

Zur Theorie der eisenlosen Induktionsöfen

Von der

Eidgenössischen Technischen Hochschule
in Zürich

zur Erlangung der

Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte

Ω
631

Promotionsarbeit

vorgelegt von

Dipl. Ing. Remus Basiliu Răduleț
aus Timișoara (Rumänien)

Referent: Herr Prof. Dr. K. Kuhlmann
Korreferent: Herr Prof. Dr. F. Tank

Zur Theorie der eisenlosen Induktionsöfen

Von der

Eidgenössischen Technischen Hochschule
in Zürich

zur Erlangung der

Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte

N^o. 631

Promotionsarbeit

vorgelegt von

Dipl. Ing. Remus Basiliu Rădulet
aus Timișoara (Rumänien)

Referent: Herr Prof. Dr. K. Kuhlmann
Korreferent: Herr Prof. Dr. F. Tank

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA



00171134

5855.-
19.c

Timișoara 1931
Tipografia Românească

Einleitung.

Ein eisenloser Induktionsofen besteht im wesentlichen aus einer zylindrischen, unter der Spannung einer Wechselstromquelle stehenden Spule und einem Schmelzgut in einem isolierenden, mit der Spule konaxialen Tiegel. Infolge des wechselnden magnetischen Feldes der Spule werden im Schmelzgut Ströme induziert, die, wegen des Hauteffektes, einen grossen ohmschen Widerstand überwinden müssen. Bei genügend hoher Frequenz wird auch ohne Eisenkern — gute Wärmeisolierung vorausgesetzt — ein wirtschaftlich zulässiger mittlerer Wirkungsgrad erreicht, d. h. ein wirtschaftlich zulässiges Verhältnis der zum Schmelzen des Gutes nötigen zu der dem Ofen zugeführten Energie. Auf den selteneren Fall des isolierenden Schmelzgutes und des leitenden Tiegels gehe ich in dieser Arbeit nicht ein.

Die Theorie der eisenlosen Induktionsöfen ersetzt, aus später näher zu begründenden Ursachen, das Schmelzgut durch zylindrische Leiter und hat die im Schmelzgut in der Zeiteinheit entwickelte Joulesche Wärme, den Wirkungsgrad, den Leistungsfaktor und die Abkühlungsverhältnisse in Funktion der Dimensionen, der elektrischen und magnetischen Konstanten des Ofens zu bestimmen und sodann Formeln für die Vorausberechnung aufzustellen. Ihre Hauptschwierigkeiten sind die Ermittlung der Jouleschen Leistung im Schmelzgut, des Leistungsfaktors und des elektrischen Wirkungsgrades der Anlage, d. h. des Verhältnisses der im Schmelzgut in Wärme verwandelten zu der dem Ofen zugeführten Leistung. Der elektrische Wirkungsgrad berücksichtigt die durch Wärmeleitung und Strahlung abgeführte Leistung nicht und wird noch mit dem thermischen Wirkungsgrad multipliziert — d. h. mit dem Verhältnis der zum Steigen der Temperatur verwendeten zu der im Schmelzgut als Joulesche Wärme auftretenden Leistung — um den Wirkungsgrad der Anlage zu ergeben. Da dieser während des Schmelzvorganges in weiten Grenzen schwankt, hängt er mit dem oben erwähnten mittleren Wirkungsgrad in einer unten näher zu bestimmenden Weise zusammen.

Das Problem der Bestimmung des elektrischen Wirkungsgrades wird im allgemeinen unter gewissen vereinfachenden Annahmen gelöst, die oft unzulässig sind. Es wird nämlich vorausgesetzt, dass die Induktionsspule und das Schmelzgut unendlich lang sind und unter diesen Bedingungen werden die Verhältnisse in der Spule so weit vereinfacht, dass eine exakte Lösung der Maxwell'schen Gleichungen möglich wird, die es gestattet, den Leistungs-

faktor und den elektrischen Wirkungsgrad für einen gegebenen Ofen zu bestimmen; dann nimmt man an, dass im endlich langen Ofen die Verhältnisse ungefähr so sind, wie in einem Teile von gleicher Höhe des zugehörigen unendlichen langen Ofens. Solange die Höhe des Ofens gross ist im Vergleich mit dem Durchmesser des Schmelzgutes, gibt dieses Verfahren Resultate die mit den experimentellen gut übereinstimmen. Betriebstechnische Gründe sprechen aber für nicht zu hohe Öfen, wenn diese einigermassen gross sind; denn die durch die Wechselwirkung zwischen den Wirbelströmen des Schmelzgutes und dem magnetischen Felde hervorgerufenen Kräfte werden so gross, dass sie unzulässig hohe „Springbrunnen“ des flüssigen Schmelzgutes erzeugen, und die hydrostatischen Drücke überschreiten auch die zulässige Grösse. Man ist also gezwungen nicht zu hohe Öfen zu verwenden und unter diesen Umständen stimmen die Ergebnisse der oben erwähnten Berechnungen nicht mehr mit den experimentellen überein. Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für den Fall eines Zylinders von endlicher Länge ist aber auch für den Fall eines homogenen zur Zylinderachse parallelen äusseren Feldes nicht bekannt, und ist eine ausserordentlich schwierige mathematische Aufgabe. Es bleibt daher nur die Möglichkeit, der endlichen Länge des Ofens durch einen Formfaktor Rechnung zu tragen. Meines Wissens sind aber theoretische und systematische experimentelle Untersuchungen zur Ermittlung eines derartigen Formfaktors nicht angestellt worden (bis auf eine Arbeit von Burch und Davis „An Introduction to the Theory of Eddy-Current Heating“, die mir erst kurz vor Abschluss meiner Arbeit bekannt geworden ist, und die den ersten wichtigen Schritt in dieser Hinsicht darstellt).

Ich werde angenäherte Formeln für den Fall einer endlichen Länge des Schmelzgutes aufstellen und die Resultate mit den Versuchsergebnissen vergleichen. Dabei wird sich eine genügende Übereinstimmung von Rechnung und Messung ergeben. Ich möchte das für einen praktischen Fortschritt halten, obwohl das theoretische Bedürfnis nach einer exakten Lösung nicht befriedigt wird. Dann werde ich den mittleren Wirkungsgrad berechnen und die Formeln für die Vorausberechnung aufstellen.

Für die Behandlung des kurzen Ofens benötige ich die Lösung für den Fall der unendlichen Länge und erötere deshalb auch diesen Fall, in einer meinen späteren Rechnungen angemessenen Weise.

Zur Vorausberechnung und des besseren Überblicks wegen werden für stark ausgeprägten Hauteffekt Näherungsdarstellungen der in der Lösung vorkommenden Funktionen benutzt, auf die ich aber erst in dem der Vorausberechnung reservierten Kapitel eingehen werde.

Die Differentialgleichungen des Problems und Literaturübersicht.

Um das elektrische Verhalten eines Ofens im Betriebe zu bestimmen, ist es zweckmässig aus den Differentialgleichungen des Problems die räumliche Verteilung und den zeitlichen Verlauf der Stromdichte und des magnetischen Feldes zu ermitteln und aus ihren Ausdrücken die in den Ofenteilen (Schmelzgut oder Spule) in der Zeiteinheit entwickelte Wärme und schwankende magnetische Energie zu berechnen.

Ich führe folgende Bezeichnungen ein :

\mathfrak{H} = Magnetische Feldstärke.

\mathfrak{G} = Elektrische Feldstärke.

\mathfrak{B} = Magnetische Induktion.

\mathfrak{D} = Elektrische Verschiebung.

\mathfrak{C} = Leitungsstromdichte.

\mathfrak{P} = Poyntingscher Vektor.

$\omega = 2\pi f$ = Kreisfrequenz der Vorgänge.

μ = Magnetische Permeabilität.

ε = Dielektrizitätskonstante.

ρ = Spezifischer elektrischer Widerstand.

$Q, 2\omega Q_m$ = Joulesche und magnetische Leistung.

R = Ohmscher Widerstand.

$X = \omega L$ = Reaktanz.

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ = Impedanz.

Ich benutze das *elektromagnetische* Masssystem und schreibe die Hauptgleichungen der Elektrodynamik in ruhenden Körpern an :

$$(I) \quad \text{rot } \mathfrak{H} = 4\pi \left(\mathfrak{C} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right)$$

$$(II) \quad \text{rot } \mathfrak{G} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

$$(III) \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{G}$$

$$(IV) \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

In Leitern ist :

$$(V) \quad \mathcal{G} = \rho \mathcal{E}$$

und, bei $\mu = \text{konst}$:

$$(VI) \quad \text{div } \mathcal{H} = 0$$

Der Poyntingsche Vektor hat den Ausdruck.

$$(VII) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{4\pi} [\mathcal{E}, \mathcal{H}] = \frac{\rho}{4\pi} [\mathcal{E}, \mathcal{H}]$$

wo die Klammer das Vektorprodukt andeutet und der letzte Ausdruck nur in Leitern gültig ist.

Ich beschränke mich auf den Fall $\mu = \text{konst}$ und auf Frequenzen, für die die Wellenlänge der sich ausbreitenden elektromagnetischen Vorgänge gross ist im Vergleich mit den Abmessungen des Ofens, behandle also das Problem quasistationär. Indem ich also in Gleichung (I) die Änderungsgeschwindigkeit der elektrischen Verschiebung vernachlässige, die Rotation dieser Gleichung bilde, Gleichung (II) nach der Zeit differenziere und aus den so entstandenen Gleichungen und (III), (IV), (V), (VI) die Grössen \mathcal{E} , \mathcal{D} , \mathcal{G} , \mathcal{F} eliminiere, erhalte ich die quasistationär ausgeartete Wellengleichung in Leitern:

$$(VIII) \quad \nabla^2 \mathcal{H} = \frac{4\pi\mu}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

In den Isolatoren ist $\rho = \infty$ und es ist bei quasistationären Vorgängen:

$$(IX) \quad \nabla^2 \mathcal{H} = 0$$

Hier ist ∇^2 der Laplacesche Operator.

Um den Sinn der auf den Vektor \mathcal{H} angewendeten Laplaceschen Operation zu präzisieren, seien die drei Komponentengleichungen von (VIII) in kartesischen Koordinaten angegeben. Die lauten:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{4\pi\mu}{\rho} \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{4\pi\mu}{\rho} \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \frac{4\pi\mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Sind \mathbf{i} , \mathbf{j} und \mathbf{k} die drei Einheitsvektoren in den Richtungen der drei Koordinatenachsen, multipliziert man die drei Komponentengleichungen respektiv mit \mathbf{i} , \mathbf{j} und \mathbf{k} und addiert sie, so erhält man die Vektorgleichung (VIII).

Analog ist (IX) folgenden drei Komponentengleichungen in kartesischen Koordinaten äquivalent:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = 0$$

Herrscht in einem elektromagnetischen System axiale Symmetrie und wählt man die Symmetrieachse zur Achse eines Zylinderkoordinatensystems, ist ferner in dem betreffenden Felde die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke Null, so kann man statt VIII, mit (z, r, φ) als Koordinaten und H_z, H_r als Komponenten von \mathfrak{H} nach z und r , schreiben:

$$(VIII') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} = \frac{4 \pi \mu}{\rho} \frac{\partial H_r}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \frac{4 \pi \mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

Im Dielektrikum bestehen in diesem Falle die mit (IX) äquivalenten Gleichungen:

$$(IX') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right.$$

Legt man die Achse eines eisenlosen Induktionsofens in die Achse des Zylinderkoordinatensystems und vernachlässigt man die Ganghöhe der Spulenumwindungen, so hat wegen der axialen Symmetrie, (bei symmetrischem Schmelzgut) das magnetische Feld keine tangentielle Komponente, wohl aber eine axiale — und eine radiale wenn der Ofen nicht als unendlich lang vorausgesetzt wird.

Es wären also die Gleichungen (VIII') und (IX') mit den entsprechenden Grenzbedingungen für die magnetische Feldstärke zu integrieren.

Bei unendlich langer Spule und Kernhöhe hängen die Vorgänge im Ofen nicht mehr von der z -Koordinate ab und die radiale Komponente der magnetischen Feldstärke verschwindet. Die ersten der Gleichungen (VIII') und (IX') werden identisch erfüllt und die zweiten vereinfachen sich zu:

$$(VIII'') \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{4 \pi \mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$$

und:

$$(IX'') \quad \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} = 0$$

von denen die erste in den Leitern und die zweite im Dielektrikum gilt.

Diese Gleichungen können streng integriert werden, wenn man die Spule durch einen mit entsprechendem spezifischen Widerstande behafteten

Hohlzylinder gleicher Dicke ersetzt, und die Vorgänge durch eine einfache harmonische Funktion von der Zeit abhängen.

Berücksichtigt man die Einschaltvorgänge nicht und setzt zeitlich nach einer einfachen harmonischen Funktion verlaufende Vorgänge voraus, so ist es zweckmässig die Methode der komplexen Grössen anzuwenden und sich auf die Realteile der Lösungen zu beschränken. Man kann also schreiben :

$$H'_s = H_s e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad H'_r = H_r e^{i\omega t} \quad i = \sqrt{-1}$$

wo der Strich andeuten soll, dass die betreffende Grösse den Faktor $e^{i\omega t}$ enthält, während H_s und H_r komplexe, von der Zeit unabhängige Grössen bedeuten. Da ich von nun an nur mit komplexen Grössen rechne, kann diese Bezeichnung mit lateinischen Buchstaben zu keinen Verwechslungen Anlass geben.

Setzt man in (VIII') und (IX') H'_s und H'_r für die *reellen* von der Zeit abhängigen Komponenten H_s und H_r , und berücksichtigt noch, dass :

$$\frac{\partial H'_r}{\partial t} = i\omega H'_s \quad \text{und} \quad \frac{\partial H'_s}{\partial t} = i\omega H'_r$$

ist, so erhält man, nach Streichen des gemeinsamen Faktors $e^{i\omega t}$:

$$(VIII''') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} - i \frac{4\pi\mu\omega}{\rho} H_r = 0 \\ \frac{\partial^2 H_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_s}{\partial z^2} - i \frac{4\pi\mu\omega}{\rho} H_s = 0 \end{cases}$$

$$(IX''') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 H_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_s}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

und statt der Gleichungen (VIII'') und (IX'') :

$$(X) \quad \frac{\partial^2 H_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_s}{\partial r} - i \frac{4\pi\mu\omega}{\rho} H_s = 0$$

$$(XI) \quad \frac{\partial^2 H_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_s}{\partial r} = 0$$

wo die *komplexen* Grössen H_s von der Zeit unabhängig sind.

Um nun die mittlere Joulesche oder die mittlere schwankende magnetische Leistung*) eines Ofenteiles zu berechnen, ist es zweckmässig den komplexen Poyntingschen Vektor einzuführen. Er kann im allgemeinen folgendermassen definiert werden : Es sei ein elektromagnetisches Feld \mathfrak{E} , \mathfrak{H} gegeben, wo \mathfrak{E} und \mathfrak{H} gewöhnliche, von der Zeit nach einer einfachen harmonischen Funktion abhängige Vektoren sind. Es seien \mathfrak{E}'' und \mathfrak{H}'' ihre Amplitudenvektoren, α_1 und α_2 ihre Phasen, ferner :

$$\overline{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}'' e^{i\alpha_1} \quad \overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}'' e^{i\alpha_2}$$

*) Es wird hier das Mittel während einer Halbperiode gemeint.

und $\bar{\mathfrak{H}}^*$ die zu $\bar{\mathfrak{H}}$ konjugiert komplexe Grösse: $\bar{\mathfrak{H}}^* = \bar{\mathfrak{H}}'' e^{-i\alpha}$; dann ist der komplexe Poyntingsche Vektor definiert durch die Gleichung:

$$(XII) \quad \bar{\mathfrak{P}} = \frac{1}{8\pi} [\bar{\mathfrak{G}}, \bar{\mathfrak{H}}^*]$$

Er hat die Eigenschaft, dass sein über die Oberfläche eines Körpers erstrecktes Integral durch ihren Realteil die mittlere Joulesche Leistung im Körper und durch ihren imaginären Teil die Differenz der Mittelwerte der magnetischen und der elektrischen Energie in dem umschlossenen Gebiet ($Q_m - Q_e$) multipliziert mit der doppelten Kreisfrequenz gibt:

$$(XIII) \quad \int \bar{\mathfrak{P}} d\mathfrak{f} = Q + i 2 \omega (Q_m - Q_e)$$

(Abraham-Föppl: Theorie der Elektrizität Bd I. Seite 317).

Bei quasistationären Vorgängen kann man die mittlere elektrische Leistung vernachlässigen. Ist I der Effektivwert des Stromes, auf den man diese Leistungen bezieht, so wird der auf den Strom I bezogene Widerstand des von der oben genannten Fläche umschlossenen Körpers:

$$(XIV) \quad R = \frac{Q}{I^2}$$

und die „innere“ Selbstinduktion des umschlossenen Gebietes:

$$(XV) \quad L_i = \frac{1}{\omega} X_i = \frac{2 \omega Q_m}{\omega I^2} = \frac{2 Q_m}{I^2}$$

Zu der „inneren“ wird noch die „äussere“ Selbstinduktion L_a addiert, die sich in der gleichen Weise aus der mittleren magnetischen Leistung des Aussenraumes berechnet, um die totale, in der Elektrotechnik gebräuchliche, auf den Strom I bezogene Selbstinduktion zu erhalten:

$$(XVI) \quad L = L_i + L_a$$

Wird bei dem Berechnen von L_i , L_a nur das vom Körper im Inneren der oben genannten, geschlossenen Fläche herrührende magnetische Feld berücksichtigt, so stellt L die üblich als „wahre“ Selbstinduktion genannte Grösse dar (die also der Körper besässe, wenn er allein Strom führte). Wird aber dabei das von allen Strömen des Systems herrührende magnetische Feld berücksichtigt, so stellt L die üblich als „scheinbare“ Selbstinduktion bezeichnete Grösse dar, die auch den Einfluss der gegenseitigen Induktionen implizit enthält.

Ist für einen gegebenen Fall \mathfrak{H} bekannt, so kann mit (V) und (I) \mathfrak{G} bestimmt werden. Gelten die speziellen Gleichungen (X) und (XI), so hat die elektrische Feldstärke nur eine tangentielle Komponente E_t , wenn man die von den Ladungen hervorgerufene Feldstärke nicht berücksichtigt, und kann aus der Gleichung:

$$(XVII) \quad \frac{1}{\rho} E_t = G_t = \frac{-1}{4\pi} \frac{\partial H_z}{\partial r}$$

berechnet werden. Der Poyntingsche Vektor hat in diesem Falle folgende komplexe Form :

$$(XVIII) \quad P_k = \frac{1}{8\pi} (E_t \cdot H_z^*) = \frac{\rho}{8\pi} (G_t \cdot H_z^*)$$

wo die letzte Gleichung nur in Leitern gilt.

Die Gleichungen (X) und (XI) wurden für den Fall eines unendlich langen in einem homogenen äusseren Wechselfelde \mathfrak{H} befindlichen leitenden Zylinders von *Lamb*¹⁾ gelöst. Für den Fall eines hohlen leitenden Zylinders findet man eine Lösung bei *J. J. Thomson*²⁾. Allgemein behandelt wird eine von Wechselstrom durchflossene (durch einen Hohlzylinder ersetzte) unendlich lange Spule von *Sommerfeld*³⁾; auch nimmt er, auf einer Vorarbeit von *G. Picciati*⁴⁾ fussend, den Einfluss der Querschnittsform des Spulendrahtes und der Ganghöhe auf die Stromverdrängung zu ermitteln, in Angriff⁵⁾. Mit der gleichen Aufgabe beschäftigt sich *Coffin*⁶⁾, dessen Formeln später von *Esau*⁷⁾ korrigiert werden. Den genauen Ausdruck für den Selbstinduktionskoeffizienten einer endlich langen (durch ein unendlich dünnes Solenoid ersetzten) Spule gibt *Nagaoka*⁸⁾. Zwei schöne Untersuchungen über die Jouleschen Verluste in von Wechselstrom durchflossenen Spulen und Leitern veröffentlicht *S. Butterworth*⁹⁾.

Die meisten Untersuchungen über die eisenlosen Induktionsöfen schliessen sich in ihrem theoretischen Teile entweder den oben genannten Arbeiten an, oder benutzen einfache Erwägungen um zu Näherungsdarstellungen zu gelangen.

Die ersten Versuche, die induktive Heizung praktisch zu verwerten, gehen bis in das Jahr 1905 zurück (*Soc. Schneider, Creuzot* und *O. Zander*). Es beginnen dann folgende Versuche: *Härden* (1906), *Debuch* (1912), *Northrup* (1916), *Ribaud* (1920), *Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung* (1924). Mit dem Jahre 1925 werden die Versuche zahlreicher.

Eine Näherung für die Theorie der induktiven Heizung gibt *Ribaud*¹⁰⁾,

¹⁾ *H. Lamb*: Proc. Lond. Math. Soc. 15. (1884) S. 133

²⁾ *J. J. Thomson*: Recent Researches S. 324.

³⁾ *A. Sommerfeld*: Ann. d. Physik. Bd. 17. (1904) S. 673.

⁴⁾ *G. Picciati*: Nuovo Cimento B1. 5. (1904).

⁵⁾ *A. Sommerfeld*: Ann. d. Physik Bd. 24 (1907) S. 609.

⁶⁾ *Coffin*: Proc. Am. Acad. 41 (1906) S. 794.

⁷⁾ *Esau*: Ann. d. Physik Bd 34. (1911) S. 76.

⁸⁾ Siehe: *Rosa u. Grover*: Bull. of the bureau of Standards Bd. 8 (1912) S. 1-230
Nagaoka: Coll. Sci. Tokyo 27 (1909).

⁹⁾ *S. Butterworth*: Proc. Roy. Soc. Bd. 107 Ser. A. (1925) S. 693 — Phil. Trans. Bd. 222 Ser A (1922) S. 57.

¹⁰⁾ *M. G. Ribaud*: Techn. Mod. 15 (1923) S. 225. — J. d. Phys. et le Radium 4 (1923) S. 185 und S. 214. — 6. (1925) S. 295 — auch in *Lebeau*: Fours électriques et chimie (1924) S. 325.

durch einfache Erwägungen geleitet; auch hat er durch eingehende experimentelle Untersuchungen das allgemeine Verhalten der eisenlosen Induktionsöfen bestimmt. *Wever* und *Fischer*¹¹⁾ veröffentlichen eine Arbeit, in der die Ribaudschen Formeln diskutiert und die Lambsche Lösung für den Zylinder abgeleitet wird; es werden Näherungsdarstellungen gegeben und an Hand experimenteller Ergebnisse ihre Brauchbarkeit geprüft und auf ihre Einschränkungen hingewiesen. *Burch* und *Davis*¹²⁾ geben in einer ersten Untersuchung eine vollständige Theorie der „unendlich langen“ Öfen, ohne von der üblicheren Integration der Differentialgleichungen auszugehen, in einer zweiten, eine Korrektur die die endliche Länge berücksichtigen soll und veröffentlichen ein Buch in dem eine Vervollständigung und Erweiterung ihrer vorherigen Resultate in Bezug auf das schwierige Problem der Berücksichtigung der endlichen Länge des Ofens zu finden ist; auch wird die Querschnittsform des Spulenkupfers berücksichtigt auf die in ihrer ersten Arbeit nicht eingegangen worden war. *M. I. O. Strutt*¹³⁾ stellt in einer ersten Untersuchung die Theorie des „unendlich langen“ Ofens auf, indem er auf den Resultaten von *Lamb* und *Coffin* fusst, in einer zweiten gibt er ihre technischen Anwendungen (ohne den Einfluss der endlichen Länge zu berücksichtigen, was dort auch hervorgehoben wird).

Ich leite im ersten Abschnitt die Formeln für den „unendlich langen“ Ofen ab, im zweiten, dritten und vierten Abschnitt entwickle ich eine Theorie des kurzen Ofens, gebe im fünften einen Überblick über seine allgemeinen Eigenschaften und im letzten einen Vergleich der Rechnung mit dem Versuche.

¹¹⁾ *F. Wever u. W. Fischer*: *Mitteilg. a. d. Kaiser-Wilhelm-Inst. f. Eisenf.* Bd 8 (1926) S. 149.

¹²⁾ *C. R. Burch u. N. R. Davis*: *Phil. Mag.* (1926) S. 768 — *A. f. Elektrot.* Bd 20 (1928) S. 211 — und: *An Introduction to the Theory of Eddy-Current Heating* (1928)

¹³⁾ *M. I. O. Strutt*: *Ann. d. Phys.* Bd 82 (1927) S. 605. — *A. f. Elektrot* Bd 19 (1928) S. 424.

I. Kapitel.

Der unendlich lange Ofen.

Der Zweck dieses Kapitels ist, für ein die wesentlichen Züge eines Ofens wiedergebendes Modell die Differentialgleichung der elektromagnetischen Vorgänge zu integrieren und die Ausdrücke für die Jouleschen „Verluste“ in der Spule und im Schmelzgut sowie für ihre auf den Spulenstrom bezogenen Widerstände und Reaktanzen aufzustellen um sie zur Ermittlung einer Näherungslösung für den kurzen Ofen zu benützen.

Ich ersetze den Ofen durch einen gleich langen Teil eines Modells, das aus einem die Spule ersetzenden unendlich langen Hohlzylinder besteht und aus einem konaxialen Vollzylinder, — beide aus gleichem Material wie die Spule und der Kern; auch sollen sie die entsprechenden Durchmesser haben. Ich setze ferner voraus, dass die Spulenwindungen unendlich dicht aneinanderliegen und nehme an, dass im Hohlzylinder tangential eine von der Zeit nach einer einfachen harmonischer Funktion abhängige aufgedrückte elektromotorische Kraft wirkt, die der Windungsspannung der Spule gleich ist. Ich

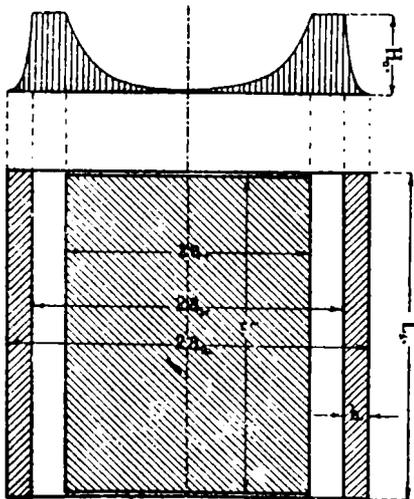


Fig. 1.
Magnetisches Feld im Ofenmodell.

erhalte ein Modell des Ofens, wie es die Fig. 1 wiedergibt, das das wesentlichste des Ofens enthält und löse für diese Bedingungen die entsprechenden Differentialgleichungen, um die oben erwähnten Grössen zu erhalten.

Lässt man die z -Achse eines Zylinderkoordinatensystems mit der Achse des Modells zusammenfallen, so hängen die Vorgänge aus Symmetriegründen von der z - und φ -Koordinate nicht ab, und die z - und φ -Komponente des magnetischen Feldes ist null. Die Differentialgleichung des magnetischen Feldes ist, in komplexer Form, für das Innere der Leiter durch (X) und für das Äussere durch (XI) gegeben:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - i \frac{4 \pi \mu \omega}{\rho} H_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$$

Schreibt man, zur Abkürzung:

$$(1) \quad \beta^2 = -i \frac{4 \pi \mu \omega}{\rho}$$

und streicht den Index z , da keine Missverständnisse entstehen können, so erhält man für die Leiter:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \beta^2 H = 0$$

und für das Dielektrikum;

$$(3) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = 0$$

Da das magnetische Feld bei quasistationären Vorgängen im Dielektrikum wirbelfrei ist, wird in diesem Falle ($H = H_z$; $H_r = 0$ $H_\varphi = 0$)

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 0$$

ausserhalb der Leiter und das Integral von (3) wird $H = \text{Const.}$

Da das Feld für $r = \infty$ verschwinden muss ($H = 0$), ist im Äusseren der Spule das Feld Null:

$$(4) \quad H = 0 \quad r > a_2$$

wo a_2 der Aussenhalbmesser der Spule ist.

Um den Wert der konstanten H für den Raum zwischen dem Schmelz-
gut und der Spule zu berechnen, sei der Strom in der Spule zu $I = \frac{\mathcal{J}}{\sqrt{2}}$
Einheiten angenommen. Ist w die Windungszahl pro cm, so ist der Strombe-
lag des Ersatzhohlzylinders (pro 1 cm Länge) gleich $wI = \frac{w \mathcal{J}}{\sqrt{2}}$ wo \mathcal{J} der
maximale Wert des Stromes ist. Ist also H_0 der Maximalwert des Feldes
für $a < r < a_1$ so wird: nach dem Gesetze des magnetischen Kreises:

$$(5) \quad H = H_0 = 4 \pi w \mathcal{J} \quad a < r < a_1$$

Damit ist das Feld im Dielektrikum in Funktion des Spulenstromes und
der Windungszahl pro cm Spulenlänge bestimmt und somit auch die Grenz-
bedingungen, denen die Lösungen von (2) für das Innere der Leiter genügen
sollen.

Die Gleichung (2) ist eine Differentialgleichung der Besselschen Art
und ihre allgemeine Lösung kann mit Hilfe der Hankelschen, oder der Zylin-

derfunktion dritter Art konstruiert werden. Es sei nämlich $J_0(x)$ die Zylinderfunktion erster Art und der Ordnung Null, $Y_0(x)$ diejenige zweiter Art; dann sind die erste und zweite Hankelsche Funktion nullter Ordnung gegeben durch die Beziehungen:¹⁾

$$(6) \quad H_0^1(x) = J_0(x) + i Y_0(x) \quad ; \quad H_0^2(x) = J_0(x) - i Y_0(x)$$

und die allgemeine Lösung der Gleichung (2) ist:

$$(7) \quad H = A_1 H_0^1(\beta r) + A_2 H_0^2(\beta r)$$

wo A_1 und A_2 noch zu bestimmende Integrationskonstanten sind und deren Wert nun für das „Schmelzgut“ und die „Spule“ ermittelt werden soll.

A. Das Schmelzgut. Die Konstanten A_1 und A_2 sollen so bestimmt werden, dass die für den Kern gültigen Grenzbedingungen erfüllt werden,

$$\text{für} \quad r = a: \quad H = H_0$$

und

$$\text{für} \quad r = 0: \quad \frac{\partial H}{\partial r} = 0$$

wo H_0 der in (5) gegebene Wert ist, und die zweite Bedingung wegen Symmetriegründen gilt. Statt (7) kann man mit (6) schreiben:

$$H = (A_1 + A_2) J_0(\beta r) + i(A_1 - A_2) Y_0(\beta r)$$

Leitet man nach r ab, und bemerkt dass gilt:

$$\lim_{r=0} \frac{\partial Y_0(\beta r)}{\partial r} \neq 0$$

so folgt:

$$A_1 = A_2$$

und wenn ihr gemeinsamer Wert mit $\frac{1}{2} A$ bezeichnet wird, wird die Lösung:

$$H = A J_0(\beta r)$$

die noch die erste Grenzbedingung erfüllen soll:

$$H = H_0 = A J_0(\beta a)$$

also:

$$A = \frac{H_0}{J_0(\beta a)}$$

und das magnetische Feld verteilt sich räumlich nach der Funktion:

$$(8) \quad H = H_0 \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)}$$

Man könnte nun für die Leitungsstromdichte G eine Differentialgleichung aufstellen um durch deren Lösung zu einem Ausdruck für G zu ge-

¹⁾ *Jahnke-Ende*: Funktionentafeln. S. 94 u. S. 166.

langen. Einfacher ist es, die Stromdichte mit Gl. (XVII) aus (8) zu berechnen :
Es ist nämlich :¹⁾

$$\frac{\partial J_0(\beta r)}{\partial r} = -\beta J_1(\beta r)$$

wo $J_1(\beta r)$ die Besselsche Funktion der Ordnung eins ist, und nach (XVII):

$$G = \frac{-1}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\beta H_0}{4\pi} \cdot \frac{J_1(\beta r)}{J_0(\beta a)}$$

Es soll nun der in (XVIII) definierte Poyntingsche Vektor berechnet werden :

$$P_k = \frac{\rho}{8\pi} (GH^*) = + \frac{\rho}{8\pi} \frac{\beta H_0^2}{4\pi} \left(\frac{J_1(\beta r) J_0^*(\beta r)}{J_0(\beta a) J_0^*(\beta a)} \right)$$

Schreibt man :

$$(9) \quad \beta = \sqrt{-i\alpha^2} = \alpha \sqrt{-i}, \quad \text{also:} \quad \alpha^2 = \frac{4\pi\mu\omega}{\rho}$$

so bestehen folgende Beziehungen :²⁾

$$J_0(\beta r) = J_0(\alpha \sqrt{-i} \cdot r) = \text{ber } \alpha r + i \text{bei } \alpha r$$

wo $\text{ber } \alpha r$ und $\text{bei } \alpha r$ den reellen und imaginären Teil von $J_0(\alpha \sqrt{-i} r)$ darstellen. Durch Ableitung nach r erhält man :

$$-\beta J_1(\beta r) = +\alpha \{ -\sqrt{-i} J_1(\alpha \sqrt{-i} r) \} = \alpha \{ \text{ber}' \alpha r + i \text{bei}' \alpha r \}$$

wo der Strich die Ableitung nach r bezeichnet.

Die zu $J_0(\beta r)$ konjugiert komplexe Funktion: $J_0^*(\beta r)$ ist :

$$J_0^*(\beta r) = J_0^*(\alpha \sqrt{-i} r) = \text{ber } \alpha r - i \text{bei } \alpha r$$

Führt man diese Beziehungen in den Ausdruck des komplexen Poyntingschen Vektors ein, so erhält man, nach Ausführung der Multiplikation :

$$(10) \quad (-P_k) = \frac{\rho H_0^2}{32\pi^2} \alpha \cdot \frac{\text{ber } \alpha r \text{ber}' \alpha r + \text{bei } \alpha r \text{bei}' \alpha r}{\text{ber}^2 \alpha r + \text{bei}^2 \alpha r} + \\ + i \frac{\rho H_0^2}{32\pi^2} \alpha \cdot \frac{\text{ber } \alpha r \text{bei}' \alpha r - \text{bei } \alpha r \text{ber}' \alpha r}{\text{ber}^2 \alpha r + \text{bei}^2 \alpha r}$$

Das ist die r -Komponente des komplexen Poyntingschen Vektors und ihr über die Oberfläche des Schmelzgutes von der Länge L erstrecktes Integral wird :

$$-2\pi a L P_k. \quad (r = a)$$

Die im Schmelzgut in Wärme verwandelte Leistung ist, nach (XIII) gleich dem reellen Teil dieses Ausdruckes, also :

$$(11) \quad Q_{\text{w}} = \pi L \rho \frac{H_0^2}{16\pi^2} (\alpha a) \frac{\text{ber } \alpha a \text{ber}' \alpha a + \text{bei } \alpha a \text{bei}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a}$$

¹⁾ Janke-Emde : Funktionentafeln S. 165.

²⁾ Janke-Emde : Funktionentafeln S. 144.

und die mittlere schwankende magnetische Leistung berechnet sich nach (XIII) aus der Gleichung :

$$(12) \quad 2 \omega Q_m = \pi L \varrho \frac{H_0^2}{16 \pi^2} (\alpha a) \frac{\text{ber } \alpha a \text{ bei}' \alpha a - \text{bei } \alpha a \text{ ber}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a}$$

Wäre das Schmelzgut stromlos, so hätte die mittlere magnetische Leistung $2 \omega Q'_m$ aus der folgenden Gleichung ermittelt werden müssen :

$$(12') \quad 2 \omega Q'_m = \pi a^2 L \frac{\mu H_0^2}{2.8 \pi} \cdot 2 \omega = 4 \pi^2 a^2 L \omega \frac{H_0^2}{32 \pi^2} \mu$$

und die Änderung der mittleren magnetischen Leistung wegen des Schmelzgutes kann aus der folgenden Beziehung berechnet werden :

$$(13) \quad 2 \omega Q_{m \text{ zu}} = 2 \omega (Q'_m - Q_m) = \\ = \mu 4 \pi^2 a^2 L \omega \left\{ \frac{H_0^2}{32 \pi^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{2}{\alpha a} \cdot \frac{\text{ber } \alpha a \text{ bei}' \alpha a - \text{bei } \alpha a \text{ ber}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a} \right\}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5), (XIV), (XV) und (XVI) kann man aus (11) und (13) den Widerstand und die „Selbstinduktion“ des Schmelzgutes, bezogen auf den Spulenstrom berechnen, wie es weiter unten geschehen wird.

B. Die Spule: Da die Spule im allgemeinen ein anderes ϱ und μ als das Schmelzgut hat, die mit ϱ_1 und $\mu_1 = 1$ bezeichnet werden sollen, sei, um nicht zu Verwechslungen zu kommen :

$$(14) \quad \delta^2 = -i \frac{4 \pi \mu_1 \omega}{\varrho_1}; \quad \delta = \gamma \sqrt{-i} \sqrt{2}; \quad \gamma^2 = \frac{2 \pi \mu_1 \omega}{\varrho_1} \quad \text{mit } \mu_1 = 1$$

gesetzt. Die Gleichung (7) nimmt für die Spule folgende Form an :

$$H = A_1 H_0^1(\delta r) + A_2 H_0^2(\delta r)$$

wo A_1 und A_2 so zu bestimmen sind, dass die Bedingungen (4) und (5) erfüllt sein sollen :

$$H = H_0 \quad \text{für } r = a_1;$$

$$H = 0 \quad \text{für } r = a_2$$

also :

$$A_1 H_0^1(\delta a_1) + A_2 H_0^2(\delta a_1) = H_0$$

$$A_1 H_0^1(\delta a_2) + A_2 H_0^2(\delta a_2) = 0$$

Daraus folgen für die Konstanten A_1 und A_2 folgende Werte :

$$A_1 = H_0 \frac{H_0^2(\delta a_2)}{N} \quad A_2 = H_0 \frac{H_0^1(\delta a_2)}{N}$$

wo :

$$N = H_0^1(\delta a_1) H_0^2(\delta a_2) - H_0^1(\delta a_2) H_0^2(\delta a_1)$$

und die Lösung wird:

$$(15) \quad H = H_0 \frac{H_0^2(\delta a_2) H_0^1(\delta r) - H_0^1(\delta a_2) H_0^2(\delta r)}{H_0^1(\delta a_1) H_0^2(\delta a_2) - H_0^1(\delta a_2) H_0^2(\delta a_1)}$$

Nach (XVII) ist die Stromdichte:

$$(16) \quad G = \frac{-1}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{-H_0}{4\pi} \frac{H_0^2(\delta a_2) H_0^1(\delta r) - H_0^1(\delta a_2) H_0^2(\delta r)}{H_0^1(\delta a_1) H_0^2(\delta a_2) - H_0^1(\delta a_2) H_0^2(\delta a_1)}$$

In den praktisch vorkommenden Fällen eines Innendurchmessers von mindestens einigen Zentimetern und einer Frequenz von mindestens 50 Per/sec sind die Argumente der in (15) und (16) vorkommenden Funktionen so gross, dass man ihre Darstellungen für grosses Argument benutzen kann. Berücksichtigt man die ersten zwei Glieder aus ihren halbkonvergenten Reihen, so erhält man bei komplexem Argument:³⁾

$$(17) \quad \begin{cases} H_0^1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \left(1 - \frac{i}{8x}\right); \\ H_0^2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4})} \left(1 + \frac{i}{8x}\right) \end{cases}$$

und:

$$(18) \quad \begin{cases} H_1^1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{3\pi}{4})} \left(1 + \frac{3i}{8x}\right); \\ H_1^2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{3\pi}{4})} \left(1 - \frac{3i}{8x}\right) \end{cases}$$

Führt man diese Werte in (15) ein, und schreibt in den Klammern, die in den Näherungsausdrücken für $H_0^1(x)$ und $H_0^2(x)$ vorkommen, überall a_1 statt: a_1, r oder a_2 (da a_1 und a_2 nicht viel von einander abweichen) so wird:

$$(19) \quad H = H_0 \sqrt{\frac{a_1}{r}} \frac{e^{-i\delta(a_2-r)} - e^{i\delta(a_2-r)}}{e^{-i\delta(a_2-a_1)} - e^{i\delta(a_2-a_1)}}$$

Führt man nun (17) und (18) in (16) ein, schreibt in den Klammern der Näherungsdarstellungen überall a_1 statt: a_1, a_2 und r , berücksichtigt man ferner nicht die Glieder mit dem Faktor $\frac{1}{(\delta a_1)^2}$ und schreibt also im Zähler (nach Einsetzen von a_1 für a_2 und r):

$$\left(1 + \frac{i}{8\delta a_2}\right) \left(1 + \frac{3i}{8\delta r}\right) \cong \left(1 + \frac{4i}{8\delta a_1}\right); \quad \left(1 - \frac{i}{8\delta a_2}\right) \left(1 - \frac{3i}{8\delta r}\right) \cong \left(1 - \frac{4i}{8\delta a_1}\right)$$

so erhält man folgenden Ausdruck für die Stromdichte, wenn man beachtet, dass die Beziehungen:

³⁾ Jahnke-Emde: Funktionentafeln S. 100.

$$H_0^1(\delta r) = -\delta H_1^1(\delta r); \quad H_0^2(\delta r) = -\delta H_1^2(\delta r)$$

bestehen :

$$(20) \quad G = -\sqrt{\frac{a_1}{r}} \frac{i \delta H_0}{4 \pi} \frac{e^{-i \delta (a_2 - r)} \left(1 + \frac{4i}{8 \delta a_1}\right) + e^{i \delta (a_2 - r)} \left(1 - \frac{4i}{8 \delta a_1}\right)}{e^{-i \delta (a_2 - a_1)} - e^{i \delta (a_2 - a_1)}} =$$

$$= -\frac{i \delta H_0}{4 \pi} \left(\frac{e^{-i \delta (a_2 - r)} + e^{i \delta (a_2 - r)}}{e^{-i \delta (a_2 - a_1)} - e^{i \delta (a_2 - a_1)}} + \frac{i}{2 \delta a_1} \frac{e^{-i \delta (a_2 - r)} - e^{i \delta (a_2 - r)}}{e^{-i \delta (a_2 - a_1)} - e^{i \delta (a_2 - a_1)}} \right) \sqrt{\frac{a_1}{r}}$$

Man erhält also für den in (XVIII) definierten Poyntingschen Vektor, bei $r = a_1$, also für $H = H_0$ und mit: $a_2 - a_1 = b$:

$$(21) \quad P_k = \frac{\varrho_1}{8 \pi} G H^* = \frac{\varrho_1 H_0}{8 \pi} G =$$

$$= -\frac{\varrho_1 H_0^2}{32 \pi^2} i \delta \left(\frac{(e^{-i \delta b} + e^{i \delta b})(e^{-i \delta b} - e^{i \delta b})^*}{(e^{-i \delta b} - e^{i \delta b})(e^{-i \delta b} - e^{i \delta b})^*} + \frac{i}{2 \delta a_1} \right)$$

Beachtet man noch (14) und also die Gleichungen:

$$e^{-i \delta b} + e^{i \delta b} = 2 (\cos \gamma b \cos \gamma b + i \sin \gamma b \sin \gamma b)$$

$$e^{-i \delta b} - e^{i \delta b} = -2 (\sin \gamma b \cos \gamma b + i \cos \gamma b \sin \gamma b)$$

$$(e^{-i \delta b} - e^{i \delta b})^* = -2 (\sin \gamma b \cos \gamma b - i \cos \gamma b \sin \gamma b)$$

so erhält man für P_k folgenden Ausdruck:

$$P_k = \frac{\varrho_1 H_0^2}{32 \pi^2} \gamma (1 + i) \times$$

$$\times \left(\frac{(\cos \gamma b \cos \gamma b + i \sin \gamma b \sin \gamma b)(\sin \gamma b \cos \gamma b - i \cos \gamma b \sin \gamma b)}{(\sin \gamma b \cos \gamma b + i \cos \gamma b \sin \gamma b)(\sin \gamma b \cos \gamma b - i \cos \gamma b \sin \gamma b)} - \frac{i}{(1 - i) \gamma a_1} \right)$$

Nach Ausmultiplizieren und Zerlegen in den reellen und imaginären Teil wird:

$$(22) \quad P_k = \frac{\varrho_1 H_0^2}{32 \pi^2} \gamma \left[\left(\frac{\sin 2 \gamma b + \sin 2 \gamma b}{\cos 2 \gamma b - \cos 2 \gamma b} + \frac{1}{\gamma a_1} \right) + i \left(\frac{\sin 2 \gamma b - \sin 2 \gamma b}{\cos 2 \gamma b - \cos 2 \gamma b} \right) \right]$$

Wird dieser Ausdruck mit $2 \pi a_1 L_1$ multipliziert, so stellt, nach (XIII) sein reeller Teil die Joulesche Leistung in der Spule dar:

$$(23) \quad Q_{su} = 2 \pi L_1 \varrho_1 \left(\frac{H_0^2}{32 \pi^2} \right) (\gamma a_1) \left(\frac{\sin 2 \gamma b + \sin 2 \gamma b}{\cos 2 \gamma b - \cos 2 \gamma b} + \frac{1}{\gamma a_1} \right)$$

und sein imaginärer Teil die mit 2ω multiplizierte magnetische Energie. Rechnet man dazu noch die Leistung im äusseren Felde, wenn die Spule leer wäre, also:

$$2 \omega Q'_{msu} = \pi a_1^2 L_1 \frac{H_0^2}{2 \times 8 \pi} 2 \omega = 4 \pi^2 a_1^2 L_1 \omega \frac{H_0^2}{32 \pi^2}$$

so erhält man die gesamte magnetische Leistung der leeren Spule:

$$(24) \quad 2 \omega Q_{msu} = 2 \omega (Q'_{msu} + Q_m) = \\ = 4 \pi^2 a_1^2 L_1 \left(\frac{H_0^2}{32 \pi^2} \right) \omega \left[1 + \frac{1}{\gamma a_1} \frac{\sin 2 \gamma b - \sin 2 \gamma b}{\cos 2 \gamma b - \cos 2 \gamma b} \right]$$

Aus den Gleichungen (5), (23) und (24) kann man nun mit Hilfe von (XIV), (XV) die Reaktanz und den Widerstand der Spule, bezogen auf den Strom I berechnen. Die Rechnung würde die Grössen R und X bei leerer Spule ergeben. Ist noch das Schmelzgut in der Spule, so kann zuerst die Frage aufgeworfen werden, ob die Kernströme nicht auf die räumliche Verteilung der Spulenströme einen Einfluss haben und die aufgestellten Gleichungen für R und X verändern. Diese Frage kann wie folgt beantwortet werden: Bei unendlich langem Schmelzgut und Spule haben die Kernströme einen Einfluss nur auf die Grösse des von der Spule unter einer gewissen Spannung aufgenommenen Stromes. (Im Falle einer endlichen Länge gilt das aber nicht mehr genau). Die oben aufgestellten Gleichungen können also beibehalten werden, nur braucht man die dem Schmelzgut zugeführte Leistung zu berücksichtigen.

Die dem Ofen zugeführte Leistung ist durch den Ausdruck: $E_k I$ gegeben, wenn E_k die (komplex geschriebene) ~~Klemmenspannung~~ ~~der Spule~~ ist. Sie ist gleich der Jouleschen Leistung des Ofens: $Q_{zu} + Q_{su}$ plus der mit i multiplizierten schwankenden magnetischen Leistung, die die Spule hätte, wenn sie leer wäre, minus der mit i multiplizierten Leistung um die das Schmelzgut nach (13) die magnetische Leistung der Spule, wegen der Schwächung des Spulenfeldes vermindert, also:*)

$$(25) \quad E_k I = Q_{zu} + Q_{su} + i 2 \omega (Q_{msu} - Q_{msu})$$

Setzt man nun:

$$E_k = (R_{0u} + i \omega L_{0u}) I = (R_{0u} + i X_{0u}) I$$

so wird:

$$(26) \quad R_{0u} + i X_{0u} = \frac{Q_{zu} + Q_{su}}{I^2} + i \frac{2 \omega (Q_{msu} - Q_{msu})}{I^2}$$

Nennt man R_{zu} , X_{zu} , R_{su} , X_{su} die „Widerstände“ und „Reaktanzen“ des Kerns und der Spule bei unendlicher Länge des Ofens (daher der Index u) bezogen auf den Spulenstrom I und die Länge $L = L_1$, und definiert sie durch die Gleichungen:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{zu} = \frac{Q_{zu}}{I^2}; \quad X_{zu} = \frac{2 \omega Q_{msu}}{I^2}; \\ R_{su} = \frac{Q_{su}}{I^2}; \quad X_{su} = \frac{2 \omega Q_{msu}}{I^2} \end{array} \right.$$

so wird:

*) Der Index u soll bedeuten, dass sich die Formeln auf den unendlich langen Ofen beziehen.

$$(28) \quad R_{0u} = R_{su} + R_{zu}; \quad X_{0u} = X_{su} - X_{zu}$$

wo nach (5), also:

$$\frac{H_0^2}{32\pi^2} = \frac{1}{2} (w \mathcal{J})^2 = (w I)^2$$

und nach (11), (13), (23) und (24) folgende Formeln gelten:⁵⁾

$$(29) \quad R_{su} = 2\pi L \rho w^2 \alpha a \frac{\text{ber } \alpha a \text{ ber}' \alpha a + \text{bei } \alpha a \text{ bei}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a}$$

$$(30) \quad R_{zu} = 2\pi L_1 \rho_1 w^2 (\gamma a_1) \left\{ \frac{\text{Sin } 2\gamma b + \sin 2\gamma b}{\text{Cos } 2\gamma b - \cos 2\gamma b} + \frac{1}{\gamma a_1} \right\}$$

$$(31) \quad X_{zu} = 4\pi^2 a^2 L w^2 \omega u \left\{ 1 - \frac{2}{\alpha a} \frac{\text{ber } \alpha a \text{ bei}' \alpha a - \text{bei } \alpha a \text{ ber}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a} \right\}$$

$$(32) \quad X_{su} = 4\pi^2 a_1^2 L_1 w^2 \omega \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma a_1} \frac{\text{Sin } 2\gamma b - \sin 2\gamma b}{\text{Cos } 2\gamma b - \cos 2\gamma b} \right\}$$

Mit Hilfe der Formeln (25) — (32) kann man das elektrische Verhalten des Ofens in jeder Hinsicht bestimmen.

Es ist z. B. die Impedanz des Ofens:

$$(33) \quad Z_{0u} = +\sqrt{R_{0u}^2 + X_{0u}^2}$$

der Leistungsfaktor:

$$(34) \quad \cos \varphi = \frac{R_{0u}}{Z_{0u}} = \frac{R_{0u}}{\sqrt{R_{0u}^2 + X_{0u}^2}}$$

und der elektrische Wirkungsgrad des Ofens:

$$(35) \quad \eta_e = \frac{Q_{zu}}{Q_{zu} + Q_{su}} = \frac{R_{zu}}{R_{zu} + R_{su}} = \frac{1}{1 + \frac{R_{su}}{R_{zu}}}$$

Für die Theorie der Induktionsöfen ist nun der Fall ausgeprägter Hautwirkung, d. h. grossen Argumentes in (29) von Bedeutung. Die Funktion von (αa) , die in dieser Formel auftritt, wächst mit (αa) und strebt dem Grenzwerte

$$\frac{\alpha a}{\sqrt{2}}$$

zu, so dass der Ausdruck (29) für grosses (αa) kürzer geschrieben werden kann:

$$(29') \quad R_{su} = 2\pi L \rho w^2 \frac{\alpha a}{\sqrt{2}}$$

⁵⁾ Ich wähle diese Definition für X_{su} , um einen positiven Wert zu erhalten:

Man ersieht aus (35) dass R_{zu} gross sein muss, um einen guten Wirkungsgrad zu erreichen. Bei $R_{zu} = R_{su}$ ist der elektrische Wirkungsgrad $\eta_e = 50\%$.

Es ist wichtig sich von der relativen Grösse nicht nur der Widerstände, sondern auch der Reaktanzen des Kerns und der Spule Rechenschaft zu geben. Da der Wirkungsgrad η_e nur dann über 50% steigt, wenn der Schmelzgutwiderstand den Spulenwiderstand übertrifft, gibt ein relativ geringer Fehler beim Berechnen des Kernwiderstandes einen bemerkbaren Fehler in dem Ausdrucke des Wirkungsgrades. Die Reaktanz des Schmelzgutes ist aber im allgemeinen klein, verglichen mit der Spulenreaktanz, und wird in ungünstigen Fällen etwa ein Drittel der letzten betragen. Ein Fehler von derselben Grössenordnung wie bei dem Kernwiderstande wird sich also weit weniger auswirken. Soweit er auftritt, hat er auf den Leistungsfaktor Einfluss. Eine Näherungslösung soll folglich einen möglichst genauen Ausdruck für den Schmelzgutwiderstand aufstellen, da die Schmelzgutreaktanz die Vorgänge in dem Ofen weniger als der Widerstand beeinflusst.

Bei stark ausgeprägter Hautwirkung nimmt die Stromdichte und das magnetische Feld rasch ab, wenn man von der Oberfläche des Kerns gegen die Achse schreitet. Diese Grössen konzentrieren sich hauptsächlich in einer dünnen Oberflächenschicht und es kann die Frage aufgeworfen werden, wie weit sie in das Innere des Schmelzgutes eindringen, d. h. wie dick eine die Oberflächenstromdichte führende „Haut“ sein müsste, um die gleiche Joulesche Wärme zu entwickeln wie der Kern. Ist ε die Dicke, so ist der Widerstand bei w Windungen pro cm, d. h. $\frac{1}{w}$ cm Windungshöhe:

$$R = \rho 2 \pi a (wL) \frac{1}{\frac{1}{w} \varepsilon} = 2 \pi a L w^2 \rho \frac{1}{\varepsilon}$$

Ein Vergleich mit (29') ergibt:

$$(36) \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$$

Das ist die Eindringtiefe des Stromes und man kann sagen, dass diese Oberflächenschicht der Stromdichte praktisch die tiefer liegenden Teile des Schmelzgutes gegen die Einwirkung des von der Spule erzeugten magnetischen Feldes schützt.

Bei dem wirklichen Ofen ist noch der „Kupferfüllfaktor“ in Betracht zu nehmen, d. h. der Quotient der von dem Kupfer der Spulenwindungen eingenommenen, zu der ganzen Länge der Spule. Er sei mit k_c bezeichnet. Man kann ihn folgendermassen berücksichtigen:

Die totale „Kupferlänge“ der Spule ist $k_c L_1$, wenn L_1 die Länge der Spule ist. Um von den durch die Abstände der Windungen bedingten Unregelmässigkeiten frei zu werden, ersetze man das Spulenkupfer durch einen Hohlzylinder von der Länge L_1 und der gleichen Dicke wie die Spulenwin-

dungen. Wäre dieser Hohlzylinder aus Kupfer, d. h. hätte er den gleichen spezifischen Widerstand wie die Spule, so würde, bei gleicher Windungsspannung, der Strombelag im Hohlzylinder $\frac{1}{k_c}$ mal grösser als in der Spule sein. Daher soll der spezifische Widerstand ϱ'_1 des Hohlzylinders $\frac{1}{k_c}$ mal grösser sein als derjenige der Spule: ϱ_1 . Der Einfluss des Kupferfüllfaktors wird also berücksichtigt, wenn man in den Gleichungen dieses Kapitels:

$$\delta^2 = -i \frac{4 \pi \mu_1 \omega}{\varrho_1} ; \quad \gamma^2 = \frac{2 \pi \mu_1 \omega}{\varrho_1} \quad \text{und } \varrho_1$$

ersetzt durch:

$$(37) \quad \delta^2 = -i \frac{k_c 4 \pi \mu_1 \omega}{\varrho_1} ; \quad \gamma^2 = k_c \frac{2 \pi \mu_1 \omega}{\varrho_1} \quad \text{und } \frac{\varrho_1}{k_c}$$

Dann gelten z. B. die Gleichungen (30) und (32) mit dem Wert (37) für γ . Man kann übrigens das Ersetzen von ϱ_1 durch $\varrho'_1 = \frac{\varrho_1}{k_c}$ auch dadurch begründen, dass man das Differentialgesetz des magnetischen Kreises aus der Integralform ableitet, in der der Weg der Kraftlinien $\frac{1}{k_c}$ mal länger ist als die von der Stromdichte eingenommene Strecke. Dadurch kommt der Kupferfüllfaktor in die Differentialgleichung, genau so, als ob man mit dem spezifischen Widerstande $\varrho'_1 = \frac{\varrho_1}{k_c}$ und mit dem Kupferfüllfaktor eins rechnen würde. Dieser zweite Weg ist in der Theorie der zusätzlichen Verluste in dem Nutenkupfer der Wechselstrommaschinen üblich.

II. Kapitel.

Die Impedanz des kurzen Schmelzgutes im homogenen magnetischen Wechselfelde.

A) Methode zur Behandlung hochfrequenter Ströme.

Lord Kelvin¹⁾ hat eine Methode zur Behandlung von Wechselstromaufgaben bei sehr hoher Frequenz angedeutet, die ich für meinen Zweck ausarbeiten werde.

In erster Linie ist es wichtig sich ein Bild über den Verlauf der magnetischen Kraftlinien zu machen. Um die Verhältnisse im Schmelzgut zu überblicken kann man die Spule durch einen Hohlzylinder mit konstantem Strombelag ersetzen und diesen als unendlich lang ansehen. Es wird dann noch eine Korrektur wegen der endlichen Länge der Spule nötig sein. Das Schmelzgut kann also in diesem Kapitel als in einem homogenen, zur z -Achse parallelen, magnetischen Wechselfelde einer unendlich langen Spule befindlich angesehen werden.

Es gelten im Schmelzgut die Gleichungen (VIII'). Bemerket man, dass in den Gleichungen (VIII'):

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} - i \frac{4 \pi \mu \omega}{\varrho} H_r = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - i \frac{4 \pi \mu \omega}{\varrho} H_z = 0$$

die Grössen ω und ϱ nur durch ihren Quotienten $\frac{\omega}{\varrho}$ auftreten, so kann man schliessen, dass die Lösungen H_r und H_z von ω und ϱ nur durch ihren Quotienten $\frac{\omega}{\varrho}$ abhängen. Man kann daraus den Schluss ziehen, dass eine sehr hohe Frequenz für die Vorgänge gleichbedeutend ist mit einem sehr hohen Leitwerte, soweit es auf die Grösse der elektromagnetischen Feldgrössen ankommt — und dass in dieser Beziehung eine „unendlich“ hohe Frequenz einem „vollkommenen“ Leiter gleich kommt. Da in diesem Falle das elek-

¹⁾ Lord Kelvin: Math. and. Phys. Papers Bd V. S. 489.

trische — und, wegen der Maxwell'schen Gleichungen auch das magnetische — Feld null ist im Inneren des Leiters, folgt dass der Strom nur ein „Oberflächenstrom“ sein kann, da die magnetische Feldstärke nur einen Flächenwirbel an der Oberfläche des Schmelzgutes hat. Da die Normalkomponente der Induktion jede Fläche stetig durchsetzt und im Inneren des Kerns verschwindet, ist sie — und folglich auch die Normalkomponente des magnetischen Feldes — null auf der Oberfläche des Kerns.*)

Die magnetische Feldstärke verläuft also tangential zur Oberfläche eines Leiters, der sich in einem mit sehr hoher (theoretisch mit unendlicher) Frequenz schwingenden magnetischen Felde befindet. Da ferner im Dielektrikum, bei quasistationärer Behandlung, die Gleichung :

$$\nabla^2 \mathfrak{H} = 0$$

gilt, ist das Feld wirbelfrei, es lässt ein Potential zu und man kann es bestimmen aus dieser Bedingung, der Grenzbedingung an der Oberfläche des Kerns und im unendlichen längs der z-Achse, wo es parallel zu Oz und gleich $H_0 e^{i\omega t}$ ist. Durch diese Methode ist das Problem der Magnetfeldverteilung längs der Oberfläche des Schmelzgutes bei sehr hoher Frequenz zurückgeführt auf die Ermittlung eines divergenzlosen Potentialfeldes. Der Vorteil der Methode ist nun, dass das potentialtheoretische Problem einfacher gelöst werden kann als die Integration der Maxwell'schen Differentialgleichungen.

Es sei bemerkt, dass in diesem Falle der „sehr hohen“ Frequenz die Kenntnis der Verteilung des magnetischen Feldes längs der Kernoberfläche wichtige Angaben über den komplexen Poyntingschen Vektor zu machen gestattet, und dieser ist für die Joulesche und die mittlere magnetische Leistung im Leiter massgebend. Wendet man nämlich das Gesetz des magnetischen Kreises :

$$\text{rot } \mathfrak{H} = 4 \pi \mathfrak{G}$$

auf die Flächenstromdichte \mathfrak{g} an der Kernoberfläche an, und verwendet den bekannten Ausdruck des „Flächenrotors“, so wird :

$$(37') \quad g_t = \frac{1}{4 \pi} H_r'$$

wo g_t und H_r' in der Oberfläche liegen und senkrecht auf einander sind.

Man kann damit den Wert des Poyntingschen Vektors noch nicht angeben, da sich der spezifische Widerstand des Leiters ρ auf räumliche Stromverteilung bezieht, während g_t eine Flächenstromdichte ist. Man kann ihn bis auf einen Faktor angeben, denn, für eine gegebene Frequenz wird er proportional dem Vektorprodukte aus \mathfrak{g} und \mathfrak{H} sein, also :

$$(38) \quad P_n = \rho' g_t H_r' = \rho H_r'^2$$

oder in Worten: Der Poyntingsche Vektor ist, für eine gegebene hohe

*) Wegen der quasistationären Behandlung gilt das nur näherungsweise.

Frequenz, auf der Kernoberfläche, proportional dem Quadrate der tangentialen Komponente des magnetischen Feldes.

Da die Joulesche und magnetische Leistung durch das Oberflächenintegral des komplexen Poyntingschen Vektors gegeben sind, und da man die komplexe Grösse p :

$$(39) \quad p = p_r + i p_i$$

schreiben kann, folgt: Bei „unendlich“ hoher Frequenz ist die mittlere Joulesche und magnetische Leistung proportional dem Integrale des Quadrates der Tangentialkomponente des magnetischen Feldes über die Leiteroberfläche:

$$(40) \quad Q = p_r \int H_{\mu}^2 dF; \quad 2 \omega Q_m = p_i \int H_{\mu}^2 dF.$$

Der Satz kann auch für hohe Frequenzen als gültig angesehen werden, da die Vorgänge denen bei „unendlich“ hoher Frequenz sehr nahe liegen. Das gibt ein Mittel ab die noch unbestimmt gebliebenen Faktoren p_r und p_i zu berechnen. Man wendet nur die gleiche Methode für sehr hohe Frequenzen auf einen unendlich langen Zylinder an, und erhält, da längs seiner Oberfläche $H_{\mu} = H_0$ ist:

$$(40') \quad Q_{zu} = p_r \cdot 2 \pi a L H_0^2 \quad 2 \omega Q_{mzu} = p_i \cdot 2 \pi a L H_0^2$$

Ein Vergleich mit (11) und (12) ergibt, wenn man für die Funktionen von (αa) ihre Näherungsdarstellungen für grosses Argument: $\frac{(\alpha a)}{\sqrt{2}}$ benützt:

$$(41) \quad p_r = p_i = \frac{\rho}{32 \pi^2} \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

Will man diese Methode der Näherungslösung auch dann anwenden, wenn die Näherungsdarstellung der (αa) - Funktionen durch den Wert $\frac{\alpha a}{\sqrt{2}}$ nicht genau genug ist, so hat man, durch Vergleich mit den Beziehungen (11) und (12):

$$(42) \quad p_r = \frac{\rho}{32 \pi^2} \alpha \frac{\text{ber } \alpha a \text{ ber}' \alpha a + \text{bei } \alpha a \text{ bei}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a}$$

und:

$$(43) \quad p_i = \frac{\rho}{32 \pi^2} \alpha \frac{\text{ber } \alpha a \text{ bei}' \alpha a - \text{bei } \alpha a \text{ ber}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a}$$

In diesem Falle sind aber die Betrachtungen nicht mehr streng richtig und das erklärt auch die in (42) und (43) vorhandene Abhängigkeit der Grössen p_r und p_i von der Form des Leiters ($a =$ Halbmesser des Zylinders) die in (41) nicht vorhanden ist, da jene als unabhängig von der Leiterform gültig angesehen werden muss.

In einer etwas anderen Ausdrucksweise kann man sagen, dass der Quotient der Jouleschen oder magnetischen Leistung im kurzen Schmelzgut

durch die entsprechende Joulesche oder magnetische Leistung eines gleichlangen Teils aus einem unendlich langen Zylinder gleichen Halbmessers gegeben ist durch den Bruch :

$$(43') \quad k_f = \frac{Q_{s e}}{Q_{z u}} = \frac{Q_{i m s e}}{Q_{i m s u}} = \frac{1}{2 \pi a L H_0^2} \int H_{f'}^2 dF$$

wo das Integral über die ganze Oberfläche des kurzen Kerns erstreckt ist. Ich nenne k_f den *Formfaktor* des Schmelzgutes und Schreibe :

$$45) \quad Q_{s e} = k_f Q_{z u} ; \quad 2 \omega Q_{i m s e} = k_f 2 \omega \cdot Q_{i m s u}$$

Damit sind die Formeln gewonnen, die das Problem des kurzen Kerns lösen, wenn das zugehörige potentialtheoretische Problem bekannt ist. (Die Indizes e und u weisen auf die endliche oder unendliche Länge hin).

Das Schmelzgut hat scharfe Kanten, an denen im Grenzfall unendlich hoher Frequenz, d. h. verschwindenden Innenfeldes, die Feldstärke unendlich wird. Doch beeinflusst dieser Umstand den Formfaktor nicht wesentlich, wenn die Frequenz einigermaßen hoch und die Hautwirkung ausgeprägt ist, denn die unendliche Feldstärke herrscht nur an den Kanten. Man könnte der Meinung sein, folgendermassen genauere Resultate zu erhalten :

Man wendet die Vorstellung der Eindringtiefe der elektromagnetischen Vorgänge in das Schmelzgut an und bedenkt, dass im mittleren Teile des

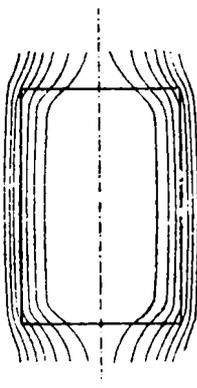


Fig. 2 Feldverteilung im Schmelzgut

der in v_p berechnete Wert ϵ als genau genug gelten kann. Der divergenzlose Übergang der magnetischen Induktion aus dem im Schmelzgut verdrängten in den hautwirkungslosen Zustand im Isolator bedingt eine Krümmung der magnetischen Kraftlinien gegen die z -Achse, an den Enden des Kerns, wie sie gefühlsmässig in Fig. 2 gezeichnet wurde. Das bedeutet, dass die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke, und also auch die Stromdichte in der Nähe der Enden sehr gross sind, und die in dem Kern in Wärme verwandelte Leistung ist grösser als in einem gleichlangen Teil des zugehörigen unendlich langen Zylinders: der Formfaktor k_f wird grösser als eins sein. Die Feldstärke hat auch auf den Endflächen eine tangentielle Komponente, die radial gerichtet ist, doch wird sie im allgemeinen so klein sein, dass ihr Einfluss zu *vernachlässigen* ist. Es ist also wichtig, einen „Ersatzkörper“ des Schmelzgutes angeben zu können, der es uns ermöglichen soll, die Feldverteilung längs der Mantelfläche zu bestimmen. Es gibt aber keine Kriterien für die Abgrenzung des Ersatzkörpers gegen die Enden, wie sie gefühlsmässig in Fig. 3 eingezeichnet wurde. Die Vorstellung der Eindringtiefe der elektromagnetischen Vorgänge in das Schmelzgut gibt uns also kein Mittel ab, für die Berechnung des Formfaktors bei niedrigen

Frequenzen durch die Lösung eines Problems über divergenzlose Potentialfelder.

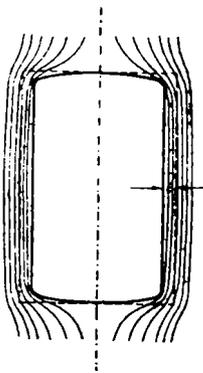


Fig. 3 Ersatzkörper des zylindrischen Schmelzgutes beeinflusst, wenn diese einigermassen klein ist.

Um schwierige Rechnungen zu vermeiden, die das Resultat nur unwesentlich verbessern würden, soll die Anordnung in der Fig. 4 durch diejenige der Fig. 5 ersetzt werden und das Oberflächenintegral (43') über die dort eingetragene Länge $\frac{L}{2}$ und die Breite πa (halber Umfang des Schmelzgutes) erstreckt werden. Da die Anordnung eine Symmetrieebene hat, kann man nur die Teil links von der Symmetrieebene betrachten und über die Breite $2\pi a$ integrieren. Das Doppelte dieses Integrals kommt in dem

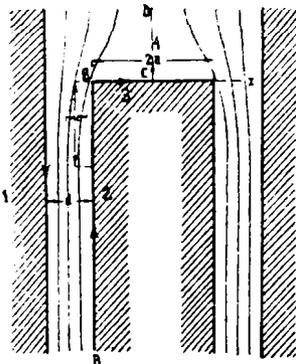


Fig. 5.

Die vereinfachte Anordnung und eines Theorems von Schwarz. Ich habe die zwei Schritte, die dabei nötig sind, in einen zusammengefasst, die Anwendung konformer Abbildungen vermieden und folgenden Satz bewiesen:²⁾

Man kann das potentialtheoretische Problem mit dem zylindrischen Schmelzgut als undurchdringlicher Körper, das die Lösung unseres Problems für „unendlich hohe“ Frequenz gibt, nicht exakt lösen, aber man erhält eine gute Näherung für die Verteilung des magnetischen Feldes längs der Mantelfläche, wenn man den Kern durch eine parallelebene Anordnung wie in Fig. 4 ersetzt und nach der Ermittlung der Feldverteilung, die ebenen Platten ins unendliche rückt, d. h. $d = \infty$ schreibt. Die Feldverteilung längs der Mantelfläche wird nämlich wenig von der Krümmung des

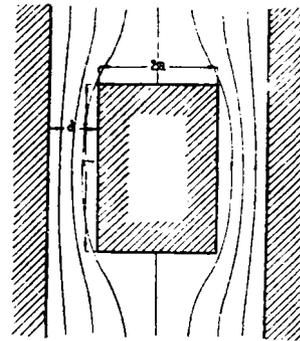


Fig. 4. Die parallelebene Anordnung.

Formfaktor vor. In den Rechnung u. neben sich der Faktor $e^{i\omega t}$ in era ort; er soll deshalb von vornherein ausgeschaltet werden.

B. Der Anteil der Mantelfläche an der komplexen Leistung.

Ich bestimme die Feldstärke längs der Seite AB in Fig. 5. Die Bestimmung des parallelebenen divergenzlosen Potentialfeldes zwischen zwei olyonalen Linien (Niveau-, oder Feldlinien) geschieht gewöhnlich mittels der konformen Abbildung

²⁾ R. B. Răduleş: Aplicaţiunea funcţiunilor analitice la studiul câmpurilor laplaciene plane. Bull. scient. de l'École Polytechn. de Timișoara. Tome 3, Fasc. 3-4 p. 257.

Satz über parallelebene Laplacesche Felder: Die analytische Funktion $w = u + iv$ der Variablen $z = x + iy$, die implizit definiert wird durch die Gleichung:

$$(54) \quad \frac{dz}{dw} = \frac{C e^{i\alpha_0} e^{\frac{\pi w}{V_0}}}{\left(e^{\frac{\pi w}{V_0}} - a_1\right)^{\rho_1} \left(e^{\frac{\pi w}{V_0}} - a_2\right)^{\rho_2} \dots \left(e^{\frac{\pi w}{V_0}} - a_n\right)^{\rho_n}}$$

besitzt einen *imaginären* Teil, der in der x, y -Ebene das Potential des parallelebenen Laplaceschen Feldes zwischen zwei unendlichen, polygonalen

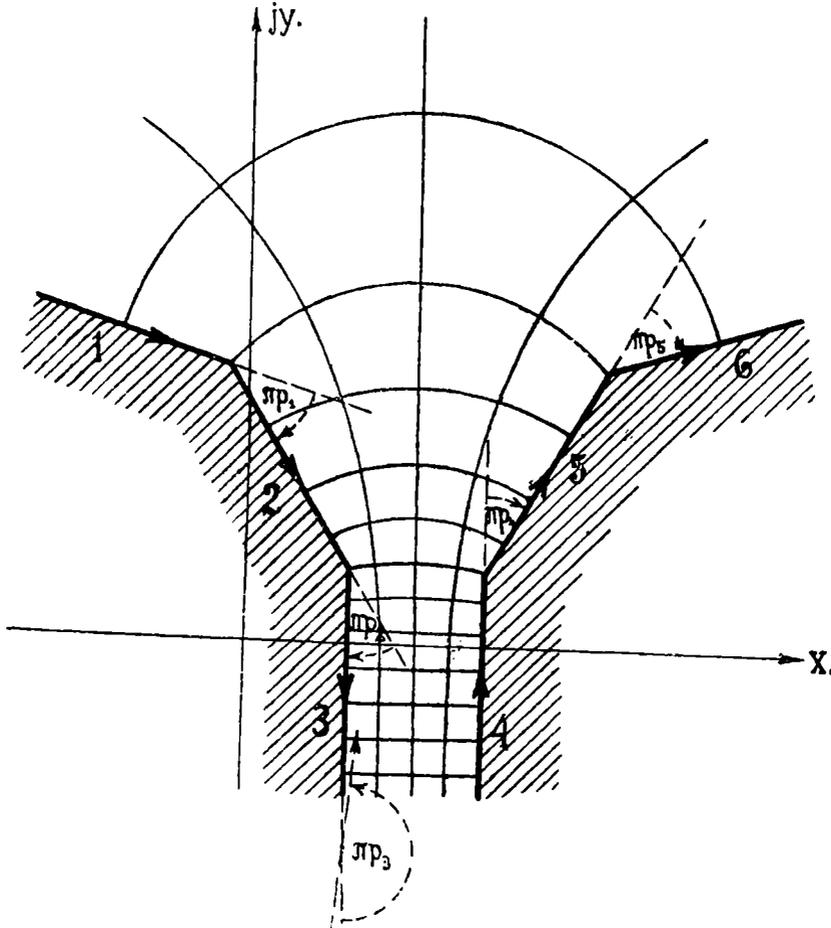


Fig. 6.

Potentiallinien mit $(n + 1)$ Seiten beschreibt (Fig. 6); die erste Potentiallinie soll m Seiten und das Potential $v = V_0$ haben, die zweite $(n + 1 - m)$ Seiten und das Potential $v = 0$; werden die Seiten so numeriert wie sie beim Durchlaufen der Potentiallinien in positivem mathematischen Sinne (Feld zur linken Hand) angetroffen werden, wenn man mit der ersten Potentiallinie beginnt, so ist $a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-1)} < 0; a_m = 0; 0 < a_{(m+1)} < \dots < a_n$ und eine dieser reellen Zahlen kann in diesen Grenzen beliebig gewählt werden;

ist ferner α_k der Winkel um den die k -te Seite gedreht werden muss, um sich mit der $(k + 1)$ -ten zu decken so wird $p_k = \frac{\alpha_k}{\pi}$ oder $\alpha_k = \pi p_k$; α_0 ist der Winkel den die $(n + 1)$ Seite mit Ox einschliesst; die Konstanten a_i und C sind durch die Dimensionen und Lage zum Koordinatensystem bestimmt. Die Feldstärke H ist, in komplexer Schreibweise, durch den Ausdruck gegeben:

$$(55) \quad H = \left(-i \frac{dw}{dz} \right)^*$$

wo der Stern die konjugiert komplexe Grösse angibt. — Sind die polygonalen Linien *Feldlinien*, so ist der *reelle* Teil von w die Potentialfunktion; bei gleicher v -Differenz (Feldlinienfunktiondifferenz) zwischen den zwei polygonalen Feldlinien hat H dieselbe absolute Grösse wie in (55) und kann aus folgender Gleichung berechnet werden:

$$(56) \quad H = \left(\frac{dw}{dz} \right)^*$$

Mit Hilfe dieses Satzes soll das Feld der Anordnung in Fig. 5 bestimmt werden, wenn die Feldstärke bei $iy = +i\infty$ gleich H_0 ist, also die Feldlinienfunktiondifferenz zwischen den zwei Polygonlinien:

$$V_0 = (d + a) \cdot H_0$$

In unserem Falle ist $(n + 1) = 4$ also $n = 3$ und man liest aus der Fig. 5 folgende Werte a_0 (Es wird nur der linke Teil der Anordnung berücksichtigt):

$$p_1 = 1; \quad p_2 = -\frac{1}{2}; \quad p_3 = +\frac{1}{2}$$

$$a_1 = 0; \quad a_2 = +1; \quad a_3 = a_3; \quad a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Die Funktion (54) wird in diesem Falle:

$$(57) \quad \frac{dz}{dw} = C e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{e^{aw} - 1}{e^{aw} - a_3}}$$

wo $a = \frac{\pi}{V_0}$ gesetzt wurde (Der Wert $a_2 = +1$ wurde so gewählt, weil man eine der reellen Konstanten a_i beliebig wählen kann, wenn man nur auf das Vorzeichen achtet.) Um noch die Konstanten C und a_3 zu bestimmen, fordern wir, dass für

$$\lim e^{aw} = \infty \quad \text{d. h. } y = +\infty$$

und also:

$$\frac{dz}{dw} = C e^{i\frac{\pi}{2}} = iC$$

das homogene Feld $iH_0 = i \frac{V_0}{d+a}$ gegeben sein soll durch (56):

$$iH_0 = i \frac{V_0}{d+a} = \left(\frac{dw}{dz} \right)^* = \left(\frac{1}{iC} \right)^* = \frac{i}{C}$$

woraus folgt:

$$C = \frac{1}{H_0} = \frac{d+a}{V_0}$$

Ferner soll für

$$\lim e^{aw} = 0, \quad \text{d. h. } y = -\infty$$

und also:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{i}{H_0 \sqrt{a_3}}$$

das homogene Feld:

$$iH_1 = i \frac{V_0}{d} = iH_0 \frac{d+a}{d}$$

gegeben sein durch (56):

$$iH_1 = iH_0 \frac{d+a}{d} = \left(\frac{dw}{dz} \right)^* = \left(\frac{H_0 \sqrt{a_3}}{i} \right)^* = iH_0 \sqrt{a_3}$$

woraus folgt:

$$a_3 = \left(\frac{d+a}{d} \right)^2 = \left(1 + \frac{a}{d} \right)^2$$

Der Ausdruck (54) wird also:

$$(57') \quad \frac{dz}{dw} = \frac{i}{H_0} \sqrt{\frac{e^{aw} - 1}{e^{aw} - \left(1 + \frac{a}{d}\right)^2}}$$

wo: $a = \frac{\pi}{H_0(d+a)}$ ist:

Das Schmelzgut ist im homogenen Felde, die $V=0$ -Potentiallinie soll also ins unendliche gerückt werden, d. h. der Grenzwert des Ausdrucks (57') für $d = \infty$ ermittelt werden.

Für grosses d entwickelt man $e^{aw} = e^{\frac{\pi w}{H_0(d+a)}}$ in eine Reihe und bricht beim zweiten Gliede ab. Dann ist:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{i}{H_0} \sqrt{1 + \frac{\left(1 + \frac{a}{d}\right)^2 - 1}{1 + \frac{\pi w}{H_0(d+a)} - \left(1 + \frac{a}{d}\right)^2}} \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{i}{H_0} \sqrt{1 + \frac{\frac{2a}{d} + \frac{a^2}{d^2}}{\frac{\pi w}{H_0(d+a)} - \frac{2a}{d} - \frac{a^2}{d^2}}} \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$(58) \quad \frac{dz}{dw} = \frac{i}{H_0 \sqrt{1 - \frac{2aH_0}{\pi w}}}$$

Ist H^* der zu H konjugiert komplexe Ausdruck, so folgt aus (56) und (58):

$$(59) \quad H^* = \left(\frac{dw}{dz} \right) = -iH_0 \sqrt{1 - \frac{2aH_0}{\pi w}}$$

Im folgenden wird z und das in dem Formfaktor vorkommende Oberflächenintegral über H^2 , über die „Mantelfäche“ berechnet.

Es folgt aus (58), wenn man $\frac{\pi}{2aH_0} = b$ schreibt:

$$z = \frac{i}{bH_0} \int \frac{\sqrt{bw}}{\sqrt{bw-1}} d(bw)$$

Setzt man:

$$bw = \alpha^2 \quad \text{und also: } d(bw) = 2\alpha d\alpha$$

so wird:

$$z = \frac{i}{bH_0} \int \frac{2\alpha^2 d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \frac{i}{bH_0} [\alpha \sqrt{\alpha^2-1} + \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})] + C$$

oder:

$$z = \frac{i}{bH_0} [\sqrt{b^3 w^2 - bw} + \ln(\sqrt{bw} + \sqrt{bw-1})] + C$$

Die Konstante C soll so bestimmt werden, dass die Kante B (Fig. 5) mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt; d. h. es soll sein:

$$z = 0 \quad \text{für } w = 0$$

Das ergibt:

$$C = -\frac{i}{bH_0} \ln \sqrt{-1}$$

und man erhält:

$$(60) \quad z = i \frac{2a}{\pi} \left[\sqrt{\left(\frac{\pi w}{2aH_0}\right)^2 - \frac{\pi w}{2aH_0}} + \ln \left(\sqrt{1 - \frac{\pi w}{2aH_0}} + \sqrt{-\frac{\pi w}{2aH_0}} \right) \right]$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass in (60) für $\nu = 0$; d. h. $w = u$ z die gebrochene Linie ABCD (Fig. 6) beschreibt — und nämlich, für $u > 0$ die Seiten BCD und für $u < 0$ die Seite AB, wobei in dem letzten Falle für den Wurzelausdruck das Vorzeichen *Minus* gewählt wird, was im folgenden wichtig sein wird.

Das Integral in dem Formfaktor wird:

$$2\pi a \int H^2 dz = 2\pi a \int \left(\frac{dw}{dz} \right)^* \left(\frac{dw}{dz} \right) dz = 2\pi a \int \left(\frac{dw}{dz} \right)^* dw = 2\pi a \int H dw$$

Der Integrationsweg geht für $x = 0$ über $dz = d(iy)$. Damit wird auch $w = u$ reell und man erhält:

$$\begin{aligned} 2 \pi a \int H_r^2 dy &= 2 \pi a \int \left(-i H_0 \sqrt{1 - \frac{2 a H_0}{\pi u}} \right)^* du = \\ &= 2 \pi a H_0 \cdot i \int \frac{\sqrt{b u - 1}}{\sqrt{b u}} d(b u) \frac{1}{b} \end{aligned}$$

wo:

$$b = \frac{\pi}{2 a H_0}$$

gesetzt wurde.

Schreibt man:

$$b u - 1 = \alpha^2; \quad d(b u) = 2 \alpha d \alpha$$

so ist:

$$2 \pi a \int H_r^2 dy = \frac{2 \pi a H_0}{b} \int \frac{2 \alpha^2 d \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = 4 a^2 H_0^2 [\alpha \sqrt{\alpha^2 + 1} - \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})]$$

Die Grenzen des Integrals sind $y = 0$ und $y = -l$. Für $y = 0$ hat man $u = 0$. Es sei noch u_l der gemäss (60) $y = -l$ entsprechende Wert von u . Es ist:

$$\begin{aligned} 2 \pi a \int H_r^2 dy &= \\ &= -4 a^2 H_0^2 \left[\sqrt{\left(\frac{\pi u_l}{2 a H_0} \right)^2 - \left(\frac{\pi u_l}{2 a H_0} \right)} - \ln \left(\sqrt{1 - \frac{\pi u_l}{2 a H_0}} + \sqrt{-\frac{\pi u_l}{2 a H_0}} \right) \right] \end{aligned}$$

Es ist ein Minuszeichen vor die Klammer gesetzt, in der Klammer die Vorzeichen geändert, und der Logarithmus der unteren Grenze mit dem der oberen in einen Ausdruck gebracht worden.

Man kann diesen Ausdruck vereinfachen, wenn man bemerkt, dass man für (60) bei $z = -il$ hat:

$$\begin{aligned} (61) \quad -il &= i \frac{2 a}{\pi} \left[\sqrt{\left(\frac{\pi u_l}{2 a H_0} \right)^2 - \left(\frac{\pi u_l}{2 a H_0} \right)} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(\sqrt{1 - \frac{\pi u_l}{2 a H_0}} + \sqrt{-\frac{\pi u_l}{2 a H_0}} \right) \right] \end{aligned}$$

Es wird:

$$2 \pi a \int H_r^2 dy = 2 \pi a H_0^2 \left[l + \frac{4 a}{\pi} \ln \left(\sqrt{1 - \frac{\pi u_l}{2 a H_0}} + \sqrt{-\frac{\pi u_l}{2 a H_0}} \right) \right]$$

oder, wenn man:

$$(61') \quad \left(-\frac{\pi u_l}{2 a H_0} \right) = \rho_l \quad \text{und} \quad l = \frac{L}{2}$$

schreibt :

$$(62) \quad 2 \pi a \int_{-l}^0 H_0^2 dy = \pi a L H_0^2 \left[1 + \frac{8a}{\pi L} \ln (\sqrt{1+p_l} + \sqrt{p_l}) \right]$$

Das doppelte dieses Integrals stellt den Zähler des Formfaktors dar.

Es ist umständlich, mit dem Ausdruck (62) zu operieren, weil p_l nicht explizit in Funktion von den Abmessungen des Heizkörpers angegeben werden kann, da die Gleichung (61) in bezug auf p_l nicht lösbar ist. Es ist daher zweckmässig, nach einem Wert von p_l zu suchen, der z. B. niemals unterschritten werden kann. Ich werde eine untere Grenze für die p_l angeben.

Setzt man in Gleichung (58) $v = 0$, oder $w = u$ und $z = iy$, betrachtet man also die Seite AB der Anordnung, die uns in der Lösung interessiert, so kann man schreiben :

$$(63) \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{H_0 \sqrt{1 - \frac{2aH_0}{\pi u}}}$$

Da für die Seite AB ($x = 0$) u negativ ist, folgt aus (63) :

$$|du| > H_0 |dy|$$

Ist man weit von B auf der Seite AB (Fig. 6), so strebt du gegen $H_0 dy$, wird aber niemals kleiner als dieser. Daraus folgt auch die Beziehung :

$$|u| > |y| \cdot H_0$$

Ist also $|u| > H_0 |y|$ und beachtet man, dass

$$\left(-\frac{\pi u_l}{2aH_0} \right) = p_l$$

gesetzt wurde, so kann man für p_l folgende Ungleichung schreiben :

$$(64) \quad p_l > \frac{\pi l}{2a} = \frac{\pi L}{4a}$$

Man kann nun $p_l = \frac{\pi L}{4a}$ als eine erste Näherungslösung betrachten, und diesen Wert in den Logarithmus der Gleichung :

$$(65) \quad l = \frac{2a}{\pi} \left[\sqrt{p_l^2 + p_l} - \ln (\sqrt{1+p_l} + \sqrt{p_l}) \right]$$

einführen, dann nach p_l auflösen, um eine zweite Näherung zu erhalten u. s. w. Diese Methode der sukzessiven Approximation habe ich angewendet — und die Wurzelwerte p_l in Funktion von $m = \frac{\pi l}{2a}$ in die Tabelle Seite 56 und graphisch in die Figur 10 eingetragen.

C). Der Formfaktor.

Der Formfaktor war gegeben durch (44) ;

$$(66) \quad k_f = \frac{Q_{ze}}{Q_{zu}} = \frac{Q_{mze}}{Q_{mzu}} = \frac{\int H_i^2 dF}{2\pi a L H_0}$$

Das Integral im Zähler ist das doppelte des Integrals (62), das im vorigen Abschnitt berechnet wurde und man erhält:

$$(67) \quad k_f = 1 + \frac{8a}{\pi L} \ln(\sqrt{1 + \rho_l} + \sqrt{\rho_l})$$

Die Grösse ρ_l bestimmt sich in Funktion der Abmessungen des Heizkörpers aus der Gleichung:

$$(68) \quad \frac{\pi L}{4a} + \left[-|\sqrt{\rho_l^2 + \rho_l}| + \ln(\sqrt{1 + \rho_l} + \sqrt{\rho_l}) \right] = 0$$

Der kleinste Wert, den die Lösung ρ_l dieser Gleichung annehmen kann, ist:

$$(69) \quad \rho_l \geq \frac{\pi L}{4a}$$

Wird die Julesche und die magnetische Leistung für einen Teil L des unendlich langen Zylinders nach den Formeln des ersten Kapitels berechnet, so gelten, für das kurze Schmelzgut folgende Gleichungen:

$$(70) \quad Q_{ze} = k_f Q_{zu} \quad 2\omega Q_{mzei} = k_f \cdot 2\omega Q_{mzui}$$

wo der Index i andeutet, dass es sich nur um die innere magnetische Energie handelt.

Der Widerstand wird, bei endlicher Länge:

$$(71) \quad R_{ze} = k_f R_{zu}$$

und die „innere“ Reaktanz:

$$(72) \quad X_{ize} = k_f \cdot X_{izu}$$

wo der Index i wieder andeutet, dass es sich nur um die die innere betreffende Grösse handelt.

Statt der Gleichungen (29) und (31) erhält man bei kurzem Kern und ausgeprägter Hautwirkung:

$$(73) \quad R_{ze} = 2\pi L \rho w^2 \alpha a \frac{\text{ber } \alpha a \text{ ber}' \alpha a + \text{bei } \alpha a \text{ bei}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a} k_f$$

$$(73') \quad X_{ze} = 4\pi^2 a^2 L w^2 \omega \mu \left\{ 1 - \frac{2k_f}{\alpha a} \frac{\text{ber } \alpha a \text{ bei}' \alpha a - \text{bei } \alpha a \text{ ber}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a} \right\}$$

wo der Formfaktor k_f durch (67) gegeben ist.

Diese Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, dass das ursprüngliche, äussere magnetische Feld homogen, d. h. die Spule unendlich lang ist.

Zum Wert (67) des Formfaktors wäre noch der Anteil der Endflächen hinzuzuzählen. Es ist zu bemerken, dass das magnetische Feld beim kurzen Schmelzgut und endlicher Frequenz nicht tangential zu den Endflächen ist,

sondern diese unter einem mit dem Abstände von der Achse variablen Winkel schneiden. Den Anteil der Endflächen an der komplexen Leistung vernachlässige ich. Ich sehe keinen Weg, dem Einfluss der Endflächen Rechnung zu tragen. Es scheint aber einleuchtend, dass er klein sein wird.

Der Anteil der Mantelfläche an der komplexen Leistung, wie er in B) berechnet wurde, sollte sich aber für alle praktischen Fälle mit dem gemessenen decken.

D) Die Vergrößerung der äusseren Kernreaktanz wegen der Felddeformation.

An den Enden des kurzen Schmelzgutes wird auch im Aussenraume das ursprünglich homogene magnetische Feld deformiert. Es soll nun die hierdurch bedingte Änderung der äusseren Kernreaktanz ermittelt werden. Nimmt man ausgeprägte Hautwirkung an, so gelten für das Feld um das Schmelzgut die in diesem Kapitel entwickelten Gleichungen (51') und (59). Daraus kann man die „Flächenstromdichte“ nach Formel (37):

$$g_t = \frac{1}{4\pi} H_t'$$

berechnen. Bildet man für alle Stromlinien das Produkt

$$j_k \Phi_k$$

wo j_k der Strom und Φ_k der Fluss der unendlich langen Spule durch die Stromlinie ist und summiert über alle Stromlinien, so erhält man:

$$\sum j_k \Phi_k$$

Dividiert man diesen Wert durch 2, da in ihm Maximalwerte auftreten, so erhält man die mit 2ω multiplizierte magnetische Energie, die man bekanntlich durch I^2 zu dividieren hat, um die auf den Strom I bezogene Induktanz zu erhalten. Multipliziert man noch mit ω so erhält man die auf I bezogene Reaktanz:

$$(74) \quad X_{ze\alpha} = \frac{\sum j_k \Phi_k}{2 I^2} \omega$$

die die Deformation des Feldes mit berücksichtigt und statt des ersten Gliedes in Gleichung (73') treten soll.

Um schwierige Rechnungen zu vermeiden, die das Resultat nur wenig verbessern würden, vernachlässige ich die mit den Stromdichten der Endflächen verketteten Flüsse, da sowohl die Stromdichten, als auch die Flüsse (wegen der im Mittel kleinen von den Stromlinien gebildeten Flächen) klein sind im Vergleich mit den entsprechenden Grössen auf der Mantelfläche.

Für diese ist aber die Summe:

$$\sum j_k \Phi_k$$

leicht auszurechnen. Nach Formel (59) ist der Absolutwert von H (gleich H_t') für die Mantelfläche, d. h. $w = u$ gegeben durch:

$$H_{\rho} = H_0 \sqrt{1 - \frac{2 a H_0}{\pi u}}$$

und :

$$g_l = \frac{1}{4\pi} H_{\rho} = \frac{H_0}{4\pi} \sqrt{1 - \frac{2 a H_0}{\pi u}}$$

Der Strom auf der Höhe dy ist gleich $g_l dy$, und, da nach (58) für $w = u$ und $x = 0$

$$dy = \frac{du}{H_0 \sqrt{1 - \frac{2 a H_0}{\pi u}}}$$

ist, folgt :

$$g_l dy = \frac{du}{4\pi}$$

Dieser Strom ist mit dem von der *Spule* herrührenden Flusse $\pi a^2 H_0 \mu$ verkettet und es ist :

$$g_l \Phi dy = \mu \frac{a^2 H_0}{4} du$$

Um die Summe in (74) zu erhalten, integriert man nach du von $y = -il$ bis $y = 0$ und multipliziert mit 2. Es ist also die Summe gleich :

$$\sum j_k \Phi_k = -2 \mu \frac{a^2 H_0}{4} u_l = 2 \mu \frac{a^2 H_0}{4} \cdot \frac{2 a H_0}{\pi} \rho_l = \mu \frac{a^3 H_0^2}{\pi} \cdot \rho_l$$

wenn man die Gleichungen (61') berücksichtigt.

Man erhält für $X_{s\epsilon a}$, mit :

$$H_0^2 = (4 \pi w \mathcal{J})^2 = (4 \pi w \sqrt{2} l)^2 = 32 \pi^2 w^2 l^2$$

den Wert :

$$(75) \quad X_{s\epsilon a} = 4 \pi^3 a^2 L w^2 \omega \mu \left[\frac{4 a}{\pi L} \rho_l \right]$$

In (73') soll also statt 1 in der Klammer der Ausdruck in der eckigen Klammer aus (75) treten und damit ist der Einfluss der Felddeformation wegen des kurzen Kerns berücksichtigt. Da, gemäss (63), ρ_l grösser ist als der reziproke Wert von $\frac{4 a}{\pi L}$, ist der Klammerausdruck in (75) immer grösser als die Einheit, wenn das Schmelzgut kurz ist, d. h. man hat eine Vergrösserung der auf den Strom I bezogenen Reaktanz des Kerns.

Die Endflächen bedingen noch eine Vergrösserung dieser Reaktanz ; doch ist sie geringfügig und die entsprechende Formel nicht einfach.

III. Kapitel.

Die Impedanz der kurzen Spule.

In der kurzen Spule ist, bei einem Strome I das magnetische Feld kleiner als :

$$H_0 = 4 \pi w \mathcal{I}$$

und deshalb ist die Reaktanz X_{s_e} der kurzen Spule kleiner als X_{s_u} eines gleich langen Teils der unendlichen Spule. Da die Joulesche und die magnetische Leistung proportional H_0^2 oder $(w \mathcal{I})^2$ sind, scheint es im ersten Augenblick, als ob die Korrektur des Widerstandes und der inneren Reaktanz einfach so vorzunehmen ist, dass man die Werte für die unendliche Spule multipliziert mit dem Verhältnis $h = \frac{H_m}{H_0}$ des quadratischen Mittelwertes H_m der Feldstärke längs der inneren Oberfläche der Spule zur Feldstärke in der unendlich langen. Diese Korrektur würde für X_{s_e} und R_{s_e} zu kleine Werte liefern, wie man folgendermassen einsieht :

Bei einer kurzen Spule sinkt die Feldstärke gegen die Enden. Bildet man aber das Linienintegral der magnetischen Feldstärke um eine Windung, so findet man sie gleich :

$$\oint (\mathcal{H} d\mathcal{s}) = 4 \pi \mathcal{I}$$

Sie hat den gleichen Wert wie in der unendlich langen Spule und, da die axiale Feldstärke sinkt, muss das Linienintegral längs der Seiten BCDA (Fig. 7)

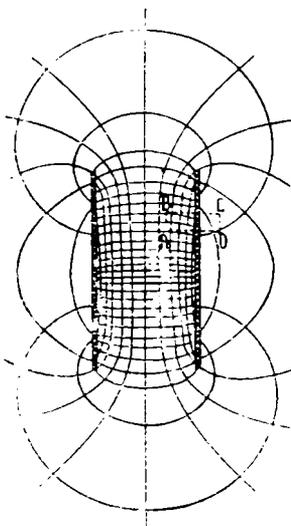


Fig 7. Feldverteilung in der kurzen Spule.

gleich der Differenz zwischen der magnetischen Spannung auf AB in der unendlichen und in der kurzen Spule sein. Schreitet man also in der kurzen Spule von der Mitte gegen die Enden, so wächst dabei die radiale Komponente der magnetischen Feldstärke, während ihre axiale Komponente sinkt. Wir werden aber die von den radialen Komponenten erzeugten Wirkungen vernachlässigen, wenn $\gamma b'$ klein ist, wo b' die axiale Dicke des Spulenkupfers ist.

Richtet man das Augenmerk auf die axiale Komponente, so kann man den Fluss, der mit einer Windung verkettet ist, in zwei Teile zerlegen, von denen einer von dem Eigenstrom der Windung herrührt, der zweite von den übrigen. (Mit der Einführung des von dem Eigenstrom erzeugten Flusses führt man allerdings einen Teil der Radialkomponentenwirkung wieder ein, so dass diese nicht ganz, sondern für jede

Windung nur die von den Fremdwindungen herrührende vernachlässigt wird.) Nun ist offenbar die Wirkung des vom Eigenstrom erzeugten Flusses auf die Windung die gleiche wie wenn die Windung einer unendlich langen Spule angehören würde, da sie nur von der Windung abhängt; diese Wirkung ist also sicher nicht mit dem oben erwähnten Faktor h , (sondern mit der Einheit) zu multiplizieren. Zieht man das Eigenfeld von dem Gesamtfelde ab, so erhält man das „fremde“ Feld. Seine Wirkung soll aus den Formeln für die unendliche Länge berechnet werden, indem man H_0^2 durch H_f^2 ersetzt, wo H_f die von den übrigen Windungen herrührende, an der ins Auge gefassten Windung herrschende mittlere Feldstärke ist. Die durch das fremde Feld bedingten Anteile an den Widerstand und die Reaktanz der Windung sollen also:

$$\frac{R_{su}}{w L_1} \frac{H_f^2}{H_0^2} \quad \text{und} \quad \frac{X_{su}}{w L_1} \frac{H_f^2}{H_0^2}$$

sein. Zieht man aber von den Grössen $\frac{1}{w L_1} R_{su}$ und $\frac{1}{w L_1} X_{su}$ die von der Eigenwirkung herrührenden Anteile R_1 und X_1 ab, und multipliziert mit $\frac{H^2}{H_0^2}$, wo H die mittlere Feldstärke an der Windung ist, so soll das auch ein Mass für die Fremdwirkung sein, also soll statt

$$(76) \quad \frac{R_{su}}{w L_1} \frac{H_f^2}{H_0^2} \quad : \quad \left(\frac{R_{su}}{w L_1} - R_1 \right) \frac{H^2}{H_0^2}$$

und statt

$$(76') \quad \frac{X_{su}}{w L_1} \frac{H_f^2}{H_0^2} \quad : \quad \left(\frac{X_{su}}{w L_1} - X_1 \right) \frac{H^2}{H_0^2}$$

geschrieben werden, und der gesamte Widerstand und die gesamte innere Reaktanz einer Windung wird:

$$\left(\frac{R_{su}}{w L_1} - R_1 \right) \frac{H^2}{H_0^2} + R_1 \quad ; \quad \left(\frac{X_{su}}{w L_1} - X_1 \right) \frac{H^2}{H_0^2} + X_1$$

Summiert man über alle Windungen und schreibt:

$$\sum \frac{H^2}{H_0^2} = (w L_1) \frac{H_m}{H_0}$$

wo also H_m und H_0 die quadratischen Mittelwerte von H und H_0 längs der kurzen Spule (auf der Innenseite) sind, so erhält man für den Widerstand R_{se} und die innere Reaktanz X_{se} der kurzen Spule den Wert:

$$(77) \quad R_{se} = (R_{su} - w L_1 R_1) \frac{H_m}{H_0} + w L_1 R_1$$

$$(78) \quad X_{se} = (X_{su} - w L_1 X_1) \frac{H_m}{H_0} + w L_1 X_1$$

In diesem Kapitel wird nun $\frac{H_m}{H_0}$ nach einer Tabelle von Butterworth

angegeben und der Widerstand R_1 und die innere Reaktanz X_1 einer Windung im Eigenfelde berechnet.

Das Verhältnis $\frac{H_m}{H_0}$ hängt nur von $\frac{L_1}{a'_1}$ ab, wo L_1 die Länge und a'_1 der effektive Halbmesser der Spule ist und kann der folgenden Tabelle entnommen werden:*)

(79)	L_1/a'_1	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	4	8	12	16	20	∞
	$h = \frac{H_m}{H_0}$	0	0,051	0,125	0,202	0,275	0,340	0,556	0,734	0,819	0,866	0,886	1

Ich habe empirisch gefunden, dass diese Abhängigkeit in dem Variabilitätsbereiche $1,2 < \frac{L_1}{a'_1} < 1,6$ mit einer Genauigkeit von $\leq 3,4\%$ und in dem Bereiche $1,6 < \frac{L_1}{a'_1} < 20$ mit einer Genauigkeit von $\leq 1,82\%$ dargestellt werden kann durch die Funktion:

$$(80) \quad \frac{H_m}{H_0} = h = \frac{1}{1 + 4,62 \left(\frac{a'_1}{L_1}\right)^{5/4}}$$

Um noch den Widerstand R_1 und die innere Reaktanz X_1 einer Windung zu berechnen, kann sie als geradlinig betrachtet werden. In dieser Hypothese sind die Formeln für den runden Draht leicht zu entwickeln und seit lange bekannt. Aus ihnen soll auch eine Näherungsformel für den rechteckigen Draht gewonnen werden, der bei den Induktionsöfen häufiger benützt wird.

Es sei also ein gerader, mit Wechselstrom beschickter Draht mit Kreisquerschnitt und dem Radius c gegeben. Das magnetische Feld hat in diesem Falle nur eine Tangentialkomponente in einem Zylinderkoordinatensystem, dessen Achse mit der Drahtachse zusammenfällt. Ist H diese Komponente, so nimmt (VIII), in komplexer Schreibweise, folgende Form an:*)

$$(81) \quad \frac{d^2 H}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d H}{d r} + \left(\tau^2 - \frac{1}{r^2} \right) H = 0$$

wo gesetzt wurde:

$$(82) \quad \tau^2 = -i \frac{4 \pi \mu_1 \omega}{\rho_1} \quad \kappa^2 = \frac{4 \pi \mu_1 \omega}{\rho_1} \quad \mu_1 = 1$$

Die Lösung von (81) ist:

$$H = A J_1(\tau r),$$

*) Butterworth: Proc. Roy. Soc. Ser. A. Vol. 107. No. A. 741. (1925)

*) Jahnke-Ende: Funktionentafeln Seite 143.

da sie über den Querschnitt endlich bleiben und wegen Symmetriegründen die Gleichung:

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = 0$$

erfüllt sein muss. Die Stromdichte G (axiale Komponente) wird, nach dem Biot-Savartschen Gesetze:

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial (rH)}{\partial r} = \frac{A}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} [r J_1(\tau r)] = \frac{\tau A}{4\pi} J_0(\tau r)$$

und man erhält für den Ausdruck des Stromes:

$$\mathcal{I} = \int_0^c G \cdot 2\pi r dr = \frac{\tau A}{2} \int_0^c r J_0(\tau r) dr = \frac{A}{2\tau} \int_0^c (\tau r) J_0(\tau r) d(\tau r) = \frac{A}{2} c J_1(\tau c)$$

woraus folgt:

$$A = \frac{2\mathcal{I}}{c J_1(\tau c)}$$

und:

$$(83) \quad H = \frac{2\mathcal{I}}{c} \frac{J_1(\tau r)}{J_1(\tau c)}$$

$$(84) \quad G = \frac{\tau \mathcal{I}}{2\pi c} \cdot \frac{J_0(\tau r)}{J_1(\tau c)}$$

Nun kann man schreiben für $r = c$:

$$Q + i2\omega Q_m = 2\pi c \frac{1}{8\pi} [E H^*] = \frac{c \varrho \tau \mathcal{I} J_0(\tau c)}{4 \cdot 2\pi c J_1(\tau c)} \left(\frac{2\mathcal{I}}{c} \right)^* = \frac{\varrho \tau \mathcal{I}^2}{4\pi c} \cdot \frac{J_0(\tau c)}{J_1(\tau c)}$$

Es bestehen aber die auf S. 14 benützten Beziehungen:

$$\begin{aligned} J_0(\tau c) &= \text{ber } \kappa c + i \text{bei } \kappa c \\ -\tau J_1(\tau c) &= \kappa (\text{ber}' \kappa c + i \text{bei}' \kappa c) \end{aligned}$$

Führt man dies in den Ausdruck der komplexen Leistung ein und multipliziert im Zähler und Nenner mit der konjugiert komplexen Grösse des Nenners, so erhält man:

$$\begin{aligned} Q + i2\omega Q_m &= \\ &= \frac{\varrho_1 \mathcal{I}^2 i \kappa}{4\pi c} \frac{(\text{ber } \kappa c \text{ber}' \kappa c + \text{bei } \kappa c \text{bei}' \kappa c) + i(\text{ber}' \kappa c \text{bei } \kappa c - \text{bei}' \kappa c \text{ber } \kappa c)}{\text{ber}'^2 \kappa c + \text{bei}'^2 \kappa c} \end{aligned}$$

Daraus erhält man, nach (XIV) und (XV)

$$R_1' = \frac{\varrho_1 \kappa}{2\pi c} \frac{\text{ber } \kappa c \text{bei}' \kappa c - \text{bei } \kappa c \text{ber}' \kappa c}{\text{ber}'^2 \kappa c + \text{bei}'^2 \kappa c}$$

$$X_1' = \frac{q_1 \kappa}{2 \pi c} \frac{\text{ber } \kappa c \text{ ber}' \kappa c + \text{bei } \kappa c \text{ bei}' \kappa c}{\text{ber}'^2 \kappa c + \text{bei}'^2 \kappa c}$$

Diese Gleichungen gelten für runden Drahtquerschnitt und die Längeneinheit, weil in dem Ausdruck für die komplexe Leistung die Oberfläche $F = 2 \pi c$ gesetzt wurde. Ist $2 \pi a_1$ die Länge der Windung, so wird ihr Wechselstromwiderstand R_1 und ihre innere Reaktanz X_1 :

$$(85) \quad R_1 = 2 \frac{q_1 a_1}{c^2} \left(\frac{\kappa c}{2} \right) \frac{\text{ber } \kappa c \text{ bei}' \kappa c - \text{bei } \kappa c \text{ ber}' \kappa c}{\text{ber}'^2 \kappa c + \text{bei}'^2 \kappa c}$$

$$(86) \quad X_1 = 2 \frac{q_1 a_1}{c^2} \left(\frac{\kappa c}{2} \right) \frac{\text{ber } \kappa c \text{ ber}' \kappa c + \text{bei } \kappa c \text{ bei}' \kappa c}{\text{ber}'^2 \kappa c + \text{bei}'^2 \kappa c}$$

Ist der Drahtquerschnitt rechteckig, so wird man eine Korrektur anbringen müssen. Ich transformiere R_1 und X_1 indem ich sie in diesem Falle mit dem umgekehrten Verhältnis der Drahtquerschnitte multipliziere, da R_1 und X_1 , bei festgehaltener Basis eines rechteckigen Querschnittes in umgekehrtem Verhältnis zur Höhe variieren, wenn man die Wirkungen der Kanten vernachlässigt. Hat also das Rechteck die gleiche Grundlinie wie der Kreisdurchmesser, so sollen die Werte (85) und (86) mit dem reziproken Werte des Querschnittsverhältnisses multipliziert werden. Sind b' und b die Seiten des Rechtecks und $b = 2c$ so ist der Korrektionsfaktor:

$$\frac{1}{4} \frac{\pi b^2}{b b'} = \frac{\pi b}{4 b'}$$

Ist w die Windungszahl pro cm und k_c der Kupferfüllfaktor so wird:

$$b' = \frac{k_c}{w}$$

und der Korrektionsfaktor:

$$\frac{\pi b w}{4 k_c}$$

Setzt man in (85) und (86) $c = \frac{b}{2}$, so wird für rechteckige Windungen:

$$(87) \quad R_1 = 2 \pi a_1 w \frac{q_1}{k_c b} \left(\frac{\kappa b}{4} \right) \frac{\text{ber } \kappa \frac{b}{2} \text{ bei}' \kappa \frac{b}{2} - \text{bei } \kappa \frac{b}{2} \text{ ber}' \kappa \frac{b}{2}}{\text{ber}'^2 \kappa \frac{b}{2} + \text{bei}'^2 \kappa \frac{b}{2}}$$

$$(88) \quad X_1 = 2 \pi a_1 w \frac{q_1}{k_c b} \left(\frac{\kappa b}{4} \right) \frac{\text{ber } \kappa \frac{b}{2} \text{ ber}' \kappa \frac{b}{2} + \text{bei } \kappa \frac{b}{2} \text{ bei}' \kappa \frac{b}{2}}{\text{ber}'^2 \kappa \frac{b}{2} + \text{bei}'^2 \kappa \frac{b}{2}}$$

Die Gleichungen (87) und (88) ergeben für rechteckige Windungen, zusammen mit (77) und (78) den Widerstand und die innere Reaktanz der Spule, wenn das Verhältnis $\frac{H_m}{H_0}$ bekannt ist (Tabelle 79).

Es sei noch bemerkt, dass die Korrektur für rechteckigen Draht durch multiplizieren mit dem oben abgeleiteten Faktor nur aus den Formeln für rundem Draht von demselben Durchmesser wie die radiale Seite des Querschnitts vorgenommen wird. Diese Einschränkung, die in der Ableitung der Formeln (87) und (88) implizit enthalten ist, soll ungefähr gleich stark ausgeprägte Hautwirkungen sichern. Auch sind die Formeln (87) und (88) nicht anwendbar, wenn b' sehr klein ist im Vergleich mit b , also: $\frac{k_c}{w} \ll b$.

Die Formel (87) stimmt, — bis auf einen, von der Frequenz unabhängigen Summanden — mit der entsprechenden Formel von Burch und Davis (Eddy-current heating S. 39), wo R_1 noch mit $w L_1$ multipliziert vorkommt³⁾, überein.

Es bleibt noch übrig, die äussere Reaktanz der Spule zu korrigieren. Solange man die Verschiebungsströme vernachlässigt, ist die äussere Reaktanz durch dieselbe Formel gegeben, ob die Frequenz hoch ist oder nicht. Sie kann aus bekannten Handbüchern abgelesen werden.

Mann kann die Verhältnisse auch so darstellen, dass man den für die unendlich lange Spule gültigen Wert:

$$X_{a.s.u} = 4 \cdot \pi^2 \cdot a_1'^2 L_1 \cdot w^2 \cdot \omega$$

der in der Formel (32) vorkommt mit einem Faktor multipliziert, der kleiner oder gleich der Einheit ist (für $L_1 = \infty$) und in Funktion des Verhältnisses des Durchmessers (oder auch des Halbmessers) zur Länge der Spule angegeben werden kann. Nennt man diesen Faktor: k_n , so kann man mit Nagaoka⁴⁾ folgende Formel schreiben:

$$(89) \quad X_{a.s.e} = k_n \cdot 4 \pi^2 a_1'^2 L_1 \cdot w^2 \cdot \omega$$

Den Wert des Nagaokaschen Faktors findet man in seiner Arbeit tabelliert, oder auch in einer Zusammenstellung der Formeln und Tafeln für die Berechnung von Selbstinduktanzen, von Rosa und Grover.⁵⁾

Die Reihenentwicklung des Faktors von Nagaoka lautet;⁶⁾

$$(90) \quad k_n = 1 - \frac{4d}{3\pi L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |2n| |2n+2|}{|n| |n+2| (|n+1|)^2 2^{4n+3}} \left(\frac{d}{L}\right)^{2n+2}$$

³⁾ Aus (87) folgt für $f=0$, d. h. bei Gleichstrom der Widerstand gleich dem Gleichstromwiderstand, wie es sein soll, während der bei Burch und Davis hinzutretende Summand einen grösseren Wert für $f=0$ ergibt. Da ich von ihrem Buche erst dicht vor dem Abschlusse meiner Arbeit Kenntnis erhielt, konnte ich nicht feststellen woher dieser Summand stammt

⁴⁾ Nagaoka: Coll. Sci. Tokyo 27 (1909).

⁵⁾ Rosa and Grover: Bull. of the Bureau of Standards Bd 8. (S. 1—230).

⁶⁾ Den Hinweis auf diesen Faktor verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des H. Ryland Davis.

wo $d = 2 a'_1$ der effektive Durchmesser der Spule ist. d. h. der innere Durchmesser, vergrößert um die Hälfte der Eindringtiefe der elektromagnetischen Vorgänge in das Spulenkupfer.

Die in diesem Abschnitt gegebene Korrektur der Impedanz der Spule ist, soweit sie sich auf die „inneren“ Größen bezieht, unter dem Einfluss der unter¹⁾ zitierten Arbeit Butterworths berechnet. Die Resultate weichen nicht wesentlich von denjenigen von Burch und Davis ab.

IV. Kapitel. Der kurze Ofen.

Das Problem des kurzen Ofens ist mit der Bestimmung der Impedanzen des Schmelzgutes im homogenen Wechselfelde und der Spule noch nicht gelöst. Es treten noch zwei Schwierigkeiten auf:

1. Das kurze Schmelzgut, auch wenn es im homogenen Wechselfelde einer unendlich langen Spule ist, deformiert die ursprünglich geradlinigen Kraftlinien, wie man es in Fig. 2 sieht. Wird also die Reaktanz des kurzen Kerns von der Reaktanz der Spule subtrahiert, so erhält man nicht die scheinbare Reaktanz der Spule, wie das im ersten Kapitel der Fall war, weil die Reaktanz der Spule für das vom Schmelzgut undeformierte Spulenfeld berechnet wurde. Es muss also noch die Deformation der Kraftlinien berücksichtigt werden, und ich werde das tun, durch Multiplikation der im Kapitel I. berechneten äusseren Reaktanz des kurzen Kerns mit einem Faktor k_d , der in (75) berechnet wurde:

$$(91) \quad k_d = \frac{4a}{\pi \cdot L} \cdot p_l$$

2. Die Korrektur wegen der Deformation der Kraftlinien kann nur in der Hypothese eines homogenen Fremdfeldes H_0 berechnet werden. In der kurzen Spule ist das Feld nicht mehr homogen; es sinkt von der Mitte gegen die Enden und es wächst, wenn man im Innern der Spule von der Achse gegen die Windungen radial fortschreitet. Deshalb braucht man noch eine Korrektur sowohl für die Reaktanz, als auch für den Widerstand des Kerns wegen der Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes.

3. Es tritt noch eine andere Schwierigkeit auf, weil das kurze Schmelzgut im Aussenraume nicht mehr ein konstantes elektrisches Feld erzeugt, wie das unendlich lange. Streng genommen, wird also auch die Verteilung der Stromdichte in der Spule verglichen mit ihrer Verteilung beim Fehlen des Schmelzgutes, verändert. Diese Veränderung soll, wie die Verluste der Radialkomponente des magnetischen Feldes, vernachlässigt werden.

A) Korrektur der Kernimpedanz wegen der Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes.

Die bisherigen Formeln sind in der Hypothese eines homogenen äusseren (ursprünglichen) Feldes H_0 abgeleitet worden. Es soll nun eine Korrektur wegen der Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes angegeben werden.

Die äussere Reaktanz des Kerns soll korrigiert werden durch Multiplikation mit dem Quotienten h_v des mittleren (von der Spule in Abwesenheit des Kerns erzeugten) quadratischen Wertes von H über das Volumen des Schmelzgutes durch H_0^2 , das vom gleichen Strom in der unendlich langen Spule erzeugte Feld, denn die mittlere magnetische Energie des Kerninneren ist dem Volumenintegral über H^2 proportional. Da H_r klein ist, kann man auch mit dem quadratischen Mittelwert von H_s rechnen, ohne merkliche Fehler zu erhalten.

Unsicherer ist die Korrektur des Widerstandes und der inneren Reaktanz des Kerns. Seine Scheiben längs der Achse werden sich *etwa* so verhalten, als ob der Kern in einem homogenen Felde, von der Grösse der Tangentialkomponente der Feldstärke am Umfange der Scheiben (bei abwesendem Kern), wäre. Bringt man also die Korrektur wegen der Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes so an, dass man den Widerstand und die innere Reaktanz multipliziert mit dem Quotienten h_f des quadratischen Mittelwertes der Axialkomponente des Spulenfeldes über die Kernoberfläche durch die konstante Feldstärke H_0^2 in der unendlich langen Spule bei gleicher Windungszahl pro Längeneinheit und gleichem Strom wie in der kurzen — so sollte man *zu grosse* Werte erhalten, da die *grossen* Stromdichten, an den Kernenden mit einem Korrekturfaktor multipliziert werden, dessen Wurzel grösser ist als der Quotient der Axialkomponente der Feldstärke an den Enden durch H_0 . Bringt man die Korrektur so an, dass man nur den Widerstand R_{zu} und die Reaktanz X_{zu} des unendlich langen Kerns auf gleicher Länge L mit h_f multipliziert, während man die Zuwächse $(k_f - 1) R_{zu}$ und $(k_f - 1) X_{zu}$ wegen der Kürze mit dem Quotienten $h_e = \frac{H_{ze}^2}{H_0^2}$

multipliziert — wo H_{ze} die Axialkomponente des Feldes der kurzen Spule an den Kanten des Kerns ist — so sollte man *zu kleine* Werte erhalten, denn die Korrektur ist der Hypothese gleich, dass sich der ganze Stromdichtezuwachs im kurzen Kern in dem „kleinen“ Felde H_{ze} befindet. Die wirklichen Werte von R_{ze} und X_{ze} sollten dazwischen liegen. Die erste dieser Korrekturen wurde von Burch und Davis in Anschluss an Butterworth vorgeschlagen. Der experimentelle Teil dieser Arbeit entscheidet eher zugunsten der zweiten.

Es gibt analytische Darstellungen oder Näherungsdarstellungen für das magnetische Feld einer kurzen Spule. Die Formeln sind aber so kompliziert, dass ihre Anwendung eine scharfe Geduldprobe werden kann. Deshalb ist es praktisch vorteilhaft, mit Burch und Davis zum Berechnen der Korrekturfaktoren folgende graphische Darstellung zu benutzen (Fig. 8):

In den Abszissen ist $\frac{L'}{a'}$ eingetragen, wo a' und L' Halbmesser und Länge der Spule sind. In den Ordinaten hat man den Quotienten der z -Komponente des Feldes: H_z in der Endfläche der Spule durch das Feld H_0 in der unendlich langen Spule, bei gleichem Halbmesser und Strombelag. Die Kurven enthalten die Werte $\frac{H_z}{H_0}$ für variable Abstände von der Spulenachse, nämlich:

$$r_1 = 0,0 a'; \quad r_2 = 0,25 a'; \quad r_3 = 0,4 a'; \quad r_4 = 0,5 a';$$

$$r_5 = 0,6 a'; \quad r_6 = 0,7 a'; \quad r_7 = 0,8 a'; \quad r_8 = 0,9 a'$$

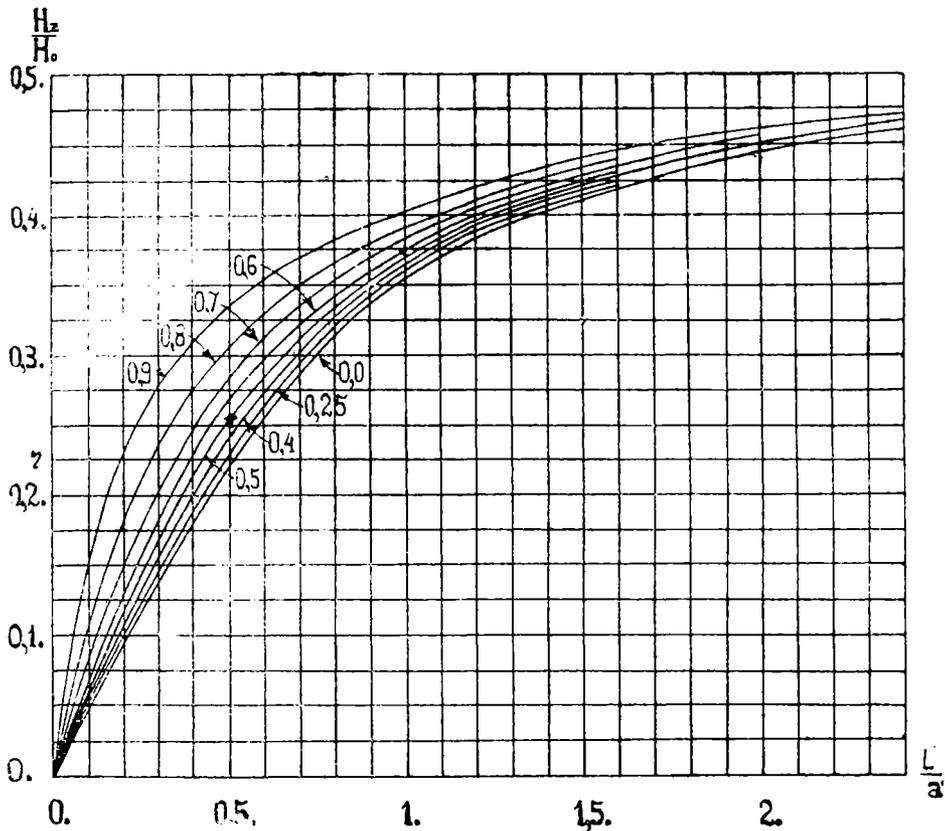


Fig. 8. Axialkomponente des magnetischen Feldes am Ende der kurzen Spule.

Will man den Wert für einen Punkt P kennen, der nicht im Endquerschnitt der Spule liegt, so teilt man diese durch eine durch P gehende, auf der Achse senkrecht stehende Ebene entzwei, wendet auf beide Spulenteile die obige Methode an, und summiert oder subtrahiert von einander die Resultate, je nachdem P innerhalb oder ausserhalb der Spulenlänge ist.

Um über die Gültigkeit von k_f und k_a unabhängig von der Korrektur wegen der Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes experimentell entscheiden zu können, habe ich auch sehr kurze Kerne benützt, für die die zwei oben angegebenen Grenzwerte der Korrektur nahezu zusammenfallen, da in diesem Falle das Spulenfeld im Kern merklich homogen ist.

B) Der thermische Wirkungsgrad des Ofens.

Es sei $Q dt$ die in der Zeit dt dem Schmelzgut zugeführte Wärmeenergie. Ein Teil von ihr erhöht die Temperatur des Schmelzgutes und ein anderer wird an den Tiegel abgegeben. Der erste ist:

$$c G dT$$

wenn dT der Temperaturzuwachs des Schmelzgutes in der Zeit dt ist, c und G seine spezifische Wärme und sein Gewicht. Der zweite Teil kann zu

$$\nu F (T - T_L) dt$$

angesetzt werden, wenn F die Oberfläche des Schmelzgutes, T seine Temperatur und ν eine Konstante ist die von der Beschaffenheit des Tiegels abhängt und angibt, wieviel Watt das Schmelzgut pro cm^2 verliert, wenn es 1°C Übertemperatur über die Luft hat. T_L ist die Temperatur der Luft. Ich setze voraus, dass man ein mittleres, während des Schmelzvorganges als konstant anzusehendes ν definieren kann, und ferner, dass die Temperatur im Schmelzgut gleichförmig ist, eine Hypothese, die bei gut leitendem Schmelzgut erfüllt ist. Es besteht also die Gleichung:

$$Q dt = c G dT + \nu F T dt$$

wenn man die Lufttemperatur als Nullpunkt betrachtet, oder:

$$T + \frac{cG}{\nu F} \frac{dT}{dt} - \frac{Q}{\nu F} = 0$$

Ist T_0 die Endtemperatur des Schmelzgutes, d. h. die höchste Temperatur die es erreichen kann, wenn ihm in der Zeiteinheit die Wärmeenergie Q zugeführt wird, so wird in diesem Zustande die ganze zugeführte Wärmeenergie abgegeben:

$$Q = \nu F T_0$$

und die Differentialgleichung wird:

$$(92) \quad T + \frac{cG}{\nu F} \frac{dT}{dt} - T_0 = 0$$

Schreibt man

$$(93) \quad \theta = \frac{cG}{\nu F}$$

und nennt sie Wärmezeitkonstante, so ist die den Grenzbedingungen angepasste Lösung von (92):

$$(94) \quad T = T_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \right)$$

Nach einer Zeitkonstante erreicht also das Schmelzgut ($t = \theta$) eine Temperatur:

$$T_1 = T_0 (1 - e^{-1}) = 0,632 T_0$$

die 63,2% der Höchsttemperatur beträgt. Nach einer Zeit die zwei Zeitkonstanten beträgt wird die Temperatur 86,5% und nach drei Zeitkonstanten 95% der Endtemperatur.

Die bei der Temperatur T , also der entsprechenden Zeit t durch Wärmeabgabe verlorene Leistung ist:

$$\nu = \nu F T = \nu F T_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \right)$$

und die zugeführte, nach einer oben angeschriebenen Gleichung:

$$Q = \nu F T_0$$

Der thermische Wirkungsgrad ist demnach:

$$(95) \quad \eta_t = \frac{Q - \nu F T}{Q} = e^{-\frac{t}{\theta}} = \frac{T_0 - T}{T_0}$$

In Worten: Der thermische Wirkungsgrad ist in jedem Moment gleich der prozentualen Differenz zwischen der höchsten erreichbaren und der gegenwärtigen Temperatur.

Nach drei Zeitkonstanten beträgt er also nur noch 50%.

Der Wirkungsgrad des Ofens η ist gleich dem Produkt des elektrischen und des thermischen Wirkungsgrades:

$$(96) \quad \eta = \eta_e \eta_t = \eta_e e^{-\frac{t}{\theta}}$$

Ist die Zeit, in der der Kern schmilzt von derselben Größenordnung wie die Zeitkonstante θ , wie das bei allen praktisch vorkommenden Öfen der Fall ist, so schwankt der Wirkungsgrad in sehr weiten Grenzen. Es ist daher nötig, für jede Zeit einen Ausdruck für den mittleren Wirkungsgrad zu haben, das heisst für den Quotienten der bis zur Zeit t zum heizen des Kerns aufgewandten zu der in derselben Zeit t dem Ofen zugeführten Energie. Rechnet man mit einem mittleren spezifischen Widerstande des Kerns, so kann der elektrische Wirkungsgrad als konstant angesehen werden und der mittlere Wirkungsgrad bis zur Zeit t_1 ist:

$$(97) \quad \eta_m = \eta_e \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} e^{-\frac{t}{\theta}} dt = \eta_e \frac{\theta}{t_1} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\theta}} \right)$$

In Worten: Der mittlere Wirkungsgrad des Ofens über eine Zeitspanne t_1 vom Beginn der Heizung ist gleich dem Produkte aus dem elektrischen Wirkungsgrad, der Zeitkonstante und der Temperatur zur Zeit t_1 , ausgedrückt in Prozenten der höchsten erreichbaren Temperatur, dividiert durch die Zeitspanne t_1 .

Nach einer Zeit vom Beginn der Heizung, die gleich der Zeitkonstante ist, beträgt der mittlere Wirkungsgrad des Ofens nur noch 63,2% des elektrischen, nach zwei Zeitkonstanten 43,25% und nach drei 31,66% des elektrischen Wirkungsgrades. Beim Beginn der Heizung ist der mittlere Wirkungsgrad gleich dem elektrischen.

Diese Näherungsrechnungen sollen die Bedeutung des thermischen Verhaltens des Ofens für den mittleren erreichbaren Wirkungsgrad hervorheben. Nach ihnen dürfte ein Ofen für ein Schmelzgut das bei einer Temperatur schmilzt, die höher liegt als 95% der Höchsttemperatur die es erreichen kann, m. a. W. dessen Schmelztemperatur nicht in drei Zeitkonstanten erreichbar ist, keinen wirtschaftlich zulässigen Wirkungsgrad haben: Öfen die bei Normalstrom das Schmelzgut kaum zum Schmelzen bringen sind wirtschaftlich nicht vorteilhaft (für das betreffende Schmelzmetall).

Die Zeitkonstante eines Ofens hängt vom Schmelzmetall ab, wie man aus (93) ersieht. Das bedeutet folgendes: Wird einem Kern eine gewisse Wärmemenge je Zeiteinheit zugeführt, so erreicht er in einer vom Ofen und Schmelzgut, nicht aber von der zugeführten Wärmemenge abhängigen Zeit einen gegebenen Prozentsatz der bei dieser Wärmezufuhr höchsten, erreichbaren Temperatur. Nur die höchste erreichbare Temperatur hängt von der Wärmezufuhr ab.

Um sich einen Begriff zu machen von der Grössenordnung der Zeitkonstante, sei sie für ein Schmelzgut aus Kupfer: $c = 0,39$ Joule/ g $^{\circ}C$ von Zylinderform, mit $L = 9$ cm und $a = 3,3$ cm bei einer Wärmeabgabekostante von $\nu = 6 \times 10^{-3}$ Watt/ cm^2 $^{\circ}C$ berechnet.

Das Volumen des Gutes ist: $V \cong 340$ cm^3 , das Gewicht $G = \gamma V = 8,9 \times 340$ g und die Oberfläche $F = 294$ cm^2 . Die Zeitkonstante ist:

$$\theta = \frac{c \gamma V}{\nu F} = \frac{0,39 \times 8,9 \times 340}{6 \times 10^{-3} \times 294} = 670 \text{ sek} \cong 11 \text{ Minuten}$$

Wird es in drei Zeitkonstanten $= 3 \times 11 = 33$ Minuten geschmolzen, so hat dabei der Ofen einen mittleren Wirkungsgrad, der 31,66% seines elektrischen Wirkungsgrades beträgt. Die Grösse ν hängt vom Tiegelmaterial und seiner Dicke ab.

V. Kapitel.

Allgemeines Verhalten und Vorausberechnung eisenloser Induktionsöfen.

Um das elektromagnetische und das thermische Verhalten eines Ofens zu überblicken, schreibe ich die abgeleiteten Formeln zusammen.

Ich habe folgende Bezeichnungen eingeführt:

Es sind R_{s_e} und R_{s_u} die auf den Spulenstrom bezogenen Widerstände des kurzen Kerns und Spule, R_{z_u} und R_{s_u} die gleichen Grössen bei unendlich langem Ofen. Der Widerstand R_{z_e} enthält implizit auch den Kopplungsfaktor.

X_{z_e} , X_{z_u} und X_{s_e} , X_{s_u} sind die auf den Spulenstrom bezogenen Reaktanzen des Kerns und der Spule bei endlicher und unendlicher Länge, wobei X_{z_e} implizit den Kopplungskoeffizienten und den Einfluss der Felddeformation (in magnetischer Hinsicht) wegen der Kürze des Heizkörpers enthält.

Ist R_0 und X_0 der auf den Spulenstrom bezogene Widerstand und Reaktanz des Ofens, so gilt einfach:

$$(97) \quad R_0 = R_s + R_z \quad ; \quad X_0 = X_s - X_z$$

wo noch die Indizes e oder u hinzukommen, je nachdem ob es sich um den kurzen oder unendlich langen Ofen handelt.

R'_1 und X'_1 bedeuten den Widerstand und die innere Reaktanz die der Spulendraht besässe, wenn er in seiner ganzen Länge geradlinig ausgestreckt wäre.

Es ist k_f der in (67) angeschriebene Formfaktor des kurzen Heizkörpers im homogenen Felde der Spule, k_d der aus (91) folgende Faktor der Felddeformation und k_n der Nagaokasche Faktor der Reaktanz der kurzen Spule.

Ferner sind vier h -Faktoren eingeführt worden, die mathematisch nicht fassbar sind und mit Hilfe von graphischen Darstellungen zu ermitteln sind — nämlich h_f und h , von denen der erste das Verhältnis des quadratischen Mittelwertes der axialen, von der leeren, kurzen Spule erzeugten magnetischen Feldstärke, genommen über die Kernoberfläche, zur gleichen Grösse in der vom gleichen Strome durchflossenen unendlich langen Spule darstellt und der zweite denselben Ausdruck für die Spulenoberfläche beim effektiven Halbmesser während h_v dasselbe quadratische Mittelwertverhältnis, genommen über das Volumen des Heizkörpers, angibt. h_e ist dasselbe Verhältnis an der Kernkante.

Ich rechne nun im technischen Masssystem.

Mit diesen Bezeichnungen erhält man folgende Formeln:

$$(98) \quad R_{z u} > R_{z e} > R_{z u} \left(\frac{1 + \frac{h_e}{h_f} (k_f - 1)}{k_f} \right)$$

$$(99) \quad R_{s e} = h \cdot R_{s u} + (1 - h) R'_1 \quad \text{bei } \gamma b' \ll 1$$

$$(100) \quad X_{z e} = k_d \cdot h_v X_{a s u} - k_f \cdot h_f \cdot X_{i s u}$$

$$(101) \quad X_{s e} = k_n X_{a s u} + h X_{i s u} + (1 - h) X'_1$$

wo die Indizes a und i die äussere und innere Reaktanz bezeichnen. Dabei wurde die obere Grenze für die innere Reaktanz benützt. Da sie klein ist, verglichen mit $X_{a s e}$, kommt es auf diese Ungenauigkeit nicht an. Ist der Ofen unendlich lang, so wird:

$$k_n = k_f = k_d = h = h_f = h_v = h_e = 1.$$

die Grössen R'_1 und X'_1 fallen aus den Formeln heraus, und man erhält die im ersten Kapitel abgeleiteten Formeln. Für den kurzen Ofen sind die Grössen k_n , h , h_f und h_v kleiner, k_f und k_d grösser als eins.

In den Formeln (98), (99), (100) und (101) ist:

$$(102) \quad R_{z u} = 2 \pi L \varrho w^2 \alpha a \frac{\text{ber } \alpha a \text{ bei}' \alpha a + \text{bei } \alpha a \text{ ber}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a} \text{ Ohm.}$$

$$(103) \quad R_{s u} = 2 \pi L_1 \varrho_1 w^2 \gamma a_1 \left[\frac{\sin 2 \gamma b + \sin 2 \gamma b}{\cos 2 \gamma b - \cos 2 \gamma b} + \frac{1}{\gamma a_1} \right] \cdot \frac{1}{k_c} \cdot \text{Ohm.}$$

$$(104) \quad X_{a z u} = 4 \pi^2 a^2 L w^2 \cdot \omega \cdot \mu \cdot 10^{-9} \text{ Ohm.}$$

$$(105) \quad X_{i z u} = \mu 4 \pi^2 a^2 L \cdot w^2 \omega \frac{2 \text{ber } \alpha a \text{ bei}' \alpha a - \text{bei } \alpha a \text{ ber}' \alpha a}{\alpha a (\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a)} \cdot 10^{-9} \text{ Ohm.}$$

$$(106) \quad X_{a s u} = 4 \pi^2 a_1^2 L_1 \cdot w^2 \omega \cdot 10^{-9} \text{ Ohm.}$$

$$(107) \quad X_{i s u} = 4 \pi^2 a_1^2 \cdot L_1 \cdot w^2 \cdot \omega \left[\frac{1}{\gamma a_1} \frac{\sin 2 \gamma b - \sin 2 \gamma b}{\cos 2 \gamma b - \cos 2 \gamma b} \right] 10^{-9} \text{ Ohm.}$$

$$(108) \quad R'_1 = \frac{2 \pi a_m L_1 w^2 \varrho}{k_c b} \left(\frac{z b}{4} \right) \frac{\text{ber } z \frac{b}{2} \text{ bei}' z \frac{b}{2} - \text{bei } z \frac{b}{2} \text{ ber}' z \frac{b}{2}}{\text{ber}^2 z \frac{b}{2} + \text{bei}^2 z \frac{b}{2}} \text{ Ohm.}$$

$$(109) \quad X'_1 = \frac{2 \pi a_m L_1 w^2 \varrho}{k_c b} \left(\frac{z b}{4} \right) \frac{\text{ber } z \frac{b}{2} \text{ ber}' z \frac{b}{2} + \text{bei } z \frac{b}{2} \text{ bei}' z \frac{b}{2}}{\text{ber}^2 z \frac{b}{2} + \text{bei}^2 z \frac{b}{2}} 10^{-9} \text{ Ohm.}$$

Die Formeln (108) und (109) gelten für rechteckigen Draht. Ist er rund, so sind die rechten Seiten mit dem Faktor:

$$(110) \quad S = \frac{4 k_c}{\pi \cdot b \cdot w}$$

zu multiplizieren und b als Durchmesser zu betrachten.

Bei ausgeprägter Hautwirkung hat der Formfaktor den Wert :

$$(110) \quad k_f = 1 + \frac{8 a}{\pi L} \ln \varphi$$

und der Faktor der Felddeformation durch den kurzen Kern :

$$(111) \quad k_d = \frac{4 a}{\pi L} \cdot p_l.$$

Ferner ist, nach Nagaoka :

$$(112) \quad k_n = 1 - \frac{8 a'_1}{3 \pi L_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{|2k| \cdot |2k+2|}{|k| \cdot |k+2| \cdot (|k+1|)^2 \cdot 2^{4k+3}}}{\left(\frac{2 a'_1}{L_1}\right)^{2k+2}}$$

und h , h_f , h_v sind die erwähnten, hier nicht mathematisch gefassten Mittelwertfaktoren.

In den Formeln (102) ÷ (111) wurden folgende Bezeichnungen und Abkürzungen benützt.

$$(113) \quad \alpha = \sqrt{\frac{4 \pi \mu \omega}{\varrho} 10^{-9}} \quad (\varrho : \text{Ohm. cm.})$$

$$(114) \quad \gamma = \sqrt{\frac{2 \pi \omega}{\varrho_1} k_c 10^{-9}} \quad (\varrho_1 : \text{Ohm. cm.})$$

$$(115) \quad \kappa = \sqrt{\frac{4 \pi \omega}{\varrho_1} 10^{-9}} \quad (\varrho_1 : \text{Ohm. cm.})$$

In dem Formfaktor (110) ist die Bezeichnung :

$$(115) \quad \varphi = \sqrt{1 + p_l} + \sqrt{p_l}$$

benützt worden, wo p_l die positive Lösung der folgenden Gleichung ist :

$$(116) \quad \frac{\pi L}{4 a} = \sqrt{p^2 + p} - \ln(\sqrt{1 + p} + \sqrt{p})$$

die Wurzelausdrücke positiv gerechnet.

Es wurde noch der mittlere Halbmesser der Spule mit a_m bezeichnet :

$$(117) \quad a_m = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

und ihr effektiver Halbmesser mit a'_1 :

$$(118) \quad a'_1 = a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1$$

wo :

$$(119) \quad \epsilon_1 = \frac{1}{\gamma}$$

die Eindringtiefe der elektromagnetischen Vorgänge in das Innere des Spulen-
kupfers ist.

Die Ausdrücke für den Leistungsfaktor $\cos \varphi$, den elektrischen, thermi-
schen und mittleren Wirkungsgrad über die Zeitspanne t_1 vom Beginn der
Heizung sind :

$$(120) \quad \cos \varphi = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + X_0^2}}$$

$$(121) \quad \eta_e = \frac{1}{1 + \frac{R_{s,e}}{R_{s,e}}}$$

$$(122) \quad \eta_t = e^{-\frac{t}{\theta}}$$

und, bei ungefähr konstantem elektrischen Wirkungsgrad :

$$(123) \quad \eta_m = \eta_e \frac{\theta}{t_1} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\theta}} \right) = \frac{\theta \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\theta}} \right)}{t_1 \left(1 + \frac{R_{s,e}}{R_{s,e}} \right)}$$

wo die mittlere Zeitkonstante des Ofens mit :

$$(124) \quad \theta = \frac{c G}{\nu F} = \frac{c \delta}{\nu} \cdot \frac{V}{F}$$

bezeichnet wurde.

Ferner sind :

$$(125): c; \quad (126): \delta; \quad (127): \nu; \quad (128): V; \quad (129): F.$$

die spezifische Wärme, das spezifische Gewicht, die Konstante der Wärme-
abführung, das Volumen und die Oberfläche des Heizkörpers. Die Gleichun-
gen für η_t und η_m sind einfache Näherungen.

A.) Allgemeines Verhalten des Ofens. Um die Vorgänge im Ofen
überblicken zu können, benützt man für grosse Argumente die asymptotischen
Werte und für kleine Argumente die ersten Glieder der Reihenentwicklungen
der in den Formeln auftretenden Funktionen.

Den Widerstand des Kerns kann man schreiben (es soll die obere Grenze
benützt werden).

$$(130) \quad R_{s,e} = k_f h_f 2 \pi L \rho w^2 \cdot F_{1,r}(\alpha a) \text{ Ohm.}$$

wo $F_{1,r}(\alpha a)$ durch Vergleich mit (98) und (102) folgt. Ihr asymptotischer
Wert ist :

$$(131) \quad F_{1,r}(\alpha a) \cong \frac{\alpha a}{\sqrt{2}}$$

und für kleines Argument kann man schreiben ($\alpha a < 1$):

$$(132) \quad F_{1r}(\alpha a) \cong \frac{(\alpha a)^4}{16}$$

wie man sich leicht durch benützen der bekannten Darstellungen (Z. B. Jahnke-Emde) überzeugen kann. Will man für k_f in (130) den von mir abgeleiteten Formfaktor benützen, so muss man sich auf grosse Werte des Argumentes (αa) beschränken, und man erhält:

$$(130') \quad R_{ze} = k_f \cdot h_f \cdot 4 \pi^2 L w^2 \cdot a \sqrt{\mu \rho f 10^{-9}} \text{ Ohm.}$$

Diese Darstellung ist für $\alpha a = 5$ mit 14% und für $\alpha a = 8$ mit 9% zu gross.

Für das unendlich lange Schmelzgut ist $k_f \cdot h_f = 1$ und die Joulesche Leistung ist proportional der Länge, dem Durchmesser, dem Quadrat der Windungszahl pro Längeneinheit und der Quadratwurzel der Frequenz, dem spezifischen Widerstand und der Permeabilität. Wird z. B. die Frequenz verdoppelt, so wächst die Wärme mit 41%. Wird ein schlechterer Leiter als Einsatz gewählt, so wächst die Joule Leistung im Schmelzgut, wenn die Bedingung ausgeprägter Hautwirkung noch erfüllt ist. Bei mittleren Frequenzen ist die Formel (130') ungenau. Man kann die Werte der Funktion:

$$(130'') \quad F_r(\alpha a) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha a} F_{1r}(\alpha a) = \sqrt{2} \frac{\text{ber } \alpha a \text{ ber}' \alpha a + \text{bei } \alpha a \text{ bei}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a}$$

aus der Kurve I. der Fig. 9. durch Benützen des linken Masstabs für die Or-

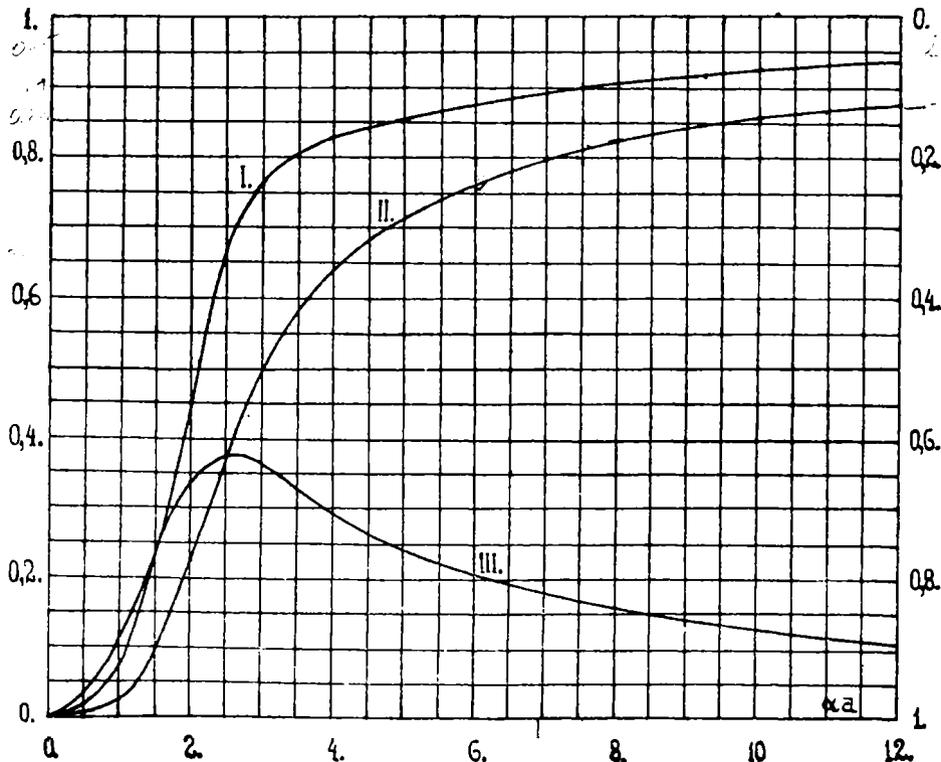


Fig. 9. Widerstand und Reaktanz des Kerns.

dinaten ablesen. Die Joulesche Leistung im Schmelzgut sinkt also schneller, als die Quadratwurzel aus der Frequenz, wenn man diese herabsetzt.

Nehmen wir das Schmelzgut als kurz, die Spule vorläufig noch als lang an, so ist in (130) $h_f > 1$ und $k_f > 1$. Es soll der Einfluss der Kürze auf die aufgenommene Joulesche Leistung untersucht werden.

Der Formfaktor k_f setzt sich aus zwei Summanden zusammen. Das erste Glied gibt die Verhältnisse im unendlich langen Schmelzgut wieder. Das zweite berücksichtigt die endliche Länge, und es ist proportional mit:

$$\ln \varphi = \ln(\sqrt{1 + p_l} + \sqrt{p_l})$$

Um nicht jedesmal bei den Vorausberechnungen die Gleichung (121) lösen zu müssen, habe ich die Lösungen p_l in Funktion von:

$$m = \frac{\pi l}{2 a} = \frac{\pi L}{4 a}$$

— für die in der Praxis vorkommenden Verhältnisse von $\frac{L}{a}$ — ermittelt und in eine Tabelle eingetragen.

Ferner habe ich die Grössen

$$\frac{8 a}{\pi L} \ln \varphi \quad ; \quad k_f = 1 + \frac{8 a}{\pi L} \ln \varphi \quad \text{und} \quad k_d = \frac{4 a}{\pi L} p_l$$

in die Tabelle aufgenommen.

Der Gang der Rechnung war der folgende: Der kleinste Wert der Wurzel p_l der Gleichung:

$$\frac{\pi L}{4 a} = m = \sqrt{p^2 + p} - \ln(\sqrt{1 + p} + \sqrt{p})$$

ist nach der Ungleichung (63) grösser als:

$$m = \frac{\pi L}{4 a}$$

Setzt man diesen Wert in das Argument des Logarithmus ein, so erhält man eine Gleichung zweiten Grades in p , deren Lösung

$$p = \sqrt{(m + \ln \varphi)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

lautet.

Man erhält damit eine zweite Näherung für den Wert der Wurzel. Wiederholt man einige Male das Verfahren, so wächst bei den sukzessiven Ermittlungen der Wert von p kaum noch und kann als endgültige Lösung der transzendenten Gleichung betrachtet werden.

Auf der nächsten Seite findet man die Tabelle der Lösungen und der Ausdrücke:

$$\frac{l}{a} = \frac{L}{2 a} = \frac{2}{\pi} m \quad ; \quad \frac{4 a}{\pi L} p_l = \frac{p_l}{m} \quad ; \quad \ln \varphi \quad ; \quad \frac{2}{m} \ln \varphi \quad ; \quad \text{und} \quad k_f = 1 + \frac{2}{m} \ln \varphi$$

In Fig. 10 sind diese Grössen graphisch dargestellt worden:
Die Abszissen stellen die Werte:

$$m = \frac{\pi L}{4 a}$$

dar. Die Kurve I. mit den links eingetragenen Ordinatenwerten von $0 \div 7$ stellt die Grösse p_l dar; die Kurve II. mit den linken Ordinatenwerten von $0,5 \div 1,9$ die Grösse:

$$\ln \varphi,$$

die Kurve III mit den rechts eingetragenen Ordinatenwerten, in einer leicht zu lesenden Weise den Formfaktor:

$$k_f = 1 + \frac{8 a}{\pi L} \ln \varphi = 1 + \frac{2}{m} \ln \varphi$$

und die Kurve IV. mit den rechten Ordinatenwerten $1 \div 2,4$ den Faktor, der den Einfluss der Deformation des Feldes auf die Reaktanz des Schmelzgutes berücksichtigt:

$$k_d = \left(\frac{4 a}{\pi L} p_l \right) = \frac{p_l}{m}.$$

Formfaktor k_f u. Felddeformationsfaktor k_d für den kurzen Heizkörper.

m	$\frac{L}{2 a}$	p_l	$\ln \varphi$	$\frac{2}{m} \ln \varphi$	$k_f = 1 + \frac{8 a}{\pi L} \ln \varphi$	$k_d = \frac{4 a}{\pi L} p_l$
0,25	0,1595	0,5677	0,6935	5,578	6,578	2,244
0,50	0,3189	0,9500	0,8635	3,453	4,454	1,900
0,75	0,478	1,2724	0,9691	2,578	3,578	1,696
1,00	0,637	1,619	1,0613	2,1226	3,1226	1,619
1,25	0,796	1,933	1,1324	1,8112	2,8112	1,546
1,50	0,955	2,234	1,1915	1,5842	2,5847	1,488
1,75	1,115	2,550	1,2473	1,4234	2,4234	1,457
2,00	1,274	2,83	1,2910	1,2910	2,291	1,425
2,25	1,433	3,115	1,3330	1,1850	2,185	1,384
2,50	1,595	3,400	1,3714	1,0970	2,097	1,360
2,75	1,750	3,680	1,4110	1,026	2,026	1,341
3,00	1,910	3,965	1,4393	0,958	1,958	1,3236
3,25	2,075	4,246	1,4708	0,906	1,906	1,306
3,50	2,230	4,52	1,4995	0,857	1,858	1,290
3,75	2,390	4,80	1,5256	0,8146	1,8146	1,280
4,00	2,548	5,072	1,550	0,775	1,775	1,268
4,25	2,71	5,364	1,5749	0,742	1,742	1,257
4,50	2,87	5,618	1,5977	0,7095	1,7095	1,248
4,75	3,03	5,89	1,6198	0,682	1,682	1,240
5,00	3,18	6,158	1,6401	0,656	1,656	1,232
5,50	3,50	6,688	1,6787	0,611	1,611	1,216
6,00	3,82	7,231	1,7152	0,5717	1,572	1,205

Die Figur ist übersichtlicher als die Tabelle. Die „Wurzel“ ρ wächst ungefähr linear mit:

$$m = \frac{\pi L}{4 a}$$

Es ist aber nicht möglich, diese Abhängigkeit durch eine lineare Gleichung auszudrücken und für ein genügend grosses Intervall von m zu genauen Ergebnissen zu gelangen. Ich werde deshalb von dieser Möglichkeit absehen.

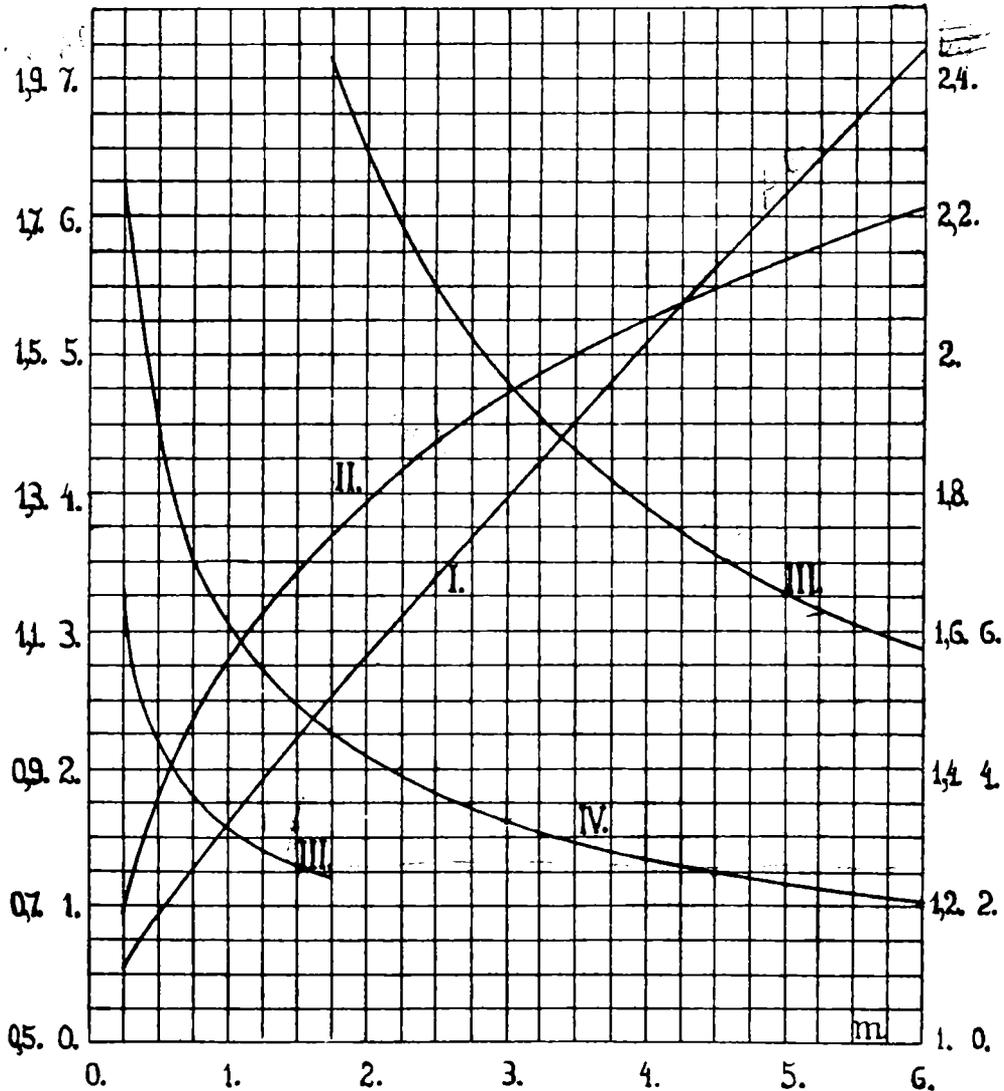


Fig. 10. Formfaktor und Felddeformationsfaktor des Kerns.

Da ρ weniger als proportional mit m wächst, wird $\ln \varphi$ eine nach oben konvexe Kurve II sein; der Formfaktor k_f sinkt mit wachsendem Verhältnis

$\frac{L}{a}$, wie es von vornherein zu ersehen war.

In der Praxis übertrifft die Länge des Schmelzgutes bei Grossöfen kaum seinen Durchmesser. Es sei deshalb der Wert des Formfaktors für diese Verhältnisse hervorgehoben.

Setzt man

$$L = 2 a$$

so wird die Grösse m :

$$m = \frac{\pi L}{4 a} = \frac{\pi}{2} \cong 1,57$$

Den zugehörigen Wert von k_f kann man aus der Fig. 10 ablesen, oder aus der Tabelle Seite 61 berechnen.

Wenn man die Interpolation zwischen den Werten

$$\begin{array}{ccc} m = 1,5 & \text{und} & m = 1,75 \\ k_f = 2,5847 & & k_f = 2,4234 \end{array}$$

ausführt, wird der Formfaktor

$$k_f = 2,53.$$

Die Abweichung von dem Widerstand eines gleichlangen Teils des unendlich langen Zylinder beträgt 153%! Die Berechnung der Jouleschen Leistung mit Hilfe der Formeln für das unendlich lange Schmelzgut ist unzulässig. Rechnet man mit dem oberen Grenzwert für den Widerstand, so wird die Kürze der Spule durch Multiplikation mit dem quadratischen Mittelwertfaktor h_f berücksichtigt. Die Wärme ist also kleiner als für das Schmelzgut in der unendlich langen Spule, da $h_f < 1$. (Es könnte der Fall eintreten, dass die Beziehung besteht $k_f h_f = 1$ und die Formeln für das unendlich lange Schmelzgut würden etwa richtige Werte liefern; doch wäre das ein Zufall.) Um die Streuung zu verringern ist man bestrebt, einen möglichst grossen Teil des Inneren der Spule mit dem Schmelzgut auszufüllen, d. h. einen möglichst grossen Faktor h_f zu erhalten, denn h_f ist für zylindrische Flächen mit grossem Durchmesser grösser als für solche mit kleinem. Es wird also bei guten Öfen im allgemeinen $k_f h_f > 1$ sein; auch im Schmelzgut in der kurzen Spule wird man eine grössere Wärmeentwicklung haben als in einem gleichlangen Teil des unendlichen Kerns — wenn der Halbmesser des Kerns nicht klein ist im Vergleich mit demjenigen der Spule. Man erhält das gleiche Resultat, wenn man mit dem unteren Grenzwert von $R_{s, \infty}$ rechnet, wenn der Kern nicht allzulänglich ist.

Es soll nun der Widerstand der Spule betrachtet werden. Ist sie unendlich lang, so hat man für die Länge L :

$$(134) \quad R_{s, \infty} = 2 \pi L_1 \rho_1 w^2 \cdot I_r (\gamma a_1) \frac{1}{k_c} \text{ Ohm.}$$

wo $I_r (\gamma a_1)$ durch Vergleich mit (103) bestimmt werden kann. Für grosses

Argument kann man für $\Gamma_r(\gamma a_1)$ ihren asymptotischen Wert benutzen:

$$\Gamma_r(\gamma a_1) \cong \gamma a_1 + 1$$

oder, wenn man 1 im Vergleich mit γa vernachlässigt:

$$\Gamma_r(\gamma a_1) \cong \gamma a_1$$

und man erhält eine einfachere Formel für den Wechselstromwiderstand der Spule bei ausgeprägter Hautwirkung:

$$(134') \quad R_{s,u} = 4 \pi^2 L_1 w^2 a_1 \sqrt{\mu_1 \varrho_1 f \cdot \frac{1}{k_c} 10^{-9}} \text{ Ohm.}$$

Der Vergleich mit (130') lehrt, dass die Abhängigkeit des Spulenwiderstandes von den Abmessungen, der Windungszahl je Längeneinheit, der Frequenz und ϱ_1 die gleiche ist wie bei dem Schmelzgut; es tritt der Innendurchmesser der Spule statt des Aussendurchmessers des Kerns und die Wurzel des Kupferfüllfaktors hinzu. Die Formeln (134) und (134') gelten für rechteckiges Spulenkupfer. (Ist es rund, wie das bei wassergekühlten Spulen vorkommen kann, so tritt, nach einer Bemerkung von Sommerfeld, noch der Faktor 0,58 hinzu.)

Den Einfluss der Kürze auf den Spulenwiderstand gibt die Formel (99) für $\gamma b' \ll 1$. Der Widerstand bei unendlicher Länge wird mit einem Faktor h multipliziert, der kleiner als die Einheit ist; es wird dazu das Produkt aus $(1-h)$ und dem Wechselstromwiderstand bei ausgestrecktem Spulenkupfer addiert. Da dieses zweite Glied nicht die Differenz $(1-h) R_{s,u}$ kompensiert, wird man bei kurzer Spule einen kleineren Widerstand erwarten als bei dem gleichlangen Teil einer unendlichen Spule, falls $\gamma b' \ll 1$ ist.

Die Reaktanz des Schmelzgutes kann man schreiben:

$$(135) \quad X_{z,e} = \mu 4 \pi^2 a^2 L w^2 \omega [k_d h_v - k_f h_f F_i(\alpha a)] 10^{-9} \text{ Ohm.}$$

Die Funktion $F_i(\alpha a)$ kann durch Vergleich mit (100), (104) und (105) bestimmt werden. Für das unendlich lange Schmelzgut sind die k - und h -Faktoren eins und man erhält:

$$(135') \quad X_{z,u} = \mu 4 \pi^2 a^2 L w^2 \omega [1 - F_i(\alpha a)] 10^{-9} \text{ Ohm,}$$

Liest man die rechts eingetragenen Ordinatenwerte, so stellt die Kurve II. in Fig 9 die Funktion

$$F_i(\alpha a) = \frac{2}{\alpha a} \frac{\text{ber } \alpha a \text{ bei}' \alpha a - \text{bei } \alpha a \text{ ber}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a}$$

dar; liest man die links eingetragenen Ordinatenwerte, so stellt dieselbe Kurve die Funktion

$$[1 - F_i(\alpha a)]$$

dar, die in der Reaktanz (135') vorkommt.

Für ausgeprägte Hautwirkung kann man mit einer Genauigkeit, die aus Fig. 9 zu ermitteln ist, die Funktion $F_i(\alpha a)$ durch ihren asymptotischen

$F_i(\alpha a) \approx \frac{\sqrt{2}}{\alpha a}$

Ausdruck ersetzen:

Man kann nämlich den asymptotischen Ausdruck für $F_i(\alpha a)$ in Fig. 9. eintragen und die Differenzen ablesen. Für $(\alpha a) > 3$ sind sie vernachlässigbar und man erhält

$$X_{s.} = 4 \pi^2 \alpha^2 L w^2 \omega \mu \left[k_d h_v - k_d h_f \frac{\sqrt{2}}{\alpha a} \right] 10^{-9} \text{ Ohm.}$$

Der Einfluss der inneren Reaktanz sinkt mit wachsendem Argument αa . Um die Abhängigkeit der äusseren Reaktanz von der Form des Schmelzgutes, bei unendlich langer Spule, zu untersuchen, braucht man den Verlauf des Faktors k_d der Deformation des Feldes in Funktion von m :

$$k_d = \frac{4 a}{\pi L} p_l$$

wo p_l die Lösung der Gleichung (121) ist.

Die Werte k_d sind in der Tabelle Seite 56 eingetragen und in Fig. 10, Kurve IV, bezogen auf die rechten Ordinatenwerte $(1 \div 2,4)$ graphisch dargestellt. Die zugehörigen Abszissenwerte sind:

$$m = \frac{\pi L}{4 a}$$

Der Reaktanzfaktor k_d sinkt mit wachsendem m . Er hat z. B. für $L = 2 a$ also $m = 1,57$ den Wert:

$$k_d = 1,479.$$

Er ist kleiner als der entsprechende Formfaktor für den Widerstand, und das gilt für jeden Wert von m . Für grosses Argument m strebt k_d gegen eins.

Bei kurzer Spule tritt noch der Faktor h_v hinzu und es können Fälle eintreten, in denen $k_d h_v < 1$ ist. Die scheinbare Reaktanz des Heizkörpers ist nicht kleiner als diejenige eines gleich langen Teils aus dem unendlich langen Zylinder, aber h_v ist für gewöhnliche Verhältnisse eine kleine Grösse.

Für $L = 2 a$ schwankt h_v bei einer Spule, die etwas länger ist als ihr Durchmesser und gut mit Schmelzmetall ausgefüllt ist (d. h. für einen nicht zu dicken Tiegel) um den Wert:

$$h_v = 0,6$$

Für grosses Argument $2 \gamma b$ kann man den Klammerausdruck in (107) durch

$$\frac{1}{\gamma a_1}$$

approximieren und man erhält für die Reaktanz:

$$(136) \quad X_{s,e} = k_n 4 \pi^2 a_1'^2 L_1 w^2 \omega \left[1 + \frac{h}{k_n} \frac{1}{\gamma a_1} + \frac{1-h}{k_n} X_1' \right] 10^{-9} \text{ Ohm.}$$

Die innere Reaktanz und die Reaktanz des ausgestreckten Spulenkupfers sind klein im Vergleich zur äusseren. Das erste Glied in (101) oder (136) wird ausschlaggebend und es folgt, dass die kurze Spule einen kleineren Blindwiderstand besitzt als ein gleichlanger Teil der unendlichen Spule, denn k_n ist kleiner als eins.

(Die in (108) und (109) auftretenden Funktionen sind z. B. in Jahnke-Ende: Funktionentafeln S. 146—147 tabelliert.)

B) Der Wirkungsgrad und der Leistungsfaktor. Das allgemeine, in diesem Abschnitt gewonnene Resultat, das über den Wirkungsgrad und den Leistungsfaktor Aufschluss gibt ist folgendes: Bei kurzem Ofen ist der Widerstand und die Reaktanz der Spule kleiner als für einen gleichlangen Teil der unendlichen falls $\gamma b' \ll 1$ ist — der Widerstand des Heizkörpers ist grösser als der eines gleichlangen Teils des unendlichen und seine Reaktanz schwankt um den Wert den sie beim gleichlangen Teil des unendlichen Schmelzgutes hätte; sie wird in vielen Fällen etwas kleiner. Man kann daraus folgenden Schluss ziehen, der für hohe Frequenzen gilt falls $\gamma b' \ll 1$:

Der kurze Ofen hat bei gut mit Metall ausgefüllter Spule einen *grösseren* elektrischen Wirkungsgrad als der lange; sein Leistungsfaktor ist *grösser* als derjenige des langen Ofens bei η_e gross, *kleiner*, bei kleinem Wirkungsgrad η_e .

Man kann das auch aus den Gleichungen sehen.

Es ist bei ausgeprägter Hautwirkung:

$$(137) \quad \eta_e = \frac{1}{1 + \frac{h \cdot 4 \pi^2 L_1 w^2 a_1 \sqrt{10^{-9} \rho_1} f / k_c + (1-h) R_1'}{k_f h_f \cdot 4 \pi^2 L w^2 a \sqrt{10^{-9} \mu \rho} f.}}$$

Für den unendlich langen Ofen ist $h = h_f = k_f = 1$ und man erhält

$$(137') \quad \eta_e = \frac{1}{1 + \frac{a_1 L_1}{a L} \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu \rho} \cdot \frac{1}{k_c}}}$$

Da $h < k_f h_f$ ist, wenn das Schmelzgut einen hinreichend grossen Durchmesser hat, und das Glied $(1-h) R_1'$ keinen wesentlichen Einfluss hat, folgt, dass der Wirkungsgrad beim kurzem Ofen grösser ist als beim langen, wenn man nur die elektrischen Vorgänge berücksichtigt und $\gamma b \ll 1$ voraussetzt.

Den Leistungsfaktor kann man bei ausgeprägter Hautwirkung schreiben:

$$(138) \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \pi^2 f \left[\frac{L a^2 \left(k_d h_v - \sqrt{2} k_f h_f \frac{1}{a a} \right) + L_1 a_1^2 \left(k_n + \frac{h}{\gamma a_1} \right)}{L a k_f h_f \sqrt{\mu \rho} 10^{-9} + h \cdot L_1 a_1 \cdot \sqrt{\frac{10^{-9} \rho_1}{k_c}}} \right]^2}}$$

Der Wirkungsgrad und der Leistungsfaktor schwanken in weiten Grenzen wenn man statt der Näherungsdarstellungen auf die genauen Ausdrücke zurückgreift (oder die graphischen Darstellungen benützt). Der Widerstand des Schmelzgutes ist Null für $f=0$, derjenige der Spule ist gleich ihrem Gleichstromwiderstand: Der Wirkungsgrad ist null. — Steigt die Frequenz so steigt auch der Widerstand $R_{s,e}$ sehr rasch; der Wirkungsgrad nimmt zu. Für sehr hohe Frequenzen strebt er einem Grenzwerte zu, der in (137') angegeben ist. Der Leistungsfaktor ist $\cos \varphi = 1$ für $f=0$ und $\cos \varphi = 0$ für $f = \infty$. Der Wirkungsgrad hat die Form einer Magnetisierungskurve, der Leistungsfaktor die einer umgeklappten Magnetisierungskurve, die bei der Ordinate 1 beginnt und die Abszissenachse zur Asymptote hat: Es ist nicht möglich, gleichzeitig mit hohem Wirkungsgrad und hohem Leistungsfaktor zu arbeiten.

Will man einen hohen Wirkungsgrad erreichen, so muss man einen kleinen Leistungsfaktor in Kauf nehmen, den man für den Generator mit Kondensatoren, in Strom- oder Spannungsresonanz mit dem Ofen, verbessert. Die erforderliche Kapazität ist:

$$(139) \quad C = \frac{1}{\omega X_0}$$

Es wird in der Literatur die Frage aufgeworfen, wie der Wirkungsgrad mit dem spezifischen Widerstand des Schmelzgutes, oder seiner Unterteilung in kleinere Zylinder, mit der Höhe des Ofens und dem Querschnitt des Spulenkupfers variiert. Ich möchte hier auf diese Fragen nur insoweit eingehen, als es für die Vorausberechnung nötig ist und um den Einfluss der Kürze zu untersuchen.

Sucht man einen Schmelzkörper (also ein ϱ) für welchen, bei gegebenen Abmessungen, der Wirkungsgrad am grössten wird, so ist es zweckmässig die Gleichungen (98) und (102) so umzuformen, dass ϱ nur durch α in ihnen auftritt. Man hat zu setzen

$$\varrho = \frac{4 \pi \mu \omega}{\alpha^2} 10^{-9}$$

und erhält den oberen Grenzwert:

$$(140) \quad R_{s,e} = k_f h_f \cdot 8 \pi^2 L w^2 \mu \omega a^2 \left[\frac{1}{\alpha a} \frac{\text{ber } \alpha a \text{ber}' \alpha a + \text{bei } \alpha a \text{bei}' \alpha a}{\text{ber}^2 \alpha a + \text{bei}^2 \alpha a} \right] \text{ Ohm.}$$

Die in Klammern stehende Funktion von αa ist in Fig. 9 Kurve III, mit den links angeschriebenen Ordinatenwerten eingetragen. Da $R_{s,e}$ von ϱ nur noch mittels dieser Funktion abhängt, fällt das Maximum von $R_{s,e}$ bei variablem ϱ mit dem Maximum dieser Funktion zusammen. Ihr Maximum liegt bei

$$\alpha a = 2,514$$

und es folgt:

$$(141) \quad \rho_{opt} = \frac{8 \pi^2 \mu f a^2}{2,514^3} 10^{-9} = 1,253 \mu f a^2 \cdot 10^{-9} \text{ Ohm. cm.}$$

Das günstigste Schmelzmetall ist also von der Höhe des Ofens unabhängig.

Mit Hilfe der Darstellung (140) kann man auch die Frage beantworten, in wieviele Zylinder mit kleinerem Durchmesser man das Schmelzgut zerlegen kann, ohne den Gesamtwiderstand zu ändern. Nimmt man an, dass man nicht sehr nahe an dem günstigsten Punkte auf der Kurve III Fig. 9 arbeitet, so wird man das Schmelzgut in mehrere Zylinder zerlegen können, ohne den Widerstand zu ändern. Die Kurve III in Fig. 9 hat für je zwei Werte (αa) die gleichen Ordinaten. Die Funktion in der Klammer (104) ändert sich also nicht, wenn man bei gegebenem α , mit einem der entsprechenden a arbeitet. Ist der Ofen unendlich lang und füllt man den gleichen Querschnitt mit Zylindern von kleinerem Durchmesser, so wird er $\left(\frac{a'}{a''}\right)^2$ -mal so viele als mit dem grossen Durchmesser enthalten, wenn a'' der kleine, a' der grosse Halbmesser ist. Andererseits sinkt der Ausdruck (140) $\left(\frac{a'}{a''}\right)^2$ -mal da ausserhalb der Klammer a'^3 durch a''^3 ersetzt wird. Da es aber $\left(\frac{a'}{a''}\right)^2$ -mal so viel Zylinder gibt, ist ihr Gesamtwiderstand unverändert geblieben. Bei unendlich langem Ofen ist das Problem durch das Zeichnen einer Horizontalen in Fig. 9 gelöst. Diese Konstruktion gilt aber nicht mehr, wenn der Ofen kurz ist. Dann ist nämlich der Formfaktor des Schmelzgutes mit grossem Durchmesser viel grösser als derjenige der dünnen Zylinder. Sieht man von der Verkleinerung h_f , der als ein Mittel für die dünnen Zylinder durch h_v zu ersetzen wäre, ab, so kann man die Konstruktion folgendermassen abändern: Man nimmt den Formfaktor der dünnen Zylinder in erster Näherung zu 1 an, multipliziert also den Funktionswert der Klammer in (140) mit k_f , zieht in diesem Abstände in Fig. 9 die Horizontale und erhält den Durchmesser der kleinen Zylinder. Dabei ist k_f der Formfaktor des Schmelzgutes mit dem grossen Durchmesser. Die Durchmesser der dünnen Zylinder mit gleichem Widerstand sind beim kurzen Ofen *grösser* als beim langen. Das gilt auch wenn man mit dem unteren Grenwert für R_{se} rechnet.

Für $\alpha a' = 8,5$ hat die Kurve II. in Fig. 9 die Ordinate 1,5. Dieselbe Ordinate hat sie bei $\alpha a'' = 1,3$. Man kann also ein langes Schmelzgut, für welches man $\alpha a' = 8,5$ hat, in $\left(\frac{\alpha a'}{\alpha a''}\right)^2 = \left(\frac{8,5}{1,3}\right)^2 \cong 43$ Zylinder mit gleicher Länge zerlegen, ohne den Widerstand des Kerns zu ändern. Hat dasselbe Schmelzgut die Höhe so gross wie der Durchmesser, so ist sein Widerstand etwa 2,53mal so gross als der des langen. Man soll daher in Fig. 9 die Horizontale im Abstände $2,53 \times 1,5 = 3,8$ von der Abzissenachse ziehen, um den Halbmesser der gesuchten Zylinder zu erhalten. Sie geht durch das

Maximum der Kurve und das betreffende αa ist: $\alpha a = 2.51$. Die Zahl der Zylinder ist also auf $\left(\frac{8,5}{2.51}\right)^2 \cong 12$ gesunken. Die neuen Zylinder haben einen etwa

$$\frac{8,5}{2,51} \cong 3,5 \text{ mal}$$

kleineren Durchmesser als der ursprüngliche. Ihr $\frac{L}{2a}$ ist 3,5, und sie haben noch den Formfaktor 1,61 wie die Tabelle Seite 56 zeigt. Ihr Widerstand ist zu gross und man muss eine entsprechende Korrektur vornehmen. Nun scheint es, dass das Problem zwei Lösungen zulässt, nämlich eine, bei der der Durchmesser der Zylinder kleiner und eine, bei der er grösser ist als der eben ermittelte. Der letzte Durchmesser fällt aber notwendig mit dem ursprünglichen überein. Denkt man sich nämlich die Kurve III. für jedes (αa) mit dem entsprechenden, dem zu lösenden Problem gehörigen Formfaktor k_f multipliziert, so erhält man eine Kurve, in der das Teilungsproblem wieder durch ziehen von Horizontalen gelöst wird. Da aber der Formfaktor bei gegebenem L eine monotone Funktion von a ist, wird die neue Kurve von einer Horizontalen wieder nur in zwei Punkten geschnitten. Es ist aber möglich, durch geeignete Wahl der Längen der Heizkörper die Kurve III. für einen breiteren Bereich ihres sinkenden Teils merklich horizontal nach der Multiplikation mit k_f zu bringen, und es würden dann mehrere *Näherungslösungen* möglich sein.

Den Einfluss der Höhe des Schmelzgutes auf den Wirkungsgrad kann man aus (137) bestimmen. Vernachlässigt man das Glied: $(1-h)R'_1$ und rechnet mit dem oberen Grenzwert für R_{∞} , so wird:

$$(137'') \quad \eta_e = \frac{1}{1 + \frac{a_1 L_1}{a L} \cdot \frac{h}{k_f h_f} \sqrt{\frac{q_1}{\mu k_c \varrho}}}$$

Ist der Ofen lang, so hat man $h = k_f = h_f = 1$. Wird L *vergrössert* und alle anderen Grössen *beibehalten*, so wächst der elektrische Wirkungsgrad. Ist der Ofen kurz, so variieren auch die Grössen k_f und h_f mit L , und zwar sinkt k_f mit wachsendem L (bei festgehaltenem a). Das Produkt $(k_f L)$ wächst aber mit wachsendem L , denn es ist $\left(L + \frac{8a}{\pi} \ln \varphi\right)$ mal den Ordinaten der Kurve II. in Fig. 10 gleich. Die Grösse h_f sinkt mit wachsendem L , und zwar langsam, solange das Schmelzgut im Inneren der Spule ist ($L < L_1$) und sehr schnell, wenn es länger wird als die Spule. Das Produkt $k_f h_f L$ wird also mit L wachsen, solange das Schmelzgut kürzer ist als die Spule. Wird es länger, so gibt es ein von L_1 abhängiges L (in engen Grenzen auch von a_1 und a), für welches das Produkt $(k_f h_f L)$ ein Maximum aufweist und dann mit wachsendem L sinkt. Dieses L für den günstigsten Wirkungsgrad kann nur für jeden einzelnen Fall durch Benützen der obigen Kurven ermittelt werden, solange die Faktoren h , h_f , k_f nicht durch einfache Formeln approximiert werden können.

Ein von diesem verschiedenes Problem hat Ribaud experimentell untersucht¹⁾. Es wird die Länge des *Schmelzgutes konstant* gehalten, und die Höhe der *Spule variiert* bis der elektrische Wirkungsgrad das Maximum erreicht. Dieses Problem ist so zu fassen, dass man in (137'') die Grösse

$$\frac{h L_1}{h_f}$$

als Variable betrachtet und alle anderen konstant hält. Die Grösse $h L_1$ wächst mit L_1 , wie man aus Tabelle (79) ersieht. Die Grösse h_f , die sich auf das festgehaltene Schmelzgut bezieht, wächst auch mit L_1 und nämlich sehr schnell, solange $L_1 \ll L$ ist. Für $L_1 \ll L$ wächst h_f schneller als proportional mit L_1 und übertrifft auch $h L_1$ im prozentualen Wachsen, wie man sich das an der Fig. 7 klar machen kann. Ist also die Spule kurz: $L_1 \ll L$, so sinkt die Grösse $\frac{h L_1}{h_f}$ mit wachsendem L_1 und der Wirkungsgrad wächst. Für $L_1 \gg L$ ist h_f praktisch konstant, die Grösse $\frac{h L_1}{h_f}$ wächst mit L_1 und der elektrische Wirkungsgrad sinkt. Dazwischen muss ein Maximum liegen, das für ein *kürzeres* Schmelzgut als die Spule eintritt. Nach diesen Betrachtungen hängt die günstigste Länge der Spule bei ausgeprägtem Hauteffekt nur von den geometrischen Verhältnissen ab. Nun gibt Ribaud eine Abhängigkeit vom Schmelzmetall an, ein Umstand, der bei weniger ausgeprägtem Hauteffekt auftritt und mit der Verteilung der Stromdichte längs des Schmelzgutes zusammenhängt. (Siehe Seite 81.)

Die Breite b des Spulenkupfers wird praktisch etwas grösser sein, als die Grösse von der angefangen der Spulenwiderstand unabhängig von b ist.

Bei unendlich langer Spule hat der Spulenwiderstand ein Minimum bei:

$$(142) \quad 2 \gamma b = \pi$$

und steigt, für grössere Werte des Arguments nur wenig an, ist also praktisch unabhängig von b . Für den Wirkungsgrad ist es günstig

$$(142') \quad b \geq \frac{\pi}{2 \gamma} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho_1}{k_c f}} 10^9 \text{ cm.}$$

zu wählen. Für die kurze Spule liegt das Minimum des Spulenwiderstandes bei einem b , das grösser ist, als aus Gleichung (142) folgt.

C) Die Vorausberechnung der eisenlosen Induktionsöfen. Die in der Einleitung erwähnte Literatur enthält die Grundlagen für die Vorausberechnung der eisenlosen Induktionsöfen; meine Untersuchung bringt hierüber einige quantitative Erkenntnisse.

Das allgemeine Problem ist, für eine Menge Material, das auf eine gegebene Temperatur geheizt werden soll, den Ofen so vorzuberechnen, dass die Summe der Anschaffungskosten der dazu nötigen Anlagen und der

^{1) Lebeau: Fours électriques et chimie, Art. von Ribaud, S. 365—367.}

kapitalisierten laufenden Kosten ein Minimum wird; darin ist implizit auch der Wirkungsgrad enthalten. Für Laboratoriumszwecke spielt der wirtschaftliche Gesichtspunkt eine untergeordnete Rolle.

Ich setze sinusförmige Wechselspannung voraus.

Ist der Einsatz nicht flüssig, sondern aus Stücken festen Materials, wie das in allen Fällen des reinen Schmelzens vorkommt, so sind die Vorgänge nicht während des ganzen Verlaufs der Heizung mathematisch fassbar. Der Übergang von den Einsatzstücken zum flüssigen Bad wird sich nach einer mit III. Fig. 9 ähnlichen Kurve abspielen. Es liegen keine Untersuchungen vor, — auch nicht bei Einsatzstücken mit einer regelmässigen geometrischen Form, z. B. Schrott, — über den gegenseitigen Einfluss der Einsatzstücke, der das Ausbilden der Wirbelströme in den nahezu wagerechten Teilen ihrer Oberflächen verhindert und eine Verminderung der aufgenommenen Jouleschen Leistung bedingt im Vergleich mit der Summe der Leistungen, die auftreten würden, wenn sich jedes Einsatzstück allein im magnetischen Spulenfeld befände. Der Wert der Theorie des zylindrischen Schmelzgutes liegt darin, dass sie die Vorgänge im flüssigen Bade, also bei hohen Temperaturen, für welche der Gesamtwirkungsgrad sehr klein ist, vorauszusagen gestattet, und dass man für die Einsatzstücke einen Halbmesser a' angeben kann, bei dem sich die Vorgänge in erster Näherung durch die Formeln für den Zylinder beschreiben lassen; denn die übereinanderliegenden Teile verhindern das Auftreten sehr grosser Stromdichten an den Kanten zwischen wagerechten und senkrechten Flächen der Einsatzstücke und bedingen dadurch eine erste Ähnlichkeit der Vorgänge mit denen im zylindrischen Schmelzgut vom Halbmesser a' ; ferner lässt die Theorie des Formfaktors erkennen, dass die Joulesche Leistung im kurzen Kernzylinder aus derjenigen in dem gleichlangen Teile eines unendlichen Zylinders, bei hohen Frequenzen, durch Multiplikation mit einem von der Frequenz unabhängigen Faktor k_f erhalten wird und man kann beweisen, dass das auch für beliebige Formen der Stücke gilt, wenn die Hautwirkung ausgeprägt ist; das wird im wesentlichen in den Formeln (40) und (41) ausgesprochen.

Um nicht einen zu kleinen elektrischen und thermischen Wirkungsgrad zu erhalten, werden die Einsatzstücke vom Ersatzhalbmesser a' der Bedingung genügen müssen

$$(143) \quad (\alpha a') > (2,514 \div 3)$$

Der Wert 2,514 von $(\alpha a')$ gibt das Maximum der Kurve III. in Fig. 9 und er soll nicht unterschritten werden, denn der Gesamtwirkungsgrad würde, wegen einer erheblichen damit verbundenen Vergrösserung der Schmelzzeit, sinken.

Die Zeit der Heizung soll nicht mehr als drei Zeitkonstanten betragen.

$$(144) \quad t_h \leq 3 \theta = 3 \frac{c \delta V}{\nu F}$$

(Die Zahl der Wärmeabgabe soll dabei aus den Verlusten des Tiegels bei der höchsten Heiztemperatur bestimmt werden.)

Da das Schmelzgut drei Zeitkonstanten nach dem Beginn der Heizung 95% der höchsten erreichbaren Temperatur hat, soll die dem Schmelzgut zugeführte Leistung Q mindestens so gross sein, um den Kern auf 105% der Heiztemperatur T_h bringen zu können:

$$(145) \quad Q = n \cdot \nu F T_h \quad (n \geq 1,05)$$

Aus betriebstechnischen Gründen und um den thermischen Wirkungsgrad — mit dem Verhältnis $\frac{V}{F}$ — zu vergrössern wird man eine Höhe des Heizkörpers wählen, die um weniges ihren Durchmesser übertrifft und legt dadurch das Verhältnis:

$$(146) \quad q = \frac{L}{a}$$

fest. Gleichung (145) kann wie folgt geschrieben werden:

$$(145') \quad Q = n \nu T_h [2 \pi a^2 (1 + q)] \quad (n \geq 1,05)$$

Ist das Volumen V des Einsatzes gegeben, so berechnet man aus

$$(147) \quad a = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi q}}$$

den Halbmesser und aus (146) die Höhe des Heizkörpers.

Nun wählt man den Tiegel mit der geringsten Wandstärke, der bei diesem Einsatz noch brauchbar ist, da die Wandstärke, die durch das Optimum der thermischen Verluste des Kerns und der Joule'schen Verluste der Spule bei den für die grossen Öfen verwendeten Tiegelbaustoffen bestimmt wird, unter dieser durch die metallurgischen Bedingungen geforderten unteren Grenze liegt,¹⁾ Das gibt das grösste erreichbare η_e und den $\cos \varphi$.

Damit ist ν gegeben und man berechnet aus (145') die zum Heizen nötige Joulesche Leistung Q .

Ist die Leistung Q vorgeschrieben, so berechnet man a aus (145') mit einem versuchsweise gewählten ν und das heizbare Volumen aus (147). Man wählt dann den Tiegel, korrigiert ν und wiederholt die Rechnung.

Bei gegebener Grösse der Einsatzstücke ist die untere Grenze der Frequenz durch (143) gegeben, Hat man hier freie Wahl, oder sollte diese untere Grenze nicht die günstigste sein, so ermittelt man die Frequenz aus Betrachtungen über die Variation des Preises der Generatoren und der zur Abstimmung des Ofens auf die Generatorfrequenz nach (139) nötigen Kondensatoren. Aus (139) bestimmt man die kleinste Grösse der Einsatzstücke. Um diese Wahl vornehmen zu können, rechnet man mit einem versuchsweise angesetzten Wert der Ofenreaktanz der nachträglich korrigiert wird.

¹⁾ Wever und Fischer: l. c. S. 161.

Der innere Durchmesser der Spule ist durch die äusseren Abmessungen des Tiegels und seine Isolierung festgelegt. Ihren äusseren Durchmesser erhält man, wenn b die Dicke des Spulenkupfers nach (142') gewählt wird:

$$(148) \quad b \cong \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varrho_1}{k_c f}} 10^9 \quad \text{cm.}$$

wo ϱ_1 der spezifische Widerstand des Kupfers bei der Betriebstemperatur der Spule ist. Der Kupferfüllfaktor wird so gross wie möglich gewählt.

Es wurde in B erwähnt, dass der Wirkungsgrad für eine Spulenlänge ein Maximum aufweist, die etwas grösser ist als die Kernhöhe. Aus den Kurven von Ribaud²⁾ kann man aber lesen, dass die Maxima des elektrischen Wirkungsgrades in Funktion von der Spulenlänge immer flacher werden, wenn sich die Höhe des Kerns dem Durchmesser nähert, und also auch die Höhe der Spule ihren Durchmesser nur wenig übertrifft; das gibt einen Spielraum. Mit der Wahl der Spulenlänge kann man die h -Faktoren bestimmen. Da man ferner die k -Faktoren ermitteln, oder aus der Figur 10 und der Tabelle von Nagaoka ablesen kann, ist es möglich, mit Hilfe der Gleichungen: (130), (131''), und (XIV) den Strombelag oder die Ampèrewindungen der Spule pro cm Länge zu berechnen:

$$(149) \quad wI = 71 \times \sqrt[4]{\left(\frac{1+q}{q}\right)^2 \frac{n^2 \cdot v^2 T_h^2}{\varrho f \cdot F_r(\alpha a)}} \cdot A \text{ W/cm.} \quad ; \quad (\varrho \text{ in Ohm. cm.})$$

Sie sind unabhängig von der Grösse des Schmelzgutes, wenn nur αa gross ist.

Hat man einen ungefähren Wert der Spannung an den Ofenklemmen und Kondensatoren, so bestimmt man die Zahl w der Windungen pro cm. Spulenlänge, indem man aus den Formeln (97') und (98) ÷ (112) die Ofenimpedanz Z_0 in Funktion von w berechnet:

$$Z_0 = z \cdot w^2$$

und in die Gleichung (reell geschrieben):

$$E_k = Z_0 I = z \cdot w^2 I$$

für wI den Wert (149) einsetzt. Bei Wasserkühlung soll $w \leq 3$ sein.

²⁾ Lebeau: Fours électriques et chimie S. 366—367.

VI. Kapitel.

Experimenteller Teil.

Ich habe in der Werkstatt des Elektrotechnischen Instituts der Eidgenössischen Technischen Hochschule einen Ofen für Laboratoriumszwecke hergestellt, um die Brauchbarkeit des Form- und des Felddeformationsfaktors experimentell zu prüfen.

Als Stromquelle stand mir ein Lorentz-Hochfrequenzgenerator zur Verfügung, mit folgenden Daten:

Scheinleistung: 1200 VA.

Klemmenspannung $45 \div 80$ V.

Nennstrom: $8 \div 14,5$ A.

Frequenz bis 2500 Per/sec.

Wicklung: Dreiphasig.

Der Ofen sollte hauptsächlich die Form der in der Industrie vorkommenden Öfen haben, d. h. eine nicht zu lange Spule, um auch über die Brauchbarkeit der Korrektur wegen der Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes entscheiden zu können.

Ich habe angenommen, dass man den Wirkungsgrad des Ofens mindestens so hoch bringen kann, um in dem Schmelzgut, für Kupfer:

$$Q = 650 \text{ Watt}$$

in Wärme verwandeln zu können.

Der spezifische Widerstand des Spulenkupfers ist: $\rho_1 = 1,7 \times 10^{-6}$ Ohm.cm. und derjenige des Kernkupfers bei der Schmelztemperatur $T_h = 1183^\circ$ C. ist: $\rho = 2 \times 10^{-5}$ Ohm. cm.

Soll in dem Ofen Kupfer geschmolzen werden, so wählt man einen Tiegel der gut wärmeisolierend ist.

Ich rechne mit einer Wärmeabgabekonstante von:

$$\nu = 2 \times 10^{-3} \text{ Watt/grad cm}^2$$

wähle

$$q = \frac{L}{a} = 2,85$$

erhalte aus (145'):

$$a = 3,34 \text{ cm.}$$

und

$$L = qa = 9,5 \text{ cm.}$$

Der Tiegel, der mir zur Verfügung stand war tronkonisch, hatte einen mittleren Durchmesser :

$$2a = 6,3 \text{ cm} \quad ; \quad a = 3,15 \text{ cm.}$$

und eine Tiefe von :

$$L' = 9,7 \text{ cm.}$$

Ich konnte mit :

$$L = 9 \text{ cm.}$$

rechnen. Der grösste Aussenhalbmesser des Tiegels war sehr gross :

$$a' = 4,75 \text{ cm.}$$

und ich war genötigt für den Innenhalbmesser der Spule :

$$a_1 = 4,8 \text{ cm.}$$

zu wählen.

Die Länge der Spule : $L_1 = 11,2 \text{ cm.}$

Rechnet man mit der Frequenz :

$$f = 2200 \text{ Per/sec}$$

so erhält man :

$$\alpha = 2,945 \text{ cm}^{-1} \quad ; \quad \alpha a = 9,3.$$

$$\gamma = 6,22 \text{ cm}^{-1} \quad \gamma a_1 = 30$$

und aus der Figur 9 :

$$F_r(\alpha a) = 0,92$$

$$F_i(\alpha a) = 0,85.$$

Nimmt man an, dass die axiale Dicke des Spulenkupfers etwa 0,25 cm. ist, so wird sein Produkt durch γ grösser als die Einheit und die Formel (99) ist nicht anwendbar. Ich werde deshalb nur $R_{s,u}$ ausrechnen. Man erhält mit $k_c = 0,76$ und $b = 0,4 \text{ cm.}$

$$R_{s,e} = k_f h_f \cdot 6,84 w^2 \cdot 10^{-3} \text{ Ohm.}$$

$$X_{s,e} = [k_d h_v - 0,15 k_f h_f] 4,86 w^2 \cdot 10^{-2} \text{ Ohm.}$$

$$R_{s,u} = 5,73 \cdot w^2 \cdot 10^{-3} \text{ Ohm.}$$

$$X_{s,e} = 10,67 \cdot w^2 \cdot 10^{-2} \text{ Ohm.}$$

$R_{s,u}$ soll als Annäherungswert für $R_{s,e}$ angesehen werden. $R_{s,e}$ wird wegen der Hautwirkung an den Kanten des Spulenkupfers grösser als $R_{s,u}$ sein. Man erhält mit : $h_f \cong 0,55$; $h_v \cong 0,54$; $k_f = 2,185$; $k_d \cong 1,384$ (Siehe S. 56).

$$R_0 = (8,2 + 5,73) w^2 \times 10^{-3} = 1,393 w^2 \cdot 10^{-2} \text{ Ohm.}$$

$$X_0 = (10,67 - 3,55) w^2 \cdot 10^{-2} = 7,12 w^2 \cdot 10^{-2} \text{ Ohm.}$$

$$Z_0 = 7,25 \cdot 10^{-2} w^2 \text{ Ohm.}$$

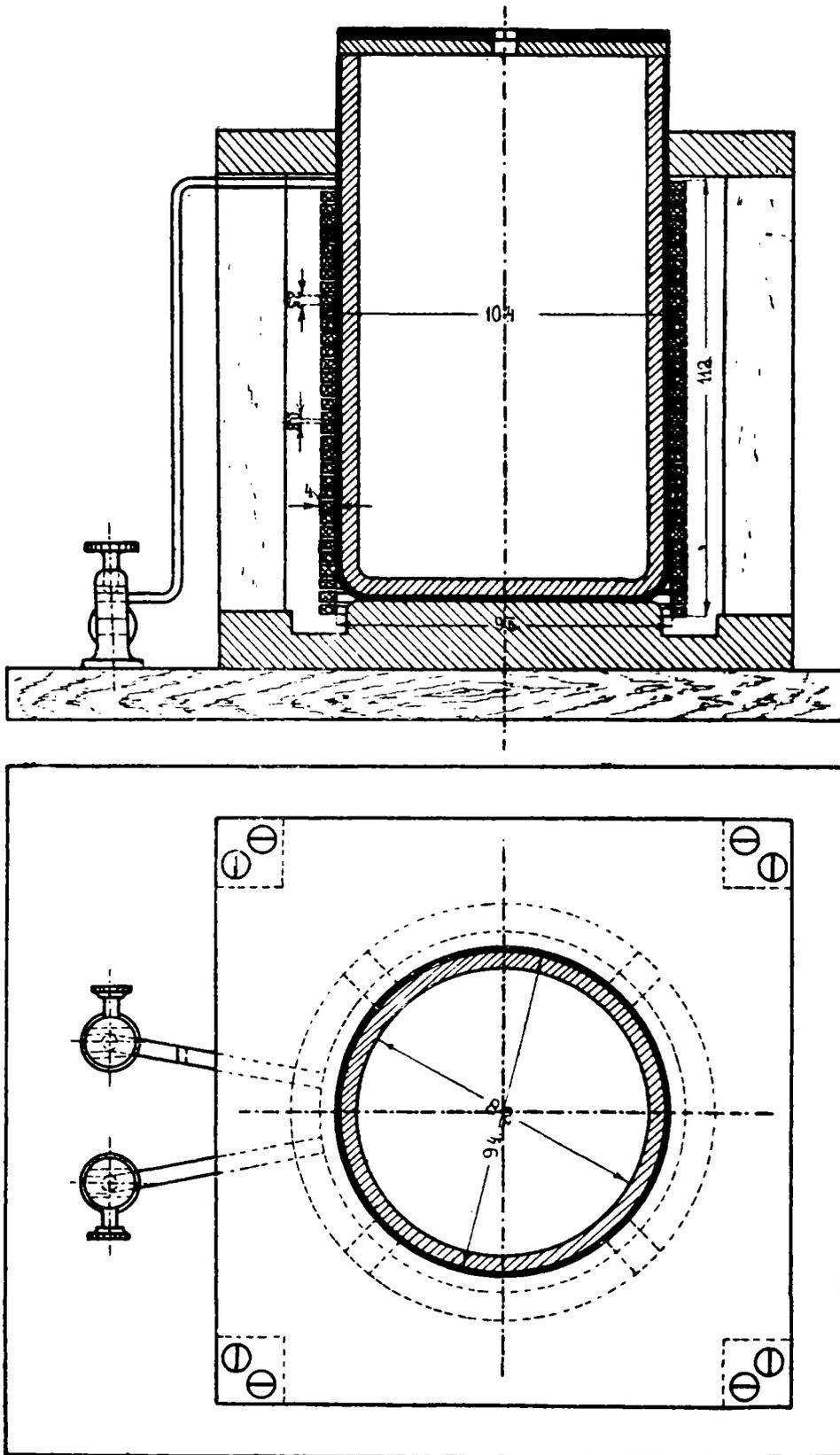


Fig. 11. Das Modell für die Versuche.

Die Ampèrewindungen pro cm. Spulenlänge berechnet man aus (149) mit $n = 1,05$:

$$w I = 290 \text{ A W/cm.}$$

Es ist, infolgedessen:

$$E_r \cong 65 = Z_0 I = 7,25 \cdot 10^{-2} \cdot w (w I) = 290 \cdot 7,25 \cdot 10^{-2} \cdot w$$

und:

$$w = \frac{65}{290 \cdot 7,25 \cdot 10^{-2}} \cong 3,03 \text{ cm.}^{-1}$$

Der Spulenstrom ist:

$$I = \frac{290}{3,03} = 95,7 \text{ Amp.}$$

Die zum Abstimmen auf die Frequenz 2200 Per/sec. nötige Kapazität ist:

$$C = \frac{1}{\omega X_0} = \frac{1}{6,28 \times 22 \times 10^3 \times 7,12} = 102 \mu \text{ F.}$$

Die totale Windungszahl der Spule ist:

$$w L = 34 \text{ Windungen}$$

und die axiale Dicke des rechteckigen Spulenkupfers:

$$b' = \frac{k_c}{w} = 0,25 \text{ cm.}$$

Mit diesem Ofen (Siehe Fig. 11) habe ich 30 Metallzylinder in bezug auf ihren Widerstand und Reaktanz untersucht, um die Formeln für den Formfaktor und den Faktor der Felddformation zu prüfen.

A) Die Versuchsanordnung.

Der Ofen wurde mit einem Kondensator von:

$$C = 105 \mu \text{ F}$$

parallel geschaltet und vom Hochfrequenzgenerator gespeist. Da der Kondensator keine Abstufungen hatte, um die jeweilige Ofenreaktanz auf eine gegebene, konstante Frequenz abzustimmen, entschloss ich mich, die Frequenz bei jeder Messung so einzustellen, dass der Ofen mit der Kapazität $105 \mu \text{ F}$ in Resonanz kam. Das Dämpfungsmass des Ofens $\frac{R_0}{X_0}$ war so klein, dass man mit dem Regulierwiderstand des Hochfrequenzmaschine antreibenden Motors die Frequenz mit etwa 0,4% Genauigkeit einstellen konnte. Man beobachtete nämlich den Generatorstrom und variierte den Regulierwiderstand bis er das Minimum erreichte. Abweichungen der Tourenzahl von 0,4% in der Nähe der Resonanzfrequenz ergaben eine deutlich bemerkbare Änderung des Generatorstromes.

Der Strom der Hochfrequenzmaschine wurde mit einem Hitzdrahtinstrument, derjenige des Ofens mit einem Hochfrequenzhitzdrahtinstrument

und die Spannung an den Ofenklemmen mit einem statischen Voltmeter gemessen.

Die Versuche sind für je 15 Kupfer- und Aluminiumzylinder ausgeführt worden, und es hat sich ergeben, dass die Resonanzfrequenzen des Ofens, wenn er mit einem Kupfer- oder mit einem gleichen Aluminiumzylinder belastet war, um weniger als 0,6% von einander abwichen. Ich habe deshalb die Versuche für gleiche Kupfer- und Aluminiumkerne mit der gleichen Frequenz ausgeführt. Nach der Einstellung der Frequenz wurde die Tourenzahl der Maschine mit einem Tourenzähler gemessen; dann wurde die Maschine entlastet, der Ofen und der Kern abgekühlt und auf die Lufttemperatur gebracht. Nach beendeten Versuche wurde wieder die Tourenzahl gemessen (bei belastetem Generator) und es haben keine merklichen Unterschiede zwischen der Tourenzahl beim Einstellen der Frequenz und nach den Messungen beobachtet werden können; ausserdem befand sich unter den Apparaten der Frequenzmesser der Hochfrequenzmaschine, zur ständigen Kontrolle der Tourenzahl.

Die dem Ofen zugeführte Leistung wurde durch Multiplikation des Generatorstromes mit der Klemmenspannung des Ofens berechnet. Das vereinfachte wesentlich die Arbeit im Vergleich z. B. mit einer elektrometrischen Methode, und dadurch gewann ich Zeit, um ständig das Ansteigen der Temperatur des Schmelzgutes zu beobachten.

Es ist üblich, die im Schmelzgut in Wärme umgesetzte Energie durch kalorimetrische Methoden zu messen. Für kleine Kerne steigt aber die Temperatur einer zum Versuche nötigen minimalen Wassermenge sehr langsam an; auch sind die kleinen Temperaturdifferenzen im Wasser nicht zu vernachlässigen, wenn man in jeder Minute etwa zwei Ablesungen haben will um den Widerstand auf ein genau bekanntes ρ zu beziehen. Ich habe deshalb nur die Hälfte der Versuche nach dieser Methode ausgeführt, und habe sie später alle folgendermassen vorgenommen:

In das Innere des in Figur 11 zu sehenden, mit Asbestpapier isolierten Glasgefässes wurde ein kleineres Glasgefäss gebracht, das ebenfalls isoliert und mit einem Asbestdeckel versehen war. In das Innere dieses Gefässes wurde der Metallkern entweder an einem durch den Asbestdeckel und den Ofendeckel gehenden Faden aufgehängt, oder einfach auf eine zweckmässig bemessene Asbestunterlage gelegt, so dass er möglichst genau in die Mitte der Spule kam. (Für die 10 cm. langen Zylinder wurde das äussere Gefäss entfernt, da sie nicht genau in die Mitte gebracht werden konnten. Jeder Zylinder hatte in der Achse an einem Ende ein feines Loch, $1,5 \div 2,5$ cm, tief, in dem sich die eine Lötstelle eines zum Messen der Temperatur bestimmten Thermoelementes befand. Später wurde auch die Temperaturmessung an exzentrisch gelegenen Stellen vorgenommen und es konnte kein Unterschied bemerkt werden. Die Thermokraft wurde mit einem aperiodisch schwingenden Galvanometer gemessen, das das Bild eines mit vertikalem Faden versehenen Lichtspaltes auf eine durchsichtige Skala warf. Man konnte deutlich Differenzen

von 0,5 mm. ablesen, und der Ausschlag pro Grad war ungefähr 1,2 cm. Der Temperaturzuwachs pro Minute war im Minimum 8 und im Maximum 25 Grad Celsius.

B) Die Versuchsergebnisse.

Die untersuchten Zylinder hatten folgende Abmessungen:

Die Längen: $L = 10 \text{ cm}$; $7,5 \text{ cm}$; 5 cm ; $3,5 \text{ cm}$; $2,5 \text{ cm}$.
und für jede Länge hatten sie drei Durchmesser:

$$2a = 5 \text{ cm} ; 4 \text{ cm} ; 3 \text{ cm}.$$

Ich habe je einen Kupfer- und einen Aluminiumzylinder für jede Grösse hergestellt. Ein Kupferzylinder hatte die Abmessungen $2a = 5 \text{ cm}$; $L = 3 \text{ cm}$. statt $L = 3,5 \text{ cm}$. Die mit ihm erhaltenen Resultate sind mit Hilfe der Formfaktoren auf $L = 3,5 \text{ cm}$. umgerechnet und in den Tabellen mit einem Stern versehen.

Um die Resultate auf sinusförmige Spannung beziehen zu können, hat man ein Oszillogramm der Spannungskurve nötig. In Fig. 12 gebe ich oben die Leerlaufspannung der Maschine bei 65 Volt (Effektivwert) und unten

die Spannungskurve an den Klemmen des Ofens, bei der kleinsten Belastung und einer Frequenz von

$$f = 1852 \text{ Per/sec}$$

Sie weicht nur wenig von der Sinuskurve ab; die im Leerlauf vorhandene fünfte Harmonische ist an den Klemmen des Ofens kaum noch zu bemerken. Der Ofen war mit dem Kondensator auf Resonanz abgestimmt und es wurde ihm eine Spannung von 65 Volt (Effektivwert) aufgedrückt. Die Hälfte der eingetragenen Ordinatenstrecke stellt also $65\sqrt{2}$ Volt dar.

Aus dem Temperaturzuwachs des Schmelzgutes habe ich die pro 1 sec im Schmelzgut in Wärme verwandelte Energie berechnet und durch Subtraktion aus der dem Ofen zugeführten Leistung

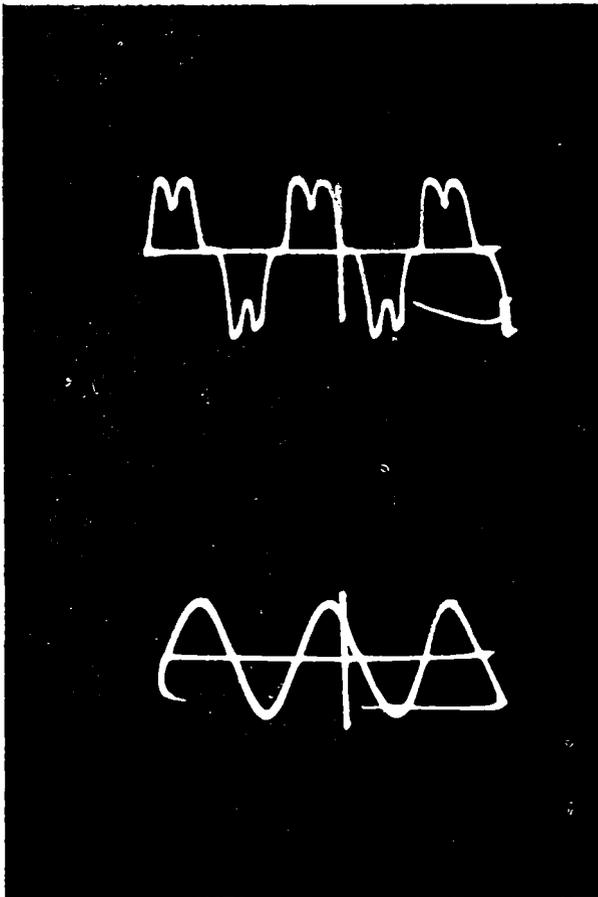


Fig. 12. Spannungskurven der Hochfrequenzmaschine

die in der Spule entwickelte Joulesche Leistung. Die Verluste durch Strahlung und Wärmeabgabe an Luft machen sich in den ersten Minuten nicht bemerkbar; bei den grösseren Zylindern, deren Temperatur wegen des kleineren Formfaktors langsamer ansteigt, macht sich eine Abweichung der Temperaturerhöhung von der linearen erst nach etwa drei Minuten bemerkbar.

Aus den Jouleschen Verlusten habe ich durch Division mit dem Quadrate des Ofenstromes den Widerstand $R_{s, e}$ und $R_{s, i}$ des Schmelzgutes und der Spule berechnet.

Die Reaktanz $X_{0, e}$ des Ofens ist aus der Resonanzfrequenz und der Kondensatorkapazität berechnet worden.

Diese Grössen erlauben uns, die Vorgänge im Ofen zu überblicken. Will man auch die Reaktanz des Schmelzgutes haben, so braucht man $X_{0, e}$ nur auf die Resonanzfrequenz im Leerlauf zu transformieren von der Leerlaufreaktanz zu subtrahieren und auf die gegenwärtige Frequenz zurückzugehen. Solange die Frequenzen nicht viel von einander abweichen, gibt diese Methode keine merklichen Fehler. Die Reaktanz des Schmelzgutes ist klein im Vergleich mit derjenigen der Spule und ein kleiner Fehler in der Messung der Resonanzfrequenz hat grossen Einfluss auf die so ermittelte Kernreaktanz. Man kann sie aus den Tabellen leicht berechnen.

Um die Grössen $R_{s, e}$, $R_{s, i}$, $X_{z, e}$ und $X_{s, e}$ zu berechnen, sind in erster Linie die h -Faktoren für jedes Schmelzgut zu berechnen. Ich habe das vom grössten Schmelzgut auf seiner Meridianebene bedeckte Rechteck in vier „Quadranten“ eingeteilt, eines von ihnen durch ein Netz von 36, mit geeigneten Längen und Breiten versehenen Rechtecken zerlegt, für jedes von ihnen die in Fig. 8 eingetragene Grösse $\left(\frac{H_3}{H_0}\right)$ bestimmt und ihr Quadrat berechnet.

Durch Summation habe ich das jedem Zylinder entsprechende h_f und h_i ermittelt.

Den zugehörigen Form- oder Felddeformationsfaktor entnimmt man leicht der Tabelle Seite (56) oder der Figur 10. Die Grössen $F_r(\alpha a)$ und $F_i(\alpha a)$ entnimmt man der Figur 9, oder man berechnet sie mit Hilfe der Näherungsdarstellungen.

Damit können $R_{s, e}$, $X_{s, e}$ und $X_{s, i}$ berechnet werden, denn der Nagaoka'sche Faktor ist für die Spule des Ofens:

$$k_n = 0,718033$$

und die Funktionen die sonst in $X_{s, e}$ auftreten sind allgemein bekannt. Da die innere Reaktanz der Spule klein ist im Vergleich mit der äusseren, und da die Frequenz nicht viel variiert, ist es zweckmässig sie für eine mittlere Frequenz zu berechnen, zur äusseren zu addieren und die Summe proportional der Frequenz anzusetzen; das ist die Variationsweise der äusseren Reaktanz. Man begeht so einen Fehler der unter einigen Promille liegt.

So erhält man für die Spule folgende Formel:

$$(110) \quad X_{s, e} = 4.45 \times 10^{-4} \cdot f \text{ Ohm.}$$

Mit:

$$\varrho = \varrho_1 = 1,7 \times 10^{-4} \text{ Ohm cm} = 1700 \text{ E. M. E.} \quad \text{und } \mu = \mu_1 = 1$$

(weil die Messungen für Kupfer bei Lufttemperatur durchgeführt worden sind) und mit $\varrho = 2,7 \times 10^{-6} \text{ Ohm cm} = 2700 \text{ E. M. E.}$ für Aluminium, erhält man für Kupfer:

$$(151) \quad R_{s_e} = 6,94 \cdot k_f \cdot h_f \cdot (\alpha a L) F_r (\alpha a) \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}$$

für Aluminium

$$(152) \quad R_{s_e} = 11 k_f h_f (\alpha a L) F_r (\alpha a) \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}$$

und die Reaktanz für Aluminium oder Kupfer:

$$(153) \quad X_{s_e} = 2,276 (a^2 L f) [k_d h_v - k_f h_f F_r (\alpha a)] \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}$$

Für die Spule sind die im III. Kapitel mitgeteilten Formeln nicht anwendbar, soweit sie sich auf den Widerstand beziehen, denn $\gamma b'$ ist zu gross. Ich habe deshalb den Widerstand bestimmt und transformiere ihn mit der Wurzel aus der Frequenz. Der Versuch ergab:

$$(154) \quad R_{s_e} = 1,565 \sqrt{\frac{f}{100}} \cdot 10 \text{ Ohm}$$

Damit sind die Formeln aufgestellt, die geprüft werden sollen.

Die Formel (150) für die Reaktanz der Spule gibt Werte, die von den experimentellen sehr wenig abweichen.

Der Hauptzweck war aber die Formeln (151), (152), (153) mit den im II und IV Kapitel berechneten und im V Kapitel numerisch angegebenen Werten von k_f und k_d experimentell zu prüfen.

Es scheint auf den ersten Blick, dass das nicht möglich ist, ohne auch die Korrekturen h_f und h_v zu benützen und dass es nicht entscheidbar ist, ob die Abweichungen von den Versuchsergebnissen wegen der Faktoren k_f und k_d oder wegen h_f und h_v entstehen. Dem ist nicht so.

In dem mittleren Teil der Spule variiert nämlich das magnetische Feld örtlich sehr wenig. Dort sind also die H_z -werte fast überall gleich und das Schmelzgut befindet sich in einem nahezu homogenen Felde. In diesem Falle sinkt h_f und h_v zu einem einfachen Proportionalitätsfaktor herab und die mit ihnen und k_f , k_d berechneten Grössen müssen merklich mit den experimentell ermittelten zusammenfallen, falls k_f und k_d annehmbare Werte haben. Sollte diese Übereinstimmung stattfinden, so ist das um so beachtenswerter, als die Faktoren k_f und k_d für kurzes Schmelzgut grosse Werte haben, also die Abweichungen von dem nach der Theorie des unendlich langen Zylinders berechneten Wert sehr gross sind. Für diesen Fall rücken die zwei Grenzwerte in (98) dicht aneinander, wie das aus den weiter unten angegebenen Tabellen zu ersehen ist. Es wird auch eine bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment, als nach der Theorie des unendlich langen Schmelzgutes, erzielt.

In den nachstehenden zwei Tabellen sind die äquivalenten Reaktanzen des Ofens, die experimentell ermittelt wurden, mit den berechneten Werten fast übereinstimmend.

Für die innere Kernreaktanz ist der Vergleich mit der Erfahrung unterblieben, da schon 1% Fehler in der Messung der Gesamtreaktanz Fehler von der Grössenordnung von 10% in der inneren Reaktanz ergibt.

In bezug auf den Spulenwiderstand sei bemerkt, dass der Effekt der Konduktanz einen mit dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportionalen Faktor zu dem mit der Wurzel aus der Wellenlänge umgekehrt proportionalen Widerstande wegen der Hautwirkung hinzuaddiert. Ich habe die Frequenzen nicht in so weiten Grenzen variiert, um den Gesamtwert des Spulenwiderstandes in diese zwei Summanden aufteilen zu können.

Der experimentell ermittelte Wert des äquivalenten Kernwiderstandes soll sich nach den Überlegungen im V. Kapitel für kurze Kerne mit dem nach den zwei Korrektionsmethoden wegen der Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes resultierenden Werte decken. Für lange Kerne soll der experimentell ermittelte Wert zwischen den zwei anderen liegen.

Aus den Versuchsergebnissen und der Rechnung ist nun festzustellen, dass für kurze Kerne, bei grossem Durchmesser, die berechneten Widerstandswerte grösser sind als die experimentell ermittelten. Es ist anzunehmen, dass dieser Unterschied von der Approximation durch eine parallelebene Anordnung herrührt, denn in diesem Falle ist der über eine gegebene Umfangslänge verdrängte Fluss grösser als in der axialsymmetrischen Anordnung. Die Unterschiede sind aber in bezug auf die ältere Berechnungsweise beträchtlich gesunken. Aus den Resultaten ist es auch zu ersehen, dass für grössere Längen des Kerns, also bei weit auseinanderstehenden Werten, die nach den zwei Methoden für die Berücksichtigung der Ungleichförmigkeit des Feldes erhalten werden, der nach der zweiten Methode erhaltene, untere Widerstandswert dem experimentell ermittelten näher liegt.

Die Methode, in der der Widerstand bei unendlicher Länge mit dem quadratischen Mittelwerte des magnetischen Feldes über die Kernoberfläche durch H_0 , und $(k_f - 1)$ mal dieses Widerstandes mit dem Werte des magnetischen Feldes am Rande des Kerns durch H_0 multipliziert wird, ergibt in folgedessen die besten Resultate und ist als die genauere anzusehen. Sie ergibt, wenigstens für nicht zu kurze Zylinder, befriedigende Widerstandswerte.

Die Theorie des unendlich langen Ofens ergibt Widerstandswerte, die nicht brauchbar sind.

Die Korrektionsfaktoren k_f und k_a können auf ein sich, parallel zur Achse, im Felde einer wechselstrombeschickten Spule befindliches kurzes Blech angewandt werden.

Um die Brauchbarkeit der in dieser Untersuchung erhaltenen Formeln nach allen Seiten zu prüfen, wären Versuche mit noch kürzeren Zylindern, als die von mir benützten vorzunehmen. Eine sehr lange Induktorspule könnte auch mit grösserer Sicherheit die Frage nach der Genauigkeit des Formfaktors

Ergebnisse der Versuche und der

a cm.	L cm.	f p/sec.	α a	h _f	h _e	k _f	h _f k _f	$1 + \frac{h_e(k_f - 1)}{h_f}$	F _r (α a)	h _f R _{s II} Berechnet Ohm.	R _{s e}
								k _f			Berechnet nach (98) ¹ Ohm.
2,5	10	2022	24,2	0,473	0,299	1,93	0,913	0,823	0,98	7,78 · 10 ⁻³	15,0 · 10 ⁻³
2,5	7,5	1985	24,0	0,523	0,416	2,13	1,115	0,892	0,93	6,38 · 10 ⁻³	13,6 · 10 ⁻³
2,5	5,0	1956	23,8	0,568	0,530	2,53	1,422	0,960	0,98	4,5 · 10 ⁻³	11,4 · 10 ⁻³
2,5	3,5	1943	23,8	0,578	0,570	3,00	1,730	0,990	0,98	3,26 · 10 ⁻³	9,78 · 10 ⁻³
2,5	2,5	1920	23,6	0,585	0,584	3,514	2,050	1,00	0,98	2,34 · 10 ⁻³	8,21 · 10 ⁻³
2,0	10	1953	19,00	0,462	0,291	1,787	0,825	0,837	0,97	5,93 · 10 ⁻³	10,6 · 10 ⁻³
2,0	7,5	1932	18,90	0,507	0,397	1,973	1,000	0,893	0,97	4,83 · 10 ⁻³	9,54 · 10 ⁻³
2,0	5,0	1914	18,82	0,548	0,513	2,310	1,265	0,965	0,97	3,49 · 10 ⁻³	8,07 · 10 ⁻³
2,0	3,5	1896	18,76	0,565	0,545	2,730	1,542	0,981	0,97	2,50 · 10 ⁻³	6,82 · 10 ⁻³
2,0	2,5	1887	18,70	0,576	0,573	3,160	1,820	1,00	0,97	1,81 · 10 ⁻³	5,72 · 10 ⁻³
1,5	10	1899	14,05	0,450	0,284	1,633	0,735	0,856	0,955	4,18 · 10 ⁻³	6,83 · 10 ⁻³
1,5	7,5	1891	14,00	0,505	0,388	1,787	0,902	0,898	0,955	3,50 · 10 ⁻³	6,25 · 10 ⁻³
1,5	5,0	1882	13,98	0,544	0,497	2,067	1,122	0,955	0,955	2,50 · 10 ⁻³	5,16 · 10 ⁻³
1,5	3,5	1876	13,95	0,556	0,539	2,377	1,316	0,980	0,955	1,79 · 10 ⁻³	4,25 · 10 ⁻³
1,5	2,5	1873,5	13,92	0,570	0,569	2,760	1,571	1,00	0,955	1,31 · 10 ⁻³	3,61 · 10 ⁻³

Ergebnisse der Versuche und der

a cm.	L cm.	f p/sec.	α a	h _f	h _e	k _f	h _f k _f	$1 + \frac{h_e(k_f - 1)}{h_f}$	F _r (α a)	h _f R _{s II} Berechnet Ohm.	R _{s e}
								k _f			Berechnet nach (98) ¹ Ohm.
2,5	10	2022	19,20	0,473	0,299	1,93	0,913	0,823	0,97	9,67 · 10 ⁻³	18,68 · 10 ⁻³
2,5	7,5	1985	19,00	0,523	0,416	2,13	1,115	0,892	0,97	7,93 · 10 ⁻³	16,9 · 10 ⁻³
2,5	5,0	1956	18,82	0,568	0,530	2,53	1,422	0,960	0,97	5,61 · 10 ⁻³	14,2 · 10 ⁻³
2,5	3,5	1943	18,80	0,578	0,570	3,00	1,730	0,990	0,97	4,03 · 10 ⁻³	12,1 · 10 ⁻³
2,5	2,5	1920	18,73	0,585	0,584	3,514	2,050	1,00	0,97	2,9 · 10 ⁻³	10,2 · 10 ⁻³
2,0	10	1953	15,05	0,462	0,291	1,787	0,825	0,837	0,955	7,33 · 10 ⁻³	13,1 · 10 ⁻³
2,0	7,5	1932	14,98	0,507	0,397	1,973	1,000	0,893	0,955	5,98 · 10 ⁻³	11,8 · 10 ⁻³
2,0	5,0	1914	14,92	0,548	0,513	2,310	1,265	0,965	0,955	4,28 · 10 ⁻³	9,9 · 10 ⁻³
2,0	3,5	1896	14,86	0,565	0,545	2,730	1,542	0,981	0,955	3,08 · 10 ⁻³	8,42 · 10 ⁻³
2,0	2,5	1887	14,83	0,576	0,573	3,160	1,820	1,00	0,955	2,245 · 10 ⁻³	7,1 · 10 ⁻³
1,5	10	1899	11,14	0,450	0,284	1,633	0,735	0,856	0,937	5,17 · 10 ⁻³	8,44 · 10 ⁻³
1,5	7,5	1891	11,12	0,505	0,388	1,787	0,902	0,898	0,937	4,34 · 10 ⁻³	7,76 · 10 ⁻³
1,5	5,0	1882	11,10	0,544	0,497	2,067	1,122	0,955	0,937	3,02 · 10 ⁻³	6,24 · 10 ⁻³
1,5	3,5	1876	10,07	0,556	0,539	2,377	1,316	0,980	0,937	2,20 · 10 ⁻³	5,24 · 10 ⁻³
1,5	2,5	1873,5	10,06	0,570	0,569	2,760	1,571	1,00	0,937	1,52 · 10 ⁻³	4,21 · 10 ⁻³

Rechnung für 15 Kupferzylinder.

$R_{s e}$ Gemessen Ohm.	$R_{s e}$ Berechnet nach (98)2 Ohm.	$R_{s e}$ nach (154) Ohm.	$R_{s e}$ Ge- messen Ohm.	h_v	k_d	$h_v k_d$	$F_i(\alpha a)$	$\frac{h_v k_d}{h/k/f_i(\alpha a)}$	$X_{s e}$ Berech- net Ohm.	$X_{s e}$ Berech- net Ohm.	X_0 Berech- net Ohm.	X_0 Ge- messen Ohm.
12,4.10 ⁻³	12,35.10 ⁻³	0,703	0,703	0,481	1,311	0,633	0,06	0,578	0,166	0,900	0,734	0,75
12,2.10 ⁻³	12,13.10 ⁻³	0,697	0,70	0,526	1,371	0,721	0,06	0,654	0,138	0,884	0,746	0,752
10.10 ⁻³	10,94.10 ⁻³	0,691	0,69	0,562	1,479	0,832	0,06	0,747	0,103	0,871	0,768	0,766
8,5.10 ⁻³	9,68.10 ⁻³	0,690	0,688	0,575	1,584	0,912	0,06	0,808	0,078	0,865	0,787	0,78
7,5.10 ⁻³	8,21.10 ⁻³	0,685	0,680	0,580	1,685	0,978	0,06	0,854	0,058	0,855	0,797	0,79
8,6.10 ⁻³	8,88.10 ⁻³	0,691	0,69	0,467	1,272	0,595	0,075	0,533	0,0945	0,870	0,7755	0,78
8,4.10 ⁻³	8,52.10 ⁻³	0,688	0,69	0,510	1,327	0,676	0,075	0,601	0,0795	0,860	0,7805	0,785
7,0.10 ⁻³	7,79.10 ⁻³	0,685	0,68	0,544	1,430	0,778	0,075	0,683	0,062	0,852	0,790	0,792
5,9.10 ⁻³	6,69.10 ⁻³	0,6805	0,68	0,556	1,517	0,844	0,075	0,728	0,044	0,844	0,800	0,801
5,0.10 ⁻³	5,72.10 ⁻³	0,681	0,68	0,560	1,625	0,910	0,075	0,774	0,033	0,840	0,807	0,805
6,1.10 ⁻³	5,85.10 ⁻³	0,6805	0,685	0,461	1,224	0,565	0,10	0,4915	0,0478	0,845	0,7972	0,800
6,0.10 ⁻³	5,61.10 ⁻³	0,680	0,676	0,505	1,272	0,641	0,10	0,551	0,0400	0,842	0,802	0,802
5,3.10 ⁻³	4,93.10 ⁻³	0,679	0,672	0,541	1,351	0,730	0,10	0,618	0,0303	0,838	0,8077	0,806
4,5.10 ⁻³	4,17.10 ⁻³	0,677	0,672	0,546	1,446	0,790	0,10	0,656	0,0221	0,835	0,813	0,810
3,7.10 ⁻³	3,61.10 ⁻³	0,677	0,665	0,551	1,533	0,845	0,10	0,680	0,0164	0,835	0,818	0,811

Rechnung für 15 Aluminiumzylinder.

$R_{s e}$ Gemessen Ohm.	$R_{s e}$ Berechnet nach (98)2 Ohm.	$R_{s e}$ nach (154) Ohm.	$R_{s e}$ Ge- messen Ohm.	h_v	k_d	$h_v k_d$	$F_i(\alpha a)$	$\frac{h_v k_d}{h/k/f_i(\alpha a)}$	$X_{s e}$ Berech- net Ohm.	$X_{s e}$ Berech- net Ohm.	X_0 Berech- net Ohm.	X_0 Ge- messen Ohm.
15.10 ⁻³	15,38.10 ⁻³	0,703	0,703	0,481	1,311	0,633	0,073	0,566	0,1628	0,900	0,737	0,75
14,5.10 ⁻³	15,08.10 ⁻³	0,697	0,700	0,526	1,371	0,721	0,074	0,6385	0,1340	0,884	0,750	0,754
12,1.10 ⁻³	13,68.10 ⁻³	0,691	0,685	0,562	1,479	0,832	0,075	0,725	0,1000	0,870	0,770	0,766
10,5.10 ⁻³	11,99.10 ⁻³	0,690	0,685	0,575	1,584	0,912	0,075	0,782	0,0755	0,865	0,7895	0,780
9,3.10 ⁻³	10,2.10 ⁻³	0,685	0,685	0,580	1,685	0,978	0,0755	0,823	0,0560	0,855	0,791	0,790
10,6.10 ⁻³	10,97.10 ⁻³	0,691	0,700	0,467	1,272	0,595	0,094	0,5175	0,0920	0,870	0,778	0,794
10,5.10 ⁻³	10,53.10 ⁻³	0,688	0,700	0,510	1,327	0,676	0,094	0,582	0,0768	0,860	0,708	0,785
8,6.10 ⁻³	9,55.10 ⁻³	0,685	0,680	0,544	1,430	0,778	0,095	0,658	0,0598	0,852	0,794	0,792
7,3.10 ⁻³	8,25.10 ⁻³	0,680	0,681	0,556	1,517	0,844	0,095	0,6975	0,0421	0,844	0,802	0,801
6,2.10 ⁻³	7,1.10 ⁻³	0,680	0,670	0,560	1,625	0,910	0,095	0,737	0,0316	0,840	0,8084	0,804
7,25.10 ⁻³	7,22.10 ⁻³	0,6815	0,680	0,461	1,224	0,565	0,127	0,4715	0,0459	0,845	0,799	0,800
7,1.10 ⁻³	6,98.10 ⁻³	0,680	0,675	0,505	1,272	0,641	0,127	0,526	0,0381	0,842	0,804	0,802
6,1.10 ⁻³	5,96.10 ⁻³	0,679	0,670	0,541	1,351	0,730	0,127	0,587	0,0288	0,838	0,809	0,806
5,2.10 ⁻³	5,14.10 ⁻³	0,677	0,670	0,546	1,446	0,790	0,1275	0,623	0,0210	0,835	0,814	0,810
4,2.10 ⁻³	4,21.10 ⁻³	0,677	0,665	0,551	1,533	0,845	0,1275	0,645	0,0155	0,835	0,8195	0,811

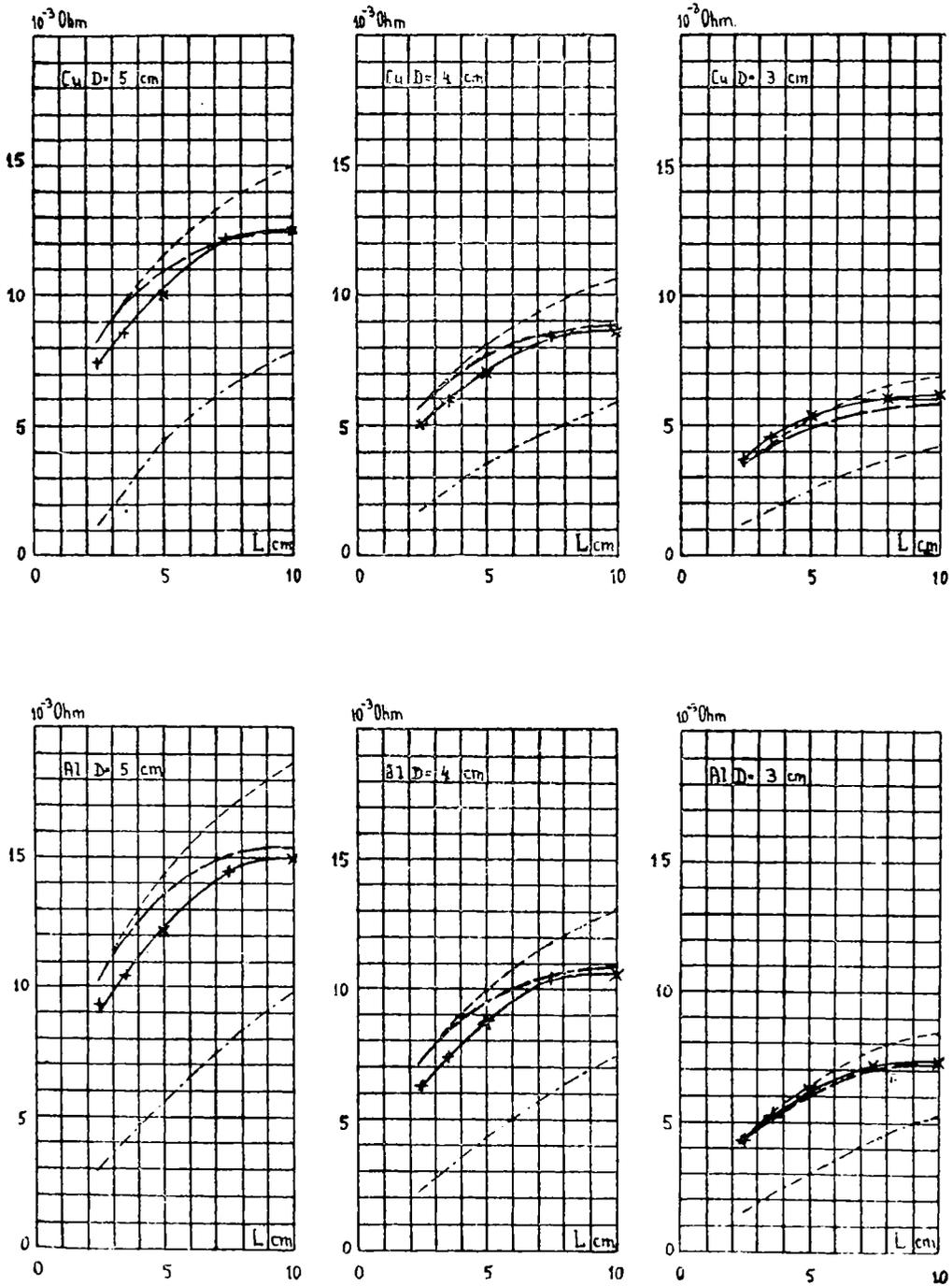


Fig. 13. Kernwiderstände bei Resonanzfrequenz.

Legende: — Gemessen
 - - - - - Berechnet nach (98)1
 - · - · - Berechnet nach (98)2
 ····· Nach der alten Berechnung

beantworten. Die Versuche mit sehr kurzen Zylindern hätten keinen grossen praktischen Wert; sie würden aber erlauben, festzustellen, ob sich der Einfluss der von mir vernachlässigten Ströme auf den Endflächen bei sehr kurzen Kernen bemerkbar macht.

Ferner ist es von Interesse festzustellen, ob bei wenig ausgeprägter Hautwirkung die Vorgänge wesentlich von denen im unendlich langen Ofen abweichen. Ich meine damit den Bereich des ansteigenden Teils der Kurve III. in Fig. 9.

Eine derartige experimentelle Untersuchung würde auch den Grund erklären, warum bei festgehaltener Kernlänge die den grössten Wirkungsgrad ergebende Spulenlänge vom Material des Schmelzgutes abhängt. Es ist nämlich zu erwarten, dass für schlechter leitende Substanzen, wie z. B. Kohle, die Vorgänge bei nicht allzu hoher Frequenz sich nahezu so wie im unendlich langen Kern abspielen, d. h. dass der Formfaktor k_f bei kleinem (αa) nicht viel von der Einheit abweicht. Der Strombelag nimmt unter diesen Umständen nur sehr wenig gegen die Zylinderenden zu. Man kann das etwa so einsehen, dass für schlechte Leiter nur das „erste“ von dem ursprünglichen Spulenfelde erzeugte elektrische Feld massgebend ist, da die von ihm getriebenen Ströme zu schwach sind, um das ursprüngliche Feld stark zu deformieren; das elektrische Feld hat aber in diesen Fällen keinen Zusammenhang mit der Kernlänge. Die oben erwähnte Abhängigkeit (S. 65) ist, dann so zu erklären, dass für schlechte Leiter, bei gleichem Verhältnis der Spulen zur Heizkörperlänge prozentual weniger Strom in dem schwächeren Spulenfelde an den Zylinderenden sich befindet als bei guten Leitern mit stark ausgeprägter Hautwirkung, mit grossem Strombelag an den Enden des Kerns. Kerne mit ausgeprägter Hautwirkung sind empfindlicher gegen das schwache Feld an ihren Enden als solche mit weniger ausgeprägter Hautwirkung und die den höchsten Wirkungsgrad ergebende Spulenlänge wächst mit der Ausprägung des Hauteffektes, in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen von Ribaud. Dieser Umstand zeugt auch davon, dass die Berücksichtigung der Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes durch eine einfache Multiplikation mit dem quadratischen Mittelwerte des magnetischen Feldes über die Kernoberfläche, für den Kernwiderstand nicht richtig ist.

Schluss.

Ich habe in dieser Arbeit die Theorie des „unendlich“ langen Ofens aufgestellt und eine Näherung für den Einfluss der Kürze auf die Vorgänge gegeben. Der Kern wurde durch eine parallelebene Anordnung ersetzt und die Verteilung der magnetischen Feldstärke längs der Mantelfläche, bei ausgeprägter Hautwirkung, aus der laplaceschen Feldverteilung bei dieser Anordnung ermittelt. Es wurde eine Methode angegeben, die daraus die Berechnung des Kernwiderstandes und der inneren Kernreaktanz gestattet. Die Ungleichförmigkeit des Spulenfeldes wurde nach zwei, auf Seite 45 angegebenen Methoden berücksichtigt. Es wurde eine, unter gewissen einschränkenden Bedingungen anwendbare, Näherung für die Berechnung des Spulenwiderstandes und der inneren Spulenreaktanz gegeben. Die äussere Spulenreaktanz wurde durch Multiplikation des Reaktanzwertes der gleichen Länge aus einer unendlich langen Spule mit dem Nagaokaschen Faktor berechnet.

Darauf fussend, wurde das allgemeine Verhalten der eisenlosen Induktionsöfen untersucht. Die Einsichten, die dabei gewonnen worden sind, und der Ausdruck für den thermischen Wirkungsgrad wurden für die Vorausberechnung der Öfen verwertet.

Die theoretischen Ergebnisse wurden in Bezug auf den Kernwiderstand und auf die Ofenreaktanz mit dem Versuche verglichen, und die 30 Resultate weisen eine wesentliche Verbesserung, im Vergleich mit der alten Berechnung, auf.

Curriculum vitae.

Ich, Remus Basiliu Răduleț, wurde am 3. Mai 1904 in Creanga (Hendorf) im Departement Târnava Mare in Rumänien als Sohn des rumänisch-orthodoxen Pfarrers Vasiliu Răduleț geboren. Nach dem Tode meiner Mutter siedelte unsere Familie nach Berivoi, im Departement Făgăraș über, wo ich die Primarschule in den Jahren 1909—1913 besuchte. Ein Jahr besuchte ich die Volksschule in meinem Geburtsorte und bezog im Jahre 1914 das Lyzeum zu Sighișoara, wo ich, nach einjähriger Unterbrechung des Studiums während des Krieges, im Jahre 1919 die vierte Klasse absolvierte. Die letzten vier Lyzealklassen und die Maturitätsprüfung habe ich in Făgăraș bestanden.

In den Jahren 1923—1927 studierte ich an der Technischen Hochschule in Timișoara und erlangte dort im Dezember 1927 das Diplom eines Elektro- und Maschineningenieurs. In demselben Jahre wurde ich dort Assistent für theoretische Elektrotechnik. Durch meinen Professor lernte ich die unter 11) zitierte Arbeit von Wever und Fischer kennen.

Ein Stipendium vom rumänischen Staate ermöglichte es mir nach Zürich zu kommen. Indem ich der Literatur über die eisenlosen Induktionsöfen nachging, bemerkte ich, dass der Einfluss der Kürze der Öfen auf die Vorgänge nicht berücksichtigt worden war. Aus meiner Befassung mit diesem Problem entstand die vorliegende Untersuchung, deren experimenteller Teil materiell vom schweizerischen Schulrat unterstützt wurde, wofür ich zu Dank verpflichtet bin. Herrn Professor Dr. Ing. Karl Kuhlmann, unter dessen Aufsicht ich die experimentelle Arbeit ausgeführt habe, danke ich für die liebenswürdige Hilfe und den anregenden Rat.

Die Untersuchung wurde im Januar 1929 begonnen und im Juni 1930 abgeschlossen.
