INSTITUTUL POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMISOARA

FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

T E Z A D E D O C T O R A T

CONTRIBUTII LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE FILIFORME NELINIARE IN REGIM FORTAT.

Ing. LE - VAN - DOANH

Conducător ştiinţific

Prof.dr.ing. Ioan De Sabata

- 1 9 7 8 -

CUPRINSUL.

CAPITOLUL I
INTRODUCERE

Fenomenele neliniare joacă un rol foarte important în electrotehnică deoarece materialele neliniare se folosesc pe larg în construcţia maşinilor, dispozitivelor şi aparatelor electrice. Elementele neliniare cum sînt: diodele, tranzistoarele, tiristoarele, elemente feromagnetice şi feroelectrice se utilizează curent în tehnică.

Practic, toate fenomenele prezintă un anumit grad de neliniaritate de aceea studiul fenomenelor neliniare prezintă o importanţă deosebită din punct de vedere teoretic şi practic.

Electrotehnica neliniară este o parte tînără a electrotehnicii şi se dezvoltă foarte repede. Studiul fenomenelor neliniare are nevoie de cunoştinţe din multe domenii cum sînt: metodica de calcul, teoria sistemelor, teoria vibraţiilor... iar în acest domeniu electrotehnica neliniară joacă un rol foarte important. Dezvoltarea tehnicii pune în faţa teoriei circuitelor electrice probleme noi din ce în ce mai complexe. De aceea teoria circuitelor liniare devine insuficientă. Încă din 1955 Neiman L.P [24] a arătat că „ Elaborarea metodelor de analiză a sistemelor neliniare este una din problemele cele mai importante ale electrotehnicii moderne".

Teoria sistemelor neliniare a început să se dezvolte din secolul XVIII fiind legată de numele lui Euler. Rezultatele fundamentale în calculul aproximativ au fost obţinute de Lagrange, Taylor,Cebîsev... Teoria creşterilor mici şi a stabilităţii făcută de Liapunov A.M, Poincare A şi alţii a fost dezvoltată de Hurwitz, Mihailov, Nyquist...

Teoria vibraţiilor neliniare a fost elaborată de van der Pol, L.I.Mandelstam,N.M.Krîlov,N.N.Bogolibov, AI Berg,Ch. Hayashi... Teoria circuitelor electrice neliniare este legată de lucrările lui P.Ionkin, A.Feldbaum,G.E.Puhov, L.A.Bessonov, W.I.Cunningham,· G.Duffing, E.Philippov şi alţii.

In România şcoala electrotehnică neliniară de la Iaşi este binecunoscută.Contribuţiile importante în teoria stabilităţii au fost făcute de V.M.Popov.Metoda transformatei în plan complex a fost făcută de Fl.Stănciulescu [37] .Trebuie să remarcăm controbuţiile lui Gh.Savin şi H.Rosman [35] F.Spinei [34] şi alţii în analiza circuitelor electrice neliniare şi parametrice.

1.1. Definiţia şi clasificarea circuitelor electrice neliniare şi parametrice.

Se numesc circuite neliniare acele circuite ale căror semnale răspuns sînt funcţii neliniare de semnale de excitaţie. Relaţiile dintre semnalele răspuns şi semnalele excitaţie în general se dau în forma unui sistem de ecuaţii integrodiferenţiale neliniare.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2 \dots x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2 \dots x_n, t) . \end{cases} \tag{1.1}$$

unde X_i sînt variabile de stare şi pot reprezenta o tensiune u, un curent i, flux magnetic ψ, sarcină electrică q, stările contactelor unui releu,etc.

Schemele din care rezultă relaţiile dintre semnale intrare şi de ieşire pot fi reprezentate grafic ca în fig.1a pentru un dipol neliniar, fig.1.b. pentru un cuadripol neliniar sau fig. 1c pentru o schemă bloc şi în fine fig.1d pentru un graf neliniar.

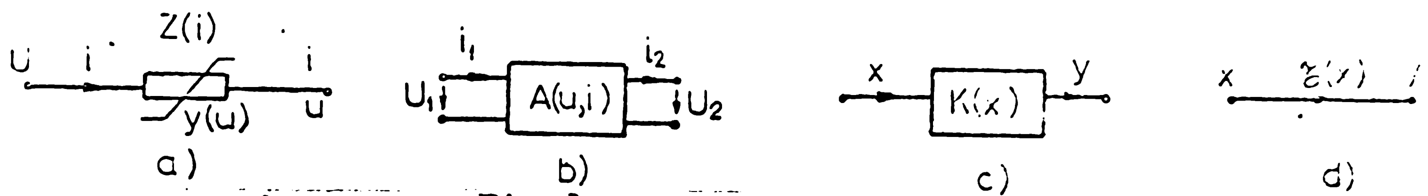


Fig.1.

In tehnică se întîlnesc ecuaţii mai simple de forma:

$$y = k(x) \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (1.2)$$

unde k(x) este parametrul caracteristic al elementelor neliniare De exemplu acesta poate fi inductivitatea dinamică $L_d(i)$,capacitatea dinamică $C_d(u)$ sau rezistenţa dinamică $R_d(i)$, conductanţa dinamică $G_d(u)$...

Circuite parametrice se numesc acele circuite ale căror parametri variază în timp,cel mai general tip de circuit întîlnit în practică fiind cel neliniar parametric. Clasificarea elementelor de circuit neliniare şi parametrice precum şi ecuaţiile lor se dau în tabelul 1.1.

Elementele de circuit neliniare se clasifică în funcţie de rolul funcţional, de proprietăţile energetice, de forma caracteristici.

Din punct de vedere al proprietăţilor energetice se deosebesc elemente disipative şi nedisipative. Din prima categorie fac parte toate tipurile de rezistoare neliniare iar din a doua categorie fac parte bobinele neliniare şi condensatoarele neliniare ideale. Din punct de vedere al formei caracteristicii elementele neliniare se împart în elemente cu caracteristică simetrică, nesimetrică şi multiformă.

Din punct de vedere al numărului de caracteristici se disting circuite neliniare necomandate pentru care se poate trasa o singură caracteristică răspuns-excitaţie şi circuite neliniare comandate pentru care se pot trasa familii de caracteristici, cîte una pentru fiecare valoare a unui semnal suplimentar de comandă.

Din punct de vedere al comportării elementului neliniar la un semnal de excitaţie alternativ se pot deosebi elemente neliniare inerţiale şi elemente neliniare inerţiale. Elementele neliniare inerţiale au caracteristicile neliniare trasate în valori efective, iar cele trasate în valori instantanee sînt liniare. Elementele neliniare neinerţiale au caracteristicile neliniare atît pentru valorile efective cît şi pentru valorile instantanee ale semnalului de excitaţie.

1.2. Principalele teoreme ale circuitelor electrice neliniare

In circuitele neliniare prima teoremă a lui Kirchhoff are aceeaşi formă ca în circuite liniare:

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = 0 \tag{1.3}$$

A doua teoremă a lui Kirchhoff aplicată unei reţele electrice conduce la un sistem de ecuaţii integro-diferenţiale neliniare (1.1). In cazul particular, pentru un rezistor neliniar(fig.2.a) avem ecuaţia legii lui Ohm :

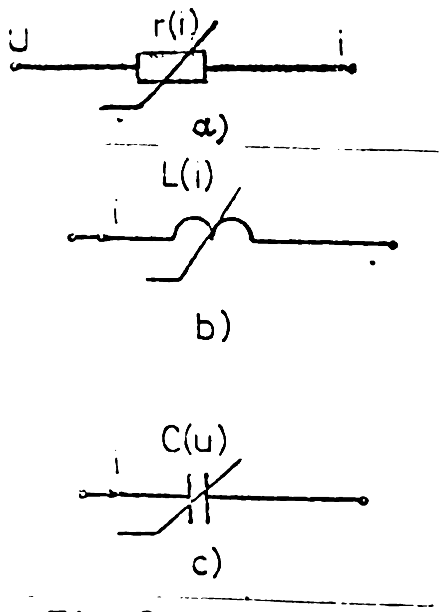


Fig.2.

$$u = r(i) \cdot i \tag{1.4a}$$

$$i = g(u) \cdot u \tag{1.4b}$$

Pentru bobina neliniară(fig.2.b) ecuaţia legii lui Ohm este :

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L_d(i) \cdot \frac{di}{dt} \tag{1.5}$$

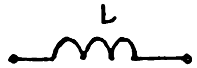
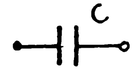
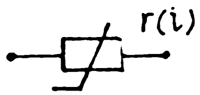
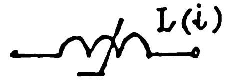
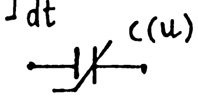
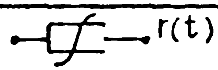
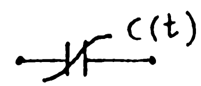
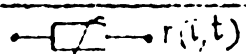
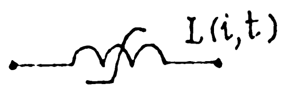
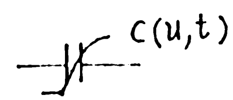
Pentru condensator neliniar(fig.2.c) ecuaţia legii lui Ohm este:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_c} \cdot \frac{du_c}{dt} = C_d(u_c) \cdot \frac{du_c}{dt} \tag{1.6}$$

Deoarece ecuaţiile circuitelor neliniare după teoremele lui Kirchh sînt ecuaţii neliniare care nu respectă principiul superpoziţiei, rezultă că analiza circuitelor neliniare prezintă o mare dificultat

TABELUL 1.1.

Elementele circuitelor electrice şi ecuaţiile lor.

Element de circuit	Rezistor	Bobină	Condensator
Liniar	 $u = ri$ $i = gu$	$\psi = Li$ $u_L = \frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt}$ 	$q = Cu_c$  $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$
Neliniar	$u = r(i).i$ $i = g(u).u$ 	$\psi = L(i).i$  $u_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di}\cdot\frac{di}{dt} = \left[L(i)+i\frac{dL(i)}{di}\right]\frac{di}{dt}$ $= L_d\cdot\frac{di}{dt}$	$q = C(u).u_c$; $i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_c}\cdot\frac{du_c}{dt}$ $i = \left[C(u)+u_c\frac{dC(u)}{du_c}\right]\frac{du_c}{dt} =$ $= C_d\frac{du_c}{dt}$ 
Parametric	 $u = r(t).i$ $i = g(t).u$	$\psi = L(t).i$  $u_L = \frac{d\psi}{dt} = L(t)\cdot\frac{di}{dt} + i\frac{dL(t)}{dt}$	 $q = C(t).u_c$ $i = \frac{dq}{dt} = C(t)\cdot\frac{du_c}{dt} + u_c\frac{dC(t)}{dt}$
Neliniar-parametric	 $u = r(i,t).i$ $i = g(u,t).u$	$\psi = L(i,t)i$  $u_L = \frac{d\psi}{dt} = \left[L(i,t)+i\frac{dL(i,t)}{di}\right]\frac{di}{dt}$	 $q = C(u,t).u_c$ $i = \frac{dq}{dt} = \left[C(u,t)+u\frac{dC(u,t)}{du_c}\right]\frac{du_c}{dt}$

totodată în circuite neliniare pot apare fenomene noi care nu au loc în circuite liniare cum sînt: autoexcitaţie, redresare, modulaţie, înmulţirea şi divizarea frecvenţei....

De exemplu dacă caracteristica neliniară are forma:

$$y = ax^2 \tag{1.7}$$

semnalul de excitaţie este suma $x = x_1+x_2$ rezultă

$$y = a(x_1+x_2)^2=ax_1^2+ax_2^2+2ax_1 \cdot x_2 \neq y(x_1)+y(x_2)=ax_1^2+ax_2^2 \tag{1.8}$$

In spectrul semnalului răspuns în circuite neliniare pot apare în afară de armonicile celor două semnale excitaţie şi alte armonici - de combinaţie, pulsaţiile lor rezultînd din suma şi diferenţa pulsaţiilor celor două semnale de excitaţie componente. De exemplu în cazul cînd semnalul de excitaţie este constituit din două semnale sinusoidale de pulsaţii ω_1, ω_2, semnalul de răspuns conţine armonice de pulsaţii:

$$\omega = \pm p\omega_1 \pm q\omega_2 \quad (p, q = 0, 1, 2...n) \tag{1.9}$$

Principiul superpoziţiei şi modificarea spectrului semnalului răspuns pentru circuite diferite se dau în tabelul 1.2.

Tabelul 1.2

Proprietăţile principale ale circuitelor electrice.

Circuit	Principiul superpoziţiei	Modificarea spectrului.
Liniar	se aplică	nu se schimbă
Neliniar	nu se aplică	se schimbă
Parametric	se aplică	se schimbă
Neliniar-parametric	nu se aplică	se schimbă.

Pentru studiul circuitelor neliniare în general trebuie să trecem prin două etape:

- Scrierea ecuaţiilor diferenţiale ale circuitului
- Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale neliniare prin diverse metode de aproximare.

Ecuaţiile diferenţiale ale circuitelor se scriu ţinînd seama de tipurile caracteristicilor neliniare. Dacă caracteristica este dată sub forma i = f(u) atunci în mod raţional ecuaţiile circuitelor se scriu după tensiunea u, iar dacă este dată sub forma u = f(i), ecuaţiile se scriu după curentul i.

In literatură [27], [35], [4] pentru studiul circuitelor neliniare, ecuaţiile se scriu după variabile de stare în forma canonică. In [26] circuitele neliniare se consideră ca şi sistem neliniar dinamic. In [4] se scriu ecuaţiile circuitelor neliniare în forma matriceală, de asemenea se obţin ecuaţiile matriceale după metoda curenţilor de contur, metoda potenţialelor nodurilor, metoda valorilor determinate şi ecuaţiile multipolilor neliniari. In [1] ecuaţia de stare a circuitelor neliniare se scrie după două variabile de stare : sarcini pe capacităţi şi fluxuri în inductanţe, de asemenea se prezintă existenţa şi unicitatea soluţiilor de stare şi proprietăţile lor.

1.3. Metodele de rezolvare ale circuitelor neliniare.

Ecuaţiile de stare ale circuitelor neliniare sînt ecuaţii integro-diferenţiale neliniare, la care nu se mai aplică principiul superpoziţiei, de aceea nu există o metodă generală de rezolvare a circuitelor neliniare. Cu toate acestea analiza neliniară are de pe acum un arsenal de metode de rezolvare urmărindu-se două căi:

a) Rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale exacte.

b) Rezolvarea exactă a ecuaţiilor diferenţiale aproximative

Prima cale în general este destul de complicată dar permite o rezolvare mai exactă, iar calea a doua este mai simplă dar precizia soluţiilor este mai scăzută.

In literatură [35], [27], [3].. se prezintă metode de rezolvare pentru un anumit fel de circuit şi anume: circuite de curent continuu, circuite neliniare rezistive, inductive, capacitive excitate de tensiune sinusoidală în regim permanent, regim tranzitoriu sau regim forţat. In paragraful acesta vom reprezenta succint metodele de calcul ale circuitelor electrice neliniare.

In mod general putem clasifica metodele de calcul ale circuitelor neliniare în patru grupe:metode analitice, metode grafice şi grafo analitice, metode numerice şi metode analogice.

1.3.1. Metode analitice.

Sarcina principală a metodelor analitice constă în găsirea soluţiilor sub forma unor serii de forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k(t)$.

In primul rînd caracteristicile sînt aproximate în formă analitică corespunzătoare. Problema aproximării caracteristicilor neliniare mai prezintă încă actualitate în literatura de specialitate. Se folosesc serii Bessel [27] , [3] ,serii Lagrange [23] , serii trogonometrice [9] , serii Cebîşev [45] , [22] ,etc. pentru aproximarea caracteristicilor neliniare, de asemenea ne interesează aproximarea optimală a caracteristicilor neliniare [7] .

Posibilitatea de aproximare a caracteristicilor tipice prin funcţii analitice sînt date în tabelul 1.3.

Metodele analitice au volum mare de calcul de aceea se folosesc numai în circuite simple, iar precizia soluţiilor în general nu depăşeşte precizia metodelor grafice. Ele prezintă avantajul că soluţia are o expresie analitică ce se pretează la concluzii generale, care explică proprietăţile principale ale circuitelor neliniare.

Metodele analitice cele mai cunoscute sînt: Metoda balanţei armonice, metoda parametrului mic, metoda liniarizării armonice...

1.3.2. Metode grafice şi grafo-analitice.

Problemele principale ale metodelor grafice constau în folosirea caracteristicilor pentru a rezolva grafic ecuaţiile circuitelor. Răspunsul x(t) se găseşte sub forma unei curbe,Metodele grafice principale sînt; metoda grafo-analitică, metoda planelor fazelor, metoda izoclinelor,etc.

Metodele grafice se folosesc pe larg pentru analiza circuitelor ce sînt descrise de ecuaţii de gradul întîi şi de gradul al doilea. Pe planul fazelor se pot aprecia fenomenele complicate apărute în circuite neliniare:stabilitatea, proprietăţile soluţiilor [27],[9]. In [51] se folosesc coordonate generale pentru a studia circuite neliniare. Cu ajutorul coordonatelor generale se poate studia calitatea sistemelor complicate.

1.3.3. Metode numerice şi folosirea calculatoarelor numerice în analiza circuitelor neliniare.

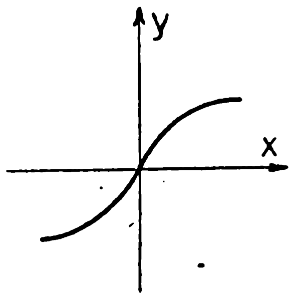
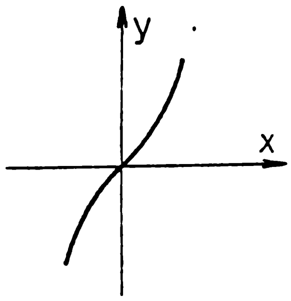
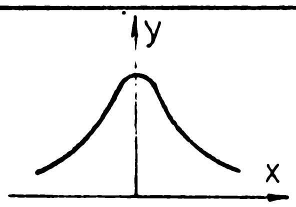
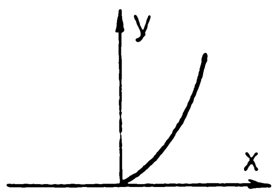
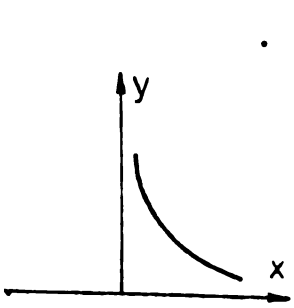
Sarcina principală a metodelor numerice constă în folosirea algortmilor (programelor) corespunzători pentru rezolvarea numerică a ecuaţiilor manuale sau cu ordinatoare. Metodele numerice principale sînt: Metoda Newton, metoda Euler, metoda Runge-Kutta,etc.

In principiu metodele numerice dau rezultate cu precizie dorită, dar cu un volum mare de calcul. In prezent calculatoarele electronice cu viteza de calcul şi capacitatea de memorizare foarte mari se folosesc pe larg, de aceea metodele numerice reprezintă o perspectivă pentru analiza circuitelor neliniare.

Au apărut multe programe tipice pentru analiza circuitelor electrice şi electronice cum sînt: NET 1, ECAP, CIRCUITS,IMAG, TRAN, ПАЭС ,АВТОГРАФ...

TABELUL 1-3

Posibilitatea de aproximare a caracteristicilor tipice prin funcţii analitice.

Caracteristica	Funcţii aproximative	Observaţii.
	$y = a_1x - a_3x^3 + a_3x^5 + \dots$ $y = a\,\mathrm{th}\,\alpha x$ $y = a\,\mathrm{arctg}\,\alpha x$ $y = a\,\mathrm{arsh}\,\alpha x$ $y = a\sqrt[(2n+1)]{bx}$	$\alpha > 0$ $a > 0$ $n > 0, b > 0$
	$y = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$ $y = a\,\mathrm{arth}\,\alpha x$ $y = a\,\mathrm{tg}\,\alpha x$ $y = a\,\mathrm{sh}\,\alpha x$ $y = ax^{2n+1}$	$\alpha > o,\ \alpha x \leq 1$ $\alpha > o,\ \alpha x \leq \frac{\pi}{2}$ $\alpha > o$ $n > o$ $a > o$
	$y = \frac{a}{(1+bx^{2n})^m}$ $y = ae^{-(bx)^2}$	$n = 1,2$ $2m.n > 2$ $a > o$
	$y = ax^b e^{cx}$	$a > o,\ b > 1,\ c > o$
	$y = \frac{a}{x} + b$ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $y = \frac{a}{x^b}$ $y = ax^b e^{cx}$ $y = a\,\mathrm{ch}\,\alpha x$ $y = a\,\mathrm{arch}\,\alpha x$	$a > o,\ b > o$ $ac > o,\ bd > o$ $a > o,\ b > o$ $a > o,\ b > o,\ c < o$ $a > o,\ \alpha > o$ $a > o,\ \alpha > o$ $x > o$

Pentru rezolvarea problemelor pe calculatoare numerice este necesar să se cunoască modelul matematic al fenomenului studiat. Calculatorul nu poate efectua decît operaţii aritmetice elementare, prin urmare a doua etapă constă în alegerea metodei numerice prin care se rezolvă modelul matematic. După alegerea metodei numerice va fi stabilit algoritmul. In sfîrşit ultima etapă o reprezintă întocmirea efectivă a programului. Acesta se scrie fie în limbajul simbolic al calculatorului, fie într-un limbaj de programare automată.

In [21] se prezintă modelele matematice ale feritelor, varicoanelor, iar modelele matematice ale elementelor electronice se dau în [24] . Pentru analiza circuitelor neliniare în regim tranzitoriu este avantajoasă folosirea metodelor de calcul numeric cu paşi variabili : Metoda Fowler,Warten [10] , metoda Schichman [31] , metoda sistematică [10] ,prezintă avantaj mare la calculul circuitelor de grad mare [42] .

După [28] folosirea calculatoarelor numerice în analiza şi sinteza circuitelor se poate clasifica în patru grupe:

1. Folosirea calculatoarelor pentru determinarea valorilor pe baza unor formule.

2. Formarea programelor după metode cunoscute dar în acest caz volumul de calcul depăşeşte posibilitatea omului.

3. Folosirea calculatoarelor în probleme care nu au soluţii generale. In acest caz se realizează modelarea comportării elementelor separate, după aceea se construiesc modelele numerice care reflectă comportările circuitelor în mod precis. In prezent această etapă se realizează semiautomat cu participarea inginerilor electricieni.

4. Legătura calculatoarelor cu dispozitive tehnice,

atunci procesul de proiectare şi de producţie se unesc.

1.3.4. Metode analogice :

Se folosesc metodele anlogice, de obicei electronice pentru a studia multe probleme ale circuitelor electrice neliniare.

Modelele analogice satisfac aceleaşi ecuaţii ca şi cele corespunzătoare circuitelor electrice neliniare motiv pentru care răspunsul modelelor este identic cu cel al circuitelor neliniare.

Maşinile analogice de calcul universale sau speciale sînt construite în serie şi reprezintă un mijloc eficace în studiul circuitelor neliniare [19], [20], [44] .

Trebuie să subliniem că metodele de calcul al circuitelor electrice-neliniare se aplică nu numai pentru circuite electrice ci şi pentru anumite sisteme neliniare din mecanică, hidraulică, etc.

1.4. Scopul tezei de doctorat:

Studiile în domeniul electrotehnicii neliniare, în general se împart în două direcţii: studiul unor metode generale de calcul pentru circuite electrice neliniare şi studiul unor dispozitive neliniare. Regimul forţat este regimul de funcţionare principal al circuitelor electrice. In ultimii ani au apărut multe lucrări în acest domeniu [4] , [34] , [29]..totuşi caşi alte probleme ale circuitelor neliniare, analiza circuitelor neliniare în regim forţat mai este o problemă actuală.

Autorul şi-a propus ca în cadrul tezei să urmeze prima cale şi anume să dezvolte cîteva metode de calcul a circuitelor neliniare în regim forţat, mai ales metode de calcul în regim forţat periodic, de asemenea vom prezenta folosirea calculatoarelor analogice la studiul circuitelor electrice neliniare.

Teză se împarte în şapte capitole.

In cap.I se prezintă noţiunile generale despre circuitele electrice neliniare, metode generale de rezolvare ale circuitelor neliniare.

In cap.II al tezei se face o sinteză a stadiului actual al metodelor de rezolvare ale circuitelor neliniare în regim forţat, trecîndu-se în revistă metodele de calcul cele mai frecvent folosite.

In cap.III se prezintă metoda balanţei armonice modificată unde prin schimbarea originei axelor de coordonate de timp pentru cîteva forme ale caracteristicilor neliniare numărul de ecuaţii prin metoda balanţei armonice se micşorează. Se prezintă un program în FORTRAN pentru metoda balanţei armonice modificate.

In cap.IV se prezintă metoda transformatei în puncte şi metoda transformatei în complex la găsirea soluţiilor forţate periodice.Se prezintă un program FORTRAN pentru rezolvarea circuitului R.L neliniar folosind metoda derivatelor centrate.

In cap.V se prezintă metoda operaţională pentru studiul regimurilor periodice, teoremele principale transformatei operaţionale pe o perioadă, o metodă iterativă pentru găsirea soluţiei periodice folosind metoda operaţională pe o perioadă.

In cap.VI se prezintă folosirea calculatoarelor analogice în analiza circuitelor neliniare.Modelarea curbei de magnetizare studiul seignetoferorezonanţei pe calculatorul analogic MEDA-42T

In cap.VII se prezintă concluziile principale ale tezei

Doresc să aduc cele mai respectuoase mulţumiri conducerii de partid şi de stat R.S.România pentru condiţiile create în procesul de studiu în România care mi-au oferit posibilitatea

să cunosc şcoala românească de prestigiu în Electrotehnică.

Doresc să exprim mulţumirea Prof.dr.ing.Ioan De Sabata pentru sprijinul generos acordat în procesul de studiu şi la întocmirea acestei teze . Mulţumesc de asemenea colectivului Catedrei de Bazele electrotehnicii a I.P.Timişoara care m-a sprijinit din toată inima sub diverse forme pentru a putea duce la bun sfîrşit această teză.

CAPITOLUL II.

METODELE DE REZOLVARE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE NELINIARE IN REGIM FORTAT.

2.1. Regimurile de funcţionare ale circuitelor neliniare

Pentru studiul fenomenelor in circuite electrice, mai întîi trebuie să se scrie ecuaţiile circuitelor prin teoremele lui Kirchhoff care în general au forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare de forma:

$$F(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \dots t) = 0 \qquad (2.1)$$

Soluţia generală $x = x(t)$ a unei astfel de ecuaţii caracterizează regimul tranzitoriu al circuitului.

Soluţia de regim permanent poate fi obţinută prin trecerea la limită a soluţiei generale

$$x_p = \lim_{t \to \infty} x(t) \qquad (2.2)$$

Dacă circuitele sînt excitate de semnale constante în timp, se obţine ecuaţia diferenţială autonomă de forma:

$$f(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \dots) = 0 \qquad (2.3)$$

Soluţia de regim liber se determină integrînd ecuaţia autonomă (2.3) corespunzător circuitului pasivizat.

Regimul particular de funcţionare al unui circuit neliniar, în care semnalul răspuns este de o formă asemănătoare semnalului excitat poartă denumirea de regim forţat. In circuite liniare soluţiile regimului permanent coincid cu cele ale regimului forţat, fiind independent de condiţiile iniţiale, în circuite neliniare, cele două soluţii sînt, în general, diferite.

Regimul forţat este regimul de funcţionare principal al dispozitivelor electrice. Problema studiului riguros al regimurilor de funcţionare ale circuitelor neliniare prezintă un grad înalt de dificultate legate de determinarea soluţiilor unui sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare (2.1.).Nu există nici o metodă generală universală pentru soluţionarea ecuaţiei diferenţiale neliniare. Metodele de analiză a circuitelor neliniare în regim forţat sînt laborioase şi se pot clasifica în cîteva grupe:

a) Metodele de calcul pentru circuitele excitate de curent continuu.

b) Metodele de calcul pentru circuitele excitate de semnale alternative cu elemente neliniare inerţiale sau neinerţiale.

c) Metodele de calcul pentru circuitele excitate de semnale continue mari şi de semnale alternative destul de mici, atunci circuitele se consideră ca liniare pentru semnale alternative mici.

d) Metodele de calcul pentru regim forţat periodic. In circuite electrice liniare sau neliniare aflate în regim forţat,dacă semnalele excitate sînt periodice, atunci răspunsurile de asemenea sînt periodice.

In capitolul acesta vom prezenta metodele de rezolvare ale circuitelor neliniare în regim forţat, mai ales pentru regim forţat periodic.

2.2. Metodele de calcul ale circuitelor neliniare de curent continuu.

In general circuitele neliniare excitate de tensiuni continue simple se rezolvă prin metode grafice. Metodele grafice constau în transfigurări succesive ale circuitelor date pînă se ajunge la configuraţia cea mai simplă formată dintr-un element neliniar echivalent în serie cu un generator ideal de tensiune.

Circuitele active cu unul sau mai multe elemente neliniare se transformă intr-o combinaţie a unor dipoli, cuadripoli, hexapoli...liniari cu elemente neliniare [35] , [27] .

Metodele grafice sînt simple şi au precizia satisfăcătoare, de aceea ele se folosesc pe larg în calculul circuitelor electrice şi magnetice neliniare [3] , [35] .

Pentru calculul circuitelor complicate, mai ales pentru circuite electronice cu multe elemente neliniare: tranzistoare, diode, etc.metodele grafice nu satisfac, în acest caz metodele numerice prezintă avantaj mai mare. Pentru studiul circuitelor complicate, ecuaţiile lor se scriu sub forma generală folosind algebra matricealâ. Studiem forma matriceală a teoremei lui Kirchhoff şi metodele de rezolvare a lor.Ecuaţiile matriceale sînt baza de rezolvare numerică pentru circuite neliniare.

2.2.1. <u>Ecuaţiile matriceale generale ale circuitelor neliniare de curent continuu:</u>

Pentru reprezentarea ecuaţiilor generale ale circuitelor neliniare, ca şi pentru circuite liniare se definesc matricele coloane ale mărimilor dar cu observaţia că pentru circuite neliniare elementele matricelor [U] şi [I] sînt funcţii de curent sau de tensiune

$$[U] = \begin{bmatrix} U_1(I_1) \\ U_2(I_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n(I_n) \end{bmatrix} \quad ; [I] = \begin{bmatrix} I_1(U_1) \\ I_2(U_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n(U_1) \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

Folosind matricea coeficienţilor de incidenţă a laturilor la suprafeţele închise $[\Sigma_H]$ care fiecare intersectează o ramură se obţine forma matriceală a teoremei întîi a lui Kirchhoff.

$$[\Sigma_H][I(U)] = [0] \qquad (2.5)$$

Coeficientul de incidenţă a laturii k la suprafaţa Σ_j, are valorile 0, 1,-1 după cum latura k nu traversează sau traversează suprafaţa şi are acelaşi sens de referinţă cu sensul de referinţă ales pe suprafaţa Σ_j, sau sens opus acesteia.

Folosind matricea de incidenţă a laturilor la curbele închise Γ_j ale unui sistem complet de curbe închise se obţine forma matricială a teoremei a doua a lui Kirchhoff.

$$[\Gamma_d][U(I)] = [0] \qquad (2.6)$$

Coeficientul de incidenţă γ_{jk} al laturii k la curba Γ_j este nul dacă latura nu face parte din curbă şi egal cu +1 sau -1 dacă latura este conţinută în curbă şi după cum sensurile de referinţă coincid sau nu coincid.

Dacă circuitele conţin şi surse de curent sau surse de tensiune, ecuaţiile generale ale circuitelor neliniare au forma:

$$[\Sigma_r]\left\{[I(U)] + [J]\right\} = [0] \qquad (2.7)$$

$$[\Gamma_d]\left\{[U(I)] + [E]\right\} = [0] \qquad (2.8)$$

Pe baza ecuaţiilor generale ale circuitelor neliniare se elaborează metodele de calcul: metoda curenţilor de contur, metoda potenţialelor nodurilor, etc. [4]

In circuite neliniare caracteristicile neliniare se dau sub forma unei familii de caracteristici, unui tabel numeric sau unei funcţii analitice. Pentru analiza circuitelor neliniare în cazul cînd caracteristicile neliniare se dau sub forma unor tabele numerice pentru determinarea funcţiilor de aproximare se folosesc metodele interpolării. Funcţiile de aproximare pot fi trigonometrice, serii Cebîşev sau Lagrange... Erorile se reduc considerabil folosind metoda celor mai mici pătrate. Trebuie să subliniem că ecuaţiile generale ale circuitelor sub forma matricealâ sînt baza de rezolvare pe calculatoare numerice.

2.2.2. <u>Metodele iterative de rezolvare ale circuitelor nelniare</u>:

Calculul iterativ constă în găsirea unui algoritm principal pertru rezolvarea ecuaţiilor algebrice neliniare şi parametrice. Folosirea metodelor numerice iterative în analiza circuitelor neliniare este cunoscută prin lucrările [4], [17], [9] unde se folosesc metode iterative pentru calculul circuitelor de curent continuu şi de curent alternativ. In partea aceasta vom prezenta folosirea metodelor iterative pentru ecuaţiile generale ale circuitelor neliniare.

Se dă sistemul de ecuaţii algebrice neliniare de forma:

$$P(x) = 0 \tag{2.9}$$

Pentru rezolvarea iterativă ecuaţia (2.9) se modifică sub forma:

$$x = F(x) \tag{2.10}$$

unde x este vectorul necunoscut, iar P(x), F(x) sînt funcţiile vectoriale date. Pentru găsirea rădăcinilor se realizează procedeul iterativ:

$$X_{k+1} = F(X_k) \tag{2.11}$$

Procedeul iterativ (2.11) este convergent dacă orice normă matriceală $\|F'_x\| < 1$, unde $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

In [4], [32] se reprezintă în mod sistematic folosirea metodei Newton pentru calculul unui sistem de ecuaţii neliniare.

Pentru obţinerea soluţiilor ecuaţiei neliniare (2.9) prin metoda Newton trebuie să se folosească formula iterativă de forma:

$$X_{k+1} = X_k - \left[P'(X_k)\right]^{-1} \cdot P(X_k) \tag{2.12}$$

unde $\left[P'(X_k)\right]$ este matricea Iacobi în punctul $X = X_k$. Metoda Newton modificată se obţine înlocuind $\left[P'(X_k)\right]$ cu valoarea aproximativă iniţială $\left[P'(X_0)\right]$, adică:

$$X_{k+1} = X_k - \left[P'(X_0)\right]^{-1} \cdot P(X_k) \tag{2.13}$$

Condiţiile convergenţei după metoda Newton sînt :

$$h_o = B_o \cdot \eta_o \cdot K \leqslant 0{,}5 \qquad (2.14)$$

unde

$$B_o \geqslant \| P'(X_o)^{-1} \| = \| \Gamma_o \|$$

$$\eta_o \geqslant \| \Gamma_o P(X_o) \| \qquad (2.15).$$

$$K \geqslant \max \| P''(X) \|$$

Studiem convergența metodei Newton în cazul cînd ecuațiile circuitelor sînt scrise prin metoda potențialelor nodurilor sau prin metoda curenților de contur [4] . Se consideră că circuitul simplu din fig.2.1 conține un element neliniar cu caracteristica 1 din fig.2.2.In acest caz ecuația circuitului după metoda Newton are forma:

$$P(I) = r_o I + U(I) - E = 0 \qquad (2.16)$$

$$P'(I) = r_o + r_d \text{ unde } r_d = \frac{dU}{dI}$$

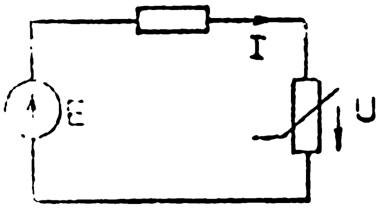


Fig.2.1.

$$P''(I) = \frac{dr_d}{dI} = r_d'$$

$$P(I_o) = r_o I_o + U(I_o) - E = \delta U_o$$

$$B_o = \left\| \frac{1}{r_o + r_d^o} \right\|$$

$$\eta_o = \left\| \frac{U_o}{r_o + r_d^o} \right\|$$

$$K = \| r_d' \|$$

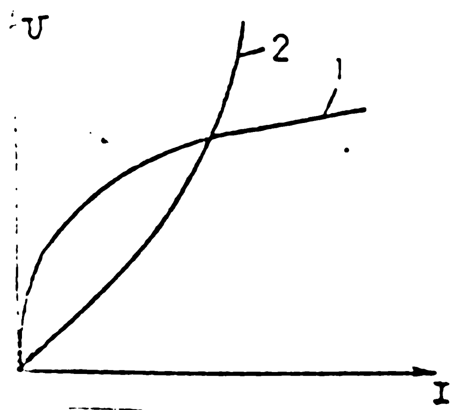


Fig.2.2.

Dacă se scrie ecuația circuitului luînd ca necunoscută tensiunea la bornele elementului neliniar prin inmulțirea ecuației (2.16) cu g_o se obține :

$$P(U) = g_o(U) + I(U) - g_o E = 0 \qquad (2.17)$$

$$P'(U) = g_o + g_d \text{ unde } g_d = \frac{dI}{dU}$$

$$P''(U) = \frac{dg_d}{dU} = g'$$

$$P(U_o) = g_o U_o + I(U_o) - g_o E = \delta J_o$$

$$B_0 = \left\| \frac{1}{g_0+g_d^o} \right\|$$

$$\eta_0 = \left\| \frac{J_0}{g_0+g_d^o} \right\|$$

$$K = \left\| g'^o_d \right\|$$

Comparînd cele două metode constatăm că volumul de calcul al ambelor metode este acelaşi dar condiţiile convergenţei sînt diferite. Valoarea K determină prin metoda tensiunii tinde la infinit dacă caracteristica elementului neliniar este de forma 1. Dacă se aplică metoda curenţilor şi dacă caracteristica elementului neliniar este de forma 2 atunci K de asemenea tinde la infinit. Acestea permit să se tragă concluzia:

Cînd caracteristica neliniară este de tipul 1 (sau 2) este mai util dacă se scrie ecuaţia circuitului după tensiunea U (sau curentul I).

Metoda Newton are viteza convergenţei mare în timp ce alte metode iterative pot fi divergente motiv pentru care această metodă se foloseşte pe larg în analiza circuitelor neliniare. In [25] se reprezintă modul cum se poate creşte convergenţa metodei Newton modificînd corespunzător ecuaţiile circuitelor.

Dacă procedeul iterativ are tendinţa de oscilaţie în jurul valorilor exacte este utilă folosirea procedeului cu valori medii [49], adică după ce s-au determinat valorile X_1, X_2 la pasul 1, 2 de iteraţie, valoarea X_3 se ia media aritmetică a lui X_1 şi X_2.

$$X_3 = \frac{X_1+X_2}{2} \quad , \quad X_5 = \frac{X_4+X_4}{2} \qquad (2.18)$$

In [49] de asemenea se prezintă programarea pentru rezolvarea circuitelor neliniare în regim permanent.

Trebuie precizat că metodele calculului iterativ se folosesc nu numai pentru valori numerice ci şi pentru valori operaţionale sau grafice...

2.2.3. Metoda programării neliniare [6], [11]

Rezolvarea circuitelor rezistive de curent continuu se poate realiza printr-o metodă relativ recentă care se bazează pe studiul proprietăţilor de extrem ale circuitelor electrice. Metoda aceasta este foarte utilă pentru analiza circuitelor complexe. D.Dennis [11] a stabilit legătura problemelor de analiza circuitelor şi problemelor programării. Circuitul studiat cuprinde rezistenţe, surse de tensiune şi surse de curent. D Dennis a arătat că analiza acestor circuite este o problemă a programării convexe, însă folosirea în mod direct a analogiei dintre analiza circuitelor neliniare şi programare este dificilă. Se poate evita acest inconvenient folosind noţiunile noi ale lui E.Cherry şi W.Millar:

Volumul : $$G_k(i_k) = \int_{i_0}^{i_k} v_k(i)\,di \qquad (2.19)$$

Covolumul $$J_k(v_k) = \int_{v_0}^{v_k} i_k(v)\,dv \qquad (2.20)$$

unde $v_k(i_k)$ este caracteristica neliniară a laturii neliniare, Constatăm că $G_k(i_k)$, $J_k(v_k)$ sînt proporţionale cu puterile instantanee. Prin teorema lui W.Millar găsirea soluţiilor ecuaţiilor în regim permanent este echivalentă cu găsirea extremelor funcţiilor $G_k(i_k)$ sau ale lui $J_k(v_k)$:

$$G(i) = \sum_{k=1}^{n} G_k(i_k) \qquad (2.21)$$

unde $i = [i_1, i_2 \ldots i_n]_{tr}$ este vectorul curenţilor laturilor

i_k este curentul în latura k

$$J(v) = \sum_{k=1}^{n} J_k(v_k) \qquad (2.22)$$

unde $v = [v_1, v_2 \ldots v_n]_{tr}$ este vectorul potenţialelor nodurilor.

Prin programarea neliniară se găsesc punctele extreme ale funcţiei de mai multe variabile G(i) sau J(v) care sînt soluţiile în regim permanent ale circuitelor neliniare de curent continuu.

Exemplu [11] : Să se determine tensiunile la noduri din schema prezentată în fig.2.3. Caracteristicile diodelor se aproximează cu expresia

$$i_d = e^{(U_d - U_o)\cdot \frac{1}{\varphi}}$$

în care i_d respectiv U_d sînt curentul respectiv tensiunea diodei iar U_o şi sînt mărimi constante

Se aleg ca variabile generale tensiunile nodurilor

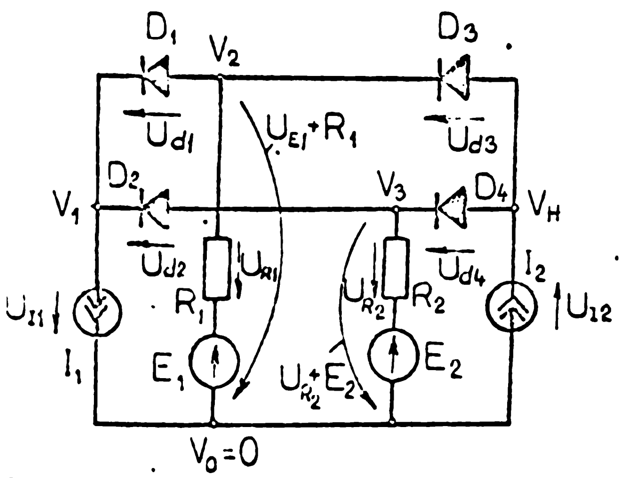


Fig.2.3.

Tensiunile pe diode sînt:

$U_{d1} = V_2 - V_1$

$U_{d2} = V_3 - V_1$

$U_{d3} = V_4 - V_2$

$U_{d4} = V_4 - V_3$

iar tensiunile la bornele surselor ideale de curent şi pe rezistenţe liniare vor fi :

$U_{I1} = V_1$, $U_{I2} = -V_4$

$U_{R1} = V_2 - E_1$, $U_{R2} = V_3 - E_2$.

Se găsesc covolumele tuturor elementelor prin tensiunile nodurilor.

1) Se notează cu J_{I1}, J_{I2} - covolumele surselor de curent

$$J_{I1} = \int_0^{V_1} I_1 dv = I_1 V_1$$

$$J_{I2} = \int_0^{-V_4} I_2 dv = -I_2 V_4$$

2) Se notează J_{E1+R} , J_{E2+R} - Covolumele laturilor respective

$$J_{E1+R_1} = \int_0^{V_2} \frac{1}{R_1}(V-U_{E1})dv = \frac{1}{R_1}\left(\frac{v^2}{2} - U_{E1}\cdot v\right)\Big|_0^{V_2} = \frac{1}{2R_1}V_2^2 - \frac{1}{R_1}E_1 V_2$$

$$J_{E2+R_2} = \int_0^{V_3} \frac{1}{R_2}(V-U_{E2})dv = \frac{1}{2R_2}V_3^2 - \frac{1}{R_2}E_2 V_3$$

3) Covolumele diodelor:

$$J_{d1} = \int_{-\infty}^{U_{d1}} e^{(U_d - U_0)\frac{1}{\varphi}} dU_d = \varphi e^{(V_2-V_1-U_0)\frac{1}{\varphi}}$$

$$J_{d2} = \varphi \cdot e^{(V_3-V_4-U_0)\cdot\frac{1}{\varphi}}$$

$$J_{d3} = \varphi \cdot e^{(V_4-V_2-U_0)\cdot\frac{1}{\varphi}}$$

$$J_{d4} = \varphi \cdot e^{(V_4-V_1-U_0)\cdot\frac{1}{\varphi}}$$

Suma covolumelor tuturor laturilor este :

$$J = I_1V_1 - I_2V_4 + \frac{1}{2R_1}V_2^2 - \frac{E_1}{R_1}V_2 + \frac{1}{2R_2}V_3^2 - \frac{1}{R_2}E_2V_3 - \frac{1}{R_2} + \varphi\left[e^{(V_2-V_1-U_0)\frac{1}{\varphi}} + e^{(V_3-V_1-U_0)\frac{1}{\varphi}} + e^{(V_4-V_2-V_0)\frac{1}{\varphi}} + e^{(V_4-V_3-U_0)\frac{1}{\varphi}}\right]$$

Presupunem cazul concret în care

$I_1 = 2A$, $I_2 = 4A$, $E_1 = 100V$, $E_2 = 5V$, $\varphi_1 = 1V$, $U_0 = 1V$, $R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 20\,\Omega$.

In această situaţie suma covolumului devine:

$$J = 2V_1 - 4V_4 + 0{,}05V_2^2 - V_2 + 0{,}025V_3^2 - 0{,}25V_3 + e^{(V_2-V_1-1)} + e^{(V_3-V_1-1)} + e^{(V_4-V_2-1)} + e^{(V_4-V_3-1)}$$

Studiind extremele funcţiei J în care variabilele independente sînt V_1, V_2, V_3 şi V_4 se găseşte un minim pentru:

$V_1 = 20{,}64$ V, $V_2 = 21{,}59$ V, $V_3 = 21{,}70$[illegible], $V_4 = 23{,}34$ V

2.3. Metodele de calcul pentru regimul forțat periodic.

2.3.1. Cosiderații generale: Studiul regimului periodic joacă un rol important în teoria circuitelor neliniare. Regimul periodic este regim de funcționare principal în multe dispozitive electrice și electronice. In circuite liniare oscilațiile periodice sînt stabile în regim permanent perioada oscilației forțate este egală cu perioada oscilației excitate.

In circuite neliniare procesele periodice sînt mult mai complicate. Regimurile pot apare în cazurile următoare:

In sistem autonom atît în sistemul conservativ cît și disipativ. In funcție de caracteristica neliniară, de felul elementelor, de structura circuitelor, pulsația, formele oscilațiilor pot fi diferite.

In sistem neautonom - sub acționarea unei surse de semnal periodic răspunsul poate fi periodic sau aperiodic. Răspunsul periodic forțat poate avea armonica fundamentală, armonici superioare sau subarmonici.

In general nu se poate studia regimurile periodice cu ajutorul metodelor analitice.In prezent metodele analitice se folosesc pentru o clasă limită a circuitelor care satisfac condițiile următoare:

- Circuite autonome și neautonome avînd o sursă de semnal armonic
- Circuitele descrise prin ecuații de gradul doi
- Circuitele neliniare cu caracteristici monotone, cu neliniaritate slabă

Metodele analitice:metoda balanței armonice, metoda transformatei în complex, transformatei în puncte sînt foarte utile pentru studiul regimului periodic, care se vor prezenta în mod amănunţit în capitolele următoare.

2.3.2. Metode analitice de rezolvare ale circuitelor de curent alternativ cu elemente inerţiale.

In cazul particular al elementelor de circuit inerţiale spectrul semnalului răspuns este acelaşi cu al semnalului de excitaţie. Elementele de circuite tipice inerţiale sînt rezistoare a căror rezistenţă se modifică cu temperatura. Atunci cînd interesează numai amplitudinea semnalului şi nu spectrul său, cu scopul de a simplifica analiza circuitului studiat pot fi considerate inerţiale chiar şi elemente de circuit neinerţiale.

Pentru studiul acestei clase de circuit se poate utiliza metoda simbolică analitică de reprezentare în complex cu toate avantajele cunoscute din analiza circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal.

Una dintre căile de rezolvare a circuitelor neliniare constă în înlocuirea elementelor neliniare cu elemente liniare echivalente. Parametrii elementelor liniare echivalente se aleg astfel încît procesele energetice în circuite să nu se schimbe. Prin înlocuirea curentului nesinusoidal cu curentul sinusoidal echivalent putem aplica toate metodele cunoscute din circuitele liniare pentru circuite neliniare [35], [49].

Procedeul analitic de calcul ai parametrilor statici ale elementelor neliniare neinerţiale considerate inerţiale se bazează pe principiul balanţei armonice. Prin metoda liniarizării armonice ecuaţiile diferenţiale sînt substituite de ecuaţii algebrice ce se pot rezolva uşor prin metode iterative.

Pentru studiul regimului periodic în circuite cu cuplaje magnetice în [13] se folosesc mărimile sinusoidale echivalente. Ecuaţiile circuitelor sînt scrise sub forma matriceală. Legătura electrică şi magnetică se reprezintă cu ajutorul unei matrice de incidență. Se consideră circuitul cu m laturi electrice și m_m laturi magnetice. Aceasta, împreună cu nodurile rețelelor electrice sau magnetice vor forma k contururi electrice și k_m contururi magnetice. Așadar rețeaua este considerată odată sub aspect electric și apoi ca o rețea magnetică.

Matricea curenților laturilor $[\dot{I}]$ se determină cu ajutorul matricei curenților de contur $[\dot{I}_c]$ prin relația:

$$[\dot{I}] = [C]_t \, [\dot{I}_c] \tag{2.23}$$

unde $[C]$ este matricea de incidență a laturilor circuitului electric la contururile fundamentale.

Ecuațiile curenților de contur au forma:

$$[Z_c] \, [\dot{I}_c] = [\dot{E}_{ech}] \tag{2.24}$$

unde $[Z_c]$ este matricea pătrată a impedanțelor contururilor.

$$[Z_c] = [C] \, [Z] \, [C]_t \tag{2.25}$$

Elementele matricei diagonale $[Z]$ reprezintă impedanțele complexe ale laturilor circuitului electric în care nu intervin inductanțele bobinelor din circuitul magnetic.

$[\dot{E}_{ech}]$ este matricea tensiunilor electromotoare ale contururilor care [illegible] se determină prin tensiunile generatoarelor laturilor $[\dot{E}]$ și prin tensiunile electromotoare induse în bobinele situate pe laturile circuitului magnetic $[\dot{E}_{ic}]$.

$$[\dot{E}_{ech}] = [C] \cdot [\dot{E}] - [\dot{E}_{ic}] \tag{2.26}$$

unde $$[\dot{E}_{ic}] = j \, \frac{\omega}{2} [C'] \, [W] [\dot{\Phi}_m] \tag{2.27}$$

unde $[\dot{\Phi}_m]$ este matricea fluxului magnetic în laturile circuitului magnetic.

Elementele matricei de conexiune $[C']$ au valorile +1 dacă sensurile de referință ale contururilor sînt la fel orientate în raport cu sensul de referință al fluxului și -1 în caz contrar. Elementele matricei $[W]$ sînt egale cu numărul de spire al bobinelor circuitului magnetic. După ce s-au determinat matricele circuitului electric, se scriu matricile circuitului magnetic. Introducem matricea de conexiune a circuitului magnetic $[C_m]$ care este asemnătoare cu matricea $[C]$. Matricea fluxurilor din laturi $[\dot{\Phi}_m]$ este determinată prin matricea fluxurilor de contur $[\dot{\Phi}_{mc}]$ prin relaţia:

$$[\dot{\Phi}_m] = [C_m]_t [\dot{\Phi}_{mc}] \qquad (2.28)$$

Ecuaţia de contur a circuitului magnetic are forma:

$$[Z_{mc}][\dot{\Phi}_{mc}] = [\dot{F}_c] \qquad (2.29)$$

unde matricea patrată a impedanţelor magnetice de contur exprimate în complex are forma:

$$[Z_{mc}] = [C_m][Z_m][C_m]_{tr} \qquad (2.30)$$

în ecuaţia (2.30) elementele matricei diagonale $[Z_m]$ sînt impedanţele magnetice exprimate în complex ale laturilor circuitului magnetic.

Matricea tensiunii magnetomotoare de contur $[\dot{F}_{mc}]$ este determinată prin relaţia:

$$[\dot{F}_c] = 2[C'_m][W_m][\dot{I}] \qquad (2.31)$$

unde elementele matricei de conexiune $[C'_m]$ sînt +1 dacă bobina aparţine conturului magnetic iar sensul fluxului coincide colenaţiei determinate de curentul, -1 dacă sesnsurile sînt opuse şi 0 dacă bobina nu aparţie conturului.

Matricea $[W_m]$ are elementele determinate de numărul de spire ale bobinelor.

După ce s-au determinat matricele de conexiune ale circuitului electric şi magnetic $[C']$ şi $[C'_m]$ se obţine ecuaţia matriciaală a circuitului electromagnetic. Substituind (2.31),(2-23) în

- ecuaţia (2.29) avem :

$$[\dot{\Phi}_{mc}] = [Z_c]^{-1} \cdot \sqrt{2}\,[C_m'][W_m][C]_t\,[\dot{I}_c] \qquad (2.32)$$

Substituind (2.26), (2.28) în ecuaţia (2.24) avem:

$$[\dot{I}_c] = [Z_c]^{-1}[C][\dot{E}] - \frac{j\omega}{\sqrt{2}}[Z_c]^{-1}[C'][W][C_m]_{tr}[\dot{\Phi}_{mc}] \qquad (2.33)$$

Prin ecuaţia (2.32), (2.33) putem determina toate mărimile de contur

$$[\dot{I}_c] = [Z_{ech\,c}]^{-1} \cdot [C][\dot{E}] \qquad (2.34)$$

$$[\dot{\Phi}_{mc}] = \sqrt{2}\,[Z_{mech.c}][C'][W_m][C]_{tr}[Z_c]^{-1}[C][\dot{E}] \qquad (2.35)$$

unde

$$[Z_{ech.c}] = [Z_c] + j\omega[C'][W][C_m]_{tr}[Z_{mc}]^{-1}[C_m'][W_m][C]_{tr} \qquad (2.36)$$

$$[Z_{mech.c}] = [Z_{mc}] + j\omega[C_m'][W_m][C]_{tr}[Z_c]^{-1}[C'][W][C_m]_{tr} \qquad (2.37)$$

Procedeul de calcul iterativ pe baza matricilor determinate de mai sus este următorul:

- Datele iniţiale ale matricelor magnetice: permeabilitatea magnetică $\mu = \mu(\frac{\Phi_m}{S})$, unghiul de pierdere $\alpha = \alpha(\frac{\Phi_m}{S})$ sînt cunoscute. Din cestea şi din dimensiunile geometrice ale laturilor circuitului magnetic se determină expresia impedanţei magnetice.

$$Z_m(\dot{\Phi}_m) = \frac{l}{S \cdot \mu(\frac{\Phi_m}{S})} \exp\left[j\alpha(\frac{\Phi_m}{S})\right] \qquad (2.38)$$

- Se alege valoarea iniţială $[B_m]^0$ a inducţiei maxime în laturile circuitului magnetic.

- Se calculează impedanţele magnetice complexe ale fiecărei laturi $[Z_m^0]$.

- Cu ajutorul ecuaţiei (2.35) se determină distribuţia fluxului magnetic $[\dot{\Phi}_m]^p$.

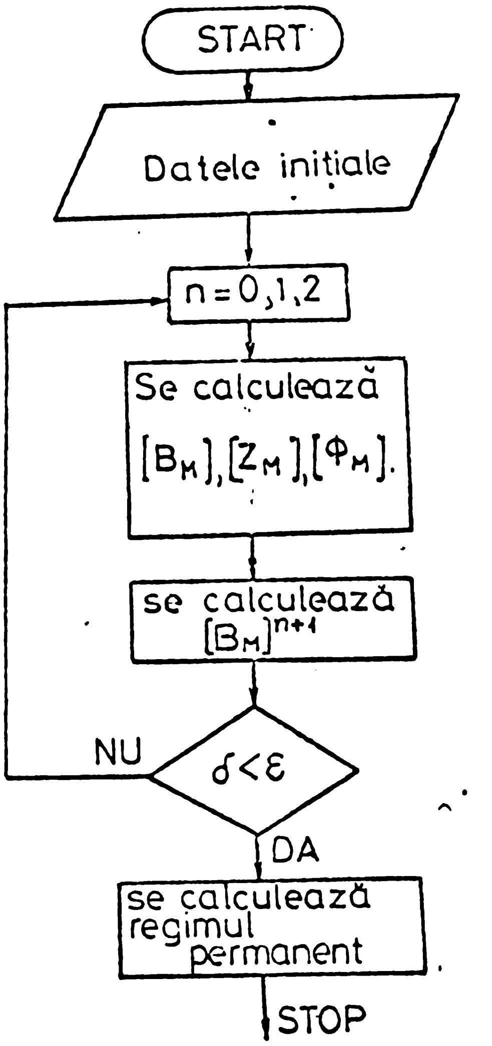


Fig.2.4.

- Se calculează $[B_m^0] = \left[\frac{\Phi_m}{S}\right]^0 = \left[f\{(|B_m|^0)\}\right]$
- Se calculează inducţia magnetică prin metoda Newton, procedeul de calcul se dă în organigrama din fig.2.4. [13].

2.3.3. Metodele grafice de rezolvare ale circuitelor de curent alternativ cu elemente inerţiale.

In [26] se prezintă o metodă directă şi una folosind diagrame cu mărimi normate pentru calculul circuitelor care conţin un singur element neliniar simetric ohmic sau reactiv. Metodele prezentate sînt aplicabile dacă toate sursele de energie sînt de aceeaşi frecvenţă. In cele ce urmează vom considera cazurile în care elementele neliniare sînt ohmice sau reactive şi au o caracteristică simetrică adică pentru o valoare a tensiunii instantanee dată, valoarea absolută a curentului nu depinde de polaritatea tensiunii.

Mai întîi studiem cazul elementelor neliniare rezistive. Vom considera cazul general în care elementul neliniar face parte dintr-un circuit oarecare avînd o serie de surse de tensiune şi de curent, toate de aceeaşi frecvenţă şi cu un număr oarecare de impedanţe. Raportat la bornele elementului neliniar, pe baza teoremei lui Thèvenin, circuitul considerat se poate reduce la un circuit echivalent constînd dintr-o sursă de tensiune U_0 în serie cu o impedanţă z. Circuitul iniţial se poate reduce la circuitul echivalent reprezentat în fig. 2.5 la care valoarea efectivă a curentului

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{\ldots}}$$

unde r este rezistenţa statică a elementului neliniar în punctul de funcţionare, iar R, X sînt rezistenţa, respectiv reactanţa echivalentă a circuitului.

Rezistenţa elementului depinde de punctul de funcţionare:

$$r = f_1\,(I) \tag{2.40}$$

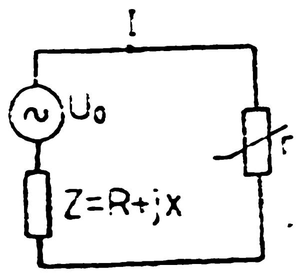


Fig.2.5.

Din relaţiile (2.39),(2.40) rezultă:

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{[f_1(I)+R]^2+X^2}} \tag{2.41}$$

Rezolvarea problemei este însă posibilă relativ simplu în modul următor: Relaţia (2.33) se poate pune sub forma:

$$(r+R)^2 I^2+(XI)^2 = U^2 \tag{2.42}$$

sau

$$(rI)^2+2rI.RI+(RI)^2+(XI)^2 = U^2 \tag{2.43}$$

Termenul rI reprezintă căderea de tensiune la bornele elementului neliniar.

$$U = rI = f_2(I) \tag{2.44}$$

deci relaţia (2.43) se poate scrie:

$$U^2 + 2RIU +(RI)^2 +(XI)^2-U_o^2 = 0 \tag{2.45}$$

Rezolvînd ecuaţia (2.26) în raport cu U se găseşte:

$$U = - RI \pm \sqrt{U_0^2 -(XI)^2} \tag{2.46}$$

care reprezintă ecuaţia unei elipse cu centrul în origine. Intersecţia caracteristicii rezistenţei neliniare cu elipsa dată de relaţia (2.46) determină punctul de funcţionare al rezistenţei neliniare. Elementul neliniar avînd o caracteristică simetrică este suficient să se reprezinte doar ramura pozitivă a lui şi respectiv ramura din cadranul I a lipsei. In cazul cînd elementul neliniar este reactiv, rezolvarea se face în mod similar ca în cazul elementelor neliniare rezistive. In fig.2.6 este ilustrat modul de rezolvare al unui circuit conţinînd un element neliniar rezistiv la variaţia rezistenţei echivalente a circuitului, iar în fig.2.7 este ilustrat determinarea punctului de funcţionare al un element neliniar rezistiv la variaţia reactanţei echivalente a circuitului.

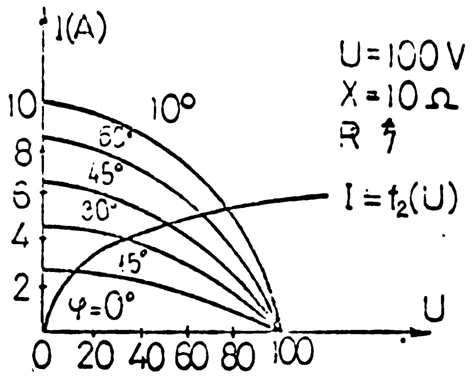


Fig.2.6.

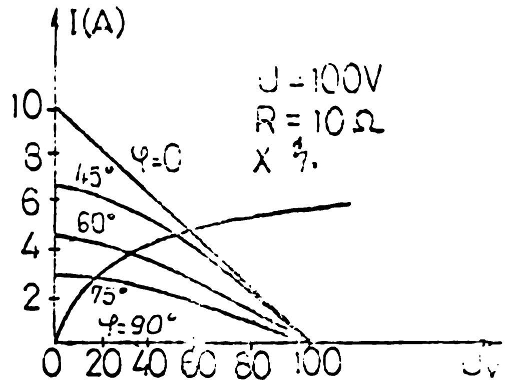


Fig.2.7.

Pentru a nu trasa elipsa de sarcină pentru fiecare circuit echivalent este util de a norma elipsa de sarcină şi de a trasa pentru o serie de valori ale unghiului de fază al circuitului echivalent.Avantajele utilizării diagramei normate în comparaţie cu metoda de rezolvare sînt importante. Elipsele de sarcină nu mai trebuie calculate pentru fiecare circuit în parte, ele fiind universale pentru orice circuit.

Metoda aceasta este utilă pentru calculul circuitelor neliniare simple.

In [34] se prezintă metoda diagramelor polare de analiză a circuitelor conţinînd unul sau două elemente neliniare inerţiale aflate în regim permanent sinusoidal.Procedeul de calcul este următorul:

1. Se transfigurează partea liniară a circuitului în raport cu bornele elementului neliniar unde elementul neliniar poate fi disipativ sau acumulativ caracterizat prin dependenţa R(I) sau

X(I) după cum elementul este disipativ sau acumulativ.

2. Pe baza ecuaţiei de funcţionare

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z+R(I)} \quad \text{sau} \quad \dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z+jX(I)} \qquad (2.47)$$

se construieşte arcul reprezentativ pentru $\dot{I}$ şi se gradează pentru 3 valori ale lui R sau X.

3. Prin intersectarea caracteristicii elementului neliniar R(I) sau X(I) cu dependenţa I(R) sau I(X) extrasă de pe diagrama construită din punctul 2, se obţine soluţia căutată (care poate să nu fie unică).

2.3.4. Metodele de calcul ale circuitelor neliniare de curent alternativ cu elemente neliniare neinerţiale.

Metoda liniarizării armonice prin considerarea circuitelor neliniare neinerţiale ca inerţiale să se pună în evidenţă numai unele proprietăţi specifice circuitelor. Analiza circuitelor neliniare inerţiale are nevoie de metode de calcul care să ţină seama în mod special de caracterul neinerţial al elementelor neliniare. Pentru circuite mai simple este utilă folosirea metodelor grafice sau metodelor grafo-analitice. In partea aceasta vom prezenta cîteva metode analitice pentru circuite neinerţiale.

1. Metoda liniarizării pe porţiuni a caracteristicii neliniare. [3], [50], [33] .

Liniarizarea caracteristicilor neliniare este algoritmul principal de rezolvarea problemelor neliniare. Cu ajutorul calculatorului numeric metoda aceasta prezintă un avantaj mare în analiza circuitelor neliniare.

Etapele principale de rezolvare după metoda liniarizării pe porţiuni sînt următoarele:

- Caracteristica neliniară se aproximează prin segmente de dreaptă. Cu cît numărul segmentelor este mai mare, cu atît precizia este mai mare dar volumul de calcul mai laborios.

- Se înlocuiesc ecuaţiile fiecărei drepte în ecuaţia diferenţială neliniară şi se obţin ecuaţiile diferenţiale liniare, numărul lor fiind egal cu numărul segmentelor de dreaptă.

- Se rezolvă sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare, constantele de integrale se determină din condiţiile de periodicitate şi condiţiile de intersecţie.

Metoda aceasta este utilă în cazul cînd segmentele de dreaptă se află pe axe sau în paralel cu axele de coordonate, mai ales pentru elemente cu caracteristica de forma dreptunghiulară.

Aplicarea metodei pentru analiza regimului permanent periodic în circuite R.L serie alimentate de tensiune sinusoidală prin liniarizări pe porţiuni a caracteristicii se prezintă în [33]. In cazul cînd semnalul de ieşire este puternic deformat se propune o metodă care constă în aproximarea prin segmente de dreaptă a caracteristicii şi determinarea semnalului periodic de ieşire sub forma unei funcţii analitice pe porţiuni.

Se dă circuitul R.L în serie alimentat de tensiune sinusoidal $e = E_m \sin\omega t$ neglijînd pierderile prin histerezis caracteristica de magnetizare se aproximează prin trei segmente (fig.2.8).

Regimul permanent se obţine cînd punctul reprezentativ se trece pe segmentul de dreaptă de la 2 la 2'.

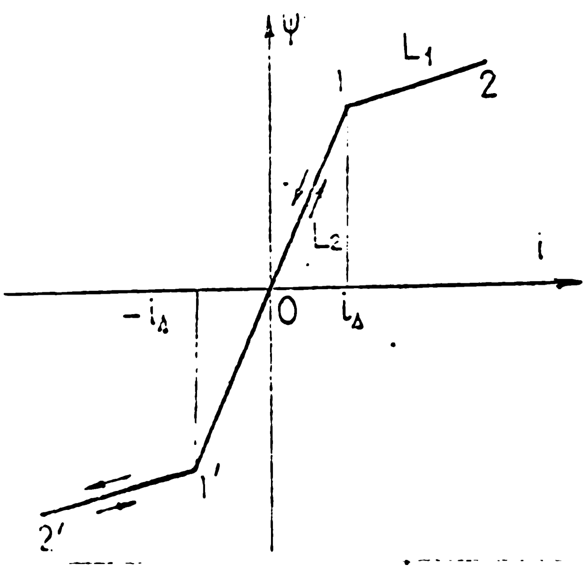


Fig.2.8.

Trecînd punctul 1 de la dreaptă la stîngă inductanţa se schimbă de la L_1 la L_2 şi invers, de aceea în regim permanent curentul se obţine aplicînd metoda de rezolvare a regimului tranzitoriu pentru circuitul liniar. Putem considera că jumătate de semnal se obţine cînd punctul p trece de la 1,2,1 şi 1,1'. Cînd punctul de funcţionare este 1 faza iniţială a tensiunii se notează cu ψ, iar curentul cu i_s , timpul de trecere în partea 1.2.1 este t_1. Expresia curentului are forma:

$$i_s = \frac{E}{Z_1}\sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_1) + \left[i_s - \frac{E}{Z_1}\sin(\psi - \varphi_1)\right]\exp\left(-\frac{t_1 \cdot R}{L_1}\right) \tag{2.48}$$

unde $Z_1 = \sqrt{R^2 + (\omega L_1)^2}$, $\varphi_1 = \mathrm{arctg}\frac{\omega L_1}{R}$

Pentru partea 1.1' se obţine:

$$-i_s = \frac{E}{Z_2}\sin(\omega t_2 + \omega t_1 + \psi - \varphi_2) + \left[i_s - \frac{E}{Z_2}\sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_2)\right]\exp\left(-\frac{t_2 R}{L_2}\right) \tag{2.49}$$

unde $Z_2 = \sqrt{R^2 + (\omega L_2)^2}$, $\varphi_2 = \mathrm{arctg}\frac{\omega L_2}{R}$

Din condiţia de periodicitate avem:

$$\omega t_1 + \omega t_2 = \pi \tag{2.50}$$

Substituind (2.50) în (2.48), (2.49) se obţin două ecuaţii pentru determinarea necunoscutelor i_s şi t_1 iar din (2.50) rezultă t_2.

2. Metoda ecuaţiilor integrale [8] , [3]

Metoda ecuaţiilor integrale este o metodă iterativă care se foloseşte util la determinarea regimului tranzitoriu, regimului forţat periodic al circuitelor neliniare.

Dacă procesul în circuit se scrie prin ecuaţia diferenţială liniară de forma:

$$A(p).X(\theta) = H(p).f(\theta) \tag{2.51}$$

unde A(p), H(p) sînt polinoame de gradul n ale operatorului diferenţial p, $x(\theta)$ este funcţia necunoscută, $f(\theta)$ este excitaţia avînd perioada 2π, iar $\theta = \omega t$ este variabila independentă, atunci soluţia periodică a lui (2.51) se găseşte prin formula:

$$X(\theta) = \int_0^{2\pi} K(\theta,\tau).F(\tau).d\tau \tag{2.52}$$

unde

$$K(\theta,\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{p_k(\theta-\tau)}}{A'(p_k)(1-e^{-p_k 2\pi})} & \text{pentru } \tau \leqslant \theta \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{p_k(\theta-\tau)}\, e^{p_k 2\pi}}{A'(p_k)(1-e^{-p_k 2\pi})} & \text{pentru } \tau > \theta \end{cases}$$

unde p_k este rădăcina polinomului A(p) = 0 şi $F(\tau)=H(p).f(\tau)$

Dacă circuitul conţine un element neliniar, ecuaţia diferenţială a circuitului are forma:

$$A(p).X(\theta) + B(p).Y(\theta) = H(p).f(\theta) \tag{2.53}$$

unde $Y = \psi(X)$ este caracteristica neliniară.

Regimul periodic al circuitului se determină rezolvînd ecuaţia integrală Fredholm de speţa a doua:

$$X(\theta) = \varphi(\theta) - \mu\int_0^{2\pi} K(\theta,\tau)\psi[X(\tau)]\ d\tau \tag{2.54}$$

Dacă caracteristica neliniară se aproximează prin expresia analitică atunci ecuaţia integrală (2.54) se poate rezolva prin metoda numerice. In [50] soluţia se găseşte sub forma unei serii Fourier, iar caracteristica neliniară se aproximează prin segmente de dreaptă. In [2] se prezintă funcţiile noi cipx, supx care sînt funcţiile exponenţiale speciale.

Caracteristicile lui supx, cipx depind de neliniaritatea elementelor neliniare. Aceste funcţii se folosesc la studiul oscilaţiilor periodice în circuite neliniare inductive. Funcţiile de descriere [43], [37] se folosesc la studiul circuitelor neliniare complexe, în esenţă metoda funcţiilor de descriere este modificarea metodei liniarizării armonice.

2.4. Studiul regimului periodic în circuite neliniare prin metode numerice: [38], [41] [30].

Metodele numerice se folosesc pe larg pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale ce descriu procese tranzitorii sau permanente în circuite electrice şi prezintă o tendinţă principală în analiza circuitelor electrice moderne.

Ecuaţia oscilaţiilor forţate în circuite avînd excitaţie periodice se poate scrie:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \qquad (2.55)$$

unde X este vectorul n componente, $f(x,t)$ este funcţia vectorială cu n componente avînd perioada T.

Condiţiile iniţiale ale regimului periodic sînt necunoscute. Orice regim permanent se poate considera ca limita regimului tranzitoriu cînd timpul tinde la infinit. Găsirea soluţiilor permanent periodice pe baza metodei aceasta în principiu este simplă dar are nevoie de un volum de calcul laborios. Pentru găsirea soluţiilor permanente periodice prin metode numerice în general se folosesc metodele următoare:

1. Alegerea condiţiilor iniţiale astfel încît regimul de funcţionare în circuite este aproape de regim periodic.

- Ecuaţiile diferenţiale ale circuitelor se înlocuiesc cu ecuaţiile cu diferenţe finite care aproximează ecuaţiile diferenţiale în limita unei perioade a excitaţiei externe. Alegerea condiţiilor iniţiale pentru regim permanent se bazează pe metoda lui Eitken Stevenson. Valorile lui x(t)-soluţie a regimului tranzitoriu în momente discrete $t = kT$ ($k = 0,1,2...$) se notează cu $X^{(k)}$. Legătura dintre $X^{(k+1)}$ şi $X^{(k)}$ se poate exprima prin operatorul $\tilde{T}$.

$$X^{(k+1)} = \tilde{T}\left[X^{(k)}\right] \tag{2.56}$$

Ecuaţia (2.56) determină punctele de început pentru regimul permanent pe care le numim punctele imobile. Ecuaţia (2.55) şi operatorul $\tilde{T}$ sînt neliniare dar ele se pot liniariza prin schimbare de variabile:

$$Y(t) = X(t) - \overline{X}(t) \tag{2.57}$$

unde $\overline{X}(t)$ este soluţia periodică a ecuaţiei (2.55)

Din ecuaţia (2.55) se obţine:

$$\frac{dy}{dt} = f\left[y(t) + \overline{x}(t), t\right] - \frac{d\overline{x}}{dt} \tag{2.58}$$

După liniarizare se obţine:

$$\frac{dy}{dt} \simeq J(t).y \tag{2.59}$$

unde J(t) este matricea Iacobi pentru funcţia vectorială f(x,t) calculată pentru $\overline{x} = x(t)$. Se constată că în acest caz J(t) este o funcţie periodică de aceea ecuaţie (2.59) este o ecuaţie cu coeficienţi variabili periodici. Pe baza teoremei lui Floque transformata în puncte a ecuaţiei (2.59) este liniară şi de forma:

$$y^{(k+1)} \simeq F.y^{(k)} \qquad (2.6o)$$

unde F este matricea nxn avînd elementele constante.

Din ecuaţia (2.6o) se face schimbarea de variabile $y = x-\bar{x}$ se obţine:

$$x^{(k+1)} \simeq F\, x^{(k)} + D \qquad (2.61)$$

unde D este vector coloană constant.

Dacă matricile F, D sînt cunoscute pe baza ecuaţiei (2.61) se găsesc punctele imobile:

$$\tilde{X} = (E-F)^{-1}.D \qquad (2.62)$$

unde E este matricea unitară. Punctele imobile $\tilde{X}$ determină condiţii iniţiale pentru regimul periodic. Pe baza acestei metode în [41] se dau exemple de calcul pentru circuit R.L, R.C descris prin ecuaţia Duffing folosind metoda numerică Runge-Kutta. Se apreciază că volumul de calcul se reduce de 1o ori.

Pentru sisteme neliniare autonome perioada oscilaţiei T_0 este cunoscută. Regim periodic în sisteme autonome se găseşte studiind valorile funcţiei şi ale derivaţiei sale în puncte situate la un interval de o perioadă [3o] .

O altă metodă constă în înlocuirea sistemului de ecuaţii diferenţiale cu ecuaţii în diferenţe finite care aproximează ecuaţii diferenţiale într-o perioadă a excitaţiei. Se obţine un sistem de ecuaţii algebrice neliniare. Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii neliniare, în general se folosesc metode iterative care pot fi convergente sau divergente. In plus numărul de ecuaţii în diferenţe finite este mare. In cazul cînd aproximarea se face prin serii Taylor cu primul termen, pentru asigurarea preciziei, numărul paşilor trebuie să fie mare.

Pentru reducerea numărului ecuaţiilor în diferenţe finite în [38] se folosește ap oximarea nu numai cu primul termen din serii Taylor ci se iau în considerare şi termeni suplimentari.

Metodele numerice prezintă avantaj mare în analiza circuitelor neliniare complicate.

CAPITOLUL III
METODA BALANTEI ARMONICE MODIFICATE

3.1. Consideraţii generale despre metoda balanţei armonice.

Metoda balanţei armonice este eficientă pentru studiul circuitelor şi sistemelor neliniare în regim forţat periodic [3] , [27] .

Fie ecuaţia cu termeni armonici de forma:

$$\sum_{k=1}^{n} S_k(a_1,a_2,\ldots a_n,b_1,b_2..b_n)\sin k\omega t + \sum_{k=1}^{n} C_k(a_1,a_2..a_n,b_1,b_2..b_n)\cos k\omega t = 0 \qquad (3.1)$$

unde S_k, C_k sînt funcţii de amplitudinile a_1,a_n,b_1,b_n ale soluţiei periodice exprimate în armonici. Deoarece $\sin k\omega t$, $\cos k\omega t$ sînt funcţii liniare independente, aceşti termeni trebuie să fie nuli, adică:

$$S_k\,(a_1,a_2..a_n,b_1,b_2..b_n) = 0$$
$$C_k\,(a_1,a_2..a_n,b_1,b_2..b_n) = 0 \qquad (3.2)$$

ceea ce conduce la un sistem de 2n ecuaţii cu 2n necunoscute: $a_1,a_2..a_n,b_1,b_2..b_n$.

Principiul balanţei armonice se aplică circuitelor neliniare în felul următor:

- Se scriu ecuaţiile diferenţiale ale circuitelor electrice neliniare.

- Se aproximează caracteristicile neliniare printr-o expresie analitică care se înlocuieşte în ecuaţiile circuitelor.

- Soluţiile căutate sînt scrise sub forma :

$$y(t) = a_1\sin\omega t + b_1\cos\omega t + \ldots + a_k\sin k\omega t + b_k\cos k\omega t \qquad (3.3)$$

sau $y(t) = A_1\sin(\omega t+\varphi_1) + \ldots + A_k\sin(k\omega t+\varphi_k)$ (3.4)

In formula (3.3) soluţia $y(t)$ căutată este determinată prin amplitudinile a_1, b_1 ale armonicii fundamentale şi prin amplitudinile armonicilor de gradul superior a_k, b_k. In formula (3.4) soluţia $y(t)$ căutată este determinată prin amplitudinea A_1 şi faza φ_1 a armonicii fundamentale şi prin amplitudinile A_k şi fazele φ_k ale armonicilor de gradul superior.

Prin principiul balanţei armonice amplitudinile armonicilor sînt determinate în modul următor: Substituind soluţia (3.3) sau (3.4) în ecuaţiile circuitelor electrice neliniare se obţine ecuaţia de forma:

$$S_1(a_1,b_1,a_k,b_k)\sin\omega t+C_1(a_1,b_1,a_k,b_k)\cos\omega t+S_k(a_1,b_1,a_k,b_k)\sin k\omega t+$$
$$+\ C_k(a_1,b_1,a_k,b_k)\cos k\omega t + \sum armonici = 0 \qquad (3.5)$$

Pentru determinarea amplitudinilor (sau fazelor) identificăm armonicile de acelaşi ordin şi obţinem 2k ecuaţii algebrice sau 2k ecuaţii transcendente de forma:

$$\begin{cases} S_1\ (a_1,\ b_1,\ a_k,\ b_k) = 0 \\ C_1\ (a_1,\ b_1,\ a_k,\ b_k) = 0 \\ S_k\ (a_1,\ b_1,\ a_k,\ b_k) = 0 \\ C_k\ (a_1,\ b_1,\ a_k,\ b_k) = 0 \end{cases} \qquad (3.6)$$

In general sistemul de ecuaţii (3.6) este un sistem de ecuaţii algebrice neliniare care se poate rezolva prin metode aproximative:

Cînd caracteristica neliniară se aproximează printr-un polinom de puteri de forma:

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \dots \alpha_n i^n \qquad (3.7)$$

funcţia de excitaţie este sinusoidală $u = U_m \sin\omega t$, pentru determinarea răspunsului i trebuie să folosim expresiile trigonometrice de forma :

$$\sin^2\omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t$$

$$\sin^3\omega t = \frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin 3\omega t$$

$$\sin^4\omega t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t + \frac{1}{8}\cos 4\omega t \tag{3.8}$$

$$\sin^5\omega t = \frac{5}{8}\sin\omega t - \frac{5}{16}\sin 3\omega t + \frac{1}{16}\sin 5\omega t$$

$$\cos^2\omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t$$

$$\cos^3\omega t = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

$$\cos^4\omega t = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t + \frac{1}{8}\cos 4\omega t$$

$$\cos^5\omega t = \frac{5}{8}\cos\omega t + \frac{5}{16}\cos 3\omega t + \frac{1}{16}\cos 5\omega t$$

Cînd caracteristica neliniară se aproximează printr-un polinom trigonometric descompunerea armonică se bazează pe funcţiile Bessel de argument real:

$$y = \alpha\sin\beta x = \alpha\sin(\beta X_m \sin\omega t) = \alpha\sin(A_m \sin\omega t)$$
$$y = \alpha\cos\beta x = \alpha\cos(\beta X_m \sin\omega t) = \alpha\cos(A_m \sin\omega t) \tag{3.9}$$
$$y = \alpha\sin\beta x = \alpha\sin(\beta X_m \cos\omega t) = \alpha\sin(A_m \cos\omega t)$$
$$y = \alpha\cos\beta x = \alpha\cos(\beta X_m \cos\omega t) = \alpha\cos(A_m \cos\omega t)$$

care se descompun în serii Fourier:

$$y = \alpha\sin(A_m\sin\omega t) = 2\alpha J_1(A_m)\sin\omega t + 2\alpha J_3(A_m)\sin 3\omega t + $$
$$+ 2\alpha J_5(A_m)\sin 5\omega t + \dots$$
$$y = \alpha\sin(A_m\cos\omega t) = 2\alpha J_1(A_m)\cos\omega t - 2\alpha J_3(A_m)\cos 3\omega t +$$
$$+ 2\alpha J_5(A_m)\cos 5\omega t + \dots \tag{3.10}$$
$$y = \alpha\cos(A_m\sin\omega t) = \alpha J_0(A_m) + 2\alpha J_2(A_m)\cos 2\omega t + 2\alpha J_4(A_m)\cos 4\omega t + \dots$$
$$y = \alpha\cos(A_m\cos\omega t) = \alpha J_0(A_m) - 2\alpha J_2(A_m)\cos 2\omega t + 2\alpha J_4(A_m)\cos 4\omega t + \dots$$

Cînd caracteristica neliniară se aproximează printr-o funcție exponențială descompunerea armonică se bazează pe funcțiile Bessel de argument imaginar.

$$y = \alpha e^{\beta X_m \sin\omega t} = \alpha e^{A_m \sin\omega t} \qquad (3.11)$$

$$y = \alpha e^{\beta X_m \cos\omega t} = \alpha e^{A_m \cos\omega t}$$

care se descompun în serii de forma:

$$y = \alpha e^{A \sin\omega t} = \alpha J_0(jA_m) + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(jA_m)\cos 2n\omega t -$$

$$- 2j\alpha \sum_{n=0}^{\infty} J_{(2n+1)}(jA_m)\sin(2n+1)\omega t$$

$$y = \alpha e^{A_m \cos t} = \alpha J_0(jA_m) + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} j^{-n} J_n(jA_m)\cos n\omega t \qquad (3.12)$$

Cînd caracteristica neliniară se aproximează printr-o funcție transcendentă descompunerea armonică se bazează pe funcțiile Bessel de argument imaginar :

$$y = \alpha \operatorname{sh}(\beta X_m \sin\omega t) = \alpha \operatorname{sh}(A_m \sin\omega t) =$$

$$= -2j\alpha J_1(jA_m)\sin\omega t - 2j\alpha J_3(jA_m)\sin 3\omega t - 2\alpha j J_5(jA_m)\sin 5\omega t$$

$$y = \alpha \operatorname{ch}(\beta X_m \cos\omega t) = \alpha \operatorname{ch}(A_m \cos\omega t) =$$

$$= \alpha J_0(jA_m) + 2\alpha J_2(jA_m)\cos 2\omega t + 2\alpha J_4(jA_m)\cos 4\omega t \qquad (3.13)$$

Pentru regimul nerezonanței armonicile superioare sînt mici ($U_k < 0{,}1\ U_1$) ecuațiile (3.6) se pot rezolva prin metoda apropierii consecutive, metoda punctelor de coincidență [2].

In prima aproximație se neglijează armonicile superioare și rezultă două ecuații pentru determinarea amplitudinilor armonicii fundamentale:

$$S_1(a_1^o, b_1^o, o, o) = 0, \qquad C_1(a_1^o, b_1^o, o, o) = o \qquad (3.14)$$

Amplitudinile armonicilor superioare se găsesc prin ecuațiile următoare:

$$S_2(a_1^o, b_1^o, a_2, b_2) = 0, \quad C_2(a_1^o, b_1^o, a_2, b_2) = 0 \qquad (3.15)$$

Tinînd seama de influența armonicilor superioare asupra armonicilor fundamentale se calculează termenii corectivi Δa_1, Δb_1.

In acest scop descompunem amplitudinile armonicii fundamentale a_1 și b_1 în ecuația (3.14) în serie Taylor și rămîn numai termenii de gradul întîi

$$\begin{cases} S_1\ (a_1^o + \Delta a_1,\ b_1^o + \Delta b_1,\ \ o + a_2,\ o + b_2) = 0 \\ C_1\ (a_1^o + \Delta a_1,\ b_1^o + \Delta b_1,\ \ o + a_2,\ o + b_2) = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} S_1(a_1^o+\Delta a_1,\ b_1^o+\Delta b_1,\ o+a_2,\ o+b_2) = S_1(a_1^o, b_1^o, o, o) + \Delta a_1 \alpha_1 + \\ +\Delta b_1 \beta_1 + a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 = 0 \\ C_1(a_1^o+\Delta a_1,\ b_1^o+\Delta b_1,\ o+a_2,\ o+b_2) = C_1(a_1^o b_1^o, o, o) + \Delta a_1 \gamma_1 + \Delta b_1 \sigma_1 + \\ + a_2 \gamma_2 + b_2 \sigma_2 = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

unde

$$\alpha_1 = \left(\frac{\partial S_1}{\partial a_1}\right)_{a_1^o, b_1^o, o, o} \qquad \alpha_2 = \left(\frac{\partial S_1}{\partial a_2}\right)_{a_1^o, b_1^o, o, o}$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\partial S_1}{\partial b_2}\right)_{a_1^o, b_1^o, o, o} \qquad \beta_2 = \left(\frac{\partial S_1}{\partial b_2}\right)_{a_1^o, b_1^o, o, o}$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{\partial C_1}{\partial a_1}\right)_{a_1^o, b_1^o, o, o} \qquad \gamma_2 = \left(\frac{\partial C_1}{\partial a_2}\right)_{a_1^o, b_1^o, o, o} \tag{3.18}$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{\partial C_2}{\partial b_1}\right)_{a_1^o, b_1^o, o, o} \qquad \sigma_2 = \left(\frac{\partial C_1}{\partial b_2}\right)_{a_1^o, b_1^o, o, o}$$

deoarece $S_1(a_1^o, b_1^o, o, o) = 0$; $C_1(a_1^o, c_1^o, o, o) = 0$ din ecuația (3.17).

se obține:

$$\Delta a_1 = \frac{\begin{vmatrix} (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2)\ \beta_1 \\ (a_2\gamma_2 + b_2\sigma_2)\ \sigma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \sigma_1 \end{vmatrix}}; \quad \Delta b_1 = \frac{\begin{vmatrix} (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2)\alpha_1 \\ (a_2\gamma_2 + b_2\sigma_2)\ \gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \sigma_1 \end{vmatrix}} \tag{3.19}$$

In regimul rezonanţei caracteristica de magnetizare în general se aproximează prin relaţia:

$$i = a\psi^{m} \; ; \; m = 3,\ 5,\ 7,\ 9\ldots \qquad (3.20)$$

In acest caz nu putem neglija armonicile superioare deoarece în cîteva cazuri armonica a treia poate fi aproape sau mai mare decît armonica fundamentală.

Folosirea metodei balanţei armonice pentru studiul regimului de rezonanţă prezintă următoarele dificultăţi:

1) Descompunerea armonică a expresiei $\left[X_m \sin(m\omega t+\varphi_m)+ + X_k \sin(k\omega t+\varphi_k)\right]^n$ pentru n mare, este dificilă.

2) Rezolvarea sistemului de ecuaţii algebrice sau transcendente de grad mare necesită un volum de calcul laborios.

In [14], [15], [16] Ilin a prezentat algoritmul pentru descompunerea armonică a sumei funcţiilor trigonometrice de forma:

$$\left[\sum_{0}^{K} X_k \cos\,(k\tau+\varphi_k)\right]^n \; ; \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \qquad (3.21)$$

La început se descompune suma a doua armonicii ridicate la puterea n.

$$\left[X_k \cos\,(k\tau+\varphi_k) \pm X_m \cos\,(m\tau+\varphi_m)\right]^n \qquad (3.22)$$

Coeficienţii care rezultă în urma descompunerii au următoarele proprietăţi:

1) n impar: de exemplu k = 3, m = 1 şi n = 5. Amplitudinile armonicilor funcţiei (3.22) sînt trecute în tabelul 3.2.

Funcţia conţine $N = \frac{1}{2}(n+1)^2 = 18$ termeni care se repartizează în $\frac{1}{2}(n+1) = 3$ grupe de cîte $n+1 = 6$ termeni în fiecare grup.

Primul grup conţine armonicile începînd cu kn, al doilea cu armonica kn $-(k+m)$ iar al treilea cu kn $-2(k+m)$. Fazele armonicilor din primul grup sînt egale cu $\varphi_k(p-\lambda)+\varphi_m(\lambda-1)$ în care p reprezintă numărul termenilor din primul grup iar $\lambda=1,2..p$. Cel din al doilea grup se va exprima în forma $\varphi_k[p-(\lambda+1)]+\varphi_m(\lambda-2)$

iar al treilea grup are fazele $\varphi_k\left[p-(\lambda+2)\right] + \varphi_m(\lambda-3)$

Amplitudinile armonicilor respective se obţin prin înmulţirea factorilor din rubrica 2 cu coeficienţii menţionaţi în dreptul armonicilor şi însumînd rezultatul obţinut. De exemplu armonica de ordinul 5 are amplitudinile

$$X_1^5 + 2o\ X_1^4X_3 + 3o\ X_1^3X_3^2 + 3o\ X_1^2X_3^3 + 2o\ X_1X_3^4 .$$

Elementele din prima şi ultima coloană ale şirurilor sînt factorii din rubrica a doua 1 $X_3^5 \pm 5\ X_3^4X_1 \ldots$ De asemenea suma elementelor pe coloana şirurilor dintr-un grup este egală cu elementul din prima coloană. De exemplu pentru grupul al doilea avem succesiv: 1+4 = 5, 2+3 = 5, 3+2 = 5, 4+1 = 5 şi 5. Suma tuturor elementelor şirurilor din orice coloană a şirurilor din rubrica a doua este egală cu 2^{n-1}, în cazul nostru 16. Suma elementelor unui şir corespunzător unui grup are valoare constantă dar diferită de la grup la grup.

Dacă se notează cu β_i primul element de pe coloană corespunzător grupului i (în cazul nostru $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 5$, , $\beta_3 = 1o$) atunci se observă că ultima sumă de mai sus se poate scrie $\frac{\beta i}{i}$ (n+1)

Coeficienţii şirurilor diagonale se bucură de următoarele proprietăţi:

Grupul întîi are un singur şir (1,1...1), al doilea grup are două şiruri (1,2,3,4,5 ; 5, 4, 3,2,1), al treilea are trei şiruri,etc. Numărul elementelor din şirul unui grup este acelaşi. De exemplu pentru şiruri din grupa 3-a numărul elementelor unui şir este 4. Numărul elementelor din şirul unui grup sînt: n+1, n , n-1, n-2...

Constatăm că elementele şirurilor din tabelul 3.2 sînt coeficienţii triunghiului Pascan,

2) n par:

De exemplu dacă $k = 3$, $m = 1$, $n = 4$ amplitudinile armonicilor funcţiei (3.22) sînt prezentate în tabelul 3.1. Funcţia conţine $N = \frac{n}{2}(n+2)+1 = 13$ termeni care se repartizează în $\frac{n+2}{3} = 3$ grupe.

Primele două grupe conţin cîte n+1 termeni, iar ultima grupă este necompletă, ea se termină cu un termen constant. Ordinul armonicilor se reduce la 2. In afară de aceste diferenţe, armonicile au proprietăţile descrise mai sus. Există şi alte metode prin care se calculează armonicile determinate de suma unor funcţii sinusoidale ridicate la puterea n. De exemplu în [14] se determină algoritmul de descompunere al expresiei de forma:

$$\left[C \pm X_1\cos(\tau+\varphi_1) \pm X_2\cos(2\tau+\varphi_2) \pm X_3\cos(3\tau+\varphi_3)+\dots\right]^n \quad (3.23)$$

Folosind algoritmul descompunerii armonice al lui Ilin în [15] se dezvoltă o metodă de calcul a armonicilor în circuite cu ferorezonanţă.

Procesul în circuit este descris de ecuaţia :

$$\frac{d\psi}{dt} + ri + \frac{1}{c}\int i\,dt = U_m \sin(l\omega t + \varphi_1) \quad (3.24)$$

unde caracteristica de magnetizare se aproximează prin relaţia $i = a\psi^n$.

Ecuaţia diferenţială normată din (3-24) are forma:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \delta\frac{dx^n}{d\theta} + x^n = V\cos(l\theta + \varphi_1) \quad (3.25)$$

Soluţia periodică a lui (3.25) se încearcă sub forma:

$$x = X_m\cos\theta + X_k\cos(k\theta + \varphi) \quad (3.26)$$

În cazul $n = 5$, $m = l = 1$, $k = 3$ trebuie să calculăm expresia:

$$\left[X_1\cos\theta + X_3\cos(3\theta+\varphi)\right]^5 = X_1^5\left[\cos\theta + \gamma\cos(3\theta+\varphi)\right]^5 \quad (3.27)$$

unde $\gamma = \frac{X_3}{X_1}$.

Tabelul 3.1

Descompunerea armonică a sumei funcţiilor trigonometrice.

Cazul n par.

N	Membrii comuni ai armonicilor					Armonici	Grupe
	$1x_1^4$	$\pm 4x_3^3x_1$	$6x_3^2x_1^2$	$\pm 4x_3x_1^3$	$1x_1^4$		
1	1					$\cos(12\xi+4\varphi_3+0\varphi_1)$	
2		1				$\cos(10\xi+3\varphi_3+1\varphi_1)$	întii
3.			1			$\cos(8\xi+2\varphi_3+2\varphi_1)$	
4				1		$\cos(6\xi+1\varphi_3+3\varphi_1)$	
5					1	$\cos(4\xi+0\varphi_3+4\varphi_1)$	
6		1				$\cos(8\xi+3\varphi_3-1\varphi_1)$	
7	4		2			$\cos(6\xi+2\varphi_3+0\varphi_1)$	al doilea
8		3		3		$\cos(4\xi+1\varphi_3+1\varphi_1)$	
9			2		4	$\cos(2\xi+0\varphi_3+2\varphi_1)$	
10				1		$\cos(0\xi-1\varphi_3+3\varphi_1)$	
11			1			$\cos(4\xi+2\varphi_3-2\varphi_1)$	
12		3		3		$\cos(2\xi+1\varphi_3-1\varphi_1)$	al treilea
13	3		2		3	$\cos(0\xi+0\varphi_3-0\varphi_1)$	

Prin algoritmul lui Ilin se obţine descompunerea armonică a expresiei (3.27).

$$\frac{1}{16} X_1^5\left[(10+60\gamma^2+30\gamma^4)\cos\theta+(20\gamma+30\gamma^3)\cos(\theta+\varphi)+5\gamma\cos(\theta-\varphi)\right] =$$

$$\frac{1}{16} X_1^5\left[A_1\cos\theta + A_2\cos(\theta+\varphi) + A_3\cos(\theta-\varphi)\right] \qquad (3.28)$$

$$\frac{1}{16} X_1^5\left[(30\gamma+60\gamma^3+10\gamma^5)\cos(3\theta+\varphi)+(5+20\gamma^2)\cos 3\theta+10\gamma^2\cos(3\theta+2\varphi)\right] =$$

$$\frac{1}{16} X_1^5\left[A_4\cos(3\theta+\varphi)+ A_5\cos 3\theta + A_6\cos(3\theta+2\varphi)\right] \qquad (3.29)$$

Ecuaţia balanţei armonice pentru ecuaţia (3.25) are forma:

$$\frac{1}{16}X_1^5\Big\{A_1\big[\cos\theta-\xi\sin\theta\big]+A_2\big[\cos(\theta+\varphi)-\xi\sin(\theta+\varphi)\big]+A_3\big[\cos(\theta-\varphi)-$$

$$-\xi\sin(\theta-\varphi)\big]-\dot{X}_1\cos\theta\Big\} = V\cos(\theta+\varphi) \qquad (3.30)$$

$$\frac{1}{16}X_1^4\Big\{A_4\big[\cos(3\theta+\varphi)-3\xi\sin(3\theta+\varphi)\big]+A_5\big[\cos 3\theta-3\xi\sin 3\theta\big]+$$

$$+A_6\big[\cos(3\theta+2\varphi)-3\xi\sin(3\theta+2\varphi)\big]\Big\}-9\gamma\cos(3\theta+\varphi) = 0 \qquad (3.31)$$

Din ecuaţia (3.31) se obţine ecuaţia pe care o satisface necunoscuta:

$$\left.\begin{aligned} &X_1^4\big[A_4+(A_5+A_6)\cos\varphi+3\xi(A_5-A_6)\sin\varphi\big] = 114\gamma \\ &3\xi A_4+3\xi(A_5+A_6)\cos\varphi-(A_5-A_6)\sin\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.32)$$

Ultima ecuaţie nu conţine X_1, de aceea putem determina amplitudinea şi faza necunoscutei în mod simplu. Din (3.32) se obţine

$$X_1 = \sqrt[4]{\frac{114\gamma}{A_4+(A_5+A_6)\cos\varphi+3\xi(A_5-A_6)\sin\varphi}}$$

$$\cos\varphi = -\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \qquad \sin\varphi = \frac{b_1+\sqrt{b_1^2-ac_1}}{a} \qquad (3.33)$$

unde $a = 9\xi^2(A_5+A_6)^2+(A_5-A_6)^2$

$b = 9\xi^2A_4(A_5+A_6)$

$c = 9\xi^2A_4^2-(A_5-A_6)^2$

$b_1 = -3\xi A_4(A_5-A_6)$

$c_1 = 9\xi^2\big[A_4^2-(A_5+A_6)^2\big]$

In mod analog pentru ecuaţia (3.30) se obţine relaţia pentru determinarea termenului sinusoidal şi cosinusoidal al lui V şi al lui φ_1 :

$$\begin{cases} V_{cos} = \frac{1}{16}X_1^5\big[A_1+(A_2+A_3)\cos\varphi-\xi(A_2-A_3)\sin\varphi\big]-\dot{X}_1 \\ V_{sin} = -\frac{1}{16}X_1^5\big[\xi A_1+\xi(A_2+A_3)\cos\varphi+(A_2-A_3)\sin\varphi\big] \end{cases} \qquad (3.34)$$

$$\varphi_1 = \text{arctg}\,\frac{V_{cos}}{V_{sin}}$$

Tabolul 3.2.

Descompunerea armonică a sumei funcţiilor trigonometrice.

Cazul n impar.

N	Membrii comuni ai armonicilor						Armonici	Grupe
	$1X_3^5$	$\pm 5X_3^4X_1$	$10X_3^3X_1^2$	$\pm 10X_3^2X_1^3$	$5X_3X_1^4$	$\pm 1X_1^5$		
1	1						$\cos(15\psi+5\varphi_3+0\varphi_1)$	
2		1					$\cos(13\psi+4\varphi_3+1\varphi_1)$	întîi
3			1				$\cos(11\psi+3\varphi_3+2\varphi_1)$	
4				1			$\cos(9\psi+2\varphi_3+3\varphi_1)$	
5					1		$\cos(7\psi+1\varphi_3+4\varphi_1)$	
6						1	$\cos(5\psi+0\varphi_3+5\varphi_1)$	
7		1					$\cos(11\psi+4\varphi_3-1\varphi_1)$	
8	5		2				$\cos(9\psi+3\varphi_3+0\varphi_1)$	
9		4		3			$\cos(7\psi+2\varphi_3+1\varphi_1)$	al doilea
10			3		4		$\cos(5\psi+1\varphi_3+2\varphi_1)$	
11				2		5	$\cos(3\psi+0\varphi_3+3\varphi_1)$	
12					1		$\cos(1\psi-1\varphi_3+4\varphi_1)$	
13			1				$\cos(7\psi+3\varphi_3-2\varphi_1)$	
14		4		3			$\cos(5\psi+2\varphi_3-1\varphi_1)$	
15	10		6		6		$\cos(3\psi+1\varphi_3-0\varphi_1)$	al treilea
16		6		6		10	$\cos(1\psi+0\varphi_3+1\varphi_1)$	
17			3		4		$\cos(-1\psi-1\varphi_3+2\varphi_1)$	
18				1			$\cos(-3\psi-2\varphi_3+3\varphi_1)$	

Coeficienţii de calcul $A_1 \div A_6$ depind numai de γ, unde $\gamma = 0 \div 1$ care sînt prezentaţi într-un tabel în [16].

Prin folosirea metodei de calcul prezentate mai sus putem evita rezolvarea unor ecuaţii algebrice de grad superior sau a unor ecuații transcendente, motiv pentru care volumul de calcul se reduce simțitor.

3.2. Metoda balanței armonice modificate.

După cum se știe rezolvarea sistemului de 2n ecuații algebrice neliniare sau transcendente (3-6) obținut din metoda balanței armonice este laborioasă. In cele ce urmează vom prezenta o metodă mai simplă pentru determinarea amplitudinilor și fazelor armonicilor în cazul cînd elementele neliniare au caracteristici simetrice impare, iar răspunsul este impar sau cu valori egale și de semne opuse pe semiperioade.

In general într-un anumit circuit tensiunea considerată funcție periodică este defazată de curba curentului cu faza $\varphi_1 = \omega t_1$ (fig.3.1)

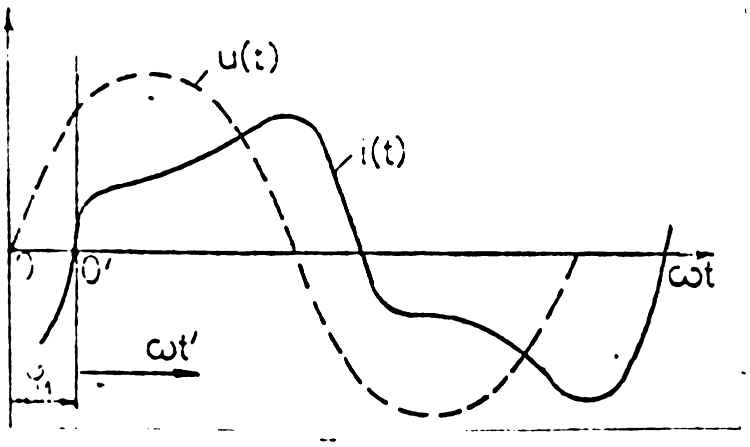


Fig.3.1.

Dacă se schimbă originea de la O la O' după faza $\varphi_1 = \omega t_1$, adică se face schimbare de variabilă $t = t_1 + t'$, în raport cu coordonata de referință t' răspunsul, considerat impar, satisface condiția : $i(t') = -i(-t')$

Dezvoltînd i(t') în serie Fourier, obținem termeni în $\sin k\omega t$

$$i(t') = A_1 \sin\omega t' + A_2 \sin 2\omega t' + \ldots A_k \sin k\omega t' \qquad (3.35)$$

In electrotehnică este răspîndită unda periodică nesinusoidală cu valori egale și de semne opuse pe semiperiodice care se dezvoltă în serie Fourier.

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \sin(2k+1)\omega t + \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \cos(2k+1)\omega t \qquad (3.36)$$

în raport cu t' descompunerea lui i(t) este :

$$i(t') = \sum_{k=0}^{\infty} A'_{2k+1} \sin(2k+1)\omega t' + \sum_{k=0}^{\infty} B'_{2k+1} \cos(2k+1)\omega t' \qquad (3.37)$$

în care B'_{2k+1} este mai mic decît B_{2k+1} în raport cu t, pentrucă în raport cu t' funcţia este mai aproape de funcţia impară decît în coordonata t.

De exemplu fie funcţia sinusoidală de forma din (fig.3.2)

$$y = A_m \sin(\omega t - \varphi) = A_m \cos\varphi \sin\omega t - A_m \sin\varphi \cos\omega t$$

$$= A_1 \sin\omega t - B_1 \cos\omega t$$

în raport cu coordonata t' funcţia este:

$$y = A'_1 \sin\omega t'$$

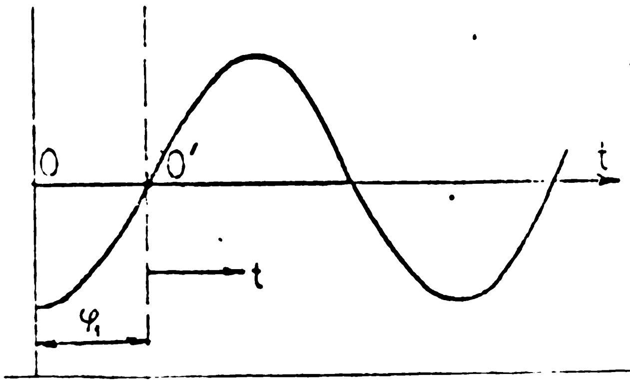


Fig.3.2.

adică funcţia căutată în raport cu t' conţine numai o armonică. Dacă se găseşte t_1 atunci numărul de ecuaţii algebrice sau transcendente prin metoda balanţei armonice se reduce la jumătate. Se vede uşor că t_1 este funcţie de rezistenţa dinamică, de inductivitatea dinamică, de capacitatea dinamică şi de semnalul de excitaţie...

Studiem metoda determinării lui t_1 în cazuri concrete.

A. Cazul răspunsului impar:

3.2.1. Circuitul R, L serie cu bobină neliniară

Se dă circuitul R, L serie (fig.3.3) unde bobina neliniară are o caracteristică simetrică impară (fig.3.4).

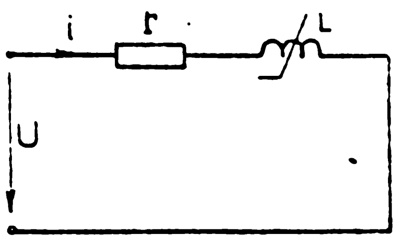


Fig.3.3.

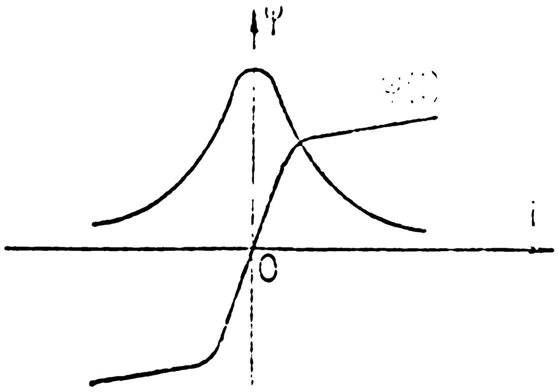


Fig.3.4.

Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuitul din fig.3.3 are forma:

$$u = ri + L_d(i) \cdot \frac{di}{dt} \tag{3.38}$$

In coordonata de referință t' ecuația (3.38) devine:

$$u(t') = ri(t') + L_d(i) . \frac{di}{dt'} \tag{3.39}$$

In originea t' = o deoarece i = o rezultă:

$$u(o) = L_d(o) . \left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=o} \tag{3.40}$$

adică

$$\left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=o} = \frac{u(o)}{L_d(o)} \tag{3.41}$$

Derivînd ecuația (3.39) în raport cu t' avem:

$$\frac{du}{dt'} = \frac{dL_d(i)}{dt'} \cdot \left(\frac{di}{dt'}\right)^2 + L_d(i) . \frac{d^2i}{dt'^2} + r . \frac{di}{dt'} \tag{3.42}$$

Din ecuația (3.42) a lui i(t') avem :

$\left(\frac{d^2i}{dt'^2}\right)_{t=o} = o$, $\frac{dL_d(o)}{di} = 0$ fiind $L_d(i)$ prezintă un maxim la i = 0

Substituind ecuația (3.41) în ecuația (3.42) rezultă:

$$\left(\frac{du}{dt'}\right)_{t'=o} = \frac{r}{L_d(o)} u(o) \tag{3.43}$$

In coordonata de referință t ecuația (3.43) devine:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=t_1} = \frac{r}{L_d(o)} u(t_1) \tag{3.44}$$

Ecuația (3.44) determină necunoscutul t_1.

In cazul particular în care semnalul de intrare este sinusoidal:

$u = U_m \sin\omega t$; $\frac{du}{dt} = \omega U_m \cos\omega t$ din ecuația (3.44) se obține :

$$U_m \cos\omega t_1 = \frac{r}{L_d(o)} \cdot U_m \sin\omega t_1$$

sau

$$tg\omega t_1 = \frac{\omega L_d(o)}{r}\text{ , adică } \varphi_1 = \omega t_1 = arctg\,\frac{\omega L_d(o)}{r} \qquad (3.45)$$

3.2.2. Circuitul R.C. serie cu condensator neliniar.

Se dă circuitul R,C serie (fig.3.5) unde condensatorul neliniar are o caracteristică simetrică impară(fig.3.6).

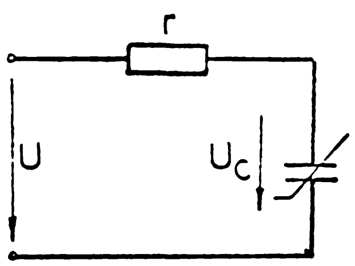


Fig.3.5.

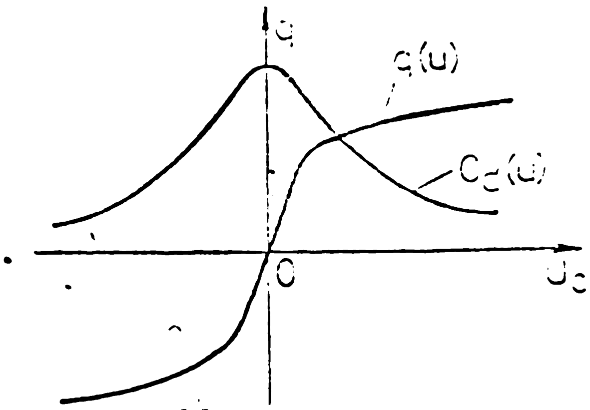


Fig.3.6.

Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru acest circuit conduce la:

$$u = ri + U_c \qquad (3.46)$$

unde $i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_c} \cdot \frac{du_c}{dt} = C_d(u) \cdot \frac{du_c}{dt}$ (3.47)

Substituind (3.47) în ecuaţia(3.46) se obţine:

$$u = r.C_d(u).\frac{du_c}{dt} + u_c \qquad (3.48)$$

In coordonata de referinţă t' ecuaţia (3.48) devine:

$$u(t') = r.C_d(u).\frac{du_c}{dt'} + u_c(t') \qquad (3.49)$$

In originea $t' = o$, $u_c = o$ se obţine:

$$u(o) = r.C_d(o).\left(\frac{du_c}{dt'}\right)_{t'=o} \text{ adică } \left(\frac{du_c}{dt'}\right)_{t'=o} =$$

$$= \frac{1}{r.C_d(o)}\,u(o) \qquad (3.50)$$

Derivînd (3.49) în raport cu t' avem :

$$\frac{du}{dt'} = r.\ \frac{dC_d}{du_c}.(\frac{du_c}{dt'})^2 + rC_d(u).\ \frac{d^2U_c}{dt'^2} + \frac{du_c}{dt'} \qquad (3.51)$$

Din ecuaţia (3.51) $\frac{d^2u_c}{dt'^2} = o$, iar $\frac{dC_d(o)}{du_c} = 0$ fiind

$C_d = C_d(u)$ prezintă un maxim la $u_c = 0$.

Substituind ecuaţia (3.5o) în ecuaţia (3.51)rezultă:

$$(\frac{du}{dt'})_{t'=o} = \frac{1}{rC_d(o)}\ u(o) \qquad (3.52)$$

In coordonata de referinţă t ecuaţia(3.52)devine :

$$(\frac{du}{dt'})_{t'=t_1} = \frac{1}{r.C_d(o)}\ u(t_1) \qquad (3.53)$$

Ecuaţia (3.53) determină necunoscutul t_1

In cazul particular în care semnalul de intrare este sinusoidal $u = U_m \sin\omega t$, din ecuaţia (3.53) se obţine:

$$tg\,\omega t_1 = \frac{1}{r.\omega.C_d(o)}\ ,\ \text{adică}\ \varphi_1 = \omega t_1 = arctg\ \frac{1}{r.\omega C_d(o)} \qquad (3.54)$$

3.2.3. Circuitul R,L secrie cu rezistenţa neliniară

Se dă circuitul R,L serie (fig.3.7) unde rezistorul neliniar este o caracteristică simetrică impară (fig.3.8).

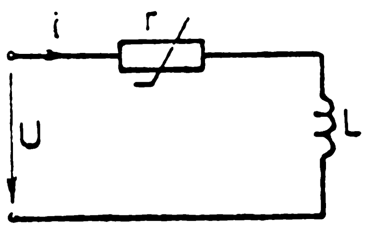


Fig.3.7.

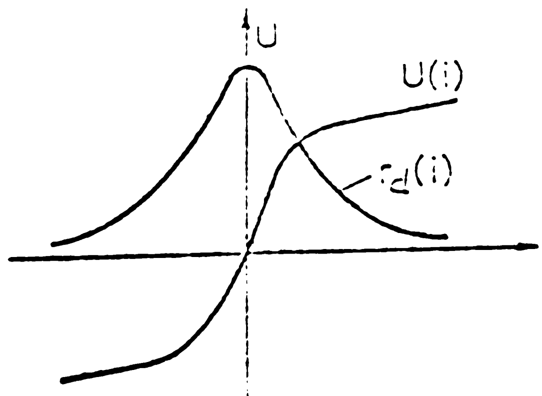


Fig.3.8.

Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru acest circuit conduce la :

$$u = u_R(i) + L\frac{di}{dt} = R(i).i + L\frac{di}{dt} \qquad (3.55)$$

In coordonata de referință t' ecuația (3.55) devine:

$$u(t') = R(i).i(t') + L\frac{di}{dt'} \qquad (3.56)$$

In originea t' = o deoarece i = o rezultă:

$$\left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=o} = \frac{u(o)}{L} \qquad (3.57)$$

Derivînd ecuația (3.56) în raport cu t' se obține:

$$\frac{du}{dt'} = \frac{dR}{di} \cdot \frac{di}{dt'}.i + R(i)\frac{di}{dt'} + L\frac{d^2i}{dt'^2} \qquad (3.58)$$

Din ecuația (3.58) avem $\frac{d^2i}{dt'^2} = 0$, iar $\frac{dR(o)}{di} = 0$ deoarece se presupune că

R = R(i) prezintă un maxim (sau minim) la i(t') = 0

Substituind (3.57) în ecuația (3.58) se obține:

$$\left(\frac{du}{dt'}\right)_{t'=o} = \frac{R(o)}{L}\,u(o) \qquad (3.59)$$

In coordonata de referință t ecuația (3.59) devine:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=t_1} = \frac{R(o)}{L}\,u(t_1) \qquad (3.60)$$

Ecuația (3.60) determină necunoscuta t_1.

In cazul particular în care semnalul de intrare este sinusoidal $u = U_m \sin\omega t$, din ecuația (3.60) se obține:

$$\operatorname{tg}\omega t_1 = \frac{\omega L}{R(o)} \quad \text{sau} \quad \varphi_1 = \omega t_1 = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R(o)} \qquad (3.61)$$

3.2.4. Circuitul R.C. serie cu rezistență neliniară.

Se dă circuitul R.C serie (fig.3.9) unde rezistorul neliniar are o caracteristică simetrică impară (fig. 3.8).

Ecuația a doua a lui Kirchhoff pentru acest circuit este:

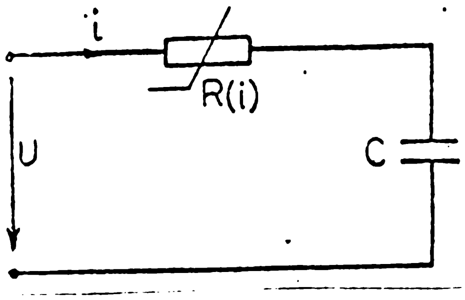


Fig.3.9.

$$u = u_R(i)+u_C = R(i).i + \frac{1}{c}\int i\,dt \qquad (3.62)$$

Derivînd ecuaţia (3.62)în raport cu t se obţine:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dR(i)}{di}\cdot\frac{di}{dt}.i + R(i).\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\,i \qquad (3.63)$$

In coordonata de referinţă t' ecuaţia (3.63) devine:

$$\frac{du}{dt'} = \frac{dR(i)}{di}\cdot\frac{di}{dt'}\,i + R(i).\frac{di}{dt'} + \frac{1}{c}\,i(t') \qquad (3.64)$$

In originea t' = 0 avem i(t') = 0

Derivînd ecuaţia (3.64) în raport cu t' se obţine:

$$\frac{d^2u}{dt'^2} = \frac{d^2R}{di^2}\left(\frac{di}{dt'}\right)^2 i + \frac{dR}{di}\,\frac{d^2i}{dt'^2}\,i + \frac{dR}{di}\left(\frac{di}{dt'}\right)^2 + \frac{dR}{di}\left(\frac{di}{dt'}\right)^2 + R\,\frac{d^2i}{dt'^2} + \frac{1}{c}\,\frac{di}{dt'} \qquad (3.65)$$

din ecuaţia (3.65) avem:

$$\left(\frac{d^2u}{dt'^2}\right)_{t'=0} = 2\left(\frac{dR}{di}\right)_{i=0}\left(\frac{di}{dt'}\right)^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=0} \qquad (3.66)$$

Pe de altă parte $\left(\frac{dR}{di}\right)_{i=0} = 0$,rezultă ecuaţia determinării t_1.

$$\left(\frac{d^2u}{dt'^2}\right)_{t'=0} = \frac{1}{CR(o)}\cdot\left(\frac{du}{dt'}\right)_{t'=0} \qquad (3.67)$$

In cazul particular în care semnalul de intrare este sinusoidal $u = U_m \sin\omega t$ din ecuaţia (3.67) avem:

$$tg\varphi_1 = \frac{1}{\omega C.R(o)} \text{ adică } \varphi_1 = \omega t_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\omega C.R(o)} \qquad (3.68)$$

B. Cazul răspunsului oarecare:

3.2.5. Circuitul R.L serie cu bobina neliniară.

Se dă circuitul R-L în serie(fig.3.3) unde bobina neliniară se aproximează printr-un polinom de forma $\psi(i) = ai-bi^3$ (3.69)

Inductivitatea dinamică a bobinei neliniare este:

$$L_d = \frac{d\psi}{di} = a - 3bi^2 \qquad (3.70)$$

Tensiunea de intrare este periodică $u(t) = u(t+T)$

Teorema a doua a lui Kirchhoff în acest caz este:

$$L_d \frac{di}{dt} + Ri = u(t) \qquad (3.71)$$

Răăpunsul satisface condiţia $i(t) = -i(t+\frac{T}{2})$

In raport cu coordonata de referinţă t' avem:

$$i(t') = -i(t' + \frac{T}{2})$$

Dacă se schimbă originea O la O', răspunsul este mai puţin diferit de funcţia impară. Dezvoltînd răspunsul i(t') în serie Fourier se obţine:

$$i(t') = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}\sin(2k+1)\omega t' + \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}\cos(2k+1)\omega t' \qquad (3.72)$$

In originea $t' = 0$ deoarece $i(o) = 0$ rezultă:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{(2k+1)} = 0 \qquad (3.73)$$

Derivînd ecuaţia (3.72) în raport cu t' se obţine

$$\left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=0} = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\omega A_{2k+1} \qquad (3.74)$$

$$\left(\frac{d^2i}{dt'^2}\right)_{t'=0} = -\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^2\omega^2 B_{2k+1} \qquad (3.75)$$

Din ecuaţia (3.71) se obţine:

$$u(o) = L_d(o) \cdot \left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=0} \quad \text{sau} \quad \left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=0} = \frac{u(o)}{L_d(o)} \qquad (3.76)$$

Derivînd ecuaţia (3.71) în raport cu t' se obţine:

$$\frac{dL_d}{di} \cdot \left(\frac{di}{dt'}\right)^2 + L_d \frac{d^2i}{dt'^2} + R\frac{di}{dt'} = \frac{du}{dt'}. \qquad (3.77)$$

$\left(\frac{dL_d}{di}\right)_{t'=0} = 0$ fiind $L_d(i)$ prezintă un maxim la $i = 0$.

Substituind (3.75) şi (3.76) în ecuaţia (3.77) se obţine:

$$L_d(o)\sum_{k=o}^{\infty}(2k+1)^2\omega^2 B_{2k+1} + R\,\frac{u(o)}{L_d(o)} = \left(\frac{du}{dt'}\right)_{t'=o} \qquad (3.78)$$

Ecuaţia (3.78) determină necunoscuta t_1.

Dacă răspunsul se ia cu armonica fundamentală şi a treia, adică:

$$i(t') = A_1\sin\omega t' + A_3\sin 3\omega t' + B_1\cos\omega t' + B_3\cos 3\omega t' \qquad (3.79)$$

Din ecuaţia (3.73)avem:

$$B_1 + B_3 = 0 \qquad (3.80)$$

Substituind (3.80) în ecuaţia (3.78) se obţine:

$$\left(\frac{du}{dt'}\right)_{t'=o} = \frac{R}{L_d(o)}\,.u(o) - L_d(o).\omega^2(B_1+9B_3)$$
$$= \frac{R}{L_d(o)}\,.\,u(o) + 8\omega^2 L_d(o).B_1 \qquad (3.81)$$

In prima aproximaţie $B_1^o = o$ din (3.80) rezultă $B_3^o = o$.

In aceasta ipoteză funcţia i(t') este aproximată cu una impară.

Ecuaţia (3.81) devine:

$$\frac{R}{L_d(o)}\,.\,u(o) = u'(o) \qquad (3.82)$$

în coordonata de referinţă t_1 avem ecuaţia determinării t_1^o:

$$\frac{R}{L_d(o)}\,.\,u(t_1^o) = u'(t_1^o) \qquad (3.83)$$

Cu metoda balanţei armonice se calculează A_1^o, A_3^o în prima aproximaţie. Apoi se încearcă soluţia de forma:

$$i(t') = A_1^o\sin\omega t' + A_3^o\sin 3\omega t' + B_1^o\cos\omega t' - B_1^o\cos 3\omega t' \qquad (3.84)$$

cu B_1^o ca mărime necunoscută. Metoda balanţei armonice permite să se calculeze B_1^o.

Ecuaţia (3.81) devine:

$$-8\omega^2 L_d(o)\, B_3 + \frac{R}{L_d(o)} \cdot u(t_1^1) = u'(t_1^1) \qquad (3.85)$$

se determină timpul t_1^1.

Se recalculează A_1^1, A_3^1. Procesul de calcul iterativ continuă pînă cînd $t_1^{(n)} \approx t_1^{(n-1)}$.

Se vede uşor că metoda balanţei armonice modificate are volum de calcul mai puţin decît metoda balanţei armonice.

3.2.6. Circuitul R,L serie cu rezistenţă neliniară.

Se dă circuitul R,L serie (fig.3.7), unde caracteristica rezistenţei neliniare se aproximează printr-un polinom

$$u_R(i) = ai - bi^3. \qquad (3.86)$$

Rezistenţa dinamică este : $R_d = \frac{du_R}{di} = a - 3bi^2$ (3.87)

Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru acest caz este:

$$u(t) = u_R(i) + L.\frac{di}{dt} = R_d(i).i + L\frac{di}{dt} \qquad (3.89)$$

In coordonata de referinţă t' ecuaţia(3.89)devine:

$$u(t') = R_d(i).i(t') + L\frac{di(t')}{dt'} \qquad (3.90)$$

In originea t' = 0 avem :

$$u(o) = L\left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=o} \qquad (3.91)$$

Răspunsul i(t') se dezvoltă în serie Fourier:

$$i(t') = \sum_{k=o}^{\infty} A_{(2k+1)}\sin(2k+1)\omega t' + \sum_{k=o}^{\infty} B_{(2k+1)}\cos(2k+1)\omega t'$$

In originea t' =o, deoarece i(o) = 0 rezultă

$$\sum_{k=o}^{\infty} B_{2k+1} = 0$$

Derivînd ecuaţia (3.90) în raport cu t' avem :

$$\frac{du}{dt'} = \left(\frac{di}{dt'}\right)\left[\frac{dR_d}{di}\, i(t') + R_d\right] + L\frac{d^2i}{dt'^2} \qquad (3.92)$$

Ținînd seama de ecuația (3.74) și (3.75) din ecuația (3.92) avem :

$$u'(o) = \frac{R_d}{L} u(o) - \omega^2 L \sum_{k=o}^{\infty} (2n+1)^2 B_{2n+1} \qquad (3.93)$$

Ecuația (3.93) determină necunoscuta t_1.
Raționamentul continuă ca în cazul precedent.

3.2.7. Circuitul R.L.C serie cu bobina neliniară.

Se dă circuitul R.L.C. serie unde bobina neliniară are caracteristică impară care se aproximează printr-un polinom (3.69). Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru acest caz este:

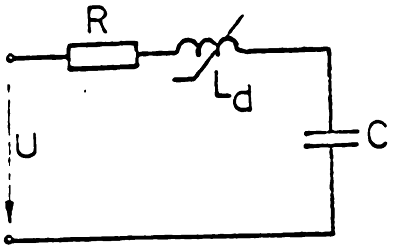


Fig.3.1o.

$$u = Ri + L_d \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt \qquad (3.94)$$

Derivînd ecuația (3.94) în raport cu t se obține:

$$\frac{du}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{dL_d}{di}\left(\frac{di}{dt}\right)^2 + L_d\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{c} \qquad (3.95)$$

In coordonata de referință t' ecuația (3.15) devine

$$\frac{du}{dt'} = R\frac{di}{dt'} + \frac{dL_d}{di}\left(\frac{di}{dt'}\right)^2 + L_d\frac{d^2i}{dt'^2} + \frac{i(t')}{c} \qquad (3.96)$$

In originea t' =o din ecuația (3.16) avem :

$$\left(\frac{du}{dt'}\right)_{t'=o} = R\left(\frac{di}{dt'}\right)_{t'=o} + L_d(o).\left(\frac{d^2i}{dt'^2}\right)_{t'=0} \qquad (3.97)$$

Ecuația (3.94) conduce la:

$$u(o) = \frac{L_d(o)}{R}\left[u'(o) - L_d\left(\frac{d^2i}{dt'^2}\right)_{t'=o}\right] + \frac{1}{c}\left(\int idt'\right)_{t'=o} \qquad (3.98)$$

Răspunsul i(t') se caută în serie Fourier:

$$i(t') = \sum_{k=o}^{\infty} A_{2k+1}\sin(2k+1)\omega t' + \sum_{k=o}^{\infty} B_{2k+1}\cos(2k+1)\omega t' \qquad (3.99)$$

$$\frac{d^2i}{dt'^2} = -\sum_{k=o}^{\infty}\omega^2(2k+1)^2 A_{2k+1}\sin(2k+1)\omega t' - \sum_{k=o}^{\infty}\omega^2(2k+1)^2 B_{2k+1}\cos(2k+1)\omega t' \qquad (3.100)$$

$$\left(\frac{d^2i}{dt'^2}\right)_{t'=o} = -\sum_{k=o}^{\infty}\omega^2(2k+1)^2 B_{2k+1}$$

$$\int i dt' = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k+1}}{(2k+1)\cdot\omega} \cos(2k+1)\omega t' + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)\omega} \sin(2k+1)\omega t'$$

(3.1o1)

$$\left[\int i dt'\right]_{t'=0} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k+1}}{(2k+1)\omega} \qquad (3.1o2)$$

Inlocuind (3.1oo), (3.1o2) în ecuaţia (3.98) avem:

$$u(o) = \frac{L_d(o)}{R}\left[u'(o) + L_d(o)\sum_{k=0}^{\infty}\omega^2(2k+1)^2 B_{2k+1}\right] - \frac{1}{\omega C}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_{2k+1}}{2k+1}$$

(3.1o3)

Ecuaţia (3.1o3) în coordonata de referinţă t devine:

$$u(t_1) = \frac{L_d(o)}{R}\left[u'(t_1) + L_1(o)\sum_{k=0}^{\infty}\omega^2(2k+1)^2 B_{2k+1}\right] - \frac{1}{\omega C}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_{2k+1}}{2k+1}$$

(3.1o4)

Ecuaţia (3.1o4) determină necunoscuta t_1.

Se trece la proces de iteraţie ca şi în § 3.2.5.

Deoarece $\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} = 0$ se presupune o singură armonică A_1^0. Ecuaţia (3.1o4) devine:

$$u(t_1^0) = \frac{L_d(o)}{R}\left[u'(t_1^0)\right] - \frac{1}{\omega C} A_1^0 \qquad (3.1o5)$$

Ecuaţia (3.1o5) împreună cu balanţa armonică determină necunoscutele A_1^0 şi t_1^0. Cu A_1^0 determinat se trece la A_3^0 în care ultimul termen al ecuaţiei (3.1o4) se înlocuieşte cu A_1^0 şi A_3^0 :

$$u(t_1^1) = \frac{L_d(o)}{R}\left[U'(t_1^1)\right] - \frac{1}{\omega C}(A_1^0 + \frac{A_3^0}{3}) \qquad (3.1o6)$$

împreună cu balanţa armonică se determină t_1^1 şi A_3^0. Procesul de calcul iterativ continuă pînă cînd $t_1^r \approx t_1^{r-1}$.

3.3. Exemplu de calcul:

Fie de rezolvat circuitul R.L serie (fig.3.11), unde rezistența neliniară are caracteristica: $u(i) = ai - bi^3$, $a = 45\Omega$, $b = 30\frac{\Omega}{A^2}$, $r_o' = 12\ \Omega$, $L_o = 0{,}05\ H_n$. Tensiunea sinusoidală U=25V, f = 50 Hz.

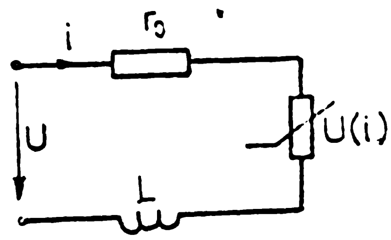


Fig.3.11

Rezolvare:

Problema se rezolvă cu metoda balanței armonice modificate. Ecuația diferențială a circuitului este:

$$u = (r_o + a)\, i + L\frac{di}{dt} - bi^3 . \qquad (3.107)$$

Din egalitatea (3.93) se obține ecuația pentru determinarea lui t_1:

$$\frac{du}{dt}(t_1) = \frac{(r_o+a)}{L}\, u(t_1) + 8\omega^2 L B_1 \qquad (3.108)$$

$u = U_m \sin\omega t$, $\frac{du}{dt} = \omega U_m \cos\omega t$, rezultă :

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\omega L}{r_o + a} - \frac{8\omega^2 L^2 B_1}{U_m (r_o+a)\cos\varphi_1} \qquad (3.109)$$

In prima aproximație se consideră că $B_1^o = 0$ soluția se caută sub forma:

$$i(t') = A_1 \sin\omega t' + A_3 \sin 3\omega t'$$

din (3.109) se obține: $\varphi_1^o = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{r_o+a} = \operatorname{arctg}\frac{15{,}7}{57} = 15^o 23'$

$$\frac{di}{dt'} = \omega A_1 \cos\omega t' + 3\omega A_3 \cos 3\omega t'$$

$$i^3 = (A_1 \sin\omega t' + A_3 \sin 3\omega t')^3 = \frac{A_1^3}{4}(3\sin\omega t' - \sin 3\omega t') +$$

$$+ \frac{3}{2}A_1^2 A_3 \sin 3\omega t - \frac{3}{4}A_1^2 A_3 \ (\sin\omega t + \sin 5\omega t) +$$

$$+ \frac{3}{2}A_1 A_3^2 \sin\omega t - \frac{3}{4}A_1 A_3^2 (\sin 7\omega t - \sin 5\omega t) + \frac{A_3^3}{4}(3\sin 3\omega t - \sin 9\omega t)$$

Identificînd armonici de acelaşi ordin din ecuaţia (3.1o7) se obţine ecuaţia balanţei armonice.

$$(r_o+a)\,A_1^o - \frac{3}{4}\,bA_1^{o3} + \frac{3b}{4}\,A_1^{o2}A_3^o - \frac{3}{2}bA_1^oA_3^{o2} = U_m\cos\varphi_1^o \quad (3.11oa)$$

$$(r_o+a)A_3^o + \frac{b}{4}\,A_1^{o3} - \frac{3b}{2}\,A_1^{o2}A_3^o - \frac{3b}{4}\,A_3^{o3} = 0 \qquad (3\text{-}11ob)$$

Deoarece $A_3 \ll A_1$ se neglijează A_3^o, în ecuaţia (3.11oa) rezultă:

$$A_1^o = \frac{U_m\cos\varphi_1^o}{r_o+a-\frac{3}{4}b\;A_1^{o2}} = \frac{34,08}{57-22,5A_1^{o2}} = 0,785$$

din ecuaţia (3.11ob) rezultă $A_3^o = \dfrac{-\frac{b}{4}\,A_1^{o3}}{r_o+a-\frac{3b}{2}\,A_1^{o2}-\frac{3}{4}\,bA_3^{o2}} =$

$$= \frac{-3,628}{28,63-22,5\;A_3^{o2}} = -0,125$$

In a doua aproximaţie se caută soluţia sub forma:

$$i(t')=A_1\sin\omega t'+A_3\sin3\omega t' + B_1(\cos\omega t' - \cos 3\omega t') \quad (3.111)$$

$$\frac{di}{dt'} = \omega A_1\cos\omega t' + 3\omega A_3\cos 3\omega t' - \omega B_1\sin3\omega t' + 3\omega B_1\sin3\omega t' \qquad (3.112)$$

Se înlocuiesc (3.111) şi (3.112) în ecuaţia (3.1o7) se obţine ecuaţiile balanţei armonice:

$$(r_o+a)\,A_1 - \omega L\,B_1 - \frac{3}{4}\,bA_1^3 + \frac{3}{4}\,bA_1^2A_3 - \frac{3}{2}\,bA_1A_3^2 - 3bA_1B_1^2 - \frac{3}{4}bA_3B_1^2 =$$

$$= U_m\cos\varphi_1 \qquad (3.113a)$$

$$(r_o+a)B_1+\omega LA_1 - \frac{3}{4}bA_1^2B_1 - \frac{3}{2}bA_1A_3B_1 - \frac{3}{2}bA_3^2B_1 - \frac{3}{4}bB_1^3 = U_m\sin\varphi_1 \qquad (3.113b)$$

$$(r_o+a)A_3+3\omega LB_1 + \frac{b}{4}\,A_1^3 - \frac{3}{2}\,bA_1^2A_3 - \frac{3}{4}bA_3^2 - \frac{3}{2}\,bA_1B_1^2 - \frac{3}{4}bA_3B_1^2 = 0 \qquad (3.113c)$$

$$-(r_o+a)B_1+3\omega LA_3 + \frac{3}{4}\,bA_1^2B_1 - 2bB_1^3 - \frac{3}{4}\,bA_3^2B_1 = 0 \qquad (3.113d)$$

Inlocuind $A_1^o = 0,785$, $A_3^o = -0,125$ în ecuaţia (3.11b)se obţine:

$$-47,92\ B_1^o - 22,5\ B_1^{o3} = -3,084$$

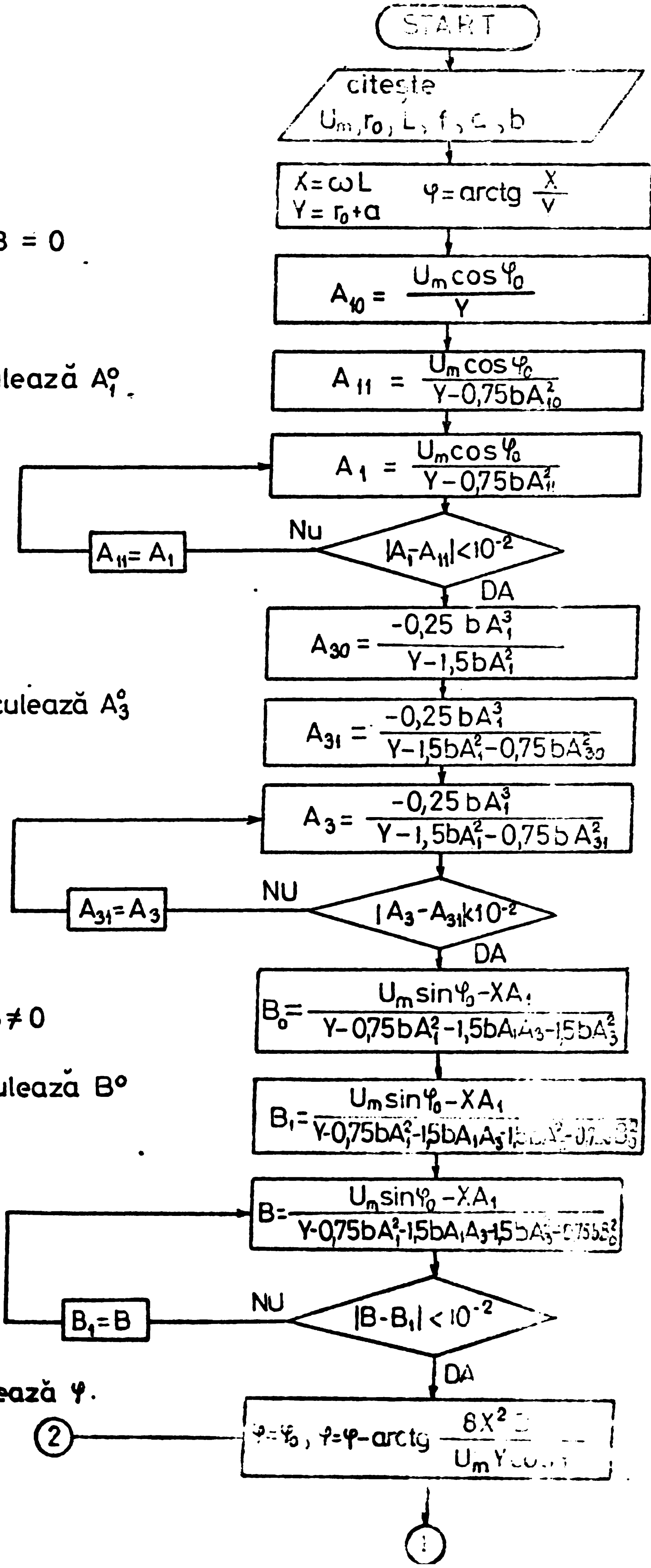
$$B_1^o = \frac{-3,084}{47,92-22,5B_1^{o2}} = -0,063$$

$$tg\varphi_1 = tg\varphi_1^o - \frac{8\omega^2 L^2 B_1^o}{U_m(r_o + a)\cos\varphi_1^o} = 0,330 \text{ rezultă } \varphi_1^1 = 18^o15'$$

Se recalculează A_1^1 şi A_3^1 după ecuaţia (3.113a) şi (3.113c) şi se obţine: $A_1^1 = 0,765$ şi $A_3^1 = -0,102$. Procesul de calcul se repetă. In fig.3.12 se prezintă schema logică după metoda balanţei armonice. Se scrie programarea BALMOD în limbaj FORTRAN. Dacă se ia $B < 0,0$ timpul de calcul este 1 minut. Amplitudinile armonicilor sînt: $A_1 = 0,7217$ A, $A_3 = -0,0642$ A, $\varphi_1 = 18^o47'$.

Rezultatul este verificat pe calculator analogic MEDA 42-TL (cap.VI) şi coincide cu cel obţinut cu alte metode (cap.IV).

SCHEMA LOGICA DUPA METODA BALANTEI ARMONICE MODIFICATE



A cazul B = 0

1. se calculează A_1^0.

2. se calculează A_3^0

B. cazul $B \neq 0$

3. se calculează B^0

4. se calculează φ.

5. se calculează A_1

6 se calculează A_3

7. se calculează B

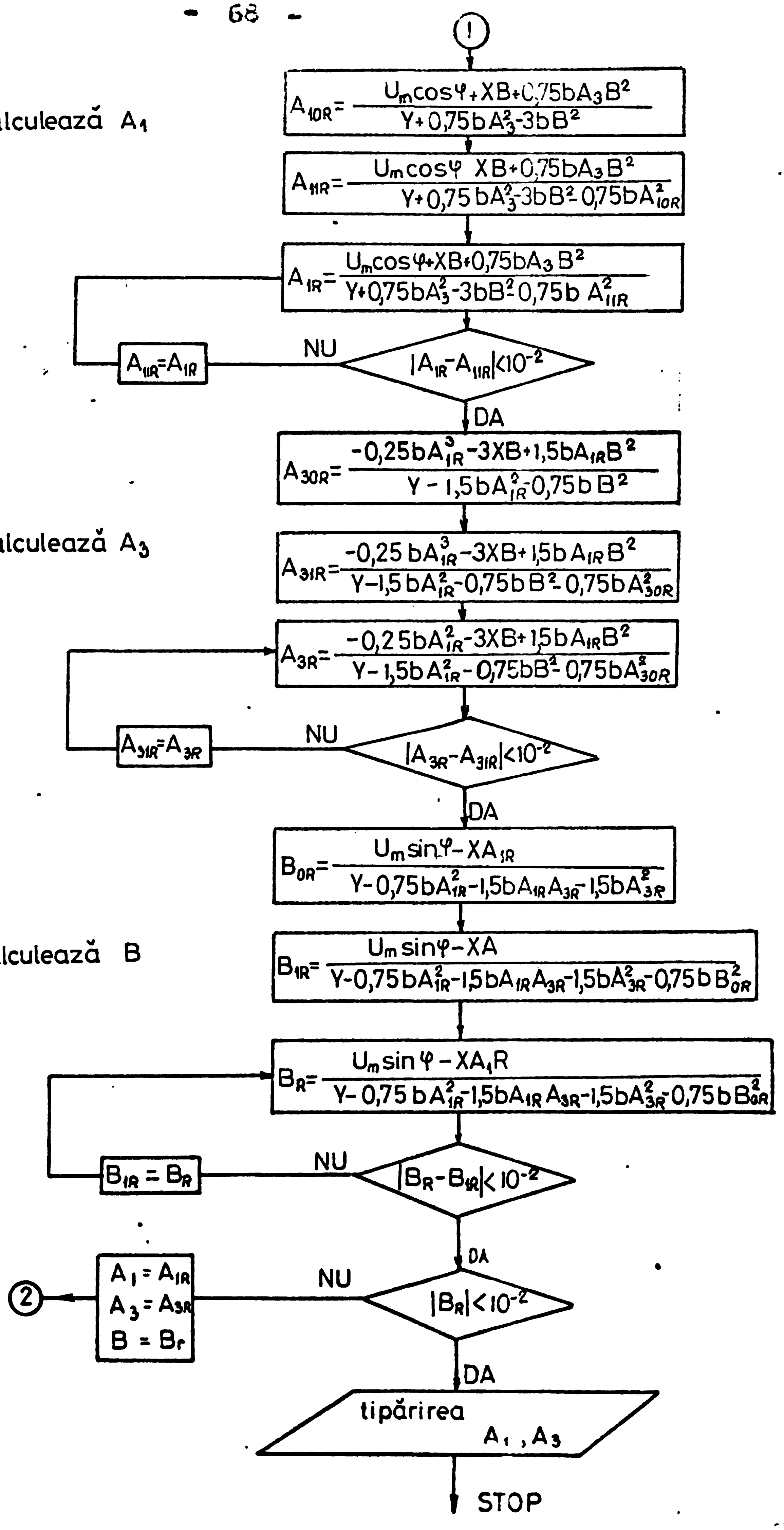


FIG. 3-12

CAPITOLUL IV.

ASUPRA TRANSFORMATEI IN PUNCTE SI IN COMPLEX

4.1. Consideraţii generale despre transformata în puncte [29]

Elaborarea metodelor de calcul simple şi eficiente pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale neliniare întîlnite în teoria circuitelor joacă un rol foarte important. Transformata în puncte este ansamblul regulilor, formulelor bazate pe aplicarea funcţiilor în puncte pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale.

Transformata directă în puncte a unei funcţii reprezintă ansamblul valorilor funcţiei pentru valori determinate ale argumentului. Fie, de exemplu funcţia periodică :

$$F(\theta) = F(\theta + T) \quad \text{unde } \theta = \omega t \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{4.1}$$

Transformata directă în puncte a lui $F(\theta)$ este vectorul $\check{F}$ ale cărui componente sînt valorile lui $F(\theta)$ pentru argumentele $\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_{n-1}$, unde n este numărul punctelor. Se obişnuieşte a se utiliza notaţia.

$$\check{F} \doteq F(\theta) \tag{4.2}$$

$$\text{şi} \quad T_n\left\{F(\theta)\right\} = \check{F} = \begin{vmatrix} F_0 = F(\theta_0) \\ F_1 = F(\theta_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1} = F(\theta_{n-1}) \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

Se numeşte transformata inversă în puncte funcţia $f(\theta)$ care aproximează funcţia $F(\theta)$ trecînd prin punctele $F_0, F_1 \ldots F_{n-1}$.

După cum se ştie funcţiile periodice în general se pot aproxima printr-un polinom trigonometric de forma:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta) \tag{4.4}$$

unde m este ordinul celei mai mari armonici

Dacă se dă $F_0, F_1 \ldots F_{n-1}$ prin valorile eg...

argumentului adică:

$$F_K = F(\theta_K) \quad \text{unde } \theta_K = \frac{2\pi}{2m+1} k \qquad (4.5)$$

atunci coeficienţii a_ν şi b_ν sînt daţi de următoarele expresii:

$$a_\nu = \frac{2}{2m+1} \sum_{K=0}^{2m} F_K \cos(\nu\theta_K)$$

$$b_\nu = \frac{2}{2m+1} \sum_{K=0}^{2m} F_K \sin(\nu\theta_K) \qquad (4.6)$$

Substituind expresia (4.6) în (4.4) se găseşte funcţia de aproximare cu ajutorul componentelor vectorului $\breve{F}$

$$f(\theta) = \frac{1}{2m+1} \sum_{K=0}^{2m} \left[1 + 2\sum_{\nu=1}^{m} \cos\nu(\theta_K - \theta) \right] F_K \qquad (4.7)$$

Pentru funcţii cu valori egale şi de semne opuse pe semiperioada care conţin numai armonici impare, transformata inversă în puncte devine mai simplă:

$$f(\theta) = \sum_{\nu} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta) \quad ; \quad \nu = 1,3,5\ldots (4.8)$$

Tinînd seama că $F(\theta) = -F(\theta+\pi)$ transformata se poate scrie sub forma:

$$a_\nu = \frac{2}{m+1} \sum_{K=0}^{m} F_K \cos\nu\theta_K$$

$$b_\nu = \frac{2}{m+1} \sum_{k=0}^{m} F_k \sin\nu\theta_k \qquad (4.9)$$

unde $\theta_k = \frac{\pi}{m+1} k$, $k = 0, 1, 2\ldots m$

In sfîrşit, se obţine transformata inversă în puncte în funcţie de componentele F_k sub forma

$$f(\theta) = \frac{2}{m+1} \sum_{K=0}^{m} \sum_{\nu=1,3\ldots}^{m} \left[\cos\nu(\theta_k - \theta) \right] F_k \qquad (4.10)$$

4.2. Proprietăţile principale ale transformatei în puncte [29]

1) Liniaritatea: Dacă λ este constant pozitiv sau negativ, atunci:

$$\lambda f(\theta) = \begin{vmatrix} \lambda F_o \\ \lambda F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda F_{n-1} \end{vmatrix} = \lambda \check{F} \qquad (4.11)$$

Dacă $f(\theta)$ şi $\varphi(\theta)$ sînt funcţii periodice cu aceeaşi perioadă, atunci :

$$f(\theta) + \varphi(\theta) = \begin{vmatrix} F_o & + \Phi_o \\ F_1 & + \Phi_1 \\ \cdots & \cdots \\ F_{n-1} & + \Phi_{n-1} \end{vmatrix} = \check{F} + \check{\Phi} \qquad (4.12)$$

2) Transformata în puncte a derivatei

Se face derivata expresiei (4.7) în raport cu t, unde $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ şi se obţine:

$$f'(\theta) = \frac{df(\theta)}{dt} = \frac{2\omega}{2m+1}\sum_{k=o}^{2m}\left[\sum_{\nu=1}^{m} \nu \sin\nu(\theta_s-\theta_k)\right] F_k \qquad (4.13)$$

Componenta s a transformatei derivatei este:

$$f'_s = \frac{2\omega}{2m+1}\sum_{k=o}^{2m}\left[\sum_{\nu=1}^{m} \nu \sin \nu(\theta_s-\theta_k)\right] F_k \qquad (4.14)$$

unde $\theta_k = \frac{2\pi}{2m+1} k$; $\theta_s = \frac{2\pi}{2m+1} s$.

Introducem matricea

$$J = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline J_{oo} & J_{o1} & \cdot & J_{o,2m} \\ \hline J_{1o} & J_{11} & \cdot & J_{1,2m} \\ \hline J_{2m,o} & J_{2m,1} & \cdot & J_{2m,2m} \\ \hline \end{array}$$

cu componentele

$$J_{sk} = -\frac{2}{2m+1}\sum_{\nu=1}^{m} \nu \sin\left(\frac{2\pi\nu(s-k)}{2s+1}\right) = \begin{cases} 0 \text{ cînd } s=k \\ -\dfrac{\cos\frac{2m\pi(s-k)}{2m+1}}{\sin\frac{\pi(s-k)}{2m+1}} \text{ cînd } s\neq k \end{cases} \qquad (4.15)$$

Formula (4.14) se poaterescrie sub forma:

$$f'_s = \sum_{k=0}^{2m-1} J_{sk} \omega F_k \tag{4.16}$$

aşa dar

$$\breve{F}' = J\omega \breve{F} \tag{4.17}$$

Matricea $J\omega$ în transformata în puncte joacă un rol asemănător lui $j\omega$ în reprezentarea în complex sau a lui p în transformata Laplace.

Transformata în puncte a derivatei de gradul n are forma:

$$\breve{F}^{(n)} = (J\omega)^n \breve{F} \tag{4.18}$$

3) Transformata în puncte a integralei:

Dacă funcţia periodică conţine şi termen constant, integrala acestei funcţii nu este periodică, de aceea se obţine numai transformata în puncte a integralei funcţiilor periodice care nu conţin termeni constanţi.

Notăm $\Gamma = J^{-1}$ atunci în [29] se demontrează că:

$$\int f(\theta)dt = \frac{1}{\omega} \Gamma \breve{F} \tag{4.19}$$

Pentru transformata în puncte a integralei, matricea $\frac{1}{\omega}\Gamma$ joacă un rol asemănător rolului lui $\frac{1}{j\omega}$ sau a lui $\frac{1}{p}$ în transformata în complex, respectiv operaţională.

Legătura dintre coeficienţii polinomului trigonometric de aproximare şi componentele vectorului $\breve{F}$ este determinată prin matricea W.

$$S = W \breve{F} \tag{4.20}$$

unde S este vectorulce are componentele a_ν , b_ν .

Matricele J, W pentru cîteva forme ale polinoamelor trigonometrice simple se dau în tabelul 4.1., iar matricea Γ se dá în tabelul 4.2.

Cînd numărul punctelor este mare ($n > 6$) obţinerea transformatei în puncte este dificilă, de aceea în [38] , [39] se găseşte transformata în puncte a derivatei şi a integralei în formă mai simplă, mai precisă

Transformata în puncte a derivatei se obţine pe baza diferenţelor divizate centrate:

Cînd $n = 2$ $\quad X_1' = \frac{1}{2h}(-X_0-X_2)$ (4.21)

$n = 4$ $\quad X_2' = \frac{1}{12h}(X_0-8X_1+8X_3-X_4)$ (4.22)

$n = 6$ $\quad X_3' = \frac{1}{60h}(-X_0-9X_1-45X_2+45X_4-9X_5+X_6)$ (4.23)

unde h este pasul de împărţire $h = \frac{T}{n}, \frac{T}{2n}$ pentru funcţia periodică, respectiv pentru funcţia periodică simetrică pe semiperioade.

In cazul general expresiile derivatelor se pot rescrie sub forma:

$$X_k' = \frac{1}{2h}(-X_{k-1} + X_{k+1}) \tag{4.24}$$

$$X_k' = \frac{1}{12h}(X_{k-2}-8X_{k-1} + 8X_{k+1} - X_{k+2}) \tag{4.25}$$

$$X_k' = \frac{1}{60h}(-X_{k-3} + 9X_{k-2} -45X_{k-1}+45X_{k+1}-9X_{k+2}+X_{k+3}) \tag{4.26}$$

$k= 0,1,2...$

Pe baza formulelor (4.24), (4.25),(4.26) se găseşte transformata în puncte a derivatei de ordinul întîi.

$$\check{X}' = \frac{1}{h} D_{1n}\check{X} \tag{4.27}$$

unde $\check{x}' = (x_0', x_1', x_2' \ldots x_{n-1}')_{tr}$.

$\check{x} = (x_0, x_1, x_2 \ldots x_{n-1})_{tr}$.

D_{1n} este o matrice pătrată de forma:

$$D_{1n} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

In [38] se demonstrează că transformata în puncte a derivatei de ordinul m este

$$\check{x}^{(m)} = \frac{1}{h^m} D_{mn}\check{x} \tag{4.29}$$

în care D_{mn} reprezintă matricea derivatei de ordinul m care se poate determina prin ridicarea matricei D_{1n} la puterea m :

$$D_{mn} = D_{1n}^m \tag{4.30}$$

Matricele derivatei obținute sînt antisimetrice pentru m impar și sînt simetrice cînd m este par.Pentru obținerea matricilor derivatei trebuie să se cunoască numai elementele liniei întîi fiindcă pentru linia a doua elementele se deplasează la dreaptă iar primul element al liniei a doua este rezervat ultimului element din prima linie dacă funcția este oarecare dar periodică și pentru ultimul element din prima linie cu semn schimbat cînd funcția este impară.

Transformata în puncte a integralei se construiește în modul următor:

Se dă funcția periodică simetrică $x(\theta) = -x(\theta+\pi)$, semiperioada se împarte în n părți egale $\theta_0 = 0$, $\theta_0 + kh$,(k=1,2..n-1) unde pasul $h = \frac{\pi}{n}$.

Notăm $X^*(\theta)$ este integrala lui $x(\theta)$

$$X^*(\theta) = \int_0^\theta x(\theta)d\theta \tag{4.31}$$

Transformata în puncte a integralei $\check{x}^*$ este legată de transformata în puncte a funcției $\check{X}$ prin formula:

Tabelul 4.1.

Polinom trigonometric	Matricea J	Matricea W
$a_1\cos\theta + b_1\sin\theta$ $\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \frac{\pi}{2}$	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$
$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta$ $\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \frac{2\pi}{3},\ \theta_2 = \frac{4\pi}{3}$	$\begin{matrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix}$
$a_1\cos\theta + b_1\sin\theta +$ $a_3\cos 3\theta + b_3\sin 3\theta$ $\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \frac{\pi}{4}$ $\theta_2 = \frac{\pi}{2},\ \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$	$\begin{matrix} 0 & \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{matrix}$

Tabelul 4.2.

Polinom trigonometric	Matricea Γ
$a_1\cos\theta + b_1\sin\theta$ $\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \frac{\pi}{2}$	$\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$
$a_1\cos\theta + b_1\sin\theta +$ $a_3\cos 3\theta + b_3\sin 3\theta$ $\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \frac{\pi}{4}$ $\theta_2 = \frac{\pi}{2},\ \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$	$\begin{matrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \end{matrix}$

$$\check{X}^{*} = h\, I_{1n}\, \check{X} \tag{4.32}$$

unde I_{1n} este matricea integrală

$$I_{1n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdot & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdot & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & -1 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

Matricea integralei de ordinul m se obține în forma:

$$I_{mn} = I_{1n}^{m} \tag{4.34}$$

4.3. Găsirea soluțiilor periodice ale circuitelor neliniare prin transformata în puncte:

Pentru găsirea soluțiilor periodice ale ecuațiilor diferențiale pentru circuite se trec cu formulele de mai sus ecuațiile diferențiale la reprezentarea în puncte. Se obține un sistem de ecuații liniare dacă ecuațiile diferențiale au coeficienți constanți și un sistem de ecuații algebrice neliniare sau parametrice dacă ecuațiile diferențiale sînt neliniare sau parametrice. Rezolvînd sistemul de ecuații se obține răspunsul în forma unei funcții în puncte. De exemplu dacă se dă ecuația diferențială neliniară:

$$\frac{dy}{dt} + x = f(t) \tag{4.35}$$

unde f(t) este funcția periodică, y(x) este funcția neliniară, atunci transformata în puncte a lui (4.35) are forma:

$$J\omega \check{y} + \check{x} = \check{f} \tag{4.36}$$

unde $\check{y} = \left[y(x_0),\ y(x_1) \ldots y(x_{n-1}) \right]_{tr}$

Sistemul de ecuații (4.36) este neliniar și se poate rezolva în raport cu $x_0, x_1 \ldots x_{n-1}$ prin metode iterative. După ce s-au determinat x_0, $x_1 \ldots x_n$, coeficienții a_ν, b_ν ai polinomului trigonometric care aproximează funcția se determină cu formula

(4.2o) . Se aplică transformata în puncte pentru rezolvarea circuitului R.L neliniar din fig.4.1. Caracteristica magnetică a bobinei se aproximează printr-un polinom :

$$\Psi(i) = ai - bi^3.$$

Ecuaţia diferenţială a circuitului este:

$$u = ri + \frac{adi}{dt} - 3bi^2 \cdot \frac{di}{dt} \qquad (4.37)$$

Ecuaţia (4.37) o transformăm într-o ecuaţie în puncte:

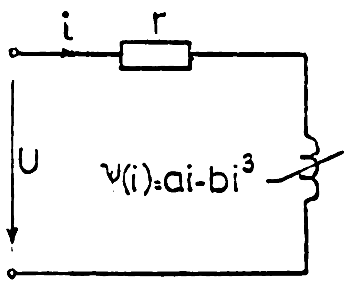


Fig.4.1.

$$\check{u} = r\check{i} + J\omega a\check{i} - 3bJ\omega \check{i}^3 \qquad (4.38)$$

Dacă semiperioada tensiunii sinusoidale se împarte în 4 părţi, curentul se caută sub forma :

$$i(t) = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t + a_3\cos 3\omega t + b_3\sin 3\omega t \qquad (4.39)$$

In acest caz vectorii lui i şi a lui u sînt:

$$\check{I} = (i_0, i_1, i_2, i_3)_{tr}, \quad \check{U} = (u_0, u_1, u_2, u_3)_{tr}$$

Ecuaţia matricială a circuitului are forma

$$\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}(a-3bi_1^2) & -(a-3bi_2^2) & \sqrt{2}(a-3bi_3^2) \\ -\sqrt{2}(a-3bi_0^2) & 0 & \sqrt{2}(a-3bi_2^2) & (a-3bi_3^2) \\ (a-3bi_0^2) & -\sqrt{2}(a-3bi_1^2) & 0 & \sqrt{2}(a-3bi_3^2) \\ -\sqrt{2}(a-3bi_0^2) & (a-3bi_1^2) & -\sqrt{2}(a-3bi_2^2) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Cu valorile numerice U_m = 3oo V, f = 5o Hz, r = 1ooΩ, a = o,5, b = o,o2 se obţine ecuaţia matricială

$$\begin{bmatrix} 100 & (222-26{,}64 i_1^2) & -(157-18{,}84 i_2^2) & (222-26{,}64 i_3^2) \\ -(222-26{,}64 i_0^2) & 100 & (222-26{,}64 i_2^2) & -(157-18{,}84 i_3^2) \\ (157-18{,}84 i_0^2) & -(222-26{,}64 i_1^2) & 100 & (222-26{,}64 i_3^2) \\ -(222-26{,}64 i_0^2) & (157-18{,}84 i_1^2) & -(222-26{,}64 i_2^2) & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 212 \\ 300 \\ 212 \end{bmatrix}$$

Ecuaţia (4.41) o rezolvăm prin metoda iterativă

In prima aproximaţie se neglijează termenul neliniar şi se obţine sistemul

$$\begin{cases} 100\, i_0 + 222\, i_1 - 157\, i_2 + 222\, i_3 = 0 \\ -222\, i_0 + 100\, i_1 + 222\, i_2 - 157\, i_3 = 212 \\ 157\, i_0 - 222\, i_1 + 100\, i_2 + 222\, i_3 = 300 \\ -222\, i_0 + 157\, i_1 - 222\, i_2 + 100\, i_3 = 212 \end{cases} \qquad (4.42)$$

Rezolvînd (4.42) se obţine: $I^0 = (-1{,}387,\ -0{,}353,\ 0{,}860,\ 1{,}587)$ A.

Coeficienţii seriei Fourier se determină prin formula (4.20)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}377 \\ 0{,}866 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.43)$$

In pasul următor se realizează calculul iterativ. Pentru ecuaţia (4.42) locul lui i_0, i_1, i_2, i_3 îl ia I^0 şi se obţine sistemul de ecuaţii pentru determinarea I^1. Procesul de calcul se repetă pînă cînd se obţine precizia dorită. Rezultatul obţinut prin calculul iterativ se dă în tabelul 4.3. In coloana 2 este redat rezultatul obţinut prin metoda transformatei în complex. El a fost comparat cu rezultatul obţinut pe calculatorul analogic MEDA 42-TL. De remarcat că la transformata în complex procesul iterativ a fost oprit la pasul doi .

In continuare se prezintă aplicarea matricilor derivatei folosind derivate centrate, n = 2. In cazul nostru pasul de împărţire este 1o. Rezultă că matricea derivatei este:

$$D_{1,1o} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuaţia diferenţială (4.3f) în transformata în puncte este:

$$\breve{u} = r\breve{i} + \frac{1}{h} D\breve{I}.(a-3b\breve{i}^2) \qquad (4.44)$$

unde pasul $h = \frac{T}{2n} = \frac{1}{2n.f}$, $U_m = 3ooV$, $f = 5o$ Hz, $r = 1oo\Omega$, $a = o,5$, $b = o,o1$

Problema se rezolvă prin metoda iterativă cu ajutorul calculatorului numeric. Ecuaţia (4.44) devine:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & +(a_{12}-3\delta i_2^2)+\ldots+ & (a_{1.1o}-3\delta i_{1o}^2) \\ (a_{21}-3\delta i_1^2)+ & a_{22} & +\ldots+(a_{2.1o}-3\delta i_{1o}^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{1o.1}-3\delta i_1^2 & +(a_{1o.2}-3\delta i_2^2)+\ldots & +a_{1o.1o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ i_{1o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_{1o} \end{bmatrix} \qquad (4.45)$$

Tabelul 4.3.

Rezultate prin metoda transformatei în puncte şi transformatei în complex

	Transformata în puncte									Transformata în complex
N	i_o	i_1	i_2	i_3	a_1	b_1	a_3	b_3	i (A)	i (A)
1	-1,387	-0,353	0,860	1,587	-1,337	0,866	0	0	$1,627\sin(\omega t-57^{o}50'$	
2	-1,366	-0,256	0,889	1,828	-1,419	1,000	-0,05	0,111	$1,736\sin(\omega t-54^{o}49')+0,$ $+0,121\sin(3\omega t-24^{o}25')$	
3	-1,283	-0,277	0,910	2,002	-1,448	1,063	0,167	0,152	$1,796\sin(\omega t-53^{o}43')+$ $+0,226\sin(3\omega t+47^{o}10')$	$1,78\sin(\omega t-54^{o}40')+$ $+0,020\sin(3\omega t+42^{o}35')$
4	-1,240	-0,270	0,896	2,056	-1,449	1,074	0,206	0,178	$1,804\sin(\omega t-53^{o}27')+$ $+0,272\sin(3\omega t+49^{o}00')$	

SCHEMA LOGICĂ DUPĂ METODA DERIVATEI ÎN CENTRU

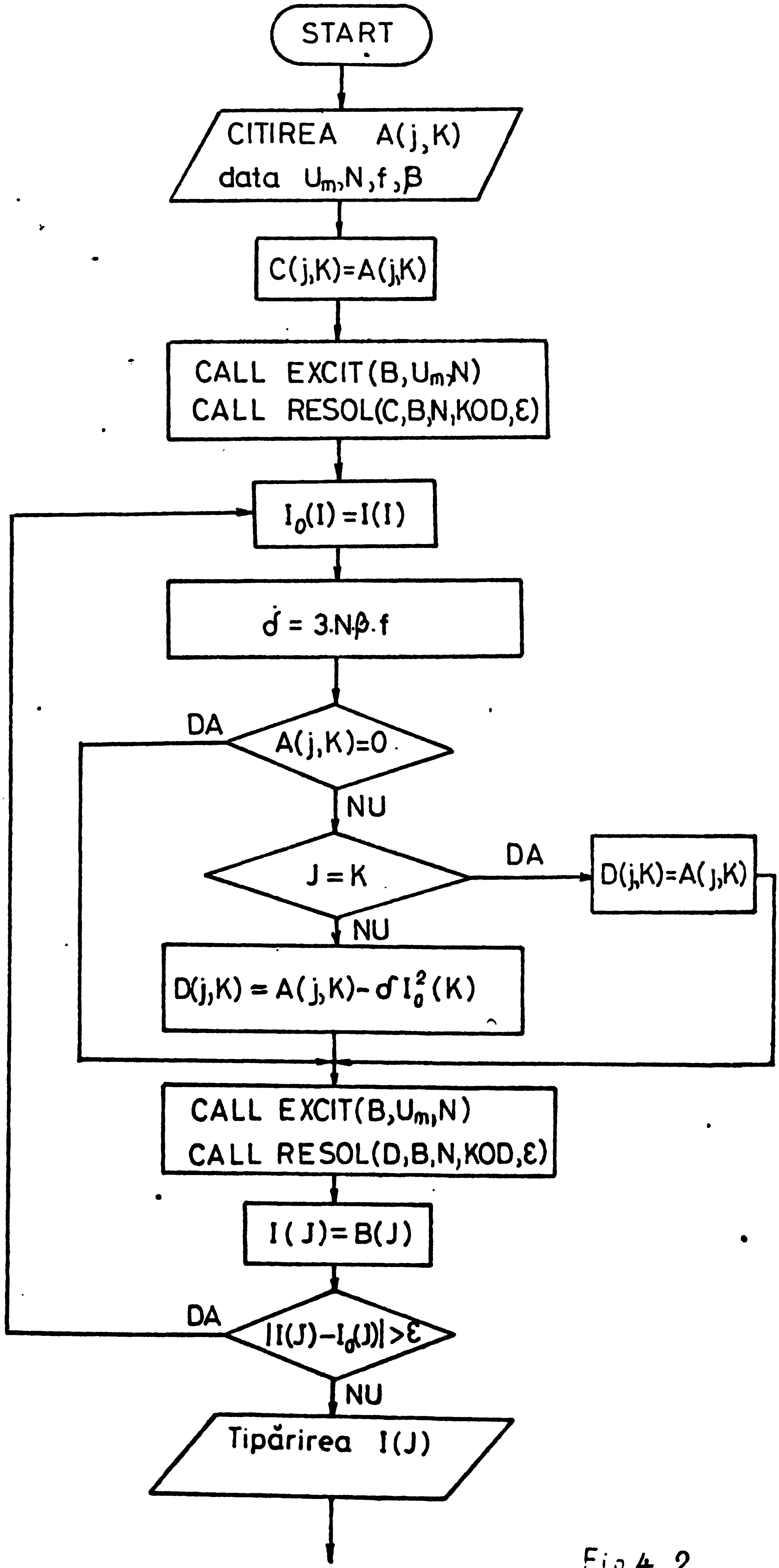


Fig.4-2

Pentru rezolvarea ecuației (4.45) se folosește schema logică în fig.4.2 unde programul principal se folosește instrucțiunea CALL RESOL (C, B, KOD, ε) pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare.In prima aproximație se consideră că termenul neliniar este zero, se obține răspunsul I_o, apoi se schimbă coeficienții a_{jk} și se folosește instrucțiunea CALL RESOL(D,B,KOD,ε) pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare și se obține răspunsul I în pasul doi. Procesul de calcul se oprește cînd $|I-I_o| \leqslant 10^{-2}$. Subprogramul EXCIT(B,N,U_m) se folosește pentru obținerea părții drepte a ecuației (4.45).

Răspunsul circuitului neliniar este:

I(1) = - 1,342 A
I(2) = - 0,920 A
I(3) = - 0,463 A
I(4) = 0,017 A
I(5) = 0,515 A
I(6) = 1,015 A
I(7) = 1,504 A
I(8) = 1,901 A
I(9) = 1,969 A
I(10)= 1,714 A

4.4. Considerații generale despre transformata în complex.

Folosirea transformatei Laplace la găsirea soluțiilor ecuațiilor diferențiale neliniare prin metoda convoluției în complex [37] este laborioasă datorită integralelor ce intervin la determinarea soluțiilor. Trebuie să subliniem că pentru ecuații diferențiale liniare, metoda transformatei Laplace prezintă avantaj numai în cazuri cînd rădăcinile ecuațiilor caracteristice sînt ușor de rezolvat.

Transformata în complex prezintă avantaje la rezolvarea problemelor circuitelor neliniare şi parametrice. Prin definiţie transformata directă în complex a funcţiei de variabile reale f(t) periodică avînd perioada T este o funcţie de variabilă complexă care se defineşte prin relaţia:

$$\dot{F}_\nu = \frac{j2}{T}\int_0^T e^{-j\nu\omega t} f(t)dt \qquad (4.50)$$

unde $\dot{F}_\nu$ este amplitudinea complexă a armonicii de ordinul ν în intervalul (0, T) şi se numeşte imaginea complexă a lui f(t).

Transformata complexă inversă a lui $\dot{F}_\nu$ este originalul f(t) care se determină prin seria Fourier care o aproximează.

$$f(t) = \frac{1}{2j}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega t}\dot{F}_\nu = \frac{\dot{F}_0}{j2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \sin(\nu\omega t+\alpha_\nu) \qquad (4.51)$$

Ca şi în transformata Laplace notăm simbolul K, ca operator care realizează trecerea de la originalul f(t) de variabilă reală la imaginea $\dot{F}_\nu$ de variabilă pur imaginară $s = j\nu\omega$.

$$\dot{F}_\nu \doteqdot f(t) \qquad \text{sau} \qquad \dot{F}_\nu = K_\nu[f(t)]$$

Prin transformata complexă operaţiunile diferenţiale şi integrale devin operaţii algebrice în domeniu de variabilă complexă. Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale cu coeficienţi constanţi prin transformata complexă se poate realiza fără determinarea rădăcinilor ecuaţiilor caracteristice. Dacă coeficienţii acestor ecuaţii sînt variabili, transformata în complex duce la rezolvarea ecuaţiilor algebrice cu coeficienţi variabili, iar pentru ecuaţii diferenţiale neliniare transformata în complex duce la rezolvarea unor ecuaţii algebrice neliniare.

4.5. Proprietăţile principale ale transformatei complexe [29] :

4.5.1. Liniaritatea: Transformata complexă a sumei dintre două funcţii $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ este suma transformatoarelor funcţiilor.

Fie $K_\nu[f_1(t)] = \dot{F}_{1\nu}$

$K_\nu[f_2(t)] = \dot{F}_{2\nu}$

atunci $K_\nu[f_1(t) \pm f_2(t)] = \dot{F}_{1\nu} \pm \dot{F}_{2\nu}$ (4.52)

4.5.2. Transformata complexă a produsului funcţiilor originale.

Fie $K_\nu[f(t)] = \dot{F}_\nu$, $K_\nu[\varphi(t)] = \dot{\Phi}_\nu$

Atunci $K_\nu[f(t).\varphi(t)] = \frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{F}_{\nu-n}\dot{\Phi}_n = \frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{F}_n\dot{\Phi}_{\nu-n}$ (4.52)

Proprietatea aceasta se foloseşte la găsirea imaginilor ecuaţiilor neliniare sau parametrice. In cazul particular imaginea complexă a puterii are forma:

$$K_\nu[f^2(t)] = \frac{1}{j2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{F}_{\nu-n}\dot{F}_n \qquad (4.53)$$

$$K_\nu[f^3(t)] = \left(\frac{1}{j2}\right)^2\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{F}_{\nu-r}\dot{F}_{r-n}\dot{F}_n \qquad (4.54)$$

In general $K_\nu[f^m(t)] = \left(\frac{1}{j2}\right)^{m-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{F}_{\nu-r}\ldots\dot{F}_n$ (4.55)

4.5.3. Imaginea unei derivate:

Dacă funcţia f(t) are imaginea complexă $\dot{F}_\nu$ a $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ atunci:

$$K_\nu\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\nu\omega\dot{F}_\nu + j2\,\frac{f_T e^{-j\nu\omega t} - f_0}{T} \qquad (4.56)$$

pentru funcţia periodică de perioadă T, valoarea iniţială f_0 şi valoarea finală f_T sînt identice $f_0 = f_T$ şi rezultă

$$K_\nu\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\nu\omega\dot{F}_\nu \; ; \quad f_0 = f_T \qquad (4.57)$$

In cazul general:

$$K_\nu\left[\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}\right] = (j\nu\omega)^n\dot{F}_\nu + (j\nu\omega)^{n-1}\frac{j2}{T}\left[f_T - f_0 + \frac{f'_T - f_0}{j\nu\omega} + \ldots + \frac{f_T^{(n-1)} - f_0^{(n-1)}}{(j\nu\omega)^{n-1}}\right] \qquad (4.58)$$

pentru funcţii periodice:

$$K_\nu\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\nu\omega)^n \dot{F}_\nu \qquad (4.59)$$

.4. Imaginea unei integrale :

Dacă funcţia $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t).dt$, imaginea lui $\varphi(t)$ are ma:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{T} f(t).dt = \frac{\dot{F}_\nu}{j\nu\omega} + \frac{\varphi_0 - \varphi_T}{j\nu\omega T} \qquad (4.60)$$

. Metoda generală de rezolvare a regimurilor forţate perio- e ale circuitelor neliniare prin transformata în complex.

general procesele în circuite neliniare sînt foarte compli- te. In cazul cînd regimul forţat este practic sinusoidal,pen- u determinarea soluţiilor periodice termenul neliniar $\varphi(x)$ înlocuieşte cu coeficientul legăturii complexe care se defi- şte în modul următor:

$$\dot{R}_\nu = \frac{K_\nu[\varphi(x)]}{\dot{x}_\nu} = \frac{\int_0^T e^{-j\nu\omega t}\varphi(x)dt}{\int_0^T e^{-j\nu\omega t}x(t).dt} \qquad (4.61)$$

Cu ajutorul coeficientului în complex $\dot{R}_\nu$, ecuaţiile di- renţiale ale circuitelor neliniare devin ecuaţii algebrice cu rime complexe, care se pot rezolva prin metode iterative. Pen- ru circuite neliniare, folosind teorema generatorului echivalent poate scrie

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z+\bar{Z}} \qquad (4.62)$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{J}}{Y+\bar{Y}} \qquad (4.63)$$

nde $\dot{I}$, $\dot{U}$ sînt curentul, respectiv tensiunea în complex

$\bar{Z}$, $\bar{Y}$ sînt impedanţa, respectiv admitanţa în complex a elemen- lui neliniar.

Rezolvarea circuitelor neliniare în regim forțat se face parcurgînd următoarele etape:

1) Se scriu ecuațiile integro-diferențiale ale circuitelor nliniare prin teoremele lui Kirchhoff.

2) Se folosește transformata în complex pentru ecuațiile scrise mai sus ținînd seamă că în regim periodic $f_0 = f_T$.

3) Se calculează coeficienții legăturii în complex pentru fiecare armonică. De exemplu dacă termenul neliniar este de forma $u = bi^3$ coeficientul legăturii în complex se scrie:

$$\dot{R}_\nu = \frac{-b\left(\frac{1}{j2}\right)^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{\nu-r}\, \dot{I}_{r-n}\, \dot{I}_n}{\dot{I}_\nu} \qquad (4.65)$$

In prima aproximație se consideră numai armonica fundamentală a curentului, coeficientul legăturii în complex are forma:

$$\dot{R}_1^0 = \frac{b\left(\frac{1}{j2}\right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{1-r}\dot{I}_{r-n}\dot{I}_n}{\dot{I}_1} = \frac{3}{4}\, b\, I_1^2 \qquad (4.66)$$

unde $\dot{I}_{-1} = -\hat{I}_1$. Notăm $\hat{I}_1$ - conjugata lui $\dot{I}_1$, iar coeficientul legăturii complexe pentru armonica a treia este:

$$\dot{R}_3^0 = \frac{b\left(\frac{1}{j2}\right)^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{3-r}\dot{I}_{r-n}\dot{I}_n}{I_3} = \frac{3}{4}\, bI_1^2 + \frac{3}{4} bI_3^2 - \frac{1}{4} b\, \frac{\dot{I}_1^3}{\dot{I}_3} \qquad (4.67)$$

Cu ajutorul lui $\dot{R}_1^0$, $\dot{R}_3^0$ se calculează armonicile curentului $\dot{I}_1^0$, $\dot{I}_3^0$ corespunzător primei aproximații.

In pasul următor se consideră că

$$\dot{R}_1^1 = f_1(\dot{I}_1^0\ ,\ \dot{I}_3^0\ )$$

$$\dot{R}_3^1 = f_2(\dot{I}_1^0,\ \dot{I}_3^0\ )$$

Folisind $\dot{R}_1^1$, $\dot{R}_3^1$ se calculează armonicile curentului $\dot{I}_1^1, \dot{I}_3^1$.

Procesul de calcul iterativ se repetă pînă cînd se obţine precizia dorită.

<u>Exemplu de calcul:</u>

Exemplul 1. Se studiază circuitul prezentat din fig.3.11 (cap.3) prin metoda transformatei în complex.

Rezolvare:

Ecuaţia diferenţială a circuitului este:

$$u = r_0 i + L\frac{di}{dt} + u(i) = (r_0+a)i + L\frac{di}{dt} - bi^3$$

Cu transformata în complex ecuaţia devine:

$$\dot{U}_\nu = \left[(r_0+a) + j\nu\omega L\right]\dot{I}_\nu - b\left(\frac{1}{j2}\right)^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{\nu-r}\dot{I}_{r-n}\dot{I}_n$$

unde $\dot{U}_\nu = \begin{cases} \dot{U}_m = 35{,}35\angle 0^0 & \text{cînd } \nu = 1 \\ 0 & \text{cînd } \nu \neq 1 \end{cases}$

In prima aproximaţie cu(4.66) se obţine armonica fundamentală.

$$\dot{I}_1^0 = \frac{\dot{U}}{r_0+a+j\omega L+\dot{R}_{01}} = \frac{\dot{U}_1}{r_0+a+j\omega L - \frac{3}{4}bI_1^2} = \frac{35{,}35\angle 0^0}{57+j15{,}7-22{,}5I_1^{02}}$$

Printr-o metodă iterativă se găseşte : $\dot{I}_1^0 = 0{,}743\ \angle{-19^0 15'}$ A

Ecuaţia armonicii de ordinul trei are forma

$$0 = (r_0+a+j3\omega L)\dot{I}_3^0 + \dot{R}_3^0\,\dot{I}_3^0\ ,$$ cu formula (4.67) rezultă:

$$\dot{I}_3^0 = \frac{-\frac{b}{4}\dot{I}_1^3}{r_0+a+j3\omega L - \frac{3}{4}b\dot{I}_1^{02} - \frac{3}{4}b\dot{I}_3^{o2}} = \frac{-3{,}076\angle{-57^0 45}}{44{,}67+j\,47{,}1-22{,}5\,I_3^2}\ \text{A}$$

Printr-o metodă iterativă se găseşte $\dot{I}_3^0 = 0{,}050\ \angle{-44^0 16'}$ A

In a doua aproximaţie avem

$$\dot{I}_1^1 = \frac{\dot{U}_1}{r_0+a+j\omega L - \frac{3}{4}bI_1^{02} - \frac{b}{4}\dot{I}_1^2 I_3 - 3\frac{b}{4}\dot{I}_3^2} = \frac{35{,}35\angle 0^0}{57+j15{,}7-22{,}87I_1^2-0{,}375\dot{I}_1^2}\ \text{A}$$

Printr-o metodă iterativă se găsește : $\dot{I}_1^1 = 0{,}746 \angle{-19^o42'}$ A

$$\dot{I}_3^1 = \frac{-\frac{b}{4}\dot{I}_1^3}{r_0+a+j3\omega L-\frac{3}{4}bI_1^2-\frac{3}{4}bI_3^2} = \frac{-3{,}113 \angle{-59^o06}}{44{,}48+j471{,}1-22{,}5I_3^2}$$

Printr-o metodă iterativă se găsește $\dot{I}_3^1 = 0{,}051 \angle{-45^o44'}$ A

Rezultă $i(t) = 0{,}746\sin(\omega t-19^o42')+0{,}051\sin(3\omega t-45^o44')$ A

Exemplul 2. Se rezolvă problema în fig.4.1 prin transformata în complex.

Rezolvare:

Ecuația diferențială a circuitului este:

$$u = ri + a\frac{di}{dt} - 3bi^2\frac{di}{dt}$$

Cu transformata complexă se obține:

$$\dot{U}_\nu = (r+j\nu\omega a)\dot{I}_\nu - b\left(\frac{1}{j2}\right)^2 j\nu\omega \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{I}_{\nu-r}\dot{I}_{r-n}\dot{I}_n$$

Coeficientul legăturii în complex devine:

$$\dot{R}_\nu = \frac{-j\frac{b}{4}\nu\omega\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{I}_{\nu-n}\dot{I}_{r-n}\dot{I}_n}{\dot{I}_\nu}$$

In prima aproximație

$$\dot{R}_1^o = j\frac{3}{4}\omega bI^2$$

$$\dot{I}_1^o = \frac{\dot{U}_1}{r+j\omega(a-\frac{3b}{4}I_1^2)} = \frac{300\angle{0^o}}{100+j(157-4{,}71I_1^{o2})}$$

Folosind metoda iterativă se obține: $\dot{I}_1^o = 1{,}72 \angle{-55^o04'}$ A

$$\dot{I}_3^o = \frac{-j\frac{9}{4}b\omega\dot{I}_1^3}{r+j3\omega a-j\frac{9}{4}b\omega I_1^2-j\frac{9}{4}b\omega I_3^2} = \frac{-j\,71{,}79\angle{-165^o.12}}{100+j(387-41{,}8I_3^2)}$$

Printr-o metodă iterativă se obține $\dot{I}_3^o = 0{,}184\angle{41^o28}$ A

In a doua aproximaţie avem:

$$\dot{I}_1^1 = \frac{\dot{U}_1}{r+j\omega(a-\frac{3}{4}bI_1^2-\frac{b}{4}I_1I_{03}-3\frac{b}{4}I_3^2)} = \frac{300\angle 0^\circ}{100+j(152{,}5-4{,}71I_1^2)} =$$

Printr-o metodă iterativă se obţine $\dot{I}_1^1 = 1{,}78\,\angle{-54^\circ 40'}$ A

$$\dot{I}_3^1 = \frac{-j\frac{9}{4}\omega b\dot{I}_1^3}{r+j3\omega(a-\frac{3}{4}bI_1^2-\frac{3}{4}bI_3^2)} = \frac{-j79{,}68\,\angle{-166^\circ}}{100+j(385-41{,}8I_3^2)}$$

Printr-o metodă iterativă se obţine $\dot{I}_3^1 = 0{,}201\,\angle 42^\circ 35'$ A

Rezultă $i(t) = 1{,}78\sin(\omega t-54^\circ 40')+0{,}201\sin(3\omega t+42^\circ 35')$A

In [5] se prezintă metoda transformatei complexe folosind ideile transformatei în puncte. Metoda transformatei în puncte permite să se calculeze curentul nesinusoidal în circuitele neliniare dar ea are dezavantajul determinat de necesitatea de a rezolva sisteme de ecuaţii algebrice de grad superior. In metoda transformatei în puncte nu trebuie să folosim expresia analitică a caracteristicilor elementelor neliniare. Este suficient să se cunoască din tabel sau grafic 6 - 8 puncte ale ei. Transformata complexă se scrie într-o formă adecvată prin exprimarea parametrilor cu ajutorul transformatei în puncte.

De exemplu în circuitul cu rezistenţa neliniară(fig.3.11) [5] rezistenţa complexă se scrie sub forma:

$$\dot{R}_\nu = \frac{j2}{\dot{I}_\nu T}\int_0^T e^{-j\nu\theta}\,U\left(\frac{1}{j2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta}\,\dot{I}_n\right)dt \qquad (4.68)$$

Circuitul din fig.3.13 conduce la ecuaţia :

$$\dot{E}_\nu = (Z_0+\dot{R}_\nu)\dot{I}_\nu\,; \quad \nu = 1,\ 2,\ 3\ldots \qquad (4.69)$$

Soluţia se caută sub forma :

$$i(t) = a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_3\cos3\theta + b_3\sin3\theta \qquad (4.70)$$

In prima aproximaţie se ia:

$$i_0(t) = 1\cos\theta + 0{,}1\cos 3\theta$$

şi deci vectorul amplitudinilor este:

$$\vec{I}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}0 \\ 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} \quad \check{I}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}778 \\ 0{,}9 \\ 0{,}778 \end{bmatrix} \quad \check{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 22{,}8 \\ 24{,}0 \\ 22{,}8 \end{bmatrix} \quad \vec{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 28{,}1 \\ 0 \\ 4{,}1 \end{bmatrix}$$

unde $\check{I}_0 = W^{-1}.\vec{I}_0$

$\check{U}_0 = W^{-1}.\vec{U}_0$

matricea W se dă în tabelul 4

Rezistenţa neliniară pentru fiecare armonică se calculează cu :

$$\dot{R}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = 28{,}1\ \Omega$$

$$Z_1 = Z_0 + \dot{R}_1 = 12+j15{,}7 + 28{,}1 = 43{,}1 \underline{/21^\circ 26}$$

$$\dot{I}_{11} = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} = \frac{35{,}35}{43{,}1 \underline{/21^\circ 26'}} = (0{,}765 - j0{,}301)\ A$$

$$\dot{I}_{31} = -\frac{\dot{U}_{30}}{Z_3} = \frac{-4{,}1}{48{,}65 \underline{/75^\circ 43}} = (-0{,}021 + j0{,}082)\ A$$

In noua aproximaţie vectorul amplitudinilor va fi

$$\vec{I}_1 = \begin{bmatrix} -0{,}301 \\ 0{,}765 \\ 0{,}082 \\ 0{,}021 \end{bmatrix}$$

După 5 iteraţii se obţine $i_1 = 0{,}735 \underline{/-19^\circ 3'}$ A,

$i_3 = 0{,}062 \underline{/60^\circ 57'}$ A.

CAPITOLUL V.

METODA OPERATIONALA PENTRU STUDIUL REGIMURILOR FORTATE .

5.1. Consideraţii generale.

Metodele operaţionale se folosesc pe larg pentru studiul circuitelor electrice liniare şi prezintă avantaje mari faţă de metodele clasice. Pentru studiul circuitelor neliniare în cazul cînd neliniarităţile sînt sub formă de produs sau polinomiale, în [37] se prezintă metoda convoluţiei în planul complex. Metoda convoluţiei în planul complex este o metodă iterativă pentru imaginile operaţionale şi oferă o soluţie analitică şi pentru aceasta posibilitatea de a studia circuite neliniare, sisteme dinamice neliniare. Trebuie să remarcăm că calculul integralelor de convoluţie are nevoie de un volum de calcul laborios. In [50] se prezintă metoda operaţională la găsirea soluţiilor periodice cînd caracteristicile neliniare se aproximează prin segmente de dreaptă. Pentru studiul regimurilor periodice în circuite liniare metoda operaţională este binecunoscută [18] .

In capitolul acesta vom prezenta teoremele principale ale transformatei Laplace pe o perioadă, de asemenea se prezintă o metodă iterativă pentru găsirea soluţiilor forţate folosind transformata Laplace pe o perioadă.

5.2. Integrala Fourier generală [18]

O funcţie poate fi dezvoltată în integrală Fourier dacă îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet şi este absolut integrabilă. Rezultă de aici că funcţiile periodice, datorită ultimei condiţii, nu admit o dezvoltare în integrală Fourier şi deci nici transformata Fourier.

In matematică se apreciază cu integrala Fourier generalizată, definită după cum urmează:

Dacă $\varphi(t)$ nu satisface condiţia de integrabilitate absolută dar le satisface pe cele ale lui Dirichelet, se alege $\sigma_1 > 0$ astfel ca funcţia $e^{-\sigma_1 t}\varphi(t)$ să fie absolut integrabilă în intervalul $0 < t < \infty$ şi deci admite transformata Fourier.

$$\Phi_+(\omega) = \int_0^{\infty} \varphi(t) \cdot e^{-\sigma_1 t} e^{-j\omega t}\, dt \qquad (5.1)$$

Dacă se calculează transformata inversă şi se înmulţeşte cu $e^{\sigma_1 t}$ avem:

$$e^{\sigma_1 t} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_+(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \begin{cases} \varphi(t) & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \qquad (5.2)$$

Analog se alege $\sigma_2 < 0$ astfel încît $e^{-\sigma_2 t}\varphi(t)$ este absolut integrabilă în intervalul $(-\infty, 0)$. Ca urmare ea admite transformata Fourier de forma:

$$\Phi_-(\omega) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t) e^{-\sigma_2 t} e^{-j\omega t}\, dt \qquad (5.3)$$

iar originalul va fi :

$$e^{\sigma_2 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \Phi_-(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \begin{cases} 0 & (t > 0) \\ \varphi(t) & (t < 0) \end{cases} \qquad (5.4)$$

Ca urmare:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_+(\omega)\, e^{(\sigma_1 + j\omega)t} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_-(\omega) e^{(\sigma_2 + j\omega)t} d\omega \right] \qquad (5.5)$$

Aşa dar dacă $\Phi_+(\omega)$ şi $\Phi_-(\omega)$ sînt definite cu relaţiile (5.1) şi (5.3) atunci $\varphi(t)$ este dat de relaţia (5.5).

Relaţiile menţionate constituie generalizarea transformatei Fourier. Dacă în continuare se fac notaţiile:

$p_1 = \sigma_1 + j\omega$ şi $p_2 = \sigma_2 + j\omega$ unde $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$

$$\bar{\varphi}_+(p) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt \,, \quad \bar{\varphi}_-(p) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t) e^{-pt}\, dt \qquad (5.6)$$

atunci:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j}\left[\int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty}\bar{\varphi}_+(p)e^{pt}\,dp + \int_{\sigma_2-j\infty}^{\sigma_2+j\infty}\bar{\varphi}_-(p)e^{pt}dp\right] \quad (5.7)$$

Relaţiile (5.6) sînt generalizări ale transformatei Laplace iar relaţia (5.7) este teorema lui Mellin-Fourier generalizată.

Mărimile σ_1 şi σ_2 sînt arbitrare, singura condiţie impusă este aceea de a asigura integrabilitatea funcţiilor menţionate în intervalele respective. Dacă σ_{10} şi $|\sigma_{20}|$ sînt valorile minime care satisfac condiţia, atunci σ_1 şi σ_2 pot lua orice valori dacă $\sigma_1>\sigma_{10}$ şi $\sigma_2<\sigma_{20}$. Rezultă aşadar că funcţiile definite de (5.6) există ca variabile de p, prima în tot planul pentru care $Re p>\sigma_{10}$, iar a doua pentru toate variabilele lui p pentru care $Re p<\sigma_{20}$.

Un caz special, care interesează în mod deosebit este următorul: Fie F(p) o funcţie analitică de variabilă complexă $p=\sigma+j\omega$. Dacă $\bar{\varphi}_+(p)$ şi $\bar{\varphi}_-(p)$ satisfac condiţiile:

$$\bar{\varphi}_+(p) = F(p) \quad \text{pentru } Re p > \sigma_{10} \quad \text{şi}$$

$$\bar{\varphi}_-(p) = -F(p) \quad \text{pentru } Re p < \sigma_{20}$$

atunci funcţiile $\bar{\varphi}_+(p)$ şi $\bar{\varphi}_-(p)$ se numesc una prelungirea analitică a celeilalte.

Dacă condiţia este îndeplinită, atunci:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j}\left[\int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty}F(p)e^{pt}dp - \int_{\sigma_2-j\infty}^{\sigma_2+j\infty}F(p)e^{pt}dp\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_L F(p)e^{pt}dp \quad (5.8)$$

Conturul de integrare fiind cel din figura 5.1, unde $L=L_1 \cup L_2$

In continuare vom demonstra că funcţiile periodice satisfac condiţia de prelungire analitică F(p) fiind tocmai transformata Laplace a funcţiei originale $\gamma(t)\cdot\varphi(t)$, unde $\varphi(t)$ este o funcţie periodică.

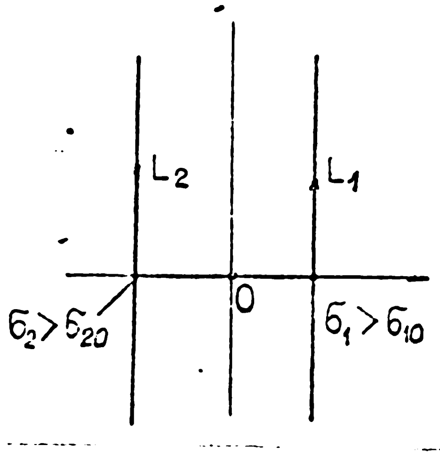


Fig.5.1.

In adevăr: $\overline{\varphi}_+(p) = \mathcal{L}[\gamma(t)\cdot\varphi(t)] = F(p)$ (5.9)

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}\varphi(t)\cdot e^{-pt}\,dt \quad \text{cu } \tau = t-kT \qquad (5.10)$$

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT}\int_0^T \varphi(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}\,\varphi_T(p)$$

$$= \varphi_T(p)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} = \frac{\varphi_T(p)}{1-e^{-pT}} \qquad (5.11)$$

$$\varphi_-(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-(k+1)T}^{-kT}\varphi(t)e^{-pt}\,dt = -\,\frac{\varphi_T(p)}{1-e^{-pT}} = -F(p) \qquad (5.12)$$

Ca urmare

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_L F(p)e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{\varphi_T(p)e^{pt}}{1-e^{-pT}}dp \qquad (5.13)$$

Interesează deci teoremele pe care le satisface transformata pe o perioadă.

5.3. Teoremele principale ale transformatei Laplace pe o perioadă:

5.3.1. Teorema derivatei.[19]

$$\int_0^T \frac{df}{dt}e^{-pt}\,dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^T + p\int_0^T f(t)e^{-pt}\,dt$$
$$= f(T)e^{-pT} - f(o) + p\cdot F_T(p) \qquad (5.14)$$

Pentru funcţia periodică $f(T) = f(o)$ rezultă

$$\mathcal{L}_T\left(\frac{df}{dt}\right) = p\,\mathcal{L}_T(f) - f(o)\left[1-e^{-pT}\right] \qquad (5.15)$$

Mai departe acum:

$$\mathcal{L}_T\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right) = \mathcal{L}_T\left(\frac{d}{dt}f'\right) = p\,\mathcal{L}_T\left(\frac{df}{dt}\right) - f'(o)\left[1-e^{-pT}\right]$$
$$= p\left[p\mathcal{L}_T(f) - f(o)(1-e^{-pT})\right] - f'(o)\left[1-e^{-pT}\right]$$

rezultă :

$$\mathcal{L}_T\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right) = p^2\,\mathcal{L}_T(f) - (1-e^{-pT})\left[pf(o)+f'(o)\right] \qquad (5.16)$$

In cazul general:

$$\mathcal{L}_T\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = p^n \mathcal{L}_T(f) - (1-e^{-pT})\left[p^{n-1}f(o)+p^{n-2}.f'(o)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots +pf^{(n-2)} + f^{(n-1)}(o)\right] \quad (5.17)$$

5.3.2. Teorema integralei:

$$f(t) = \int \varphi(t).dt \text{ rezultă } \frac{df}{dt} = \varphi(t)$$

Din teorema derivatei se obţine:

$$\mathcal{L}_T\left[\frac{df}{dt}\right] = p\,\mathcal{L}_T(f) - f(o)\left[1-e^{-pT}\right]$$

$$\mathcal{L}_T(f) = \frac{1}{p}\mathcal{L}_T\left[\varphi(t)\right] + \frac{f(o)}{p}\left[1-e^{-pT}\right] \quad (5.17)$$

5.3.3. Teorema deplasării:

Se referă la originalul funcţiei $F_T(p-q)$

$$F_T(p-q) = \int_0^T f(t)e^{-(p-q)t}dt = \int_0^T\left[f(t)e^{qt}\right]e^{-pt}dt \quad (5.18)$$

Funcţia $e^{qt}f(t)$ definită în intervalul (O,T) deci:

$$F_T(p-q) = \mathcal{L}_T\left[f(t).e^{qt}\right] \quad (5.19)$$

5.3.4. Teormea puterii unei funcţii originale

O funcţie periodică ridicată la o putere reprezintă tot o funcţie periodică.

Să calculăm imaginea Laplace periodică a puterii $\mathcal{L}_T\left[f^2(t)\right]$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q)e^{qt}}{1-e^{-qT}}dq \quad (5.20)$$

care se înmulţeşte cu f(t)

$$f^2(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q)}{1-e^{-qT}}e^{qt}.f(t).dq \quad (5.21)$$

Se ţine seama de teorema deplasării

$$e^{qt}.f(t) = \mathcal{L}_T^{-1}F_T(p-q) \quad (5.22)$$

şi deci avem :

$$f^2(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q)}{1-e^{-qT}}\, dq.\ \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(p-q)}{1-e^{-(p-q)T}}\, e^{pt} dp \qquad (5.23)$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_L \left[\frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q).F_T(p-q)}{(1-e^{-qT})(1-e^{-(p-q)T})}\, dq.(1-e^{-pT})\right] \frac{e^{pt} dp}{1-e^{-pT}} \qquad (5.24)$$

Comparînd cu (5.11) rezultă:

$$\mathcal{S}_T[f^2(t)] = (1-e^{-pT})\frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q).F_T(p-q)}{(1-e^{-qT})(1-e^{-(p-q)T})}\, dq \qquad (5.25)$$

In mod analog calculăm $\mathcal{S}_T[f^3(t)]$:

$$\mathcal{S}_T\left[f^3(t)\right] = \mathcal{S}_T\left[f^2(t).f(t)\right] = (1-e^{-pT}).\frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q_1).\psi_T(p-q_1).dq_1}{(1-e^{-q_1T})(1-e^{-(p-q_1)T})}$$

(5.26)

unde

$$\psi_T(p) = (1-e^{-pT}).\ \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q_2)-F_T(p-q_2)}{(1-e^{-q_2T})(1-e^{-(p-q_2)T})}\, dq_2 \qquad (5.27)$$

$$\psi_T(p-q_1) = (1-e^{-(p-q_1)T})\frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q_2)F_T(p-q_1-q_2)dq_2}{(1-e^{-q_2T})(1-e^{-(p-q_1-q_2)T})} \qquad (5.28)$$

Inlocuind (5.28) în (5.26) se obţine:

$$\mathcal{S}_T\left[f^3(t)\right] = (1-e^{-pT})\ \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q_1)}{(1-e^{-q_1T})(1-e^{-(p-q_1)T})}\ .$$

$$.\ \frac{(1-e^{-(p-q_2)T})}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(q_2).F_T(p-q_1-q_2)dq_2.dq_1}{(1-e^{-q_2T})(1-e^{-(p-q_1-q_2)T})} =$$

$$= (1-e^{-pT})\ \frac{1}{(2\pi j)^2}\int_L \frac{F_T(q_2)dq_2}{(1-e^{-q_2T})}\int_L \frac{\cancel{(1-e^{-(p-q_1)T})}.F_T(q_1).F_T(p-q_1-q_2)dq_1}{(1-e^{-q_1T})\cancel{(1-e^{-(p-q_1)T})}(1-e^{-(p-q_1-q_2)T})}$$

(5.29)

5.4. Calculul soluţiilor permanente periodice prin metoda transformatei Laplace pentru circuite liniare [11] .

Pentru a stabili metoda ne vom referi la ecuaţia de gradul doi.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ady}{dt} + by = f(t) \qquad (5.30)$$

unde f(t) este o funcţie periodică avînd perioada T_0.

Se calculează transformata pe o perioadă a ecuaţiei (5.3o) toate funcţiile fiind periodice:

$$p^2Y_T(p)-(1-e^{-pT})\left[py(o)+y'(o)\right]+apY_T(p)-ay(o)\left[1-e^{-pT}\right]+$$

$$+ bY_T(p) = F_T(p) \tag{5.31}$$

$$Y_T(p)\left[p^2+ap+b\right] = F_T(p)+(1-e^{-pT})\left[py(o)+y'(o)+ay(o)\right] \tag{5.32}$$

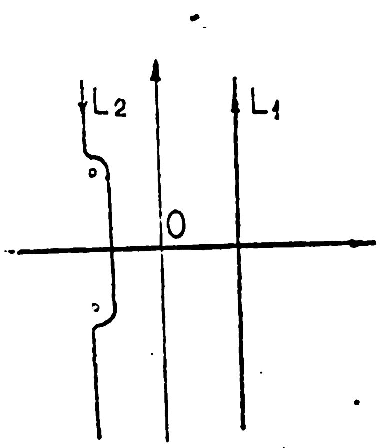
Rezultă:

$$Y_T(p) = \frac{F_T(p)}{p^2+ap+b} + \frac{(1-e^{-pT})\left[py(o)+y'(o)+ay(o)\right]}{p^2+ap+b} \tag{5.34}$$

Pentru găsirea originalului periodic observăm că soluţia permanentă nu poate depinde de valorile y(o) şi y'(o), motiv pentru care al doilea termen deci $y_T(p)$ nu va duce o contribuţie la valoarea integralei. Acest lucru se obţine dacă conturul L nu cuprinde polii determinaţi de ecuaţia $p^2+ap+b = 0$ ceea ce se realizează deformînd corespunzător conturul de integrare (vezi fig.5.2). Cu aceste observaţii :

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(p)e^{pt}.dp}{(1-e^{-pT})(p^2+ap+b)} \tag{5.35}$$

In aplicaţii calculele se automatizează în sensul că în expresiile derivatei şi integralei nu se mai ţine seamă de termeni care conţin pe y(o) şi y'(o) adică derivata se înlocuieşte cu $p^n y_T(p)$ iar integrala cu $\frac{1}{p}$ $y_T(p)$. Din sistemul obţinut se calculează $y_{\lambda T}(p)$ în funcţie de $F_{\lambda T}(p)$. Etapa următoare constă în calculul integralei care intervine în (5.35) cu alegerea corespunzătoare a conturului de integrare.



Gig.5.2.

5.5. Calculul soluţiilor forţate ale circuitelor neliniare prin metoda transformatei Laplace pe o perioadă.

Pentru calculul soluţiilor forţate ale circuitelor neliniare mai întîi se scriu ecuaţiile diferenţiale ale circuitelor prin teoremele lui Kirchhoff. Se trec ecuaţiile diferenţiale în ecuaţii operaţionale cu ajutorul transformatei Laplace pe o perioadă ţinînd seamă că condiţiile iniţiale sînt nule. Dacă termenul neliniar este sub forma unui polinom ecuaţiile operaţionale se pot rezolva prin metoda iterativă.

Se dă ecuaţia diferenţială de gradul doi cu un termen neliniar mic cy^2.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ady}{dt} + by + cy^2 = f(t) \qquad (5.36)$$

Aplicînd transformata operaţională pe o perioadă se obţine:

$$Y_T(p)Z(p) = F_T(p) - c\mathcal{L}_T(y^2)$$

unde $Z(p) = p^2+ap+b$

$$Y_T(p) = \mathcal{L}_T[y(t)]$$

$$F_T(p) = \mathcal{L}_T[f(t)]$$

Pentru găsirea originalului y(t) folosind formula (5.13) se obţine:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(p)e^{pt}}{(1-e^{-pT})Z(p)}dp - \frac{c}{2\pi j}\int_L \frac{\mathcal{L}_T(y^2)e^{pt}}{Z(p)(1-e^{-pT})}dp \qquad (5.37)$$

Se vede uşor că termenul întîi al ecuaţiei (5.37) este soluţia generatoare a ecuaţiei (5.36) care poate fi determinat prin ecuaţia (5.35), iar termenul al doilea al ecuaţiei (5.37) este un termen corectiv care poate fi determinat prin metoda iterativă.

In care conturul de integrare L nu închide zero-urile funcției Z(p).

Algoritmul de calcul iterativ este următorul:

In cazul cînd c = o se determină soluția liniarizată:

$$y_0(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_L \frac{F_T(p)e^{pt}}{Z(p)(1-e^{-pT})}\,dp$$

Procedînd din aproape în aproape rezultă șirul:

$$\begin{cases} y_1(t) = y_0(t) - \dfrac{c}{2\pi j}\displaystyle\int_L \frac{\mathcal{S}_T(y_0^2)e^{pt}}{Z(p)(1-e^{-pT})}\,dp. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(t) = y_{n-1}(t) - \dfrac{c}{2\pi j}\displaystyle\int_L \frac{\mathcal{S}_T(y_{n-1}^2)e^{pt}}{Z(p)(1-e^{-pT})}\,dp \end{cases} \quad (5.38)$$

In cazul general se dă ecuația diferențială de gradul n cu un termen neliniar mic $\psi(y)$.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt} + a_n y + \psi(y) = f(t) \quad (5.39)$$

Se calculează transformata pe o perioadă

$$Y_T(p).Z(p) - G\left[y(o),\ y'(o)\ldots y^{(n-1)}(o),p\right] = F_T(p) - \psi_T(p) \quad (5.40)$$

unde $Z(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$

$$\psi_T(p) = \mathcal{S}_T\left[\psi(y)\right]$$

$G\left[y(o),\ y'(o)\ldots y^{(n-1)}(o),p\right]$ corespund condițiilor inițiale.

Rezultă

$$Y_T(p) = \frac{F_T(p)}{Z(p)} - \frac{\psi_T(p)}{Z(p)} + \frac{G(p)}{Z(p)} \quad (5.41)$$

Procedeul de calcul iterativ este următorul:

$$\begin{cases} y_0(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_L \frac{F_T(p)e^{pt}dp}{z(p)(1-e^{-pT})} \\ y_1(t) = y_0(t) - \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_L \frac{\mathcal{S}_T\left[\psi(y_0)\right]e^{pt}}{z(p)(1-e^{-pT})}\,dp \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(t) = y_{n-1}(t) - \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_L \frac{\mathcal{S}_T\left[\psi(y_{n-1})\right]e^{pt}}{z(p)(1-e^{-pT})}\,dp \end{cases} \quad (5.42)$$

Se alegé conturul de integrare L astfel încît zerourile funcției Z(p) să fie în exteriorul lui.
Procesul de calcul se oprește cînd se obține precizia dorită.
Organigrama metodei iterative se reprezintă în fig.5.3.Trebuie precizat că această organigramă nu reprezintă organigrama pentru calculator numeric, și sintetizează etapele principale de calcul.

5.6. Exemplu de calcul.

5.6.1. Fie de rezolvat problema prezentată în cap.III pag.64 prin metoda operațională.

Rezolvare:

Ecuația circuitului obținută cu teorema lui Kirchhoff este:

$$u = ri + L\frac{di}{dt} + ai - bi^3$$

Ecuația operațională pe o perioadă este

$$U_T(p) = (pL+a+r_0)\dot{I}(p) - b\,\mathcal{L}_T[i^3]$$

$$I(p) = \frac{U_T(p)}{pL+r} + \frac{b\mathcal{L}_T[i^3]}{pL+r}$$

Tensiunea este sinusoidală, rezultă că termenul liniarizat $i_0(t)$ se găsește ușor cu metoda clasică

$$i_0(t) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t - \varphi_0) = I_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$$

unde $$I_0 = \frac{U_m}{\sqrt{r^2+(\omega L)^2}}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{r}, \quad r = r_0 + a$$

$$i_0^3(t) = \frac{3}{4}I_0^3\sin(\omega t - \varphi_0) - \frac{I_0^3}{4}\sin(3\omega t - 3\varphi_0)$$

imaginea Laplace a lui $i_0^3(t)$ este :

$$\mathcal{L}_T\left[i_0^3(t)\right] = \frac{3}{4}I_0^3\,\frac{(\omega\cos\varphi_0 - p\sin\varphi_0)}{p^2+\omega^2} - \frac{I_0^3}{4}\,\left(\frac{3\omega\cos\varphi_0 - p\sin\varphi_0}{p^2+9\omega^2}\right)$$

Imaginea Laplace a lui $\frac{b\mathcal{L}_T[i^3]}{pL+r}$ este:

ORGANIGRAMA GĂSIRII SOLUȚIILOR PERIODICE PRIN METODA TRANSFORMATEI LAPLACE PE O PERIOADĂ

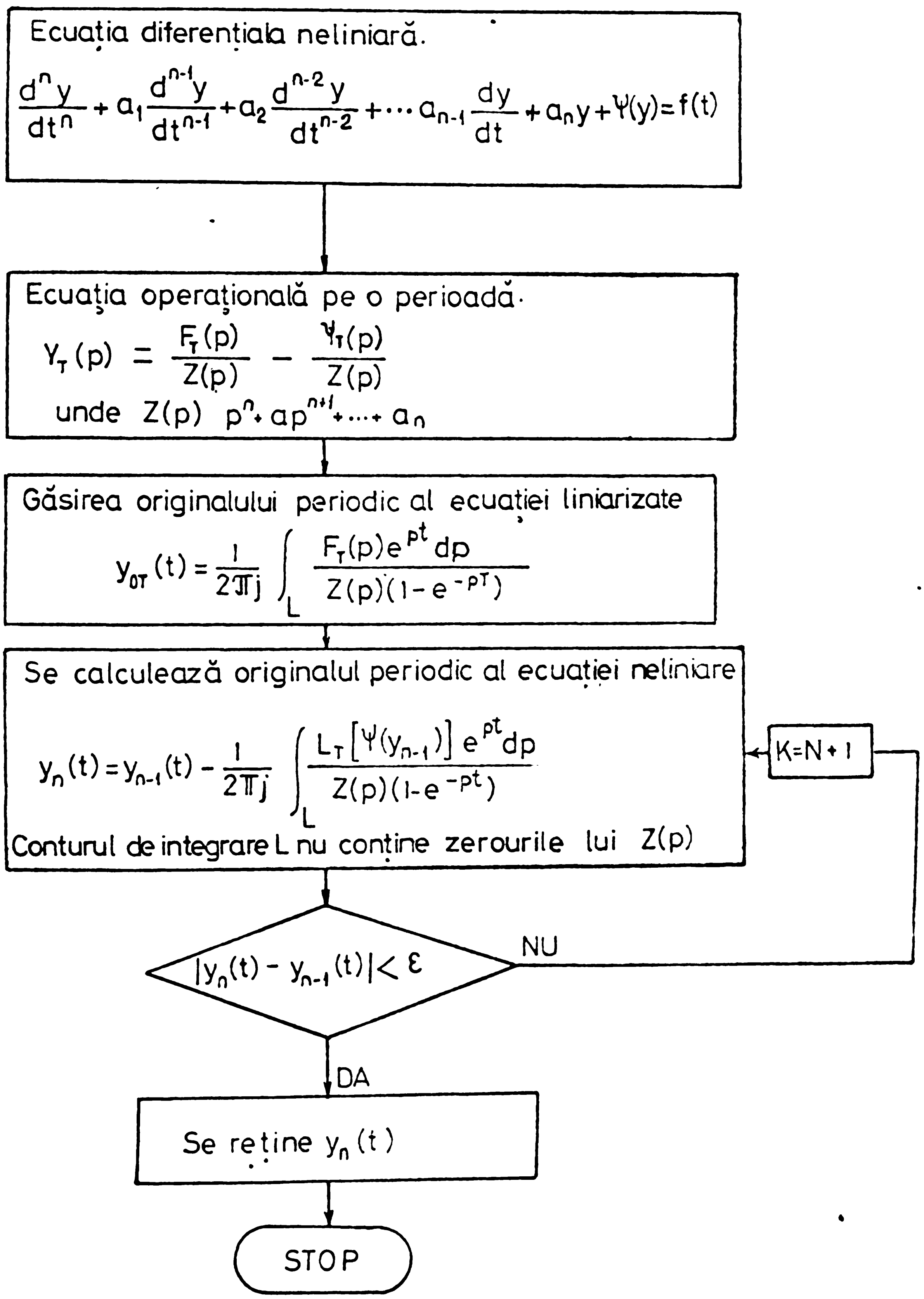


FIG. 5.3

$$\frac{b\mathcal{L}_T(i^3)}{pL+r} = \frac{3}{4} bI_o^3 \frac{(\omega\cos\varphi_o - p\sin\varphi_o)}{(pL+r)(p^2+\omega^2)} - \frac{bI_o^3}{4(3pL+r)(p^2+9\omega^2)}(3\omega\cos\varphi_o - p\sin\varphi_o)$$

Originalul i(t) în pasul doi de iterație este:

$$i_2(t) = i_o(t) + \frac{3}{4} b \frac{I_o^3}{\sqrt{r^2+(\omega L)^2}} \sin(\omega t - 2\varphi_o) -$$

$$- \frac{bI_o^3}{4\sqrt{r^2+(3\omega L)^2}} \sin(3\omega t - 3\varphi_o - \varphi')$$

unde $\varphi' = \operatorname{arctg}\frac{3\omega L}{r}$, $\varphi_o = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{r}$

In valorile numerice $U_m = 35,35$ V , a = 45, b = 3o, L = o,o5H, $r_o = 12\,\Omega$ avem:

$r = r_o + a = 12 + 45 = 57\,\Omega$, $z = r + j\omega L = 57 + j15,7 = 59,12\,\underline{/15^o39}\,\Omega$

$$I_o = \frac{U_m}{Z} = \frac{35,35\,\underline{/o^o}}{59,12\,\underline{/15^o39}} = 0,598\,\underline{/-15^o39'}\ \text{A}$$

Dacă nu se ține seama de influența termenului i_3 la termenul principal i(t) ,procesul de calcul iterativ este următorul:

După ce s-a obținut $i_o(t)$ termenul $\frac{3bI_1^3}{4\sqrt{r^2+(\omega L)^2}}\cdot$ $\sin(\omega t - 2\varphi_o)$ este un termen corectiv Δi adică

$i_1(t) = i_o(t) + \Delta i_o(t)$, în pasul următor se ia:

$i_2(t) = i_1(t) + \Delta i_1(t)$. Pasul de calcul continuă pînă cînd $|i_n(t) - i_{n-1}(t)| < \varepsilon$. Armonica a treia se obține după formula:

$$i_3(t) = \frac{-bI_o^3}{4\sqrt{r^2+(3\omega L)^2}} \sin(3\omega t - 3\varphi_o - \varphi')$$

Rezultatul obţinut după calcul se dă în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1.

Nr.	i (A)	i (A)
1	$0,598\angle{-15^{\circ}23'} = 0,576-j0,159$	$0,081\angle{-30^{\circ}46'} = 0,069-j0,041$
2	$0,675\angle{-17^{\circ}13'} = 0,645-j0,200$	$0,12\angle{-34^{\circ}26'} = 0,099-j0,068$
3	$0,712\angle{-18^{\circ}34'} = 0,675-j0,227$	$0,13\angle{-37^{\circ}08'} = 0,103-j0,078$
4	$0,720\angle{-19^{\circ}14'} = 0,679-j0,234$	$0,14\angle{-38^{\circ}28'} = 0,106-j0,088$
5	$0,727\angle{-19^{\circ}40'} = 0,685-j0,245$	

$$i_3 = 0,040\sin(3\omega t-38^{\circ}36')\ A.$$

Rezultă în sfîrşit:

$$i(t) = 0,727\sin(\omega t-19^{\circ}40')+0,040\sin(3\omega t-38^{\circ}36')\ A.$$

CAPITOLUL VI

FOLOSIREA CALCULATOARELOR ANALOGICE IN STUDIUL CIRCUITELOR NELINIARE

6.1. Noţiuni de bază:

Modelarea electronică constă în folosirea amplificatoarelor operaţionale şi a circuitelor de reacţie prin care se pot rezolva probleme diverse ale ştiinţei şi tehnicii.

Intr-un calculator analogic soluţionarea unei probeleme constă în modelizarea ecuaţiilor ce interesează cu ajutorul elementelor de circuit sau a elementelor operaţionale electronice. Soluţiile căutate sînt reprezentate prin valorile unor tensiuni sau curenţi.

Calculatoarele analogice aflate în uz se împart după domeniile de utilizare în universale şi specializate. Ele se pot utiliza pentru a rezolva ecuaţii diferenţiale liniare, neliniare, sau probleme de optimizare...

In prezent în afară de analizoare diferenţiale electronice, circuitele modelizate care se construiesc pe baza analogiei şi cvasianalogiei se dezvoltă foarte repede [29] , [48] ...
In analiza circuitelor neliniare se realizează simularea circuitelor, metoda prezentînd o perspectivă a dezvoltării studiilor circuitelor neliniare moderne.

In acest capitol vom prezenta o sinteză a folosirii calculatoarelor analogice în analiza circuitelor, de asemenea vom prezenta următoarele studii pe calculatorul analogic MEDA 42-TL: rezolvarea unui circuit liniar, studiul regimului forţat în circuitul RL serie neliniar, modelarea curbei de magnetizare şi studiul seignetoferorezonanţei.

6.2. Elementele calculatorului analogic.

Elementul principal al oricărui calculator analogic îl constituie amplificatoarele operaţionale, care se realizează dintr-un amplificator de curent continuu cu coeficientul amplificării mare ($> 10^6$) avînd circuite de reacţie.

Cu ajutorul acestora se formează:sumatoare, înmulţitoare, integratoare, generatoare de funcţii.

Schema bloc şi funcţiile matematice ale acestor elemente se dau în tabelul 6.1.

6.3. Programarea calculatoarelor analogice:

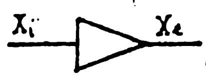
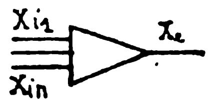
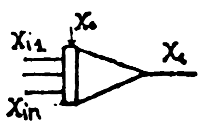
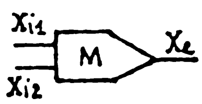
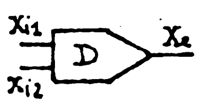
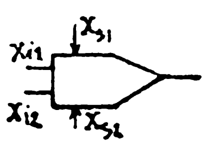
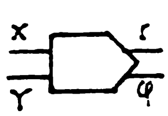
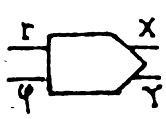
Programarea atît a problemelor liniare cît şi a celor neliniare trebuie să parcurgă utmătoarele etape:

- Se determină numărul şi natura elementelor de calcul necesare.
- Se determină ordinea legăturii elementelor.
- Se determină parametrii elementelor (forma funcţiilor neliniare concrete, scările variabilelor, condiţiile iniţiale pe integratoare)etc.

Factorii de scară trebuie astfel aleşi încît tensiunile pe care le determină să nu depăşească domeniile admise de ±1ooV sau ± 1oV ale calculatorului folosit. Pentru a micşora erorile relative şi erorile datorită deplasării nulului, zgomotului, etc este de dorit ca factorii de scară să fie cît mai mari.

In general necunoscînd soluţia y(t) nu se cunoaşte nici valoarea maximă a ei y_{max} şi astfel factorul de scară se apreciază cu valoarea corespunzătoare estimată y_{max}. Această estimare se bazează pe aprecierea soluţiei sub diverse aspecte fizice, energetice. La punerea la punct a programului factorii de scară se pot ajusta pe baza indicatoarelor de supradepăşire

Tabelul 6.1. Elemente de calcul.

Denumirea elementului de calcul	Operația de calcul	Simbol	Funcția matematică
Amplificator operațional	Simbol general		Elemente de bază pentru realizarea operațiilor
invertor	Schimbarea semnului		$x_e = -x_i$
Sumator	Adunarea mai multor funcțiuni		$x_e = \sum_{j=1}^{n} C_i x_{ij}$
integrator	Integrarea funcțiilor de o variabilă reală		$x_e = x_o' - \int_0^t (\sum_{j=1}^{n} C_i x_{ij}) dt$
Potențiometru	Multiplicarea cu o constantă		$x_e = \alpha x_i$; $0 < \alpha < 1$
Multiplicator	Inmulțirea a două mărimi variabile		$x_e = x_{i1} \cdot x_{i2}$
Divizor	Divizarea a două mărimi variabile		$x_e = \frac{x_{i1}}{x_{i2}}$
Generator de funcții	Generarea funcțiunilor		$x_e = f(x_i)$
Comparator	Decizia logică		$x_e = \begin{cases} x_{i1} & \text{dacă } X_{s1}+X_{s2} > 0 \\ x_{i2} & \text{dacă } X_{s1}+X_{s2} < 0 \end{cases}$
Transformator de coordonate	Transformarea coordonatelor carteziene în coordonate polare		$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$
	Transformarea coordonatelor polare în coordonate carteziene		$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$

sau subdepăşire.

In ecuaţiile neliniare frecvent întîlnite în electrotehnică neliniarităţile se prezintă sub forma de produse sau de puteri. Dacă notăm a_1, a_2 valorile normate ale variabilelor reale x_1, x_2 atunci

$$a_1 = \frac{x_1}{x_{1\,max}} \quad , \quad a_2 = \frac{x_2}{x_{2\,max}} \tag{6.1}$$

rezultă condiţia necesară $-1 \leqslant a_1 . a_2 \leqslant 1$ (6.2)

Dacă neliniaritatea se prezintă sub forma unei funcţii oarecare, funcţia neliniară care trebuie normată se poate prezenta sub forma generală:

$f(x_i) = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, dacă notăm ai $= \frac{x_1}{x_{i\,max}}$ valorile normate lui x_i atunci valoarea normată a lui $f(x_i)$este:

$$a(x_i) = \frac{f(x_i)}{f_{max}(x_i)} \tag{6.3}$$

şi satisface condiţia:

$$-1 \leqslant a(x_i) \leqslant 1 \tag{6.4}$$

Operaţiunea de normare joacă un rol important în simularea analogică a sistemelor descrise de ecuaţii diferenţiale neliniare, deoarece sistemul de ecuaţii obţinut după normare este direct programabil pe calculator.

6.4. Micşorarea erorilor calculatorului analogic:

Programarea pe calculatoare analogice trebuie să se facă astfel încît erorile să fie cît mai mici. Erorile se datoresc următoarelor cauze:

1. Tensiunea pe elementele de calcul este prea mare sau prea mică în gama de variaţie a soluţiilor.

2. Elementele de calcul nu corespund cu problemele căutate.

Dacă variabila reală x variază în intervalul $x_{min} < x < x_{max}$, variabila maşinii variază în intervalul $U_{min} < U < U_{max}$ unde $u = kx$, $k \leqslant \frac{U_{max}}{U_{min}}$ (6.5)

k se consideră ca un factor de calitate al oricărui calculator analogic. In general calculatoarele moderne au $U_{max} = 100$ V, $U_{min} = 0{,}1$ V adică $k = \frac{U_{max}}{U_{min}} = 10^3$.

Pentru a mări precizia programării factorul de scară k trebuie să fie cît mai mare. Dacă condiţia (6.5) nu se realizează, factorul k nu poate fi constant. In acest caz factorul de scară trebuie să se schimbe în procesul de rezolvare.

De cele mai multe ori un program realizat nu va funcţiona optim de la început. Factorii de scară se pot schimba într-un domeniu al variabilelor sau se schimbă în mod continuu după relaţia $k = f(t)$.

Pentru obţinerea unor factori de scară eficienţi, aceştia trebuie să se aleagă astfel încît

$$y = g(t).\int_0^t x\, dt \qquad (6.6)$$

în general $g(t) \neq k;g(t)$ nefiind constant, ea se poate obţine numai în cazul în care x(t) este cunoscut. Dacă dorim ca valoarea de ieşire a integratorului să fie ky, atunci:

$$\frac{d}{dt}(ky) = y\frac{dk}{dt} + k\frac{dy}{dt} \qquad (6.7)$$

In schema din fig.(6.1) se poate rezolva ecuaţia (6.7) factorii de scară schimbîndu-se în mod continuu.

In [20] se prezintă metoda variaţiei pentru micşorarea erorilor. Fiecare variabilă este descompusă în valoarea nominală y_0 şi abaterea Δy

$$y = y_0 + \Delta y \qquad (6.8)$$

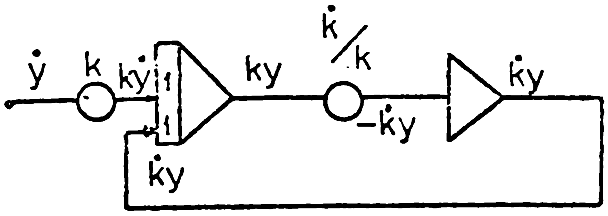


Fig.6.1.

Factorii de scară sînt aleşi prin Δy şi nu prin y, de asemenea în [20] se studiază posibilitățile de a simplifica schema bloc în vederea micşorării erorilor.

După [52] transformînd corespunzător sistemul de ecuații studiat în scheme echivalente se poate mări precizia soluțiilor. Experiențele efectuate pe calculatoare analogice şi studiile teoretice din [52] au arătat că există pentru factorul erorii variabilei $\omega(x_i)$ care caracterizează precizia variabilelor reale şi variabilelor maşinii relațiile :

$$\omega(x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} \tag{6.9}$$

unde ∂x_i, ∂X_i sînt erorile relative ale variabilelor reale şi ale variabilelor maşinii. Pentru diverse transformări ale sistemului de ecuații se obține factorul erorii sub formele:

1. Transformata liniară

$$x_i = M_i X_i + N_i \tag{6.10}$$

unde M_i, N_i sînt coeficienții de transformare.

$$M_i = \frac{u_i}{\theta_i} \quad , \quad N_i = x_{imax} - \frac{u_i}{\theta_i} X_{imax}$$

$$u_i = x_{imax} - x_{imin} \qquad \theta_i = X_{imax} - X_{imin}$$

u_i, θ_i sînt diapazoanele variației variabilei reale şi respectiv variabilei maşinii; factorul erorii este: $\omega(x_i) = \frac{\psi_i}{\Psi_i}$

unde $\psi_i = \frac{u_i}{|x_i|_{max}}$, $\Psi_i = \frac{\theta_i}{|X_i|_{max}}$

ψ_i, Ψ_i sînt diapazoanele variației relative a variabilei reale şi respectiv variabilei maşinii ψ_i, şi $\Psi_i \in [0,2]$

2. Transformata logaritmică:

Transformata logaritmică are forma:

$$x_i = B_i \cdot 10^{X_i/A_i} \tag{6.11}$$

unde $A_i = \frac{0_i}{\lg(\frac{1}{1-\psi_i})}$, $B_i = X_{imax}(1-\psi_i)^{1/\psi_i}$ sînt coefoccenţii transformatei.

Factorul erorii

$$\omega(x_i) = \frac{\lg(\frac{1}{1-\psi_i})}{\psi_i \lg e}$$

3. Transformata unei puteri:

$$x_i = C_i X_i^{m_i} \qquad (6.12)$$

unde m_i se alege după condiţia simplificării schemei

$C_i = \frac{x_{i\,max}}{[|X_i|_{max}]^{m_i}}$ este coeficientul transformatei

Factorul erorii

$$\omega(x_i) = m_i + \frac{m_i(m_i-1)}{1.2} \delta X_i + \frac{m_i(m_i-1)(m_i-2)}{1.2.3} (\delta X_i)^2 + \dots \approx m_i$$

Factorul erorii pentru diverse transformări se prezintă în

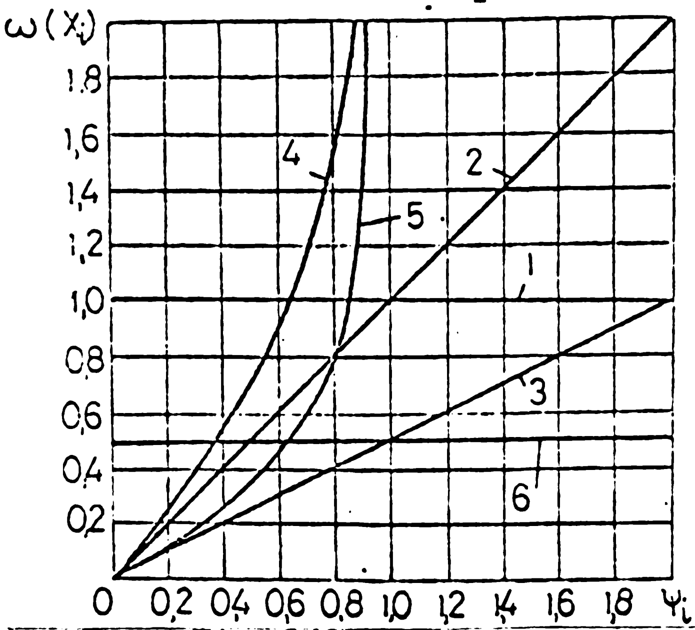


Fig.6.2.

Din graficul 6.2 constatăm că factorul erorii $\omega(x_i)$ depinde numai de forma transformărilor şi de factorii de scară.

6.5. <u>Elementele neliniare ale calculatoarelor analogice</u>:

Elementele neliniare joacă un rol foarte important pentru probleme liniare şi neliniare.

Relaţia $\omega(x_i)$ pentru diverse transformări:

1. Transf.de puteri $m_i = 1$
2. Transf.liniară $\psi_i = 1$
3. Transf.liniară $\psi_i = 2$
4. Transf.logaritmică $\psi_i = 1$
5. Transf.logaritmică $\psi_i = 2$
6. Transf.de putere $m_i = 0,5$

şi influenţează precizia soluţiilor. Voi prezenta principalele elemente neliniare care se folosesc pe larg în calculatoare analogice.

1. Generatoare de funcţii: Programarea problemelor neliniare şi liniare are nevoie de funcţii de timp $y=f(t)$ şi funcţii de variabilă reală $y = f(x)$. Funcţiile de timp se realizează pe calculatoare relativ simplu rezolvînd ecuaţiile diferenţiale ajutătoare. De exemplu fie de realizat funcţia $y = e^{-\alpha t}$. Se ştie că ea este soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul întîi care se poate obţine prin schema prezentată în fig.6.3. Funcţiile sinusoidale şi cosinusoidale sînt soluţiile ecuaţiei diferenţiale de ordinul 2.

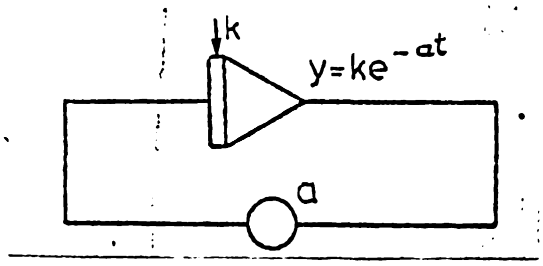


Fig.6.3.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad (6.13)$$

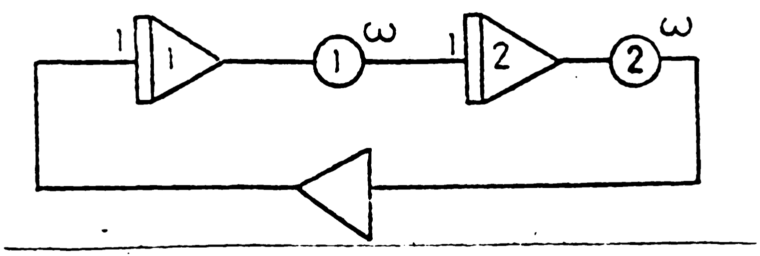


Fig.6.4.

In schema prezentată în fig.(6.4) funcţia y poate fi sinusoidală sau cosinusoidală, depinde de condiţii iniţiale. Funcţia exponenţială de variabilă de timp t $y = kt^n$ se poate realiza folosind integratoare în serie.

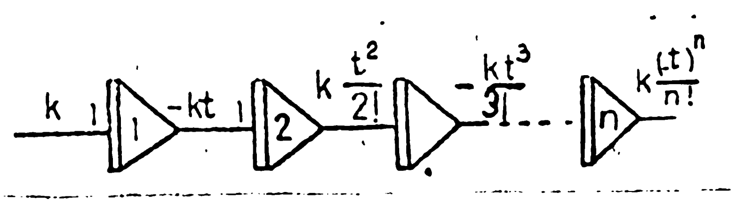


Fig.6.5.

In acest caz condiţiile iniţiale ale tuturor integralelor sînt nule (fig.6.5). Pentru obţinerea coeficienţilor variabili de timp se poate folosi potenţiometrul cu cursor variabil (fig.6.6), Pentru schema (6.6) funcţia variabilă se obţine:

$$f(t) = \frac{r(t)}{R} \qquad (6.14)$$

unde r(t) este rezistenţa dintre cursor şi masă, R este

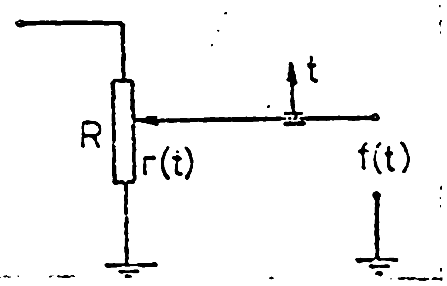


Fig.6.6.

rezistenţa totală a potenţiometrului. Funcţiile de variabilă reală $y = f(x)$ se pot realiza prin elemente neliniare. Datorită greutăţilor de reproducere cu precizie a acestor caracteristici şi influenţelor perturbatoare care pot modifica mult dependenţa realizată, se folosesc în general circuite cu diode şi rezistoare cu ajutorul cărora neliniaritatea dorită se aproximează prin segmente de dreaptă.

Circuitele neliniare elementare se pot combina şi astfel se poate realiza o clasă largă de funcţii neliniare. In fig.6.7 se prezintă circuitele neliniare serie şi cele de tip paralel în reacţie.

Parametrii caracteristicilor ce rezultă sînt daţi în ipoteza că diodele sînt ideale. Funcţiile analitice simple de variabilă de maşină x de forma unor polinoame $aX + b$; $aX^2 + bX + c$... se realizează folosind sumatoare, dispozitive de înmulţire şi potenţiometrie pentru coeficienţi. Combinînd caracteristicile neliniare ale elementelor de tipul celor realizate de limitoare se obţine o clasă mare de funcţii aproximate pe porţiuni cu segmente de dreaptă. Principiul obţinerii de relaţii funcţionale este prezentat în fig.6.8. Cele două blocuri în ipoteza că punctul este la potenţial nul realizează nişte caracteristici neliniare de curent de forma:

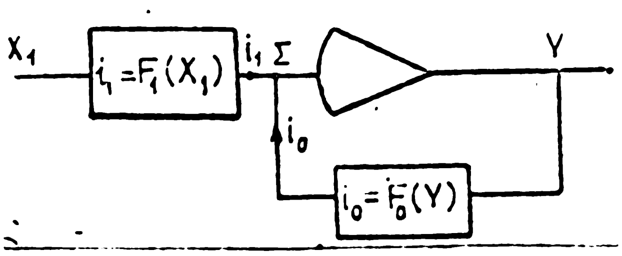
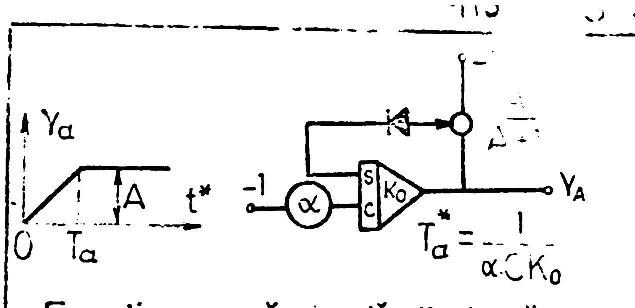


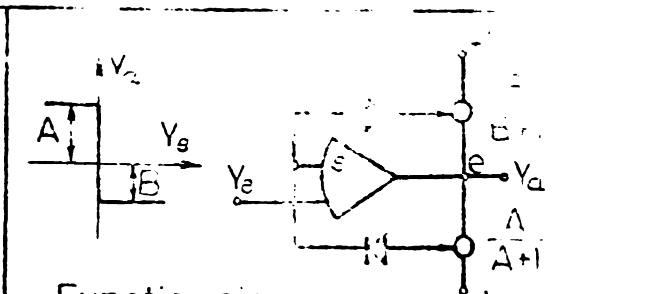
Fig.6.8.

$$i_1 = F_1(X_1) \quad ; \quad i_0 = F_0(Y)$$

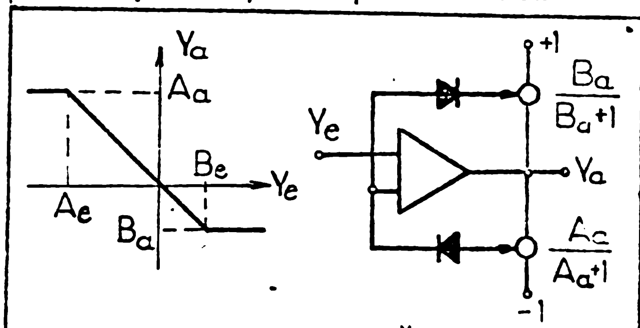
Din condiţia $i_1 + i_0 \approx 0$ îndeplinită datorită amplificării mari a amplificatorului de curent continuu, rezultă:



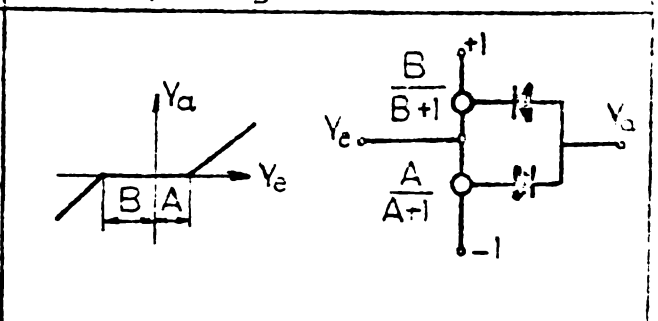
Funcția rampă simplă limitată



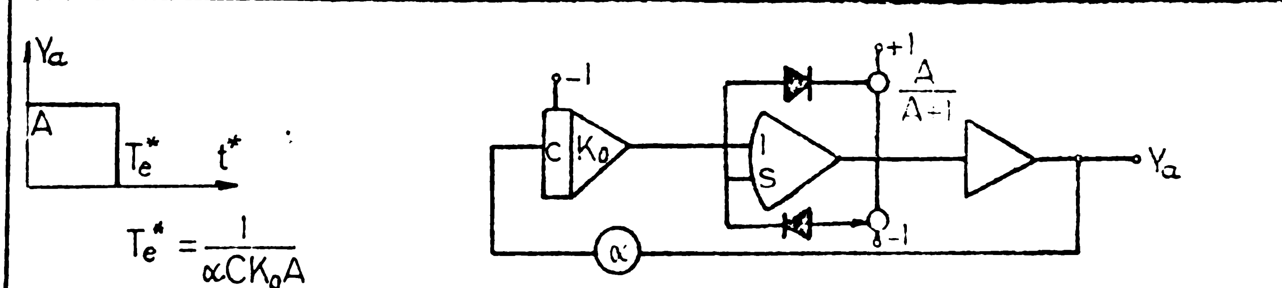
Funcția signum



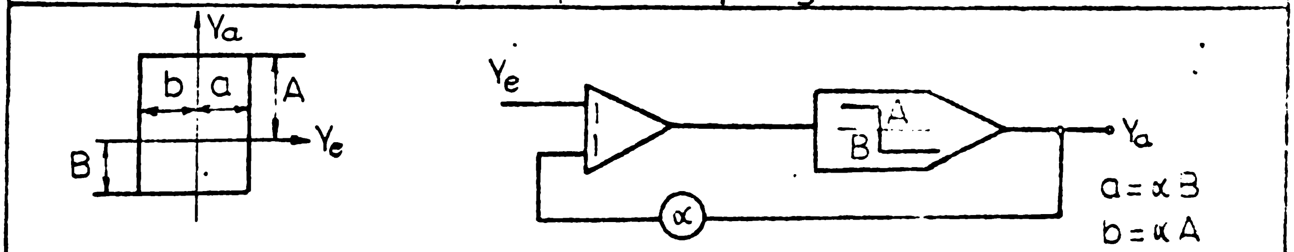
Funcția rampă dublă limitată



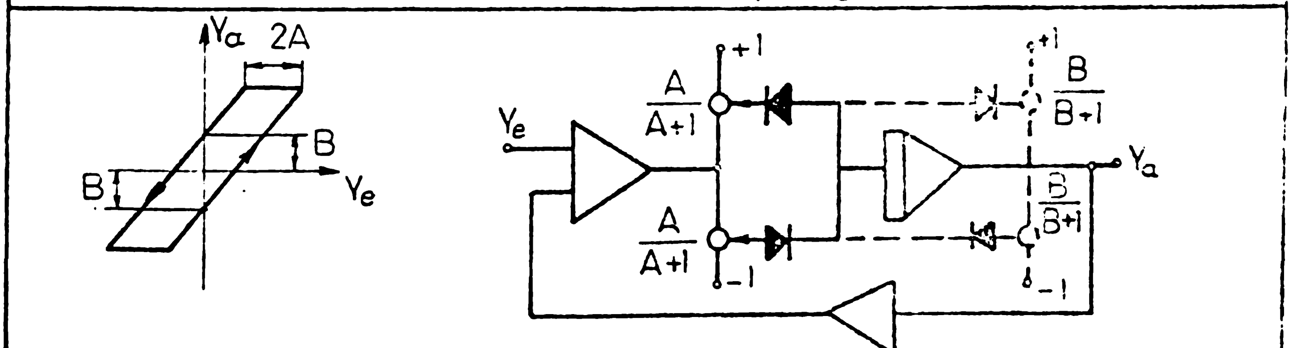
Funcția timp mort



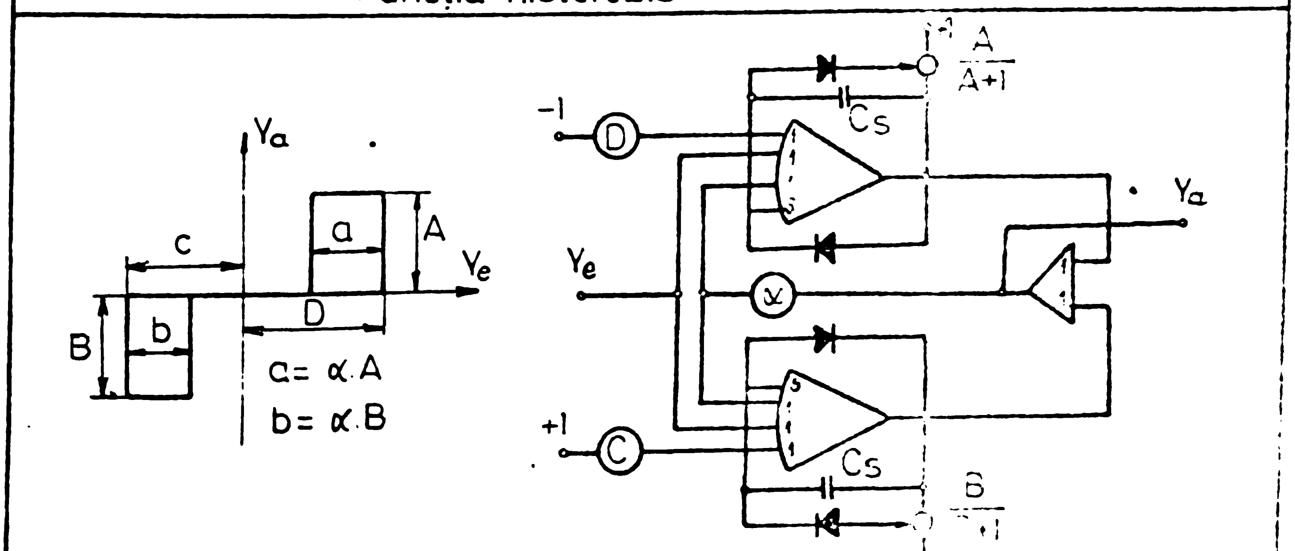
Funcția impuls dreptunghiular



Functia histerezis dreptunghiular



Funcția histerezis



Funcția histerezis bipozițional

$F_1(X_1) = F_0(Y)$ sau $Y = f(X_1)$

Generatoarele de funcţii universale sînt destinate realizării unor dependanţe oarecare. Principiul lor este asemănător cu cel al generatoarelor specializate, cu diferenţa că ele permit să se aleagă numărul segmentelor de aproximare şi punctele acestora. Cu alte cuvinte ele sînt universale şi se acordează înainte de folosire. In general se dispune de un număr oarecare de elemente neliniare cu diode care stabilesc şi numărul segmentelor ce se pot utiliza în aproximarea respectivă. Acestea se pot conecta fie la tensiunea de intrare X_1, fie la $-X_1$ pentru a obţine pante pozitive şi la fel tensiunea de polarizare poate fi aleasă pozitivă sau negativă. Diodele se pot şi inversa rezultînd în final posibilitatea de a avea segmente de dreaptă cu pantă pozitivă sau negativă în toate cele patru cadrane. In fig.6.9 se prezintă schema principală a unui generator universal simplu care conţine pînă la 19 elemente neliniare cu diode şi rezistoare.

O caracteristică mai complicată poate fi realizată utilizînd două generatoare. Ajustarea manuală a unui generator de funcţii începe prin a stabili fie analitic, fie grafic punctele de frîngere şi punctele aproximării pe porţiuni prin segmente. Se stabileşte apoi numărul segmentelor cu puncte de frîngere pozitive sau negative. Se deplasează punctele de frîngere spre valori mari ale lui X, respectiv -X. Elementele pentru segmentul orizontal cel care trece prin origine se ajustează întîi. Se fixează apoi X_1 la valoarea primului punct de frîngere şi se ajustează punctul de frîngere al elementului destinat să intervină pînă cînd se reglează întîi panta elementului

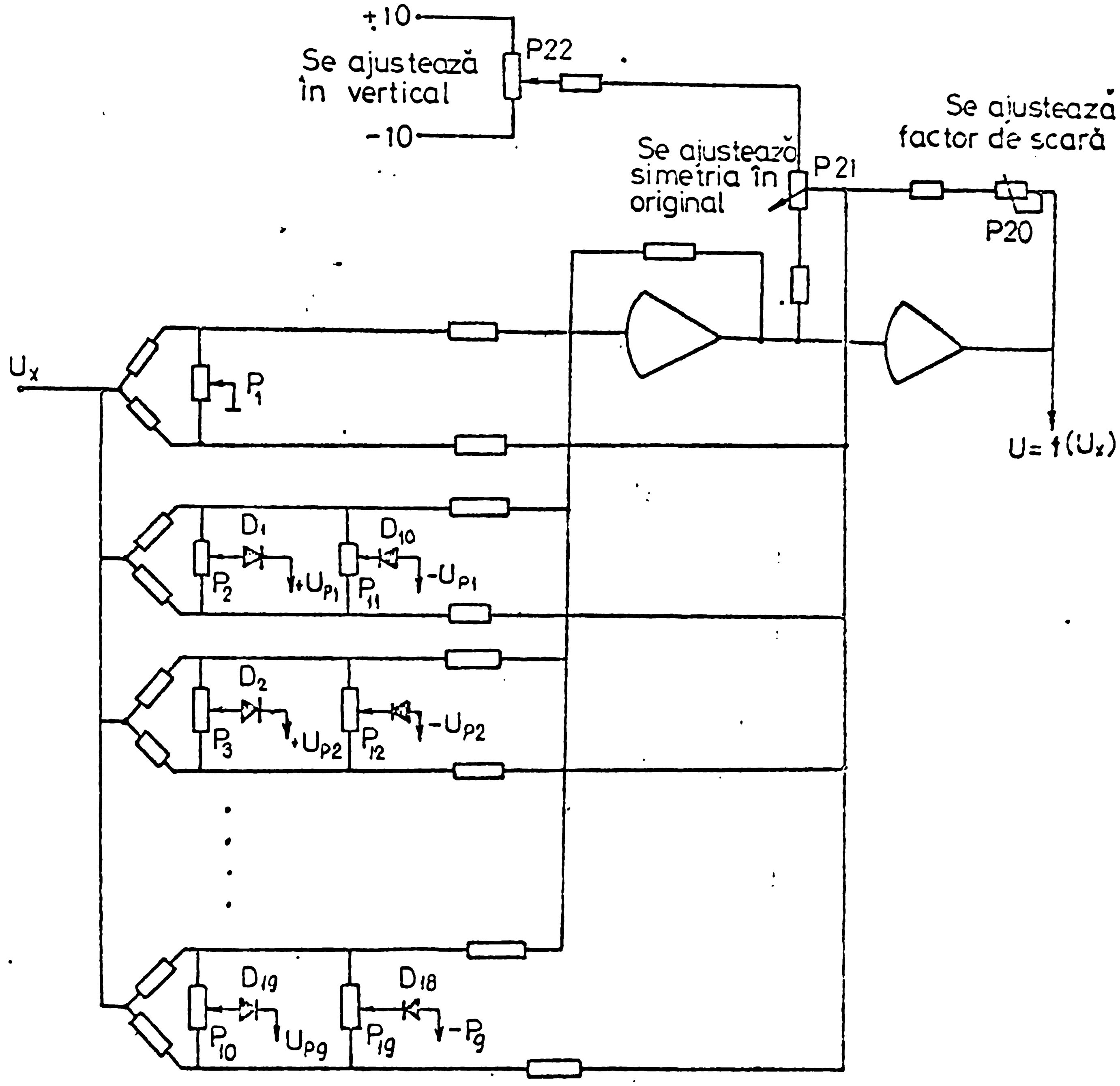


Fig.6.9.

acordat în ceea ce priveşte frîngerea, pînă cînd se obţine tensiunea de ieşire X_0 impusă. Procesul se repetă pînă cînd s-au ajustat toate elementele. De obicei sînt necesare două sau trei treceri peste întregul domeniu pînă cînd se obţine aproximarea dorită.

Funcţiile de două variabile se pot obţine pe baza unor dispozitive speciale sau prin combinaţii ale funcţiilor de o variabilă. La ora actuală nu există nici un dispozitiv care poate realiza funcţii de trei sau de mai multe variabile. Aceste funcţii se află în afară de posibilitatea modelării analogice dacă nu se pot aproxima prin combinaţia funcţiilor de o variabilă sau de două variabile.

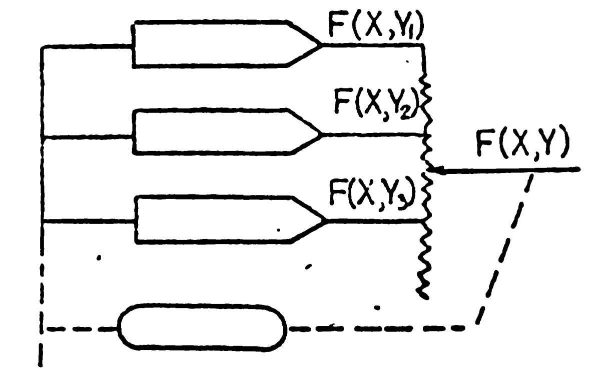


Fig.6.1o.

In fig.6.1o se prezintă un generator de funcţii realizat cu un servomecanism şi generatoare obişnuite.

In [53] s-a prezentat metoda generării funcţiilor reale prin modelări ale unor funcţii de timp. Dacă trebuie să realizăm relaţia y = sinlnx (6.15), descriem funcţia (6.15) în forma parametrică:

$$x = e^{-\alpha t} \quad ; \quad y = -\sin \alpha t \qquad (6.16)$$

funcţiile (6.16) se obţin rezolvînd pe calculator ecuaţiile următoare:

$$\begin{cases} \dot{x} + \alpha x = 0 \\ \ddot{y} + \alpha y^2 = 0 \end{cases} \qquad (6.17)$$

Apoi se realizează "deparametrizarea" adică se elimină parametrul t. Intr-un caz simplu acesta se poate realiza pe un oscilograf electronic aducînd x şi y pe plăcile orizontală şi transversală ; pe ecran se obţine funcţia y = sinlnx.

Dacă trebuie să se obţină o tensiune ce are legea de variaţie (6.15) acesta se realizează după cum urmează: în schema prezentată în fig.6.11 tensiunea $x = e^{-\alpha t}$ se realizează în partea stîngă iar în partea dreaptă se obţine tensiunea $y = -\sin \alpha t$.

Tensiunea de ieşire a integratorului 1 se leagă cu organ-nul. Cînd semnalul de comandă M coincide ca semnal de intrare, întreruptorul K_1 se închide. La început, cînd tensiunea de intrare: $x_i = x = 1$ şi $y = 0$, intreruptoarele sînt în stare deschisă. Dacă tensiunea de intrare se reduce sub acţiunea semnalului de comandă M, întreruptoarele se închid şi tensiunile x, y încep să varieze pînă cînd tensiunea x diferă de tensiunea x_i, atunci întreruptoarele se deschid şi în final la ieşirea schemei se obţine tensiunea $y = \sin \ln x$.

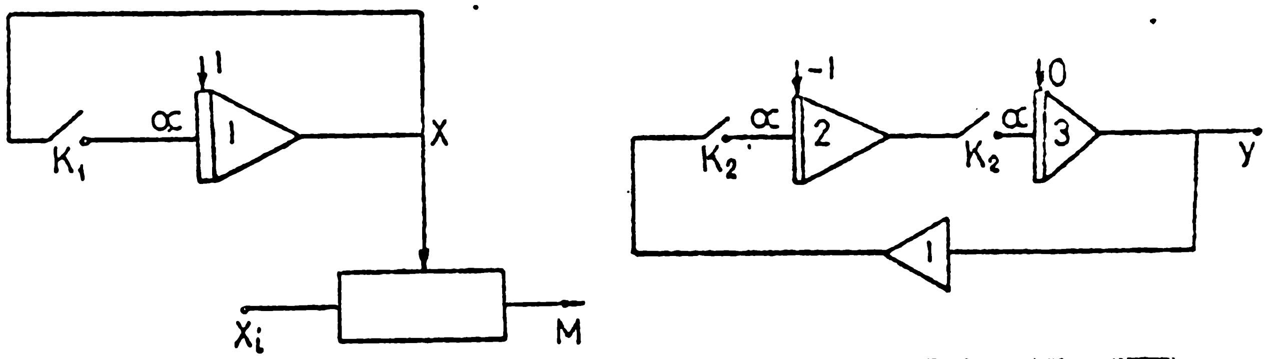


Fig.6.11.

Coeficientul α este ales astfel încît viteza de variaţie a lui x să fie mai mare decît viteza de variaţie a lui x_i. In aceste condiţii tensiunea x are variaţia continuă şi deci tensiunea $y = \sin \ln x$ are şi ea variaţie continuă.

In mod analog se poate realiza modelarea unor funcţii oarecari. Funcţiile căutate trebuie scrise sub formă parametrică:

$$x = \varphi_1(t_1) \quad ; \quad y = \varphi_2(t_1) \quad ; \quad t_1 = Mt \tag{6.18}$$

după ce funcţiile φ_1, φ_2 au fost realizate organul-nul compară x şi x_i, la ieşirea schemei se obţine $y = \varphi_2\left[\varphi_1^{-1}(x)\right]$; $x = x_i$

$$(6.19)$$

Parametrizarea unei funcţii nu este univocă. De exemplu funcţia $y = x^2$ poate fi parametrizată prin variantele următoare:

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{2} \sin t \\ y = 1 - \cos 2t \end{cases} \tag{6.20}$$

Prin combinaţia funcţiilor parametrizate se pot realiza alte funcţii ca de exemplu: $y = xe^{-\alpha x}$ $y = C_1x+C_2x^{\alpha}$...

Studiem ce clasă de funcţii se poate modeliza prin metoda prezentată mai sus. In primul rînd ne vom limita la studiul ecuaţiilor de ordinul întîi. Soluţiile lor sînt: αt sau $e^{\alpha t}$. trecem la realizarea unei clase de funcţii mai mare $y = \varphi_2[\varphi_1(x)] = f(x)$ în care se cuprind funcţiile exponenţiale, logaritmice... de exemplu: $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $x^{\alpha/\beta}$, a^x, a^{-x}, lgx... Prin combinarea unor ecuaţii de diverse ordine se obţin funcţiile: sin x, cos x, arc sin x, arcosx, xa^x, coslnx, exp(arcsinx)...

Dacă ambele funcţii determinate sînt de ordinul doi, atunci se obţine polinomul Cebîsev cos(narccosx) care este caracteristica de transfer optimală a multiplicatoarelor şi schema determinată se poate folosi pentru înmulţirea, împărţirea frecvenţelor. Există posibilitatea modelării funcţiilor multivoce cu curbe închise sau întretăiate prin polinoamele Cebîşev de speaţa a doua. In [53] de asemenea s-a prezentat modelarea funcţiilor de mai multe variabile. Schema dată în [53] prezintă avantajul că ea permite să se realizeze o clasă vastă a funcţiilor prin mijloace simple. Inchiderea şi deschiderea schemei se realizează prin întreruptoare electronice sau prin relee polarizate.

Existenţa erorii dinamice datorită inerţiei mecanice şi electrice a contactelor reprezintă dezavantajul principal al schemei.

Inmulţirea se poate realiza fie pe baza unor elemente cu servomecanisme fie pe baza unor circuite pur electronice.

Primele sînt relativ precise dar lente datorită părților mecanice pe care le conțin. Cele electronice au atins și ele un nivel înalt de dezvoltare și înlocuiesc actualmente în multe cazuri sistemele cu servomecanisme.

Folosind generatoare de funcții se pot realiza și dispozitive de înmulțire pe baza relației:

$$xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right] \qquad (6.21)$$

Inmulțirea se poate realiza cu ajutorul unor sumatoare și cuadratoare. In fig.6.12 se prezintă două dispozitive de înmulțire cu cuadratoare unde:

$$U_a = \frac{U_1+U_2}{2} \; ; \quad U_b = \frac{U_1-U_2}{2} \qquad (6.22)$$

Rezultă:

$$i_1+i_2 = -k\left(\frac{U_1+U_2}{2}\right)^2 \qquad (6.23)$$

$$i_3+i_4 = k\left(\frac{U_1-U_2}{2}\right)^2 \qquad (6.24)$$

$$U_a = R_o i_o = -R_o(i_1+i_2+i_3+i_4) \qquad (6.25)$$

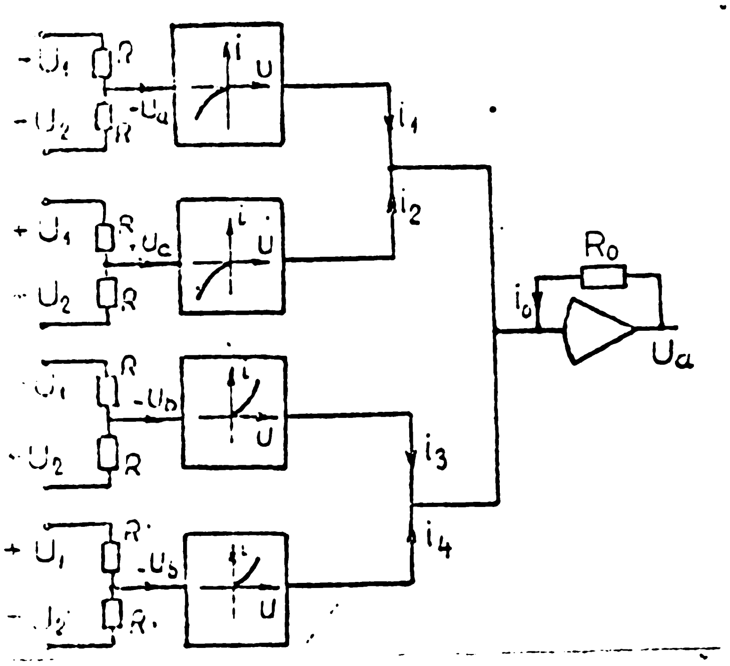


Fig.6.12.

Din ultimele relații avem:

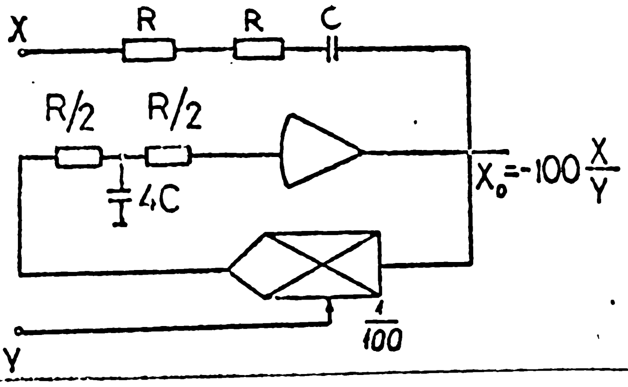
$$U_a = R_o k\left[\left(\frac{U_1+U_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{U_1-U_2}{2}\right)^2\right] = U_1 \cdot U_2 \qquad (6.26)$$

Principala dificultate tehnică a schemei din fig.6.12 este legată de faptul că în natură nu se găsesc elemente cu caracteristică pur pătratică, astfel încît practic în simulator ea este înlocuită cu un șir de segmente de dreaptă.

Impărțirea electronică se obține în general folosind soluția ecuației:

$$\alpha X_0 Y + X = 0 \quad ; \; X_0 = -\frac{X}{\alpha Y} \qquad (6.27)$$

care se programează folosind un amplificator de c.c. şi un înmulţitor fig.(6.13).



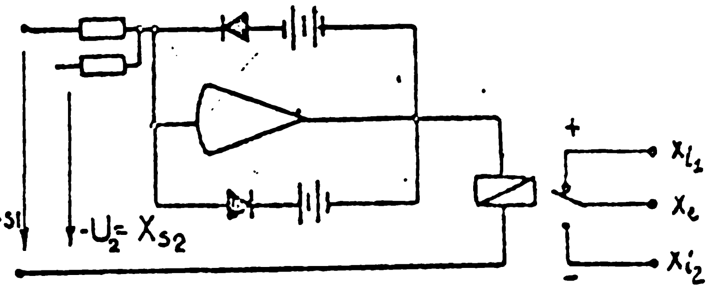


Fig.6.13. Fig.6.14

Comparatorul este utilizat ca element de calcul independent. Cu ajutorul lui elaborarea deciziilor logice care apar în probleme neliniare devine posibilă. Un exemplu de operaţie logică care poate fi efectuată cu ajutorul comparatorului este:

$$x_e = \begin{cases} x_{i1} & \text{dacă } x_{si} + x_{s2} > 0 \\ x_{i2} & \text{dacă } x_{s1} + x_{s2} < 0 \end{cases} \qquad (6.27)$$

Schema de principiu a comparatorului se dă în fig.(6.14)

6.6. <u>Studiul circuitelor neliniare pe calculatorul analogic MEDA 42-TL</u>.

6.6.1. <u>Desciere:</u> Calculatorul analogic MEDA 42-TL se foloseşte pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare, neliniare, ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale, ecuaţiilor algebrice, problemelor operaţionale, programării liniare care au răspîndire în tehnică.

MEDA 42-TL poate rezolva ecuaţii liniare sau neliniare pînă la gradul 12 poate realiza calculul iterativ, decizii logice

Tensiunea de calcul este ± 1o V, poate funcţiona în regim single-shot sau regim repetitiv cu frecvenţa 5o Hz. Pentru mărirea capacităţii de calcul poate funcţiona în paralel şi se comandă de la unul dintre ele.

6.6.2. Rezolvarea circuitului liniar de curent continuu pe MEDA 42-TL

Se dă circuitul cu tensiuni imprimate continue (fig. 6.15). Se cer curenţi în laturi.

Problema se rezolvă prin teorema curenţilor de contur. Ecuaţiile curenţilor de contur sînt:

$$\begin{cases} r_{11}I_1 + r_{12}I_2 + r_{13}I_3 + 0 + 0 = E_{11} \\ + r_{21}I_1 + r_{22}I_2 + r_{24}I_4 + 0 = E_{22} \\ + r_{31}I_1 + 0 + r_{33}I_3 + r_{34}I_4 + r_{35}I_5 = E_{33} \\ 0 + r_{42}I_2 + r_{43}I_3 + r_{44}I_4 + r_{45}I_5 = E_{44} \\ 0 + 0 + r_{53}I_3 + r_{54}I_4 + r_{55}I_5 = E_{55} \end{cases} \quad (6.28)$$

unde $r_{11} = 1 + 2 + 2 = 5\ \Omega$

$r_{22} = 2 + 2 + 1 = 5\ \Omega$

$r_{33} = 2 + 3 + 4 + 1 = 1o\ \Omega$

$r_{44} = 5 + 3 + 1 + 1 = 1o\ \Omega$

$r_{55} = 1 + 5 = 6\ \Omega$

$E_{11} = 5 - 5 = 0\ V$

$E_{22} = 5 - 1 = 4\ V$

$E_{33} = 2 - 3 = -1\ V$

$E_{44} = 3 - 3 = 0V$

$E_{55} = 5\ V$

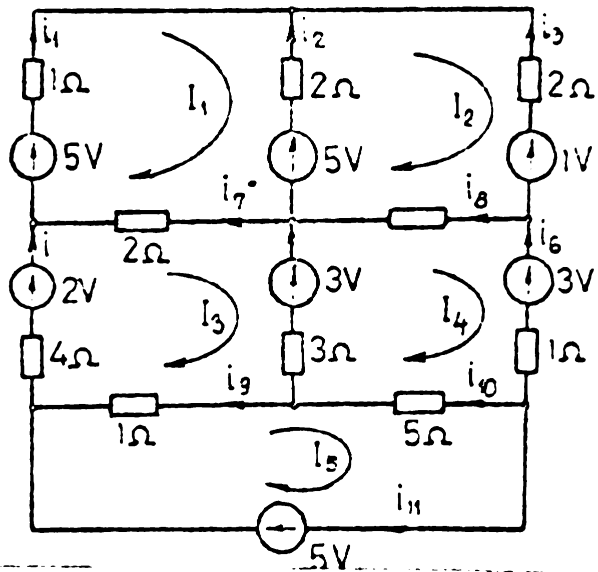


Fig.6.15.

$r_{12} = r_{21} = -2\,\Omega$

$r_{13} = r_{31} = -2\,\Omega$

$r_{24} = r_{42} = -1\,\Omega$

$r_{34} = r_{43} = -3\,\Omega$

$r_{35} = r_{53} = -1\,\Omega$

$r_{45} = r_{56} = -5\,\Omega$

Sistemul de ecuaţii (6.28) devine:

$$\begin{cases} 5I_1 - 2I_2 - 2I_3 = 0 \\ -2I_1 + 5I_2 - I_4 = 4 \\ -2I_1 + 10I_3 - 3I_4 - I_5 = -1 \\ -I_2 - 3I_3 + 10I_4 - 5I_5 = 0 \\ -I_3 - 5I_4 + 6I_5 = 5 \end{cases} = \begin{cases} I_1 - 0,4I_2 - 0,4I_3 = -I_1' \\ -0,4I_1 + I_2 - 0,2I_4 - 0,8 = -I_2' \\ -0,2I_1 + I_3 - 0,3I_4 - 0,1I_5 + 0,1 = -I_3' \\ -0,1I_2 - 0,3I_3 + I_4 - 0,5I_5 = -I_4' \\ -0,166I_3 - 0,83I_4 + I_5 - 0,83 = -I_5' \end{cases} \tag{6.29}$$

Schema analogică pentru ecuaţia (6.29) se dă în fig.6.16.

Rezultatele obţinute se dau în tabelul 6.2.

Tabelul 6.2.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
Rezultatele obţinute pe calculator (A)	1,50	1,45	2,30	2,30	3,10
Rezultatele obţinute prin calcul (A)	1,50	1,47	2,29	2,31	3,13

Curenţii din laturi: $i_1 = I_1 = 1,50$ A

$i_2 = I_2 - I_1 = 1,45 - 1,50 = -0,05$A

$i_3 = -I_2 = -1,45$ A

$i_4 = I_3 = 2,30$ A

$i_5 = I_4 - I_3 = 2,3 - 2,3 = 0$

$i_6 = -I_4 = -2,3$ A

$i_7 = I_1 - I_3 = 1,5 - 2,3 = -0,8$A

$i_8 = I_2 - I_4 = 1,45 - 2,30 = -0,85$ A

$i_9 = I_3 - I_5 = 2,30 - 3,10 = -0,8$ A

$i_{10} = I_4 - I_5 = 2,3 - 3,10 = -0,8$ A

$i_{11} = I_5 = 3,1$ A

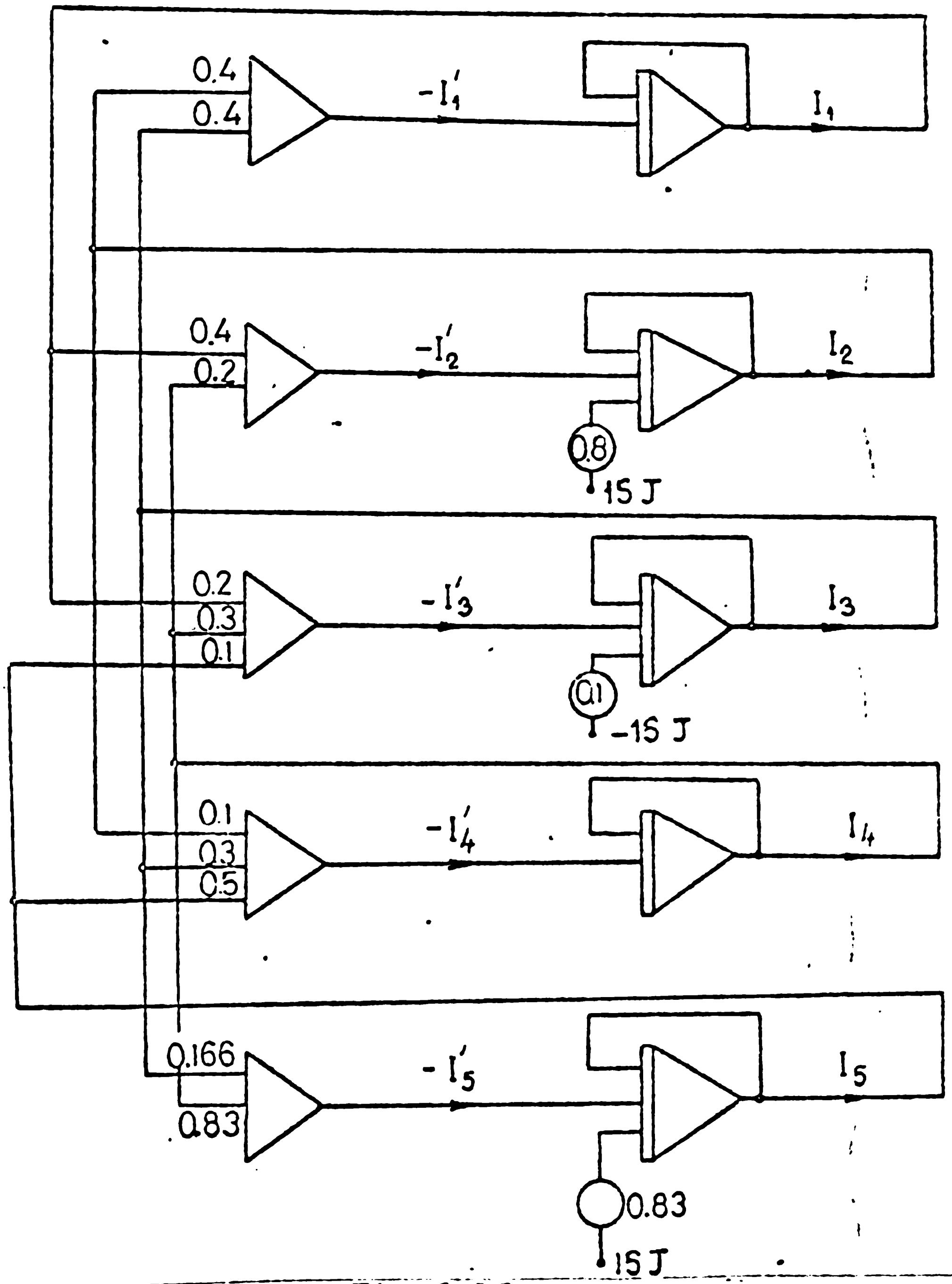


Fig.6.16.

6.6.3.: Modelarea curbei de magnetizare.

Pentru modelarea curbei de magnetizare se foloseşte blocul neliniar TFM-1 şi două amplificatoare operaţionale. Schema pentru modelarea curbei de magnetizare se dă în fig.6.9. Materialul magnetic este tabla silicioasă E33o în funcţie de presiunea transversală în două cazuri: a) p = 0, b = p = 1o Kg/cm^2. Alegem factorii de scară $m_v = m_H = 1$ A/cm, $m_v = \frac{1}{5} m_B = 0{,}2$ T/cm

Rezultatele obţinute se dau în tabelul 6.3.

Tabelul 6.3.

Caracteristica de magnetizare pe calculatorul analogic MEDA 42-T

$U_{in}(V)$		0,5	1.5	2.5	3.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
$U_{ieş}(V)$	a	6.1o	7.9o	8.3o	8.5o	8.6o	8.7o	8.8o	8.9o	9.oo
	b	3.oo	6.5o	7.5o	8.oo	8.3o	8.7o	8.85	9.oo	9.1o

Procesul de ajustare este următorul: Calculatorul funcţionează în regim de condiţii iniţiale. Potenţiometrul P_{2o} fiind la capăt în sensul de rotaţie al ceasornicului, se dă $U_{in} = 0$, se ajustează P_{22} astfel încît $U_{ieş} = 0$, apoi potenţialul P_{2o} este dus la celălalt capăt în sens invers, se dă $U_{in} = 0$ şi se ajustează P_{22} astfel încît $U_{ieş} = 0$. Potenţialul P_{2o} fiind la

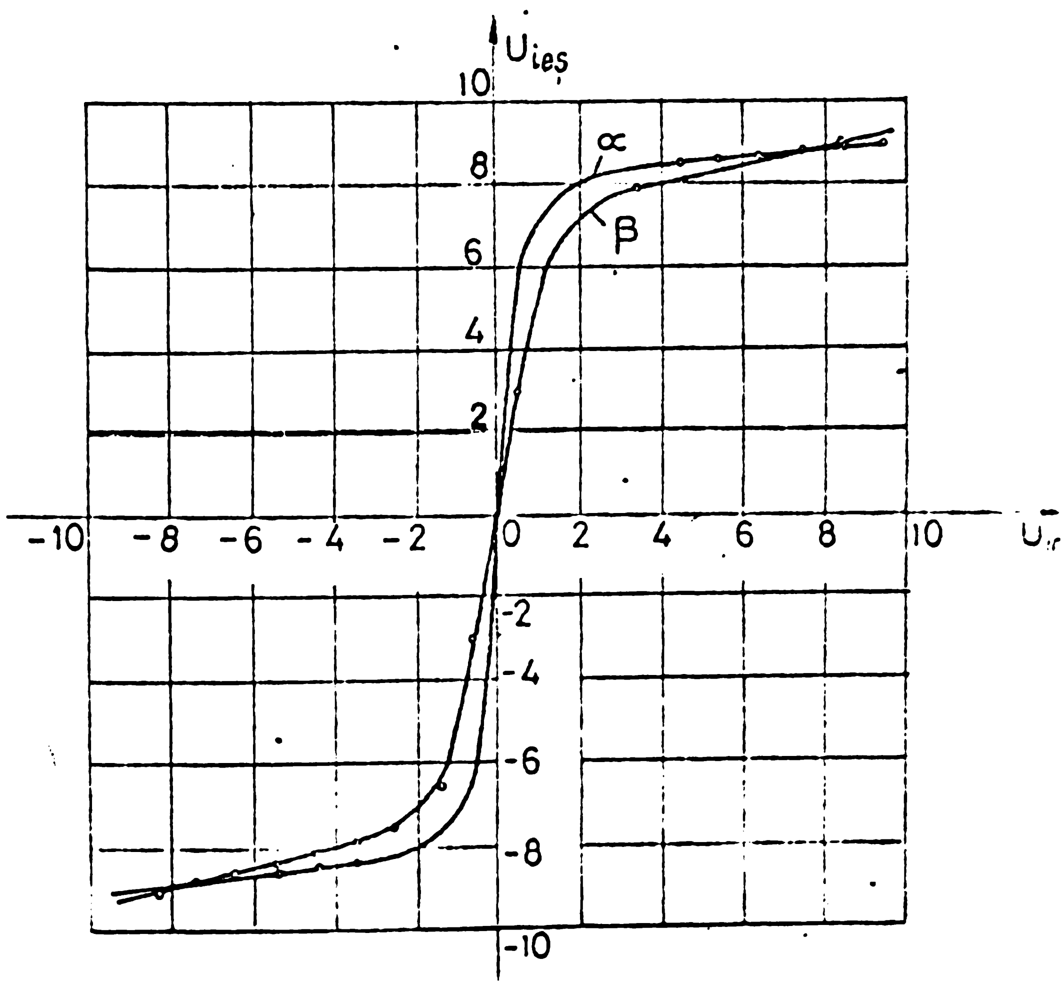


Fig.6.17.

poziţia centrală, se dă U_{in} = + o,5V, simetria segmentului 1 se obţine prin ajustarea P_{21} ca să obţinem aceleaşi tensiuni la două poziţii extreme ale potenţiometrului P_1.După ce s-a ajustat segmentul 1 se va ajusta segmentul 2,3... Curba de magnetizare obţinută pe calculatorul analogic se dă în fig.6.17.

Modelarea ciclului de histerezis se realizează în felul următor: bobină cu miez feromagnetic are schemă echivalentă prezentată în fig.6.18.

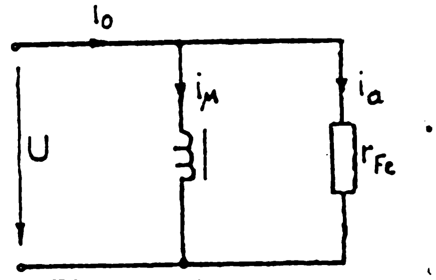


Fig.6.18.

unde $i_0 = i_\mu + i_a$ (6.30)

$$u = \frac{d\psi}{dt} = r_{fe} \cdot i_a \qquad (6.31)$$

Dacă se dă tensiunea u din ecuaţia(6.31) se obţine:

$$i_0 = \frac{u}{r_{Fe}} + i_\mu \qquad (6.32)$$

$$\psi = \int u dt + \psi_r \qquad (6.33)$$

unde ψ_r este o constantă de integrare.

Schema analogică pentru modelarea ciclului de histerezis se prezintă în fig.6.19, unde se foloseşte blocul neliniar TEM-1.

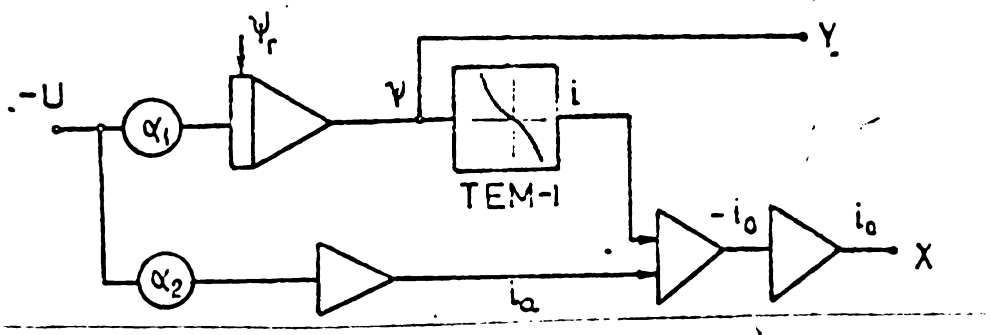


Fig.6.19

Tensiunea de ieşire pe y este proporţională cu ψ, iar cea de pe x-proporţională cu i. In schemă U_{max} = 300 V, ψ_{max} =2Wb, f = 50 Hz.

$$\alpha_1 = \frac{U_{max}}{m_t \cdot \psi_{max}} = \frac{300}{50.2} = 3$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{r_{Fe}} \text{ depinde de pierderile în fier}$$

Caracteristica $\psi(i)$ normată este:

ψ (V)	0.5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
i (V)	0,2	0,4	0,7	1,1	1,5	2,1	2,9	3,9	5,4	8

Rezultatul obţinut pe MEDA 42-TL se dă în fig.6.2o unde curba din 6.2o a esté ciclul de histerezis cînd $\psi_r = 0$, curba din 6.2o.b. cînd $\psi_r \neq 0$, iar curba în 6.2o.c este curba fundamentală de magnetizare.

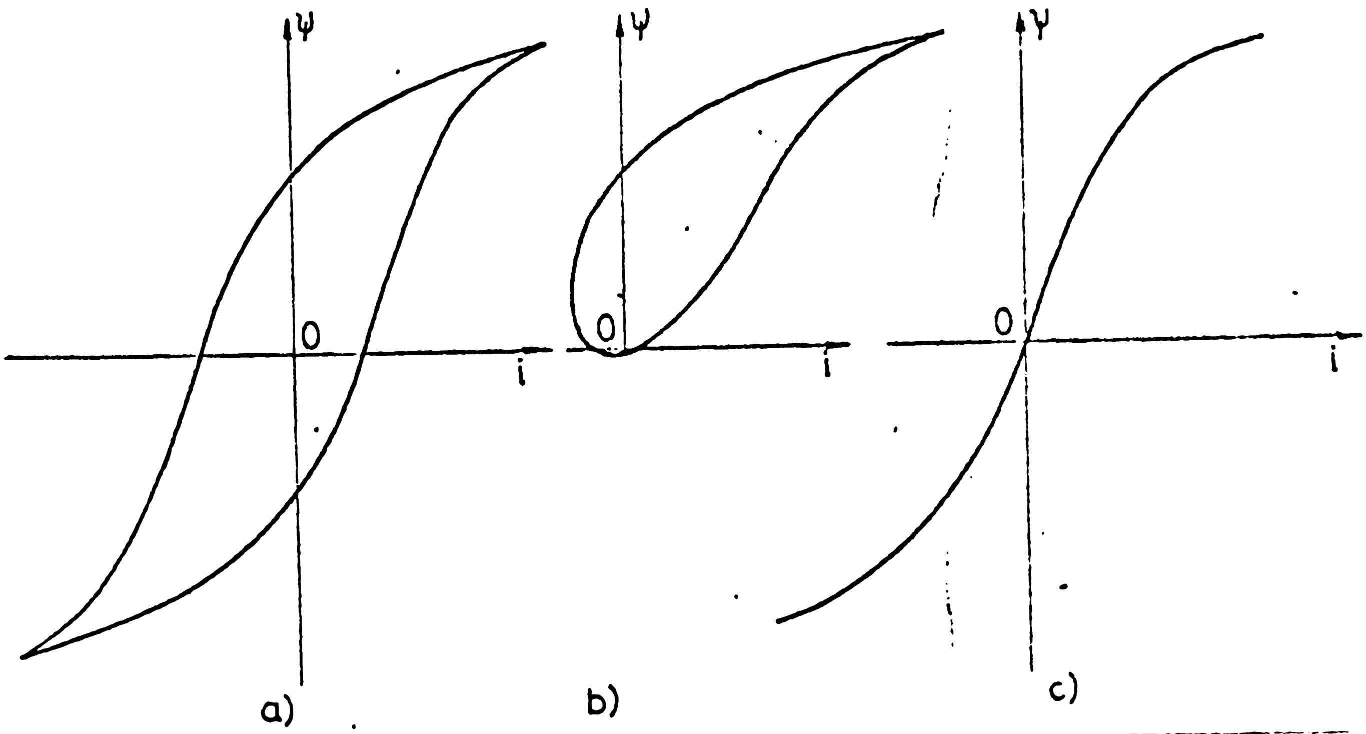


Fig.6.2o.

6.6.4. Regim permanent în circuitul R-L în serie cu rezistenţa neliniară.

Se studiază problema prezentată în cap.III (pag 64)pe MEDA 42TL

Ecuaţia diferenţială în cazul acesta este:

$$u = r_0 i + u(i) + L\frac{di}{dt}, \tag{6.34}$$

rezultă

$$\frac{di}{dt} = \frac{u}{L} - \frac{r_o}{L} i - \frac{u(i)}{L} \qquad (6.35)$$

Programul calitativ este în fig.6.21.

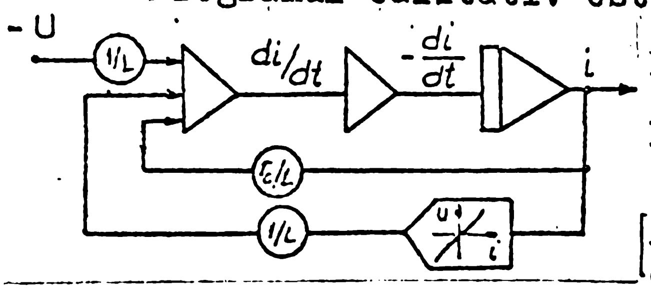


Fig.6.21.

Programul cantitativ :

$I_{max} = 2A$, $U_{max} = 40$ V ,

$$\left[\frac{di}{dt}\right]_{max} = \frac{U_m}{L} = \frac{40}{0,05} = 800 \text{ V/Hn}$$

Factorii de scară sînt :

$$m_i = \frac{10}{I_{max}} = \frac{10}{2} = 5$$

$$m_U = \frac{10}{U_{max}} = \frac{10}{40} = 0,25$$

$$m_t = \frac{\tau}{t} = \frac{1}{0,02} = 50$$

$$m_{\dot{I}} = \frac{10}{\left[\frac{di}{dt}\right]_{max}} = \frac{10}{800} = 0,0125$$

Coeficienţii potenţiometrelor sînt:

$$\alpha_1 = \frac{m_i}{m_{\dot{I}} m_t} = \frac{5}{0,0125.50} = 0,8x10$$

$$\alpha_2 = \frac{r_o}{L}\frac{m_{\dot{I}}}{m_i} = \frac{12.0,0125}{0,05.5} = 0,6$$

$$\alpha_3 = \frac{m_{\dot{I}}}{Lm_U} = \frac{0,0125}{0,05.025} = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{m_{\dot{I}}}{Lm_U} = \alpha_3 = 1$$

Condiţia iniţială $U(o) = U_{max} \cdot m_U = 35,35 \cdot 0,25 = 8,9$ V

Caracteristica neliniară u(i) normată este:

U_{in}(V)	o	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
$U_{ieş}$(V)	o	2,0	3,5	4,5	5,5	6,0	6,6	7,0	7,5	7,7

Programul cantitativ pe MEDA 42-TL se prezintă în fig.6.22, iar rezultatul este dat în fig.6.23.

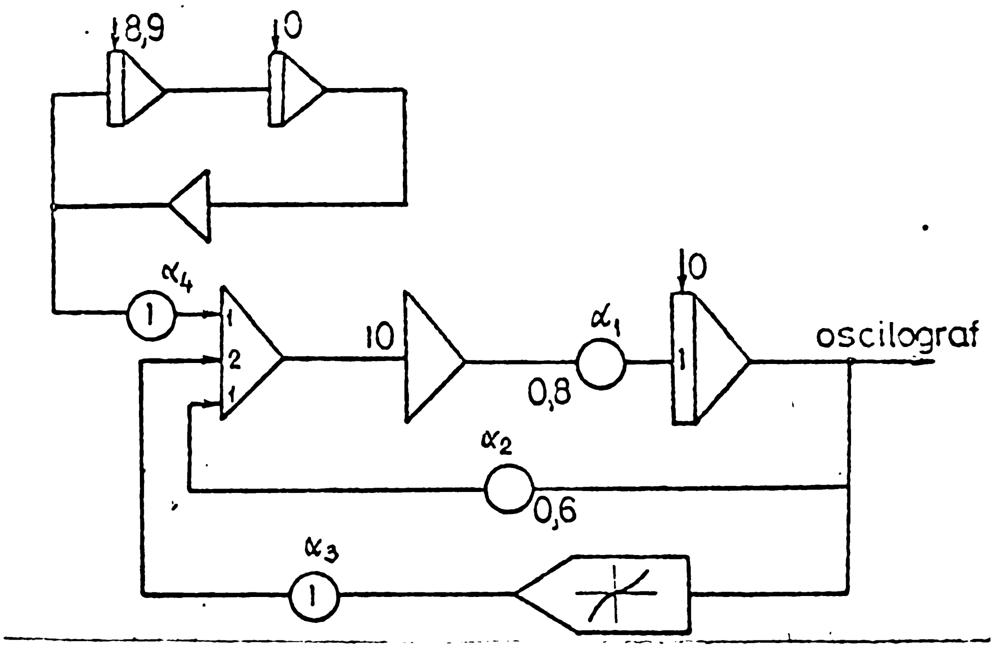


Fig.6.22.

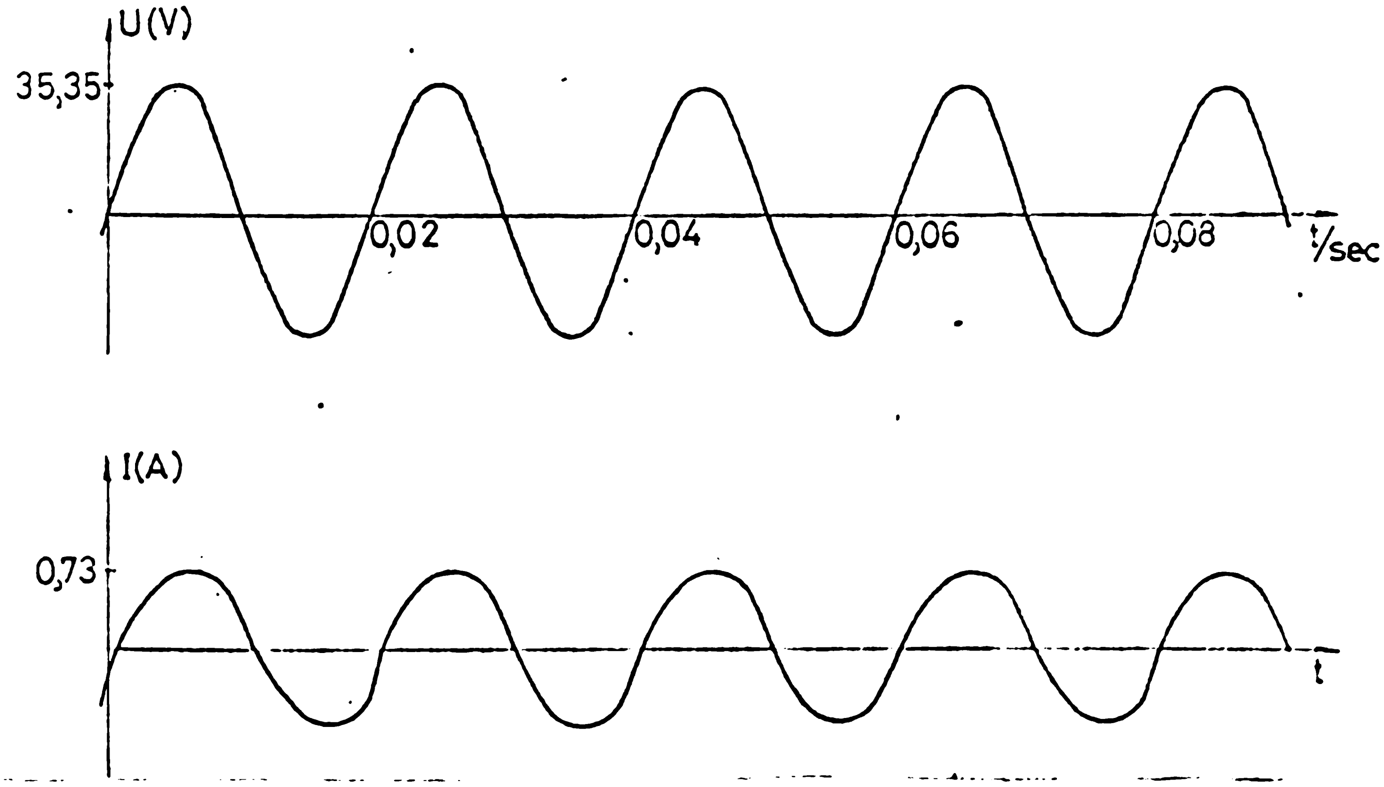


Fig.6.23.

6.6.5. Regim forțat periodic în circuitul R,L serie cu bobina neliniară.

Se studiază problema prezentată în cap.IV (pag.88) pe MEDA 42 TL.Caracteristica de magnetizare $\psi(i) = ai-bi^3$ în cazul $a = 0,5$ H , $b = 0,01$ H/A², $b = 0,02$ H/A²

Ecuația diferențială a circuitului este:

$$u = \frac{d\psi}{dt} + ri \tag{6.36}$$

Programul calitativ se prezintă în fig.6.24.

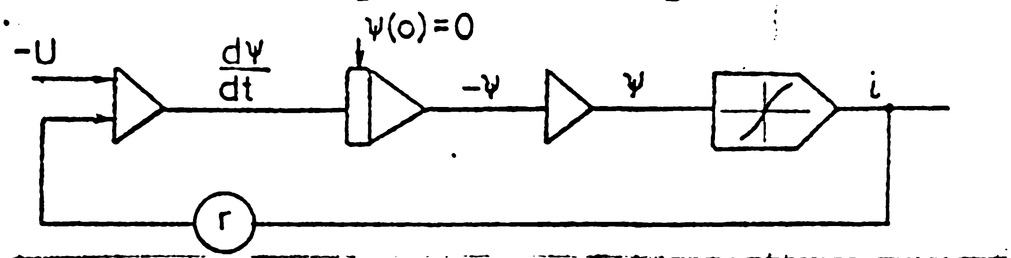


Fig.6.24.

Programul cantitativ este:

$$U_{max} = 400 \text{ V} \quad , I_{max} = \frac{U_{max}}{R} = \frac{400}{100} = 4 \text{ A}$$

$$\left[\frac{d\psi}{dt}\right]_{max} = 400 \text{ V}, \ \psi_{max} = 2 \text{ Weber} \ , \ U(o) = 300.m_v = 300x0,025 = 7,5V$$

Factorii de scară sînt:

$$m_v = \frac{10}{U_{max}} = \frac{10}{100} = 0,025 = m_{\dot\psi}.$$

$$m_I = \frac{10}{I_{max}} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$m_\psi = \frac{10}{max} = \frac{10}{2} = 5$$

$$m_t = \frac{\tau}{t} = \frac{1}{0,02} = 50$$

Coeficienții potențiometrelor sînt

$$\alpha_1 = \frac{m}{m_{\dot\psi}.m_t} = \frac{5}{0,025.50} = 0,4x10 \ ; \ \alpha_2 = \frac{r\,m_{\dot\psi}}{m_I} = \frac{100.0,025}{2,5} = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{m_{\dot{\psi}}}{m_U} = \frac{0,025}{0,025} = 1$$

Caracteristica neliniară $\psi(i)$ normată este :

U_{in} (V)	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	6,8
$U_{ieş}$(V)	0	0,50	1,52	2,60	3,70	4,90	6,40	8,90	10

Programul cantitativ se prezintă în fig.6.25.Rezultatul obţinut pe MEDA 42 TL se dă în fig.6.26.

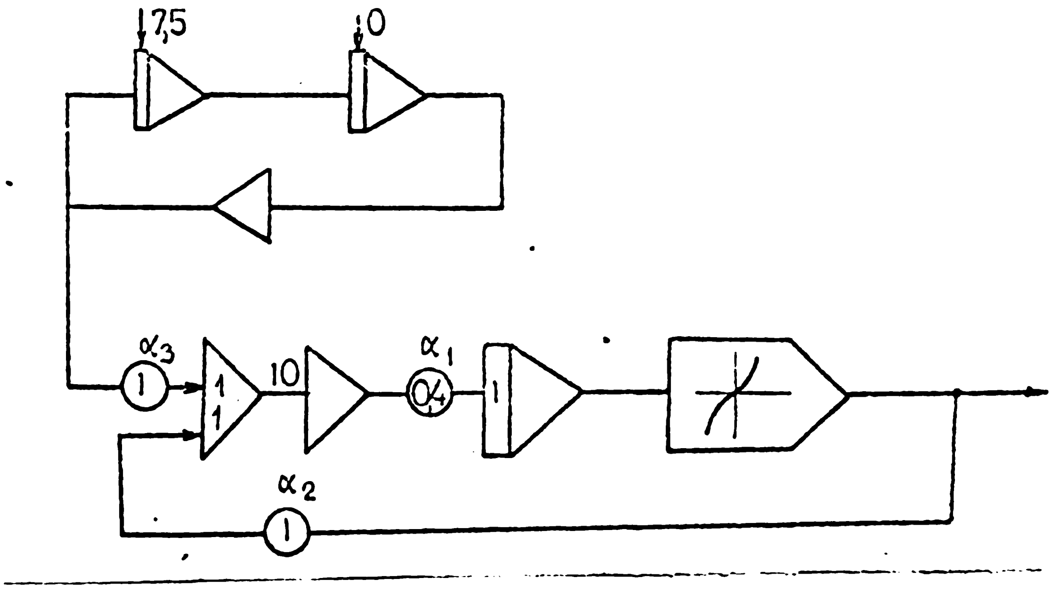


Fig.6.25

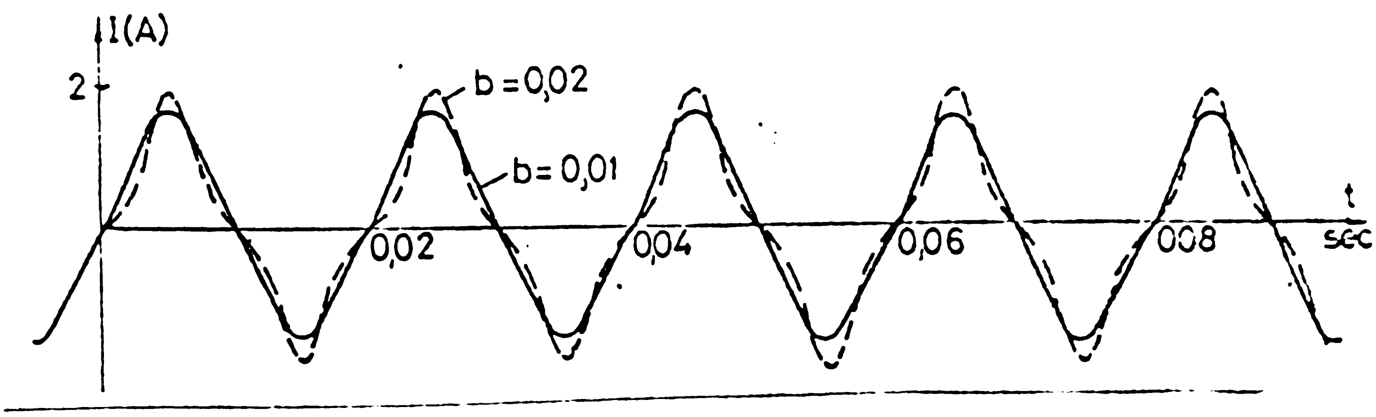


Fig.6.26.

6.6.6. Studiul seignetoferorezonanţei pe calculatorul analogic MEDA 42.TL.

Seignetoferorezonanţa se studiază cu ajutorul metodelor grafoanalitice [46] , analitice [16] .Se obţin uşor caracteristicile seignetoferorezonanţei folosind calculatorul analogic MEDA 42 TL.Circuitul studiat se prezintă în fig. 6.27. unde condensatorul neliniar este varikonul BK-35.

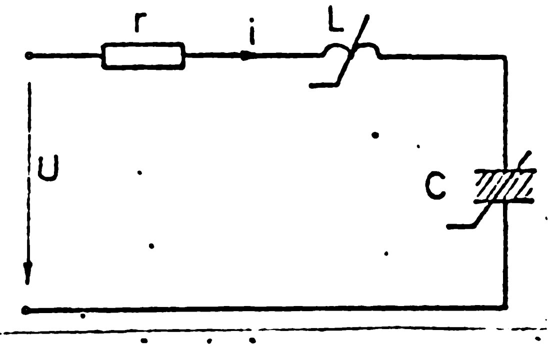


Fig.6.27.

Caracteristica lui se aproximează prin relaţia [46] .

$$u = \frac{q}{C_0}(1 - aq^2 + bq^4)$$

$C_0 = 0,88.10^{-6}F$, $a=31.10^6C^{-2}$,

$b = 1230.10^{12}C^{-4}$.

Bobina neliniară se aproximează prin relaţia:

$\psi(i) = ai - bi^3 = 0,1\,(0,4i - 0,01i^3), -1 \leqslant i \leqslant 1$ A.

Tensiunea este sinusoidală $U = 380\sin 5000tV$, $r = 400\,\Omega$

Ecuaţia circuitului ferorezonanţei se obţine cu teorema a doua alui Kirchhoff:

$$u = ri + \frac{d\psi}{dt} + u_c \tag{6.37}$$

unde $\psi = ai - bi^3$ rezultă $\frac{d\psi}{dt} = (a-3bi^2)\frac{di}{dt}$ (6.38)

deoarece $i = \frac{dq}{dt}$, ecuaţia (6.38) devine:

$$\frac{d\psi}{dt} = \left[a - 3b(\frac{dq}{dt})^2\right] \cdot \frac{d^2q}{dt^2} \tag{6.39}$$

Inlocuind (6.39) în (6.37) avem:

$$u = \frac{rdq}{dt} + \left[a - 3b\,(\frac{dq}{dt})^2\right]\frac{d^2q}{dt^2} + u_c \tag{6.40}$$

sau

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{u-u_c-r\,\frac{dq}{dt}}{a-3b(\frac{dq}{dt})^2} \tag{6.41}$$

Programul calitativ se prezintă în fig.6.28 unde se foloseşte generatorul de funcţii pentru modelarea caracteristicii neliniare a condensatorului, iar caracteristica neliniară a bobinei se modelează cu ajutorul înmulţitorului şi sumatorului.

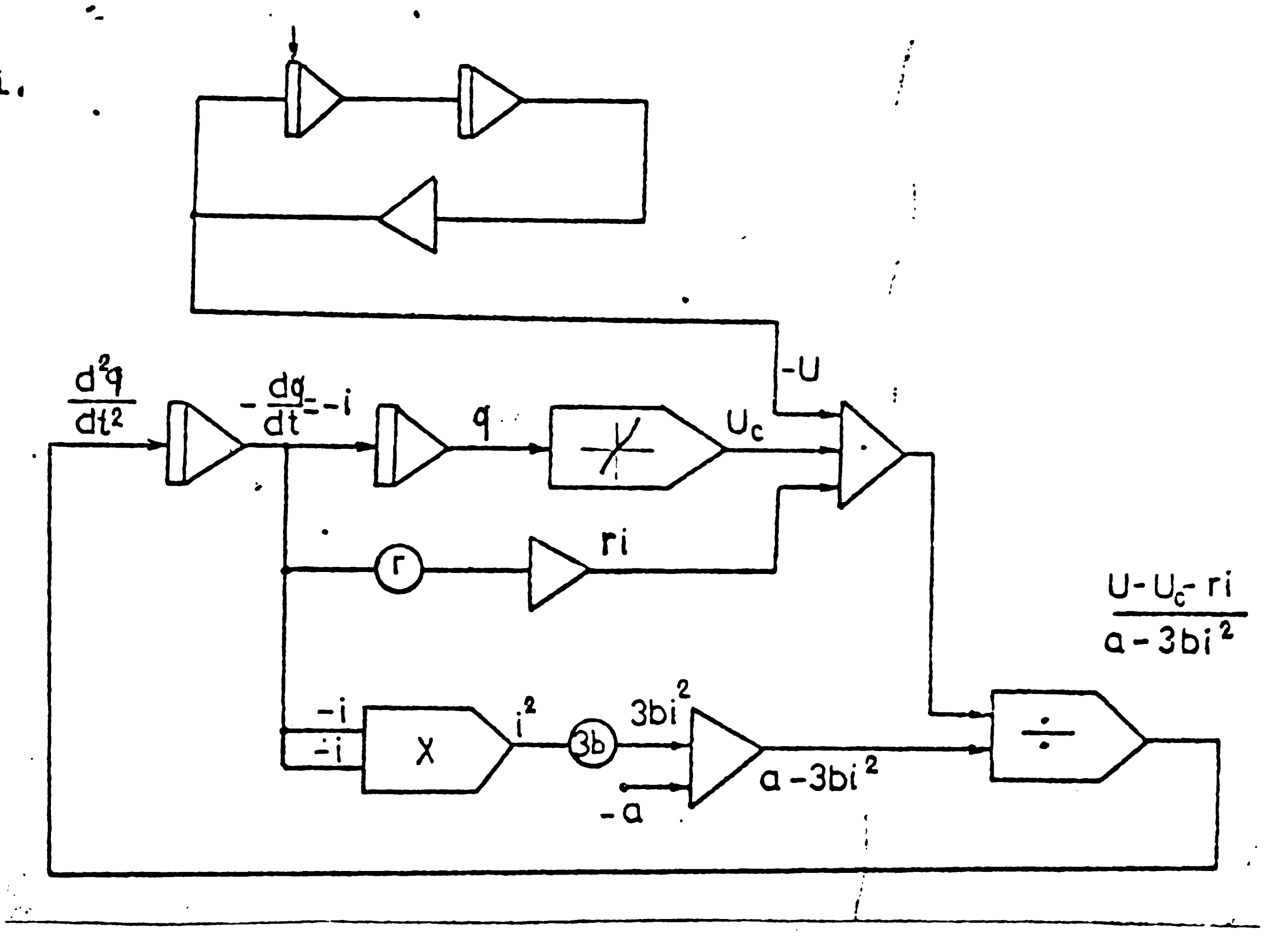


Fig.6.28

Programul cantitativ:

Valorile maxime ale variabilelor:

$$U_m = 400\ V, \quad I_m = \frac{U_m}{r} = \frac{400}{400} = 1\ A$$

$$q_m = 2.10^{-4}C$$

$$I_m = \dot{q}_m = \omega q_m = 1\ A$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5000}{2\pi} = 796\ Hz\ (\approx 800\ Hz)$$

$$(\ddot{q})_m = (\omega \dot{q})_m = 5000$$

$$(\frac{d\psi}{dt})_m = U_m = 400.V$$

Factorii de scară sînt:

$$m_v = \frac{10}{U_m} = \frac{10}{400} = 0{,}025$$

$$m_I = m_{\dot q} = \frac{10}{1} = 10$$

$$m_{\ddot q} = \frac{10}{\omega . I_m} = \frac{10}{5000} = 0{,}002$$

$$m_t = \frac{\tau}{t} = \frac{1}{1/800} = 800$$

Condiţia iniţială pe integrator este

$$U_o = 380\ m_v = 380 . 0{,}025 = 9{,}5\ V.$$

$$\alpha_1 = \frac{\ddot q}{I_m . m_t} = \frac{5000}{1.800} = 0{,}625.10$$

$$\alpha_2 = \frac{I_m}{q_m . m_t} = \frac{1}{2.10^{-4}.800} = 0{,}625.10$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{U_m}{U_m} = 1$$

$$\alpha_5 = r. \frac{I_m}{U_m} = \frac{400.1}{400} = 1$$

$$\alpha_6 = \frac{U_m}{\ddot q_m} = \frac{400}{5000} = 0{,}08$$

$$\alpha_7 = \frac{\left[\frac{d\psi}{dt}\right]_m}{q_m} = \frac{400}{5000} = 0{,}08$$

$$\alpha_8 = a. \frac{U_m}{\left[\frac{d\psi}{dt}\right]_m} = 0{,}04$$

$$\alpha_9 = 3b \frac{U_m}{\left[\frac{d\psi}{dt}\right]_m} . 10 = 0{,}03$$

Caracteristica varikonului BK_35 normată este:

q (c)	0	1.10^{-5}	3.10^{-5}	5.10^{-5}	7.10^{-5}	9.10^{-5}	$1{,}1.10^{-4}$	$1{,}3.10^{-4}$	$1{,}5.10^{-4}$	$1{,}7.10^{-4}$
u (V)	0	11,30	33,40	43,30	69,20	83.80	101,00	116,00	158,00	218.00
q_m (V)	0	0,30	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,50	8,50
U_m (V)	0	0,28	0,83	1,32	1,73	2,10	2,52	2,90	3,95	5.45

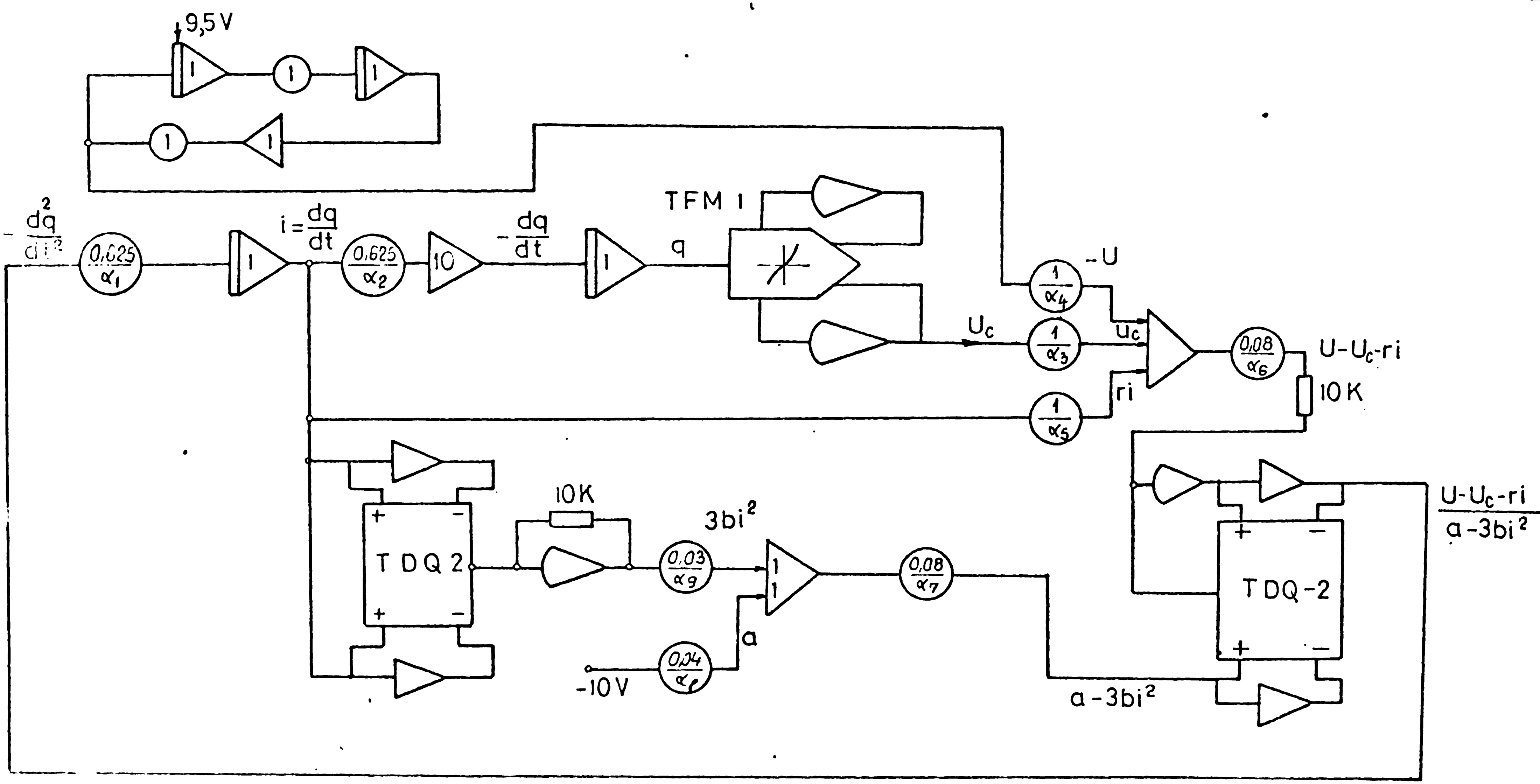

9,5V
TFM 1
$-\frac{d^2q}{dt^2}$
$i=\frac{dq}{dt}$
$-\frac{dq}{dt}$
q
-U
U_c
ri
$U-U_c-ri$
10K
TDQ 2
TDQ-2
$3bi^2$
a
-10V
$a-3bi^2$
$\frac{U-U_c-ri}{a-3bi^2}$

FIG. 6.29

Programul cantitativ se prezintă în fig.6.29, unde de folosește generatorul neliniar.TFM-1 pentru modelarea caracteristicii varikonului, iar pentru modelarea caracteristicii magnetice se folosește blocul TDQ.2 ca înmulțitor și divizor. Tensiunea la ieșire a divizorului este $\frac{1}{10} \cdot \frac{u_1}{u_2}$, tensiunea la ieșire a înmulțitorului este $10 \cdot u_1 \cdot u_2$.

Curba curentului seignetoferorezonanței este asemănătoare curbei curentului ferorezonanței (fig.6.30), iar curba tensiunii pe varikon are forma ascuțită, datorită saturației varikonului.

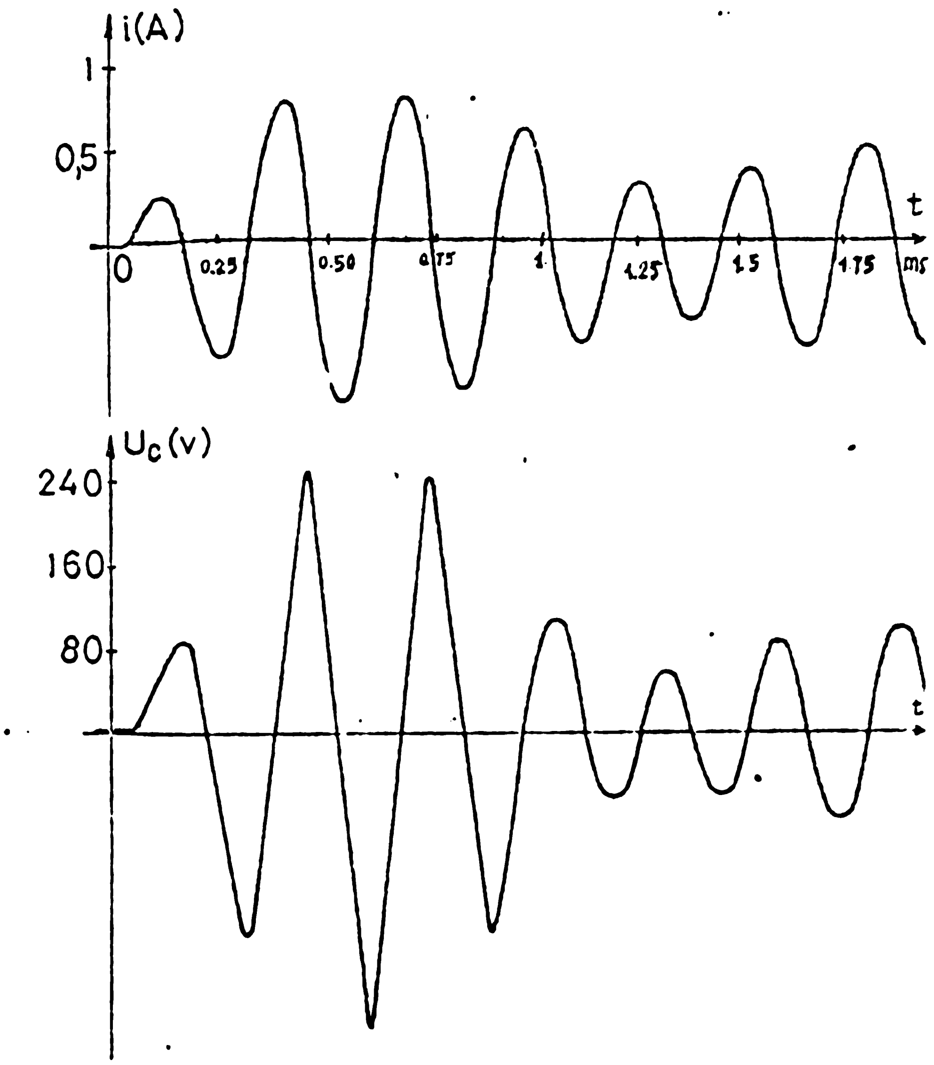


FIG.6.30

CAPITOLUL VII.

CONCLUZII GENERALE

Lucrarea conţine un studiu de sinteză asupra principalelor metode de calcul ale regimurilor forţate din circuite neliniare avînd în general ~~caracteristicile~~ elementelor sînt aproximate prin polinoame.

Principalele contribuţii originale cuprinse în lucrare sînt :

1. Se face o sinteză a stadiului actual al metodelor de rezolvare ale circuitelor neliniare în regim forţat ţinînd seama de metodele de calcul cele mai frecvent folosite. Se studiază în detaliu, în principal, metodele elaborate în ultimii ani.

2. S-a elaborat o nouă metodă de calcul prin modificarea metodei balanţei armonice. Ea constă în schimbarea originei axelor de coordonate ceea ce micşorează numărul de ecuaţii pentru determinarea constantelor.

S-au stabilit relaţii de calcul pentru determinarea momentului de trecere prin zero a curentului de regim forţat în raport cu momentul trecerii prin zero a semnalului de intrare.

- Elaborarea metodei de calcul iterative prin metoda balanţei armonice modificate pe baza căreia s-a stabilit un program în FORTRAN pentru circuitul R-L avînd rezistenţă neliniară
- Volumul de calcul la metoda balanţei armonice modificate este mai mic decît cel necesar la aplicarea metodei balanţei armonice.
- Metoda balanţei armonice modificate se aplică numai în cazul cînd caracteristica neliniară este impară.

3. Se studiază avantajele transformatelor în puncte şi în complex la găsirea soluţiilor de regim forţat în circuite neliniare. S-a ajuns la concluzia că metoda transformatei în complex prezintă avantaje la calculul circuitelor neliniare excitate

de semnale sinusoidale iar metoda transformatei în puncte este foarte utilă dacă se folosesc calculatoarele numerice. In lucrare s-a stabilit un program în FORTRAN pentru circuitul R-L avînd bobina neliniară, folosind derivate centrate.

4. S-a elaborat o metodă de folosire a transformatei Laplace pe o perioadă la studiul regimului forţat a circuitelor neliniare. In acest scop s-au stabilit principalele teoreme ale transformatei Laplace pe o perioadă: teorema integralei, teorema deplasării şi teorema puterii unei funcţii originale.

Pe baza acestora s-a elaborat o metodă iterativă pentru găsirea soluţiilor forţate ale circuitelor neliniare.

Metoda oferă soluţia analitică şi este mai simplă decît metoda convoluţiei în planul complex care dă soluţia regimului tranzitoriu. Metoda este utilă pentru găsirea soluţiilor periodice forţate în circuite neliniare.

5. S-a elaborat un studiu asupra folosirii calculatoarelor analogice în analiza circuitelor neliniare. Lucrarea cuprinde cîteva aplicaţii pe calculatorul analogic MEDA 42 TL şi anume:

- Rezolvarea unui circuit de curent contiunuu folosind metoda curenţilor de contur. Programarea este simplă dar numărul amplificatoarelor folosite creşte mult o dată cu sporirea numărului ecuaţiilor de contur.

- Studiul regimului forţat periodic în circuitul R,L neliniar avînd rezistenţa neliniară şi bobina neliniară. Rezultatele obţinute pe calculator coincid cu cele determinate prin metoda balanţei armonice modificate, metoda transformatei în puncte, metoda transformatei în complex şi prin metoda transformatei Laplace pe o perioadă.

- Modelarea curbei de magnetizare fără histerezis şi cu histerezis.

- Studiul seignetoferorezonanței pe MEDA-42 TL. Curba curentului în regimul seignetoferorezonanței este asemănătoare cu curba curentului în regimul ferorezonanței.

Calculatorul analogic prezintă avantaje în toate domeniile analizei circuitelor neliniare.

BIBLIOGRAFIE

1 Balabanian N., Bickart T. Teorema modernă a circuitelor Ed.Tehnica Bucureşti 1974.

2 Bessonov L.A. Dostizienia v oblasti issledovania nelineinîh electriceskih ţepei. Electricestvo 1963 Nr.3.

3 Bessonov L.A. Nelineinîe electriceskie ţepi Moscva 1977.

4 Bondarenco V.M. Voprocî analiza nelineineh ţepei.Kiev 1967.

5 Bondarenco V.M. Vîcislitenaia matematica i tehnica AH YCCP 1962.

6 Bondari M.A, Lane A.A. Ov analize odnovo clasa nelineinîh rezistivnîh ţepei. Teoreticeskaia electrotehnica Nr.11.

7 Carpov E.A. Aproximaţia v zadaţah analiza i sinteza nelineinîh ţepei.Piataia vsesoiuznaia mezvuzovskaia conferenţia po teorii i metodam rasciota nelineinîh ţepei i sistem.

8 Carpov E.A. Primenenie integralnîh uravnenii k rasciotu periodiceskih regimov v nelineinîh ţepah. Teoreticeskaia electrotehnica Nr.7.

9 Cunningham W.J. Instroduction to nonlinear analysis. Mc.Graw-Hill.N.Y.1958.

1o Demircian K.S, Volcov V.M., Kartaşev. Sravnitenîi analiz metodov cislenovo integriorovania pri rasciote perehodnîh procesov v electriceskih ţepah. Electricestvo 1976, Nr.9.

11 Dennis D.Z. Matematiceskoe programirovanie i electriceskie ţepi ILL 1961.

12 Filţ R.V, Bilîi L.A. Rasciot caracteristic periodiceskih reginov staticeskih nelineinîh electromagnenîh ustroistv Teoreticeskaia electrotehnica 1972 Nr.14.

BUPT

13 Farhi S.L., Hinova I.G. Metod analiza sinusoidalnîh regimov v nelineinîh ţepah s feromagnitnoi inductivnoi sviaziu. Electricestvo 1972, Nr.11.

14 Ilin V.M. Algoritm opredelenia armoniceskovo sostava trigometriceskih funcţii s nenulevîmi naţanîmi fazami armonic. Izv. vîssih ucev. zav.Energetica 1966, Nr.12.

15 Ilin V.M. Metodî polucenia i resenia sistemî algebraiceskih uravnenii pri rasciote nelineinîh electriceskih ţepei. Izv. vîssih ucev. zav.Energetica 1967 Nr.5.

16 Ilin V.M. Rasciot periodiceskih regimov nelineinîh electriceskih ţepei Izv.vîssih ucev.zav.Energetica 1968 Nr.8.

17 Ionkin P.A. Electricestvo 1953, Nr.8.

18 Kontorovici M.I. Calculul operaţional şi fenomenele tranzitorii în circuite electrice E.E.S. 1955.

19 Korn G.A. Korn T.M. Electronic Analog and Hybrid Computers. Mc.Graw-Hill 1964.

2o Leon Lewin Methods for solving engineering problems using analog computers .Mc.Graw-Hill 1964.

21 Lovcenco G.N. Primenenie EЦ.BM dlia rasciota schom na feritah i seignetocondensatorov .Kiev 1969.

22 Mezin L.V. Sohina L.N. K armoniceskomu analizu nelineinîh ţepei complexnîm metodom Teoreticeskaia electrotehnica 1971, Nr.11

23 Marcarova L.V. Primenenie riadov Lagrange dlia analiza electriceskih ţepei. Tr Cubîsev aviaţia 1973.

24 Nagorki Modelirovanie electronîh ţepei na ЦВМ Kiev 1974

25 Paternac M.P. Sposovî uluşenia shodimosti metoda Newton pri analiza nelineinîh ţepei. Teoreticeskaia Electrotehnica Nr.16.

26 Ponner I. Contribuţii privind calculul circuitelor de curent alternativ care conţin un singur element neliniar simetric ohmic sau reactiv. Studii şi cercetări de Energetică şi electrotehnică 1971, Nr.1.

27 Philippow Eugen Nichlineare Electrotehnic.Leipzig 1971.

28 Puhov G.E.,Bondarenco V.M. O zadaţah sovremenîi teorii ţepei i maşinovo proectirovania electronîh schem.Teoreticeskaia electrotehnica 1969,Nr.7.

29 Puhov G.E. Metodî analiza i sinteza cvasinaloghih electronîh ţepei Kiev 1969.

30 Poliakovki Y.Y., Siniski L.A. O rasciote periodiceskih regimov y nelineinîh abtomîh ţepah na E.B.Ų Teoreticeskaia Electrotehnica 1972,Nr.13.

31 Schichman .Integration system of nonlinear Analysis Program I.E.E.E. Trans.on circ.Theory.1970 August.

32 Schiop Al.I. Metode aproximative în analiza neliniară Ed.Acad,R.S.R. 1972.

33 Savel Mitrea A piece-wise linear method for solving the steady-state in sinevoltage driven serie R.L nonlinear circuits. Buletinul I.P.Iaşi,1973 fasc.3-4.

34 Spinei Fănică Contribuţii privind teoria circuitelor electrice cu elementele neliniare şi cu parametrii variabili.I.P.B Teză de doctorat, 1971.

35 Savin Gh, Rosman H. Circuite electrice neliniare şi parametrice. Ed.tehnică, Bucureşti, 1973.

36 Stănciulescu Florin The systemic approach of the theory of nonlinear electrical circuits.Revue roumain des sciences tehniques.Serie Elect.et energ. Tom.22 1,1977.

37 Stănciulescu Florin Analiza şi simularea sistemelor neliniare Ed.Acad.R.S.R. 1974.

38 Sovpel V.B. Opredelenie periodiceskih regimov v nelineinîh ţepah.Teoreticeskaia Electrotehnica 197o,Nr.1o.

39 Sovpel V.B. Rasciot periodiceskih procesov v nelineinîh ţepah s pomostiu prosteisih matric integrirovania. Teoreticeskaia Electrotehnica 197o, Nr.1o.

4o Sovpel V.B. Uvelicenie tosnosti rasciota periodiceskih v nelineinîh ţepah s pomosiu proteisih integralnîh tocesnîh preovnazovanii.Teoreticeskaia Electrotehnica Nr.18.

41 Siniski L.A, Sumkov Y.M. O poiske periodiceskih regimov v nelineinîh ţepah cislenîmi metodami.Teoreticeskaia Electrotehnica Nr.9 197o.

42 Tabarnîi V.G., Vasiniuc V.E. Nekotorie metodî cislenovo integtrirovania i ih primenenie k maşinomu analizu nelineinîh schem.Teoreticeskaia Electrotehnica Nr.14 ,1972.

43 Teodorescu D.Desribing function series: a new means for nonlinear control system analysis.Proc.IEE 11.197o.

44 Teteelbaum. Eletriceskoe modelirovanie,Moscova 1959.

45 Vladîko V.M., Duvanienco V.V. Rasciot nelineinîh ţepei s pomosiu mngoslenov Cebîşev's uciotom ciotnîh armonic. Izv.Energetica 1973,Nr.7.

46 Vladimirov V.L. Topsi V.Z. Isledovanie rezonansnih crivîh posledovatenovo seignetoferorezonanovo colebatelnovo contura.Teoreticeskaia electrotehnica .1967, Nr.3.

47 Voronov R.A. Rasciot tocov i napriazenii v ţepah s bezinerţionîmi nelineinîmi elementami.Electricestvo 1953,Nr.8.

48 Verlan A.F. Modeli nelineinîh integralnîh uravnenii Volterra Matematiceskoe modelirovanie i elec.ţepi 1966, Nr.4.

49 William Lewis Hughes Nonlinear electrical networks.The Ronald Press Comp. 1o NY.

50 Zazirko V.N. K teorii electricekih ţepei s kuşoţno-
lineinîmi caracteristikami. Teoreticeskaia
electrotehnica 1972, Nr.13.

51 Zaednîi A.M. Metodî rasciota i isledovania ţepei na osnova
ispolzovania obaşenîh fazorîh coordinat.
Piataia vesoiuznaia mezvuzovskaia conferinţa
po teorii i metodî, neliniar ţepei i sistem.

52 Nekotorîe voproci metodiki potgotovki zadaţ dlia reşenia
na maşinah neprerîvnovo deistria. Matematiceskoe
mod. i elect. ţepi Kiev 1966 Nr.4.

53 Metodî modelirovania funcţionalnîh zavisimostei na ABM.
Matematiceskoe mod. i elect. ţepi Kiev Nr.12.