QUOTIENT ET RESTE DE LA DIVISION DE DEUX POLYNOMES

PAR

V. ALACI

EXTRAIT DU „BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLITECHNIQUE DE TIMIŞOARA"

TOME 5 FAS. 1—2

1 9 3 3

Imprimerie „Tipografia Românească" Timişoara

A MESSIEURS

D. POMPEIU
Membre correspondant de l'Académie Roumaine
Professeur à l'Université et à l'École Polytechnique de Bucarest
Professeur agréé à la Sorbonne.

G. TZITZÉICA
Vice-Président de l'Académie Roumaine
Professeur à l'Université et à l'École Polytechnique de Bucarest
Professeur agréé à la Sorbonne.

(A l'occasion du soixantième anniversaire de leur naissance, 26/XI. 1933)

Hommage de profonde admiration.

Quotient et reste de la division de deux polynômes.

Par

V. ALACI

Nous nous proposons dans ce qui suit — tout en complétant et généralisant ce qui a été énoncé et traité dans l'article „*Les expressions du reste et du quotient de la division de deux polynômes*"[1] — de trouver directement la loi de formation du quotient et du reste de la division de deux polynômes quelconques, en fonction de leurs coefficients.

Soit à trouver ainsi directement le quotient et le reste de la division du polynôme:

$$a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p$$

par le polynôme:

$$b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q ,$$

où p et q sont des entiers positifs, $q \leqq p$.

1. En premier lieu recherchons le développement en série absolument convergente d'après les puissances de $\frac{1}{x}$, de l'expression:

$$\frac{1}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q} = \frac{1}{x^q \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_q}{x^q} \right)}$$

Soit α la racine de plus grand module de l'équation:

$$b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q = 0 .$$

En supposant que:

$$x > |\alpha| , \tag{1}$$

nous pouvons exprimer le développement suivant, en série absolument convergente:

$$\frac{1}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_q}{x^q}} = A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_r}{x^r} + \cdots \tag{2}$$

et où il faut déterminer les coefficients $A_0 , A_1 , A_2 , \cdots , A_r , \cdots$

Pour cela, nous remarquons que la relation (2) peut s'écrire:

$$1 = \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_q}{x^q} \right) \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_r}{x^r} + \cdots \right)$$

[1]) Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, Tome 4, fasc. 3—4, 1932 pages 135—150.

En identifiant les coefficients des mêmes puissances de $\frac{1}{x}$ dans les deux membres, nous en déduisons :

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
b_0\,A_0 = 1 \\
b_1\,A_0 + b_0\,A_1 = 0 \\
b_2\,A_0 + b_1\,A_1 + b_0\,A_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_r\,A_0 + b_{r-1}\,A_1 + \cdots + b_0\,A_r = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\right.
$$

En résolvant ce système par récurrence ou mieux par la règle de *Cramer,* nous obtenons :

$$
A_r = \frac{\begin{vmatrix}
b_0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 1 \\
b_1 & b_0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \\
b_2 & b_1 & b_0 \ldots\ldots 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\
b_r & b_{r-1} & b_{r-2} \ldots b_1 & 0
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
b_0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \\
b_1 & b_0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \\
b_2 & b_1 & b_0 \ldots\ldots 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
b_r & b_{r-1} & b_{r-2} \ldots b_1 & b_0
\end{vmatrix}} = \frac{(-1)^r}{b_0^{r-1}} \begin{vmatrix}
b_1 & b_0 & 0 \ldots\ldots 0 \\
b_2 & b_1 & b_0 \ldots\ldots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\
b_r & b_{r-1} & b_{r-2} \ldots\ldots b_1
\end{vmatrix}
$$

où $r = 1, 2, \ldots$. Nous avons ainsi successivement :

$$
(4) \qquad A_0 = \frac{1}{b_0}, \qquad A_1 = -\frac{b_1}{b_0^2}, \qquad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}}{b_0^3}, \ldots
$$

$$
A_r = \frac{(-1)^r}{b_0^{r+1}} \begin{vmatrix}
b_1 & b_0 & 0 \ldots 0 \\
b_2 & b_1 & b_0 \ldots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\
b_r & b_{r-1} & b_{r-2} \ldots b_1
\end{vmatrix}, \ldots
$$

2. *Une formule de récurrence.* Si nous notons pour être bref :

$$
\Delta_r = \begin{vmatrix}
b_1 & b_0 & 0 \ldots\ldots 0 \\
b_2 & b_1 & b_0 \ldots\ldots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
b_r & b_{r-1} & b_{r-2} \ldots b_1
\end{vmatrix}
$$

nous avons alors en observant les relations (4):

(5)
$$A_r = \frac{(-1)^r}{b_0^{r+1}} \Delta_r \,, \qquad (r = 0,\ 1,\ 2 \ldots)$$

Si dans la dernière équation écrite en (3), nous remplaçons les valeurs de A_0, A_1, A_2, ..., A_r, ... données par (5), en prenant $\Delta_0 = 1$, on obtient:

$$\frac{b_r}{b_0}\Delta_0 - \frac{b_{r-1}}{b_0^2}\Delta_1 + \frac{b_{r-2}}{b_0^3}\Delta_2 - \cdots + \frac{(-1)^{r-1} b_1}{b_0^r}\Delta_{r-1} + \frac{(-1)^r}{b_0^r}\Delta_r = 0$$

Nous déduisons de cette dernière expression la formule de récurrence suivante:

(6)
$$\Delta_r = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \, b_0^k \, b_{k+1} \, \Delta_{r-k-1}$$

Remarque. Dans cette formule, pour $r > q$, il est évident que nous remplacerons par zéro les coefficients b_{q+1}, b_{q+2} ....

3. Il résulte de ce qui vient d'être exposé que la condition (1) étant satisfaite, nous obtenons le développement suivant en série absolument convergente:

(7)
$$\frac{1}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q} = \frac{A_0}{x^q} + \frac{A_1}{x^{q+1}} + \frac{A_2}{x^{q+2}} + \cdots + \frac{A_r}{x^{q+r}} + \cdots,$$

où les coefficients A_0, A_1, A_2, ..., A_r, ... ont les valeurs données par les relations (5) qui comprennent Δ_r calculés à l'aide des relations (6).

Cas particuliers: 1°. Soit:

$$\frac{1}{a x^2 + b x + c} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{x^{2+r}}$$

En comparant cette relation à (7), il en résulte que;

$$q = 2\,, \qquad b_0 = a\,, \qquad b_1 = b\,, \qquad b_2 = c$$

ainsi que (5) devient:

$$A_r = \frac{(-1)^r}{a^{r+1}} \Delta_r \,,$$

où en vertu de la relation (6):

(8)
$$\Delta_r = b\,\Delta_{r-1} - a\,c\,\Delta_{r-2}\,.$$

Comme, $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = b$, il résulte de l'expression (8) successivement:

$$\Delta_2 = b^2 - a c\,, \quad \Delta_3 = b^3 - 2 a b c\,, \quad \Delta_4 = b^4 - 3 a b^2 c + a^2 c^2, \ldots$$

Nous déduisons ainsi le développement:

(9)
$$\frac{1}{a x^2 + b x + c} = \frac{1}{a x^2} - \frac{b}{a^2 x^3} + \frac{b^2 - a c}{a^3 x^4} - \frac{b^3 - 2 a b c}{a^4 x^5} + \frac{b^4 - 3 a b^2 c + a^2 c^2}{a^5 x^6} - \cdots,$$

valable pour :

$$x > |\alpha|,$$

α étant la racine de plus grand module de l'équation :

$$a x^2 + b x + c = 0 .$$

Remarque : Si nous avons :

$$a = b = c = 1 ,$$

la relation (8) devient :

$$\Delta_r = \Delta_{r-1} - \Delta_{r-2} \quad ; \qquad \text{alors :} \quad A_r = (-1)^r \, (\Delta_{r-1} - \Delta_{r-2})$$

et par conséquent :

$$A_0 = 1 \ , \qquad A_1 = -1 \ , \qquad A_2 = 0 ,$$

et en général :

(10) $$A_{k+3r} = A_k \ , \qquad \text{pour :} \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, 2 \\ r = 0, 1, 2, 3, \ldots . \end{array}$$

Il en résulte ainsi le développement :

(11) $$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{1}{x^{2+3r}} - \frac{1}{x^{3(1+r)}} \right] = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{x^{2+3r}}$$

valable pour :

$$x > 1 .$$

2°. Soit :

$$\frac{1}{a x^3 + b x^2 + c x + d} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{x^{3+r}}$$

En comparant cette expression à (7), il en résulte :

$$q = 3 \ , \qquad b_0 = a \ , \qquad b_1 = b \ , \qquad b_2 = c \ , \qquad b_3 = a \ ,$$

ainsi que (5) devient :

$$A_r = \frac{(-1)^r}{a^{r+1}} \Delta_r ,$$

où en vertu de la relation (6) :

(12) $$\Delta_r = b \, \Delta_{r-1} - a \, c \, \Delta_{r-2} + a^2 \, d \, \Delta_{r-3} .$$

Comme :

$$\Delta_0 = 1 \ , \qquad \Delta_1 = b \, , \qquad \Delta_2 = b^2 - a \, c \ ,$$

il résulte de (12) successivement :

$$\Delta_3 = b^3 - 2 \, a \, b \, c + a^2 \, d \, , \qquad \Delta_4 = b^4 - 3 \, a \, b^2 \, c + a^2 \, c^2 + 2 \, a^2 \, b \, d \, , \ldots .$$

Nous avons ainsi le développement :

$$\frac{1}{a x^3 + b x^2 + c x + d} = \frac{1}{a \, x^3} - \frac{b}{a^2 \, x^4} + \frac{b^2 - a \, c}{a^3 \, x^5} - \frac{b^3 - 2 \, a \, b \, c + a^2 \, d}{a^4 \, x^6} + \ldots$$

Remarque: Si nous avons:

$$a = b = c = d = 1 ,$$

la relation (12) devient:

$$\Delta_r = \Delta_{r-1} - \Delta_{r-2} + \Delta_{r-3} ,$$

et par conséquent:

$$\Delta_0 = \Delta_1 = 1 , \qquad \Delta_2 = \Delta_3 = 0 , \dots$$

et en général:

$$\Delta_{k+4r} = \Delta_k , \qquad \text{pour:} \begin{array}{l} k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \\ r = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots . \end{array}$$

Nous avons ainsi le développement:

$$(14) \qquad \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{1}{x^{3+4r}} - \frac{1}{x^{4(1+r)}} \right] = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{x^{3+4r}}$$

valable pour:

$$x > 1 .$$

Expressions du quotient et du reste.

4. Après ce qui vient d'être exposé, nous pouvons chercher maintenant à établir la loi de formation du quotient et du reste consécutifs à la division de deux polynômes entiers, en fonction de leurs coefficients:

Soit à trouver ainsi directement le quotient $Q(x)$ *et le reste* $R(x)$ *de la division du polynôme:*

$$a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p ,$$

par le polynôme:

$$b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q ,$$

où p et q sont des entiers positifs, $q \leq p$.

Nous faisons en premier lieu l'hypothèse:

$$(15) \qquad x > |\alpha| ,$$

α étant la racine de module maximum de l'équation:

$$b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q = 0 ,$$

hypothèse que nous écarterons ensuite.

Dans cette hypothèse, nous avons établi au § 3, le développement (7), c'est-à-dire:

$$(16) \qquad \frac{1}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q} = \frac{A_0}{x^q} + \frac{A_1}{x^{q+1}} + \frac{A_2}{x^{q+2}} + \dots + \frac{A_r}{x^{q+r}} + \dots$$

où les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, A_r, \dots$ se calculent à l'aide des relations (5) et (6).

En multipliant les deux membres de (16), par: $a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p$, on obtient:

$$\frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q} = (a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p) \left(\frac{A_0}{x^q} + \frac{A_1}{x^{q+1}} + \frac{A_2}{x^{q+2}} + \cdots + \frac{A_r}{x^{q+r}} + \cdots \right),$$

ou encore :

$$(17) \quad \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q} = a_0 A_0 x^{p-q} + (a_1 A_0 + a_0 A_1) x^{p-q-1} + (a_2 A_0 + a_1 A_1 + a_0 A_2) x^{p-q-2} + \cdots + (a_{p-q} A_0 + a_{p-q-1} A_1 + \cdots + a_0 A_{p-q}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{p-q+k}}{x^q}$$

où nous avons noté pour être bref :

$$(18) \qquad B_r = a_r A_0 + a_{r-1} A_1 + \cdots + a_0 A_r, \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

et en prenant évidemment pour $r > p$:

$$a_{p+1} = a_{p+2} = \cdots = 0 .$$

Comme le quotient cherché $Q(x)$ est un polynôme en x du dégré $p-q$, il s'ensuit que le développement du deuxième membre dans la relation (17) arrêté au terme libre de x, représente $Q(x)$ tandis que la partie suivante, qui est une série absolument convergente, représente le développement de l'expression :

$$\frac{R(x)}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q}$$

ainsi que nous pouvons écrire :

$$(19) \qquad Q(x) = a_0 A_0 x^{p-q} + (a_1 A_0 + a_0 A_1) x^{p-q-1} + (a_2 A_0 + a_1 A_1 + a_0 A_2) x^{p-q-2} + \cdots + (a_{p-q} A_0 + a_{p-q-1} A_1 + \cdots + a_0 A_{p-q})$$

$$(20) \quad \frac{R(x)}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{p-q+k}}{x^k} = \frac{B_{p-q+1}}{x} + \frac{B_{p-q+2}}{x^2} + \cdots + \frac{B_p}{x^q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{p+k}}{x^{q+k}}$$

L'expression du quotient cherché $Q(x)$ est donnée par la relation (19) où les coefficients $A_0, A_1, \ldots A_{p-q}$ se calculent à l'aide des relations (5) et (6).

Il reste à trouver l'expression du reste, $R(x)$.

Dans ce but, remarquons que de (20) nous déduisons :

$$R(x) = (b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q) \left(\frac{B_{p-q+1}}{x} + \frac{B_{p-q+2}}{x^2} + \cdots + \frac{B_p}{x^q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{p+k}}{x^{q+k}} \right)$$

En effectuant le produit du deuxième membre, nous obtenons :

(21) $$R(x) = b_0 B_{p-q+1} x^{q-1} + (b_1 B_{p-q+1} + b_0 B_{p-q+2}) x^{q-2} + (b_2 B_{p-q+1} + b_1 B_{p-q+2} + b_0 B_{p-q+3}) x^{q-3} + \cdots + (b_{q-1} B_{p-q+1} + b_{q-2} B_{p-q+2} + \cdots + b_0 B_p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_q B_{p-q+k} + b_{q-1} B_{p-q+k+1} + \cdots + b_0 B_{p+k}}{x^k}$$

Comme le premier membre $R(x)$ est un polynôme en général du dégré $q-1$, il en résulte que le développement du deuxième membre dans la relation (21) arrêté au terme libre de x, représente $R(x)$, et que les coefficients des autres termes doivent être nuls.

Il en résulte que :

(22) $$R(x) = b_0 B_{p-q+1} x^{q-1} + (b_1 B_{p-q+1} + b_0 B_{p-q+2}) x^{q-2} + (b_2 B_{p-q+1} + b_1 B_{p-q+2} + b_0 B_{p-q+3}) x^{q-3} + \cdots + (b_{q-1} B_{p-q+1} + b_{q-2} B_{p-q+2} + \cdots + b_0 B_p),$$

de même que les identités suivantes en nombre infini :

(23) $$b_q B_{p-q+k} + b_{q-1} B_{p-q+k+1} + \cdots + b_0 B_{p+q} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

où B_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ est donné par la relation (18).

L'expression du reste cherché $R(x)$ *est donnée par la relation* (22) *où les coefficients* $B_{p-q+1}, B_{p-q+2}, \ldots B_p$ *se calculent à l'aide des relations* (18), (5) *et* (6).

Il reste maintenant à écarter la restriction $x > |\alpha|$ que nous avons faite au début du § 4 et qui nous a permis d'établir les relations (19), (22), (23). En fait ces relations (19), (22), (23) étant valables pour un intervalle (dans notre cas pour $x > |\alpha|$), sont évidemment valables pour toute valeur de x.

Applications. 1. *Soit à trouver directement le quotient et le reste de la division du polynôme :*

$$x^{3n+1} - x^{3n} + 1$$

par $x^2 + x + 1$, *n entier positif.*

En comparant ce dernier cas au cas général traité au § 4, nous avons ici :

$$p = 3n + 1, \qquad q = 2$$

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = -1, \qquad a_2 = a_3 = \cdots = a_{3n} = 0, \qquad a_{3n+1} = 1$$

$$b_0 = b_1 = b_2 = 1.$$

En nous servant des formules (19) et (22) qui donnent les expressions du quotient et du reste, nous avons dans notre cas ;

$$Q(x) = A_0 x^{3n-1} + (-A_0 + A_1) x^{3n-2} + (-A_1 + A_2) x^{3n-3} + \cdots + (-A_{3n-2} + A_{3n-1})$$

$$R(x) = B_{3n}\, x + (B_{3n} + B_{3n+1})$$

La relation (18) appliquée à notre cas, donne:

$$B_{3n} = -A_{3n-1} + A_{3n}$$

$$B_{3n+1} = A_0 - A_{3n} + A_{3n+1}$$

Il nous reste à calculer les coefficients $A_0, A_1, \ldots A_{3n+1}$ à l'aide des relations (5) et (6); mais ces coefficients sont déjà calculés quand le diviseur est $x^2 + x + 1$ au § 3, formules (10), où nous avons trouvé:

$$A_0 = 1\,, \qquad A_1 = -1\,, \qquad A_2 = 0\,.$$

$$A_{k+3r} = A_k\,, \qquad \text{pour:} \quad \begin{array}{l} k = 0,\ 1,\ 2 \\ r = 0,\ 1,\ 2, \ldots \end{array}$$

Ainsi pour $r = n - 1$ et $k = 0, 1, 2$, nous avons:

$$A_{3n-3} = 1\,, \qquad A_{3n-2} = A_1 = -1\,, \qquad A_{3n-1} = A_2 = 0\,,$$

ensuite pour $r = n$, $k = 0$, 1, nous avons:

$$A_{3n} = 1\,, \qquad A_{3n+1} = A_1 = -1\,.$$

Ayant en vue ces valeurs des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{3n+1}$, les expressions cherchées du quotient et du reste deviennent:

$$Q(x) = (x^{3n-1} - 2x^{3n-2} + x^{3n-1}) + (x^{3n-4} - 2x^{3n-5} + x^{3n-6}) + \cdots$$

$$\cdots + (x^2 - 2x + 1) = (x-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} x^{3(n-k-1)}$$

$$R(x) = x\,.$$

2. *Soit à trouver directement le quotient et le reste de la division de x^p par $(x-1)^q$, où p et q sont des entiers positifs, $q \leq p$.*

En comparant ce cas au cas général traité au § 4 et en remarquant que:

$$(x-1)^q = x^q - C_q^1 x^{q-1} + C_q^2 x^2 - \cdots + (-1)^q C_q^q\,,$$

nous avons ici:

$$a_0 = 1\,, \qquad a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$$

$$b_0 = 1\,, \qquad b_1 = -C_q^1\,, \qquad b_2 = C_q^2\,, \ldots b_q = (-1)^q C_q^q$$

En utilisant les formules (19) et (22) qui donnent les expressions du quotient et du reste, nous obtenons dans notre cas:

$$Q(x) = A_0\, x^{p-q} + A_1\, x^{p-q-1} + A_2\, x^{p-q-2} + \cdots + A_{p-q} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} R(x) = {} & A_{p-q+1}\, x^{q-1} + (-C_q^1 A_{p-q+1} + A_{p-q+2})\, x^{q-2} + \\ & (C_q^2 A_{p-q+1} - C_q^1 A_{p-q+2} + A_{p-q+3})\, x^{q-3} + \cdots \\ & \cdots (-1)^q [C_q^q A_{p-q+1} - C_q^{q-1} A_{p-q+2} + \cdots + (-1)^q A_p]\,, \end{aligned} \tag{25}$$

où nous avons posé :

$$B_r = A_r,$$

conformément à la relation (18) appliquée dans ce cas.

Il nous reste à calculer les coefficients $A_0, A_1, \ldots A_p$ à l'aide des relations (5) et (6). Dans le cas qui nous occupe, ces coefficients sont :

$$(26)\quad A_r = (-1)^r \Delta_r = (-1)^r \begin{vmatrix} -C_q^1 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ C_q^2 & -C_q^1 & 1 \ldots\ldots 0 \\ -C_q^3 & C_q^2 & -C_q^1 \ \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^r C_q^r & (-1)^{r-1} C^{r-1} & (-1)^{r-2} C_q^{r-2} \ldots -C_q^1 \end{vmatrix},$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

Les relations (24) et (25) nous donnent le quotient et le reste cherchés, les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_p$, étant donnés par la relation (26).

Remarque : Dans l'article „*Les expressions du reste et du quotient de la division de deux polynômes*" publié dans le précédent numéro de ce bulletin, je me suis occupé du cas particulier de la division d'un polynôme de forme :

$$a_0 + a_1 x + \cdots a_p x^p,$$

par $(a - x)^q$, et j'ai établi que l'expression du quotient est donnée par la relation (17) exprimée dans cet article, c'est-à-dire :

$$(27)\qquad Q(x) = (-1)^q [a^p x^{p-q} + (a_{p-1} + \Gamma_q^1 a_p a) x^{p-q-1} + (a_{p-2} + \Gamma_q^1 a_{p-1} a + \Gamma_q^2 a_p a^2) x^{p-q-2} + \cdots + (a_q + \Gamma_q^1 a_{q+1} a + \cdots + \Gamma_q^{p-q} a_p a^{p-q})]$$

Dans le cas où nous avons à diviser x^p par $(x-1)^q$, le quotient donné par (27) devient :

$$(28)\qquad Q(x) = x^{p-q} + \Gamma_q^1 x^{p-q-1} + \Gamma_q^2 x^{p-q-2} + \cdots + \Gamma_p^{p-q},$$

où Γ_m^n signifie des combinaisons à répétions des m objets pris à n.

Comme ce quotient doit être identique à celui de (24), il résulte de la comparaison des coefficients, l'identité suivante qui est à remarquer :

$$\Gamma_q^i = (-1)^i \begin{vmatrix} -C_q^1 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ C_q^2 & -C_q^1 & 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ -C_q^3 & C_q^2 & -C_q^1 \ \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^i C_q^i & (-1)^{i-1} C_q^{i-1} & (-1)^{i-2} C_q^{i-2} \ldots -C_q^1 \end{vmatrix},$$

valable pour $i = 1, 2, 3, \ldots, p - q$.