Universitatea "Politehnica" din Timişoara

ing. Sorin George Lemac

MODELAREA GEOMETRICĂ, CA TEHNICĂ DE CUPLARE A SISTEMELOR CAD-CAM DE CONCEPŢIE ŞI FABRICAŢIE A ENTITĂŢILOR GEOMETRICE

Teză destinată obţinerii
titlului ştiinţific de doctor inginer
în domeniul Inginerie Industrială

Conducător ştiinţific:
Prof. univ. dr. ing. George Drăghici

2010

CUPRINS

Notaţii, abrevieri, acronime

Capitolul 1
$f(x) - p(x)$, eroarea de trunchiere,
k, numărul condiţiei absolute a problemei matematice,
λ (F, B) $\in \mathbb{R}^+$, constanta lui Lipschitz a lui F în regiunea B $\subseteq X$,
$\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F}, \mathrm{B})$ a lui F : X → Y pe B $\subseteq X$, norma lui Lipschitz,
$K_{K_{F \leftarrow x}}(x_0)$, condiţia numerică absolută de gradul I a lui F în x_0,
$\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F}, \mathrm{B})$, condiţia numerică pentru $\forall$ vecinătate x_0 în B.

Capitolul 2
$(u_i), (v_i)$, coordonatele parametrice,
$\mathrm{R}\boldsymbol{G_{nm}}$, reţeaua caracteristică ca $(m+1)$ secvenţe ordonate de $(n+1)$ puncte,
S_{ij}, vectorii elemente ale unei reţele caracteristice asociate unui caroiaj.

Capitolul 3
Φ, o familie de funcţii de o singură variabilă x,
Π_n, un set de polinoame P în domeniul real sau complex,
$P_{i_0 i_1} \in \Pi_k$, un polinom în Π_k,
(x_i, f_i), punctele de suport, $\Phi^{\mu,v}(x)$ sunt funcţiile raţionale de interpolare,
$P_s{}^{\mu,v}(x)$ şi $Q_s{}^{\mu,v}(x)$, polinoame de grad mai mic decit μ şi v,
$S_\Delta\,(Y; \bullet)$, funcţia spline de interpolare S_Δ,
$K^m\,[a, b]$, funcţiile reale $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ pentru care $f^{(m-1)}$ este absolut continuă pe $[a, b] \to \mathbb{R}$,
$f^m \in L^2[a, b]$, unde $L^2[a, b]$ estet setul tuturor funcţiilor pătratice a căror integrale pe intervalul $[a, b]$, de exemplu $\int_a^b |f(t)|^2\, dt$, există şi sunt finite,
$K_p^m\,[a, b]$, setul tuturor funcţiilor pentru care $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b)$, pentru $k = 0, 1, 2 \ldots (m-1)$,
M_j, momente determinante ale lui $S_\Delta(Y; \bullet)$,
A, matricea de dimensiune $(n+1) \bullet (n+1)$,
M_j, vectorul de momente a funcţiei spline $S_\Delta(Y; \bullet)$,
$\mathrm{F}: [a, b] \to \mathbb{R}$ de $(n+1)$, funcţia diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$,
$P \in \Pi_n$ este un polinom, unde $P_{x_k} = f_{x_k}$ pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Capitolul 4
$B_n(x)$, polinoamele lui Bernstein de ordinul n al funcţiei $f(x)$, unde $B_n(x)$ este un polinom în x, iar $x \le n$, $n \in N$,
$B_{n_1,n_2}^f(x, y)$, polinoamele lui Bernstein în două variabile x şi y pentru funcţia $f(x, y)$ de două variabile,
$B_{f, n_1, n_2, \ldots n_n}(x_1, x_2, \ldots x_m)$, polinoamele lui Bernstein de ordinul n,
$\omega(\delta)$, modul de continuitate.

Capitolul 5
$\mathcal{P}_k \subset \mathbb{R}^k$, spaţiu vectorial de polinoame de grad $\le k$,
$\mathcal{P}_{k,\tau,r}$, spaţiul vectorial de funcţii polinomiale de grad $\le k$ pe [a, b],

$\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathbb{R}^k$, spaţiul format din funcţiile $f_{i,j}$,
$f \in \mathcal{P}_{k,\tau,r}$,, un polinom $P_i \subset [\tau_i, \tau_{i+1}]$,
$\mathcal{S}_{k,r}$, subspaţiul inclus în $\mathcal{S}_{k,r} \subset \mathcal{P}_{k,\tau,r}$,
$\mathcal{S}_{k,r} \subset \mathcal{P}_{k,\tau,r}$, subspaţiul denumit subspaţiul polinoamelor (curbelor) spline de ordinul k având punctele (nodurile) τ_i,
$\Phi \in E$, subset a lui C^r ($E \subset C^r$) de polinoame (curbe) definite pe [a, b],
$\mathcal{S}_{1,\tau}$, spaţiul polinoamelor (curbelor, funcţiilor) de gradul I pe $[a, b]$ având punctele de control (nodurile) τ_i,
$S_{k,\Delta}$, vector în spaţiul real $\mathbb{R}^k$
$\chi_{[\widetilde{\chi}_i, \widetilde{\chi}_{i+1}]}$, funcţie caracteristică recursivă,
$N_{i,k}(x)$, funcţiile B-spline de ordin k,
d_i , coeficienţii ce definesc nodurile (punctele) $\mathscr{s}$ ale lui de Boor,
$B_i^n(t)$, polinoame lui Bernstein de gradul n, univariabile în $t, t \subset \mathbb{R}^2$,
$P_{i,j}$, puncte Bezier,
$b_{i,j,k}^n(u, v, w)$, polinoame bivariante Bernstein de gradul n.

Capitolul 6
$\oint$, proprietatea globală studiată şi care este o integrală triplă pe un volum V dat, iar $f(p)$ un vector funcţie descriind $\oint$,
$\mathcal{J}$, transformarea Jacobiană,
$\bar{n}$, vectorul normal unitar, iar ∇ operatorul de derivare $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$,
$t \in [0,1]$, $t \in \mathbb{R}^3$ unde i identifică o porţiune a frontierei (marginii),
w şi a, ponderi ale polinomului lui Legendre de ordinul $(m+1)$,
L , numărul de curbe închise care definesc sub-suprafeţele S_i,
$\bar{c}'(s) = \bar{t}$, vectorul unitar tangent,
$\bar{c}''(s) = \bar{k} = k\,\bar{n}$, unde $\bar{k}$ este vectorul curbură care măsoară variaţia vectorului tangent,
$\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, vectori ortonormali,
E, F şi G, coeficienţii suprafeţei reprezentate parametric în u, v,
ρ, colţul toroidal,
q ,tipul sculelor de prelucrat,
s, mărimea axului,
$\bar{T}$, vectorul tangent la traiectoria sculei de prelucrat,
$\bar{N}$, vectorul normal la suprafaţă,
$\bar{S}$, vectorul binormal,
$\bar{X}$, punct al traiectoriei sculei de prelucrat,
$\bar{V}$, vectorul de deplasare,
$(\bar{T}, \bar{S}, \bar{N})$, sistemul de coordonate ortonormale,

Capitolul 7
P este suprafaţa modelată (sculptată) ce urmează a se realiza pe maşinile unelte cu comandă numerică,
T este suprafaţa generatoare a sculelor prelucrătoare,
$\boldsymbol{r}_P$ este vectorul de poziţie al unui punct al suprafeţei sculptate P;
X_P, Y_P, Z_P sunt coordonatele rectangulare carteziene (Gauss) ale unui punct al suprafeţei modelate (sculptate) P;
U_P, V_P sunt variabilele carteziene (Gauss) reprezentând parametrii unui punct al suprafeţei modelate (sculptate) P;

$U_{1.P}, U_{2.P}$ sunt punctele de frontieră ale intervalului închis $[U_{1.P}, U_{2.P}] \subseteq \mathbb{R}$ ai parametrului U_P;
$V_{1.P}, V_{2.P}$ sunt punctele de frontieră ale intervalului închis $[V_{1.P}, V_{2.P}] \subseteq \mathbb{R}$ ai parametrului V_P,
$\Phi_{1.P}$ este funcţia fundamentală de ordinul I,
Φ_{2P} este funcţia fundamentală de ordinul II,
s_P este elementul liniar al suprafeţei modelate (sculptate) P;
E_P, F_P, G_P sunt mărimi fundamentale de ordinul I funcţii scalare ai parame-trilor U_P^- şi V_P^- ai suprafeţei modelate (sculptate) P,;
L_P, M_P, N_P sunt mărimile fundamentale de ordinul II ca funcţii scalare ale parametrilor U_P^- şi V_P^- a suprafeţei modelate (sculptate) P,
T_P este discriminantul funcţiei fundamentale de ordinul II: $\Phi_{2.P}$
$\boldsymbol{n}_P$ este vectorul unitate normal la suprafaţa P,
$\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ sunt vectori unitari ortogonali la suprafaţa P,
(x_P, y_P, z_p) este sistemul de coordonate local,
t reprezintă timpul,
$\varphi_u, \varphi_v, \varphi_n$ sunt unghiurile de rotaţie ale sculelor tăietoare după axele de referinţă x_P, y_P, z_P,
$\boldsymbol{V}_\Sigma$ defineşte viteza mişcării rezultante ale sculelor prelucrătoare relative la suprafaţa sculptată P,
R_{P_u} şi R_{P_v} definesc razele de curbură a suprafeţei modelate (sculptate) P pe direcţiile $\boldsymbol{u}_P$ şi respectiv $\boldsymbol{v}_P$ şi care se măsoară în planul secţiunilor vectorilor unitari $|\boldsymbol{U_P}|$ şi $|\boldsymbol{V_P}|$,
$R_{1.P}$ şi $R_{2.P}$ definesc prima şi a doua rază de curbură principală a suprafeţei modelate (sculptate) P,
ω este unghiul pe care tangenta vectorului unitar $\boldsymbol{u}_P$ o face cu direcţia principală $\boldsymbol{t}_{1.P}$ la suprafaţa considerată,
$\boldsymbol{\omega}_{T-P}$ este vectorul mişcării de rotaţie a suprafeţei T ale sculelor prelucrătoare în jurul unei axe perpendiculare pe planul normal definit de vectorul $\boldsymbol{V}_\Sigma$;
R_{P_Σ} este raza de curbură a suprafeţei modelate (sculptate) P în direcţia vectorului $\boldsymbol{V}_\Sigma$;
δ = $\delta^+ + \delta^-$ toleranţa prelucrării suprafeţei modelate (sculptate) P,
$\boldsymbol{V_n}$ mişcarea relativă a sculei de prelucrat de-a lungul vectorului normal unitar $\boldsymbol{n}_P$;
$\boldsymbol{T_r}(\alpha_x, X)$, $\boldsymbol{T_r}(\alpha_y, Y)$, $\boldsymbol{T_r}(\alpha_z, Z)$ sunt operatorii de translaţie,
$(a_x,\ a_y,\ a_z)$ reprezintă translaţia de-a lungul axelor de coordonate respective,
$\boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{M})$, vector de poziţie,
$\boldsymbol{r_2}(\boldsymbol{M})$, vector de poziție,
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ sunt unghiurile de rotaţie corespunzătoare axelor respective,
$\mathbf{R_S}(1 \rightarrow 2)$ este operatorul liniar de transformare ce descrie analitic rezultatul transformărilor coordonatelor de sistem de la X_1, Y_1, Z_1 la X_2, Y_2, Z_2,
μ este unghiul dintre vectorul tangent unitar $\boldsymbol{t}_{1.P}$ al primei direcţiei principale a suprafeţei modelate (sculptate) P si vectorul tangent unitar $\boldsymbol{t}_{2.P}$ al primei direcţiei principale a suprafeţei generatoare T a sculelor prelucrătoare,
$\boldsymbol{r}_{tp}$ este vectorul de poziţie al unui punct de pe planul tangent comun,
$\boldsymbol{r}_K$ este vectorul de poziţie al punctului CC de contact K,
$\boldsymbol{\xi}$ este unghiul dintre direcţia principală $\boldsymbol{t}_{1.p}$ de pe suprafaţa P şi vectorul unitar tangent $\boldsymbol{U}_P$,
ξ_T este unghiul dintre direcţia principală $\boldsymbol{t}_{1.T}$ pe care suprafaţa generatoare T a sculelor prelucrătoare o face cu direcţia tangentei $\boldsymbol{u}_t$,

$Dup\ (P)$ este coeficientul lui Dupin,
$\boldsymbol{C_{nf_R}}\ (\boldsymbol{P}/\boldsymbol{T})$ este coeficientul de conformitate al suprafeţelor P si T în punctul CC de contact K,
d_{cnf} este diametrul unei curbe central simetrice,
$\boldsymbol{d_{cnf}^{(min)}}$ valori minime şi $\boldsymbol{d_{cnf}^{(max)}}$ valori maxime reprezentând diametrele exterioare,
φ_{min} şi φ_{max}, unghiurile definind două direcţii cuprinse în planul tangent comun,
$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathrm{u})$ este vectorul curbei directoare sau curba de bază al unui conoid, iar $\mathbf{l}(\mathrm{u})$ este dreapta ce se deplasează în spaţiu pe curba directoare,
$\boldsymbol{Pl}_R\ (P)$ este conoidul lui Plücker de gradul I,
$\boldsymbol{Pl}_K\ (P)$ este conoidul lui Plücker de gradul II,
$\mathbf{Pl}_R\ (P)(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{T})$ este coeficientul curburii lui Plücker cu curba caracteristică planară corespunzătoare,
$\mathrm{A}n_r\ (P)$ este coeficientul bidimensional,
S_T reprezintă dimensiunea sculei prelucrătoare,
h_P este elementul de degroşare,
R_T^u reprezintă razele de curbură ale diferitelor suprafeţe ale sculelor prelucrătoare $T^i\ (i = a, b, c, d)$ au valori,
$h_P^i\ (i = a, b, c, d)$ este adaosul de prelucrare,
R_T este rata maximă de conformitate a suprafeţei T faţă de suprafaţa P,
F_1, F_2, F_3 sunt funcţii descriind coeficienţii de conformitate ai suprafeţelor P şi T,
Γ_{jk}^i sunt simbolurile lui Christoffel de ordinul II şi unde g_{ij} este tensorul metric al suprafeţei T,
g^{ij} este tensorul covariant al suprafeţei T,
r_T reprezintă poziţia unui vector al unui punct al curbei generatoare;
Ψ reprezintă parametrul curbei generatoare,
$R_{T.0}$ este vectorul de poziţie al originii axelor de coordonate,
$\propto, \beta, \gamma$ reprezintă unghiurile normalei la suprafaţa P cu axele de coordonate,
(ψ, θ, φ) reprezintă unghiurile lui Euler,
$\boldsymbol{r}_T^{(i)}$ şi $\boldsymbol{r}_T^{(i\pm1)}$ descriu poziţia vectorilor suprafeţelor $\mathbf{T}_i$ şi respectiv $\mathbf{T}_{i+1}$,
$U_T^{(i\pm1)}$ şi $V_T^{(i\pm1)}$ sunt coordonatele carteziene ale unui punct al suprafeţelor şi $\mathbf{T}_i$ respectiv $\mathbf{T}_{i+1}$,
$\boldsymbol{r}_P^{(n)}$ este vectorul de poziţie a unui punct al suprafeţei ideale $\mathbf{P}^{(n)}$,
$\boldsymbol{r}_P^{(a)}$ este vectorul de poziţie a unui punct al suprafeţei reale $\mathbf{P}^{(a)}$,
$\boldsymbol{r}_P^{(t)}$ este vectorul de poziţie a unui punct aparţinînd suprafeţei $\mathbf{P}^{(t)}$ numită suprafaţă de toleranţă,
$\boldsymbol{n}_P$ este vectorul normal la suprafaţa ideală $\mathbf{P}^{(n)}$,
h_{fr} este eroarea elementară de prelucrare,
h_{ss_Σ} reprezintă erorile de prelucrare la realizarea suprafeţei reale P_{ac} faţă de suprafaţa nominală P_{nom},
h_Σ^{max} este eroarea maximă de prelucrare a suprafeţei modelate (sculptate) reale P_{ac} faţă de suprafaţa nominală P_{nom},
$R_{1.P}$ şi $R_{2.P}$ sunt razele de curbură în punctul CC de contact K;
t_P este tensorul suprafeţei modelate (sculptate) P în punctul CC de contact K,
$\boldsymbol{r}_{P1}$ reprezintă poziţia vectorului $\boldsymbol{r}_{P1}$ într-un punct arbitrar p_1 al suprafeţei modelate (sculptate) P,
θ_{tr} şi φ_{tr} sunt unghiurile dintre razele cercurilor ce definesc torul considerat şi direcţiile vectorilor unitari în punctul dat,

$R_{P.f}$ şi $R_{T.f}$ sunt razele curburii normale a suprafeţelor P şi respectiv T, măsurate pe direcţia vectorului F_{fr},

$\breve{F}_f$ este segmentul de arc al vectorului de direcţie F_{fr},

$R_{P.ss}$ şi $R_{T.ss}$ sunt razele curburii normale a suprafeţelor P şi T măsurate pe arcul $\breve{F}_{ss}$ care este segmentul de arc al vectorului de direcţie $\boldsymbol{F}_{ss}$,

δ_Σ reprezintă deplasarea liniară totală a sculelor prelucrătoare faţă de suprafaţa sculptată P,

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ reprezintă deplasările liniare elementare de-a lungul axelor x_P, y_P, z_P,

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ reprezintă deplasările unghiulare ale sistemului de coordonate x_T, y_T, z_T faţă de sistemul de coordonate x_P, y_P, z_P,

θ_Σ reprezintă deplasarea unghiulară totală a sculelor prelucrătoare faţă de suprafaţa P,

K_P şi K_T reprezintă originile sistemelor locale de coordonate x_P, y_P, z_P şi respectiv x_T^*, y_T^*, z_T^*.

x_T^*, y_T^*, z_T^* reprezintă deplasările elementare la sistemele de coordonate x_T, y_T, z_T,

$real_i$ şi nom_i reprezintă poziţiile reale şi respectiv, poziţii cerute de proiectul de execuţie ale prelucrărilor i ($i = 1,2, \dots n$),

CDA reprezintă coeficientul de aproximaţie al suprafeţelor toroidale de aproximaţie T_{r_P} şi respectiv T_{r_P},

$[\Delta\, h_\Sigma]$ este toleranţa rezultată din calculul rugozităţii,

$P_{GS} = P_{GS}(t)$ reprezintă productivitatea a generării suprafeţei modelate (sculptate) P,

$\breve{\boldsymbol{F}}_{fr} = |\boldsymbol{F}_{fr}|$ reprezintă vectorul avansului sculei prelucrătoare,

$\breve{\boldsymbol{F}}_{ss} = |\boldsymbol{F}_{ss}|$ reprezintă vectorul vitezei prelucrării adausului de prelucrare,

S_{sg} reprezintă totalul suprafeţei generate în intervalul total de timp t_Σ,

V_{mr} este volumul total de material prelucrat,

t_Σ este timpul total al prelucrării,

$R_{P.ss}$ şi $R_{T.ss}$ sunt razele normale de curbură,

$\mathbf{V}^{opt}$ reprezintă direcţia optimala a traiectoriei sculelor prelucrătoare pe suprafaţa sculptată P şi care se exprimată matricial în sistemul de coordonate carteziene x_P, y_P, z_P definit pe suprafaţa locală P,

k_{tP} şi t_{tP} sunt curbura şi respectiv torsiunea traiectoriei punctului CC de contact K,

$\boldsymbol{t}_{tp}$ şi $\boldsymbol{b}_{tp}$ sunt vectorul tangent unitar şi respectiv vectorul binormal al traiectoriei punctului curent K,

θ este unghiul dintre vectorul lui Darboux $\boldsymbol{\Omega}$ şi vectorul tangent $\boldsymbol{t}_{tp}$ la traiectoria punctului CC de contact K curent considerat,

l_{tr} este lungimea arcului traiectoriei măsurată dintr-un punct al traiectoriei şi care este exprimată în funcţie de raza de curbură r_{tr} a unui punct al traiectoriei şi de torsiunea τ_{tr} în acel punct,

n reprezintă numărul total al traiectoriilor necesare acoperirii întregii suprafeţe prelucrătoare,

K_{int} reprezintă coeficientului de interferenţă,

$S_{[h]}$ este suprafaţa toleranţei admisă la distanţa $[h]$ faţă de suprafaţa sculptată P,

$\pm S_{wl}$ mişcarea de pendulare a sculelor prelucrătoare,

$\pm S_{wn}$ mişcarea de rotaţie a sculelor prelucrătoare.

Lista de tabele

Lista de figuri

Capitolul 6

Capitolul 7

INTRODUCERE GENERALĂ

Dezvoltarea tehnologică a civilizaţiei umane după sfârşitul secolului al XIX-lea, şi în special în secolul al XX-lea, a fost fără precedent în istoria umanităţii, atât ca domenii de dezvoltare, practic afectând orice aspect al vieţii umane, dar şi ca viteză de schimbare şi transformare a societăţilor umane. Această dezvoltare explozivă şi exponenţială s-a datorat unui complex de factori, dintre care se pot menţiona o serie de invenţii şi descoperiri considerate de istorici ca fiind cruciale, şi care au schimbat definitiv cursul istoriei umane.

Noile descoperiri s-au manifestat pe plan tehnologic, dar în egală măsură şi pe planul cunoştinţelor teoretice. Noi teorii au condus la apariţia de noi discipline care au îmbunătăţit universul de cunoaştere a umanităţii, dar nu de puţine ori au condus la noi invenţii şi descoperiri practice. Acest proces s-a accentuat după al doilea război mondial, când cele două laturi ale cunoaşterii umane menţionate mai sus, al cunoştinţelor practice şi al celor teoretice, s-au întrepătruns şi influenţat reciproc.

În cadrul acestui proces complex al dezvoltării civilizaţiei umane, alături de alte ştiinţe şi discipline, matematica şi a adus o contribuţie aparte, influenţând profund modul în care alte discipline îşi desfăşoară activitatea. În perioada menţionată matematica s-a dezvoltat, întocmai ca celelalte ştiinţe, atât pe plan teoretic – al matematicii ”pure”, cât şi al matematicii „aplicate” în diferite şi numeroase alte ştiinţe şi discipline, care au beneficiat de noile descoperiri.

În domeniul Ingineriei Industriale, concepţia produselor şi a proceselor de fabricaţie este abordată integrat (Drăghici, 1999), evitându-se consecinţele erorilor de concepţie asupra fabricaţiei şi performanţelor produsului realizat, reducându-se termenele de lansare în fabricaţie şi pe piaţă a produselor, precum şi costurile de producţie. Sistemele actuale de concepţie şi fabricaţie virtuală sunt bazate pe integrarea cunoştinţelor întregului ciclu de viaţă al produsului (Product Lifecycle Management). Cuplarea sistemelor de concepţie şi fabricaţie depinde în mare măsură de modul de reprezentare a obiectului. Cele mai uzuale modele folosite în sistemele integrate CAD/CAM sunt Constructive Solid Geometry (CSG), Boundary Representation (B-Rep) etc., iar pentru suprafeţele complexe, modelele matematice (Bezier, B-spline, NURBS, etc.).

Obiectivul cercetărilor întreprinse în cadrul tezei de doctorat l-a constituit dezvoltarea modelelor matematice de descriere a entităţilor geometrice în vederea cuplării sistemelor de concepţie şi fabricaţie.

Atingerea acestui obiectiv a necesitat o abordare sistematică, succesivă a diferitelor aspecte legate de modelarea matematică în general şi modelarea geometrică în particular. A fost necesar studiul aprofundat al metodelor matematice de modelare, aşa cum se prezintă ele în literatura de specialitate, ca bază de abordare şi rezolvare a problemelor de modelare matematică.

Scopul principal al studierii şi prezentării acestor metode a fost dictat de necesitatea utilizării metodelor modelării geometrice şi aplicarea aparatului matematic studiat ca instrument de cuplare a sistemelor CAD-CAM de concepţie şi fabricaţie a entităţilor geometrice.

Structura lucrării are în vedere rezolvarea acestor cerinţe.

In **capitolele 1 şi 2** se definesc noţiunile de *model*, *modelare*, *modelare matematică*, *modelare geometrică*, iar în **capitolul 3** se prezintă evoluţia cunoştinţelor referitoare la acest domeniu.

Introducerea formalizărilor şi a simbolurilor matematice în ştiinţe şi discipline în care matematica era puţin prezentă a condus la noi moduri de abordare şi prezentare a cunoştinţelor în aceste discipline, dar ca un revers, au condus la îmbogăţirea matematicii însăşi. Au apărut şi s-au dezvoltat noi domenii, nu numai teoretice, dar şi practice, ca de exemplu: fizica matematică, matematica finanţelor, biologia matematică, ca sa menţionăm doar câteva.

În plus, dacă în domeniile sau ştiinţele denumite „clasice", apariţia de noi descoperiri, considerate cruciale, care pot să modifice radical sau să schimbe profund aceste ştiinţe, se apreciază a fi relativ scăzută (dar bineînţeles nu imposibilă), atunci nu aceeaşi situaţie poate apărea în domenii multidisciplinare, şi mai ales interdisciplinare, care se consideră domenii potenţiale de cercetare reale, susceptibile de noi şi profunde schimbări.

În anul 2010 se aniversează un secol de când o astfel de descoperire crucială a avut loc, şi care a schimbat nu numai matematica pură, dar şi cea aplicată. Dacă până la acea dată matematicienii lumii căutau formule „perfecte", care să reprezinte curbe şi suprafeţe „perfecte", pentru prima dată s-a demonstrat că dându-se o curbă oarecare, în loc să se caute o formulă „perfectă", care să reprezinte acea curbă, există posibilitatea găsirii unei funcţii care să „aproximeze" curba respectivă.

În anul 1910, *Serghei Natanovici Bernstein* a definit polinoamele ce îi poartă numele, polinoame care pot aproxima practic orice curbă. Importanţa acestei descoperiri s-a confirmat ulterior, după 1935, şi în special după 1950, când aceste polinoame au devenit fundamentale pentru o nouă ramură a matematicii: teoria aproximării funcţiilor, teorie care stă la baza *modelării matematice*, în general, şi a *modelării geometrice*, în particular. *Bernstein* a arătat că orice funcţie poate fi aproximată cu ajutorul unui polinom care, în limitele unor valori acceptabile ale erorilor de aproximare, ne permite să *aproximăm* sau să *modelăm* o funcţie iniţială dată.

Prezenta lucrare, în care sunt descrise pe larg *polinoamele lui Bernstein* constituie un modest omagiu adus unui matematician care a schimbat cursul istoriei matematicii pentru generaţiile ce au urmat după el. **Capitolul 4** al acestei lucrări, consacrat *polinoamelor lui Bernstein*, proprietăţilor şi aplicaţiilor acestora, prezintă schimbările majore introduse de aceste polinoame în abordarea problemelor legate de aproximarea funcţiilor, cu consecinţe directe asupra dezvoltării *modelelor matematice* de descriere a entităţilor geometrice, şi care au fost studiate în continuare în cadrul lucrării.

Necesitatea reprezentării curbelor, aşa cum ele apar în natură, adică departe de o formă „perfectă", a făcut ca utilizarea *polinoamelor lui Bernstein* să reprezinte primul pas pentru dezvoltarea unor noi modele şi algoritmi care să rezolve această problemă. În acest fel, din necesitatea de a modela forma exterioară a automobilului s-au descoperit *modelele lui Bezier* şi *algoritmul lui Casteljau,* care au contribuit la dezvoltarea şi consolidarea unor noi ramuri apărute în matematică, şi anume *modelarea matematică* şi, în special, *modelarea geometrică*.

Modelele propuse de *Bezier* au constituit următorul pas decisiv în dezvoltarea acestei noi ramuri a matematicii numerice, şi anume au arătat practic cum poate fi construit şi generat un astfel de polinom. Importanţa practică a modelului propus de *Bezier* constă în aceea că a condus la descoperirea unei algoritm care să permită atât construirea modelului ce îi poartă numele, cât şi obţinerea de informaţii asupra derivatelor polinomului de interpolare sau de aproximare, şi care au fost studiate în **capitolul 5.**

În abordarea acestor probleme autorul a încercat o metodă devenită clasică în cercetarea matematică fundamentală şi aplicativă. În primul rând, s-au prezentat problemele propuse a se cerceta, aşa cum apar în literatura de specialitate la data elaborării lucrării. În al doilea rând, pe baza acestor cunoştinţe disponibile, s-a încercat a se adăuga o modestă contribuţie, atât printr-o nouă formă de abordare a problemelor cercetate, cât şi prin noi idei şi concepte, care pot sta la baza dezvoltării ulterioare, într-un domeniu care încă se prezintă ca un domeniu potenţial de cercetare pentru viitor.

Astfel, pe lângă reprezentarea considerată clasică a acestor probleme, autorul a încercat şi o prezentare matricială a diverselor tehnici de aproximare şi modelare, ţinându-se cont de volumul ridicat de date care se cer manipulate cu tehnici specifice de calcul. Ca un domeniu de abordat pentru viitor, autorul consideră că abordarea vectorială şi tensorială, atât în domeniul real, cât şi în domeniul complex, reprezintă un domeniu viitor de cercetare, cu rezultate promiţătoare.

Un factor major în dezvoltarea *modelării matematice* şi a *modelării geometrice* l-a constituit apariţia, după 1950, a calculatoarelor electronice, care a condus la noi descoperiri importante, consolidând această nouă ştiinţă, iar cercetările şi descoperirile din domeniul *modelării suprafeţelor*, şi apoi a *volumelor*, au permis extinderea orizontului acestei ştiinţe până la nivelul realizării virtuale a *modelării obiectelor.*

Aceste descoperiri au pregătit fundamentul matematic pe care s-au elaborat apoi sistemele software de proiectare existente în domeniul aplicativ. Fără acest fundament teoretic matematic, formalizat într-un limbaj adecvat, şi cu simboluri specifice matematice, nu ar fi fost posibilă realizarea acestora. Lucrarea de faţă se doreşte o modestă contribuţie tocmai la cercetarea acestui fundament al conceptelor matematice ce stau la baza *modelării matematice* şi a *modelării geometrice.*

În mod detaliat s-au prezentat în **capitolul 5** din lucrare suprafeţele şi volumele folosite în *modelarea geometrică*, în special suprafeţele bicubice şi bicuadrice. S-a insistat asupra unor tehnici de interpolare a suprafeţelor, folosind suprafeţe triunghiulare sau dreptunghiulare, şi în special asupra zonelor de frontieră şi de conectare între suprafeţele studiate, considerându-se că aceste zone au o influenţă majoră, atât pentru acurateţea modelării geometrice a suprafeţelor şi a volumelor, dar şi la precizia acestei reprezentări în zonele de frontieră şi conectare.

În abordarea lucrării s-a ţinut cont de faptul că metodele de *modelare geometrică* reprezintă o sinteză a unor domenii ştiinţifice diferite: geometrie analitică şi descriptivă, topologie şi algebră topologică, teoria logicii matematice, analiză numerică, calcul vectorial şi metode matriciale, pentru a enumera doar câteva domenii ce îşi aduc contribuţia la abordarea acestei probleme. Or aceasta a condus la necesitatea folosirii cunoştinţelor din domenii diverse ale matematicii, pentru abordarea adecvată a acestor probleme complexe.

În practică, prin asamblarea acestor domenii s-a creat o disciplină independentă, cu o logică şi un limbaj specific. Acest lucru a fost urmărit şi în cadrul lucrării. Iniţial s-a aprofundat prezentarea unor obiecte în spaţiul bidimensional, apoi, întocmai ca în practică, noi cerinţe, atât teoretice, cât şi tehnologice, împreună cu noi cunoştinţe în domeniile prezentate mai sus, au condus la extinderea prezentării *modelării geometrice* şi, în special, la extinderea modelării tri şi multidimensionale.

În **capitolul 6** s-a abordat pe larg cuplarea sistemelor CAD-CAM, de concepţie şi de fabricaţie a entităţilor geometrice, atât la nivelul liniilor, a curbelor în plan şi în spaţiu, a suprafeţelor în plan şi în spaţiu şi a volumelor, dar accentuându-se îndeosebi asupra modelării volumelor şi a suprafeţelor în spaţiu.

S-a prezentat *modelarea geometrică* a volumelor folosind geometria constructivă a volumelor, modele de frontieră şi cu ajutorul unor poliedre. Totodată, s-au calculat proprietăţile globale ale volumelor modelate folosind metoda descompunerii volumelor în părţi componente şi prin metoda Timmer – Stern. O atenţie aparte s-a acordat abordării problemei intersecţiilor entităţilor geometrice.

În abordarea *modelării geometrice* a volumelor s-a ţinut cont de reprezentarea obiectului de modelat, de desenul obiectului şi de realizarea practică a modelului, cele trei aspecte fiind strâns legate şi dependente. În practică, când se creează un *model geometric* al unui produs nou, obiectul fizic iniţial nu există, ci se creează, apoi obiectul creat prin *modelare* este studiat, perfecţionat sau îmbunătăţit, modelul fiind apoi disponibil pentru analiză şi evaluare. După selectarea unui *model* şi aprobarea lui conceptuală, acesta se poate utiliza pentru fabricaţia obiectului modelat.

În numeroase aplicaţii, *modelul geometric* al unui obiect fizic poate necesita o descriere completă a proprietăţilor suprafeţelor modelate sau poate include doar informaţii referitoare, de exemplu, la proprietăţile de rezistenţă sau elasticitate a obiectului material. În practică se pot utiliza metode de *modelare geometrică* pentru a construi o descriere matematică cât mai apropiată a detaliilor unui obiect real sau pentru a simula un proces.

Construcţia propriu-zisă a *modelului* se poate realiza, în principiu, utilizând calculatoare şi sisteme de operaţii şi de aplicaţii adecvate. Utilizarea calculatoarelor este, de fapt, principalul instrument folosit în *modelarea geometrică*. Fără un sistem de calcul adecvat, din punctul de vedere al puterii de calcul şi a programelor de calcul folosite, nu este posibilă crearea, construcţia şi analiza unor modele sofisticate, care au o importanţă practică.

Odată *modelul* creat, este necesară testarea acestuia, pentru a constata dacă el corespunde cerinţelor şi specificaţiilor pentru care a fost creat, ceea ce conduce la elaborarea unor versiuni şi variante îmbunătăţite şi care să corespundă în mod adecvat caietului de sarcini ale produsului.

Acceptarea *modelului* din punctul de vedere calitativ şi cantitativ reprezintă pasul final spre scopul pentru care a fost construit *modelul*: acela de a permite studierea caracteristicilor şi proprietăţile obiectului modelat, folosind un *model virtual* conceput pentru a substitui acest obiect. Funcţie de complexitatea şi fidelitatea modelului, informaţiile obţinute din studierea modelului reprezintă o sursă importantă de informaţii relative, de exemplu la forma obiectului modelat, structurile de rezistenţă, aspect, etc.

Ca urmare a informaţiilor obţinute prin folosirea *modelului geometric* al obiectului modelat, analiza structurilor de rezistenţă mecanice, statice şi dinamice, se poate studia într-un număr extrem de mare de condiţii şi sarcini de încărcare. Efectul acestor sarcini mecanice se pot vizualiza rapid, rezultând o interpretare clară a solicitărilor structurale, uşor de modificat în direcţia cerută de caietul de sarcini.

Sistemele cinematice pe calculator au permis realizarea de *modele* diferite pentru părţi diferite ale modelelor de realizat, făcând apoi îmbinarea lor finală, fie vizual, fie analitic. Iar sistemele de inteligenţă artificială permit punerea de întrebări şi obţinerea de răspunsuri la probleme legate, de pildă, de accesibilitatea sculelor de prelucrat în asamblarea pieselor.

În departamentele de producţie, calculatoarele sunt în măsură să interpreteze aceste modele, să genereze instrucţiuni de prelucrare şi de asamblare pentru liniile de producţie computerizate şi robotizate. Inspecţia finală şi controlul automat al calităţii cu ajutorul calculatoarelor electronice a condus la creşterea indicilor de calitate a produselor realizate.

Se poate considera că un domeniu în care *modelarea geometrică* a avut cele mai spectaculoase aplicaţii îl reprezintă *fabricaţia asistată de calculator*. Modelarea geometrică a făcut posibil ca întreg procesul de fabricaţie al produselor să fie asistat de calculator. Sistemele de prelucrare sunt dotate cu microprocesoare capabile ca, prin folosirea unor limbaje de programare adecvate, să execute comenzile necesare realizării produselor, reprezentând faza finală a ciclului de producţie.

În acelaşi timp, în funcţie de complexitatea lor, realizarea suprafeţelor sculptate necesită maşini-unelte de înaltă performanţă, capabile să realizeze o astfel de precizie şi complexitate, dar care ridică semnificativ costurile de prelucrare. Aceasta conduce la o cerinţă stringentă impusă proiectării proceselor tehnologice, şi anume la reducerea timpilor de prelucrare, ca o măsură eficientă de folosire a maşinilor-unelte cu comandă numerică pentru realizarea suprafeţelor sculptate.

În final, în **capitolul 7** din lucrare s-a prezentat pe larg teoria generării suprafeţelor sculptate, cu scopul folosirii optimale a acestei teorii în domeniul prelucrării acestor suprafeţe pe maşini-unelte cu comandă numerică. S-a evidenţiat prin formule matematice adecvate influenţa alegerii adecvate, optimale, a sculelor de prelucrat, pentru optimizarea procesului de prelucrare.

S-au studiat în detaliu realizarea suprafeţelor modelate pe maşini-unelte cu comanda numerică, descriindu-se din punct de vedere matematic suprafeţele ce apar în cadrul prelucrării în punctul de contact. Din studierea cinematicii sculelor aşchietoare s-au obţinut traiectoriile optime de prelucrare pentru care se pot minimiza costurile de fabricaţie.

În mod detailat s-au studiat condiţiile necesare şi suficiente pentru o realizare optimală a suprafeţei sculptate modelate. Acestea trebuie luate în considerare atunci când se are în vedere modelarea optimală a suprafeţei sculptate, reprezentând condiţiile necesare şi suficiente pentru îndeplinirea condiţiilor proiectului tehnic de realizare a suprafeţei.

Totodată, din studiul erorilor de prelucrare ce apar în procesul de obţinere a suprafeţelor sculptate, a rezultat necesitatea reducerii acestora pentru încadrarea în limitele de toleranţă. Studiul matematic al erorilor de prelucrare prezentat în lucrare permite minimizarea acestor erori, în scopul măririi preciziei de prelucrare.

În finalul capitolului 7 se calculează parametrii optimali de prelucrare a suprafeţei sculptate, în vederea minimizării costurilor de producţie, evidenţiindu-se metode de mărire a preciziei suprafeţei sculptate şi calculându-se parametrii optimali de prelucrare.

Prin cuplarea modelului geometric de analiză a suprafeţelor sculptate cu programarea maşinilor-unelte cu comandă numerică se obţine modelul geometric al generării suprafeţelor sculptate, ceea ce reprezintă o metodă avansată de prelucrare a suprafeţelor sculptate pe maşini-unelte cu comandă numerică.

Prin elaborarea acestei lucrări a rezultat că, deşi progresele din domeniul modelării matematice, în general, şi a *modelării geometrice,* în special, sunt impresionante, cercetările sunt departe de a fi încheiate. Se poate considera că în viitor aceste cercetări vor continua, relevând noi cunoştinţe, care vor contribui, atât la dezvoltarea generală a acestui domeniu, dar şi numeroase aplicaţii în alte domenii ale dezvoltării teoretice şi practice.

1. NOŢIUNI ŞI PRINCIPII FUNDAMENTALE

1.1. Introducere

În acest capitol se prezintă definirea noţiunilor de **model** în general şi de **modelare geometrică** în particular, noţiuni care fac obiectul studiului aprofundat în cadrul acestei lucrări. Se fac referiri la **model** şi la **subiectul de modelat,** pe de o parte şi la **modelul** propus şi realitatea **modelată,** pe de altă parte. În final se prezintă etapele generale ce se parcurg în cadrul specific al creerii unui **model**, de la prezentarea problemei luată în considerare, până la testarea şi validarea **modelului**.

Termenul **"modelare geometrică"** s-a consolidat în vocabularul tehnic după 1970, în principal datorită dezvoltării rapide a proiectării asistate de calculator (CAD/CAM)[1]. Acest termen se referă la o serie de metode utilizate pentru definirea caracteristicilor geometrice ale unui obiect în spaţiu sau a unei suprafeţe în plan sau în spaţiu, cu scopul, în principal, de a fi realizat în practică, cu metode specifice de fabricaţie.

Modelarea geometrică extinde cunoştinţele din domeniul graficii pe calculator (CG)[2] şi a geometriei pe calculator (CG)[3] într-un domeniu distinct - **al modelării volumelor (solidelor[4]**)– domeniu care reprezintă o sinteză a îmbinării geometriei spaţiale şi a utilizării calculatoarelor electronice.

În general, atunci când se realizează un **model,** se creează de fapt o reprezentare a realităţii modelate, **model** care permite studierea caracteristicilor acestei realităţi într-un mod relativ facil şi direct. Dacă modelul creat este unul considerat corespunzător, atunci acesta poate răspunde necesităţilor cercetării şi producţiei, întocmai ca şi obiectul modelat.

Uneori, în practică, se încearcă abstractizarea informaţiei esenţiale a obiectului propus, chiar ignorându-se unele informaţii considerate neesenţiale cu scopul simplificării calculelor necesare realizării modelului propus.

1.2. Modelul

1.2.1. Termenul de model

Termenul de **"model**"[5] şi în consecinţă acţiunea de a **modela** – are diferite semnificaţii în funcţie de domeniul de aplicaţie.

Dicţionarul Petit Larousse Illoustré (Larousse, 2007) prezintă termenul **de model – modelare** - sub diferite aspecte.

Model:

- ce serveşte ca obiect de imitare;
- persoane sau orice obiect după care lucrează şi creează artiştii;

---

[1] Computer Aided Design / Computer Aided Manufacturing (engl.)
[2] Computer Graphics (engl.)
[3] Computational Geometry (engl.)
[4] Solid modeling (engl.)
[5] Modello (ital.)

- aparat ce permite reproducerea unei piese date prin procedee utilizate în turnătorie pentru realizarea amprentei unei forme în care se va turna piesa metalică;
- formă în relief în sculptură, formă utilizată în pictură;
- forma de eroziune a reliefului (**model** în relief (geografie));
- caracteristică de imitare: de ex. "Turrene a fost un **model** de curaj".

Model matematic: reprezentarea matematică a unui fenomen fizic, chimic, uman etc. cu scopul de a studia această reprezentare în locul fenomenului propriu-zis.

Model redus: reprezentare la o scară redusă, dar funcţională, a unei maşini sau a unui ansamblu.

A modela:

- a porni de la pământ, argilă, ceară pentru a obţine forme concrete;
- a imita, prin desen sau pictură obiectul ales;
- figurativ: a se conforma: "şi-a modelat conduita sa după a oamenilor de bine".

Alţi termeni legaţi de noţiunea de **model** pot fi:

Modelor - modelator: artist care modelează o statuie, un basorelief. În industrie: un modelator poate fi un muncitor care face modele din lemn, argilă, ceară etc. pentru mulajul pieselor turnate.

Modelare: acţiunea de a modela figuri în relief.

Modelist: desenator/are de modele, persoană care fabrică modele reduse.

Model, ca adjectiv: perfect în domeniul său - un elev model, o femeie model.

În (Ören, 1979) se defineşte un **model** ca un obiect artificial şi care reflectă şi reproduce elemente esenţiale, relaţii între elemente ale structurii şi funcţii ale unui obiect concret sau fenomen al realităţii într-un mod simplificat şi care astfel poate fi folosit ca instrument pentru examinarea şi analizarea realităţii concrete.

Fenomenul de **modelat** - realitatea - şi **modelul** creat trebuie să fie similar sau cât mai apropiat de obiect sau fenomen, referitor la caracteristicile şi funcţiile modelate.

Faptul că **modelul** este obţinut prin simplificarea unor caracteristici şi funcţii ale fenomenului real se datoreşte necesităţii de a simplifica studiul fenomenului real. Ca urmare, **modelul** este o simplificare, o reducere, o abstractizare a realităţii, iar **modelele** reduc obiectele originale la unele mai simple. În acelaşi timp este posibil ca **modelele** să aibă caracteristici fără nici-o legătură cu fenomenul sau obiectul studiat. După cum este posibil să existe mai multe **modele** pentru acelaşi fenomen sau mai multe **modele** parţiale care să reflecte mai mult sau mai puţin exact fenomenul sau obiectul de modelat.

În acelaşi timp, se poate face o distincţie între ***modelele structurale*** şi ***modelele funcţionale*.** În general ***modelele structurale*** încearcă o analogie între obiectul sau obiectele originale şi **modelul** referitor la relaţiile între elementele sistemului. Pe de altă parte este posibil ca realizarea **modelului** să corespundă integral obiectului (fenomenului) iniţial (original).

Modelele funcţionale reprezintă comportamentul unui sistem în funcţie de datele de intrare/ieşire ale sistemului. Ca urmare, **modelul** ignoră structura internă a obiectului sau a fenomenului original cu scopul de a reproduce legăturile funcţionale, obţinându-se "cutia neagră"[6] a obiectului de studiu.

[6] Black box (engl.)

Studiind reacţiile sistemului la diferiţi stimuli se poate obţine comportamentul sistemului considerat, eventual predicţia şi evoluţia comportării acestuia în spaţiu sau în timp.

1.2.2. Modelul şi subiectul de modelat

În practică este evident că **modelele** servesc unor scopuri diferite. Persoana care dezvoltă un **model** încorporează diverse informaţii despre fenomenul (obiectul) real în crearea **modelului**, iar persoana care utilizează acel **model** obţine noi informaţii despre fenomenul (obiectul) studiat folosind **modelul** creat sau propus.

În acest fel, **modelele** pot fi clasificate în funcţie de scopul pentru care au fost create:

- obţinerea de noi informaţii, de ex. când acestea nu pot fi obţinute considerând obiectul original sau este prea costisitor să fie obţinute în acest mod;
- diseminarea informaţiilor (un astfel de exemplu îl constitute hărţile geografice – un **model** al datelor geodezice);
- ca aplicaţii tehnice cu scopul de a înlocui sistemele originale (de ex. sistemul autopilot al avioanelor).

1.2.3. Modelul propus şi realitatea modelată

În general utilizatorul **modelului** verifică informaţiile obţinute prin utilizarea **modelului** la studiul fenomenului original cu scopul de a obţine noi informaţii sau de a verifica cele existente.

Rezultă că un **model**, experimental sau de simulare, nu înlocuieşte datele şi experimentele empirice, iniţiale. Exemplul clasic îl poate reprezenta prognoza meteorologică şi care foloseşte **modelele** matematice ale atmosferei, bazându-se pe datele meteorologice anterioare pentru a prezice vremea probabilă.

Un alt exemplu îl constituie utilizarea **modelării** matematice la procesarea datelor medicale aşa cum sunt ele obţinute prin folosirea tomografiei computerizate (CT)[7], rezonanţa magnetică (MRI)[8], tomografiei cu emisie de protoni (PET)[9], angiografie digitală (DSA)[10] etc.

Datele obţinute sunt folosite la crearea unui **model** grafic a corpului uman în vederea stabilirii diagnosticului. Cu toate că aceste metode devin din ce în ce mai sofisticate şi precise, diagnosticul final implică şi alte investigaţii de specialitate.

1.2.4. Crearea modelului

Activitatea de creare a unui **model**, denumită anterior **modelare**, presupune parcurgerea unor etape care să conducă la crearea şi dezvoltarea **modelului** propriu-zis. Această activitate se prezintă figura 1.1, unde diagrama propusă încearcă definirea etapelor creării unui **model** ca o succesiune logică a etapelor procesului de **modelare**.

---

[7] Computered tomography (engl.)
[8] Magnetic resonance imaging (engl.)
[9] Positron emission tomography (engl.)
[10] Digital substraction tomography (engl.)

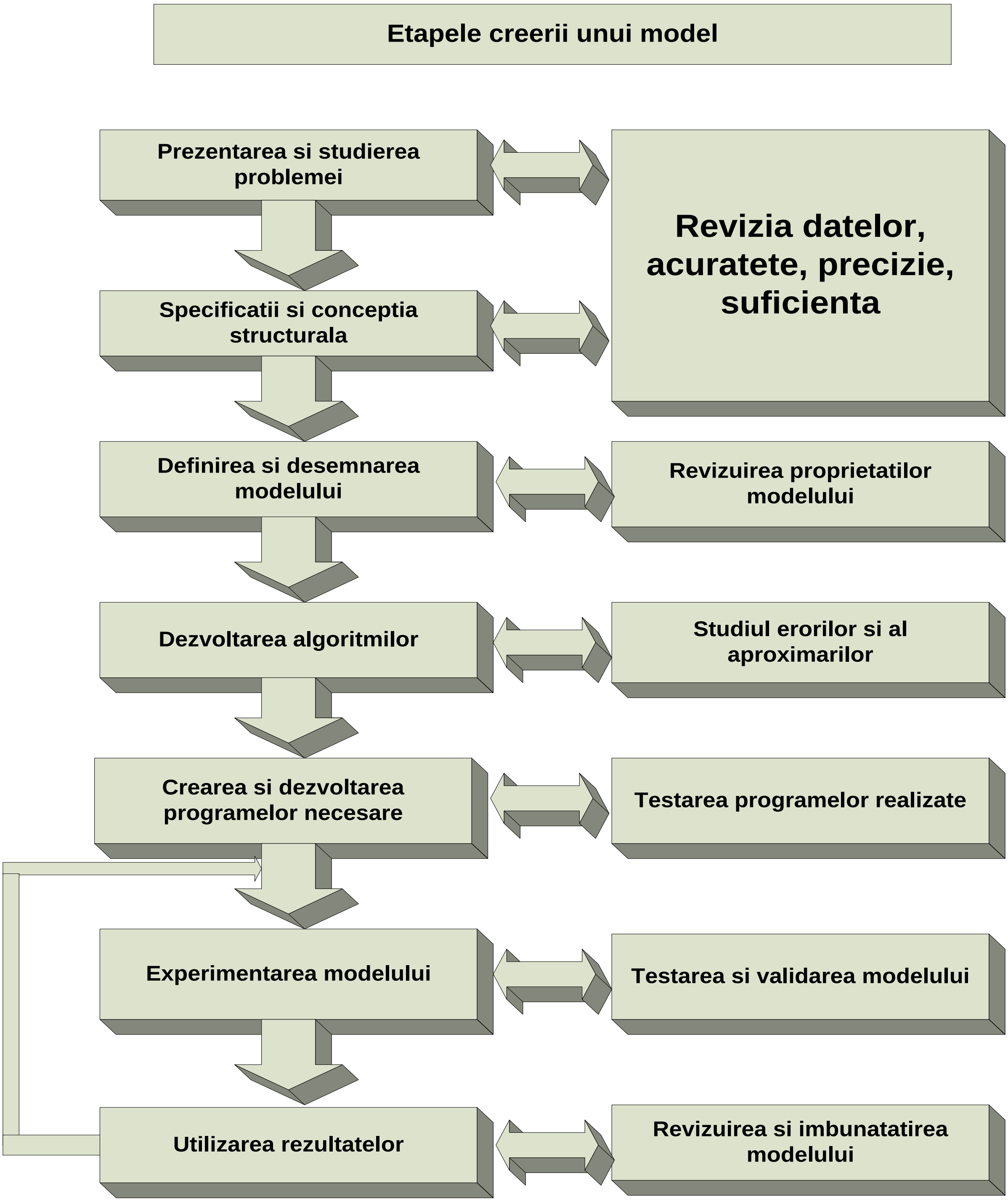


Fig. 1.1. Etapele creerii unui model

1.2.4.1. Prezentarea şi studierea problemei

Primul pas în constituirea **modelului** îl constituie prezentarea clară a problemei studiate, definindu-se scopul cercetării şi al investigaţiei, stabilindu-se acurateţea necesară. De multe ori, în cursul construirii **modelului**, problema modelată se poate modifica şi remodela pentru a reflecta mai precis fenomenul studiat.

1.2.4.2. Specificaţii şi concepţia structurală

După obţinerea datelor necesare şi verificarea acurateţei lor, acestea sunt grupate, structurate şi organizate în vederea alegerii sau creării **modelului** adecvat procesului studiat.

1.2.4.3. Desemnarea şi definirea modelului

Având la baza datele procesului de **modelat** şi alegându-se metoda de **modelare,** se desemnează **modelul** ca o imagine fizică a obiectelor sau fenomenelor studiate. Proprietăţile relevante ale obiectelor sau fenomenelor studiate se pot descrie folosind un limbaj natural sau formal, ca de exemplu în cazul **modelelor** matematice, şi care formalizează procesul **modelat**.

La alegerea **modelelo**r se ţine cont de criteriile metodologice, de analiza costurilor necesare realizării **modelului**, de acurateţea necesară, de complexitatea **modelului**, de destinaţia acestuia etc.

Descrierea calitativă şi cantitativă a obiectului sau a fenomenului de **modelat** trebuie să fie suficient de precisă ca să corespundă intenţiilor pentru care a fost creat **modelul**. Ca urmare, **modelul** trebuie să reflecte în mod adecvat descrierea calitativă pe baza datelor disponibile.

Creşterea gradului de complexitate a problemei studiate poate duce la complicarea **modelului** şi care uneori face ca modelul să fie dificil de utilizat. Utilizarea unui **model** neadecvat sau care să distorsioneze problema studiată în loc să o rezolve, reduc şansele de existenţă a **modelului**. De aceea, verificarea şi testarea **modelului** propus este crucială.

Deşi uneori **modele** complexe par mai potrivite în a descrie fenomenele studiate decât **modelele** simple, totuşi sunt posibile cazuri când prea multe parametrizări să nu reflecte adecvat realitatea.

"Din două **modele** adecvate, cel ce necesită mai puţine resurse sau mai puţine prezumţii este cel mai adecvat"[11]. Matematic. aceasta se poate exprima folosind diferite metode numerice simple, ca de ex. analiza valorilor singulare sau analiza factorilor, ca metode care analizează relaţiile dintre elementele unui fenomen aleator dat şi cauzele acestuia.

1.2.4.4. Dezvoltarea algoritmilor

Dezvoltarea algoritmilor ţine cont de tipul problemei de **modelat** şi resursele disponibile pentru rezolvarea algoritmilor propuşi. În funcţie de destinaţia **modelului** se pot alege sau crea programe specifice **modelului** respectiv şi care să reflecte cât mai adecvat problema propusă.

1.2.4.5. Testarea şi validarea modelului

Odată **modelul** ales, testarea şi validarea acestuia apare ca o etapă necesară pentru experimentarea **modelului.**

Problemele principale care se consideră în cadrul etapei de experimentare a **modelului** trebuie să răspundă întrebărilor de tipul:

- Comportarea **modelului** corespunde în suficientă măsură comportamentului fenomenului (obiectului) abordat?
- Este **modelul** mult prea complicat, poate fi perfecţionat?
- Comportarea **modelului** comparativ cu fenomenul (obiectul) studiat limitează aplicabilitatea sa?

[11] Principiul lui Occan, cunoscut sub numele de principiu minimal.

Ca metode de verificare se pot folosi următoarele strategii:

- Verificarea statistică bazată pe teste statistice, care în limita unor erori de probabilitate impuse determină dacă **modelul** acoperă sau nu comportamentul fenomenului (obiectului) studiat;
- Verificarea indirectă, care demonstrează că contrariul nu e posibil sau e posibil doar în cazuri particulare.

O analiză a sensibilităţii **modelului** se impune ca necesară şi care să arate cât de sensibil este **modelul** la schimbarea parametrilor sau a structurii fenomenului (obiectului) de studiat. Comportamentul **modelului** trebuie să corespundă comportamentului sistemului studiat, în limitele acceptate sau impuse ulterior. **Modelul** validat poate fi folosit apoi – ca în cazul simulării pe calculator – la găsirea soluţiilor problemei originale.

1.3. Modelarea matematică numerică

Pentru descrierea, analiza şi controlul unor fenomene (obiecte) tehnice, ştiinţifice, economice – principalul scop al existenţei şi dezvoltării **modelării,** în general, şi a celei matematice în special – se consideră că sunt posibile cel puţin două metode de abordare:

1. **prin experiment**: informaţiile necesare modelării fenomenelor (obiectelor) se obţin din examinarea fenomenelor (obiectelor) propriu-zise;
2. **prin simulare**: datele necesare studierii fenomenelor (obiectelor) se obţin în principal prin utilizarea calculatoarelor electronice, şi care pe baza unui **model** creat, în special cu ajutorul metodelor matematice, furnizează aceste date.

Atunci când se pune problema alegerii strategiei utilizate, de regulă se iau în considerare costul şi fezabilitatea proiectului. În acelaşi timp, există fenomene pentru care singurele metode de studiere sunt metodele ştiinţifice, în special matematice, folosindu-se de cele mai multe ori calculatoarele electronice şi, în special, sisteme de programe (software) adecvate (Meyer, 1984).

Un element important al specificaţiilor problemelor de rezolvat îl constituie nivelul de acurateţe cerut datelor iniţiale ce sunt folosite ulterior pentru **modelarea** fenomenelor (obiectelor).

În cadrul studiilor de simulare, calitatea **modelelor** şi a datelor ce rezultă din aplicarea metodelor sunt determinante pentru obţinerea nivelului de acurateţe cerut. De aceea, pentru a obţine acest nivel este necesară cunoaşterea şi cuantificarea totalităţilor factorilor care influenţează acest nivel.

1.3.1. Aspecte calitative şi cantitative ale procesului de modelare

Uneori este posibil ca în procesul de elaborare a **modelului** să se obţină expresii matematice care să nu poată fi rezolvate într-o manieră simplă. Aceasta înseamnă că utilizarea formulelor matematice care să descrie şi să modeleze problema dată pot conduce la situaţii calitative referitoare la legăturile dintre datele existente şi valorile obţinute utilizând **modelele** create. Dar, în practică, sunt mai puţin frecvente situaţiile în care scopul **modelării** îl constituie rezolvarea problemelor cantitative ale proceselor **modelate.**

1.3.2. Probleme ale modelării matematice

În general, **modelarea** matematică se prezintă sub forma unor expresii matematice (ecuaţii algebrice, ecuaţii diferenţiale, inecuaţii, etc.) care încearcă să „**modeleze**” (să reproducă) teoretic sau practic un fenomen (obiect, proces).

Se poate menţiona că în **modelarea** matematică se pot întâlni următoarele probleme:

- *Calitative:*
    - ca de exemplu, în examinarea stabilităţii soluţiilor obţinute (ţinând cont de perturbaţiile ce apar în **model**);
    - sau problemele ce pot apare urmărind evoluţia **modelului** după o perioadă de timp.
- *Cantitative:*
    - pot apare de exemplu când se cere precizarea soluţiilor sau a valorilor variabilelor, fie ele constitutive ale procesului, fie ca valori de control.

1.3.3. Prelucrarea datelor numerice

Problemele matematice care apar în procesul de **modelare** necesită determinarea stărilor variabilelor ce fac parte din proces. Aceasta a condus, prin natura şi volumul datelor numerice, la dezvoltarea unei noi ramuri ale matematicii: matematica numerică[12] sau matematica prelucrării datelor numerice[13] sau analiza numerică[14]. Această ramură se ocupă cu crearea, analiza şi implementarea de metode matematice care, folosind calculatoarele electronice, să fie în măsură rezolve probleme numerice.

În principiu există o delimitare între problemele matematice şi problemele numerice, chiar dacă la reprezentarea soluţiilor unor probleme matematice se folosesc formule matematice. Pe de altă parte însă, numeroase probleme numerice pot fi puse în corespondenţă cu diferite probleme matematice care să fie apoi folosite la obţinerea unor soluţii acceptabile. În practică există numeroase metode de a obţine soluţii numerice începând cu dezvoltarea şi implementarea unor algoritmi proprii, până la utilizarea unor sisteme de programe de calcul disponibile (Hamming, 1987).

1.3.4. Tipuri de probleme numerice

Rezolvarea problemelor numerice se poate încadra în următoarele tipuri:

- evaluarea de funcţii $f: F \to \mathbb{R}$:
    - prin calculul valorilor funcţiilor $f(x)$,
    - a derivatelor $f'(x)$, $f''(x), \ldots$ (diferenţiere numerică),
    - prin integrare $\int_a^b f(t)\,dt$ (integrare numerică),
    - calculul normelor $\| f \|_p$, (unde $\| \|$ reprezintă norma funcţiei corespunzătoare);
- soluţii ale unor ecuaţii algebrice prin determinarea valorilor algebrice ale necunoscutelor rezolvând sisteme de ecuaţii liniare sau neliniare;
- soluţii ale ecuaţiilor analitice prin determinarea unor operatori folosind:
    - ecuaţii diferenţiale ordinare sau parţiale,

---

[12] Numerical Mathematics (engl.)
[13] Numerical data processing (engl.)
[14] Numerical analyses (engl.)

  - ecuaţii integrale,
  - ecuaţii funcţionale,
  - ecuaţii Boule, etc.;
- soluţii de optimizare a problemelor prin determinarea unor valori numerice sau funcţionale, în funcţie de unele condiţii date şi care să optimizeze (maximizeze sau minimizeze) o funcţie obiectiv dată.

În concluzie, se poate afirma că rezolvarea problemelor numerice poate fi privită ca o problemă $F: x \to \mathbb{R}$ în spaţiile liniare normate $\mathbb{R}^{n \times n}$, unde în funcţie de entităţile necunoscute *y*, x sau F avem următoarele probleme (Tabel 1.1):

Tabel 1.1. Rezolvarea problemelor numerice

Problema: ↦ ↓	***F*** ↓	***x*** ↓	***Y*** ↓
- Directă ↦	dat	dat	se cere
≤ Inversă ↦	dat	se cere	dat
≤ De identificare ↦	se cere	dat	dat

1.3.5. Erori în modelarea matematică

Prin „**modelare** matematică” se încearcă găsirea şi realizarea unui „**model** matematic”, o formulă, un polinom, o relaţie matematică etc., care să aproximeze (să reflecte) o situaţie, o realitate, un proces etc., date şi cunoscute prin expresii numerice sau formule definite.

Noţiunea de „aproximare” indică faptul ca între realitate şi **modelul** propus există o diferenţă şi care se poate exprima prin calculul erorilor în **modelarea** matematică: cu cât eroarea e mai mică, cu atât **modelarea** se apropie de realitatea **modelată**.

Acurateţea şi calculul erorilor reprezintă un capitol distinct în analiza numerică. În general, se disting:

- ***Erori în datele de intrare***, iniţiale, ale procesului de **modelat**. De exemplu, astfel de erori pot apare în utilizarea aparatelor de măsurat şi care îşi au clasele lor de toleranţe;
- ***Erori de rotunjire*** ce pot apare, de exemplu, atunci când reprezentarea numerelor se restrânge la un număr finit de cifre, de exemplu la reprezentarea numerelor în calculatoarele electronice;
- ***Erori de aproximare*** pot apare, de exemplu, atunci când se încearcă descrierea unui **model** M folosind o „aproximare”, o relaţie simplă $\widetilde{M}$, şi care încearcă sa „aproximeze” **modelul** M. În acest caz, erorile poartă denumirea de erori de **model**. Uneori, în dezvoltarea algoritmilor ce stau la baza **modelului** se fac unele simplificări, care însă modifică rezultatul, apărând modificări de algoritmi ale **modelului**.
- ***Erori de trunchiere*** ce se definesc ca diferenţa dintre funcţia dată $f(x)$ şi funcţia de aproximare $p(x)$, acceptând să folosim un polinom de aproximare $\Pi(x)$.

  În acest caz, eroarea de trunchiere este:

$$f(x) - p(x) = \frac{\Pi(x)}{(n+1)!}\, y^{(n+1)}(\zeta)\ ;$$

Deşi ζ este necunoscut, formula poate fi totuşi folosită pentru a obţine marginile domeniului de eroare x_0 şi x_n. De remarcat că în probleme de predicţie, acest tip de eroare poate fi substanţial, deoarece factorul ζ devine foarte mare în afara intervalului în care se află x_0 şi x_n .

În principiu este necesar să existe relaţia:

||erorile în datele de intrare + erorile de rotunjire + erorile de aproximare + erorile de trunchiere ||≤ toleranţa dată.

- Datorită efectelor erorilor de aproximare şi de rotunjire, soluţia $\tilde{x}$ a problemei numerice nu este în general egală cu soluţia x a problemei matematice. Totuşi ea trebuie sa aibă o anumită acurateţe:

$$\| \tilde{x} - x \| < \varepsilon, \text{ pentru un } \varepsilon > 0 \text{ dat.}$$

- Datorită efectelor erorilor datelor de intrare şi a erorilor de trunchiere, soluţia x a problemei matematice descrie procesul pe baza căruia s-a creat modelul. Faţă de acestea se estimează o eroare de date si de aproximare:

$$\| x - x_{real}\| < \delta, \text{ pentru } \delta > 0 \text{ dat.}$$

În acest caz se estimează o eroare generală ca fiind dată de formula:

$$\| \tilde{x} - x_{real}\| \leq \beta \| \tilde{x} - x \| + \| x - x_{real}\| \leq \beta\ \varepsilon + \delta$$

Această relaţie indică faptul că nu este suficient să se aleagă o eroare relativ mică ε pentru problema numerică şi care să garanteze o eroare generală pentru soluţia aproximativa $\tilde{x}$. Pe de altă parte efectul erorilor de date şi de aproximare $\| x - x_{real} \|$ trebuie să fie suficient de mic pentru a avea valori acceptabile pentru eroarea generală $\| \tilde{x} - x_{real}\|$.

În practică, estimarea efectelor diverselor erori poate deveni destul de complicată, iar în unele cazuri chiar imposibilă. Uneori se preferă efectuarea de teste sau experimente care să valideze sau nu modelul, iar algoritmii şi programele să fie create în aşa fel ca acesta sa corespundă acurateţei cerute de problema dată.

Dacă prin validare rezultă că nivelul de acurateţe nu a fost atins, este necesară izolarea factorilor responsabili pentru nivelul de eroare şi modificarea (îmbunătăţirea) **modelului** care astfel să corespundă cerinţelor **modelării** (Rutherford, 1995).

1.3.6. Problema condiţiei numerice

Impactul erorilor datelor şi a erorilor de trunchiere $\| x - x_{real}\|$ face obiectul analizei erorilor de date şi care se referă la a stabili ce măsură soluţia x este modificată, dacă datele $\mathcal{D}$ pe care această soluţie se bazează a fost alterată din cauza introducerii datelor eronate.

Tranziţia de la datele $\mathcal{D}$ ale problemei originale (numite **date fără perturbare**) la datele $\overline{\mathcal{D}}$ ale modelului (numite **date perturbate**) reprezintă tranziţia de la soluţia exactă x la soluţia perturbată $\bar{x}$.

1.3.7. Numărul condiţiei absolute

S-a arătat mai sus că erorile de forma:

$$\| \bar{x} - x \| \leq \| \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D}\|$$

caracterizează sensibilitatea soluţiei la schimbările (**perturbările**) datorate erorilor datelor de intrare. Partea dreaptă a inegalităţii de mai sus reprezintă noma în spaţiul $S \subset \mathbb{R}^n$ al datelor şi care măsoară distanţa (**diferenţa**) dintre $\mathcal{D}$ şi $\overline{\mathcal{D}}$.

Cel mai mic factor posibil:

$$k = \inf \{\| \bar{x} - x\| \leq \| \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D}\| \}, \text{ unde } \overline{\mathcal{D}}, \mathcal{D} \in S \subset \mathbb{R}^n$$

reprezintă **numărul condiţiei absolute** a problemei matematice relativ la acel particular set de date.

1.3.8. Numărul condiţiei relative

Definind inegalitatea:

$$\frac{\| \bar{x} - x\|}{\| x\|} \leq \kappa \frac{\|\bar{\mathcal{D}} - \mathcal{D}\|}{\|\mathcal{D}\|}$$

se obţine **numărul condiţiei relative** a problemei matematice pentru factorul k relativ la setul de date.

Pentru a cuantifica sensibilitatea modelului F : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, a $\mapsto y$ la perturbaţii, considerăm o dată particulară $a_i \in \mathbb{R}$ şi studiem perturbaţia pe care o produce această dată asupra variabilei $y_j \in \mathbb{R}$.

Comparăm modificările relative ale rezultatului:

$$M_r = \frac{\left|\left(y_j(a_1, \dots a_{i-1}, \tilde{a}_i, a_{i+1} \dots a_m) - y_j(a_1, \dots a_m)\right)\right|}{|\ y_j\ (a_i \dots a_m)\ |}$$

cu modificările asupra datelor:

$$D_i = \frac{|\ \tilde{a}_i - a_i\ |}{|\ a_i\ |}, i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots, m.$$

şi care ne conduce la cuantificarea modificării relative a rezultatului variabilelor y_j, într-un punct particular a_i sub forma:

$$K_{y_{j \leftarrow a_i}} = \frac{M_r}{D_i}, i = 1,2, \dots, n, \dots, m$$

Dacă respectivele cantităţi: $a_1, a_2, \dots a_i, \dots a_m$ şi $\tilde{a}_i \neq a_i$ variază în aşa fel încât: $(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m)$ şi $(a_1, a_2, \dots, \tilde{a}_i, \dots, a_m)$ sunt elemente ale unui sistem de date $\mathcal{D}$, atunci **numărul condiţiei relative** $K_{y_{j \leftarrow a_i}}(\mathcal{D})$ şi care reprezintă sensibilitatea lui y_j în raport cu schimbările lui a_i, se obţine ca suprem al tuturor fracţiilor D_i, pentru $i = 1, 2, \dots, n, \dots, m$. Dacă de exemplu numărul condiţiei relative $K_{y_{j \leftarrow a_i}} = 5$, determinarea impactului lui $a_{j,}$ asupra lui y_j înseamnă că schimbând a_i cu 1%, rezultă schimbări ale rezultatului y_j cu 5%.

Este evident că **numărul condiţiei relative** $K_{y_{j \leftarrow a_i}}$ acoperă cel mai dezavantajos caz, astfel încât impactul asupra sensibilităţi lui y_j, pentru orice schimbări arbitrare ale lui a_i, să fie corect reprezentat.

1.3.9. Calculul numerelor condiţiei folosind diferenţierea

Din definiţiile de mai sus se poate observa ca problema **numerelor condiţiei** se tratează luând în considerare diferenţa dintre situaţia reală şi cea care rezultă din modelarea propusă. Or aceasta poate conduce la ideea folosirii calculului diferenţial şi a noţiunii de derivată în calculul **numerelor condiţiei**.

Fie o funcţie f continu diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi un argument a astfel încât $y = f(a)$.

Folosind schimbarea de variabilă: $\tilde{a} = a + \Delta a$ în mod corespunzător se schimbă y:

$$\tilde{y} = f(\tilde{a}) = f(a + \Delta a) = f(a) + f'(\bar{a})\, \Delta a = y + \Delta y,$$

unde $a \leq \bar{a} \leq a + \Delta a$ şi unde schimbarea Δy este dată de relaţia:

$$\Delta y = \tilde{y} - y = f'(\bar{a})\, \Delta a.$$

Relaţiile dintre schimbările relative $\frac{\Delta y}{y}$ şi $\frac{\Delta a}{a}$, unde $y = f(a)$ se pot obţine prin simple transformări: $\frac{\Delta y}{y} = \frac{a\, f'(\bar{a})}{f(a)} \cdot \frac{\Delta a}{a}$, dar primul termen $\frac{a\, f'(\bar{a})}{f(a)}$ reprezintă tocmai modificarea relativă conform definiţiei acesteia.

Deoarece $\bar{a} \approx a$ formula $K_{y_{j \leftarrow a_i}} = |\frac{a\, f'(\bar{a})}{f(a)}| \approx K_{y_{j \leftarrow a_i}}(B)$ produce o aproximare satisfăcătoare a **numărului condiţiei relative** într-un domeniu de date suficient de mic B. Pentru date într-un domeniu multidimensional, formula de mai sus poate fi interpretată prin analogie ca o formulă multidimensională sau derivatele parţiale ale datelor individuale pot fi folosite pentru a obţine valorile individuale ale **numerelor condiţiilor**.

1.3.10. Problemele valorilor condiţiilor numerice

Dacă valoarea **condiţiei numerice** a problemei matematice este mare, adică ($K \gg 1$), atunci chiar pentru o mică schimbare a datelor are loc o deviere pronunţată a lui $\bar{x}$ faţă de x. Aceste probleme sunt tratate în literatura de specialitate ca „ill–conditioned" faţă de „well–conditioned" pentru condiţii mici ale valorii condiţiei numerice.

În acelaşi timp se poate arata că este dificil delimita o linie exactă între cele două probleme şi care depinde doar de nivelul cerut şi obţinut al acurateţei modulelor. Ca urmare, dându-se eroarea totală τ, specificată de utilizator, aceasta poate fi obţinută doar dacă se garantează că:

$$\| \tilde{x} - x_{real} \| \leq \| \tilde{x} - x \| + \| x - x_{real} \| \leq \varepsilon + \delta < \tau,$$

sau mai puţin restrictiv:

$$\varepsilon + K \| \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D} \| < \tau .$$

Dacă dimensiunea erorilor de date $\| \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D} \|$ este cunoscută, o problemă a valorii condiţiei numerice K este considerată „ill-conditioned" dacă:

$\| \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D} \| \geq \tau$ sau chiar dacă $K \| \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D} \| \approx \tau$ deoarece în aceste cazuri chiar alegerea unui ε extrem de mic (dar care de regulă necesită un efort de calcul ridicat) nu poate garanta că $\tilde{x}$ este suficient de precis.

Dar pe de altă parte, nu este în general recomandabil să se aleagă ε mult mai mic decât $K \leq K \| \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D} \|$ deoarece în acest caz nivelul total de precizie (de toleranţă) este determinat de erorile de **model** şi de erorile de date.

Deci, doar dacă condiţia numerică a problemei matematice şi nivelul total de precizie (toleranţă), adică toleranţa ε specificată de utilizator pentru problema numerică şi informaţiile asupra dimensiunii $\| \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D} \|$ a erorilor de date sunt disponibile, atunci un nivel rezonabil de toleranţă ε poate fi specificat.

Ca urmare, parametrii de toleranţă, care de obicei se precizează ca date de intrare pentru problema numerică, se referă la eroarea $\tilde{x} - x$ şi deci joacă rolul lui ε. Aceasta datorită faptului că astfel de probleme de obicei pot controla devierea rezultatelor numerice obţinute faţă de rezultatul matematic ideal. Discrepanţa dintre model, algoritmul însăşi şi realitate poate fi influenţată din afara sistemului doar de către utilizator.

1.3.11. Unele probleme ale condiţiei numerice

Dacă rezultatul problemei matematice depinde în mod discontinuu de datele care variază continuu, atunci soluţia numerică a problemei este în general imposibilă, dacă datele sunt în vecinătatea acelei discontinuităţi. În astfel de cazuri rezultă perturbaţii substanţiale chiar pentru date extrem de precise prelucrate cu o precizie ridicată. Aceste cazuri pot conduce la noţiunea de probleme „ill-posed”.

Analog problemelor condiţiei numerice pentru problemele matematice şi aplicaţiile pot fi „well sau ill – conditioned”, aceasta depinzând de influenţa unor schimbări micii în experiment şi starea iniţială care afectează rezultatul x_{real}.

Ca urmare o proprietate matematică relevantă a modelelor matematice o constituie similaritatea dintre aplicaţie şi problema matematică referitor la sensibilitatea la perturbaţii. Dacă nu sunt astfel de similarităţi, atunci, în principiu, modelul nu este realistic.

În practică însă, o altă abordare este aleasă: informaţii adiţionale despre soluţia expectată sunt adăugate la modelul matematic care să îmbunătăţească considerabil condiţia numerică, strategie denumită regularizare şi care va fi abordată în capitolele ulterioare.

1.3.12. Constanta lui Lipschitz

Fie funcţia F : X → Y. Se spune despre această funcţie ca este **Lipschitz** continuă în regiunea B ⊆ X, dacă ∃ un numar λ (F, B) ∈ $\mathbb{R}^+$ astfel încât:

$$\| F x_1 - F x_2\| \le \lambda (F, B) \| x_1 - x_2\|, \text{ pentru } \forall\, x_1, x_2 \in B .$$

Fiecare număr λ (F, B) ∈ $\mathbb{R}^+$ se numeşte astfel **constanta lui Lipschitz** a lui F în regiunea B ⊆ X. Ca urmare, ceea mai realistică apreciere a sensibilităţii modelului este dată de cea mai mică **constantă Lipschitz** λ (F, B) şi care se referă la **norma lui Lipschitz** a lui F în regiunea B ⊆ X.

1.3.13. Norma lui Lipschitz

Cantitatea:

$$\mathrm{Lip}\,(F, B) := \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : \| F x_1 - F x_2\| \le \lambda \| x_1 - x_2\|, x_1, x_2 \in B \} =$$
$$= \sup \left\{ \frac{\|F x_1 - F x_2\|}{\| x_1 - x_2\|} \right\} ; \text{ unde: } x_1, x_2 \in B, x_1 \neq x_2.$$

se numeşte **norma lui Lipschitz** $\mathrm{Lip}\,(F, B)$ a lui F : X → Y pe B ⊆ X şi care este numărul condiţiei absolute a problemei directe y = F x pe setul de date B ⊆ X.

Pentru o funcţie neliniară F, alegerea setului de date B are o importanţă crucială asupra dimensiunii condiţiei numerice. Pe de altă parte condiţia de monotonie are loc întotdeauna deoarece:

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow \mathrm{Lip}\,(F, B_1) \le \mathrm{Lip}\,(F, B_2)$$

Pentru o funcţie liniară F pe X având **norma lui Lipschitz** $\mathrm{Lip}\,(F, B)$ pe $B \subseteq X$ şi unde B conţine domeniul S_δ astfel încât:

$S_\delta (x_0) := \{ x \in X : \| x - x_0\| < \delta\}$, unde δ > 0 se află în vecinătatea lui x_0.

Atunci pentru ∀ x_1, x_2 ∈ X avem:

$$\| F x_1 - F x_2\| = \| F (x_1 - x_2)\| = \| c\, F \left(\frac{x_1}{c} - \frac{x_2}{c}\right)\| = \| c\, F\left(\left(x_0 + \frac{x_1}{c}\right) - \left(x_0 + \frac{x_2}{c}\right)\right)\| \le$$
$$c\, \mathrm{Lip}\,(F, B)\, \| \left(x_0 + \frac{x_1}{c}\right) - \left(x_0 + \frac{x_2}{c}\right) = c\, \mathrm{Lip}\,(F, B)\, \frac{\| (x_1 - x_2)\|}{c} = \mathrm{Lip}\,(F, B)\, \| (x_1 - - x_2)\|.$$

Dacă alegem c > 0 astfel încât:

$$\| \frac{x_1}{c}\| < \delta \text{ şi } \| \frac{x_2}{c}\| < \delta, \text{ pentru a avea:}$$

$$x_0 + \frac{x_1}{c} \in S_\delta (x_0) \text{ şi } x_0 + \frac{x_2}{c} < \delta \text{ şi unde } c = \frac{(1 + \| x_1\| + \| x_2\|)}{\delta} .$$

Pentru funcţia liniară F de mai sus, **norma Lipschitz** nu depinde de domeniul B ⊆ X, atunci când domeniul B înglobează $S_\delta (x_0)$ şi unde x_0 ∈ X, iar $\delta > 0$, adică B este în vecinătatea lui x_0.

Deoarece expresia:

$$\| F x_1 - F x_2\| = \| F (x_1 - x_2)\| \le \| F \| \| (x_1 - x_2)\|$$

este adevărată pentru norma $\| F \|$ a domeniului liniar F, ea este totodată şi cea mai mică valoare care satisface expresia de mai sus.

Din definiţia **normei lui Lipschitz** obţinem:

$\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}) = \| F \|$, pentru funcţia liniară F.

1.3.14. Determinarea condiţiei numerice prin diferenţiere

Fie funcţia F : X → Y continuu diferenţiabilă pe domeniul convex $\mathrm{B} \subseteq X$, atunci obţinem:

$\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}) = \sup \{ \| f'(x) \| \}$, unde: $x \in \mathrm{B}$

şi unde $\| \; \|$ reprezintă operatorul normă aplicat vectorilor în spaţiul liniar X, Y.

<u>*Demonstraţie:*</u> Pentru $\forall\, x_1,\, x_2 \in \mathrm{B}$ obţinem:

$$F x_1 - F x_2 = \int_0^1 F'(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))\,(x_1 - x_2)\, d\lambda),$$

de unde:

$$\| F x_1 - F x_2 \| \leq \int_0^1 F'(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))\,(x_1 - x_2)\, d\lambda) \leq$$

$$\leq \sup \{ \| F'(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) \| : \lambda \in [0,1] \} \; \| (x_1 - x_2) \| \leq$$

$$\leq \sup \{ \| F'(x) \| : x \in \mathrm{B} \} \| (x_1 - x_2) \|.$$

dar:

$$F x_1 - F x_2 = F' x_2 \,(x_1 - x_2) + R\,(x_1, x_2),$$

unde:

$$\| R(x_1, x_2) \| = (\| x_1 - x_2 \|)$$

şi care confirmă definiţia **normei lui Lipschitz**, unde norma lui R se poate alege în mod arbitrar în apropierea lui sup $\{ \| F'(x) \| \}$, unde: $x \in \mathrm{B}$.

1.3.15. Condiţia numerică de gradul I

În anumite condiţii, **condiţia numerică** determinată prin **norma lui Lipschitz** $\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B})$ este posibil să conveargă spre $\| \mathrm{F}'(x_0) \|$ cu B → $\{x_0\}$.

Ca urmare: $\| \mathrm{F}' \; (x_0) \|$ poate fi folosit pentru a aproxima **condiţia numerică**, cu condiţia ca perturbaţiile sa fie mici.

Aceasta ne conduce la **condiţia numerică** de gradul I prin care se face tranziţia de la B la setul de valori $\{x_0\}$. Pentru acesta, fie F : X → Y şi $x_0 \in$ X, atunci obţinem:

$$K_{K_{F \leftarrow x}}(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \mathrm{Lip}\left(\mathrm{F},\, \mathrm{S}_\delta\, (\mathrm{x}_0) \right)$$

şi care este denumită **condiţia numerică** absolută de gradul I a lui F în x_0.

Dar din condiţia de monotonie a **normei lui Lipschitz** avem:

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}) \leq \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}_2),$$

care este marginea superioară $K_{K_{F \leftarrow x}}(x_0)\, \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B})$ şi care este adevărată pentru orice vecinătate a lui x_0 în B. S-a ales în mod convenţional o vecinătate a lui x_0 deoarece x se deplasează în direcţii arbitrare, atunci când este analizată comportarea lui x.

Deoarece:

$\mathrm{Lip}\left(\mathrm{F},\, \mathrm{S}_\delta\, (\mathrm{x}_0) \right) \geq 0$, pentru $\forall S_\delta\, (x_0)$, marginea inferioară:

$K_{K_{F \leftarrow x}}(x_0) \geq 0$ poate fi considerată ca o estimare a lui $\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B})$ în vecinătatea lui x_0 în B, după cum arată următoarea:

Teoremă: dacă: $\left(K_{K_{F \leftarrow x}}(x_0) \right) > 0$, atunci pentru orice $\rho > 0$ şi $\forall\; \delta > 0$, astfel încât **condiţia numerică** $\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B})$ pentru $\forall$ vecinătate x_0 în B, unde: B $\leq$ $\mathrm{S}_\delta\; (\mathrm{x}_0)$, poate fi estimată de numărul de condiţie de gradul I $K_{K_{F \leftarrow x}}(x_0) > 0$ adică:

$$K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) \leq \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}) \leq (1+\rho)\,K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0)$$

Demonstraţie: Condiţiile de mai sus impun inegalitatea din partea stângă:

$K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) \leq \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}) > 0$, pentru $\forall$ vecinătate x_0 în B.

Pentru a demonstra inegalitatea din partea dreaptă considerăm cantitatea ε astfel încât:

$$\varepsilon := \rho\, K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) > 0$$

definită corespunzător ipotezelor teoremei de mai sus.

Atunci există δ > 0 astfel încât:

$$\mathrm{Lip}\left(\mathrm{F},\, \mathrm{S}_\delta\ (\mathrm{x}_0)\right) \leq K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) + \varepsilon$$

deoarece:

$$K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) := \mathrm{Lip}\left(\mathrm{F},\, \mathrm{S}_\delta\ (\mathrm{x}_0)\right), \mathrm{unde}\ \delta \to 0^+$$

Demonstraţia: este completă dacă îl substituim pe ε şi aplicăm condiţia de monotonie a **normei lui Lipschitz :**

$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}_1) \leq \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}_2)$ pentru $\mathrm{B} \leq \mathrm{S}_\delta\ (\mathrm{x}_0)$.

Teorema de mai sus ne arată ca în principiu, **condiţia numerică** absolută a lui F într-o vecinătate x_0 a lui B suficient de mică este de aceiaşi mărime ca şi $K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0)$. În comparaţie cu norma $\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B})$ a lui Lipschitz, **condiţia numerică** de gradul I $K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0)$ este mult mai uşor de calculat, fiind astfel un instrument versatil când se analizează sensibilitatea modelului la schimbările de variabile sau de condiţii.

Mai mult, în particular, teorema de mai sus şi condiţia de monotonie implică:

$$K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) = \left\{ \| F'(x_0) \| : x \in \mathrm{B} \right\}.$$

Dar pe de altă parte, dacă numărul de condiţie de gradul I tinde spre zero, de exemplu $K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) = 0$, nu întotdeauna F răspunde la schimbările lui x în vecinătatea x_0 a lui B.

Dar pentru un spaţiu liniar F ecuaţia:

$$K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) = \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B}) = \|\mathrm{F}\|$$

are loc pentru $\forall\, x_0 \in x$ şi pentru orice $B \subseteq X$.

1.3.16. Condiţia numerică de gradul I relativă

Pentru a obţine estimarea locală a numărului condiţiei relative, valoarea condiţiei numerice absolute se împarte la valorile lui x corespunzătoare rezultatelor F (x):

$$K_{F\leftarrow x}(x_0) := \frac{\| x_0 \|}{\| \mathrm{F}\,(x_0) \|}\, K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0),$$

Pentru o funcţie diferenţiabilă F ecuaţia $K_{K_{F\leftarrow x}}(x_0) := \| \mathrm{F}'\,(x_0) \|$ conduce la formulele:

$K_{F\leftarrow x}(x_0) = \frac{\| x_0 \|}{\|\mathrm{F}\,(x_0)\|} \| \mathrm{F}'\,(x_0) \|$ pentru funcţii multi-variabile şi

$K_{F\leftarrow x}(x_0) = \frac{| x_0 |}{| \mathrm{F}\,(x_0) |} | \mathrm{F}'\,(x_0) |$ pentru funcţii mono-variabile.

1.3.17. Condiţia numerică pentru problema matematică inversă

Fie funcţia F $x = y$ continuu diferenţiabilă pe domeniul convex $\mathrm{B} \subseteq X$. Problema matematică inversă înseamnă al găsi pe x atunci când sunt date F şi y. În acest caz se cere investigată şi problema perturbaţiilor $\bar{F}\,\bar{x} = \bar{y}$, unde termenii sint afectaţi de erori, de exemplu:

$$\bar{F} = F + \Delta F,\ \bar{x} = x + \Delta x, \bar{y} = y + \Delta x.$$

Ca ipoteză iniţială:

- se presupune că $\bar{F}$ şi F au o soluţie unică în vecinătatea lui B,
- şi că norma lui Lipschitz există pentru ambii $\overline{F^{-1}}$, şi F^{-1} adică:

$$\| (x_1 - x_2)\| \leq \text{Lip}\,(F^{-1}, B)\, \|\, \text{F}\,(x_1) - \text{F}\,(x_2)\|$$

şi

$$\| (x_1 - x)\| \leq \text{Lip}\,(\overline{F^{-1}}, B)\, \|\, F^{-1}\,(x_1) - \overline{F^{-1}},\,(x_2)\|$$

şi unde: B ⊆ Y.

Din ipoteza iniţială rezultă:

$$F\,(\bar{x}) - F\,(x) = F\,(\bar{x}) - y =$$
$$= F\,(\bar{x}) - \bar{y} + \Delta\, y = F\,(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{x}) + \Delta\, y = -\Delta\, F\bar{x} + \Delta y$$

Dacă substituim $x_1 = \bar{x}$ şi $x_2 = x$ în ipotezele de mai sus:

$$\| \Delta\, x \| \leq \text{Lip}\,(F^{-1}, B)\, \|\, F\,(\bar{x}) - F\,(x)\,\| \leq \text{Lip}\,(F^{-1}, B)\,(\| \Delta F\,(\bar{x})\, \| + \| \Delta\, y\, \|)$$

Prin analogie:

$$\bar{F}\,(\,\bar{x}\,) - \bar{F}\,(x\,) = -\Delta\, F\,(x\,) + \Delta\, y,$$

şi care din ipoteza iniţială rezultă că:

$$\| \Delta\, x \| \leq \text{Lip}\,(\overline{F^{-1}}, \text{B}\,)\, \|\, \bar{F}\,(\,\bar{x}\,) - \bar{F}\,(x\,)\, \| \leq \text{Lip}\,\left(\overline{F^{-1}}, B\,\right)(\| \Delta F\,(x)\, \| + \| \Delta\, y\, \|)$$

Mai rezultă că ambii $\text{Lip}\,(F^{-1}, B)$ sau $\text{Lip}\,(\bar{F}^{-1}, B)$ pot fi aleşi ca şi **condiţie numerică** absolută a problemei inverse când se studiază valorile din partea dreaptă a inegalităţii. Din relaţia de monotonie se poate observa că norma $\| \Delta\, x \|$ de mai sus devine mai precisă dacă B este ales cât mai mic posibil. În mod ideal, pentru analiza **condiţiei numerice**, domeniul B este selectat cât mai mic posibil în vecinătatea lui $y \in Y$, dar care să includă toate perturbaţiile valorilor $y + \Delta\, y$ datorate erorilor de date $\Delta\, y$.

Dacă **norma Lipschitz** $\text{Lip}\,(\,\Delta\, \text{F}, \text{B}\,)$ a perturbaţiei $\Delta\, \text{F}$ este cunoscută, atunci este posibil a se elimina $\text{Lip}\,(\,\Delta\, \text{F}, \text{B}\,)$ din formula de mai sus, estimându-se ulterior $\text{Lip}\,(\,F^{-1}, B\,)$ şi $\text{Lip}\,(\,\Delta\, \text{F}, \text{B}\,)$.

Din:

$$\| \Delta\, \text{F}\,(x_1) - \Delta\, \text{F}\,(x_2)\| \leq \text{Lip}\,(\,\Delta\, \text{F}, \text{B}\,)\| \,(x_1 - x_2)\| \text{ pentru } \forall\, x_1,\, x_2 \in \text{B şi}$$
$$F\,(\,x_1\,) - F\,(\,x_2\,) = \left(F\,(\,x_1\,) - \bar{F}\,(\,x_1\,)\right) + \left(\bar{F}\,(\,x_1\,) - \bar{F}\,(\,x_2\,)\right) + \left(\bar{F}\,(\,x_2\,) - F\,(\,x_2\,)\right)$$
$$= -\Delta\, F\,(\,x_1) + \left(\bar{F}\,(\,x_1) - \bar{F}\,(\,x_2\,)\right) + \Delta\, F\,(x_2)$$

obţinem

$$\|\, F\,(\,x_1\,) - F\,(\,x_2\,)\, \| \leq \bar{F}\,(\,x_1\,) - \bar{F}\,(\,x_2\,) + \text{Lip}\,(\,\Delta\, \text{F}, \text{B}\,)\, \|\|\|\, (x_1 - x_2)\|$$

şi încă

$$\|(\,x_1 - x_2\,)\| \leq \text{Lip}\,(\bar{F}^{-1}, B)\,(\,\|\, \bar{F}\,(\,x_1\,) - \bar{F}\,(\,x_2\,)\, \|) + \text{Lip}\,(\,\Delta\, \text{F}, \text{B}\,)\|\, (x_1 - x_2)\|$$

sau în final

$$\|\,(\,x_1 - x_2\,)\,\| \leq \frac{\text{Lip}\,(F^{-1}, B)}{1 - \text{Lip}\,(F^{-1}, B)\,\text{Lip}\,(\,\Delta\, \text{F}, \text{B}\,)}\,(\,\|\, \bar{F}\,(\,x_1\,) - \bar{F}\,(\,x_2\,)\, \|\,),$$

presupunând că numitorul este > 0, de exemplu când perturbaţia Δ *F*, aşa cum este măsurată de către **norma Lipschitz** $\text{Lip}\,(\,\Delta\, \text{F}, \text{B}\,)$, este suficient de mică.

Din aceiaşi inecuaţie mai rezultă marginea superioară:

$$\text{Lip}\,(\bar{F}^{-1}, B) \leq \frac{\text{Lip}\,(F^{-1}, B)}{1 - \text{Lip}\,(F^{-1}, B)\,\text{Lip}\,(\Delta\, \text{F}, \text{B})}$$

sau:

$$\|\, \Delta\, x\, \| \leq \frac{\text{Lip}\,(F^{-1}, B)}{1 - \text{Lip}\,(F^{-1}, B)\,\text{Lip}\,(\Delta\, \text{F}, \text{B})}\,(\| \,\Delta F\,(x)\, \| + \| \,\Delta\, y\, \|)$$

Cele două expresii găsite ale lui $\|\, \Delta\, x\, \|$ sunt complementare. Utilizatorul poate să aleagă care din cele două expresii să le folosească:

- în cazul considerării problemei cu perturbaţii;
- şi una pentru cazul considerării problemei fără perturbaţii.

De asemenea în problema directă, norma derivatelor $\| (F^{-1})' \|$ sau $\|(\bar{F}^{-1})' \|$ se pot folosi cu aproximări acceptabile pentru **normele Lipschitz** pentru F^{-1} sau $\bar{F}^{-1}$ cu condiţia ca perturbaţiile să nu fie prea mari.

1.3.18. Condiţia numerică a problemelor liniare

Din ecuaţia:

$$K_{F\leftarrow x}(x_0) = \mathrm{Lip}\,(\mathrm{F}, \mathrm{B}) = \| \mathrm{F} \|$$

care se referă la operatorii liniari F şi ΔF, astfel încât pentru un spaţiu B nevid, conţinând valorile $\mathrm{S}_\delta\ (\mathrm{x}_0)$ în jurul valorii $x_0 \in$ B, rezultă expresiile:

$$\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F}, \mathrm{B}) = \| \mathrm{F} \|,$$

$$\mathrm{Lip}\,(F^{-1}, \mathrm{B}) = \| F^{-1}, \mathrm{B} \|,$$

$$\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F}, \mathrm{B}) = \| \Delta\, \mathrm{F} \|.$$

În acest caz **norma Lipschitz** poate fi înlocuită cu operatorul normă, dependenţa de B dispare şi **condiţia numerică** estimată poate fi derivată fără dificultate.

1.3.19. Efectul perturbaţiei asupra lui y

Presupunând ca doar x este perturbat şi F este dat fară eroare $(\Delta F = 0)$, atunci avem:

$$\| \Delta\, x \| \le \mathrm{Lip}\,(F^{-1}, B) \| \Delta y \| = \| F^{-1} \| \| \Delta F\, (\bar{x}) \|.$$

Considerând şi inegalitatea:

$\| F^{-1} \| \| \Delta\, F \| \le \| \bar{x} \|$ şi deci:

$$\frac{\| \Delta\, x \|}{\| \bar{x} \|} \le \| F \| \| F^{-1} \| \frac{\| \Delta\, y \|}{\| y \|}$$

Din cele trei formule ale perturbaţiei asupra lui y şi respectiv F se poate obţine numărul condiţiei $\| F \| \, \| F^{-1} \|$ pentru problema funcţiei liniare inverse.

Pe de altă parte, în ultima formulă eroarea relativă se referă la o soluţie perturbata $\bar{x}$. O formulă similară, unde erorile relative se referă la x şi nu la $\bar{x}$, poate fi dedusă şi pentru $\Delta\, y = 0$:

$$\frac{\| \Delta\, x \|}{\| x \|} \le \frac{\| F \| \| F^{-1} \|}{1 - \| F^{-1} \| \| \Delta\, F \|} \frac{\| \Delta\, F \|}{\| F \|}.$$

De asemenea, estimările relative sunt posibile şi pentru funcţiile inverse şi neliniare cu condiţia ca ele să fie mărginite. Marginile sunt date de formulele de mai jos:

$$\| \Delta\, \mathrm{F}\,(x) \| \le \mathrm{M}\,(\Delta\, \mathrm{F}) \| x \| \text{ şi } \| \mathrm{F}\,(x) \| \le \mathrm{M}\,(\mathrm{F}) \| x \|,$$

dacă comportamentul funcţiilor F şi $\Delta\, \mathrm{F}$ în spaţiul B este similar.

Presupunând că doar F este perturbat şi y rămîne neperturbat $(\varDelta y) = 0$, atunci:

$$\| \varDelta x \| \le Lip\,(F^{-1}, B) \| \varDelta\, F\, \bar{x} \| = \| F^{-1} \| \| \varDelta\, F\, \overline{x} \| \le \| F^{-1} \| \| \varDelta\, F \| \| \overline{x} \|$$

şi deci în final

$$\frac{\| \Delta\, x \|}{\| \bar{x} \|} \le \| F \| \| F^{-1} \| \frac{\| \Delta\, F \|}{\| F \|},$$

ceea ce ne permite să concludem asupra efectului perturbaţiei asupra lui y.

1.3.20. Validarea modelului matematic

Validarea **modelului matematic** care încearcă să simuleze realitatea (fenomenul, obiectul) reprezintă o componentă importantă, atât a modelarii, cât şi a matematicii aplicate, în general.

Scopul validării modelului constă în a compara fenomenul (obiectul) real cu modelul propus. În general, se propun numeroase experimente care să valideze şi eventual să îmbunătăţească modelul.

Problema fundamentală a validări **modelului matematic** constă în compararea **modelului** cu realitatea **modelată**:

- În ce măsură comportarea **modelului** corespunde (reflectă) comportamentul fenomenului (obiectului) studiat?
- Cit de precis este **modelul**, în principiu determinat empiric, în a reflecta cantitativ şi calitativ mărimile şi valorile sistemului original?.
- Este structura **modelului** prea complicată sau poate fi îmbunătăţită?
- Manifestă **modelul** instabilitate, în sensul că există valori pentru care **modelul**, fie să nu corespundă realităţii, fie să fie instabil şi să evalueze în mod diferit realitatea?.

În practică nu se poate afirma că există o certitudine totală a comportamentului **modelului**, existând întotdeauna un nivel de incertitudine şi care să facă necesară validarea **modelulu**i. De multe ori este posibil ca rezultatele obţinute prin **modelare** să fie valide doar la un domeniu restrâns al **modelului** fenomenului (obiectului) **modelat**. Este posibil în acelaşi timp, ca validarea modelului pentru un număr restrâns de date (situaţii) să poată conduce la largi discrepanţe faţă de realitate pentru valorile (datele) pentru care nu s-a făcut o testare corespunzătoare. De regulă, în acest caz este necesară o nouă variantă a **modelării** care să ţină cont de testele anterioare şi care reflectă mai fidel realitatea **modelată**.

1.3.21. Sensibilitatea analizei şi estimarea erorilor

Analiza empirică a sensibilităţii **modelului** constă în investigarea cantitativă şi calitativă a **modelului** creat la schimbările impuse modelului. În mod deliberat se fac schimbări la structura modelului, la parametrii şi valorile de intrare, la soluţia şi structura algoritmilor şi la alţi factori ce caracterizează **modelul**, cu scopul de al compara cu realitatea (fenomenul, obiectul) **modelat**.

Este evident că tipul şi mărimea acestor perturbaţii depind de **modelul** şi problema respectivă. Dacă aceste perturbaţii cauzează doar mici perturbaţii în comportamentul **modelului** şi care se pot încadra în toleranţa impusă **modelului,** atunci şi gradul de incertitudine al **modelului** se poate considera acceptabil.

1.3.22. Impactul erorilor de model

Impactul erorilor de **model** în procesul construirii acestuia poate avea consecinţe importante asupra comportamentului **modelului**. Sensibilitatea analizei erorilor de **model** are ca obiect tocmai determinarea acestor erori. Uneori, în practică nu sunt excluse situaţii când sunt propuse sisteme complexe, chiar noi metode de testare a **modelelor** propuse şi implicit chiar personal format special pentru a testa **modelele** propuse.[15]

1.3.23. Impactul erorilor de date

Soluţia de preferat este ca **modelul** creat să fie testat în cât mai multe situaţii, cu cât mai multe date posibile. Dar aceasta poate conduce la mărirea cheltuielilor de testare, iar uneori este chiar imposibil. Alteori se aleg metode

[15] Quality tester engineer or quality tester system (engl.)

aleatoare de generare a datelor de testare. În principiu, alegerea datelor de testare considerate reprezentative pentru aplicaţie trebuie făcută în aşa fel încât să corespundă în mare măsură situaţiilor reale care se **modelează**.

Determinarea caracteristicilor experimentale ale **modelării** ne poate condu-ce la rezultate importante ale sensibilităţii algoritmilor aleşi, a programelor componente şi a consecinţelor erorilor de date asupra comportamentului **modelului**.

Dacă se semnalează mari discrepanţe sau analiza datelor de intrare (de exemplu folosind metoda Monte Carlo) relevă erori importante, atunci se cere o îmbunătăţire a metodelor de colectare a datelor, iar întreg procesul de validare se cere a se relua cu noi proceduri şi seturi de date.

1.3.24. Impactul erorilor de rotunjire

Erorile de rotunjire pot apare în procesul utilizării programelor calculatoarelor electronice care sunt folosite la crearea, generarea şi testarea **modelelor** matematice.

Se poate remarca faptul că utilizarea de calculatoare cu performanţe din ce în ce mai ridicate şi creşterea gradului de performanţă a programelor (software) de aplicaţii reduce impactul erorilor de rotunjire asupra **modelelor** matematice.

1.3.25. Impactul erorilor algoritmilor de calcul

În prezent există un număr semnificativ de programe care rezolvă problemele numerice determinate de dezvoltarea **modelării** matematice. Este evident că unele programe pot fi mai performante decât altele, în cazul particular al problemei abordate şi simpla înlocuire a acestora în procesul de testare poate conduce la modificări semnificative a erorilor algoritmilor de calcul.

În general, algoritmii numerici iau în considerare parametrii de intrare specifici, şi / sau numărul maxim de iteraţii necesare obţinerii rezultatelor. Analiza erorilor trebuie să investigheze dependenţa rezultatelor numerice de aceşti parametrii.

1.3.26. Analiza erorilor folosind condiţiile numerice

În secţiunile dedicate **condiţiei numerice** s-a arătat că **normele lui Lipschitz** $\mathrm{Lip}\,(\mathrm{F},\mathrm{B})$ şi $\mathrm{Lip}\,(F^{-1},B)$ pot fi calculaţi sau cel puţin estimaţi. În practică, în special pentru problemele complicate, calculul acestor norme se dovedeşte a fi dificil, uneori chiar imposibil.

Deoarece informaţiile referitoare la sensibilitatea rezultatelor la erorile de date sunt importante la determinarea acurateţei **modelării**, în practică se pot folosi sisteme de simulare a perturbaţiilor şi care să genereze aceste erori. Datele artificiale introduse în setul de date sunt intenţionat perturbate într-un mod similar cu situaţiile perturbante existente în practică, de exemplu prin erorile de măsurare.

Se pot utiliza numere sau date aleatoare sau pseudo-aleatoare cu o distribuţie similară cu aceea a datelor existente. Numere generatore aleatorii pot fi folosite la a produce seturi de date perturbatoare. Acestea pot fi folosite la generarea de date perturbatoare, ca date de intrare, sau la investigarea metodei numerice care stă la baza algoritmului modelului realizat.

Aceasta conduce la un set de rezultate în vecinătatea domeniului rezultatelor exacte, evidenţiind totodată cât de senzitiv este această metodă la erorile de calcul sau de date.

Uneori este posibil ca o mică variaţie a datelor standard ale rezultatelor să nu reflecte întotdeauna o variaţie mică a erorilor ci, dimpotrivă, aceste valori să fie semnificative. În general, analiza empirică a **condiţiei numerice** este eficientă la reducerea incertitudinii **modelului**. Dar utilizarea ei este redusă, în particular la analiza sistematică a cât mai multe variante, dar care în schimb complică calculele necesare performării experimentelor definite în acest fel şi care se determină prin metode statistice adecvate.

1.3.27. Analiza generării erorilor

Generarea erorilor şi analiza lor poate fi o alternativă la obţinerea experimentală a datelor şi a analizei sensibilităţii acestora la erori. **Modelele** matematice de generare a erorilor, atunci când sunt folosite, pot lua în considerare diverşi factori, cantitativi sau calitativi, ai procesului de **modelare**. Astfel este posibil ca diferite tipuri de erori să determine diferite rezultate pentru aceeaşi problemă.

Ca dificultăţi ce pot apare la utilizarea generării erorilor şi la analiza lor se pot menţiona:

- Aparatul matematic teoretic şi practic al investigaţilor este mult prea complicat pentru a face analiza erorilor fezabilă;
- Estimarea impactului diverşilor factori poate fi mult prea pesimist (de exemplu exagerând importanţa acestor factori) şi ca urmare rezultatele sa aibă o valoare relativă redusă;
- Ipotezele asupra datelor de intrare pot fi prea restrictive, încât utilizarea metodei propuse să nu poate fi aplicată uşor.

1.4. Concluzii

Etapele creerii unui **model** , pot avea diverse succesiuni. Schema de mai sus reprezintă o schema generală, care se poate adapta la diverse situaţii.

Atât analiza empirică a datelor de intrare cât şi generarea matematică a erorilor au limitele lor când sunt folosite ca metode în **modelarea matematică.** Totuşi, ambele tehnici au importanţa lor când se consideră îmbunătăţirea rezultatelor calculelor numerice. În acelaşi timp, impunând standarde ridicate tehnicilor de testare a **modelelor** se măreşte considerabil volumul de calcule necesare validării acestora.

Atunci când se efectuează validarea programelor folosite în cadrul **modelării** se pot lua în considerare unele criterii, ca de exemplu:

- Este necesar să existe specificaţii formale (matematice) ale cerinţelor impuse **modelulu**i pe care acesta să le satisfacă, de exemplu descrierea detailată a rezultatelor cerute **modelului** în funcţie de datele de intrare;
- Este necesar un sistem analitic de verificare a corectitudinii algoritmilor care transformă datele de intrare în rezultate finale. Chiar folosind uneori validarea automată a programelor numerice, aceasta este restrictivă datorită complexităţii problemelor numerice ce se cer rezolvate. Aceste restricţii ce apar în astfel de sisteme automate de validare se pot datora de exemplu erorilor de rotunjire, în special când algoritmii matematici necesită soluţii numerice.

2. MODELAREA GEOMETRICĂ, CA PARTE IMPORTANTĂ A PROCESULUI DE MODELARE

2.1. Introducere

În acest capitol se prezintă definirea generală a principalelor noţiuni care se folosesc în lucrare referitoare la **modelarea geometrică**, scopul, destinaţia şi tehnici ale **modelării** suprafeţelor geometrice, clasificarea condiţiilor de continuitate şi de racordare a suprafeţelor.

Se prezintă în continuare unele tehnici generale de construcţie a **modelelor geometrice** pornind de la puncte obţinute prin procesul de digitizare şi prin schiţe şi desene de proiectare, detaliindu-se utilizarea polinoamelor la construcţia **modelelor matematice**. Totodată, se prezintă procedee de construcţie a curbelor şi a caroiajelor, accentuându-se asupra intersecţiilor şi a racordurilor, prezentându-se construcţia curbelor ca locuri geometrice, a suprafeţelor de revoluţie şi a caroiajelor de pe suprafaţa acestora (Mortensen, 2006).

Modelarea geometrică reprezintă o componentă importantă a procesului de **modelare,** în general, şi care folosind metode şi obiecte matematice, în special geometrice, îşi propune să **modeleze** o realitate dată (un fenomen sau obiecte).

În principiu, în **modelarea matematică,** în general, şi în **modelarea geometrică,** în particular, se folosesc elemente de bază utilizate în cadrul acestor ştiinţe: puncte, linii, curbe, suprafeţe, volume, şi care utilizate în cadrul unor relaţii şi formule matematice permit descrierea şi modelarea fenomenelor sau obiectelor considerate.

În general, **punctele** apar ca date de bază ale procesului de modelare, atât ca date iniţiale ale procesului, cât şi ca date obţinute în cursul modelării.

Este bine cunoscut faptul că într-un sistem n spaţial, punctele se reprezintă prin coordonatele lor raportate la un sistem de coordonate (x_i), unde $i = 1, 2, 3, \dots n$ şi unde:

- pentru $i = 1, 2$ se obţine o reprezentare planară;
- pentru $i = 1, 2, 3$ se obţine o reprezentare spaţială;
- pentru $i = 1, 2, 3, \dots n$ se obţine o reprezentare în spaţiul n dimensional.

Prin unirea a două puncte se poate obţine o **linie**, care în funcţie de axele de coordonate poate fi în plan sau în spaţiu. O **curbă** se poate obţine prin unirea mai multor puncte sau intersecţia unor suprafeţe şi cane la fel, pot fi descrise în plan sau în spaţiu.

Suprafeţele sunt elemente geometrice fundamentale care pot apare în procesul de reprezentare a datelor. În general, **volumele** sunt definite atunci când suprafeţele ce reprezintă volumul sunt suprafeţe închise.

Corespunzător, **modelarea matematică volumetrică** se distinge de **modelarea matematică a suprafeţelor**, printre altele, cel puţin prin faptul că noţiunile de interior sau exterior la volumele sau suprafeţele modelate necesită o cantitate mult mai mare de informaţii sau parametri, când ne referim la elemente geometrice ce constituie frontiera volumului. Se distinge astfel o modelare geometrică a **curbelor, suprafeţelor sau a volumelor**.

În principal această lucrare urmăreşte **modelarea geometrică** a:

- ***curbelor,*** folosind tehnici de modelare a curbelor şi, în principal, tehnici de interpolare;
- ***suprafeţelor,*** folosind în special sisteme de caroiaj;
- ***volumelor,*** folosind în special metode de modelare spaţială.

2.2. Scopul şi destinaţia modelării geometrice

Independent de tehnica de modelare (prin curbe, suprafeţe sau volumetrică) şi în special folosind tehnici specifice, **modelarea geometrică** are ca scop aplicaţii prin care se obţin:

- modele geometrice sintetice, ca de exemplu în cinematografie;
- obiecte modelate, reprezentări fizice, machete ale obiectului modelat, ca de exemplu în sectorul mecanic de construcţii de automobile, aeronautice, navale etc.

2.3. Modelarea geometrică a suprafeţelor

Modelarea geometrică a suprafeţelor îşi propune realizarea de modele ale suprafeţelor pornind de la puncte sau curbe date. Datele, constituite în principal din puncte, se pot obţine:

- utilizând instrumente de măsură adecvate sau
- pot fi propuse ca parametrii de intrare a fenomenului (obiectului) de modelat.

Mai pot exista situaţii când majoritatea datelor se pot obţine de utilizator în procesul construcţiei suprafeţelor. Realizarea modelelor se bazează în acest caz pe cunoştinţele şi experienţa proiectantului referitoare la funcţiile şi destinaţia obiectului de modelat, geometria, caracteristicile acestuia şi de cunoştinţele tehnologice din domeniul respectiv.

De exemplu, cunoştinţele tehnologice din domeniul turnării, forjării, extrudării şi alte procedee mecanice de elaborare şi prelucrare tehnologică a suprafeţelor îşi au importanţa lor, în special în etapele iniţiale de predimensionare, completând definiţia geometrică a obiectului de modelat şi permiţând obţinerea de informaţii complementare importante, ce pot fi folosite ulterior la realizarea modelelor corespunzătoare.

2.4. Tehnici de modelare geometrică a suprafețelor

În principal, pentru **modelarea geometrică** a suprafeţelor se foloseşte tehnica descompunerii în caroiaje şi utilizarea de racordări. În sens geometric, un caroiaj reprezintă un domeniu închis, mărginit, şi care încearcă să aproximeze cât mai aproape de realitate suprafaţa obiectului de modelat. În general, această definiţie se referă la un caroiaj de patru curbe descrise de parametri independenţi. Pot exista însă situaţii când careurile pot avea trei, două, sau chiar nici o curbă de frontieră (de exemplu când suprafaţa de caroiaj se reduce la un punct) sau situaţii când careurile nu corespund cu curbele de frontieră, fiind, de pildă, tocmai interiorul careurilor.

Uneori, din motive tehnologice sau estetice, pot exista situaţii când carourile se descompun în mai multe subansamble, situaţii care necesită studiul racordărilor şi a condiţiilor de continuitate la frontiera subansamblelor (Berg, 2008).

Ca urmare, **modelarea geometrică** a suprafeţelor impune iniţierea unui proces de analiză a problemelor matematice şi tehnologice ce apar la descompunerea în carouri şi la frontiera subansamblelor (carourilor) care să ţină cont în principal de:

- ⇨ forma geometrică a obiectului de **modelat**;
- ⇨ existenţa razelor de curbură în diverse zone ale caroiajului;
- ⇨ tehnologia disponibilă pentru realizarea **modelelor**;
- ⇨ modele matematice şi sisteme de programe disponibile utilizatorului;
- ⇨ natura datelor iniţiale şi modul în care acestea au fost obţinute.

2.5. Clasificarea condiţiilor de continuitate şi racordare

Condiţiile de continuitate şi de racordare se pot clasifica în continuitate de gradul:

- 0 - corespunzătoare curbelor de frontieră a suprafeţelor adiacente şi care corespund;
- 1 - corespunzătoare unei evoluţii continue a orientării normalei la suprafaţa care înglobează frontiera comună a două caroiaje adiacente;
- 2 - corespunzătoare conservării continuităţii curburii la trecerea frontierei între caroiajele adiacente.

2.6. Tehnici de construcţie a modelelor geometrice

2.6.1. Construcţia modelelor geometrice pornind de la date (puncte) obţinute prin procesul de digitizare

În principal, datele obţinute prin procesul de digitizare servesc la construcţia de curbe al căror rol principal este legat de descompunerea suprafeţelor în caroiaje.

Construcţia de curbe se efectuează ţinând cont de următoarele premise:

- ↦ toleranţa erorilor datelor de intrare obţinute în procesul de digitizare;
- ↦ criterii estetice ale obiectului de modelat;

↦ racordurile în punctele de joncţiune între curbele existente şi compatibilitatea lor la descompunerea în carouri.

Integrarea acestor premise permite obţinerea de date (puncte) care să stea la baza curbelor ce constituie suprafeţele cerute. În realizarea acestor curbe se pot avea în vedere cel puţin două aspecte legate de:

- metodele de aproximare folosite la realizarea curbelor (interpolări, parametrizări);
- gradul polinoamelor în sistemele de modulare şi poziţia nodurilor sau a punctelor de racordare ale polinoamelor.

În prealabil, construcţia de caroiaje cere ca elaborarea curbelor să fie validată din punctul de vedere al unor criterii calitative referitoare la estetică, dimensiuni, racorduri şi raze de curbură etc. Totodată construcţia curbelor trebuie să ţină cont de criteriile de continuitate comparabile cu cele ale caroiajelor.

În principiu, realizarea şi construcţia curbelor care stau la baza obţinerii caroiajelor se desfăşoară în cadrul unui proces iterativ în paşi succesivi, cu numeroase validări şi reveniri la datele iniţiale până la obţinerea formei finale a modelului şi care să corespundă cel mai bine condiţiilor iniţiale, tehnologice şi estetice ale modelării.

2.6.2. Construcţia modelelor geometrice pornind de la schițe şi desene de proiectare

Această situaţie se deosebeşte de cea precedentă prin aceea ca este mai puţin secvenţială. Dacă la prima metodă **punctele, curbele, caroiajele sau volumele** sunt elemente de bază ale **modelării,** ce sunt furnizate, cel puţin iniţial, în cazul 2.6.2 informaţiile disponibile procesului de **modelare** se obţin prin diverse metode de proiectare.

Ca urmare, se poate trece direct la realizarea de **curbe, suprafeţe şi volume** ce stau la baza **modelării** subiectului respectiv, eforturile concentrându-se în special la alegerea procedeelor tehnologice necesare producerii pieselor şi ansamblelor cerute.

În acest caz, construcţia geometrică a **modelului geometric** este strâns legată de:

⇨ dimensionarea adecvată bazată pe calcule de rezistenţa materialelor şi / sau calcule de elemente de structură ale obiectului final;
⇨ procedeele tehnologice de realizare a obiectului de modelat, şi care impun diverse forme ale obiectului final.

La rândul lor, entităţile geometrice (**puncte, linii, curbe, suprafeţe, volume**) se pot clasifica în entităţi:

➢ funcţionale, obţinute din caietele de sarcini ale obiectului de **modelat**;
➢ de legătură între suprafeţele şi curbele destinate a lega entităţile funcţionale constituite în prealabil, şi care descriu cerinţele de construire a **modelului**.

Prima etapă în construirea propriu-zisă a suprafeţelor o constituie studierea caietelor de sarcini, pentru a începe construcţia linilor şi a suprafeţelor funcţionale. În mod frecvent este vorba de elemente geometrice "clasice":

segmente de dreaptă, arce de cerc, plane, cilindri, sfere, conuri etc. şi care sunt dimensionate cu ajutorul criteriilor tehnologice sau a restricţiilor tehnicilor de producţie.

Alternanţa ciclurilor de producţie cu etapele de validare prin metode de calcul cu elemente finite sau tehnici de simulare a producţiei conduce în final la realizarea unui compromis între tehnologiile de producţie, caietul de sarcini şi criteriile economice şi estetice.

Un element important ce apare în procesul de mai sus îl constituie liniile sau suprafeţele de racordare. Utilizarea lor se bazează pe prezenţa curbelor de intersecţie între suprafeţele de legătură dintre suprafeţele funcţionale şi suprafeţele de legătură. Existenţa lor este impusă de procedeele tehnologice de fabricaţie (turnare, forjare, extrudare etc.), de utilajele de prelucrare sau de cerinţele economice şi estetice.

Ca urmare, procesul de **modelare** a suprafeţei unui obiect impune un proces iterativ în cursul căruia sunt dezvoltate suprafeţe funcţionale, de legătură şi de racordare alternativ cu fazele de simulare a comportamentului mecanic sau tehnologic necesare realizării obiectului.

Uneori, utilizarea tehnicii de descompunere în carouri pentru realizarea suprafeţelor modelate este limitată de absenţa informaţiilor complete despre conturul carourilor. O soluţie posibilă o constituie alegerea unor dimensiuni corespunzătoare simplificate şi care, de exemplu, să ţină cont în special de carourile de legătură în zonele de racordare.

2.6.3. Procedee de construcţie a curbelor şi a caroiajelor

2.6.3.1. Construcţia de curbe

În procesul de modelare, o primă problemă ce se ia în considerare o constituie realizarea şi construcţia curbelor ce definesc obiectul de **modelat**. Ca tehnici de construcţie a curbelor se folosesc, în principal, tehnici şi algoritmi de interpolare, care constau în simularea unor curbe care trec prin toate punctele iniţiale şi satisfac orientările impuse de vectorul tangent.

Totodată, se folosesc tehnici de aproximare ce simulează curbe, care încearcă să treacă sau să acopere majoritatea punctelor iniţiale, iar orientarea vectorului tangentă să aproximeze cât mai bine posibil valorile impuse acestuia, prin minimizarea distanţei dintre curbele şi datele iniţiale.

2.6.3.2. Intersecţia a două caroiaje

Intersecţia a doua caroiaje este, de asemenea, o tehnică ce permite definirea unei curbe, prin:

- ↦ marcarea domeniului caroiajului suprafeţelor;
- ↦ marcarea frontierei caroiajului;
- ↦ obţinerea de parametrii ce permit definirea suprafeţelor de racordare.

2.6.3.3. Curbe definite pe o suprafaţă

În principal curbele definite pe o suprafaţă sunt reprezentate de soluţiile numerice ale ecuaţiilor diferenţiale sau de construcţiile geometrice ce definesc modelul de realizat. Aceste curbe se mai pot obţine din reprezentarea punctelor iniţiale şi care aparţin unei suprafeţe date, definită, de exemplu, prin coordonatele parametrice $(u_i), (v_i)$.

2.6.3.4. Construcţia de curbe ca locuri geometrice

În funcţie de situaţiile ce apar şi de tipul algoritmilor matematici utilizaţi pot exista cazuri când construcţia de curbe are loc pe baza locurilor geometrice a unor **puncte, drepte, curbe** şi care îşi au importanţa lor, mai puţin la crearea şi exploatarea modelului geometric şi mai mult la realizarea modelului din punct de vedere tehnologic.

2.6.3.5. Construcţia curbelor de racordare

Curbele de racordare sunt elemente geometrice ce apar la îmbinarea a două curbe disjuncte, astfel încât ansamblul rezultat să formeze o entitate pentru care vectorul tangent să evolueze cât mai aproape de raza de curbură.

2.6.3.6. Construcţia de caroiaje în domenii normate

Dacă reţeaua de puncte date iniţial formează un domeniu de natură normată, atunci este posibilă construirea de caroiaje care să interpoleze sau, în cel mai bun caz, să aproximeze punctele date referitoare la o suprafaţă dată. Există situaţii când suprafaţa dată are distorsiuni importante şi când poate fi dificilă obţinerea unor rezultate satisfăcătoare.

2.6.3.7. Suprafeţe de revoluţie

Suprafeţele de revoluţie constituie un caz particular, dar des utilizat în practică, datorită aplicaţiilor tehnologice şi, mai ales, a procedeelor tehnologice ce facilitează realizarea modelelor şi apoi a produselor cerute.

2.6.3.8. Caroiaje de racordare

Caroiajele de racordare apar la îmbinarea a două suprafeţe de caroiaj şi, în general, se împart în două categorii în funcţie de suprafeţele de racordare şi care pot fi de rază:

- constantă;
- variabilă, sub formă polinomială.

În general, caroiajele sunt tangente la suprafeţele de modelat în zona suprafeţelor de racordare a două suprafeţe. De remarcat că în cazul intersecţiei a trei caroiaje modalităţile de racordare diferă.

2.6.3.9. Construcţia de suprafeţe plane în jurul unei axe

Această metodă foloseşte o serie de suprafeţe plane dezvoltate de-a lungul unei axe pe care secţiunile plane sunt plasate şi orientate. În final, suprafeţele generate " îmbracă" axa dată în care suprafeţele date sunt felii înglobate în volumul general. O astfel de tehnică defineşte realizarea de volume prin felii[1] şi care este folosită de exemplu la realizarea de imagini ale corpului uman cu ajutorul imaginilor luate la intervale determinate, utilizând, de exemplu, interferenţa rezonanţei magnetice[2].

[1] Slide (engl.)
[2] MRI – Magnetic Resonance Interference (engl.).

2.6.3.10. Construcţia de caroiaje folosind metoda lui Coons

Aceasta metodă se foloseşte când se dispune de trei sau patru curbe iniţiale în cadrul unor caroiaje adecvate prin tehnici de glisare.

2.6.3.11. Construcţia de caroiaje folosind suprafeţe de racordare între caroiaje

Se foloseşte în special la realizarea tehnologică a modelului propriu-zis, atunci când acesta este prelucrat prin metode mecanice. În vecinătatea zonei de racordare dintre două caroiaje se poate genera un caroiaj care să folosească suprafeţe de racordare dintre caroiaje.

2.6.4. Utilizarea polinoamelor la modelarea matematică

În cazul **modelării matematice** se folosesc formule matematice care au la bază polinoame, funcţii trigonometrice, exponenţiale, logaritmice etc., pentru a descrie elementele matematice (**puncte, linii, curbe, suprafeţe, volume**) ce definesc modelul considerat.

Utilizarea polinoamelor la **modelarea matematică** este determinată în special de proprietăţile polinoamelor, proprietăţi care le fac să fie utilizate ca instrumente preferate în **modelarea matematică,** datorită:

→ adaptării cu uşurinţă la diversitatea formelor obiectelor de modelat;
→ simplicităţii utilizării acestora în procesul de modelare;
→ rapidităţii cu care acestea răspund la schimbări relativ importante ale parametrilor de modelare.

Polinoamele care se folosesc la modelarea matematică pot fi sub formă:

- **explicită:**
  - $y = f\,(x)$; în planul bidimensional (x, y),
  - $z = f\,(x, y)$; în planul tridimensional (x, y, z),
  - $z = f\,(x_1, x_2,\, x_3 \ldots.\, x_n)$; în spaţiul n dimensional $(x_1, x_2,\, x_3 \ldots.\, x_n)$.

Această formă, deşi larg utilizată în modelarea matematică, nu întotdeauna răspunde diversităţii sub care se găsesc modelele în practică. În plus, manipularea parametrilor polinoamelor este destul de laborioasă, chiar pentru manipulări simple, ca de exemplu de tipul translaţiilor sau al rotaţiilor.

- **implicită:**
  - $\begin{cases} f_1(x, y\,) = 0 \\ f_2(\,x, y\,) = 0 \end{cases}$ pentru o curbă definită prin intersecţia a două suprafeţe.
  - $g\,(\,x, y, z\,) = 0$ pentru o suprafaţă în spaţiul tridimensional.
  - $h\,(\,x_1, x_2 \ldots.\, x_n) = 0$ pentru un volum în spaţiul n dimensional.

Acesta formă permite descrierea unei largi game de tipuri de situaţii întâlnite în modelarea matematică, suplinind lipsurile întâlnite la forma explicită.

- **parametrică:**
  - $P\,(\,u\,) =\; 0$, unde $u = u\,(x, y)$, în planul bidimensional (x, y),
  - $Q\,(\,u, v\,) = 0$, unde $u = u\,(x, y, z)$ şi $v = v\,(x, y, z)$, în planul tridimensional $(\,x, y, z\,)$,
  - $R\,(\,u, v \ldots, z\,) = 0$, unde $u = u\,(\,x_1, x_2 \ldots., x_n)$, $v =\; (x_1, x_2 \ldots., x_n), \ldots, z = z\,(\,x_1, x_2 \ldots., x_n)$, în spaţiul n dimensional $(\,x_1, x_2 \ldots., x_n,),$.

Aceasta formă permite prezentarea unei game largi de **curbe, suprafeţe sau volume** cu aplicaţii extinse în domenii ca de pildă vizualizarea şi prelucrarea imaginilor sau generarea de modele complicate.

- **polinomială prin părţi**: este posibil ca la utilizarea polinoamelor de grad superior să apară oscilaţii care să nu mai reprezinte evoluţia modelului real, oscilaţii considerate parazite. Pentru a preveni această situaţie s-a optat ca, în locul reprezentării întregii curbe sau suprafeţe, să se reprezinte doar o porţiune, o parte a respectivei curbe sau suprafeţe şi apoi să se studieze racordurile dintre parţi în cazul curbei sau între caroiajele în cazul suprafeţelor. Aceste curbe sunt folosite în special la modelarea **Bezier** şi **Bezier raţional** şi care vor fi studiate ulterior.

- **polinomială prin spline**: care satisfac un număr limitat de condiţii de continuitate în punctele de racord ale diferitelor părţi.

Fie o funcţie $f\,(u)$ construită din polinoame ce se racordează în abscisele: $u_0 \geq u_1 \geq \ldots u_i \ldots \geq u_p$. Numim $f\,(u)$ o funcţie polinomială spline de gradul m dacă aceasta satisface condiţiile următoare:

- $f\,(u)$ este un polinom de gradul m şi $f_i\,(u)$ o parte a polinomului $f\,(u)$ definit pe fiecare din intervalele $[\,u_i, u_{i+1}\,]$, $i \in \{0, \ldots (p-1)\}$,
- $f\,(u)$ este derivabilă de ordinul $1, 2, \ldots.(m-1)$, iar derivatele sunt continue, inclusiv în punctele de racordare u_i, adică:

$$f_i(u_i) = f_{i+1}(u_i);$$
$$\frac{d\,f_i}{du}\,(\,u_i\,) = \frac{d\,f_{i+1}}{du}\,(\,u_i\,);$$
$$\ldots$$
$$\frac{d^{(m-1)}}{d\,u^{(m-1)}}\,f_i\,(u_i) = \frac{d^{(m-1)}}{d\,u^{(m-1)}}\,f_{i+1}\,(u_i).$$

2.6.5. Polinoame şi reţele caracteristice

Se consideră că în abordarea modelării geometrice un important instrument îl constituie utilizarea poligoanelor şi a reţelelor caracteristice.

Într-un sistem de coordonate în spaţiul tridimensional $(\,0, x, y, z\,) \in \mathbb{R}^{\,3}$ se defineşte un **poligon caracteristic** ca un ansamblu ordonat de puncte (elemente): $s_1, s_2, s_3, \ldots.s_i, \ldots, s_m$, unde $i \in \{0, 1, \ldots m\}$, care formează elementele poligonului caracteristic PG_m. Ca urmare, fiecare element este asignat unui vector $\overline{0S_i}$, notat $\bar{S}_i$.

Asupra poziţiei elementelor $S_i, i \in \{0, 1, \ldots m\}$ nu se impune nici o restricţie. Deci, pot exista cazuri când punctele poligonului caracteristic, definit prin diferenţa vectorilor $(S_{i+1} - S_i)$, $i \in \{0, 1, \ldots m\}$ să fie chiar nule, în acest caz referindu-ne la un punct.

Generalizând poligonul caracteristic în spaţiul tridimensional se obţine reţeaua caracteristică, iar aceasta defineşte caroiajul suprafeţei.

Fiind dat un sistem de coordonate în spaţiul tridimensional $(\,0, x, y, z\,) \in \mathbb{R}^{\,3}$, o **reţea caracteristică** $\mathbf{RG}_{nm}$ se defineşte ca $(\,m+1\,)$ secvenţe ordonate de $(\,n+1\,)$ puncte:

$$S_{00,}\, S_{01}, \ldots, S_{0j}, \ldots, S_{0n}, S_{10}, S_{11}, \ldots, S_{mo}, \ldots, S_{mn}.$$

Vectorii S_{ij}, unde $i \in \{0,1,\dots m\}, j \in \{0,1,\dots n\}$ reprezintă elemente ale unei **reţele caracteristice** asociate unui caroiaj. În acest caz cotele poligonul caracteristic sunt definite de vectorii:

$(\bar{S}_{i+1j}), (\bar{S}_{ij})$, $i \in \{0,1,\dots (m-1)\}, j \in \{0,1,\dots n\}$,
$(\bar{S}_{ij+1}), (\bar{S}_{ij})$, $i \in \{0,1,\dots m\}, j \in \{0,1,\dots (n-1)\}$.

Ca şi cazul poligoanelor caracteristice, unele elemente ale **reţelei caracteristice** pot coincide atunci când cotele sunt de lungime nulă (adică coincid), sau reţelele sunt parţial închise, adică:

$\left((\bar{S}_{i0}) = (\bar{S}_{in})\right)$, $i \in \{0,1,\dots,m\}$,
sau:
$\left((\bar{S}_{0j}) = (\bar{S}_{mj})\right)$, j $\in \{0,1,\dots,n\}$.

2.7. Concluzie

Modelarea geometrică este parte a **modelării matematice,** folosind metodele generale ale acestei modelări. Aplicând aceste metode, dar mai ales descoperind noi procedee specifice geometriei, **modelarea matematică** s-a extins, definind o nouă ştiinţă aparte, a **modelării geometrice** care, folosind procedee şi reguli specifice, permite obţinerea de noi rezultate, contribuind la dezvoltarea generală a ştiinţei, generând totodată numeroase aplicaţii practice.

3. TEHNICI DE MODELARE GEOMETRICĂ PRIN INTERPOLARE

3.1. Introducere

In acest capitol se prezintă principalele tehnici de modelare geometrică folosind tehnica interpolării polinomiale. Se prezintă polinomul de interpolare a lui Lagrange, polinomul de interpolare a lui Newton, interpolarea prin funcţii spline, accentuându-se asupra utilizării funcţiilor spline cubice, îndeosebi asupra proprietăţilor de convergenţă a funcţiilor spline. Aceste proprietăţi se vor utiliza şi detaila în capitolele următoare, ca tehnici de modelare geometrică, extinzându-se utilizarea lor.

Se atrage atenţia asupra diferitelor tipuri de erori care apar inevitabil în cadrul procesului de interpolare şi care trebuie avute în vedere atunci când se studiază acurateţea modelării geometrice.

3.2. Problema interpolării şi tipuri de interpolare

Fie o familie Φ de funcţii de o singură variabilă x:

$\Phi = \Phi\,(x, a_0, \dots a_i, \dots, a_n)$, având $(n+1)$ parametrii: $a_0, \dots a_i, \dots, a_n$ şi unde: $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Problema **interpolării** pentru familia de funcţii Φ definită mai sus constă în a determina parametrii a_i, astfel încât pentru $(n+1)$ perechi de puncte (x_i, f_i) în domeniul real sau complex şi pentru $i \neq k$ să avem (Stoer, 1976):

$\Phi\,(x_i, a_0, \dots, a_i, \dots, a_n) = f_i$, unde: $i = 0, 1, 2, \dots, n$, cu $x_i \neq x_j$,:

Vom numi perechile de puncte: (x_i, f_i) puncte de suport, iar:

- x_i - abscise de suport şi
- f_i - ordonate de suport.

Problema de mai sus este o **interpolare**:

- **liniară** dacă:

$$\Phi\,(x, a_0, \dots, a_i, \dots, a_n) \equiv a_0\,\Phi_0\,(x) + a_1\,\Phi_1\,(x) + \dots + a_n\,\Phi_n\,(x),$$

- **polinomială**, dacă:

$$\Phi\,(x, a_0, \dots, a_i, \dots, a_n) \equiv a_0 + a_1 x + a_2\,x^2 + \dots + a_i\,x^i + \cdots + a_n\,x^n,$$

- **trigonometrică**, dacă:

$$\Phi\,(x, a_0, \dots, a_i, \dots, a_n) \equiv a_0 + a_1 e^{xi} + a_2 e^{2xi} + \dots . + a_i e^{ixi} + \dots + a_n e^{nxi},$$

unde $i^2 = -1$,

- **prin funcţii raţionale**, dacă:

$$\Phi^{\mu,v}\,(x) = \frac{P^{\mu,v}\,(x)}{Q^{\mu,v}\,(x)} \equiv \frac{a_0 + a_1 x \dots + a_i\,x^i + \dots + a_\mu\,x^\mu}{b_0 + b_1 x \dots + b_i\,x^i + \dots + b_v\,x^v},$$

- **prin funcţii spline**[1], dacă:

$$\Phi_i\,(x) = a_i + b_i\,(x - x_i) + c_i\,(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 + \dots,$$

unde $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

[1] Cuvântul **spline** este originar din engleză, unde defineşte instrumentul numit în română "**florar",** folosit de asemenea şi la aproximarea curbelor.

3.3. Interpolarea prin polinoame. Polinomul de interpolare al lui Lagrange

Fie Π_n un set de polinoame P în domeniul real sau complex (Kahner, 1989), (Linndfield, 1995):

$$P(x) = a_0, + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \cdots + a_n x^n.$$

Pentru $(n+1)$ puncte de suport arbitrare (x_i, f_i) în domeniul real sau complex există un polinom unic $P \in \Pi_n$ astfel încât:

$$P_i(x_i) = f_i, \text{ unde: } i = 0, 1, 2, \dots, n, \text{ cu } x_i \neq x_j \text{ şi pentru } i \neq k.$$

<u>Demonstraţie:</u> Fie două polinoame $P_1, P_2 \in \Pi_n$ cu $P_1(x) = P_2(x) f_i$ şi unde $i = 0, 1, 2, \dots, n$, atunci polinomul $P := P_1 - P_2 \in \Pi_n$ este de grad cel puţin n şi pentru $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ are cel puţin $(n+1)$ termeni diferiţi de zero, ceea ce impune ca cele două polinoame P_1 şi P_2 să fie identice, adică $P \equiv P_1 \equiv P_2$.

Soluţia P a problemei de interpolare se poate exprima direct în funcţie de polinoamele lui Lagrange L_i:

$$P(x) \equiv \sum_{i=0}^{0} f_i \, L_i(x) \equiv \sum_{i=0}^{0} f_i \prod_{\substack{k \neq i \\ k=0}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

adică coeficienţii lui P depind liniar de ordonatele de suport f_i şi unde:

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, \quad i \neq k \end{cases}$$

3.4. Algoritmul lui Neville

În loc de a rezolva problema interpolării liniare luând în considerare totalitatea punctelor date, se poate considera un număr redus de puncte şi apoi prin iteraţii succesive să se obţină o soluţie pentru totalitatea punctelor.

Fie $P_{i_0 i_1} \in \Pi_k$ un polinom în Π_k şi dându-se punctele de suport (x_i, f_i), $i = 0, 1, 2, \dots, n$, pentru care $P_{i_0 i_1 \dots i_k}\left(x_{i_j}\right) = f_{i_j}$, unde: $i = 0, 1, 2, \dots, n$ şi $j = 0, 1, 2, \dots, k$, aceste polinoame sunt legate de următoarele formule de recurenţă:

$$P_i(x) \equiv f_i$$

şi

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) \equiv \frac{(x - x_{i_0}) P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) - (x - x_{i_k}) P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

<u>Demonstraţie.</u> Pentru a demonstra ultima relaţie de mai sus, notăm partea dreaptă cu $R(x)$ şi vom arăta că $R(x)$ are proprietăţile caracteristice ale lui $P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x)$. Este evident că gradul lui $R(x)$ nu este mai mare decât k.

Prin definiţie avem pentru $P_{i_0 \dots i_{k-1}}$ şi $P_{i_1 \dots i_k}$:

$$R\left(x_{i_0}\right) = P_{i_0 \dots i_{k-1}}\left(x_{i_0}\right) = f_{i_0},$$

$$\vdots$$

$$R\left(x_{i_k}\right) = P_{i_1 \dots i_k}(x_k) = f_{i_k},$$

$$\vdots$$

şi $R\left(x_{i_j}\right) = \dfrac{(x_{i_j} - x_{i_0}) f_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k}) f_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = f_{i_j}$, pentru $i = 0, 1, 2, \dots, n$ şi $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$

şi care ne arată că $R(x) = P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x)$ în virtutea unicităţii polinomului de interpolare $P_i(x) \equiv f_i$.

Algoritmul lui Neville ne permite determinarea polinomului de interpolare P pentru o singură valoare $f_0 = P_0\ (x)$ a lui x, ca apoi, prin iteraţii succesive să se obţină soluţia pentru totalitatea punctelor $P_{i_0 i_1 \dots i_k}\ (x)$. De exemplu, pentru $k = 3$ **algoritmul lui Neville** pentru polinoamele succesive de interpolare sunt prezentate în Tabel 3.2 de mai jos:

Tabel 3.2. Polinoamele succesive de interpolare conform algoritmului lui Neville

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
x_0	$f_0 = P_0\ (x)$			
		$P_{01}\ (x)$		
x_1	$f_1 = P_1\ (x)$		$P_{012}\ (x)$	$P_{0123}\ (x)$
		$P_{12}\ (x)$		
x_2	$f_2 = P_2\ (x)$		$P_{123}\ (x)$	
		$P_{23}\ (x)$		
x_3	$f_3 = P_3\ (x)$			

unde prima coloană a tabloului conţine ordonatele de suport f_i. Următoarele coloane se obţin iterativ luând în considerare câte doi vecini din coloanele precedente. Pentru $P_{123}\ (x)$ de exemplu, avem:

$$P_{123}\ (x) = \frac{(x - x_1)\, P_{23}\ (x) - (x - x_3)\, P_{12}\ (x)}{x_3 - x_1}$$

3.5. Polinomul lui Newton de interpolare

Fie polinomul de interpolare $P \in \Pi_n$, unde $P_i\ (x) = f_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ sub form:

$$P\ (x) \equiv P_{01\dots n}\ (x) = a_0 + a_1\ (x - x_0) + a_2 (x - x_0)\ (x - x_1) + \dots + a_n\ (x -$$
$$- x0 \dots x - xn - 1\ .$$

Pentru $P\ (\xi)$, forma de mai sus se poate transforma în formula de recurenţă:

$$P\ (\xi) = \big((a_n\ (\xi - x_{n-1}) + a_{n-1})\ (\xi - x_0) + a_0\big)$$

şi care corespunde schemei lui Horner şi unde coeficienţii a_i se pot calcula succesiv:

$$f_0 = P\ (x_0) = a_0,$$
$$f_1 = P\ (x_1) = a_0 + a_1\ (x_1 - x_0),$$
$$f_2 = P\ (x_2) = a_0 + a_1\ (x_2 - x_0) + a_2\ (x_2 - x_0)\ (x_2 - x_1)\ ,$$
$$\vdots$$

şi care pot fi calculaţi prin n împărţiri şi $n\ (n-1)$ înmulţiri.

Algoritmul se poate îmbunătăţi observând că cele două polinoame:

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}\ (x) \text{ şi } P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}\ (x)$$

diferă printr-un polinom de gradul k şi având $k = 0$, deoarece ambele polinoame de interpolare corespund aceloraşi puncte.

Deci există un coeficient unic:

$f_{i_0 i_1} \dots {}_{i_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, astfel încât:

$P_{i_0 i_1 \dots i_k}\ (x) \equiv P_{i_0 i_1 \dots i_{k+1}}\ (x) + f_{i_0 i_1} \dots {}_{i_k} (x - x_0)\ (x - x_1) \dots \big(x - x_{i_{k-1}}\big)$.

Ţinând cont că: $P_{i_0}\ (x) \equiv f_{i_0}$, obţinem:

$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) \equiv f_{i_0} + f_{i_0 i_1}(x - x_0) + \dots + f_{i_0 i_1 \dots i_k}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{ik-1}$ şi care este polinomul de interpolare $Pi0i1\dots ik$ a lui Newton.

În acest caz, formula de recurenţă este:

$$f_{i_0 i_1 \dots i_k} = \frac{f_{i_0 i_1 \dots i_k} - f_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

unde:

$$f_{i_0 i_1 \dots i_k} \text{ şi } f_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}$$

sunt coeficienţii de cel mai mic grad al polinoamelor $P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x)$ şi respectiv $P_{i_0 i_1 \dots i_{k+1}}(x)$.

3.6. Interpolarea prin funcţii raţionale

Considerând punctele de suport (x_i, f_i), unde $i = 0, 1, 2, \dots, n$, definim **funcţiile raţionale** de interpolare, ca fiind:

$$\Phi^{\mu,\upsilon}(x) \equiv \frac{P^{\mu,\upsilon}(x)}{Q^{\mu,\upsilon}(x)} \equiv \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_\mu x^\mu}{b_0 + b_1 x + \dots + b_\upsilon x^\upsilon}$$

şi unde μ şi υ reprezintă gradul maxim al polinoamelor de la numărător şi respectiv numitor.

Funcţiile raţionale $\Phi^{\mu,\upsilon}(x)$ sunt determinate de $(\mu + \upsilon + 2)$ coeficienţi:

$$a_0, a_1, \dots, a_\mu, b_0, b_1 \dots, b_\upsilon.$$

Dar funcţia raţională $\Phi^{\mu,\upsilon}(x)$ determină aceşti coeficienţi până la un factor comun $P = 0$, ceea ce înseamnă că $\Phi^{\mu,\upsilon}(x)$ este complet determinată de $(\mu + \upsilon + 1)$ condiţii de interpolare:

$$\Phi^{\mu,\upsilon}(x_i) = f_i \text{ , unde: } i = 0, 1, 2, \dots, (\mu + \upsilon) \text{ ,}$$

Ca urmare, pentru a afla coeficienţii a_r, b_s ai lui $\Phi^{\mu,\upsilon}(x_i)$ este necesar a se rezolva sistemul de ecuaţii liniare omogene:

$$P^{\mu,\upsilon}(x_i) - f_i Q^{\mu,\upsilon}(x_i) = 0, \text{ unde: } i = 0, 1, 2, \dots, (\mu + \upsilon) \text{ ,}$$

sau:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_\mu x^\mu - f_i (b_0 + b_1 x + \dots + b_\upsilon x^\upsilon) = 0$$

Teoremă. Sistemul de ecuaţii liniare omogene:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_\mu x^\mu - f_i (b_0 + b_1 x + \dots + b_\upsilon x^\upsilon) = 0$$

are întotdeauna soluţii nebanale. Pentru fiecare astfel de soluţii:

$$\Phi^{\mu,\upsilon}(x) \equiv \frac{P^{\mu,\upsilon}(x)}{Q^{\mu,\upsilon}(x)},$$

unde $Q^{\mu,\upsilon}(x) \not\equiv 0$ există şi este de formă raţională.

<u>Demonstraţie</u>. Sistemul de ecuaţii liniare omogene de mai sus are: $(\mu + \upsilon + 1)$ ecuaţii pentru $(\mu + \upsilon + 2)$ necunoscute. Pentru ca un astfel de sistem, cu mai multe necunoscute decât ecuaţii, să aibă soluţii diferite de soluţiile banale este necesar ca:

$$(a_0, a_1, \dots, a_\upsilon, b_0, b_1 \dots b_\upsilon) \neq (0, 0, \dots 0, 0, \dots 0) \text{ .}$$

Pentru astfel de soluţii $Q^{\mu,\upsilon}(x) \not\equiv 0$ deoarece:

$$Q^{\mu,\upsilon}(x) \equiv (b_0 + b_1 x + \dots + b_\upsilon x^\upsilon) \equiv 0$$

ceea ce implică faptul că polinomul:

$$P^{\mu,\upsilon}(x) \equiv a_0 + a_1 x + \dots + a_\mu x^\mu$$

este egal cu zero:

$$P^{\mu,\upsilon}(x) = 0, \text{ pentru } i = 0, 1, 2, \dots, (\mu + \upsilon).$$

Ca urmare, $P^{\mu,\upsilon}(x) \equiv 0$, deoarece polinomul $P^{\mu,\upsilon}(x)$ are cel puţin gradul μ şi

$$(a_0, a_1, \dots, a_\upsilon, b_0, b_1 \dots b_\upsilon) \neq (0, 0),$$

care ne arată că polinomul raţional de interpolare are o soluţie unică, dacă aceasta există.

În acelaşi timp:

$$\Phi^{\mu,\upsilon}(x) \equiv \frac{P^{\mu,\upsilon}(x)}{Q^{\mu,\upsilon}(x)},$$

pentru orice $i = 0, 1, 2, \ldots, (\mu + \upsilon)$ putînd exista două cazuri:

1) $Q^{\mu,\upsilon}(x) \neq 0$; când $\Phi^{\mu,\upsilon}(x) = f_i$

2) $Q^{\mu,\upsilon}(x_i) = 0$ când punctele de suport (x_i, f_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ pot fi inacesibile şi atunci $P^{\mu,\upsilon}(x) = 0$ din definiţia sistemului de ecuaţii liniare omogene. Ca urmare, ambii $P^{\mu,\upsilon}(x)$ şi $Q^{\mu\,\upsilon}(x)$ conţin un factor $(x - x_i)$ şi ambii sunt respectivi primi.

Dacă $S^{\mu\,\upsilon}(x)$ este o soluţie pentru $\Phi^{\mu,\upsilon}(x) = 0$ şi ambii $P^{\mu,\upsilon}(x)$ şi $Q^{\mu,\upsilon}(x)$ sunt respectivi primi, atunci nu sunt puncte inaccesibile şi problema polinomului raţional de interpolare este solvabilă. Ca urmare, dacă $S^{\mu,\upsilon}(x)$ rezolvă $\Phi^{\mu,\upsilon}(x) = 0$, atunci $\Phi^{\mu,\upsilon}$ reprezintă soluţia cu condiţia ca P şi Q să fie respectivi primi.

3.7. Algoritmul lui Neville pentru funcţii raţionale

Presupunând că problema polinomului de interpolare este solvabilă avem:

$$\Phi_s{}^{\mu,\upsilon}(x) \equiv \frac{P_s{}^{\mu,\upsilon}(x)}{Q_s{}^{\mu,\upsilon}(x)} \text{ cu } Q_s{}^{\mu,\upsilon}(x) \neq 0.$$

Notăm $\Phi_s{}^{\mu,\upsilon}(x) = f_i$, pentru $i = s(s+1), \ldots, (s + \mu + \upsilon)$, şi unde: $P_s{}^{\mu,\upsilon}(x)$ şi $Q_s{}^{\mu,\upsilon}(x)$ sunt polinoame de grad mai mic decit μ şi υ, respectiv.

Fie $p_s^{\mu,\upsilon}(x)$ şi $q_s^{\mu,\upsilon}(x)$ coeficienţii de cel mai mare grad al polinoamelor:

$$P_s{}^{\mu,\upsilon}(x) = p_s^{\mu,\upsilon} x^{\mu} + \ldots$$
$$Q_s{}^{\mu,\upsilon}(x) = q_s^{\mu,\upsilon} + \ldots$$

şi fie $\alpha_i := x - x_i$ şi $T_s^{\mu,\upsilon} := \left(P_s{}^{\mu,\upsilon}(x) - yQ_s{}^{\mu,\upsilon}(x)\right)$,

unde $T_s^{\mu,\upsilon}(x_i, f_i) = 0$, pentru $i = s, s+1, \ldots, +s + \mu + \upsilon$.

Teoremă. Începând cu $P_s^{0,0}(x) = f_s$ şi $Q_s^{0,0}(x) = 1$, relaţiile de recurenţă sunt:

a) când $(\mu - 1, \upsilon) \rightarrow (\mu, \upsilon)$ obţinem:

$$P_s{}^{\mu,\upsilon}(x) = \alpha_s q_s^{\mu-1,\upsilon} P_{s+1}{}^{\mu-1,\upsilon}(x) - \alpha_{s+\upsilon+\mu} q_{s+1}^{\mu-1,\upsilon} P_s{}^{\mu-1,\upsilon}(x)$$
$$Q_s{}^{\mu,\upsilon}(x) = \alpha_s q_s^{\mu-1,\upsilon} Q_{s+1}{}^{\mu-1,\upsilon}(x) - \alpha_{s+\upsilon+\mu} q_{s+1}^{\mu-1,\upsilon} Q_s{}^{\mu-1,\upsilon}(x).$$

b) când $(\mu, \upsilon - 1) \rightarrow (\mu, \upsilon)$ obţinem:

$$P_s{}^{\mu,\upsilon}(x) = \alpha_s p_s^{\mu,\upsilon-1} P_{s+1}{}^{\mu,\upsilon-1}(x) - \alpha_{s+\upsilon+\mu} p_{s+1}^{\mu,\upsilon-1} P_s{}^{\mu,\upsilon-1}(x)$$
$$Q_s{}^{\mu,\upsilon}(x) = \alpha_s q_s^{\mu,\upsilon-1} Q_{s+1}{}^{\mu,\upsilon-1}(x) - \alpha_{s+\upsilon+\mu} q_{s+1}^{\mu,\upsilon-1} Q_s{}^{\mu,\upsilon-1}(x)$$

Demonstraţie. Presupunând că expresiile raţionale $\Phi_s{}^{\mu-1,\upsilon}$ şi $\Phi_{s+1}{}^{\mu-1,\upsilon}$ îndeplinesc condiţiile de interpolare:

$$T_s^{\mu-1,\upsilon}(x_i, f_i) = 0, \text{ pentru } i = s, (s+1), \ldots, (s + \mu + \upsilon - 1).$$
$$T_{s+1}^{\mu-1,\upsilon}(x_i, f_i) = 0, \text{ pentru } i = (s+1), \ldots, (s + \mu + \upsilon).$$

Din relaţia a) rezultă că: $P_s{}^{\mu,\upsilon}(x)$ şi $Q_s{}^{\mu,\upsilon}(x)$ nu pot avea un grad mai mare decât μ, respectiv υ.

Deci:

$$T_s{}^{\mu,\upsilon}(x,y) = \alpha_s q_s^{\mu-1,\upsilon} T_{s+1}{}^{\mu-1,\upsilon}(x,y) - \alpha_{s+\upsilon+\mu} q_{s+1}^{\mu-1,\upsilon} T_s{}^{\mu-1,\upsilon}(x,y)$$

şi deci: $T_s^{\mu,\upsilon}(x_i, f_i) = 0$ pentru $i = s, (s+1), \ldots, (s + \mu + \upsilon)$.

Sub rezervă că nici o combinaţie (υ, μ, s) nu are puncte inaccesibile, rezultatul de mai sus ne arată că relaţia a) defineşte un numărător şi un numitor pentru $\Phi_s{}^{\mu,\upsilon}(x)$.

3.8. Interpolarea prin funcţii spline

Fie $\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ un subinterval al intervalului $[a, b] \to \mathbb{R}$.

<u>Definiţie:</u> Fie o funcţie cubic spline $S_\Delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ având proprietăţile:

a) $S_\Delta \in \mathbb{R}^2 [a, b]$ unde S_Δ este de două ori diferenţiabilă pe $[a, b] \to \mathbb{R}$, iar

b) S_Δ coincide pe fiecare subinterval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$, cu un polinom de gradul III.

Curba spline cubică este formată din polinoame definite astfel încât valorile sale şi ale primelor derivate să coincidă în punctele $x_i, i = 1, \dots n-1$, puncte numite noduri.

Fie un set $Y := \{y_0, y_1, \dots y_n\}$ de $(n+1)$ numere reale.

Notăm cu $S_\Delta (Y; \bullet)$ funcţia spline de interpolare S_Δ având $S_\Delta (Y; x_i) = y_i$ pentru $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Dar $S_\Delta (Y; \bullet)$ definită ca mai sus nu este unic determinată de setul Y al ordonatelor de suport, existând încă două grade de libertate rămase şi care impun alte condiţii.

Se pot considera încă trei astfel de condiţii adiţionale pentru a obţine unicitatea:

1. $S_\Delta' (Y; a) = S_\Delta'' (Y; b) = 0$,
2. $S_\Delta^{(k)} (Y; a) = S_\Delta^{(k)} (Y; b)$ pentru $k = 0, 1, 2$; $S_\Delta (Y; \bullet)$ este periodic,
3. $S_\Delta^{(k)} (Y; a) = y_0' S_\Delta' (Y; b) = y_n'$ pentru numerele date y_0' şi y_n', şi condiţii care asigură unicitatea funcţiei spline de interpolare $S_\Delta (Y; \bullet)$.

O cerinţă iniţială pentru 2. este ca $y_0 = y_n$. Pentru a stabili proprietăţile funcţiei spline considerăm setul $K^m [a, b]$, unde $m > 0$, întreg.

Setul $K^m [a, b]$ reprezintă funcţiile reale $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ pentru care $f^{(m-1)}$ este **absolut** continuă[2] pe $[a, b] \to \mathbb{R}$ şi $f^m \in L^2 [a, b]$, unde prin setul $L^2 [a, b]$ s-a notat setul tuturor funcţiilor pătratice a căror integrale pe intervalul $[a, b]$, de exemplu $\int_a^b |f(t)|^2 \, dt$, există şi sunt finite.

Fie $K_p^m [a, b]$ setul tuturor funcţiilor pentru care $f^{(k)} (a) = f^{(k)} (b)$, pentru $k = 0, 1, 2 \dots (m-1)$. Aceste funcţii sunt periodice, deoarece restricţiile impuse funcţiilor pe intervalul $[a, b]$ sunt periodice cu perioada $(\mathrm{b} - \mathrm{a})$.

Fie $S_\Delta \in K_p^3 [a, b]$ şi $S_\Delta (Y; \bullet) \in K_p^3 [a, b]$ satisfăcând condiţia 2.

Dacă $f \in K_p^2 [a, b]$ atunci putem defini:

$$\| f \|^2 := \int_a^b \left| f''(x) \right|^2 dx, \text{ unde } \| f \| \geq 0$$

Pe de altă parte $\| f \| = 0$ poate avea loc pentru funcţii care nu întotdeauna sunt zero, de exemplu toate funcţiile liniare de forma: $f(x) = cx + d$.

---

[2] O funcţie reală $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este **absolut continuă** pe intervalul $[a, b]$ dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît $\sum_i | f(b_i) - f(a_i) | < \varepsilon$ pentru $\forall$ set finit de intervale $[a_i, b_i]$, unde $a \leq a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n \leq b$ şi $\sum_i | b_i - a_i | < \delta$. Dacă funcţia f este diferenţiabilă oriunde pe intrevalul inchis $[a, b]$ sau, mai general satisface condiţiile Lipschitz, adică $| f(x_1) - f(x_2) | \leq \theta | x_1 - x_2 |$ pe $[a, b]$, atunci f este **absolut continuă**, dar nu şi reciproc: există funcţii **absolut continue**,având derivate care nu au margini. Dacă funcţia este **absolut continuă**, atunci f' este continuă şi există pe întreg intervalul de existenţă. Mai mult, $f(a) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt$ pentru $x \in [a, b]$. Continuitatea absolută a funcţiilor f, g a unei integrale de forma $\int_a^b f(t) \, g'(t)$ ne asigură că integrarea prin părţi este posibilă.

3.9. Teorema lui Holladay

Fie $f \in K^2(a,b)$ şi subintervalul $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ al intervalului $[a,b]$, Dacă S_Δ este o funcţie splina având punctele $x_i \in \Delta$ (numite noduri), atunci:

$$\| f - S_\Delta \|^2 = \| f \|^2 - \| S_\Delta \|^2 -$$
$$-2\left[\left(f'(x) - S'_\Delta(x)\right) S''_\Delta(x) \Big|_a^b - \sum_{i=1}^{n} \left(f(x) - S_\Delta(x)\right) - S'''_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}\right]$$

Pe de altă parte, $S'''_\Delta(x)$ este o funcţie definită prin părţi cu posibile discontinuităţi în nodurile $x_1, \dots, x_{n-1}$. De aceea, folosim limitele de dreapta şi de stânga ale lui $S'''_\Delta(x)$ în punctele x_1 şi respectiv x_{n-1}.

Avem:

$$\| f - S_\Delta \|^2 = \int_a^b \left|f''(x) - S''_\Delta(x)\right|^2 dx = \| f \|^2 - 2\int_a^b f''(x) S''_\Delta(x)\, dx + \|S_\Delta\|^2$$
$$= \| f \|^2 - 2\int_a^b (f''(x) - S''_\Delta(x)) S''_\Delta(x) - \| S_\Delta \|.$$

Integrând prin părţi pentru $i = 0, 1, 2, \dots, n$ obţinem:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f''(x) - S''_\Delta(x)\right) S''_\Delta(x)\, dx = \left(\left(f'(x)\right) - S'_\Delta(x)\right) S''_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} -$$
$$- \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f'(x) - S'_\Delta(x)\right) S'''_\Delta(x)\, dx = \left(f'(x) - S'_\Delta(x)\right) S''_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} -$$
$$- \left(f(x) - S_\Delta(x)\right) S'''_\Delta(x)) \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - S_\Delta(x)\right) S^{(4)}_\Delta(x)\, dx.$$

Dar $S^{(4)}_\Delta(x) \equiv 0$ pe subintervalele (x_{i-1}, x_i) şi f', S'_Δ, S''_Δ sunt continue pe $[a,b]$ şi unde pentru $i = 0, 1, 2 \dots n$ obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f'(x) - S'_\Delta(x)\right) S''_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \left(f'(x) - S'_\Delta(x)\right) S''_\Delta(x) \Big|_a^b.$$

Aceasta ne permite să demonstrăm o importantă proprietate a funcţiilor spline reflectată în teorema de mai jos:

Teoremă: Fie un subinterval $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ al intervalului $[a,b]$, un set $Y := \{y_0, y_1, \dots y_n\}$ de $(n+1)$ numere reale şi o funcţie $f \in K^2(a,b)$ având $f(x_i) = y_i$, pentru $i = 0, 1, 2 \dots n$, atunci:

$$\| f \|^2 \geq \| S_\Delta(Y; \bullet) \|^2$$

şi mai exact:

$$\| f - S_\Delta(Y; \bullet) \|^2 = \| f \|^2 - \| S_\Delta(Y; \bullet)\|^2 \geq 0,$$

ce are loc pentru orice funcţie spline $S_\Delta(Y; \bullet)$ care satisface una din condiţiile iniţiale:

1) $S''_\Delta(Y; a) = S''_\Delta(Y; b) = 0,$
2) $f \in K^2(a,b),$ pentru $S_\Delta(Y; \bullet)$ periodic,
3) $f'(a) = S'_\Delta(Y; a),\ f'(a) = S'_\Delta(Y; b),$

Se remarcă faptul că în acest caz funcţiile spline sunt unic determinate.

<u>*Demonstraţie*</u> În cele 3 cazuri de mai sus expresia:

$$\left(f'(x) - S'_\Delta(x)\right) S''_\Delta(x) \Big|_a^b - \sum_{i=1}^{n} \left(f(x) - S_\Delta(x)\right) S'''_\Delta(x)) \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} = 0,$$

dacă $S_\Delta = S_\Delta(Y; \bullet)$ şi care demonstrează proprietatea funcţiei spline: $S_\Delta(Y; \bullet)$.

Faptul că această funcţie spline este continuă rezultă considerând $\bar{S}_\Delta(Y; \bullet)$, o altă funcţie spline având aceleaşi proprietăţi ca şi $S_\Delta(Y; \bullet)$. Dacă acceptam că $\overline{S_\Delta}(Y; \bullet)$ să aibă rolul funcţiei $f \in K^2[a,b]$ din teorema de mai sus, atunci avem

$$\|\bar{S}_\Delta(Y; \bullet) - S_\Delta(Y; \bullet)\|^2 = \| \overline{S_\Delta}(Y; \bullet)\|^2 - \| S_\Delta(Y; \bullet) \|^2 \geq 0,$$

şi deoarece $S_\Delta(Y; \bullet)$ şi $\overline{S_\Delta}(Y; \bullet)$ pot inversa rolurile, atunci

$$\|\bar{S}_\Delta(Y; \bullet) - S_\Delta(Y; \bullet)\|^2 = \int_a^b \left(\bar{S}''_\Delta(Y; x) - S''_\Delta(Y; x)\right)^2 dx = 0$$

şi pentru că: $\bar{S}''_\Delta(Y; \bullet)$ şi $S''_\Delta(Y; \bullet)$ sunt ambele continue:

$$\bar{S}''_{\Delta}(Y;\, x) = S''_{\Delta}(Y;\, x)$$

Ca urmare, prin integrare rezultă:

$$\bar{S}_{\Delta}(Y;\, x) \equiv S_{\Delta}(Y;\, x) + cx + d$$

dar $\bar{S}_{\Delta}(Y;\, x) = S_{\Delta}(Y;\, x)$ are loc pentru $x = a, b$ respectiv şi care implică faptul că $c = d = 0$.

3.10. Metode de determinare a funcţiilor spline cubice

Fie:

$$\Delta = \{x_i|, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

un subinterval al intervalului $[a, b]$ având punctele (noduri) $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < xn = b$ şi $Y = yi, i = 0, 1, 2, \dots, n$ un set de $(n+1)$ numere reale.

Fie:

$h_{j+1} := x_{j+1} - x_j$, unde: $j = 0, 1, 2, \dots, n$ şi fie valorile derivatei a II - a în nodurile $x_j \in \Delta$.

Vom arăta că funcţiile spline sunt deja determinate de momentele M_j ale lui $S_{\Delta}(Y; \bullet)$ şi că aceste momente ale interpolării funcţiilor spline pot fi calculate ca o soluţie a unui sistem de ecuaţii liniare, unde:

$M_j := S''_{\Delta}(Y;\, x_j)$, unde: $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ sunt momente ale unei funcţii spline $S_{\Delta}(Y; \bullet)$ ce urmează a fi găsită.

Remarcăm că derivata secundă $S''_{\Delta}(Y; \bullet)$ a funcţiei spline coincide cu o funcţie liniară în fiecare interval $[x_j, x_{j+1}]$, unde: $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ şi că aceste funcţii liniare pot fi descrise în funcţie de momentele M_i ale lui $S_{\Delta}(Y; \bullet)$, astfel:

$$S''_{\Delta}(Y; x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_{j+1}},$$

pentru $x \in [x_j, x_{j+1}]$, unde: $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Prin integrare obţinem:

$$S'_{\Delta}(Y; x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + A_j,$$

şi

$$S''_{\Delta}(Y; x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j\,(x - x_j) + B_j,$$

pentru $x \in [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ şi unde A_j şi B_j sunt constante de integrare.

Considerând $S_{\Delta}(Y;\, x_j) = y_j$ şi $S_{\Delta}(Y;\, x_{j+1}) = y_{j+1}$ obţinem următoarele ecuaţii pentru constantele de integrare A_j şi B_j:

$$M_j \frac{(h_{j+1})^2}{6} + B_j = y_j,\;\; M_{j+1} \frac{(h_{j+1})^2}{6} + A_j\, h_{j+1} + B_j = y_{j+1}$$

În consecinţă obţinem:

$$B_j = y_j - M \frac{(h_{j+1})^2}{6},$$

$$A_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}\,(M_{j+1} - M_j)$$

şi care ne conduce la următoarea reprezentare a funcţiilor spline în funcţie de momentele sale:

$$S_{\Delta}(Y; x) = \alpha_j + \beta_j (x - x_j) + \gamma_j (x - x_j)^2 + \delta_j (x - x_j)^3,$$

pentru $x \in [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ unde:

$$\alpha_j := y_j,$$

$$\gamma_j := \frac{M_j}{2},$$

$$\beta_j := S'_\Delta(Y;\, x_j) = -\frac{M_j\, h_{j+1}}{6} + A_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{2M_j + M_{j+1}}{6} h_{j+1},$$

$$\delta_j := \frac{S'''_\Delta(y;\, x_j^+)}{6} = \frac{M_{j+1} - M_j}{6\, h_{j+1}}$$

şi unde $S_\Delta(Y;\bullet)$ este caracterizat de momentele M_j şi pe care ne propunem să le calculăm.

Condiţia de continuitate a lui $S'_\Delta(Y;\bullet)$ în nodurile $x = x_j$ din relaţia:

$$S'_\Delta(Y;\, x_j^-) = S'_\Delta(Y;\, x_j^+)$$

conduce la $(n-1)$ ecuaţii pentru momentele necunoscute M_j.

Înlocuind constantele de integrare A_j şi B_j în formula lui $S_\Delta(Y;x)$ obţinem:

$$S'_\Delta(Y;x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j).$$

Pentru $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ obţinem:

$$S'_\Delta(Y;\, x_j^-) = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3} M_j + \frac{h_j}{6} M_{j-1},$$

$$S'_\Delta(Y;\, x_j^+) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} + \frac{h_{j+1}}{3} M_j - \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1}$$

şi pentru că: $S'_\Delta(Y;\, x_j^-) = S'_\Delta(Y;\, x_j^+)$:

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j},$$

pentru $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ şi care sunt $(n-1)$ ecuaţii pentru momentele necunoscute M_j. Alte trei ecuaţii a), b), c), se pot obţine din condiţiile iniţiale 1), 2), 3):

a) $S''_\Delta(Y;\, a) = M_0 = 0 = M_n = S''_\Delta(Y;\, b) = 0$,

b) $S''_\Delta(Y;\, a) = S''_\Delta(Y;\, b) \Rightarrow M_0 = M_n$,

$S'_\Delta(Y;a) = S'_\Delta(Y;b) \Rightarrow \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n + h_1}{3} M_n + \frac{h_j}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_n}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$

şi care este identică cu condiţia deja enunţată mai sus unde pentru $j = n$, obţinem:

$$h_{n+1} := h_1,\ M_{n+1} := M_1,\ y_{n+1} := y_1.$$

c) Reamintindu-ne condiţia $y_n := y_0$, avem:

$$S'_\Delta(Y;a) = y'_0 \Rightarrow \frac{h_1}{3} M_0 - \frac{h_1}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_n}{h_1} - y'_0$$

$$S'_\Delta(Y;b) = y'_n \Rightarrow \frac{h_n}{6} M_{n-1} - \frac{h_n}{3} M_n = y'_n - \frac{y_n - y_{n+1}}{h_1},$$

ecuaţii ce pot fi scrise sub forma:

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \text{unde: } j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

şi unde:

$$\lambda_j := \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}},$$

$$\mu_j := 1 - \lambda_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}},$$

$$d_j := \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left\{ \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right\}$$

pentru $j = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Pentru a) avem:

$$\lambda_0 := 0, d_0 := 0, \mu_n := 0, d_n := 0,$$

iar pentru c) avem:

$$\lambda_0 := 1, d_0 := \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right)$$

şi care ne conduce la un sistem de n ecuaţii liniare pentru momentele M_1 rezultate din a) şi c)

$$\begin{gathered} 2 M_0 + \lambda_0 M_1 + \ = d_0, \\ \mu_1 M_0 + 2 M_1 + \lambda_1 M_2 + \ = d_1, \\ \vdots \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2 M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n + \cdots = d_{n-1}, \\ \mu_n M_{n-2} + 2 M_n \ = d_n. \end{gathered}$$

şi care se pot scrie matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & . & . & . & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & . & . & . \\ & \mu_2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & . & . & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ . \\ . \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Pentru b) avem

$$\lambda_n := \frac{h_1}{h_n + h_1},$$

$$\mu_n := 1 - \lambda_n = \frac{h_n}{h_n + h_1},$$

$$d_n := \frac{6}{h_n + h_1} \left\{ \frac{y_1 - y_n}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}, \right\}$$

şi care ne conduce la următorul sistem de ecuaţii pentru momentele:

$$M_1, M_2, \ldots M_n \ (= M_0):$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & . & . & . & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & . & . & . \\ & \mu_3 & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & . & . & . & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ . \\ . \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Coeficienţi λ_i, μ_i şi d_i în sistemele matriciale de ecuaţii sunt complet definiţi de relaţiile:

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j},$$

şi

$$\lambda_n := \frac{h_1}{h_n + h_1},$$

$$\mu_n := 1 - \lambda_n = \frac{h_n}{h_n + h_1},$$

$$d_n := \frac{6}{h_n + h_1} \left(\frac{y_1 - y_n}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right).$$

În particular: $\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \lambda_i + \mu_i = 1$, pentru toţi coeficienţii λ_i şi μ_i şi care depind numai de valorile nodurilor $x_j \in \Delta$ şi nu de valorile $y_i \in Y$ sau y_0', y_n', ca în cazul c). Ceea ce ne conduce la următoarea:

Teoremă. Cele două sisteme liniare de ecuaţii matriciale de mai sus sunt nesingulare pentru orice interval Δ a lui (a, b). Ceea ce înseamnă că sistemele au o soluţie bine determinată şi în consecinţă problema interpolării prin funcţii spline cubice are o soluţie unică în fiecare din cele 3 cazuri: a), b) şi c).

Demonstraţie. Fie matricea A de dimensiune $(n+1) \bullet (n+1)$ din sistemul matricial de ecuaţii liniare: $A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & . & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ . & \mu_2 & . & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & 2 & \lambda_{n-1} \\ & . & . & . & \mu_n & 2 \end{bmatrix}$

Această matrice are următoarea proprietate:

$A z = w \Rightarrow \max\limits_i | z_i | \leq \max\limits_i | w_i |$, pentru orice pereche de vectori:

$z = (z_0, z_1, \dots, z_n)^T$ şi w $= (w_0, w, \dots, w_n)^T$, unde $z, w \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Fie r astfel încât $| z_r | = \max\limits_i | z_i |$. Din:

$A z = w$ avem: $\mu_r z_{r-1} + 2 z_r + \lambda z_{r+1} = w_r$, unde: $\mu_0 := 0, \lambda_n := 0$.

Dar din definiţia lui r şi pentru ca să existe relaţia: $\mu_r + \lambda_r = 1$

$$\max_i | w_i | \geq | w_r | \geq 2 | z_r | - \mu_r | z_{r-1} | - \lambda_r | z_{r+1} | \geq 2 | z_r | - \mu_r | z_r | - \lambda_r | z_i | =$$

$$= (2 - \mu_r - \lambda_r) | z_r | = | z_r | = \max_i | z_i |.$$

Presupunem că matricea A este nulă. Atunci trebuie să existe o soluţie $z \neq 0$ a lui $A z = 0$, dar care ne conduce la contradicţia:

$$0 < \max_i | z_i | \leq 0$$

şi ceea ce contrazice afirmaţia de mai sus.

Rezolvarea acestui sistem matricial se face aplicând algoritmul lui Gauss pentru a obţine o matrice triunghiulară şi care ne prezintă soluţia imediat. Prin înmulţirea primei linii cu elementele celei de a II –a linii şi scăzând, eliminăm μ_1. La fel cu următoarele linii pentru a elimina μ_2, μ_3,....

3.11. Proprietăţile de convergenţă a funcţiilor spline

În practică este posibil ca polinomul de interpolare să nu conveargă întotdeauna spre funcţia de interpolare f, chiar dacă intervalele Δ au fost alese corespunzător. Dar impunând de la început unele condiţii funcţiei de interpolare f şi intervalelor Δ, este posibil ca funcţiile de interpolare spline să conveargă spre funcţia de interpolare f, atunci când $\Delta \to 0$.

Vom arăta pentru început că momentele M_j ale funcţiei spline de interpolare converg spre derivata secundă a funcţiei date. Mai precis, considerând subintervalul

$\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ al intervalului $[a, b]$ şi fie:

$M = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ . \\ . \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}$, vectorul de momente M_j a funcţiei spline $S_\Delta(Y; \bullet)$.

Fie $f(x_i) = y_j$, pentru $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, astfel încât:

$S_\Delta\,(Y;\ a\,) = f^{'}\,(a)$ şi $S_\Delta\,(Y;\ b\,) = f^{'}\,(b)$, adică cazul c).

Vectorul de momente M_j satisface ecuaţia matricială liniară: $A\,M = d$ şi unde $d = d_j$, pentru $j = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Fie F şi r vectorii:

$$F := \begin{bmatrix} f^{''}(x_0) \\ f^{''}(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ f^{''}(x_{n-1}) \\ f^{''}(x_n) \end{bmatrix},$$

$$r := d - A\,F = A\,(M - F).$$

Definind $\|\, z \,\| := \max\limits_i |\, z_i \,|$ pentru vectorii z şi alegând $\|\,\Delta\,\|$, astfel încât:

$$\|\,\Delta\,\| := \max_j \left|\, x_{j+1} - x_j \,\right|,$$

pentru subintervalul Δ, avem:

Lemă. Dacă $f \in \mathbb{R}^{(4)}\,[\,a, b\,]$ şi $|\, f^4\,(\,x\,)\,| \le L$ pentru $x \in [\,a, b\,]$, atunci:

$$\|\, M - F \,\| \le \|\, r \,\| \le \frac{3}{4}\, L\, \|\,\Delta\,\|^2.$$

<u>Demonstraţie</u>. Prin definiţie $r_0 = d_0 - 2\,f^{''}\,(\,x_0\,) - f^{''}\,(x_1\,)$ şi din c) obţinem:

$$r_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0^{'}\right) - 2\,f^{''}\,(\,x_0\,) - f^{''}\,(\,x_1\,).$$

Folosind teorema lui Taylor pentru $y_1 = f\,(x_1)$ şi $f^{''}\,(\,x_1\,)$ în funcţie de valorile şi respectiv derivatele lui f în (x_0) obţinem:

$$r_0 = \frac{6}{h_1}\left[f^{'}\,(\,x_0\,) + \frac{h_1}{2}\,f^{''}\,(\,x_0\,) + \frac{h_1^2}{6}\,f^{'''}\,(\,x_0\,) + \frac{h_1^3}{24}\,f^{(4)}\,(\,\tau_1\,) - f^{'}\,(x_0)\right] -$$

$$-\,2\,f^{''}\,(\,x_0\,) - \left[f^{''}\,(\,x_0\,) + h_1\,f^{'''}\,(\,x_0\,) + \frac{h_1^2}{2}\,f^{(4)}\,(\,\tau_2\,)\right] =$$

$$= \frac{h_1^2}{4}\,f^{(4)}\,(\,\tau_1\,) - \frac{h_1^2}{2}\,f^{(4)}\,(\,\tau_2\,)$$

şi unde $\tau_1, \tau_2 \in [\,x_0, x_1\,]$. Deci $|\, r_0 \,| \le \frac{3}{4}\, L\, \|\,\Delta\,\|^2$.

În mod analog pentru: $r_n = d_n - f^{''}\,(\,x_{n-1}\,) - 2\,f^{''}\,(\,x_n\,)$ avem: $|\, r_n \,| \le \frac{3}{4}\, L\, \|\,\Delta\,\|^2$

Pentru componentele rămase $r := d - A\,F$ obţinem:

$$r_j = d_j - \mu_j f^{''}\left(\,x_{j-1}\,\right) - 2 f^{''}\left(\,x_j\,\right) - \lambda_j f^{''}\left(\,x_{j-1}\,\right) =$$

$$= \frac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right) - \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} f^{''}\left(\,x_{j-1}\,\right) - 2\,f^{'}\left(x_j\,\right)$$

$$- \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}\, f^{''}\left(\,x_{j+1}\,\right).$$

Din formula lui Taylor în punctele x_j obţinem:

$$r_j = \frac{1}{h_j + h_{j+1}} \Big\{ 6 \Big[f'(x_j) + \frac{h_{j+1}}{2} f''(x_j) + \frac{h_{j+1}^2}{6} f'''(x_j) + \frac{h_{j+1}^3}{24} f^{(4)}(\tau_1) - f'(x_j)$$
$$+ \frac{h_j}{2} f''(x_j) - \frac{h_j^2}{6} f'''(x_j) + \frac{h_j^3}{24} f^{(4)}(\tau_2) \Big]$$
$$- h_j \Big[f''(x_j) - h_j f'''(x_j) + \frac{h_j^2}{2} f^{(4)}(\tau_3) \Big] - 2 f''(x_j) \big(h_j$$
$$+ h_{j+1}\big); -h_{j+1} \Big[f''(x_j) + h_{j+1} f'''(x_j) + \frac{h_{j+1}^2}{2} f^{(4)}(\tau_4) \Big] \Big\}$$
$$= \frac{1}{h_j + h_{j+1}} \Big[\frac{h_{j+1}^3}{4} f^{(4)}(\tau_1) + \frac{h_j^3}{4} f^{(4)}(\tau_2) - \frac{h_j^3}{2} f^{(4)}(\tau_3) - \frac{h_{j+1}^3}{2} f^{(4)}(\tau_4) \Big]$$

şi unde $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$ şi deci

$$|r_j| \leq \frac{3}{4} L \frac{1}{h_j + h_{j+1}} [h_{j+1}^3 + h_j^3] \leq \frac{3}{4} L \, \|\Delta\|^2, \text{ pentru } j = 1,2, \ldots n-1,$$

dar: $|r| \leq \frac{3}{4} L \, \|\Delta\|^2$ deoarece: $r = A(M - F)$ şi ceea ce implică: $\|M - F\| \leq \|r\|$.

Teoremă. Fie $f \in C^{(4)}[a,b]$ şi $|f^{(4)}(x)| \leq L$ pentru $x \in [a,b]$ şi fie un subinterval:

$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ al intervalului $[a,b]$ şi o constantă K astfel încât:

$$\frac{\|\Delta\|}{|x_{j+1} - x_j|} \leq K$$

pentru $j = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Dacă S_Δ este o funcţie spline care interpolează valorile funcţiei f în nodurile $x_0, x_1, \ldots . x_n \in \Delta$ şi care satisface: $S'_\Delta(x) = f'(x)$ pentru $x = a, b$, atunci există o constantă $C_k \leq 2$ care <u>**nu**</u> depinde de subintervalul Δ, astfel încât pentru $x \in [a,b]$:

$$\left| f^{(k)}(x) - S_\Delta^{(k)}(x) \right| \leq C_k \, L \, K \, \|\Delta\|^{(4-k)}, \text{ unde } j = 1,2,3.$$

<u>*Demonstraţie.*</u> Pentru început vom demonstra teorema de mai sus pentru $k = 3$.

Fie $x \in [x_{j-1}, x_j]$, avem: $S_\Delta'''(x) - f'''(x) = \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} - f'''(x) =$

$$= \frac{M_j - f''(x_j)}{h_j} - \frac{M_{j-1} - f''(x_{j-1})}{h_j} + \frac{f''(x_j) - f''(x) - [f''(x_{j-1}) - f''(x)]}{h_j}$$
$$- f'''(x).$$

Din **teorema lui Taylor** în x obţinem:

$$S_\Delta'''(x) - f'''(x) \leq \frac{3}{2} L \frac{\|\Delta\|^2}{h_j} + \frac{1}{h_j} \Big| (x_j - x) f'''(x) + \frac{(x_j - x)^2}{2} f^{(4)}(\eta_1) -$$

$- xj-1 - x f''' \ x- xj-1- x 22 f4 \eta2 - hj f''' \ x \leq 32 L \ \Delta \ 2hj+ L2 \ \Delta \ 2hj,$

unde: $\eta_1, \eta_2 \in [x_{j-1}, x_j]$.

Prin ipoteză $\frac{\|\Delta\|}{h} \leq K$ pentru $\forall j$. Deci $|f''(x) - S_\Delta''(x)| \leq 2 L K \|\Delta\|$.

Pentru a demonstra teorema de mai sus pentru $k = 2$, observăm că pentru fiecare $x \in (a,b)$ există nodul $x_j = x_j(x)$, pentru care: $|x_j(x) - x| \leq \frac{1}{2} \|\Delta\|$.

Din: $f''(x) - S_\Delta''(x) = f''\big(x_j(x)\big) - S_\Delta''\big(x_j(x)\big) + \int_{x_j(x)}^{x} (f'''(t) - S_\Delta'''(t))\, dt$,

Pentru $K \geq 1$ avem:

$$|f''(x) - S_\Delta''(x)| \leq \frac{3}{4} L \|\Delta\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta\| \, 2 L K \|\Delta\| \leq \frac{7}{4} L K \|\Delta\|^2,$$

unde: $x \in [a,b]$.

În final considerăm $k = 1$.

Din teorema lui Rolle având punctele marginale $\xi_0 := a$ şi $\xi_{n+1} := b$ şi punctele $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, pentru $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, obţinem:

$$f'(\xi_j) - S'_\Delta(\xi_j), \text{ pentru } j = 0, 1, 2, \ldots, n+1.$$

Pentru $\forall \in [a, b] \exists \xi_j = \xi_j(x)$ pentru care avem: $\left|\xi_j(x) - x\right| < \| \Delta \|$, atunci: $f'(x) - S'_\Delta(x) = \int_{\xi_j(x)}^{x} (f''(t) - S''_\Delta(t))\, dt$ şi

$$\left| f'(x) - S'_\Delta(x) \right| \le \frac{7}{4} L K \| \Delta \|^2 \bullet \| \Delta \| = \frac{7}{4} L K \| \Delta \|^3, \text{ unde } x \in [a, b].$$

În final pentru $k = 0$ obţinem:

$$f(x) - S_\Delta(x) = \int_{x_j(x)}^{x} (f'(t) - S'_\Delta(t))\, dt,$$

unde pentru $k = 1$, obţinem:

$$\left| f(x) - S_\Delta(x) \right| \le \frac{7}{4} L K \| \Delta \|^3 \cdot \frac{1}{2} \| \Delta \| = \frac{7}{8} LK \| \Delta \|^4, \text{ unde } x \in [a, b]^5,$$

dar $\Delta_m = \left\{ a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \cdots < x_{n_m}^{(m)} = b \right\}$

unde $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ şi dacă $\Delta_m \to 0$ atunci:

$$\sup_{m,j} \frac{\| \Delta_m \|}{x_{j+1}^{(m)} < x_j^{(m)}} \le K < +\infty,$$

corespunzând funcţiilor spline S_{Δ_m} a căror derivate până la ordinul III converg spre f în intervalul $[a, b]$.

Se poate observa că f''' poate fi exprimată de S'''_{Δ_m}, considerând o secvenţă de funcţii definite pe intervale diferite.

Din observaţia de mai sus rezultă că **problema interpolării** constă în aceea că pentru un tabel de valori date: (x_i) şi $f(x_i)$, unde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, se cere să se găsească funcţia f care să satisfacă perechile $((x_i), f(x_i))$. După care, folosindu-se f determinat anterior, se pot obţine şi alte valori diferite de valorile date[3].

Dacă aceste valori sunt în afara domeniului iniţial a lui x, atunci problema găsirii acestor valori (puncte, experimente) se numeşte **extrapolare.** Un caz particular de extrapolare îl constituie funcţiile temporale, care pe baza unor valori (puncte, experimente) determinate în cadrul unor experienţe anterioare, desfăşurate în timp, ale funcţiei (procesului) studiat, se cere să se găsească, să se „prezică”, valorile viitoare, proces care se numeşte **predicţie** (Linndfield, 1995)**.**

Ca exemplu, ce mai simplă problemă de **interpolare** o constituie **interpolarea** liniară pentru care sunt suficiente doar două puncte mărginind intervalul dat.

Fie (x_0, y_0) şi (x_0, y_1) valorile date. Se cere să se obţină şi alte valori y pentru un x dat, astfel încât: $(x_0 < x < x_1)$.

Presupunem că x şi y definesc o dreaptă: $y = a\,x + b$. Ne propunem să evaluăm f astfel încât: $y = \frac{\{y_0\,(x_1 - x) + y_1\,(x - x_0)\}}{x_1 - x_0}$.

De exemplu, dându-se funcţia $y = x^{2,5}$ pentru $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$, se cere să se estimeze y pentru : $x = 4,5$ şi $x = 6,5$ folosindu-ne de interpolarea liniară (Tabel 3.2).

[3] In engleză problema poartă denumirea de “fiting function to data” or “curve fitting”

Tabel 3.2. Valorile funcţiei $\boldsymbol{y = x^{2,5}}$, pentru $\boldsymbol{x = 0, 1, 2, \dots, 10}$ şi ale interpolării liniare.

$\rightarrow x$	1	2	3	4	4,5	5	6	6,5	7	8	9	10
$y = x^{2,5}$		5,6	5,5	32	49,9	55,9	88,1	107,7	129,6	181	243	316
Interpolare liniară:					140			202,8				

Interpolarea liniară a funcţiei $y = x^{2,5}$ pentru $x = 0, 1, 2, \dots, 10$ prezintă erori apreciabile, aşa cum se poate observa din (Tabel 3.2) şi din figura alăturată (Fig. 3.1):

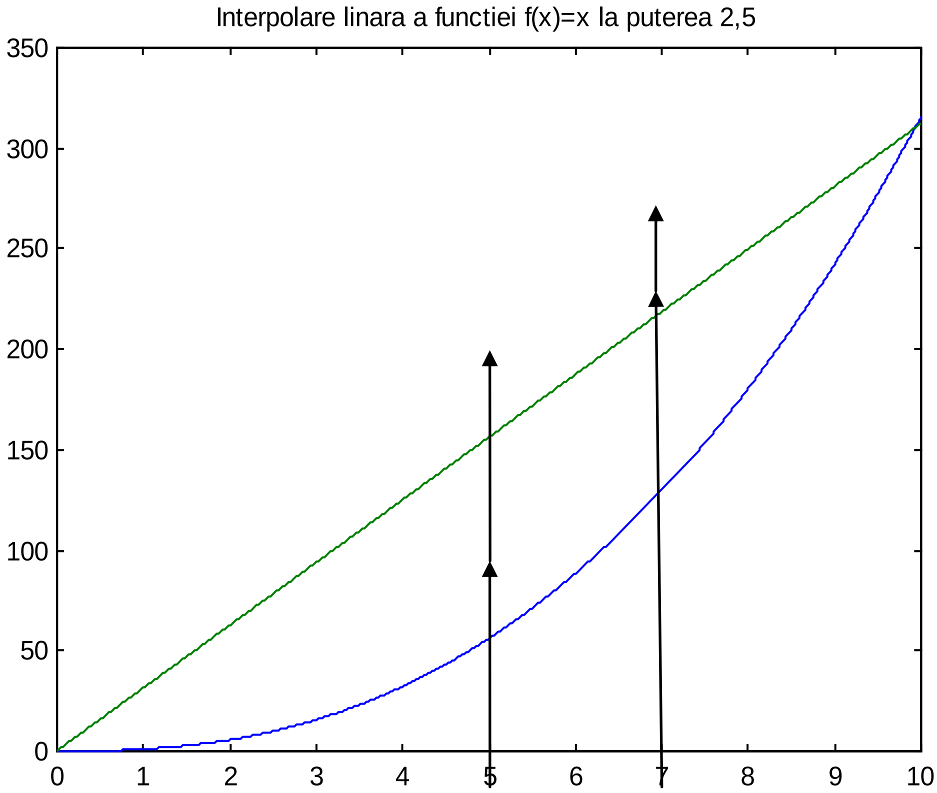


Fig. 3.1. Interpolare liniară a funcţiei $\boldsymbol{f(x) = x^{2,5}}$

În graficul din (Fig. 3.2) s-a prezentat interpolarea liniară pentru funcţia $y = \sin(x)$, pentru $x = 0, 1, 2, \dots, 10$.

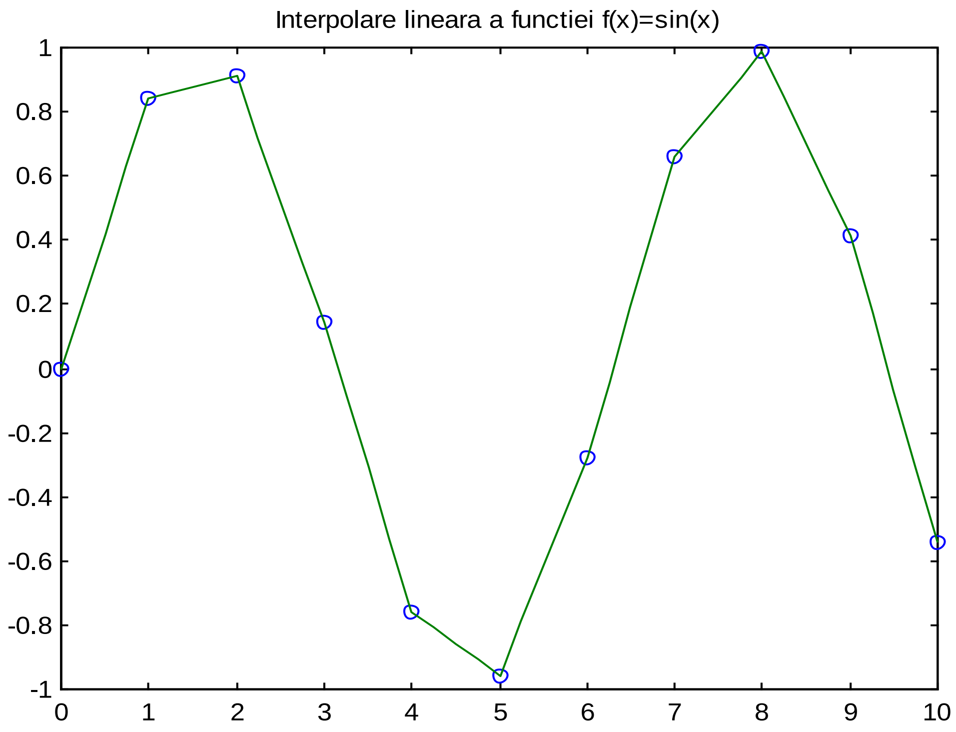


Fig. 3.2. Interpolarea liniară a funcţiei $F(x) = \sin(x)$.

Suprapunând funcţia sinusoidală cu funcţia liniară se obţine graficul de mai jos (Fig. 3.3):

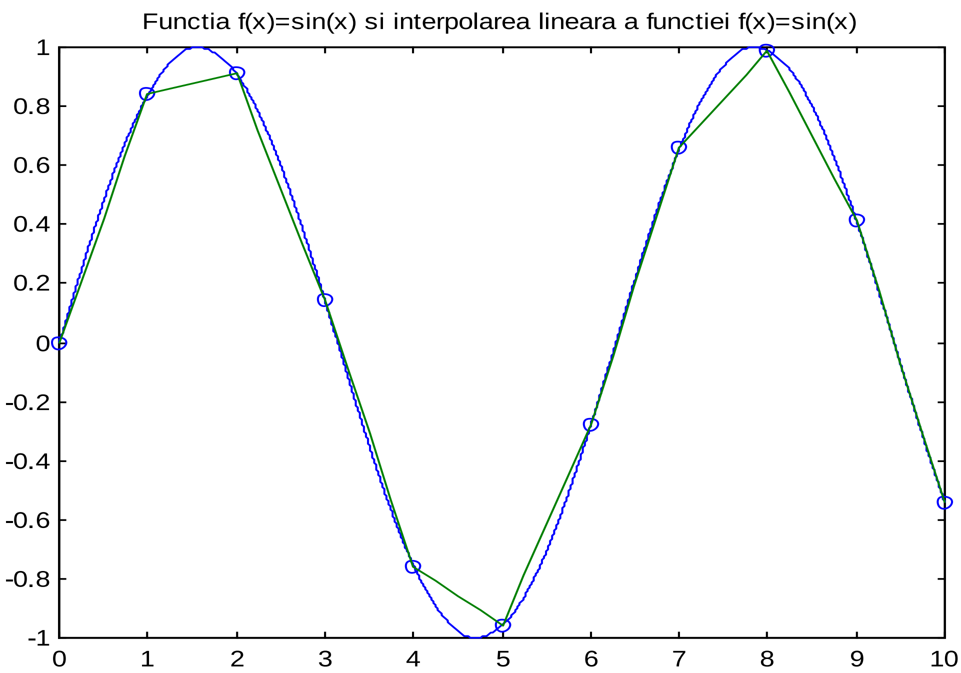


Fig. 3.3. Funcţia $f(x) = \sin(x)$ şi interpolarea liniară a funcţiei $f(x) = \sin(x)$.

Se poate observă că interpolarea liniară nu este practică. Însă interpolarea se poate îmbunătăţii dacă se utilizează un polinom de interpolare de grad mai mare. Un astfel de polinom de grad mai mare poate fi ajutat „să treacă” prin $n+1$ puncte (variabile). Nu este necesar să se cunoască coeficienţii polinomului în mod explicit, dar ei pot fi utilizaţi implicit în cadrul procedurii de estimare a lui x. De exemplu în (Fig. 3.4) s-a prezentat interpolarea liniară şi cubică utilizând un polinom de interpolare de gradul III al lui $\sin(x)$:

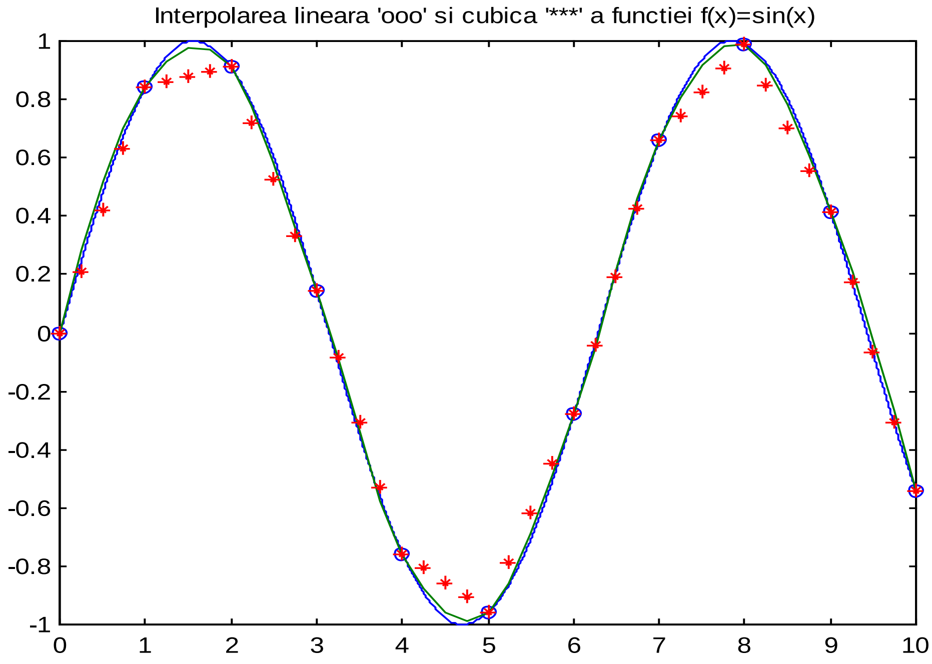


Fig. 3.4. Interpolarea liniară „ooo” şi cubică „***” a funcţiei $\boldsymbol{f(x)=\sin(x)}$

În acelaşi fel, aplicând interpolarea cubică (Fig. 3.5) pentru $y = x^{2,5}$ şi $x = 0, 1, 2, \dots, 10$ gradul de acurateţe a polinomului de interpolare este mult îmbunătăţit în comparaţie cu interpolarea liniară:

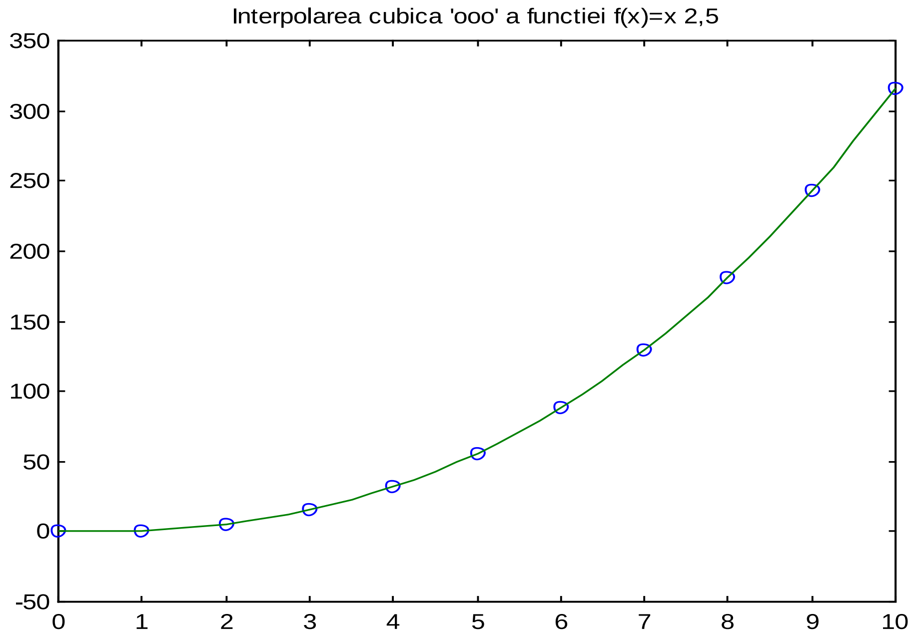


Fig. 3.5. Interpolarea cubică „ooo” a funcţiei $\boldsymbol{f(x) = x^{2,5}}$

3.12. Erorile de interpolare

Erorile de interpolare pot apare prin utilizarea funcţiilor de interpolare, de exemplu prin polinoamele de interfaţă utilizate la interpolarea funcţiilor date.

Pentru a calcula erorile ce apar în acest caz apelăm la următoarea teoremă (Robert, 2003):

Fie funcţia $\mathrm{F} : [a,b] \to \mathbb{R}$ de $(n+1)$ ori diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi fie $P \in \Pi_n$ un polinom, unde $P_{x_k} = f_{x_k}$ pentru $k = 0,1,2,\dots,n$.

Eroarea de interpolare pentru orice $\bar{x} \in [a,b]$, este dată de formula:

$$f(\bar{x}) - P(\bar{x}) = \frac{\omega(\bar{x})\, f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

şi unde: $\xi = \xi(\bar{x}) \in [a,b]$ şi $\omega(x) := (x - x_0)\dots(x - x_n)$.

Demonstraţie. Dacă $\bar{x} = x_n$ pentru diferiţi k, atunci ambii membrii ai ecuaţiei de mai sus dispar.

Fie însă $x \notin \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ şi fie:

$$\psi(x) := f(\bar{x}) - P(x) - K\,\omega(x)$$

şi unde constanta K este astfel aleasă încât $\psi(\bar{x}) = 0$.

Pentru a găsi o reprezentare particulară pentru constanta K pentru început observăm că funcţia ψ are cel puţin $(n+2)$ intervale nule: $x_0, x_1, \dots x_n, \bar{x}$ pe intervalul $[a,b]$. Aceasta ne conduce la concluzia că funcţia ψ' are cel puţin $(n+1)$ porţiuni nule în intervalul $[a,b]$ şi că există "ξ" de zerouri ale lui $\psi^{(n+1)}$ în intervalul $[a,b]$. În plus $P^{(n+1)} \equiv 0$ şi $\omega^{(n+1)} \equiv (n-1)!$ din observaţia că $\omega \in \Pi_{n+1}$ are 1 ca şi coeficient.

Obţinem

$$\psi^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0$$

de unde: $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, ceea ce demonstrează afirmaţia de mai sus şi care ne arată că funcţiile $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pot fi interpolate de către polinoamele de interpolare, eroarea de interpolare fiind calculată mai sus.

Mai mult, pentru subintervalul:

$$\Delta = \left\{ a = x_0^{(\Delta)} < x_1^{(\Delta)} < \dots < x_{n(\Delta)}^{(\Delta)} = b \right\}$$

al intervalului $[a,b]$ obţinem:

$$\|\Delta\| := \max_{1 \le k \le n(\Delta)} \left\{ x_k^{(\Delta)} - x_{k-1}^{(\Delta)} \right\},$$

ceea ce ne arată că teorema de mai sus are loc şi pentru subintervalele:

$\Delta^{(0)}, \Delta^{(1)}, \dots$ cu $\left\| \Delta^{(m)} \right\| \nrightarrow 0$ pentru $m \to \infty$.

Teoremă. Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diferenţiabilă de o infinitate de ori a-vând:

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f^{(k)}(x) \right| \le M,$$

unde $k = 0,1,2,\dots,n$ şi unde M este o constantă finită.

Fie $\Delta^{(0)}, \Delta^{(1)}, \dots$ o secvenţă a subintervalelor intervalului $[a,b]$ şi unde:

$$n_m := n\left(\Delta^{(m)}\right) \to \infty \text{ pentru } m \to \infty.$$

Ca urmare, secvenţele succesive ale polinoamelor de interpolare $P_m \in \Pi_{n_m}$, care interpolează valorile corespunzătoare a funcţiei f relative la subintervalele parţiale $\Delta^{(m)}$, converg uniform spre funcţia f.

Demonstraţie. Din teorema precedentă unde:

$$\max_{x \in [a,b]} |\omega(x)| \le (b-a)^{n_m+1},$$

rezultă:

$$\max_{x \in [a,b]} \left| P_m(x) - f(x) \right| \le M \frac{(b-a)^{n_m+1}}{(n_m+1)!} \to \infty, \text{ pentru } m \to \infty.$$

şi care ne arată convergenţa polinoamelor de interpolare prin partiţionarea intervalului $[a, b]$.

Practic însă mărirea gradului de aproximare al polinoamelor de interpolare prin partiţionarea intervalului $[a, b]$ nu creşte spectacular prin alegerea lui $m \to \infty$.

Teoremă. Fie funcţia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de $(n + 1)$ ori diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi dacă $\bar{x} \notin \{x_0, x_1, \dots x_n\}$, atunci eroarea de interpolare se poate obţine cu formula de mai jos:

$$f(\bar{x}) - P(\bar{x}) = f[x_0, x_1, \dots x_n, \overline{x}]\, \omega(\bar{x})$$

Demonstraţie. Pentru $x_{n+1} := \bar{x}$ şi $P_{0,1,2,\dots,n+1}(x) = P(x)$ avem:

$P_{0,1,2,\dots,n+1}(x) = P_{0,1,2,\dots,n}(x) + f[x_0, x_1, \dots x_n, \overline{x}]\, \omega(\bar{x})$, pentru $x \in \mathbb{R}$ din teorema iniţială folosind identitatea:

$$f(\bar{x}) = P_{0,1,2,\dots,n+1}(\bar{x}) .$$

Corolar. Pentru orice $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă de n ori şi pentru

$[x_0, x_1, \dots x_n] \in [a, b]$, intervale ale absciselor x_i, $i = 0,1,2, \dots n$,

atunci $\forall$ un număr $\xi = \xi(x) \in [a, b]$, astfel încât

$$f[x_0, x_1, \dots x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

şi unde ordonatele corespunzătoare sunt date de relaţia:

$$f_k = f(x_k), \text{ pentru } k = 0, 1, 2, \dots . n.$$

Demonstraţie. Propoziţia de mai sus este evidentă pentru $n = 0$. Pentru $n \geq 1$, propoziţia se demonstrează comparând termenii din partea dreaptă a celor două teoreme anterioare pentru abscisele x_i, $i = 0,1,2, \dots . n$ şi $\bar{x} = x_n$.

3.13. Concluzii

Din cele prezentate în cadrul acestui capitol rezultă că interpolarea reprezintă o importantă tehnică utilizată in modelarea geometrică. Problema interpolării şi tipurile de tehnici de interpolare depinde în principal de tipurile de date considerate, de abilitatea personalului care manipulează datele avute în vedere, dar şi de nivelul de toleranţă impus de problema studiată.

Creşterea volumului de date, mărirea gradului de precizie pentru acurateţea interpolării necesare modelării geometrice impune cunoaşterea şi aplicarea de tehnici diverse, adaptate problemelor avute în vedere.

De remarcat că deşi realizările şi cunoştinţele în acest domeniu al matematicii au avansat în mod considerabil, totuşi domeniu este departe de a fi epuizat. Se poate considera ca teoria funcţiilor spline şi nu numai, poate aduce noi rezultate şi cercetări care să aprofundeze şi să diversifice cunoştinţele din domeniul tehnicilor de modelare geometrică prin modelare.

4. POLINOAMELE LUI BERNSTEIN CA ELEMENTE DE BAZĂ ALE MODELĂRII GEOMETRICE

4.1. Introducere

În anul 1910, **Serghei Natanovici Bernstein**[1] încercând să demonstreze **Teorema lui Weierstrass**, a definit polinoamele ce îi poartă numele (Bernstein, 1912-1913). Ulterior, după 1935, şi în special după 1950, aceste polinoame au devenit fundamentale pentru o nouă ramură a matematicii: teoria aproximării funcţiilor, teorie care stă la baza dezvoltării modelării matematice, în general, şi a modelării geometrice în particular (Lorentz, 1953).

4.2. Definirea polinoamelor lui Bernstein

Fie $f\,(x)$ definită pe $[\,0,1\,]$ şi cu valori în P:

$$f\,(x)\ \equiv [\,0,1\,]\ \rightarrow\ P,$$

expresia

$$B_n\,(x) =\ B_n^f = \sum_{v=0}^{n} f\,\left(\frac{v}{n}\right)\left(\frac{n}{v}\right)\,x^v\,(\,1-x\,)^{n-v}$$

defineşte **polinoamele lui Bernstein** de ordinul n al funcţiei $f\,(x)$ şi unde $B_n\,(x)$ este un polinom în x, iar $x\ \leq n,\ n\ \in N$.

Dacă $f\,(x)\ \equiv [\,0,1\,]\ \rightarrow P \in \mathrm{P}$ este continuă pe $[\,0,1\,]$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} B_n\,(x) =\ f\,(x),$$

expresie ce ne permite să înţelegem de ce **polinoamele lui Bernstein** au devenit atât de importante pentru dezvoltarea ulterioară a teoriei aproximării funcţiilor. Expresia ne arată că orice funcţie continuă pe $[\,0,1\,]$, poate fi înlocuită (aproximată) de polinomul $B_n\,(x)$, atunci când $n\ \rightarrow\ \infty$. Cu cît n este mai mare, cu atât polinomul $B_n\,(x)$ aproximează mai bine funcţia $f\,(x)\ \equiv [\,0,1\,]\ \rightarrow\ \mathrm{P}$ continuă pe $[\,0,1\,]$.

Demonstraţie. Fie:

$$T = \sum_{v=0}^{n}\ (\,v-nx\,)^2\ p_v = \sum_{v=0}^{n}\ \{\,v\,(\,v-1) -\ (\,2nx-1\,)\,v +\ n^2\,x^2\,\}\ p_v,$$

pentru că: $\sum_{v=0}^{n} p_v = 1$ şi

[1] **Serghei Natanovici Bernstein** (în rusă: **Сергей Натанович Бернштейн**, tradus cu caractere latine: *Bernstein*), născut la Odessa în 5 martie 1880, decedat la Moscova în 26 octombrie 1968. Teza sa de doctorat, susţinută la Sorbone, a rezolvat a XIX-a problemă a lui Hilbert, găsind soluţia analitică a ecuaţiilor diferenţiale eliptice. Ulterior, a publicat numeroase lucrări în domeniul teoriei probabilităţilor, în genetică, în teoria funcţiilor etc. Între 1906 şi 1933 a condus Societatea Matematică din Harkov, unde a prezentat principalele sale descoperiri în matematică, inclusiv polinoamele ce îi poartă numele.

$$\sum_{\upsilon=0}^{n} \upsilon\, p_\upsilon = nx \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} x^\mu \, (1-x)^{n-1-\mu} = nx,$$

$$\sum_{\upsilon=0}^{n} \upsilon\,(\upsilon-1)\, p_\upsilon = n\,(n-1)\,x^2\,(1-x)^{n-2-\mu} = n\,(n-1)\,x^2$$

şi deci:

$$T = n^2x^2 - 2\,(nx-1)\,n\,x + n\,(n-1)\,x^2 = n\,x\,(1-x)$$

şi pentru că: $x\,(1-x) \le \frac{1}{4}$ pe intervalul $[\,0,1\,]$, obţinem inegalitatea:

$$\sum_{\left|\frac{\upsilon}{n}-x\right| \ge \delta} p_\upsilon \le \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{\upsilon}{n}-x\right| \ge \delta} \left(\frac{\upsilon}{n} - x\right)^2 p_\upsilon \le \frac{1}{n^2\,\delta^2}\, T = \frac{x\,(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Dacă funcţia $f\,(x) \equiv [\,0,1\,] \to P$ este continuă pe $[\,0,1\,]$ şi mărginită, adică $|\,f\,(n)\,| \le \mathrm{M}$ pe intervalul [0, 1], $\mathrm{M} \in P$ şi x astfel încât pentru $\forall\, \varepsilon > 0$, putem găsi δ$>0$ pentru care avem: $\left|x - x'\right| < \delta$ şi corespunzător $\left|f\,(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon$, atunci:

$$|\,f\,(x) - B_n\,(x)\,| = \left|\sum_{\upsilon=0}^{n} \{f\,(x) - f\,(\tfrac{\upsilon}{n})\, p_\upsilon\,\}\right|$$

$$\le \sum_{\left|\frac{\upsilon}{n}-x\right| < \delta} |\,f\,(x) - f\,(\tfrac{\upsilon}{n})\,|\, p_\upsilon + \sum_{\left|\frac{\upsilon}{n}-x\right| < \delta} |\,f\,(x)\,|\, p_\upsilon,$$

dar

- ⇨ prima sumă $\sum_{\left|\frac{\upsilon}{n}-x\right| < \delta} \left|f\,(x) - f\,(\tfrac{\upsilon}{n})\right| p_\upsilon \le \varepsilon \sum p_\upsilon = \varepsilon,$
- ⇨ iar a doua sumă $\sum_{\left|\frac{\upsilon}{n}-x\right|} \;|\,f\,(x)|\, p_\upsilon \le 2M\,(4\,n\,\delta^2)^{-1},$

şi deci

$$|\,f\,(x) - B_n\,(x)\,| \le \varepsilon + M\,(2\,n\,\delta^2\,)^{-1},$$

şi dacă n este suficient de mare,

$$|\,f\,(x) - B_n\,(x)\,| \le 2\varepsilon.$$

În final, dacă $f\,(x) \equiv [\,0,1\,] \to P \in \mathrm{P}$ este continuă pe $[\,0,1\,]$, ultima expresie ne arată că δ este independentă de x şi deci $B_n\,(x) \to f\,(x)$ în mod uniform, dacă n este suficient de mare, ceea ce demonstrează definiţia **polinoamele lui Bernstein**.

4.3. Polinoamele lui Bernstein pentru funcţii de două variabile

Fie o funcţie $f\,(x,y)$ de două variabile reale x,y definită pe spaţiul S, astfel încât x şi y satisfac condiţiile:

$$S := 0 \le x \le 1\,;\; 0 \le y \le 1.$$

Definiţie: **Polinoamele lui Bernstein** în două variabile x şi y pentru funcţia $f\,(x,y)$ de două variabile se definesc astfel (Kingsley, 1951):

$$B^f_{n_1,n_2}\,(x,y) = \sum_{\upsilon_1=0}^{n_1} \sum_{\upsilon_2=0}^{n_2} f\left(\frac{\upsilon_1}{n_1}, \frac{\upsilon_2}{n_2}\right) p_{\upsilon_1,n_1}\,(x)\, p_{\upsilon_2,n_2}\,(x),$$

unde

$$p_{\upsilon,n}\,(u) = \binom{n}{\upsilon}\, u^\upsilon\,(1-u)^{n-\upsilon}$$

şi

$$\sum_{v=0}^{n} p_{v,n}(u) = 1$$

Teoremă. Dacă funcţia $f(x,y)$ de două variabile reale x,y definită pe spaţiul S este mărginită de spaţiul inchis $S := \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$, atunci

$$\lim \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\, \delta y_0^{p-q}} B_{n_1,n_2}^{f}(x_0, y_0) = \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\, \delta y_0^{p-q}} f(x_0, y_0)$$

în orice punct (x_0, y_0) aparţinând spaţiului deschis $(0 < x < 1, 0 < y < 1)$, unde diferenţiala totală de ordin p a funcţiei $f(x,y)$ există cu condiţia ca n_1, n_2 să tindă spre infinit, astfel încât

$$0 < r \le \frac{n_1 + 1}{n_2 + 1} \le s < +\infty.$$

În plus, dacă derivatele parţiale ale lui $f(x,y)$ de ordinul p există şi sunt continue în S, atunci limitele de mai sus converg uniform în S când n_1, n_2 tind spre infinit în orice direcţie posibilă.

Demonstraţie. Dacă $\delta \ge n_1^{-\alpha}, 0 < \alpha < \frac{1}{2}$, atunci pentru $\forall k > 0\, \exists\, C$ depinzînd doar de α şi k astfel încât:

$$\sum_{\left|\frac{v}{n} - u\right| \ge \delta} p_{v,n}(u) \le C\, n^{-k},$$

unde: $0 \le u \le 1$.

În plus pentru un $\gamma \ge 0$ şi orice $0 \le u \le 1$, obţinem:

$$\sum_{v=0}^{n} |v - n\,u|^{v}\, p_{v,n}(u) \le C_1\, n^{\frac{1}{2}\gamma},$$

unde: C_1 este o constantă depinzând doar de γ.

Reamintindu-ne unele proprietăţi ale diferenţialelor:

Prin definiţie, diferenţiala totală de ordinul p a lui $f(x,y)$ există în punctul (x_0, y_0) dacă:

$$f(x,y) = P(x,y) + g(x,y),$$

unde: $P(x,y)$ reprezintă un polinom de grad p şi:

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^{p} a_i(x,y)\,(x - x_0)^{p-i}\,(y - y_0)^{i} = \sum_{i=0}^{p} \beta_i\,,$$

unde: $a_i(x,y)$ tind spre zero ca unică limită când $x \to x_0$ şi $y \to y_0$.

Definind:

$$\Delta_{(x,h)}^{0} f(x,y) = f(x,y),$$

$$\Delta_{(x,h)}^{1} f(x,y) = f(x+h,y) - f(x,y),$$

unde în general, pentru $i = 1,2,\ldots.p$ şi j $1,2,\ldots q$ se obţine:

$$\Delta_{(x,h)}^{p} f(x,y) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(x + i\,h, y)$$

şi:

$$\Delta_{(y,k)}^{q} f(x,y) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} f(x, y + j\,k).$$

Din cele două relaţii de mai sus rezultă că:

$$\Delta_{(x,h)}^{p}\, \Delta_{(y,k)}^{q} f(x,y) = \Delta_{(y,k)}^{q}\, \Delta_{(x,h)}^{p} f(x,y) =$$

$$\sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{p+q-i-j} = \binom{p}{i} \binom{q}{j} f(x + i\,h, y + j\,k).$$

Dacă însă toate derivatele parţiale ale lui $f\,(x,y)$ de ordin $\leq p+q$ există şi sunt continue în $S,$ se poate arăta că

$$\Delta^{p}_{(x,h)}\ \Delta^{q}_{(y,k)}\, f\,(\,x_0,y_0\,) =\ h^p\,k^q\,\frac{\delta^{p+q}}{\delta x_0^q\ \delta y_0^{p-q}}\ f\,(\,x_0 +\ p\,\theta_1\,h\,y + q\,\theta_2\,k\,),$$

unde: $\theta_i\ = \theta_i\,(\,x_0,y_0;\ h,k\,)$ şi $(0 <\ \theta_i\ < 1;\ \text{pentru}: i = 1,2)$

În plus, aplicând inducţia matematică pentru $q = 0,1,2,\ldots p,$ în relaţia de mai sus, obţinem:

$$\frac{\delta^p}{\delta x^q\ \delta y^{p-q}}\ B^f_{n_1,n_2}\,(\,x,y\,) =$$
$$= n_1\,(\,n_1 -\ 1\,)\ldots(\,n_1 -\ q+1)\,n_2\,(\,n_2 -\ 1\,)\ldots(n_2 -\ p+q+1)\,\bullet$$
$$\bullet\sum_{v_1=0}^{n_1-q}\ \sum_{v_2=0}^{n_2-p+q}\ \Delta^{p}_{(x,n_1^{-1})}\ \Delta^{p-q}_{(y,n_2^{-1})}\, f\left(\frac{v_1}{n_1},\frac{v_2}{n_2}\right)p_{v_1,n_1-q}\,(\,x\,)p_{v_2,n_2-q}\,(\,y\,).$$

Din definiţia **polinoamelor lui Bernstein** pentru funcţii de două variabile rezultă următoarele:

Lema 1. Dacă $f\,(\,x,y\,)$ este mărginită şi continuă în spaţiul S, atunci pentru orice punct $(\,x,y\,)$ avem:

$$\lim_{n_1,n_2\infty} B^f_{n_1,n_2}\,(\,x,y\,) = f\,(\,x,y\,);$$

şi care se demonstrează prin analogie cu **polinoamele lui Bernstein** de o singură variabilă.

Lema 2. Dacă toate derivatele parţiale ale lui $f\,(\,x,y\,)$ de ordin $\leq p$ există şi sunt continue în spaţiul $S,$ atunci:

$$\frac{\delta^p}{\delta x^q\ \delta y^{p-q}}\ B^f_{n_1,n_2}\,(\,x,y\,)$$

şi

$$\frac{\delta^p}{\delta x^q\ \delta\ y^{p-q}}\ f\,(\,x,y\,)$$

tind spre infinit din orice direcţie în mod continuu în spaţiul lui S, când n_1, n_2 sunt continue.

<u>*Demonstraţie*</u>. Din relaţiile de mai sus:

$$\frac{\delta^p}{\delta x^q\ \delta y^{p-q}}\ B^f_{n_1,n_2}\,(\,x,y\,) =$$
$$= n_1\,(\,n_1 -\ 1\,)\ldots(\,n_1 -\ q+1)\,n_2\,(\,n_2 -\ 1\,)\ldots(n_2 -\ p+q+1)\,\bullet$$
$$\bullet\sum_{v_1=0}^{n_1-q}\ \sum_{v_2=0}^{n_2-p+q}\ \Delta^{p}_{(x,n_1^{-1})}\ \Delta^{p-q}_{(y,n_2^{-1})}\, f\left(\frac{v_1}{n_1},\frac{v_2}{n_2}\right)p_{v_1,n_1-q}\,(\,x\,)\,p_{v_2,n_2-q}\,(\,y\,)$$

şi:

$$\Delta^{p}_{(x,h)}\ \Delta^{q}_{(y,k)}\, f\,(\,x_0,y_0\,) =\ h^p\,k^q\,\frac{\delta^{p+q}}{\delta x_0^q\ \delta y_0^{p-q}}\ f\,(\,x_0 +\ p\,\theta_1\,h, y + q\,\theta_2\,k\,)$$

Rezultă:

$$\frac{\delta^p}{\delta x^q\ \delta y^{p-q}}\ B^f_{n_1,n_2}\,(\,x,y\,) =$$
$$= n_1\,(\,n_1 -\ 1\,)\ldots(\,n_1 -\ q+1)\,n_2\,(\,n_2 -\ 1\,)\ldots(n_2 -\ p+q+1)\,\bullet$$
$$\bullet\left(\frac{1}{n_1}\right)^q\left(\frac{1}{n_2}\right)^{p-q}\sum_{v_1=0}^{n_1-q}\ \sum_{v_2=0}^{n_2-p+q}\ \frac{\delta^p}{\delta x^q\ \delta y^{p-q}}\ f\left(\frac{v_1}{n_1}+\ q\ \frac{\Theta_{v_1v_2}}{n_1},\frac{v_2}{n_2}+\ (p-q\,)\frac{\phi_{v_1v_2}}{n_2}\right)\bullet$$
$$\bullet\, p_{v_1,n_1-q}\,(\,x\,)\,p_{v_2,n_2-q}\,(\,y\,),$$

unde

$$0\ <\ \Theta_{v_1v_2}\ < 1\ \text{şi}\ 0\ <\ \phi_{v_1v_2}\ < 1,$$

iar produsul factorilor din afara sumei duble tinde spre 1, dacă $n_1, n_2 \ \rightarrow \infty$.

Notăm

$$h\,(x,y) = \frac{\delta^p}{\delta x^q\ \delta y^{p-q}}\ f\,(x,y)$$

cu observaţia că diferenţa dintre dubla sumă şi:

$$B^h_{n_{1-q},\, n_2-p+q}(x,y)$$

tinde uniform spre zero în x şi y când $n_1, n_2 \rightarrow \infty$. Dar, din **Lema 2,** ultima expresie tinde spre

$$\frac{\delta^p}{\delta x^q\ \delta y^{p-q}}\ f\,(x,y)$$

în mod uniform în x şi y, ceea ce demomstrează lema 2.

Lema 3. Fie:

$$\frac{d^l}{du^l}\,[u^v\,(1-u)^{n-v}] = Q\,(u)\,u^{v-l}(1-u)^{n-p-1},$$

unde:

$Q\,(u) = \sum_{i,j} n^i\,(v-n\,u)^j\,h^l_{i,j}$ şi unde: $i,j \ \geq 0, 2i+j \ \leq l$, iar: $h^l_{i,j}\ (u)$ sunt polinoame în u independente de v şi n lemă care se demonstrează prin inducţie mate-matică.

Cele de mai sus ne permit să demonstrăm teorema din introducerea capitolului.

Demonstraţie. Din definiţia diferenţialei totale de ordinul p a lui $f\,(x,y)$ în punctul (x_0, y_0) şi considerând relaţia definită mai sus rezultă:

$$f\,(x,y) = P\,(x,y) + g\,(x,y),$$

unde: $P\,(x,y)$ reprezintă un polinom de grad p şi g definit ca mai jos,

$$g\,(x,y) = \sum_{i=0}^{p} a_i\,(x,y)\ (x-\ x_0)^{p-i}\,(y-\ y_0)^i = \sum_{i=0}^{p} \beta_i$$

obţinem

$$\frac{\delta^p}{\delta x_0^q\ \delta y_0^{p-q}} B^f_{n_1,n_2}\,(x_0,\, y_0) = \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\ \delta y_0^{p-q}} B^p_{n_1,n_2}\,(x_0,\, y_0) + \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\ \delta y_0^{p-q}} B^q_{n_1,n_2}\,(x_0,\, y_0)$$

şi conform **Lemei 2**. trebuie doar să arătăm că termenul secund din dreapta ecuaţiei tinde spre zero.

Folosind definiţia lui $g\,(x,y)$ de mai sus este suficient să arătăm că

$$\frac{\delta^p}{\delta x_0^q\ \delta y_0^{p-q}} B^{\beta_k}_{n_1,n_2}\,(x_0,\, y_0) \ \rightarrow\ 0,$$

şi unde: $k = 0,1,2\ \ldots, p$.

Din **Lema 3**. obţinem

$$\frac{\delta^p}{\delta x_0^q\ \delta y_0^{p-q}} B^{\beta_k}_{n_1,n_2}\,(x_0,\, y_0) =$$

$$= \sum_{2\,i_1+\,j_1\,\leq q} h^q_{i_1+\,j_1}\,(x_0) \sum_{2\,i_2+\,j_2\,\leq p-q} h^{p-q}_{i_2+\,j_2}\,(y_0) \sum_{v_1=\,0}^{n_1} \sum_{v_2=0}^{n_2} \propto_k \left(\frac{v_1}{n_1}, \frac{v_2}{n_2}\right) \left(\frac{v_1}{n_1} - x_0\right)^{p-k} \bullet$$

$$\bullet \left(\frac{v_2}{n_2} - y_0\right)^k n_1^{i_1}\,(v_1 - n_1\,x_0)^{j_1}\,n_2^{i_2}\,(v_2 - n_2\,y_0)^{j_2} \binom{n_1}{v_1} x_0^{v_1-q}\,(1-\ x_0)^{n_1-v_1-q} \binom{n_2}{v_2} \bullet$$

$$\bullet\ y_0^{v_2-p+q}\,(1-\ y_0)^{n_2-v_2-p+q}$$

şi care se poate rescrie sub forma

$$\frac{\delta^p}{\delta x_0^q\ \delta y_0^{p-q}} B^{\beta_k}_{n_1,n_2}\,(x_0,\, y_0) =$$

$$= \sum_{2\,i_1+\,j_1\,\leq q} h^*_{i_1+\,j_1}(x_0) \sum_{2\,i_2+\,j_2\,\leq p-q} h^*_{i_2+\,j_2}\,(y_0) \sum_{v_1=\,0}^{n_1} \sum_{v_2=0}^{n_2} \propto_k \left(\frac{v_1}{n_1},\frac{v_2}{n_2}\right)\left(\frac{v_1}{n_1}-\,x_0\right)^{p-k} \bullet$$

$$\bullet\left(\frac{v_2}{n_2}-\,y_0\right)^k n_1^{i_1}\,(v_1-\,n_1\,x_0)^{j_1}\,n_2^{i_2}\,(v_2-\,n_2\,y_0)^{j_2}\,p_{v_1,n_1}\,(\,x_0\,)\,p_{v_2,n_2}\,(\,y_0\,),$$

unde: $h^*_{i_1+\,j_1}(x_0)$ sunt independenţi de v_1 şi n_1 iar $h^*_{i_2+\,j_2}(y_0)$ sunt independenţi de v_2 şi n_2. Deci este suficient să arătăm că dubla sumă din interior, pe care o notăm cu σ tinde spre zero cu condiţia ca

$$0 < r \leq \frac{n_1+1}{n_2+1} \leq s < +\infty$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există δ astfel încât

$$a_k\,|\,x_1 - x_0\,| < \varepsilon$$
$$|\,x_1 - x_0\,| < \delta$$
$$|\,y_1 - y_0\,| < \delta,\text{ unde: } k = 0,1,2\,\ldots.,p$$

iar δ se va preciza ulterior şi unde există un M astfel încât

$$a_k\,|\,x_1 - x_0\,| \leq M \text{ pentru:}$$
$$0 \leq x_1 \leq 1,$$
$$0 \leq y_1 \leq 1.$$

A. În valoare absolută partea din componentele lui σ corespunzătoare acestuia:

$$\left|\frac{v_1}{n_1}-\,x_0\right| < \delta \text{ şi:}$$
$$\left|\frac{v_2}{n_2}-\,y_0\right| < \delta$$

nu este mai mare decât expresia:

$$n_1^{i_1-p+k}\,n_2^{i_2-k} \sum_{v_1=\,0}^{n_1} \sum_{v_2=0}^{n_2} |\,v_1 - n_1\,x_0\,|^{p-k+j_1}\,|\,v_2 - n_2\,y_0|^{k+j_2}\,p_{v_1,n_1}\,(\,x_0\,)\,p_{v_2,n_2}\,(\,y_0\,).$$

Ţinând cont de expresia de mai sus:

$$\sum_{v=0}^{n} |\,v - n\,u\,|^v\,p_{v,n}\,(\,u\,) \leq C_1\,n^{\frac{1}{2}\gamma}$$

ultima expresie nu este mai mare decât:

$$C_{2n_1^{i_1-p+k+\frac{1}{2}(p-k+j_2)}} \leq C_2\left(\sqrt{n_1}\,\right)^{2i_1+j_1-(p-k)}\left(\sqrt{n_2}\,\right)^{2i_2+j_2-k)}$$

Dar:

$$\begin{cases} 2i_1 + j_1 \leq q \\ 2i_2 + j_2 \leq p - q \end{cases},\ \text{rezultă că: } 2i_1 + j_1 + 2i_2 + j_2 - p \leq 0$$

şi deci ultima expresie nu este mai mare decât C_2 pentru toţi n_1, n_2 suficienţi de mari şi care satisfac relaţia:

$$\sum_{v=0}^{n} |\,v - n\,u\,|^v\,p_{v,n}\,(\,u\,) \leq C_1\,n^{\frac{1}{2}\gamma}.$$

În plus, în valoare absolută partea din componentele lui σ corespunzătoare acestuia:

$$\left|\frac{v_1}{n_1}-\,x_0\right| < \delta \text{ şi:}$$
$$\left|\frac{v_2}{n_2}-\,y_0\right| \geq \delta$$

nu este mai mare decât

$$n_1^{i_1-p+k} n_2^{i_2-k} M \sum_{v_1=0}^{n_1} |v_1 - n_1 x_0|^{p-k+j_1} p_{v_1,n_1}(x_0)\, p_{v_2,n_2}(y_0) \sum_{\left|\frac{v_2}{n_2}-y_0\right|\geq\delta} |v_2 - n_2 y_0|^{k+j_2} p_{v_2,n_2}(y_0).$$

Din

$$0 < r \leq \frac{n_1+1}{n_2+1} \leq s < +\infty,$$
$$|v - n\,u| \leq n,$$
$$\sum_{v_1=0}^{n_1} p_{v_1,n_1}(x_0) = 1$$

rezultă că expresia de mai sus nu este mai mare decât:

$$n_2^{i_1-p+k} n_2^{i_2-k} M_1\, n_2^{j_1-k+p} n_2^{i_2-k} \sum_{\left|\frac{v_2}{n_2}-y_0\right|\geq\delta} p_{v_2,n_2}(y_0).$$

Considerând n_1, n_2 suficienţi de mari şi $0 < \propto < \frac{1}{2}$, atunci numărul:

$$\delta = n_1^{-\propto} + n_2^{-\propto}$$

satisface condiţiile:

$$a_k\,|x_1 - x_0| < \varepsilon$$
$$|x_1 - x_0| < \delta$$
$$|y_1 - y_0| < \delta, \text{unde: } k = 0, 1, 2 \ldots . p$$

B. O concluzie similară rezultă din componentele lui σ corespunzătoare acestuia

$$\left|\frac{v_1}{n_1} - x_0\right| \geq \delta, şi:$$
$$\left|\frac{v_2}{n_2} - y_0\right| < \delta.$$

C. În final, partea lui σ corespunzătoare acestuia

$$\left|\frac{v_1}{n_1} - x_0\right| \geq \delta, şi:$$
$$\left|\frac{v_2}{n_2} - y_0\right| \geq \delta$$

în valoare absolută nu este mai mare decât

$$n_1^{i_1-p+k} n_2^{i_2-k} M \sum_{v_1=0}^{n_1} |v_1 - n_1 x_0|^{p-k+j_1} p_{v_1,n_1}(x_0)\, p_{v_2,n_2}(y_0) \sum_{\left|\frac{v_2}{n_2}-y_0\right|\geq\delta} |v_2 - n_2 y_0|^{k+j_2} p_{v_2,n_2}(y_0)$$

Considerând

$$\sum_{\left|\frac{v}{n}-u\right|\geq\delta} p_{v,n}(u) \leq C\, n^{-k}$$

aceştia nu sunt mai mari decât

$$n_1^{i_1-p+k} n_2^{i_2-k} M\, C\, \frac{n_1^{p-k+j_1}}{n_1^{i_1+j_1+1}} \frac{n_2^{k+j_2}}{n_2^{i_2+1+j_2}}$$

şi care tinde spre zero când n_1, n_2 suficienţi de mari tind spre ∞.

De aici rezultă că

$$\frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}} B_{n_1,n_2}^{\beta_k}\,(x_0,\,y_0)$$

poate fi ales suficient de mic şi considerând n_1, n_2 suficienţi de mari, astfel încât relaţiile

$$0 < r \le \frac{n_1+1}{n_2+1} \le s < +\infty,$$

să fie satisfăcute, ceea ce demonstrează teorema dată.

În acelaşi timp, trebuie să arătăm că relaţia limită prezentată la începutul capitolului:

$$\lim \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}} B_{n_1,n_2}^{f}\,(x_0,\,y_0) = \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}}\,f\,(x_0,\,y_0)$$

este valabilă şi în cele patru puncte ale suprafeţei S cu coordonatele:

$(0,0), (0,1), (1,0)$ şi $(1,1)$.

Este suficient să arătăm aceasta pentru punctul $(0,0)$, demonstraţia fiind similară pentru celelalte puncte.

Fie:

$$D_{v_1,v_2} = \frac{d^q}{dx^q}\,x^{v_1}(1-x)^{n_1-v_1}\,\frac{d^{p-q}}{dx^{p-q}}\,y^{v_2}(1-y)^{n_2-v_2},$$

unde: $D_{v_1,v_2}\,(0,0)$, pentru:

$v_1 \ge q+1$, şi:

$v_2 \ge q+1$.

Aplicând **Teorema lui Leibnitz**, obţinem:

$$D_{v_1,v_2}\,(0,0) = \binom{q}{v_1}\frac{d^{v_1}}{dx^{v_1}}\,x^{v_1}\,\frac{d^{q-v_1}}{dx^{q-v_1}}\,(1-x)^{n_1-v_1}\binom{p-q}{v_2}\frac{d^{v_2}}{dy^{v_2}}y^{v_2}\,\frac{d^{p-q-v_2}}{dy^{p-q-v_2}}\,(1-y)^{n_2-v_2}\Big|x=y=0$$

$$= (-1)^{q-v_1}\frac{q!}{(q-v_1)!}\,(n_1-v_1)(n_1-v_1-1)\dots(n_1-q+1)\,\bullet$$

$$\bullet\;(-1)^{p-q-v_2}\frac{(p-q)!}{(p-q-v_2)!}\,(n_2-v_2)(n_2-v_2-1)\dots(v_2-pq+q+1) \cong C\,C\,n_1^{q-v_1}\,n_2^{p-q-v_2},$$

unde: $n_1, n_2\;\infty$.

Trebuie să arătăm că

$$\frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}} B_{n_1,n_2}^{\beta_k}\,(x_0,\,y_0) \to 0$$

pentru punctul $(0,0)$ în loc de (x_0, y_0).

Obţinem:

$$\frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}} B_{n_1,n_2}^{\beta_k}(x,y)\big|x=y=0 =$$

$$= \sum_{v_1=0}^{q}\;\sum_{v_2=0}^{p-q} \propto_k \left(\frac{v_1}{n_1},\frac{v_2}{n_2}\right)\left(\frac{v_1}{n_1}-x_0\right)^{p-k}\left(\frac{v_1}{n_1}\right)\left(\frac{v_2}{n_2}\right) D_{v_1,v_2}\,(x,y)\,\big|x=y=0$$

şi unde D_{v_1,v_2} în valoare absolută este

$$\cong C\left|\sum_{v_1=0}^{q}\;\sum_{v_2=0}^{p-q} \propto_k \left(\frac{v_1}{n_1},\frac{v_2}{n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}\right)^{p-k}\left(\frac{1}{n_2}\right)^{k} n_1^{v_1}\,n_2^{v_2}\,n_1^{q-v_1}\,n_2^{p-q-v_2}\right|$$

şi deoarece $n_1,\,n_2$ satisfac inegalitatea

$$0 < r \le \frac{n_1+1}{n_2+1} \le s < +\infty,$$

ultima expresie nu e mai mare decât

$$C\sum_{v_1=0}^{q}\sum_{v_2=0}^{p-q}\left|\left(\frac{v_1}{n_1},\frac{v_2}{n_2}\right)\right|$$

şi care tinde spre zero când $n_1, n_2 \to \infty$, deoarece $\propto_k(x,y) \to 0$, când $x \to 0$ şi $y \to 0$.

Ca urmare, obţinem relaţia:

$$\frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}} B_{n_1,n_2}^f(x,y)\Big|\, x = y = 0 \quad \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}} f(x,y)\Big|\, x = y = 0,$$

dacă diferenţiala de ordinul n a lui $f(x,y)$ există în punctul $(0,0)$ şi n_1, n_2 satisface inegalitatea

$$0 < r \le \frac{n_1+1}{n_2+1} \le s < +\infty.$$

Vom arăta că demonstraţia de mai sus se poate extinde la toate celelalte puncte considerate. Fie pentru aceasta punctul $(x_0, 0)$, unde: $0 < x_0 < 1$ şi fie funcţia

$$f(x,y) = \varepsilon(y)\,|\,x - x_0\,| \text{ şi unde: } 0 < x_0 < 1,$$

iar $\varepsilon(y)$ este definit pentru $0 \le y \le 1$, cu următoarele proprietăţi:

$$\varepsilon(y) \to 0$$

$$y^{-\frac{1}{2}}\varepsilon(y) \to +\infty, \text{ când: } y \to 0.$$

Considerând: $n_1 = n_2 = n$, obţinem:

$$\frac{d}{dy} p_{v_2,n}(y)\Big|\, y = 0 = \begin{cases} n \text{ pentru } v_2 = 1 \\ 0 \text{ pentru } v_2 = 2, 3, \dots n. \end{cases}$$

Ca urmare,

$$\frac{\delta}{\delta y} B_{nn}(x,y)\Big|_{(x_0,0)} = \sum_{v_1=0}^{n}\left|\frac{v_1}{n} - x\right| p_{v_1,n}(x) \sum_{v_1=0}^{n}\left(\frac{v_2}{n}\right)\frac{d}{dy} p_{v_2,n}(y)\Big|_{(x_0,0)} =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{v_1=0}^{n}|\,v_1 - n\,x_0\,|\,p_{v_1,n}(x_0)\left(\frac{1}{n}\right) n \ge C\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\right)$$

şi care tinde spre ∞, când $n \to \infty$, deoarece:

$$\lim \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}} B_{n_1,n_2}^f(x_0, y_0) = \frac{\delta^p}{\delta x_0^q\,\delta y_0^{p-q}} f(x_0, y_0).$$

Rezultă că pentru orice: $0 < x < 1$, există o constantă $C > 0$ astfel încât

$$\sum_{v=0}^{n}|\,v - n\,x\,|\,p_{v,n}(x) \ge C\sqrt{n}$$

când $n \to \infty$, ceea ce ne arată că extinderea **polinoamelor lui Bernstein** pentru funcţii de două variabile este fezabilă. De remarcat abordarea originală a acestei probleme, diferită de ceea existentă în literatura de specialitate. O astfel de abordare ne permite extinderea **polinoamelor lui Bernstein** pentru polinoame de gradul - m, în general, şi care este prezentată în continuare.

4.4. Polinoamele lui Bernstein de gradul m

Fie: $$B_k^m[r,s](t) = \binom{m}{k}\left(\frac{s-t}{s-r}\right)^{m-k}\left(\frac{t-r}{s-r}\right)^k$$

şi unde:

$$\sum_{k}^{m} B_k^m[r,s](t)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{s-t}{s-r}\right)^{m-k}\left(\frac{t-r}{s-r}\right)^k = \left(\frac{s-t}{s-r} + \frac{t-r}{s-r}\right)^m = 1$$

Pentru $r = 0$ şi $s = 1$ şi deoarece $t_i = \lambda_i$ expresia se poate simplifica şi obţinem funcţia polinomială $h\,(t)$ asociată lui $f\,(x)$ (Fichtenholtz, 1934):

$$h\,(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\,(1-t)^{m-k}\; t^k\, f\,(0,0,\dots,0,1,1,\dots 1)$$

unde: $0,0,\dots 0 = m-k$ şi $1,1,\dots 1 = k$.

Polinoamele

$$B_k^m\,(t) = \binom{m}{k}(1-t)^{m-k}\,(t)^k$$

se numesc **polinoamele Bernstein** de gradul m. Mai mult,

$$B_k^m\,[r,s]\,(t) = B_k^m\left(\frac{t-r}{s-r}\right).$$

4.5. Polinoamele lui Bernstein în spaţiul n dimensional

În spaţiul n dimensional şi m variabile polinoamele lui Bernstein pot fi definite astfel:

$$B_{f,n_1,n_2,\dots,n_n}\,(x_1,x_2,\dots x_m) = \sum_{\substack{0 \le k_j \le n_j \\ j \in \{1,2,\dots,m\}}} f\left(\frac{k_1}{n_2},\dots,\frac{k_m}{n_m}\right) \prod_{j=1}^{m}\left(\binom{n_j}{k_j}\, x_j^{k_j}\,(1-\; x_j)^{n_j - k_j}\right),$$

unde: $n_1,\, n_2, \dots, n_n \in N$ şi f este o funcţie continuă de m variabile:

$f = f\,(n_1,\, n_2,\dots,n_n)$ şi unde $f\colon [\,0,1\,]^n,\ n \in N$.

Şi în acest caz, este evident că **polinoamele lui Bernstein de m** variabile $B_{f,n_1,n_2,\dots,(x_1,x_2,\dots,x_m)}$ converg spre f când $x_1,\, x_2,\dots,x_m \to \infty$.

În acest caz general:

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}\,x^k\,(1-x)^{n-k} = n\,x\,(1-x),$$

iar pentru toţi $x \in [0,1]$, obţinem: $x\,(1-x) \le {}^1\!/_4$ şi deci:

$$0 \le \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}\,x^k\,(1-x)^{n-k} \le \frac{n}{4}$$

Această generalizare este foarte importantă deoarece ne permite să studiem proprietăţile acestor polinoame în cazul general de m variabile şi apoi să particularizăm rezultatele obţinute pentru funcţii de o variabilă, de două sau de trei variabile.

Se poate observa că particularizând definiţia de mai sus, pentru $m = 1,2,3$ obţinem **polinoamele lui Bernstein** pentru $1,2,3$ variabile studiate mai sus.

Ca exemplificare, se prezintă mai jos reprezentarea grafică comparativă a **polinoamelor lui Bernstein** pentru o variabilă (Fig. 4.1) şi două variabile (Fig. 4.2).

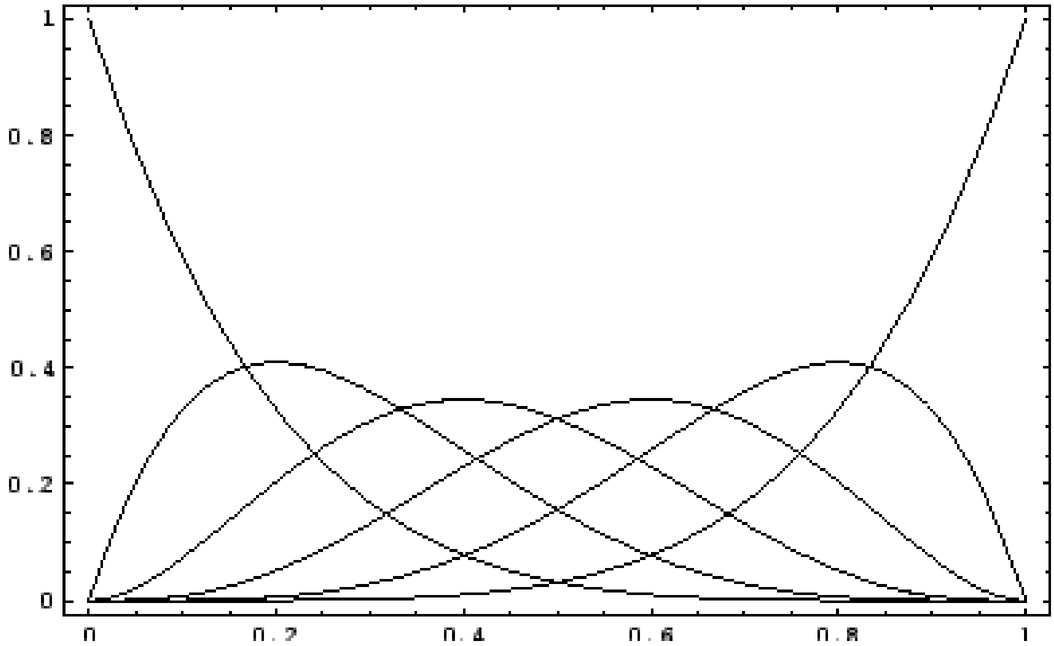


Fig. 4.1. Polinoamele lui Bernstein pentru o variabilă

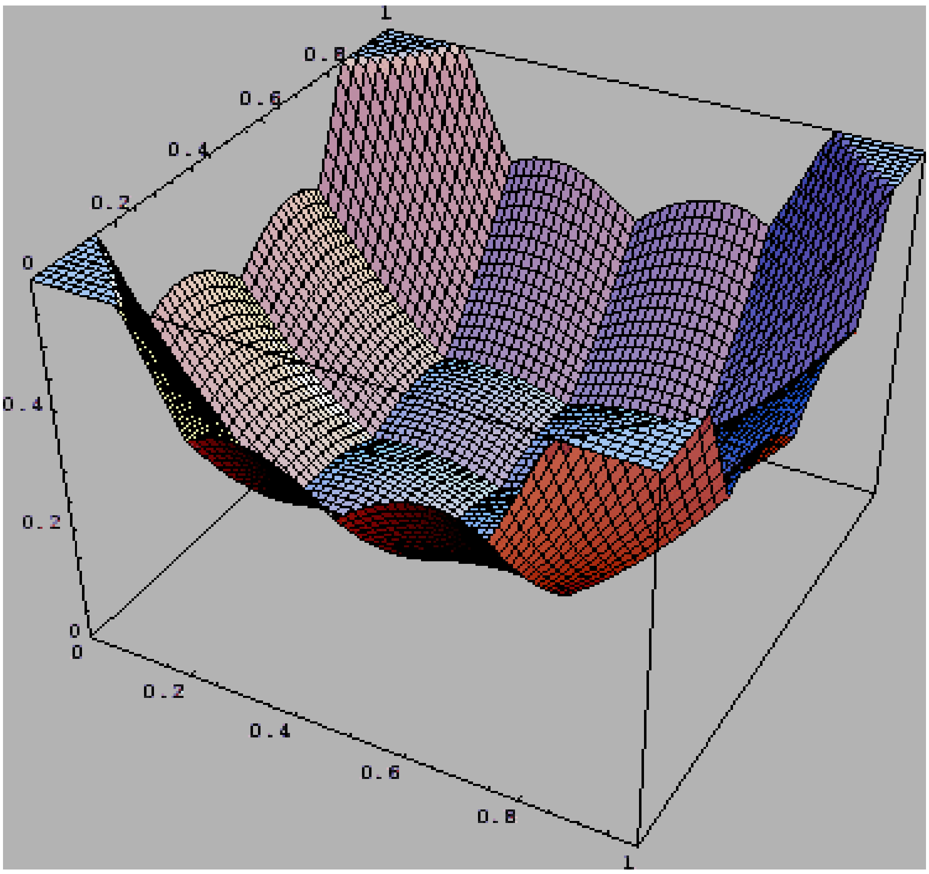


Fig. 4.2. Reprezentarea grafică a polinoamelor lui Bernstein pentru două variabile.

Se poate observa că, convexitatea **polinoamelor lui Bernstein** de o variabilă reprezintă principala raţiune pentru care aceste polinoame sunt preferate în teoria aproximării funcţiilor. În practică, această proprietate se menţine şi pentru **polinoamele lui Bernstein** multivariabile (Sauer, 1981), reprezentând în acest caz un domeniu interesant de investigat.

4.6. Derivatele polinoamelor lui Bernstein

Prin diferenţierea polinoamelor lui Bernstein obţinem:

$$B_n'(x) = \frac{dB_n(x)}{dx} = \sum_{v=0}^{n} f\left(\frac{v}{n}\right)\binom{n}{v}\{v\,x^{v-1}(1-x)^{n-v} - (n-v)\,x^{v}(1-x)^{n-v-1}\} =$$

$$= n\sum_{v=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{v+1}{n}\right) - f\left(\frac{v}{n}\right)\right\}\binom{n-1}{v} x^{v}\ (1-x)^{n-1-v},$$

unde: $f\left(\frac{v+1}{n}\right) - f\left(\frac{v}{n}\right)$ este diferenţiala de ordinul I a funcţiei $f(x)$ pentru $n = \frac{v}{n}$.

Diferenţa de ordinul k corespunzătoare creşterii argumentului $\Delta x = h$ este:

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta\left(\Delta_h^{k-1} f(x)\right) = f(x+kh) - \binom{k}{1} f(x+(k-1)h) + \ldots + (-1)^k f(x)$$

Dacă notăm $\Delta^k f(x)$ pentru $h = n^{-1}$ şi pentru k diferenţieri obţinem:

$$B_n^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)\sum_{v}^{n-k}\Delta^k f(v)\binom{n-k}{v} x^{v}\ (1-x)^{n-1-v},$$

pentru $k = 1,2,\ldots n,$ sau pentru puteri ale lui x obţinem expresia **polinoamelor lui Bernstein**:

$$B_n^f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k f(0)\,x^k = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\,x^k.$$

Dar pentru polinomul $f(x) = P(x)$ de grad m avem:

$$\Delta^k P(x) = 0, \text{ pentru } k > m.$$

Ca urmare **polinomul lui Bernstein** $B_n^P(x)$ al unui polinom de gradul m este el însuşi un polinom de grad $\leq m$.

Deci $B_n^P(x)$ este în general diferit de P. De exemplu pentru:

$$P(x) = x^2;\ B_n^P(x) = x^2 - n^{-1}x(1-x).$$

Coeficientul a_{nk} a lui x^k din expresia de mai sus a **polinoamelor lui Bernstein** este:

$$a_{nk} = \binom{n}{k}\Delta^k f(0) = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{\Delta^k}\frac{f(0)}{(\Delta x)^k}$$

şi unde $\Delta x = n^{-1}$ converge către $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ pentru $n \to \infty$, dacă derivata $f^{(k)}(0)$ există şi este finită.

Se observă că expresia de mai sus nu este altceva decât suma primilor $(n+1)$ termeni ai dezvoltării Taylor pentru funcţia $f(x)$, şi care ne arată că nu este surprinzător faptul că şi dezvoltările Taylor îşi au rolul lor în aproximarea funcţiilor (Kantorovitch, 1931).

4.7. Gradul de aproximare al funcţiei $f(x)$ atribuit polinoamelor Bernstein

Gradul de aproximare al funcţiei $f(x)$, unde $a \leq x \leq b$ de către **polinoamele Bernstein** poate fi descris introducând modulul de continuitate $\omega(\delta)$ definit ca mai jos:

$\omega(\delta) = \omega^f(\delta)$, astfel încât pentru orice $\delta > 0$,

$\omega(\delta) = \max\ |f(x) - f(y)|$,

pentru orice $a \leq x \leq b$ şi $a \leq y \leq b$ şi $|x-y| < \delta$. Se observă că (δ) converge spre zero, dacă funcţia $f(x)$ este continuă.

Consecinţe:

A. Dacă $\omega(\delta)$ *este modulul de continuitate al funcţiei* $f(x)$ *pentru* $0 \leq x \leq 1$, *atunci pentru fiecare* $n, \exists$ *un polinom* $P_n(x)$ *de grad* $\leq n$, *astfel încât*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C\,\omega(n^{-1}),$$

unde C *este o constantă absolută, de exemplu se poate lua* $C = 3$.

B. Dacă $f(x)$ *are o derivată* $f^{(p)}(x)$ *continuă în [0, 1] şi un modul de continuitate* $\omega_p(\delta)$, *atunci pentru fiecare* $n > p$, $\exists$ *un polinom* $P_n(x)$ *de grad* $\leq n$, *pentru care*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C_p\, n^{-p}\, \omega_p(n^{-1}),$$

unde C_p *este de asemeni o constantă absolută*.

Pentru a studia gradul de aproximaţie atribuit **polinoamelor Bernstein** se introduce **Teorema lui Popoviciu** (Popoviciu, 1935)**:**

Dacă $f(x)$ este continuă şi $\omega(\delta)$ este modulul de continuitate definit mai sus, atunci

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{5}{4}\,\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

<u>*Demonstraţie:*</u> Pentru orice x_1 şi x_2 arbitrari în $[0,1]$ şi $\delta > 0$, fie $\lambda = \lambda(x_1, x_2, \delta)$ întregul expresiei $[|x_1 - x_2|\,\delta^{-1}]$, atunci diferenţa $f(x_1) - f(x_2)$ este egală cu suma a $(\lambda + 1)$ diferenţe ale lui $f(x)$ pe intervalul de lungime $> \delta$.

Dar

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (\lambda + 1)\ \omega(\delta) \text{ şi}$$

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{\upsilon=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{\upsilon}{n}\right) \right| p_\upsilon(x) \leq$$

$$\leq \omega(\delta) \sum_{\upsilon=0}^{n} \left\{ 1 + \lambda\left(x, \frac{\upsilon}{n}, \delta\right) \right\} p_\upsilon = \omega(\delta) \left\{ 1 + \sum_{\lambda \geq 1} \lambda\left(x, \frac{\upsilon}{n}, \delta\right) p_\upsilon \right\} \leq$$

$$\leq \omega(\delta) \{ 1 + (4n\delta^2)^{-1} \}$$

Dacă $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ obţinem formula de mai sus: $\left| f(x) - B_n(x) \right| \leq \frac{5}{4}\,\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Dar cea mai mică valoare a lui C pentru care

$$|f(x) - B_n(x)| \leq C\,\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

este adevărată pentru fiecare funcţie f şi fiecare n, este difícil a se determina cu exactitate; în orice caz însă $C \leq \frac{5}{4}$. Mai mult $c \geq 1$; după cu se poate vedea mai jos.

Fie $\delta_n = \omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Presupunând că $f_n(x)$ este o funcţie definită astfel

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, 0 < x_0 < 1 \\ 1, [0, x_0 - \delta_n] \cap [x_0 + \delta_n, 1] \end{cases}$$

şi liniară pentru restul intervalului $[0,1]$, atunci pentru n suficient de mare avem $\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) = 1$, pentru funcţia f_n.

De asemenea,

$$|f_n(x_0) - B_n(x_0)| = B_n(x_0) \geq \sum_{\left|\frac{\upsilon}{n} - x\right| \geq \delta_n} p_\upsilon(x_0) = 1 - \varepsilon_n$$

şi unde $\varepsilon \to 0$, deci:

$|f(x) - B_n(x)| \leq C\,\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ nu poare fi adevarată pentru $c < 1$.

Rezultă ca funcţia $\omega(\delta)$ este cea mai rapidă funcţie descrescătoare spre zero care poate exista.

De exemplu, se poate arăta aceasta pentru funcţia

$f(x) = |x - x_0|^{\alpha}$, unde $0 < x_0 < 1$, $0 < \alpha \leq 1$, avem: $\omega(\delta) = \delta^{\alpha}$ şi $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ şi atunci

$$|f_n(x_0) - B_n(x_0)| = \sum_{v=0}^{n} \left|\frac{v}{n} - x_0\right|^{\alpha} p_v(x_0) \geq$$

$$\geq n^{-\frac{1}{2}\alpha} \sum_{\left|\frac{v}{n} - x_0\right| \geq n^{-\frac{1}{2}}} p_v(x_0) \cong C\, n^{-\frac{1}{2}\alpha},$$

pentru oricare $c > 0$.

Introducând în discuţie funcţii care au derivate $f'(x)$ continue pe [0, 1], se poate arăta că dacă $\omega_1(\delta)$ este modul de continuitate al derivatei f' atunci:

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{3}{4} n^{-\frac{1}{2}} \omega_1\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Pentru a demonstra aceasta introducem

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi) = (x_1 - x_2) f'(x_1) + (x_1 - x_2)\left[f(\xi) - f'(\xi)\right],$$

unde $x_1 \leq \xi \leq x_2$ şi unde valoarea absolută a ultimului termen nu este mai mare decât $|x_1 - x_2|(\lambda + 1)\,\omega_1(\delta)$, unde $\lambda = \lambda(x_1, x_2; \delta)$, atunci:

$$|f(x) - B_n(x)| = \sum_{v=0}^{n} \left|f(x) - f\left(\frac{v}{n}\right)\right| p_v(x) \leq$$

$$\leq \left|\sum_{v=0}^{n} \left(x - \frac{v}{n}\right) f'(x)\, p_v\right| + \omega_1(\delta) \sum_{v=0}^{n} \left|\frac{v}{n} - x\right| (\lambda + 1)\, p_v \leq$$

$$\leq \omega_1(\delta) \left\{\sum_{v=0}^{n} \left|\frac{v}{n} - x\right| p_v + \sum_{\lambda \geq 1}^{n} \left|\frac{v}{n} - x\right| \lambda\left(x, \frac{v}{n}, \delta\right) p_v\right\} \leq$$

$$\leq \omega_1(\delta) \left\{\sum_{v=0}^{n} \left|\frac{v}{n} - x\right| p_v + \delta^{-1} \sum_{v=0}^{n} \left(\frac{v}{n} - x\right)^2 p_v\right\}.$$

unde ultimul termen este

$$x(1 - x)\, n^{-1} \leq \frac{1}{4} n^{-1}.$$

Atunci

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega_1(\delta) \left\{\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} + (4n\delta)^{-1}\right\}.$$

Înlocuind $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ se obţine: $\left|f(x) - B_n(x)\right| \leq \frac{3}{4} n^{-\frac{1}{2}} \omega_1\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$, ceea ce con-firmă ipoteza.

4.8. Convergenţa derivatelor $B_n^{(k)}$ ale polinoamelor lui Bernstein a funcţiei $f(x)$

Dacă $f^{(k)}(x)$ există şi este continuă în $[0, 1]$ şi $0 < \theta_v < 1$, iar $k = 1, 2, \ldots n$, atunci:

$$B_n^{(k)}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \sum_{v=0}^{n-k} f^{(k)}\left(\frac{v}{n} + \theta_v \frac{k}{n}\right) p_{n-k\, v}(x)$$

Deoarece $\frac{\Delta^k f(x)}{h^k}$ se reduce la $f^{(k)}(c)$, astfel încât: $x < c < x + k\,h$.

Diferenţa dintre $B_n^{(k)}(x)$ şi $B_{n-k}^{(k)}(x)$ a derivatelor $f^{(k)}(x)$ converge spre zero pentru x când $n \to \infty$ şi deci: $B_n^{(k)}(x) \to f^{(k)}(x)$, pentru $0 \leq x \leq 1$.

Dacă $f(x) \in [0,1]$ şi $f^{(k)}(x_0)$ există pentru $0 \le x \le 1$, atunci

$$B_n^{(k)}(x_0) \rightarrow f^{(k)}(x_0),$$

demonstrând importanţa **polinoamelor Bernstein** în aproximarea funcţiilor $f(x)$ continue pe $[0,1]$.

Derivatele $B_n^{(k)}$ ale **polinoamelor lui Bernstein** ale funcţiei $f(x)$ converg spre $f^{(k)}(x)$, oriunde aceste derivate există. Dacă $f^{(k)}(x)$ există şi este continuă pe [0, 1], atunci avem

$$B_n^{(k)}(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\sum_{v=0}^{n-k} f^{(k)}\left(\frac{v}{n}+\theta_v\,\frac{k}{n}\right) p_{n-k},v\,(x),$$

unde: $0 < \theta_v < 1$, deoarece $\frac{\Delta^k f(x)}{h^k}$ din derivata $B_n^{(k)}$ se reduce la $f^{(k)}(c)$ pentru c astfel ca: $x < c < x + k\,h$.

Diferenţa $\left| f_n^{(k)} - B_n^{(k)}(x) \right|$ converge uniform spre zero pentru x, când $n \rightarrow \infty$ şi deci $B_n^{(k)}(x)$ converge uniform spre $f^{(k)}(x)$:

$$B_n^{(k)}(x) \rightarrow f^{(k)}(x) \text{ pentru } 0 \le x \le 1.$$

Totodată, aceasta implică:

⇰ $B_n^{(k)}(0) \rightarrow f^{(k)}(0)$, dacă $f^{(k)}(0)$ există şi

⇰ $B_n^{(k)}(1) \rightarrow f^{(k)}(1)$, dacă $f^{(k)}(1)$ există.

Dacă $f(x) \in [0,1]$ şi dacă $f^{(k)}(x_0)$ există într-un punct x_0, astfel încât:

$0 \le x_0 \le 1$, atunci:

$$B_n^{(k)}(x_0) \rightarrow f^{(k)}(x_0).$$

Presupunem că ∃ polinoamele $q_{ij}^{(k)}(x)$ funcţie de x şi care nu depind de v sau n astfel încât

$$\frac{d^k}{d_n^k}\left[x^v (1-x)^{n-v}\right] = Q(x)\, x^{v-k} (1-x)^{n-v-k}$$

şi unde

$$Q(x) = \sum_{i,j} n^i (v-nx)^j\, q_{ij}^{(k)}(x),$$

unde $i,j \ge 0$, şi $2i + j \le k$.

Pentru $k = 0$ afirmaţia de mai sus este evidentă.

Pentru a demonstra aceasta în cazul general se foloseşte inducţia matematică pentru $k \rightarrow k+1$:

$$\frac{d^{k+1}}{d_x^{k+1}}\left[x^v (1-x)^{n-v}\right] =$$

$$= x^{v-k-1}(1-x)^{n-v-k-1}\left\{x(1-x)\,Q'(x) + Q(x)[(v-nx) + 2kx - k]\right\},$$

unde termenii în acolade au forma:

$$\sum_{i,j} n^i (v-nx)^j\, q_{ij}^{(k)}(x),$$

unde: $2i, j \ge 0$ şi $2i + j \le k+1$.

Pentru a demonstra această teoremă introducem

$$f(x) = P(x) + g(x),$$

unde

$$P(x) = f(x_0) + \left(x - x_0\right) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0),$$

iar $g(x)$ satisface condiţiile:

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(k)}(x_0) = 0 \text{ şi}$$

$$g(x) = \varepsilon(x)(x-x_0)^k,$$

astfel încât: $\varepsilon(x) \to 0$, când $x \to x_0$.

Deoarece:

$$\frac{d^k}{d_x^k} B_n^f = \frac{d^k}{d_x^k} B_n^P + \frac{d^k}{d_x^k} B_n^g$$

este suficient să arătăm că membrul drept converge spre zero pentru $x = x_0$. Ca urmare obţinem

$$\frac{d^k}{d_x^k} B_n^g(x) = \sum_{2i+j\leq k} \bar{g}_{ij}(x) \sum_{\upsilon=0}^{n} \varepsilon\left(\frac{\upsilon}{n}\right)\left(\frac{\upsilon}{n} - x\right)^k n^i (\upsilon - nx)^j p_{n\upsilon}(x),$$

unde $\bar{g}_{ij}(x)$ este independent de υ şi n.

Deoarece $k + j \geq 2(i+j)$ pentru $x = x_0$, valoarea absolută a sumei nu poate fi mai mare decât expresia:

$$n^{i+j} \sum_{\upsilon=0}^{n} \left|\varepsilon\left(\frac{\upsilon}{n}\right)\right| \left(\frac{\upsilon}{n} - x_0\right)^{2(i+j)} p_\upsilon(x_0)$$

Fie $|\varepsilon(x_1)| < \varepsilon$, pentru $|x_1 - x_0| < \delta$ şi $|\varepsilon(x_1)| \leq \mathrm{M}$ pentru $0 \leq x_1 \leq 1$

Descompunem suma în două părţi corespunzând inegalităţilor:

$$\left|\frac{\upsilon}{n} - x_0\right| < \delta, \left|\frac{\upsilon}{n} - x_0\right| \geq \delta.$$

Prima parte nu poate fi mai mare decât $\mathrm{A} \leq \varepsilon$:

$$n^{i+j}\varepsilon \sum_{\upsilon=0}^{n}\left(\frac{\upsilon}{n} - x_0\right)^{2(i+j)} p_\upsilon(x_0) = \varepsilon\ n^{-(i+j)}\, \mathrm{T}_{n,2(i+j)}(x_0) \leq \mathrm{A}\varepsilon,$$

iar a doua parte:

$$n^{i+j}\, \mathrm{M\,C}\, n^{-(i+j+1)} < \varepsilon,$$

pentru orice n suficient de mare, iar A şi M constante.

Rezultă că derivata este suficient de mică pentru un astfel de n ceea ce demonstrează convergenţa derivatelor $B_n^{(k)}$ ale **polinoamelor lui Bernstein** a funcţiei $f(x)$. Această observaţie îşi are importanţa ei atunci când se încearcă înlocuirea polinoamelor lui Bernstein cu derivatele acestora, simplificând astfel utilizarea acestora.

4.9. Liniaritatea polinoamelor lui Bernstein

Polinoamele Bernstein sunt liniare în raport cu funcţia $f(x)$:

Dacă:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

avem:

$$B_n^f(x) = a_1 B_n^{f_1}(x) + a_2 B_n^{f_2}(x).$$

Deoarece:

$$p_{n\upsilon}(x) = \left(\frac{\upsilon}{n}\right) x^\upsilon (1-x)^{n-\upsilon} \geq 0,$$

pentru $x \in [0,1]$ şi $\sum_0^n p_{n,\upsilon} = 1$, obţinem:

$m \leq B_n^f(x) \leq \mathrm{M}$ pentru $m \leq f(x) \leq M$ în intervalul $[0,1]$.

Proprietatea de liniaritate a **polinoamelor lui Bernstein** ne permite să substituim sau să descompunem funcţia $f(x)$ în diferite funcţii $f_i(x)$ cu condiţia:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x),$$

proprietate care îşi are o importanţă practică atunci când se descrie un model matematic imaginat de funcţia $f\ (x)$.

4.10. Reprezentări grafice ale polinoamelor lui Bernstein

Aşa cum s-a arătat, **polinoamele Bernstein**

$$B_n^{(n)}\ (\ x\ ) = \binom{m}{k}\ x^k\ (\ 1-x\ )^{n-k}, k\ \in [0, n]$$

reprezintă polinoame de aproximaţie care converg spre o funcţie continuă $f\ \in [0,1]$.

În acelaşi timp, aceste polinoame se pot exprima sub forma unui operator liniar:

$$B_n\ [\ f\ ]\ (\ x\ ) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}\ (\ x\ ) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k\ (\ 1-x\ )^{n-k}.$$

Ca exemplificare, se prezintă **polinoamele Bernstein** pentru câteva cazuri particulare.

Pornind de la formula de mai sus a lui $B_n^{(n)}\ (\ x\ )$, unde după formula lui Newton pentru $\binom{n}{k}$ avem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(\ n-k\ )!\ k!}\ x^k\ (\ 1-x\ )^{n-k}, k\ \in [0, n]$$

Pentru $n = 4$ avem:

$$k = 0\ \ B_{04} = \frac{4!}{(\ 4\ )!\ 0!}\ x^0\ (\ 1-x\ )^4 = \ (\ 1-x\ )^4$$

$$k = 1\ \ B_{14} = \frac{4!}{(\ 3\ )!\ 1!}\ x^1\ (\ 1-x\ )^3 = \ 4\ x\ (\ 1-x\ )^3$$

$$k = 2\ \ B_{24} = \frac{4!}{(\ 2\ )!\ 2!}\ x^2\ (\ 1-x\ )^2 = \ 6\ x^2\ (\ 1-x\ )^2$$

$$k = 3\ \ B_{34} = \frac{4!}{(\ 1\ )!\ 3!}\ x^3\ (\ 1-x\ )^1 = 4\ x^3 (\ 1-x\ )$$

$$k = 4\ \ B_{44} = \frac{4!}{(\ 0\ )!\ 4!}\ x^4\ (\ 1-x\ )^0 = \ x^4,$$

care se reprezintă grafic în (Fig. 4.3) pentru **polinoamele Bernstein** de gr.4.

Pentru $n = 5$ avem:

$$k = 0\ B_{05} = \frac{5!}{(\ 5\ )!\ 0!}\ x^0\ (\ 1-x\ )^5 = \ (\ 1-x\ )^5$$

$$k = 1\ B_{15} = \frac{5!}{(\ 4\ )!\ 1!}\ x^1\ (\ 1-x\ )^4 = \ 5\ x\ (\ 1-x\ )^4$$

$$k = 2\ B_{25} = \frac{5!}{(\ 3\ )!\ 2!}\ x^2\ (\ 1-x\ )^3 = \ 10\ x^2\ (\ 1-x\ )^3$$

$$k = 3\ B_{35} = \frac{5!}{(\ 2\ )!\ 3!}\ x^3\ (\ 1-x\ )^2 = \ 20\ x^3\ (\ 1-x\ )^2$$

$$k = 4\ \ B_{45} = \frac{5!}{(\ 1\ )!\ 4!}\ x^4\ (\ 1-x\ )^1 = \ 5\ x^4\ (\ 1-x\ )^1$$

$$k = 5\ B_{55} = \frac{5!}{(\ 0\ )!5!}\ x^5\ (\ 1-x\ )^0 = \ x^5\ ,$$

şi care se prezintă în (Fig. 4.4) pentru **polinoamele Bernstein** de gradul 5.

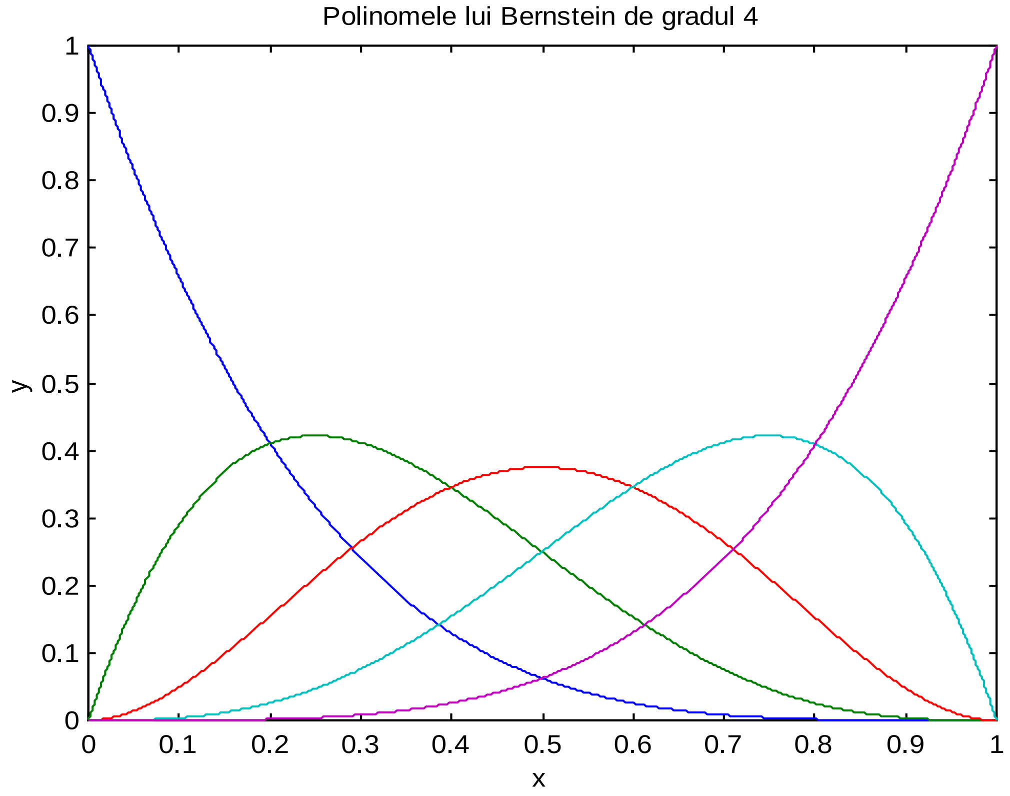


Fig. 4.3. Polinoamele lui Bernstein de gradul 4.

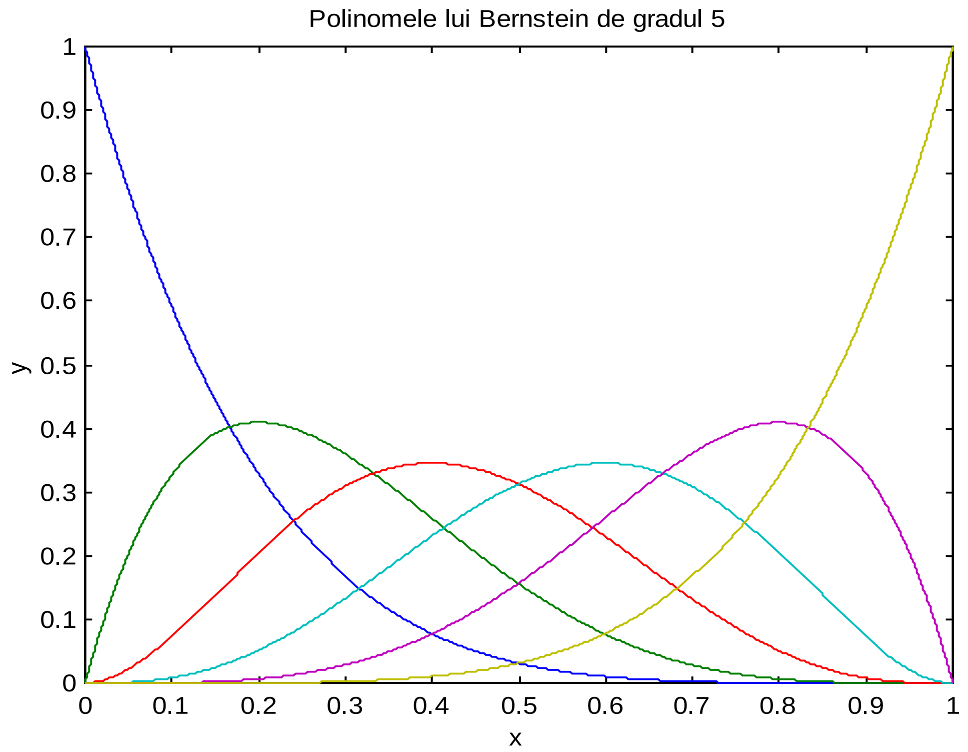


Fig. 4.4. Polinoamele lui Bernstein de gradul 5**.**

Pentru n $= 10$ **avem:**

$$k=0\ B_{010}=\frac{10!}{(10)!\,0!}\,x^0\,(1-x)^{10}=\ x^0\,(1-x)^{10}$$
$$k=1\ \ B_{110}=\frac{10!}{(9)!\,1!}\,x^1\,(1-x)^9=\ 10\,x\,(1-x)^9$$
$$k=2\ B_{210}=\frac{10!}{(8)!\,2!}\,x^2\,(1-x)^8=\ 45\,x^2\,(1-x)^8$$
$$k=3\ B_{310}=\frac{10!}{(7)!\,3!}\,x^3\,(1-x)^7=\ 120\,x^3\,(1-x)^7$$
$$k=4\ B_{410}=\frac{10!}{(6)!\,4!}\,x^4\,(1-x)^6=\ 210\,x^4\,(1-x)^6$$
$$k=5\ B_{510}=\frac{10!}{(5)!\,5!}\,x^5\,(1-x)^5=\ 245\,x^5\,(1-x)^5$$
$$k=6\ B_{610}=\frac{10!}{(4)!\,6!}\,x^6\,(1-x)^4=\ 210\,x^6\,(1-x)^4$$
$$k=7\ B_{710}=\frac{10!}{(3)!\,7!}\,x^7\,(1-x)^3=\ 120\,x^7\,(1-x)^3$$
$$k=8\ B_{810}=\frac{10!}{(2)!\,8!}\,x^8\,(1-x)^2=\ 45\,x^8\,(1-x)^2$$
$$k=9\ B_{910}=\frac{10!}{(1)!\,9!}\,x^9\,(1-x)^1=10\,x^9\,(1-x)^1$$
$$k=10\ B_{1010}=\frac{10!}{(0)!10!}\,x^{10}\,(1-x)^0=\ x^{10}\,(1-x)^0.$$

şi care se prezintă grafic în (Fig. 4.5) **pentru polinoamele lui Bernstein** de gradul 10.

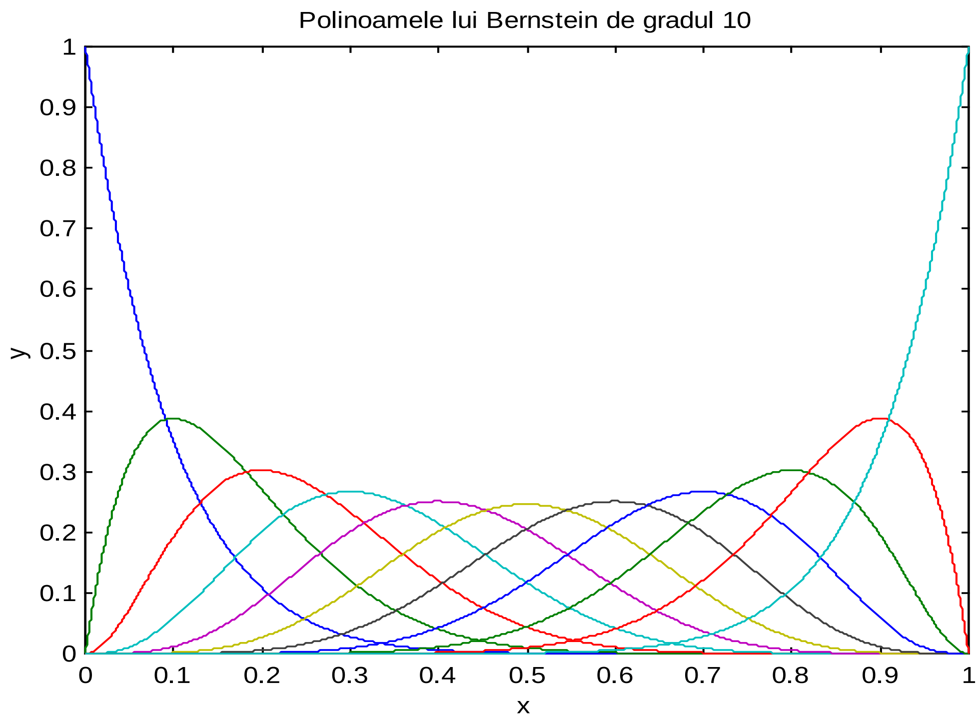


Fig. 4.5. Polinoamele lui Bernstein de gradul 10.

Se poate observa că prin creşterea gradului lui n, înfăşurătoarea polinoamelor lui Bernstein aproximează mai exact o parabolă.

Polinoamele lui Bernstein sunt implementate în sistemele de programe Mathematica 7. Folosind funcţia **Bernstein Basis** $[\boldsymbol{n},\boldsymbol{i},\boldsymbol{t}]$ a acestor programe se pot studia proprietăţile **polinoamelor lui Bernstein**, inclusiv reprezentarea lor grafică pentru diferite funcţii.

Ca exemplu, se prezintă în (Fig. 4.6) **polinoamele lui Bernstein** $B_{i,n}\,(x)$, unde $i = 1,2 \dots 20$ pentru funcţia

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,n\,x\,(1-x)}}$$

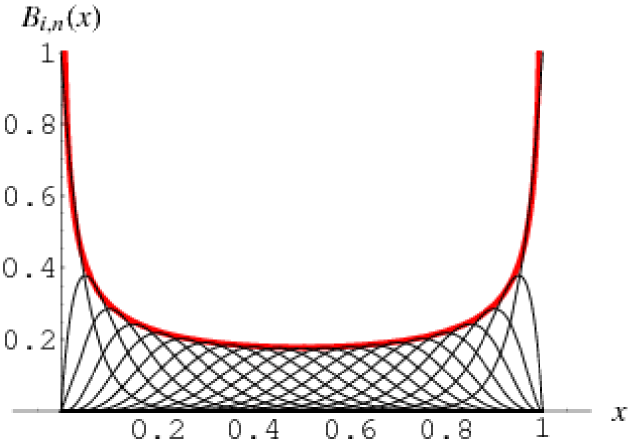


Fig. 4.6. Polinoamele lui Bernstein pentru $\boldsymbol{n} = \mathbf{20}$ aproximînd funcţia $\boldsymbol{f_x(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{x}\,(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})}}$ folosind Mathematica 7

4.11. Recurenţa polinoamelor lui Bernstein

O importantă proprietate a **polinoamelor lui Bernstein** şi care are aplicaţii în proiectarea asistată de calculator o reprezintă proprietatea de recurenţă:

$$B_k^{(n+1)}\,(x) = (1-x)\,B^{(n)} + \,x\,B_{k-1}^{(n)}\,(x)$$

şi care ne permite să determinăm elementul succesiv $(k+1)$ cunoscând elementele precedente $(k-1)$ şi respectiv (k).

4.12. Generalizarea polinoamelor lui Bernstein

Stancu (Stancu, 1968) generalizează **polinoamele Bernstein** introducând:

$$S_{\alpha,k}^{(n)}(x) = S_k^{(n)}(x) =$$
$$= \binom{n}{k} \frac{x\,(x+\alpha)\dots[x+(k-1)\,\alpha\,(1-x)(1-x+\alpha)\dots[1-x+(n-k-1)\,\alpha]}{(1+\alpha)(1+2\,\alpha)\dots(1+[n-1]\,\alpha)}$$

unde $n \geq 0$, pentru $\alpha = 0$, $S_k^{(n)}(x) = B_k^{(n)}\,(x)$, adică **polinoamele Bernstein**.

Sau ca operator:

$$S_n\,[f\,](x) = \sum_{k=0}^{n} f\,\binom{k}{n}\,S_k^{(n)}(t)$$

Se poate observa că polinoamele lui Stancu satisfac relaţia de recurenţă

$$S_k^{(n+1)}(t) = \left[\frac{1-t+(n-k)\,\alpha}{1+n\,\alpha}\right] S_k^{(n)}(t) + \left[\frac{t+(k-1)\,\alpha}{1+n\,\alpha}\right] S_k^{(n)}(t).$$

Ca urmare, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} S_n\,[\,t^k\,] = \int_0^{(k)} S_k^n\,(t)$$

reprezentând o generalizare a polinoamelor lui Bernstein în cazul că $\boldsymbol{n} \to \infty$. Această generalizare ne permite să înlocuim polinoamele lui Bernstein cu integrala lor pentru $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$.

4.13. Polinoamele lui Bernstein în cazul funcţiilor discontinue

În unele cazuri, comportamentul şi evoluţia **polinoamelor lui Bernstein** pot fi descrise chiar şi de funcţii $f\,(\,x\,)$ discontinue pe $[\,0,1\,]$, ceea ce ne conduce la următoarea teoremă:

Teorema lui Chlodovsky (Chlodovsky, 1925)**, Herzog şi Hill** (Herzog, 1946).

Fie $f\,(\,x\,)\ \equiv [\,0,1\,]\ \to\ P\ \in \mathrm{P}$, L^+ şi L^- limitele superioare (stânga – dreapta) şi l^+ şi l^- limitele inferioare (stânga – dreapta) respectiv întru-un punct x. Atunci:

$$\frac{1}{2}\,(\,l^+ + \,l^+\,) \le \lim_{n\to\infty}\inf B_n\,(x\,)\ \le\ \lim_{n\to\infty}\sup B_n\,(x\,)\ \le \frac{1}{2}\,(\,L^+ +\, L^+\,).$$

În particular, dacă un punct x este un punct de discontinuitate de gradul I avem:

$$\lim_{n\to\infty} B_n\,(x\,)\ \ = \frac{1}{2}\,\{\,f\,(\,x+)+\,f\,(x-)\}$$

Pentru a demonstra aceasta, descompunem suma reprezentată de $B_n\,(x\,)$ în trei părţi definind inegalităţile:

$$x\ \le \frac{v}{n} < x + \,\delta', x -\,\delta\, < \frac{\delta}{n} < x, \qquad \left| x - \frac{v}{n} \right|\ \ge\,\delta.$$

Fie $\varepsilon\ > 0$ arbitrar; pentru prima parte

$$l^- -\,\varepsilon\, < f\left(\frac{v}{n}\right)\, <\,L^+ +\,\varepsilon\,,$$

iar a doua parte

$$l^+ -\,\varepsilon\, < f\left(\frac{v}{n}\right)\, <\,L^- +\,\varepsilon$$

în condiţiile că δ > 0 este suficient de mic şi care converge spre $\frac{1}{2}$ pentru n suficient de mare, ceea ce demonstrează teorema de mai sus. Dar condiţiile impuse limitei sunt foarte restrictive, dificil de satisfăcut pentru unele funcţii discontinue arbitrare. În plus $B_n^f\,(\,x\,)$ depinde doar de $f\left(\frac{v}{n}\right)$, ceea ce face ca valorile $f\left(\frac{v}{n}\right)$ ale lui $f\,(\,x\,)$ în punctele raţionale să nu poată descrie comportamentul funcţiei $f\,(\,x\,)$ în punctele iraţionale.

În acelaşi timp, fie **polinoamele Bernstein** ale funcţiei

$F\,(\,x\,) =\ |\,c - x\,|^{-v}$, unde $v\ > 0$,

iar c iraţional $\in [\,0,1\,]$.

Vom observa că în general comportamentul lui $B_n\,(x\,)$ depinde de gradul de transcendenţă a lui c.

Pentru aceasta introducem următoarea definiţie:

Fie $A\,(\,v\,)$ o funcţie pozitivă, definită pentru $v > 0$, astfel încât $A\,(\,v\,)\ \to 0$ pentru $(v) \to\ \infty$. Spunem că numărul real c admite o aproximaţie

$A(v)$ dacă ∃ o infinitate de n poziţii astfel încât inegalitatea: $\left|c - \frac{v}{n}\right| \leq A(n)$ să fie îndeplinită de întregii v, cu observaţia că orice c admite aproximaţia $A(v) = \frac{1}{2}v$.

Numerele raţionale şi cele algebrice admit numai aproximaţii cu $A(v)$ descrescând încet spre zero când $v \to \infty$, dar unele numere transcedentale descresc extrem de rapid.

Ca o consecinţă se poate afirma că:

a) *majoritatea lui c real nu admite $A(v) = v^{-k}, k > 2$ şi:*
b) *pentru ∃ $A(v) \to 0$, unde $v \to \infty$, ∃ un set de puteri ale lui c care admite aproximaţia $A(v)$.*

Aceste consecinţe se reflectă în **teorema lui Lorentz** (Lorentz G. G., 1951):

Fie $F(x) = |c - x|^{-v}$. Pentru $c \in [0,1]$, $B_n(x) \to F(x)$, pentru $\forall x \neq c$, ∃ un set c de puteri pentru care $B_n(x)$ sunt mărginite pentru $\forall x \neq 0, 1, c$.

<u>*Demonstraţie*</u>. Pentru a demonstra această teoremă presupunem că c este un număr întreg care satisface consecinţa a) şi fie $k > 2$. Pentru orice $x \neq c$ se alege:

$$0 < \delta < |x - c| \text{ şi fie } \delta = |x - c| - \delta > 0.$$

Dacă $\bar{F}(t)$ este definit de:

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } |t - c| < \delta \\ F(t), \text{pentru } |t - c| \geq \delta. \end{cases}$$

Atunci pentru **polinoamele Bernstein** $\overline{B_n}(x)$ ale lui $\bar{F}$ avem:

$$\overline{B_n}(x) \to \bar{F}(x) \to F(x)$$

şi unde $\bar{F}(x)$ şi $F(x)$ sunt continue în x.

Dar

$$|B_n(x) - \overline{B_n}(x)| \leq \sum_{\left|\frac{v}{n} - x\right| \geq \delta_n} F\left(\frac{v}{n}\right) p_{nv}(x) - \sum_{\left|\frac{v}{n} - x\right| \geq \delta_n} \bar{F}\left(\frac{v}{n}\right) p_{nv}(x)$$

Pentru că

$$\left|\frac{v}{n} - x\right| \geq \delta_n \text{ şi } F\left(\frac{v}{n}\right) \leq n^{\gamma^k},$$

şi n suficienţi de mari şi pentru orice γ obţinem

$$|B_n(x) - \overline{B_n}(x)| \leq c\, n^{-(\gamma k+1)}\, n^{\gamma k} = \mathrm{C}\, n^{-1} \to 0,$$

pentru C constant şi care demonstrează prima parte a teoremei. Pentru a demonstra partea a II-a, presupunem că c este un număr iraţional admiţând aproximaţia $A(x) = e^{-n^2}$. Atunci c admite deasemenea aproximaţia $n^{-1}\, q^{\frac{n}{\gamma}}$, pentru $\forall\, 0 < q < 1$.

Fie o valoare v_0 o valoare pentru care: $\left|\frac{v_0}{n} - c\right| < \frac{1}{2}n$. Pentru un x dat, $B_n(x)$ se poate descompune în suma: $u_n + v_n, v_n$ fiind un termen a lui $B_n(x)$, corespunzând lui $v = v_0$. Ca mai sus se poate arată că: $U_n - \overline{B_n}(x) \to 0$ şi $U_n \to F(x)$.

Pe de altă parte, dacă q este cel mai mic număr dintre x şi $1 - x$, atunci:

$$V_n = F\left(\frac{\gamma_0}{n}\right) p_{nv_0}(x) \geq q^n \left|\frac{v_0}{n} - \mathrm{C}\right|^{-\gamma}.$$

Pentru $n \to \infty$ obţinem:

$$\left|\frac{v_0}{n} - c\right| \leq n^{-1}\, q^{\frac{n}{\gamma}} \text{ şi } V_n \geq n^{\gamma} \to \infty,$$

ceea ce completează demonstraţia, dar care ne arată totodată că aplicarea **polinoamelor lui Bernstein** în cazul funcţiilor discontinue nu dă întotdeauna rezultate acceptabile practice cu consecinţe asupra modelarii matematice in acest caz.

4.14. Polinoamele de aproximare a lui Bernstein

Fie $B_{n,j}\,(x) = C_n^j\, x^j\,(1-x)^{n-j}$, unde $x \in [0,1]$.

Pentru $f\,(x) \equiv [0,1] \to \infty$ şi $f\,(x) \xrightarrow{continuă}$ pe $[0,1]$, polinoamele de aproximare ale lui Bernstein ale funcţiei $f\,(x)$ sunt definite de relaţia de mai jos: (Schatzman, 2002).

$$B_n\,(f,x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j}\,(x)\, f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Teoremă. Fie $f\,(x) \equiv [0,1] \to \infty$ şi $f\,(x) \xrightarrow{continua}$ pe $[0,1]$, ω modulul de continuitate al funcţiei $f\,(x)$ şi $B_n\,(f,x)$ polinoamele de aproximare a lui Bernstein de gradul n, atunci avem:

$$\max_{x\in[0,1]} |\,f\,(x) - B_n\,(f,x)| \leq \frac{9}{4}\,\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Pentru a demonstra teorema de mai sus trebuie să definim modulul de continuitate ω.

Fie o funcţie f continuă pe un set de domenii $K \subset P^d$, atunci avem o funcţie $\omega \subset \mathrm{P}^d$ astfel încât:

$$|\,f\,(x) - f\,(y)\,| \leq \omega\,(\,|\,x-y\,|\,), \text{ pentru } \forall\, x,y \in K.$$

Rezultă că ω este:

$$\omega\,(h) = \sup_{|x-y\,|\leq h} \left|\,f\,(x) - f\,(y)\,\right| \text{ şi } x,y \in K.$$

Revenind la teorema de mai sus, din teorema binomului obţinem:

$$(a+b\,)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j\, a^j\, b^{n-j},$$

ca urmare rezultă:

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j}\,(x) = 1$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{n}\,\beta_{n,j}\,(x) = x$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{j^2}{n^2}\,\beta_{n,j}\,(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}\,x.$$

Observaţii:

- Dacă în formula teoremei binomului de mai sus:

$$(a+b\,)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j\, a^j\, b^{n-j},$$

alegem: $a = x$ şi $b = 1 - x$, atunci obţinem formula:

$$\textstyle\sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j}\,(x) = 1.$$

- Dacă diferenţiem formula binomului în funcţie de a, obţinem:

$$n\,(a+b)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} j\, C_n^j\, a^{j-1}\, b^{n-j}\,.$$

- Dacă înmulţim cu a şi împărţim cu n avem:

$$a\,(a+b)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n}\, C_n^j\, a^j\, b^{n-j}.$$

Înlocuind a $= x$ şi $b = 1 - x$, obţinem: $\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{n}\, \beta_{n,j}\ (x) = x$.

➢ Dacă diferenţiem încă odată binomul în raport cu *a*, obţinem:

$$n\,(n-1)\,(a+b)^{n-2} = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{j^2}{n^2} - \frac{j}{n^2}\right) C_n^j\, a^j\, b^{n-j}.$$

Folosind aceiaşi substituţie ca mai sus, obţinem:

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{j^2}{n^2} - \frac{j}{n^2}\right) \beta_{n,j}\,(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2.$$

Din această formulă şi folosind: $\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{n}\, \beta_{n,j}\ (x) = x$ deducem :

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{j^2}{n^2}\right) \beta_{n,j}\,(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{j^2}{n^2} - \frac{j}{n^2} + \frac{j}{n^2}\right) \beta_{n,j}\,(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n}\, x.$$

şi care este tocmai:

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{j^2}{n^2}\right) \beta_{n,j}\ (x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n}\, x.$$

Fie: $y_0, y_1, \ldots, y_{p+1}$ puncte astfel încât:

$$y_0 = x, \ldots, y_k = x + \frac{k}{p+1}\left(\frac{j}{n} - x\right), \ldots, y_{p+1} = \frac{j}{n}$$

Dacă distanţa între punctele y_k este cel puţin egală cu δ, obţinem:

$$\left| f\,(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right|$$

$$\leq |f\,(x) - f\,(y_1)| + \ldots + |f\,(y_k) - f\,(y_{k+1})| + \ldots + \left| f\,(y_p) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right|$$

$$\leq\leq (p+1)\,\omega\,(\delta) \leq \omega\,(\delta) \left[1 + \frac{1}{\delta^2}\left(n - \frac{j}{n}\right)^2\right],$$

şi deci:

$$\sum_{j:\left|x - \left(\frac{j}{n}\right)\right| > \delta} \beta_{n,j} \left| f\,(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| \leq \omega\,(\delta) \left[\sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j}\,(x) + \frac{1}{\delta^2} \sum_{j=0}^{n} \left(x - \frac{\delta}{n}\right)^2 \beta_{n,j}\,(x).\right]$$

Dar combinând cu teorema binomului şi ţinând cont că:

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j}\,(x) = 1$$

şi

$$\sum \frac{1}{n}\, j_{n,j}\,(x) = x$$

iar

$$\sum_{n} \frac{j^2}{n^2}\, \beta_{n,j}\,(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) x^2 + \frac{1}{4}\, x,$$

obţinem

$$\sum_{j=0}^{n} \left(x - \frac{\delta}{n}\right)^2 \beta_{n,j}\,(x) = x^2 - 2x^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x = \frac{x\,(1-x)}{n}$$

Maximul funcţiei $x \longmapsto x\,(1-x)$ pe intervalul $[\,0,1\,]$ are loc pentru $x = \frac{1}{2}$ şi este egal cu $\frac{1}{4}$.

Calculul erorii dintre $B_n\,(f,\,\bullet)$ şi $f\,(\,x\,)$ ne permite să cuantificăm în ce măsură **polinomul de aproximare** a lui **Bernstein** $\boldsymbol{B_n}\,(f,\,\bullet)$ aproximează funcţia $f\,(\,x\,)$, ceea ce rezultă din formula:

$$e_n\,(f,x\,) = f\,(\,x\,) - \sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j}\,(\,x\,)\,f\,\left(\frac{j}{n}\right) \leq \sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j}\,(\,x\,)\left|f\,(\,x\,) - f\,\left(\frac{j}{n}\right)\right|.$$

Fie $\delta > 0$ astfel încât $\left|x - \left(\frac{j}{n}\right)\right| \leq \delta$, atunci $\left|f\,(\,x\,) - f\,\left(\frac{j}{n}\right)\right| \leq \omega\,(\delta)$, ca urmare:

$$\sum_{j:\left|x-\left(\frac{j}{n}\right)\right|\leq\delta} \beta_{n,j}(x)\,\left|f\,(\,x\,) - f\,\left(\frac{j}{n}\right)\right| \leq \omega\,(\delta).$$

Dar dacă dimpotrivă,

$\left|x - \left(\frac{j}{n}\right)\right| > \delta$, fie *p* partea întreagă a lui: $\frac{\left|x-\left(\frac{j}{n}\right)\right|}{\delta}$, atunci:

$$p\,\delta \leq \left|x - \left(\frac{j}{n}\right)\right| < (\,p+1\,)\,\delta.$$

Obţinem:

$$\sum_{j:\left|x-\left(\frac{j}{n}\right)\right|\leq\delta} \beta_{n,j}(x)\,\left|f\,(\,x\,) - f\,\left(\frac{j}{n}\right)\right| \leq \omega\,(\delta)\,\left(1 + \frac{1}{4\,n\,\delta^2}\right).$$

Combinând această expresie cu valoarea erorii $e_n\,(f,x\,)$ rezultă

$$|\,e_n\,(f,x\,)\,| \leq \omega\,(\delta)\,\left(2 + \frac{1}{4\,n\,\delta^2}\right).$$

şi dacă: $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ se obţine formula de la care am plecat, adică

$$\max_{x\in[0,1]} |\,f\,(\,x\,) - B_n\,(f,x)| \leq \frac{9}{4}\,\omega\,\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

În general, **polinomul de aproximare a lui Bernstein** este stabil, adică oscilează relativ puţin, apropiindu-se rapid de curba modelată, dar nu întotdeauna aproximează exact această curbă.

4.15. Teorema lui Weierstrass

În introducerea acestui capitol s-a arătat că **Bernstein** a descoperit polinoamele ce îi poartă numele încercând să demonstreze teorema lui **Weierstrass**:

Pentru orice funcţie $f\,(\,x\,) \equiv [\,a,b\,] \rightarrow \infty \in \mathrm{P}$ şi $f\,(\,x\,) \xrightarrow{continuă} \mathrm{pe}\,[a,b]$ şi pentru orice $e > 0$, $\exists$ un polinom $P\,(\,x\,)$, astfel încât pentru $\forall\,x \in [a,b]$ să avem

$$|\,f\,(\,x\,) - P\,(\,x\,)\,| < e$$

sau astfel spus, polinomul $P\,(\,x\,)$ aproximează $f\,(\,x\,)$ în mod uniform cu o eroare mai mică decât *e*, ca în (
Fig. 4.7).

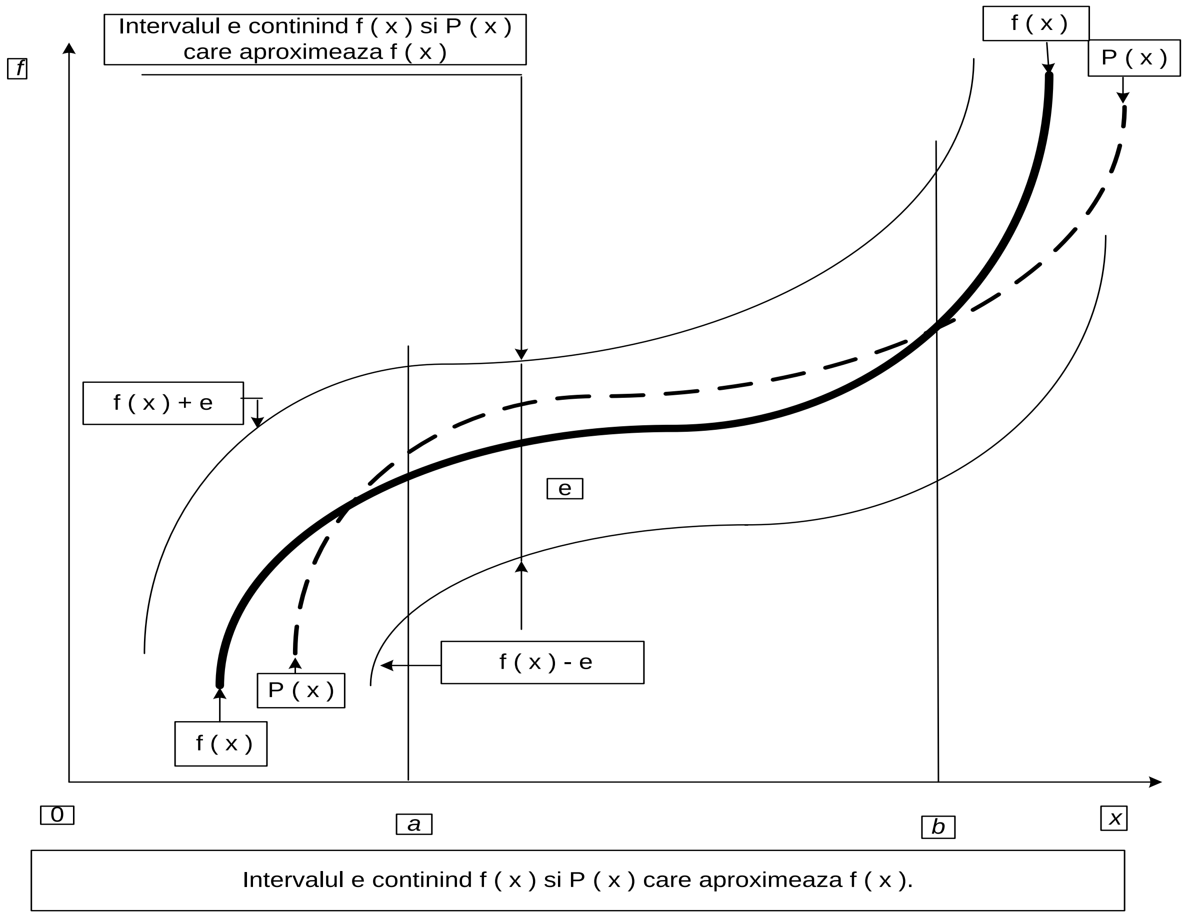


Fig. 4.7. Intervalul $\boldsymbol{e}$ conţinând $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$ şi $\boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{x})$ care aproximează $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$.

Printr-o substituţie liniară intervalul închis $[a, b]$ poate fi transformat în inter-valul închis $[0, 1]$, ceea ce face ca **teorema lui Weierstrass** să fie un corolar al **polinoamelor lui Bernstein** şi care s-a demonstrat în introducerea acestui capitol.

4.16. Alte expresii matematice care aproximează funcţia generatoare $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$

În încheierea acestui capitol se poate arăta că există şi alte expresii matematice care încearcă să aproximeze funcţia generatoare $f\,(x)$ şi care să repro-ducă unele din proprietăţile sale.

➢ Se poate exemplifica prin **integrala lui Dirichet**:

$$s_n\,(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\,(t)\, \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - x)}{2\,\sin\frac{1}{2}\,(t - x)}\, dt$$

şi care reprezintă sumele parţiale $s_x\,(x)$ ale dezvoltării în **serie Fourier** ale funcţiei $f\,(x)$ integrabilă pe $\{-\pi, +\pi]$.

➢ Un alt exemplu este **integrala lui Fejér** reprezentând suma aritmetică:

$$\sigma_n = \frac{(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)}{n + 1}$$

ale sumelor $s_n\,(x)$ definite mai sus.

În general avem:

$$\Phi_n\,(x) = \int_a^b f\,(t)\; K_n\,(x,t)\,dt,$$

unde $K_n\,(x,t)$ este **funcţia Kernel** definită pe: $a \le x \le b$ şi $a \le t \le b$ cu proprietatea importantă pentru care funcţiile $f\,(x)$ de diferite clase şi în anumite condiţii şi anu-me funcţia $\Phi_n\,(x)$ converge spre $f\,(x)$, când $n \to \infty$.

- **Polinoamele lui Bernstein** sunt de fapt sume finite corespunzând integralei de mai sus. Atât integrala de mai sus, cât şi **polinoamele lui Bernstein** devin astfel de cazuri particulare ale **integralei lui Stieltjes**.

De exemplu, putem defini **polinoamele Bernstein** sub forma **integralelor lui Stieltjes** în funcţie de variabila t:

$$B_n\,(x) = \int_0^1 f\,(t)\;dt\,K_n\,(x,t),$$

Considerând **funcţia lui Kernel:**

$$K_n\,(x,t) = \sum_{v \le n,t} \binom{n}{k}\, x^v\,(1-x)^{n-v}, 0\ < t\ \le 1,\ K_n\,(x,0) = 0$$

constantă pe orice interval $\frac{v}{n} \le t < \frac{(v+1)}{n}$, unde $v = 0,1,2,\ldots n-1$, avînd un maxim pentru:

$$\binom{n}{k} x^v\,(1-x)^{n-v}$$

în punctul de interpolare $t = \frac{v}{n}$.

Această observaţie este deosebit de importantă deoarece în acest fel, teoria **polinoamelor lui Bernstein** devine un capitol al teoriei integralelor singulare de tipul celor de mai sus.

Totodată, **polinoamele Bernstein** sunt strâns legate de teoria probabi-lităţilor prin teoria sumelor seriilor divergente.

- De exemplu, expresia:

$$p_v = p_{nv}\,(x) = \binom{n}{k} x^v\,(1-x)^{n-v},$$

care apare în **polinoamele lui Bernstein** este bine cunoscută în teoria probabi-lităţilor ca binomul lui Newton.

Dacă $0 \le x \le 1$ este probabilitatea unui eveniment E, atunci $p_{nv}\,(x)$ este probabilitatea prin care E are loc de v ori în n încercări. În acest fel, numeroase proprietăţi ale lui $p_{nv}\,(x)$ şi ale sumelor sale pot fi considerate ca aplicaţii ale teoriei probabilităţilor, reprezentând un domeniu de cercetare interesant ce poate fi extins prin cercetări ulterioare.

- Un alt exemplu îl constituie **teorema lui Bernoulli** pentru numere mari.

Fie $\epsilon > 0$ şi $\delta > 0$ şi pentru n încercari, u este numărul pentru care au loc E evenimente.

Pentru n suficient de mare, probabilitatea P_δ a lui $\frac{v}{n}$ diferă de x prin mai puţin decât $(1-\epsilon)$,

$$P_\delta = \sum_{\left|\frac{v}{n} - x\right| < \delta} \binom{n}{v}\, n^v\,(1-x)^{n-v}\ > 1-\epsilon$$

pentru $\forall\, x$ suficient de mare. Se observă că ultima sumă are loc pentru toate valorile pentru care $v = 0,1,2,\ldots n$ şi care satisface condiţia:

$$\left|\frac{v}{n} - x\right| < \delta$$

4.17. Concluzii

Polinoamele Bernstein au avut un rol determinant în dezvoltarea modelării matematice, în general, şi a teoriei aproximării, în particular.

Pentru prima dată s-a demonstrat că, dându-se o curbă oarecare, în loc să se caute o formula "perfectă" care să reprezinte aceea curbă, există posibilitatea găsirii unei funcţii $f(x)$ care *să* "aproximeze" curba dată. Problema care s-a pus în continuare a fost să se găsească funcţii $f(x)$ care să "aproximeze" cât "mai bine" curba dată, satisfăcând totodată condiţiile date.

Rezolvarea acestei probleme, combinată cu apariţia calculatoarelor electronice, a dus la o considerabilă dezvoltare a modelării matematice. Cu toate acestea, deşi Bernstein a descoperit polinoamele ce îi poartă numele în 1912 şi începând cu acea dată au avut loc numeroase descoperiri matematice în acest domeniu, descoperiri considerate "excepţionale" ca valoare teoretică şi aplicaţii practice se consideră că acest domeniu de cercetare este departe de a fi încheiat.

Ca direcţii viitoare de cercetare, autorul îşi propune să continue extinderea polinoamelor lui Bernstein în spaţiul n dimensional, abordînd funcţii reale cu mai mult de 3 variabile. Un domeniu promiţător pentru acest domeniu îl constituie extinderea studiului în domeniul complex (Gal, 2009), atât pentru funcţii de două şi trei variabile, cât şi în spaţiul n dimensional. De asemenea, extinderea **polinoamelor lui Bernstein** în domeniul teoriei probabilităţii reprezintă, de asemenea, un domeniu care merită a fi investigat în continuare.

Or, aceste cercetări, nu numai că vor extinde cunoştinţele din domeniu, dar vor face posibilă o largă extindere a acestora în domeniul modelării matematice şi nu numai (Stoica-Laze, 2009).

5. DEZVOLTAREA MODELELOR MATEMATICE DE DESCRIERE A ENTITĂŢILOR GEOMETRICE

5.1. Introducere

Capitolul precedent, consacrat **polinoamelor lui Bernstein,** proprietăţilor şi aplicaţiilor acestora, a prezentat schimbările majore introduse de aceste polinoame în abordarea problemelor legate de aproximarea funcţiilor, cu consecinţe directe asupra dezvoltării modelelor matematice de descriere a entităţilor geo-metrice şi care vor fi studiate în continuare.

În acest capitol se va aprofunda abordarea **polinoamelor lui Bernstein** făcându-se trecerea spre studiul **modelelor lui Bezier, algoritmului lui Casteljau** şi al **algoritmului lui Boor** ca un caz particular al **algoritmului lui Casteljau.**

Relevându-se importanţa polinoamelor definite prin părţi în modelarea matematică s-au prezentat aceste polinoame ca o tehnică avansată în modelarea geometrică şi în special utilizarea polinoamelor (curbelor) spline folosite în modelarea geometrică.

În mod detaliat se vor prezenta suprafeţele şi volumele folosite în modelarea geometrică, în special suprafeţele bicubice şi bicuadrice. Se va insista asupra unor tehnici de interpolare a suprafeţelor folosind suprafeţe triunghiulare sau dreptunghiulare şi în special asupra zonelor de frontieră şi de conectare între suprafeţele studiate.

În final se prezintă utilizarea suprafeţelor **Gordon – Coons** bicubice şi triunghiulare în modelarea geometrică.

În abordarea acestor problema autorul a încercat o metodă devenită clasică în cercetarea matematică fundamentală şi aplicativă. În primul rând s-a făcut prezentarea problemelor propuse a se cerceta aşa cum prezintă în literatura de specialitate la data elaborării lucrării. În al doilea rând pe baza acestor cunoştinţe disponibile s-a încercat a adăuga o modestă contribuţie, atât printr-o nouă formă de abordare a problemelor cercetate, cât şi prin noi idei şi concepte care pot sta la baza dezvoltării ulterioare într-un domeniul care încă se prezintă ca un domeniu potenţial de cercetare pentru viitor.

5.2. Polinoamele lui Bernstein şi modelele lui Bezier

În capitolul destinat **polinoamelor lui Bernstein** s-a prezentat detaliat acest subiect. Pentru a continua se vor trece în revistă principalele proprietăţi ale **polinoamelor lui Bernstein** $B_i^n(x)$ şi care vor fi folosite la descrierea altor modele utilizate în modelarea matematică, în general, şi cea geometrică, în special (Liming, 1979).

Din capitolul precedent:

Fie funcţia $f(x)$ definită pe $[0,1]$ şi cu valori în $P \in \mathrm{P}$:

$$f(x) \equiv [0,1] \to P,$$

şi fie **polinoamele lui Bernstein** $B_n(x)$ de ordinul n al funcţiei $f(x)$ şi fie $x \leq n$:

$$B_n(x) = B_n^f = \sum_{v=0}^{n} f\left(\frac{v}{n}\right)\binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v}.$$

Polinoamele lui Bernstein au următoarele proprietăţi:

1. $x = 0$ este rădăcina i a lui $B_i^n(x)$,
2. $x = 1$ este rădăcina $(n-1)$ a lui $B_i^n(x)$,
3. $B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x)$; ceea ce reprezintă proprietatea de simetrie, pentru $i = 0, 1, 2, \dots n$,
4. $(1-x) B_0^n = B_0^{n+1}$ şi $x B_n^n = B_{n+1}^{n+1}$,
5. $B_i^n \geq 0$ pentru $x \in [0,1]$, **polinoamele lui Bernstein** sunt strict pozitive pe intervalul $[0,1]$.
6. Valoarea maximă a lui B_i^n în $[0,1]$ este $x = \frac{1}{n}$,
7. $B_i^n(x) = x B_{i-1}^{n-1}(x) + (1-x) B_i^{n-1}(x)$, pentru $i = 1, 2, \dots, n$ şi $x \in \mathrm{P}$, numită şi relaţia de recurenţă,
8. **Polinoamele lui Bernstein** formează o bază:

$\mathcal{B} := \{B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n\}$ a lui P_n.

Demonstraţie. Primele 5 proprietăţi sunt evidente din definiţia **polinoamelor lui Bernstein**.

Proprietatea 6. rezultă prin diferenţiere:

$$\frac{d}{dx} B_i^n(x) = \binom{n}{i}(1-\lambda)^{n-i-1} x^{i-1}(i - nx),$$

pentru: $i = 1, 2, \dots, n$ şi $x \in P$.

Proprietatea 7. rezultă din relaţia de recurenţă a coeficienţilor binomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i},$$

aplicată definiţiei **polinoamelor lui Bernstein**.

În legătură cu ultima proprietate se poate observa că s-a introdus polinomul P.

Definiţie: Un polinom (sau o curbă) de gradul n în R^d este o funcţie P de forma: $P := R \to R^d$,

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

unde: $a_0, a_1, \dots, a_n \in R^d$, $\mathrm{a_n} \neq 0$ şi unde spaţiul polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n în R^d se notează cu R_n^d. Dacă se consideră $d = 3$, se obţin curbele în spaţiu, iar pentru $d = 2$ se obţin curbele în plan.

Dacă $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ este o bază a lui P_n şi $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ este o bază a lui R^d atunci polinoamele:

$\{e_i, P_j\} \big| \, i = 1, 2, \dots d$ şi $j = 0, 1, 2, \dots n$, formează o bază a lui R_n^d.

Ca urmare graful Γ_p al polinomului $P \in R_n^d$:

$\Gamma_p := R \to R^{d+1}, x \longmapsto [x, P(x)]$ poate fi considerat de asemeni un polinom de expresie:

$$\Gamma_p \in P^{d+1}.$$

Dacă P se reprezintă de exemplu ca un polinom $P(x)$

$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, atunci:

$$\Gamma_p(x) = \binom{0}{a_0} + \binom{1}{a_0} x + \binom{0}{a_2} x^2 + \dots + \binom{0}{a_n} x^n.$$

Pentru proprietatea 8. se va arăta că $n+1$ polinoame B_i^n sunt liniar independente.

Dacă

$$0 = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_i^n\,(x) \text{ conform 1. şi 2., atunci:}$$

$$0 = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_i^n\,(1) = b_n \, B_n^n\,(1) = b_n,$$

ceea ce impune: $b_0 = b_1 = \cdots = b_n = 0$.

Aceasta ne permite să definim orice polinom $P \in P_n^d$ ca o combinaţie liniară a **polinoamelor lui Bernstein**

$$P\,(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_i^n\,(x;\, a, b),\; b_i \in R^d$$

unde coeficienţi $b_i, i = 0, 1, \ldots n$ se numesc puncte de control sau **punctele lui Bezier** ale lui $P\,(x)$, iar $P\,(x)$ - **polinoamele lui Bezier** (Free Software Foundation, 1998).

Deoarece:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \, B_i^n\,(x) \Rightarrow x \sum_{i=0}^{n} \left[a + \frac{i}{n}\,(b-a) \right] B_i^n\,(x;\, a, b),$$

punctele lui Bezier aparţinând polinomului $P\,(x) = x$ au ca maxim:

$$b_i = a + \frac{i}{n}\,(b-a),$$

corespunzătoare **polinoamelor lui Bernstein**.

În particular din sinteza **polinoamelor lui Bernstein**:

$$B_i^n\,(x) = B_{n-i}^n\,(1-x),$$

se obţine, în cazul **coeficienţilor lui Bezier**:

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \, B_i^n\,(t;\, a, b) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i} \, B_i^n\,(t;\, b, a),$$

adică b, a **coeficienţii lui Bezier** în ordine inversă.

Atunci reprezentarea **modelului lui Bezier** este dată de graful Γ_p al polinoamelor:

$$P\,(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_i^n\,(x;\, a, b), \text{unde } b_i \in R_n^d$$

şi unde:

$$\Gamma_p\,(x) = \begin{pmatrix} x \\ P\,(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a + \frac{i}{n}\,(b-a) \\ b_i \end{pmatrix} B_i^n\,(x;\, a, b).$$

Din analiza proprietăţilor **polinoamelor lui Bernstein** şi a **modelului lui Bezier** rezultă clar că punctele iniţiale şi finale ale **polinoamelor lui Bernstein** corespund cu punctele iniţiale şi finale ale **modelului lui Bezier**. În plus, tangentele în punctele marginale ale **polinoamelor lui Bernstein** corespund cu punctele marginale ale **modelului lui Bezier** (Peter Alfred, 1995).

Pentru a demonstra această proprietate, calculăm derivatele **polinoamelor lui Bernstein** pe intervalul $[\,0, 1\,]$.

Teoremă. Derivatele **polinoamelor lui Bernstein** B_i^n pe intervalul $[\,0, 1\,]$ satisfac relaţia:

$$\frac{d}{dx} B_i^n\,(x) = \begin{cases} -n\, B_0^{n-1}, \text{pentru } i = 0 \\ n\left[B_{i-1}^{n-1}\,(x) - B_i^n\,(x) \right], \text{pentru } i = 1, 2, \ldots n-1 \\ n\, B_{n-1}^{n-1}\,(x), \text{pentru } i = n \end{cases}.$$

Demonstraţie. Aceasta rezultă imediat din derivarea formulei de definiţie a **modelului lui Bezier**.

Generalizând, fie

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(x),$$

atunci derivata de ordinul k a lui P este

$$P^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k b_i B_i^{n-k}(x),$$

unde Δ este operatorul diferenţă

$$\Delta^1 b_i := b_{i+1} - b_i$$

şi

$$\Delta^k b_i := \Delta^{k-1} b_{i+1} - \Delta^{k-1} b_i$$

pentru $k > 1$.

Corolar. Pentru punctele marginale $x = 0, x = 1$ se obţin valorile:

$$P^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k b_0 \text{ şi } P^{(k)}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k b_{n-k},$$

şi încă

a) $P(0) = b_0$ şi $P(1) = b_n$,
b) $P'(0) = n(b_1 - b_0)$ şi $P' = n(b_n - b_{n-1})$,
c) $P''(0) = n(n-1)(b_2 - 2b_1 + b_0)$ şi $P'' = n(n-1)(b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2})$,

deci

$$B_i^{n-k}(0) = \delta_{0,1} \text{ şi } B_i^{n-k}(1) = \delta_{n-k,i}$$

şi care confirmă geometric afirmaţia din corolar.

Este important de observat că în punctele marginale **curba lui Bezier** este determinată până la derivata de ordinul k de punctele marginale ale lui x, proprietate crucială atunci când ne vom referi la asamblarea caroiajelor ce modulează supra-feţele considerate.

Pentru a observa în continuare proprietăţile **modelului lui Bezier** vom introduce un set de definiţii (Yamaguchi, 1988):

Fie A un set astfel încât $A \subset R$; acesta este numit convex dacă pentru orice două puncte $x, y \in A$ în linie dreaptă care şi ea este inclusă în A avem:

$$[x, y] := \{x + (1-x)y\} \mid x \in [0,1] \subset A, \text{ pentru } \forall x, y \in A.$$

O combinaţie liniară de forma:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \text{ unde } x_1 = R^d,\ \lambda_i \geq 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

se numeşte combinaţia liniară convexă a lui $x_1, x_2, \ldots, x_k$ şi care ne arată că curba ce reprezintă polinomul este inclusă în punctele ce definesc **curba lui Bezier**.

Teoremă. Imaginea $P([a,b])$ a polinomului $P \in R_n^d$ în **reprezentarea lui Bernstein** este dată de relaţia:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(x; a, b),$$

unde $x \in [a,b]$. În particular, graficul polinoamelor pentru $x \in [a,b]$ este conţinut în setul convex al punctelor b_i.

Demonstraţie. În [a,b] **polinoamele lui Bernstein** definesc partiţii strict pozitive:

$$B_i^n(x; a, b) \geq 0 \text{ pentru } x \in [a,b]: \text{ cu proprietatea:}$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1, \text{deci: } P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t; a, b)$$

care este combinaţia liniară conexă a **punctelor lui Bezier** $b_0, b_0, \dots b_n$ şi care ne arată ca punctele polinomului $P\,(x)$ sunt cuprinse în setul conex al punctelor b_i conţinute în **modelul lui Bezier** (Farin, 1992).

În capitolul destinat **polinoamelor lui Bernstein** s-a arătat în mod repetat că aceasta avut un rol determinant în dezvoltarea unei noi ramuri a matematicii: analiza numerică. **Bernstein** a arătat că orice funcţie $f\,(x)$ poate fi aproximată cu ajutorul unui polinom şi care, în limitele unor valori acceptabile ale erorilor de aproximare, ne permite să **"aproximăm"**sau să **"modelăm"**o funcţie iniţială dată.

Modelul propus de Bezier a constituit următorul pas decisiv în dezvoltarea acestei noi ramuri a matematicii numerice şi anume a arătat practic cum poate fi construit şi generat un astfel de polinom. Pe lângă interpretarea geometrică a punctelor Bezier prezentată anterior, impor-tanţa practică a modelului propus de Bezier constă în aceea că a condus la descoperirea unei algoritm care să permită, atât construirea modelului ce îi poartă numele, cit şi obţinerea de informaţii asupra derivatelor polinomului de interpolare sau de aproximare.

Mai mult, acelaşi algoritm poate fi folosit la împărţirea **curbei lui Bezier**, asociată **polinomului lui Bezier** în două segmente. Repetând algoritmul de împărţire a curbei în segmente se obţine o secvenţă de **polinoame Bezier** şi care - lucrul **cel mai important** – converg extrem de rapid (chiar exponenţial în unele condiţii) spre o curbă finală, proprietate larg utilizată la reprezentarea grafică unei curbe pe calculator[1] cu ajutorul unui plotter sau pe ecranul al unui monitor[2].

Prin definiţia de mai jos se introduce noţiunea de polinoame parţiale P.

<u>Definiţie</u>: Fie **polinomul lui Bezier** reprezentat pe $[\,0,1\,]$ şi $i = [0,1]$

$$P\,(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\; B_i^n\,(x).$$

Definim **polinomul parţial** $b_i^k\ \in\ R$ a lui P pentru $i = 0,1,2,\dots,n-k$, prin:

$$b_i^k\,(x) := \sum_{j=0}^{k} b_{i+j}\; B_i^k\,(x) = \sum_{j=1}^{i+k} b_j\; B_{j-i}^k\,(x),$$

pentru **polinomul lui Bezier:**

$$P\,(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\; B_i^n\,(x; a, b),$$

Pentru [a, b] obţinem polinoamele parţiale b_i^k în mod similar definite prin:

$$b_i^k\,(x; a, b) := b_i^k\,[\lambda\,(x)\,] = \sum_{j=0}^{n} b_{i+j}\; B_j^n\,(x; a, b).$$

În definiţia de mai sus polinomul parţial $b_i^k \in P_k^d$ a lui P pentru $i = 0,1,2,\dots,n--k$, este definit de **punctele lui Bezier** $b_i, b_{i+1}, \dots b_{i+k}$. În continuare pentru $b_i^k\,(x;\ a, b)$ se va folosi notaţia: $b_i^k\,(a, b)$ pentru a evita confuziile. În plus, se observă că: $b_0^1\,(t) = P\,(t)$ este punctul de început al polinomului; $b_i^k\,(b) = b_i$ sunt **punctele Bezier** pentru $\forall\, x \in R$ şi $b_i^k\,(a) = b_i$; iar $b_i^k\,(b) = b_{i+k}$ sunt punctele marginale.

[1] Computer Graphics (CG).

[2] In practică procedeul este similar cu operaţia unui croitor care taie materialul cu o foarfecă cât mai aproape de marcajul trasat.

5.3. Polinoamele lui Bernstein şi algoritmul lui de Casteljau

În capitolul precedent s-au prezentat principalele proprietăţi ale **polinoamelor lui Bernstein**. Relaţia de recurenţa 7. poartă numele de **algoritmul lui de Casteljau** şi care a avut un rol important în modelarea geometrică, aşa cum se va prezenta în continuare.

Fie

$$b_i^k = (1-\lambda) + b_i^{k-1}\lambda\, b_{i+1}^{k-1},$$

unde: $\lambda = \lambda(x) = \frac{x-a}{b-a}$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n-k$, pentru polinoamele parţiale $b_i^k(x)$ ale **polinomului (curbelor) lui Bezier** $P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, B_i^n(x;\, a, b)$, reprezentat pe $[0, 1]$, pentru $i = [0, 1]$.

<u>Demonstraţie</u>. Dacă înlocuim relaţia de recurenţă 7. în definiţia polinoamelor parţiale b_i^k ale **polinomului (curbelor) lui Bezier** $P(x)$, obţinem:

$$b_i^k = \sum_{i=0}^{k} b_{i+j}\, B_j^k = b_i\, B_0^k + b_{k+i}\, B_k^k + \sum_{j=1}^{k-1} b_{i+j}\, B_j^k =$$

$$= b_i\,(1-\lambda)\, B_0^{k-1} + b_{i+k}\,\lambda\, B_{k-1}^{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} b_{i+j}\,[(1-\lambda) B_j^{k-1} + \lambda\, B_{k-1}^{k-1}] =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} b_{i+j}\,(1-\lambda)\, B_j^{k-1} + \sum_{j=1}^{k} b_{i+j}\,\lambda\, B_{j-1}^{k-1} = (1-\lambda) b_i^{k-1} + \lambda\, b_{i+1}^{k-1}.$$

Deoarece: $b_i^0(x) = b_0$, unde $x \in [a, b]$ putem calcula valoarea funcţiei $P(x) = b_0^n(x)$ **în punctele Bezier**.

Punctele auxiliare b_i^k se pot obţine prin **algoritmul lui de Casteljau**[3] ce va fi prezentat mai jos (Fig. 5.1):

$$\begin{array}{l}
b_n = b_n^0, \searrow \\
b_{n-1} = b_{n-1}^0, \longrightarrow b_{n-1}^1, \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
b_1 = b_1^0 \longrightarrow \longrightarrow b_1^{n-1}, \searrow \\
b_0 = b_0^0 \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow b_0^{n-1},\ b_0^n,
\end{array}$$

Fig. 5.1. Exemplificarea algoritmului lui de Casteljau

Totuşi, teorema de mai sus se referă la un singur **polinom (curbă) Bezier** pentru un interval fix dat. Problema care se pune este de a cunoaşte cum se schimbă **punctele Bezier** când se schimbă intervalul dat. De asemenea, de a cunoaşte cum se comportă polinomul în punctele de joncţiune şi ce se întâmplă dacă intervalul de referinţă se subdivide în subintervale.

S-a arătat că în punctele marginale, **polinomul (curba) Bezier** P este determinat de derivata de ordinul k. Reciproca este deasemenea adevărată:

[3] similar **algoritmului lui Neville**.

valorile lui P ale derivatei de ordinul k în punctul $k = 0$, determină punctele parţiale $b_0^0(x), b_0^1(x), \ldots, b_0^k(x)$, aşa cum se va demonstra în lema de mai jos:

Lemă. Polinomul parţial $b_0^k(x)$ al unui **polinom (curbă) Bezier**:

$$P(x) = b_0^n(x)\sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(x)$$

este complet determinat de valorile lui $P(x)$ până la şi incluzând derivatele de ordinul k in punctul $k = 0$.

<u>*Demonstraţie.*</u> Conform teoremei precedente, derivatele în punctul $x = 0$ satisfac relaţia:

$$\frac{d^l}{dx^l} b_0^k(0) = \frac{k!}{(k-l)!}\Delta^l b_0 = \frac{(n-l)!\,k!}{(k-l)!\,n!}\frac{d^l}{dx^l} b_0^n(0)$$

pentru $l = 1, 2, \ldots, k$ şi $x \in P$. Ceea ce este adevărat, deoarece toate derivatele polinomului există şi sunt determinate în punctele $x = 0$. Ca urmare se obţine următoarea teoremă:

Teoremă. Fie:

$P(x) = a_0^n(x; a, b)$ şi

$Q(x) = b_0^n(x; a, c)$, două **polinoame (curbe) Bezier**,

iar a, b, şi respectiv a, c puncte de control (**puncte Bezier**) ale lui $P(x)$; atunci următoarele propoziţii sunt echivalente:

i. $P(x)$ şi $Q(x)$ coincid în punctul $x = a$ până la derivata de ordinul k, de exemplu:

$$P^{(l)}(a) = Q^{(l)}(a),\ \text{pentru } l = 0, 1, 2, \ldots k,$$

ii. $a_0^k(x; a, b) = b_0^k(x; a, c)$, pentru $\forall x \in R \subset \mathrm{P}$ şi pentru $l = 0, 1, 2, \ldots k$,

iii. $a_0^l(x; a, b) = b_0^l(x; a, c)$, pentru $\forall x \in R \subset \mathrm{P}$ şi pentru $l = 0, 1, 2, \ldots k$,

iv. $a_l = b_0^l(b; a, c)$, pentru $l = 0, 1, 2, \ldots k$.

<u>*Demonstraţie*</u>. Se va arăta că: $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii)$.

Conform lemei de mai sus, cele două polinoame (curbe) $P(x)$ şi $Q(x)$ coincid pentru $x = a$ până la derivata de ordinul k, dacă şi numai dacă au aceleaşi polinoame parţiale $a_0^k(x; a, b) = b_0^k(x; a, c)$, pentru $\forall x \in \mathrm{P}$ şi pentru $l = 0, 1, 2, \ldots k$.

Deci primele propoziţii sunt echivalente. Dacă a_0^k şi b_0^k coincid, atunci şi polinoamele lor parţiale a_0^l şi b_0^l coincid pentru $l = 0, 1, 2, \ldots k$ şi deci (ii) implică (iii).

Înlocuind $x = b$ în (iii) obţinem

$$a_l = a_0^l(1) = a_0^l(b; a, b) = b_0^l(b; a, c)\ \text{şi deci } (iv).$$

Deoarece polinomul este unic determinat de **coeficienţii săi Bezier**, (iv) implică (ii) şi de aici rezultă echivalenţa celor patru propoziţii. Or, acesta răspunde la întrebarea comportamentului **punctelor lui Bezier** când intervalul de referinţă se subdivide şi când se schimbă însăşi intervalul de referinţă.

Corolar. Fie: $a_0^n(x; a, b) = b_0^n(x; a, c) = c_0^n(x; a, c)$ **punctele Bezier** pentru polinomul $P(x)$ respectiv intervalelor: $[a, b], [a, c]$ şi $[b, c]$, atunci:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x; a, b) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(x; a, b)$$

Ca urmare, coeficienţii a_l şi a_l al poligoanelor parţiale pot fi calculaţi cu ajutorul coeficienţilor a_l a lui Bezier conform relaţiilor:

$$a_k = b_0^n(b; a, c)\ \text{şi}\ c_k = b_k^{n-k}(b; a, c),\ \text{pentru } k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

<u>*Demonstraţie.*</u> Deoarece polinomul de ordinul n este complet determinat de derivatele sale, corolarul de mai sus rezultă din:

- teorema precedentă pentru $k = n$ şi
- simetria **reprezentării Bezier**.

În plus, deoarece **subpolinoamele Bezier** sunt cuprinse în polinomul convex când polinomul este continuu subdivizat, practic, doar după câteva subdiviziuni, subpolinoamele se suprapun peste curba iniţială. Dacă ne folosim de faptul că doar derivatele într-un punct trebuie să coincidă, atunci se poate rezolva problema îmbinărilor a două polinoame adiacente.

Corolar. **Subpolinoamele Bezier**:

$$R(x) = \begin{cases} a_0^n\,(x; a, b), \text{dacă } a \le x \le b \\ c_0^n\,(x; b, c), \text{dacă } b \le x \le c \end{cases}$$

sunt C^k continue, dacă şi numai dacă:

$$c\,(l) = a_{n-l}^l\,(c; a, b) \text{ pentru } l = 0, 1, 2, \dots k$$

sau echivalent:

$$a_{n-l}\,(l) = c_0^l\,(c; a, b) \text{ pentru } l = 0, 1, 2, \dots k.$$

Ca urmare, considerând C^k continue, primele $(k+1)$ **puncte Bezier** ale derivatei de ordinul II sunt determinate de ultimele $(k+1)$ **puncte Bezier** şi viceversa. Un polinom $a_0^n\,(c; a, b)$ pe intervalul [a, b] poate fi deci continuu pe C^k şi complet determinat de polinomul $C\,(x; a, b)$ pe intervalul [a, b], determinând **punctele Bezier** $c_0, c_1, \dots, c_k$ pe intervalul [b, c] conform corolarului de mai sus folosind **algoritmul lui de Casteljau**, iar punctele rămase $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ se pot alege liber.

În particular, **subpolinoamele Bezier** $R(x)$ sunt continue, dacă şi numai dacă

$$a_n = c_0,$$

în plus sunt continuu diferenţiabile, dacă şi numai dacă

$$c_1 = a_{n-1}^1\,(c; a, b) = a_{n-1}^1\,(x_1) = (1 - x_1)\,a_{n-1} + x\,a_n, \text{unde } x_1 = \frac{c-a}{b-a},$$

sau echivalent

$$a_{n-1} = c_0^1\,(a; b, c) = c_0^1\,(x_2) = (1 - x_2)\,c_0 + \mu\,c_1, \text{unde } x_2 = \frac{a-b}{c-b},$$

ceea ce implică:

$$a_n = c_0 = \frac{c-b}{c-a}\,a_{n-1} + \frac{b-a}{c-a}\,c_1$$

adică punctul $a_n = c_0$ împarte segmentul $[a_{n-1}, c]$ în porţiunile $(c-b)$ şi $(b-a)$. Dacă subpolinoamele C^2 sunt continue, atunci a_{n-2}, a_{n-1} şi a_n descriu aceiaşi parabolă ca şi c_0, c_1, c_2 referitoare la intervalul [a, b] şi respectiv intervalul [b, c].

Ca urmare a corolarului de mai sus, **punctele Bezier** ale acestei parabole re-feritoare la întreg intervalul $[a, c]$ sunt a_{n-2}, d şi c_2, unde d este un punct auxiliar astfel încât

$$d := a_{n-2}^1\,(c; a, b) = a_{n-2}^1\,(x_1) = c_1^1\,(a; b, c) + c_1^1\,(x_2)$$

şi deci din continuitatea lui C^2 rezultă că

$$c_2 = a_{n-2}^2\,(x_1) = (1 - x_1)\,a_{n-2}^1\,(x_1) + x_1\,a_{n-1}(x_1)$$

unde

$$a_{n-2}^1\,(x_1) = d \text{ şi } a_{n-1}^1\,(x_1) = c_1$$

şi

$$a_{n-2} = C_0^2\,(x_2) = (1 - x_2)\,C_0^1\,(x_2) + x_2\,C_0^1\,(x_2),$$

iar

$$c_0^1\,(x_2) = a_d \text{ şi } c_1^1\,(x_2) = d.$$

Deci subpolinoamele C^2 sunt continue, dacă şi numai dacă $\exists$ un punct d astfel încât

$$c_2 = (1 - x_1)\,a_{n-1} + x_1 c_1 \text{ şi } a_{n-2} = (1 - x_1)\,a_{n-1} + x_1 d.$$

Punctul auxiliar d este cunoscut în literatura de specialitate ca **punctul de Boor** (Deuflhard, 2003).

5.4. Algoritmul lui Boor ca un caz particular al algoritmului lui de Casteljau

Fie un polinom (curbă) B–spline $B_i^n(x)$, unde: $x \subset [x_{n-1}, x_{l+n-1}]$ şi fie: $x_j \in [x_j, x_{j+1}] \subset [x_{n-1}, x_{l+n-1}]$.

Dacă definim:

$$d_i^k = \frac{x_{i+n-k} - x}{x_{i+n-k} - x_{j-1}} d_{i-1}^{k-1}(x) + \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+n-k} - x_{i-1}} d_i^{k-1}(x),$$

unde $k = 0, 1, 2, \dots n - r$ şi $i = j - n + k + 1, \dots, j + 1$, atunci

$$s(x) = B_i^n = d_{j+1}^{n-r}(x);$$

este valoarea funcţiei B–spline pentru x, iar r reprezintă numărul de puncte (valori) alese pentru a multiplica polinomul B_i^n .

Dacă se alege $r = 0$, atunci obţinem: $d_i^0 = d_i$. Ca urmare, pentru fiecare nivel al lui k se grupează un nou poligon şi noi puncte de control corespunzătoare care să descrie curba B–spline iniţială.

Fie cazul:

$0 = x_0 = x_1 = \cdots x_{i-1} < x_i = x_{i-1} \dots = x_{2n-1} = 1$, unde x_0 şi x_{2n} sunt multiplu de 2.

În acest caz abscisa unui punct (numit **abscisa lui Grenville**) este dată de formula:

$$\xi_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{i+n-1} x_i = \frac{i}{n}\ ;\ i = 1, 2, \dots, n$$

Dacă $0 \le x \le 1$ **algoritmul lui Boor** pentru $j = n - 1$ este:

$$d_i^k(x) = \frac{x_{i+n-k} - x}{x_{i+n-k} - x_{i-1}} d_{i-1}^{k-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+n-k} - x_{i-1}} d_i^{k-1},$$

Deoarece $n - 1 \ge (1 - x) \ge 0$, avem: $x_{i+n-k} = 1$, $x_{i-1} = 0$, pentru $\forall\, i, k$, deci

$$d_i^k(x) = (1 - x) d_{i-1}^{k-1} + x\, d_i^{k-1}\ ; k = 1, 2, \dots n$$

şi care este **algoritmul lui de Casteljau** ca un caz particular al **algoritmului lui Boor.**

5.5. Unele observaţii referitoare la algoritmul lui Boor

Analiza **algoritmului lui de Casteljau**, ca un caz particular al **algoritmului lui Boor** permite substanţierea unor observaţii:

- Restricţia referitoare la intervalul [0, 1] nu este esenţială, polinoamele sunt invariante la transformarea parametrilor. Dacă două puncte (noduri) adiacente au $r = n$, atunci polinomul B – splin este generat de **polinomul lui Bezier**, iar **abscisa lui Grenville** este calculată într-un punct echi-distant între cele două puncte.
- După ce înserăm x puncte pentru a atinge B până când obţinem gradul de multiplicitate n, polinomul (curba) iniţial **de Boor** [sau polinomul (curba) **Bezier** în acest caz], se va transforma în două polinoame (curbe) **Bezier**, definind aceiaşi curbă aşa cum a făcut-o poligonul iniţial. De fapt este o confirmare a faptului că **algoritmul lui de Casteljau** subdivide **curbele lui Bezier**.
- S-a arătat anterior că polinoamele (curbele) B–spline sunt definite prin părţi pe domeniul $[x_{n-1}, x_{j+n-1}]$. Se poate oricând insera un vector de puncte (noduri) arbitrare, până la obţinerea gradului de multiplicitate n.

Polinomul B–spline corespunzător secvenţei de noduri este astfel un polinom (curbă) **Bezier** definit prin părţi.

5.6. Polinoame definite prin părţi folosite la modelarea geometrică

Complexitatea unor polinoame (curbe) ce se cer interpolate sau aproximate în vederea utilizării lor la modelarea geometrică a condus la ideea segmentării acestora în părţi (segmente, intervale) care au fost aproximate - relativ uşor – prin polinoame (curbe) definite prin părţi şi care apoi au fost asamblate (reunite) într-un polinom definit prin acele părţi. Evident problema care s-a pus ulterior a fost cea legată de continuitatea poligoanelor (curbelor) de interpolare (aproximare).

Fie $\mathcal{P}_k \subset \mathbb{R}^k$ un spaţiu vectorial de polinoame de grad $\leq k,$ unde: $x \in [a, b]$ de o singură variabilă x. Rezultă că $\mathcal{P}_k$ este de dimensiune $(k+1)$ în $\mathbb{R}$.

Dându-se

- un interval [a, b] $\subset \mathcal{P}_k$,
- un întreg $l \geq 1, l \subset \mathbb{R}^+$,
- un set τ de $(l-1)$ puncte (τ_i)
- şi fie $(1 \leq i \leq l-1) \subset (a, b)$

atunci punctele $a < \tau_1 < \tau_2 \ldots < \tau_{l-1} < b$ se numesc puncte de control (noduri), iar $(l-1) \subset \mathbb{R}^+$ intregi r_i unde $0 \leq r_i \leq k$. Stabilim de asemeni $a = \tau_0$ şi $b = \tau_l$.

Notăm $\mathcal{P}_{k,\tau,r}$ spaţiul vectorial de funcţii polinomiale de grad $\leq k$ pe [a, b] şi C^{r_i-1} condiţia de continuitate in τ_i $(1 \leq i \leq l-1)$, adică funcţia (polinomul, curba) are (r_i-1) derivate continue in τ_i şi unde pentru $r_i = 0$ nu sunt necesare condiţii de continuitate.

Lemă. Fie

$$\mathcal{P}_{k,\tau,r} = (k+1)l - \sum_{i=1}^{l-1} r_{i.}$$

<u>*Demonstraţie*</u>*.* Fie spaţiul funcţiilor $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathbb{R}^k$ astfel încât pentru fiecare l intervale $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ şi ∀ polinom de grad k, dimensiunea spaţiului va fi: $(k+1)\, l$.

Baza pentru spaţiul $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathbb{R}^k$ va fi format din funcţiile $f_{i,j}$ astfel încât

$$f_{i,j} = \begin{cases} (\mathrm{X} - \tau_i)^j \text{ pentru } \mathrm{X} \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \\ 0 \text{ pentru } \mathrm{X} \notin [\tau_i, \tau_{i+1}] \text{ şi } (0 \leq i \leq l-1, 0 \leq j \leq k) \end{cases}$$

Fie $f \in \mathcal{P}_{k,\tau,r}$, un polinom $\mathrm{P_i} \subset [\tau_i, \tau_{i+1}]$ şi unde :

$$\mathrm{P_i} = \sum_{j=0}^{k} a_j^i \, (\mathrm{X} - \tau_i)^j .$$

Condiţia de continuitate C^{r_i-1} a lui f în punctul (nodul):

τ_i $(1 \leq i \leq l-1)$ determină r_i relaţii liniare ale lui a_i^j :

$$\begin{cases} a_0^i = \Phi_0\left(a_0^{i-1}, a_1^{i-1}, \ldots, a_{k-1}^{i-1}, a_k^{i-1}\right) \\ a_1^i = \Phi_1\left(a_0^{i-1}, a_1^{i-1}, \ldots, a_{k-1}^{i-1}, a_k^{i-1}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{r_i-1}^i = \Phi_{r_i-1}\left(a_0^{i-1}, a_1^{i-1}, \ldots a_{k-1}^{i-1}, a_k^{i-1}\right) \end{cases}$$

relaţii care introduc r_i ecuaţii liniar independente, fiecare de o nouă variabilă ale lui a_i^j :

Fie

$$(X - \tau_i)_+ = \begin{cases} (X - \tau_i) \text{ pentru } X \geq \tau_i \\ 0 \text{ pentru } X \leq 0 \end{cases}$$

atunci funcţia $(X - \tau_i)_+ = \text{Sup} (X - \tau_i, 0)$.

Lemă. Setul de restricţii

$(0 \leq i \leq l - 1, r_i \leq j \leq k)$ pe $[a, b]$ impus funcţiilor $(X - \tau_i)_+$ reprezintă o bază a lui $\mathcal{P}_{k,\tau,r}$.

Demonstraţie. Deoarece funcţia $(X - \tau_i)$ este o clasă C^0 (din condiţia de continuitate) prin inducţie rezultă clar că funcţiile $(X - \tau_i)_+^j$ sunt o clasă C^{j-1} în punctele (nodurile) τ_i. Rezultă că funcţiile $(X - \tau_i)_+{}^j \in \mathcal{P}_{k,\tau,r}$, pentru $r_i \leq j \leq k$; şi atunci pentru ∀ astfel de funcţii

$$\left[(k + 1) l - \sum_{i=1}^{l-1} r_i \right]$$

este de-ajuns să observăm că funcţiile $(X - \tau_i)_+^j$ sunt liniar independente, ceea ce este evident.

Fie $\mathcal{S}_{k,r}$ un subspaţiu inclus în $\mathcal{S}_{k,r} \subset \mathcal{P}_{k,\tau,r}$, unde: $r_i = k \; (1 \leq i \leq l - 1)$.

Subspaţiul $\mathcal{S}_{k,r} \subset \mathcal{P}_{k,\tau,r}$ este denumit subspaţiul polinoamelor (curbelor) spline de ordinul k având punctele (nodurile) τ_i şi unde un punct are:

$$\dim \mathcal{S}_{k,r} = l (k + 1) - \sum_{i=1}^{l-1} k = k + l,$$

iar polinoamele (curbele) spline sunt de C^{k-1} ori funcţii continue.

5.6.1. Polinoame (curbe) spline cubice definite prin părţi

Fie

$$\mathrm{M}_i = (\tau_i, y_i) (0 \leq i \leq l),$$

unde M_i sunt $(l + 1)$ puncte de control (noduri) în $\mathcal{P}^2$, $\mathrm{M}_i \subset \mathcal{P}^2$ (Liming, 1979).

Fiind date două numere α şi β, atunci ∃ un polinom (curbă, funcţie) spline $f \in \mathcal{S}_{3,r}$, astfel încât funcţia $y = f (x)$ care trece prin punctele M_i şi satisface condiţiile:

$$\begin{cases} f' (a) = \alpha \\ f' (b) = \beta' \end{cases}$$

Demonstraţie. Vom alege cazul mai uşor de demonstrat când punctele de control (nodurile) sunt echidistante: $(\tau_{i+1} - \tau_i = h)$ şi care ne conduce la $(l + 3)$ condiţii liniar independente, deoarece dimensiunea lui $\mathcal{S}_{3,r}$ este $(l + 3)$. Obţinem:

$$f (\tau_i) = y_i, (0 \leq i \leq l)$$
$$f' (a) = \alpha$$
$$f' (b) = \beta$$

Ca urmare, putem rescrie condiţiile restrictive P_i impuse lui f pe astfel încât pentru fiecare l intervale $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ să avem

$$\mathrm{P}_i(u) = a_i + b_i u + c_i u^2 + d_i u^3 \text{ unde: } (0 \leq i \leq l) \text{ şi: } (0 \leq n \leq 1), \text{iar } u = \frac{t - \tau_i}{h},$$

atunci

$$\begin{cases} \mathrm{P}_i(0) = f (\tau_i) = y_i \\ \mathrm{P}_i(i) = f (\tau_{i+1}) = y_{i+1}, \end{cases} \text{ unde: } (0 \leq i \leq l)$$

Condiţiile impuse lui a_i, b_i, c_i, d_i sunt:

1) $a_i = b_i$,
2) $a_i + b_i + c_i + d_i = y_i$, unde: $[0 \le i \le (l-1)]$, cu $f(\tau_i) = y_i$,
3) $\begin{cases} b_0 = \frac{\alpha}{h} \\ b_{l-1} + 2\,c_{l-1} + 3\,d_{l-1} = \frac{\beta}{h} \end{cases}$ şi care rezultă din condiţiile de mărginire,
4) $b_i + 2\,c_i + 3\,d_i = b_{i+1}$ şi care rezultă din condiţia de continuitate C^2,
5) $2\,c_i + 6\,d_i = 2\,c_i$, unde: $[1 \le i \le (l-2)]$.

Din 1), 2), 4) rezultă

$$\begin{cases} c_i = 3\,(y_{i+1} - y_i) - 2\,b_i - b_{i+1} \\ d_i = -2\,(y_{i+1} - y_i) + b_i + b_{i+1} \end{cases},$$

şi introducând în 5) pentru $(i+1)$ rezultă $b_{i-1} + 4\,b_i + b_{i+1} = 3\,(y_{i+1} - y_i)$ unde: $[0 \le i \le (l-1)]$.

Obţinem astfel următorul sistem matricial în b_j:

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & . & . \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{h} \\ 3\,(y_2 - y_0) \\ 3\,(y_3 - y_1) \\ \vdots \\ 3\,(y_l - y_{l-2}) - \frac{\beta}{h} \end{bmatrix}$$

Este evident că matricea sistemului este nesingulară şi folosind **metoda lui Gauss** se pot obţine rapid soluţiile b_j. În acest caz numărul de operaţii este l.

Teoremă. Fie $f \in \mathcal{S}_{3,r}$ polinoame (curbe, funcţii) spine definite prin părţi astfel încât:

$$\begin{cases} f(\tau_i) = y_i, (0 \le i \le l) \\ f'(a) = \alpha \\ f'(b) = \beta \end{cases}$$

Definim $\Phi \in E$ un subset a lui C^r ($E \subset C^r$) de polinoame (curbe) definite pe [a, b] astfel încât

$$\begin{cases} \Phi(\tau_i) = y_i, (0 \le i \le l) \\ \Phi'(a) = \alpha \\ \Phi'(b) = \beta \end{cases}$$

atunci dintre elementele lui E, f este singurul care minimizează integrala

$$\int_a^b [\Phi'']^2\,(t)\,dt$$

<u>*Demonstraţie:*</u> Fie în $\Phi \in E$ subsetul $e = \phi - f$, reprezentând eroarea în aproximarea lui Φ de către polinomul (curba, funcţia) splin f''.

Fie $\mathcal{S}_{1,\tau}$ spaţiul polinoamelor (curbelor, funcţiilor) de gradul I pe $[a,b]$ având punctele de control (nodurile) τ_i; ca urmare C^0 sunt polinoame liniare definite prin părţi şi care îşi schimbă poziţia în punctele τ_i.

Avem:

$$\int_a^b e''(x)\,h(x)\,dx = 0, \text{pentru } \forall\, h \in \mathcal{S}_{1,\tau}\,.$$

<u>*Demonstraţie*</u>. Integrând prin părţi obţinem

$$\int_a^b e''(x)\,h(x)\,dx = \sum_{i=0}^{l-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} - e''(x)\,h(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} \left((e'(x)\,h(x))\right|_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e'(x)\,h'(x)$$

Dar în acelaşi timp avem

$$\sum_{i=0}^{l-1} e'(b)\,h(b) - e'(a)\,h(a) = 0$$

Deoarece: $e'(a) = e'(b) = 0$ prin definiţie, iar

$$\sum_{i=0}^{l-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e'(x)\,h'(x) = \sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i \left(e(\tau_{i+1}) - e(\tau_{i+1})\right)$$

dacă $h'(x) = \lambda,$ pentru $x \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, avem: $e(\tau_{i+1}) = 0$ din definiţia lui $f(\tau_i) = \phi(\tau_i)$, unde: $(0 \le i \le l)$.

Fie $\phi \in E$ şi $e = \phi - f$, atunci obţinem:

$$\int_a^b (\phi'')^2 = \int_a^b (e'' + f'')^2 = \int_a^b (e'')^2 + \int_a^b (f'')^2 + 2\int_a^b (e'')(f'')$$

Deoarece $f \subset \mathcal{S}_{3,\tau}, \exists f'' \in \mathcal{S}_{1,\tau}$ şi deci $\int_a^b (e'')(f'') = 0$ prin lema de mai sus.

De asemenea, $\int_a^b \phi''^2 \ge \int_a^b (f'')^2$, pentru egalitatea $\phi'' = f''$.

Deoarece $\int_a^b (e'')^2 = 0$ rezultă $e'' = 0$, unde e'' este continuu, ceea ce implică $\phi = f$, dacă $l \ge 1$ şi deoarece ϕ şi f satisfac relaţiile:

$$\begin{cases} \phi'(\alpha) = f'(\alpha) \\ \Phi'(\beta) = f'(\beta) \\ \Phi'(\tau_i) = f(\tau_i) \end{cases}$$

Este posibilă generalizarea funcţiilor de mai sus considerând spaţiul $\mathcal{P}_{k,\tau,r}$, astfel încât:

a) k să ia orice valori – nu neapărat 3;
b) funcţiile vor fi de clasă C^{r_j-1} în punctele τ_i $[1 \le i \le (l-1)]$, cu $r_i \le k$ şi nu neapărat $r_i = k$.

Ori aceste generalizări conduc la obţinerea polinoamelor (curbelor) B-spline şi care vor fi tratate în capitolele următoare.

5.7. Polinoame spline folosite la modelarea geometrică

În capitolele anterioare în care s-a dezvoltat interpolarea şi aproximarea geometrică în modelarea polinoamelor (curbelor) s-a arătat că utilizarea acestor metode la un număr mare de puncte date este inadecvată. Pe de altă parte, creşterea gradului polinomului de interpolare, în loc de a mări fidelitatea modelării faţă de punctele iniţiale, măreşte instabilitatea modelului, introducând oscilaţii nedorite, în special la un număr mare de puncte, rezultând valori neadecvate ale numărului de condiţie.

Mici schimbări ale punctelor (nodurilor) conduc la schimbări importante ale polinomului de interpolare $P(x)$ pentru punctele intermediare $x \ne x_i$, dar şi la oscilaţii pronunţate ale polinomului de interpolare între punctele (nodurile) date. Acesta a condus la generarea unor noi tipuri de polinoame care să corespundă mai bine cerinţelor modelării. Astfel de polinoame (curbe) sunt polinoamele (curbele) spine şi care şi–au găsit o largă aplicare, nu numai în modelarea geometrică, dar şi în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale.

Definiţie. Fie $\Delta = \{x_0, x_1, \dots x_{l+1}\}$ intervale de $(l+2)$ puncte (noduri) distincte:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{l+1} = b$$

O curbă splină de gradul $k+1$ (numită şi de ordinul k) relativ la Δ este o curbă $\mathcal{s} \in C^{k-2}[a,b]$ şi care pentru fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, pentru $i = 0, 1, \dots . l$

coincide cu polinomul $s_i \in P_{k-1}$ de grad relativ $\leq (k-1)$. Polinomul format din splin de grad $(k-1)$ relativ la Δ se notează cu $S_{k,\Delta}$.

Printre cele mai utilizate funcţii spline (curbe) se remarcă polinoamele (curbele) spline liniare de ordinul $k = 2$ şi polinoamele (curbele) spline cubice $k = 4$.

În principiu:

- Polinoamele (curbele) spline liniare sunt funcţii liniare (părţi) de diferite orientări, ataşate una altuia pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, pentru $i = 0, 1, \dots, l$.
- Polinoamele (curbele) splin cubice reprezintă curbele de diferite orientări şi care, una în continuarea altora, oscilează înglobând punctele (nodurile) date.

Este clar că $S_{k,\Delta}$ reprezintă un vector în spaţiul real $\mathbb{R}^k$ şi care în particular conţine toate polinoamele de grad $\leq (k-1)$ ale lui $P_{k-1} \subset S_{k,\Delta}$.

Prin urmare puterile (trunchiate) de gradul k ale lui x_i sunt:

$$(x - x_i)_+^k := \begin{cases} (x - x_i)^k, \text{dacă } x \geq x_i \\ 0, \text{dacă } x < x_i \end{cases}$$

conţinute în $S_{k,\Delta}$. Aceste puteri, împreună cu monoamele $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$ formează o bază a lui $S_{k,\Delta}$ şi care ne conduce la următoarea teoremă:

Teoremă. Monoamele şi puterile trunchiate ale spaţiului spline $S_{k,\Delta}$ formează o bază vectorială $\mathcal{B}$:

$$B := \left\{1, x, x^2, .. x^{k-1}, (x - x_1)_+^{k-1}, (x - x_2)_+^{k-1}, \dots, (x - x_l)_+^{k-1}\right\}$$

În particular, dimensiunea lui $S_{k,\Delta}$ este:

$$\dim S_{k,\Delta} = k + 1,$$

<u>*Demonstraţie.*</u> Pentru început arătăm că $\mathcal{B}$ are cel mult $(k + l)$ grade de libertate în spaţiul spline $s \in S_{k,\Delta}$. Pe intervalul $[t_0, t_1]$ se poate alege orice polinom de grad $\leq (k-1)$; acesta are k parametrii liberi. Din această cerinţă de continuitate impusă lui $s \in S_{k,\Delta}$, polinoamele formate pe intervalele $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_l, x_{l+1}]$ sunt determinate de precedesor până la parametrul l.

Dar, aşa cum s-a arătat mai sus funcţiile $(k + l)$ rămase sunt liniar independente în $\mathcal{B}$.

Pentru a continua demonstraţia, considerăm $s(x)$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^{l} c_i (x - x_i)_+^{k-1} = 0, \text{pentru } \forall x \in [a, b]$$

şi formula funcţiilor liniare $G_i(f)$:

$$G_i(f) := \frac{1}{(k-1)!}\left(f^{(k-1)}(x_i^+) - f^{(k-1)}(x_i^-)\right)$$

care se aplică lui $s(x)$. Mai sus s-a introdus $f(x^+)$ şi $f(x^-)$ ca limită stînga şi respectiv dreapta a lui f pentru $\forall\, i = 0, 1, \dots . l$.

Rezultă că avem:

$$0 = G_i(s) = G_i\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j\right) + \sum_{j=1}^{l} c_i G_i\left(x - x_j\right)^{k-1} = c_j .$$

Dar

$$G_i\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j\right) = 0 \text{ şi fie } G_i\left(x - x_j\right)_+^{k-1} = \delta_{ij}$$

şi încă

BUPT

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i = 0, \text{pentru } \forall\, x \in [a, b] \text{ şi deci:}$$

$$a_0 = a_1 = \cdots a_{k-1} = 0$$

Pe de altă parte, definiţia bazei $\mathcal{B}$ a lui $S_{k,\Delta}$ prezintă unele dezavantaje:

- Elementele bazei $\mathcal{B}$ nu sunt elemente locale, x_j aparţinând întregului spaţiu $\mathbb{R}$.
- Puterile trunchiate $(X - x)^k$ sunt dependente de nodurile x_i, x_{i+1}.

Aceasta ne conduce la observaţia că evaluarea curbelor spline în reprezentarea:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^{l} c_i\, (x - x_i)_+^{k-1}$$

nu răspunde adecvat evoluţiei perturbaţilor coeficienţilor C_i. În plus coeficienţii a_i şi c_i nu au semnificaţie geometrică – spre deosebire de **punctele Bezier** b_i.

Rezultă că este necesară construirea unei baze pentru spaţiul splin $S_{k,\Delta}$ care să aibă cel puţin proprietăţile pe care **polinoamele lui Bernstein** le au pentru P_k.

Pentru a obţine aceasta definim o funcţie caracteristică recursivă $\chi_{[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]}$ pentru $x \in [\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$, unde: $i = 0, 1, \dots, n-k$ şi care ne conduce la capitolul următor.

5.7.1. Polinoame (curbe) B-spline[4] folosite la modelarea geometrică

Definiţie: Fie $\tilde{x}_1 \le \tilde{x}_2 \dots \le \tilde{x}_n$ o succesiune arbitrară de noduri. Numim B-spline funcţiile $N_{i,k}(x)$ de ordin k, pentru $k = 0, 1, \dots, n$ şi $i = 0, 1, \dots, n-k$. Acestea sunt recursiv definite prin:

$$N_{i,1}(x) := \chi_{[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]}(x) = \begin{cases} 1, \text{dacă: } \tilde{x}_i \le x \dots \le \tilde{x}_{i+1} \\ \quad 0, \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(x) := \frac{t - \tilde{x}_i}{\tilde{x}_{i+k+1} - \tilde{x}_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{\tilde{x}_{i+k} - x}{\tilde{x}_{i+k} - \tilde{x}_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x)$$

unde $N_{i,1}(x)$ numită **funcţie caracteristică** este nulă, dacă nodurile coincid:

$$N_{i,1}(x) := \chi_{[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]}(x) = 0, \text{dacă } \tilde{x}_i = \tilde{x}_{i+1}.$$

Ca urmare termenii corespunzători sunt omişi în funcţia $N_{i,k}(x)$, numită şi relaţie de recurenţă. Aceasta ne arată că şi în cazurile când nodurile coincid, funcţiile B–spline sunt definite şi reprezentate de cele două relaţii de mai sus.

Ca urmare $N_{i,k}(x) = 0$, dacă $\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i+1}$ şi care rezultă din recursivitatea de mai sus.

În plus rezultă următoarele proprietăţi ale funcţiilor B – spline:

I. $sup\, N_{i,k}(x) \subset [\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+k}]$,
II. $N_{i,k}(x) \ge 0, \text{pentru } \forall\, x \in \mathbb{R}^+ P(\text{ne} - \text{negativ})$
III. $N_{i,k}(x)$ este un polinom de grad $\le k-1$, relativ la intervalele $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$.

Pentru a obţine noi proprietăţi ale funcţiilor (curbelor) B–spline reprezentăm aceste funcţii ca o aplicaţie a k diferenţe a lui $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$ corespunzătoare puterilor trunchiate $f(s) = (s - \tilde{x}_i)_+^{k-1}$.

Lemă. Dacă $\tilde{x}_i < \tilde{x}_{i+k}$ atunci funcţia B-splin $N_{i,k}(x)$ satisface relaţia:

$$N_{i,k}(x) = (\tilde{x}_{i+k} - \tilde{x}_i)[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots \tilde{x}_{i+k}](\bullet - x)_+^{k+1}.$$

[4] Numele complet este Basis spline în engleză.

Demonstraţie. Dacă $k = 1$, obţinem pentru partea dreaptă a expresiei:

$$(\tilde{x}_{i+k} - \tilde{x}_i)[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}], (\bullet - x)_+^{k+1} = (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i)\frac{(\tilde{x}_i - x)_+^0 - (\tilde{x}_{i+1} - x)_+^0}{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1})} =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{daca } \tilde{x}_i \le x \le \tilde{x}_{i+1} \\ 0, \text{în caz contrar} \end{cases}.$$

Folosind formula lui Leibnitz pentru:

- $g, h \in C^n$ şi
- $t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n$, o succesiune arbitrară de puncte (noduri) obţinem:

$$[t_0, t_1, \dots, t_n]\, g\, h = \sum_{i=0}^{n} [t_0, t_1, \dots, t_i]\; g\, [t_i, t_{t+1}, \dots, t_n]\, h.$$

Se poate verifica că partea dreaptă satisface şi relaţia de recurenţă: dacă un polinom (curbă) de gradul n în $\mathbb{R}^d$ este funcţie de P de forma: $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ atunci:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i, \text{pentru } a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}^d, a_n \neq 0.$$

Ca urmare, corolarul de mai sus se demonstrează inductiv:

Corolar. Dacă $\tilde{x}_j$ este al m-lea punct (nod) şi:

1. $\tilde{x}_{j-1} < \tilde{x}_j = \cdots = \tilde{x}_{j+m-1} < \tilde{x}_{j+m}$,

atunci în poziţia $\tilde{x}_j$, polinomul (curba) B – splină $N_{i,k}(x)$ este cel puţin de $(k - 1 - m)$ ori continuu diferenţială. Derivata lui $N_{i,k}(x)$ satisface relaţia:

2. $\left(N_{i,k}\right)'(x) = (k-1)\left[\frac{N_{i,k}(x)}{\tilde{x}_{i+k-1} - \tilde{x}_i} - \frac{N_{i+k,k-1}(x)}{\tilde{x}_{i+k-1} - \tilde{x}_{i+1}}\right]$,

Demonstraţie. Afirmaţia 1. rezultă din faptul că intervalele $[\tau_i, \tau_{i+1}, \dots \tau_{i+k}]$ conţin cel puţin o derivată a funcţiei f în punctul τ_i. Pe de altă parte puterea (trunchiată) $f(s) = (s - \tau_i)_+^{k-1}$ este de $(k-2)$ ori continuu diferenţiabilă.

Afirmaţia 2. rezultă din:

$$\left(N_{i,k}\right)'(x) = -(k-1)(\tau_{i+k} - \tau_i)[\tau_i, \tau_{i+1}, \dots \tau_{i+k}](\cdot - \mathrm{x})_+^{\mathrm{k}-2} =$$

$$= -(k-1)(\tau_{i+k} - \tau_i)\left\{\frac{[\tau_{i+1}, \tau_{i+2} \dots \tau_{i+k}](\bullet - x)_+^{k-2} - [\tau_i, \tau_{i+1}, \dots \tau_{i+k-1}](\bullet - x)_+^{k-2}}{(\tau_{i+k} - \tau_i)}\right\} =$$

$$= (k-1)\left[\frac{N_{i,k}(x)}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(x)}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}}\right].$$

Revenind la spaţiul $S_{k,\Delta}$ al curbelor spline de ordinul k referitoare la intervalele:

$$\Delta = \{t_j\}_{j=0,1,,\dots,l+1}, j = 0, 1, \dots, l+1$$

obţinem:

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{l+1} = b.$$

Pentru a construi baza de transformare, asigurăm lui Δ secvenţa extinsă de puncte (noduri): $T = \{\tau_j\}_{j=1,2,\dots,n+k}$, unde nodurile de frontieră (margini) $a = x_0$ şi $b = x_{l+1}$ sunt considerate de k ori, adică:

$$\begin{array}{ccccccccc} \Delta: a = & x_0 & < & x_1 & < \cdots < & x_{l+1} = b & & & \\ & \| & & \| & & \| & & & \\ T: \tau_1 = \cdots = & \tau_k & < & \tau_{k+1} & < \cdots < & \tau_{n+1} & = \cdots = & \tau_{n+k} & \end{array}$$

şi unde $n = l + k = \dim S_{k,\Delta}$ este dimensiunea spaţiului curbelor B-spline $S_{k,\Delta}$.

Considerăm"n" B–spline curbe $N_{i,k}$ pentru $i = 0, 1, \dots, n$ şi care corespunde secvenţei extinse de puncte (noduri) $T = \{\tau_j\}_{j=1,2,\dots,n+k}$. Vom arata că aceasta formează o bază a spaţiului curbelor spline $S_{k,\Delta}$.

Pentru aceasta, pornim de la corolarul de mai sus din care rezultă că cele $N_{i,k}$ curbe spline sunt de fapt curbele spline de ordinul k:

$$N_{i,k} \in S_{k,\Delta} \text{ pentru } \forall\, i = 1, 2, \dots n.$$

Deoarece numărul ”n”cu dimensiunea lui

$$n = \dim \int_{k,\Delta},$$

atunci ne mai rămâne să arătăm doar linear independenţa bazei spaţiului curbelor spline $S_{k,\Delta}$. Pentru a arăta aceasta ne folosim de **identitatea lui Marsen**:

Lemă: Pentru $\forall\, x \in [a, b]$ şi $s \in P^d$ avem:

$$(x - s)^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,k}(s) N_{ik}(x)$$

şi unde:

$$\varphi_{i,k}(s) := \prod_{j=1}^{k-1} (\tau_{i+j} - s)$$

<u>Demonstraţie</u>. Folosim metoda inducţiei, deoarece din definiţia curbelor B–spline rezultă că acestea sunt recursive.

- Pentru $k = 1$, afirmaţia este evidentă deoarece:
  $1 = \sum_{i=1}^{n} N_{i_1}(x)$ pentru $\forall\, l \le k-1$.
- Pentru $k > 1$ presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $\forall\, l \le k-1$.

Ne reamintim definiţia polinoamelor (curbelor) de gradul n în P^d ca funcţie de P sub forma (recurentă):

$$\mathrm{P}: \mathbb{R} \to P^d,\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \text{ pentru } a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}^d, a_n \neq 0.$$

Introducând această relaţie de recurenţă în partea dreaptă a lemei de mai sus obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,k}(s) N_{i,k}(x) = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{x - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} \varphi_{i,k}(s) + \frac{\tau_{i+k-1} - x}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} \varphi_{i-1,k}(s) \right) N_{i,k-1}(s)$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-2} (\tau_{i+j} - s) \left[\frac{x - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} (\tau_{i+k-1} - s) + \frac{\tau_{i+k-1} - x}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} (\tau_i - s) N_{i,k-1}(x) \right] =$$

$$= (t - s) \sum_{i=2}^{n} \varphi_{i,k-1}(s) N_{i,k-1}(x) = (t - s)(t - s)^{k-2} = (t - s)^{k-1},$$

expresie care este interpolarea liniară a lui $(t - s)$, adică chiar însăşi $(t - s)$.

Corolar. Spaţiul $P_{k-1}[a, b]$ al polinoamelor de grad $\le k-1$ pe $[a, b]$ este conţinut în spaţiul curbelor spline de ordinul k.

$$P_{k-1}[a, b] \subset S_{n,k} \text{ unde: } S_{n,k} = (N_{1,k}, N_{2,k}, \dots N_{n,k}).$$

În particular:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} N_{i,k}(x), \text{pentru } \forall\, x \in [a, b]$$

şi ca urmare curbele B–spline însumate sunt egale cu 1 pe $[a, b]$.

<u>*Demonstraţie.*</u> Pentru a “l” derivată a funcţiei $f(s) := (x - s)^{k-1}$ din **identitatea lui Marsen**, rezultă:

$$f^{(l)}(0) = (k-1)\dots(k-l)(-1)^l x^{k-l-1} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,k}{}^{(l)}(0) N_{i,k}(x)$$

şi deci pentru: $m = k - l - 1$, obţinem:

$$x^m = \frac{(-1)^{k-m-1}}{(k-1)\dots(m+1)} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,k}{}^{(k-m-1)}(0)\, N_{i,k}(x).$$

Derivata lui $\Phi_{i,k}$ de ordinul $(k-1)$ satisface relaţia:

$$\Phi_{i,k}^{(k-1)}(s) = \left[\prod_{j=1}^{k-1}(\tau_{i+j} - s)\right]^{(k-1)} = [(-1)^{k-1} s^{k-1} + \cdots]^{k-1} = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

ceea ce demonstrează a doua propoziţie a lemei de mai sus.

După toate aceste pregătiri putem acum demonstra liniar independenţa polinoamelor (curbelor) B–spline şi anume ca ele sunt "local" independente, aşa cum arată teorema de mai jos:

Teoremă. Polinoamele (curbele) B–spline $N_{i,k}(x)$ sunt "local" independente dacă:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\ N_{i,k}(x) = 0 \text{ pentru } \forall\, x \in (c,d) \subset [a,b] \text{ şi }]\,c,d\,[\ \cap\ ]\,\tau_i, \tau_{i+k}\,[\ \neq \phi$$

atunci $c_i = 0$.

<u>Demonstraţie</u>. Presupunem că intervalul deschis (c, d) nu conţine nici unul din punctele (nodurile) x_i [dacă le-ar conţine, vom descompune intervalul deschis (c, d) în subintervale].

Conform corolarului de mai sus, fiecare polinom de grad $\le k-1$ din intervalul deschis (c, d) poate fi reprezentat de polinoamele (curbele) spline $N_{i,k}(x)$. Rezultă că ele sunt **liniar independente.**

Rezumând cele de mai sus, am arătat că polinoamele (curbele) B–spline $N_{i,k}(x)$ de ordinul k referitoare secvenţelor punctelor (nodurilor) $T = \{\tau_j\}_{j=1,2,\dots,n+k}$ formează o bază **liniar independentă** $BB := \{N_{1,k}, N_{2,k}, \dots N_{n,k}\}$ a spaţiului polinoamelor (curbelor) splin $S_{k,\Delta}$, care sunt local liniar independente formând totodată o partiţie a vectorului unitar.

Rezultă că fiecare polinom (curbă) splin $s \in S_{k,\Delta}$ este o reprezentare unică ca o combinaţie liniară de forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n} d_i\ N_{i,k}(x),$$

unde coeficienţii d_i se numesc nodurile (punctele) s ale lui **de Boor**. Valorile funcţiilor $s(x)$ sunt deci combinaţii convexe ale funcţiilor d_i ale lui **de Boor**.

Pentru a le calcula putem folosi definiţia recursivă a polinoamelor (curbelor) B–spline $N_{i,k}(x)$ şi derivatele relaţiei de recurenţă pentru combinaţia liniară.

Remarcă. Folosind **identitatea lui Marsen** se poate obţine explicit baza duală $\boldsymbol{\mathcal{B}}$:

$\boldsymbol{\mathcal{B}} := \{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{n,}\}$ a polinoamelor (curbelor) B–spline de bază duală $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ şiB

$$\nu_j : S_{k,\Delta} \to \mathbb{R}^d \text{ liniar cu } \nu_j(N_{i,k}) = \delta_{i,j}.$$

Mai mult se poate arăta că $\exists$ o constantă $\mathcal{D}_k$ care depinde doar de ordinul k, astfel încît:

$$\mathcal{D}_k \max_{j=1,2,\dots n} |d_j| \le \left\| \sum_{j=1}^{n} d_j\ N_{j,k}(x) \right\|_\infty \le \max_{j=1,2,\dots n} |d_j|,$$

unde a doua inegalitate rezultă din faptul că polinoamele (curbele) B–spline formează vectorul unitate. Ca urmare, valorile polinoamelor (curbelor) B–spline sunt:

$$s = \sum_{i=1}^{n} d_i \ N_{i,k}\,(x)$$

şi unde coeficienţii lor pot fi estimaţi.

5.7.2. Calculul polinoamelor (curbelor) B–spline folosind metoda interpolării.

Fie dată funcţia f şi intervalele: $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{l+1}\}$ astfel încât :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_k < x_{l+1} = b.$$

În cazul **liniar** $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$, numărul $(l+2)$ al nodurilor (punctelor) coincide cu dimensiunea spaţiului $n = \dim S_{2,\Delta} = l + k$. Curbele liniar independente B–spline $N_{i,2}$ corespunzătoare secvenţei extinse de noduri:

$$T := \{\tau_1 = \tau_2 < \cdots < \tau_{n+2} = \tau_{n+1}\} \text{ cu } \tau_j = \tau_{j-2} \text{ pentru } j = 2, 3, \dots, n,$$

satisfac relaţia: $N_{i,2}\,(x_j) = \delta_{j+1,i}$.

Deci polinoamele B – splin $\mathrm{I}_2 f \in S_{2,\Delta}$, formate din părţi care interpolează f sunt unic determinate de:

$$\mathrm{I}_2 f = \sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1}) \ N_{i,2}\,(x),$$

Cazul $\boldsymbol{k} = \mathbf{4}$ corespunde polinoamelor (curbelor) B–spline cubice şi care sunt preferate în cazul diverselor aplicaţii. În acest caz, dimensiunea spaţiului $n = \dim S_{4,\Delta}$, iar numărul de noduri este $= l + k - l - 2 = 2$.

Dacă se pune problema construirii polinoamelor (curbelor) spline se va alege o variantă cât mai "adaptabilă ", cu o curbură cât mai apropiată de funcţia dată. Pentru o curbă y:

$y \in C^2\,[a, b]$ şi $x \in [a, b\,]$, curbura este dată de relaţia:

$$k\,(x) := \frac{y''\,(x)}{[1 + y'\,(x)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Valoarea absolută a curburii este de fapt $\frac{1}{r}$, unde r este raza cercului în punctul de curbură $(x, y\,(x))$. Ca urmare curbura este zero dacă şi numai dacă cercul are raza $r \to \infty$ şi deci curba este lineară.

Pentru a simplifica formula de mai sus considerăm o aproximaţie acceptabilă:

$$k\,(x) := \frac{y''\,(x)}{(1 + y'\,(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y''\,(x)$$

şi ca atare măsura curburii întregii curbe este dată de norma:

$$\| y'' \|_2 = \left[\int_a^b y''\,(x)^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

De remarcat că polinoamele (curbele) spline de interpolare minimizează această normă.

Teoremă. Fie s curba splină de interpolare în punctele (nodurile): $a = x_0 < x_1 < \cdots x_k \cdots < x_{l+1} = b$ şi fie $y \in \mathrm{C}^2\,[a, b]$ o funcţie care interpolează funcţia f, astfel încât :

$$[s\,(x)''\,(y\,(x)' - s\,(x)')]\Big|_{x-a}^{b} = 0$$

atunci:

$$\| s'' \|_2 \leq \| y'' \|_2,$$

Demonstraţie. Înlocuind $y'' = s'' + (y'' - s'')$ în partea dreaptă a relaţiei de mai sus obţinem:

$$\int_a^b (y'')^2\, dx = \int_a^b (s'')^2\, dx = 2\int_a^b s''(y'' - s'')^2\, dx + \int_a^b (y'' - s'')^2\, dx$$
$$\geq \int_a^b (s'')^2\, dx\,.$$

Al doilea termen devine zero prin integrare deoarece:

$$\int_a^b s''(y'' - s'')^2\, dx = [s''(y' - s')]\Big|_a^b - \int_a^b s'''(y' - s')\, dt,$$

unde s''' este în general discontinuu în nodurile: $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ şi constant, iar $s'''(x) = s_i'''(x) = d_i$, pentru $x \in (x_i, x_{i+1})$ în interiorul subintervalelor ale lui s_i şi care sunt polinoame (curbe) cubice.

Deci:

$$\int_a^b s''(y'' - s'')\, dx = -\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} d_i\,(y' - s_i')\, dx = -\sum_{i=1}^{n} d_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (y' - s_i')\, dx =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} d_i\,\left[\big(y(x_i) - s(x_i)\big) - y(x_{i+1}) - s(x_{i-1}))\right] = 0 - 0 = 0$$

Corolar. În plus faţă de condiţiile de interpolare: $s(x_i) = f(x_i)$, presupunem că polinoamele (curbele) spline cubice $s \in S_{4,\Delta}$ satisfac următoarele condiţii de frontieră (margine):

I. $s'(a) = f'(a)$ şi $s'(b) = f'(b)$

II. $s''(a) = s''(b) = 0$

III. $s'(a) = s'(b)$ şi $s''(a) = s''(b)$, dacă f este periodic având perioada $(b - a)$,

atunci există o soluţie unică $s \in S_{4,\Delta}$ care satisface condiţiile de frontieră (margine), iar o funcţie arbitrară de interpolare $y \in C^2[a, b]$ care satisface condiţiile de frontieră (margine) satisface şi relaţia:

$$\| s'' \|_2 \leq \| y'' \|_2.$$

Demonstraţie. Prin ipoteză polinoamele considerate sunt liniare în s şi numărul lor de condiţie coincide cu dimensiunea $n = l + 4$ al spaţiului polinoamelor B'- spline $S_{4,\Delta}$. Este suficient în a arata că soluţia trivială $s \equiv 0$ este singura soluţie pentru funcţia nulă $f \equiv 0$.

Deoarece $y \equiv 0$, aceasta satisface toate condiţiile impuse de teorema precedentă, ceea ce implică:

$$\| s'' \|_2 \leq \| y'' \|_2 = 0$$

Deoarece s'' este continuu, $s''' \equiv 0$. Deci s este continuu diferenţiabilă şi fiind definită prin părţi, ca funcţii liniare ce au $s(x_i) = 0$, rezultă că f este funcţia nulă.

Cele trei propoziţii I., II., III., ale corolarului de mai sus definesc proprietăţile polinoamelor (funcţiilor, curbelor) B–spline, adică polinomul cubic B–spline de interpolare este complect şi respectiv periodic.

Interpretarea fizică a acestor propoziţii a făcut ca aceste proprietăţi să fie asemănate "florarului"[5]. Dacă $y(x)$ descrie poziţia "florarului", atunci expresia:

$$E = \int_a^b \left[\frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^2 dx$$

[5] spline (eng.)

măsoară deformaţia "florarului". Aplicând **principiul lui Hamilton** pentru a minimiza poziţia " florarului", atunci deformaţiile ce apar faţă de curba iniţială sunt aproximate de formula:

$$E \approx \int_a^b (y''(x))^2 \, dx = \| y'' \|^2.$$

Deci polinomul de interpolare cubic B–spline $\mathcal{s} \in S_{4,\Delta}$ descrie aproximativ po-ziţia "florarului"care trebuie să treacă prin punctele (nodurile) x_i. Pentru o mai mare precizie, s-au impus condiţii adiţionale la nodurile marginale şi care corespund situaţiei când acestea sunt cuprinse în intervalul $[a, b]$.

În mod asemănător, s-au impus condiţiile de continuitate, când polinoamele (curbele) au fost definite prin părţi ale căror margini s-au impus a fi continue. Adică funcţia I_4: $f \in S_{4,\Delta}$ numită polinomul (curba) splin ce interpolează complet funcţia de ordinul 4; $f \in \mathrm{C}^4[a, b]$ satisface relaţia:

$$h := \max_{i=0,1,\dots l} | x_{i+1} - x_i |$$

şi care este cea mai mare distanţă între punctele (nodurile) x_i. În plus:

$$\| f - \mathrm{I}_4 f \|_\infty \leq \frac{5}{384} h^4 \left\| f^{(4)} \right\|_\infty$$

şi care ne arată că această estimare este independentă de poziţia punctelor (nodurilor) x_i, formulă datorată lui **Hull şi Meye**r (Hall, 1976).

Condiţia de continuitate a lui $\mathcal{s}$ implică faptul că:

$$b_{3i} = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} b_{3i-1} + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} b_{3i+1}$$

şi care sunt **puncte (noduri) de Boor** astfel încât:

$$b_{3i+2} = -\frac{h_i}{h_{i-1}} d_i + \frac{h_{i-1} + h_i}{h_{i-1}} b_{3i+1}$$

$$b_{3i-2} = \frac{h_{i-1} + h_i}{h_i} b_{3i-1} - \frac{h_{i-1}}{h_i} d_i.$$

Grafic, acesta înseamnă că segmentele de dreaptă (b_{3i-2}, d_i) şi (d_i, b_{3i+2}) sunt divizate cu raţia $\frac{h_{i-1}}{h_i}$ de căte **punctele Bezier** b_{3i-1} şi respectiv b_{3i+1}. Or aceasta implică faptul că :

$$b_{3i+1} = \frac{h_i + h_{i+1}}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} d_i + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} d_{i+1}$$

$$b_{3i-1} = \frac{h_{i-2} + h_{i-1}}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i} d_i + \frac{h_i}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i} d_{i-1}.$$

Dacă definim condiţiile de frontieră:

$$h_{-1} := h_{l+1} := 0$$

şi

$$d_0 := b_1,\ d_{-1} := b_0, d_{l+1} := b_{3l+2},\ d_{l+2} := b_{3(l+1)}$$

atunci coeficienţii b_{3i+j} a lui **Bezier** şi deci întreaga curbă splină este complet determinată de $l + 4$ puncte de la d_{-1} la d_{l+2} şi de ecuaţiile de mai sus.

Adăugând condiţiile de interpolare

$$f_i = \mathcal{s}(x_i) = b_{3i}, \text{pentru } l = 0, 1, 2, \dots (l + 1)$$

şi condiţiile de frontieră

$$d_{-1} := f_0 \text{ şi } d_{l+2} = f_{l+1},$$

punctele $d_0, d_1, \dots d_{l+1}$ ale poligonului de interpolare trebuie să satisfacă următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & & . & . & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & . & . & . \\ & \vdots & . & . & . & . & . \\ & & & . & . & . & . \\ & & & & \alpha_l & \beta_l & \gamma_l \\ & & & & & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ . \\ . \\ d_l \\ d_{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ (h_0 - h_1)f_1 \\ (h_1 - h_2)f_2 \\ . \\ (h_{l-1} - h_l)f_l \\ b_{3l+2} \end{bmatrix}$$

cu soluţiile:

$$\alpha_i := \frac{h_i^2}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i},$$
$$\beta_i := \frac{h_i(h_{i-2} + h_{i-1})}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i} + \frac{h_{i-1}(h_i + h_{i+1})}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}},$$
$$\gamma_i := \frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}};$$

mai rămânând de determinat **punctele (nodurile) Bezier** b_1 şi b_{3l+2} din condiţiile de frontieră.

Prin interpolarea polinoamelor (curbelor) splin (I) obţinem:

$$f_0' = s'(a) = \frac{3}{h_0}(b_1 - b_0) \text{ şi } f_{l+1}' = s'(b) = \frac{3}{h_l}(b_{3(l+1)} - b_{3l+2})$$

unde

$$b_1 = \frac{h_0}{3} f_0' + f_0 \text{ şi } b_{3l+2} = -\frac{h_l}{3} f_{l+1}' + f_{l+1}.$$

Pentru condiţii de frontieră naturale (II) trebuie să alegem b_1 şi b_{3l+2} astfel încât

$$s''(a) = s''(b) = 0$$

şi care sunt satisfăcute pentru

$$b_1 := b_0 = f_0 \ si \ b_{3l+2} := b_{3(l+1)} = f_{l+1},$$

ceea ce ne conduce la două remarci finale.

Remarcă I. Pentru un caroiaj echidistant, de exemplu $h_i = h$ pentru $\forall a_i$, avem:

$$\alpha_i = \gamma_i = \frac{h}{3} \ si \ \beta_i = \frac{4h}{3} \text{ pentru } i = 2,3, \dots . l - 1.$$

În acest caz matricea este strict diagonală şi poate fi rezolvată uşor de exemplu prin eliminare gaussiană şi fără a fi necesară schimbarea coloanelor.

Remarcă II. **Punctele de Boor** d_i sunt de fapt coeficienţii polinomului de interpolare B–spline cubice.

$$s = \sum_{i=1}^{l+4} d_{i-2} N_{i_4},$$

unde N_{i_4} sunt curbele B–spline pentru secvenţa de puncte (noduri) extinsă $T = \{\tau_j\}$.

5.8. Suprafeţe spaţiale şi volume utilizate în modelarea geometrică

În capitolele precedente s-au prezentat tehnici şi metode de utilizare a **polinoamelor (curbelor)** în modelarea geometrică.

Pasul următor îl reprezintă studiul **suprafeţelor spaţiale şi a volumelor** utilizate în modelarea geometrică şi care are o importanţă deosebită în modelare, deoarece orice obiect în spaţiu poate fi reprezentat şi construit prin suprafeţele sale spaţiale ce îl definesc.

Metoda de abordare a acestei probleme constă în a extinde în spaţiu tehnicile şi metodele utilizate în cadrul studiului polinoamelor (curbelor).

În practică se folosesc îndeosebi suprafeţele reprezentate:

- explicit sub forma $z = f\,(x, y)$ sau
- implicit sub forma $F\,(\,x, y, z\,) =\ 0$.

Formele parametrice se folosesc îndeosebi la suprafeţe sau curbe pe suprafeţe definite prin puncte de control (noduri).

Pentru a generaliza tehnicile şi metodele folosite pentru polinoame (curbe) se porneşte de la definiţia unui polinom (curbă):

$$\mathrm{X}\,(\,u\,) = \sum_{i=0}^{n} C_i\ F_i\,(\,u\,) \text{ definit în } \mathbb{R}^2 \text{ sau } \mathbb{R}^3$$

şi unde: $F_i\,(\,u\,)$ sunt functii de bază similare celor studiate anterior.

Dacă deplasăm aceste funcţii în spaţiu, presupunând că $\mathrm{X}\,(\,u\,)$ permite deformaţii, atunci această deplasare poate fi descrisă introducând un nou parametru v sub forma:

$$C_i\,(\,v\,) = \sum_{k=0}^{m} A_{i_k}\ G_k\,(\,v\,)$$

Rezultă suprafaţa:

$$\mathrm{X}\,(\,u, v\,) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} A_{i_k}\, F_i\,(\,u\,)\, G_k\,(\,v\,)$$

şi care este o suprafaţă bipolinomială definită de cele două polinoame $F_i\,(\,u\,)$ şi $G_k\,(\,v\,)$, funcţie de doi parametrii $(\,u, v\,)$ (în general un domeniu rectangular) şi unde $a\ \le u\ \le b, c\ \le v\ \le d$. Suprafaţa bipolinomială mai poartă denumirea de suprafaţă produs – tensională.[6]

Dacă funcţiile de definiţie (de bază) $F_i\,(\,u\,)$ şi $G_k\,(\,v\,)$ se aleg ca monoame, atunci suprafaţa bipolinomială are forma:

$$\mathrm{X}\,(\,u, v\,) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} A_{i_k}\, u^i\, v^k$$

sau matricial:

$$\mathrm{X}\,(\,u, v\,) = \big(\,F_0\,(\,u\,), F_1, (\,u\,)\ \ldots, F_n\,(\,u\,)\big)\begin{pmatrix} A_{00} & \ldots\ldots & A_{0m} \\ . & \ldots\ldots & . \\ A_{n0} & \ldots\ldots & A_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_0\,(\,v\,) \\ \ldots \\ G_m\,(\,v\,) \end{pmatrix}.$$

Problema interpolării (cu condiţia satisfacerii condiţiilor de existenţă):

$$\mathrm{X}\,\big(\,u_j, v_l\,\big) = P_{jl}, \text{unde } j = 0\,(\,1\,)n \text{ şi } l = 0\,(1)\,m$$

conduce la un sistem de ecuaţii matriciale:

$$\underline{X} =\ \underline{F}\,\underline{A}\,\underline{G}$$

şi unde:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} P_{00} & \ldots\ldots & P_{0m} \\ . & \ldots\ldots & . \\ P_{n0} & \ldots\ldots & P_{nm} \end{pmatrix};\ \underline{A} = \begin{pmatrix} A_{00} & \ldots\ldots & A_{0m} \\ . & \ldots\ldots & . \\ A_{n0} & \ldots\ldots & A_{nm} \end{pmatrix}$$

[6] Tensor – product surface (engl.)

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} F_0\,(u_0) & \dots\dots. & F_n\,(u_0) \\ . & \dots\dots. & . \\ F_0\,(u_n) & \dots\dots. & F_n\,(u_n) \end{pmatrix};\ \underline{G} = \begin{pmatrix} G_0\,(v_0) & \dots\dots. & G_n\,(v_m) \\ . & \dots\dots. & . \\ G_0\,(v_m) & \dots\dots. & G_m\,(v_m) \end{pmatrix}.$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii matriciale rezultă:

$$\underline{A} = \underline{F}^{-1}\,\underline{X}\,\underline{G}^{-1}$$

Dacă alegem: $\underline{D} = \underline{A}\,\underline{G}$ atunci: $\underline{X} = \underline{F}\,\underline{D}$. Aceasta ne permite să rezolvăm problema interpolării aplicând metodele prezentate în cadrul polinoamelor (curbelor):

⇒ interpolând în direcţia u pentru toţi k şi apoi

⇒ interpolând în direcţia v pentru toţi i.

Începând cu punctele date P_{jl} şi valorile asociate parametrilor (u_j, v_l), primul pas constă în a determina valorile intermediare $d_i\,(v_l)$ şi care satisfac ecuaţia matricială: $\underline{F}\,\underline{D} = \underline{X}$ sau sub formă extinsă:

$$\begin{pmatrix} F_0\,(u_0) & \dots\dots. & F_n\,(u_0) \\ . & \dots\dots. & . \\ F_0\,(u_n) & \dots\dots. & F_n\,(u_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0\,(v_0) & \dots\dots. & d_n\,(v_m) \\ . & \dots\dots. & . \\ d_n\,(v_0) & \dots\dots. & d_n\,(v_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00} & \dots\dots. & P_{0m} \\ . & \dots\dots. & . \\ P_{n0} & \dots\dots. & P_{nm} \end{pmatrix}.$$

Pasul următor constă în a calcula coeficienţii A_{ik} în funcţie de valorile intermediare $d_i\,(v_l)$ din ecuaţia matricială:

$$\underline{G}^T\,\underline{A}^T = \underline{D}^T$$

sau:

$$\begin{pmatrix} G_0\,(v_0) & \dots\dots. & G_n\,(v_m) \\ . & \dots\dots. & . \\ G_m\,(v_0) & \dots\dots. & G_m\,(v_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} & \dots\dots. & A_{0m} \\ . & \dots\dots. & . \\ A_{n0} & \dots\dots. & A_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0\,(v_0) & \dots\dots. & d_n\,(v_0) \\ . & \dots\dots. & . \\ d_n\,(v_m) & \dots\dots. & d_n\,(v_m) \end{pmatrix}$$

şi care conduce la un sistem de $(n+1)(m+1) \bullet (n+1)(m+1)$ ecuaţii, ceea ce ne permite să reducem problema la a rezolva $(m+1)$ sisteme de ecuaţii a matricei $\underline{F}$ cu coeficienţi ficşi şi de dimensiune $(n+1) \bullet (n+1)$, urmată de rezolvarea a $(n+1)$ ecuaţii a matricei $\underline{G}$ de dimensiune $(m+1) \bullet (m+1)$.

5.9. Suprafeţe de interpolare folosite la modelarea geometrică

Modelarea geometrică a curbelor şi a suprafeţelor în spaţiu necesită utilizarea unor tehnici şi metode de interpolare şi / sau aproximare adecvate acestei probleme. Cunoaşterea lor permite adaptarea tehnicilor de modelare în funcţie de modelul propus a se realiza, ţinând cont că fiecare metodă îşi are domeniul său de aplicabilitate cu avantaje şi dezavantaje specifice. În cele ce urmează se vor studia unele dintre cele mai folosite suprafeţe de interpolare.

5.9.1. Suprafeţe spline bicubice

Considerând P_{ij} puncte de control (noduri) în număr de:

$$(n+1) \bullet (m+1) \Rightarrow (u_j, v_l)$$

ca valori ale parametrilor asociaţi care formează un caroiaj rectangular în (u, v) parametrii plani, se cere să se găsească o suprafaţă splină bicubică a căror bi-polinoame sunt date de relaţia:

$$\mathrm{X}_{i,j}\,(u, v) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{l=0}^{3} A_{ijkl}\,(u - u_i)^k\,(v - v_i)^l\ ,$$

unde $i = 0\,(1)\,\dots.(n-1)$ şi $j = 0\,(1)\,\dots.(m-1)$.

Pentru (i,j) fix, ecuaţia de mai sus reprezintă un caroiaj [7] bicubic şi care interpolează punctele:

$$\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}, P_{i,j+1}\};$$
$$X_{ij}(u_i, v_j) = P_{ij}$$

şi unde derivatele parţiale:

$$\frac{\partial x_{ij}}{\partial u};\ \frac{\partial x_{ij}}{\partial v};\ \frac{\partial^2 x_{ij}}{\partial u \partial v}$$

sunt continue.

Sub formă matricială obţinem:

$$\underline{X} = \underline{U}^T\ \underline{A}\ \underline{V},$$

sau

$$X_{i,j}(u,v) = u^T(u,u_i)\, A_{ij}\, V(v_i, v_j)$$

unde:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij00} & A_{ij01} & A_{ij02} & A_{ij03} \\ A_{ij10} & A_{ij11} & A_{ij12} & A_{ij13} \\ A_{ij20} & A_{ij21} & A_{ij22} & A_{ij23} \\ A_{ij30} & A_{ij31} & A_{ij32} & A_{ij33} \end{bmatrix}$$

şi

$$U(u,u_i) = [1, (u-u_i), (u-u_i)^2, (u-u_i)^3]^T$$
$$V(v,v_i) = \left[1, \left(v-v_j\right), (v-v_j)^2, (v-v_j)^3\right]^T$$

Pentru a găsi coeficienţii A_{ijkl} introducem notaţia:

$$p_{ij} := \frac{\partial}{\partial u} X_{ij}(u_i, v_j),$$
$$q_{ij} := \frac{\partial}{\partial v} X_{ij}(u_i, v_j),$$
$$r_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} X_{ij}(u_i, v_j).$$

Înlocuind în expresia lui $X_{ij}(u_i, v_j)$ de mai sus obţinem:

$$X_{ij}(u_i, v_j) = P_{ij} = A_{ij00},$$
$$\frac{\partial}{\partial u} X_{ij}(u_i, v_j) = p_{ij} = A_{ij10},$$
$$\frac{\partial}{\partial v} X_{ij}(u_i, v_j) = q_{ij} = A_{ij01},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} X_{ij}(u_i, v_j) = r_{ij} = A_{ij11}.$$

Fie $\Delta u_i := u_{i+1} - u_i$ şi $\Delta v_j := v_{j+1} - j$; deci:

$$X_{ij}(u_{i+1}, v_j) = P_{i+1,j} = \left[\left((1, \Delta u_i, (\Delta u_i)^2, (\Delta u_i)^3)\, A_{ij}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial u} X_{ij}(u_{i+1}, v_j) = p_{i+1,j} \left[\left((0, 1, 2\,\Delta u_i, 3\,(\Delta u_i)^2)\, A_{ij}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial v} X_{ij}(u_{i+1}, v_{j+1}) = q_{i,j+1}(1,0,0,0) A_{ij} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\,\Delta v_j \\ 3\left(\Delta v_j\right)^2 \end{pmatrix},$$

[7] Patch (in engl.)

Fie

$$\underline{W_{ij}} := \begin{pmatrix} p_{i,j}\ q_{i,j}\ p_{i,j+1}\ q_{i,j+1} \\ p_{i,j}\ r_{i,j}\ p_{i,i+1}\ r_{i,j+1} \\ p_{i+1,j}\ q_{i+1,j}\ p_{i+1,j+1}\ q_{i+1,j+1} \\ p_{i+1,j}\ r_{i+1,j}\ p_{i+1,j+1}\ r_{i+1,j+1} \end{pmatrix},$$

$$\underline{G}\,(t_i) := \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 1\ \Delta t_i\ (\Delta t_i)^2\ (\Delta t_i)^3 \\ 0\ 1\ 2\,\Delta t_i\ 3\,(\Delta t_i)^2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{G}^{-1}(t_i) := \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ -\frac{3}{(\Delta t_i)^2}\ -\frac{2}{(\Delta t_i)}\ \frac{3}{(\Delta t_i)^2}\ -\frac{1}{(\Delta t_i)} \\ \frac{2}{(\Delta t_i)^3}\ \frac{1}{(\Delta t_i)^2}\ -\frac{2}{(\Delta t_i)^3}\ \frac{1}{(\Delta t_i)^2} \end{pmatrix}$$

şi

$$\underline{W_{ij}} = \underline{G}\,(u_i)\,\underline{A_{ij}}\,\underline{G^T}\,(v_j)$$

şi deci:

$$\underline{A_{ij}} = \underline{G_{ij}}^{-1}\,(u_i\,)\,\underline{W_{ij}}\left[\,\underline{G^T}\,(v_j)\right]^{-1}.$$

Având matricea coeficient $\underline{W_{ij}}$ se poate calcula matricea coeficienţilor bi-polinoamelor splin $\underline{A_{ij}}$ corespunzătoare caroiajului elementului $(\,i,j\,)$. Este necesară calcularea derivatelor p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} din $\underline{W_{ij}}$.

Presupunând că valorile parametrilor (u, v) determină un caroiaj rectangular, liniile definite prin $u = u_j$ şi $v = v_j$ sunt linii parametrice ale suprafeţei şi anume polinoame (curbe) spline cubice (în acest caz) şi care ne conduce la ideea că derivatele p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} din $\underline{W_{ij}}$ pot fi obţinute folosind relaţiile de recurenţă aplicate acestor polinoame.

În plus, din condiţiile de frontieră (margini) rezultă următoarele valori:

- p_{ij} pentru $i = 0,(\,1\,),\ldots n, j = 0\,(\,1\,),\ldots m$,
- q_{ij} pentru $i = 0,(\,1\,),\ldots n, j = 0,(\,1\,),\ldots m$,
- r_{ij} pentru $i = 0,(\,1\,),\ldots n, j = 0,(\,1\,),\ldots m$.

O modalitate de a găsi p, q şi r constă în a le estima folosind punctele de con-trol (nodurile) date, de exemplu:

⇒ Se pot calcula derivatele în punctele de frontieră (margine):

- Pentru fiecare $j = 0\,(\,1\,)\ldots m$, a estima $p_{0,j}$ constă în a deriva în raport cu u polinomul cubic ce interpolează punctele de control de frontieră (marginale) $p_{i,j}$ cu indicii $i = 0,\ldots n$. Apoi se estimează $p_{n,j}$ folosind punctele cu indicii $i = n - 3\,(\,1\,)\,n$.
- Pentru fiecare $i = 0,\ldots n$, a estima $q_{i,0}$ constă în a deriva în raport cu v polinomul cubic ce interpolează punctele de control de frontieră (marginale) $p_{i,j}$ cu indicii $j = 0, 1{,}2,\ldots n$. Apoi se estimează q_{im} folosind punctele cu indicii $i = m - 3\,(\,1\,)\,m$.

⇒ Pentru fiecare $j = 0\,(\,1\,)\ldots m$ se calculează $p_{i,j}$ pentru indicii $i = 0, 1,\ldots(n-1)$ rezolvând sistemul:

$$\Delta\,u_i\,p_{i-1,j} + 2\,p_{i,j}(\,\Delta\,u_i + \Delta\,u_{i-1}\,) + \Delta\,u_{i-1}\,p_{i+1,j} =$$
$$= 3\,\frac{\Delta u_{i-1}}{\Delta u_i}\left(P_{i+1,j} - P_{i,j}\,\right) - 3\,\frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-1}}\left(P_{i-1,j} - P_{i,j}\right).$$

- Din teoria polinoamelor (curbelor) spline a rezultat că relaţia de mai sus defineşte un sistem liniar independent având o soluţie unică atâta timp cât se dau valorile de frontieră (margine) $p_{i,j}$ pentru $i = 0$ şi $j = 0, (1) \dots m$.

⇒ Pentru fiecare $i = 0, (1), \dots, n$ se calculează $q_{i,j}$ pentru $j = 1 (1), \dots, (m-1)$ rezolvând sistemul:

$$\Delta v_j\, q_{i,j-1} + 2\, q_{i,j}\big(\Delta v_j + \Delta v_{j-1}\big) + \Delta v_{j-1}\, q_{j,j+1}$$
$$= 3\,\frac{\Delta v_{j-1}}{\Delta v_j}\big(P_{i,j+1} - P_{i,j}\big) - 3\,\frac{\Delta v_j}{\Delta v_{j-1}}\big(P_{i,j-1} - P_{i,j}\big)$$

şi care defineşte un sistem liniar independent având o soluţie unică atâta timp cât sunt date valorile de frontieră $p_{i,j}$ pentru $j = 0, \dots, m$ şi $i = 0 (1), \dots, n$.

⇒ Se calculează derivata secundă $r_{i,j}$ în punctele de frontieră (marginale) $i = 0$ şi $j = 0$ folosind polinoamele cubice spline. De exemplu, pentru a găsi $r_{0,m}$ se poate obţine polinomul (curba) $Y_{q,i,m}(u)$ din interpolarea datelor $q_{im}, i = 0, 1, 2, 3$. Prin diferenţierea acestui polinom în raport cu u se pot obţine valorile lui u pentru u_0 şi pentru derivatele mixte $r_{0,m}$, unde unele $q_{i,j}$ fiind deja derivate în raport cu v. Derivatele mixte în cele patru colţuri ale caroiajului de interpolare pot fi deasemenea estimate interpolând $p_{i,j}$ cu ajutorul polinomului $Y_{p_{i,j}}(v)$ şi apoi diferenţiind în raport cu v. Este posibil să se obţină valori diferite, deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial u} Y_{q_{i,m}}(u) \neq \frac{\partial}{\partial v} Y_{p_{i,j}}(v).$$

⇒ Pentru $j = 0, \dots m$ se calculează $r_{i,j}$ pentru $i = 1 (2), \dots, (n-1)$, rezolvând sistemul:

$$\Delta u_i\, r_{i-1,j} + 2\, r_{i,j}(\Delta u_i + \Delta u_{i-1}) + \Delta u_{i-1}\, r_{i+1,j} =$$
$$= 3\,\frac{\Delta u_{i-1}}{\Delta u_i}\big(q_{i+1,j} - q_{i,j}\big) - 3\,\frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-1}}\big(q_{i-1,j} - q_{i,j}\big).$$

Pentru $j = 0$ dându-se valorile de frontieră (marginale) $r_{i,0}$ pentru $i = 0, 1, \dots., n$, sistemul este liniar independent cu soluţii unice pentru $r_{i,0}, i = 1 (1), \dots, n-1$. În mod similar se obţine şi pentru $j = m$.

⇒ Pentru $i = 0 (1)$ se calculează $r_{i,j}$ pentru $j = 1 (2), \dots, (m\text{-}1)$ rezolvând sistemul:

$$\Delta v_j\, r_{i,j} + 2\, r_{i,j}\big(\Delta v_j + \Delta v_{j-1}\big) + \Delta v_{j-1}\, r_{i,j-1} =$$
$$= 3\,\frac{\Delta v_{j-1}}{\Delta v_j}\big(p_{i,j+1} - p_{i,j}\big) + 3\,\frac{\Delta v_j}{\Delta v_{j-1}}\big(p_{i,j-1} - p_{i,j}\big).$$

Pentru fiecare i, dându-se valorile de frontieră (marginale) $r_{i,j}$ pentru $j = 0,1, \dots, m$ obţinute mai sus, sistemul este liniar independent cu soluţii unice, unde pentru $r_{i,j}$ şi pentru $j = 0,1, \dots, m$.

Valorile găsite pentru p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} se înlocuiesc în:

$$\mathrm{X}_{i,j}(u, v) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{l=0}^{3} A_{i,j,k,l}\,(u - u_i)^k\,(v - v_i)^l$$

obţinându-se suprafeţe de interpolare bicubice spline.

5.9.2. Suprafeţe Bezier bicubice

Considerând **polinoamele (curbele) lui Bernstein** pe cele două direcţii, parametrii u şi v, $B_i^n(u)$ şi $B_k^m(v)$ ca funcţii de bază, atunci **suprafeţele Bezier** bicubice se definesc ca (Hoschek, 1989):

$$X(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{i,k}\, B_i^n(u)\, B_k^m(v)$$

şi unde $u, v \in [0,1] \bullet [0,1]$ sunt puncte de control (noduri); coeficienţii $b_{i,k}$ se numesc **puncte (noduri) Bezier**, care formează o **reţea Bezier.**

Secvenţa de succesiune a **punctelor Bezier** $\{b_{i,k}\}$ corespunzătoare lui i şi respectiv lui k formează **reţeaua lui Bezier**. Punctele: $b_{0,0}$, $b_{n,0}$, $b_{0,m}$, $b_{n,m}$ sunt puncte de colţ ale **suprafeţei lui Bezier**, iar setul de puncte: $\{b_{0,k}\}, \{b_{i,0}\}, \{b_{i,m}\}, \{b_{n,k}\}$ sunt **puncte Bezier** ale polinoamelor (curbelor) de margine ale **suprafeţei Bezier**.

În plus punctele:

- $\{b_{00}, b_{10}, b_{01}\}$, determină planul tangent în b_{00},
- $\{b_{u0}, b_{n-10}, b_{n1}\}$, determină planul tangent în b_{u0},
- $\{b_{0m}, b_{1m}, b_{0m-1}\}$, determină planul tangent în b_{0m},
- $\{b_{nm}, b_{n-1m}, b_{nm-1}\}$, determină planul tangent în b_{nm}.

Referitor la formula de definire a **suprafeţelor bipolinomiale Bezier** aces-tea pot fi definite vectorial (tensorial) sau în valori reale, caz în care valorile $b_{i,k} \in \mathbb{R}$ se numesc **ordonate Bezier**. Înlocuind aceste valori în:

$$X(u,v) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{i=0}^{3} A_{i,j,k,l}\,(u - u_i)^k\,(v - v_i)^l$$

se obţine o suprafaţă definită în $\mathbb{R}^3$ descriind o funcţie definită pe caroiajul unitar.

Ca şi în cazul polinoamelor (curbelor) Bezier, **ordonatele Bezier** $b_{i,k}$ se vor asocia cu punctele (abscisele) având valorile parametrilor $\left(\frac{i}{k}, \frac{k}{m}\right)$.

În cazul definirii vectoriale a suprafeţelor bipolinomiale Bezier pentru punctele:

$$b_{i,k} = \left(\frac{i}{k}, \frac{k}{m}\right),$$

suprafeţele Bezier se obţin vectorial reprezentând vectorul $X(u,v) = (x, y, X(u,v))$, unde $x = u$ şi $y = v$.

Pentru $u = u_0$ **suprafaţa Bezier** se reduce la un **polinom (curbă) Bezier** având **punctele Bezier definite** de:

$$b_k = \sum_{i=0}^{n} b_{i,k}\; B_i^n(u_0)$$

şi înlocuind în:

$$X(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{i,k}\, B_i^n(u)\, B_k^m(v)$$

se obţine:

$$X(u_0, v) = \sum_{k=0}^{m} b_k\; B_k^m(v)$$

Derivatele suprafeţei **bipolinomiale Bezier**:

$$\frac{\partial^r}{\partial u^r} X(u,v) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{m} \Delta^{r,0} b_{i,k}\ B_i^{n-r}(u), B_k^m(v)$$
$$\frac{\partial^s}{\partial v^s} X(u,v) = \frac{m!}{(m-s)!} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m-s} \Delta^{0,s} b_{i,k}\ B_i^{n}(u), B_k^{m-s}(v)$$

unde:

$$\Delta^{r,0} b_{i,k} = \Delta^{r-1,0} b_{i+1,k} - \Delta^{r-1,0} b_{i,k}$$
$$\Delta^{0,s} b_{i,k} = \Delta^{0,s-1} b_{i,k+1} - \Delta^{0,s-1} b_{i,k}$$

iar derivata mixtă este dată de :

$$\frac{\partial^{s+r}}{\partial u^r \partial v^s} X(u,v) = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{m!}{(m-s)!} \sum_{i=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{m-s} \Delta^{r,s} b_{i,k}\ B_i^{n-r}(u), B_k^{m-s}(v)$$

şi unde:

$$\Delta^{r,s} b_{i,k} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{l=0}^{s} (-1)^j (-1)^l \binom{r}{j}\binom{s}{l} b_{i+r-j,k+s+l}\ .$$

Derivata parţială de ordinul I perpendiculară în punctele de frontieră (margine) $u = 0$ este:

$$X_u(0,v) = \frac{n}{\Delta u} \sum_{k=0}^{m} (b_{1,k} - b_{0,k})\, B_k^m(v),$$

unde Δu este lungimea intervalului parametrului u.

Se poate observa din această formulă că derivata depinde doar de polinomul (curba) de frontieră (margine) şi de polinomul (curba) imediat următoare, ceea ce confirmă afirmaţia de mai sus referitoare la derivatele de ordinul k ale unui **polinom (curbă) Bezier** în punctele de frontieră care depinde doar de acest punct şi cel imediat următor.

Deasemenea, asemănător **poligoanelor (curbelor) Bezier** este posibil să se mărească gradul bipolinoamelor (bicubice) **suprafeţei Bezier**, în care caz **reţeaua Bezier** conduce în acest caz la o **suprafaţă Bezier**. Mărind gradul lui n la $(n+1)$ pe direcţia lui u se obţin noi **puncte Bezier**:

$$b_{0,j}^* = b_{0,j},$$
$$b_{i,j}^* = b_{i,j} + \left(\frac{i}{n+1}\right)(b_{i-1,j} - b_{i,j}), i = 1,(2)\dots n,$$
$$b_{n+1,j}^* = b_{n,j}, \text{pentru } j = 0,(1)\dots m.$$

În mod analog, mărind gradul lui m la $m+1$ se obţin noi **puncte Bezier** pe direcţia lui v .

5.9.3. Algoritmul lui de Casteljau în cazul suprafeţelor Bezier

Se aplică în două faze:

- la început pentru $v = v_0$ pentru a calcula **punctele Bezier**:

$$b_i = \sum_{k=0}^{m} b_{i,k}\ B_k^m(v_0), i = 0(1),\dots,n$$

- şi apoi pentru $u = u_0$.

Se obţine astfel suprafaţa:

$$X(u_0,v_0) = \sum_{i=0}^{n} b_i\ B_i^n(u_0) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{i,k}\ B_i^n(u_0), B_k^m(v_0)$$

Ca în cazul **polinoamelor (curbelor) Bezier** direcţiile pentru derivatele parţiale x_u şi respectiv x_v sunt date de penultimul element al **algoritmului lui de Casteljau**. Bineînţeles se poate alege întâi u şi apoi v sau ambii simultan**.**

5.9.4. Conexitatea suprafeţelor Bezier

Un bipolinom spin Bezier de gradul (n, m) determină o **suprafaţă conexă Bezier**, dacă colţurile $(b_{i,j}, b_{i,j+1})$ şi $(b_{i,j}, b_{j+1,0})$ ale **reţelei Bezier** sunt colţuri ale **bipolinomului convex Bezier** şi orice set de patru **puncte Bezier** de forma $b_{i,j}, b_{i+1,j}$ $b_{i,j+1}, b_{i+1,j+1}$ trebuie să fie colţuri ale poligonului convex care este planar.

Ca observaţii se poate afirma că:

1) **Punctele Bezier** $b_{i,k}$ determină complect **suprafaţa Bezier**.
2) **Algoritmul lui de Casteljau** poate fi utilizat pentru a subîmparţi **suprafaţa Bezier** în caroiaje spline **Bezier**.
3) Reţeaua de caroiaje prin subdiviziuni succesive în final converge spre suprafaţa **Bezier**, observaţie care ne permite să obţinem suprafeţele Bezier şi intersecţii ale curbelor aparţinând suprafeţelor **Bezier**.

5.9.5. Condiţiile de continuitate a suprafeţelor Bezier

Observaţia 3) ne conduce totodată la ideea după care dacă o singură **supra-faţă Bezier** nu ne permite să obţinem o aproximare satisfăcătoare a suprafeţei date, atunci una din soluţii poate fi utilizarea de subdiviziuni ale **suprafeţelor (caroiajelor) Bezier** şi care prin reuniune pot reface **suprafaţa Bezier** iniţial propusă.

O astfel de metodă impune studiul condiţiilor de continuitate ale suprafeţelor subdivizate. Extinzând condiţiile de continuitate determinate la studiul **polinoamelor (curbelor) Bezier** la **suprafeţele Bezier** se poate afirma că acestea din urmă trebuie să îndeplinească condiţii similare.

De exemplu se cere ca:

- Primele derivate în raport cu ambii parametri (u, v) să existe şi să fie continue de-a lungul frontierei comune dintre două subdiviziuni ale **suprafeţelor Bezier**.
- Primele derivate în raport cu ambii parametri (u, v) de-a lungul frontierei comune să aibă aceiaşi direcţie cu planul tangenţial comun celor două subdiviziuni ale **suprafeţei Bezier**.
- Două subdiviziuni vecine ale **suprafeţei Bezier** trebuie să aibă acelaşi plan tangent de-a lungul frontierei comune.

Fie dată o subdiviziune $\mathrm{X}_{p,q}$ de ordinul (n, m) având ecuaţia parametrică:

$$\mathrm{X}_{p,q} (u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} b_{i,k,p,q} \, B_i^n (u), B_k^m (v),$$

unde $u \in [u_p, u_{p+1}]$ şi $v \in [v_q, v_{q+1}]$.

De-a lungul frontierei comune a două subdiviziuni curbele de frontieră coincid. În plus din condiţia de continuitate de-a lungul liniei parametrice $u = u_{p+1}$ obţinem

$$\frac{\partial X_{p,q}}{\partial u} (u_{p+1}, v) = \frac{\partial X_{p+1,q}}{\partial u} (u_{p+1}, v),$$

iar de-a lungul liniei parametrice $v = v_{p+1}$, avem:

$$\frac{\partial X_{p,q}}{\partial v}\left(u, v_{q+1}\right) = \frac{\partial X_{p,q+1}}{\partial v}.$$

Substituind $X_{p,q}\,(u, v)$ din relaţia de mai sus şi ţinând cont că

$$\Delta\, u_p := u_{p+1} - u_p \text{ şi } \Delta\, v_p := v_{q+1} - v_q$$

obţinem de-a lungul lui $u = u_{p+1}$:

$$\frac{n}{\Delta u_p}\,(b_{n,k} - b_{n-1,k})_{p,q} = \frac{n}{\Delta u_{p+1}}\,(b_{1,k} - b_{0,k})_{p+1,q},$$

unde $k = 0\,(1), \ldots, m$.

De asemenea, de-a lungul lui $v = v_{p+1}$ obţinem:

$$\frac{n}{\Delta v_p}\,(b_{i,m} - b_{i,m-1})_{p,q} = \frac{n}{\Delta v_{p+1}}\,(b_{i,1} - b_{i,0})_{p,q+1},$$

unde $i = 0\,(1), \ldots, n$.

Dar având o curbă de frontieră comună:

$$b_{n,k,p,q} = b_{0,k,p+1,q}$$

şi:

$$b_{i,m,p,q} = b_{i,o,p,q+1}$$

condiţiile de continuitate de-a lungul direcţiei lui $u = u_{p+1}$ devin:

$$b_{n,k,p,q}\left(\Delta\, u_{p+1} + \Delta\, u_p\right) = \Delta\, u_{p+1} b_{n-1,k,p,q} + \Delta\, u_p b_{1,k,p+1,q}$$
$$b_{i,m,p,q}\left(\Delta\, v_{q+1} + \Delta\, v_q\right) = \Delta\, v_{q+1} b_{i,m-1,p,q} + \Delta\, v_q b_{i,1,p,q+1}$$

pentru orice k fix şi unde **punctele (noduri) Bezier** asociate direcţiei u sunt coliniare şi în plus:

$$\frac{u_p}{u_{p+1}} = \frac{\Delta u_p}{\Delta u_{p+1}}$$

În mod similar, avem condiţiile de continuitate de-a lungul direcţiei lui $v = v_{q+1}$. În plus derivatele mixte de-a lungul frontierei comune coincid:

$$\frac{\partial^2 X_{p,q}}{\partial u \partial v}\left(u_{p+1}, v\right) = \frac{n\,m}{\Delta u_p \Delta v_q} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(b_{n,k+1} - b_{n-1,k+1}\right) - \left(b_{n,k} - b_{n-1,k}\right)\right]_{p,q} B_k^{m-1}(v)$$

şi

$$\frac{\partial^2 X_{p+1,q}}{\partial u \partial v}\left(u_{p+1}, v\right) = \frac{n\,m}{\Delta u_{p+1} \Delta v_q} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(b_{1,k+1} - b_{0,k+1}\right) - \left(b_{1,k} - b_{0,k}\right)\right]_{p+1,q} B_k^{m-1}(v).$$

Condiţiile de continuitate sunt importante de-a asemeni când se încearcă să se pună împreună două **subdiviziuni Bezier** pentru a realiza o **suprafaţă Bezier** comună F_1 şi care să satisfacă condiţiile de continuitate.

Fie F_0 o **subdiviziune Bezier** a unui bipolinom bicubic de gradul 3 descrisă de **punctele Bezier** $\{ b_{ik} \}$ şi F_2 o altă **subdiviziune Bezier** descrisă de $\{ \tilde{b}_{ik} \}$. Se cere ca suprafaţa F_1 să se reunească cu F_0 de-a lungul curbei de frontieră asociate **punctelor (nodurilor) Bezier** $\{ b_{i3} \}$. Atunci **punctele (nodurile) Bezier** $\{ a_{i,k} \}$ ale lui F_1 trebuie să satisfacă

$$\{ a_{0,i} \} = \{ b_{3,i} \} \text{ şi } \{ a_{3,i} \} = \{ \tilde{b}_{0i} \},$$

dar din

$$\Delta\, u_p := u_{p+1} - u_p \text{ şi } \Delta\, v_p := v_{q+1} - v_q$$

rezultă că

$$\Delta v_0\, a_{i,1} = b_{i,3}\,(\Delta\, v_0 + \Delta\, v_1) - \Delta\, v_1\, b_{i,2}$$
$$\Delta v_2\, a_{i2} = \tilde{b}_{i0}\,(\Delta\, v_1 + \Delta\, v_2) - \Delta\, v_1\, \tilde{b}_{i,1}$$

şi unde Δv_i este lungimea parametrului v a suprafeţei F_1 reprezentând condiţiile de continuitate la reuniunea unor **subdiviziuni Bezier.**

Totuşi pentru condiţii de continuitate de un ordin mai mare, condiţiile devin mai restrictive, necesitând existenţa unor puncte auxiliare d_k şi care să satisfacă relaţia:

$$d_k = b_{n-1,k,p,q}\left(1+\frac{\Delta u_{p+1}}{\Delta u_p}\right) - b_{n-2,k,p,q}\frac{\Delta u_{p+1}}{\Delta u_p} = b_{1,k,p+1,q}\left(1+\frac{\Delta u_p}{\Delta u_{p+1}}\right) - b_{2,k,p+1,q}\frac{\Delta u_p}{\Delta u_{p+1}}.$$

5.9.6. Suprafeţe spine Bezier bicuadratice

Fie $(l+1)\bullet(m+1)$ puncte $P_{i,k} \subset \mathbb{R}^2$ şi valorile parametrilor asociaţi (u_i, v_k), unde $i = 0,(1),\ldots,l$ şi $k = 0(1)\ldots.m$.

Dacă definim o subdiviziune (i,k) a unei **suprafeţe Bezier** ca fiind:

$$\mathrm{X}_{i,k}(u,v) = \sum_{j=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} b_{2i+j,2k+l}\, B_j^2(u), B_l^2(v),$$

atunci acestea reprezintă suprafeţe **splin Bezier bicuadratice**. Pentru simplificare considerăm punctele (nodurile) date ca fiind în colţurile subdiviziunii, adică :

$$b_{2i,2k} = P_{i,k}.$$

În plus, condiţiile de continuitate între subdiviziuni se cer respectate. Aceasta lasă un punct (nod) liber, de exemplu $b_{2i,1}$ sau $b_{1,2k}$ pentru fiecare curbă parametrică $u = u_i$ şi $v = v_k$. După ce alegem aceste puncte, problema se reduce la a rezolva formulele recurente prezentate mai sus la condiţiile de continuitate de-a lungul lui u şi respectiv v:

$$b_{n,k,p,q}(\Delta u_{p+1} + \Delta u_p) = \Delta u_{p+1} b_{n-1,k,p,q} + \Delta u_p b_{1,k,p+1,q}$$
$$b_{i,m,p,q}(\Delta v_{q+1} + \Delta v_q) = \Delta v_{q+1} b_{i,m-1,p,q} + \Delta v_q b_{i,1,p,q+1}.$$

5.9.7. Suprafeţe spline Bezier bicubice

În aceleaşi condiţii ca şi pentru suprafeţele **spline Bezier bicuadratice** definim suprafeţele **spline Bezier bicubice:**

$$\mathrm{X}_{i,k}(u,v) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{l=0}^{3} b_{3i+j,3k+l}\, B_j^3(u), B_l^3(v).$$

De asemenea, pentru simplitate alegem punctele (nodurile) date în colţurile subdiviziunii, adică:

$$b_{3i,3k} = P_{i,k}.$$

Considerăm două cazuri:

1) Când dorim să construim o subdiviziune continuă a unei **suprafeţe spline Bezier** calculul punctelor (nodurilor) corespunzătoare **punctelor Bezier** se poate face în doi paşi:
   - *i.* Se interpolează $(l+1)$ rânduri $(m+1)$ date, de puncte $P_{i,k}$ a subdiviziunii spline cubice **Bezier,** conform metodei de interpolare descrisă la capitolul referitor la interpolare. Acestea produc **punctele Bezier**:

     $$b_{3i,3k+l} \; si \; b_{3i+l,3k} \text{ unde } l = 1,2.$$

     şi unde punctele de frontieră (margine):

     $$b_{1,3k}, b_{3i,1}, b_{3l-1,3k}, b_{3i,3m-1}$$

     pot fi alese arbitrar.
   - *ii.* Pentru fiecare colţ al suprafeţei $P_{i,k} = b_{3i,3k}$ considerăm $3 \bullet 3 = 9$ **puncte (noduri) Bezier**:

     $$b_{3i-1,3k-1}, b_{3i,3k-1}, b_{3i+1,3k-1},$$

$$b_{3i-1,3k}\,,\, b_{3i,3k}\,,\, b_{3+1,3k}\,,$$
$$b_{3i-1,3k+1}\,,\, b_{3i,3k+1}\,,\, b_{3i+1,3k+1}\,,$$

şi unde punctele din colţuri sunt cunoscute. Se cer a se determina celelalte puncte. Acestea rezultă din condiţiile de continuitate de mai sus:

$$\Delta u_i\, b_{3i+1,3k-1} + \Delta u_{i+1}\, b_{3i-1,3k-1} = b_{3i,3k-1}\,(\Delta u_i + \Delta u_{i+1})$$
$$\Delta u_i\, b_{3i+1,3k+1} + \Delta u_{i+1}\, b_{3i-1,3k+1} = b_{3i,3k+1}\,(\Delta u_i + \Delta u_{i+1})$$
$$\Delta v_k\, b_{3i-1,3k+1} + \Delta v_{k+1}\, b_{3i-1,3k-1} = b_{3i-1,3k}\,(\Delta v_k + \Delta v_{k+1})$$
$$\Delta v_k\, b_{3i+1,3k+1} + \Delta v_{k+1}\, b_{3k+1,3k-1} = b_{3i+1,3k}\,(\Delta v_k + \Delta v_{k+1}).$$

iii. Dacă alegem unul din punctele din colţuri, putem determina celelalte trei puncte folosind metoda recursivă de mai sus. De exemplu dacă alegem **punctul (nodul) Bezier** $b_{3i+1,3k+1}$ în planul care trece prin **punctele (nodurile) Bezier:**
$b_{3i+1,3k+1}, b_{3i,3k+1}, b_{3i-1,3k}, b_{3i+1,3k+1}$ determinate anterior, atunci:
$b_{3i+1,3k+1} = b_{3i,3k+1} + (b_{3i+1,3k} - b_{3i,3k})$, iar derivata mixtă trebuie să fie nulă.

2) Când dorim să construim o suprafaţă **splină Bezier** bicubică continuă. În acest caz condiţia de continuitate impune:

$$(\Delta u_i + \Delta u_{i-1})\, b_{3i,s} = \Delta u_{i-1} b_{3i-1,s} + \Delta u_i\, b_{3i+1,s}$$
$$(\Delta v_k + \Delta v_{k-1})\, b_{r,3k} = \Delta v_{k-1} b_{r,3k-1} + \Delta v_k b_{r,3k+1}$$

Or această condiţie de continuitate se impune a fi studiată în două direcţii şi anume direcţiile u, v:

- **Condiţia de continuitate în direcţia u impune:**

$(\Delta u_i + \Delta u_{i-1})\, b_{3i-1,s} - \Delta u_i\, b_{3i-2,s} := \Delta u_{i-1}\, f_{i,s}$, unde: $i = 0,(1),\dots,l$
şi:
$(\Delta u_i + \Delta u_{i-1})\, b_{3i+1,s} - \Delta u_{i-1}\, b_{3i+2,s} := \Delta u_i\, f_{i,s}$, unde: $i = 0,(1),\dots,(l-1)$.

- **Condiţia de continuitate în direcţia v impune:**

$(\Delta v_k + \Delta v_{k-1})\, b_{r,3k-1} - \Delta v_k b_{r,3k-2} := \Delta v_{k-1}\, g_{r,k}$, unde: $k = 1,(1),\dots,m$
şi:
$(\Delta v_k + \Delta v_{k-1})\, b_{r,3k+1} - \Delta v_{k-1}\, b_{r,3k+2} := \Delta v_k\, g_{r,k}$, unde: $k = 0,(1)\dots m-1$, iar $f_{i,s}$, $s = 0,(1),\dots,3m$ şi $g_{r,k}$, unde: $r = 0,(1),\dots,3l$ sunt puncte auxiliare.

Folosind ponderile $d_{i,k}$ definite prin:

$$(\Delta u_i + \Delta u_{i-1})\, g_{3i-1,k} - \Delta u_i, g_{3i-2,k} := \Delta u_{i-1}\, d_{i,k}$$
$$(\Delta u_i + \Delta u_{i-1})\, g_{3i+1,k} - \Delta u_{i-1}, g_{3i+2,k} := \Delta u_i\, d_{i,k}$$

şi

$$(\Delta v_k + \Delta v_{k-1})\, f_{i,3k-1} - \Delta v_k, f_{i,3k-2} := \Delta v_{k-1}\, d_{i,k}$$
$$(\Delta v_k + \Delta v_{k-1})\, f_{i,3k+1} - \Delta v_{k-1}, f_{i,3k+2} := \Delta v_k\, d_{i,k},$$

rezultă că trebuie satisfăcute următoarele condiţii:

$$\beta_k^2\, \alpha_i^2\, b_{3i-2,3k-2} = \beta_k^1 \left(\alpha_i^1\, d_{i-1,k-1} + \alpha_{i-2}^0\, d_{i,k-1}\right) + \beta_{k-2}^0 \left(\alpha_i^1 d_{i-1,k} + \alpha_{i-2}^0\, d_{i,k}\right)$$
$$\beta_k^2\, \alpha_i^5\, b_{3i,3k-2} = \beta_k^1 \left(\alpha_i^3\, d_{i-1,k-1} + \alpha_i^4\, d_{i,k-1} + \alpha_{i-1}^3\, d_{i+1,k-1}\right) + $$
$$+ \beta_{k-2}^0 \left(\alpha_i^3 d_{i-1,k} + \alpha_i^4\, d_{i,k} + \alpha_{i-1}^3 d_{i+1,k}\right)$$
$$\beta_k^2\, \alpha_{i+1}^2\, b_{3i+2,3k-2} = \beta_k^1 \left(\alpha_{i+1}^0\, d_{i,k-1} + \alpha_i^1\, d_{i+1,k-1}\right) + \beta_{k-2}^0 \left(\alpha_{i+1}^0 d_{i,k} + \alpha_i^1\, d_{i+1,k}\right)$$

pentru $b_{3i+j,3k}$ şi $b_{3i+j,3k+2}$, unde $j = -2, 0, 2$,
iar:

$$\alpha_i^0 \equiv \Delta u_i, \alpha_i^1 \equiv \Delta u_i + \Delta u_{i-1}, \alpha_i^2 \equiv \Delta u_i + \Delta u_{i-1} + \Delta u_{i-2},$$
$$\alpha_i^3 \equiv \left(\alpha_i^0\right)^2 \alpha_{i+1}^2, \alpha_i^4 \equiv \alpha_i^0\, \alpha_{i-1}^1\, \alpha_{i+1}^2 + \alpha_{i+1}^0\, \alpha_{i+1}^1\, \alpha_i^2, \alpha_i^5 \equiv \alpha_i^1\, \alpha_i^2\, \alpha_{i+1}^2,$$

unde: $\beta_k^0,\dots,\beta_k^5$ sunt definiţi în mod analog în funcţie de lungimea intervalului parametrului Δv_k.

De îndată ce avem $d_{i,k}$, punctele intermediare $f_{i,s}$ unde $s \neq 0 \dots 3m$ şi $g_{r,k}$, unde $r \neq 0, \dots, 3l$ atunci **punctele Bezier** sunt unic definite, ceea ce înseamnă că setul de **puncte (noduri) Bezier** $(l+1) \bullet (m+1)$ sunt unic determinate din condiţiile bipolinomiale spline.

În continuare, pentru a determina punctele de început $d_{i,x}$ se cere a se rezolva sistemul liniar de ecuaţii:

$$\underline{L} \bullet \underline{D} \bullet \underline{M} = \underline{B}$$

unde

$$\frac{L}{(l-2) \bullet (l-2)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_{-1}^0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^3 & \alpha_1^4 & \alpha_0^3 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \alpha_{l-1}^3 & \alpha_{l-1}^4 & \alpha_{l-2}^3 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & \alpha_l^0 & \alpha_{l-2}^1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{D}{(m \bullet m)} = \begin{pmatrix} d_{0,0} & \cdots & d_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{l,0} & \cdots & d_{l,m} \end{pmatrix},$$

$$\frac{M}{(m-1) \bullet (m-1)} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^3 & . & . & 0 & 0 \\ \beta_{-1}^0 & \beta_1^4 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \beta_{m-1}^3 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & \beta_{m-1}^4 & \beta_m^0 \\ 0 & 0 & . & . & \beta_{m-2}^3 & \beta_{m-1}^1 \end{pmatrix},$$

şi

$$\frac{B}{(m-1) \bullet (m-1)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^2\, \beta_1^2 b_{1,1}\ \alpha_1^2\, \beta_1^5\, b_{1,3} \dots \dots \alpha_1^2\, \beta_{m-1}^5\, b_{1,3m-3}\ \alpha_1^2\, \beta_m^2\, b_{1,3m-1} \\ \alpha_1^5\, b_1^2 b_{3,1}\ \alpha_1^5\, \beta_1^5\, b_{3,3} \dots \dots \alpha_1^5\, \beta_{m-1}^5\, b_{3,3m-3}\ \alpha_1^5\, \beta_m^2\, b_{3,3m-1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{l-1}^5\, \beta_1^2 b_{3l-3,1}\ \alpha_{l-1}^5\, \beta_1^5\, b_{3l-3,3} \dots \dots \alpha_{l-1}^5\, \beta_{m-1}^5 b_{3l-3,3m-3}\ \alpha_l^5\, \beta_m^2\, b_{3l-3,3m-1} \\ \alpha_l^2\, \beta_1^2\, b_{3l-1,1}\ \alpha_l^2\, \beta_1^5\, b_{3l-1,3} \dots \dots \alpha_l^2\, \beta_{m-1}^5 b_{3l-1,3m-3}\ \alpha_l^2\, \beta_m^2\, b_{3l-1,3m-1} \end{pmatrix}.$$

Pentru: $d_{0,0}, d_{l,0}, d_{0,m}, d_{l,m}$ avem nevoie de Δu_i, unde: $i = -1,0, \dots, l$ şi Δv_k, unde: $k = -1,0, \dots, l$

Punctele (nodurile) Bezier $b_{0,0}, b_{3l,0}, b_{0,3m}$ şi $b_{3l,3m}$ nu depind de punctele auxiliare $f_{i,s}, g_{r,k}$ şi $d_{i,k}$. Deoarece curbele de frontieră ale unei suprafeţe spline bicubice sunt polinoame (curbe) spline asociate cu punctele auxiliare $f_{i,s}, s = 0,1, \dots 3m$ şi respectiv $g_{r,k}, r = 0, 1 \dots, 3m$, punctele din interiorul curbelor de margine pot fi calculate prin interpolare splină cubică.

În acest caz curba splină cubică este determinată de $(3l+1) \bullet (3m+1)$ **puncte (noduri) Bezier**. Dar numărul de **puncte (noduri) Bezier** care defineşte complect **suprafaţa splină Bezier** este $(l+3) \bullet (m+1)$.

Sunt necesare $(l+1) \bullet (m+1)$ **puncte (Bezier)** pentru a determina $d_{i,k}$. Pentru $(l+1)$ auxiliare $f_{i,0}$, avem nevoie de $(l+1)$ **puncte (noduri) interioare Bezier** pentru $v = 0$. La fel pentru $s = 3m$ şi $v = 1$, după care putem calcula $b_{r,0}$ şi $b_{r,3m}$ pentru $r \neq 0, \dots 3l$.

Pentru $(m+1)$ puncte auxiliare $g_{0,k}$, avem nevoie de a folosi $(m+1)$ **puncte Bezier** interioare pentru $u = 0$. La fel pentru $r = 3l$ şi $n = 1$, după care putem calcula $b_{0,s}$ şi $b_{3l,s}$ pentru $s \neq 0 \dots 3m$. În final, numărul total de **puncte (noduri) Bezier** impunând condiţiile de continuitate pentru bipolinoamele spline sunt $8(l\,m-1)$.

5.10. Algoritmul lui de Casteljau aplicat suprafeţelor triunghiulare Bezier

Algoritmul clasic al lui **Casteljau** aplicat polinoamelor (curbelor) în plan se bazează pe relaţia de recurenţă – proprietate a **polinoamelor lui Bernstein**:

$$B_i^n(t) = (1-t)\,B_i^{n-1}(t) + t\,B_i^{n-1}(t).$$

Această proprietate se poate extinde suprafeţelor. Deoarece: $i + j + k = n$, avem:

$$B_{i,j,k}^n(u) = u\,B_{i-1,k}^{n-1}(u) + v\,B_{i,j-1,k}^{n-1}(u) + w\,B_{i,j,k-1}^{n-1}(u)$$

sau echivalent:

$$B_{\mathrm{I}}^n(u) = u\,B_{\mathrm{I}-e_1}^{n-1}(u) + v\,B_{\mathrm{I}-e_2}^{n-1}(u) + w\,B_{\mathrm{I}-e_3}^{n-1}(u)$$

Ideea de bază a algoritmului constă în a genera un punct $\mathrm{X}(u)$ pe o suprafaţă determinată de **polinoamele lui Bernstein** de un grad mai redus:

$$\mathrm{X}(u) = \sum_{|\mathrm{I}|=n-r} b_{\mathrm{I}}^r(u)\,B_{\mathrm{I}}^{n-r}(u), \text{unde: } r = 0(1), \dots, n$$

şi unde: $b_{\mathrm{I}}^r(u)$ sunt **sub suprafeţe (sub caroiaje) Bezier** triunghiulare de ordinul r, iar $B_{\mathrm{I}}^{n-r}(u)$ sunt polinoame generalizate Bernstein de ordinul $(n-r)$.

Pe de altă parte din relaţia:

$$B_{\mathrm{I}}^n(u) = u\,B_{\mathrm{I}-e_1}^{n-1}(u) + v\,B_{\mathrm{I}-e_2}^{n-1}(u) + w\,B_{\mathrm{I}-e_3}^{n-1}(u)$$

obţinem:

$$\mathrm{X}(u) = \sum_{|\mathrm{I}|=n-r-1} \left[u\,b_{\mathrm{I}+\mathrm{e}_1}^r(u) + v\,b_{\mathrm{I}-e_2}^r(u) + w\,b_{\mathrm{I}-e_3}^r(u)\right] B_{\mathrm{I}}^{n-r-1}(u).$$

Din comparaţia coeficienţilor rezultă relaţia de **recurenţă a lui de Casteljau**:

$$b_{\mathrm{I}}^{r+1}(u) = u\,b_{\mathrm{I}+\mathrm{e}_1}^r(u) + v\,b_{\mathrm{I}-e_2}^r(u) + w\,b_{\mathrm{I}-e_3}^r(u)$$

unde: $|\mathrm{I}| = n - r - 1$. Dacă $b_{\mathrm{I}}^0 = b_{\mathrm{I}}$ pentru $r = 0$ şi pentru un pas $r = (n-1)$ atunci obţinem:

$$b_{\mathrm{I}}^n(u) = \mathrm{X}(u).$$

Relaţia de **recurenţă a lui de Casteljau** ne permite să calculăm noul coeficient $b_{\mathrm{I}}^{r+1}(u)$ în funcţie de trei coeficienţi $b_{\mathrm{I}+\mathrm{e}_\mathrm{i}}^r(u)$, unde $i = 1,2,3$ folosind coordonatele (u, v, w) ale triunghiului determinat de punctele: $b_{\mathrm{I}+\mathrm{e}_1}^r$, $b_{\mathrm{I}+\mathrm{e}_2}^r$, $b_{\mathrm{I}+\mathrm{e}_2}^r$, cum se prezintă în figura de mai jos (Fig. 5.2).

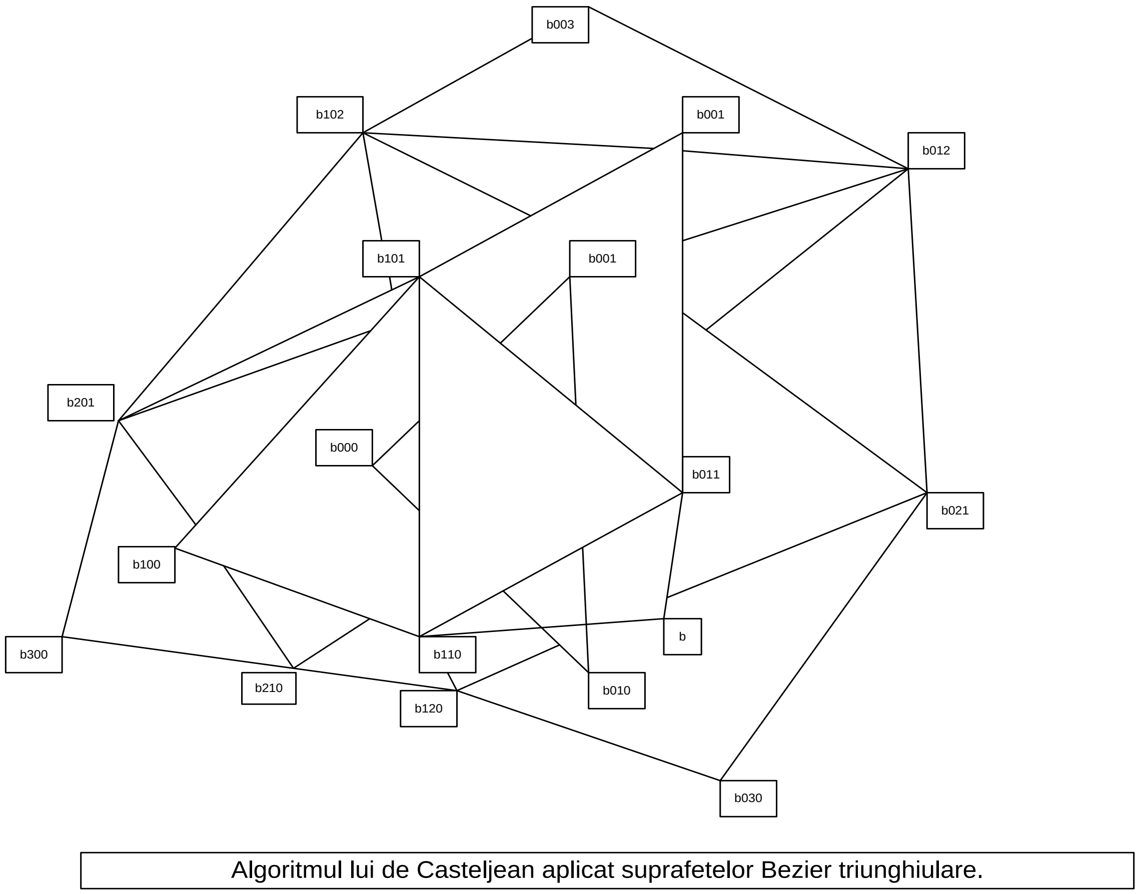


Fig. 5.2. Algoritmul lui de Casteljau aplicat suprafeţelor Bezier triunghiulare

În concluzie algoritmul lui **de Casteljau** aplicat suprafeţelor Bezier triunghiulare se poate formula astfel:

Dându-se o **sub-suprafaţă (sub-caroiaj) Bezier** triunghiulară $\mathrm{X}(u)$ de ordinul n şi un punct $U_0 = (u_0, v_0, w_0)^T$ atunci:

1. Pentru $r = 0(1), \ldots, (n-1)$ şi $|\mathrm{I}| = n - r$ se calculează:
$$b_{\mathrm{I}}^{r+1}(u) = u_0\, b_{\mathrm{I}+\mathrm{e}_1}^{r} + v_0\, b_{\mathrm{I}-e_2}^{r} + w_0\, b_{\mathrm{I}-e_3}^{r}.$$
2. Se calculează apoi $\mathrm{X}(u_0) = b_0^n$.

În cazul suprafeţelor bipolinomiale, **algoritmul lui de Casteljau** poate fi folosit pentru a subdiviza **suprafaţa triunghiulară Bezier** în trei sub-suprafeţe (sub-caroiaje) care se întâlnesc într-un punct dat (u_0, v_0, w_0).

La rândul lor **punctele Bezier** aparţinând **sub-suprafeţelor Bezier** determinate anterior pot fi folosite din nou pentru aplicarea **algoritmului lui de Casteljau**:

- sub - suprafaţa (caroiajul) I conţine punctele Bezier $b_{0,j,k}^{n}\,(b_{0,0,0}^{n}, b_{0,n,0}^{0}, b_{0,0,n}^{0})$,
- sub - suprafaţa (caroiajul) II conţine punctele Bezier $b_{i,0,k}^{n}\,(b_{0,0,0}^{n}, b_{0,n,0}^{0}, b_{0,0,n}^{0})$,
- sub - suprafaţa (caroiajul) III conţine punctele Bezier $b_{i,j,0}^{n}\,(b_{0,n,0}^{n}, b_{n,0,0}^{0}, b_{0,0,n}^{0})$.

unde: $r + j + k = n$.

În acest fel, combinând un număr determinat de paşi ai **algoritmului lui de Casteljau** putem subdivide **sub-suprafeţele (sub-caroiajele) Bezier** într-un număr arbitrar de sub-triunghiuri de ordinul n şi care secvenţe de interpolare a sub-suprafeţelor (sub-caroiajelor) liniare, triunghiulare, definite prin părţi, pot conduce la obţinerea unei **suprafeţe Bezier**.

5.11. Condiţiile de continuitate ale sub-suprafeţelor (sub-caroiajelor) triunghiulare Bezier

Pentru a analiza condiţiile de continuitate ale **sub-suprafeţelor triunghiulare Bezier** introducem un operator $\mathrm{X}\,(u,v,w)$ definit astfel:

$$\mathrm{X}\,(u,v,w) = (E_1\,u + E_2\,v + E_3\,w)^n\, b_{0,0,0} = \sum_{|\mathrm{I}|=n} b_{\mathrm{I}}\,(\,u\,)\,B_{\mathrm{I}}^n\,(\,u\,),$$

unde $\mathrm{I} = (i,j,k)^T, u = (u,v,w)^T, u+v+w=1$ şi unde

$$E_1\,b_{i,j,k} = b_{i+1,j}, E_2\,b_{i,j,k} = b_{i,j+1,k}, E_3\,b_{i,j,k} = b_{i,j,k+1}\,.$$

Deoarece: $u+v+w=1$:

a) prima derivată pe direcţia u este dată de formula:

$$\frac{\mathrm{DX}}{du} = n\,(E_1\,u + E_2\,v + E_3\,w)^{n-1}\,(E_1 - E_3)\,b_{0,0,0} =$$

$$= n \sum_{i+j+k=n-1} \left(b_{i+1,j,k} - b_{i,j,k+1}\right) B_{i,j,k}^{n-1}\,(u,v,w),$$

unde: $w = 1-u-v$.

b) dacă eliminăm $v = 1-u-w$, prima derivată pe direcţia u este dată de relaţia:

$$\frac{\mathrm{DX}}{du} = n\,(E_1\,u + E_2\,v + E_3\,w)^{n-1}\,(E_1 - E_2)\,b_{0,0,0} =$$

$$= n \sum_{i+j+k=n-1} \left(b_{i+1,j,k} - b_{i,j+1,k}\right) B_{i,j,k}^{n-1}\,(u,v,w)\,.$$

c) similar avem:

$$\frac{\mathrm{DX}}{dv} = n\,(E_1\,u + E_2\,v + E_3\,w)^{n-1}\,(E_2 - E_3)\,b_{0,0,0} =$$

$$= n \sum_{i+j+k=n-1} \left(b_{i,j+1,k} - b_{i,j,k+1}\right) B_{i,j,k}^{n-1}\,(u,v,w\,).$$

În figura 5.3 se prezintă interpretarea geometrică a derivatelor direcţionale din formulele a), b), c) de-a lungul unei curbe de frontieră u.

Considerând un punct generic $(0,0,1)$ al **triunghiului lui Bezier**, derivatele pe direcţiile u, v au forma:

$$\frac{\mathrm{DX}}{du}\,(\,0,0,1\,) = n\left(b_{1,0,n-1} - b_{0,0,n}\right);\ \frac{\mathrm{DX}}{dv}\,(\,0,0,1\,) = n\left(b_{0,1,n-1} - b_{0,0,n}\right),$$

planul tangent în acel punct fiind determinat de **punctele Bezier** din colţ şi două puncte învecinate.

Luând în considerare derivatele de ordinul II obţinem:

$$\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{X}}{du^2} = n\,(\,n-1\,)(E_1\,u + E_2\,v + E_3\,w)^{n-2}\,(E_2 - E_3)^2\,b_{0,0,0} =$$

$$= n\,(n-1) \sum_{i+j+k=n-2} \left(b_{i+2,j,k} - 2\,b_{i+1,j,k+1} + b_{i,j,k+2}\right) B_{i,j,k}^{n-2}\,(u,v,w\,),$$

$$\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{X}}{dv^2} = n\,(\,n-1\,)(E_1\,u + E_2\,v + E_3\,w)^{n-2}\,(E_2 - E_1)\;b_{0,0,0} =$$

$$= n\,(n-1) \sum_{i+j+k=n-2} \left(b_{i,j+2,k} - 2\,b_{i+1,j+1,k} + b_{i+2,j,k}\right) B_{i,j,k}^{n-2}\,(u,v,w\,),$$

$$\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{X}}{dudv} = n\,(\,n-1\,)(E_1\,u + E_2\,v + E_3\,w)^{n-2}\,(E_1 - E_3)^2\,b_{0,0,0} =$$

$$= n\,(n-1) \sum_{i+j+k=n-2} \left(b_{i+1,j+1,k} - b_{i+1,j,k+1} - b_{i,j+1,k+1} + b_{i,j,k+2}\right) B_{i,j,k}^{n-2}\,(u,v,w\,).$$

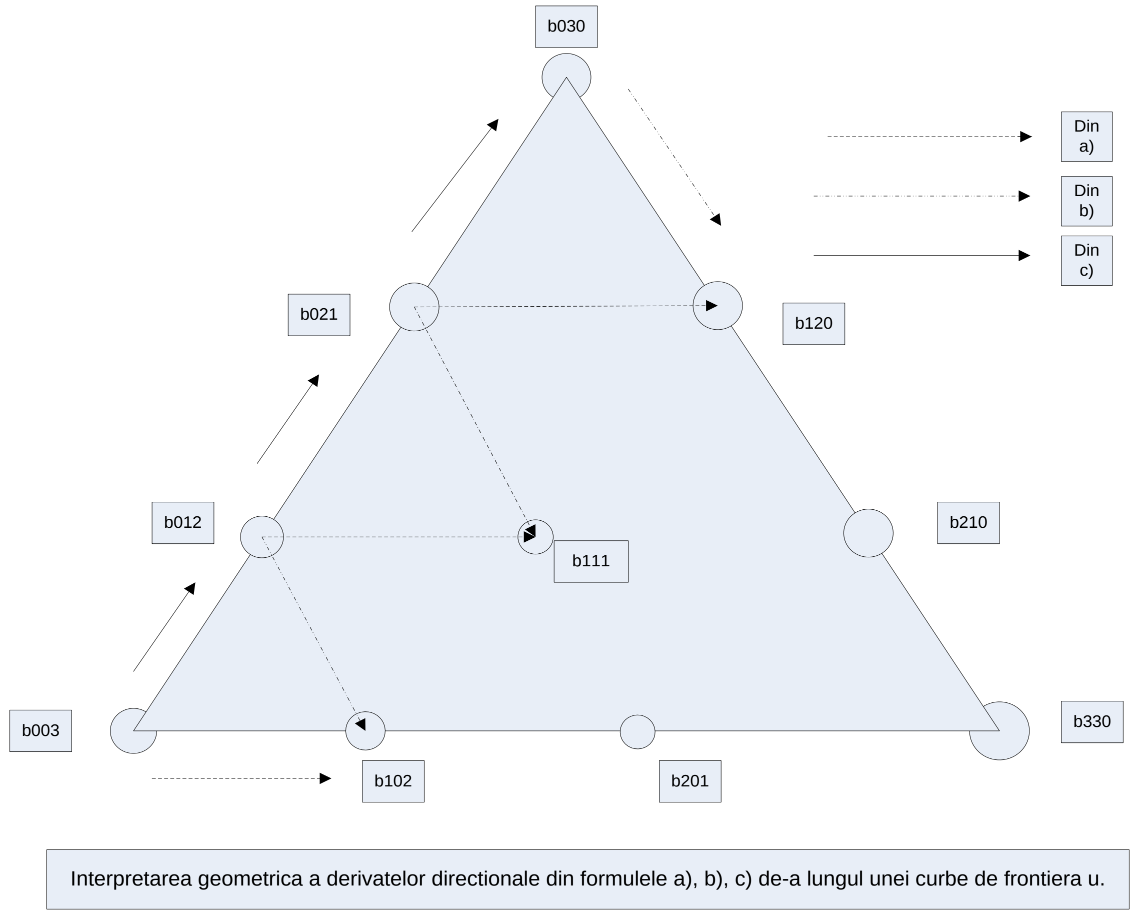


Fig. 5.3. Interpretarea geometrică a derivatelor direcţionale din formulele a), b), c) de-a lungul unei curbe de frontieră $\boldsymbol{u}$.

Dacă dezvoltăm condiţiile de continuitate de-a lungul direcţiei $n = 0$, pentru două **sub-suprafeţe (sub-caroiaje) triunghiulare Bezier** obţinem:

$$X_1\,(u, v, w\,) = \sum_{|\mathrm{I}|=n} b_{\mathrm{I}}{}^{1}\;(\,u\,)\,B_{\mathrm{I}}{}^{n}\,(\,u\,),$$

$$X_2\,(u, v, w\,) = \sum_{|\mathrm{I}|=n} b_{\mathrm{I}}{}^{2}\;(\,u\,)\,B_{\mathrm{I}}{}^{n}\,(\,u\,).$$

Pentru a îndeplini condiţiile de continuitate (numite şi condiţiile GC^0 de continuitate) trebuie ca:

$$X_1\,(\,0, v, w\,) = X_2\,(\,0, v, w\,)$$

sau:

$$b^1_{0,n-k,k} = \; b^2_{0,n-k,k}, \text{unde } k = 0, (\,1\,), \ldots, n\,.$$

Deasemenea, planurile tangente a două suprafeţe trebuie să coincidă pentru fiecare punct al frontierei comune (numite şi condiţiile GC^1 de continuitate):

$$\frac{DX_1}{du}\,(\,0, v, w\,) = \lambda_1\,\frac{DX_2}{du}\,(\,0, v, w\,) + \lambda_2\,\frac{DX_2}{du}\,(\,0, v, w\,),$$

unde λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sunt parametrii arbitrari aleşi.

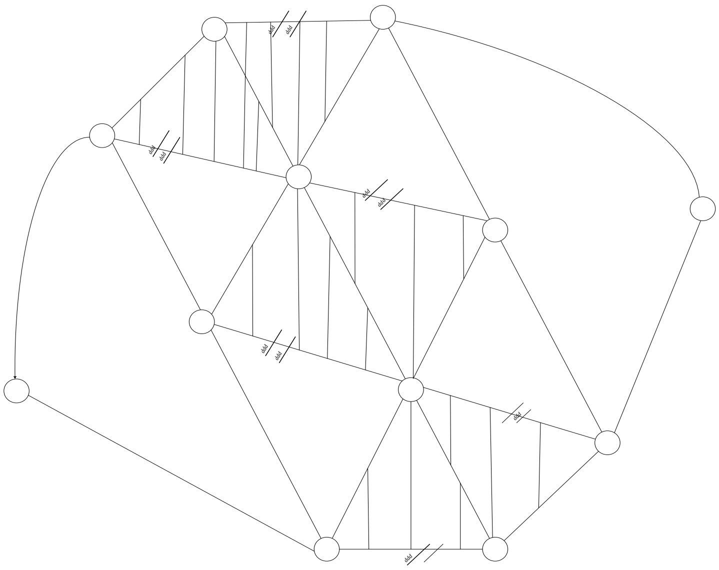
Alegând: $\lambda := 1 - \lambda_1 + \lambda_2$ atunci condiţia de continuitate GC^1 devine:

$$b^1_{1,n-1-k,k} = \lambda\, b^2_{0,n-1-k,k+1} + \lambda_1\, b^2_{1,n-1-k,k} - \lambda_2\, b^2_{0,n-k,k}\,.$$

Dacă $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = -1$, tangentele coincid de-a lungul liniilor corespunzătoare u, v, atunci:

$$b^1_{1,n-1-k,k} - b^1_{0,n-1-k,k+1} = b^2_{0,n-k,k} - b^2_{1,n-1-k,k}$$

şi atunci laturile corespunzătoare ale **triunghiurilor Bezier** sunt paralele conform figurii de mai jos (Fig. 5.4):



Triunghiurile Bezier corespunzatoare conditiei de continuitate GC'

Fig. 5.4. Triunghiurile Bezier corespunzătoare condiţiei de continuitate $\boldsymbol{GC^1}$.

Condiţia de continuitate impusă de egalitatea derivatelor secunde după o direcţie u dată (numite şi condiţia GC^2 de continuitate) rezultă din relaţiile:

$$\frac{D^2X_1}{du^2}\,(0,v,w) = \frac{D^2X_2}{du^2}\,(0,v,w)$$

şi

$$b^1_{2,n-2-k,k} - 2\,b^1_{1,n-2-k,k+1} + b^1_{0,n-2-k,k+2} = b^2_{0,n-k,k} - 2\,b^2_{1,n-1-k,k} + b^2_{2,n-2-k,k}.$$

Folosind condiţia GC^2 de continuitate, obţinem:

$$b^2_{1,n-2-k,k+1} + b^2_{1,n-1-k,k} - D_k = b^2_{2,n-2-k,k}$$

unde

$$D_k = b^1_{1,n-1-k,k} + b^1_{1,n-2-k,k+1} - b^1_{2,n-2-k,k}$$

este un punct auxiliar arbitrar ales.

Rezultă că dacă sub-suprafaţa (sub-caroiajul) are o frontieră comună cu altă suprafaţă ce îndeplineşte condiţiile de continuitate, atunci **punctele Bezier** pot fi determinate utilizând algoritmul lui **de Casteljau** în r paşi consecutivi.

5.12. Condiţiile de continuitate în cazul suprafeţelor (caroiajelor) Bezier mixte

În capitolul precedent s-a prezentat cazul sub-suprafeţelor **(sub-caroiajelor) Bezier triunghiulare.** Dacă însă sub-suprafeţele (sub-caroiajele) adiacente sunt un triunghi de ordinul n şi întâlnesc o **sub-suprafaţă (sub-caroiaj) rectangulară Bezier**, atunci condiţiile de continuitate au un aspect relativ diferit (Falcidieno, 1999).

Fie **sub-suprafaţa (sub-caroiajul) Bezier triunghiulară**:

$$X_1\,(u,v,w) = \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k}\, B^n_{i,j,k}\,(u,v,w),$$

unde

$$0 \le u,v,w \le 1, u+v+w=1 \text{ şi fie}$$

$$X_2\,(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\; B_i^n\,(u) B_j^n\,(v)$$

o **suprafaţă Bezier rectangulară**.

Pentru ca două sub-suprafeţe să fie asamblate continuu de-a lungul direcţiei $u = 0$ este necesar ca:

$$X_1\,(0,v,w) = X_2\,(0,v)$$

ceea implică:

$$b_{0,k,n-k} = a_{0,k}, k = 0,(1),\dots,n.$$

Pentru continuitatea GC^1 se impune ca tangentele de-a lungul direcţiei u să coincidă:

$$\frac{\partial X_2}{\partial u}\,(0,v) = -\frac{DX_1}{du}\,(0,v,w).$$

Se poate observa că cele două derivate de mai sus au grade diferite. Pentru a putea compara coeficienţii este necesar să mărim gradul derivatei DX_1:

$$\frac{DX_1}{du}\,(0,v,w) = n\sum_{j+k=n-1}(b_{1,j,k} - b_{0,j,k+1})\,B_{0,j,k}^n\,(0,v,1-v) =$$

$$= n\sum_{j=0}^{n}\left[\left(1-\frac{j}{n}\right)(b_{1,j,n-1-j} - b_{0,j,n-j}) - \left(\frac{j}{n}\right)(b_{0,j-1,n+1-j} - b_{1,j-1,n-j})\,B_j^n\,(v)\right].$$

Pentru $u = 0$ şi comparând coeficienţii **suprafeţei Bezier** rectangulară considerată mai sus

$$X_2\,(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\; B_i^n\,(u) B_j^n\,(v)$$

şi folosind

$$\frac{\partial X_2}{\partial u}\,(0,v) = -\frac{DX_1}{du}\,(0,v,w)$$

rezultă

$$a_{1j} = 2\left[\left(1-\frac{j}{2n}\right)b_{0,j,n-j} + \left(\frac{j}{2n}\right)b_{0,j-1,n+1-j}\right] - c_j$$

unde

$$c_j = \left(1-\frac{j}{n}\right)b_{1,j,n-1-j} + \left(\frac{j}{2n}\right)b_{1,j-1,n-j}$$

pentru: $j = 0,(1),\dots,n$.

Geometric, situaţia de mai sus este reprezentată în (Fig. 5.5) şi care prezintă continuitatea **sub-suprafeţelor(caroiajelor)** Bezier triunghiulare şi rectangulare.

În cazul **sub-suprafeţelor Bezier** rectangulare condiţia GC' de continuitate devine:

$$\left(1-\frac{j}{n}\right)b_{1,j,n-1-j} + \left(\frac{j}{n}\right)b_{1,j-1,n-j} = -\left(a_{i,j} - a_{0,j}\right) + \left(1-\frac{j}{n}\right)a_{0,j} + \left(\frac{j}{n}\right)a_{0,j+1},$$

pentru $j = 0,(1),\dots,(n-1)$. Pentru $j = 0$ avem: $b_{1,0,2} = a_{0,0} - (a_{1,0} - a_{0,0})$.

În mod recursiv $b_{1,j,k}$ se poate calcula din relaţia de mai sus, adică se pleacă de la $a_{1,j}$ pentru a se obţine $b_{1,j,n-j-1}$.

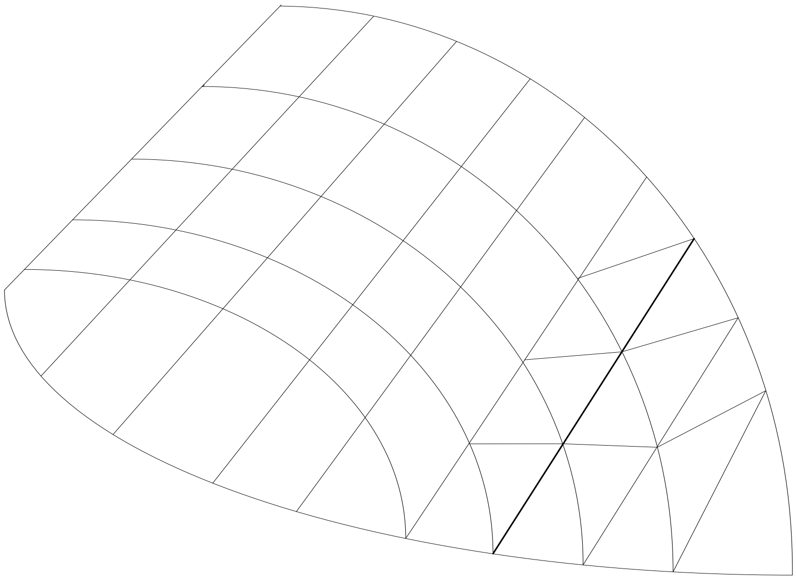


Fig. 5.5. Continuitatea sub-suprafeţelor (caroiajelor) Bezier triunghiulare şi rectangulare.

5.13. Interpolarea suprafeţelor folosind suprafeţele Bezier generate de puncte Bezier

O importantă aplicaţie a **suprafeţelor Bezier** cu aplicaţii în modelarea suprafeţelor o constituie utilizarea acestora la interpolarea unor suprafeţe date. Pentru interpolare se folosesc **suprafeţele Bezier** sub formă dreptunghiulară sau triunghiulară.

5.13.1. Dreptunghiuri Bezier şi triunghiuri Bezier folosite la interpolarea suprafeţelor

Fie un **dreptunghi Bezier** de dimensiune $(m \bullet n)$ definit prin:

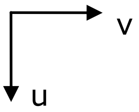
$$S\,(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} P_{ij}\; B_i^m\,(u)\, B_j^n\,(v),$$

unde: $(\,0\ \leq u,v\ \leq 1\,)$ şi unde: $B_i^n\,(\,t\,)$ sunt **polinoame lui Bernstein** de gradul n, univariabile în $t, t\ \subset\ \mathbb{R}^2$, iar $P_{i,j}$ sunt **puncte Bezier**:

$$B_i^n\,(\,t\,) = \binom{n}{i}\,(\,1-n\,)^{n-1}\,t^i\,.$$

De exemplu punctele Bezier $P_{i,j}$ ale **dreptunghiului bicubic Bezier** pentru $m = n = 3$ sunt prezentate în (Tabel 5.1).

Tabel 5.1. Punctele Bezier ale dreptunghiului bicubic Bezier pentru $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} = \mathbf{3}$.



$P_{0,0}$	$P_{0,1}$	$P_{0,2}$	$P_{0,3}$
$P_{1,0}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$
$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$
$P_{3,0}$	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$P_{3,2}$

Punctele Bezier $Q_{i,j,k}$ ale unui **triunghi Bezier cuartic** pentru $n = 4$ sunt prezentate în figura de mai jos (Fig. 5.6):

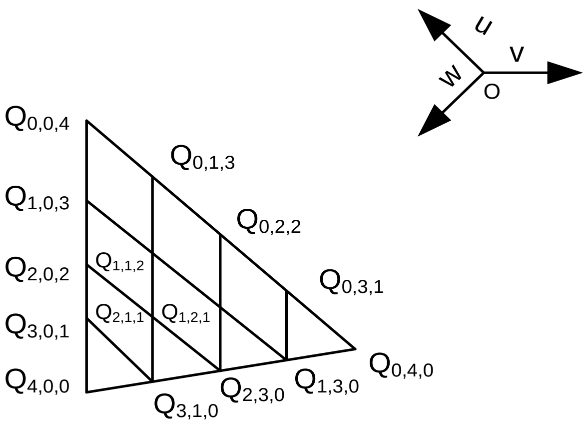


Fig. 5.6. Puncte Bezier ale unui triunghi Bezier cuartic.

5.13.2. Definirea unui triunghi Bezier de gradul n

Un triunghi Bezier de gradul n se defineşte:

$$S\,(u,v,w\,) = \sum_{0\le i,j,k}^{i+j+k=n} b_{i,j,k}^{n}\ (u,v,w\,)\,Q_{i,j,k}$$

unde

$$\begin{pmatrix} 0 \le u,v,w\ \le 1 \\ u+v+w=1 \end{pmatrix}$$

iar: $b_{i,j,k}^{n}\,(u,v,w)$ sunt **polinoame bivariante Bernstein** de gradul n:

$$b_{i,j,k}^{n}\,(\,u,v,w\,) = \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,u^i\,v^j\,w^k\,.$$

5.13.3. Proprietăţile geometrice ale triunghiului lui Bezier

Aceste proprietăţi se pot pune în evidentă transformând **dreptunghiurile Bezier** în **triunghiuri Bezier** folosind substituţiile:

$$u = t\,(\,1-v\,)\ \text{şi}\ w = (\,1-t\,)\,(1-v)$$

atunci:

$$S\,(u,v,w\,) = \sum_{0\le i,j,k}^{i+j+k=n} \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\, t^i\,(1-v)^i\,v^j\,(1-t)^k\,Q_{i,j,k} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} B_j^n\,(\,v\,) \sum_{i=0}^{n-j} B_i^{n-j}\,(\,t\,)\,Q_{i,j,n-j-i}.$$

Această substituţie transformă coordonatele centrului de greutate[8] (u, v, w) în coordonate carteziene (t, v). Ca urmare suprafaţa $S\,(u, v, w)$ este transformată în $S\,(\,t, v\,)$:

$$S\,(\,t,v\,) = \sum_{j=0}^{n} B_j^n\,(\,v\,)\,C_j\,(\,t\,),$$

unde

$$C_j\,(\,t\,) = \sum_{j=0}^{n-j} B_i^{n-j}\,(\,t\,)\,Q_{i,j,n-j-i}\,.$$

Suprafaţa $S\,(\,t, v\,)$ reprezintă o interpolare a unor curbe de grade ce variază de la n la 0, după cum se prezintă în figura de mai jos (Fig. 5.7).

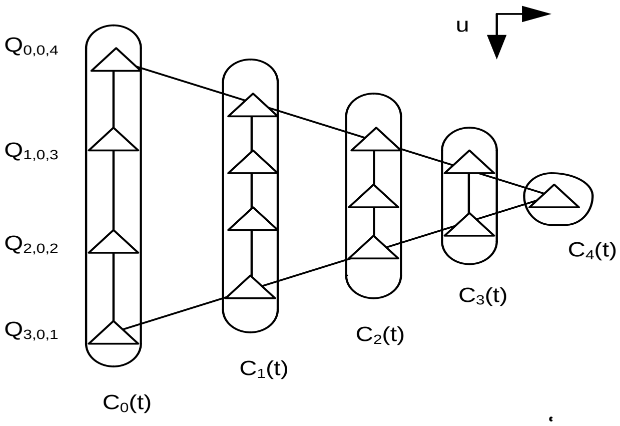


Fig. 5.7. Interpolarea unor curbe Bezier de grade ce variază de la $\boldsymbol{n}$ la zero.

Calculând derivatele suprafeţei $S\,(\,t, v\,)$ pentru marginile $v = 0$ obţinem:

$$\frac{\partial}{\partial v}\,S\,(\,t,v\,)\,\Big|_{v\,=\,0} = n\big(C_1\,(\,t\,) - C_0\,(\,t\,)\big)$$

şi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,S\,(\,t,v\,)\Big|_{t\,=\,0} = \frac{d}{dt}\,C_0\,(\,t\,)$$

Suprafaţa $S\,(\,t, v\,)$ este astfel convertită la **dreptunghiuri Bezier** de gradul $(n \bullet n)$ prin creşterea gradului fiecărei curbe până la gradul n. Fiecare curbă $C_j\,(\,t\,)$ este convertită la o curbă $C_j^{'}\,(\,t\,)$, iar **punctele de control (nodurile) Bezier** ale tuturor curbelor $C_j^{'}\,(\,t\,)$ formează un **dreptunghi Bezier** de gradul $(n \bullet n)$:

$$C_j^{'}\,(\,t\,) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n\,(\,t\,)\,Q_{i,j}^{'}$$

şi care este de fapt un dreptunghi”degenerat”corespunzător unei curbe de gradul 0 aşa cum se prezintă în (Fig. 5.8).

[8] Barycenter (engl.)

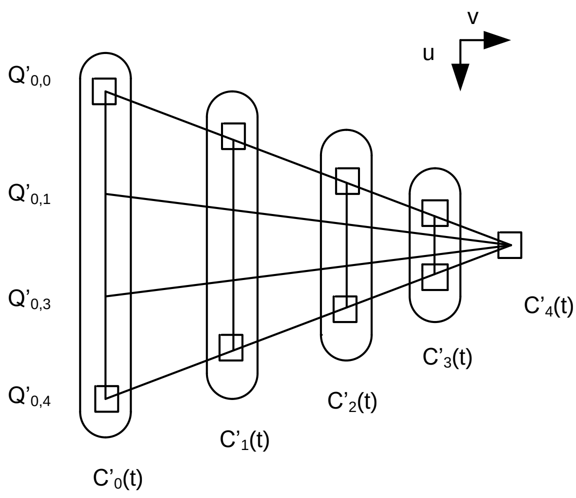


Fig. 5.8. Dreptunghiuri Bezier"degenerate"corespunzătoare unor curbe Bezier de gradul zero

5.13.4. Derivatele marginale ale triunghiurilor Bezier

Folosind derivatele marginale ale **triunghiurilor Bezier** de-a lungul frontierei **dreptunghiurilor Bezier** se pot construi **punctele (noduri) Bezier** aparţinând **triunghiurilor Bezier** (Fig. 5.9).

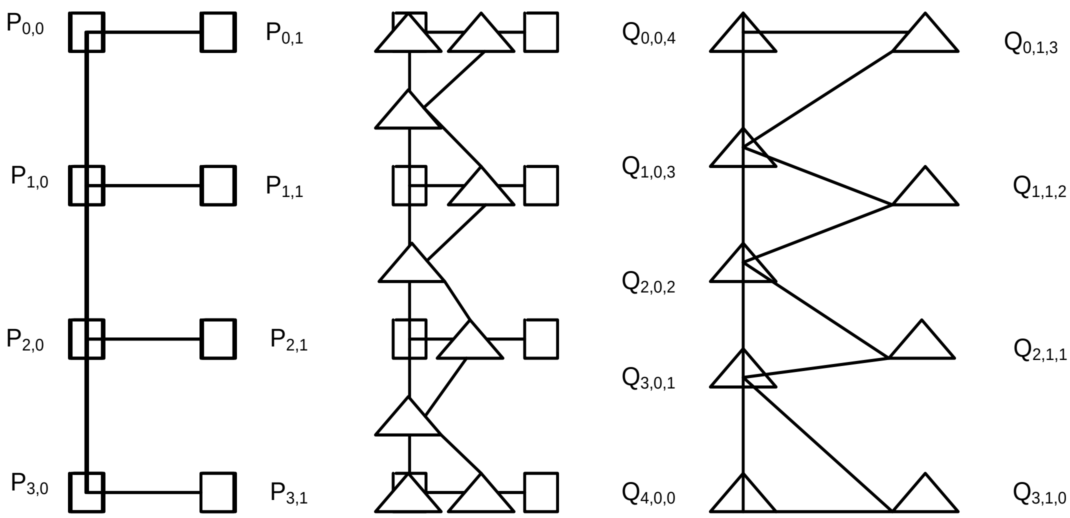


Fig. 5.9. Derivatele dreptunghiului Bezier cubic şi ale triunghiului Bezier cuartic.

De exemplu **punctele (nodurile) Bezier** $Q_{i,j,k}$ sunt derivatele de ordinul I ale **triunghiului Bezier cuartic** construit pornind de la **punctele (nodurile) Bezier** $\boldsymbol{P_{i,j,k}}$ ale dreptunghiului Bezier cubic folosind formulele:

$$Q_{0,0,4} = P_{0,0} \; Q_{0,1,3} = \frac{P_{0,0} + 3\,P_{0,1}}{4}$$

$$Q_{0,1,3} = \frac{P_{0,0} + 3\,P_{1,0}}{4} \; Q_{1,1,2} = \frac{P_{1,0} + 3\,P_{1,1}}{4}$$

$$Q_{2,0,2} = \frac{2P_{1,0} + 2\,P_{2,0}}{4} \; Q_{2,1,1} = \frac{P_{2,0} + 3\,P_{2,1}}{4}$$

$$Q_{3,0,1} = \frac{3\,P_{2,0} + P_{3,0}}{4} \quad Q_{3,1,0} = \frac{P_{2,0} + 3\,P_{3,0} + 3\,P_{3,1}}{4}$$
$$Q_{4,0,0} = P_{3,0}$$

Observaţie. Dacă sunt folosite derivatele de ordin superior, gradul **triunghiurilor Bezier** creşte corespunzător acestui ordin.

5.13.5. Studiul suprafeţelor Bezier în zona frontierei comune

Corespunzător tipurilor de suprafeţe care se conectează în zona de frontieră comună se pot obţine puncte (noduri) **Bezier** pentru dreptunghiurile sau **triunghiurile Bezier** din soluţiile ecuaţiilor ce descriu această conexiune[9]. Se disting astfel trei combinaţii ale conexiunilor în zona frontierei comune:

1) Dreptunghi – dreptunghi;
2) Triunghi – triunghi;
3) Mixte: dreptunghi – triunghi.

Se pot obţine astfel puncte de control interioare folosind condiţiile de continuitate ale planului tangent:

$$\frac{\partial}{\partial v} S^b(u,v)\Big|_{v=0} = k(u)\frac{\partial}{\partial v} S^a(u,v)\Big|_{v=1} + h(u)\frac{\partial}{\partial v} S^a(u,v)\Big|_{v=1}$$

unde s-au introdus două funcţii suplimentare:

$$k(u) = (1-u)\,k_0 + n\,k_1$$
$$h(u) = (1-u)\,h_0 + n\,h_1$$

Din condiţiile impuse: $u = 0$ şi $u = 1$ se obţin constantele k_0, k_1, h_0 şi h_1:

$$b_0 = k_0\,a_0 + h_0\,c_0 \text{ şi } b_3 = k_1\,a_3 + h_1\,c_2.$$

Valorile lui b_1 şi b_2 se obţin rezolvând ecuaţiile de mai sus:

$$3b_1 = (k_1 - k_0) + 3\,k_0\,a_1 + 2\,h_0\,c_1 + h_1\,c_1$$
$$3b_2 = 3\,k_1\,a_2 - (k_1 - k_0)\,a_3 + h_0\,c_2 + 2\,h_1\,c_1,$$

iar reprezentarea grafică se prezintă în figura de mai jos (Fig. 5.10):

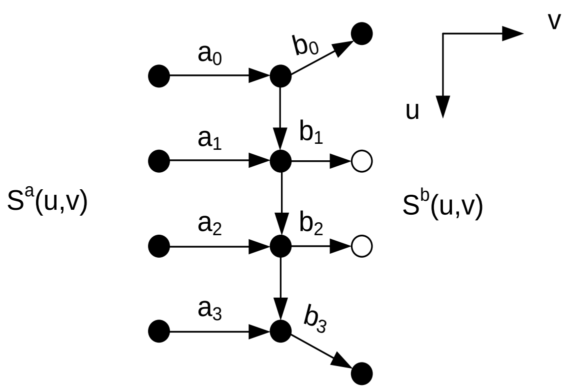


Fig. 5.10. Conectarea a două dreptunghiuri Bezier.

Această tehnică rezolvă orice combinaţie dintre suprafeţele de contact, indiferent dacă au patru sau trei frontiere comune, de exemplu ca în figura de mai jos (Fig. 5.11):

[9] Tehnică dezvoltată de Chiokura şi Kimura (Chiokura, 1983).

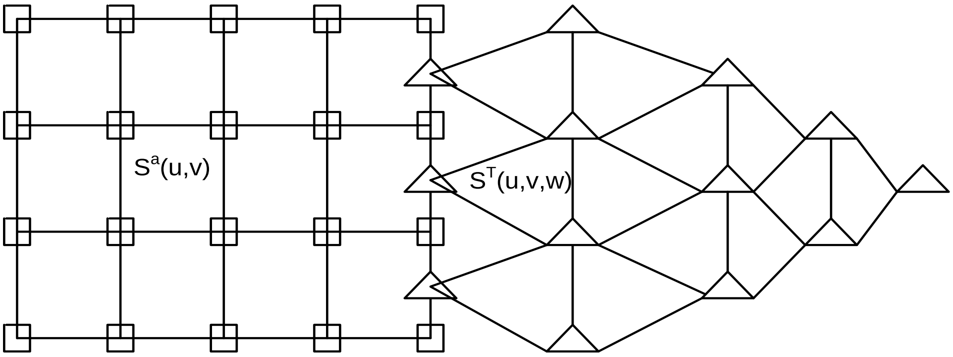


Fig. 5.11. Conexiuni dintre dreptunghiurile Bezier bicubice şi triunghiulare Bezier cuartice.

Generalizând pentru suprafeţe (caroiaje) se pot considera două cazuri:

1) Considerăm cazul suprafeţelor (caroiajelor) cu patru laturi.

Folosim în acest caz **suprafaţa** (**caroiajul) Gregory** care ne permite să interpolăm punctele interioare de control cu ajutorul unei suprafeţe raţionale în funcţie de două subpuncte de control, asociate cu una din margini.

Definim **suprafaţa** (**caroiajul) Gregory bicubic**:

$$S\,(\,u,v\,) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i^3\,(\,u\,)\,B_j^3\,(\,v\,)\,P_{i,j}\,(\,u,v\,)$$

unde:

$$P_{1,1}\,(\,u,v\,) = \frac{u\,P_{1,1}^{v} +\ v\,P_{1,1}^{u}}{u+(1-v)}$$

$$P_{1,2}\,(\,u,v\,) = \frac{u\,P_{1,2}^{v} +\ (1-v)\,P_{1,2}^{u}}{u+v}$$

$$P_{2,1}\,(\,u,v\,) = \frac{(1-u)\,P_{2,1}^{v} +\ v\,P_{2,1}^{u}}{(1-\ u)+v}$$

$$P_{2,2}\,(\,u,v\,) = \frac{(\,1-\ u\,)\,P_{2,2}^{v} +\ (1-\ v)\,P_{2,2}^{u}}{(\,1-u\,)+(1-\ v)}$$

şi unde: $P_{i,j}\,(\,u,v\,) = P_{i,j}$ sunt puncte de control: patru puncte interne se deplasează de-a lungul liniei segmentelor, iar punctele de capăt ale fiecărei linii segment sunt subpuncte de control care definesc derivatele de-a lungul marginilor suprafeţei, ca în figura de mai jos (Fig. 5.12):

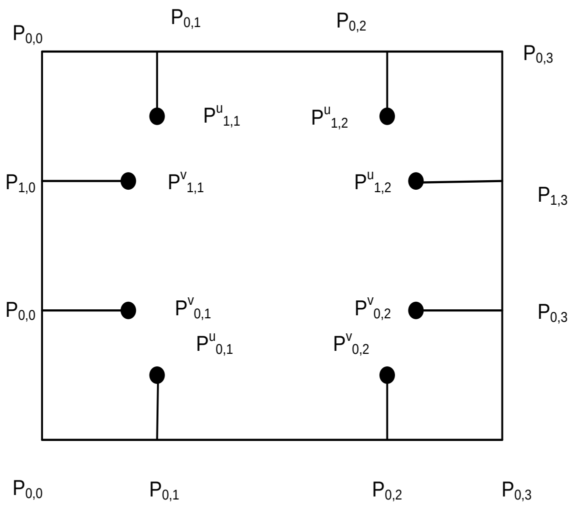


Fig. 5.12. Suprafeţe (caroiaje) Gregory rectangulare bicubice.

Există diferite funcţii care pot genera subpuncte de control conform relaţiei de mai sus, dar acestea vor trebui să satisfacă cel puţin condiţiile:

$$P_{1,1}\,(\,0,v\,) = P^{u}_{1,1}\; P_{1,1}\,(\,u,0\,) = P^{v}_{1,1}$$
$$P_{1,2}\,(\,0,v\,) = P^{u}_{1,2}\; P_{1,2}\,(\,u,1\,) = P^{v}_{1,2}$$
$$P_{2,1}\,(\,1,v\,) = P^{u}_{2,1}\; P_{2,1}\,(\,u,0\,) = P^{v}_{2,1}$$
$$P_{2,2}\,(\,1,v\,) = P^{u}_{2,2}\; P_{2,2}\,(\,u,1\,) = P^{v}_{2,2}$$

2) Considerăm cazul suprafeţelor (caroiajelor) cu trei laturi.

În acest caz, adoptând metoda de mai sus, de la patru laturi la trei laturi definim **triunghiul cuartic a lui Gregory** (Fig. 5.13) astfel:

$$S\,(\,u,v,w\,) = \sum_{0\,\le i,j,k}^{i+j+k=4} b^{4}_{i,j,k}\;(\,u,v,w\,)\,Q_{i,j,k}(\,u,v,w\,),$$

unde:

$$Q_{1,1,2}\,(\,u,v,w\,) = \frac{u\,Q^{v}_{1,1,2} + v\,Q^{u}_{1,1,2}}{u+v}$$
$$Q_{2,1,1}\,(\,u,v,w\,) = \frac{v\,Q^{w}_{2,1,1} + w\,Q^{v}_{2,1,1}}{u+w}$$
$$Q_{1,2,1}\,(\,u,v,w\,) = \frac{w\,Q^{u}_{1,2,1} + u\,Q^{w}_{1,2,1}}{w+u}$$

şi unde: $Q_{i,j,k}\,(\,u,v,w\,) = Q_{i,j,k}$ pentru restul punctelor (nodurilor) de control.

Şi în acest caz subpunctele (nodurile) de control trebuie să satisfacă condiţiile:

$$Q_{1,1,2}\,(\,0,v,w\,) = Q^{u}_{1,1,2}, Q_{1,1,2}\,(\,u,0,w\,) = Q^{v}_{1,1,2}$$
$$Q_{2,1,1}\,(\,u,0,w\,) = Q^{v}_{2,1,1}, Q_{2,1,1}\,(\,u,v,0\,) = Q^{w}_{2,1,1}$$
$$Q_{1,2,1}\,(\,u,v,0\,) = Q^{w}_{1,2,1}, Q_{1,2,1}\,(\,0,v,w\,) = Q^{u}_{1,2,2}$$

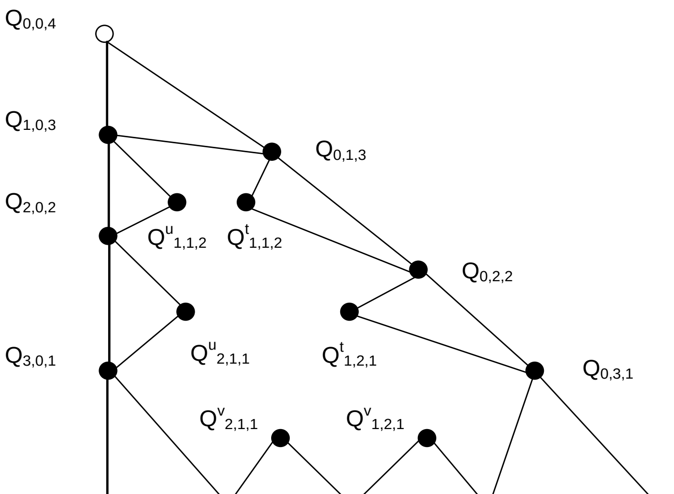


Fig. 5.13. Suprafaţă (caroiaj) Gregory triunghiulară cuartică

5.13.6. Utilizarea suprafeţelor raţionale Bezier pentru generarea punctelor Bezier

În acest caz folosim pentru generarea punctelor (nodurilor) interioare **Bezier** funcţii raţionale, ca de exemplu:

$$f\,(\,u,v\,) = \frac{(\,1-u\,)\,u\,\{(1-v)^2\,V_0 + v^2 V_1\} + (\,1-v\,)\,v\,\{(1-u)^2 U_0 + u^2\,U_1\}}{(\,1-u\,)\,u\,\{(1-v)^2 + v^2\} + (\,1-v\,)\,v\,\{\,(1-v)^2 + u^2\}} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (1-u)^2 \\ 2\,(1-u\,)\,u \\ u^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & U_0 & 0 \\ V_0 & 0 & V_1 \\ 0 & U_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v)^2 \\ 2\,(1-v\,)\,v \\ v^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (1-u\,)^2 \\ 2\,(1-u\,)\,u \\ u^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v)^2 \\ 2\,(1-v\,)\,v \\ v^2 \end{bmatrix}}.$$

Funcţia $f\,(u,v\,)$ este de tip **raţional Bezier** şi se generează pentru patru puncte V_0, V_1, U_0 şi U_1 (Fig. 5.14):

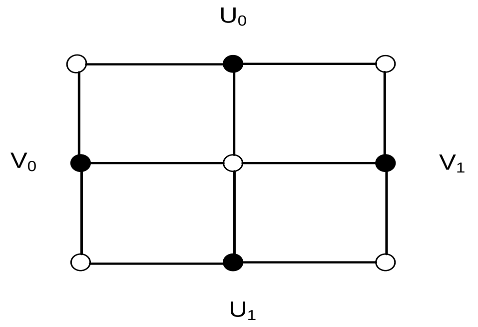


Fig. 5.14. Funcţia F (u, v) de tip raţional Bezier

Se poate observa că ponderea punctelor de control este zero. Ca urmare funcţia are următoarele proprietăţi:

$$f\,(u,0\,) = V_0\,;\; f\,(u,1\,) = V_1$$
$$f\,(0,v\,) = u_0\,;\; f\,(1,v\,) = U_1$$
$$f\,(u,v\,) = \begin{cases} \dfrac{(1-u\,)(1-v\,)V_0 + u\,v\,V_1}{(1-u\,)(1-v\,) + u\,v}, \text{dacă: } V_0 = U_0, V_1 = U_1 \\ \dfrac{u\,(1-v\,)\,V_0 + (1-u\,)\,v\,V_1}{u\,(1-v\,) + (1-u\,)\,v}, \text{dacă: } V_0 = U_1, V_1 = U_0 \end{cases}$$

În acest caz **punctele (nodurile) de control Bezier** sunt definite de **punctele (nodurile) de control raţionale Bezier:**

$$P_{1,1}\,(u,v\,) = \frac{u\,(1-v\,)\,P_{1,1}^{v} + (1-u\,)\,v\,P_{1,1}^{u}}{u\,(1-v\,) + (1-u\,)\,v},$$
$$P_{1,2}\,(u,v\,) = \frac{u\,v\,P_{1,2}^{v} + (1-u\,)\,(1-v)\,P_{1,2}^{u}}{u\,v + (1-u\,)\,(1-v)},$$
$$P_{2,1}\,(u,v\,) = \frac{(1-u\,)\,(1-v\,)\,P_{2,1}^{v} + u\,v\,P_{2,1}^{u}}{(1-u)\,(1-v\,) + u\,v},$$
$$P_{2,2}\,(u,v\,) = \frac{(1-u)\,v\,P_{2,2}^{v} + u\,(1-v\,)\,P_{2,2}^{u}}{(1-u\,)\,v + u\,(1-v\,)}.$$

Totuşi în unele cazuri, datorită numitorului, suprafeţele generate prezintă instabilităţi care pot fi evidenţiate considerând derivatele pentru margini unde $v = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\,S\,(u,v\,) = \sum_{i=0}^{m} B_i^m\,(u\,)\left\{\sum_{j=0}^{n} \frac{d}{dv}\,B_j^n\,(v\,)\,P_{i,j}\,(u,v\,) + \sum_{j=0}^{n} B_j^n\,(v)\;P_{i,j}\,(u,v\,)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\,S\;(u,v\,)\Big|_{v\,=\,0} = \sum_{i=0}^{m} B_i^m\,(u\,)\{n\,[P_{i,1}\,(u,0\,) - P_{i,0}\,(u,0)]\} + \frac{\partial}{\partial v}\,P_{i,0}\;(u,v\,)\Big|_{v\,=\,0}$$

Pentru a defini cele patru derivate independente de-a lungul marginilor trebuie luate în considerare şi **punctele (nodurile) de control Bezier**. Valoarea derivatelor în **punctele Bezier** pentru cele patru margini este zero.

$$\frac{\partial}{\partial v} S\ (u, v)\Big|_{v\,=\,0} = 0$$

Dacă însă se încearcă folosirea unor funcţii de grad mai mare şi este necesară obţinerea derivatelor **punctelor Bezier** pentru valoarea zero, atunci trebuie utilizată următoarea formă pentru funcţia $f\ (u, v)$:

$$f\ (u, v) = \frac{B_d^{2d}\ (u)\{B_0^{2d}\ (v)\ V_0 + B_{2d}^{2d}\ (v)\ V_1\} + B_d^{2d}\ (v)\{B_0^{2d}\ (u)\ U_0 + B_{2d}^{2d}\ (u)\ U_1\}}{B_d^{2d}\ (u)\{B_d^{2d}\ (v) + B_{2d}^{2d}\ (v)\} + B_d^{2d}\ (v)\{B_0^{2d}\ (u) + B_{2d}^{2d}\ (u)\}} =$$

$$= \frac{(1-u)^d\, u^d\, \{(1-v)^{2d}\, V_0 + v^{2d}\, V_1\} + (1-v)^d\, v^d\, \{(1-u)^{2d}\, U_0 + U^{2d}\, U_1\}}{(1-u)^d\, u^d\, \{(1-v)^{2d} + v^{2d}\} + (1-v)^d\, v^d\, \{(1-u)^{2d}\}}.$$

Exprimând funcţia $f\ (u, v)$ matricial obţinem:

$$\frac{\begin{bmatrix} B_0^{2d}\ (u) \\ B_1^{2d}\ (u) \\ . \\ . \\ B_{d-1}^{2d}\ (u) \\ B_d^{2d}\ (u) \\ B_{d+1}^{2d}\ (u) \\ . \\ . \\ B_{2d-1}^{2d}\ (u) \\ B_{2d}^{2d}\ (u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0\ 0 \ldots 0\ U_0\ 0 \ldots 0\ 0 \\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \\ V_0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0\ V_1 \\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 00 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \\ 0\ 0 \ldots .0\ U_1\ 0 \ldots 0\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^{2d}\ (u) \\ B_1^{2d}\ (u) \\ . \\ . \\ B_{d-1}^{2d}\ (u) \\ B_d^{2d}\ (u) \\ B_{d+1}^{2d}\ (u) \\ . \\ . \\ B_{2d-1}^{2d}\ (u) \\ B_{2d}^{2d}\ (u) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} B_0^{2d}\ (u) \\ B_1^{2d}\ (u) \\ . \\ . \\ B_{d-1}^{2d}\ (u) \\ B_d^{2d}\ (u) \\ B_{d+1}^{2d}\ (u) \\ . \\ . \\ B_{2d-1}^{2d}\ (u) \\ B_{2d}^{2d}\ (u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0\ 0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0\ 0 \\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \\ 1\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 1 \\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 00 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \\ 0\ 0 \ldots .0\ 1\ 0 \ldots 0\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^{2d}\ (u) \\ B_1^{2d}\ (u) \\ . \\ . \\ B_{d-1}^{2d}\ (u) \\ B_d^{2d}\ (u) \\ B_{d+1}^{2d}\ (u) \\ . \\ . \\ B_{2d-1}^{2d}\ (u) \\ B_{2d}^{2d}\ (u) \end{bmatrix}}$$

Se poate observa că funcţia $f\ (u, v)$ a **suprafeţelor Bezier** are doar un punct (nod) de control nenul în fiecare parte. Acesta reduce amploarea calculelor în cazul conversiei suprafeţelor considerate spre o **suprafaţă Bezier** raţională.

În plus funcţia $f\ (u, v)$ mai are următoarele proprietăţi:

$$\frac{\partial^i}{\partial u^i} f\ (u, v)\Big|_{u\,=\,0} = \frac{\partial^i}{\partial u^i} f\ (u, v)\Big|_{u\,=\,1} = \frac{\partial^i}{\partial v^i} f\ (u, v)\Big|_{v\,=\,0} = \frac{\partial^i}{\partial v^i} f\ (u, v)\Big|_{v\,=\,1} = 0$$

unde: $i = 1, 2, \ldots, (d-1)$.

În cazul considerării **triunghiurilor Bezier**, ∃ o funcţie $g\ (u, v, w)$ care generează subpunctele (nodurile) de control:

$$g\ (u, v, w) = \frac{v\, w\, U_0 + w\, u\, V_0 + u\, v\, W_0}{v\, w + w\, u + u\, v}$$

unde cele trei valori U_0, V_0, W_0 introduse au următoarele proprietăţi conform figurii de mai jos (Fig. 5.15).

$$g\ (0, v, w) = U_0$$
$$g\ (u, 0, w) = V_0$$
$$g\ (u, v, 0) = W_0$$

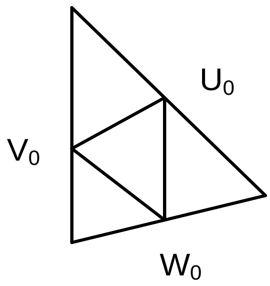


Fig. 5.15. Funcţia g (u, v, w) Bezier triunghiulară

Întocmai ca şi funcţia $f\ (u, v\ )$, funcţia g $(\ u, v, w\ )$ are forma generală:

$$g\ (\ u, v, w\ ) = \frac{v^d\ w^d\ U_0 + w^d\ u^d\ V_0 + u^d\ v^d\ W_0}{v^d\ w^d\ + w^d\ u^d + u^d\ v^d} =$$

$$= \frac{b_{0,d,d}^{2d}\ (\ u, v, w\ )U_0 + b_{d,0,d}^{2d}\ (\ u, v, w\ )V_0 + b_{d,d,0}^{2d}\ (\ u, v, w\ )W_0}{b_{0,d,d}^{2d}\ (\ u, v, w\ ) + b_{d,0,d}^{2d}\ (\ u, v, w\ ) + b_{d,d,0}^{2d}\ (\ u, v, w\ )}$$

Şi această funcţie, întocmai ca şi funcţia $f\ (\ u, v\ )$ are o singură valoare pentru fiecare parte a ecuaţiei când este exprimată prin **forme Bezier raţionale**. În plus funcţia g $(\ u, v, w\ )$ are următoarele proprietăţi:

$$\frac{\partial^i}{\partial u^i}\ g\ \ (\ u, v, w\ )\ \Big|_{u\ =\ 0} = \frac{\partial^i}{\partial v^i}\ g\ \ (\ u, v, w)\ \Big|_{v\ =\ 0} = \frac{\partial^i}{\partial w^i}\ g\ \ (\ u, v, w\ )\ \Big|_{w\ =\ 0} = 0$$

unde $i = 1, 2, \ldots, (d-1)$.

În special funcţia g $(\ u, v, w\ )$ este utilizată indeosebi la suprafeţe cu trei margini (laturi). În acest fel punctele (nodurile) de **control Bezier** ale **suprafeţelor (caroiajelor) Gregory** triunghiulare bicubice pot fi înlocuite cu următoarele puncte de control a unor suprafeţe raţionale

$$Q_{i,j,k}\ (\ u, v, w\ ) = \frac{u\ w\ Q_{i,j,k}^{u} + w\ u\ Q_{i,j,k}^{v} + u\ v\ Q_{i,j,k}^{w}}{u\ w + w\ u + u\ w}$$

unde:

$$Q_{1,2,1}^{v} = \frac{Q_{1,2,1}^{w} + Q_{1,2,1}^{u}}{2},$$

$$Q_{1,1,2}^{w} = \frac{Q_{1,1,2}^{u} + Q_{1,1,2}^{v}}{2},$$

$$Q_{2,1,1}^{u} = \frac{Q_{2,1,1}^{v} + Q_{2,1,1}^{w}}{2}.$$

În plus **suprafeţele Bezier** având puncte (noduri) de control raţionale pot fi convertite la **suprafeţe raţionale Bezier**. Dar dacă **punctele raţionale Bezier** nu au un numitor comun acestea trebuiesc transformate pentru a avea un numitor comun, ceea ce nu prezintă dificultăţi suplimentare deoarece fiecare punct (nod) de control are doar trei sau patru puncte valori nenule, ceea ce face ca efortul de conversie să fie minim.

5.13.7. Utilizarea punctelor raţionale Bezier la generarea suprafeţelor Bezier rectangulare

Suprafeţele Bezier dreptunghiulare ce folosesc **puncte raţionale Bezier** au forma:

$$S\ (\ u, v\ ) = \sum_{i=0}^{m}\ \sum_{j=0}^{n}\ \ B_i^m\ (\ u\ )\ B_j^n(\ v\ )\ P_{i,j}\ (u, v)$$

unde: $P_{i,j}\ (u, v)$ are forma raţională de mai jos:

$$P_{i,j}(u,v) = \frac{\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} B_k^p(u)\, B_l^q(v)\, w_{k,l}\, P_{k,l}^{i,j}}{\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} B_k^p(u)\, B_l^q(v)\, w_{k,l}}.$$

Folosind **polinoamele lui Bernstein** într-o singură variabilă t:

$$B_i^p(t)\, B_j^q(t) = \frac{\binom{p}{i}\binom{q}{j}}{\binom{p+q}{i+q}} B_{i+j}^{p+q}(t)$$

suprafaţa dreptunghiulară Bezier are forma:

$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m+p}\sum_{j=0}^{n+p} B_i^{m+p}(u)\, B_j^{n+q}(v)\, w'_{i,j}\, P'_{i,j}}{\sum_{i=0}^{m+p}\sum_{j=0}^{n+p} B_i^{m+p}(u)\, B_j^{n+q}(v)\, w'_{i,j}}$$

Şi în acest caz nu este necesar să se ia în considerare elementele nule, ceea ce simplifică calculele, iar numărul elementelor **(punctelor, nodurilor) Bezier** nenule este întotdeauna patru, egal cu numărul marginilor **suprafeţei Bezier** corespunzătoare

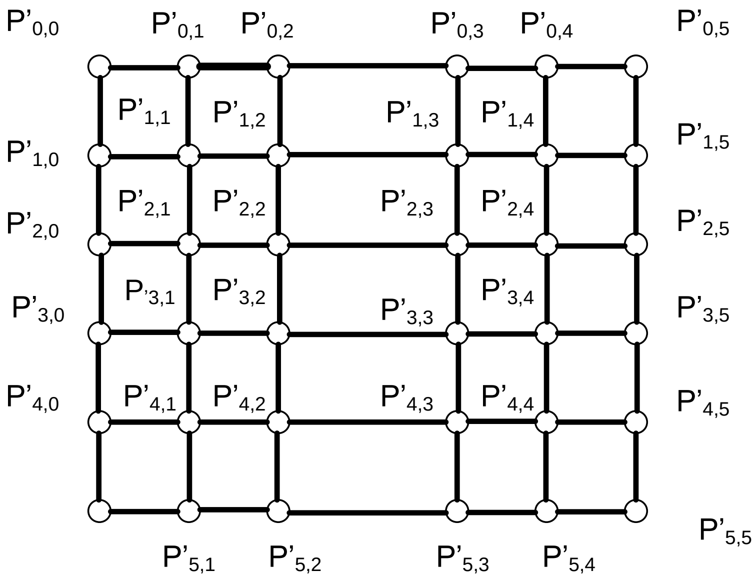


Fig. 5.16. Suprafeţe rectangulare raţionale Bezier având puncte (noduri) Bezier de pondere zero

Punctele de control (nodurile) $P'_{i,j}$ ale unei suprafeţe rectangulare raţionale **Bezier** sunt prezentate în figura de mai sus (Fig. 5.16), unde punctele (nodurile) din colţuri au ponderea zero, datorită raţionalităţii funcţiei ce le defineşte. Punctele (nodurile) aflate în apropierea colţurilor au următoarele caracteristici:

$$W'_{0,0} = 0, P'_{0,1} = p'_{1,0}$$
$$W'_{0,5} = 0, P'_{0,4} = p'_{1,5}$$
$$W'_{5,0} = 0, P'_{5,1} = p'_{1,0}$$
$$W'_{5,5} = 0, P'_{5,4} = p'_{4,5}$$

şi care sunt prezentate în figura de mai jos (Fig. 5.17).

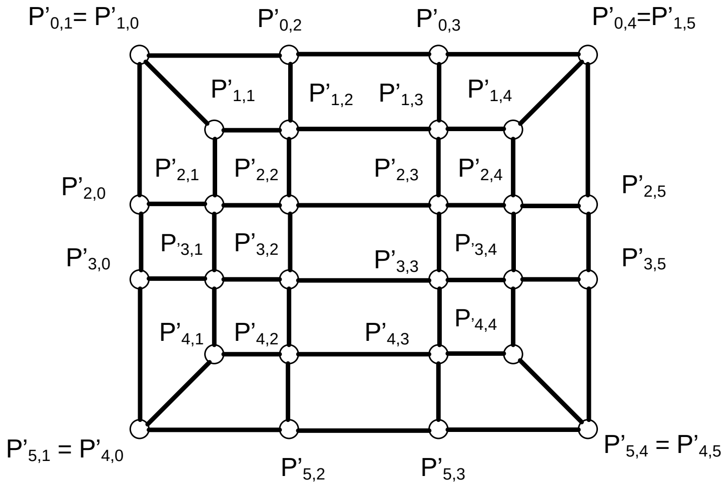


Fig. 5.17. Suprafeţe Bezier rectangulare folosind puncte (noduri) Bezier.

Dacă funcţia $f\,(u, v)$ se alege a avea un grad superior, aceasta devine:

$$f\,(u,v\,) = \frac{(\,1-u\,)^2\, u^2\,\{(1-v)^4\, V_0 +\, v^4\, V_1\} + (\,1-v\,)^2\, v^2\,\{(1-u)^4\, u_0 +\, u^4\, u_1\,\}}{(\,1-u\,)^2\, u^2\,\{(1-v)^4 +\, v^4\,\} + (\,1-v\,)^2\, v^2\,\{(1-u)^4\, +\, u^4\,\}}$$

şi care este în special utilizată când, prin mărimea numărului de puncte (noduri) de control cu ponderea zero, gradul colţurilor suprafeţei cresc.

5.13.8. Utilizarea punctelor raţionale Bezier la generarea suprafeţelor Bezier triunghiulare

O **suprafaţă Bezier** triunghiulară având **puncte Bezier** are forma:

$$S\,(\,u,v,w\,) = \sum_{0\,\le i,j,k}^{i+j+k=n} b_{i,j,k}^{n}\,\,(\,u,v,w\,)\,Q_{i,j,k}\,(u,v,w)$$

unde:

$$Q_{i,j,k}\,(\,u,v,w\,) = \frac{\sum_{0\,\le l,m,n}^{l+m+k=p} b_{l,m,n}^{p}\,\,(\,u,v,w\,)\,w_{l,m,n}\,Q_{l,m,n}^{i,j,k}\,(u,v,w)}{\sum_{0\,\le l,m,n}^{l+m+n=p} b_{l,m,n}^{p}\,\,(\,u,v,w\,)\,w_{l,m,n}}.$$

Folosind **polinoamele lui Bernstein** în acest caz de două variabile obţinem:

$$b_{i,j,k}^{p}\,(\,u,v,w\,)\,b_{l,m,n}^{q}\,(\,u,v,w\,) = \frac{\dfrac{p!}{i!\,j!\,k!}\,\dfrac{q!}{l!\,m!\,n!}}{\dfrac{(\,p+q\,)!}{(\,i+l\,)!\,(\,j+m\,)!\,(\,k+n\,)!}}\;b_{i+l,j+m,k+n}^{p+q}\,(u,v,w)$$

suprafaţa $S\,(u,v,w\,)$ devine:

$$S\,(\,u,v,w\,) = \frac{\sum_{0\le i,j,k}^{i+j+k=n+p} b_{i,j,k}^{n+p}\,\,(\,u,v,w\,)\,W_{i,j,k}'\,Q_{i,j,k}'}{\sum_{0\le i,j,k}^{i+j+k=n+p} b_{i,j,k}^{n+p}\,\,(\,u,v,w\,)\,W_{i,j,k}'}\,.$$

Numărul de **puncte (noduri) Bezier** nenule este întotdeauna trei, egal cu numărul de margini (laturi) ale **suprafeţei Bezier**, dar în acest caz punctele nule au o mai mică importanţă faţă de **suprafeţele Bezier rectangulare**. **Punctele (nodurile) de control Bezier** din colţuri au următoarele caracteristici:

$$W_{0,0,6}' = 0, Q_{1,0,5}' =\; Q_{0,1,5}'$$
$$W_{0,6,0}' = 0, Q_{1,5,0}' =\; Q_{0,1,1}'$$
$$W_{6,0,0}' = 0, Q_{5,0,1}' =\; Q_{5,1,0}'$$

şi care sunt exemplificate în figura de mai jos (Fig. 5.18).

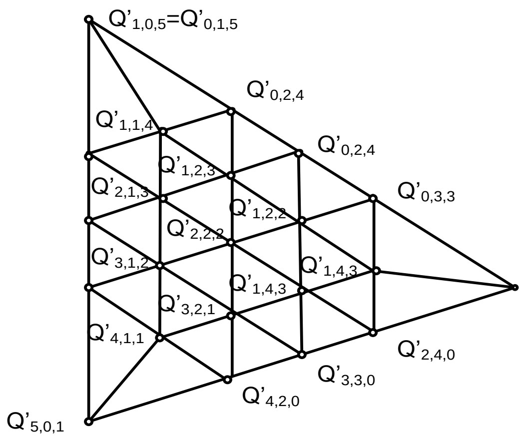


Fig. 5.18. Suprafeţe Bezier triunghiulare folosind puncte (noduri) Bezier

5.13.9. Eliminarea singularităţilor la colţurile de conectare

Se poate observa din exemplele precedente că **suprafeţele raţionale Bezier** au singularităţi la colţurile de conectare ceea ce poate reprezenta un inconvenient, ponderile nule în general fiind nepermise. În general se folosesc diverse metode pentru a elimina aceste singularităţi, funcţia $f\,(u,v)$ fiind înlocuită cu funcţia $f^{\varepsilon}\,(u,v)$, iar $g(u,v,w)$ cu $g^{\varepsilon}\,(u,v,w)$, unde funcţia $f^{\varepsilon}\,(u,v)$ are expresia matricială de mai jos:

$$\frac{\begin{bmatrix} B_0^{2d}(u) \\ B_1^{2d}(u) \\ . \\ . \\ B_{d-1}^{2d}(u) \\ B_d^{2d}(u) \\ B_{d+1}^{2d}(u) \\ . \\ . \\ B_{2d-1}^{2d}(u) \\ B_{2d}^{2d}(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (u_0+v_0)\varepsilon\ 0 \dots\dots 0\ U_0\ 0 \dots\dots 0\ (u_0+v_1)\varepsilon \\ 0\ 0 \dots\dots 0\ 0\ 0 \dots\dots 0\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0 \dots\dots 0\ 0\ 0 \dots\dots 0\ 0 \\ V_0\ 0 \dots\dots 0\ 0\ 0 \dots\dots 0\ V_1 \\ 0\ 0 \dots\dots 0\ 0\ 0 \dots\dots 0\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \\ (u_1+v_0)\,\varepsilon\ 0 \dots 0\ U_1\ 0 \dots 0\ (u_1+v_1)\,\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^{2d}(u) \\ B_1^{2d}(u) \\ . \\ . \\ B_{d-1}^{2d}(u) \\ B_d^{2d}(u) \\ B_{d+1}^{2d}(u) \\ . \\ . \\ B_{2d-1}^{2d}(u) \\ B_{2d}^{2d}(u) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} B_0^{2d}(u) \\ B_1^{2d}(u) \\ . \\ . \\ B_{d-1}^{2d}(u) \\ B_d^{2d}(u) \\ B_{d+1}^{2d}(u) \\ . \\ . \\ B_{2d-1}^{2d}(u) \\ B_{2d}^{2d}(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2\varepsilon\ 0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0\ 2\varepsilon \\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \\ 1\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \dots 0\ 1 \\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \dots 00 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \\ 2\varepsilon\ 0 \dots .0\ 1\ 0 \dots 0\ 2\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^{2d}(u) \\ B_1^{2d}(u) \\ . \\ . \\ B_{d-1}^{2d}(u) \\ B_d^{2d}(u) \\ B_{d+1}^{2d}(u) \\ . \\ . \\ B_{2d-1}^{2d}(u) \\ B_{2d}^{2d}(u) \end{bmatrix}}$$

Funcţia $f^{\varepsilon}\,(u,v)$ se obţine introducând mici deviaţii ale valorilor în cele patru colţuri care ridică singularitatea funcţiei $f\,(u,v)$ în cele patru colţuri.

Valorile $f\,(0,0), f\,(0,1), f\,(1,0), f\,(1,1)$, exprimând colturile de conectare care sunt nedefinite, se înlocuiesc cu noi valori:

$$f^{\varepsilon}\,(0,0) = \frac{u_0 + v_0}{2}, f^{\varepsilon}(0,1) = \frac{u_0 + v_1}{2}, f^{\varepsilon}(1,0) = \frac{u_1 + v_0}{2} \text{ şi } f^{\varepsilon}\,(1,1) = \frac{u_1 + v_1}{2}$$

Proprietăţile derivatelor funcţiilor $f\,(u,v)$ se extind şi pentru funcţia $f^{\varepsilon}\,(u,v)$:

$$\frac{\partial^i}{\partial u^i} f^{\varepsilon}\,(u,v)|_{u=0} = \frac{\partial^i}{\partial u^i} f^{\varepsilon}\,(u,v)|_{u=1} = \frac{\partial^i}{\partial v^i} f^{\varepsilon}\,(u,v)|_{v=0} = \frac{\partial^i}{\partial v^i} f^{\varepsilon}\,(u,v)|_{v=1} = 0$$

unde: $i = 1, 2, \ldots, (d-1)$.

În mod similar funcţia $g\,(u,v,w)$ este înlocuită cu funcţia $g^{\varepsilon}\,(u,v,w)$:

$$g^{\varepsilon}\,(u,v,w) = \frac{\begin{bmatrix} \binom{2d}{d} v^d w^d U_0 + \binom{2d}{d} w^d u^d V_0 + \binom{2d}{d} u^d v^d W_0 \\ v^{2d}\,(w_0 + u_0)\,\varepsilon + w^{2d}\,(u_0 + v_0)\,\varepsilon + u^{2d}\,(v_0 + w_0)\,\varepsilon \end{bmatrix}}{\binom{2d}{d} v^d w^d + \binom{2d}{d} w^d u^d + \binom{2d}{d} u^d v^d + u^{2d} 2\varepsilon + v^{2d}\, 2\varepsilon + w^{2d}\, 2\varepsilon}.$$

Funcţia $g\,(u,v,w)$ este înlocuită cu funcţia $g^{\varepsilon}\,(u,v,w)$ introducând mici variaţii ale valorilor în cele trei colţuri ale funcţiei $g\,(u,v,w)$ şi $f\,(u,v)$ unde valorile lui g se înlocuiesc cu g^{ε}:

$$g^{\varepsilon}\,(1,0,0) = \frac{v+w}{2};\; g^{\varepsilon}\,(0,1,0) = \frac{u+w}{2};\; g^{\varepsilon}\,(0,0,1) = \frac{u+v}{2},$$

iar proprietăţile derivatelor funcţiei $g\,(u,v,w)$ pentru margini (laturi) se extind şi pentru funcţia $g^{\varepsilon}\,(u,v,w)$:

$$\frac{\partial^i}{\partial u^i} g^{\varepsilon}\,(u,v,w)|_{u=0} = \frac{\partial^i}{\partial v^i} g^{\varepsilon}\,(u,v,w)|_{v=0} = \frac{\partial^i}{\partial w^i} g^{\varepsilon}\,(u,v,w)|_{w=0} = 0$$

unde: $i = 1, 2, \ldots, (d-1)$.

Ambele funcţii $f^{\varepsilon}\,(u,v)$ şi $g^{\varepsilon}\,(u,v,w)$ complică prelucrarea **suprafeţelor Bezier raţionale**, mărind timpul de prelucrare, deoarece numărul de elemente nenule se măresc şi anume de la patru la opt în cazul funcţiei $f\,(u,v)$ şi de la trei la şase în cazul funcţiei $g\,(u,v,w)$.

În concluzie se poate arăta că folosind metodele de mai sus, **modelarea suprafeţelor Bezier** se poate executa folosind suprafeţe rectangulare sau triunghiulare, reducând în acest fel timpul de prelucrare.

5.14. Utilizarea suprafeţelor Gordon–Coons[10] în modelarea geometrică

În contrast cu metodele prezentate anterior unde modelarea, interpolarea sau aproximarea suprafeţelor se poate face ţinând cont de un set de puncte de control (noduri), metoda **suprafeţelor Gordon–Coons** ia în considerare totalitatea punctelor (nodurilor) de-a lungul unor polinoame (curbe) de frontieră date.

5.14.1. Utilizarea suprafeţelor rectangulare Gordon–Coons în modelarea geometrică

Pentru început se va prezenta utilizarea sub-suprafeţelor (sub-caroiajelor) rectangulare care intersectează datele de-a lungul frontierei unui patrulater. Astfel de suprafeţe pot fi folosite pentru a construi un complex de astfel de sub-suprafeţe (sub-caroiaje) rectangulare care să interpoleze datele într-o reţea rectangulară de curbe în spaţiu.

[10] numite în literatura de specialitate şi suprafeţe de interpolare **Hermite.**

Fie pentru început cazul simplu al unor curbe de frontieră (margine) reprezentate prin linii drepte ale unui patrulater, definit prin patru puncte $F\,(\,i,k\,), i,k = 0,1$ aflate pe unul din planele $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ (Fig. 5.19).

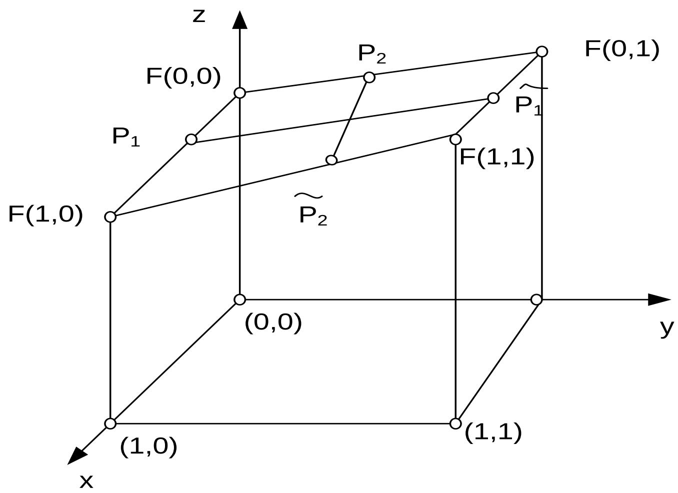


Fig. 5.19. Interpolare liniară a unui patrulater în spaţiu cu laturi (margini) linii drepte.

Presupunând că sunt date valorile funcţiei $F\,(\,0\,)$ şi $F\,(\,1\,)$, atunci linia care interpolează aceste valori este dată de relaţia:

$$F\,(\,x\,) = (\,1 - x\,)\,F\,(\,0\,) + \,x\,F\,(\,1\,),\ \text{definită pentru } x\ \in [0,1]$$

şi unde $f_0\,(\,x\,) \,:=\, 1 - \,x, f_1\,:=\,x, x\ \in [0,1]$.

Pentru a fi siguri că funcţia de interpolare ia valori corecte, adică cu toleranţe în limitele acceptate, la capetele intervalului [0, 1], cele două funcţii trebuie să satisfacă condiţiile:

$$f_i\,(\,k\,) = \,\delta_{i,k} = \begin{cases} 1, \text{pentru } i = k \\ 0, \text{pentru } i \neq k \end{cases}$$

Deoarece patrulaterul de interpolare a fost definit, construim marginile liniare ale acestuia, considerând de exemplu planele $y =$ constant:

$$P_1 = (\,1 - x\,)\,F\,(\,0,0) + \,x\,F\,(\,1,0\,)\ \text{şi}\ \tilde{P}_1 = (\,1 - x\,)\,F\,(\,0,1\,) + \,x\,F\,(1,1)$$

Dacă **interpolăm în direcţia y** avem suprafeţele :

$$Q_1 = (\,1 - y\,)[(\,1 - x\,)\,F\,(\,0,0\,) + \,x\,F\,(\,1,0\,) + \,y\,[\,(\,1 - x\,)\,F\,(\,0,1\,) + x\,F\,(\,1,1\,)]$$

pentru $x =$ constant avem:

$$P_2 = (\,1 - y\,)\,F\,(\,0,0\,)\ \text{şi}\ P_2\,(\,1 - y\,)\,F\,(\,1,0\,) + \,y\,F\,(\,1,1\,).$$

- Dacă **interpolăm în direcţia x** avem suprafeţele:

$$Q_2 = (\,1 - x\,)\,[\,(\,1 - y\,)\,F\,(\,0,0\,) + \,y\,F\,(\,0,1\,)] + \,x\,[\,(\,1 - y\,)\,F\,(\,1,0\,) + \,y\,F\,(\,1,1\,)].$$

Pentru ca patrulaterul să se”închidă”, adică laturile să se întâlnească două câte două trebuie ca: $Q_1 = Q_2$. Extinzând problema considerată astfel încât marginile să nu fie linii drepte, ci curbe în spaţiu (Fig. 5.20):

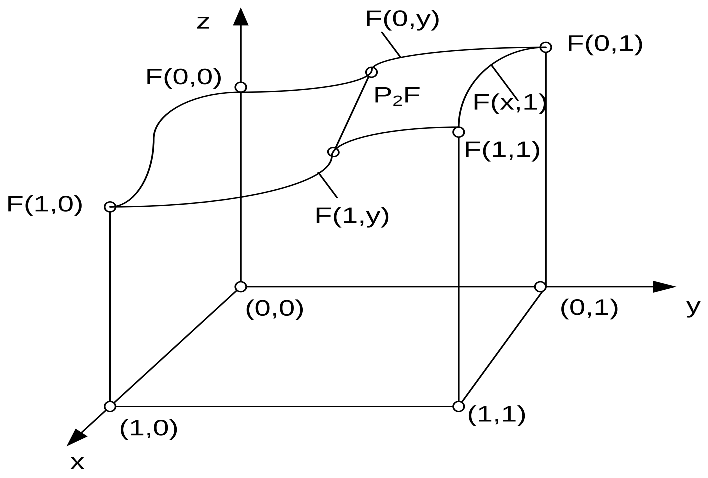


Fig. 5.20. Suprafaţa de interpolare liniară a unui patrulater în spaţiu cu laturi (margini) linii curbe.

$F\ (x, 0\ ), F\ (x, 1\ ), F\ (0, y\ )$ şi $F\ (1, y\ )$,

- atunci pentru y **constant**, formula de interpolare are forma:

$$P_1\ F\ (x, y\ ) = (1 - y\ )\ F\ (x, 0\ ) +\ y\ F\ (x, 1\ ).$$

- iar pentru x **constant**, formula de interpolare are forma:

$$P_2\ F\ (x, y\ ) = (1 - x\ )\ F\ (0, y\ ) +\ x\ F\ (1, y\ ).$$

Dar în acest caz cele două suprafeţe $P_1\ F(x, y\ )\ si\ P_2\ F\ (x, y)$ sunt diferite. Pentru a le apropia trebuie să modificăm formulele de mai sus, ori aceasta induce erori. Pentru a calcula aceste erori, considerăm marginile pentru care $x = 0$ şi $x = 1$, figura de mai jos (
Fig. 5.21):

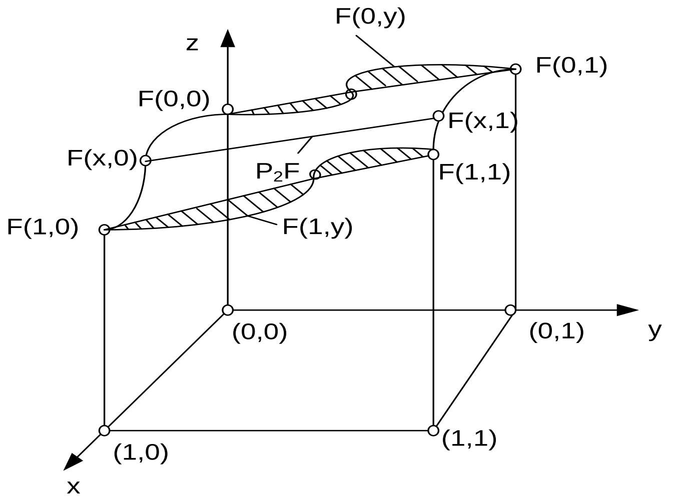


Fig. 5.21. Suprafaţă de interpolare liniară corectată faţă de un patrulater în spaţiu cu laturi (margini) linii curbe.

- În **planul** $\boldsymbol{x = 0}$, trebuie să corectăm $P_1\ F\ (x, y\ )$ cu:

$$F\ (0, y\ ) - [(1 - y\ )\ F\ (0, 0\ ) +\ y\ F\ (0, 1\ )]$$

- iar în **planul** $\boldsymbol{x = 1}$, corecţia necesară este:

$$F\ (1, y\ ) - [(1 - y\ )\ F\ (1, 0\ ) +\ y\ F\ (1, 1\ )]$$

Ca urmare se poate calcula corecţia din termenii scrişi simbolic:

$$F - P_1 F$$

Dorim să calculăm această eroare nu numai pentru laturi (margini), ci şi de-a lungul liniilor determinate de $P_2\, F\,(x, y)$. Simbolic putem scrie:

$$P_2(F - P_1 F) = P_2 - P_2\, P_1\, F.$$

Atunci formula de interpolare devine:

$$Q = P_1\, F + P_2\, F - P_2 P_1\, F.$$

- În **planul $\boldsymbol{y = 0}$** avem:

$$F\,(x, 0) = [(1 - x) F\,(0, 0) + x\, F\,(1, 0)]$$

- iar în **planul $\boldsymbol{y = 1}$** avem:

$$F\,(x, 1) = [(1 - x) F\,(0, 1) + x\, F\,(1, 1)]$$

Simbolic putem scrie ca mai sus:

$$F - P_2\, F$$

La fel ca mai sus putem calcula eroarea determinată de-a lungul liniilor determinate de $P_1 F\,(x, y)$:

$$P_1(F - P_2\, F) = P_1 - P_1\, P_2\, F.$$

din condiţia ca operatorii simbolici să descrie aceiaşi suprafaţă:

$$P_2 P_1\, F = P_1\, P_2\, F$$

Combinând formulele de mai sus, rezultă formula de interpolare a suprafeţei:

$$Q\,(x, y) = (1 - y) F\,(x, 0) + y\, F\,(x, 1) + (1 - x)\, F\,(0, y) + x\, F\,(1, y) -$$
$$- [(1 - x)\,((1 - y) F\,(0, 0) + y\, F\,(0, 1) + x\,\big((1 - y) F\,(1, 0) + y\, F\,(1, 1)\big)]$$

şi unde termenul în paranteze drepte [ ] reprezintă tocmai eroarea de corecţie. Introducând f_0 şi f_1 putem rescrie în formă matricială:

$$Q\,(x, y) = \big(F\,(x, 0), F\,(x, 1)\big) \begin{pmatrix} f_0\,(y) \\ f_1\,(y) \end{pmatrix} + \big(f_0\,(x), f_1\,(x)\big) \begin{pmatrix} F\,(0, y) \\ F\,(1, y) \end{pmatrix} -$$
$$- \big(f_0\,(x), f_1\,(x)\big) \begin{pmatrix} F\,(0, 0) & F\,(0, 1) \\ F\,(1, 0) & F\,(1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0\,(y) \\ f_1\,(y) \end{pmatrix}.$$

Pentru a parametriza formula de mai sus, înlocuim x şi y cu u şi respectiv v, unde $u, v \in [0, 1]$ şi presupunând că funcţiile (curbele) de margine sunt curbe parametrice în spaţiu, obţinem:

$$Q\,(u, v) = \big(P\,(u, 0), P\,(u, 1)\big) \begin{pmatrix} f_0\,(v) \\ f_1\,(v) \end{pmatrix} + \big(f_0\,(u), f_1\,(u)\big) \begin{pmatrix} P\,(0, v) \\ P\,(1, v) \end{pmatrix} -$$
$$- \big(f_0\,(u), f_1\,(u)\big) \begin{pmatrix} P\,(0, 0) & P\,(0, 1) \\ P\,(1, 0) & P\,(1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0\,(v) \\ f_1\,(v) \end{pmatrix},$$

unde: $P\,(i, v)$ şi $P\,(u, i)$ sunt reprezentările parametrice ale funcţiilor (curbelor) de margine (frontieră) pentru $i = 0, 1$. Considerând coordonatele (u, v) şi având punctele (nodurile) (u_k, v_j) unde: $k = 0, (1), \dots n$ şi $j = 0, (1), \dots, m$ putem introduce coordonatele locale: $r = \frac{u - u_k}{\Delta u_k}, s = \frac{v - v_j}{\Delta v_j}$, unde: $r, s \in [0, 1]$, iar: $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ şi unde: $\Delta\, v_j = v_{j+1} - v_j$.

Atunci Q devine:

$$Q\,(u, v) = \big(P\,(u, v_j), P\,(u, v_{j+1})\big) \begin{pmatrix} f_0\,(s) \\ f_1\,(s) \end{pmatrix} + \big(f_0\,(r), f_1\,(v)\big) \begin{pmatrix} P\,(u_k, v) \\ P\,(u_{k+1}, v) \end{pmatrix} -$$
$$- \big(f_0\,(r), f_1\,(r)\big) \begin{pmatrix} P\,(u_k, v_j) & P\,(u_k, v_{j+1}) \\ P\,(u_{k+1}, v_j) & P\,(u_{k+1}, v_{j+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0\,(s) \\ f_1\,(s) \end{pmatrix}.$$

Dar formula de mai sus nu conţine nici o condiţie de continuitate. Dacă dorim să obţinem suprafeţe continue de tip GC^1, atunci derivatele funcţiilor pentru punctele aflate pe frontiera (marginea) **suprafeţelor Gordon–Coons** trebuie să satisfacă condiţia adiţională:

$$f_i'\,(k) = 0\; i, k = 0{,}1.$$

condiţii care sunt satisfăcute de **polinoamele Hermite** cubice de forma:

$$f_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3, f_1(t) = 3t^2 - 2t^3$$

Atunci:

$$Q_u(i,v) = P_u(i,0)f_0(v) + P_u(i,1)f_1(v)$$
$$Q_v(u,i) = P_v(0,i)f_0(0) + P_v(1,i)f_1(u)$$

pentru $i = 0,1$ care ne arată că vectorul tangent la curba $Q(u_l, v)$ în punctul $Q(u_l, 0)$, unde u_l constant, depinde doar de vectorii tangenţi $P_v(0,0)$ şi $P_v(1, 0)$ în punctele de margine (colturi) $P(0,0)$ şi $P(1,0)$ care este identic şi pentru celelalte curbe de margine, ca în (
Fig. 5.22).

Ceea ce ne permite să alăturăm două sub-suprafeţe de–a lungul liniei (frontierei) comune în aşa fel încât să aibă aceleaşi tangente de–a lungul acestei linii.

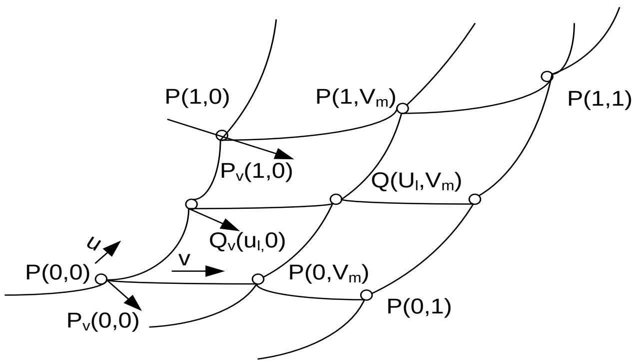


Fig. 5.22. Derivatele în punctele aparţinând curbelor de margine ce definesc sub-suprafeţele (sub-caroiaje) **Gordon–Coons**

Dacă notăm cele două sub-suprafeţe de interpolare I şi II şi presupunând că acestea se întâlnesc de–a lungul liniilor (curbelor) $P_{\mathrm{I}}(1,v)$ şi $P_{\mathrm{II}}(0,v)$, obţinem:

$$P_{\mathrm{I}}(1,v) \text{ şi } P_{\mathrm{II}}(0,v).$$

Din condiţia ca tangentele de–a lungul liniei (curbei) comune pentru punctele de margine pentru care $v = 0$ şi $v = 1$ obţinem:

$$P_{\mathrm{I},u}(1,i) = c\, P_{\mathrm{II},v}(0,i) \text{ cu } c > 0 \text{ şi } i = 0,1,$$

unde curbele de margine (frontieră) $v = 0$ şi $v = 1$ trebuie să aibă aceleaşi direcţii ca şi pentru tangentă.

Condiţiile de mai sus GC^1 de asamblare a sub-suprafeţelor s-au impus fără a se utiliza derivatele de-a lungul frontierelor (marginilor).

Se cere a se găsi funcţiile care de-a lungul frontierei tind spre zero şi a căror derivate să poată reproducă derivatele de – a lungul frontierei (marginilor).

Din nou apelăm la **polinoamele Hermite** cubice:

$$g_0(t) = t - 2t^2 + t^3, g_1(t) = -t^2 + t^3$$

şi care în mod similar conduc la formulele:

$$P_1 F(u,v) = f_0(v)P(u,0) + f_1(v)P(u,1) + g_0 P_v(u,0) + g_1(u)P_u(1,v)$$
$$P_2 F(u,v) = f_0(u)P(0,v) + f_1(u)P(1,v) + g_0 P_u(0,v) + g_1(u)P_u(1,v)$$

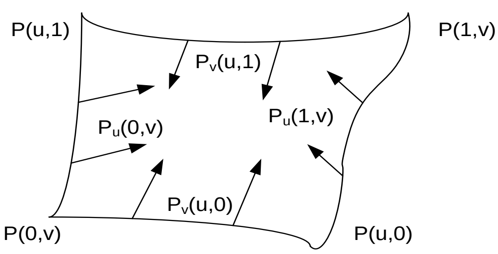


Fig. 5.23. Suprafaţă de interpolare de-a lungul frontierelor (marginilor).

Matricial, formula de mai sus se poate scrie:

$$P_1 P_2\, F \;:=\; (\, f_0\,(\,u\,), f_1\,(\,u\,), g_0\,(\,u\,), g_1\,(\,u\,)\,)\,\underline{B}\begin{pmatrix} f_0\,(\,u\,) \\ f_1\,(\,u\,) \\ g_0\,(\,v\,) \\ g_1\,(\,v\,) \end{pmatrix}$$

şi unde: $\underline{B}$ este o matrice $(4 \bullet 4)$ de forma:

$$\begin{bmatrix} [\underline{B}_{11}]\,[\underline{B}_{12}] \\ [\underline{B}_{21}]\,[\underline{B}_{22}] \end{bmatrix}$$

şi unde $[\underline{B}_{i,j}]$, $i,j = 1,2$ sunt matrici de dimensiune $(2 \bullet 2)$ corespunzând lui $Q\,(\,u,v\,)$ conţinând corecţiile de-a lungul frontierei (marginilor). Matricile $\underline{B}_{12}$ şi $\underline{B}_{21}$ corectează derivatele de margine (frontieră) de-a lungul lui u şi respectiv v.

În final matricea $\underline{B}$ are forma:

$$B := \begin{bmatrix} P\,(\,0,0\,)\; P\,(\,0,1)\; P_v\,(\,0,0\,)\; P_v\,(\,0,1\,) \\ P\,(\,1,0\,)\; P\,(\,1,1\,)\; P_v\,(\,1,0\,)\; P_v\,(\,1,1\,) \\ P_u\,(\,0,0)\; P_u\,(\,0,1\,)\; P_{u,v}\,(\,0,0)\; P_{u,v}\,(\,0,1\,) \\ P_u\,(\,1,0\,)\; P_u\,(\,1,1\,)\; P_{u,v}\,(\,1,0\,)\; P_{u,v}\,(1,1) \end{bmatrix}$$

corespunzătoare funcţiei de interpolare de forma:

$$Q\,(\,u,v\,) = (1,\; f_0\,(\,u\,),\; f_1\,(\,u\,)\; g_0\,(\,u\,), g_1\,(\,u\,))\,\underline{B}\begin{pmatrix} f_0\,(\,u\,) \\ f_1\,(\,u\,) \\ g_0\,(\,v\,) \\ g_1\,(\,v\,) \end{pmatrix}$$

unde
$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0\; P\,(\,u,0\,)\; P\,(\,u,1\,)\; P_v\,(\,u,0\,) P_v\,(\,u,1\,) \\ P\,(\,0,v\,) \\ P\,(\,1,v\,)\; - B \\ P\,(\,0,v\,) \\ P\,(\,1,v\,) \end{bmatrix}$$

şi unde corecţia definită de funcţia de interpolare $Q\,(\,u,v\,)$ de mai sus este comutativă, dacă ordinul derivatelor mixte în matricea $\underline{B}$ poate fi inversat, adică:

$$P_{u,v}\,(\,i,j\,) = \; P_{v,u}\,(\,i,j)\ \text{pentru}\ i,j = \; 0{,}1$$

În cazul suprafeţelor ce satisfac condiţia de continuitate GC^2, condiţia de mai sus este satisfăcută. Dar în cazul nostru derivatele mixte din colţurile patrulaterului nu sunt cunoscute, însă pot fi estimate, deşi în general derivatele de ordinul II mixte sunt necomutative.

Ca metode de estimare se poate alege un set de componente nule, ca apoi prin modificări adecvate să se obţină forma suprafeţei dorite.

De exemplu se poate estima un punct, interpolând valorile a patru puncte vecine: $u_{k-1}, u_{k+1}, v_{j-1}$, şi v_{j+1} ceea ce face necesar a înlocui u_k şi v_k cu u_{k-1} şi respectiv v_{j-1} care ne conduce la formula[11]:

$$Q_{u,v}\,(\,u_k, v_{j-1}\,) = \frac{-Q_v\,(\,u_k, v_{j-1}\,) + Q_v\,(u_k, v_{j-1})}{\Delta v_j} + \frac{-Q_u\,(\,u_{k-1}, v_j\,) + Q_u\,(u_k + 1, v_j)}{\Delta\, u_k} -$$
$$- \frac{Q\,(u_{k-1}, v_{j-1}) + \; Q\,(u_{k+1}, v_{j+1}) - Q\,(u_{k-1}, v_{j+1}) - Q\,(u_{k+1}, v_{j-1})}{\Delta\, u_k\, \Delta\, v_j},$$

unde: $\Delta\, u_k = \; u_{k+1} - \; u_{k-1}$ şi $\Delta\, v_j = \; v_{j+1} - v_{j-1}$.

Alternativ se aplică **formula lui Bessel** care ne permite să construim sub-suprafeţe **(sub-caroiaje) Gordon–Coons** interpolând toate combinaţiile posibile ale celor patru puncte vecine şi ţinând cont de derivatele mixte în punctele $P\,(\,u_k, v_j\,)$. Avem:

[11] Numită şi formula lui Adini.

$$Q_{u,v}\,(u_k, v_j) = \frac{-P\,(u_k, v_j) + P\,(u_k, v_{j+1}) + P\,(u_{k+1}, v_j) - P\,(u_{k+1}, v_{j+1})}{\Delta\, u_k\, \Delta v_j}.$$

Grafic acesta se poate reprezenta ca în figura de mai jos (Fig. 5.24):

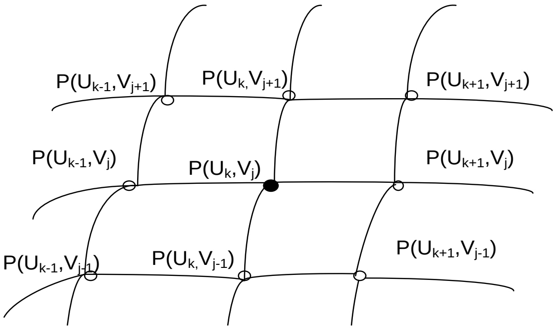


Fig. 5.24. Estimarea punctelor $\boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{u_k}, \boldsymbol{v_j})$ în funcţie de punctele vecine.

Asemănător considerăm derivatele parţiale mixte ale altor sub-suprafeţe liniare patrulatere pentru a obţine în final **formula lui Bessel**:

$$X_{u,v}\,(u_k, v_j) = (1 - \alpha_k, \beta_k)\begin{pmatrix} Q_{u,v}\,(u_{k-1}, v_{j-1})\, Q_{u,v}\,(u_{k-1}v, v_j) \\ Q_{u,v}\,(u_k, v_{j-1})\, Q_{u,v}\,(u_k, v_j) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\beta_j \\ \beta_j \end{pmatrix},$$

unde

$$\alpha_k = \frac{\Delta\, u_{k-1}}{u_{k+1} - u_{k-1}}, \beta_k = \frac{\Delta v_{k-1}}{v_{k+1} - v_{k-1}}.$$

5.14.2. Suprafeţe de interpolare Gordon–Coons bicubice

Dacă definim funcţiile (curbele) de frontieră (margine) :

$$P\,(u, i) := \left(f_0\,(u), f_1(u), g_0(u), g_1\,(u)\right)\begin{pmatrix} P\,(0,i) \\ P\,(1,i) \\ P\,(0,i) \\ P\,(1,i) \end{pmatrix},$$

unde $i = 0, 1$ şi

$$P\,(i, v) := (P\,(i, 0), P\,(i, 1)\; P_v\,(i, 0)P_v\,(i, 1)\;\begin{pmatrix} f_0\,(v) \\ f_1\,(v) \\ g_0\,(v) \\ g_1\,(v) \end{pmatrix}$$

atunci

$$Q\,(u, v) = (1, f_0\,(u), f_1\,(u)\; g_0\,(u), g_1\,(u)\; \underline{B}\;\begin{pmatrix} f_0\,(u) \\ f_1\,(u) \\ g_0\,(v) \\ g_1\,(v) \end{pmatrix}$$

devine o suprafaţă bicubică de forma

$$Q^*\,(u, v) = F\,(u)^T\, P\, F\,(v)$$

unde

$$F\,(u) := f_0\,(u), f_1\,(u), g_0\,(u), g_1\,(u)^T$$
$$F\,(v) := f_0\,(v), f_1\,(v), g_0\,(v), g_1\,(v)^T$$

şi

$$P := \begin{bmatrix} P\,(0,0)\; P\,(0,1)\; P_v\,(0,0)\; P_v\,(0,1) \\ P\,(1,0)\; P\,(1,1)\; P_v\,(1,0)\; P_v\,(1,1) \\ P\,(0,0)\; P\,(0,1)\; P_{uv}\,(0,0)\; P_{uv}\,(0,1) \\ P\,(1,0)\; P\,(1,1)\; P_{uv}\,(1,0)\; P_{uv}\,(1,1) \end{bmatrix}$$

sau în formă matricială pentru

$$f_0(u),\ f_1(u), g_0(u), g_1(u)^T = (u^3,\ u^2, u, 1) \begin{pmatrix} 2\,2\,1\,1 \\ -3\,3\,-2\,-1 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \end{pmatrix} := U^T K$$

avem: $\underline{Q}^* = \underline{U}^T\ \underline{K}\ \underline{P}\ \underline{K}^T\ \underline{v}$

Observaţie. Folosind sub-suprafeţele bicubice se poate observa uşor cum suprafeţele **Gordon-Coons** se transformă în **suprafeţe Bezier**. Dacă definim sub-suprafaţa $\underline{Q}^*$ ca o **suprafaţă bicubică Bezier**:

$$Q^* = \sum_{k=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} b_{ik}\, B_i^3(u)\, B_k^3(k) = U^T\, L\, B\, L^T,$$

unde: $B = \{b_{ik}\}$ este matricea de **puncte Bezier** iar:

$$L := \begin{pmatrix} -1\,3\,-3\,1 \\ 3\,-6\,3\,0 \\ -3\,3\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

şi comparăm cu: $\underline{Q}^* = \underline{U}^T\ \underline{K}\ \underline{P}\ \underline{K}^T$ obţinem: $\underline{P} = \underline{K}^{-1}\ \underline{L}\ \underline{B}\ \underline{L}^T\ (\underline{K}^T)^{-1}$, confirmând observaţia de mai sus.

5.14.3. Suprafeţe de interpolare Gordon–Coons triunghiulare

Pentru simplificare ne propunem să utilizăm triunghiul având punctele de contact (nodurile): $(1,0), (0,1), (0,0)$. Dacă interpolăm **paralel cu axa x** (Fig. 5.25) obţinem:

$$P_1 F = \frac{1-x-y}{1-y}\, F(0, y) + \frac{x}{1-y}\, F(1-y, y)$$

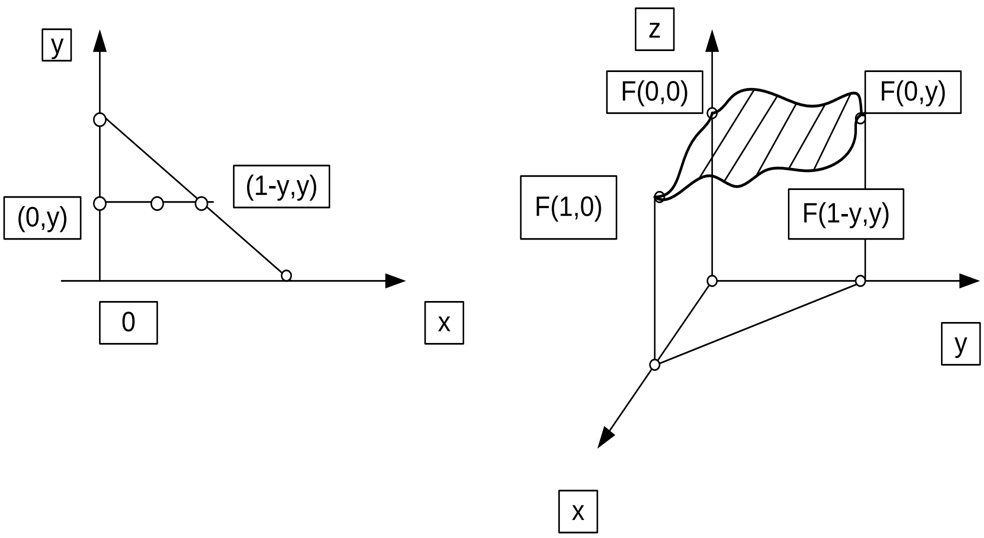


Fig. 5.25. Interpolare paralelă cu axa x.

Pentru frontieră (margini) obţinem:

$$P_1 F = F(1-y, y), \text{pentru: } x + y = 1$$
$$P_1 F = F(0, y), \text{pentru: } x = 0$$
$$P_1 F = (1-x)\, F(0,0)\, x\, F(1,0), \text{pentru: } y = 0$$

ceea ce reduce interpolarea la o linie dreaptă de-a lungul lui $y = 0$.

În mod similar, interpolăm **paralel cu axa y** (Fig. 5.26**)**:

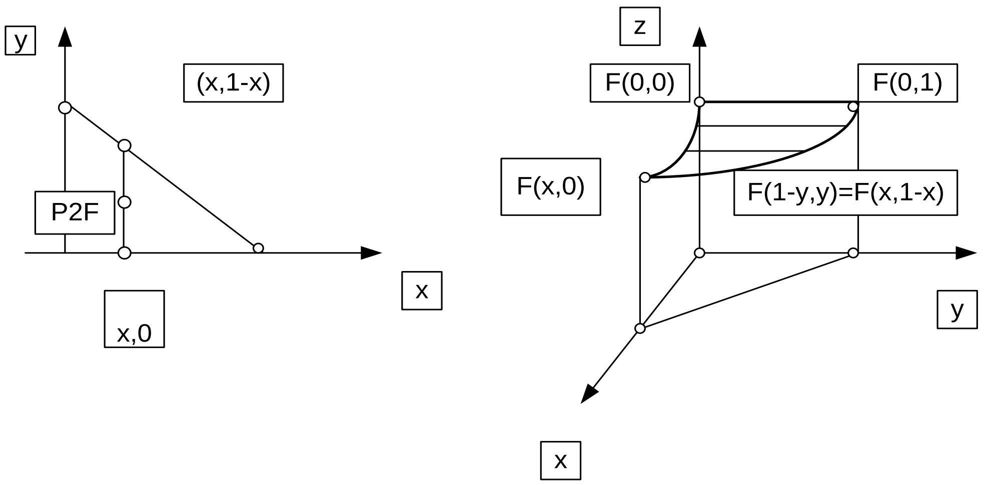


Fig. 5.26. Interpolare paralelă cu axa $\boldsymbol{y}$.

Obţinem:

$$P_2\,F = \frac{1-x-y}{1-x}\,F\,(\,x,0\,) + \frac{y}{1-x}\,F\,(x,1-x)$$

şi unde frontierele (marginile) sunt:

$$P_2\,F = \;F\,(\,x,0\,),\text{pentru } y = 0,$$
$$P_2\,F = (\,1-y\,)\,F\,(\,0,0\,) + y\,(0,1),\text{pentru } x = 0$$

Dacă interpolăm de-a lungul liniei $\boldsymbol{y} = \mathbf{1} - \boldsymbol{x}$, obţinem:

$$P_3\,F = \frac{x}{x+y}\,F\,(\,x+y,0\,) + \frac{y}{x+y}\,F\,(\,0,x+y\,).$$

Combinând cele trei interpolări:

$$Q\,(x,y\,) = \frac{1}{2}\,(P_1\,F + P_2\,F\; + P_3\,F - \;L\,F\,)$$

şi unde $L\,F$ are următoarele valori pe frontieră (margini):

$$L\,F\,\Big|_{x\,=\,0} = (\,1-y\,)\,F\,(\,0,0\,) + \;y\,F\,(\,0,1\,);$$
$$L\,F\,\Big|_{y\,=\,0} = (\,1-x\,)\,F\,(\,0,0\,) + \;x\,F\,(\,1,0\,);$$
$$L\,F\,\Big|_{x\,=\,1-y} = x\,F\,(\,1,0\,)\,F\,(\,0,0\,) + \;y\,F\,(\,0,1\,).$$

În final obţinem:

$$\begin{aligned} Q\,(\,x,y\,) = \frac{1}{2}\Bigg\{&\left(\frac{1-x-y}{1-y}\right)F\,(\,0,y\,) + \frac{x}{1-y}\,F\,(\,1-y,y\,) + \frac{1-x-y}{1-x}\,F\,(\,x,0\,) \\ &+ \frac{y}{1-x}\,F\,(\,x,1-x\,)\; + \frac{x}{x+y}\,F\,(\,x+y,0\,) \\ &+ \frac{y}{x+y}\,F\,(\,0,x+y\,) - \left[x\,F\,(\,1,0\,) + \;y\,F\,(\,0,1\,) + \;(\,1-x-y\,)\,F\,(0,0)\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

reprezentând ecuaţia **suprafeţei Gordon–Coons** care interpolează punctele date.

5.15. Concluzii

Descoperirea **polinoamelor lui Bernstein** la începutul secolului XX a marcat un moment crucial în dezvoltarea matematicii în general şi a teoriei polinoamelor în particular.

Elementul crucial l-a reprezentat, atât noutatea abordării problemei reprezentării grafice a curbelor, dar mai ales spectaculare abordări în diferite domenii ale matematicii determinate de acesta descoperire.

Necesitatea reprezentării curbelor, aşa cum ele apar în natură, adică departe de o formă „perfectă” a făcut ca utilizarea **polinoamelor lui Bernstein** să reprezinte primul pas pentru dezvoltarea unor noi modele şi algoritmi care să rezolve această problemă.

Astfel au apărut **modelele lui Bezier** şi **algoritmul lui Casteljau** din necesitatea de a modela forma exterioară a automobilului şi care au contribuit la dezvoltarea unor noi ramuri a matematicii şi anume **modelarea matematică** şi în special **modelarea geometrică**.

Apariţia calculatoarelor electronice după 1950 a condus la noi descoperiri care au consolidat această nouă ştiinţă, cercetările şi descoperirile în domeniul modelării suprafeţelor şi apoi a volumelor au permis extinderea orizontului acestei ştiinţe până la nivelul realizării virtuale a modelării fenomenelor (obiectelor).

În acest capitol s-a prezentat evoluţia **modelării geometrice** de la **polinoamele lui Bernstein** până la diverse tehnici de modelare geometrică a suprafeţelor în plan şi apoi în spaţiu, trecându-se astfel la modelarea spaţială.

Pe lângă reprezentarea devenită clasică a acestor probleme, autorul a încercat şi o prezentare matricială a diverselor tehnici de modelare, ţinându-se cont de volumul ridicat de date şi care se cer manipulate cu tehnici specifice de calcul.

Ca un domeniu de abordat pentru viitor, autorul consideră că abordarea vectorială şi tensorială, atât în domeniul real, cât şi în domeniul complex reprezintă un domeniu viitor de cercetare cu rezultate promiţătoare.

Dezvoltarea modelării geometrice în spaţiul n dimensional constituie deasemenea un domeniu cu certe rezultate viitoare. De exemplu, abordarea meteorologiei globale impune pe lângă modelări spaţiale tridimensionale şi considerarea unei a patra dimensiuni - timpul.

Se poate prognoza cu certitudine că domeniul modelării matematicii şi în special geometrice va reprezenta un domeniu viitor de cercetare cu deosebite realizări, atât pe plan teoretic, cât şi pe plan practic.

6. CUPLAREA SISTEMELOR DE CONCEPŢIE ŞI FABRICAŢIE A ENTITĂŢILOR GEOMETRICE

6.1. Introducere

În acest capitol se prezintă cuplarea sistemelor de concepţie şi de fabricaţie a entităţilor geometrice, înţelegându-se prin entităţi geometrice: linii, curbe în plan şi în spaţiu, suprafeţe în plan şi în spaţiu şi volume, dar accentuându-se îndeosebi asupra modelării volumelor şi a suprafeţelor în spaţiu.

Se prezintă **modelarea geometrică** a volumelor folosind geometria constructivă a volumelor, modele de frontieră şi cu ajutorul unor poliedre. Se calculează proprietăţile globale ale volumelor modelate folosind metoda descompunerii volumelor în părţi componente şi prin metoda Timmer – Stern. O atenţie aparte s-a acordat abordării problemei intersecţiilor entităţilor geometrice. În final, studiul se concentrează asupra aspectelor matematice ale sculelor de prelucrat, relevându-se importanţa acestora în realizarea modelelor propuse.

În numeroase aplicaţii, **modelul geometric** al unui obiect fizic poate necesita o descriere completă a proprietăţilor suprafeţelor modelate sau poate include doar informaţii referitoare, de exemplu, la proprietăţile de rezistenţă sau elasticitate a obiectului material. În practică se pot utiliza metode de **modelare geometrică** pentru a construi o descriere matematică cât mai apropiată a detaliilor unui obiect real sau pentru a simula un proces.

Construcţia propriu-zisă a **modelului** se poate realiza în principiu utilizând calculatoare şi sisteme de operaţii şi de aplicaţii adecvate. Utilizarea calculatoarelor este, de fapt, principalul instrument folosit în **modelarea geometrică**. Fără un sistem de calcul adecvat, din punctul de vedere al puterii de calcul şi a programelor de calcul folosite, nu este posibilă crearea, construcţia şi analiza unor modele sofisticate care au o importantă practică.

Metodele de **modelare geometrică** reprezintă o sinteză a unor domenii ştiinţifice diferite: geometrie analitică şi descriptivă, topologie şi algebră topologică, teoria logicii matematice, analiză numerică, calcul vectorial şi metode matriciale, pentru a enumera doar câteva domenii ce îşi aduc contribuţia la abordarea acestei probleme.

Iniţial, prin asamblarea acestor domenii s-a creat o disciplină independentă, cu o logică şi un limbaj specific. Dacă, la început, specialiştii erau mulţumiţi cu reprezentarea grafică a unor obiecte în spaţiul bidimensional, noi cerinţe, atât teoretice, cât şi tehnologice, împreună cu noi cunoştinţe în domeniile prezentate mai sus, au condus la extinderea **modelării geometrice** şi, în special, la extinderea modelării tri şi multidimensionale.

Odată create aceste modele, a fost posibilă studierea proprietăţilor geometrice şi analitice ale obiectului modelat. În plus, **modelul matematic** creat a permis obţinerea de noi informaţii referitoare la obiectul modelat: intersecţii, racordări, îmbinări etc., informaţii care apoi să fie folosite la prelucrarea şi realizarea propriu–zisă a obiectului modelat. Este clar că tehnologiile bazate pe **modelarea matematică** continuă să se îmbunătăţească în ritm rapid, odată cu creşterea cerinţelor tehnologice şi practice în acest domeniu.

În principiu, se pot distinge trei aspecte ale **modelării geometrice**:

1. **reprezentarea** *obiectului: dându-se caracteristicile şi dimensiunile fizice al obiectului, se determină aproximarea matematică a modelului obiectului de modelat.*
2. **desenul** *obiectului: se cere şi se obţine desenul obiectului, care apoi să servească obiectivelor tehnologice şi / sau estetice*.
3. **realizarea** *practică a modelului: pentru început cu scopul de a-l interpreta, apoi de al realiza practic şi tehnologic.*

Bineînţeles, cele trei aspecte sunt strâns legate şi dependente: de exemplu când se creează un **model geometric** al unui produs nou, obiectul fizic iniţial nu există, ci se creează, apoi prin **modelare** este studiat, perfecţionat sau îmbunătăţit, modelul fiind apoi disponibil pentru analiză şi evaluare. După selectarea unui desen şi aprobarea lui conceptuală, **modelul** se poate utiliza pentru a se realiza fabricaţia acelui obiect.

Odată realizat, **modelul geometric** furnizează informaţii despre forma obiectului, informaţii necesare desenului tehnic şi, ulterior, producţiei propriu–zise. Importante descoperiri teoretice, împreună cu aplicaţiile lor practice, în domenii ca de pildă: grafica pe calculator[1], proiectarea asistată de calculator[2], fabricaţia asistată de calculator[3] au fost de fapt principalii factori în dezvoltarea rapidă a **modelării geometrice**.

Robotica[4], inteligenţa artificială[5], prelucrarea imaginilor[6] cu ajutorul calculatorului au creat noi cerinţe acestei ramuri a ştiinţei, mărind în acelaşi timp cunoştinţele din domeniul **modelării geometrice**. Sistemele grafice pe calculator sunt în măsură să producă în mod curent imagini realistice în două dimensiuni ale unor obiecte şi / sau acţiuni în spaţiul tridimensional.

Modelarea geometrică a solidelor, tehnicile de reprezentare poligonală sau a unor suprafeţe sculptate au făcut ca aceste tehnici să fie utilizate în mod curent. Utilizând tehnici diverse, ca efecte luminoase din multiple surse, texturi şi opacităţi diferite, se pot obţine imagini apropiate realităţii.

Sistemele grafice de simulare a realităţii, de mişcare şi animare, au contribuit la crearea şi dezvoltarea unei noi arte cinematografice apropiate actorilor umani. Aceleaşi tehnici şi–au găsit aplicarea, de exemplu, în generarea de imagini necesare antrenării piloţilor, în simularea zborurilor avioanelor, fie comerciale, fie militare. Ceea ce permite predicţia apariţiei şi dezvoltării de forţe combatante artificiale, capabile să poarte acţiuni de luptă împotriva altor soldaţi umani sau artificiali.

Dezvoltarea şi perfecţionarea sistemelor de proiectare pe calculator a condus la revoluţionarea acestora, mărind fără precedent productivitatea creerii de noi produse. În plus, departamentele şi secţiile de proiectare folosesc în măsură din ce în ce mai mică reprezentările grafice pe hârtie, care sunt înlocuite cu cele pe mediile folosite de calculatoarele electronice.

---

[1] CG – Computer Graphics (engl.)
[2] CAD – Computer Aided Design (engl.)
[3] CAM – Computer Aided Manufacturing (engl.)
[4] Robotics – robotică (engl.)
[5] Artificial intelligence (engl.)
[6] Imaging processing (engl.)

Activitatea echipei de proiectare s-a transformat dintr-o activitate de desen tehnic într-una de sculptură virtuală, capabilă în acelaşi timp să creeze rapid modele complexe, utilizând tehnici ale modelării geometrice, în special folosind calculatoare electronice şi sisteme de programe adecvate.

Analiza structurilor (de rezistenţă şi nu numai) este un alt domeniu care a înregistrat schimbări profunde datorită progreselor în **modelarea geometrică**. Modelarea solidelor permite construcţia rapidă de modele având la bază elemente finite.

În acest mod, analiza structurilor de rezistenţă mecanice, statice şi dinamice se poate studia într-un număr extrem de mare de condiţii şi sarcini de încărcare. Efectul acestor sarcini mecanice se pot vizualiza rapid, rezultând o interpretare clară a solicitărilor structurale, uşor de modificat în direcţia cerută de caietul de sarcini.

Sistemele cinematice pe calculator au permis realizarea de modele diferite pentru părţi diferite ale modelelor de realizat şi apoi îmbinarea lor finală, fie vizual, fie analitic. Iar sistemele de inteligenţă artificială permit punerea de întrebări şi obţinerea de răspunsuri la probleme legate de pildă de accesibilitatea sculelor de prelucrat în asamblarea pieselor.

Se poate însă considera că un domeniu în care **modelarea geometrică** a avut cele mai spectaculoase aplicaţii îl reprezintă prelucrarea asistată de calculator. **Modelarea geometrică** a făcut posibil ca întreg procesul de prelucrare al produselor să fie realizat cu ajutorul calculatoarelor electronice.

Inginerii în **modelare geometrică**[7] furnizează, prin intermediul unor sisteme de calculatoare electronice, **modele geometrice** complecte şi exacte a unor părţi ce urmează a fi prelucrate.

În departamentele de producţie, calculatoarele sunt în măsură să interpreteze aceste modele, să genereze instrucţiuni de prelucrare şi apoi de asamblare pentru liniile de producţie computerizate şi robotizate. Inspecţia finală şi controlul automat al calităţii cu ajutorul calculatoarelor a condus la creşterea indicilor de calitate a produselor realizate.

Dezvoltarea sistemelor de **modelare geometrică**, aplicarea acestora în domeniul roboticii şi al prelucrării imaginilor cu ajutorul calculatoarelor a condus la dezvoltări apreciabile în domeniul sistemelor de **inteligenţă artificială**.

Îmbinarea cercetărilor şi dezvoltărilor din acest domeniu a condus la dezvoltarea roboticii în măsură să permită mişcări în spaţiul tridimensional, incluzând şi recunoaşterea de obiecte cu ajutorul unor senzori vizuali, tactili, olfactivi sau altor senzori generatori de informaţii.

Se consideră că roboţii îşi vor crea propriul lor model geometric într-un spaţiu artificial, robotizat, utilizând senzori artificiali şi o putere de influenţă şi decizie artificială.

În acelaşi timp se poate observa că la baza fiecărui sistem de aplicaţii pe calculator care să permită realizarea de modele geometrice stă un aparat matematic apreciabil, capabil să elaboreze în mod rapid variante diverse, uneori optimizate a unor **modele geometrice** propuse a fi studiate de către utilizator. Aceste **modele** pot fi interpretate, studiate, modificate si apoi acceptate de utilizator în funcţie de cerinţele proiectului tehnic.

Scopul principal al acestei lucrări îl constituie tocmai prezentarea acestui aparat matematic şi care stă la baza **modelării matematice** în general şi a **modelării geometrice** în particular, încercându-se totodată extinderea sa, atât

[7] Geometric modeling engineer (engl.)

prin forme de prezentare noi, cât şi prin ducerea mai departe a cunoştinţelor din domeniu.

6.2. Modelarea geometrică a volumelor[8]

Modelarea geometrică a volumelor reprezintă un important domeniu al **modelării geometrice** cu implicaţii şi, mai ales, aplicaţii importante în producţie. Prin realizarea practică a unui model solid se obţine un volum reprezentând un obiect (o piesă) în spaţiu, şi care să poată fi folosit la studii şi analize ulterioare necesare îmbunătăţirii şi perfecţionării produsului final.

În mod general, se poate afirma despre **A** că este un model a lui **B**, dacă **A** poate fi utilizat în a răspunde pentru diferite întrebări asupra lui **B**. În **modelarea geometrică** a volumelor aceasta înseamnă că se pun întrebări şi se obţin rezultate despre proprietăţile geometrice ale volumelor, proprietăţile topologice ale acestora, greutate şi centru de greutate, inerţie, solicitări de rezistenţă şi conectări cu alte volume şi părţi ale ansamblului etc.

Scopul practic al acestor activităţi, de creare şi realizare a **modelului geometric** al volumelor considerate şi apoi studierea proprietăţilor fizice şi estetice a modelului realizat îl constituie, în principal, realizarea unui nou produs prin metode de fabricaţie adecvate.

Ca tehnici de realizare a **modelelor geometrice** volumetrice se pot enumera:

1. Utilizarea geometriei constructive a volumelor;
2. Utilizarea modelelor de frontieră (margini);
3. Utilizarea reprezentării solidelor cu ajutorul unor poliedre.

6.2.1. Utilizarea geometriei constructive a volumelor[9] la modelarea acestora

Geometria constructivă a volumelor, numită şi modelarea solidelor folosind algoritmi[10] specifici, reprezintă descrierea obiectului (solidului) de modelat cu ajutorul unor caroiaje elementare sau a unor primitive. Se folosesc un set de operaţii Boule arborescente, unde dreptunghiurile reprezintă caroiaje de diverse dimensiuni şi poziţii în spaţiu, iar legăturile reprezintă un set de operaţii de îmbinare şi intersecţie.

6.2.2. Utilizarea modelelor de frontieră (margini)

Folosirea modelelor de frontieră (margini) prin care un model (obiect) este reprezentat prin suprafaţa sa de frontieră, şi care înglobează volumul interior reprezintă o altă tehnică utilizată la modelarea volumelor. Se reprezintă astfel solidul ca o îmbinare de suprafeţe mărginite. Feţele exterioare se descompun în suprafeţe, iar suprafeţele sunt mărginite prin curbe care se descompun în puncte comune. **Modelul geometric** conţine date ce reprezintă matematic suprafeţele geometrice de frontieră (margine), curbe de frontieră, de îmbinare şi coordonate geometrice ale punctelor de intersecţie.

[8] Solid modeling (engl.)
[9] CSG – Constructive Solid Geometry (engl.)
[10] ASM- Algorithmic Solid Modeling (engl.)

6.2.3. Utilizarea reprezentării volumelor cu ajutorul unor poliedre

Utilizarea reprezentării volumelor cu ajutorul unor poliedre este o tehnică a reprezentării volumelor cu ajutorul unor suprafeţe planare – poliedrice-în care caroiajele sunt patrulatere, iar liniile de îmbinare sunt linii drepte care se intersectează în punctele de intersecţie.

Aceste metode depind de operatorii constructivi care se folosesc în procesul de modelare. S-au menţionat deja **operatorii lui Boule**: reuniune, intersecţie, disjuncţie. Alţi operatori transformă suprafeţele bidimensionale în reprezentări tridimensionale prismatice sau axiomatice, folosind tehnici de translaţie sau rotaţie. Se pot menţiona **operatorii lui Euler,** utilizaţi pentru a crea suprafeţe, margini şi puncte de intersecţie în concordanţă cu topologia modelului propus.

În principiu, modelarea volumelor prelucrează două tipuri de date ce descriu modelul propus:

a) ***Date geometrice*** *referitoare la parametrii de descriere a suprafeţelor de bază (caroiaje), de exemplu coeficienţii geometrici ai suprafeţelor bi-cubice sau coordonatele punctelor ce reprezintă poliedrele suprafeţelor Bezier;*
b) ***Date topografice*** *referitoare la relaţia de conectare a componentelor geometrice considerate, acordându-se o atenţie deosebită zonelor de frontieră (marginilor).*

Alegerea tehnicilor de **modelare** şi construcţia **modelului** depinde în mare măsură de principiile care sunt alese pentru a sta la baza **modelării** şi de cerinţele ca **modelul** să fie un **model** viabil. Deşi sunt câteva categorii fundamentale de tehnici de construcţie a modelelor, la baza acestor tehnici stau principii generale, universale, principii geometrice faţă de care orice tehnică de **modelare** trebuie să se conformeze. De exemplu, modelele solide, tridimensionale trebuie să respecte condiţii topologice de generare restrictive.

6.3. Calculul proprietăţilor globale ale volumelor modelate

Evaluarea proprietăţilor globale ale volumelor ce fac obiectul **modelării** şi evaluarea **modelelor** realizate aplicând tehnicile de **modelare** necesită aplicarea cunoştinţelor de geometrie spaţială, tridimensională.

Fie:

$$\oint = \int_V f(p)\, dV ,$$

unde $\oint$ reprezintă proprietatea globală studiată şi care este o integrală triplă pe un volum V dat, iar $f(p)$ un vector funcţie descriind $\oint$.

Pentru studierea integralelor triple se folosesc sisteme şi teoreme ale calcului geometric şi diferenţial aplicate în spaţiul tridimensional, ca de exemplu: **teorema lui Gauss** (numită şi teorema divergenţei), care transformă o integrală pe o suprafaţă închisă într-o integrală corespunzând unui volum închis şi / sau **teorema lui Green,** care transformă o integrală pe o direcţie dată într-o integrală pe o suprafaţă închisă, integrale ce sunt utilizate în **metoda Timmer – Stern** şi care se vor studia în continuare (Mortenson, 1985).

6.3.1. Metoda descompunerii volumelor în părţi componente

Metoda descompunerii volumelor în părţi se utilizează la realizarea de componente care pot fi studiate, reproduse, şi / sau fabricate şi apoi asamblate pentru a realiza obiectul (**modelul**) global. Pot exista mai multe moduri de descompunere în celule, descompunerea nefiind unică, dar în final ea se cere a fi deplin definită. Metoda este curent folosită în analiza structurală a unor piese asamblate şi reprezintă un element de bază la **modelarea** cu elemente finite.

Metode avansate de analiză structurală folosesc reprezentări matematice ale solidelor tri-cubice reprezentate parametric. Se realizează o enumerare spaţială[11] de elemente componente, care prin asamblare definesc produsul (**modelul**) considerat:

$$\boldsymbol{MODEL} = \bigcup_i celulele_i,$$

unde $i \in P^3$ reprezintă părţile componente (celulele) **modelului**.

În principiu, orice integrală referitoare la **model** se descompune într-o sumă de integrale triple referitoare la părţile **modelului**,

$$\int_V f\,(p)\ dV = \sum_i \iiint_{celulele_i} f\ dV$$

şi care este o sumă de integrale valide triple referitoare la volume distincte ca părţi ale **modelului.** Fiecare integrală trebuie evaluată, în domeniul real sau complex, în funcţie de natura părţilor în care s-a descompus volumul studiat.

O metodă relativ simplă o poate constitui descompunerea în cuburi de dimensiuni fixe sau variabile. Atunci, volumul este dat, de exemplu, de o integrală triplă de obiecte în spaţiu, în formă parametrică, relative la un sistem de coordonate cartezian:

$$\iiint_{celule} f\ ds\, dy\, dz = \iiint_{celula\ elementară} f\, \mathcal{J}\, du\, dv\, dw$$

unde $\mathcal{J}$ reprezintă transformarea Jacobiană.

Reprezentarea **modelului** (solidului) folosind frontierele (marginile) **modelului** constituie o altă metodă de a realiza un **model**, cu ajutorul integrării directe sau folosind **teorema lui Gauss,** de exemplu: fie $\bar{p}$ o funcţie vectorială continuă, astfel încât

$$\int_{volum} \nabla\cdot p\, dV = \oint p\ \cdot \bar{n}\, dA.$$

unde $\bar{n}$ este vectorul normal unitar, iar ∇ operatorul de derivare $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Deoarece integrala pe volum se transformă în integrală pe o suprafaţă de frontieră (margine) a **modelului** (obiectului, solidului), şi cum aceasta se compune (sau descompune) într-o reuniune de suprafeţe cvasi-disjuncte S_i, putem scrie:

$$\oint_{suprafaţă} p\cdot \bar{n}\, dA = \sum \int_{f_i} p\ n_i\, d\, S_i$$

Pentru a calcula proprietăţile integrale ale modelului (solidului) folosind reprezentarea sa în sub-suprafeţe se utilizează **metoda Lee şi Requicha** şi care constă în utilizarea unui algoritm recursiv aplicat sub-suprafeţelor componente:

$$\int_{A\cup B} f\ dV = \int_A f\, dV + \int_B f\, dV - \int_{A\cap B} f\ dV;$$

[11] Cell decomposition (engl.)

$$\int_{A-B} f\ dV = \int_A f\,dV - \int_{A\cap B} f\ dV.$$

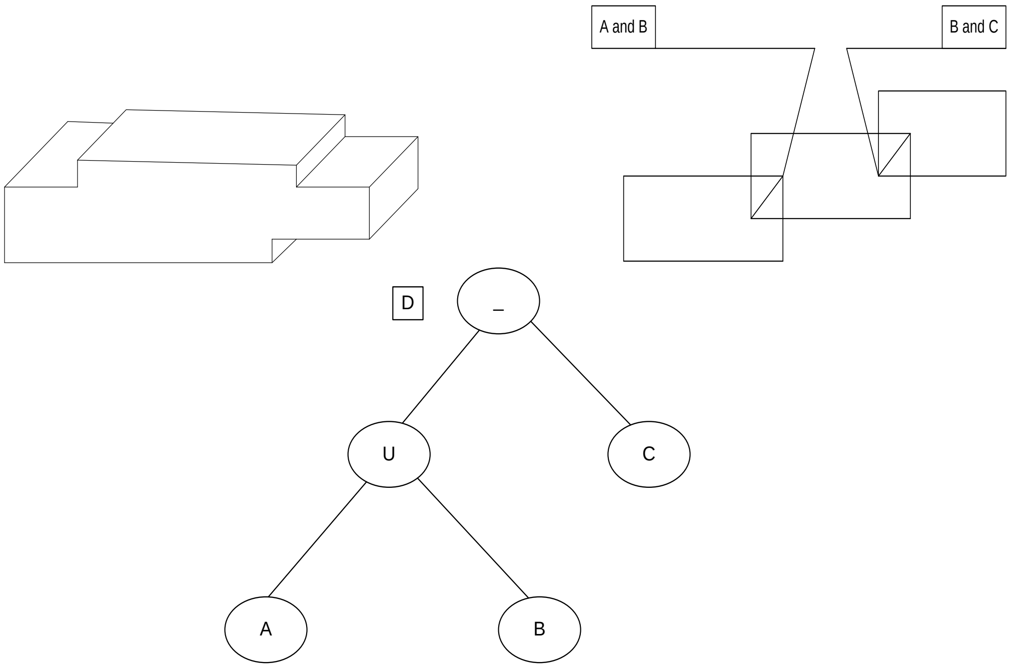


Fig. 6.1. Reprezentarea grafică a metodei Lee şi Requicha de realizare a unui model (solid)

În (Fig. 6.1) solidul D rezultă din reuniunea obiectelor A şi B urmate de diferenţa C.

Notăm cu I proprietăţile integralei şi, conform **metodei Lee şi Requicha,** obţinem:

$$\mathrm{I}_D = \mathrm{I}_A + \mathrm{I}_B - \mathrm{I}_{A\cap B} - \mathrm{I}_{A\cap C} - \mathrm{I}_{B\cap C} + \mathrm{I}_{A\cap B\cap C}$$

Dar $\mathrm{I}_{A\cap C}$ şi $\mathrm{I}_{A\cap B\cap C} = \phi$, unde ϕ este mulţimea vidă, deci:

$$\mathrm{I}_D = \mathrm{I}_A + \mathrm{I}_B - \mathrm{I}_{A\cap B} - \mathrm{I}_{B\cap C}.$$

Dezavantajul calculului lui I_D prin această metodă constă în aceea că este posibil ca numărul de integrale din dreapta ecuaţiei să crească exponenţial, mărind corespunzător timpul de calcul.

6.3.2. Metoda Timmer–Stern

Această metodă utilizează reprezentarea frontierelor (marginilor) pentru a calcula proprietăţile globale ale **modelului** (solidului). Or, aceasta presupune că orice faţă a **modelului** să fie reprezentată de o ecuaţie parametrică de forma:

$$p = p\,(u, w\,), \qquad u, w\ \in [\,0, 1\,], p\ \in\ \mathbb{R}^3$$

Reuniunea acestor sub-suprafeţe formează totalitatea frontierelor (marginilor) **modelului** (solidului), definind suprafaţa marginală a **modelului** (solidului). Curba închisă, frontierele (marginile) fiecărei regiuni se definesc parametric folosind tensorul unitar astfel:

$$u = u_i\,(\,t\,),$$
$$w = w_i\,(\,t\,),$$

unde $t\ \in [\,0, 1\,]$, $t \in\ \mathbb{R}^3$ şi unde i identifică o porţiune a frontierei (marginii).

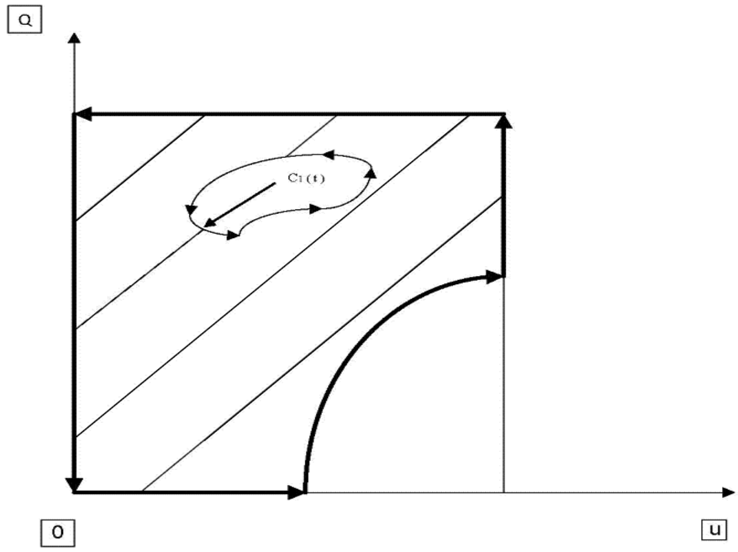


Fig. 6.2. Reprezentarea parametrică a frontierei (marginilor) feţei (sub-suprafeţei) unui solid. Zona haşurată reprezintă zona activă.

Cum am văzut mai sus, proprietăţile globale ale modelului (solidului) se pot calcula fie folosind integrale de suprafaţă, fie folosind integrale de volum, deoarece **teorema lui Gauss** (a divergenţei) permite reducerea integrării de volum la integrarea de suprafaţă. Folosind notaţiile lui **Timmer şi Stern** obţinem:

$$\iiint_R \nabla \cdot \phi \; d\tau = \iint_S \phi \; \vec{n} \; d\sigma$$

unde $\vec{n}$ este pozitiv, când este îndreptat spre exteriorul obiectului (modelului).

Dacă proprietăţile globale pe care dorim să le calculăm sunt

$$\psi = \iiint F \; (x, y, z) \; d\tau$$

unde: $d\tau = dx \, dy \, dz$, atunci ϕ trebuie să satisfacă expresia

$$\nabla \cdot \phi = F$$

cu dezavantajul că ϕ nu este unic.

Ca un exemplu, se poate calcula momentul de inerţie de–a lungul axei x, ca fiind:

$$F \; (x, y, z) = y^2 + z^2$$

În acest caz: $\phi = [x \; (y^2 + z^2), 0, 0]$ sau: $\phi = [0, \frac{y^3}{3}, \frac{z^3}{3}]$; ambele reprezentând aceeaşi funcţie ϕ.

Ca urmare, calculul se reduce la a evalua o integrală de suprafaţă:

$$\psi = \iint_S F \; (x, y, z) \; d\sigma$$

Dar prin ipoteză s-a stabilit că frontiera (marginile) volumului (modelului, obiectului) este formată din reuniunea a n feţe definite ca sub-suprafeţe, atunci ψ devine

$$\bar{\psi} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i$$

şi care, în termenii variabilelor parametrice (u, w) devine

$$\bar{\psi} = \iint_{S_i} F \; [x \; (u, w), y \; (u, w), z \; (u, w) \; | \; \mathcal{J} \; | \; du \; dw$$

sau simplificat:

$$\psi_i = \iint_{S_i} H\ (u, w)\ du\ dw$$

şi unde: $|\mathcal{J}|$ este transformarea Jakobiană

$$|\mathcal{J}| = \frac{\partial p\ (u, w)}{\partial u} \bullet \frac{\partial p\ (u, w)}{\partial w}$$

sau

$$|\mathcal{J}| = \| p_{uw}^{u} \bullet\ p_{uw}^{u} \|$$

Integrând pe suprafeţele active din figura de mai sus (Fig. 6.2) şi considerând tensorul suprafaţă unitar, cu ajutorul **dublei cuadraturi a lui Gauss** obţinem aproximarea integralei

$$\psi_i \cong \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} w_j\, w_k\, H\,(a_j, a_k)$$

unde w şi a sunt ponderi ale **polinomului lui Legendre** de ordinul $(m+1)$. În mod natural, conturul suprafeţei este iregular, ceea ce măreşte dificultatea calcului.

Dacă aplicăm **teorema lui Green** algoritmului lui **Timmer şi Green** pentru a transforma suprafaţa de integrat într-o integrală pe o curbă, obţinem:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial \beta}{\partial w}\right)\right] du\ dw = \oint_{r_i} (\ \beta\ du +\ \alpha\ dw), \text{ unde } \alpha =\ \alpha\ (u, w)\ si\ \beta =\ \beta\ (u, v)$$

În Fig. 6.2 sub-suprafaţa este mărginită de curba închisă c_1, atunci α şi β, devin:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial \beta}{\partial w}\right) = H\ (u, w)$$

Dar $F\ (x, y, z)$ poate fi specificată independent ca un obiect geometric şi deci ϕ poate fi determinat prin măsurători directe. În unele cazuri însă, funcţia $H\,(u, w)$ poate lua valori în domeniul complex şi deci este dificil de evaluat. Se cere a se calcula α şi β.

Dacă presupunem că suprafaţa S_i este continuă şi funcţia $H\,(u, w)$ este fără discontinuităţi, atunci funcţia $H\,(u, w)$ poate fi aproximată cu ajutorul polinomului:

$$H\ (u, w) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} a_{i,j}\ u^{i-1}\ w^{j-1}\ ,$$

unde M este modelul considerat.

Dacă în formula:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial \beta}{\partial w}\right) = H\ (u, w)$$

alegem $\beta\ (u, w) = 0,$ atunci obţinem

$$\alpha\ (u, w) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} i^{-1} a_{i,j}\ u^{i}\ w^{j-1},$$

iar

$$\psi_i = \oint_{r_i} \alpha_i\ (u, w)\ dw$$

sau

$$\psi_i = \sum_{l=1}^{L} \int_0^1 \alpha_i\ [u_1\ (t), w_i\ (t)] \left(\frac{dw_1}{dt}\right) dt$$

şi unde L este numărul de curbe închise care definesc sub-suprafeţele S_i. Această ecuaţie poate fi evaluată exact, dacă curbele închise $C_i\ (t)$ sunt polinoame, deoarece ψ_i se reduce la polinoame în t. Pe de altă parte, ordinul polinomului poate deveni prea mare, îngreuind calculele. De exemplu, dacă se consideră sub-polinoamele bi-cubice şi curbele închise cubice, atunci polinomul în t are ordinul 24.

Dacă luăm în considerare erorile de reprezentare care apar în cadrul folosirii metodei de mai sus, se poate observa că acestea apar în principal din două surse:

1. al calcului propriu–zis;
2. al aproximării geometrice.

În prima categorie se încadrează erorile inerente **cuadraturii lui Gauss**, erorile de trunchiere şi de rotunjire. În categoria aproximării geometrice erorile pot apărea când se aproximează sub-suprafeţele de frontieră (marginile) prin polinoame bi-cubice parametrice. De remarcat că o altă sursă de erori poate fi determinată de frontiera dintre două sub-suprafeţe bi-cubice adiacente, erori ce se ce luate în considerare.

Algoritmul lui Timmer şi Stern ne permite să calculăm aceste intersecţii rezultând un număr de puncte în cadrul unei toleranţe date, dar care apoi sunt cuprinse în ecuaţiile parametrice, ceea ce uneori poate conduce la rezultate globale eronate.

6.4. Modelarea geometrică a intersecţiilor

Modelarea solidelor şi în special **modelarea geometrică** a acestora conduce la o problemă importantă a acestei discipline, şi anume la problema intersecţiilor, problemă ce are aplicaţii largi în:

- Geometria analitică şi computaţională (numerică);
- Proiectarea şi concepţia de produse asistată de calculator;
- Prelucrarea asistată de calculator, de exemplu pentru:
  - Obţinerea de vederi în plan, folosind diverse plane de intersecţie ale volumelor studiate;
  - Calculul traiectoriei maşinilor-unelte cu comandă numerică, atunci când aceasta se obţine prin intersecţia unor suprafeţe;
  - Descrierea unor suprafeţe (volume, îmbinări) ale unor structuri întâlnite la proiectarea unor produse complexe, ca de pildă proiectarea automobilelor, avioanelor, vapoarelor etc.

Pentru a **modela** intersecţia a două suprafeţe şi a obţine curba de intersecţie în mod cât mai precis, şi în acelaşi timp eficient din punctul de vedere tehnologic, sunt necesare nu numai aproximări de acurateţe ridicată, implicând diferenţiale de ordin superior, dar şi calculul tangentelor curbelor de intersecţie şi a curburii vectorilor.

În general, cele două tipuri de suprafeţe care se intersectează şi care sunt utilizate cu predilecţie în **modelarea geometrică,** sunt în special de tip parametric şi / sau implicit, ceea ce conduce la trei tipuri de probleme legate de intersecţia suprafeţelor:

- Parametric – parametric (P P);
- Implicit – implicit (I I);
- Parametric – implicit (P I).

Pentru a studia problema intersecţiei a două suprafeţe este necesară introducerea şi studierea noţiunilor de curbură vectorială, vector normal si torsiune.

Fie o suprafaţă dată.:

$x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ sau sub formă vectorială: $\overline{r} = \overline{c}(s)$.

Definim:

⤇ $\overline{c}'(s) = \overline{t}$, vectorul unitar tangent;

⤇ $\overline{c}''(s) = \overline{k} = k\,\overline{n}$, unde $\overline{k}$ este vectorul curbură şi care măsoară variaţia vectorului tangent.

Avem: $k^2 = \overline{k} \cdot \overline{k} = \overline{c}'' \cdot \overline{c}''$ şi prin diferenţiere obţinem:

$$\overline{c}'''(s) = k'\overline{n} + k\,\overline{n}'.$$

Înlocuind pe n' obţinem formula lui **Fernet – Serret**:

$$\overline{c}'''(s) = -k^2\,\overline{t} + k'\overline{n} + k\,\tau\,\overline{b},$$

unde $\overline{t}$, $\overline{n}$, $\overline{b}$ sunt vectori ortonormali şi unde

$$\tau = \frac{\overline{b} \cdot \overline{c}'''}{k} \text{ este torsiunea } (k \neq 0).$$

≤ **În cazul $k = 0$**, pentru a obţine vectorul normal în punctul în care $k = 0$ este necesară calcularea unor derivate de ordin superior rezultând situaţiile de mai jos:

- Dacă $k \equiv 0$, curba este linia dreapta şi τ nu este definită;
- Dacă $k = 0$ şi $k' \neq 0$, derivata de ordinul III

$$\overline{c}'''(s) = k'\overline{n} + k\,\overline{n}'$$

se reduce la: $\overline{c}'''(s) = k'n$ şi care defineşte vectorul normal unde k' se obţine din

$$(k')^2 = \overline{c}''' \cdot \overline{c}'''.$$

- Dacă $k = k' = 0$ şi $k'' \neq 0$ se cere evaluarea derivatelor de ordinul IV

$$\overline{c}^{(4)}(s) = k''\overline{n},$$

unde:

$$(k'')^2 = \overline{c}^{(4)} \cdot \overline{c}^{(4)}.$$

Generalizând, dacă: $k = k' = k^{(j-1)} = 0$ şi $k^{(j)} = 0$, atunci

$$\overline{c}^{(j+2)}(s) = k^{(j)}\,\overline{n},$$

unde:

$$\left(k^{(j)}\right)^2 = \overline{c}^{(j+2)} \cdot \overline{c}^{(j+2)}.$$

≤ **În cazul** $k = 0$ şi $k' \neq 0$, torsiunea τ se poate calcula evaluând derivata de ordinul al IV-lea a lui $\overline{c}$, folosind formula lui **Fernet – Serret:**

$$\overline{c}^{(4)}(s) = -3\,k\,k' + \left(k'' - k\,\tau^2 - k^3\right)\overline{n} + \left(2\,k'\tau + k\,\tau'\right)\overline{b},$$

sau:

$$\overline{c}^{(4)}(s) = k''\overline{n} + 2\,k'\tau\,b$$

deci:

$$\tau = \frac{b \cdot c^{(4)}}{2k'}.$$

În mod similar:

$$\overline{c}^{(5)}(s) = \left(-4\,k\,k'' - 3\left(k'\right)^2 + k^4 + k^2\tau^2\right)\overline{t} + (k''' - 6\,k^2k' - 3\,k'\tau^2 - 3k\,\tau\,\tau')\,\overline{n} + \left(3\,k''\tau + 3\,k'\tau' - k^3\tau - k\,\tau^3 + k\,\tau''\right)\overline{b},$$

dacă: $k = k' = 0$ şi $k' \neq 0$, atunci τ devine:

$$\tau = \frac{\overline{b} \cdot \overline{c}^{(5)}}{3k''}.$$

În general, dacă $k = k' = \ldots = k^{(j-1)} = 0$ şi $= k^{(j)} \neq 0$, atunci:

$$\tau = \frac{\overline{b} \cdot \overline{c}^{(j+3)}}{(j+1)k^{(j)}};$$

Considerăm două suprafeţe sub formă parametrică:

$$x = x^A(u_A, v_A), y = y^A(u_A, v_A), z = z^A(u_A, v_A);$$
$$x = x^B(u_B, v_B), y = y^B(u_B, v_B), z = z^B(u_B, v_B).$$

Sau în formă vectorială:

$$\overline{r} = \overline{r}^A(u_A, v_A),$$
$$\overline{r} = \overline{r}^B(u_B, v_B)$$

şi care reprezintă cele două suprafeţe sub formă parametrică.

De asemeni fie două suprafeţe în formă implicită:

$$f^A(x, y, z) = 0$$

şi

$$f^B(x, y, z) = 0$$

Presupunând că aceste suprafeţe sunt suprafeţe regulare, adică

$$\overline{r}_{uA}^A \bullet \overline{r}_{vA}^A \neq 0, \overline{r}_{uA}^B \bullet \overline{r}_{vB}^B \neq 0, \nabla f^A \neq 0, \nabla f^B \neq 0,$$

atunci vectorul normal unitar pentru o suprafaţă sub formă parametrică este:

$$\overline{N} = \frac{\overline{r}_u \bullet \overline{r}_v}{| r_u \bullet r_v |},$$

iar ecuaţia planului tangent la $r(u_p, v_p)$ se poate scrie ca:

$$\left(\overline{r} - \overline{r}(u_p \bullet v_p)\right) \bullet \overline{N}\left(u_p \bullet v_p\right) = 0$$

unde r este un punct în planul tangenţial.

În cazul suprafeţei date sub formă implicită vectorul unitar este:

$$\overline{N} = \frac{\left(f_x, f_y, f_z\right)^T}{\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|},$$

cu condiţia: $|\nabla f| \neq 0$.

Dacă derivăm relaţia de mai sus şi considerând o curbă parametrică arbitrară $\overline{r} = \overline{r}(t)$ pe o suprafaţă implicită $f(x, y, z) = 0$ se obţine relaţia:

$$\nabla f \bullet \dot{\overline{r}} = 0,$$

deoarece $\overline{r} = \overline{r}(t)$ este arbitrar, ∇f trebuie să fie perpendicular pe planul tangent şi deci **acesta** este planul tangent.

Planul tangent al suprafeţei implicite $f(x, y, z) = 0$ în punctul $P\left(x_p, y_p, z_p\right)$ se obţine înlocuind vectorul normal al suprafeţei date sub forma parametrică, obţinându-se:

$$f_x\left(x - x_p\right) + f_y\left(y - y_p\right) + f_z\left(z - z_p\right) = 0,$$

unde: $f(x, y, z) = 0$, iar f_x, f_y, f_z de mai sus sunt evaluaţi în $\left(x_p, y_p, z_p\right)$.

În cele de mai sus s-a studiat curba de intersecţie a două suprafeţe, independent de suprafeţele intersectate. Pe de altă parte problema curbei de intersecţie se poate studia şi ca o curbă a două suprafeţe intersectate.

Fie două curbe:

$u = u(s)$ şi

$v = v(s)$ în planul (u, v) definit de curba $\overline{r} = \overline{c}(t) = \overline{r}((u(s), v(s))$, aparţinând suprafeţei definită parametric $\overline{r}(u, v)$, şi fie curba

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s),$$

unde $f(x(s), y(s), z(s)) = 0$, defineşte o curbă implicită $f(x, y, z) = 0$.

Atunci, primele trei derivate ale curbei de intersecţie $\overline{c}(s)$ sunt:

$$\overline{c}'(s) = \overline{r}_u u' + \overline{r}_v u'$$
$$\overline{c}''(s) = \overline{r}_{uu}(u')^2 + 2\overline{r}_{uv} u'v' + \overline{r}_{vv}(u')^2 + \overline{r}_u u'' + \overline{r}_v u'$$
$$\overline{c}'''(s) = \overline{r}_{uuu}(u')^3 + 3\overline{r}_{uuv}(u')^2 v' + 3\overline{r}_{uvv} u'(v')^2 + \overline{r}_{vvv}(v')^3 +$$
$$+ 3[\overline{r}_{uu} u' u'' + \overline{r}_{uv}(u'' v' + u'v'') + \overline{r}_{vv} v' v'' + \overline{r}_u u''' + \overline{r}_v u'''].$$

În mod similar,

$$\frac{df}{ds} = f_x\, x' + f_y\, y' + f_z\, z' = 0$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = f_{xx}\,(x')^2 + f_{yy}\,(y')^2 + f_{zz}\,(z')^2 + 2\left(f_{xy}\, x'y' + f_{yz}\, y'z' + f_{xz}\, x'z'\right) + \\ + f_x\, x'' + f_y\, y'' + f_z\, z'' = 0$$

$$\frac{d^3 f}{ds^3} = f_{xxx}\,(x')^3 + f_{yyy}\,(y')^3 + f_{zzz}\,(z')^3 + 3\left(f_{xxy}\,(x')^2\, y' + f_{xxz}\,(x')^2\, z' + \\ f_{xyy}\,(y')^2 x' + f_{yyz}\,(y')^2 z' + f_{xzz}\,(z')^2 x' + f_{yzz}\,(z')^2 y'\right) + 2\, f_{xyz}\, x'y'z' + 3\,(f_{xx}\, x'x'' + \\ f_{yy}\, y'y'' + f_{zz}\, z'z'' + f_{xy}\,(x''\, y' + x'\, y'') + f_{yz}\,(y''\, z' + y'\, z'') + f_{xz}(x''z' + x'\, z'')) + \\ + f_x\, x''' + f_y\, y''' + f_z\, z''' = 0$$

Cele de mai sus confirmă observaţia de la începutul acestui paragraf referitoare la importanţa deosebită ce trebuie acordată intersecţiilor suprafeţelor studiate şi / sau modelate, în special în cazul discontinuităţilor sau singularităţilor dintre suprafeț ele adiacente considerate.

6.5. Modelarea geometrică a intersecţiilor suprafeţelor

Fie intersecţia a două suprafeţe, prima suprafaţă definită printr-un polinom raţional sub formă parametrică, iar a doua suprafaţă sub formă algebrică implicită

$$r = r\,(u,v) = \left(\frac{X\,(u,v)}{W\,(u,v)}\ \frac{Y\,(u,v)}{W\,(u,v)}\ \frac{Z\,(u,v)}{W\,(u,v)} \right)^T \cap f\,(r) = 0$$

unde $0 \leq u,v \leq 1$, şi care conduce la patru ecuaţii algebrice în cinci necunoscute:

$$r\,(u,v),\quad u\,(x,y),\quad v\,(x,y),\quad x,\quad y.$$

Pentru suprafeţele $f\,(r)$ şi $r\,(u,v)$ de grad inferior se poate substitui $r\,(u,v)$ în $f\,(r)$ pentru a obţine o curbă în (u,v).

Ca exemple, se pot cita intersecţiile:

- a două plane descrise de ecuaţii de gradul I,
- a sferelor, cilindrilor, conurilor descrise de ecuaţii de gradul II,
- a două volume toroidale descrise de ecuaţii de gradul IV,

şi care sunt cele mai utilizate în proiectarea elementelor mecanice, simplificând considerabil rezolvarea intersecţiilor prin metode analitice sau geometrice considerate clasice.

Fie suprafaţa definită sub formă algebrică implicită $f\,(x,y,z) = 0$ de gradul m:

$$f\,(x,y,z) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-i-j} c_{i,j,k}\, x^i\, y^j\, z^k.$$

Efectuând substituţiile:

$$x = \frac{X\,(u,v)}{W\,(u,v)};\ y = \frac{Y\,(u,v)}{W\,(u,v)};\ z = \frac{Z\,(u,v)}{W\,(u,v)},$$

unde: $X\,(u,v), Y\,(u,v), Z\,(u,v)$ au gradul maxim p în u şi q în v şi înmulţind cu $w^m\,(u,v)$ rezultă curba algebrică:

$$F\,(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-i-j} c_{i,j,k}\, X^i\,(u,v)\, Y^j\,(u,v)\, Z^k\,(u,v)\, W^{m-i-j-k}\,(u,v) = 0$$

de grad maxim $M = m\,p$ şi respectiv $N = m\,q$ în (u,v).

În consecinţă, problemele intersecţiilor se reduc la a rezolva ecuaţia $F\,(u,v) = 0$, ţinându-se cont de situaţiile speciale care pot apărea, ca de pildă:

singularităţi, discontinuităţi, şi care se consideră a fi probleme fundamentale ale geometriei algebrice, unde coeficienţii lui $F\,(u,v\,) = 0$ sunt întregi.

În contextul utilizării calculatoarelor electronice la rezolvarea acestor probleme, coeficienţii lui $F\,(u,v\,) = 0$ şi $r = r\,(u,v\,)$ sunt numere în virgulă mobilă, aşa cum sunt numerele reprezentate în calculator. Or, acesta introduce în mod inevitabil erori, care pot modifica considerabil rezolvarea problemei intersecţiilor considerate.

Fie polinomul (curba):

$$F\,(u,v\,) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M-1} c_{i,j}^{M}\, u^{i}\, v^{j} = 0.$$

Folosind **polinoamele lui Bernstein**, obţinem:

$$F\,(u,v\,) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M-1} c_{i,j}^{B}\, B_{i,M}\,(\,u\,)\, B_{j,N}\,(\,v\,) = 0\,,$$

unde (u, v) ∊ [0, 1] • [0, 1].

Ca exemplu, pornim de la ecuaţia unui plan în formă implicită

$$ax + b\,y + cz + d = 0$$

şi o **suprafaţă Bezier** de gradul m în u şi n în v:

$$r\,(u,v\,) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j}\, b_{i,j}\, B_{i,m}\,(\,u\,) B_{j,n}\,(\,v\,)}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j}\, B_{i,m}\,(\,u\,) B_{j,n}\,(\,v\,)}\,,$$

unde: $b_{i,j} = \left(x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}\,\right)^{T}$ cu ponderile $w_{i,j} \geq 0.$

Rezultă un polinom (curbă) de ecuaţie:

$$c_{i,j}^{B} = \left(\,a\,x_{i,j} +\, b\,y_{i,j} +\, c\,z_{i,j} +\, d\,\right) w_{i,j}.$$

Avantajul utilizării **polinoamelor lui Bernstein** constă în aceea că se obţine o mai mare stabilitate în apropierea rădăcinilor.

Dacă $c_{i,j}^{B} > 0$ sau $c_{i,j}^{B} < 0$ pentru toţi i şi j, atunci nu există soluţie şi suprafeţele nu se întâlnesc, rezultă că întreaga suprafaţă definită prin $f(\,r\,) = 0$ nu intersectează suprafaţa dată $r = r\,(u,v\,)$ pentru $(u,v\,) \in [\,0,1\,] \bullet [\,0,1\,]$, iar pentru $c_{i\prime j}^{B} = 0$ cele două suprafeţe coincid.

Ca tipuri de intersecţie pot exista diferite situaţii prezentate în Fig. 6.3 de mai jos:

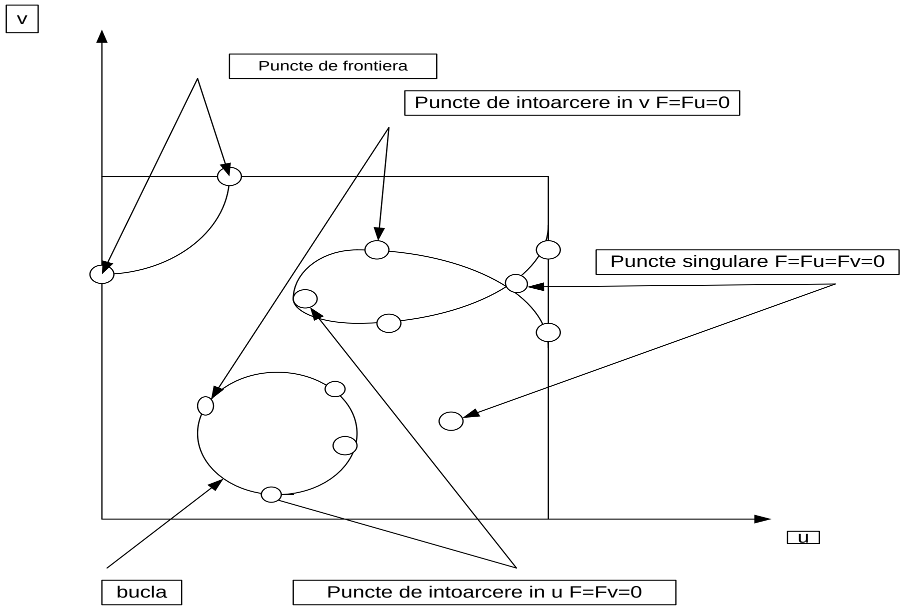


Fig. 6.3. Tipuri de intersecţie ale suprafeţei $r\,(u,v\,)$ rezolvând curba $F\,(u,v\,) = 0$

Fie $F(u,v)=0$. Folosind **metoda lui Taylor** putem calcula variaţia lui F pentru $u+\delta u$ şi $v+\delta v$ astfel încât

$$F(u+\delta u, v+\delta v)=0$$

şi anume:

$$F(u+\delta u, v+\delta v) = F(u,v)+F_u\,\delta u+F_v\,\delta v+\frac{1}{2}(F_{uu}\,\delta u^2+2F_{uv}\,\delta u\,\delta v+F_{vv}\,\delta v^2)+\ldots$$

Când F_u şi F_v nu sunt ambii zero sau $F_u^2+F_v^2>0$, pentru a obţine $F(u,v)=0$ şi $F(u+\delta u, v+\delta v)=0$, trebuie să avem

$$F_u\,\delta u+F_v\,\delta v=0$$

sau:

$$F_{v_L}=-\frac{F_u}{F_v}\,\delta u, \text{ presupunând că } F_v\neq 0.$$

În Fig. 6.4 se prezintă curba algebrică $F(u,v)$ în apropierea punctului $P(u,v)$ şi $Q(u+\delta, v+\delta v)$.

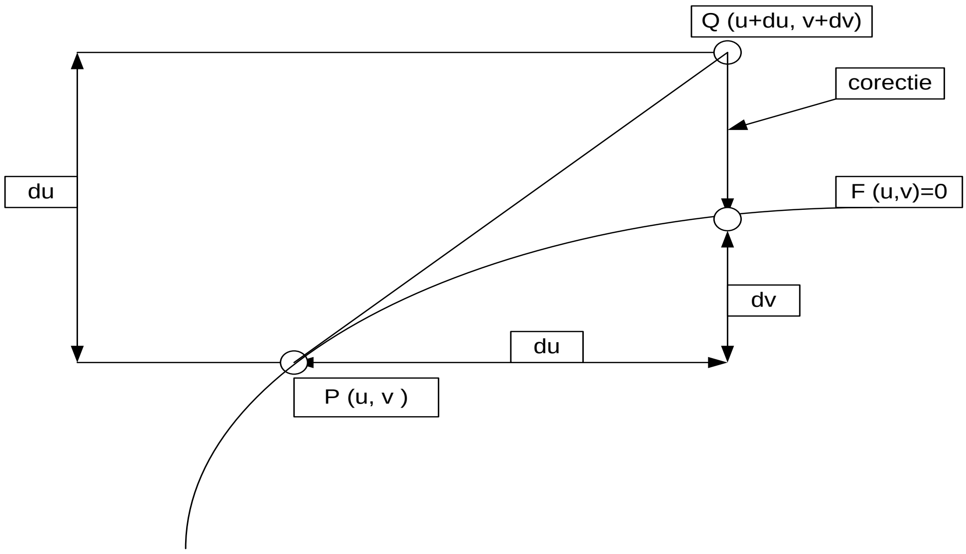


Fig. 6.4. Variaţia curbei algebrice $F(u,v)$ în apropierea lui $P(u,v)$ şi $Q(u+\delta u, v+\delta v)$.

Dezavantajul acestei metode constă în faptul că uneori punctul Q poate fi destul de departe de curba $F(u,v)=0$. Se poate utiliza **metoda lui Newton** pentru $F(u+\delta u, v)=0$ cu aproximararea iniţială:

$$v_{\mathrm{I}}=v+\delta v_L$$

şi care poate fi folosită pentru a calcula apoi δv. Pentru $|F_v|$ de mici valori se poate utiliza:

$$\delta_{u_L}=-\frac{F_v}{F_u}\,\delta v.$$

Putem scrie: $F_u\,\delta u+F_v\,\delta v=0$ ca:

$F_u\,\dot{u}+F_v\,\dot{v}=0$, unde u, v sunt considerate funcţii de parametru t.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale de mai sus este:

$$\dot{u}=\xi\,F_v(u,v)$$
$$\dot{v}=-\xi\,F_u(u,v),$$

unde $\xi\neq 0$ este un factor arbitrar şi care poate fi ales de exemplu din numărul de condiţie la suprafaţa dată:

$$\xi=\frac{1}{(E\,F_v^2-2\,F\,F_u\,F_v+G\,F_u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

şi unde: E, F şi G sunt coeficienţii suprafeţei reprezentate parametric în u, v.

Ecuaţiile diferenţiale de mai sus:

$$\dot{u} = \xi \, F_v \, (u, v)$$
$$\dot{v} = -\, \xi \, F_u \, (u, v),$$

formează un sistem de două ecuaţii diferenţiale neliniare şi care pot fi rezolvate de exemplu prin **metoda Runge – Kunta.**

Din Fig. 6.3 şi Fig. 6.4 de mai sus rezultă că pot apărea diverse situaţii pentru punctele caracteristice ca de exemplu:

⇒ **puncte de frontieră** ce rezultă din $F\,(u, v) = 0$ pentru intersecţia cu una din frontiera (marginile) spaţiului $r = r\,(u, v)$, unde: $u, v \in [0, 1] \bullet [0, 1]$ şi de exemplu: $F\,(0, v) = 0$, unde $0 \le v \le 1$.

⇒ **puncte de întoarcere**:

- ***în*** $\boldsymbol{u}$*: punctele pentru care tangenta la* $F\,(u, v) = 0$ *este paralelă cu axa* $u = 0$ *şi care satisfac ambele ecuaţii* $F = F_v, cu\, F_u \neq 0$,
- ***în*** $\boldsymbol{v}$: *punctele pentru care tangenta la* $F\,(u, v) = 0$ *este paralelă cu axa* $v = 0$ *şi care satisfac ambele ecuaţii* $F = F_u, cu\, F_v \neq 0$.

Dacă $F\,(u, v) = 0$ are gradul lui (M, N) în (u, v), atunci gradele lui F_u şi F_v vor fi $(M-1, N)$ şi respectiv $(M, N-1)$, ceea ce înseamnă că numărul total de rădăcini pentru două ecuaţii polinomiale în două variabile de grade (m, n) şi (p, q) sunt $(m\,q + n\,p)$. De unde rezultă că numărul de puncte de întoarcere după $u\ si\ v$ pot fi cel mult $(2\,MN - M)$ şi respectiv $(2\,MN - N)$.

⇒ **puncte singulare**: sunt puncte aparţinând curbei şi care satisfac simultan cele trei ecuaţii:

$$F = F_u = F_v = 0$$

Fie

$$f\,(x, y, z) = 0$$

şi

$$F\,(u, v) = W^m\,(u, v) f\,(x, y, z),$$

atunci

$$F_u = m\,W^{m-1}\,f + W^m\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = W^m \bullet \nabla f \bullet r_u\,,$$

similar $F_v = W^m \bullet \nabla f \bullet r_0$, iar pentru un punct singular $\nabla f \bullet r_u = \nabla f \bullet r_v = 0$, ceea ce implică:

a) $\nabla f \bullet \| r_u \bullet r_v \|$

b) normalele la cele două sunt paralele şi pentru că $F\,(u, v) = 0$, în aceste puncte cele două suprafeţe se intersectează tangenţial.

Dacă F este de ordinul (M, N) în (u, v):

- ordinele lui $F_u\ si\ F_v$ vor fi $(M-1, N)$ şi respectiv $(M, N-1)$,
- iar numărul punctelor singulare vor fi cel puţin $(2\,MN - M - N + 1)$.

Practic pentru a găsi **punctele singulare** se rezolvă sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} F = F_u = 0 \\ F = F_v = 0 \end{cases}.$$

Pentru a analiza **punctele singulare** considerăm o ecuaţie parametrică a unei linii drepte ce intersectează curba $F\,(u, v) = 0$ în punctul (u_0, v_0):

$$u = u_0 + \alpha\, t$$
$$v = v_0 + \beta\, t;$$

unde α, β constante, iar t parametru. Intersecţia rezultă determinând rădăcinile ecuaţiei:

$$F\,(u_0 + \alpha\, t, v_0 + \beta\, t) = 0$$

Deoarece $F(u_0, v_0) = 0$, folosind **metoda lui Taylor** obţinem

$$(\alpha\, F_u + \beta\, F_v)\, t + \frac{1}{2}\,(\alpha^2\, F_{uu} + 2\,\alpha\,\beta\, F_{uv} + \beta^2\, F_{vv})t^2 + \ldots = 0$$

şi unde derivatele parţiale sunt evaluate în (u_0, v_0).

În general, F_u şi F_v nu sunt ambele zero în acelaşi timp, iar $F_u^2 + F_v^2 > 0$, pentru (u_0, v_0), atunci ecuaţia de mai sus are o rădăcină pentru $t = 0$ şi orice linie ce trece prin (u_0, v_0) are o singură intersecţie cu curba dată în (u_0, v_0) cu excepţia unui singur caz, când $\alpha F_u + \beta F_v = 0$ pentru diferite valori ale lui α şi β. În acest caz, ecuaţia cu derivate parţiale de mai sus are o rădăcină dublă $t = 0$, cel puţin o ecuaţie de ordinul II este diferită de zero, $F_{uu}^2 + F_{uv}^2 + F_{vv}^2 > 0$, iar L este tangentă la curba dată în punctul (u_0, v_0).

Dacă punctul (u_0, v_0), este un **punct singular**

$$F_u(u_0, v_0) = F_v(u_0, v_0) = F(u_0, v_0) = 0,$$

atunci cel puţin una din derivatele $F_{u,u}, F_{u,v}, F_{v,v}$ este diferită de zero, iar $t = 0$ este o rădăcină dublă şi care are cel puţin două intersecţii în (u_0, v_0) cu excepţia valorilor lui α şi β care satisfac ecuaţia cuadratică:

$$\alpha^2 F_u + 2\alpha\beta F_{u,v} + \beta^2 F_{v,v} = 0.$$

În astfel de cazuri, $t = 0$ este o rădăcina triplă. Atunci, cel puţin una din derivatele parţiale de ordinul III este nenulă şi

$$F_{uuu}^2 + F_{uuv}^2 + F_{uvv}^2 + F_{vvv}^2 = 0.$$

Ecuaţia cuadratică de mai sus,

$$\alpha^2 F_u + 2\alpha\beta F_{uv} + \beta^2 F_{vv} = 0$$

se poate rezolva pentru $\frac{\alpha}{\beta}$ şi $\frac{\beta}{\alpha}$, ceea ce conduce la următoarele trei posibilităţi:

1. **două rădăcini reale distincte**, ceea ce corespunde celor două direcţii ale tangentei distincte în punctul singular, adică curba se intersectează cu ea însăşi, ca de exemplu foliculul lui Descartes ($f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$), prezentat în Fig. 6.5 de mai jos;

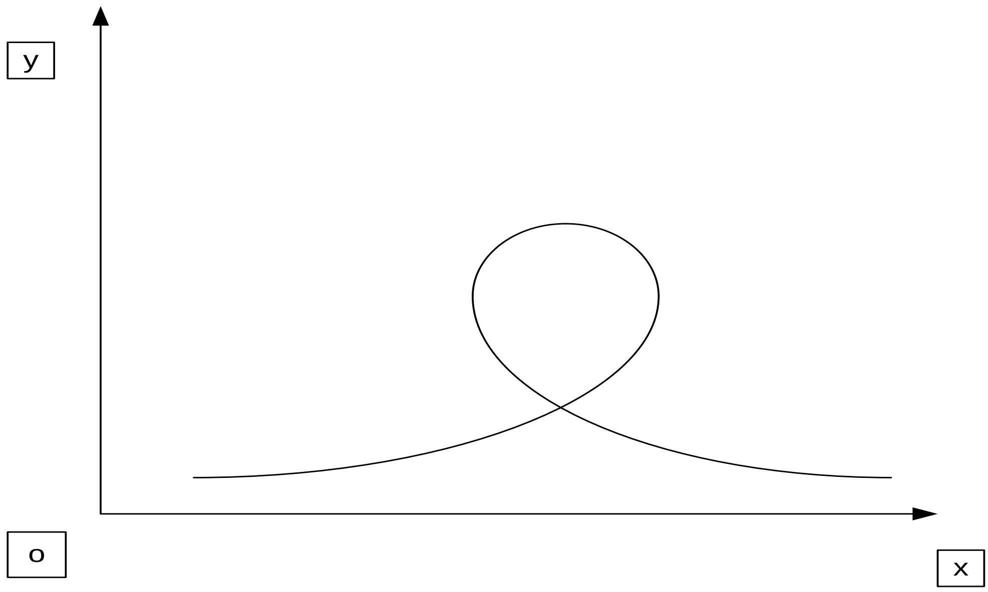


Fig. 6.5. Foliculul lui Descartes.

2. **o rădăcină reală** corespunzând unei direcţii distincte în punctul singular $O(0,0)$ ca în Fig. 6.6 de mai jos;

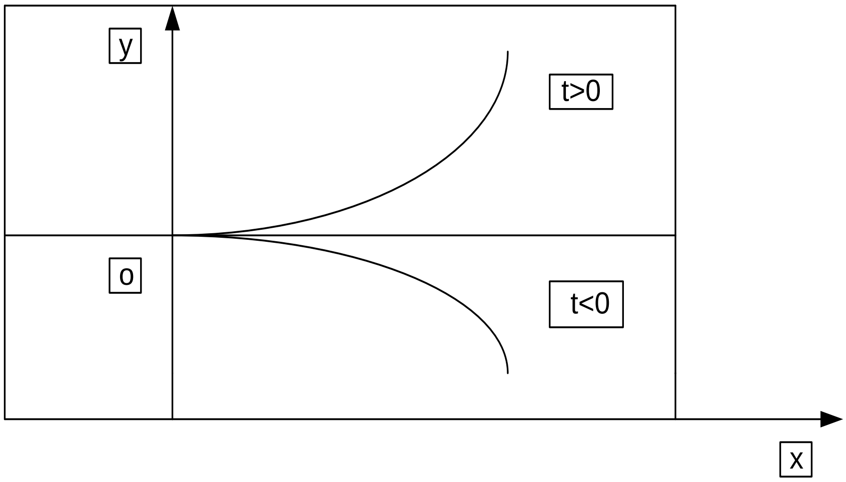


Fig. 6.6. Punctul singular O (0, 0) corespunzător unei rădăcini reale

3. **două rădăcini complexe**, când nu există tangente reale în **punctul singular** considerat ca un punct izolat. Ca exemplu, considerând ecuaţia unei curbe

$$F\,(u, v\,) = \; u^3 + \; u^2 + \; v^2 = 0,$$

avem

$$F_u = u\,(\,3u + 2\,);\;\; F_v = 2v;\;\; F_{u,u} = 6\,u + 2;\;\; F_{u,v} = 0;\;\; F_{v,v} = 2$$

$$F_{uuu} = 6;\;\; F_{uuv} = \; F_{uvv} = \; F_{vvv} = 0$$

⇨ Pentru a găsi **punctul de întoarcere** în u se caută rădăcinile pentru $F = \; F_v = 2v$; şi $F_u \; \neq 0$.
Rezultă imediat că $v = 0$; înlocuind în $F = 0$ se obţine $u = 0, -1$. Deoarce $F_u\,(\,0, 0\,)$, punctul (0, 0) nu este un punct de întoarcere în u şi deci doar $(\,-1, 0\,)$ este un punct de întoarcere în v.

⇨ Pentru a găsi **punctul de întoarcere** în v se caută rădăcinile pentru $F = F_u = 0$ şi $F_v \; \neq 0$, dar care nu are soluţie reală. Deci doar $u = v = 0$ este un **punct singular**. Tangenta pentru $u = v = 0$ se poate obţine din

$$\alpha^2\, F_{uu} + \; 2\,\alpha\,\beta\, F_{uv} + \; \beta^2\, F_{vv} = 2\,\alpha^2 + \; 2\,\beta^2 = 0$$

care conduce la ecuaţia:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \; 1 = 0$$

şi care nu are nu are soluţie reală şi deci $u = v = 0$ este un punct izolat, ca în Fig. 6.6 de mai sus.

Ca alt exemplu, se consideră un parabola semi-cubică

$$F\,(u, v\,) = \; u^3 - \; v^3 = 0.$$

Curba are un punct singular în $u = v = 0$. Avem:

$$F_u = 3u^2;\;\; F_v = -\,2v;\;\; F_{u,u} = 6\,u;\;\; F_{u,v} = 0;\;\; F_{v,v} = -\,2$$

$$F_{uuu} = 6;\;\; F_{uuv} = \; F_{uvv} = \; F_{vvv} = 0$$

şi:

$$\alpha^2\, F_{uu} + \; 2\,\alpha\,\beta\, F_{uv} + \; \beta^2\, F_{vv} = 6\,u\,\alpha^2 - \; 2\,\beta^2 = 0$$

Pentru $O\,(0, 0)$ există o rădăcină dublă $\beta = 0$, iar alura curbei este asemănătoare curbei din Fig. 6.7.

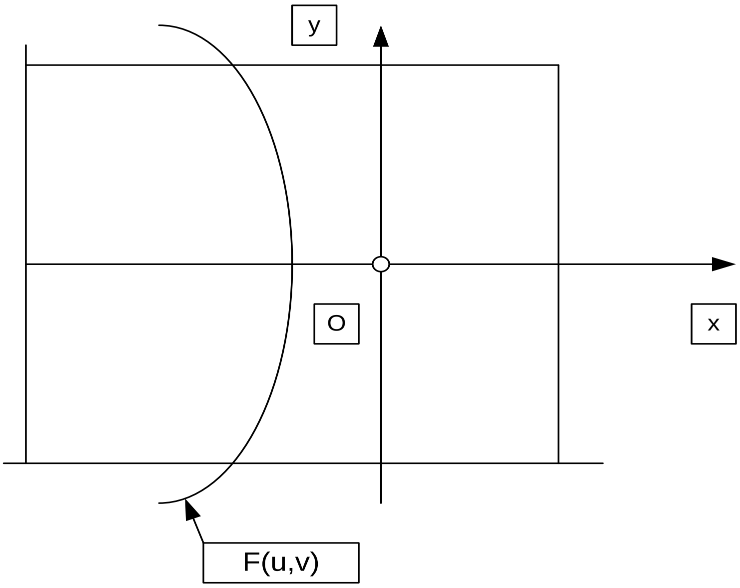


Fig. 6.7. Graficul curbei $\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, având o rădăcină dublă în O (0, 0).

În cazul rădăcinilor complexe, ca în exemplul 3, se poate considera ecuaţia

$$F_3\,(u,v) = \,(u+1)\,u\,(u-1)\,(v+1)\,v\,(v-1) + \frac{1}{20} = 0$$

definită pe [-2, 2] • [-2, 2] şi care este o curbă algebrică de gradul 6, Fig. 6.8 de mai jos:

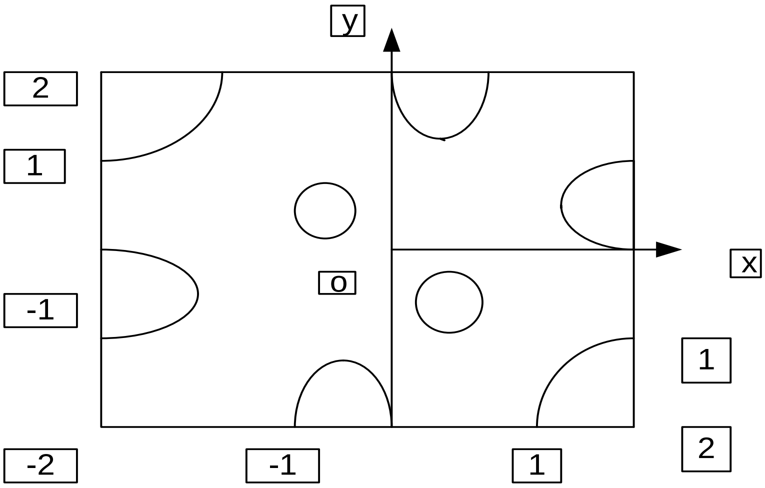


Fig. 6.8. Graficul curbei $\boldsymbol{F}_3\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ de gradul 6.

Se poate observa că pentru fiecare frontieră (margine) se pot considera cel puț in trei puncte de frontieră. Curba nu are puncte singulare, dar are puncte de întoarcere interne şi şase ramuri de-a lungul frontierei (marginilor).

Curba $F_3\,(u,v) = 0$ are în acest caz $M = 3, N = 3 \,\text{în}\, u, v.$ Deci**, punctele de întoarcere** după u, v şi **punctul singular** sunt mărginite de expresiile:

$$2\,M\,N - M = 15$$
$$2\,M\,N - N = 15$$
$$2\,M\,N - M - N + 1 = 13$$

Punctele de frontieră (de margine) de-a lungul lui $u = 0,$ de exemplu, se pot calcula cu expresia

$$F\,(\,0,0\,) = \sum_{j=0}^{N} C_{0,j}^{B}\ B_{j,N}\,(\,v\,) = 0.$$

Pentru a calcula **punctele de întoarcere** şi **punctul singular** este necesară calcularea derivatelor parţiale de ordinul I după direcţ iile u şi respectiv v:

$$F_u\,(u,v\,) = M \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N}\ \left(\,C_{i+1,j}^{B} - C_{i,j}^{B}\,\right) B_{i,M-1}\,(\,u\,)\,B_{j,N}\,(\,v\,);$$

$$F_v\,(u,v\,) = N \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N-1}\ \left(\,C_{i,j+1}^{B} - C_{i,j}^{B}\,\right) B_{i,M}\,(\,u\,)\,B_{j,N-1}\,(\,v\,).$$

Ca urmare, calculul **punctelor de întoarcere**:

$$F = F_u = 0$$
$$F = F_v = 0$$

se reduce la rezolvarea unui sistem de două ecuaţii neliniare în două necunoscute şi la calculul punctelor singulare pentru:

$$F = F_u = F_v = 0$$

ceea ce este echivalent cu un sistem de trei ecuaţii neliniare cu două necunoscute.

6.6. Modelarea matematică a procesului de fabricaţie a modelelor (solidelor)

Realizarea practică a modelelor (solidelor) reprezintă un proces de fabricaţie de precizie, şi care, în general, se realizează pe maşini unelte cu comandă program[12].

În funcţie de direcţia de mişcare a sculelor de prelucrare se disting următoarele tipuri de maşini-unelte cu comandă program:

- 2D-maşini de prelucrare cu comandă program la care sculele de prelucrare se deplasează după direcţiile x şi y.
- 2½D-maşini ce permit deplasări arbitrare după direcţiile x şi y, dar numai pas cu pas în direcţia z;
- 3D-maşini ce permit deplasări arbitrare după direcţiile x, y şi z, dar nu şi rotaţii ale sculelor de prelucrat;
- 5D-maşini ce permit deplasări arbitrare după direcţiile x, y şi z, dar şi rotaţii ale sculelor de prelucrat în jurul axelor x şi y;

Se recunoaşte (Patrikalakis, 2002) că succesul prelucrării pe maşini cu comandă program depinde în mare măsură de utilizarea unor algoritmi eficienţi care să definească traiectoria sculelor de prelucrare.

În principal, problemele matematice ce pot apare în acest caz se pot evidenţia ca fiind (Hoschek, 1993):

- Determinarea coordonatelor traiectoriilor sculelor de prelucrat relativ la suprafeţele prelucrate şi depinzând de tipul de prelucrare;
- Mişcarea sculelor de prelucrat de–a lungul unor traiectorii (curbe) speciale, determinându-se dimensiunea, forma şi profilul suprafeţei prelucrate, Fig. 6.9 de mai jos:

[12] NC machines-numerically controlled milling machines (engl.)

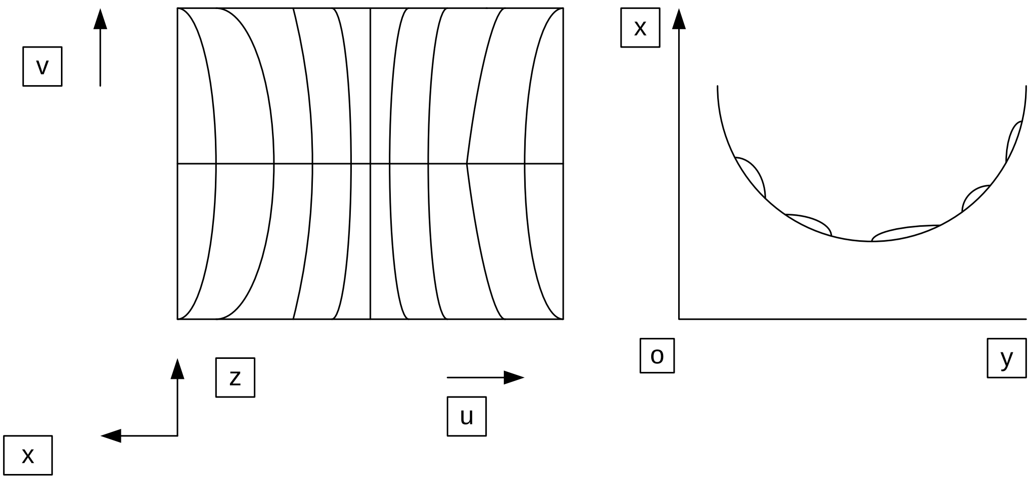


Fig. 6.9. Vedere laterală şi profil a unei traiectoriilor sculelor prelucrătoare speciale.

- Transformarea traiectoriilor curbelor (formelor) cerute în comenzi specifice maşinilor de prelucrat;
- Calculul profilului în exces şi al materialului de degroşare;
- Calculul restricţiilor impuse maşinilor de prelucrat, astfel încât să se respecte parametrii funcţionali ai maşinii.

În mare parte, traiectoria sculelor de prelucrat a maşinilor cu comandă program este determinată şi controlată de microprocesoare, care împreună cu sistemele de operare adecvate determină, prin mişcări incrementale, pas cu pas, liniare sau circulare, traiectoria sculelor de prelucrat, ceea ce impune studiul matematic al traiectoriei sculelor de prelucrat.

6.6.1. Studiul matematic al traiectoriei sculelor de prelucrat

A. Cazul **sculelor cilindrice**, Fig. 6.10 de mai jos:

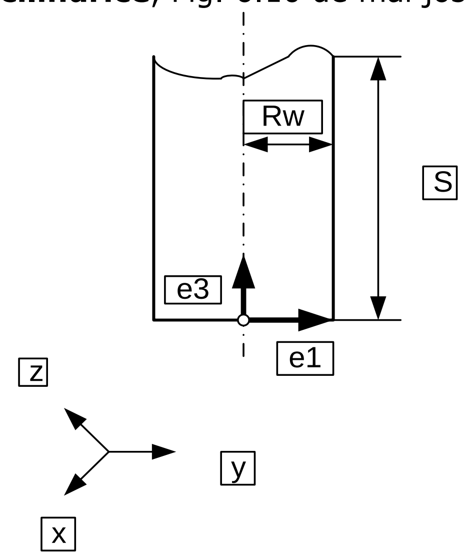


Fig. 6.10. Sculă de prelucrat cilindrică

Fie vectorii unitari de mişcare în cele trei direcţii (e_1, e_2, e_3), unde $|e_i| = 1$. Atunci ecuaţia de mişcare a sculei de prelucrat este descrisă de ecuaţia

$W_z(r,s) = (q\,R_w \cos r, q\,R_w \sin r, s\,S)^T$, unde: $q = [0,1]$ şi $s = 0$, ceea ce corespunde diferitelor tipuri de scule, iar $q = 1$, $s = [\,0, 1\,]$, corespunzîd diferitelor axe de mişcare.

Se poate afirma că în general sculele cilindrice sunt folosite la prelucrări în două axe.

B. Cazul **sculelor cilindrice cu cap sferic**, Fig. 6.11 de mai jos:

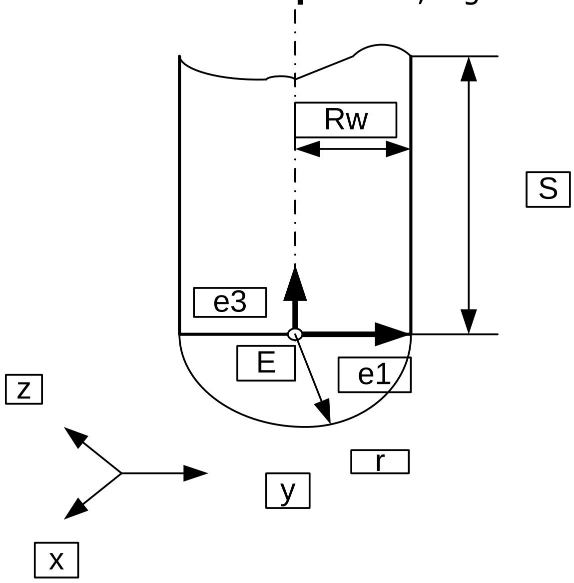


Fig. 6.11. Sculă de prelucrat cilindrică cu cap sferic.

Se poate observa că mişcarea capului sferic al sculei de prelucrat se compune, în principal, din două mişcări:

⇨ **Circulară,** descrisă de formula

$$k_1(v) = (R_w \sin t, 0 - R_w \cos t)^T, unde\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

⇨ **Liniară,** descrisă de formula

$$k_2(v) = (R_w, 0, s\,S)^T$$

Combinând aceste formule, rezultă

$$k\ (v) = (R_w \sin t, 0, s\,S - R_w \cos t)^T$$

- pentru $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ si $s = 0$, $k(v)$ se reduce la linia dreaptă $k_1(v)$,
- pentru $0 \le s \le 1$ si $t = \frac{\pi}{2}$, $k(v)$ se reduce la linia dreaptă $k_2(v)$,

de unde rezultă ecuaţia suprafeţei sculei de prelucrat:

$$W_k(r, s, t) = (R_w \cos r \sin t, R_w \sin r \sin t, s\,S - R_w \cos t)^T.$$

Folosind această formulă este important să respectăm domeniul de definiţie (mişcare) impus de intervalele de definiţie:

- Dacă stabilim $s = 0$, atunci W_k descrie o jumătate de sferă când r şi s variază;
- Dacă stabilim $t = \frac{\pi}{2}$, atunci obţinem suprafaţa cilindrică când r şi s variază.

În general, acest tip de sculă de prelucrat se utilizează la maşini de prelucrat în trei axe de mişcare.

C. Cazul sculelor de prelucrat de tip toroidal, Fig. 6.12 de mai jos:

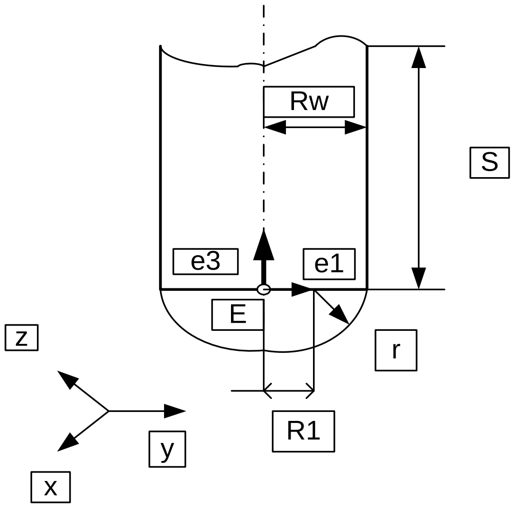


Fig. 6.12. Sculă de prelucrat cu cap toroidal

În acest caz, formula parametrică a unui cap toroidal trebuie să introducă o rază ρ a colţului toroidal şi care introduce doi noi parametrii:

- q ce descrie tipul sculelor de prelucrat şi
- s ce descrie mărimea axului.

Rezultă următoarea reprezentare parametrică:

$$W_t\,(q,r,s,t) = \begin{pmatrix} \cos r\,(q\,R_1 + \rho \sin t \\ \sin r\,(q\,R_1 + \rho \sin t \\ s\,S - \rho \cos t \end{pmatrix},$$

unde $q,s \in [0,1]$, $r \in [0,2\pi]$ şi $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Dacă stabilim:

- $q = 0$ şi $\rho = R\,w$ ecuaţia de mai sus se reduce la cea a sculei de prelucrare cu cap sferic W_k,
- $R_1 \neq 0$ şi $\rho = 0$ ecuaţia de mai sus reduce la reprezentarea parametrică a sculei de prelucrare cilindrică W_z.

Alegerea constantei ρ şi $q = 1$ corespunde suprafeţei de prelucrare cu cap toroidal.

În general, acest tip de sculă de prelucrare se întâlneşte la maşini 3D şi 5D.

Dacă considerăm mişcarea sculei de prelucrat în sistemul de coordonate (e_1, e_2, e_3) în direcţia $x_3 = 0$, atunci

$$x_3 := s\,S + \rho\,(1 - \cos t),$$

unde originea sistemului se alege în E – punctul terminal al sculei de prelucrat.

Considerăm formula pentru toate cele 3 forme:

$$W_t\,(q,r,s,t) = \begin{pmatrix} \cos r\,(q\,R_1 + \rho \sin t \\ \sin r\,(q\,R_1 + \rho \sin t \\ s\,S + \rho\,(1 - \cos t) \end{pmatrix}.$$

Se poate obţine o descriere completă a sculei de prelucrat lăsând parametrii q,t,s să varieze în intervalul corespunzător pentru orice r. Când unul din parametri atinge marginea superioară, acel parametru devine fix. În general, parametrii q,t,s nu ating marginea superioară simultan, deci ei pot fi combinaţi folosind un parametru comun $v = v\,(q, t, s)$ şi care ia valori în intervalul $[0, B_L]$, unde:

$$B_L := R_1 + \rho\,\frac{\pi}{2} + S.$$

Pentru a avea v de-a lungul liniei parametru de deplasare este necesar ca:

a) $0 \le v \le R_1$, unde: $q = \frac{v}{R_1}, t = 0, s = 0$

b) $R_1 \le v < \left(\rho\,\frac{\pi}{2} + R_1\right)$ unde: $q = 1, s = 0, t = \frac{(v - R_1)}{\rho}$

c) $\left(\rho\,\frac{\pi}{2} + R_1\right) \le v < B_L$ unde: $q = 1, t = \frac{\pi}{2}, s = \frac{\left[v - \left(\rho\frac{\pi}{2} + R_1\right)\right]}{S}$

În cazul maşinilor-unelte 3D pentru a îmbunătăţi operaţia de prelucrare şi în acelaşi timp pentru a evita coliziunile, se poate introduce un nou unghi β de înclinare şi care, de pildă, să descrie rotaţia sculei în jurul axei e_2, presupunând că se deplasează în direcţia e_1. Dacă multiplicăm matricea $\underline{R}\,(\beta)$ ce descrie rotaţia în jurul axei e_2:

$$\underline{R}\,(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

cu $W\,(1)$, obţinem:

$$\underline{W}\,(\beta, q, r, s, t) = \underline{R}\,(\beta) \bullet \underline{W}\,(q, r, s, t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos r\,[\,q\,R_1 + \rho\sin t\,] + \sin\beta\,[s\,S + \rho\,(1 - \cos t)] \\ \sin r\,[q\,R_1 + \rho\sin t] \\ -\sin\beta\cos r\,[q\,R_1 + q\sin t] + \cos\beta\,[s\,S + \rho\,(1 - \cos t)] \end{pmatrix}$$

relativ la (e_1, e_2, e_3).

Fig. 6.13. de mai jos reprezintă cele trei tipuri de scule de prelucrat pentru un unghi de înclinare dat b = $\beta > 0$.

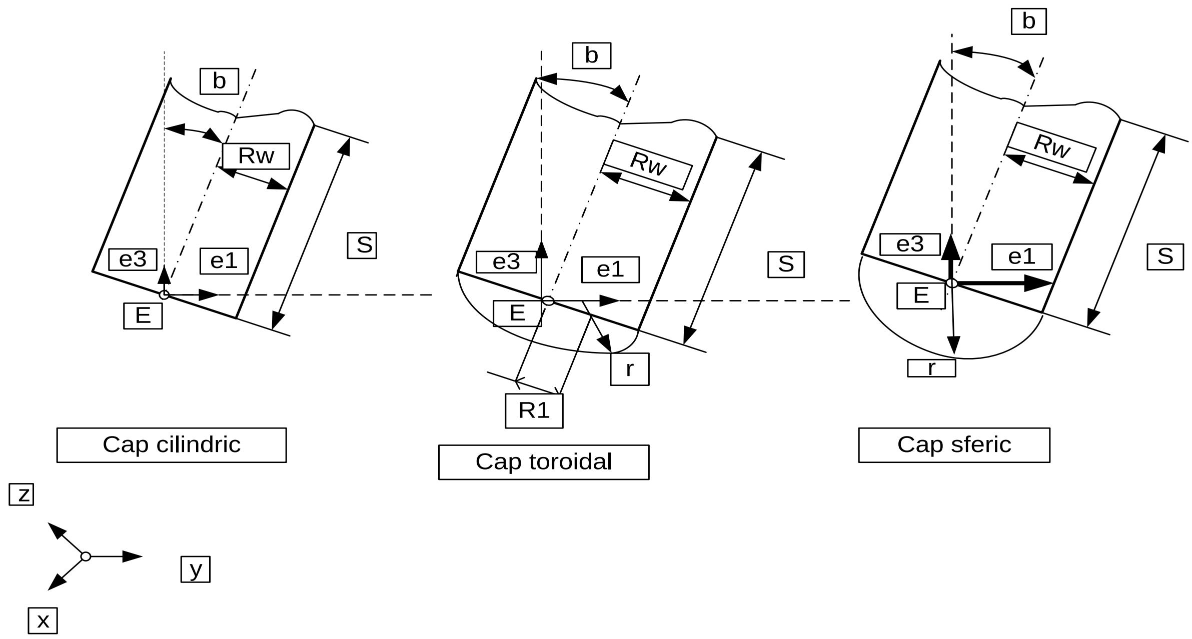


Fig. 6.13. Unghiul de înclinare dat (unde b = β pentru cele 3 tipuri de scule de prelucrat)

6.6.2. Tipuri de traiectorii ale sculei de prelucrat

În principiu se disting două strategii de prelucrat:

a) În **zig–zag (prelucrare paralelă)** Fig. 6.14 de mai jos:

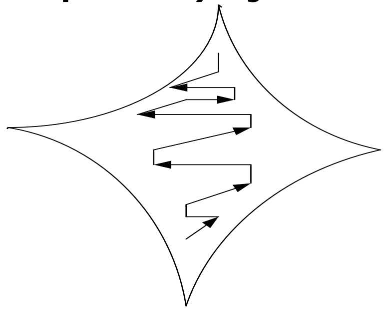


Fig. 6.14. Prelucrare în zig-zag.

b) **Paralelă cu conturile suprafeţei** (cunoscută sub numele de **ofset)**, Fig. 6.15 de mai jos:

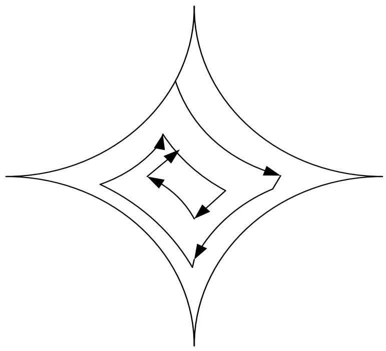


Fig. 6.15. Prelucrare paralelă cu conturile suprafeţei (cunoscută sub numele de ofset).

Pentru:

→ **2D**, scule cilindrice, scula de prelucrat se deplasează la o distanţă egală cu raza cilindrului;

→ **3D**, scule sferice, centrul sferei sculei de prelucrat se deplasează la o distanţă egală cu raza sferei;

→ **5D**, scule toroidale, este dificil de a descrie traiectoria sculei, punctul de contact al sculei de prelucrat urmând o traiectorie specială, utilizând în general suprafeţe parametrice.

Pentru a descrie traiectoria sculei de prelucrat de-a lungul unei suprafeţe curbe $X(t)$ în direcţia $\dot{X}(t)$ se introduce un sistem de coordonate ortonormale $(\overline{T}, \overline{S}, \overline{N})$ care se deplasează de-a lungul suprafeţei $X(u, v)$ şi unde:

⇨ $\overline{T}$ este vectorul tangent la traiectoria sculei de prelucrat,

⇨ $\overline{N}$ este vectorul normal la suprafaţă;

⇨ $\overline{S} = \overline{N} \bullet \overline{T}$ este vectorul binormal.

Pentru a descrie poziţia punctelor de contact pe suprafaţa curbă descrisă mai sus, coordonatele sistemului (e_1, e_2, e_3) se cer convertite la coordonatele ortonormale $(\overline{T}, \overline{S}, \overline{N})$ prin translaţie. Această transformare este descrisă de ecuaţia sistemului

$$\overline{X} = \underline{\overline{F}} + \left(\Delta\, h\, \overline{T} - \Delta\, z\, \overline{N}\right) := \underline{\overline{F}} + \overline{V}$$

unde:

⇨ $\overline{X} =$ reprezintă un punct al traiectoriei sculei de prelucrat;

⇨ $\overline{V} =$ este vectorul de deplasare.

Traiectoria descrisă de un punct E al sculei de prelucrat defineşte traiectoria sculei, iar componentele vectorului de deplasare variază în funcţie de tipul sculei de prelucrat, Fig. 6.16 de mai jos:

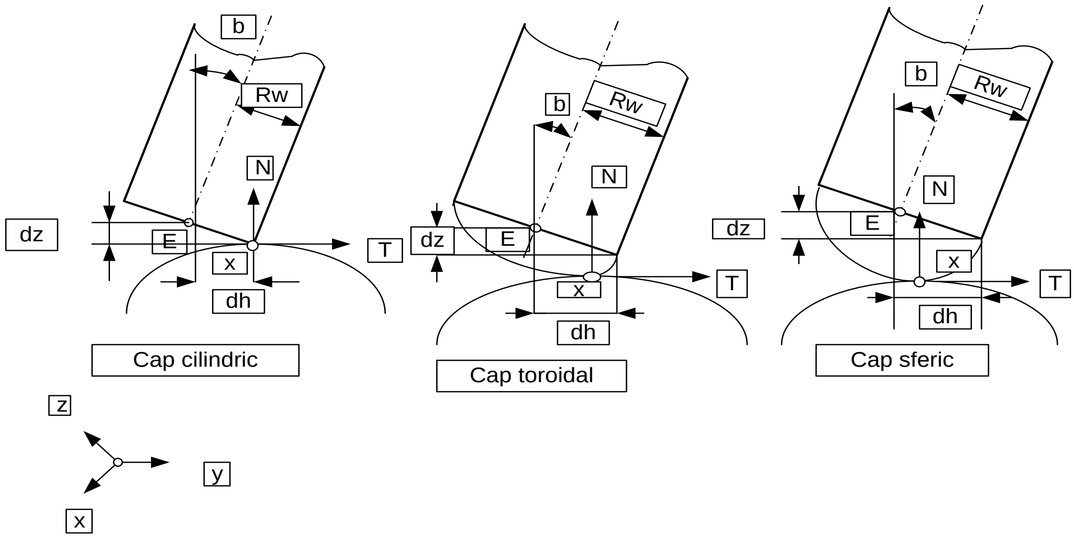


Fig. 6.16. Poziţii de lucru al diferitelor tipuri de scule de prelucrat (unde b = $\boldsymbol{\beta}$ reprezintă unghiul de prelucrat, iar $\mathrm{dh} = \Delta h$ şi $\mathrm{dz} = \Delta z$) definiţi mai sus

6.7. Descrierea geometrică a traiectoriei sculei de prelucrat

În mod uzual, descrierea suprafeţei de prelucrat se face aproximând traiectoria sculei prelucrătoare printr-o secvenţă de polinoame a căror valori descriu poziţia sculei prelucrătoare, iar secvenţa profilelor de tăiere descriu suprafaţa de prelucrat, Fig. 6.17 de mai jos:

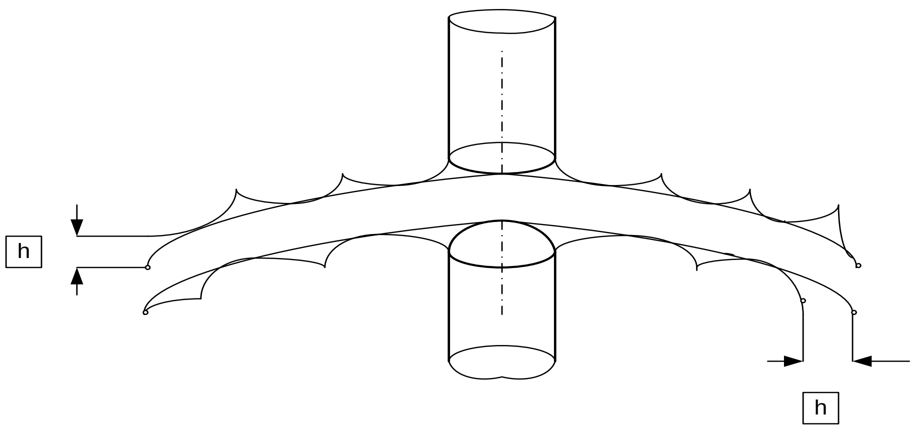


Fig. 6.17. Secvenţa profilelor de tăiere descriind suprafaţa de prelucrat

O abordare diferită a problemei de mai sus se poate face considerând înfăşurătoarea traiectoriei suprafeţei de prelucrat: mişcarea curbei de-a lungul traiectoriei generează o suprafaţă secundară, care consistă dintr-o familie de curbe a căror înfăşurătoare conţin toate punctele sculei.

Totalitatea curbelor înfăşurătoare corespunzătoare traiectoriilor de tăiere de-a lungul suprafeţei de prelucrat descriu o familie de suprafeţe generatoare a suprafeţei de prelucrat. Aceasta conduce la ideea descrierii acestor familii de suprafeţe şi care se consideră diferenţiabile (ca de exemplu suprafeţele) spline. Rezolvând ecuaţiile obţinute rezultă punctele înfăşurătoarei mişcării sculei prelucrătoare.

Fie traiectoria curbei de prelucrat $X\,(\mu)$ corespunzătoare lui $\mu = u$ sau $\mu = v$ [în general $\mu = \mu\,(u, v)$]. Din ecuaţia generală:

$$\underline{W}\,(\beta, q, r, s, t) = \underline{R}\,(\beta) \bullet \underline{W}\,(q, r, s, t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta \cos r\,[\,q\,R_1 + \rho \sin t\,] + \sin\beta\,[s\,S + \rho\,(1 - \cos t)] \\ \sin r\,[q\,R_1 + \rho \sin t] \\ -\sin\beta \cos r\,[q\,R_1 + q \sin t] + \cos\beta\,[s\,S + \rho\,(1 - \cos t)] \end{pmatrix},$$

şi considerând sistemul de coordonate ortonormale $(\overline{T}, \overline{S}, \overline{N})$ se poate obţine

$$M\,(\mu) = X\,(\mu) + (\overline{T}\,\overline{S}\,\overline{N})\,(\beta, q, r, t) + V\,(\mu, \beta, q, r, s, t),$$

unde $(\overline{T}\,\overline{S}\,\overline{N})$ reprezintă matricea vectorilor coloană, iar V este deplasarea definită de

$$\overline{X} = \underline{F} + \left(\Delta\, h\, \overline{T} - \Delta\, z\, \overline{N}\right) := \underline{F} + \overline{V}$$

Pentru un unghi de incidenţă β şi o valoare a parametrului μ, formula lui $M\,(\mu)$ de mai sus reprezintă o formulă completă a mişcării sculei de prelucrat de-a lungul traiectoriei $X\,(\mu)$ şi unde parametrii q, r, s, t sunt definiţi în intervalele lor de definiţie, Fig. 6.18 de mai jos:

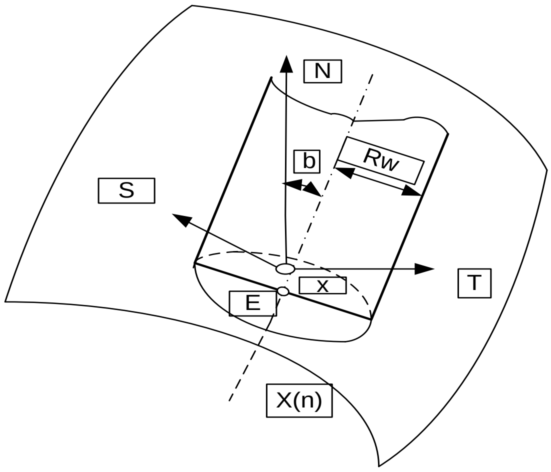


Fig. 6.18. Mişcarea sculei de prelucrat cilindrică de-a lungul traiectoriei $\boldsymbol{X}\,(\boldsymbol{\mu})$

Se cer punctele traiectoriei sculei de prelucrat. Se observă că înfăşurătoarea atinge suprafaţa tangenţial, deci punctele înfăşurătoarei trebuie să fie ortonormale la suprafaţa prelucrată, ceea ce conduce la condiţia

$$M_\mu \bullet \overline{W} \bullet \overline{N} = 0,$$

unde

$$M_\mu = \frac{\partial \overline{M}}{\partial \mu} \text{ şi } \overline{W} \bullet \overline{N},$$

sunt vectorii normalei la suprafaţa de prelucrat.

Pentru a calcula $\overline{W} \bullet \overline{N}$ este necesar a se calcula derivatele parţiale ale funcţiei $\underline{W}\,(\beta, q, r, s, t)$ în funcţie de parametrii: β, q, r, s, t:

$$W_q = \frac{\partial W}{\partial q} = (\cos\beta\ \cos r\ ,\ \sin r, -\sin\beta\ \cos r\,)^T$$

$$W_r = \frac{\partial W}{\partial r} = (-\ \cos\beta\ \cos r\ ,\ \cos r,\ \sin\beta\ \sin r\,)^T$$

$$W_s = \frac{\partial W}{\partial s} = (\sin\beta, 0, \cos\beta)^T$$

$$W_T = \frac{\partial W}{\partial t} = \begin{pmatrix} \cos\beta\ \cos r\ ,\ \cos t,\ \sin\beta\ \sin t \\ \sin r\ \cos t \\ \cos\beta\ \sin t\ ,\ -\sin\beta\ \cos r\ \cos t \end{pmatrix}$$

Dacă considerăm trei produse:

$$W_r \bullet W_q\ ,$$
$$W_r \bullet W_s\ ,$$
$$W_r \bullet W_t$$

în raport cu ($\overline{S}\,\overline{N}$) obţinem:

a) $W\ N_{r,q} = \frac{W_r \bullet W_q}{|W_r \bullet W_q|} = -(\sin\beta)\,T - (\cos\beta)\,N$

b) $W\ N_{r,s} = \frac{W_r \bullet W_s}{|W_r \bullet W_q|} = -(\cos\beta\cos r)\,T + (\sin r)\,S - (\sin\beta\cos r)\,N$

c) $W\ N_{r,t} = \frac{W_r \bullet W_t}{|W_r \bullet W_t|} = (\cos\beta\cos r\sin t - \sin\beta\cos t)\,T - (\sin r\sin t)\,S -$
$(\cos\beta\cos t + \sin\beta\cos r\sin t)\,N$

Se poate observa că:

$\leq$ a) şi b) sunt incluse în c):

- pentru $t = 0, c) \rightarrow a)$
- pentru $t = \frac{\pi}{2}, c) \rightarrow b)$.

Ca urmare, se poate considera o singură formulă vectorială care să descrie traiectoria sculei de prelucrat:

$$WN := W\ N_{rt} := W\ N_1\ T + W\ N_2\ S + W\ N_3\ N$$

Pentru β constant obţinem:

$$M_\mu = X_\mu + \left(T_\mu\, S_\mu\, N_\mu\right) W\,(\beta, q, r, s, t) + V_r$$

unde

$$T_\mu = \frac{\partial T}{\partial \mu};$$
$$S_\mu = \frac{\partial S}{\partial \mu};$$
$$N_\mu = \frac{\partial N}{\partial \mu};$$
$$X_\mu = \frac{\partial X}{\partial \mu};$$
$$V_\mu = \frac{\partial V}{\partial \mu}.$$

Derivatele vectoriale în raport cu μ au valorile de mai jos:

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\dot{X}}{|\dot{X}|}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\,(N \bullet T) = N_\mu \bullet T + N \bullet T_\mu\ ,$$

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{X_u \bullet X_v}{|X_u \bullet X_v|}\right) = \frac{\partial}{\partial \mu}\,(X_u \bullet X_v) \bullet [(|X_u \bullet X_v|)^2]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= (R_u + R_v)\,(R^2)^{-\frac{1}{2}} - R \bullet (R^2)^{-\frac{3}{2}} \bullet (R \bullet (R_u + R_v))$$

unde

$$R = X_u \bullet X_v, \qquad R_u = X_{v\mu} \bullet X_v, \qquad R_v = X_u \bullet X_{v\mu}$$

atunci

$$M_\mu = X_\mu + W_1\,T_\mu + W_2\,S_\mu + W_s\,N_\mu + V_\mu$$

unde: W_1, W_2, W_3 sunt componente ale lui W din formula lui M_μ de mai sus.

Înlocuind în:

⤇ formula lui M_μ ,

⤇ formula lui $W\,N := W\,N_{rt} := W\,N_1\,T + W\,N_2\,S + W\,N_3\,N$

⤇ condiţia lui $M_\mu \bullet \overline{W} \bullet \overline{N} = 0$

obţinem:

$$M_\mu \bullet W\,N = X_\mu \bullet W\,N + W_1\left(T_\mu \bullet W\,N\right) + W_2\left(S_\mu \bullet W\,N\right) + \\ + W_3\left(N_\mu \bullet W\,N\right) + V_\mu \bullet W\,N = 0.$$

Deoarece $W\,N$ conţin vectorii $(\overline{T}, \overline{S}, \overline{N})$ ecuaţia de mai sus se poate simplifica

$$|\,T\,| = |\,S\,| = |\,N\,| = 1$$

şi deci derivatele vectorilor unitari în raport cu μ satisfac relaţiile de mai jos:

$$T \bullet T_\mu = 0;\ S \bullet S_\mu;\ N \bullet N_\mu = 0$$

În plus,

$$T \bullet S = T \bullet N = S \bullet N = 0 \text{ şi } X_\mu \bullet S = X_\mu \bullet N = 0.$$

Atunci $M_\mu \bullet W\,N$ devine:

$$M_\mu \bullet W\,N = W\,N_1 + W_1\,W\,N_2\left(T_\mu \bullet S\right) + W_1\,W\,N_2\left(T_\mu \bullet N\right) + \\ + W_2\,W\,N_1\left(S_\mu \bullet T\right) + W_2\,W\,N_3\left(S_\mu \bullet N\right) + \\ + W_3\,W\,N_1\left(N_\mu \bullet T\right) + W_3\,W\,N_2\left(N_\mu \bullet S\right) + V_\mu \bullet W\,N = 0\,,$$

unde:

⤇ $W\,N_1, W\,N_2, W\,N_3$ sunt componente ale vectorilor normali $W\,N$, iar:

⤇ W_1, W_2, W_3 sunt componente ale lui W.

Dar pentru a rezolva ecuaţia $M_\mu \bullet W\,N$ de mai sus sunt necesare condiţii suplimentare, care însă depind de tipul de sculelor de prelucrare utilizate în acest proces. De pildă pentru scule de prelucrat cilindrice ecuaţia $M_\mu \bullet W\,N$ se poate rezolva în funcţie de două situaţii:

- odată pentru vectorul normal la capătul inferior al sculelor de prelucrat;
- şi odată pentru vectorul normal la axă.

Pentru scule de prelucrare cu cap toroidal se poate introduce în plus o nouă condiţie determinată de condiţiile de mai sus a), b), c).

În concluzie, pentru a găsi înfăşurătoarea unei scule de prelucrat cu cap sferic, de exemplu având raza R_w, care se roteşte în jurul unui cilindru de rază R sub un unghi de incidenţă $\beta = 0$ şi considerând

$$\rho = R_w,\ R_1 = 0,\ s = 0, \beta = 0 \text{ în}$$

$$M_\mu = X_\mu + W_1\,T_\mu + W_2\,S_\mu + W_\mu\,N_\mu + V_\mu\,,$$

obţinem

$$W = \begin{pmatrix} R_w\ \cos r\ \sin t \\ R_w\ \sin r\ \sin t \\ R_w\ (1 - \cos t) \end{pmatrix}.$$

Din

⤇ ecuaţia cilindrului:

$$X\,(u, v) = (R\cos u, \qquad R\sin u, \qquad v)^{\,T}$$

⤇ ecuaţia sculei de prelucrat de-a lungul lui $u = u_0$:

$$X\,(\mu) = (R\cos u_0, \qquad R\sin u_0, \qquad \mu)^{\,T}$$

⤇ şi $V = 0$,

rezultă:

$$\begin{cases} X_\mu = T = (0, 0, 1)^T \\ S = (-\sin u_0\,, \cos u_0, 0)^T \\ N = (\cos u_0, \sin u_0, 0)^{\,T} \end{cases}$$

sau matricial:

$$(\overline{T}, \overline{S}, \overline{N}) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin u_0 & \cos u_0 \\ 0 & \cos u_0 & \sin u_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Din a) rezultă:

$$WN = \ (\cos r \sin t\,,\ \sin r \sin t\,, -\cos t)^T.$$

Ţinând cont de coordonatele ortonormale ale lui $(\overline{T}, \overline{S}, \overline{N})$:

$$(\overline{T}, \overline{S}, \overline{N}) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin u_0 & \cos u_0 \\ 0 & \cos u_0 & \sin u_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obţinem:

$$WN = (\overline{T}, \overline{S}, \overline{N}) = \begin{pmatrix} -\sin u_0 \sin r \sin t\,, -\cos u_0 \cos t \\ \cos u_0 \sin r \sin t - \sin u_0 \cos t \\ \cos r \sin t \end{pmatrix}$$

În plus:

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = (\,0, 0, 1\,) + \left(T_\mu\, S_\mu\, N_\mu\right) W$$

$$T_\mu = T_v = 0;\ \ S_\mu = S_v = 0;\ \ N_\mu = N_v = 0.$$

Din condiţia înfăşurătoarei:

$$M_\mu \bullet W\,N = 0$$

⤇ şi $W\,N$ de mai sus

⤇ şi pentru: $\cos r \sin t = 0, r = \frac{\pi}{2}$, pentru $t = 0$

se obţine doar traiectoria extremităţii sculei de prelucrat şi care include $r = \frac{\pi}{2}$

Rezultă următoarea ecuaţie pentru înfăşurătoare:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{R}\cos \mathrm{u_0} \\ \mathrm{R}\sin \mathrm{u_0} \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{R_w}\sin \mathrm{u_0}\sin \mathrm{t} \\ \mathrm{R_w}\cos \mathrm{u_0}\sin \mathrm{t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{R_w}\ \cos \mathrm{u_0}\ (1-\cos \mathrm{t}) \\ \mathrm{R_w}\ \sin \mathrm{u_0}\ (1-\cos \mathrm{t}) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (R + R_w)\ \cos u_0 \\ (R + R_w)\sin u_0 \\ \mu \end{pmatrix} + R_w \begin{pmatrix} -\cos\ (t - u_0) \\ \sin\ (t - u_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

şi care implică faptul că centrul sferei trebuie să se deplaseze de-a lungul unui cilindru de rază $R + R_w$ şi în fiecare punct al traiectoriei trebuie să trasăm un cerc de rază R_w ca în Fig. 6.19 de mai jos:

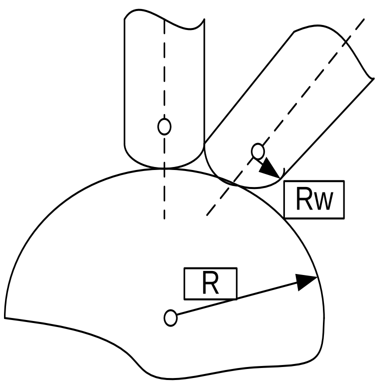


Fig. 6.19. Profilul de prelucrat şi poziţia sculei pentru prelucrare în 3D şi care se deplasează de-a lungul unui cilindru.

6.8. Concluzii

Cuplarea sistemelor de concepţie şi fabricaţie a entităţilor geometrice reprezintă un domeniu important al cercetării matematice fundamentale şi aplicative. Descoperirile din domeniul geometriei analitice şi numerice, împreună cu progresele fără precedent ale calculatoarelor electronice şi ale sistemelor de aplicaţii de la sfârşitul secolului XX şi începutul secolului XXI au permis dezvoltarea **modelării matematice** în general şi a **modelării geometrice** în particular.

Aceasta a condus la schimbări fundamentale asupra modului în care se proiectează şi realizează noile produse. Calculatoare electronice dotate cu sisteme de aplicaţii adecvate au înlocuit munca considerată tradiţională a proiectantului dotat cu o planşetă şi o riglă de calcul, permiţând nu numai scurtarea timpului de proiectare, dar şi obţinerea de variante constructive optimale în funcţie de cerinţele tehnologice al produselor realizate.

Introducerea microprocesoarelor electronice la construcţia şi realizarea maşinilor-unelte a permis ridicarea performanţelor acestor maşini, atât din punctul de vedere al preciziei de prelucrare, cât şi al capabilităţii de prelucrare a acestor maşini. Totodată realizarea de desene de proiectare ale produselor s-a transformat dintr-o activitate orientată spre un suport de hârtie într-o activitate de programare a maşinilor-unelte cu comandă program şi care pe baza unui sistem de aplicaţii propriu bazat pe microprocesoare permite comanda acestor maşini pentru realizarea de produse adecvate.

Toate aceste progrese au la bază un aparat matematic fundamental cu aplicaţii practice determinante pentru dezvoltarea modelării geometrice prin îmbinarea cunoştinţelor din domeniul geometriei teoretice cu principiile generale a teoriei modelării matematice.

Scopul principal al acestei lucrări îl constituie tocmai dezvoltarea acestui aparat, atât prin prezentarea cunoştinţelor din domeniu, cât şi prin modeste contribuţii personale şi care să ducă la îmbogăţirea acestor cunoştinţe, pregătind totodată dezvoltări ulterioare în domeniu, dezvoltări care se anunţă deosebit de promiţătoare.

7. MODELAREA GEOMETRICĂ, CA TEHNICĂ DE CONCEPŢIE ŞI FABRICAŢIE A SUPRAFEŢELOR SCULPTATE

7.1. Introducere

Numeroase produse create pentru consumul general necesită un aspect estetic special, care să mărească satisfacţia consumatorilor pentru utilizarea acestor produse. Folosind suprafeţe sculptate în proiectarea, prelucrarea şi realizarea acestor produse, în special în industria de automobile şi de produse electronice, se pot obţine produse cu un aspect estetic adecvat.

Pe de altă parte, unele produse necesită ele însuşi folosirea suprafeţelor sculptate din motive funcţionale, iar uneori aceste produse pot interacţiona cu alte suprafeţe sculptate adiacente sau cu mediul înconjurător. În acest caz, suprafeţele funcţionale se numesc *suprafeţe dinamice*. Exemple de astfel de suprafeţe se pot găsi în: industria aero-hidro-dinamică (de ex. elicele turbinelor), industria optică (de ex. reflectoarele lămpilor), industria de aparatură medicală (de ex. în reproducerea unor părţi anatomice), industria mecanică (de ex. prelucrarea subansamblelor complexe) etc.

În funcţie de complexitatea lor, realizarea suprafeţelor sculptate necesită maşini-unelte de înaltă performanţă, capabile să realizeze o astfel de precizie şi complexitate, dar care ridică semnificativ costurile de prelucrare.

Aceasta conduce la o cerinţă stringentă impusă proiectării proceselor tehnologice, şi anume la reducerea timpurilor de prelucrare, ca o măsură eficientă de folosire a maşinilor-unelte cu comandă numerică (NC[1]) pentru realizarea suprafeţelor sculptate (Radzevich, 2008).

În cele ce urmează se va prezenta teoria generării suprafeţelor sculptate (SSE[2]), cu scopul folosirii optimale a acestei teorii în domeniul prelucrării suprafeţelor sculptate pe maşini-unelte cu comandă numerică.

În principal, studiul realizării suprafeţelor sculptate ia în considerare două suprafeţe:

- Suprafaţa sculptată **P** ce urmează a se realiza pe maşinile-unelte cu comandă numerică;
- Suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare.

De remarcat că:

- Suprafaţa sculptată **P** se poate genera ca o suprafaţă înfăşurătoare a punctelor suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare, când suprafeţele **P** şi **T** sunt în contact.
- În realitate, suprafaţa generatoare **T** nu există în mod explicit, ci este reprezentată de poziţiile consecutive ale mişcărilor relative a sculei aşchietoare în cadrul unui sistem de axe de coordonate.

În acest capitol se prezintă unele probleme ce apar la generarea optimală a suprafeţelor sculptate folosind maşini-unelte cu comandă numerică.

---

[1] NC = Numerically Controlled machine – (engl.)
[2] SSE = Sculptured–Surface generation – (engl.)

Se prezintă definiţii, concepţii şi notaţii referitoare la analiza suprafeţelor sculptate, luându-se în considerare analiza, investigarea şi compararea diferitelor metode de prelucrare pentru sintetizarea generalizări optimale pe aceste maşini a suprafeţelor sculptate.

Se introduc conceptele fundamentale ale geometriei suprafeţelor sculptate şi teoria mişcării multiparametrice a unui corp rigid în spaţiul tridimensional $\mathbb{R}^{3,}$ luându-se în considerare faptul că elementul principal în prelucrarea suprafeţelor îl constituie suprafaţa însuşi.

Alte elemente luate în calcul la prezentarea programelor referitoare la generarea optimală a suprafeţelor sculptate au fost:

- cinematica sculei aşchietoare,
- parametrii geometrici ai generării suprafeţelor sculptate,
- tipul şi complexitatea maşinilor-unelte pe care are loc prelucrarea suprafeţelor sculptate.

Se prezintă optimizarea prelucrării suprafeţelor sculptate pe maşini-unelte cu comandă numerică folosind teoria geometrică a generării suprafeţelor în spaţiu, atât pentru suprafeţele sculptate realizate, cât şi pentru mişcările sculei aşchietoare.

Principalele soluţii folosite la prezentarea problemelor legate de prelucrarea suprafeţelor complexe au constat în generarea cinematicii sculei aşchietoare, astfel ca acestea să urmărească coordonatele geometrice ale suprafeţei de realizat[3].

În acest fel, generarea optimală a parametrilor pentru realizarea suprafeţelor sculptate se poate exprima numeric prin cotele parametrilor suprafeţelor ce urmează a fi realizate.

7.2. Realizarea suprafeţelor sculptate pe maşini-unelte cu comandă numerică

Fie o suprafaţă sculptată **P**; aceasta se poate reprezenta unic exprimând coordonatele sale rectangulare: X_P, Y_P, Z_P în spaţiul tridimensional $\mathbb{R}^3$ ca funcţii de două variabile independente carteziene (Gauss) - parametrii (U_P, V_P) într-un interval închis $[U_P, V_P] \subseteq \mathbb{R}$ (Fig. 7.1).

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_P\ (U_P, V_P) = \begin{bmatrix} X_P\ (U_P, V_P\ ) \\ Y_P\ (\ U_P, V_P\ ) \\ Z_P\ (U_P, V_P) \end{bmatrix}, \text{ unde: } (U_{1.P} \leq U_P \leq U_{2.P}\ ;\ V_{1.P} \leq V_P \leq V_{2.P})$$

şi unde:

- $\boldsymbol{r}_P$ este vectorul de poziţie al unui punct al suprafeţei sculptate **P**;
- X_P, Y_P, Z_P sunt coordonatele rectangulare carteziene (Gauss) ale unui punct al suprafeţei sculptate **P;**
- U_P, V_P sunt variabilele carteziene (Gauss), parametrii unui punct al suprafeţei sculptate **P;**
- $U_{1.P}, U_{2.P}$ sunt punctele de frontieră ale intervalului închis $[U_{1.P}, U_{2.P}] \subseteq \mathbb{R}$ ai parametrului U_P;
- $V_{1.P}, V_{2.P}$ sunt punctele de frontieră ale intervalului închis $[\ V_{1.P}, V_{2.P}] \subseteq \mathbb{R}$ ai parametrului V_P

Parametrii U_P, V_P trebuie să fie independenţi, ca urmare matricea **M:**

[3] SSE = Sculptured –Surface generation – (engl)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial U_P} & \frac{\partial Y_P}{\partial U_P} & \frac{\partial Z_P}{\partial U_P} \\ \frac{\partial X_P}{\partial V_P} & \frac{\partial Y_P}{\partial V_P} & \frac{\partial Z_P}{\partial V_P} \end{bmatrix} \text{are rangul 2.}$$

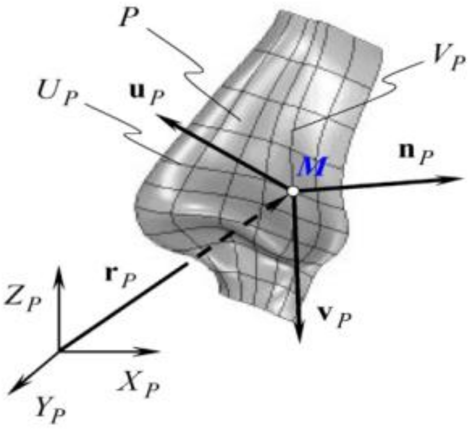


Fig. 7.1. Elementele principale ale topologiei suprafeţelor sculptate (Radzevich, 2008)

De remarcat că dacă rangul matricei **M** este 1 sau 0, atunci punctele considerate sunt singulare, iar ecuaţia matricială **M** reprezintă o curbă (în spaţiu sau în plan).

Definim în continuare două funcţii fundamentale ale geometriei suprafeţelor legate de punctele ce definesc suprafaţa sculptată **P** şi anume funcţiile fundamentale de ordinul I şi respectiv II: $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ (A.) şi $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$ (B.)

A. Fie **funcţia fundamentală de ordinul I:** $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ a suprafeţei sculptate **P**, reprezentată de funcţia pătratică $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ definită mai jos:

$$\boldsymbol{\Phi}_{1.P} \Rightarrow ds_P^2 = E_P dU_P^2 + 2 F_P dU_P dV_P + G_P dV_P^2$$

şi unde:

- s_P este elementul liniar al suprafeţei sculptate **P**;
- E_P, F_P, G_P sunt mărimi fundamentale de ordinul I;
- $U_P = \frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial U_P}, V_P = \frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial V_P}$ sunt derivatele de ordinul I ale vectorului $\boldsymbol{r}_P$ în funcţie de coordonatele rectangulare gaussiene U_P, V_P.

În teoria generării suprafeţelor, forma matricială a funcţiei fundamentale de ordinul I: $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ a suprafeţei sculptate **P** se defineşte ca (Radzevich, 1990):

$$\boldsymbol{\Phi}_{1.P} \Rightarrow ds_P^2 = [\, dU_P \quad dV_P \; 0 \quad 0\,] \begin{bmatrix} E_P & F_P & 0 & 0 \\ F_P & G_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dU_P \\ dU_P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pentru calculul mărimilor fundamentale de ordinul I: (E_P, F_P, G_P) se folosesc ecuaţiile vectoriale:

$$E_P = \boldsymbol{U}_P \, \boldsymbol{U}_P \,;$$
$$F_P = \boldsymbol{U}_P \, \boldsymbol{V}_P \,;$$
$$G_P = \boldsymbol{V}_P \, \boldsymbol{V}_P,$$

unde: $\boldsymbol{U}_P = \frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial \boldsymbol{U}_P}$; $\boldsymbol{V}_P = \frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial \boldsymbol{V}_P}$, sunt primele derivate ale lui $\boldsymbol{r}_P$ în funcţie de $\boldsymbol{U}_P$, $\boldsymbol{V}_P$.

Pentru vectorii unitate $\boldsymbol{U}_P$ şi $\boldsymbol{V}_P$, expresiile:

$$\boldsymbol{u}_P = \frac{\boldsymbol{U}_P}{|\boldsymbol{U}_P|} \text{ şi}$$

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{\boldsymbol{V}_P}{|\boldsymbol{V}_P|}$$

există şi definesc direcţia tangentei la curba de coordonate $\boldsymbol{U}_P$ şi respectiv $\boldsymbol{V}_P$ într-un punct dat **M** al suprafeţei sculptate **P**.

Fie mărimile fundamentale de ordinul I

$$(E_P, F_p, G_p),$$

ca funcţii scalare ai parametrilor U_P^- şi V_P^- ai suprafeţei sculptate **P** şi care se pot exprima ca fiind:

$$E_p = E_P(U_P, V_p),$$
$$F_p = F_P(U_P, V_p),$$
$$G_p = G_P(U_P, V_p).$$

Mărimile E şi G sunt totdeauna pozitive ($E_P > 0$, $G_P > 0$), dar F_P poate fi şi zero:

$$(F_P \geq 0).$$

Funcţia fundamentală de ordinul I: $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ reprezentând lungimea curbei înfăşurătoare este întotdeauna pozitivă, adică $\boldsymbol{\Phi}_{1.P} \geq 0$. Discriminantul $\boldsymbol{H_P}$ al funcţiei $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ se poate calcula din ecuaţia:

$$\boldsymbol{H_P} = \sqrt{E_P\, G_P - F_P^2} \text{ şi unde } \boldsymbol{H_P} \geq 0.$$

B. Fie **funcţia fundamentală de ordinul II:** $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$ a suprafeţei sculptate **P** şi unde $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$ este reprezentată de forma pătratică (Faux, 1987):

$$\boldsymbol{\Phi}_{2.P} \Rightarrow -d\boldsymbol{r}_P\, d\boldsymbol{n}_P = L_P dU_P^2 + 2\, M_p dU_P dV_P + N_P dV_P^2$$

În teoria generării suprafeţelor, forma matricială a funcţiei fundamentale de ordinul II: $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$ se defineşte ca (Pottmann, 2001):

$$\boldsymbol{\Phi}_{2.P} \Rightarrow [\, dU_P \quad dV_P \; 0 \quad 0\,] \begin{bmatrix} L_P & M_P & 0 & 0 \\ M_P & N_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dU_P \\ dU_P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

unde (L_P, M_P, N_P) sunt mărimi fundamentale de ordinul II şi unde

$$L_P = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{U_P}}{\partial U_P}\, \boldsymbol{U}_P . \boldsymbol{V}_P}{\sqrt{E_P\, G_P - F_P^2}},$$

$$M_P = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{U_P}}{\partial V_P}\, \boldsymbol{U}_P . \boldsymbol{V}_P}{\sqrt{E_P\, G_P - F_P^2}}\, \frac{\frac{\partial \boldsymbol{V_P}}{\partial U_P}\, \boldsymbol{U}_P . \boldsymbol{V}_P}{\sqrt{E_P\, G_P - F_P^2}},$$

$$N_P = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{V_P}}{\partial V_P}\, \boldsymbol{U}_P . \boldsymbol{V}_P}{\sqrt{E_P\, G_P - F_P^2}}.$$

Mărimile fundamentale de ordinul II: (L_P, M_P, N_P) sunt funcţii scalare ale parametrilor U_P^- şi V_P^- a suprafeţei sculptate **P,** relaţii care pot fi reprezentate prin:

$$L_P = L_P\,(U_P, V_P),$$
$$M_P = M_P\,(U_P, V_P),$$
$$N_P = N_P\,(U_P, V_P).$$

Discriminantul T_P funcţiei fundamentale de ordinul II: $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$ se poate calcula cu formula:

$$T_P = \sqrt{L_P N_P - M_P^2}$$

Sub formă parametrică funcţiile fundamentale de ordinul I şi II: ($\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$) se pot reprezenta ca un set de două ecuaţii:

$$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}\,(\boldsymbol{\Phi}_{1.P}, \boldsymbol{\Phi}_{2.P}) \begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_{1.P} = \boldsymbol{\Phi}_{1.P}\,(E_P, F_P, G_P) \\ \boldsymbol{\Phi}_{2.P} = \boldsymbol{\Phi}_{2.P}\,(E_P, F_P, G_P, L_P, M_P, N_P). \end{cases}$$

Se poate observa că mărimile fundamentale de ordinul I: (E_P, F_P, G_P), împreună cu mărimile fundamentale de ordinul II: $(E_P, F_P, G_P, L_P, M_P, N_P)$ definesc în mod unic o suprafaţă, ca poziţie şi orientare în spaţiu.

De remarcat faptul că funcţiile fundamentale de ordinul I şi II: ($\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$) sunt utilizate la realizarea de programe de aplicaţii CAD/CAM folosind transformări de coordonate multiple (Radzevich, 2002).

7.3. Cinematica prelucrării suprafeţelor sculptate

Pentru realizarea practică a suprafeţelor sculptate sunt necesare mişcări specifice ale sculei aşchietoare, cu regimuri de lucru adecvate prelucrării.

Totodată, realizarea acestor suprafeţe necesită optimizarea regimurilor de lucru relative ale mişcărilor în orice moment al prelucrării. În continuare se va prezenta un astfel de criteriu de optimizare.

Mişcările relative ale maşinilor de prelucrat şi ale sculei tăietoare se pot descompune într-un număr de mişcări elementare urmând o traiectorie specifică. În general, acestea sunt:

- *translaţii* pe diferite direcţii;
- *rotaţii* după diferite axe, orientate diferit unele de altele.

O combinaţie dintre mişcările elementare de *translaţie* şi de *rotaţie* generează o mişcare complexă a maşinilor de prelucrat şi a sculei tăietoare, care este sincronizată în mod specific prelucrării suprafeţei sculptate.

În continuare, analiza generării suprafeţelor sculptate multiparametrice se bazează pe prezumţia că orice mişcare necesară, atât a maşinii-unelte, cât şi a sculei tăietoare se poate realiza pe o maşină cu comandă numerică.

7.3.1. Sistemul local de referinţă

Pentru a descrie mişcările relative a maşinii-unelte şi a sculei aşchietoare este necesară definirea un sistem de coordonate carteziene care să permită studierea generării cinematicii suprafeţei sculptate **P** şi a suprafeţei generatoare **T** a sculei, sistem prezentat în (Fig. 7.2) de mai jos:

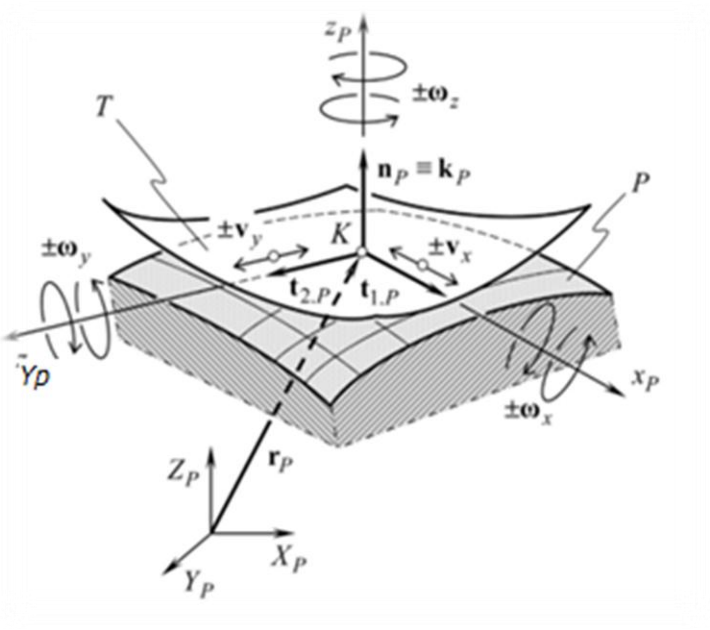


Fig. 7.2. Sistemul de coordonate carteziene a generării suprafeţei sculptate **P** şi a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare.

Pentru uşurinţa calculelor se propune ca sistem de referinţă **triedronul lui Darboux** considerat cel mai adecvat în cazul studiului şi realizărilor suprafeţelor sculptate (Radzevich, 2004).

Acesta se poate defini printr-un triplet de vectori:

- vectorul unitate $\boldsymbol{n}_P$ normal la suprafaţa **P** şi
- doi vectori unitari $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ ortogonali la suprafaţa **P,** astfel încât**:**

$$\boldsymbol{n}_P = \boldsymbol{t}_{1.P} \bullet \boldsymbol{t}_{2.P}.$$

Folosim vectorii unitari $\boldsymbol{U}_P$ şi $\boldsymbol{V}_P$ pentru calculul vectorului unitate $\boldsymbol{n}_P$ normal la suprafaţa **P** în punctul **M**:

$$\boldsymbol{n}_P = \boldsymbol{U}_P \bullet \boldsymbol{V}_P.$$

Alegând adecvat vectorii unitari $\boldsymbol{U}_P$ şi $\boldsymbol{V}_P$ se poate obţine ca vectorul unitate $\boldsymbol{n}_P$ normal la suprafaţa **P** să fie orientat spre axa pozitivă ***Z*** a suprafeţei sculptate.

Pentru calculul vectorilor tangentă unitate $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ este necesară definirea vectorilor tangentă $\boldsymbol{T}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{T}_{2.P}$ ale direcţiilor principale ca raport $\frac{dU_P}{dV_P}$ şi care pot fi calculaţi ca soluţie a ecuaţiei pătratice:

$$\begin{bmatrix} E_P\, dU_P + F_P dV_P & F_P\, dU_P + G_p\, dV_P \\ L_P\, dV_P + M_P\, dV_P & M_P\, dU_P + N_P\, dV_P \end{bmatrix} = 0$$

După calculul vectorilor tangentă a direcţiilor principale $\boldsymbol{T}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{T}_{2.P}$, vectorii tangentă unitate $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ se pot calcula folosind expresiile:

$$t_{1.P} = \frac{\boldsymbol{T}_{1.P}}{|\boldsymbol{T}_{1.P}|} \text{ şi } t_{2.P} = \frac{\boldsymbol{T}_{2.P}}{|\boldsymbol{T}_{2.P}|}.$$

Vectorii tangentă unitate $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ şi vectorul normal unitate $\boldsymbol{n}_P$ la suprafaţa **P** formează **triedronul axelor de coordonate**, permiţând definirea suprafeţei **P** într-un mod relativ simplu.

Totodată, este posibilă deplasarea sistemului de coordonate ortogonale (x_P, y_P, z_p) într-un punct **CC** de contact[4] **K** a suprafeţei sculptate **P** cu suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare.

Sistemul de coordonate local (x_P, y_P, z_p) este direcţionat conform direcţiilor corespunzătoare ale vectorilor tangentă unitate $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ şi a vectorul unitate normal $\boldsymbol{n}_P$, permiţând atât identificarea oricărui punct a suprafeţei sculptate **P**, în funcţie de acest sistem de coordonate, cât şi exprimarea relativ simplă a ecuaţiilor ce definesc procesul de prelucrare folosind în acest scop **triedronul lui Darboux**.

7.3.2. Elementele mişcării relative

Mişcările sculei tăietoare se pot descompune în cel mult **şase mişcări elementare**, de exemplu **trei translaţii** după cele trei axe şi **trei rotaţii** în jurul sistemului de coordonate ortogonale (x_P, y_P, z_p). În practică, nu toate cele şase mişcări relative se pot realiza. De exemplu, mişcarea de translaţie a sculei după axa z_P^- nu este totdeauna fezabilă şi se poate elimina din mişcarea generării suprafeţelor sculptate din cel puţin două motive:

1. Mişcarea sculei aşchietoare după direcţia $+\boldsymbol{n}_P$ poate cauza uneori întreruperi ale procesului generării suprafeţelor sculptate, ceea ce nu e permis din punct de vedere practic;

[4] CC point - cutter contact point = punctul de contact dintre scula aşchietoare şi suprafaţa prelucrată (engl.)

2. Când au loc deplasări elementare ale mişcării sculei aşchietoare după direcţia $-\boldsymbol{n}_P$ pot apare interferenţe care, de asemenea, nu sunt permise din punct de vedere practic.

Ca urmare, viteza mişcării de translaţie a sculei tăietoare de lungul perpendicularei comune va fi egală cu zero:

$$\boldsymbol{V}_n = \frac{\partial z_P}{\partial t} \bullet \boldsymbol{k}_P = 0,$$

unde t reprezintă timpul.

Fie $\boldsymbol{V}_u$ şi $\boldsymbol{V}_v$ vitezele de translaţie ale sculei tăietoare de-a lungul axelor x_P şi respectiv y_P şi fie $\omega_u, \omega_v, \omega_n$ rotaţiile în jurul axelor de coordonate x_P, y_P, z_P.

În principal, în funcţie de un sistem de axe de referinţă x_P, y_P, z_P şi unde $\varphi_u, \varphi_v, \varphi_n$ sunt unghiurile de rotaţie ale sculei tăietoare după axele de referinţă x_P, y_P, z_P, cinematica generării suprafeţelor sculptate se poate descompune în 5 mişcări relative:

- **două translaţii**:

$$\boldsymbol{V}_u = \frac{\partial x_P}{\partial t} \bullet \boldsymbol{u}_P = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_P}{\partial U_P \partial_t};$$

$$\boldsymbol{V}_v = \frac{\partial y_P}{\partial t} \bullet \boldsymbol{v}_P = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_P}{\partial V_P \partial_t}.$$

- **trei rotaţii**:

$$\boldsymbol{\omega}_u = \frac{\partial \varphi_u}{\partial t} \bullet \boldsymbol{u}_P;$$

$$\boldsymbol{\omega}_v = \frac{\partial \varphi_v}{\partial t} \bullet \boldsymbol{v}_P;$$

$$\boldsymbol{\omega}_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \bullet \boldsymbol{n}_P,$$

7.3.2.1. Generarea mişcărilor sculei tăietoare

După prelucrarea pe maşina-unealtă cu comandă numerică, suprafaţa sculptată **P** se prezintă ca un caroiaj al traiectoriilor sculei. Generarea suprafeţei sculptate **P** de către caroiajele succesive reprezintă principala sarcină a realizării suprafeţelor sculptate cu ajutorul maşinilor-unelte cu comandă numerică. În general, mişcarea sculei tăietoare de-a lungul direcţiei de prelucrare, în principal perpendiculară, se poate considera o *mişcare continuă*, pe când schimbarea de direcţie a sculei se poate consideră o *mişcare discretă*.

Aşa cum s-a arătat la începutul capitolului, suprafaţa sculptată **P** se poate genera ca o suprafaţă înfăşurătoare ale punctelor suprafeţei generatoare **T** ale sculei aşchietoare, când suprafeţele **P** şi **T** sunt în *contact liniar* sau *punctiform*:

- În cazul unui *contact liniar* al suprafeţelor, o mişcare cu un singur grad de libertate este suficientă pentru a genera suprafaţa sculptată **P**;
- În cazul suprafeţelor cu *contact punctiform* este necesară o mişcare cu două grade de libertate pentru generarea întregii suprafeţe sculptate **P**.

Observaţie:

Numărul gradelor de libertate necesare generării suprafeţei sculptate **P** poate fi mai mare decât 2, de exemplu în cazul mişcărilor multiparametrice ale sculei tăietoare.

În practică, metodele de prelucrare pe maşini-unelte nu oferă întotdeauna o soluţie eficientă şi optimă cerinţelor tehnologice ale suprafeţei sculptate **P**. În acelaşi timp există o varietate de soluţii, eficienţa fiecăreia fiind diferită şi nu totdeauna cea mai ridicată.

Pentru calculul parametrilor mişcărilor relative, în literatura de specialitate se defineşte ecuaţia de contact (Willis, 1941):

$$\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0,$$

unde $\boldsymbol{n}_P$ este vectorul unitate normal la suprafaţă, iar $\boldsymbol{V}_\Sigma$ defineşte viteza mişcării rezultante ale sculei aşchietoare relative la suprafaţa sculptată **P.**

Evident, un număr infinit de vectori $\boldsymbol{V}_\Sigma$ satisfac ecuaţia de contact $\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0$ şi toţi aparţin planului tangent al suprafeţei sculptate **P,** acesta fiind principalul motiv pentru care, teoretic, un număr infinit de soluţii pot fi luate în considerare la prelucrarea suprafeţei sculptate **P**.

De asemenea, este evident că performanţele generării suprafeţei sculptate **P** depind de direcţia vectorului $\boldsymbol{V}_\Sigma$: pe o direcţie oarecare a lui $\boldsymbol{V}_\Sigma$ performanţele suprafeţei sculptate pot fi ridicate, pe când pe o altă direcţie pot să fie diferite, ceea ce poate conduce la următoarele concluzii:

a) există o direcţie optimală a lui $\boldsymbol{V}_\Sigma$;
b) această direcţie satisface ecuaţia de contact: $\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0$;
c) parametrii optimali ai direcţiei $\boldsymbol{V}_\Sigma$ pot fi calculaţi.

Pentru calculul parametrilor optimali ai mişcării relative $\boldsymbol{V}_\Sigma$ a maşinii-unelte şi ai sculei aşchietoare este necesară adoptarea unui criteriu de optimizare, cu scopul de a selecta direcţia optimală a vectorului $\boldsymbol{V}_\Sigma$ din numărul infinit de direcţii care satisfac ecuaţia de contact $\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0$.

Pentru a satisface ecuaţia de contact $\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0$, vectorul $\boldsymbol{V}_\Sigma$ al mişcări relative a sculei aşchietoare trebuie să aparţină planului tangent al suprafeţelor **P** şi **T** în punctul **CC** de contact ***K***.

Considerând sistemul de coordonate de referinţă x_P, y_P, z_P cu originea în punctul **CC** de contact **K**, vectorul $\boldsymbol{V}_\Sigma$ poate fi descris analitic de ecuaţia vectorială de mai jos:

$$\boldsymbol{V}_\Sigma = \frac{\partial x_P}{\partial t}\boldsymbol{u}_P + \frac{\partial y_P}{\partial t}\boldsymbol{v}_p + \frac{\partial z_P}{\partial t}\boldsymbol{n}_P.$$

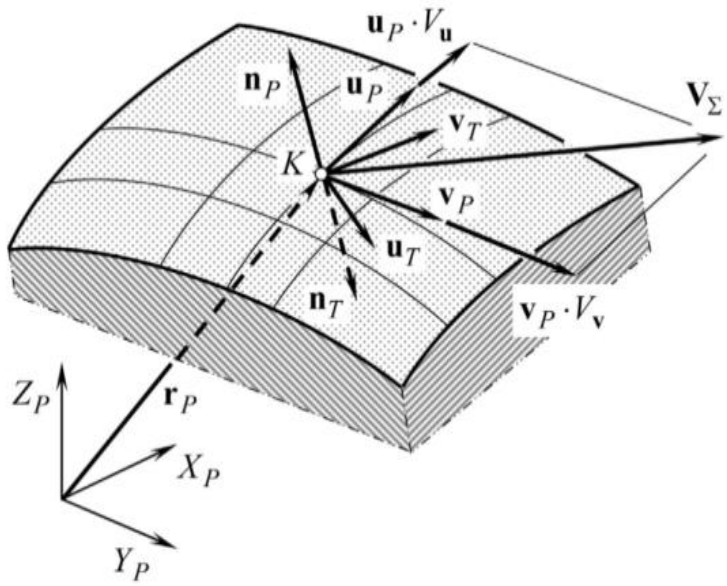


Fig. 7.3. Mişcările relative ale sculei aşchietoare în sistemul de coordonate de referinţă $\boldsymbol{x_P, y_P, z_P}$ cu originea în punctul **CC** de contact **K**

În Fig. 7.3. se prezintă vectorii mişcărilor relative ale sculei tăietoare în sistemul de coordonate de referinţă x_P, y_P, z_P cu originea în punctul **CC** de contact **K**.

Remarcă:

În acelaşi sistem de coordonate şi pentru acelaşi punct **CC** de contact **K** există egalităţile:

$$\boldsymbol{n}_P = \boldsymbol{k}_P;$$
$$\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0.$$

Înlocuind în expresia lui $\boldsymbol{V}_\Sigma$ de mai sus obţinem:

$$\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = \frac{\partial z_P}{\partial t} = 0.$$

Pentru a satisface ecuaţia de contact

$$\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0$$

în punctul **CC** de contact **K,** proiecţia vectorului $\boldsymbol{V}_\Sigma$ a mişcării rezultante pe direcţia perpendicularei comune $\boldsymbol{pr_n}$ la suprafeţele **P** şi **T** trebuie să fie egală cu zero, ceea ce demonstrează afirmaţia că vectorul $\boldsymbol{V}_\Sigma$ este cuprins în tangenta comună la suprafeţele **P** şi **T.**

- Dacă $\boldsymbol{pr_n}\,\boldsymbol{V}_\Sigma < 0$; această situaţie poate fi considerată ca o condiţie a operaţiei de degroşare[5], porţiunile suprafeţei **T** care desfăşoară astfel de mişcări îndepărtează adaosul de prelucrare.
- Dacă $\boldsymbol{pr_n}\,\boldsymbol{V}_\Sigma = \boldsymbol{0}$; această situaţie este echivalentă cu condiţia de contact: $\boldsymbol{n}_P.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0$ şi care corespunde generării suprafeţei sculptate la prelucrarea pe maşini-unelte cu comandă numerică.
- Dacă $\boldsymbol{pr_n}\,\boldsymbol{V}_\Sigma > 0$; această situaţie se referă la prelucrarea unor porţiuni a suprafeţei generatoare **T** ale sculei aşchietoare şi care diferă de suprafaţa sculptată **P.**

Ca urmare, ecuaţia de contact $\boldsymbol{n_P}.\boldsymbol{V}_\Sigma = 0$ descrie cinematica generării suprafeţei sculptate **P**, dar nu în mod unic, ţinând cont de numărul infinit al direcţiilor fezabile ale vectorului $\boldsymbol{V}_\Sigma$.

Poziţia şi orientarea perpendicularei comune $\boldsymbol{n}_P$ este unic determinată de suprafaţa sculptată **P**. În mod normal, dar nu şi necesar, aceasta nu poate fi schimbată. Pe de altă parte, în cazuri speciale ale prelucrării, orientarea perpendicularei comune $\boldsymbol{n_p}$ se poate schimba în cazul prelucrării.

De exemplu, când se prelucrează membrane subţiri, este necesar a se lua în considerare deformaţia elastică a acestor membrane. Dacă deformaţia elastică este folosită în procesul de prelucrare, atunci ecuaţia de contact trebuie să fie satisfăcută pentru diferite faze ale prelucrării. Schimbarea orientării vectorului normal la suprafaţă este relativ dificil de realizat în practică, dar când aceasta este posibilă, generarea suprafeţei **P** este afectată în cel puţin situaţiile următoare:

- Când se prelucrează suprafeţele sculptate pe maşini-unelte după o traiectorie (caroiaj) dată, caz în care punctul **CC** de contact **K** se deplasează de-a lungul traiectoriei sculei aşchietoare;
- Când se termină o fază de prelucrare după o traiectorie (caroiaj) dată, sculele aşchietoare se deplasează spre o nouă poziţie de lucru întrerupând traiectoria iniţială, caz în care punctul **CC** de contact **K** se deplasează într-o direcţie diferită de traiectoria sculei aşchietoare.

[5] Roughing – degroşare (engl.)

Pentru a descrie analitic generarea mişcării sculei aşchietoare folosim mişcările elementare ce compun cinematica generării suprafeţei sculptate **P** în funcţie de timp (Fig. 7.1) şi (Fig. 7.3):

$$|\boldsymbol{V_u}| = |\boldsymbol{\omega_V}|.R_{P_u} \text{ şi}$$
$$|\boldsymbol{V_v}| = |\boldsymbol{\omega_u}|.R_{P_v},$$

unde R_{P_u} şi R_{P_v} definesc razele de curbură a suprafeţei sculptate **P** pe direcţiile $\boldsymbol{u}_P$ şi respectiv $\boldsymbol{v}_P$ şi care se măsoară în planul secţiunilor vectorilor unitari $|\boldsymbol{U_P}|$ şi $|\boldsymbol{V_P}|$.

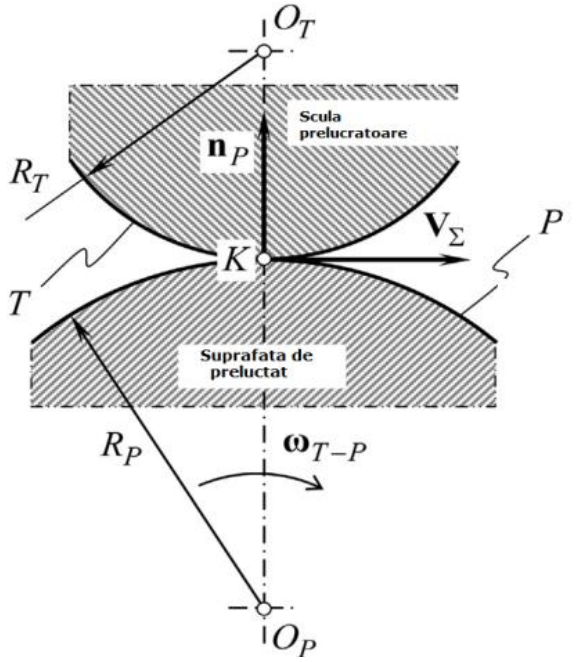


Fig. 7.4. Mişcările sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată P.

Pentru calculul lor, folosim ecuaţia lui Euler:

$$R_{P_u} = \left[\frac{cos^2\varphi}{R_{1.P}} + \frac{sin^2\varphi}{R_{2,P}}\right]^{-1}$$

unde $R_{1.P}$ şi $R_{2.P}$ definesc prima şi a doua rază de curbură principală a suprafeţei sculptate **P**, iar unghiul ω este unghiul pe care tangenta vectorului unitar $\boldsymbol{u}_P$ o face cu direcţia principală $\boldsymbol{t}_{1.P}$ la suprafaţa considerată şi care sunt rădăcinile ecuaţiei pătratice:

$$R_{1.P} = \begin{bmatrix} L_P\,R_P - E_P & M_P\,R_P - F_p \\ M_P\,R_P - F_P & N_P\,R_P - G_P \end{bmatrix}.$$

În mod similar se poate calcula $R_{2.P}$.

<u>*Observaţie:*</u>

Ecuaţiile

$$|\boldsymbol{V}_u| = |\boldsymbol{\omega}_v| \bullet R_{P_u} \text{ şi}$$
$$|\boldsymbol{V}_v| = |\boldsymbol{\omega}_u| \bullet R_{P_v}$$

conduc la generalizarea

$$|\boldsymbol{V}_\Sigma| = |\boldsymbol{\omega}_{T-P}| \bullet R_{P_\Sigma}$$

unde:

- $\boldsymbol{V}_\Sigma$ este vectorul rezultant al mişcării punctului **CC** de contact **K** de-a lungul traiectoriei sculei aşchietoare;
- $\boldsymbol{\omega}_{T-P}$ este vectorul mişcării de rotaţie a suprafeţei **T** ale sculei aşchietoare în jurul unei axe perpendiculare pe planul normal definit de vectorul $\boldsymbol{V}_\Sigma$;

- R_{P_Σ} este raza de curbură a suprafeţei sculptate **P** în direcţia vectorului $\boldsymbol{V}_\Sigma$.

Cum s-a arătat mai sus, considerând sistemul de coordonate de referinţă x_P, y_P, z_P cu originea în punctul **CC** de contact **K**, vectorul $\boldsymbol{V}_\Sigma$ poate fi descris analitic de ecuaţia vectorială de mai jos:

$$\boldsymbol{V}_\Sigma = \frac{\partial x_P}{\partial t}\boldsymbol{u}_P + \frac{\partial y_P}{\partial t}\boldsymbol{v}_p.$$

În plus, pentru a satisface ecuaţiile:

$$|\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{u}}| = |\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{v}}| \bullet \boldsymbol{R}_{P_u} \text{ şi}$$
$$|\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{v}}| = |\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{u}}| \bullet \boldsymbol{R}_{P_v}$$

este necesar ca

$$\frac{\partial x_P}{\partial t} \bullet \boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{v}} \bullet (\boldsymbol{R}_{P_u} \bullet \boldsymbol{n}_P)$$
$$\frac{\partial y_P}{\partial t} \bullet \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{u}} \bullet (\boldsymbol{R}_{P_v} \bullet \boldsymbol{n}_P)$$

şi deci:

$$\boldsymbol{V}_\Sigma = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{v}} \bullet (\boldsymbol{R}_{P_u} \bullet \boldsymbol{n}_P) + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{u}} \bullet (\boldsymbol{R}_{P_v} \bullet \boldsymbol{n}_P).$$

În plus, se cere satisfăcută ecuaţia de contact $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{P}} \bullet \boldsymbol{V}_\Sigma = 0$ în orice punct al prelucrării suprafeţei sculptate **P** pe maşina-unealtă cu comandă numerică (Fig. 7.4).

Fie δ = $\delta^+ + \delta^-$ toleranţa prelucrării suprafeţei sculptate **P** şi $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}}$ mişcarea relativă a sculei de-a lungul vectorului normal unitar $\boldsymbol{n}_P$.

Cinematica generării suprafeţei sculptate **P** este compusă din 5 grade de libertate relativ la mişcările sculei aşchietoare. Ca urmare, suprafaţa sculptată **P** se poate reprezenta ca o suprafaţă înfăşurătoare a poziţiilor elementare relative a cel mult 5 mişcări relative ale sculei aşchietoare generatoare a suprafeţei **T.**

7.3.2.2. Generarea mişcărilor sculei aşchietoare

Obţinerea suprafeţelor sculptate **P** pe maşini-unelte cu comandă numerică implică existenţa suprafeţei **P** şi a suprafeţelor generatoare **T** ale mişcărilor sculei aşchietoare, suprafeţe care au un punct **CC** de contact **K** în orice moment al operaţiei de prelucrare.

Se pot distinge diferite tipuri de mişcări relative ale sculei aşchietoare în funcţie de orientarea poziţiei punctului **CC** de contact **K** faţă de suprafaţa **P** în timpul prelucrării:

- dacă în timpul prelucrării, poziţia punctului **CC** de contact **K** rămâne în poziţia sa, atât pe suprafaţa sculptată **P**, cât şi pe suprafaţa generatoare **T** a sculei de prelucrat, se distinge o mişcare de tip I;
- dacă, în schimb, punctul **CC** de contact **K** rămâne în poziţia sa pe suprafaţa **P**, dar îşi schimbă poziţia pe suprafaţa **T**, se distinge o mişcare de tip II.

Alegerea regimurilor de lucru şi, în special, a mişcărilor sculei aşchietoare depinde de curburile suprafeţei **P** în punctul **CC** de contact **K** şi de viteza mişcărilor sculei generatoare.

7.3.2.3. Transformările coordonatelor de sistem şi impactul lor asupra suprafeţelor de prelucrat

Suprafeţele considerate **P** şi **T** ocupă diverse poziţii care pot fi diferite în timpul prelucrării şi care pot fi descrise analitic folosind transformări ale operatorilor coordonatelor de sistem.

Pentru a descrie translaţia de-a lungul axelor de coordonate se folosesc operatorii de translaţie: $\boldsymbol{T_r}(\alpha_x, X), \boldsymbol{T_r}(\alpha_y, Y), \boldsymbol{T_r}(\alpha_z, Z)$ şi unde (a_x, a_y, a_z) reprezintă translaţia de-a lungul axelor de coordonate respective:

$$\boldsymbol{T_r}(\alpha_x, X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T_r}(\alpha_y, Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T_r}(\alpha_z, Z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Fie două coordonate de sistem X_1, Y_1, Z_1 şi X_2, Y_2, Z_2 care se deplasează de-a lungul axei X_1 cu distanţa a_x (Fig. 7.5.a) şi un punct M în sistemul de coordonate X_1, Y_1, Z_1 definit de vectorul de poziţie $\boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{M})$ şi care se poate exprima în funcţie de vectorul $\boldsymbol{r_2}(\boldsymbol{M})$ (Fig. 7.5..b şi c) folosind expresiile:

$$\boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{T_r}(a_x, X) \bullet \boldsymbol{r_2}(\boldsymbol{M}),$$
$$\boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{T_r}(a_y, Y) \bullet \boldsymbol{r_2}(\boldsymbol{M}),$$
$$\boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{T_r}(a_z, Z) \bullet \boldsymbol{r_2}(\boldsymbol{M}).$$

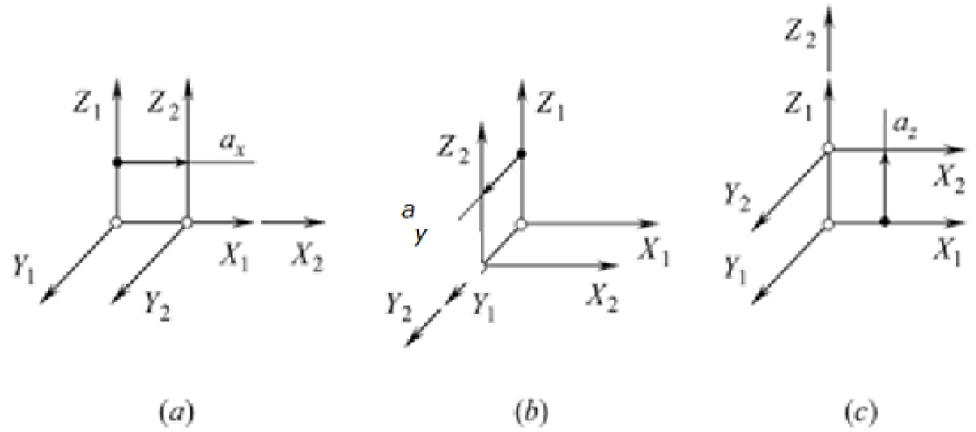


Fig. 7.5. Descrierea operatorilor de translaţie $\mathbf{T_r}(\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{X}), \mathbf{T_r}(\boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{Y}), \mathbf{T_r}(\boldsymbol{a_z}, \boldsymbol{Z})$ de-a lungul axelor de coordonate

Considerând un punct **P** aparţinând unui corp rigid şi care se translatează de la $\mathbf{P_1}$ la $\mathbf{P_2}$ prin schimbarea coordonatelor (a_x, a_y, a_z).

Deplasarea punctului **P** se poate descrie folosind operatorul de translaţie $\mathbf{T_r}(a, A)$ de-a lungul axei A ce trece prin originea axelor de coordonate:

$$\mathbf{T_r}(a, A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & 1 & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operatorul translaţiei $\mathbf{T_r}(a, A)$ se poate exprima în funcţie de operatorii elementari ai translaţiilor:

$$\mathbf{T_r}(a, A) = \mathbf{T_r}(a_z, Z), \mathbf{T_r}(a_y, Y), \mathbf{T_r}(a_x, X),$$

unde A este originea axelor de coordonate.

Alte elemente ce trebuiesc luate în considerare în cadrul transformărilor liniare utilizate în teoria generări suprafeţelor îl constituie mişcările de rotaţie. Pentru aceasta folosim operatorii de rotaţie: $\mathbf{R_t}\left(\varphi_x, X\right), \mathbf{R_t}\left(\varphi_y, Y\right), \mathbf{R_t}\left(\varphi_z, Z\right)$ pentru a definii matricile omogene de mai jos:

$$\mathbf{R_t}\left(\varphi_x, X\right) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_x & 0 & -\sin\varphi_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_x & 0 & \cos\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R_t}\left(\varphi_y, Y\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_y & \sin\varphi_y & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_y & \cos\varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R_t}\left(\varphi_z, Z\right) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & \sin\varphi_z & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şi unde $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ sunt unghiurile de rotaţie corespunzătoare axelor respective:

- φ_x este rotaţia în lungul axei **X,**
- φ_y este rotaţia în lungul axei **Y**,
- φ_z este rotaţia în lungul axei **Z**.

Fie două sisteme de coordonate:

- X_1, Y_1, Z_1 primul sistem şi
- X_2, Y_2, Z_2 al doilea sistem obţinut prin rotaţia în jurul axei x_1 cu unghiul φ_x (Fig. 7.6.a).

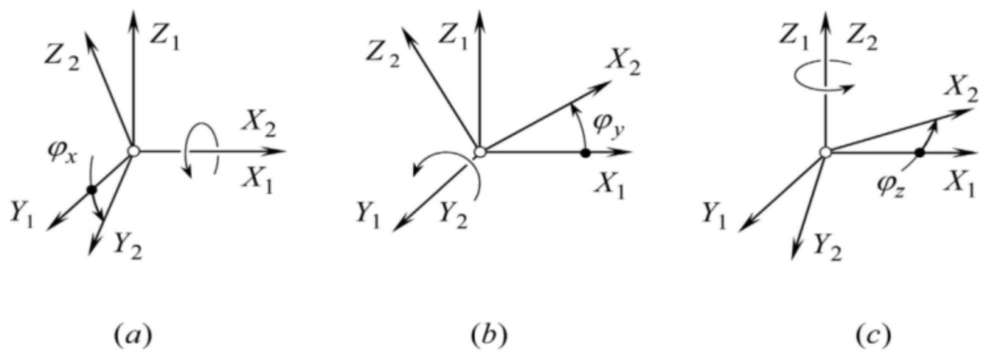


Fig. 7.6. Sistemele de axe de coordonate $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Z_1}$ şi $\boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{Y_2}, \boldsymbol{Z_2}$

Fie un punct **M** definit de vectorul $\boldsymbol{r_1}$ ***(*M*)*** în sistemul de coordonate X_1, Y_1, Z_1 şi vectorul de poziţie $\boldsymbol{r_2}$ ***(*M*)*** în sistemul de coordinate X_2, Y_2, Z_2 definind acelaşi punct **M**. Ca urmare poziţia vectorului $\boldsymbol{r_1}$ ***(*M*)*** se poate se poate exprima în funcţie de poziţia vectorului $\boldsymbol{r_2}\left(\mathbf{M}\right)$ cu ajutorul ecuaţiei:

$$\boldsymbol{r_1}\left(\mathbf{M}\right) = \mathbf{R}_t\left(\varphi_x, X\right).\boldsymbol{r_2}\left(\mathbf{M}\right)$$

şi, în mod similar, pentru ceilalţi operatori, respectiv $\mathbf{R_t}\left(\varphi_y, Y\right)$ şi $\mathbf{R_t}\left(\varphi_z, Z\right)$ ai transformării.

În acest fel definim operatorii:

$$\begin{cases} \mathbf{T_r}\left(\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{X}\right), \mathbf{T_r}\left(\boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{Y}\right), \mathbf{T_r}\left(\boldsymbol{a_z}, \boldsymbol{Z}\right) \\ \mathbf{R_t}\left(\boldsymbol{\varphi_x}, \boldsymbol{X}\right), \mathbf{R_t}\left(\boldsymbol{\varphi_y}, \boldsymbol{Y}\right), \mathbf{R_t}\left(\boldsymbol{\varphi_z}, \boldsymbol{Z}\right) \end{cases},$$

unde:

- **T** sunt operatorii translaţiei,
- **R** sunt operatorii rotaţiei,

iar combinaţia lor definesc operatorul liniar de transformare $\mathbf{R_S}\,(1 \to 2)$ ce descrie analitic rezultatul transformărilor coordonatelor de sistem de la X_1, Y_1, Z_1 la X_2, Y_2, Z_2. Ca urmare, expresia:

$$\mathbf{R_S}\,(\,1 \to 5\,) = \,\mathbf{T_r}\,(\,\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{X}\,), \mathbf{R_t}\,(\,\boldsymbol{\varphi_x}, \boldsymbol{X}\,), \mathbf{R_t}\,(\,\boldsymbol{\varphi_z}, \boldsymbol{Z}\,), \mathbf{R_t}\,(\,\boldsymbol{\varphi_x}, \boldsymbol{X}\,)$$

indică faptul că trecerea de la coordonatele de sistem X_1, Y_1, Z_1 la coordonatele de sistem X_5, Y_5, Z_5 are loc în următorii paşi succesivi:

- translaţie $\mathbf{T_r}\left(\boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{Y}\right)$, urmată de
- rotaţie $\mathbf{R_t}\,(\,\boldsymbol{\varphi_x}, \boldsymbol{X}\,)$, urmată de
- a doua rotaţie $\mathbf{R_t}\,(\,\boldsymbol{\varphi_z}, \boldsymbol{Z})$ şi
- în final de translaţia $\mathbf{T_r}\,(\,\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{X}\,)$,

exemplu ce poate fi extins pentru celelalte cazuri similare.

Rezultă că orice schimbări ale sistemului de coordonate implică schimbări ale ecuaţiei suprafeţei sculptate P şi/sau a suprafeţei generatoare T a sculei aşchietoare.

Ca urmare, este necesară recalcularea coeficienţilor $F_{1.P}$ şi $F_{2.P}$ de fiecare dată când are loc transformarea coordonatelor de sistem. Pentru a elimina această procedură se pot folosi operatorii transformărilor de sistem aplicaţi direct formelor fundamentale $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$.

După ce se calculează mărimile fundamentale de sistem: $E_P, F_P, G_P, L_P, M_P\ şi\ N_P$, acestea se pot transforma în orice alte noi coordonate de sistem folosind în acest scop operatori de translaţie şi de rotaţie şi coordonatele iniţiale de sistem. Transformări de acest tip pentru mărimile fundamentale $\boldsymbol{\Phi}_{1,\mathrm{P}}$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2,\mathrm{P}}$ se prezintă în continuare.

Fie suprafaţa sculptată **P** dată de $\boldsymbol{r_P} = \boldsymbol{r_P}\,(\,U_P, V_P\,)$, unde $(\,U_P, V_P\,) \in$ **G** şi fie forma fundamentală de gradul I $\boldsymbol{\Phi}_{1,\mathrm{P}}$ a suprafeţei sculptate **P** reprezentată matricial sub forma:

$$\boldsymbol{\Phi}_{1,\mathrm{P}} = [\,dU_P \quad dV_P\ 0 \quad 0\,]\begin{bmatrix} E_P & F_P & 0 & 0 \\ F_P & G_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dU_P \\ dU_P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Similar, forma fundamentală gradul II: $\boldsymbol{\Phi}_{2,\mathrm{P}}$ a suprafeţei sculptate **P** rezultă din ecuaţia:

$$\boldsymbol{\Phi}_{2,\mathrm{P}} = [\,dU_P \quad dV_P\ 0 \quad 0\,]\begin{bmatrix} L_P & M_P & 0 & 0 \\ M_P & N_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dU_P \\ dU_P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Transformarea coordonatelor de sistem cu ajutorul operatorului liniar de transformare $\boldsymbol{R_S}\,(1 \to 2)$ transferă ecuaţia:

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_P\,(\,U_P, V_P\,)$$

a suprafeţei **P**, iniţial dată în coordonatele de sistem X_1, Y_1, Z_1 în ecuaţia:

$$\boldsymbol{r}_P^\star = \boldsymbol{r}_P^\star\,(U_p^\star,\, V_P^\star)$$

a aceleiaşi suprafeţe sculptate **P** în noile coordonate de sistem X_2, Y_2, Z_2. Evident $\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{r}_P^\star$.

În noile coordonate de sistem, suprafaţa sculptată **P** este descrisă analitic cu ajutorul următoarei expresii:

$$\boldsymbol{r}_P^\star = \boldsymbol{r}_P^\star\left(\,U_p^\star,\, V_P^\star\,\right) = \boldsymbol{R_S}\,(\,1 \to 2\,) \bullet \boldsymbol{r_P}\,(\,U_P, V_P\,).$$

Operatorul rezultant al transformărilor coordonatelor de sistem $\mathbf{R_S}(1 \to 2)$ transformă matricea coloană a variabilelor din ecuaţiile $\boldsymbol{\Phi}_{1,P}$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2,P}$ de mai sus în forma:

$$[\,dU_p^\star \quad dV_P^\star\; 0 \quad 0\,]^T = \boldsymbol{R_S}(1 \to 2).[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]^T$$

şi care substituită în ecuaţiile $\boldsymbol{\Phi}_{1,P}$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2,P}$ de mai sus, conduc la expresiile lui $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}^\star$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}^\star$ în noile coordonate de sistem:

$$[\boldsymbol{\Phi}_{1.P}^\star] = [\mathbf{R_S}(1 \to 2).[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]^T\,]^T.[\,\boldsymbol{\Phi}_{1.P}\,].\mathbf{R_S}(1 \to 2).[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]^T$$

şi

$$[\boldsymbol{\Phi}_{2.P}^\star] = [\mathbf{R_S}(1 \to 2).[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]^T\,]^T.[\,\boldsymbol{\Phi}_{2.P}\,].\mathbf{R_S}(1 \to 2).[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]^T.$$

sau

$$[\mathbf{R_S}(1 \to 2).[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]^T\,]^T = \mathbf{R_S^T}(1 \to 2)[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]$$

deci

$$[\boldsymbol{\Phi}_{1.P}^\star] = [\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]^T.\{\mathbf{R_S^T}.(1 \to 2)[\,\boldsymbol{\Phi}_{1.P}\,].\,\mathbf{R_S}(1 \to 2)\}.[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]$$

şi

$$[\boldsymbol{\Phi}_{2.P}^\star] = [\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,]^T.\{\mathbf{R_S^T}.(1 \to 2)[\,\boldsymbol{\Phi}_{2.P}\,].\,\mathbf{R_S}(1 \to 2)\}.[\,dU_P \quad dV_P\; 0 \quad 0\,].$$

Se poate arăta că matricile $[\boldsymbol{\Phi}_{1.P}^\star]$ şi $[\boldsymbol{\Phi}_{2.P}^\star]$ din ecuaţiile de mai sus reprezintă formele pătratice ale lui U_P şi V_P.

Operatorul rezultant al transformării $\mathbf{R_S}(1 \to 2)$ a suprafeţei sculptate **P** având prima formă fundamentală $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ şi a doua formă fundamentală $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$ exprimate în coordonatele iniţiale de sistem X_1, Y_1, Z_1 conduce spre noile coordonate de sistem X_2, Y_2, Z_2 generând noi expresii:

$$[\boldsymbol{\Phi}_{1.P}^\star] = \mathbf{R_S^T}(1 \to 2).[\,\boldsymbol{\Phi}_{1.P}\,].\,\mathbf{R_S}(1 \to 2)$$

şi:

$$[\boldsymbol{\Phi}_{2.P}^\star] = \mathbf{R_S^T}(1 \to 2).[\,\boldsymbol{\Phi}_{2.P}\,].\,\mathbf{R_S}(1 \to 2)$$

care arată că după ce transformarea coordonatelor de sistem s-a efectuat, prima formă $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}^\star$ şi a doua formă fundamentală $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}^\star$ a suprafeţei sculptate **P** în noile coordonate de sistem X_2, Y_2, Z_2 sunt exprimate în termenii primei forme fundamentale $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ şi în termenii celei de a doua forme fundamentale $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$, iniţial reprezentate în coordonatele de sistem X_1, Y_1, Z_1.

Pentru a realiza această transformare, cele două forme fundamentale corespunzătoare $\boldsymbol{\Phi}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2.P}$ se cer iniţial multiplicate cu $\mathbf{R_S}(1 \to 2)$, şi apoi multiplicate din nou cu $\mathbf{R_S^T}(1 \to 2)$, ceea ce simplifică semnificativ formulele transformărilor de mai sus.

De remarcat că, în mod identic, ecuaţii similare se pot generaliza şi pentru suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare.

7.4. Descrierea analitică a geometriei de contact a suprafeţelor sculptate P şi a suprafeţelor generatoare T a sculei aşchietoare

În timpul operaţiei de prelucrare cele două suprafeţe considerate **P** şi **T** sunt în contact permanent în punctul **CC** de contact **K,** ceea ce impune restricţii la descrierea analitică a configuraţiei relative a celor două suprafeţe de contact.

În cele ce urmează se va studia geometria de contact a celor două suprafeţe, considerându-se coordonatele relative ale celor două suprafeţe şi direcţiile de deplasare ale acestora în funcţie de un sistem de axe de coordonate carteziene convenabil ales.

7.4.1. Definirea orientărilor relative a suprafeţelor P şi T

Cele două suprafeţe **P** şi **T** sunt suprafeţe conjugate, ele fiind în contact permanent, tangente una faţă de alta, ceea ce impune unele restricţii la configurarea celor două suprafeţe **P** şi **T** referitor la poziţiile si orientările mişcărilor lor relative.

În (Fig. 7.7) se prezintă planul tangent la suprafeţele **P** şi **T** în punctul **CC** de contact **K.**

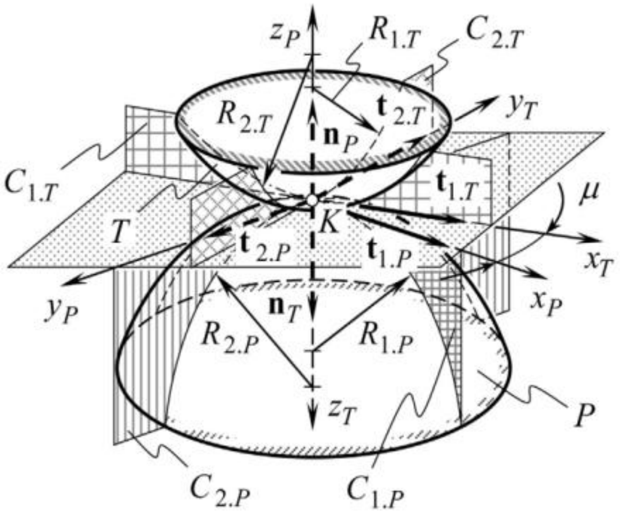


Fig. 7.7. Tangenta la suprafeţele **P** şi **T** în punctul **CC** de contact **K**

7.4.1.1. Geometria de contact a celor două suprafeţe P şi T

Pentru a studia geometria de contact a celor două suprafeţe **P** si **T,** luând în considerare coordonatele relative ale suprafeţelor şi direcţiile de mişcare a acestora, definim unghiul μ dintre vectorul tangent unitar $\boldsymbol{t}_{1.P}$ al direcţiei principale a suprafeţei sculptate **P** si vectorul tangent unitar $\boldsymbol{t}_{2.P}$ al direcţiei principale a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare. Acelaşi unghi μ se poate defini şi determina şi între vectorul tangent unitar a direcţiei secundare a suprafeţelor **P** şi **T** în punctul **CC** de contact **K**

Calculul unghiului μ se obţine din:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\,\boldsymbol{t}_{1.P} \bullet \boldsymbol{t}_{1.T}\,|}{\boldsymbol{t}_{1.P} \bullet \boldsymbol{t}_{1.T}} \equiv \frac{|\,\boldsymbol{t}_{2.P} \bullet \boldsymbol{t}_{2.T}\,|}{\boldsymbol{t}_{2.P} \bullet \boldsymbol{t}_{2.T}}.$$

Rezultă ecuaţia:

$$(\boldsymbol{r}_{tp} - \boldsymbol{r}_K)\,\boldsymbol{u}_p.\boldsymbol{v}_P = 0$$

unde

- $\boldsymbol{r}_{tp}$ este vectorul de poziţie al unui punct de pe planul tangent comun,
- iar $\boldsymbol{r}_K$ este vectorul de poziţie al punctului **CC** de contact **K.**

De remarcat că:

- În cazul unui punct de contact dintre suprafeţele **P** şi **T**, valoarea unghiului μ se calculează în punctul **CC** de contact **K**;
- În cazul unei linii de contact între suprafeţele **P** şi **T**, valoarea unghiului μ se poate calcula în fiecare punct al liniei de contact.

Vectorii unitari ai direcţiilor principale $\boldsymbol{t}_{1.P}, \boldsymbol{t}_{1.T}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}, \boldsymbol{t}_{2.T}$ se pot calcula prin două metode:

1. folosind ecuaţia:

$$\begin{bmatrix} E_P\, dU_P + F_P dV_P & F_P\, dU_P + G_p\, dV_P \\ L_P\, dV_P + M_P\, dV_P & M_P\, dU_P + N_P\, dV_P \end{bmatrix} = 0, \text{ sau}$$

2. folosind coordonatele unghiulare ω_P din ecuaţiile:

$$\sin\omega_P = \frac{\sqrt{E_P\, G_P - F_p^2}}{\sqrt{E_P\, G_P}}, \cos\omega_P = \frac{F_P}{\sqrt{E_P\, G_P}}, \operatorname{tg}\omega_P = \frac{\sqrt{E_P\, G_P - F_p^2}}{F_P};$$

Ecuaţii similare se pot deduce şi pentru calculul unghiului ω_T referitor la suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare. Se poate observa că, atât vectorii tangentă unitari $\boldsymbol{u_P}$ şi $\boldsymbol{v_P}$, cât şi vectorii tangentă unitari $\boldsymbol{u_T}$ şi $\boldsymbol{v_T}$, se pot specifica cu ajutorul unghirilor θ şi ε conform ecuaţiilor:

$$\cos\theta = \boldsymbol{u}_P \boldsymbol{u}_T \text{ şi } \cos\varepsilon = \boldsymbol{v}_P \boldsymbol{v}_T$$

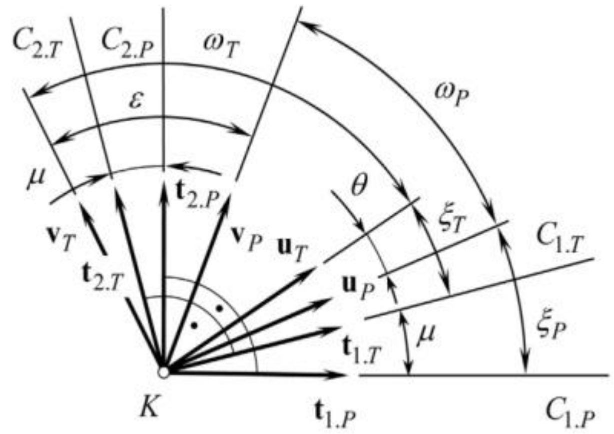


Fig. 7.8. Unghiul $\boldsymbol{\mu}$ dintre suprafeţele **P** şi **T** măsurat în planul tangent comun la suprafeţele **P** şi **T** în punctul **CC** de contact **K**

In Fig. 7.8 se prezintă orientările suprafeţelor **P** şi **T** în planul tangent comun. Unghiul $\boldsymbol{\xi}$ din Fig. 7.8 este unghiul dintre direcţia principală $\boldsymbol{t}_{1.P}$ de pe suprafaţa **P** şi vectorul unitar tangent:

$$\sin\xi_P = \frac{\eta_p}{\sqrt{\eta_P^2 - 2\,\eta_P\,\cos\omega_P + 1}} \sin\omega_P,$$

unde

$$\eta_p = \frac{\partial U_P}{\partial V_p}.$$

Derivând prin părţi obţinem:

$$d\boldsymbol{r_P} = \boldsymbol{U}_P\, dU_P + \boldsymbol{V}_P\, dV_P.$$

Prin definiţie $\sin\xi_P = \frac{|\boldsymbol{U}_P \bullet d\boldsymbol{r}_P|}{|\boldsymbol{U}_P| \bullet |d\boldsymbol{r}_P|}$ şi $\cos\xi_P = \frac{|\boldsymbol{U}_P \bullet d\boldsymbol{r}_P|}{|\boldsymbol{U}_P| \bullet |d\boldsymbol{r}_P|}$ şi deci unghiul ξ_P:

$$\operatorname{tg}\xi_P = \frac{\sqrt{E_P G_P - F_P^2}}{\eta_P\, E_P + F_P}.$$

În mod similar, se poate calcula unghiul ξ_T dintre direcţia principală $\boldsymbol{t}_{1.T}$ pe care suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare o face cu direcţia tangentei $\boldsymbol{u}_t$**,** ceea ce conduce la ecuaţiile de calcul ale principalelor direcţii $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$**:**

$$\boldsymbol{t}_{1.P} = \mathbf{Rt}\left(\xi_p, \boldsymbol{n}_P\right) \bullet \boldsymbol{u}_P$$

$$\boldsymbol{t}_{1.P} = \mathbf{Rt}\left[\left(\xi_p + \frac{\pi}{2}\right) \bullet \boldsymbol{n}_P\right] \bullet \boldsymbol{u}_P$$

pentru suprafaţa sculptată **P.**

Ecuaţii similare de calcul ale direcţiilor principale $\boldsymbol{t}_{1.T}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.T}$ se pot scrie şi pentru suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare**:**

$$\boldsymbol{t}_{1.T} = \mathbf{Rt}\,(\,\xi_T, \boldsymbol{n}_T\,)\,\bullet\,\boldsymbol{u}_T$$
$$\boldsymbol{t}_{2.T} = \mathbf{Rt}\left[\left(\xi_p + \frac{\pi}{2}\right)\bullet\,\boldsymbol{n}_T\right]\bullet\boldsymbol{u}_T.$$

7.4.2. Coeficientul lui Dupin

Pentru a descrie curbura normală a suprafeţelor **P** şi **T** în vecinătatea punctului **CC** de contact **K** se foloseşte **coeficientul lui Dupin** (Radzevich, 2008):

$$Dup\,(\,P\,)\;\Rightarrow\frac{L_P}{E_P}\,x_p^2 + \frac{2M_P}{\sqrt{E_P G_P}}\,x_p\,y_P + \frac{N_P}{G_P}\,y_p^2\;=\;\pm 1$$

Întocmai ca şi alte forme pătratice, **coeficientul lui Dupin** se poate exprima matricial:

$$Dup\,(\,P\,)\;\Rightarrow\;[x_P,\,y_P,0,0]\begin{bmatrix}\frac{L_P}{E_P} & \frac{2M_P}{\sqrt{E_P G_P}} & 0 & 0\\ \frac{2M_P}{\sqrt{E_P G_P}} & \frac{N_P}{G_P} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mp 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_P\\ y_P\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\;=\;\pm 1$$

În mod similar se poate calcula **coeficientul lui Dupin** pentru suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare.

Coeficientul lui Dupin se mai poate reprezenta sub forma:

$$r_{Dup}\;(\,\varphi\,) = \sqrt{|\,R_P\,(\,\varphi\,)\,|}$$

relaţie care ne arată că **coeficientul lui Dupin** al vectorului de poziţie în orice direcţie al unui punct este egal cu rădăcina pătrată a razei de curbură după aceiaşi direcţie.

7.4.3. Coeficientul de conformitate al suprafeţelor P şi T în punctul CC de contact K

Considerăm cele două suprafeţe **P** şi **T** tangente în punctul **CC** de contact **K**. Definim **coeficientul de conformitate** $\boldsymbol{C_{nf_R}}\,(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{T})$ al suprafeţelor **P** si **T** în punctul **CC** de contact **K** funcţie de razele curburii normale R_P si R_T ale celor două suprafeţe în planul normal comun în punctul **CC** de contact **K,** ca fiind:

$$\boldsymbol{C_{nf_R}}\left(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{T}\right)\;\Rightarrow\;r_{cnf}\,(\,\varphi,\mu\,) =$$
$$= \sqrt{\left|\frac{E_P\;G_P}{L_P G_p\;cos^2\,\varphi - \;M_P\,\sqrt{E_P\;G_P}\;\sin 2\varphi + \;N_P E_P\;sin^2\varphi}\right|}\;sgn\,\Phi_{2.P}^{-1}$$
$$+\sqrt{\left|\frac{E_T\;G_T}{L_T G_T\;cos^2(\,\varphi + \;\mu\,) - \;M_T\,\sqrt{E_T\;G_T}\;\sin 2\,(\varphi + \;\mu) + \;N_T\;E_T sin^2(\varphi + \;\mu)}\right|}\;sgn\,\Phi_{2.P}^{-1}.$$

Se poate observa că ecuaţia lui $\boldsymbol{C_{nf_R}}\left(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{T}\right)$ de mai sus reprezintă o curbă de ordinul IV simetrică în planul central. În particular, simetria poate fi de tip oglindă, de exemplu când unghiul μ al suprafeţelor **P** şi **T** este egal cu $\mu = \pm\,\frac{\pi}{2}\,n,$ unde $n \in N$ este un număr întreg.

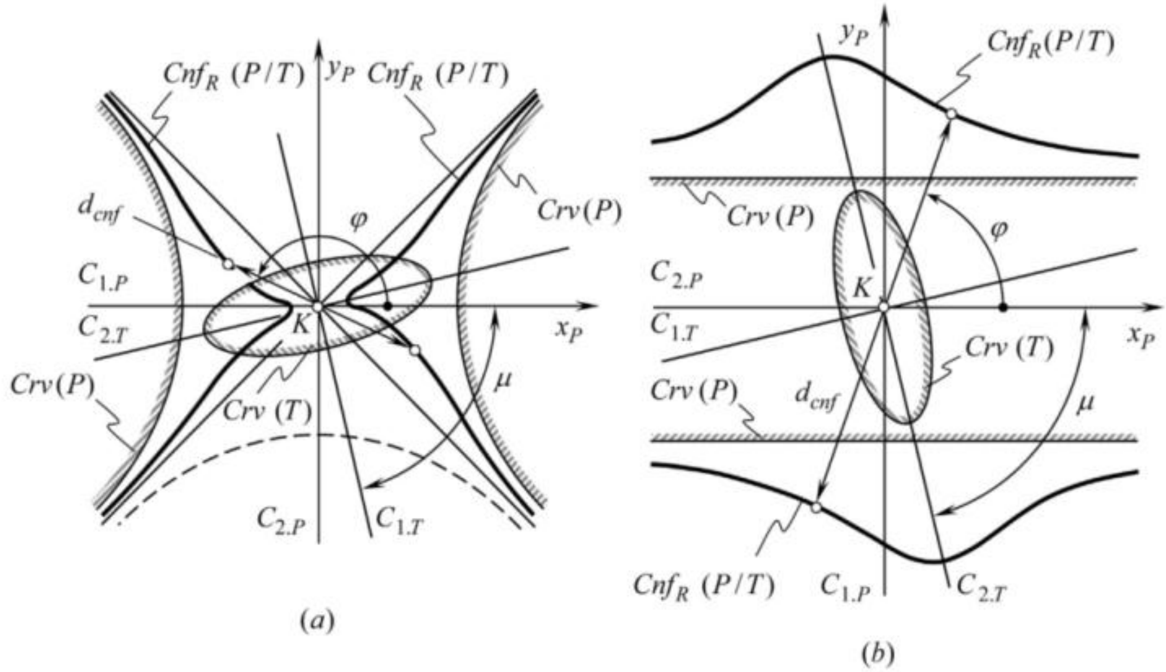


Fig. 7.9. Exemple ale coeficientului de conformitate $C_{nf_R}\ (^{P}/_{T})$

În primul caz (Fig. 7.9.a) se prezintă contactul dintre o suprafaţă sculptată **P** de tip parabolic şi o suprafaţă generatoare **T** a sculei aşchietoare de tip eliptic, iar în al doilea caz (Fig. 7.9.b), dintre **P** de tip convex parabolic şi **T** eliptic. Pentru ambele cazuri se prezintă coeficienţii de conformitate $C_{rv}\ (\boldsymbol{P})$ şi $C_{rv}\ (\boldsymbol{T})$ ai suprafeţelor **P** şi **T**. Cu linii haşurate s-a prezentat **coeficientul lui Dupin** $Dup\ (P)$ pentru suprafaţa sculptată **P**.

Suprafeţele **P** şi **T** se află în contact datorită condiţiilor de prelucrare, dar dacă aceste suprafeţe interferă, **coeficientul de conformitate** $C_{nf_R}\ (^{P}/_{T})$ se modifică corespunzător.

Definind diametrul unei curbe central simetrice d_{cnf} ca fiind distanţa dintre două puncte aparţinând curbei măsurată pe o linie dreaptă de-a lungul centrului de simetrie al curbei. Se poate obţine **coeficientul de conformitate** $C_{nf_R}\ (^{P}/_{T})$ al suprafeţelor **P** şi **T** în punctul **CC** de contact **K** într-o secţiune plană la suprafeţe în jurul perpendicularei comune şi unde direcţia secţiunilor planurilor normale la suprafeţele **P** si **T** este definită de unghiul corespunzător φ.

7.4.4. Variaţia coeficientul de conformitate al suprafeţelor P şi T în punctul CC de contact K

Mărimile vectorilor de direcţie pentru care se calculează **coeficientul de conformitate** $C_{nf_R}\ (^{P}/_{T})$ al suprafeţelor **P** şi **T** variază între diferite valori minime $\boldsymbol{d_{cnf}^{(min)}}$ şi maxime $\boldsymbol{d_{cnf}^{(max)}}$, reprezentând diametrele exterioare şi care pot fi calculate considerând **coeficientul de conformitate** $C_{nf_R}\ (^{P}/_{T})$ al suprafeţelor **P** şi **T**.

Fie unghiurile φ_{min} şi φ_{max} definind două direcţii cuprinse în planul tangent comun pentru care **coeficientul de conformitate** $C_{nf_R}\ (^{P}/_{T})$ al suprafeţelor **P** şi **T** dintre cele două suprafeţe considerate are valori extreme şi care sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} r_{cnf}\ (\varphi,\mu\,) = 0$$

Se observă că, în cazul general a două suprafeţe în contact, diferenţa dintre unghiurile φ_{min} şi $\varphi_{max} \neq \frac{\pi}{2}$, ca urmare:

$$\varphi_{min} - \varphi_{max} \neq \pm\frac{\pi}{2}\, n\ (\,n\ \in N\ \text{întreg}\,).$$

Se poate observa că prima condiţie: $\varphi_{min} = \varphi_{max} \pm \frac{\pi}{2}\, n$ este satisfăcută doar în cazul unghiului μ al suprafeţelor **P** şi **T** egal cu $\pm\frac{\pi}{2}\, n$, adică direcţiile principale a suprafeţei **P**

$$\boldsymbol{t}_{1.P} \text{ şi } \boldsymbol{t}_{2.P}$$

şi a suprafeţei **T**

$$\boldsymbol{t}_{1.T} \text{ şi } \boldsymbol{t}_{2.T}$$

sunt ambele în aceiaşi direcţie sau în direcţii opuse una alteia, ceea ce ne permite să concluzionăm că în cazul general a două suprafeţe **P** şi **T** în contact, direcţiile după care **coeficientul de conformitate** $\boldsymbol{C_{nf_R}}\ (\boldsymbol{P}/\boldsymbol{T})$ dintre cele două suprafeţe **P** şi **T** au valori extreme, nu sunt direcţiile ortogonale.

7.4.5. Utilizarea conoidul lui Plücker pentru descrierea analitică a curbelor caracteristice

Descrierea analitică a curbelor caracteristice a geometriei spaţiale de contact a suprafeţelor sculptate **P** şi a suprafeţelor generatoare **T** ale sculei aşchietoare se poate realiza cu ajutorul **conoidului lui Plücker,** care permite vizualizarea distribuţiei normale într-un punct **CC** de contact **K** al suprafeţei sculptate.

In literatura de specialitate (Velimirović, 2002) un **conoid** se defineşte ca o suprafaţă regulată în spaţiu, care rezultă din mişcarea unei drepte în spaţiu, având ecuaţia parametrică de forma:

$$\boldsymbol{r}\,(\,u,v\,) = \mathbf{R}\,(\,u\,) + \,v\,\mathbf{l}\,(\,u\,), \text{unde: } u,v\ \in R,$$

şi unde $\mathbf{R} = \mathbf{R}\,(\,\mathrm{u}\,)$ este vectorul curbei directoare sau curba de bază, iar $\mathbf{l}\,(\,\mathrm{u}\,)$ este dreapta ce se deplasează în spaţiu pe curba directoare.

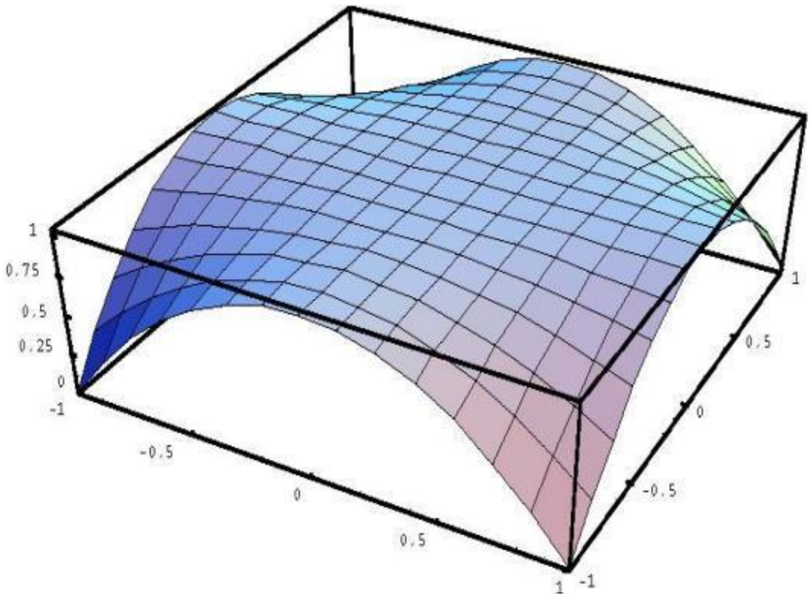


Fig. 7.10. Exemplu de conoid rezultat din deplasarea unei drepte paralele cu un plan ce intersectează două axe de coordonate

Dacă

$\mathbf{l}\,(u) = v\,(\boldsymbol{i}\,cos\,(u) + \boldsymbol{j}\sin(u))$, atunci*:*

$\mathbf{r}\,(u,v) = \boldsymbol{i}\,cos\,(u) + \boldsymbol{j}\sin(u)) + \boldsymbol{kf}(u)$,

Un caz particular de conoid în spaţiu îl reprezintă **conoidul lui Plücker** ce rezultă din mişcarea unei drepte in spaţiu, de exemplu axa z, în jurul unui cerc $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ ca o curbă directoare; ca urmare, în coordonate polare ecuaţia parametrică a **conoidului lui Plücker** devine:

$$r\,(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta, 2\cos\theta\sin\theta) = (0,0,2\cos\theta\sin\theta) + \ \rho\,(\cos\theta\,,\sin\theta, 0)$$

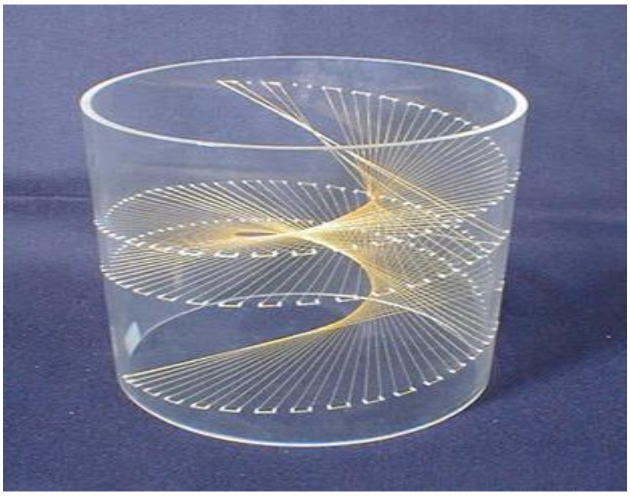


Fig. 7.11. Un exemplu al **conoidului lui Plücker** ca suprafaţă regulată în care o dreaptă se deplasează perpendicular pe o line dată (în acest caz axa unui cilindru)

O generalizare a **conoidului lui Plücker** se poate obţine folosind n diferit de 1, $n \in \mathrm{N}$ întreg:

$$r[n]\,(\rho,\theta) = (0,0,\sin n\,\theta) + \ \rho\,(\cos\theta\,,\sin\theta, 0)$$

ceea ce conduce la o mare varietate de suprafeţe de tip Plücker în spaţiu, de exemplu pentru n = 4 (Fig. 7.12).

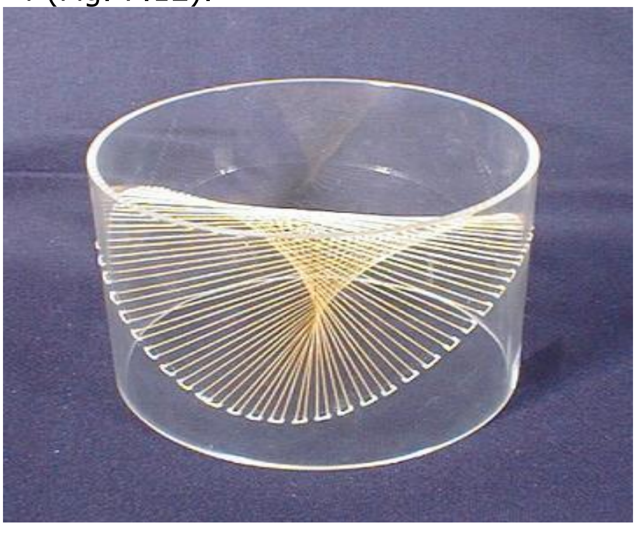


Fig. 7.12. Exemplu al unui **conoid Plücker** pentru $\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$.

Definim suprafeţele caracteristice:

- $\boldsymbol{Pl}_R\,(P)$ ca fiind **conoidul lui Plücker** de gradul I şi
- $\boldsymbol{Pl}_K\,(P)$ ca fiind **conoidul lui Plücker** de gradul II.

Cele două corpuri în spaţiu sunt inverse una alteia, adică:

$$\boldsymbol{Pl}_R\,(P) \Leftrightarrow \boldsymbol{Pl}_K^{inv}\,(P).$$

Deoarece curbele cuprinse în suprafaţa de frontieră a **conoidului lui Plücker** ne pot furniza informaţii necesare distribuţiei normale a suprafeţei **P** în vecinătatea punctului **CC** de contact **K**, pentru simplificarea calculelor se poate înlocui **conoidul lui Plücker** cu aceste curbe, definite prin coeficientul curburii lui Plücker de gradul I a suprafeţei **P** în punctul **CC** de contact **K**.

Acest coeficient este reprezentat de poziţiile vârfurilor vectorilor de lungime $R_P\,(\varphi)$ şi care se rotesc şi se deplasează de-a lungul axelor suprafeţei $\mathbf{Pl}_R\,(P)$, ceea ce ne conduce la ecuaţia suprafeței caracteristice:

$$\mathbf{Pl}_R\,(P) \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_{\boldsymbol{R}}\,(\varphi) = \begin{bmatrix} R_P\,(\varphi)\cos\varphi \\ R_P\,(\varphi)\sin\varphi \\ R_P\,(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix},$$

şi unde $R_P\,(\varphi)$ rezultă din formula lui Euler

$$R_P\,(\varphi) = \left(R_{1.P}^{-1}\,cos^2\varphi + R_{2.P}^{-1}\,sin^2\varphi\right)^{-1}.$$

În mod similar pentru coeficienţii **curburii lui Plücker** de gradul II:

$$\mathbf{Pl}_R\,\lambda_{\mathrm{k}}\,(P) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{r}_k\,(\varphi) = \begin{bmatrix} k_P\,(\varphi)\cos\varphi \\ k_P\,(\varphi)\sin\varphi \\ k_P\,(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix},$$

unde

$$k_P\,(\varphi) = k_{1.P}\,cos^2\varphi + k_{2.P}\,sin^2\varphi.$$

7.4.6. Coeficientul bidimensional a suprafeţei sculptate

Pentru a simplifica descrierea analitică a topologiei locale a două suprafeţe regulate tangente de gradul I, coeficientul **curburii lui Plücker** se poate înlocui cu o curbă caracteristică în plan.

Cele două mărimi de mai sus: $R_P\,(\varphi)\cos\varphi$ şi $k_P\,(\varphi)\sin\varphi$ conţin informaţiile necesare definirii distribuţiei razei normale a curburii suprafeţei sculptate **P** în punctul **CC** de contact **K**. Ca urmare, în loc de a considera coeficientul **curburii lui Plücker** pentru descrierea analitică a geometriei de contact a două suprafeţe regulate, se poate folosi curba caracteristică plană de gradul I $\mathrm{A}n_R\,(P)$:

$$\mathrm{A}n_R(P) \Rightarrow \boldsymbol{r}_{iR}\,(\varphi) = \begin{bmatrix} R_P\,(\varphi)\cos\varphi \\ R_P\,(\varphi)\sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

iar pentru distribuţia curburii normale a suprafeţei sculptate **P** în punctul **CC** de contact **K** se poate considera curba caracteristică planară de gradul II $\mathrm{A}n_k\,(P)$:

$$\mathrm{A}n_k\,(P) \Rightarrow \boldsymbol{r}_{ik}\,(\varphi) = \begin{bmatrix} k_P\,(\varphi)\cos\varphi \\ k_P\,(\varphi)\sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7.4.7. Curbe caracteristice relative

Pentru a simplifica în continuare descrierea geometriei spaţiale de contact a suprafeţei sculptate **P** şi a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare înlocuim coeficientul curburii lui **Plücker** $\mathbf{Pl}_R\,(P)(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{T})$ cu curba caracteristică planară corespunzătoare.

Ca urmare coeficientul bidimensional $\mathrm{A}n_r\,(P)$ devine:

$$\mathrm{A}n_R\left({}^{P}/_{T}\right) \Rightarrow \mathbf{R}_{iR}\,(\,\varphi\,) = \begin{bmatrix} R_T)\ \cos\varphi \\ (\,R_P +\ R_T\,)\ \sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şi care este coeficientul bidimensional $\mathrm{A}n_R\left({}^{P}/_{T}\right)$ de ordinul I, descriind distribuţia razei normale de curbură la suprafeţele **P** şi **T** în punctul **CC** de contact **K**.

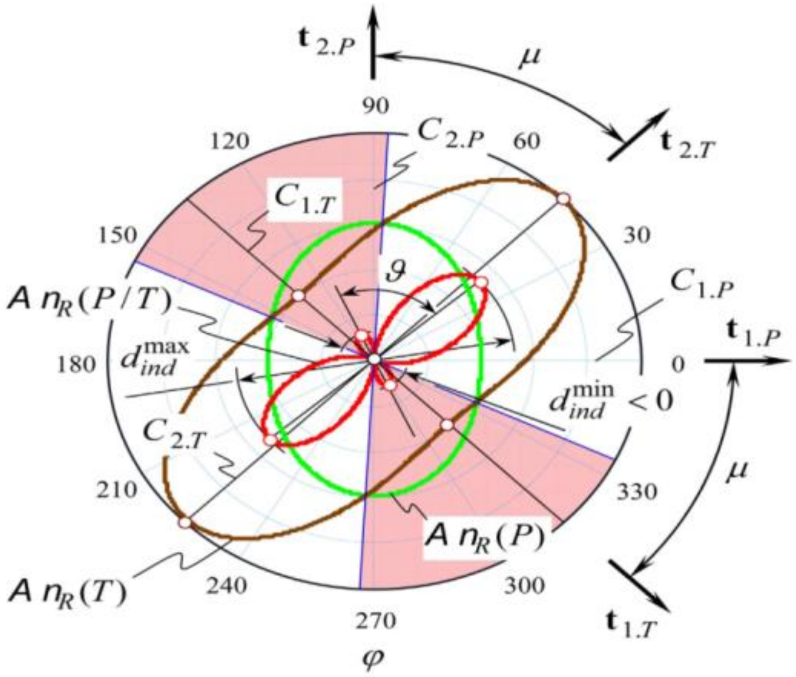


Fig. 7.13. Coeficientul bidimensional $\boldsymbol{An_R}\left({}^{P}/_{T}\right)$ al suprafeţelor **P** şi **T.**

În acest caz, curba caracteristică corespunzătoare coeficientul bidimensional $\mathrm{A}n_R\left({}^{P}/_{T}\right)$ este calculată pentru o suprafaţă de contact **P** convex eliptică având $R_{1.P} = 3$ mm şi $R_{2.P} = 15$ mm cu o suprafaţă de contact **T** concav eliptică având $R_{1.T} = -2$ mm şi $R_{2.T} = -5$ mm. Unghiul relativ dintre supafeţele **P** şi **T** faţă de perpendiculara comună este 45^0

Remarca 1:

Se poate remarca faptul că, atât direcţia diametrului minimal d_{ind}^{min}, cât şi direcţia diametrului maximal d_{ind}^{max} a curbei caracteristice $An_R\left({}^{P}/_{T}\right)$ sunt diferite de direcţiile principale $\boldsymbol{t}_{1.p}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ de pe suprafaţa sculptată **P** şi direcţiile principale $\boldsymbol{t}_{1.T}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.T}$ de pe suprafaţa **T** a sculei tăietoare, direcţii ce nu sunt ortogonale una cu alta şi deci $\theta\ \neq 90^{0.}$

Remarca 2:

Forma şi mărimea coeficientului bidimensional $\mathrm{A}n_R\left({}^{P}/_{T}\right)$ depinde de valorile algebrice ale razelor de curbură $R_{1.P,}$ $R_{2.P}$ şi $R_{1.T,}$ $R_{2.T}$ ale suprafeţelor **P** şi **T** şi valoarea unghiului μ dintre normalele suprafeţelor **P** şi **T**.

Curba caracteristică $\mathrm{A}n_R\left({}^{P}/_{T}\right)$ are o structură relativ mai simplă şi este întotdeauna o curbă plană, ceea ce o face preferabilă în a o utiliza în calcule.

Pentru a descrie diferenţele dintre curburile normale ale suprafeţelor **P** şi **T** folosim expresia analitică a curbei caracteristice plane $\mathrm{R}_{1k}\,(\,\varphi\,)$ denumită şi coeficientul caracteristic de gradul II:

$$\mathrm{A}n_k\left({}^{P}/_{T}\right) \Rightarrow \boldsymbol{R}_{ik}\,(\varphi) = \begin{bmatrix} (k_P - k_T)\cos\varphi \\ (k_P - k_T)\sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Folosind **conoidul lui Plücker** se pot defini curbele plane caracteristice $\mathrm{A}n_k\left({}^{P}/_{T}\right)$ şi **coeficientul de conformitate** $C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)$. Totodată, se poate demonstra că ambele mărimi:

- curbele plane caracteristice $\mathrm{A}n_R\left({}^{P}/_{T}\right)$ şi
- **coeficientul de conformitate** $\boldsymbol{C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)}$

a celor două suprafeţe **P** şi **T** definesc aceiaşi direcţie t_{cnf}^{max} pentru care **coeficienţii de conformitate** $\boldsymbol{C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)}$ ai suprafeţelor **P** şi respectiv **T** au valori maximale posibile.

<u>În concluzie</u>:

- curbele caracteristice $An_R\left({}^{P}/_{T}\right)$ şi
- **coeficientul de conformitate** $\boldsymbol{C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)}$

al suprafeţelor **P** şi **T** permit analiza geometriei spaţiale al acestor suprafeţe.

7.5. Proiectarea optimală a sculei aşchietoare

Obţinerea suprafeţei sculptate **P** se realizează folosind maşini-unelte cu comandă numerică, în general multiaxe, întrebuinţând scule aşchietoare adecvate. Tipul, forma şi parametrii tehnici ai sculei aşchietoare influenţează semnificativ suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare, implicând necesitatea proiectării optimale a acesteia.

În acest capitol se vor dezvolta diverse metode de profilare optimală a sculei aşchietoare, cu scopul optimizării prelucrării suprafeţelor sculptate.

7.5.1. Proiectarea sculei aşchietoare necesare realizării suprafeţelor sculptate

Pentru realizarea suprafeţei sculptate **P** este necesar ca scula aşchietoare să execute mişcări de rotaţie şi de deplasare generând suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare. Teoretic, numărul acestor suprafeţe este infinit, punându-se problema practică a alegerii optimale a formei sculei aşchietoare pentru obţinerea suprafeţei sculptate **P** dată.

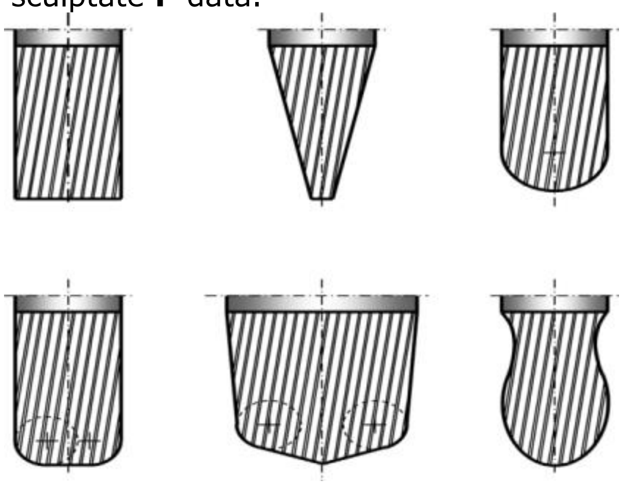


Fig. 7.14. Diverse forme ale sculei aşchietoare destinate obţinerii suprafeţei sculptate **P**

Cum s-a arătat încă de la început, în realitate, suprafaţa generatoare **T** nu există în mod explicit, ci este reprezentată de poziţiile consecutive ale mişcărilor relative ale sculei aşchietoare în cadrul unui sistem de axe de coordonate.

Este importantă definirea termenului de **proiectare optimală** pentru obţinerea de scule aşchietoare cu parametri care să satisfacă criteriile de optimizare date, ca de exemplu productivitatea maximă a procesului de prelucrare, asociată cu cerinţele deplasării minimale ale sculei aşchietoare. Pentru aceasta, în teoria generării suprafeţelor se iau în considerare:

a) geometria spaţială a suprafeţei sculptate **P**,
b) geometria spaţială a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare,
c) cinematica procesului de prelucrare.

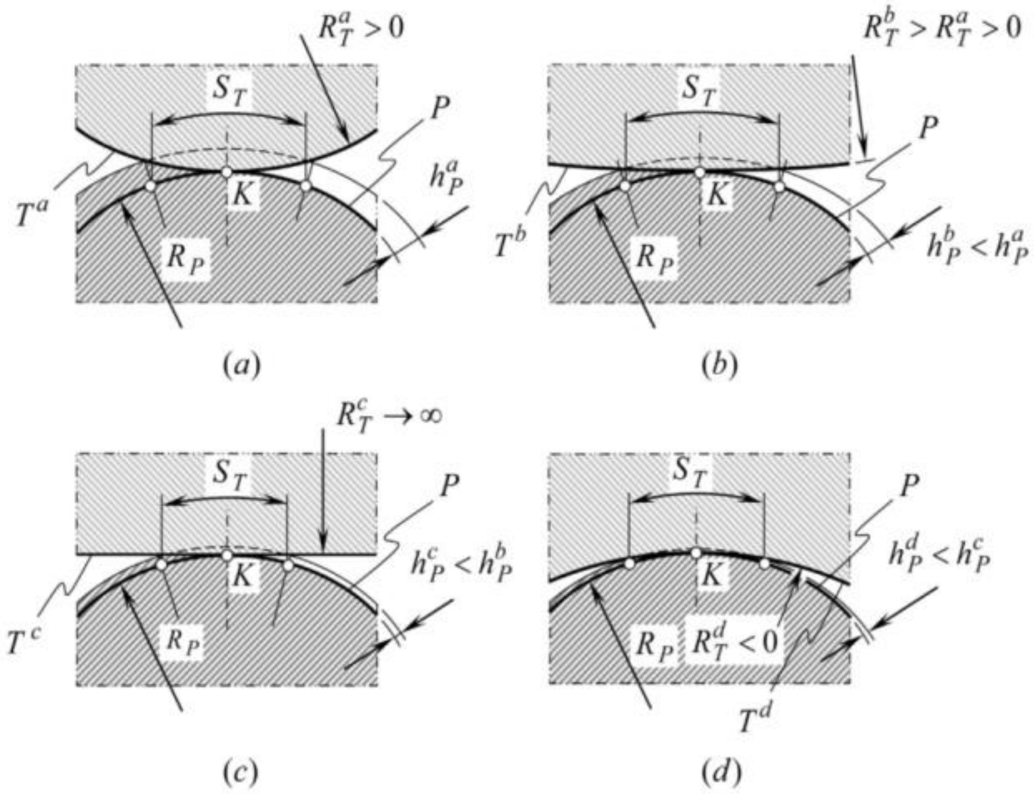


Fig. 7.15. Exemple de coeficienţi a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare pentru realizarea suprafeţei sculptate **P** în planul vectorului normal unitar $\boldsymbol{n_p}$.

Fie o secţiune a suprafeţelor **P** şi **T** în planul vectorului unitar $\boldsymbol{n}_P$ prezentate în Fig. 7.15. Acest plan este perpendicular în punctul **K** pe direcția sculei aşchietoare la suprafaţa **P**. În aceleaşi figuri, S_T reprezintă dimensiunea sculei aşchietoare, şi care este aceeaşi în figurile prezentate. Aceeaşi remarcă şi pentru raza curburii normale R_P a suprafeţei **P** în punctul **CC** de contact **K**, unde h_P este elementul de degroşare. Razele de curbură ale diferitelor suprafeţe ale sculei aşchietoare T^i $(i = a, b, c, d)$ au valori pozitive $R_T^u > 0$.

Este evident că pentru o dimensiune S_T dată a sculei aşchietoare, adâncimea de prelucrare h_P^i $(i = a, b, c, d)$ trebuie să fie mai mică decât adaosul $[\,h\,]$ impus de precizia prelucrării suprafeţei sculptate **P**.

Aceeaşi suprafaţă sculptată **P** se poate genera şi de către o suprafaţă T^b diferită a sculei aşchietoare. În acest caz, raza de curbură a suprafeţei T^b este mai mare decât raza de curbură T^a din cazul precedent $\left(R_T^b > R_T^a \right)$.

Fie $h_P^b < h_P^a$; ca urmare, **coeficientul de conformitate** al suprafeţei T^b faţă de suprafaţa **P** este mai mare decât al suprafeţei T^a pentru aceeaşi suprafaţă.

În punctul **CC** de contact **K,** suprafaţa T^c este plană şi ca urmare raza de curbură $R_T^c \to \infty$, $R_t^c > R_T^b$, iar $h_P^c < h_P^b$ ca urmare a creşterii coeficientului de conformitate al suprafeţei generatoare T^c comparativ cu T^b.

Pentru T^d avem $R_T^d < 0$, deci **coeficientul de conformitate** al suprafeţei generatoare T^d este cel mai mare dintre cazurile considerate.

<u>Concluzie</u>: Mărirea **coeficientului de conformitate** al suprafeţei generatoare **T** al sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată **P** conduce la reducerea corespunzătoare a dimensiunii adaosului de prelucrare al suprafeţei sculptate **P**, ceea ce indică importanţa studierii metodelor optimale de realizare a sculei aşchietoare în vederea unei prelucrări adecvate.

7.5.2. Descrierea înfăşurătorilor suprafeţei sculptate P determinate de suprafaţa generatoare T a sculei aşchietoare

Aşa cum s-a arătat, rata de conformitate a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată **P** poate măsura eficienţa operaţiei de prelucrare influenţând:

a) productivitatea procesului de prelucrare;
b) reducerea adaosului de prelucrare;
c) reducerea timpului de prelucrare.

Pentru o proiectare adecvată, optimală, a sculei aşchietoare, suprafaţa **T** trebuie să fie cât mai apropiată de suprafaţa sculptată **P**; ca urmare suprafaţa **T** trebuie generată ca înfăşurătoare a suprafeţei **P**.

Considerând planele ce se pot construi folosind ca direcţie vectorul normal $\boldsymbol{n}_P$, rata maximă de conformitate a suprafeţei **T** faţă de suprafaţa **P** se poate obţine, pentru fiecare plan, din egalitatea:

$$R_T = -R_P$$

În acest caz, suprafeţele **P** şi **T** sunt în contact direct, contact de ordinul I sau de ordinul II, cum s-a arătat anterior.

În realitate, datorită imperfecţiunii sculei aşchietoare faţă de suprafaţa **P**, egalitatea de mai sus este posibil să nu fie realizată, impunând înlocuirea cu egalitatea:

$$R_T = R_T(R_P),$$

unde funcţia $R_T(R_P)$ se poate exprima în funcţie de toleranţele configuraţiei sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată.

Ca urmare, problema alegerii optimale a formei sculei aşchietoare se reduce la determinarea suprafeţei generatoare **T**, astfel încât să satisfacă ecuaţia de mai sus:

$$R_T = R_T(R_P)$$

şi care să corespundă cât mai aproape de suprafaţa **P**.

Prin schimbarea funcţiei $R_T = -R_P$ cu funcţia $R_T = R_T(R_P)$, se trece de la condiţiile ideale de control ale suprafeţei **P** şi **T** la condiţiile practice, realizabile prin procesul de prelucrare. Dacă exprimăm suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare sub formă parametrică şi fie $\boldsymbol{\Phi}_{1.T}$ şi $\boldsymbol{\Phi}_{2.T}$ prima şi respectiv a doua formă fundamentală a suprafeţei **T** în funcţie de mărimile $E_p, F_P, G_P,$ şi L_P, M_P, G_N ale suprafeţei **T**, atunci ecuaţia:

$$R_T = R_T(R_P)$$

se descompune într-un set de două ecuaţii:

$$\begin{cases} M_T = M_T\,(M_P;\, G_P\,) \\ G_T = G_T\,(M_P;\, G_P\,) \end{cases}'$$

unde M_P şi M_T reprezintă curburile medii, iar G_P şi G_T sunt curburile suprafeţelor **P** şi respectiv **T** în punctul **CC** de control **K.**

Pentru a satisface ecuaţiile de mai sus este necesară introducerea egalităţilor numite de compatibilitate:

$$L_T\, N_T - M_T^2 = F_1\left(L_p\, N_P - M_P^2\right);$$
$$E_T\, N_T - 2\, F_T\, M_T + G_T\, L_T = F_2\,(E_P\, N_P - 2\, F_P\, M_P + G_P\, L_P);$$
$$E_T\, G_T - F_T^2 = F_3\,(E_P\, G_P - F_P^2\,).$$

unde F_1, F_2, F_3 sunt funcţii descriind **coeficienţii de conformitate** ai suprafeţelor **P** şi **T** şi care pot fi determinaţi experimental folosind metode de simulare ale suprafeţelor sculptate.

Ecuaţiile de mai sus sunt necesare, dar nu şi suficiente, pentru a descrie cele şase necunoscute din ecuaţiile de mai sus şi anume:

- mărimile fundamentale E_T, F_T, G_T ale formei fundamentale de gradul I: $\boldsymbol{\Phi}_{1.T}$ a suprafeţei **T** a sculei aşchietoare;
- mărimile fundamentale L_T, M_T, N_T ale formei fundamentale de gradul II: $\boldsymbol{\Phi}_{2.T}$ a suprafeţei **T** a sculei aşchietoare.

Ca urmare, sunt necesare şase ecuaţii cu şase necunoscute şi care să înglobeze cele trei egalităţi. Pe de altă parte, orice suprafaţă generatoare **T** a sculei aşchietoare satisface ecuaţia lui Gauss[6]:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_T\,(E_T\, G_T - F_T^2\,) &= \left[\frac{\partial^2 F_T}{\partial U_T\,\partial V_T} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_T}{\partial V_T^2} + \frac{\partial^2 G_T}{\partial U_T^2}\right)\right](E_T\, G_T - F_T^2\,) \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial F_T}{\partial V_T} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G_T}{\partial U_T} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G_T}{\partial V_T} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E_T}{\partial U_T} & E_T & F_T \\ \dfrac{\partial F_T}{\partial U_T} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E_T}{\partial V_T} & F_T & G_T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E_T}{\partial V_T} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G_T}{\partial U_T} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E_T}{\partial V_T} & E_T & F_T \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G_T}{\partial U_T} & F_T & G_T \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Alte două ecuaţii de compatibilitate rezultă din formulele lui Mainardy-Codacci (do Carmao, 1976), (Radzevich, 2002):

$$\frac{\partial L_T}{\partial V_T} - \frac{\partial M_T}{\partial U_T} = L_T\,\Gamma_{12}^1 + M_T\,(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\,) - N_T \Gamma_{11}^2,$$
$$\frac{\partial M_T}{\partial V_T} - \frac{\partial N_T}{\partial U_T} = L_T\,\Gamma_{22}^1 + M_T\,(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\,) - N_T \Gamma_{12}^2.$$

unde Γ_{jk}^i sunt simbolurile lui Christoffel de ordinul II (Struik, 1962).

Totalitatea acestor ecuaţii descriu complet înfăşurătoarea celor două suprafeţe regulate **P** şi respectiv **T,** unde suprafaţa sculei aşchietoare **T** este înfăşurătoarea suprafeţei sculptate **P**, permiţând astfel utilizarea mărimilor fundamentale de gradul I: $\boldsymbol{\Phi}_{1.T}$ şi gradul II: $\boldsymbol{\Phi}_{2.T}$ a suprafeţei sculei aşchietoare **T** pentru determinarea acestei înfăşurători.

7.5.3. Generarea suprafeţei T de către sculele aşchietoare

Pentru a converti ecuaţia parametrică a suprafeţei **T** întrun sistem de coordonate carteziene folosim un sistem tensorial de două ecuaţii Gauss-Weingarten (Jeffreys, 1961):

[6] Numită şi theorem egregium (lat.)

$$\text{Suprafața generatoare } \mathbf{T} \text{ a sculei așchietoare} \; \Big| \Leftarrow \begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}\, \boldsymbol{r}_P + b_{ij}\, \boldsymbol{n}_P \\ \boldsymbol{n}_i = -\, b_{ik}\, g^{kj}\, r_j \end{cases}$$

şi care rezolvate conduc la o ecuaţie matricială a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare pentru prelucrarea suprafeţei sculptate **P** pe maşini-unelte cu comandă numerică.

Condiţiile de integrare ale ecuaţiei de mai sus se cer alese corespunzător, astfel:

$$\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_T}{\partial U_T};$$

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_T}{\partial U_T \partial V_T};$$

$$\boldsymbol{n}_i = \frac{\partial \boldsymbol{n}_T}{\partial U_T};$$

$$b_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij}.\boldsymbol{r}_{ij}.\boldsymbol{n}_T = -\boldsymbol{n}_i \boldsymbol{r}_j - n_j.\boldsymbol{r}_i;$$

şi unde g_{ij} este tensorul metric al suprafeţei **T,** iar g^{ij} este tensorul covariant al suprafeţei **T.**

7.5.4. Algoritm de calcul al parametrilor sculei aşchietoare

Pentru calculul parametrilor suprafeţei **T** se foloseşte schema logică din Fig. 7.16.

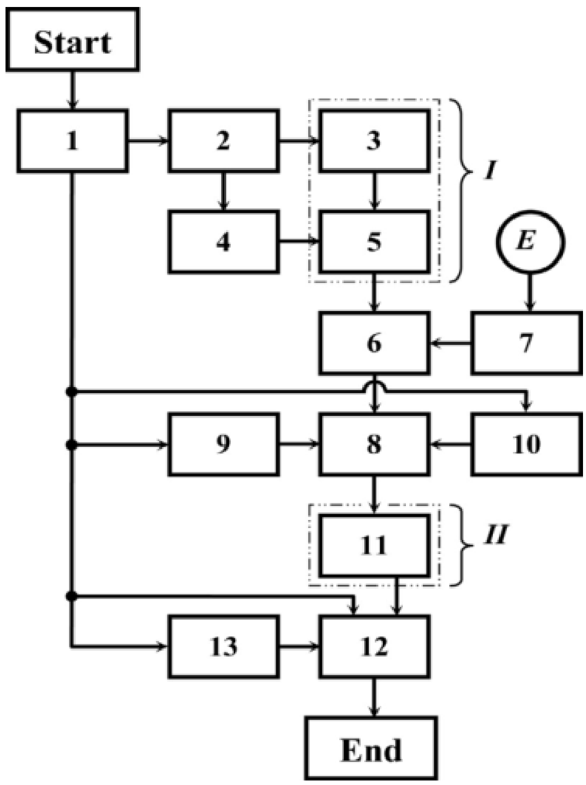


Fig. 7.16. Schema logică a algoritmului de calcul a parametrilor sculei aşchietoare pentru prelucrarea optimă a suprafeţei sculptate P pe maşini-unelte cu comandă numerică

1. Calculul suprafeţei sculptate regulate **P**. Dacă **P** este compusă din două sau mai multe părţi se cere a se defini un set de ecuaţii prin părţi $\boldsymbol{P_i}\Big|_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}}$;
2. Calculul primei derivate a ecuaţiei (ecuaţiilor) suprafeţei sculptate **P**;

3. Calculul mărimilor fundamentale de gradul I: ***Φ***$_{1.T}$ a suprafeţei sculptate **P:** E_p, F_P, G_P;
4. Calculul derivatelor de gradul II a suprafeţei sculptate **P**;
5. Calculul mărimilor fundamentale de gradul II: ***Φ***$_{2.T}$ a suprafeţei **P**. Se poate observa că 3 şi 5 reprezintă calculul parametrilor suprafeţei sculptate **P**;
6. Definirea celor 3 ecuaţii ce descriu gradul de conformitate a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată **P**;
7. Determinarea funcţiilor ce definesc gradul de conformitate a suprafeţei sculptate **P**;
8. Definirea şi utilizarea înfăşurătoarelor suprafeţei sculptate **P**;
9. Calculul funcţiei lui Gauss;
10. Calculul celor două ecuaţii de compatibilitate ale lui Mainardy-Codacci şi care conduc la un set de 6 ecuaţii cu 6 necunoscute $E_T, F_T, G_T,$ şi L_T, M_T, G_T;
11. Exprimarea parametrică a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare;
12. Rezolvarea celor două ecuaţii tensoriale Gauss–Weingarten;
13. Alegerea condiţiilor iniţiale pentru integrarea celor ecuaţii tensoriale Gauss–Weingarten.

Utilizând schema de mai sus se obţine o suprafaţă generatoare **T** a sculei aşchietoare având o topologie optimală, obţinându-se totodată parametrii constructivi ai sculei aşchietoare ce satisfac combinaţiile $k_{1.T}$ şi $k_{2.T}$.

7.5.5. Alegerea parametrilor constructivi ai sculei aşchietoare

Schema bloc de mai sus reprezintă un exemplu practic de obţinere a parametrilor constructivi ai sculei aşchietoare. În literatura de specialitate se prezintă şi alte metode de calcul (Radzevich, 2004), (Radzevich, 2007).

După cum s-a arătat, suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare este o suprafaţă de revoluţie. Pentru a creşte performanţele sculei aşchietoare este necesar ca principalele raze de curbură a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare să fie egale sau ce puţin apropiate de valorile extreme ale razelor de curbură ale acestor suprafeţe luate cu semn schimbat.

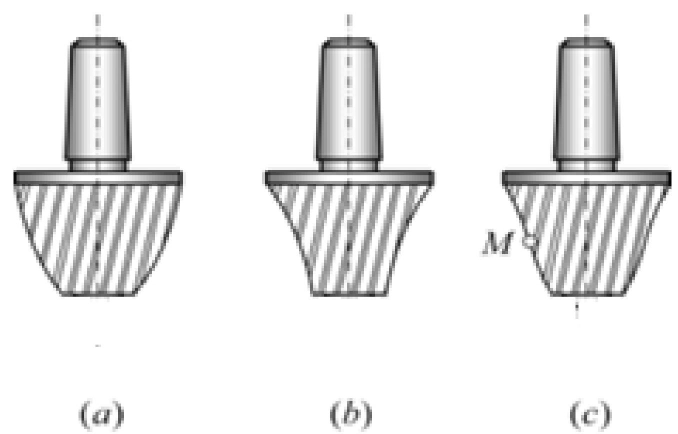


Fig. 7.17. Diverse forme ale sculei aşchietoare în cazul prelucrării suprafeţei sculptate **P,** pe maşini-unelte cu comandă numerică: a) convexă, b) concavă, c) cu un punct de inflexiune **M**.

Ca urmare, intervalul de variaţie al razelor de curbură a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare, ca şi configuraţia acestei suprafeţe faţă de axa de rotaţie a sculei se cere determinată în funcţie de intervalul de variaţie al razelor de curbură, recomandându-se calculul gradientului variaţiei razelor de curbură.

Pentru un gradient constant există un o relaţie liniară între raza de curbură ρ_T a sculei generatoare şi lungimea arcului acesteia L_T. Ca urmare, există relaţia $\rho_T = c\, L_T$, unde c este o constantă parametru desemnând variaţia modificărilor razei de curbură ρ_T.

Considerând ecuaţia curbei generatoare R_T în coordonate polare, aceasta se poate scrie sub forma $r_T = r_T\,(\psi)$, unde:

- r_T reprezintă poziţia unui vector al unui punct al curbei generatoare;
- Ψ reprezintă parametrul curbei generatoare.

Folosind formula transformărilor, ecuaţia curbei generatoare devine:

$$R_T = R_{T.0}\, exp\,(c\,\psi),$$

unde $R_{T.0}$ este vectorul de poziţie al originii axelor de coordonate, ecuaţie ce poate fi derivată.

Dacă considerăm rotaţia curbei generatoare R_T în jurul axei O_T se obţine suprafaţa generatoare a sculei aşchietoare. Ecuaţia acestei suprafeţe poate fi descrisă analitic de ecuaţia:

$$r_T\,(\psi,\delta) = \begin{bmatrix} \left(r_t + R_O\, e^{c.\psi}\, \cos\psi\right)\, \sin\delta \\ \left(r_t + R_O\, e^{c.\psi}\, \cos\psi\right)\, \cos\delta \\ \left(r_t \tan\varphi + R_O\, e^{c.\psi}\, \sin\psi\right) \\ 1 \end{bmatrix},$$

şi care poate descrie suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare pentru cazurile considerate, când scula aşchietoare are o formă convexă în cazul a), concavă în cazul b) sau sub formă de curbă cu un punct de inflexiune M a două curbe spiral-logaritmice în cazul c).

7.5.6. Scule aşchietoare ce permit schimbarea continuă a suprafeţei generatoare T a sculei aşchietoare

În cea mai mare parte, suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare este realizată cu ajutorul unor scule având o formă rigidă, care nu permite schimbarea formei sau a parametrilor suprafeţei **T**. Există însă cazuri când se folosesc scule de forme speciale, a căror suprafeţe aşchietoare se pot schimba în cursul prelucrării. În acest caz, suprafaţa generatoare **T** a sculei se schimbă continuu.

Ca urmare, suprafaţa **T** nu se mai obţine ca o înfăşurătoare a diverselor poziţii consecutive ale suprafeţei sculptate **P**, fiind formată în schimb prin mişcarea compusă a sculei aşchietoare relativ la coordonatele $X_T, Y_T, Z_T,$ rezultând o cinematică complexă în acest caz şi care poate face obiectul studiilor în continuare.

7.6. Condiţii optimale ale generării suprafeţei sculptate P

Se poate observa că aceeaşi suprafaţă se poate obţine cu aceleaşi scule aşchietoare utilizând diferite suprafeţe cinematice de generare **T** ale sculei. Această observaţie conduce la necesitatea alegerii parametrilor cinematici astfel încât să conducă la rezolvarea problemei optimizării cinematicii suprafeţei **T** a sculei aşchietoare pentru realizarea suprafeţei sculptate **P**.

7.6.1. Orientarea optimală a suprafeţei generatoare T a sculei aşchietoare

Definim o orientare optimală a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare ca fiind orientarea care minimizează numărul de treceri necesare prelucrării sau maximizează numărul suprafeţelor obţinute la o singură trecere a sculei aşchietoare.

Cum s-a arătat mai sus, obţinerea orientării optimale a sculei aşchietoare pentru realizarea suprafeţei sculptate **P** se poate face prin mai multe metode, considerând diferite suprafeţe generatoare **T** ale sculei aşchietoare. O astfel de metodă o reprezintă **metoda lui Gauss,** care constă în a minimiza diferenţa dintre unghiul normalei la suprafaţa sculptată în punctul ei central şi poziţia axei sculei aşchietoare, cu scopul minimizării numărului de treceri necesare prelucrării.

Dacă această condiţie nu este urmărită şi nu este îndeplinită optimal, există posibilitatea reducerii performanţelor sculei aşchietoare, fiind necesare mai multe treceri pentru realizarea suprafeţei sculptate cerute, mărindu-se astfel costul prelucrării.

Fie suprafaţa sculptată **P** ce se realizează pe o maşină-unealtă cu comandă numerică după trei axe Fig. 7.18.

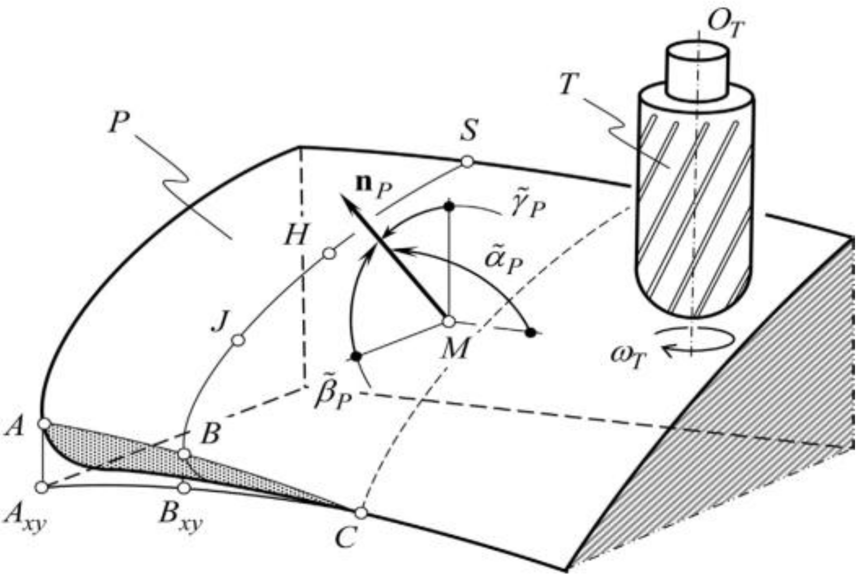


Fig. 7.18. Realizarea suprafeţei sculptate **P** folosind sculele aşchietoare **T**.

Fie suprafaţa plană $A_{xy}\ B_{xy}\ C\ B\ A$ care nu poate fi prelucrată în acest pas. Prin metoda Gauss amintită se introduce noţiunea unei suprafeţe sferice unitare. Se obţine astfel înfăşurătoarea suprafeţelor paralele normale la suprafaţa sferei unitare în punctele de intersecţie cu vectorul normal.

Calculul parametrilor orientării vectorului normal $\widetilde{\boldsymbol{N}}_P$ al suprafeţei normale se obţine cu formula:

$$\widetilde{N}_P = \frac{\iint_P \sqrt{E_P\ G_P - F_P^2}\ N_P\ (U_P; V_P\ )\ dU_P\ dV_P}{S_P},$$

iar în cazul suprafeţelor sculptate multiple P_i care se realizează printr-o singură trecere, formula devine

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}_P = \frac{\sum_{i=1}^{k} \iint_{P_i} \sqrt{E_P\, G_P - F_P^2}\; \boldsymbol{N}_P\,(U_P;\, V_P)\, dU_P\, d\, V_P}{\sum_{i=1}^{k} S_{P_i}},$$

k fiind numărul suprafeţelor sculptate multiple $(k = 1,2,\ldots.i)$ realizate printr-o singură trecere, în care caz se consideră normalele la suprafeţele sculptate $\boldsymbol{P}_i$ într-un punct central al suprafeţelor prelucrate.

Fie unghiurile normalei la suprafaţa **P** cu axele de coordonate notate cu $\propto, \beta, \gamma$. Rezultanta transformării sistemului de coordonate folosind unghiurile lui Euler (ψ, θ, φ) se pot exprima analitic cu ajutorul operatorului $E\ (\psi, \theta, \varphi)$ al transformării lui Euler.

Pentru a obţine direcţia optimală a prelucrării se consideră deplasarea unei părţi a suprafeţei **P** în jurul vectorului normal $\widetilde{\boldsymbol{N}}_P$, ceea ce schimbă orientarea suprafeţei **P** faţă de axele de coordonate. În acelaşi timp, se pot considera şi alte condiţii adiţionale rezultate din condiţiile de prelucrare, de exemplu:

- suprafaţa de lucru a maşinii-unelte cu comandă numerică,
- parametrii constructivi ai sculei aşchietoare,
- regimurile de lucru ale maşinii-unelte,
- parametrii funcţionali, constructivi şi caracteristicile tehnice ale maşinii-unelte etc. (Radzevich, 2002).

Introducerea acestor condiţii adiționale permite creşterea acurateței formulelor matematice ce reflectă procesul de prelucrare, dar, în acelaşi timp, complică exprimarea şi, în special, rezolvarea lor.

Autorul consideră că şi această direcție de cercetare merită a fi investigată, ceea ce poate constitui subiectul unor cercetări ulterioare.

7.6.2. Condiţii necesare şi suficiente pentru generarea optimală a suprafeţei sculptate P

După determinarea direcţiei de prelucrare optimală (sau cel puţin fezabilă) a sculei aşchietoare este necesară stabilirea condiţiilor necesare şi suficiente pentru generarea suprafeţei sculptate **P** sau a părţilor $\boldsymbol{P}_i$ ce compun suprafaţa sculptată **P**. În continuare se prezintă şapte condiţii considerate necesare şi suficiente pentru generarea suprafeţei sculptate **P** şi care trebuie luate în considerare atunci când se are în vedere modelarea optimală a suprafeței sculptate **P**.

1) Condiţia a I-a pentru generarea suprafeţei sculptate **P** sau a părţilor $\boldsymbol{P}_i$ ce compun suprafaţa sculptată **P** implică existenţa suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare.

2) Condiţia a II-a pentru generarea suprafeţei sculptate **P** sau a părţilor $\boldsymbol{P}_i$ ce compun suprafaţa sculptată **P** constă în aceea că suprafeţele **P** şi **T** trebuie să fie în contact:

a) **permanent,** în cazul generării continue a suprafeţei sculptate **P**;
b) **temporar,** în cazul generării discontinue a suprafeţei sculptate **P,** datorită discontinuităţilor în prelucrarea suprafeţelor $P_i \subset P$.

În cazul a) suprafeţele **P** şi **T** sunt tangente una faţă de alta. Ca urmare,

$$\boldsymbol{n}_{P/T} \bullet \boldsymbol{V}_{\Sigma} = 0, \text{ unde:}$$

- $\boldsymbol{n}_{P/T}$ este vectorul unitar normal comun şi care prin definiţie poate fi

$$\boldsymbol{n}_{P/T} \equiv \boldsymbol{n}_P \text{ sau } \boldsymbol{n}_{P/T} \equiv -\boldsymbol{n}_T,$$

- $\boldsymbol{V}_{\Sigma}$ este vectorul rezultant al mişcării relative a suprafeţelor **P** şi **T**.

Rezultă că ecuaţiile

$$\boldsymbol{n}_P + \boldsymbol{n}_T = 0 \text{ şi}$$
$$\boldsymbol{n}_P \bullet \boldsymbol{n}_T = -1$$

sunt echivalente şi pot constitui a doua ecuaţie necesară generării suprafeţei sculptate **P**. Vectorii unitari normali comuni $\boldsymbol{n}_{P/T}$ ai suprafeţei sculptate **P** şi ai suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare sunt codirecţionali şi orientaţi în sens contrar în orice punct al suprafeţei comune.

3) Condiţia a III-a pentru generarea suprafeţei sculptate **P** sau a părţilor $\boldsymbol{P}_i$ ce compun suprafaţa sculptată **P** constă în aceea că, contactul dintre suprafeţele **P** şi **T** trebuie menţinut astfel încât cele două suprafeţe să nu penetreze una în alta. De asemenea, este necesar ca normalele razelor de curbură la un plan ce trece prin perpendiculara comună să corespundă pentru fiecare secţiune.

Bineînţeles, astfel de probleme nu apar când cele două suprafeţe conexe **P** şi **T** sunt în contact. De asemenea, nu este fezabil ca două suprafeţe concave **P** şi **T** sau una concavă şi alta convexă să fie în contact.

Ca urmare, este important ca la prelucrarea pe maşini-unelte cu comandă numerică să se stabilească condiţiile necesare şi suficiente pentru un contact corespunzător al suprafeţelor **P** şi **T** în vecinătatea punctului **CC** de contact **K,** când:

a) suprafaţa **P** este convexă, iar cealaltă suprafaţă **T** este concavă;
b) suprafaţa **P** este concavă, iar **T** este convexă;
c) ambele suprafeţe sunt concave.

În practică, interpretarea analitică a condiţiilor de contact al suprafeţelor de contact are o importanţă deosebită în cadrul prelucrării pe maşini-unelte cu comandă numerică.

Când relaţia dintre raza normală de curbură R_P a suprafeţei sculptate **P** şi raza normală de curbură R_T a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare este corespunzător aleasă, adică are loc inegalitatea $|R_P| > R_T$, atunci suprafaţa **P** poate fi generată de suprafaţa **T** în vecinătatea punctului **CC** de contact **K** (Fig. 7.19.a).

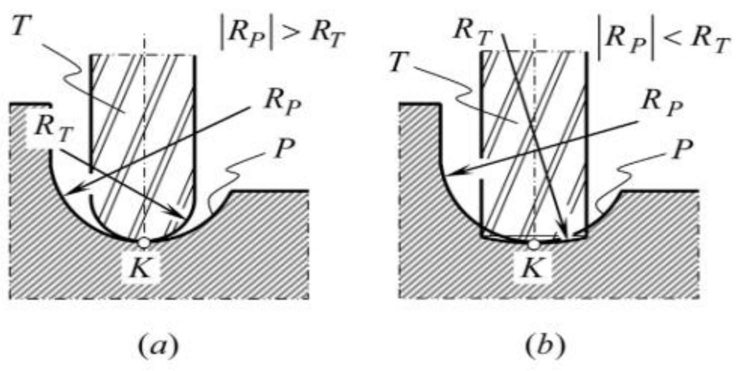


Fig. 7.19. Exemple ale celei de a III-a condiţii de generare a suprafeţei sculptate **P**

În caz contrar, când $|R_P| < R_T$, are loc o interferenţă între suprafeţele **P** şi **T** şi ca urmare suprafaţa **P** nu poate fi generată în vecinătatea punctului **CC** de contact **K** (Fig. 7.19.b). Rezultă că inegalitatea $|R_P| > R_T$, se poate folosi pentru descrierea analitică a celei de a III–a condiţii. Pentru aceasta se calculează

coeficientul de conformitate $\boldsymbol{C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)}$ al suprafeţelor **P** şi **T** şi care a fost determinat mai sus:

$$C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right) \Rightarrow r_{cnf}(\varphi,\mu) =$$

$$= \sqrt{\left|\frac{E_P\, G_P}{L_P G_p\, cos^2\varphi - M_P\sqrt{E_P\, G_P}\,\sin 2\varphi + N_P E_P\, sin^2\varphi}\right|}\; sgn\,\Phi_{2.P}^{-1}$$

$$+\sqrt{\left|\frac{E_T\, G_T}{L_T G_T\, cos^2(\varphi+\mu) - M_T\sqrt{E_T\, G_T}\,\sin 2(\varphi+\mu) + N_T\, E_T sin^2(\varphi+\mu)}\right|}\; sgn\,\Phi_{2.P}^{-1}.$$

În Fig. 7.19 se prezintă cazul compatibilităţii (a) şi incompatibilităţii (b) a celei de a III–a condiţii prezentată mai sus. Dacă condiţia a III-a este satisfăcută, atunci toate diametrele $d_{\boldsymbol{cnf}} = 2\, r_{cnf}$ ale **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)$ sunt negative, iar în planul tangent comun, în orice direcţie ce trece prin punctul **CC** de contact **K** sunt satisfăcute condiţiile:

- inegalitatea $r_{cnf} \geq 0$ sau
- există setul de ecuaţii echivalent:

$$\begin{cases} sgn\, r_{cnf} = 0 \\ sgn\, r_{cnf} = \pm 1 \end{cases}$$

Când $d_{\boldsymbol{cnf}}{}^{(\min)} \geq 0$, unde $d_{\boldsymbol{cnf}}{}^{(\min)}$ este diametrul minimal al **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)$ al suprafeţelor **P** şi **T,** atunci toţi $C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)$ ai acestei curbe caracteristice sunt **nenegativi**.

Punctul **CC** de contact **K** reprezintă un punct al curbei de frontieră $\boldsymbol{r}_{bc}$ care împarte suprafaţa **P** în suprafeţe în care sculele aşchietoare sunt accesibile şi suprafeţe în care nu sunt accesibile.

Deci, condiţia a III-a este satisfăcută când $d_{\boldsymbol{cnf}}{}^{(\min)} \geq 0$, ceea ce conduce la reenunţarea celei de a III-a condiţii:

Pentru realizarea suprafeţei sculptate P şi a suprafeţei generatoare T a sculei aşchietoare este necesar ca cele două suprafeţe P şi T să nu interfereze în vecinătatea punctului CC de contact K.

4) Condiţia a IV-a: dacă condiţia a III–a este satisfăcută în punctul **CC** de contact **K** este posibil ca o interferenţă să existe în vecinătatea punctului **CC** de contact **K**, ceea ce introduce noţiunea de interferenţă globală între suprafeţele **P** şi **T**.

Pentru verificarea condiţiei de compatibilitate (sau incompatibilitate) a interferenţei globale a suprafeţelor **P** şi **T** se foloseşte sistemul de ecuaţii vectoriale reprezentate în acelaşi sistem de axe de coordonate:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r_P} = \boldsymbol{r}_P\,(U_P, V_P\,) \\ \boldsymbol{r}_T = \boldsymbol{r}_T\,(U_T, V_T\,)' \end{cases}$$

unde U_P, V_P şi U_T, V_T sunt coordonatele carteziene ale unui punct a suprafeţei **P** şi respectiv **T**.

Sistemul de ecuaţii vectoriale de mai sus nu are soluţii în domeniul real în afara punctelor unde suprafeţele **P** şi **T** sunt în contact. Ca urmare, condiţia a IV-a este satisfăcută dacă şi numai dacă **nu** există o interferenţă globală între suprafeţele **P** şi **T**.

5) Condiţia a V-a: s-a arătat că pentru realizarea suprafeţelor sculptate $\mathbf{P_i} \subset \mathbf{P}$ scula aşchietoare generează suprafeţele $\mathbf{T_i} \subset \mathbf{T}$, existând mai multe suprafeţe $\mathbf{T_i} \subset \mathbf{T}$ fezabile de a realiza suprafeţele $\mathbf{P_i} \subset \mathbf{P}$. Condiţia pentru realizarea suprafeţei $\mathbf{P_{i+1}} \subset \mathbf{P}$ este ca scula aşchietoare să poată realiza suprafeţele $\mathbf{T}_{\mathrm{i}}$ şi $\mathbf{T}_{i+1}$, ceea ce analitic se transcrie în setul de două ecuaţii matriciale:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_T^{(i)} = \boldsymbol{r}_T^{(i)}\left(U_T^{(i)};\, V_T^{(i)}\right) \\ \boldsymbol{r}_T^{(i\pm1)} = \boldsymbol{r}_T^{(i\pm1)}\left(U_T^{(i\pm1)};\, V_T^{(i\pm1)}\right) \end{cases}$$

unde $\boldsymbol{r}_T^{(i)}$ şi $\boldsymbol{r}_T^{(i\pm1)}$ descriu poziţia vectorilor suprafeţelor $\mathbf{T}_i$ şi respectiv $\mathbf{T}_{i+1}$, iar $U_T^{(i\pm1)}$ şi $V_T^{(i\pm1)}$ sunt coordonatele carteziene ale unui punct al suprafeţelor $\mathbf{T}_{\mathbf{i}}$ şi respectiv $\mathbf{T}_{i+1}$.

Condiţia a V-a este satisfăcută dacă şi numai dacă setul de ecuaţii de mai sus nu are soluţii reale, adică vecinătăţile suprafeţei generatoare **T** ale sculei aşchietoare nu se intersectează şi nici o suprafaţă **T** nu este situată în vecinătatea suprafeţelor generatoare $\boldsymbol{T}_i$. Cu alte cuvinte, condiţia a V-a este satisfăcută dacă nu sunt permise suprafeţe de tranziţie pentru realizarea suprafeţelor $\mathbf{P}_i$ şi $\mathbf{P}_{i+1}$.

6) Condiţia a VI-a: obţinerea suprafeţei sculptate **P** are loc în jurul punctului **CC** de contact **K**. Ca urmare, între suprafeţele **P** şi **T** are loc o generare „discretă”, reală a suprafeţei sculptate, diferită de cea „ideală”, proiectată, atât datorită condiţiilor de lucru, cât şi a toleranţei sculei aşchietoare care generează suprafaţa **T**.

Practic, este dificil a se genera suprafaţa sculptată **P** cu ajutorul unui singur punct care se deplasează. În realitate, are loc o generare discretă a suprafeţei sculptate reale $\mathbf{P}^{(a)}$ care este diferită de suprafaţa sculptată ideală $\mathbf{P}^{(n)}$, ceea ce impune condiţia a VII-a:

7) Condiţia a VII-a: suprafaţa sculptată reală $\mathbf{P}^{(a)}$ trebuie să respecte limitele de toleranţă impuse suprafeţei **P**. Devierile maxime h_Σ nu trebuie să depăşească toleranţa h admisă de caietul de sarcini sau proiectul tehnic, adică

$$\boldsymbol{n}_p^{(n)} \bullet h_\Sigma = \boldsymbol{r}_P^{(a)} - \boldsymbol{r}_P^{(n)} \leq \boldsymbol{r}_P^{(t)} = \boldsymbol{n}_P^{(n)} \bullet [h]$$

pentru orice punct $k < \mathbf{P}$ şi unde:

- $\boldsymbol{r}_P^{(n)}$ este vectorul de poziţie a unui punct al suprafeţei ideale $\mathbf{P}^{(n)}$;
- $\boldsymbol{r}_P^{(a)}$ este vectorul de poziţie a unui punct al suprafeţei reale $\mathbf{P}^{(a)}$;
- $\boldsymbol{r}_P^{(t)}$ este vectorul de poziţie a unui punct aparţinând suprafeţei $\mathbf{P}^{(t)}$ numită suprafaţă de toleranţă;
- $\boldsymbol{n}_P$ este vectorul normal la suprafaţa ideală $\mathbf{P}^{(n)}$ cu observaţia că două puncte de pe suprafaţa $\boldsymbol{r}_P^{(n)}$ şi $\boldsymbol{r}_P^{(a)}$ corespund, dacă aparţin unei linii comune a perpendicularei $\boldsymbol{n}_P$ la suprafaţa $\boldsymbol{r}_P^{(n)}$.

Concluzie: cele şapte condiţii de generare a suprafeţei sculptate **P** reprezintă condiţiile necesare şi suficiente pentru îndeplinirea condiţiilor proiectului tehnic de realizare a suprafeţei sculptate **P**.

7.6.3. Verificarea globală a condiţiilor de generare a suprafeţei sculptate P

La prelucrarea pe maşini-unelte cu comandă numerică pot exista situaţii când unele porţiuni ale suprafeţei sculptate **P** nu se pot executa. Un astfel de exemplu îl poate reprezenta cazul când aceste porţiuni nu sunt accesibile sculei aşchietoare din cauza geometriei suprafeţei sculptate.

Aceste situaţii conduc la necesitatea studierii şi verificării globale a condiţiilor de generare a suprafeţei sculptate **P,** în funcţie de:

- geometria suprafeţei sculptate **P**;

- parametrii constructivi ai maşinilor-unelte cu comandă numerică;
- portabilitatea sculei aşchietoare.

7.7. Calculul toleranţei prelucrării suprafeţei sculptate P

Realizarea suprafeţei sculptate **P** necesită cerinţe constructive, tehnologice şi estetice care sunt determinante la prelucrarea pe maşini-unelte cu comandă numerică, impunându-se calculul toleranţei acestor prelucrări.

7.7.1. Componente ale erorilor de prelucrare pe maşini-unelte cu comandă numerică

În general se pot considera două cauze ale erorilor de prelucrare (Fig. 7.20):

1. Suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare este o suprafaţă reală P_{ac} obţinută cu ajutorul sculei aşchietoare, rezultând eroarea elementară de prelucrare h_{fr} în punctul de contact dintre suprafeţele **P** şi **T** de la suprafaţa proiectată nominală P_{nom} ;
2. Poziţionările relative dintre punctele de contact dintre suprafeţele **P** şi **T** introduc erorile de prelucrare h_{ss_Σ} la realizarea suprafeţei reale P_{ac} faţă de suprafaţa nominală P_{nom} şi care se măsoară pe direcţia vectorului normal n_P la suprafaţa nominală P_{nom} fiind egale cu distanţa dintre suprafeţele P_{ac} şi P_{nom} . Acestea depind de erorile elementare de prelucrare h_{fr} şi h_{ss}:

$$h_{\Sigma,i} = h_{\Sigma,i}\left(h_{fr,i}, h_{ss,i}\right),$$

unde $i \subset \mathrm{P}$ şi unde erorile $h_{fr,i}$ şi $h_{ss,i}$ sunt considerate ca funcţii ale:

a) coordonatelor unui punct a suprafeţei **P**;
b) punctelor corespunzătoare a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare;
c) unghiului μ dintre suprafeţele **P** şi **T**;

Erorile $h_{fr,i}$ şi $h_{ss,i}$ se pot exprima prin relaţiile:

$$h_{fr} = h_{fr}\left(U_P, V_P, U_T, V_\mu\right);$$
$$h_{ss} = h_{ss}\left(U_P, V_P, U_T, V_\mu\right).$$

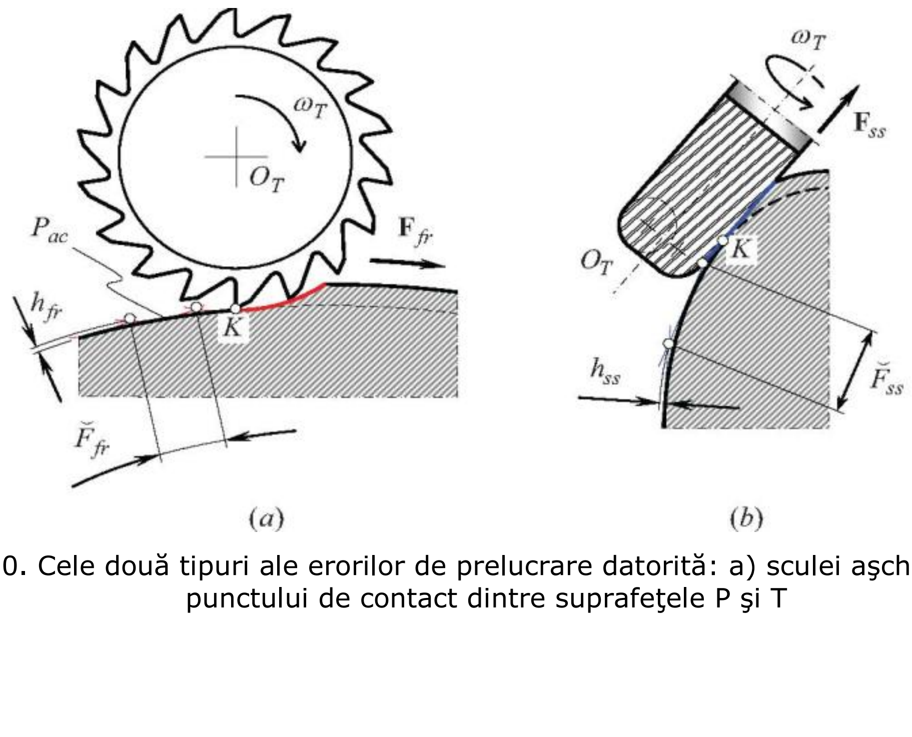


Fig. 7.20. Cele două tipuri ale erorilor de prelucrare datorită: a) sculei aşchietoare şi b) punctului de contact dintre suprafeţele P şi T

Eroarea maximă de prelucrare h_{Σ}^{max} a suprafeţei sculptate reale P_{ac} faţă de suprafaţa nominală P_{nom} se utilizează la evaluarea cantitativă a acurateţei suprafeţei sculptate **P**:

$$h_{\Sigma} = a_h . h_{fr} + b_n . h_{ss} ,$$

presupunând că erorile $h_{fr} + h_{ss}$ se compun liniar şi unde a_h şi b_n sunt constante date în punctul **CC** de contact **K,** iar

$$0 \leq a_h \leq 1 \text{ şi}$$
$$0 \leq b_h \leq 1.$$

Observaţia 1:

Eroarea h_{Σ} atinge valoarea maximă pentru $a_b = b_h = 1$. În acest caz particular, $h_{\Sigma}^{max} = h_{fr}^{max} + h_{ss}^{max}$, iar funcţia h_{Σ} aparţine domeniului complex.

Observaţia 2:

Din cerinţe tehnologice, $h_{\Sigma} < h$, unde h este eroarea impusă procesului de prelucrare.

7.7.2. Aproximări ale erorilor de prelucrare în punctele de contact

Soluţiile la ecuaţiile erorilor fiind în domeniul complex, sunt dificil de obţinut la nivelul întregii suprafeţe sculptate **P.** Problema se poate simplifica încercând soluţii locale pe porţiuni ale suprafeţei reprezentate prin ecuaţii de ordinul IV şi care pot fi aproximate prin suprafeţe elicoidale.

Suprafaţa sculptată **P** se poate exprima local prin razele de curbură $R_{1.P}$ şi $R_{2.P}$ în punctul **CC** de contact **K** şi tensorul t_P al suprafeţei sculptate **P** în punctul **CC** de contact **K**, iar suprafeţele elicoidale se pot aproxima local, atât pentru suprafaţa sculptată **P**, cât şi pentru suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare, folosind $R_{1.P}$ şi $R_{2.P}$ şi t_P. În practică t_P este neglijabil, considerându-se egal cu zero. În acest fel, suprafaţa elicoidală se poate reduce la un tor (Fig. 7.21).

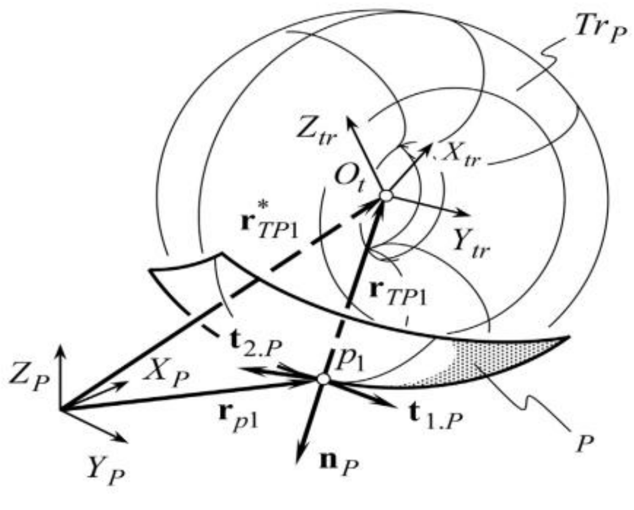


Fig. 7.21. Reprezentarea suprafeţei toroidale $\mathbf{T}_P$ în punctul $\boldsymbol{p_1}$ al suprafeţei sculptate **P**

În Fig. 7.21 s-a reprezentat suprafaţa toroidală T_P în punctul p_1 al suprafeţei sculptate **P**, unde $\boldsymbol{r}_{P1}$ reprezintă poziţia vectorului $\boldsymbol{r}_{P1}$ într-un punct arbitrar p_1 al suprafeţei sculptate **P**. În Fig. 7.21 de mai sus, suprafeţele **P** şi **T** s-au ales ca având vectorul unitar normal $\boldsymbol{n}_P$ comun şi având aceiaşi vectori unitari tangenţi $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$.

Vectorii $\boldsymbol{t}_{1.P}$, $\boldsymbol{t}_{2.P}$ şi $\boldsymbol{n}_P$ împreună cu razele de curbură $R_{1.P}$ şi $R_{2.P}$ permit definirea şi calculul poziţiei vectorului $\boldsymbol{r}_{TP1}$ care împreună cu vectorul de poziţie

$\boldsymbol{r}_{P1}$ al punctului P_1 conduc la calculul vectorului de poziţie $\boldsymbol{r}_{TP1}^*$ în coordonatele de sistem X_P, Y_P, Z_P asociate suprafeţei **P**.

De remarcat că nu toate punctele suprafeţei torului pot fi folosite pentru aproximarea locală a suprafeţelor **P** şi **T**, ci doar punctele cuprinse între cel mai mare şi cel mai mic meridian al suprafeţei **P**.

Suprafaţa toroidală se poate exprima în funcţie de raza cercului generator r_{tr} şi raza R_{tr} a cercului director. În funcţie de raportul r_{tr} şi R_{tr}, r_{tr} poate fie egal cu raza de curbură $R_{1.P}$ a suprafeţei considerate $r_{tr} = R_{1.P}$, când raza R_{tr} a torului este egală cu diferenţa $R_{tr} = R_{2.P} - R_{1.P}$. Pentru alte valori ale raportului $\frac{r_{tr}}{R_{tr}}$ au loc egalităţile:

$$r_{tr} = R_{2.P} - R_{1.P} \text{ şi}$$
$$R_{tr} = R_{1.P.}$$

Expresia generală a lui r_{tr} în funcţie de unghiurile θ_{tr} şi φ_{tr} are forma:

$$r_{tr}\ (\ \theta_{tr}, \varphi_{tr}\ ) = \begin{bmatrix} -(R_{2.P} - R_{1.P}\ )\cos\theta_{tr} + R_{1.P}\ \cos\varphi_{tr}\ \cos\varphi_{tr} \\ -(R_{2.P} - R_{1.P}\ )\sin\theta_{tr} + R_{1.P}\ \cos\varphi_{tr}\ \sin\theta_{tr} \\ R_{1.P}\sin\varphi_{tr} \\ 1 \end{bmatrix},$$

unde θ_{tr} şi φ_{tr} sunt unghiurile dintre razele cercurilor ce definesc torul considerat şi direcţiile vectorilor unitari în punctul dat. Vectorul normal unitar la suprafaţa toroidală $\boldsymbol{n}_{tr}$ se poate calcula cu formula:

$$\boldsymbol{n}_{tr} = \boldsymbol{u}_{tr} \bullet \boldsymbol{v}_{tr}\,,$$

unde

$$\boldsymbol{U}_{tr} = \frac{\boldsymbol{U}_{tr}}{|\,\boldsymbol{U}_{tr}\,|} \text{ şi } \boldsymbol{V}_{tr} = \frac{\boldsymbol{V}_{tr}}{|\,\boldsymbol{V}_{tr}\,|}$$

şi unde vectorii tangenţi $\boldsymbol{U}_{tr}$ şi $\boldsymbol{V}_{tr}$ au valorile

$$\boldsymbol{U}_{tr} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{tr}}{\partial \boldsymbol{U}_{tr}} \text{ şi } \boldsymbol{V}_{tr} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{tr}}{\partial \boldsymbol{V}_{tr}}.$$

Vectorii tangentă unitari $\boldsymbol{t}_{1.tr}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.tr}$ definesc suprafaţa toroidală r_{tr}. În punctul **CC** de contact **K,** vectorii tangentă unitari $\boldsymbol{t}_{1.tr}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.tr}$ sunt identici cu vectorii tangentă $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ ai suprafeţei **P**.

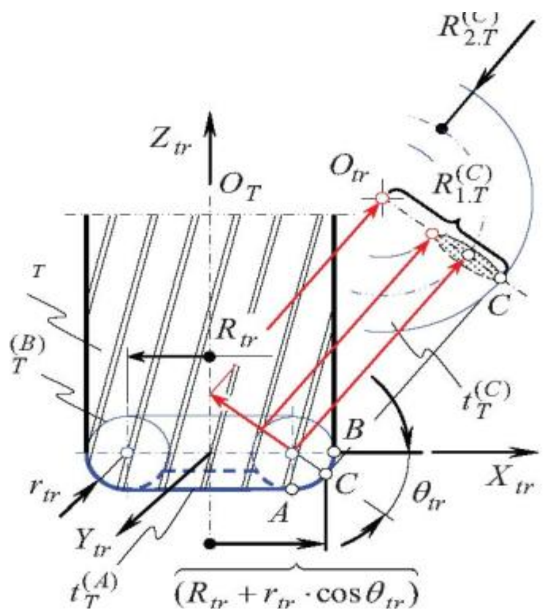


Fig. 7.22. Suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare în punctul **CC** de contact **K**

De remarcat că:

a) suprafeţele componente ale torului aproximează suprafeţele **P** şi **T**;
b) suprafaţa toroidală a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare este distinctă de suprafaţa sculptată **P**.

Concluzie: Alegerea suprafeţei toroidale pentru aproximarea suprafeţei sculptate **P** prezintă avantajul unei acurateţe suficiente, în special pentru suprafeţe mai mari, comparativ cu aproximarea prin ecuaţii de gradul IV, care dau rezultate bune doar în vecinătatea punctului **CC** de contact **K**.

7.7.3. Calculul suprafeţei torului de aproximaţie.

Se poate remarca faptul că atunci când suprafaţa sculptată **P** şi suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare sunt în contact una cu alta într-un punct **CC** de contact **K**, atunci şi suprafeţele torului de aproximaţie sunt în contact una cu alta.

Mai mult, vectorii unitate $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ tangenţi la suprafaţa sculptată **P** în punctul **CC** de contact **K** şi vectorii $\boldsymbol{t}_{1.T}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.T}$ ai suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare sunt identici cu vectorii tangentă corespunzători ai suprafeţei torurilor de aproximaţie T_{r_P} şi T_{r_T}, ceea ce simplifică reprezentarea analitică a suprafeţei torurilor de aproximaţie.

Fie suprafaţa sculptată **P** şi suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare tangente în punctul **T** (Fig. 7.23).

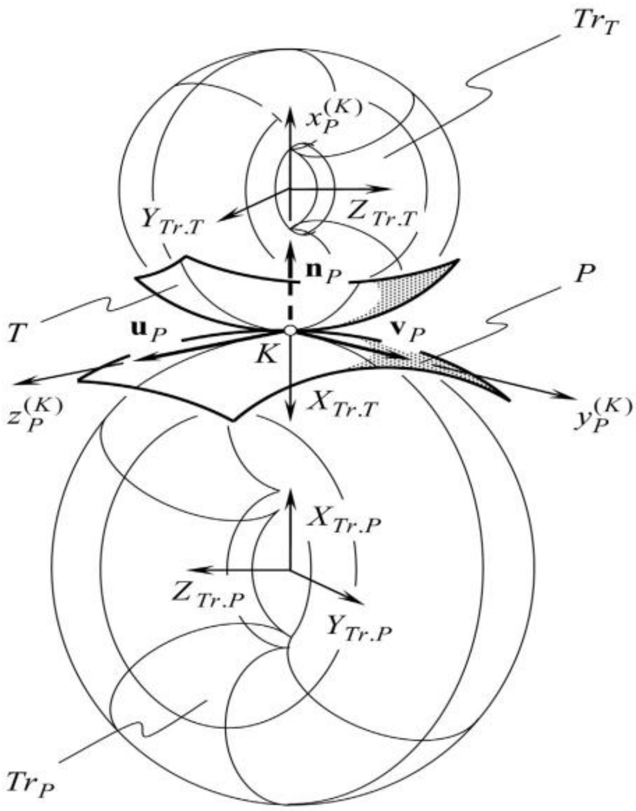


Fig. 7.23. prezintă dispunerea relativă a suprafeţelor toroidale de aproximaţie $\boldsymbol{Tr_P}$şi $\boldsymbol{Tr_T}$

Alegem **triedronul lui Darboux** generat de vectorii $\boldsymbol{t}_{1.P}$, $\boldsymbol{t}_{2.P}$ şi $\boldsymbol{n}_P$ ca fiind originea sistemului de coordonate cartezian locale x_P, y_P, z_P în punctul **CC** de contact **K** considerat ca punct de origine. Cunoscând poziţiile şi direcţiile vectorilor normali ai suprafeţelor **P** şi **T** în sistemul de coordonate X_{NC}, Y_{NC}, Z_{NC} al sculei aşchietoare se pot obţine operatorii transformărilor de coordonate $R_S\,(NC \mapsto P)$ ai transformării de la coordonatele de sistem X_{NC}, Y_{NC}, Z_{NC} la coordonatele de sistem X_P, Y_P, Z_P şi apoi $R_S\,(P \mapsto K_P)$ ai transformării locale de la coordonatele de sistem X_P, Y_P, Z_P la coordonatele de sistem locale x_P, y_P, z_P. În final se poate calcula operatorul $R_S\,(NC \mapsto P)$.

În mod similar se pot calcula operatorii $R_S\,(NC \mapsto T)$, $R_S\,(T \mapsto K_T)$ şi $R_S\,(NC \mapsto K_T)$ corespunzător transformărilor sistemului de coordonate ce compun suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare.

În final se pot calcula coordonatele transformărilor sistemului de coordonate directe $R_S\left(K_T \mapsto K_p\right)$ şi inverse $R_S\,(K_P \mapsto K_T)$ şi care închid transformările sistemului de coordonate.

Această procedură permite ca reprezentarea tuturor operatorilor suprafeţelor $\boldsymbol{r}_P$ şi $\boldsymbol{r}_T$ şi a celorlalte elemente ale geometriei suprafeţelor să fie prezentată în aceleaşi sistem de coordonate locale x_P, y_P, z_P.

7.7.4. Evaluarea erorilor de prelucrare a suprafeţei sculptate P

Pentru calculul erorilor de prelucrare:

$$h_\Sigma = a_h . h_{fr} + b_n . h_{ss}$$

sunt necesare valorile erorile h_{fr} şi h_{ss} care se calculează în mod similar.

Fie ca exemplu calculul erorii h_{fr}. În Fig. 7.24. se prezintă o secţiune printr-un plan a suprafeţei sculptate **P** de către un plan ce trece prin vectorul normal unitar $\boldsymbol{n}_P$ şi vectorul $\boldsymbol{F}_{fr}$ al direcţiei de deplasare a sculei de aşchietoare. În funcţie de alegerea punctului considerat pe suprafaţa sculptată **P**, secţiunea rezultantă poate avea un profil:

- planar $K\,K_1$,
- conex $K_1\,K_2$,
- concav $K_2\,K_3$.

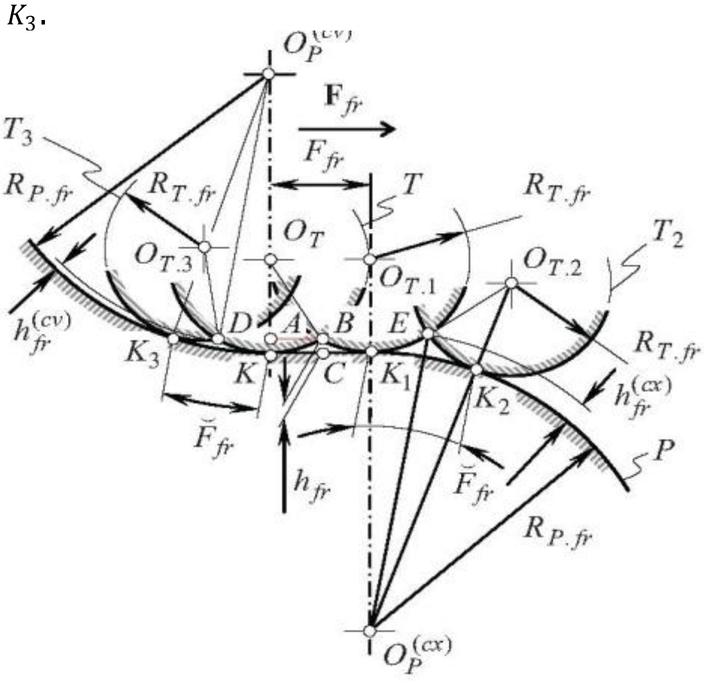


Fig. 7.24. Eroarea de prelucrare $\boldsymbol{h_{fr}}$ relativă la suprafaţa sculptată **P**

Calculul erorii h_{fr} se poate calcula cu formula (Radzevich, 2007), (Radzevich, 2008):

$$h_{fr} \cong \frac{R_{P.fr}\left(R_{P.fr} + R_{T.fr}\right)\left(1 - \cos\frac{\breve{F}_{fr}}{2\,R_{P.fr}}\right)}{R_{P.fr} - \left(R_{P.fr} + R_{T.fr}\right)\cos\left(\frac{\breve{F}_{fr}}{2\,R_{P.fr}}\right)},$$

unde $R_{P.f}$ şi $R_{T.f}$ sunt razele curburii normale a suprafeţelor **P** şi respectiv **T**, măsurate pe direcţia vectorului F_{fr} , iar $\breve{F}_f$ este segmentul de arc al vectorului de direcţie F_{fr} .

Calculul razei de curbură normale $R_{T.fr}$ se poate obţine cu ajutorul ecuaţiei:

$$R_{P.fr} = \frac{E_P . G_P}{G_P\, L_P\, sin^2\,\xi + M_P\sqrt{E_P\, G_P}\,\sin 2\xi + E_P\, N_P\, cos^2\,\xi},$$

unde ξ este unghiul dintre vectorul direcţiei F_{fr} şi direcţiile principale $\boldsymbol{t}_{1.P}$ şi $\boldsymbol{t}_{2.P}$ ale suprafeţei sculptate **P**.

Similar pentru raza de curbură normală $R_{T.fr}$:

$$R_{T.fr} \cong \frac{E_T\, G_T}{G_T\, L_T\, sin^2\,(\xi + \mu) + M_T\sqrt{E_T\, G_T}\,\sin 2(\xi + \mu) + E_T\, N_T\, cos^2\,(\xi + \mu)},$$

unde cele două suprafeţe **P** şi **T** sunt reprezentate în acelaşi sistem de coordonate x_P, y_P, z_P, iar μ este unghiul dintre normalele celor două suprafeţe **P** şi **T** în punctul **CC** de contact **K.**

Dacă suprafaţa sculptată **P** este plană, atunci ecuaţia erorii totale h_f se poate simplifica:

$$h_{fr} = R_{T.fr} - \sqrt{R_{T.fr}^2 - 0{,}25\,\breve{F}_{T.fr}^2}.$$

Pentru calculul erorii parţiale h_{ss} se foloseşte un plan ce trece prin vectorul normal unitar $\boldsymbol{n}_p$ şi vectorul F_{ss} şi care este ortogonal faţă de planul ce trece prin vectorii $\boldsymbol{n}_p$ şi $\boldsymbol{F}_r$.

Prin derivare se poate obţine eroarea parţială h_{ss}:

$$h_{ss} \cong \frac{R_{P.ss}\left(R_{P.ss} + R_{T.ss}\right)\left(1 - \cos\frac{\breve{F}_{ss}}{2\,R_{P.ss}}\right)}{R_{P.ss} - \left(R_{P.ss} + R_{T.ss}\right)\cos\left(\frac{\breve{F}_{ss}}{2\,R_{P.ss}}\right)},$$

unde

$$R_{P.ss} = \frac{E_P\, G_P}{G_P\, L_P\, cos^2\,\xi + M_P\sqrt{E_P\, G_P}\,\sin 2\xi + E_P\, N_P\, sin^2\,\xi},$$

$$R_{T.ss} \cong \frac{E_T\, G_T}{G_T\, L_T\, cos^2\,(\xi + \mu) + M_T\sqrt{E_T\, G_T}\,\sin 2(\xi + \mu) + E_T\, N_T\, sin^2\,(\xi + \mu)}.$$

şi unde $R_{P.ss}$ şi $R_{T.ss}$ sunt razele curburii normale a suprafeţelor **P** şi **T** măsurate pe arcul $\breve{F}_{ss}$ care este segmentul de arc al vectorului de direcţie $\boldsymbol{F}_{ss}$.

7.7.5. Eroarea totală a deplasării sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată P.

Realizarea suprafeţei sculptate **P** se face în limitele unei toleranţe faţă de cotele de prelucrare, atât datorită maşinii-unelte cu comandă numerică care efectuează prelucrarea, cât şi datorită sculei aşchietoare a cărei utilizare induce cea mai mare parte a erorii de prelucrare.

Ca urmare, este important a se determina eroarea introdusă de scula aşchietoare la eroarea totală rezultantă a suprafeţei sculptate **P** faţă de cotele proiectate şi, în special, este necesară determinarea abaterii maxime admise a sculei aşchietoare faţă de cotele de prelucrare.

Pentru aceasta se calculează distanţa minimă de apropiere a celor două suprafeţe **P** şi **T**. Considerăm cazul ideal când suprafeţele **P** şi **T** sunt tangente în punctul **CC** de contact **K.**

Definim:

- suprafaţa sculptată **P** într-un sistem de axe de coordonate carteziene x_P, y_P, z_P,
- suprafaţa T_a a sculei aşchietoare **T** într-un sistem de axe de coordonate X_T, Y_T, Z_T
- X_{NC}, Y_{NC}, Z_{NC} sistemul de axe de coordonate a maşinii cu comandă numerică.

Prin definiţie se cunosc suprafeţele **P** şi **T** în coordonatele X_{NC}, Y_{NC}, Z_{NC}. Ca urmare, se obţin coordonatele transformărilor de sistem:

- operatorul $\boldsymbol{R_S}\,(NC \mapsto P)$ ca rezultat al transformărilor de la coordonatele de sistem X_{NC}, Y_{NC}, Z_{NC} la coordonatele de sistem X_P, Y_P, Z_P.
- operatorul $\boldsymbol{R_S}\,(P \mapsto K_P)$ ca rezultat al transformării de la coordonatele de sistem X_P, Y_P, Z_P la coordonatele de sistem x_P, y_P, z_P.

În acest fel, operatorii $\boldsymbol{R_S}\,(NC \mapsto P)$ şi $\boldsymbol{R_S}\,(P \mapsto K_P)$ ai transformărilor de coordonate sunt exprimaţi în funcţie de transformările elementare de sistem.

În final, operatorul $\boldsymbol{R_S}\,(NC \mapsto K_P)$ se poate calcula ca rezultat al transformărilor de sistem corespunzătoare. În mod similar se calculează operatorii $\boldsymbol{R_S}\,(NC \mapsto T)$, $\boldsymbol{R_S}\,(T \mapsto K_T)$ şi $\boldsymbol{R_S}\,(NC \mapsto K_T)$ ai suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare şi operatorul transformării directe $\boldsymbol{R_S}\,(K_T \mapsto K_P)$ şi inverse $\boldsymbol{R_S}\,(K_P \mapsto K_T)$ a transformării coordonatelor de sistem.

Se poate remarca existenţa egalităţii $\boldsymbol{R_S}\,(K_T \mapsto K_P) = \boldsymbol{R_S^{-1}}\,(K_P \mapsto K_T)$, unde operatorii $\boldsymbol{R_S}\,(K_T \mapsto K_P)$ şi $\boldsymbol{R_S^{-1}}\,(K_P \mapsto K_T)$ închid transformările de coordonate sistem, permiţând reprezentarea suprafeţelor $\boldsymbol{r_P}$ şi $\boldsymbol{r_T}$ într-un sistem de coordonate comun.

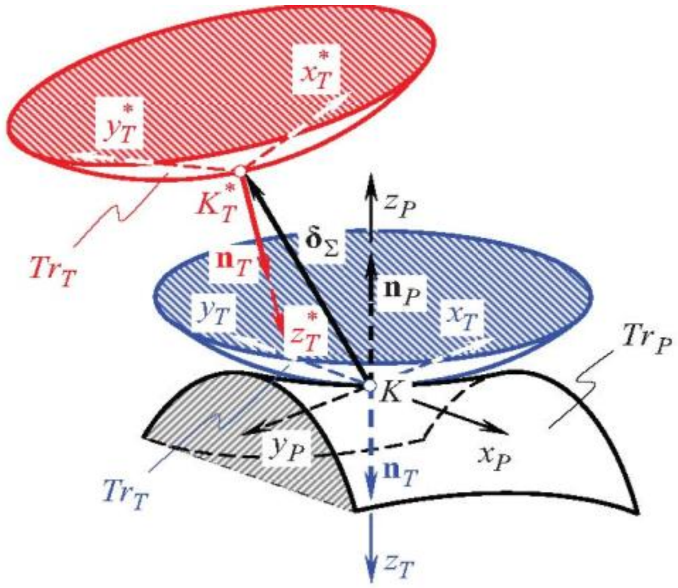


Fig. 7.25. Configuraţia suprafeţei toroidale locale T_{r_P} şi T_{r_T}.

În mod ideal, când suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare se consideră tangentă la suprafaţa sculptată **P,** atunci originile celor două coordonate de sistem x_P, y_P, z_P şi x_T, y_T, z_T coincid în punctul **CC** de contact **K** al suprafeţelor **P** şi **T** (Fig. 7.25**)**.

În realitate însă, suprafeţele **P** şi **T** nu sunt în contact perfect, ele fiind distanţate una faţă de alta, ori suprafaţa **T** penetrează suprafaţa **P**. Ca urmare a erorilor inerente procesului de prelucrare au loc deplasări inevitabile, iar sistemele de coordonate locale x_T, y_T, z_T se deplasează la poziţia reală x_T^*, y_T^*, z_T^*,.

Fie δ_Σ deplasarea liniară totală a sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată **P** şi $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ deplasările liniare elementare de-a lungul axelor x_P, y_P, z_P,

$$\text{unde } \delta_\Sigma = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

În plus, considerăm şi deplasările unghiulare $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ale sistemului de coordonate x_T, y_T, z_T faţă de sistemul de coordonate x_P, y_P, z_P.

Deplasarea unghiulară totală θ_Σ a sculei aşchietoare faţă de suprafaţa **P** se poate exprima în funcţie de deplasările unghiulare $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ definite cu ajutorul axelor de coordonate x_P, y_P, z_P:

$$\theta_\Sigma = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ca urmare, coordonatele locale de sistem x_T, y_T, z_T asociate sculei aşchietoare se transformă în coordonatele de poziţie x_T^*, y_T^*, z_T^*.

Cum s-a arătat, deplasările δ_Σ şi θ_Σ apar inevitabil datorită deplasărilor dintre suprafeţele **P** şi **T** sau când suprafeţele **P** şi **T** interferă.

Cele două deplasări, δ_Σ liniară şi θ_Σ unghiulară, se pot exprima în funcţie de deplasările elementare corespunzătoare ale sistemelor de coordonate locale între punctele $K_P \equiv K$ şi punctul K_T, unde K_P şi K_T reprezintă originile sistemelor locale de coordonate x_P, y_P, z_P şi respectiv x_T^*, y_T^*, z_T^*. Pentru a închide lanţul de transformări este necesară definirea operatorului $\mathbf{R_S}(K_T^* \mapsto K)$ a rezultantei transformărilor sistemului de coordonate şi a operatorului $\mathbf{R_S}(K_P \mapsto K_T^*) = \mathbf{R_S^{-1}}(K_T^* \mapsto K_P)$ datorate transformării inverse a sistemului de coordonate.

În compunerea operatorilor $\mathbf{R_S}(K_T^* \mapsto K_P)$ şi $\mathbf{R_S}(K_P \mapsto K_T^*)$ folosim operatorii definiţi anteriori:

$$\mathbf{R_S}(P \mapsto K_P), \mathbf{R_S}(P \mapsto K_T),$$

atunci:

$$\mathbf{R_S}(K_T^* \mapsto K_P) = \mathbf{R_S^{-1}}(P \mapsto K_T). \mathbf{R_S}(P \mapsto K_P).$$

Ca urmare a transformărilor coordonatelor de sistem, suprafeţele $\boldsymbol{r}_P$ şi $\boldsymbol{r}_T$ se pot reprezenta în acelaşi sistem de coordonate.

<u>Cazul ideal</u>: suprafeţele **P** şi **T** sunt în contact perfect în punctul **CC** de contact **K** şi când nu se iau în considerare deplasările suprafeţei **T** faţă de suprafaţa **P**, adică un punct K_P al suprafeţei **T** converge spre punctul comun **K**. Ca urmare, există identitatea: $K_P \equiv K_T \equiv K$.

Se poate observa că:

- cea mai mică distanţă dintre suprafeţele **P** şi **T** poate fi interpretată ca distanţa dintre punctele K_P şi K_T;
- această distanţă este identică cu cea mai mică distanţă dintre suprafeţele toroidale de aproximaţie T_{r_P} şi T_{r_T};
- ca urmare, distanţa $K_P K_T = 0$, când $K_P \equiv K_T \equiv K$.

Cazul real: suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare este deplasată faţă de suprafaţa sculptată **P** cu:

- o deplasare liniară dată de mărimea vectorului δ_Σ şi
- o deplasare unghiulară dată de mărimea vectorului θ_Σ.

Se poate observa că dacă:

- $\delta_\Sigma > 0$, scula aşchietoare este situată în afara suprafeţei **P**;
- $\delta_\Sigma < 0$, scula aşchietoare interferă cu suprafaţa **P**.

Ca urmare:

- suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare este situată diferit de suprafaţa sculptată **P**;
- suprafaţa **T** intersectează suprafaţa **P** cu consecinţe asupra procesului de prelucrare.
- cea mai mică distanţă dintre suprafeţele **P** şi **T** nu este egală cu zero, putând fi or negativă ori pozitivă;

Aceasta ne conduce la o observaţie importantă, şi anume:

Cea mai mică distanţă dintre cele două suprafeţe regulate P şi T este dată de perpendiculara comună a celor două suprafeţe, şi nu de distanţa dintre punctele K_T^* şi K ($\equiv K_P$).

Presupunem că sistemul local de coordonate x_T^*, y_T^*, z_T^* în raport cu sistemul x_P, y_P, z_P este cunoscut.

Cunoscându-se operatorul $\mathbf{R_s}\,(K_T^* \mapsto K_P)$ al transformărilor sistemului de coordonate şi utilizând operatorul $\mathbf{R_s}\,(K_T^* \mapsto K_P)$, împreună cu operatorul $\mathbf{R_s}\,(K_P \mapsto K_T)$, se obţine matricea $\mathbf{D_s}\,(T/P)$ a deplasării suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată **P**.

Referitor la matricea $\mathbf{D_s}\,(T/P)$ se poate observa:

- că este compusă din totalitatea deplasărilor elementare n_i ($i = 1, 2, \dots n$) a sistemului de coordonate $x_i^{real}\ y_i^{real}\ z_i^{real}$, faţă de sistemul de coordonate nominal x_i, y_i, z_i,
- în plus, matricea $\mathbf{D_s}\,(T/P)$ calculează deplasarea reală totală a sculei aşchietoare în sistemul de coordonate x_T^*, y_T^*, z_T^* faţă de poziţia ideală exprimată în coordonatele x_T, y_T, z_T referitor la suprafaţa sculptată **P**;

Aceasta permite introducerea matricei deplasărilor elementare $\mathbf{ds_i}\,(real_i \mapsto nom_i)$:

$$\mathbf{ds_i}\,(real_i \mapsto nom_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xx}^{(i)} & \cos\theta_{xy}^{(i)} & \cos\theta_{xz}^{(i)} & \delta_x^{(i)} \\ \cos\theta_{xy}^{(i)} & \cos\theta_{yy}^{(i)} & \cos\theta_{yz}^{(i)} & \delta_y^{(i)} \\ \cos\theta_{xz}^{(i)} & \cos\theta_{yz}^{(i)} & \cos\theta_{zz}^{(i)} & \delta_z^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

deplasări care pot fi liniare sau unghiulare.

Considerând toate deplasările elementare dintre sistemele elementare dintre sistemele de coordonate x_T^*, y_T^*, z_T^* la sistemele de coordonate x_T, y_T, z_T, atunci se poate obţine matricea rezultantă $\mathbf{D_s}\,(T/P)$:

$$\mathbf{D_s}\,(T/P) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{ds_i}\,(real_i \mapsto nom_i)),$$

unde $real_i$ şi nom_i reprezintă poziţiile reale şi respectiv, poziţiile cerute de proiectul de execuţie ale prelucrărilor i ($i = 1,2, \dots n$).

Când operatorul $\mathbf{R_s}\,(K_T^* \mapsto K_P)$, împreună cu operatorul $\mathbf{R_s}\,(K_P \mapsto K_T)$ sunt cunoscuţi, matricea $\mathbf{D_s}\,(T/P)$ se poate exprima în funcţie de operatorii $\mathbf{R_s}\,(K_T^* \mapsto K_P)$ şi $\mathbf{R_s}\,(K_P \mapsto K_T)$ a rezultantei transformărilor de coordonate:

$$\mathbf{D_s}\,(T/P) = \mathbf{R_s}\,(K_P \mapsto K_T) \bullet \mathbf{R_s}\,(K_T^* \mapsto K_P).$$

În final, matricea $\mathbf{D_s}\,(T/P)$ se poate exprima în funcţie de deplasările elementare liniare şi unghiulare ale sistemului local de coordonate x_T^*, y_T^*, z_T^* faţă de sistemul de coordonate x_T, y_T, z_T.

$$\mathbf{D_s}\,(T/P) = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xx} & \cos\theta_{xy} & \cos\theta_{xz} & \delta_x \\ \cos\theta_{xy} & \cos\theta_{yy} & \cos\theta_{yz} & \delta_y \\ \cos\theta_{xz} & \cos\theta_{yz} & \cos\theta_{zz} & \delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

În mod similar se poate calcula matricea rezultantă a deplasărilor $\mathbf{D_s}\,(T/P)$ sau se poate utiliza relaţia:

$$\mathbf{D_s}\,(T/P) = \mathbf{D_s^{-1}}\,(T/P).$$

Elementele matricei $\mathbf{D_s}\,(T/P)$ pot fi calculate în funcţie de elementele reale ale deplasărilor faţă de poziţiile ideale rezultante din proiectul de execuţie şi care includ:

a) deplasările liniare şi unghiulare ale elementelor mecanice;
b) deplasările cauzate de elasticitatea materialelor componente supuse prelucrării;
c) deplasările cauzate de modificările termice ale materialelor componente în timpul prelucrării.

Teoretic, elementele matricei rezultante a deplasărilor $\mathbf{D_s}\,(T/P)$ se pot determina prin măsurători directe ale sistemului maşină-unealtă/sculă aşchietoare.

În practică, deplasările suprafeţei **T** faţă de suprafaţa sculptată **P** sunt dificil de determinat datorită multitudinii şi complexităţii elementelor componente ale prelucrării.

Ca urmare, este dificil a se utiliza matricea deplasărilor $\mathbf{D}_s\,(T/P)$ la calculul deplasărilor configuraţiei reale a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată **P**. În schimb, se poate utiliza matricea toleranţei $\mathbf{Tl}\,(^T/_P)$ şi care se poate calcula în mod similar calculului matricei $\mathbf{D_s}\,(^T/_P)$, dar în loc de a folosi deplasările elementare $\mathbf{ds_i}\,(real_i \mapsto nom_i)$ ale suprafeţei **T** faţă de suprafaţa **P**, folosim toleranţele corespunzătoare $\mathbf{tl_i}\,(real_i \mapsto nom_i)$ din relaţia

$$\mathbf{Tl}\left(^T/_P\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{tl_i}\,(real_i \mapsto nom_i)$$

şi care conduce la aproximaţia

$$\mathbf{D}_s\left(^T/_P\right) \cong \mathbf{Tl}\left(^T/_P\right)$$

şi unde $\mathbf{Tl}\left(^T/_P\right)$ poate fi calculat relativ mai uşor decât $\mathbf{D}_s\left(^T/_P\right)$.

S-a considerat mai sus suprafaţa de aproximaţie toroidală T_{r_T} în sistemul local de coordinate x_T^*, y_T^*, z_T^*, având ecuaţia $\boldsymbol{r}_{tr.T}(\theta_{tr.T}, \varphi_{tr.T})$ şi care în sistemul local de coordonate x_P, y_P, z_P are forma:

$$\boldsymbol{r}_{tr.T}^{(P)}\,(\theta_{tr.T}, \varphi_{tr.T}) = \mathbf{D}_s\left(^T/_P\right) \bullet \boldsymbol{r}_{tr.T}(\theta_{tr.T}, \varphi_{tr.T}).$$

Ecuaţia suprafeţei de aproximaţie toroidală T_{r_T}:

$$\boldsymbol{r}_{tr.T}(\theta_{tr.T}, \varphi_{tr.T})$$

este iniţial determinată în sistemul local de coordonate x_P, y_P, z_P, iar ecuaţia de mai sus descrie suprafaţa toroidală de aproximaţie T_{r_T} în aceleaşi coordonate de sistem x_P, y_P, z_P, ceea ce conduce la concluzia că suprafeţele toroidale T_{r_P} şi T_{r_T} sunt determinate.

Ca urmare, pentru calculul distanţei minime dintre cele două suprafeţe regulate **P** şi **T** se consideră toleranţa δ_P a suprafeţei locale $\mathbf{P}_{real}$ faţă de suprafaţa proiectată nominală $\mathbf{P}_{nom}$, ceea ce reduce problema la studiul celor două suprafeţe toroidale.

Fie suprafeţele **P** şi **T** definite în sistemul de coordonate comun x_{NC}, y_{NC}, z_{NC} asociat maşinii-unelte cu comandă numerică şi aproximate de către suprafeţele toroidale de aproximaţie T_{r_P} şi respectiv T_{r_P}. Punctele K_P şi K_T^* se aleg de către suprafeţele toroidale de aproximaţie T_{r_P} şi respectiv T_{r_P} pe care le redefinim ca fiind p_i şi t_i.

Dându-se configuraţia suprafeţelor toroidale de aproximaţie T_{r_P} şi respectiv T_{r_P} se poate calcula **coeficientul de aproximaţie CDA** dintre aceste suprafeţe, ca o primă aproximare dintre suprafeţele **P** şi **T** şi care este măsurată pe perpendiculara comună la aceste suprafeţe, unde vectorul normal unitar $n_{Tr.P}$ la suprafaţa toroidală T_{r_p} este cuprins în planul ce trece prin axa de rotaţie a suprafeţei de rotaţie T_{r_p}.

Pentru calculul **coeficientului de aproximaţie CDA** dintre suprafeţele **P** şi **T** se utilizează în primă aproximaţie calculul CDA dintre suprafeţele toroidale T_{r_p} şi T_{r_T} de-a lungul perpendicularei comune la cele două suprafeţe şi unde vectorul unitar normal $\boldsymbol{n}_{Tr.P}$ la suprafaţa toroidală T_{r_p} este cuprins în planul ce trece prin axa de rotaţie a suprafeţei T_{r_p}. Ciclul se repeta pînă când CDA dintre suprafeţele **P** şi **T** devine mai mic decât o valoare maximă admisă prin proiectul tehnic de realizare a suprafeței sculptate.

7.7.6. Metode de mărire a preciziei suprafeţei sculptate P

După cum s-a arătat anterior, diferenţa dintre suprafaţa sculptată reală P_{real} şi suprafaţa sculptată **P** cerută prin proiectul tehnic se datoreşte în principal a cel puţin două componente: înălţimea h_Σ a rugozităţii şi toleranţa δ_P a suprafeţei.

Ca urmare, diferenţa rezultantă dintre suprafaţa sculptată reală şi cea nominală este:

$$\delta_\Sigma = h_\Sigma + \delta_P.$$

Evident că ambele componente trebuie reduse pentru a creşte acurateţea prelucrării, dar ne vom concentra asupra componentei h_Σ, care este rezultanta a cel puţin două componente:

- înălţimea rugozităţii locale în punctul considerat h_{fr} şi
- înălţimea devierii elementelor locale h_{ss} şi care trebuie să fie mai mică decât toleranţa rezultantă $[h]$ acceptată în punctul considerat, adică $h_{ss} = c\,[h]$, unde c este un parametru local al toleranţei $[h]$, $0 \le c \le 1$.

În punctul **CC** de contact **K** considerat al suprafeţei sculptate **P** se poate stabili o valoare optimală a parametrului c şi care se poate exprima în funcţie de coordonatele carteziene a suprafeţei sculptate **P**:

$$c = c\,(U_P, V_P).$$

Dacă acceptăm că $h_\Sigma = h_{fr} + h_{ss}$, atunci există egalitatea pentru devierea elementară h_{fr}: $h_{fr} = (c-1)\,[h]$, ca urmare rugozitatea h_Σ se poate exprima în funcţie de parametrul c, adică: $h_\Sigma = h_\Sigma\,(c)$.

Pentru a afla optimul lui h_Σ considerăm ecuaţia:

$$\frac{\partial h_\Sigma\,(c)}{\partial c} = 0$$

şi care este condiţia pentru ca funcţia $h_\Sigma = h_\Sigma\,(c)$ să admită un minimum. În plus, inegalitatea

$$\frac{\partial^2 h_{\Sigma}(c)}{\partial c^2} > 0$$

trebuie să existe, de asemenea, din condiţia existenței unui minim. Or, condiţiile de mai sus permit minimizarea funcţiei $h_{\Sigma} = h_{\Sigma}(c)$ cu consecinţe benefice asupra procesului de prelucrare a suprafeţei sculptate **P**.

7.7.7. Principiul liniarităţii rugozităţilor

Pentru simplificarea calculelor, în capitolele precedente s-a considerat că există relaţia:

$$h_{\Sigma} = h_{fr} + h_{ss},$$

Or, aceasta s-a bazat pe supoziţia că elementele rugozităţii sunt funcţii liniare, ceea ce nu corespunde realităţii, atât funcţiile $h_{fr} = h_{fr}(R_{P.fr}, R_{T.fr}, \breve{F}_{fr})$, cât şi $h_{ss} = h_{ss}(R_{P.ss}, R_{T.ss}, \breve{F}_{ss})$ fiind funcţii neliniare.

Ca urmare, se impune întrebarea: în ce condiţii principiul asumat al liniarităţii rugozităţii este valid şi corespunde realităţii tehnologice? Răspunsul la această întrebare este că acest principiu este valid, dacă şi numai dacă relaţia $\breve{h}_{\Sigma} - h_{\Sigma} \leq [\Delta h_{\Sigma}]$ are loc şi unde $[\Delta h_{\Sigma}]$ este toleranţa rezultată din calculul rugozităţii.

Totodată, această întrebare conduce la necesitatea continuării studierii fenomenului prezentat în condiţii cât mai apropiate de realitate, şi care presupune utilizarea domeniului matematic neliniar, constituind o direcţie de abordare ulterioară, extrem de interesantă şi cu un larg potențial de cercetare.

7.8. Prelucrarea optimală a suprafeţei sculptate P

Prelucrarea optimală a suprafeţei sculptate **P** reprezintă o cerinţă principală a prelucrării. Cu cât prelucrarea pe maşini-unelte cu comandă numerică se apropie de prelucrarea optimală, cu atât costul prelucrării este mai scăzut. Ţinând cont de costul ridicat al prelucrării pe aceste maşini, acest criteriu reprezintă un important factor ce trebuie avut în considerare.

7.8.1. Criterii de optimizare a prelucrării suprafeţei sculptate P

Rezolvarea problemei prelucrării optimale a suprafeţei sculptate **P** necesită alegerea unor criterii de optimizare a procesului de prelucrare, în special legate de:

A. productivitatea *prelucrării* suprafeţei sculptate **P** şi care se poate îmbunătăţi prin micşorarea timpului necesar procesului de prelucrare. Cum s-a arătat mai sus, datorită costului ridicat al maşinilor-unelte cu comandă numerică, acest criteriu este deosebit de important în practica prelucrării suprafeţei sculptate **P**.

B. productivitatea *generării* suprafeţei sculptate **P** şi care are cel puţin 3 aspecte ale generării:
   1. <u>generarea locală</u> a suprafeţei sculptate **P**: analiza generării locale a suprafeţei sculptate **P** are loc în vecinătatea punctului **CC** de contact **K** dintre suprafaţa sculptată **P** şi suprafaţa **T** a sculei aşchietoare;
   2. <u>generarea regională</u> a suprafeţei sculptate **P**: această analiză trebuie desfăşurată în contextul regional al zonei de contact dintre suprafeţele **P** şi **T**;

3. generarea globală a suprafeţei sculptate **P**: în final este necesar ca analiza parţială în vecinătatea punctului de contact a suprafeţei sculptate **P** să ţină cont de conturul suprafeţei sculptate **P** în ansamblul ei.

Este evident că parametrii suprafeţei sculptate **P** variază în timp, ceea ce conduce la necesitatea studierii procesului de fabricaţie în funcție de acest parametru.

Considerând:

- productivitatea $P_{GS} = P_{GS}(t)$ a generării suprafeţei sculptate **P**,
- vectorul $\breve{\boldsymbol{F}}_{fr} = |\boldsymbol{F}_{fr}|$ al avansului sculei aşchietoare şi
- vectorul $\breve{\boldsymbol{F}}_{ss} = |\boldsymbol{F}_{ss}|$ al vitezei prelucrării adaosului de prelucrare,

atunci productivitatea generării suprafeţei sculptate **P** se poate calcula cu formula:

$$P_{GS}(t) = |\boldsymbol{F}_{fr} \bullet \boldsymbol{F}_{ss}|,$$

unde t reprezintă timpul.

Vectorii $\boldsymbol{F}_{fr}, \boldsymbol{F}_{ss}$ sunt ortogonali, adică $\boldsymbol{F}_{fr} \perp \boldsymbol{F}_{ss}$. În cazul general, vectorii $\boldsymbol{F}_{fr}$ și $\boldsymbol{F}_{ss}$ sunt situaţi la un unghi θ unul faţă de altul.

Ca urmare, productivitatea generării suprafeţei sculptate **P** se poate calcula cu formula

$$P_{GS}(t) = \breve{F}_{fr} \bullet \breve{F}_{ss} \bullet \sin\theta$$

şi care ne arată că pentru creşterea productivităţii $P_{GS}(t)$ a generării suprafeţei sculptate **P** este necesară mărirea celor doi vectori corespunzători şi că aceasta este semnificativ redusă când $\theta \neq 90^0$.

Este evident că mărind productivitatea prelucrării se măreşte suprafaţa prelucrată. Ca urmare $P_{GS}(t)$ depinde de:

- coordonatele punctului **CC** de contact **K** a celor două suprafeţe **P** şi **T**,
- unghiul μ dintre vectorii de direcţie a celor două suprafeţe şi vectorii de direcţie a mişcării relative a sculei aşchietoare în punctul **CC** de contact **K**:

$$P_{sg} = P_{sg}(U_P, V_P, U_T, V_T, \mu, \varphi)$$

Suprafaţa medie generată $\tilde{P}_{sg}$ se poate defini ca:

$$\tilde{P}_{sg} = \frac{S_{sg}}{t_\Sigma},$$

unde S_{sg} reprezintă totalul suprafeţei generate în intervalul total de timp t_Σ. Prin diferenţierea lui $\tilde{P}_g$ se poate obţine viteza generării suprafeţei sculptate **P**:

$$P_{sg} = \frac{dS_{sg}}{dt}$$

şi care permite analiza eficienţei procesului de prelucrare a întregii suprafeţe **P**.

Cantitatea medie instantanee de material prelucrat este:

$$\tilde{P}_{mr} = \frac{V_{mr}}{t_\Sigma},$$

unde:

- V_{mr} este volumul total de material prelucrat;
- t_Σ este timpul total al prelucrării.

Identic, pentru a caracteriza eficienţa operaţiei de prelucrare se poate utiliza rata instantanee a vitezei de prelucrare:

$$P_{mr}(t) = \frac{d\,V_{mr}}{dt}.$$

Când suprafeţele **P** şi **T** sunt în contact în punctul **CC** de contact **K**, deplasările maxime permise ale sculei aşchietoare sunt limitate de valorile limită ale sculei aşchietoare $[\breve{F}_{fr}]$ şi $[\breve{F}_{ss}]$ şi care sunt specificate de cerinţele tehnologice ale procesului de prelucrare în funcţie de toleranţa $[h]$ impusă prelucrării.

Utilizarea sculei aşchietoare la obţinerea suprafeţei sculptate **P** induce o rugozitate a acestei suprafeţe h_{fr} şi care trebuie să fie sub limita toleranţei totale $[h]$. Or, $[\breve{F}_{fr}]$ depinde de valoarea admisă a toleranţei parţiale $[h_{fr}]$.

Ca urmare, calculul ratei $[\breve{F}_{fr}]$ se poate exprima ca:

$$[\breve{F}_{fr}] \cong 2\, R_{P.fr}\, arc\cos\frac{R_{P.fr}^2 + R_{T.fr}\left(R_{P.fr} + [h_{fr}]\, sgn\, R_{P.fr}\right)}{(R_{P.fr} + R_{T.fr})\,(R_{P.fr} + [h_{fr}]\, sgn\, R_{P.fr})}.$$

Din

$$R_{Pss} = \frac{E_P\, G_P}{G_P\, L_P\, cos^2\,\xi + M_P\sqrt{E_P\, G_P}\,\sin 2\xi + E_P\, N_P\, sin^2\,\xi},$$

şi

$$R_{Tss} \cong \frac{E_T\, G_T}{G_T\, L_T\, cos^2\,(\xi+\mu) + M_T\sqrt{E_T\, G_T}\,\sin 2(\xi+\mu) + E_T\, N_T\, sin^2\,(\xi+\mu)}$$

se pot obţine razele de curbură normale $R_{P.fr}$ şi $R_{T.fr}$.

Presupunem că există inegalitatea $\breve{F}_{fr} \ll R_{P.fr}$ şi ca urmare:

$$\breve{F}_{fr} \cong AB = F_{fr}.$$

Considerăm că $[h_{fr}]^2$ este neglijabil şi îl putem elimina din calculul de mai sus. În practică, $\breve{F}_{ss}$ este cel mai important factor care afectează suprafaţa generată P_{gs}, pentru calculul limitei maxime a deplasării $[\breve{F}_{fr}]$.

În mod similar se calculează

$$[\breve{F}_{ss}] \cong 2\, R_{P.ss}\,\arccos\frac{R_{P.ss}^2 + R_{T.ss}\,(R_{P.ss} + [h_{ss}]\, sgn\, R_{P.ss})}{(R_{P.ss} + R_{T.ss})\,(R_{P.ss} + [h_{ss}]\, sgn\, R_{P.ss})},$$

unde $R_{P.ss}$ şi $R_{T.ss}$ sunt razele normale de curbură şi rezultă din ecuaţiile lui $R_{P.ss}$ şi $R_{T.ss}$.

Din practică rezultă că determinarea condiţiilor pentru care productivitatea generării suprafeţelor este maximă are o importanţă deosebită la prelucrarea optimală pe maşini-unelte cu comandă numerică.

Productivitatea generării suprafeţei P_{sg}^{max} poate atinge o rată maximă, dacă şi numai dacă, productivitatea instantanee a generării suprafeţei $P_{sg}^{max}\,(t)$ este maximă în orice punct **CC** de contact **K** al suprafeţelor **P** şi **T**.

Pentru calculul condiţiilor de maximă productivitate instantanee se foloseşte ecuaţia

$$P_{sg}^{max}\,(t) = [\breve{F}_{fr}] \bullet [\breve{F}_{ss}]\sin\theta,$$

din care rezultă că ambii factori $[\breve{F}_{fr}]$ şi $[\breve{F}_{ss}]$ trebuie să atingă valoarea maximă.

În concluzie, ambii factori au valori extreme în jurul aceloraşi valori ai parametrilor de intrare. Ca urmare, nu numai că funcţia $P_{sg}^{max}\,(t)$ se poate utiliza pentru rezolvarea problemei optimizării productivităţii prelucrării, ci şi pentru fiecare din cei doi factori de mai sus. De exemplu, funcţia $P_{sg}^{max}\,(t)$ a productivităţii instantanee se poate substitui cu **coeficientul de conformitate** $C_{nf_R}\,({}^{P}/_{T})$ a suprafeţelor **P** şi **T**, substituţie care simplifică calculul lui $P_{sg}^{max}\,(t)$.

7.8.2. Calculul parametrilor optimali ai prelucrării suprafeţei sculptate P

Calculul parametrilor optimali ai prelucrărilor suprafeţei sculptate **P** implică dezvoltarea unor procedee de calcul care să răspundă acestor cerinţe şi care în practică se realizează prin 3 paşi:

- la nivel local;
- la nivel regional;
- la nivel global.

A) <u>Generarea locală</u> a suprafeţei se poate face considerând suprafaţa elementară a suprafeţei sculptate **P** ce urmează a fi realizată în punctul **CC** de contact **K**:

Din ecuaţia **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)$ al celor două suprafeţe **P** şi **T**:

$$C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right) \Rightarrow r_{cnf}(\varphi,\mu) =$$

$$= \sqrt{\left|\frac{E_P\, G_P}{L_P G_p \cos^2\varphi - M_P\sqrt{E_P\, G_P}\,\sin 2\varphi + N_P E_P \sin^2\varphi}\right|}\; sgn\, \Phi_{2.P}^{-1}$$
$$+ \sqrt{\left|\frac{E_T\, G_T}{L_T G_T \cos^2(\varphi+\mu) - M_T\sqrt{E_T\, G_T}\,\sin 2(\varphi+\mu) + N_T\, E_T \sin^2(\varphi+\mu)}\right|}$$

calculul diametrului d_{cnf} a lui $C_{nf_R}\left({}^{P}/_{T}\right)$ se obţine după formula:

$$d_{cnf} = d_{cnf}\,(U_P, V_P, U_T, V_T, \mu, \varphi).$$

Pentru ca un punct al suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare să poată fi un punct optimal sunt necesare condiţiile:

$$\frac{\partial d_{cnf}}{\partial U_T} = 0 \text{ şi } \frac{\partial d_{cnf}}{\partial V_T} = 0.$$

În plus pentru determinarea condiţiilor suficiente pentru calculul lui d_{cnf}^{min} este necesar ca inegalităţile:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 d_{cnf}}{\partial U_T^2} & \frac{\partial^2 d_{cnf}}{\partial U_T \partial V_T} \\ \frac{\partial^2 d_{cnf}}{\partial U_T \partial V_T} & \frac{\partial^2 d_{cnf}}{\partial V_T^2} \end{vmatrix} > 0 \text{ şi } \frac{\partial^2 d_{cnf}}{\partial U_T^2} > 0$$

să fie satisfăcute.

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de mai sus şi impunerea condiţiilor suficiente pentru calculul lui d_{cnf}^{min} conduce la calculul coordonatelor carteziene U_T^{opt} şi V_T^{opt} ale unui punct optimal K_T a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare.

Pentru a obţine productivitatea maximă posibilă generării suprafeţei sculptate **P** este necesar ca punctul considerat K_P al suprafeţei **T** a sculei generatoare să coincidă cu punctul optimal K_T al suprafeţei **P.** iar atunci când punctele K_P, K_T şi K coincid, se va considera un punct unic $K\,(K_P \equiv K_T \equiv K)$.

Punctele de contact impun restricţii importante la mişcarea relativă a suprafeţei **T** faţă de suprafaţa **P**. În acest caz, singura mişcare permisă pentru suprafeţele **P** şi **T** în contact, se poate desfăşura numai în punctul **CC** de contact **K**.

În funcţie de parametrii suprafeţelor **P** şi **T** în punctul **CC** de contact **K,** suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare poate fie să se rotească în jurul vectorului normal comun $\boldsymbol{n}_P$, fie să se deplaseze cu un unghi dat în jurul aceluiaşi vector, nefiind permise, în acest caz, alte mişcări relative pentru suprafeţele **P** şi **T**.

Fie μ unghiul dintre suprafeţele **P** şi **T** în contact şi ecuaţia diametrului d_{cnf} a **coeficientului de conformitate** $\boldsymbol{C_{nf_R}}\left({}^{\boldsymbol{P}}/_{\boldsymbol{T}}\right)$:

$$d_{cnf} = d_{cnf}\,(U_P, V_P, U_T, V_T, \mu, \varphi).$$

Unghiul optimal μ^{opt} poate fi calculat ca soluţie a ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{\partial d_{cnf}}{\partial \mu} = 0$$

şi care să satisfacă condiţia necesară şi suficientă:

$$\frac{\partial^2 d_{cnf}}{\partial \mu^2} > 0.$$

Or, aceasta ne permite obţinerea punctului minimal d_{cnf}^{min} şi care este optimul local al suprafeţei **T** a sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată **P**.

Ca urmare, în funcţie de soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{\partial d_{cnf}}{\partial \mu} = 0,$$

sculele aşchietoare trebuie să se deplaseze în jurul vectorului $\boldsymbol{n}_P$ după un unghi optimal μ^{opt} relativ la suprafaţa **P**.

Direcţia după care diametrul curent d_{cnf} este măsurată face un unghi φ cu direcţia principală $\boldsymbol{t}_{1.P}$ a suprafeţei sculptate **P**.

Ca urmare, cu ajutorul ecuaţiei de mai sus:

$$\frac{\partial d_{cnf}}{\partial \mu} = 0$$

şi satisfăcând condiţia necesară şi suficientă dată, se poate obţine valoarea optimală φ^{opt} a unghiului φ.

Fie vectorul mişcării sculei aşchietoare $\boldsymbol{F}_{fr}$ care se deplasează după unghiul $\xi^{opt} = \varphi^{opt} + 90^0$, unghi care specifică direcţia optimală după care punctul **CC** de contact **K** se deplasează.

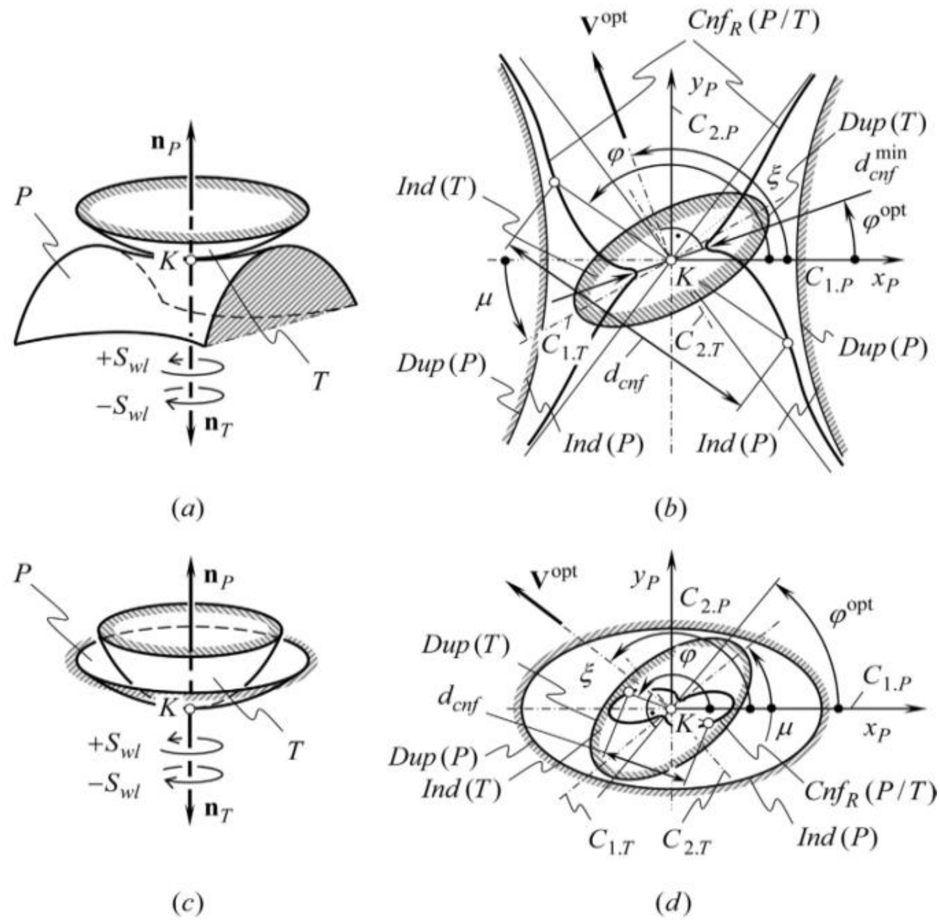


Fig. 7.26. Rezultatele soluţiilor problemei prelucrării locale a suprafeţei sculptate **P**

În Fig. 7.26 se prezintă: (a) rezultatele prelucrării unei suprafeţe **P** convexe, (c) unei suprafeţe **P** concave, iar (b) şi (d) secţiunile corespunzătoare celor două situaţii. Se observă unghiul optimal $\xi^{opt} = \varphi^{opt} + 90^0$ al direcţiei optimale al vectorului $\boldsymbol{V}^{opt}$ relativ la mişcarea celor două suprafeţe.

Ca un caz particular ce apare la rezolvarea problemei locale a prelucrării suprafeţei sculptate **P** se poate menţiona cazul când cele două configuraţii optimale alternative a celor două suprafeţe să fie echivalente una faţă de alta, caz menţionat în figura de mai jos (Fig. 7.27):

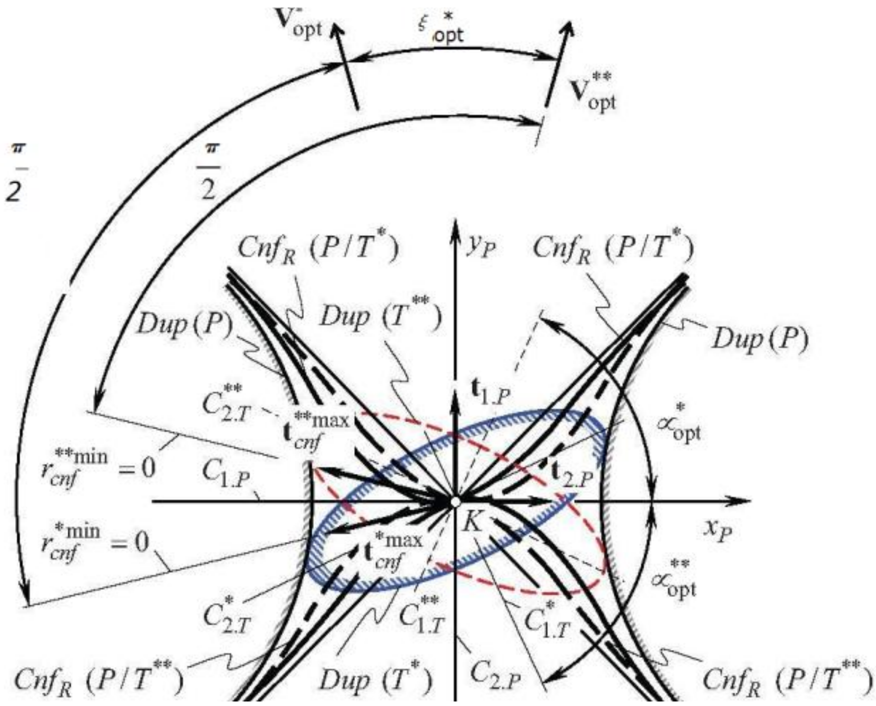


Fig. 7.27. Exemplu de generare a unei suprafeţe concave **P** de către suprafaţa convexă **T** a sculei aşchietoare

În Fig. 7.27 se prezintă generarea unei suprafeţe concave **P** de către suprafaţa convexă **T** a sculei aşchietoare. Raza minimală a **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\,(P/_{T^*})$ a suprafeţei P: r_{cnf}^{*min} şi a suprafeţei optimale $\mathbf{T}^*$ a sculei aşchietoare este zero ($r_{cnf}^{*min} = 0$).

Se poate observa că cele două suprafeţe **P** şi $\mathbf{T}^*$ se află sub un unghi optimal μ_{opt}^{*}. Vectorul direcţiei optimale $\mathbf{V}_{opt}^{*}$, relativ la suprafaţa locală **P,** este ortogonal la direcţia spre care raza minimă $r_{cnf}^{*min} = 0$ a **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\,(P/_{T^*})$ este măsurată. Această direcţie este direcţia ratei maximale a **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\,(P/_{T^*})$.

Pe de altă parte, aceeaşi porţiune locală **concavă** a suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare poate fi generată de aceeaşi porţiune **convexă** a suprafeţei generatoare **T** a sculei generatoare pentru o configuraţie diferită a sculei aşchietoare.

Şi în acest caz, valoarea minimală a razei **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\,(P/_{T^{**}})$ a suprafeţei **P** şi a suprafeţei $\mathbf{T}^{**}$ a sculei aşchietoare este egală cu zero ($r_{cnf}^{**min} = 0$), iar secţiunea de plan $C_{1.T}^{**}$ a suprafeţei $\mathbf{T}^{**}$ a sculei aşchietoare se află sub unghiul optimal μ_{opt}^{**min} dintre cele două suprafeţe **P** şi $\mathbf{T}^{**}$.

Vectorul direcţiei optimale $\mathbf{V}_{opt}^{**}$ a suprafeţei $\mathbf{T}^{**}$ a sculei aşchietoare relative la suprafaţa locală P este ortogonal la direcţia după care raza minimă r_{cnf}^{**min} a **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\left(P/_{T^{**}}\right)$ este măsurată.

Această direcţie este direcţia ratei maxime de conformitate a suprafeţei generatoare a sculei aşchietoare la suprafaţa sculptată locală P şi este notată cu r_{cnf}^{**min}.

În final, referitor la Fig. 7.27 se mai poate observa că există două direcţii optimale ale mişcării relative a sculei aşchietoare: prima direcţie optimală V_{opt}^{*}, specificată de unghiul $\xi_{opt}^{*} = \varphi_{opt}^{*} + 90^0$, iar a doua direcţie optimală V_{opt}^{**} specificată de unghiul $\xi_{opt}^{**} = \varphi_{opt}^{**} + 90^0$, dar care nu sunt prezentate în Fig. 7.27 din lipsă de spaţiu, direcţiile V_{opt}^{*} şi V_{opt}^{**} fiind sub un unghi $\Delta\,\xi_{opt}$, una faţă de alta.

Observaţie: referitor la problema generării optimale a suprafeţei sculptate locale **P** se poate arăta că soluţiile găsite local la ecuaţiile diferenţiale de mai sus, urmărind procesul descris, au aplicabilitate doar în cadrul suprafeţei sculptate **P** local aleasă.

B) Aceste soluţii conduc la rezolvarea problemei găsirii soluţiei optimale pentru generarea soluţiei regionale a suprafeţei sculptate **P**.

Considerând:

- generarea suprafeţei sculptate **P** de către suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare;
- un punct **CC** de contact **K** ϵ **P** având coordonatele carteziene U_T şi V_T;
- valorile optimale U_T^{opt}, V_T^{opt};
- unghiul optimal μ^{opt} al suprafeţelor **P** şi **T** măsurat între principalele direcţii $t_{1.P}$ şi $t_{1.T}$ pentru care diametrul curbei caracteristice a **coeficientului de conformitate** $C_{nf_R}\left(P/_{T^{**}}\right)$ are valoarea minimală d_{cnf}^{min} faţă de vectorul direcţiei principale $t_{1.P}$,

se poate obţine direcţia optimală ξ^{opt} a deplasării sculei aşchietoare deasupra suprafeţei sculptate **P**:

$$\xi^{opt} = \varphi^{opt} + 90^0.$$

Fie vectorul $\mathbf{V}^{opt}$ al direcţiei optimale a traiectoriei sculei aşchietoare pe suprafaţa sculptată **P** exprimată matricial în sistemul de coordonate carteziene x_P, y_P, z_P definit pe suprafaţa locală **P** considerată:

$$\mathbf{V}^{opt} = \begin{bmatrix} \sin\xi^{opt} \\ \cos\xi^{opt} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Folosind operatorul $\mathbf{Rs}\,(K \mapsto NC)$ (Fig. 7.28) reprezentăm vectorul $\mathbf{V}^{opt}$ în coordonatele carteziene de sistem X_{NC}, Y_{NC}, Z_{NC}:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{NC}}^{opt} = \mathbf{Rs}\,(K \mapsto NC)\,\mathbf{V}^{opt} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial x_P}{\partial U_P}(t)\cos\varphi^{opt}(t) - \dfrac{\partial x_P}{\partial V_P}(t)\sin\varphi^{opt}(t)\right) \\ \left(\dfrac{\partial y_P}{\partial U_P}(t)\cos\varphi^{opt}(t) - \dfrac{\partial y_P}{\partial V_P}(t)\sin\varphi^{opt}(t)\right) \\ \left(\dfrac{\partial z_P}{\partial U_P}(t)\cos\varphi^{opt}(t) - \dfrac{\partial z_P}{\partial V_P}(t)\sin\varphi^{opt}(t)\right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

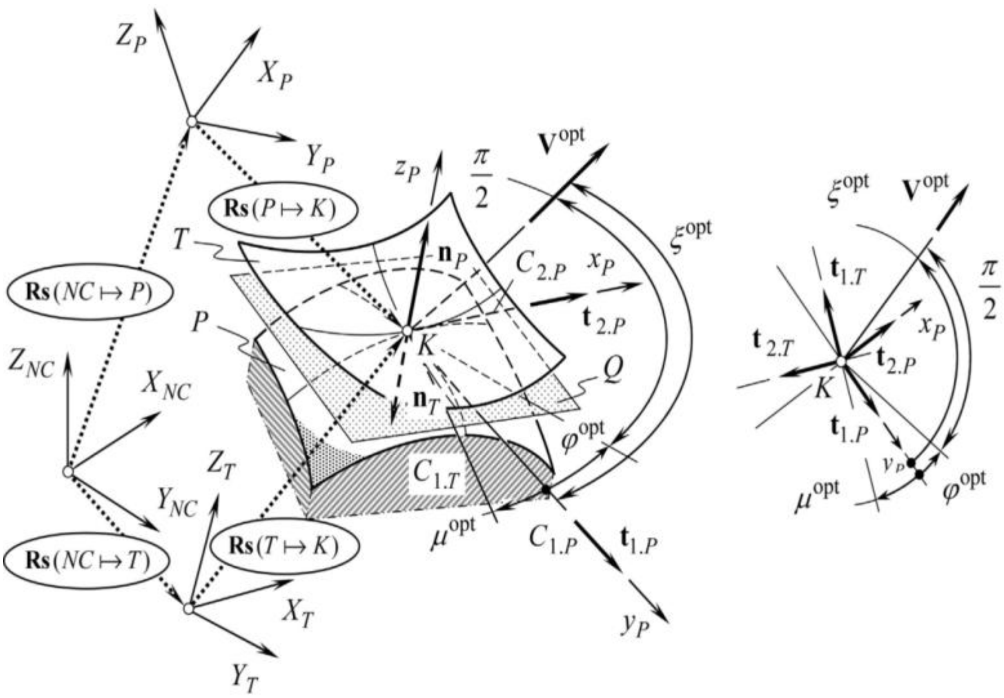


Fig. 7.28. Configurarea şi mişcarea relativă a suprafeţelor **P** şi **T** în funcţie de coordonatele carteziene de sistem $\boldsymbol{X_{NC}}, \boldsymbol{Y_{NC}}, \boldsymbol{Z_{NC}}$ asociate maşinii-unelte cu comandă numerică.

Ca urmare,

$$[\boldsymbol{r}_{tp}^{opt}](t) = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial X_P}{\partial U_P}(t) \cos\varphi^{opt}(t) - \frac{\partial X_P}{\partial V_P}(t) \sin\varphi^{opt}(t) \right) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial Y_P}{\partial U_P}(t) \cos\varphi^{opt}(t) - \frac{\partial Y_P}{\partial V_P}(t) \sin\varphi^{opt}(t) \right) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial Z_P}{\partial U_P}(t) \cos\varphi^{opt}(t) - \frac{\partial Z_P}{\partial V_P}(t) \sin\varphi^{opt}(t) \right) dt \\ 1 \end{bmatrix}$$

În punctul curent **CC** de contact **K,** viteza maximă de lucru a sculei aşchietoare de-a lungul traiectoriei optimale este limitată de valoarea limită a regimului de lucru $[\breve{F}_{fr}]$ a acestor scule. Din considerente geometrice şi cinematice, viteza maximă a sculei aşchietoare este mai mare când se prelucrează suprafeţe sculptate **P** concave şi mai mică când se prelucrează suprafaţa sculptate **P** convexe.

Ca un caz particular, când ecuaţia traiectoriei optimale a sculei se exprimă prin ecuaţia diferenţială

$$[\boldsymbol{r}_{tp}^{opt}] \Rightarrow \begin{bmatrix} E_P\, dU_P + F_P\, dV_P & F_P\, d\,U_P + G_P\, dV_P \\ L_P\, dU_P + M_P\, dV_P & M_P\, d\,U_P + N_P\, dV_P \end{bmatrix} = 0$$

rezultă o ecuaţie ce se poate aplica când sculele aşchietoare au o extremitate aşchietoare sferică sau plată. În aceste cazuri, unghiul μ dintre suprafeţele **T şi P** ia valori diferite, ceea ce impune considerarea alegerii traiectoriilor suprafeţelor optimale de-a lungul liniilor de curbură de pe suprafaţa sculptată **P**.

Coordonatele carteziene de sistem X_P, Y_P, Z_P care exprimă traiectoria sculei aşchietoare se rotesc întocmai ca un corp rigid cu viteza unghiulară de rotaţie

$$|\mathbf{\Omega}| = \sqrt{k_{tp}^2 + t_{tp}^2},$$

axa de rotaţie fiind dată de **vectorul lui Darboux:**

$$\mathbf{\Omega} = k_{tp}\,\boldsymbol{t}_{tp} + t_{tp}\,\boldsymbol{b}_{tp},$$

unde k_{tP} şi t_{tP} sunt curbura şi respectiv torsiunea traiectoriei punctului **CC** de contact **K**, iar $\boldsymbol{t}_{tp}$ şi $\boldsymbol{b}_{tp}$ sunt vectorul tangent unitar şi respectiv vectorul binormal al traiectoriei punctului curent **K**.

În funcţie de vectorul normal $\boldsymbol{n}_{tp}$ şi de vectorul tangent unitar $\boldsymbol{t}_{tp}$ a traiectoriei punctului **CC** de contact **K**:

$$\mathbf{\Omega} = \sqrt{k_{tp}^2 + \tau_{tp}^2}\,\left(\boldsymbol{t}_{tp}\cos\theta + \boldsymbol{n}_{tp}\sin\theta\right),$$

unde θ este unghiul dintre **vectorul lui Darboux** $\mathbf{\Omega}$ şi vectorul tangent $\boldsymbol{t}_{tp}$ la traiectoria punctului **CC** de contact **K** curent considerat. Se poate observa că viteza unghiulară de rotaţie $|\mathbf{\Omega}|$ este funcţie de curbura traiectoriei punctului **CC** de contact **K**.

C) Sinteza generării globale a suprafeţei sculptate **P** este faza finală a optimizării obţinerii şi prelucrării suprafeţei sculptate **P**. Soluţiile la această problemă sunt, în principiu, legate de problemele optimizării generării locale şi regionale prezentate mai sus şi, în principal, aceasta se realizează minimizând timpul de prelucrare pe maşina-unealtă cu comandă numerică.

Pentru a rezolva această problemă este necesar:

a) a minimiza interferenţa traiectoriilor învecinate ale sculei aşchietoare ce prelucrează suprafaţa sculptată **P**;
b) a determina parametrii optimali ai intrării şi ieşirii sculei aşchietoare de-a lungul traiectoriei de prelucrare;
c) a determina punctul optimal de start al prelucrării pe maşini-unelte cu comandă numerică.

În practică, suprafaţa sculptată **P** este realizată printr-un număr de traiectorii ce acoperă suprafaţa sculptată nominală **P.** Mărirea traiectoriilor de–a lungul traiectoriilor punctului **CC** de contact **K** pe suprafaţa sculptată **P,** dar şi perpendicular pe traiectorii, poate face ca diferite traiectorii să interfereze una cu alta, iar unele porţiuni ale traiectoriilor suprafeţei sculptate **P** chiar să se suprapună. Or, aceste interferenţe pot cauza reducerea performanţelor maşinii-unelte cu comandă numerică, ceea ce determină necesitatea minimizării interferenţei traiectoriilor învecinate.

În general, traiectoria punctului **CC** de contact **K** al sculei aşchietoare este o curbă în spaţiul tridimensional de traiectorie $l_{tr} = l_{tr}\,(r_{tr}, \tau_{tr})$, unde l_{tr} este lungimea arcului traiectoriei măsurată dintr-un punct al traiectoriei şi care este exprimată în funcţie de raza de curbură r_{tr} a unui punct al traiectoriei şi de torsiunea τ_{tr} în acel punct.

În punctul **CC** de contact **K** curent considerat, dimensiunea adaosului de prelucrare se poate exprima în funcţie de lungimea traiectoriei de ordinul i:

$$\breve{F}_{ss}^{(i)} = \breve{F}_{ss}^{(i)}\left[l_{tr}^{(i)}\right].$$

Pentru o unitate de timp dt, scula aşchietoare se poate deplasa de-a lungul traiectoriei de ordinul i cu o distanţă dl_{tr}, generând o suprafaţă sculptată:

$$dS_{tr}^{(i)} = \breve{F}_{ss}^{(i)}\left[l_{tr}^{(i)}\right] dt.$$

Suprafaţa generată printr-o singură trecere de ordinul i este:

$$S_{tr}^{(i)} = \int_{\left[l_{tr}^{(i)}\right]} \breve{F}_{ss}^{(i)} \left[l_{tr}^{(i)}\right] dt,$$

iar suprafaţa totală generată de totalitatea traiectoriilor este:

$$S_{tr} = \sum_{i=1}^{n} S_{tr}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\left[l_{tr}^{(i)}\right]} \breve{F}_{ss}^{(i)} \left[l_{tr}^{(i)}\right] dt,$$

unde n reprezintă numărul total al traiectoriilor necesare acoperirii întregii suprafeţe.

În general, suprafaţa totală S_{tr} este mai mare decât suprafaţa generată, adică $S_{tr} > S_{sg}$. Ca urmare, definim rata de interferenţă a traiectoriilor vecine cu ajutorul coeficientului de interferenţă

$$K_{int} = \frac{S_{tr} - S_{sg}}{S_{sg}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_{\left[l_{tr}^{(i)}\right]} \breve{F}_{ss}^{(i)} \left[l_{tr}^{(i)}\right] dt - S_{sg}}{S_{sg}}$$

şi care este funcţie de:

a) Parametrii de design ai suprafeţei sculptate **P**;
b) Parametrii de design ai suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare;
c) Parametrii cinematici ai operaţiei de prelucrare a suprafeţei **T**.

În practică, se cere ca acest coeficient K_{int} să fie minimizat utilizând metode convenţionale de calcul ale minimizării funcţiilor analitice.

7.8.3. Efectul zonei de frontieră asupra prelucrării suprafeţei sculptate P

De remarcat că generarea suprafeţei locale în apropierea suprafeţei de frontieră este diferită de generarea restului suprafeţei şi este evident că forma şi parametrii suprafeţei de frontieră influenţează eficienţa procesului de generare a suprafeţei sculptate **P**.

Or, această remarcă conduce la necesitatea studierii efectelor zonei de frontieră asupra prelucrării suprafeţei sculptate P.

Fie suprafaţa sculptată **P** şi toleranţa admisă $[h]$ a prelucrării, iar $S_{[h]}$ suprafaţa toleranţei admisă la distanţa $[h]$ faţă de suprafaţa sculptată **P**. Ca urmare, suprafaţa **T** se află între suprafaţa **P** şi $S_{[h]}$.

Suprafaţa generatoare **T** a sculei aşchietoare atinge suprafaţa sculptată locală considerată într-un punct K_1 (Fig. 7.29) şi intersectează suprafaţa de toleranţă $S_{[h]}$ rezultând curba 1 de intersecţie a suprafeţelor $S_{[h]}$ şi **T** ca o curbă închisă de tip elipsă. Această curbă nu are puncte comune cu suprafaţa de frontieră.

Fie un punct K_3 al traiectoriei punctului **CC** de contact **K**, în acest caz curba de intersecţie 3 a suprafeţelor $S_{[h]}$ şi **T** nu este o linie închisă, intersectând suprafaţa de frontieră în punctele B şi C.

Cursa sculei aşchietoare se încheie când punctul limită L de pe conturul curbei 3 atinge suprafaţa de frontieră în punctul L^*.

În cazul punctului K_2, suprafaţa de frontieră este intersectată în punctul A. Pentru orice punct A_i al suprafeţei locale de frontieră există punctele K_i, similare lui K_2 şi care formează conturul limită. Aceasta impune luarea în considerare a impactului de frontieră a acestor curbe descrise de traiectoria punctelor **CC** de contact **K** situate pe suprafaţa locală a curbei de frontieră şi pe conturul limită.

Se observă că lăţimea bc a acestei suprafeţe măsurată de-a lungul perpendicularei la curba de frontieră nu este constantă. Fie W_i lăţimea arcului ac în punctul curent c de pe traiectoria punctului de **CC** contact **K**. Regimul de lucru al sculei aşchietoare determină un adaos de prelucrare care poate fi constant pentru un arc ac al acestei traiectorii sau poate varia în funcţie de mărimea curentă a traiectoriei sculei.

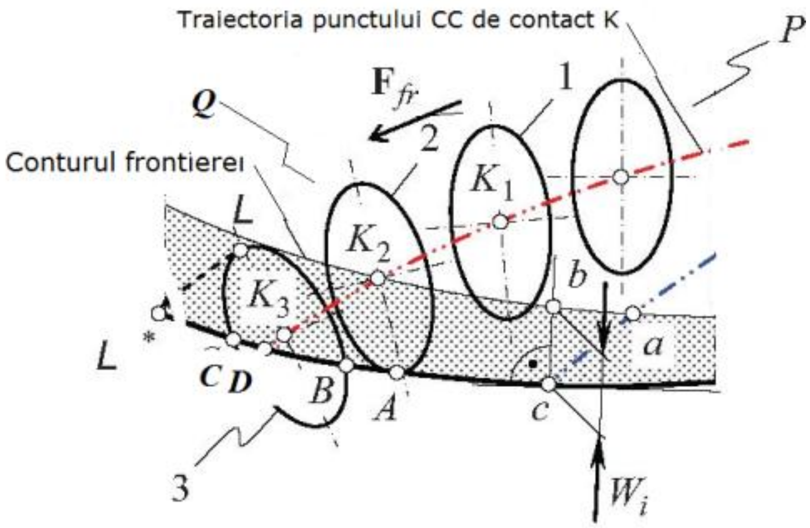


Fig. 7.29. Efectul de frontieră asupra prelucrării suprafeţei sculptate **P**

Se pot remarca următoarele efecte ale impactului zonei de frontieră asupra întregii suprafeţe sculptate **P**:

a) Mărirea adaosului de prelucrare provoacă mărirea traiectoriei sculei aşchietoare în contact cu suprafaţa locală sculptată;
b) Mărirea toleranţei $[h]$ prelucrării suprafeţei sculptate **P** măreşte traiectoriile sculei aşchietoare, atunci când acestea ies din contactul cu suprafaţa locală de prelucrat;
c) Cu cât suprafaţa sculptată locală **P** considerată este mai mică, cu atât impactul zonei de frontieră asupra eficienţei prelucrării este mai mare;
d) Impactul efectului zonei de frontieră este cu atât mai mare cu cât traiectoriile de prelucrare sunt mai lungi;
e) Poziţia punctului de la care începe prelucrarea suprafeţei sculptate **P** afectează de asemenea rezultatele prelucrării.

7.8.4. Cuplarea modelului geometric al analizei suprafeţelor sculptate cu programarea maşinilor-unelte cu comandă numerică

Realizarea modelul geometric al generării suprafeţelor sculptate reprezintă o metodă avansată pentru producerea de suprafeţe sculptate folosind maşini-unelte cu comandă numerică.

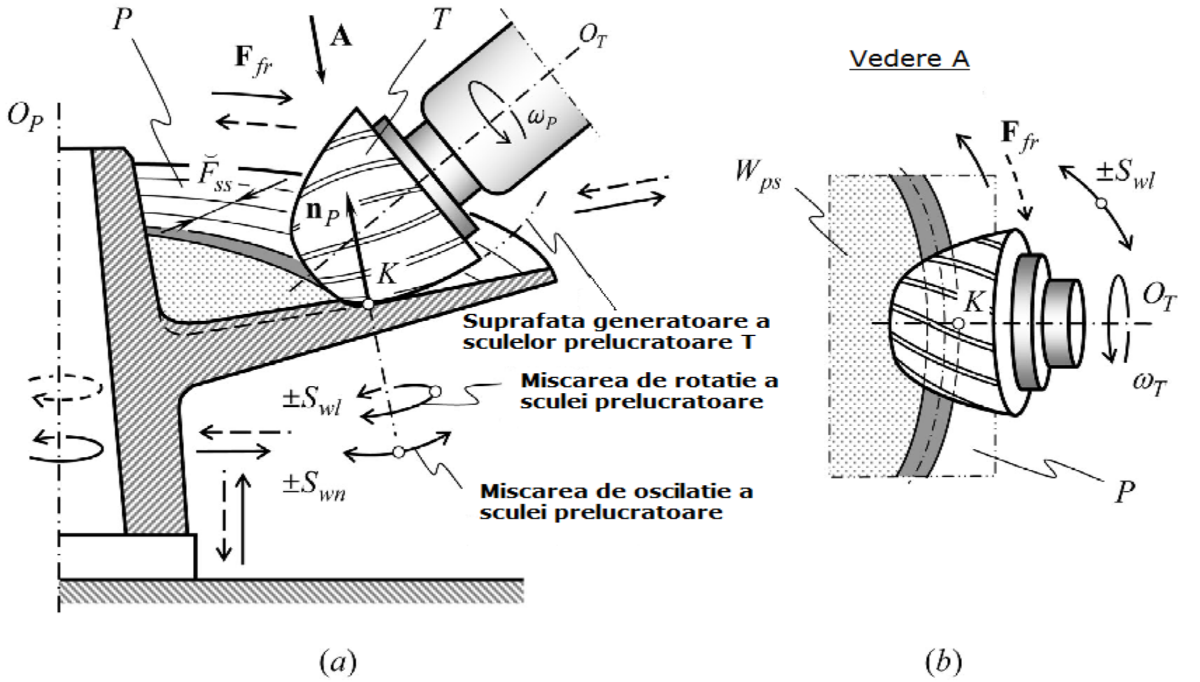


Fig. 7.30. Optimizarea prelucrării suprafeţei sculptate **P** pe maşini-unelte cu comandă numerică

Fie prelucrarea suprafeţei sculptate **P** pe maşini-unelte cu comandă numerică, prezentată în figura de mai sus (Fig. 7.30). În funcţie de aşezarea piesei pe maşina-unealtă şi în funcţie de tipul sculei aşchietoare se modelează geometria suprafeţei generatoare **T** a sculei.

În aceeaşi figură sculele aşchietoare se rotesc în jurul axei O_T cu o viteză unghiulară φ_T, descriind o traiectorie calculată a fi optimală şi executând o degroşare optimală F_{fr}. Calculul traiectoriei optimale se poate face cu ecuaţia determinată anterior:

$$[\,\boldsymbol{r}_{tp}^{opt}\,](t) = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial x_P}{\partial U_P}\,(t)\cos\varphi^{opt}(t) - \frac{\partial X_P}{\partial V_P}\,(t)\sin\varphi^{opt}\,(t)\right)dt \\ \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial Y_P}{\partial U_P}\,(t)\cos\varphi^{opt}(t) - \frac{\partial Y_P}{\partial V_P}\,(t)\sin\varphi^{opt}\,(t)\right)dt \\ \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial Z_P}{\partial U_P}\,(t)\cos\varphi^{opt}(t) - \frac{\partial Z_P}{\partial V_P}\,(t)\sin\varphi^{opt}\,(t)\right)dt \\ 1 \end{bmatrix}$$

După executarea prelucrării urmând o traiectorie dată, sculele aşchietoare se deplasează de-a lungul traiectoriei punctului **CC** de contact **K** în direcţia F_{ss} la o distanţă F_{ss}, începând o nouă prelucrare pe o nouă traiectorie.

Pentru ca prelucrarea să aibă o eficienţă ridicată, dimensiunea adaosului de prelucrare la o trecere trebuie să fie la mărimea maximă pentru orice punct al suprafeţei de prelucrat. Or, pentru aceasta se impun cel puţin două mişcări de poziţionare a sculei aşchietoare: una de pendulare $\pm S_{wl}$ şi una de rotaţie $\pm S_{wn}$.

Considerăm iniţial mişcarea de pendulare a sculei aşchietoare $\pm S_{wl}$ şi apoi cea de rotaţie $\pm S_{wn}$ prezentate în

Fig. 7.31 şi unde $\pm S_{wn}$ este direcţia mişcării de pendulare care are loc sub un anumit unghi la direcţia specificată t_{cnf}^{max}, ceea de permite o traiectorie oblică a punctului **CC** de contact **K** în cadrul suprafeţei generatoare **T** a sculei aşchietoare. Ca urmare a acestui fapt, deviaţiile cinematicii maşinii-unelte cu comandă numerică pentru prelucrarea unei piese date pot fi reduse semnificativ.

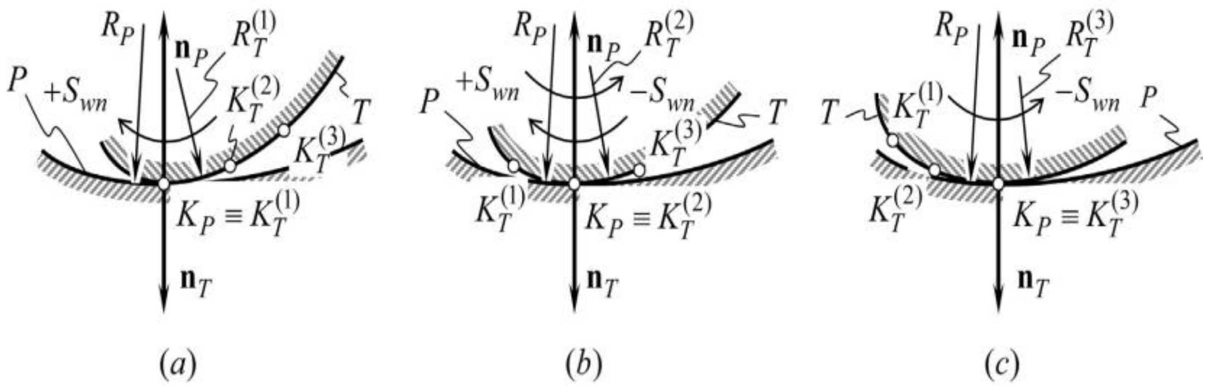


Fig. 7.31. Mişcarea de rotaţie $\pm \boldsymbol{S_{wn}}$ care provoacă o rotaţie $\boldsymbol{\omega_n}$ a sculei aşchietoare în jurul perpendicularei comune $\boldsymbol{n_P} = -\boldsymbol{n_T}$.

Viteza mişcării de rotaţie $\pm S_{wn}$ este egală cu $\omega_n = \frac{\partial\mu}{\partial t}$; cele două mişcări considerate fiind efectuate simultan.

Rezultanta mişcării relative a maşinii şi a sculei aşchietoare se poate descompune în diferite rotaţii şi translaţii generate de sistemele de prelucrare a maşinii-unelte cu comandă numerică.

7.9. Concluzii

Modelarea geometrică reprezintă o tehnică eficientă de realizare a suprafeţelor sculptate. În cadrul acestui capitol s-au prezentat problemele ce se iau în considerare atunci când se consideră folosirea acestor tehnici în cadrul procesului de fabricaţie.

În general, realizarea suprafeţelor sculptate necesită utilizarea unor maşini unelte cu comandă program de mare complexitate, dar care ridică semnificativ costurile de fabricaţie, ceea ce impune stringent problema utilizării optimale a acestor maşini.

Această condiţie, determinantă în cazul utilizării maşinilor-unelte cu comandă program, impune condiţii restrictive referitoare la alegerea optimală a regimurilor de lucru, optimizarea proiectării sculelor, impunerea corespunzătoare a condiţiilor de toleranţă.

Pentru realizarea practică a suprafeţelor sculptate sunt necesare mişcări specifice ale sculei aşchietoare, cu regimuri de lucru adecvate prelucrării. Totodată, realizarea acestor suprafeţe necesită optimizarea regimurilor de lucru relative ale mişcărilor în orice moment al prelucrării. În lucrare s-a prezentat un astfel de criteriu de optimizare.

Prin considerarea elementelor mişcărilor sculei aşchietoare şi formalizarea lor matematică a fost posibilă obţinerea unor criterii de optimizare care se cer luate în considerare la alegerea adecvată a regimurilor de lucru a maşinii-unelte cu comandă program.

De exemplu, în lucrare se propune folosirea **coeficientului de conformitate** la studierea suprafeţei sculptate faţă de suprafaţa sculelor. Prin mărirea coeficientului de conformitate al suprafeţei generatoare a sculei aşchietoare faţă de suprafaţa sculptată se obţine reducerea corespunzătoare a dimensiunii adaosului de prelucrare al suprafeţei sculptate, ceea ce indică importanţa studierii metodelor optimale de realizare a sculei aşchietoare, în vederea unei prelucrări adecvate.

Prin definirea şi considerarea ratei de conformitate a suprafeţei generatoare a sculei faţă de suprafaţa sculptată se poate măsura eficienţa operaţiei de prelucrare, influenţând productivitatea procesului de prelucrare, reducerea adaosului de prelucrare, reducerea timpului de prelucrare pe maşina-unealtă cu comandă program.

Se prezintă un algoritm de calcul al proiectărilor sculelor aşchietoare care permite obţinerea suprafeţei generatoare a sculei având o topologie optimală, obţinându-se totodată parametrii constructivi ce satisfac condițiile optimale de prelucrare.

Acest capitol prezintă pe larg condiţiile necesare şi suficiente pentru generarea optimală a suprafeţei sculptate, condiţii care trebuie luate în considerare atunci când se are în vedere modelarea optimală a suprafeței sculptate.

Evaluarea erorilor de prelucrare a suprafeţei sculptate face obiectul unor capitole aparte, dată fiind importanţa acestora. Au fost luate în considerare: deplasările liniare şi unghiulare ale elementelor mecanice, deplasările cauzate de elasticitatea materialelor componente supuse prelucrării şi deplasările cauzate de modificările termice în timpul prelucrării.

Au rezultat o serie de metode de mărire a preciziei suprafeţei sculptate care, luate în considerare, permit evidențierea acestora şi pot constitui o sursă de reducere a erorilor de prelucrare.

În final, prin studiul prelucrării optimale a suprafețelor la nivel local, regional şi global au rezultat o serie de criterii de optimizare a prelucrării suprafeţei sculptate, care aplicate în practică permit determinarea condiţiilor pentru care productivitatea generării suprafeţelor este maximă, având o importanţă deosebită la prelucrarea optimală pe maşini-unelte cu comandă numerică.

Totodată, s-a remarcat că generarea suprafeţei locale în apropierea suprafeţei de frontieră este diferită de generarea restului suprafeţei şi deci, forma şi parametrii suprafeţei de frontieră influenţează eficienţa procesului de generare a suprafeţei sculptate. Ca urmare, studiindu-se aceste zone au rezultat o serie de efecte ale zonei de frontieră asupra eficienței pe maşinile-unelte cu comandă program.

În concluzie, se poate afirma că determinarea prelucrării optimale a suprafeţei sculptate, începând cu găsirea punctului optim de început a acestei prelucrări şi terminând cu alegerea optimală a regimurilor de aşchiere este o problemă importantă care se cere studiată în continuare.

CONCLUZII FINALE, CONTRIBUŢII ŞI PERSPECTIVE

Concluzii finale

Modelarea matematică, în general, şi modelarea geometrică, ca parte componentă a modelării matematice, care au făcut obiectul acestei lucrări, s-au dezvoltat ca urmare a progresului general al dezvoltării tehnologice, pe care societăţile umane le-au înregistrat după sfârşitul secolului al XIX-lea şi, în special în secolul al XX-lea, dezvoltare fără precedent în istoria umanităţii, atât ca domenii de dezvoltare, practic afectând orice aspect al vieţii umane, dar şi ca viteză de schimbare şi transformare a societăţilor umane.

Lucrarea a abordat în prima parte noţiuni şi principii fundamentale referitoare la subiectul abordat, aşa cum sunt ele prezentate în literatura de specialitate consultată. A fost definit termenul de model şi subiect de modelat, model propus şi subiect de modelat, crearea modelului. S-a propus o succesiune logică a creerii, analizei şi, în final, testării şi acceptării modelului creat.

Din abordarea exhaustivă a problemei modelări matematice numerice, a aspectelor cantitative şi calitative ale procesului de modelare, a rezultat că problema erorilor ce inevitabil apar în obţinerea, prelucrarea, testarea şi stocarea datelor au o importanţă deosebită în obţinerea rezultatelor ce definesc procesul de modelare, problemă ce a fost tratată în mod detailat în finalul capitolului 1.

A rezultat necesitatea aplicării analizei erorilor la datele ce definesc obiectul de modelat, considerându-se că datele afectate de erori conduc la rezultate distorsionate ale procesului de modelare, relevându-se importanţa validării modelului obţinut, componentă principală a procesului de modelare, în funcţie de care modelul propus se acceptă sau este supus perfecţionării şi îmbunătăţirilor, atât de formă, cât şi de conţinut.

Lucrarea a prezentat modelarea geometrică, ca parte importantă a procesului de modelare matematică. Prin definirea scopului şi a destinaţiei modelării geometrice, a rezultat importanţa tehnicilor de modelare geometrică a suprafeţelor în construcţia modelelor, când pornind de la un volum de date numerice sau pornind de la desene şi schiţe de proiectare, se pot obţine rezultate semnificative referitoare la obiectele modelate.

De remarcat că, deşi realizările şi cunoştinţele în acest domeniu al matematicii au avansat în mod considerabil, domeniul este departe de a fi epuizat. De exemplu, se poate considera că teoria funcţiilor spline, şi nu numai, poate aduce noi rezultate şi cercetări care să aprofundeze şi să diversifice cunoştinţele din domeniul tehnicilor de interpolare.

În lucrare s-a evidenţiat în mod deosebit faptul că la dezvoltarea acestor domenii ale matematicii au contribuit la importante descoperiri teoretice, dar şi cerinţe tehnologice. În capitolul 4 s-a prezentat pe larg contribuţia crucială a lui *Bernstein,* care descoperind polinoamele ce îi poartă numele, a făcut posibilă aproximarea numerică a curbelor şi a funcţiilor, şi care a reprezentat un punct de referinţă în dezvoltarea acestui domeniu.

S-a accentuat faptul că, deşi aceste polinoame sunt în atenţia matematicienilor de o sută de ani, domeniul este departe de a fi epuizat. De exemplu, în finalul capitolului s-a prezentat problema extinderii *polinoamelor lui Bernstein* în domeniul complex, şi care se poate considera un domeniu de cercetare viitor cu certe perspective.

În lucrare s-a arătat că cerinţele tehnologice ale dezvoltării societăţilor tehnologizate de după cel de-al doilea război mondial au condus la noi abordări, dobândindu-se noi cunoştinţe, care au progresat domeniul modelării matematice până la nivelul unei ştiinţe aparte, având un limbaj şi simboluri proprii de prezentare referitoare la domeniu propriu de cunoştinţe teoretice şi practice. S-a relevat faptul că dezvoltarea industriei de automobile de după anii 1950 a fost aceea care a determinat necesitatea obţinerii de modele ale diferitelor modele ce urmau a se fabrica, şi să determine progrese esenţiale ale acestei noi ramuri a matematicii.

Ca urmare, s-au aprofundat *polinoamele lui Bernstein,* făcându-se trecerea spre studiul *modelelor lui Bezier, algoritmului lui Casteljau şi al algoritmului lui Boor,* ca un caz particular al *algoritmului lui Casteljau.* Relevându-se importanţa polinoamelor definite prin părţi, în modelarea matematică s-au prezentat aceste polinoame ca o tehnică avansată în modelarea geometrică şi, în special, utilizarea polinoamelor (curbelor) spline folosite în modelarea geometrică.

În mod detaliat s-au prezentat suprafeţele şi volumele folosite în modelarea geometrică, în special suprafeţele bicubice şi bicuadrice. S-a avut în vedere extinderea polinoamelor de aproximare clasice la suprafeţe de aproximare, cu toate problemele ce apar în acest caz, insistându-se asupra unor tehnici de interpolare a suprafeţelor, folosind suprafeţe triunghiulare sau dreptunghiulare şi, în special, asupra zonelor de frontieră şi de conectare între suprafeţele.

Din cercetarea acestor zone a rezultat necesitatea acordării unei atenţii deosebite acestor zone, datorită singularităţilor ce apar la colţurile de conectare dintre suprafeţe, prezentându-se o metodă de studiere şi eliminare a acestor probleme. În final s-a prezentat utilizarea suprafeţelor rectangulare Gordon–Coons în modelarea geometrică, suprafeţele de interpolare Gordon–Coons bicubice şi suprafeţele de interpolare Gordon–Coons triunghiulare ca domenii de cercetare relativ recente în abordarea modelării suprafeţelor în spaţiu.

În lucrare s-a prezentat un exemplu referitor la cuplarea sistemelor de concepţie şi de fabricaţie a entităţilor geometrice. După prezentarea modelării geometrice a volumelor, ce pune probleme deosebite în cadrul modelării geometrice, extinzând aria modelării în spaţiu, s-a prezentat utilizarea geometriei constructive a volumelor pentru modelarea acestor volume, insistându-se în special asupra zonelor de frontieră capabile să producă distorsiuni, neregularităţi şi singularităţi.

La calculul proprietăţilor globale ale volumelor modelate s-a folosit metoda descompunerii în părţi componente şi metoda Timmer-Stern. A rezultat o metodă care utilizează reprezentarea frontierelor (marginilor) pentru a calcula proprietăţile globale ale modelului propus. Prin prezentarea modelării geometrice a intersecţiilor şi prin extinderea studiului la intersecţia suprafeţelor s-a avut în vedere modelarea matematică a acestor zone, ce pot avea implicaţii asupra continuităţii modelului.

În lucrare s-a prezentat o aplicaţie a modelării matematice în domeniul proiectării sculelor aşchietoare. Studiindu-se diverse tipuri de traiectorii ale sculelor în procesul de prelucrare s-au obţinut diverse profile ale acestora, care în cadrul unor mişcări optimizate, împreună cu o formă optimizată a profilului sculei, poate conduce la o prelucrare optimizată, ceea ce confirmă aşteptările referitoare la utilizarea metodelor avansate de proiectare bazate pe modelarea geometrică. Exemplul prezentat confirmă faptul că pot fi de aşteptat noi domenii de abordare matematică în care să se obţină rezultate importante, atât teoretice, dar mai ales practice.

Finalul lucrării a prezentat modelarea geometrică, ca o tehnică de concepţie şi fabricaţie a suprafeţelor sculptate pe maşini-unelte cu comandă numerică. S-a prezentat cinematica prelucrării suprafeţelor sculptate, folosindu-se un sistem local de referinţă format din două suprafeţe: suprafaţa sculptată şi suprafaţa generatoare a sculei aşchietoare.

Pentru a caracteriza precizia prelucrării pe maşini-unelte cu comandă numerică, s-a definit coeficientul de conformitate al suprafeţelor considerate în punctul de contact. Studiul variaţiei acestui coeficient a relevat direcţii de prelucrare care pot fi optimizate, ceea ce are o importanţă deosebită pentru reducerea costurilor de fabricaţie, în condiţiile folosirii unor maşini-unelte cu comandă numerică, de regulă scumpe.

Tot în finalul lucrării s-a abordat problema proiectării sculelor aşchietoare necesare realizării suprafeţelor sculptate, studiindu-se suprafaţa generatoare a sculelor, permiţând elaborarea unui algoritm de calcul al parametrilor constructivi ai sculelor, cu care s-a studiat posibilitatea existenţei unor scule ce permit schimbarea continuă a suprafeţei generatoare.

Un aspect deosebit l-a reprezentat studiul condiţiilor optimale ale generării suprafeţei sculptate. Au rezultat orientări optimale de deplasare a sculelor, ceea ce permite reducerea costurilor de prelucrare, importante în cazul prelucrări pe maşini-unelte cu comandă numerică.

Din lucrare a rezultat că un alt aspect important al prelucrării suprafeţelor sculptate îl constituie studiul erorilor de prelucrare în cadrul toleranţelor care se cer respectate, în conformitate cu caietul de sarcini. În lucrare s-au studiat componentele erorilor de prelucrare în punctele de contact a suprafeţei sculptate şi suprafaţa generatoare a sculelor de prelucrat, relevându-se faptul că acestea permit aproximarea erorilor de prelucrare şi calculul suprafeţei torului de aproximaţie a prelucrării suprafeţei sculptate, cu scopul de a reduce erorile de prelucrare.

În finalul concluziilor referitoare la modelarea matematică, în general, şi a modelării geometrice, în particular, şi care face obiectul acestei lucrări, se poate afirma cu certitudine că, deşi ultimii ani au confirmat realizări importante, aceste domenii ale matematicii sunt încă domenii de vârf ale cercetării fundamentale şi aplicate, unde sunt de aşteptat noi descoperiri teoretice şi practice.

Contribuţii personale

Contribuţii personale rezultate în urma elaborării lucrării:

1. Prin definirea termenului de model şi subiect de modelat, model propus şi subiect de modelat, crearea modelului, s-a propus o succesiune logică a creerii, analizei şi, în final, testării şi acceptării modelului creat.
2. Au fost prezentate *polinoamele lui Bernstein* în cadrul funcţiilor de o variabilă. De remarcat extinderea definirii polinoamelor pentru funcţii de două variabile şi, mai ales, în spaţiul n dimensional.
3. În calculul proprietăţilor globale ale volumelor modelate s-a folosit metoda descompunerii în părţi componente . A rezultat o metodă care utilizează

reprezentarea frontierelor (marginilor) pentru a calcula proprietăţile globale ale modelului propus.

4. Prin prezentarea unor aplicaţii a modelării matematice în domeniul proiectării sculelor aşchietoare, studiindu-se diverse tipuri de traiectorii ale sculelor în procesul de prelucrare, s-au obţinut diverse profile ale acestora, care în cadrul unor mişcări optimizate, împreună cu o formă optimizată a profilului sculei, poate conduce la o prelucrare optimizată pe maşini-unelte cu comandă numerică.
5. S-a prezentat modelarea geometrică, ca o tehnică de concepţie şi fabricaţie a suprafeţelor sculptate pe maşini-unelte cu comandă numerică. S-au studiat coordonatele de reprezentare a sistemul de referinţă în spaţiu a suprafeţelor de prelucrat şi efectul schimbărilor de coordonate asupra mişcărilor sculelor aşchietoare.
6. Pentru a caracteriza precizia prelucrării pe maşini-unelte cu comandă numerică s-a definit coeficientul de conformitate al suprafeţelor considerate în punctul de contact. Studiul variaţiei acestui coeficient a relevat direcţii de prelucrare care pot fi optimizate, ceea ce, în condiţiile folosirii unor maşini-unelte cu comandă numerică, de regulă scumpe, are o importanţă deosebită pentru reducerea costurilor de fabricaţie.
7. S-a abordat problema proiectării sculelor aşchietoare necesare realizării suprafeţelor sculptate, studiindu-se suprafaţa generatoare a sculelor, permiţând elaborarea unui algoritm de calcul al parametrilor constructivi ai sculelor, cu care s-a studiat posibilitatea fabricării unor scule ce permit schimbarea continuă a suprafeţei generatoare.
8. S-au studiat componentele erorilor de prelucrare în punctele de contact a suprafeţei sculptate şi suprafaţa generatoare a sculelor de prelucrat. Aceasta a permis aproximarea erorilor de prelucrare şi calculul suprafeţei torului de aproximaţie a prelucrării suprafeţei sculptate, cu scopul de a releva erorile de prelucrare a suprafeţei sculptate.

Perspective

Din cercetările referitoare la modelarea matematică şi modelarea geometrică prezentate în această lucrare şi din concluziile generale ale lucrării a rezultat cu impetuozitate că acest domeniu este susceptibil pe viitor de noi contribuţii la dezvoltarea generală a cunoaşterii.

Direcţiile de dezvoltare preconizate pot fi:

1. Noi algoritmi de tratare a problemelor ce apar în cadrul prelucrării unui volum foarte mare de date;
2. Extinderea modelării volumice;
3. Noi domenii în care să fie folosite tehnicile de modelare.

Perspectivele imediate de continuare a cercetărilor prezentei teze pot fi:

1. Extinderea studierii polinoamelor lui Bernstein pentru domeniul funcţiilor reale de două şi trei variabile, dar mai ales domeniul funcţiilor reale de n variabile;
2. Extinderea cercetărilor pentru polinoamele lui Bernstein în domeniul complex de o singură variabilă, domeniul bidimensional şi tridimensional, dar în special în spaţiul multidimensional complex;
3. Noi aplicaţii ale Polinoamelor lui Bernstein în domenii noi ca de pildă statistica matematică sau studiul integralelor în spaţiu şi de volum;

4. Extinderea utilizării polinoamelor de aproximare clasice la suprafeţe sau volume de aproximare, în special studii asupra zonelor de frontieră şi de conectare între suprafeţele, insistându-se asupra zonelor de frontieră, care pot genera distorsiuni;
5. Extinderea modelării geometrice a intersecţiilor, în special extinderea studiului intersecţiei suprafeţelor în spaţiu;
6. Continuarea cercetărilor în domeniu optimizării formelor sculelor aşchietoare, pentru creşterea preciziei prelucrării pe maşini-unelte cu comandă numerică;
7. Continuare studiului coeficientul de conformitate al suprafeţelor sculptate considerate în punctul de contact, coeficient care permite optimizarea prelucrării acestor suprafeţe;
8. Având în vedere că în scopul simplificărilor calculelor, în studiul rugozităţilor suprafeţelor prelucrate s-a presupus principiul liniarităţii rugozităţilor şi a erorilor, ar fi interesant de luat în considerare un aspect mai general şi mai ales mai apropiat de realitatea prelucrării suprafeţelor sculptate, şi anume al rugozităţilor neliniare.

BIBLIOGRAFIE

1. Adini, A. C. (n.d.). *Analysis of plate bending by the finite element method*. NSF Report G737.
2. Bernstein, S. (1912). *Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités.* Commun. Soc. Math. Krakow (2), 13, 1-2.
3. Berg, M. (2008). *Computational Geometry, Algorithms and Applications.* Springer.
4. Bezier P. E. (1970). *Emploi des machines à commande numérique*, Masson et Cie., Paris
5. Bornhill, R. (1987). Surface / surface intersection*. Computer Aided Geometric Design*, 4 (1-2), 3-16.
6. Bouix S. (2002). *Divergence-Based Medial Surfaces,* McGill University School of Computer Science & Center for Intelligent Machines.
7. Brândaşu D. P. (1997). *Metode moderne în proiectarea sculelor aşchietoare*, Editura Universităţii "Lucian Blaga" din Sibiu.
8. Catmull E. (1978) Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*,10(6)
9. Catrina D. (2003) *Sisteme flexibile de prelucrare prin aschiere*, Ed. Bren, Bucuresti.
10. Chiokura, K. (1983). Design of Soilds with Free Form Surface. *Proc. SIGGRAPH '83, 17 (3)*, 289-296.
11. Chlodovsky, I. (1925). *Sur la représentation des fonctions continues par les polynômes a coefficients entiers.* Moskow: Math. Sbornik, 32.
12. Choi, B.K., (1997) C-space approach to tool-path generation for die and mold machining, *Computer-Aided Design 14(2)56-67.*
13. Choi, W. (1998). *Sculptured Surface Machining Theory and Applications.* Kluwer Academic Publishers.
14. Coquillart, 5. (1987) Computing offsets of B-spline curves, *Computer-Aided Design,* 19(6), 305-9.
15. Deuflhard, P. (2003). *Numerical Analysis in Modern Scientific Computing. An Introduction, Second edition.* New York, Springer Verlag.
16. Diehl L. (2002). *Machining Methods For Complex Models,* MMS Online, 2002
17. Drăghici G. (1999). *Ingineria integrată a produselor*, Editura Mirton Timişoara
18. Drăghici G. (2005). *Concepţia proceselor de prelucrare mecanică*, Editura Politehnica Timişoara.
19. Duncan, J.P. (1983). *Sculptured Surfaces in Engineering and Medicine,* Cambridge University Press, Cambridge-London -New Y ork.
20. Dwite., F. I. (1981). *Computational Geometry for Design and Manufacture.* Chichester, England, Elis Horwood.
21. Falcidieno, B. (1999). *Modeling in Computer Graphics, Methods and Aplications.* Berlin, Springer Verlag.
22. Farin G. (1993). A *History of Curves and Surfaces in CAGD*, Computer Science and Engineering, Arizona State University
23. Farin, G (1993). *A Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design,* Academic Press.

24. Farouki, R. (1987). *Algorithms for polynomials in Bernstein form.* 4 (3), 191-216.
25. Farouki, R. (1987). *Computer Aided Geometry Design*, Vols. 4 (3), 191-216.
26. Fichtenholtz, G. K. (1934). *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.* Studia Math., 5, 69-98.
27. Gal, S. G. (2009). *Approximation by Complex Bernstein and Convolution Type Operators.* Oradea: Series on Concrete and Applicable Mathematics – Vol. 8.
28. Hall, C. (1976). Optimal error bound for cubic spin interpolation. *J. Approx. Theory 16*, 105-122.
29. Hamming, R. (1987). *Numerical Methods for Scientists and Engineers.* Davon Publications.
30. Held, M. *On the Computational Geometry of Pocket Machining.* Springer-Verlag, Berlin, Germany.
31. Held, M. (1994) Pocket machining based on contour parallel tool paths generated by means of proximity maps, *Computer-Aided Design,* 26(3), 189-203.
32. Herzog, F. H. (1946). *The Bernstein polynomials for discontinuous functions.* New York: Amer. J. Math, 68.
33. Hoffman, C. (1989). *Geometric and Solid Modeling: An Introduction,* San Mateo,California, , Morgan Kaufman Publishers, Inc.
34. Hoschek, J. (1993). *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design,* A.K. Peters, Wellesley, MA.
35. Hoschek, J. (1989). *Fundaments of Computer Aided Geometric Design.* Wellesley, Massachusetts, A K Peters.
36. Jerard, R. B. (1989). Approximate methods for simulation and verification of numerically controlled machining program*, The Visual Computer* 5, 329-349.
37. Jerard R. (1989). Methods for Detecting Errors in Numerically Controlled Machining of Sculptured Surfaces, *IEEE Computer Graphics & Applications*
38. Kahner, D. M. (1989). *Numerical Methods and Software.* New York: Prentice Hall.
39. Kantorovitch, L. V. (1931). *Sur la convergence de la suite des polynômes de S. Bernstein en dehors de l'intervalle fondamental.* Moskow: Bull. Acad. Sci. URSS, 1163-1168.
40. Kingsley, E. (1951). *Bernstein polynomials for functions of two variables of class.* Proc. Amer. Math. Soc., 2, 64 -71.
41. Larousse (2007). *Petit Larousse Illustré, Libraire Larousse, 17, rue de la Montparnasse, Paris, France.* Paris, France: Larousse, Paris.
42. Lartigue, C. (2001). *CNC tool path in terms of B-spline curves*. (33 (4): 307-319.
43. Lemac S. G. (1978). Utilizarea calculatorului electronic pentru rezolvarea unei probleme de decizie multicriterială în vederea optimizării planului de producţie. *Probleme ale optimizării în economia întreprinderilor, Ministerul Educaţiei şi Învăţământului, Universitatea "Al. I. Cuza", Iaşi , Facultatea de Ştiinţe Economice, Centrul de Cercetări Economice,* Iaşi, 121-125.
44. Lemac S. G. (1979). Eficienţa introducerii şi utilizării calculatoarelor de gestiune în organizarea şi conducerea unităţilor industriale. *Studii de economie industrială, Nr. 4, Consiliul Suprem al Dezvoltării Economice şi Sociale, Institutul Central de Cercetări Economice, Institutul de economie industrială*, Bucureşti, 280 pagini, plus anexe 391 pagini.

45. Lemac S. G. (1979). Unele tendinţe în domeniul sistemelor de operare şi de aplicaţii în evoluţia informaticii pe plan mondial. *Contribuţii la dezvoltarea energeticii româneşti, Bucureşti, Institutul de cercetări şi modernizări energetice*, 12-14 iunie 1979, pag. 168, publicat în 1980.
46. Lemac S. G. (1980). An algorithmic approach of the present legislation on investments. *Computation and Management, The 6th Symposium of Informatics and Management,* Cluj-Napoca 21-25 mai 1980.
47. Lemac S. G. (1982). Introducerea roboţilor industriali în întreprinderile industriale – aspecte economice şi sociale. Sesiunea de comunicări ştiinţifice Valorificarea superioară a resurselor, cerinţă fundamentală a noului mecanism economico – financiar, Universitatea din Timisoara, Facultatea de ştiinţe economice, 21-22 mai 1982.
48. Le Mac G., XiaoFang X., Rasmunssen H. (2001). *Using Maple6 to study Lambert functions*. Department of Applied Mathematics, Ontario Research Center for Computer Algebra, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, June 2001.
49. Le Mac G., Benghorbal M., Jeffrey D. J. (2001). *Generating excentric trigonometric functions*, Department of Applied Mathematics, Ontario Research Center for Computer Algebra, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, June 2001.
50. Le Mac G., Jeffrey D. J. (2001). *Derivative of excentric trigonometric functions*, Department of Applied Mathematics, Ontario Research Center for Computer Algebra, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, August 2001.
51. Le Mac G., Jeffrey D. (2002). *Extending classical trigonometric functions*. Department of Applied Mathematics, Ontario Research Center for Computer Algebra, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, March 2002.
52. Le Mac G. , XiaoFang X. (2002). *Lambert functions on Mathematica 4.,* Department of Applied Mathematics, Ontario Research Center for Computer Algebra, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada June 2002.
53. Le Mac G., Jeffrey D. (2002). *Bernstein polynomials on multiple dimensional spaces,* Department of Applied Mathematics, Ontario Research Center for Computer Algebra, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, June 2002.
54. Le Mac G. (2005). *Multivariant Bernstein polynomials conexity*, University of Department of Applied Mathematics, Ontario Research Center for Computer Algebra, Western Ontario University, London, Ontario, Canada, June 2005.
55. Le Mac G. (2007). Modelarea geometrică ca tehnică de modelare, *Revista Centrului de cercetări pentru economia industriei,* Bucureşti, August 2007.
56. Leon J.C. (1991) Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO, Hermès, 1991.
57. Li, S.X. (1994) Five axis machining of sculptured surfaces with flat-end cutter, *Computer-Aided Design,* 26 (3), 165-78.
58. Liming, R. (1979). *Mathematics for Computer Graphics.* Fallbrock, California: Publishers, Inc.
59. Levin A. (2004). Interpolating Nets Of Curves By Smooth Subdivision Surfaces, Tel Aviv University
60. Linndfield, G. P. (1995). *Numerical methods using Mathlab.* New York: Ellis Horwood.

61. Lorentz, G. G. (1951). *Deferred Bernstein polynomials.* Proc. Amer. Math. Soc., 1, 72-76.
62. Lorentz, G. C. (1953). *Bernstein polynomials.* Toronto, ON, Toronto University Press.
63. Mantyla M. (1988). *An introduction to Solid Modeling,* Computer Science Press, Rockville, Maryland.
64. Marciniack (1991). *Geometry modeling for numerically controlled machining,* Oxford University Press, New York.
65. Meyer, W. (1984). *Concepts of Mathematical Modeling.* Dover Publications.=
66. Mortenson, M. (1985). *Geometric modeling,* John Wiley & Son, Inc.
67. Mortensen, M. (2006). *Geometric Modeling.* Industrial Press.
68. Nittel. *Numerically controlled machining of propeller blades,* Marine Tehnology, 26 (3), 202-209.
69. Olfe, D. *Computer Graphics for Design from algorithms to AutoCAD.*
70. Patrikalakis, N. M. (1990). *Surface intersections for geometric modeling,* Journal of Mechanical Design, Transactions of ASME, 112 (1), 100-101.
71. Patrikalakis, N. M. (1993). *Surface to surface intersection,* IEEE Computer Graphics and Applications, 13 (1), 89-95.
72. Patrikalakis, N. (2002), *Sharpe interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing,* Springer Verlag.
73. Peter Alfred, N. M. (1995). *Circular Bernstein - Bezier Polynomials.* M. Daehlen eds. Nashville, Vanderbilt University Press, 11-20.
74. Petrişor E. (2001). *Modelare geometrică algoritmică*, Editura Tehnică
75. Popoviciu, T. (1935). *Sur l'approximation des fonctions convexe d'ordre supérieur.* Cluj: Mathematica (Cluj), 10, 49-54.
76. Radzevich, S. P. (2007). A Novel Method for Mathematical Modeling of a Form-Cutting-Tool of the Optimum Design. *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 00, 1639-2654.
77. Radzevich, S. P. (2007). A Novel Tool for Partitioning of a Sculptured Surface. *Mathematical and Computer Modeling,* Vol. 46, 1314-1331.
78. Radzevich, S. P. (2004). A Possibility of Application of Pluckner's Conoid for Mathematical Modeling of Contact of Two Smooth Regular Surfaces in the First Order of Tangency. *Mathematical and Computer Modeling, Vol. 42*, 999-1022.
79. Radzevich, S. P. (2008). CAD / CAM of Sculptured Surfaces on Multi-Axis NC Machine. The DG/K - Based Approach.
80. Radzevich, S. P. (June 2002). Computation of Optimal Workpiece Orientation for Muli-Axis NC Machining of Sculptured Part Surfaces. *ASME J. of Mechanical Design*, Vol.124, No.2, 201-212.
81. Radzevich, S. P. (2008). *Kinematic Geometry of Surface Machining.* Boca Raton, Florida: CRC Press, 508.
82. Requicha, A. (1990). *Representation for rigid solide: Theory, Methods and Systems,.* Computing Surveys, 12 (4).
83. Requicha, A. (1992). *Solid modeling and beyond,* IEEE Computer Graphics and Applications, 12 (5), 31-44.
84. Risler, I. I. (1992). *Mathematical Methods for CAD.* Cambridge Unioversity Press.
85. Rutherford, A. (1995). *Mathematical Modelling Techniques.* Dover Publications.
86. Savii G., Milenco L. (2000). *Modeling and Simulation*, Eurostampa Publishing.

87. Savii G. (1997). *Bazele proiectării asistate de calculator*, Editura Mirton, Timişoara.
88. Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis - a mathematical introduction.* Oxford: Claredon Press, Oxford.
89. Sebe A. P. (2004). *Cercetări privind prelucrarea suprafeţelor complexe pe maşini-unelte cu comandă numerică* , Teză de doctorat, Universitatea Politehnica Bucureşti.
90. Sherbrooke E. C., Patrikalakis N. and Brisson E. (1996) An algorithm for the medial axis transform of 3d polyhedral solids. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2(1):44-61, 1996.
91. Stancu, D. (1968). Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators. *Rev. Rom. Math. Pures Appl., No. 13*, 1173-1194.
92. Stoer, J. B. (1976). *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, Berlin.
93. Stoica-Laze, E. I. (2009). On the Stancu Type Linear Positive Operators of Approximations Constructed by using Beta and Gama Functions. *Studia Univ. "BABES - BOLYAI", Mathematica, Volume LIV, Number 2*.
94. van de Wetering H. (2004). *Implicit surfaces CSG Lipschitz condition scanline rendering*, ISO. Industrial Automation
95. Velimirović L., S. (2002). Modeling Conoid Surfaces. *FACTA UNIVERSITATIS Series: Architecture and Civil Engineering Vol. 2, Niš, Serbia*, 261-266.
96. Warkentin A. (2000) "Comparison between multi-point and other 5-axis tool positioning strategies", *International Journal of Machine Tools & Manufacture 40 (2000),* Elsevier Science Ltd
97. Willis, R. (1941). *Principles of Mechanism, Designed for the Use of Students in the Universities and for Engineering Students Generally.* London: John W Parker, West Stand, Cambridge: J. & J.J. Deighton.
98. Yamaguchi, F. (1988). *Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design.* Berlin, Springer-Verlag.
99. *** (1989). *Theory and Practice of Geometric Modeling,* Springer.