UNE CLASSE DE FONCTIONS SIMPLE-DISCONTINUES A DEUX VARIABLES

PAR

VALERIU ALACI

PROFESSEUR Á L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMISOARA

EXTRAIT DU „BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMIŞOARA"
TOME 4. FASC. 1—2.

TIMIŞOARA
IMPRIMERIE „TIPOGRAFIA ROMANEASCA"
1931

UNE CLASSE DE FONCTIONS SIMPLE-DISCONTINUES A DEUX VARIABLES

PAR

V. ALACI

Je me propose de présenter dans les pages suivantes une classe de fonctions simple-discontinues qui soient exprimées par des intégrales définies, en traitant premièrement des diverses cas particulièrs, leurs propriétés et les applications qu' elles comportent.

§ 1.

La fonction de deux variables:

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin |\sin (y - x)| \alpha}{\alpha} d\alpha, \tag{1}$$

est simple-discontinue.

Pour établir que la fonction (1) est simple-discontinue nous trouverons les valeurs qu'elle prend pour n'importe quel point $M(x, y)$ du plan.

Premièrement, on sait que l'intégrale définie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin A \alpha}{\alpha} d\alpha,$$

prend les valeurs $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ selon que A est négatif, égal à zéro ou positif.

Maintenant nous pouvons construire facilement le tableau suivant de variation pour la fonction (1):

$y-x$	...	0		π		2π		3π		4π	...
$u(x,y)$	...	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	...

En construisant les droites:

$$y - x = k\pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2}$$

qui deux à deux consécutives donnent une série de bandes, on peut interpréter les résultats compris dans le tableau ci-dessus, en remarquant la figure 1, de la façon suivante.

1°. Pour n'importe quel point $M(x, y)$ à l'intérieur d'une bande hachurée, nous avons :

$$u(x, y) = 1$$

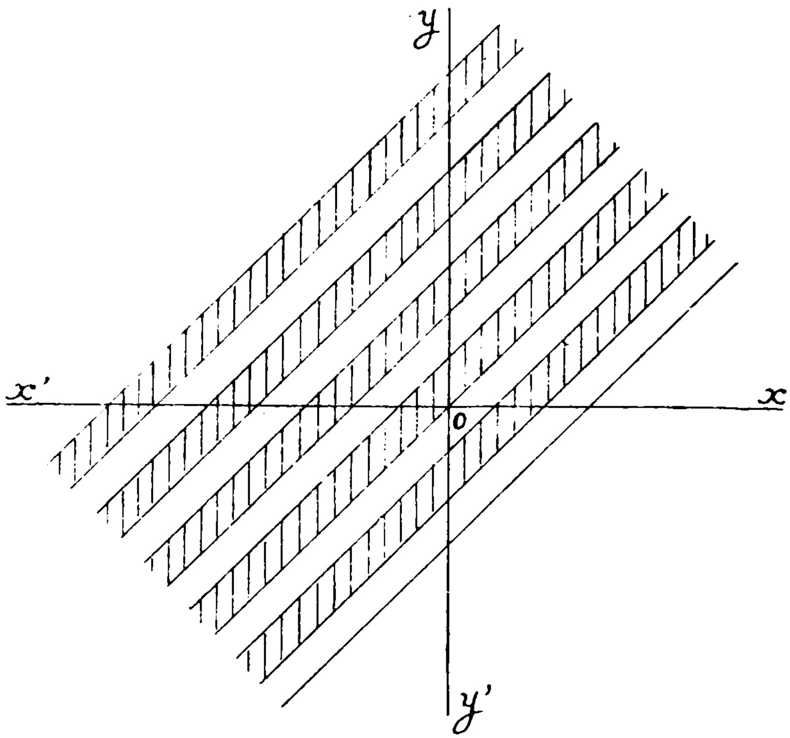

Fig. 1.

2°. Pour n'importe quel point à l'intérieur d'une bande qui n'est pas hachurée, nous avons :

$$u(x, y) = -1$$

3°. Pour un point quelconque d'une des droites (2), nous avons :

$$u(x, y) = 0$$

En passant ainsi d'un point d'une bande hachurée à un point d'une bande non hachurée, on voit que la fonction $u(x, y)$ passe brusquement de la valeur 1 à la valeur -1. Cela signifie que la fonction (1) est simple-discontinue, les droites (2) étant pour elle des lignes de discontinuités :

Propriétés. 1°. La fonction $u(x, y)$ est *anti-symétrique*, parce que nous remarquons que nous avons :

$$u(x, y) = -u(y, x)$$

2°. La fonction simple-discontinue $u(x, y)$ est périodique parce que nous avons :

$$u(x + 2k\pi,\ y + 2k'\pi) = u(x, y), \qquad (k, k' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Applications. 1. *Soit à résoudre le système:*

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} u(x, y) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

ou $u(x, y)$ *est donné par l'expression* (1).

La fonction $u(x, y)$ étant égale à zéro seulement aux points situés sur les lignes de discontinuités:

$$\text{(4)} \qquad y - x = k\pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

il résulte que seulement les points d'intersections des droites (2) avec le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, nous donnent les systèmes de solutions pour le système (3), figure 2.

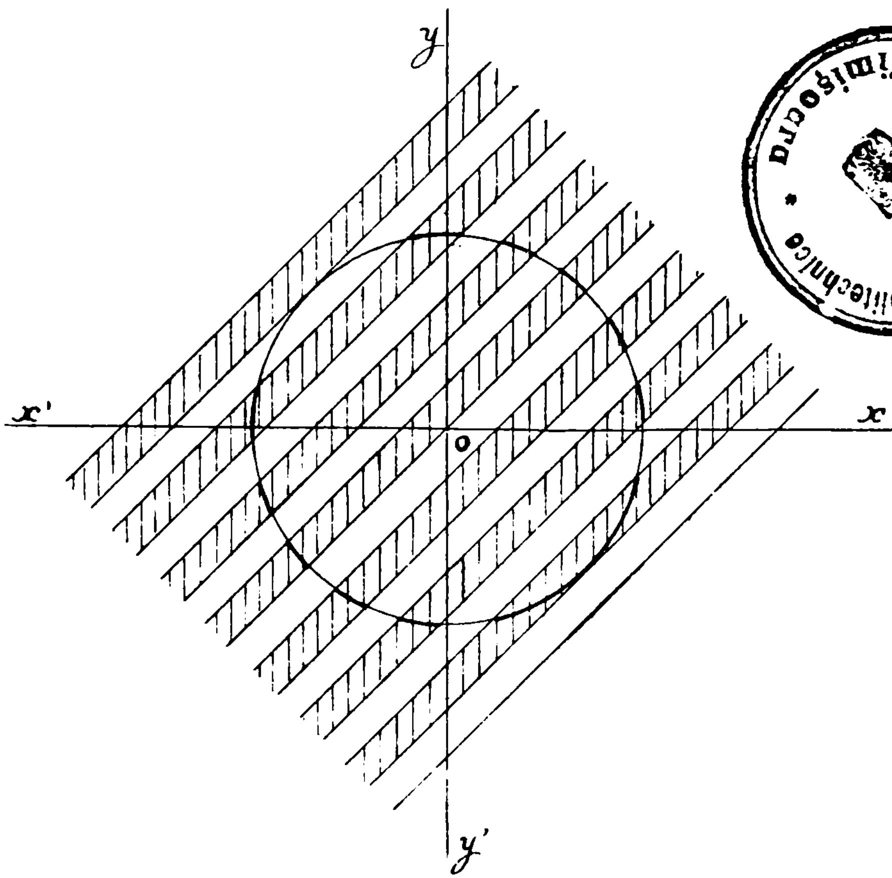

Fig. 2.

Remarque. Comme la distance entre deux droites consécutives de (4) est $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, il en résulte que le nombre de systèmes de solutions pour le système (3), est:

$$4n, \qquad \text{ou} \qquad 2(2n + 1)$$

selon que $\frac{a\sqrt{2}}{\pi}$ est l'entier n, ou le plus grand entier n qui est compris dans $\frac{a\sqrt{2}}{\pi}$.

2. *Soit à résoudre les systèmes:*

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,y) = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{array}\right. \tag{5}$$

En regardant la figure 2, nous pouvons dire que seulement les coordonnées de chaque point des arcs du cercle O situées dans l'intérieur des bandes hachurées, nous donnent un système de solutions pour le systéme:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,y) = 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{array}\right.$$

et les coordonnées de chaque point des arcs du cercle O situées dans l'intérieur des bandes qui ne sont pas hachurées, nous donnent un système de solutions pour le système:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,y) = -1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{array}\right.$$

Remarque. Il est évident qu'on peut changer le cercle O par n'importe quelle autre courbe continue et si nous suivons continuellement les valeurs de la fonction $u(x,y)$ pour chaque point d'une telle courbe nous trouvons la série de valeurs 1, 0, —1, ou —1, 0, 1, le passage d'une valeur à l'autre étant brusque. Nous pouvons dire ainsi que la fonction $u(x,y)$ est discontinue sur une telle courbe continue.

§ 2.

La fonction:

$$v(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_6^{\infty} \frac{\sin[\sin(x^2+y^2)]\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha, \tag{6}$$

est simple-descontinue.

En regardant la fonction (6), nous pouvons construire facilement le présent tableau de variation;

x^2+y^2	0		π		2π		3π		4π	...
$v(x,y)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	...

Nous construisons maintenant les cercles:

$$x^2 + y^2 = k\pi, \qquad (k = 0, 1.2, 3, \ldots) \tag{7}$$

et en regardant la figure 3 et le tableau de variation, nous en déduisons sans difficulté les résultats suivants.

BUPT

1°. Pour n'importe quel point à l'intérieur du premier cercle en exceptant l'origine et pour n'importe quel point d'une couronne quelconque hachurée, nous avons :

$$\nu(x, y) = 1$$

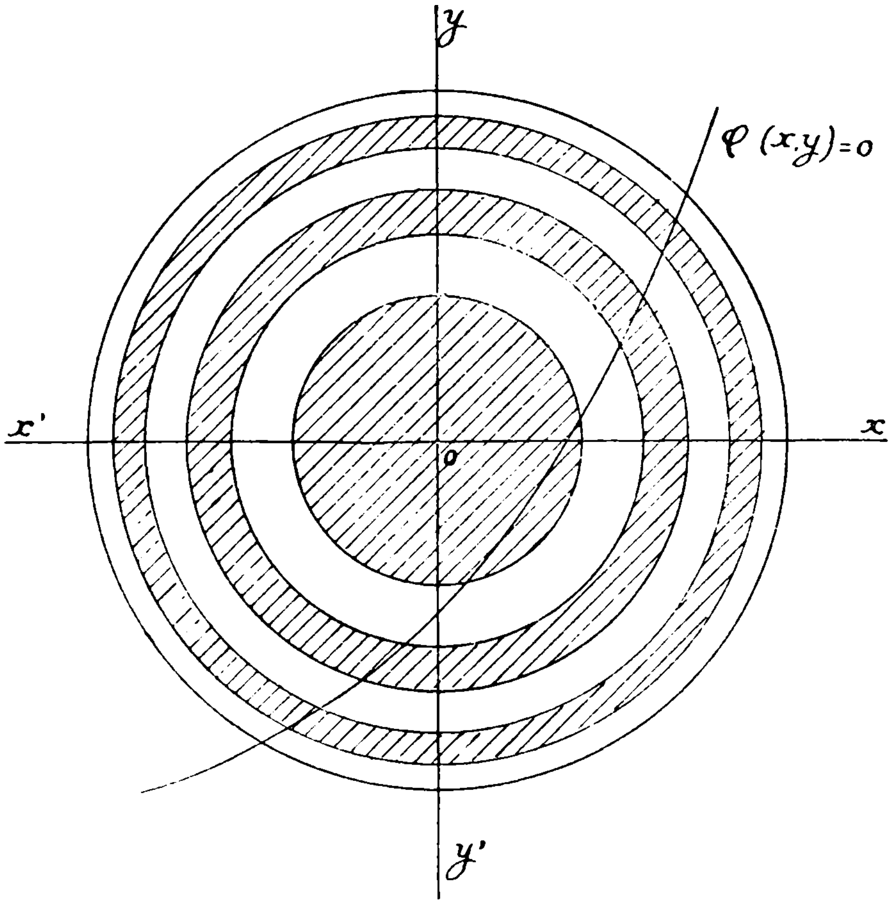

Fig. 3.

2°. Pour n'importe quel point d'une couronne qui n'est pas hachurée, nous avons :

$$\nu(x, y) = -1$$

3°. Pour l'origine et pour n'importe quel point des cercles (7), nous avons :

$$\nu(x, y) = 0$$

La fonction $\nu(x, y)$ est donc simple-discontinue, le passage par les valeurs 1, 0, -1 étant brusque.

Applications. Si nous trouvions l'intersection des cercles de la figure 3, avec une courbe continue $\varphi(x, y) = 0$, nous en déduirons les résultats :

1°. Les coordonnées des points d'intersections des cercles (7) avec la courbe $\varphi(x,y)=0$, sont des systèmes de solutions pour le système d'équations:

$$\begin{cases} v(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

2°. Les coordonnées de n'importe quel point situé sur les arcs de la courbe $\varphi(x,y)=0$ compris dans les régions hachurées, sont des systémes de solutions pour le systême:

$$\begin{cases} v(x.y)=1 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

3°. Les coordonnées de n'importe quel point situé sur les arcs de la courbe $\varphi(x,y)=0$ compris dans les régions qui ne sont pas hachurées, sont des systémes de solutions pour le système:

$$v(x,y)=-1$$
$$\varphi(x,y)=0$$

§ 3.

La fonction à deux variables:

$$w(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\sin x)\alpha+\sin(\sin y)\alpha}{\alpha}\,d\alpha. \tag{8}$$

est simple discontinue.

Nous construisons premièrement les droites:

$$x=k\pi \tag{9}$$
$$y=k\pi \tag{10}$$
$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

qui deux à deux consécutives donnent une série de bandes, les unes parallèles à Ox, les autres à Oy.

Si nous notons:

$$w_1(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\sin x)\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

$$w_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\sin y)\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

alors:

$$w(x,y)=w_1(x,y)+w_2(x,y) \tag{11}$$

Chaque fonction $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ ne peut avoir que les valeurs 1, 0, -1; elles prennent respectivement la valeur 1 pour les points situés à l'intérieur d'une bande hachurée parallèle à Ox ou à Oy; elles prennent la valeur zéro pour les points situés sur les droites (9) ou (10); elles prennent la valeur -1 pour les points situés à l'intérieur d'une bande non hachurée parallèle à Ox ou à Oy.

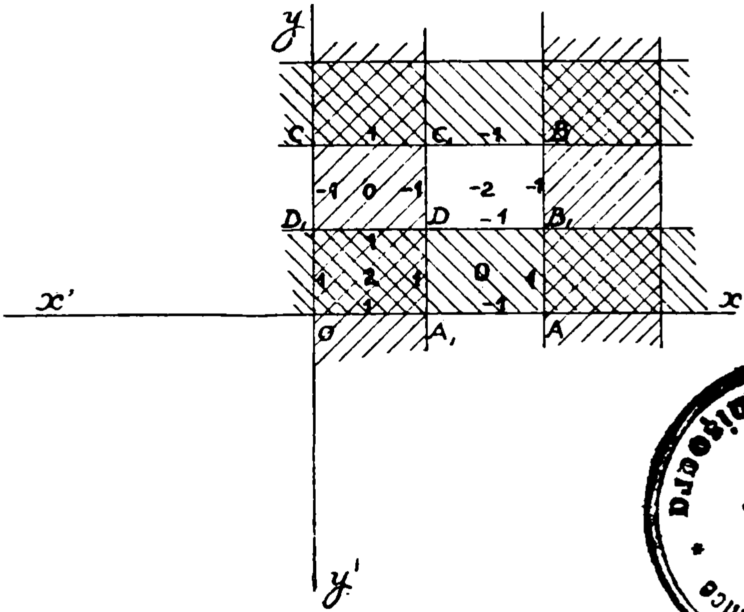

Fig. 4.

Nous remarquons encore sur la relation (8) que la fonction $w(x, y)$ est périodique, c'est-à-dire :

$$w(x + 2k\pi,\ y + 2k'\pi) = w(x, y), \qquad (k, k' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Il en résulte ainsi qu'il faut étudier la fonction $w(x, y)$ seulement à l'intérieur et sur les côtés du carré $OABC$.

En regardant la figure 4, et en tenant compte des résultats que nous avons établi,, nous en déduisons les conclusions suivantes :

1°. Pour n'importe quel point d'une région commune d'une bande hachurée parallèle à Ox et d'une bande hachurée paralèle à Oy, nous avons :

$$w(x, y) = 2$$

Seulement les points de l'intérieur du carré OA_1DD_1 qui est situé à l'intérieur du carré période $OABC$, satisfont cette relation.

2°. Pour n'importe quel point d'une région commune à deux bandes non hachurées, l'une parallèle à Ox, l'autre parallèle à Oy, nous avons :

$$w(x, y) = -2$$

Seulement les points de l'intérieur du carré DB_1BC_1, qui est situé à l'intérieur du carré période $OABC$, satisfont cette relation.

3°. Pour n'importe quel point d'une région commune à une bande hachurée parallèle à l'un des axes et à une bande non hachurée parallèle à l'autre axe, nous avons :

$$w(x, y) = 0$$

Ainsi, les points à l'intérieur des carré $A_1 A B_1 D$, $D_1 D C_1 C$ et encore les points O, A, B, C, A_1, B_1, C_1, D_1, D satisfont cette relation.

4°. Pour n'importe quel point situé sur les côtés du carré $O A_1 D D_1$ et sur les segments $A B_1$, $C C_1$ en exceptant les extrémités, nous avons:

$$w(x,y) = 1$$

5°. Pour n'importe quel point situé sur les côtés du carré $D B_1 B C_1$ et sur les segments $A_1 A$, $D_1 C$ en exceptant les extrémités, nous avons:

$$w(x,y) = -1$$

La fonction $w(x,y)$ reçoit ainsi dans tout le plan, seulement cinq valeurs, c'est-à-dire: 2, 1, 0, -1, -2 et parce qu'elle passe brusquement d'une valeur á l'autre, il en résulte que cette fonction $w(x,y)$ est simple-discontinue.

§ 4.

Les fonctions $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ que nous avons étudié ci-dessus sont des cas particuliers d'une fonction plus générale, c'est-à-dire:

$$\psi(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \frac{\sin[\sin \varphi_i(x,y)]\,\alpha}{\alpha}\, d\alpha, \tag{12}$$

ou:

$$\varphi_i(x,y) = k\pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

représente des familles de courbes continues.

La fonction (12) signifie ainsi une classe importante de fonctions périodique simple-discontinue à deux variables.