

CERCETĂRI PRIVIND EVALUAREA NUMERICĂ A PARAMETRIILOR DE MECANICA RUPERII

Teză destinată obținerii
titlului științific de doctor inginer
la
Universitatea "Politehnica" din Timișoara
în domeniul INGINERIE MECANICĂ
de către

ing. Cristian-Sorin NEȘ

Conducător științific: prof.univ.dr.ing. Nicolae Faur

Referenți științifici: prof.univ.dr.ing. Mihail Hărdău
prof.univ.dr.ing. Dan-Mihai Constantinescu
prof.univ.dr.ing. Liviu Marșavina

Ziua susținerii tezei: 09.09.2011

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- | | |
|------------------------|---|
| 1. Automatică | 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații |
| 2. Chimie | 8. Inginerie Industrială |
| 3. Energetică | 9. Inginerie Mecanică |
| 4. Ingineria Chimică | 10. Știința Calculatoarelor |
| 5. Inginerie Civilă | 11. Știința și Ingineria Materialelor |
| 6. Inginerie Electrică | |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2011

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221
e-mail: editura@edipol.upt.ro

Cuvânt înainte

Teza de doctorat cu titlul „Cercetări privind evaluarea numerică a parametrilor de mecanica ruperii” a fost elaborată pe parcursul activității mele în cadrul Catedrei de Rezistența Materialelor a Universității „Politehnica” din Timișoara, sub îndrumarea domnului Prof. Univ. Dr. Ing. Nicolae Faur.

Lucrarea tratează problematica aplicațiilor numerice în evaluarea parametrilor de mecanica ruperii, punând accentul pe utilizarea metodei elementelor finite.

Teza conține o sinteză bibliografică referitoare la metodele numerice utilizate în problemele de mecanica ruperii, cu trecerea în revistă a tehnicilor de modelare a discontinuităților, precum și metodele de calcul al parametrilor de interes (factorii de intensitate a tensiunii, K , respectiv integrala J). De asemenea, se prezintă o serie de aplicații realizate cu ajutorul programelor ABAQUS, COSMOS 2007, respectiv FRANC 2D. Prin intermediul acestor aplicații s-au făcut determinări ale factorilor de intensitate a tensiunii pentru un arbore solicitat la încovoiere și torsiune, un stent autoexpandabil din aliaj de Cobalt, respectiv a fost studiată interacțiunea fisurilor pentru o placă din Al 6060 T6.

Pentru validarea rezultatelor obținute numeric s-a pus la punct o metodă experimentală pentru determinarea integralei critice J_{Ic} utilizând epruvete nestandardizate din Al 6060 T6 cu o fisură de margine. Apelând la tehnologia video și un soft specializat pentru măsurarea lungimii fisurii, această metodă prezintă câteva avantaje majore comparativ cu metodele standardizate, în special în cazul testării componentelor destinate industriei aerospațiale.

Mulțumirile se adresează în special domnului Prof. Univ. Dr. Ing. Nicolae Faur, care pe parcursul celor trei ani de doctorat mi-a împărtășit cu dărnicie din propria experiență și expertiză, asigurându-mi, totodată, condiții optime pentru desfășurarea activității de cercetare. De asemenea, aș dori să mulțumesc tuturor celor care mi-au fost alături, m-au susținut și m-au ajutat în tot acest răstimp, precum și managementului Proiectului de Burse doctorale nr. 6/1.5/S/13.

Timișoara, septembrie 2011

Cristian-Sorin Neș

Familiei mele, cu multă recunoștință

Teza de doctorat a fost realizată cu sprijin parțial din grantul strategic POSDRU/6/1.5/S/13, ID6998, cofinanțat din Fondul Social European "Investește în oameni", în cadrul Programului Operațional Sectorial Dezvoltare Resurse Umane 2007-2013

Neș, Cristian-Sorin

Cercetări privind evaluarea numerică a parametrilor de mecanica ruperii

Teze de doctorat ale UPT, Seria 9, Nr. 96, Editura Politehnica, 2011, 126 pagini, 115 figuri, 10 tabele.

Cuvinte cheie: metode numerice, factor de intensitate a tensiunii, ABAQUS, FRANC2D, J_{Ic} , Al 6060 T6

Rezumat,

În aplicațiile numerice de mecanica ruperii se apelează la metoda elementelor finite sau metoda elementelor de frontieră. Metoda elementelor finite este cel mai des utilizată, fisurile fiind modelate cu ajutorul elementelor singulare speciale. Studiul variației factorilor de intensitate a tensiunii pentru un arbore solicitat la torsiune și încovoiere a relevat predominanța modului I de rupere și o proporționalitate directă între dimensiunile fisurii și valorile lui K_I , K_{II} , K_{III} . Pentru o placă plană din Al6060T6, s-a arătat că fisurile interacționează chiar dacă distanța dintre ele este mult mai mare decât lungimea lor, fiind cel mai evidentă în cazul în care ambele fisuri sunt de margine. Determinarea integralei critice J_{Ic} utilizând epruvete nestandardizate, cu ajutorul analizei imaginilor înregistrate în timp real reprezintă o metodă fiabilă, ieftină și ușor de pus în practică.

CUPRINS

1. Importanța și actualitatea temei de cercetare intitulată "Cercetări privind evaluarea numerică a parametrilor de mecanica ruperii".....	7
2. Cercetări privind stadiul actual al utilizării metodelor numerice în calculul parametrilor de mecanica ruperii.....	9
2.1. Considerații privind metodele numerice utilizate în mecanica ruperii.....	9
2.1.1. Metoda elementelor de frontieră (metoda integralei pe contur).....	9
2.1.2. Metoda elementelor finite.....	11
2.2. Considerații privind tehnicile de modelare a fisurilor utilizând elemente finite.....	13
2.2.1. Modele locale și non-locale.....	13
2.2.2. Modele avansate.....	13
2.3. Considerații privind metodele de calcul numeric în mecanica ruperii.....	26
2.3.1. Metode tradiționale de calcul numeric în mecanica ruperii.....	26
2.3.2. Metoda integralei pe domeniu a energiei.....	31
3. Cercetări privind calculul numeric al parametrilor de mecanica ruperii.....	39
3.1. Determinarea parametrilor de mecanica ruperii utilizând programul ABAQUS.....	40
3.1.1. Aspecte teoretice privind implementarea determinării parametrilor de mecanica ruperii în programul ABAQUS.....	40
3.1.2. Determinarea factorilor de intensitate a tensiunii pentru un arbore solicitat mixt.....	42
3.1.3. Calculul factorilor de intensitate a tensiunii pentru fisuri plane într-un stent coronarian.....	54
3.2. Studiul numeric al interacțiunii dintre fisuri.....	68
3.2.1. Interacțiunea fisurilor colineare.....	68
3.2.2. Influența interacțiunii a două fisuri asupra propagării fisurii de margine.....	79
4. Cercetări privind determinarea experimentală a integralei critice J_{Ic} folosind epruvete de dimensiuni nestandardizate.....	91
4.1. Considerații generale privind determinarea experimentală a integralei critice J_{Ic}	91
4.2. Determinarea experimentală a integralei critice J_{Ic} pentru epruvete nestandardizate din Al 6060 T6.....	95
4.2.1. Schema de încercare.....	96
4.2.2. Determinarea experimentală a curbei forță-deplasare.....	98
4.2.3. Determinarea numerică a rigidității epruvetei cu fisuri.....	103
4.2.4. Validarea modelului de calcul.....	106
4.2.5. Determinarea integralei critice J_{Ic}	107
4.3. Concluzii.....	110
5. Concluzii și contribuții personale.....	112
Bibliografie.....	115

1. IMPORTANȚA ȘI ACTUALITATEA TEMEI DE CERCETARE INTITULATĂ „CERCETĂRI PRIVIND EVALUAREA NUMERICĂ A PARAMETRILOR DE MECANICA RUPERII”

Rezistența materialelor este disciplina fundamentală care guvernează proiectarea structurilor mecanice. Orice proiect începe cu un calcul de rezistență și se încheie cu o analiză numerică a tensiunilor și deformațiilor.

Odată cu dezvoltarea tehnicii de calcul a devenit posibilă proiectarea rațională a structurilor, prin renunțarea la coeficienții de siguranță uriași utilizați în trecut. Acest fapt a condus, pe de altă parte, la trecerea de la principiile de rezistența materialelor (material ideal – continuu, omogen și izotrop), la principiile de mecanica ruperii (material real, cu defecte). Astfel, de la relația tensiune aplicată – tensiune de rupere sau limită de curgere (rezistența materialelor) s-a trecut la relația tensiune aplicată – dimensiunea defectului – tenacitatea la rupere (mecanica ruperii – Fig.1.1).

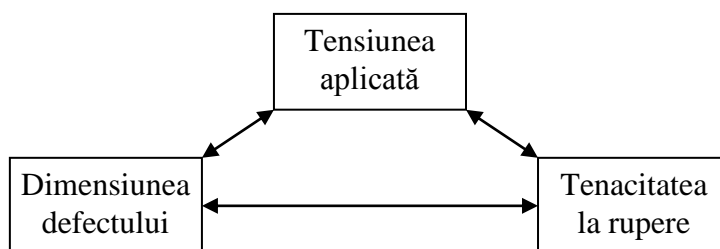


Fig. 1.1. Schema de principiu în abordarea problemelor de mecanica ruperii

În plus, se pune problema duratei de viață remanente a unor structuri sau organe de mașini dificil de înlocuit, greu de fabricat sau cu un preț extrem de ridicat, evaluare care este posibilă doar prin utilizarea principiilor de mecanica ruperii (compararea parametrilor efectivi de mecanica ruperii cu valorile critice).

Mecanica ruperii este un domeniu nou al mecanicii solidului deformabil. Dezvoltarea mecanicii ruperii a fost impusă de catastrofele care au avut loc în decursul dezvoltării civilizației moderne (amintim accidente produse la navele de tip Liberty, 400 din cele 2700 de exemplare produse au suferit avarii grave în timpul celui de-al doilea război mondial datorită concepției neadecvate).

Modul de abordare a calculelor, ținând cont de prezența defectelor în material, a cunoscut trei etape distincte: mecanica ruperii în domeniul linear-elastic, mecanica ruperii în domeniul elasto-plastic, mecanica ruperii în domeniul vâsco-elasto-plastic la care, în plus față de celelalte două, intervine și parametrul timp.

Cunoașterea parametrilor de mecanica ruperii pentru diferite geometrii reprezintă o problemă fundamentală în aplicarea conceptelor de calcul moderne, în care se ține cont de imperfecțiunile de material. Parametrii de mecanica ruperii sunt: factorii de intensitate a tensiunilor (K_I, K_{II}, K_{III}), forța de extensie a fisurii (G), deschiderea la vârful fisurii (CTOD – crack tip opening displacement sau CTOA – crack tip opening angle) și integrala J .

Determinarea pe cale experimentală a parametrilor de mecanica ruperii se poate face în laborator cu mașini și instalații de mare complexitate și sisteme de achiziție și prelucrare a datelor performante.

Evaluarea durabilității structurilor de rezistență presupune calculul parametrilor efectivi de mecanica ruperii pentru anumite situații date. Aceste valori efective se compară cu valorile critice, determinate experimental. Calculul parametrilor de mecanica ruperii prin metode analitice este deosebit de laborios și, uneori, inoperant datorită complexității structurilor de rezistență reale.

Din aceste considerente s-au dezvoltat o serie de metode numerice care permit evaluarea mult mai eficientă a parametrilor efectivi de mecanica ruperii.

Dintre metodele numerice, în mod curent se aplică metoda elementelor finite.

Având în vedere că, în prezent, accentul se pune pe utilizarea metodelor numerice în aplicațiile de mecanica ruperii, tratarea acestora în cercetarea pentru conceperea tezei de doctorat reprezintă o etapă esențială în dezvoltarea profesională a cercetătorului care studiază problemele legate de mecanica solidului deformabil.

Pe de altă parte, fiind ieftin de utilizat, la îndemâna oricui și necesitând o dotare minimă (un calculator și un software), aceste metode sunt deosebit de utile și foarte larg răspândite.

Dacă se pune și problema pieței muncii, se poate observa că există o cerere constantă pentru specialiști în proiectare – partea adevărată de proiectare, nu doar design – iar un expert în metode numerice, cu cunoștințe solide de mecanica ruperii este o "rara avis".

Fără a ține cont de actualitatea temei și aspectele economico-sociale, studiul acestor două domenii (metodele numerice și mecanica ruperii) au avut un impact pozitiv asupra dezvoltării gândirii ingineresti și deschiderea unor noi posibilități de perfecționare și evoluție în plan personal și profesional pe viitor.

2. CERCETĂRI PRIVIND STADIUL ACTUAL AL UTILIZĂRII METODELOR NUMERICE ÎN CALCULUL PARAMETRILOR DE MECANICA RUPERII

2.1. Considerații privind metodele numerice utilizate în mecanica ruperii

Metodele numerice au căpătat o importanță ridicată în ceea ce privește problemele de Mecanica Ruperii și nu numai; dezvoltarea calculatoarelor personale a adus cu sine posibilitatea determinării rapide a parametrilor de mecanica ruperii pentru cele mai complexe configurații. Pe de altă parte, s-au dezvoltat softuri cu rutine de mecanica ruperii încorporate, cu interfețe accesibile și algoritmi perfecționați, garantând totodată și un timp relativ redus de procesare.

Pentru detetminarea soluțiilor analitice ale distribuției tensiunilor și deformațiilor într-un corp oarecare, relațiile propuse de [Westergaard, 1939] și [Williams, 1957] pentru materiale linear elastice, izotrope, aflate în stare plană de tensiune sau deformație sunt, în cele mai multe cazuri, imposibil de aplicat. Cel mai comod mod de a determina aceste distribuții îl reprezintă utilizarea metodelor numerice: metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite și metoda elementelor de frontieră. Dintre acestea, cea mai utilizată este metoda elementelor finite.

2.1.1. Metoda elementelor de frontieră (metoda integralei pe contur)

Metoda elementelor de frontieră se pretează determinării tensiunilor și deformațiilor de pe suprafața unui corp, dar poate fi utilizată și pentru determinarea tensiunilor și deformațiilor din interior.

Principial, această metodă se bazează pe teorema reciprocă a lui Betti, care leagă lucrul mecanic produs de două încărcări diferite ale aceluiași corp. În absența forțelor masice, teorema lui Betti este enunțată astfel:

$$\int_S T_i^{(1)} u_i^{(2)} dS = \int_S T_i^{(2)} u_i^{(1)} dS, \quad (2.1)$$

unde T_i și u_i sunt componentele vectorilor sarcină și deplasare.

Să considerăm că încărcarea (1) este cea care interesează, iar încărcarea (2) este de referință, cu soluție cunoscută. În Fig.2.1 sunt prezentate condițiile de contur convenționale. O forță unitară (t) este aplicată în punctul interior p după fiecare direcție x_j , dând naștere unor deplasări și sarcini în punctul de suprafață Q , după direcțiile j .

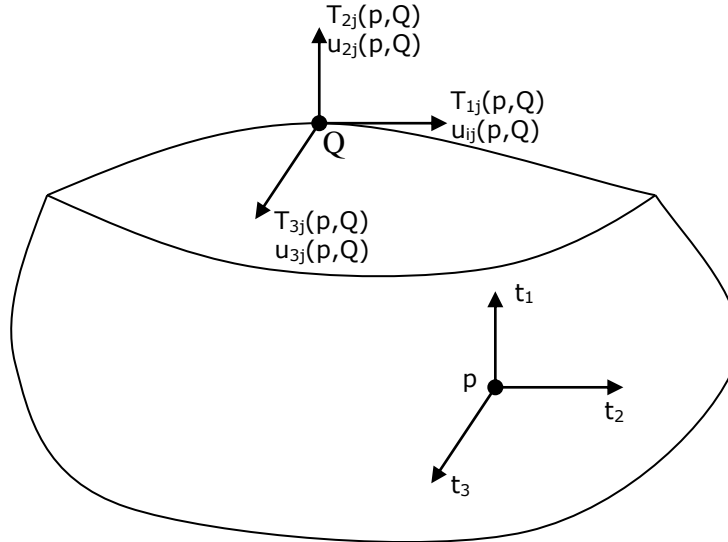


Fig.2.2. Condițiile pe contur de referință pentru un element de frontieră

Aplicând teorema reciprocă a lui Betti, obținem:

$$u_i(p) = - \int_S T_{ij}(p, Q) u_j(Q) dS + \int_S u_{ij}(p, Q) T_j(Q) dS, \quad (2.2)$$

unde $u_i(p)$ este vectorul deplasare al punctului interior p ;

$u_j(Q)$ și $T_j(Q)$ sunt vectorii de referință deplasare și sarcină din punctul de suprafață Q .

Dacă punctul p este un punct la suprafața corpului (notat P), relația (2.2) devine:

$$\frac{1}{2} u_i(P) + \int_S T_{ij}(P, Q) u_j(Q) dS = \int_S u_{ij}(P, Q) T_j(Q) dS, \quad (2.3)$$

în cazul în care suprafața este fină.

Presupunând că suprafața corpului este neuniformă, este necesară divizarea acesteia în elemente. Considerând că u_i și T_i variază linear între punctele nodale discrete ale suprafeței, ecuația (2.3) devine:

$$\left(\left[\frac{1}{2} \delta_{ij} \right] + [AT_{ij}] \right) \{u_j\} = [Au_{ij}] \{T_j\}, \quad (2.4)$$

unde δ_{ij} este funcția delta Kroenecker.

Conform [Poterășu, 1992], comparativ cu metoda elementelor finite, metoda elementelor de frontieră prezintă următoarele avantaje și dezavantaje:

- discretizează numai contururi (au cu o dimensiune mai puțin față de elementele finite);

- au o precizie ridicată;
- viteza de calcul este superioară;
- rezolvă rapid concentrările de tensiune;
- datele de intrare sunt mai reduse;
- necesită mai puține resurse de calcul (îndeosebi memorie);
- rezolvă rapid și economic problemele elasto-dinamice;

Dezavantajele principale constau în dificultatea rezolvării problemelor nelineare, a problemelor tridimensionale cu volum mare sau a problemelor plăcilor curbe subțiri.

2.1.2. Metoda elementelor finite

Principiul acestei metode constă în divizarea corpului supus analizei în entități numite elemente finite. Aceste elemente pot fi unidimensionale (bare), bidimensionale (plăci) și tridimensionale (poliedre). Elementele sunt legate între ele prin noduri.

În Fig.2.2 este reprezentat un element izoparametric continuu pentru probleme de stare plană de tensiune, împreună cu sistemele local și global de coordonate.

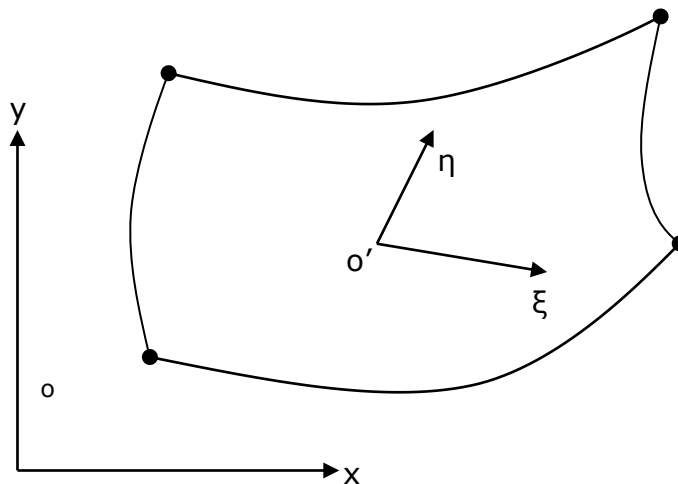


Fig.2.2. Sistemele de coordonate local și global pentru un element bidimensional

Coordonatele locale (numite și coordonate parametrice), variază între -1 și +1 pe suprafața elementului. Acest sistem de coordonate nu este neapărat ortogonal.

Pentru un punct oarecare, de coordonate (ξ, η) , coordonatele globale sunt date prin relațiile:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i, \quad (2.5)$$

unde N este numărul de noduri al elementului, iar N_i sunt funcțiile de formă corespunzătoare nodului i de coordonate (x_i, y_i) , respectiv (ξ_i, η_i) .

Funcțiile de formă sunt funcții polinomiale de câmp, iar gradul polinoamelor depinde de numărul de noduri al elementului.

În mod similar, deplasările dintr-un punct arbitrar sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

unde (u_i, v_i) sunt deplasările nodale după direcțiile x și y .

Matricea deformațiilor pentru coordonatele (x, y) este dată de:

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (2.7)$$

unde matricea de interpolare a deformațiilor specifice este:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

iar

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (2.9)$$

unde $[J]$ este matricea Iacobiană:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \dots \\ \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Matricea tensiunilor este dată de relația:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.11)$$

unde $[D]$ este matricea constitutivă tensiune-deformație.

Pentru problemele în care apare plasticitatea incrementală, tensiunile și deformațiile sunt determinate tot incremental, iar pentru fiecare pas, $[D]$ este corectată după forma:

$$\{\Delta\sigma\} = [D(\varepsilon, \sigma)]\{\Delta\varepsilon\} \quad (2.12)$$

Deplasările nodale depind de rigiditatea elementului, $[k]$, definită prin relația:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det|J| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (2.13)$$

Prin asamblarea matricilor de rigiditate elementare se obține matricea de rigiditate globală, $[K]$, legată de sarcini și deplasări prin relația:

$$[K][u] = [F], \quad (2.14)$$

unde $[F]$ este matricea forțelor nodale.

2.2. Considerații privind tehnicile de modelare a fisurilor utilizând elemente finite

Pentru a oferi posibilitatea simulării problemelor care implică existența sau inițierea și propagarea fisurilor, s-au pus la punct o serie de modele aplicabile metodei elementului finit. Aceste modele pot fi împărțite în două categorii distincte: continue și discontinue. Din prima categorie face parte modelul fisurii distribuite continuu, iar din cea de-a doua categorie se pot aminti modelul fisurii discrete și modelul bazat pe elemente discrete. Modelul elementelor singulare, respectiv modele bazate pe elemente îmbogățite (enriched elements), utilizate de majoritatea programelor de analiză numerică a stării de tensiune și deformație, sunt modelele cele mai recente care simulează singularitățile modelelor printr-o discretizare continuă din punct de vedere geometric.

2.2.1. Modele locale și non-locale

Aceste modele au fost dezvoltate în perioada de pionierat a aplicațiilor cu elemente finite în probleme de mecanica ruperii. Algoritmul consta în determinarea stării de tensiune în punctele de integrare și aplicarea unui criteriu de rezistență. Deoarece rezultatele depindeau strict de starea de tensiune din punctele respective (de unde și denumirea de model local), influențată masiv de discretizare, s-au căutat alternative non-locale. Aceste modele determinau parametrii de rupere dintr-un punct pe baza variabilelor de stare din acel punct, precum și dintr-un număr de puncte vecine [Bazant, 1997].

2.2.2. Modele avansate

Modelul fisurii distribuite continuu

Modelul fisurii distribuite continuu consta în simularea efectelor mecanice (modificarea rigidității și a rezistenței la rupere) ale prezenței fisurii în interiorul elementului, și nu modelarea geometrică a fisurii, Fig.2.3. Cu alte cuvinte, este vorba despre o abordare continuă a unei probleme discontinue/singulare. Discontinuitatea cauzată de fisura discretă din interiorul elementului este echivalată printr-un câmp distribuit uniform pe tot domeniul elementului [Owen, 1980]. Principalul avantaj al acestei metode este că nu necesită refaceri locale sau globale ale discretizării pe parcursul propagării fisurii.

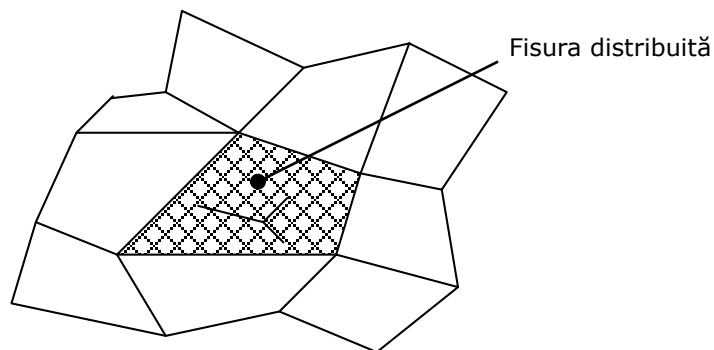


Fig.2.3. Fisura distribuită continuu

Modelul fisurii discrete

Acest model constă în definirea fisurii de-a lungul muchiilor elementelor finite, Fig.2.4. Astfel, discontinuitatea este generată automat prin distribuția deplasărilor de-a lungul fisurii. Modelul se pretează în mod deosebit simulării fisurilor preexistente de-a lungul muchiilor elementelor. Dezavantajele constau în imposibilitatea modelării singularității de la vârful fisurii, precum și dificultatea aplicării în cazul propagării după o direcție oarecare, întrucât este necesară refacerea discretizării modelului. De asemenea, discretizarea are o influență însemnată asupra rezultatelor.

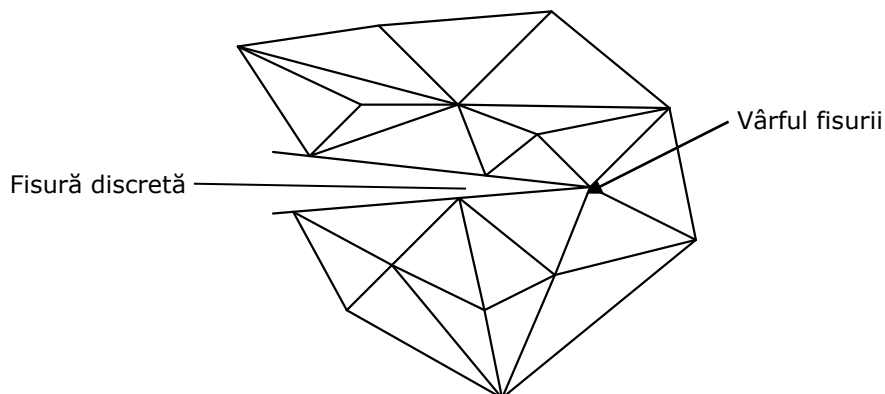


Fig.2.4. Fisură discretă inter-elementară

Modelul elementelor discrete fisurate

Modelul elementelor discrete fisurate este o îmbunătățire adusă modelului fisurii discrete inter-elementare și permite definirea și propagarea fisurilor și în interiorul elementelor finite, Fig.2.5. Acest model necesită combinarea metodelor adaptive cu o refacere locală a discretizării prin separarea elementului fisurat și divizarea elementelor adiacente. Această metodă a fost adaptată simulării ruperii progresive datorată impactului și încărcărilor explozive. De asemenea, se poate ține cont și de efectele interacțiunilor ulterioare fisurării, inclusiv frecare neliniară [Mohammadi, 2003]. Principalul dezavantaj al metodei constă în necesitatea alocării unui volum impresionant de resurse de calcul pentru parcurgerea diversilor algoritmi pentru fisurare, refacerea discretizării etc. O soluție pentru această problemă constă în evitarea refacerii discretizării întregului model prin re-discretizări graduale locale, în concordanță cu extinderea fisurii.

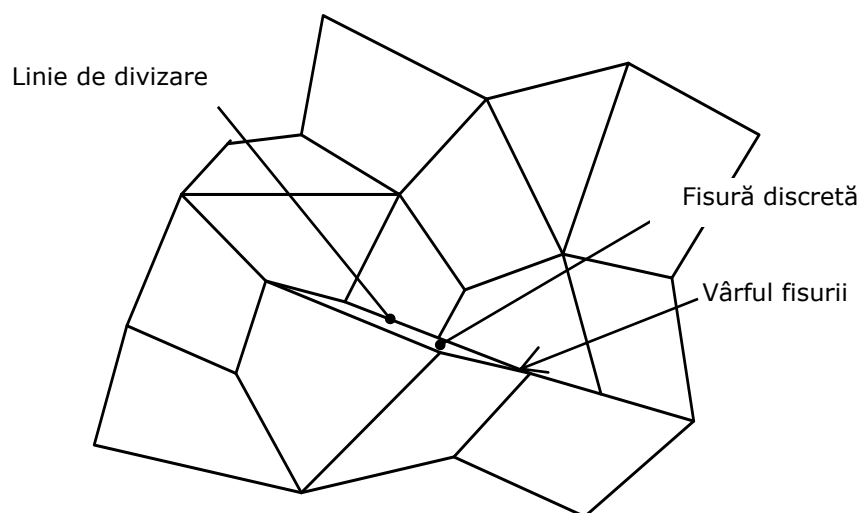


Fig.2.5. Element discret fisurat

Elemente singulare

Dezvoltarea acestor elemente finite capabile de simularea singularității la vârful fisurii a marcat un progres semnificativ în aplicarea metodelor numerice pentru rezolvarea problemelor de mecanica ruperii. Principala limitare în utilizarea elementelor singulare este dată de imposibilitatea modelării discontinuității de-a lungul traseului fisurii. Pentru îndepărtarea acestui inconvenient, elementele singulare sunt utilizate în combinație cu modelul fisurii discrete sau al elementelor discrete fisurate.

Aceste elemente finite au fost introduse de [Henshell, 1975], respectiv [Barsoum, 1976].

La vârful fisurii starea de tensiune tinde spre infinit, deci punctul de la vârful fisurii este un punct singular unde din punct de vedere matematic, tensiunea tinde spre infinit.

Utilizarea în această zonă a elementelor finite obișnuite este inefficientă, cu rezultate mult distorsionate sau mai degrabă eronate. Se pot utiliza elemente finite obișnuite, cu condiția ca dimensiunile acestora să fie foarte mici, ceea ce poate fi imposibil de realizat din punct de vedere al resurselor de calcul. Chiar și în aceste

condiții, se dovedește că utilizarea elementelor finite obișnuite cu discretizare foarte fină este ineficientă.

Din teoria mecanicii ruperii în domeniul liniar, în apropierea vârfului fisurii starea de tensiune este caracterizată de factorul de intensitate notat pentru modul I de rupere cu K_I , Fig.2.6.

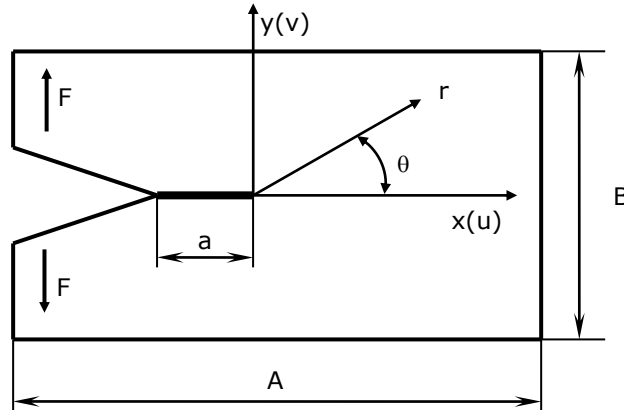


Fig.2.6. Modul I de deschidere la vârful fisurii

Pentru starea plană, câmpul de tensiune este dat de relația:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Câmpul de deplasări în apropierea vârfului fisurii este:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{K_I \sqrt{r}}{2\mu \sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

unde μ – este modul de elasticitate transversal;

$\kappa = 3 - 4\nu$ pentru starea plană de tensiune; ν este coeficientul de contracție transversală (coeficientul lui Poisson);

$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ pentru starea plană de deformație.

Analizând ecuațiile (2.15) și (2.16), rezultă că starea de tensiune variază invers proporțional cu rădăcina pătrată a lui r , (\sqrt{r}), iar deplasările variază direct proporțional cu rădăcina pătrată a lui r .

Notăm faptul că la vârful fisurii avem o stare de tensiune singulară, ($r \rightarrow 0$), ($\sigma \rightarrow \infty$).

Se pune problema de a elabora un element finit care să reflecte dependența stării de tensiune și deplasare la vârful fisurii și în apropierea acesteia în concordanță cu cele enunțate anterior.

În acest sens a fost formulat elementul finit pătratic, izoparametric cu 8 noduri, așa cum este prezentat în Fig.2.7.

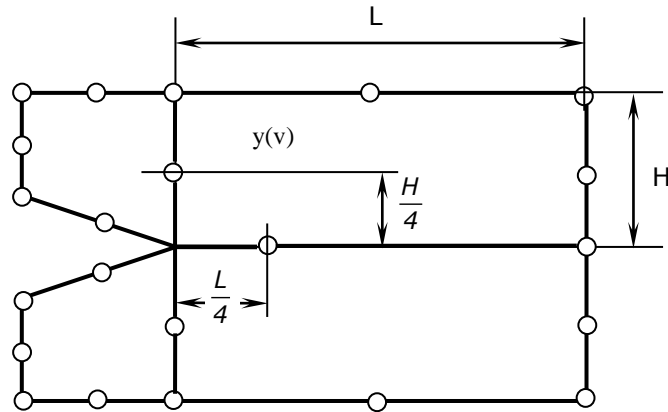


Fig.2.7. Modelarea fisurii utilizând elemente finite pentru vârful fisurii

Acest element finit este identic cu elementul finit izoparametric cu 8 noduri, pătratic, cu excepția nodurilor plasate la mijlocul laturilor convergente fisurii, care sunt deplasate de la mijloc spre vârful fisurii, la $\frac{L}{4}$, $\frac{H}{4}$, adică la un sfert din lungimea laturilor spre vârful fisurii.

În Fig.2.8 se consideră un element finit în care nodurile 1, 2 și 3 sunt plasate pe latura x, de-a lungul direcției de propagare a fisurii.

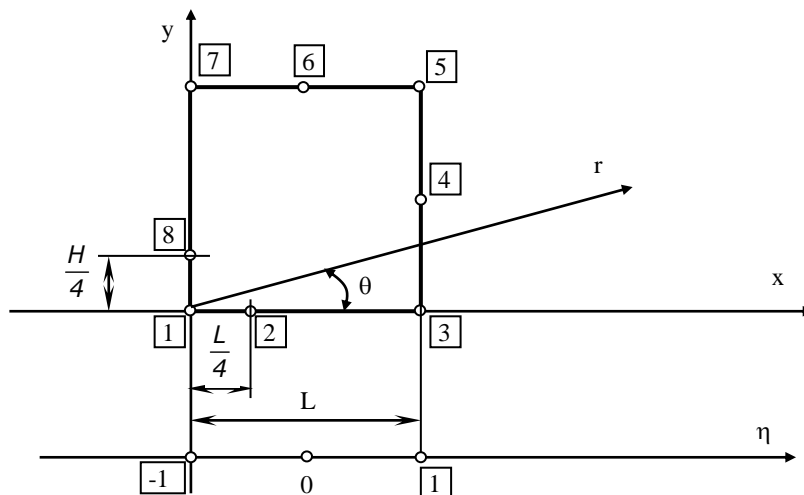


Fig.2.8. Element finit pătratic izoparametric, la vârful fisurii

În aceste condiții, funcțiile de formă utilizate pentru interpolarea deplasărilor sunt identice cu cele ale transformării de coordonate:

$$x = -0,5\eta(1-\eta)x_1 + (1+\eta)(1-\eta)x_2 + 0,5\eta(1+\eta)x_3 \quad (2.17)$$

$$u = -0,5\eta(1-\eta)u_1 + (1+\eta)(1-\eta)u_2 + 0,5\eta(1+\eta)u_3, \quad (2.18)$$

unde η este coordonata locală;

$x_i, (i = \overline{1..3})$ sunt coordonatele globale ale nodurilor 1, 2, respectiv 3;

$u_i, (i = \overline{1..3})$ sunt deplasările nodurilor 1, 2, respectiv 3.

Considerând originea în nodul 1 și mutând nodul 2 la un sfert distanța de origine, avem următoarele condiții:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{L}{4}; \quad x_3 = L; \quad u_1 = 0, \quad (2.19)$$

Înlocuind condițiile (2.19) în relația (2.17) și (2.18) se obține:

$$x = 0,25(1+\eta)(1-\eta)L + 0,5\eta(1+\eta)L \quad (2.20)$$

$$u = (1+\eta)(1-\eta)u_2 + 0,5\eta(1+\eta)u_3 \quad (2.21)$$

În (2.20) se poate scrie:

$$x = 0,25(1-\eta^2)L + (0,5\eta + 0,25\eta^2)L = (0,25 + 0,5\eta + 0,25\eta^2)L \Rightarrow x = (1+\eta)^2L, \quad (2.22)$$

$$\text{iar din (2.21)} \Rightarrow u = (1+\eta)[(1-\eta)u_2 + 0,5\eta u_3] \quad (2.23)$$

De-a lungul axei x, vom considera raza r, adică $\theta = 0$, rezultând:

$$r = 0,25(1+\eta)^2L \Rightarrow (1+\eta) = 2\sqrt{\frac{r}{L}} \quad (2.24)$$

Înlocuind relația (2.24) în (2.23), avem :

$$u = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{L}} [(1-\eta)u_2 + 0,5u_3] \quad (2.25)$$

Din (2.25) rezultă că aplicând deplasarea nodului 2 de la mijlocul laturii la $\frac{1}{4}$ de vârf, deplasarea u este direct proporțională cu \sqrt{r} , ceea ce, de altfel, este cunoscut în relația (2.16).

Deformația specifică ε_x , este:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.26)$$

Ținând cont de relația (2.22), putem scrie:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = 0,25(1 + \eta)L = 0,5(1 + \eta)L = \sqrt{r} \cdot \sqrt{L} \quad (2.27)$$

sau

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{L}} \quad (2.28)$$

Înlocuind pe (2.28) în (2.26) și derivând $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, unde u este dat de (2.23), obținem:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{L}} \cdot \left[-2\eta \cdot u_2 + \left(\frac{1}{2} + \eta \right) u_3 \right] \quad (2.29)$$

Cum avem $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$, rezultă că tensiunea este invers proporțională cu rădăcina pătrată a razei.

În mod analog se consideră nodurile 1, 7 și 8. Prin urmare, prin deplasarea nodurilor la un sfert distanță de origine (vârful fisurii) pe laturile convergente fisurii, se obține un element finit specific care simulează variația tensiunii și deplasării la vârful fisurii. În mod analog se obțin elemente finite triunghiulare, respectiv tetraedrice, Fig.2.9.

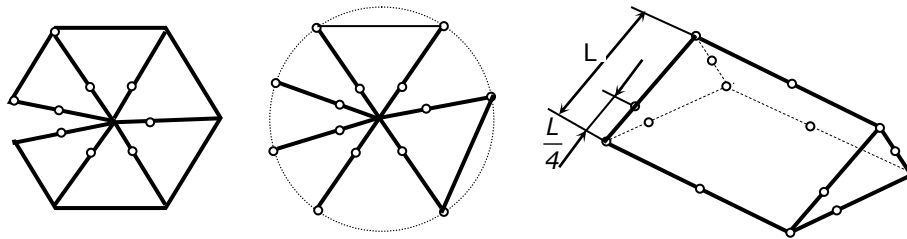


Fig.2.9. Elemente singulare triunghiulare și tetraedrice

Elemente finite îmbogățite

Acest model presupune simularea câmpului discontinuu sau singular al deplasărilor printr-un set de funcții de formă speciale. Fisura nu mai este modelată geometric, așadar discretizarea nu trebuie făcută în conformitate cu direcția de propagare. Funcțiile speciale care permit aproximarea precisă a câmpului deplasărilor în zonele cu discontinuități sau singularități sunt implementate în definiția elementelor finite uzuale, rezultând aceste elemente finite îmbogățite. Ca o consecință, metoda utilizării acestor elemente poartă denumirea de Metoda Elementelor Finite Extinse (MEFX) sau *eXtended Finite Element Method (XFEM)*.

Principalul avantaj al acestei metode este că nu necesită rediscrétizarea modelului în timpul propagării fisurii; odată cu deplasarea vârfului fisurii, elementele din jurul acestuia sunt automat îmbogățite cu funcțiile menționate. De asemenea, metoda permite simularea precisă a fisurilor multiple, inclusiv pentru cazul în care acestea se intersectează.

Primele cercetări în direcția dezvoltării MEFX aparțin lui [Belytschko și Black, 1999], care au adăugat elementelor finite, funcții discontinue, simulând astfel prezența fisurii.

[Dolbow, 1999, 2000] a propus soluții pentru rezolvarea problemelor plăcilor bidimensionale în domeniul elastic, precum și Mindlin-Reissner, prin utilizarea atât a unor funcții de salt, cât și a unor elemente îmbogățite cu funcții de aproximare bazate pe deplasări.

Extinderea metodei și în domeniul tridimensional aparține cercetărilor conduse de Sukumar [Sukumar, 2000, 2003].

Ulterior, MEFX a fost adoptată utilizării elementelor coezive [Bellec și Dolbow, 2003], [Belytschko, 2003], [Asadpoure, 2006].

Simularea propagării fisurilor multiple a fost pusă la punct în [Daux 2000], [Budyn, 2004], respectiv [Zi, 2004] – care a abordat inclusiv problema joncțiunii a două fisuri.

Îmbogățirea elementelor finite

În principiu, îmbogățirea poate fi privită ca modalitate de mărire a ordinului de determinare al sistemului de ecuații care generează soluția. În cazul fisurilor, rezultatul acestei îmbogățiri (*enrichment*) este obținerea unei precizii sporite a aproximărilor prin introducerea unor soluții analitice pentru câmpul de tensiuni și deformații din zona vârfului fisurii. Implementarea acestor funcții suplimentare pornește de la ecuațiile de bază ale metodei elementului finit.

Astfel, pentru un element tetragonal, Fig.2.10, avem următoarele relații:

$$x = \sum_{j=1}^4 N_j \bar{x}_j, \quad (2.30)$$

unde $x^T = (x, y)$ reprezintă coordonatele globale;

$\bar{x}^T = (\bar{x}, \bar{y})$ sunt coordonatele locale ale nodurilor;

N_j este matricea funcțiilor de formă ale elementului finit:

$$N_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$j=2..4$ sunt nodurile elementului finit.

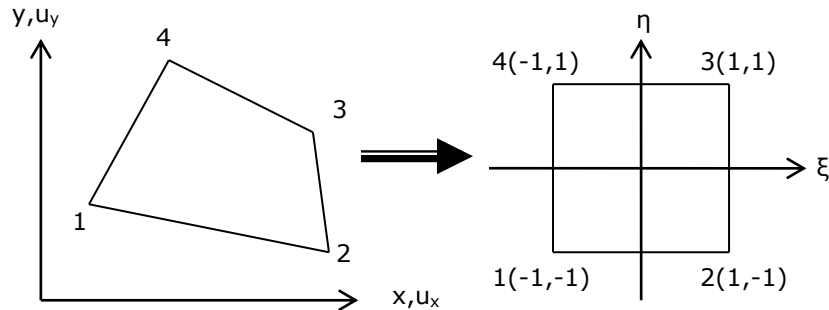


Fig.2.10. Element finit tetragonal, izoparametric

O relație similară exprimă deplasările globale $u^T = (u_x, u_y)$ funcție de deplasările nodale $\bar{u}^T = (\bar{u}_x, \bar{u}_y)$:

$$u = \sum_{j=1}^4 N_j \bar{u}_j \quad (2.32)$$

Deformațiile specifice sunt exprimate prin relația:

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^4 B_j \bar{u}_j, \quad (2.33)$$

unde B_j este matricea de interpolare a deformațiilor specifice:

$$B_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Trecerea de la derivatele parțiale ale funcției N în raport cu coordonatele locale, la cele în raport cu coordonatele globale se face prin intermediul matricei Iacobiene J :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\text{unde } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \text{ respectiv } J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Matricea de rigiditate K a elementului oarecare S este dată de relația:

$$K = \int_S B^T D B dS, \quad (2.37)$$

unde D este matricea constitutivă a elementului (matricea tensiune-deformație).

Rescriind ecuația (2.32) pentru m funcții de bază p (cu alte cuvinte, funcțiile N_j sunt înlocuite cu m funcții p), se obține:

$$u = p^T a = \sum_{k=1}^m p_k a_k, \quad (2.38)$$

unde necunoscutele a_k sunt determinate din aproximațiile făcute în punctele nodale.

Pentru probleme bidimensionale, funcțiile p de ordinul 1, respectiv 2 sunt de forma:

$$p^T = \{1, x, y\}, \text{ respectiv } p^T = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (2.39)$$

În cazul în care se „îmbogățește” vectorul de bază (p), se realizează o îmbogățire intrinsecă; dacă se „îmbogățește” aproximarea, se realizează o îmbogățire extrinsecă.

Îmbogățirea intrinsecă (*intrinsic enrichment*) constă în modificarea funcției p prin includerea unor noi termeni suplimentari.

Astfel, porind de la relația (2.39) și notând $p^{ef} = \{1, x, y\}$, se adaugă și termenii de îmbogățire $p^{im} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$:

$$p = \{p^{ef}, p^{im}\} = \{1, x, y, f_1, f_2, f_3, f_4\} \quad (2.40)$$

În cazul unei fisuri centrale într-o placă plană, infinită, funcțiile f_1, f_2, f_3, f_4 pot fi extrase din relațiile de calcul ale câmpului de deplasări de la vârful fisurii:

$$u_x = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + \cos \theta + 2) \right) \quad (2.41)$$

$$u_y = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(K_I \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) - K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa + \cos \theta - 2) \right) \quad (2.42)$$

unde K_I și K_{II} sunt factorii de intensitate a tensiunii pentru modurile I, respectiv II de fisurare,
 r și θ sunt coordonatele polare la vârful fisurii (Fig.2.11).

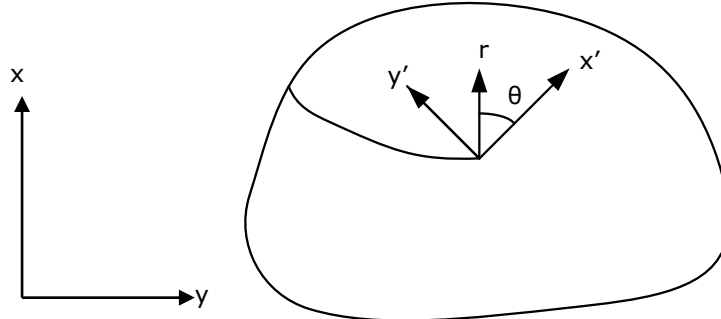


Fig.2.11. Coordonatele polare la vârful fisurii

Câmpul asimptotic al deplasărilor lângă vârful visurii poate fi exprimat prin următoarele funcții de bază $p(x)$, definite tot în sistemul de coordonate polar:

$$p^{im}(x) = [P_1, P_2, P_3, P_4] = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.43)$$

Vectorul total $p^T(x)$, care include cele două componente din relația (2.40) devine:

$$p^T(x) = \left[1, x, y, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.44)$$

Îmbogățirea extrinsecă (*extrinsic enrichment*) folosește funcții de bază extrinseci $p_k(x)$ pentru creșterea ordinului de determinare.

$$u(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j + \sum_{k=1}^m p_k(x) a_k, \quad (2.45)$$

unde a_k sunt grade de libertate necunoscute, asociate soluției îmbogățite;
 m este numărul de noduri afectate de „îmbogățire”.

Modelarea discontinuităților folosind MEFX

Pentru un punct arbitrar x , aparținând unui domeniu discretizat în elemente finite cu n noduri, cu o discontinuitate în interior, deplasarea acestuia se poate determina cu relația:

$$u(x) = u^{ef} + u^{im} = \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x) \psi(x) a_k, \quad (2.46)$$

unde u_j este vectorul gradelor de libertate obișnuite în metoda elementului finit;
 a_k este setul suplimentar de grade de libertate adăugat;
 $\psi(x)$ este funcția de îmbogățire discontinuă, definită pentru setul de noduri pe care le influențează discontinuitatea;
 m este numărul de noduri influențate de discontinuitate;

u^{ef} este deplasarea dată de soluția obținută cu metoda elementului finit;
 u^{im} este deplasarea dată de funcțiile de „imbogățire”.

În cazul în care elementul finit analizat are n_p discontinuități, relația (2.46) se poate extinde sub forma:

$$u(x) = u^{ef} + u^{im} = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j + \sum_{l=1}^{n_p} \sum_{k=1}^m N_k(x)\psi^l(x)a_k^l \quad (2.47)$$

Funcțiile $\psi(x)$ trebuie alese astfel încât să fie satisfăcute următoarele condiții:

- să reproducă singularitatea la vârful fisurii;
- să asigure continuitatea în deplasările elementelor finite adiacente;
- să creeze câmpuri de deformații independente pe-o parte și pe cealaltă a suprafeței fisurate;
- să asigure respectarea altor cerințe specifice problemelor de discontinuitate.

Modelarea fisurilor folosind MEFX

Pentru modelarea fisurilor, se pornește de la relația (2.46). În mod uzual, funcțiile $\psi(x)$ sunt fie funcții Heaviside ($H(\xi)$), fie funcții semn ($sgn(\xi)$).

Funcția Heaviside este o funcție de tip salt, definită în relația (2.48) și ilustrată în Fig.2.12:

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ 0 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

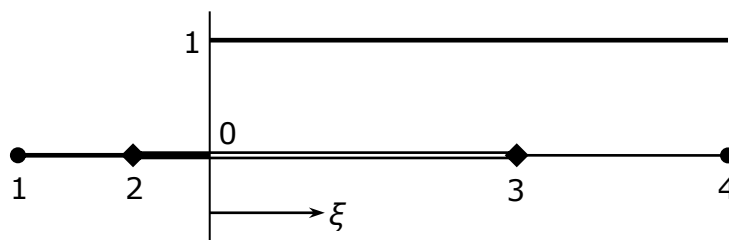


Fig.2.12. Funcția Heaviside

Relația finală de calcul pentru deplasări (2.46) capătă atunci forma:

$$u(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x)(H(\xi) - H(\xi_k))a_k \quad (2.49)$$

Funcția semn (2.50) este o variantă alternativă a funcției Heaviside:

$$H(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ -1 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Relația de calcul a deplasărilor este similară ecuației (2.49):

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x)(\operatorname{sgn}(\xi) - \operatorname{sgn}(\xi_k))a_k \quad (2.51)$$

Modelarea defectelor folosind MEFX

Modelarea discontinuităților de tipul defectelor se face prin înlocuirea funcțiilor Heaviside și semn din relația (2.46), cu funcții de tipul funcției de semn a distanței dintre puncte, $\chi_k(x)$:

$$\chi_k(x) = |\xi(x)| - |\xi(x_k)| \quad (2.52)$$

$$u(x) = u^{ef} + u^{im} = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x)\chi_k(x)a_k \quad (2.53)$$

Modelarea plasticității de la vârful fisurii

Pentru modelarea zonei plastice de la vârful fisurii, [Elguedj, 2006] a propus conceptul de îmbogățire plastică (*plastic enrichment*). Astfel, pornind de la modelul Hutchinson-Rice-Rosengren [Hutchinson, 1968, Rice, 1968] (2.54), se definesc deplasarea asimptotică la vârful fisurii, u_i , precum și câmpurile de deformații și tensiuni ε_{ij} , respectiv σ_{ij} (2.55, 2.56, 2.57).

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \frac{\sigma}{\sigma_c} + k_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^n, \quad (2.54)$$

unde ε_c sunt deformațiile plastice;
 σ_c este limita de curgere;
 n este exponentul de ecruisare.

$$u_i = k_0 \varepsilon_c r \left(\frac{J}{k_0 \sigma_c \varepsilon_c I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} u_i(\theta, n) \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_{ij} = k_0 \varepsilon_c \left(\frac{J}{k_0 \sigma_c \varepsilon_c I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \varepsilon_{ij}(\theta, n) \quad (2.56)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_c \left(\frac{J}{k_0 \sigma_c \varepsilon_c I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sigma_{ij}(\theta, n), \quad (2.57)$$

unde k_0 este o constantă adimensională, proprietate de material;
 J este integrala pe contur;
 I_n este o constantă adimensională care depinde de n ;

\bar{u}_{ij} , $\bar{\varepsilon}_{ij}$ și $\bar{\sigma}_{ij}$ sunt funcții unghiulare adimensionale.

Descompunând funcțiile \bar{u}_{ij} în serie Fourier pentru modurile I și II de fisurare, câmpurile de deformații pot fi definite pe baza funcției de bază din relația (2.58):

$$r^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \left(\cos \frac{k\theta}{2}, \sin \frac{k\theta}{2} \right); k \in [1, 3, 5, 7] \right\} \quad (2.58)$$

[Elguedj, 2006] a folosit, pornind de la relația (2.58), următoarele funcții:

$$r^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sin \frac{\theta}{2} \sin 2\theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin 2\theta \right\} \quad (2.59)$$

$$r^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin 3\theta \right\} \quad (2.60)$$

$$r^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sin \frac{\theta}{2} \sin 2\theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin 2\theta, \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin 3\theta \right\} \quad (2.61)$$

Pe lângă tehnicile de modelare a fisurilor bazate pe metoda elementelor finite, mai există și tehnici bazate pe modele nediscretizate.

Metodele sau tehnicile alternative de modelare a fisurilor au fost dezvoltate pentru a contracara principalele neajunsuri ale metodei elementelor finite: necesar ridicat de resurse de calcul, respectiv dificultăți în modelarea geometriilor complexe (cauzate de apariția elementelor distorsionate).

Majoritatea acestor metode alternative nu necesită discretizarea modelului geometric analizat (*meshless methods*): metoda Galerkin fără elemente (*element-free Galerkin method - EFG*) [Belytschko, 1994], metoda Petrov-Galerkin fără discretizare locală (*meshless local Petrov-Galerkin method - MLPG*) [Atluri, 2002], metoda punctului finit (*finite point method - FPM*) [Onate, 1995], metoda echilibrului pe linie (*equilibrium on line method - ELM*) [Sadeghirad, 2007].

2.3. Considerații privind metodele de calcul numeric în mecanica ruperii

2.3.1. Metode tradiționale de calcul numeric în mecanica ruperii

Aceste metode tradiționale pot fi aplicate atât cu ajutorul elementelor finite, cât și cu ajutorul elementelor de frontieră (mai puțin abordarea derivativă a rigidității) și pot fi împărțite în două mari categorii: metode punctuale și metode energetice.

Extrapolarea tensiunii și deplasării

Considerăm un corp fisurat, solicitat în modul modului I, conform Fig.2.13. În planul fisurii ($\theta = 0$), K_I este legat de tensiunea după direcția x_2 astfel:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{22} \sqrt{2\pi r}) \quad (\theta = 0), \quad (2.62)$$

unde σ_{22} este tensiunea normală după direcția x_2 .

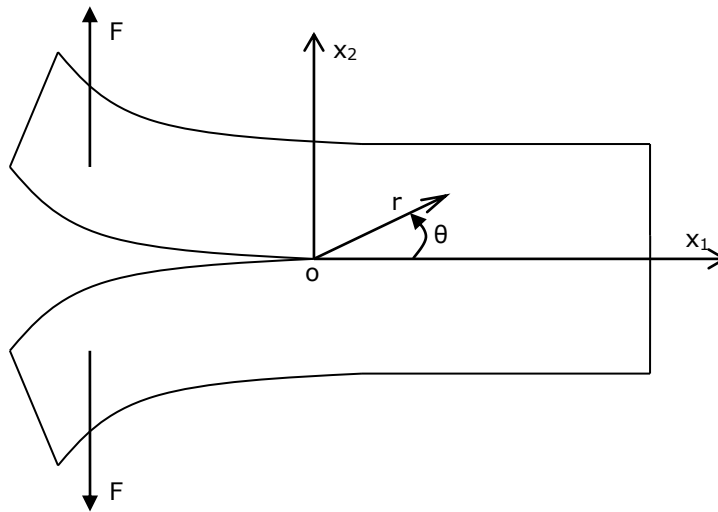


Fig.2.13. Corp cu fisură, solicitat conform modului I

Factorul de intensitate a tensiunii poate fi determinat prin reprezentarea grafică a cantității din paranteză funcție de distanța până la vârful fisurii și extrapolarea ulterioară pentru $r = 0$.

În mod similar, K_I poate fi determinat pe baza extrapolării deschiderii fisurii:

$$K_I = \frac{2\mu}{k+1} \lim_{r \rightarrow 0} \left[u_2 \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right] \quad (\theta = \pi), \quad (2.63)$$

unde μ este modulul de elasticitate transversal;

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \nu \text{ fiind coeficientul lui Poisson;}$$

u_2 este deschiderea fisurii după direcția x_2 .

Principalul dezavantaj al acestei metode constă în necesitatea unei discretizări fine pentru obținerea unor rezultate cât de cât exacte.

Avansarea elementală a fisurii

Această metodă se bazează pe determinarea forței de extensie a fisurii pentru aceeași geometrie, dar cu o fisură de lungime a , respectiv $a + \Delta a$, pentru un corp bidimensional cu grosimea egală cu unitatea:

$$G = - \left(\frac{\Delta \Pi}{\Delta a} \right), \quad (2.64)$$

unde G este forța de extensie a fisurii;
 $\Delta \Pi$ este variația energiei potențiale de deformație.

Avantajele acestei metode constau în post-procesarea minimală și lipsa nevoii pentru o discretizare fină. Dintre dezavantaje, cel mai important este reprezentat de necesitatea mai multor soluții (mai multe analize).

Integrarea pe contur

Această metodă presupune determinarea integralei J pentru un contur arbitrar din jurul vârfului fisurii (pentru probleme tridimensionale este nevoie de o suprafață sau de un volum). Principalul avantaj constă în aplicabilitatea acestei metode atât în problemele liniare, cât și neliniare.

Extensia virtuală a fisurii. Abordarea derivativă a rigidității

Această metodă a fost propusă, independent, în lucrările lui Parks [Parks, 1974] și Hellen [Hellen, 1975] și a fost ulterior perfecționată de același Parks [Parks, 1977].

În sistemul de coordonate global al metodei elementelor finite, energia potențială Π este dată de relația:

$$\Pi = \frac{1}{2} [u]^T [K] [u] - [u]^T [F] \quad (2.65)$$

Pentru o încărcare cunoscută (*fixed load condition*), forța de extensie a fisurii G este dată de relația:

$$G = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} \right)_{inc} = - \frac{\partial [u]^T}{\partial a} \{ [K] [u] - [F] \} - \frac{1}{2} [u]^T \frac{\partial [K]}{\partial a} [u] + [u]^T \frac{\partial [F]}{\partial a} \quad (2.66)$$

$$G = - \frac{K_I^2}{E'} = - \frac{1}{2} [u]^T \frac{\partial [K]}{\partial a} [u], \quad (2.67)$$

întrucât primul și al treilea termen sunt zero, iar $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ este modulul de elasticitate longitudinal echivalent pentru starea plană de deformație.

Se poate observa că forța de extensie a fisurii este proporțională cu derivata matricei rigidității în raport cu lungimea fisurii.

Să presupunem că avem o discretizare și o soluție pentru fisura de lungime a . Dacă dorim să extindem această fisură cu cantitatea Δa , este suficientă mutarea cu cantitatea Δa a conturului Γ_0 în direcția vârfului fisurii, conturul Γ_1 rămânând neschimbat, după cum este prezentat în Fig.2.14.

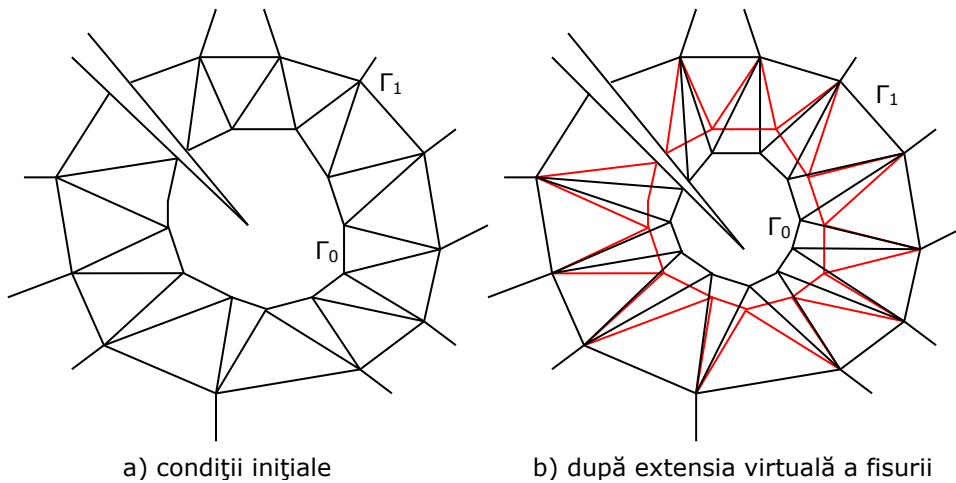


Fig.2.14. Extensia virtuală a fisurii într-un model de analiză cu elemente finite

Forța de extensie a fisurii, în acest caz, este dată de relația:

$$G = -\frac{1}{2} [u]^T \left(\sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial [k_j]}{\partial a} \right) [u], \quad (2.68)$$

unde $[k_j]$ sunt matricile de rigiditate elementale;
 N_c este numărul conturilorilor.

Extensia virtuală a fisurii: abordarea continuă

Pornind de la metoda dezvoltată de Parks și Hellen, deLorenzi a determinat forța de extensie a fisurii într-un mediu continuu, ceea ce înseamnă că această metodă nu se pretează numai analizei cu elemente finite, ci și analizei cu elemente de frontieră [deLorenzi, 1982].

În Fig.2.15 este reprezentată creșterea virtuală a unei fisuri într-un mediu continuu bidimensional.

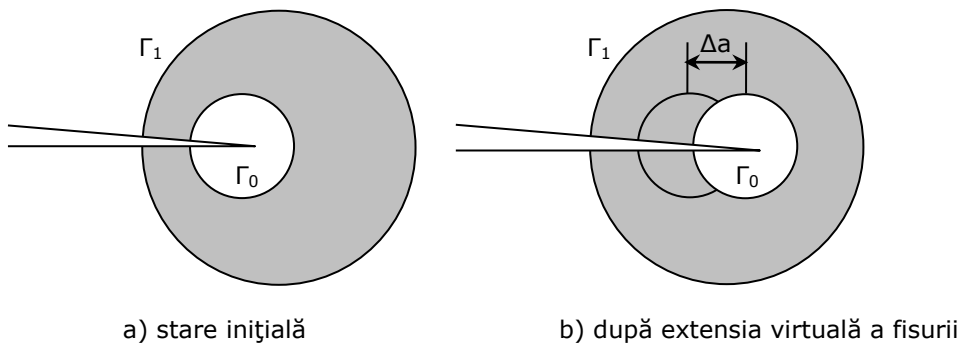


Fig.2.15. Extensia virtuală a fisurii într-un mediu bidimensional elastic și continuu

Punctele din interiorul conturului Γ_0 suferă o translație rigidă pe distanța Δa după direcția x_1 , în timp ce punctele din exteriorul conturului Γ_1 rămân fixe. În zona cuprinsă între cele două contururi, punctele materiale sunt translatate pe distanța Δx_1 .

Pentru materiale elastice sau elasto-plastice,

$$G = \frac{1}{\Delta a} \int_A \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{i1} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dA, \quad (2.69)$$

unde $w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ este densitatea energiei de deformație. σ_{ij} , respectiv ε_{ij} sunt tensorii tensiunii, respectiv deformației specifice.

Această relație este valabilă în absența forțelor masice în interiorul Γ_1 , a sarcinilor pe fețele fisurii, iar creșterea fisurii este unidirecțională (după x_1). De asemenea grosimea corpului este egală cu unitatea.

În cazul general al unui corp tridimensional, unde avem forțe masice și sarcini aplicate pe fețele fisurii, forța de extensie a fisurii este dată de relația:

$$G = \frac{1}{\Delta A_c} \int_V \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - w \delta_{ik} \right) \frac{\partial \Delta x_k}{\partial x_i} - F_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j \right] dV - \frac{1}{\Delta A_c} \int_S T_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \Delta x_j dS, \quad (2.70)$$

unde ΔA_c este creșterea în suprafață a fisurii generată de extinderea virtuală a fisurii;

V este volumul corpului;

F_i sunt forțele masice.

Trebuie menționat că, în problemele tridimensionale, forța de extensie a fisurii poate varia de-a lungul frontului fisurii. De asemenea, în calculul lui ΔA_c poate fi luată în considerare o creștere uniformă de-a lungul întregului front a fisurii, Fig.2.16, sau, dimpotrivă, o creștere pe o porțiune mică a frontului, Fig.2.17.

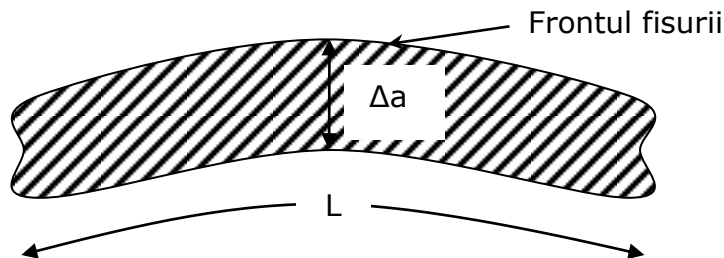


Fig.16. Creșterea uniformă fisurii de-a lungul unui front tridimensional de propagare

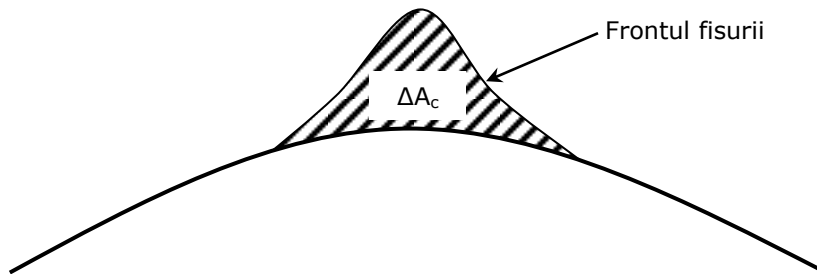


Fig.2.17. Creșterea pe o zonă restrânsă a fisurii de-a lungul unui front tridimensional de propagare

2.3.2. Metoda integralei pe domeniu a energiei

Implementarea integralei pe domeniu pentru corpuri bidimensionale

Metodologia implementării integralei pe domeniu a energiei, în scopul determinării numerice a integralei J , a fost pusă la punct de Shih și colaboratorii săi [Shih et al, 1986]. Similară cu metoda extensiei virtuale a fisurii, integrala pe domeniu poate fi aplicată în problemele cvasistatice și dinamice cu material având comportare elastică, plastică și vâscoplastică, dar și solicitări termice.

Conform definiției generalizate a integralei J , pentru un contur infinitesimal în jurul vârfului fisurii avem:

$$J = \lim_{\Gamma_0 \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} \left[(w + T)\delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] n_i d\Gamma, \quad (2.71)$$

unde T este densitatea energiei cinetice;
 w este lucrul mecanic al forțelor de deformație;
 δ_{1i} este deschiderea fisurii.

În cazul în care avem un material cu comportare plastică, încărcat în condiții cvasistatice ($T = 0$), în prezența solicitărilor termice, deformația totală este dată de relația:

$$\varepsilon_{ij}^{tot} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + a\theta\delta_{ij} = \varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^t, \quad (2.72)$$

unde a este coeficientul de dilatare termică;
 θ este diferența dintre temperatura corpului și temperatura mediului ambiant. Indicii e, p, m, t reprezintă deformații elastice, plastice, mecanice și termice.

Lucrul mecanic al forțelor de deformație plastică și elastică este egal cu:

$$w = \int_0^m \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^m \quad (2.73)$$

Să considerăm un contur închis în jurul vârfului fisurii, contur mărginit de curbele Γ_1 și Γ_0 (Fig.2.18). Conturul exterior Γ_1 este finit iar Γ_0 este infinitesimal. Conturul rezultat Γ^* este compus din contururile Γ^+ , Γ^- , Γ_1 și Γ_0 .

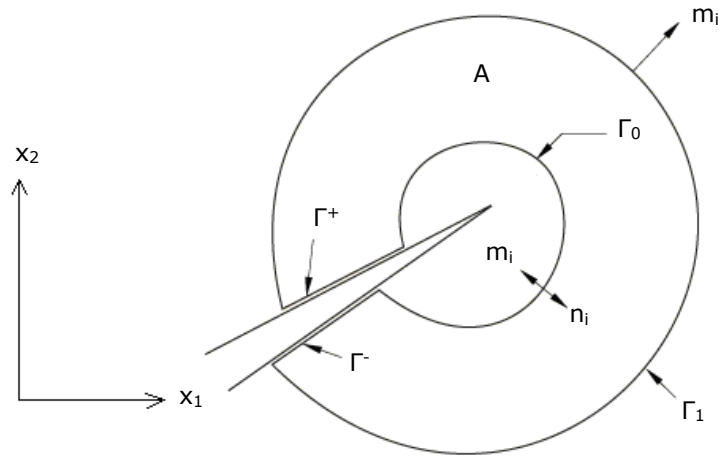


Fig.2.18. Formarea conturului închis în jurul vârfului fisurii

$$\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma^+ + \Gamma^- - \Gamma_0 \quad (2.74)$$

$$J = \int_{\Gamma^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] q m_i d\Gamma - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q d\Gamma, \quad (2.75)$$

unde q este o funcție arbitrară, dar omogenă, egală cu unitatea pe Γ_0 și nulă pe Γ_1 ;

m_i este normala exterioară la Γ^* ; $m_i = -n_i$ pe Γ_0 , respectiv $m_1 = 0$ și $m_2 = \pm 1$ pe Γ^+ și Γ^- .

Al doilea membru al ecuației dispare dacă nu există sarcini pe fețele fisurii. În această situație, prin aplicarea teoremei divergenței pentru relația (5) se obține:

$$J = \int_A \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] q \right\} dA = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] q dA, \quad (2.76)$$

unde A este aria delimitată de conturul Γ^* .

Se știe că, dacă nu există forțe masice și lucrul mecanic al forțelor de deformație are proprietățile unui potențial elastic, avem:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad (2.77)$$

respectiv:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.78)$$

Separând lucrul mecanic al forțelor de deformație în componente elastică și plastică, obținem:

$$w = w^e + w^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} S_{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad (2.79)$$

unde S_{ij} este tensiunea deviatorie:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.80)$$

Revenind la exprimarea generală a lui J (inclusiv deformații plastice, forțe masice și solicitări termice), din relația (2.71), pentru un corp bidimensional aceasta devine:

$$J = \int_A \left\{ \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} + \left[\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x_1} - \frac{\partial w_p}{\partial x_1} + a \sigma_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - F_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] q \right\} dA - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q d\Gamma \quad (2.81)$$

Pentru un material cu comportament elastic liniar sau neliniar, aflat în condiții quasistatice și în absența forțelor masice, a solicitărilor termice și a sarcinilor aplicate pe fețele fisurii, relația (2.81) se simplifică, devenind:

$$J = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA \quad (2.82)$$

Pentru simplificare, q poate fi interpretat ca o deplasare virtuală normalizată.

Generalizarea pentru trei dimensiuni

Vom porni de la relația (2.71), care se transformă într-o formă convenabilă pentru analiza cu elemente finite [Anderson, 1995]. Să considerăm fisura plană din corpul tridimensional prezentat în Fig.2.19.

Sistemul de coordonate local are axa x_1 normală la frontul fisurii, axa x_2 normală la planul fisurii și axa x_3 tangentă la frontul fisurii.

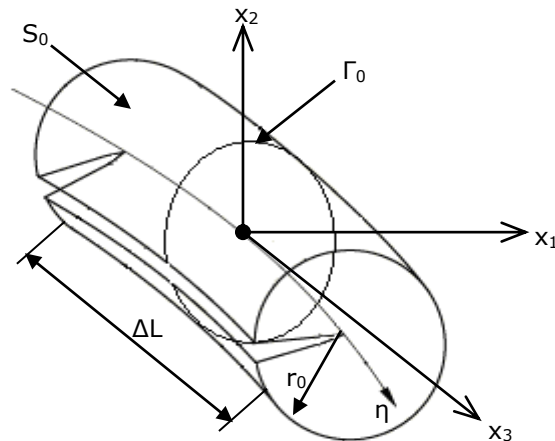


Fig.2.19. Suprafața creată în jurul unui segment elementar al frontului fisurii

Construind un tub de lungime ΔL și rază r_0 în jurul frontului fisurii și considerând condiții de solicitare cvasistatice, putem defini o integrală medie ponderată J în punctul η de pe frontul fisurii:

$$\bar{J}_{\Delta L} = \int_{\Delta L} J(\eta) q d\eta = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{S_0} \left[w \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] q n_i dS, \quad (2.83)$$

unde $J(\eta)$ este valoarea într-un punct a lui J ;

S_0 este aria suprafeței tubului;

q este funcția de ponderare definită anterior.

După cum s-a afirmat, q poate fi interpretată ca fiind o extindere virtuală a fisurii $\Delta a(\eta)$, Fig.2.20, adică:

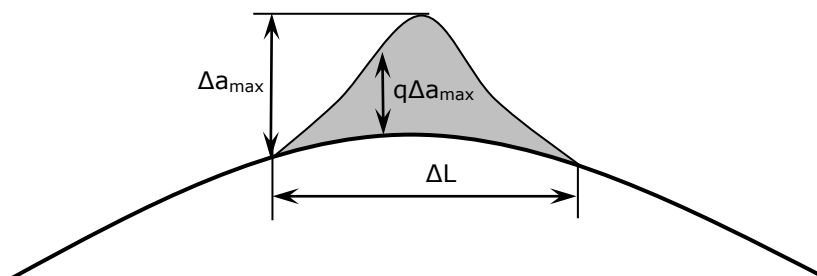


Fig.2.20. Interpretarea lui q ca fiind o creștere virtuală a fisurii de-a lungul segmentul ΔL al frontului

$$\Delta a(\eta) = q(\eta)\Delta a_{max}, \tag{2.84}$$

unde Δa_{max} este extensia maximă a frontului fisurii.

În mod analog,

$$\Delta A_c = \Delta a_{max} \int_{\Delta L} q(\eta) d\eta \tag{2.85}$$

Construind un al doilea tub de rază r_1 în jurul frontului fisurii, Fig.2.21, se poate defini integrala medie ponderată J pentru o suprafață închisă:

$$\bar{J}_{\Delta L} = \int_{S^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] q m_i dS - \int_{S^+ + S^-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q dS, \tag{2.86}$$

unde $S^* = S_1 + S^+ + S^- - S_0$;

S_1 este suprafața exterioară a tubului;

S_0 este suprafața interioară a tubului;

S^+ , respectiv S^- sunt suprafețele flancurilor fisurii.

Prin derivarea pe domeniu a relației (2.86) se obține o integrală pe volum:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\Delta L} &= \\ &= \int_{V^*} \left\{ \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} + \left[\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x_1} - \frac{\partial w_p}{\partial x_1} + a \sigma_{ii} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - F_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] q \right\} dV - \int_{S^+ + S^-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q dS \end{aligned} \tag{2.87}$$

Pentru ca J să nu fie influențată de suprafețele de capăt ale cilindrului, q trebuie să fie nulă la ambele capete ale segmentului ΔL , în concordanță așadar cu interpretarea anterioară, conform căreia q poate fi asimilată unei extensii virtuale a fisurii (Fig.2.20).

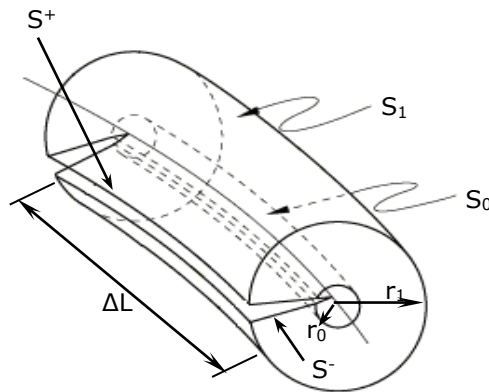


Fig.2.21. Delimitarea volumului de calcul V^*

Punctual, $J(\eta)$ poate fi aproximată prin relația:

$$J(\eta) \approx \frac{\bar{J}\Delta L}{\int_{\Delta L} q(\eta, r_0) d\eta} \quad (2.88)$$

Pentru exprimarea integralei pe domeniu (2.87) în coordonate fixe, q trebuie înlocuit cu vectorul cantitate q_i , iar derivatele parțiale trebuie făcute în raport cu x_i , nu cu x_1 (q_i și x_i sunt paraleli cu direcția de propagare a fisurii).

Implementarea în analiza cu elemente finite

Shih și colaboratorii săi [Shih, 1986], precum și Dodds și Vargas [Dodds, 1988] au oferit instrucțiuni detaliate privind implementarea metodei integralei pe domeniu în analiza cu elemente finite.

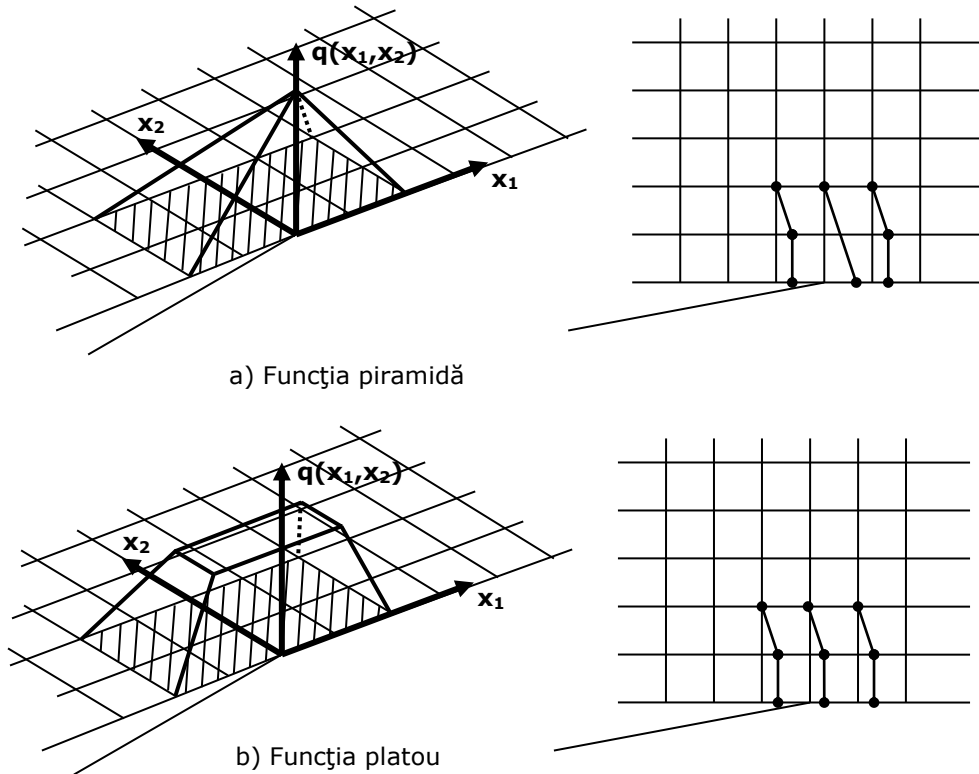


Fig.2.22. Exemple de funcții q , cu deplasările nodale virtuale corespunzătoare

Pentru problemele bidimensionale, la definirea suprafeței pe care se face integrarea, conturul interior Γ_0 coincide cu vârful fisurii, iar conturul Γ_1 trebuie să coincidă cu frontierele elementelor. Pentru problemele tridimensionale se procedează analog.

Cea mai mare problemă o constituie alegerea corectă a funcției q . De exemplu, pentru starea plană de tensiune sau deformație, $q = 1$ pe Γ_0 (la vârful fisurii) și $q = 0$ pe conturul exterior Γ_0 . În Fig.2.22 sunt reprezentate două funcții utilizate în problemele bidimensionale, funcția piramidă și funcția platou.

În Fig.2.23 este ilustrată funcția piramidă de-a lungul unui front de fisură tridimensional, unde nodul de interes pentru calcularea integralei J este deplasat cu o unitate.

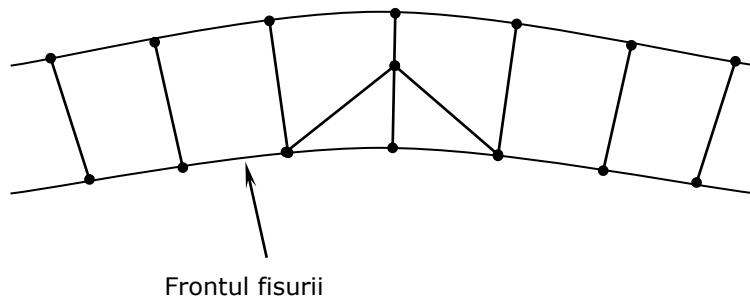


Fig.2.23. Definierea lui q în termenii unei deplasări nodale virtuale de-a lungul unui front de fisură tridimensional

Într-un element, funcția q poate fi interpolată după cum urmează:

$$q(x_1) = \sum_{i=1}^n N_i q_i, \tag{2.89}$$

unde n este numărul de noduri per element;
 q_i reprezintă valorile nodale ale lui q ;
 N_i sunt funcțiile de formă ale elementului.

Derivatele spațiale ale lui q sunt de forma:

$$\frac{\partial q}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{2,3} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} q_i, \tag{2.90}$$

unde ζ_i sunt coordonatele parametrice ale elementului.

Dacă în volumul sau aria de integrare nu sunt deformații termice, deformații plastice dependente de cale și forțe masice, forma discretizată a integralei pe contur este următoarea:

$$J = \sum_{A^* \text{ sau } V^*} \sum_{p=1}^m \left\{ \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} \right] \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) \right\}_p w_p - \sum_{\text{Fetele fisurii}} \left(\sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q \right) w, \tag{2.91}$$

unde m reprezintă numărul punctelor gaussiene ale fiecărui element;
 w_p și w sunt factori de ponderare.

Cantitățile dintre parantezele $\{ \}_p$ sunt luate în considerare pentru punctele gaussiene [Anderson, 1995].

3. CERCETĂRI PRIVIND CALCULUL NUMERIC AL PARAMETRILOR DE MECANICA RUPERII

Pentru a putea oferi predicții fiabile referitoare la durabilitatea unei structuri de rezistență supusă unui set aleator de sarcini, în condițiile prezenței fisurilor, este necesară determinarea parametrilor de mecanica ruperii. În domeniul elastic este vorba despre factorii de intensitate a tensiunii (*Stress Intensity Factors*) – K_I , K_{II} , K_{III} , respectiv forța de extensie a fisurii (*Energy Release Rate*) – G . În domeniul elasto-plastic și plastic, parametrii de mecanica ruperii luați în considerare sunt deschiderea la vârful fisurii (*Crack Tip Opening Displacement*) – $CTOD$, respectiv integrala J .

Literatura de specialitate oferă soluții analitice pentru calculul acestor parametri, dar sunt limitate la geometriile simple. De asemenea, aceste soluții analitice nu pot fi aplicate pentru sarcini multiple, amplasate aleator pe suprafața structurii de rezistență. Pentru aceste cazuri există două alternative: determinarea experimentală sau determinarea numerică.

Determinările experimentale sunt preferabile din punctul de vedere al acurateții rezultatelor, dar au câteva dezavantaje majore, printre care trebuie amintite costul ridicat, durata de timp îndelungată, limitări dimensionale. Analiza numerică, pe de altă parte, oferă o precizie satisfăcătoare, este incomparabil mai ieftină și permite modificări importante ale geometriei structurii pentru optimizări sau comparații, realizate foarte rapid. De asemenea, dezvoltarea softurilor de analiză numerică și evoluția tehnicii de calcul permit determinări precise ale parametrilor de mecanica ruperii prin utilizarea unei discretizări fine, în condițiile unei durate a simulărilor de doar câteva ore. Pe de altă parte, și programele CAD actuale facilitează realizarea unor modele geometrice extrem de complicate cu deosebită ușurință, reducând și mai mult timpul și costurile aferente unei analize numerice a stării de tensiune și deformație.

Programele de analiză numerică a stării de tensiune și deformație care au implementate și aplicații de mecanica ruperii, se axează, în principal, pe determinarea factorilor de intensitate a tensiunii, respectiv a integralei J . Unele programe au implementate subrutine și pentru calculul altor parametri relevanți pentru problemele de mecanica ruperii, cum ar fi deschiderea la vârful fisurii sau tensiunea tangențială T -stress, care este o componentă a câmpului de tensiuni de la vârful fisurii, orientată după o direcție paralelă cu fețele fisurii.

Aplicațiile de calcul numeric al parametrilor de mecanica ruperii au cuprins atât corpuri în stare triaxială de tensiune (un arbore solicitat la încovoiere și trăsătură, respectiv un stent coronarian), cât și plăci aflate în stare plană de tensiune, cu accentul pus pe studiul interacțiunii fisurilor. De asemenea, aplicațiile au fost dezvoltate cu ajutorul mai multor programe de calcul (Cosmos 2007, FRANC2D, ABAQUS 6.9). Programul Cosmos permite doar calculul factorilor de intensitate a tensiunii, în timp ce programele FRANC2D, respectiv ABAQUS permit și evaluarea altor parametri.

3.1. Determinarea parametrilor de mecanica ruperii utilizând programul ABAQUS

3.1.1. Aspecte teoretice privind implementarea determinării parametrilor de mecanica ruperii în programul ABAQUS

Întrucât integrala J are aplicabilitate atât în domeniul elastic, cât și elasto-plastic sau elastic-vâscoplastic, ea reprezintă principalul parametru de mecanica ruperii utilizat în aplicațiile cu elemente finite. Pentru materialele cu comportare lineară, integrala J este echivalentă forței de extensie a fisurii (G), așadar permite determinarea lejeră a factorilor de intensitate a tensiunii (K_I, K_{II}, K_{III}).

Pentru determinarea integralei J , programul ABAQUS utilizează extensia virtuală a fisurii [Parks, 1977], [Shih et al., 1986]. Această metodă este deosebit de precisă, necesită alocarea unor resurse de calcul ne semnificative în ansamblul simulărilor și, cel mai important, nu impune utilizarea unei discretizări foarte fine la vârful fisurii.

Conform documentației programului ABAQUS, integrala J poate fi exprimată matematic printr-o formă restrânsă a relației (2.10):

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int n \cdot \left(W \cdot I - \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot q d\Gamma, \quad (3.1)$$

unde u este deplasarea după direcția x ;

W este energia de deformare elastică pentru materialele cu comportare elastică, respectiv energia de deformare a unui material elastic echivalent, pentru domeniile plastice;

I este deschiderea fisurii.

Pentru simplificare, cantitatea din paranteză se înlocuiește cu funcția H :

$$\left(W \cdot I - \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = H \quad (3.2)$$

În cazul unei probleme bidimensionale, în jurul vârfului fisurii se consideră un contur (Fig.2.4) pentru care integrala J se poate stabili cu relația:

$$J = - \int_A \left[H : \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \left(f \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma : \frac{\partial \varepsilon^{ter}}{\partial x} \right) \cdot \bar{q} \right] d\Gamma - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} d\Gamma, \quad (3.3)$$

unde \bar{q} este o funcție de interpolare (în mod uzual, extensia virtuală a fisurii);

f este densitatea forței masice;

ε^{ter} este deformația termică;

iar $t = m_j \cdot \sigma$ (tensiunile tangente pe curbele Γ^+ și Γ^-).

Evaluarea integralei J începe cu un prim contur format din elementele care conțin nodurile de la vârful fisurii, iar celelalte contururi se obțin adăugând strat cu strat, elementele adiacente conturului anterior.

Pentru problemele tridimensionale, domeniul de integrare este de tipul celui prezentat în Fig.3.1, iar integrala J se poate scrie sub forma:

$$J = - \int_V \left[H : \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \left(f \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma : \frac{\partial \epsilon^{ter}}{\partial x} \right) \cdot \bar{q} \right] dV - \int_{A_{cap} + A_{fis}} t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{q} dA \quad (3.4)$$

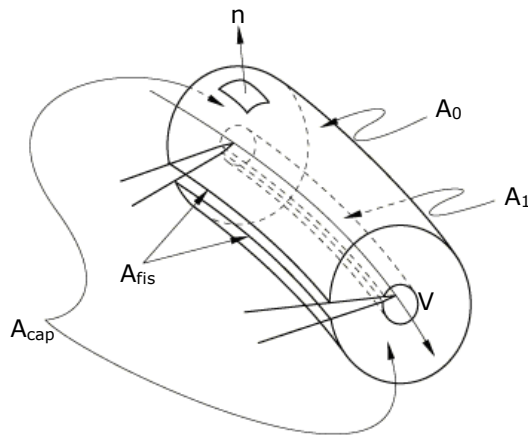


Fig.3.1. Domeniul de integrare pentru problema tridimensională

Având în vedere faptul că, în domeniul elastic, factorii de intensitate a tensiunii sunt principalii parametri în baza cărora se face atât caracterizarea stării de tensiune și deformare la vârful fisurii, cât și calculul referitor la propagarea fisurii, determinarea acestora în timpul analizei cu elemente finite reprezintă o etapă importantă în proiectarea și evaluarea structurilor mecanice. Programul ABAQUS calculează factorii de intensitate a tensiunii pe baza integralei J .

Relația generală de legătură între factorii de intensitate a tensiunii și integrala J este următoarea:

$$J = \frac{1}{8\pi} [K_I, K_{II}, K_{III}] \cdot P^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

unde P este matricea factorului energetic prelogaritmic [Shih, 1988], [Gao, 1992].

Pentru materiale omogene și izotrope, relația (3.5) devine:

$$J = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2, \quad (3.6)$$

unde \bar{E} este modulul de elasticitate echivalent ($\bar{E} = E$ pentru stare plană de tensiune și $\bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ pentru stare plană de deformare, axisimetrie sau probleme tridimensionale).

3.1.2. Determinarea factorilor de intensitate a tensiunii pentru un arbore sollicitat mixt

Considerații generale

Arborele analizat provine de la un subansamblu supus la solicitări mari datorită caracterului dinamic al încărcărilor aplicate. În conformitate cu Fig.3.2, arborele face corp comun cu pinionul dințat.

În zona de capăt a arborelui sunt aplicate sarcinile, respectiv un moment de torsiune (60000 Nmm) și o forță tăietoare (500 N), Fig.3.3.



Fig.3.2. Ansamblul monobloc arbore-pinion

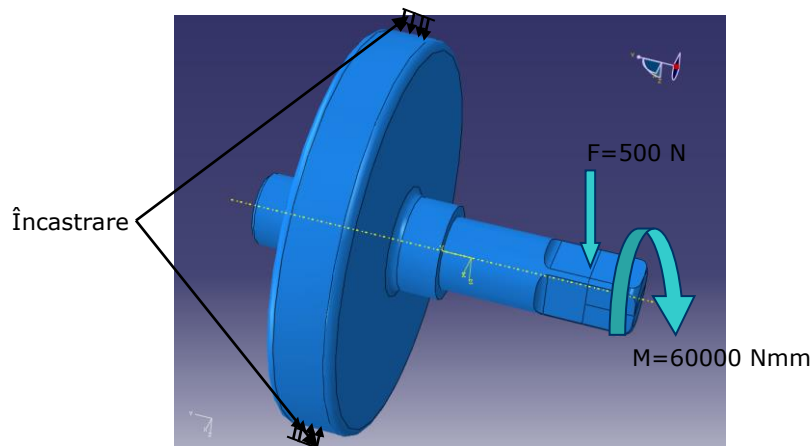


Fig.3.3. Încărcările aplicate arborelui

Arborele prezintă câteva zone de concentrare a tensiunilor, dintre care zona de trecere de la secțiunea pătrată la cea cilindrică, în conformitate cu observațiile experimentale, s-a dovedit a fi o zonă critică.

De altfel și studiile prezentate în [Dumitru, 2007] au pus în evidență faptul că în zona racordului dintre secțiunea pătrată și cea dreptunghiulară apare o puternică concentrare a tensiunilor având drept consecință, inițierea unei fisuri.

Din aceste considerente, modelul propus pentru analiza cu elemente finite este unul simplificat, conținând doar secțiunea circulară, secțiunea pătrată și racordul dintre ele, conform Fig.3.4.

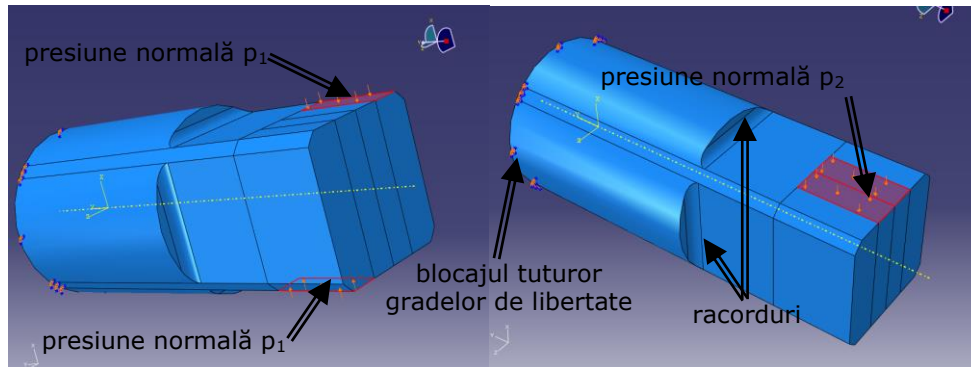


Fig.3.4. Condițiile pe contur ale modelului de calcul

Pentru simularea celor două sarcini s-au utilizat două seturi de forțe uniforme distribuite, aplicate pe zona pătrată: p_1 pentru generarea momentului de torsiune, respectiv p_2 pentru forța tăietoare.

$$p_1 = 213,33N / mm^2 \quad (M=60000 \text{ Nmm})$$

$$p_2 = 10N / mm^2 \quad (F=500 \text{ N})$$

Arborele este încastrat la capătul părții cilindrice.

Materialul din care este fabricat arborele este un oțel FE430C îmbunătățit, cu un modul de elasticitate longitudinal $E = 210000MPa$, iar coeficientul de contracție transversală $\nu = 0,3$.

În scopul ușurării procesului de partiționare necesar discretizării, modelul arborelui a fost partiționat în două zone, Fig.3.5, prin secționarea cu un plan paralel cu planul fisurii, admitând că fisura este înclinată cu unghiul de 45° față de axa longitudinală. Cele două segmente au fost ulterior asamblate și conectate printr-o legătură de tip *tie*.

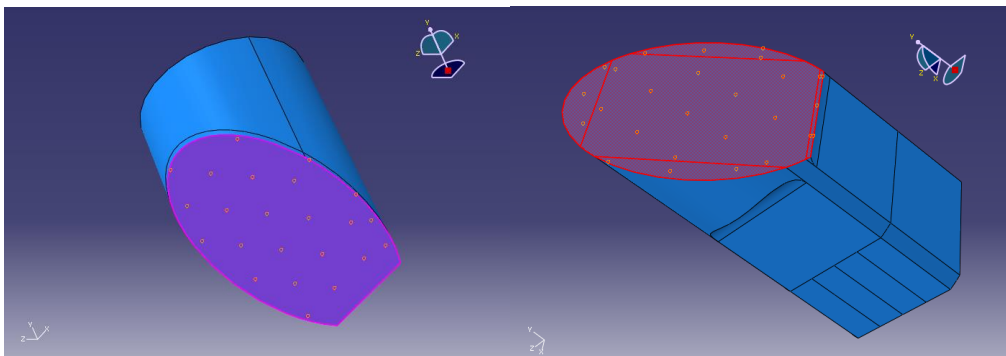


Fig.3.5. Cele două segmente ale modelului de calcul

Modelul de calcul a fost discretizat în 12500 de elemente hexaedrice, folosind o strategie de tip "sweep", Fig.3.6. Această strategie este impusă de program, întrucât este singura care permite combinația cu elementele finite degenerate folosite pentru modelarea vârfului fisurii.

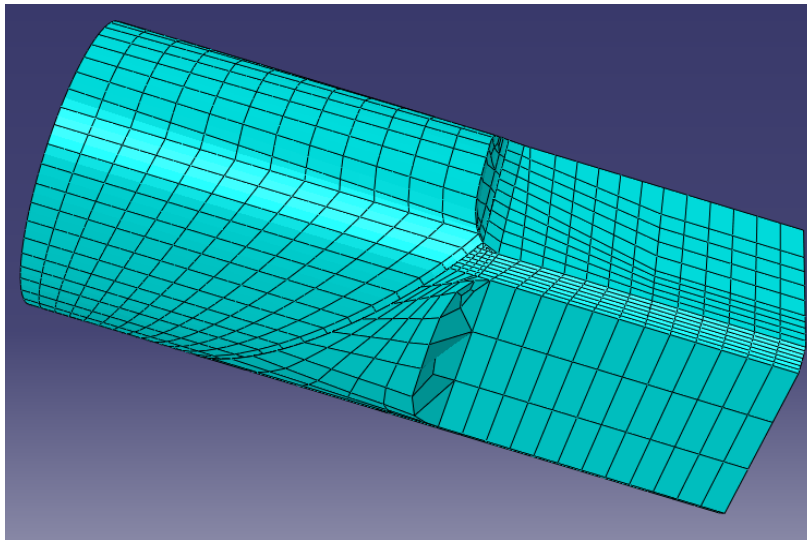


Fig.3.6. Imaginea de ansamblu a modelului discretizat

Pentru evidențierea efectului de concentrare a tensiunilor produs de racordul dintre cele două secțiuni (pătrată și circulară), s-a analizat distribuția tensiunii după direcția axei longitudinale. În acest scop, s-a creat o cale (*path*), Fig.3.7, conținând nodurile de la suprafața arborelui, situate pe o generatoare.

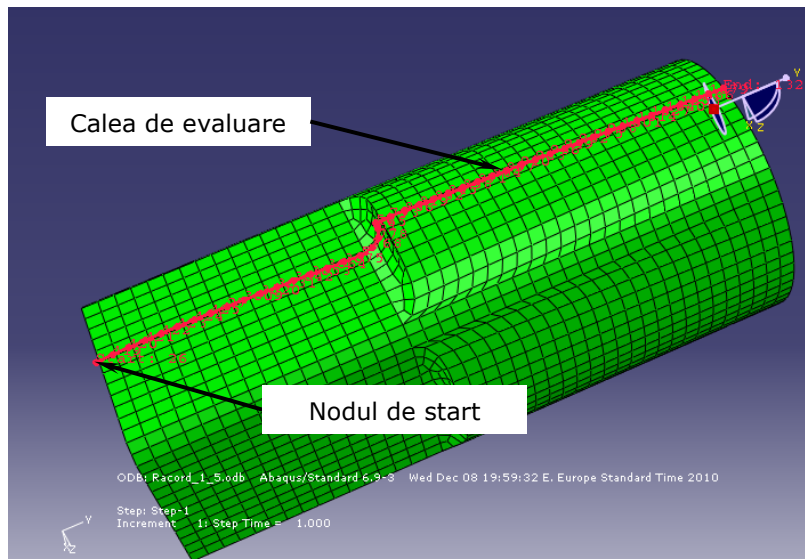


Fig.3.7. Localizarea căii de evaluare a tensiunii echivalente von Mises pe suprafața exterioră a modelului de calcul

Distribuția tensiunii echivalente von Mises de-a lungul căii (d este distanța reală dintre noduri), pentru o rază de racordare de 1,5 mm este prezentată în Fig.3.8.

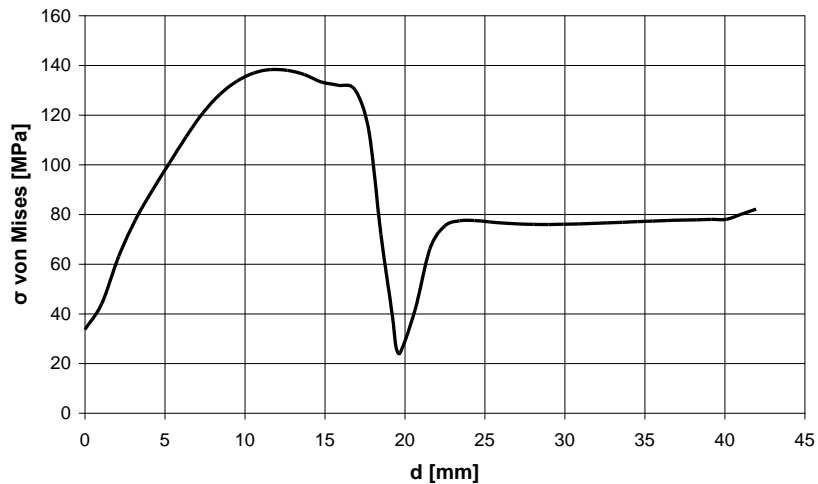


Fig.3.8. Variația tensiunii von Mises de-a lungul căii de evaluare

Se observă tendința crescătoare a tensiunii echivalente (efectul creșterii momentului de încovoiere), cu un ușor palier în zona concentratorului. Scăderea bruscă din zona $d=20$ mm reprezintă tensiunile corespunzătoare sectorului descris de partea superioară a concentratorului și suprafața părții cilindrice. Solicitățile din partea cilindrică a arborelui sunt semnificativ mai mici datorită secțiunii majorate.

Global, pentru un arbore cu raza zonei de trecere de 2 mm, distribuția tensiunii principale maxime este prezentată în Fig.3.9.

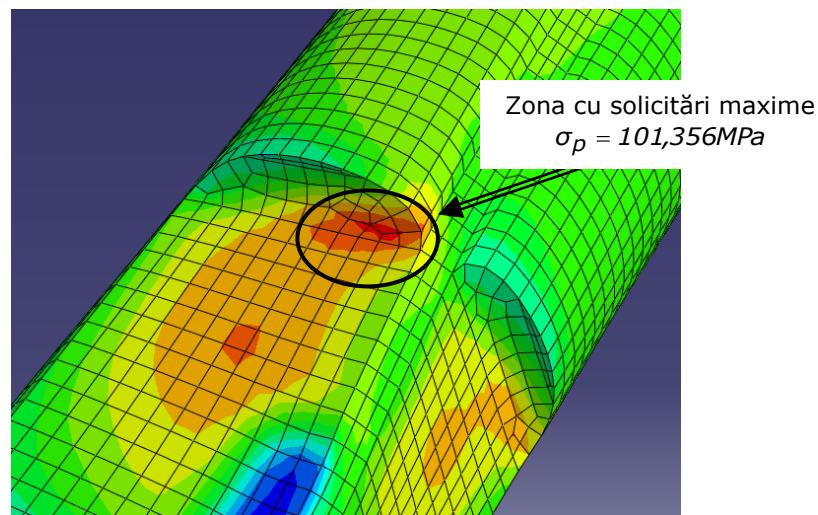


Fig.3.9. Distribuția tensiunilor principale maxime în zona de trecere dintre secțiunea pătrată și cilindrică

Alegerea tensiunii principale maxime s-a făcut în sensul corelării rezultatelor obținute cu simulările de propagare a fisurii, unde s-a folosit modelul de degradare bazat pe tensiunile principale maxime.

Pentru studiul influenței razei de racordare asupra coeficientului de concentrare al tensiunilor, raza de racordare a fost modificată, luând valorile de 0,5 mm, 1 mm, 1,5 mm, 2 mm, 2,5 mm și 3,2 mm. În Fig.3.10 este reprezentată grafic, variația coeficientului teoretic de concentrare a tensiunilor.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}, \quad (3.7)$$

unde σ_{max} este tensiunea principală maximă la baza concentratorului;
 σ_n este tensiunea nominală la nivelul concentratorului; $\sigma_n = 107,94$ MPa.

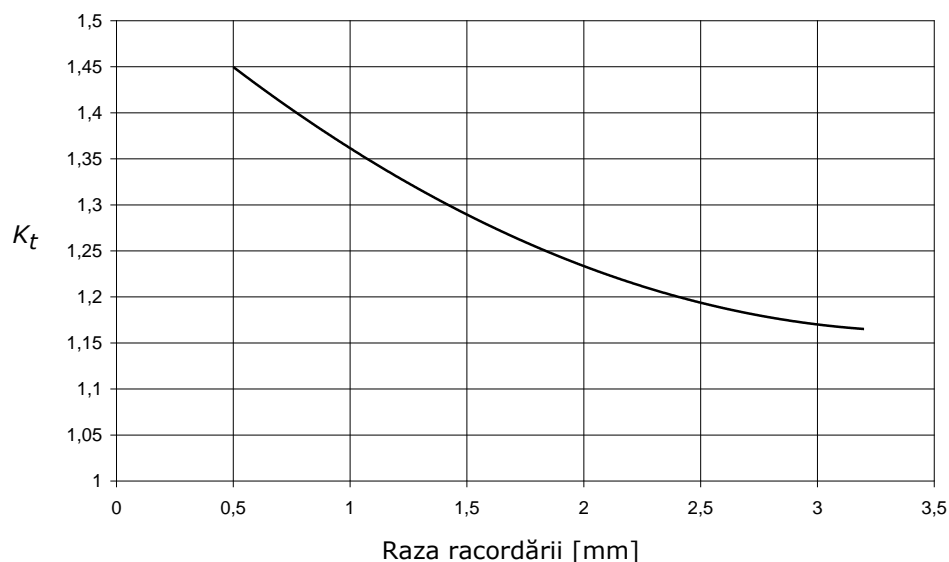


Fig.3.10. Variația coeficientului teoretic de concentrare a tensiunilor cu raza zonei de racordare

După cum se poate vedea din Fig.3.10, valoarea coeficientului teoretic de concentrare a tensiunilor K_t scade odată cu creșterea razei de racordare. De asemenea, începând cu valoarea de 2 mm a razei de racordare, variațiile lui K_t sunt reduse.

Din aceste considerente, dar ținând cont și de existența unor date experimentale, analiza ulterioară a fost făcută pentru valoarea de 2 mm a razei de racordare. Aceeași valoare a fost utilizată și pentru producția de serie a arborelui studiat.

Pe baza datelor obținute prin analiza cu elemente finite a fost posibil să se determine punctul de inițiere și direcția de propagare a fisurii. Cu acest scop a fost utilizat modulul de analiză cu elemente finite extinse (XFEM) al programului ABAQUS. Pentru îmbogățirea elementelor finite s-a folosit un criteriu de rupere bazat pe tensiunea principală maximă (MaxPS).

Utilizarea elementelor finite îmbogățite s-a făcut pentru domeniul întregului model, pentru a avea certitudinea determinării corecte a punctului de inițiere a fisurii.

După cum se vede în Fig.3.11, punctul de inițiere se află la baza concentratorului (la baza zonei de racordare), în apropierea muchiei.

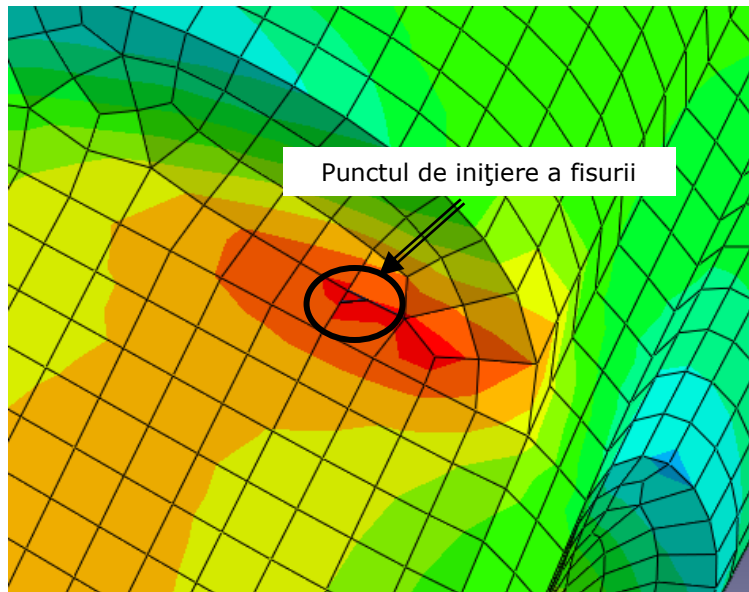


Fig.3.11. Localizarea punctului de inițiere a fisurii utilizând elemente finite îmbogățite

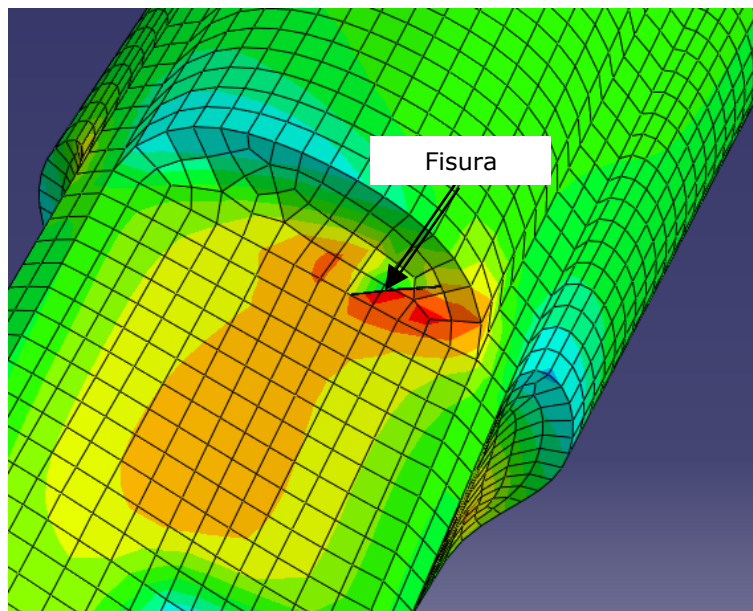


Fig.3.12. Imagine de ansamblu privind studiul propagării fisurii prin metoda elementelor finite

De asemenea, s-a putut determina unghiul de propagare a fisurii $\theta = 49,22^\circ$, Fig.3.12, o valoare foarte apropiată de media obținută experimental [Dumitru, 2007]: $\theta_{exp} = 48,6^\circ$, Fig.3.13.

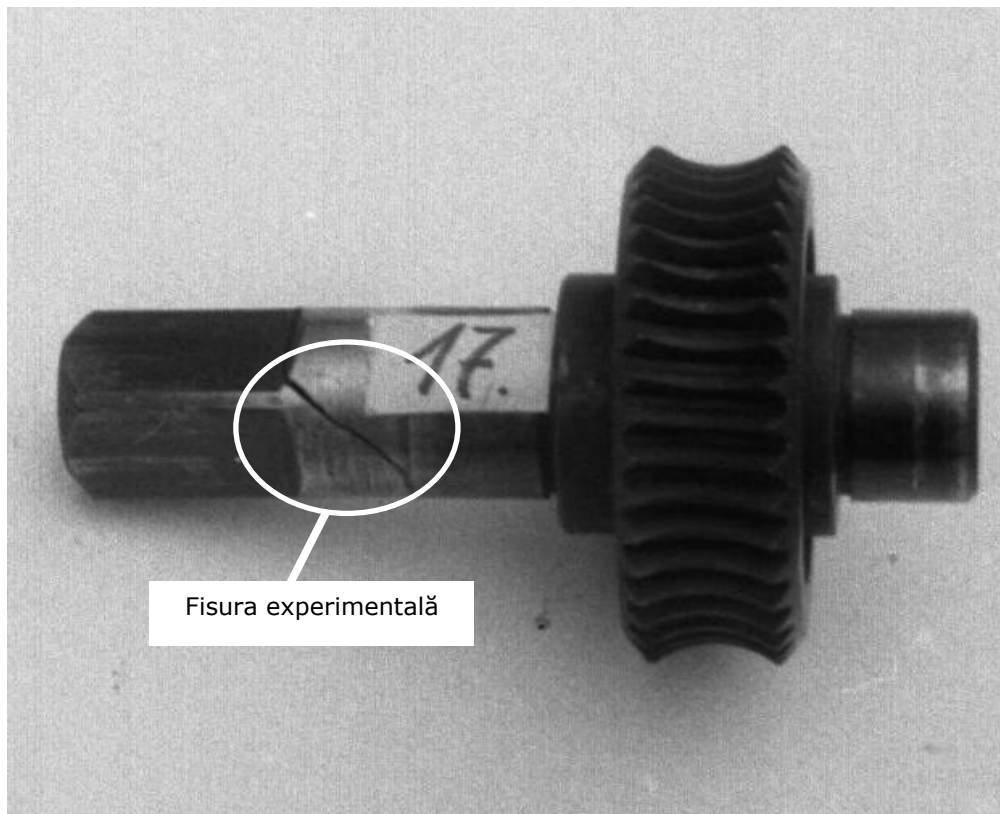


Fig.3.13. Fisura obținută experimental

Aceste rezultate apropiate de valorile experimentale au confirmat validitatea modelului numeric. În aceste condiții, modelul de calcul s-a utilizat pentru determinarea unor valori convenabile ale factorilor de intensitate a tensiunii.

Calculul factorilor de intensitate a tensiunii pentru fisuri cu lungime egală și adâncime variabilă

Pentru acoperirea câtor mai multe scenarii de fisurare, s-au determinat valorile factorilor de intensitate a tensiunii pentru diferite adâncimi ale fisurii, păstrând, însă, lungimea constantă. Aceste modele simulează apariția fisurii într-o zonă cu defecte de material. Astfel, după o propagare superficială pe o distanță oarecare, fisura se va propaga spre interiorul arborelui.

Fisura implementată în modelul de calcul are o lungime de 11 mm, iar adâncimea δ este de 0,4 mm, 0,7 mm, 1 mm, 1,3 mm, respectiv 1,5 mm. Unul dintre capetele fisurii este dispus în zona în care s-a obținut punctul de inițiere a fisurii cu elemente finite extinse, iar celălalt capăt a fost amplasat conform rezultatelor experimentale de propagare, după cum se arată în Fig.3.14.

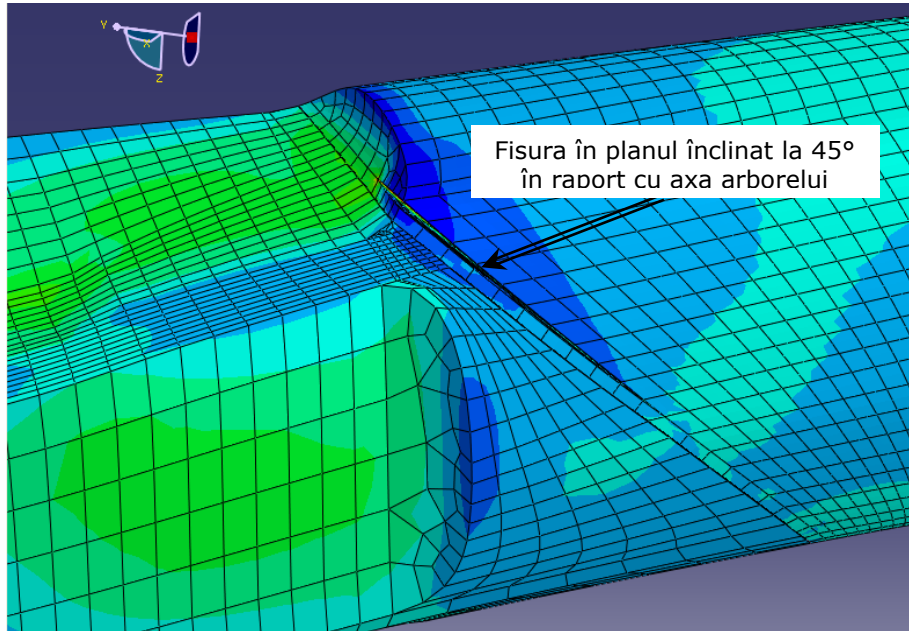


Fig.3.14. Imagine a arborelui discretizat în zona cu fisură

Geometria unei fisuri cu adâncimea de 0,7 mm este prezentată în Fig.3.15. Pentru fiecare adâncime δ s-au determinat factorii de intensitate a tensiunii pentru cele trei moduri de propagare: K_I , K_{II} și K_{III} .

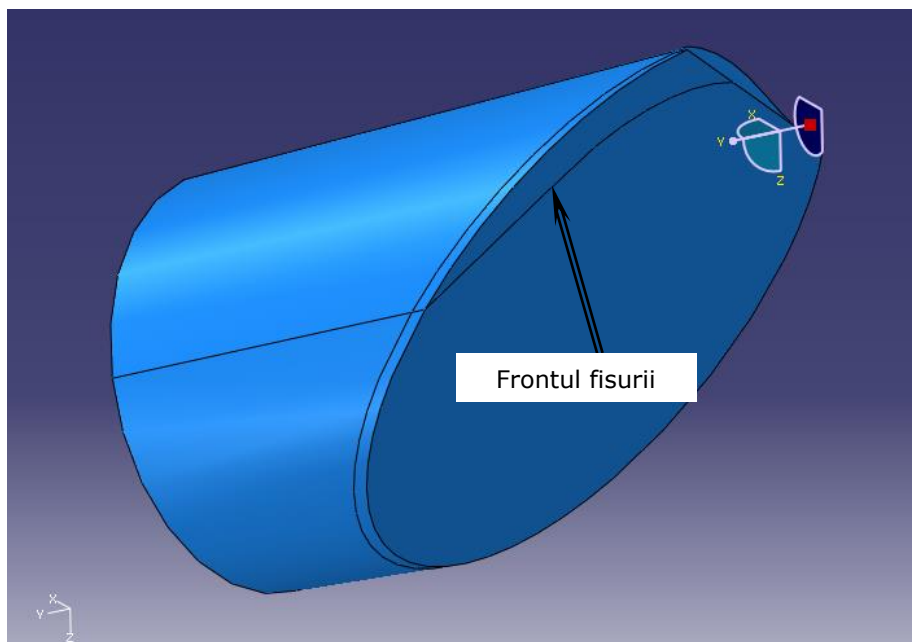


Fig.3.15. Secțiune în planul fisurii cu lungime fixă (11 mm) și adâncime de 0,7 mm

În figurile 3.16, 3.17 și 3.18 sunt reprezentate variațiile factorilor de intensitate a tensiunii (K_I, K_{II}, K_{III}) de-a lungul frontului fisurii. Originea este reprezentată de nodul cel mai apropiat de punctul de inițiere a fisurii.

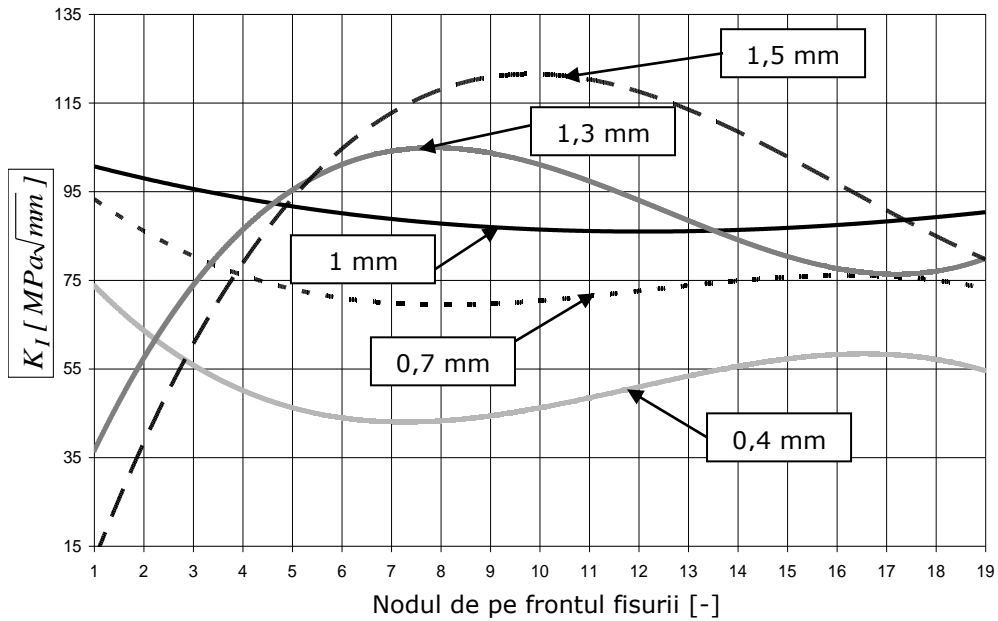


Fig.3.16. Distribuția de K_I de-a lungul frontului fisurii pentru diferite valori ale adâncimii δ

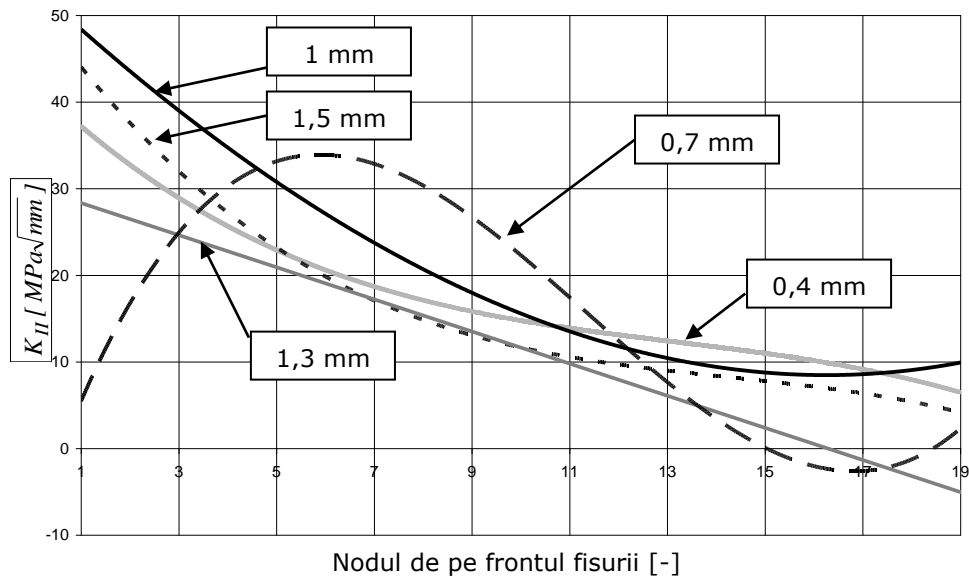


Fig.3.17. Distribuția de K_{II} de-a lungul frontului fisurii pentru diferite valori ale adâncimii δ

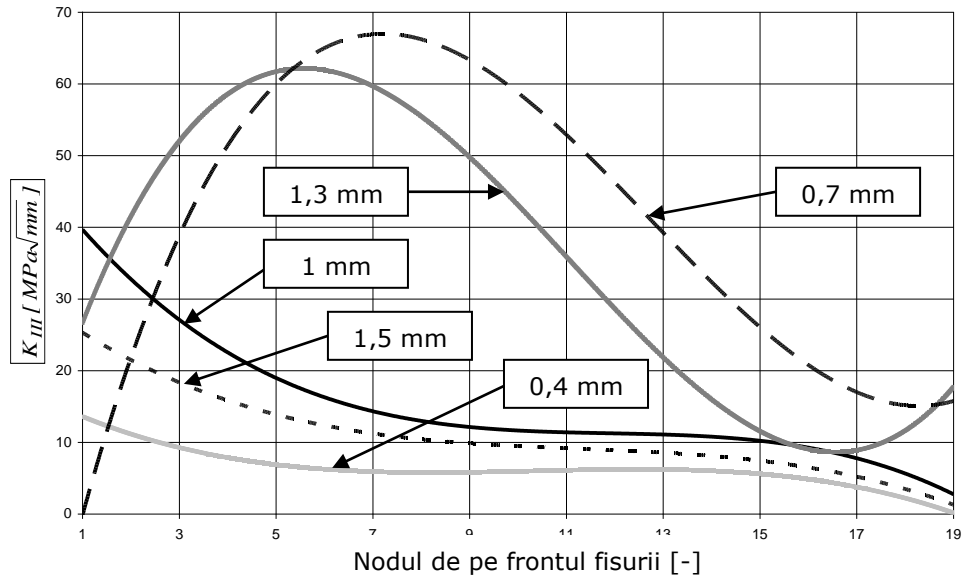


Fig.3.18. Distribuția de K_{III} de-a lungul frontului fisurii pentru diferite valori ale adâncimii δ

Se poate observa că modul I este predominant în toate cazurile. În plus, valorile maxime ale factorilor de intensitate a tensiunii pentru modurile I și III de rupere sunt atinse în zona de mijloc a frontului fisurii, denotând o propagare a fisurii spre interiorul arborelui.

De asemenea, se observă o cerștere a valorii factorilor de intensitate a tensiunii odată cu adâncimea fisurii. Se confirmă astfel că o fisură este cu atât mai periculoasă cu cât este mai adâncă.

În cazul fisurii cu adâncimea de 1,5 mm se poate observa un puternic efect de margine, dar și o variație semnificativă a factorilor de intensitate a tensiunii pe frontul fisurii.

Calculul factorilor de intensitate a tensiunii pentru fisuri cu lungime variabilă

Pentru aceste simulări, lungimea fisurilor a fost fixată la 4,5 mm, 8 mm și 11 mm. Adâncimea fiecărei fisuri în parte a fost aleasă astfel încât geometria să fie similară unei fisuri reale: frontul fisurii să fie de forma unui arc de cerc, iar adâncimea să aibă între 1/3 și 1/4 din lungime.

Lungimile fisurilor au fost alese astfel încât să fie simulată faza incipientă a dezvoltării fisurii, o fază intermediară și o fază apropiată de momentul ruperii arborelui.

Geometria unei fisuri cu lungimea de 4,5 mm este prezentată în Fig.3.19.

Calculul factorilor de intensitate a tensiunii a fost făcut în mod similar cazului precedent.

În figurile 3.20, 3.21 și 3.22 sunt reprezentate variațiile lui K_I , K_{II} și K_{III} de-a lungul frontului fisurii. Originea corespunde nodului din zona de inițiere a fisurii.

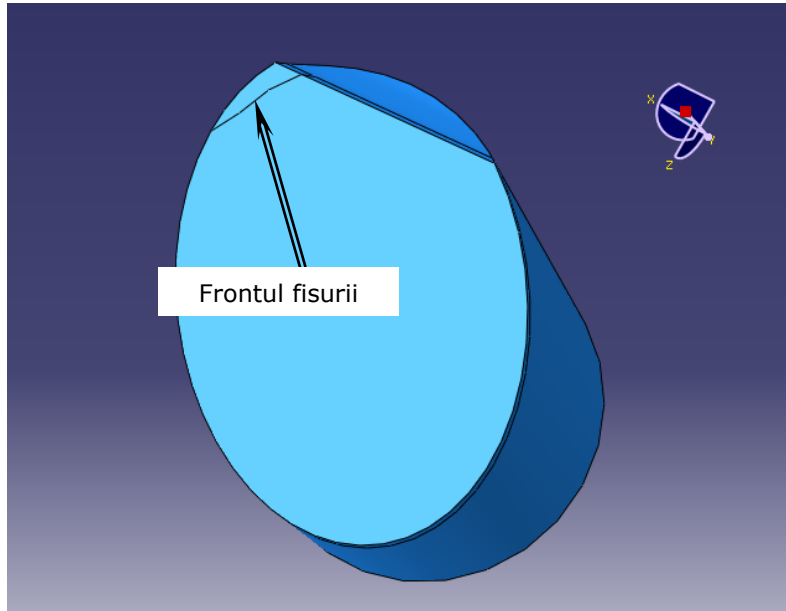


Fig.3.19. Fisura de 4,5 mm

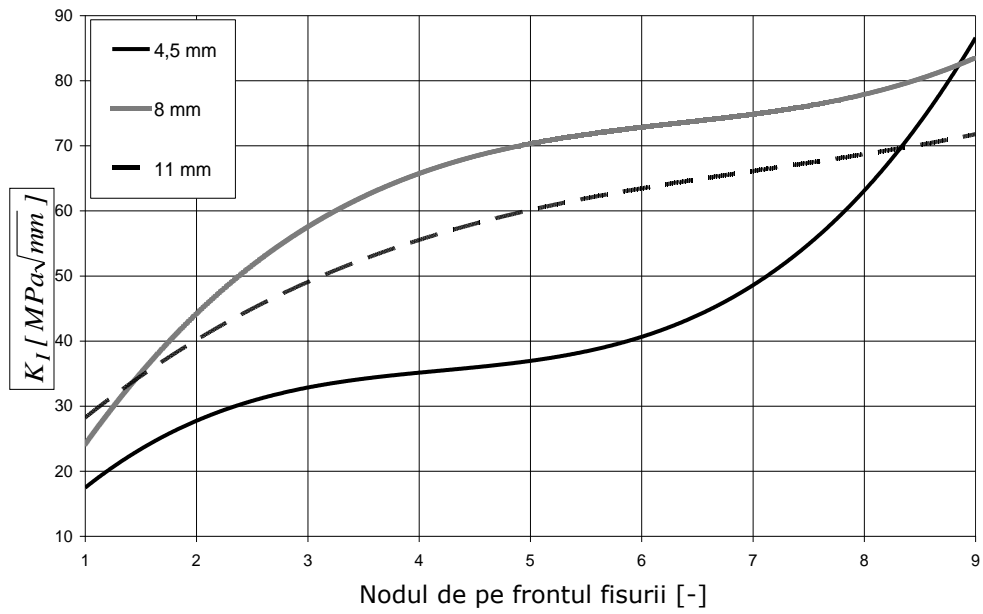


Fig.3.20. Distribuția de K_I de-a lungul frontului fisurii pentru lungimi diferite ale fisurii

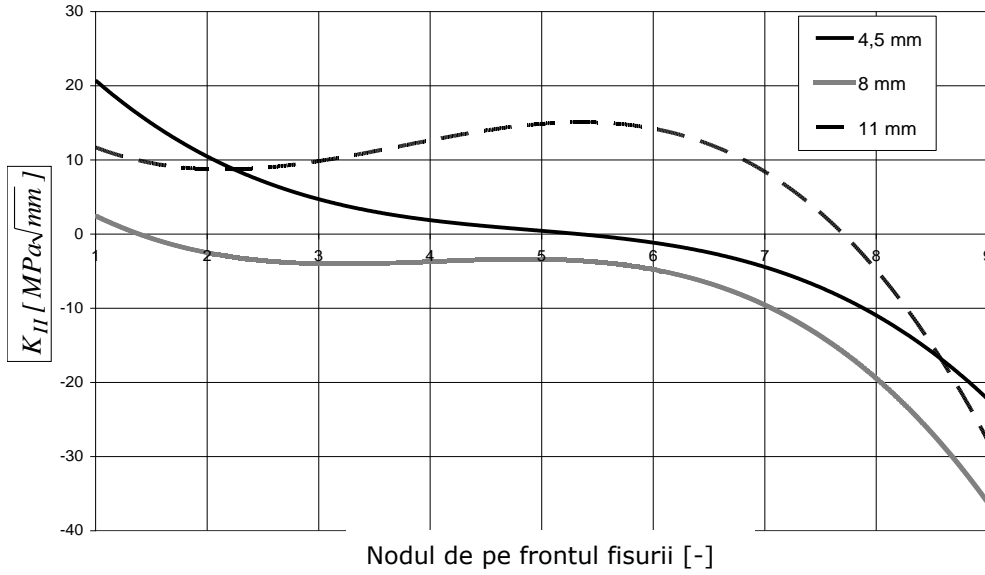


Fig.3.21. Distribuția de K_{II} de-a lungul frontului fisurii pentru lungimi diferite ale fisurii

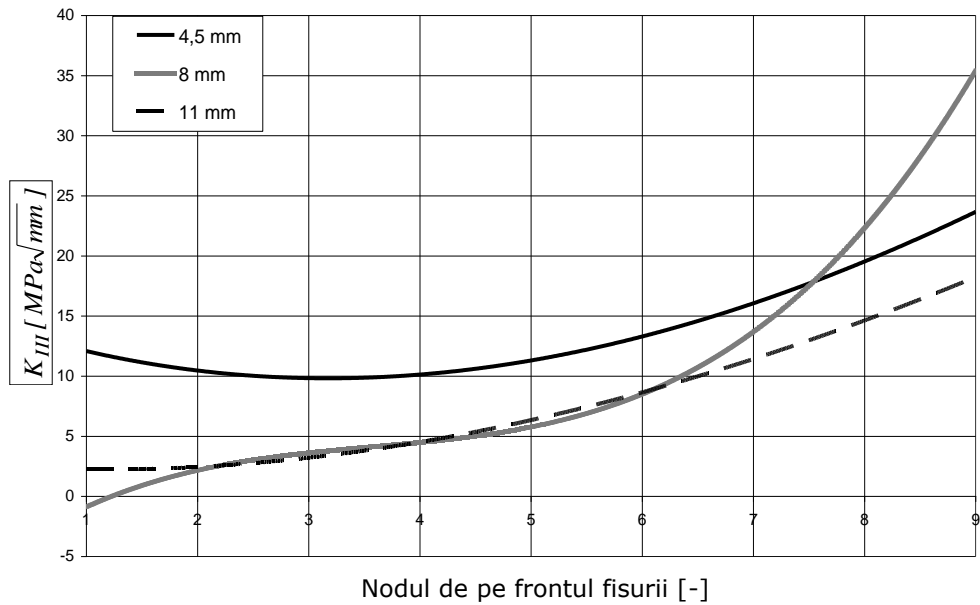


Fig.3.22. Distribuția de K_{III} de-a lungul frontului fisurii pentru lungimi diferite ale fisurii

Parametrii discretizării au fost menținuți neschimbați pe parcursul tuturor simulărilor.

Și în cazul acestor modele s-a observat predominarea modului I de rupere. În plus, s-a constatat o pondere destul de ridicată a modului III, conform Fig.3.22. Spre deosebire de cazul anterior, pentru aceste configurații s-a observat un puternic efect de margine, valorile maxime ale factorilor de intensitate a tensiunii corespunzând exclusiv nodurilor din apropierea marginilor fisurii.

Valorile factorilor de intensitate a tensiunii pentru fisura de 8 mm au fost mai mari comparativ cu celele două configurații.

Concluzii

Analiza numerică a arborelui compus din două secțiuni, una pătrată și una circulară a confirmat existența efectului de concentrare a tensiunilor din zona de racord. Această concentrare este dependentă de valoarea razei de racordare și se stabilizează pentru valori ale razei superioare celor 2 mm.

Utilizarea elementelor finite extinse a permis identificarea punctului de inițiere a fisurii, precum și a direcției de propagare. Întrucât aceste rezultate au fost confirmate experimental, modelul de calcul a putut fi validat.

Curbele de variație ale factorilor de intensitate a tensiunii au reliefat că valorile maxime sunt atinse în zona capetelor (efect de margine); acest efect este mai puțin pronunțat pentru adâncimi mici ale fisurii.

Adâncimea fisurii are un efect major asupra factorilor de intensitate a fisurii: valorile acestora cresc semnificativ odată cu δ .

3.1.3. Calculul factorilor de intensitate a tensiunii pentru fisuri plane într-un stent coronarian

Considerații generale privind implanturile de tip stent

În ultimii ani, implanturile de tip stent s-au dovedit a fi soluția optimă în tratarea stenozelor arteriale și anevrismelor. Angioplastia este o procedură relativ simplă care a suscitat un interes remarcabil în comunitatea medicală, având ca principale atuuri, o rată ridicată de reușită, perioadă de convalescență scurtă și lipsită de complicații pentru pacient, costuri reduse comparativ cu intervențiile chirurgicale clasice pentru remedierea aceluiași probleme. De asemenea, aceste implanturi se bucură de aprecierea și gradul ridicat de acceptare în rândul pacienților, în principal datorită impactului nesemnificativ asupra stilului de viață.

Stentul vascular este un tub metalic de mici dimensiuni, care se introduce în arteră în zona îngustată, unde preia rolul unui suport artificial al vasului de sânge.

Stenturile pot fi împărțite în două mari categorii: stenturi autoexpandabile și stenturi care se deschid cu ajutorul baloanelor. Stenturile autoexpandabile sunt făcute din materiale cu memoria formei, de tipul aliajelor Ni-Ti (nitinol), aliaje de cobalt, oțeluri inoxidabile, tantal. Comparativ cu stenturile expandate cu ajutorul baloanelor, cele autoexpandabile prezintă o durabilitate sporită, necesită o procedură de instalare mai simplă și pot conține un strat de medicament imunosupresiv, pentru minimizarea riscului de respingere din partea organismului.

Prezența unor fisuri este deosebit de periculoasă, întrucât pe lângă riscul distrugerii stentului, acestea pot favoriza condițiile depunerii unui strat stenotic, compromițând astfel circulația sangvină și anulând, practic, beneficiile angioplastiei.

Calculul factorilor de intensitate a tensiunii a fost efectuat pentru un stent special, utilizat în intervențiile chirurgicale la bovine, prezentat în Fig.3.23.

Stentul analizat constă într-un tub lung de 22,4 mm, format din 12 inele interconectate, construite din sârmă de secțiune dreptunghiulară, Fig.3.24.

Diametrul exterior al tubului este de 8,3 mm. Materialul din care este confecționat stentul este un aliaj pe bază de Cobalt, L-605. Stentul este de tip autoexpandabil.

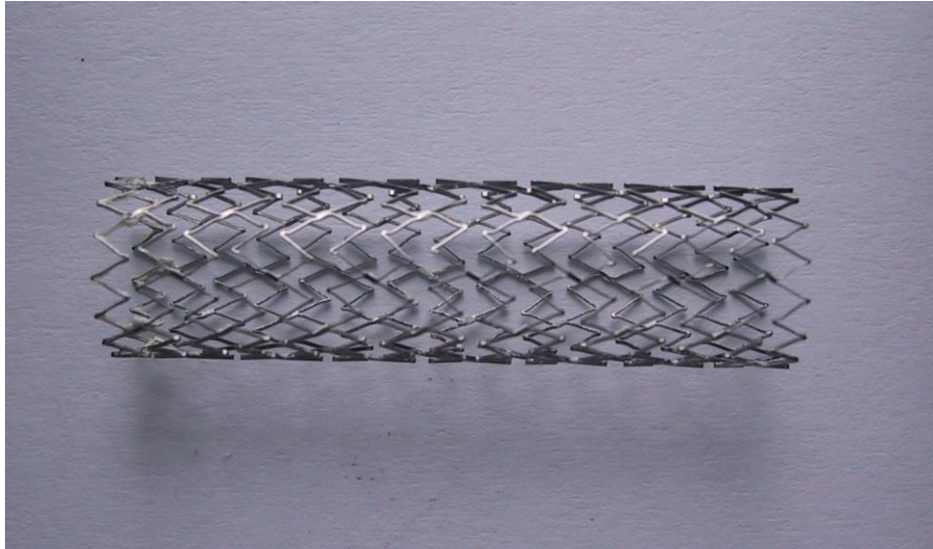


Fig.3.23. Stent coronarian pentru intervenții chirurgicale la bovine

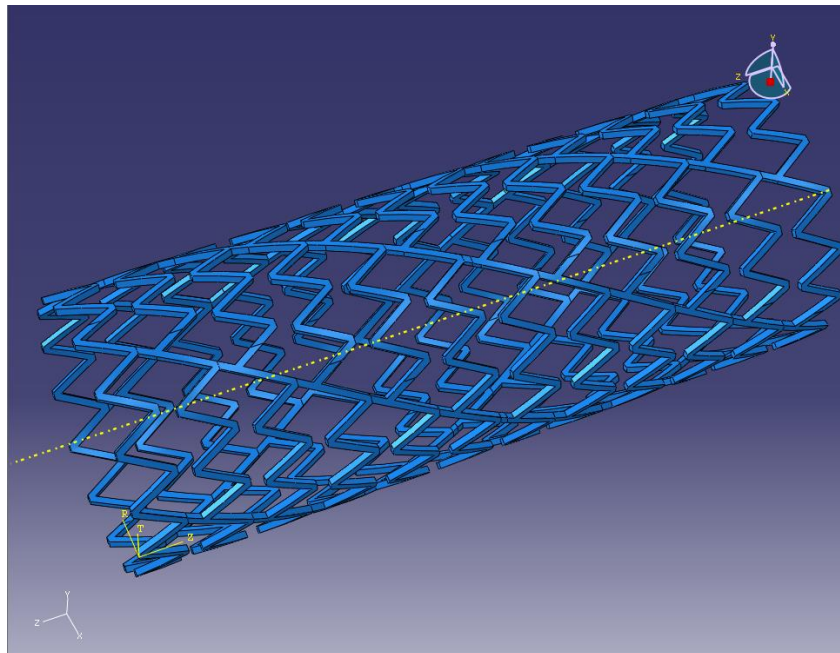


Fig.3.24. Modelul geometric al stentului autoexpandabil din aliaj de cobalt L-605

Cedarea unor astfel de stenturi a constituit subiectul mai multor studii clinice și științifice conduse, printre alții, de Beebe [Beebe, 2001], Jacobs [Jacobs, 2003], Chafke [Chafke, 2004]. Nu au fost identificate în literatura de specialitate studii

privind determinarea factorilor de intensitate a tensiunii pentru diverse geometrii ale fisurii la stenturi.

Metoda de calcul

Pentru început, a fost necesară evaluarea stării globale de tensiune pentru întregul stent. În acest fel au putut fi identificate zonele cele mai sollicitate, în care eventuala prezență a fisurilor este cea mai periculoasă. De asemenea, a fost necesară această evaluare pentru optimizarea ulterioară a modelului simplificat pentru determinări de mecanica rupei.

Modelul de calcul reprezentând tubul complet a fost discretizat în 9183 de elemente tetraedrice. Nu s-a putut face o discretizare și mai fină din cauza limitărilor tehnicii de calcul și complexității deosebite a geometriei stentului. Sarcina a fost implementată sub forma unei presiuni uniforme distribuite pe toată suprafața exterioară a tubului, Fig.3.25. Pentru mai multă precizie, tubul a fost „suspendat” cu ajutorul unor legături moi („soft springs”), dispuse la nivelul inelelor de la cele două capete.

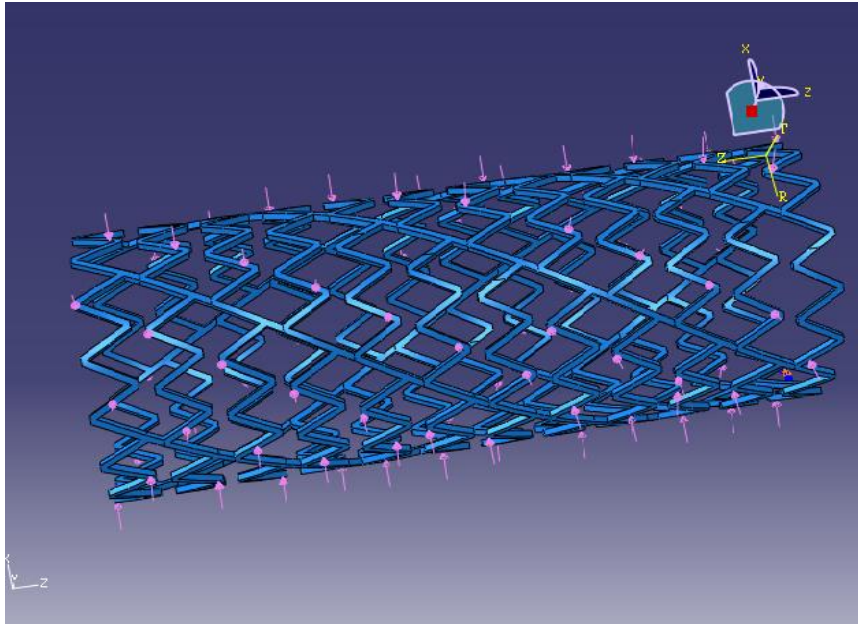


Fig.3.25. Condițiile pe contur pentru modelul tubului complet

Sarcina cu care peretele arterial acționează asupra stentului a fost simulată printr-o forță uniform distribuită pe toată suprafața.

Pornind de la ipoteza că stentul este implantat într-o secțiune a vasului de sânge puternic stenozată (56%), valoarea presiunii uniform distribuite a fost aleasă $p = 2,5 \text{ MPa}$ [Migliavacca, 2004]. În felul acesta, s-au putut simula condițiile cele mai severe de încărcare. Această valoare a fost determinată numeric, dar și confirmată experimental și implică utilizarea unor materiale cu caracteristici mecanice foarte ridicate, cu o tensiune de rupere de circa 1000 MPa. Aliajul L-605 are o valoare a tensiunii de rupere de 1100 MPa și un modul de elasticitate longitudinal $E = 243000 \text{ MPa}$ [www.euroflex-gmbh.de]. Pe lângă caracteristicile

meccanice deosebite, aliajul L-605 se remarcă printr-un grad ridicat de biocompatibilitate.

Distribuția tensiunilor echivalente von Mises a arătat că zona cea mai periculoasă este la vârful înfășurării de sârmă, Fig.3.26. De asemenea, și distribuția tensiunilor principale maxime a indicat aceeași zonă ca fiind cea mai solicitată.

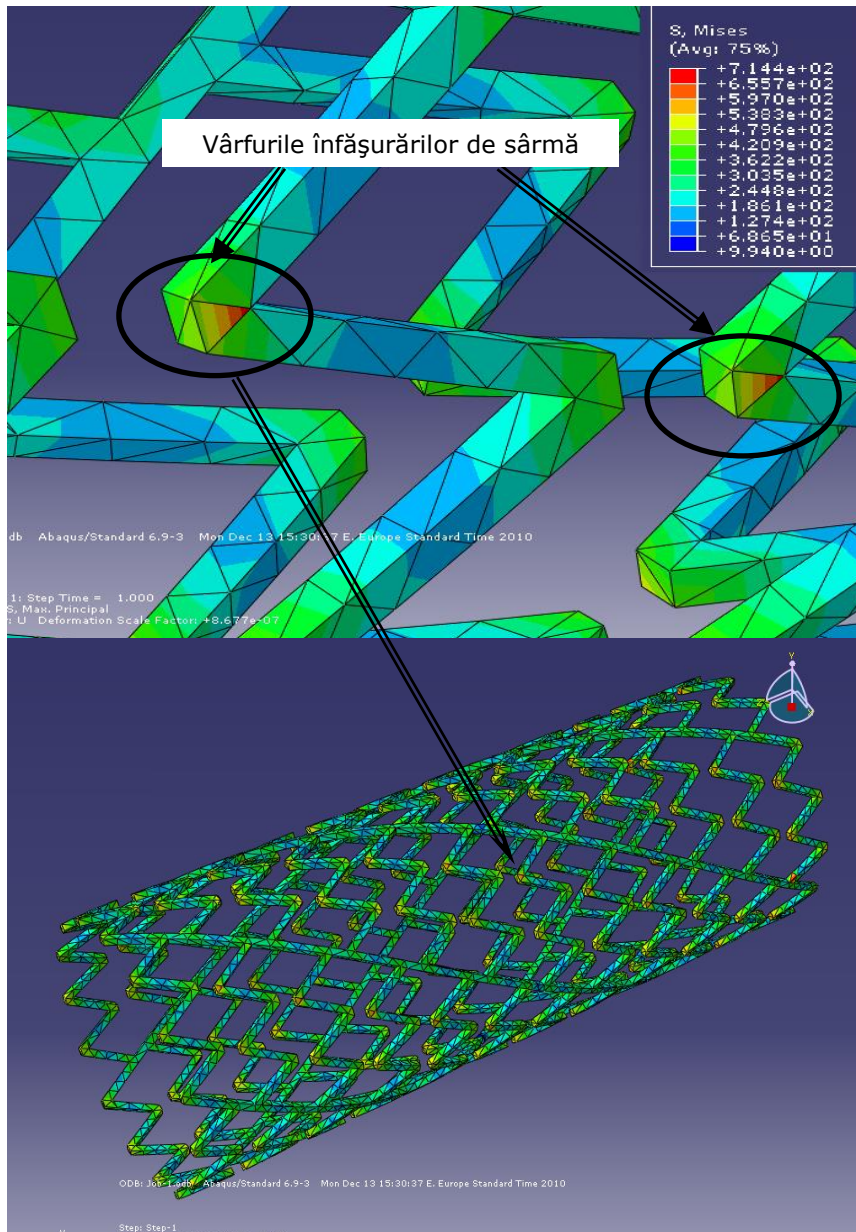


Fig.3.26. Distribuția tensiunilor principale maxime la vârful înfășurărilor de sârmă

Pentru analiza de mecanica ruperii, din modelul complet al stentului a fost extras un segment în formă de „V”, Fig.3.27, astfel încât să fie conținută și zona cea mai periculoasă.

Secțiunea sârmei din care este confecționat stentul este de formă pătrată, cu dimensiunile 0,2x0,2 mm.

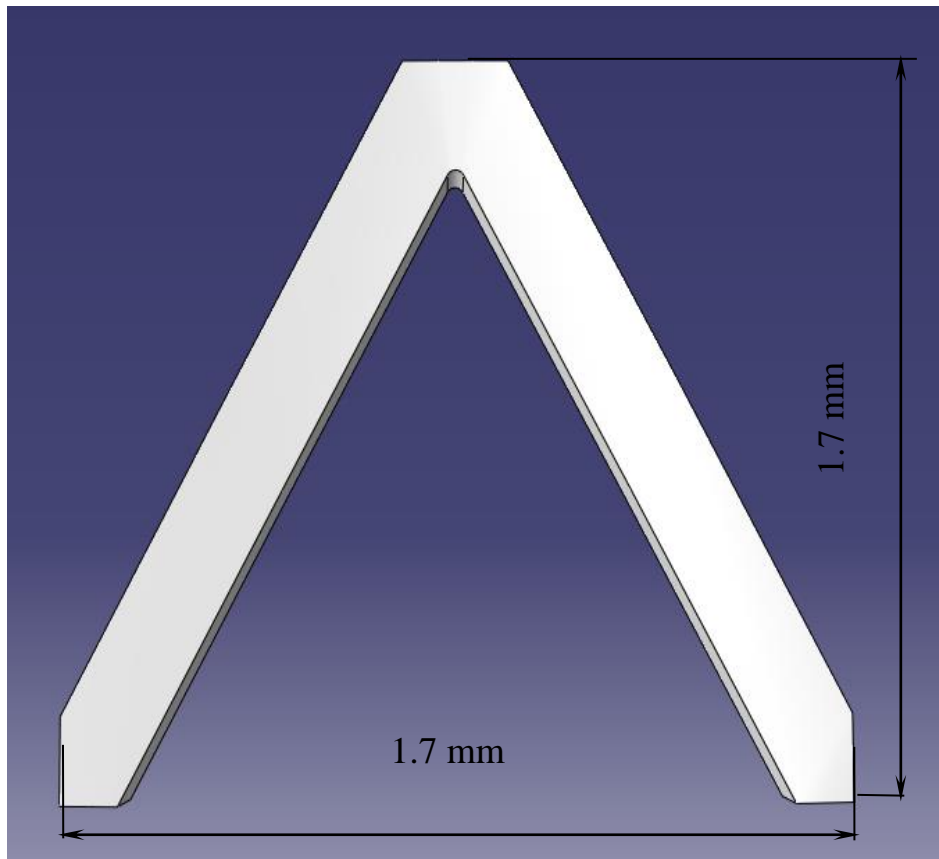


Fig.3.27. Segment în formă de „V”
(modelul geometric pentru evaluările de mecanica ruperii)

Având în vedere dimensiunile, dar și procedurile de control al calității în timpul fabricației, orice defect de material nedetectat poate fi considerat bidimensional, putând fi modelat sub forma unei fisuri plane. De asemenea, acest model simplificat poate fi utilizat și pentru evaluarea factorilor de intensitate a tensiunii pentru fisuri de oboseală.

Simularea numerică inițiere a unei fisuri folosind elemente finite extinse (XFEM)

Inițierea și propagarea fisurii s-au făcut utilizând modulul XFEM al programului ABAQUS.

S-a folosit criteriul de rupere al tensiunii principale maxime.

Modelul utilizat conține 1104 elemente hexaedrice îmbogățite. Fisura s-a propagat de la mijlocul zonei de îmbinare, după o direcție aproape perpendiculară pe unul dintre brațe, Fig.3.28.

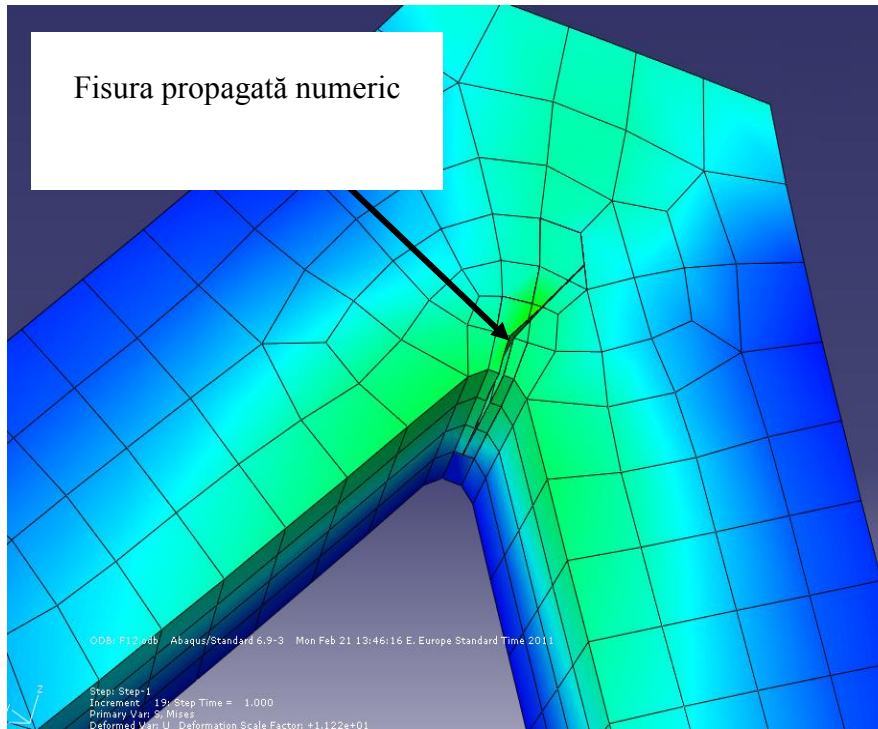


Fig.3.28. Fisura propagată cu ajutorul elementelor finite extinse

Evaluarea factorilor de intensitate a tensiunii s-a făcut pentru diferite geometrii ale fisurii.

Prezența fisurilor plane schimbă semnificativ distribuția tensiunilor în segmentul de stent, cu efecte asupra distribuției globale a tensiunilor și deformațiilor pentru întregul stent. Având în vedere solicitările la care este supus implantul, o singură fisură poate provoca deteriorarea iremediabilă a stentului, cu importante complicații clinice pentru pacient.

Analiza stării globale de tensiune pentru întregul stent a evidențiat că vârfurile segmentelor sunt cele mai solicitate. Această zonă a prezentat, așadar, cel mai mare interes, iar pentru comparație, au fost modelate fisuri plane și în secțiunile „brațelor”.

Pentru a oferi un termen de comparație între efectele diverselor amplasamente ale fisurii, acestea au fost grupate în trei categorii: fisuri verticale la vârful segmentului, fisuri orizontale la vârful segmentului și fisuri în zona brațelor segmentului.

Simularea numerică a fisurilor verticale la vârful segmentului

Acest set de modele simulează prezența unor fisuri plane la vârful segmentului. Planul fisurii conține bisectoarea proiecției unghiului format de cele două brațe. S-au ales patru geometrii diferite pentru acest caz, Fig.3.29.

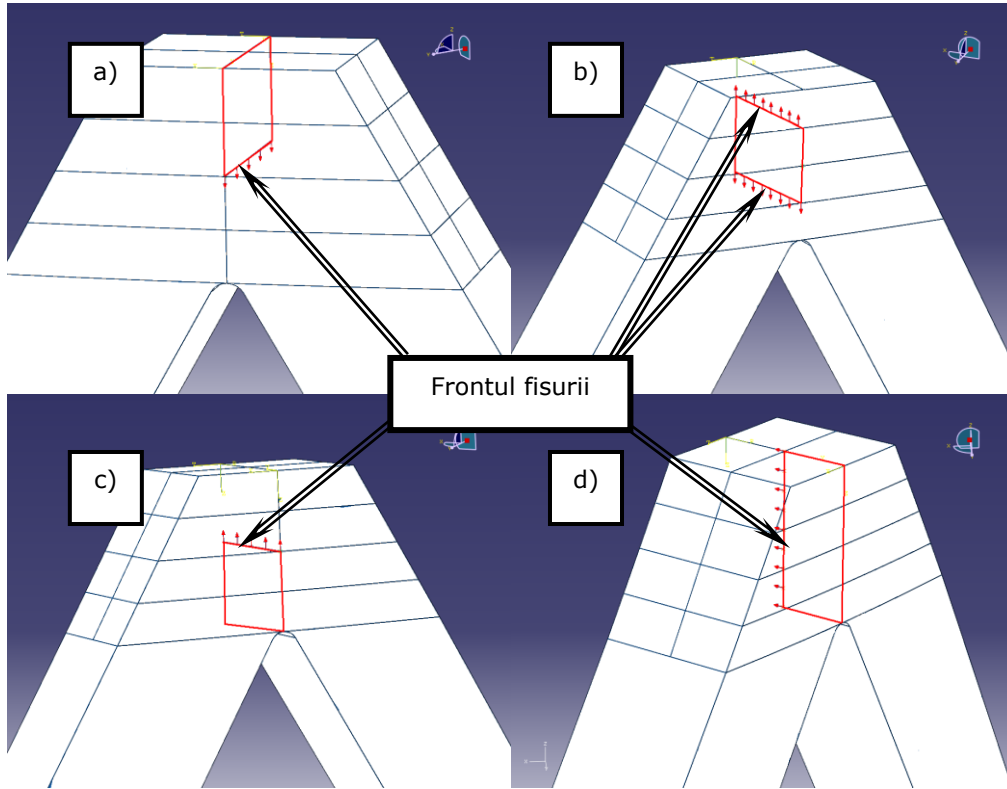


Fig.3.29. Localizarea fisurilor „verticale”

Modelele de calcul au fost discretizate folosind elemente hexaedrice de tip C3D8R, Fig.3.30.

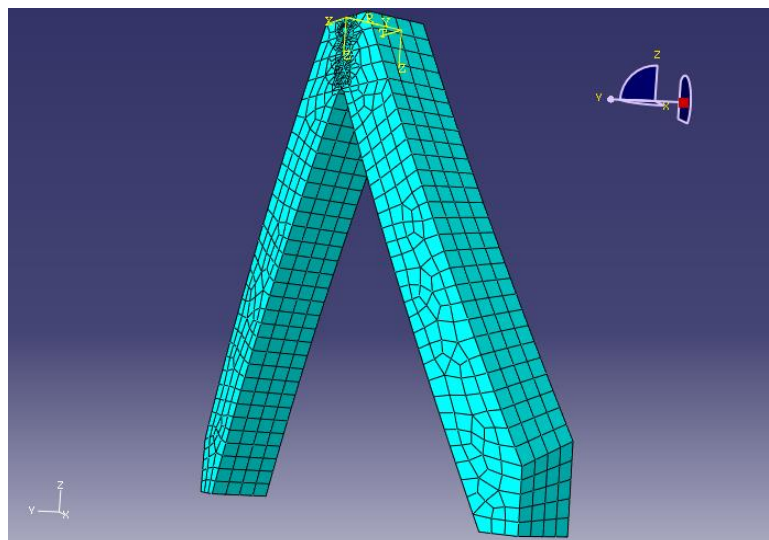


Fig.3.30. Imaginea modelului de calcul discretizat în configurația b)

În jurul vârfurilor fisurilor s-a operat o rafinare suplimentară a elementelor, după cum se poate vedea în Fig. 3.31, pentru configurația b).

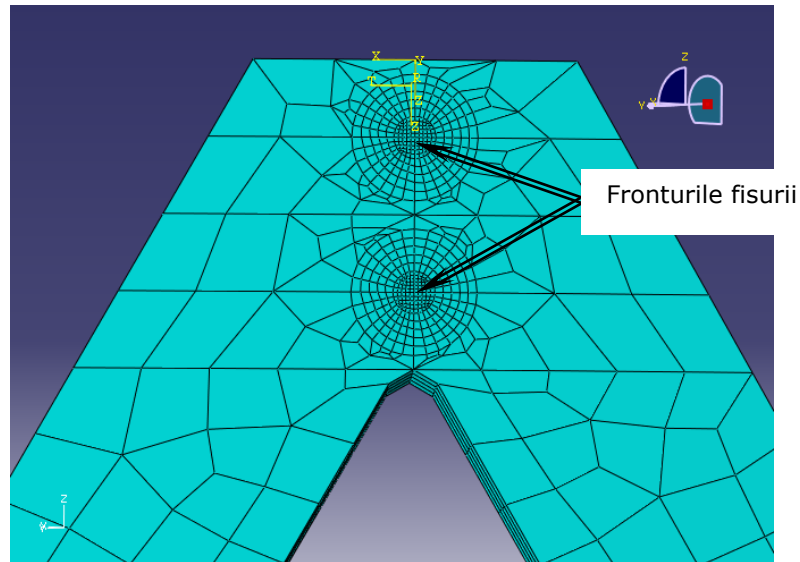


Fig.3.31. Detaliu privind rafinarea discretizării la vârful fisurii

Factorii de intensitate a tensiunii au fost calculați utilizând metoda integralei pe contur. Întrucât rezultatele depind în mare măsură de discretizare, s-a făcut și un studiu de convergență. Astfel, pentru modelul în configurația c) s-au calculat factorii de intensitate a tensiunii pentru 12 contururi succesive. În Fig.3.32 este prezentată variația lui K_I pentru nodul numărul 3 al frontului fisurii. Rezultatele au fost similare pentru toate nodurile.

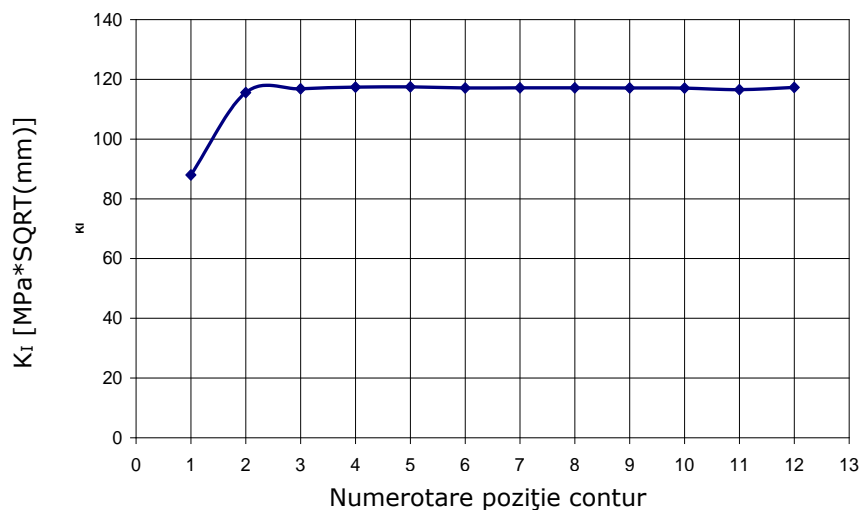


Fig.3.32. Variația factorului de intensitate a tensiunii K_I în funcție de numărul conturului

Se observă că, excluzând primul contur (format din elementele de la vârful fisurii), celelalte contururi oferă rezultate similare. Pentru mai multă exactitate, pentru toate simulările efectuate pe elementele de stent se vor lua în considerare rezultatele obținute pentru conturul numărul 10.

Valorile obținute de-a lungul frontului fisurii sunt prezentate în Tabelul 3.1. În cazul configurației b), doar valorile obținute pentru frontul fisurii superioare sunt prezentate, întrucât acestea au fost mult superioare celor obținute pentru celălalt front.

Tabel 3.1. Valorile factorului de intensitate a tensiunii K_I în nodurile frontului fisurii

Nod	$K_I [MPa\sqrt{mm}]$			
	Configurația a)	Configurația b)	Configurația c)	Configurația d)
1	146,300	50,970	147,100	126,700
2	128,100	27,480	127,500	131,100
3	103,700	2,609	117,026	59,000
4	72,680	25,300	22,980	22,640
5	37,520	43,970	9,718	17,300

Valorile maxime obținute pentru fiecare configurație sunt prezentate grafic în Fig.3.33, pentru o comparație mai facilă. Configurațiile a), c) și d) au produs valori comparabile ale factorilor de intensitate a tensiunii. Fisura din mijlocul segmentului (configurația b)) a determinat factori de intensitate a tensiunii de aproximativ patru ori mai mici. Rezultatele au confirmat teoria potrivit căreia fisurile de margine sunt cele mai periculoase.

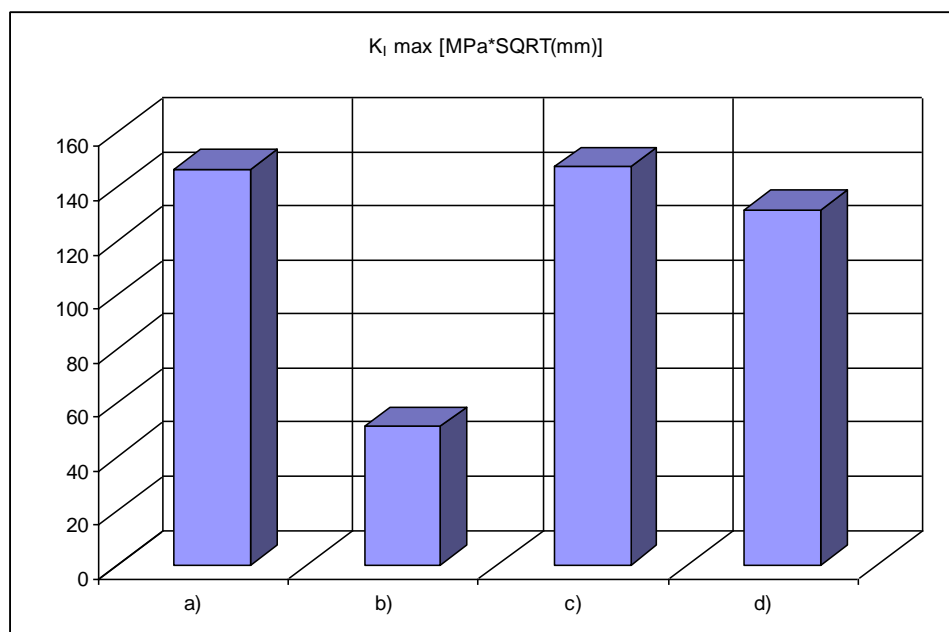


Fig.3.33. Reprezentarea valorilor maxime ale lui K_I pentru fisurile „verticale”

Simularea numerică a fisurilor orizontale la vârful segmentului

Pentru aceste modele, fisurile au fost modelate tot în zona „vârfului” segmentului, iar planul fisurii a fost menținut normal la proiecția bisectoarei unghiului descris de cele două brațe, Fig.3.34.

Au fost alese trei configurații diferite pentru acest caz, care simulează existența fisurilor în trei zone distincte ale vârfului segmentului.

Condițiile pe contur, parametrii discretizării, precum și rafinarea elementelor de la vârful fisurii au rămas aceleași ca și în cazul fisurilor „verticale”.

Determinarea parametrilor de mecanica ruperii s-a făcut la nivelul conturului cu numărul 10.

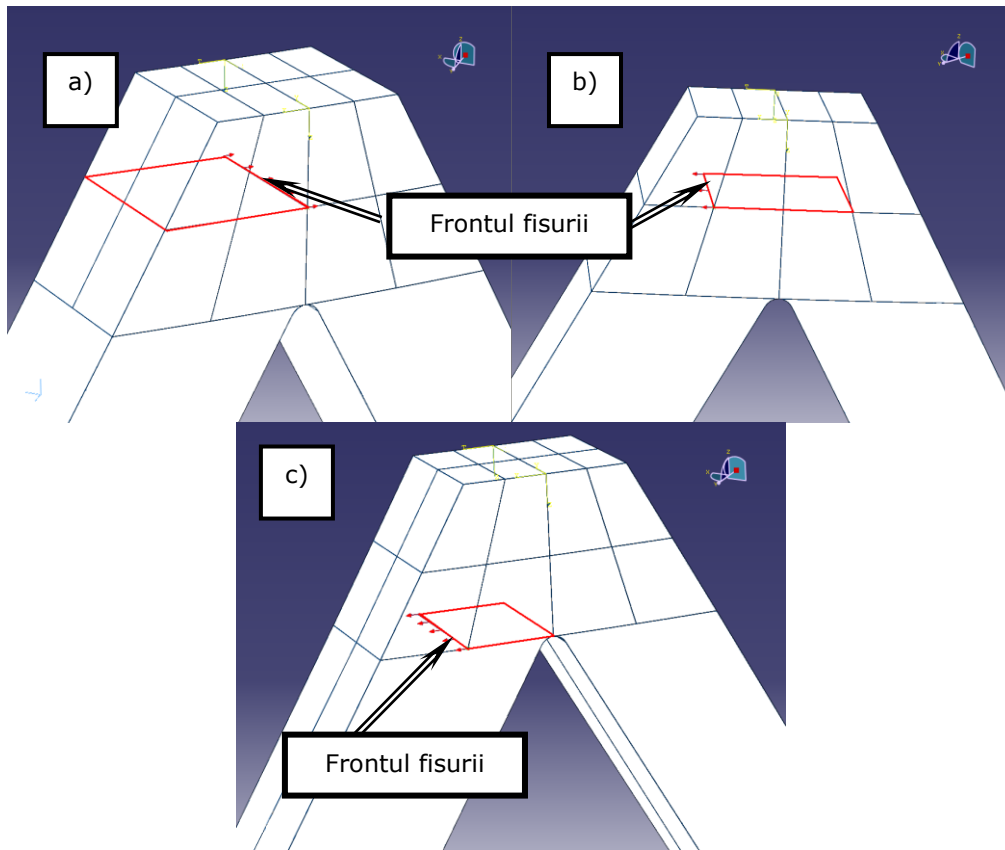


Fig.3.34. Localizarea fisurilor „orizontale”

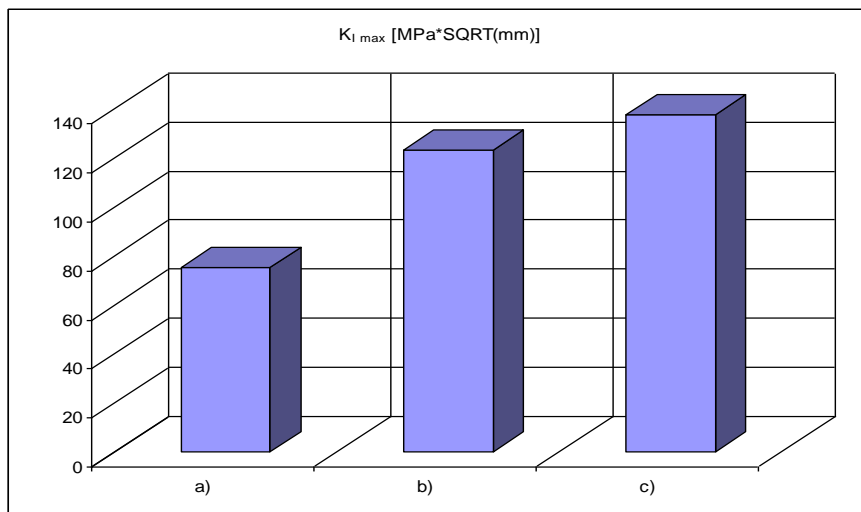
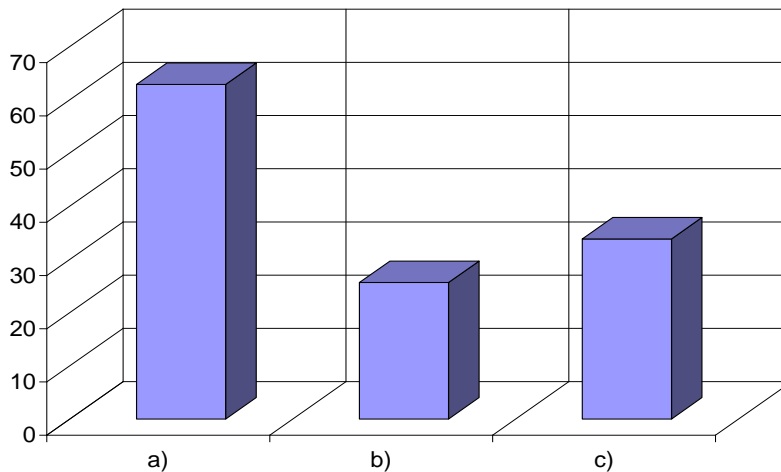
Factorii de intensitate a tensiunii obținuți sunt listați în Tabelul 3.2.

Valorile maxime ale factorilor de intensitate a tensiunii sunt comparate în Fig.3.35.

Se poate observa că pentru toate cele trei configurații s-au obținut valori relativ ridicate ale factorilor de intensitate a tensiunii pentru Modul I de deschidere a fisurii (K_I), comparabile cu cele obținute în cazul precedent. De asemenea, pentru aceste configurații s-a observat existența Modurilor II și III de deschidere a fisurii, cu valori ale factorilor de intensitate a tensiunii corespunzătoare deloc neglijabile, Fig.3.36, Fig.3.37.

Tabel 3.2. Valorile factorilor de intensitate a tensiunii în nodurile frontului fisurii

Nod	Configurația a)			Configurația b)			Configurația c)		
	K_I	K_{II}	K_{III}	K_I	K_{II}	K_{III}	K_I	K_{II}	K_{III}
1	74.94	8.404	15.24	123	9.497	12.78	137.5	27.18	18.14
2	50.31	0.8469	11.44	86.77	11.79	6.412	113	20.35	19.41
3	7.813	26.42	12.99	27.9	16.47	6.585	72.29	2.438	12.55
4	30.01	52.72	16.91	25.22	21.88	3.344	28.4	23.51	10.91
5	53.43	62.88	21.29	55.92	25.66	12.21	17.4	33.85	1.496

Fig.3.35. Representarea valorilor maxime ale lui K_I pentru fisurile „orizontale”Fig.3.36. Representarea valorilor maxime ale lui K_{II} pentru fisurile „orizontale”

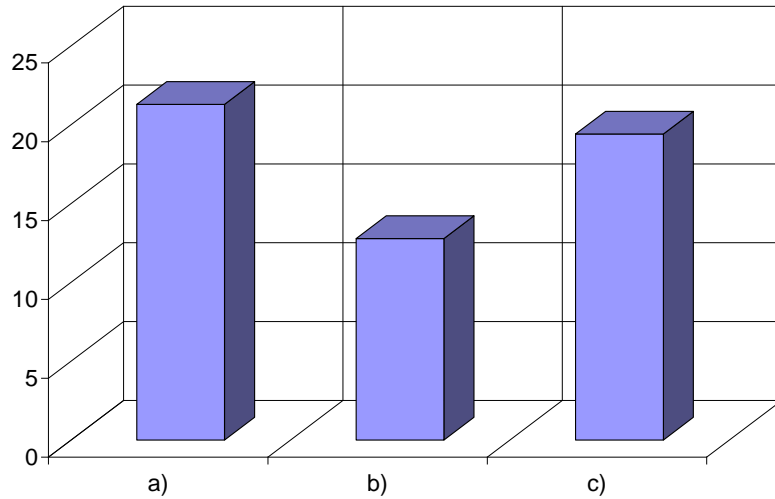


Fig.3.37. Reprezentarea valorilor maxime ale lui K_{III} pentru fisurile „orizontale”

Simularea numerică a fisurilor în zona „brațelor” segmentului

În condițiile în care solicitările maxime sunt localizate la „vârful” segmentelor, prezența unei fisuri în zona „brațelor” nu poate fi neglijată. Cele trei configurații alese pentru acest caz prezintă fisuri dispuse într-un plan perpendicular pe generatoarea segmentului, Fig.3.38.

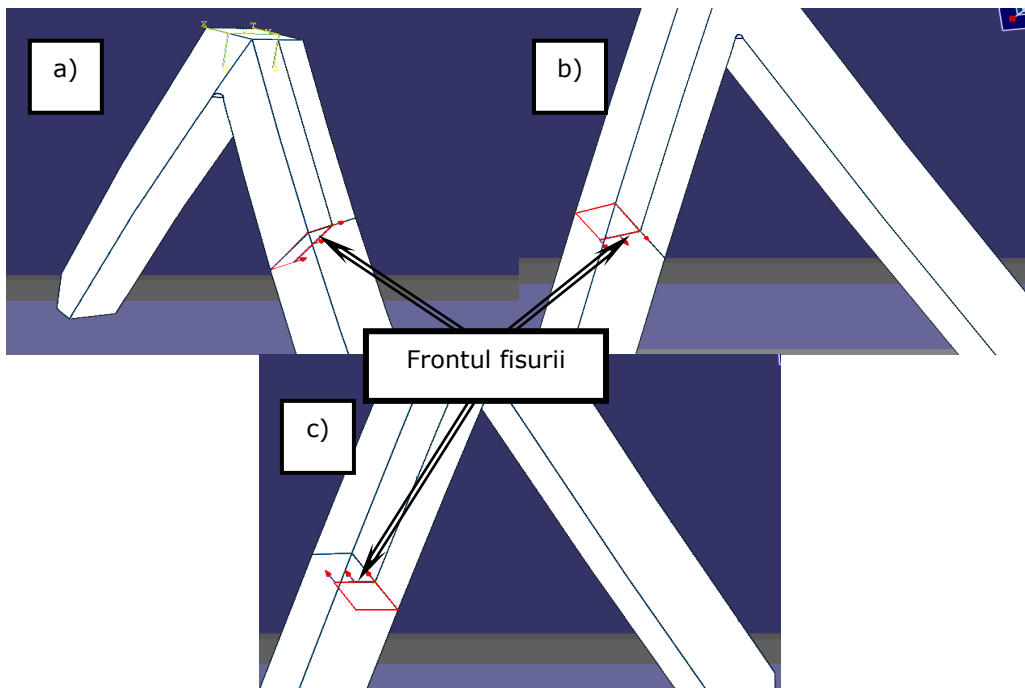


Fig.3.38. Localizarea fisurilor în zona „piciorului” segmentului

Condițiile pe contur, parametrii discretizării, precum și rafinarea elementelor de la vârful fisurii au rămas aceleași ca și în cazul fisurilor „verticale” și „orizontale”. Determinarea parametrilor de mecanica ruperii s-a făcut la nivelul conturului cu numărul 10.

În Tabelul 3.3 sunt prezentate valorile factorilor de intensitate a tensiunii pentru cele 3 moduri de fisurare, determinate în nodurile frontului fisurii.

Tabel 3.3. Valorile factorilor de intensitate a tensiunii în nodurile frontului fisurii

Nod	Configurația a)			Configurația b)			Configurația c)		
	K_I	K_{II}	K_{III}	K_I	K_{II}	K_{III}	K_I	K_{II}	K_{III}
1	65.95	6.423	31.34	81.46	29.99	25.98	78.13	18.93	41.76
2	93.07	11.29	3.156	75.89	29.76	8.12	57.77	11.98	20.87
3	95.45	7.622	0.683	50.79	17.96	11.99	33.20	1.316	17.59
4	79.70	2.946	0.443	22.39	3.689	14.15	11.24	12.41	13.65
5	81.24	14.3	38.39	11.95	1.472	9.112	4.566	15.83	13.33

Și pentru aceste configurații s-au înregistrat valori notabile ale Modurilor II și III de deschidere a fisurii.

Valorile maxime ale factorilor de intensitate pentru cele 3 moduri sunt comparate în Figurile 3.39, 3.40 și 3.41.

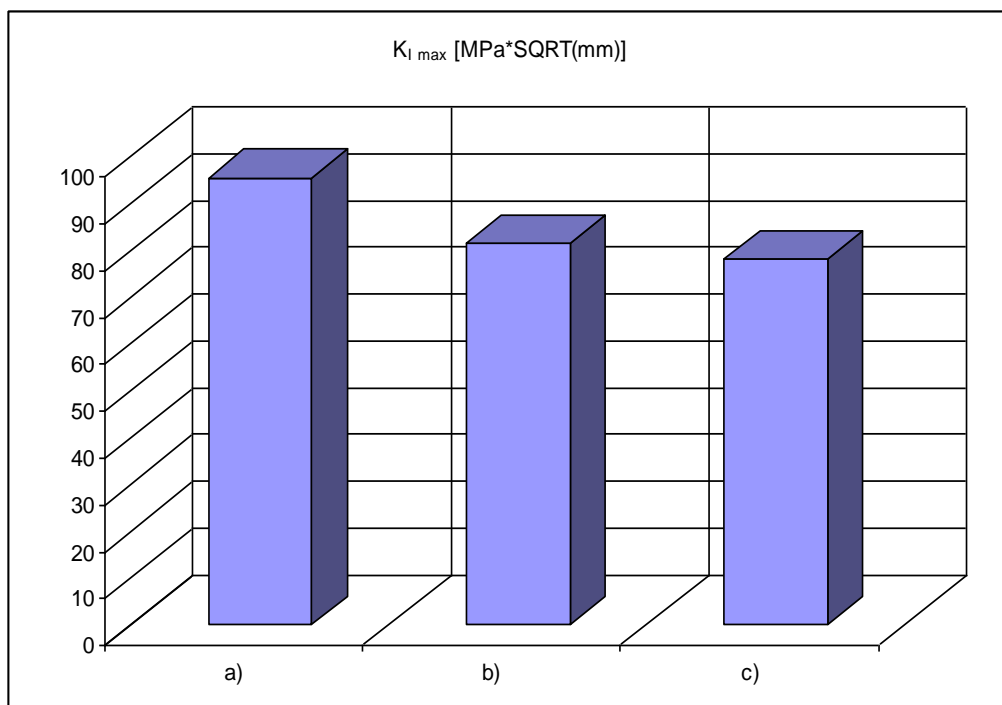
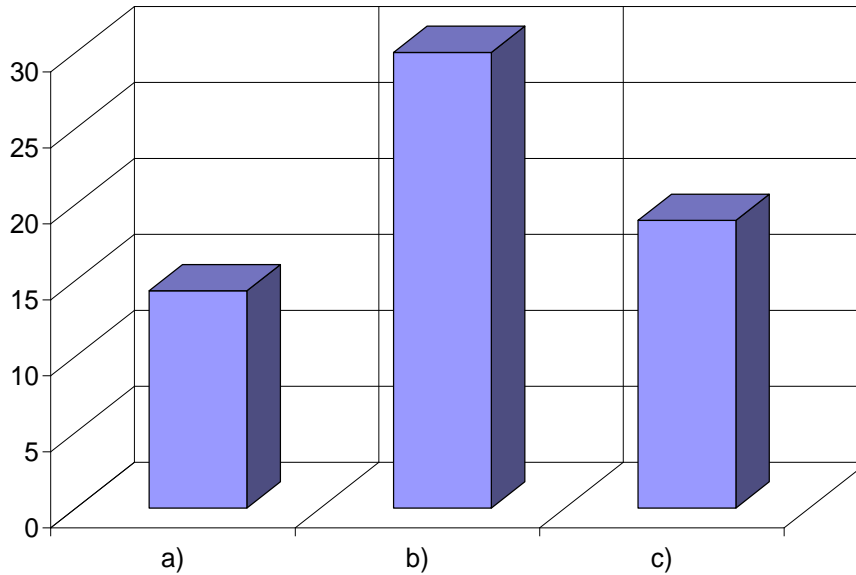
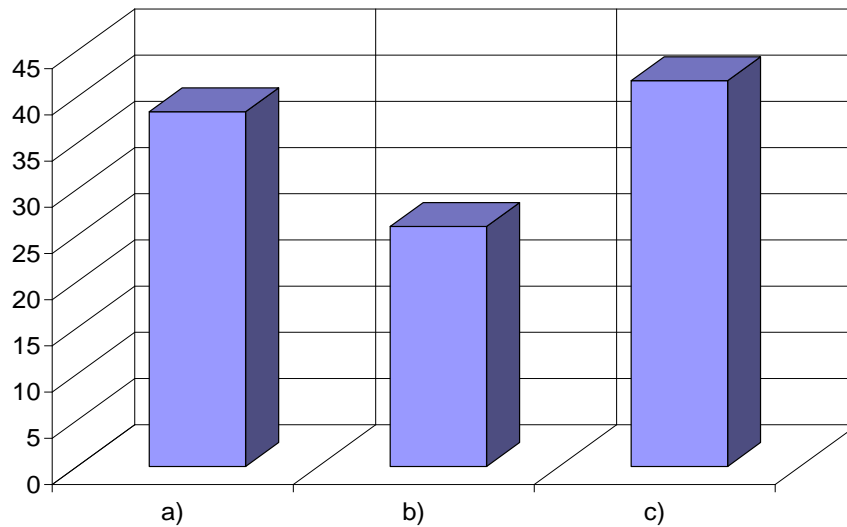


Fig.3.39. Reprezentarea valorilor maxime ale lui K_I pentru fisurile din zona „picioarelor”

Fig.3.40. Reprezentarea valorilor maxime ale lui K_{II} pentru fisurile din zona „piciorului”Fig.3.41. Reprezentarea valorilor maxime ale lui K_{III} pentru fisurile din zona „piciorului”

Concluzii

Calculul numeric al factorilor de intensitate a tensiunii pentru configurații diferite ale segmentului fisurat constituie un pas important în predicția corectă a duratei de viață pentru un asemenea implant.

Ținând cont de faptul că majoritatea aliajelor utilizate la confecționarea stenturilor prezintă un comportament linear-elastic (una dintre excepții fiind

nitinolul, cu comportament hiperelastice), rezultatele obținute în urma acestor simulări pot fi luate în considerare pentru alte stenturi cu geometrii similare.

Chiar dacă sarcinile aplicate asupra stentului au fost la limita superioară a valorilor, iar dimensiunile defectelor (fisurilor) au fost alese cu valori mari (raport lungime fisură/ lățimea sârmei de aproximativ 0,5), factorii de intensitate a tensiunii rămân în limite tolerabile pentru un oțel obișnuit.

Modurile II și III de fisurare sunt practic inexistente în cazul fisurilor „verticale”, dar se manifestă destul de semnificativ în celelalte cazuri. Totuși, s-a observat că pentru toate modelele analizate, Modul I de fisurare este dominant.

3.2. Studiul numeric al interacțiunii dintre fisuri

3.2.1. Interacțiunea fisurilor colineare

Considerații generale

Pentru a putea înțelege comportamentul unei structuri plane reală, supusă unor sarcini aleatorii, diferențele și similaritățile dintre efectul tracțiunii, respectiv încovoierii trebuie cunoscute. Principiul suprapunerii efectelor este aplicabil în mecanica ruperii pentru domeniul linear elastic, însă predicția comportamentului real este strâns legată de acuratețea evaluării efectului fiecărei sarcini în parte. Pe de altă parte, prezența fisurilor multiple modifică semnificativ câmpul de tensiuni, iar evaluarea factorilor de intensitate a tensiunii devine problematică. Predicțiile de durabilitate pentru corpurile cu fisuri multiple sunt și mai pretențioase, întrucât prezența unei fisuri vecine poate conduce la stoparea evoluției fisurii de interes.

Problema interacțiunii fisurilor a fost abordată pentru prim dată de Kachanov [Kachanov, 1985], cu scopul de a propune o metodă simplificată de evaluare a factorilor de intensitate a tensiunii pentru o placă plană. Această metodă a fost ulterior perfecționată [Li, 2003] și adaptată situației în care distanța dintre fisuri este mică. Sadowski a extrapolat aceste metode pentru corpuri tridimensionale din materiale ortotrope [Sadowski, 2008].

Soluțiile analitice prezente în literatură [Murakami, 1987], [Sih, 1973] oferă posibilitatea determinării rapide a factorilor de intensitate a tensiunii, însă pentru situațiile în care dimensiunile fisurii sunt apropiate de lățimea piesei, singurele metode precise de evaluare sunt fie metodele numerice, fie metodele experimentale.

Modelul de calcul

Placa bidimensională considerată, Fig.3.42, a fost modelată cu ajutorul programului de evaluare numerică a stării de tensiune și deformație COSMOS 2007. Placa este solicitată mai întâi la tracțiune, ulterior fiind solicitată la încovoiere. Pentru prima situație avem un model de tip SECT (*Single Edge Cracked Traction specimen*), iar pentru cea de-a doua, SENB (*Single Edge Notched Bending specimen*).

Fisura de margine are o lungime de 10 mm. Pentru un raport al lungimii fisurii cu lățimea epruvetei de 0,2, soluțiile analitice nu oferă suficientă acuratețe. Cu soluția dată de [Ingraffea, 2003], relația (3.8), se determină factorul de intensitate a tensiunii analitic, K_I^a .

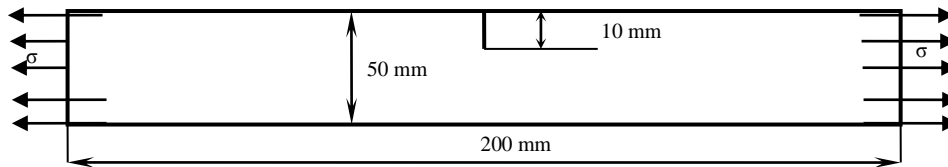


Fig.3.42. Configurația modelului fizic solicitat la tracțiune

$$K_I^a = \sigma \sqrt{a} \left[1,99 - 0,41 \left(\frac{a}{W} \right) + 18,7 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 38,48 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 53,85 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right], \quad (3.8)$$

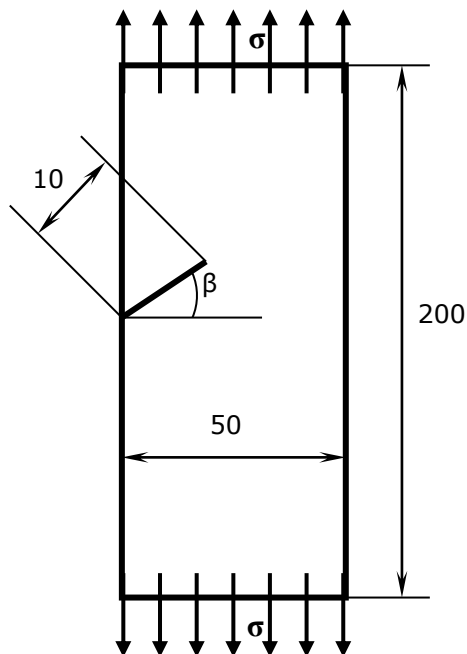
unde σ este tensiunea normală uniform distribuită;
 a - lungimea fisurii;
 W - lățimea epruvetei.

Pentru datele problemei rezultă:

$$K_I^a = 7,698 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}} \quad (3.9)$$

Pentru simplificare, s-a ales $\sigma = 1$ [MPa].

Înclinând fisura la unghiul β față de normala sarcinii, Fig.3.43, apare și Modul II de deschidere a fisurii, ruperea devenind mixtă. Ponderea Modulului II de rupere a putut fi evidențiată prin evaluarea factorului de intensitate a tensiunii K_{II} .

Fig.3.43. Configurația modelului fizic cu fisura înclinată (cu unghiul β)

Pentru obținerea unor rezultate concludente, unghiul β a fost crescut cu câte 5° pentru fiecare pas.

Modelul a fost discretizat folosind elemente de tip PLANE2D, cu 8 noduri/element (elemente pătratiche) pentru stare plană de tensiune. Factorii de intensitate a tensiunii au fost determinați prin metoda integralei pe contur. Pentru o precizie ridicată s-a folosit o discretizare extrem de fină a întregului model, cu 48000 de elemente, Fig.3.44.

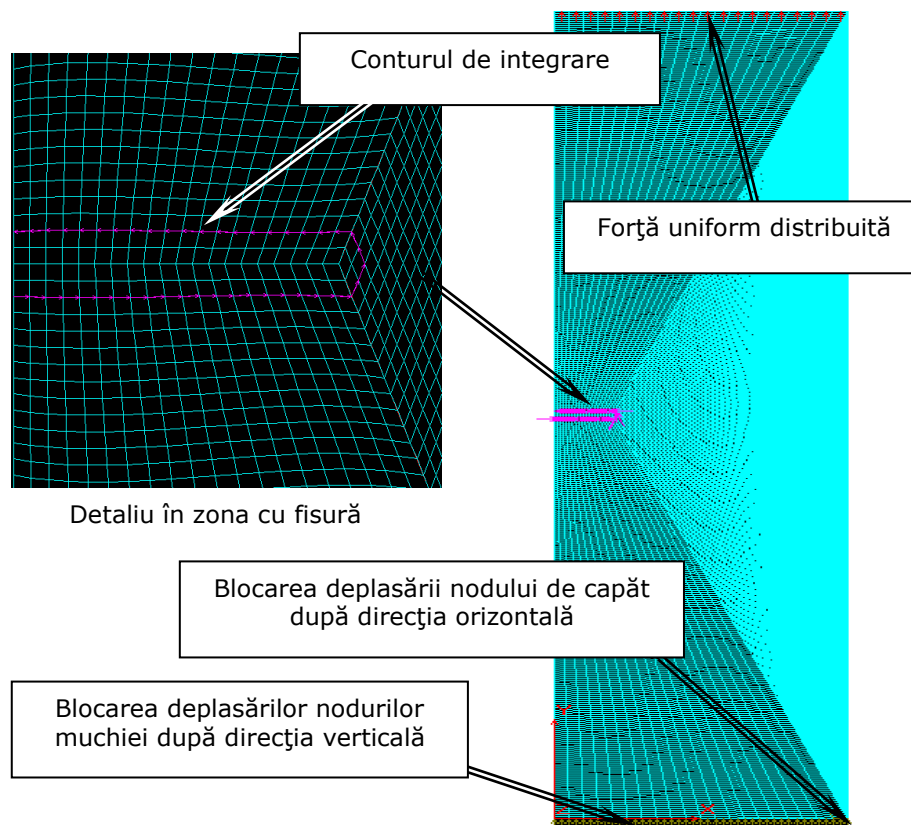


Fig.3.44. Discretizarea, condițiile pe contur și calea de integrare pentru modelul de calcul

Materialul epruvetei este aluminiu 6060 T6. Acest material este un aliaj cu comportare elasto-plastică [Negru, 2009], s-a putut folosi o schematizare de tip Ramberg-Osgood [Gabauer, 2001].

Conform acestui model, deformația totală este exprimată prin relația:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k}\right)^m \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{k}\right)^m, \quad (3.11)$$

unde ε_t este deformația totală;
 ε_p este deformația plastică;
 k este coeficientul de rezistență;
 m^{-1} este coeficientul de ecrusare.

Caracteristica materialului în schematizare Ramberg-Osgood este prezentată în Fig.3.45. Se rețin modulul de elasticitate longitudinal $E = 62078\text{MPa}$ și coeficientul lui Poisson $\nu = 0,33$ [Negru, 2009].

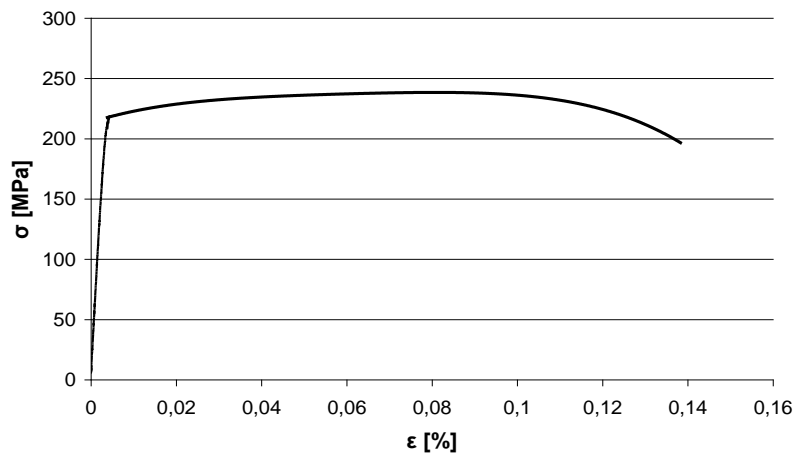


Fig.3.45. Diagrama $\sigma - \varepsilon$, schematizarea Ramberg-Osgood, pentru AL 6060 T6

Pe baza analizei cu elemente finite s-au obținut componentele tensiunii. În Fig.3.46 este prezentat spectrul de distribuție al tensiunilor echivalente von Mises la vârful fisurii pentru fisura înclinată cu unghiul $\beta = 45^\circ$.

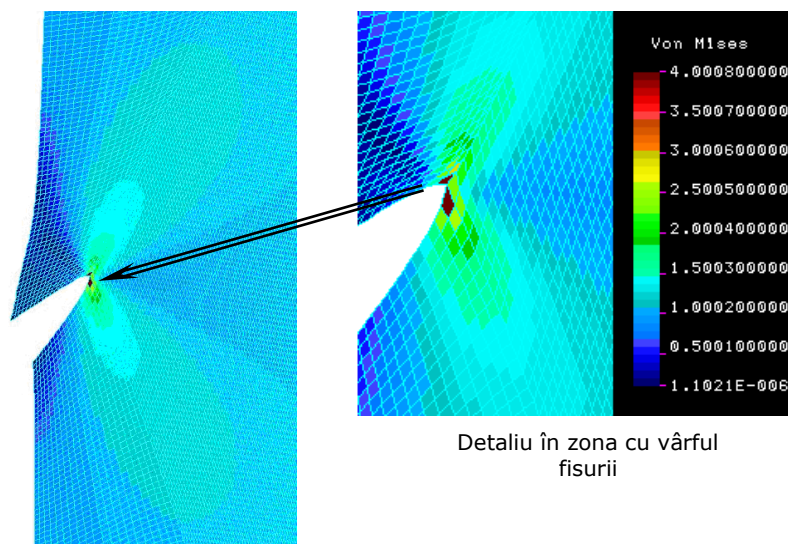


Fig.3.46. Distribuția tensiunilor von Mises la vârful fisurii pentru $\beta = 45^\circ$

Valorile factorilor de intensitate a tensiunii pentru diferite unghiuri de înclinare sunt redată în Tabelul 3.4.

Tabel 3.4. Valorile factorilor de intensitate a tensiunii pentru epruvete de tip SECT

Unghiul fisurii [°]	K_I [$MPa\sqrt{mm}$]	K_{II} [$MPa\sqrt{mm}$]
0	7,59208	0
5	7,55219	0,622846
10	7,38738	0,922
15	7,0509	1,22852
20	6,73934	1,31473
25	6,28919	1,46974
30	5,77482	1,58768
35	5,20639	1,66856
40	4,60147	1,71304
45	3,97388	1,72186
50	3,33809	1,6963
55	2,69675	1,63133
60	2,02123	1,55055
65	1,33816	1,3592
70	1,12881	1,06515
75	1,13188	0,126618

Abaterea rezultatului obținut numeric, raportată la valoarea analitică obținută cu relația (3.8) este de -1,38%, ceea ce confirmă validitatea modelului de calcul. Rezultatele obținute numeric au fost confirmate de simulările și cu programele FRANC2D și ABAQUS 6.9-3.

Pentru o comparație mai facilă, valorile din tabel ale factorilor de intensitate a tensiunii sunt normalizate cu valoarea determinată analitic pentru o fisură de margine (3.9).

Variația factorilor de intensitate a tensiunii normalizați cu unghiul fisurii este reprezentată în Fig.3.47.

Se observă o descreștere constantă a lui K_I până la un unghi al fisurii de 65° , după care rămâne constant. Variația lui K_{II} este mult mai interesantă: crește până la unghiul de 45° , după care începe să scadă. Pentru toată plaja de variație a unghiului β , Modul I de fisurare este dominant; doar pentru $\beta = 65^\circ$, K_{II} este ușor superior lui K_I .

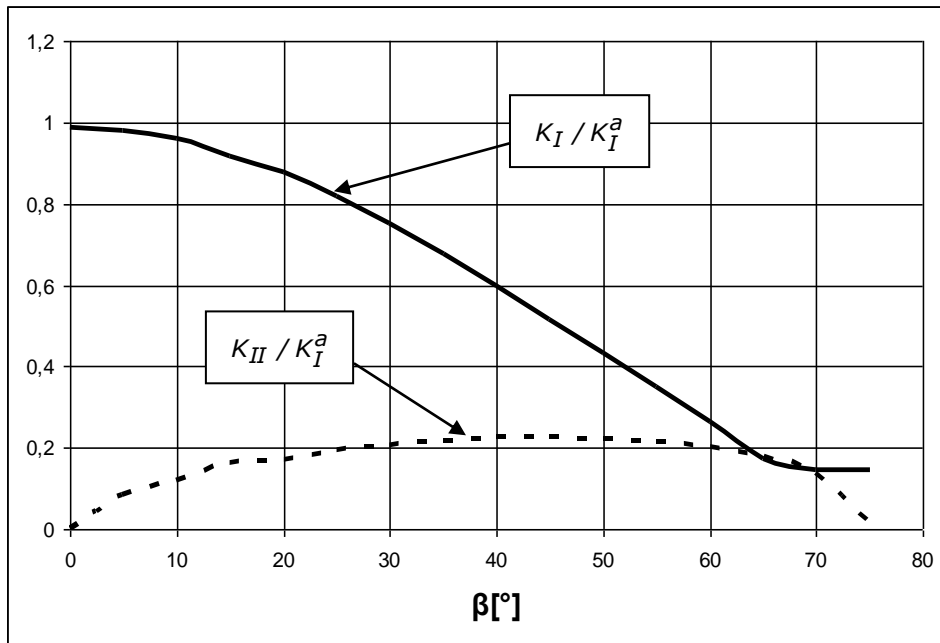


Fig.3.47. Variația factorilor de intensitate a tensiunii cu unghiul β de înclinare al fisurii pentru epruveta SECT

Modelul epruvetei supuse la încovoiere (SENB) este identic modelului anterior, cu excepția încărcării, Fig.3.48. De această dată, solicitarea este produsă de un moment de încovoiere, generat de forța unitară F .

Parametrii de discretizare, precum și conturul integralei au rămas neschimbate, iar valorile factorilor de intensitate a tensiunii sunt listați în Tabelul 3.5.

Tabel 3.5. Valorile factorilor de intensitate a tensiunii pentru epruvete de tip SENB

Unghiul fisurii [°]	K_I [MPa√mm]	K_{II} [MPa√mm]
0	0,650493	0
5	0,534077	0,05334
10	0,533678	0,0745369
15	0,531306	0,0910541
20	0,527661	0,105073
25	0,52277	0,117008
30	0,517256	0,126448
35	0,472692	0,142532
40	0,42602	0,151007

45	0,375613	0,158479
50	0,323156	0,162393
55	0,268609	0,16195
60	0,209083	0,154638
65	0,156343	0,149115
70	0,123855	0,113746
75	0,110316	0,00306985

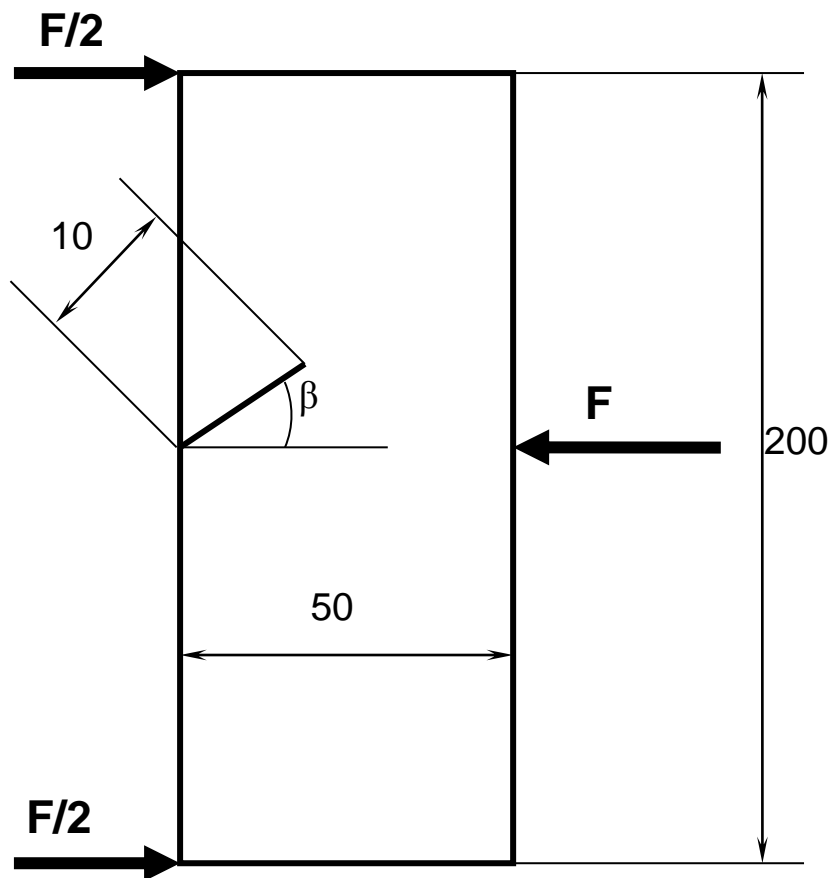


Fig.3.48. Modelul fizic pentru epruveta de tip SENB, cu fisura înclinată cu unghiul β

Factorii de intensitate a tensiunii evaluați au fost normalizați, în acest caz, cu soluția analitică K_I^b [Anderson, 1995].

$$K_I^b = \frac{F}{\sqrt{W}} \frac{3 \frac{L}{W} \sqrt{\frac{a}{W}}}{2 \left(1 + 2 \frac{a}{W}\right) \left(1 - \frac{a}{W}\right)^2} \left\{ 1,99 - \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \cdot \left[2,15 - 3,93 \left(\frac{a}{W}\right) + 2,7 \left(\frac{a}{W}\right)^2 \right] \right\},$$

$$K_I^b = 0,665 \text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$$
(3.12)

unde L este lungimea epruvetei.

Variația factorilor de intensitate a tensiunii funcție de unghiul fisurii este reprezentată în Fig.3.49. Se poate observa că alura graficelor este similară cazului epruvetelor SECT, dar valorile sunt cu un ordin de mărime inferioare.

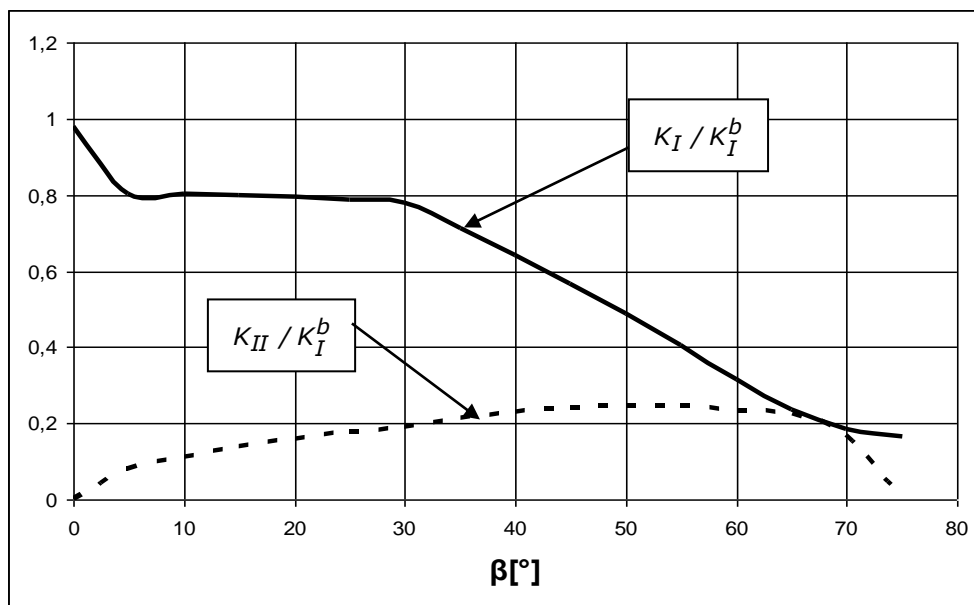


Fig.3.49. Variația factorilor de intensitate a tensiunii cu unghiul β de înclinare al fisurii pentru epruveta SENB

Studiul interacțiunii fisurilor colineare

Abordarea studiului interacțiunii fisurilor s-a făcut pornind de la modelul epruvetei SECT, căruia i-a mai fost implementată încă o fisură, colineară cu prima, Fig.3.50. Discretizarea, precum și conturul integralei au fost păstrate neschimbate.

Pentru studiul interacțiunii fisurilor, au fost elaborate două seturi de modele. Fisura de margine (fisura-etalon A) rămâne neschimbată pentru toate modelele.

Primul set de simulări considerau cea de-a doua fisură de lungime constantă (10 mm), iar distanța dintre cele două fisuri variază cu un pas de 5 mm.

În cazul celui de-al doilea set de simulări, distanța dintre cele două fisuri a fost menținută constantă, iar lungimea fcele de-a doua fisuri a variat cu un pas de 5 mm.

Distanța dintre cele două fisuri este măsurată la vârfuri.

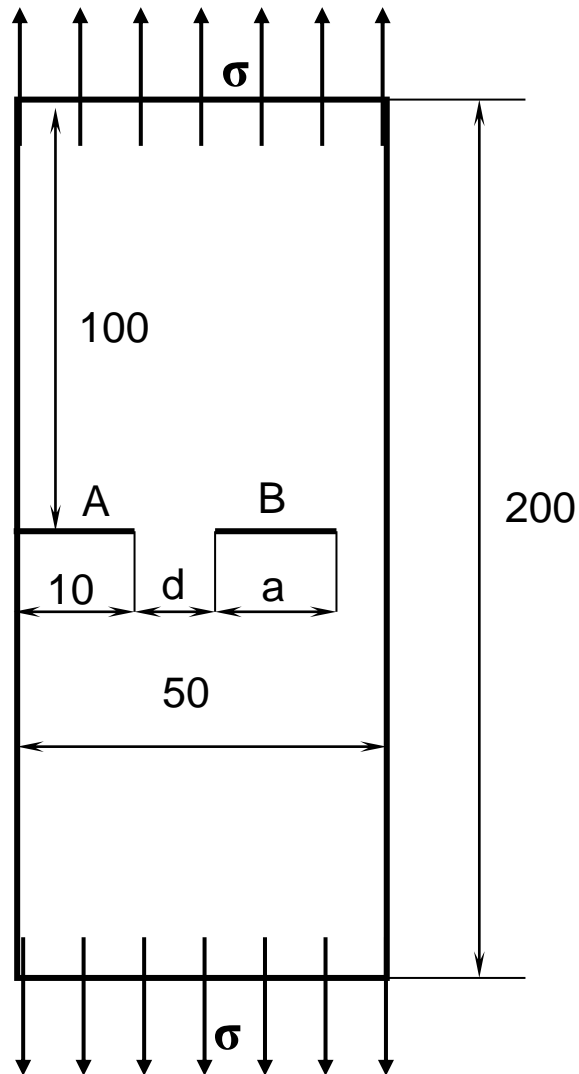


Fig.3.50. Modelul fizic cu 2 fisuri

Distribuția tensiunilor von Mises pentru modelul cu o distanță dintre fisuri $d=10$ mm și o lungime a celei de-a doua fisuri $a=10$ mm, Fig.3.51, reliefează concentrarea de tensiuni din zona vârfurilor fisurilor.

Interacțiunea fisurilor a fost urmărită prin influența celei de-a doua fisuri asupra valorilor factorului de intensitate total K_{tot} , determinat pentru fisura etalon (fisura A).

$$K_{tot} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (3.13)$$

Valorile obținute sunt prezentate în Tabelul 3.6.

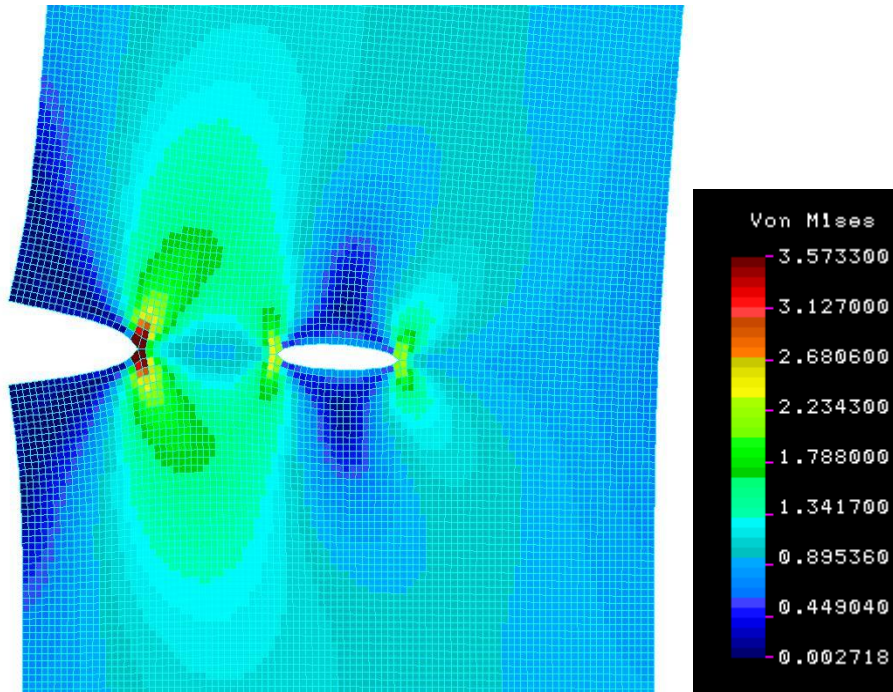


Fig.3.51. Distribuția tensiunilor von Mises pentru modelul cu două fisuri de 10 mm, situate la distanța $d=10$ mm

Tabel 3.6. Valorile factorului de intensitate a tensiunii K_{tot} pentru epruveta cu două fisuri

Distanța dintre fisuri/ Lungimea celei de-a doua fisuri [mm]	K_{tot} [MPa \sqrt{mm}]	
	Distanță variabilă (d)	Lungime variabilă (a)
5	8,82636	7,78541
10	8,09409	8,09409
15	7,7834	8,36726
20	7,5761	8,47205
25	7,38777	8,17998
30	6,31845	36,9798

Întrucât și în această situație, Modul I de rupere este net dominant, este posibilă și o comparație între valorile obținute pentru modelul cu o singură fisură și modelul cu două fisuri. Astfel, se poate observa că în cazul unei distanțe dintre fisuri

mai mare de 20 mm, factorii de intensitate a tensiunii pentru fisura-etalon scad. Acest fapt se datorează schimbării distribuției de tensiuni pe secțiunea epruvetei.

Pentru reprezentarea grafică a variației factorului de intensitate a tensiunii K_{tot} cu distanța dintre fisuri, respectiv lungimea celei de-a doua fisuri, s-a făcut o normalizare cu K_I^a (3.9). Rezultatele sunt prezentate în Fig.3.52 și denotă o variație redusă a lui K_{tot} funcție de cei doi parametri (a și d). Cu alte cuvinte, interacțiunea fisurilor nu este strâns legată de dimensiunea celei de-a doua fisuri sau de distanța dintre fisuri.

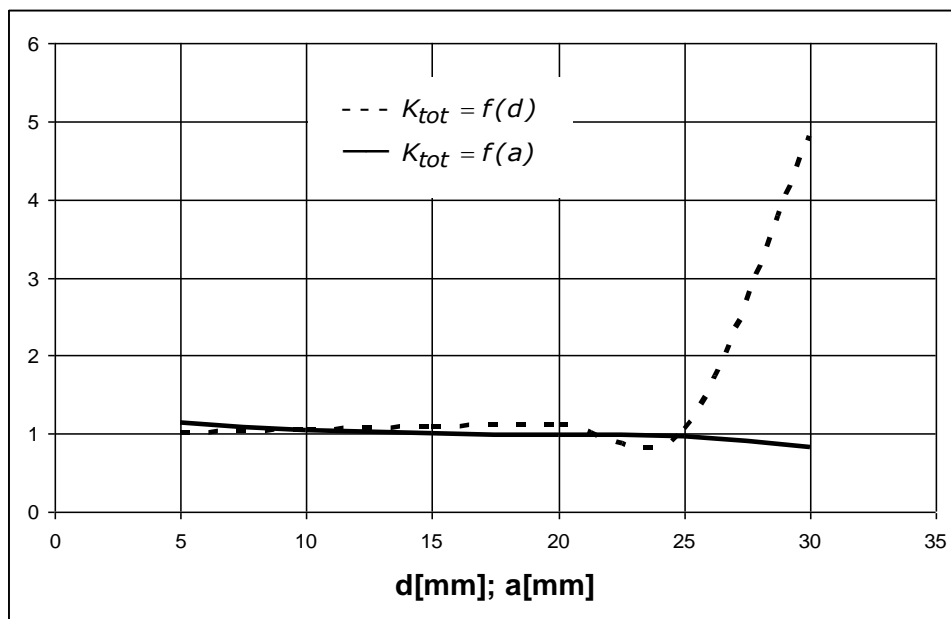


Fig.3.52. Influența interacțiunii fisurilor asupra factorilor de intensitate a tensiunilor

Concluzii

Analiza influenței unghiului fisurii și a încărcării asupra factorilor de intensitate a tensiunii, precum și interacțiunea fisurilor pentru o placă plană, cu dimensiuni finite, s-au putut trage următoarele concluzii:

1. Încărcarea are o influență majoră asupra factorilor de intensitate a tensiunii;
2. Unghiul fisurii determină ponderea fiecărui mod de rupere în parte;
3. Factorii de intensitate a tensiunii au o dependență similară față de unghiul fisurii, pentru ambele tipuri de epruvete (SECT și SENB);
4. Dimensiunea epruvetei, precum și raportul lungimea fisurii/ lățimea epruvetei influențează semnificativ factorii de intensitate a tensiunii;
5. Interacțiunea fisurilor apare și la distanțe mari dintre fisuri;
6. Prezența celei de-a doua fisuri crește valoarea factorilor de intensitate a tensiunii;
7. Influențele distanței dintre fisuri, respectiv a lungimii celei de-a doua fisuri asupra factorilor de intensitate a tensiunii sunt reduse.

3.2.2. Influența interacțiunii a două fisuri asupra propagării fisurii de margine

Considerații generale

În acest subcapitol este analizată interacțiunea dintre două fisuri prezente în aceeași structură, prin modificările care apar la nivelul factorilor de intensitate a tensiunii (K_I și K_{II}), respectiv a unghiului direcției de propagare a fisurii. Comparațiile sunt făcute în raport cu rezultatele obținute pentru o fisură unică.

Toate simulările s-au făcut cu ajutorul softului FRANC2D, dezvoltat de Cornell University.

Modelul analizat este de tip placă bidimensională, în stare plană de tensiune, cu o fisură de margine cu dimensiunea inițială de 10 mm. Cea de-a doua fisură cu lungimea inițială tot de 10 mm este o fisură de margine, situată pe aceeași parte cu prima sau pe partea opusă, respectiv o fisură interioară, situată chiar la mijlocul epruvetei. Distanța dintre cele două fisuri este variată din 10 în 10 milimetri, de la 10 mm la 80 mm.

În cazul al doilea (fisuri de margine opuse), se analizează și situația fisurilor colineare.

Modelul a fost supus la tracțiune, iar valoarea tensiunii de întindere a fost aleasă $\sigma = 1 [N / mm^2]$.

Discretizarea s-a făcut în 2500 de elemente.

Propagarea fisurii s-a realizat automat, în 30 de pași pentru primele două cazuri, respectiv 20 de pași pentru cel de-al treilea caz, iar incrementul fisurii pentru fiecare pas a fost stabilit la 1 mm.

Pentru fiecare pas, programul a determinat factorii de intensitate a tensiunii pentru Modurile I și II de rupere, precum și direcția de propagare pentru fisura-etalon (fisura A).

Factorii de intensitate a tensiunii au fost evaluați prin metoda corelării deplasărilor (*DCM – Displacement Correlation Method*), iar unghiul direcției de propagare a fost evaluat conform teoriei tensiunii circumferențiale maxime (*MCST – Maximum Circumferential Stress Theory*).

Conform metodei corelării deplasărilor, relațiile de calcul pentru factorii de intensitate a tensiunii pentru o fisură de margine, într-o epruvetă de tip SECT [Mohammadi, 2008] sunt de forma:

$$K_I = \mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \frac{u_y^b - u_y^a}{2 \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right)} \quad (3.14)$$

$$K_{II} = \mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \frac{u_x^b - u_x^a}{2 \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right)}, \quad (3.15)$$

unde μ este modulul de forfecare,

ν este coeficientul lui Poisson,

$u_{x,y}^{a,b}$ sunt deplasările după x , respectiv y ale nodurilor a și b (a este nodul de la vârful fisurii, b este un nod de pe flancul fisurii).

Relațiile de calcul analitice pentru plăcile plane cu fisuri multiple nu oferă rezultate corespunzătoare pentru rapoarte dintre lungimea fisurii și lățimea piesei mai mari de 0,1. Spre exemplu, pentru epruveta de tip SECT, s-a obținut cu relația (3.9), $K_I^a = 7,698 \text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$.

Numeric, pentru aceeași configurație s-a obținut $K_I^f = 7,680 \text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$.

Abateră valorii analitice a fost de -1,38%. Pe de altă parte, evaluarea aceleiași epruvete utilizând programul COSMOS 2007, pentru un model cu 48000 de elemente, a condus la obținerea unui factor de intensitate a tensiunii $K_I^c = 7,592 \text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$, o diferență de doar 1,1%. Se poate deduce că metodele numerice oferă rezultate foarte precise pentru aceste situații.

Materialul plăcii este același aliaj de aluminiu, Al6060 T6, folosit și la simulările anterioare, cu modulul de elasticitate longitudinal $E = 62078 \text{MPa}$ și coeficientul lui Poisson $\nu = 0,33$.

Studiul influenței fisurilor plasate pe aceeași latură

În acest caz, cele două fisuri de lungime egală (10 mm) sunt dispuse pe aceeași muchie, la o distanță variabilă d , Fig.3.53. Valorile alese pentru distanța dintre fisuri au fost 10 mm, 20 mm, 30 mm, 40 mm, 50 mm, 60 mm, 70 mm, 80 mm.

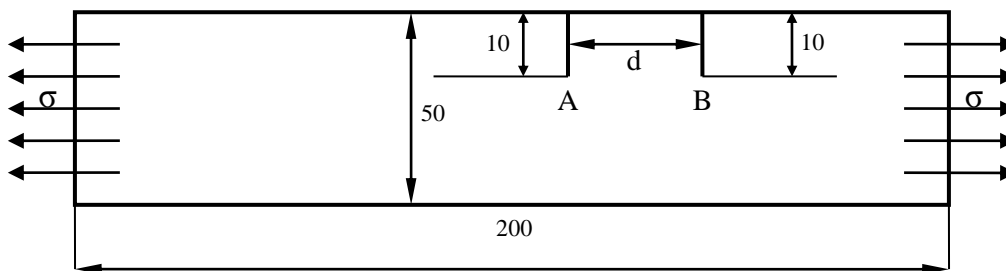


Fig.3.53. Modelul fizic pentru 2 fisuri plasate pe aceeași latură

Discretizarea (Fig.3.54) a fost făcută automat, în 2500 de elemente (număr limitat de resursele hardware disponibile). De-a lungul fisurii, precum și la vârful acesteia, discretizarea a fost rafinată, pentru mai multă precizie. S-au folosit elemente pătratice, cu 8 noduri/element, iar la vârful fisurii s-au implementat elemente finite degenerare.

Analiza a fost efectuată în condiții de stare plană de tensiune.

Fisurile au fost propagate câte un milimetru pentru fiecare dintre cei 30 de pași. Astfel, a putut fi analizată evoluția fisurilor pentru intervale suficient de discrete.

De asemenea, după propagarea completă, lungimea unei fisuri a acoperit 80% din lățimea totală a epruvetei.

Distribuția tensiunilor von Mises în jurul vârfurilor fisurilor pentru $d=20 \text{mm}$ este prezentată în Fig.3.55.

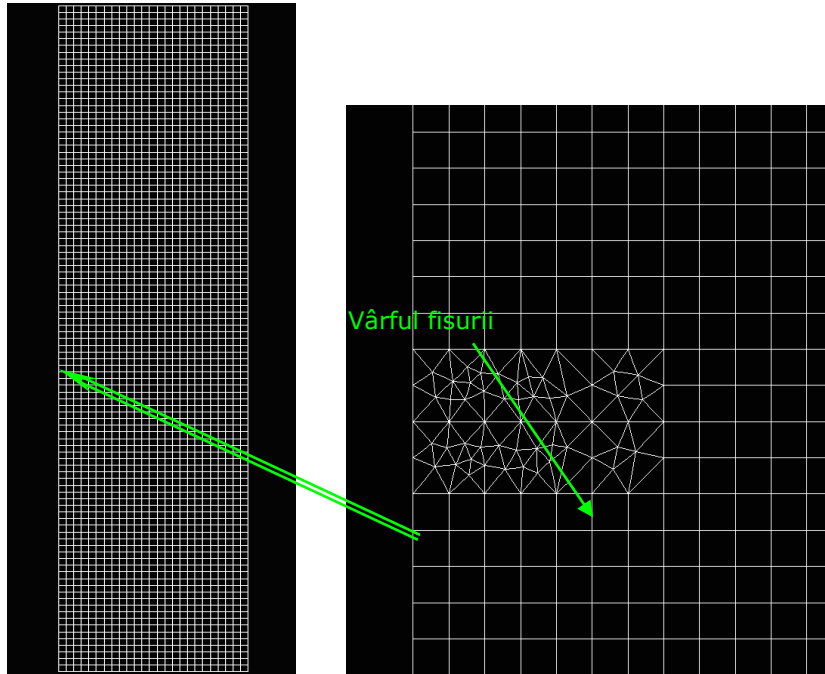


Fig.3.54. Modelul discretizat, cu rafinarea suplimentară a discretizării de-a lungul fisurii

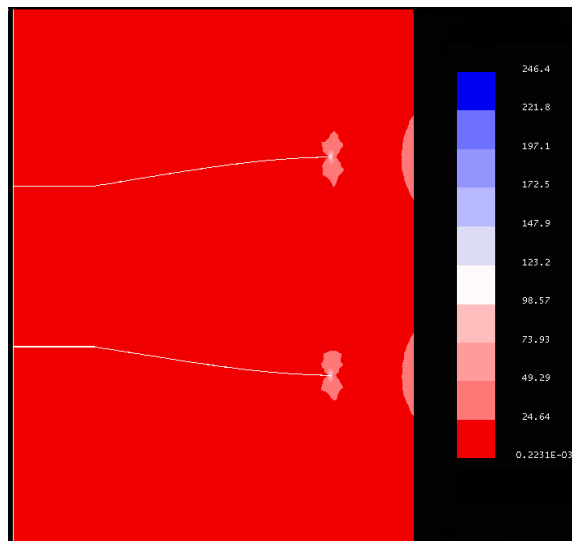


Fig.3.55. Imagine privind distribuția câmpului tensiunilor von Mises la vârful fisurilor

Programul FRANC2D produce propagarea alternativă a celor două fisuri, rezultatele necesitând o prelucrare ulterioară pentru evidențierea corespunzătoare a tendințelor. Întrucât extragerea datelor este un proces laborios, greu de realizat cu programele comerciale de uz curent (de genul pachetului software Microsoft OFFICE), s-a pus la punct un program special pentru rezolvarea acestor inconveniente. Programul a fost conceput în mediul de programare *Turbo Pascal*.


```

Program Franc;
Uses crt;
Var i,j,k,l,m:integer;
    f,g:text;
    a,b,c:real;
    x,y,z:string;
Begin
Clrscr;
Assign(f,'c:\tp\a.txt');
Reset(f);
Assign(g,'c:\tp\b.txt');
Rewrite(g);
For i:=1 to 7 do
  Readln(f);
For i:=1 to 31 do
  Begin
    k:=0;
    Repeat
      k:=k+1;
      Read(f,x[k]);
      Write(g,x[k]);
    Until k=39;

    Readln(f);
    Readln(f);
    Write(g,' ');
    l:=0;
    Repeat
      l:=l+1;
      Read(f,y[l]);
      Write(g,y[l]);
    Until l=39;

    Readln(f);
    Readln(f);
    Write(g,' ');
    m:=0;
    Repeat
      m:=m+1;
      Read(f,z[m]);
      Write(g,z[m]);
    Until m=40;

    Writeln(g);
    For j:=1 to 11 do
      Readln(f);
  End;
Close(f);
Close(g);
End.

```

Rezultatele obținute în urma analizei cu elemente finite au fost prelucrate și reprezentate grafic. Astfel, în Fig.3.56 este reprezentată variația factorului de intensitate a tensiunii pentru Modul I (K_I), odată cu creșterea fisurii. Fiecare curbă

corespunde unei distanțe dintre fisuri d . În Fig.3.57 este reprezentată variația factorului de intensitate a tensiunii pentru Modul II (K_{II}), iar în Fig.3.58, variația unghiului direcției de propagare a fisurii.

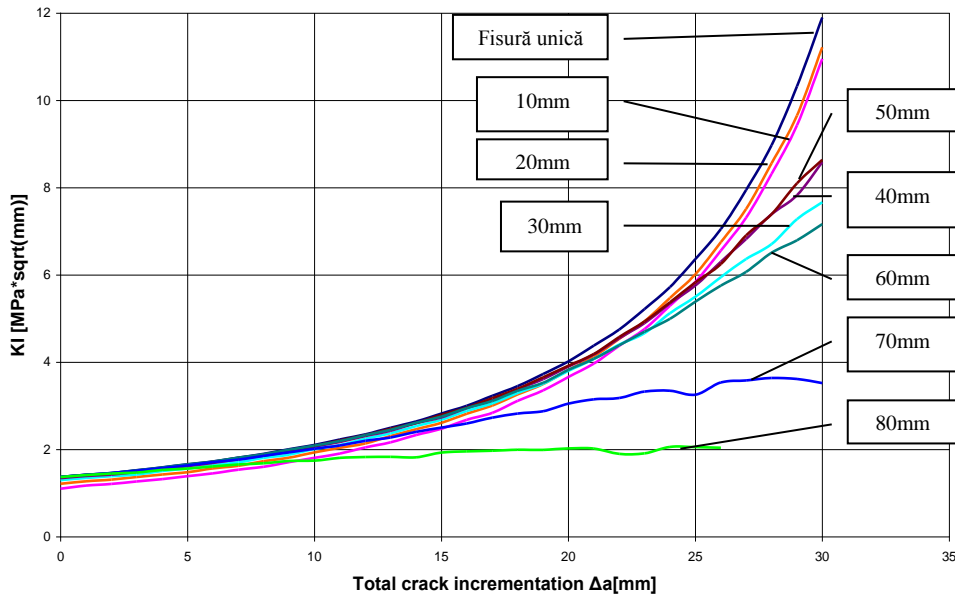


Fig.3.56. Influența interacțiunii fisurilor asupra lui K_I – fisura A

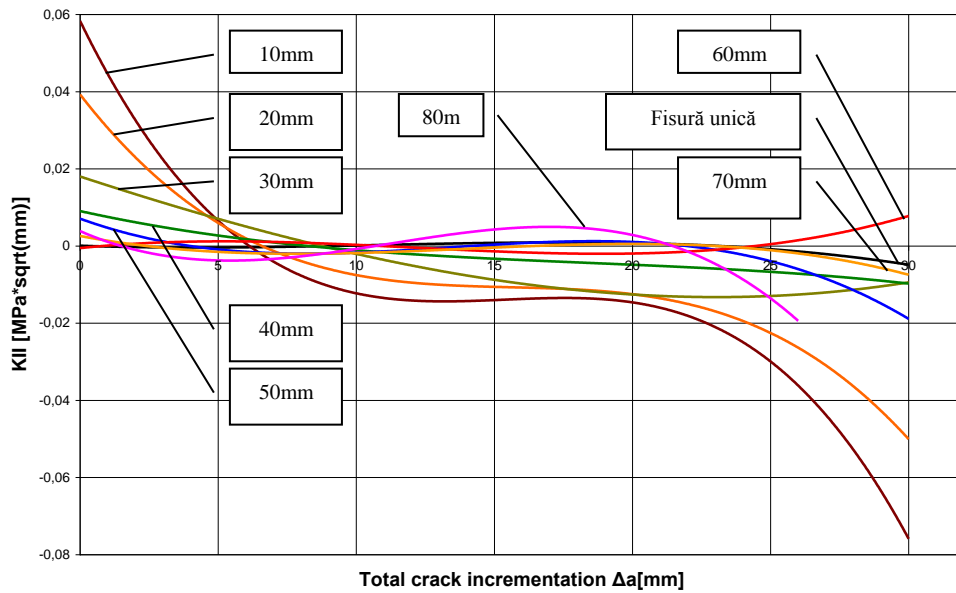


Fig.3.57. Influența interacțiunii fisurilor asupra lui K_{II} – fisura A

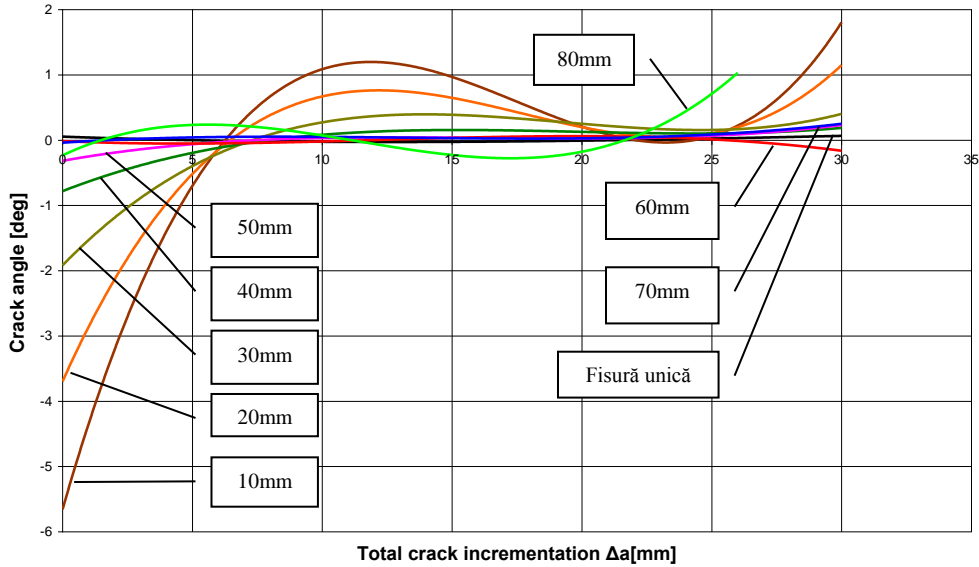


Fig.3.58. Influența interacțiunii fisurilor asupra unghiului direcției de propagare a fisurii – fisura A

Studiul influenței fisurilor plasate pe laturi opuse

În acest caz, cele două fisuri de lungime egală (10 mm) sunt dispuse pe uchii opuse, la o distanță variabilă d , Fig.3.59.

Valorile alese pentru distanța dintre fisuri au fost 10 mm, 20 mm, 30 mm, 40 mm, 50 mm, 60 mm, 70 mm, 80 mm.

Parametrii discretizării au fost aceiași ca și în cazul precedent, respectiv modelul în stare plană de tensiune a fost împărțit în 2500 de elemente pătrate, cu rafinări suplimentare în zona fisurilor.

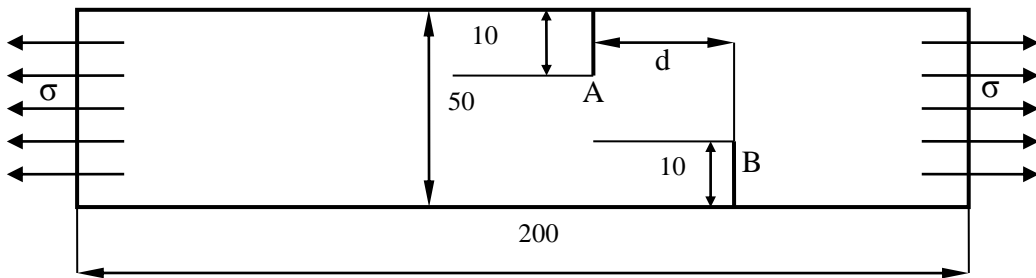


Fig.3.59. Modelul fizic pentru 2 fisuri plasate pe laturi opuse

Distribuția tensiunilor în jurul vârfurilor fisurilor, pentru $d=20$ mm, este prezentată în Fig.3.60.

În Fig.3.61 este reprezentată grafic variația factorului de intensitate a tensiunii pentru Modul I (K_I), odată cu creșterea fisurii. Fiecare curbă corespunde unei distanțe dintre fisuri d . În Fig.3.62 este reprezentată variația factorului de

intensitate a tensiunii pentru Modul II (K_{II}), iar în Fig.3.63, variația unghiul direcției de propagare a fisurii.

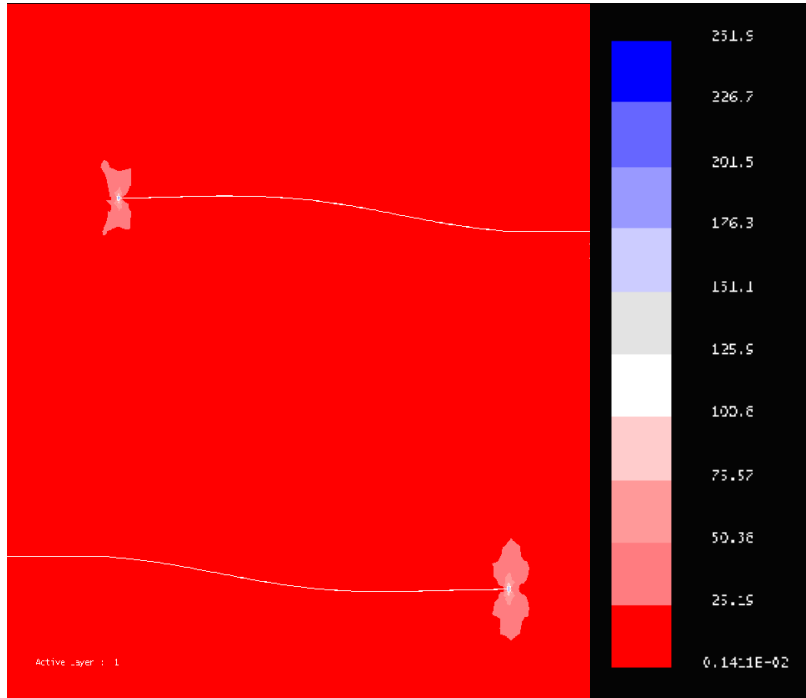


Fig.3.60. Imagine privind distribuția câmpului de tensiuni von Mises pentru $d=20$ mm

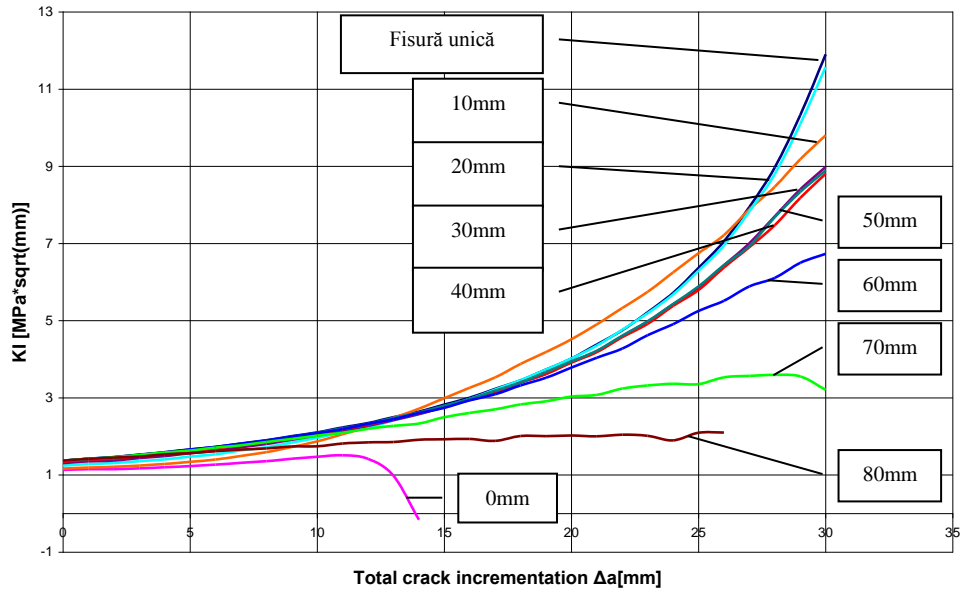


Fig.3.61. Influența interacțiunii fisurilor asupra lui K_I - fisura A

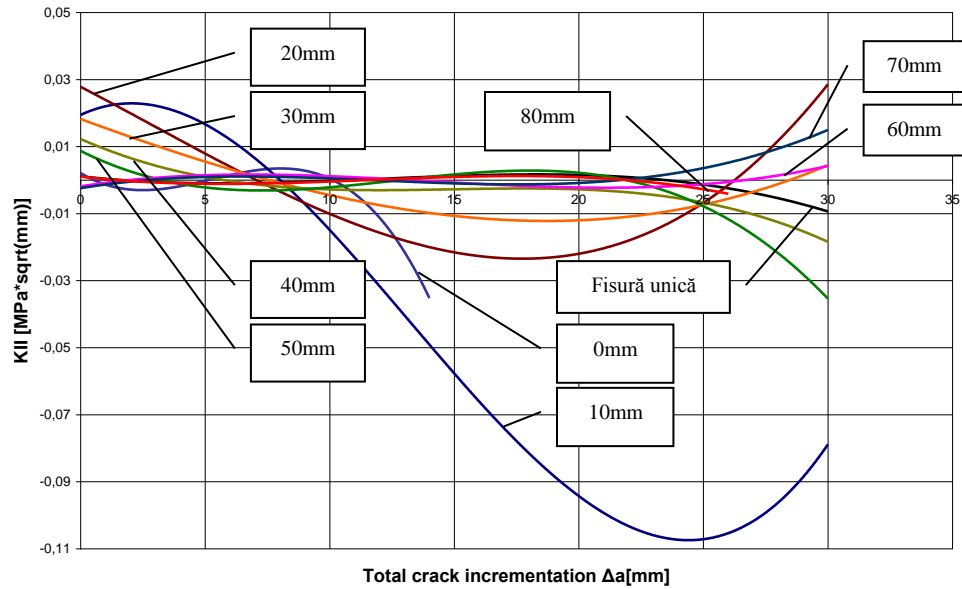


Fig.3.62. Influența interacțiunii fisurilor asupra lui K_{II} – fisura A

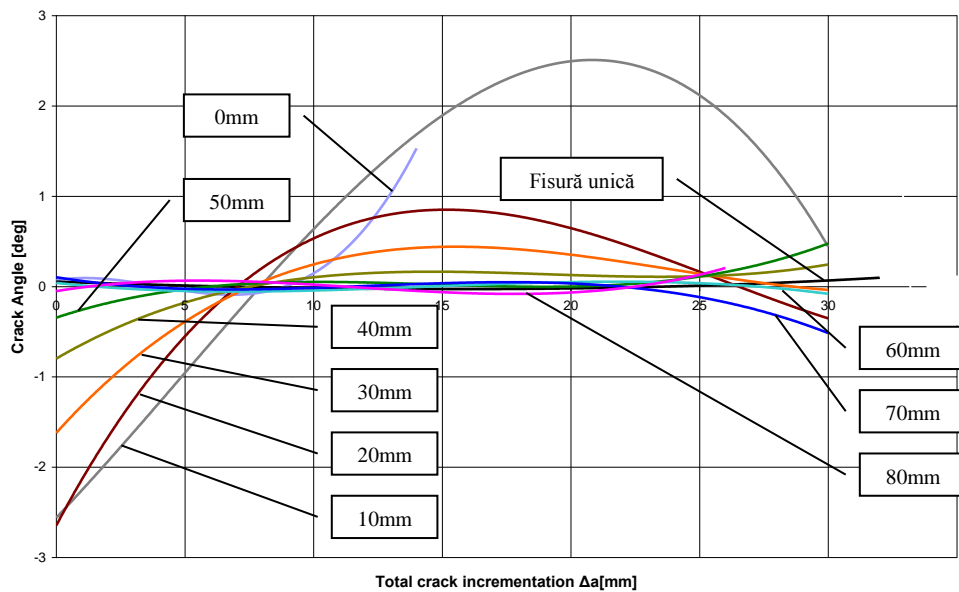


Fig.3.63. Influența interacțiunii fisurilor asupra unghiului direcției de propagare a fisurii – fisura A

Propagarea completă ($\Delta a = 30mm$) a evidențiat tendința de “respingere” a celor două fisuri în momentul în care vârfurile acestora se apropie, Fig.3.64. Explicația constă în interacțiunea pronunțată a câmpurilor de tensiuni de la vârfurile

fisurilor, chiar și pentru distanțe semnificative între cele două fronturi. Pentru comparație, discontinuitățile de tipul găurilor atrag fisurile. De asemenea, se poate observa că variația unghiului direcției de propagare descrie traiectoria fisurii în timpul propagării.

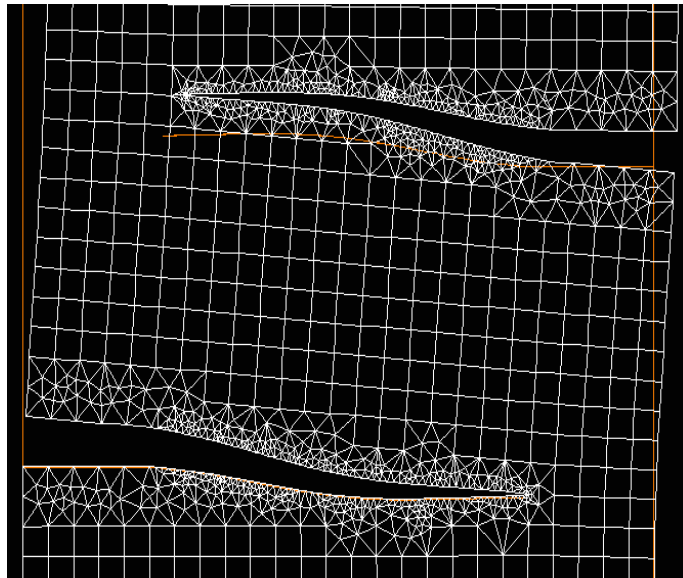


Fig.3.64. Două fisuri propagate complet ($d=20$ mm)

Studiul influenței a două fisuri paralele decalate

În acest caz, placa bidimensională prezintă o fisură de margine (fisura-etalon A) și o fisură interioară, ambele cu o lungime de 10 mm, Fig.3.65. Fisura interioară (fisura B) este plasată la distanțe egale de cele două muchii laterale ale plăcii. Distanța d dintre cele două fisuri ia aceleași valori ca și în cazurile anterioare (10 mm, 20 mm, 30 mm, 40 mm, 50 mm, 60 mm, 70 mm, 80 mm).

Parametrii discretizării sunt neschimbați. Pentru această configurație, propagarea s-a făcut în 20 de pași a câte 1 mm.

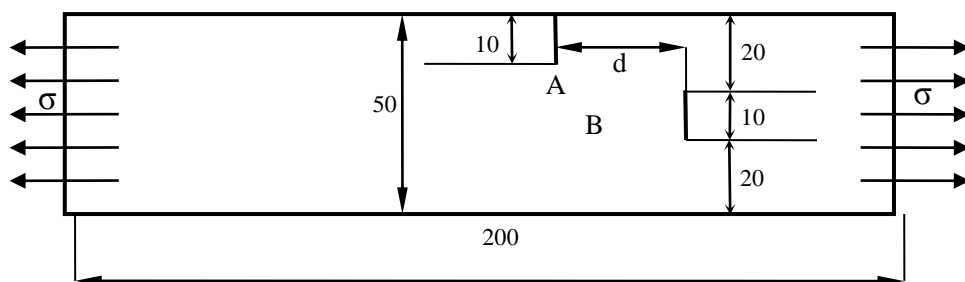


Fig.3.65. Configurația modelului fizic pentru două fisuri paralele decalate

În Fig.3.66 este ilustrată distribuția tensiunilor von Mises în jurul vârfurilor fisurilor pentru $d=20$ mm. Se pot observa valorile mai reduse ale tensiunii în jurul fisurii B.

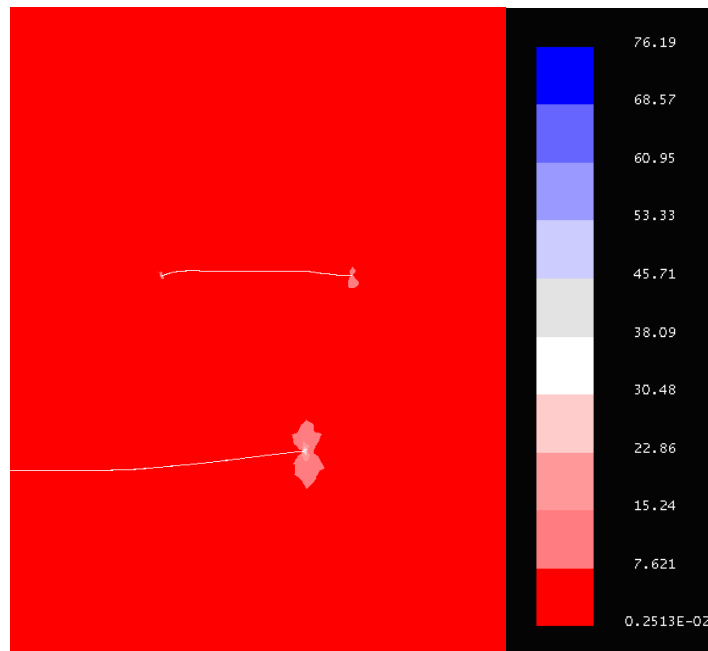


Fig.3.66. Imagine privind distribuția câmpului de tensiuni von Mises pentru $d=20$ mm

Variația lui K_I odată cu creșterea fisurii este reprezentată grafic în Fig.3.67, iar în Fig.3.68, respectiv Fig.3.69 sunt reprezentate variațiile lui K_{II} , respectiv a unghiului direcției de propagare a fisurii.

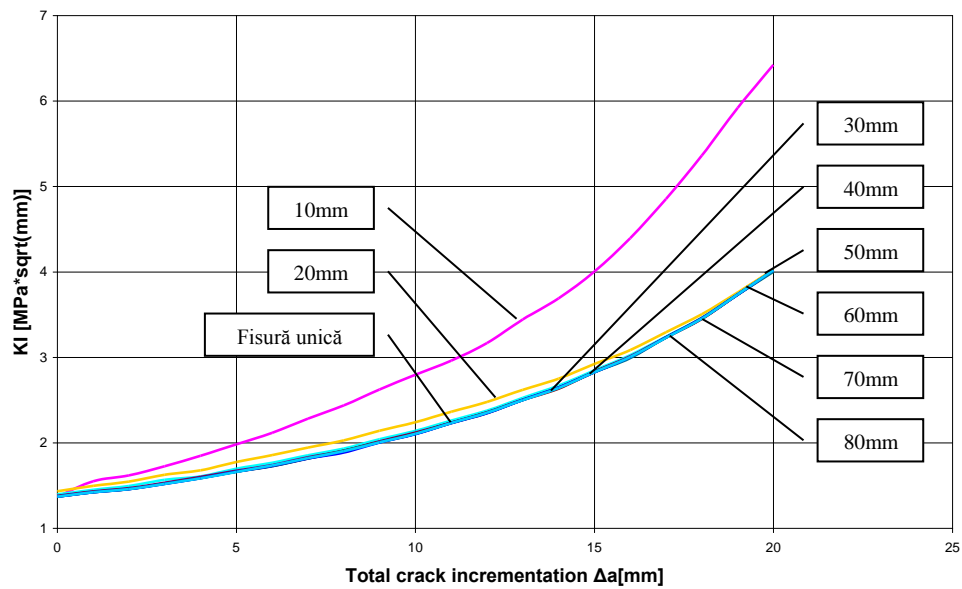


Fig.3.67. Influența interacțiunii fisurilor asupra lui K_I – fisura A

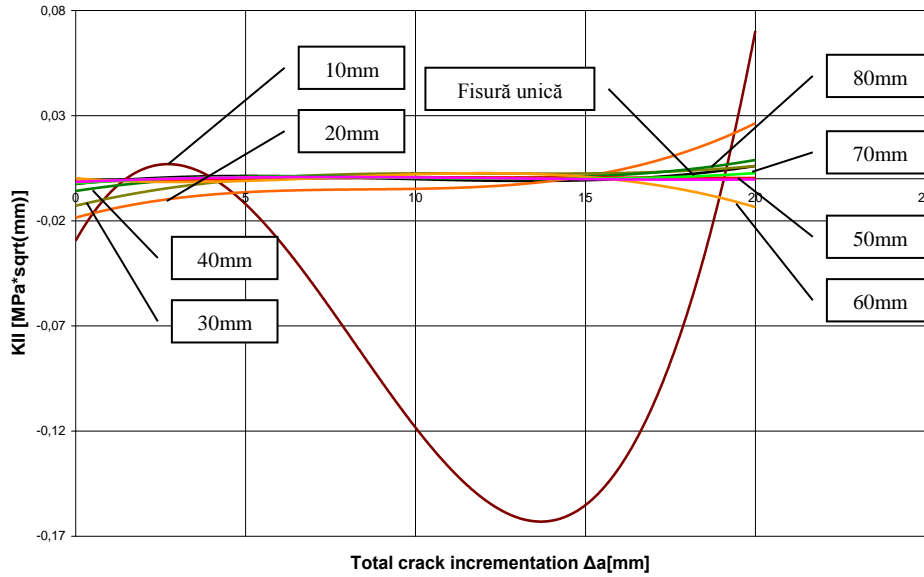


Fig.3.68. Influența interacțiunii fisurilor asupra lui K_{II} – fisura A

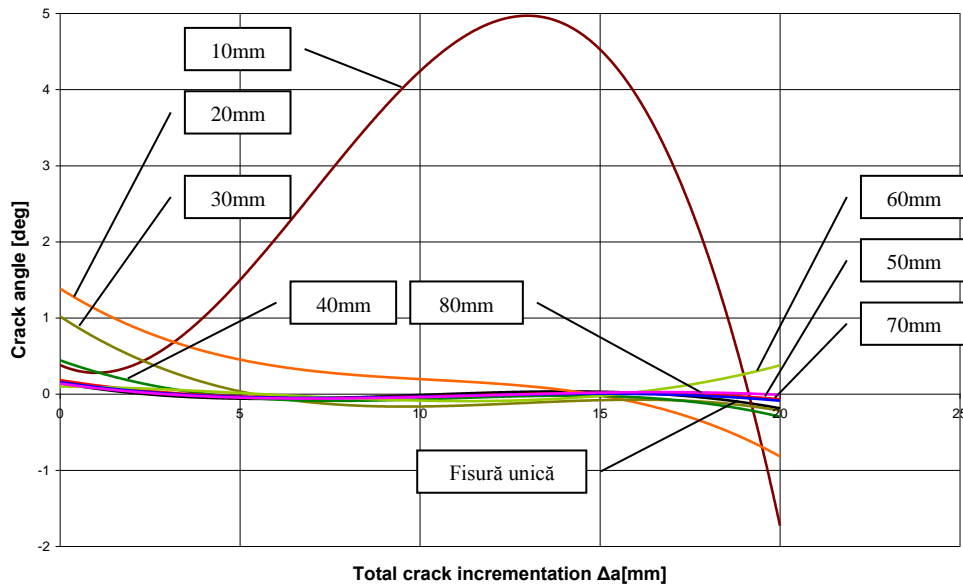


Fig.3.69. Influența interacțiunii fisurilor asupra unghiului direcției de propagare a fisurii – fisura A

Concluzii

Analiza influenței interacțiunii fisurilor asupra propagării unei fisuri într-o placă plană a condus la următoarele concluzii:

1. Fisurile interacționează chiar și la distanțe mari (mai mari decât lungimea fisurii);
2. Interacțiunea fisurilor se manifestă pentru diferite configurații: fisuri de margine suprapuse, fisuri de margine alăturate, fisură de margine și fisură interioară;
3. Direcțiile de propagare ale celor două fisuri prezintă o tendință divergentă;
4. Interacțiunea este mai puternică dacă ambele fisuri sunt fisuri de margine;
5. Alurile graficelor factorilor de intensitate a tensiunii, respectiv ale direcției de propagare sunt similare pentru diverse configurații;
6. La distanțe mari între fisuri, propagarea fisurii-etalon are tendința de calare;
7. Direcția de propagare a fisurilor evoluează în sensul eliminării Modului II de rupere.

4. CERCETĂRI PRIVIND DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A INTEGRALEI CRITICE J_{IC} FOLOSIND EPRUVETE DE DIMENSIUNI NESTANDARDIZATE

4.1. Considerații generale privind determinarea experimentală a integralei critice J_{IC}

Determinarea experimentală a integralei critice J_{IC} , care marchează condițiile inițierii propagării ductile a fisurii, este reglementată prin intermediul standardelor americane ASTM E813, respectiv ASTM 561. Aceste standarde stabilesc atât parametrii încercării, geometria epruvetelor, cât și algoritmul de prelucrare și interpretare a datelor experimentale obținute.

În ceea ce privește epruvetele utilizate pentru astfel de încercări, standardul prevede două tipuri distincte: epruvete compacte CT (epruvete solicate la tracțiune), respectiv epruvete de tip SENB (epruvete solicate la încovoiere). Cea de-a doua categorie de epruvete (SENB) se pretează exclusiv încercărilor în condiții de stare plană de deformație, pe când epruvetele compacte se pot utiliza atât pentru stare plană de tensiune, cât și stare plană de deformație.

Epruvete utilizate

Standardul recomandă utilizarea epruvetelor de tip compact pentru obținerea unor rezultate concludente. Se pot utiliza și alte tipuri de epruvete (spre exemplu, epruvete de tip SENT, Fig.4.1 - epruvete cu o singură fisură de margine, solicate la tracțiune), însă pentru acestea sunt recomandate câteva limite dimensionale, după cum urmează:

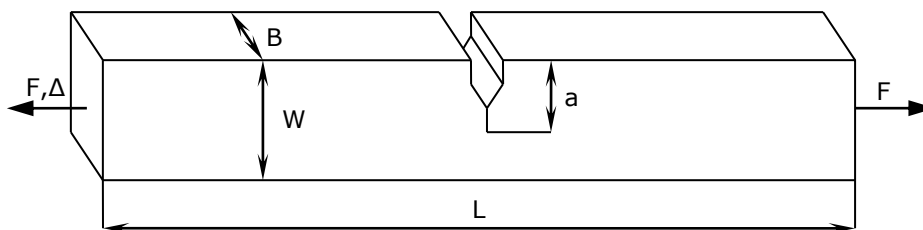


Fig.4.1. Epruveta SENT

$$a > 4B, \quad (4.1)$$

unde a este lungimea fisurii;
 B este grosimea epruvetei;

$$b = (W - a) > 4B, \quad (4.2)$$

unde W este lățimea epruvetei;

$$\Delta a_{max} \leq 0,1b_0, \quad (4.3)$$

unde Δa_{max} este extensia maximă a fisurii pentru un pas;
 $b_0 = W - a_0$ este lățimea inițială a ligamentului;

$$0,35 \leq \frac{a_0}{W} \leq 0,70 \quad (4.4)$$

Prefisurarea probelor

Înainte de încercările pentru determinarea integralei critice J_{IC} este necesară o prefisurare a probei. Și pentru această etapă, standardul prevede câteva recomandări:

- coeficient de asimetrie $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0,1$;

- amplitudine maximă pentru $\frac{K_{max}}{E} = 0,00013 \sqrt{m}$, unde K_{max} este

factorul maxim de intensitate a tensiunii;

- lungime minimă a fisurii de oboseală $\Delta a_{ob} \geq 1,3$ mm.

Metodologia de încercare

Pentru evaluarea experimentală a integralei critice J_{IC} , standardele prevăd utilizarea curbei J-R. Această curbă poate fi obținută fie prin încercarea unui număr de epruvete identice, fie prin încercarea unei singure epruvete, folosind metoda complianței la descărcare, Fig.4.2, unde Δ este deplasarea punctului de aplicație al sarcinii.

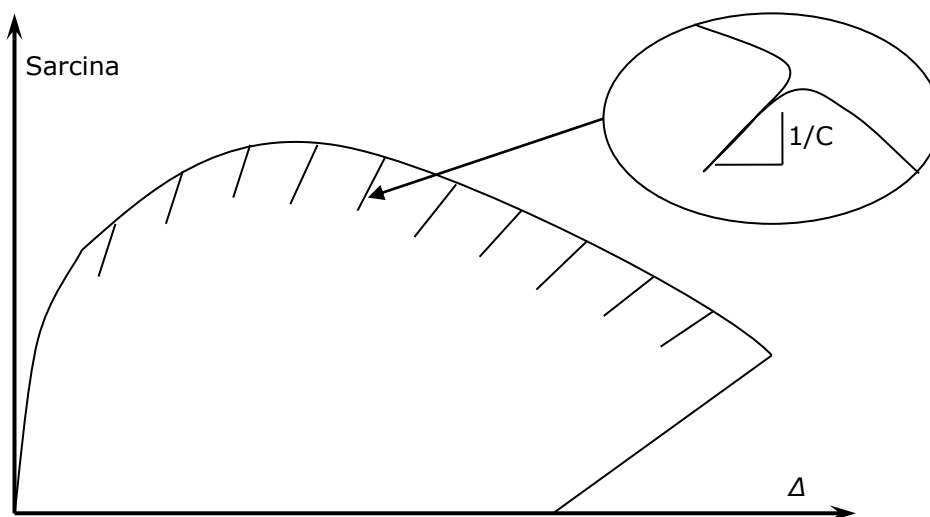


Fig.4.2. Metoda complianței pentru determinarea curbei R

Metoda complianței consta în descărcarea parțială a epruvetei la diferite intervale și calculul integralei J , utilizând relații analitice de corespondență între valoarea complianței și lungimea fisurii, respectiv lungimea fisurii și integrala J .

Astfel, pe baza complianței, se determină lungimea fisurii pentru epruvete de tip SENT [Anderson, 1995]:

$$C = \frac{\Delta BE}{F} = \frac{L}{2W} + \frac{4\left(\frac{a}{W}\right)^2}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^2} \left\{ 0,99 - \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left[1,3 - 1,2\left(\frac{a}{W}\right) + 0,7\left(\frac{a}{W}\right)^2 \right] \right\} \quad (4.5)$$

Determinarea lungimii fisurii pe baza complianței epruvetei este implementată în softul majorității mașinilor de tracțiune dinamică, însă doar pentru configurația epruvetelor compacte.

Odată cunoscută lungimea fisurii, se trece la calculul integralei J . Integrala J poate fi împărțită în două componente: una elastică și una plastică.

$$J = J_{el} + J_{pl} \quad (4.6)$$

Componenta elastică J_{el} se determină pe baza factorului de intensitate a tensiunii K_I :

$$J_{el} = \frac{K_I^2}{E}, \quad (4.7)$$

unde

$$K_I = \frac{F}{B\sqrt{W}} \frac{\sqrt{2 \tan \frac{\pi a}{W}}}{\cos \frac{\pi a}{W}} \left[0,752 + 2,02\left(\frac{a}{W}\right) + 0,37\left(1 - \sin \frac{\pi a}{W}\right)^3 \right] \quad (4.8)$$

Componenta plastică J_{pl} este calculată pe baza suprafeței A_{pl} , delimitată de curba sarcinii cu deplasarea punctului de aplicație al forței. Această suprafață reprezintă energia de deformare plastică consumată, Fig.4.3, [Lereim, 1979].

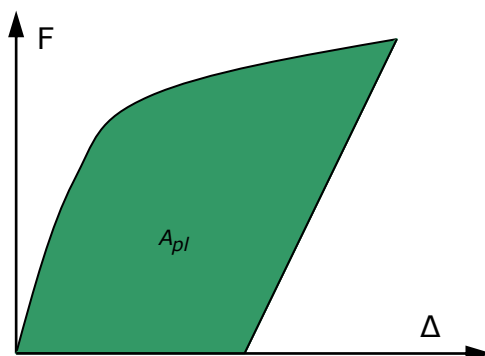


Fig.4.3. Suprafața de calcul a energiei plastice, plasată sub curba $F-\Delta$

$$J_{pl} = \frac{2A_{pl}}{Bb_0} \quad (4.9)$$

Li Xiao-wei prezintă o alternativă la determinarea componentelor integralei J , bazată pe relațiile de calcul a energiei de deformare elastică, U_e , respectiv a energiei de deformare plastică, U_{pl} [Xiao-wei, 1988].

$$J = J_{el} + J_{pl} = \frac{\eta_e U_e}{B(W-a)} + \frac{\eta_{pl} U_{pl}}{B(W-a)}, \quad (4.10)$$

unde η_e și η_{pl} sunt constante adimensionale denumite factor elastic, respectiv factor plastic, după cum urmează:

$$\eta_e = \frac{4\sigma}{E \cdot \Delta_e} \cdot \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left[\frac{2\left(\frac{a}{W}\right)}{\left(\frac{a}{W} - \frac{a}{W}\right)^3} \left[0,99 - \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left(1,3 - 1,2\left(\frac{a}{W}\right) + 0,7\left(\frac{a}{W}\right)^2\right) \right] - \left(\frac{\frac{a}{W}}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)}\right)^2 \left[\left(1 - 2\left(\frac{a}{W}\right)\right) \left(1,3 - 1,2\left(\frac{a}{W}\right) + 0,7\left(\frac{a}{W}\right)^2\right) + \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left(1,4\left(\frac{a}{W}\right) - 1,2\right) \right] \right] \quad (4.11)$$

$$\Delta_e = \frac{4W\sigma}{E} \frac{\left(\frac{a}{W}\right)^2}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^2} \left\{ 0,99 - \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left[1,3 - 1,2\left(\frac{a}{W}\right) + 0,7\left(\frac{a}{W}\right)^2 \right] \right\} + \frac{\sigma}{E} L \quad (4.12)$$

$$U_e = \frac{1}{2} F \Delta_e \quad (4.13)$$

$$\eta_p = \frac{(W-a) \left\{ \frac{2a-W}{\sqrt{(W-a)^2 + a^2}} - 1 \right\}}{\sqrt{(W-a)^2 + a^2} - a} \quad (4.14)$$

$$U_p = P_1 A_p, \quad (4.15)$$

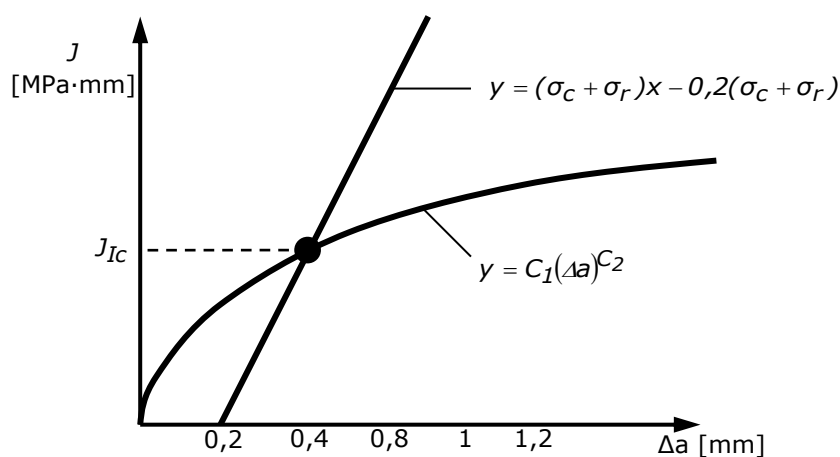
unde
$$P_1 = 1,455 \left(\sqrt{(W-a)^2 + a^2} - a \right) \sigma B \quad (4.16)$$

Valorile obținute pentru integrala J sunt reprezentate grafic funcție de extensia fisurii. Standardul prevede ca rezultatele să poată fi exprimate printr-o funcție putere:

$$J = C_1(\Delta a)^{C_2}, \quad (4.17)$$

unde C_1 și C_2 sunt două constante caracteristice.

Integrala critică J_{IC} corespunde intersecției curbei descrise de ecuația (4.17), cu o dreaptă având panta $m = \sigma_c + \sigma_r$, unde σ_c este limita de curgere, iar σ_r este tensiunea de rupere, dusă prin punctul corespunzător unei extensii de 0,2 mm de pe abscisă, după cum este prezentat în Fig.4.4.



4.2. Determinarea experimentală a integralei critice J_{IC} pentru epruvete nestandardizate din Al 6060 T6

Metodologia determinării experimentale a integralei critice J_{IC} , descrisă în subcapitolul anterior, este destinată utilizării unor epruvete de dimensiuni standardizate. Există, totuși, situații în care utilizarea acestor modele nu este posibilă, fie din cauza indisponibilității materialului în semifabricate suficient de mari încât să se poată prelucra aceste epruvete, fie se dorește determinarea parametrilor de interes pentru configurația reală. Este binecunoscută influența dimensiunii piesei asupra caracteristicilor mecanice ale materialelor, iar acest fapt este important în cazul unor subansambluri utilizate, spre exemplu, în industria aeronautică sau la centralele atomoelectrice.

Efectuarea acestor teste pe mașinile de tracțiune dinamică pune, însă, probleme prin prisma dificultății adaptării dispozitivelor de măsurare a diversilor parametri la configurația piesei sau validității datelor măsurate și prelucrate automat de softul de achiziție. Cea mai importantă problemă este reprezentată de

imposibilitatea utilizării extensometrului pentru determinarea lungimii fisurii prin măsurarea deschiderii la vârf, întrucât calibrarea dispozitivului pentru acest tip de măsurători este configurată exclusiv pentru epruvete compacte. În acest context, utilizarea metodelor numerice pentru îndepărtarea acestor neajunsuri a devenit o alternativă deosebit de atractivă, nivelul de precizie atins de acestea fiind foarte ridicat, îndeosebi la programele care permit definirea materialelor prin șiruri de înregistrări sau diverse schematizări.

4.2.1. Schema de încercare

Întrucât epruvetele, Fig.4.5, au dimensiuni nestandardizate, Fig.4.6, a fost necesară utilizarea unei metode alternative pentru determinarea lungimii fisurii.

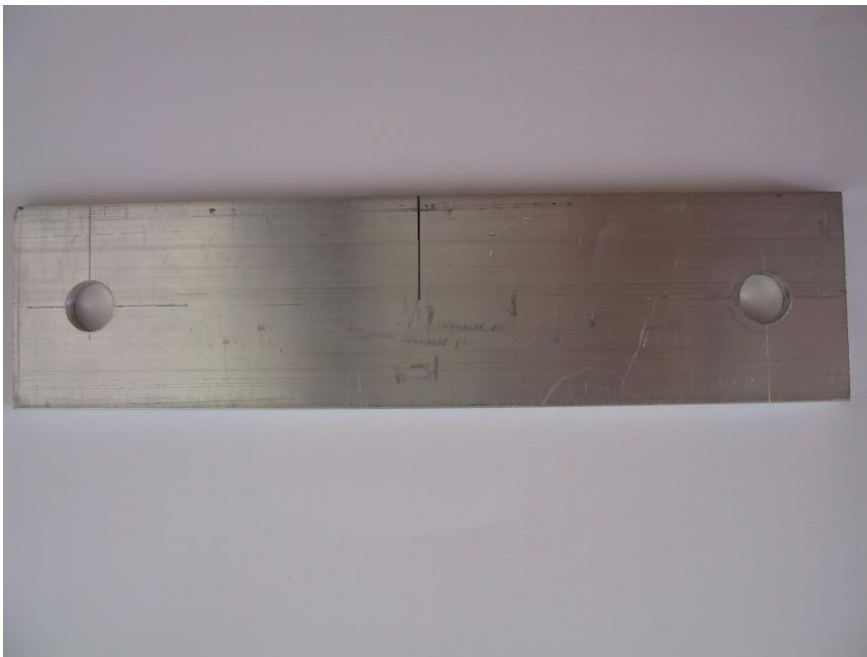


Fig.4.5. Imaginea epruvetei pentru încercări experimentale de determinare a integralei critice J_{IC}

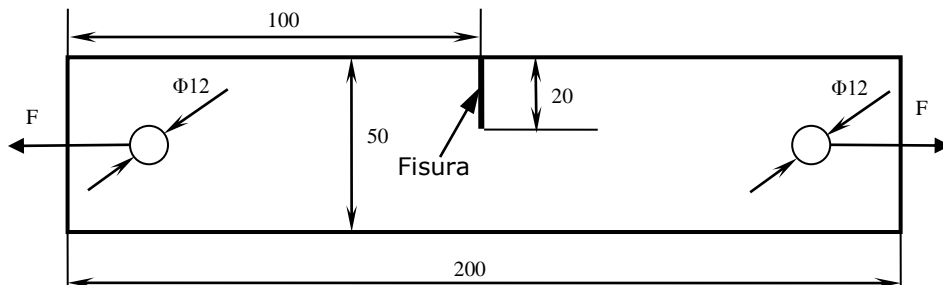


Fig.4.6. Dimensiunile epruvetei

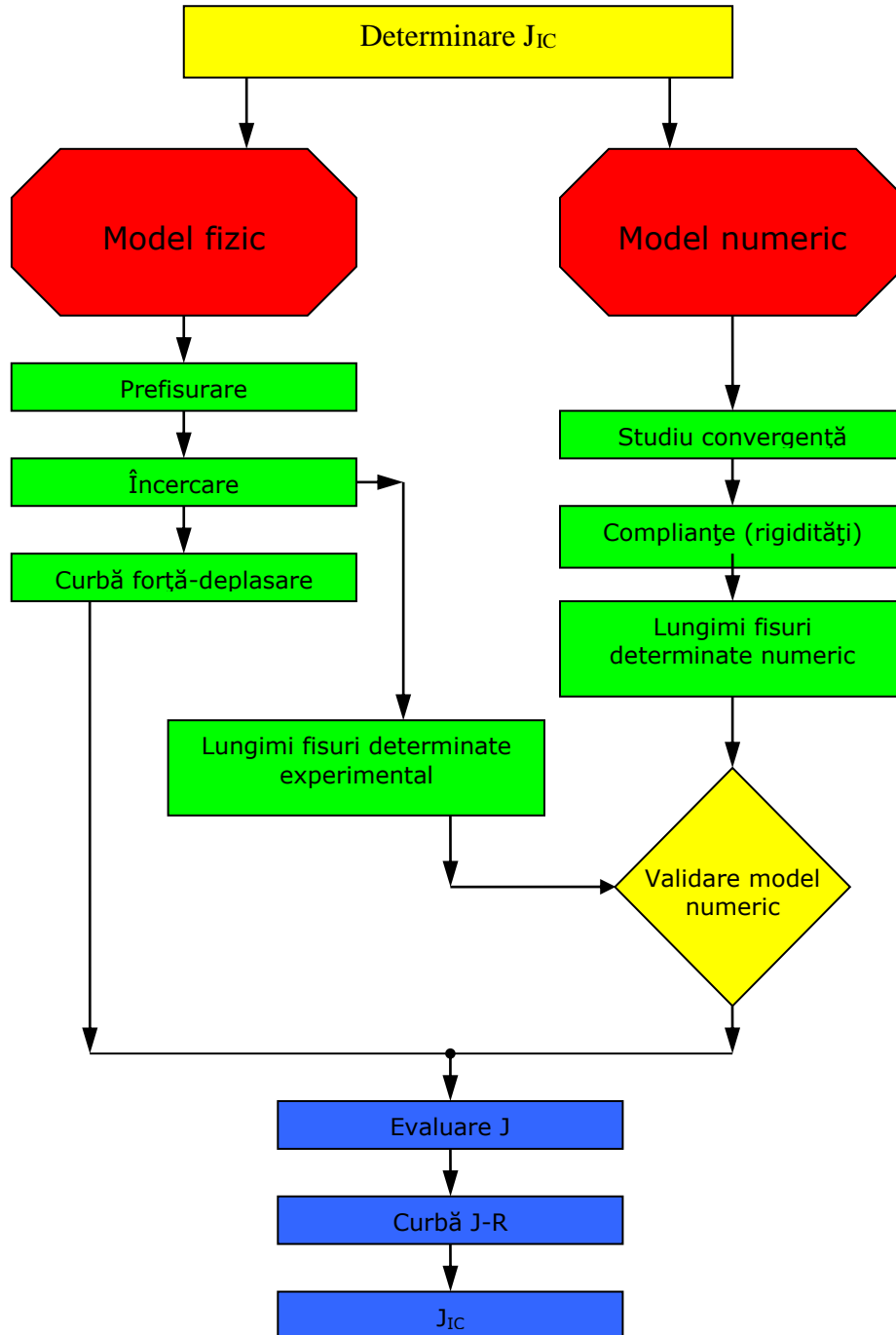


Fig.4.7. Schema logică pentru determinarea experimentală a integralei critice J_{IC} utilizând epruvete nestandardizate

Epruvetele sunt confecționate din profil extrudat din AL6060 T6, cu grosimea de 5 mm. Fisura a fost prelucrată prin electroeroziune cu fir având diametrul de 0,2 mm.

În scopul monitorizării experimentale a lungimii fisurii, s-a folosit un sistem video compus dintr-o cameră de filmat Samsung SIR-4160 și un înregistrator video digital Amax DVR H264. Prin sincronizarea manuală a înregistrării video cu graficul de încărcare a probei, s-a putut face o corelare corectă între sarcina aplicată și dimensiunea fisurii. În plus, programul de extragere a imaginilor din înregistrarea video a permis o derulare cadru cu cadru, oferind posibilitatea eliminării erorilor de sincronizare.

Lungimea fisurii pentru fiecare treaptă de încercare a fost determinată ulterior, pe baza analizei imaginilor, cu ajutorul softului SigmaScan Pro, oferit de AlfaSoft AB pentru o evaluare de 30 de zile.

Schema propusă a derulării încercărilor este prezentată în Fig.4.7.

4.2.2. Determinarea experimentală a curbei forță-deplasare

Pentru determinarea experimentală a integralei critice J_{IC} pentru epruvete din Al 6060 T6, s-a folosit o mașină de tracțiune dinamică Walter+Bai de 100 kN. Epruvetele au fost montate în bacuri prin intermediul unor bolțuri din oțel aliat, cu diametrul de 12 mm.

Softul utilizat a fost DionPro.

Mașina de încercat și montajul epruvetei sunt prezentate în Fig.4.8 și Fig.4.9.

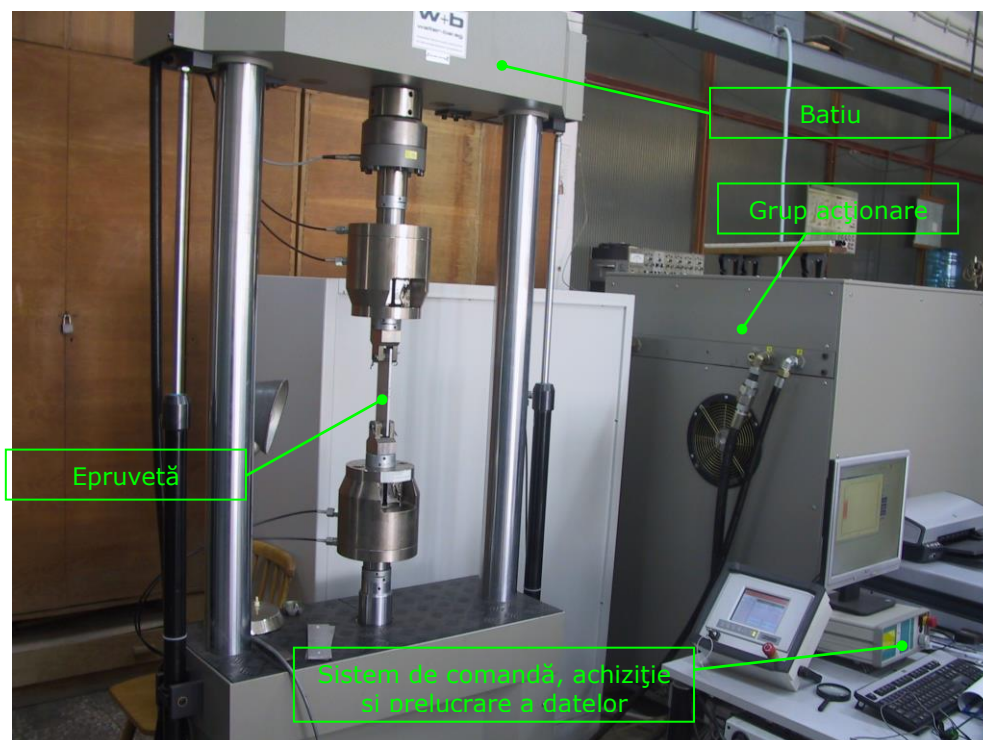


Fig.4.8. Imagine de ansamblu a mașinii de încercări Walter+Bai cu epruveta montată

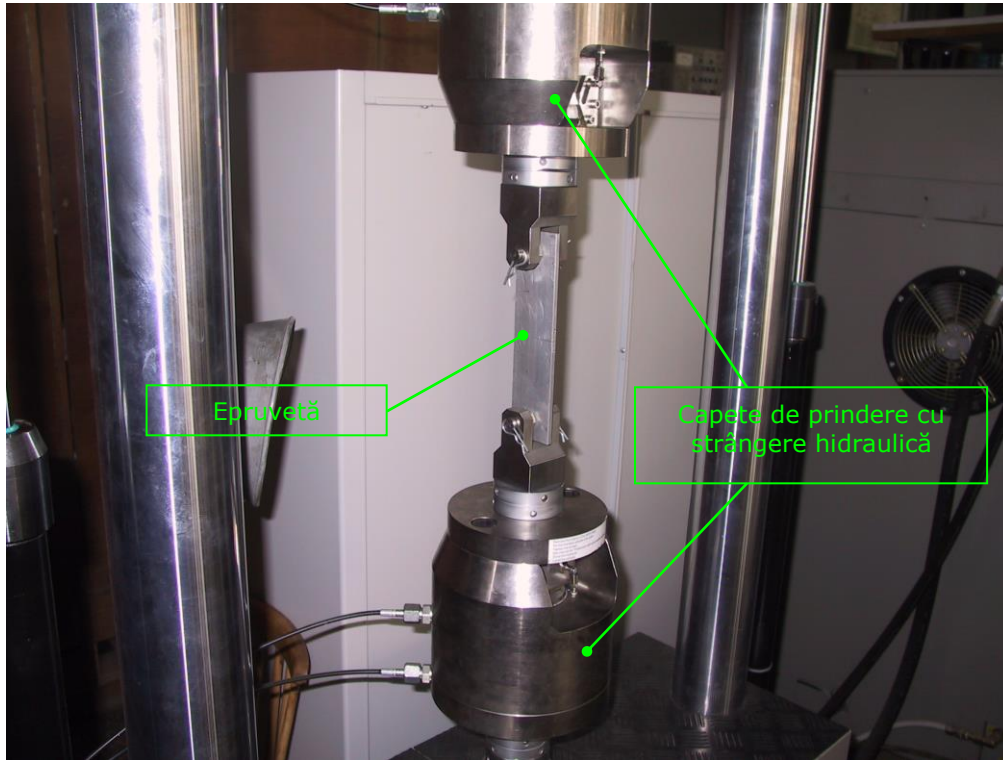


Fig.4.9. Detaliu privind montajul epruvetei în bacuri

Prefisurarea probei

Respectând recomandările indicate în standarde, s-a efectuat prefisurarea probelor pe o lungime de 5 mm, utilizând următorii parametri:

- forța medie: $F_{med} = 3kN$;
- amplitudine: $F_{am} = 2kN$;
- frecvența: 5 Hz

În aceste condiții, am obținut $F_{max} = 5kN$, $F_{min} = 1kN$, respectiv coeficientul de asimetrie $R = 0,2$.

$$\begin{aligned} \frac{K_{max}}{E} &= \frac{1,12\sigma_{max}\sqrt{\pi a_{max}}}{E} = \frac{1,12 \cdot \frac{F_{max}}{A_{min}} \sqrt{\pi a_{max}}}{E} = \frac{1,12 \cdot \frac{5000}{28 \cdot 5} \sqrt{\pi \cdot 2}}{62078} = \\ &= 0,001614\sqrt{mm} = 0,00005106\sqrt{m} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Rezultatele încercărilor

Epruvetele au fost supuse unei încărcări în trepte, cu viteza de 1 mm/minut, urmate de descărcări parțiale.

S-a preferat utilizarea unei strategii de încărcare prin controlul deplasării, nu prin controlul forței aplicate.

Valoarea unei trepte a fost stabilită la 0,25 mm, cu o descărcare parțială de 0,05 mm. Curba astfel obținută este redată în Fig.4.10. De asemenea, s-a impus o preîncărcare cu 0,25 mm, pentru eliminarea jocurilor.

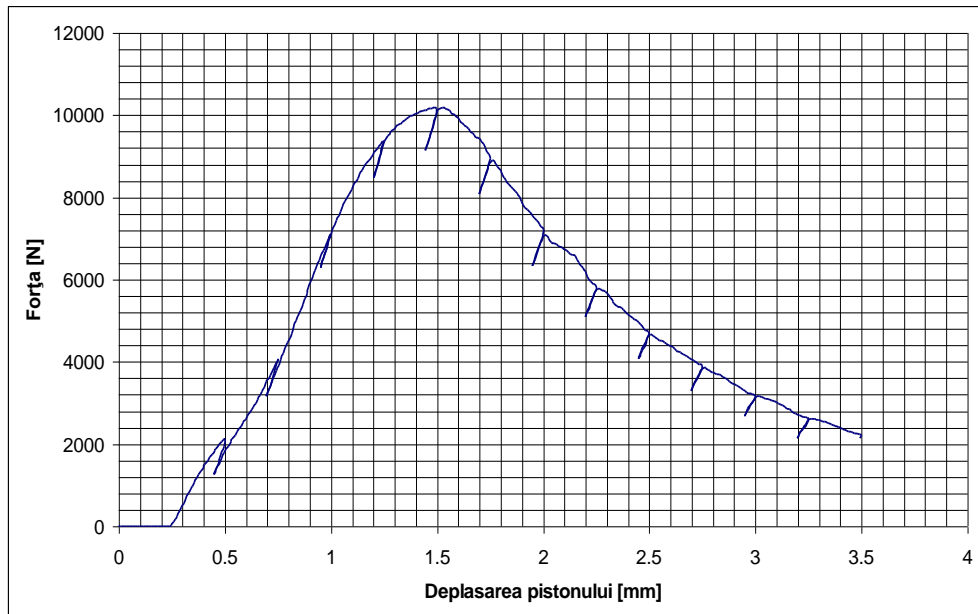


Fig.10. Curba forță-deplasarea pistonului pentru epruveta din Al 6060 T6, cu o fisură inițială de 25 mm

Pornind de la curba din Fig.4.10, s-au calculat valorile complianțelor și ale rigidităților pentru fiecare treaptă de încercare, Tabel 4.1. Pentru ușurința calculului ulterior, s-a preferat utilizarea rigidităților ($r=1/C$).

Conform standardului, aceste determinări s-au făcut exclusiv pentru tronsoanele de descărcare parțială.

Tabel 4.1. Valorile determinate experimental ale complianței probei

Nr. crt.	Complianța C [mm/N]	Rigiditatea $r=1/C$ [N/mm]
1	0,0000558859	17893,62
2	0,0000570776	17520
3	0,0000584270	17115,38
4	0,0000593939	16836,73
5	0,0000595647	16788,46
6	0,0000635762	15729,17
7	0,0000779412	12830,19
8	0,0000870279	11490,57
9	0,0001000000	10000
10	0,0001206897	8285,714
11	0,0001264637	7907,407
12	0,0001511335	6616,667

Lungimea fisurii a fost monitorizată video, cu ajutorul unei camere de filmat și a unui înregistrator video digital. Camera video utilizată pentru aceste încercări are o rezoluție de 600 de linii color și 700 de linii alb-negru, chipset integrat pentru procesarea digitală a semnalului video și stabilizator digital al imaginii. Înregistratorul video prezintă un sistem de operare integrat (Linux), pentru o stabilitate ridicată, hard-disk de 500 GB, port USB pentru transferul datelor, mufă pentru CD/DVD writer și oferă posibilitatea conectării la internet pentru monitorizarea în timp real a filmării.

Camera video a fost plasată în lateralul epruvetei, după cum se poate observa în Fig.4.11.



Fig.4.11. Amplasarea camerei video în lateralul epruvetei

După încheierea achiziției de imagini, s-a folosit un program de redare cadru-cu-cadru, astfel încât s-a putut determina cu precizie imaginea corespunzătoare deschiderii maxime a fisurii pentru fiecare treaptă.

Prelucrarea imaginilor astfel obținute în scopul determinării lungimii fisurii a fost făcută utilizând softul SigmaScan. În Fig.4.12 este prezentată o imagine a epruvetei în timpul testelor. În conformitate cu Fig.4.12, pentru determinarea lungimii fisurii s-a procedat în felul următor:

- pentru început, se alege o origine pentru sistemul de referință, la intersecția celor două linii ajutoare de culoare roșie din partea dreaptă;
- se calibrează imaginea funcție de lungimea fisurii inițiale (înaintea prefisurării), măsurată cu ajutorul șublerului digital, cu precizie de 0,01 mm;
- se marchează poziția vârfului fisurii printr-o linie verticală (linia roșie din partea stângă);
- se măsoară distanța dintre cele două segmente verticale, care coincide cu lungimea fisurii;

- dacă fisura are o traiectorie oarecare, se împarte flancul fisurii în segmente rectilinii consecutive, care sunt ulterior măsurate. Lungimea fisurii se obține prin însumarea acestor rezultate.

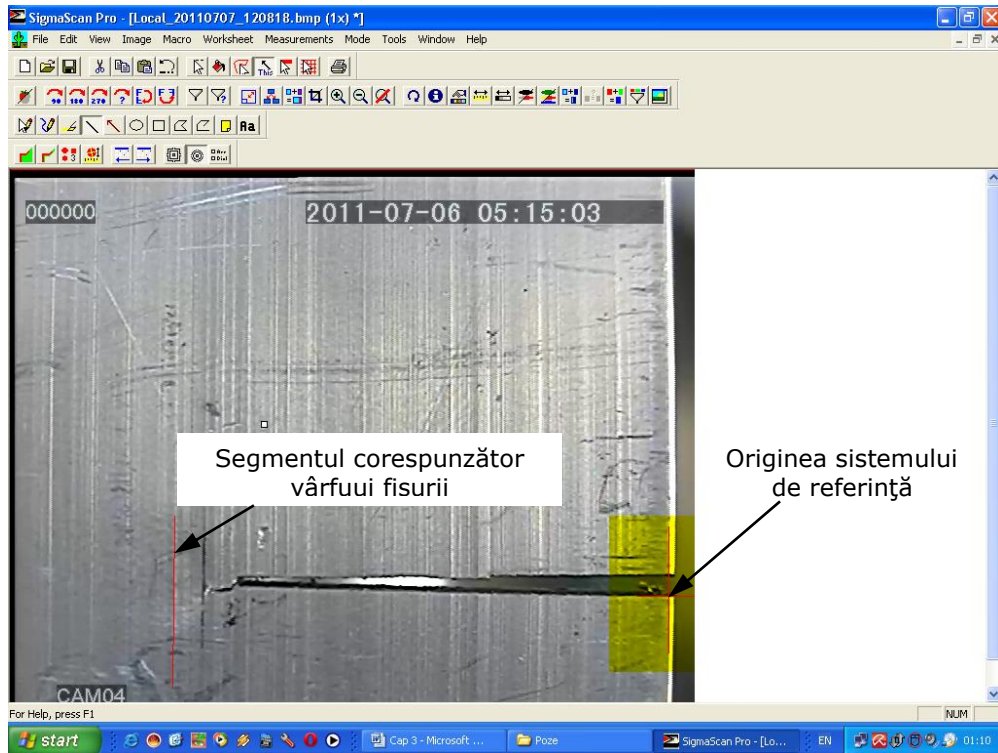


Fig.4.12. Imagine a epruvetei în timpul testelor pentru determinarea lungimii fisurii cu ajutorul softului SigmaScan Pro

Valorile lungimii fisurii corespunzătoare fiecărei trepte de încărcare, determinate experimental, sunt prezentate în Tabelul 4.2.

Tabel 4.2. Valorile determinate experimental ale lungimii fisurii

Treapta de încărcare	Rigiditatea $r=1/C$ [N/mm]	Lungimea fisurii a [mm]
1	17893,62	25,10
2	17520	25,83
3	17115,38	26,95
4	16836,73	27,23
5	16788,46	27,37
6	15729,17	28,19
7	12830,19	30,98
8	11490,57	32,23
9	10000	33,51
10	8285,714	34,60
11	7907,407	35,31
12	6616,667	36,16

4.2.3. Determinarea numerică a rigidității epruvetei cu fisuri

Modelul numeric a fost elaborat folosind programul de analiză a stării de tensiune și deformație ABAQUS 6.9-3.

Întrucât epruveta este simetrică după direcția orizontală, s-a utilizat modelul de calcul simplificat, prezentat în Fig.4.13.

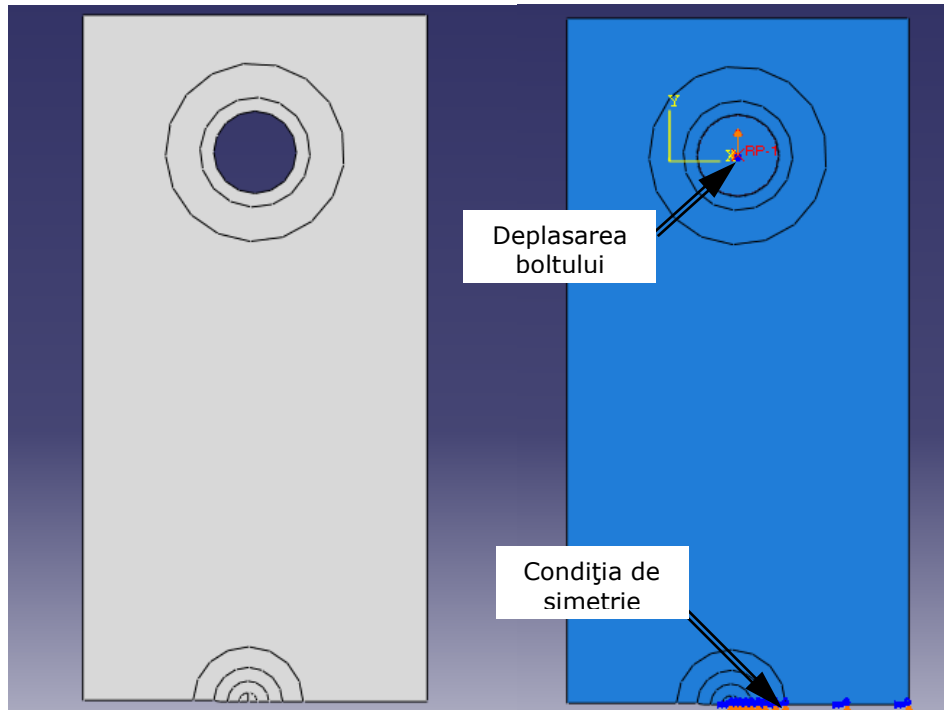


Fig.4.13. Condițiile pe contur pentru modelul de calcul simplificat

Tracțiunea a fost aplicată boltului asamblat cu contact în orificiul destinat, iar în partea de jos au fost impuse condițiile de simetrie.

În conformitate cu încercările experimentale $\sigma - \varepsilon$ pentru Al6060 T6, [Negru, 2009], materialul a fost definit prin seturi de înregistrări, cu luarea în seamă a comportării sale elasto-plastice, soluție care a oferit o precizie sporită analizei. De asemenea, comparativ cu utilizarea modelului Ramberg-Osgood, s-a putut constata o stabilitate mai mare a soluției și tolerarea mult mai bună a deformațiilor plastice mari.

Modelul este de tip placă bidimensională, aflată în condiții de stare plană de tensiune.

Pentru a spori precizia determinărilor, în zona vârfului fisurii, precum și în zona găurii pentru bolt s-au efectuat partiționări suplimentare ale modelului. Aceste partiții vor servi rafinării locale a discretizării.

Studiul convergenței soluției numerice

Modelul numeric a fost destinat determinării rigidității epruvetelor cu fisură. Întrucât deplasarea boltului a fost stabilită în conformitate cu parametrii încercării experimentale (0,25 mm, apoi o descărcare parțială cu 0,05 mm), reacțiunea din bolt după direcția verticală a fost parametrul de interes. În consecință, s-a studiat

convergența soluției numerice pentru acest parametru, pentru un model cu o fisură de 24 mm.

S-au folosit două tipuri de elemente (tetragonale și triunghiulare), respectiv niveluri diferite de rafinament ale discretizării. Rezultatele au arătat că este recomandabilă utilizarea elementelor tetragonale, cu o discretizare cât mai fină, Fig.4.14. Pentru elementele triunghiulare, rafinamentul discretizării a avut o influență ridicată, cu o diferență între rezultate de până la 10%. Discretizarea cu elemente preponderent tetragonale a prezentat o sensibilitate mult mai scăzută la rafinamentul discretizării, fiind relativ facilă obținerea convergenței soluției.

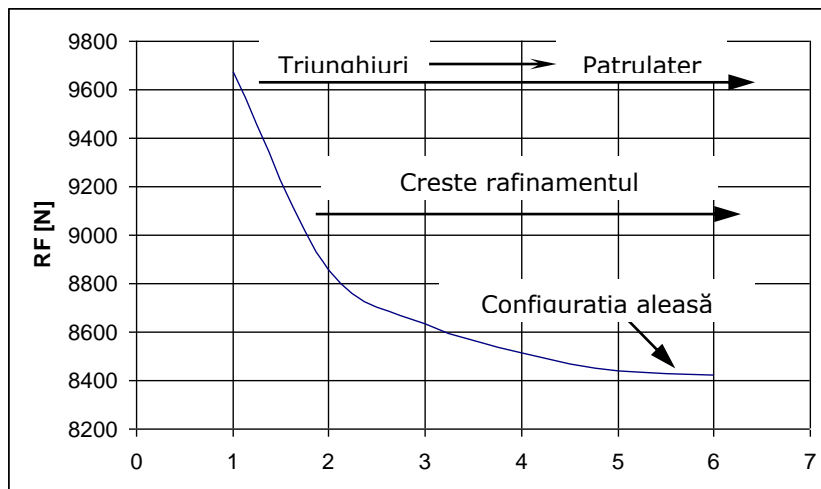


Fig.4.14. Studiul convergenței soluției numerice

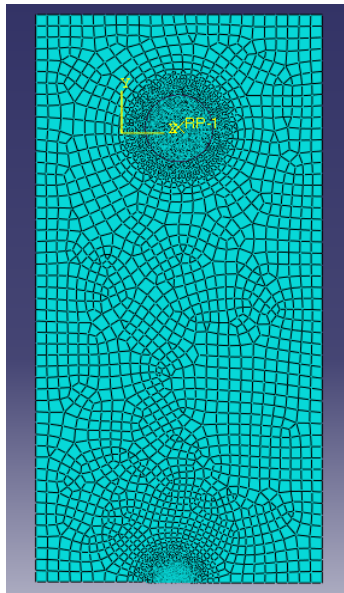


Fig.4.15. Imagine privind discretizarea modelului simplificat de calcul

Pentru toate modelele a fost aleasă o discretizare cu elemente preponderent tetragonale și rafinament progresiv atât la vârful fisurii, cât și în zona găurii pentru bolt, Fig.4.15.

Dimensiunea globală a partiționării a fost aleasă de 2mm; în jurul vârfului fisurii s-a făcut o trecere treptată de la 2mm, la 0,1 mm. Aceasta a fost discretizarea maximă permisă de resursele de calcul disponibile.

Corelarea rigidității modelelor cu lungimea fisurii

Pentru obținerea unei funcții de corelare a rigidității epruvetei cu lungimea fisurii, s-au folosit modele cu fisuri pornind de la 21 mm, până la 40 mm.

Pentru fiecare model s-a analizat evoluția reacțiunii din bolt (definit ca solid rigid) în raport cu deplasarea punctului de referință al boltului. În Fig.4.16 este prezentată curba reacțiune-deplasare bolt pentru fisura de 24 mm.

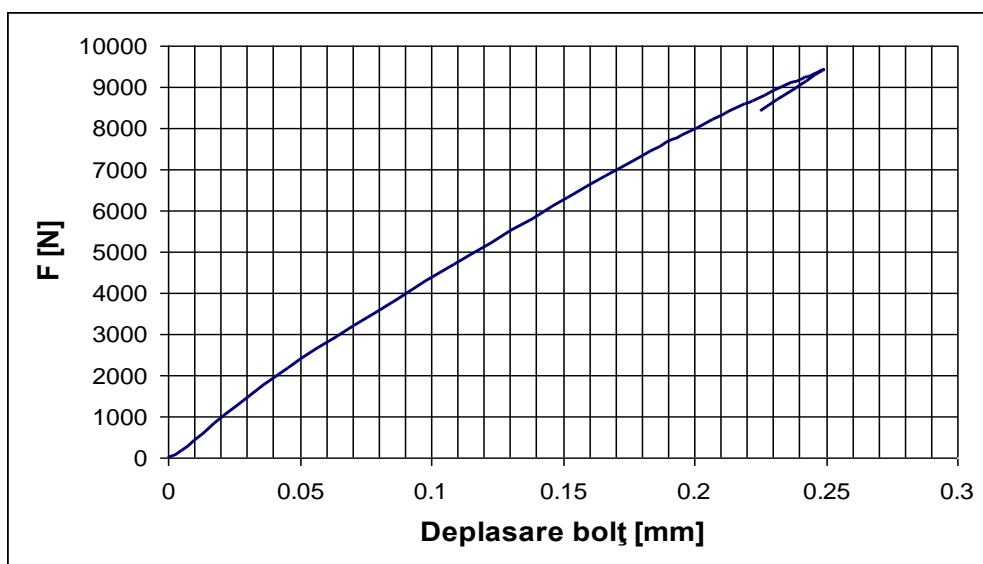


Fig.4.16. Diagrama reacțiune-deplasare bolt pentru modelul cu fisură de 24 mm

Considerând doar porțiunea de descărcare, s-a determinat rigiditatea plăcii pentru fiecare lungime de fisură (definită prin raportul dintre variația forței și variația deplasării). Rezultatele sunt prezentate în Tabelul 4.3.

Tabel 4.3. Rigiditatea și complianța epruvetelor funcție de lungimea fisurii

Lungime fisură [mm]	Rigiditate [N/mm]	Complianță [mm/N]
21	23092	4,3305E-05
22	22338,2	4,4766E-05
24	20145,2	4,964E-05
26	18125,4	5,5171E-05
28	15744,8	6,3513E-05
30	13123,4	7,62E-05
32	10635,4	9,4026E-05

34	8099,2	0,00012347
36	6016,2	0,00016622
38	4266,4	0,00023439
40	2882	0,00034698

În Fig.4.17 este reprezentată grafic corespondența dintre lungimea fisurii și rigiditate. Se observă, de asemenea, ecuația funcției de corespondență:

$$y = -0.0008889401x + 41.7657798231 \quad (4.19)$$

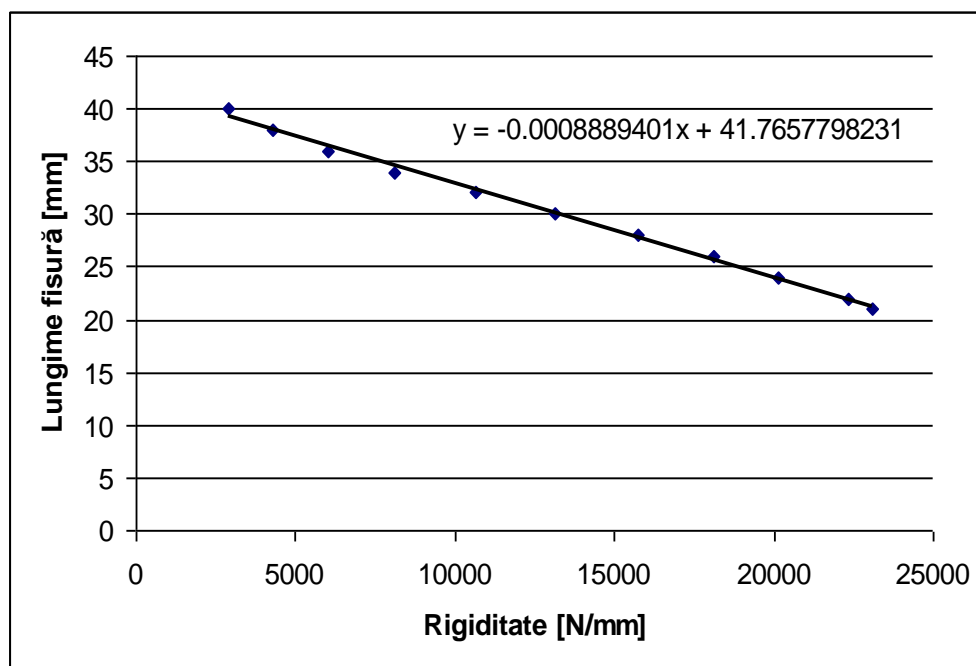


Fig.4.17. Corespondența dintre lungimea fisurii și rigiditatea epruvetei

4.2.4. Validarea modelului de calcul

Aplicând funcția (4.19) pentru rigiditățile obținute experimental din Tabelul 4.1, se obțin lungimile fisurii pentru fiecare pas de încărcare. Rezultatele acestor calcule sunt prezentate în Tabelul 4.4.

Tabel 4.4. Lungimea fisurii experimentale, obținută pe baza corelării rezultatelor numerice

Nr. crt.	Complianța C [mm/N]	Rigiditatea $r=1/C$ [N/mm]	Lungimea fisurii a [mm]
1	0,0000558859	17893,62	25,85365
2	0,0000570776	17520	26,18577
3	0,0000584270	17115,38	26,54545
4	0,0000593939	16836,73	26,79315
5	0,0000595647	16788,46	26,83606

6	0,0000635762	15729,17	27,77771
7	0,0000779412	12830,19	30,35473
8	0,0000870279	11490,57	31,54558
9	0,0001000000	10000	32,8706
10	0,0001206897	8285,714	34,3945
11	0,0001264637	7907,407	34,73079
12	0,0001511335	6616,667	35,87818

Întrucât modelul de calcul numeric a avut implementată curba reală a materialului, valorile obținute pentru lungimea fisurii țin cont inclusiv de zona plastică de la vârf. În aceste condiții, corectarea lungimii fisurii cu zona plastică adiacentă nu mai este necesară.

În Fig.4.18 sunt prezentate, comparativ, curbele lungimilor fisurii determinate pe baza analizei imaginilor, respectiv prin corelarea rezultatelor numerice.

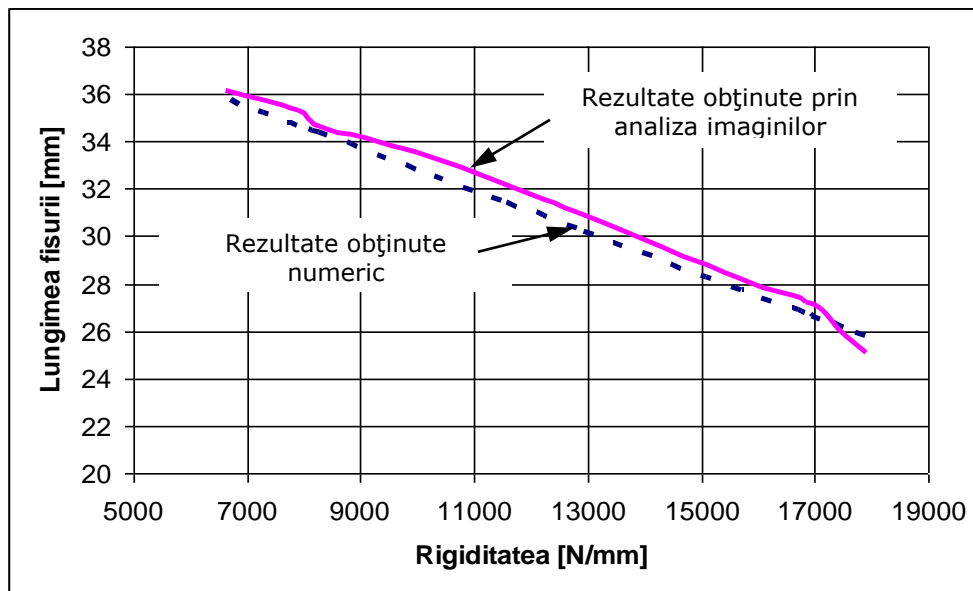


Fig.4.18. Compararea rezultatelor obținute pe cale experimentală și numerică

Întrucât diferență dintre cele două seturi de rezultate a fost de maximum 2,91 %, se poate considera că modelul numeric este valid.

4.2.5. Determinarea integralei critice J_{Ic}

În vederea determinării integralei critice J_{Ic} , s-a preferat utilizarea unei curbe J-R obținută pe cale numerică. S-a considerat că rezultatele astfel obținute sunt mult mai precise comparativ cu metoda analitică de calcul a integralei J .

Astfel, modelele numerice utilizate în subparagrafele anterioare au fost adaptate prin înlocuirea deplasării bolțului cu o forță de tracțiune, respectiv modificarea lungimii fisurii. Pentru forță s-au folosit valorile din curba experimentală din Fig.4.10, iar pentru lungimea fisurii s-au utilizat valorile determinate tot pe cale experimentală din Tabelul 4.2.

Studiul convergenței soluției numerice

Având în vedere faptul că, în analiza numerică, valorile parametrilor de mecanica ruperii pot diferi de la un contur de calcul la altul, se impune studiul convergenței soluției obținute pentru integrala J .

În cele ce urmează, se prezintă studiul convergenței soluției numerice pentru un model cu fisura de 25,83 mm. Conform diagramei din Fig.4.10, această valoare a lungimii fisurii se obține pentru încărcarea cu o forță de 4061 N.

În jurul vârfului fisurii s-a practicat aceeași rafinare a discretizării ca și în cazul celorlalte modele utilizate pentru validare, după cum se poate vedea în Fig.4.19.

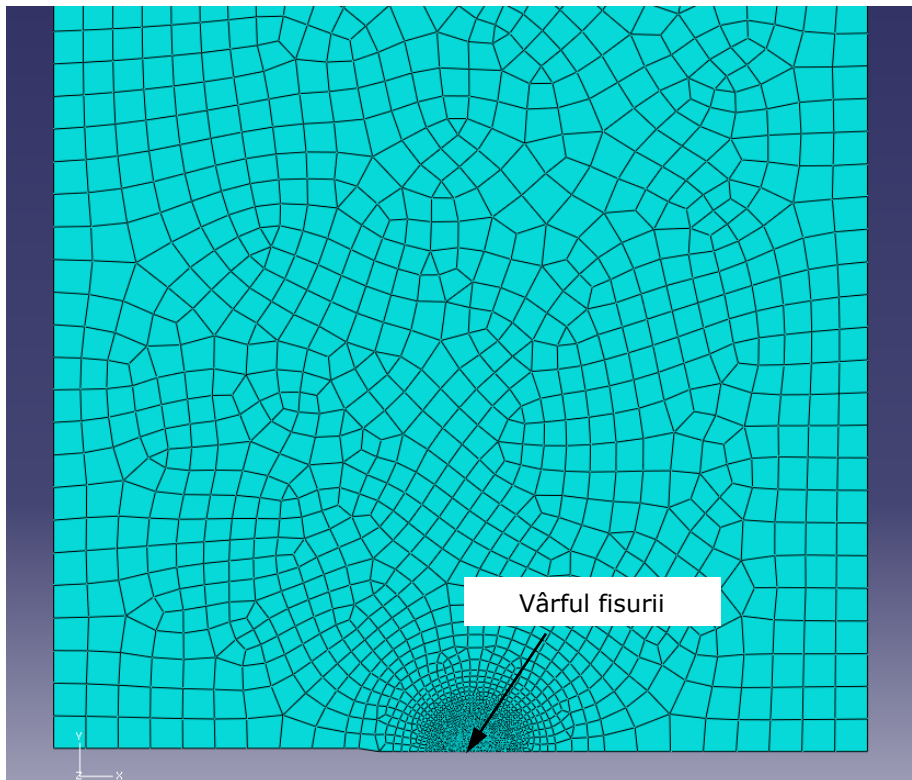


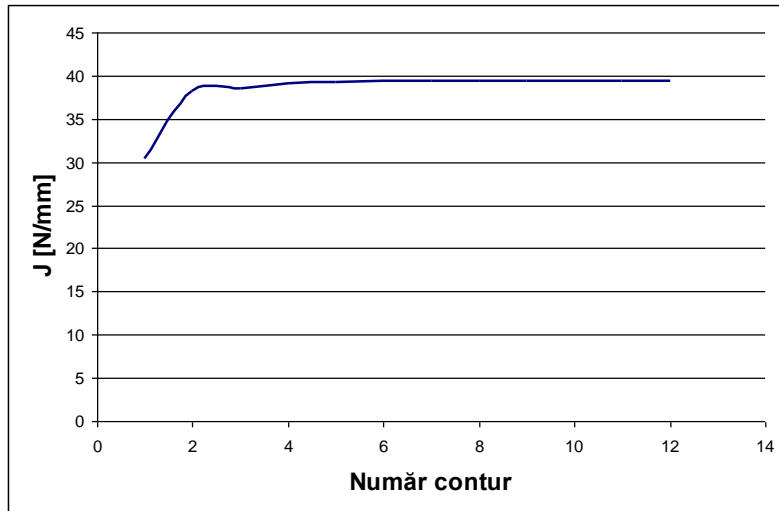
Fig.4.19. Rafinarea discretizării la vârful fisurii

Conform algoritmului de calcul al integralei J în programul ABAQUS, primul contur corespunde elementului finit de la vârful fisurii; următoarele contururi sunt obținute prin adăugarea elementelor finite adiacente conturului anterior.

Pentru modelul de față au fost luate în considerare 12 contururi succesive, pentru fiecare contur în parte fiind compilată o valoare a integralei J . În Fig.4.20 este prezentată curba descrisă de aceste valori.

Se poate observa că soluția converge începând cu conturul numărul 8. Pentru mai multă exactitate, în cazul tuturor modelelor a fost performat un studiu de convergență a soluției.

Pentru toate modelele s-a obținut convergența pentru rezultatele corespunzătoare conturilor 7 sau 8.

Fig.4.20. Convergța soluției numerice pentru integrala J **Trasarea curbei J-R și determinarea integralei critice J_{IC}**

Pe baza modelelor de calcul descris anterior, s-au determinat valorile integralei J pentru diverse valori ale creșterii fisurii $\Delta a = a - a_0$. Lungimea inițială a fisurii a fost determinată cu ajutorul șublerului digital, având valoarea $a_0 = 24,76\text{mm}$.

În Fig.4.21, punctele de pe graficul $J - \Delta a$ au fost interpolate printr-o funcție putere, având ecuația:

$$y = 58,888x^{0,6348} \quad (4.20)$$

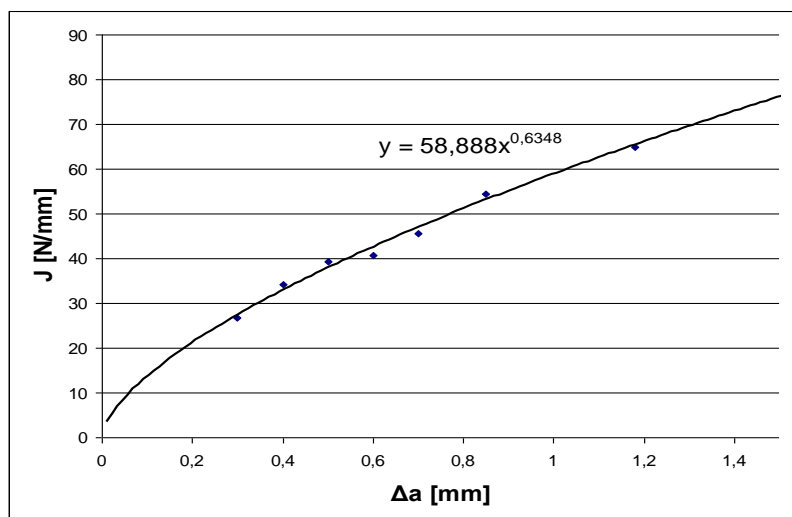


Fig.4.21. Curba J-R pentru epruvetele din Al6060 T6

Pentru determinarea valorii integralei critice J_{IC} , trebuie determinată și ecuația dreptei cu panta egală cu $\sigma_C + \sigma_r$, care taie abscisa prin punctul $x=0,2$, conform Fig.4.4. Punctul de intersecție a celor două curbe corespunde integralei critice J_{IC} , Fig.4.22.

$$y = (\sigma_C + \sigma_r)x - 0,2(\sigma_C + \sigma_r) = (213 + 238)x - 0,2(213 + 238) = 451x - 90,2 \quad (4.21)$$

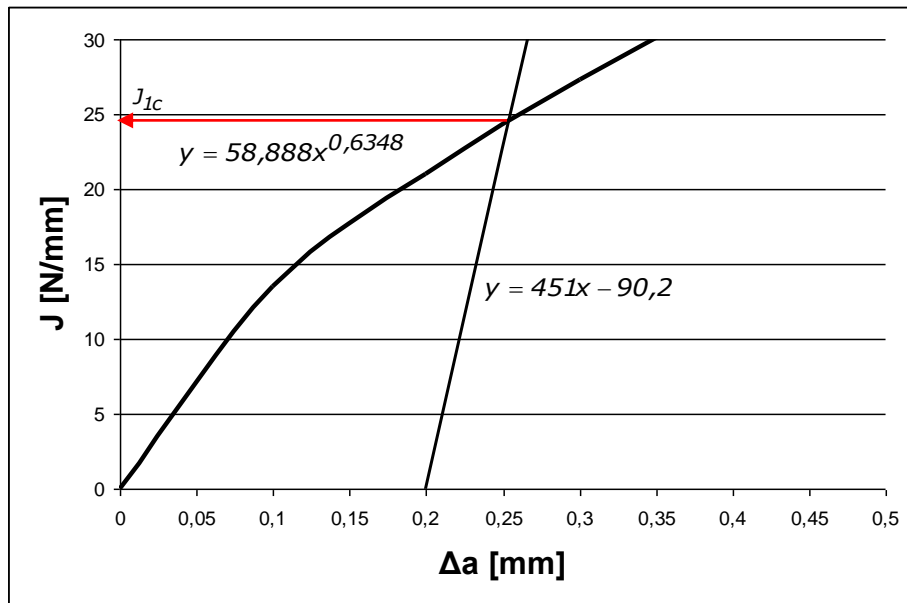


Fig.4.22. Determinarea grafică a integralei critice J_{IC}

Din Fig.4.22 se obține $J_{IC} = 24,54 \frac{N}{mm}$.

4.3. Concluzii

- procedeul de determinare a integralei critice J_{IC} este reglementat prin standardele ASTM E813, respectiv ASTM 561;
- determinarea integralei critice J_{IC} se poate face pentru multiple geometrii ale epruvetelor;
- integrala critică J_{IC} poate fi determinată și cu ajutorul epruvetelor nestandardizate;
- metodele numerice oferă o alternativă viabilă la încercările de laborator, în cazul în care sunt validate modelele de calcul;

-
- utilizând programul ABAQUS, problema convergenței rezultatelor și a validării modelelor de calcul este simplificată prin definirea corectă a materialelor, condiții de contur corespunzătoare și rafinări locale ale discretizării;
 - pentru epruvete dn Al 6060T6, dependența dintre lungimea fisurii și rigiditate este una liniară;
 - evaluarea lungimii fisurii prin prelucrarea imaginilor video ale epruvetei folosind softuri specializate reprezintă o metodă precisă și ușor aplicabilă oricărei configurații geometrice;
 - pentru tipul de încărcare aplicat, se observă o creștere neuniformă a fisurii;
 - rezultatele obținute prin intermediul modelelor numerice valide au putu fi interpolate după o funcție putere;
 - valoarea integralei critice pentru configurația dată este $J_{IC} = 24,54 \frac{N}{mm}$.

5. CONCLUZII ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE

Lucrarea de față reprezintă o abordare sistematizată a problematicei determinării numerice a parametrilor de mecanica ruperii, cu punctarea atât a fundamentelor teoretice, cât și a metodicii de calcul, respectiv interpretarea rezultatelor obținute. Accentul s-a pus aproape exclusiv pe metoda elementelor finite, cu derivata acesteia – metoda elementelor finite extinse, din considerente practice și de aplicabilitate, întrucât marea majoritate a aplicațiilor sunt cadrate pe aceste metode.

În cuprinsul lucrării s-au identificat următoarele contribuții personale ale autorului și concluzii pertinente care rezultă din acestea:

- studiu bibliografic cuprinzător și sinteză originală a principalelor metode numerice utilizate în aplicațiile de mecanica ruperii, cu punctarea principiilor matematice care stau la baza acestora;
- sinteză bibliografică a tehnicilor de modelare a fisurilor utilizând elemente finite și elemente finite extinse;
- sinteză bibliografică privind metodele de calcul numeric al parametrilor de mecanica ruperii;
- efectuarea unui studiu al concentrării tensiunilor în zona racordului dintre secțiunea pătrată și cea rotundă. S-a confirmat faptul că coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor K_t scade odată cu creșterea razei de racordare;
- elaborarea unui model de calcul utilizând elemente finite extinse, în scopul determinării punctului de inițiere și a direcției de propagare a fisurii pentru arborele solicitat în modul mixt;
- elaborarea modelelor de calcul pentru arborele cu fisură, pentru diferite geometrii ale fisurii, în vederea calculului factorilor de intensitate a tensiunii;
- compararea factorilor de intensitate a tensiunii obținuți pentru diferite geometrii ale fisurii. S-a pus în evidență că modul I este predominant în toate cazurile. În plus, valorile maxime ale factorilor de intensitate a tensiunii pentru modurile I și III de rupere sunt atinse în zona de mijloc a frontului fisurii, denotând o propagare a fisurii spre interiorul arborelui. De asemenea, exceptând factorii de intensitate a tensiunii pentru modul II (K_{II}), se observă o creștere a valorii acestora odată cu adâncimea fisurii. În cazul fisurii cu adâncimea de 1,5 mm se poate observa un puternic efect de margine, dar și o variație semnificativă a factorilor de intensitate a tensiunii pe frontul fisurii;
- elaborarea modelului de calcul și studiul distribuției globale a tensiunilor pentru un stent coronarian din aliaj de Cobalt L-605. Zonele cele mai solicitate sunt „vârfurile” înfășurărilor de sârmă;
- elaborarea unui model de calcul simplificat pentru calculul parametrilor de mecanica ruperii în cazul stentului;
- implementarea unor fisuri cu geometrii diverse în modelul simplificat de calcul al stentului coronarian.
- efectuarea unui studiu de convergență a rezultatelor pentru contururi succesive pe care se calculează integrala J , și din aceasta, factorii de

- intensitate a tensiunii. S-a arătat că soluția este stabilă începând cu conturul numărul 2;
- compararea rezultatelor obținute pentru fisurile „verticale” de la vârful segmentului de stent. Rezultatele au confirmat că fisurile de margine sunt cele mai periculoase;
 - compararea rezultatelor obținute pentru fisurile „orizontale” de la vârful segmentului de stent, cu relevarea existenței Modurilor II și III de deschidere a fisurii pentru aceste cazuri;
 - compararea rezultatelor obținute pentru fisurile din zona „brațelor” segmentului de stent. Valorile factorilor de intensitate a tensiunii au fost mai mici în comparație cu celelalte două cazuri;
 - elaborarea modelelor de calcul în programul COSMOS pentru placa bidimensională cu fisură înclinată, solicitată la tracțiune și calculul factorilor de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} . Se observă o descreștere constantă a lui K_I până la un unghi al fisurii de 65° , după care rămâne constant. Variația lui K_{II} este mult mai interesantă: crește până la unghiul de 45° , după care începe să scadă. Pentru toată plaja de variație a unghiului β , Modul I de fisurare este dominant; doar pentru $\beta = 65^\circ$, K_{II} este ușor superior lui K_I ;
 - elaborarea modelelor de calcul în programul COSMOS pentru placa bidimensională cu fisură înclinată, solicitată la încovoiere și calculul factorilor de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} . Alura graficelor este similară cazului epruvetelor SECT, dar valorile sunt cu un ordin de mărime inferioare;
 - elaborarea modelelor de calcul pentru placa plană, solicitată la tracțiune, cu două fisuri colineare având diverse geometrii și calculul factorului de intensitate a tensiunii total K_{tot} pentru fisura de margine. S-a pus în evidență o variație redusă a lui K_{tot} funcție de cei doi parametri (a și d).
 - elaborarea în programul FRANC2D, a modelelor de calcul pentru o placă bidimensională, cu două fisuri, în scopul studierii influenței fenomenului de interacțiune a fisurilor asupra propagării fisurii-etalon de margine. Fisurile interacționează chiar și la distanțe mari (mai mari decât lungimea fisurii); interacțiunea fisurilor se manifestă pentru diferite configurații: fisuri de margine suprapuse, fisuri de margine alăturate, fisură de margine și fisură interioară; direcțiile de propagare ale celor două fisuri prezintă o tendință divergentă; interacțiunea este mai puternică dacă ambele fisuri sunt fisuri de margine;
 - conceperea unui program automat de prelucrare a fișierelor-rezultat ale programului FRANC2D, utilizând mediul de programare Turbo Pascal;
 - sinteza bibliografică privind realizarea încercărilor experimentale pentru determinarea integralei critice J_{IC} ;
 - conceperea unei metodologii proprii și a schemei logice pentru determinarea experimentală a integralei critice J_{IC} utilizând epruvete nestandardizate;
 - determinarea experimentală a curbei forță-deplasare pentru epruveta din Al 6060T6, cu fisură inițială de 25 mm și determinarea valorilor complianței pentru treptele de încărcare;
 - determinarea experimentală a lungimii fisurii, utilizând un sistem de captură video și prelucrarea digitală a imaginilor folosind programul SigmaScan Pro;

- evaluarea lungimii fisurii prin prelucrarea imaginilor video ale epruvetei folosind softuri specializate reprezintă o metodă precisă și ușor aplicabilă oricărei configurații geometrice;
- elaborarea modelelor pentru calculul numeric al rigidității epruvetei și stabilirea relației de corespondență dintre rigiditate și lungimea fisurii;
 - calculul numeric al integralei J pentru diverse lungimi de fisură (cu aplicarea forței determinată experimental) și trasarea curbei J - R ; rezultatele obținute prin intermediul modelelor numerice valide au putu fi interpolate după o funcție putere;
 - determinarea grafică a integralei critice J_{IC} pentru epruveta din AL 6060 T6, aflată în stare plană de tensiune.

BIBLIOGRAFIE

- ABAQUS 6.9-3 Documentation.
- Alluri, S.N. and Nishoika. T., On Some Recent Advances in Computational Methods in the Mechanics of Fracture, *Advances in Fracture Research: Seventh International Conference on Fracture*, Pergamon Press, Oxford, 1989 pp. 1923-1969.
- Anderson, T.L., *Fracture Mechanics*, CRC Press, ISBN: 0-8493-4260-0, USA, 1995.
- Asadpoure, A., Analysis of layered composites by the extended finite element method, MSc thesis, Sharif University of Technology, Tehran, Iran, 2006.
- ASTM E561-98, Standard Practice for R-Curve Determination, *Annual Book of ASTM Standards*, vol. 03, 2001.
- ASTM E813-89, Standard Test Method for J_{Ic} , a Measure of Fracture Toughness, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1987.
- ASTM E399-90, Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1990.
- Atluri, S.N. and Shen, S., The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method, Tech Science Press, USA, 2002.
- Barenblatt. G.I., The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, Academic Press, 1962, pp. 55-129.
- Barnett, D. M., and R. J. Asaro, The Fracture Mechanics of Slit-Like Cracks in Anisotropic Elastic Media, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 20, 1972, pp. 353-366.
- Barsoum, R.S., On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 1, 1976, pp. 25-37.
- Bazant, Z.P. and Planas, J., *Fracture and Size Effects in Concrete and Other Quasibrittle Materials*, CRC Press, USA, 1997.
- Beebe, H.G., Cronenwett, J.L., Katzen, B.T., Brewster, D.C., Green, R.M., Results of an aortic endograft trial: impact of device failure beyond 12 months, *Journal of Vascular Surgery*, Vol. 33, 2001, pp. 55-63.
- Bellec, J. and Dolbow, J.E., A note on enrichment functions for modelling crack nucleation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 2003, pp. 921-932.
- Belytschko, T. and Black, T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 45, 1999, pp. 601-620.
- Belytschko, T., Chen, H., Xu, J. and Zi, G., Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, 2003, pp. 1873-1905.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp. 229-256.
- Blandford, G.E. and Ingraffea, A.R., Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, p. 387-404.

- Brebbia, C.A. and Dominguez, J., *Boundary Elements. An Introductory Course*, Second Edition, WIT Press, Southampton, 2001, ISBN 1-85312-160-6.
- Brown W.F. Jr. and Srawley. J.E.. Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials. ASTM STP 410. American Society for Testing and Materials. Philadelphia. PA. 1966.
- Budiansky, B. and Rice, J.R., Conservation Laws and Energy Release Rates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, 1973, p. 201-203.
- Budyn, E., Zi, G., Moes, N. and Belytschko, T., A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, 2004, pp. 1741-1770.
- Bueckner, H.F., A Novel Principle for the Computation of Stress Intensity Factors., *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol 50, 1970, pp. 529-545.
- Burdckin, F.M. and Stone, D.E.W., The Crack Opening Displacement Approach to Fracture Mechanics in Yielding Materials, *Journal of Strain Analysis*, Vol. 1, 1966, pp. 145-153.
- Cao, Y.G., Sun, X.Y., Tanaka, K., Study on the relationship between J-integral and COD, *Acta Metall. Sin.*, Vol. 20, No. 6, 2007, pp. 417-424.
- Carpenter, W.C., Read, D.T and Dodds, R.H. Jr., Comparison of Several Path Independent Integrals Including Plasticity Effects, *International Journal of Fracture*, Vol. 31, 1986, p. 303-323.
- Chakfe, N., Dieval, F., Riepe, G., Mathieu, D., Zbali, I., Thaveau, F., Heintz, K., Kretz, G., Durand, B., Influence of the textile structure on the degradation of explanted aortic endoprostheses, *European Journal of Vascular and Endovascular Surgery*, Vol. 27, 2004, pp.33-41.
- Chan, S.K., Tuba, I.S., Wilson, W.K., On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 2, No. 1-A, pp. 1-17, 1970.
- Chapra, S.C., Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers, Second Edition*, McGraw-Hill, Inc., 1985, ISBN 0-07-909944-0.
- Chung, Y-I, Song, J-H, Improvement of ASTM compliance offset method for precise determination of crack opening load, *International Journal of Fatigue*, Vol. 31, 2009, pp. 809-819.
- Constantinescu, D.M., *Dezvoltări și aplicații în mecanica ruperii și oboseală*, Ed. Academiei Române, București, 2003.
- Cottrell, B. and Rice. J.R., Slightly Curved or Kinked Cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 16, 1980, pp. 155-169.
- Cravero, S., Ruggieri, C., Estimation procedure of J-resistance curves for SE(T) fracture specimens using unloading compliance, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, 2007, pp. 2735-2757.
- Cruse, T.A., An Improved Boundary-Integral Equation for Three Dimensional Elastic Stress Analysis, *Computers and Structures*, Vol. 4, 1974, pp. 741-754.
- Cruse, T.A., *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1988.
- Daux, C., Moes, N., Dolbow, J., Sukumark, N. and Belytschko, T., Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, 2000, pp. 1741-1760.
- deLorenzi, H.G., Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, 1985, pp.129-143.

- deLorenzi, H.G., On the Energy Release Rate and the J-Integral of 3-D Crack Configurations, *International Journal of Fracture*, Vol. 19, 1982, pp. 183-193.
- Dodds, R.H. Jr. and Vargas, P.M. – Numerical Evaluation of Domain and Contour Integrals for Nonlinear Fracture Mechanics, Report UILU-ENG-88-2006, University of Illinois, Urbana, IL, August 1988.
- Dodds, R.H. Jr., Anderson T.L. and Kirk. M.T., A Framework to Correlate a/W Effects on Elastic-Plastic Fracture Toughness (J_c), *International Journal of Fracture*, Vol. 48, 1991, pp. 1-22.
- Dolbow, J., Moes, N. and Belytschko, T., Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 36, 2000, pp. 235-260.
- Dolbow, J., Moes, N. and Belytschko, T., Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, 2000, pp. 7161-7183.
- Dolbow, J.E., An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics, PhD dissertation, *Theoretical and Applied Mechanics*, Northwestern University, USA, 1999.
- Dragos, C.-A., Preitl, S., Precup, R.-E., Pirlea, D., **Nes, C.-S.**, Petriu, E.M., Pozna, C., Modeling of a vehicle with continuously variable transmission, *Proceedings of RAAD 2010*, 2010, pp. 441-446.
- Dragos, C.-A., Preitl, S., Precup, R.-E., **Nes, C.-S.**, Pirlea, D., Paul, A.S., Control solutions for vehicles with continuously variable transmission, *2010 11th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics (CINTI)*, 2010, pp. 157-162.
- Dugdale, D.S., Yielding in Steel Sheets Containing Slits, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 8, pp. 100-104.
- Dumitru, I., Marsavina, L., Faur, N., Experimental study of torsional impact of shafts, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 308, 2007.
- Dumitru, I., Faur, N., *Rezistența materialelor – Bazele teoretice în oboseala materialelor, mecanica ruperii, compozite, metode de analiză numerică*, Lito UPT, 1997.
- Elguedj, T., Gravouil, A. and Combescure, A., Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, 2006, pp. 501-515.
- Erdogan, F. and Sih. G.C., On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear, *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, 1963, pp 519-527.
- Faur N., Marșavina L., Cernescu A., **Neș C.**, Linul E., The Influence of the Steel and Aluminium Components Separation at the Conductors Locking for Stress-Strain Tests, *Key Engineering Materials*, Vol. 417-418, ISBN 0-07849-315-8, ISBN-13 978-0-87849-315-9, Trans Tech Publications, 2009, pp. 693-696.
- Faur, N., Dumitru, I., *Diferențe finite și elemente finite*, Ed. Mirton, Timișoara, 1997.
- Faur, N., *Elemente finite. Fundamente*, Ed. Politehnica, Timișoara, 2007, ISBN 973-8247-98-5.
- Faur, N., Dumitru, I., *Metode numerice în rezistența materialelor*, Lito UPT, 1997.
- Gabauer, W., The Determination of Uncertainties of Ramberg-Osgood Parameters (from a Tensile Test), Standards Measurement & Testing Project No SMT4-CT97-2165, 2001.

Gao, H., M. Abbudi, and D. M. Barnett, Interfacial Crack-Tip Fields in Anisotropic Elastic Solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 40, 1992, pp. 393-416.

Gehlen, P.C. and Kanninen, M.F., An Atomic Model for Cleavage Crack Propagation in an iron, *Inelastic Behavior of Solids*, McGraw-Hill, New York, 1970, pp. 587-603.

Giner, E., Sukumar, N., Tarancon, J.E., Fuenmayor, F.J., An Abaqus implementation of the extended finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 76, 2009, pp. 347-368.

Gorbatikh, L., Lomov, S., Verpoest, I., On stress intensity factors of multiple cracks at small distances in 2-D problems, *Int. J Fract.*, Vol. 143, 2007, pp.377-384.

Gourisankaran, V., Sharma, M.G., The finite-element analysis of stresses in atherosclerotic arteries during balloon angioplasty, *Crit. Rev. Biomed. Eng.*, Vol. 28, 2000, pp. 47-51.

Green, A.E. and Sneddon, I.N., The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Flat Elliptical Crack in an Elastic Solid, *Proceedings, Cambridge Philosophical Society*, Vol. 46, 1950, pp. 159-163.

Griffith, A.A., The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, *Philosophical Transactions*, Vol. 221, 1920, pp. 163-198.

Gross, B. and Srawley, J.E., Stress Intensity Factors of Three Point Bend Specimens by Boundary Collocation, NASA Technical Note D-2603, 1965.

Hărdău, M., *Metoda elementelor finite (curs)*, Ed. Univ. Tehnică, Cluj-Napoca, 1995.

Heerens, J., Schödel, Characterization of stable crack extension in aluminium sheet material using the crack tip opening angle determined optically and by the δ_5 clip gauge technique, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 76, 2009, pp. 101-113.

Hellen, T.K., On the Method of Virtual Crack Extensions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 1975, pp. 187-207.

Henshell, R.D. and Shaw, K.G., Crack Tip Finite Elements are Unnecessary, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 1975, pp. 495-507.

Holzapfel, G.A., Stadler, M., Schulze-Bauer, C.A.J., A Layer-Specific Three-Dimensional Model for the Simulation of Balloon Angioplasty using Magnetic Resonance Imaging and Mechanical Testing, *Ann. Biomed. Eng.*, Vol. 30, 2002, pp. 753-767.

Hutchinson, J., Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a power-law hardening material, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, 1968, pp. 13-31.

Hutchinson, J.W. and Paris, P.C., Stability Analysis of J-Controlled Crack Growth, ASTM STP 668, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1979, pp. 37-64.

Inglis, C.E., Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners, *Transactions of the Institute of Naval Architects*, Vol. 55, 1913, pp. 219-241.

Ingraffea, A.R., Wawrzynek, P.A., Finite element methods for Linear Elastic Fracture Mechanics, *Comprehensive Structural Integrity*, Elsevier, Oxford, 2003, pp.1-88.

Irwin. G.R., Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, 1957, pp. 361-364.

- Irwin. G.R., Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys, *Sagamore Research Conference Proceedings*, Vol. 2, 1956, pp. 289-305.
- Irwin. G.R., Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness, *Sagamore Research Conference Proceedings*, Vol. 4, 1961.
- Irwin. G.R., Fracture Dynamics. Fracturing of Metals, *American Society for Metals*, Cleveland, 1948, pp. 147-166.
- Ishida, M., Tension of a half plane containing array cracks, branched cracks and cracks emanating from sharp notches, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 45, 1979, pp. 306-314.
- Jacobs, T.S., Won, J., Gravereaux, E.C., Faries, P.L., Morrissey, N., Teodorescu, V., Hollier, V.J., Holl, L.H., Marin, M.L., Mechanical failure of prosthetic human implants: a 10-year experience with aortic stent graft devices, *Journal of Vascular Surgery*, Vol. 37, 2003, pp.16-26.
- Jianxu Shi, D. Chopp, J. Lua, N. Sukumar, T. Belytschko, Abaqus implementation of extended finite element method using a level set representation for three-dimensional fatigue crack growth and life predictions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, 2010, pp. 2840-2863.
- Kachanov, M., A simple technique of stress analysis in elastic solids with many cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 28, R11-R19, 1985.
- Kfoury, A.P., Miller, K.J., Stress, displacement, line integral and closure energy determinations of crack tip stress intensity factors, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 2, Applied Science Publishers Ltd., England, 1974, pp. 179-191.
- Kobayashi, A.S., Cherepy, R.B. and Kinsel, W.C., A Numerical Procedure for Estimating the Stress Intensity Factor of a Crack in a Finite Plate, *Journal of Basic Engineering*, Vol. 86, 1964, pp. 681-684.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., *Numerical solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*, John Wiley and Sons, New York, 1982.
- Lereim, J., Embury, J.D., A simple method for the determination of J-integral values, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 11, Pergamon Press Ltd., 1979, pp. 161-164.
- Lhermet, G., Vessiere, G., Bahuaud, J., Determination of stress intensity factors from stress concentrations for V-notched beams, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 28, 1987, pp. 331-343.
- Li, Y.P., Tham, L.G., Wang, Y.H., Tsui, Y., A modified Kachanov method for analysis of solids with multiple cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, 2003, pp. 1115-1129.
- Marşavina, L., *Metode numerice în mecanica ruperii*, Ed. Mirton, Timișoara, 1998.
- Marşavina, L., *Metode experimentale de determinare a tenacității la rupere*, Ed. Politehnica, Timișoara, 2006, ISBN 973-625-149-7.
- McMeeking, R.M. and Parks, D.M., On Criteria for J-Dominance of Crack Tip Fields in Large-Scale Yielding, ASTM STP 668, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1979, pp. 175-194.
- Mendelson, A. and Albers, L.U., Application of Boundary Integral Equations to Elastoplastic Problems, *Boundary Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics*, AMD-Vol. 11, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1975, pp. 47-84.
- Migliavacca, F., Petrini, L., Massarotti, P., Schievano, S, Auricchio, F., Dubini, G., Stainless and shape memory alloy coronary stents: a computational

study on the interaction with the vascular wall, *Biomechan Model Mechanobiol*, Vol. 2, 2004, pp. 205–217.

Migliavacca, F., Petrini, L., Colombo, M., Auricchio, F., Pietrabissa, R., Mechanical behavior of coronary stents investigated through the finite element method, *J Biomech*, Vol. 35, 2002, pp. 803–811.

Mohammadi, S., *Discontinuum Mechanics by Combined Finite/Discrete Elements*, WIT Press, UK, 2003.

Mohammadi, S., *Extended Finite Element Method*, Blackwell Publishing Ltd, ISBN: 978-1-4051-7060-4, Singapore, 2008.

Moran, B. and Shih, C.F., A General Treatment of Crack Tip Contour Integrals, *International Journal of Fracture*, Vol. 35, 1987, pp. 295–310.

Murakami, Y., *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, ISBN: 0-08-034809-2, Oxford, U.K., 1987.

Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems in the Theory of Elasticity*, Noordhoff Ltd., Netherlands, 1953.

Nakamura, T. and Parks, D.M., Conditions of J-Dominance in Three-Dimensional Thin Cracked Plates. Analytical, Numerical, and Experimental Aspects of Three-Dimensional Fracture Processes, *ASME AMD-91*, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1988, pp. 227–238.

Narasimhan, R. and Rosakis, A.J., Three Dimensional Effects Near a Crack Tip in a Ductile Three Point Bend Specimen - Part I: A Numerical Investigation., California Institute of Technology, Division of Engineering and Applied Science, Report SM 88-6, Pasadena, CA, January 1988.

Neale, B.K., Priddle, E.K., J-integral functions of a compact tension specimen for fracture and fatigue analysis, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 26, 1987, pp. 323–331.

Negru, R., *Contribuții la studiul efectului de concentrare a tensiunilor cu aplicații în mecanica rupeii și oboseala materialelor*, teză de doctorat, Ed. Politehnica, Timișoara, 2009.

Neș C., Faur N., Marșavina L., Numerical analysis of crack angle and crack interaction influence on stress intensity factors, *Acta Technica Napocensis, Series: Applied Mathematics and Mechanics*, No. 53, Vol. II, 2010, ISSN 1221- 5872, pp. 213–218.

Neș C., Faur N., Marșavina L., Numerical analysis of crack interaction influence on crack propagation, *Buletinul Universității Petrol-Gaze din Ploiești*, Nr. 1/2011, ISSN 1224-8495, Ploiești, 2011.

Neș, C.-S., Faur, N., Cernescu, A., Linul, E., Data acquisition and processing for stress-strain tests for aluminium-steel electric conductors, *Știință și inginerie*, Vol. 16, Ed. AGIR, București, 2009, ISBN 973-8130-82-4, ISBN 978-973-720-246-8, pp. 117–124.

Oh, S., Kleinberger, M., McElhaney, J.H., Finite-element analysis of balloon angioplasty, *Med Biol Eng Comput*, Vol. 32, 1994, S108–S114.

Onate, E., Idelsohn, S., Fischer, T. and Zienkiewicz, O.C., A finite point method for analysis of fluid flow problems, *Ninth International Conference on Finite Elements in Fluids*, Venice, Italy, 1995, pp. 15–21.

Orowan, E., Fracture and Strength of Solids, *Reports on Progress in Physics*, Vol. XII. 1948.

Owen, D.R.J. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Ltd, Swansea, UK, 1980.

Park, K., Paulino, G.H., Roesler, J., A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 57, 2009, pp. 891-908.

Parks, D.M., A Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination of Crack Tip Stress Intensity Factors, *International Journal of Fracture*, Vol. 10, 1974, pp. 487-502.

Parks, D.M., The Virtual Crack Extension Method for Nonlinear Material Behavior, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 12, 1977, pp. 353-364.

Parks, D.M. and Kamenzky, E.M., Weight Functions from Virtual Crack Extension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1979, pp. 1693-1706.

Petrini, L., Migliavacca, F., Dubini, G., Auricchio, F., Numerical investigation of the intravascular coronary stent flexibility, *J Biomechanics*, Vol. 37, 2004, pp.495-504.

Pirondi, A., Fersini, D., Simulation of ductile crack growth in thin panels using the crack tip opening angle, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 76, 2009, pp. 88-100.

Poteraşu, V.F., Mihalache, N., Elemente de contur. Aplicații, Editura Militară, Bucureşti, 1992, ISBN 973-32-0285-1.

Potirniche, G.P., Hearndon, J., Daniewicz, S.R., Parker, D., Cuevas, P., Wang, P.T., Horstemeyer, M.F., A two-dimensional finite element for fracture applications, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, 2008, pp. 3895-3908.

Rice, J.R., Some Remarks on Elastic Crack-Tip Stress Fields, *International Journal of Solids and Structures*, Vol 8, 1972, pp. 751-758.

Rice, JR., Weight Function Theory for Three-Dimensional Elastic Crack Analysis, ASTM STP 1020, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1989, pp. 29-57.

Rice, J.R. and Rosengren, G.F., Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, 1968, pp. 1-12.

Rizzo, F.J., An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatic, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 25, 1967, pp. 83-95.

Rogers, C., Tseng, D.Y., Squire, J.C., Edelman, E.R., Balloon-artery interactions during stent placement. A finite element analysis approach to pressure, compliance, and stent design as contributors to vascular injury, *Circ Res*, Vol. 84, 1999, pp.378-383.

Rooke, D P. and Cartwright, D.J., *Compendium of Stress Intensity Factors*, Her Majesty's Stationary Office, London, 1976.

Sadeghirad, A. and Mohammadi, S., Equilibrium on the line method (ELM) for imposition of Neumann boundary conditions in the finite point method (FPM), *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 69, 2007, pp. 60-86.

Sadowski, T., Marşavina, L., Peride, N., Craciun, E.-M., Cracks propagation and interaction in an orthotropic elastic material: Analytical and numerical methods, *Computational Materials Science*, Vol. 46, 2008, pp. 687-693.

Sanford, R.J., A Critical Re-Examination of the Westergaard Method for Solving Opening Mode Crack Problems, *Mechanics Research Communications*, Vol. 6, 1979, pp. 289-294.

- Saul, G.D., Arterial stress from intraluminal pressure modified by tissue pressure offers a complete explanation for the distribution of atherosclerosis, *Med Hypotheses*, Vol. 52, 1999, pp.349-351.
- Schubbe, J.J., Fatigue crack propagation in 7050-T7451 plate alloy, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 76, 2009, pp. 1037-1048.
- Schwalbe, K.-H., Newman Jr., J.C., Shannon Jr., J.L., Fracture mechanics testing on specimens with low constraint – standardization activities within ISO and ASTM, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72, 2005, pp. 557-576.
- Sha, G.T. and Yang, C-T., Weight Function Calculations for Mixed-Mode Fracture Problems with the Virtual Crack Extension Technique, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, 1985, pp. 1119-1149.
- Sham, T.-L., A Unified Finite Element Method for Determining Weight Functions in Two and Three Dimensions, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 23, 1987, pp. 1357-1372.
- Shih, C.F., Moran, B. and Nakamura, T., Energy Release Rate Along a Three Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body, *International Journal of Fracture*, Vol. 30, 1986, pp. 79-102.
- Shih, C. F., and R. J. Asaro, Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I—Small Scale Yielding, *Journal of Applied Mechanics*, 1988, pp. 299-316.
- Sih, G.C., On the Westergaard Method of Crack Analysis, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 2, 1966, pp. 628-631.
- Sih, G.C., *Handbook of Stress Intensity Factors for Researchers and Engineers*, Leigh University, Bethlehem, USA, 1973.
- Sneddon, I.N., The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid, *Proceedings, Royal Society of London*, Vol. A-187, 1946, pp. 229-260.
- Sukumar, N. and Prevost, J.H., Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method, Part I: Computer implementation, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, 2003, pp. 7513-7537.
- Sukumar, N., Moes, N., Moran, B. and Belytschko, T., Extended finite element method for three-dimensional crack modeling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, 2000, pp. 1549-1570.
- Suo, Z., Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media, *Proceedings of the Royal Society*, London, Vol. 427, 1990, pp. 331-358.
- Tada, H., Paris, P.C., and Irwin, G.R., *Stress Analysis of Cracks Handbook*, (2nd Ed.), Paris Productions Inc., St. Louis, 1985.
- Tracey, D.M., Finite Element Methods for Determination of Crack Tip Elastic Stress Intensity Factors, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 3, 1971, pp. 255-266.
- Vainshtok, V.A., A Modified Virtual Crack extension Method of the Weight Functions Calculation for Mixed Mode Fracture Problems, *International Journal of Fracture*, Vol. 19, 1982, pp. R9-R15.
- Wells, A.A. and Post, D., The Dynamic Stress Distribution Surrounding a Running Crack—A Photoelastic Analysis, *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, Vol. 16, 1958, pp. 69-92.
- Westergaard, H.M., Bearing Pressures and Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, 1939, pp. 49-53.
- Williams, J.G. and Ewing. P.D., Fracture under Complex Stress-The Angled Crack Problem, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 8, 1972, pp. 441-446.

-
- Williams, M.L., On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, 1957, pp. 109-114
- Williams, M.L., Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 74, 1952, pp. 526-528.
www.euroflex-gmbh.de
- Xiao-wei, L., Yi, L., Calculating the J-integral of different types of specimens in fracture studies by means of η factors, *Int J Fatigue*, No 4, 1988, pp. 261-265.
- Yang, F.-P., Kuang, Z.-B., Fatigue crack growth for a surface crack in a round bar under multi-axial loading condition, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol 28, 2005.
- Yokobori, T., Ohashi, M., Ichihawa, M., The interaction of two collinear asymmetrical elastic cracks, *Report of the Institute for Strength and Fracture of Materials*, Tohoku University, 1965.
- Zerbst, U., Heinemann, M., Dalle Donne C., Steglich, D., Fracture and damage mechanics modeling of thin-walled structures – An overview, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 76, 2009, pp. 5-43.
- Zi, G., Song, J.H., Budyn, E., Lee, S.H. and Belytschko, T., A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth, *Modeling and Simulations for Material Science and Engineering*, Vol. 12, 2004, pp. 901-915.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method (Fourth Edition)*, McGraw-Hill, New York, 1989.