = -\sigma\frac{\partial A}{\partial t} = -\sigma k_A \frac{du_{mc}}{dt_m} = -\frac{\sigma}{C_m} k_A i_{mc} \tag{3.17}$$

Al doilea tip de model (fig.3.3.c) permite pentru regimul variabil însoţit de curenţi turbionari, determinarea directă a densităţii de curent ($\bar{J} = -\sigma(\frac{\partial A}{\partial t} + K)\bar{k}$) în domeniu timp, compunerea lui J nemaifiind necesară după efectuarea măsurărilor pe model ca în cazul primului tip şi de asemenea permite alimentarea mai simplă, mai puţin costisitoare.

Se observă că dacă viteza de variaţie a lui A este apreciabilă, şi la problema de cîmp e necesar printre altele şi repartiţia cîmpului în curent continuu, această repartiţie se poate obţine cu o precizie convenabilă alimentînd modelul din fig.3.2.c. cu curenţi (sau tensiuni) sinusoidale de frecvenţe foarte mici : aşa de mici încît căderile de tensiune pe condensatori să fie foarte apropiate, practic egale.

După necesităţi se poate alege tipul de model adecvat.

Trebuie remarcat că pentru determinarea mărimilor globale R, L, C, al doilea tip răspunde foarte bine din p.d.v. al preciziei aşa că, din motive de economicitate, de spaţiu, referirile se vor face în continuare doar la acesta.

Referitor la cîmpurile potenţiale e util doar de precizat că pentru cele care se extind în tot domeniul (pînă la infinit), se poate utiliza un model în dublu strat asemănător celui prezentat în cap.II. Modelul în dublu strat se poate utiliza şi pentru analiza cîmpurilor magnetice rotaţionale ale sistemelor complete de conductoare, cu condiţia ca aceste conductoare să fie conţinute în interiorul cilindrului avînd raza egală cu raza in-

BUPT

versiune, în condiţii la limită omogene [57] .

Pentru cîmpurile electrice în medii neomogene relaţiile de similitudine se deduc uşor luînd în considerare ecuaţiile 3.37-A şi (3.2) din analiza cărora, cu

$$V = k_V V_m, \tag{3.18}$$

rezultă :

$$\varepsilon_{e'} \frac{L_{mn}}{L_{ee'}} = k_\varepsilon \, G_{me'}, \quad (G_{me'} = \frac{1}{R_{me'}}) \tag{3.19}$$

adică proporţionalitatea dintre permitivitatea din original şi conductanta model.

3.2. Exprimarea mărimilor din original în funcţie de cele din model

Pentru obţinerea unor relaţii simple de corespondenţă se admite că discretizarea cu pas constant este efectuată astfel, încît secţiunile conductoarelor sînt divizate într-un număr întreg N_s de elemente de suprafaţă $\Delta s_e = h \times h$. Acest lucru nu este desigur întotdeauna posibil şi ca atare relaţiile obţinute aici se modifică potrivit, de la caz la caz.

Inducţia magnetică se exprimă în funcţie de mărimile măsurabile pe model astfel :

$$\bar{B} = B_x \bar{i} + B_y \bar{j} = \frac{\partial A}{\partial y} \bar{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \bar{j} \approx \frac{A_2 - A_4}{2h} \bar{i} + \frac{A_3 - A_1}{2h} \bar{j} =$$

$$= \frac{k_A}{2h} (V_{m2} - V_{m1}) \bar{i} + (V_{m3} - V_{m1}) \bar{j} \tag{3.20}$$

<u>Densitatea de curent</u> are expresia :

$$J_e = - \sigma_e \left(\frac{\partial A_e}{\partial t} + K \right) = \frac{k_A}{k_t} \sigma_e \frac{d(V_{me} - V_{m,N+1})}{dt_m} = \frac{k_A}{k_t} \frac{\sigma_e}{\sigma_{me}} i_{me} =$$

$$= k_A \frac{R_m}{\mu h^2} i_{me} \tag{3.21}$$

<u>Curentul electric</u> este una din condiţiile date la o problemă de cîmp magnetic şi se calculează simplu în funcţie de cel absorbit de model, ţinînd seama de (3.21) :

$$i = \int_{S_0} \bar{J} \cdot \bar{ds} \approx k_A \frac{R_m}{\mu} i_m \tag{3.22}$$

BUPT

Impunîndu-se i_m în funcţie de posibilităţile de alimentare şi măsurare, pentru i cunoscut, se determină coeficientul de similitudine k_A :

$$k_A = \frac{\mu}{R_m} \frac{i}{i_m} \qquad (3.23)$$

Cu această valoare, pentru condiţii de frontieră, iniţialele şi structurile geometrice şi fizice cunoscute, corelaţiile original-model sînt cunoscute.

<u>Fluxul magnetic</u> printr-o suprafaţă S_Γ care se sprijină pe curba închisă Γ, formată din două segmente paralele, în direcţia lui $\bar{A}$ şi alte două normale acestea se obţin

$$\phi_{1,2} = \int_{S_\Gamma} (\bar{B}.\bar{ds}) = \oint_\Gamma (\bar{A}.\bar{dl}) = h_c\,(A_1-A_2) \approx k_A h_c (V_{m1}-V_{m2}) \qquad (3.24)$$

h_c - lungimea segmentelor paralele cu $\bar{A}$.

<u>Tensiunea la bornele originalului</u> se obţine din legea inducţiei electromagnetice :

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma (\bar{E}.\bar{dl}) = -\frac{d\phi_{1,2}}{dt} \qquad (3.25)$$

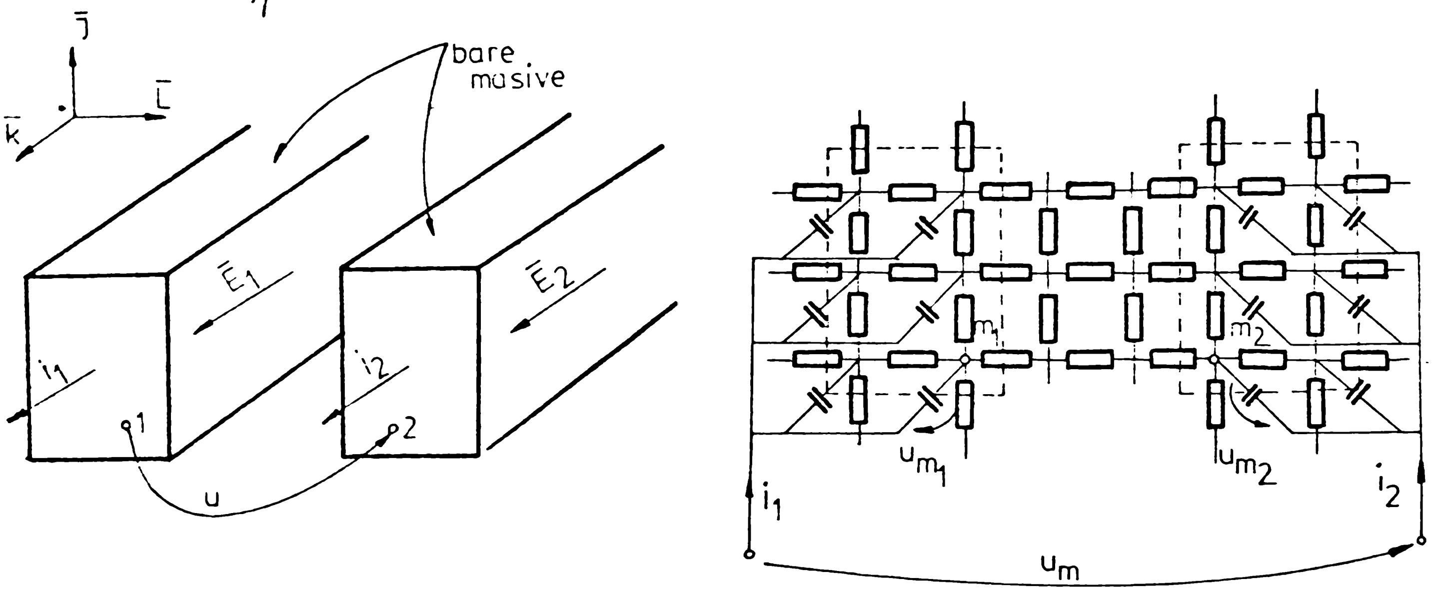


Fig.3.4.a. original; b. model (parţial).

Cu notaţiile din fig.3.4.a, (3.25) devine :

$$u + h_c\,(E_1-E_2) = -\frac{d\phi_{12}}{dt} \qquad (3.26)$$

Pentru model se poate scrie :

$$u_m - u_{m2}+(V_{m2} - V_{m1}) + u_{m1} = 0 \qquad (3.27)$$

BUPT

Introducînd expresiile căderilor de tensiune pe condensatori în funcţie de curenţi în derivata expresiei (3.26) în raport cu timpul din model rezultă :

$$\frac{du_m}{dt_m} + (E_1-E_2)\frac{k_A}{k_t} = -\frac{k_t}{h_c k_A}\frac{d\phi_{12}}{dt} ; \qquad (3.28)$$

s-a ţinut aici seama şi de relaţia :

$$E_e = \frac{J_e}{e} = \frac{k_t}{k_A}\frac{i_{me}}{C_{me}} \qquad (3.29)$$

Comparînd (3.28) cu (3.26) se obţine :

$$u = h_c \frac{k_A}{k_t}\frac{du_m}{dt_m} \qquad (3.30)$$

Energia magnetică se aproximează prin sume cu una din relaţiile :

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V (\bar{B}.\bar{H})\, dv = \frac{1}{2}\int_V (\bar{A}.\bar{J})\, dv \qquad (3.31)$$

Cu expresia (3.30) puterea instantanee se exprimă :

$$p = ui = h_c \left(\frac{k_A}{k_t}\right)^2 h^2 \frac{\sigma_e}{C_{me}} i_m \frac{du_m}{dt_m} \qquad (3.32)$$

In regim sinusoidal puterea complexă

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = P + j\,Q = k_p(-Q_m + j\,P_m) \qquad (3.32)$$

k_p avînd valoarea :

$$k_p = h_c \left(\frac{k_A}{k_t}\right)^2 h^2 \frac{\sigma_e}{C_{me}}\omega_m \qquad (3.33)$$

în care s-a ţinut seama de expresia lui k_t :

$$k_t = \frac{t}{t_m} = \frac{\omega_m}{\omega} = \frac{fm}{f} \qquad (3.34)$$

Puterea activă disipată în original este proporţională deci cu puterea reactivă din model iar cea reactivă cu cea activă din model. Această observaţie simplifică mult determinarea parametrilor R, L, C în curent alternativ sinusoidal dacă mijloacele de măsurare sînt sensibile la puteri mici. Astfel R_a şi L_a se vor determina din :

$$P = \frac{1}{\sigma}\int_V J^2 dv = I^2 R_a ; \quad Q = \int_V (\bar{B}.\bar{H})\, dv = X_a I^2 = L_a I^2$$

Ţinînd seama de relaţiile (3.21), (3.22) şi (3.7), expresia factorul rezistenţei în alternativ

$$k_a = \frac{R_a}{R_c} = \frac{P_a}{P_c} = \frac{\int_{V_c} (\bar{J}.\bar{E})\, dv}{R_c I^2} = \frac{S_c}{I^2}\int_{S_c} J^2 ds \approx$$

$$\approx \frac{S_c}{I^2}\sum_{e=1}^{N} J_e^2 \,\Delta S_c ,$$

primeşte formele :

$$k_a = \frac{N'}{I_m^2}\sum_{e=1}^{N} I_{me}^2 \frac{C_{me}}{C_m} = \frac{N'\omega_m^2}{I_m^2}\sum_{e=1}^{N}(U_{me}C_{me})^2 \frac{C_{me}}{C_m} \tag{3.35}$$

unde : N' este numărul de celule hxh cuprinse în secţiunea S_c a conductorului :

N - numărul de noduri cuprinse în interiorul lui S_c;

C_m- capacitatea de proiectare (v.rel.3.13);

C_{me}- capacitatea corespunzătoare nodului "e" (ea poate fi diferită de C_m dacă discretizarea nu cuprinde un număr întreg de celule cu S_e = h x h).

Se caută ca pe cît posibil discretizarea să se facă astfel încît n' = N şi $C_{me} = C_m$.

Expresia raportului dintre inductivitatea în c.a., (L_a) şi cea în c.c., (L_c):

$$L_{ar} = \frac{L_a}{L_c} = \frac{\int_{V_c}(\bar{B}.\bar{H})dv}{\int_{V_c}(\bar{B}.\bar{H})dv}$$

se aproximează, în caz general, înlocuind pe L_c cu L_a determinată pe modelul RC la o frecvenţă suficient de mică (de 1Hz pentru efectul de refulare mediu). Prin acest procedeu se evită utilizarea unor surse de curent necesare modelării cîmpului magnetic în C.C.

BUPT

Cu această aproximație, ținînd seama de relația (3.20), se obține :

$$L_{ar} \quad \frac{(L_a)_f}{(L_a)_{1Hz}} = \frac{(\int B^2\, ds)_f}{(\int_{S_c} B^2\, ds)_{1Hz}} = \frac{\left[\sum_e (U^2_{m2e4}+U^2_{m3e1})\frac{C_{me}}{C_m}\right]_f}{\left[\sum_e (U^2_{m2e4}+U^2_{mse1})\frac{C_{me}}{C_m}\right]_{1H}} \quad (3.36)$$

în care :

- U_{m2e4}, este tensiunea măsurată pe model în punctele 2 și 4, vecine pe o direcție punctului "e";
- U_{m3e1} - tensiunea între punctele 3 și 1 vecine lui "e",pe o direcție ortogonală direcției (2,4).

Forța care acționează asupra unui corp din cîmpul magnetic poate fi determinată prin intermediul tensiunii fictive de suprafață [4] , [5]: $\bar{F} = \int_{S_c} \bar{T}\, ds$ (3.37)

S_c fiind suprafața conductorului iar $\bar{T}$- tensiunea superficială.

Pentru cîmpurile plan-paralele

$$\bar{F} = h_c \oint_{\Gamma} \bar{T}\, dl \quad (3.37')$$

în care Γ reprezintă urma lui S_c în planul cîmpului.

Tensiunea superficială la neglijarea variației permeabilității cu densitatea de masă are expresiile

$$T = \left[\bar{H}/\bar{B} - \frac{1}{2}(\bar{B}.\bar{H})\right].\bar{n} = \bar{H}.(\bar{B}.\bar{n}) - \frac{1}{2}(\bar{B}.\bar{H}).\bar{n} \quad (3.38)$$

unde $\bar{n}$ reprezintă normala exterioară a suprafeței S_c (fig.3.5) și $\bar{H}/\bar{B}$ - produsul diadic al lui $\bar{H}$ cu $\bar{B}$.

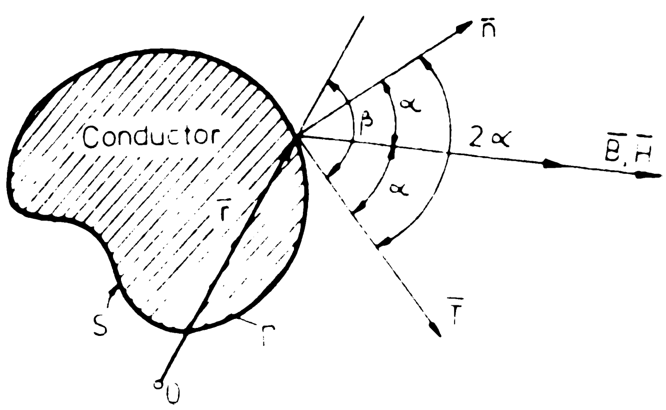


Fig. 3.5. Explicativă pentru relațiile (3.38) și (3.41).

Alegînd ultima expresie a lui $\bar{T}$ se observă ușor că $\bar{n}$ cu $\bar{H}$ și $\bar{H}$ cu $\bar{T}$ formează unghiuri egale și în plus unghiul dintre $\bar{n}$ și $\bar{T}$ are de două ori valoarea primului (notat cu α în fig.3.5): vectorii $\bar{n}$, $\bar{H}$, $\bar{T}$ sînt coplanari, perechile $(\bar{n},\bar{H})$ și $(\bar{H},\bar{T})$ for-

BUPT

mînd unghiuri egale. In plus $T = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu}$ (3.39)

Din cele arătate rezultă un mod simplu de determinare a forţei $\bar{F}$. Pentru fiecare nod al reţelei de discretizare, aflat pe curba Γ, se determină $\bar{B}$ cu expresia (3.20), se află pătratul modulului ei care se înmulţeşte apoi cu $\frac{\mu}{2}$ şi se determină modulul lui $\bar{T}$; direcţia şi sensul tensiunii $\bar{T}$ se determină în baza explicativei din fig. 3.5. Se calculează forţele elementare $h_0\bar{T}\ \Delta l_\Gamma$ şi apoi se însumează de-a lungul lui Γ. Elementul de lungime Δl_Γ este deseori egal cu pasul de discretizare h.

Tensiunea maxwelliană $\bar{T}$ în cazul unei suprafeţe de discontinuitate pentru μ (μ are valorile μ_1 şi μ_2 pe cele două feţe), cînd una din valorile lui μ, de exemplu μ_2, este cu mult mai mare decît cealaltă, are valoarea [4] , [5] :

$$\bar{T}_{1,2} = \frac{\bar{n}}{2}\mu_2\, H_t^2 \tag{3.40}$$

H_t fiind componenta tangenţială la suprafaţă a intensităţii cîmpului magnetic $\bar{H}$.

<u>Momentul</u> în raport cu un punct se determină simplu cu

$$\bar{M} = (\bar{r}\times\bar{F}) = h_c \oint_\Gamma [\bar{r}\times\bar{T}]\ dl = \frac{1}{2}\,\bar{k}h_0 \oint_\Gamma r\ H\ B\ \sin\beta\ dl, \tag{3.41}$$

Momentul are sensul şi direcţia lui $\bar{k}$.

S-a optat pentru utilizarea tensiunii maxwelliene la calculul forţelor şi momentelor întrucît faţă de metoda care utilizează densitatea de volum a forţelor, nu necesită un număr aşa de mare de măsurări şi nu implică determinări de defazaje, iar faţă de metoda care are la bază teoremele forţelor generalizate măsurările necesitate pentru calculul unei forţe sînt cu mult mai puţine.

3.3. <u>Modelarea la limitele de discontinuitate</u> <u>Condiţii de frontieră</u>

Este practică imposibil ca pentru o frontieră oarecare şi forme ale secţiunii conductoarelor diferite să se utilizeze doar discretizarea cu pas constant, şi deci constanţa valorilor rezistenţelor $R_{mee} = R_m$ în model.

Urmărirea geometriei sistemului, în apropierea contururilor de diferite forme, se efectuează prin schimbări ale rapoartelor $L_{ee'}/L_{mn}$, acest lucru transpunîndu-se pe model prin modi-

BUPT

ficare în acelaşi raport a valorilor rezistenţelor $R_{me'e}$. În acelaşi scop, structura unei celule se poate modifica şi prin modificarea numărului de elemente patrulatere eme'n, respectiv de triunghiuri emn astfel încît $N \geq 4$. Aceste operaţii pot fi foarte uşor urmărite prin intermediul relaţiilor (3.6) şi (3.7).

Sub aspect fizic, structura domeniului D se poate caracteriza prin funcţiile μ (x,y) şi σ(x,Y). În mod obişnuit $\mu=\mu_0$ pentru materialele neferomagnetice, în fier valoarea permeabilităţii fiind mult mai mare decît μ_0 şi, la considerarea neliniarităţii, este o funcţie de punct şi de intensitatea cîmpului magnetic : μ (x,y, H).

Executarea modelului corespunzător zonelor neliniare implică aşa cum s-a mai arătat, dificultăţi de ordin constructiv şi un volum mare de măsurări. Este indicat ca pentru rezolvarea acestor probleme să se apeleze la calculatorul cifric atunci cînd numărul ecuaţiilor algebrice care intervin în analiza cîmpului, este suficient de mic pentru o capacitate medie de rezolvare a unui calculator.

În cazurile pentru care se poate evita studierea cîmpului în astfel de medii, prin introducerea la suprafeţele lor a unor condiţii de frontieră neliniare, se poate transpune într-o formă adecvată metoda descrisă în Cap.II al acestei părţi.

În condiţiile aproximării funcţiei μ (x,y) cu o constantă cel puţin pe zone, un sistem care conţine miezuri feromagnetice de bună calitate şi în rest materiale electrotehnice obişnuite (cupru, aluminiu, izolaţie) divizează domeniul cîmpului plan-paralel în zone care pot fi caracterizate prin $\mu_r = \infty$ (cu oţel) şi în zone cu $\mu_r = 1$ ($\mu = \mu_0$: cupru). În acest caz pentru discretizarea în apropierea limitelor de separaţie, pentru geometrii ale acestor limite compuse din segmente de drepte ortogonale ale acestor limite celulele pătratice pot fi în mai multe situaţii : în funcţie de raportul dintre dimensiunile zonelor şi mărimea pasului de discretizare şi în funcţie de plasarea reţelelor de segmente cu care se subdivizează aceste zone.

Se vor considera doar rezultatele pentru trei situaţii tipice în care se află o celulă din zona de dispersie a cîmpului magnetic în vecinătatea unei zone ocupate de oţel electrotehnic în condiţiile inexistenţei unei densităţi superficiale de curent (fig.3.6.a,b,c.). Cele două medii : oţelul (notat cu II) şi cel din zona de dispersie (notat cu I) au conductivităţi electrice diferite. Relaţiile pe care le satisface A în cele trei situaţii (deduse în Anexa 1) sînt, în ordine :

$$\frac{A_1-A_e}{\mu_I}+\frac{A_2-A_e}{\mu_I}+\frac{A_3-A_e}{\frac{\mu_I+\mu_{II}}{2}}+\frac{A_4-A_e}{\mu_I}=\sigma_I\, h^2\left(\frac{\partial A_e}{\partial t}+K\right)$$

$$\frac{A_1-A_e}{\mu_I}+\frac{A_2-A_e}{\frac{2\mu_I\mu_{II}}{\mu_I+\mu_{II}}}+\frac{A_3-A_e}{\mu_{II}}+\frac{A_4-A_e}{\frac{2\mu_I\mu_{II}}{\mu_I+\mu_{II}}}=\frac{h^2}{4}\,(\sigma_I+\sigma_{II})\,\left(\frac{\partial A_e}{\partial t}+K\right) \quad (3.42)$$

$$\frac{A_1-A_e}{\mu_I}+\frac{A_2-A_e}{\mu_I}+\frac{A_3-A_e}{\frac{2\mu_I\mu_{II}}{\mu_I+\mu_{II}}}+\frac{A_4-A_e}{\frac{2\mu_I\mu_{II}}{\mu_I+\mu_{II}}}=(3\sigma_I+\sigma_{II})\,\frac{h^2}{4}\left(\frac{\partial A_e}{\partial t}+K\right)$$

care în baza relaţiilor (3.6) şi (3.8) se pot analiza pe reţelele din fig.3.6 d,e,f; sau, pentru $\mu_{rII}\gg 1$ şi $\sigma_{II}=0$ (la oţelul electrotehnic cu planul tolelor paralel cu cel al cîmpului), pe reţelele din fig.3.6, g, h, i.

E uşor de observat că pentru $\mu_{rII}=\infty$ ($\mu_{rII}\gg 1$) condiţiile la limită dau condiţii de frontieră de tip Neumann omogene şi porţiunilor ocupate de oţel le corespund în model rezistori cu conductanţe nule.

Pentru comoditatea construcţiei unui model RC este util ca pe cît posibil valorile R_m şi C_m să aibe aceleaşi valori.

Comparînd reţelele din fig.3.6 g,h,i se observă că dezideratul de mai sus este satisfăcut alegînd o discretizare la care celulele vecine frontierei să fie de tipul celei din fig.3.6.a.

De multe ori pe frontieră sînt date componentele tangenţiale ale intensităţii cîmpului magnetic (condiţii Neumann pentru A), diferite de zero şi celula interioară domeniului, vecină frontierei, este dreptunghiulară (fig.3.7.a). Pentru lungime L_Γ se poate aproxima :

$$\int_{L_\Gamma}\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}\,dl\approx\left(\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial A}{\partial n}\right)_e\cdot L_\Gamma \quad (3.43)$$

Ecuaţia (5.1) scrisă pentru celula vizată, va avea forma:

$$\frac{A_1-A_e}{\mu_1}\,\frac{L_1}{L_{e1}}+\frac{A_2-A_e}{\mu_2}\,\frac{L_2}{L_{e2}}+\frac{A_4-A_e}{\mu_4}\,\frac{L_4}{L_{e4}}=\Delta S_e\sigma_e\left(\frac{\partial A_e}{\partial t}+K\right)-\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}\right)_e\cdot L_\Gamma \quad (3.44)$$

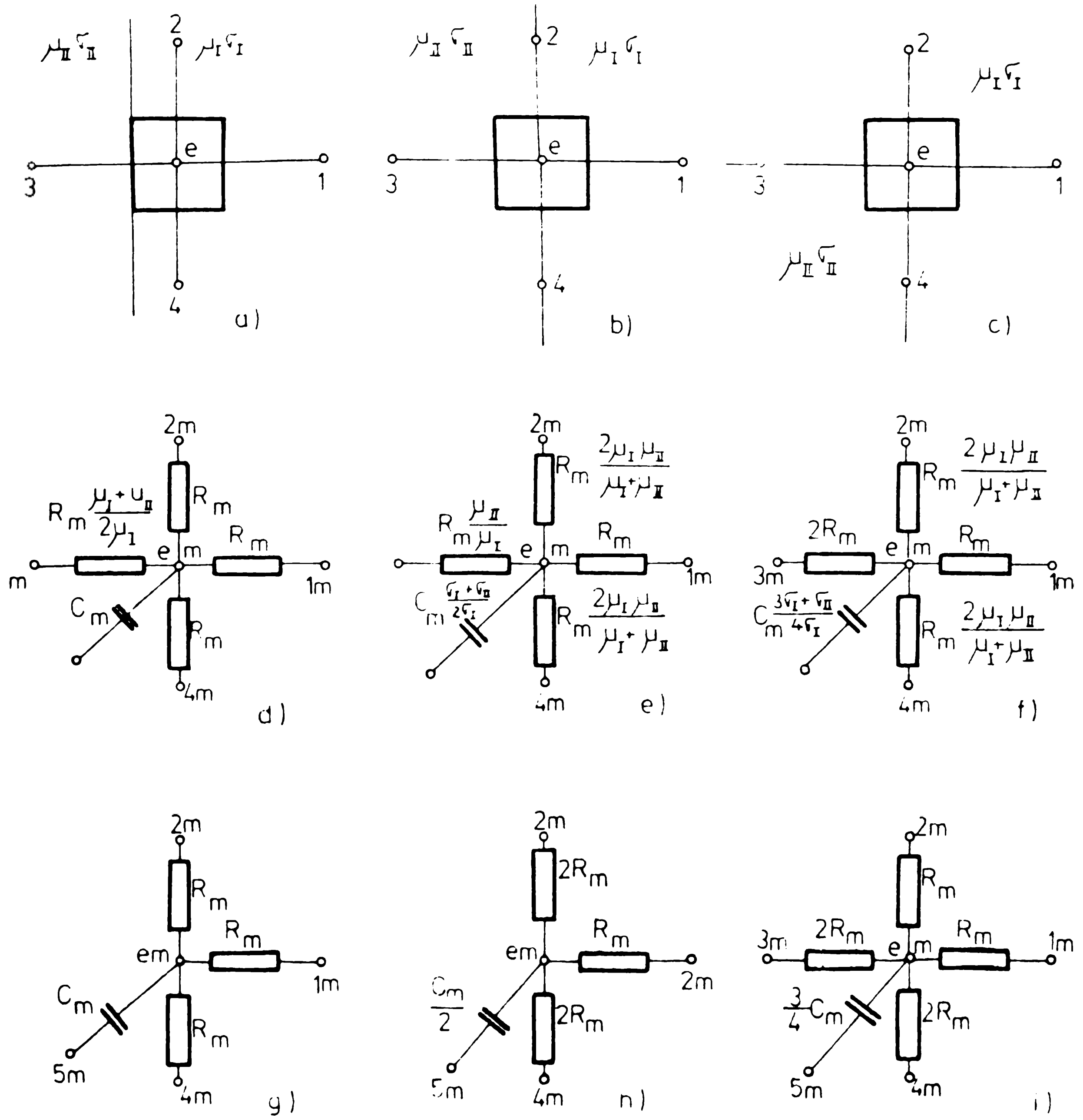


Fig.3.6. Poziţii tipice ale celulei pătratice şi reţelele-model corespunzătoare.

Pentru analogul din fig.5.7 b se poate scrie :

$$\frac{V_{m1}-V_{me}}{R_{m1}} + \frac{V_{m2}-V_{me}}{R_{m2}} + \frac{V_{m4}-V_{me}}{V_{m4}} = C_{m1}\,\frac{d(V_{me}-V_{m5})}{dt_m} - i_{ms} \qquad (3.45)$$

Din compararea relaţiilor (5.44) şi (5.45) rezultă :

$$i_{ms} = \frac{k_\mu}{K_A}\left(\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial A}{\partial n}\right)_e L_r \qquad (3.46)$$

Curenţii i_{ms} se obţin de la surse de curent adecvate : amplificatoare operaţionale acordate cu reacţie pozitivă [68] , sau pur şi simplu surse obişnuite de tensiune înseriate cu rezistenţe (impodanţe) adiţionale suficient de mari pentru a transforma aceste surse în surse de curent.

In regim sinusoidal, pentru condiţii de frontieră neliniare, determinarea cîmpului pe model se efectuează utilizînd metoda aproximaţiilor succesive (descrisă în cap.II al acestei părţi).

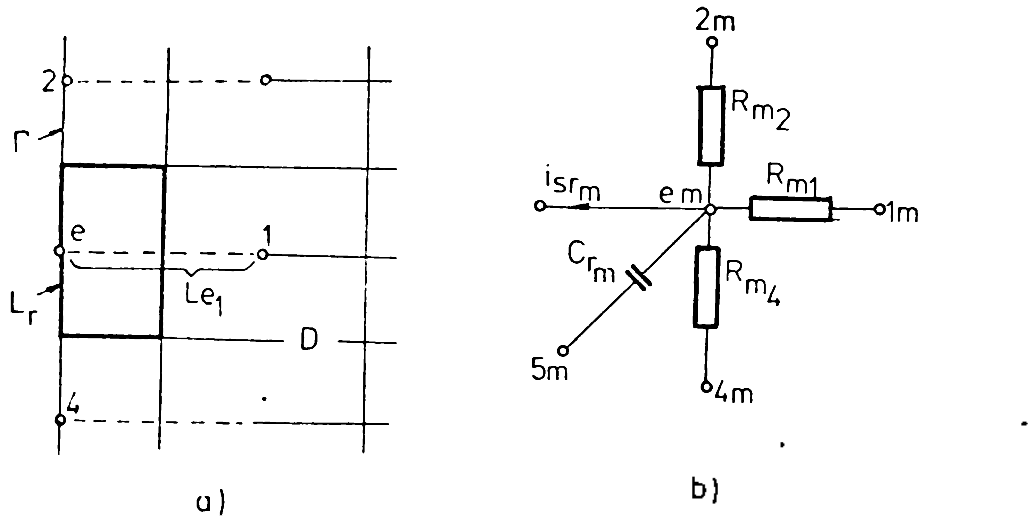


Fig.3.7.

Pentru o frontieră de acelaşi tip ca aceea prezentată în paragraful menţionat la o scriere în complex a mărimilor de cîmp se obţine :

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_e = \frac{k_A}{k_\mu}\frac{\underline{I}_{ms}}{L_r} \tag{3.47}$$

$$\text{şi } \underline{V}_{me} = (0,6-j)\sqrt{\frac{\mu_e}{\sigma\omega}}\,\frac{k_A}{k_\mu}\frac{\underline{I}_{ms}}{L_r}\,, \tag{3.48}$$

$$\text{de unde : } \underline{Z}_{me} = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_{ms}} = r_{mr} + j\,X_m = (0,6-j)\sqrt{\frac{\mu_e}{\sigma\omega}}\cdot L_r^{-1} \tag{3.49}$$

Analogul electric corespunzător unei celule de frontieră va avea structura celui din fig.3.8.

După stabilirea lui r_{mr} şi C_m pentru un μ_e (de exemplu $\mu_e = \mu_0$) se efectuează procesul de iteraţie şi se determină modelul final şi soluţia problemei.

Pentru o frontieră curbată (fig.3.9) sau oblică; este necesară deformarea dreptunghiurilor -celule (atît poziţia punctelor "e" cît şi a laturilor) pentru a le acomoda frontierei curbate.

BUPT

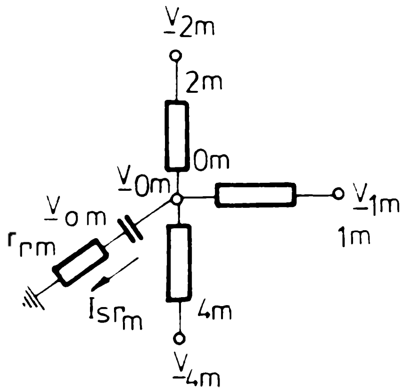


Fig.3.8. Analog electric pentru realizarea condițiilor de frontieră neliniare.

La construirea analogului electric se observă că anumiți rezistori sînt poziționați în linii diagonale ca de exemplu cel corespunzător punctelor P_1 și P_2.

E necesară o anumită experiență pentru a alege celula și punctul potrivit pentru fiecare frontieră curbată.

In caz cînd A este definit pe Γ printr-o constantă, valoarea V_m se impune la scara k_A și se fixează printr-un rezistor conectat cu o bornă la echipotențiala Γ_m și cu cealaltă la masă, valoarea rezistenței fiind cu mult mai mare decît $R_{mee'}$.

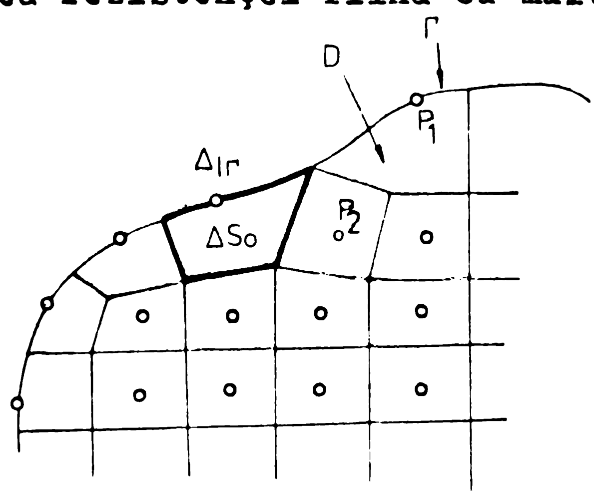


Fig.3.9. Structuri de celule la o frontieră Γ, curbată.

3.4. Tehnica măsurării pe modelele

Pentru măsurările pe rețelele analizoare R și RC sînt necesare voltmetre cu consum propriu mic : voltmetre electronice (analogice sau cifrice), oscilografe catodice etc. La modelele de curent alternativ, trebuie măsurate și defazaje. In acest scop se folosesc fazmetre electronice, osciloscoape stabile cu două spoturi, sau vectormetre magnetoelectrice.

a). In fig.3.10 este prezentată o schemă de măsurare pentru un model RC.

BUPT

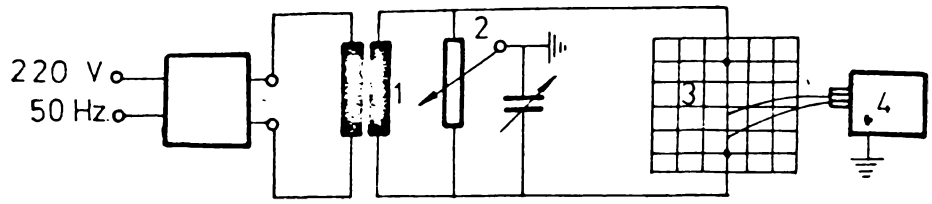


Fig.3.10. - Schemă de măsurare cu osciloscop cu două spoturi : 1) generator de audiofrecvenţă; 2) transformator de izolare a circuitului de măsurare; 3) priză de pămîntare tip Wagner; 4) modelul reţea; 5) oscilograf cu două spoturi.

Oscilograful are intrarea simetrică. Modelul este conectat la masă printr-o pămîntare Wagner pentru armonica fundamentală a tensiunii de alimentare.

În lipsa unui oscilograf cu două spoturi se poate utiliza unul cu un spot şi în acest caz defazajele se măsoară prin metoda elipsei.

Schema de lucru cu osciloscop cu un spot este prezentată în fig.3.11.

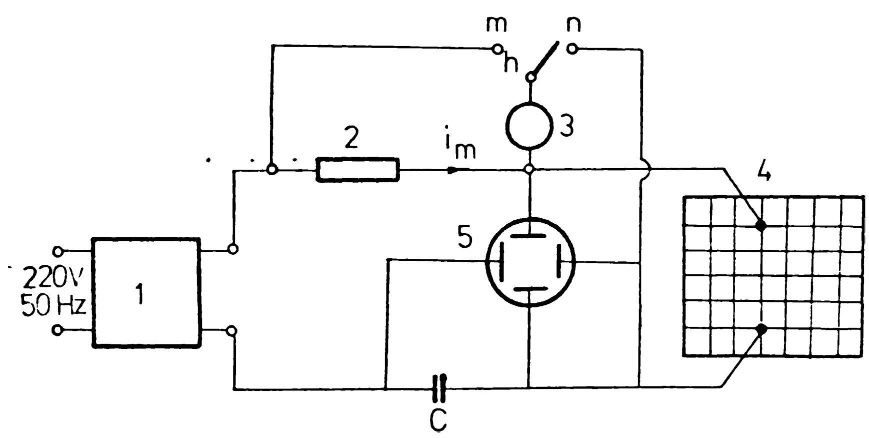


Fig.3.11. Schema de măsurare a mărimilor P_m şi Q_m : 1) generator de audiofrecvenţă; 2)rezistenţa etalon pentru măsurarea din i_m; 3) voltmetru electronic; 4) model RC; 5)osciloscop cu un spot.

Puterea activă este :

$$P_m = \frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} u_m\, i_m\, dt_m = \frac{Cf_m A}{S_x S_y} \qquad (3.50)$$

unde : $A = \pi ab$, este aria elipsei descrisă de spot pe ecranul osciloscopului (a şi b, cele două semiaxe),iar S_x şi S_y - sensibili-

BUPT

tăţile deplasărilor pe orizontală respectiv pe verticală osciloscopului ($S = \frac{h}{U}$; h - deplasarea spotului pe ecran.

Cu comutatorul k în poziţia "n" se măsoară curentul i_m, ($i_m = \frac{U}{R}$, R - rezistenţa rezistorului 2), iar în poziţia "n", tensiunea la bornele modelului. Rezultă :

$$Q_m = \sqrt{U_m^2 I_m^2 - P_m^2}$$

Metoda voltmetrului este mai simplă decît cele descrise şi la utilizarea unui voltmetru cifric, mai precisă. Ea permite măsurarea puterilor şi a valorilor densităţilor de curent. Schema de măsurare (fig.5.12) este extrem de simplă.

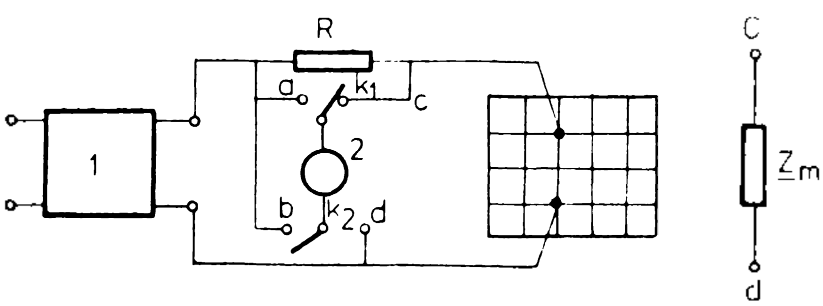


Fig.3.12.
a) generator de audiofrecvenţă; R rezistor de precizie ridicată; 2-voltmetru electronic; 3- model.

Se măsoară I_m (k_1 în poziţia c şi k_2 în poziţia b), V_m(k, în c şi k_2 în d), R_{em} (rezistenţa echivalentă a mediului) şi K_{em} (reactanta echivalentă a modelului).

Notînd $U_m = U_{m1}$ şi cu U_{m2} tensiunea măsurată între a şi d, rezultă :

$$R_{em} = \frac{R}{2}\left[\left(\frac{U_1}{U_a}\right)^2 - \left(\frac{U_2}{U_3}\right)^2 - 1\right] \qquad (3.51)$$

$$X_{em} = R\sqrt{\left(\frac{U_2}{U_3}\right)^2 - \left(\frac{R_{em}}{R}\right)^2} \qquad (3.52)$$

Cu aceste mărimi se calculează P_m şi Q_m respectiv Q şi P din original.

Cu K_1 în poziţia a şi k_2 în b se reglează "zeroul" aparatului de măsurare.

3.5. Precizia rezultatelor obţinute prin modelare pe reţele analizoare

Erorile de determinare a soluţiei problemei de cîmp pe modele R şi RC, au ca surse : imprecizia cunoaşterii funcţiilor de timp - tensiuni, curenţi de alimentare, imprecizia cunoaşterii parametrilor elementelor pasive care intră în structura modelului, imprecizia măsurărilor şi fixării condiţiilor de unicitate pe model şi trunchierile ecuaţiilor cîmpului la aproximarea lor prin relaţii între valori în puncte finite.

Cu tot numărul mare de surse de erori aferente acestei metode. modelarea de acest tip asigură o bună precizie de determinare a cîmpurilor şi anume sub 5% [35] , iar la o elaborare şi măsurări atente sub 3% [19] .-

a. Imprecizia inerentă cunoaşterii valorilor rezistenţelor şi capacităţilor elementelor pasive care alcătuiesc modelele determină, în baza condiţiilor de analogie (3.7 şi 3.8), un original probabil pentru care sînt valabile rezultatele obţinute pe model şi care diferă de cel pentru care s-a construit modelul.

Aprecierea cantitativă a erorilor introduse de abaterile (ΔR_m şi ΔC_m valorilor rezistenţelor şi capacităţilor reale (R_m, C_m) faţă de cele considerate în calcul (R_m şi C_m) este dificilă şi pentru a avea certitudinea diminuării lor nu rămâne altceva decît să se aleagă clase de precizie ridicate pentru elementele modelului. În caz că furnizorul nu poate asigura astfel de clase de precizie ele se asigură în urma sortării rezistorilor şi condensatoarelor cu punţi precise.

La reţelele RC, în comparaţie cu cele de tip R, pe care se modelează ecuaţia lui Laplace, apar erori suplimentare datorită imperfecţiunii condensatoarelor. Din această cauză reţeaua RC este mai puţin precisă decît reţeaua R. În consecinţă reţelele RC sînt construite de obicei cu puţini paşi de discretizare, tendinţă care creşte prin faptul că eroarea datorită curentului rezidual a condensatoarelor creşte cu numărul condensatorilor folosiţi.

Pentru a nu se influenţa negativ eroarea de trunchiere, care, după cum se va vedea, creşte esenţial cu creşterea pasului de discretizare, se caută limitarea scăderii numărului de condensatoare prin utilizarea unora cu pierderi foarte mici, şi anume a condensatoarelor cu stiroflex [69].

b. In contrast cu cuva electrolitică şi hîrtia electroconductoare (în mai mică măsură) reţelele analizoare nu ridică o reală dificultate de măsurare. Eroarea de măsurare poate fi re-

BUPT

dusă la o atentă alegere a schemei și aparaturii de măsurare, sub $10^{-4} \div 10^{-5}$ din valoarea potențialului maxim [7] .

La modelul RC, alimentat cu mărimi alternative, trebuie compensată influența capacităților parazite ale modelului față de masă. Acest lucru se poate efectua în două moduri : fie alegînd valorile capacităților din model cu mult mai mari decît cele parazite (care sînt de ordinul zecilor de picofarazi), fie compensînd influența ultimilor prin pămîntare Wagner [19] .

c. Pretenția unei bune precizii în cunoașterea semnalelor de alimentare a modelului este pe deplin satisfăcută azi întrucît există o gamă largă de generatoare de semnale cu calități superioare.

d. Precizia fixării condițiilor de unicitate depinde de satisfacerea cerințelor de la b și c.

e. Erorile sistematice ale căror valori nu se pot reduce oricît, sînt erorile de trunchiere.

Din expresiile (2.4-A), (2.7-A), (3.8-A), (2.67-A) și (2.68-A) rezultă că eroarea care afectează valoarea $A_{i,j}$(sau $V_{i,j}$) se propagă prin diferențele succesive, cu coeficienții binomului $(a-b)^{2n}$, în toate direcțiile planului cîmpului și ca urmare soluțiile locale sînt afectate de erorile de trunchiere din tot domeniul studiat.

Modul de estimare a acestor erori e sugerat tocmai de expresiile lor. După determinarea unei soluții introducînd valorile $A_{i,j}$ în aceste expresii se calculează aceste erori, bineînțeles cu un anumit grad de aproximație.

La proiectarea unui model e necesară estimarea acestor erori pentru că în funcție de ele se alege pasul de discretizare al domeniului cîmpului și ca atare numărul de rezistori și de condensatoare. Prin urmare ar fi foarte utile unele expresii ale acestora, chiar aproximative, care să sugereze mărimea pasului de discretizare.

Se știe că la modelarea ecuațiilor Fourier cele mai mari erori se pot datora trunchierii [7] și o parte substanțială din acestea este determinată de variația cîmpului, respectiv a lui A, în timp. Ținînd seama de aceste observații în [57] și [70] s-au dedus expresii ale diferitelor tipuri de erori de trunchiere pentru cazul particular al cîmpului magnetic unidimensional, adică pentru $\varepsilon_{2y} = 0$. Pentru acest caz :

$$\varepsilon_{\Delta} = \frac{\varepsilon_{2x}}{h^2} \qquad (3.52)$$

Indexînd mărimile exacte cu "e" şi a celor trunchiate cu "m" (măsurate pe model în condiţiile în care celelalte erori de modelare ar fi nule), transcriind mărimile electromagnetice în complex, se obţin următoarele relaţii între valorile raportate ale erorilor de trunchiere :

$$\underline{\varepsilon}_{\Delta} = - \frac{(\nabla^2 \underline{A})_m - (\nabla^2 \underline{A})_l}{(\nabla^2 \underline{A})_l} = \frac{\underline{J}_m - \underline{J}_e}{\underline{J}_e} = - \underline{\varepsilon}_{jr} =$$

$$= \left(\frac{h}{\delta}\right)^2 \sin \frac{h}{\delta} \, \mathrm{sh} \frac{h}{\delta} \; 1+j \; \left(\frac{h}{\delta}\right)^2 \left(1-\cos \frac{h}{\delta} \, \mathrm{sh} \frac{h}{\delta}\right) \qquad (3.53)$$

din care se observă că părţile reale şi imaginare ale cantităţilor $\underline{\varepsilon}_{\Delta r}$ şi de semn contrar :

$$\varepsilon_{\Delta rr} = - \varepsilon_{jrr}$$

$$\varepsilon_{\Delta ri} = - \varepsilon_{jri} \qquad (3.54)$$

Calculînd pe $\varepsilon_{\Delta rr}$, (ε_{jrr}), $\varepsilon_{\Delta ri}$ (ε_{jri}) şi erorile de unghi ale densităţii de curent, în funcţie de raportul $(\frac{h}{\delta})$ s-au obţinut rezultatele din tabelul 3.1.

Din analiza acestor rezultate se pot trage cîteva concluzii foarte importante pentru analiza numerică în general şi pentru modelarea cîmpului în particular.

Tabelul 3.1.

$\frac{h}{\delta}$	ε_{jrr}	ε_{jri}	$\frac{J_m}{J_e}$	$\varphi_{J_m} - \varphi_{J_e}$
0,1	0,000003	-0,0018	1,0000046	- 0,103°
0,2	0,000025	-0,0067	1,0000474	- 0,383°
0,3	0,000092	-0,0150	1,000204	- 0,859°
0,4	0,000287	-0,0267	1,000643	- 1,520°
0,5	0,000695	-0,0417	1,00156	- 2,386°
0,6	0,001441	-0,0599	1,00323	- 3,423°
0,7	0,002670	-0,0816	1,00598	- 4,652°
0,8	0,004553	-0,1065	1,01018	- 6,052°
0,9	0,007290	-0,1348	1,01629	- 7,622°
1,0	0,011105	-0,1663	1,02468	- 9,340°
1,25	0,027076	-0,2589	1,05920	-14,148°
1,5	0,056028	-0,3704	1,11910	-19,328°

BUPT

Se observă că începînd de la $\frac{h}{\delta}$ =0,8 , eroarea în modul a densităţii de curent este mai mare decît 1%, astfel încît la $\frac{h}{\delta}$ =1,5 această eroare atinge valoarea de 12%.

Atunci cînd rezolvarea problemei de cîmp se face doar în scopul determinării pierderilor suplimentare în alternativ sau în general a pierderilor Joule, raportul $\frac{h}{\delta}$ se poate lua aproximativ 0,8.

Dacă pentru a evita un număr mare de măsurări pe model, se determină mărimile globale k_a şi L_{ar} din puteri, e necesar ca $\frac{h}{\delta} \leq 0,5$ întrucît pentru $h > 0,5\delta$ eroarea de unghi a lui J depăşeşte $2,386^{o}$.

O altă observaţie interesantă se referă tot la erorile de unghi. Erorile de unghi sînt negative şi pentru compensarea lor ar fi necesară introducerea în model a unor reactanţe inductive. Prin utilizarea ecuaţiilor (3.70-A) la modelare aceste erori s-ar micşora esenţial, însă, aşa după cum s-a mai remarcat, alimentarea modelului ar ridica probleme suplimentare în utilizarea lui întrucît ar fi necesară introducerea de inductivităţi (fig.3.13).

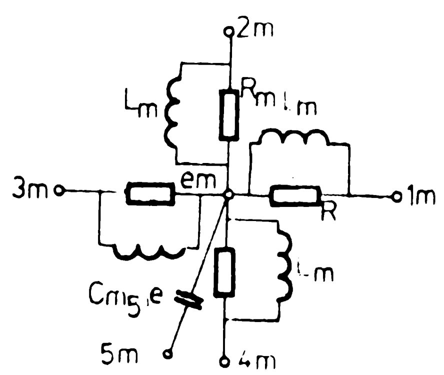


Fig.3.13. Model îmbunătăţit corespunzător relaţiilor (3.70-A).

Bineînţeles evaluarea erorilor analizate aici, la proiectarea unui model pentru o problemă de cîmp bidimensional, este aproximativă, însă ea poate fi satisfăcătoare dacă se utilizează o discretizare de tip celulă la care o pereche de normale L_{ee}, să urmărească liniile de cîmp magnetic, respectiv liniile $A(x,y)$= constant.

Acest fapt ar presupune cunoaşterea spectrului de cîmp, adică soluţia problemei. Pentru multe probleme e posibilă o trasare aproximativă a liniilor de cîmp înaintea proiectării modelului aşa încît problema evaluării cu bună precizie a erorii de trunchiere la determinările pe un model RC nu este insolubilă.

BUPT

În concluzie, modelarea pe rețele analizoare pasive permite rezolvarea ecuațiilor cîmpului electromagnetic pentru toate regimurile avute aici în vedere. Schemele de măsurare pe astfel de modele sînt extrem de simple și erorile de orice natură pot fi diminuate astfel încît precizia de determinare a mărimilor de cîmp poate fi dată practic de eroarea de trunchiere, eroare controlabilă și deci ajustabilă.

IV. MODELARE PROBABILISTICĂ

O deducere a relațiilor de similitudine nu-și are sensul la acest tip de modelare, cu totul special.

Metoda se bazează pe identitatea formală a ecuațiilor în diferențe finite pe care le satisface φ, (V, V_H, A), cu ecuațiile în diferențe pe care le satisface probabilitatea P, caracteristică mersului la întîmplare. Mersul la întîmplare se efectuează pe rețeaua de discretizare corespunzătoare dezvoltării în diferențe finite a laplacianului [2] . În continuare se dau cîteva elemente orientative privind acest tip de modelare [71] .

4.1. Bazele metodei

Se reconsideră fig.3.2-A (fig.4.1) în care se aleg două puncte M (ih, jh) și L (kh, th), h fiind pasul de discretizare, iar i,j,k,t, numere, numere întregi pozitive sau negative.

Un traseu (sau drum) al rețelei este constituit dintr-o succesiune de puncte vecine din aproape în aproape, de exemplu M, M_1, M', M", M"', ..., L. Într-o asemenea succesiune parametrii i și j a două puncte vecine diferă sau unul sau altul (nu ambele în același timp) printr-o unitate în plus sau în minus; un pas înainte sau înapoi pe una din dreptele rețelei.

Deplasarea la întîmplare pe o rețea plană este un lanț Markov finit foarte special și reprezintă alcătuirea din aproape în aproape a unor trasee conform unei matrici de probabilități de trecere dintr-un punct-nod în altul vecin. Stările la care se referă acest proces (în caz general include timpul)sînt nodurile rețelei. Procesul, caracterizat de o macrostructură uniformă și o microstructură neregulată, este dat odată cu matricea probabilităților de trecere de la un nod la altul $p_{M,L}$ sau $p_{ij,kl}$. În procesul de mers la întîmplare singurele posibilități elementare care nu sînt obligator nule sînt cele care corespund unui singur pas sau rămînerii pe loc.

Se va presupune de la început că probabilitățile pașilor $(i,j)\rightarrow(i+1,j)$ și $(i,j)\rightarrow(i-1,j)$ ca și acelea ale pașilor (i,j) $(i,j+1)$, $(i,j)\rightarrow(i,j-1)$ sînt respectiv egale.

Cu aceste convenții prealabile se pot introduce notații convenabile pentru posibilitățile elementare de trecere într-un singur pas de la o poziție la alta (de la o stare la alta).

$$p_{M,L}=\begin{cases} p_M = p_{i,j} \text{ dacă L este } M_1 \text{ sau } M_3, \\ q_M = q_{i,j} \text{ dacă L este } M_2 \text{ sau } M_4, \\ r_M = r_{i,j} \text{ dacă L este identic cu M.} \end{cases} \tag{4.1}$$

În plus, $p_{M,L} = 0$, dacă L nu este M însuși sau un punct vecin cu M.

Ținînd seama pentru posibilitățile elementare ale unui lanț Markov se pot scrie [71] , [39] , [72]:

$$p_{M,L} \geqslant 0; \sum_L p_{ML} = 1, \tag{4.2}$$

cînd L parcurge pozițiile posibile în rețea, rezultă în acest caz următoarele proprietăți

$$p_M \geqslant 0; \; q_M \geqslant 0; \; r_M \geqslant 0; \; 2(p_M+q_M) + r_M = 1 \tag{4.3}$$

Dacă se notează cu $P^{(n)}_{M,L}$ posibilitatea de trecere de la M la L în n pași, relația lui Chapman caracteristică lanțului Markov este

$$P^{(n+1)}_{M,L} = \sum_R p_{M,R}\, P^{(n)}_{R,L} \tag{4.4}$$

unde R parcurge toate stările rețelei, și care, în cazul mersului la întîmplare, devine :

$$\begin{aligned} P^{(n+1)}_{(i,j),L} - P^{(n)}_{(i,j),L} = {} & p_{i,j}(P^{(n)}_{(i+1,j),L} + P^{(n)}_{(i-1,j),L} - \\ & - 2\,P^{(n)}_{(i,j),L}) + q_{i,j}(P^{(n)}_{(i,j+1),L} + P^{(n)}_{(i,j-1),L} - \\ & - 2\,P^{(n)}_{(i,j),L}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dacă $P^{(n+1)}_{(i,j),L} = P^{(n)}_{(i,j),L'}$ ecuația (4.5) este identică formal cu ecuația lui Laplace în diferențe finite la o discreti-

BUPT

zare cu paşi diferiţi pe direcţiile x şi y.

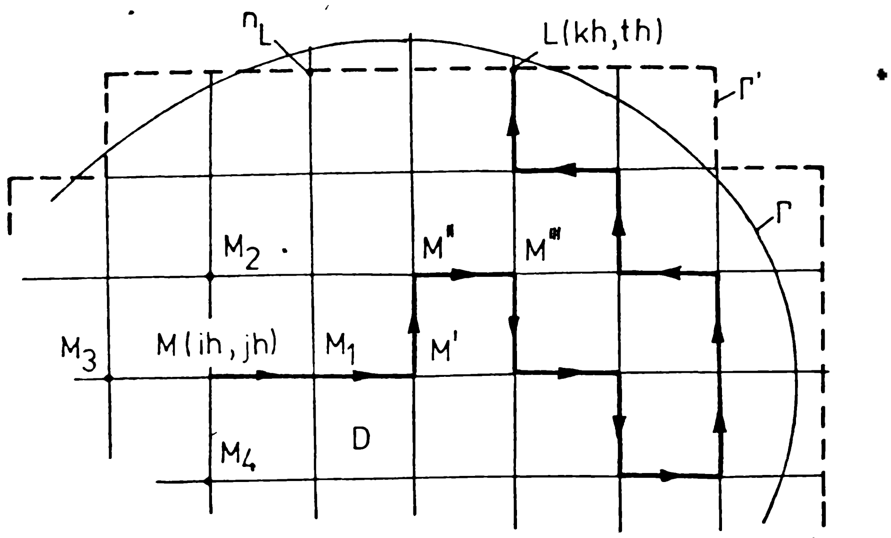


Fig.4.1. O porţiune din domeniul D, limitat de curba cu punctele semnificative şi un traseu aleator.

In [71], [73], se arată că dacă, atunci cînd M şi L se află pe frontiera Γ a domeniului (neextinsă pe la infinit), se admit pentru $P^{(n)}_{M,L}$ condiţiile :

$$P^{(n)}_{M,L} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } M \equiv L, \\ 0 \text{ dacă } M \not\equiv L, \end{cases} \qquad (4.6)$$

mersul la întîmplare este un proces subergodic, adică $\lim\limits_{n \to \infty} P^{(n)}_{M,L} = P_{M,L}$, şi ca urmare relaţia (4.5) primeşte forma :

$$p_{i,j}(P_{(i+1,j),L} + P_{(i-1,j),L} - 2\,P_{(i,j),L}) + \qquad (4.7)$$

$$q_{i,j}(P_{(i,j+1),L} + P_{(i,j-1),L} - 2\,P_{(i,j),L}) = 0$$

Dacă probabilităţile de trecere $p_{i,j}$ şi $q_{i,j}$ sînt egale relaţia (4.7) se reduce la :

$$P_{(i,j),L} = \frac{1}{4}(P_{(i+1,j)L} + P_{(i-1,j)L} + P_{(i,j+1),L} + P_{(i,j-1),L}) \qquad (4.8)$$

Se observă că $P_{M,L}$ satisface o ecuaţia Laplace, în diferenţe finite.

In [73] se demonstrează că în condiţiile (4.6) valoarea unei funcţii (x,y) care satisface ecuaţia lui Laplace, într-un punct M, interior domeniului D, cu valorile pe frontieră φ_L se

BUPT

poate estima cu relaţia

$$\varphi_M = \sum_{L=1}^{N} \varphi_L \, P_{M,L} = \sum_{L=1}^{N} \frac{n_L}{n} \varphi_L \tag{4.9}$$

unde N este numărul de puncte - noduri aflate pe linia frîntă închisă care aproximează după discretizare, frontiera.

Valoarea lui $P_{M,L}$ se calculează simplu cu expresia :

$$P_{M,L} = \frac{n_L}{n} , \tag{4.10}$$

unde n este numărul total de trasee realizate pornind din M şi ajungînd într-un punct de pe frontieră, iar n_L este numărul de cîte ori, pornind din M (x_i, y_j) intersectarea frontierei se face în $L(x_k, y_l)$.

O realizare a procesului de mers la întîmplare, în corespondenţă cu posibilităţile de trecere definite de (4.1), dacă aceste posibilităţi sînt numere raţionale, este următoarea : fiecărui punct M i se asociază o urnă care conţine cinci grupe a cîte b_k $(k = 0, \ldots, 4)$ bile de culori diferite. Cînd mobilul imaginar care execută mersul la întîmplare ajunge în M, se extrage din urnă, la întîmplare, o bilă. Dacă se asociază deplasarea elementară $M M_k$ culorii grupului b_k, posibilităţile de trecere P_{MM_k} vor avea valorile

$$P_{MM_k} = \frac{b_k}{\sum_{k=0}^{N} b_k} \tag{4.11}$$

avînd evident satisfăcute relaţiile (4.2) :

$$\sum_{k=0}^{4} P_{MM_k} = \sum_{k=0}^{4} \frac{b_k}{\sum_{k=0}^{4} b_k} = \frac{\sum b_k}{\sum b_k} = 1$$

Grupul b_0 determină posibilitatea rămînerii în M.

Asociind extragerile la întîmplare din cîte o urnă la procesele de mers la întîmplare, se pune în evidenţă partea esenţială aleatoare a procesului prin intervenţia numerelor aleatoare legate de aceste extracţii. Utilizarea efectivă a metodei este numai o problemă de practică imediată, care de-

BUPT

pinde în primul rînd de tabelele de care se dispune în prealabil. E uşor de închipuit pe baza unor astfel de tabele cu nu,ere aleatoare,. algoritme şi programe de calcul cu calculatorul cifric obişnuit, astfel încît durata de calcul a potenţialelor să fie extrem de scurtă.

Sînt calculatoare hibride, specializate, care evită utilizarea unor tabele de numere aleatoare, tot procesul de realizare a traseelor aleatoare şi de estimare probabilistică, efectuîndu-se de către un calculator hibrid [73] . Schema bloc a unui astfel de calculator este prezentată, în fig. 4.2.

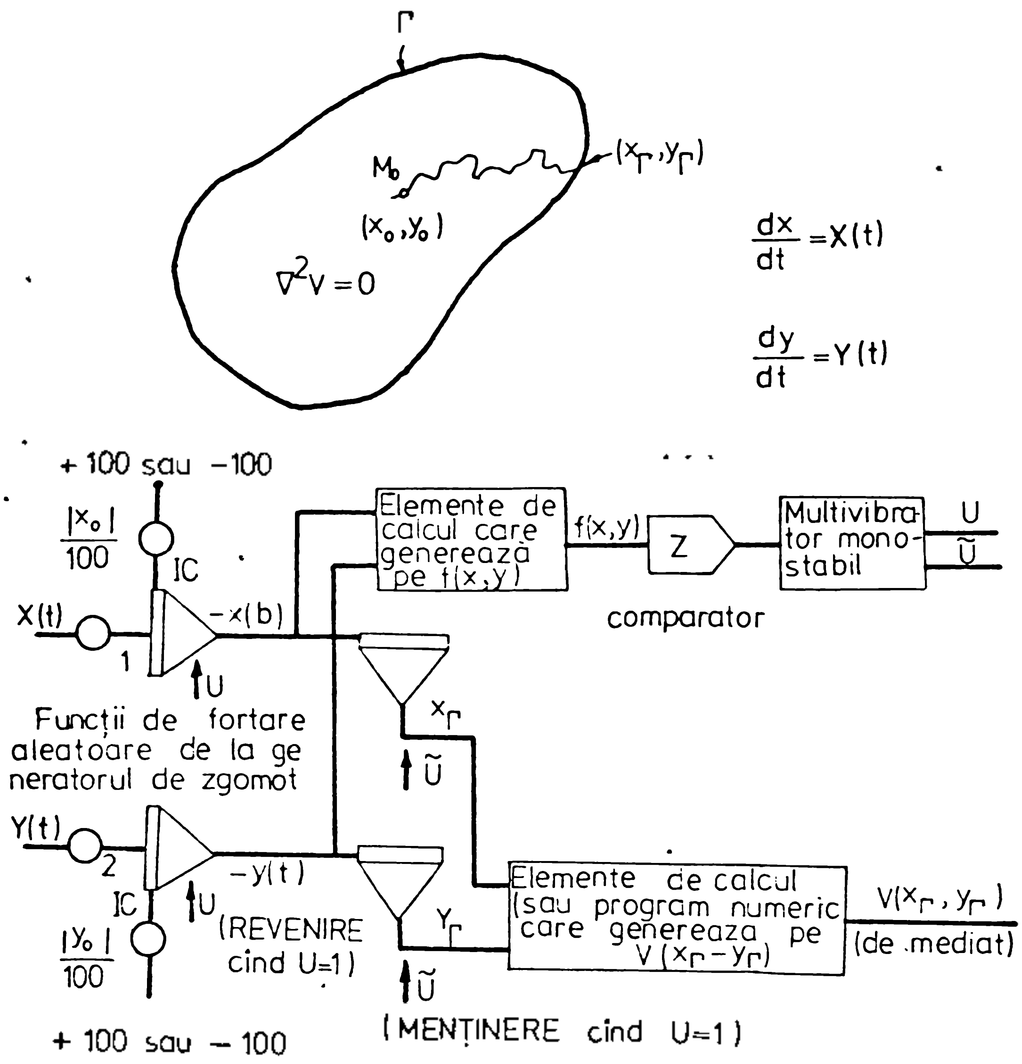


Fig.4.2. Schema bloc al unui calculator hibrid pentru rezolvare stohastică a ecuaţiei lui Laplace: $\nabla^2\varphi = 0$.

De data aceasta se rezolvă forma diferenţială a ecuaţiei lui Laplace.

Se arată [74] că traseul aleator generat de soluţiile x(t) şi y(t) ale ecuaţiilor

$$\frac{dx}{dt} = X(t) \; ; \; \frac{dy}{dt} = Y(t) \; , \qquad (4.12)$$

cu valorile inițiale $x(0) = x_M$, $y(0) = y_M$ și funcții de forțare independente cu zgomot alb $X(t)$ $Y(t)$, cu medie nulă și densități spectale egale, va traversa frontiera în astfel de puncte (x_L, y_L) să fie satisfăcută condiția ca media pe ansamblu

$$E\left\{(x_L,y_L)\right\} = \varphi(x_M, y_M) \qquad (4.13)$$

Prin urmare media eșantioanelor $\widetilde{\varphi}(x_L,y_L)$ pentru un număr convenabil de trasee aleatoare este o estimație dorită $\varphi(x_M,y_M)$ în $M(x_M,y_M)$.

Integratoarele 1 și 2 din fig.4.2. rezolvă ecuațiile stohastică (4.12) iar circuitul basculant acționat de un comparator eșantionează pe $x(t)$,$y(t)$ și readuce în situația inițială integratoarele cînd $M(x,y)$ traversează frontiera.

Frontiera poate fi definită sub formele :

$$\begin{aligned} U = 1 \text{ dacă } & y - f_1(x) \geq 0, \\ \text{sau } & y - f_2(x) \leq 0, \qquad (4.13) \\ \text{sau } & f\,(x,y) \geq 0. \end{aligned}$$

Funcția de frontieră $\varphi(x_L,y_L)$ a mărimilor de ieșire x_L,y_L, ale elementului de extragere-menținere, este calculată de circuite analogice sau numerice și este mediată, de preferință numeric, pentru a produce estimațiile $\varphi(x_M,y_M)$; se regăsește astfel formula (4.9).

Metoda stohastică (probabilistică,Monte-Carlo) poate fi extinsă pentru probleme Dirichlet generale (cîmpuri irotaționale în medii neomogene [75] , [76] și foarte ușor pentru cîmpuri tridimensionale [71] .

De asemenea există posibilități atrăgătoare de a fi utilizată și în analiza cîmpurilor care satisfac cele mai generale ecuații diferențiale cu derivate parțiale [77] , [78] .

Se întrevede utilizarea în baza ecuațiilor (4.8) și (4.9) a unui program de calcul cifric utilizînd tabele de numere aleatoare generate cu un model cu urne. Algoritmul de calcul constă în esență în varierea indicilor (i,j) pînă la identificarea lor cu (k,l), varierea fiind condiționată de numerele aleatoare atașate deplasărilor elementare. Identificarea cuplurilor (i,j), (k,l) reprezintă condiția de reîntoarcere la valorile inițiale

BUPT

ale lui (i,j).

4.2. Precizia metodei stocastice

Rezultatele obținute cu această metodă sînt afectate de erorile de trunchiere și de cele provocate de fluctuațiile statistice. Pentru eșantioane de 300 ÷ 2000 trasee, ultimul tip de erori are valoarea de cîteva procente [73].

Utilizarea calculatorului specializat introduce și erorile determinate de imprecizia elementelor lor componente.

BUPT

C. PROBLEME REZOLVATE

În problemele propuse spre rezolvare se cere determinarea cîmpului electromagnetic cvasistaționar în cîteva sisteme de conductoare masive.

După cum se observă în Cap.I-A, curenții variabili nu parcurg conductoarele masive cu o distribuție uniformă. Ei tind să se concentreze la periferia lor și ca urmare pierderile de putere pe unitatea de lungime a oricărui conductor, cresc peste valoarea din curent continuu. În mod similar repartițiile parțiale de curenți dau naștere la variații ale distanțelor geometrice ale distribuțiilor de curent, conducînd la variații ale inductanței totale a oricărui conductor din sistem. În toate cazurile distribuția de curent este guvernată de ecuația difuziei.

Prima soluție în întregime analitică dată unei astfel de probleme este prezentată în [79] și utilizează o generalizare a procesului iterativ pentru bare de secțiuni transversale dreptunghiulare. Această metodă pare a fi puțin cunoscută și nu a fost des folosită, poate din cauza convergenței prea lente a iterației, care conduce la o rezolvare laborioasă. Este adevărat că foarte multe calcule pot fi preluate de calculatorul digital, însă între timp au fost dezvoltate metode mai bune.

Tehnica de aproximare numerică propusă și folosită pentru prima dată în [80] s-a dovedit ușor adaptabilă pentru o programare simplă a calculatorului cifric și a devenit foarte practică și cu aplicabilitate extinsă datorită lucrării [81].

Folosind teoria modală a curgerii curentului în analiza efectului pelicular al conductoarelor izolate, paralele, aranjate arbitrar și excitate de curenți arbitrari, s-au obținut rezultate cu precizii de 0,5% [82]. Procedeul a fost extins [83] pentru cazul multiconductoarelor (conductoare multiple și polifazate). Întrucît deocamdată nu este suficient de bine înțeleasă variația parametrilor modali cu rapoartele laturilor conductoarelor, metoda s-a utilizat doar pentru regimuri sinusoidale, extinderea rezultatelor pentru regimuri tranzitorii neputînd fi preconizată.

În [19] se prezintă o soluționare numerică a acestor probleme, prin utilizarea rețelelor analizoare de tip RC, justificată de acuratețea de 0,5 ÷ 0,3%. In scopul utilizării modelării discrete pentru o gamă mai largă de probleme de cîmp magnetic în [30] se sugerează aplicarea pentru domeniile infinite a unei inversiuni care determină o rețea "matematică" infinită. Acest model reprezintă o replică a cuvei electrolitice în dublu strat [56].

Rezolvările celor trei probleme prezentate aici au la bază analiza cîmpului prin modelare pe rețele analizoare RC, celelalte mijloace de modelare (v.Cap.I-B și III-B) fiind incapabile de a asigura precizii cît de cît rezonabile. Din motive de comoditate constructivă s-a ales ca tip fundamental discretizarea cu pas constant. Cum la problemele de cîmp magnetic se dau deseori condiții de frontieră de tip Neumann (pentru potențialul vector magnetic) și frontierele sînt de forme oarecare, se impune divizarea domeniului în celule patratice, de la care se poate trece fără dificultate la forme adecvate cuprinderii întregului domeniu delimitat de frontieră.

Întrucît în prezentarea de principiu s-au dedus relațiile de calcul și s-au făcut precizări asupra schemelor de măsurare, în continuare se va evita repetarea acestora. Cu toate că fiecare din problemele rezolvate s-a pretat la soluționări cu calculatorul cifric, doar pentru una din ele s-a alcătuit și s-a rulat un program scris în FORTRAN (problema III), în scopul confruntării rezultatelor.

I. MODELAREA UNUI SISTEM DE BARE COLECTOARE IN VEDEREA DETERMINARII PARAMETRILOR R^*, L^*, C^*

Se prezintă o rețea RC pe care se poate modela cîmpul electromagnetic a unui sistem de două bare masive, paralele, parcurse de curenți sinusoidali, în vederea determinării valorilor parametrilor lineici R^*, L^*, C^* și a forțelor electrodinamice. Sînt prezentate de asemenea unele rezultate experimentale utilizate în calculul de proiectare a laboratorului de mare putere din cadrul U.E.P.C., și publicate în [69].

1.1. Integratorul RC corespunzător sistemului

Se consideră un sistem de două bare paralele de secțiune dreptunghiulară (fig.1), așezate simetric față de o axă mediană (y,y').

Datorită simetriei barelor față de axa y y', pentru orice distanță d există o linie de cîmp magnetic care coincide cu direcţia yy' (fig.2), componenta inducţiei magnetice după axa xx' fiind pentru toate punctele de pe axa yy' egală cu zero :

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = 0. \tag{1.1}$$

altfel spus, A = const. de-a lungul axei yy'.

Datorită simetriei sistemului faţă de axa xx', relaţia (1.1) va fi adevărată de asemenea pentru orice punct de pe această axă, xx' fiind perpendiculară pe toate liniile de cîmp care o traversează, astfel încît unul dintre semiplanele determinate de ea poate fi considerat ca fiind imaginea magnetică a celuilalt.

Observaţiile făcute dau posibilitatea modelării doar a sfertului de plan xoy (cadranul 1), spectrele avînd aceeaşi formă în cele patru cadrane.

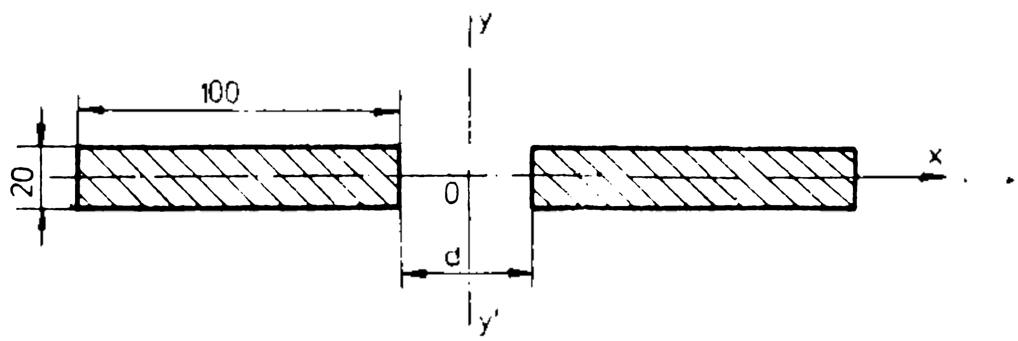


Fig.1.1. Dispunerea barelor colectoare.

Cu toate acestea, numărul rezistorilor necesari modelului e infinit de mare, neavînd nici o condiţie de margine (dată de exemplu, de o ecranare feromagnetică a barelor) care să limiteze întinderea modelului.

Dacă însă se aplică spaţiului $r > r_0$ o inversiune

$$r' = \frac{r_0^2}{r}, \tag{1.2}$$

atunci cadranul 1 se modelează prin două reţele identice de rezistori avînd punctele corespunzătoare arcului $r = r_0$, echipotenţializate conform figurii 1.3.

Rezistorii dispuşi de-a lungul axei oy au o rezistenţă egală cu zero, iar cei de-a lungul axei ox au o rezistenţă dublă faţă de cei din interiorul conturului modelului (fig.4).

Valoarea nulă a rezistenţelor rezultă din condiţia necesară separării cadranului I de IV.

Modelul s-a construit folosind un pas de discretizare h = 5 mm, o valoare a rezistenţei R_m de 1000 Ω şi o capacitate

BUPT

C_m = 27.000 pF la o frecvență a curentului din bare de 50 Hz.

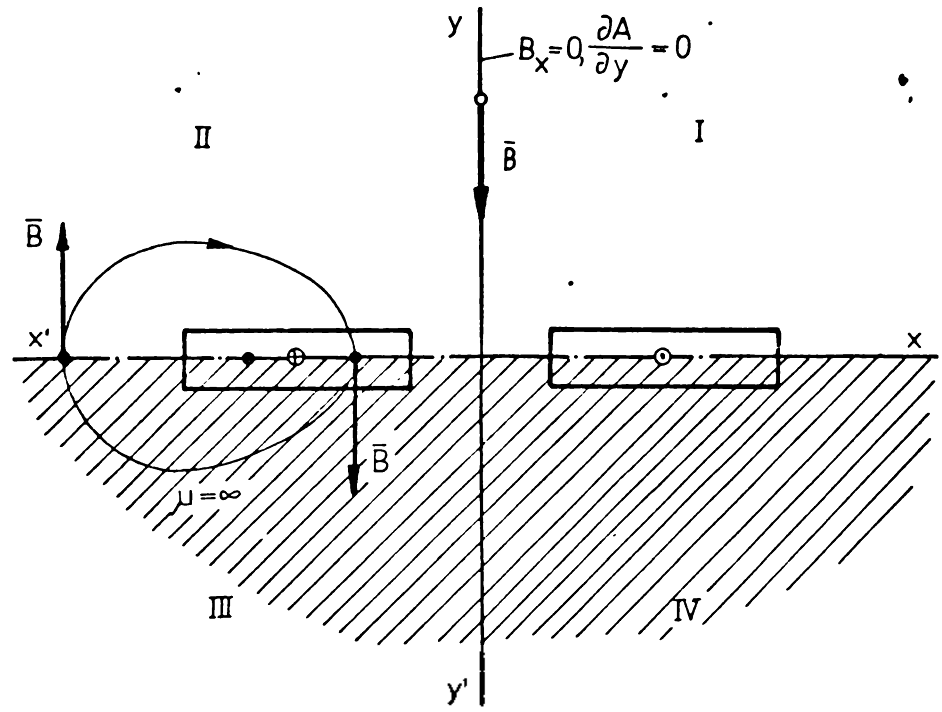


Fig.1.2.- Punerea în evidență a simetriilor cîmpului magnetic după cele două axe xx', yy'.

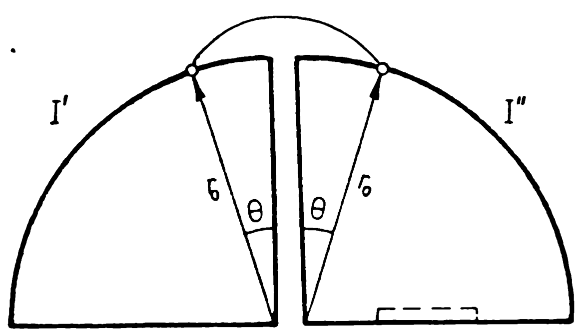


Fig.1.3. Modul echipotențializării punctelor modelului.

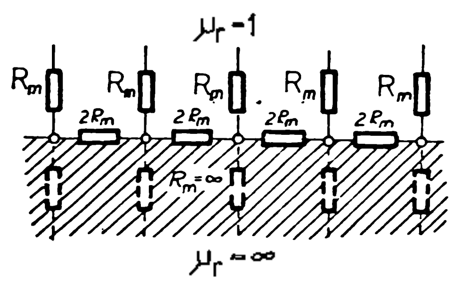


Fig.1.4. Valorile rezistențelor la limite de trecere dintr-un mediu cu $\mu_r=1$ într-un mediu cu $\mu_r=\infty$

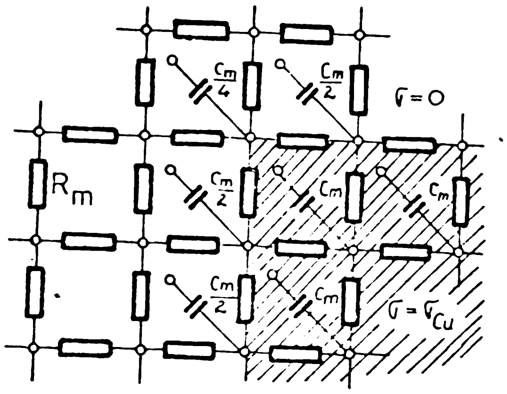


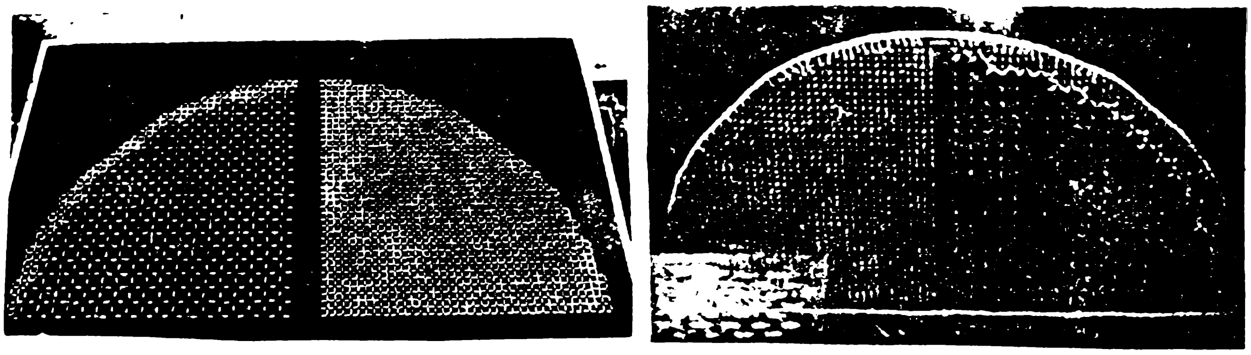
Fig.1.5. Valorile capacităților corespunzătoare frontierei conductor-izolant.

S-au utilizat aproximativ 2000 de rezistori a 1000 Ω fiecare, 500 de rezistori cu valori ale rezistenței cuprinse între 600 și 2000 Ω

BUPT

şi 80 de condensatori cu valori ale capacităţilor cuprinse între 6800 şi 27000 pF. Valorile capacităţilor se modifică doar de-a lungul conturului secţiunii, conform figurii 1.5.(v.rel.3.13-B).

Modelul este prezentat în fig. 1.6.a,b.



a. b.

Fig.1.6 Model RC pentru studiul câmpului electromagnetic a unui sistem de bare colectoare :
a.- dispunerea rezistorilor; b.- modul de conectare a rezistroŧilor şi a condensatoarelor.

1.2. Rezultate experimentale

Pentru sistemul de bare prezentat s-au efectuat o serie de măsurători pe model în ceea ce priveşte pierderile suplimentare care apar în conductele masive datorită efectului skin şi proximitate. Aceste pierderi sînt puse în evidenţă prin factorul rezistenţei în alternativ, care se exprimă în funcţie de mărimile măsurabile pe model cu expresia (3.35-B).

In fig.1.7 este reprezentat factorul k_a în funcţie de distanţa d dintre feţele interioare ale barelor în două cazuri : cînd conductele nu sînt divizate (d_1= 0) şi cînd fiecare conductă este divizată longitudinal în două părţi egale (d_1=20 mm).

Din măsurătorile efectuate pentru distanţa d cuprinsă între 450 şi 600 mm, cînd efectul de proximitate este neglijabil, s-a constatat o stabilizare a factorului k_a la valoarea 1,35. Această valoare este confirmată de literatură [84] , [85] .

Figura 1.8 reprezintă o diagramă spaţială a repartiţiei densităţilor de curent pe secţiunea unei conducte pentru distanţa d = 10 mm.

Mai jos sînt date cîteva tabele cu numere proporţionale cu densităţile de curent pentru diverse valori ale lui d : d = 20,40 ... 160 mm. Pentru uşurinţa urmăririi lor se numerotează nodurile reţelei de discretizare ca în fig. 1.9.

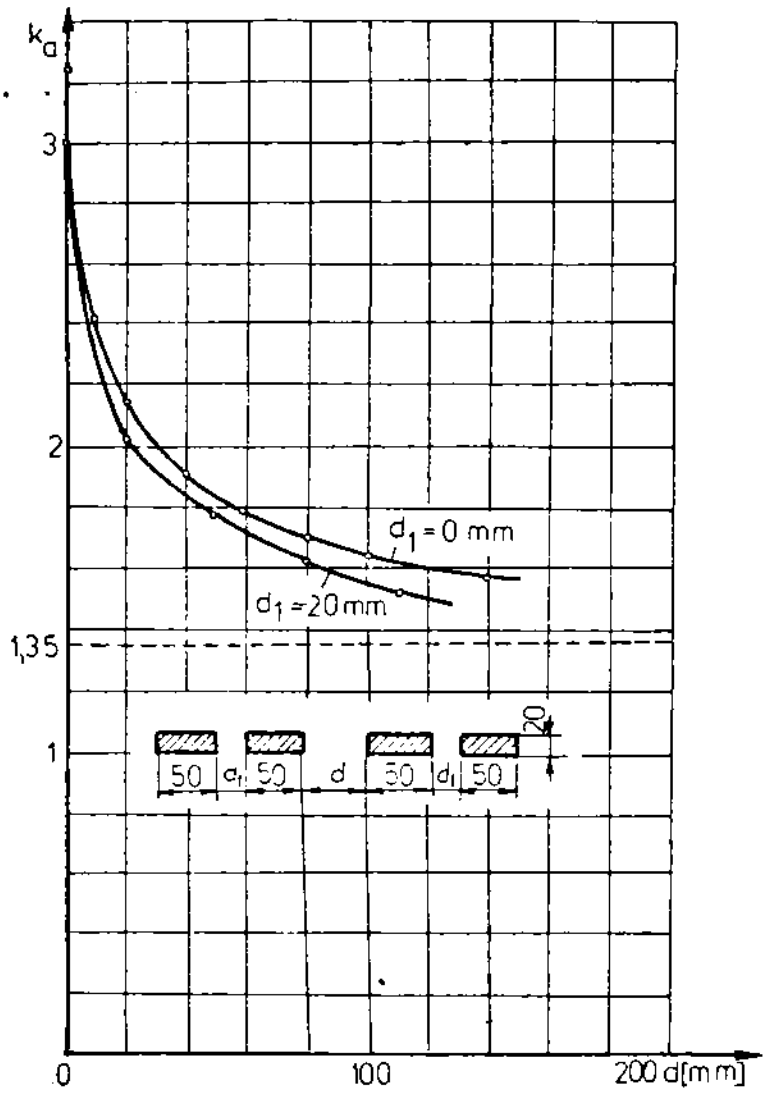
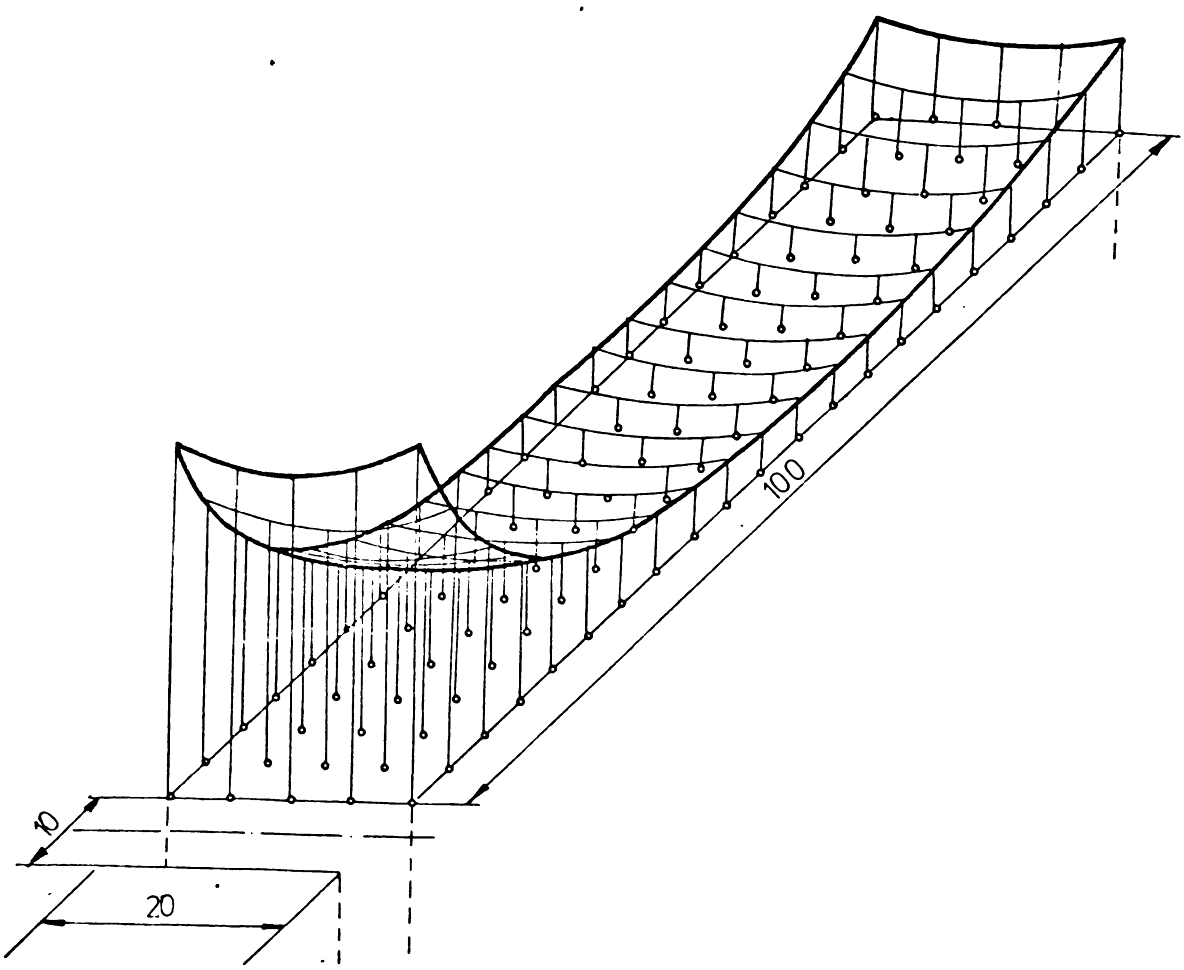


Fig.1.7. Factorul în alternativ al rezistenței k_a, pentru sistemul de bare din fig.1.1-funcție de distanța d dintre bare.

Fig.1.8. Repartiția spațială a densităților de curent pe secțiunea unui conductor pentru d = 10 mm.



BUPT

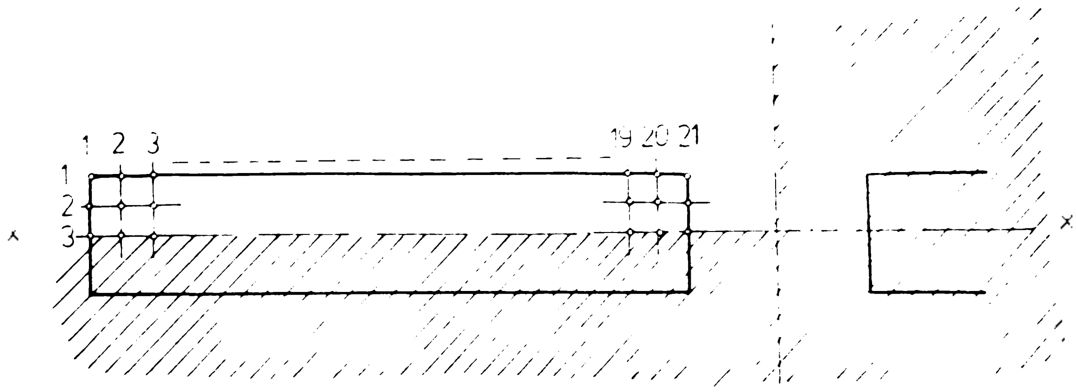


Fig.1.9. Explicativă la tabele.

Pentru alimentarea modelului s-a utilizat un generator de audiofrecvență de 5 W, iar pentru măsurători un voltmetru electronic cu intrare simetrică. Pentru determinările făcute s-a estimat o eroare totală de cîteva procente.

Tabelul 1.1 : d = 20 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	lo
1	1,6	1,28	1,o6	o,89	o,72	o,64	o,615	o,6	o,61	o,625
2	1,42	1,1	o,9	o,72	o,59	o,53	o,48	o,465	o,465	o,47
3	1,37	1,o75	o,865	o,7o	o,58	o,525	o,47	o,46	o,435	o,45

11	12	13	14	15	16	17	18	19	2o	21
o,66	o,7	o,75	o,865	o,o15	1,24	1,57	2,o7	2,75	3,67	o,435
o,485	o,53	o,58	o,68	o,83	1,o6	1,365	1,815	2,45	3,28	4,48
o,47	o,515	o,57	o,67	o,835	1,o5	1,36	1,79	2,375	3,17	4,335

Tabelul 1.2 : d = 40 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	lo
1	1,77	1,43	1,15	o,965	o,82	o,725	o,68	o,63	o,625	o,67
2	1,57	1,2	o,98	o,8	o,665	o,57	o,53	o,49	o,48	o,48
3	1,515	1,16	o,95	o,78	o,65	o,565	o,5	o,45	o,45	o,45

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
o,7	o,73	o,8	o,9	o,o3	1,25	1,52	1,885	2,41	3,16	4,16
o,5	o,52	o,58	o,65	o,8	1,o15	1,275	1,675	2,12	2,8	3,8
0,5	o,52	o,57	o,65	o,83	1,o	1,27	1,63	2,o7	2,7	3,68

Tabelul 1.3 : d = 60 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,825	1,46	1,17	0,95	0,8	0,75	0,7	0,66	0,64	0,64
2	1,63	1,25	1,0	0,8	0,65	0,58	0,52	0,5	0,48	0,48
3	1,56	1,18	0,97	0,77	0,625	0,575	0,51	0,48	0,45	0,45

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0,08	0,7	0,765	0,85	1,01	1,17	1,37	1,71	2,165	2,78	3,625
0,48	0,5	0,55	0,64	0,77	1,0	1,15	1,52	1,9	2,47	3,3
0,45	0,48	0,53	0,63	0,76	0,95	1,114	1,47	1,86	2,375	3,175

Tabelul 1.4 : d = 80 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,52	1,3	1,03	0,84	0,725	0,635	0,6	0,57	0,575	0,57
2	1,45	1,15	0,88	0,715	0,6	0,515	0,47	0,44	0,43	0,435
3	1,38	1,05	0,76	0,7	0,59	0,51	0,46	0,43	0,415	0,42

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0,585	0,625	0,65	0,7	0,785	0,925	1,13	1,41	1,78	2,33	3,015
0,45	0,47	0,5	0,55	0,635	0,75	0,935	1,21	1,56	2,035	2,725
0,44	0,46	0,475	0,535	0,625	0,74	0,930	1,18	1,525	1,95	2,635

Tabelul 1.5 : d = 100 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,62	1,28	1,03	0,84	0,72	0,635	0,6	0,57	0,565	0,56
2	1,425	1,12	0,885	0,715	0,6	0,515	0,465	0,45	0,42	0,420
3	1,37	1,07	0,865	0,7	0,59	0,51	0,46	0,42	0,4	0,41

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0,575	0,585	0,625	0,67	0,75	0,87	1,05	1,3	1,66	2,16	2,77
0,435	0,46	0,475	0,54	0,6	0,715	0,88	1,115	1,43	1,87	2,53
0,42	0,435	0,47	0,525	0,59	0,71	0,875	1,1	1,385	1,8	2,45

BUPT

Tabelul 1.6 : d = 120 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,475	1,17	0,935	0,765	0,65	0,565	0,525	0,5	0,485	0,48
2	1,352	1,01	0,8	0,65	0,525	0,465	0,415	0,37	0,36	0,36
3	1,265	0,965	0,77	0,635	0,535	0,46	0,4	0,36	0,35	0,35

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0,5	0,52	0,54	0,58	0,65	0,75	0,9	1,13	1,415	1,825	2,37
0,37	0,375	0,41	0,44	0,52	0,615	0,75	0,965	1,23	1,575	2,12
0,36	0,37	0,385	0,435	0,51	0,6	0,75	0,945	1,2	1,52	2,03

Tabelul 1.7 : d = 140 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,48	1,17	0,935	0,765	0,635	0,56	0,517	0,487	0,487	0,485
2	1,32	1,015	0,9	0,64	0,53	0,465	0,4	0,37	0,37	0,36
3	1,27	0,97	0,77	0,63	0,53	0,45	0,39	0,37	0,36	0,345

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0,49	0,515	0,53	0,57	0,63	0,72	1,865	1,06	1,335	1,715	2,23
0,365	0,37	0,4	0,435	0,49	0,58	0,725	0,92	1,165	1,49	2,01
0,36	0,36	0,385	0,435	0,48	0,58	0,72	0,9	1,135	1,44	1,935

Tabelul 1.8 : d = 160 mm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,5	1,185	0,94	0,77	0,64	0,56	0,525	0,485	0,48	0,48
2	1,3	1,03	0,815	0,655	0,54	0,45	0,4	0,37	0,36	0,36
3	1,315	1,985	0,785	0,65	0,535	0,45	0,4	0,37	0,35	0,35

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0,49	0,50	0,53	0,56	0,617	0,7	0,83	1,02	1,285	1,635	2,127
0,36	0,365	0,4	0,43	0,49	0,565	0,68	0,87	1,12	1,435	1,91
0,355	0,36	0,38	0,423	0,475	0,565	0,68	0,86	1,087	1,375	1,84

BUPT

1.3. Observații

Rezultatele experimentale obținute pe model pentru sistemul de bare colectoare (fig.1.1) indică o majorare apreciabilă a pierderilor suplimentare din bare pentru $d < 150$ mm, așa încît o dispunere a barelor în rășini epoxidice de exemplu, ar fi sub acest aspect dezavantajoasă. De la distanța $d > 500$ mm, factorul k_a include doar creșterea rezistenței datorată efectului pelicular, efectul de proximitate fiind neglijabil.

Cu integratorul prezentat se pot rezolva problemele de cîmp magnetic (și electric) care prezintă duble simetrii (față de două axe ortogonale).

Dacă conductoarele considerate sînt plasate într-o carcasă feromagnetică, modelul alimentat cu o frecvență aproape de zero va fi în principiu modelul unor înfășurări de transformator și cu el se poate deci studia fluxul de dispersie al unui transformator.

II. DETERMINAREA PRIN MODELARE A CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC AL UNUI CONDUCTOR CILINDRIC, DE SECȚIUNE TRANSVERSALA TRAPEZOIDALA, PLASAT INTR-O CRESTATURA FEROMAGNETICA

Se studiază pe un model RC cîmpul unui conductor cilindric de secțiune transversală trapezoidală parcurs de un curent alternativ, plasat într-o crestătură efectuată într-un material feromagnetic. Pentru acest caz se prezintă modelul și cîteva rezultate experimentale referitoare la factorul în alternativ al rezistenței, k_a, la inductivitatea internă, L_i, și la forța lineică specifică f_0^*, comparîndu-se aceste rezultate cu valorile luate în mod curent în considerare la proiectarea mașinilor electrice și cu cele obținute prin calcul analitic exact pentru conductorul cu secțiunea transversală în formă de sector coroană circulară.

2.1. Descrierea sistemului

Realizarea unui model RC pentru studiul cîmpului electromagnetic al unui conductor drept, parcurs de un curent $i=I\sqrt{2}\sin t$, plasat într-o crestătură efectuată într-un material feromagnetic, necesită precizarea ipotezelor și condițiilor în care se rezolvă ecuațiile cîmpului.

Materialul feromagnetic, în care este practicată crestătura, este alcătuit dintr-un pachet de tole izolate una față de alta (cu hîrtie, cu oxizi neconductori etc.).Acest lucru echiva-

BUPT

lează cu faptul că σ_z, conductibilitatea electrică după normală fețelor izolate, este nulă.

Se consideră tolele suficient de subțiri și rezistivitatea lor electrică suficient de mare și ca urmare, se poate neglija efectul curenților turbionari din tole asupra cîmpului magnetic al conductorului plasat în crestătură.

Datorită faptului că în direcția curentului, respectiv în direcția lui $\bar{k}$, straturile de material feromagnetic alternează cu straturile de izolant care au o altă permeabilitate magnetică decît materialul feromagnetic, cîmpul magnetic nu este în general plan-paralel. Pentru a avea un cîmp plan-paralel e necesar ca raportul dintre grosimea tolei fără izolație și grosimea izolației dintre două tole succesive să fie cu mult mai mare decît unitatea. Se consideră îndeplinită și această condiție.

Raportul foarte mare între permeabilitatea magnetică a oțelului electrotehnic și aceea a aerului, cuprului, aluminiului etc. permite considerarea raportului : $\frac{\mu_{Fe}}{\mu_{aer,Al,Cu}} = \infty$

Conductorul este dispus ca în figura 2.1a și el poate fi studiat considerîndu-se că curentul din el se întoarce printr-un conductor plasat la infinit [47], [57] ; de asemenea el poate fi considerat ca făcînd parte dintr-un sistem complet de conductoare plasate astfel încît efectul de proximitate al restului de conductoare din sistem asupra conductorului dat să fie nul.

Problema mai poate fi privită și altfel. Dacă pentru conductorul din sistemul prezentat în figura 2.1, al cărui curent i, este cunoscut, se mai cunoaște o linie de cîmp magnetic Γ_B care înlănțuie numai acest conductor, respectiv o linie A=constant, determinarea cîmpului din interiorul curbei Γ_B se face admițînd că curentul i se întoarce printr-o suprafață cilindrică, perpendiculară pe planul cîmpului, sprijinită pe conturul Γ_B și de conductivitate infinită.

Conform observațiilor din § 3.2-A, pentru sistemul din figura 2.1a, e suficient să se cunoască doar o linie de cîmp din întrefierul δ. Pentru întrefierul constant considerat aici se cunosc o infinitate de linii de cîmp.

Datorită simetriei sistemului față de axa mediană a secțiunii transversale a conductorului și respectiv a cîmpului electromagnetic, este suficientă modelarea unei jumătăți din

BUPT

suprafaţa de modelat.

Pentru porţiunea corespunzătoare materialului feromagnetic rezistenţele din reţea au valori infinite şi deci această zonă va fi "decupată" din model.

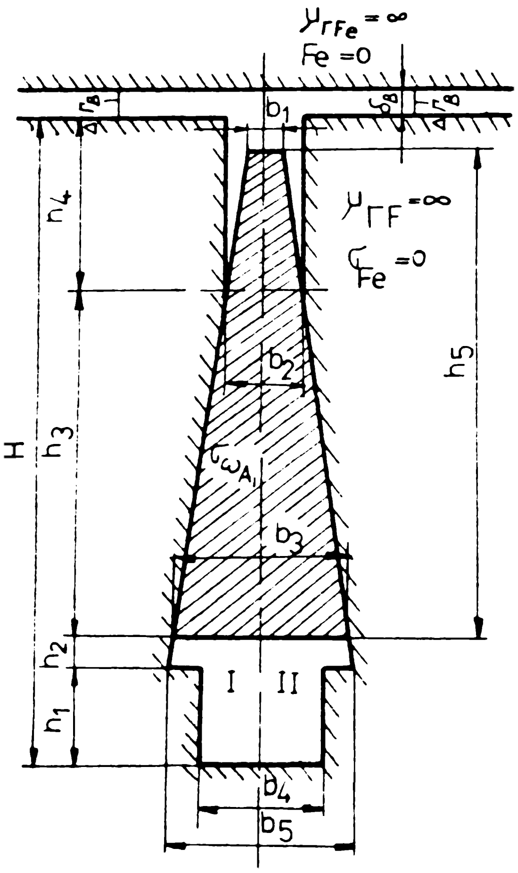


Fig.2.1.a - Ansamblul conductor-crestătură de modelat.

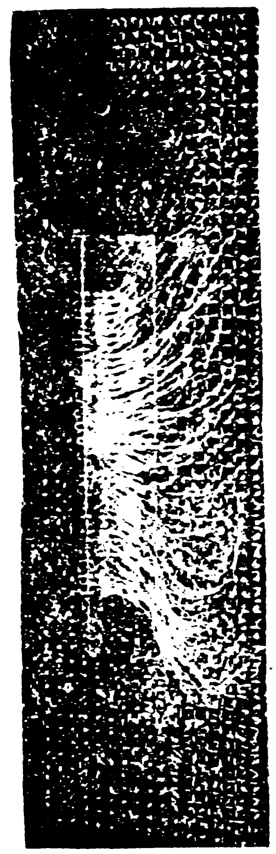


Fig.2.1.b- Modelul RC al ansamblului din figura 2.1. a.

2.2. O soluţie analitică pentru un caz idealizat

Pentru un conductor avînd secţiunea transversală de forma unui sector-coroană circulară (fig.2.1-a) expresiile intensităţii de cîmp magnetic şi a densităţii de curent la o reprezentare complexă a mărimilor electromagnetice sînt (v.Anexa 2) :

$$\underline{H}\,(\gamma\rho) = \frac{\underline{I}}{2\theta_m a}\,\frac{H_1^{(1)}(\gamma b)J_1(\gamma\rho) - J_1(\gamma b)\,H_1^{(1)}(\gamma\rho)}{J_1(\gamma a)\,H_1^{(1)}(\gamma b) - J_1(\gamma b)H_1^{(1)}(\gamma a)} \qquad (2.1)$$

$$\underline{J}\,(\gamma\rho) = \frac{H_1^{(1)}(\gamma b)\,J_0(\gamma\rho) - J_1(\gamma b)\,H_0^{(1)}(\gamma\rho)}{J_1(\gamma a)\,H_1^{(1)}(\gamma b) - J_1(\gamma b)\,H_1^{(1)}(\gamma a)} \qquad (2.2)$$

în care $H_k^{(1)} = J_k + j\,Y_k$ este funcţia Hankel.

Separînd din puterea complexă prin suprafaţa generatoare a conductorului puterea activă şi reactivă se obţin :

$$k_a = \frac{\mathrm{Re}\{\underline{J}(\gamma a)\}}{2\,\theta_m J_{med}} \tag{2.3}$$

$$L_{iar} = \frac{2\delta^2}{a^2 - 3b^2 + \dfrac{4b^2}{1-(\frac{a}{b})^2}\ln\dfrac{b}{a}}\;\frac{\mathrm{Im}\{\underline{J}(\underline{\gamma}\, a)\}}{J_{med}} \tag{2.4}$$

în care $\underline{J}_{med} = \dfrac{\underline{I}}{\theta_m(b^2-a^2)}$, este real dacă se alege ca origine a fazelor fazorul $\underline{I}$.

In expresiile de mai sus θ_m, a şi b au valorile obţinute din echivalările efectuate crestăturilor din fig.2.1a şi fig.2.1-a : unghiul θ_m este identic pentru cele două crestături,

$$\theta_m = \mathrm{artg}\,\frac{b_3-b_1}{2h_5}, \tag{2.5}$$

cilindrul de rază a (fig.2.1-a), are axa de simetrie identică cu muchia diedrului format de feţele laterale ale conductorului din fig.2.1 şi este tangent bazei b_1 (fig.2.1) la mijlocul ei,

$$a = \frac{b_1 h_5}{b_3-b_1}\,, \tag{2.6}$$

ariile secţiunilor transversale ale celor două conductoare sînt egale,

$$b = h_5\frac{b_1}{b_3-b_1}\sqrt{1+\frac{b_1^3+b_3^3-b_1b_3(b_1+b_3)}{2\,\mathrm{arctg}(\frac{b_3-b_1}{2h_5})}}\;. \tag{2.7}$$

Folosind tabelele din [86] pentru datele problemei s-au calculat valorile pentru k_a şi L_{iar} reprezentate în fig.2.2. şi fig.2.6 prin curbele 6 respectiv 3.

2.3. Modelul RC corespunzător sistemului

Pentru discretizarea suprafeţei de modelat, elementele de suprafaţă ΔS_e se aleg de formă convenabilă. Pentru a se utiliza elemente pasive R_m şi C_m pe cît posibil de valori constante pentru întreg domeniul modelat şi pentru a avea eroare de trunchiere mică, s-a ales discretizarea în elemente pătratice cu pas mic de discretizare.

BUPT

Alegînd pe $h = 10^{-3}$m, $R_m = 910\,\Omega$, $C_m = 4{,}7\cdot10^{-9}$ F, $\sigma =$
$= 5{,}5\cdot10^{7}\ \frac{S}{m}$, $\mu_{Cu} = \mu_o = 1{,}256\cdot10^{-6}\ \frac{H}{m}$, ştiind că mărimea (constantă în planul cîmpului) $K = \frac{1}{S\sigma}$ (S = secţiunea conductorului) se poate determina k_t, în baza relaţiilor (3.13-B)

$$k_t^{-1} = \frac{R_m C_m}{\mu \sigma h^2} = 6{,}2\cdot10^{-2}$$

Datorită faptului că în cele ce urmează interesează mărimile raportate, k_a, $\frac{L_{ia}}{L_{io}}$, f_o^*, valoarea coeficientului de similitudine k_A nu trebuie cunoscută.

Pe baza celor prezentate mai sus, pentru sistemul din figura 2.1a s-a construit modelul din figura 2.1b. Alimentarea modelului cu un curent de aceeaşi formă cu i s-a făcut prin punctul comun al condensatoarelor reţelei şi prin punctul corespunzător unui segment Δr_B.

2.4. Rezultate experimentale

a. Rezistenţa în alternativ a conductorului R_a se determină indirect prin factorul în alternativ al rezistenţei k_a, dat de expresia (3.35-B), în funcţie de mărimile măsurabile pe model.

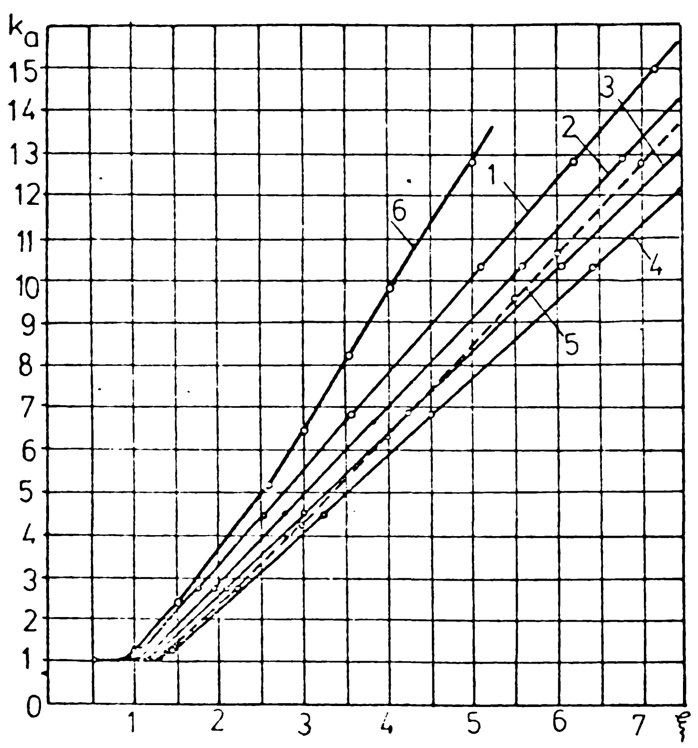


Fig.2.2. Factorul rezistenţei în alternativ $k_a = f(\xi)$ pentru diverse temperaturi medii ale conductorului de cupru;
Curba: 1-θ =20°C; 2-θ =75°C; 3-θ =125°C; 4-θ=175°C; 5-curba dată în [87]; 6-curba corespunzătoare rel.(2.3).

Rezultatele experimentale determinate pe model sînt reprezentate sub formă de diagrame în figura 2.2 şi figurile 2.3.a,b,c,d.

In figura 2.2 este reprezentată variaţia lui :

$k_a = k_a(\xi)$, $\xi = 0{,}09\, h_5\sqrt{\frac{f}{50}}$, (f-frecvenţa curentului i; h_5 înălţimea conductorului în mm).

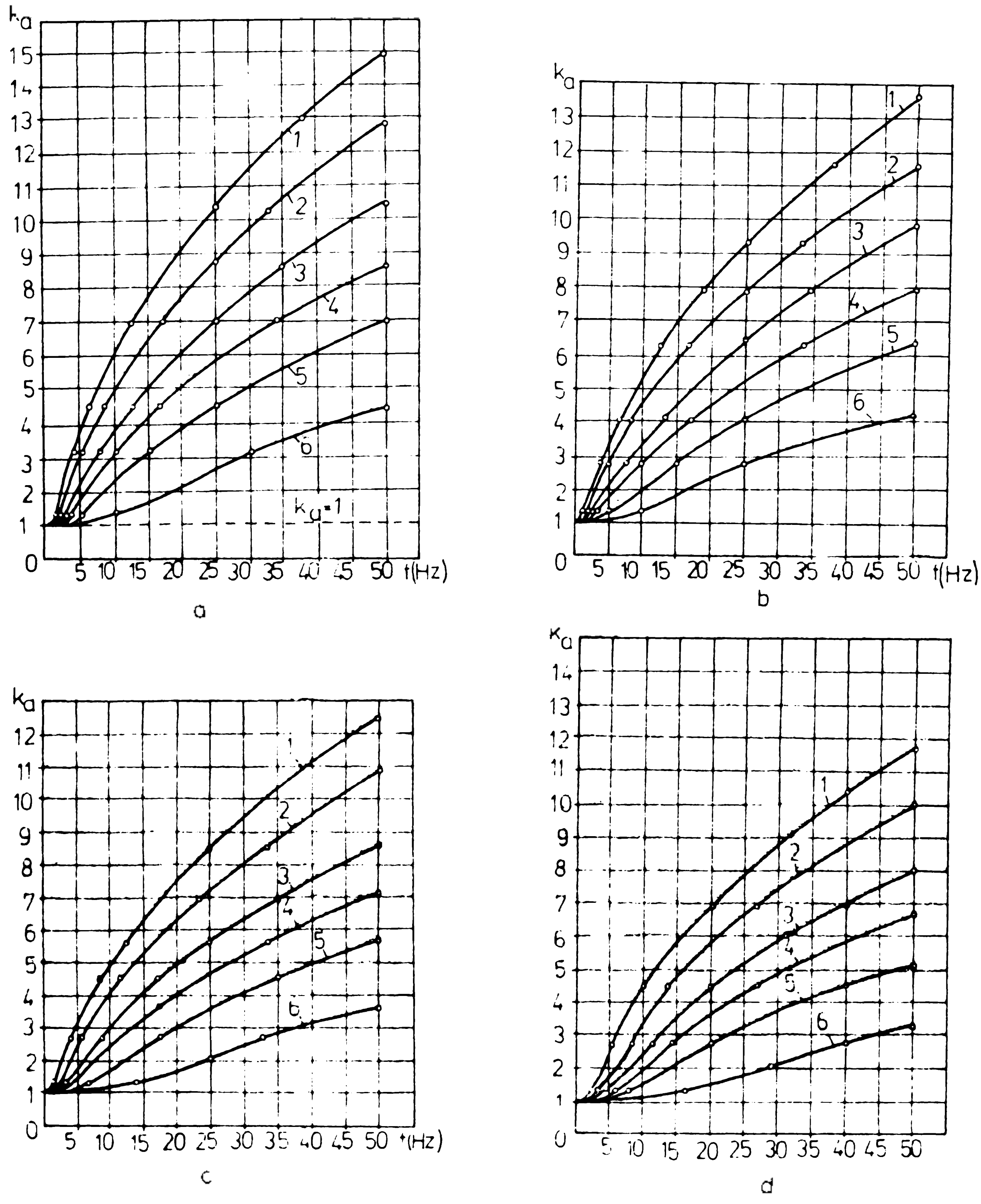


Fig.2.3. - Factorul k_a în funcţie de frecvenţa cîmpului electromagnetic.

In figura 2.3 sînt prezentate patru familii de curbe : $k_a(f)$, (,b,c,d), pentru diferite temperaturi medii ale conductorului : a) $\Theta = 20^{o}C$ c) $\Theta = 125^{o}C$

b) $\Theta = 75^{o}C$ d) $\Theta = 175^{o}C$.

BUPT

Dimensiunile secţiunii conductorului (fig.2.1) pentru care s-au făcut determinările date de curbele 1 ÷ 6 din fig.2.3, sînt:

1 - $b_1 = 6{,}8$ mm; $b_2 = 14$ mm; $h_5 = 80$ mm;

2 - $b_1 = \sqrt{3}.3{,}4$ mm; $b_3 = \sqrt{3}.14$ mm; $h_5 = \sqrt{3}.40$ mm;

3 - $b_1 = \sqrt{2}.3{,}4$ mm; $b_3 = \sqrt{2}.14$ mm; $h_5 = \sqrt{2}.40$ mm;

4 - $b_1 = \sqrt{1{,}5}.3{,}4$ mm; $b_3 = \sqrt{1{,}5}.14$ mm; $h_5 = \sqrt{1{,}5}.40$ mm;

5 - $b_1 = 3{,}4$ mm; $b_2 = 14$ mm; $h_5 = 40$ mm;

6 - $b_1 = 1{,}7$ mm; $b_3 = 7$ mm; $h_5 = 20$ mm.

S-a găsit interesantă prezentarea repartiţiei densităţii de curent J (x,y), (fig.2.5 a,b,c,d,e,f,g,h) pentru un conductor de cupru la temperatura de 20°C, avînd baza mică a secţiunii transversale egală cu 3,4 mm, baza mare cu 14 mm şi înălţimea de 40 mm, pentru diverse frecvenţe ale cîmpului magnetic. Reprezentarea s-a făcut pe baza tabelei 2.1 care cuprinde valorile relative, $\frac{J_a}{J_c}$,în funcţie de frecvenţă,pentru axa mediană a conductorului studiat.

Notarea punctelor pentru care s-au dat valorile raportului $\frac{J_a}{J_c}$ s-a făcut începînd cu mijlocul bazei mici(care s-a notat cu 1) şi terminînd cu mijlocul bazei mari (notat cu 21) din 4 în 4 mm.

Din figura 2.2 se observă că variaţia factorului $k_a = f(\xi, \Theta)$ se poate aproxima, pentru $\xi > 1{,}5$ cu o familie de drepte :

$$k_a = m\xi + n \qquad (2.8),$$

coeficienţii m şi n determinîndu-se din diagramele respective în funcţie de temperatura Θ.

Făcînd rapoartele între pierderile Joule în curent alternativ şi în curent continuu, la definirea lui k_a, conductivitatea electrică nu mai apare explicat în expresia factorului rezistenţei în alternativ, considerîndu-se, de obicei, că ea are aceeaşi valoare atît în expresia pierderilor P_a cît şi în expresia lui P_c.

S-a considerat şi aici că printr-o metodă oarecare temperatura conductorului, atunci cînd prin el circulă un curent continuu sau un curent alternativ de frecvenţă arbitrară dar cu va-

BUPT

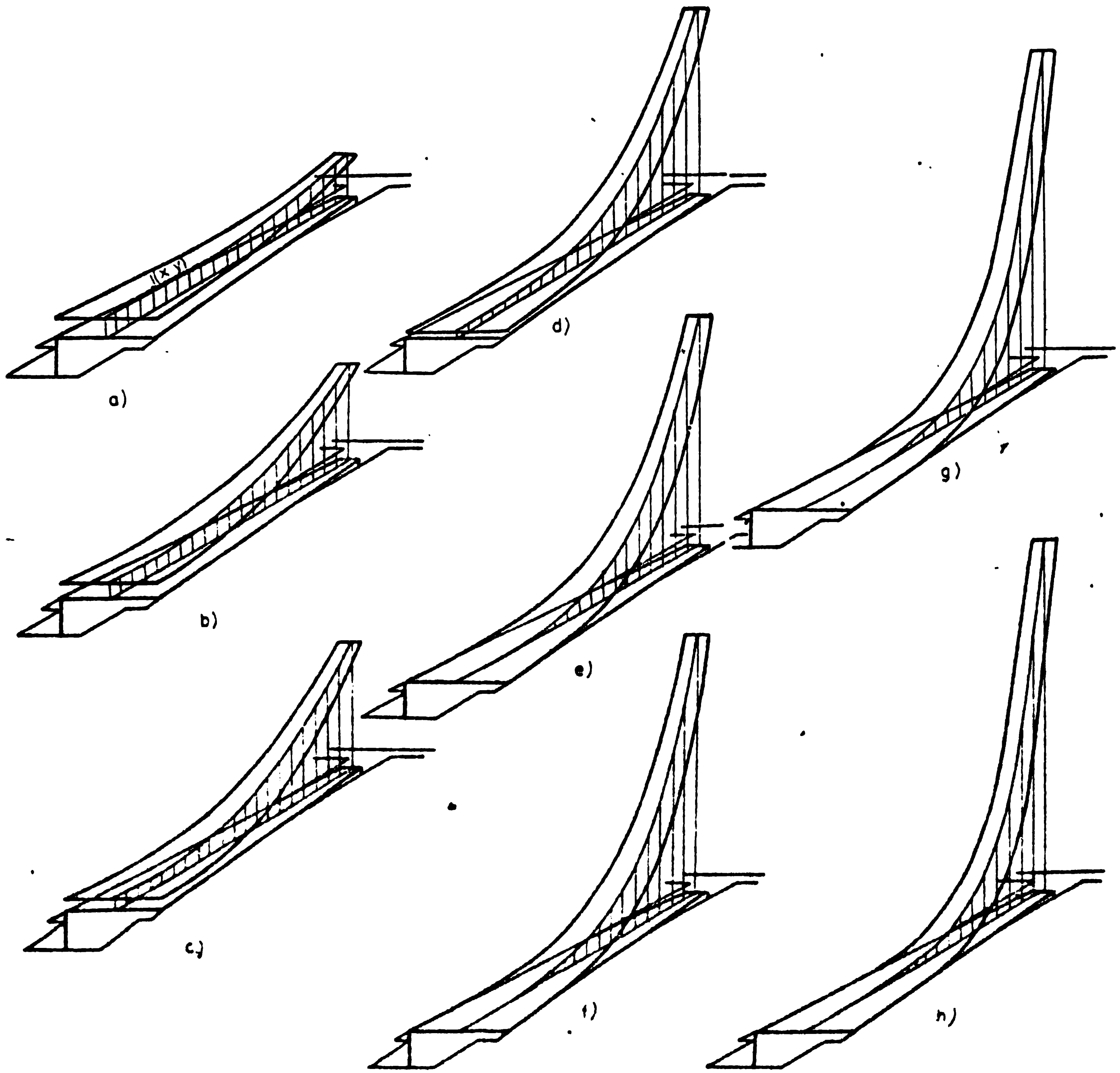


Fig 2.5 Repartiția densității de curent, J(x,y), pe secțiunea transversală a conductorului de cupru, cu b_1=3,4 mm ; b_2=14 mm ; h=40mm pentru diferite frecvențe.

a) f=5 Hz, b) f=15 Hz, c) f=25 Hz, d) f=50 Hz, e) f=75 Hz, f) f=100 Hz, g) f=150 Hz, h) f=200 Hz

BUPT

loare eficace egală cu valoarea curentului continuu, este aceeași. In aceste condiții influența conductivității în variația lui k_a intervine prin deformările provocate de variația ei în repartiția cîmpului, respectiv a densității de curent J (x,y).

Tabelul 2.1.

Punctul	15 Hz	25 Hz	50 Hz	75 Hz	100 Hz	150 hz	200 Hz
1	3,900	5,330	7,640	9,030	10,000	12,060	14,200
2	3,467	4,640	6,470	7,315	7,660	9,060	10,000
3	3,040	4,035	5,36	5,590	5,800	6,670	6,670
4	2,645	3,500	4,25	4,350	4,415	4,470	4,400
5	2,260	2,967	3,43	3,265	3,170	3,070	2,870
6	2,000	2,487	2,715	2,457	2,300	2,067	1,570
7	1,715	2,050	2,110	1,863	1,763	1,435	1,200
8	1,450	1,680	1,644	1,380	1,268	0,965	0,777
9	1,238	1,357	1,285	1,070	0,866	0,667	0,473
10	1,107	1,143	1,000	0,759	0,600	0,433	0,267
11	0,986	0,892	0,786	0,517	0,400	0,267	0,153
12	0,857	0,750	0,607	0,418	0,300	0,166	0,067
13	0,786	0,607	0,471	0,290	0,233	0,133	0,020
14	0,700	0,536	0,393	0,221	0,166	0,667	0,005
15	0,643	0,486	0,357	0,172	0,133	0,033	0,000
16	0,615	0,464	0,286	0,138	0,066	0,013	0,000
17	0,600	0,428	0,250	0,114	0,040	0,005	0,000
18	0,600	0,428	0,214	0,089	0,016	0,000	0,000
19	0,600	0,428	0,214	0,076	0,000	0,000	0,000
20	0,600	0,428	0,214	0,076	0,000	0,000	0,000
21	0,600	0,428	0,214	0,076	0,000	0,000	0,000

Conductivitatea electrică, σ , depinde de temperatură prin relația

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1+\alpha_0 \theta} , \tag{2.9}$$

ca urmare, adîncimea echivalentă de pătrundere a cîmpului, va avea expresia :

$$\delta = \sqrt{\frac{2(1+\alpha_0\theta)}{\mu\,\sigma_0\,\omega}} \tag{2.10}$$

și deci, chiar cînd valorile lui din expresiile lui P_a și P_c sîn egale, factorul k_a ia valori diferite pentru temperaturi

BUPT

diferite ; aşa se explică diferenţele dintre diagramele din figura 2.2 (1,2,3,4) şi de asemenea între diagramele din figura 2.3 a,b, c,d.

b. <u>Inductivitatea internă</u> , L_i , a conductorului se defineşte energetic

$$L_i = \frac{2W_{mi}}{I^2} \tag{2.11}$$

W_{mi} fiind energia magnetică înmagazinată în volumul conductorului.

Ea s-a determinat prin raportul $L_{iar} = L_{ia}/L_{ic}$, respectiv cu expresia (3.36-B).

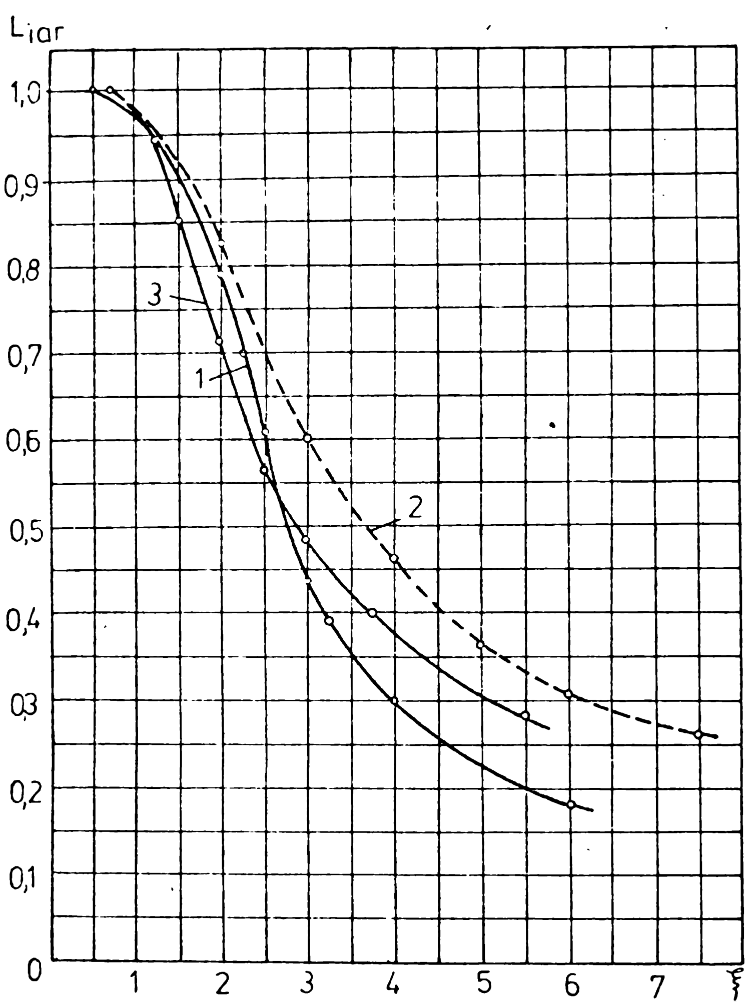


Fig.2.4 a. Inductivitatea internă raportată în funcţie de ξ(la θ = 75°C):
1 - curba obţinută din model;
2 - curba din [87];
3 - curba calculată cu expresia (2.4).

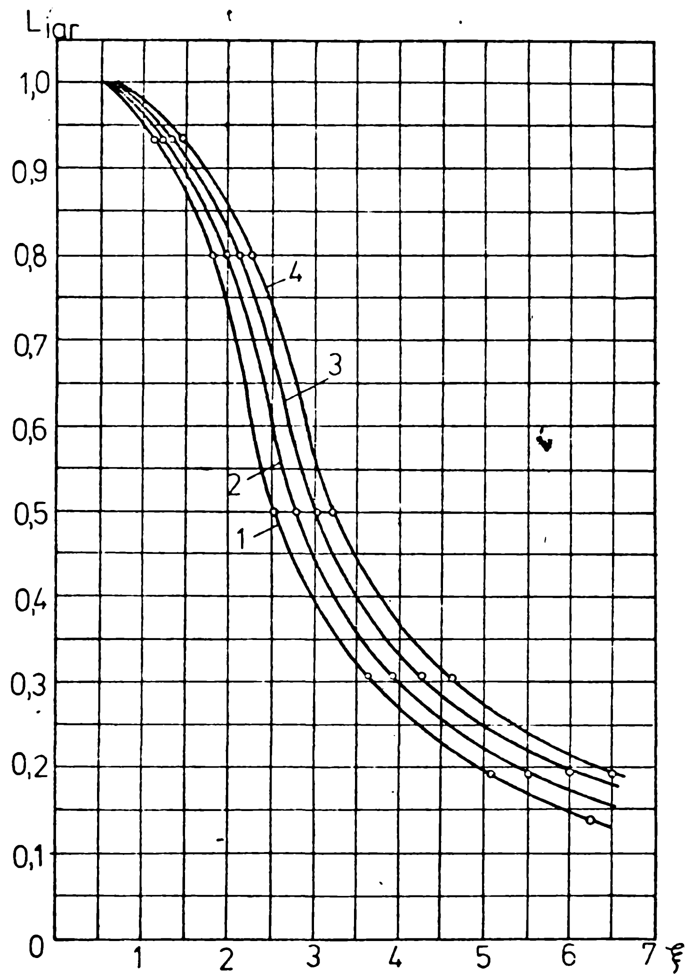


Fig.2.4 b. Valorile lui L_{iar} pentru θ = 20°C(curba 1), θ = 75°C (curba 2), θ = 125°C (curba 3), θ = 175°C (curba 4).

In fig.2.4. a este prezentată inductivitatea internă raportată în funcţie de ξ, pe model, la θ = 75°C, din literatură [87] şi calculată, iar în figura 2.4.b sînt date curbele experimentale în funcție de φ pentru diferite temperaturi medii ale conductorului.

c. Forța rezultantă care acționează asupra conductorului s-a determinat ținînd seama de expresiile (3.37-B)-(3.39-B) și s-a calculat numeric cu metoda lui Simpson.

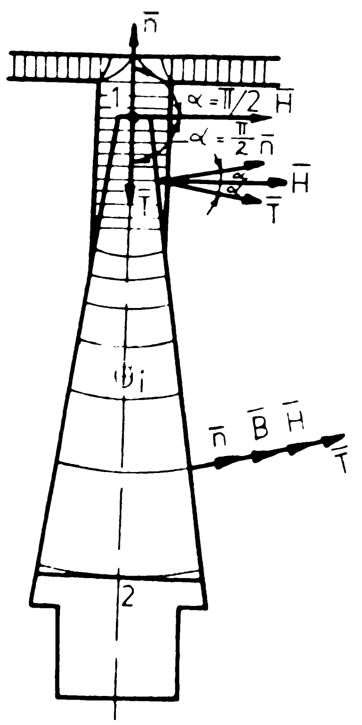


Fig.2.6.Explicativă la repartiția tensiunii maxwelliene pe conturul secțiunii transversale a conductorului.

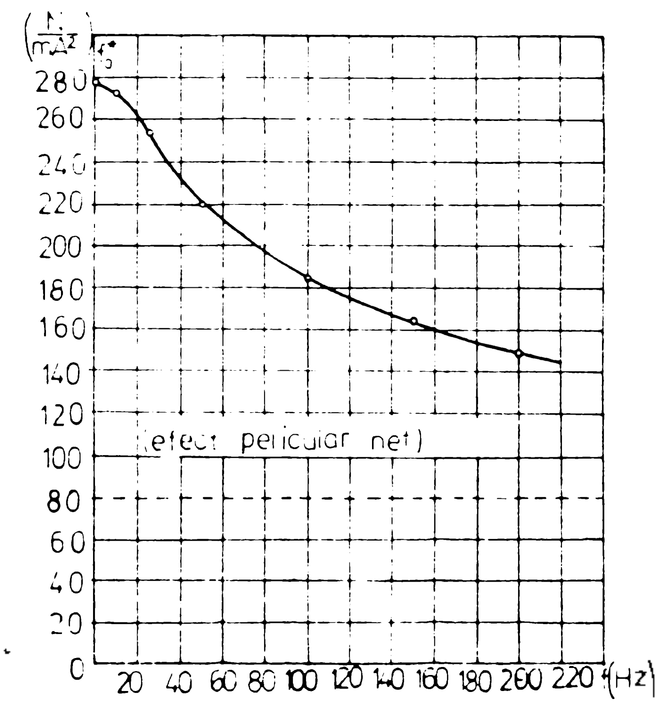


Fig.2.7. Variația lui f_o^* în funcție de frecvență, pentru un conductor de cupru cu b_1=3,4 mm, b_3=14 mm, b_5= =40 mm, la temperatura θ =20°C.

In figura 2.7, s-a prezentat variația în funcție de frecvență a forței lineice specifice

$$f_o^* = \frac{F}{b_o I^2} \tag{2.13}$$

După cum rezultă și din explicativa din figura 2,6, forța F împinge (fixează) conductorul în crestătură.

2.5. Aparate utilizate. Precizia măsurării

Pentru măsurările pe integrator s-au utilizat un miliampermetru UNIGOR-3 și un voltmetru electronic.

Modelul s-a alimentat cu un curent obținut de la un generator de audio-frecvență.

In urma unei analize atente a erorii de determinare a mărimilor k_a, L_{iar}, f_o^*, ea s-a evaluat la o valoare de cîteva procente, eroarea de trunchiere fiind practic neglijabilă,pentru pasul de discretizare ales. Condensatorii şi rezistorii au fost sortaţi cu o punte cu precizia de 1%.

Aceste cîteva procente-eroare au făcut imposibilă cunoaşterea pe această cale a factorului k_a pentru efectul pelicular slab.

2.6. Observaţii

Rezultatele obţinute, în ceea ce priveşte factorul k_a, concordă suficient de bine cu acele date în literatură [87] şi sînt mai mici, aşa cum de altfel era de aşteptat, faţă de cele corespunzătoare conductorului de secţiune transversală sector-coroană circulară. In ceea ce priveşte inductivitatea internă raportată, ea este mai mică decît cea dată în literatură, mai ales pentru frecvenţe mari.

Făcînd raportul între pierderile Joule în curent alternativ şi cele în curent continuu în expresia lui k_a, nu mai apare explicit, influenţa ei intervenind prin deformările provocate de variaţia ei, în repartiţia cîmpului magnetic $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$, respectiv a densităţii de curent J (x,y).

In ceea ce priveşte influenţa temperaturii asupra forţei acţionează asupra conductorului se poate spune că ea este inversă influenţei frecvenţei.

Pentru cazul limită al conductorului de secţiune transversală trapezoidală, conductorul de secţiune dreptunghiulară, atît influenţa temperaturii cît şi a frecvenţei este nulă pentru forţă, menţinîndu-se pentru factorul k_a şi inductanţa L_{ia}.

Determinările s-au efectuat pentru δ_B = 1 mm şi δ_B = 2 mm rezultatele nediferind într-o situaţie faţă de cealaltă decît foarte puţin (datorită erorilor întîmplătoare de măsurare).

III. CIMPUL ELECTROMAGNETIC IN CONDUCTORUL PARALELIPIPEDIC FOARTE LUNG, PARCURS DE UN CURENT SINUSOIDAL, PLASAT INTR-O CRESTATURA EFECTUATA IN MATERIAL FEROMAGNETIC

Studiul cîmpului sistemului considerat, are ca scop obţinerea unor informaţii asupra erorii de trunchiere, a erorii globale introdusă de modelarea pe reţele pasive RC şi a formulelor optime de calcul a factorului în alternativ al rezistenţei (k_a) şi a inductivităţii interne raportate (L_{iar}) în cadrul analizei numerice a cîmpului electromagnetic (prin modelare şi calcul cifric).

BUPT

Rezultatele determinate prin modelare şi cu calculatorul cifric se compară cu cele obţinute prin calcul analitic exact.

Sistemul electromagnetic considerat se prezintă în fig. 3.1.a, iar în secţiune transversală în fig.3.1.b.

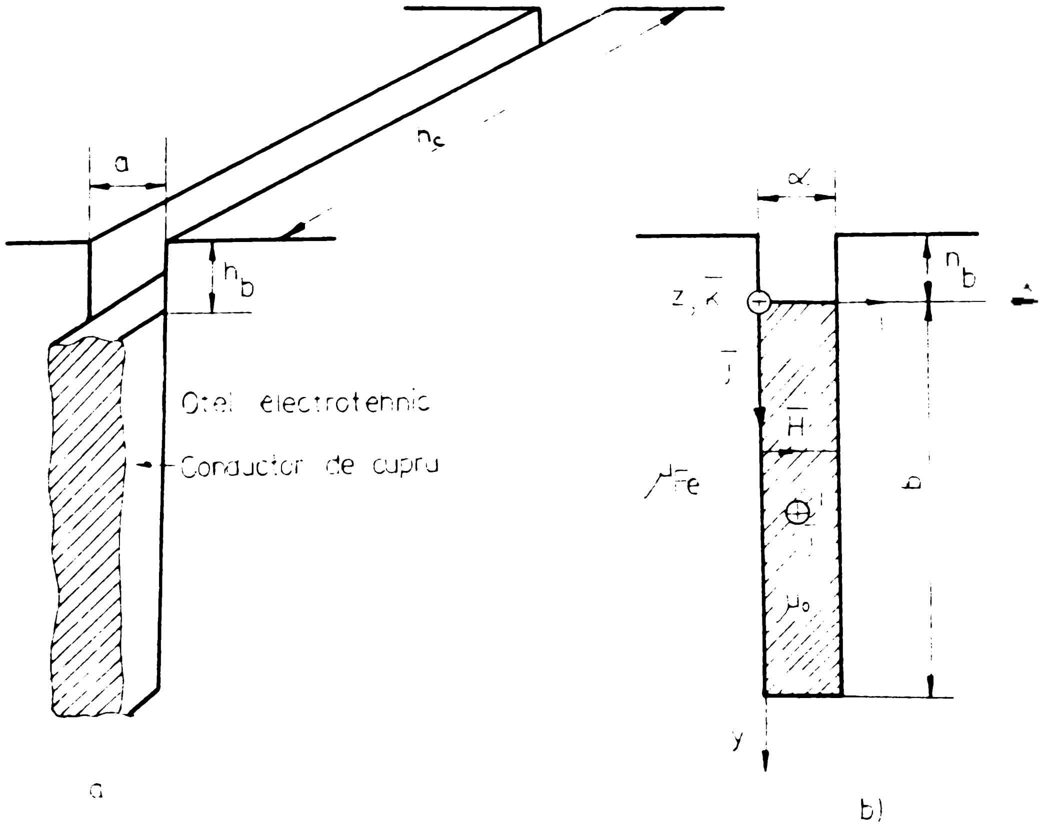


Fig.3.1.

Ipotezele admise sînt aceleaşi pentru fiecare mod de tratare a cîmpului :

$$\mu_{Fe} \gg \mu_0 ; \; h_c \gg b \gg a \; ; \; h_b > a ; \; \sigma_{zFe} = 0 \qquad (3.1)$$

Ultima ipoteză derivă din dispunerea miezului feromagnetic sub forma de tole izolate între ele electric.

3.1. Soluţia exactă a problemei

Ca urmare a ipotezelor acceptate cîmpul magnetic va fi plan-paralel şi unidirecţional (ǁ cu axa x) şi pentru determinarea lui e necesară aflarea soluţiei uneia din ecuaţiile :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu\sigma\left(\frac{\partial A}{\partial t} + K\right) \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3.3)$$

satisfăcute de componenţa spaţială a vectorului potenţial magnetic A,(3.2), respectiv de unica componentă a intensităţii cîmpului magnetic $\bar{H}(\bar{H} = H\bar{i})$, (2.3).

BUPT

Indiferent care din cele două ecuații se utilizează, rezultatele sînt aceleași, diferența în rezolvare constînd practic doar în tipul de condiții de frontieră utilizate. Se observă că condiția de frontieră dată este de tip Dirichlet pentru ecuația (3.3) și de tip Neumann pentru ecuația (3.2.), întrucît din aplicarea teoremei lui Ampère pe perimetrul secțiunii conductorului rezultă valoarea H (o,t) a intensității cîmpului magnetic :

$$H(o,t) = \frac{i(t)}{a} , \tag{3.4}$$

i(t) - curentul din conductor.

Valorile lui k_a și L_{iar} obținute prin rezolvarea ecuației (3) (v.Anexa 3) sînt :

$$k_a = \alpha b \frac{sh2\alpha b + \sin 2\alpha b}{ch2\ \ b - \cos 2\ \ b} ; \tag{3.5}$$

$$L_{iar} = \frac{3}{2\alpha b}\ \frac{sh2\alpha b - \sin 2\alpha b}{ch2\alpha b - \cos 2\alpha b} ; \tag{3.6}$$

în care

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} = \frac{1}{\delta} \tag{3.7}$$

δ - fiind adîncimea echivalentă de pătrunderea cîmpului în semispațiul conductor ;

ω - pulsația electrică a curentului $i(t) = I\sqrt{2}\sin\omega t$.

Valorile deduse cu expresiile (3.5) și (3.6) sînt prezentate în coloanele 2 ale tabelelor 3.1 și 3.3, în funcție de frecvență, pentru b = 10 a = 40 mm,

$$\mu_{cu} = \mu_o = 1{,}256\cdot10^{-6} H/m,\ \ \sigma = 5{,}6\cdot10^{7} S/m\ ,\omega = 2\pi\cdot f\ .$$

3.2. <u>Modelarea pe o rețea RC</u>

Datorită ortoganalității suprafețelor de separație ale diferitelor medii care intră în structura sistemului, rețeaua de discretizare a planului cîmpului se alege ortogonală și cu pas constant h=(fig.3.2 b) sau cu varierea pasului de discretizare doar la bazele conductorului (fig.3.2 a) în scopul unei mai bune aproximări a cîmpului la efect pelicular accentuat.

Neluînd în seamă variația densității de curent pe un element de suprafață $\Delta S_k = {}_k h^2$, ($\eta_1 = \frac{1}{2}$ la baza superioară, $\eta_{10} = \frac{3}{2}$ la baza inferioară și $\eta_k = 1$ în restul secțiunii conductorului), ecuațiile diferențiale trunchiate care derivă din 3.2. sînt :

$$-A_1+A_2=\frac{1}{2}\mu\sigma(\frac{\partial A_1}{\partial t}+K)h^2+\mu I$$

$$A_{k-1}-2A_k+A_{k+1}=\mu\sigma(\frac{\partial A_k}{\partial t}+K)h^2\ ;\ k=2,\dots,9 \qquad (3.8)$$

$$A_9-A_{10}=\frac{3}{2}\mu\sigma(\frac{\partial A_{10}}{\partial t}+K)h^2$$

Acestor ecuaţii le corespunde modelul din fig.3.2.c. Pentru parametrii modelului s-au ales valorile : $R = 1000\,\Omega$, $C=4,6$ nF şi la $h= a = 4$ mm, $\mu_{cu}\approx\mu_0$, din relaţia (3.13-B) rezultă $k_t = 4,1.10^{-3}$ respectiv frecvenţa mărimilor din model $f_m = 244\ f$.

Măsurile s-au efectuat cu schema din fig.3.12-B, în care s-a utilizat un voltmetru cifric EO 302 şi un generator de joasă frecvenţă (EO 501).

Rezultatele măsurării şi calculelor sînt prezentate în coloanele 3 şi 4 ale tabelelor 3.1 şi 3.3.

a. Pentru calcularea factorilor k_a şi L_{iar} s-au utilizat expresiile puterilor date de (3.32-B) în funcţiile de mărimile măsurabile pe modelul RC, rezultă :

$$P_a=-k_pQ_m=-k_pI_m^2X_{me};\quad Q=k_pP_m=k_pI_m^2R_{me} \qquad (3.9)$$

în care R_{me} şi X_{me} sînt componentele impedanţei echivalente a modelului.

Din (3.9) cu (3.33-B) şi (3.34-B) şi expresiile puterii active în c.c. şi a energiei magnetice în funcţie puterea aparentă ($Q = 2\ W_m$) rezultă :

$$k_{alm}=10\frac{X_{me}}{X_m}\ \text{cu}\ X_m=-\frac{1}{C_m\omega_m} \qquad (3.10)$$

şi

$$L_{iarlm}=\frac{3}{10}\frac{R_{me}}{R_m} \qquad (3.11)$$

b. Aproximînd integralele de volum care dau puterile active şi reactive (respectiv a energiei magnetice) prin sume de valori finite, considerînd valorile densităţilor de puteri şi energii constante pe cîte un element de suprafaţă $\eta_k h^2$:

$$P_a=\frac{1}{\sigma}\int_V\bar{J}.\bar{J}^*\,dv=\frac{h_ch}{\sigma}\int_0^b J^2\,dy\approx\frac{h_ch^2}{\sigma}\sum_{k=1}\eta_kJ_k^2 \qquad (3.12)$$

BUPT

$(\eta_1 = \frac{1}{2}\,;\eta_k = 1,$ pentru $k = 2,\ldots,9;\ \ \eta_{10} = \frac{3}{2})$

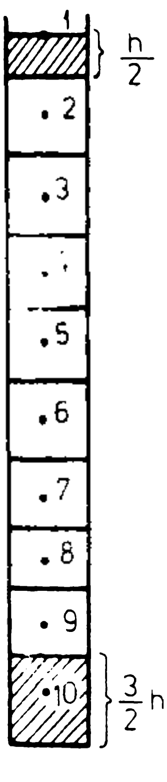
$$W_{ma} = \frac{1}{2\mu}\int_V \vec{B}\cdot\vec{B}^*\,dv = \frac{h_c h}{2\mu}\int_0^b B^2 dy = \frac{h_c h^2}{2\mu}\sum_{k=1}^{10}\eta_k B^2 k \qquad (3.13)$$

dacă se ţine seama de (3.21-B) şi (3.20-B), rezultă :

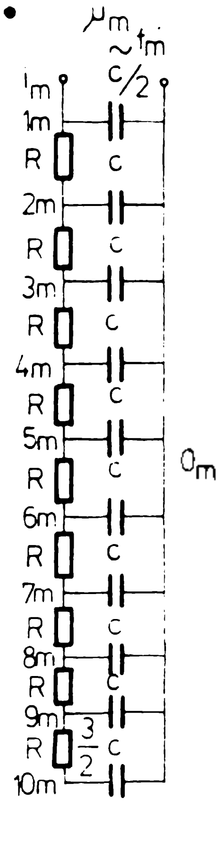
$$k_{a2m} = 10\left(\frac{1}{X_m I_m}\right)^2 \sum_{k=1}^{10}\eta_k\, U_{mk}^2 \qquad (3.14)$$

$$L_{iar2m} = 0{,}15 + \frac{3}{40}\left(\frac{1}{X_m I_m}\right)^2\left(\sum_{k=2}^{9} U_{mk+1,k-1}^2 + U_{m10,9}^2\right), \qquad (3,15)$$

în care U_{mk} este tensiunea la bornele condensatorului „k" iar $U_{mk+1,k-1}$ - tensiunea la capetele m,k+1 - m,k-1 ale conductoarelor „k+1" şi „k-1" .



a)



b)

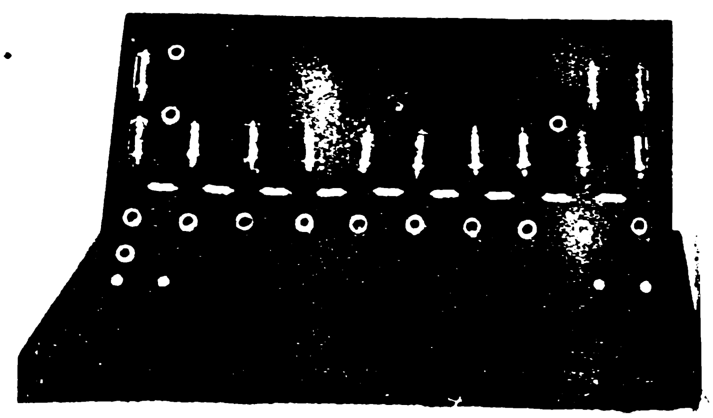


Fig.3.2. Discretizarea crestăturii (a) schema electrică a modelului (b),modelul realizat (c).

c. Folosind evaluări îmbunătăţite ale puterii active şi ale energiei magnetice din (3.12) şi (3.13) cu formula $\frac{1}{3}$ a lui Simpson se obţine :

$$P_a = \frac{h_c h^2}{3\sigma}\sum_{k=1}^{10}\varsigma_k\, J_k^2\ ,\ \text{cu}\ \varsigma_1 = 1, \varsigma_k = 4\ \text{pentru} \qquad (3.16)$$

BUPT

$k = 2n$, $\varsigma_k = 2$ pentru $k = 2n + 1$, n - numărul natural.

$$W_m = \frac{h_c \mu I^2}{6} + \frac{h_c h^2}{6} \sum_{k=2}^{10} \varsigma_k B_k^2$$ cu (3.16) și (3.17) rezultă : (3.17)

$$k_{a3m} = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{X_m I_m}\right)^2 \sum_{k=1}^{10} \varsigma_k\, U_{mk}^2 \qquad (3.18)$$

$$L_{iar3m} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40(X_m I_m)^2} \sum_{k=2}^{9} \varsigma_k U^2_{m,k+1,k-1} \qquad (3.19)$$

Pentru măsurări s-a utilizat schema din fig.3.12-B în care s-a utilizat un voltmetru cifric și rezistența R a avut valoarea de 1 kΩ.

Rezultatele obținute utilizînd expresiile de calcul (3.10), (3.11),(3.14),(3.15),(3.18) și (3.19), s-au prezentat în tabelele 3.1 și 3.3, coloanele 3,4 și 5.

3.3. Rezultatele obținute cu calculatorul cifric

Problemei i se poate asocia reprezentarea în complex a ecuațiilor (3.8). Dacă se ia ca mărime de referință în planul complex fazorul $\underline{I}$, corespunzător curentului i (t), ecuațiilor (3.8) le corespund ecuațiile complexe :

$$- \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \frac{1}{2} \mu \sigma h^2 (j\omega \underline{A}_1 - \frac{I}{\sigma ab}) + \mu I$$

$$\underline{A}_{k-1} - 2\underline{A}_k + \underline{A}_{k+1} = \mu \sigma h^2 (j\omega \underline{A}_k - \frac{I}{\sigma ab});\ k=2,\dots,9 \qquad (3.20)$$

$$\underline{A}_9 - \underline{A}_{10} = \frac{3}{2} \mu \sigma h^2\ (j\omega \underline{A}_{10} - \frac{I}{\sigma ab}),$$

în care s-a ținut seama că $I = -\sigma abk$.

Se notează :

$$x_k = R_e \left\{ \underline{A}_k \right\};\ x_{k+10} = I_m \left\{ \underline{A}_k \right\},\ k = 1,\dots,10 \qquad (3.21)$$

și din cele 10 ecuații complexe (3.20) rezultă 20 ecuații algebrice reale cu 20 de necunoscute (x_L, $L = 1,\dots,20$)

$$- x_1 + x_2 + \frac{1}{2} \mu \sigma \omega h^2 x_{11} = \frac{19}{20} \mu\ I\ ;$$

$$- \frac{1}{2} \mu \sigma \omega h^2 x_1 - x_{11} + x_{12} = 0$$

$$x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} + \mu \sigma \omega\ h^2 x_{k+10} = - \frac{I\mu}{10}\ .$$

$$- \mu \sigma \omega\ h^2 x_k + x_{k+9} - 2x_{k+10} + x_{k+11} = 0$$

$k = 2,\dots,9$ (3.22)

BUPT

$$x_9 - x_{10} + \frac{3}{2}\mu\sigma\omega\, h^2 x_{20} = -\frac{\mu I}{10};$$

$$-\frac{3}{2}\mu\sigma\omega\, h^2 x_{10} + x_{19} - x_{20} = 0$$

Norma sumă a matricii sistemului (3.22) este mai mare decît unitatea şi deci sistemul nu se pretează la o rezolvare iterativă. S-a utilizat metoda lui Gauss.

Rezolvarea s-a efectuat pentru 10 frecvenţe cuprinse în domeniul (0,50] cu un pas de 5 Hz, la I = 400 A, după algoritmul care rezultă din schema logică prezentată în fig.3.3.

Marea majoritate a termenilor matricei A a sistemului (3.13) sînt nuli aşa încît se introduc în calculator în zona afectată acesteia, valorile "0".

Coeficienţii independenţi de frecvenţă sînt, unii egali cu 1, sau -1 şi alţii cu -2 şi se introduc cu ajutorul instrucţiunii de ciclare D Ø .

Termenii dependenţi de frecvenţă se calculează după iniţializarea frecvenţei f (f = 50 Hz) tot cu ajutorul unei instrucţiuni D Ø.

După introducerea termenilor liberi şi după o prealabilă tipărire a celor două matrice se cheamă din biblioteca calculatorului (MATHLIB) subprogramul de rezolvare a sistemului de ecuaţii denumit RESØL, are la bază algoritmul lui Gauss.

Din soluţia X se calculează valorile factorilor k_a şi L_{iar} la fel ca şi la modelare :

a. Utilizînd expresiile de definire energetică, separînd puterile, activă şi reactivă, din fluxul vectorului Poyting :

$$\underline{S} = P_a + jQ = \int_{\Sigma} (\overline{\underline{H}}^* \times \underline{\bar{E}})\overline{ds} = -h_c\, I\, (j\omega\, \underline{A}_1 + K) =$$

$$= P_c\left(1 + \frac{\sigma a b \omega}{I} x_{11}\right) - j\omega\, h_c\, I x_1 \qquad (3.23)$$

din care rezultă :

$$k_{alc} = 1 + \frac{10\alpha'}{I} x_{11} \; ; \quad \text{cu } \alpha' = \mu\sigma\omega h^2 \qquad (3.24)$$

$$L_{iarlc} = \frac{3}{10\,\mu I} x_1 \qquad (3.25)$$

b.Inlocuind în (3.12) şi (3.13) pe J_k respectiv, B_k cu expr siile :

$$J_k = \sigma E_k = \sigma \sqrt{(K-\omega x_{k+10})^2 + (\omega x_k)^2} \tag{3.26}$$

$$B_k = \mu H_k = \frac{1}{2h} \sqrt{(x_{k+1}-x_{k-1})^2 + (x_{k+11}-x_{k+9})^2} \tag{3.27}$$

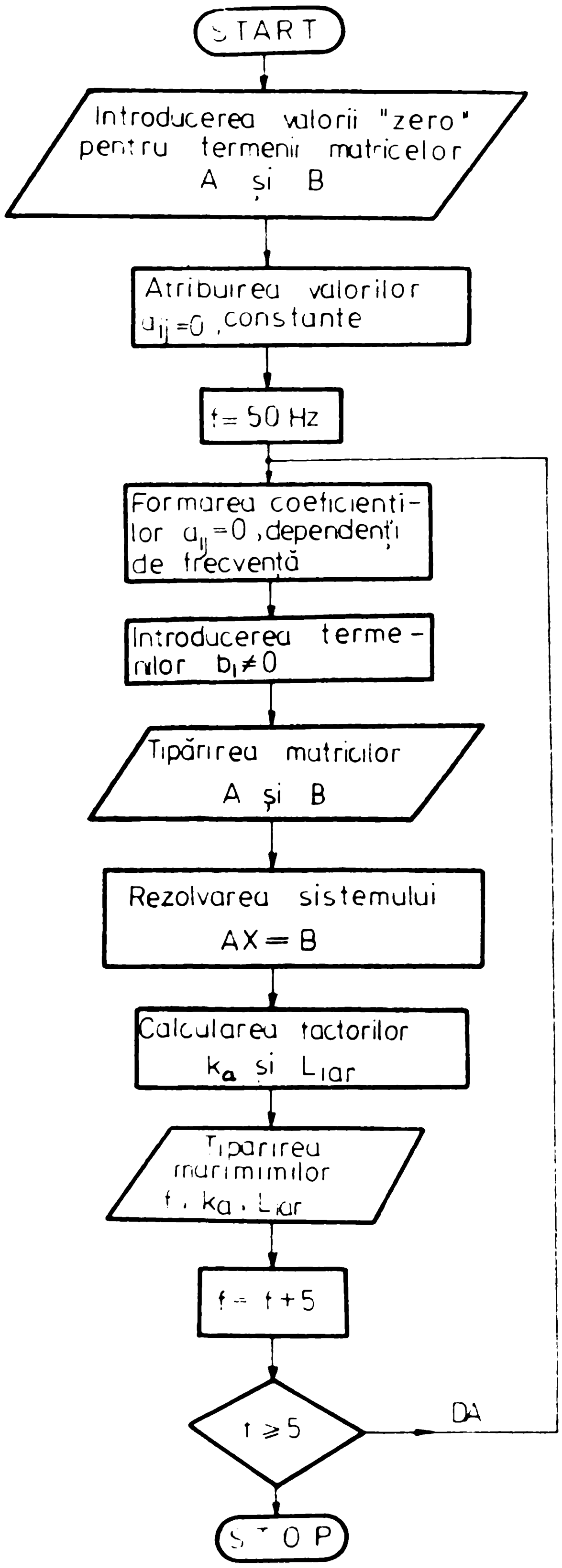


Fig.3.3. Schema logică de rezolvare a sistemului: AX = B.

se deduc :

$$k_{a2c} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} \eta_k (1+\frac{10\alpha'}{\mu I} x_{k+10})^2 + (\frac{10\alpha'}{\mu I} x_k)^2 \qquad (3.28)$$

$$L_{iar2c} = \frac{3}{20} + \frac{3}{40}(\frac{1}{\mu I})^2 (\sum_{k=2}^{9} [(x_{k+1}-x_{k-1})^2 + (x_{k+11}-x_{k+9})^2] + $$

$$+ \frac{3}{2}(x^2_9 + x^2_{19})) \qquad (3.29)$$

c. Înlocuind în (3.16) şi (3.17) expresiile (3.27) respectiv (3.28), rezultă :

$$k_{a3c} = \frac{1}{30}\sum_{k=1}^{10} \xi_k \ [(1+\frac{10\alpha'}{\mu I} x_{k+10})^2 + (\frac{10\alpha'}{\mu I} x_k)^2] \qquad (3.30)$$

$$L_{iar3c} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40(\mu I)^2}\sum_{k=2}^{9} [(x_{k+1}-x_{k-1})^2 + (x_{k+11}-x_{k+9})^2] \qquad (3.31)$$

Calculele se repetă pentru cele 10 frecvenţe.

Programul scris în FORTRAN este prezentat în Anexa 4 sub numele de MASIV 1.

Programul a utilizat cîteva instrucţiuni care au determinat calcularea expresiilor (3.5) şi (3.6).

Din confruntarea rezultatelor obţinute pe model şi cu calculatorul cu valori exacte s-au obţinut abaterile relative procentuale. Erorile de determinare aferente fiecărei expresii de calcul a rapoartelor k_a şi L_{iar} sînt trecute în coloanele tabelelor 3.2 şi 3.4, notate corespunzător.

3.4. Observatii

Aşa cum este de aşteptat, erorile de determinare pe model sînt mai mari decît cele pe care le include calculul numeric. Pe cînd erorile incluse de a doua metodă urmăresc o lege clară de variaţie cu frecvenţa, determinată de gradul de aproximare făcută la trunchiere şi la evaluarea mărimilor calculate, primele nu respectă această calitate datorită intervenţiei erorilor nesistematice determinate de impreciziile elementelor care intră în schema de măsurare : voltmetrul cifric utilizat a asigura o precizie de 1%, elementele pasive R_m şi C_m au fost sortate cu o precizie de 0,2%, rezistenţa R s-a cunoscut cu o precizie de 0,02%, iar generatorul RC utilizat pentru alimentarea modelului, o precizie în frecvenţă

BUPT

Tabel 3.1 : Dependența factorului în alternativ a rezistenței de frecvență

1	2	3	4	5	6	7	8
f(Hz)	k_e	k_{a1m}	k_{a2m}	k_{a3m}	k_{a1c}	k_{a2c}	k_{a3c}
0	1	-	-	-	-	-	-
5	1,2482	1,2214	1,2517	1,2186	1,2536	1,2536	1,2179
10	1,760	1,7610	1,7346	1,7502	1,7773	1,7772	1,7342
15	2,2516	2,2514	2,2333	2,2309	2,2849	2,2817	2,2264
20	2,6516	2,5686	2,5626	2,5456	2,6973	2,6975	2,6254
25	2,9818	2,9501	2,8658	2,8303	3,0453	3,0449	2,9520
30	3,2676	3,4768	3,1430	3,1335	3,3503	3,3449	3,2320
35	3,5256	3,7783	3,3656	3,3314	3,6291	3,6286	3,4845
40	3,7648	4,0049	3,6035	3,5419	3,8904	3,8899	3,7163
45	3,9901	4,2180	3,7602	3,7721	4,1388	4,1382	3,9333
50	4,2040	4,5078	4,0022	3,9811	4,3788	4,3763	4,1382

BUPT

Tabelul 3.2. : Repartiţia erorilor de determinare a factorului în alternativ al rezistenţei la diferite frecvenţe

1	2	3	4	5	6	7	8
f(Hz)	$\varepsilon'_{k_{ae}}$	$\varepsilon'_{k_{a1m}}$	$\varepsilon'_{k_{a2m}}$	$\varepsilon'_{k_{a3m}}$	$\varepsilon'_{k_{a1c}}$	$\varepsilon'_{k_{a2c}}$	$\varepsilon'_{k_{a3c}}$
1	0	-	-	-	-	-	-
5	0	-2,4	0,3	-2,5	0,4	0,4	-2,4
10	0	0	-1,1	-1,2	1,o	1,o	-1,4
15	0	0	-0,8	-0,9	1,5	1,5	-1,0
20	0	-3,1	-3,3	-3,3	1,7	1,7	-1,0
25	0	-1,0	-3,9	-5,0	2,1	2,1	-1,0
30	0	6,4	-3,8	-3,9	2,5	2,5	-1,0
35	0	7,1	-4,5	-4,1	3,0	3,0	-0,7
4o	0	6,3	-4,2	-5,9	3,3	3,3	-1,0
45	0	5,4	-5,7	-5,4	3,7	3,7	-1,4
50	0	7,2	-4,8	-5,3	4,1	4,1	-1,5

BUPT

Tabelul 3.3 : Dependenţa de frecvenţă a inductivităţii interne raportate

1	2	3	4	5	6	7	8
f(Hz)	L_{iarc}	L_{iar1m}	L_{iar2m}	L_{iar3m}	L_{iar1c}	L_{iar2c}	L_{iar3c}
1	1	-	-	-	-	-	-
5	o,9296	o,9254	o,9027	o,9193	o,9249	o,9422	o,9328
10	o,7887	o,7674	o,7381	o,7538	o,7878	o,8o74	o,7896
15	o,6629	o,6329	o,6264	o,6246	o,6539	o,6762	o,6621
20	o,5720	o,5524	o,535o	o,528o	o,5613	o,588o	o,57o1
25	o,5o81	o,48o5	o,4787	o,47o4	o,4964	o,5228	o,5o55
30	o,4617	o,4217	o,4391	o,43oo	o,4489	o,4772	o,4587
35	o,4266	o,384o	o,4o76	o,3972	o,4127	o,4427	o,4232
40	o,3987	o,3541	o,3818	o,371o	o,3838	o,4156	o,395o
45	o,3756	o,3274	o,3635	o,3511	o,36oo	o,3934	o,372o
50	o,3566	o,3194	o,3466	o,3325	o,3398	o,3748	o,3526

BUPT

Tabelul 3.4 : Repartiţia erorilor de determinare a inductivităţii interne raportate, în funcţie de frecvenţă

1	2	3	4	5	6	7	8
f(Hz)	ε_{Le}	ε_{L1m}	ε_{L2m}	ε_{L3m}	ε_{L1c}	ε_{L2c}	ε_{L3c}
0	0	-	-	-	-	-	-
5	0	-o,5	-2,9	-1,1	-0,5	-1,3	0,3
10	0	-2,7	-6,4	-4,4	-0,1	2,3	0,1
15	0	-4,5	-5,5	-5,5	-1,3	2,0	-0,1
20	0	-3,4	-7,7	-7,7	-1,8	2,7	-0,3
25	0	-5,4	-6,4	-7,4	-2,3	2,9	-0,5
30	0	-8,6	-4,9	-7,o	-2,7	3,3	-0,6
35	0	-9,9	-4,4	-6,8	-3,2	3,7	-0,8
40	0	-11,1	-4,2	-6,8	-3,7	4,2	-0,9
45	0	-12,8	-3,2	-6,5	-4,1	4,7	-0,9
50	0	-10,4	-2,8	-2,8	-4,7	5,1	-1,1

BUPT

de 5%. Semnalul generatorului a avut o bună sinusoidalitate.

Se remarcă faptul că erorile de măsurare pe model care apar la determinarea lui k_a și L_{iar} din mărimile electromagnetice la suprafața conductorului, respectiv din fluxul vectorului Poyting, (relațiile 3.10 și 3.11), sînt mai mari decît la utilizarea expresiilor puterilor sub forma unor integrale de volum. Rezultatele reflectă o "acumulare" mai accentuată a erorilor la "frontiera" modelului decît în "interiorul" său (v.comparativ coloanele 3 și 4 din tabelele 3.2 și 3.4.).

Pentru elementele din schema de măsurare de precizii obișnuite, utilizarea unor formule de evaluare numerică îmbunătățite (3.18 și 3.19) nu dau rezultate mai precise decît cele care au la bază a evaluării simple (3.14 și 3.15).Această observație rezultă din compararea coloanelor 4 și 5 din tabelele 3.2 și 3.4.

Se poate constata de asemenea că pentru schema aleasă de alimentare și măsurare a modelului, rezultatele pe model diferă cu 3% pentru k_a și cu 5% pentru L_{iar}, față de cele corespunzătoare de la calculul cifric. La alegerea sursei, elementelor pasive și a aparatelor de măsurare de precizii ridicate rezultatele vor fi practic cele date de calculul cifric și în această situație se indică utilizarea formulelor de evaluare îmbunătățită (formulele $\frac{1}{3}$ ale lui Simpson).

Abaterile rezultatelor obținute prin calcul numeric,față de valorile exacte obținute prin calcul analitic arată clar că discretizarea domeniului sistemului electromagnetic trebuie făcută cu un pas h, mai mic decît jumătate din adîncimea δ ,de pătrundere a cîmpului în conductor.

E interesant de observat că majoritatea erorilor incluse de modelare sînt negative atît pentru k_a cît și pentru L_{iar} așa încît nu se poate afirma că generatorul ar fi avut o deplasare de scală care ar provoca abateri în k_a și L_{iar} de semne opuse). Cauza căutată inițial în precizia de cunoaștere a tensiunii generatorului, a fost aflată în precizia de măsurare a voltmetrului numeric, cu mult mai slabă decît o asigura cartea aparatului, mai ales la limitele inferioare ale domeniului de măsurare. Este indicat ca pentru a nu fi nevoie de o schimbare a domeniului de măsurare a voltmetrului la măsurarea tensiunilor $U_{mk+1,k-1}$ și U_{mk}, să se modifice R, respectiv curentul I_m, corespunzător

BUPT

pentru fiecaro frecvenţă a semnalului de alimentare.

BUPT

CONCLUZII

α. În legătură cu problemele abordate în lucrare se pot face următoarele observații finale :

1. Utilizarea modelării în studiul cîmpului electromagnetic din sisteme cu conductoare masive se impune din cel puțin două motive :

- este o metodă care poate furniza soluții cu precizii acceptabile din punct de vedere tehnic, pentru sisteme cu structuri geometrice și fizice și condiții de unicitate, dintre cele mai complicate;
- este un mijloc care permite analiza simplă a cîmpului din sistemele cu conductoare cilindrice de secțiuni arbitrare, cu domenii extinse la infinit.

2. Sub aspectul posibilităților constructive și al controlabilității preciziei de determinare a cîmpului, modelele care au la bază rețelele analizoare pasive (de tip R și RC), sînt mai convenabile decît celelalte tipuri de modele.

3. Dacă studiul pe model RC a efectului pelicular slab și net trebuie abordat cu circumspecție (datorită erorilor de măsurare și, respectiv, erorilor de trunchiere), pentru analiza efectului pelicular mediu acest model reprezintă un mijloc de tratare sigur și de multe ori de neînlocuit.

4. Din rezultatele obținute pe modele RC s-a constatat că în analiza efectului pelicular mediu utilizarea unui pas de discretizare mai mic sau egal cu jumătate din adîncimea echivalentă de pătrundere a cîmpului, conduce la rezultate acceptabile. Ca urmare numărul condensatoarelor necesare construirii unui model, chiar pentru conductoare-original parcurse de curenți de ordinul kiloamperilor, este suficient de mic încît influența rezistențelor lor de pierderi să nu devină supărătoare. Dacă în unele probleme numărul acestora este totuși prea mare, dificultatea poate fi depășită alegînd rezistori (R_m) cu valori ale rezistențelor suficient de mici în comparație cu rezistențele parazite ale condensatoarelor.

Compensarea influenței capacităților parazite din instalația de măsurare se efectuează prin alegerea adecvată a valorii C_m și utilizînd schema de pămîntare Wagner. Cu valori pentru R_m de ordinul kiloohmilor și pentru C_m de ordinul nanofarazilor, problema

BUPT

eliminării celor două influențe parazite este practic rezolvată.

5. O modelare comodă implică utilizarea unor valori constante ale rezistențelor și capacităților elementelor pasive și ca urmare, discretizarea cu pas constant a subdomeniilor omogene. Ecuațiile care stau la baza acestor modele sînt ecuațiile în diferențe finite sau cele date de metoda lui Gaîr. Ultimele se folosesc pentru obținerea unor expresii de calcul îmbunătățite și pentru cuprinderea în rețeaua de discretizare a întregului domeniu chiar și atunci cînd frontierele sînt curbate. Utilizarea ecuațiilor date de metoda elementelor finite este dificilă [88].

6. Modelarea discretă a cîmpurilor determinate de condiții de unicitate nesinusoidale, e discutabilă. Dacă aceste condiții sînt periodice și sistemul este liniar, în lipsa unor surse adecvate de alimentare a modelului, se analizează cîmpul pentru fiecare armonicăsursă suprapunîndu-se apoi rezultatele. Trebuie avut în vedere faptul că pentru armonicile de ordin superior celei corespunzătoare efectului pelicular mediu, erorile de trunchiere și influența capacităților parazite, cresc sensibil. Analiza regimurilor tranzitorii se efectuează de asemenea cu prudență.

O orientare aproximativă în aprecierea dacă o anumită formă în timp a fenomenului electromagnetic poate fi tratată prin modelare RC sau nu, o pot da constantele de timp ale originalului [89] . Aceste regimuri ar putea fi analizate corespunzător pe modele cu pături electroconductoare, dacă tehnologia de construcție a acestora ar fi pusă la punct.

7. Modelarea neliniarităților magnetice, în general, este dificilă și ca urmare problemele de cîmp magnetic în medii neliniare sînt greu abordabile cu această metodă. În rest, majoritatea problemelor de interes practic prezintă anizotropii care se pot idealiza sau domenii cu structuri neomogene pentru care permeabilitatea are expresii de punct simple ($\mu_r(\bar{r}) = 1$ sau $\gg 1$). Ultimele probleme sînt ușor rezolvabile prin modelare.

8. După cum se observă din § 2.4-C repartiția cîmpului magnetic este o funcție de temperatură. În sistemele de conductoare parcurse de curenți mari și răcite forțat, la suprafețele conductoarelor apar de obicei gradienți mari de temperatură și

BUPT

dacă în plus deformările repartițiilor de curent în interiorul conductoarelor sînt accentuate, cîmpul electromagnetic nu poate fi analizat corect independent de cel termic. Analiza celor două cîmpuri simultane se poate face în principiu prin aproximații succesive : se determină J la σ admis, apoi Θ cu J în sursa de căldură, se recalculează σ, se află valori noi pentru J, ş.a.m.d. .

9. Schemele de măsurare utilizate la modelare sînt extrem de simple şi permit determinarea aproape directă cu precizii bune, a mărimilor globale (rezistenţe, inductivităţi) din puterile absorbite de model. Determinările acestor mărimi se pot face folosind formule de aproximare numerică a expresiilor lor de definire energetică. Din măsurările efectuate s-a observat că formulele de calcul a puterilor active şi reactive din fluxul vectorului Poyting dau valori mai imprecise pentru impedanţe decît cele care utilizează expresiile lor sub forma unor integrale de volum. La precizii foarte bune ale elementelor din schema de măsurare la utilizarea unor formule de calcul cu aproximări îmbunătăţite a integralelor de volum, rezultă precizii de evaluare a mărimilor k_a şi L_{ar} de 1%.

10. Pentru probleme cu domenii mici (pentru care se scriu 100 $\div$ 200 de ecuaţii algebrice între valorile potenţialelor) analiza cîmpului cu calculatorul cifric este mai avantajoasă decît cea cu modelul, cel puţin sub aspectul preciziei (V.III-C).

β. Principalele contribuţii personale la analiza cîmpului electromagnetic în sisteme cu conductoare masive, sînt :

1. In § 2.2-A se particularizează metoda lui Gair de proiectare utilizîndu-se discretizarea în "celule" [18] pentru cîmpurile electrostatice (folosind legea fluxului electric) şi se generalizează pentru cîmpul electromagnetic în regim cvasistaţionar în sisteme cu medii neomogene (utilizînd teorema lui Ampère). Această metodă posedă cîteva însuşiri care o impun : elasticitate maximă în discretizarea planului cîmpului, uşoară introducere în ecuaţiile cu valori finite a condiţiilor de frontieră de tip Neumann.

2. Tot în § 2.2-A se prezintă o aproximare îmbunătăţită a ecuaţiilor corespunzătoare metodei lui Gair luîndu-se

BUPT

în considerare variația densității de curent pe elementele de arie componente ale "celulei" : în § 3.4-B se prezintă analogul corespunzător acestei îmbunătățiri (fig.3.13-B).

4. Paragraful 2.4 - A conține o analiză comparativă a celor trei metode de bază prezentate în II-A punîndu-se în evidență identitatea acestora în aceleași condiții de aproximare.

5. Se demonstrează o teoremă de echivalență a cîmpurilor magnetice din două sisteme : unul real al problemei date și unul fictiv format în scopul limitării domeniului infinit al problemei de modelat și ușurării alimentării modelului (III-A).

6. Partea a doua a lucrării (B) poate fi considerată complet originală sub aspectul tratării unitare a diferitelor tipuri uzuale de modelare. Se utilizează pentru prima oară analiza criterială ca mijloc de obținere a relațiilor de analogie fapt care dă o solidă fundamentare teoretică a modelării cîmpurilor, generalitate relațiilor obținute și o prezentare concentrată a modelării pentru diferite regimuri și medii de diferite structuri. De remarcat (de exemplu) modul simplu de obținere a modelelor corespunzătoare mediilor neomogene și anizotrope (§ 2.1.-B). Prin introducerea noțiunii de "analog ipotetic" diversele moduri de injecție a curenților în modelele rezistiv-capacitive continui se pot prezenta unitar.

7. In § 3.4-B se prezintă cea mai simplă schemă de măsurare a mărimilor globale pe model (schema cu un voltmetru) dîndu-se relațiile de calcul a componentelor impedanței modelului din datele măsurătorilor. Schema conține o rezistență de măsurare a curentului prin tensiunea la bornele ei, precisă, reglabilă în scopul menținerii domeniului de măsurare a voltmetrului pentru orice frecvență.

8. Paragraful 3.5-B cuprinde o analiză completă a dependenței erorilor de trunchiere de pasul de discretizare și viteza de variație a cîmpului electromagnetic unidimensional.

9. Prima problemă din partea de aplicații (I-C) are la bază ideea lui Sylvester [30] de a utiliza pentru cîmpuri din domenii infinite analogul în dublu strat, observațiile simplificatoare, proiectare, construirea modelului,măsurările,

BUPT

interpretarea rezultatelor, inclusiv formulele de calcul fiind originale.

10. Problema II-C este întrutotul originală.

11. Rezolvările problemei III-C sînt originale.

12. Determinarea formelor ecuațiilor satisfăcute de valorile vectorului potențial magnetic în puncte finite la limitele de separație a două medii diferite, au fost deduse în mai multe lucrări [19] , [31] ş.a., utilizîndu-se metoda diferențelor finite. In Anexa 1 se deduc cîteva din aceste forme utilizîndu-se discretizarea tip "celula", teorema lui Ampére şi teoremele de conservare a componentelor tangențiale ale intensităților de cîmp magnetic şi electric şi a celor normale ale inducției magnetice : sînt prezentați şi analogii electrici elementari pentru modelarea RC. Se scoate în evidență dependența formei unei ecuații de repartiția conductivității electrice.

13. In Anexa 2 se dă soluția analitică exactă pentru cîmpul magnetic al unui sistem apropiat ca formă de sistemul din problema II-C.

14. Programul de calcul din Anexa 4 a fost întocmit de autor şi s-a rulat la un calculator FELIX-256K.

BUPT

A N E X E

Anexa 1 : DISCRETIZAREA SI MODELAREA LA LIMITELE DE SEPARATIE A DOUA MEDII MAGNETICE DE PERMEABILITATI DIFERITE

1. Cazul omogenităţii magnetice şi electrice : $\mu(x,y)$ = const. şi $\sigma(x,y)$ = const.

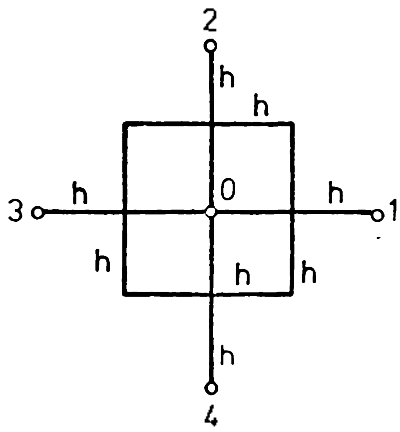


Fig.1.1 a - Alegerea elementelor de lungime la discretizarea cu pas egal.

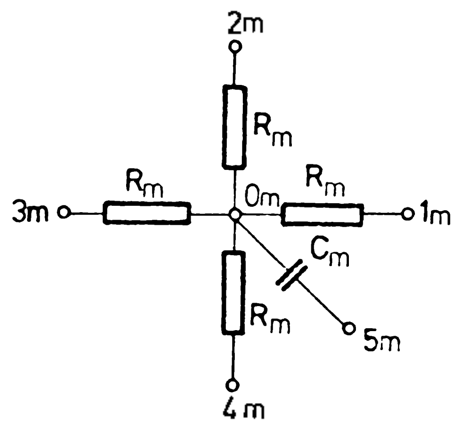


Fig.1.1 b - Analogul electric al discretizării din figura 1.1.a.

Relaţiile (3.1-B) şi (3.3-B) corespunzătoare discretizării din figura 1.1.a şi analogului electric din figura 1.1.b, iau forma :

$$\frac{A_1-A_0}{\mu} + \frac{A_2-A_0}{\mu} + \frac{A_3-A_0}{\mu} + \frac{A_4-A_0}{\mu} = \sigma_0 h^2\left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + K\right) \qquad (1.1)$$

$$\frac{V_{m1}-V_{mo}}{R_m} + \frac{V_{m2}-V_{mo}}{R_m} + \frac{V_{m3}-V_{mo}}{R_m} + \frac{V_{m4}-V_{mo}}{R_m} = \frac{C_m}{k_t}\left(\frac{dV_{mo}}{dt} - \frac{dV_{m5}}{dt}\right) \qquad (1.2)$$

Pentru aceste relaţii se pot face corespondenţele :

$$\frac{R_m C_m}{k_t} = \mu\sigma h^2 ; \quad A_0 = k_A V_m ; \quad K = -k_A \frac{dV_{m5}}{dt} \qquad (1.3)$$

2. Situaţia cînd un element de suprafaţă, $\Delta S_0 = h^2$, se ia la limita de separaţie a două medii de permeabilităţi diferite şi conductivităţi electrice diferite (fig.1.2.a).

Din ecuaţia (3.1-B) se obţine :

$$\frac{A_1-A_0}{\mu_I} + \frac{A_2-A_0}{\mu_I} + \int_r^q \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}\, dl + \frac{A_4-A_0}{\mu_I} = \sigma_0 h^2\left(\frac{\partial A_0}{dt} + K\right). \qquad (1.4)$$

Conservarea componentei normale a inducţiei magnetice,

$$A_{q'} - A_{r'} = A_{q''} - A_{r''} \qquad (1.5)$$

BUPT

şi a componentei longitudinale a cîmpului electric, la limita de separaţie a mediului I de mediul II,

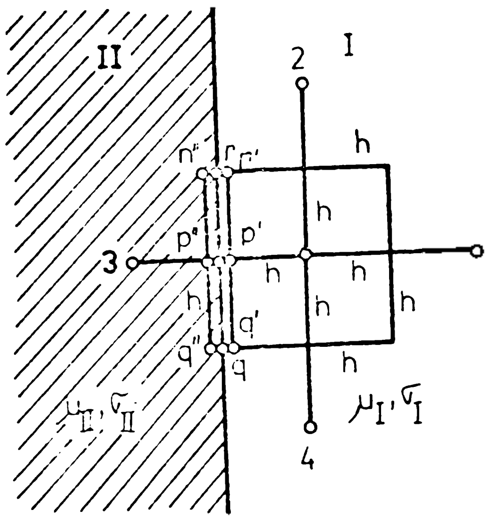


Fig.1.2 a - Elementul de suprafaţă $\Delta S_0 = h^2$, la limita de separaţie a două medii de permeabilităţi diferite.

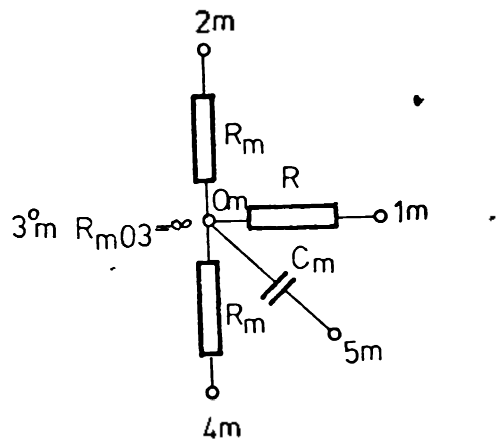


Fig.1.2 b - Analogul electric al discretizării din figura 1.2.a.

$$\frac{\partial A_{p'}}{\partial t} + K_{p'} = \frac{\partial A_{p''}}{\partial t} + K_{p''} \quad (K_{p'} = K_{p''} = K) \tag{1.6}$$

determină :

$$A_{q'} = A_{q''} = A_q; \quad A_r = A_{r''} = A_r \; ; \; A_{p'} = A_{p''} = A_p \tag{1.7}$$

Impreună cu expresia conservării componentei tangenţiale a intensităţii cîmpului magnetic,

$$\frac{1}{\mu_I}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_I = \frac{1}{\mu_{II}}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_{II}, \tag{1.8}$$

expresia (1.8) determină :

$$\int_r^q \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}\,dl = \int_{r'}^{q'} \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_I dl = \frac{1}{\mu_I}\,\frac{A_q - A_o}{\frac{h}{2}}\,h = \frac{1}{\mu_m}(A_3 - A_o), \tag{1.9}$$

cu $\mu_m = \frac{\mu_I + \mu_{II}}{2}$.

Ecuaţia (1.4) se scrie acum astfel :

$$\frac{A_1 - A_o}{\mu_I} + \frac{A_2 - A_o}{\mu_I} + \frac{A_3 - A_o}{\frac{\mu_I + \mu_{II}}{2}} + \frac{A_4 - A_o}{\mu_I} = \sigma_{oI} h^2 \left(\frac{\partial A_o}{\partial t} + K\right)$$

Pentru $\frac{\mu_{II}}{\mu_I} = \infty$ se obţine :

$$\frac{A_1-A_o}{\mu_I}+\frac{A_2-A_o}{\mu_I}+\frac{A_4-A_o}{\mu_I}=\sigma_{oI}h^2\left(\frac{\partial A_o}{\partial t}+K\right). \qquad (1.10)$$

Analogul electric al acestei relaţii este prezentat în figura 1.2 b. unde $R_{mo3}=\infty$ (adică un model rezistorul respectiv lipseşte).

3. Cazul cînd un element de suprafaţă $\Delta s_o = h^2$ este împărţit în două părţi egale (ca în fig.1.3 a) de linia de separaţie a două medii de permeabilităţi magnetice şi conductivităţi electrice diferite.

Din relaţia (3.1-B) se deduce

$$\frac{A_1-A_o}{\mu_I}+\int_{P_1}^{P_2}\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}dl+\frac{A_3-A_o}{\mu_{II}}+\int_{P_3}^{P_4}\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}dl=\frac{h^2}{2}(\sigma_{oI}+\sigma_{oII})\left(\frac{\partial A_o}{\partial t}+K\right), \qquad (1.11)$$

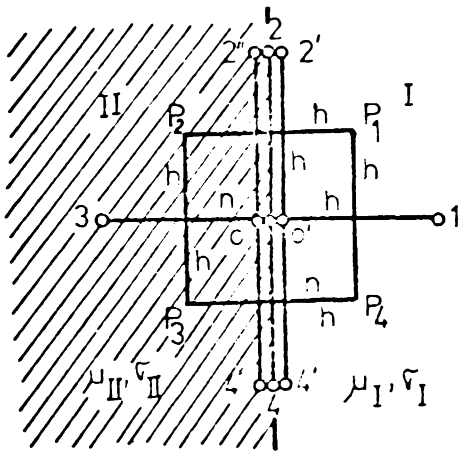


Fig.1.3.a - Elementul de suprafaţă este înjumătăţit de linia de separaţie a două medii de natură diferită.

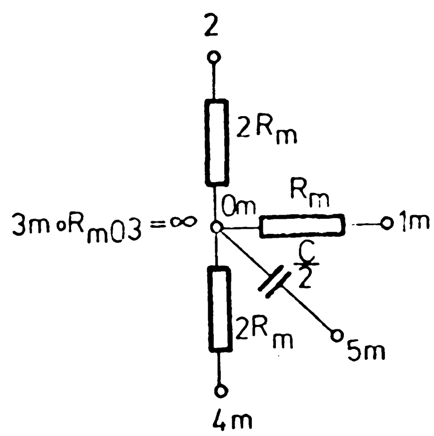


Fig.1.3.b. Analogul electric al discretizării din fig.1.3.a.

Ţinînd cont că :

$$A_{o'}=A_{o''}=A_o; \quad A_{2'}=A_{2''}=A_2; \quad A_{4'}=A_{4''}=A_4$$

rezultă :

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}dl=\frac{A_2-A_o}{\frac{2\mu_I\mu_{II}}{\mu_I+\mu_{II}}} \text{ şi analog } \int_{P_3}^{P_4}\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}dl=\frac{A_4-A_o}{\frac{2\mu_I\mu_{II}}{\mu_I+\mu_{II}}}$$

cu alte cuvinte, pentru cele două integrale $\mu_m=\frac{2\mu_I\mu_{II}}{\mu_I+\mu_{II}}$ şi ecuaţia (1.11) devine :

$$\frac{A_1-A_o}{\mu_I}+\frac{A_2-A_o}{\mu_m}+\frac{A_3-A_o}{\mu_{II}}+\frac{A_4-A_o}{\mu_m}=\frac{h^2}{2}(\sigma_{oI}+\sigma_{oII})\left(\frac{\partial A_o}{\partial t}+K\right) \qquad (1.12)$$

BUPT

Dacă $\frac{\mu_{II}}{\mu_I} =$; $\sigma_{0II} = 0$,

rezultă :

$$\frac{A_1-A_0}{\mu_I} + \frac{A_2-A_0}{2\mu_I} + \frac{A_4-A_0}{2\mu_I} = \sigma_{0I}\,\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + K\right) \qquad (1.13)$$

Analogul electric al expresiei (1.13) este prezentat în figura 1.3 b; se observă că în acest caz capacitatea are jumătate din valoarea celor din figura 1.2.b și figura 1.1.b.

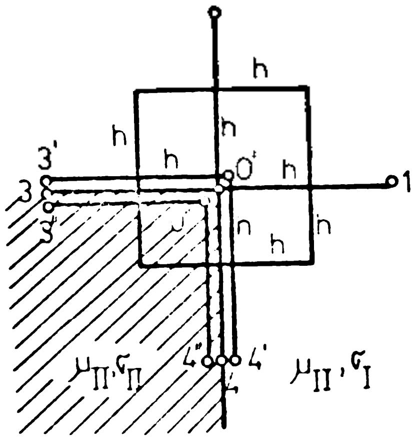


Fig.1.4.a - Elementul de suprafață este dispus la frîngerea liniei de separație a două medii diferite cu 90°.

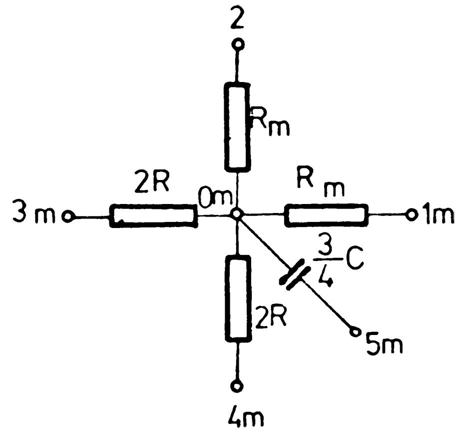


Fig.1.4.b-Analogul electric al discretizării din figura 1.3.a.

4. Atunci cînd elementul de suprafață este plasat ca în figura 1.4.a, dacă se ține seama de rezultatele precedente, relația (3.1-B) se scrie astfel :

$$\frac{A_1-A_0}{\mu_I} + \frac{A_2-A_0}{\mu_I} + \frac{A_3-A_0}{\mu_m} + \frac{A_4-A_0}{\mu_m} = (3\sigma_{0I}+\sigma_{0II})\,\frac{h^2}{4}\left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + K\right) \qquad (1.14)$$

Dacă $\frac{\mu_{II}}{\mu_I} =$, $\sigma_{0II} = 0$, se obține :

$$\frac{A_1-A_0}{\mu_I} + \frac{A_2-A_0}{\mu_I} + \frac{A_3-A_0}{2\mu_I} + \frac{A_4-A_0}{2\mu_I} = \frac{3}{4}\,\sigma_{0I}h^2\left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + K\right) \qquad (1.15)$$

Analogul electric al acestei expresii este prezentat în figura 1.4.b.

Anexa 2: <u>STUDIUL CIMPULUI ELECTROMAGNETIC AL UNUI CONDUCTOR CILINDRIC DE SECTIUNE TRANSVERSALA-SECTOR COROANA CIRCULARA, ECRANAT FEROMAGNETIC</u>

Secțiunea transversală a sistemului considerat, este prezentat în figura 2.1.

Se presupune σ_{Cu} = const., $\sigma_{zFe} = 0$ și $\mu_{Fe} \gg \mu_{Cu} \approx \approx \mu_0$. In aceste condiții : $\bar{H} = -H\bar{u}_\theta$ (2.1)

BUPT

$\bar{u}_\theta$ alături de $\bar{u}_\rho$ şi $\bar{k}$ formînd triedul versorilor sistemului de referinţă curbiliniu ortogonal cilindric (cu parametrii Lamé $h_\theta = \rho$; $h_\rho = 1$; $h_z = 1$).

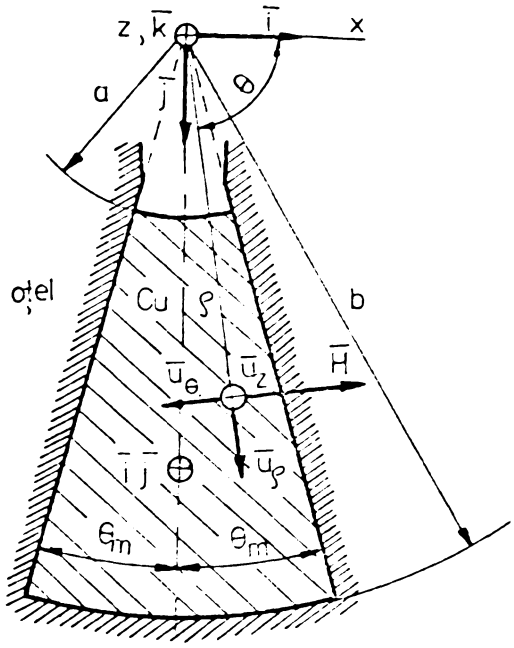


Fig.2.1.

In sistemul cilindric,

$$\text{rot}\ \bar{H} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \bar{u}_\rho & \rho\bar{u}_\theta & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -H & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ (\rho H)\bar{k} \qquad (2.2)$$

şi

$$\text{rot rot}\ \bar{H} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \bar{u} & \bar{u}_\theta & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ (\rho H)\right]\rho\bar{u}_\theta \qquad (2.3)$$

Din :

$$\text{rot}\ \bar{H} = \bar{J} = \sigma\bar{E} \qquad (2.4)$$

$$\text{rot}\ \bar{E} = -\mu\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} \qquad (2.5)$$

rezultă :

$$\text{rot rot}\ \bar{H} - \mu\sigma\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} \qquad (2.6)$$

şi deci :

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ (\rho H)\right] = \mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (2.7)$$

In reprezentarea complexă (pentru regimul sinusoidal), relaţia (2.7) ia forma :

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ (\rho \underline{H})\right] = j\omega\mu\sigma\underline{H}\ , \qquad (2.8)$$

care se mai poate scrie astfel :

$$\frac{\partial^2\underline{H}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\underline{H}}{\partial\rho} - \left(\frac{1}{\rho^2} + j\mu\sigma\omega\right)\underline{H} = 0 \qquad (2.9)$$

Soluţia acestei ecuaţii are forma unei combinaţii liniare a funcţiilor Bessel de speţa I şi a II-a de argument complex :

$$\underline{H} = \underline{A}_1\ J_1\ (\underline{\gamma}\rho) + \underline{B}_1\ Y_1\ (\underline{\gamma}\rho) \qquad (2.10)$$

în care : $\underline{A}_1$ şi $\underline{B}_1$ - constante complexe

BUPT

$$\underline{\gamma} = \sqrt{-j\mu\sigma\omega} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{\frac{3\pi}{4}j} = \alpha(-1+j) = \frac{-1+j}{\delta}$$

δ - adîncimea echivalentă de pătrundere a cîmpului electromagnetic în semispațiul conductor din cupru.

Constantele $\underline{A}_1$ și $\underline{B}_1$ se determină din condițiile de unicitate a cîmpului.

1) $\underline{H} = 0$ pentru $\rho = b$ $(a \leq \rho \leq b)$; (2.11A)

2) $\underline{H} = \dfrac{\underline{I}}{2\,\theta_m a}$ pentru $= a$.

Din aceste condiții rezultă :

$$\underline{A}_1 = \frac{Y_1(\underline{\gamma}b)}{J_1(\underline{\gamma}a)Y_1(\underline{\gamma}b) - J_1(\underline{\gamma}b)\,Y_1(\underline{\gamma}a)}\;\frac{\underline{I}}{2\theta_m a} \tag{2.12A}$$

$$\underline{B}_1 = \frac{J_1(\underline{\gamma}b)}{J_1(\underline{\gamma}a)Y_1(\underline{\gamma}b) - J_1(\underline{\gamma}b)\,Y_1(\underline{\gamma}a)}\;\frac{\underline{I}}{2\theta_m a}$$

$\underline{H}$ are deci expresia :

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{2\theta_m a}\;\frac{Y_1(\underline{\gamma}b)J_1(\underline{\gamma}\rho) - J_1(\underline{\gamma}b)\,Y_1(\underline{\gamma}\rho)}{J_1(\underline{\gamma}a)\,Y_1(\underline{\gamma}b) - J_1(\underline{\gamma}b)\,Y_1(\underline{\gamma}a)} =$$

$$= \frac{\underline{I}}{2\theta_m a}\;\frac{H_1^{(1)}(\underline{\gamma}b)J_1(\underline{\gamma}\rho) - J_1(\underline{\gamma}b)H_1^{(1)}(\underline{\gamma}\rho)}{J_1(\underline{\gamma}a)H_1^{(1)}(\underline{\gamma}b) - J_1(\underline{\gamma}b)H_1^{(1)}(\underline{\gamma}a)} \tag{2.13A}$$

unde $H_1^{(1)} = J_1 + jY_1$ este funcția Hankel (funcția Bessel de speța a III-a).

Densitatea locală de curent $\underline{J}$ și cîmpul electric $\underline{E}$ vor avea expresiile :

$$\underline{J} = \sigma\underline{E} = \frac{1}{\rho}\left(\underline{H} + \rho\frac{\partial \underline{H}}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\left\{\underline{A}_1\left[J_1(\underline{\gamma}\rho) + \rho\frac{\partial J_1(\underline{\gamma}\rho)}{\partial\rho}\right] +\right.$$

$$\left. + \underline{B}_1\left[Y_1(\underline{\gamma}\rho) + \rho\frac{\partial Y_1(\underline{\gamma}\rho)}{\partial\rho}\right]\right\} = \underline{\gamma}\left[\underline{A}_1 J_0(\underline{\gamma}\rho) + \underline{B}_1 Y_0(\underline{\gamma}\rho)\right] =$$

$$= \frac{\underline{\gamma}\,\underline{I}}{2\theta_m a}\;\frac{H_1^{(1)}(\underline{\gamma}b)J_0(\underline{\gamma}\rho) - J_1(\underline{\gamma}b)H_0^{(1)}(\underline{\gamma}\rho)}{J_1(\underline{\gamma}a)H_1^{(1)}(\underline{\gamma}b) - J_1(\underline{\gamma}b)H_1^{(1)}(\underline{\gamma}a)} \tag{2.14A}$$

BUPT

Vectorul Poynting complex este :

$$\underline{\bar{S}} = \underline{\bar{E}} \times \underline{\bar{H}} = \bar{n} \; \frac{\underline{\gamma}\, \underline{I}\underline{I}^*}{4\sigma\theta_m{}^2a^2} \; \frac{H_1^{(1)}(\underline{\gamma} b)J_0(\underline{\gamma}\rho)-J_1(\underline{\gamma} b)H_0^{(1)}(\underline{\gamma}\rho)}{J_1(\underline{\gamma} a)H_1^{(1)}(\underline{\gamma} b)-J_1(\underline{\gamma} b)H_1^{(1)}(\underline{\gamma} a)} \qquad (2.15)$$

unde $\bar{n}$ este versorul normal exterior suprafeţei conductorului.

Puterea complexă $\underline{P}_\Sigma$ va avea deci forma :

$$\underline{P}_\Sigma = \int_{S_c} \underline{\bar{S}}\bar{n}dA = \frac{h_c I^2}{2\,\theta_m a}(-1+j)\,\frac{H_1^{(1)}(\underline{\gamma} b)J_0(\underline{\gamma} a)-J_1(\underline{\gamma} b)H_0(\underline{\gamma} a)}{J_1(\underline{\gamma} a)H_1^{(1)}(\underline{\gamma} b)-J_1(\underline{\gamma} b)H_1^{(1)}(\underline{\gamma} a)} =$$

$$= P + jQ = R_a I^2 + jX_a I^2$$

unde :

P - puterea activă disipată în conductor;

Q - puterea reactivă;

R_a - rezistenţa în alternativ a conductorului;

X_a - ωL_{ia} - reactanţa internă a conductorului;

L_{ia} - inductivitatea internă;

h_c - lungimea conductorului.

Factorul în alternativ al rezistenţei se calculează în expresia :

$$k_a = \frac{P_a}{P_c} = \frac{R_e\{\underline{P}_\Sigma\}}{\dfrac{h_c I^2}{\sigma S_c}} \qquad (2.17)$$

A fiind aria secţiunii transversale a conductorului :

$$S_c = \theta_m(b^2 - a^2) \qquad (2.18)$$

Pentru determinarea inductivităţii interne relative,

$$L_{iar} = \frac{L_{ia}}{L_{ic}},$$

pentru inductivitatea internă în curent continuu, L_{ic}, se poate lua ca valoare aproximativă valoarea lui L_{ia} pentru o frecvenţă mică (f = 1Hz de exemplu) şi atunci

BUPT

$$L_{iar} \quad \frac{(L_{ia})_f}{(L_{ia})_{f=1Hz}} , \tag{2.19}$$

sau pe cea obţinută după calcul exact :

$$L_{ic} = \frac{\mu_o\, h_c}{8\ \theta_m (b^2-a^2)} \left(a^2-3b^2+ \frac{4b^2}{1-\frac{a^2}{b^2}} \ln \frac{b}{a}\right). \tag{2.20}$$

Valoarea exactă pentru L_{iar} este deci :

$$L_{iar} = \frac{I_m \ \{ \underline{P}_\Sigma \}}{\frac{\mu_o h_c}{8\ \theta_m (b^2-a^2)} \left(a^2-3b^2+ \frac{4b^2}{1-\frac{a^2}{b^2}} \ln \frac{b}{a}\right)} \tag{2.21}$$

Pe baza tabelelor prezentate în [86] , în urma calculului, s-au obţinut valorile din tabelul de mai jos :

f(Hz)	$k_a = \frac{R_a}{R_b}$	$L_{iar} = \frac{L_{ia}}{L_{ic}}$	$L_{iar} = \frac{(L_{ia})f}{(L_{ia})1H_z}$
1	1,o48	o,9975	1
4	1,248	o,99oo	o,9925
9	2,37o	o,85oo	o,8525
16	3,7oo	o,7o75	o,7o9o
25	5,22o	o,576o	o,5776
36	6,65o	o,4880	o,4890
49	8,100	o,43oo	o,4315
64	9,930	0,3800	o,3810

Diferenţele dintre $\frac{L_{ia}}{L_{ic}}$ şi $\frac{(L_{ia})_f}{(L_{ia})_{Hz}}$ sînt neglijabile.

Anexa 3 : CIMPUL ELECTROMAGNETIC AL UNUI CONDUCTOR PARALELIPIPEDIC ECRANAT FEROMAGNETIC

Sistemul considerat este prezentat în secţiune transversală în fig.3.1.

Intrucît $\mu_{Fe} \gg \mu_{Cu} \approx \mu_0$, pentru sistemul din fig.3.1,cîmpul magnetic va fi monodimensional : are o singură componentă spaţială după axa x. $\bar{H} = H\,\bar{i}$ (3.1)

In regim sinusoidal, utilizînd reprezentarea complexă a mărimilor electromagnetice, legea circuitului magnetic sub forma locală va avea forma :

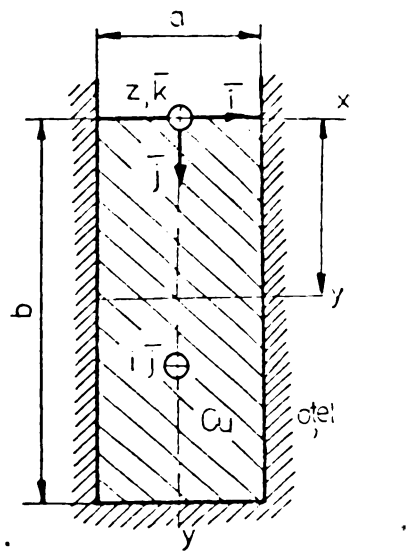


Fig.3.1.

$$\text{rot}\ \underline{\bar{H}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{H} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \underline{H}}{\partial y}\,\bar{k} =$$

$$= \underline{J}\bar{k} = \sigma \underline{E}\bar{k} \tag{3.2}$$

Aplicînd încă o dată operatorul "rot" ecuației (3.2), se obține:

$$\text{rot rot}\ \underline{\bar{H}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \underline{H}}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial y^2}\,\bar{i} = \sigma\,\text{rot}\,(\underline{E}\bar{k}) = -\mu\sigma \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}\,\bar{i} \tag{3.3}$$

Din (1.3) rezultă :

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial y^2} = j\,\mu\,\sigma\omega\,\underline{H} \tag{3.4}$$

Notînd $\underline{\gamma} = \sqrt{j\mu\sigma\omega} = \alpha(1+j) = \sqrt{2}\,\alpha e^{j\frac{\pi}{4}}$, soluția ecuației ordinare (3.4) are forma :

$$\underline{H} = \underline{C}_1 e^{\underline{\gamma} y} + \underline{C}_2 e^{-\underline{\gamma} y} \tag{3.5}$$

Constantele $\underline{C}_1$ și $\underline{C}_2$ se determină din condițiile de frontieră :

$$\underline{H}_{y=0} = \frac{\underline{I}}{a} = \underline{C}_1 + \underline{C}_2$$

$$\underline{H}_{y=b} = 0 = \underline{C}_1 e^{\underline{\gamma} b} + \underline{C}_2 e^{-\underline{\gamma} b} \tag{3.6}$$

Din (3.5) și (3.6) rezultă expresia determinată pentru $\underline{H}$:

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{a}\,\frac{\text{sh}\,\underline{\gamma}(b-y)}{\text{sh}\,\underline{\gamma} b} \tag{3.7}$$

Intensitatea cîmpului electric din conductor este :

BUPT

$$\bar{E} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial y}\bar{k} = \frac{\gamma I}{a\sigma}\,\frac{ch\,\gamma(b-y)}{sh\,\gamma b}\,\bar{k} \tag{3.8}$$

Vectorul Poynting pentru y = 0 are expresia :

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{\gamma I}{a\sigma}\,\frac{ch\,\gamma b}{sh\,\gamma b}\cdot\frac{I^*}{a}\,\frac{sh\,\gamma^* b}{sh\,\gamma^* b}\,\bar{j} =$$

$$= \bar{j}\,\frac{\gamma I^2}{\sigma a^2}\,cth\,\gamma b \tag{3.9}$$

Fluxul vectorului Poynting se obţine uşor :

$$\underline{P}_\Sigma = \int_\Sigma \bar{S}\,d\bar{A} = \frac{\gamma I^2}{\sigma a}\,h_c\,cth\,\gamma b =$$

$$= \frac{I^2 h_c}{\sigma a}\left(\frac{sh2\alpha b + \sin 2\alpha b}{ch2\alpha b - \cos 2\alpha b} + j\,\frac{sh2\alpha b - \sin 2\alpha b}{ch2\alpha b - \cos 2\alpha b}\right), \tag{3.10}$$

de unde puterea activă din bară primeşte forma :

$$P_a = R_e\left\{P_\Sigma\right\} = \frac{\alpha I^2 h_c}{\sigma a}\,\frac{sh2\alpha b + \sin 2\alpha b}{ch2\alpha b - \cos 2\alpha b} \tag{3.11}$$

ia puterea reactivă a conductorului, expresia :

$$Q = Im\left\{\underline{P}_\Sigma\right\} = \frac{I^2 h_c}{\sigma a}\,\frac{sh2\alpha b - \sin 2\alpha b}{ch2\alpha b - \cos 2\alpha b} \tag{3.12}$$

Puterea activă disipată în sistem, în c.c. este :

$$P_c = \frac{h_c}{\sigma b a}\,I^2 \tag{3.13}$$

Cîmpul magnetic în c.c. $(\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0)$ se obţine uşor :

$$H = \frac{I}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \tag{3.14}$$

şi deci inductivitatea internă în c.c. este :

$$L_{ic} = \frac{\mu_o}{I^2}\int_v H^2 dv = \frac{a h_c \mu_o}{I^2}\,\frac{I^2}{a^2}\int_0^b \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 dy = \frac{h_c \mu_o b}{3a} \tag{3.15}$$

Factorul rezistenţei în alternativ are expresia :

$$k_a = \frac{P_a}{P_c} = \alpha b\,\frac{sh2\alpha b + \sin 2\alpha b}{ch2\alpha b - \cos 2\alpha b}, \tag{3.16}$$

iar inductivitatea internă raportată :

$$L_{iar} = \frac{L_{ia}}{L_{ic}} = \frac{3}{2\alpha b}\,\frac{sh2\alpha b - \sin 2\alpha b}{ch2\alpha b - \cos 2\alpha b} \tag{3.17}$$

BUPT

Anexa 4 : PROGRAMUL DE CALCUL AL MARIMILOR k_a şi L_{iar} PENTRU CONDUCTORUL PARALELIPIPEDIC, ECRANAT FEROMAGNETIC "MASIV 1 "

```
      DIMENSION E(10),R(10)
      REAL ALFA.F.LIAR,KAPAB,A(20,20),B(20)
     x,C(400),KAPABB,LIARB
      DATA B/20 x 0./,A/400 x 0,/
      A(1,1) = -1.
      A(1,2) = 1.
      A(2,11)=-1.
      A(2,12) =1.
       A(3,1)=1.
       A(4,11)=1.
      DO 3 I=2,9
      A(2 x I + 1,I) =1.
      A(2 x I-1,I+1) =1.
      A(2 x I +2,I +10)=1.
 3    A(2 x I,I+11)=1.
      DO 4 I=2,9
      A(2 x I-1,I) = -2.
      A(2 x I,I+10) = - 2.
      A(19,10)= -1.
      A(20,20) = - 1.
      FMAX=50.
      F50.
69    ALFA=0,00707 x F
      A(1,11)=0.5 x ALFA
      A(2,1) = -0.5 x ALFA
      A(20,10) = -1.5 x ALFA
      A(19,20) = + 1.5 x ALFA
      DO 5 I =2,9
      A (2 x I,I) = - ALFA
 5    A (2 x I-1,I+10) = ALFA
      B(1) = 4,7728E-4
      DO 37 I=2,9
37    B (2 x I-1) = -5.024 E-5
      B(19)= -7.536E-5
       DO 11 J=1,20
       DO 11 I=1,20
       K=K+1
11    C(K)=A(I,J)
      EPS=5.E-5
      N=20
      CALL RESOL(C,B,N,KOD,EPS)
      WRITE(103,6)
 6    FORMAT(///10X,'REZULTATE')
      KAPAB=1.+140.7 x F x B(11)
      LIAR = - 597.1 x B (1)
      SUM=0.05 x(1. +140.7 x F x B(11)) xx 2 +0.05 x (140.7xFxB(1))xx2
      DO 29 L=2,9
29    SUM=SUM+0.1x(1.+140.7xFxB(L+10))xx2+0.1 x (140.7x F xB(L)) xx 2
      SUM=SUM +0.15 x(1.+140.7xFxB(20))xx2x0,15x(140.7xFxB(10))xx2
      KAPABB=SUM
      SIGMA=0.15+1.E6x((B(10)-B(9))xx2x+(B(20)-B(19))xx2)x0.45
      DO 36 L=2,9
```

BUPT

```
30  SIGMA=SIGMA+0.3E6*((B(L+1)-B(L-1))**2+(B(L+11)-B(L+9))**2)
    LIARB=SIGMA
    DO 72 L=1,10
72  E(L)=(1.+140.672*F*B(L+10))**2+(140.672*F*B(L))**2
    UM=(0.5 *E(1)+2.*E(2)+E(3)+2.*E(4)+E(5)+2.*E(6)+E(7)+2.*E(8))
    PABB=(UM+E(9)+2.*E(10))/15.
    DO 43 L=2,9
43  R(L)=(B(L+1)-B(L-1)**2+(B(L+11)-B(L+9))**2
    R(10)=4.*((B(10)-B(9))**2+(B(20)-B(19))**2)
    GMA=0.1+3.96E8*(R(2)+0.5 * R(3)+R(4)+0.5*R(5)+R(6)+0.5*R(7)+R(8))
    ARB=GMA+3.96E8*(0.5 * R(9)+R(10))
    WRITE(108,1)F,KAPAB,LIAR,KAPABB,LIARS,PABB,ARB
 1  FORMAT(20,7F8,4)
    DO 12 L=1,20
12  B(L)=0
    F=F-5.
    IF(F.GE.5.)GO TO 69
    STOP
    END
```

B I B L I O G R A F I E

[1]. Pl.Andronescu : Bazele electrotehnicii I,II,Edit.Didactică şi Pedagogică,Bucureşti,1972.

[2]. R.Răduleţ : Bazele electrotehnicii-probleme,I,Edit.Didactică şi Pedagogică,Bucureşti, 1970.

[3]. K.Simonyi : Electrotehnică teoretică (trad.din l.maghiară), Ed.Tehnică,Bucureşti, 1974.

[4]. C.Şora : Bazele electrotehnicii,II,Reprografia I.P.T., 1973.

[5]. I.De Sabata : Bazele electrotehnicii,II,Reprografia I.P.T., 1974.

[6]. D.Vitkovitch : Field Analysis; Experimental and Computational Methods, D.Van Nostrand Company LTD,London,1966.

[7]. J.K.Binns : P.J.Lavrenson,Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems, Pergamon Press, 1963.

[8]. E.A. Erdélyi, S.V.Ahamed, and R.D.Burtness: Flux distribution in saturated d.c.machines on no load,IEEE Trans.Power Apparatus Syst.,1965,64,p.375.

[9]. E.A. Erdelyi and E.F.Fuchs : Nonlinear Magnetic Field Analysis of DC Machines, IEEE Transaction, Volume PAS-89, Sept./Oct.1970,pp1546-1583.

[10]. S.V.Ahamed and E.A. Erdelyi : Nonlinear vector potenţial equations for highly satured heteropolar electrical machines, IEEE Trans.,1964,A-2,p.896.

[11]. G.Mitra and B.Salvage : Electric stress in a circular cylindrical gaseous cavity in a solid dielectric, the axis of the cylinder being parallel to the field, Proc. IEE, vol.113,No.5,1966.

[12]. A.Malandain : Phénomènes liés au champ magnetique des transformateurs .Leur étude a l'aide d'une calculatrice numerique. R.G.E.,2,p.159-166,1969.

BUPT

[13]. V.Bunea : Magnetisation of isotropic and ferromagnetic conducting media, Proc.IEE, 113 (12) pp 2087-2094, 1966.

[14]. J.T.Storey and M.J.Billings : General digital-computer program for the determination of 3-dimensional axially symetric fields, Proc.IEE, 114 (10),pp. 1551-1555, 1965.

[15]. C.J.Carpenter : Numerical solution of magnetic fields in the vicinity of current-carrying conductors, Proc.IEE, vol.114,No.11, pp.1973-1800,1967.

[16]. Ph.Lair : Méthodes mathématiques de prédétermination de caractéristiques électromagnétiques des grands transformateurs. R.G.E.,No.2, p.152-158,1969.

[17]. M.Tetelbaum : Elektrische Analogierechenverfahren, Verlag Tehnik,Berlin,1963.

[18]. F.C.Gaïr: Unifyng design principle for the resistance network, Brit.J.Appl.Phys. vol.10, pp.166-72, 1959.

[19]. K. Oberretl : Die Ermittlung von magnetischen Feldern, Wirbelströmen und Kräften in komplizierten, Arch. Elektrotech., vol.48,pp.297-313,1963.

[20]. S.I. Lurie :Matematicescoe modelirovanie magnitnîh polei rasscianiia transformatorov i reactorov na electroprovodiascei bumaghe, Electricestvo,No. 10 p.80-86, 1965.

[21]. C.S. Demircian : Modelirovanie magnitnîh polei, Energhia, Leningradscoe otdelenie, 1974.

[22]. M.Kant : Etude du champ magnetique de la partie frontale d'un turbo-alternateur, R.G.E., tome 75, No.7-8, p.913-922.

[23]. J. Delhaye: Méthode analogique rhéoéléctrique pour étude du champ magnétique de fuite dans un transformateur R.G.E., No.2,p.167-178,1968.

[24]. A.V. Ivanov-Smolenschii, A.I. Dulchin : Issledovanie magnitnîh provodimostei i inductivnostei obmotoc electriceschih mașin i aparatov metodom modeliro-

BUPT

vaniia na electroproprovodnoi bumaghe, Electromecanica,No.10, 1963.

[25]. F.Stier : Bestimung der Energie eines ebenen Magnetfeldes durch Abbildung desselben auf ein elektrischer Stromfeld, Areh. Elektrotechn. Bd.45,S 343-346, 1960.

[26]. M.J.O. Strutt und R.Vuilleumier : Analogieverfahren für die Bestimmung elektromagnetischer Wechselfelder in Leitern und Halbleitern, Arch.Elektrotech.,Bd.46 S 259-276, 1961.

[27]. P.Silvester : Ac resistance and reactance of isolated rectangular conductors, IEEE Trans. Power Apparatus, an Systems, vol.PAS-86 pp 770-774,1967.

[28]. C.Sora : Untersuchung des elektrischen Feldes in einem rechteckigen Hallplättchen mittels eines elektrokinetischen Modells, ETZ-A,Bd.90,H.1,1969.

[29]. G.Hortopan : Modelarea transformatoarelor în scopul determinării repartiției la tensiunea de impuls, Electrotehnica, 9 (1961), nr.8.

[30]. P.Silvester : Network Analog Solution of Skin an Proximity Effect Problems, IEEE, vol.86, No.2 pp.241-247,1967.

[31]. H.Reiche : Der Einsatz von Rechnautomaten für elektrotehnische Berechnungen, Electric, Heft 7, Teil 1, 256-261,1967.

[32]. H.Reiche : Mesmethoden für moderne magnetische Werkstoffe,Wiss, Z.d.TH Dresden, 620-630,1961.

[33]. L.D.Landau, E.M.Lifșiț : Electrodhinamica mediilor continue (trad.din lb.rusă),Ed.Tehnică,1968.

[34]. M.G. Salvadori,M.L.Baron : Metode numerice în tehnică,(trad. din lb.engleză-SUA),Ed.Tehnică,București,1972.

[35]. I.Fetiță : Determinarea prin modelare a cîmpului electromagnetic al unui conductor cilindric de secțiune transversală trapezoidală plasat într-o crestătură feromagnetică, Std.cerc.energ.electr.,22,nr.2, 1972.

[36]. P.Silvester and M.V.K.Chari : Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems, IEEE Transactions, vol.PAS-89, sept./oct. 1970,pp.1642-1651.

BUPT

[37]. O.W. Andersen : Iterative Soluţion of Finite Element Equations in Magnetic Field Problems, IEEE Transactions, 1972 (extras primit de la autor).

[38]. M.V.K.Chari and P.Silvester : Analysis of Turboalternator Magnetic Fields by Finite Elements, IEEE Transactions, vol.PAS-90,March/April 1971, pp.454-464.

[39]. B.Demidovitch et I.Maron : Éléments de calcul numérique,Édition MIR, Moscou,1973.

[40]. L.Collatz : The Numerical Treatment of Differenţial Equations, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1966.

[41]. A.Haimovici : Ecuaţiile fiziciimatematice şi elemente de calcul variaţional,Ed.Did.şi Ped.,Bucureşti, 1966.

[42]. Oh.Sabac : Matematici superioare, vol.2,Ed.Did.şi Ped., Bucureşti,1965.

[43]. I.E. Tamm : Bazele teoriei electricităţii,Bucureşti,Ed. Tehn.,1952.

[44]. R.Răduleţ, Al.Timotin şi A.Ţugulea : O teorie generală a parametrilor lineici tranzitorii ai liniilor electrice lungi şi cu pierderi în prezenţa solului, St.cerc.energ.electr.Tom 16,nr.3 p.417-449, Bucureşti, 1966.

[45]. Ch.Popescu ş.a. : Materiale electrotehnice-proprietăţi şi utilizări, Ed.Tehn.,Bucureşti, 1976.

[46]. Al.Timotin : Unicitatea soluţiilor şi calculul puterii în cîmpul electromagnetic cvasistaţionar al unui sistem de conductoare paralele,St. cerc.energ.electr.,tom.17,nr.1 p.143-156, Bucureşti, 1967.

[47]. A.Ţugulea : Cîmpul electromagnetic cvasistaţionar al conductoarelor parcurse de curenţi alternativi în prezenţa ecranelor electromagnetice cilindrice, St.cerc.energ.electr.,14, 4,807-837, 1964.

BUPT

[48]. Al.Timotin şi I.R.Civic : Unicitatea soluţiilor şi calculul puterilor în cîmpul electromagnetic cvasistaţionar al sistemelor axial-simetrice, St.cerc.energ. electr.,20,1,p.125-138, 1970.

[49]. A.Ţugulea, A.Moraru şi C.Bălă : Cîmpul electromagnetic şi pierderile suplimentare în transformatoarele electrice cu cuvă ecranată, St.cerc.energ.electr.,18, 4, p.819-837, 1968.

[50]. Al.Davidescu : Termotehnica, Ed.Did.şi Ped.,Bucureşti,1964.

[51]. Al.A.Vasilescu : Analiza dimensională şi teoria similitudinii, Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1969.

[52]. V.A. Venicov, A.V. Ivanov-Smolenschii : Fizicescoe modelirovanie electriceschix sistem, M.,Gosenergoizdat, 1956.

[53]. W.J.Karplus : Analog Simulation, Mc.Graw Hill,New-York,1958.

[54]. I.V.Boriu : O modelirovanii polia rasseianiia transformatorov na electroprovodnoi bumaghe,Electrotehnica, No.3, 1969.

[55]. P.F. Filciacov, V.I.Pancis : Integratori EGDA, Kiev,1961.

[56]. A.R. Boothroyd, E.C. Cherry and R.Makar : An electrolytic tank for measurement of steady state response, transient response and allied properties of networks, Proc.IEE (London) vol.96, pp.163-177,May 1949.

[57]. W.E. Rogers : A two-space fluid mapper, IEEE Trans.Instrum. and Measur, 1967, 16, No.3, 184-186.

[58]. H.K. Farr and W.A. Keen : Improving field analogues through conformal mapping, Trans. AIEE, vol.74 pp.395-400, 1955.

[59]. S.I.Lurie : Modelirovanie magnitnîh polei transformatorov, Electrotehnica, No.7,1965, 54-57.

[60]. C.Ambrozie : Măsurarea şi calculul capacităţilor proprii distribuite din înfăşurările continue ale transformatoarelor de putere, Teză de doctorat (lucrare nepublicată).

BUPT

[61]. K.Oberretl : Ermittlung magnetischer Felder Blechmodellen, ETZ-A, 1963, H 23, S 757-759.

[62]. F.Mülner : Elektrische Abbildung magnetischer Wirbelfelder ETZ Bd.50 (1929).S 1321-1323.

[63]. W.Schusky : Berechnung elektrischer Maschinen, Springer Werlag. Wien, 1960.S 98.

[64]. K.Oberretl : Die genauere Berechnung des Magnetisierungstromes von dreiphasigen Asynchronmaschinen,Bull Oerlikon Nr.335 (1959) S 66-84.

[65]. K.Oberretl : Neue Erkenntnisse über parasitäre Drehmomente in Käfiglänfemotoren, Bull.Oerlikom,No.348, (1962), S 130-155.

[66]. K.Oberretl : Streufelder, Wirbelstromverluste,Erwärmungen,Käfte und Eisenbrandim Stirnraum von Turbogeneratoren, Elektrotechn.u.Masch., Bd.80 (1963),H.23.

[67]. J. Roberts : Analogue treatment of eddy currents and magnetic flux penetration in saturated iron, Institution Monopraph IEE, 1962, 406-411.

[68]. A.Moraru : Metodele de studiu al fenomenului de inducție în ecranele electromagnetice ale transformatoarelor, St.cerc.energ.electr.,tom 19,Nr.3,p.581-599;1969.

[69]. I.Fetiță : Modelarea unui sistem de bare colectoare în vederea determinării parametrilor lineici R , L , C , St.cerc.energ.electr.,tom 20,nr.3,p.655-666.

[70]. I.Fetiță : Asupra erorii de trunchiere a laplacianului ^{2} A în regim cvasistaționar, Bul.șt.și tehn. al I.P.T., S. electr. tom.18 (32) fasc.2/1973.

[71]. O.Onicescu : Numere și sisteme aleatoare, Ed.Acad.R.P.R.,1962.

[72]. M.Stoka, R.Theodorescu : Probabilitate și geometrie,Ed.Stiinț., București, 1966.

[73]. G.A.Korn : Simularea și măsurarea proceselor aleatoare.Trad. din lb.engleză - SUA, Ed.Tehn.,București,1969.

[74]. G.W.King : Monte Carlo Method for Solving Diffusion Problems, Ind.Eng. Chem. 43 : 2475 (1951).

[75]. G.W. King : Applied Mathematics in Operations Research,in Beckenbach,E.F.,Modern Mathematics for the Engineer,

BUPT

First Series, New-York,Mc Graw-Hill,1956.

[76]. N.Metropolis and S.Ulam : The Monte Carlo Method, J.Am. Statist. Assoc., 44,335 (1949).

[77]. W.F.Bauer : The Monte Carlo Method, J.Soc.Ind. and Appl. Math, 1958, 6, pp. 438-451.

[78]. P.D.Lax : Differential Equations, Difference Equations and Matrix Theory, Comm. Pure and Appl.Math., 1958, 11, pp 175-194.

[79]. H.B. Dwight : Effective resistance of isolated nonmagnetic rectangular conductors, Trans.AIEE, vol.66,pp. 549-52, 1947.

[80]. H.Schwenkhagen : Untersuchungen über Stromverdrängung in rechteckigen Querschnitten, Arch.Elektrotechn. Bd.17,S537-589, 1926-1927.

[81]. P.Graneau : Alterning and transient conduction currents in straight conductors of any cross-section,Internat'l J.Electronics, vol.19 pp. 41-59,1965.

[82]. P.Silvester : Modal network theory of skin effect in flat conductors, Proc.IEEE, vol.54,pp.1147-1151,Sept. 1966.

[83]. P.Silvester : Skin Effect in Multiple and Polyphase Conductors, Trans.IEEE, vol.Pas - 88, no.3,pp.231-238, 1969.

[84]. B.A.Smiremin : Manual de radiotehnică,Ed.Energ.,1953,p.28.

[85]. I.V.Butchevici ş.a. : Partea electrică a centralelor şi staţiilor electrice, Ed.Energ.,1953, p.35.

[86]. E.Janke,F.Emde, F.Lösch : Tafeln Höherer Funktionen,B.G. Teubner Verlagsgessellschaft,Stuttgart,1960.

[87]. P.S. Sergheev, ş.a. : Proiectirovanie electriceschih maşin, Energhia, 1969,Moscva.

[88]. C.J. Carpenter : Finite - element network models and their application to eddy-current problems,PROC.IEE, vol.122, No.4,APRIL 1975.

[89]. Al.Timotin, A.Ţugulea : Parametrii tranzitorii longitudinali ai liniei coaxiale, St.cerc.energ.electr.,tom.17, nr.3, p.577-602,Bucureşti,1967.

BUPT