

INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE CONSTRUCȚII

ing. Richard FRILDRICH

CONTRIBUTII LA STUDIUL GRINZILOR-PEREȚI  
DIN BETON ARMAT

Teză pentru obținerea titlului  
de doctor inginer

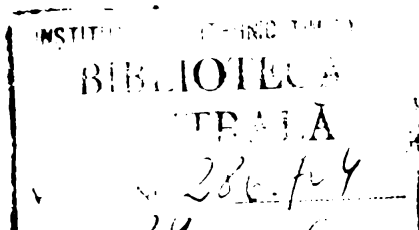
BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA  
"POLITEHNICA" TIMIȘOARA

Conducător științific :

Prof. emerit ing. Constantin AVRAM

Membru corespondent al Academiei R.S.R.

1974





## C U P R I N S

<u>INTRODUCERE</u>	5
<u>1. STAREA DE TENSIUNE PLANA</u>	7
1.1. Statica plăcilor în starea de tensiune plană	7
1.1.1. Elemente elastice	7
1.1.1.1. Formularea problemei	7
1.1.1.2. Soluționarea problemei	8
1.1.2. Elemente din beton armat	17
1.1.2.1. Stadiul elastic	17
1.1.2.2. Stadiile postelastice	17
1.1.2.3. Rezistența biaxială	20
1.2. Stabilitatea plăcilor plane	24
1.2.1. Elemente elastice	24
1.2.2. Elemente din beton armat	25
<u>2. METODE DE APROXIMATIVE</u>	26
2.1. Discretizarea matematică prin cologație	26
2.1.1. Cologația punctuală	26
2.1.1.1. Cologația într-un singur nod	26
2.1.1.2. Cologația în cinci noduri	28
2.1.2. Cologația liniară	33
2.1.2.1. Cologația în lungul unei singure drepte	34
2.1.2.2. Cologația în lungul a trei drepte	34
2.1.2.3. Integrarea sistemului de ecuații diferențiale	37
2.2. Discretizarea fizică	42
2.2.1. Elementul finit	42
2.2.1.1. Modelul de deplasări	45
2.2.1.2. Modelul de tensiuni	47

2.2.1.3. Modelul hibrid	47
2.2.2. Structura	54
2.2.3. Substructuri	54
2.2.3.1. Substructuri din elemente finite	59
2.2.3.2. Elemente finite mari	61
3. <u>GRINZI-PEREȚI PLINE ȘI CU GOLURI ÎN STADIUL ELASTIC</u>	62
3.1. Aplicarea metodei diferențelor finite	69
3.1.1. Prezentarea procedurii	69
3.1.2. Diagrame de tensiuni	69
3.1.3. Mărimi de calcul	73
3.2. Aplicarea metodei elementelor finite	74
3.2.1. Prezentarea procedurii	74
3.2.2. Diagrame de tensiuni	81
4. <u>COMPORTAREA GRINZIILOR-PEREȚI DIN BETON ARMAT</u>	82
4.1. Încercări pe elemente din mortar armat	85
4.1.1. Elemente încercate	85
4.1.2. Rezultatele încercărilor	86
4.2. Încercări pe elemente din beton armat	91
4.2.1. Elemente încercate	92
4.2.2. Rezultatele încercărilor	95
4.2.3. Calculul încărcării de fisurare	96
4.2.4. Calculul încărcării de rupere	99
4.3. Încercări pe elemente perforate din mortar armat	100
4.3.1. Prisme perforate	103
4.3.2. Grinzi-pereți perforate	104
5. <u>SINTEZA ȘI CONCLUZII</u>	112
5.1. Dezvoltarea teoriei de calcul	112
5.2. Compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale	114



<b><u>BIBLIOGRAFIE</u></b>	119
<b><u>ANEXA I</u></b> Operatori cu diferențe finite (DF)	I-1
<b><u>ANEXA II</u></b> Diagrame de tensiuni (MDF)	II-1-1
<b><u>ANEXA III</u></b> Diagrame de tensiuni (MEF)	III-B3-11
<b><u>ANEXA IV</u></b> Fotografiiile elementelor din mortar armat	IV-1
<b><u>ANEXA V</u></b> Fotografiiile elementelor din beton armat	V-1
<b><u>ANEXA VI</u></b> Prisme perforate. Diagrame și fotografii	VI-1
<b><u>ANEXA VII</u></b> Fotografiiile elementelor perforate din mortar armat	VII

100%

## INTRODUCERE

Studiului grinzilor-pereti îi sînt consacrate relativ puține lucrări. Lipsesc mai ales cercetări sistematice privind influența golurilor asupra comportării acestora. Lucrarea de față și-a propus elucidarea acestei probleme pentru grinzi-pereti pătrate, prevăzute cu goluri dreptunghiulare. Grinzile sînt simplu rezemate și încărcate uniform la marginea superioară, golurile diferind prin mărime (A, B, C) și poziție (1, 2, 3).

Urmărirea prin calcule a comportării elementelor descrise poate fi realizată numai cu ajutorul calculatoarelor electronice. Astfel a fost necesară formularea matriceală a operațiilor matematice.

Teza de doctorat încearcă să pună la dispoziția proiectanților și cercetătorilor atât metode de calcul cât și rezultate practice cu aplicabilitate imediată. Primele două capitole cuprind o prezentare succintă a metodelor de calcul, cu accentul pe cele aproximative cu caracter general, cât și prezentarea mai detaliată a unor îmbunătățiri și extinderi ale acestora. În capitolul 3 se aplică unele dintre metodele prezentate anterior la determinarea stării de tensiune elastice în grinzi-pereti pline și cu goluri, propuse pentru studiu. Metoda modernă de calcul s-a utilizat pentru rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice ce caracterizează continuitatea respectiv echilibrul structurii. Pe baza producerii datelor experimentale, în capitolul 4 se dezvoltă procedee pentru determinarea încălcării de fisurare respectiv de rupere a grinzilor-pereti studiate.

Principalele rezultate originale aparțin domeniului matematicilor aplicate, extinderii și îmbunătățirii metodelor matriceale ale teoriei elasticității cât și studiului grinzilor-pereți din beton armat în stadiul elastic, la fisurare și la rupere. Prezentarea lor mai detaliată este cuprinsă în capitolul 5.

Actualitatea subiectului tratat este confirmată de încadrarea sa în orientarea actuală a cercetării științifice. Astfel comisia X "Plăci și structuri plane" a CMB a hotărât în 1972 impulsivarea cercetărilor în domeniul structurilor plane. Într-un cadru mai larg, directivele congresului al X-lea al PCR orientează cercetarea științifică în special spre domeniile moderne avînd ca obiectiv perfecționarea metodelor și introducerea mijloacelor moderne de calcul cit și realizarea economiei de metal. Acestea sînt tocmai direcțiile în care s-au obținut rezultate pozitive.

x

x

x

Autorul este profund recunoscător conducătorului științific, prof.emerit ing.Constantin M.Avram, m.c. al Academiei NSR, pentru sprijinul acordat pe parcursul elaborării acestei lucrări, pentru încurajarea și raluarea de care a beneficiat din partea Domniei sale. De asemenea mulțumește tuturor colegilor care prin discuții și sugestii au contribuit la clarificarea unor aspecte ale cercetărilor întreprinse, cât și personalului Laboratorului de beton armat al Facultății de Construcții din Timișoara pentru activitatea legată de executarea programului experimental.

## 1. STAREA DE TENSIUNE PLANĂ

### 1.1. Statistica plăcilor în starea de tensiune plană

#### 1.1.1. Elemente elastice

##### 1.1.1.1. Formularea problemei

Notând vectorii tensiunilor, deplasărilor și deformațiilor specifice, în raport cu un sistem de referință cartezian, cu

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{xy}\}, \{u\} = \{u_x u_y\}, \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xy}\}$$

și legătura între ultimii doi cu

$$[D]\{u\} = \{\varepsilon\},$$

ecuațiile de echilibru și ecuația de compatibilitate a deformațiilor unui element diferențial sînt:

$$[D]^T\{\sigma\} = \{0\} \text{ și } [A]\{\varepsilon\} = 0. \quad (1a, b)$$

În cazul unui material omogen, izotrop și elastic, legea lui Hooke

$$\{\varepsilon\} = [\varphi]\{\sigma\},$$

permite transformarea ecuației (1b) în,

$$[A][\varphi]\{\sigma\} = 0. \quad (1b')$$

Sistemul de ecuații cu derivate parțiale (1a-1b') poate fi înlocuit printr-o singură ecuație cu derivate parțiale dacă se introduc funcții de tensiuni. Filby [48] folosește două funcții de tensiuni  $\{F\} = \{F_x F_y\}$  astfel ca

$$[a]\{F\} = \{\sigma\},$$

ecuația de continuitate (1b') luind forma:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0. \quad (2)$$

Funcția de tensiuni Airy [54,120] se introduce sub forma:

$$[A]^T F = \{\sigma\},$$

astfel că (1b') devine:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (3)$$

Matricele ce intervin în relațiile de mai sus sînt prezentate în figura 1.

#### 1.1.1.2. Soluționarea problemei

Tensiunile caracteristice se obțin în urma integrării ecuațiilor (1),(2) sau (3) în concordanță cu condițiile de margine. Se consideră margini drepte, paralele cu axele sistemului de referință, ce formează domenii simple sau multiplu conexe (adică elemente dreptunghiulare fără sau cu goluri dreptunghiulare). Condițiile de margine sînt date în tensiuni.

Din lucrarea fundamentală [120] rezultă că cele mai importante metode pentru soluționarea problemei plane sînt cele variaționale și operaționale, metoda funcțiilor de variabilă complexă și metoda diferențelor finite. La acestea se adaugă metoda elementelor finite [95]. Metoda diferențelor finite se bazează pe discretizarea matematică a problemei, iar metoda elementelor finite pe o discretizare fizică a acesteia.

##### a. Metoda funcțiilor de variabilă complexă

În cadrul acestei metode generale teoretice, soluția se obține prin transformarea conformă a domeniului considerat pe un alt domeniu, mai simplu, cu rezolvarea cunoscută [92,120].

Rezultate bune s-au obținut pentru șalbe cu goluri mici [79,109]. Un studiu teoretic al domeniului dublu conex cu contururi dreptunghiulare paralele între ele este cuprins în lucrarea [20]. Procedee aproximative în această metodă sînt prezentate în cartea [39].

#### b. Metoda singularităților

În lucrarea [69] se prezintă o metodă pentru calculul elementelor plane prevăzute cu goluri, prin corectarea distribuției cunoscute a tensiunilor în aceleași elemente pline. Metoda seamănă mult cu metoda singularităților din teoria cargerii fluidelor și poate fi considerată de același rang cu metoda transformărilor conforme.

#### c. Metode bazate pe discretizări matematice

Folosind transpuneri finite, ecuațiile sau sistemele de ecuații cu derivate parțiale se înlocuiesc prin sisteme de ecuații algebrice respectiv diferențiale. Transpunerile finite pe subdomenii se pot obține prin cologație punctuală [37,46] sau liniară [46]. Spre exemplu în cazul cologației punctuale (în nodurile unei rețele ortogonale), pentru ecuația cu derivate parțiale (3) se caută o transpunere finită de forma:

$$[C]\{F\} = \{R\}, \quad (4)$$

în care  $[C]$  este o matrice pe cît posibil de tip bandă și  $\{F\}$  - vectorul valorilor unei funcții înlocuitoare  $\phi(x,y)$ . Funcția înlocuitoare se alege de forma:

$$\phi = S + PZ, \quad (5)$$

$S(x,y)$  fiind funcția de bază (un polinom de tip Lagrange sau L'Hermite). Funcția  $P(x,y)$  asigură identitatea valorilor de bază ale lui  $S$  și  $\phi$  pentru orice funcție suplimentară  $Z(x,y)$ :

$$P(x,y) = \prod (x-x_1)^{\nu} (y-y_1)^{\mu}, \quad (6a)$$

$$Z(x,y) = k_0 + k_1 x + k_2 y + \dots + k_n y^m. \quad (6b)$$

Precizia operatorilor cu diferențe finite obținuți prin colocație depinde de modul de alegere a funcțiilor  $S$  și  $Z$ . Dacă funcția de bază  $S$  este de tip Lagrange și se renunță la funcția suplimentară  $Z$ , colocația într-un singur nod duce la operatorii cu diferențe finite obișnuiți. Dacă se folosește o funcție suplimentară cu  $n$  parametri  $k$  și se face colocația în  $n+1$  noduri, se obțin operatori plurilocali. Operatorii cu diferențe finite și plurilocali pot fi deduși și pe alte căi [118].

Pentru integrarea ecuației cu derivate parțiale (2), în lucrarea [48] se aplică metoda diferențelor finite. Fiecărei funcții de tensiuni îi corespunde o altă rețea ortogonală de noduri (fig.2). Cele două rețele sînt decalate între ele pe ambele direcții cu cîte o jumătate de pas. Avantajului determinării simple a tensiunilor (primele derivate ale funcțiilor de tensiuni) i se opune dezavantajul necesității aproximării acestor tensiuni în lungul marginilor.

În această lucrare se utilizează funcția de tensiuni Airy, deci se pornește de la ecuația (3). Condițiile de margine fiind date în tensiuni, valorile marginale ale funcției  $F$  și ale primei ei derivate se determină pe baza analogiei de cadru [33,120]. Aplicînd metoda diferențelor finite obișnuite [13,33,54,99,106,118,120,126,130] este necesară aproximarea valorilor  $F$  în nodurile rețelei, situate în exteriorul domeniului studiat (fig.3a). Precizia cu care se determină aceste valori este mai mică decît precizia operatorului cu diferențe finite obținut prin colocație. Din acest motiv lucrarea [25] cuprinde operatori speciali pentru punctele învecinate marginilor. În acești operatori nu intervin nodurile exterioare imaginare (fig.3b).



$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$[\varphi] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \text{ sau } [d] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$\nu$  - coef. lui Poisson

FIG. 1

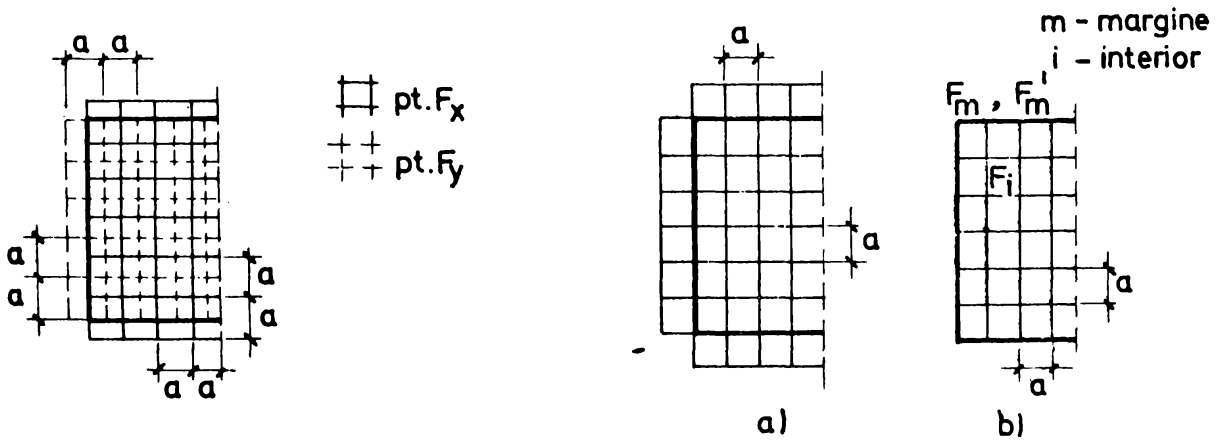


FIG. 2

FIG. 3

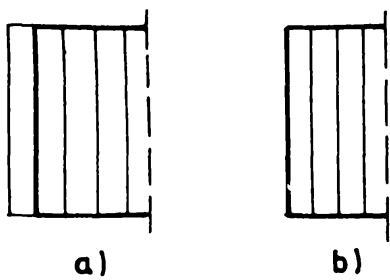


FIG. 4

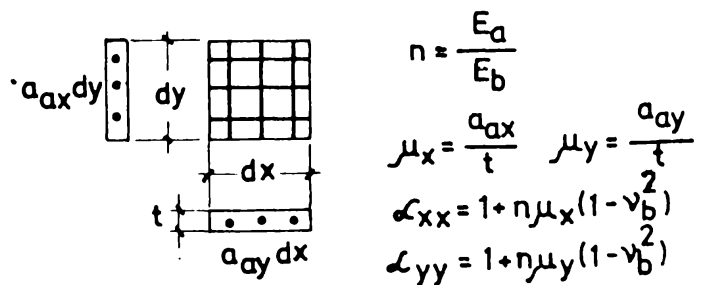


FIG. 5

$$[\chi_b] = \frac{E_b}{1-\nu_b^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_b & 0 \\ \nu_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(1-\nu_b) \end{bmatrix} \quad [\chi_a] = E_a \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\chi_c] = \frac{E_b}{1-\nu_b^2} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \nu_b & 0 \\ \nu_b & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(1-\nu_b) \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{1-\nu_b^2}{\epsilon_{xx}\epsilon_{yy}-\nu_b^2} \quad [\varphi] = \frac{c}{E_b} \begin{bmatrix} \epsilon_{yy} - \nu_b & 0 \\ -\nu_b & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{c}(1+\nu_b) \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1+\nu_b}{c} - \nu_b$$

FIG. 6

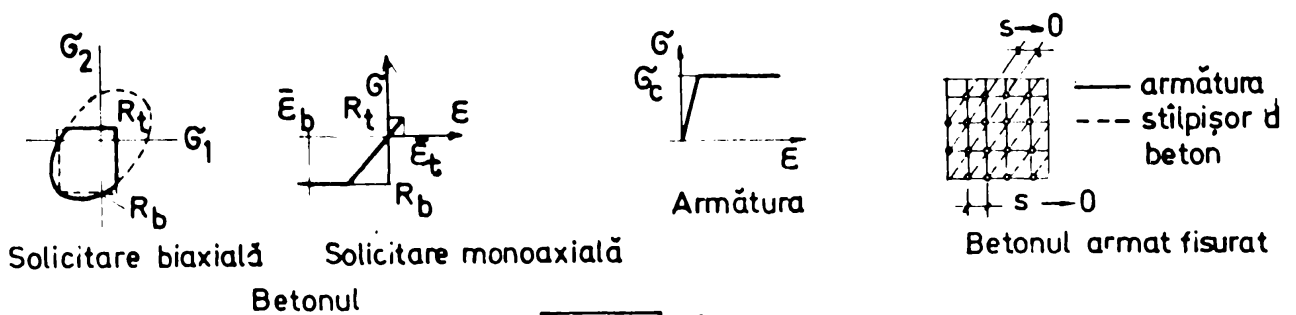


FIG. 7

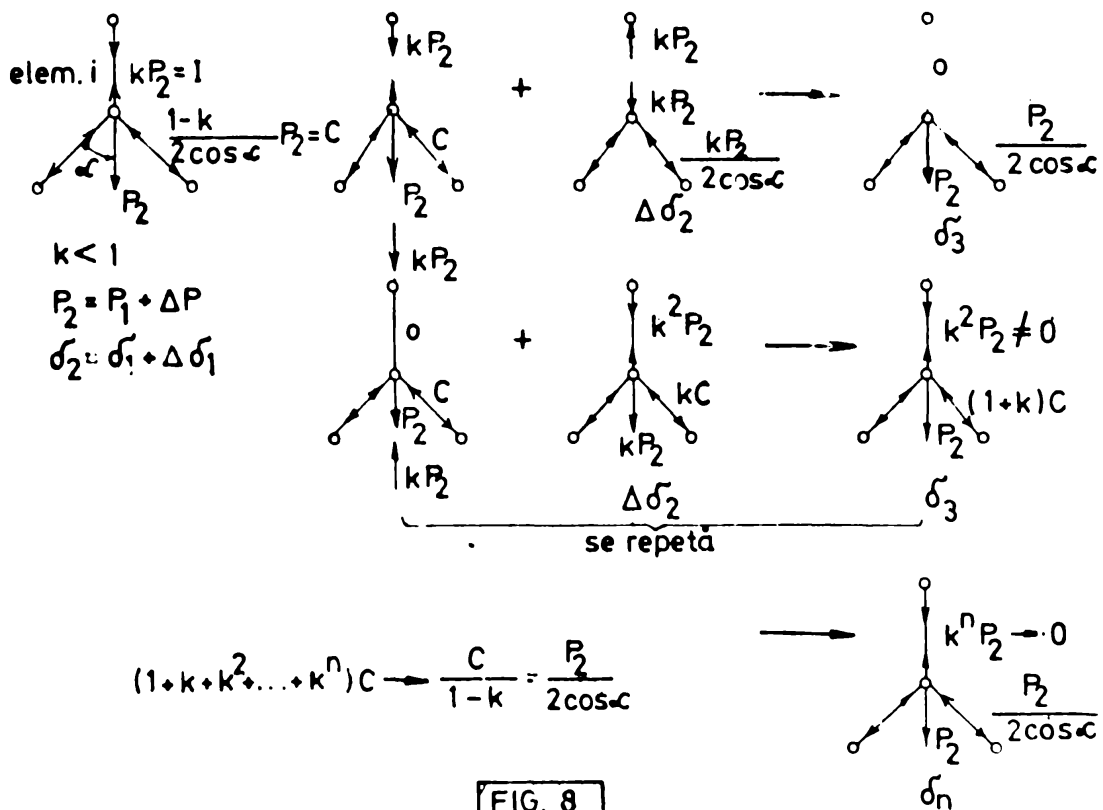


FIG. 8

După determinarea valorilor marginale  $\{F_m\}$  și  $\{F'_m\}$  și a operatorilor cu diferențe finite se scrie sistemul de ecuații (4) sub forma:

$$[C]\{F_1\} = [C_m]\{F_m\} + [C'_m]\{F'_m\} . \quad (4')$$

din care rezultă vectorul valorilor funcției înlocuitoare  $\phi$  în punctele interioare:

$$\{F_1\} = [C]^{-1}([C_m]\{F_m\} + [C'_m]\{F'_m\}) .$$

Dacă domeniul este  $m$  - conex, problema este de  $3(m-1)$  ori static nedeterminată. Aplicând metoda eforturilor și - pentru găsirea deplasărilor  $\{\delta\}$  și  $\{\Delta\}$  - metoda Mohr-Maxwell generalizată [30,40] , spre exemplu:

$$\delta_{jk} = \int_V \{\varepsilon_k\}^T \{\sigma_j\} dV ,$$

rezultă

$$\{X\} = [\delta]^{-1}\{\Delta\}$$

și vectorul funcțiilor de tensiuni:

$$\{F_1\}^T = \{F_{i0}\}^T + \{X\}^T [F_n] ,$$

$\{F_{i0}\}$  corespunzând sistemului de bază static determinat și  $[F_n]$  necunoscutele static nedeterminate. Cunoscându-se valorile  $\{F_1\}$ , se determină mărimile tensiunilor în nodurile rețelei, prin aplicarea operatorilor cu diferențe finite corespunzători.

Relația liniară [46] permite o transpunere a ecuației cu derivate parțiale (3) în forma:

$$\frac{d}{dy} \{Z\} = [A]\{Z\} + \{P\} , \quad (7)$$

în care  $\{Z\}$  reprezintă variațiile funcțiilor de tensiuni și ale primelor lor trei derivate față de  $y$ , în lungul unor drepte paralele cu axa  $Oy$  (fig.4). Prin aceasta, problema s-a redus la integrarea unui sistem de ecuații diferențiale, ce se poate

face principial la fel atit in cazul domeniilor simplu conexe cit si in cel al domeniilor multiplu conexe [1,42,72].

#### d. Metoda bazate pe discretizări fizice

Placa continuă poate fi înlocuită, pentru calcul, printr-o structură formată din bare [32,64,73,116] sau din elemente mici de suprafață, numite elemente finite [74 ș.a.]. Noțiunea de element finit apare și în lucrarea [70]. Acolo condițiile de echilibru și de continuitate de tipul (1) nu se formulează pentru un element diferențial ci pentru un element cu dimensiuni finite. Drept necunoscute se consideră valorile tensiunilor în colțurile acestor elemente dreptunghiulare și se determină dintr-un sistem de ecuații algebrice. Procesul se încadrează de fapt în metoda diferențelor finite aplicată direct sistemului de ecuații (1).

Obișnuit, prin element finit se înțelege un corp cu geometrie simplă, având dimensiuni finite și un număr finit de legături cu elementele adiacente. Proprietățile mecanice ale elementului finit sînt caracterizate prin matricea lui de flexibilitate [f] respectiv de rigiditate [k]. Acestea se determină astfel încît, dacă dimensiunile elementelor finite ale structurii înlocuitoare tind către zero, soluția obținută să tindă către cea exactă a structurii reale. Metoda elementelor finite este o generalizare a metodei matriceale pentru calculul structurilor formate din bare [4,8,55,91]. Literatura privind această metodă este bogată [2,7,9,24,27,63,86,95,100,102,124,127,139,140]. Cea mai convenabilă este varianta bazată pe metoda deplasărilor ce permite o schematizare completă a operațiilor de calcul. După împărțirea judicioasă a structurii în elemente finite și definirea matricelor rigidităților acestora în coordonate proprii

$[k^{(i)}]$  unează trecerea la matricile rigidităților în coordonate centrale  $[\bar{k}^{(i)}]$ . Acestea se asamblează în matricea rigidităților structurii înlocuitoare  $[K]$ . După eliminarea gradelor de libertate de corp rigid, deplasările nodurilor structurii  $\{U_R\}$  se determină din sistemul de ecuații de echilibru:

$$[K_R] \{U_R\} = \{P_R\}. \quad (8)$$

Pe baza deplasărilor

$$\{U_R\} = [K_R]^{-1} \{P_R\},$$

$\{P_R\}$  fiind vectorul încărcărilor nodale, se calculează tensiunile  $\{\sigma\}$ . Matricile rigidităților elementelor finite se deduc admitând modele de deformații (compatibile), modele de tensiuni (de echilibru) sau hibride [136].

Față de metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite are principalul avantaj că nu cere o formulare matematică a problemei studiate. În ambele metode se poate lucra cu substructuri [33,102]. Din combinația lor a rezultat metoda elementelor finite mari [52]. Procedeul mixt descris în [53] leagă într-un alt mod cele două metode.

Precizia rezultatelor obținute în metoda diferențelor finite respectiv în metoda elementelor finite depinde de trei factori: numărul și distribuția nodurilor rețelei de calcul respectiv a elementelor finite, calitatea operatorilor cu diferențe finite respectiv a matricilor rigidităților și precizia de rezolvare a sistemelor de ecuații de condiție. O privire de ansamblu asupra posibilităților de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice este dată în lucrarea [88]. Un procedeu interesant, folosit mai ales în metoda diferențelor finite, este relaxarea dinamică [28,60,96,138].

Plăcile plane cu cel puțin două margini paralele pot fi înlocuite pentru calcul cu fișii finite, legate continuu între ele în lungul laturilor lungi [101]. În acest caz legătura între încărcările și deplasările structurii înlocuitoare este descrisă printr-un sistem de ecuații diferențiale. Acesta poate fi integrat prin metoda seriilor de matrice [1,42,72,101]. Dacă numărul funcțiilor necunoscute nu este prea mare se pot aplica și metode operaționale [31,68,89,120], ce reduc problema tot la un sistem de ecuații algebrice, având însă coeficienți polinomiali.

#### e. Metode experimentale

Metoda bazată pe analogia cu placa încovoiată [21,111, 120,134] pornește de la forma similară a ecuației:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (9)$$

cu cea a problemei plane (3). Funcției de tensiuni  $F$  îi corespunde săgeata  $w$  a plăcii, încărcărilor marginale le corespund deplasări marginale, iar tensiunilor problemei plane le corespund curburile plăcii. Acestea se pot măsura pe modele corespunzătoare de placă. În cazul domniilor multiplu conexe, golurilor le corespund incluziuni rigide ale plăcii analoge.

Problema plană a elasticității poate fi soluționată și cu metoda analogiei electrice [49,61]. Aceasta se bazează pe analogia între legea lui Hooke și cea a lui Ohm.

Metoda fotoelastică [66] se folosește cel mai frecvent pentru studiul problemelor plane. Dacă modelul ce trebuie cercetat prezintă o rigiditate mare, este necesar să se determine și izocromate de ordin fracționar, ceea ce îngreunează efectu-

area încercărilor. Acestea se găsesc prin procedeul compensației.

### 1.1.2. Elemente din beton armat

#### 1.1.2.1. Stadiul elastic

Prezența barelor de armătură sporește rigiditatea axială a elementelor de beton:

$$[\alpha] = [\alpha_b] + [\alpha_a]. \quad (10)$$

Pentru o rețea de bare paralele cu axele de coordonate se obțin, cu notațiile din figura 5, matricea rigidităților  $[\alpha]$  și inversa ei, matricea flexibilităților  $[\varphi] = [\alpha]^{-1}$  a betonului armat elastic din figura 6. Introducând funcția de tensiuni Airy, ecuația de compatibilitate a deformațiilor se scrie sub forma:

$$\frac{\partial^4(\alpha_{xx}F)}{\partial x^4} - 2\nu_b \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1+\nu_b) \frac{\partial^4(\frac{\Delta}{c})}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\alpha_{yy}F)}{\partial y^4} = 0. \quad (11)$$

Pentru subdomenii cu aceeași armare se obține:

$$\alpha_{xx} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\alpha_{xy} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha_{yy} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (12)$$

Integrarea ecuației (12) se poate face spre exemplu prin discretizarea ei matematică. Pentru rezolvarea problemei poate fi folosită și discretizarea fizică, ținând seama de rigiditatea materialului definită mai sus. Experimental se obține o soluție folosind modele fotoelastice armate [29].

#### 1.1.2.2. Stadiile postelastice

Comportarea betonului armat în stadiile postelastice (fisurarea betonului, deformarea plastică a betonului sau a armăturii) poate fi caracterizată prin matrice de rigiditate corespunzătoare. Pornind de la acestea rezultă (în

cazul stării de tensiune plane) pentru fiecare stadiu o ecuație de tipul (11) sau (12). Integrarea acestora prin discretizare matematică este însă greoaie deoarece distribuția diferitelor stadii pe suprafața elementului nu este cunoscută și variază în funcție de mărimea încărcărilor. Lucrarea [19] cuprinde o încercare de calcul elasto-plastic a plăcilor încovoiate folosind diferențele finite, iar lucrarea [71] se referă la calculul grinzilor pereți de beton armat.

Mai adecvate sînt metodele bazate pe discretizarea fizică a structurii și mai ales metoda elementelor finite. Cu aceasta se ține seama ușor de stadiul în care se află fiecare zonă a structurii. Pentru urmărirea trecerii structurii prin diferitele stadii de lucru ale materialului s-au dezvoltat procedeele incrementale, la care încărcarea se consideră crescătoare în trepte  $\Delta P$ , de la zero pînă la cedarea structurii. S-au cristalizat două moduri de caracterizare a proprietăților betonului armat: p în definirea unor elemente finite distincte pentru beton și armătură [93,94,105,125,137] respectiv prin definirea unor elemente finite armate, ca în stadiul elastic prezentat mai sus [24,67]. În lucrările [57,71] sînt date relații între tensiunile și deformațiile elementelor de beton armat fisurate.

Conform [24] modelul betonului armat se prezintă în felul următor: În stadiul elastic betonul se consideră omogen și isotrop într-o stare de tensiune plană. Limitele acestui stadiu sînt date de criteriile de curgere Huber-Mises-Hencky (lucrul mecanic maxim de modificare a formei) pentru domeniul compresiune-compresiune respectiv al lui Galilei (tensiunea normală maximă) pentru celelalte domenii. Fisurarea are deci loc atunci cînd tensiunea prin-



cipală în beton  $\sigma_{1B}$  depășește rezistența la întindere  $R_t$ . Distanța între fisuri se consideră infinit mică, iar direcția acestora perpendiculară pe cea a lui  $\sigma_{1B}$  în momentul premergător fisurării. Betonul fisurat este omogen și anizotrop, putînd prelua numai eforturi normale paralele cu fisurile; se află deci într-o stare de tensiune monoaxială. În această situație ansamblul beton-armătură se comportă ca o structură reticulară cu ochiuri infinitesimale, deoarece armătura se consideră distribuită continuu. Ipotezele ce stau la baza acestui model sînt reprezentate în figura 7.

Pentru exemplificarea procedurilor incrementale se prezintă calculul într-o singură treaptă de încălzare, sub care un singur element finit "i" fisurează. Tensiunile perpendiculare pe fisuri nu mai pot fi preluate și trebuie deci transferate elementelor adiacente. Acest lucru poate fi obținut direct printr-un calcul pe structura cu rigiditatea elementului "i" modificată sau prin relaxare, operîndu-se pe structura nemodificată. Cele două procedee sînt exemplificate pentru structura simplă din bare, reprezentată în figura 8, la care fisurarea seca e din lucru bara întinsă. Succesiunea operațiilor de calcul este redată schematic în figura 9, iar diagramele  $\sigma - \epsilon$  corespunzătoare sînt prezentate în figura 10.

Procedeul direct cere rezolvarea succesivă a unor sisteme de ecuații cu matrice modificate ale coeficienților. În procedeul prin relaxare nu se schimbă matricea coeficienților, numărul sistemelor de ecuații ce trebuie rezolvate succesiv este însă mult mai mare. În lucrarea [125] procedeul relaxării se utilizează atît pentru studiul fisurării cît și pentru studiul deformațiilor plastice ale betonului armat. Lucrarea [24] recomandă aplicarea primului procedeu la studiul fisurării și a celui do al doilea la studiul plasticizării betonului comprimat biaxial.

### 1.1.2.3. Rezistența biaxială.

Lucrările [12,13,29,50] dau o privire de ansamblu asupra teoriilor de rupere a betonului simplu cît și o clasificare a acestora.

Criteriul de rupere a lui Mohr neglijează tensiune principală medie, putînd fi aplicat deci numai în domeniul compre-  
siune-întindere. Din [29] rezultă buna concordanță a acestuia cu rezultatele experimentale, astfel că în cele ce urmează se generalizează pentru  $\sigma_{yy} \neq 0$ . Starea de tensiune  $\{\sigma\}$  devine critică atunci cînd cercul de tensiuni

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2 \quad (13)$$

întîlnește curba înfrîșurătoare parabolică

$$\left(\frac{\tau}{R_{pr}}\right)^2 = \left(\alpha + \frac{\sigma}{R_{pr}}\right) A, \quad (14)$$

cu  $\alpha = R_t/R_{pr}$  și  $A = 1 + 2\alpha - 2\sqrt{\alpha(1+\alpha)}$ . Din condiția de tangență a lui (13)-(14) rezultă criteriul de rupere:

$$\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{R_{pr}}\right)^2 - 2A \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{R_{pr}} + \left(\frac{2\sigma_{xy}}{R_{pr}}\right)^2 + A(A - 4\alpha) = 0, \quad (15)$$

valabil pentru  $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/R_{pr} > 1 - 2\sqrt{\alpha(1+\alpha)}$ , cedarea producîndu-se prin alunecare. Dacă cercul (13) întîlnește parabola (14) în vîrf, criteriul de rupere devine:

$$\left(\frac{\sigma_{xy}}{\alpha R_{pr}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2\alpha R_{pr}} + 1\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\alpha R_{pr}}\right)^2 = 0, \quad (16)$$

cedarea avînd loc prin desprindere. Dacă se introduc tensiunile principale prin relația  $\{\sigma\} = [t]\{M\}$ , dată explicit în figura 11, criteriile de rupere (15) și (16) iau forma:

$$\left(\frac{2m_2}{R_{pr}}\right)^2 - \frac{4M_1}{R_{pr}} + A(A - 4\alpha) = 0, \quad (15')$$

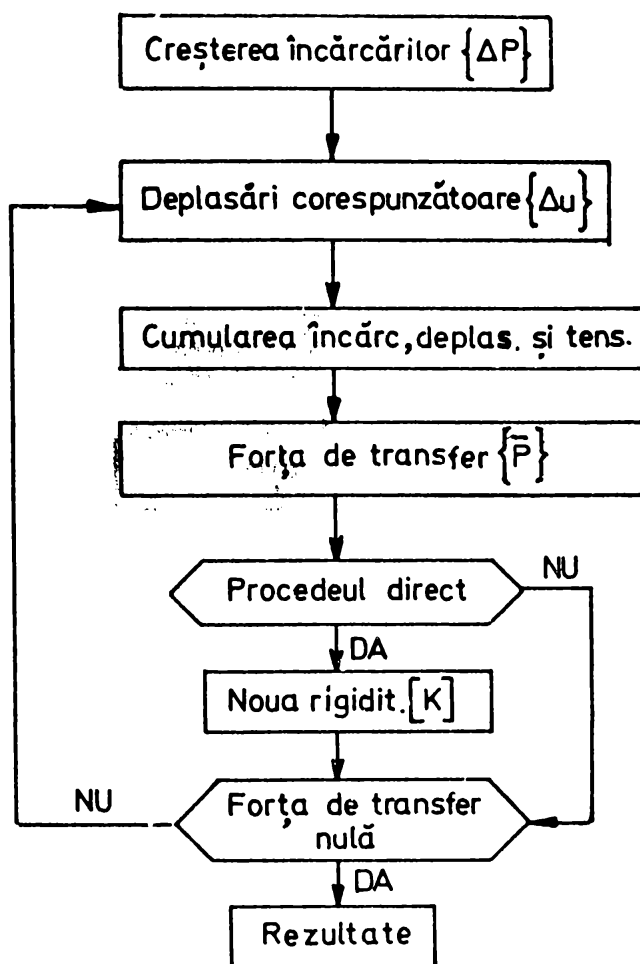


FIG. 9

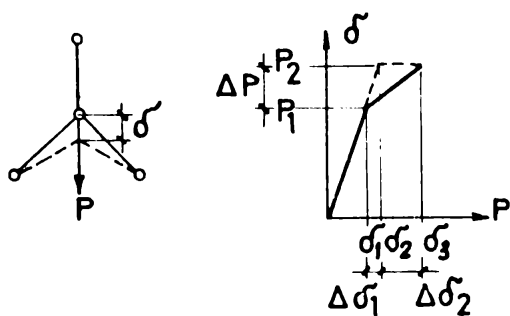
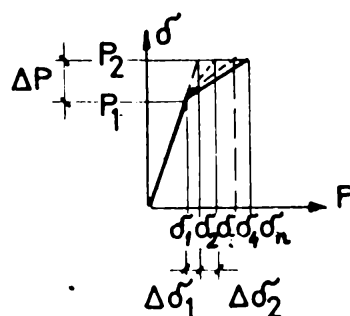


FIG. 10



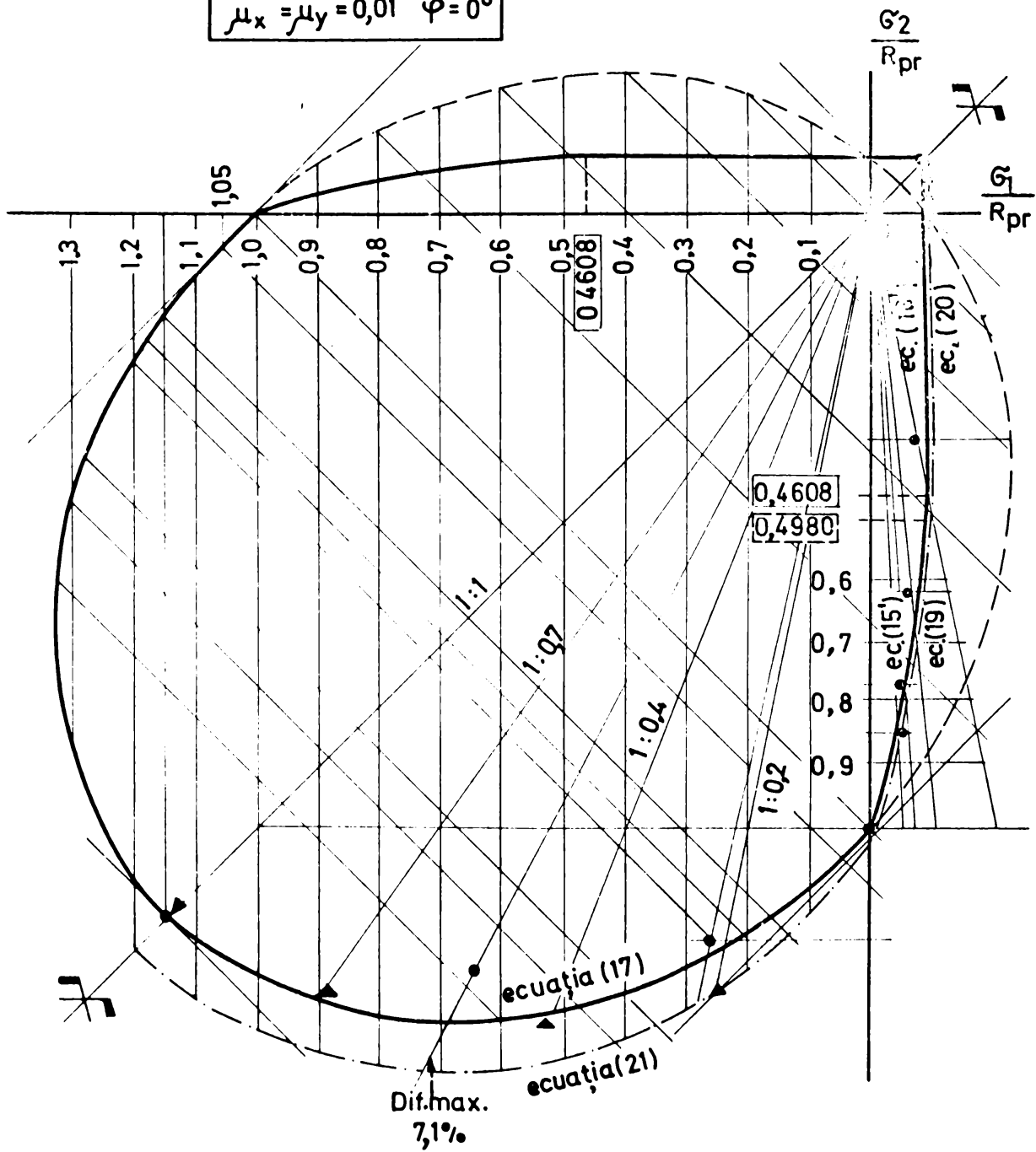
$$\begin{bmatrix} G_{xx} \\ G_{yy} \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\varphi \\ 1 & -\cos 2\varphi \\ 0 & \sin 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = 0,5(G_1 + G_2)$$

$$M_2 = 0,5(G_1 - G_2)$$

FIG. 11

$R_{pr} = 311 \text{ daN/cm}^2$   
 $\nu_b = 0,187 \quad n = 6,36$   
 $\mu_x = \mu_y = 0,01 \quad \varphi = 0^\circ$



- Kupfer.[78]
- ▲ Schröder-Opltz [15], valori interpolate

FIG.12

$$\frac{M_1 + M_2}{R_{pr}} + \alpha = 0, \text{ respectiv } \frac{M_1 - M_2}{R_{pr}} + \alpha = 0. \quad (16')$$

Pentru domeniul compresiune-compresiune se poate admite criteriul lucrului mecanic maxim de modificare a formei, generalizat în lucrarea [151] :

$$\left(\frac{\sigma_1}{R_{pr}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{R_{pr}}\right)^2 - \bar{A} \frac{\sigma_1}{R_{pr}} \frac{\sigma_2}{R_{pr}} + \bar{B} \left(\frac{\sigma_1}{R_{pr}} + \frac{\sigma_2}{R_{pr}} - 1\right) = 1, \quad (17)$$

cu  $\bar{A} = (2\beta + \alpha - 2)/\beta$ ,  $\bar{B} = -(1 + \alpha)$  și  $\beta = R_0/R_{pr}$ ,  $R_0$  fiind rezistența la compresiune biaxială uniformă ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ).

În figura 12 sînt reprezentate curbele (15'), (16') și (17) pentru un beton cu  $R_{pr} = 311 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\alpha = 0,091$  și  $\beta = 1,15$  [78]. Comparativ sînt date rezultatele experimentale obținute pentru acest beton cît și cele comunicate (pentru domeniul compresiune-compresiune) în lucrarea [115]. Încercările [78, 115] s-au efectuat în condiții certe de eliminare a frecărilor între epruvete și dispozitivele de încărcare. Corespondența valorilor teoretice și experimentale este bună. Pentru domeniul întindere-întindere s-au prelungit dreptele (16').

Pentru a ține seama de influența armăturii asupra cedării betonului, s-au dat criterii de tipul de mai sus și în condițiile existenței unei rețele de bare dispuse ortogonal. În ipoteza aderenței perfecte se obține, notînd pentru betonul simplu  $\{\sigma_p\} = [\alpha_p]\{\varepsilon\}$  și pentru cel armat  $\{\sigma\} = [\alpha]\{\varepsilon\}$ , următoarea relație între vectorii tensiunilor

$$\{\sigma_p\} = [\alpha_p][\alpha]^{-1}\{\sigma\} = [s]\{\sigma\}, \quad (18)$$

matricele ce intervin fiind explicitate în figurile 6 și 13.

Cele trei criterii de rupere devin:

$$\left(\frac{S_1 M_1 + S_4 M_2 \cos 2\varphi}{R_{pr}}\right)^2 - 2A \frac{S_1 M_1 + S_2 M_2 \cos 2\varphi}{R_{pr}} + \left(\frac{2M_2 \sin 2\varphi}{R_{pr}}\right)^2 + A(A - 4\alpha) = 0 \quad (19)$$

$$\left(\frac{S_1 M_1 + S_4 M_2 \cos 2\varphi}{R_{pr}}\right)^2 - \left(\frac{S_1 M_1 + S_2 M_2 \cos 2\varphi}{R_{pr}} + 2\alpha\right)^2 + \left(\frac{2M_2 \sin 2\varphi}{R_{pr}}\right)^2 = 0 \quad (20)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{A}}{4}\right) \left(\frac{S_1 M_1 + S_2 M_2 \cos 2\varphi}{R_{pr}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{A}}{4}\right) \left[\left(\frac{S_1 M_1 + S_4 M_2 \cos 2\varphi}{R_{pr}}\right)^2 + \left(\frac{2M_2 \sin 2\varphi}{R_{pr}}\right)^2\right] + \bar{B} \left(\frac{S_1 M_1 + S_2 M_2 \cos 2\varphi}{R_{pr}} - 1\right) - 1 = 0 \quad (21)$$

Semnificația lui  $S_1 + S_4$  rezultă din figura 13.

Considerând betonul cu  $R_{pr} = 311 \text{ daN/cm}^2$ ,  $E_b = 330.000 \text{ daN/cm}^2$  și  $\nu_b = 0,187$  și o rețea de armături din oțel OB38 cu  $n=6,36$  și  $\mu_x = \mu_y = 0,01$ , pentru  $\varphi = 0^\circ$  se obțin curbele din figura 12. Ecuațiile lor cit și cele corespunzătoare betonului simplu sînt prezentate în figura 14. Elementele finite de beton armat pot fi caracterizate de coeficienți de armare mai mari decît cei considerați în acest exemplu; atunci influența armăturii poate fi importantă.

## 1.2. Stabilitatea plăcilor plane

### 1.2.1. Elemente elastice

Ecuația cu derivate parțiale a suprafeței mediano de voalare este [110] :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D} (\sigma_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \sigma_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}), \quad (22)$$

în care  $w$  reprezintă deplasarea normală pe planul median și  $D$  - rigiditatea cilindrică a plăcii. Folosind metoda diferențelor finite [133], în prima etapă se determină tensiunile pornind de la ecuația (3). Urmează aplicarea operatorilor cu diferențe finite corespunzător ecuației (22) în fiecare nod al rețelei folosite. Sistemul de ecuații rezultat are soluții diferite de zero, dacă determinantul matricii coeficienților se anulează.

În metoda elementelor finite problema stabilității elastice se studiază pornind de la ecuația matriceală [35,63,102]:

$$([K] + \lambda [K_G]) \{U\} = \{0\}, \quad (23)$$

în care  $[K]$  este matricea rigidităților la încovoiere și  $[K_G]$  matricea rigidităților geometrice, ce ține seama de tensiunile  $\{\sigma\}$  ale stării de tensiune plane. Problema de valori proprii a perechii de matrice  $[K]$  și  $[K_G]$  conduce la valorile proprii  $\lambda$  și la vectorul propriu  $\{U\}$ . Ecuația caracteristică este:

$$\det ([K] + \lambda [K_G]) = 0 \quad (24)$$

### 1.2.2. Elemente de beton armat

Indicații privind determinarea încărcării critice a pereților de beton armat sînt date în lucrările [77, 149]. În lucrarea [77] se dau coeficienți de reducere a încărcării critice în cazul rezemării discontinue, ca la grinzile pereți cu o singură deschidere.



## 2. METODE APROXIMATIVE

În acest capitol se dezvoltă principalele metode aproximative cu aplicabilitate generală la studiul stării de tensiune plane, definită pe domenii simplu sau multiplu conexe cu contururi dreptunghiulare paralele între ele.

### 2.1. Discretizarea matematică prin colocatie

#### 2.1.1. Colocatia punctuală

Ecuația cu derivate parțiale a stării de tensiune plane într-un element armat, elastic (12), se scrie convențional sub forma:

$$\alpha_{xx} F_{4x} + 2\alpha_{xy} F_{2x2y} + \alpha_{yy} F_{4y} = 0. \quad (12')$$

Aplicând pe domeniul de definiție o rețea cu ochiuri pătrate și făcând trecerea la coordonate adimensionale ca în figura 15, ecuația (12') devine:

$$\alpha_{xx} F_{4\xi} + 2\alpha_{xy} F_{2\xi2\eta} + \alpha_{yy} F_{4\eta} = 0. \quad (12'')$$

Funcția înlocuitoare (de aproximare) se consideră de tipul (5):

$$\phi(\xi, \eta) = U(\xi, \eta) + P(\xi, \eta) Z(\xi, \eta). \quad (5')$$

#### 2.1.1.1. Colocatia într-un singur nod

În vederea deducerii operatorului de bază se consideră un subdomeniu cu centrul  $ij$  situat la cel puțin 2a față de margini. Datorită simetriei membrului stîng al ecuației (12'') nodurile subdomeniului considerat vor fi dispuse simetric față de axele  $O\xi$  și  $O\eta$ . Extinderea subdomeniului se alege în funcție de precizia dorită. Pentru a obține un operator de tipul celui cu diferențe finite obișnuit, se consideră cele 13 no-



duri din figura 16.

Funcția de bază se alege de forma:

$$S(\xi, \eta) = A_1 + A_2 \xi + A_3 \eta + A_4 \xi^2 + A_5 \xi \eta + A_6 \eta^2 + A_7 \xi^2 \eta + A_8 \xi \eta^2 + A_9 \xi^2 \eta^2 + A_{10} \xi^3 + A_{11} \eta^3 + A_{12} \xi^4 + A_{13} \eta^4. \quad (25)$$

Punând condițiile:

$$S(\xi_k, \eta_k) = \Gamma_k, \quad (k = 1, \dots, 13) \quad (26)$$

rezultă sistemul de ecuații:

$$[\alpha]\{A\} = \{F\} \quad (27)$$

pentru determinarea parametrilor  $\{A\}$ , care introduși în (25) duc la expresia funcției de aproximare de bază  $S$ . Matricea  $[\alpha]$  și funcția  $S$  sînt date în figura 17. Colocația uzuală să se facă numai într-un singur punct, funcția suplimentară  $Z$  nu mai este necesară, deci  $\phi = S$ .

Derivatele necesare pentru aproximarea membrului stîng al ecuației (12") sînt:

$$24\alpha_{xx}\phi_{4\xi} = \alpha_{xx}(24F_5 - 96F_6 + 144F_7 - 96F_8 + 24F_9)$$

$$48\alpha_{xy}\phi_{2\xi 2\eta} = 2\alpha_{xy}(24F_2 - 48F_3 + 24F_4 - 48F_6 + 96F_7 - 48F_8 + 24F_{10} - 48F_{11} + 24F_{12})$$

$$24\alpha_{yy}\phi_{4\eta} = \alpha_{yy}(24F_1 - 96F_3 + 144F_7 - 96F_{11} + 24F_{13})$$

Prin colocație în centrul domeniului (punctul 7:  $\xi = \eta = 0$ ) se obține expresia:

$$\begin{aligned} & F_1 \alpha_{yy} + F_2 (2\alpha_{xy}) + F_3 (-4\alpha_{xy} - 4\alpha_{yy}) + F_4 (2\alpha_{xy}) + F_5 \alpha_{xx} + \\ & + F_6 (-4\alpha_{xx} - 4\alpha_{xy}) + F_7 (6\alpha_{xx} + 8\alpha_{xy} + 6\alpha_{yy}) + F_8 (-4\alpha_{xx} - 4\alpha_{xy}) + \\ & + F_9 \alpha_{xx} + F_{10} (2\alpha_{xy}) + F_{11} (-4\alpha_{xy} - 4\alpha_{yy}) + F_{12} (2\alpha_{xy}) + F_{13} \alpha_{yy} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

care reprezintă operatorul cu diferențe finite, rodat în figura 18. Dacă lipsește armătura ( $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha_{xy} = 1$ ) se găsește operatorul bine cunoscut din aceeași figură.

Operatorii pentru calculul tensiunilor  $\{\sigma\}$  în centrul subdomeniului se obțin prin derivarea funcției de aproximare  $\phi$  din figura 17 în acest punct.

$$(F_{2\xi})_{\xi=\eta=0} = \frac{1}{24}(-2F_5 + 32F_6 - 60F_7 + 32F_8 - 2F_9)$$

$$(F_{2\eta})_{\xi=\eta=0} = \frac{1}{24}(-2F_1 + 32F_3 - 60F_7 + 32F_{11} - 2F_{13})$$

$$(F_{\xi\eta})_{\xi=\eta=0} = \frac{1}{24}(-6F_2 + 6F_4 + 6F_{10} - 6F_{12})$$

Făcând trecerea la sistemul de axa xoy, cu:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

rezultă operatorii din figura 19. Primi doi diferă de cei cunoscuți în metoda diferențelor finite obișnuite, asigurând o precizie mai mare.

Se poate obține evident și expresia variației tensiunilor în subdomeniul considerat.

#### 2.1.1.2. Colocăția în cinci noduri

Pentru obținerea operatorului de bază în metoda plurilocală se alege subdomeniul din figura 20, cu 21 noduri. Pentru funcția de bază se admite expresia:

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & A_1 + A_2\xi + A_3\eta + A_4\xi^2 + A_5\xi\eta + A_6\eta^2 + A_7\xi^3 + A_8\xi^2\eta + A_9\xi\eta^2 + \\ & + A_{10}\eta^3 + A_{11}\xi^4 + A_{12}\xi^3\eta + A_{13}\xi^2\eta^2 + A_{14}\xi\eta^3 + A_{15}\eta^4 + A_{16}\xi^2\eta^4 + \\ & + A_{17}\xi\eta^4 + A_{18}\xi^3\eta^2 + A_{19}\xi^2\eta^3 + A_{20}\xi\eta^4 + A_{21}\xi^4\eta. \end{aligned} \quad (29)$$

Punând condițiile de tip 2C, se obține matricea  $[a]$  din figura 21. În figura 22 este rodată funcția de bază  $\phi$ .

$$[s] = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \alpha_{yy} - \nu_b^2 & \nu_b(\alpha_{xx} - 1) & 0 \\ \nu_b(\alpha_{yy} - 1) & \alpha_{xx} - \nu_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\delta} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} - 2\nu_b)(1 + \nu_b) \\ S_2 &= -\frac{1}{\delta} (\alpha_{yy} - \alpha_{xx})(1 + \nu_b) \\ S_3 &= \frac{1}{\delta} (\alpha_{yy} - \alpha_{xx})(1 - \nu_b) \\ S_4 &= \frac{1}{\delta} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + 2\nu_b)(1 - \nu_b) \end{aligned}$$

$$\delta = \alpha_{xx} \alpha_{yy} - \nu_b^2$$

FIG. 13

$$(15') \longrightarrow \bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2 - 2\bar{G}_1\bar{G}_2 - 1,104(\bar{G}_1 + \bar{G}_2) + 0,104 = 0$$

$$(16') \longrightarrow \bar{G}_1 + 0,091 = 0 ; \bar{G}_2 + 0,091 = 0$$

$$(17) \longrightarrow \bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2 - 0,340\bar{G}_1\bar{G}_2 - 0,909(\bar{G}_1 + \bar{G}_2) - 0,091 = 0$$

$$(19) \longrightarrow \bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2 - 2\bar{G}_1\bar{G}_2 - 1,128(\bar{G}_1 + \bar{G}_2) + 0,111 = 0$$

$$(20) \longrightarrow 1,881\bar{G}_1 + 0,021\bar{G}_2 + 0,182 = 0 \quad 0,021\bar{G}_1 + 1,881\bar{G}_2 + 0,182 = 0$$

$$(21) \longrightarrow \bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2 - 0,296\bar{G}_1\bar{G}_2 - 0,981(\bar{G}_1 + \bar{G}_2) - 0,103 = 0$$

$$\bar{G}_1 = \frac{G_1}{R_{pr}} ; \bar{G}_2 = \frac{G_2}{R_{pr}}$$

FIG. 14

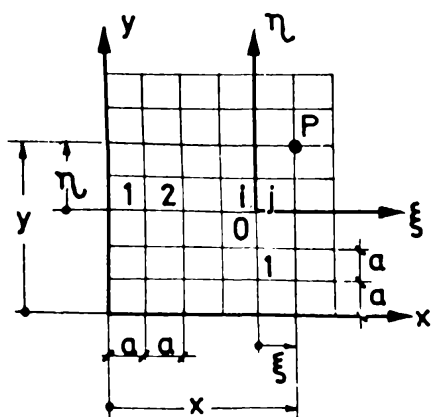


FIG. 15

$$x = (i + \xi)a$$

$$y = (j + \eta)a$$

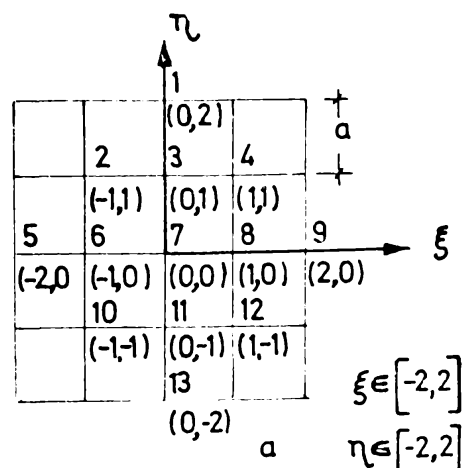


FIG. 16

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 16 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$24\theta(\xi, \eta) = 24S(\xi, \eta) = 24 \{F\}^T \{e_1\} \quad \{F\}^T = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_{13}]$$

$$\{e_1\} = \begin{bmatrix} -2\eta - \eta^2 + 2\eta^3 + \eta^4 \\ -6\xi\eta + 16\xi^2\eta - 6\xi\eta^2 + 6\xi^2\eta^2 \\ 16\eta + 16\eta^2 - 12\xi^2\eta - 12\xi^2\eta^2 - 4\eta^3 - 4\eta^4 \\ 6\xi\eta + 6\xi^2\eta + 6\xi\eta^2 + 6\xi^2\eta^2 \\ 2\xi - \xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4 \\ -16\xi + 16\xi^2 + 12\xi\eta^2 - 12\xi^2\eta^2 + 4\xi^3 - 4\xi^4 \\ 24 - 30\xi^2 - 30\eta^2 + 24\xi^2\eta^2 + 6\xi^4 + 6\eta^4 \\ 16\xi + 16\xi^2 - 12\xi\eta^2 - 12\xi^2\eta^2 - 4\xi^3 - 4\xi^4 \\ -2\xi - \xi^2 + 2\xi^3 + \xi^4 \\ 6\xi\eta - 6\xi^2\eta - 6\xi\eta^2 + 6\xi^2\eta^2 \\ -16\eta + 16\eta^2 + 12\xi^2\eta - 12\xi^2\eta^2 - 4\eta^3 - 4\eta^4 \\ -6\xi\eta - 6\xi^2\eta + 6\xi\eta^2 + 6\xi^2\eta^2 \\ 2\eta - \eta^2 - 2\eta^3 + \eta^4 \end{bmatrix}$$

FIG. 17

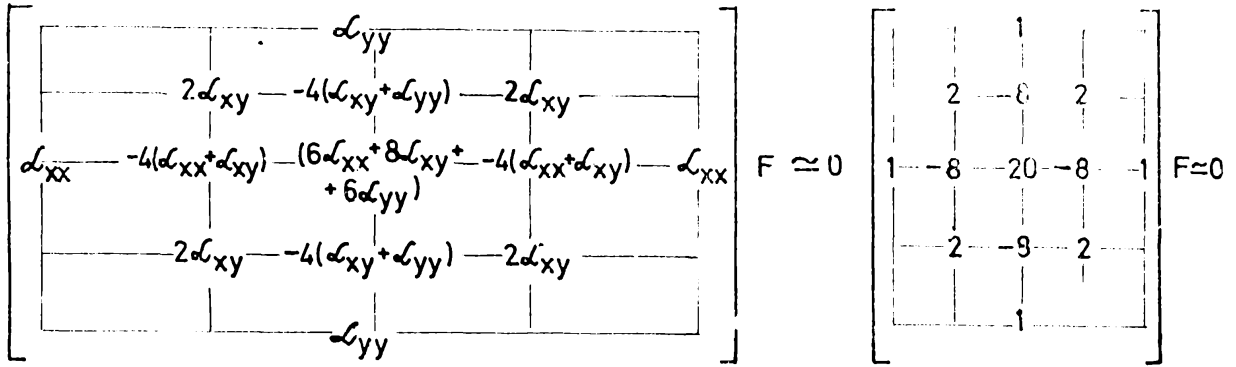


FIG. 18

$$(F_{2x})_{ij} \approx \frac{1}{12a^2} \begin{bmatrix} -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \end{bmatrix} F$$

$$(F_{2y})_{ij} \approx \frac{1}{12a^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 16 \\ -30 \\ 16 \\ -1 \end{bmatrix} F \quad (F_{xy})_{ij} = \frac{1}{4a^2} \begin{bmatrix} -1 & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & -1 \end{bmatrix}$$

FIG. 19

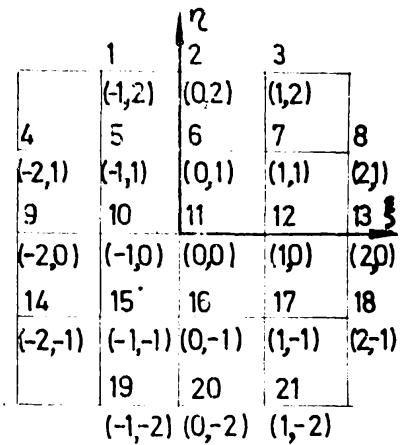


FIG. 20

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 & 4 & -1 & 2 & -4 & 8 & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 16 & 2 & -4 & 8 & -16 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 16 & 2 & 4 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & -2 & 1 & -8 & 4 & -2 & 1 & 16 & -8 & 4 & -2 & 1 & 4 & 16 & -8 & 4 & -2 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 8 & 4 & 2 & 1 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 4 & 16 & 8 & 4 & 2 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & 2 & 1 & -8 & -4 & -2 & -1 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 4 & -16 & -8 & -4 & -2 & 16 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -2 & 1 & 8 & -4 & 2 & -1 & 16 & -8 & 4 & -2 & 1 & 4 & -16 & 8 & -4 & 2 & 16 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 & 4 & -1 & -2 & -4 & -8 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 16 & -2 & -4 & -8 & -16 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & 1 & -2 & 4 & -8 & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 16 & -2 & 4 & -8 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

FIG. 21

$$\begin{aligned}
48S(\xi, \eta) &= 48\{F\}^T \{e_2\}; \\
\{F\} &= [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_{21}] \\
25\eta - 2\xi^2\eta + \xi\eta^2 - \xi^2\eta^2 - 2\xi\eta^3 + \xi^2\eta^4 + 2\xi^3\eta^3 - \xi\eta^4 & \\
-4\eta - 2\eta^2 + 4\xi\eta + 4\eta^3 + 2\xi\eta^2 + 2\eta^4 - 2\xi^2\eta^4 - 4\xi\eta^3 & \\
-2\xi\eta - 2\xi^2\eta - \xi\eta^2 - \xi^2\eta^2 + 2\xi\eta^3 + \xi^2\eta^4 + 2\xi^3\eta^3 + \xi\eta^4 & \\
25\eta - \xi^2\eta + 2\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - \xi^2\eta^2 + \xi^4\eta - 2\xi^3\eta^2 + \xi^4\eta^2 & \\
-20\xi\eta + 20\xi^2\eta - 20\xi\eta^2 + 4\xi^3\eta + 20\xi^2\eta^2 + 4\xi\eta^3 - 4\xi^2\eta^4 + 4\xi^3\eta^3 - 4\xi\eta^4 - 4\xi^4\eta^2 & \\
32\eta + 32\eta^2 - 38\xi\eta - 8\eta^3 - 38\xi^2\eta^2 - 8\eta^4 + 8\xi\eta^4 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^4\eta^2 & \\
20\xi\eta + 20\xi^2\eta + 20\xi\eta^2 - 4\xi^3\eta + 20\xi^2\eta^2 - 4\xi\eta^3 - 4\xi^2\eta^4 - 4\xi^3\eta^3 - 4\xi\eta^4 - 4\xi^4\eta^2 & \\
-2\xi\eta - \xi^2\eta - 2\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta - \xi^2\eta^2 - \xi^4\eta + 2\xi^3\eta^2 + \xi^4\eta^2 & \\
4\xi - 2\xi^2 - 4\xi^3 - 4\xi\eta^2 + 2\xi^4 + 2\xi^2\eta^2 + 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^4\eta^2 & \\
-32\xi + 32\xi^2 + 8\xi^3 + 38\xi\eta^2 - 8\xi^4 - 38\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^4 - 8\xi\eta^3 - 8\xi^3\eta^2 - 6\xi\eta^4 + 8\xi^4\eta^2 & \\
48 - 60\xi^2 - 60\eta^2 + 12\xi^4 + 72\xi^2\eta^2 + 12\eta^4 - 12\xi^2\eta^4 - 12\xi^4\eta^2 & \\
32\xi + 32\xi^2 - 8\xi^3 - 38\xi\eta^2 - 8\xi^4 - 38\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^4 + 8\xi\eta^3 + 6\xi\eta^4 + 8\xi^4\eta^2 & \\
-4\xi - 2\xi^2 + 4\xi^3 + 4\xi\eta^2 + 2\xi^4 + 2\xi^2\eta^2 - 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^4\eta^2 & \\
-2\xi\eta + \xi^2\eta + 2\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta - \xi^2\eta^2 - \xi^4\eta - 2\xi^3\eta^2 + \xi^4\eta^2 & \\
20\xi\eta - 20\xi^2\eta - 20\xi\eta^2 - 4\xi^3\eta + 20\xi^2\eta^2 - 4\xi\eta^3 - 4\xi^2\eta^4 + 4\xi^3\eta^3 + 4\xi\eta^4 - 4\xi^4\eta^2 & \\
-32\eta + 32\eta^2 + 38\xi^2\eta + 8\eta^3 - 38\xi^2\eta^2 - 8\eta^4 + 8\xi\eta^4 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^4\eta^2 & \\
-20\xi\eta - 20\xi^2\eta + 20\xi\eta^2 + 4\xi^3\eta + 20\xi^2\eta^2 + 4\xi\eta^3 - 4\xi^2\eta^4 + 4\xi^3\eta^3 + 4\xi\eta^4 - 4\xi^4\eta^2 & \\
25\eta + \xi^2\eta - 2\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - \xi^2\eta^2 - \xi^4\eta + 2\xi^3\eta^2 + \xi^4\eta^2 & \\
-4\xi\eta - 2\xi^2\eta + \xi\eta^2 - \xi^2\eta^2 + 2\xi\eta^3 + \xi^2\eta^4 - 2\xi^3\eta^3 - \xi\eta^4 & \\
4\eta - 2\eta^2 - 4\xi\eta - 4\eta^3 + 2\xi^2\eta^2 + 2\eta^4 - 2\xi^2\eta^4 + 4\xi\eta^3 & \\
25\eta + 2\xi^2\eta - \xi\eta^2 - \xi^2\eta^2 - 2\xi\eta^3 + \xi^2\eta^4 - 2\xi^3\eta^3 + \xi\eta^4 &
\end{aligned}$$

FIG. 22

Funcția adaos  $Z(\xi, \eta)$  va trebui să conțină patru parametri  $k$ , ce vor putea fi eliminați din cele cinci ecuații de colocație, obținându-se operatorul plurilocal căutat. Funcția  $P(\xi, \eta)$  se alege astfel încât valorile produsului  $PZ$  să fie nule în noduri.

$$P(\xi, \eta) = \xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 4) + \eta(\eta^2 - 1)(\eta^2 - 4), \quad (30)$$

$$Z(\xi, \eta) = k_1\xi + k_2\eta + k_3\xi^2 + k_4\eta^2. \quad (31)$$

Produsul  $PZ$  este dat în figura 23. Colocația se face în nodurile 6, 10, 11, 12 și 16. Operatorul cu diferențe finite este redat în figura 24. Cu  $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha_{xy}$  se obține operatorul plurilocal bine cunoscut.

Operatorii pentru calculul tensiunilor în centrul subdomeniului se determină ca în cazul anterior, fiind aceiași cu cei dați în lucrarea [143].

În cele de mai sus s-a aplicat procedeul colocației propus de S. Falk [37] în cazul problemei de tensiuni plane, astfel încât să se obțină operatorii pentru discretizarea ecuației cu derivate parțiale (12) în metoda diferențelor finite obișnuite și în metoda plurilocală. Avantajul acestui procedeu constă în aceea că se obține o funcție de variație a lui  $F$  pe subdomenii (fig. 17, 22) și prin derivarea acesteia - variația tensiunilor<sup>[6]</sup>. De asemenea permite deducerea unor operatori cu precizie mai mare dacă funcția de aproximare de bază  $S$  se alege de tip hermitic cât și utilizarea unor rețele cu pași variabili.

### 2.1.2. Colocația liniară

Procedeul colocației poate fi extins în vederea găsirii operatorilor necesari pentru aproximarea ecuației cu derivate parțiale a problemei plane printr-un sistem de ecuații diferențiale. În acest scop discretizarea se face pe o singură direcție,

spre ax.pe direcția X :

$$\alpha_{xx} F_{4\xi} + 2\alpha_{xy} a^2 F_{2\xi 2y} + \alpha_{yy} a^4 F_{4y} = 0. \quad (12'')$$

Funcția de aproximare se alege de forma:

$$\phi(\xi, y) = S(\xi, y) + P(\xi)Z(\xi). \quad (5'')$$

Considerând subdomeniul ce conține cele cinci dreptele din figura 25a funcția de bază se admite sub forma dată în figura 25 b.

### 2.1.2.1. Colocația în lungul unei singure drepte

Funcția suplimentară Z nefiind necesară, derivatele funcției înlocuitoare  $\phi = S$ , vor fi:

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} \phi_{4\xi} &= \alpha_{xx} (F_1 - 4F_2 + 6F_3 - 4F_4 + F_5) \\ 2\alpha_{xy} a^2 \phi_{2\xi 2y} &= \frac{\alpha_{xy} a^2}{6} (-1-6\xi+6\xi^2)F_{1,2y} - (-16-12\xi+24\xi^2)F_{2,2y} + \\ &+ (-30+36\xi^2)F_{3,2y} - (-16+12\xi+24\xi^2)F_{4,2y} + (-1+6\xi+6\xi^2)F_{5,2y} \\ \alpha_{yy} a^4 \phi_{4y} &= \frac{\alpha_{yy} a^4}{24} [(2\xi-\xi^2+2\xi^3+\xi^4)F_{1,4y} - (16\xi-16\xi^2-4\xi^3+4\xi^4)F_{2,4y} + \\ &+ (24-30\xi^2+6\xi^4)F_{3,4y} - (-16\xi-16\xi^2+4\xi^3+4\xi^4)F_{4,4y} + \\ &+ (-2\xi-\xi^2+2\xi^3+\xi^4)F_{5,4y}] \end{aligned}$$

Prin colocație în lungul dreptei 3 (figura 25a) se obține operatorul din figura (26).

### 2.1.2.2. Colocația în lungul a trei drepte

Dacă colocația se face în lungul dreptelor 2, 3 și 4 din figura 25a, P( $\xi$ ) și Z( $\xi$ ) se aleg de forma:

$$P(\xi) = \xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 4). \quad (32)$$

$$Z(\xi) = k_1 + k_2 \xi. \quad (33)$$

Produsul PZ este dat în figura 27.

După eliminarea parametrilor k între cele trei ecuații de colocație se obține operatorul din figura 28.



$$PZ = \{k\}^T \{e_3\} \quad \{k\}^T = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$$

$$\{e_3\} = \begin{bmatrix} 4\xi\eta - 5\xi\eta^3 + \xi\eta^5 + 4\xi^2 - 5\xi^4 + \xi^6 \\ 4\eta^2 - 5\eta^4 - \eta^6 + 4\xi\eta - 5\xi^3\eta + \xi^5\eta \\ 4\xi^2\eta - 5\xi^2\eta^3 + \xi^2\eta^5 + 4\xi^3 - 5\xi^5 + \xi^7 \\ 4\eta^3 - 5\eta^5 + \eta^7 + 4\xi\eta^2 - 5\xi^3\eta^2 + \xi^5\eta^2 \end{bmatrix}$$

FIG. 23

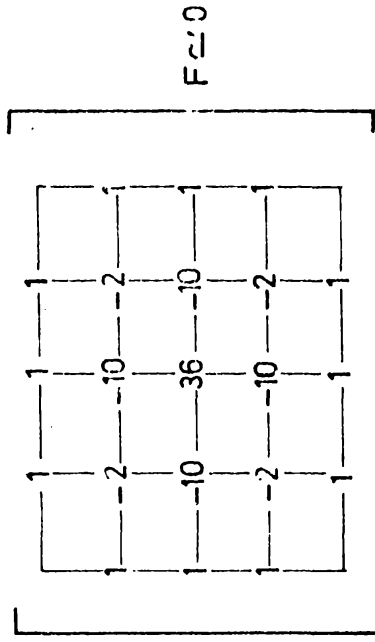


FIG. 24b

$$\begin{bmatrix} 6(\alpha_{xx} + \alpha_{xy}) & 12(-\alpha_{xy} + 2\alpha_{yy}) & 6(\alpha_{xy} + \alpha_{yy}) & 6(\alpha_{xx} + \alpha_{xy}) \\ 12(2\alpha_{xx} - \alpha_{xy}) & 12(3\alpha_{xx} - 5\alpha_{xy} - 8\alpha_{yy}) & 24(-\alpha_{xx} + \alpha_{xy} - \alpha_{yy}) & 6(\alpha_{xx} + \alpha_{xy}) \\ 6(\alpha_{xx} + \alpha_{xy}) & 144(\alpha_{xx} + \alpha_{xy} + \alpha_{yy}) & 12(-8\alpha_{xx} - 5\alpha_{xy} + 3\alpha_{yy}) & 12(2\alpha_{xx} - \alpha_{xy}) \\ 6(\alpha_{xx} + \alpha_{xy}) & 12(3\alpha_{xx} - 5\alpha_{xy} - 8\alpha_{yy}) & 24(-\alpha_{xx} + \alpha_{xy} - \alpha_{yy}) & 6(\alpha_{xx} + \alpha_{xy}) \end{bmatrix} F \approx 0$$

FIG. 24a

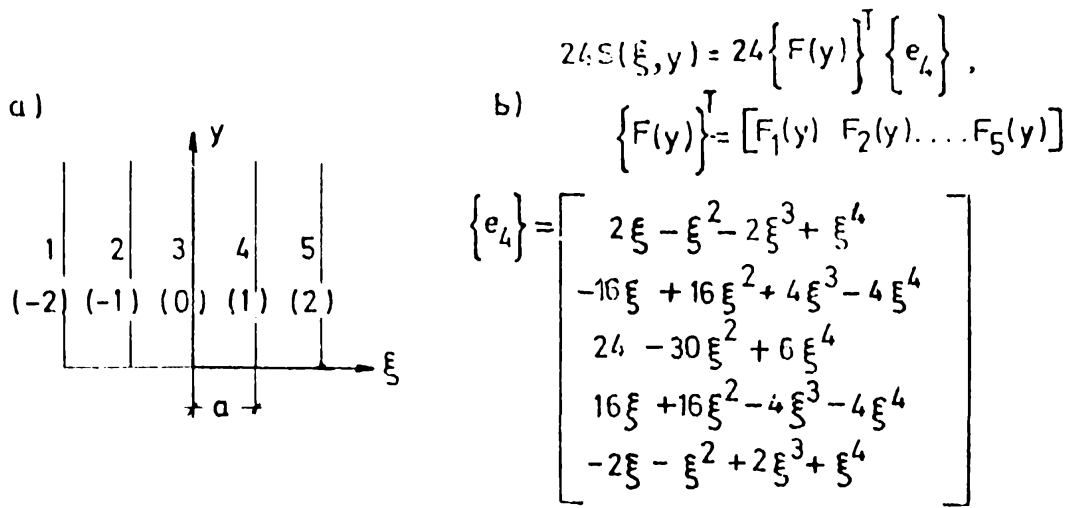


FIG.25

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{L}_{xx} F + \frac{a^2}{6} \begin{bmatrix} -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \end{bmatrix} \mathcal{L}_{xx} F_{2y} + a^4 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \mathcal{L}_{yy} F_{4y} \approx 0$$

FIG.26

$$PZ = \{k\}^T \{e_5\} \quad \{k\}^T = [k_1 \ k_2] \quad \{e_5\} = \begin{bmatrix} 4\xi - 5\xi^3 + \xi^5 \\ 4\xi^2 - 5\xi^4 + \xi^6 \end{bmatrix}$$

FIG.27

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{L}_{xx} F + \frac{a^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 8 & -18 & 8 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{L}_{xy} F_{2y} + \frac{a^4}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{L}_{yy} F_{4y} \approx 0$$

FIG.28

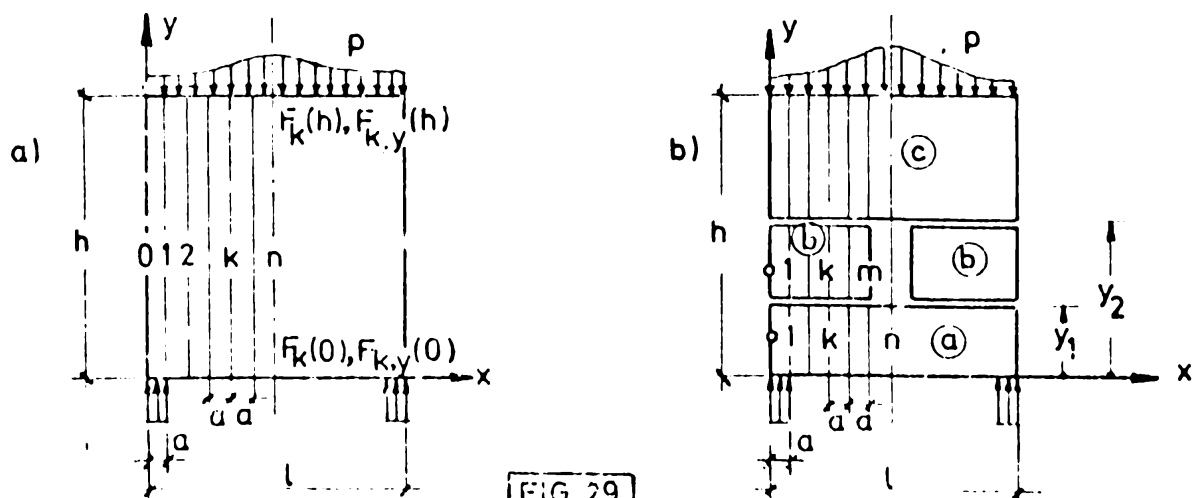


FIG.29

În lungul dreptelor considerate, expresiile derivatelor în raport cu  $y$  se obțin direct din integrarea sistemului de ecuații diferențiale format prin aplicarea operatorului din figura 26 respectiv a celui din figura 28. Evident, se pot deduce operatori speciali pentru zonele marginale, ca în cazul colocației punctuale. Expresiile derivatelor în raport cu  $x$  cât și cele ale derivatelor mixte se obțin din funcția înlocuitoare  $\phi = \Phi + \Psi$ . Spre exemplu, în cazul colocației în lungul unei singure drepte, se obține din figura 25, în dreptul dreptei 3:

$$(F_{2x})_i \approx \frac{1}{12a^2} [-F_1(y) + 16F_2(y) - 30F_3(y) + 16F_4(y) - F_5(y)], \quad (34)$$

un operator analog celui din figura 19.

### 2.1.2.3. Integrarea sistemului de ecuații diferențiale

Se prezintă metoda seriilor de matrice folosită de S.M.A. Kazimi și A. Coull în lucrarea [72] pentru soluționarea problemelor plane în cazul domeniilor simple conexe și extinderea acestora la domenii multiplu-conexe. Pentru ușurarea expunerii se consideră elemente cu o axă de simetrie (fig.29).

Pentru cazul din figura 29a cele  $n$  ecuații diferențiale de ordinul 4 se înlocuiesc printr-un sistem de  $4n$  ecuații diferențiale de ordinul 1, introducând notațiile:

$$F_k = Z_{4k-3}, \quad F_{k,y} = Z_{4k-2}, \quad F_{k,2y} = Z_{4k-1}, \quad F_{k,3y} = Z_{4k} \quad (35)$$

Acest sistem are forma (7):

$$\frac{d}{dy} \{Z(y)\} = [A] \{Z(y)\} + \{B\}, \quad (7')$$

$\{Z(y)\}$  fiind vectorul funcțiilor  $Z$  necunoscute. Soluția sistemului este:

$$\{Z(y)\} = [B(y)] \{Z(0)\} + \{\tilde{Z}(y)\}, \quad (36)$$

cu

$$[G(y)] = \exp[A]y \text{ și } \{\tilde{Z}(y)\} = (\exp[A]y - [I])[A]^{-1}\{B\}, \quad (37a, b)$$

[I] fiind matricea unitate. Pentru efectuarea practică a calculelor funcția exponențială se dezvoltă în serie de matrice:

$$\exp[A]y = [I] + [A]y + \frac{[A]^2 y^2}{2} + \frac{[A]^3 y^3}{3} + \dots + \frac{[A]^n y^n}{n!} + \dots \quad (38)$$

Dintre elementele vectorului  $\{Z(0)\}$  numai jumătate sînt cunoscute prin condițiile de margine pentru  $y=0$ . Restul se determină apelînd la condițiile de margine pentru  $y=h$ , transformînd astfel problema cu condiții de margine într-o problemă cu condiții inițiale. Elementele necunoscute din  $\{Z(0)\}$  se grupează într-un vector  $\{\bar{Z}(0)\}$  astfel ca, în concordanță cu figura 29a:

$$\{Z(0)\} = [K_1] \{\bar{Z}(0)\} \quad (39)$$

La marginea  $y = h$ , soluția (36) devine - ținînd seama de (39)

$$\{Z(h)\} = [G(h)] [K_1] \{\bar{Z}(0)\} + \{\tilde{Z}(h)\} \quad (40)$$

Din acest sistem se izolează ecuațiile ce conțin elementele  $Z(h)$  cunoscute, prin înmulțire cu o matrice  $[K_2]$ :

$$[K_2] \{Z(h)\} = [K_2] [G(h)] [K_1] \{\bar{Z}(0)\} + [K_2] \{\tilde{Z}(h)\} \quad (41)$$

Rezolvînd acest sistem de  $2n$  ecuații liniare rezultă vectorul căutat

$$\{\bar{Z}(0)\} = ([K_2] [G(h)] [K_1])^{-1} [K_2] (\{Z(h)\} - \{\tilde{Z}(h)\}), \quad (42)$$

astfel încît soluția (36) este determinată. Matricile de în-  
ci ență  $[K_1]$  și  $[K_2]$  sînt de ordinul  $(4n, 2n)$  respectiv  $(2n, 4n)$ .

Procedeu expus poate fi extins și asupra domeniilor mul-  
tipliconexe cu contururi formate din drepte paralele cu axele  
de coordonate. Se consideră spre exemplu domeniul dublu conex  
din figura 29b. În lungul marginilor golului nu se cunosc va-  
loarea funcției de tensiuni  $\bar{F}$ . Se știe doar că, datorită sime-

triei,  $F$  trebuie să varieze liniar în raport cu  $y$ ,  $a$  fiind valori constante în lungul marginilor paralele cu  $Ox$ . Elementul trebuie studiat deci sub acțiunea a trei tipuri de condiții marginale și anume cele corespunzătoare încălzirii exterioare și cele două acțiuni unitare în sensul metodei eforturilor.

În vederea determinării funcțiilor de tensiuni și a derivatelor lor, elementul din figura 29b se împarte în subdomeniile  $a, b$  și  $c$ . Pentru fiecare subdomeniu se construiesc matricile  $[A]$  și  $[B]$ , soluția (36) devenind:

$$[Z_a(y)] = [G_a(y)][Z_a(0)] + [\tilde{Z}_a(y)] \text{ pentru } y \in [0, y_1] \quad (43a)$$

$$[Z_b(y)] = [G_b(y)][Z_b(y_1)] + [\tilde{Z}_b(y)] \quad y \in [y_1, y_2] \quad (43b)$$

$$[Z_c(y)] = [G_c(y)][Z_c(y_2)] + [\tilde{Z}_c(y)] \quad y \in [y_2, h] \quad (43c)$$

Pentru domeniile  $b$  și  $c$ , în (37)  $y$  se înlocuiește cu  $y-y_1$  respectiv cu  $y-y_2$ . Matricile  $[A_a]$  și  $[A_c]$  sînt identice cu matricea  $[A]$  din problema precedentă, iar matricile  $[B_a]$ ,  $[B_b]$  și  $[B_c]$  vor avea câte trei coloane. Matricile  $[A_b]$  și  $[B_b]$  sînt de ordinul  $[4(n-1), 4(n-1)]$  respectiv  $[4(n-1), 3]$ .

Matricile necunoscute  $[Z_a(0)]$ ,  $[Z_b(y_1)]$  și  $[Z_c(y_2)]$  din soluțiile (43) rezultă din condițiile de margine. Pentru marginea  $y=0$  se scrie din nou:

$$[Z_a(0)] = [K_1][\bar{Z}_a(0)], \quad (39')$$

iar pentru marginea  $y=y_1$ :

$$[Z_a(y_1)] = [G_a(y_1)][K_1][\bar{Z}_a(0)] + [\tilde{Z}_a(y_1)]. \quad (40')$$

În dreptul aceleiași margini:

$$[Z_b(y_1)] = [G_b(y_1)][Z_b(y_1)] + [\tilde{Z}_b(y_1)]. \quad (44)$$

Iar egalitatea valorilor  $Z$  în dreptul acestei margini comune subdomeniilor  $a$  și  $b$  permite scrierea relației de trecere:

$$[Z_b(y_1)] = [T_{ab}][Z_a(y_1)]. \quad (45)$$

Cu (40°), relația (45) devine:

$$[Z_b(y_1)] = [T_{ab}][G_a(y_1)][K_1][\bar{Z}_a(0)] + [T_{ab}][\tilde{Z}_a(y_1)]. \quad (45^\circ)$$

În dreptul marginii  $y = y_2$  se scrie:

$$\begin{aligned} [Z_b(y_2)] &= [G_b(y_2)][Z_b(y_1)] + [\tilde{Z}_b(y_2)] = \\ &= [G_b(y_2)][T_{ab}][G_a(y_1)][K_1][\bar{Z}_a(0)] + \\ &+ [G_b(y_2)][T_{ab}][\tilde{Z}_a(y_1)] + [\tilde{Z}_b(y_2)]. \end{aligned} \quad (46)$$

respectiv:

$$[Z_c(y_2)] = [G_c(y_2)][Z_c(y_2)] + [\tilde{Z}_c(y_2)]. \quad (47)$$

Legătura între  $[Z_c(y_2)]$  și  $[Z_b(y_2)]$  poate fi exprimată prin relația:

$$[Z_c(y_2)] = [T_{bc}][Z_b(y_2)] + [Z_c(y_2)_{\text{compl}}]. \quad (48)$$

Matricea:

$$[Z_c(y_2)_{\text{compl}}] = [K_3][\bar{Z}_c(y_2)_{\text{compl}}] + [L_c(y_2)] \quad (49)$$

conține elementele ce nu au un corespondent în domeniul b.

Elementele matricei  $[\bar{Z}_c(y_2)_{\text{compl}}]$  sînt necunoscute. Matricea de incidență  $[K_3]$  este de ordinal  $[4n, 2(n-n+1)]$ . Cu (46) și (49) relația (48) devine:

$$\begin{aligned} [Z_c(y_2)] &= [T_{bc}][G_b(y_2)][T_{ab}][G_a(y_1)][K_1][\bar{Z}_a(0)] + \\ &+ [T_{bc}][G_b(y_2)][T_{ab}][\tilde{Z}_a(y_1)] + [T_{bc}][\tilde{Z}_b(y_2)] + \\ &+ [K_3][\bar{Z}_c(y_2)_{\text{compl}}] + [L_c(y_2)]. \end{aligned} \quad (48^\circ)$$

$[T_{ab}]$  și  $[T_{bc}]$  sînt matrice de ordinal  $[4(n-1), 4n]$  respectiv  $[4n, 4(n-1)]$ , între ele existînd relația  $[T_{bc}]^T = [T_{ab}]$ . Prima este de forma:

$$[T_{ab}] = [I \ ; \ 0].$$

Prin scrierea relațiilor (39°), (45°) și (48°) numărul matricelor necunoscute s-a redus la doi și anume  $[\bar{Z}_a(0)]$ , de

ordinul  $(2n, 3)$  și  $[\bar{Z}_c(y_2)_{\text{comp1}}]$ , de ordinul  $[2(n-m+1), 3]$ . Ele se determină folosind condițiile de margine pentru  $y = h$  și  $y = y_1$ . La marginea  $y = h$  relația (43c) devine:

$$[Z_c(h)] = [G_c(h)][Z_c(y_2)] + [\tilde{Z}_c(h)], \quad (50)$$

din care, prin înmulțire cu matricea  $[K_2]$ , se izolează cele  $3 \times 2n$  ecuații ce conțin elementele  $Z(h)$  cunoscute. Ele pot fi scrise sub forma:

$$[C][\bar{Z}_a(0)] + [D][\bar{Z}_c(y_2)_{\text{comp1}}] + [E] = 0, \quad (51)$$

unde, ținându-se seama de (43')

$$[C] = [K_2][G_c(h)][T_{bc}][G_b(y_2)][T_{ab}][G_a(y_1)][K_1], \quad (52)$$

$$[D] = [K_2][G_c(h)][K_3], \quad (53)$$

$$[E] = [K_2]([G_c(h)]([T_{bc}][G_c(y_2)][T_{ab}][\tilde{Z}_a(y_1) + [\tilde{Z}_b(y_2)]] + [L_c(y_2)] + [\tilde{Z}_c(h)] - [Z_c(h)]). \quad (54)$$

Pentru marginea  $y = y_1$  relația (43a) dă:

$$[Z_a(y_1)] = [G_a(y_1)][Z_a(0)] + [\tilde{Z}_a(y_1)], \quad (55)$$

din care, cu ajutorul unei matrice  $[K_4]$  se izolează cele  $3 \times 2(n-m+1)$  ecuații:

$$[H][\bar{Z}_a(0)] + [J] = 0, \quad (56)$$

în care ținând seama de (39'),  $[H]$  și  $[J]$  au expresiile:

$$[H] = [K_4][G_a(y_1)][K_1], \quad (57)$$

$$[J] = [K_4](\tilde{Z}_a(y_1) - [Z_a(y_1)]). \quad (58)$$

Relațiile (51) și (56) formează un sistem de  $3 \times 2(2n-m+1)$  ecuații liniare pentru determinarea elementelor matricelor necunoscute  $[\bar{Z}_a(0)]$  și  $[\bar{Z}_c(y_2)_{\text{comp1}}]$ . Din relațiile (39'), (45') și (48') rezultă matricele necunoscute din expresiile soluțiilor (43).

După găsirea celor trei mulțimi de funcții  $F$ , expresiile finale ale funcțiilor de tensiuni rezultă dintr-o combinație liniară în sensul metodei eforturilor.

În figura 30 se dă schema logică a unui program de calcul a funcțiilor de tensiuni în care s-a pus în evidență unul din avantajele metodei. Acesta constă în faptul că la calculul unui număr de  $N$  grinzi având aceeași deschidere însă diferite înălțimi sau diferite goluri dreptunghiulare, operația cea mai voluminoasă și anume calculul coeficienților matriceali ai seriei (38) pentru subdomeniile  $a$  și  $c$  trebuie făcut numai o singură dată. Dacă lățimea golurilor este aceeași, atunci și pentru subdomeniul  $b$  seria (38) trebuie calculată numai o singură dată, programul putând fi modificat în mod corespunzător.

Dacă se studiază simultan mai multe cazuri de încărcare se mărește în mod corespunzător numărul coloanelor matricelor  $[B]$ ,  $[L]$  și  $[Z]$ . Procedul poate fi aplicat și în cazul domeniilor nesimetrice și multipla conexe.

## 2.2. Discretizarea fizică

Dintre cele două posibilități de discretizare în elemente respectiv fișii finite, se prezintă în continuare numai prima. Pentru calculul structurii se folosește metoda deplasărilor.

### 2.2.1. Elementul finit.

Pentru deducerea matricelor rigidităților elementelor finite se pornește de la principiul energetic fundamental (principiul deplasărilor virtuale) respectiv de la cele derivate din acesta. Sînt de menționat cele două principii clasice de minim (principiul minimului energiei potențiale și principiul minimului energiei complementare) cît și extinderile acestora formulate de Reissner și de Tong și Pian.



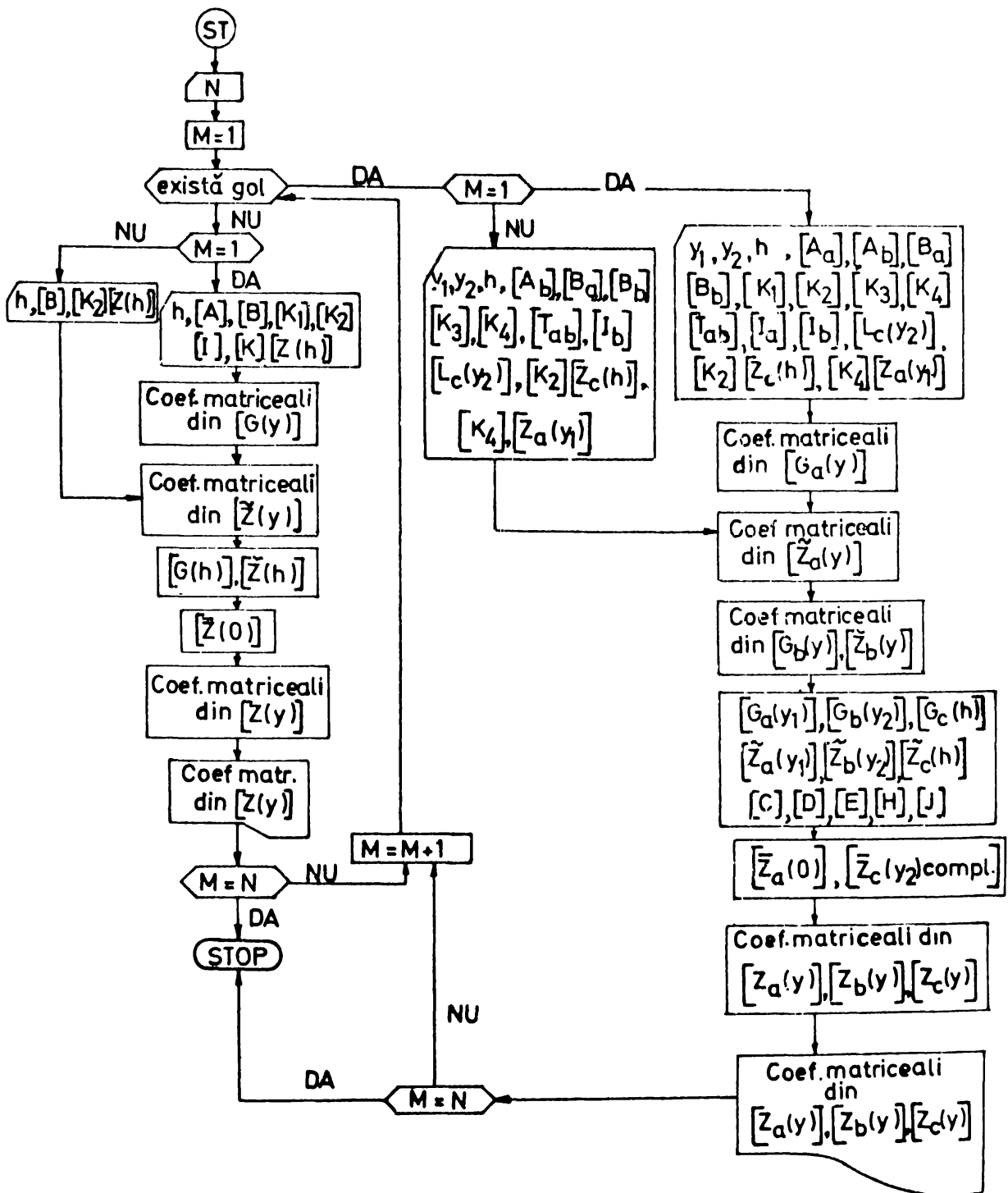


FIG.30

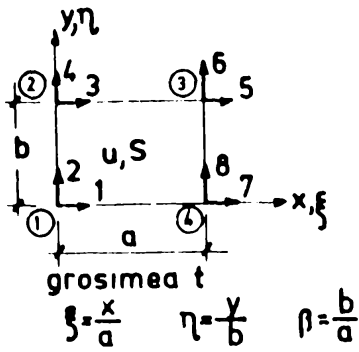


FIG. 31

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}$$

$$[D_{\xi\eta}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

FIG. 32

$$\bar{\Omega} = \left[ \begin{array}{c|c} \Omega_{nn}^{-1} & -\Omega_{nn}^{-1} \Omega_{nl} \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \left[ \begin{array}{c|c} K_{nn} & K_{nl} \\ \hline K_{ln} & K_{ll} \end{array} \right]$$

FIG. 33

FIG. 34

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -y & -x \end{bmatrix}$$

FIG. 36

$$[k_2] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} k & & & & & & & \\ 0 & k' & & & & & & \\ -k & 0 & k & & & & & \\ 0 & -k' & 0 & k' & & & & \\ k & 0 & -k & 0 & k & & & \\ 0 & k' & 0 & -k' & 0 & k' & & \\ -k & 0 & k & 0 & -k & 0 & k & \\ 0 & -k' & 0 & k' & 0 & -k' & 0 & k' \end{bmatrix} \text{ sim.}$$

$$k = \frac{(1-\nu)(\beta^{-1} - \nu\beta)^2}{(1-\nu)\beta + 2\beta^{-1}}$$

$$k' = \frac{(1-\nu)(\beta - \nu\beta^{-1})^2}{(1-\nu)\beta^{-1} + 2\beta}$$

FIG. 37

Folosirea principiilor energetice de minim permite formularea deducerii matricelor rigidităților ca și o problemă de calcul variațional. După cum se pornește de la câmpuri de deplasări sau câmpuri de tensiuni se definesc modele de deplasări respectiv de tensiuni. Principiul lui Reissner permite considerarea simultană a unor câmpuri de deplasări și tensiuni ducând la modele mixte. Modelele hibride se bazează pe admiterea unor câmpuri de deplasări sau tensiuni și independent de acestea a unor variații a tensiunilor sau deplasărilor pe contur.

În continuare se prezintă elemente finite dreptunghiulare elastice cu două legături în fiecare nod.

#### 2.2.1.1. Modelul de deplasări

Pentru elementul finit din figura 31 se alege câmpul de deplasări compatibile:

$$\{u\} = [\omega]\{c\}, \quad (59)$$

numărul parametrilor  $\{c\}$  fiind egal cu numărul deplasărilor nodale  $\{u_n\}$ . Punându-se condițiile:

$$\{u\}_{\xi_n, \eta_n} = \{u_n\}, \quad (60)$$

rezultă sistemul de ecuații:

$$[\Omega]\{c\} = \{u_n\}, \quad (61)$$

pentru determinarea parametrilor câmpului. Revenind la (59) se găsește

$$\{u\} = [\omega][\Omega]^{-1}\{u_n\} = [t]\{u_n\}. \quad (59')$$

Prin derivare se obține:

$$\{\varepsilon\} = [D_{\xi\eta}]\{u\} = [D_{\xi\eta}][t]\{u_n\} = [b]\{u_n\} \quad (62)$$

și aplicînd principiul deplasărilor virtuale rezultă matricea rigidității elementului finit:

$$[k] = \int_V [b]^T [\sigma] [b] dv. \quad (63)$$

Matricile  $[\omega]$  și  $[D_{\xi\eta}]$  sînt date în figura 32.

Dacă se folosește principiul minimului energiei potențiale

$$\Pi = W_d - E = \min, \quad (64)$$

numărul parametrilor  $\{c\}$  poate fi ales mai mare decît numărul deplasărilor nodale  $\{u_n\}$ . Atunci (59) devine:

$$\{u\} = [\omega^*] \{c^*\}. \quad (65)$$

Dintr-o relație asemănătoare cu (61) și anume

$$[\Omega_n : \Omega_1] \{c_n : c_1\} = \{u_n\}, \quad (66)$$

rezultă

$$\{c_n\} = [\Omega_n^{-1} : -\Omega_n^{-1}\Omega_1] \{u_n : c_1\} \quad (67)$$

și

$$\{c^*\} = \{c_n : c_1\} = [\bar{\Omega}] \{u_n : c_1\}. \quad (68)$$

În expresia energiei de deformație:

$$W_d = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV \quad (69)$$

se introduce

$$\{\epsilon\} = [D] \{u\} = [L][\omega^*] \{c^*\} = [\xi] \{c^*\} \quad (70)$$

$$\text{și } \{\sigma\} = [\kappa] \{\epsilon\} = [\kappa][\xi] \{c^*\}, \quad (71)$$

obținându-se

$$W_d = \frac{1}{2} \{c^*\}^T [z] \{c^*\} = \frac{1}{2} \{u_n : c_1\}^T [K] \{u_n : c_1\} \quad (69')$$

$$\text{cu } [z] = \int_V [\xi]^T [\kappa] [\xi] dV \quad \text{și } [K] = [\bar{\Omega}]^T [z] [\bar{\Omega}]. \quad (72a,b)$$

Potențialul poate fi deci scris sub forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{u_n : c_1\}^T [K] \{u_n : c_1\} - \{u_n\}^T \{S\} = \min \quad (64')$$

și condițiile de minim  $\frac{\partial \Pi}{\partial u_n} = 0$ ,  $\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0$  duc la sistemul:

$$[K] \{u_n : c_1\} = \{S : 0\}. \quad (73)$$

După eliminarea lui  $\{c_1\}$  se obține

$$[k] \{u_n\} = \{S\} \quad (74)$$

și matricea rigidităților:

$$[k] = [K_{nn}] - [K_{n1}][K_{11}]^{-1}[K_{1n}], \quad (75)$$

mai exactă decât (65).

Forma matricelor  $[\bar{\Omega}]$  și  $[k]$  este prezentată în figura 33.

Dacă se pornește de la câmpul (59) procedeul descris duce la matricea de rigiditate (63). Astfel (63) devine:

$$\{c^*\} = \{c_n\} = [\bar{\Omega}]\{u_n\}, \quad (68')$$

cu  $[\bar{\Omega}] = [\Omega_n]^{-1}$ ,

mai departe

$$\{\varepsilon\} = [\xi][\Omega_n]^{-1}\{u_n\} = [b]\{u_n\}, \quad (70')$$

$$[K] = \int_V [\bar{\Omega}]^T [\xi]^T [\alpha] [\xi] [\bar{\Omega}] dV = \int_V [b]^T [a] [b] dV = [k] \quad (63')$$

#### 2.2.1.2. Modelul de tensiuni

Se pornește de la un câmp de tensiuni în echilibru

$$\{\sigma\} = [\alpha]\{a\}, \quad (76)$$

numărul parametrilor  $\{a\}$  fiind egal cu numărul deplasărilor nodale minus numărul gradelor de libertate de corp rigid. Aplicând legea lui Hooke se determină

$$\{\varepsilon\} = [\varphi]\{\sigma\} \quad (77)$$

și prin integrare

$$\{u\} = [\omega]\{c\}. \quad (78)$$

Noii parametri  $\{c\}$  depind de parametrii câmpului admis  $\{a\}$  și de constantele elastice  $E$  și  $\nu$ . Mai departe se procedează ca în cazul modelului de deplasări pînă la obținerea matricei rigidităților din relația (63). În figura 34 s-a reprezentat matricea  $[\alpha]$  și în figura 35 matricea rigidităților  $[k]$ .

#### 2.2.1.3. Modelul hibrid

În lucrarea [100], I.H.H. Pian deduce matricea rigidităților

unui element finit pătrat dintr-un material cu coeficientul Poisson egal cu  $\nu = 0,33$ . Se pornește de la un câmp de tensiuni în echilibru și de la o distribuție compatibilă a deplasărilor în lungul marginilor elementului finit. Folosind același procedeu, în cele ce urmează, se deduce în primul rând expresia generală a matricii rigidităților unui element finit dreptunghiular având 4 noduri. Parametrii câmpului de tensiuni de tipul (76) se determină din condiția de minim

$$\pi_c = U_c - \int_A \{p\}^T \{u_m\} dA = \min, \quad (79)$$

unde

$$U_c = \frac{1}{2} \{a\}^T [\phi] \{a\}, \quad (80)$$

cu

$$[\phi] = \int_V [\alpha]^T [\varphi] [\alpha] dV. \quad (81)$$

Cu deplasările alese ale marginilor

$$\{u_m\} = [\beta] \{u_n\} \quad (82)$$

și tensiunile marginale

$$\{p\} = [\tau] \{a\}, \quad (83)$$

condiția (79) dă vectorul parametrilor câmpului de tensiuni,

$$\{a\} = [\phi]^{-1} [\tau] \{u_n\}, \quad (84)$$

cu 
$$[\tau] = \int_A [\tau]^T [\beta] dA, \quad (85)$$

și matricea rigidităților

$$[k] = [\tau]^T [\phi]^{-1} [\tau]. \quad (86)$$

Deci pentru  $[\alpha]$  se alege matricea din figura 34 și deplasările marginale sînt liniare, se obține tot matricea de rigiditate din figura 35. Mărind numărul parametrilor  $a$  de la cinci la șapte, matricea  $[\alpha]$  ia forma din figura 36, iar matricea rigidităților poate fi scrisă sub forma:

$$[k] = [k_1] + [k_2], \quad (87)$$



$$[\phi]^{-1}[\Gamma] = \frac{E}{ab}$$

1	$b(C+vA)$	$a(B-D)$	$-vb(A+D)$	$-a(B-D)$	$vb(A+D)$	$a(B+D)$	$-b(C+vA)$	$-a(B+D)$
2	$1-2vA$	0	$-(1-2vA)$	0	$1-2vA$	0	$-(1-2vA)$	0
3	$b(A-D)$	$a(C+vB)$	$-b(A+D)$	$-a(C+vB)$	$b(A+D)$	$va(B+D)$	$-b(A-D)$	$-va(B+D)$
4	0	$1-2vB$	0	$-(1-2vB)$	0	$1-2vB$	0	$-(1-2vB)$
5	$-a(A+F)$	$-b(B+F)$	$a(A+F)$	$b(B-F)$	$-a(A-F)$	$-b(B-F)$	$a(A-F)$	$b(B+F)$
6	0	$-2B$	0	$2B$	0	$-2B$	0	$2B$
7	$-2A$	0	$2A$	0	$-2A$	0	$2A$	0

$$A = \frac{a^2 - vb^2}{2N}$$

$$B = \frac{b^2 - va^2}{2M}$$

$$C = \frac{-2 + v^2}{2(1-v^2)}$$

$$D = \frac{v}{2(1-v^2)}$$

$$F = \frac{1}{4(1+v)}$$

$$M = a^2(1-v^2) + 2b^2(1+v)$$

$$N = b^2(1-v^2) + 2a^2(1+v)$$

FIG. 38



$$\{u_m\} = [P]\{u_n\}; \begin{bmatrix} u_x^{12} \\ u_y^{12} \\ u_x^{23} \\ u_y^{23} \\ u_x^{34} \\ u_y^{34} \\ u_x^{14} \\ u_y^{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{y}{b} & 0 & \frac{y}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{y}{b} & 0 & \frac{y}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{x}{a} & 0 & \frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{x}{a} & 0 & \frac{x}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{b} & 0 & 1-\frac{y}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{b} & 0 & 1-\frac{y}{b} \\ 1-\frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{a} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}$$

$$\{p\} = [P]\{a\} \begin{bmatrix} p_x^{12} \\ p_y^{12} \\ p_x^{23} \\ p_y^{23} \\ p_x^{34} \\ p_y^{34} \\ p_x^{14} \\ p_y^{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6_{xx}^{12} \\ -6_{xy}^{12} \\ 6_{xy}^{23} \\ 6_{yy}^{23} \\ 6_{xx}^{34} \\ 6_{xy}^{34} \\ -6_{xy}^{14} \\ -6_{yy}^{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & b & 0 \\ 1 & y & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -y & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix}$$

$$[\Gamma] = \frac{t}{6} \begin{bmatrix} -3b & 0 & -3b & 0 & 3b & 0 & 3b & 0 \\ -b^2 & 0 & -2b^2 & 0 & 2b^2 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & -3a & 0 & 3a & 0 & 3a & 0 & -3a \\ 0 & -a^2 & 0 & a^2 & 0 & 2a^2 & 0 & -2a^2 \\ -3a & -3b & 3a & -3b & 3a & 3b & -3a & 3b \\ 0 & b^2 & -3ab & 2b^2 & 0 & -2b^2 & 3ab & -b^2 \\ a^2 & 0 & -a^2 & 3ab & -2a^2 & 0 & 2a^2 & -3ab \end{bmatrix}$$

FIG. 9a



$[k_1]$  fiind identic cu  $[k]$  din figura 35, iar  $[k_2]$  fiind dat în figura 37. Tensiunile  $\{\sigma\}$  rezultă din relația (76) în funcție de deplasările nodale  $\{u_n\}$ :

$$\{\sigma\} = [\alpha][\phi]^{-1}[\Gamma]\{u_n\}. \quad (38)$$

Elementele produsului  $[\phi]^{-1}[\Gamma]$  sînt prezentate în figura 38. Celelalte relații matriceale ce intervin în calcul sînt date în figura 39.

Pentru cazul particular al elementului finit pătrat ( $\beta = 1$ ) cu  $\nu = 0,17$  matricele  $[k]$  și  $[\phi]^{-1}[\Gamma]$  sînt date în figura 40. Pornind de la un câmp de tensiuni depinzînd de nouă parametri, cu  $[\alpha]$  ca în figura 41, s-a obținut o matrice a rigidităților foarte apropiată de cea din figura 40.

În scopul obținerii unei soluții optime, mărimea elementelor finite trebuie aleasă în funcție de gradientul tensiunilor din structura studiată. Astfel apare problema realizării legăturii între elemente finite dreptunghiulare de diferite dimensiuni. Pentru aceasta se pot folosi elemente finite triunghiulare sau elemente finite dreptunghiulare cu cinci noduri, ca în figura 42.

Pentru elementul finit cu cinci noduri matricea rigidităților se poate determina tot cu procedul de mai sus. Câmpul de tensiuni poate rămîne același, iar în lungul marginii 1-5-4 (fig.43) se poate admite o variație parabolică a deplasărilor:

$$u_x^{14} = (2x^2/a^2 - 3x/a + 1)u_1 + (2x^2/a^2 - x/a)u_7 + (-4x^2/a^2 + 4x/a)u_9, \quad (39a,b)$$

$$u_y^{14} = (2x^2/a^2 - 3x/a + 1)u_2 + (2x^2/a^2 - x/a)u_3 + (-4x^2/a^2 + 4x/a)u_{10},$$

astfel că matricea  $[\beta]$  se modifică.

In figura 44 se dă matricea rigidităților  $[k]$  cit și produsul matriceal  $[\Phi]^{-1}[\Gamma]$  pentru cazul elementului finit pătrat cu  $\nu = 0,17$ .

In comparație cu structura reală, modelele de deplasări duc la structuri înlocuitoare prea rigide, iar cu modelele de tensiuni se construiesc structuri înlocuitoare prea elastice. Modelele hibride prezentate aici dau structuri mai rigide decât modelele de tensiuni cu același câmp de tensiuni respectiv structuri mai elastice decât modelele de deplasări cu aceeași variație a deplasărilor marginale [136].

### 2.2.2. Structura

Matricea rigidităților structurii se construiește cu ajutorul matricelor rigidităților elementelor finite. Acestea au fost raportate la sisteme de axe proprii, astfel încât în primul rând este necesară trecerea la un sistem de axe central, definit pentru structura în ansamblu. Urmează asamblarea matricii rigidităților structurii întregi operând cu matrice de incidență sau amplasând direct rigiditățile elementelor în poziția corespunzătoare sensului lor mecanic. Matricea rigidităților este o matrice bandă. Lățimea benzii depinde ca și în cazul diferențelor finite de modul de numerotare a nodurilor.

După eliminarea gradelor de libertate de corp rigid se calculează deplasările nodurilor și tensiunile din structură. Operațiile descrise sînt reprezentate schematic în figura 45.

### 2.2.3. Substructuri

Operarea cu substructuri permite reducerea numărului necunoscutelor ecuațiilor de condiții. Substructurile se pot studia cu metoda elementelor finite sau cu metoda diferențelor fi-



3361										
357	2409									
861	-963	3321								
249	-567	-1071	3321							
-1371	-567	-1791	-459	3321						
-861	-657	459	351	1071	3321					
-1751	-447	-1371	861	861	-249	3361				
447	-561	567	-657	963	-567	-357	2409			
-1100	1620	-1020	420	-1020	-420	-1100	-1620	4240		
-192	-624	1008	-2448	-1008	-2448	192	-624	0	6144	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

sim.

$$[k] = \frac{Et}{7160}$$

-5397a	616a	-147a	-168a	147a	882a	2877a	-434a	2520a	-896a	
3990	-420	-3990	0	3990	0	-3990	-420	0	840	
-42a	-1449a	-882a	4137a	882a	147a	-378a	2541a	420a	-5376a	
420	3990	0	-3990	0	3990	420	-3990	-840	0	
437a	-2677a	147a	-367a	367a	367a	1487a	157a	-3710a	2520a	
2520	-1050	0	1050	0	-1050	2520	1050	-5040	0	
-1050	-2520	1050	0	-1050	0	1050	-2520	0	5040	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

$$[\phi]^{-1} [\tau] = \frac{E}{4165a^2}$$

FIG. 46

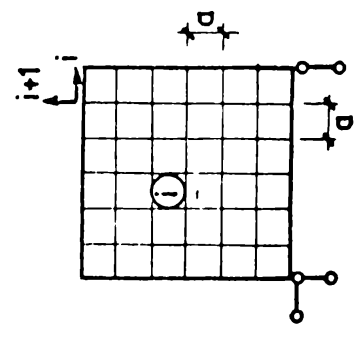


FIG. 47

$$[K^{(i)}] = \begin{bmatrix} k_{mm}^{(i)} & k_{mi}^{(i)} \\ -k_{im}^{(i)} & -k_{ii}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$[U^{(i)}] = \begin{bmatrix} U_m^{(i)} \\ -U_i^{(i)} \end{bmatrix} \quad [P^{(i)}] = \begin{bmatrix} P_m^{(i)} \\ P_i^{(i)} \end{bmatrix}$$

FIG. 48

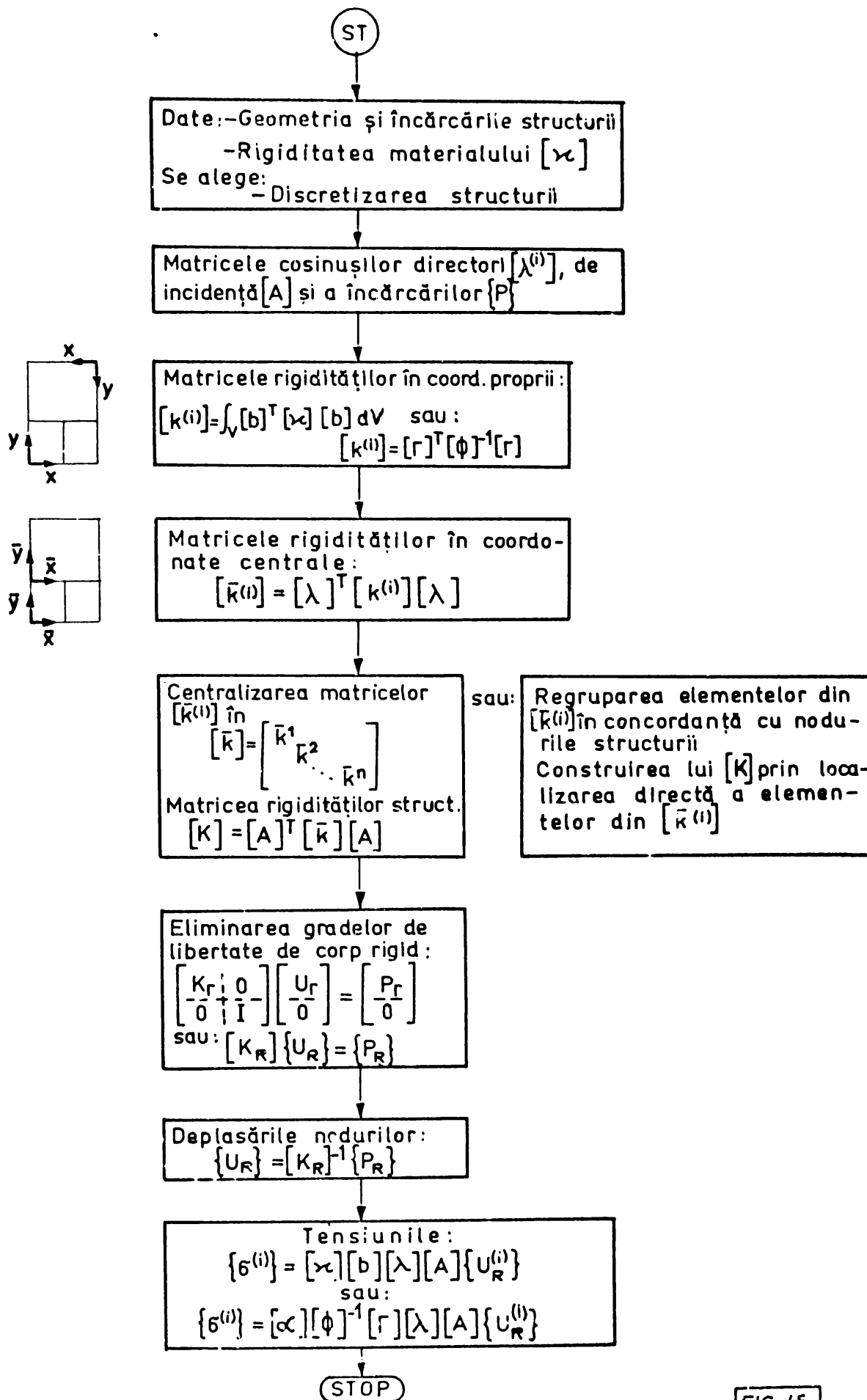


FIG. 45

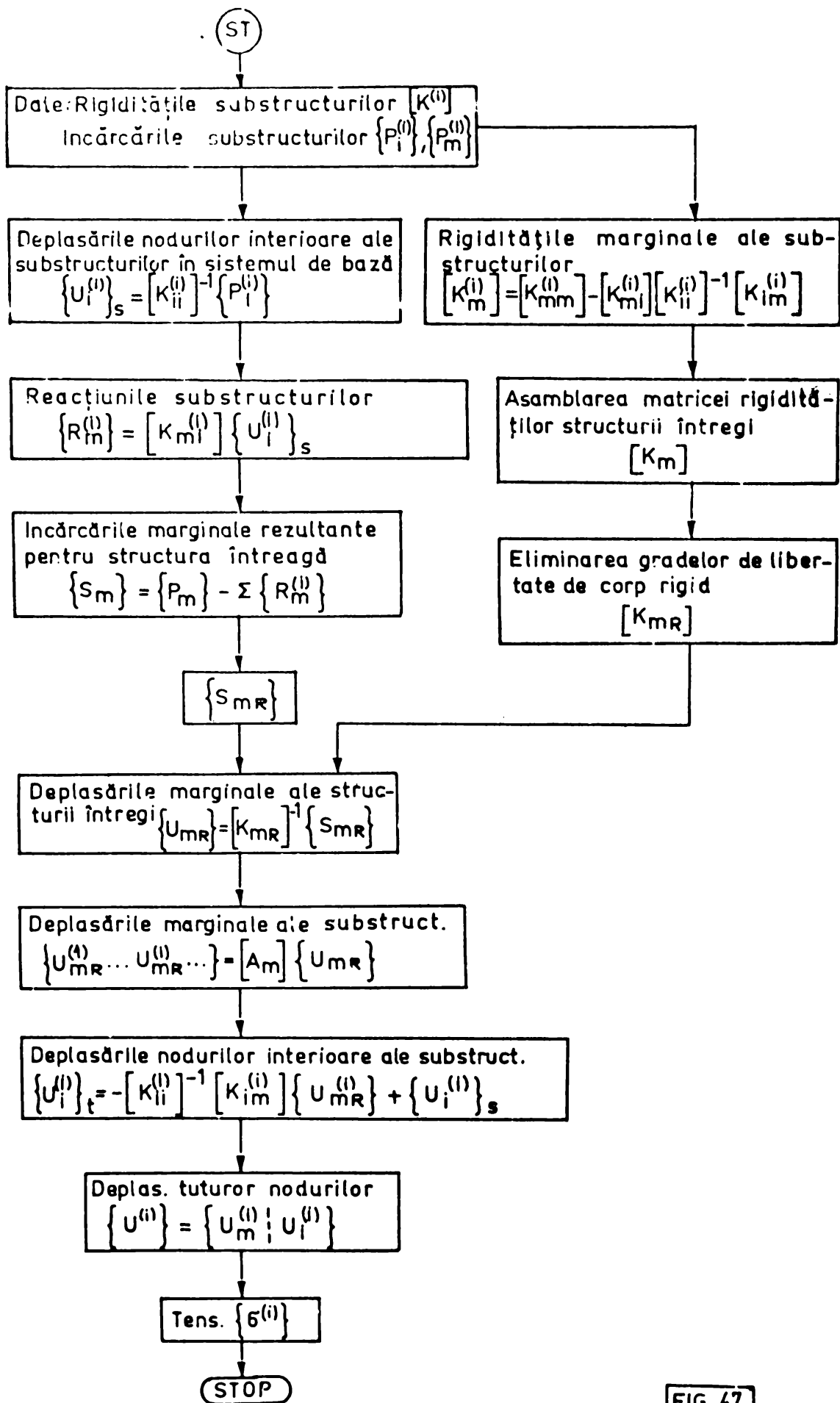


FIG. 47



nite. In ultimul caz substructurile se numesc și elementele finite mari [52]. Asamblarea substructurilor se face la fel cu asamblarea elementelor finite.

### 2.2.3.1. Substructuri din elemente finite

Din matricile rigidităților substructurilor  $[K^{(i)}]$ , determinate ca mai sus, se deduc matricile rigidităților marginale  $[K_m^{(i)}]$ . Acestea leagă deplasările marginale  $\{U_m^{(i)}\}$  de încărcările marginale  $\{P_m^{(i)}\}$ .

Pentru găsierea matricii  $[K_m^{(i)}]$  a elementului  $i$ , în matricea  $[K^{(i)}]$  termenii corespunzători nodurilor marginale  $m$  se separă de cei corespunzători nodurilor interioare  $i$ , obținându-se submatricile din figura 46. Rigiditățile marginale sînt forțele marginale  $\{P_m^{(i)}\}$  ce trebuie aplicate asupra substructurii pentru a obține deplasări unitare  $\{U_m^{(i)}\}$ . Scriind deci relația:

$$[K^{(i)}] \{U_m^{(i)} : U_i^{(i)}\} = \{P_m^{(i)} : 0\} \quad (90)$$

se obțin ecuațiile

$$[K_{mm}^{(i)}] \{U_m^{(i)}\} + [K_{mi}^{(i)}] \{U_i^{(i)}\} = \{P_m^{(i)}\},$$

$$[K_{im}^{(i)}] \{U_m^{(i)}\} + [K_{ii}^{(i)}] \{U_i^{(i)}\} = \{0\}, \quad (91a,b)$$

din care rezultă

$$\{U_i^{(i)}\} = - [K_{ii}^{(i)}]^{-1} [K_{im}^{(i)}] \{U_m^{(i)}\} \quad (92)$$

$$\text{și } \{P_m^{(i)}\} = ([K_{mm}^{(i)}] - [K_{mi}^{(i)}] [K_{ii}^{(i)}]^{-1} [K_{im}^{(i)}]) \{U_m^{(i)}\}. \quad (93)$$

Matricea căutată este deci:

$$[K_m^{(i)}] = [K_{mm}^{(i)}] - [K_{mi}^{(i)}] [K_{ii}^{(i)}]^{-1} [K_{im}^{(i)}]. \quad (94)$$

Dacă nodurile interioare ale substructurii  $i$  sînt încărcate este necesar să se introducă forțe de blocare marginale  $\{R_m^{(i)}\}$ , pentru asigurarea sistemului de bază geometric determinat  $\{U_m^{(i)}\}_s = \{0\}$  față de marginile substructurii. Se scrie această

condiție:

$$[K^{(1)}] \{0 : U_{is}^{(1)}\} = \{R_m^{(1)} : P_i^{(1)}\} \quad (95)$$

sau, dezvoltat:

$$\begin{aligned} [K_{mi}^{(1)}] \{U_i^{(1)}\}_s &= \{R_m^{(1)}\}, \\ [K_{ii}^{(1)}] \{U_i^{(1)}\}_s &= \{P_i^{(1)}\}. \end{aligned} \quad (96a,b)$$

rezultând:

$$\{U_i^{(1)}\}_s = [K_{ii}^{(1)}]^{-1} \{P_i^{(1)}\} \quad (97)$$

$$\text{și } [K_{mi}^{(1)}] [K_{ii}^{(1)}]^{-1} \{P_i^{(1)}\} = \{R_m^{(1)}\}. \quad (98)$$

Din asamblarea matricelor substructurilor  $[K_m^{(1)}]$  rezultă matricea structurii  $[K_E]$ . Matricea încărcărilor marginale se determină cu relația

$$\{S_m\} = \{P_m\} - \sum \{R_m^{(1)}\}. \quad (99)$$

După eliminarea gradelor de libertate de corp rigid se poate scrie:

$$[K_{mR}] \{U_{mR}\} = \{S_{mR}\}, \quad (100)$$

din care rezultă deplasările marginale

$$\{U_{mR}\} = [K_{mR}]^{-1} \{S_{mR}\}. \quad (101)$$

Revenind la substructuri, se selectionează-cu ajutorul unor matrice de incidență - deplasările marginale ale acestora:

$$\{U_E^{(1)} : U_{mR}^{(2)} : \dots : U_{mR}^{(1)} \dots\} = [A_m] \{U_{mR}\}. \quad (102)$$

Urmează determinarea deplasărilor nodurilor interioare ale fiecărei substructuri  $i$  cu relația (92) la care se adaugă deplasările suplimentare (97) cauzate de încărcările nodurilor interioare  $\{P_i^{(1)}\}$ . Deplasările nodurilor interioare sînt deci egale cu

$$\{U_i^{(1)}\}_t = - [K_{ii}^{(1)}]^{-1} ([K_{im}^{(1)}] \{U_m^{(1)}\} - \{P_i^{(1)}\}). \quad (103)$$

Cunoscându-se deplasările tuturor nodurilor  $\{U^{(i)}\}$ , se determină tensiunile  $\{\sigma^{(i)}\}$ . Figura 47 prezintă schema generală de calcul.

### 2.2.3.2. Elemente finite mari

La discretizarea matematică, pornind de la condiția de continuitate, este mai convenabil să se determine în prealabil matricea flexibilităților substructurilor  $i$ . În acest scop se poate folosi relația (104), duală relației (63):

$$[f^{(i)}] = \int_V [a^{(i)}]^T [\varphi] [a^{(i)}] dV, \quad (104)$$

cu

$$\{\sigma\} = [a]\{s\}. \quad (105)$$

Aplicând succesiv încărcări unitare  $S_1=1$ , (fig.47'), se găsesc elementele lui  $[a]$  în nodurile rețelei. Elementele matricei  $[f]$  se obțin din (104) prin integrare numerică.

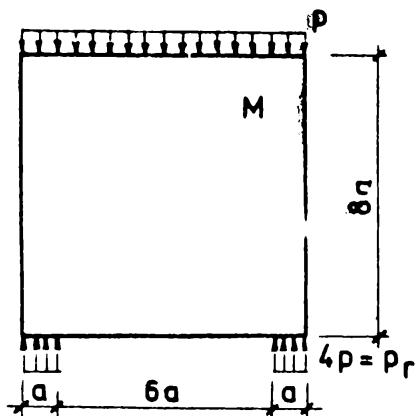
Din matricea flexibilităților găsită în acest mod se deduce matricea rigidităților elementului  $i$ . Mai departe se continuă ca în metoda elementelor finite.

### 3. GRINZI-PEREȚI PLINE ȘI CU GOLURI ÎN STADIUL ELASTIC

Sub acțiunea încărcărilor gravitaționale, în zona inferioară a diafragmelor rezemate discontinuu se dezvoltă eforturile caracteristice grinzilor-pereți. Această zonă, denumită activă, are o înălțime aproximativ egală cu distanța între reazeme [90]. În vederea studierii efectului de grindă-perete s-au ales elementele pătrate din figura 48, încărcate uniform distribuit la marginea superioară, având două reazeme la marginea inferioară. Golurile pot fi necesare pentru amplasarea ferestrelor și ușilor

Pentru calculul practic al grinzilor-pereți pline în stadiul elastic se pot folosi diagramele de eforturi din lucrările [59, 90, 99]. Prezența golurilor modifică însă distribuția eforturilor, ce poate fi determinată cu metodele prezentate la punctul 1.1. Dintre acestea, metodele aproximative dezvoltate în capitolul 2 sînt caracterizate prin generalitate și orientare spre calculul automat. Acesta este motivul pentru care unele din ele, ca metoda diferențelor finite obișnuite și metoda elementelor finite, au fost aplicate în vederea calculului eforturilor în stadiul elastic. S-a neglijat influența armăturilor asupra distribuției eforturilor.

Din motive economice doar rezolvarea sistemelor de ecuații s-a efectuat cu ajutorul unui calculator electronic de capacitate medie. Pentru celelalte operații s-au folosit mașini de calcul de birou.



Grinda-perete plină M  
Grinzile-pereteți cu un gol de  
tipul A,B,C în poziția 1,2,3.

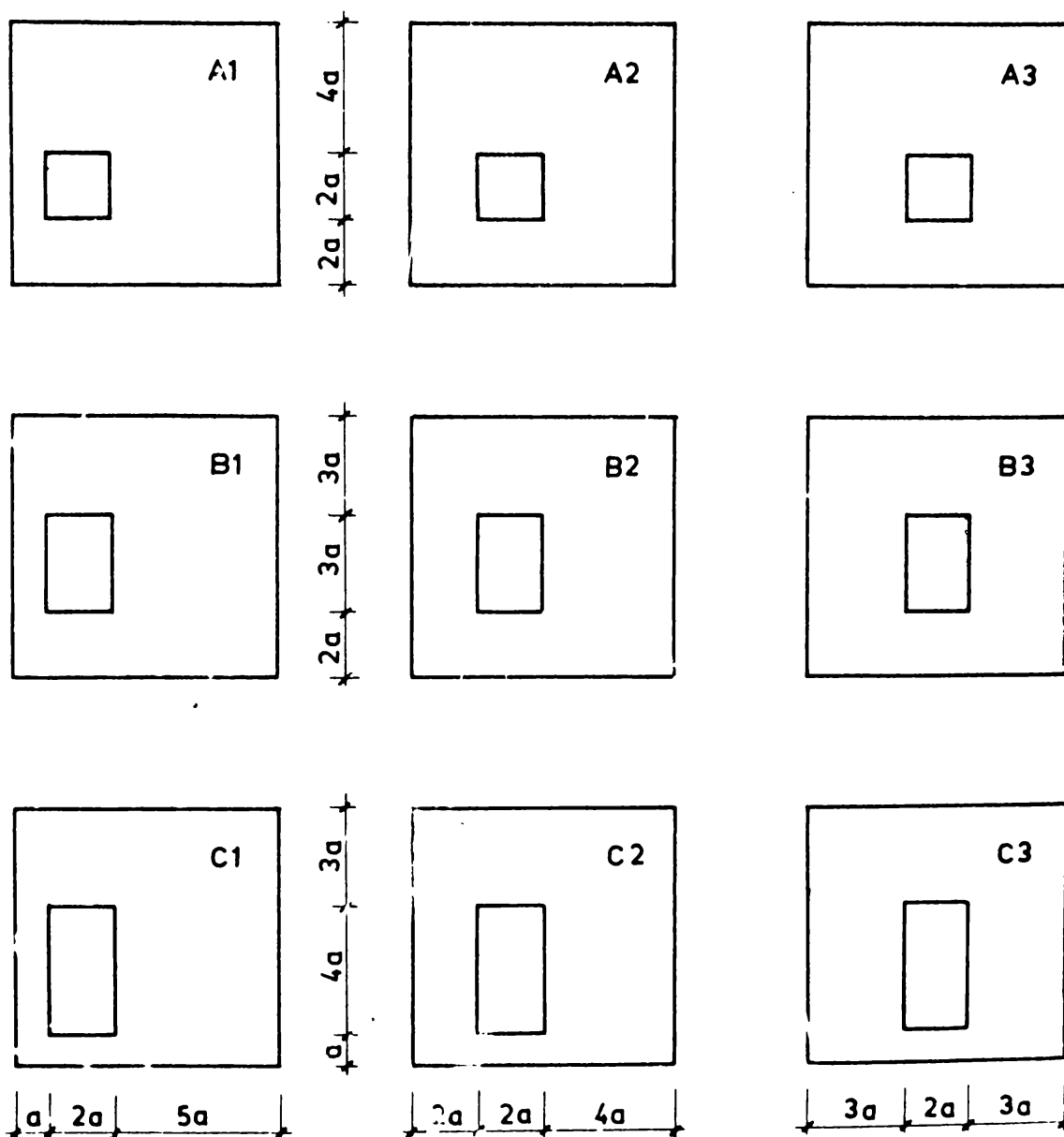
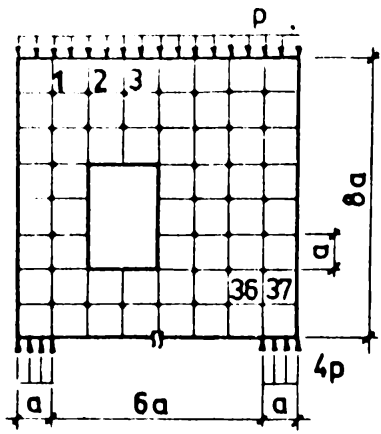


FIG 48



Elementul B2

Analogia de cadru:

$$F = M$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = N$$

$$P = \alpha^2 p$$

4\*37 necunoscute -  
funcții de tensiuni

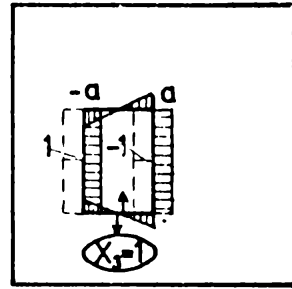
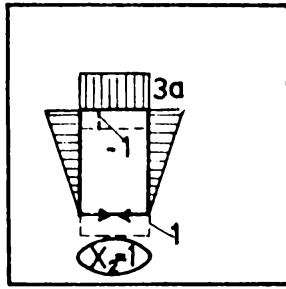
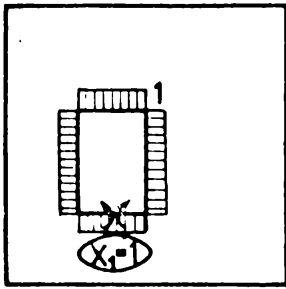
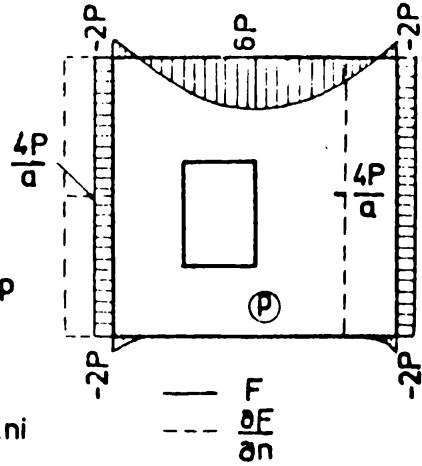
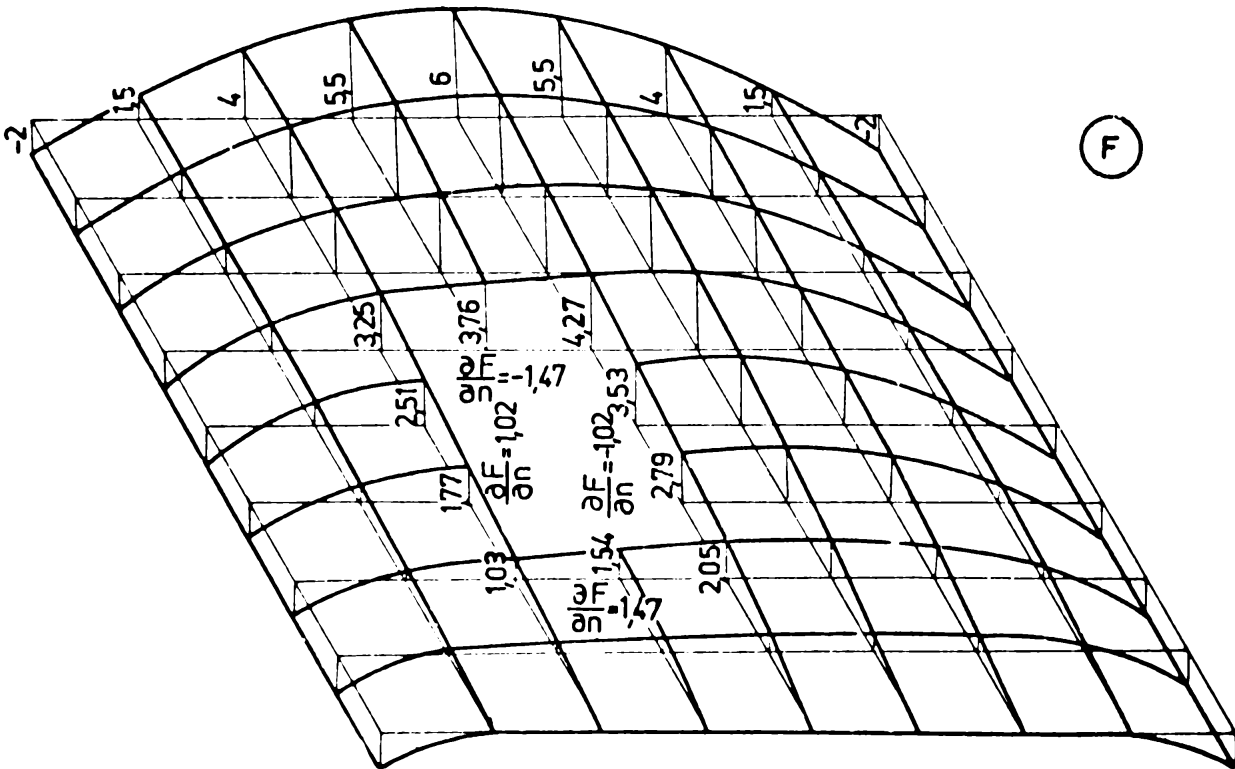
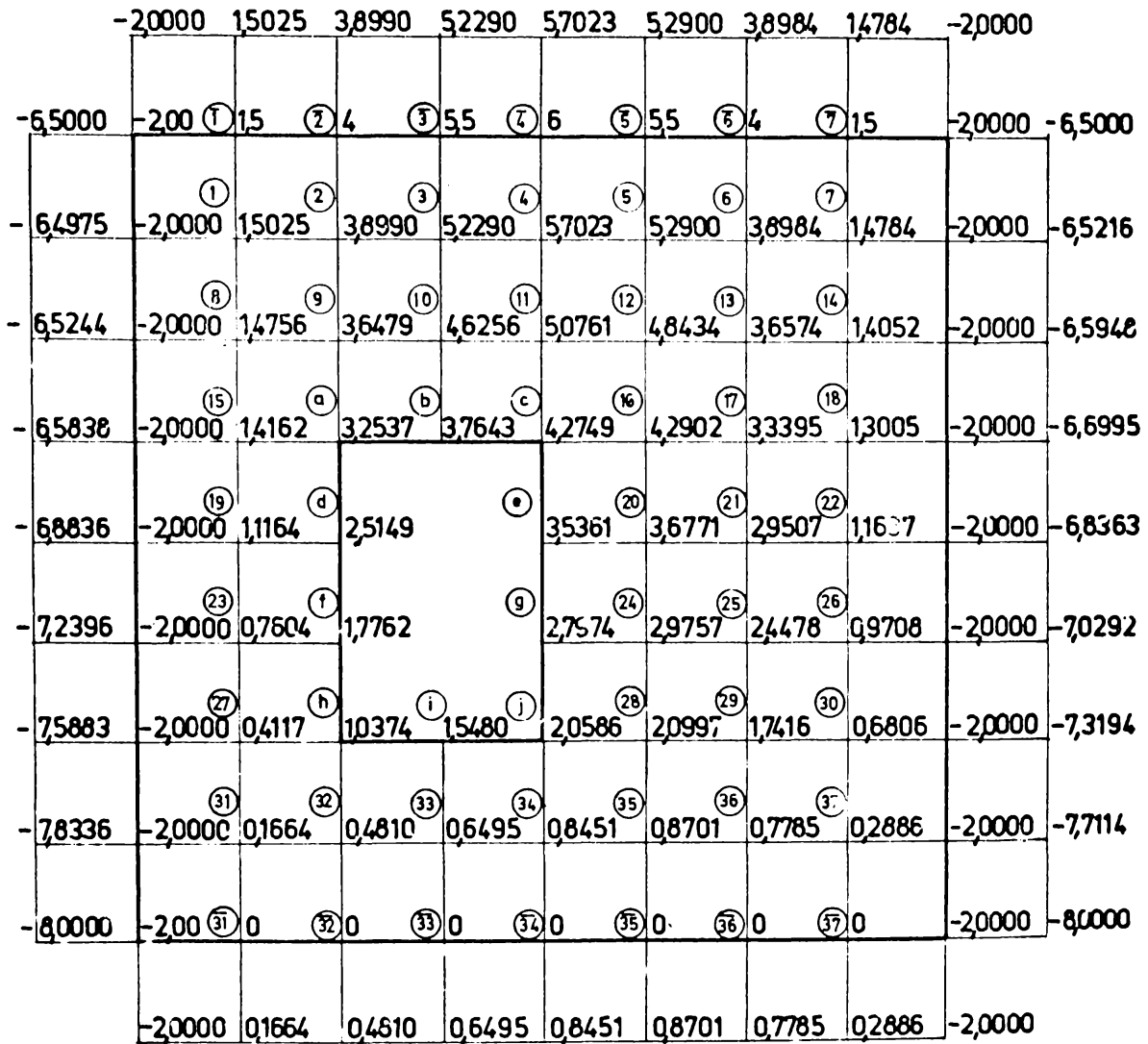
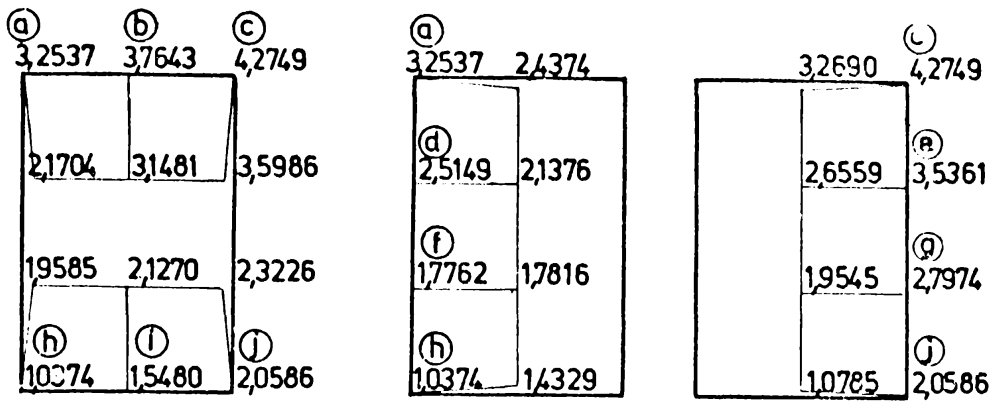


FIG. 49



$$F = F_0 + 1,5480 F_1 + 1,4775 F_2 + 1,0212 F_3$$

FIG. 50a



$x_1 = 1,5480$

$x_2 = 1,4775$

$x_3 = 1,0212$

FIG. 50b





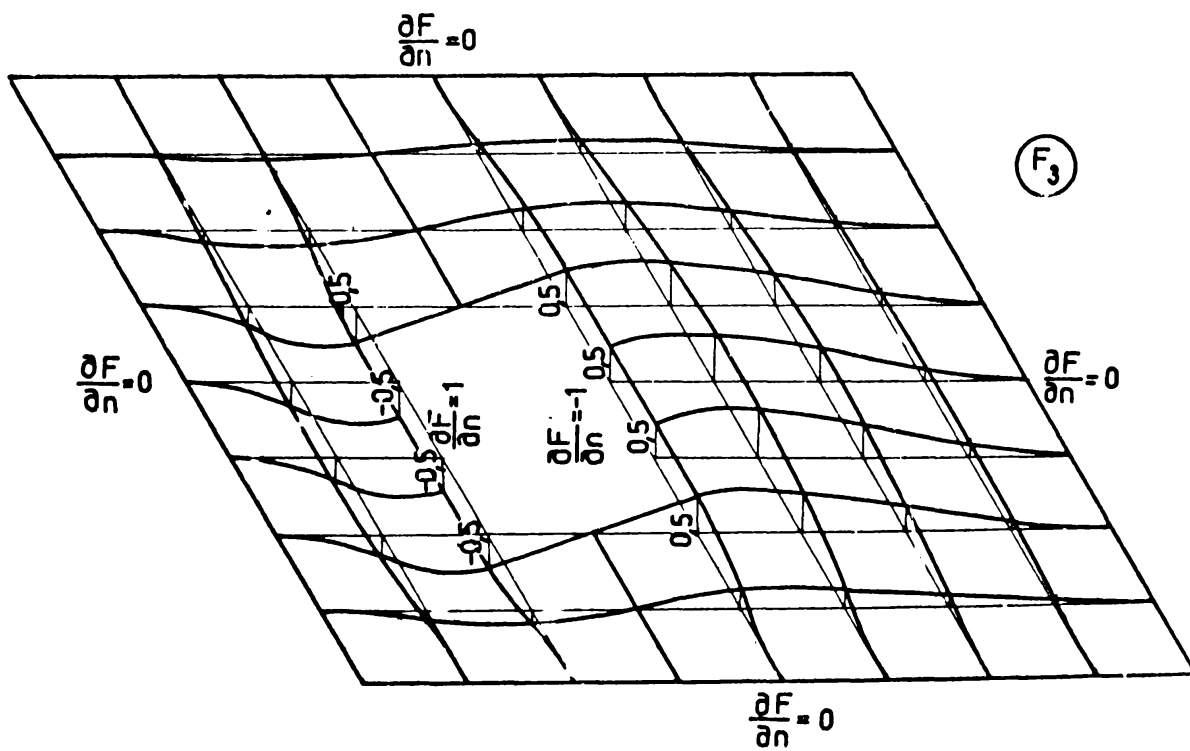
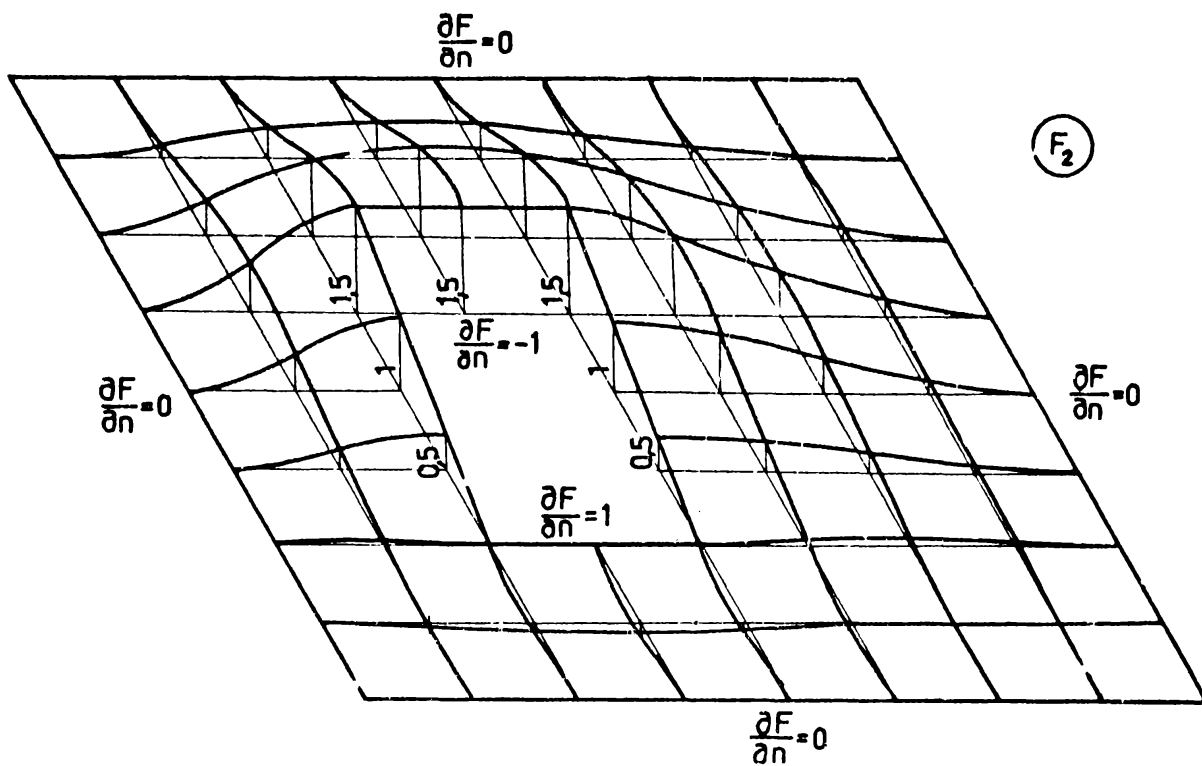
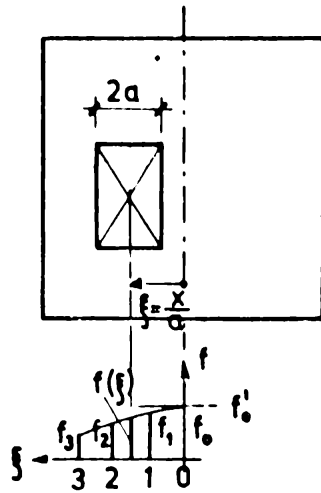


FIG. 52



$$\begin{bmatrix} \xi^4 \\ \xi^3 \\ \xi^2 \\ \xi \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -8 & -11 & 18 & -9 & 2 \\ 36 & 60 & -90 & 36 & -6 \\ -66 & -85 & 108 & -27 & 4 \\ 36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0' \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = 36 f(\xi)$$

FIG. 53

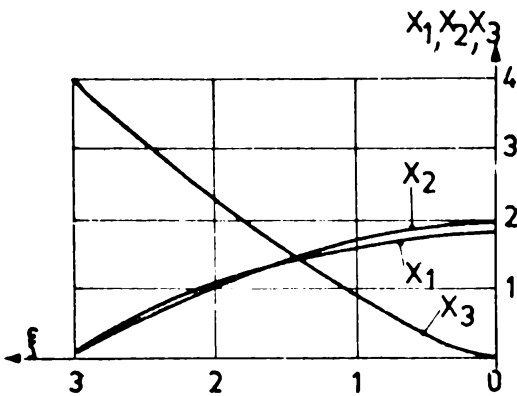
Ecuatiile curbelor :

Golul A

$$X_1(\xi) = -0,0170\xi^4 + 0,0576\xi^3 - 0,2158\xi^2 + 1,7635$$

$$X_2(\xi) = 0,0201\xi^4 - 0,0724\xi^3 - 0,1778\xi^2 + 1,9238$$

$$X_3(\xi) = 0,1151\xi^4 - 0,6744\xi^3 + 1,4316\xi^2$$

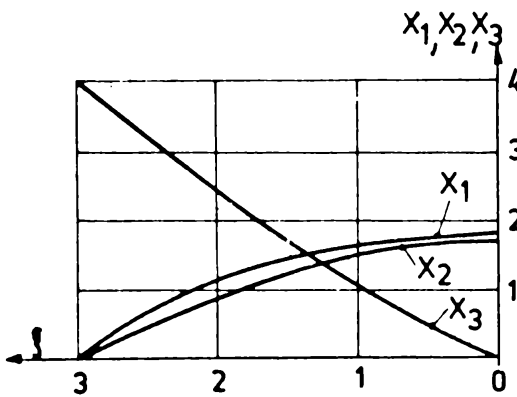


Golul B

$$X_1(\xi) = -0,0607\xi^4 + 0,2608\xi^3 - 0,4340\xi^2 + 1,7819$$

$$X_2(\xi) = 0,0301\xi^4 - 0,1170\xi^3 - 0,1053\xi^2 + 1,6697$$

$$X_3(\xi) = 0,1243\xi^4 - 0,7855\xi^3 + 1,6824\xi^2$$



Golul C

$$X_1(\xi) = -0,0011\xi^4 - 0,0002\xi^3 - 0,0677\xi^2 + 0,7051$$

$$X_2(\xi) = 0,0195\xi^4 - 0,0449\xi^3 - 0,2370\xi^2 + 1,7689$$

$$X_3(\xi) = 0,1286\xi^4 - 0,6237\xi^3 + 1,1584\xi^2$$

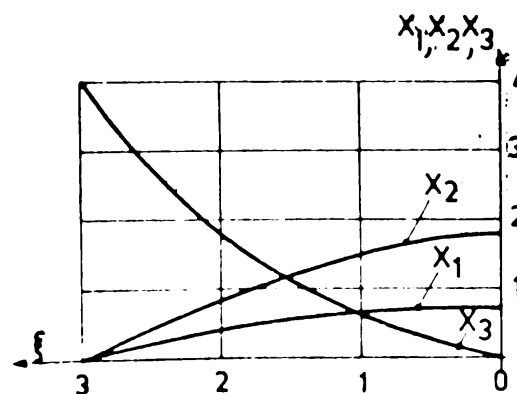


FIG. 54

### 3.1. Aplicarea metodei diferentelor finite

#### 3.1.1. Presentarea procedurii

Pasul rețelei s-a ales egal cu  $a = 1/8$ . Pentru elementul B2 se prezintă în figura 49 valorile marginale ale funcției de tensiuni și ale derivatei ei, acțiunea încărcării exterioare  $p$  și a necunoscutelor unitare  $\{X\}$ , iar în figurile 50a și b suprafața I.

Suprafețele  $F_0$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  și  $F_3$  corespunzătoare sistemului de bază static determinat sînt redată în figurile 51 și 52. Pentru determinarea matricii invariantilor  $[b]$  respectiv a vectorului termenilor liberi  $\{A\}$ , conform punctului 1.1.1.2, alineatul c, s-au construit operatorii din anexa I. După determinarea lui  $\{X\}$ , funcția de tensiuni  $F$  rezultă din suprapunerea efectelor (fig.50a).

Cunoscîndu-se vectorii  $\{X\}$  pentru cele trei tipuri de goluri A, B și C, în cele trei poziții 1, 2 și 3 cît și în poziția limită, pentru aproximarea lor cînd golurile au alte poziții, s-au construit polinoame de interpolare hermitice. Forma lor generală este dată în figura 53, iar figura 54 redă variațiile particulare de uso.

#### 3.1.2. Diagrame de tensiuni

Anexa III cuprinde pentru tipurile de grinzi-pereți din figura 48 următoarele elemente: valorile funcției de tensiuni  $F$ , tensiunile principale ca mărime și direcție, diagramele  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  și  $\sigma_{xy}$  și reprezentarea mărimilor și direcțiilor tensiunilor principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  în punctele interioare. Scările diagramelor sînt diferite, de aceea scările în care s-au reprezentat  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  . Tensiunile principale s-au determinat în concordanță cu rețelele din figura 55.

In cazul elementului plin  $M$ , precizia de determinare a tensiunilor normale este bună, așa cum arată comparația tensiunilor  $\sigma_{xx}$  în secțiunea de mijloc cu cea dată în lucrarea [51] pentru un pas pe jumătate  $a/2 = l/16$ . Nu același lucru poate fi afirmat în ceea ce privește tensiunea tangențială  $\sigma_{xy}$  în secțiunea de la marginea reazemului. Nici finețea rețelei folosite în [51] nu este suficientă pentru determinarea acestei tensiuni. Conform [99,120], în vecinătatea reazemului,  $\sigma_{xy}$  poate fi luat egal cu  $p_r/\pi$ . În aceste condiții diagrama  $\sigma_{xy}$  poate fi corectată ca în figura 56.

Pentru a aprecia influența pasului rețelei asupra valorilor funcției de tensiuni și a derivatelor ei de ordinul doi, elementul A2 s-a calculat și cu un pas dublu al rețelei  $2a=l/4$ . Valorile funcțiilor de tensiuni au rezultat destul de apropiate de cele obținute cu pasul  $a=l/8$ , diferența maximă fiind de -8%. Diferența între derivate este mai mare așa cum rezultă din diagramele  $\sigma_{xx}$  din figura 57. Având două aproximații ale acestor derivate, cu ajutorul formulei de extrapolare a lui Richardson [106] se pot găsi valori îmbunătățite "exacte". Pentru întinderile semnificative aceste valori sînt prezentate încadrat în figura 57. Diferența maximă față de acestea a valorilor găsite cu pasul  $a=l/8$  este de -15,9%. Pentru o mai bună aproximare a vîrfurilor de tensiuni este necesară folosirea unei rețele mai fine.

Teoria clasică a elasticității, aplicată aici, consideră că interacțiunea părților medialei continuu are loc prin forțe distribuite. În realitate există medii în care interacțiunea se realizează în plus prin momente distribuite, denumite medii Cosserat [112,121]. În lucrarea [147] se arată că în cazul me-

Tensiuni principale:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

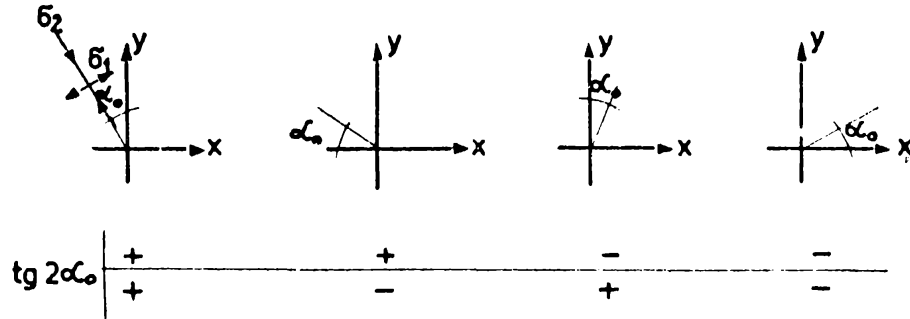


FIG. 55

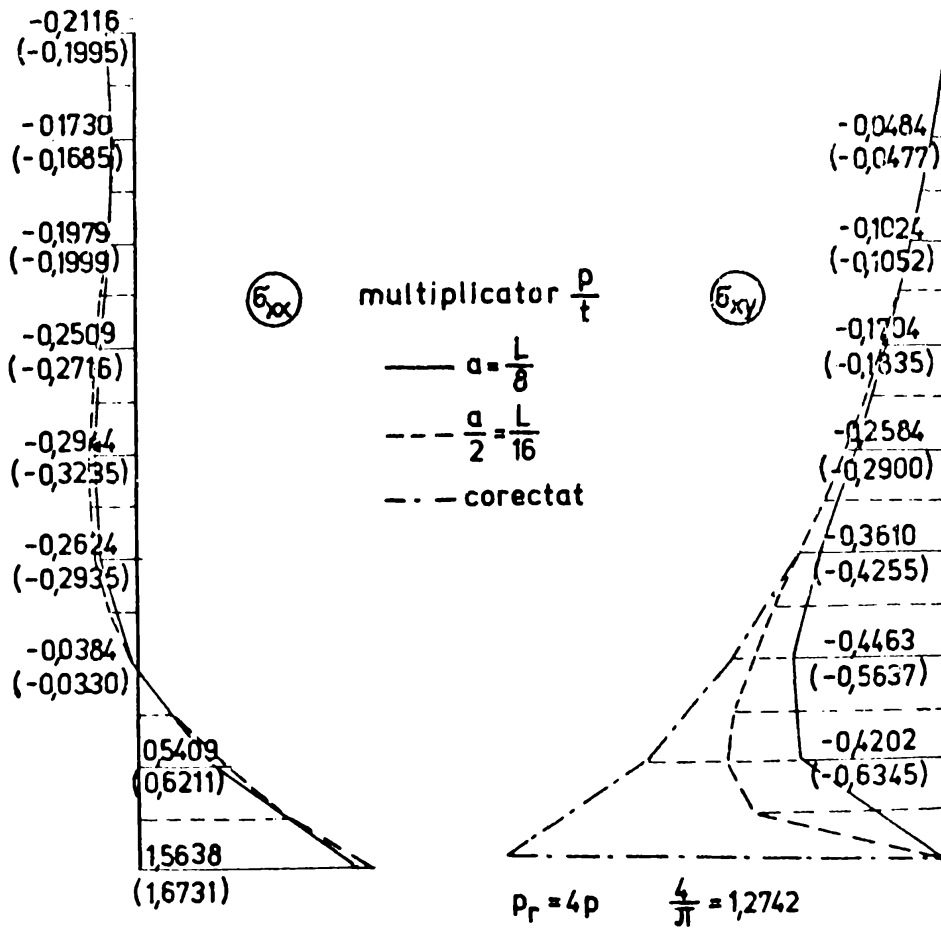
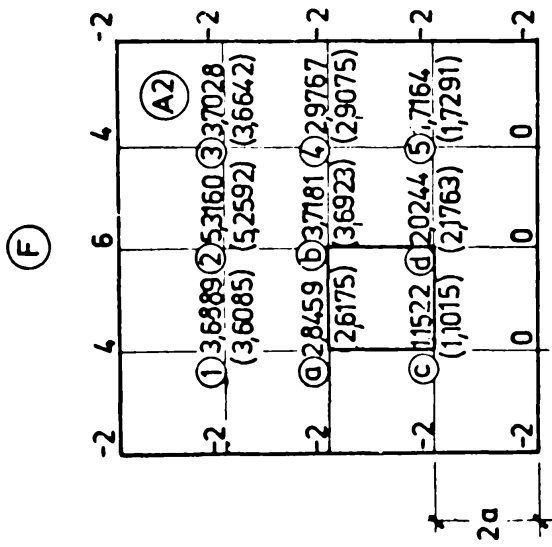


FIG. 56



În paranteză: valorile corespunzătoare pasului  $2a = \frac{L}{4}$

Diferența maximă între valorile F - în nodul (a) - 8%

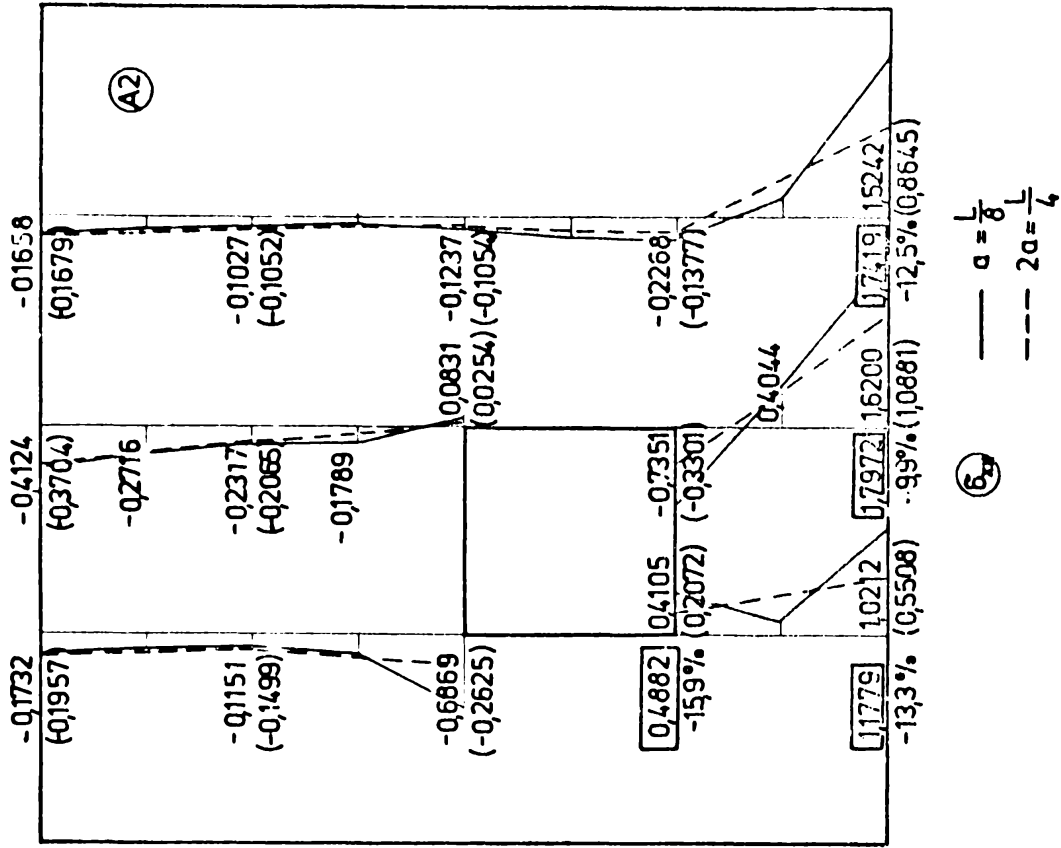


FIG. 57

diilor Cosserat, coeficienții de concentrare a tensiunilor pot fi mult mai mici decât în cazul mediilor clasice. Conform [123] plăcile de beton a căror grosime nu este decât de câteva ori mai mare decât dimensiunile agregatelor pot fi considerate corpuri de tip Cosserat.

### 3.1.5. Mărimi de calcul

Pe baza diagramei de tensiuni s-au determinat o serie de mărimi necesare calculului grinzilor-pereți în starea limită de fisurare și în starea limită de rezistență. Astfel s-au determinat rezultantele  $Z$  ale întinderilor  $\sigma_{xx}$  la marginea inferioară a grinzilor-pereți și deasupra golurilor; sînt indicate în anexa II. Pentru tipurile M, B3, B2 și B1 s-au determinat și "rezultantele"  $Z_1$  ale tensiunilor principale de întindere  $\sigma_1$ , conform schemei din figura 58. Acestea dau indicații asupra necesarului de armătură înclinată. Din diagramele prezentate în anexa II se observă că  $Z_{imax}$  depășește  $Z_{max}$  cu cel mult 2% astfel că, practic, barele dimensionate la  $Z_{max}$ , așezate în concordanță cu traiectoriile tensiunilor principale sînt suficiente pentru preluarea întinderilor în vecinătatea marginii inferioare a grinzilor-pereți studiate.

În figura 59 sînt prezentate, pentru secțiunea din mijlocul deschiderii, rezultanta întinderilor  $Z$ , înălțimea zonei întinse alăturată marginii inferioare  $h_1$ , brațul de pârghie al eforturilor  $z_{e1}$  ( $z_{p1}$  în ipoteza plastificării zonei întinse), momentul  $M$  și diferența față de valoarea exactă, ca și o indicație privind precizia de determinare a eforturilor unitare normale. Diagramele din această figură dau variația mărimilor  $h_1$ ,  $z_{p1}$  și  $z_{e1}$  în funcție de poziția golului.

La calculul grinzilor pereți cu goluri este interesant de cunoscut și rezultanta tensiunilor de compresiune  $\bar{\sigma}_{yy}$  din stînga golului,  $D_g$ . Pe baza valorilor calculate pentru cele trei poziții ale golurilor s-au construit polinoamele de interpolare și diagrama din figura 60.

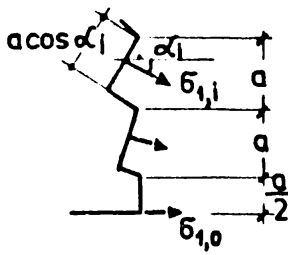
### 3.2. Aplicarea metodei elementelor finite

#### 3.2.1. Prezentarea procedurii

În cazul unor elemente finite avînd latura egală cu pasul rețelei folosite la metoda diferențelor finite, numărul ecuațiilor de condiție este mai mare. Pentru a nu ajunge la sisteme de ecuații prea mari, metoda elementelor finite s-a folosit numai la grînda-perete simetrică B3 (fig. 61a). În situația din figura 61b s-au făcut două calcule, cu rigidități corepunzătoare modelului de tensiuni (punctul 2.2.1.2) respectiv modelului hibrid (punctul 2.2.1.3). Astfel s-a pornit de la matricea rigidităților din figura 35, particularizată pentru  $\beta = 1$ ,  $\nu = 1/6$ , respectiv de la cea din figura 40. Succesiunea operațiilor este aceeași, astfel că se prezintă numai varianta a doua.

Datorită simetriei geometrice și de încărcare se lucrează cu semistructura din figura 62. Pentru scrierea matricei rigidităților structurii, în matricele rigidităților elementelor finite se regrupează elementele înînd seama de ordinea de parcurgere a nodurilor. Rezultatul acestei regrupări este prezentat tot în figura 62, simbolic - prin indicii elementelor - și cu valorile reale ale elementelor. Se indică de asemenea modul de partiționare a matricei rigidităților, iar în figura 63a, b locul submatricelor, obținute prin partiționare, în matricea structurii. În figura 63b este dat și vectorul încărcărilor  $\{P\}$ . După eliminarea gradelor de libertate de corp rigid, respectiv luarea





$$Z_1 = 0,5at b_{1,0} + at \sum b_{1,i} \cos \alpha_i$$

FIG. 58

Elem	Rezultanta Z	Înălț. zonei întinse $h_f$	Bratul de pîrghie		Momentul $M = Z z_{el}$	
			$z_{el}$	$z_{pl}$	Valoarea	Dif. față de 6
M	1,3228ap	1,849 a	4,400 a	3,975 a	5,82 a <sup>2</sup> p	-3,0%
A3	1,0057 ap	1,628 a	5,621 a	5,316 a	5,61 a <sup>2</sup> p	-6,5%
A2	1,0768 ap	1,354 a	5,082 a	4,853 a	5,47 a <sup>2</sup> p	-8,8%
A1	1,2848 ap	1,444 a	4,332 a	4,058 a	5,56 a <sup>2</sup> p	-7,3%
B3	0,9448 ap	1,411 a	5,895 a	5,615 a	5,56 a <sup>2</sup> p	-7,3%
B2	1,0808 ap	1,279 a	4,974 a	4,761 a	5,38 a <sup>2</sup> p	-10,3%
B1	1,3704 ap	1,398 a	4,414 a	4,151 a	6,03 a <sup>2</sup> p	+0,5%
C3	0,8844 ap	1,000 a	6,478 a	6,380 a	5,73 a <sup>2</sup> p	-3,8%
C2	0,7920 ap	0,819 a	6,857 a	6,721 a	5,26 a <sup>2</sup> p	-12,3%
C1	1,0011 ap	0,906 a	5,238 a	5,187 a	5,24 a <sup>2</sup> p	-12,7%

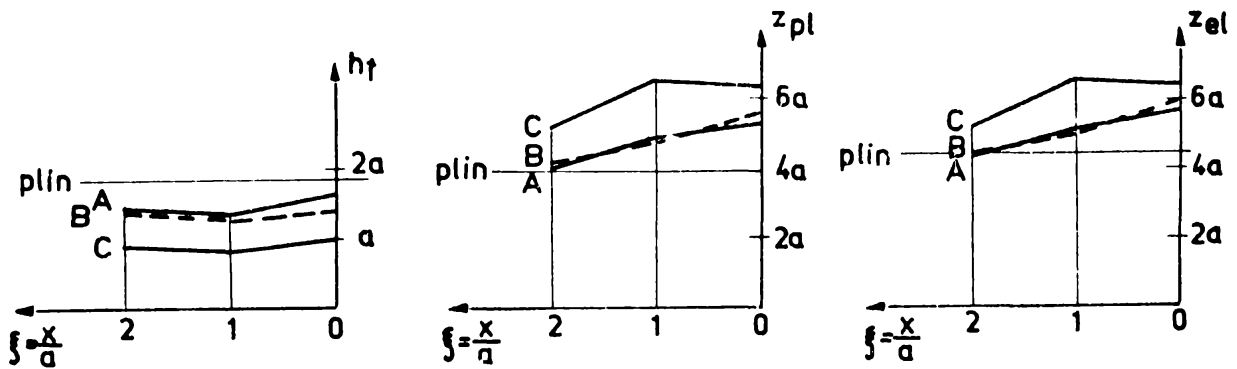


FIG. 59

Multiplicator: ap

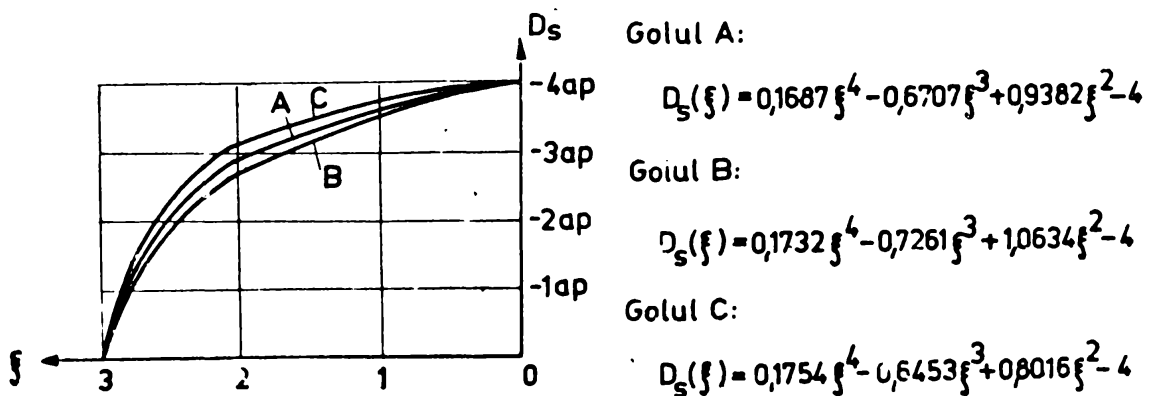


FIG. 60



Structura matricei complete a rigidităților [K]

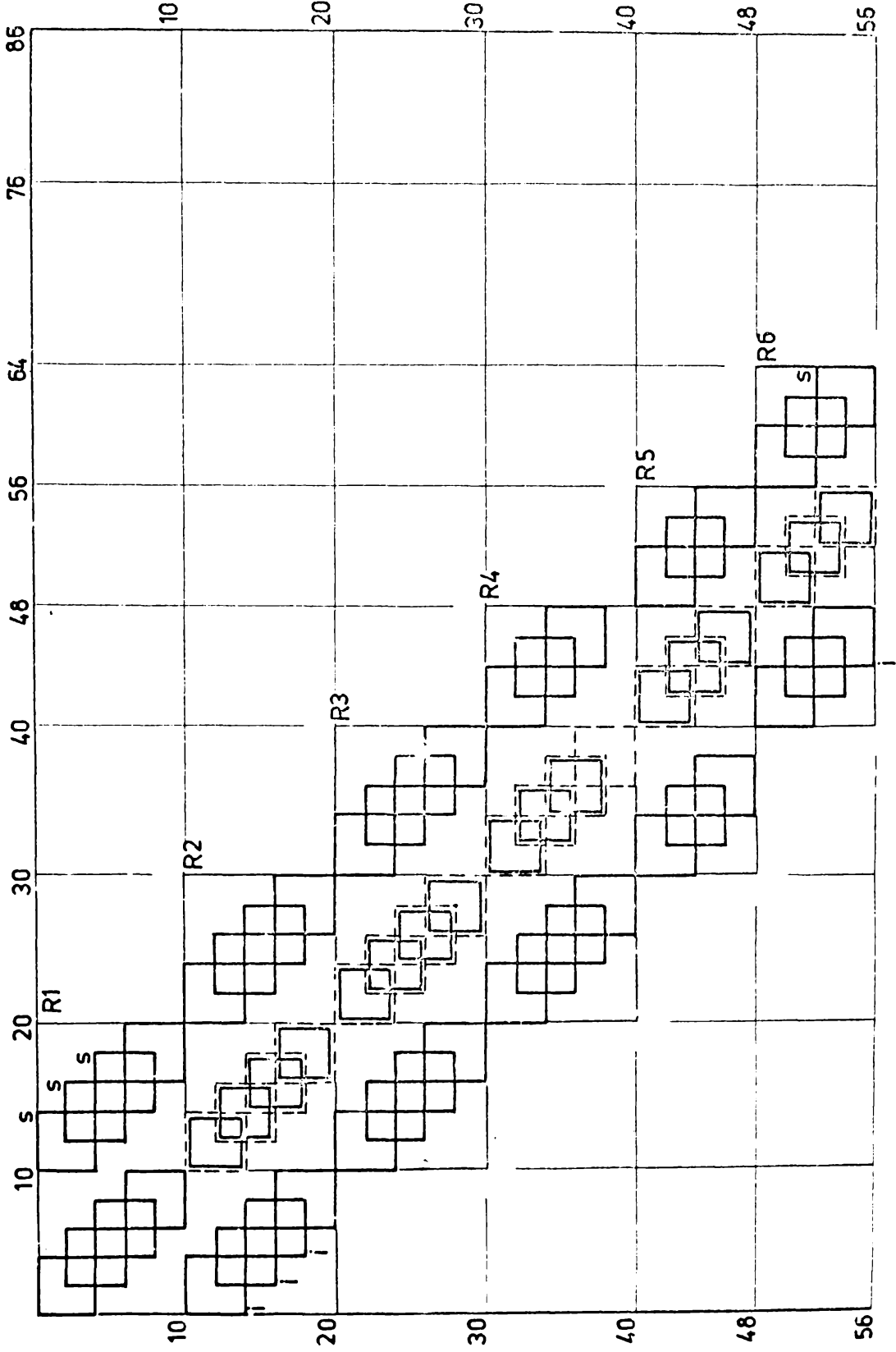
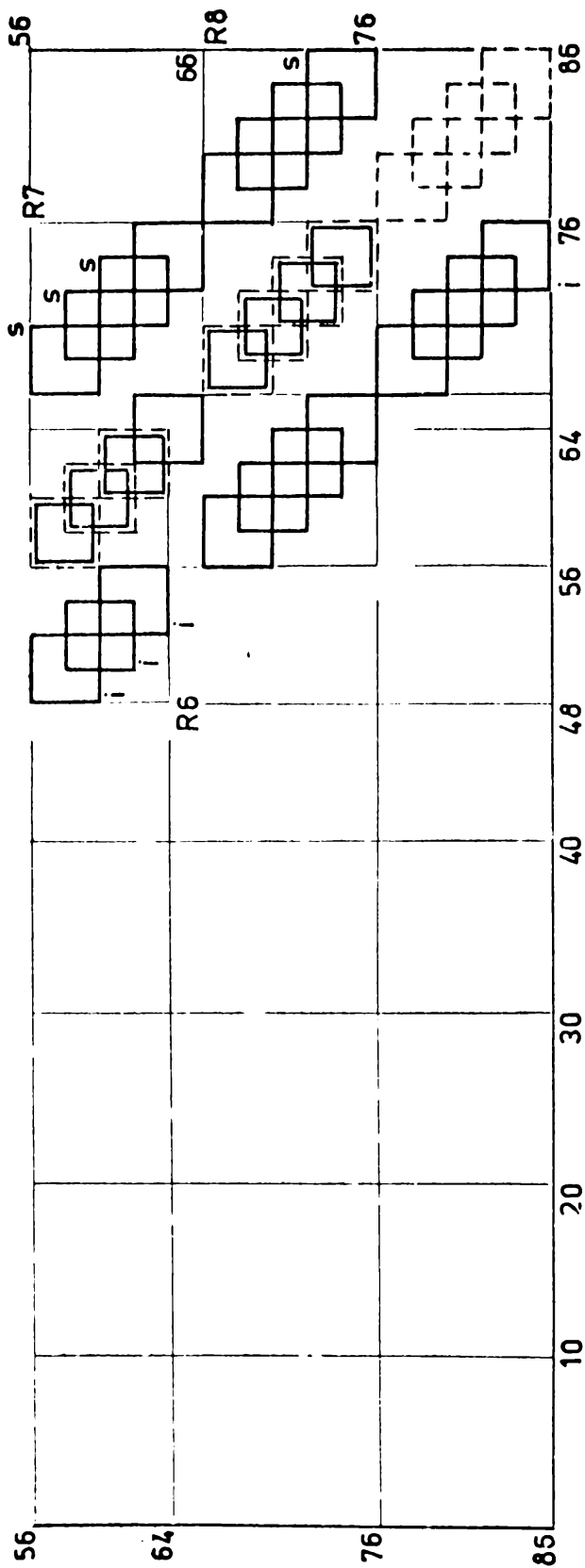


FIG. 63a

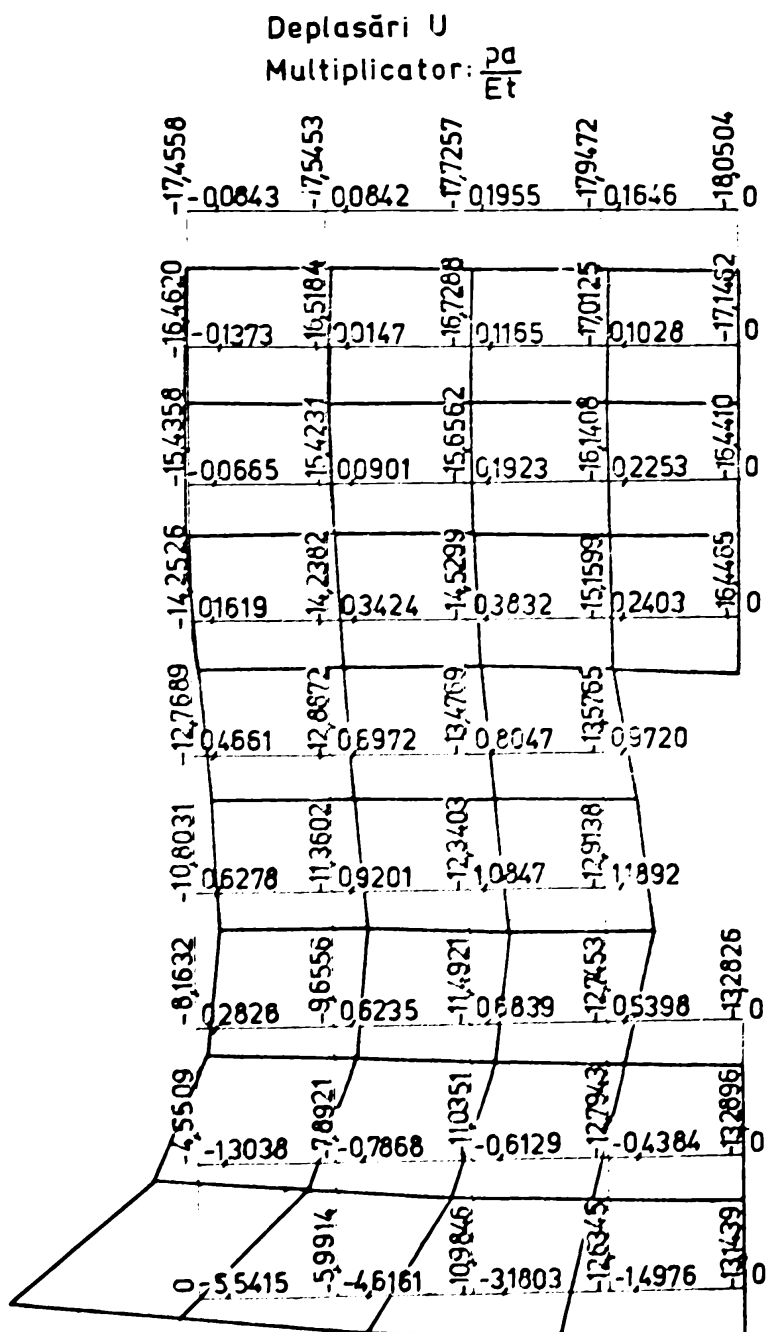


Vectorul forțelor nodale:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -0.5 & \dots & 2 & 0 & 2 & \dots & 0 \end{Bmatrix} \text{ ap}$$

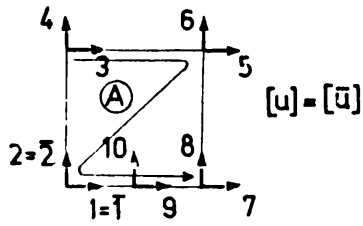
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots & 78 & 79 & 80 & \dots & 86 \end{matrix}$$

FIG. 63b

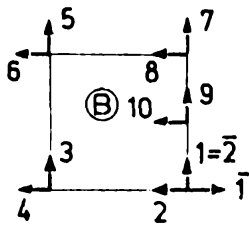


Scara  $u_x$ : de 10 ori mai  
 mare ca  $u_y$

FIG. 84

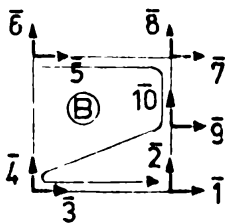


3.3	3.4	3.5	3.6	3.1	3.2	3.9	3.10	3.7	3.8
4.3	4.4	4.5	4.6	4.1	4.2	4.9	4.10	4.7	4.8
5.3	5.4	5.5	5.6	5.1	5.2	5.9	5.10	5.7	5.8
6.3	6.4	6.5	6.6	6.1	6.2	6.9	6.10	6.7	6.8
1.3	1.4	1.5	1.6	1.1	1.2	1.9	1.10	1.7	1.8
2.3	2.4	2.5	2.6	2.1	2.2	2.9	2.10	2.7	2.8
9.3	9.4	9.5	9.6	9.1	9.2	9.9	9.10	9.7	9.8
10.3	10.4	10.5	10.6	10.1	10.2	10.9	10.10	10.7	10.8
7.3	7.4	7.5	7.6	7.1	7.2	7.9	7.10	7.7	7.8
8.3	8.4	8.5	8.6	8.1	8.2	8.9	8.10	8.7	8.8

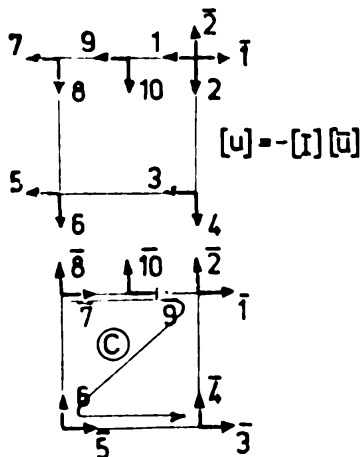


$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2.2	-2.1	2.4	-2.3	2.6	-2.5	2.8	-2.7	2.10	-2.9
2	-1.2	1.1	-1.4	1.3	-1.6	1.5	-1.8	1.7	-1.10	1.9
3	4.2	-4.1	4.4	-4.3	4.6	-4.5	4.8	-4.7	4.10	-4.9
4	-3.2	3.1	-3.4	3.3	-3.6	3.5	-3.8	3.7	-3.10	3.9
5	6.2	-6.1	6.4	-6.3	6.6	-6.5	6.8	-6.7	6.10	-6.9
6	-5.2	5.1	-5.4	5.3	-5.6	5.5	-5.8	5.7	-5.10	5.9
7	8.2	-8.1	8.4	-8.3	8.6	-8.5	8.8	-8.7	8.10	-8.9
8	-7.2	7.1	-7.4	7.3	-7.6	7.5	-7.8	7.7	-7.10	7.9
9	10.2	-10.1	10.4	-10.3	10.6	-10.5	10.8	-10.7	10.10	-10.9
10	-9.2	9.1	-9.4	9.3	-9.6	9.5	-9.8	9.7	-9.10	9.9



6.6	-6.5	6.8	-6.7	6.10	-6.9	6.4	-6.3	6.2	-6.1
-5.6	5.5	-5.8	5.7	-5.10	5.9	-5.4	5.3	-5.2	5.1
8.6	-8.5	8.8	-8.7	8.10	-8.9	8.4	-8.3	8.2	-8.1
-7.6	7.5	-7.8	7.7	-7.10	7.9	-7.4	7.3	-7.2	7.1
10.6	-10.5	10.8	-10.7	10.10	-10.9	10.4	-10.3	10.2	-10.1
-9.6	9.5	-9.8	9.7	-9.10	9.9	-9.4	9.3	-9.2	9.1
4.6	-4.5	4.8	-4.7	4.10	-4.9	4.4	-4.3	4.2	-4.1
-3.6	3.5	-3.8	3.7	-3.10	3.9	-3.4	3.3	-3.2	3.1
2.6	-2.5	2.8	-2.7	2.10	-2.9	2.4	-2.3	2.2	-2.1
-1.6	1.5	-1.8	1.7	-1.10	1.9	-1.4	1.3	-1.2	1.1



7.7	7.8	7.9	7.10	7.1	7.2	7.5	7.6	7.3	7.4
8.7	8.8	8.9	8.10	8.1	8.2	8.5	8.6	8.3	8.4
3.7	3.8	3.9	3.10	3.1	3.2	3.5	3.6	3.3	3.4
10.7	10.8	10.9	10.10	10.1	10.2	10.5	10.6	10.3	10.4
1.7	1.8	1.9	1.10	1.1	1.2	1.5	1.6	1.3	1.4
2.7	2.8	2.9	2.10	2.1	2.2	2.5	2.6	2.3	2.4
5.7	5.8	5.9	5.10	5.1	5.2	5.5	5.6	5.3	5.4
6.7	6.8	6.9	6.10	6.1	6.2	6.5	6.6	6.3	6.4
3.7	3.8	3.9	3.10	3.1	3.2	3.5	3.6	3.3	3.4
4.7	4.8	4.9	4.10	4.1	4.2	4.5	4.6	4.3	4.4

FIG. 65

în considerare a condițiilor de simetrie și rezolvarea sistemului de ecuații rezultă deplasările din figura 64. Pe baza lor se determină tensiunile  $\{\sigma\}$ .

Analog se procedează și în cazul idealizării din figura 61c. Elementele finite cu cinci noduri intervin în cele trei poziții A, B și C. Pentru pozițiile B și C, regruparea elementelor trebuie precedată de trecerea la sistemul de axe central xoy, ca în schema din figura 45. Cu notații simbolice, matricile A, B și C sînt reprezentate în figura 65.

### 5.2.2. Diagrama de tensiuni

Tensiunile  $\{\sigma\}$  sînt reprezentate în anexa III. Diagramele sînt desenate la aceeași scară ca cele din anexa II. Ele prezintă și variațiile admise ale tensiunilor pe suprafața elementelor finite, respectiv ale deplasărilor în lungul marginilor.

În figura 66 se prezintă o comparație a rezultatelor calculului pentru elementul 23, prin diferențele procentuale ale tensiunilor însumate, față de valorile reale. Însumarea tensiunilor  $\sigma_{xx}$  și  $\sigma_{yy}$  cu regula trapezului 23, în cazul metodei diferențelor finite obișnuite, întotdeauna rezultate exacte. Din acest motiv, pentru K=83 coloanele  $\sum \sigma_{yy}$  nu se referă la această sumă, ci la nodulul 23.

Din compararea rezultatelor rezultă că modelul hibrid dă rezultate mai bune pentru  $\sigma_{xx}$ . Celelalte tensiuni s-au obținut cu precizie asemănătoare. În cazul modelului hibrid și al împărțirii mai fine din figura 61c se obțin rezultate mai bune decât la împărțirea din figura 61b, pentru  $\sigma_{xx}$  și  $\sigma_{xy}$ ; tensiunile  $\sigma_{yy}$  rezultă aproximativ cu aceeași precizie. În comparație cu metoda diferențelor finite, cu metodele elementelor finite s-au obținut rezultate mai bune pentru  $\sigma_{xy}$ , însă mai puțin exacte pentru  $\sigma_{xx}$ .

#### 4. COMPORTAREA GRINZILOR PEREȚI

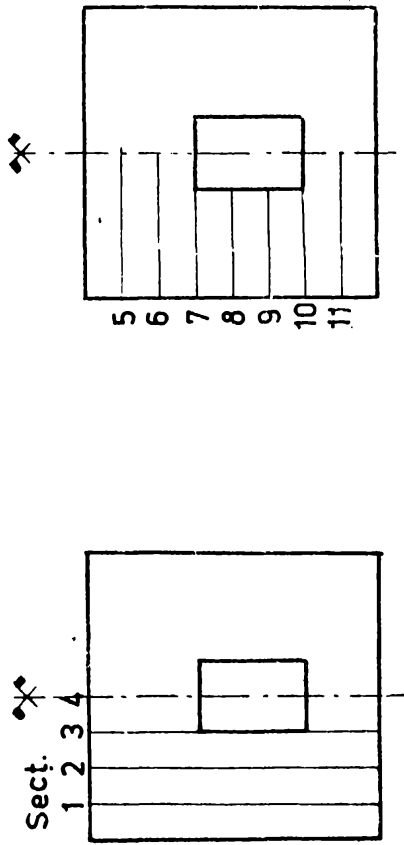
##### DIN BETON ARMAT

În comparație cu grinzile obișnuite, grinzile-pereteți pline au fost mai puțin studiate experimental. Date privind comportarea grinzilor-pereteți din beton armat, simplu rezenate și încărcate la partea superioară sînt cuprinse în lucrările [15,56,75,80,83,87,103,108,114,119] ; unele dintre ele se referă la betonul ușor armat. Cele mai multe încercări s-au efectuat sub încălcări concentrate rezultate concludente fiind obținute de H. Long și colaboratorii [75] . Secția abstractie de grinzi-pereteți prevăzute cu lisere (îngroșări) în dreptul reazemelor, numărul cunoscut al grinzilor pereteți încărcate sub încălcări uniforme la partea superioară se ridică la 14 [80,105] ; sînt de remarcat încercările lui F. Leonhardt și W. Althor [80]. A. Mintze [135] a reușit realizarea unor modele reale ale betonului armat, din araldit și beton armat cu sîme de duralu-miniu și cupru, studiind și grinzi-pereteți cu o deschidere încărcate uniforme la partea superioară.

Numărul încercărilor efectuate pe grinzi-pereteți cu goluri dreptunghiulare este mic [23,58,76]. Programul cel mai vast a fost îndeplinit de H. Long și G. A. Shamp [76] , pe grinzi din beton ușor armat prevăzute cu cîte două goluri așezate simetric și încărcate cu două forțe concentrate simetrice la marginea superioară. Încercările din [58] cuprind o grindă-perete cu un gol marginal, încărcată la marginea inferioară, iar cele din



Tablou comparativ pentru B3



Diferențe procentuale față de valorile exacte

Rezultanta	$\Sigma \delta_{xx}$		$\Sigma \delta_{yy}$								$\Sigma \delta_{xy}$		
	2	③	5	6	⑦	8	9	10	11	①	2	③	
Sectiunea	<1	-5,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-56,7	-5,7	-41,0
II-B3		-7,1											
III-B3-T	22,2	18,3	9,5	<1	<1	-8,1	<1	<1	<1	-34,0	-1,8	-40,5	
III-B3-H	13,5	9,6	5,8	<1	<1	-8,4	<1	<1	-12	-35,0	-2,7	-40,1	
III-B3-HC	8,5	10,2	<1	2,8	<1	-4,4	<1	<1	<1	-30,6	4,6	-28,0	

FIG. 66

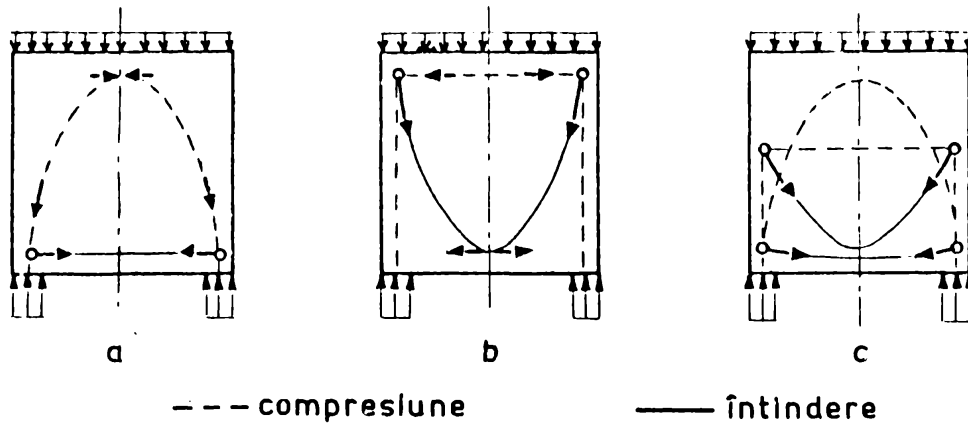
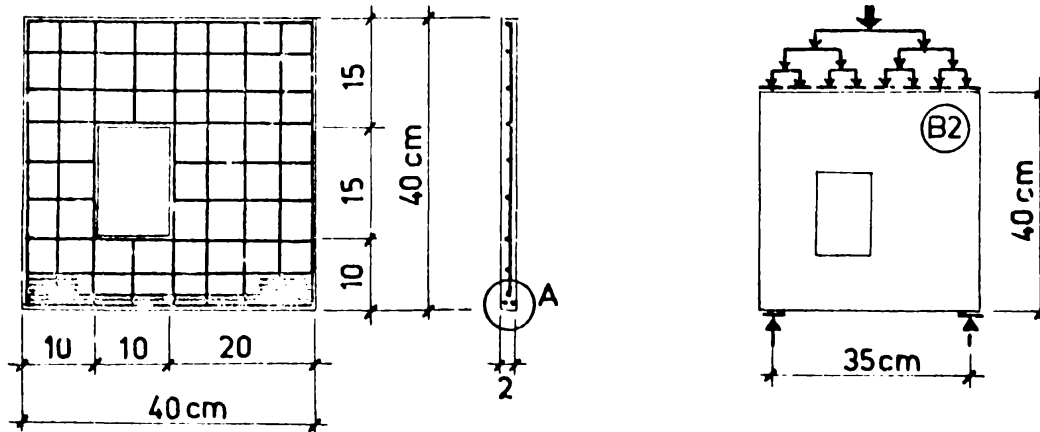
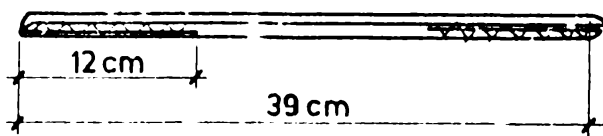


FIG. 67



- armătura principală  $3\phi 1,6$  ( $3\phi 2$ )



- plasă  $\phi 1/5$

- plase  $\phi 1$  deasupra reazemelor: câte 8 buc.

detaliul A

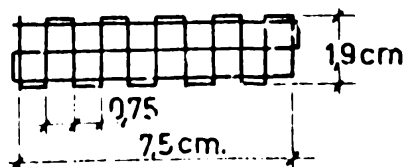
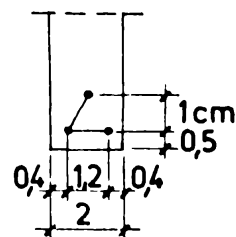


FIG. 68

[23] se referă de fapt la grinzi obișnuite cu goluri. Șaibe dreptunghiulare cu goluri dreptunghiulare sînt studiate și în lucrările [17,49] .

Programul experimental propriu a cuprins încercări pe elemente din mortar armat și beton armat cuprinzînd toate tipurile din figura 48 și încercări pe elemente perforate din beton armat de tipul III.

#### 4.1. Încercări pe elemente din mortar armat

În cazul armării traiectoriale, în stadiul I are loc o redistribuție a eforturilor, numită primară, de la beton la armătură. G. G. [15] a arătat că la grinzi pereți armarea traiectorială nu este neapărat necesară, încercările putînd fi transmise spre rezervoare printr-un efect de arc cu tirant, sistem suspendat sau printr-o combinație a acestor două (fig.67). Schema combinată din figura 67c se apropie cel mai mult de armarea traiectorială. Alegînd o armare corespunzătoare schemelor din figurile 67a și b, proiectantul impune o redistribuție a tensiunilor numită secundară.

Dintre schemele de armare corespunzătoare figurii 67, prima (folosită și în [30] ), este compatibilă geometric cu toate grinziile pereți din figura 48. Scopul încercărilor pe modele din mortar (microbeton) armat a fost testarea compatibilității mecanice a acestei armări, urmîndu-se obținerea mai ales a unor date calitative privind comportarea pînă la rupere a grinziilor pereți studiate analitic în stadiul plastic, în cadrul capitolului 3.

##### 4.1.1. Elementele încercate

Grinziile pereți încercate au avut dimensiunile 40x40x2 cm, unele pline, altele cu goluri de tipul celor din figura 48.

Mortarul a avut următoarea compoziție:

- ciment  $500 \text{ kg/m}^3$ , nisip C-1 :  $300 \text{ kg/m}^3$ , nisip 1-3 :  
 $1250 \text{ kg/m}^3$  și apă  $250 \text{ kg/m}^3$ .

O armare tipică este schițată în figura 68. Armătura principală a fost formată din trei bare drepte bine ancorate la capete. În plus s-a prevăzut o plasă de armătură pe toată suprafața elementului și cîte 8 plase deasupra rezemelor, pentru sporirea rezistenței zonelor de rezem. Coeficientul de armare calculat față de înălțimea utilă a elementului plin a fost  $\mu_0 = 0,077\%$  respectiv  $\mu_0 = 0,12\%$ .

Schema de încărcare este prezentată tot în figura 68, iar în figura 69 se prezintă fotografiile ale elementului  $R_{11}$  după cedare. Rolele dispozitivului de încărcare respectiv de rezemare au fost complet libere. Pentru verificarea acestui dispozitiv la unele elemente s-au măsurat reacțiunile de rezem cu doza de presiune tip Maihak. Rezultatele au fost mulțumitoare așa cum rezultă din figura 70.

Rezistențele betonului la încercarea elementelor sînt prezentate în tabelul din figura 72. Valorile  $R_0$  și  $R_f$  s-au obținut pe cuburi cu latura  $7,07 \text{ cm}$  respectiv prisme de  $5 \times 5 \times 30 \text{ cm}$ . Rezistențele  $R_f$  s-au calculat în funcție de  $R_0$ . Caracteristicile mecanice ale barelor de armătură au fost următoarele. Pentru barele  $\varnothing 1 \text{ mm}$ :  $\sigma_c = 3000 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\sigma_r = 4200 \text{ daN/cm}^2$ , pentru barele  $\varnothing 1,6 \text{ mm}$ :  $\sigma_c = 3000 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\sigma_r = 4000 \text{ daN/cm}^2$  și pentru barele  $\varnothing 2 \text{ mm}$ :  $\sigma_c = 3180 \text{ daN/cm}^2$  și  $\sigma_r = 4130 \text{ daN/cm}^2$ .

#### 4.1.2. Rezultatele încercărilor

În timpul încălzirii în trepte, respectîndu-se prescripțiile și recomandările [146,148] s-au măsurat deplasările marginilor, cu microcomparatoare 1:100. În figura 71 se prezintă cîteva

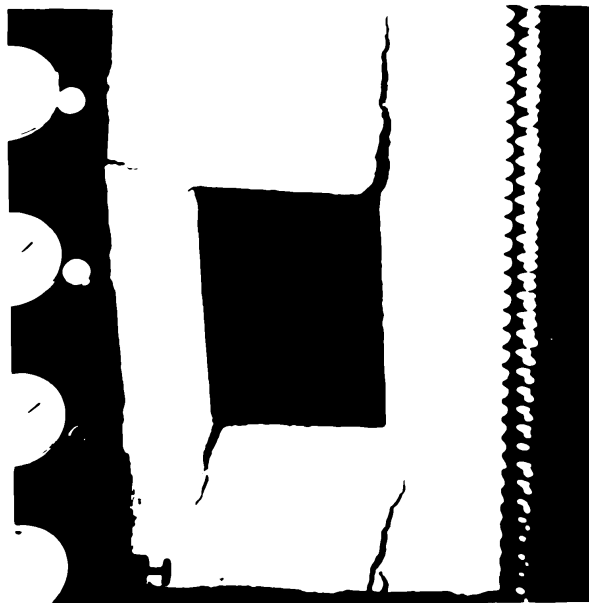
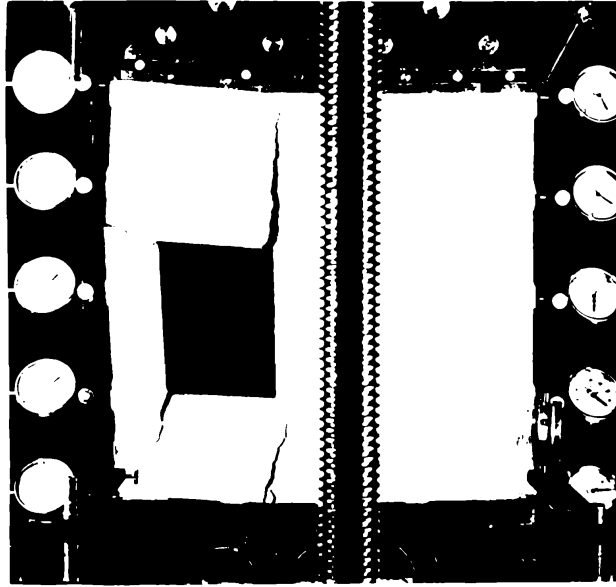


FIG. 69

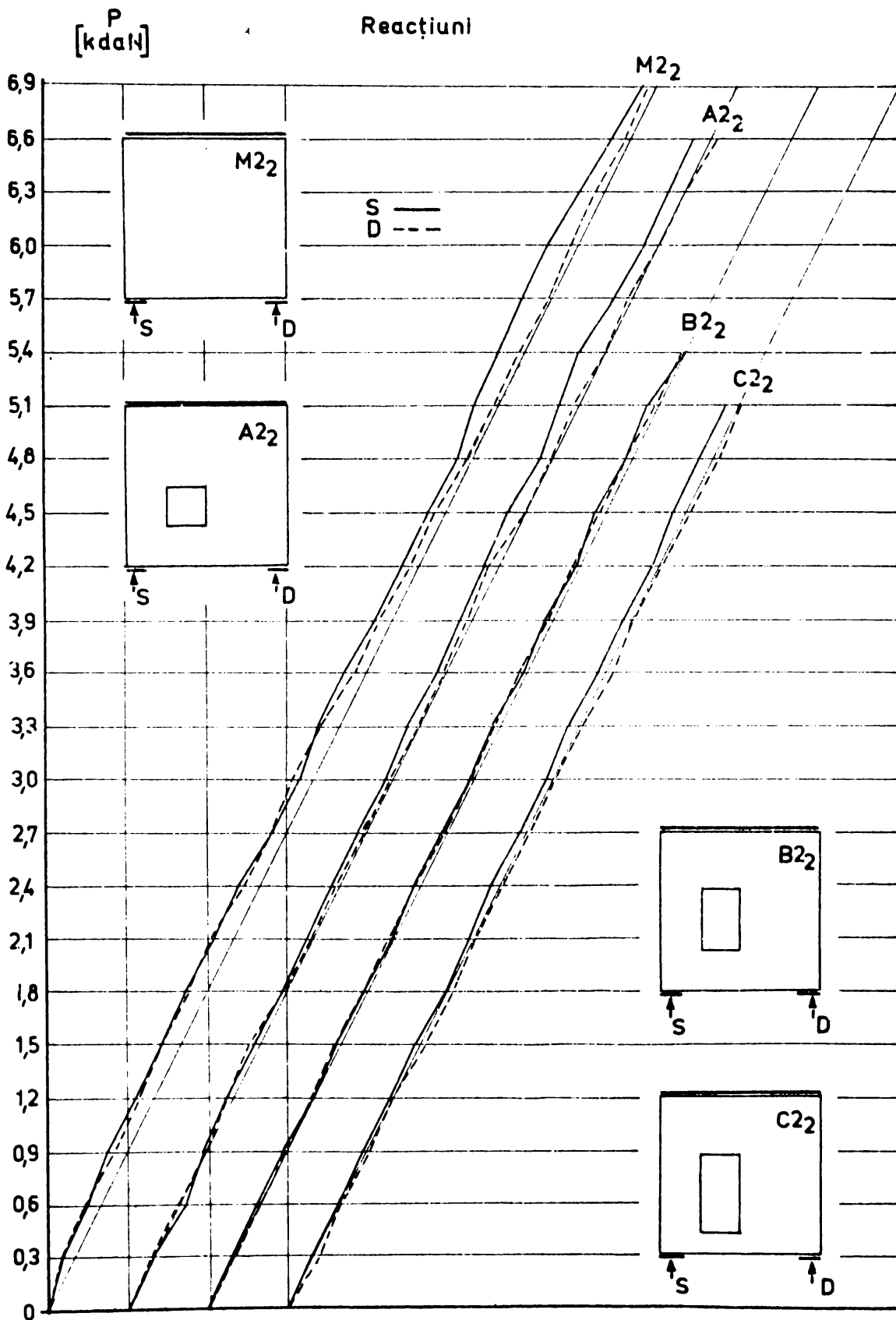


FIG. 70

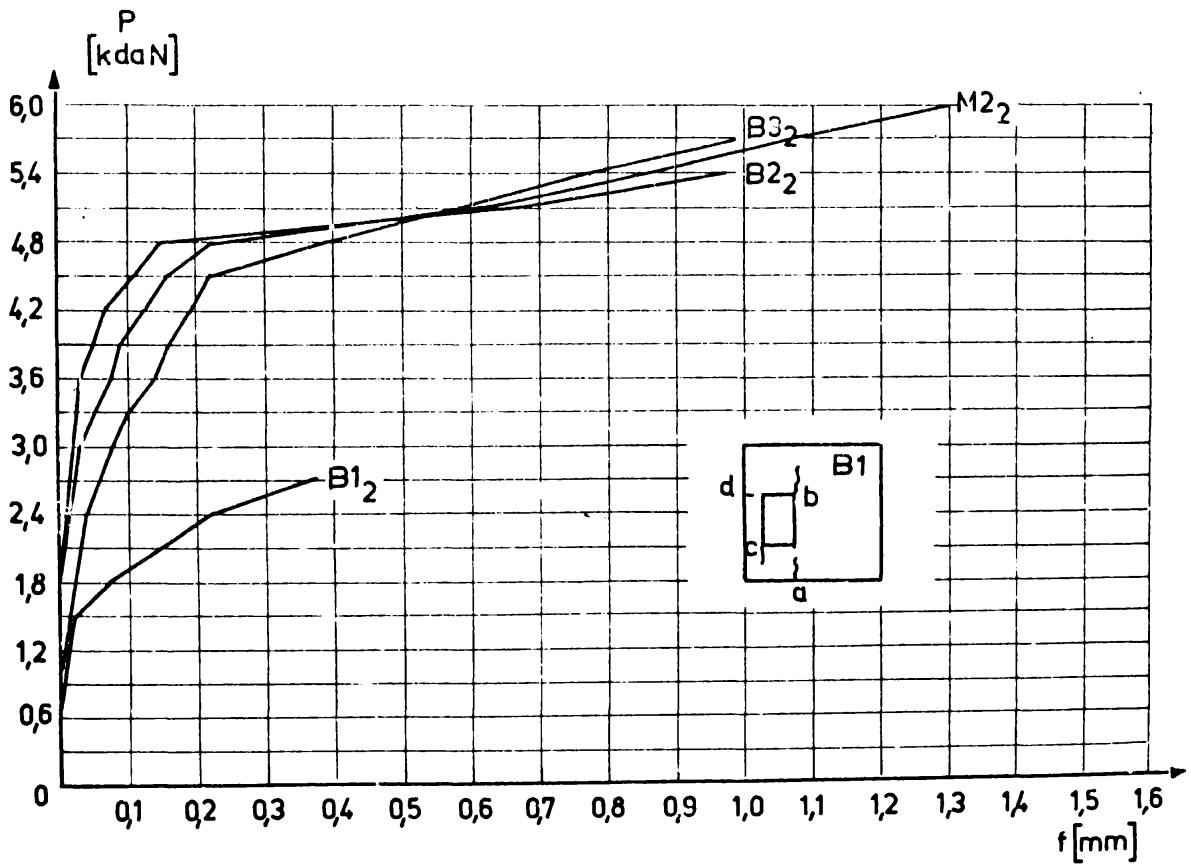
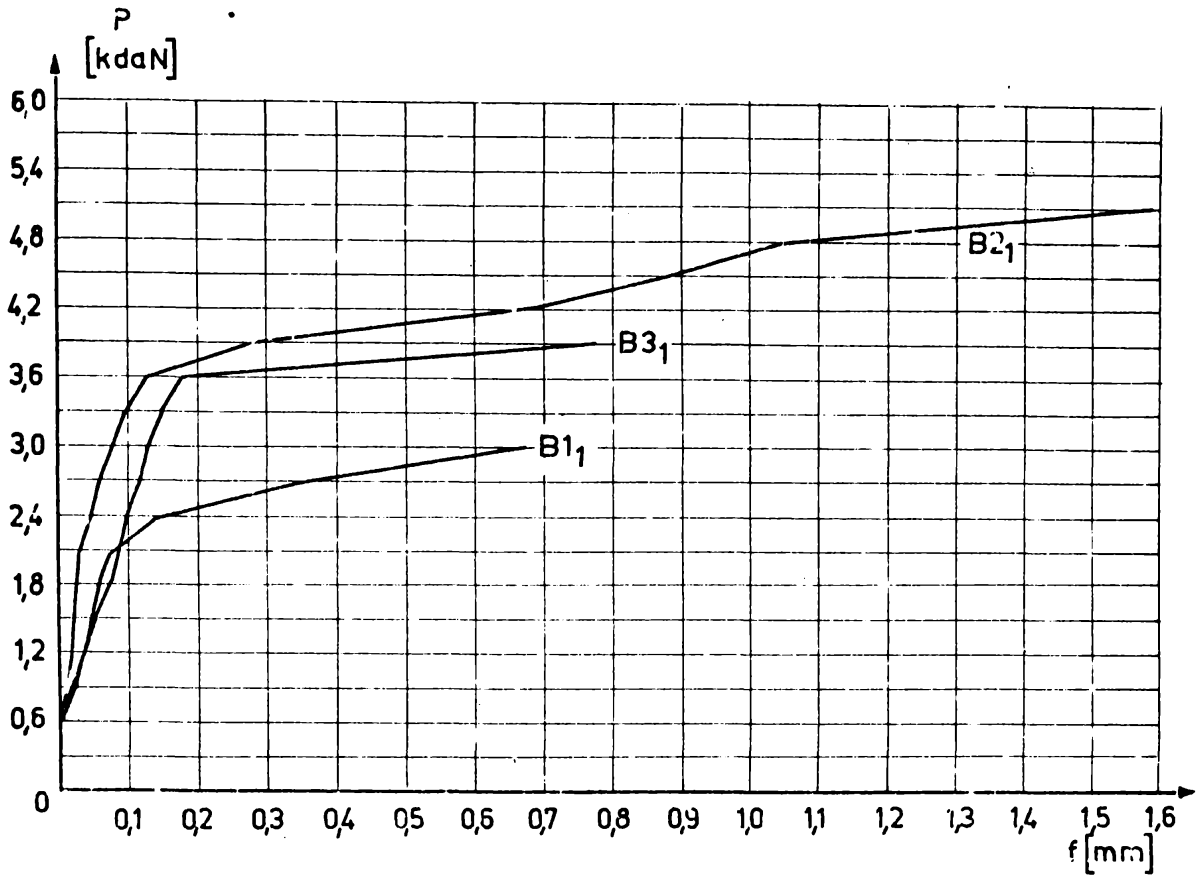


FIG. 71

Elem	R <sub>b</sub> daN/cm <sup>2</sup>	R <sub>i</sub> daN/cm <sup>2</sup>	R <sub>t</sub> daN/cm <sup>2</sup>	Armăt princ.	P <sub>f</sub> kdaN	P <sub>r</sub> [kdaN]		Dif. %	Mecan. rupere	Obs.
						experim	teor.			
M <sub>1</sub>	307	263	30	3φ15	4,80	5,40	3,98	-26,3	1	
M3 <sub>2</sub>	300	260	28	3φ2	3,60	6,90	5,53	-19,8	1	ced.reaz.
M2 <sub>2</sub>	324	282	29	3φ2	3,30	7,74	5,56	-28,2	1	
M1 <sub>2</sub>	244	215	27	3φ2	3,60	6,00	5,48	-8,7	1	ced.reaz.
A3	307	263	30	3φ16	4,50	4,89	3,75	-22,7	1	
A3 <sub>1</sub>	410	359	34	3φ16	3,90	4,50	3,80	-15,5	1	
A3 <sub>2</sub>	300	260	28	3φ2	3,90	7,50	5,32	-29,1	1	
B3	307	263	30	3φ16	3,60	4,20	3,60	-14,3	1	
B3 <sub>1</sub>	390	341	36	3φ16	3,90	4,20	3,62	-13,8	1	
B3 <sub>2</sub>	300	260	28	3φ2	4,50	6,60	5,16	-21,8	1	
C3 <sub>1</sub>	374	341	33	3φ16	2,70	3,90	3,36	-13,8	1	
C3 <sub>2</sub>	300	260	28	3φ2	2,70	6,18	4,92	-20,4	1	
A2 <sub>1</sub>	410	359	34	3φ16	3,60	4,05	3,80	-6,2	1	
A2 <sub>2</sub>	324	282	29	3φ2	3,60	6,90	5,28	-23,5	1	
B2 <sub>1</sub>	390	341	36	3φ16	3,30	5,55	3,62	-34,8	1	
B2 <sub>2</sub>	324	282	29	3φ2	3,60	5,70	5,13	-10,0	1	
C2 <sub>1</sub>	374	341	33	3φ16	2,40	4,14	3,36	-18,8	1	
C2 <sub>2</sub>	324	282	29	3φ2	2,70	5,34	4,90	-9,0	1	
A1 <sub>1</sub>	410	359	34	3φ16	3,00	4,20	2,30	-45,2	2	
A1 <sub>2</sub>	244	215	27	3φ2	1,80	3,00	2,84	-5,3	2	ced.reaz.
B1 <sub>1</sub>	390	341	36	3φ16	2,40	3,09	1,66	-46,2	2	
B1 <sub>2</sub>	244	215	27	3φ2	1,80	3,00	2,14	-28,6	2	
C1 <sub>1</sub>	374	341	33	3φ16	1,80	1,80	1,18	-34,4	2	
C1 <sub>2</sub>	244	215	27	3φ2	1,50	1,86	1,42	-23,7	2	

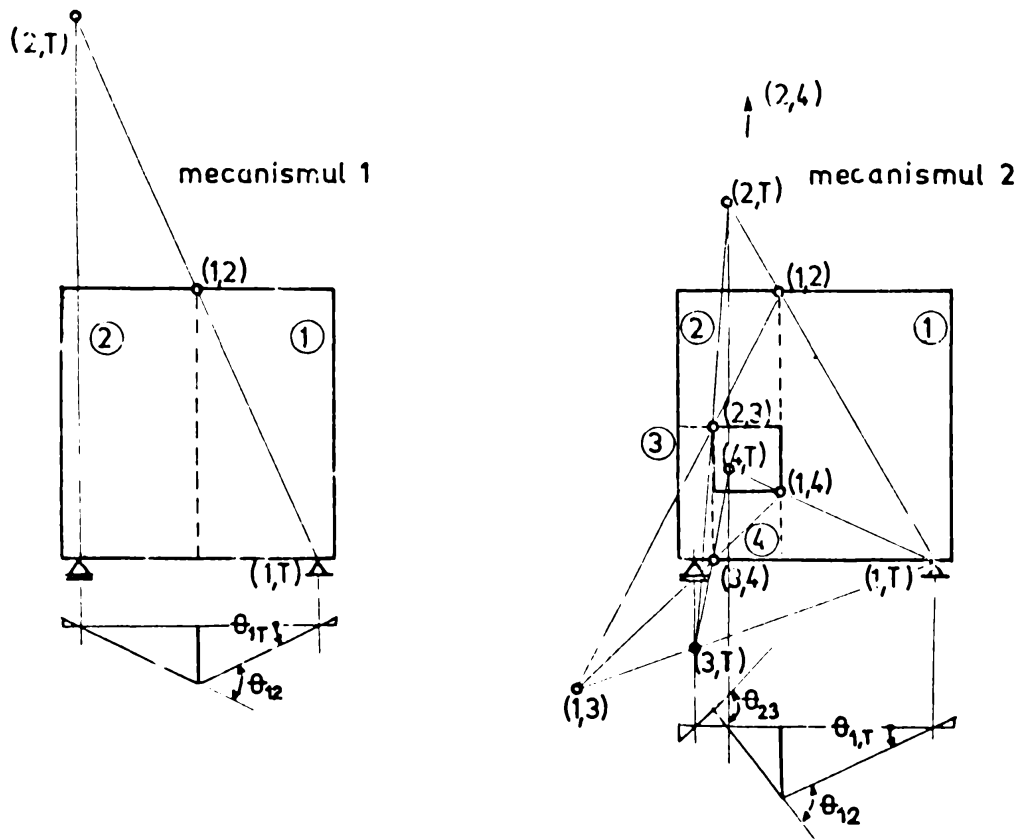


FIG. 72



curbe caracteristice încărcare-săgeată la mijlocul deschiderii, iar în anexa IV fotografiile celor 24 elemente încercate.

La elementele pline și la cele cu goluri în pozițiile 3 și 2 primele fisuri au pornit de la marginea inferioară a elementului, cu excepția unor elemente cu goluri tip C, la care fisurarea a început la marginea inferioară a golului. Încercările de fisurare  $P_f$  sînt trecute în tabelul din figura 71. Cedarea acestor elemente s-a produs în concordanță cu mecanismul 1 din figura 72 (cheia arcului din fig. 67a este foarte apropiată de marginea superioară).

Primele fisuri ale elementului cu goluri în poziția 1 au fost de tipul celor schițate în figura 71. Ordinea de apariție a fost în trei cazuri: b și c simultan, urmate de a și d și în celelalte trei cazuri a, b și c simultan, urmate de d. Cedarea poate fi aproximată prin mecanismul 2 din figura 72.

Rezultatul principal al acestor încercări constituie evidențierea celor două moduri de cedare în funcție de poziția golurilor. Încercările de rupere  $P_r$  sînt trecute în tabelul din figura 72. În același tabel sînt trecute valorile calculate ale acestor încercări, așa cum se arată la punctul 4.2.4. Diferențele între valorile teoretice și cele experimentale se datoresc efectului frecării rotelor de mecan, iar în cazul golurilor în poziția 1 și neglijării influenței forțelor axiale și tăietoare asupra cedării.

#### 4.2. Încercări pe elemente din beton armat

Pentru urmărirea mai detaliată a comportării grinzilor pereți pline și cu goluri s-au încercat 16 elemente, de 2,5 ori mai mari decît elementele din mortar armat. Astfel s-au obținut informații privind comportarea în stadiul I, măsurarea

și ruperea grinzilor pereți, încercându-se și urmărirea acestor faze prin calcul.

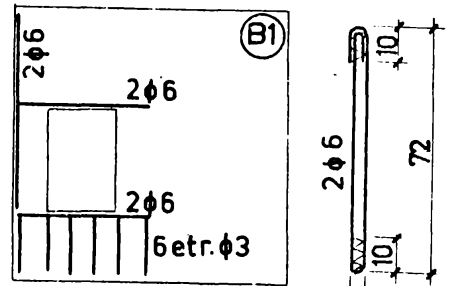
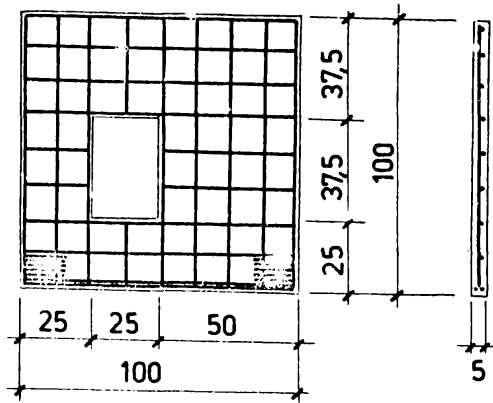
#### 4.2.1. Elementele încercate

Dimensiunile exterioare ale elementelor încercate au fost de 100x100x5 cm. Compoziția betonului a fost următoarea: -ciment 325 kg/m<sup>3</sup>, nisip 0-1: 265 kg/m<sup>3</sup>, nisip 1-3 : 510 kg/m<sup>3</sup>, nisip 3-7 : 155 kg/m<sup>3</sup>, pietriș 7-15 : 1035 kg/m<sup>3</sup> și apă : 160 kg/m<sup>3</sup>.

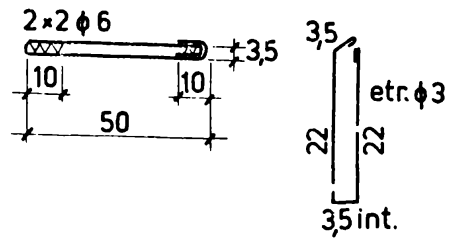
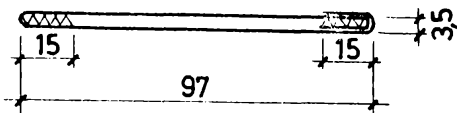
Armarea tipică a elementelor pline și cu goluri în pozițiile 3 și 2 este schițată în figura 73. Analog elementelor din mortar armat, armătura principală este formată din bare drepte, de data aceasta 2/6, astfel că față de înălțimea utilă a elementelor pline se realizează un procent de armare de  $\mu_s = 0,115\%$ . S-a prevăzut de asemenea o plasă de armătură pe toată suprafața elementelor cât și câte 8 plase deasupra reazemelor. Iuind seama de modul de cedare a elementelor din mortar armat cu goluri în poziția 1 (mecanismul de rupere 2), s-a prevăzut armătura suplimentară schițată tot în figura 73 (bare drepte și otrieri).

Din motive legate de siguranța încercării, dispozitivul de distribuție a încărcării s-a executat cu un otaș mai puțin decât în cazul elementelor din mortar armat. Pentru măsurarea deformațiilor specifice, pe ambele fețe ale elementelor s-au fixat timbre tensometrice de 50 mm lungime și ploturi pentru palpatoarele unui deformetru mecanic cu baza de 50 mm. În figura 74 se prezintă așezarea acestor dispozitive la două elemente experimentale. Se observă și în fotografiile celor 16 elemente încercate din anexa V.

Rezistențele betonului la încercarea elementelor sînt cuprinse în tabelul din figura 77. Pentru determinarea lor



- armătura principală: 2 φ 6



- plasă φ 1,6 / 12,5

- plase φ 2 deasupra reazemelor: câte 8 buc.

Armături suplimentare în cazul elementelor cu goluri în poziția 1

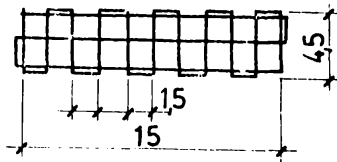


FIG. 73

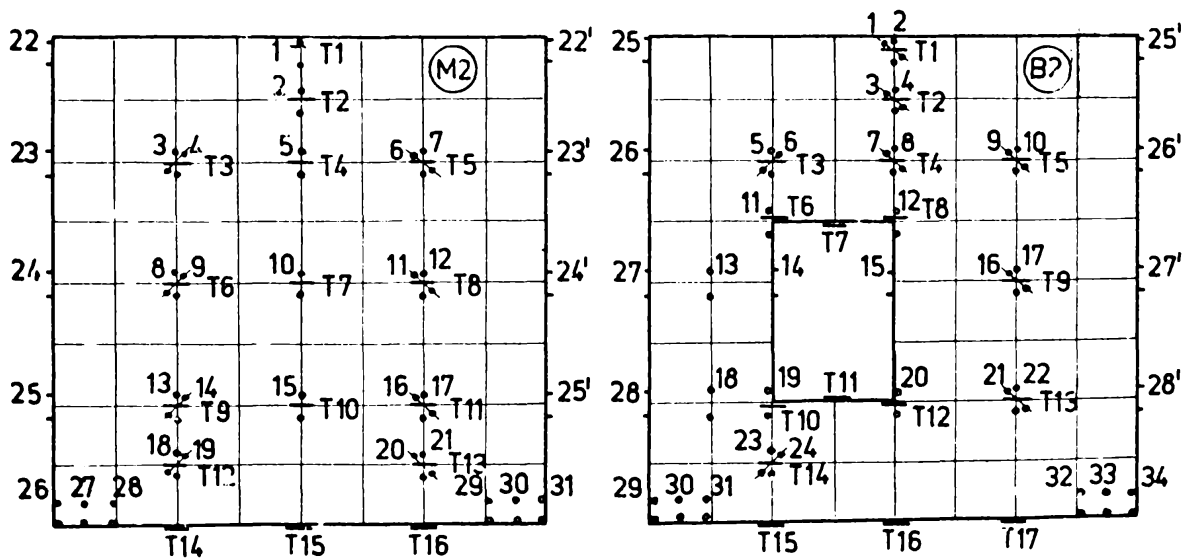


FIG. 74

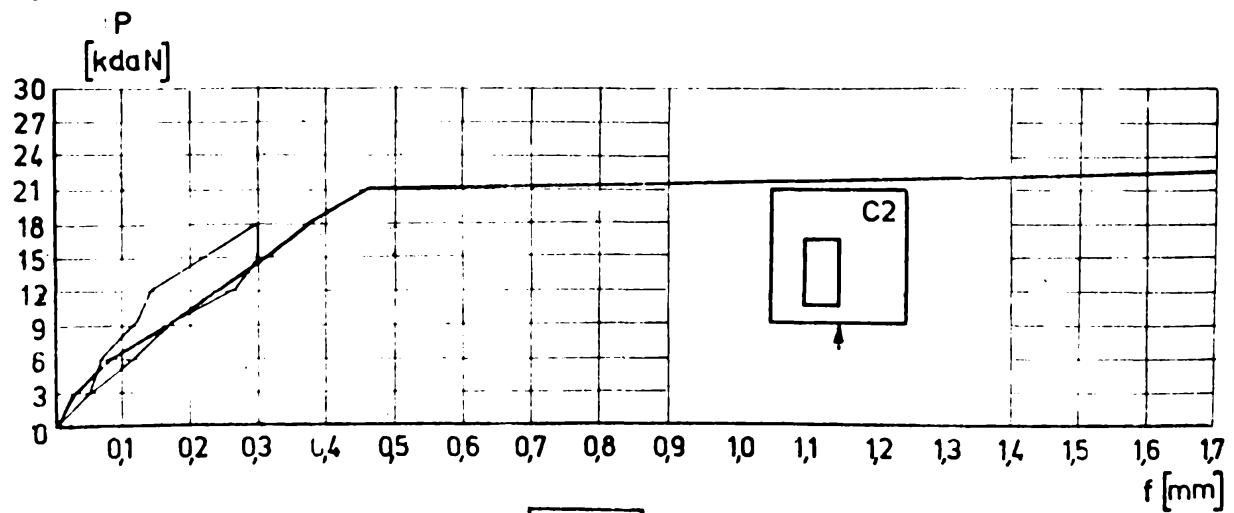
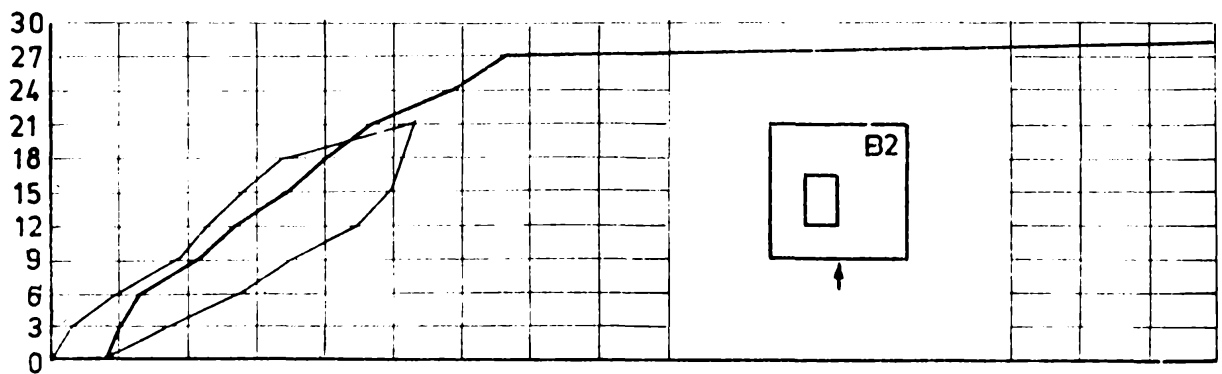
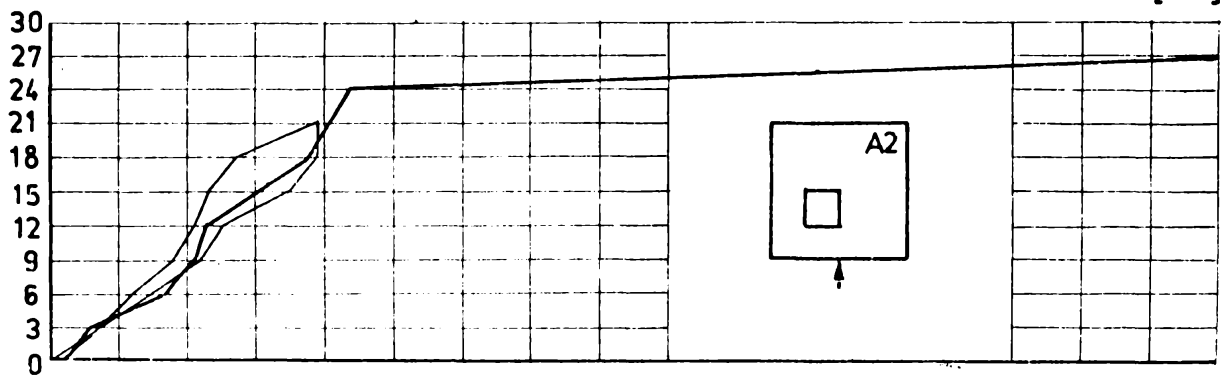
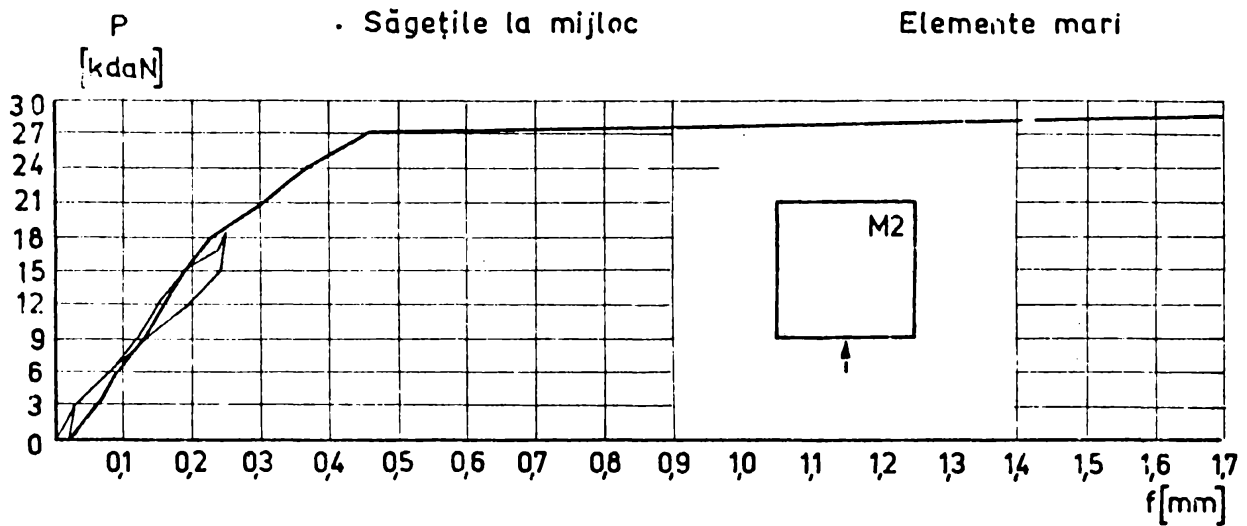


FIG. 75

s-au folosit cuburi cu latura de 20 cm și prisme de 10x10x55 cm. Armăturile  $\varnothing 6$  au avut un  $P_c = 985$  daN și un  $P_r = 1320$  daN.

#### 4.2.2. Rezultatele încercărilor

Treptele de încărcare s-au ales, ca în cazul elementelor din mortar armat, în concordanță cu prescripțiile și recomandările [146,148]. După cîte trei încercări preliminare în stadiul I a urmat încărcarea pînă la fisurare, descărcarea completă și reîncărcarea pînă la cedare. S-au măsurat deplasările marginii inferioare cît și deformațiile specifice în punctele indicate.

Figura 75 redă cîteva curbe caracteristice încărcare-săgeată la mijlocul deschiderii. Deformațiile specifice măsurate în stadiul I sînt de același ordin de mărime cu cele calculate în concordanță cu teoria elasticității:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}). \quad (106)$$

Pentru exemplificare, în figura 76 s-a reprezentat variația teoretică a deformațiilor specifice  $\varepsilon_{xx}$  și  $\varepsilon_{yy}$  pentru grinda perete 12, sub o încărcare de 15 kdaN, cît și valorile măsurate electric respectiv mecanic.

Calitativ, fisurarea elementelor din beton armat este similară fisurării elementelor din mortar armat. Cu referire la schița din figura 71 ordinea de formare a fisurilor în elementele cu goluri în poziția 1 a fost de două ori: a,b,c și d și o dată : b,a,c,d. Numărul fisurilor observate a fost mai mare decît în cazul elementelor din mortar armat, creșterea numărului fisurilor fiind proporțională cu scăderea gradientului tensiunilor, respectiv cu creșterea scării geometrice [22].

Taboul din figura 77 cuprinde valorile găsite experimental pentru încărcarea de fisurare  $P_f$ , cea de rupere  $P_r$

cit și pentru raportul între ele  $P_f/P_p$ . Admițind un coeficient de siguranță egal cu 1,8, s-a determinat încărcarea de exploatare  $P_e$ , ce s-a comparat cu încărcarea de fisurare  $P_f$ . Rezultă că grinzile-pereteți pline și cele cu goluri centrale (goluri în poziția 3) s-au comportat, din acest punct de vedere, ca niște elemente de beton slab armat [10], fără fisuri în stadiul de exploatare. Grinzile pereteți cu goluri în pozițiile 2 și 1 au prezentat fisuri cu deschideri mici.

#### 4.2.3. Calculul încărcării de fisurare

S-a constatat că, la formare, fisurile sînt preponderent verticale. Din acest motiv calculul la apariția fisurilor s-a făcut în secțiuni normale. Pentru cazurile în care direcția fisurilor a fost diferită față de verticală, s-a făcut și un calcul în secțiuni înclinate, rezultînd însă valori ale încărcării de fisurare mai mari decît cele obținute din calculul în secțiuni normale.

Intr-o primă variantă încărcările de fisurare s-au determinat pornind de la distribuția tensiunilor corespunzătoare stadiului elastic, rezultînd valori  $P_f$  cu (35,0 - 56,7)% mai mici decît cele determinate experimental. Ținînd seama de faptul că datorită gradientului mare al tensiunilor normale în zona întinsă, se poate admite o plastificare a acestei zone, s-a reluat calculul încărcării la fisurare într-o a doua variantă. Neexistînd date mai exacte, zona întinsă alăturată marginii inferioare, de înălțime  $h_f$  (tabelul din figura 59), s-a considerat complet plastificată, iar pe restul înălțimii secțiunii s-a admis distribuția corespunzătoare stadiului elastic. Astfel abaterile valorilor calculate față de cele determinate experimental s-au redus la intervalul (+27,2%) - (-15,2%). Valo-

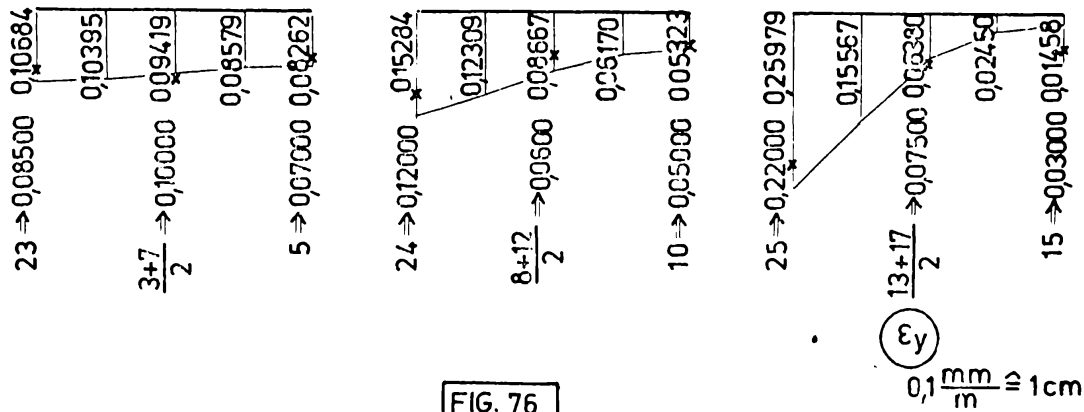
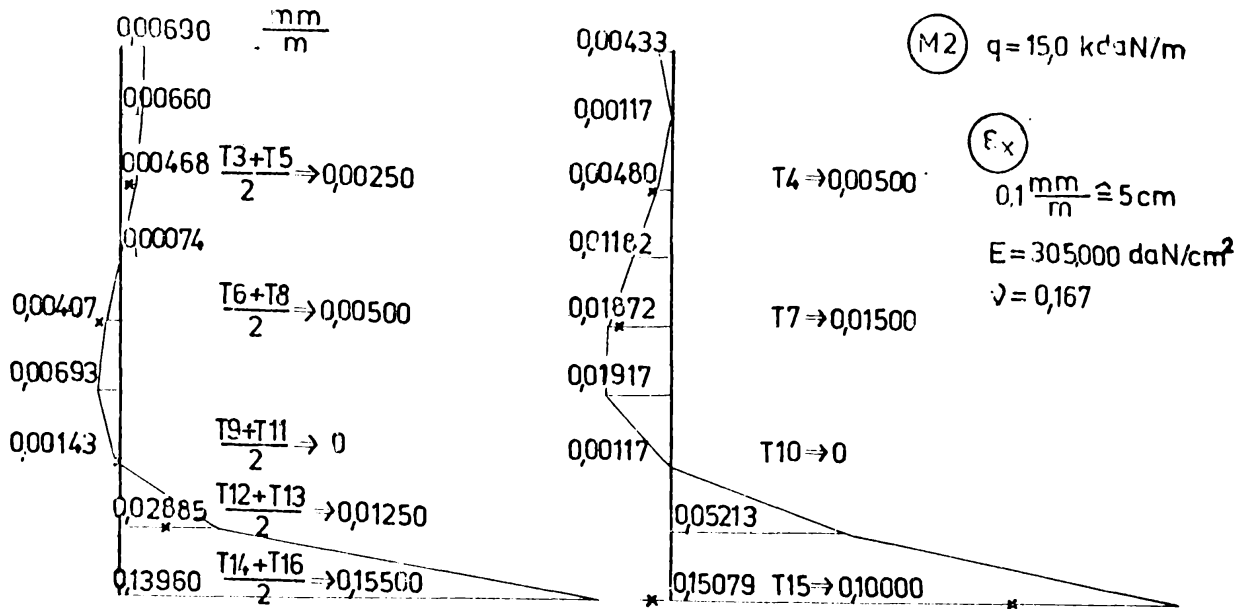


FIG. 76

Elem	$R_b$ daN/cm <sup>2</sup>	$R_i$ daN/cm <sup>2</sup>	$R_t$ daN/cm <sup>2</sup>	$P_f$ kdaN	$P_r$ kdaN	$\frac{P_f}{P_r}$	$P_e = \frac{P_r}{1,8}$	$P_e > P_f$	$a_f$ (mm)	$P_{max}^{cu}$ $a_f < 0,3 \text{ mm}$	Obs.
M0	451	405	35,9	18,0	42,0	0,429	23,3	da	0,07	27,0	c.reaz.
M0 <sub>1</sub>	451	405	35,9	27,0	36,9	0,731	20,5	nu	—	30,0	
M3	430	422	35,9	22,5	36,6	0,614	20,3	nu	—	25,5	
M2	355	310	30,2	16,5	32,7	0,504	18,2	da	0,05	27,0	
M1	390	340	30,0	18,0	34,2	0,526	19,0	da	0,07	27,0	
A0	451	405	35,9	24,0	39,0	0,615	21,6	nu	—	27,0	
A0 <sub>1</sub>	451	405	35,9	22,5	36,6	0,614	20,3	nu	—	24,0	
A3	480	422	35,9	27,0	34,5	0,781	19,2	nu	—	30,0	
B3	480	422	35,9	25,5	34,2	0,746	19,0	nu	—	25,5	
C3	480	422	35,9	22,5	37,2	0,605	20,6	nu	—	24,0	
A2	355	310	30,2	18,0	35,4	0,508	19,7	da	0,06	24,0	
B2	355	310	30,2	16,5	35,4	0,466	19,7	da	0,05	21,0	
C2	355	310	30,2	15,0	32,7	0,459	18,2	da	0,16	21,0	
A1	390	340	30,0	13,5	39,0	0,346	21,7	da	0,05	30,0	
B1	390	340	30,0	13,5	34,8	0,388	19,3	da	0,06	27,0	
C1	390	340	30,0	10,5	19,8	0,530	11,0	da	0,07	18,0	

FIG. 77

Elem.	$P_f$ [kdaN]				$P_r$ [kdaN]			$P_c$ [kdaN]	$P_c > P_f$	
	exper.	c.elast	dif.	$\frac{c}{p}$ plastic	dif.	exper.	calcul			dif.
M0	18,0	11,7	-35,0%	22,9	+27,2%	42,0	31,2	-25,7%	17,3	nu
M0 <sub>1</sub>	27,0	11,7	-56,7%	22,9	-15,2%	36,9	31,2	-15,4%	17,3	nu
M3	22,5	11,5	-48,6%	22,4	-0,4%	36,6	31,2	-14,7%	17,3	nu
M2	16,5	9,8	-40,6%	19,5	+18,2%	32,7	31,1	-4,9%	17,3	nu
M1	18,0	10,0	-44,4%	19,2	+6,7%	34,2	31,1	-9,1%	17,3	nu
A0	24,0	13,2	-45,0%	26,9	+12,1%	39,0	30,5	-21,5%	17,0	nu
A0 <sub>1</sub>	22,5	13,2	-41,3%	26,9	+19,6%	36,6	30,5	-16,7%	16,9	nu
A3	27,0	14,0	-48,1%	28,5	+5,6%	34,5	30,7	-11,0%	17,1	nu
B3	25,5	11,8	-53,7%	24,7	-3,1%	34,2	30,2	-11,7%	16,8	nu
C3	22,5	13,5	-40,0%	20,2	-10,2%	37,2	29,7	-20,2%	16,5	nu
A2	18,0	9,4	-47,8%	17,2	-4,4%	35,4	30,6	-13,5%	17,0	nu
B2	16,5	8,9	-46,1%	15,6	-5,5%	35,4	30,1	-15,0%	16,7	da
C2	15,0	8,0	-46,7%	14,1	-6,0%	32,7	29,5	-9,8%	16,4	da
A1	13,5	7,7	-43,0%	14,6	+8,1%	39,0	47,7	+22,3%	26,5	da
B1	13,5	7,2	-46,9%	14,8	+9,6%	34,8	33,5	-3,7%	18,6	da
C1	10,5	6,1	-41,9%	11,9	+13,3%	19,8	28,4	+43,4%	15,8	da

FIG. 78

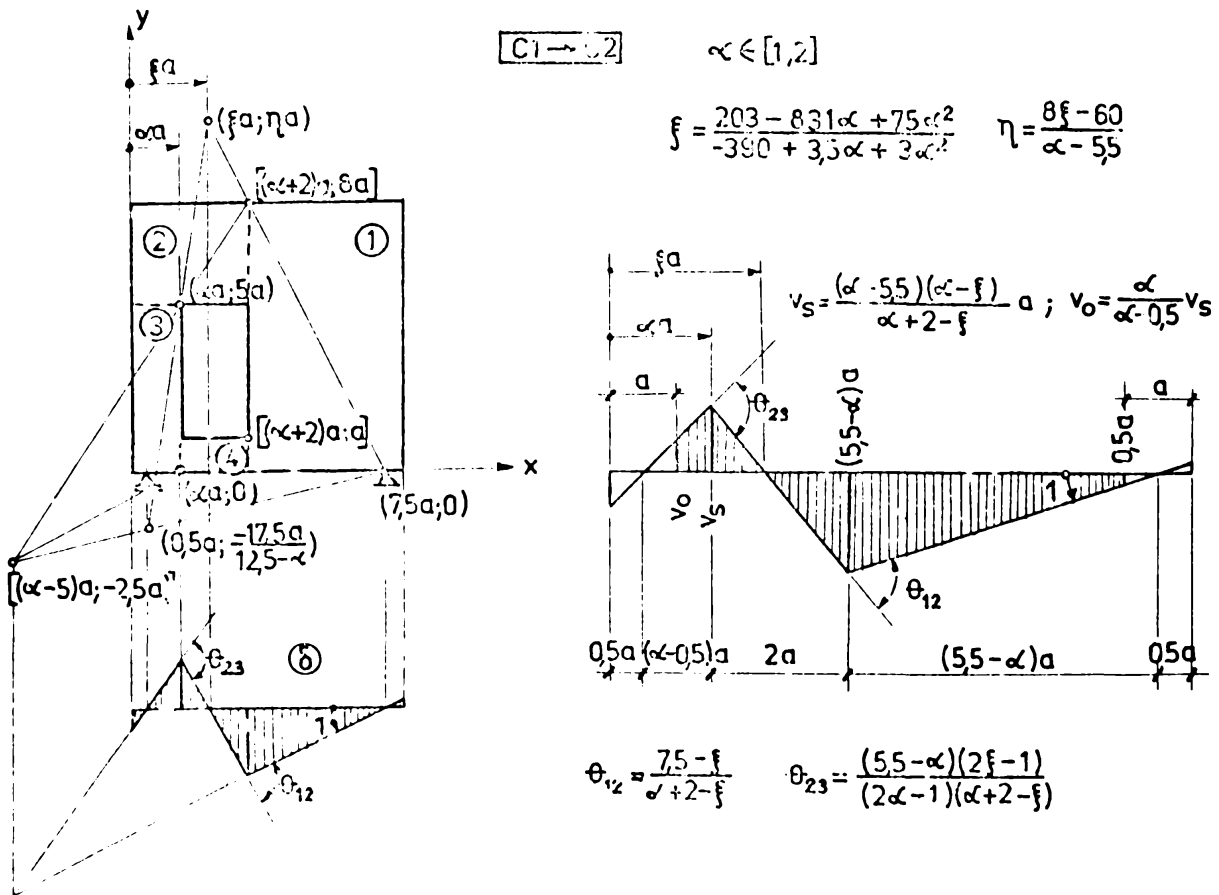


FIG. 79



rile calculate în cele două variante, elastică și ținând seama de plastificare, cât și diferențele față de valorile experimentale sînt cuprinse în tabelul din figura 78.

#### 4.2.4. Calculul încărcării de rupere

Încărcările de rupere s-au determinat pornind de la cele două mecanisme de cedare schițate în figura 72. Cedarea elementelor pline și a celor cu goluri în pozițiile 3 și 2 s-a produs prin ruperea armăturii principale cât și a unor bare învocate ale plasei suplimentare de armătură și zdrobirea betonului comprimat, în concordanță cu mecanismul 1. Valorile calculate ale încărcărilor  $F_p$  sînt redată în tabelul din figura 78. Abaterile față de valorile găsite experimental sînt cuprinse între (-4,9%) și (-25,7%). Acestea pot fi puse parțial pe seama frecării rolor de reazem. Cu un coeficient de frecare de 2,5% - determinat experimental - s-au corectat valorile teoretice, noul domeniu al abaterilor, cuprins între (+8,9%) și (-12,4%), apropiindu-se mai mult de valorile determinate experimental.

La elementele cu goluri în poziția 1 s-a observat tendința formării unui mecanism de cedare de tip 2. Ruperea propriu zisă a avut loc însă prin cedarea locală a montanților la elementele A1 și B1, respectiv prin formarea fisurii 3 la elementul C1 (anexa V). Aceste cedări locale se datorează probabil reducerii capacităților de rotație ale articulațiilor plastice, datorită armăturilor suplimentare în jurul golurilor, respectiv ancorării insuficiente a armăturii suplimentare deasupra golului, la elementul C1. Teoretic, admitînd atingerea limitei de curgere în armături, s-au obținut valori ale încărcării de rupere cu (22,3% - 43,4%) mai mari decît cele experimentale. Numai pentru elementul B1 s-a obținut o valoare foarte apropiată de cea expe-

rimentală (diferența : - 3,7%). Se menționează, așa cum s-a arătat și la punctul 4.1.3, că o altă cauză a neconcordanței între valorile teoretice și experimentale este neluarea în considerare a efectului forțelor axiale și tăietoare, efect prea puțin studiat la asemenea elemente.

În vederea studiului trecerii de la mecanismul 2 la mecanismul 1, în funcție de poziția golului, s-a aplicat teorema de minim a calculului plastic [37]. În figura 79 se prezintă, spre exemplu, variația mărimilor ce intervin în calculul plastic, în funcție de poziția golului dată de  $\alpha \in [1,2]$ , pentru elementele cu goluri de tip C. Pentru simplificarea calculelor, la studiul cinematic al mecanismelor s-au neglijat înălțimile zonelor comprimate de beton, fiind mici. Calculul s-a făcut pentru două cazuri: fără armături suplimentare în jurul golurilor (cazul a) și cu armăturile suplimentare din figura 73 (cazul b). Expresiile pentru calculul încărcării de rupere  $P_r$  sînt prezentate în figura 80. Din diagramele desenate în aceeași figură rezultă că în cazul "a" trecerea de la mecanismul 2 la mecanismul 1 are loc pentru  $\alpha = 1,56 + 1,95$ , iar în cazul "b" pentru  $\alpha = 1,08 + 1,44$ , în funcție de tipul golului.

#### 4.3. Încercări pe elemente perforate din mortar armat

Grinzile pereți mari necesită pentru încercare instalații de încărcare puternice și prezintă deformații mici, mai ales în stadiul I. Reducerea grosimii lor este limitată de pericolul pierderii stabilității. În vederea eliminării acestor dezavantaje, fără reducerea scării geometrice, la sugestia prof. I. Grüner s-a încercat aplicarea ideii perforării [38] grinzilor pereți de beton armat. Astfel s-au executat și încercat două grinzi pereți tip B2, cu tipuri de perforare diferite. Compor-

$$p_r \int \delta dx = \Sigma M \Theta \quad \Sigma M \Theta = (M_{12} + M_{14}) \Theta_{12} + (M_{23} + M_{34}) \Theta_{23}$$

$$\int \delta dx = [\alpha(-7\alpha^2 + 27\alpha + 69) + \xi(9\alpha^2 - 54\alpha + 26) - 41] a^2$$

- Ⓐ cazul a  $\Sigma M \Theta = \alpha(15\alpha + 8.152) + \xi(-30\alpha^2 - 962\alpha + 707) - 4.199$   
cazul b  $\Sigma M \Theta = \alpha(246\alpha + 20182) + \xi(-492\alpha^2 - 974\alpha + 6174) - 12.934$
- Ⓑ cazul a  $\Sigma M \Theta = \alpha(15\alpha + 7.692) + \xi(-30\alpha^2 - 900\alpha + 676) - 3.959$   
cazul b  $\Sigma M \Theta = \alpha(246\alpha + 16.452) + \xi(-492\alpha^2 - 480\alpha + 5.926) - 11.069$
- Ⓒ cazul a  $\Sigma M \Theta = \alpha(15\alpha + 3.667) + \xi(-30\alpha^2 - 334\alpha + 243) - 1.872$   
cazul b  $\Sigma M \Theta = \alpha(246\alpha + 12.394) + \xi(-492\alpha^2 + 522\alpha + 2.962) - 7.808$

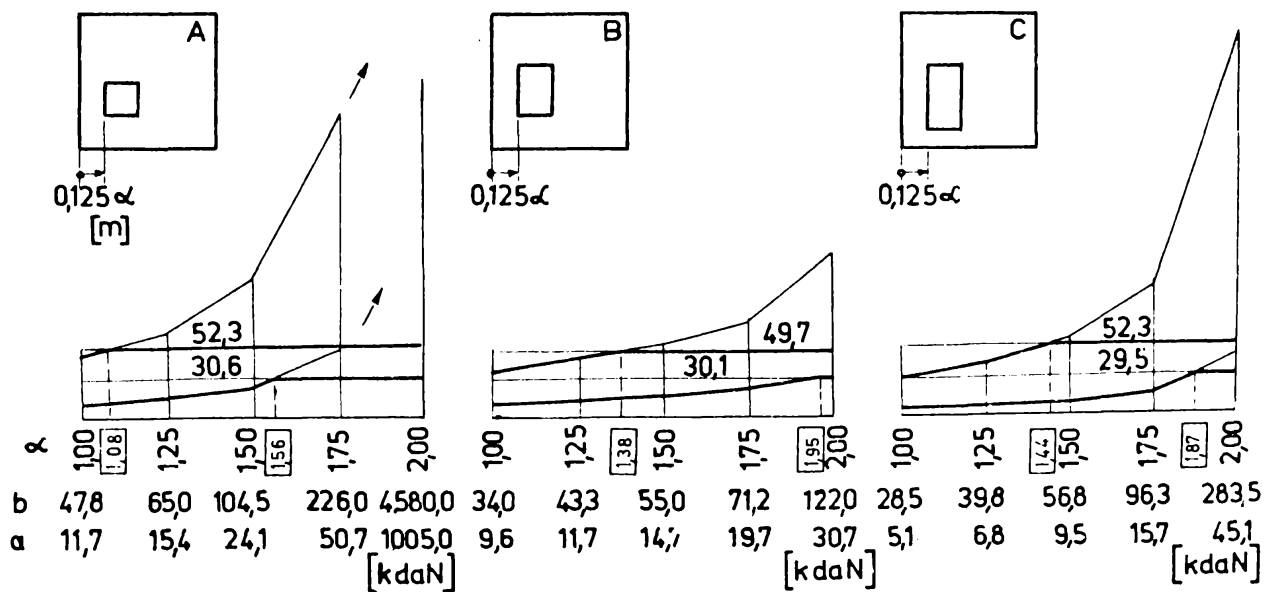
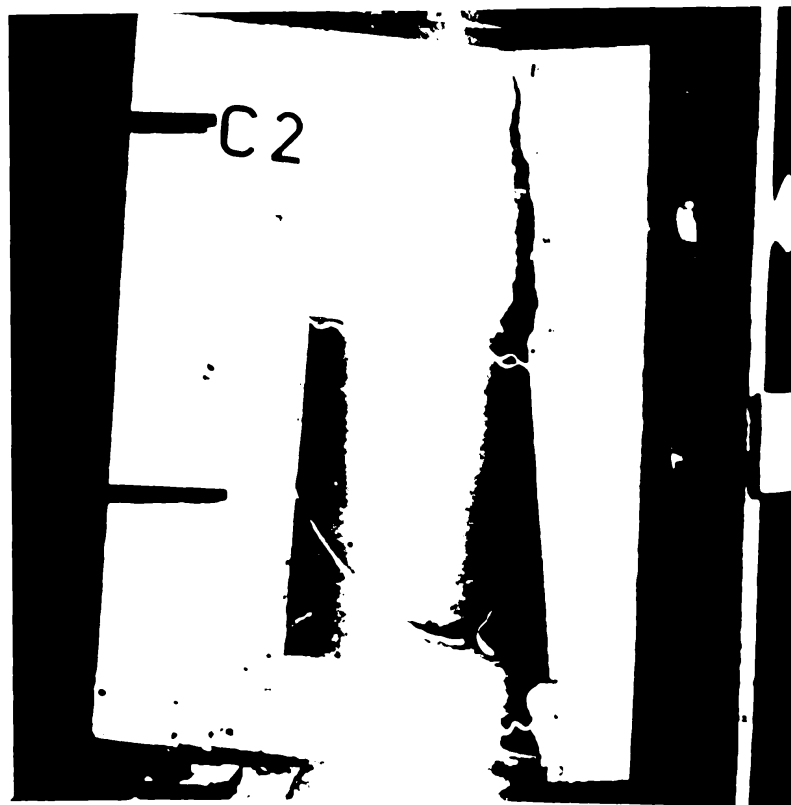
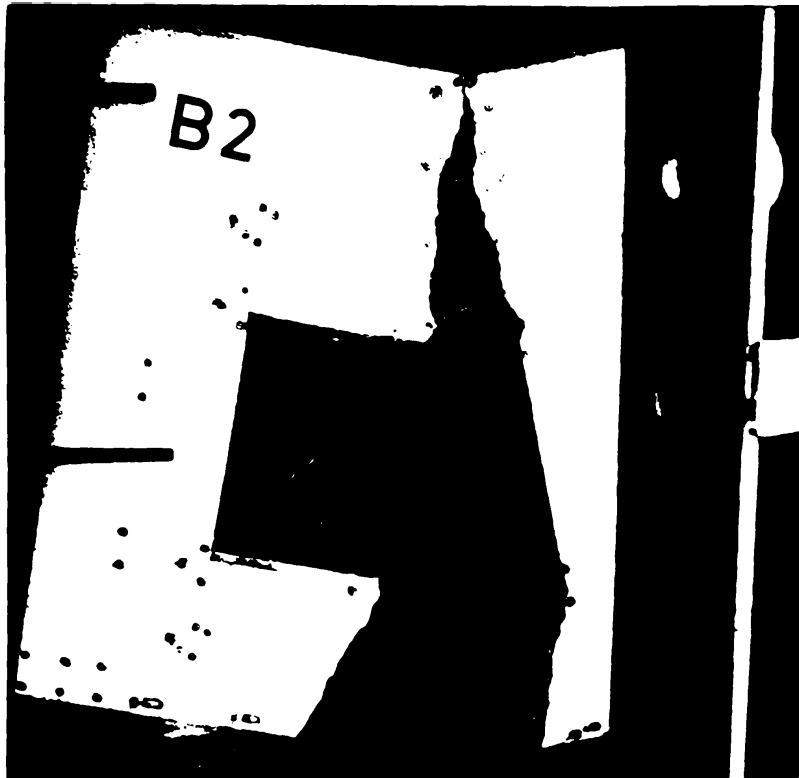


FIG. 80



F15-01

tarea mecanică a materialului s-a studiat în prealabil pe epruvete prismatice. Prismele și grinziile-pereți s-au executat din mortar pentru a permite o dispunere cât mai deasă a golurilor.

#### 4.3.1. Prisme perforate

Pentru găsirea caracteristicilor geometrice ale perforațiilor (diametru, pas) care să asigure un spor apreciabil al deformabilității s-a calculat raportul  $\rho$  al deformațiilor elementului perforat și plin, sub o încărcare uniaxială (fig.82). Acest calcul nu reflectă exact fenomenul, însă dă, așa cum s-a constatat experimental, indicații utile privind deformabilitatea reală.

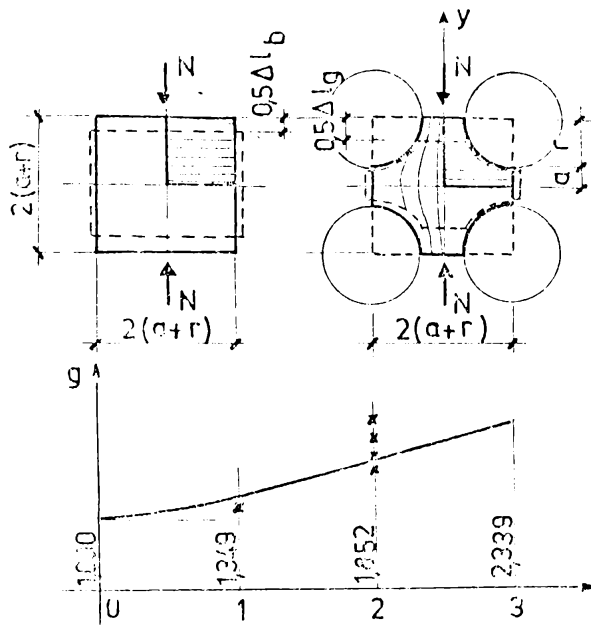
S-au încercat prisme pline (P) și perforate (P) de două mărimi (mici: 30x12,5x5 și mari: 40x15x5); unele din ele au fost armate. Pe prismele mici s-a studiat influența numărului golurilor și a pasului acestora, evidențiate prin rapoartele  $\rho = 1$  și  $\rho = 2$ , asupra deformabilității. Forma prismelor mari (L) s-a ales astfel încât să reprezinte decupări dintr-o grindă perote perforată. În același timp prismele mari au servit la studiul influenței poziției golurilor față de direcția de acțiune a încărcării asupra deformabilității. Astfel s-au încercat prisme cu rețeaua pătrată a perforațiilor paralelă cu marginile (G II L) și prisme la care această rețea a fost înclinată cu  $45^\circ$  față de margini (G III L D). Tabelul din figura 83 dă o privire de ansamblu asupra prismelor încercate, cu valorile modulilor de elasticitate și ale coeficienților Poisson determinați experimental. Anexa VI cuprinde diagramele  $N-\epsilon$  și  $N-\nu$  pentru toate prismele încercate cât și fotografiile prismelor mari după încercare. În figura 82 sînt reprezentate grafic

valorile rapoartelor  $\nu_g$  găsite teoretic și experimental. Prismele notate cu I și II s-au turnat împreună cu grinzi-pereteți B2-I și B2-II.

#### 4.3.2. Grinzi pereteți perforate

Pentru obținerea prismelor și grinzilor-pereteți perforate s-au folosit tuburi din PVC, ca în figura 85. După întărirea betonului tuburile s-au extras cu un dispozitiv cu șurub sprijinit pe suprafața exterioară a cofragului. Tabelul din figura 86 conține caracteristicile celor două grinzi-pereteți perforate având un gol de tip B2. Grinzile s-au deosebit prin amplasarea perforațiilor și prin armătura secundară sub formă de plasă. La elementul B2-I rețeaua perforațiilor a fost paralelă cu marginile, iar la elementul B2-II - înclinată la  $45^\circ$ , deci pe direcția diagonalelor. Amplasarea timbrei tensometrice și a ploturilor este dată în figurile 87 și 88. Timbrele lipite peste perforații au fost fixate, ca și în cazul prismelor, pe plăcuțe de araldit.

Modul de perforare a grinzii-perete B2-I s-a dovedit a fi necorespunzător, cedarea acesteia având loc prin forfecare la marginea golului (figura 90). Grinda-perete B2-II s-a comportat mai bine. Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  pentru această grindă este dată în figura 86. În figura 89 s-au reprezentat variațiile calculate ale deformațiilor specifice  $\epsilon_{yy}$  cât și valorile măsurate în stadiul I. Calculul s-a făcut în două variante: pentru  $E_{gd} = 35.000 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\nu_{gd} = 0,14$  și pentru  $E_m = (\nu_{gd} + \nu_g)/2 = 14.000 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\nu_m = (\nu_{gd} + \nu_g)/2 = 0,135$ . Ambele variante sînt aproximative, deoarece consideră grinda-perete ca fiind izotropă, așa cum de altfel s-a considerat și la calculul tensiunilor. Din figură se observă că valorile  $\epsilon_{yy}$  măsurate sînt situate în gene-



$$\Delta l_b = \frac{N}{Et} ; \quad \Delta l_g = \frac{N}{Et} \int_0^{2(a+r)} \frac{1}{f(y)} dy$$

$$f(y) = \begin{cases} a+r & \text{pentru } y \in [0, a] \\ a+r - \sqrt{r^2 - [y - (a+r)]^2} & \text{pentru } y \in (a, a+r) \end{cases}$$

$$g = \frac{\Delta l_g}{\Delta l_b} = \frac{E_b}{E_g} ; \quad \rho = \frac{r}{a}$$

$$g = \frac{1}{1+\rho} - \frac{\rho}{2} + \frac{2(1+\rho)}{\sqrt{1-2\rho}} = \text{arctg} \sqrt{1+2\rho}$$

x valori experimentale

$$\rho = \frac{r}{a}$$

FIG. 82

Tipul element.	Buc.	Perforații		Plasa de armături	E <sub>b</sub> , E <sub>g</sub> (daN/cm <sup>2</sup> )	ν <sub>b</sub> , ν <sub>g</sub>	ρ = r/a	E <sub>g</sub> (daN/cm <sup>2</sup> )	ν <sub>gd</sub>
		mărimea	poz.						
P1	2	—	—	—	200000	—	—	—	—
G1	2	φ12,5/2,5	vertic.	—	170000	—	1,21	—	—
P2	2	—	—	—	170000	—	—	—	—
G2	2	φ25/3,75	vertic.	—	—	—	1,36	—	—
P1	2	—	—	—	200000	0,13	—	—	—
G1	2	φ25/3,75	vertic.	—	—	0,23	2,49	—	—
P1	3	—	—	φ16/125	200000	0,15	—	—	—
G1	3	φ25/3,75	vertic.	φ16/125	112000	0,1	1,03	—	—
P1L	3	—	—	φ16/125	200000	0,15	—	—	—
G1L	3	φ25/3,75	vertic.	φ16/3,75	98000	0,13	2,26	—	—
G1LD	3	φ25/3,75	diag.	φ16/3,75	—	—	—	35000	0,14

FIG. 83

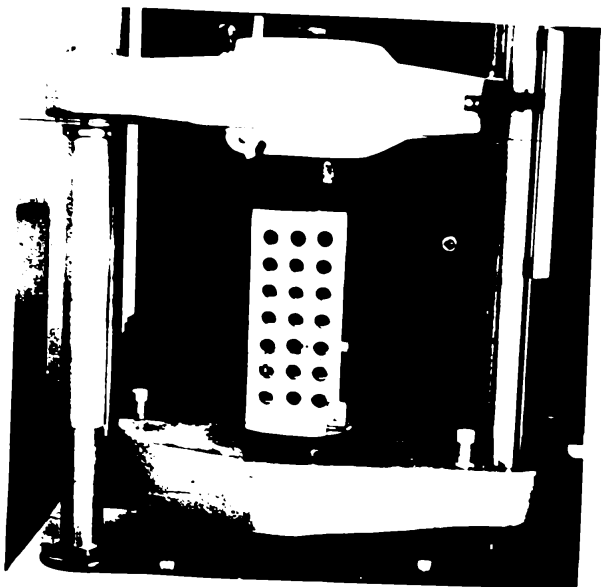


FIG. 84

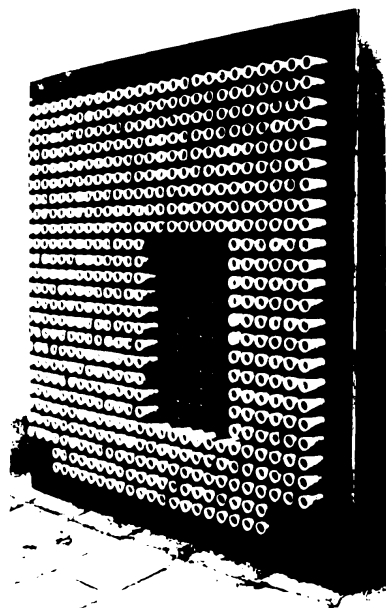
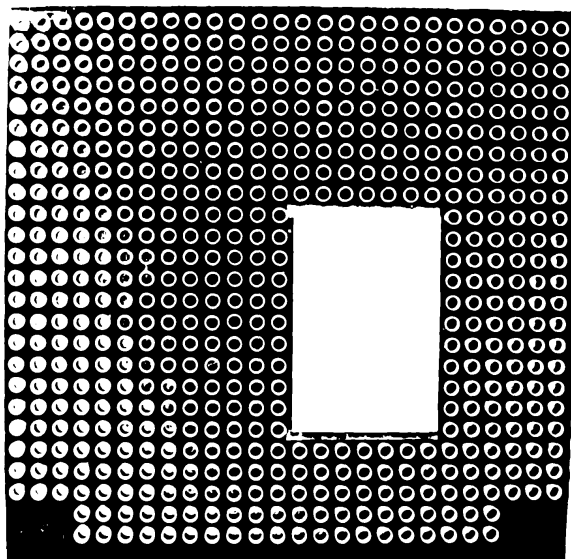


FIG. 85

Tiparul pentru B2-I



Elem.	Perforatiil		Plasa de armături	E <sub>b</sub> [daN/cm <sup>2</sup> ]	E <sub>g</sub> [daN/cm <sup>2</sup> ]	E <sub>f</sub> E <sub>g</sub>	E <sub>gd</sub> [daN/cm <sup>2</sup> ]	P <sub>f</sub> [kdaN]	P <sub>r</sub> [kdaN]	P <sub>f</sub> P <sub>r</sub>
	mărirea	poz.								
B2-I	φ25/3,75	vertic.	φ1,6/12,5	220.000	88.200	2,49	—	7,5	9,0	0,832
B2-II	φ25/3,75	diag.	φ1,6/3,75	210.000	93.000	2,26	35.000	6,0	9,6	0,625

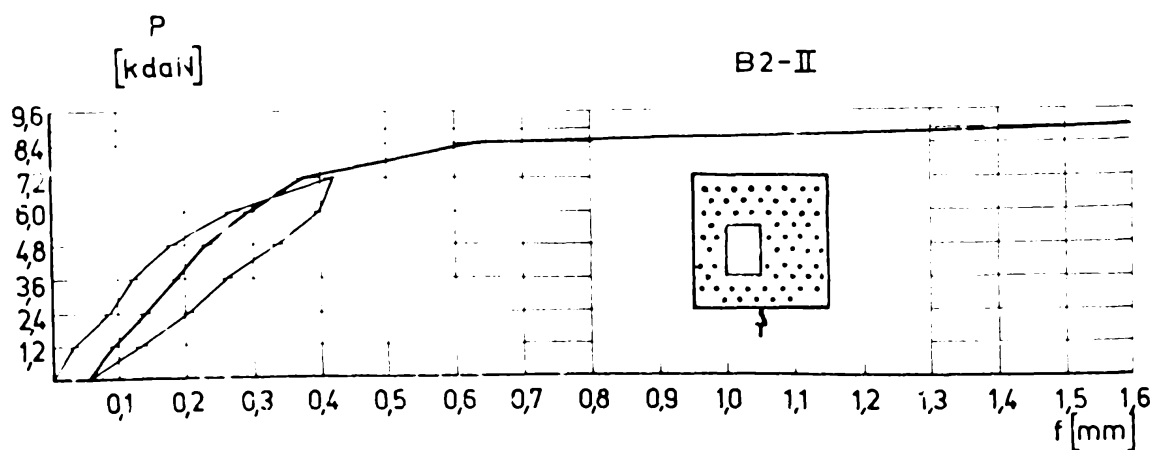
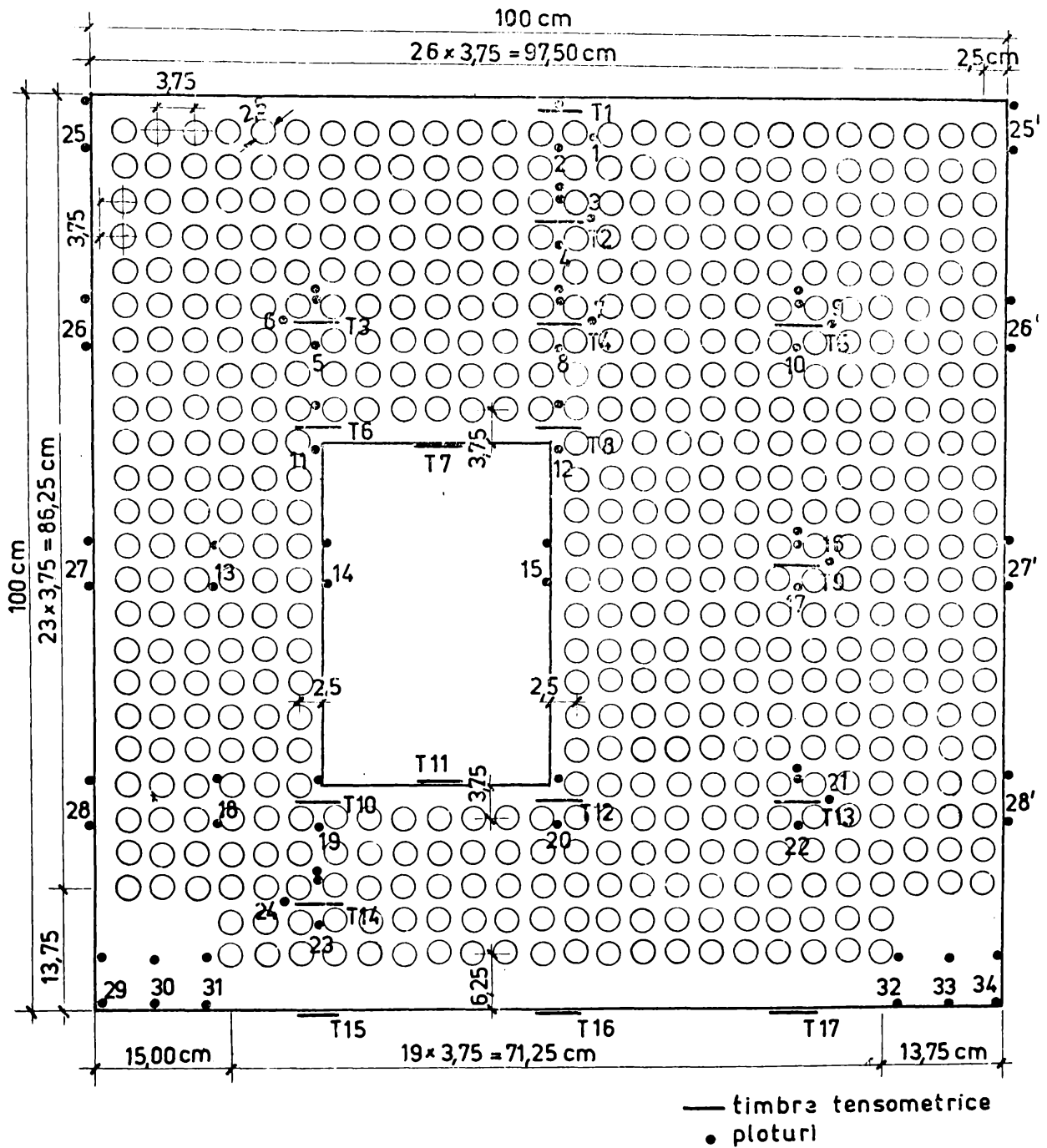


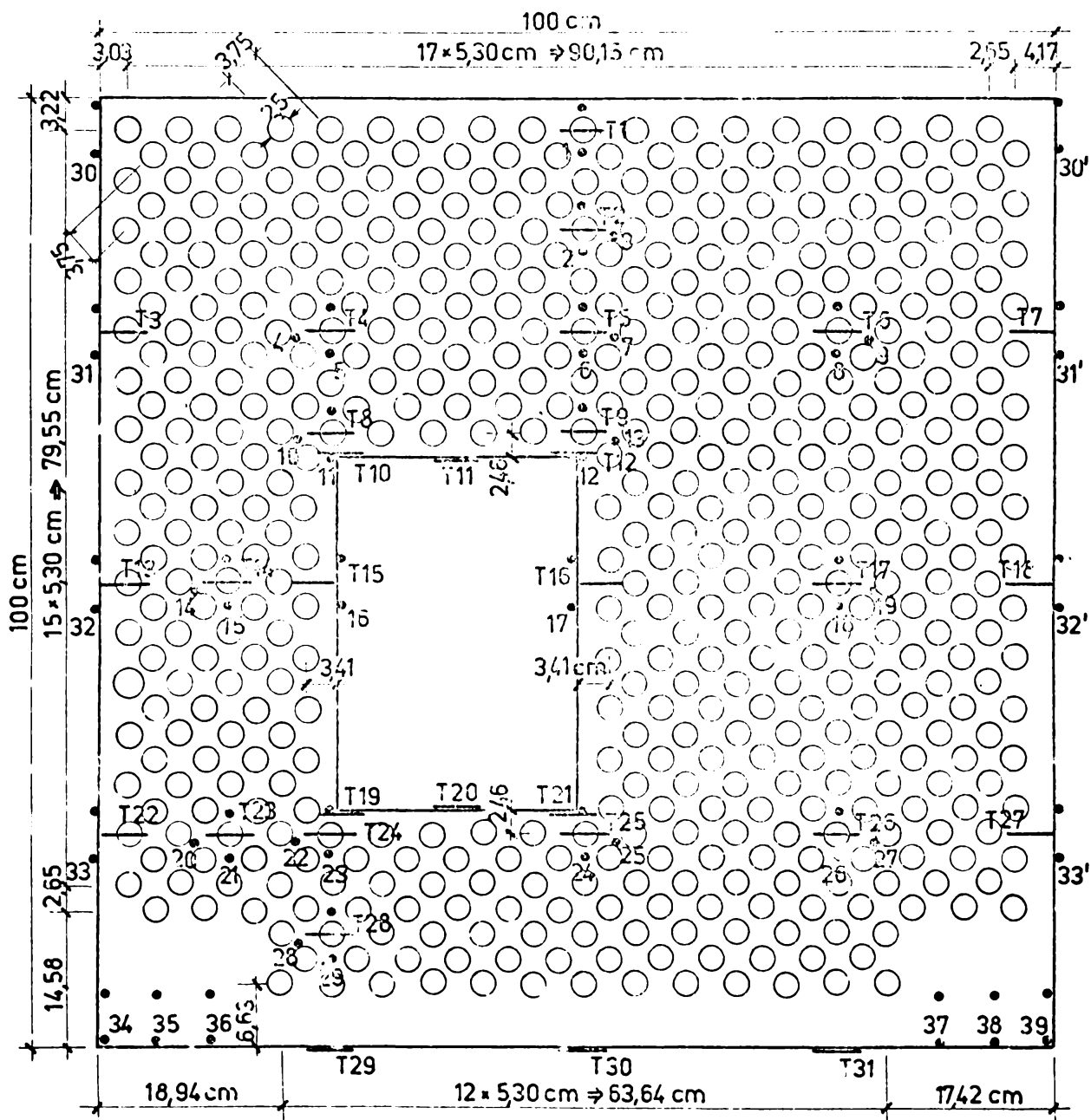
FIG. 86





Grinda perete B2-I

FIG. 87



— timbre tensometrice  
 • ploturi

Grinda perete B2-II

FIG. 88

B2-II

q = 3,6 kdaN/m.

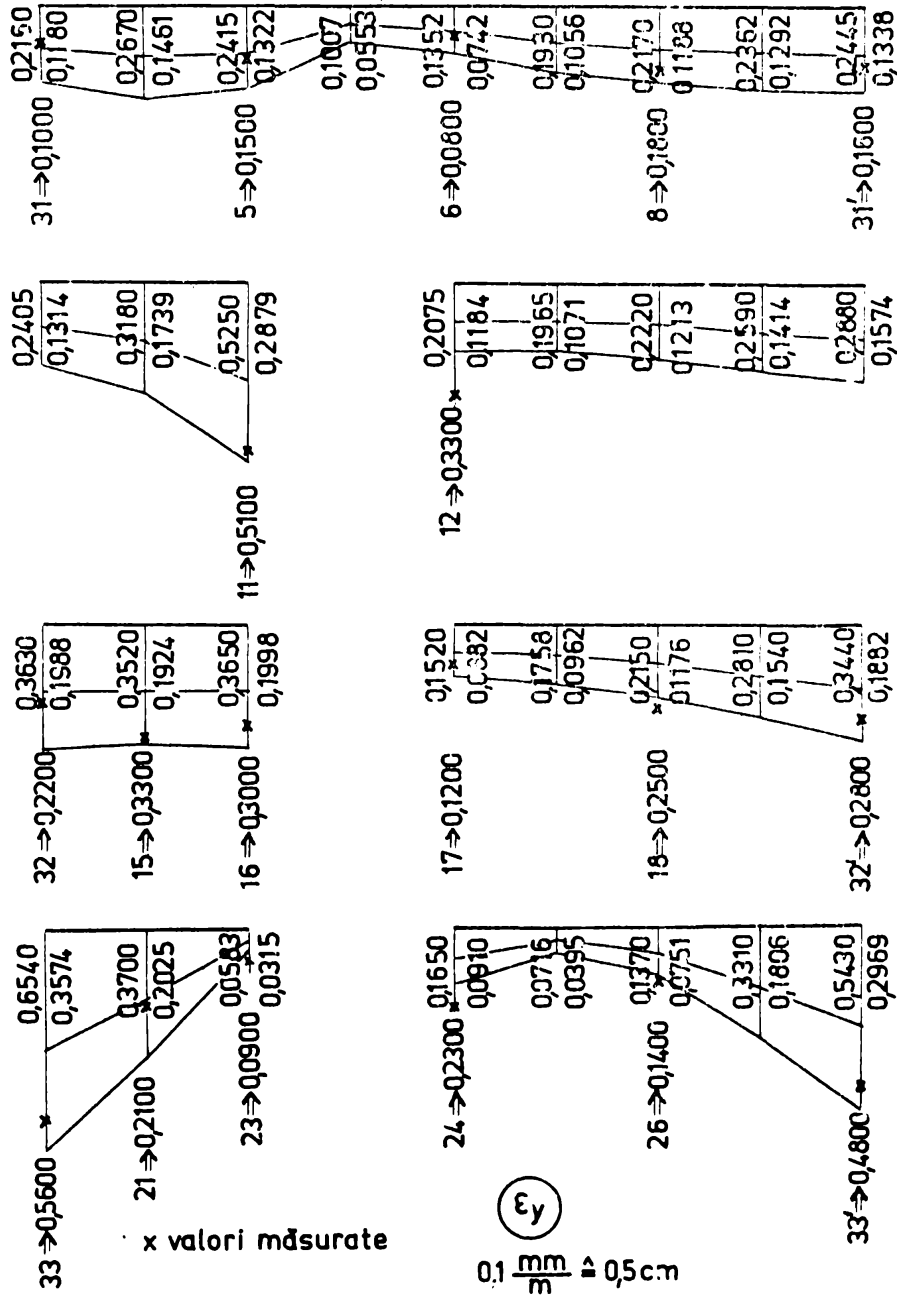


FIG. 89

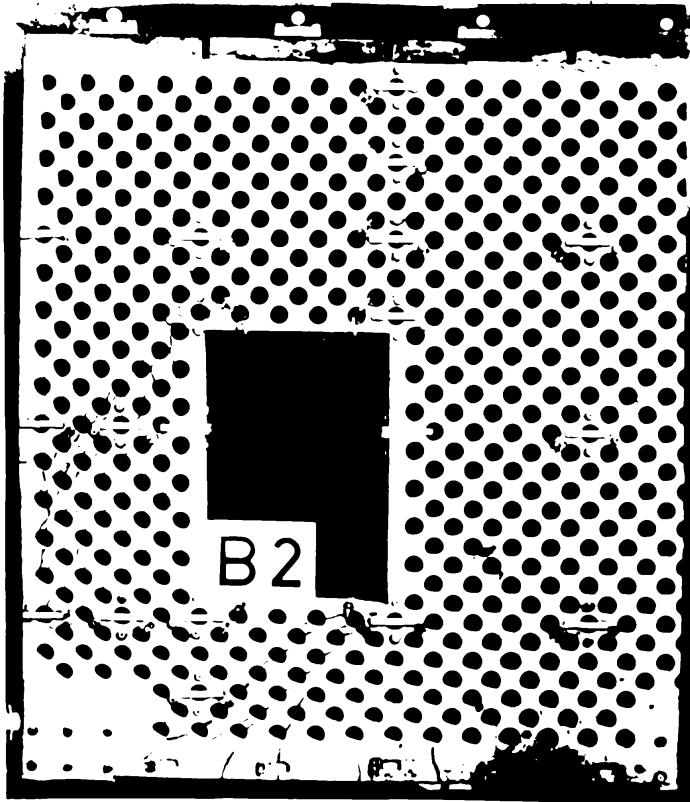
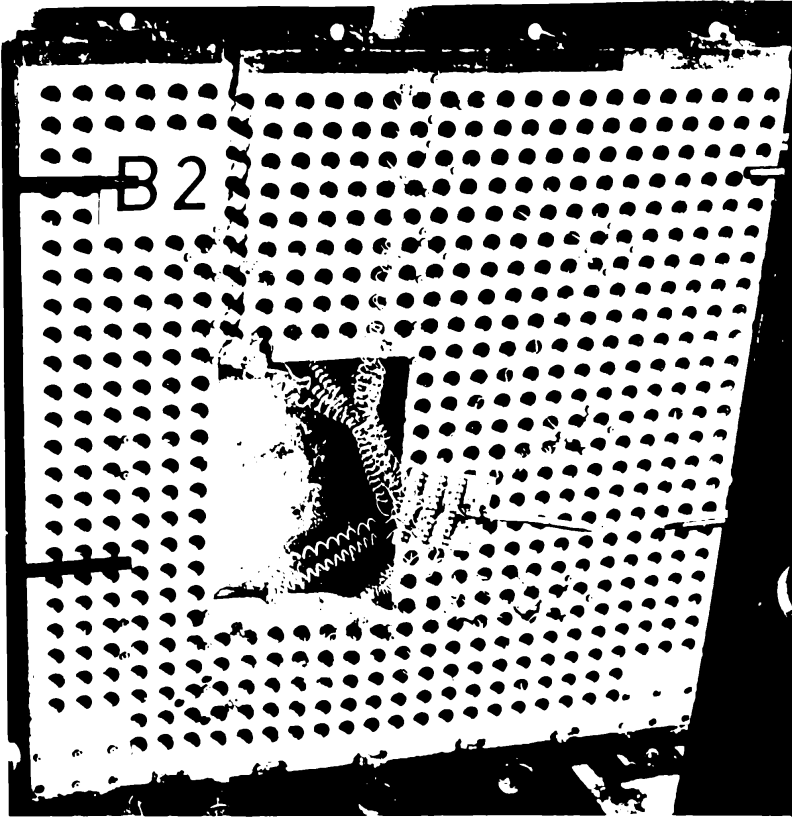


FIG. 90

ral între cele două curbe teoretice. Grinda-perete B2-II și-a atins capacitatea portantă prin cedarea „arcului” (figura 90) spre deosebire de cedarea „tirantului” la grinzile-perete de același tip neperforate. Armătura principală, aceeași ca în cazul grinzii-perete de beton armat B2 a fost deci prea puternică. Anexa VII cuprinde fotografiile ale grinzilor-perete perforate după încercare.

Pentru îmbunătățirea modelării cu ajutorul unor elemente perforate este indicată micșorarea diametrului perforațiilor (păstrându-se însă raportul  $q$  cel puțin egal cu 2), în vederea creșterii omogenității. De asemenea este necesară efectuarea unor încercări biaxiale pentru determinarea proprietăților mecanice cât și aplicarea metodei elementelor finite la calculul eforturilor și deformațiilor.

## 5. SINTEZĂ ȘI CONCLUZII

Primele două capitole cuprind dezvoltările teoretice legate de studiul stării de tensiune plano. Unele dintre rezultatele teoretice obținute se aplică în capitolele 3 și 4 în vederea urmării comportării grinzilor-pereti simplu rezemate, pline și cu goluri dreptunghiulare pentru ferestre și uși.

### 5.1. Dezvoltarea teoriei de calcul

În primul capitol se prezintă pe scurt posibilitățile de rezolvare a problemei plano în stadiul elastic pentru structuri omogene, prin calcul și experimental. Se insistă asupra metodelor de calcul aproximative bazate pe discretizarea matematică respectiv fizică a problemei, avându-se în vedere caracterul universal al acestora. După formularea ecuației cu derivate parțiale a problemei plano pentru elemente de beton armat în stadiul elastic se prezintă posibilitățile de urmărire, prin calcul, a acestora în stadiile postelastico. Legat de acestea se deduc criteriile de rupere pentru betonul simplu în ipoteza  $\sigma_{yy} \ll f_c$ , ce se confruntă cu unele rezultate experimentale. Aceste criterii se generalizează astfel încât să permită luarea în considerare a unei rețele ortogonale de bare de armătură. Capitolul se încheie cu o prezentare succintă a stabilității plăcilor plano elastice și de beton armat.

Capitolul 2 este consacrat dezvoltării principalelor metode aproximative pentru soluționarea problemei plano în stadiul elastic. Prin aplicarea colocației punctuale propuse de S.Falk [37] ecuației cu derivate parțiale a problemei plano (12),

dedusă în capitolele anterior, rezultă operatorii cu diferențe finite (colocația într-un singur nod) cât și operatorii plurilocali (colocația în cinci noduri). Avantajele acestui procedeu constau în primul rând în aceea că se obține o funcție de variație a lui  $F$  pe subdomenii și prin derivarea acesteia variația tensiunilor [6]. De asemenea procedoul permite deducerea unor operatori cu precizie sporită, dacă funcția de aproximare de bază  $S$  se alege de tip hermitic, cât și utilizarea unor rețele de calcul cu pași variabili.

Prin generalizarea colocației punctuale se introduce colocația numită liniară, obținându-se operatori pentru aproximarea ecuației (12) printr-un sistem de ecuații diferențiale. Similar colocației punctuale, colocația în lungul unei singure drepte respectiv în lungul a trei drepte permite obținerea unor operatori cu grad de precizie diferit. În continuare se prezintă o posibilitate de integrare a sistemului de ecuații diferențiale în cazul domeniilor dreptunghiulare simplu conexe cât și extinderea acestuia la domenii dublu conexe cu contururi dreptunghiulare paralele între ele. Prin urmare sensul logic se exemplifică aplicarea acestui procedeu, cu posibilități de extindere la domenii multiple conexe.

În cadrul discretizării fizice se prezintă posibilitățile de caracterizare a rigidităților elementelor finite dreptunghiulare prin modele de deplasări, modele de torsiuni și modele hibride, scoțându-se în evidență legătura între ultimele două. Pe baza modelului hibrid propus de E.F.F. Pian [10] se deduce expresia generală a matricii rigidităților unui element finit cu patru noduri cât și particularizarea acesteia pentru forța pătrată și  $\nu = 0,17$ . Prin extinderea modelului se construiește matricia

rigidităților unui element finit pătrat, de trecere, cu cinci noduri. Capitolul se încheie cu studiul unui ansamblu format din substructuri rezolvate în metoda elementelor finite respectiv în metoda diferențelor finite.

Rezultatele teoretice principale ale tezei se referă la: formularea ecuației problemei plane pentru un element elastic din beton armat; deducerea criteriilor de rupere pentru betonul simplu în domeniul compresiune-întindere când  $\sigma_{yy} < 0$ ; reformularea criteriilor de rupere pentru domeniile compresiune-întindere și compresiune-compresiune ținând seama de aportul armăturii la preluarea eforturilor; aplicarea cologației punctuale pentru determinarea operatorilor cu diferențe finite și pluri-locali în problema plană; introducerea cologației liniare ca o extindere a celei punctuale; extinderea metodei scriilor de matrice pentru integrarea sistemelor de ecuații diferențiale la domenii dublu și multiplu conexe; deducerea matricii rigidităților elementului finit de trecere ca model hibrid în cazul general; introducerea elementului finit de trecere cu cinci noduri și deducerea matricii corespunzătoare a rigidităților.

## 5.2. Compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale.

Capitolul 5 cuprinde calculul eforturilor în grinzile-pereteți din figura 4b considerate elastice, omogene și izotrope; cele cu goluri se consideră prin înălțimea  $(1,7,0)$  și poziția  $(1,2,3)$  acestora. Pentru calculul cu metoda diferențelor finite s-a ales, ținând seama de posibilitățile calculatorului disponibil, o rețea cu ochiuri pătrate egale cu  $1/8$ . Operatorii din anexa I s-au adus pentru ușurarea determinării matricilor  $[s]$  și  $\{A\}$ . Pentru alte poziții ale golurilor, necunoscute-



le  $\{X\}$  rezultă din polinoame de interpolare. Variațiile tensiunilor  $\{\sigma\}$  sînt reprezentate în anexa II. Acestea dau împreună cu tensiunile principale o imagine clară asupra transmiterii încărcării uniforme, aplicate la marginea superioară, spre reazeme. Se fac aprecieri privind precizia rezultatelor obținute. O mai bună aproximație a vîrfurilor de tensiuni ar fi necesitat micșorarea ochiurilor rețelei de calcul în jurul golurilor. Pe de altă parte, ținînd seama de faptul că plăcile de beton armat pot fi considerate corpuri tip Cosserat și de reducerea vîrfurilor de tensiuni datorită deformațiilor neelastice, rezultatele pot fi considerate suficient de exacte pentru scopurile practice. S-au determinat și măsurile de calcul necesare dimensionării pe baza stadiului I și anume rezultanta tensiunilor de întindere  $\sigma_{xx}$ , înălțimea zonei întinse  $h_1$  și brațul de pârghie al eforturilor interioare.

Unul din elementele cu gol central s-a calculat și aplicînd metoda elementelor finite în trei variante. Rezultatele cele mai bune s-au obținut folosind elemente finite hibride de formă pătrată cu patru respectiv cinci noduri.

Numărul grinzilor-pereți studiate experimental de către alți autori sub acțiunea unei încărcări uniforme distribuite la marginea superioară fiind redus, programul experimental propriu a cuprins încercarea a 42 elemente de acest tip. Dintre acestea un număr de 24 s-au executat din mortar armat, 16 din beton armat și 2 din mortar armat perforat. Comportarea lor este prezentată în capitolul 4. Elementele de mortar armat (40x40x2cm) au servit la obținerea unor date calitative privind comportarea grinzilor-pereți din figura 48, în starea limită de rezistență. Armarea lor s-a ales ținînd seama de cercetările lui H.Bay [15] și

F. Leonhardt [80]. S-au pus în evidență două moduri de cedare. Grinzile-pereteți pline și cu goluri în pozițiile 3 și 2 se desfac în două elemente, conform mecanismului de rupere 1, iar grinzile pereteți cu goluri în poziția 1 se desfac în patru elemente, conform mecanismului de rupere 2 (fig. 72 și anexa IV).

Pe elementele experimentale din beton armat cu dimensiuni mai mari (100x100x5 cm) s-a găsit o bună concordanță a valorilor deformațiilor specifice calculate și măsurate în stadiul elastic. Considerând un coeficient de siguranță față de rupere egal cu 1,8 se constată că grinzile-pereteți pline și cele cu goluri în poziția 3 nu prezintă fisuri în situația de exploatare. Acestea se comportă deci ca elemente de beton slab armat ( $\mu\% = 0,115$ ). Grinzile-pereteți cu goluri în pozițiile 2 și 3 sînt fisurate în această situație, mărimile deschiderii fisurilor fiind însă mici. În ceea ce privește fisurarea se constată că se obțin valori ale lui  $P_f$  mai apropiate de cele observate atunci cînd se admite plastificarea zonei întinse de beton. Trecerea de la mecanismul de rupere 1 la mecanismul de rupere 2, depinde de poziția golului, de mărimea acestuia cît și de armarea în jurul golului. În cazul mărimilor de goluri studiate, cu cît marginea superioară a golului este mai apropiată de marginea superioară a grinzii, trecerea la mecanismul 2 se face pentru un  $\alpha$  mai mare. La grinzile-pereteți pline și la cele cu goluri în pozițiile 3 și 2 nu este necesară armarea în jurul golurilor. Cantitatea de armătură dispusă sub formă de bare drepte în vecinătatea marginii inferioare rezultă cu precizie suficientă dintr-un calcul corespunzător mecanismului de rupere 1. În armătură se poate considera atingerea lui  $\sigma_r$ , dacă procentul de armare este cuprins între limitele folosite la încercările efectuate ( $\mu\% =$

= 0,077-0,120%). Dacă golul este amplasat marginal se recomandă dispunerea unor bare de armătură în jurul acestuia. Pentru precizarea cantității necesare de armătură sînt necesare cercetări suplimentare, comportarea mecanismului 2 nefiind suficient de bine studiată.

Principalele rezultate ale ultimelor două capitole ale tezei se rezumă la următoarele: aplicarea practică a metodei diferențelor finite și a metodei elementelor finite la studiul unor grinzi-pereți pline și cu goluri; determinarea pe această bază a min.ilor de calcul necesare proiectării; studiul experimental al unor grinzi-pereți din mortar armat, beton armat și mortar armat perforat; verificarea concordanței între mărimile deformațiilor specifice teoretice și experimentale; determinarea prin calcule a încălcării de fisurare; evidențierea a două moduri de cedare a grinzilor pereți cu goluri; dimensionarea armăturii de rezistență ținînd seama de comportarea reală a grinzilor-pereți, ce duce la soluții mai economice decît dimensionarea bazată pe distribuția tensiunilor în stadiul I; introducerea unor elemente perforate în vederea ușurării armării deformațiilor în problemele plane și punerea la punct a tehnologiei de execuție a acestora.



## BIBLIOGRAFIE

1. Aass A., Matrix Progression Method, Bauingenieur, 8/1964, 306-311, 10/1964, 417-421.
2. Absi L., Méthode des éléments finis, Annales de l'ITBTP, 10/1969, 1593-1621.
3. Agent R., Sisteme reticulare nedeterminate, Ed. Tehnică, București, 1970.
4. Anastasescu D., Calculul cadrelor spațiale de beton armat pe reazeme deplaseabile, Rezumatul tezei de doctorat, Timișoara, 1972.
5. Andermann F., Statik der rechteckigen Scheiben, Berner Verlag, Düsseldorf, 1968.
6. Appeltauer I., Anastasescu D., Considerații asupra soluțiilor energetice ale mecanicii construcțiilor, Bul. St. și Teh. al IPT, tom 2(16), fasc. 2, 1957.
7. de Arantes e Oliveira E.R., Theoretical Foundations of the Finite Element Method, Intern. J. Solids Structures, 1968, 929-952.
8. Argyris J.H., Die Matrixtheorie der Statik, Ing.-Archiv, 1957, 174-194.
9. Argyris J.H., Matrix Displacement Analysis of Plates and Shells, Ing.-Archiv, 35 Bd., 2/1966, 102-142.
10. Avram C., Filimon I., Curs de beton armat, partea a III-a, Ed. Did. și Ped., București, 1962.

11. Avram C., Filimon I., Marinov R., Die Biegezugfestigkeit des Betons, Wiss. Zeitschr. EW. Dresden, 6/1968, 1543-1545.
12. Avram C., Făcăoaru I., Filimon I., Mirșu O., Terteș I., Resistențele și deformațiile betonului, Ed. Tehnică, București, 1971.
13. Bay H., Wandartigen Träger und Bogenscheibe, K. Wittwer, Stuttgart, 1960.
14. Bay H., Gleit- und Trennriss beim ebenen Spannungszustand, Beton u. Stahlbetonbau, 6/1964, 125-132.
15. Bay H., Spannungsumlagerungen im Stahlbetonträger, Beton u. Stahlbetonbau 12/1965, 277-285.
16. Bălan St., Arcan M., (red.), Incercarea construcțiilor, Ed. Tehnică, București, 1965.
17. Benjamin J.R., Williams H.A., Behavior of One - storey Reinforced Concrete Shear Walls Containing Openings, Journal of the ACI, 11/1958, 605-618.
18. Berg O. Ia., Fizicasskie osnovi teorii procinosti betona i jelezobetona, Gosstroizdat, Moskva, 1961.
19. Bhaumik A.K., Hanley J.I., Elasto-Plastic Plate Analysis by Finite Differences, J. of the Struct. Div., ST5/1967, 279-294.
20. Bode H., Ein Ansatz zur Bestimmung der Funktion, die ein beschränktes Gebiet, dessen Rand aus zwei Rechtecken besteht, konform auf einen Kreisring abbildet, Wiss. Zeitschr. H.A.B. Weimar, 2/1970, 129-130.

21. Boushamp J.G., Analysis of Two-Dimensional Stress Problems by the Moiré - Method, Experimental Mechanics, Pergamon Press, Oxford, 1963, 195-219.
22. Burggrabe A.H., Mikrobeton für modellstatische Untersuchungen, Dt.A.f.St.Heft 225, V.v.W.Ernst u.Sohn, Berlin, 1972.
23. Carpenter J.H., Hanson N.W., Tests of RC Wall Beams with Large Web Openings, Journal of the ACI, 9/1969, 756-766.
24. Corvenka V., Gerstle K.H., Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels: Theory, Memoires AFPC, 31-II/1971, 31-45.
25. Clemens G., Verbesserte Randwertformeln zur Scheibenberechnung mit Hilfe des Differenzenverfahrens, Baupl-Baut., 2/1960, 58-63.
26. Collatz L., The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer V., Berlin, 1966.
27. Cook T.D., Some Elements for Analysis of Plate Bonding, J. of the Engrg Mech.Div., EM6/1972, 1453-1470.
28. Day A.S., An Introduction to Dynamic Relaxation, The Engineer, Jan.29, 1965, 218-221.
29. Deutsch I., Contribuții la fisurarea elementelor de beton armat solicitate la încovoiere cu forță tăietoare, Teză de doctorat, Timișoara, 1970.
30. Diaconu M., Studiul teoretic și experimental al grinzilor de lungime medie și al grinzilor pereți rezanate pe mediu deformabil, Rezumatul tezei de doctorat, Iași, 1969.

31. **Dimitrov N., Operatorenrechnung und ihre Anwendung auf die Baustatik, Memoires AIPC, 24/1964, 31-60.**
32. **Dirr B., Beitrag zur näherungsweise Berechnung dünner, isotroper elastischer Scheiben mit Hilfe von Gitterrostelementen, TH Hannover, 1966.**
33. **Dlugaci L.I., Metod setok v smezannoj ploskoi zadace teorii uprugosti, Naukova dumka, Kiev, 1964.**
34. **Dubas P., Calcul numérique des plaques et des parois minces, Schweiz. Bauzeitung, 17/1961, 9-16.**
35. **Ebel H., Beitrag zur Stabilitätsberechnung ebener Flächen-tragwerke mit Hilfe der Methode der finiten Elemente, TH Darmstadt, 1968.**
36. **Eberle K., Meerwald K., Beitrag zur mehrachsigen Festigkeit des Betons, Beton u. Stahlbetonbau, 4/1969, 94-96.**
37. **Falk S., Eine Variante zum Differenzenverfahren, ZAMM, Bd.45, Sonderheft 1965, 132.**
38. **Farkas M., s.a., Modellversuch über eine neuartige Bahn-hofkonstruktion der Budapester Untergrundbahn, Periodica Polyt., Civil Engrg, 3-4/1969, 111-123.**
39. **Filciakov P.P., Sistemnie i graficeskie metody prikladnoi matematiki, Naukova dumka, Kiev, 1970.**
40. **Frans G., Konstruktionslehre des Stahlbetons, Springer V., Berlin, 1964.**
41. **Frentzel B., Experimentelle und rechnerische Ermittlung der Scheibenspannungen im Bereich einer Quadratöffnung bei querkraftfreier Biegung, Wiss. Zeitschr. H.A. Meiner, 3/1966.**



42. Friedrich R., Friedrich G., Aplicarea metodei seriilor de matrice la calculul șabelor cu goluri, Bul. St. și Teh. al IPT, Seria Constr., tom 16(30), fasc.1/1971, 111-118.
43. Friedrich R., Calculul șabelor armate în stadiul elastic, Bul. St. și Teh. al IPT, Seria Constr. tom 17(31), fasc.1/1972, 34-38.
44. Friedrich R., Bazele metodei elementelor finite, Centrul de multiplicare al IPT, Timișoara, 1972.
45. Friedrich R., Elemente finite dreptunghiulare pentru calculul șabelor, Bul. St. și Teh. al IPT, Seria Constr. tom 18(32), fasc.1/1973, 49-54.
46. Friedrich R., Friedrich G., Operatori pentru calculul plăcilor plane prin colocație, Bul. St. și Teh. al IPT, Seria Constr. tom 18(32), fasc.2/1973, 153-159.
47. Frühanz H., Beitrag zur Ermittlung der Biegemomente von Stahlbetonscheiben mit einem rechteckigen Loch, Univ. Stuttgart, 1968.
48. Füzy J., Analysis of Homogeneous Orthotropic Quadrangular Panels, Acta Technica A.S. Hung, tom 59, 1-2/1967, 11-20.
49. Gagarina A.A., Mamasian V.S., Borisov M.V., Robota stenovih paneloi na vertikalniiu nagruzki, Stroizdat, Moskva, 1971.
50. Gambarov G.A., Matkov M.G., Deformații i razruseniia betonov i restvorov pod deistviiem dvuh - i trekhosnogo napriajennogo sostoiania, Beton i železobeton, 8/1973, 43-44.

51. Geer E., Stresses in Deep Beams, Journal of the ACI, 1/1960, 651-661.
52. Ghali A., Bathe K.C., Analysis of Plates Subjected to In - Plane Forces Using Large Finite Elements, Mémoires AIPC, 30-I /1970, 61-72.
53. Giencke ..., Ein einfaches finites Verfahren zur Berechnung von Flächentragwerken, Wiss.Zeitschr.H.A.B. Weimar, 3/1969, 231-234.
54. Girkmann K., Flächentragwerke, Springer V., Wien, 1963.
55. Gótesz F., Götürig A., Elemente de calcul matriceal și formularea calculului structurilor din bare în vederea programării la calculatoare, Centrul de multiplicare al IPC, Cluj, 1972.
56. Godycki - Čwirko E., Zolbetowe belki - ściany w świetle dotychczasowych badań na modelach zolbetowych, Inz. i budownictwo, 12/1963, 461-468, 1/1964, 5-13.
57. Gvozdev A.A., Karpenko N.I., Rabota jelezobetona s tresciami prin ploskom napriajennom sostojanii, Stroit.meh.i rasciot soov., 2/1965, 20-23.
58. Haidukov G.K., Ermakov A.K., Issledovanie i rasciot procičnosti po metodu predelnogo ravnovesiisbalansirovanok s proemami, Beton i jelezobeton, 8/1962, 371-377.
59. Hampe E., Barzel W., Stein W., Die Tragqualität von Rechteck- und Quadratscheiben, Wiss. Zeitschr. H.A.B. Weimar, 5-6/1972, 427-440, 3/1973, 235-244.

60. Hansson V., Zur praktischen Berechnung von Scheiben mit beliebiger Geometrie und allgemeinem Materialgesetz, Vulkan Verlag, Essen, 1973.
61. Hayes I., Fikler G., Solution of Disc Problems by an Electrical Analogue Network, Periodica Polyt., Civil Engrg, 2/1970, 155-171.
62. Hillenbrand A., Wolter F., Anwendung der Methode der finiten Elemente auf scheibenartige Tragwerke, Baupl.-Baut., 2/1971, 76-81.
63. Holand I., Bell K., (red.), Finite Element Methods in Stress Analysis, Copir Verlag, Kronheim, 1970.
64. Hrennikoff A., Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method, Journal of the Appl. Mech., Dec. 1941, A 169- A 175.
65. Hrennikoff A., Precision of Finite Element Method in Plane Stress, Mémoires AIPC, 29-II/1969, 125-137.
66. Iosipescu N., Introducerea în fotoelasticitate, vol.1 și 2, Ed. Tehnică, București, 1958 și 1960.
67. Isenberg J., Adham S., Analysis of Orthotropic Reinforced Concrete Structures, J. of the Struct. Div., St 12/1970, 2607-2624.
68. Jaeger J.C., Newstead G.H., Introducere în teoria transformării Laplace cu aplicații în tehnică, Ed. Tehnică, București, 1971.
69. Jung G., Eine neue Methode zur Ermittlung der Spannungserhöhungen an unversteiften Ausschnitten und starren Pflaster in Scheiben, Zeitschr. f. Flugwissensch. 7/1970, 258-267.

70. Karamanaki T., Berechnung rechteckiger Scheiben mit beliebiger Belastung nach der Methode der endlichen Elemente mit direkter Bestimmung der Spannungen, V, IKM - Berichte, VEB Verlag f. Bauwesen, Berlin, 1969, 68-73.
71. Karpenko N.I., Gurevici A.L., O raschiote jelezobetonnih balokstenok s ucetom trescin, Stroit.moh.i raschiot soer., 1/1974, 22-24.
72. Kazimi S.M.A., Coull A., The Application of Line - Solution Techniques to the Solution of Plane - Stress Problems, Intern.J of Mech.Sciences, 10/1964, 331-399.
73. Kazimi S.M.A., Solution of Plane-Stress Problems by Grid Analysis Building Science, 1966, 277-288.
74. Klaf R.U. (Clough R.W.), Method konecnogo elementa v resenii ploskoi zadaci teorii uprugosti, Raschiot stroitelinih konstrukcii s primeneniem elektronnih masin, Stroizdat, Moskva, 1967.
75. Kong F.K., Robins P.J., Singh A., Sharp G.A., Shear Analysis and Design of Reinforced Concrete Deep Beams, The Structural Engineer, 10/1972, 405-409.
76. Kong F.K., Sharp G.A., Shear Strength of Lightweight Reinforced Concrete Deep Beams with Web Openings, The Structural Engineer, 3/1973, 267-275.
77. Kripnarayanan K.M., Fintel M., Analysis and Design of Slender Tilt - Up Reinforced Concrete Wall Panels, Journal of the ACI, 1/1974, 20-28.

78. Kupfer H., Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung, T.H München, Lehrstuhl für Massivbau, 1969.
79. Lavrik V.I., Savenkov V.N., Spravocinik po konformnim otobrajeniam, Naukova dumka, Kiev, 1970.
80. Leonhardt H., Walther R., Wandartige Träger, Dt.A.f.St., 1973, V.v.V. Ernst u.Sohn, Berlin, 1966.
81. Leonhardt H., Albigés H., Recommendations internationales du CEB pour le calcul et l'exécution des poutres cloisons, Annales de l'IBCP, Jan.1970, 165-170.
82. Levy M., Spira M., Analysis of Composite Walls With and Without Openings, Memoires AISC, 33-1/1973, 143-166.
83. Linse H., Wandartige Träger mit Pfeilervorsprüngen, Bautechnik, 8/1961, 264-268.
84. MacLeod A., Green D.R., Frame Idealization for Shear Wall Support Systems, The Structural Engineer, 2/1973, 71-74.
85. Marinov M., Aplicarea metodei de calcul cu elemente finite la determinarea siguranței la rupere a structurilor masive de beton, A 7-a Conf. de Betonaș, Timișoara, 1972, 621-C34.
86. Massonet Ch., ș.a., Calculul structurilor la calculatoarele electronice, Ed.Tehnică, București, 1974.
87. Mateescu D., Calculul structurilor în stadiul plastic, Curs ASIT, Timișoara, 1962.

88. Meyer Ch., **Solution of Linear Equations - State of the Art**,  
J.of the Struct. Div., ST5/1973, 1507-1526.
89. Miksiniski J., **Operatorenrechnung**, Dt, Verlag d.Wissensch.  
Berlin, 1957.
90. Mirșu O. **Structuri de beton armat**, Centrul de multiplicare  
al IPT, Timișoara, 1966.
91. Munteanu I., **Calculul structurilor spațiale în formulare  
matriceală**, Ed.Facla, Timișoara, 1973.
92. Muskhelishvili N.I., **Nekotorie osnovnie zadaci matematiches-  
koi teorii uprugosti**, Izd.Akad.Nauk SSSR, Moskva,  
1954.
93. Ngo O., Scordelis A.C., **Finite Element Analysis of Reinforced  
Concrete Beams**, Journal of the ACI, 3/1967, 152-163.
94. Nilson A.H., **Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by  
the Finite Element Method**, Journal of the ACI,  
9/1968, 757-766.
95. Olteanu N.Gh., Pîrvu E.A., **Metode de discretizare a conti-  
nuului în vederea rezolvării diferitelor tipuri  
de probleme de mecanică**, vol.II și III, **Metoda  
elementelor finite**, INID, București, 1972, 1973.
96. Otter J.R.H., **Dynamic Relaxation Compared with Other Ite-  
rative Finite Difference Methods**, Nuclear  
Engrg and Design, 1966, 183-185.
97. de Paiva H.A.R., Siess Ch.P., **Résistance and comportements  
des poutres-cloisons à l'effort tranchant**, CEB  
Bulletin d'inform., No.65, 1968, 131-169.

98. Petcu V., **Calculul structurilor de beton armat în domeniul plastic**, Ed. Tehnică, București, 1972.
99. Pfaffner G., **Berechnung und Bemessung von wandartigen Trägern**, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1968.
100. Pian T.H.H., **Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions**, AIAA Journal, 7/1964, 1333-1336.
101. du Preez n., **Berechnung prismatischer Flächentragwerke mit Hilfe von finiten Streifen-elementen**, Bau-technik, 5/1972, 151-162.  
\*
102. Przemieniecki J.S., **Theory of Matrix Structural Analysis**, Mc Graw Hill, New York, 1968.
103. Ramakrishnan V., Ananthanarayana N., **Ultimate Strength of Deep Beams in Shear**, Journal of the ACE, 2/1968, 37-58.
104. Reimann H., **Kritische Spannungszustände des Betons bei mehrachsiger, ruhender Kurzzeitbelastung**, Dt. A.f.st., II.175, V.v.V. Ernst u. Sohn, Berlin, 1965.
105. Robins P.J., Fong S.K., **Modified Finite Element Method Applied to RC Deep Beams**, Civil Engrg and PWR, 11/1973, 963-966.
106. Salvadori M.G., Baron M.L., **Metode numerice în tehnică**, Ed. Tehnică București, 1972.
107. Sardi M. ș.a., **Subprograme pentru determinarea stării de eforturi și deplasări statice și dinamice în grinzi-pareți, diafragme plane, plăci plane**, București, INCARC, 1971.

108. Santhakumar A.K., Arunachalam H.V., Strength and Behaviour of Single-Span, Deep Reinforced Concrete Beams, Indian Concrete J., 11/1972, 459-465, 475.
109. Samin G.N., Spannungserhöhung am Rande von Löchern, VEB Verlag Technik, Berlin, 1956.
110. Scarlet A., Stabilitatea structurilor. Probleme speciale, Ed. Tehnică, București, 1969.
111. Schaefer H., Die vollständige Analogie Scheibe - Platte, Abh.d.Braunschw.Wiss.Ges., Bd.VIII, 1956, 142-150.
112. Schaefer H., Das Cosserat - Kontinuum, ZAMM, 8/1967, 435-497.
113. Schleeß W., Bauteile mit zweiachsigen Spannungszustand, Beton-Kalender 1972, V.v.V. Ernst u.Sohn, Berlin, 1972.
114. Schmitt H., Über das Tragvermögen wandartiger Stahlbetonträger, Beton u. Stahlbetonbau, 10/1956, 220-224
115. Schröder S., Opitz H., Festigkeit und Verformungseigenschaften des Betons bei zweiachsiger Druckbeanspruchung, Baupl.-Baut., 4/1968, 190-193, 196.
116. Schwarz H., Haas F.O., Anwendung der Stabwerkmethode zur Lösung des ebenen Spannungsproblems, Bautechnik, 6/1968, 200-205.
117. Smirnov S.A., Sterjnevaiia analogiia metoda setok, Stroit. meh.i resciot., 5/1968, 7-10.
118. Soare M., Metode de discretizare a continuului in vederea rezolvării diferitelor tipuri de probleme de mecanică, vol.1, Metoda diferonțelor finite, INID, București, 1972.



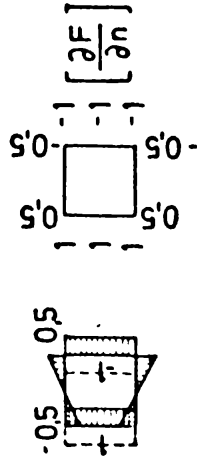
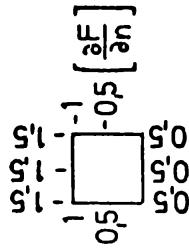
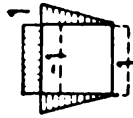
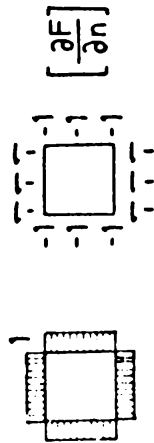
119. Sokolov B.S., Iasin A.V., Issledovanie procinosti naklon-  
nih secheni karambite - jelezobetonnih balab-  
stensk, Beton i jelezobeton, 1/1970, 40-42.
120. Teodorescu P.P., Probleme plane in teoria elasticității,  
vol.1 și 2, Ed.Academiei, București, 1961 și  
1966.
121. Teodorescu P.P., Asupra corpurilor de tip Cosserat cu  
elasticitate liniară, Studii și cercetări me-  
tem., 4/1971, 643-670.
122. Tertea I., Costea A., Onuț T., Incercări asupra betonului,  
betonului armat și betonului precomprimat, Lito-  
grafia Invățământului, Cluj, 1964.
123. Timpiu G.A., K rasciotu jelezobetona s pomoščiu momentnoi  
teorii uprugosti, Stroit. mech. i rasciot soor.,  
3/1968, 30-32.
124. Tottenham H., Brebbia C. (red.), Finite Element Techniques  
in Structural Mechanics, Stress Analysis  
Publishers, Southampton, 1970.
125. Valliappan S., Doohan T.F., Nonlinear Stress Analysis  
of Reinforced Concrete Structures by Finite  
Element Method, UNICIV Report No R-72, Kensington,  
1971.
126. Varvak P.M., Razvitie i prilozhenie metoda setok k rasciotu  
plastinok, Ciast 2, Izd.Nauk Ukr.SSR, Kiev, 1952.
127. Varvak P.M., Riabov A.F. (red), Spravocinik po teorii  
uprugosti (dlia inženerov stroitelei), Izd.  
Budivelnik, Kiev, 1971.

128. Vijaya Rangan B., Ultimate Strength of Reinforced Concrete Deep Beams, *Indian Concrete J.*, 2/1969, 50-54.
129. Walther R., Über die Berechnung der Schubtragfähigkeit von Stahl- und Spannbetonbalken - Schubbruchtheorie, *Beton u. Stahlbetonbau*, 11/1962, 261-271.
130. Wang H.C., Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor, Ed. Tehnică, București, 1970.
131. Weigler H., Becker G., Über das Bruch- und Verformungsverhalten von Beton bei mehrachsiger Beanspruchung, *Bauing.*, 10/1961, 390-396.
132. Weigler H., Becker G., Zur Frage der Schubdruckfestigkeit von Beton, *Beton u. Stahlbetonbau*, 5/1964, 101-105.
133. White R.N., Stability of Plates Under Partial Edge Loadings, *J. of the Engrg Mech. Div.*, 11/1962, 67-85.
134. Wiedemann J., Die Scheiben - Platten - Analogie und ihre Anwendung auf Ansehnitt - und Pfeilstarprobleme, *Fortschrift Ber. VDI-Z.*, Reihe 1, Nr. 18, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1969.
135. Wintze A., Modelarea fotoelastică a betonului armat înainte și după fisurare, *Rezumatul tezei de doctorat*, București, 1971.
136. Wolf J.P., Das Flächentragwerksprogramm von STAMP, Schweiz. Bauzeitung, 3/1972, 41-52.
137. Yuzugullu O., Schnobrich S.C., A Numerical Procedure for the Determination of the Behaviour of a Shear Wall Frame System, *Journal of the ACI*, 7/1973, 474-479.

138. Zerna W., Schmellenbach G., Zur Berechnung von Spannbeton-Reaktor-druckbehältern, Beton u. Stahlbetonbau, 11/1970, 2-8.
139. Zienkiewicz O.C., Hollister G.S.(red.), Stress Analysis John Wiley and Sons, London, 1965.
140. Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, Mc Graw Hill, New York, 1967.
141. Zienkiewicz O.C., Valliappan S., King J.P., Stress Analysis of Rock as a "No Tension" Material, Geotechnique, 3/1968, 56-66.
142. Zienkiewicz O.C., Valliappan S., Analysis of Real Structures for Creep, Plasticity and Other Complex Constitutive Laws, Conference "Structure, Solid Mechanics and Engineering Design, Southampton 1969", Wiley - Interscience, London, 1971, 27-48.
143. Zureñhl R., Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren, ZAMM, 1-2/1957, 1-16.
144. Zureñhl R., Matrizen, Springer V., Berlin, 1964.
145. Zureñhl R., Diskretisierung für Aufgaben der Elastomechanik, Wiss.Zeitschr.H.A.B. Weimar, 5-6/1965, 569-572.
146. x x x CEB Recommendations pratiques unifies pour le calcul et l'execution des ouvrages en béton armé, Ed. Inst. E. Torroja, Madrid, 1964.
147. x x x Spravočnik projektirovščika promišlennih, žilnih i objektivnih zdanij i sooruzenij, kniga 2, Stroizdat, Moskva, 1973, 26-28.

148. x x x STAS 1336 - 62. Construcții din beton armat. In-  
cercarea prin încărcare.
149. x x x Studii experimentale privind structurile etajate  
executate cu elemente spațiale tip ICH1. Contract  
nr.4366/1973. IPT Catedra de Beton armat și clă-  
diri, Timișoara.
150. x x x The Shear Strength of Reinforced Concrete Members,  
J.of the Struct. Div., STG/1973, 1091-1187.

golul A

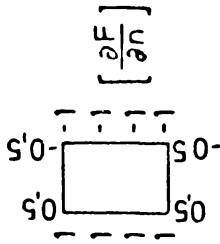
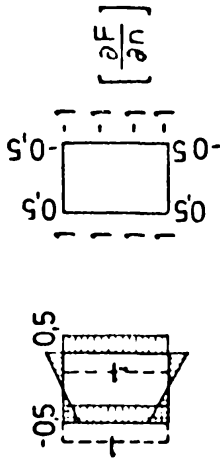
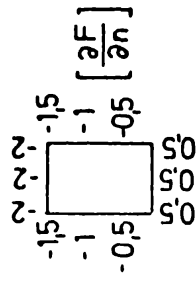
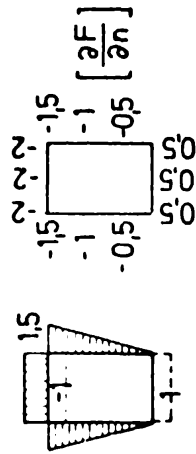
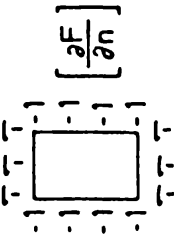
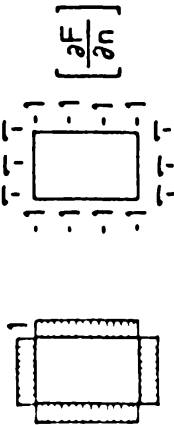


1	1	1			
2	-6	-4	-6	2	
1	-6	8	3	8	-6
1	-4	3	3	-4	1 [F]
1	-6	8	3	8	-6
2	-6	-4	-6	2	
1	1	1			

1	1	1			
2	-7	-5	-7	2	
1	-7	10	4	10	-7
0.5	-2	1.5		1.5	-2
1	-2	-1	-2	1	
1	1	1			

	-1	4			
	-0.5	4	-6	6	-4
	-0.5	3	-2.5	2.5	-3
	-0.5	4	-6	6	-4
		-1	4		

golul B

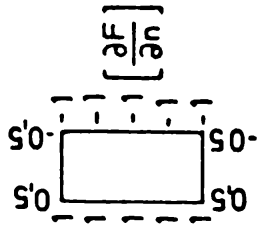
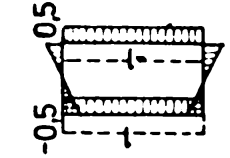
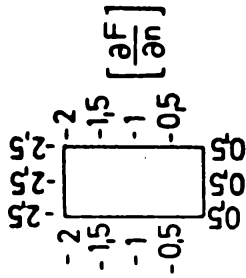
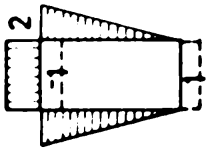
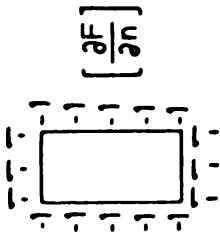


1	1	1	1				
2	-6	-4	-6	2			
1	-6	8	3	8	-6	1	
1	-4	3		3	-4	1	
1	-4	3		3	-4	1	[F]
1	-6	8	3	8	-6	1	
2	-6	-4	-6	2			
1	1	1	1				

	15	15	15				
3	-10	-7	-10	3			
15	-10	14	55	14	-10	15	
1	-4	3		3	-4	1	
05	-2	15		15	-2	05	[F]
1	-2	-1	-2	1			
1	1	1	1				

	-05						
	-1	4					
	-05	4	-6				
	-05	3	-25				
	-05	3	-25				[F]
	-05	4	-6				
	-1	4					
	-05						

golul C



	1	1	1						
1									
2	-6	-4	-6	2					
1	-6	8	3	8	-6	1			
1	-4	3		3	-4	1			
1	-4	3		3	-4	1			
1	-4	3		3	-4	1			
1	-6	8	3	8	-6	1			
2	-6	-4	-6	2					
1	1	1	1						

	2	2	2						
2									
4	-13	-9	-13	4					
2	-13	18	7	18	-13	2			
15	-6	4,5		4,5	-6	15			
1	-4	3		3	-4	1			
0,5	-2	1,5		1,5	-2	0,5			
1	-2	-1		-2	1				
1	1	1		1					

	-0,5								
	-1	4							
	-0,5	-4	-6						
	-0,5	3	-2,5						
	-0,5	3	-2,5						
	-0,5	4	-6						
	-1	4							
	-0,5								





II-M-1

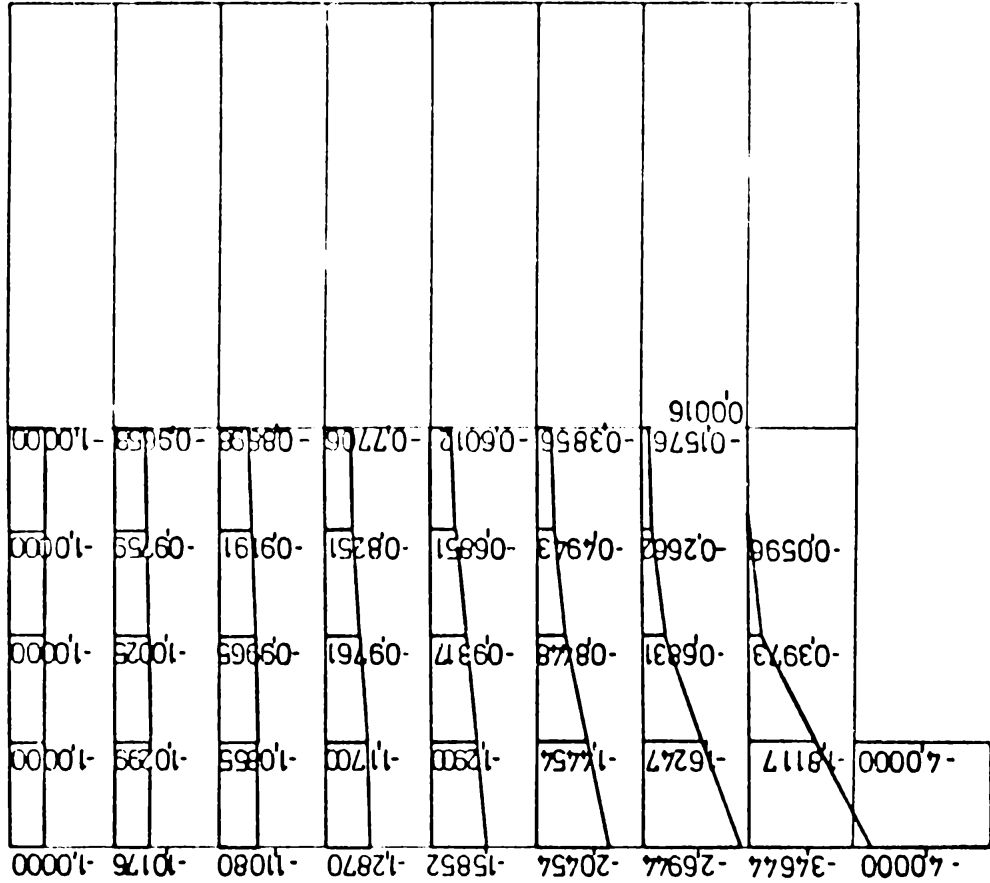
$\sigma_1, \sigma_2$   
Multiplier: p/t  
 $\alpha_0$

	-00341	-00933	-01494	-01730							
	-10322	-10077	-09787	-09658							
	2°47'	4°20'	3°20'	0°							
	-00343	-00985	-01664	-01979							
	-10955	-10155	-09290	-08898							
	5°48'	8°17'	6°34'	0°							
	-00341	-01063	-01996	-02509							
	-11955	-10245	-08523	-07706							
	8°48'	13°16'	11°46'	0°							
	-00281	-00939	-02047	-02944							
	-13429	-10352	-07517	-06012							
	11°35'	19°22'	20°28'	0°							
	-00040	-00326	-01290	-02624							
	-15358	-10249	-06215	-03856							
	14°04'	25°14'	30°33'	0°							
	00579	01023	00576	-00384							
	-17431	-09141	-03966	-01576							
	14°51'	28°28'	32°25'	0°							
	02048	03839	04811	05409							
	-18993	-05481	-00603	00016							
	11°46'	23°44'	11°05'	0°							

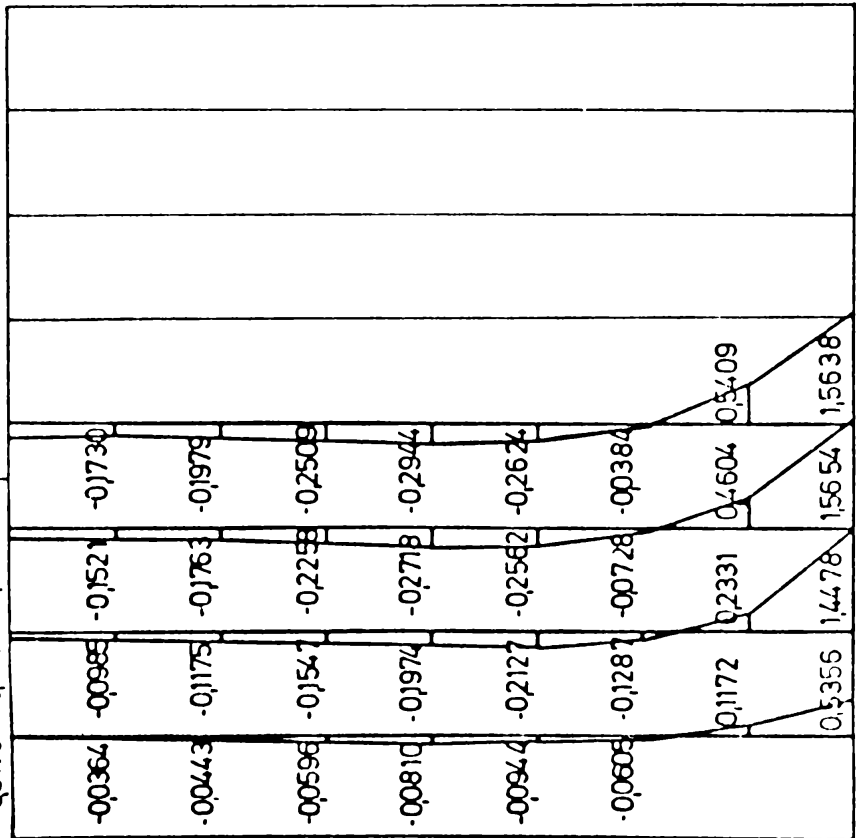
$\times$  F  
Multiplier: a' p

	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)
-20000	14912	39525	54113	58942							
	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
20000	14260	38065	51705	56154							
	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)
-20000	13565	35730	47555	51387							
	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)
20000	12074	31248	41005	44111							
	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)
-20000	09773	25092	31963	33891							
	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)	(34)
20000	06528	16809	20259	21047							
	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)
-20000	02678	07239	07827	07819							
	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)
20000	0	0	0	0							

$\sigma_{yy}$   
Multiplier : p/t

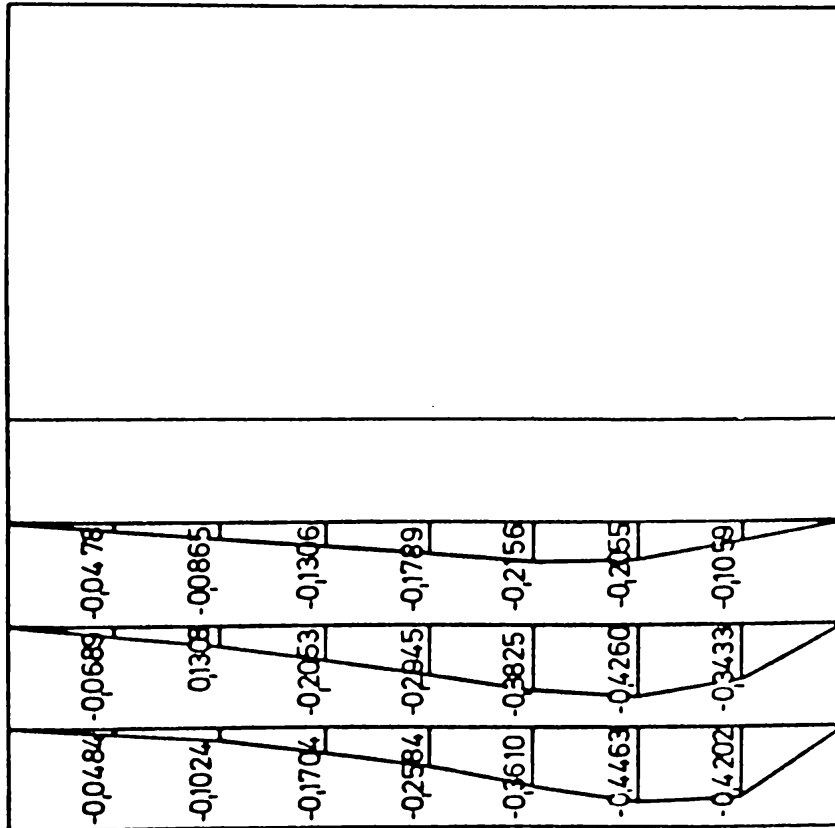


$\sigma_{xx}$   
Multiplier : p/t

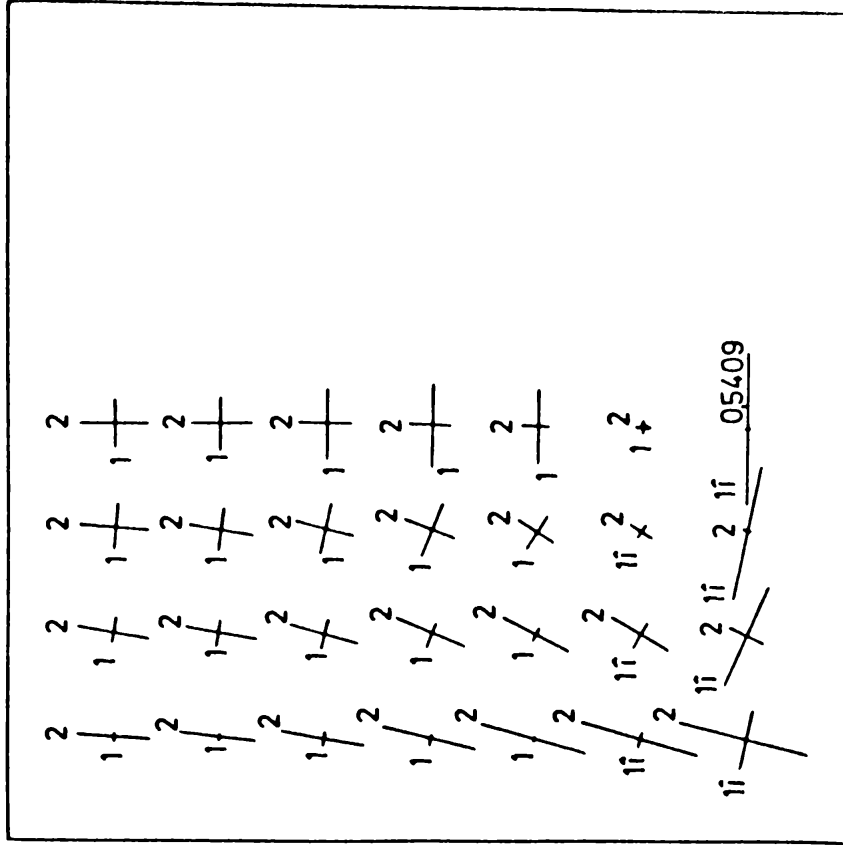


---  $z_i$  multiplier : ap

$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t



$\sigma_1, \sigma_2$

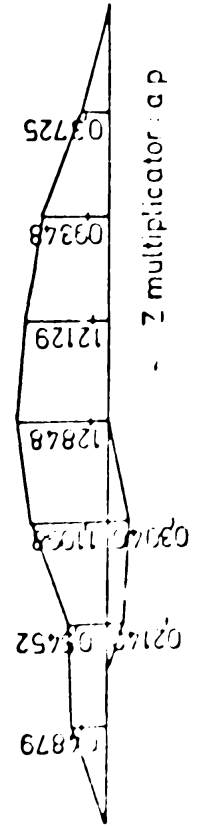
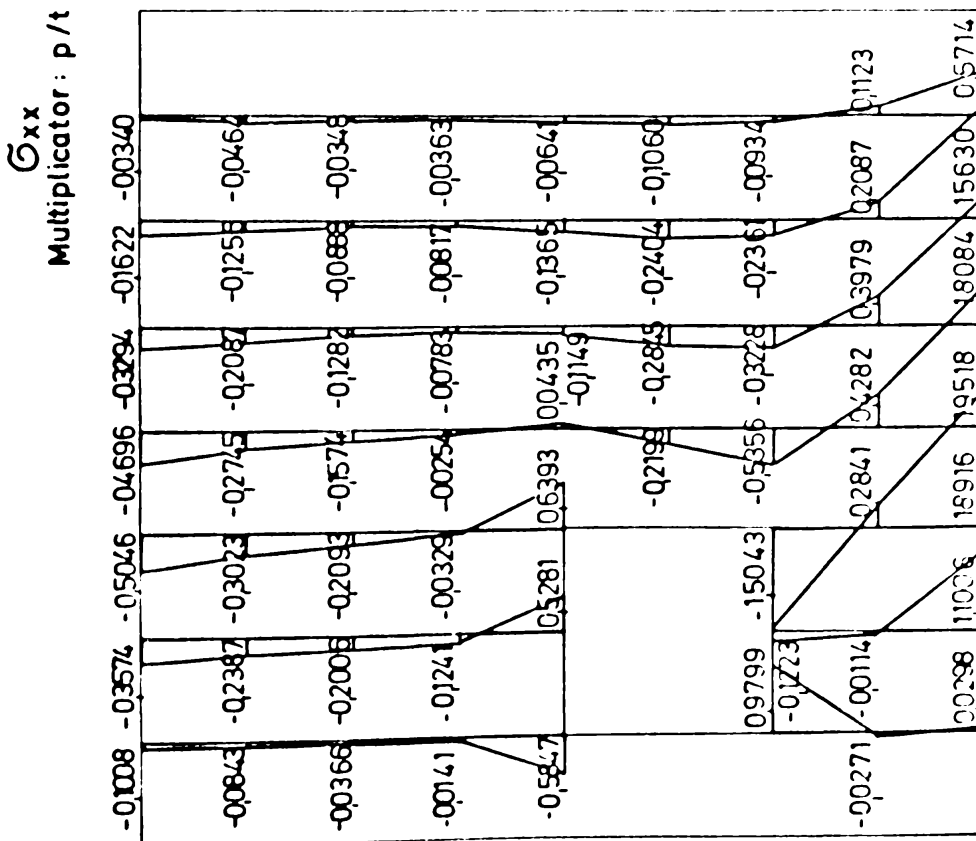
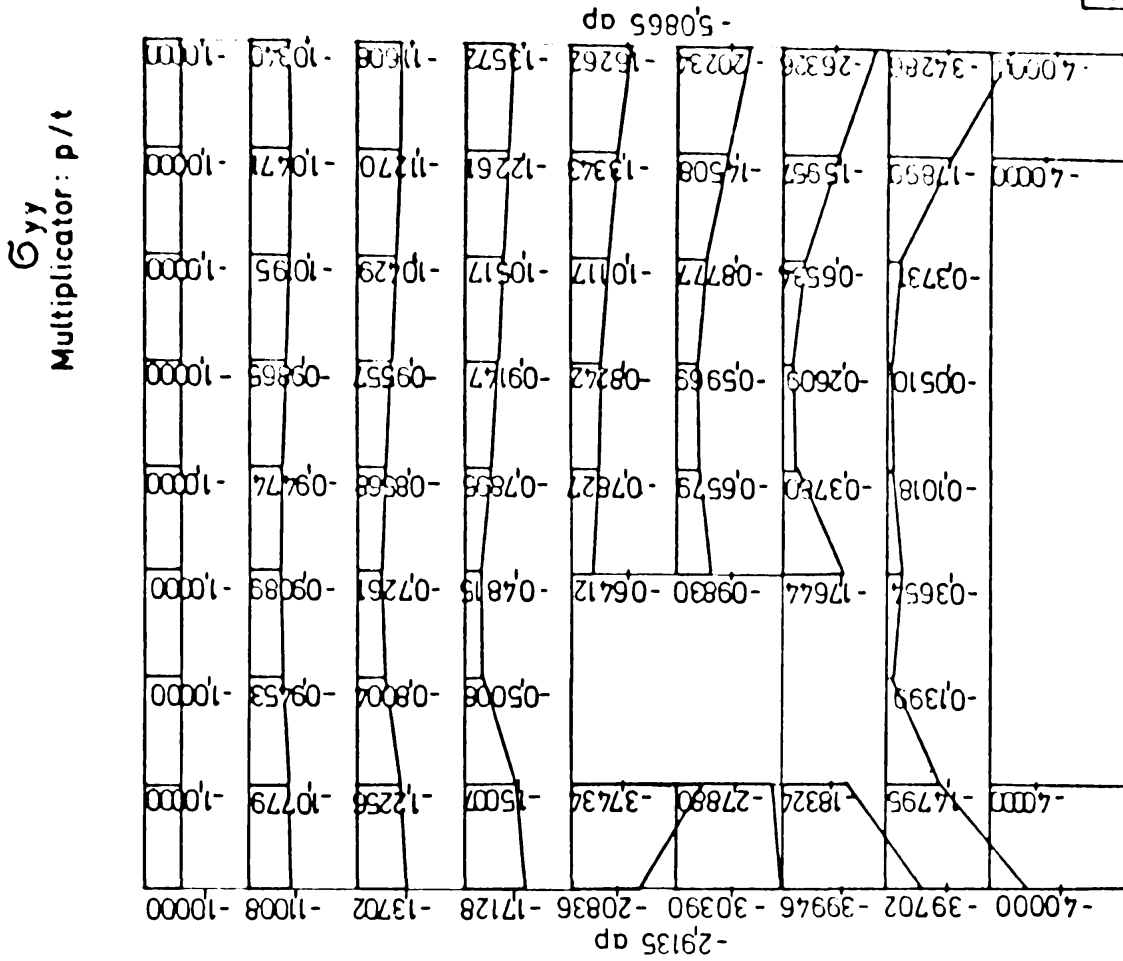


II - M - 3

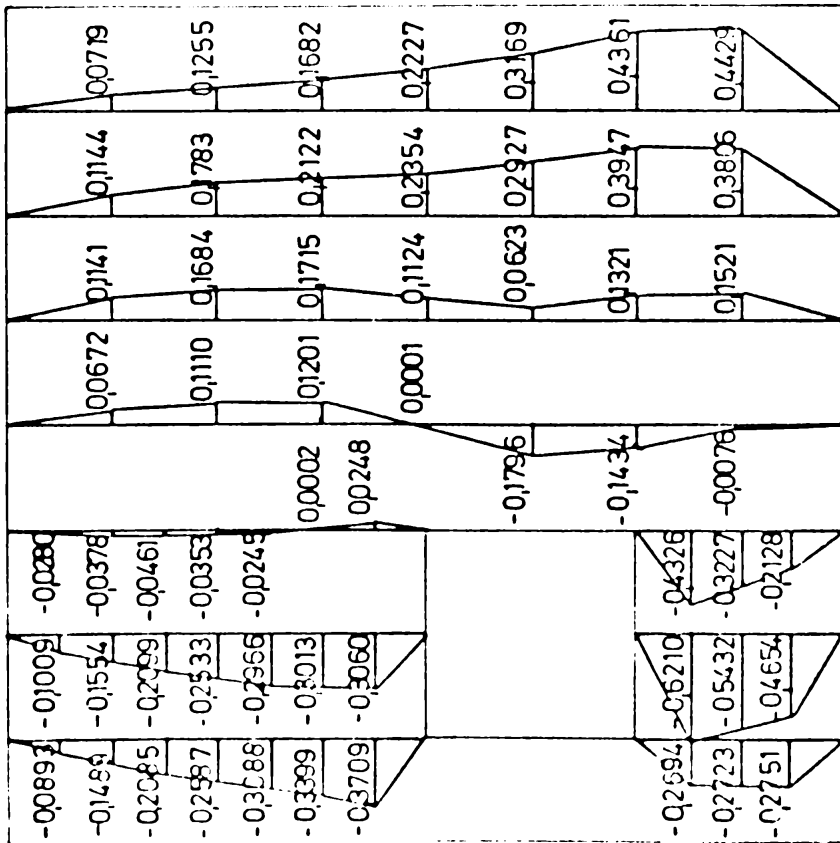
171



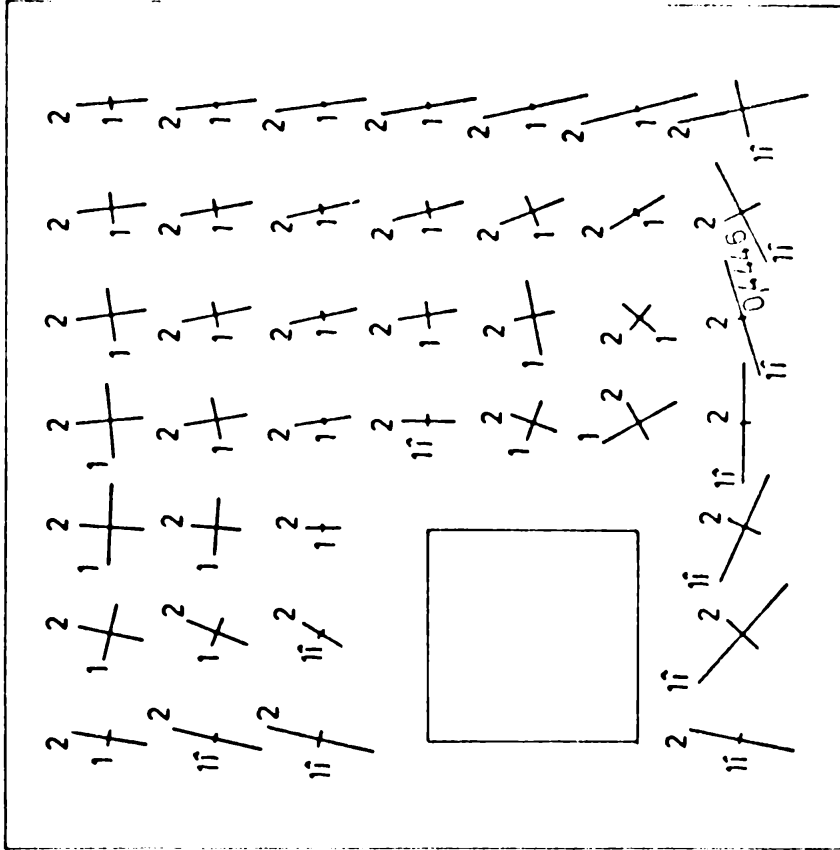
2-17-11



$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t



$\sigma_1, \sigma_2$



**F**

Multiplier:  $a^2 p$

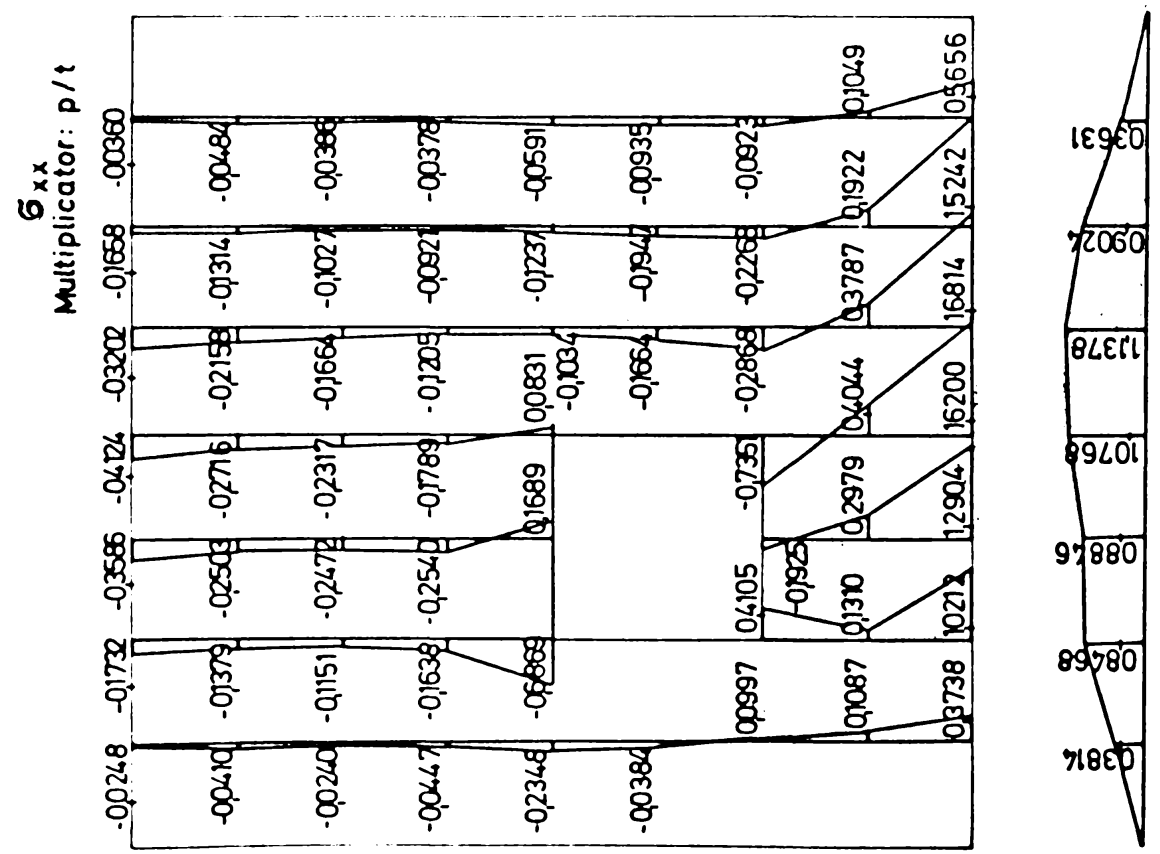
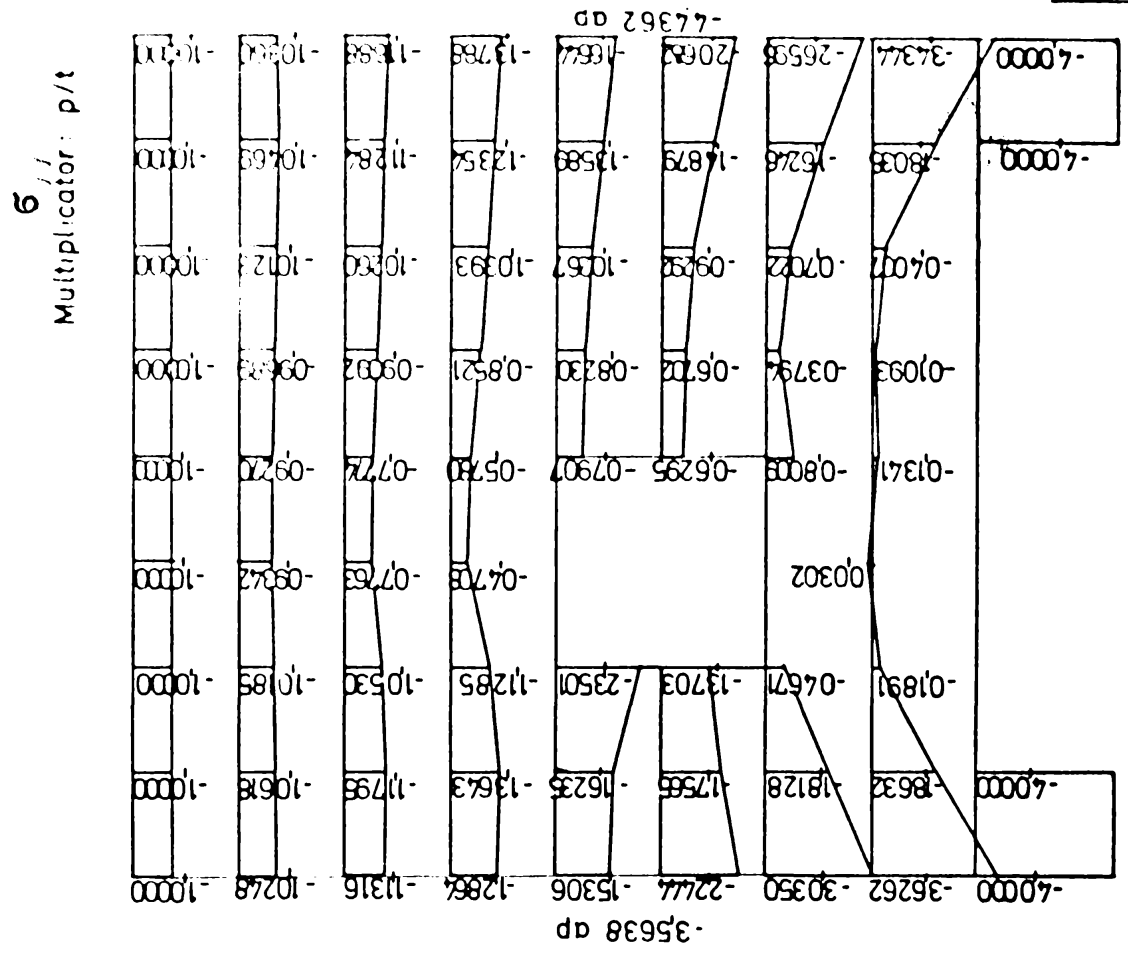
Multiplier:  $p/t$

$\alpha_0$

1) 15000	2) 40000	3) 55000	4) 60000	5) 55000	6) 40000	7) 15000	-20000
1) 14876	2) 39134	3) 53207	4) 57938	5) 53399	6) 39171	7) 14820	-20000
8) 14342	9) 36889	10) 48906	11) 53160	12) 49640	13) 37028	14) 14156	-20000
15) 13568	16) 33493	17) 42133	18) 46065	19) 44217	20) 33858	21) 13105	-20000
22) 12347	a) 28459	b) 32820	c) 37181	23) 37589	24) 29767	25) 11678	-20000
26) 8778	d) 19991	e) 28713	27) 29927	28) 24439	29) 09659	29) 09659	-20000
30) 04825	f) 11522	g) 15883	h) 20244	30) 20601	31) 17164	32) 06705	-20000
34) 01869	35) 05106	36) 06452	37) 08100	38) 08407	39) 07621	40) 02228	-20000
34) 0	35) 0	36) 0	37) 0	38) 0	39) 0	40) 0	-20000

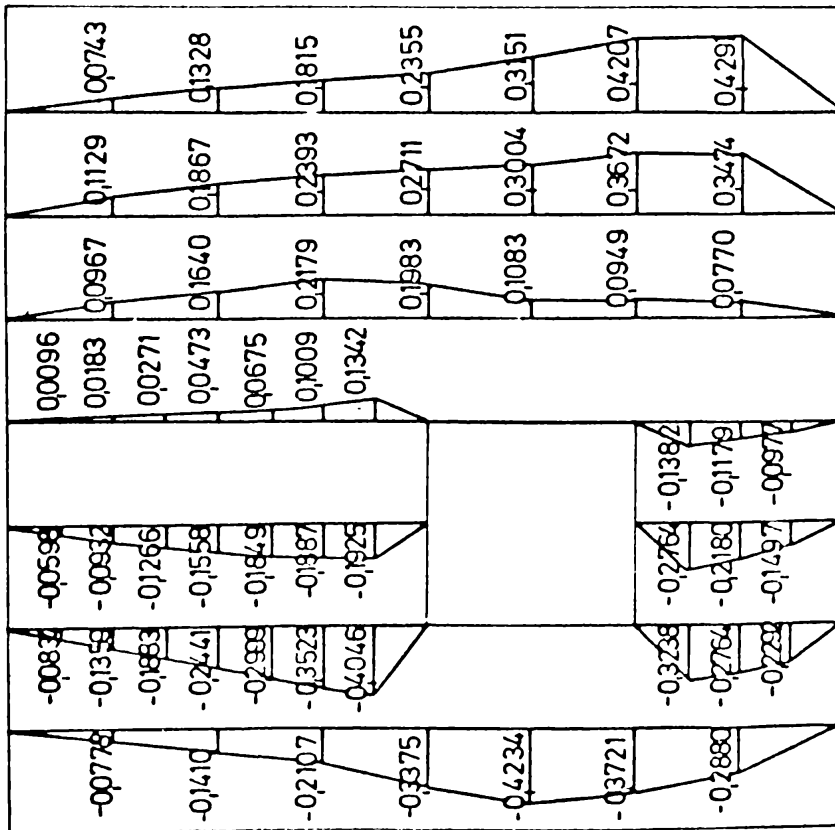
  

-00351	-01174	-02383	-02711	-02036	-01172	-00429
-10677	-10390	-09467	-09275	-09811	-10265	-10524
4°20'	8°34'	7°37'	1°36'	7°12'	7°11'	4°14'
-00071	-00554	-02047	-02277	-01318	-00664	-00227
-11965	-11127	-08187	-07814	-09438	-10623	-11443
6°51'	13°45'	15°15'	4°55'	11°55'	11°00'	6°50'
-00119	-00488	-01448	-01548	-00605	-00351	-00109
-13971	-12435	-05800	-06021	-09121	-10963	-12623
8°51'	18°04'	30°04'	13°24'	15°23'	13°24'	8°29'
-01571				-00524	-00486	-00177
-17012				-08740	-11018	-14002
12°57'				14°26'	15°25'	9°57'
00603				-01441	-00875	-00256
-18552				-06925	-10364	-15658
13°07'				11°38'	19°38'	12°09'
01695				-02276	-00271	00155
-18826				-04385	-09019	-17323
10°38'				31°59'	28°32'	14°22'
01499	02903	04198	04291	03905	03524	01969
-19044	-03484	-00917	-01588	-01211	-05609	-18955
8°08'	29°58'	29°13'	11°49'	8°45'	24°46'	12°06'

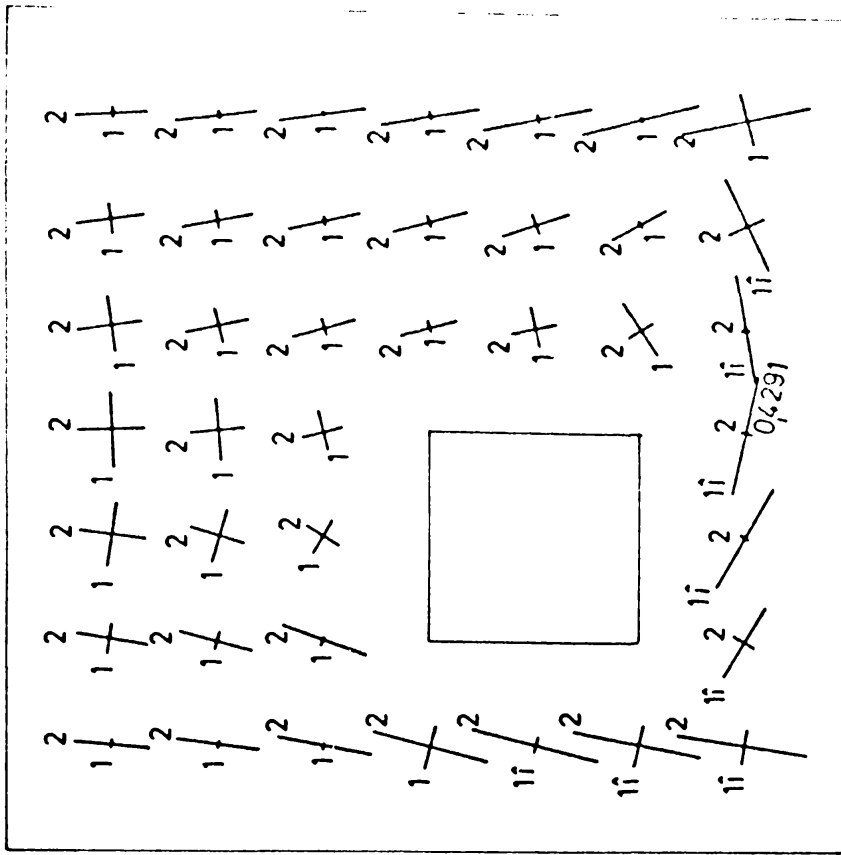




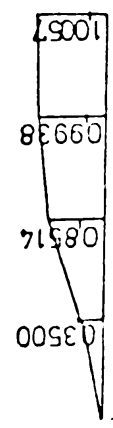
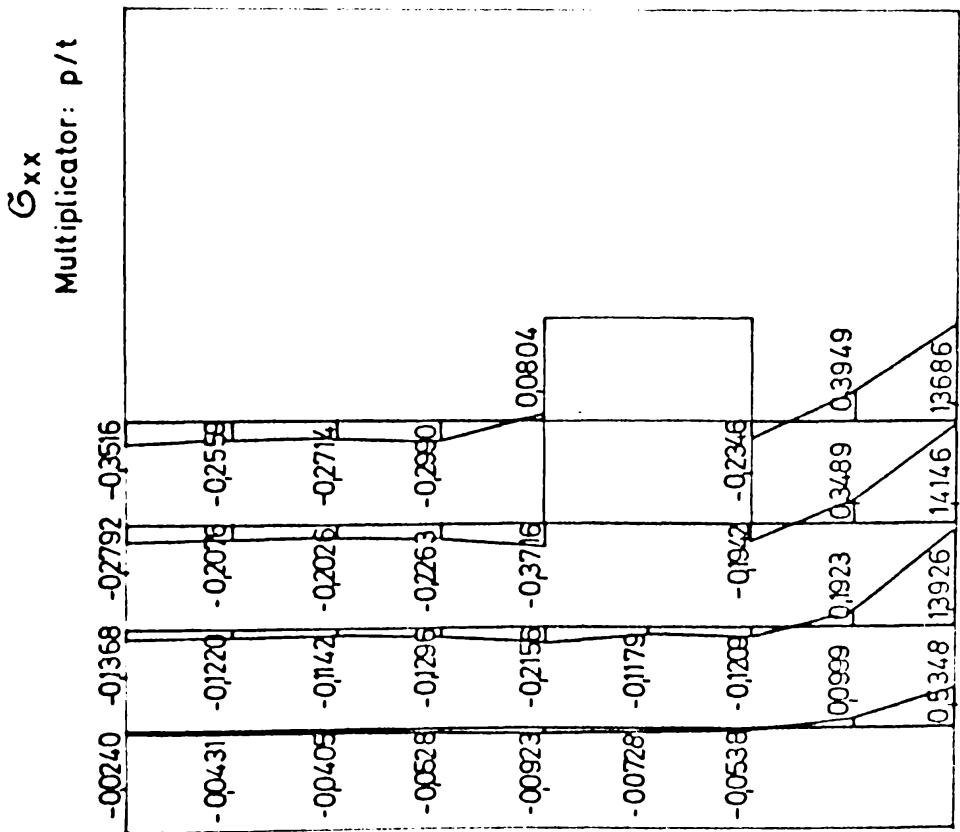
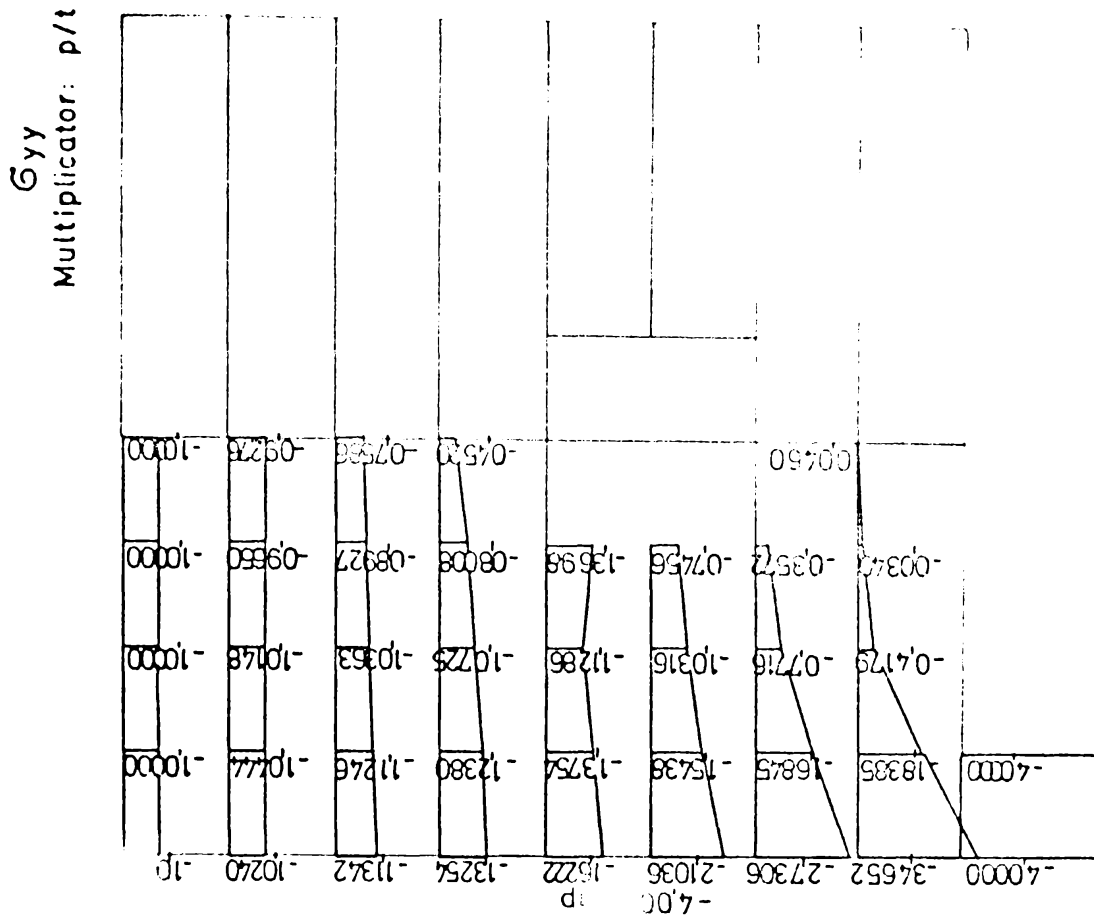
$G_{xy}$   
Multiplier: p/t



$G_1, G_2$

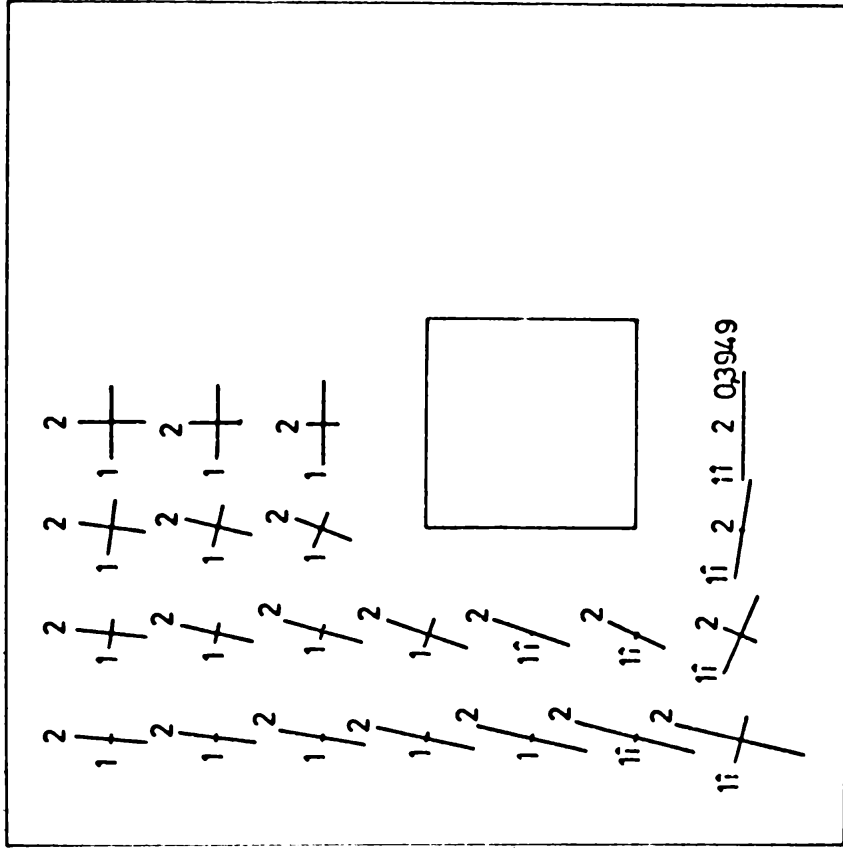




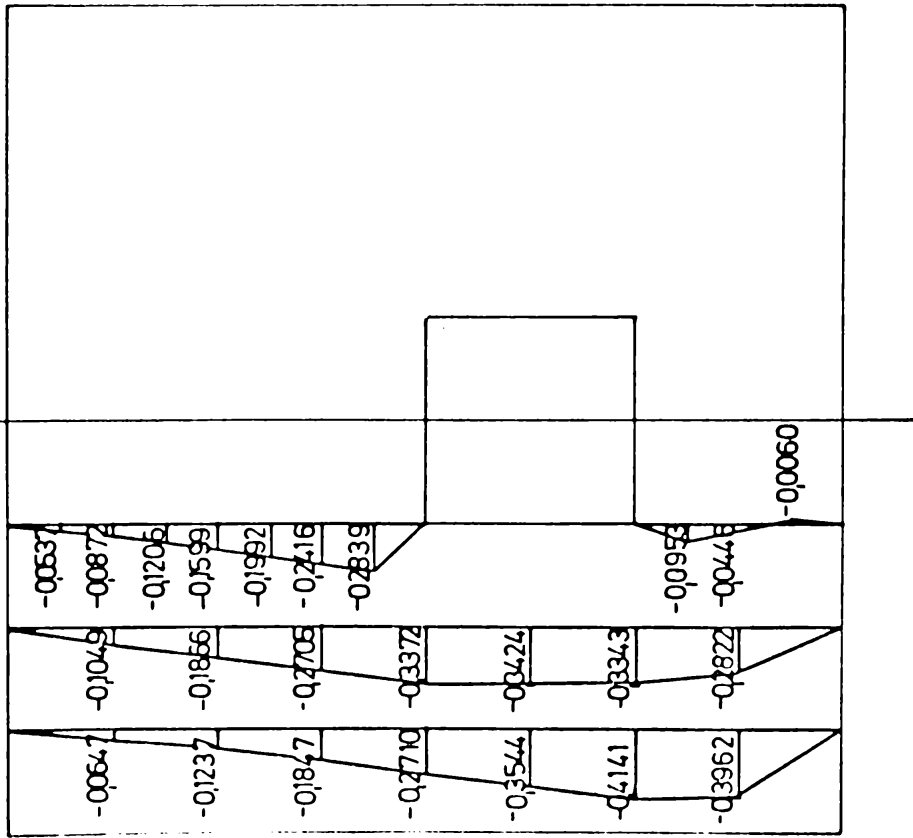


— Z multiplier: ap

$\sigma_1, \sigma_2$



$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t



$\sigma_1, \sigma_2$   
Multiplier: p/t  
 $\alpha_0$

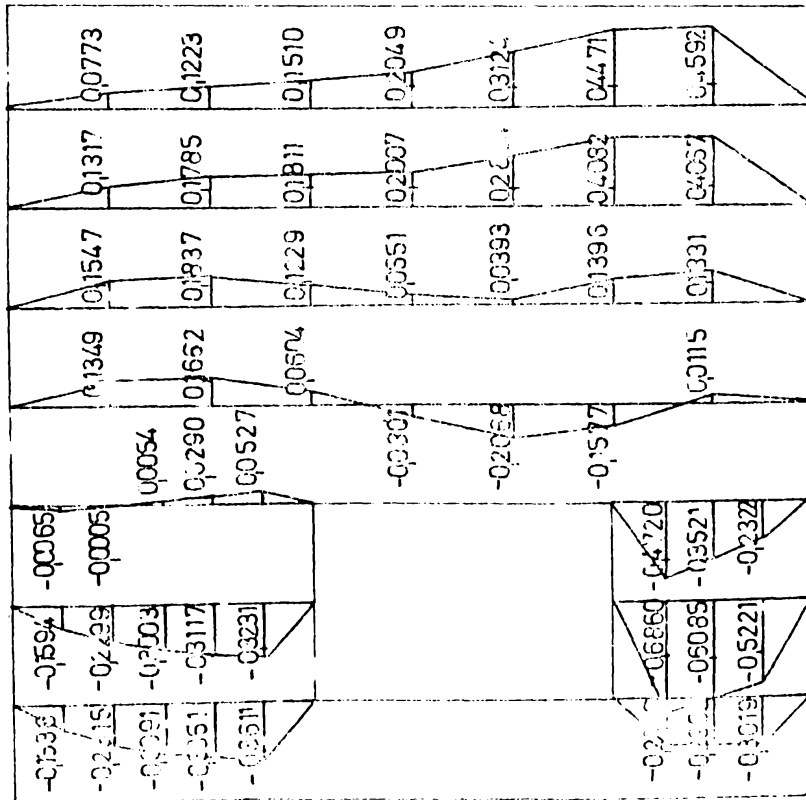
F  
Multiplier:  $a^2 p$

	1	2	3	4	5	6	7
	15000	40000	55000	60000	55000	40000	15000
1	14227	36923	51039	56792	52983	39074	14809
8	12687	30741	43492	50719	48889	36907	14158
a	a)	b)	c)	15)	16)	17)	18)
20000	11348	23519	35690	44550	42883	34180	13251
d	A = -07939						
20000	07378		31720	39763	39533	30866	12046
f	A = 24342						
20000	03409		27751	34149	33140	25982	10135
h	A = 07939						
20000	00561	11610	23781	25693	23320	18370	07050
31	31)	32)	33)	34)	35)	36)	37)
20000	00093	06038	10535	10681	09619	08099	02941
31)	0	0	0	0	0	0	0
20000	0	0	0	0	0	0	0

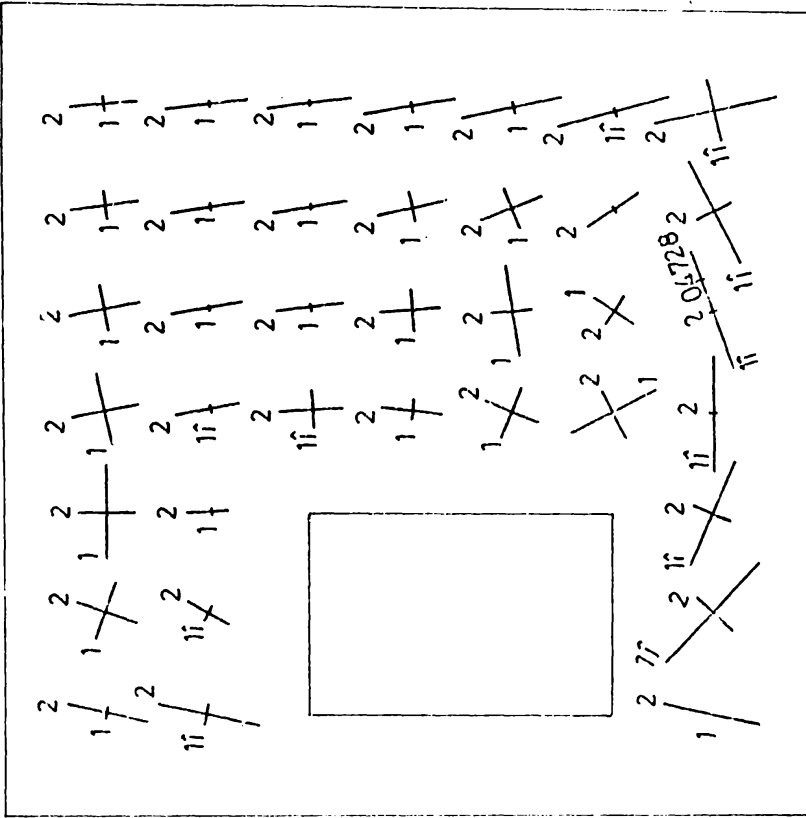
	-00290	-02268	-03586	-02604	-01789	-01055	-00401
	-12008	-09417	-08363	-09823	-10388	-10542	-10603
	1°38'	20°00'	0°03'	10°58'	10°32'	8°03'	4°21'
	00923	00604	-00239	00202	-00174	-00257	-00124
	-15355	-06947	-05540	-09355	-10490	-11070	-11541
	12°09'	27°49'	3°08'	10°10'	10°26'	9°38'	6°11'
				01416	00009	-00276	-00111
				-09161	-09989	-11137	-12509
				3°16'	7°07'	9°44'	7°03'
				-00742	-01599	-01124	-00379
				-08358	-08481	-10599	-13553
				6°04'	4°36'	12°32'	9°04'
				-02045	-03372	-01617	-00468
				-08204	-06204	-09801	-14994
				2°05'	8°03'	21°37'	12°44'
				-03478	-01689	-00031	00228
				-07363	-04769	-08998	-16983
				27°07'	32°26'	32°46'	15°39'
	-00146	05148	04166	04333	04728	04265	02222
	-14749	-07062	-05806	-01210	-01104	-05731	-18837
	11°42'	42°41'	22°27'	1°11'	19°26'	27°14'	12°55'



$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t



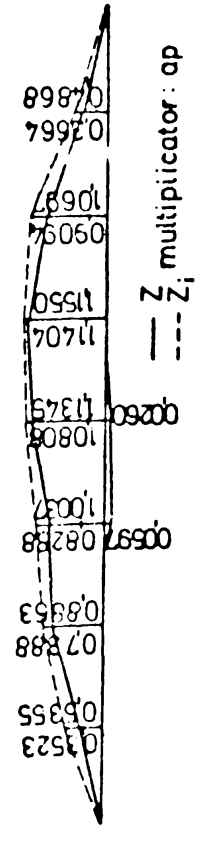
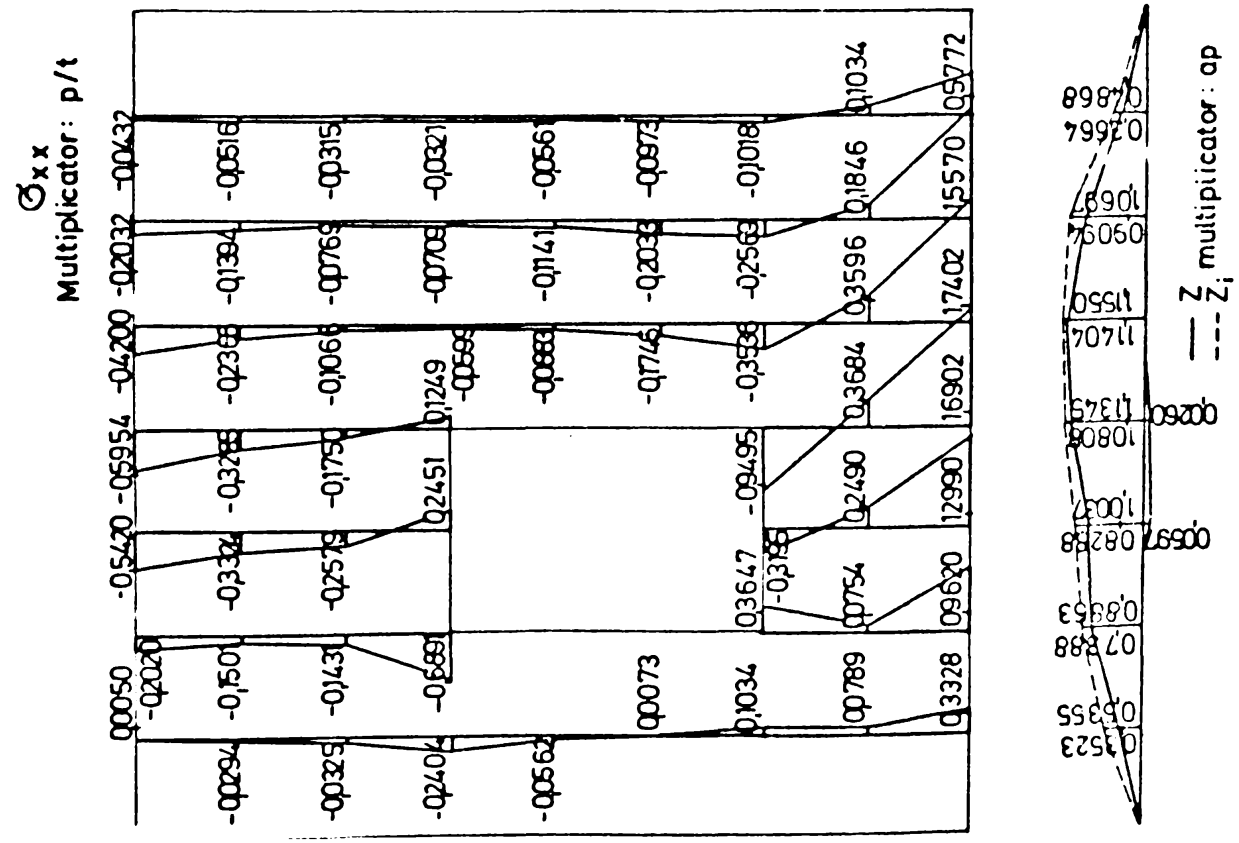
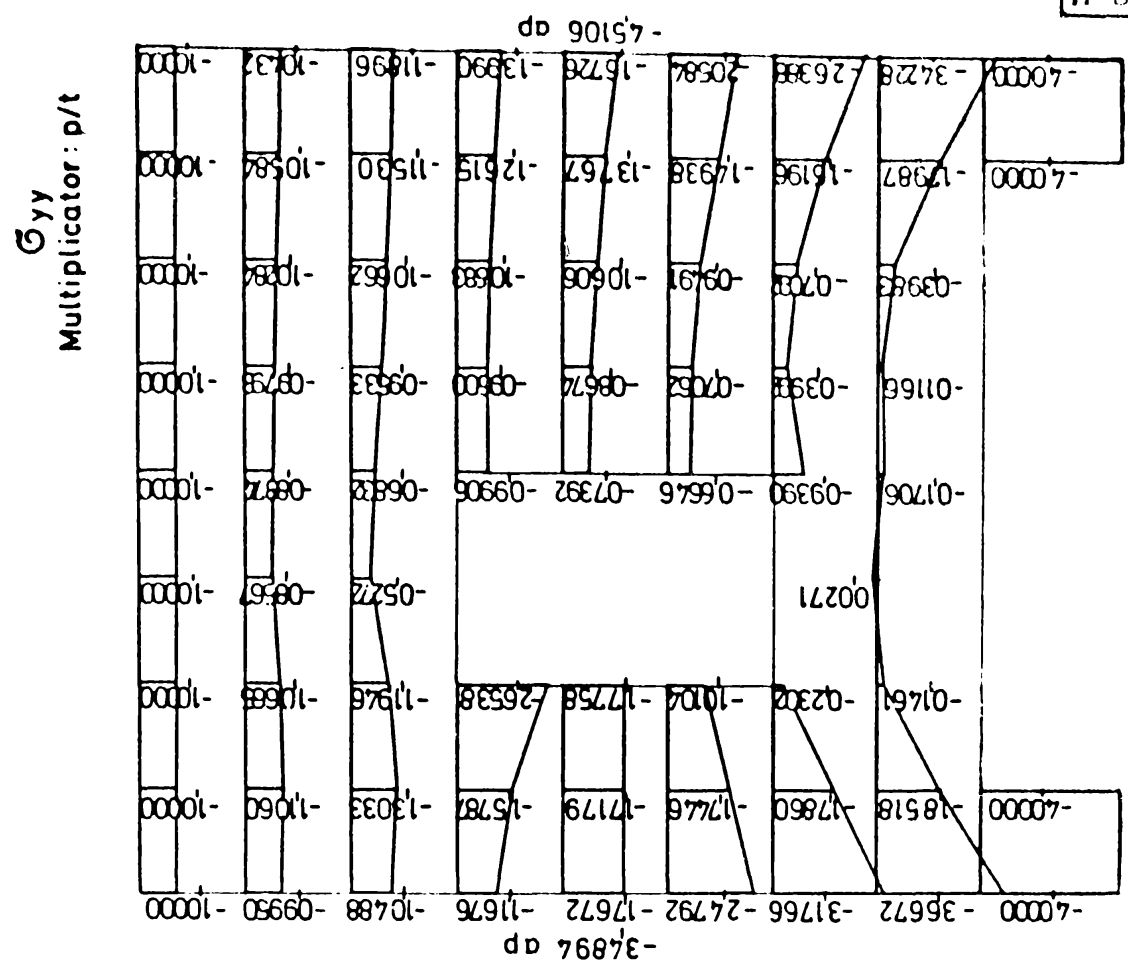
$\sigma_1, \sigma_2$



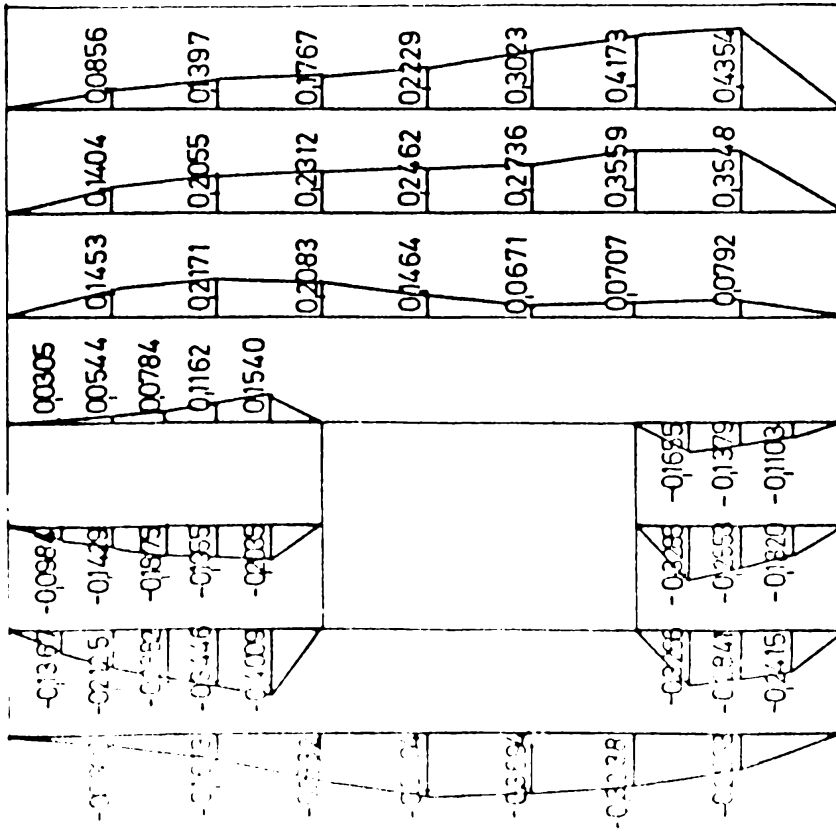
II-31-3



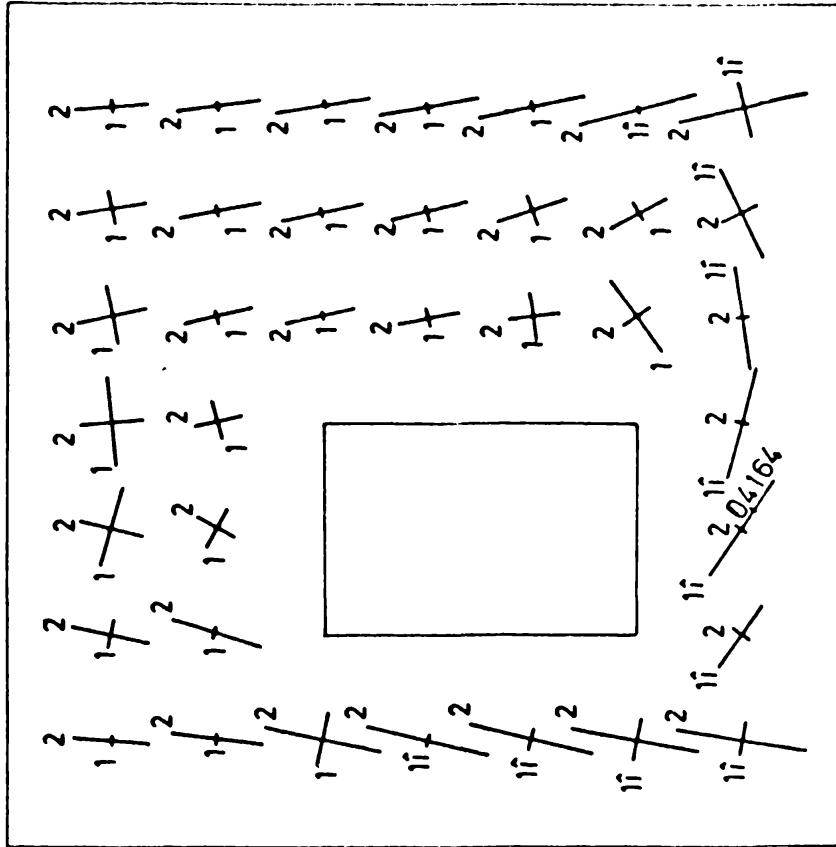




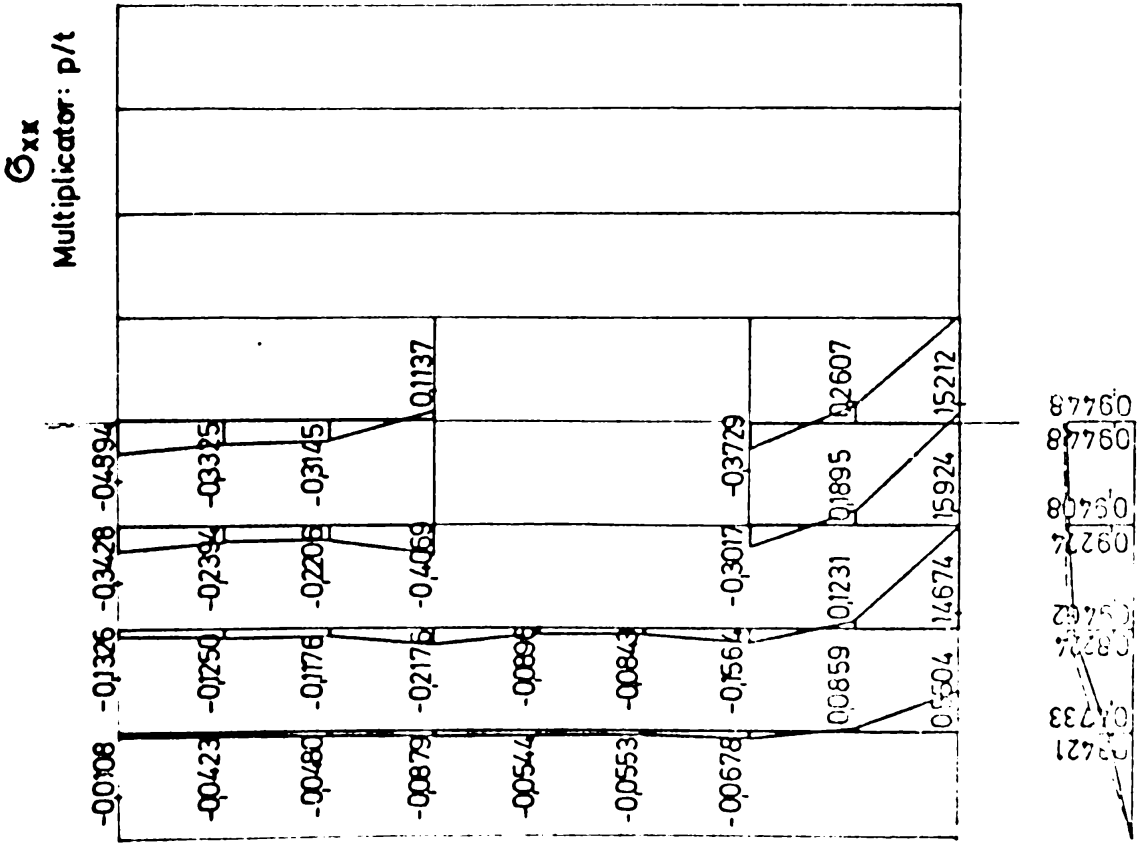
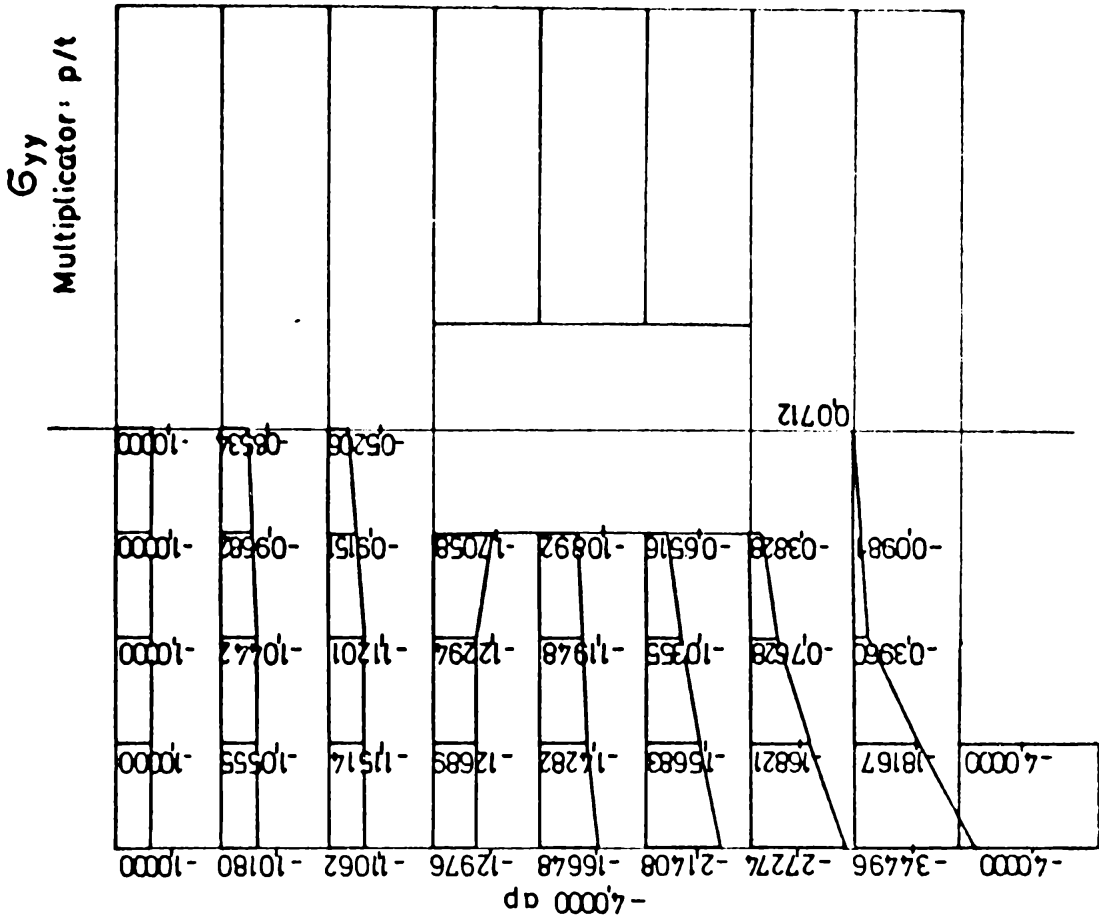
$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t



$\sigma_1, \sigma_2$

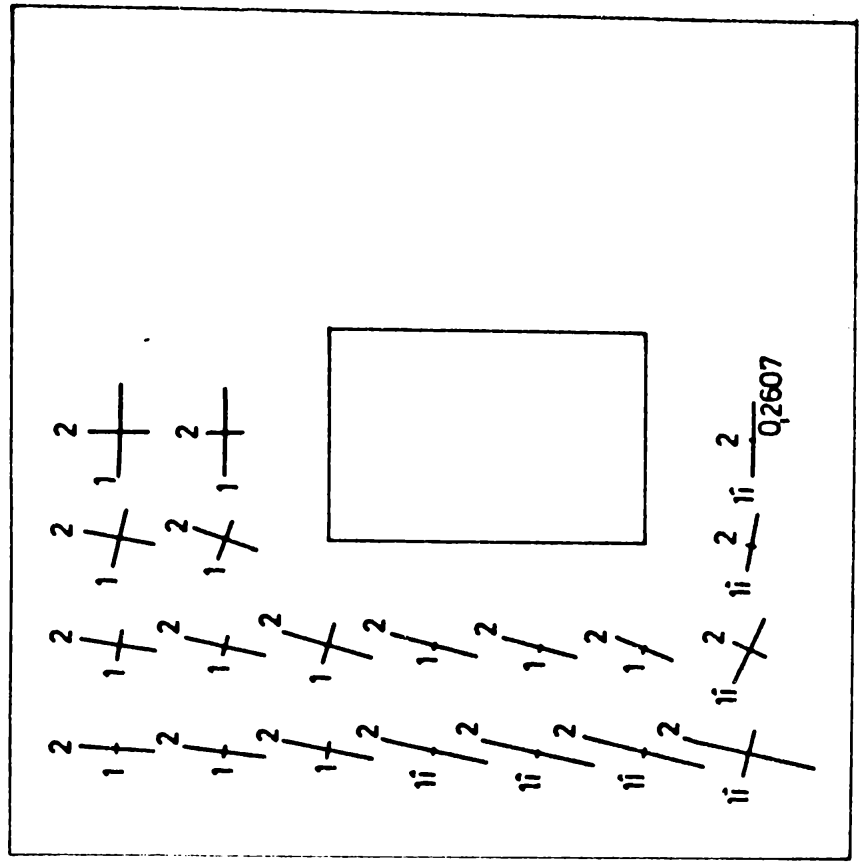
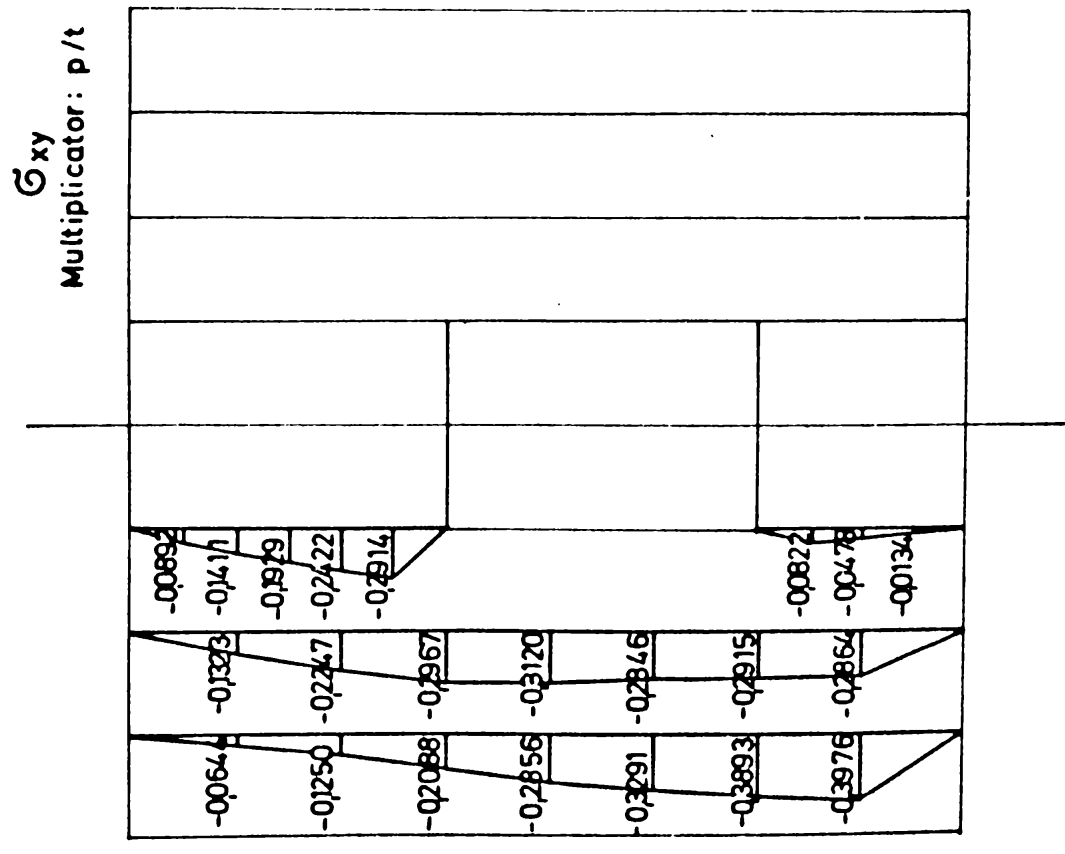






—  $Z$  multiplier : ap  
 - - -  $Z_1$

$\sigma_1, \sigma_2$



$\alpha_1, \alpha_2$   
Multiplier: p/t  
 $\alpha_0$

F  
Multiplier:  $a^2 p$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
	15000	40000	55000	60000	55000	40000	15000	-20000
$\bar{1}$	14002	35871	49231	54979	51661	38374	14613	7
$\bar{8}$	12156	27921	38520	45741	45216	34882	13514	14
$\bar{a}$	11101	19607	28113	36798	38548	30971	12194	18
$\bar{d}$	07237	17012	24249	31346	33072	27190	10816	22
$\bar{f}$	03372	10120	20384	26193	27208	22668	09037	26
$\bar{h}$	00492	04920	16520	19805	19352	16227	06364	30
$\bar{j}$	04357	04149	12655	11054	09004	07566	02769	34
0	0	0	0	0	0	0	0	-20000

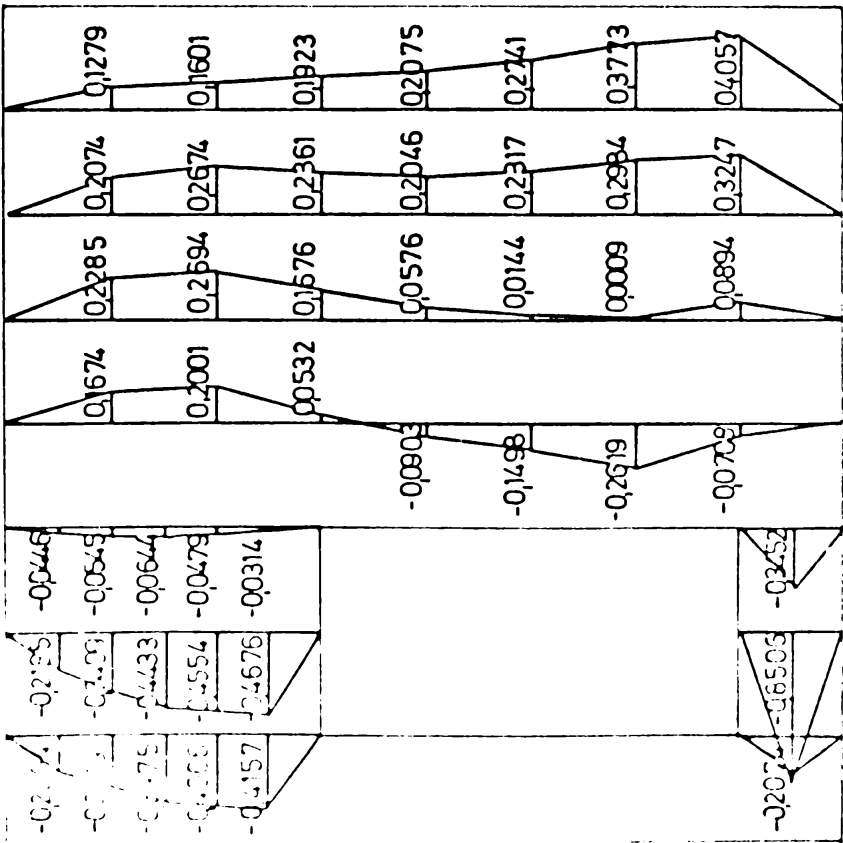
  

	-00091	-02028	-04835	-03695	-02415	-01392	-00553	
	-12890	-10302	-07719	-09588	-10660	-10348	-11011	
	14904	27944	11006	17019	16500	12552	7005	
	01709	02383	00365	00765	00482	00216	-00010	
	-17304	-07913	-03439	-08216	-10514	-11669	-12357	
	12939	3906	7017	13014	14940	13221	7031	
				03518	01452	00602	00213	
				-06962	-09587	-11672	-13688	
				2055	8050	11018	8002	
				00439	-00343	-00328	-00101	
				-05511	-07654	-10904	-14742	
				8050	4032	11231	804	
				-00689	-01987	-01238	-00394	
				-05340	-05559	-09776	-15905	
				2000	2019	16026	1021	
				-00343	-02493	-00736	-00056	
				-05758	-02671	-08221	-17367	
				3708	2051	26026	12055	
				-00210	01691	02805	01664	
				-02542	-00959	-05069	-18810	
				1804	2913	2706	1140	

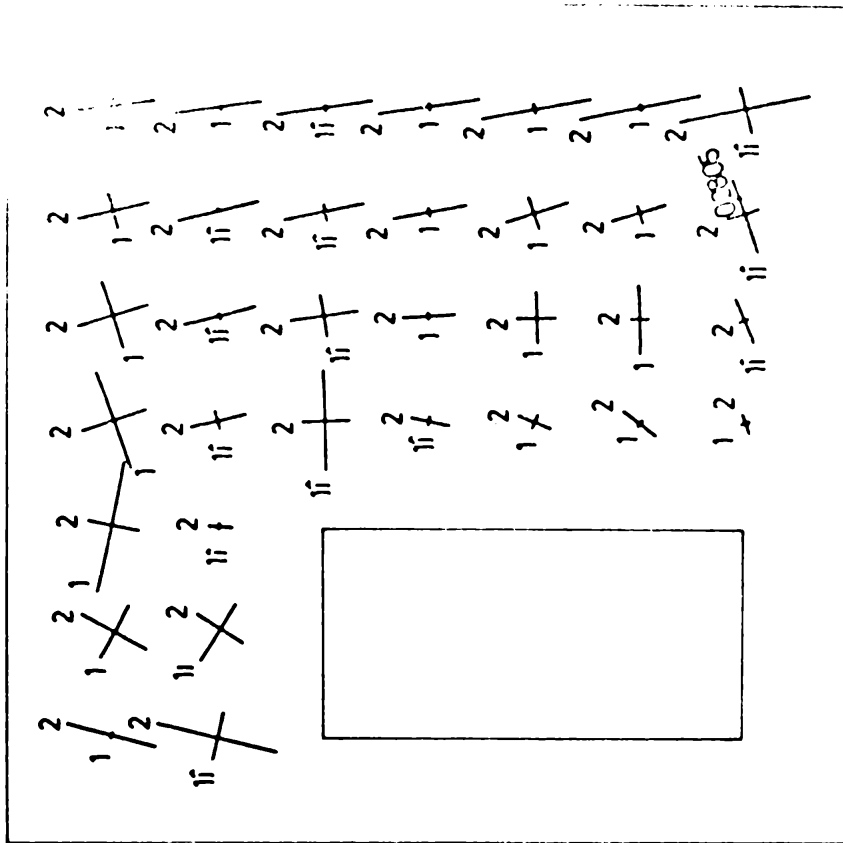
II-CI-1



$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t



$\sigma_1, \sigma_2$

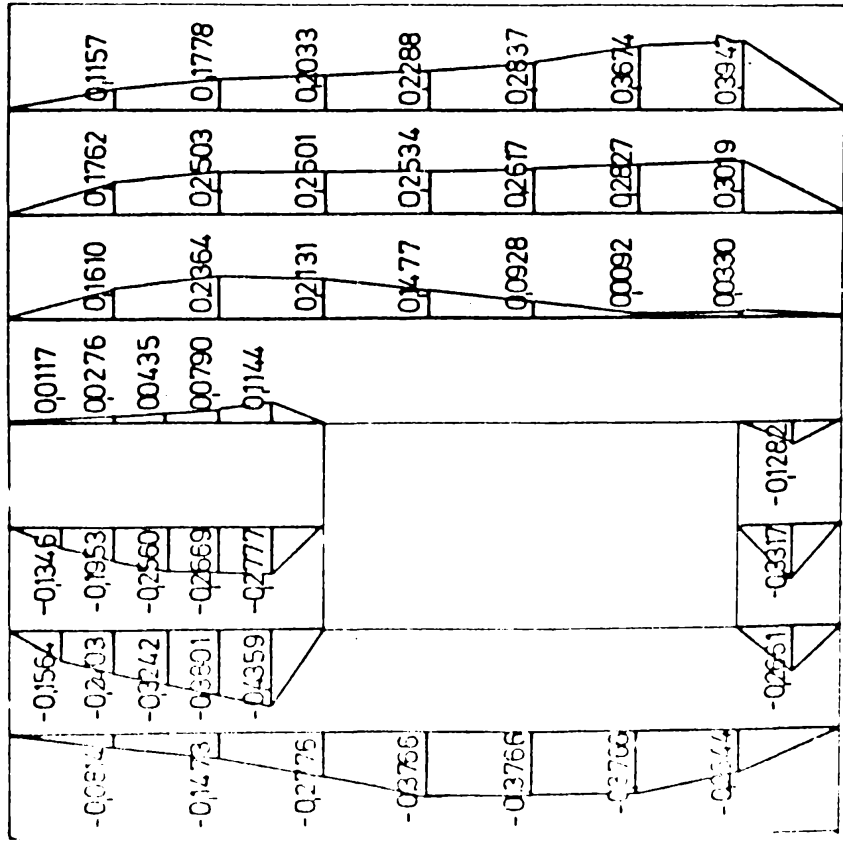




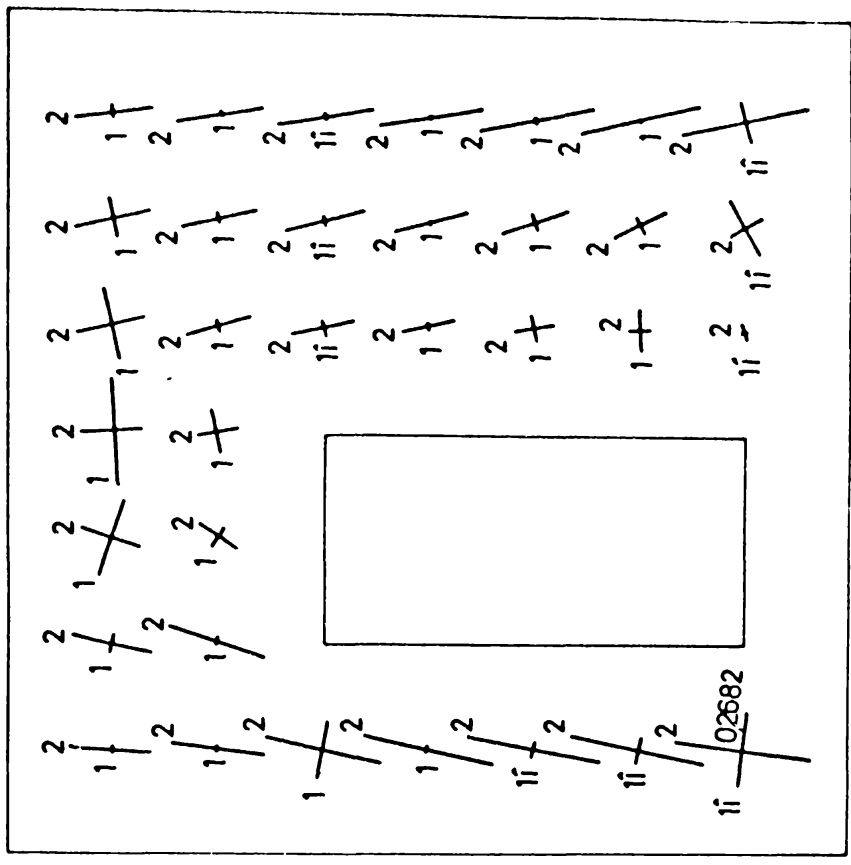




$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t



$\sigma_1, \sigma_2$



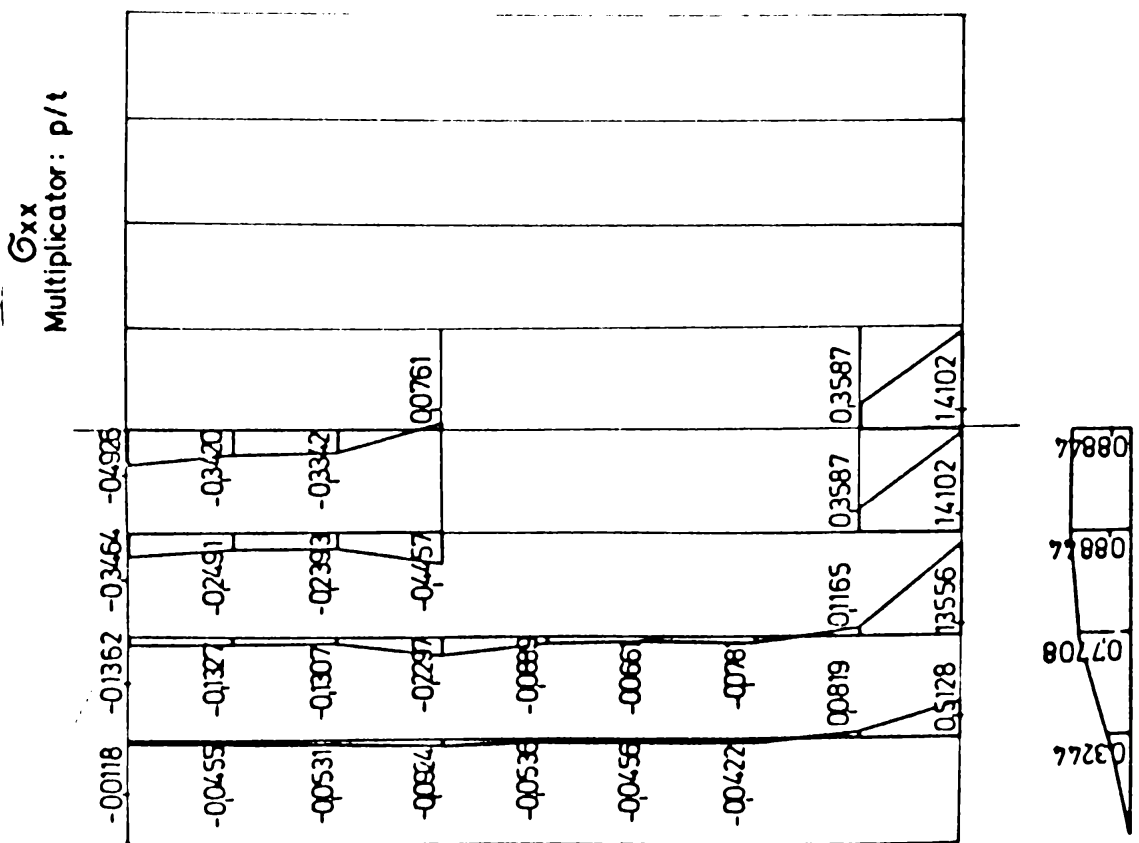
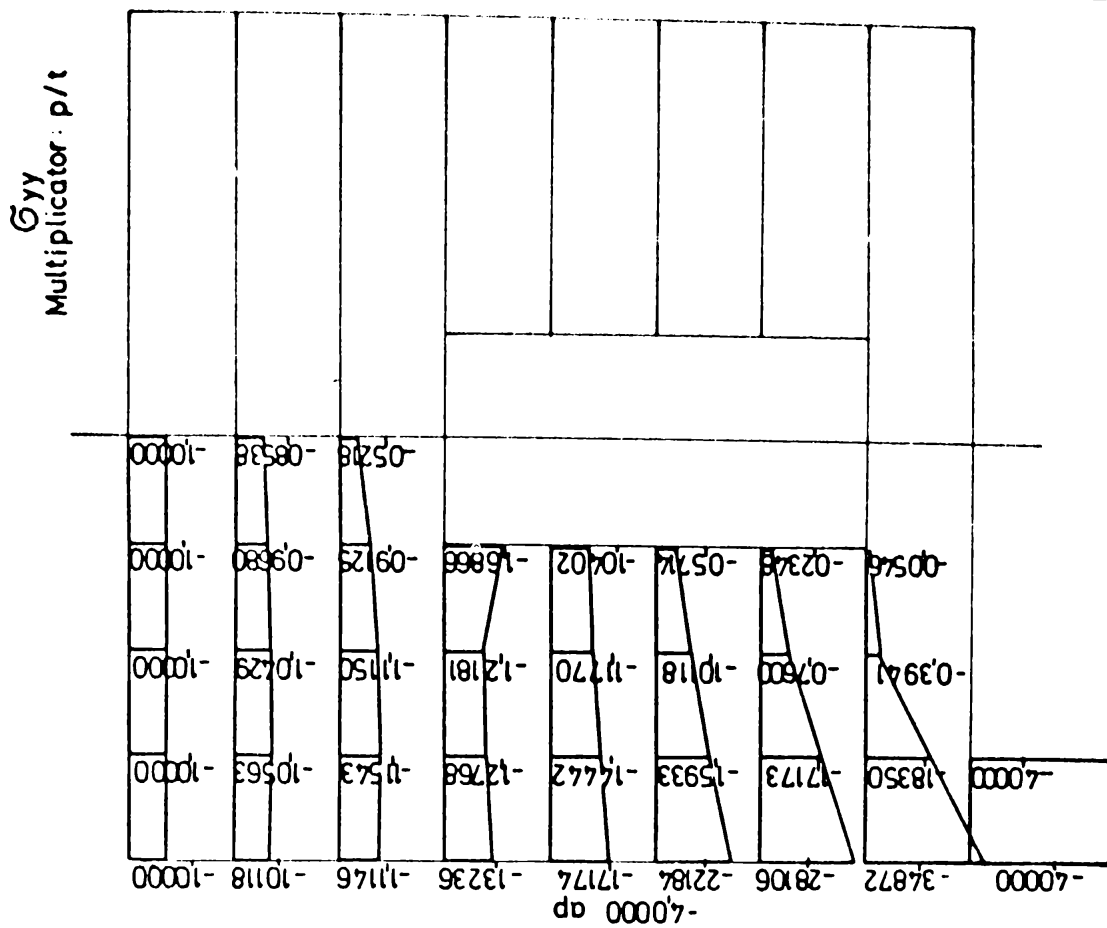
F  
Multiplier:  $a^2 p$



	④ 15000	③ 40000	② 55000	① 60000			
⑦ -20000	④ 14941	③ 39319	② 53268	① 57537			
⑧ -20000	⑧ 14427	⑦ 37311	⑥ 49045	⑤ 51654			
⑩ -20000	⑩ 13382	⑨ 33996	⑧ 42429	⑦ 42429			
⑫ -20000	⑫ 11413	⑪ 28384	⑩ 33585	⑨ A = -17689			
⑭ -20000	⑭ 98908	⑬ 21883	⑫ 24790				
⑯ -20000	⑯ 95947	⑮ 14721	⑭ 15895				
⑰ -20000	⑰ 92564	⑯ 1778	⑰ 07051	⑱ A = 17689			
⑲ -20000	⑲ 0	⑲ 0	⑲ 0	⑲ 0			

$\sigma_1, \sigma_2$   
Multiplier:  $p/t$   
 $\alpha_0$

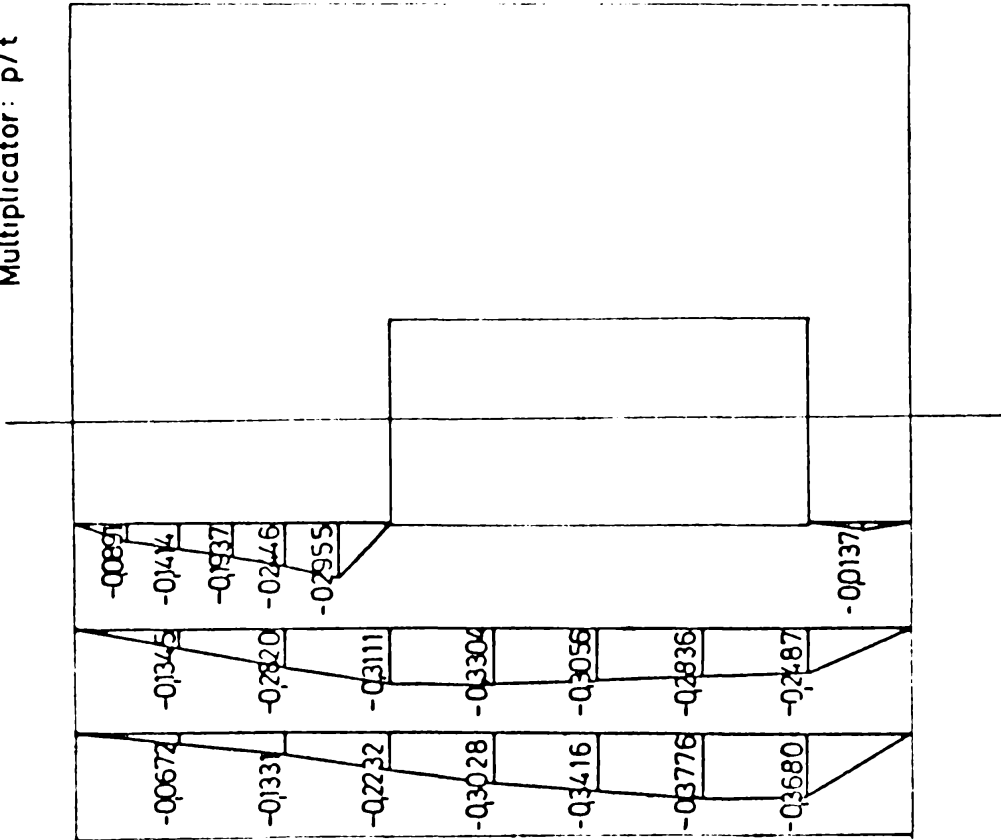
	-00411	-01133	-07223	-03420			
	-10607 3°47'	-10624 8°14'	-09948 10°44'	-08538 0°			
	-00373	-00788	-01599	-03342			
	-11702 6°47'	-11669 12°37'	-09919 18°00'	-05218 0°			
	-00518	-01399					
	-13175 10°19'	-13079 16°05'					
	00095	00036					
	-15073 11°46'	-12695 15°38'					
	00264	00241					
	-16653 11°54'	-11019 16°26'					
	00390	00244					
	-17985 12°08'	-08625 19°52'					
	01501	02176					
	-19032 10°30'	-04952 22°07'					



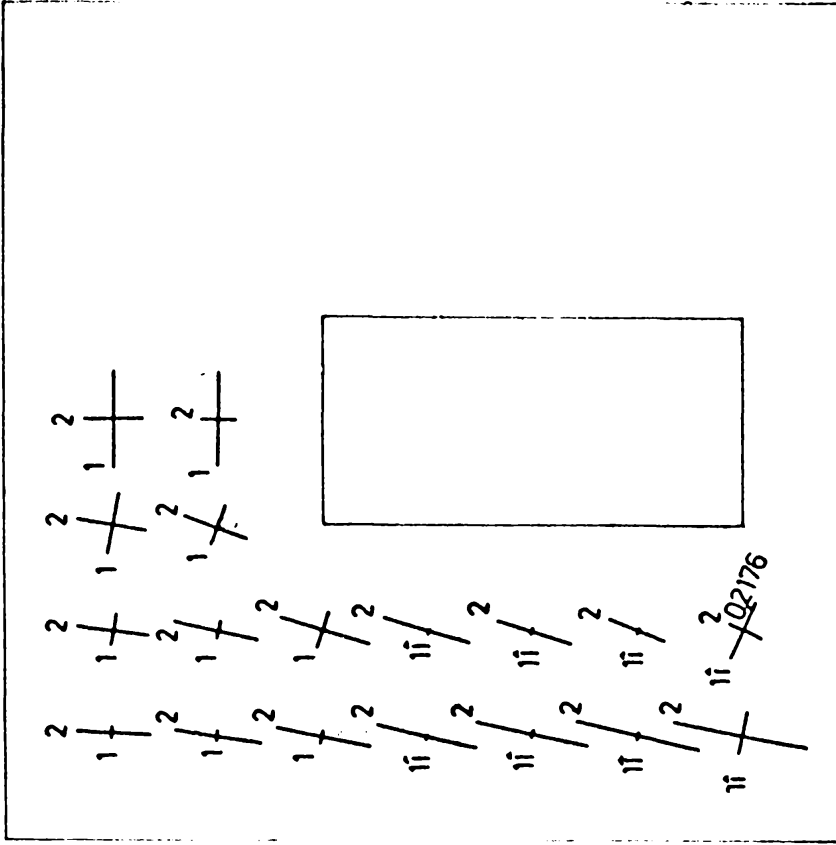
— Z multiplier: ap

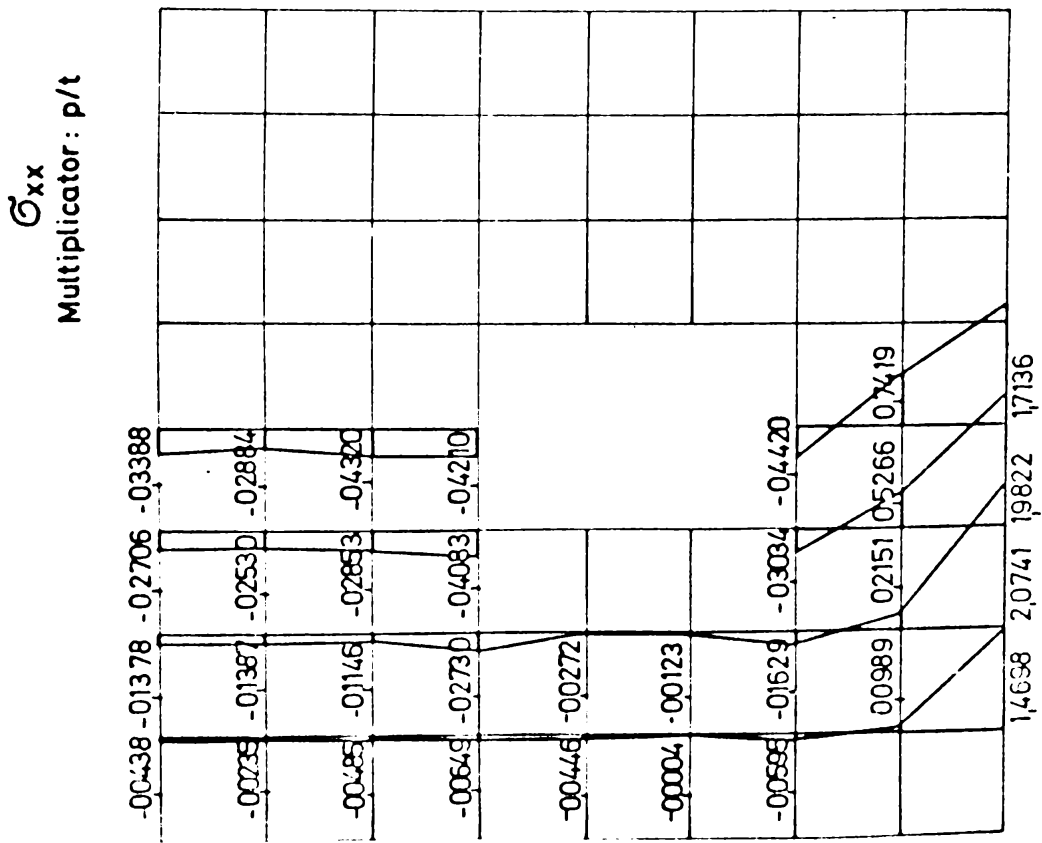
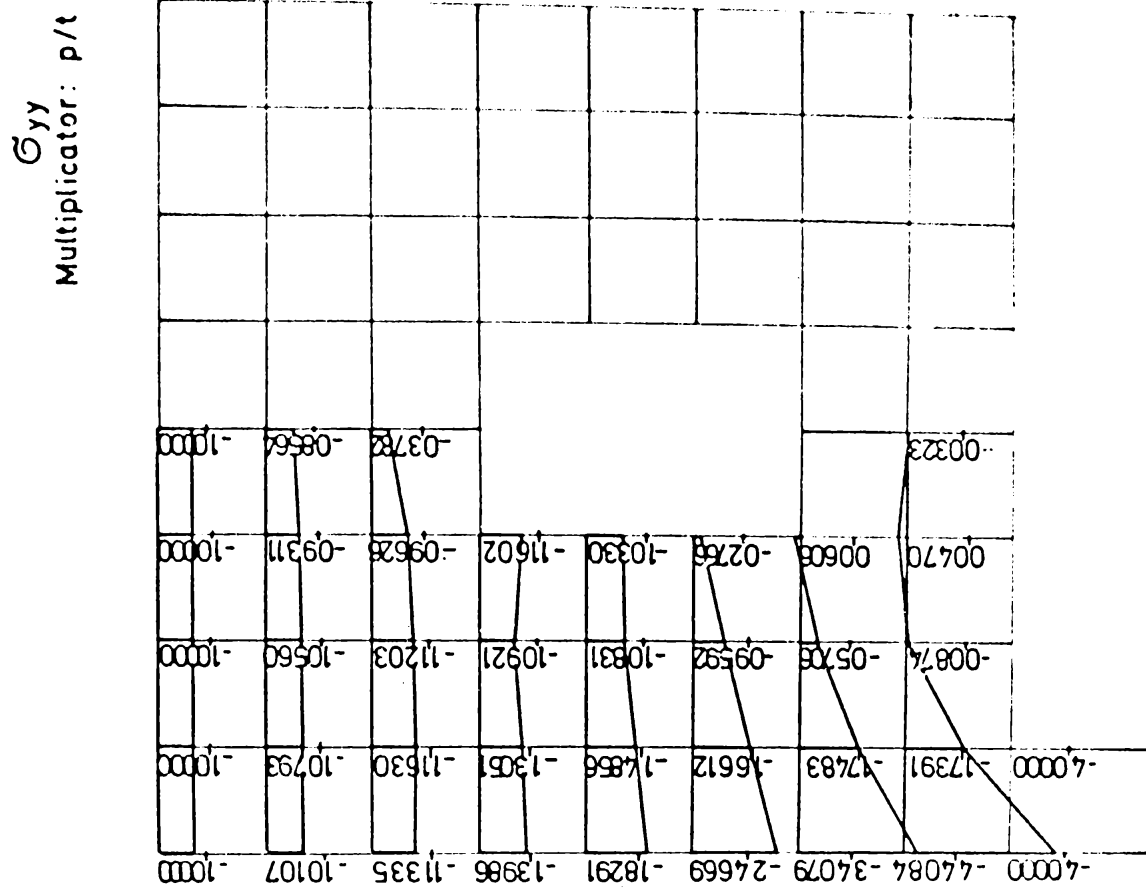


$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t

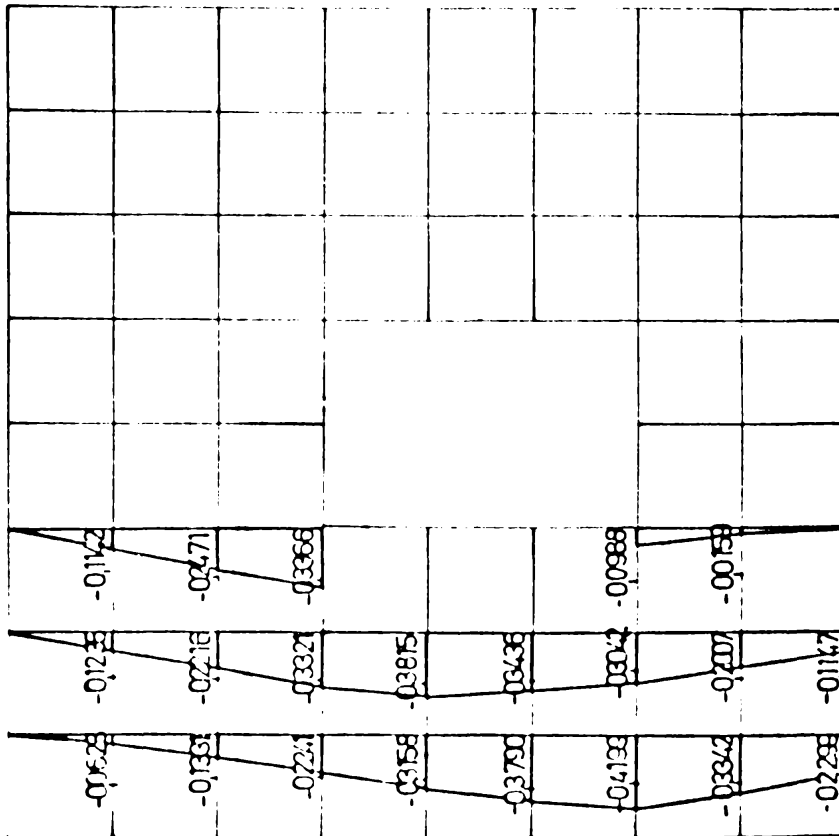


$\sigma_1, \sigma_2$

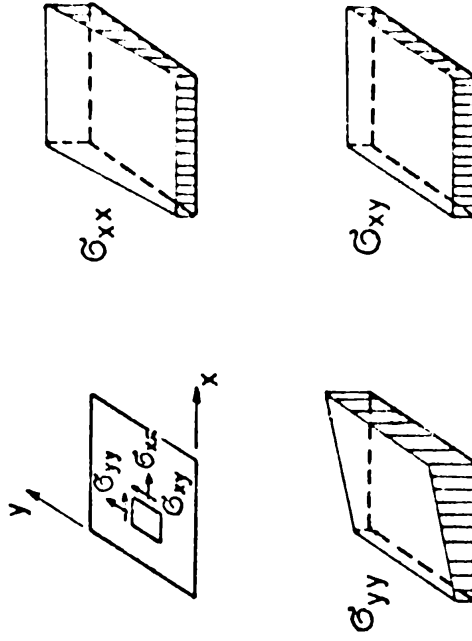




$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t

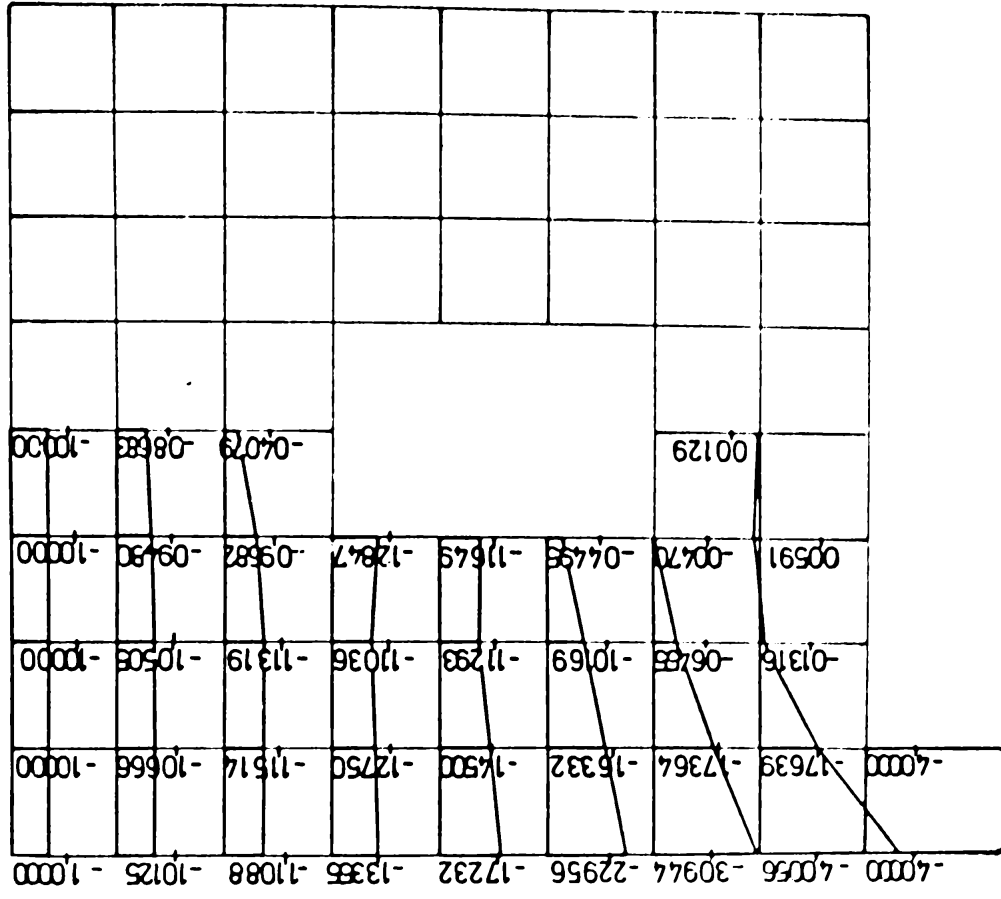


Model de tensiuni T

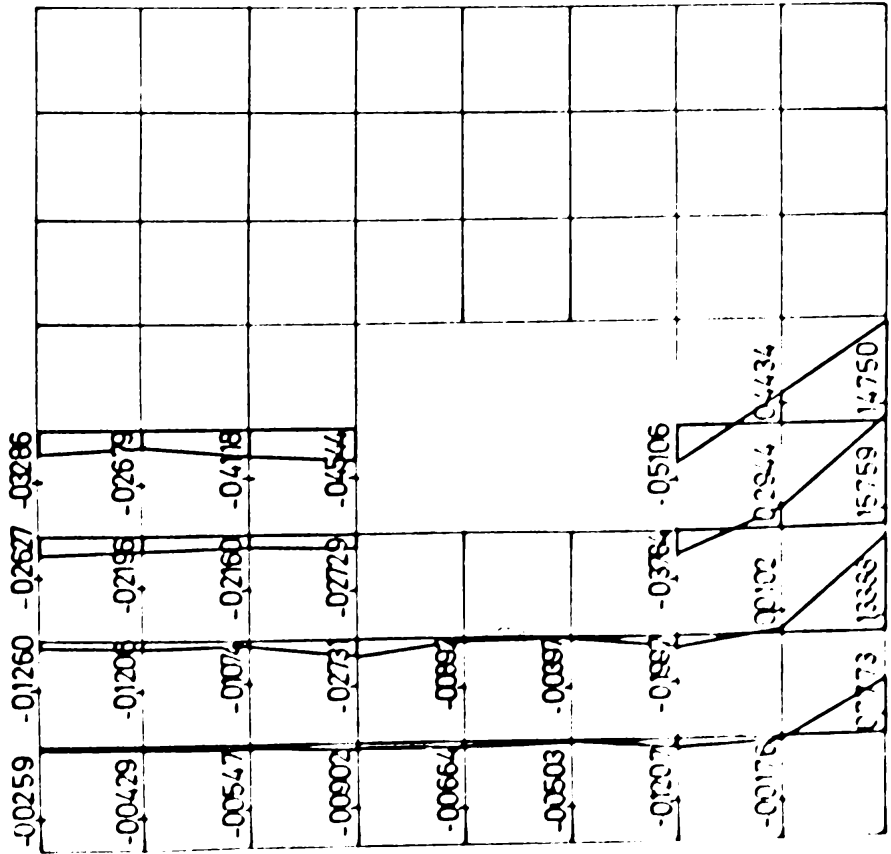




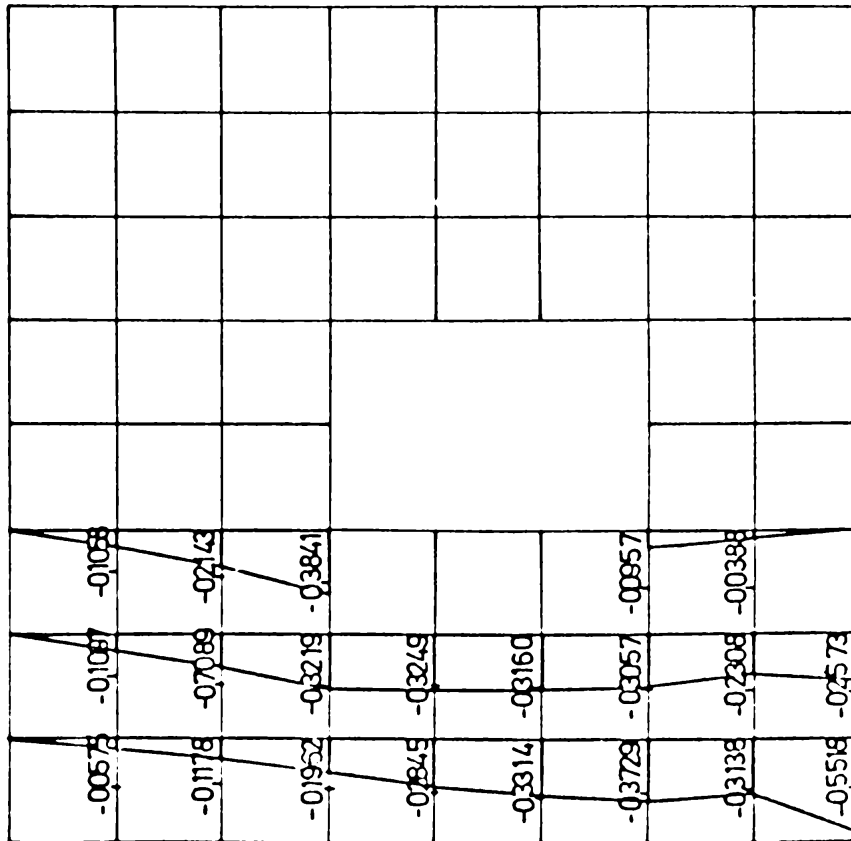
$\sigma_{yy}$   
Multiplier: p/t



$\sigma_{xx}$   
Multiplier: p/t

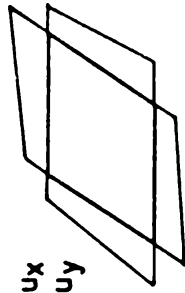


$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t

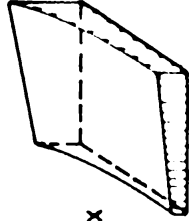


Model hibrid H

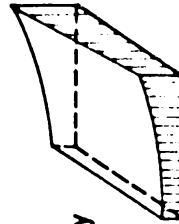
$u_x$   
 $u_y$



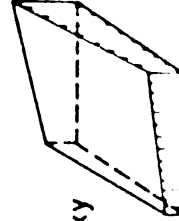
$\sigma_{xx}$



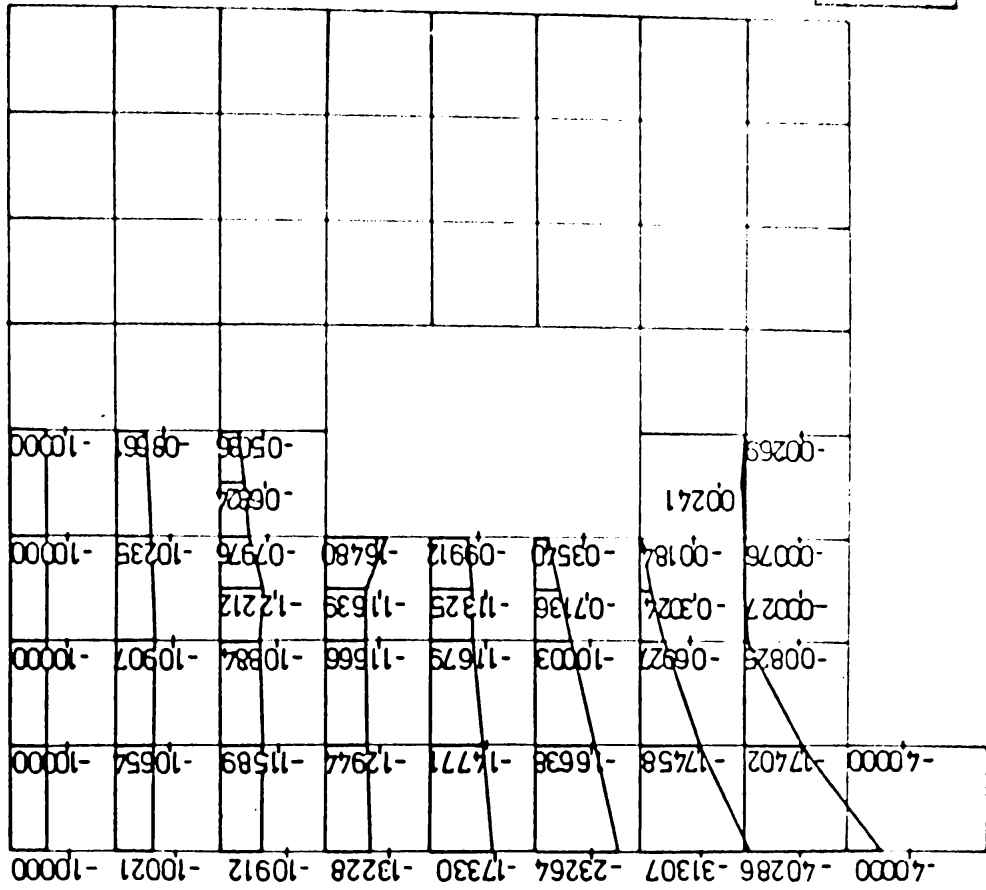
$\sigma_{yy}$



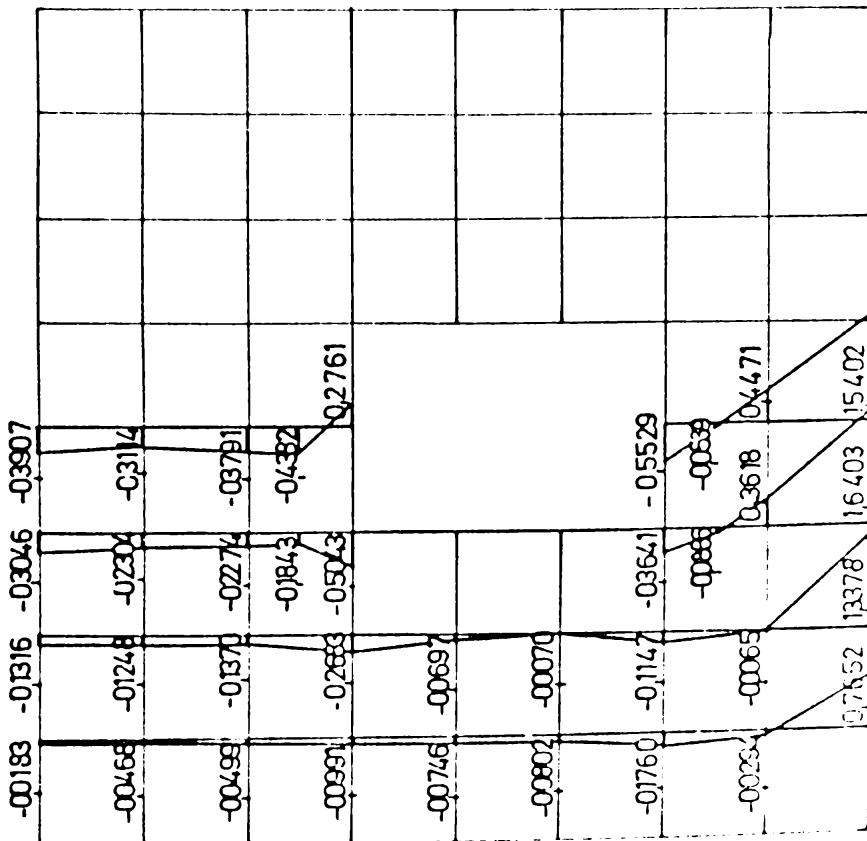
$\sigma_{xy}$



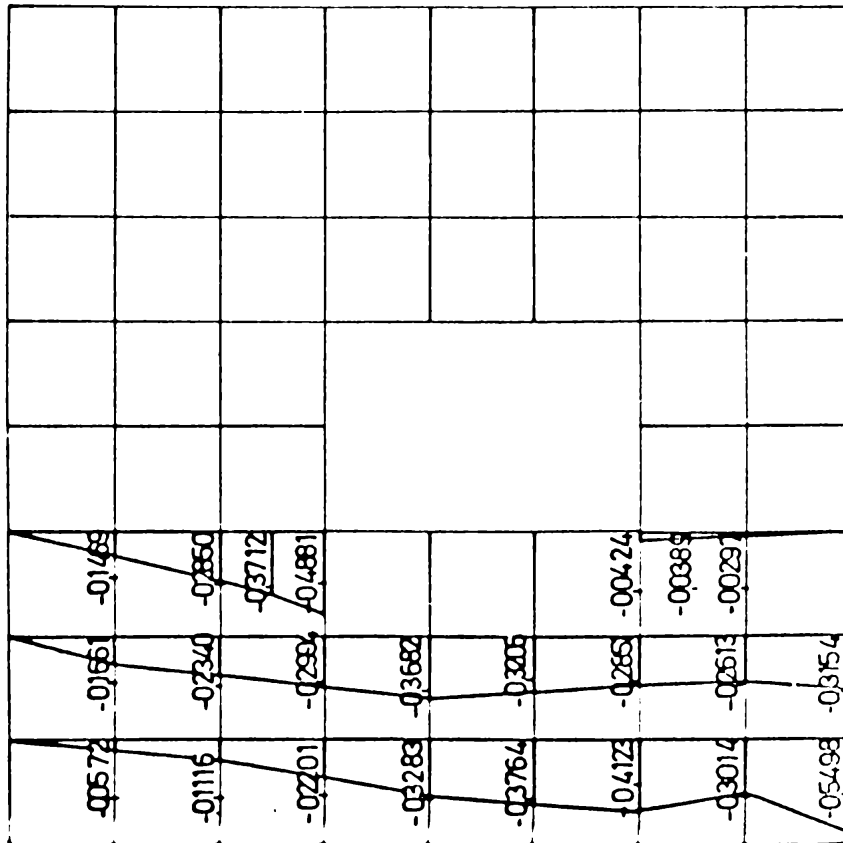
$\sigma_{yy}$   
Multiplier: p/t



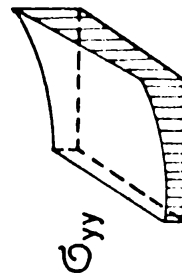
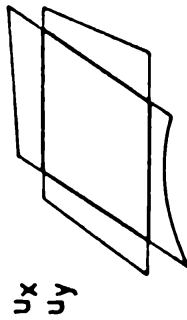
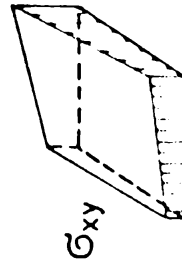
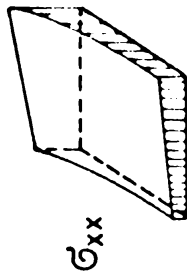
$\sigma_{xx}$   
Multiplier: p/t



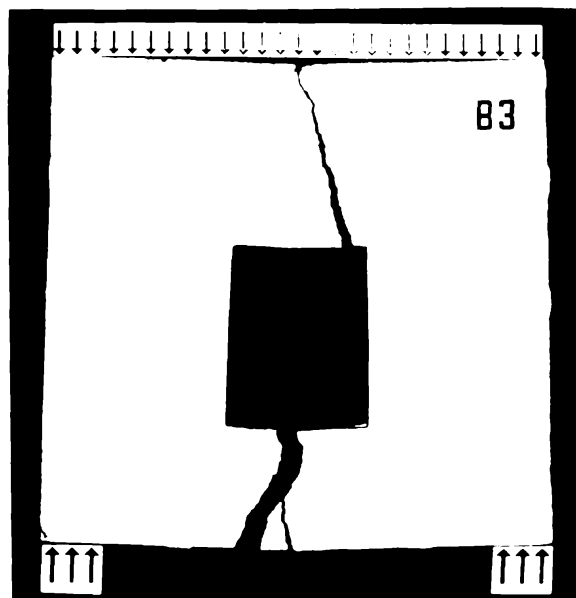
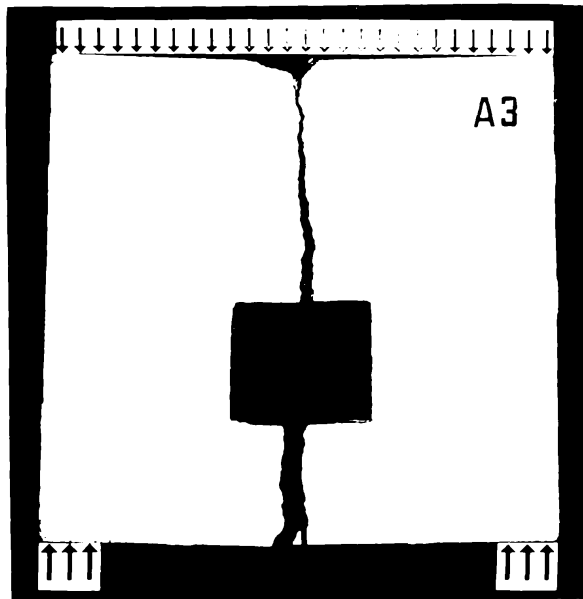
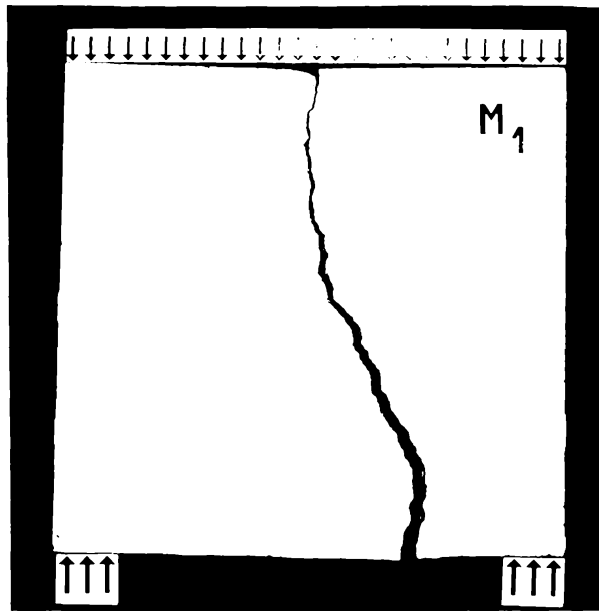
$\sigma_{xy}$   
Multiplier: p/t

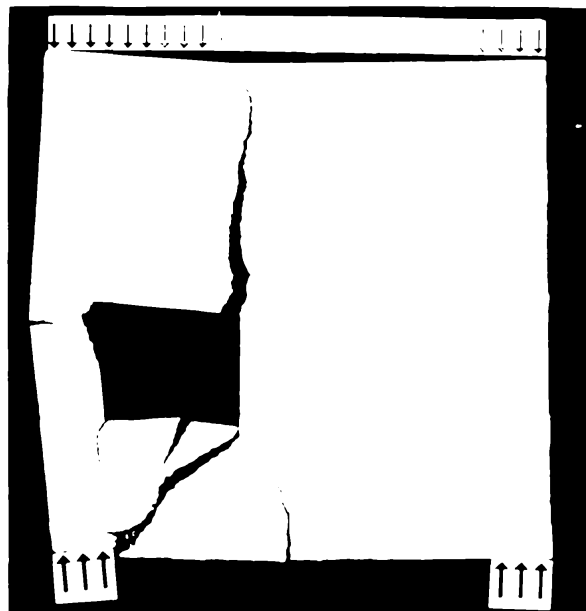
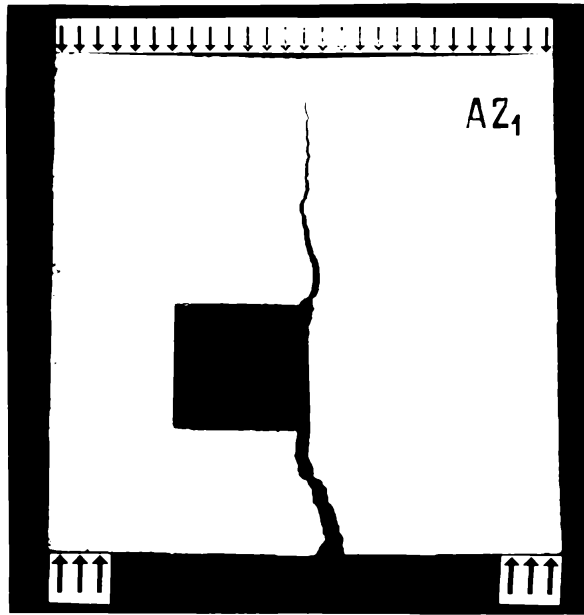
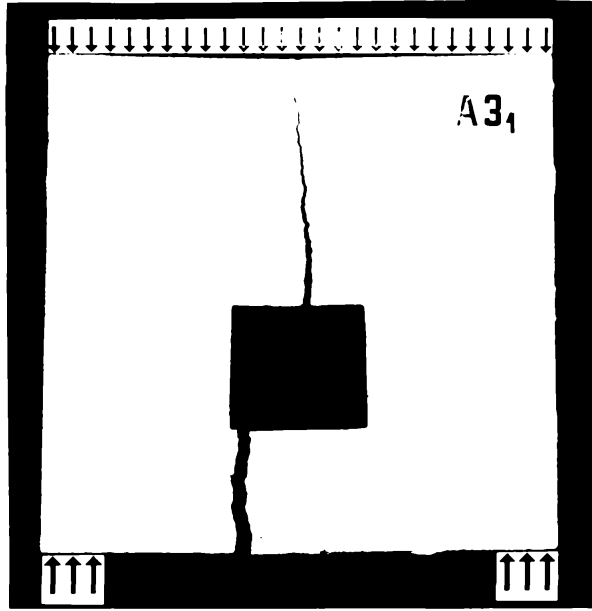


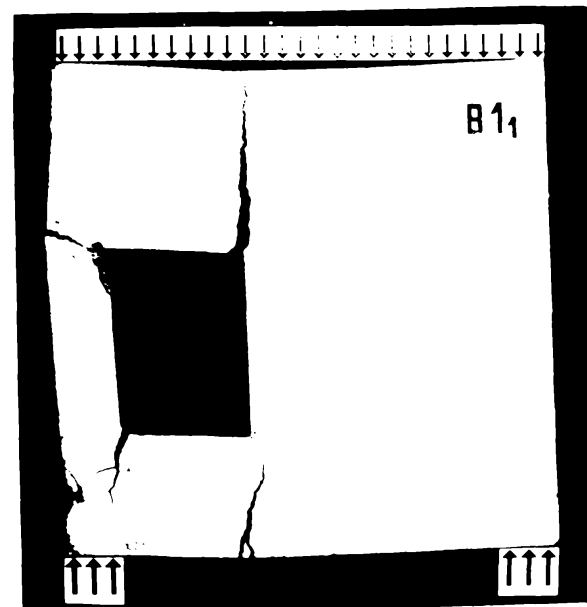
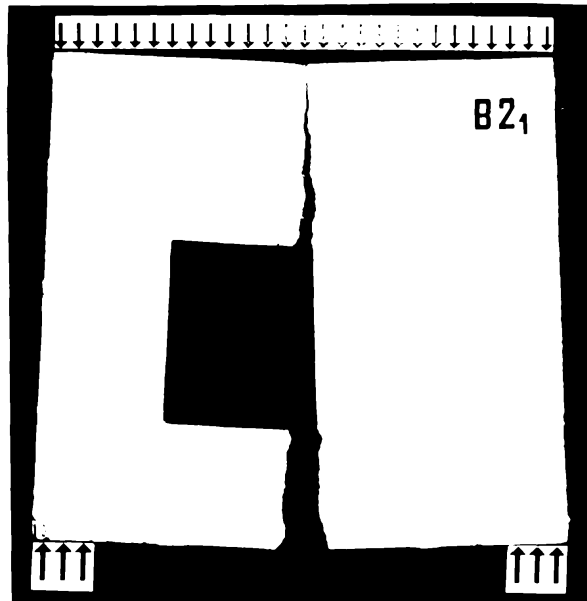
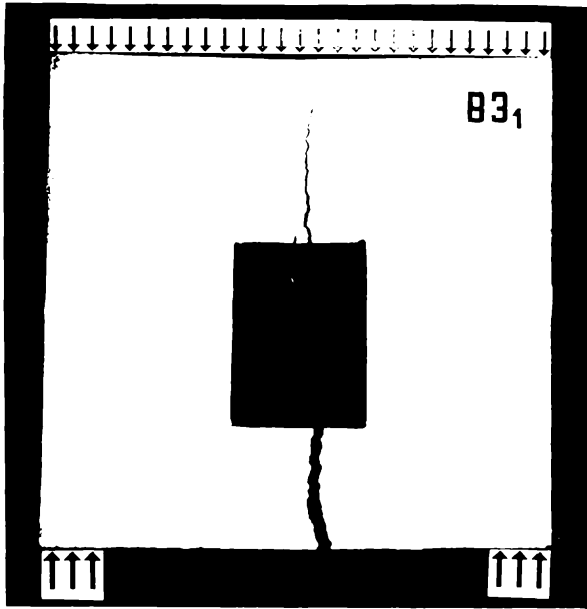
Model hibrid HC

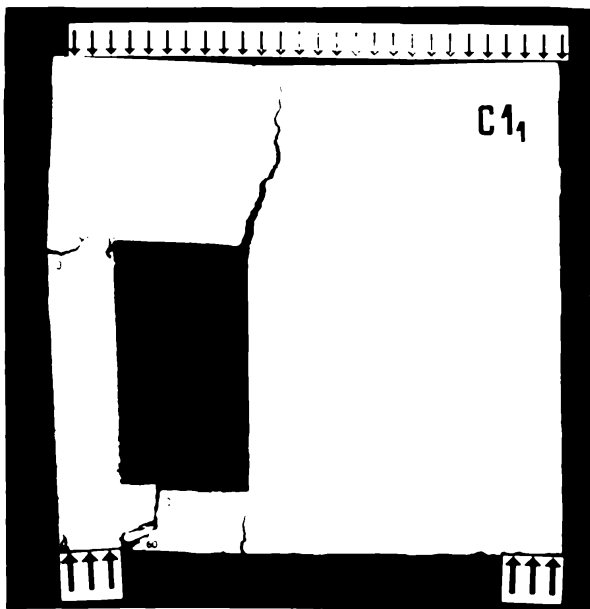
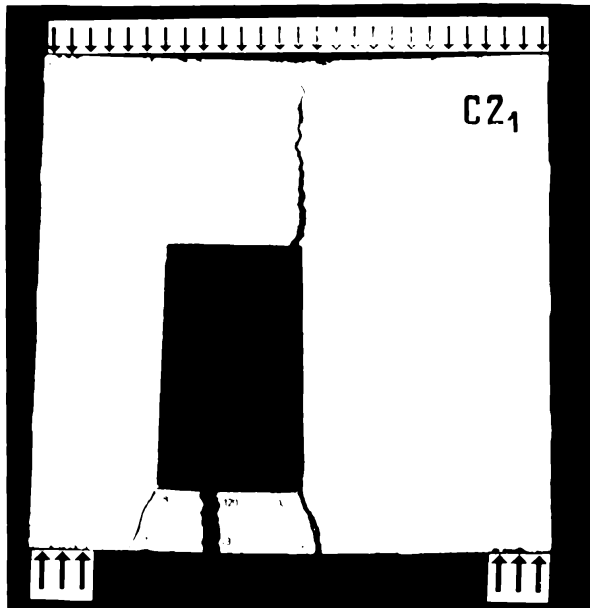
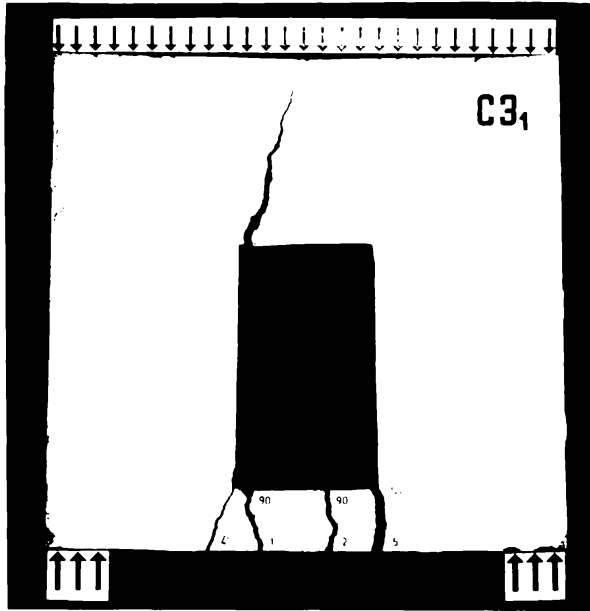


IV-1

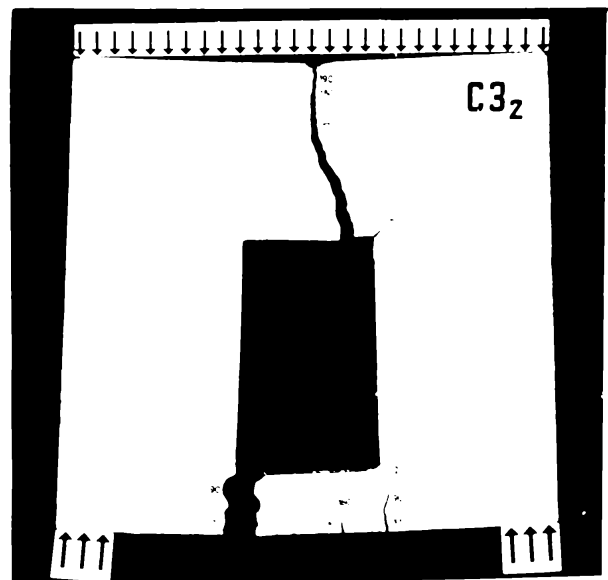
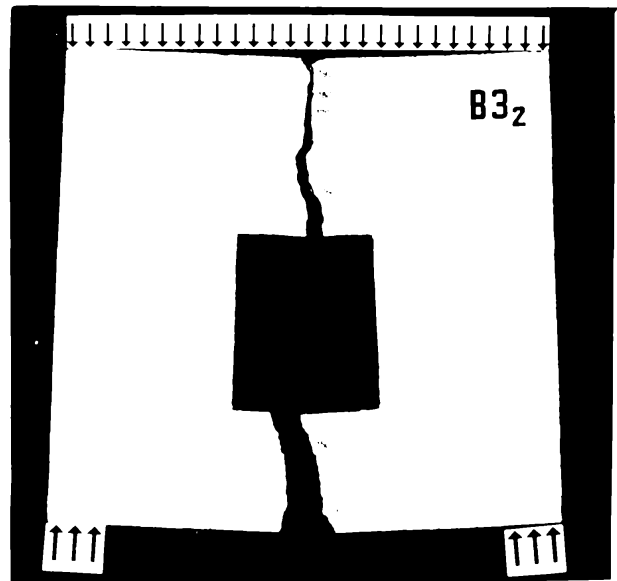
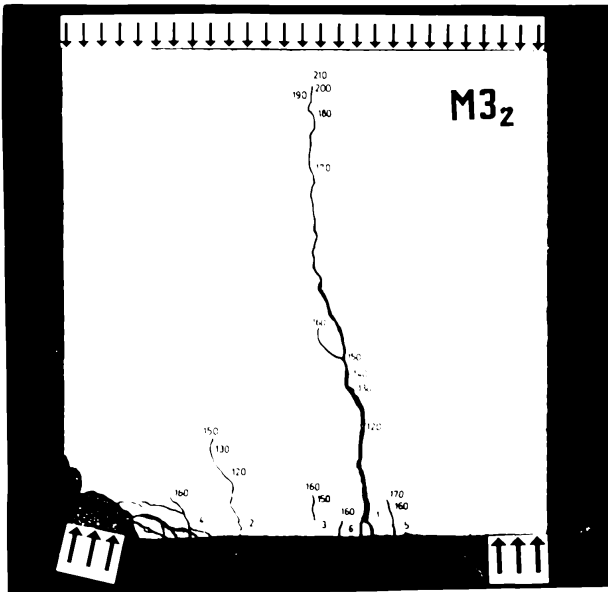
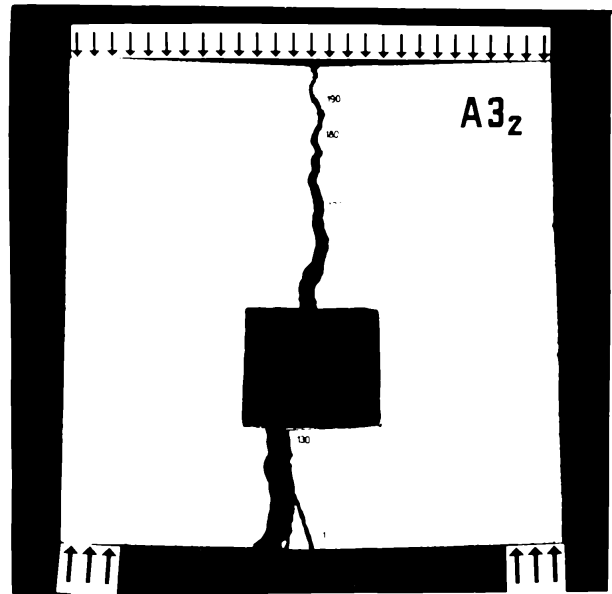


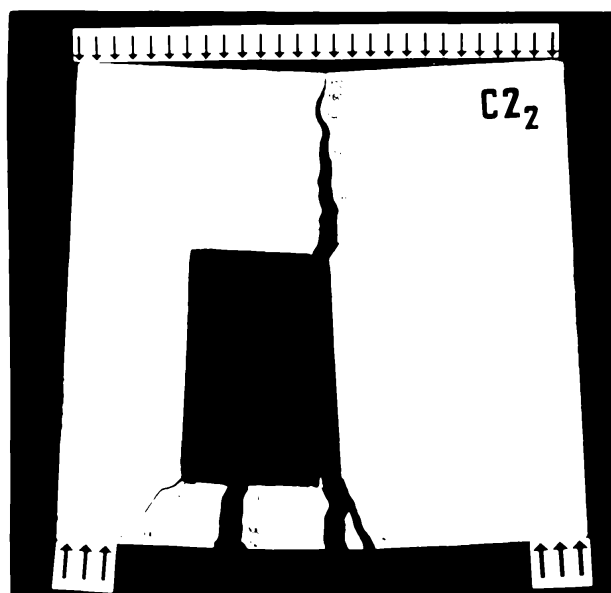
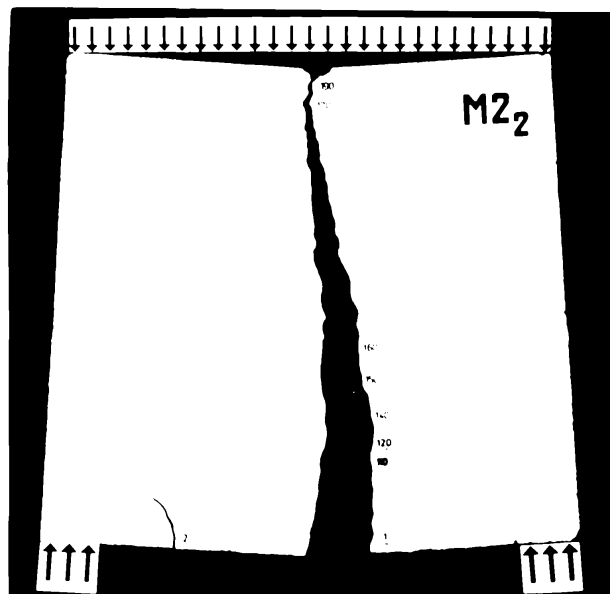
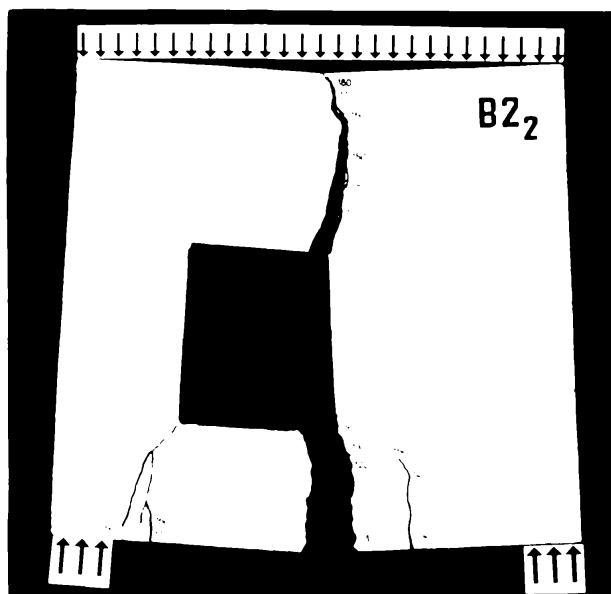
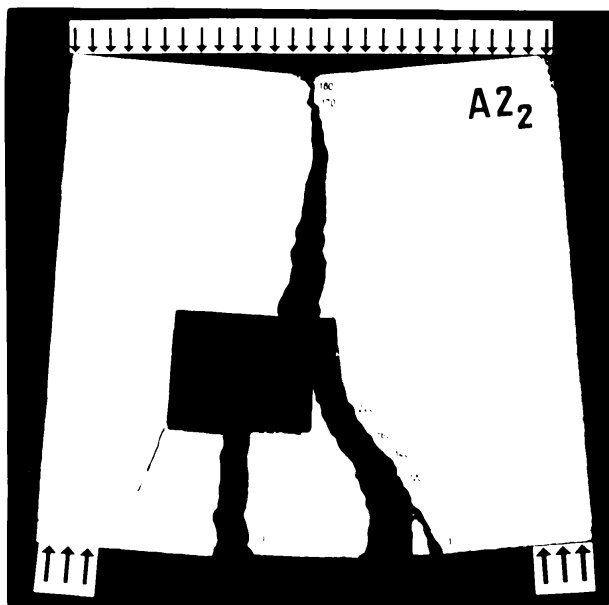


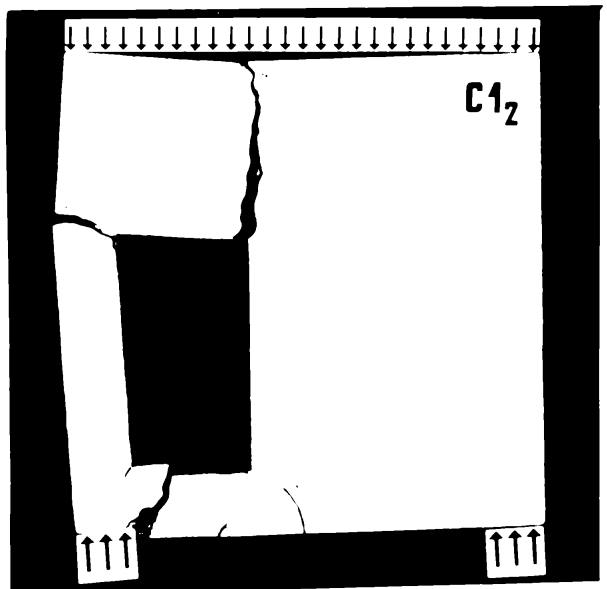
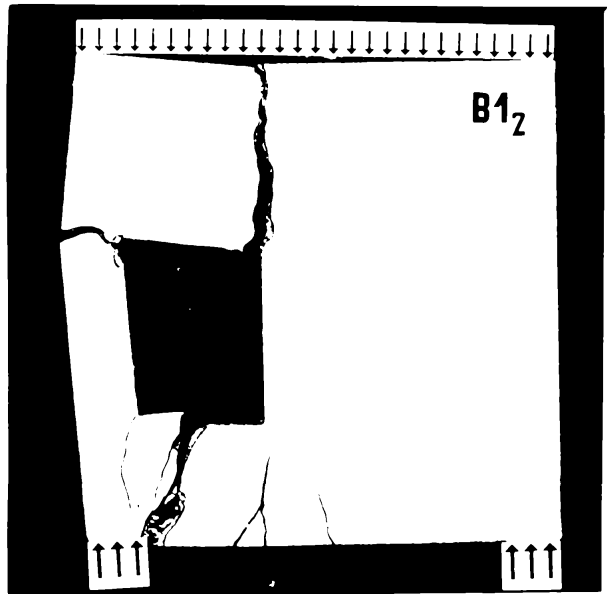
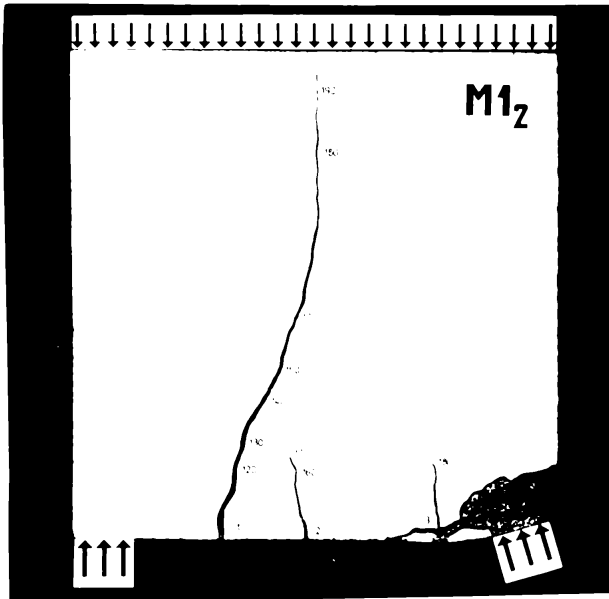
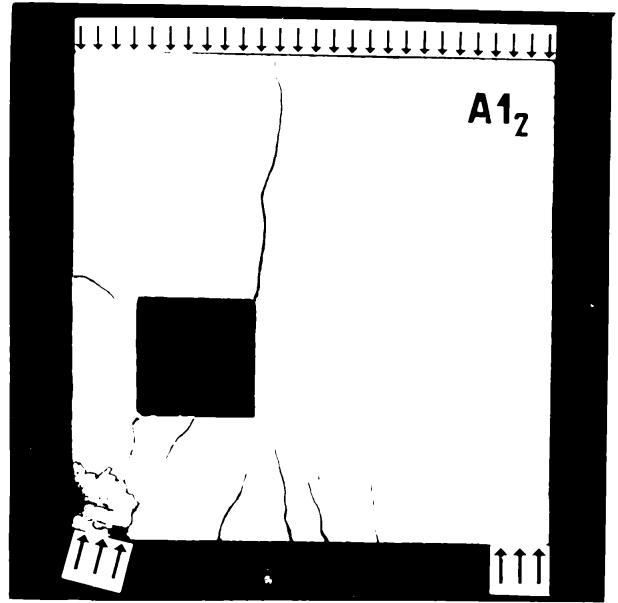




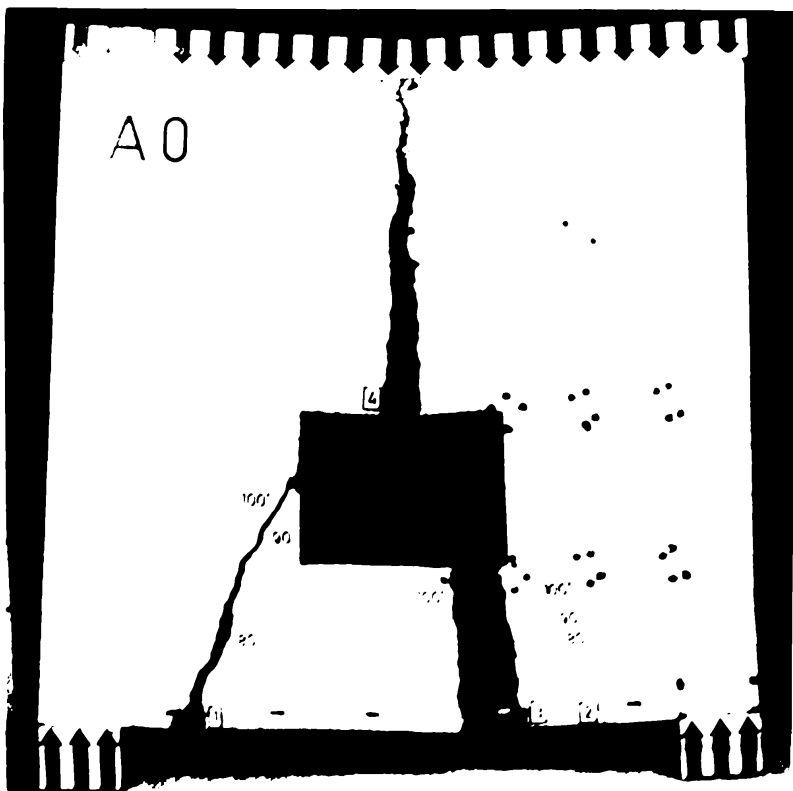
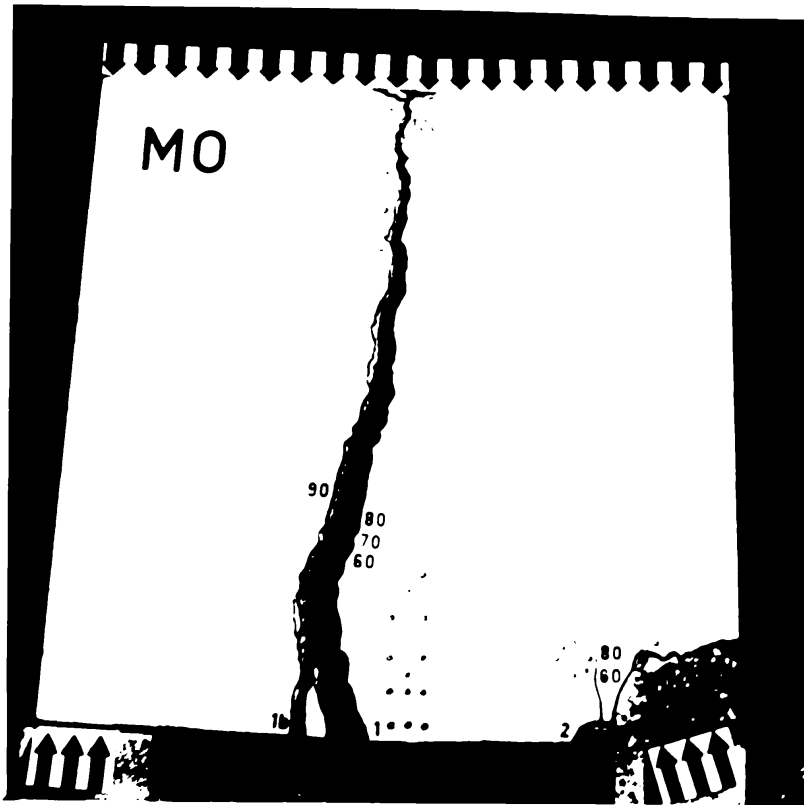


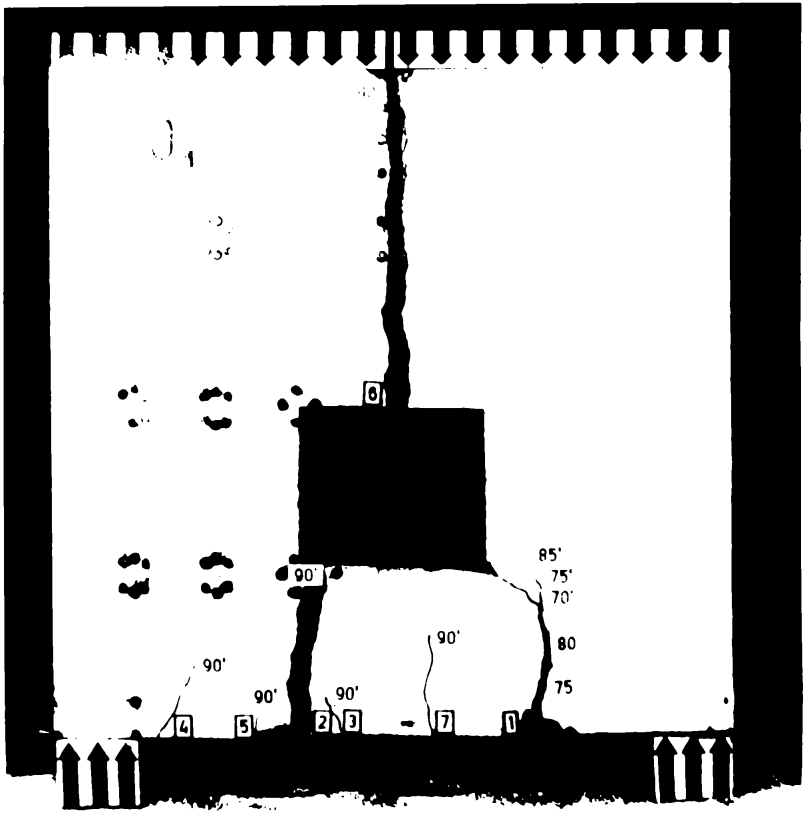
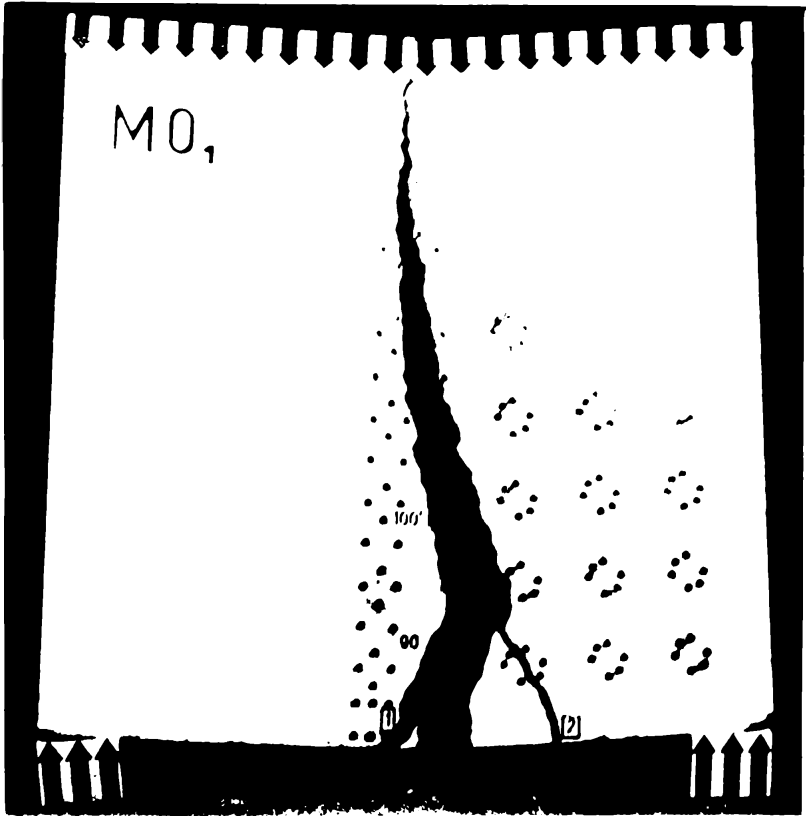


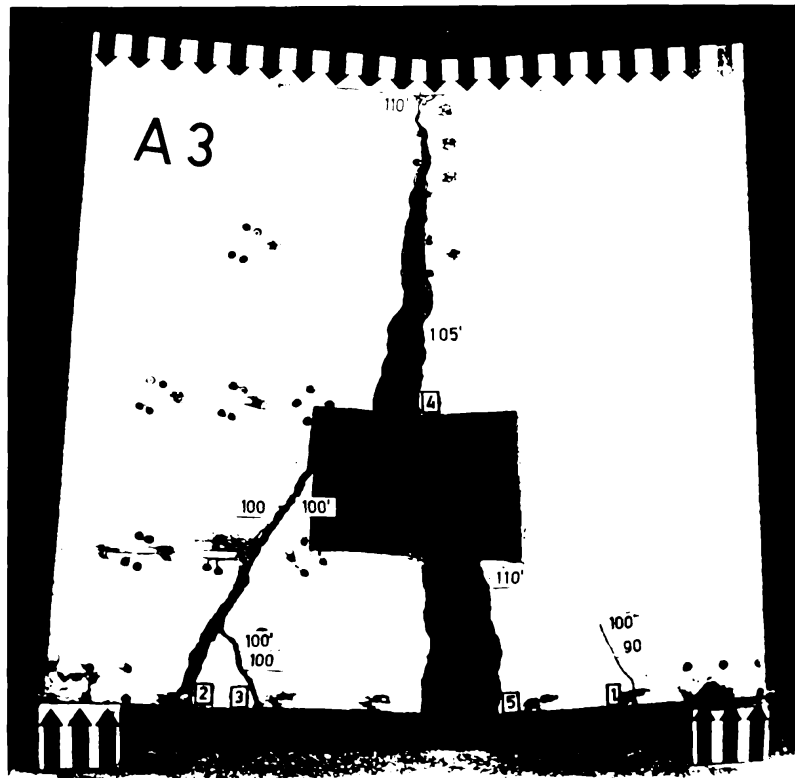
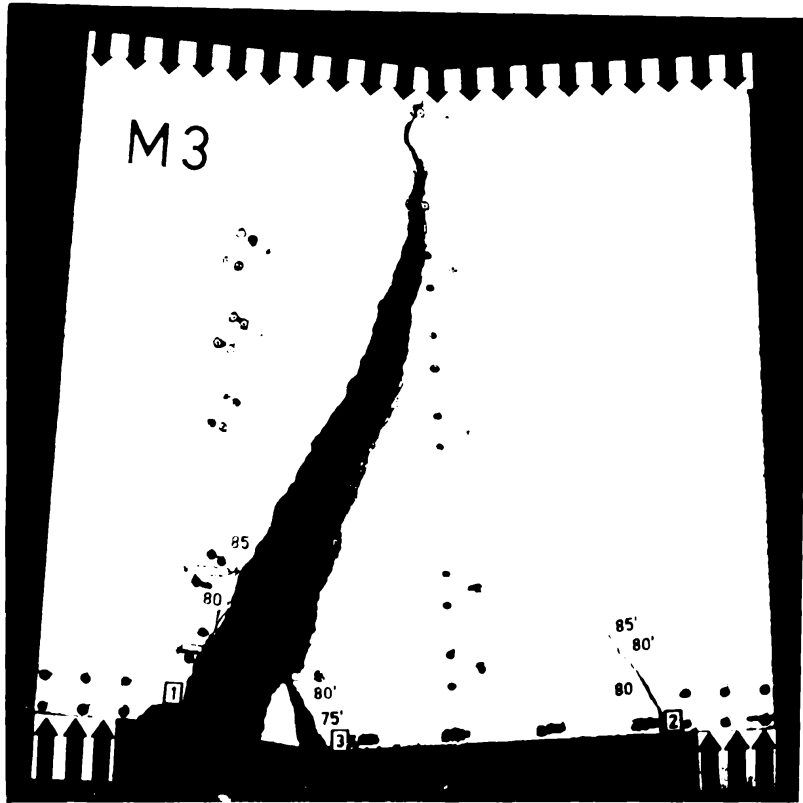


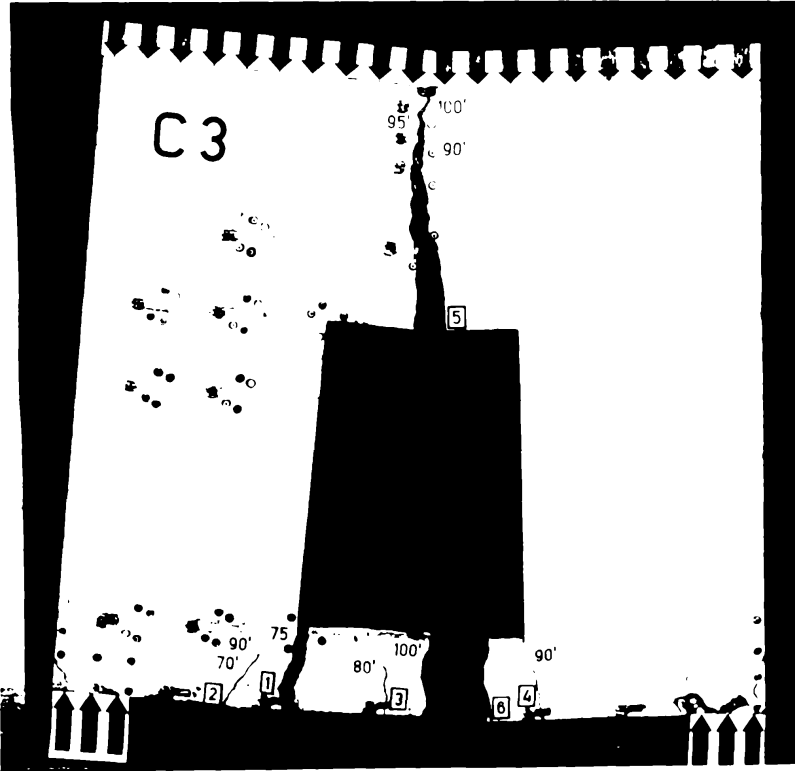
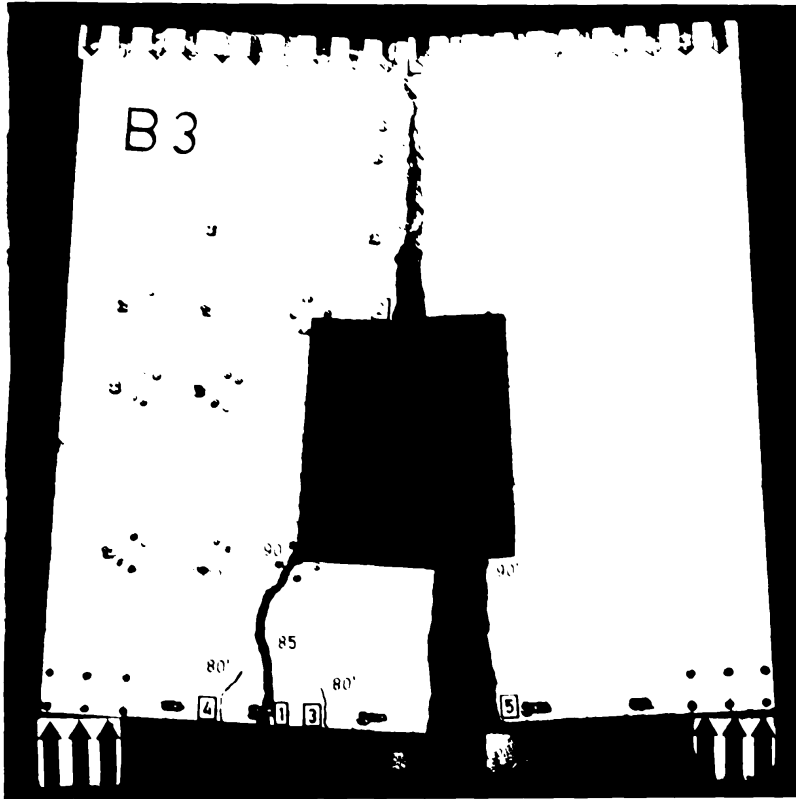




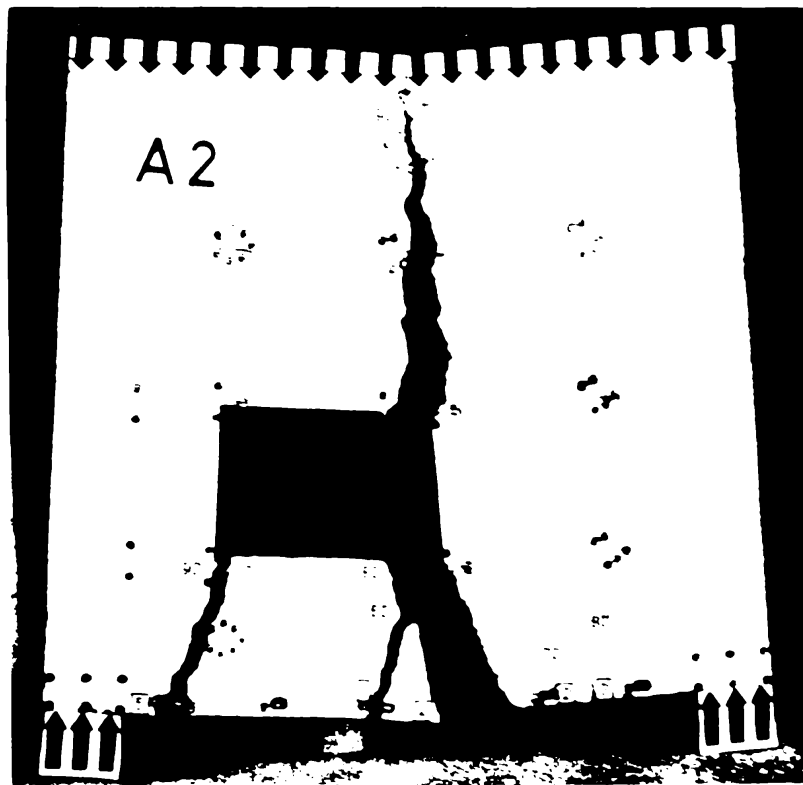
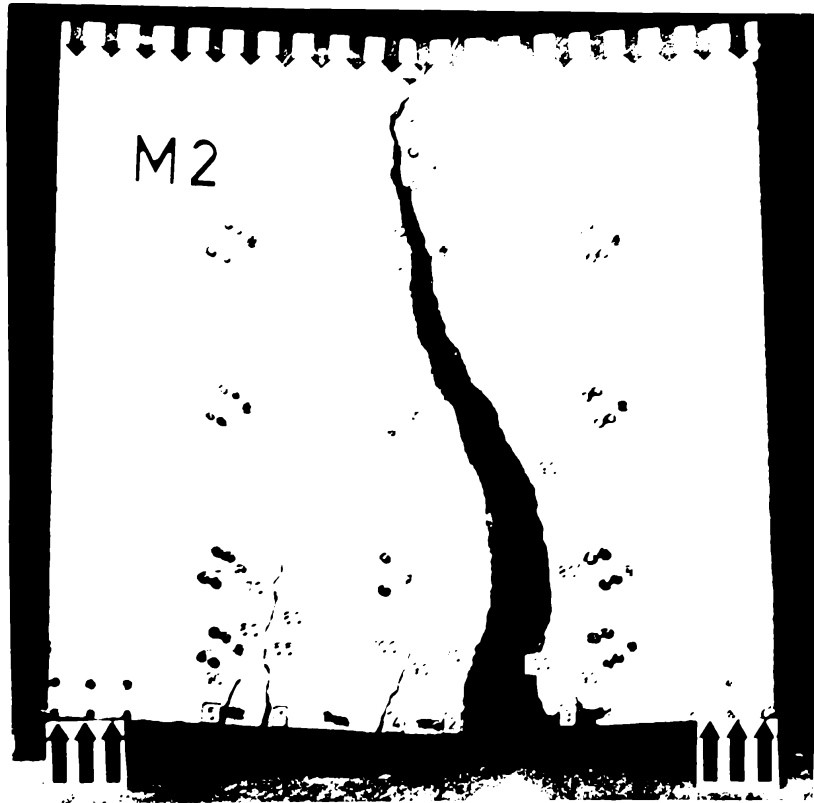


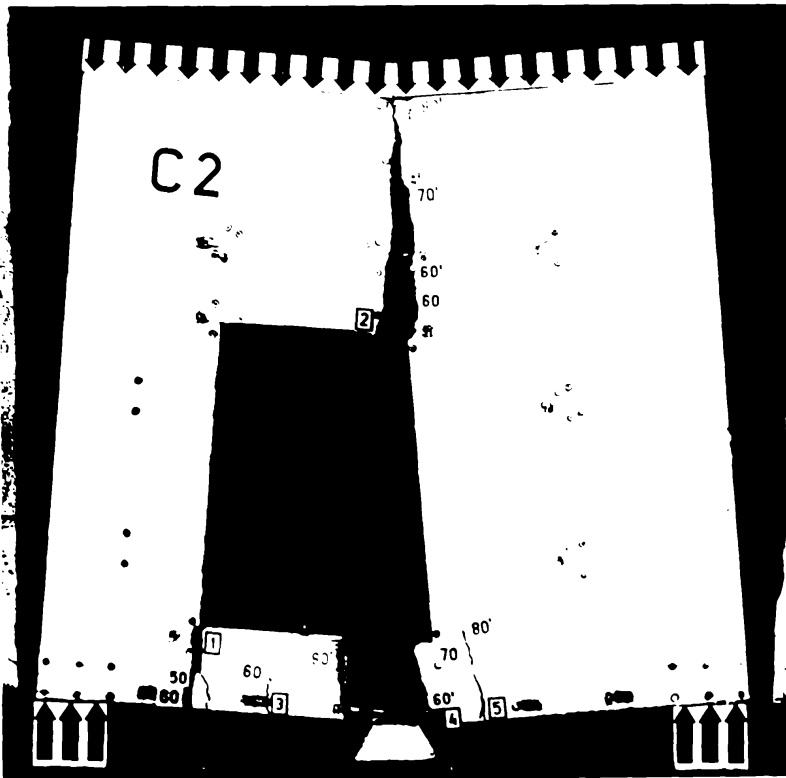
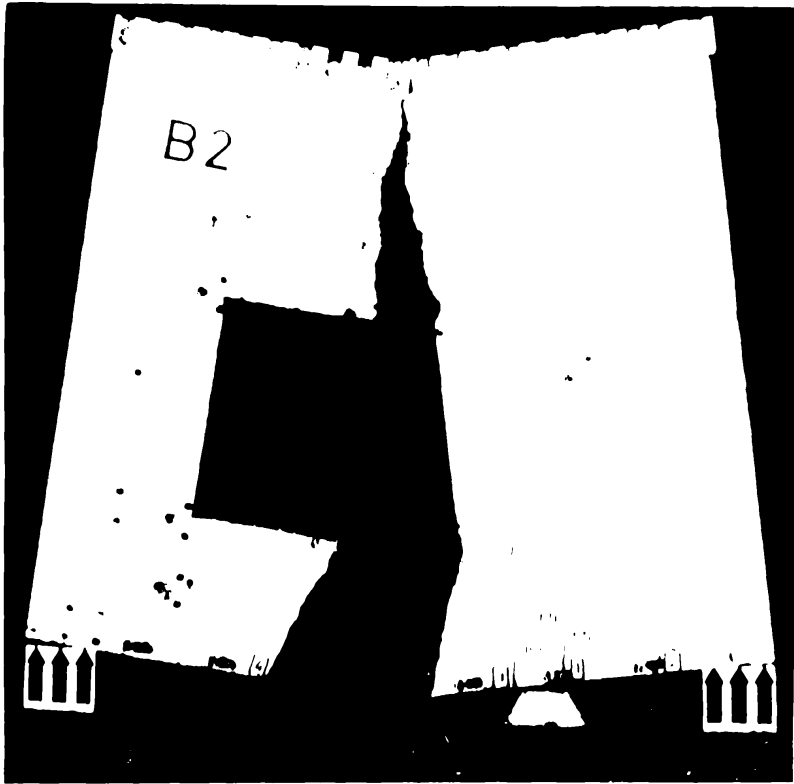




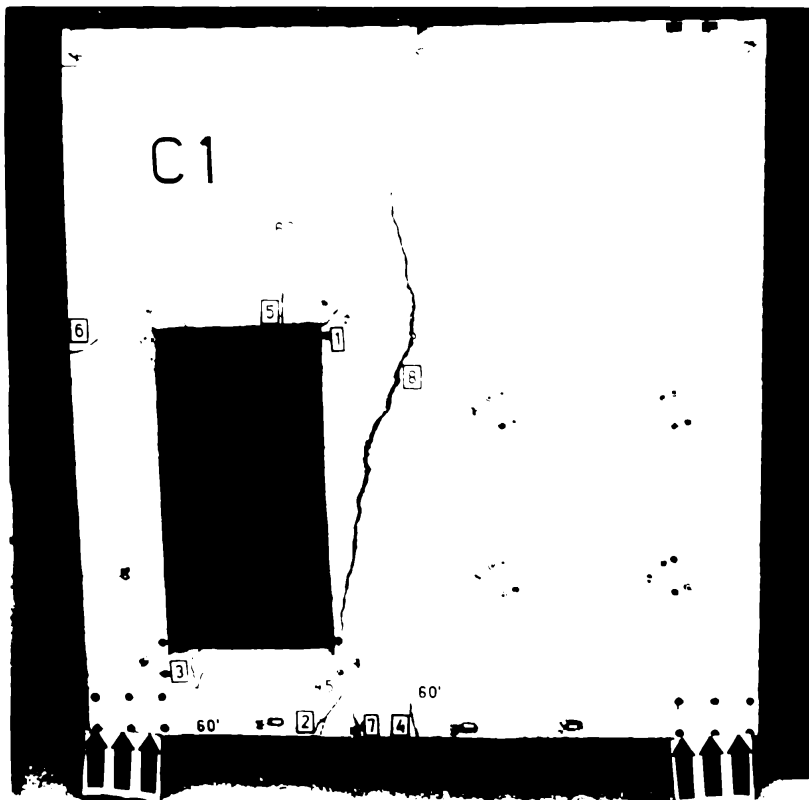
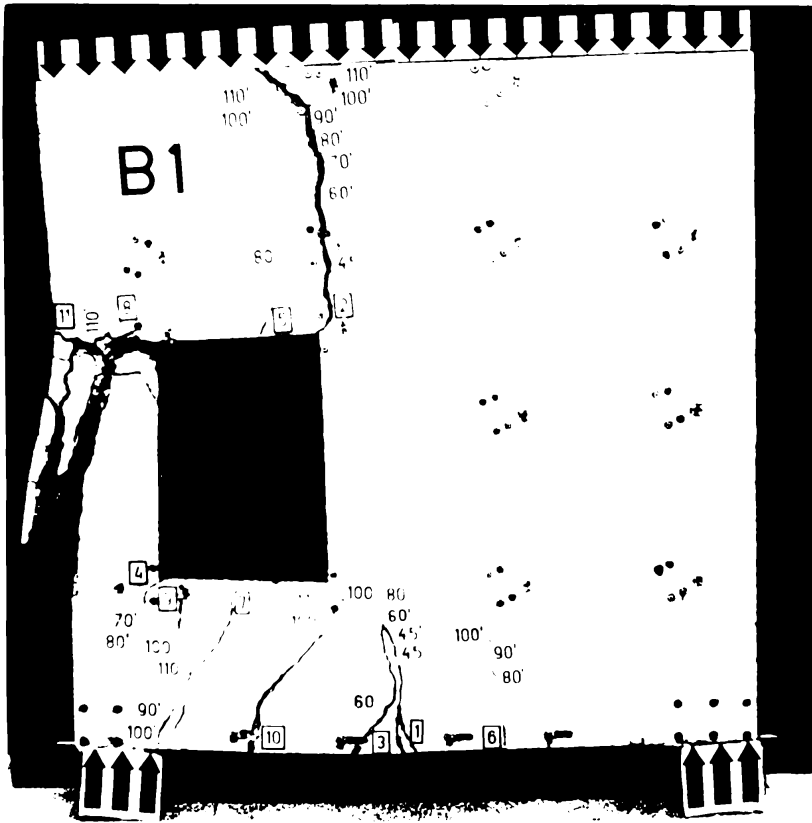


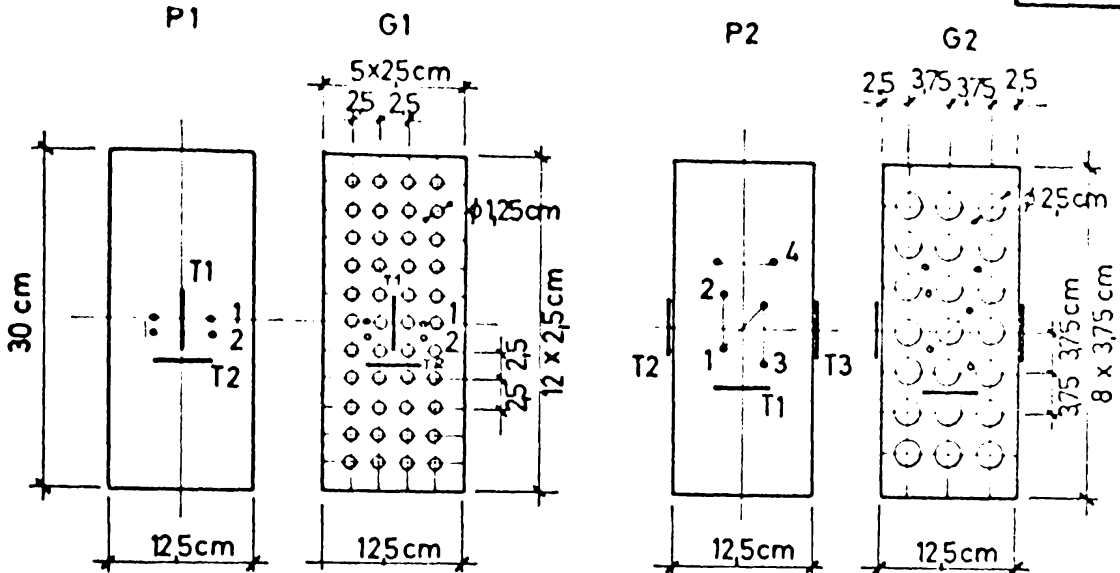












$R_{pr} = 198 \text{ daN/cm}^2$

$R_{pr} = 192 \text{ daN/cm}^2$

$E_b = 208000$

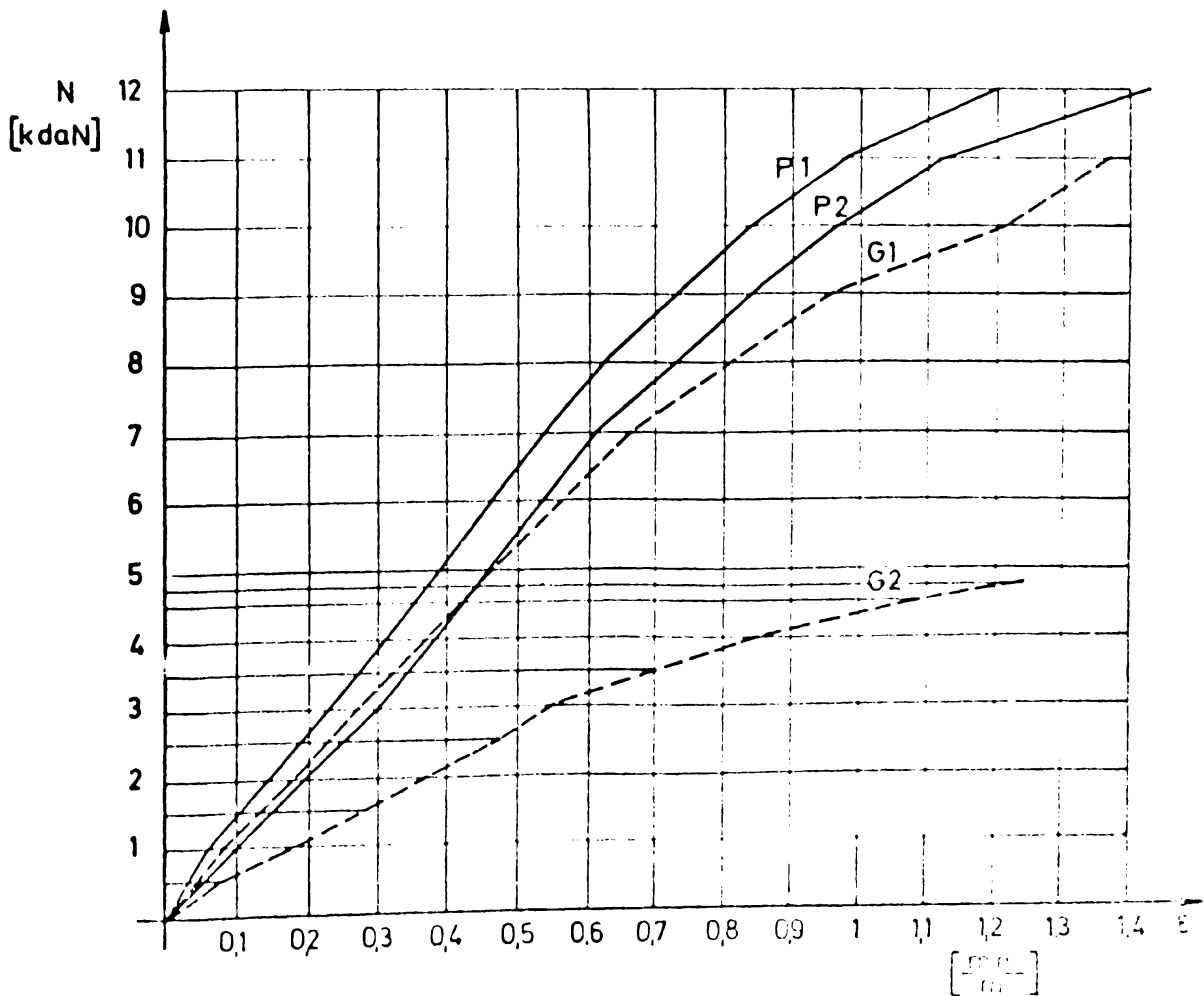
$E_g = 172000 \text{ daN/cm}^2$

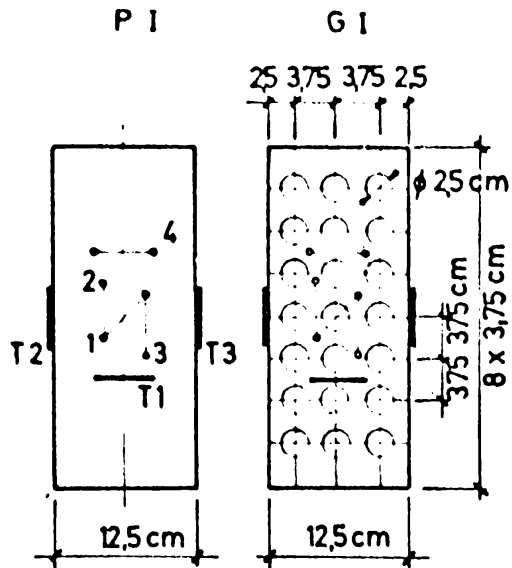
$E_b = 170000$

$E_g = 90400 \text{ daN/cm}^2$

$\frac{E_b}{E_g} = 1,21 \text{ (1,35)}$

$\frac{E_b}{E_g} = 1,88 \text{ (1,85)}$





$$R_{pr} = 304 \text{ daN/cm}^2$$

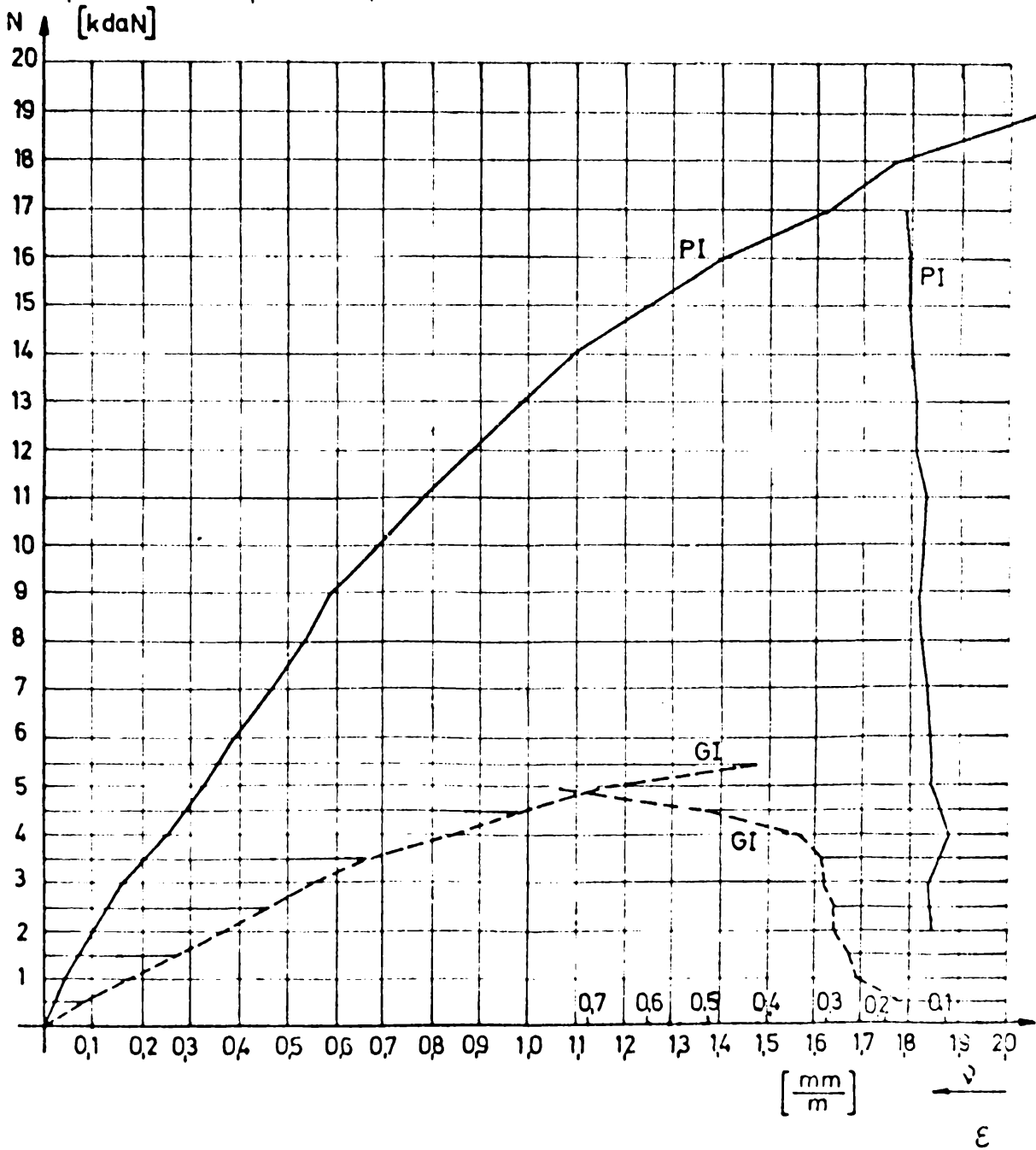
$$E_b = 220000 \text{ daN/cm}^2$$

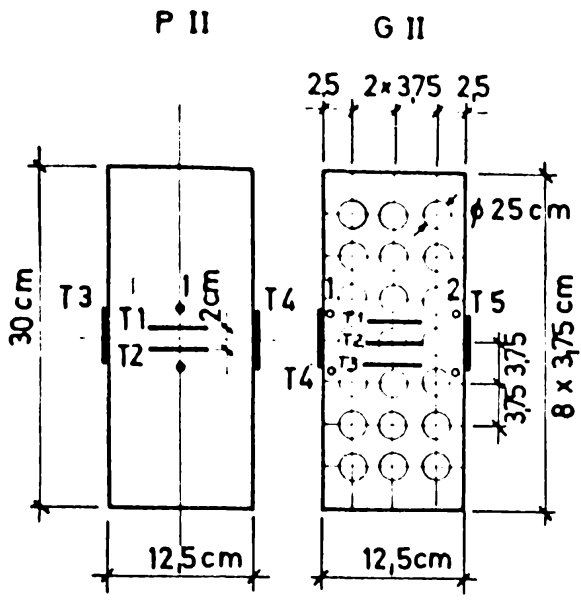
$$\nu_b = 0,13$$

$$E_g = 88200 \text{ daN/cm}^2$$

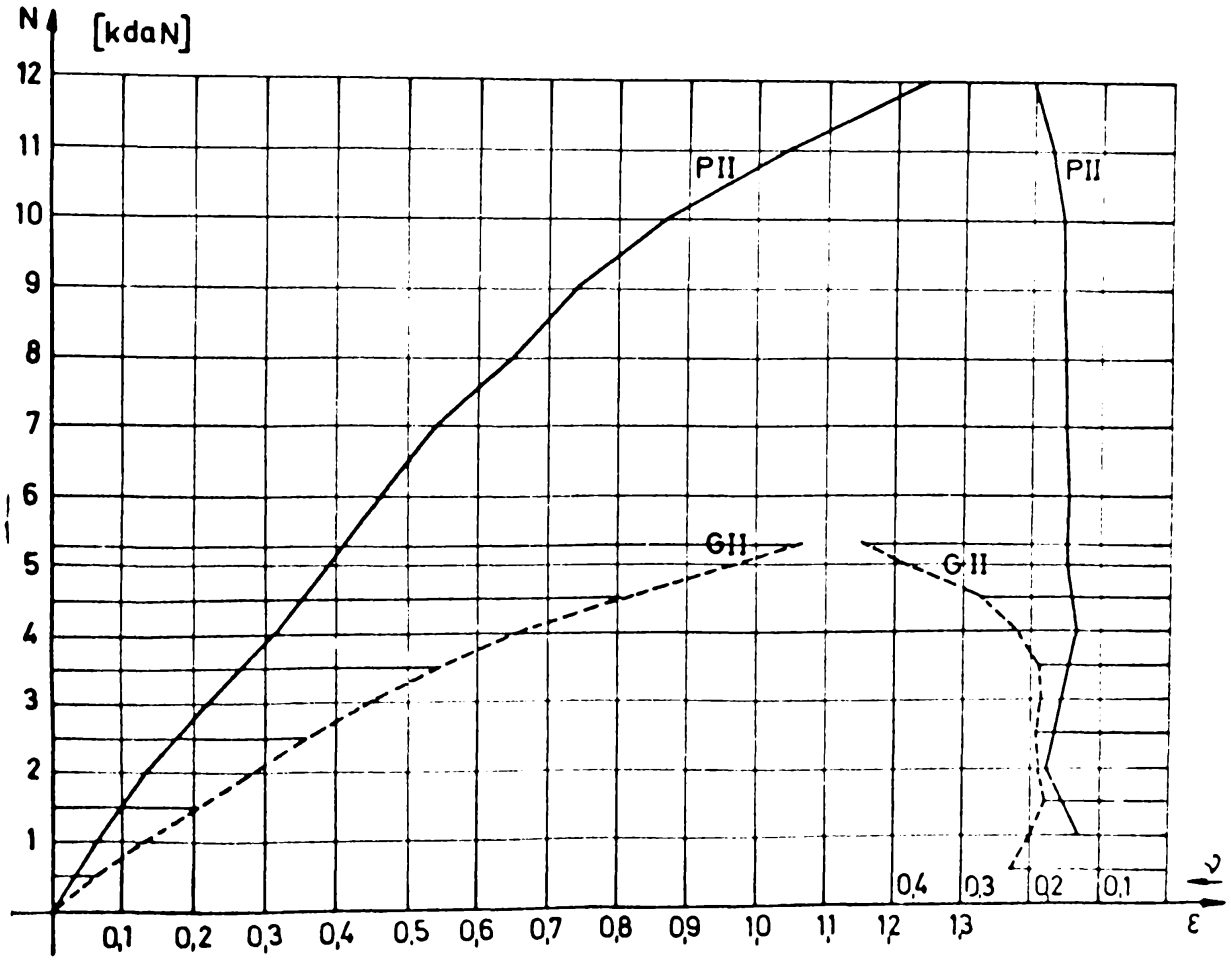
$$\nu_g = 0,23$$

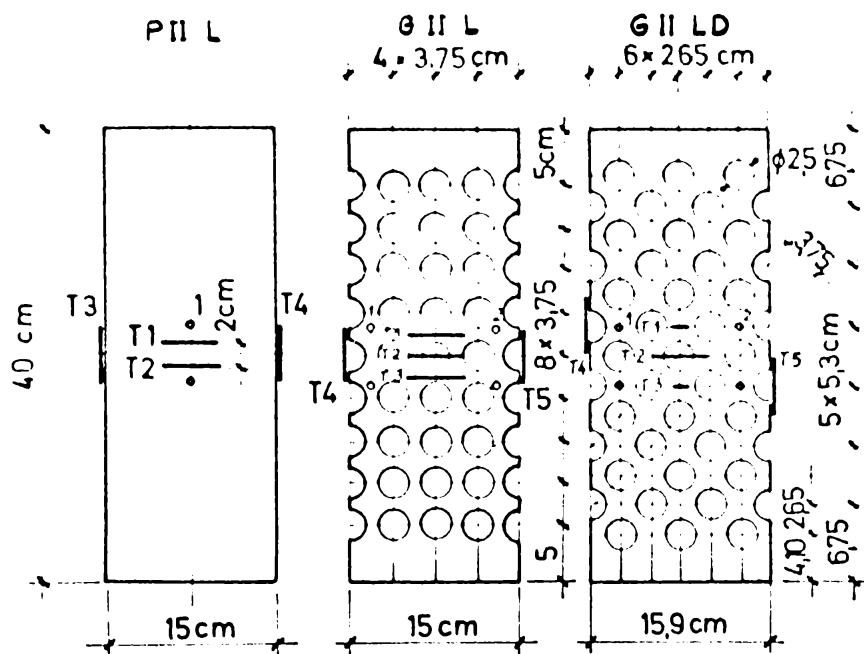
$$\frac{E_b}{E_g} = 2,49 \text{ (1,85)}$$





$R_{pr} = 196 \text{ daN/cm}^2$   
 $E_b = 205000 \text{ daN/cm}^2$   
 $\nu_b = 0,15$   
 $E_g = 112000 \text{ daN/cm}^2$   
 $\nu_g = 0,19$   
 $\frac{E_b}{E_g} = 1,83 (1,85)$





VI-3

$R_{pr} = 203 \text{ daN/cm}^2$   
 $E_b = 210000 \text{ daN/cm}^2$   
 $\nu_b = 0,15$   
 $E_g = 93000 \text{ daN/cm}^2$   
 $\nu_g = 0,13$   
 $\frac{E_b}{E_g} = 226 (1,85)$   
 $E_{gd} = 35000 \text{ daN/cm}^2$   
 $\nu_{gd} = 0,14$

