Les expressions du reste et du quotient de la division de deux polynômes.

Par

V. ALACI

Nous nous proposons de trouver directement le reste et le quotient de la division du polynôme:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p ,$$

par $(a-x)^q$, où p et q sont des entiers positifs, $q \leqslant p$.

Nous employons pour le développement du polynôme $f(x)$, la formule de *Taylor* et en divisant en même temps par $(a-x)^q$, nous obtenons:

$$\frac{f(x)}{(a-x)^q} = \frac{f(a) - \frac{f'(a)}{1}(a-x) + \frac{f''(a)}{2!}(a-x)^2 - \dots + (-1)^{q-1}\frac{f^{(q-1)}(a)}{(q-1)!}(a-x)^{p-1}}{(a-x)^q} +$$

$$(-1)^q \left[\frac{f^{(q)}(a)}{q!} - \frac{f^{(q+1)}(a)}{(q+1)!}(a-x) + \dots + (-1)^{p-q}\frac{f^{(p)}(a)}{p!}(a-x)^{p-q} \right]$$

En désignant par $R(x)$ et $Q(x)$ le reste et le quotient cherchés, nous avons:

$$(1)\quad R(x) = f(a) - \frac{f'(a)}{1}(a-x) + \frac{f''(a)}{2!}(a-x)^2 - \dots + (-1)^{q-1}\frac{f^{(q-1)}(a)}{(q-1)!}(a-x)^{q-1}$$

$$(2)\qquad Q(x) = (-1)^q \left[\frac{f^{(q)}(a)}{q!} - \frac{f^{(q+1)}(a)}{(q+1)!}(a-x) + \dots + (-1)^{p-q}\frac{f^{(p)}(a)}{p!}(a-x)^{p-q} \right]$$

Mais si nous développons $R(x)$ et $Q(x)$ suivant les puissances de x nous avons encore d'après la formule de *Maclaurin*:

$$(3)\qquad R(x) = R(0) + \frac{R'(0)}{1}x + \frac{R''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{R^{(q-1)}(0)}{(q-1)!}x^{q-1}$$

$$(4)\qquad Q(x) = Q(0) + \frac{Q'(0)}{1}x + \frac{Q''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{Q^{(p-q)}(0)}{(p-q)!}x^{p-q},$$

où l'on doit déterminer les coefficients.

L'expression du reste.

Pour calculer un coefficient quelconque $\frac{\overset{(k)}{R}(0)}{k!}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, (q-1))$ de l'expression (3), nous prenons la dérivée d'ordre k de la relation (1), puis en posant $x = 0$, nous obtenons :

$$(5) \qquad \frac{\overset{(k)}{R}(0)}{k!} = \frac{\overset{(k)}{f}(a)}{k!} - \Gamma^1_{k+1} \frac{\overset{(k+1)}{f}(a)}{(k+1)!} a + \Gamma^2_{k+1} \frac{\overset{(k+2)}{f}(a)}{(k+2)!} a^2 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{q-k-1} \Gamma^{q-k-1}_{k+1} \frac{\overset{(q-1)}{f}(a)}{(q-1)!} a^{q-k-1} =$$

$$\left(a_k + \Gamma^1_{k+1} a_{k+1} a + \Gamma^2_{k+1} a_{k+2} a^2 + \ldots + \Gamma^{p-k}_{k+1} a_p a^{p-k}\right) - \Gamma^1_{k+1}\left(a_{k+1} a + \right.$$
$$\left. \Gamma^1_{k+2} a_{k+2} a^2 + \ldots + \Gamma^{p-k-1}_{k+2} a_p a^{p-k}\right) + \Gamma^2_{k+1}\left(a_{k+2} a^2 + \Gamma^1_{k+3} a_{k+3} a^3 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \Gamma^{p-k-2}_{k+3} a_p a^{p-k}\right) - \ldots + (-1)^{q-k-1} \Gamma^{q-k-1}_{k+1}\left(a_{q-1} a^{q-k-1} + \right.$$
$$\left.\Gamma^1_q a_q a^{q-k} + \ldots + \Gamma^{p-q+1}_q a_p a^{p-k}\right),$$

où en général :

$$\Gamma^n_m = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}$$

En ordonnant l'expression (5) selon les puissances croissantes de a, nous avons :

$$(6) \quad \frac{\overset{(k)}{R}(0)}{k!} = a_k + \sum_{i=1}^{q-k-1} \left(\Gamma^i_{k+1} - \Gamma^1_{k+1} \Gamma^{i-1}_{k+2} + \ldots + (-1)^{i-1} \Gamma^{i-1}_{k+1} \Gamma^1_{k+1} + \right.$$
$$\left.(-1)^i \Gamma^i_{k+1}\right) a_{i+k} a^i + \sum_{i=o}^{p-q} \left(\Gamma^{q-k+i}_{k+1} - \Gamma^1_{k+1} \Gamma^{q-k+i-1}_{k+2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{q-k-1} \Gamma^{q-k-1}_{k+1} \Gamma^{i+1}_q\right) a_{q+i} a^{q-k+i}$$

Nous allons calculer d'abord le coefficient numérique de a^i, qu'on peut écrire successivement :

$$\Gamma^i_{k+1} - \Gamma^1_{k+1} \Gamma^{i-1}_{k+2} + \ldots + (-1)^{i-1} \Gamma^{i-1}_{k+1} \Gamma^1_{k+i} + (-1)^i \Gamma^i_{k+1} =$$

$$\Gamma^i_{k+1}\left[1 - \frac{i}{1} + \frac{i(i-1)}{2!} - \ldots + (-1)^{i-1} \frac{i}{1} + (-1)^i\right] =$$

$$\Gamma^i_{k+1}\left(1 - C^1_i + C^2_i - \ldots + (-1)^{i-1} C^{i-1}_i + (-1)^i C^i_i\right)$$

Mais, si dans l'identité évidente :

$$(1-x)^i = 1 - C^1_i x + C^2_i x^2 - \ldots + (-1)^i C^i_i,$$

nous faisons $x = 1$, nous en déduisons :

$$1 - C_i^1 + C_i^2 - \ldots + (-1)^i C_i^i = 0 ,$$

ainsi que l'on obtient :

$$\Gamma_{k+1}^i - \Gamma_{k+1}^1 \Gamma_{k+2}^{i-1} + \ldots + (-1)^{i-1} \Gamma_{k+1}^{i-1} \Gamma_{k+i}^1 + (-1)^i \Gamma_{k+1}^i = 0$$

pour :

$$i = 1, 2, \ldots, (q - k - 1).$$

Il en résulte ainsi que les coefficients de $a, a^2, \ldots, a^{q-k-1}$ de l'expression (6) sont égales à zéro et nous pouvons écrire :

$$\text{(7)} \qquad \frac{\overset{(k)}{R}(0)}{k!} = a_k + \sum_{i=o}^{p-q} \Big(\Gamma_{k+1}^{q-k+i} - \Gamma_{k+1}^1 \Gamma_{k+2}^{q-k+i-1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{q-k-1} \Gamma_{k+1}^{q-k-1} \Gamma_q^{i+1} \Big) a_{q+i} a^{q-k+i}$$

Maintenant nous allons calculer le coefficient numérique de a^{q-k+i}, qu'on peut s'écrire :

$$\text{(8)} \quad \Gamma_{k+1}^{q-k+i} - \Gamma_{k+1}^1 \Gamma_{k+2}^{q-k+i-1} + \ldots + (-1)^{q-k-1} \Gamma_{k+1}^{q-k-1} \Gamma_q^{i+1} =$$

$$\Gamma_{k+1}^{q-k+i} \Bigg[1 - \frac{q-k+i}{1} + \frac{(q-k+i)(q-k+i-1)}{2!} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{q-k-1} \frac{(q-k+i)(q-k+i-1)\ldots(i+2)}{(q-k-1)!} \Bigg] =$$

$$\Gamma_{k+1}^{q-k+i} \left(1 - C_{q-k+i}^1 + C_{q-k+i}^2 - \ldots + (-1)^{q-k-1} C_{q-k+i}^{q-k-1} \right)$$

Mais le coefficient de la paranthèse peut se calculer, en considérant l'identité évidente :

$$(1 - x^{q-k})(1 - x)^{q-k+i-1} = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-k-1})(1 - x)^{q-k+i}$$

et en posant que les coefficients du terme en x^{q-k-1} de deux membres sont égaux. Nous obtenons ainsi :

$$(-1)^{q-k-1} C_{q-k+i-1}^{q-k-1} = 1 - C_{q-k+i}^1 + C_{q-k+i}^2 - \ldots + (-1)^{q-k-1} C_{q-k+i}^{q-k-1}$$

En vertu de cette relation, l'expression (8) peut s'écrire :

$$\Gamma_{k+1}^{q-k+i} - \Gamma_{k+1}^1 \Gamma_{k+2}^{q-k+i-1} + \ldots + (-1)^{q-k-1} \Gamma_{k+1}^{q-k-1} \Gamma_q^{i+1} =$$

$$(-1)^{q-k-1} \Gamma_{k+i}^{q-k+i} C_{q-k+i-1}^{q-k-1} = (-1)^{q-k-1} \Gamma_{k+1}^{q-k+i} \Gamma_{i+1}^{q-k-1} =$$

$$(-1)^{q-k+i} \Gamma_{k+1}^{q-k+i} \Gamma_{q-k}^i$$

Il en résulte que la relation (7) devient :

(9) $$\frac{R^{(k)}(0)}{k!} = a_k + (-1)^{q-k-1} \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_{k+1}^{q-k+i}\, \Gamma_{q-k}^{i}\, a_{q+i}\, a^{q-k+i},$$

relation vraie pour : $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, (q-1)$.

En vertu de cette relation les coefficients du reste $R(x)$, sont ainsi déterminés.

On peut donc écrire l'expression (3) sous la forme définitive :

(10) $$\begin{aligned} R(x) = & \left[a_0 + (-1)^{q-1} \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_q^i\, a_{q+i}\, a^{q+i}\right] + \\ & \left[a_1 + (-1)^{q-2} \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_2^{q+i-1}\, \Gamma_{q-1}^{i}\, a_{q+i}\, a^{q+i-1}\right] x + \\ & \left[a_2 + (-1)^{q-3} \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_3^{q+i-2}\, \Gamma_{q-2}^{i}\, a_{q+i}\, a^{q+i-2}\right] x^2 + \ldots \\ & \ldots + \left[a_{q-2} - \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_{q-1}^{i+2}\, \Gamma_2^{i}\, a_{q+i}\, a^{i+2}\right] x^{q-2} + \left[a_{q-1} + \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma^{i-1}\, a_{q+i}\, a^{i+1}\right] x^{q-1} \end{aligned}$$

Cell-ci est l'expression intéressante du reste de la division du polynôme :

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p,$$

par $(a - x)^q$, et ce reste est exprimé directement en fonction des coefficients du dividende et du diviseur.

Remarque. Pour que le reste de la division du polynôme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p,$$

par $(a - x)^q$ soit identiquement nul, on, doit satisfaire aux conditions suivantes qu'on déduit avec facilité de l'expression (10) du reste $R(x)$, c'est-à-dire :

$$a_0 = (-1)^q \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_q^i\, a_{q+i}\, a^{q+i}$$

$$a_1 = (-1)^{q-1} \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_2^{q+i-1}\, \Gamma_{q-1}^{i}\, a_{q+i}\, a^{q+i-1}$$

$$a_2 = (-1)^{q-2} \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_3^{q+i-2}\, \Gamma_{q-2}^{i}\, a_{q+i}\, a^{q+i-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{q-2} = \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_{q-1}^{i+2}\, \Gamma_2^{1}\, a_{q+i}\, a^{i+2}$$

$$a_{q-1} = -\sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_q^{i+1}\, a_{q+i}\, a^{i+1}$$

Ces relations expriment les premiers q coefficients du polynôme $f(x)$ en fonction de ceux qui suivent.

Cas particuliers. 1. Pour $q = 2$, l'expression (10) du reste se réduit à la relation suivante:

$$(11) \quad R(x) = a_0 - \sum_{i=0}^{p-2} (i+1)\, a_{2+i}\, a^{2+i} + \left(a_1 + \sum_{i=0}^{p-2} (i+2)\, a_{2+i}\, a^{i+1} \right) x =$$

$$a_0 + a_1 x - \sum_{i=0}^{p-2} \left[(i+1)\, a - (i+2)\, x \right] a_{2+i}\, a^{i+1}$$

2. Pour $q = 3$, l'expression (10) du reste devient:

$$(12)\ R(x) = a_0 + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i+1)\ (i+2)}{2} a_{3+i}\, a^{3+i} + \left[a_1 - \sum_{i=0}^{p-3} (i+1)\ (i+2)\, a_{3+i}\, a^{2+i} \right] x$$

$$+ \left[a_2 + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i+2)(i+3)}{2} a_{3+i}\, a^{1+i} \right] x^2 =$$

$$\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i+1)(i+2)}{2} a^2 - (i+1)(i+2)\, a x + \right.$$

$$\left. \frac{(i+2)(i+3)}{2} x^2 \right] a_{3+i}\, a^{1+i}$$

Applications. 1. Trouver directement le reste de la division de x^p par $(1-x)^q$, où p et q sont des entiers positifs, $p \geqq q$.

Nous employons la formule (10), en remarquant que dans ce cas:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0,\ a_p = 1,\ a = 1,$$

on obtient:

$$R(x) = (-1)^{q-1} \left[\Gamma_q^{p-q} - \Gamma_2^{p-1} \Gamma_{q-1}^{p-q} x + \Gamma_3^{p-2} \Gamma_{q-2}^{p-q} x^2 - \ldots + \right.$$

$$\left. (-1)^{q-2} \Gamma_{q-1}^{i+2} \Gamma_2^{p-q} x^{q-2} + (-1)^{q-1} \Gamma_q^{p-q+1} x^{q-1} \right]$$

Remarques. Dans le cas particulier $p = 5$, $q = 3$, on obtient:

$$R(x) = \Gamma_3^2 - \Gamma_2^4 \Gamma_2^2 x + \Gamma_3^3 x^2 = 6 - 15x + 10x^2$$

En tenant compte de la relation:

$$x^p = (1-x)^q\, Q(x) + R(x),$$

on obtient pour $x = 1$, l'identité:

$$\Gamma_q^{p-q} - \Gamma_q^{p-1} \Gamma_{q-1}^{p-q} + \Gamma_3^{p-2} \Gamma_{q-2}^{p-q} - \ldots + (-1)^{q-2} \Gamma_{q-1}^{i+2} \Gamma_2^{p-q} +$$

$$(-1)^{q-1} \Gamma_q^{p-q+1} = (-1)^{q-1}$$

2. *Trouver directement le reste de la division du polynôme:*

$$a_0 + a_1 x + x^2 + 2x^3 + \ldots + (p-1)x^p,$$

par $(1-x)^2$.

En appliquant la formule (10) et en remarquant que dans ce cas :

$$a_{2+i} = i+1, \text{ pour } i = 0, 1, 2 \ldots, p-2, \text{ et } a = 1,$$

on obtient :

$$R(x) = a_0 - \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} + \left[a_1 + \frac{p(p^2-1)}{3}\right]x.$$

3. *Trouver directement le reste de la division du polynôme :*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^p,$$

par $(1-x)^3$.

En employant la formule (12) et en remarquant que dans ce cas :

$$a_{3+i} = 1, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots, (p-3); \text{ et } a = 1,$$

on obtient :

$$R(x) = a_0 + \frac{(p-2)(p-1)p}{6} + \left[a_1 - \frac{(p-2)(p-1)(2p+3)}{6}\right]x +$$

$$\left[a_2 + \frac{p(p^2-1)}{6} - 1\right]x^2$$

L'expression du quotient.

Pour avoir l'expression du quotient, on doit calculer un coefficient quelconque $\frac{\overset{(k)}{Q}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, (p-q)$ de l'expression (4).

En conséquence, nous prenons la dérivée d'ordre k, de l'expression (2), nous posons ensuite $x = 0$ et nous obtenons :

$$\frac{\overset{(k)}{Q}(0)}{k!} = (-1)^q \left[\frac{\overset{(q+k)}{f}(a)}{(q+k)!} - \Gamma^1_{k+1} \frac{\overset{(q+k+1)}{f}(a)}{(q+k+1)!} a + \Gamma^2_{k+1} \frac{\overset{(q+k+2)}{f}(a)}{(q+k+2)!} a^2 - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{p-q-k} \Gamma^{p-q-1}_{k+1} \frac{\overset{(p)}{f}(a)}{p!} a^{p-q-k}\right]$$

En développant les dérivées du deuxième membre, nous avons :

$$\frac{\overset{(k)}{Q}(0)}{k!} = (-1)^q \left[(a_{q+k} + \Gamma^1_{q+k+1} a_{q+k+1} a + \ldots + \Gamma^{p-q-k}_{q+k+1} a_p a^{p-q-k}) - \right.$$

$$\Gamma^1_{k+1}(a_{q+k+1} a + \Gamma^1_{q+k+2} a_{q+k+2} a^2 + \ldots + \Gamma^{p-q-k-1}_{q+k+2} a_p a^{p-q-k}) +$$

$$\left.\ldots + (-1)^{p-q-k} \Gamma^{p-q-k}_{k+1} a_p a^{p-q-k}\right]$$

En ordonnant suivant les puissances de a, nous pouvons écrire :

$$(13) \quad \frac{\overset{(k)}{Q}(0)}{k\,!} = (-1)^q \Big\{ a_{q+k} + \sum_{\alpha=1}^{p-q-k} \Big[\Gamma^{\alpha}_{q+k+1} - \Gamma^{1}_{k+1}\Gamma^{\alpha-1}_{q+k+2} + \Gamma^{2}_{k+1}\Gamma^{\alpha-2}_{q+k+2} - \dots + (-1)^{\alpha-1}\Gamma^{\alpha-1}_{k+1}\Gamma^{1}_{q+k+\alpha} + (-1)^{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k+1}\Big] a_{q+k+\alpha}\, a^{\alpha} \Big\}$$

Nous allons calculer maintenant le coefficient numérique de a^{α}.

En tenant compte de la relation :

$$\Gamma^{n}_{m} = C^{n}_{m+n-1} \; ,$$

nous pouvons écrire :

$$(14) \quad \Gamma^{\alpha}_{q+k+1} - \Gamma^{1}_{k+1}\Gamma^{\alpha-1}_{q+k+2} + \Gamma^{2}_{k+1}\Gamma^{\alpha-2}_{q+k+3} - \dots + (-1)^{\alpha-1}\Gamma^{\alpha-1}_{k+1}\Gamma^{1}_{q+k+\alpha} + (-1)^{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k+1} = C^{\alpha}_{q+k+\alpha} - \Gamma^{1}_{k+1}C^{\alpha-1}_{q+k+\alpha} + \Gamma^{2}_{k+1}C^{\alpha-2}_{q+k+\alpha} - \dots + (-1)^{\alpha-1}\Gamma^{\alpha-1}_{k+1}C^{1}_{q+k+\alpha} + (-1)^{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k+1}$$

Pour calculer le deuxième membre de cette égalité, nous considérons l'identité évidente :

$$(15) \quad (1-x)^{q+\alpha-1} = \frac{(1-x)^{q+k+\alpha}}{(1-x)^{k+1}}$$

En supposant $-1 < x < 1$, nous pouvons développer $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$ dans une série absolument convergente, d'après la formule de *Maclaurin*, et l'identité (15) devient :

$$(1-x)^{q+\alpha-1} = (1-x)^{q+k+\alpha}\left(1 + \Gamma^{1}_{k+1}x + \Gamma^{2}_{k+1}x^{2} + \dots + \Gamma^{\alpha}_{k+1}x^{\alpha} + \dots\right)$$

En rendant identiques les coefficients de x^{α} de deux membres, nous obtenons :

$$C^{\alpha}_{q+\alpha-1} = C^{\alpha}_{q+k+\alpha} - \Gamma^{1}_{k+1}C^{\alpha-1}_{q+k+\alpha} + \dots + (-1)^{\alpha-1}\Gamma^{\alpha-1}_{k+1}C^{1}_{q+k+\alpha} + (-1)^{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k+1}$$

En vertu de cette égalité la relation (14) devient :

$$\Gamma^{\alpha}_{q+k+1} - \Gamma^{1}_{k+1}\Gamma^{\alpha-1}_{q+k+2} + \dots + (-1)^{\alpha-1}\Gamma^{\alpha-1}_{k+1}\Gamma^{1}_{q+k+\alpha} + (-1)^{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k+1} = C^{\alpha}_{q+\alpha-1} = \Gamma^{\alpha}_{q}$$

En tenant compte de cette relation, l'expression (13) peut s'écrire :

$$(16) \quad \frac{\overset{(k)}{Q}(0)}{k\,!} = (-1)^q \left(a_{q+k} + \sum_{\alpha=1}^{p-q-k} \Gamma^{\alpha}_{q}\, a_{q+k+\alpha}\, a^{\alpha} \right)$$

Si nous prenons successivement :

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ (p-q) \; ,$$

nous obtenons respectivement tous les coefficients du quotient cherché $Q(x)$ de l'expression (4), qui devient ainsi :

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{p-q}\frac{\overset{(k)}{Q}(0)}{k!}x^k=(-1)^q\sum_{k=0}^{p-q}\Big(a_{q+k}+\Gamma_q^1\,a_{q+k+1}\,a+$$

$$\Gamma_q^2\,a_{q+k+2}\,a^2+\ldots+\Gamma_q^{p-q-k}\,a_p\,a^{p-q-k}\Big)\,x^k$$

En ordonnant selon les puissances décroissantes de x, nous avons :

$$(17)\quad Q(x)=(-1)^q\Big[a_p\,x^{p-q}+(a_{p-1}+\Gamma_q^1\,a_p\,a)\,x^{p-q-1}+(a_{p-2}+\Gamma_q^1\,a_{p-1}\,a+$$

$$\Gamma_q^2\,a_p\,a^2)\,x^{p-q-2}+\ldots+(a_q+\Gamma_q^1\,a_{q+1}\,a+\Gamma_q^2\,a_{q+2}\,a^2+\ldots+\Gamma_q^{p-q}a_p\,a^{p-q})\Big]$$

Celle-ci est l'expression intéressante du quotient de la division du polynôme :

$$f(x)=a_0+a_1\,x+\ldots+a_p\,x^p\,,$$

par $(a-x)^q$ *et ce quotient est exprimé directement en fonctions des coefficients du dividende et du diviseur.*

Nous remarquons que l'expression du quotient de la relation (17) dépend seulement des $p-q+1$ derniers coefficients de $f(x)$.

Cas particulier. Pour $p=q+2$, le quotient donné par la relation (17) devient :

$$(18)\quad Q(x)=(-1)^q\left[a_p\,x^2+(a_{p-1}+\Gamma_q^1\,a_p)\,x+a_{p-2}+\Gamma_q^1\,a_{p-1}\,a+\Gamma_q^2\,a_p\,a^2\right]$$

Applications. 1. *Trouver directement le quotient de la division du polynôme :*

$$x^p+b\,x+c$$

par $(1-x)^q$, *p et q étant des entiers positifs,* $p\geqq q$.

En employant la formule (17), et en remarquant que dans ce cas :

$$a_p=1,\quad a_{p-1}=a_{p-2}=\ldots=a_2=0,\quad a_1=b,\quad a_0=c\quad\text{et}\quad a=1\,,$$

nous trouvons :

$$Q(x)=(-1)^b\,(x^{p-q}+\Gamma_q^1\,x^{p-q-1}+\Gamma_q^2\,x^{p-q-2}+\ldots+\Gamma_q^{p-q-1}\,x+\Gamma_q^{p-q})$$

2. *Trouver directement le quotient de la division du polynôme :*

$$a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+x^3+x^4+\ldots+x^p\,,$$

par $(1-x)^q$, *p et q étant des entiers positifs,* $p\geqq q>3$.

Nous employons la formule (17), et en remarquant que dans ce cas :

$$a_{3+k}=1,\quad\text{pour}\quad k=0,\,1,\,2,\ldots,\,(p-3)\quad\text{et}\quad a=1,$$

nous trouvons avec facilité :

$$Q(x)=(-1)^q\,[x^{p-q}+(1+\Gamma_q^1)\,x^{p-q-1}+(1+\Gamma_q^1+\Gamma_q^2)\,x^{p-q-2}+\ldots$$

$$\ldots+(1+\Gamma_q^1+\Gamma_q^2+\ldots+\Gamma_q^{p-q-1})\,x+(1+\Gamma_q^1+\ldots+\Gamma_q^{p-q}]$$

Mais, en vertu de l'identité connue:

$$1+\Gamma_q^1+\Gamma_q^2+\ldots+\Gamma_q^\alpha=\Gamma_{q+1}^\alpha,$$

nous pouvons encore écrire:

$$Q(x)=(-1)^q(x^{p-q}+\Gamma_{q+1}^1 x^{p-q-1}+\Gamma_{q+1}^2 x^{p-q-2}+\ldots+\Gamma_{q+1}^{p-q-1}x+\Gamma_{q+1}^{p-q})$$

C'est le quotient cherché.

Autre méthode.

Voici maintenant une autre méthode plus simple et plus rapide pour établir directement les expressions du reste et du quotient de la division du polynôme:

$$a_0+a_1x+\ldots+a_px^p,$$

par $(a-x)^q$, p et q étant des entiers positifs, $q\leqq p$.

Considérons en effet la relation évidente:

$$(19)\qquad \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_px^p}{(a-x)^q}=(-1)^q\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_px^p}{x^q\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^q}$$

En supposant:

$$(20)\qquad |x|>a,$$

nous pouvons considérer le développement ci-aprés en série absolument convergente:

$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^q}=1+\Gamma_q^1\frac{a}{x}+\Gamma_q^2\frac{a^2}{x^2}+\ldots,$$

où Γ_m^n sont les combinaisons avec repétitions de m objets pris n à n.

La relation (19), dans l'hypothèse (20) devient:

$$\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_px^p}{(a-x)^q}=(-1)^q\,(a_0+a_1x+a_px^p)\,(x^{-q}+\Gamma_q^1\,a\,x^{-(q+1)}+$$
$$\Gamma_q^2a^2x^{-(q+2)}+\ldots+\Gamma_q^{p-q}x^{p-1}+\ldots)$$

En effectuant les multiplications du deuxième membre et en ordonnant selon les puissances de x, nous obtenons:

$$(21)\quad \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_px^p}{(a-x)^q}=(-1)^q\,[a_px^{p-q}+(a_{p-1}+\Gamma_q^1a_pa)x^{p-q-1}+$$
$$(a_{p-2}+\Gamma_q^1a_{p-1}a+\Gamma_q^2a_pa^2)x^{p-q-2}+\ldots+(a_q+\Gamma_q^1a_{q-1}a+\ldots+\Gamma_q^{p-q}a_pa^{p-q})+$$
$$\frac{a_{q-1}+\Gamma_q^1a_qa+\ldots+\Gamma_q^{p-q+1}a_pa^{p-q+1}}{x}+$$

Mais, en vertu de l'identité connue :

$$1+\Gamma_q^1+\Gamma_q^2+\ldots+\Gamma_q^\alpha=\Gamma_{q+1}^\alpha ,$$

nous pouvons encore écrire :

$$Q(x)=(-1)^q(x^{p-q}+\Gamma_{q+1}^1 x^{p-q-1}+\Gamma_{q+1}^2 x^{p-q-2}+\ldots+\Gamma_{q+1}^{p-q-1}x+\Gamma_{q+1}^{p-q})$$

C'est le quotient cherché.

Autre méthode.

Voici maintenant une autre méthode plus simple et plus rapide pour établir directement les expressions du reste et du quotient de la division du polynôme :

$$a_0+a_1x+\ldots+a_p x^p ,$$

par $(a-x)^q$, p et q étant des entiers positifs, $q \leqq p$.

Considérons en effet la relation évidente :

$$(19)\qquad \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_p x^p}{(a-x)^q}=(-1)^q\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_p x^p}{x^q\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^q}$$

En supposant :

$$(20)\qquad |x|>a ,$$

nous pouvons considérer le développement ci-aprés en série absolument convergente :

$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^q}=1+\Gamma_q^1\frac{a}{x}+\Gamma_q^2\frac{a^2}{x^2}+\ldots ,$$

où Γ_m^n sont les combinaisons avec repétitions de m objets pris n à n.

La relation (19), dans l'hypothèse (20) devient :

$$\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_p x^p}{(a-x)^q}=(-1)^q(a_0+a_1x+a_px^p)(x^{-q}+\Gamma_q^1 a x^{-(q+1)}+$$
$$\Gamma_q^2 a^2 x^{-(q+2)}+\ldots+\Gamma_q^{p-q}x^{p-1}+\ldots)$$

En effectuant les multiplications du deuxième membre et en ordonnant selon les puissances de x, nous obtenons :

$$(21)\qquad \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_p x^p}{(a-x)^q}=(-1)^q[a_p x^{p-q}+(a_{p-1}+\Gamma_q^1 a_p a)x^{p-q-1}+$$
$$(a_{p-2}+\Gamma_q^1 a_{p-1}a+\Gamma_q^2 a_p a^2)x^{p-q-2}+\ldots+(a_q+\Gamma_q^1 a_{q-1}a+\ldots+\Gamma_q^{p-q}a_p a^{p-q})+$$
$$\frac{a_{q-1}+\Gamma_q^1 a_q a+\ldots+\Gamma_q^{p-q+1}a_p a^{p-q+1}}{x}+$$

$$\frac{a_{q-2}+\Gamma_q^1 a_{q-1} a+\ldots+\Gamma_q^{p-q+2} a_p a^{p-q+2}}{x^2}+$$

$$\ldots+\frac{a_0+\Gamma_q^1 a_1 a+\ldots+\Gamma_q^p a_p a^p}{x^q}+$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\Gamma_q^\lambda a_0+\Gamma_q^{\lambda+1} a_1 a+\ldots+\Gamma_q^{p+\lambda} a_p a^p}{x^{q+\lambda}} a^\lambda \Big]$$

Nous notons par $Q(x)$ et $R(x)$ le quotient et le reste de la division du polynôme :

$$a_0+a_1 x+\ldots+a_p x^p,$$

par $(a-x)^q$.

Comme le quotient doit être du degré $p-q$, il s'ensuit que le développement du deuxième membre de la relation (21), arrêté au terme libre de x, exprime la quotient cherché $Q(x)$ et l'autre partie — qui suit et est une série absolument convergente — représente le développement de l'expression $\frac{R(x)}{(a-x)^q}$, ainsi que nous pouvons écrire.

(22) $$Q(x)=(-1)^q\left[a_p x^{p-q}+(a_{p-1}+\Gamma_q^1 a_p a) x^{p-q-1}+(a_{p-2}+\right.$$
$$\left.\Gamma_q^1 a_{p-1} a+\Gamma_q^2 a_p a^2) x^{p-q-2}+\ldots+(a_q+\Gamma_q^1 a_{q+1} a+\ldots+\Gamma_q^{p-q} a_p a^{p-q})\right]$$

(23) $$\frac{R(x)}{(a-x)^q}=(-1)^q\left[\frac{a_{q-1}+\Gamma_q^1 a_q a+\ldots+\Gamma_q^{p-q+1} a^{p-q+1}}{x}+\right.$$

$$\frac{a_{q-2}+\Gamma_q^1 a_{q-1} a+\ldots+\Gamma_q^{p-q+2} a_p a^{p-q+2}}{x^2}+$$

$$\ldots+\frac{a_0+\Gamma_q^1 a_1 a+\ldots+\Gamma_q^p a_p a^p}{x^q}+$$

$$\left.\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\Gamma_q^\lambda a_0+\Gamma_q^{\lambda+1} a_1 a+\ldots+\Gamma_q^{p+\lambda} a_p a^p}{x^{q+\lambda}} a^\lambda\right]$$

Pour abréger les notation nous exprimerons les coefficients des numérateurs des fractions du deuxième membre respectivement par A_0, A_1, $A_2, \ldots$ $A_{q-1}, \ldots$.

La relation (23) peut donc s'écrire :

$$R(x)=[x^q-C_q^1 x^{q-1} a+\ldots+(-1)^{q-1} C_q^{q-1} x a^{q-1}+$$
$$(-1)^q a^q]\left(\frac{A_0}{x}+\frac{A_1}{x^2}+\ldots+\frac{A_{q-1}}{x^q}+\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{A_{q-1+\lambda}}{x^{q+\lambda}} a^\lambda\right)$$

En effectuant les multiplications du deuxième membre et en ordonnant selon les puissances décroissantes de x, nous avons :

(24) $$R(x)=A_0 x^{q-1}+(A_1-C_q^1 A_0 a) x^{q-2}+(A_2-C_q^1 A_1 a+C_q^2 A_0 a^2) x^{q-3}+$$

$$\ldots + [A_{q-1} - C_q^1 A_{q-2} + \ldots + (-1)^{q-1} C_q^q A_0 a^{q-1}) +$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} [A_{q-1+\lambda} - C_q^1 A_{q-2+\lambda} a + \ldots + (-1)^q C_q^q A_{\lambda-1} a^{q-1}] \left(\frac{a}{x}\right)^{\lambda}$$

Comme le premier membre $R(x)$ est un polynôme en général du degré $q-1$, il en résulte que le développement du deuxième membre de la relation (24) doit être arrêté au terme libre de x, et que les autres coefficients des autres termes doivent être nuls.

Ainsi que nous pouvons écrire:

(25) $$R(x) = A_0 x^{q-1} + (A_1 - C_q^1 A_0 a) x^{q-2} + (A_2 - C_q^1 A_1 a + C_q^2 A_0 a^2) x^{q-3} +$$

$$\ldots + [A_{q-1} - C_q^1 A_{q-2} a + \ldots + (-1)^{q-1} C_q^{q-1} A_0 a^{q-1}]$$

Il en résulte encore les identités suivantes en nombre infini:

(26) $$A_{q+\lambda-1} - C_q^1 A_{q+\lambda-2} a + \ldots + (-1)^q C_q^q A_{\lambda-1} a^{q-1} = 0 \ ,$$

pour $\lambda = 1, 2, 3, \ldots.$

Il nous reste à calculer les coefficients de $R(x)$ de l'expression (25), que nous notons respectivement par $R_0, R_1, \ldots R_k, \ldots R_{q-1}$.

L'expression générale d'un de ces coefficients, est:

$$R_k = A_k - C_q^1 A_{k-1} a + C_q^2 A_{k-2} a^2 - \ldots + (-1)^k A_0 a^k .$$

En remplaçant ici $A_0, A_1, \ldots, A_k$ par leurs valeurs qui sont les numérateurs des fractions du deuxième membre de la relation (23), nous pouvons écrire:

$$R_k = (a_{q-k-1} + \Gamma_q^1 a_{q-k} a + \ldots + \Gamma_q^{p-q-k+1} a_p a^{p-q-k+1}) + C_q^1 (a_{q-k} a +$$

$$\Gamma_q^1 a_{q-k+1} a^2 + \ldots + \Gamma_q^{p-q-k} a_p a^{p-q-k+1}) - C_q^2 (a_{q-k+1} a^2 + \Gamma_q^1 a_{q-k+2} a^3 +$$

$$\ldots + \Gamma_q^{p-q+k-1} a_p a^{p-q+1}) - \ldots + (-1)^k C_q^k (a_{q-1} a^k + \Gamma_q^1 a_q a^{k+1} +$$

$$\ldots + \Gamma_q^{p-q+1} a_p a^{p-q+k+1})$$

En ordonnant selon les puissances croissantes de a, nous pouvons écrire:

(27) $$R_k = a_{q-k-1} + \sum_{i=1}^{k} (\Gamma_q^i - C_q^1 \Gamma_q^{i-1} + \ldots + (-1)^{i-1} C_q^{i-1} \Gamma_q^1 +$$

$$(-1)^i C_q^i) a_{q+i-1} a^i + \sum_{i=1}^{p-q-1} (\Gamma^{k+i} - C_q^1 \Gamma^{k+i-1} - \ldots + (-1)^k C_q^k \Gamma_q^i) a_{q+i-1} a^{k+i}$$

Mais, nous pouvons démontrer que le coefficient de a^i est nul. En effet, en considérant les développements évidents:

$$(1-x)^q = 1 - C_q^1 x + \ldots + (-1)^{q-1} C_q^{q-1} x^{q-1} + (-1)^q x^q$$

$$\frac{1}{(1-x)^q} = 1 + \Gamma_q^1 x + \ldots + \Gamma_q^i x^i + \ldots , \quad \text{où} \quad |x| < 1,$$

et en les multipliant, nous avons tout en rendant identiques les coefficients de x^i de deux membres:

$$0 = \Gamma_q^i - C_q^1 \Gamma_q^{i-1} + \ldots + (-1)^{i-1} C_q^{i-1} \Gamma_q^1 + (-1)^i C_q^i$$

La relation (27) peut être réduite ainsi à la suivante:

$$(28) \qquad R_k = a_{q-k+1} + \sum_{i=1}^{p-q+1} (\Gamma_q^{k+i} - C_q^1 \Gamma_q^{k+i-1} + C_q^2 \Gamma_q^{k+i-2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k C_q^k \Gamma_q^i) a_{q+i-1} a^{k+i} .$$

Ainsi l'expression du reste cherché, est:

$$(29) \quad R(x) = R_0 x^{q-1} + R_1 x^{q-2} + \ldots + R_k x^{q-k-1} + \ldots + R_{q-2} x + R_{q-1},$$

où les coefficients R_k sont donnés successivement par la relation (28), pour:

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (q-1).$$

Il résulte de ce qui précede que l'expression du quotient de la division du polynôme.

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p ,$$

par $(a-x)^q$ est donnée par la relation (22), et que l'expression du reste est donnée par la relation (29) où les coefficients ont la forme (28).

La restriction $|x| > a$, que nous avons, faite au cours de la démonstration peut être écartée maintenant parce que les formules trouvées pour le quotient et le reste, étant valables pour un intervalle (dans notre cas, pour $|x| > a$), sont ainsi valables pour n'importe quelle valeur de x.

Remarque. Comme R_k de la relation (29) est le coefficient de x^{q-k-1} de l'expression du reste $R(x)$, il en résulte que ce coefficient est identique au coefficient de x^{q-k-1} du développement (3) employé dans la premiére méthode, c'est-à-dire $\frac{R^{(q-k-1)}_{(0)}}{(q-k-1)!}$, ainsi que nous avons:

$$(30) \qquad R_k = \frac{R^{(q-k-1)}_{(0)}}{(q-k-1)!}$$

Mais nous avons établi dans la formule (9) que:

$$\frac{R^{(k)}_{(0)}}{k!} = a_k + (-1)^{q-k-1} \sum_{i=0}^{p-q} \Gamma_{k+1}^{q-k+i} \Gamma_{q-k}^i a_{q+i} a^{q-k+i}$$

En substituant ici k par $q-k-1$ et i par $(i-1)$, nous trouvons:

$$\frac{R^{(q-k-1)}_{(0)}}{(q-k-1)!} = a_{q-k-1} + (-1)^k \sum_{i=1}^{p-q+1} \Gamma_{q-k}^{k+i} \Gamma_{k+1}^{i-1} a_{q+i-1} a^{k+i}$$

En vertu de la relation (30), nous pouvons donc écrire :

(31) $$R_k = a_{q-k-1} + (-1)^k \sum_{i=1}^{p-q+1} \Gamma_{q-k}^{k+i} \Gamma_i^k a_{q+i-1} a^{k+i}$$

En comparant cette valeur de R_k avec sa valeur dans la relation (28), il en résulte les identités intéressantes ci-après :

$$\Gamma_q^{k+i} - C_q^1 \Gamma_q^{k+i-1} + C_q^2 \Gamma_q^{k+i-2} - \ldots + (-1)^k C_q^k \Gamma_q^i = (-1)^k \Gamma_{q-k}^{k+i} \Gamma_i^k ,$$

pour :

$$i = 1, 2, \ldots, (p - q + 1).$$

Le cas général.

Nous allons traiter maintenant le cas plus général qui suit :

Trouver directement le quotient et le reste de la division du polynôme :

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$$

par le produit :

$$(\alpha_1 - x)^{q_1} (\alpha_2 - x)^{q_2} \ldots (\alpha_n - x)^{q_n} ,$$

où les nombres $p, q_1, q_2, \ldots, q_n$ *sont des entiers positifs,* $q_1 + q_2 + \ldots + q_n \leqq p$.

En notant :

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = q ,$$

nous remarquons qu'on peut écrire :

(32) $$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p}{(\alpha_1 - x)^{q_1} (\alpha_2 - x)^{q_2} \ldots (\alpha_n - x)^{q_n}} =$$

$$(-1)^q \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p}{x^q \left(1 - \frac{\alpha_1}{x}\right)^{q_1} \left(1 - \frac{\alpha_2}{x}\right)^{q_2} \cdots \left(1 - \frac{\alpha_n}{x}\right)^{q_n}}$$

En supposant :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n ,$$

nous pouvons considérer le développement ci après en série absolument convergente, dans l'hypothèse :

$$|x| > \alpha_n :$$

(33) $$\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{x}\right)^{q_1} \left(1 - \frac{\alpha_2}{x}\right)^{q_2} \cdots \left(1 - \frac{\alpha_n}{x}\right)^{q_n}} = \left(1 + \Gamma_{q_1}^1 \frac{\alpha_1}{x} + \Gamma_{q_1}^2 \frac{\alpha_1^2}{x^2} + \ldots\right)$$

$$\left(1 + \Gamma_{q_2}^1 \frac{\alpha_2}{x} + \Gamma_{q_2}^2 \frac{\alpha_2^2}{x^2} + \ldots\right) \cdots \left(1 + \Gamma_{q_n}^1 \frac{\alpha_n}{x} + \Gamma_{q_2}^2 \frac{\alpha_n^2}{x_2} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_{p-q}}{x^{p-q}} + \ldots,$$

où nous avons noté :

$$A_1 = \sum_{i=1}^{n} \Gamma^1_{q_i}\, \alpha_i$$

$$(34) \qquad A_2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\Gamma^2_{q_i}\, \alpha_i^2 + \Gamma^1_{q_i}\, \Gamma^1_{q_j}\, \alpha_i\, \alpha_j\right), \qquad (i \neq j)$$

$$A_3 = \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\Gamma^3_{q_i}\, \alpha_i^3 + \Gamma^2_{q_i}\Gamma^1_{q_j}\, \alpha_i^2\, \alpha_j + \Gamma^1_{q_i}\Gamma^1_{q_j}\,\Gamma^1_{q_k}\, \alpha_i\, \alpha_j\, \alpha_k\right), \quad (i \neq j \neq k)$$

. . . .

En vertu du développement (33), la relation (32) peut s'écrire :

$$(35) \quad \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p}{(\alpha_1 - x)^{q_1} (\alpha_2 - x)^{q_2} \ldots (\alpha_n - x)^{q_n}} = (-1)^q\, (a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p)\, [x^{-q} +$$

$$A_1 x^{-(q+1)} + A_2 x^{-(q+2)} + \ldots + A_{p-q} x^{-p} + A_{p-q-1} x^{-(p+1)} + \ldots) =$$

$$(-1)^q [a_p x^{p-q} + (a_{p-1} + A_1 a_p) x^{p-q-1} (a_{p-2} + A_1 a_{p-1} + A_2 a_p)\, x^{p-q-2} + \ldots$$

$$\ldots + (a_q + A_1 a_{q+1} + \ldots + A_{p-q} a_p) + \frac{a_{q-1} + A_1 a_q + \ldots + A_{p-q+1} a_p}{x} +$$

$$\frac{a_{q-2} + A_1 a_{q-1} + \ldots + A_{p-q+1} a_p}{x^2} + \ldots + \frac{a_0 + A_1 a_1 + \ldots + A_p a_p}{x^q} +$$

$$\left.\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{A_\lambda a_0 + A_{\lambda+1} a_1 + \ldots + A_{\lambda+p} a_p}{x^{q+\lambda}}\right]$$

En désignant par $Q(x)$ et $R(x)$ le quotient et le reste cherchés, et en regardant la relation (35), nous en déduisons que le dernier membre arrêté au terme libre, exprime le quotient $Q(x)$ et l'autre partie qui suit — étant une série absolument convergente — représente le développement de l'expression :

$$\frac{R(x)}{(\alpha_1 - x)^{q_1} (\alpha_2 - x)^{q_2} \ldots (\alpha_n - x)^{q_n}}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$(36) \quad Q(x) = (-1)^q [a_p x^{p-q} + (a_{p-1} + A_1 a_p)\; x^{p-q-1} + (a_{p-2} + A_1 a_{p-1} +$$

$$A_2 a_p)\, x^{p-q-2} + \ldots + (a_q + A_1 a_{q+1} + \ldots + A_{p-q} a_p)]$$

$$(37) \quad \frac{R(x)}{(\alpha_1 - x)^{q_1} (\alpha_2 - x)^{q_2} \ldots (\alpha_n - x)^{q_n}} = (-1)^q \left[\frac{a_{-q1} + A_1 a_q + \ldots + A_{p-q+1} a_p}{x}\right.$$

$$\frac{a_{q-2} + A_1 a_{q-1} + \ldots + A_{p-q+2} a_p}{x^2} + \ldots + \frac{a_0 + A_1 a_1 + \ldots + A_p a_p}{x^q} +$$

$$\left. \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{A_\lambda a_0 + A_{\lambda+1} a_1 + \ldots + A_{\lambda+p} a_p}{x^{q+\lambda}} \right]$$

Mais nous remarquons que:

(38) $$(\alpha_1 - x)^{q_1} (\alpha_2 - x)^{q_2} \ldots (\alpha_n - x)^{q_n} = (-1)^q \left[x^{q_1} - C^1_{q_1} x^{q_1 - 1} \alpha_1 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{q_1} C^{q_1}_{q_1} \alpha_1{}^{q_1}\right] \left[x^{q_2} - C^1_{q_2} x^{q_2 - 1} \alpha_2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{q_2} C^{q_2}_{q_2} \alpha_2{}^{q_2}\right] \ldots \left[x^{q_n} - C^1_{q_n} x^{q_n - 1} \alpha_n + \ldots + (-1)^{q_n} C^{q_n}_{q_n} \alpha_n{}^{q_n}\right]$$

$$= (-1)^q \left[x^q - B_1 x^{q-1} + B_2 x^{q-2} - \ldots + (-1)^q B_q\right],$$

où nous avons noté:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} C^1_{q_i} \alpha_i$$

(39) $$B_2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(C^2_{q_i} \alpha_i^2 + C^1_{q_i} C^1_{q_j} \alpha_i \alpha_j\right), \qquad (i \neq j)$$

$$B_3 = \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(C^3_{q_i} \alpha_i^3 + C^2_{q_i} C^1_{q_j} \alpha_i^2 \alpha_j + C^1_{q_i} C^1_{q_j} C^1_{q_k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k\right), \quad (i \neq j \neq k)$$

. . . .

$$B_q = \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \ldots \alpha_n^{q_n}$$

En vertu de la relation (38), l'expression (37) où nous notons encore par $C_1, C_2, \ldots C_q, C_{q+1}, \ldots$ les numérateurs des fractions du deuxième membre, devient:

(40) $$R(x) = [x^q - B_1 x^{q-1} + B_2 x^{q-2} - \ldots + (-1)^q B_q] \left(\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{C_q}{x^q} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{C_{q+\lambda}}{x^{q+\lambda}}\right) = C_1 x^{q-1} + (C_2 - B_1 C_1) x^{q-2} +$$

$$(C_3 - B_1 C_2 + B_2 C_1) x^{q-3} + \ldots + [C_q - B_1 C_{q-1} + \ldots + (-1)^{q-1} B_{q-1} C_1] +$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{C_{q+\lambda} - B_1 C_{q+\lambda-1} + \ldots + (-1)^q B_q C_\lambda}{x^\lambda}$$

Comme le reste est un polynôme en général du dégré $(q-1)$, il en résulte que le développement (40) arrêté au terme libre exprime le reste $R(x)$ et que les autres coefficients sont nuls.

Ainsi nous pouvons donc écrire:

(41) $R(x) = C_1 x^{q-1} + (C_2 - B_1 C_1) x^{q-2} + (C_3 - B_1 C_2 + B_2 C_1) x^{q-3} + \dots + [C_q - B_1 C_{q-1} + \dots + (-1)^{q-1} B_{q-1} C_1]$

(42) $$C_{q+\lambda} - B_1 C_{q+\lambda-1} + \dots + (-1)^q B_q C_\lambda = 0\ ,$$

pour $\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$

De tout ce qui précède, il en résulte que le quotient $Q(x)$ *de la division du polynôme:*

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$$

par le produit:

$$(\alpha_1 - x)^{q_1} (\alpha_2 - x)^{q_2} \dots (\alpha_n - x)^{q_n}$$

est exprimé par l'expression (36), où les coefficients A_i $[i = 1, 2, \dots, (p-q)]$ *sont donnés par les relations (34), et le reste* $R(x)$ *de la même division est exprimé par la relation (41) où les coefficients* B_i, $(i = 1, 2, \dots, q)$ *sont donnés par les relations (39), et les coefficients* C_i, $(i = 1, 2 \dots, q)$ *sont les numérateurs des fractions du deuxième membre de la relation (37).*

La restriction, $|x| > \alpha_n$ que nous avons faite au cours de la démonstration, peut être écartée maintenant, parce que les formules trouvées pour le quotient et le reste, étant valables pour un intervalle, (dans notre cas, pour $|x| > \alpha_n$), sont ainsi valables pour n'importe quelle valeur de x.