UNE CLASSE DE FONCTIONS DISCONTINUES DE PREMIÈRE ESPÈCE

PAR

VALERIU ALACI
PROFESSEUR À L'ÉCOLE POLITECHNIQUE DE TIMIŞOARA

EXTRAIT DU „BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMIŞOARA"
TOME 3. FASC. 1—2.

TIMIŞOARA
IMPRIMERIE „CARTEA ROMANEASCĂ
1930

UNE CLASSE DE FONCTIONS DISCONTINUES DE PREMIÈRE ESPÈCE

PAR

VALERIU ALACI
PROFESSEUR À L'ÉCOLE POLITECHNIQUE DE TIMIŞOARA

EXTRAIT DU „BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMIŞOARA"
TOME 3. FASC. 1—2.

TIMIŞOARA
IMPRIMERIE „CARTEA ROMANEASCA
1930

UNE CLASSE DE FONCTIONS DISCONTINUES DE PREMIÈRE ESPÈCE

PAR

VALERIU ALACI

§ I.

1. Je me propose de présenter dans les pages suivantes, une classe importante de fonctions de 1-ère espèce en partant d'une remarque très simple faite sur une intégrale classique.

2. On sait que la fonction:

$$y = \int_0^{\infty} \frac{\sin x\alpha}{\alpha} d\alpha, \tag{1}$$

ne peut avoir que les valeurs $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, selon que x est négatif, égal à zéro ou positif et que son graphique est, fig. 1:

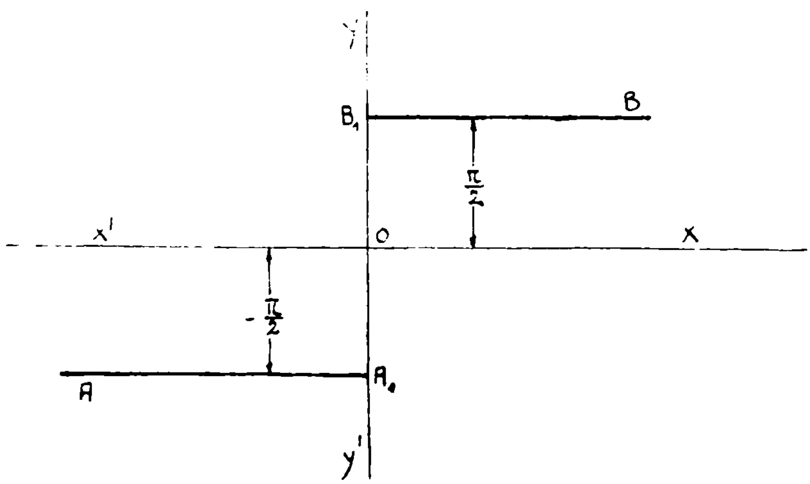

Fig. 1.

formé des semi-droites $A A_1$, $B_1 B$ et du point O qui remplace les extrémités de même abscisse.

3. La fonction (1) est connue en *Analyse* comme une fonction discontinue de première espèce et représentée par une intégrale. Cette particularité que présente la fonction (1), m'a suggeré l'idée d'une généralisation et d'une extension à des branches diverses et m'a permis de découvrir une classe importante de fonctions discontinues de 1-ère espèce digne d'être relevée.

Nous avons la première généralisation immédiate en considérant la fonction :

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin P(x)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha, \tag{2}$$

où $P(x)$ est un polynome du degré n. Nous supposons que le polynome $P(x)$ a p racines réelles simples $a_1, a_2, \ldots a_p$, rangées en ordre de grandeur et que n est pair.

Faisons varier x entre $-\infty$ et $+\infty$ et remarquons qu'en passant par une racine, la fonction y est discontinue, comme nous pouvons le lire facilement sur le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		a_1		a_2		a_3		$\ldots\ldots\; a_p$		$-\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\ldots\ldots 0$	$+$	
y		$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\ldots 0$	$\frac{\pi}{2}$	

Dans ce cas, le graphique de la fonction est, fig. 2 :

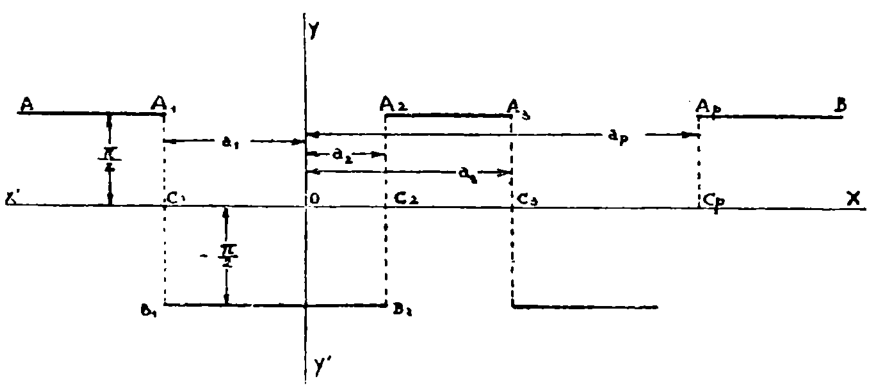

Fig. 2.

formé des semi-droites $A\,A_1$, $A_p\,B$, des segments $B_1\,B_2$, $A_2\,A_3, \ldots$ des points $C_i\,(i = 1, 2, \ldots p)$ qui remplacent les extrémités de même abscisse.

Remarques. 1°. Si n était impair, les signes de $P(x)$ et de y du tableau changeraient, et le graphique correspondant serait symétrique par rapport à l'axe $x'x$, au graphique ci-dessus.

2°. Si $P(x)$ présentait aussi des racines réelles multiples d'ordre impair, la fonction y, pour une telle racine, sauterait de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$, ou inversement.

Pour une racine réelle paire de $P(x)$, y garde à gauche et à droite la même valeur $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, mais ayant la valeur zéro pour cette racine.

Cas particuliers. 1°. La fonction :

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin (x^2 - 4)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

présente le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y		$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	

et par conséquent, le graphique est, fig. 3.

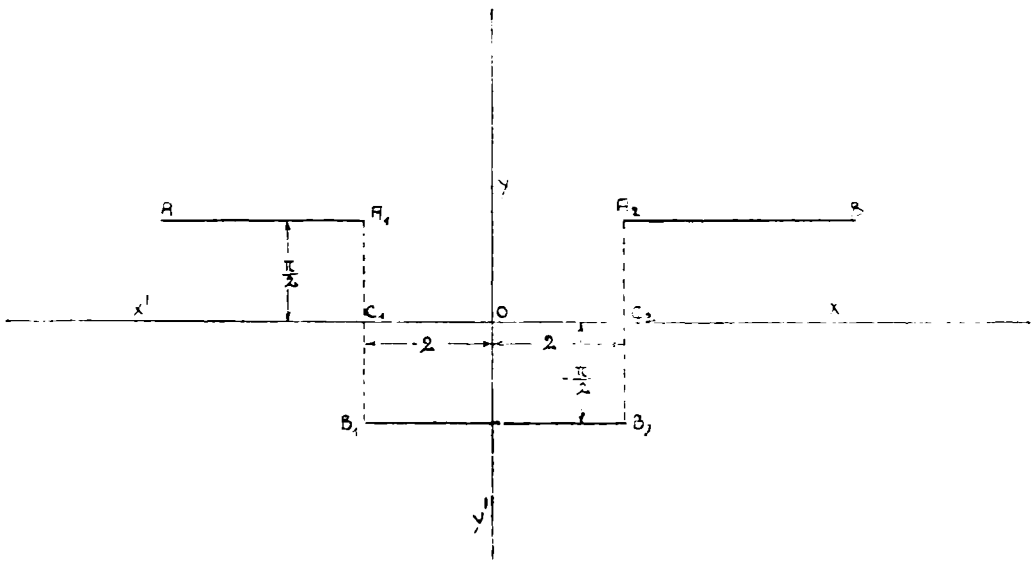

Fig. 3.

formé des semi-droites $A A_1$, $A_2 B$, du segment $B_1 B_2$, des points C_1, C_2 qui remplacent les extrémités de même abscisse.

3°. La fonction :

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin x\,(x^2 - \pi^2)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

présente le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\pi$		0		π		$+\infty$
y		$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	

et par conséquent le graphique est, fig. 4 :

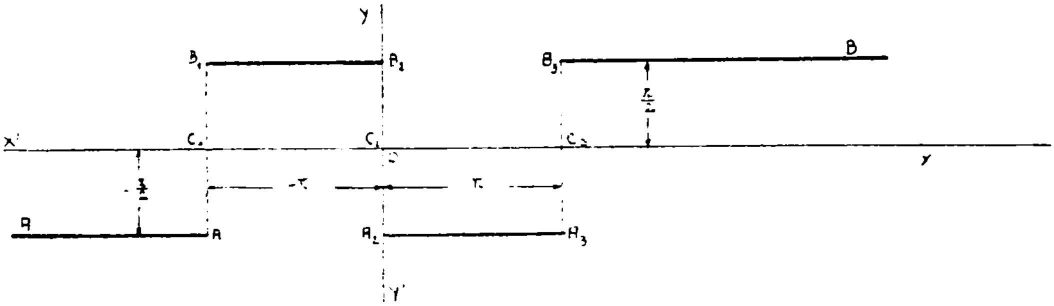

Fig. 4.

formé des semi-droites $A A_1$, $B_3 B$, des segments $B_1 B_2$, $A_2 A_3$, des points C_1 C_2, C_3 qui remplacent les extrémités de même abscisse.

3°. La fonction :

$$y = \int_0^{\infty} \frac{\sin [(\sin x) \alpha]}{\alpha} d \alpha,$$

présente le tableau de variations :

x	$-\infty \ldots$		-2π		$-\pi$		0		π		$2\pi \ldots +\infty$
y	$\ldots -\frac{\pi}{2}$		0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$0 \ldots$

et par conséquent, le graphique est, fig. 5 :

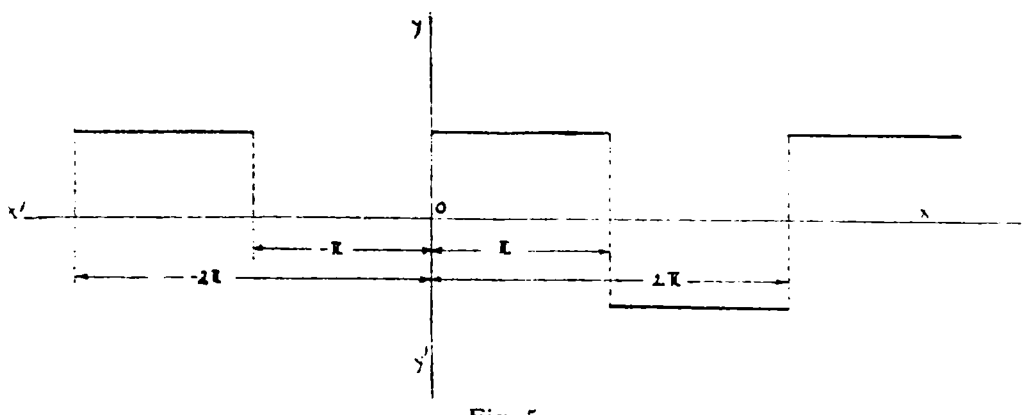

Fig. 5.

formé d'une infinité de segments égaux situés de part et d'autre de l'axe $x' x$, les extrémités des segments étant remplacés par les points de l'axe $x' x$ qui correspondent aux mêmes abscisses.

On voit que nous sommes en présence d'une fonction périodique discontinue de première espèce et nous savons qu'elle peut être aussi représentée par la série trigonométrique :

$$2 \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin (2k+1)}{2k+1} + \ldots \right].$$

4. Nous avons une autre généralisation de la fonction (1), en considérant la fonction :

$$y=\int_0^\infty \frac{\sin P(x)\,\alpha \cos Q(x)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha, \tag{3}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynomes. Elle peut se réduire à la somme de deux intégrales de forme (2).

En effet, nous pouvons écrire :

$$y=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin[P(x)+Q(x)]\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin[P(x)-Q(x)]\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha$$

Afin de préciser le tableau de variations, supposons que $a_1, a_2, \ldots a_p$; $b_1, b_2, \ldots b_q$ soient toutes les racines réelles simples ou multiples, d'ordre impair, des polynomes :

$$p(x)=P(x)+Q(x), \qquad q(x)=P(x)-Q(x).$$

supposés pairs et que leur ordre de grandeur soit :

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots a_n,\ b_n, \ldots$$

Nous remarquons facilement que la tableau de variations est :

x	$-\infty$		a_1		b_1		a_2		$b_2 \ldots a_p \ldots b_q \ldots$		$+\infty$
y		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4} \ldots$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

et par conséquent le graphique est, fig. 6 :

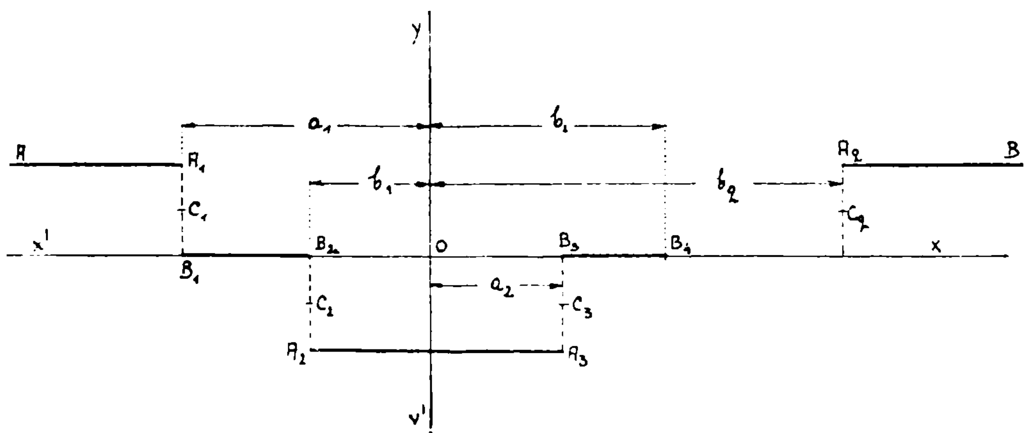

Fig. 6.

formé des semi-droites AA_1, A_qB, des segments B_1B_2, A_2A_3, $B_3B_4, \ldots$ des points C_i $(i=1,\ 2,\ 3, \ldots q)$ qui remplacent les extrémités de même abscisse.

Il serait tout aussi facile de traiter les cas présentant des polynomes $p(x)$, $q(x)$ impairs ou de parités différentes et même s'ils présentaient des racines réelles d'ordre pair.

Remarque. Nous pourrions traiter de même la fonction plus générale:

$$(4) \qquad y=\int_0^\infty \frac{\sin P(x)\,\alpha \cos Q_1(x)\,\alpha \cos Q_2(x)\,\alpha \ldots \cos Q_n(x)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

Cette fonction peut se réduire à une somme de 2^n sommes de forme (2), en transformant le produit du numérateur en une somme de sinus.

Cas particuliers. 1°. *Soit à construire le graphique de la fonction :*

$$y=\int_0^\infty \frac{\sin x^3\,\alpha \cos x\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha$$

Nous pouvons écrire :

$$y=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x\,(x^2+1)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x\,(x^2-1)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha$$

et en faisant varier x, nous obtenons le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y		$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	0	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	

et par conséquent le graphique est, fig. 7 :

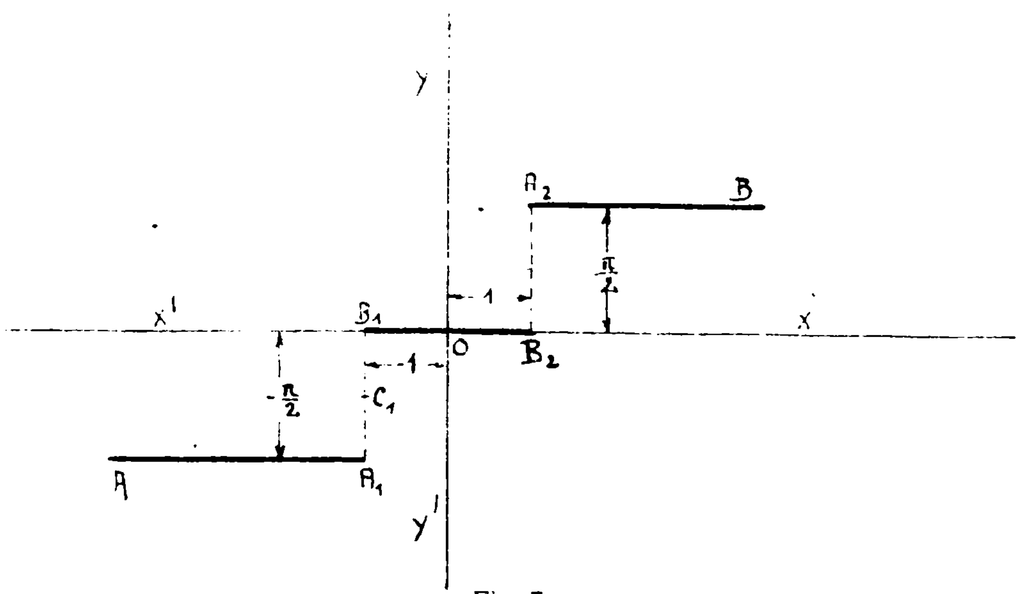

Fig. 7.

formé de semi-droites $A\,A_1$, $A_2\,B$, du segment $B_1\,B_2$, des points C_1, C_2 qui tiennent lieu des extrémités de même abscisse.

2°. *Soit à représenter graphiquement la fonction :*

$$y=\int_0^\infty \frac{\sin (x^2-5)\,\alpha \cos 4\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

Nous pouvons écrire :

$$y=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x^2-1)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x^2-9)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha,$$

et en faisant varier x, nous obtenons le tableau :

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
y		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	

et ainsi le graphique est, fig. 8 :

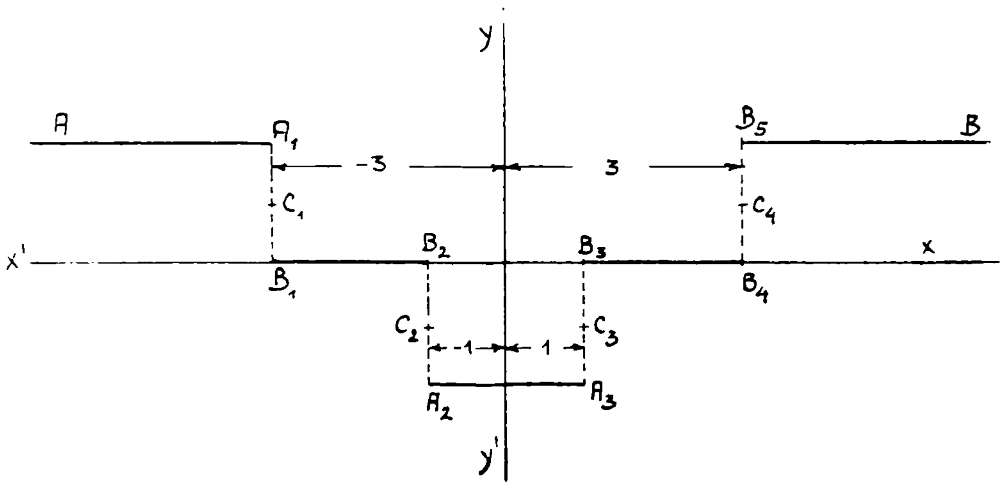

Fig. 8.

formé des semi-droites $A\,A_1$, $B_5\,B$, des segments $B_1\,B_2$, $A_2\,A_3$, $B_3\,B_4$, des points C_1, C_2, C_3, C_4 qui remplacent les extrémités de même abscisse.

Remarque. Si l'on voulait que le graphique restât en entier au-dessus de l'axe $x'x$, nous pourrions considérer la fonction ;

$$y=a+\int_0^{\infty}\frac{\sin(x^2-5)\,\alpha\cos 4\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha, \qquad a>\frac{\pi}{2}.$$

5. Nous pouvons encore généraliser la fonction (1) de la manière suivante. *Considérons la fonction :*

$$(5) \qquad y=\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x-\frac{n-1}{2}\right)\alpha\,\sin\frac{n\,\alpha}{2}}{\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\,\alpha,$$

dont on demande d'établir le graphique.

En observant que :

$$\frac{\sin\left(x-\frac{n-1}{2}\right)\alpha \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin x\alpha+\sin(x-1)\alpha+\ldots+\sin(x-n+1)\alpha,$$

il en résulte que la fonction (5), devient :

$$y=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x-k)\alpha}{\alpha}d\alpha,$$

c'est-à-dire qu'elle est une somme de n fonctions de forme (1).

En faisant varier x nous obtenons le tableau :

x	$-\infty$	0		1			$2\ldots n-1$	$+\infty$
y	$-\frac{n\pi}{2}$	$-\frac{(n-1)\pi}{2}$	$-\frac{(n-2)\pi}{2}$	$-\frac{(n-3)\pi}{2}$	$-\frac{(n-4)\pi}{2}$	$-\frac{(n-5)\pi}{2}$	$\frac{(n-1)\pi}{2}$	$\frac{n\pi}{2}$

Nous avons par conséquent le graphique échelle, fig. 9 :

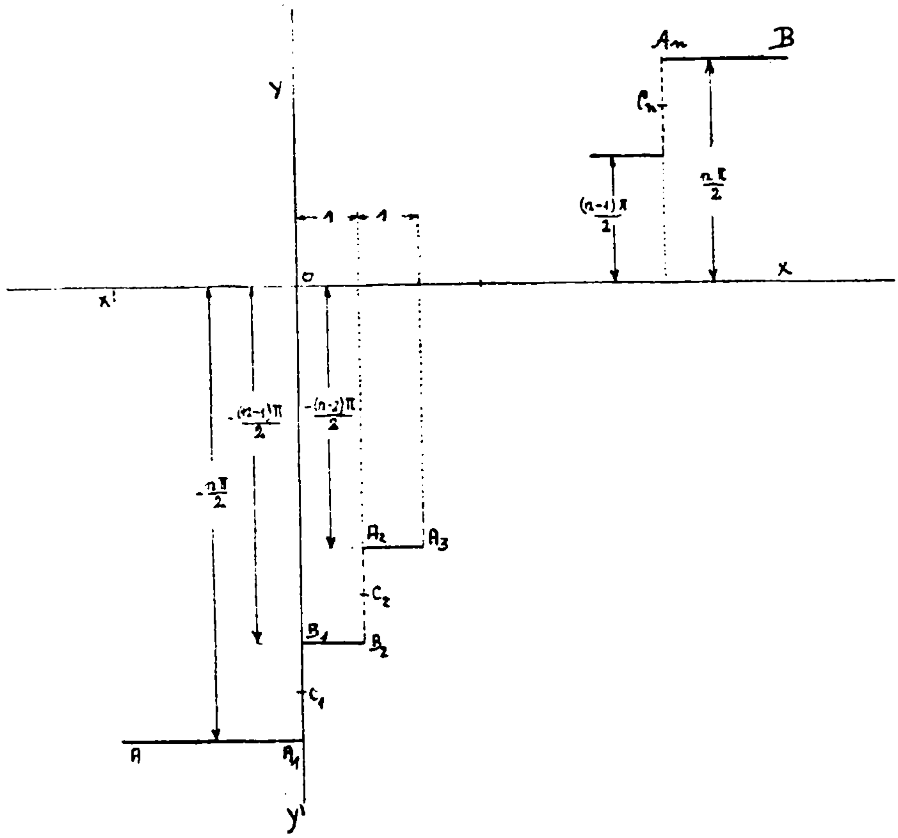

Fig. 9

formé des semi-droites $A A_1$, $A_n B$, des segments $B_1 B_2$, $A_2 A_3, \ldots$, des points $C_i (i = 1, 2, \ldots n)$ qui remplacent les extrémités de même abscisse.

Remarque. Si n est pair, un des segments se trouve sur l'axe $x' x$.

6. *Nous pouvons considérer de même la fonction :*

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin\left[x\alpha + \frac{(n-1)(\pi-\alpha)}{2}\right] \sin\frac{n(\pi-\alpha)}{2}}{\alpha \cos\frac{\alpha}{2}} \, d\alpha, \tag{6}$$

dont on veut obtenir le graphique.

Nous observons ici que :

$$\frac{\sin\left[x\alpha + \frac{(n-1)(\pi-\alpha)}{2}\right] \sin\frac{n(\pi-\alpha)}{2}}{\alpha \cos\frac{\alpha}{2}} =$$
$$\sin x\alpha - \sin(x-1)\alpha + \ldots + (-1)^{n-1} \sin(x-n+1)\alpha.$$

D'où il résulte que :

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\infty \frac{\sin(x-k)\alpha}{\alpha} \, d\alpha.$$

Faisons varier x, en supposant n pair, nous obtenons le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$2 \ldots\ldots$		$n-1$		$+\infty$
y		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2} \ldots\ldots$	$\frac{\pi}{2}$		0	

et par conséquent le graphique, est, fig. 10 :

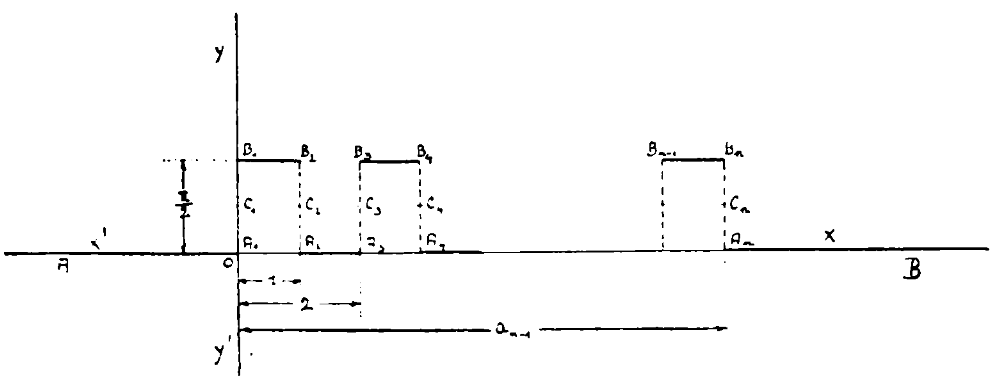

Fig. 10.

formé des semi-droites $A A_1$, $A_n B$, des segments $B_1 B_2$, $A_2 A_3$, $B_3 B_4, \ldots\ldots$ $B_{n-1} B_n$ et des points C_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ qui remplacent les extrémités de même abscisse.

Remarque. Si n était impair, nous aurions le même graphique avec les ordonnées diminuées de $\frac{\pi}{2}$, ainsi que les points C_1, C_2, ... C_n tomberaient sur l'axe $x'x$.

7. Et voici encore une généralisation intéressante de l'équation (1).

Soit la fonction :

$$y = \frac{2f(x)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \varphi(x)\alpha}{\alpha} d\alpha \tag{7}$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions quelconques, et dont on demande de construire le graphique.

Remarquons que l'intégrale qui entre dans la fonction (7) prend seulement les valeurs $-\frac{\pi}{2}$, 0, $+\frac{\pi}{2}$, selon que $\varphi(x)$ est négatif, zéro, ou positif.

Il résulte de ceci, qu'en faisant varier x, nous avons :

$$y = f(x),$$

dans les intervalles, où $\varphi(x) > 0$:

$$y = -f(x),$$

dans les intervalles, où $\varphi(x) < 0$, et :

$$y = 0,$$

pour n'importe quelle racine de $\varphi(x)$.

Nous en déduisons facilement la régle pratique suivante qui nous permettra de construire le graphique de la fonction (7).

Construisons d'abord la fonction :

$$y_1 = f(x),$$

dans son domaine d'existence. Nous trouvons ensuite les racines réelles de $\varphi(x)$, qui tombent dans l'intervalle d'existence de $f(x)$. Dans les intervalles pour lesquels nous avons $\varphi(x) < 0$, nous remplaçons $f(x)$ par sa symétrique par rapport à $x'x$, en tenant compte de plus que les racines réelles de $\varphi(x)$ sont aussi les racines de y.

Nous obtenons ainsi, d'une manière très simple, le graphique de la fonction (7).

Applications. 1°. Soit à etablir le graphique de la fonction :

$$y = \frac{2x}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Conformément à la règle énoncée, nous construisons d'abord la fonction :

$$y_1 = x$$

et comme ici :

$$\varphi(x) = x,$$

a la racine $x = 0$, et que dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ nous avons $\varphi(x) < 0$, remplaçons dans le graphique de y_1, la partie de l'intervalle $(-\infty, 0)$ par sa symétrique par rapport à $x'x$.

Le graphique à établir est ainsi l'angle AOB, fig, 11.

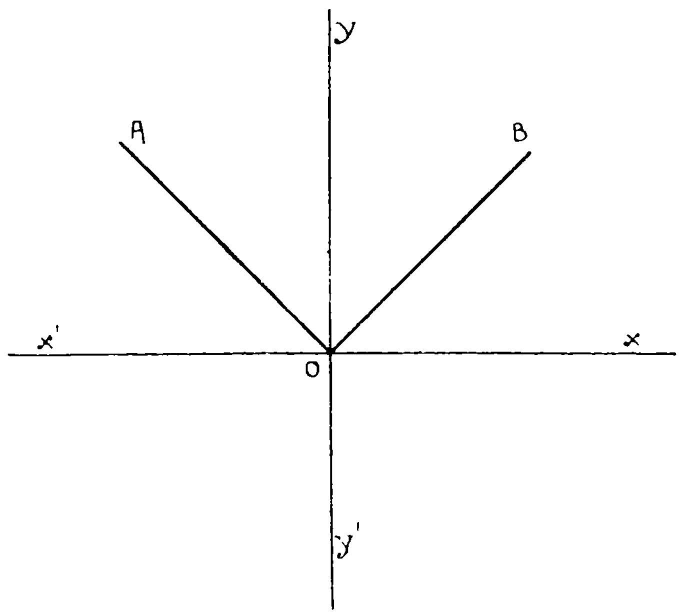

Fig. 11.

2°. *Soit à établir le graphique de la fonction* :

$$y = \frac{(x-1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

Construisons d'abord la fonction :

$$y_1 = \frac{x-1}{2},$$

en remplaçant la partie de l'intervalle $(-\infty, 0)$ pour lequel $\varphi(x) = x < 0$, par sa symétrique par rapport à $x' x$. Nous obtenons ainsi le graphique, fig. 12 :

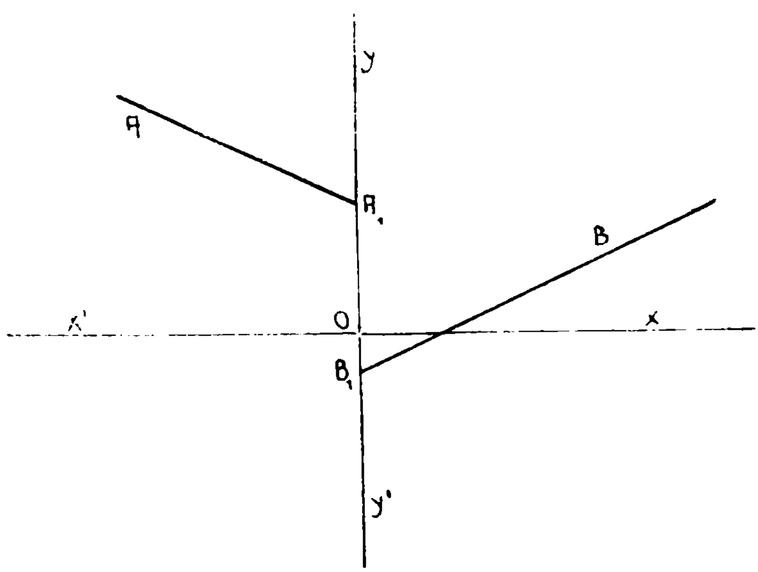

Fig. 12

formé des semi-droites AA_1, B_1B et du point O qui remplace les extrémités A_1, B_1.

3°. *Soit à construire les graphiques des fonctions :*

$$y = x^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin (x-1)\alpha}{\alpha}\, d\alpha, \qquad y = x^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin (x^2-1)\alpha}{\alpha}\, d\alpha,$$

$$y = x^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin (1-x^2)\alpha}{\alpha}\, d\alpha, \qquad y = x^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x(x^2-1)\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

D... construisons d'abord la parabole :

$$y_1 = \frac{\pi x^2}{2}$$

Remarquons que la fonction $\varphi(x)$ correspondante aux fonctions données est négative, pour la première fonction, dans l'intervalle $(-\infty, -1)$; pour la deuxième, dans l'intervalle $(-1, 1)$; pour la troisième, dans les intervalles $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; et enfin pour la quatrième, dans les intervalles $(-\infty, -1)$ et $(0, 1)$.

Conformément à la règle précédemment énoncée, remplaçons — dans les intervalles où $\varphi(x)$ correspondant est négatif — la partie de la parabole :

$$y_1 = \frac{\pi x^2}{2}$$

par sa symétrique par rapport à $x'x$.

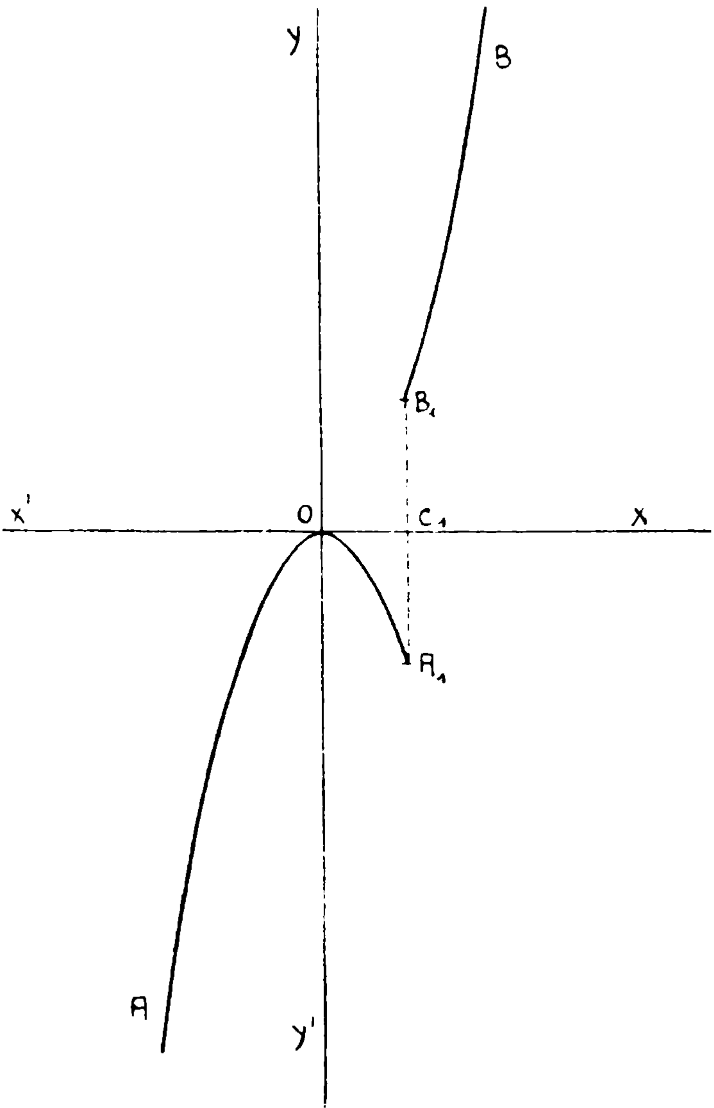

Fig. 13.

Nous obtenons ainsi les graphiques qui correspondent aux fonctions données, fig. 13, 14, 15, 16 :

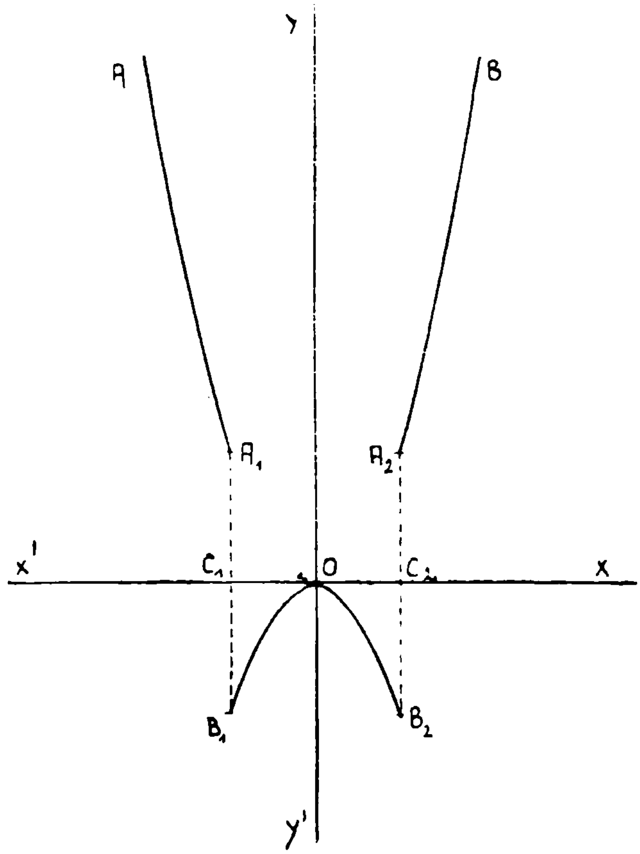

Fig. 14.

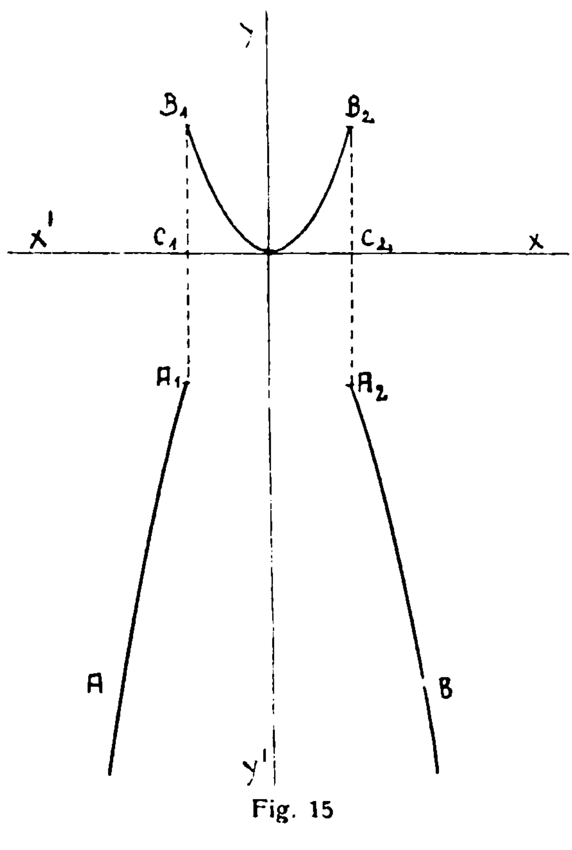

Fig. 15

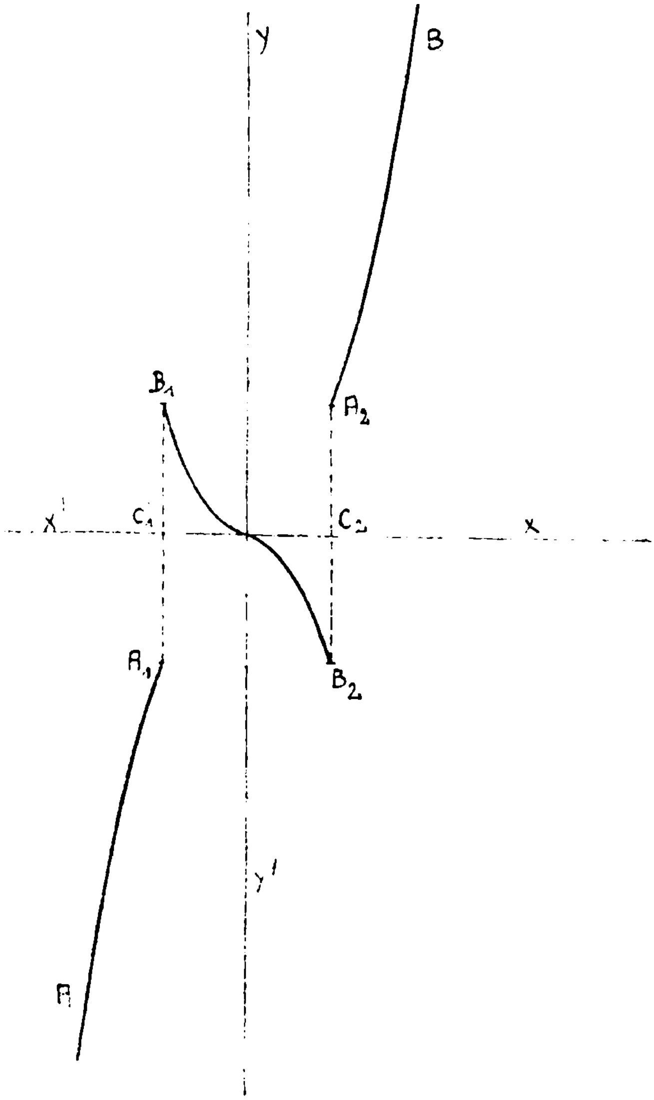

Fig. 16.

4°. *Soit à construire le graphique de la fonction :*

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} \int_0^\infty \frac{\sin x\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

Construisons d'abord la fonction :

$$y_1 = \frac{\pi}{2\,(x^2 - 1)}$$

et comme $\varphi(x) = x$ est négatif dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ remplaçons, dans cet intervalle, la fonction y_1, par sa symétrique par rapport à l'axe $x'x$; nous obtenons ainsi le graphique de la fonction donnée fig. 17 :

formé par les branches $A A_1$, $B_1 B_2$, $A_2 A_3$, $B_3 B$ et du point O qui tient lieu des extrémités A_2, B_2.

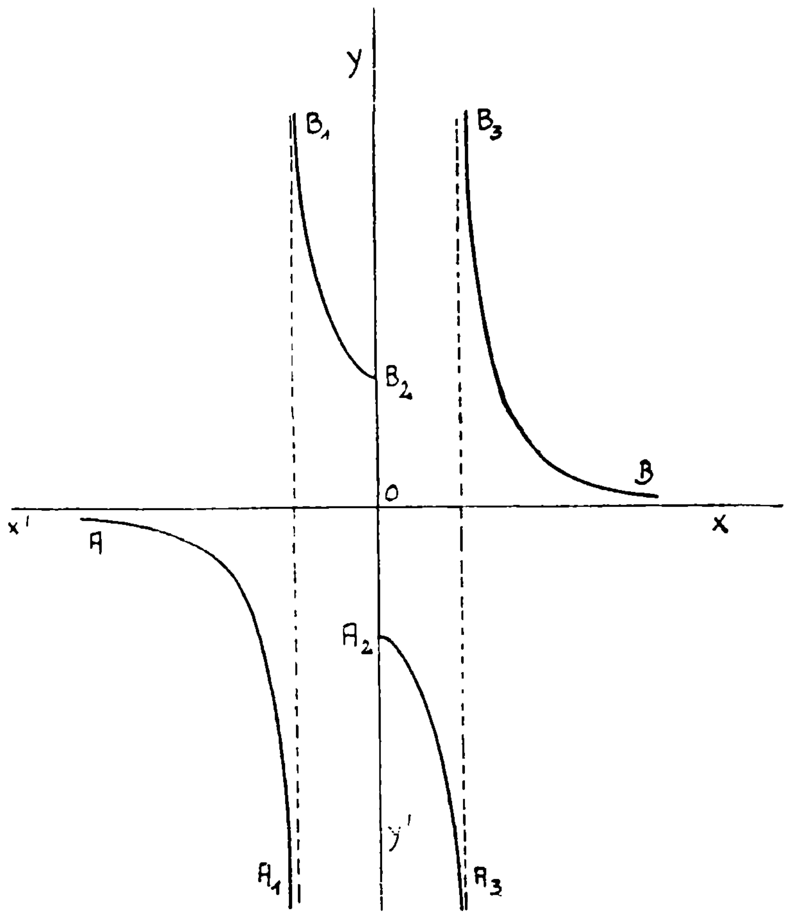

Fig. 17.

5°. *Soit à établir les graphiques des fonctions:*

$$y = x \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha \sin x)}{\alpha}\, d\alpha, \qquad y = \frac{2(a + b\,x)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha \sin x)}{\alpha}\, d\alpha.$$

Construisons d'abord les droites:

$$y_1 = \frac{\pi x}{2}, \qquad y_2 = a + b\,x.$$

Remarquons que, dans les deux cas, nous avons:

$$\varphi(x) = \sin x,$$

avec les racines:

$$x = 0, \quad \pm \pi, \quad \pm 2\pi, \ldots$$

Dans les intervalles, $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $(5\pi, 6\pi)$,... et dans ceux qui sont symétriques par rapport à l'origine, $\varphi(x)$ est négatif; nous allons donc remplacer dans ces intervalles les parties correspondantes de y_1 et de y_2 par leurs symétriques par rapport à l'axe $x'x$.

Nous obtenons ainsi les graphiques des fonctions données, fig. 18 et 19:

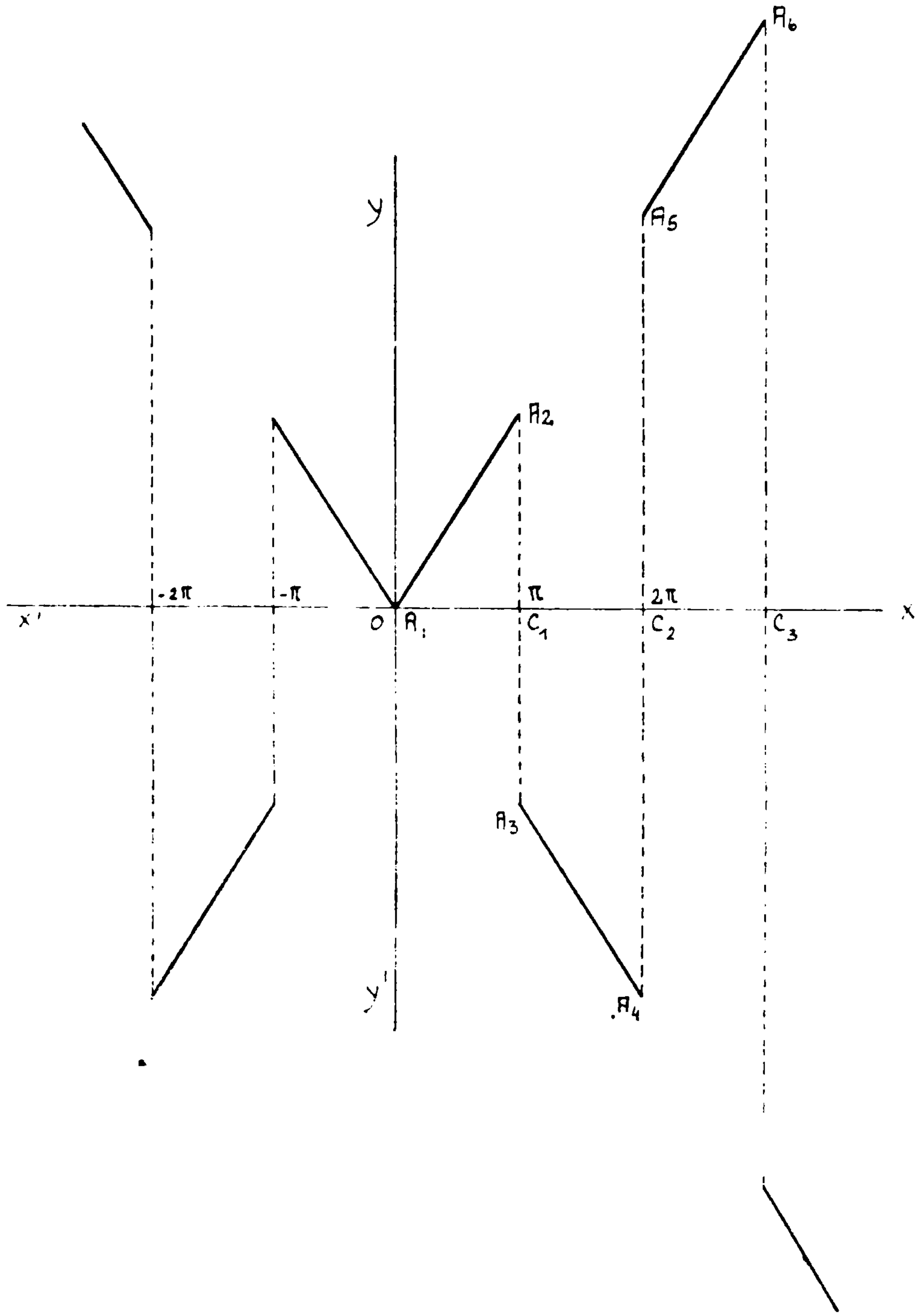

Fig. 18.

formés d'une infinité de segments $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$,... des points C_1, C_2, C_3,... qui remplacent les extrémités des segments de même abscisse; de même, nous obtenons à gauche, les segments et les points symétriques de ceux de droite par rapport à l'axe yy'.

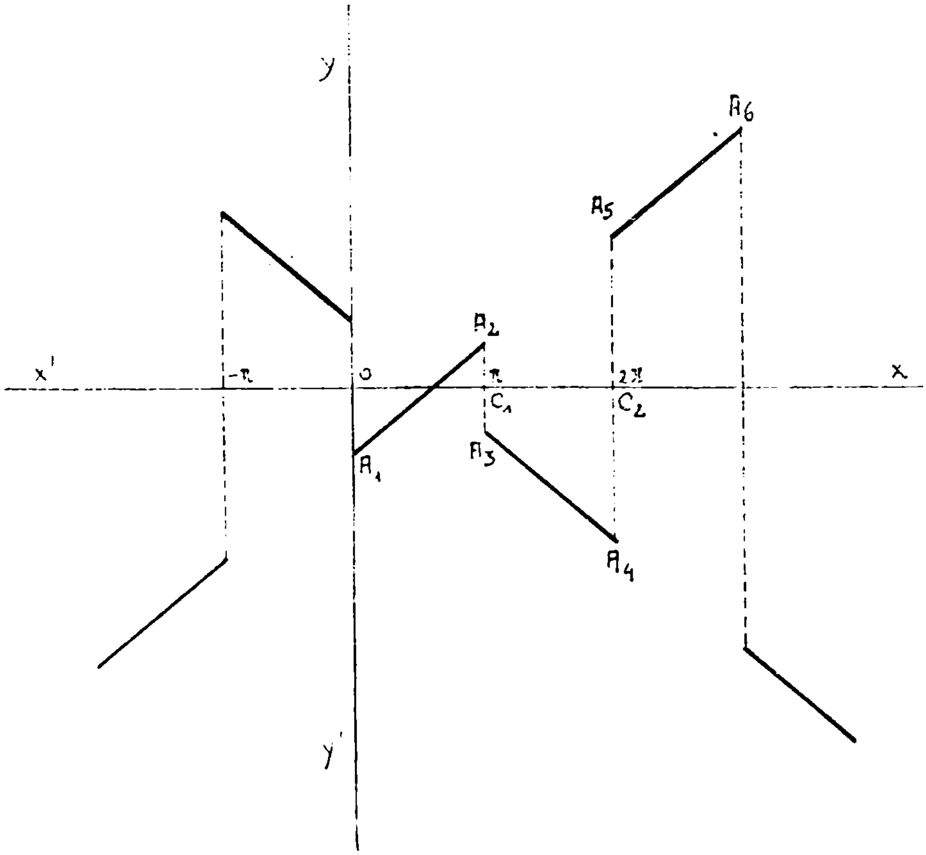

Fig. 19.

6°. *Soit à établir le graphique de la fonction :*

$$y = \frac{x^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha \sin x)}{\alpha} \, d\alpha.$$

Construisons d'abord la parabole :

$$y_1 = \frac{x^2}{8}.$$

Remarquons que nous avons :

$$\varphi(x) = \sin x,$$

avec les racines :

$$x = 0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \ldots$$

Dans les intervalles ... $(-3\pi, -2\pi)$, $(-\pi, 0)$, $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, ... $\varphi(x)$ est négatif ; nous allons donc dans ces intervalles remplacer les parties de y_1, par leurs symétriques par rapport à l'axe $x'x$.

Nous obtenons ainsi le graphique demandé, fig. 20

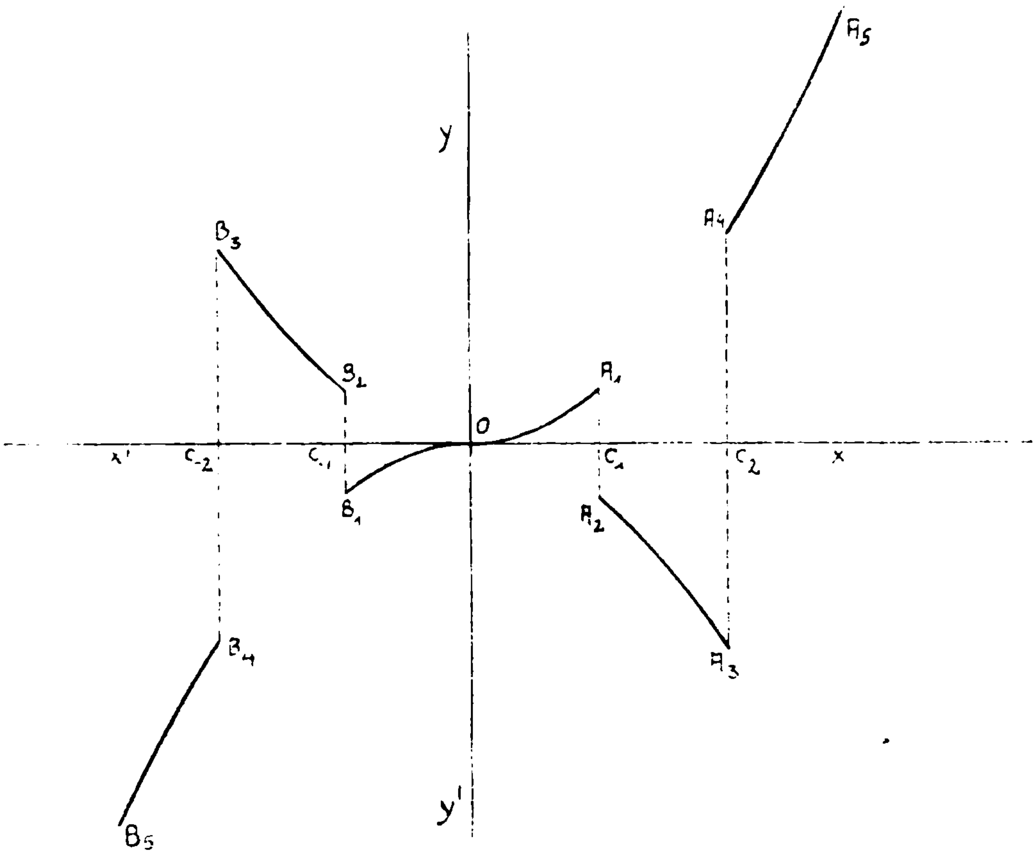

Fig. 20.

formé d'arcs en nombre infini, ... $B_5 B_4$, $B_3 B_2$ $B_2 B_1$, $A_2 A_3$, $A_4 A_5$, ... et des points... C_{-2}, C_{-1}, C_1, C_2, ... qui remplacent les extrémités des segments de même abscisse.

7°. *Soit à établir les graphiques des fonctions:*

$$y = \frac{2 \sin x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin (\alpha \cos x)}{\alpha} \, d\,\alpha, \qquad y = \frac{2 \cos x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin (\alpha \sin x)}{\alpha} \, d\,\alpha.$$

Construisons d'abord les fonctions trigonométriques:

$$y_1 = \sin x, \qquad y_2 = \cos x.$$

Remarquons ensuite que la fonction $\varphi(x)$ correspondante aux fonctions données est négative pour la première fonction, dans les intervalles,

$$\ldots\left(-\frac{7\pi}{2}, \ -\frac{5\pi}{2}\right), \ \left(-\frac{3\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{2}\right), \ \left(\frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}\right), \ \left(\frac{5\pi}{2}, \ \frac{7\pi}{2}\right)\ldots;$$

de même pour la deuxième, dans les intervalles, ... $(-3\pi, \ -2\pi)$, $(-\pi, \ 0)$, $(\pi, \ 2\pi)$, $(3\pi, \ 5\pi)$, ...

Dans ces intervalles remplaçons respectivement les parties de y_1, et de y_2 par leurs symétriques par rapport à $x' x$.

Nous obtenons ainsi les graphiques des fonctions données, fig. 21 et 22 :

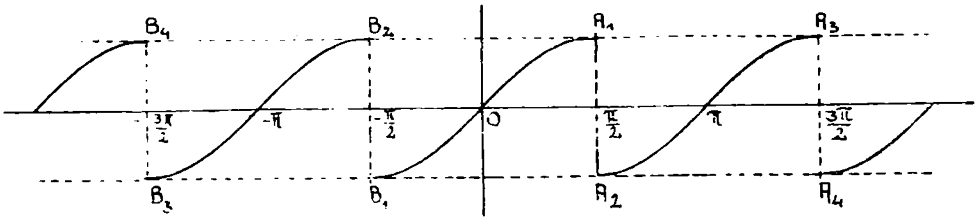

Fig. 21.

formés d'une infinité d'arcs,... $B_3 B_2$, $B_1 A_1$, $A_2 A_3$,... et des points sur l'axe $x' x$ qui ont la même abscisse que les extrémités des arcs qu'ils remplacent.

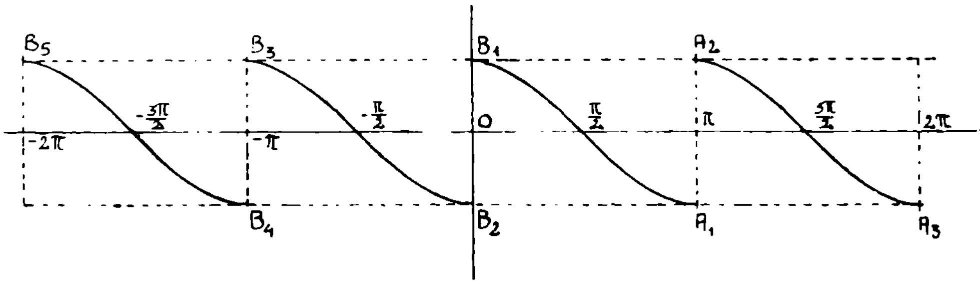

Fig. 22.

§ II. Fonctions élémentaires et générales discontinues.

8. Nous allons montrer dans ce paragraphe, comment il est possible de construire à l'aide des intégrales de forme (1) § I, une fonction qui, dans des intervalles différents, représente différentes fonctions à notre choix.

En particulier nous passerons au cas des fonctions périodiques, dans un intervalle fini ou infini. Formulons d'abord quelques définitions.

9. *Définition. Nous disons qu'une fonction :*

$$y = f(x). \tag{1}$$

est élémentaire discontinue quand elle est représentée dans un intervalle (a, b) par la fonction (1) elle même, mais qui est égale à zéro en dehors de l'Intervalle et prend respectivement les valeurs :

$$\frac{f(a)}{2}, \quad \frac{f(b)}{2},$$

aux extrémités de l'intervalle :

Le graphique d'une telle fonction est, fig. 23 :

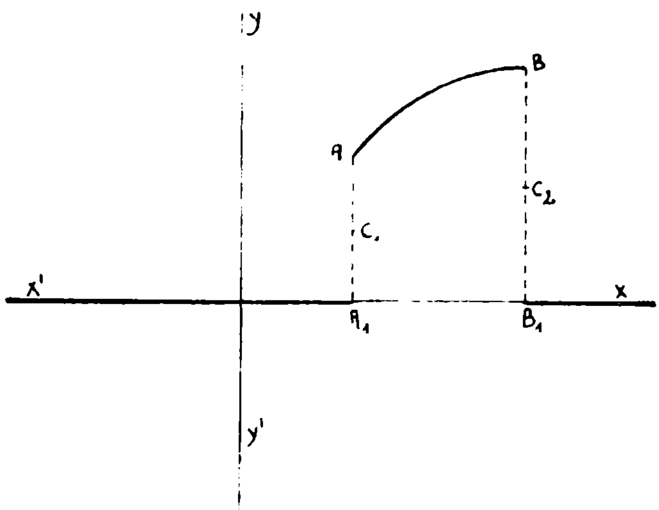

Fig. 23.

formé des semi-droites $x' A_1$, $B_1 x$, de l'arc AB et des points C_1, C_2, qui remplacent les extrémités A_1, A, B, B_1.

Il est intéressant de noter l'expression analytique de la fonction dont le graphique vient d'être donné.

Cette expression est la suivante :

$$y = \frac{f(x)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin (x-a)\,\alpha - \sin (x-b)\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha. \tag{2}$$

Et voici comment nous démontrons que la fonction (2) correspond au graphique ci-dessus.

Remarquons les valeurs des deux intégrales dans le deuxième membre :

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin (x-a)\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha, \qquad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin (x-b)\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha,$$

quand x varie, en tenant compte de ce qui a été dit au point 1, § 1.

Nous pouvons construire ainsi très facilement le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		a			b			$+\infty$
I_1		$-\frac{\pi}{2}$	0		$\frac{\pi}{2}$				
I_2				$-\frac{\pi}{2}$		0	$\frac{\pi}{2}$		
y		0	$\frac{f(a)}{2}$		$f(x)$	$\frac{f(b)}{2}$		0	

qui justifie le graphique ci-dessus.

10. *Si nous notons :*

$$b - a = 2\,l,$$

nous pouvons encore écrire :

$$y = \frac{2\,f(x)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin l\,\alpha \cos (x-a-l)\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha. \tag{3}$$

11. *Définition Nous disons qu'une fonction :*

$$y = f(x)$$

est générale discontinue dans un intervalle (a_1, a_{n+1}), *quand dans les intervalles partiels* (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots (a_n, a_{n+1})$, *elle peut représenter respectivement des fonctions données* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots f_n(x)$, *mais est égale à zéro, en dehors de l'intervalle* (a_1, a_{n+1}), *et prend respectivement aux points* a_1, a_2, $\ldots a_n$, a_{n+1}, *les valeurs :*

$$\frac{f_1(a_1)}{2}, \quad \frac{f_1(a_2) + f_2(a_2)}{2}, \ldots \quad \frac{f_{n-1}(a_n) + f_n(a_n)}{2}, \quad \frac{f(a_{n+1})}{2}$$

Le graphique d'une telle fonction est, fig. 24 :

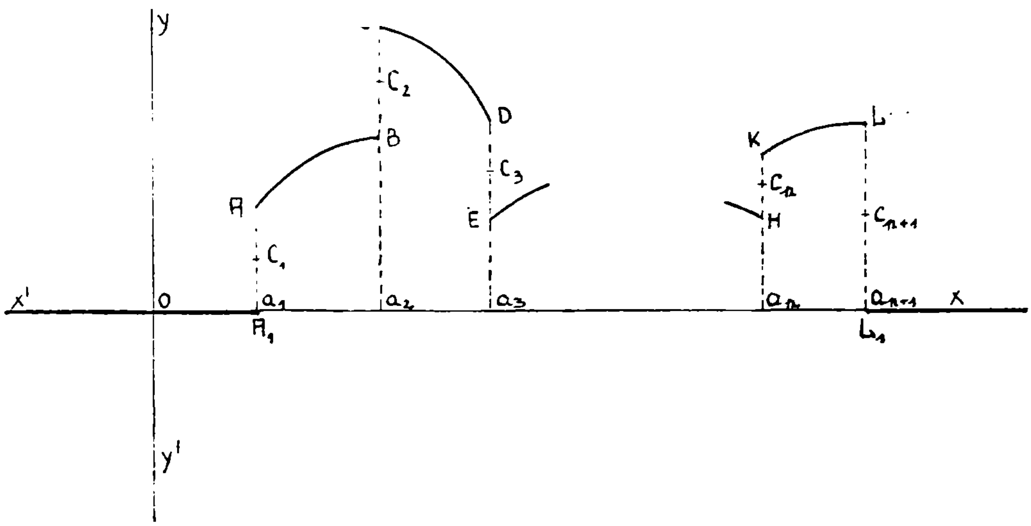

Fig. 24.

formé des semi-droites $x' A_1$, $L_1 x$, des arcs AB, CD.... KL et des points $C_i (i = 1, 2, \ldots n + 1)$, qui tiennent lieu des extrémités de même abscisse.

En tenant compte de l'expression (2) d'une *fonction élémentaire discontinue*, il résulte facilement que :

$$(5) \qquad y = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \int_0^{\infty} \frac{\sin(x - a_i)\,\alpha - \sin(x - a_{i-1})\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

est l'expression analytique de la *fonction générale discontinue, dans l'intervalle* (a_1, a_{n+1}), fonction que nous avons déjà définie et dont le graphique est celui indiqué plus haut, et qu'ainsi elle est la somme de n fonctions élémentaires discontinues.

Fonctions périodiques dans un intervalle (a_1, a_{n+1}).

12. *On doit qu'une fonction;*

$$y = f(x),$$

est périodique dans un intervalle (a_1, a_{n+1}), *quand en divisant l'intervalle en n parties égales,* (a_1, a_2), $(a_2, a_3), \ldots (a_n, a_{n+1})$, *elle se reproduit dans chacune d'elles, c'est-à-dire :*

$$f(x) = f[x - 2(i-1)l], \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

$\frac{a_{n+1} - a_1}{n} = 2l$, *mais est égale à zéro en dehors de l'intervalle* (a_1, a_{n+1}) *et prend en* a_1, a_{n+1} *respectivement les valeurs :*

$$\frac{f(a_1)}{2}, \qquad \frac{f(a_{n+1})}{2},$$

mais en a_2, a_3, ... a_n prend la valeur:

$$\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}.$$

Comme on le voit, ces fonctions sont un cas particulier des *fonctions générales discontinues* qui ont été déjà définies.

Il en résulte que l'expression analytique de ces *fonctions périodiques dans l'intervalle* (a_1, a_{n+1}), se déduit aussi facilement de (4), où l'on remplace:

$$f_i(x)=f[x-2(i-1)l], \qquad (i=1, 2, \ldots n).$$
$$a_i=a_1+2(i-1)l;$$

nous obtenons ainsi:

$$y=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n} f[x-2(i-1)l]\int_0^\infty \frac{\sin[x-a_1-2(i-1)l]\alpha-\sin(x-a_1-2il)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

ou bien:

$$(5)\qquad y=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1} f(x-2il)\int_0^\infty \frac{\sin l\alpha\cos[x-a_1-(2i+1)l]\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Le graphique de ces fonctions est, fig. 25:

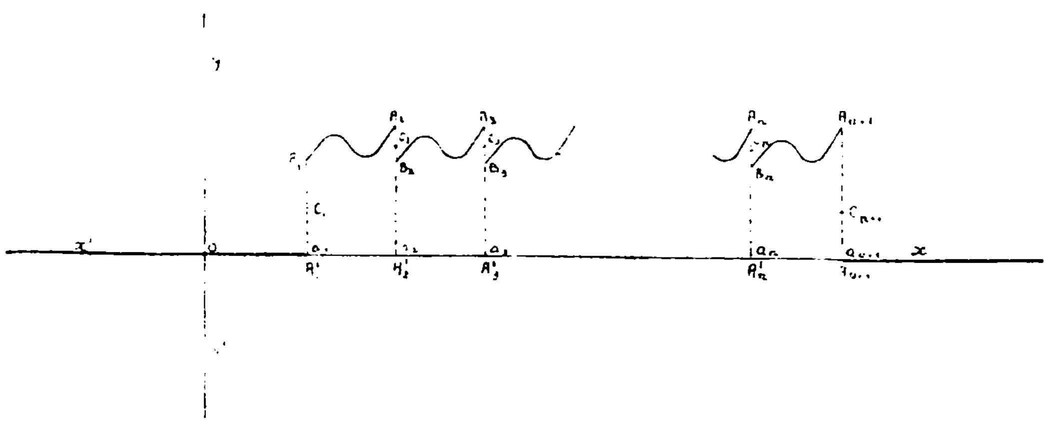

Fig. 25.

formé des semi-droites $x'A_1'$, $A_{n+1}'x$, des arcs égaux A_1A_2, B_2A_3, ... B_nA_{n+1} et des points $C_i (i=1, 2, \ldots n+1)$ qui tiennent lieu des extrémités de même abscisse.

Pour $a_1=0$, l'expression (5) devient:

$$(6)\qquad y=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1} f(x-2il)\int_0^\infty \frac{\sin l\alpha\cos[x-(2i+1)l]\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Remarque. Si nous prenons, $n=\infty$ et si nous gardons $l\neq 0$ et déterminé, l'intervalle (a_1, a_{n+1}) dont nous avons déjà parlé dans la définition No. 12, se transforme alors en intervalle $(0, \infty)$, et l'expression devient:

$$(7)\qquad y=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty} f(x-2il)\int_0^\infty \frac{\sin l\alpha\cos[x-(2i+1)l]\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

qui est *l'expression d'une fonction périodique à droite de l'origine, l'intervalle fondamental étant* $(0, 2\,l)$.

Il est évident que nous pouvons aussi polonger cette fonction à gauche de l'origine.

13. *Applications.* 1°. *Sot à établir la fonction dont le graphique est,* fig. 26:

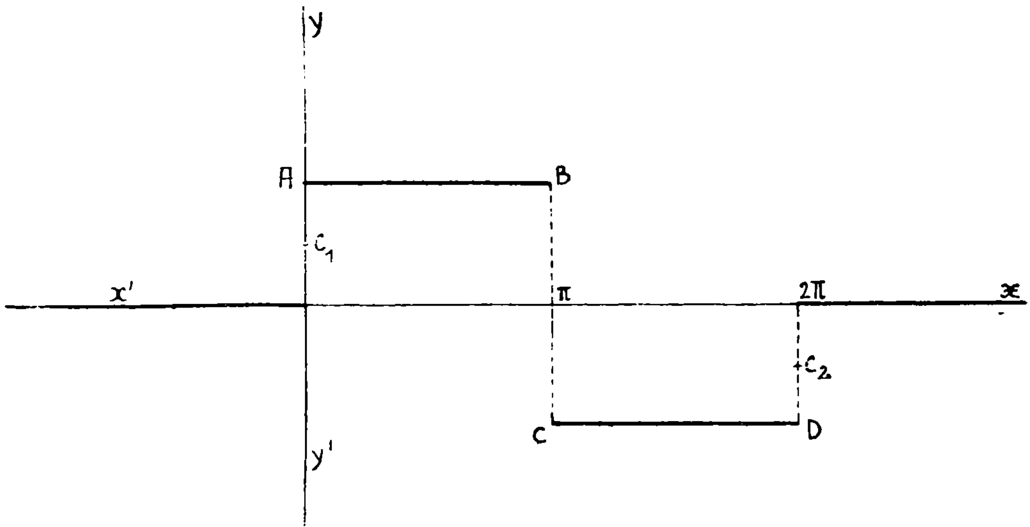

Fig. 26.

ou dont le tableau des variations est le suivant:

x	$-\infty$		0		π		2π		$+\infty$
y		0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	

L'expression analytique de cette fonction, en vertu de l'expression (4), peut s'écrire successivement:

$$y = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x\alpha - \sin(x-\pi)\alpha}{\alpha}\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x-\pi)\alpha - \sin(x-2\pi)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x\alpha + \sin(x-2\pi)\alpha}{\alpha}\,d\alpha - \int_0^\infty \frac{\sin(x-\pi)\alpha}{\alpha}\,d\alpha =$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x-\pi)(\cos\pi\alpha - 1)}{\alpha}\,d\alpha.$$

La fonction demandée est par conséquent:

$$y = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2\pi\alpha \sin 2(\pi - x)\alpha}{\alpha}\,d\alpha. \tag{8}$$

2°. *Soit à établir la fonction dont le graphique est,* fig. 27.

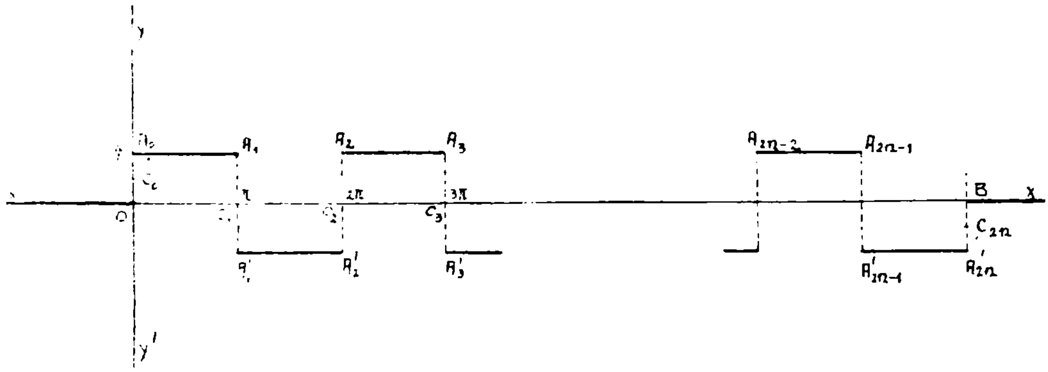

Fig. 27.

formé des semi-droites $x'O$, Bx, des segments égaux $A_0 A_1$, $A'_1 A'_2$, $A_2 A_3, \ldots$ $A'_{2n-1} A'_{2n}$ et des points $C_i (i = 0, 1, \ldots 2n)$ qui remplacent les extrémités de même abscisse.

Comme on peut le voir aisément, ce graphique s'obtient du précédent, si nous lui adjoignons dans $(n-1)$ intervalles successifs égaux à 2π, la même configuration.

Et voici le procédé pour trouver l'expression analytique. Si dans l'expression (8), nous remplaçons x par $(x - 2i\pi)$, nous obtenons :

$$(9) \qquad y = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \alpha \sin 2\left[(2i+1)\pi - x\right]\alpha}{\alpha} \, d\alpha,$$

dont le graphique est analoque à celui qui correspond à (8), mais dans l'intervalle $|2i\pi, \ 2(i+1)\pi|$.

Si en (9) nous donnons successivement à i les valeurs 0 1, $2, \ldots n-1$, nous obtenons n fonctions dont chacune représente le graphique de l'intervalle correspondant et qui étant nulles en dehors, leur somme nous donne aussi la fonction :

$$y = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \alpha \sin 2\left[(2i+1)\pi - x\right]\alpha}{\alpha} \, d\alpha,$$

dont le graphique est celui indiqué plus haut.

Nous pouvons encore écrire :

$$(10) \qquad y = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \alpha \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sin 2\left[(2i+1)\pi - x\right]\alpha}{\alpha} \, d\alpha,$$

et comme :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sin 2\left[(2i+1)\pi - x\right]\alpha = \sin 2(\pi - x)\alpha + \sin 2(3\pi - x)\alpha + \ldots$$
$$\ldots + \sin 2\left[(2n+1)\pi - x\right]\alpha = \frac{\sin 2(n\pi - x)\alpha \sin 2n\pi\alpha}{\sin 2\pi\alpha},$$

l'expression (10) devient :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2\, n\, \pi\, \alpha \operatorname{tg} \pi\, \alpha \sin 2\,(n\, \pi - x)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha, \tag{11}$$

et représente sous cette dernière forme, la forme définitive de la fonction à établir.

3°. *Soit à établir la fonction dont le graphique est*, fig. 28.

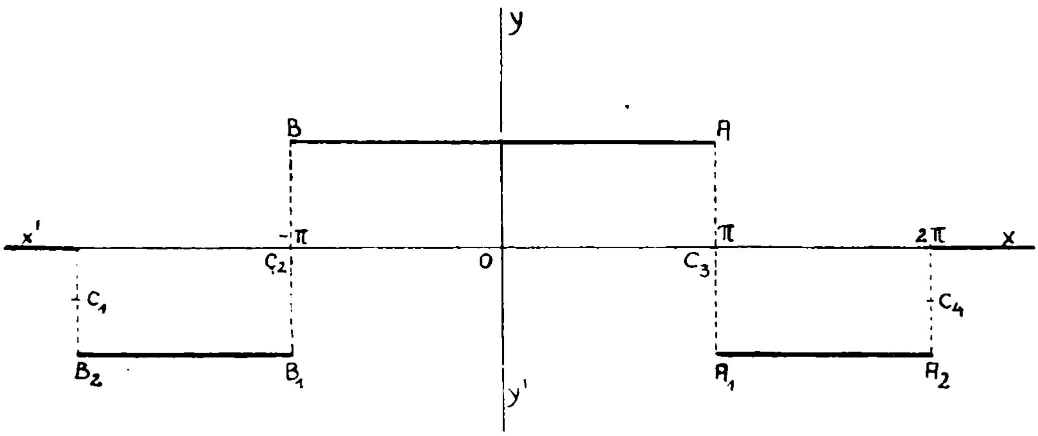

Fig. 28.

c'est-à-dire qui présente le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2π		$-\pi$		π		2π		$+\infty$
y		0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	

L'expression analytique de cette fonction en vertu de l'expression (4) peut encore s'écrire successivement :

$$y = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+2\pi)\,\alpha - \sin(x+\pi)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+\pi)\,\alpha - \sin(x-\pi)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x-\pi)\,\alpha - \sin(x-2\pi)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+\pi)\,\alpha - \sin(x-\pi)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+2\pi)\,\alpha - \sin(x-2\pi)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha =$$

$$2\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi\,\alpha \cos x\,\alpha\ \ (1-\cos \pi\,\alpha)}{\alpha}\, d\,\alpha = 4\int_0^{\infty} \frac{\sin 4\,\alpha \sin^2 \dfrac{\pi\,\alpha}{2} \cos x\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

La fonction demandée est donc :

$$y = 8\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 \pi\,\alpha \cos \pi\,\alpha \cos 2x\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha. \tag{12}$$

4°. *Soit à établir les fonctions dont les graphiques sont,* fig. 29 et 30 :

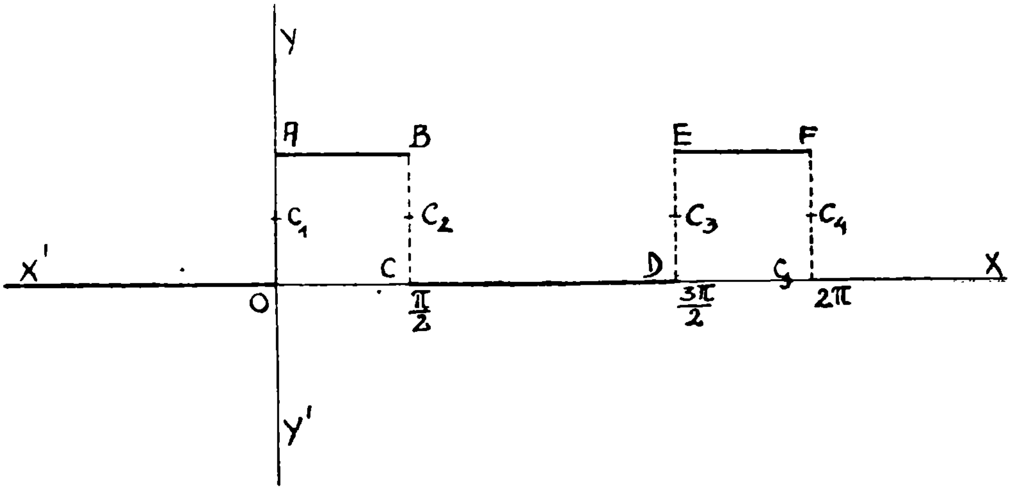

Fig. 29.

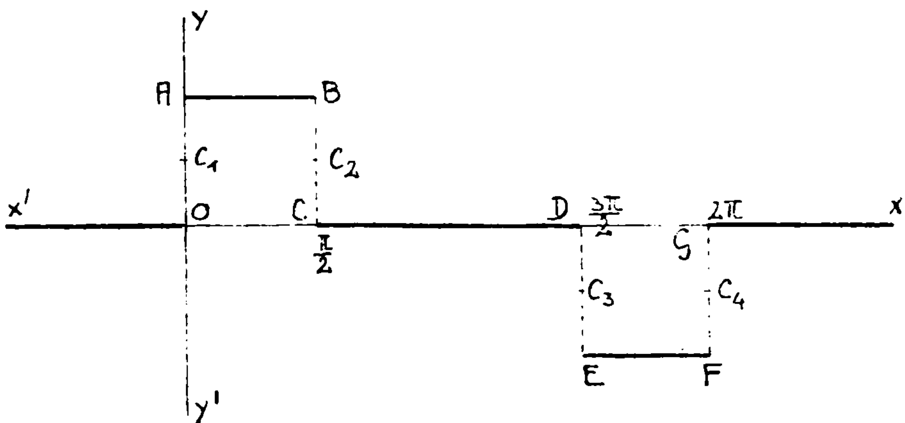

Fig. 30.

formés des semi-droites $x'O$, Gx, des segments AB, CD, EF et des points C_1, C_2, C_3, C_4 qui remplacent les extrémités de même abscisse. Les expressions analytiques de ces fonctions, en vertu de l'expression (4) peuvent toutes deux s'écrire :

$$y = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x\alpha - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha \pm \int_0^\infty \frac{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\alpha - \sin(x - 2\pi)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{4}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\alpha \pm \cos\left(x - \frac{7\pi}{4}\right)\alpha\right.}{\alpha}\,d\alpha.$$

En changeant α en 4α et en séparant les deux fonctions, nous obtenons :

(13) $$y=2\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\alpha\cos 4(x-\pi)\alpha\cos 3\pi\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

(14) $$y=2\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\alpha\sin 4(x-\pi)\alpha\sin 3\pi\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Nous avons ainsi les fonctions demandées.

Calcul de quelques intégrales.

14. Les expressions analytiques établies pour les différents graphiques ci-dessus, nous permettent de calculer quelques intégrales intéressantes de la théorie des séries trigonométriques.

Ainsi, si dans l'expression (8), nous rendons $x=\frac{\pi}{2}$ et si nous observons dans le graphique correspondant que $y=\frac{\pi}{2}$, nous en déduisons aussitôt, tout en substituant encore $\pi\alpha$ par α que:

(15) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{4}.$$

De même, si dans l'expression 12), nous prenons $x=\frac{\pi}{2}$ et și nous observons dans le graphique correspondant qu'aussi $y=\frac{\pi}{2}$, nous obtenons, en substituant $\pi\alpha$ par α par:

(16) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3\alpha\cos^2\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{16}.$$

En retranchant (16) de (15), nous obtenons:

(17) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin^5\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{3\pi}{16}.$$

De même, si dans l'expression (11) nous rendons $x=\frac{\pi}{2}$, et si nous remarquons dans le graphique correspondant que $y=\frac{\pi}{2}$, en substituant ensuite $\pi\alpha$ par α, nous obtenons:

(18) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2n\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin(2n-1)\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{2},$$

où nous pouvons développer $\sin 2n\alpha$, $\sin(2n-1)\alpha$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ et en faisant ensuite $n=1, 2,\ldots$ nous obtenons d'autres intégrales.

15. Dans les applications du No. 13, on donnait les graphiques et il s'agisait de trouver les fonctions correspondantes. Il va s'agir maintenant de l'inverse.

Applications. 1°. *Soit à construire le graphique de la fonction :*

$$y = 4 \int_0^\infty \frac{\sin^3 \pi\, \alpha \cos(\pi - x)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha. \tag{19}$$

Étant donné que :

$$\sin^3 \pi\, \alpha = \frac{3 \sin \pi\, \alpha - \sin 3\, \pi\, \alpha}{4},$$

nous pouvons écrire :

$$y = 3 \int_0^\infty \frac{\sin \pi\, \alpha \cos(\pi - x)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha - \int_0^\infty \frac{\sin 3\, \pi\, \alpha \cos(\pi - x)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha =$$

$$\frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x\, \alpha - \sin(x - 2\, \pi)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(x + 2\, \pi)\, \alpha - \sin(x - 4\, \pi)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha,$$

ou encore :

$$y = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(x + 2\, \pi)\, \alpha - \sin x\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha + \int_0^\infty \frac{\sin x\, \alpha - \sin(x - 2\, \pi)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(x - 2\, \pi)\, \alpha - \sin(x - 4\, \pi)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha,$$

En vertu de l'expression (2) § II, la première partie de y représente $-\frac{\pi}{2}$, dans l'intervalle $(-2\, \pi,\ 0)$; la deuxième partie représente π dans l'intervalle $(0,\ 2\, \pi)$ et la 3-e partie représente $-\frac{\pi}{2}$, dans l'intervalle $(2\, \pi,\ 4\, \pi)$. Ainsi le graphique de la fonction, est, fig. 31 :

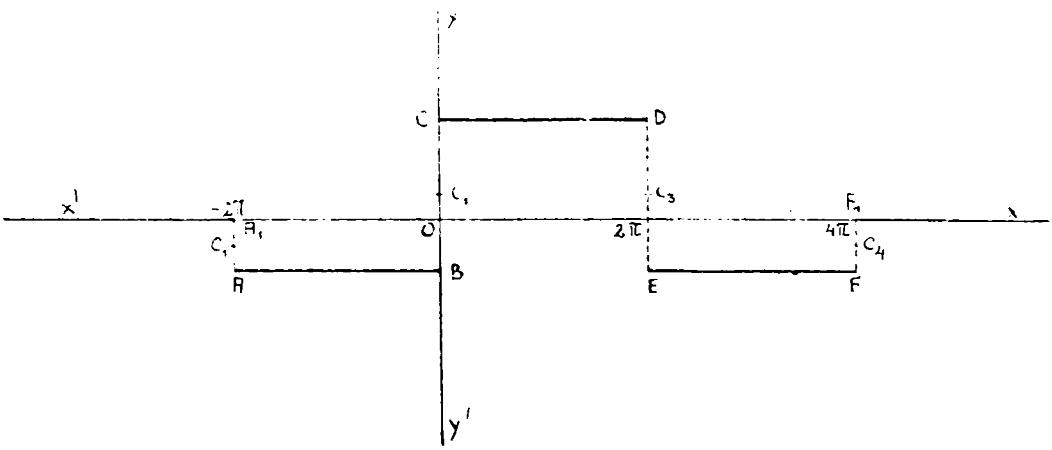

Fig. 31.

formé des semi-droites $x' A_1$, $F_1 x$, des segments $A B$, $C D$, $E F$ et des points $C_i (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ qui remplacent les extrémités de même abscisse.

Remarque. Si en (19) nous rendons $x = 0$, nous obtenons :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 \alpha \cos \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha = \frac{\pi}{16}. \tag{20}$$

2°. *Soit à construire le graphique de la fonction :*

$$y = 8\int_0^\infty \frac{\sin^4 \pi\alpha \sin(\pi - x)\alpha}{\alpha}\, d\alpha. \tag{21}$$

Étant donné que :

$$\sin^4 \pi\alpha = \frac{\cos 4\pi\alpha - 4\cos 2\pi\alpha + 3}{8},$$

nous pouvons écrire :

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin(\pi - x)\alpha \cos 4\pi\alpha}{\alpha}\, d\alpha - 4\int_0^\infty \frac{\sin(\pi - x)\alpha \cos 2\pi\alpha}{\alpha}\, d\alpha +$$

$$3\int_0^\infty \frac{\sin(\pi - x)\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(5\pi - x)\alpha - \sin(3\pi + x)\alpha}{\alpha}\, d\alpha -$$

$$2\int_0^\infty \frac{\sin(3\pi - x)\alpha - \sin(\pi + x)\alpha}{\alpha}\, d\alpha + 3\int_0^\infty \frac{\sin(\pi - x)\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

Nous pouvons écrire encore :

$$y = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x + 3\pi)\alpha - \sin(x + \pi)\alpha}{\alpha}\, d\alpha +$$

$$\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x + \pi)\alpha - \sin(x - \pi)\alpha}{\alpha}\, d\alpha - \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x - \pi)\alpha - \sin(x - 3\pi)\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x - 3\pi)\alpha - \sin(x - 5\pi)\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

En vertu de l'expression (2) § II, la première partie de y représente $-\frac{\pi}{2}$, dans l'intervalle $(-3\pi, -\pi)$; la deuxième partie représente $\frac{3\pi}{2}$, dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$; la troisième partie représente $-\frac{3\pi}{2}$, dans l'intervalle $(\pi, 2\pi)$ et la 4-e partie représente $\frac{\pi}{2}$, dans l'intervalle $(3\pi, 5\pi)$.

Ainsi le graphique de la fonction (21) est ; fig. 32 :

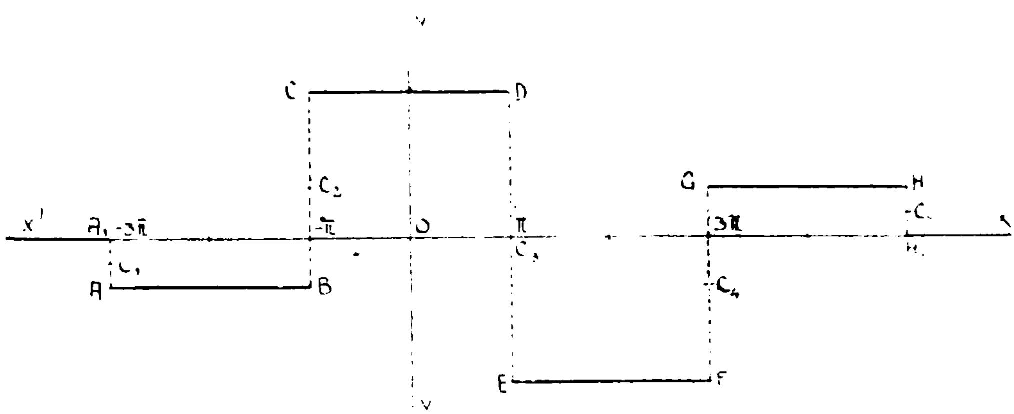

Fig. 32.

formé des demi-droites $x'A_1$, H_1x, des segments AB, CD, EF, GH et des points C_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) qui tiennent lieu des extrémités de même abscisse

Remarque. Si en (21), nous rendons $x=0$, ensuite $x=\frac{\pi}{2}$ et si nous observons dans le graphique les valeurs de y, nous obtenons:

$$(22) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^5 \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{3\pi}{16}, \qquad (23) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^5 \alpha \cos^4 \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{3\pi}{256}.$$

De quelques autres graphiques.

16. Voici une manière de procéder pour exprimer graphiquement, les fonctions de forme:

$$(24) \qquad y = \frac{2f(x)}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(\sin\alpha,\ \cos x\alpha)}{\alpha}\, d\alpha,$$

où $P(\sin\alpha, \cos x\alpha)$ est un polynome de forme:

$$(25) \qquad P(\sin\alpha,\ \cos x\alpha) = \Sigma A_{hk} \sin^{2h+1}\alpha \cos^{2k+1} x\alpha,$$

h, k pouvant être $0, 1, 2, \ldots n-1$.

Nous pouvons réduire la fonction (24) en une somme d'expressions de forme (2) § II en utilisant les formules:

$$\sin^{2h+1}\alpha = \frac{(-1)^h}{4^h}\left[\sin(2h+1)\alpha - C^1_{2h+1}\sin 2h-1)\alpha + \ldots + (-1)^h C^k_{2h+1}\sin\alpha\right]$$

$$\cos^{2k+1} x\alpha = \frac{1}{4h}\left[\cos(2k+1)x\alpha + C^1_{2k+1}\cos(2k-1)x\alpha + \ldots + C^k_{2k+1}\cos x\alpha\right].$$

Ces valeurs introduites en (25) donnent pour $P(\sin\alpha, \cos x\alpha)$, la forme:

$$P(\sin\alpha,\ \cos x\alpha) = \Sigma B_{hk}\sin(2h+1)\cos(2k+1)x\alpha =$$

$$\frac{1}{2}\Sigma B_{hk}\left[\sin[(2k+1)x + 2h+1]\alpha - \sin[(2k+1)x - (2h+1)]\alpha\right].$$

Il en résulte que la fonction (24) est de forme:

$$(26) \quad y = \frac{f(x)}{\pi}\Sigma B_{kk}\int_0^\infty \frac{\sin[(2k+1)x+2h+1]\alpha - \sin[(2k+1)x-2h-1]\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

Chaque terme de cette dernière fonction, en vertu de l'expression (2) § II, présente comme graphique $B_{hk} f(x)$, dans l'intervalle symétrique:

$$\left(-\frac{2h+1}{2k+1},\qquad \frac{2h+1}{2k+1}\right).$$

Mais pour obtenir le graphique de la fonction (24), il est nécessaire de réunir d'abord dans un seul et même graphique, la somme algébrique des graghiques partiels.

Applications. 1°. *Soit à établir le graphique de la fonction:*

$$(27) \qquad y = \frac{8x}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3\alpha\cos^3 x\alpha}{\alpha}\, d\alpha,$$

Nous avons :

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3 \alpha}{4}, \qquad \cos^3 x \alpha = \frac{3 \cos x \alpha + \cos 3 x \alpha}{4},$$

donc :

$$\sin^3 \alpha \cos^3 x \alpha =$$

$$\frac{9 \sin \alpha \cos x \alpha + 3 \sin \alpha \cos 3 x \alpha - 3 \sin 3 \alpha \cos x \alpha - \sin 3 \alpha \cos 3 x \alpha}{16}.$$

Il en résulte que :

$$y = \frac{9x}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x+1)\alpha - \sin(x-1)\alpha}{\alpha} d\alpha + \frac{3x}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(3x+1)\alpha - \sin(3x-1)\alpha}{\alpha} d\alpha$$

$$- \frac{3x}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x+3)\alpha - \sin(x-3)\alpha}{\alpha} d\alpha - \frac{x}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 3(x+1)\alpha - \sin 3(x-1)\alpha}{\alpha} d\alpha$$

$$(28) \qquad \therefore \quad y = - \frac{3x}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x+3)\alpha - \sin(3x+1)\alpha}{\alpha} d\alpha +$$

$$\frac{2x}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x+1)\alpha - \sin(x-1)\alpha}{\alpha} d\alpha - \frac{3x}{4} \int_0^\infty \frac{\sin(3x-1)\alpha - \sin(x-3)\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

En vertu de l'expression (2) § II, la première partie de y représente $-\frac{3x}{4}$ dans l'intervalle $\left(-3, -\frac{1}{3}\right)$; la deuxième partie représente $2x$, dans l'intervalle $(-1, 1)$, et la troisième partie représente $-\frac{3x}{4}$ dans l'intervalle $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

On devrait donc construire ces graphiques et comme ils présentent des parties communes dans les intervalles, nous devrions construire dans un même graphique, la somme de ces graphiques partiels.

Mais on peut procéder encore de la façon suivante : on décompose les intervalles ci-dessus en d'autres intervalles de façon à faire disparaître les parties communes, ainsi :

L'intervalle	Intérvalles partiels
$\left(-3, -\frac{1}{3}\right)$	$(-3, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$
$(-1, 1)$	$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
$\left(\frac{1}{3}, 3\right)$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $(1, 3)$

En applicant cette décomposition à l'intégrale du (28) et en additionnant les parties communes des inttervalles, nous trouvons :

$$(29) \qquad y = -\frac{3x}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+3)\alpha - \sin(x+1)\alpha}{\alpha}\,d\alpha +$$

$$\frac{5x}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+1)\alpha - \sin\left(x+\frac{1}{3}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \frac{2x}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{3}\right)\alpha - \sin\left(x-\frac{1}{3}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha +$$

$$\frac{5x}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x-\frac{1}{3}\right)\alpha - \sin(x-1)\alpha}{\alpha}\,d\alpha - \frac{3x}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x-1)\alpha - \sin(x-3)\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Le graphique de cette fonction peut maintenant se construire facilement ; en vertu de l'expression (4) il est, fig, 33 :

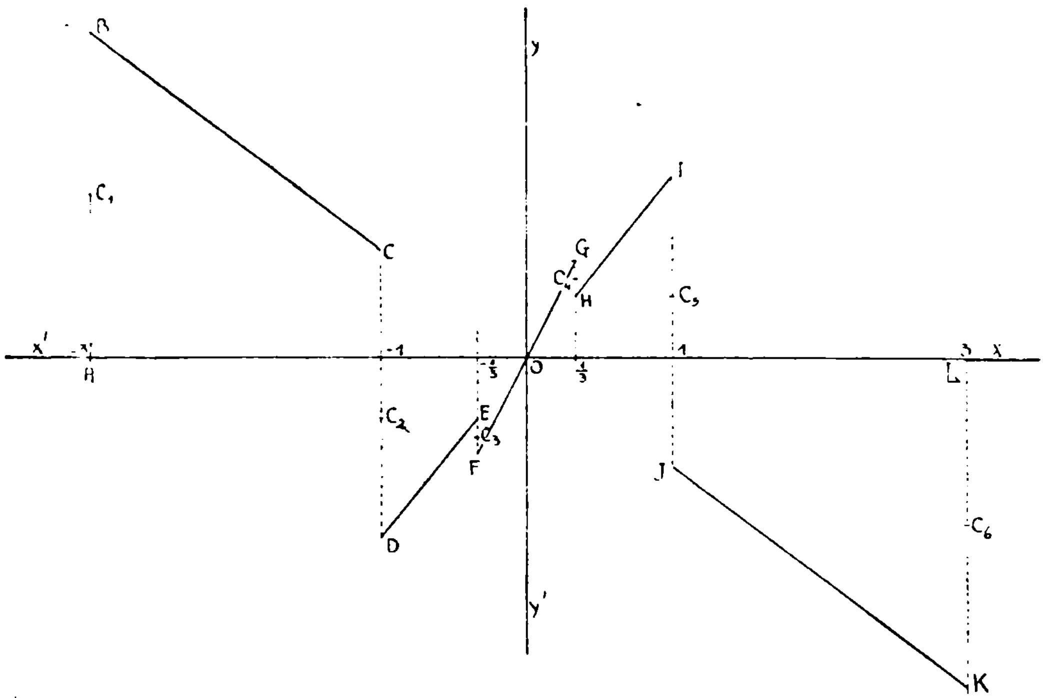

Fig. 33.

formé des semi-droites x'A, Lx, des segments BC, DE, FG, HI, JK et des points C_i ($i = 1, 2, \ldots 6$) qui remplacent les extrémités de même abscisse.

2°. *Soit à construire le graphique de la fonction :*

$$(30) \qquad y = \frac{8}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^3\alpha\cos^3 x\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

En procédant comme dans le cas précédant, nous trouvons :

$$y = -\frac{3}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+3)\alpha - \sin(x+1)\alpha}{\alpha}\,d\alpha +$$

$$\frac{5}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+1)\alpha - \sin\left(x+\frac{1}{3}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{3}\right)\alpha - \sin\left(x-\frac{1}{3}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

$$+\frac{5}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x-\frac{1}{3}\right)\alpha - \sin(x-1)\alpha}{\alpha}\,d\alpha - \frac{3}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x-1)\alpha - \sin(x-3)\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

Le graphique de cette fonction est, fig. 34 :

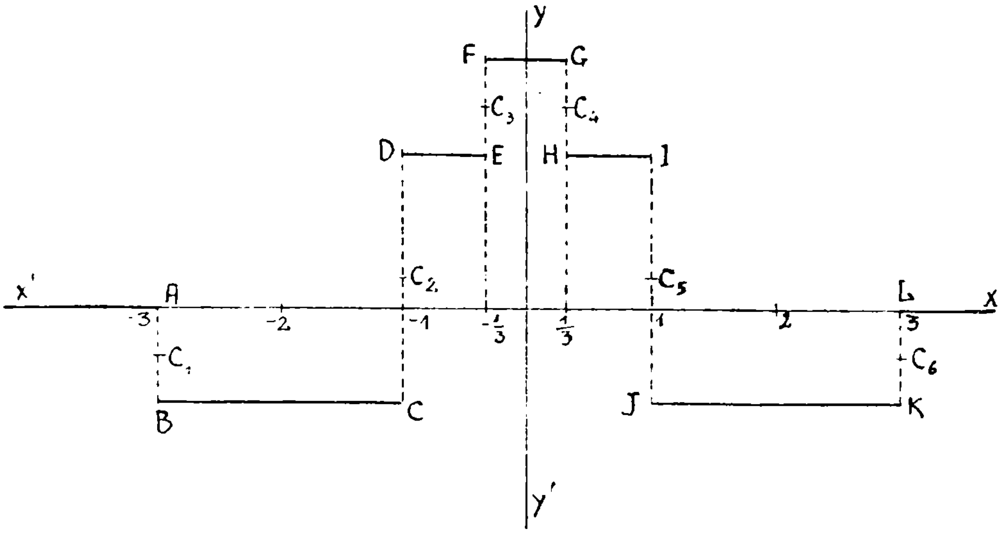

Fig. 34.

formé des semi-droites x' A, L x, des segments BC, DE, FG, HI, JK et des points C_i $(i = 1, 2, \ldots 6)$ qui tiennent lieu des extrémités de même abscisse.

Remarque. Si en (30) nous rendons $x = 2$ et si nous observons le graphique correspondant, nous trouvons :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 \alpha \cos^3 2\alpha}{\alpha} d\alpha = -\frac{3\pi}{32}. \tag{31}$$

17. Avant de terminer ce paragraphe, proposons-nous encore de trouver la fonction correspondant à des graphiques polygonaux qui peuvent être considérés comme des fonctions continues.

1°. *Soit à trouver la fonction dont le graphique est*, fig. 35 :

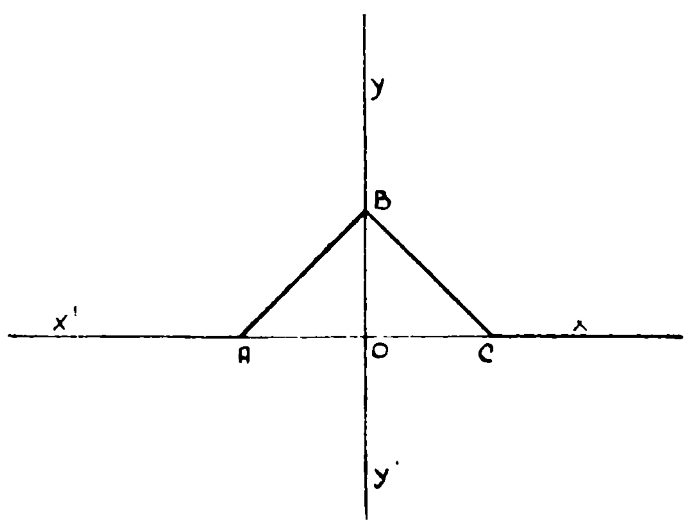

Fig. 35.

formé du contour $x' \mathrm{ABC} x$, c'est-à-dire qui présente le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y		0	0	$x+1$	1	$1-x$	0	0	

En vertu de l'expression (4) § II, on peut établir facilemant la fonction demandée qui est :

$$y = \frac{x+1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin (x+1)\alpha - \sin x\alpha}{\alpha}\, d\alpha + \frac{1-x}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\alpha - \sin (x-1)\alpha}{\alpha}\, d\alpha =$$

$$\frac{2(x+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\, d\alpha + \frac{2(1-x)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

En arangeant par rapport à x et en remplaçant α par 2α, on peut encore écrire :

$$(32) \qquad y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2\alpha \cos 2x\alpha - 2x\sin^2\alpha \sin 2x\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

2°. *Soit à trouver la fonction dont le graphique est,* fig. 36 :

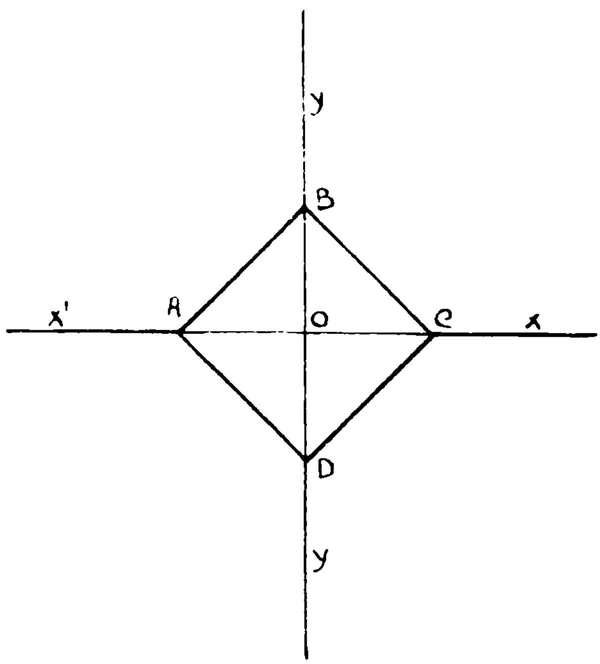

Fig. 36.

formé des semi-droites $x'\mathrm{A}$, $\mathrm{C}x$ et du contour du carré ABCD.

En vertu de l'expression (4) § II, on remarque que l'expression :

$$y^2 = \frac{(x+1)^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x+1)\alpha - \sin x\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \frac{(x-1)^2}{1}\int_0^\infty \frac{\sin x\alpha - \sin(x-1)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

présente le graphique demandé. Cette dernière expression peut encore s'écrire :

$$(33) \qquad y^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(x^2+1)\sin 2\alpha\cos 2x\alpha - 4x\sin^2\alpha\sin 2x\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Remarque. Si dans le deuxième membre de l'expression (32), nous prenons le signe $\pm$, nous obtenons le même graphique que celui qui correspond à l'expression (33).

3°. *Soit à trouver la fonction dont le graphique est,* fig. 37 :

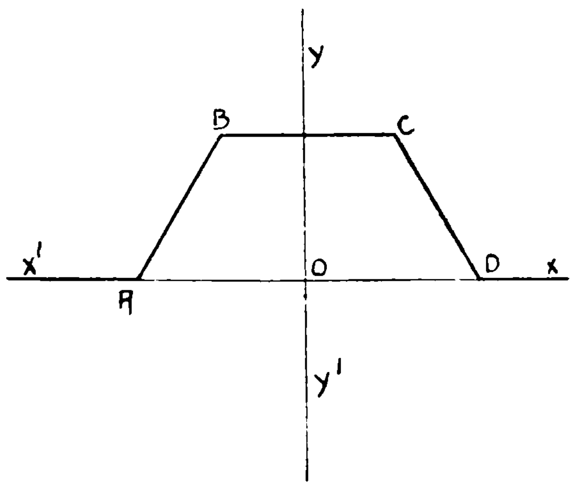

Fig. 37.

formé du contour x' A B C D x ; A B C D représentant la moitié de l'hexagone.

En vertu de l'expression (4) § II, la fonction demandée est :

$$y = \frac{\sqrt{3}\,(x+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x+1)\alpha - \sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha +$$

$$\frac{\sqrt{3}\,(1-x)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin(x-1)\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

En transformant les différences de sinus en produits et en substituant ensuite 4α à α, nous obtenons :

$$(34)\quad y=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha\,[(x+1)\cos(4x+3)\alpha-(x-1)\cos(4x-3)\alpha+\cos\alpha\cos 4x\alpha]}{\alpha}d\alpha$$

4°. *Soit à trouver la fonction dont le graphique est*, fig. 38 :

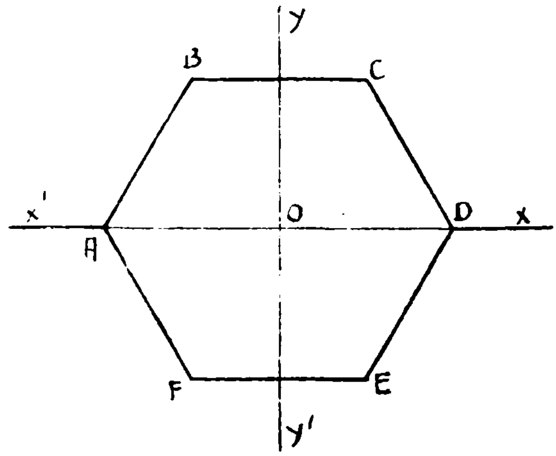

Fig. 38.

formé des semi-droites $x'A$, Dx et du contour de l'hexagone ABCDEF.

En vertu de l'expression (4) § II, l'équation du graphique demandé est :

$$(35)\qquad y^2=\frac{3\,(x+1)^2}{\pi}\int\frac{\sin(x+1)\,\alpha-\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha+$$

$$\frac{3}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha+$$

$$\frac{3\,(1-x)^2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin(x-1)\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

En effet, si $-1\leqq x\leqq-\frac{1}{2}$, nous pouvons en déduire que :

$$y=\pm\sqrt{3}\,(x+1),$$

c'est-à-dire les côtés AB, AF ; si $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$, il en résulte que $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ c'est-à-dire les côtés BC, FE ; si $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$, il en résulte que $y=\pm\sqrt{3}\,(1-x)$. c'est-à-dire les côtés CD, DE et si x est en dehors de l'intervalle $(-1,\ 1)$, alors $y=0$.

L'expression (35) peut encore s'écrire :

(36) $$y^2 =$$

$$\frac{3}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha\,[2(x+1)^2\cos(4x+3)\alpha-2(x-1)^2\cos(4x-3)\alpha+\cos\alpha\cos 4x\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

Remarques. 1°. Si dans l'expression (34) nous plaçons le signe $+$ devant le deuxième membre, nous obtenons la fonction dont le graphique est le même que celui qui correspond à l'expression (36).

2°. Les équations (33) et (34) pourraient être considérées comme les équations du carré et de l'hexagone régulier, quand $-1 \leqq x \leqq 1$; mais nous reviendrons dans un autre exposé sur les équations des polygones convexes pour aboutir à des résultats beaucoup plus simples.

§ III. Fonctions discontinues de première espèce dans les coordonnées polaires.

18. Soient ϱ et θ les coordonnées polaires d'un point et proposons-nous de construire les graphiques d'une classe de fonctions discontinues de première espèce, de forme :

(1) $$\varrho = f(\theta)\left[1+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin[\varphi(\theta)\,\alpha]}{\alpha}\,d\,\alpha\right].$$

Nous remarquons que, pour toute racine réelle de $\varphi(\theta)$, l'intégrale de (1) est égale à zéro, donc $\varrho = \varphi(\theta)$; mais si $\varphi(\theta)$ passe par zéro, en passant par exemple du positif au négatif, alors la grande paranthèse passe par les valeurs $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$ et nous obtenons ainsi :

$$\varrho = \frac{3}{2} f(\theta),$$

dans les intervalles où, $\varphi(\theta) > 0$;

$$\varrho = \frac{1}{2} f(\theta),$$

dans les intervalles où, $\varphi(x) < 0$, et :

$$\varrho = 0,$$

pour toute racine de $\varphi(\theta)$.

Il en résulte la règle pratique suivante pour obtenir le graphique de la fonction (1).

On construit d'abord la fonction :

$$\varrho_1 = \frac{3}{2} f(\theta)$$

et dans les intervalles où $\varphi(\theta) < 0$, *on remplace les arcs correspondants* *par des arcs dont les rayons polaires se réduisent au* $\frac{1}{3}$ *de ceux qui sont remplacés, car dans ces intervalles, la fonction est:*

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} f(\theta).$$

Les extrémités des arcs sur le même rayon se remplacent, par le point équidistant de ces extrémités.

Applications. 1°. *Soit à établir le graphique de la fonction:*

$$(2) \qquad \varrho = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin [(\sin 4\,\theta)\,\alpha]}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

Nous avons ici:

$$f(\theta) = 1, \qquad \varphi(\theta) = \sin 4\,\theta.$$

Conformément à la règle ci-dessus pour obtenir le graphique de la fonction (2), on construit d'abord le cercle:

$$\varrho_1 = \frac{3}{2},$$

et comme $\sin 4\,\theta$ est négatif dans les intervalles:

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{3\,\pi}{4}, \pi\right), \quad \left(\frac{5\,\pi}{4}, \frac{3\,\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{7\,\pi}{4}, 2\,\pi\right), \ldots$$

l'on remplace les arcs correspondants à ces intervalles par ceux qui correspondent aux rayons polaires égaux au $\frac{1}{3}$ des rayons supprimés. Les extrémités des arcs sur le même rayon, se remplacent par le point équidistant. On obtient ainsi le graphique de la fonction (2), fig. 39:

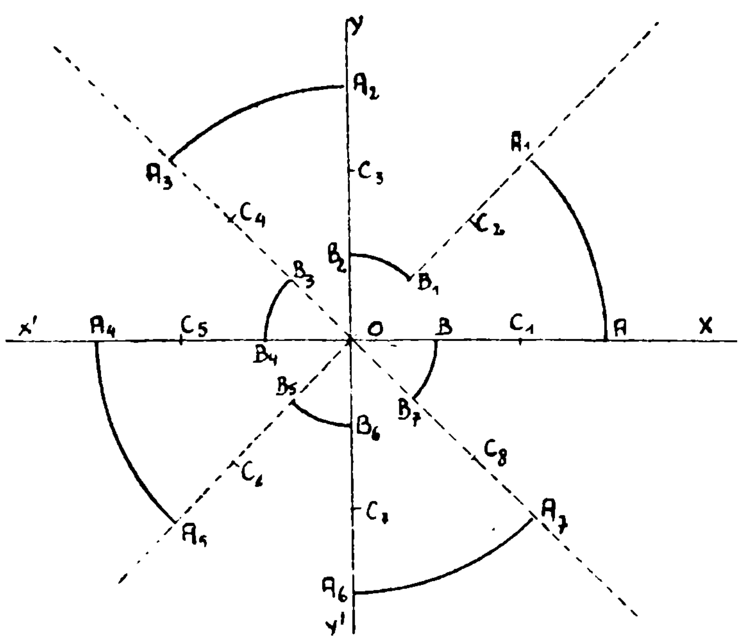

Fig. 39.

formés des arcs AA_1, B_1B_2, A_2A_3, B_3B_4, A_4A_5, B_5B_6, A_6A_7, B_7B et des points C_i $(i = 1, 2, \ldots)$ qui tiennent lieu des extrémités des arcs sur les mêmes rayons.

2°. *Soit à établir le graphique de la fonction :*

$$\varrho = \theta \left[1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin[(\sin 4\theta)\alpha]}{\alpha} d\alpha \right]. \tag{3}$$

Nous avons ici :

$$f(\theta) = \theta, \qquad \varphi(\theta) = \sin 4\theta.$$

Conformément à la règle enoncée plus haut, pour obtenir le graphique de la fonction (3), construisons d'abord *la spirale d'Archimède :*

$$\varrho_1 = \frac{3}{2}\theta,$$

et comme le $\sin 4\theta$ est négatif dans les intervalles :

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right), \ldots$$

remplaçons les arcs correspondants à ces intervalles par ceux qui correspondent aux rayons polaires égaux au $\frac{1}{3}$ des rayons supprimés. Les extrémités des arcs de même rayon se remplacent par le point qui indique leur milieu.

On obtient ainsi le graphique de la fonction (3), fig. 40 :

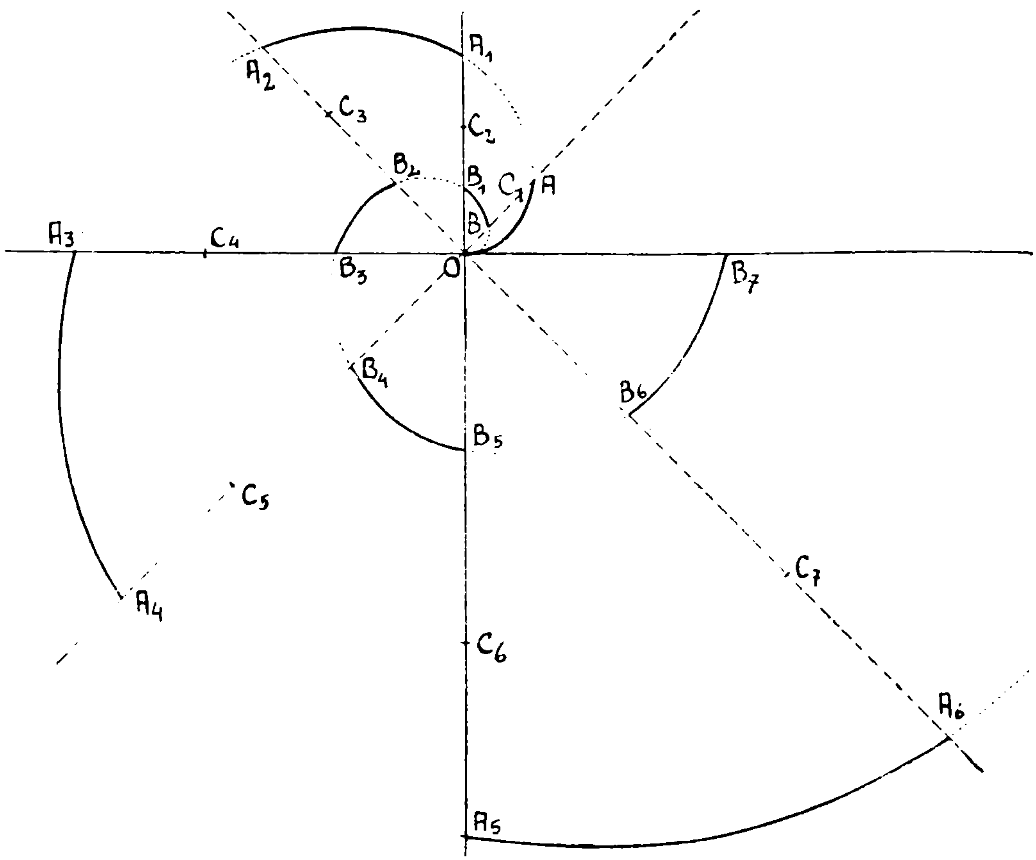

Fig. 40.

formé des arcs OA, BB_1, A_1A_2, B_2B_3, A_3A_4, B_4B_5, A_5A_6, B_6B_7,... et des points C_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) qui remplacent les extrémités des arcs de même rayon.

Dérivation et intégration des fonctions discontinues de première espèce

19. Si nous avons la fonction :

$$(4) \qquad y = f(x) \int_0^\infty \frac{\sin \varphi(x)\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

il est évident que sa dérivée est donnée par la relation :

$$(5) \qquad y = f'(x) \int_0^\infty \frac{\sin \varphi(x)\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

car l'intégrale qui entre en (4) est une constante.

De même, l'intégrale de la fonction (4) est donnée par la relation :

$$(6) \qquad \int y\, d\,x = \left[\int f(x)\, d\,x\right] \int_0^\infty \frac{\sin \varphi(x)\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha + C.$$

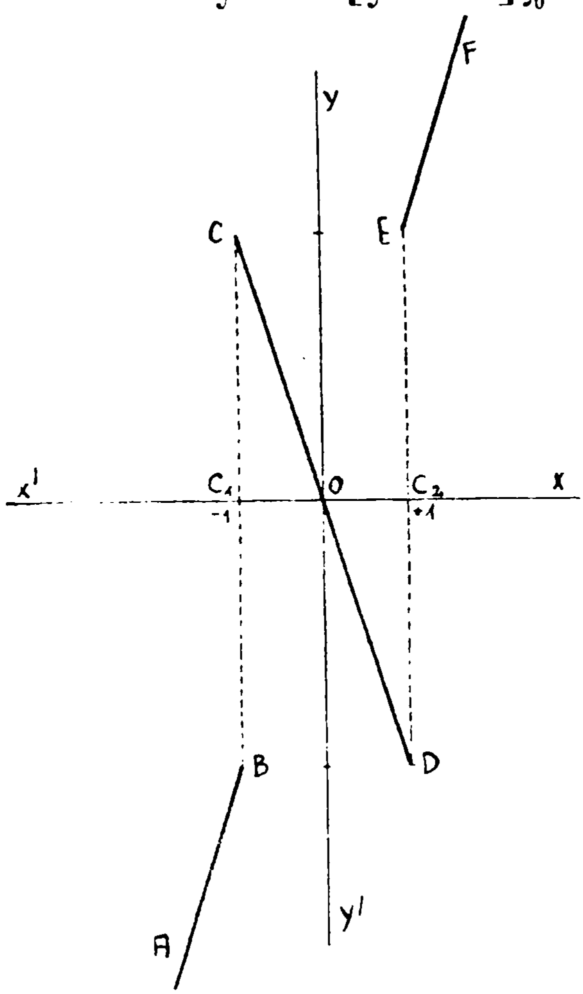

Fig. 41.

Application. Soit à établir les graphiques des dérivées de la fonction :

$$(7) \quad y = x^2 \int_0^\infty \frac{\sin (x^2 - 1)\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

Nous avons :

$$y' = 2\,x \int_0^\infty \frac{\sin (x^2 - 1)\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

qui prend la valeur $-\pi x$ dans l'intervalle $(-1, 1)$ et πx en dehors. Nous avons donc le graphique de la dérivée de (7), fig. 41, formé des semi-droites AB, EF, du segment CD et des points C_1, C_2 qui remplacent les extrémités de même abscisse.

De même nous avons :

$$y'' = 2 \int_0^\infty \frac{\sin (x^2 - 1)\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

dont le graphique est, fig. 42. formé des semi-droites A B, E F, du segment C D et des points C_1, C_2 qui remplacent les extrémités de même abscisse. Les autres dérivées sont nulles.

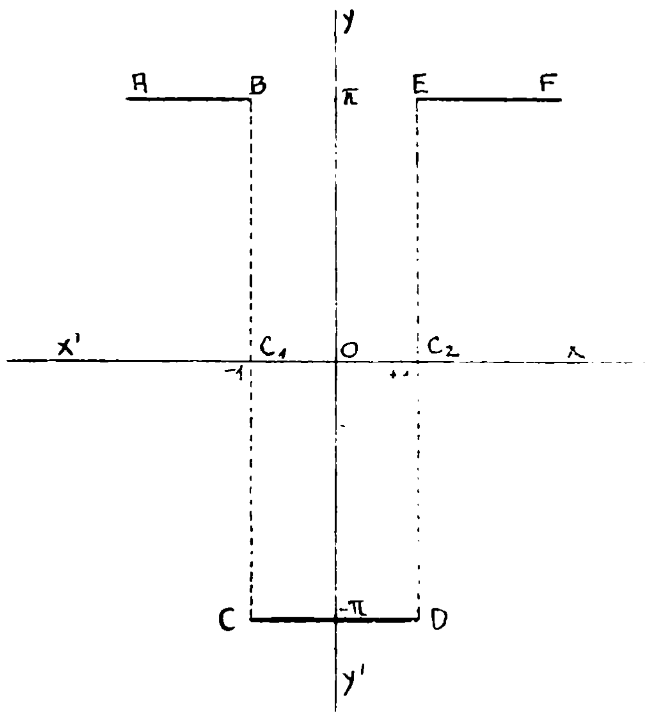

Fig. 42.

§ IV. Fonctions implicites discontinues de première espèce.

Nous nous proposons de montrer par des exemples différents et variés la manière d'étudier et d'établir les graphiques de ce genre de fonctions.

1. *Soit à construire le graphique de la fonction y, définie par la relation :*

$$(1) \qquad x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x+y)\,\alpha\,\cos y\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

Nous pouvons écrire :

$$(2) \qquad x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+y)\,\alpha + \sin x\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

Envisageons maintenant l'une après l'autre, les hypothèses suivantes.
1°. Si $x < 0$, il en résulte :

$$x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+y)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha - \frac{1}{2}.$$

En tenant compte que l'intégrale a les valeurs $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ selon que $x+y$ est positif, égal à zéro ou négatif, il résulte que :

Si	Il en résulte
$x+y<0$	$x=-1$
$x+y=0$	$x=-\frac{1}{2}$
$x+y>0$	$x=0$

Les deux premièrs systèmes de conditions sont équivalents aux relations :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Le troisième systéme de conditions ne peut être satisfait car nous sommes dans l'hypothèse $x < 0$.

2°. Si $x = 0$, il en résulte :

$$0 = \int_0^\infty \frac{\sin y\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

équation satisfaite seulement pour $y = 0$,

3°. Si $x > 0$, il résulte de (2) :

$$x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin (x + y)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha + \frac{1}{2},$$

et par conséquent :

Si	Il en résulte
$x + y < 0$	$x = 0$
$x + y = 0$	$x = \frac{1}{2}$
$x + y > 0$	$x = 1$

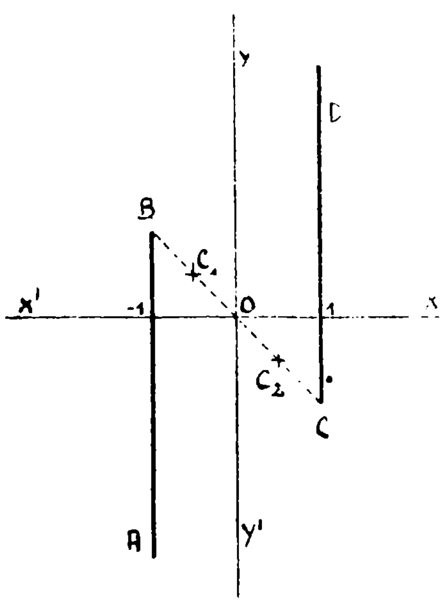

Fig. 43.

Le premier cas dans ce tableau de conditions ne peut être satisfait car nous sommes dans l'hypothèse $x > 0$. Les deux derniers sont équivalents aux relations :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y > -1, \end{cases}$$

En traduisant par un graphique les conclusions des points 1°, 2°, 3°, nous obtenons le graphique de la fonction demandée, (fig. 43) : formée des semi-droites A B, C D et des points C_1, O, C_3 qui tiennent lieu des extrémités B et C.

Remarque. Remplaçons en (1), y par y^2; *nous trouvons ainsi le graphique de la fonction y définie par la relation :*

$$x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x + y^2)\,\alpha \cos y\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha. \tag{3}$$

En suivant pas à pas la discussion précédente, nous concluons que l'expression (3) est équivalente aux relations :

$$\begin{cases} x = -1 \\ -1 < y < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y < 0, \text{ ou } y > 0. \end{cases}$$

Il en résulte que le graphique de la fonction (3) est, fig. 44 : formé du segment A B, excepté les extrémités A, B, ensuite de la droite CD et des points C_1, C_2, O.

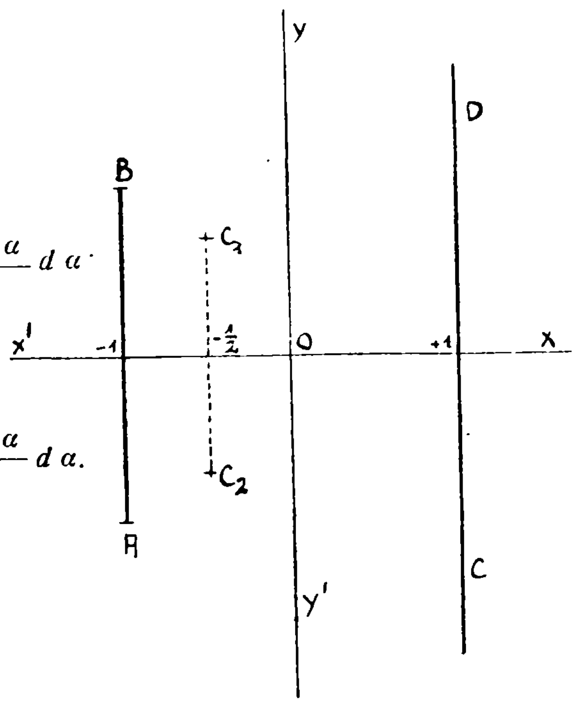

Fig. 44.

2. *Soit à construire le graphique de la fonction y, définie par la relation :*

$$y = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin y\,\alpha \cos(2x + y)\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha. \tag{4}$$

Nous pouvons écrire :

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + y)\,\alpha - \sin x\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha. \tag{5}$$

Considérons l'une après l'autre les hypothèses suivantes :

1°. Si $x < 0$, il résulte de (5) :

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + y)\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \frac{1}{2},$$

Nous en déduisons :

Si	Il en résulte
$x + y < 0$	$y = 0$
$x + y = 0$	$y = \frac{1}{2}$
$x + y > 0$	$y = 1$

Pour satisfaire à ces conditions, nous devons prendre :

$$\begin{cases} x < 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 < x < 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

2°. Si $x = 0$, il résulte de (5) :

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

équation satisfaite seulement pour $y = 0$.

3°. Si $x > 0$, il résulte de (5) :

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin (x+y)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha - \frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons :

Si	Il en résulte
$x + y < 0$	$y = -1$
$x + y = 0$	$y = -\frac{1}{2}$
$x + y > 0$	$y = 0$

En tenant compte que $x > 0$, nous pouvons satisfaire à ces conditions si nous prenons :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

En traduisant dans un graphique les conclusions qui découlent des points 1°, 2°, 3°, nous obtenons le graphique de la fonction demandée, fig. 45 :

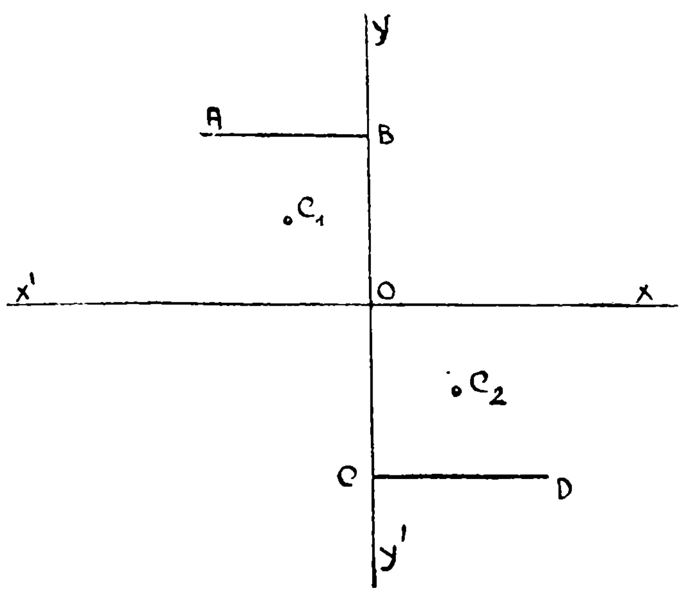

Fig. 45.

formé de l'axe entier $x'x$, des segments AB, CD en exceptant leurs extremités, et des points C_1, O, C_2.

3°. *Soit à établir le graphique de la fonction y définie par la relation :*

(6) $$x\,y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin y\,\alpha \cos(2\,x + y)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

Remarquons la légère modification apportée à la fonction (5). Voyons en quoi cela modifie le graphique.

L'expression (6) peut s'écrire :

(7) $$x\,y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x + y)\,\alpha - \sin x\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

Considérons l'une après l'autre les hypothèses :

1°, Si $x < 0$, il résulte de (7) :

$$x\,y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x + y)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha + \frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons :

Si	Il en résulte
$x + y < 0$	$x\,y = 0$
$x + y = 0$	$x\,y = \frac{1}{2}$
$x + y > 0$	$x\,y = 1$

Les conditions de la première et de la dernière rangée nous conduisent aux relations :

$$\begin{cases} x < 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x < 0 \\ y > -x \\ x\,y = 1.. \end{cases}$$

Les conditions de la deuxième rangée ne peuvent être satisfaites.

2°. Si $x = 0$, de même alors $y = 0$.

3°. Si $x > 0$, il résulte de l'expression (7).

$$x\,y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x + y)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha - \frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons :

Si	Il en résulte
$x + y < 0$	$x\,y = -1$
$x + y = 0$	$x\,y = -\frac{1}{2}$
$x + y > 0$	$x\,y = 0$

Ces conditions sont équivalentes aux relations:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x\,y = -1 \\ y < -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Le graphique qui résulte des conclusions exprimées en 1°, 2°, 3° est, fig. 46;

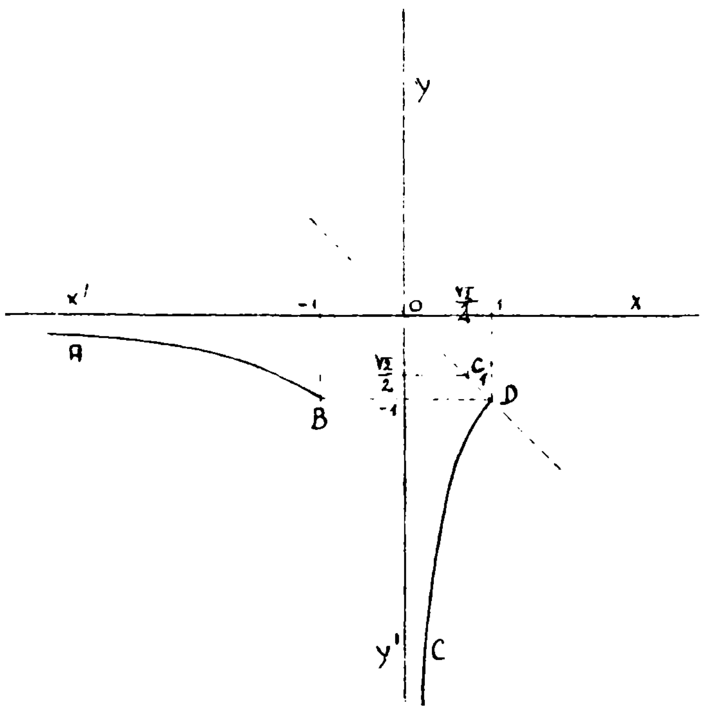

Fig. 46.

formé de l'axe $x' x$, des branches de l'hyperbole A B, C D en exceptant les extremités B, D, et des points O, C_1.

4. *Soit à établir le graphique de la fonction y, définie par la relation:*

$$(8) \qquad x + y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin (x+y)\, \alpha \cos (x-y)\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

Nous pouvons écrire:

$$(9) \qquad x + y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y\, \alpha + \sin x\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

Envisageons les divers cas l'un après l'autre:

1°. Si $x < 0$, il résulte:

$$x + y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y\, \alpha}{\alpha}\, d\,\alpha - \frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons :

Si	Il en résulte
$y < 0$	$x + y = -1$
$y = 0$	$x = -\frac{1}{2}$
$y > 0$	$x + y = 0$

Ces conditions et l'hypothèse $x < 0$ sont équivalentes aux relations :

$$\left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \\ x + y = -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ y > 0 \\ x + y = 0. \end{array}\right.$$

2°. Si $x = 0$, l'expression (9) devient :

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin y\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha,$$

satisfaite par les valeurs :

$$y = -\frac{1}{2}, \qquad y = 0, \qquad y = \frac{1}{2}.$$

3°. Si $x = 0$, l'expression (9) devient :

$$x + y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin y\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons :

Si	Il en résulte
$y < 0$	$x + y = 0$
$y = 0$	$x = \frac{1}{2}$
$y > 0$	$x + y = 1$

Ces conditions sont équivalentes aux relations :

$$\left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ y < 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y = 1. \end{array}\right.$$

Le graghique qui résulte des conclusions exprimées en 1°, 2°, 3°, est, fig. 47.

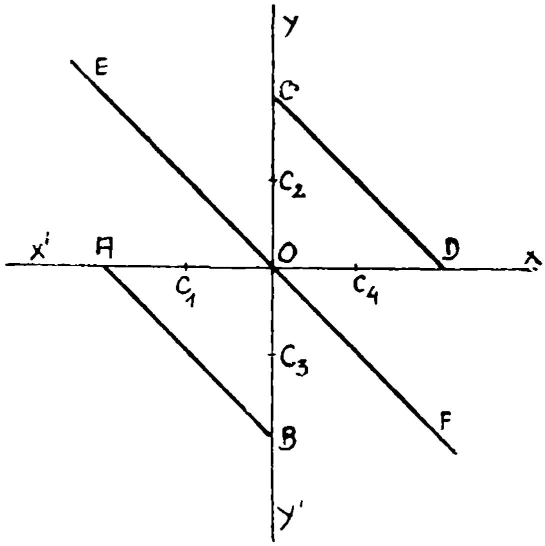

Fig. 47.

formé de la droite E F, [illegible] A B, C D leurs extrémités exceptées et des points C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Remarque. En considérant l'expression (8) nous en déduisons qu'elle est symétrique par rapport à l'origine, car si l'on remplace x et y par $-x$ et $-y$ elle ne change pas de valeur. Cette remarque rend superflue la discussion du point 3°.

5. *Soit à construire le graphique de la fonction y définie par la relation :*

$$(10) \qquad \frac{y-x}{x+y+\sqrt{2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\sqrt{2}\,x\cos(2x+2y+\sqrt{2})\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

On peut encore écrire :

$$(11) \qquad \frac{y-x}{x+y+\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+y+\sqrt{2})\,\alpha - \sin(x+y)\,\alpha}{\alpha}\,d\,\alpha.$$

Il en résulte la discution suivante résumée dans le tableau ct-dessous :

Si	Il en résulte
$0 < x+y < \sqrt{2}$	$y - x = 0$
$x+y = -\sqrt{2}$	$y - x = 0$
$-\sqrt{2} < x+y < 0$	$\frac{y-x}{x+y+\sqrt{2}} = 1$
$x+y = 0$	$y - x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x+y > 0$	$y - x = 0$

Ces conditions sont respectivement équivalentes aux relations :

$$x = y < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \left|\begin{array}{l} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$x = -y = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad x = y > 0.$$

En représentant graphiquement ces relations nous obtenons le graphique, fig. 48 :

formé des semi-droites A B, O D, du segment B C et du point C_1, en exceptant les extremités C et O.

6. *Soit à établir le graphique de la fonction y, définie par la relation :*

$$(12)\quad \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

1°. Si $x<0$, le deuxième membre est -1, et il en résulte que :

$$(a+a_1)x+(b+b_1)y+c+c_1=0.$$

2°. Si $x=0$, il en résulte que :

$$y=-\frac{c}{b}$$

ou $y=\pm\infty$, avec la condition :

$$\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}.$$

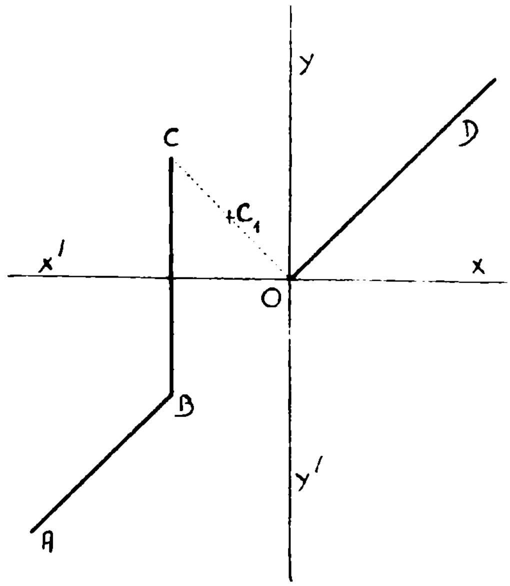

Fig. 48.

3°. Si $x>0$, il résulte que :

$$(a-a_1)x+(b-b_1)y+c-c_1=0.$$

Le graphique de la fonction est, fig. 49 :

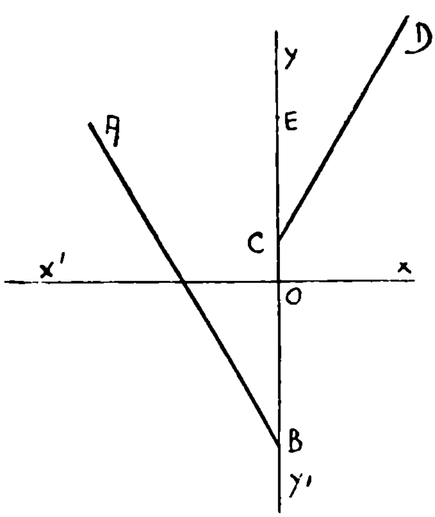

Fig. 49.

formé des semi-droites A B, C D en exceptant les points B, C ; du point E et des points $\pm\infty$ situés sur l'axe yy'.

Remarque. Dans le cas particulier de la fonction :

$$(13)\quad \frac{y}{x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

le graphique est, fig. 50 :

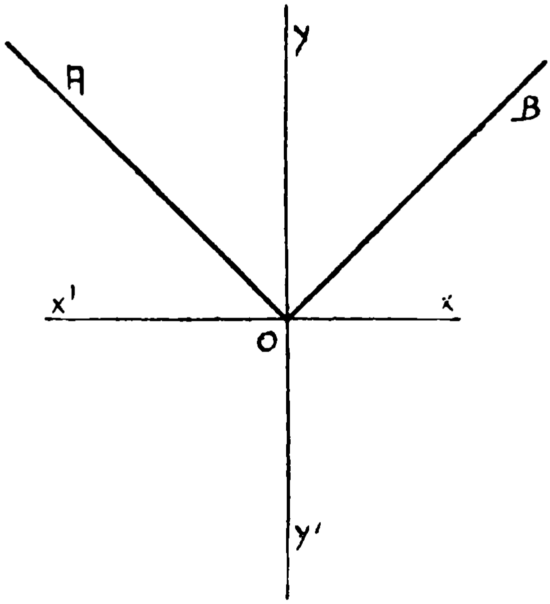

Fig. 50.

formé de l'angle A O B,

7. *Soit à établir le graphique de la fonction y définie par la relation :*

(14) $$x^2 + y^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin y\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

En faisant varier y, nous avons :

Si	Il s'ensuit
$y < 0$	$x^2 + y^2 = -1$
$y = 0$	$x = 0$
$y > 0$	$x^2 + y^2 = 1$

Le graphique est, fig. 51 :

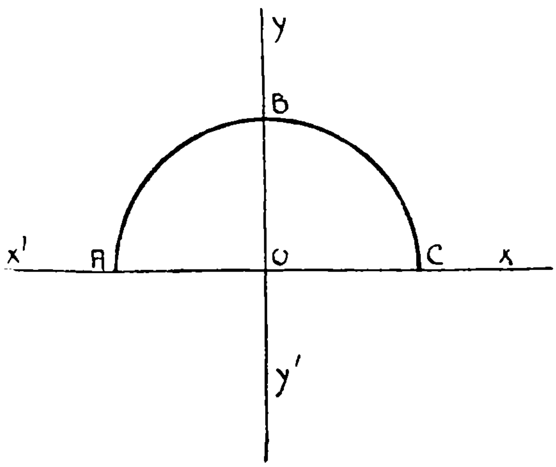

Fig. 51.

formé du semi-cercle A B C en exceptant les extrémités A, C ; et du point O.

8. *Soit à construire le graphique de la fonction y, définie par la relation :*

(15) $$x^2 + y^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{a^2 \sin x\,\alpha + b^2 \sin y\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

où $b > a$.

1°. Si $x < 0$, il en résulte :

$$x^2 + y^2 = \frac{2\,b^2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin y\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha - a^2,$$

où :

Si	Il en résulte
$y < 0$	$x^2 + y^2 = -(a^2 + b^2)$
$y = 0$	$x^2 = -a^2$
$y > 0$	$x^2 + y^2 = b^2 - a^2$

Les conditions exprimées dans les deux premières rangées ne peuvent être satisfaites.

2°. Si $x = 0$, il résulte de l'équation (15) :

$$y^2 = \frac{2\,b^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha,$$

qui ne peut être satisfaite qu'en posant $y = 0$, ou bien $y = b$.

3°. Si $x > 0$, il résulte de (15) :

$$x^2 + y^2 = \frac{2\,b^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha + a^2,$$

où :

Si	Il en résulte
$y < 0$	$x^2 + y^2 = -\,b^2 + a^2$
$y = 0$	$x^2 = a^2$
$y > 0$	$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Les premières conditions ne peuvent être satisfaites.

Le graphique qui réstulte des conclusions exprimées en 1°, 2°, 3°, est, fig. 52 :

fo-m-[illegible]-s q----t- ue -e--l- AB, CD en exceptant leurs extrémités, et des points C_1, O, C_2.

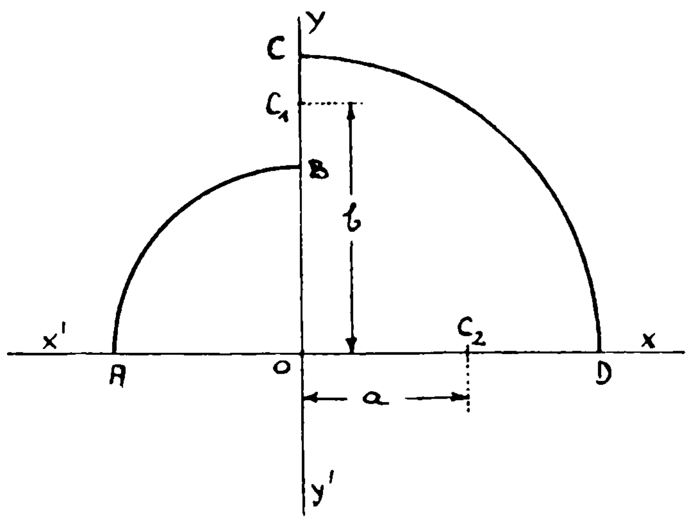

Fig. 52.

De quelques autres graphiques.

1. *Soit à établir le graphique de la fonction y, définie par la relation :*

(16) $$1 = y^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\,(1 - x^2)\,\alpha}{\alpha}\, d\,\alpha.$$

On peut résumer la discussion, facile à suivre, dans les systèmes de relations suivantes :

$$\begin{cases} x < -1 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ y = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Le graphique est, fig. 53 :

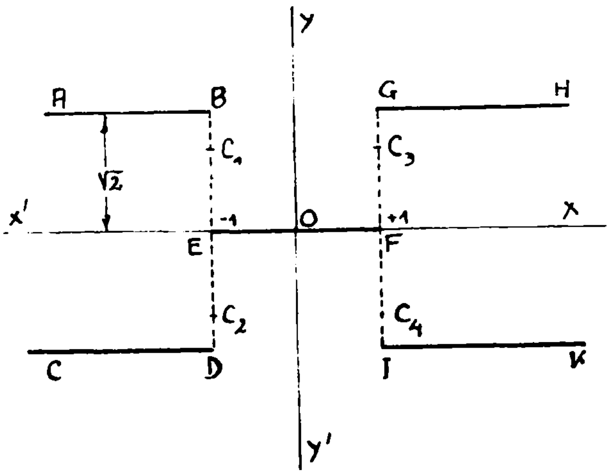

Fig. 53.

formé des semi-droites A B, C D, G H, I K, du segment E F, et des points C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) qui remplacent les extrémités de même abscisse.

2. *Soit à établir le graphique de la fonction y, définie par la relation :*

$$(17) \qquad 2 - y^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin (1 - x^2)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha.$$

On peut résumer la discussion dans les systèmes de relations suivants :

$$\begin{cases} x < -1 \\ y = \pm \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm \sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \qquad y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm \sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ y = \pm \sqrt{3}. \end{cases}$$

Le graphique est, fig. 54 :

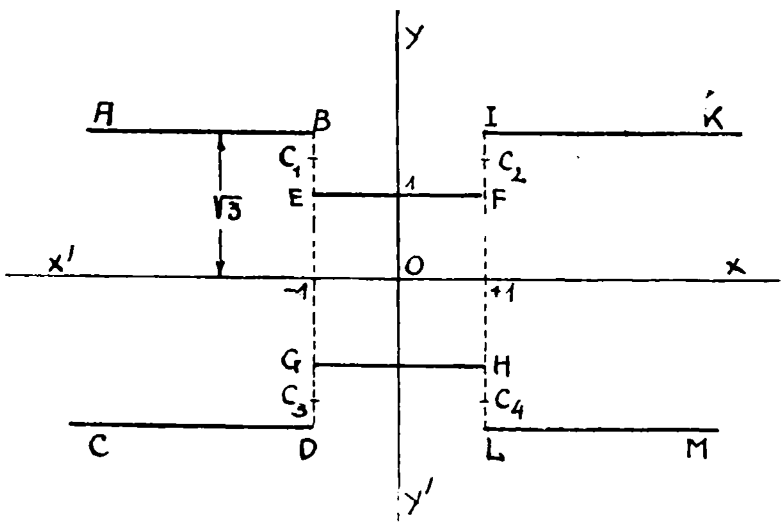

Fig. 54.

formé des semi-droites A B, C D, I K, L M, des segments E F, G H et des points C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) qui remplacent les extrémités de même abscisse.

3. *Soit à établir le graphique de la fonction y, définie par la relation :*

$$(18) \qquad x^2 + y^2 - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin (x^2 + y^2 - 1)\, \alpha}{\alpha}\, d\, \alpha.$$

La discussion peut se résumer ainsi :

$$\begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x^2+y^2-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \qquad x^2+y^2-1=0, \qquad \begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+y^2-\dfrac{3}{2}=0, \end{cases}$$

Le graphique est, fig. 55, formé de trois cercles concentriques et des rayons respectifs, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. *Soit à établir le graphique de la fonction y, définie par la relation :*

$$(19)\quad 1-y^2=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\sqrt{1-x^2}}{\alpha}\,d\alpha.$$

Cette expression est satisfaite si nous prenons :

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=\pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=\pm 1. \end{cases}$$

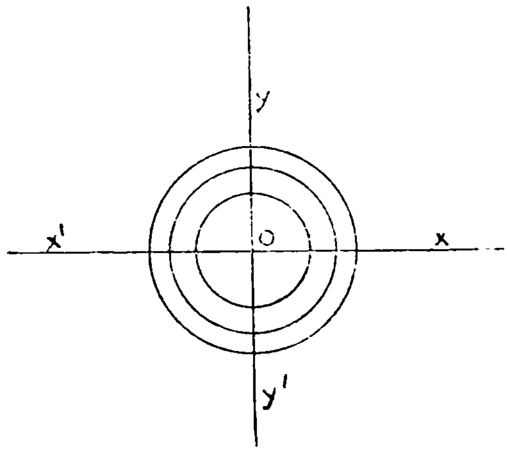

Fig. 55.

Le graphique est formé de quatre points isolés.

5. *Soit à établir le graphique de la fonction y, définie par la relation*

$$(20)\qquad \int_6^\infty \frac{\sin(1-x^2-y^2)\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Cette équation est satisfaite, pour :

$$x^2+y^3-1<0,$$

c'est-à-dire pour les points tombant à l'interieur du cercle :

$$x^2+y^2-1=0.$$

6. *Soit à représenter graphiquement la fonction y, définie par la relation :*

$$(21)\qquad \frac{\pi}{2}+\int_0^\infty \frac{\sin\varphi_1\varphi_2\alpha}{\alpha}\,d\alpha=0,$$

où :

$$\varphi_1=x^2+y^2-a^2,$$
$$\varphi_2=x^2+y^3-b^2.$$

L'équation (21) ne peut être satisfaite que si nous prenons :

$$\varphi_1\varphi_2<0,$$

c'est-à-dire seulement pour les points qui tombent à l'intérieur de la couronne formée par les cercles.

$$\varphi_1=0,\qquad \varphi_2=0,\qquad \text{fig. 56.}$$

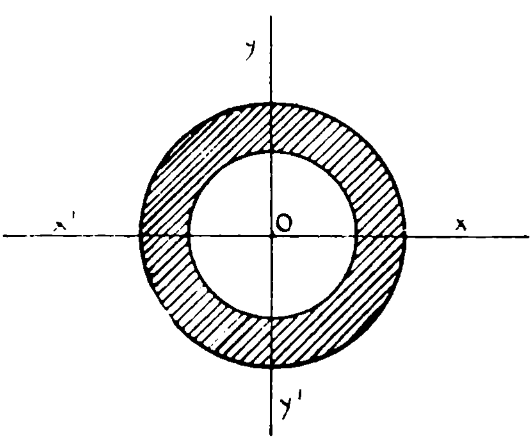

Fig. 56.

7. *Soit à représenter graphiquement la fonction y, définie par la relation :*

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha\sqrt{1-x^2} - \sin \alpha\sqrt{1-y^2}}{\alpha}\, d\alpha = 0. \tag{22}$$

La discussion peut se résumer ainsi :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Le graphique est, fig. 57 :

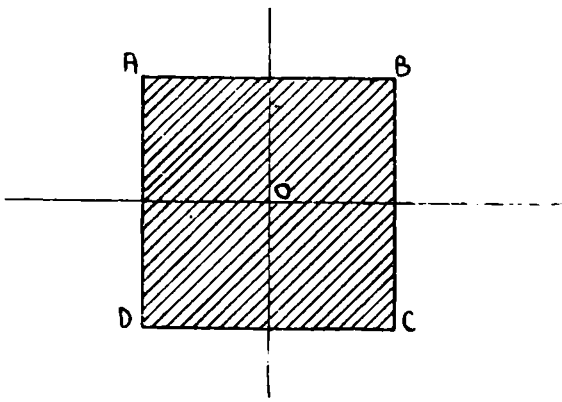

Fig. 57.

formé des points situés à l'intérieur du carré A B C D et de ses sommets.

§ V. Fonctions discontinues de première espèce à plusieurs variables.

Nous nous proposons de traiter seulement quelques exemples de ce genre de fonctions.

1. *Soit à representer graphiquement la fonction :*

$$z = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin (x+y-1)\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha. \tag{1}$$

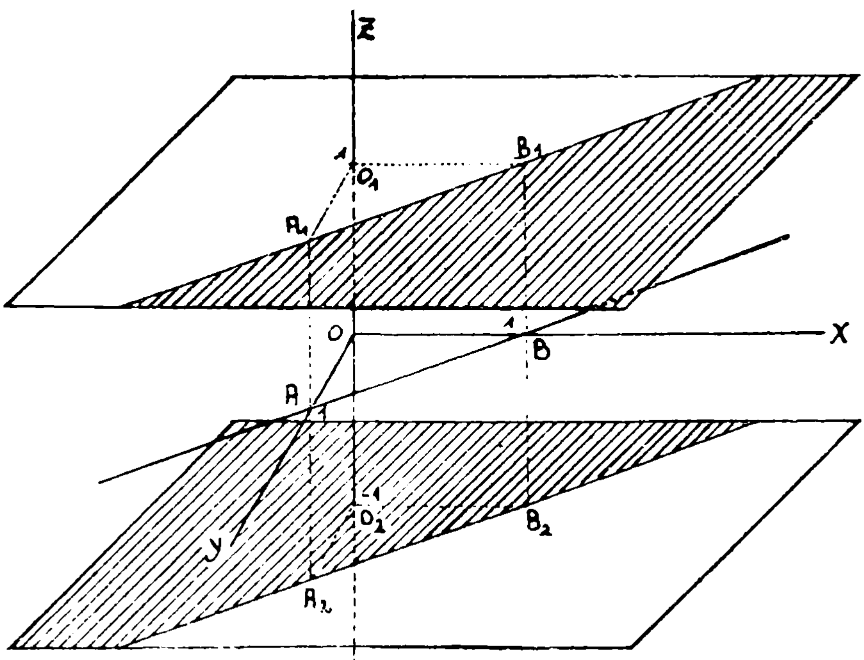

Fig. 58.

Remarquons que si $x+y-1<0$, alors $z=-1$; si $x+y-1=0$, alors $z=0$ et si $x+y-1>0$, alors $z=1$.

On obtient le graphique en menant les plans $z=\pm 1$ et dans ces plans, comme aussi en xOy, en menant les droites $x+y-1=0$. Le graphique de la fonction demandée est, (fig. 58) : formé de la droite AB, de toute la partie du plan $z=-1$, du côté de A_2B_2 qui contient O_2, et de toute la partie du plan $z=1$, du côté de A_1B_1 qui ne contient pas O_1 :

2. *Soit à représenter graphiquement la fonction :*

$$(2) \qquad z=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x^2+y^2-1)\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

La discussion et le graphique s'obtiennent de la même manière que ci-dessus, en remplaçant les droites par les cercles, $x^2+y^2-1=0$.

Nous avons ainsi le graphique, fig. 59 : formé du plan entier $z=1$, à l'exception des points de l'intérieur du cercle O_1 ensuite des points du cercle O du plan xOy et enfin des points à l'intérieur du cercle O_2 du plan $z=-1$.

C'est comme si l'on avait fait dans le plan $z=1$ une ouverture circulaire O_1, comme si l'on avait déplacé ensuite ce cercle parallélement à lui même, en laissant son contour dans le plan $z=0$, mais l'intérieur dans le plan $z=-1$.

3. *Soit à construire le graphique de la fonction :*

$$(3) \quad z=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\varphi_1\varphi_2\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

où $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ *sont des coniques.*

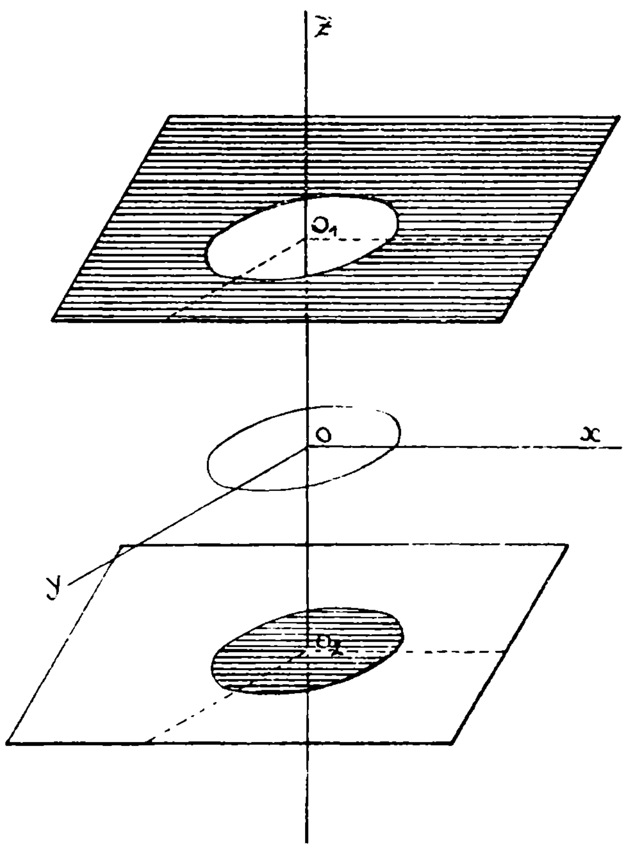

Fig. 59.

Pour plus de précision supposons que nous ayions des ellypses et que pour les points situés à l'intérieur de ces ellypses nous ayions respectivement $\varphi_1<0$, $\varphi_2<0$.

Nous remarquons alors que si $\varphi_1\,\varphi_2<0$, alors $z=-1$; que si $\varphi_1\,\varphi_2=0$, alors $z=0$ et que si $\varphi_1\,\varphi_2>0$ alors $z=1$. Pour avoir le graphique demandé, construisons dans le plan xOy et dans les plans $z=-1$, $z=1$, les éllypses $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$.

1°. Si les ellypses sont extérieures le graphique est, fig. 60:

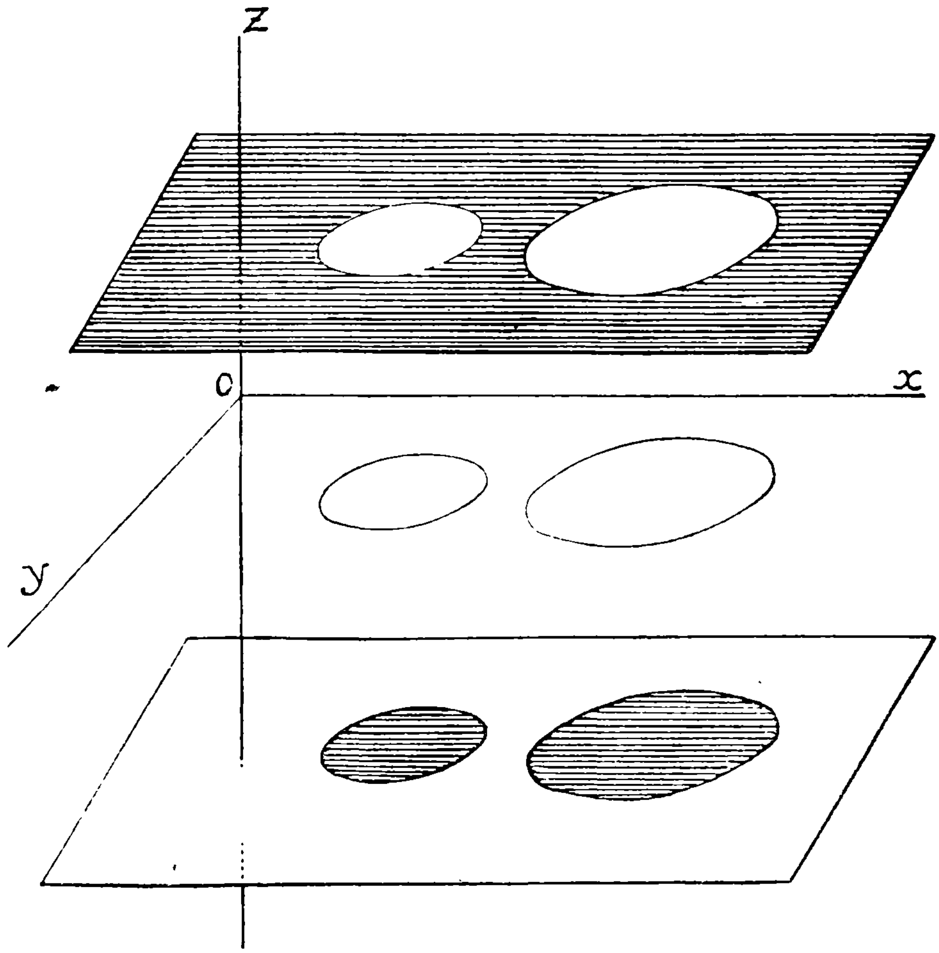

Fig. 60.

formé des contours des ellypses du plan $z=0$, ensuite des points à l'intérieur des ellypses du plan $z=-1$ et enfin des points du plan $z=1$ exceptés ceux qui tombent à l'intérieur et sur les contours des ellypses.

2°. Si les ellpyses sont intérieures, le graphique est, fig. 61: formé des contours des ellypses du plans $z=0$, ensuite des points du plan $z=-1$ compris entre les deux ellypses, et enfin des points du plan $z=1$ tombant à l'intérieur de la petite ellypse et à l'extérieur de la grande ellypse.

3°. Si les ellypses sont sécantes le graphique est, fig. 62:

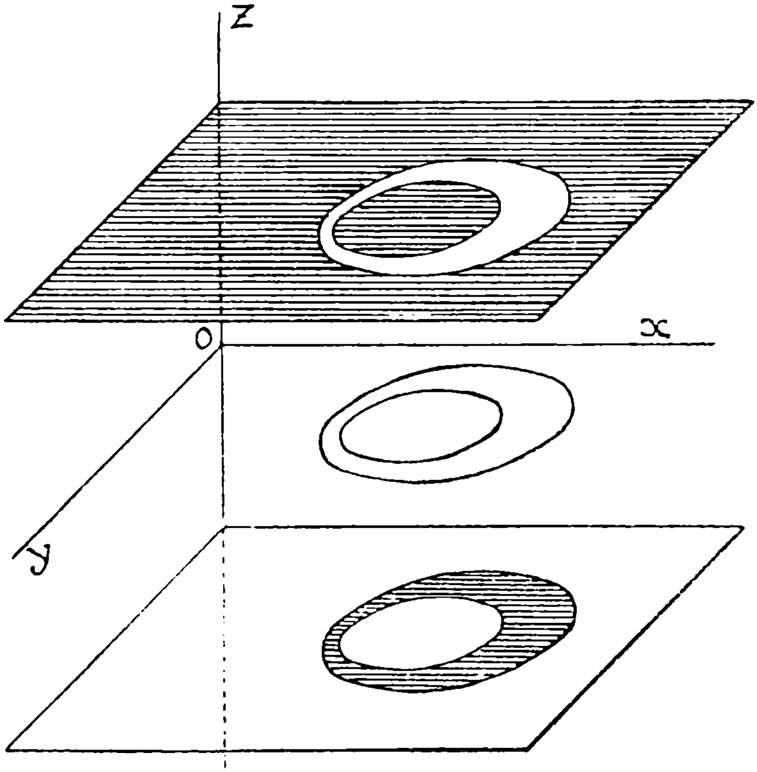

Fig. 61.

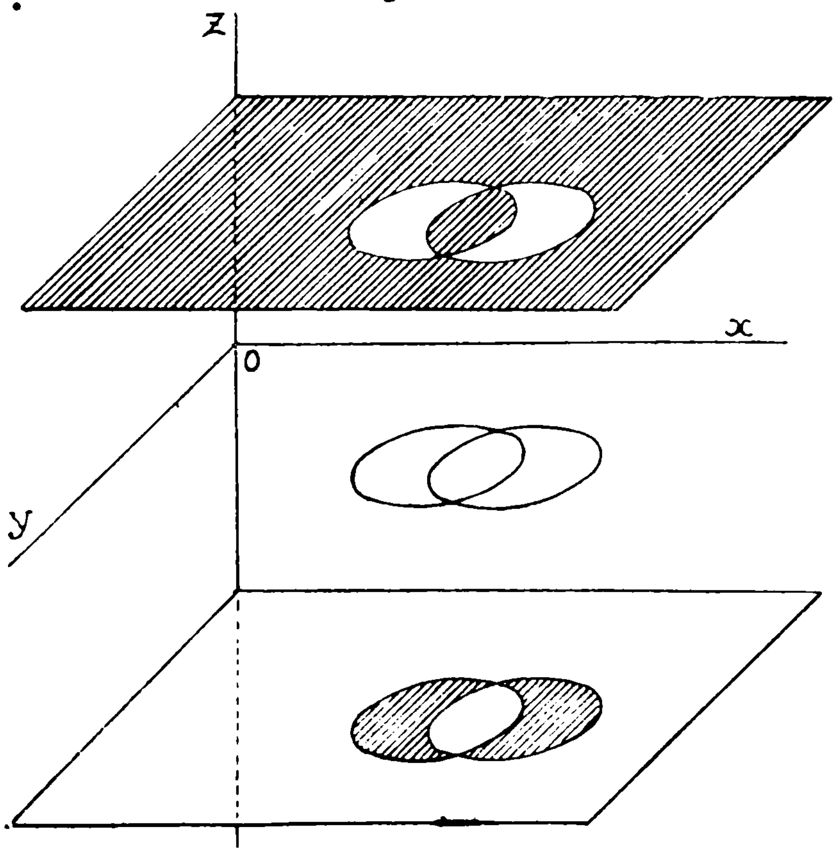

Fig. 62.

formé des contours des ellypses du plan $z=0$, ensuite des points du plan $z=-1$ à l'intérieur des ellypses exceptés ceux qui tombent dans la partie commune, et enfin des points du plan $z=1$ communs et extérieurs aux deux ellypses.

4. *Soit à représenter graphiquement la fonction:*

$$z=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi_1(\varphi_2-1)\alpha\cos\varphi_1(\varphi_2+1)\alpha}{\alpha}\,d\alpha. \tag{4}$$

où $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ sont des coniques.

Pour plus de précision supposons des ellypses sécantes et que pour les points tombant à l'intérieur de ces ellypses nous ayions respectivement $\varphi_1<0$, $\varphi_2<0$.

La fonction (4) peut encore s'écrire:

$$z=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi_1\varphi_2\alpha-\sin\varphi_1\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Soit $M(x, y)$ un point du plan xOy, point que nous déplaçons dans tout le plan.

Considerons l'une après l'autre les hypothèses suivantes:

1°. Si $\varphi_1<0$, et encore:

Si	Il en résulte
$\varphi_2<0$	$z=1$
$\varphi_2=0$	$z=\frac{1}{2}$
$\varphi_2>0$	$z=0$

2°. Si $\varphi_1=0$, alors $z=0$ quelle que soit la valeur de φ_2.

3°. Si $\varphi_1>0$, et encore:

Si	Il en résulte
$\varphi_2<0$	$z=-1$
$\varphi_2=0$	$z=-\frac{1}{2}$
$\varphi_2>0$	$z=0$

Pour obtenir le graphique demandé l'on procède ainsi.

On construit dans les plans :

$$z = -1, \quad z = -\frac{1}{2}, \quad z = 0, \quad z = \frac{1}{2}, \quad z = 1$$

les ellypses sécantes $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, fig. 63 :

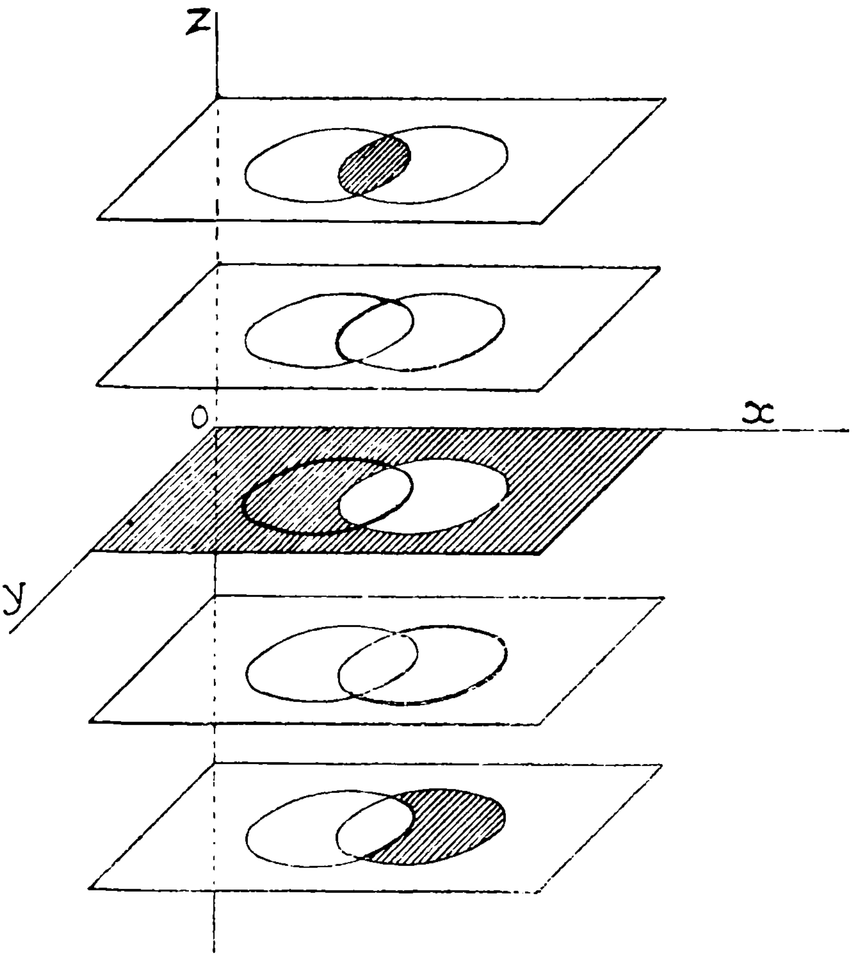

Fig .63

De la discussion ci-dessus, il résulte que le graphique se compose :

1°. Des points du plan $z = 0$, intérieurs à l'ellypse $\varphi_1 = 0$, mais extérieurs à celle $\varphi_2 = 0$; ensuite du contour de $\varphi_1 = 0$ et enfin des points du plan $z = 0$ extérieurs aux ellypses.

2°. Des points du plan $z = -1$ à l'intérieur de l'ellypse $\varphi_2 = 0$ à l'exception de ceux qui tombent sur le contour et à l'intérieur de $\varphi_1 = 0$.

3°. Des points du plan $z = -\frac{1}{2}$ appartiennent à l'ellypse $\varphi_2 = 0$ à l'exception de ceux qui tombent à l'intérieur et sur le contour de $\varphi_1 = 0$.

4°. Des points du plan $z = \frac{1}{2}$ appartenant à $\varphi_2 = 0$, mais à l'intérieur de $\varphi_1 = 0$.

5°. Des points du plan $z = 1$ appartenant à la partie commune des deux ellypses.

5. *Soit à établir le graphique défini par l'équation :*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(1 - x^2 - y^2 - z^2)\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Cette équation est satisfaite pour les points où nous avons :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 < 0,$$

c'est-à-dire pour les points à l'intérieur de la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{6}$$

Remarque. L'équation des points à l'extérieur de la sphère (6) est :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

6. *Soit à établir le graphique défini par la relation :*

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(1 - z^2)\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha. \tag{8}$$

Cette équation est équivalente aux relations :

$$\begin{cases} z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 < z < 1 \\ \quad z^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Le graphique qui en résulte est, fig. 64 :

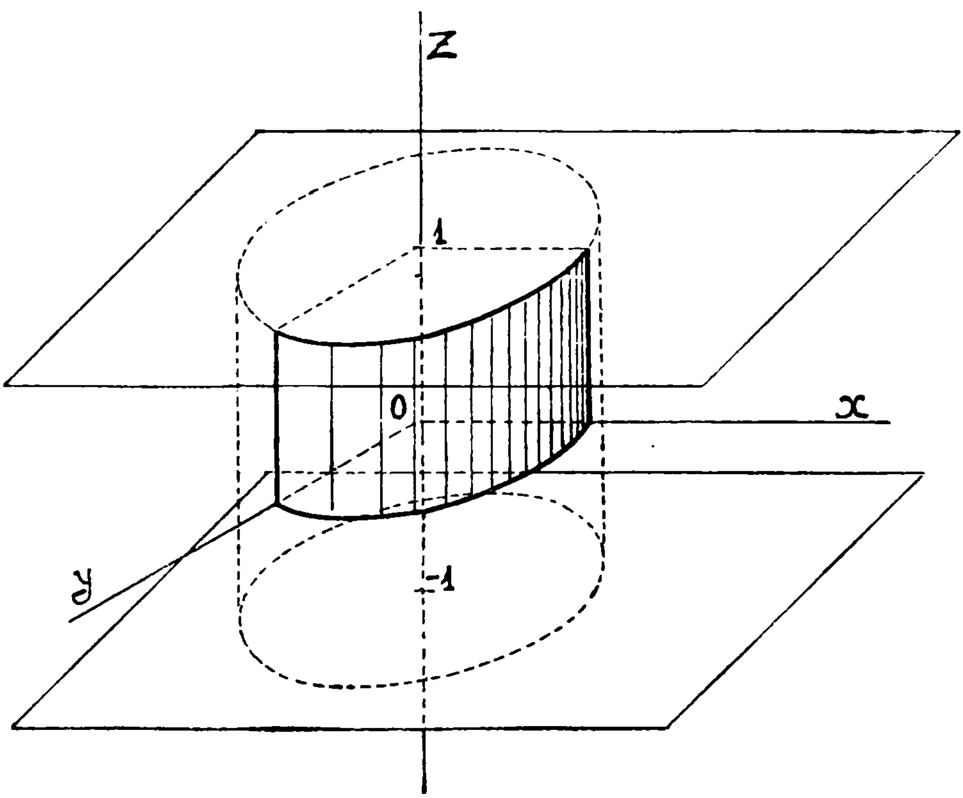

Fig. 64.

formés des points situées sur la surface du cylindre comprise entre les deux bases, et de centres O_1 et O_2 de ces dernières bases.

7. Un genre intéressant de problèmes serait celui qui découle de l'exemple suivant.

Soit à résoudre l'équation :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin P(x)\,\alpha \cos [2 - 3\,P(x)]\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{4}, \tag{9}$$

où :

$$P(x) = x^2 + x - 1.$$

L'équation (9) peut encore s'écrire :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin [P(x) - 1]\,\alpha + \sin [1 - 2\,P(x)]\,\alpha}{\alpha} = -\frac{\pi}{2}.$$

Cette équation ne peut être satisfaite que si nous prenons :

$$P(x) = 1, \qquad \text{ou} \qquad 2\,P(x) = 1,$$

c'est-à-dire :

$$x^2 + x - 2 = 0, \quad \text{ou} \quad 2\,x^3 + 2\,x - 3 = 0,$$

dont les racines sont :

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad x_{3,\,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2},$$

ces sont les racines de l'équation (9).

8. Les applications nombreuses et très variées qui découlent du présent exposé ont éclairé une classe ou, pour mieux dire, des classes importantes de fonctions discontinues de premières espèce à une ou plusieurs variables, comme elles ont éclairé aussi d'autres questions avoisinantes. Toutefois je me propose, dans un prochain exposé de m'occuper de questions à mon avis encore plus importantes, celles qui consistent à établir les équations des polygones et des polyèdres convexes, questions apparentées à celles traitées dans le présent exposé.