

STUDII ȘI CERCETĂRI ÎN MECANICA MEDIILOR CONTINUE PRIN APLICAREA UNOR NOI METODE ANALITICE APROXIMATIVE

Teză destinată obținerii
titlului științific de doctor inginer
la
Universitatea Politehnica Timișoara
în domeniul INGINERIE MECANICĂ
de către

Mat. Remus-Daniel Ene

Conducător științific:
Referenți științifici:

prof.univ.dr.ing. Liviu Bereteu
prof.univ.dr. ing. Nicolae Vasiliu
prof.univ.dr. ing. Polidor Bratu
prof.univ.dr. mat. Vasile Marinca

Ziua susținerii tezei: 18.12.2014

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- | | |
|---|--|
| 1. Automatică | 9. Inginerie Mecanică |
| 2. Chimie | 10. Știința Calculatoarelor |
| 3. Energetică | 11. Știința și Ingineria Materialelor |
| 4. Ingineria Chimică | 12. Ingineria sistemelor |
| 5. Inginerie Civilă | 13. Inginerie energetică |
| 6. Inginerie Electrică | 14. Calculatoare și tehnologia informației |
| 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații | 15. Ingineria materialelor |
| 8. Inginerie Industrială | 16. Inginerie și Management |

Universitatea Politehnica Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2014

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității Politehnica Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221
e-mail: editura@edipol.upt.ro

Cuvânt înainte

Teza de doctorat a fost elaborată pe parcursul activității mele în cadrul Departamentului de Mecanică și Rezistența Materialelor al Universității Politehnica Timișoara.

Mulțumiri deosebite se cuvin conducătorului de doctorat prof. univ. dr. ing. Liviu Bereteu, căruia îi adresez pe această cale sincere mulțumiri. Îmi exprim pe această cale profunda recunoștință nu doar pentru sfaturile și îndrumările susținute de-a lungul elaborării acestei teze, ci și pentru formarea mea profesională.

În particular, doresc să aduc mulțumiri referenților științifici ai tezei, dl. prof. univ. dr. ing. Nicolae Vasiliu, dl. prof. univ. dr. ing. Polidor Bratu, dl. prof. univ. dr. mat. Vasile Marinca, pentru timpul pe care l-au dedicat analizei acestei lucrări și pentru efortul pe care l-au făcut pentru a lua parte la susținerea tezei.

Doresc să adresez calde mulțumiri tuturor colegilor din cadrul Departamentului de Matematică pentru încurajările și sprijinul acordat în timpul elaborării prezentei teze, în mod special domnului prof. univ. dr. mat. Vasile Marinca și domnului conf. univ. dr. mat., coleg la Departamentul de Matematică din cadrul Universității Politehnica Timișoara, pentru observațiile constructive formulate în diverse etape ale elaborării tezei.

Nu în ultimul rând, doresc să adresez din suflet călduroase mulțumiri familiei mele care mi-a oferit sprijin moral și înțelegere în toți acești ani, dar și de acum înainte în viață.

Timișoara, Decembrie 2014

Ene Remus-Daniel

Părinților mei,

Constantin și Dela

Ene, Remus-Daniel

Studii și cercetări în mecanica mediilor continue prin aplicarea unor noi metode analitice aproximative

Teze de doctorat ale UPT, Seria 9, Nr. 157, Editura Politehnica, 2014, 226 pagini, 129 figuri, 100 tabele.

ISSN: 1842-4937

ISBN:978-606-554-894-7

Cuvinte cheie:

amortizoare neliniare MR, curgere vâscoasă, fluid vâscos, fluid Maxwell, fluid Oldroyd, fluid MHD, nanofluid, transfer de căldură, transport de masă, alunecare parțială, viteză de aspirație/ imersie, suprafață întinsă, cilindru contractat, ecuații diferențiale neliniare, soluție numerică, soluție analitică aproximativă, soluții duale, metoda homotopică asimptotică optimală.

Rezumat,

Lucrarea de față are ca obiect studiul unor probleme neliniare din Mecanica Mediilor Continue cu ajutorul metodei homotopice asimptotice optimale. Problemele abordate sunt: un model neliniar ce descrie vibrațiile unei particule de fluid MR în amortizoarele neliniare MR de tip Bingham, curgerea unui fluid Newtonian sub acțiunea unui gradient de presiune (ecuația neliniară Falkner-Skan), curgerea unui fluid vâscos pe o suprafață întinsă cu alunecare parțială, transferul de căldură și curgerea unui fluid vâscos pe o suprafață întinsă instabilă, curgerea unui fluid Maxwell superior-convectiv pe o placă poroasă, curgerea unei pelicule de fluid Oldroyd pe o bandă în mișcare, transferul de căldură prin radiație și curgerea stabilă a unui fluid MHD, curgerea vâscoasă instabilă printr-un cilindru contractat a unui nanofluid. Sunt stabilite soluții analitice aproximative de mare precizie. Pentru prima dată sunt stabilite soluții duale. Rezultate comparative între soluțiile analitice aproximative și soluțiile numerice sunt prezentate în tabele și grafice. Pentru prima dată acuratețea metodei este arătată prin reprezentarea restului de aproximare și prin efectuarea a două teste statistice (testul Barlett, respectiv testul Durbin-Wattson) asupra abaterilor dintre soluțiile numerice și soluțiile aproximative. Aceste studii scot în evidență convergența soluțiilor analitice aproximative obținute cu metoda MHAO folosind o singură iterație.

CUPRINS

Introducere	7
1 Fundamentare teoretică	14
1.1 Medii elastice continue	14
1.1.1 Proprietăți mecanice	14
1.1.2 Ecuații constitutive	16
1.1.3 Ecuații statice și dinamice	18
1.2 Fluide vâscoelastice	18
1.2.1 Fluide Newtoniene	19
1.2.2 Fluide incompresibile de ordinul al doilea	19
1.2.3 Fluide Maxwell	20
1.2.4 Fluide Oldroyd	20
1.2.5 Ecuațiile de bază: ecuația de moment, ecuația conservării masei, ecuația energiei	20
1.2.6 Coeficientul superficial la limită	21
2 Metoda MHAO - o prezentare generală	23
2.1 Elemente de dinamică neliniară	23
2.2 Prima variantă a metodei MHAO	25
2.2.1 Descriere	25
2.2.2 Exemplu: Ecuația neliniară de propagare a undei elastice longitudinale - cazul vibrațiilor periodice	26
2.3 A doua variantă a metodei MHAO	29
2.3.1 Descriere	29
2.3.2 Exemplul 1: Ecuația neliniară Thomas-Fermi	32
2.3.3 Exemplul 2: Curgerea unui fluid vâscos la nivelul stratului-limită într-un domeniu nemărginit	35
3 Fluide magneto- și electro-reologice	43
3.1 Amortizoare fluide neliniare de tip Bingham	43
3.1.1 Rezolvarea problemei amortizoarelor fluide neliniare de tip Bingham	47
3.1.2 Rezultate numerice	49
4 Fluide Newtoniene	51
4.1 Ecuația neliniară Falkner-Skan	51
4.1.1 Ecuațiile de mișcare	52
4.1.2 Rezolvarea ecuației neliniare Falkner-Skan	53
4.1.3 Exemple numerice	58
4.2 Curgerea vâscoasă a unui fluid Newtonian pe o suprafață întinsă cu alunecare parțială	77
4.2.1 Ecuațiile de mișcare	78
4.2.2 Rezolvarea problemei fluidelor vâscoase cu alunecare parțială	79
4.2.3 Exemple numerice	81
4.3 Curgerea unui fluid Newtonian vâscos pe o suprafață întinsă instabilă și transferul de căldură	102
4.3.1 Ecuațiile de mișcare	102
4.3.2 Soluții analitice aproximative pentru curgerea fluidului vâscos Newtonian și transferul de căldură	104
4.3.3 Exemple numerice	111
5 Fluide ne-Newtoniene	127
5.1 Soluții multiple pentru curgerea unui fluid Maxwell superior-convectiv pe o placă poroasă întinsă	127
5.1.1 Ecuațiile de mișcare	127

6 Cuprins

5.1.2 Soluții multiple pentru curgerea unui fluid Maxwell superior-convectiv	129
5.1.3 Exemple numerice	131
5.2 Curgerea peliculei subțiri a unui fluid Oldroyd cu 6-constante pe o bandă în mișcare	141
5.2.1 Ecuațiile de mișcare	142
5.2.2 Soluții analitice aproximative pentru curgerea peliculei subțiri a unui fluid Oldroyd cu 6-constante	143
5.2.3 Rezultate numerice și discuții	149
5.3 Curgerea stabilă a unui fluid MHD vâscos la nivelul stratului limită și transferul de căldură prin radiație	172
5.3.1 Ecuațiile de mișcare	172
5.3.2 Aplicarea metodei MHAO - a doua variantă la curgerea stabilă a unui fluid MHD vâscos la nivelul stratului limită și transferul de căldură prin radiație	174
5.3.3 Rezultate numerice	176
5.4 Soluții duale pentru problema curgerii vâscoase instabile printr-un cilindru contractat	193
5.4.1 Ecuațiile de mișcare	193
5.4.2 Soluții aproximative multiple ale fluxului vâscos instabil	195
5.4.3 Exemple numerice	196
Concluzii generale. Contribuții originale. Perspective de viitor	208
Bibliografie	214

Introducere

De la atomi la galaxii, totul este într-o continuă mișcare. Sângele circulă prin corpul nostru, plantele se leagănă-n vânt; chiar și continentele se deplasează. Se poate afirma, astfel, că mișcarea este o componentă inerentă a lumii micro- sau macroscopice. Pentru a descrie varietatea de forme de mișcare existente se apelează la o multitudine de termeni: curgere, vibrație, alunecare, alergare, țâșnire, scurgere, prelingere, infiltrare etc. Fiecare termen are semnificația sa specifică și ne sugerează imediat tipul de mișcare la care se referă. Curgerea sau mișcarea tuturor tipurilor de materiale poate fi, de asemenea, descrisă cu ajutorul unor ecuații specifice care au fost dezvoltate de-a lungul timpului. Atât gazele, cât și solidele curg, dar în mod obișnuit când auzim termenul **curgere** ne gândim la produsele în stare lichidă. Din această cauză termenul **reologie** este, cel mai adesea, legat de curgerea lichidelor. Aceasta nu exclude și existența unei reologii a stării gazoase și a unei reologii a stării solide. Cel mai elocvent exemplu de reologie a stării solide sunt proprietățile mecanice ale corpurilor, care reprezintă răspunsul acestora la diferite solicitări la care sunt supuse. Curgerea multifazică (multicomponentă) apare frecvent în procesele chimice ce presupun reacții chimice sau procese de separare. De-a lungul timpului au apărut numeroase studii referitoare la acest tip de curgere, referitoare fie la amestecuri de fluide newtoniene (ex. emulsii de apă în ulei), suspensii de particule solide în fluide newtoniene (exemple: fluidele magneto- sau electro-reologice), fie la mișcarea bulelor de gaz în fluide newtoniene. Totuși relativ puține lucrări se referă la studiul cazurilor ce implică **fluide ne-Newtoniene**. Sistemele multifazice ce implică cel puțin un lichid ne-Newtonian vâscoelastic apar în multe operații de prelucrare a polimerilor, cum ar fi: prelucrarea sistemelor compozite, a produselor expandate sau a poliblendurilor și copolimerilor. Datorită comportării reologice complexe a lichidelor polimerice și comportarea reologică a sistemelor polimerice multifazice devine foarte complicată în comparație cu cea a sistemelor multifazice ce conțin lichide newtoniene.

Teoria clasică a dinamicii fluidelor s-a dezvoltat prin cercetările teoretice asupra unui fluid ideal sau perfect, incompresibil și lipsit de vâscozitate și elasticitate, denumit **fluidul lui Pascal**. Până la introducerea conceptului de **strat limită** de către **Prandtl** rezultatele acestor cercetări au avut aplicabilitate limitată. Teoria stratului limită consideră că *efectele de frecare sunt concentrate într-un film subțire de fluid situat în imediata vecinătate a frontierei solide*. Limitările teoriei curgerii fluidelor lipsite de vâscozitate au contribuit la dezvoltarea teoriei hidrodinamice a celor mai simple fluide reale numite **fluide Newtoniene**. Dezvoltarea a numeroase ramuri industriale ce prelucrează materiale a căror comportare în curgere nu este newtoniană (materiale plastice, fibre sintetice, cauciuc, etc.) a dus la o nouă etapă în evoluția dinamicii fluidelor și a impus constituirea reologiei ca știință. **Reologia** poate fi considerată ca o ramură a fizicii ce se ocupă cu comportarea corpurilor deformabile care posedă cel puțin una din următoarele proprietăți: *elasticitate, plasticitate sau vâscozitate*. În anul 1929 Societatea Americană de Reologie a acceptat definiția dată de E.C. Bingham "*reologia este studiul deformării și curgerii materiei*". Dar acest obiect de studiu aparține și altor științe care derivă din ramura de bază a fizicii: *mecanica*. De asemenea, poate fi remarcat că și curgerea este un tip de deformare. **Reiner**, remarcând tautologia, definește reologia ca știința ce se ocupă cu studiul deformării materialelor, incluzând și curgerea. Nici această definiție nu este însă completă. Analizând obiectul reologiei, interferența ei cu științele adiacente și precizându-se

locul ei în asamblul științelor ce studiază curgerea și deformarea corpurilor s-a propus următoarea definiție: "*Reologia este știința ce studiază interdependența între solicitările mecanice, răspunsul corpurilor și proprietățile acestora*". Această știință stabilește *modelele matematice care formează funcția răspuns a unui corp supus la solicitări*. O forță sau un sistem de forțe aplicat unui corp conduce la mișcarea acestuia. Mișcarea corpului poate consta în *deplasări* sau/ și *deformări*. În general, deplasarea nu modifică poziția relativă a elementelor ce formează corpul, dar modifică poziția acestuia, în raport cu un sistem de referință exterior. Ea constă din translația sau/ și rotația corpului. În alte condiții, prin aplicarea unei forțe sau a unui sistem de forțe, corpul poate fi deformat, ceea ce determină modificarea poziției relative a elementelor constituente. Un corp este deformat atunci când sub acțiunea solicitărilor se modifică forma sau/ și volumul. *Deformarea*, în cazul solidelor are loc până la atingerea echilibrului între forțele interne și externe, în timp ce fluidele, prin aplicarea unei forțe anizotrope și neomogene, nu ajung la o deformație de echilibru. *Gradul de deformare* se schimbă continuu în timp. Deformația a cărei valoare crește continuu și nu se mai recuperează după îndepărtarea forței se numește *curgere*. Fluidele opun rezistențe mici la deformare, iar forțele de frecare internă, ce iau naștere în timpul curgerii, diminuează *viteza de deformare*. Sub acțiunea unei forțe viteza de deformare a fluidelor crește până ce se stabilește echilibrul cu forța de frecare, după care viteza de deformare rămâne constantă. Răspunsul corpurilor la solicitări mecanice este funcție de proprietățile lor și poate fi:

- *neelastic (rigid)* - deformația este egală cu zero;
- *perfect elastic* - deformație temporară recuperabilă;
- *pur vâscos* - deformație permanentă nerecuperabilă;
- *simultan elastic și vâscos* - deformație parțial temporară, parțial permanentă;
- *succesiv elastic și vâscos* - deformație temporară sau/ și permanentă;
- *nevâscos* - deformație permanentă pentru solicitare egală cu zero.

Curgerea este un proces cheie în majoritatea operațiilor specifice tehnologiilor de sinteză și prelucrare a compușilor macromoleculari.

Astfel, reologia stabilește relațiile matematice între diverse solicitări și răspunsul corpurilor supuse acestora. Aceste relații se numesc în mod uzual *relații (legi) constitutive* și sunt stabilite pe baza măsurărilor experimentale. Ele depind de un număr de coeficienți constitutivi care caracterizează *proprietățile lor mecanice* sau/și *termice*. În baza principiilor mecanicii și termodinamicii se stabilesc ecuațiile de mișcare ale corpurilor supuse la solicitări. Ecuațiile de mișcare sunt descrise prin ecuații diferențiale sau cu derivate parțiale care, în general, sunt neliniare.

Considerații generale

Prezenta lucrare își propune să abordeze un domeniu de larg interes în lumea științifică: Mecanica Mediilor Continue. În cele câteva exemple practice, cu ajutorul unor transformări de similaritate, ecuațiile Navier-Stokes corespunzătoare se transformă în ecuații diferențiale cu condiții inițiale și la limită. Până în acest moment sunt cunoscute câteva metode de rezolvare a acestor ecuații, dar numai parțial: existența parametrului mic sau a unor condiții inițiale ce conțin parametru mic. Sunt foarte rare situațiile când soluția este prezentată efectiv. În general, rezultatele sunt cunoscute grafic sau tabular, fiind dificilă verificarea corectitudinii calculului. Metoda aplicată în prezenta lucrare nu presupune nici un fel de ipoteză

simplificatoare și permite determinarea soluțiilor după numai o iterație, lucru neîntâlnit în literatura de specialitate.

În literatură există o singură metodă care, aparent, dă rezultate bune, dar presupune existența unui calculator ultraperformant, dar la care soluția este prezentată pe câteva pagini, după un număr mare de iterații (20 – 120 iterații). Există și alte metode, dar nu reglează convergența soluțiilor și acestea nu se pot aplica oricărui tip de fluid în mișcare. Astfel se cunosc metodele: metoda parametrului mic, metoda Lindstedt-Poncaré, metoda dezvoltării δ , metoda iterativă variațională, metoda descompunerii Adomian, ș.a.m.d.

Capitolul I are un caracter introductiv și de sinteză având ca scop o fundamentare teoretică a mecanicii mediilor continue. Prima secțiune este dedicată solidelor elastice deformabile, amintindu-se conceptul matematic de corp continuu, semnificația mecanică a componentelor deformării, ecuația constitutivă a mediilor elastice omogene, principiile mecanicii și termodinamicii. A doua secțiune, de asemenea, cu caracter monografic este dedicată fluidelor vâscoelastice și se constituie într-o mică prezentare a modelelor de fluide Newtoniene și ne-Newtoniene, cum sunt: fluide de gradul II, fluide Maxwell și fluide Oldroyd [175]. La majoritatea modelelor de curgeri ale fluidelor reale un parametru mecanic joacă un rol foarte important, și anume *coeficientul superficial la limită*.

În **capitolul II**, de asemenea cu caracter de sinteză, sunt descrise două variante ale metodei MHAO care vor fi aplicate în capitolele următoare. Construcțiile homotopiilor sunt originale. Pentru prima dată în literatura de specialitate s-a folosit o singură iterație pentru a obține rezultate de o deosebită acuratețe. Am introdus noțiunea de operator liniar, funcții auxiliare și parametrii de control al convergenței soluțiilor. Am considerat metode riguros demonstrate de determinare optimă a parametrilor de control al convergenței soluțiilor. Orice ecuație diferențială neliniară este transformată în numai două ecuații diferențiale liniare, ușor de rezolvat. Pentru fiecare ecuație diferențială sunt respectate condițiile la limită / inițiale corespunzătoare cazului studiat. Se explică modul de alegere al funcțiilor auxiliare. Se arată că abaterile obținute sunt mai bune, odată cu creșterea numărului de parametrii optimali. Într-un exemplu se arată că metoda MHAO poate fi aplicată cu succes la ecuații diferențiale neliniare cu singularități, în comparație cu metodele tradiționale [121]. Într-un alt exemplu se aplică metoda MHAO pentru a rezolva aproximativ o ecuație cu derivate parțiale neliniară, anume ecuația de propagare a undei elastice neomogene.

Fluidele magnetoreologice (MR) au atras un interes considerabil datorită gamei largi de utilizare în amortizoare de vibrații pentru sistemele de vehicule cu suspensie. Capacitățile pot fi ajustate foarte repede, prin aplicarea unui câmp electric sau magnetic adecvat [103], [16], [99], [27]. În **capitolul III** propunem un model neliniar pentru amortizoare fluide de tip Bingham. Modelul propus este o generalizare a modelului clasic de tip Bingham. Aplicarea cu succes a metodei MHAO a condus la soluții aproximative de o mare acuratețe.

Studiul stratului limită de curgere vâscoasă pe o suprafață întinsă este important, datorită mai multor aplicații ale sale în inginerie sau procese industriale, cum sunt: materiale fabricate prin extrudare din foi de polimer, producția de hârtie, fibră de sticlă, creșteri de cristale, tratamente termice ale materialelor care rulează între o rolă de alimentare și rola de vânt sau o bandă transportoare, dar și în medicină: modelarea curgerii sângelui, etc. Importanța acestor aplicații face necesară rezolvarea cu metoda MHAO a problemelor neliniare, oferind soluții aproximative de mare precizie. Astfel, fluidele Newtoniene fac obiectul **capitolului**

IV. Am abordat următoarele probleme: **1)** curgerea bi-dimensională la nivelul stratului-limită vâscos a unui fluid Newtonian incompresibil sub acțiunea unui gradient de presiune constant (ecuația neliniară Falkner-Skan - folosită și la modelarea curgerii sângelui prin vasele capilare); am discutat influența gradientului de presiune, caracterizat de coeficientul β , asupra funcției de curent și a derivatei acesteia, cu ajutorul metodei MHAO, folosind patru funcții auxiliare de control al convergenței soluțiilor analitice aproximative; din comparația soluțiilor aproximative cu rezultatele numerice (prin tabele și grafice), se observă că acuratețea rezultatelor obținute cu MHAO este mai mare atunci când crește numărul de parametri optimali din expresia funcțiilor auxiliare; rezultatele adimensionale se completează prin grafice tri-dimensionale (ale componentelor vitezei), dar și a câmpului de vectori (u, v) , arătând importanța soluțiilor aproximative; **2)** curgerea unui fluid vâscos pe o suprafață întinsă cu alunecare parțială; am studiat două tipuri de curgeri: curgerea plană ($m = 1$) și curgerea asimetrică ($m = 2$), la fiecare dintre acestea având în vedere două tipuri de întindere a suprafeței: întindere cu pânză impermeabilă ($a = 0$) și întindere cu pânză de aspirație ($a = 3 > 0$); în toate cele doisprezece cazuri am discutat influența coeficientului de alunecare ($\lambda > 0$) asupra deplasării și a vitezei de curgere a fluidului; validitatea soluțiilor analitice aproximative construite cu MHAO (în toate cazurile studiate) este motivată prin comparația lor cu rezultatele integrării numerice (le-am prezentat în tabele și grafice); pentru două tipuri de curgeri (curgerea plană cu pânză impermeabilă și curgerea asimetrică cu pânză impermeabilă), prin grafice tri-dimensionale (ale componentelor vitezei), dar și a câmpului de vectori (u, w) , se arată importanța soluțiilor aproximative obținute cu MHAO; aceste reprezentări grafice completează rezultatele adimensionale din secțiunea de față; **3)** curgerea bidimensională a unui fluid vâscos Newtonian cu transfer de căldură pe o suprafață întinsă instabilă; am prezentat o abordare cu metoda MHAO folosind două tipuri de aproximări: aproximarea cu funcții exponențiale și aproximarea cu funcții raționale; am discutat influența condiției inițiale (f_w) asupra deplasării, vitezei și temperaturii, în cele trei cazuri posibile: imersie ($f_w < 0$), impermeabilitate ($f_w = 0$), respectiv aspirație ($f_w > 0$); de asemenea, am studiat variațiile temperaturii fluidului datorate variației numărului lui Prandtl, în fiecare dintre cele trei cazuri amintite mai sus; și pentru această problemă din mecanica mediilor continue, metoda MHAO a condus la soluții aproximative de mare precizie pe întreg domeniul de definiție; soluțiile aproximative le-am comparat cu soluțiile numerice (în tabele și grafice), verificând astfel acuratețea metodei MHAO.

Capitolul V are ca obiect aplicarea metodei MHAO la fluide ne-Newtoniene. Printre problemele abordate amintim: **1)** curgerea unui fluid Maxwell superior-convectiv pe o placă poroasă întinsă; am construit doisprezece clase de soluții aproximative cu metoda MHAO, care s-au dovedit a fi performante atât în cazul curgerii cu viteză de imersie ($R < 0$), cât și în cazul curgerii cu viteză de aspirație ($R > 0$); aceste soluții aproximative le-am comparat cu soluțiile numerice, obținând abateri foarte mici (a se vedea tabelele și graficele acestei secțiuni); mai mult decât atât, acuratețea soluțiilor aproximative am demonstrat-o comparând coeficientul superficial la limită ($f''(0)$) și valoarea limită ($f(\infty)$) obținute cu MHAO cu valorile integrării numerice; pentru prima dată s-au folosit două teste statistice pentru studiul abaterilor: testul Durbin-Watson (pentru autocorelații) și testul Barlett (pentru varianță constantă); pentru toate cele doisprezece soluții aproximative

valorile ambelor teste statistice se încadrează între limitele admise; la ambele tipuri de curgeri (curgerea cu viteză de aspirație și curgerea cu viteză de imersie), se arată importanța soluțiilor aproximative; se prezintă grafice tri-dimensionale (ale componentelor vitezei), dar și a câmpului de vectori (u, v) , care completează rezultatele adimensionale stabilite cu MHAO, ară tând importanța soluțiilor aproximative; **2**) curgerea unei pelicule subțiri de fluid Oldroyd cu 6-constante pe o bandă în mișcare; cu ajutorul unei transformări de similaritate am redus problema neliniară la o ecuație diferențială neliniară cu condiție inițială omogenă și condiție la limită neliniară; analiza atentă a condiției la limită neliniară a condus la două posibile condiții la limită: una omogenă, iar alta neomogenă; cu ajutorul metodei MHAO am construit soluții aproximative de mare precizie pentru ambele cazuri, folosind funcții exponențiale și funcții polinomiale; am discutat variația profilului vitezei în raport cu variația coeficientului de inerție adimensional (m), respectiv a variației constantelor materiale adimensionale (a_1 și a_2); comparațiile dintre soluțiile aproximative și rezultatele integrării numerice le-am prezentat în tabele și grafice; aceste comparații scot în evidență acuratețea metodei MHAO; **3**) curgerea stabilă la nivelul stratului limită vâscos a unui fluid magneto-hidro-dinamic (MHD) și transferul de căldură prin radiație; am aplicat metoda MHAO pentru a construi soluții aproximative de mare precizie pentru două cazuri ale coeficienților fizici: coeficientul de aspirație ($S > 0$) sau de imersie ($S < 0$), coeficientul magnetic (M), coeficientul de radiație (R), coeficientul vitezei de alunecare (λ), coeficientul termic de alunecare (δ); acuratețea rezultatelor aproximative am abordat-o prin comparația dintre soluțiile aproximative și rezultatele integrării numerice (prezentate în tabele și grafice), atât pentru funcția de curent (ce descrie transportul de masă), cât și în cazul temperaturii; mai mult, precizia soluțiilor am întărit-o prin comparația rezultatelor obținute cu MHAO și a rezultatelor numerice, pentru coeficientul superficial la limită ($f''(0)$) și a valorii limite ($f(\infty)$), dar și prin reprezentarea restului de aproximare (pentru funcția de curent, respectiv pentru temperatură), în două din cele două cazuri abordate; am discutat variația deplasării și a vitezei orizontale în raport cu variația coeficientului de aspirație ($S > 0$) sau de imersie ($S < 0$), precum și în raport cu variația coeficientului magnetic (M); de asemenea, am discutat variația temperaturii în raport cu variația coeficientului de aspirație ($S > 0$) sau de imersie ($S < 0$), a variației coeficientului magnetic (M), precum și în raport cu variația coeficientului termic de alunecare (δ); **4**) curgerea vâscoasă instabilă printr-un cilindru contractiv a unui fluid incompresibil; problema studiată admite soluții duale; cu ajutorul metodei MHAO am stabilit soluții aproximative ale soluțiilor duale, în patru cazuri; pentru ambele soluții duale, am prezentat variația deplasării și a vitezei în raport cu variația coeficientului de aspirație ($\gamma > 0$), și a variației coeficientului de instabilitate (S); precizia rezultatelor analitice aproximative am motivat-o prin comparația dintre rezultatele aproximative cu cele numerice, pentru deplasare și viteză, dar și pentru coeficientul superficial la limită ($f''(0)$) și a valorii limită ($f(\infty)$); toate aceste comparații le-am prezentat în tabele și grafice; importanța soluțiilor aproximative este prezentată pentru două cazuri (când coeficientul de instabilitate are valoarea $S = -2$) prin graficele tri-dimensionale (ale componentelor vitezei fluidului), dar și graficul câmpului de vectori (u, w) , în cele două cazuri de instabilitate.

Toate soluțiile analitice aproximative obținute cu metoda MHAO sunt într-un bun acord cu soluțiile numerice, spre deosebire de rezultatele unor studii și cercetări

din literatura de specialitate obținute cu ajutorul metodelor tradiționale de către alți cercetători, unde abaterile sunt mult mai mari decât în studiile noastre.

Actualitatea temei

Prezenta teză își propune să determine efectiv soluțiile ecuațiilor diferențiale de mișcare, să compare rezultatele obținute cu rezultatele obținute numeric cu metoda Runge-Kutta de ordin patru în combinație cu metoda shooting. De asemenea, se calculează coeficienții superficiali la limită, precum și alte caracteristici. În lucrare se vor folosi noțiuni ca operatori liniari, operatori neliniari, funcții auxiliare, parametri de control ai convergenței și se dau metode riguroase de determinare optimală a acestor parametri, în sensul ca restul obținut prin înlocuirea soluției în ecuația diferențială să fie minim. Metoda MHAO constă în definitiv în transformarea unei ecuații diferențiale neliniare într-o singură ecuație diferențială liniară, lucru neabordat în literatură. Metoda MHAO constă în definitiv în transformarea unei ecuații diferențiale neliniare într-o singură ecuație diferențială liniară, lucru neabordat în literatură. Ceea ce este caracteristic primei variante a metodei MHAO este că ecuația diferențială (2.2.9) este rezolvată prin metode de cuadratură, spre deosebire de a doua variantă în care ecuația diferențială (2.3.12) nu este rezolvată efectiv și se propun soluții de o anumită formă în funcție de funcțiile care apar în operatorul neliniar. Prima variantă se aplică problemelor de dificultate medie și mare, iar cea de-a doua variantă se aplică acelor probleme de dificultate maximă care nu dau rezultate eficiente cu prima variantă. Avantajul variantei a doua este că simplifică rezolvarea unor ecuații complicate cu un număr foarte mare de parametri. A doua variantă nu este cunoscută ca o metodă de sine stătătoare în teoria ecuațiilor diferențiale. A doua variantă permite determinarea soluțiilor exacte în unele cazuri, dar și a soluțiilor multiple, rezultate care nu sunt cunoscute în literatură. Există puține metode de a determina soluțiile exacte, dar acestea nu țin seama de condițiile inițiale și la limită.

În ultimul deceniu s-au dezvoltat metode analitice optimale, cum ar fi: metoda homotopică perturbatoare optimală (OHPM) [94], [127], [59], metoda variațională optimală (OVM) [128] și metoda homotopică asimptotică optimală (MHAO) [126]. Aceste metode nu se bazează pe ipoteza simplificatoare de existența a parametrilor mici sau mari în ecuația diferențială sau în condițiile inițiale / la limită. Principalul avantaj al acestei abordări este controlul convergenței soluțiilor aproximative într-un mod foarte riguros.

Obiectivele tezei

Obiectivele prezentei teze sunt abordările corecte ale ecuațiilor diferențiale neliniare, ce corespund unor situații practice, folosind metoda MHAO. Aceste obiective sunt concretizate în:

1. Studiul amortizoarelor de vibrații pentru suspensiile sistemelor de mașini.
2. Ecuația neliniară Falkner-Skan, ce corespunde curgerii vâscoase pe o pană.
3. Alunecarea parțială pe o suprafață întinsă.
4. Curgerea unui fluid Newtonian vâscos pe o suprafață întinsă instabilă și transferul de căldură într-un fluid vâscos.

5. Curgerea unui fluid Maxwell superior-convectiv pe o placă poroasă întinsă.

6. Curgerea peliculei subțiri de fluid Oldroyd cu 6-constante pe o bandă în mișcare.

7. Curgerea stabilă la nivelul stratului-limită a unui fluid MHD vâscos și transferul de căldură prin radiație.

Astfel de curgeri corespund unor aplicații practice, precum:

- studiul amortizoarelor de vibrații pentru suspensiile sistemelor de mașini;
- curgerea vâscoasă pe o pană;
- producția de hârtie, fibră de sticlă, fibre sintetice;
- cultivarea cristalelor;
- materiale fabricate prin extrudare din foi de polimeri;
- tratamente termice ale materialelor care rulează între o rolă transportoare;
- transferul de căldură într-un fluid vâscos;
- noroaie de foraj;
- prelucrarea produselor alimentare;
- polimeri plastici;
- procesul de răcire a plăcilor metalice;
- alunecarea parțială pe un plan întins.

Rezultatele obținute în prezenta lucrare pot fi folosite în practica inginerească.

Rezultatele obținute cu eroare foarte bună demonstrează deosebită eficiență a metodei MHAO în comparație cu rezultatele obținute numeric. În situațiile prezentate nu există alte soluții efective.

Prin compararea soluțiilor și a coeficienților superficiali la limită obținuți prin metoda MHAO cu soluțiile numerice corespunzătoare, dar și prin graficul restului, sau prin aplicarea testelor statistice Durbin-Wattson și Barlett, se poate spune cu certitudine că metoda MHAO este foarte eficientă în practică și de o acuratețe deosebită.

1 Fundamentare teoretică

1.1 Medii elastice continue

Este cunoscut că un corp material din spațiul fizic poate exista într-una din cele trei stări: lichidă, solidă sau gazoasă.

La rândul lui, un corp material solid poate avea o structură de corp rigid (i.e. în timpul mișcării distanța dintre două particule arbitrare din corp rămâne constantă) sau o structură elastică. Corpurile materiale ce au o structură elastică se numesc în mod uzual *medii solide deformabile*.

Mișcarea, față de un reper fix, a unui mediu deformabil conține atât un proces de deplasare a corpului în ansamblu ca un rigid, cât și un proces de deformare. Aceste procese sunt rezultatele acțiunii asupra corpului a unor forțe masice (de volum) sau / și tensiuni (forțe de suprafață). Procesul de deformare a corpului se poate datora și acțiunii câmpului termic, produs de sursele termice aflate în apropierea corpului.

În această subsecțiune se prezintă într-o sinteză succintă conceptele de bază ce intervin în probleme ce descriu starea de deformare și tensiune a unui *mediu continuu deformabil*, cum sunt: modelul matematic de corp continuu, componentele deformației, componentele tensiunii, câmpul de forțe masice.

Starea de tensiune și deformare a unui mediu continuu deformabil este guvernată de un sistem de ecuații cu derivate parțiale, la care se adaugă o serie de ecuații constitutive. Aceste ecuații sunt: ecuațiile de mișcare, ecuația de continuitate și, eventual ecuația conductiei termice (în unele probleme această ecuație este înlocuită cu ecuația energiei). Aceste ecuații au fost deduse din principiile mecanicii și termodinamicii și sunt sintetizate în subsecțiunea 1.1.3. Aceste principii sunt: principiul conservării masei, principiul impulsului, principiul momentului cinetic, principiul energiei și principiul entropiei. Pentru determinarea mișcării, ecuațiile de bază sunt completate cu legi de structură specifice, ce vor genera ecuații de structură, numite în mod uzual ecuații constitutive. Prima lege constitutivă a fost formulată de Hooke în 1678. Ecuațiile constitutive au în componența lor coeficienți constitutivi. Ecuațiile constitutive trebuie să respecte următoarele principii: principiul obiectivității și principiul invarianței materiale. Există medii continue care prezintă anumite simetrii în ceea ce privește proprietățile lor fizice. Proprietățile de simetrie sunt caracterizate de un grup de transformări ortogonale. În funcție de grupul de transformări ortogonale se disting două categorii de medii: medii hemitrope și medii izotrope.

1.1.1 Proprietăți mecanice

Modelul matematic de corp continuu. Mișcarea corpului continuu

Un corp material la un moment dat ocupă o porțiune din spațiul fizic. Ansamblului de poziții din această porțiune îi corespunde o submulțime din spațiul Euclidian afin E_3 (modelul matematic al spațiului fizic). Această submulțime caracterizează locul unde se află corpul și forma lui la momentul considerat. Dacă se face abstracție de structura moleculară a corpului și se presupune că particulele în corp sunt distribuite continuu, atunci această submulțime din E_3 este în general

închiderea unui domeniu mărginit și se numește model de corp continuu. Modul de repartitie al materiei în corp se modelează cu o funcție pozitivă și continuă definită pe această mulțime și care se numește funcție de densitate.

Forțe masice

Acele forțe care acționează în toată masa corpului continuu se numesc **forțe masice** [17]. În fiecare punct din spațiul ocupat de corp s-a aplicat un vector al cărui direcție, mărime și sens depind de punct. Un exemplu de forță masică este greutatea.

Tensiuni

Se consideră un corp cu suprafața A asupra căruia acționează o forță F , uniform distribuită. Raportul F/A definește *efortul unitar*. Limita raportului când suprafața tinde către zero, reprezintă efortul unitar într-un punct și poartă denumirea de *tensiune*. A cunoaște starea de tensiune în vecinătatea unui punct înseamnă a cunoaște tensiunile ce acționează pe toate elementele de suprafață ce trec prin acel punct.

Componentele deformației

Sub acțiunea unei tensiuni un corp se deformează. Deformația poate modifica volumul sau forma corpului. De asemenea, deformația poate fi elastică și se recuperează la descărcarea corpului, sau poate fi curgere și rămâne nerecuperată. Când asupra unui corp acționează numai tensiunile normale după cele trei direcții va avea loc o deformare care va modifica volumul și va lăsa forma neschimbată (compresie - tensiunile normale sunt orientate spre interiorul corpului și volumul se micșorează și dilatare - tensiuni orientate în sens invers și volumul se mărește). Compresia și dilatarea formează o clasă de deformații numite deformații volumice. Există o a doua clasă de deformații care se caracterizează prin modificarea formei corpului și menținerea neschimbată a volumului. Acestea au loc sub acțiunea tensiunilor tangențiale (forfecare simplă, forfecare pură și rotație).

Mișcarea unui corp continuu, descrisă printr-o funcție $\Phi = \Phi(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ conține atât un proces de deplasare a corpului în ansamblu ca un rigid, cât și un proces de deformare în care se modifică distanțele reciproce între punctele corpului și variază unghiurile între elementele de linie [17]. Este importantă separarea deplasării de corp rigid de procesul de deformare. Acest lucru se face introducând elemente prin care putem caracteriza deformarea.

Fie în acest scop Q o particulă a corpului continuu. Notăm cu (ξ_1, ξ_2, ξ_3) coordonatele particulei la momentul inițial $t=0$ și cu (x_1, x_2, x_3) coordonatele sale la momentul t , adică:

$$x_i = \varphi(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.1)$$

Funcțiile $\gamma_{jk} = \gamma_{jk}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ definite prin

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_k} - \delta_{jk} \right) \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (1.1.2)$$

se numesc *componentele deformației* în punctul P_0 la momentul t (P_0 corespunde particulei Q la momentul inițial $t = 0$).

Componenta γ_{11} caracterizează alungirea specifică a elementului de linie QQ' care la momentul inițial este paralel cu axa $O\xi_1$. Analog, componentele γ_{22} , respectiv γ_{33} caracterizează alungirile specifice ale elementelor de linie QQ' paralele cu axa $O\xi_2$, respectiv cu axa $O\xi_3$.

Componenta γ_{12} caracterizează variația unghiului drept ($\pi/2$) dintre elementele de linie QQ' și QQ'' care la momentul inițial erau paralele cu axele $O\xi_1$ respectiv $O\xi_2$ [17]. La fel se justifică, că γ_{13} caracterizează variația unghiului drept dintre două elemente de linie care la momentul inițial sunt paralele cu $O\xi_1$ respectiv $O\xi_3$, iar γ_{23} caracterizează variația unghiului drept dintre două elemente de linie care la momentul inițial sunt paralele cu $O\xi_2$ respectiv $O\xi_3$.

Vectorul \bar{u} definit prin [17]:

$$\bar{u} = \bar{x} - \bar{\xi} = (x_1 - \xi_1)\bar{e}_1 + (x_2 - \xi_2)\bar{e}_2 + (x_3 - \xi_3)\bar{e}_3 \quad (1.1.3)$$

se numește *vectorul deplasare* al particulei Q la momentul t .

Starea de tensiune și deformare poate fi caracterizată cu ajutorul *invariantilor stării de deformație*, care nu depind de alegerea reperului.

Un invariant al stării de deformare este deformația specifică de volum:

$$\theta = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{div}\bar{u}. \quad (1.1.4)$$

Viteza de deformare Sub acțiunea unor solicitări externe corpurile deformabile se pot deforma cu viteze diferite. Deformarea poate fi instantanee sau are loc într-un interval finit de timp. În timpul curgerii fluidelor în mod obligatoriu trebuie să se țină cont de factorul timp, care trebuie luat în considerare și în cazul solidelor numai pentru stările de echilibru de dinainte și de după încărcare.

1.1.2 Ecuații constitutive

Principiile generale, relative la mișcarea unui corp continuu (*principiul conservării masei, principiul impulsului*) și traduse în ecuații (*ecuația de continuitate, ecuația de mișcare*) sunt valabile pentru orice corp continuu (solid sau fluid). Ecuațiile care rezultă nu sunt suficiente pentru determinarea mișcării. Este natural să fie așa deoarece aceste principii ale mecanicii newtoniene se referă la proprietatea mediilor de a fi sisteme materiale continue deformabile.

Modul cum se mișcă un mediu continuu în prezența acțiunilor exterioare depinde însă și de structura lui: într-un fel răspunde un solid la solicitări și în alt fel un fluid.

Va trebui deci să se completeze principiile generale cu legi de structură specifice. Aceste legi de structură specifice vor genera ecuații de structură specifice ce completează ecuațiile rezultate din principii generale. Aceste ecuații specifice vor face ca modelele matematice să aibă aspecte diferite în medii cu structuri diferite.

Două corpuri de aceeași formă și aceeași masă pot avea comportări diferite atunci când sunt supuse la aceleași solicitări. Se spune că cele două corpuri sunt alcătuite din materiale diferite.

Relațiile care definesc diverse clase de medii continue, corespunzătoare diverselor comportări ale acestora se numesc, în literatură, relații constitutive sau ecuații constitutive ([95], [17]). Exemple de medii continue ideale: elastice, fluide, vâsco-elastice.

Relațiile constitutive ce definesc un material, trebuie să respecte următoarele principii: principiul obiectivității și principiul invarianței materiale ([70], [136], [166], [167]).

Principiul obiectivității afirmă că ecuațiile constitutive trebuie să fie independente de observator.

Există medii continue care prezintă anumite simetrii în ceea ce privește proprietățile lor fizice. Principiul invarianței materiale se aplică în cazul când există astfel de proprietăți de simetrie. Acest principiu se enunță astfel: ecuațiile constitutive ale unui material trebuie să fie invariante în raport cu grupul transformărilor ce caracterizează proprietățile de simetrie ale materialului.

Este cunoscut că un corp este *incompresibil* dacă în timpul oricărei deformări densitatea rămâne neschimbată: $\rho = \rho_0(\xi)$.

Legea lui Hooke. [17] Prima lege constitutivă a fost formulată de Hooke în 1678, a cărei sens este că "întinderea este proporțională cu forța" (legea era sugerată de experiențe referitoare la întinderea barelor).

De la Hooke și Euler încoace, creatorii mecanicii mediilor continue au căutat să formuleze principii din care să obțină aceste legi pe cale matematică. Cea mai completă formulare de acest gen se datorează lui W. Noll de la Carnegie-Mellon University (Pitsburg, publicată în 1972 în "Archiv for Rational Mechanics and Analysis 48", pg 1-50 sub titlul "A New Mathematical Theory of Simple Materials").

Legea constitutivă a lui Hooke se referă la un corp omogen și izotrop și se exprimă prin următoarea ecuație constitutivă:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \text{div} \bar{u} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij}. \quad (1.1.5)$$

În această relație σ_{ij} sunt componentele tensiunii într-un punct (x_1, x_2, x_3) , ε_{ij} sunt componentele deformațiilor mici în același punct, $\text{div} \bar{u} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ este deformația specifică de volum în punctul (x_1, x_2, x_3) , δ_{ij} este simbolul lui Kronecker, iar λ și μ sunt constante numite constantele lui Lamé.

Ecuațiile (1.1.5) pot fi rezolvate în raport cu componentele deformației și se obține:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \Theta \cdot \delta_{ij}, \quad (1.1.6)$$

unde s-a notat

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (1.1.7)$$

$$\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}. \quad (1.1.8)$$

Constanta E se numește *modulul lui Young*, iar ν este *coeficientul lui Poisson*.

Proprietățile elastice ale corpului sunt descrise de constantele lui Lamé λ și μ sau de constantele elastice E și ν .

Semnificația mecanică a coeficienților elastici E și ν este:

- modulul lui Young, E , este raportul dintre tensiunea de întindere longitudinală și alungirea specifică longitudinală determinată de ea;

• coeficientul lui Poisson, ν , este raportul dintre contracția specifică transversală și alungirea specifică longitudinală.

Constanta μ a lui Lamé este raportul dintre tensiunea de alunecare și deformația longitudinală pe care o provoacă, și poartă numele de *modul de forfecare*.

Constanta λ a lui Lamé nu are o semnificație simplă, însă o anumită combinație dintre această constantă și modulul de forfecare μ are. Constanta k dată de

$$k := \lambda + \frac{2\mu}{3} \quad (1.1.9)$$

se numește *modul de compresiune hidrostatică* și satisface $k = -\frac{p}{\text{div}u}$. Prin urmare,

constantă de compresiune hidrostatică este raportul dintre presiunea hidrostatică și deformația specifică de volum pe care o provoacă.

Constantele E , ν , μ , k se numesc *constante elastice fundamentale* și au un sens fizic bine determinat.

1.1.3 Ecuații statice și dinamice

În baza *principiilor mecanicii și termodinamicii* [95] se stabilesc: *ecuațiile de mișcare, ecuația de continuitate și, după caz, ecuația energiei (sau conducției termice)*.

Pentru un corp continuu, omogen și izotrop, ecuațiile pe care le satisfac componentele tensiunii, ale micilor deformații și ale vectorului de deplasare în *condiții statice / condiții dinamice* sunt [17]:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + \rho f_i &= 0 \quad (\text{ecuații statice}) \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + \rho f_i &= \rho \ddot{u}_i \quad (\text{ecuații dinamice}) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{div} \bar{u} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Alte probleme din mecanica mediilor elastice abordate de autor pot fi găsite în articolele [25], [44]-[55], [58].

1.2 Fluide vâscoelastice

Convecția căldurii are loc în procesele naturale și industriale datorită prezenței gradientilor de temperatură, care pot apărea în orice direcție în raport cu verticala, care este determinată de direcția gravitației.

Descrierea teoretică a convecției naturale nu a fost făcută mai înainte de 1916, atunci când Rayleigh [145] a făcut calcule în apropierea pereților de frecare. Jeffrey [98] a fost primul care a studiat cazul ce include frecare în pereți. Teoria

liniară poate fi găsită în monografia lui Chandrasekhar [29]. Efectele neliniarității în convecția fluidelor Newtoniene au fost luate în considerare de către Malkus și Veronis [115] și Veronis [174] folosind așa-numita aproximare slab-neliniară, care este: numărul Rayleigh este mai mare, dar aproape de numărul critic Rayleigh.

1.2.1 Fluide Newtoniene

Tensorul tensiune de forfecare la fluide Newtoniene are o relație constitutivă liniară în raport cu tensorul rată de forfecare. Ecuația constitutivă a acestei relații are ca și constantă de proporționalitate vâscozitatea dinamică a fluidului, adică

$$\tau_{ij} = 2\eta_0 e_{ij} \quad (1.2.1)$$

unde tensorul rată de forfecare este

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2.2)$$

Motivația fizică poate fi explicată prin structura internă a fluidelor. Ele pot fi realizate din topituri de polimeri sau soluții polimerice în unele lichide. Când forfecarea este aplicată la topitură sau soluție, lanțurile polimerice se deformează odată cu curgerea și apoi acestea sunt extinse sau deformate în funcție de energia transferată de tensiunea de forfecare.

1.2.2 Fluide incompresibile de ordinul al doilea

Un model simplu de fluid vâscoelastic este cel al fluidului incompresibil de ordinul al doilea [33], [39], [130]. Presupunând τ_{ij} ca tensor tensiune de forfecare, ecuația constitutivă este:

$$\tau_{ij} = 2\eta_0 e_{ij} + 4\beta e_{ik} e_{kj} + 2\gamma \frac{D e_{ij}}{Dt} \quad (1.2.3)$$

în care

$$\frac{D P_{ij}}{Dt} = \frac{D P_{ij}}{Dt} + P_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} P_{kj} \quad (1.2.4)$$

pentru un tensor P_{ij} și unde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.2.5)$$

este derivata materială sau Lagrange în raport cu timpul. Derivata în raport cu timpul din relația (1.2.4) este numită derivata inferior-convectivă (în raport cu timpul), prin contrast cu derivata superior-convectivă (în raport cu timpul) dată de relația

$$\frac{D P_{ij}}{Dt} = \frac{D P_{ij}}{Dt} - P_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} P_{kj} \quad (1.2.6)$$

și cu derivata corotațională de timp

$$\frac{D P_{ij}}{Dt} = \frac{D P_{ij}}{Dt} + \omega_{ik} P_{kj} - P_{ik} \omega_{kj} \quad (1.2.7)$$

unde tensorul viteza de rotație instantanee (vectorul rată de rotație) este

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2.8)$$

Aceste derivate de timp sunt invariante la o schimbare a reperului de referință.

În ecuațiile (1.2.1) și (1.2.3) η_0 este vâscozitatea și în ecuația (1.2.3) β și γ sunt constante de material.

Al doilea model pentru ecuația (1.2.3) are limitări în ceea ce privește mișcarea fluidului. Este o aproximare pentru o mișcare slabă cu viteze de forfecare mici [23].

1.2.3 Fluide Maxwell

Modelul Maxwell [23] este utilizat pentru a descrie mișcarea acolo unde este posibil să existe relaxarea tensiunilor de forfecare.

Ecuația constitutivă a acestui model este de forma:

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\eta_0 e_{ij} \quad (1.2.9)$$

unde λ este timpul de relaxare. O caracteristică a acestei ecuații este că pentru valori ale lui λ mici fluidul se comportă aproape ca un fluid Newtonian. Pentru λ mare tinde să se comporte ca un solid elastic. În cazul limită pentru λ foarte mare, ecuația aproximativă se integrează în timp și se obține legea lui Hooke, care este: "tensiunea este proporțională cu deformarea".

Această ecuație constitutivă are trei versiuni: model Maxwell superior-convectiv, model Maxwell inferior-convectiv și model Maxwell corotațional, în funcție de derivata de timp selectată pentru a descrie comportamentul fluidului.

1.2.4 Fluide Oldroyd

Modelul Oldroyd de fluid [23], [137] include, pe lângă timpul de relaxare, un timp de întârziere.

Versiunea liniară a acestui model este numit modelul Jeffreys (dar modelul neliniar este uneori numit cu acest nume). Ecuația constitutivă este

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\eta_0 (e_{ij} + \lambda_1 \frac{De_{ij}}{Dt}) \quad (1.2.10)$$

unde λ_1 este timpul de întârziere.

1.2.5 Ecuațiile de bază: ecuația de moment, ecuația conservării masei, ecuația energiei

În forma adimensională, ecuațiile de bază sunt

ecuația de mișcare (ecuația de moment) :

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + R\theta \hat{k} \quad (1.2.11)$$

ecuația conservării masei (ecuația de continuitate) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.2.12)$$

ecuația conservării energiei :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta - \mathbf{u} \cdot \hat{k} = \nabla^2 \theta \quad (1.2.13)$$

la acestea adăugându-se

ecuația conductiei termice la nivelul peretilor :

$$\frac{k}{k_W} \frac{\partial \theta_W}{\partial t} = \nabla^2 \theta_W \quad (1.2.14)$$

unde coeficienții au semnificația: $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - viteza, p - presiunea, τ - tensorul tensiune de forfecare, θ - temperatura fluidului, $Pr = \frac{\nu}{k}$ - numărul Prandtl,

$R = \frac{g \alpha_T \Delta T d^3}{\nu k}$ - numărul Rayleigh, ΔT - diferență de temperatură reprezentativă, k_W - coeficientul de difuzivitate termică al unuia dintre pereți (k_L pentru peretele inferior, k_U pentru peretele superior), θ_W - temperatura unuia dintre pereți (θ_L temperatura peretelui inferior, θ_U temperatura peretelui superior).

Observații: 1) În toate aceste modele de fluide vâscoelastice **vâscozitatea este presupusă constantă.**

2) O clasă importantă de fluide ne-Newtoniene a căror **vâscozitate se modifică** sub acțiunea unui câmp magnetic sau electric, este cea a fluidelor **magneto-**, respectiv **electro-reologice**. Acestea fac obiectul **Capitolului 3** al prezentei lucrări.

Un parametru mecanic care apare în studiul problemei curgerii unui fluid este *coeficientul superficial la limită*, notat simbolic cu $\psi''(0)$, unde ψ este funcția de curent.

1.2.6 Coeficientul superficial la limită

Când ecuațiile stratului-limită sunt integrate, se poate deduce distribuția vitezei, și poziția punctului de separare poate fi determinată. Aceasta, la rândul său, permite să se calculeze *coeficientul superficial la limită* [157] în jurul suprafeței printr-un simplu proces de integrare a tensiunii de forfecare la nivelul peretelui de pe suprafața corpului. Tensiunea de forfecare la nivelul peretelui este

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1.2.15)$$

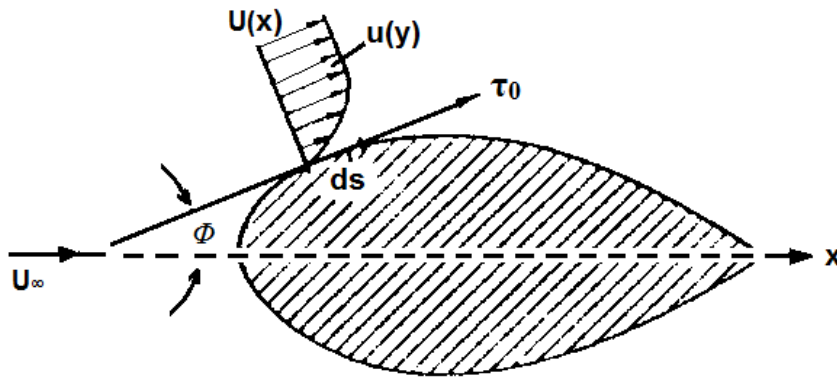
Pentru cazul curgerii bi-dimensionale coeficientul superficial la limită este

$$D_f = b \int_0^l \tau_0 \cos \varphi \, ds, \quad (1.2.16)$$

unde b reprezintă înălțimea corpului cilindric; φ este unghiul dintre vectorul tangentei la suprafață și viteza de curent-liber U_∞ , iar s este coordonata măsurată de-a lungul suprafeței. Presupunând că nu există nici o separare, integrarea se face pe toată suprafața. Deoarece $\cos \varphi \, ds = dx$, unde x este măsurată paralel cu viteza de curent-liber, putem scrie

$$D_f = b \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx. \quad (1.2.17)$$

Pentru a calcula coeficientul superficial la limită, este necesar să se cunoască gradientul vitezei la nivelul peretelui, care poate fi realizat doar prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale stratului limită.



O ilustrare a calculării coeficientului superficial la limită

2 Metoda MHAO - o prezentare generală

2.1 Elemente de dinamică neliniară

În tehnică unele sisteme a căror evoluție poate fi studiată pe baza unor ecuații diferențiale au caracter liniar, însă majoritatea sistemelor fizice nu conduc la ecuații diferențiale liniare ci la ecuații nelinare. O ecuație diferențială se numește neliniară dacă variabilele independente sau derivatele lor nu apar la puterea unu. În general sistemele mecanice neliniare capătă denumirea coeficientului neliniar din ecuația diferențială respectivă. Astfel, se deosebesc sistemele de masă neliniară, cu amortizare neliniară, cu elasticitate neliniară, etc.

Problemele care le pune tehnica sunt în general neliniare și liniarizarea lor nu are decât o valoare de primă aproximare, corespunzătoare unei schematizări mai mult sau mai puțin satisfăcătoare a legilor naturale, schematizare impusă de insuficiența mijloacelor de analiză și experimentare. Științele ingineresti moderne cu instrumentarea lor rafinată și mijloace de calcul avansate, au pus în evidență faptul că formularea legilor de mișcare care neglijează termenii neliniari conduce la rezultate inadecvate sau chiar false. Tratarea liniară nu numai că duce la mari erori cantitative, dar deformează de multe ori caracterul calitativ al fenomenului.

Din fericire, premisa liniarității domină încă domenii considerabile ale tehnicii. Sunt numeroase exemple în tehnică când apar fenomene liniare, cum ar fi: în teoria elasticității, legea lui Hooke are o valabilitate limitată, proporționalitatea dintre forțe și deformații dispăre (cazul arcurilor conice, forțele elastice sau de readucere depind de viteză sau timp, etc.), în domeniul vibrațiilor: forțele perturbatoare depind de poziție și chiar de viteză, amortizările pot fi neliniare (cazul automobilelor), mișcarea pământului sau a stelelor au mișcări periodice și aproape periodice - domeniu de care se ocupă astronomia, oscilațiile scoarței pământului (seismologia). Oscilațiile se găsesc la baza fenomenelor optice, a proceselor din nucleul atomic, cuprind în general toată fizica, acustica, electrotehnica, electronica. Clădirile și construcția de mașini se întâlnesc, în proiectarea lor, cu vibrații iar construcțiile navale cu tangajul și ruliul vaselor. Fenomene neliniare apar în fluide, biologie, vehicule spațiale, poduri suspendate, consolidarea barajelor, reologie, etc.

În prezent, activitatea de cercetare a inginerului în domeniul mecanicii neliniare s-a extins considerabil. Prin introducerea deliberată a neliniarității în diferite sisteme se obțin performanțe deosebite și o stabilizare remarcabilă. A început să fie investigat și câmpul ecuațiilor cu derivate parțiale neliniare, deoarece multe probleme din domeniul mediilor continue, mecanica fluidelor compresibile, termotehnică sau mașini electrice, seismologie, plasmă, chimie și alte domenii ale tehnicii conduc la astfel de ecuații.

Inițial, teoria sistemelor neliniare s-a bazat pe rezultatele obținute de N. Poincaré (1878-1900), Liapunov (1893), Birkhoff (1908-1944) apoi Koenig, Hadamard, Andronov, Krîlov-Bogoliubov, etc. Elementele neliniare din sistemele fizice au fost observate și studiate în special în astronomie: J. Homer Lane în anul 1870, apoi Lord Kelvin au studiat probleme neliniare legate de mișcarea stelelor. Poincaré a analizat multe probleme neliniare din mecanica cerească și a elaborat metoda perturbațiilor, dezvoltată ulterior de A. Lindstedt. Lord Rayleigh s-a ocupat îndeosebi de teoria sunetelor. În teoria elasticității problemele neliniare au atras atenția fraților Bernoulli, precum și a lui Euler și Lagrange. Deformațiile finite

neliniare ale solidului au fost studiate analitic de M. Biot, J. Boussinesq, G. Kirchhoff, D. Murnagham. Multe probleme de hidrodinamică și aerodinamică care conduc la ecuații diferențiale neliniare au fost studiate de L. Prandtl, D. Reynolds, G. Taylor. Mișcările oscilatorii cu amplitudini finite au fost analizate de Lord Rayleigh, G. Stokes, Levi-Civita. Riemann a elaborat metoda de analiză a propagării impulsului în gaze. În secolul XX, problemele neliniare au început să fie studiate în mai toate domeniile tehnice. Astfel, Van der Pol a obținut rezultate fructuoase în studiul sistemelor diferențiale neliniare din electrotehnică. De stabilirea soluțiilor periodice ale ecuațiilor diferențiale neliniare s-a ocupat A. Liapunov, Malkin, Andronov, Pontriaghin, Mandelstam, Papaleski, Witt.

Oscilațiile neliniare ce apar la circuitele electrice au fost studiate de Hayashi, Kawakami, Ueda. Metode generale de aproximare au fost date de Krilov, Mitropolski, Duffing.

Soluții exacte pentru sisteme neliniare sunt foarte puține și în general nu țin seama de condițiile impuse. De o deosebită importanță în acest domeniu sunt soluțiile aproximative. Din nefericire, în cazul ecuațiilor diferențiale neliniare nu este valabil principiul suprapunerii. Determinarea soluției generale a unei ecuații diferențiale neliniară este o problemă deosebit de dificilă și adesea imposibilă. Sunt foarte puține cazurile când soluția se poate exprima cu ajutorul funcțiilor elementare. În multe cazuri practice, ecuația diferențială este foarte complicată, astfel că nu se poate determina o soluție într-un timp acceptabil și cu mijloace obișnuite.

Cele mai cunoscute metode aproximative sunt tehnicile perturbatoare. Un aspect deosebit al acestor metode a fost descoperirea celei de a noua planete a sistemului solar. Aceste tehnici sunt considerate printre primele zece realizări de excepție ale secolului XX. Tehnicile perturbatoare au un rol important în știință și inginerie. Dar aceste tehnici sunt bazate pe existența unui parametru mic sau mare sau pe variația mică a variabilei necunoscute. Aceste restricții fac imposibilă rezolvarea unor ecuații diferențiale ce nu conțin astfel de parametri.

Metodele perturbatoare au fost aplicate pentru a determina soluții aproximative la problemele slab neliniare de către Nayfeh [134] în 1985. Dar utilizarea teoriei perturbațiilor în multe probleme este invalidă pentru valori ale parametrilor dincolo de un anumit interval specificat. Alte proceduri au fost propuse, cum ar fi: metoda de descompunere Adomian [7], metode de liniarizare [19], [143], diverse metode modificate de tip Lindsedt-Poincaré [91], și altele.

Pentru studiul fenomenelor neliniare s-au elaborat și se elaborează și în prezent o mulțime de metode, printre care amintim: metoda balanței armonice, metoda Lindstedt-Poincaré, metoda de medie, metoda scărilor multiple, metoda funcțiilor eliptice, metoda elementelor de frontieră, metoda liniarizării ponderate, metoda parametrului artificial, metode homotopice, metode iterative, metode variaționale, etc.

Dar aceste metode se aplică în special dacă în ecuațiile diferențiale de mișcare apare un parametru mic, ceea ce face ca anumite probleme (puternic neliniare) să nu poată fi rezolvate. Un alt aspect care trebuie avut în vedere este eroarea soluției aproximative în comparație cu soluția numerică.

În ultimii ani, s-au obținut rezultate remarcabile în probleme tari neliniare, în special făcând apel la programe specifice pe calculator prin așa-numitele metode optimale.

2.2 Prima variantă a metodei MHAO

2.2.1 Descriere

În acest capitol se propune să se obțină o soluție aproximativă cu ajutorul metodei homotopice asimptotice optimale (MHAO) (în limba engleză: optimal homotopy asymptotic method (OHAM) [122], [123], [124], [125], [126], [127], [128], [129]), pentru ecuația diferențială neliniară

$$L[u(x)] + g(x) + N[u(x)] = 0 \quad (2.2.1)$$

supusă condițiilor inițiale / la limită

$$B\left[u(x), \frac{du(x)}{dx}\right] = 0 \quad (2.2.2)$$

după numai o singură iterație, rezolvând o ecuație diferențială liniară, unde L este un operator liniar și N este un operator neliniar. Operatorul liniar L nu este unic.

Dacă $\varphi(x, p; C_i)$ este o funcție necunoscută scrisă în forma

$$\varphi(x, p; C_i) = u_0(x) + pu_1(x, C_i) \quad (2.2.3)$$

unde $p \in [0, 1]$ este un parametru, iar $u_0(x)$ este o aproximare inițială a funcției necunoscute $u(x)$ care are proprietățile

$$L(u_0(x)) + g(x) = 0, \quad B\left(u_0(x), \frac{du_0(x)}{dx}\right) = 0 \quad (2.2.4)$$

atunci soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuației (2.1) este dată de

$$\bar{u}(x, C_i) = \varphi(x, 1; C_i) = u_0(x) + u_1(x, C_i), \quad (2.2.5)$$

unde C_i sunt parametri necunoscuți la acest moment, iar prima aproximare $u_1(x, C_i)$ va fi determinată conform descrierii de mai jos.

Cu ajutorul operatorului liniar L și a operatorului neliniar N din ecuația (2.2.1), se construiește familia de ecuații diferențiale

$$H[L(\varphi(x, p; C_i)), H(x, C_i), N(\varphi(x, p; C_i))] = L(u_0(x)) + g(x) + p[L(u_1(x, C_i)) - H(x, C_i)N(u_0(x))], \quad (2.2.6)$$

care satisface următoarele proprietăți

$$H[L(\varphi(x, 0; C_i)), H(x, C_i), N(\varphi(x, 0; C_i))] = L(u_0(x)) + g(x) = 0 \quad (2.2.7)$$

$$H[L(\varphi(x, 1; C_i)), H(x, C_i), N(\varphi(x, 1; C_i))] = H(x, C_i)[L(\bar{u}(x, C_i)) + g(x) - N(\bar{u}(x))] \quad (2.2.8)$$

unde $H(x, C_i) \neq 0$ este o funcție arbitrară de control a convergenței, depinzând de variabilele x și de un număr arbitrar de parametri C_1, C_2, \dots, C_s care vor fi determinați ulterior.

Identificând numai coeficienții puterilor p^0 și p^1 în relația (2.2.6), se obține ecuația de guvernare a aproximării inițiale $u_0(x)$ din ecuația (2.2.4) și ecuația de guvernare a funcției $u_1(x, C_i)$ i.e.

$$L(u_1(x, C_i)) = H(x, C_i)N(u_0(x)), \quad (2.2.9)$$

cu condițiile inițiale / la limită

$$B(\Phi_1(x, C_i), \frac{d\Phi_1(x, C_i)}{dx}) = 0, i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.2.10)$$

Este natural să se aleagă funcția arbitrară auxiliară $H(x, C_i)$ astfel încât produsul

$H(x, C_i)N(u_0(x))$ și $N(u_0(x))$ să fie de aceeași formă. Parametrii C_1, C_2, \dots, C_s care apar în expresia soluției aproximative de ordinul întâi dată de relația (2.2.5) pot fi identificați optimal prin diverse metode de optimizare, cum ar fi: metoda celor mai mici pătrate, Metoda Galerkin, metoda cologației, metoda Ritz, metoda rezidului ponderat, metoda Kantorowich, metoda minimizării pătratului restului de aproximare și altele.

Astfel, substituind relația (2.2.5) în ecuația (2.2.1) rezultă expresia restului de aproximare

$$R(x, C_i) = N(\bar{u}(x, C_i)). \quad (2.2.11)$$

Minimizarea pătratului restului de aproximare

$$J(C_1, C_2, \dots, C_s) = \int_a^b R^2(x, C_1, C_2, \dots, C_s) dx \quad (2.2.12)$$

unde a și b sunt două valori depinzând de problema dată, permite să se identifice parametrii necunoscuți C_1, C_2, \dots, C_s din condițiile

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = \frac{\partial J}{\partial C_2} = \dots = \frac{\partial J}{\partial C_s} = 0. \quad (2.2.13)$$

Cu acești parametri cunoscuți (numiți parametri de control ai convergenței), soluția aproximativă de ordinul întâi (2.2.5) este bine-determinată.

2.2.2 Exemplu: Ecuația neliniară de propagare a unei elastice longitudinale - cazul vibrațiilor periodice

Prima variantă a metodei MHAO se aplică pentru a găsi soluții aproximative pentru ecuația neliniară de propagare a unei elastice longitudinale [60], [61]

$$\ddot{u} - f_1 - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, t > 0, \quad (2.2.14)$$

cu condițiile inițiale / la limită

$$u(x, 0) = v_0(x) = \frac{1}{4\pi} \cos(4\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_1(x) = 0. \quad (2.2.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0. \quad (2.2.16)$$

supusă acțiunii forței volumice

$$f_1(x, t) = 2\pi c_1^2 (\sin(4\pi x) \cos(4\pi c_1 t) + \sin(8\pi x)) \quad (2.2.17)$$

pentru $x \in [0, 1], t \in [0, 1]$ ($a = 0, b = 1, T = 1, c_1 = 0.02$).

În vederea aplicării primei variante a metodei MHAO, se alege operatorul liniar L în forma

$$L(u(x, t)) = \ddot{u}(x, t). \quad (2.2.18)$$

Atunci operatorul neliniar N definit în relația (2.2.1) se obține din ecuația (2.2.14):

$$N(u(x, t)) = -2\pi c_1^2 (\sin(4\pi x) \cos(4\pi c_1 t) + \sin(8\pi x)) - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (2.2.19)$$

Aproximarea inițială $u_0(x, t)$, obținută din ecuația (2.2.4) cu operatorul liniar definit în relația (2.2.18) și condițiile inițiale / la limită (2.2.15)-(2.2.16) are soluția

$$u_0(x, t) = \frac{1}{4\pi} \cos(4\pi x). \quad (2.2.20)$$

Folosind relațiile (2.2.20) și (2.2.19), prima aproximare $u_1(x, t)$ se obține din ecuația (2.2.9), care devine:

$$\ddot{u}_1(x, t) + H_1(x, t, C_j) \left[\ddot{u}_0(x, t) - 2\pi c_1^2 (\sin(4\pi x) \cos(4\pi c_2 t) + \sin(8\pi x)) - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.2.21)$$

și verifică condițiile inițiale / la limită

$$u_1(x, 0) = \dot{u}_1(x, 0) = u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \quad (2.2.22)$$

unde $H_1(x, t, C_j)$ este o funcție auxiliară arbitrară de control a convergenței depinzând de un număr finit de parametri de control C_j .

Pentru integrarea ecuației (2.2.21) se alege funcția auxiliară $H_1(x, t, C_j)$ în forma

$$H_1(x, t, C_j) = 2C_1 \sin 2\pi x + 4C_2 \sin 2\pi x \cos 2\pi c_2 t + 4C_3 \sin 2\pi x \cos 6\pi c_2 t + 4C_4 \sin 2\pi x \cos 8\pi c_2 t \quad (2.2.23)$$

unde C_1, C_2, C_3 și C_4 sunt parametri necunoscuți la acest moment.

Pe această cale, soluția ecuației (2.2.21) pentru prima aproximare $u_1(x, t)$ este

$$\begin{aligned} u_1(x, t, C_j) = & 2\pi c_2^2 C_1 (\cos(6\pi x) - \cos(10\pi x)) \cdot t^2 + (1 - \cos(2\pi c_2 t)) \cdot [(C_2 + \\ & + C_3) \cos(2\pi x) + (C_2 - C_3) \cos(6\pi x) - 2C_2 \cos(10\pi x)] + \frac{1}{4} (C_1 + C_4) \cdot (1 - \\ & - \cos(4\pi c_2 t)) \cdot (\cos(6\pi x) - \cos(10\pi x)) + \frac{1}{9} (1 - \cos(6\pi c_2 t)) \cdot [C_2 \cos(2\pi x) + (2C_3 - \\ & - C_2) \cos(6\pi x) - 2C_3 \cos(10\pi x)] + \frac{1}{8} C_4 \cdot (1 - \cos(8\pi c_2 t)) \cdot (\cos(6\pi x) - \cos(10\pi x)) + \\ & + \frac{1}{36} C_4 \cdot (1 - \cos(12\pi c_2 t)) \cdot (\cos(2\pi x) - \cos(6\pi x)) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi este acum obținută din relația (2.2.5):

$$\bar{u}(x, t, C_j) = u_0(x, t) + u_1(x, t, C_j) \quad (2.2.25)$$

unde $u_0(x, t)$ este dată de relația (2.2.20), iar $u_1(x, t, C_j)$ este dată de relația (2.2.24).

Acuratețea metodei poate fi motivată prin comparația soluției aproximative (2.2.25) cu rezultatele numerice pentru câteva valori ale variabilei t . Valorile parametrilor de control a convergenței $C_j, j = 1, \dots, 4$ sunt determinate optimal cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate folosind soft-ul Wolfram Mathematica 6.0.

Tabelul 2.1. Comparația soluției aproximative de ordinul întâi (2.2.25) cu rezultatele numerice, pentru diferite valori ale variabilei t , $c_1 = 0.02$, $c_2 = 0.1$
 $(\varepsilon_U = |u_{MHAO} - u_{numeric}|)$

x	$t = 0.15, c_1 = 0.02, c_2 = 0.1$			$t = 0.45, c_1 = 0.02, c_2 = 0.1$		
	u_{MHAO}	$u_{numeric}$	ε_U	u_{MHAO}	$u_{numeric}$	ε_U
0	0.0795775	0.0794589	0.000118563	0.0795775	0.0785134	0.0010641
0.1	0.0245908	0.0247573	0.000166524	0.0245907	0.0260891	0.00149846
0.2	-0.0643795	-0.0642142	0.000165284	-0.0643794	-0.0628998	0.00147962
0.3	-0.0643795	-0.0642547	0.000124816	-0.0643796	-0.0632847	0.00109499
0.4	0.0245908	0.0243142	0.000276648	0.0245909	0.0221275	0.00246336
0.5	0.0795775	0.0793993	0.000178205	0.0795775	0.0779691	0.00160841
0.6	0.0245908	0.0247573	0.000166508	0.0245909	0.026089	0.00149812
0.7	-0.0643795	-0.0642142	0.000165308	-0.0643796	-0.0628998	0.00147987
0.8	-0.0643795	-0.0642547	0.000124792	-0.0643794	-0.0632847	0.00109475
0.9	0.0245908	0.0243141	0.000276635	0.0245907	0.0221274	0.00246329
1	0.0795775	0.0793385	0.000238988	0.0795775	0.0774005	0.00217697

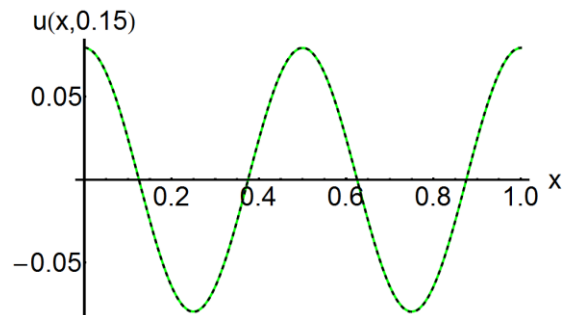


Fig. 2.1: Comparația soluțiilor pentru $t_1 = 0.15$: — soluția numerică; soluția aproximativă

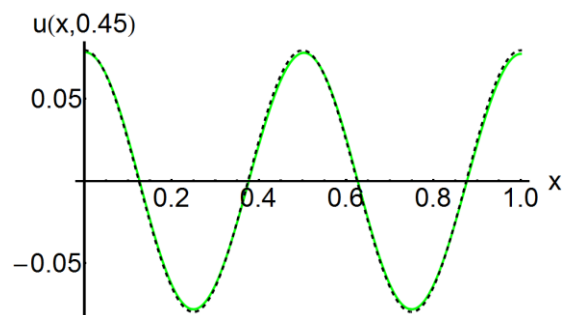


Fig. 2.2: Comparația soluțiilor pentru $t_2 = 0.45$: — soluția numerică; soluția aproximativă

În Tabelul 2.1, ca și în Figurile 1 și 2 sunt prezentate comparații între soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (2.2.25) și rezultatele numerice, pentru

câteva valori fixate ale variabilei timp t , respectiv câteva valori ale variabilei $x \in [0, 1]$.

2.3 A doua variantă a metodei MHAO

2.3.1 Descriere

Fie ecuația diferențială scrisă în forma generală:

$$L[u(x)] + g(x) + N[u(x)] = 0 \quad (2.3.1)$$

unde L este un operator liniar și N este un operator neliniar. Condițiile la limită se presupun scrise sub forma:

$$B\left[u(x), \frac{du(x)}{dx}\right] = 0 \quad (2.3.2)$$

Fie $u_0(x)$ o aproximare inițială a funcției $u(x)$ astfel încât

$$L[u_0(x)] + g(x) = 0, \quad B\left[u_0(x), \frac{du_0(x)}{dx}\right] = 0 \quad (2.3.3)$$

Se subliniază că operatorul liniar L din relațiile (2.3.1) și (2.3.3) nu este unic.

Se consideră funcția $\Phi(x, p, C_j)$ în forma

$$\Phi(x, p, C_j) = u_0(x) + pu_1(x, C_j) \quad (2.3.4)$$

unde $p \in [0, 1]$ este un parametru. Rezultă că soluția aproximativă de ordinul întâi poate fi scrisă astfel

$$\bar{u}(x, C_j) = u_0(x) + u_1(x, C_j) \quad (2.3.5)$$

unde C_1, C_2, \dots, C_s sunt parametri necunoscuți, care se vor determina la sfârșit. Condițiile la limită sunt

$$B\left[\bar{u}(x, C_j), \frac{d\bar{u}(x, C_j)}{dx}\right] = 0 \quad (2.3.6)$$

Conform cu [122], [123], [124], [125], [126], [127], [128], [129], se construiește familia de ecuații:

$$\begin{aligned} H[L(\Phi(x, p, C_j)) + g(x), H(x, C_j), N(\Phi(x, p, C_j))] = \\ = L[u_0(x)] + g(x) + p[L(u_1(x, C_j)) - H(x, C_j)N(u_0(x))] = 0. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

cu proprietățile

$$\begin{aligned} H[L(\Phi(x, 0, C_j)) + g(x), H(x, C_j), N(\Phi(x, 0, C_j))] = \\ = L(\Phi(x, 0, C_j)) + g(x) = L[u_0(x)] + g(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} H[L(\Phi(x, 1, C_j)) + g(x), H(x, C_j), N(\Phi(x, 1, C_j))] = \\ = H(x, C_j)[L(\bar{u}(x, C_j)) + g(x) + N(\bar{u}(x, C_j))] = 0. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

unde $H(\eta, C_j)$ este o funcție auxiliară arbitrară de control a convergenței.

Din relațiile (2.3.4) și (2.3.5) se găsește

$$\Phi(x, 0, C_j) = u_0(x) \quad (2.3.10)$$

$$\Phi(x, 1, C_j) = \bar{u}(x, C_j) \quad (2.3.11)$$

Acum, egalând numai coeficienții puterilor p^0 și p^1 în relația (2.3.7), se obține ecuația diferențială pentru funcția $u_0(x)$ dată de ecuația (2.3.3) și ecuația diferențială pentru prima aproximare $u_1(x, C_i)$, i.e.

$$\begin{aligned} L(u_1(x, C_i)) &= H(x, C_i)N(u_0(x)), \\ B\left[u_1(x, C_i), \frac{du_1(x, C_i)}{dx}\right] &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

În general, operatorul neliniar din relația (2.3.12) poate avea forma

$$N(u_0(x)) = \sum_{i=1}^n h_i(x)g_i(x) \quad (2.3.13)$$

unde funcțiile $h_i(x)$ și $g_i(x)$ sunt cunoscute și depind de funcția $u_0(x)$ și de operatorul neliniar, n fiind un număr întreg cunoscut. Este cunoscut că soluția generală a ecuației diferențiale neomogene (2.3.12) este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare și câteva soluții particulare a ecuației neomogene. În cele ce urmează, nu se va rezolva ecuația (2.3.12), dar din teoria ecuațiilor diferențiale este mai convenabil a considera funcția necunoscută $u_1(x, C_i)$ în forma:

$$u_1(x, C_j) = \sum_{i=1}^m H_i(x, h_j(x), C_j)g_i(x), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (2.3.14)$$

sau

$$u_1(x, C_j) = \sum_{i=1}^m H_i(x, g_j(x), C_j)f_i(x), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (2.3.15)$$

$$B\left[u_1(x, C_j), \frac{du_1(x, C_j)}{d\eta}\right] = 0 \quad (2.3.16)$$

unde în cadrul expresiei funcției $H_i(x, h_j(x), C_j)$ din relația (2.3.14) apar combinații liniare ale funcțiilor h_j , câțiva termeni care sunt dați de ecuația omogenă corespunzătoare și un număr de parametri necunoscuți C_j , $j = 1, 2, \dots, s$, m fiind un număr întreg arbitrar. De exemplu, dacă h_1 este o funcție trigonometrică, atunci H_1 este o combinație de funcții trigonometrice, dacă $h_1 = \sin ax$, atunci putem alege $H_1(x, h_1, C_j) = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + C_3 \sin 2ax + \dots$. Analog, dacă $h_1 = x^3$, atunci putem alege $H_1(x, h_1, C_j) = C_1 x + C_2 x^3 + C_3 x^7 + C_4 x^8 + \dots$. În cazul când $h_1 = \ln x$, putem alege $H_1(x, h_1, C_j) = C_1 \ln x + C_2 \ln^2 x + C_3 x \ln x + \dots$ sau $H_1(x, h_1, C_j) = C_1 \ln x + C_2 x \ln x + C_3 x^2 \ln x + C_4 x \ln 2x + \dots$. Există o mare libertate de a alege valoarea lui m și funcțiile auxiliare H_i . Nu se poate cere ca $u_1(x, C_i)$ să fie soluție a ecuației (2.3.12), dar $\bar{u}(x, C_i)$ dat de relația (2.3.5) cu $u_1(x, C_i)$ dat de relația (2.3.14), este soluție a ecuației (2.3.1). Aceasta este ideea care stă la baza acestei variante a metodei MHAO. Convergența soluției aproximative $\bar{u}(x, C_i)$

dată de relația (2.3.5) depinde de funcțiile auxiliare $H_j(x, h_j, C_j)$, $j = 1, \dots, s$. Se alege H_j , astfel ca în relația (2.3.14) termenii $\sum_{i=1}^m H_i(x, h_j(x), C_j) g_i(x)$ să fie de aceeași formă cu termenii din expresia $\sum_{i=1}^n h_i(x) g_i(x)$ dată de relația (2.3.13). Aceleași considerații pot fi făcute pentru expresia din relația (2.3.15) unde f_j și g_j sunt inversate între ele.

Metoda MHAO constă în definitiv în transformarea unei ecuații diferențiale neliniare într-o singură ecuație diferențială liniară, lucru neabordat în literatură. Ceea ce este caracteristic primei variante a metodei MHAO este că ecuația diferențială (2.2.9) este rezolvată prin metode de cuadratură, spre deosebire de a doua variantă în care ecuația diferențială (2.3.12) nu este rezolvată efectiv și se propun soluții de o anumită formă în funcție de funcțiile care apar în operatorul neliniar. Prima variantă se aplică problemelor de dificultate medie și mare, iar cea de-a doua variantă se aplică acelor probleme de dificultate maximă care nu dau rezultate eficiente cu prima variantă.

Avantajul variantei a doua este că simplifică rezolvarea unor ecuații complicate cu un număr foarte mare de parametri. A doua variantă nu este cunoscută ca o metodă de sine stătătoare în teoria ecuațiilor diferențiale. A doua variantă permite determinarea soluțiilor exacte în unele cazuri, dar și a soluțiilor multiple, rezultate care nu sunt cunoscute în literatură. Există puține metode de a determina soluțiile exacte, dar acestea nu țin seama de condițiile inițiale și la limită.

Un relativ dezavantaj al metodei MHAO este folosirea unui număr mare de parametri de control ai convergenței, dar pe de altă parte, acești parametri conduc la o abatere foarte bună.

Convergența soluției aproximative (2.3.5)

Convergența soluției aproximative $\bar{u}(x, C_j)$ dată de relația (2.3.5) depinde de funcțiile auxiliare $H_j(x, h_j(x), C_j)$, $j = 1, \dots, s$ care apar în relația (2.3.14). Există multe posibilități de a alege aceste funcții H_j . Se alege o astfel de funcție H_j astfel încât în cadrul relației (2.3.14) termenii $\sum_{i=1}^m H_i(\eta, h_j(\eta), C_j) g_i(\eta)$ să fie de aceeași formă cu termenii din expresia $\sum_{i=1}^n h_i(x) g_i(x)$ dată de relația (2.3.13) [64], [122]-[129]. Soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{u}(x, C_j)$ depinde, de asemenea, de parametrii C_j , $j = 1, \dots, s$. Valorile acestor parametri pot fi determinate optimal cu ajutorul metodelor cunoscute, cum sunt: metoda celor mai mici pătrate, metoda rezidului ponderat, metoda Galerkin, metoda cologației, metoda Ritz, etc. Pe această cale, este clar că soluțiile aproximative de ordinul întâi date de relația (2.3.5) sunt bine-determinate. Pentru că funcțiile auxiliare H_j nu sunt unice, există libertatea de a determina mai multe soluții aproximative pentru ecuația diferențială neliniară (2.3.1) - (2.3.2). Trebuie subliniat că toată procedura conține funcțiile auxiliare $H_i(x, h_j(x), C_j)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, s$ care oferă o modalitate simplă de a ajusta și de a controla convergența soluțiilor aproximative.

2.3.2 Exemplul 1: Ecuația neliniară Thomas-Fermi

Se consideră ecuația diferențială Thomas-Fermi [121]:

$$y'' = \sqrt{\frac{y^3}{x}} \quad (2.3.17)$$

cu condiția inițială / la limită:

$$y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0, \quad (2.3.18)$$

unde simbolul prim notează derivarea în raport cu x .

Ecuația (2.3.17) descrie schimbarea densității în atomii cu număr atomic foarte mare. Soluția numerică a problemei (2.3.17) și (2.3.18) poate fi găsită cu mare dificultate [20] deoarece ecuația diferențială neliniară are o singularitate în $x = 0$.

Cu transformarea

$$\sqrt{x} = t \quad (2.3.19)$$

se găsesc

$$y' = \frac{\dot{y}}{2t}, \quad y'' = \frac{t\ddot{y} - \dot{y}}{4t^3} \quad (2.3.20)$$

unde simbolul dot notează derivarea în raport cu t . Pe această cale, ecuațiile (2.3.17) și (2.3.18) devin

$$\begin{aligned} t\ddot{y} - \dot{y} - 4t^2y^{3/2} &= 0 \\ y(0) = 1, \quad y(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Operatorul liniar este definit prin

$$L(y(t)) = \ddot{y} - \lambda^2 y \quad (2.3.22)$$

unde $\lambda > 0$ este un parametru arbitrar necunoscut la acest moment. Operatorul neliniar este

$$N(y(t)) = t\ddot{y} - \dot{y} - 4t^2y^{3/2}. \quad (2.3.23)$$

Aplicând această variantă a metodei MHAO se obține:

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) = & (1 + 2.8440462072\sqrt{x} + 2.8385227981x + 408.2504889408x\sqrt{x} + \\ & + 2684.0147299659x^2 - 2058.3106795493x^2\sqrt{x} + 694.4558078037x^3 - \\ & - 136.4738073947x^3\sqrt{x} + 16.6503077715x^4 - 1.2030880433x^4\sqrt{x} + \\ & + 0.0407110884x^5) \cdot e^{-2.8440462072\sqrt{x}} + \\ & + (-0.6666986241x - 186.2530445276x\sqrt{x} + 2044.6317622248x^2 - \\ & - 2284.2358172213x^2\sqrt{x})e^{-3.9157652153\sqrt{x}} + (0.2844032411x - \\ & - 221.6578865121x\sqrt{x} - 5243.2544994816x^2 - \\ & - 590.9937887039x^2\sqrt{x})e^{-4.2660693108\sqrt{x}} \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

În Figura 2.3 este prezentată o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi date de relația (2.3.24) și rezultatele numerice.

Câteva valori ale soluțiilor aproximative obținute cu metoda HAM [110], MHAO - relația (2.3.24) și rezultatele numerice pentru diferite valori ale variabilei x , sunt date în Tabelul 2.2.

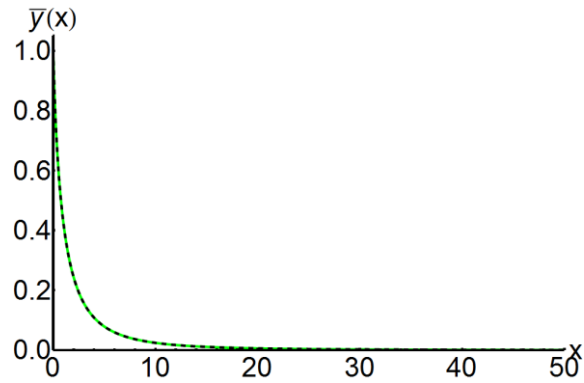


Fig. 2.3: Rezultate comparative între soluția aproximativă dată de relația (2.3.24) și rezultatele numerice: _____ soluția numerică; soluția aproximativă

Tabelul 2.2. Soluțiile aproximative obținute cu metodele HAM [110], MHAO-relația (2.3.24) și rezultatele numerice pentru diferite valori ale variabilei x

x	$Y_{HAM}(x)$ [110]	$\bar{y}(x)$ (2.3.24)	$Y_{numeric}(x)$
0	1	1	1
0.5	0.606987	0.606986083	0.606986374
1	0.424008	0.424007644	0.424008039
1.5	0.314778	0.314776923	0.314777447
2	0.243009	0.243008140	0.243008484
2.5	0.192795	0.192983819	0.192984090
3	0.156633	0.156632277	0.156632627
3.5	0.129370	0.129369080	0.129369533
4	0.108404	0.108403678	0.108404170
4.5	0.0919482	0.091947558	0.091948019
5	0.0788078	0.078807234	0.078807630
10	0.0243143	0.024310868	0.024313241
15	0.0108054	0.010798763	0.010801392
20	0.00578494	0.005775234	0.005773988
25	0.00347375	0.003449790	0.003448745
30		0.002202137	0.002205639
35		0.001458654	0.001459192
40		0.000983936	0.000957785
45		0.000012900	0.000655659
50	0.000632255	0.000454954	0.000441049
100	0.000100243	$8.98417 \cdot 10^{-6}$	$7.36651 \cdot 10^{-6}$

În Tabelul 2.3, se compară abaterile $\varepsilon_{MHAO} = |\bar{y}(x) - y_{numeric}(x)|$ cu HAM [110], MHAO (relația (2.3.24)) pentru 20 de valori din intervalul $0 \leq x \leq 100$.

Tabelul 2.3. Rezultate comparative între abaterile obținute cu HAM [110] și MHAO-relația (2.3.24) pentru diferite valori ale variabilei x

x	$\varepsilon_{HAM} =$ $= y_{HAM}(x) - y_{numeric}(x) $ [110]	$\varepsilon_{MHAO} =$ $= \bar{y}(x) - y_{numeric}(x) $ (2.3.24)
0	0	0
0.5	$6.25177 \cdot 10^{-7}$	$2.91 \cdot 10^{-7}$
1	$3.9715 \cdot 10^{-8}$	$3.95 \cdot 10^{-7}$
1.5	$5.52454 \cdot 10^{-7}$	$5.23 \cdot 10^{-7}$
2	$5.15483 \cdot 10^{-7}$	$3.43 \cdot 10^{-7}$
2.5	$1.890909 \cdot 10^{-4}$	$2.71 \cdot 10^{-7}$
3	$3.7291 \cdot 10^{-7}$	$3.49 \cdot 10^{-7}$
3.5	$4.66894 \cdot 10^{-7}$	$4.52 \cdot 10^{-7}$
4	$1.7057 \cdot 10^{-7}$	$4.92 \cdot 10^{-7}$
4.5	$1.80459 \cdot 10^{-7}$	$4.61 \cdot 10^{-7}$
5	$1.69127 \cdot 10^{-7}$	$3.96 \cdot 10^{-7}$
10	$1.058496 \cdot 10^{-6}$	$2.37 \cdot 10^{-6}$
15		$2.62 \cdot 10^{-6}$
20	$1.095139 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$
25	$2.500488 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-6}$
30		$3.50 \cdot 10^{-6}$
35		$5.37 \cdot 10^{-7}$
40		$2.61 \cdot 10^{-5}$
45		$1.29 \cdot 10^{-5}$
50	$1.912002 \cdot 10^{-4}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$
100	$9.287648 \cdot 10^{-5}$	$1.61 \cdot 10^{-6}$

În altă ordine de idei, din relația (2.3.24) aproximarea pantei inițiale $\bar{y}(0)$ este

$$\bar{y}(0) = -1.5880719992608454 \quad (2.3.25)$$

Kobayashi [102] dă un rezultat numeric pentru aceeași problemă ca fiind

$$y'_K(0) = -1.588071 \quad (2.3.26)$$

Tabelul 2.4. Rezultate comparative între diferite aproximații ale pantei inițiale $\dot{y}(0)$ ($\varepsilon_{HAM} = |\dot{y}_{HAM}(0) - \dot{y}_{numeric}(0)|$, $\varepsilon_{MHAO} = |\bar{y}(0) - \dot{y}_{numeric}(0)|$)

Ordinul aproximării	Liao [102] / abaterea ε_{HAM}		(2.3.24) / abaterea ε_{MHAO}
10	-1.50014	$8.7 \cdot 10^{-2}$	-1.5880719992/ $9.9 \cdot 10^{-6}$
20	-1.54093	$4.7 \cdot 10^{-2}$	
30	-1.55595	$3.2 \cdot 10^{-2}$	
40	-1.56373	$2.4 \cdot 10^{-2}$	
50	-1.56848	$1.9 \cdot 10^{-2}$	
60	-1.57168	$1.6 \cdot 10^{-2}$	
70	-1.57399	$1.4 \cdot 10^{-2}$	
80	-1.57572	$1.2 \cdot 10^{-2}$	
90	-1.57708	$1.09 \cdot 10^{-2}$	
100	-1.57816	$8.7 \cdot 10^{-2}$	

O comparație între diferite aproximații ale pantei inițiale $\dot{y}(0)$ este prezentată în Tabelul 2.4.

Este clar că rezultatele prezentate pentru panta inițială sunt mai bune decât cele obținute de Liao [110] cu metoda HAM.

2.3.3 Exemplul 2: Curgerea unui fluid vâcos la nivelul stratului-limită într-un domeniu nemărginit

În cele ce urmează, se consideră curgerea la nivelul stratului-limită vâcos, guvernată de ecuațiile:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.3.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3.28)$$

supusă condițiilor inițiale / la limită:

$$u = u_s = u_0 \left(\frac{x_0}{|x|} \right)^n, \quad v = 0, \quad \text{la } y = 0, \quad 0 < n < 1 \quad (2.3.29)$$

$$u \rightarrow 0, \quad \text{pentru } y \rightarrow \infty \quad (2.3.30)$$

unde u și v sunt componentele vitezei în direcțiile axelor Ox și respectiv Oy .

Dacă Ψ este funcția de curent definită prin relațiile

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.3.31)$$

atunci ecuația (2.3.28) este automat satisfăcută. Cu ajutorul transformărilor de similaritate

$$\Psi = F(\eta) \sqrt{2\nu u_s |x|}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{u_s}{2\nu |x|}} \quad (2.3.32)$$

ecuația (2.3.27) se reduce la

$$F'''(\eta) + (n-1)F(\eta)F''(\eta) - 2n[F'(\eta)]^2 = 0 \quad (2.3.33)$$

cu condițiile inițiale / la limită

$$F(0) = 0, F'(0) = 1, F'(\infty) = 0 \quad (2.3.34)$$

unde simbolul prim notează derivarea în raport cu variabila η .

Soluții aproximative ale problemei curgerii la nivelul stratului vâscos cu ajutorul metodei MHAO

În continuare se aplică a doua variantă a metodei MHAO pentru a obține soluții aproximative ale ecuațiilor (2.3.33) și (2.3.34). Pentru aceasta, se alege operatorul liniar în forma [122]-[129]:

$$L(F(\eta)) = F'''(\eta) + \frac{3K}{K\eta + 1} F''(\eta) \quad (2.3.35)$$

și prin urmare, operatorul neliniar are expresia

$$N(F(\eta)) = -\frac{3K}{K\eta + 1} F''(\eta) + (n-1)F(\eta)F''(\eta) - 2n[F'(\eta)]^2, \quad (2.3.36)$$

unde K este un parametru necunoscut ($K > 0$).

Din ecuația (2.3.3) și relația (2.3.35) se găsește

$$F_0(\eta) = \frac{1}{K} - \frac{1}{K(K\eta + 1)}. \quad (2.3.37)$$

Substituind relația (2.3.37) în relația (2.3.36) se obține

$$N(F_0(\eta)) = \frac{6K^2 - 2}{(K\eta + 1)^4} - \frac{2(n-1)}{(K\eta + 1)^3}. \quad (2.3.38)$$

Din relațiile (2.3.13) și (2.3.38) se deduce că

$$h_1(\eta) = 1, g_1(\eta) = \frac{6K^2 - 2}{(K\eta + 1)^4}, h_2(\eta) = -1, g_2(\eta) = \frac{2(n-1)}{(K\eta + 1)^3} \quad (2.3.39)$$

În fine, prima aproximare $F_1(\eta)$ poate fi scrisă cu ajutorul relației (2.3.14) prin

$$F_1(\eta) = \frac{C_1\eta^2}{(K\eta + 1)^2} + \frac{C_2\eta^2}{(K\eta + 1)^3} + \dots + \frac{C_s\eta^2}{(K\eta + 1)^{s+1}} \quad (2.3.40)$$

unde C_1, C_2, \dots, C_s sunt parametri necunoscuți.

Din relațiile (2.3.37), (2.3.40) și (2.3.5) se obține soluția aproximativă de ordinul întâi, folosind a doua alternativă a metodei MHAO, în forma:

$$\bar{F}(\eta, C_i) = \frac{1}{K} - \frac{1}{K(K\eta + 1)} + \frac{C_1\eta^2}{(K\eta + 1)^2} + \frac{C_2\eta^2}{(K\eta + 1)^3} + \dots + \frac{C_s\eta^2}{(K\eta + 1)^{s+1}} \quad (2.3.41)$$

unde s este un număr arbitrar întreg pozitiv.

Exemple numerice

Acuratețea celei de-a doua variante a metodei MHAO, este ilustrată prin comparația soluțiilor aproximative cu rezultatele integrării numerice obținute cu ajutorul metodei Runge-Kutta de ordin 4 în combinație cu metoda shooting, folosind

soft-ul Wolfram Mathematica 6.0. Pentru $n = \frac{1}{3}$, $s = 13$, folosind metoda celor mai mici pătrate, parametri optimali de control a convergenței sunt

$$\begin{aligned} C_1 &= 1.3157126545, C_2 = -9.6351399667, C_3 = 46.7491539979, \\ C_4 &= -148.7412141919, C_5 = 305.7835542914, C_6 = -375.3183121831, \\ C_7 &= 187.8905875969, C_8 = 131.0927130265, C_9 = -196.6249687866, \\ C_{10} &= -54.3893541176, C_{11} = 237.0668998568, C_{12} = -163.4060230684, \\ C_{13} &= 38.3356375909, K = 0.3999712932 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(\eta) &= 2.5001794299 - \frac{2.5001794299}{1+0.3999712932\eta} + \frac{1.3157126545\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^2} - \\ &- \frac{9.6351399667\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^3} + \frac{46.7491539979\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^4} - \frac{148.7412141919\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^5} + \\ &+ \frac{305.7835542914\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^6} - \frac{375.3183121831\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^7} + \frac{187.8905875969\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^8} + \\ &+ \frac{131.0927130265\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^9} - \frac{196.6249687866\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^{10}} - \frac{54.3893541176\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^{11}} + \\ &+ \frac{237.0668998568\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^{12}} - \frac{163.4060230684\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^{13}} + \frac{38.3356375909\eta^2}{(1+0.3999712932\eta)^{14}} \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

În Figurile 4, 6 și 8 sunt reprezentate comparații între soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{F}(\eta)$, derivata de ordinul întâi $\bar{F}'(\eta)$, respectiv derivata de ordinul 2 a acesteia $\bar{F}''(\eta)$ și rezultatele numerice. În Figurile 5, 7 și 9 sunt reprezentate abaterea pentru funcțiile \bar{F} , \bar{F}' și respectiv \bar{F}'' . Restul aproximării este prezentat în Figura 10.

De asemenea, în Tabelele 2.5, 2.6 și 2.7 sunt prezentate comparații între soluția aproximativă de ordinul întâi, derivata acesteia, respectiv derivata de ordinul 2 a acesteia și rezultatele numerice.

În Tabelul 2.8 se prezintă o comparație între coeficientul superficial la limită $\bar{F}''(0)$ și valoarea limită $\bar{F}(\infty)$ cu ajutorul metodei MHAO și rezultatele integrării numerice. Toate aceste comparații sunt găsite a fi într-un acord foarte bun pentru soluția aproximativă obținută cu metoda MHAO.

Tabelul 2.5. Valori ale funcției $F(\eta)$ pentru câteva valori ale variabilei η , precum și abaterea $\varepsilon_F = |F_{numeric} - \bar{F}_{MHAO}|$, pentru $n = 1/3$

η	$F_{numeric}$	\bar{F}_{MHAO}	ε_F
0	$-3.149 \cdot 10^{-21}$	0.	$3.149 \cdot 10^{-21}$
1/2	0.4412993635	0.4413003207	$9.572 \cdot 10^{-7}$
1	0.7976199044	0.7976206608	$7.563 \cdot 10^{-7}$
3/2	1.0990502963	1.0990511577	$8.613 \cdot 10^{-7}$

2	1.3622700319	1.3622678675	$2.164 \cdot 10^{-6}$
5/2	1.5973912528	1.5973920037	$7.509 \cdot 10^{-7}$
3	1.8109710253	1.8109730278	$2.002 \cdot 10^{-6}$
7/2	2.0074895225	2.0074899151	$3.925 \cdot 10^{-7}$
4	2.1901384401	2.1901370085	$1.431 \cdot 10^{-6}$
9/2	2.3612702824	2.3612682405	$2.041 \cdot 10^{-6}$
5	2.5226684628	2.5226669778	$1.484 \cdot 10^{-6}$
11/2	2.6757167752	2.6757163380	$4.372 \cdot 10^{-7}$
6	2.8215088684	2.8215094008	$5.324 \cdot 10^{-7}$
13/2	2.9609215014	2.9609226308	$1.129 \cdot 10^{-6}$
7	3.0946653189	3.0946666154	$1.296 \cdot 10^{-6}$
15/2	3.2233214215	3.2233225326	$1.111 \cdot 10^{-6}$
8	3.3473686147	3.3473693150	$7.003 \cdot 10^{-7}$
17/2	3.4672042675	3.4672044570	$1.895 \cdot 10^{-7}$
9	3.5831605862	3.5831602640	$3.221 \cdot 10^{-7}$
19/2	3.6955174648	3.6955166970	$7.677 \cdot 10^{-7}$
10	3.8045127040	3.8045115943	$1.109 \cdot 10^{-6}$

Tabelul 2.6. Valori ale funcției $F'(\eta)$ pentru câteva valori ale variabilei η , precum și abaterea $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric} - \bar{F}'_{MHAO}|$, pentru $n = 1/3$

η	$F'_{numeric}$	\bar{F}'_{MHAO}	$\varepsilon_{F'}$
0	1	1	0
1/2	0.7841904593	0.7841677296	$2.272 \cdot 10^{-5}$
1	0.6506166368	0.6506332151	$1.657 \cdot 10^{-5}$
3/2	0.5604633813	0.5604518423	$1.153 \cdot 10^{-5}$
2	0.4956948049	0.4956969458	$2.140 \cdot 10^{-6}$
5/2	0.4469299313	0.4469359638	$6.032 \cdot 10^{-6}$
3	0.4088577453	0.4088566045	$1.140 \cdot 10^{-6}$
7/2	0.3782658548	0.3782616139	$4.240 \cdot 10^{-6}$
4	0.3531053248	0.3531027266	$2.598 \cdot 10^{-6}$
9/2	0.3320110442	0.3320111555	$1.113 \cdot 10^{-7}$
5	0.3140393884	0.3140412657	$1.877 \cdot 10^{-6}$
11/2	0.2985159879	0.2985181519	$2.164 \cdot 10^{-6}$
6	0.2849429823	0.2849446011	$1.618 \cdot 10^{-6}$

13/2	0.2729432345	0.2729439885	$7.540 \cdot 10^{-7}$
7	0.2622248408	0.2622247837	$5.709 \cdot 10^{-8}$
15/2	0.2525584842	0.2525578436	$6.406 \cdot 10^{-7}$
8	0.2437622075	0.2437612477	$9.598 \cdot 10^{-7}$
17/2	0.2356907144	0.2356896641	$1.050 \cdot 10^{-6}$
9	0.2282275203	0.2282265460	$9.743 \cdot 10^{-7}$
19/2	0.2212789912	0.2212781955	$7.957 \cdot 10^{-7}$
10	0.2147697036	0.2147691360	$5.676 \cdot 10^{-7}$

Tabelul 2.7. Valori ale funcției $F''(\eta)$ pentru câteva valori ale variabilei η , precum și abaterea $\varepsilon_{F''} = |F''_{numeric} - \bar{F}''_{MHAO}|$, pentru $n = 1/3$

η	$F''_{numeric}$	\bar{F}''_{MHAO}	$\varepsilon_{F''}$
0	-0.5614491952	-0.5614491852	$9.994 \cdot 10^{-9}$
1/2	-0.3307410936	-0.3308147079	$7.361 \cdot 10^{-5}$
1	-0.2154862331	-0.2155239425	$3.770 \cdot 10^{-5}$
3/2	-0.1507975709	-0.1508029547	$5.383 \cdot 10^{-6}$
2	-0.1112691041	-0.1112394475	$2.965 \cdot 10^{-5}$
5/2	-0.0855012591	-0.0855116898	$1.043 \cdot 10^{-5}$
3	-0.0678295241	-0.0678420558	$1.253 \cdot 10^{-5}$
7/2	-0.0552060685	-0.0552062277	$1.592 \cdot 10^{-7}$
4	-0.0458828405	-0.0458774707	$5.369 \cdot 10^{-6}$
9/2	-0.0388040137	-0.0387991295	$4.884 \cdot 10^{-6}$
5	-0.0333043582	-0.0333024018	$1.956 \cdot 10^{-6}$
11/2	-0.0289535368	-0.0289539535	$4.167 \cdot 10^{-7}$
6	-0.0254630778	-0.0254646488	$1.571 \cdot 10^{-6}$
13/2	-0.0226324814	-0.0226342453	$1.763 \cdot 10^{-6}$
7	-0.0203170378	-0.0203184628	$1.424 \cdot 10^{-6}$
15/2	-0.0184086917	-0.0184095909	$8.991 \cdot 10^{-7}$
8	-0.0168245899	-0.0168249809	$3.909 \cdot 10^{-7}$
17/2	-0.0155000146	-0.0155000069	$7.669 \cdot 10^{-9}$
9	-0.0143838198	-0.0143835454	$2.743 \cdot 10^{-7}$
19/2	-0.0134353166	-0.0134348945	$4.221 \cdot 10^{-7}$
10	-0.0126220300	-0.0126215525	$4.774 \cdot 10^{-7}$

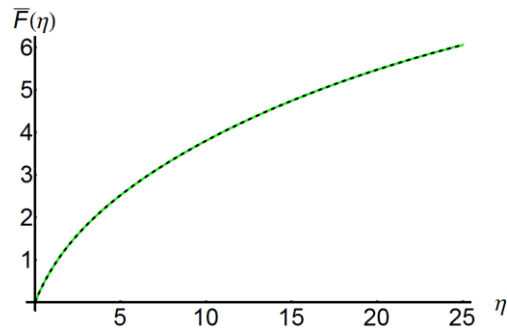


Fig. 2.4: Comparație între soluția aproximată $\bar{F}(\eta)$ dată de relația (2.3.42) și rezultatele numerice ale ecuației (2.3.33) pentru $n = 1/3$: — soluția numerică; soluția aproximativă

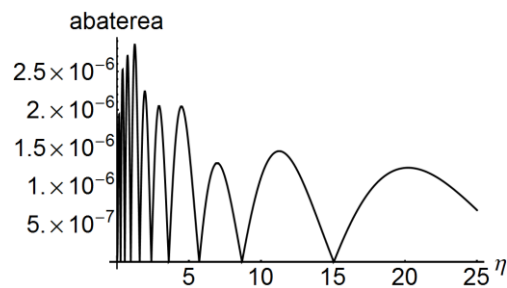


Fig. 2.5: Variația abaterii ε pentru \bar{F} în cazul $n = 1/3$, $\varepsilon = |\bar{F}_{MHAO} - \bar{F}_{numeric}|$

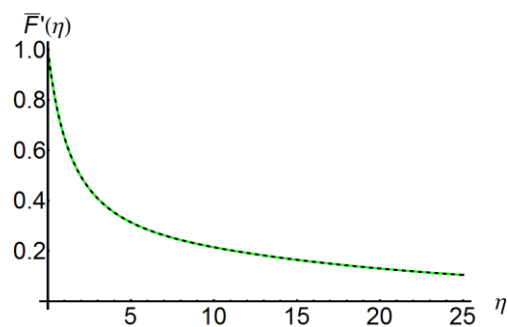


Fig. 2.6: Comparație între derivata soluției aproximative obținută din relația (2.3.42) și rezultatele numerice pentru $n = 1/3$: — soluția numerică; soluția aproximativă

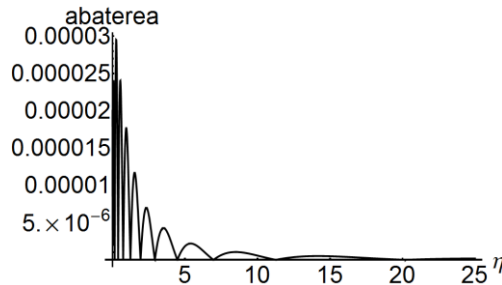


Fig. 2.7: Variația abaterii ε pentru \bar{F}' în cazul $n = 1/3$, $\varepsilon = |\bar{F}'_{MHAO} - \bar{F}'_{numeric}|$

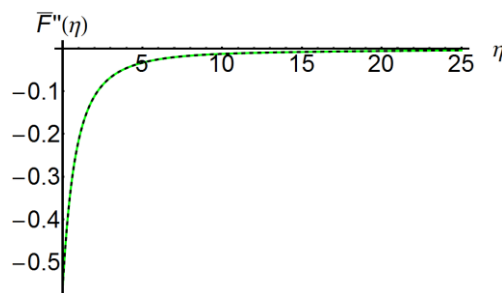
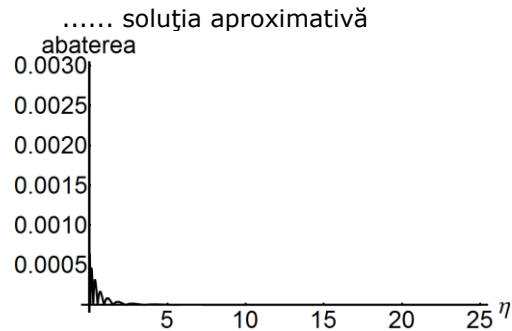


Fig. 2.8: Comparație între derivata secundă a soluției aproximative obținută din relația (2.3.42) și rezultatele numerice pentru $n = 1/3$: — soluția numerică;



..... soluția aproximativă
Fig. 2.9: Variația abaterii ε pentru \bar{F}'' în cazul $n = 1/3$, $\varepsilon = |\bar{F}''_{MHAO} - \bar{F}''_{numeric}|$

Tabelul 2.8. Rezultate comparative între valorile coeficientului superficial la limită $F''(0)$, respectiv a valorii limite $F(\infty)$ cu rezultatele numerice, pentru $n = 1/3$

n	$1/3$
$F''_{numeric}(0)$	-0.5614491952886338
$\bar{F}''_{MHAO}(0)$	-0.5614491852939238
$F_{numeric}(\infty)$	10.72456395448771
$\bar{F}_{MHAO}(\infty)$	10.72456395447381

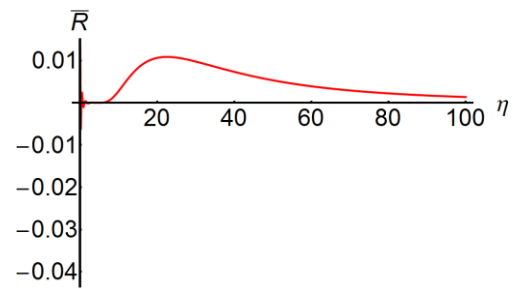


Fig. 2.10: Restul aproximării în cazul $n = 1/3$, $\bar{R} = \bar{F}'''+(n-1)\bar{F}\bar{F}''-2n\bar{F}'^2$

3 Fluide magneto- și electro-reologice

3.1 Amortizoare fluide neliniare de tip Bingham

În ultimul deceniu, o mare atenție a fost acordată la amortizoarele magnetoreologice (MR) pentru caracteristicile sale atractive în aplicații ale structurilor de inginerie civilă, inclusiv atenuarea pericolului cutremurelor de pământ, sau de rezistență înaltă, precum și necesarul de putere mică. De asemenea fluidele MR au atras un interes considerabil datorită gamei largi de utilizare în amortizoare de vibrații pentru suspensiile sistemelor de vehicule sau mașini, rigiditatea lor, capacități care pot fi ajustate foarte repede, prin aplicarea unui câmp electric sau magnetic adecvat [103], [16], [99], [27]. Răspunsul magnetoreologic ale fluidelor MR rezultă din polarizarea indusă în particulele suspendate prin aplicarea unui câmp extern. Interacțiunea dintre dipolii induși rezultanți cauzează particulele de forma structurilor columnare, paralele cu câmpul aplicat. Aceste structuri în lanț restricționează mișcarea fluidului, crescând astfel caracteristicile vâscoase ale suspensiei. Energia mecanică necesară pentru a produce aceste structuri-lanț crește odată cu creșterea câmpului aplicat într-un câmp dependent de tensiunea produsă [99]. Relația constitutivă dinamică a fluidelor MR este foarte complicată și forța de amortizare este intrinsec neliniară, deci nu este un model mecanic consistent, recunoscut pentru amortizoare MR. Modelul mecanic pentru un amortizor MR este adesea stabilit prin metode de optimizare conform datelor experimentale [163], [28], [162], [108]. În prezent, există o mare varietate de modele dinamice pentru amortizoare MR. Unele modele care sunt simple nu pot simula în mod eficient caracteristicile dinamice neliniare ale amortizoarelor MR. Deși există unele modele care pot simula caracteristicile dinamice neliniare, ele sunt stabilite prin ecuații neliniare puternice având o mulțime de parametri care sunt determinați printr-un calcul numeric complicat.

În inginerie, modelul Bingham este adesea folosit pentru descrierea comportamentului dinamic al amortizoarelor MR. Acest model este unul dintre cele mai populare modele și a fost folosit pe scară largă cu o precizie și costuri de calcul rezonabile. Așa-numitul model Bingham include un element rigid perfect plastic conectat în paralel la un element de vâscozitate newtoniană. Acest model presupune ca tensiunea de forfecare a fluidului este proporțională cu rata de forfecare în regiunea post-fluaj și poate fi exprimat ca [27], [28], [162], [182]:

$$\tau = \tau_y(H) \cdot \text{sgn}(\dot{\gamma}) + \eta \dot{\gamma} \quad (3.1.1)$$

unde τ este tensiunea de forfecare în fluid, τ_y este tensiunea de forfecare produsă controlat prin câmpul aplicat H , η este vâscozitatea post-fluaj independentă de câmpul magnetic aplicat, $\dot{\gamma}$ este rata de forfecare-deformare și $\text{sgn}(\cdot)$ este funcția signum. Lichidul este într-o stare de repaus și se comportă vâscoelastic până când tensiunea de forfecare este mai mare decât valoarea critică τ_y , în rest mișcarea este, ca a unui fluid newtonian, când o astfel de valoare critică este mai mare.

Pe baza acestui model a comportării reologice a fluidelor electroreologice, Stanway și alții [163] au propus un sistem mecanic idealizat care constă dintr-un element de frecare Coulomb plasat în paralel cu un amortizor vâscos. În acest model, pentru viteza nenulă a pistonului \dot{x} , forța generată de dispozitiv este dată de fluid după cum urmează:

$$F(t) = f_c \cdot \text{sgn}(\dot{x}) + c_0 \dot{x} + f_0 \quad (3.1.2)$$

unde f_c este coeficientul forței de frecare, care este legat de curgerea fluidului, c_0 este coeficientul de amortizare, f_0 denotă o abatere a forței ce rezultă ținând cont de prezența acumulatorului. Remarcăm că dacă în orice moment viteza pistonului este zero, forța generată în elementul de frecare este egală cu forța aplicată. Modelul Bingham reprezintă comportamentul fluidelor electro- și magneto-reologic dincolo de punctul produs, adică pentru fluxul de lichid pe deplin dezvoltate sau rate de forfecare suficient de mari. Cu toate acestea, se presupune că fluidul rămâne rigid în regiunea ante-fluaj [27]. Acest model Bingham nu descrie proprietățile elastice ale fluidului la deformații mici și viteze de forfecare mici, care este necesar pentru aplicații dinamice. Lee și Wereley [107] și Wang și Gordaninejad [180] au utilizat modelul Herschel-Bulkley pentru a studia lichidul post-fluaj, precum și subțierea forfecării și îngroșarea forfecării. În acest model, vâscozitatea plastică post-fluaj constantă în modelul Bingham este înlocuită cu un model de lege de putere dependent de rata de forfecare-deformare. Cu toate acestea, datorită simplității sale, modelul Bingham este încă foarte eficient, în special în faza de amortizare [182]. Modelul Herschel-Bulkley poate fi exprimat prin

$$\tau = \left[\tau_Y(H) \cdot \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) + k(\dot{\gamma})^{\frac{1}{m}} \right] \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) \quad (3.1.3)$$

unde k este un parametru de consistență și m este indicele de comportament al fluidului magnetoreologic. Pentru $m > 1$, ecuația (3.1.3) reprezintă o tensiune de subțiere a fluidului (de fluidificare) la forfecare, în timp ce tensiunea de îngroșare a fluidului la forfecare este descrisă pentru $m < 1$. Pentru $m = 1$, modelul Herschel-Bulkley se reduce la modelul Bingham [135]. Zubieta și colab. [191] au propus modele de plasticitate dependente de câmp, pentru fluide magnetoreologice bazate pe modelul original de plasticitate Bingham și modele de plasticitate Herschel-Bulkley. În funcție de modelele Bingham și Herschel-Bulkley dependente de câmp, proprietățile reologice ale fluidelor magnetoreologice depind de câmpul magnetic aplicat și pot fi estimate prin următoarea ecuație [135]:

$$Y = Y_\infty + (Y_0 - Y_\infty) \left(2e^{-Ba_{YS}} - e^{-2Ba_{YS}} \right) \quad (3.1.4)$$

în care Y reprezintă un parametru reologic al fluidului magnetoreologic, cum ar fi tensiunea produsă, vâscozitatea post-fluaj, consistența fluidului și indexul de comportament al curgerii. Valoarea parametrului Y tinde de la valoarea Y_0 a câmpului aplicat la valoarea de saturație Y_∞ , a_{YS} este indicele momentului de saturație a parametrului Y , B este densitatea câmpului magnetic aplicat. Valorile Y_0 , Y_∞ , a_{YS} sunt determinate din rezultatele experimentale, folosind metoda curbei de tip fitting.

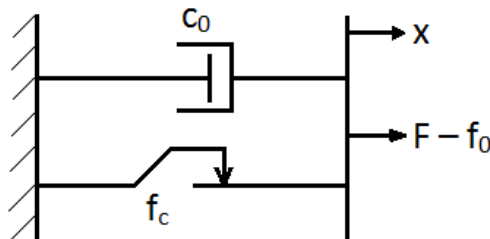


Fig. 3.1: Modelul Bingham

Modelul Bingham al corpului, prezentat în Figura 3.2 diferă de modelul Bingham (Figura 3.1) prin introducerea unui arc de constantă k . Modelul Bingham al corpului conține în paralel cele trei elemente care se conectează elementelor Sf. Venant, Newton și elementul Hooke. Pentru o anumită valoare a forței aplicate f_c - forța de frecare statică a elementului Sf. Venant, numai arcul se va deforma, similar cu corpul elastic Hooke.

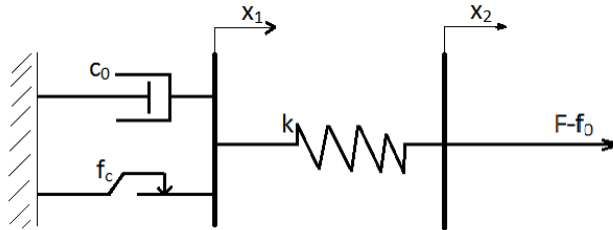


Fig. 3.2: Modelul Bingham al corpului

În cazul în care această forță este mai mare decât f_c corpul Bingham se va alungi. Rata de deformare va fi proporțională cu diferența dintre forța aplicată și forța de frecare a elementului Sf. Venant [156]. În acest caz forța de amortizare F poate fi exprimată prin

$$F(t) = \begin{cases} f_c \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) + c_0 \dot{x}_1 + f_0 & \text{pentru } |F| > f_c \\ k(x_2 - x_1) + f_0 & \text{pentru } |F| \leq f_c \end{cases} \quad (3.1.5)$$

unde k este rigiditatea corpului elastic (modelul Hooke), iar ceilalți parametri au aceeași semnificație ca în ecuația (3.1.2). O extensie a modelului Bingham este formulată de Gamota și Filisko [75]. Această extensie descrie comportamentul fluidului electroreologic în regiunea ante- și post-fluaj precum și limita de curgere. Acest model vâscoelastic-plastic depinde de conexiunea modelelor de tip corp Bingham, Kelvin-Voight și Hooke (Figura 3.3).

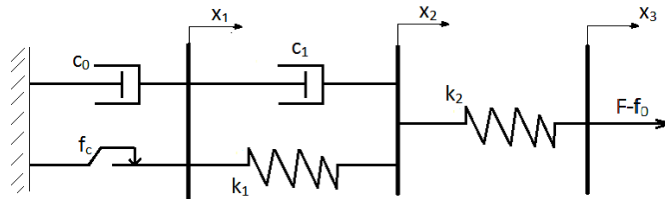


Fig. 3.3: Modelul Bingham extins pentru modelul Gamota-Filisko

Forța de amortizare în modelul Gamota-Filisko este dată de

$$F(t) = \begin{cases} k_1(x_2 - x_1) + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_0 = c_0 \dot{x}_1 + f_c \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) + f_0 = & \text{pentru } |F| > f_c \\ k(x_2 - x_1) + c_1 \dot{x}_2 + f_0 = k_2(x_3 - x_2) + f_0 & \text{pentru } |F| \leq f_c \end{cases} \quad (3.1.6)$$

unde c_0 , f_0 și f_c sunt cunoscute din modelul Bingham (3.1.2) iar parametrii c_1 , k_1 și k_2 sunt asociați cu proprietățile elastice ale fluidului în regiunea ante-fluaj. Remarcăm că, dacă $|F| \leq f_c$ atunci $\dot{x}_1 = 0$, ceea ce înseamnă că, atunci când forța de frecare f_c produsă de o nouă presiune în fluid este mai mare decât forța de

amortizare F , pistonul rămâne nemișcat. Un alt punct de vedere al proprietăților vâsco-elasto-plastice a comportamentului amortizorului MR este propus de către Li și alții [109].

În esență forța de amortizare este egală cu forța vâsco-plastică, la care, pe lângă forța de frecare conectată cu tensiunea de forfecare a fluidului f_c , mai contribuie forța vâscoasă și forța inerțială, care poate fi scrisă sub forma [156]

$$F(t) = f_c \cdot \text{sgn}(\dot{x}) + c_0 \dot{x} + m \ddot{x} \quad (3.1.7)$$

unde c_0 este un co-factor de frecare vâscos și m este masa fluidului MR înlocuit dependent de amplitudinea și frecvența excitației cinematice aplicate pistonului.

Un model de element discret cu componente similare, menționat ca modelul BingMax, este studiat de către Makris și alții [114]. Acesta constă dintr-un element Maxwell în paralel cu un element de frecare Coulomb cum este descris în Figura 3.4.

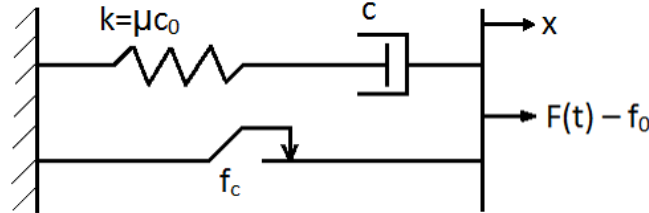


Fig. 3.4: Modelul BingMax

Forța $F(t)$ este dată de

$$F(t) = c \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu(t-\tau)} \dot{x}(\tau) d\tau + f_c \text{sgn}(\dot{x}(t)) \quad (3.1.8)$$

unde μ este un parametru care înseamnă efectul de amortizare non-vâscos (sau parametrul de relaxare [6]). Modelul pentru forța de amortizare se exprimă prin

$$f_d(t) = c \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu(t-\tau)} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (3.1.9)$$

și a fost propus inițial de Biot [22] și mai târziu a fost folosit de mai mulți autori în contextul dinamicii sistemelor vâscoelastice. Fizic ecuația (3.1.9) implică că istoriile de timp anterioare ale vitezei \dot{x} contribuie la forța de amortizare actuală și cele mai recente cazuri de viteză au cea mai mare influență. În cazul limită, atunci când $\mu \rightarrow \infty$, nucleul funcției exponențiale se apropie de funcția Dirac $\delta(t)$. Pentru acest caz special, forța de amortizare dată de (3.1.9) se reduce la cazul de amortizare vâscoasă. Pentru sistemele vâscoelastice, o ecuație similară cu ecuația (3.1.9) este adesea asociată cu parametrul de rigiditate. Pe baza considerațiilor de mai sus, în cele ce urmează vom considera comportamentul unui amortizor magnetoreologic după modelul Bingham, care, în plus, conține un termen neliniar [65].

Ecuația de mișcare este constituită sub forma:

$$m \frac{d^2 x(\bar{t})}{d\bar{t}^2} + \bar{c} \cdot \int_0^{\bar{t}} \bar{\mu} e^{-\bar{\mu}(\bar{t}-\bar{\tau})} \dot{x}(\bar{\tau}) d\bar{\tau} + kx(\bar{t}) + akx^3(\bar{t}) + k\beta \text{sgn}(\dot{x}(\bar{t})) + kf_0 = 0 \quad (3.1.10)$$

unde m , \bar{c} , $\bar{\mu}$, k , ak , βk and kf_0 sunt masa, coeficientul de amortizare, rigiditatea liniară, rigiditate neliniară, coeficientul forței de frecare și de compensare a forței, respectiv; x , \dot{x} și \ddot{x} sunt răspunsurile dinamice ale structurii (deplasare, viteză și accelerație).

Condițiile inițiale sunt:

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1.11)$$

Obiectivul prezentei secțiuni este de a propune o procedură corectă de a rezolva analitic aproximativ ecuația diferențială neliniară a modelului neliniar Bingham dat de ecuația (3.1.10), folosind MHAO. A doua variantă a MHAO este aplicată în acest studiu pentru a obține expresii analitice de mare precizie ale soluțiilor cu o singură iterație și un număr mic de pași. Procedura noastră este independentă de prezența unor parametri mici sau mari, contrazicând alte metode cunoscute în literatura de specialitate. Principalul avantaj al acestei abordări este controlul convergenței soluțiilor aproximative într-un mod foarte riguros. Un acord foarte bun a fost găsit între soluțiile noastre aproximative și rezultatele numerice, ceea ce dovedește că metoda noastră este foarte eficientă și precisă [65].

3.1.1 Rezolvarea problemei amortizoarelor fluide neliniare de tip Bingham

În cele ce urmează, vom aplica a doua variantă a metodei MHAO pentru a obține soluții aproximative ale problemei (3.1.10) și (3.1.11). Pentru aceasta, se introduc variabilele adimensionale

$$t = \bar{t} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \tau = \bar{\tau} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.1.12)$$

astfel încât ecuația (3.1.10) poate fi exprimată prin

$$\ddot{x}(t) + 2c \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu(t-\tau)} \dot{x}(\tau) d\tau + x(t) + ax^3(t) + \beta \operatorname{sgn}(\dot{x}(t)) + f_0 = 0 \quad (3.1.13)$$

unde $c = \frac{\bar{c}}{2\sqrt{km}}$, $\mu = \sqrt{\frac{m}{k}} \bar{\mu}$, iar simbolul punct denotă derivarea în raport cu variabila adimensională timp. Condițiile inițiale (3.1.11) devin

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (3.1.14)$$

Cu ajutorul transformării

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} z(t) \quad (3.1.15)$$

unde λ este un parametru pozitiv necunoscut la acest moment, ecuația (3.1.13) poate fi scrisă sub forma

$$\ddot{z} - 2\lambda \dot{z} + (\lambda^2 + 2\mu c + 1)z - 2c\mu^2 \cdot \int_0^t e^{(\lambda-\mu)(t-\tau)} z(\tau) d\tau + aA^2 e^{-2\lambda t} z^3 + \frac{\beta}{A} e^{\lambda t} \operatorname{sgn}(\dot{z} - \lambda z) + \frac{f_0 e^{\lambda t}}{A} - 2c\mu e^{(\lambda-\mu)t} = 0 \quad (3.1.16)$$

Condițiile inițiale (3.1.14) devin

$$z(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = \lambda + \frac{v_0}{A} \quad (3.1.17)$$

Pentru ecuația diferențială neliniară (3.1.16), se alege operatorul liniar de forma:

$$L(z(t)) = \ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) \quad (3.1.18)$$

unde ω este un parametru pozitiv necunoscut.

Operatorul neliniar corespunzător relațiilor (3.1.16) și (3.1.18) este

$$N(z(t)) = -2\lambda \dot{z} + (\lambda^2 + 2\mu c + 1 - \omega^2)z - 2c\mu^2 \cdot \int_0^t e^{(\lambda-\mu)(t-\tau)} z(\tau) d\tau + \\ + aA^2 e^{-2\lambda t} z^3 + \frac{\beta}{A} e^{\lambda t} \operatorname{sgn}(\dot{z} - \lambda z) + \frac{f_0}{A} e^{\lambda t} - 2c\mu e^{(\lambda-\mu)t} \quad (3.1.19)$$

Aproximarea inițială $z_0(t)$ poate fi obținută din ecuația (2.3.3) cu condițiile inițiale:

$$z_0(0) = 1, \quad \dot{z}_0(0) = -\frac{\omega^2}{\lambda} \quad (3.1.20)$$

Acum, ecuația (2.3.3) cu operatorul liniar (3.1.8) și cu condițiile inițiale (3.1.20) are soluția

$$z_0(t) = \cos \omega t - \frac{\omega}{\lambda} \sin \omega t \quad (3.1.21)$$

Operatorul neliniar corespunzător ecuației (2.3.13) va avea forma

$$N(z_0(t)) = \frac{\lambda(1 + \lambda^2 + \omega^2 + 2\mu c) - 2\mu^2 c(\omega^2 - \lambda^2 + \lambda\mu)}{\lambda(\omega^2 + (\mu - \lambda)^2)} \cos \omega t + \\ + \frac{\omega(\lambda^2 + \omega^2 - 2\mu c - 1)(\lambda^2 + \omega^2 + \lambda^2 - 2\mu\lambda) + 2\mu^2 c\omega(\mu - 2\lambda)}{\lambda(\omega^2 + (\mu - \lambda)^2)} \sin \omega t + \\ + \frac{2\mu^2 c(\omega^2 - \lambda^2) - 2\mu c\lambda(\omega^2 + \lambda^2 - 2\lambda\mu)}{\lambda(\omega^2 + (\mu - \lambda)^2)} e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{f_0}{A} e^{\lambda t} + \\ + \frac{aA^2}{4} e^{-2\lambda t} \left[\frac{3(\omega^2 + \lambda^2)}{\lambda^2} \cos \omega t + \frac{3\omega(\omega^2 + \lambda^2)}{\lambda^3} \sin \omega t + \frac{\lambda^2 - 3\omega^2}{\lambda^2} \cos 3\omega t + \right. \\ \left. + \frac{\omega(\omega^2 - 3\lambda^2)}{\lambda^3} \sin 3\omega t \right] - \frac{4\beta}{\lambda A} e^{\lambda t} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \right. \\ \left. - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \frac{1}{9} \cos 9\omega t - \dots \right) \quad (3.1.22)$$

Din relațiile (3.1.22), (3.1.17) și (2.3.14) se alege prima aproximare de forma:

$$z_1(t) = C_1 t^2 \cos \omega t + (C_2 t^2 + C_3 t) \sin \omega t + \\ + \left[\left[C_4 t^2 + \left(v_0 + \frac{\omega^2 + \lambda^2}{\lambda} A + 3\lambda C_7 \right) t \right] \cos 3\omega t + \right. \\ \left. + (C_5 t^2 + C_6 t) \sin 3\omega t + C_7 \right] e^{-2\lambda t} - C_7 e^{\lambda t} \cos \omega t \quad (3.1.23)$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuațiilor (3.1.13) și (3.1.14) dată de relația (2.3.5) este obținută din relațiile (3.1.21), (3.1.23) și (3.1.15):

$$x(t) = \left[(C_1 t^2 + A) \cos \omega t + (C_2 t^2 + C_3 t - \frac{\omega}{\lambda} A) \sin \omega t \right] e^{-\lambda t} + \\ + \left[\left[C_4 t^2 + \left(v_0 + \frac{\omega^2 + \lambda^2}{\lambda} A + 3\lambda C_7 \right) t \right] \cos 3\omega t + \right.$$

$$+ (C_5 t^2 + C_6 t) \sin 3\omega t + C_7 \left. \right\} e^{-3\lambda t} - C_7 \cos \omega t \quad (3.1.24)$$

3.1.2 Rezultate numerice

Acuratețea soluției aproximative, este ilustrată pentru următoarele valori ale parametrilor: $c = 0.1$, $\mu = 20$, $a = 1$, $\beta = 0.1$, $f_0 = 0.1$, $A = 5$, $v_0 = 0.1$. Parametrii optimali de control a convergenței sunt determinați cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate în trei etape astfel:

Pentru $t \in [0, 7/2]$ se obține

$$\begin{aligned} C_1 &= -8.3835528344, C_2 = 0.4059363155, C_3 = 9.8101433224, \\ C_4 &= 12.7300955924, C_5 = -8.3640772984, C_6 = -14.6926248464, \\ C_7 &= -15.2775231617, \lambda = 0.4221369200, \omega = 1.1700000000. \end{aligned}$$

Pentru această primă etapă, soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (3.1.24) devine:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \left[(-8.3835528344t^2 + 5) \cos \omega t + (0.4059363155t^2 + 9.8101433224t - \right. \\ &\quad \left. - 13.8580629241) \sin \omega t \right] e^{-0.4221369200t} + \left[(12.7300955924t^2 - \right. \\ &\quad \left. - 1.0230014969t) \cos 3\omega t + (-8.3640772984t^2 - 14.692624846t) \sin 3\omega t - \right. \\ &\quad \left. - 15.2775231617 \right] e^{-1.2664107600t} + 15.2775231617 \cos \omega t \quad (3.1.25) \end{aligned}$$

Pentru a doua etapă, când $t \in [7/2, 7]$ se obține

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \left[(-18.7159298670t^2 + 1.3931962652) \cos \omega t + (2.5809325241t^2 - \right. \\ &\quad \left. - 12.3307330274t - 7.2827523763) \sin \omega t \right] e^{-0.3726878974t} + \left[(16.1687136688t^2 - \right. \\ &\quad \left. - 76.6284415838t) \cos 3\omega t + (1.8324463202t^2 - 15.4843220143t) \sin 3\omega t - \right. \\ &\quad \left. - 68.7655829044 \right] e^{-1.1180636924t} + 68.7655829044 \cos \omega t \quad (3.1.26) \end{aligned}$$

unde $\omega = 1.9481775386$, $\lambda = 0.3726878974$.

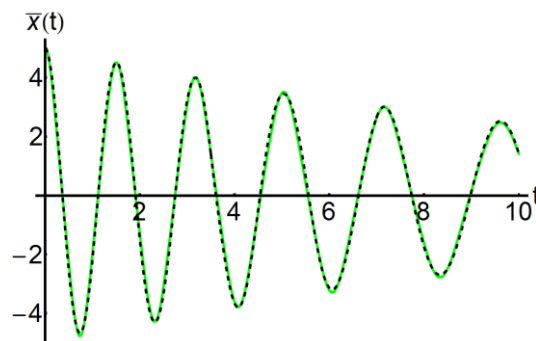


Fig. 3.5: Comparație între soluția aproximativă (3.1.25), (3.1.26) și (3.1.27) și soluția numerică: — soluția numerică; soluția aproximativă

În ultima etapă, când $t \in [7, 10]$, soluția aproximativă de ordinul întâi este

$$\bar{x}(t) = \left[(0.1521594849t^2 + 2.6425574994) \cos \omega t + (-1.4223903751t^2 + \right.$$

$$+ 13.8451447750t - 10.3560770110) \sin \omega t \left. \right] e^{-0.1870115667t} + \left[(-7.9954565850t^2 + \right.$$

$$+ 12.3657070213t) \cos 3\omega t + (1.5073646864t^2 - 0.3337501284t) \sin 3\omega t +$$

$$\left. + 1.1037184321 \right] e^{-0.5610347000t} - 1.1037184321 \cos \omega t \quad (3.1.27)$$

unde $\omega = 0.7328908403$, $\lambda = 0.1870115667$.

În Figura 3.5 este prezentată o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi și rezultatele numerice (obținute cu metoda Runge-Kutta de ordinul 4).

4 Fluide Newtoniene

4.1 Ecuația neliniară Falkner-Skan

În 1931, Falkner și Skan [71] au folosit unele proceduri aproximative pentru a rezolva ecuațiile de strat limită. Hartree [81] găsește soluția numerică folosind metoda shooting, considerând $F''(0)$ (a se vedea ecuația (4.1.8)) ca parametru liber (independent, arbitrar). Condițiile la limită (4.1.9) apar în studiul curgerii vâscoase pe o pană de unghi $\beta\pi$, $\beta > 0$ corespunde curgerii pe pană și $\beta < 0$ corespunde scurgerii de pe pană. Cazul special $\beta = 0$ se numește ecuația Blasius, pana fiind redusă la o placă plană.

În [164] și [82] este demonstrat că dacă $0 \leq \beta \leq 1$ atunci ecuația Falkner-Skan (4.1.8), cu condițiile inițiale / la limită (4.1.9), admite o unică soluție netedă. Pentru $-0.1988 < \beta < 0$ există două soluții, una corespunde la $F''(0) > 0$ și alta la $F''(0) < 0$. Botta și al. [26] au arătat că soluția ecuației Falkner-Skan este unică pentru $\beta > 1$, fiind supusă restricției $0 < F''(0) < 1$. Curgerea la stratul limită de tip convecție forțată pe o pană, cu aspirație sau imersie uniformă este analizată de Yih [183]. Asaithambi [15] a studiat ecuația Falkner-Skan folosind schema diferențelor finite. În [187], Zaturka și Banks prezintă o nouă ramură de soluții în funcție de parametrul β . Tehnica transformărilor diferențiale este adoptată în [104] pentru a investiga viteza și câmpurile forfecare-tensiune, asociate cu problema Falkner-Skan de strat limită. Metoda grupurilor de transformări este folosită pentru a reduce problema la limită într-o pereche de probleme cu valori inițiale, care apoi sunt rezolvate cu ajutorul metodei transformărilor diferențiale. Ecuația diferențială ordinară neliniară este rezolvată, prin metoda descompunerii Adomian (ADM), de către Elgazery [41], astfel încât condiția la infinit a fost aplicată unei aproximări Padé aferente și transformatei Laplace la soluția obținută. De asemenea, metoda ADM este folosită în [11] de Alizadeh și al., pentru găsirea unei soluții analitice sub formă de serie de puteri. Efectele magnetohidrodinamice ale curgerii, descrise prin ecuațiile Falkner-Skan pe o pană, au fost studiate de Abbasbandy și Hayat în [3]. Aceiași autori au folosit metoda Hankel-Padé și metoda analizei homotopice la studiul derivatei soluțiilor [4]. Un model de curgere la stratul limită pentru calculul pierderii de presiune și a debitului de separare este prezentat în [21].

Pirkhedri ș.a. [138] dezvoltă o tehnică numerică transformând problema neliniară cu derivate parțiale într-o problemă la limită neliniară de ordinul trei, pe care o rezolvă cu metoda colocației folosind funcții raționale Legendre. În [8] este investigată soluția problemei de echilibru pentru fluide micropolare. Ecuațiile diferențiale neliniare sunt rezolvate numeric cu ajutorul schemei diferențelor finite implicite, numită în literatură ca metoda Keller-box. În [106] Lakestani, trunchiază domeniul fizic semi-infinit al problemei la un domeniu finit și dezvoltă soluția aproximativă ca elemente ale funcțiilor cardinale de tip Chebyshev. În [184] Yun propune o metodă alternativă pentru rezolvarea ecuației Falkner-Skan sub forma unei serii de polinoame. În [93] Hendi și Hussian studiază curgerea de tip Falkner-Skan pe o suprafață poroasă. Este luat în considerare cazul aspirației / suflării. Introducerea funcției de curent și a transformărilor corespunzătoare reduce problema neliniară de tip Falkner-Skan la o problemă neliniară, descrisă de o ecuație diferențială ordinară care este rezolvată cu metoda analizei homotopice.

4.1.1 Ecuțiile de mișcare

Ecuțiile stratului limită în cazul curgerii laminare bi-dimensionale a unui fluid incompresibil, supuse unui gradient de presiune sunt [71], [81], [187], [11]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} p' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1.2)$$

unde p' este gradientul de presiune, $p' = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x}$, u este viteza de curent (flux) în direcția curgerii fluidului, v este viteza în direcția normală la u , ν este vâscozitatea cinematică constantă, $U(x)$ este viteza la marginea stratului limită care este supusă relației legii-putere $U(x) = ax^m$, ($x > 0$), unde a este viteza de curent medie și m este o constantă. Condițiile la limită relevante pentru placă fixă, sunt

$$y = 0 : u = 0, v = 0; u \rightarrow a \text{ pentru } y \rightarrow \infty. \quad (4.1.3)$$

Funcția de curent $\psi(x, y)$ este introdusă astfel încât

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.1.4)$$

Ecuția de continuitate (4.1.2) este identic satisfăcută. Ecuția de moment (4.1.1) devine:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (4.1.5)$$

Se integrează ecuația (4.1.5) și se folosesc variabilele de similaritate:

$$\psi = x^{(1+m)/2} \sqrt{\frac{2\nu a}{1+m}} F(\eta) \quad (4.1.6)$$

$$\eta = \frac{y}{x^{(1-m)/2}} \sqrt{\frac{(1+m)a}{2\nu}}. \quad (4.1.7)$$

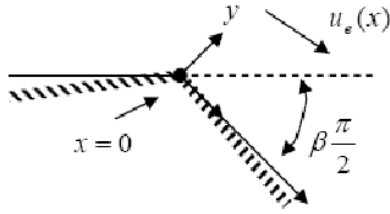
Substituirea relațiilor (4.1.6) și (4.1.7) în ecuația (4.1.5) ne conduc la ecuația Falkner-Skan în forma:

$$F'''(\eta) + F(\eta)F''(\eta) + \beta(1 - F'(\eta)^2) = 0 \quad (4.1.8)$$

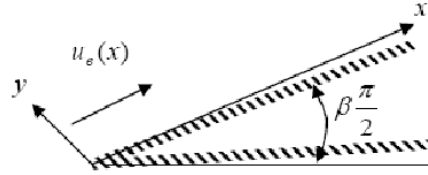
cu condițiile inițiale / la limită

$$F(0) = 0, F'(0) = 0, F'(\infty) = 0 \quad (4.1.9)$$

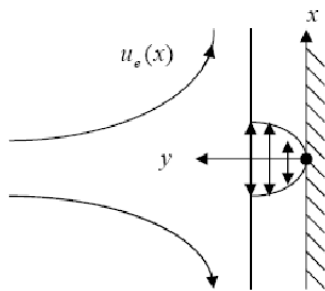
unde $\beta = \frac{2m}{m+1}$ este o măsură a gradientului de presiune, și $' = \frac{d}{d\eta}$.



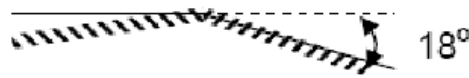
Curgerea în jurul unui unghi (difuzie) $-2 \leq \beta \leq 0$



Curgerea spre pană $0 \leq \beta \leq 2$



Creșterea vitezei de curgere nevâscoasă de la punctul de stagnare la $x = -0$



Modelul fizic pentru $\beta = -0.19884$, i.e. $\beta\pi = 18^\circ$

4.1.2 Rezolvarea ecuației Falkner-Skan

Pentru a aplica ideile de bază ale metodei propuse, se alege operatorul liniar [118]:

$$L(F(\eta, p)) = \frac{\partial^3 F(\eta, p)}{\partial \eta^3} + K \frac{\partial^2 F(\eta, p)}{\partial \eta^2} \tag{4.1.10}$$

unde K este un parametru necunoscut în acest moment. Operatorul neliniar N este

$$N(F(\eta, p)) = F(\eta, p) \frac{\partial^2 F(\eta, p)}{\partial \eta^2} - K \frac{\partial^2 F(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \beta [1 - (\frac{\partial F(\eta, p)}{\partial \eta})^2] \tag{4.1.11}$$

Condițiile la limită sunt

$$F(0, p) = 0, \frac{\partial F(0, p)}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial F(\infty, p)}{\partial \eta} = 1. \tag{4.1.12}$$

Ecuația (2.2.4) poate fi scrisă în forma

$$F_0''(\eta) + KF_0''(\eta) = 0, F_0(0) = 0, F_0'(0) = 0, F_0'(\infty) = 1 \tag{4.1.13}$$

și are soluția

$$F_0(\eta) = \eta + \frac{e^{-K\eta} - 1}{K}. \tag{4.1.14}$$

Din relațiile (2.2.1), (4.1.10) și (4.1.11) se obține expresia

$$N_0(\eta) = -KF_0''(\eta) + F_0(\eta)F_0''(\eta) + \beta [1 - F_0'(\eta)^2]. \tag{4.1.15}$$

Substituind relația (4.1.14) în relația (4.1.15), se obține

$$N_0(\eta) = (K\eta + 2\beta - 1 - K)e^{-K\eta} + (1 - \beta)e^{-2K\eta}. \quad (4.1.16)$$

Dacă se consideră numai aproximarea de ordinul întâi ($m = 1$), relația (2.2.5) devine

$$\bar{F}(\eta) = F_0(\eta) + F_1(\eta) \quad (4.1.17)$$

unde $F_1(\eta)$ este obținută din ecuația (2.2.9):

$$F_1''(\eta) + KF_1'(\eta) - (F_0''(\eta) + KF_0'(\eta)) = H_1(\eta, C_i)N_0(\eta). \quad (4.1.18)$$

Substituind relațiile (4.1.14) și (4.1.16) în ecuația (4.1.18) se obține ecuația:

$$F_1''(\eta) + KF_1'(\eta) = H_1(\eta, C_i)[(K\eta + 2\beta - 1 - K)e^{-K\eta} + (1 - \beta)e^{-2K\eta}]$$

$$F_1(0) = 0, F_1'(0) = 0, F_1(\infty) = 0. \quad (4.1.19)$$

Există multe posibilități în a alege funcția auxiliară $H_1(\eta, C_i)$ care apare în ecuația (4.1.19). Convergența soluției $F_1(\eta)$ și, în consecință, convergența soluției aproximative $\bar{F}(\eta)$ dată de relația (4.1.17) depind de funcția auxiliară $H_1(\eta, C_i)$. Practic, forma funcției $H_1(\eta, C_i)$ ar trebui să fie de forma termenilor ce apar în relația (4.1.16) care sunt produse de funcții polinomiale sau exponențiale. În general, se încearcă să se aleagă funcția $H_1(\eta, C_i)$ astfel ca produsul $H_1(\eta, C_i)N_0(\eta)$ din relația (4.1.18) și $N_0(\eta)$ să aibă aceeași formă. În tot acest paragraf, se pot considera, de exemplu, numai posibilitățile:

$$H_1(\eta, C_i) = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + \dots + C_q\eta^{q-1}$$

$$H_1(\eta, C_i) = C_1 + C_2\eta + C_3e^{-K\eta} + C_4e^{-2K\eta}$$

$$H_1(\eta, C_i) = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + (C_4 + C_5\eta)e^{-K\eta}$$

și așa mai departe, unde C_1, C_2, \dots sunt parametri necunoscuți. În cele ce urmează se au în vedere patru cazuri.

Cazul 1. Dacă funcția auxiliară $H_1(\eta, C_i)$ de control a convergenței are forma

$$H_1(\eta, C_i) = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + C_4\eta^3 + (C_5 + C_6\eta + C_7\eta^2)e^{-K\eta} + C_8e^{-2K\eta} \quad (4.1.20)$$

atunci ecuația (4.1.19) devine

$$F_1''(\eta) + KF_1'(\eta) = \{(2\beta - 1 - K^2)C_1 + [(2\beta - 1 - K^2)C_2 + KC_1]\eta +$$

$$+ [(2\beta - 1 - K^2)C_3 + KC_2]\eta^2 + [(2\beta - 1 - K^2)C_4 + KC_3]\eta^3 +$$

$$+ KC_4\eta^4\}e^{-K\eta} + \{(1 - \beta)C_1 + (2\beta - 1 - K^2)C_5 + [(1 - \beta)C_2 + KC_5 +$$

$$+ (2\beta - 1 - K^2)C_6]\eta + [(1 - \beta)C_3 + KC_6 + (2\beta - 1 - K^2)C_7]\eta^2 +$$

$$+ [(1 - \beta)C_4 + KC_7]\eta^3\}e^{-2K\eta} + \{(1 - \beta)C_5 + (2\beta - 1 - K^2)C_8 +$$

$$+ [(1 - \beta)C_6 + KC_8]\eta + (1 - \beta)C_7\eta^2\}e^{-3K\eta} + (1 - \beta)C_8e^{-4K\eta}. \quad (4.1.21)$$

În fine, folosind relația (4.1.14) și rezolvând ecuația (4.1.21), se determină soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (4.1.17) în forma

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\eta) = & \eta - \frac{1}{K} + \frac{4K^2 - 7\beta - 5}{4K^3} C_1 + \frac{8K^2 - 15\beta - 17}{4K^4} C_2 + \frac{48K^2 - 93\beta - 147}{8K^5} C_3 + \\
& + \frac{96K^2 - 189\beta - 387}{4K^6} C_4 + \frac{9K^2 - 14\beta - 4}{36K^3} C_5 + \frac{54K^2 - 92\beta - 43}{216K^4} C_6 + \\
& + \frac{81K^2 - 146\beta - 97}{216K^5} C_7 + \frac{48K^2 - 69\beta - 11}{432K^3} C_8 + \\
& + \left[\frac{C_4}{5K} \cdot \eta^5 + \left(\frac{C_3}{4K} + \frac{2\beta + 7 - K^2}{4K^2} C_4 \right) \cdot \eta^4 + \left(\frac{C_2}{3K} + \frac{2\beta + 5 - 2K^2}{3K^2} C_3 + \right. \right. \\
& + \left. \frac{4\beta + 10 - 2K^2}{K^3} C_4 \right) \cdot \eta^3 + \left(\frac{C_1}{2K} + \frac{2\beta + 3 - K^2}{2K^2} C_2 + \frac{4\beta + 7 - 2K^2}{K^3} C_3 + \right. \\
& + \left. \frac{18\beta + 39 - 9K^2}{K^4} C_4 \right) \cdot \eta^2 + \left(\frac{2\beta + 1 - K^2}{K^2} C_1 + \frac{4\beta + 4 - 2K^2}{K^3} C_2 + \frac{12\beta + 18 - 6K^2}{K^4} C_3 + \right. \\
& + \left. \frac{48\beta + 96 - 24K^2}{K^5} C_4 \right) \cdot \eta + \frac{1}{K} + \frac{3\beta + 3 - 2K^2}{2K^3} C_1 + \frac{13\beta + 19 - 8K^2}{4K^4} C_2 + \\
& + \frac{41\beta + 79 - 24K^2}{4K^5} C_3 + \frac{339\beta + 813 - 192K^2}{8K^6} C_4 + \\
& + \frac{10\beta + 5 - 6K^2}{12K^3} C_5 + \frac{49\beta + 41 - 27K^2}{36K^4} C_6 + \frac{718\beta + 875 - 378K^2}{216K^5} C_7 + \\
& + \frac{9\beta + 2 - 6K^2}{36K^3} C_8 \cdot e^{-K\eta} + \left[\left(\frac{\beta - 1}{4K^3} C_4 - \frac{1}{4K^2} C_7 \right) \cdot \eta^3 + \left(\frac{\beta - 1}{4K^3} C_3 + \frac{3\beta - 3}{2K^4} C_4 - \frac{1}{4K^2} C_6 + \right. \right. \\
& + \left. \frac{K^2 - 5 - 2\beta}{4K^3} C_7 \right) \cdot \eta^2 + \left(\frac{\beta - 1}{4K^3} C_2 + \frac{\beta - 1}{K^4} C_3 + \frac{33\beta - 33}{8K^5} C_4 - \frac{1}{4K^2} C_5 + \frac{K^2 - 2\beta - 3}{4K^3} C_6 + \right. \\
& + \left. \frac{8K^2 - 16\beta - 25}{8K^4} C_7 \right) \cdot \eta + \frac{\beta - 1}{4K^3} C_1 + \frac{\beta - 1}{2K^4} C_2 + \frac{11\beta - 11}{8K^5} C_3 + \frac{39\beta - 39}{8K^6} C_4 + \\
& + \frac{K^2 - 2\beta - 1}{4K^3} C_5 + \frac{4K^2 - 8\beta - 7}{8K^4} C_6 + \\
& + \left. \frac{11K^2 - 22\beta - 28}{8K^5} C_7 \right] \cdot e^{-2K\eta} + \left[\frac{\beta - 1}{18K^3} C_7 \eta^2 + \left(\frac{\beta - 1}{18K^3} C_6 + \frac{7\beta - 7}{54K^4} C_7 - \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{18K^2} C_8 \right) \cdot \eta + \frac{\beta - 1}{18K^3} C_5 + \frac{7\beta - 7}{108K^4} C_6 + \frac{11\beta - 11}{108K^5} C_7 + \frac{6K^2 - 1 - 12\beta}{108K^3} C_8 \cdot e^{-3K\eta} + \\
& + \frac{\beta - 1}{48K^3} C_8 e^{-4K\eta} \tag{4.1.22}
\end{aligned}$$

Cazul 2. Funcția auxiliară $H_1(\eta, C_i)$ are forma

$$H_1(\eta, C_i) = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + C_4\eta^3 + C_5\eta^4 + (C_6 + C_7\eta + C_8\eta^2)e^{-K\eta}. \tag{4.1.23}$$

Ecuția (4.1.19) devine

$$\begin{aligned}
 F_{II}''(\eta) + KF_{II}''(\eta) = & \{(2\beta - 1 - K^2)C_1 + [(2\beta - 1 - K^2)C_2 + KC_1]\eta + \\
 & + [(2\beta - 1 - K^2)C_3 + KC_2]\eta^2 + [(2\beta - 1 - K^2)C_4 + KC_3]\eta^3 + \\
 & + [(2\beta - 1 - K^2)C_5 + KC_4]\eta^4 + KC_5\eta^5\}e^{-K\eta} + \{(1 - \beta)C_1 + \\
 & + (2\beta - 1 - K^2)C_6 + [(1 - \beta)C_2 + KC_6 + (2\beta - 1 - K^2)C_7]\eta + \\
 & + [(1 - \beta)C_3 + KC_7 + (2\beta - 1 - K^2)C_8]\eta^2 + [(1 - \beta)C_4 + KC_8]\eta^3 + \\
 & + (1 - \beta)C_5\eta^4\}e^{-2K\eta} + [(1 - \beta)C_6 + (1 - \beta)C_7\eta + (1 - \beta)C_8\eta^2]. \quad (4.1.24)
 \end{aligned}$$

În acest caz, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.1.17) este obținută din relația (4.1.14), iar ecuația (4.1.24) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(\eta) = & \eta - \frac{1}{K} + \frac{4K^2 - 7\beta - 5}{4K^3}C_1 + \frac{8K^2 - 15\beta - 17}{4K^4}C_2 + \frac{48K^2 - 93\beta - 147}{8K^5}C_3 + \\
 & + \frac{96K^2 - 189\beta - 387}{4K^6}C_4 + \frac{960K^2 - 1935\beta - 4785}{8K^7}C_5 + \frac{9K^2 - 14\beta - 4}{36K^3}C_6 + \\
 & + \frac{54K^2 - 92\beta - 43}{216K^4}C_7 + \frac{81K^2 - 146\beta - 97}{216K^5}C_8 + \\
 & + \left[\frac{C_5}{6K}\eta^6 + \left(\frac{C_4}{5K} + \frac{2\beta + 9 - K^2}{9K^2}C_5\right) \cdot \eta^5 + \left(\frac{C_3}{4K} + \frac{2\beta + 7 - K^2}{4K^2}C_4 + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{4\beta + 13 - 2K^2}{K^3}C_5\right) \cdot \eta^4 + \left(\frac{C_2}{3K} + \frac{2\beta + 5 - K^2}{3K^2}C_3 + \frac{4\beta + 10 - 2K^2}{K^3}C_4 + \right. \\
 & + \left. \frac{24\beta + 68 - 12K^2}{K^4}C_5\right) \cdot \eta^3 + \left(\frac{C_1}{2K} + \frac{2\beta + 3 - K^2}{2K^2}C_2 + \frac{4\beta + 7 - 2K^2}{K^3}C_3 + \right. \\
 & + \left. \frac{18\beta + 39 - 9K^2}{K^4}C_4 + \frac{96\beta + 252 - 48K^2}{K^5}C_5\right) \cdot \eta^2 + \\
 & + \left(\frac{2\beta + 1 - K^2}{K^2}C_1 + \frac{4\beta + 4 - 2K^2}{K^3}C_2 + \frac{12\beta + 18 - 6K^2}{K^4}C_3 + \right. \\
 & + \left. \frac{48\beta + 96 - 24K^2}{K^5}C_4 + \frac{240\beta + 600 - 120K^2}{K^6}C_5\right) \cdot \eta + \frac{1}{K} + \frac{3\beta + 3 - 2K^2}{2K^3}C_1 + \\
 & + \frac{13\beta + 19 - 8K^2}{4K^4}C_2 + \frac{41\beta + 79 - 24K^2}{4K^5}C_3 + \frac{339\beta + 813 - 192K^2}{8K^6}C_4 + \\
 & + \frac{1053\beta + 2307 - 480K^2}{4K^7}C_5 + \frac{10\beta + 5 - 6K^2}{12K^3}C_6 + \\
 & + \frac{49\beta + 41 - 27K^2}{36K^4}C_7 + \frac{718\beta + 875 - 378K^2}{216K^5}C_8 \cdot e^{-K\eta} + \left[\frac{\beta - 1}{4K^3}C_5\eta^4 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\beta-1}{4K^3} C_4 - \frac{2\beta-2}{K^4} C_5 - \frac{1}{4K^2} C_8 \right) \cdot \eta^3 + \left(\frac{\beta-1}{4K^3} C_3 + \frac{3\beta-3}{2K^4} C_4 + \frac{33\beta-33}{4K^5} C_5 - \right. \\
& + \frac{2\beta-7-K^2}{4K^3} C_8 \left. \right) \cdot \eta^2 + \left(\frac{\beta-1}{4K^3} C_2 + \frac{\beta-1}{K^4} C_3 + \frac{33\beta-33}{8K^5} C_4 + \frac{39-39\beta}{2K^6} C_5 - \right. \\
& - \frac{1}{4K^2} C_6 + \frac{K^2-2\beta-3}{4K^3} C_7 + \frac{8K^2-16\beta-25}{8K^4} C_8 \left. \right) \cdot \eta + \frac{\beta-1}{4K^3} C_1 + \frac{\beta-1}{2K^4} C_2 + \\
& + \frac{11\beta-11}{8K^5} C_3 + \frac{39\beta-39}{8K^6} C_4 + \frac{171\beta-171}{8K^7} C_5 + \frac{K^2-2\beta-1}{4K^3} C_6 + \\
& + \frac{K^2-2\beta-1}{4K^3} C_6 + \frac{4K^2-8\beta-7}{8K^4} C_7 + \frac{11K^2-22\beta-28}{8K^5} C_8 \left. \right) \cdot e^{-2K\eta} + \left[\frac{\beta-1}{18K^3} C_8 \eta^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\beta-1}{18K^3} C_7 + \frac{7\beta-7}{54K^4} C_8 \right) \cdot \eta + \frac{\beta-1}{18K^3} C_6 + \frac{7\beta-7}{108K^4} C_7 + \frac{11\beta-11}{108K^5} C_8 \right] \cdot e^{-3K\eta} \quad (4.1.25)
\end{aligned}$$

Cazul 3. Dacă funcția auxiliară $H_1(\eta, C_i)$ are forma

$$H_1(\eta, C_i) = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + C_4\eta^3 + (C_5 + C_6\eta + C_7\eta^2 + C_9\eta^3)e^{-K\eta} + C_8e^{-2K\eta} \quad (4.1.26)$$

atunci soluția aproximativă de ordinul întâi (4.1.17) este

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\eta) = \bar{F}(\eta) + C_9 \left[-\frac{6804K^2 + 793 + 908\beta}{648K^6} + \frac{1215K^2 + 3872 + 2365\beta}{216K^6} e^{-K\eta} + \right. \\
+ \left(-\frac{1}{4K^2} \eta^4 + \frac{K^2-7-2\beta}{4K^3} \eta^3 + \frac{6K^2-27-12\beta}{4K^4} \eta^2 + \right. \\
+ \frac{33K^2-123-66\beta}{8K^5} \eta + \frac{39K^2-132-78\beta}{8K^6} \left. \right) e^{-2K\eta} + \\
+ \left. \left(\frac{\beta-1}{18K^3} \eta^3 + \frac{7\beta-7}{36K^4} \eta^2 + \frac{11\beta-11}{36K^5} \eta + \frac{131\beta-131}{648K^6} \right) e^{-3K\eta} \right] \quad (4.1.27)
\end{aligned}$$

unde $\bar{F}(\eta)$ este dată de relația (4.1.22).

Cazul 4. În ultimul caz, se consideră

$$H_1(\eta, C_i) = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + C_4\eta^3 + C_5\eta^4 + (C_6 + C_7\eta + C_8\eta^2 + C_9\eta^3)e^{-K\eta} \quad (4.1.28)$$

astfel încât soluția aproximativă de ordinul întâi (4.1.17) devine

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\eta) = \bar{F}(\eta) + C_9 \left[-\frac{6804K^2 + 793 + 908\beta}{648K^6} + \left(-\frac{1}{4K^2} \eta^4 + \right. \right. \\
+ \frac{1215K^2 + 3872 + 2365\beta}{216K^6} e^{-K\eta} + \frac{K^2-7-2\beta}{4K^3} \eta^3 + \\
+ \left. \frac{6K^2-27-12\beta}{4K^4} \eta^2 + \frac{33K^2-123-66\beta}{8K^5} \eta + \frac{39K^2-132-78\beta}{8K^6} \right) e^{-2K\eta} +
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\beta - 1}{18K^3} \eta^3 + \frac{7\beta - 7}{36K^4} \eta^2 + \frac{11\beta - 11}{36K^5} \eta + \frac{131\beta - 131}{648K^6} \right) e^{-3K\eta} \quad (4.1.29)$$

unde $\bar{F}(\eta)$ este dată de relația (4.1.25).

4.1.3 Exemple numerice

În vederea demonstrării acurateței rezultatelor obținute, se determină parametrii de control ai convergenței C_j care apar în relațiile (4.1.22), (4.1.25), (4.1.27) și (4.1.29) cu ajutorul metodei Galerkin. Fie $R(\eta, C_j)$ restul aproximării soluției aproximative $\bar{F}(\eta)$ (sau $\bar{\bar{F}}(\eta)$) date de relațiile (4.1.22), (4.1.25), (4.1.27) și (4.1.29) care satisface relația (4.1.8):

$$R(\eta, C_j) = \bar{F}'''(\eta, C_j) + \bar{F}(\eta, C_j)\bar{F}''(\eta, C_j) + \beta(1 - \bar{F}^2(\eta, C_j)). \quad (4.1.30)$$

Deoarece $R(\eta, C_j)$ conține parametrii C_j , $i = 1, 2, \dots$, aceștia pot fi determinați din condițiile

$$J_i(C_j) = \int_0^\infty R(\eta, C_j) f_i(\eta) d\eta = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (4.1.31)$$

unde f_j sunt funcții liniar independente, luate în sensul de funcții pondere. Relațiile (4.1.22) și (4.1.25) conțin nouă parametri necunoscuți: K și C_j , $i = 1, 2, \dots, 8$ și prin urmare se vor considera nouă funcții pondere ($q = 9$)

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{-K\eta}, f_2 = \eta e^{-K\eta}, f_3 = \eta^2 e^{-K\eta}, f_4 = \eta^3 e^{-K\eta}, f_5 = \eta^4 e^{-K\eta}, \\ f_6 &= \eta^5 e^{-K\eta}, f_7 = \eta e^{-2K\eta}, f_8 = \eta^2 e^{-2K\eta}, f_9 = \eta^3 e^{-2K\eta}. \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Pentru relațiile (4.1.27) și (4.1.29) care conțin parametrii necunoscuți: K , a și C_j , $i = 1, 2, \dots, 9$ se consideră funcțiile pondere ($q = 11$)

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{-K\eta}, f_2 = \eta e^{-K\eta}, f_3 = \eta^2 e^{-K\eta}, f_4 = \eta^3 e^{-K\eta}, f_5 = \eta^4 e^{-K\eta}, \\ f_6 &= \eta^4 e^{-2K\eta} + a\eta e^{-4K\eta}, f_7 = \eta e^{-2K\eta}, f_8 = \eta^2 e^{-2K\eta}, f_9 = \eta^3 e^{-2K\eta}, \\ f_{10} &= \eta^5 e^{-K\eta} + \eta e^{-3K\eta}, f_{11} = \eta^3 e^{-4K\eta} + \eta^7 e^{-2K\eta}. \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

Pe această cale, parametrii de control ai convergenței C_j , $i = 1, 2, \dots$ sunt determinați optimal și soluțiile aproximative de ordinul întâi sunt cunoscute pentru diferite valori ale parametrului cunoscut β .

În cele ce urmează, acuratețea metodei MHAO se ilustrează prin comparația dintre soluțiile aproximative obținute cu MHAO, cu soluțiile numerice calculate cu ajutorul metodei shooting în combinație cu metoda Runge-Kutta de ordin 4 folosind soft-ul Wolfram Mathematica 6.0. De asemenea, se arată că abaterile soluțiilor aproximative descresc atunci când numărul de parametri de control ai convergenței din expresia funcției auxiliare H_1 crește. Pentru câteva valori ale parametrului β , se vor determina soluțiile aproximative date de relațiile (4.1.22), (4.1.25), (4.1.27) și (4.1.29) și cu parametrii necunoscuți a , K , C_j obținuți din sistemul de ecuații dat de (4.1.31).

Exemplul 4.1.3.1 În primul caz se consideră $\beta = \frac{1}{2}$.

• a) Pentru relația (4.1.22), din sistemul (4.1.31), urmând procedurile descrise mai sus, se obțin parametrii de control ai convergenței:

$$C_1 = -0.0974633576, C_2 = 0.3334342895, C_3 = -0.0846971328,$$

$$C_4 = 0.0054445300, C_5 = 10.8640621331, C_6 = -8.9072774043,$$

$$C_7 = 0.7917175772, C_8 = 0.4377125759, K = 0.9345058664$$

și, în consecință soluția aproximativă de ordinul întâi (4.1.22) poate fi scrisă în forma:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\eta) = & -0.8095502989 + \eta + (-2.2237146927 + 0.2852293525\eta + 0.0785389555\eta^2 + \\ & + 0.0216006979\eta^3 + 0.0115505513\eta^4 + 0.0011652211\eta^5)e^{-0.9345058664\eta} + \\ & + (3.0954492754 + 2.0345244657\eta + 0.8905286290\eta^2 - \\ & - 0.1261379297\eta^3)e^{-1.8690117328\eta} + (-0.0565973734 + 0.2080470361\eta - \\ & - 0.0269476991\eta^2)e^{-2.8035175992\eta} - 0.0055869102 \cdot e^{-3.7380234657\eta} \quad (4.1.34) \end{aligned}$$

Tabelul 4.1. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.34), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.34) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1/2$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.34)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.34)	$\varepsilon_{F'}$
0	-5.77 $\cdot 10^{-25}$	$5.55 \cdot 10^{-16}$	$5.55 \cdot 10^{-16}$	1.85 $\cdot 10^{-21}$	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$4.44 \cdot 10^{-16}$
4/5	0.25434807 64	0.254314942 2	0.00003313 41	0.58330481 77	0.583314951 4	0.00001013 37
8/5	0.85502678 40	0.855062131 4	0.00003534 73	0.87609756 97	0.875965145 4	0.00013242 43
12/5	1.60452739 96	1.604358832 2	0.00016856 73	0.97606875 61	0.975951958 2	0.00011679 79
16/5	2.39631337 88	2.396240432 0	0.00007294 67	0.99719207 50	0.997376897 8	0.00018482 28
4	3.19550025 98	3.195378161 6	0.00012209 81	0.99980819 86	0.999469307 9	0.00033889 07
24/5	3.99545297 46	3.994961090 5	0.00049188 40	0.99999257 69	0.999522297 5	0.00047027 94
28/5	4.79545139 76	4.794697237 0	0.00075416 05	0.99999983 98	0.999833158 9	0.00016668 08
32/5	5.59545136 76	5.594652622 6	0.00079874 50	0.99999999 78	1.000005026 8	$5.02 \cdot 10^{-6}$

36/ 5	6.39545136 70	6.394624200 0	0.00082716 70	0.99999999 95	0.999883264 8	0.00011673 46
8	7.19545136 67	7.194427470 97	0.00102389 57	0.99999999 95	0.999617494 9	0.00038250 46

În Tabelul 4.1 se prezintă o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (4.1.34), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.34), cu rezultatele numerice, pentru câteva valori ale variabilei η și abaterile corespunzătoare.

• b) Din relația (4.1.25), obținută cu ajutorul funcției auxiliare de control a convergenței H_1 , dată de relația (4.1.23), se obțin următoarele rezultate pentru parametrii de control:

$$C_1 = 15.3365053132, C_2 = -20.7743165892, C_3 = 9.3076203696,$$

$$C_4 = -2.0941285422, C_5 = 0.2277189607, C_6 = -5.2584096507,$$

$$C_7 = -45.5148999446, C_8 = 8.3240015527, K = 2.1171968259$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi (4.1.25) devine

$$\begin{aligned} \bar{F}(\eta) = & -0.8071635483 + \eta + (2.8068611339 - 3.4953295790\eta + 4.4303812597\eta^2 - \\ & - 2.5930631506\eta^3 + 0.8330363534\eta^4 - 0.1666768365\eta^5 + \\ & + 0.0179261368\eta^6)e^{-2.1171968259\eta} + (-2.0785335331 + 0.0310432086\eta + \\ & + 0.2175675516\eta^2 - 0.4253321356\eta^3 - 0.0029993386\eta^4)e^{-4.2343936518\eta} + \\ & + (0.0788359475 + 0.1063683100\eta - 0.0243638517\eta^2)e^{-6.3515904777\eta} \quad (4.1.35) \end{aligned}$$

Tabelul 4.2. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.35), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.35) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1/2$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.35)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din (4.1.35)	$\varepsilon_{F'}$
0	-5.77 $\cdot 10^{-25}$	-1.33 $\cdot 10^{-15}$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$1.85 \cdot 10^{-21}$	$2.55 \cdot 10^{-15}$	$2.55 \cdot 10^{-15}$
4/5	0.25434807 64	0.25433337 46	0.00001470 17	0.58330481 77	0.583198184 9	0.00010663 27
8/5	0.85502678 40	0.85495612 91	0.00007065 49	0.87609756 97	0.876076942 8	0.00002062 68
12/ 5	1.60452739 96	1.60427147 79	0.00025592 16	0.97606875 61	0.975721975 3	0.00034678 08
16/ 5	2.39631337 88	2.39589021 42	0.00042316 45	0.99719207 50	0.997087692 0	0.00010438 29
4	3.19550025 98	3.19488436 75	0.00061589 22	0.99980819 86	0.999345622 2	0.00046257 64
24/ 5	3.99545297 46	3.99430629 91	0.00114667 54	0.99999257 69	0.999202573 7	0.00079000 32
28/ 5	4.79545139 67	4.79369445 97	0.00175694 57	0.99999983 95	0.999319191 9	0.00068064 46

5	76	32	44	98	9	79
32/5	5.59545136 76	5.59325627 78	0.00219508 98	0.99999999 78	0.999586820 0	0.00041317 78
36/5	6.39545136 70	6.39301634 52	0.00243502 18	0.99999999 95	0.999797059 6	0.00020293 98
8	7.19545136 67	7.19290609 45	0.00254527 21	0.99999999 95	0.999913648 1	0.00008635 14

În Tabelul 4.2 sunt date câteva valori ale funcției de curent (4.1.35), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.35) pentru câteva valori ale variabilei η și abaterile corespunzătoare.

• c) Pentru relația (4.1.27), care depinde de funcția auxiliară H_1 dată prin relația (4.1.26), se obțin:

$$C_1 = 17.1086190380, C_2 = -6.1886479153, C_3 = 0.7626899878, C_4 = -0.0317286051, \\ C_5 = -63.8867694459, C_6 = 0.7750251041, C_7 = -7.4945476964, C_8 = -9.8195426109, \\ C_9 = -0.4164447206, K = 1.1269038309, a = 0.8746910670$$

Prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi pentru funcția de curent este

$$\bar{F}(\eta) = -2.4537934149 + \eta + (-18.9229176282 + 1.0563974022\eta + 3.6621795605\eta^2 - \\ -1.0933800148\eta^3 + 0.1271627184\eta^4 + 0.0056311114\eta^5)e^{-1.1269038309\eta} + \\ + (19.9100776837 + 25.8158411889\eta + 9.3137451766\eta^2 + \\ + 1.9358858129\eta^3)e^{-2.25380766196\eta} + (1.3951574877 + 0.7157493617\eta + \\ + 0.1454729886\eta^2)e^{-3.3807114929\eta} + 0.0714758716 e^{-4.5076153239\eta} \quad (4.1.36)$$

Tabelul 4.3. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.36), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.36) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1/2$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.36)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.36)	$\varepsilon_{F'}$
0	-7.58 $\cdot 10^{-25}$	-2.22 $\cdot 10^{-16}$	2.22 $\cdot 10^{-16}$	-2.96 $\cdot 10^{-20}$	0	2.96 $\cdot 10^{-20}$
4/5	0.2543480 764	0.2543410815	6.99 $\cdot 10^{-6}$	0.58330481 75	0.583237275 6	0.000067541 9
8/5	0.8550267 840	0.8550382932	0.0000115092	0.87609756 95	0.876176316 1	0.000078746 6
12/5	1.6045273 993	1.6045272608	1.38 $\cdot 10^{-7}$	0.97606875 57	0.976015346 3	0.000053409 4
16/5	2.3963133 781	2.3963351657	0.0000217876	0.99719207 44	0.997285593 9	0.000093519 4
4	3.1955002 585	3.1955812100	0.0000809514	0.99980819 78	0.999842126 7	0.000033928 9
24/5	3.9954529 727	3.9955457399	0.0000927671	0.99999257 59	1.000008774 9	0.000016198 9

28/ 5	4.7954513 949	4.7955738251	0.0001224302	0.99999983 87	1.000055791 7	0.000055952 9
32/ 5	5.5954513 640	5.5956241393	0.0001727753	0.99999999 65	1.000065074 7	0.000065078 1
36/ 5	6.3954513 623	6.3956765240	0.0002251617	0.99999999 80	1.000068295 3	0.000068297 3
8	7.1954513 606	7.1957387803	0.0002874196	0.99999999 78	1.000090194 7	0.000090196 8

În Tabelul 4.3 se prezintă câteva valori ale funcției de curent (4.1.36), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.36) pentru câteva valori ale variabilei η și abaterile corespunzătoare.

• d) Dacă se consideră relația (4.1.29), depinzând de funcția auxiliară H_1 dată prin relația (4.1.28), atunci din sistemul (4.1.31) se obțin următoarele rezultate:

$$C_1 = 28.8801485140, C_2 = -30.7469629234, C_3 = 10.1656115824, C_4 = -1.3058736876, \\ C_5 = 0.0629713196, C_6 = -11.2295919004, C_7 = 62.3525565579, C_8 = -18.6274524032, \\ C_9 = 13.7997786872, K = 1.9932224781, a = 2.7977542979$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi pentru funcția de curent (4.1.29) devine

$$\begin{aligned} \bar{F}(\eta) = & -0.8042841228 + \eta + (5.055972832 - 7.4607384673\eta + 7.6988739549\eta^2 - \\ & - 3.9526112515\eta^3 + 1.0002001924\eta^4 - 0.1204170249\eta^5 + \\ & + 0.0052654533\eta^6)e^{-1.9932224781\eta} + \\ & + (-4.126293156 - 0.2733114331\eta - 0.151609344\eta^2 - 0.5576699112\eta^3 - \\ & - 0.869355537\eta^4)e^{-3.9864449562\eta} + (-0.0807202735 - 0.2092400883\eta - \\ & - 0.0196584681\eta^2 - 0.0484063456\eta^3)e^{-5.9796674343\eta} \quad (4.1.37) \end{aligned}$$

Tabelul 4.4. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.37), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.37) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1/2$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.37)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.37)	$\varepsilon_{F'}$
0	-5.77 $\cdot 10^{-25}$	$8.88 \cdot 10^{-16}$	$8.88 \cdot 10^{-16}$	$1.85 \cdot 10^{-21}$	$-5.32 \cdot 10^{-15}$	$5.32 \cdot 10^{-15}$
4/5	0.25434807 64	0.25436110 93	0.00001303 28	0.583304817 5	0.583347583 8	0.00004276 62
8/5	0.85502678 40	0.85504759 45	0.00002081 05	0.876097569 5	0.876107196 8	$9.62 \cdot 10^{-6}$
12/ 5	1.60452739 93	1.60457510 46	0.00004770 53	0.976068755 7	0.976089867 9	0.00002111 21
16/ 5	2.39631337 81	2.39636852 95	0.00005515 14	0.997192074 46	0.997207473 5	0.00001539 90

4	3.19550025 85	3.19557906 15	0.00007880 29	0.999808197 8	0.999848584 8	0.00004038 69
24/ 5	3.99545297 27	3.99557156 67	0.00011859 39	0.999992575 99	1.000052033 5	0.00005945 75
28/ 5	4.79545139 49	4.79562179 08	0.00017039 59	0.999999838 73	1.000065359 2	0.00006552 05
32/ 5	5.59545136 40	5.59566795 50	0.00021659 10	0.999999996 55	1.000047290 7	0.00004729 41
36/ 5	6.39545136 23	6.39569632 94	0.00024496 71	0.999999998 03	1.000024471 0	0.00002447 30
8	7.19545136 06	7.19570941 47	0.00025805 40	0.999999997 80	1.000009827 0	$9.82 \cdot 10^{-6}$

În Tabelul 4.4 se prezintă comparații între soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (4.1.37), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.37), cu rezultatele numerice pentru câteva valori ale variabilei η și abaterile corespunzătoare.

Dacă se compară rezultatele prezentate în Tabelele 4.1, 4.2, 4.3 și 4.4, se poate ajunge la concluzia că rezultatele analitice obținute cu MHAO sunt mai bune, atunci când crește numărul de parametri de control a convergenței din expresia funcției auxiliare H_1 .

Este important să se stabilească valoarea coeficientului superficial la limită $F''(0)$. În Tabelul 4.5 este prezentată o comparație între valorile $\bar{F}''(0)$ obținute cu MHAO din relațiile (4.1.34), (4.1.35), (4.1.36) și (4.1.37) și rezultatele numerice, pentru $\beta = \frac{1}{2}$. Astfel, rezultatele noastre sunt într-un acord foarte bun cu rezultatele numerice.

Tabelul 4.5. Rezultate comparative între valoarea $\bar{F}''(0)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\beta = 1/2$

Tipul relației	(4.1.34)	(4.1.35)	(4.1.36)	(4.1.37)	Numeric
$\bar{F}''_{MHAO}(0)$	0.92767733	0.92763760	0.92760923	0.92779335	0.92768004

Exemplul 4.1.3.2 În cel de-al doilea caz se consideră $\beta = 1$.

• a) Pentru relația (4.1.22), din sistemul (4.1.31) se obțin valorile parametrilor de control:

$$C_1 = 5.9913279914, C_2 = -6.6828413743, C_3 = 2.0729320860,$$

$$C_4 = -0.1950415110, C_5 = 18.0871429890, C_6 = -84.4868066767,$$

$$C_7 = 17.6775180449, C_8 = -0.3871636300, K = 2.0064973399$$

Cu aceste valori ale parametrilor, din relația (4.1.22) se obține soluția aproximativă de ordinul întâi în forma:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\eta) = & -0.6476658539 + \eta + (1.1858804994 - 1.0205705493\eta + 1.1912223638\eta^2 - \\ & - 0.7433934009\eta^3 + 0.1980363504\eta^4 - \\ & - 0.0194409937\eta^5)e^{-2.0064973399\eta} + (-0.5332638964 + \\ & + 0.2249079388\eta + 0.3083821306\eta^2 + 0.0240412688\eta^3)e^{-4.0129946798\eta} + \end{aligned}$$

$$+ (-0.004950749 + 0.0053425041\eta)e^{-6.0194920197\eta} \quad (4.1.38)$$

În Tabelul 4.6 se prezintă câteva valori ale funcției de curent (4.1.38), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.38) pentru câteva valori ale variabilei η . De asemenea sunt date și abaterile corespunzătoare în acest caz.

Tabelul 4.6. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.38), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.38) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.38)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.38)	$\varepsilon_{F'}$
0	$2.22 \cdot 10^{-25}$	-1.11 $\cdot 10^{-16}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	-4.59 $\cdot 10^{-21}$	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$4.44 \cdot 10^{-16}$
4/5	0.31242303 32	0.31242189 93	$1.13 \cdot 10^{-6}$	0.68593746 77	0.685934771 1	$2.69 \cdot 10^{-6}$
8/5	0.97977953 27	0.97978131 57	$1.78 \cdot 10^{-6}$	0.93234825 29	0.932346881 6	$1.37 \cdot 10^{-6}$
12/5	1.75525394 94	1.75525731 34	$3.36 \cdot 10^{-6}$	0.99054939 83	0.990568335 2	0.00001893
16/5	2.55232546 90	2.55234664 84	0.00002117 94	0.99918603 73	0.999196764 1	0.00001072
4	3.35210935 90	3.35213082 23	0.00002146 32	0.99995843 04	0.999962113 5	$3.68 \cdot 10^{-6}$
24/5	4.15209983 58	4.15214440 24	0.00004456 65	0.99999877 92	1.000054790 5	0.00005601 12
28/5	4.95209959 46	4.95220185 32	0.00010225 86	0.99999998 36	1.000079522 5	0.00007953 89
32/5	5.75209959 55	5.75226019 00	0.00016059 45	1.00000000 61	1.000062195 1	0.00006218 90
36/5	6.55209960 12	6.55229912 12	0.00019951 99	1.00000000 81	1.000035681 3	0.00003567 31
8	7.35209960 86	7.35231948 36	0.00021987 50	1.00000001 01	1.000016892 0	0.00001688 18

- b) Pentru relația (4.1.25), sistemul (4.1.31) are soluțiile

$$C_1 = 25.6413506662, C_2 = -27.7257520445, C_3 = 10.2440262047, \\ C_4 = -1.6311566772, C_5 = 0.1133872279, C_6 = -37.8620215531, \\ C_7 = 4.5810479839, C_8 = -9.7143709526, K = 2.0340821793$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi poate fi scrisă astfel:

$$\bar{F}(\eta) = -0.6482098275 + \eta + (1.7192094539 - 4.5907375859\eta + 5.3333876914\eta^2 - \\ - 3.0101935973\eta^3 + 0.8973516349\eta^4 - 0.1394863598\eta^5 + \\ + 0.0092906134\eta^6)e^{-2.0340821793\eta} + (-1.0709996263 +$$

$$+ 2.7307483905\eta + 2.3599924746\eta^2 + 0.5869724289\eta^3)e^{-4.0681643586\eta} \quad (4.1.39)$$

În Tabelul 4.7 se prezintă câteva valori ale funcției de curent (4.1.39), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.39) pentru diferite valori ale variabilei η și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.7. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.39), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.39) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.39)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.39)	$\varepsilon_{F'}$
0	$2.22 \cdot 10^{-25}$	$-2.22 \cdot 10^{-16}$	$2.22 \cdot 10^{-16}$	$-4.59 \cdot 10^{-21}$	$1.77 \cdot 10^{-15}$	$1.77 \cdot 10^{-15}$
4/5	0.31242303 32	0.31242509 05	$2.05 \cdot 10^{-6}$	0.68593746 77	0.685933452 5	$4.01 \cdot 10^{-6}$
8/5	0.97977953 27	0.97978166 32	$2.13 \cdot 10^{-6}$	0.93234825 29	0.932359258 6	0.00001100 57
12/5	1.75525394 94	1.75524588 57	$8.06 \cdot 10^{-6}$	0.99054939 83	0.990521279 9	0.00002811 83
16/5	2.55232546 90	2.55230686 56	0.00001860 33	0.99918603 73	0.999186780 7	$7.43 \cdot 10^{-7}$
4	3.35210935 90	3.35208444 63	0.00002491 27	0.99995843 04	0.999931794 3	0.00002663 61
24/5	4.15209983 58	4.15203363 80	0.00006619 77	0.99999877 92	0.999924839 3	0.00007393 98
28/5	4.95209959 46	4.95196491 31	0.00013468 14	0.99999998 36	0.999909022 9	0.00009096 06
32/5	5.75209959 55	5.75189654 04	0.00020305 50	1.00000000 61	0.999923861 7	0.00007614 43
36/5	6.55209960 12	6.55184621 01	0.00025339 11	1.00000000 81	0.999950614 1	0.00004939 40
8	7.35209960 86	7.35181634 33	0.00028326 52	1.00000001 01	0.999973368 7	0.00002664 14

• c) Pentru relația (4.1.27), cu funcția auxiliară H_1 dată de relația (4.1.26), se obține:

$$C_1 = 15.1069993472, C_2 = -6.1116892850, C_3 = 0.8419581636,$$

$$C_4 = -0.0391594463, C_5 = -348.1410130441, C_6 = 354.6124244346,$$

$$C_7 = -78.2878044901, C_8 = -3.8910409852,$$

$$C_9 = -4.3179402181, K = 1.3940527605, a = 1.2080121437$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi pentru funcția de curent (4.1.27) devine:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\eta) = & -0.6477776791 + \eta + (-18.001344737 + 2.2989361198\eta + 2.4130328127\eta^2 - \\ & - 0.8773035418\eta^3 + 0.1154431274\eta^4 - 0.0056180723\eta^5) e^{-1.3940527605\eta} + \\ & + (18.631306321 + 23.515563981\eta + \\ & + 12.357602161\eta^2 + 3.3122912941\eta^3 + 0.5554669357\eta^4) e^{-2.7881055211\eta} + \\ & + (0.0178160913 + 0.1112333145\eta) e^{-4.1821582817\eta} \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

În Tabelul 4.8 se prezintă câteva valori ale funcției de curent (4.1.40), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.40) pentru diferite valori ale variabilei η și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.8. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.40), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.40) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.40)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.40)	$\varepsilon_{F'}$
0	$4.69 \cdot 10^{-25}$	$6.21 \cdot 10^{-15}$	$6.21 \cdot 10^{-15}$	$-9.39 \cdot 10^{-21}$	$-4.08 \cdot 10^{-14}$	$4.08 \cdot 10^{-14}$
4/5	0.31242303 32	0.31242560 50	$2.57 \cdot 10^{-6}$	0.68593746 76	0.685936684 9	$7.82 \cdot 10^{-7}$
8/5	0.97977953 26	0.97978707 84	$7.54 \cdot 10^{-6}$	0.93234825 27	0.932349034 9	$7.82 \cdot 10^{-7}$
12/5	1.75525394 91	1.75525844 40	$4.49 \cdot 10^{-6}$	0.99054939 79	0.990553306 8	$3.90 \cdot 10^{-6}$
16/5	2.55232546 82	2.55233692 80	0.00001145 97	0.99918603 66	0.999190590 3	$4.55 \cdot 10^{-6}$
4	3.35210935 76	3.35211935 33	$9.99 \cdot 10^{-6}$	0.99995842 93	0.999955731 6	$2.69 \cdot 10^{-6}$
24/5	4.15209983 32	4.15211255 74	0.00001272 41	0.99999877 75	1.000007461 1	$8.68 \cdot 10^{-6}$
28/5	4.95209959 03	4.95211928 59	0.00001969 55	0.99999998 12	1.000006785 6	$6.80 \cdot 10^{-6}$
32/5	5.75209958 89	5.75212330 93	0.00002372 03	1.00000000 29	1.000004808 4	$4.80 \cdot 10^{-6}$
36/5	6.55209959 17	6.55212965 38	0.00003006 20	1.00000000 39	1.000012172 5	0.00001216 85
8	7.35209959 53	7.35214313 39	0.00004353 85	1.00000000 49	1.000020960 4	0.00002095 54

• d) Dacă se are în vedere relația (4.1.29), cu funcția auxiliară H_1 dată de relația (4.1.28), atunci se obține:

$$\begin{aligned} C_1 = 2.5755597425, C_2 = -0.5965183787, C_3 = -0.0172692621, C_4 = 0.0136562951, \\ C_5 = -0.0010079176, C_6 = -5.9530458601, C_7 = -1.9930045747, \end{aligned}$$

$$C_8 = -1.9931630292, C_9 = 0.0743455822, K = 1.1143724942, a = 0.2855970092$$

și prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.1.29) este dată prin:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{F}}(\eta) = & -0.6475361092 + \eta + (-7.0772773941 + 1.5599095672\eta + 0.3833481708\eta^2 - \\ & - 0.141867195\eta^3 + 0.0068820136\eta^4 + 0.0015709234\eta^5 - \\ & - 0.0001507451\eta^6)e^{-1.1143724942\eta} + (7.7248135031 + 6.7700065534\eta + \\ & + 2.2685016445\eta^2 + 0.2970574871\eta^3 - 0.014966987\eta^4)e^{-2.2287449884\eta} \quad (4.1.41) \end{aligned}$$

În Tabelul 4.9 se prezintă comparații între soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (4.1.41), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.41), cu rezultatele numerice, și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.9. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.41), respectiv a vitezei $\bar{\bar{F}}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.41) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{\bar{F}}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{\bar{F}}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{\bar{F}}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.41)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{\bar{F}}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.41)	$\varepsilon_{F'}$
0	$4.69 \cdot 10^{-25}$	0	$4.69 \cdot 10^{-25}$	$-9.39 \cdot 10^{-21}$	0	$9.39 \cdot 10^{-21}$
4/5	0.31242303 32	0.31241745 80	$5.57 \cdot 10^{-6}$	0.68593746 76	0.685953989 7	0.00001652 20
8/5	0.97977953 26	0.97977401 64	$5.51 \cdot 10^{-6}$	0.93234825 27	0.932309225 6	0.00003902 71
12/5	1.75525394 91	1.75525342 23	$5.26 \cdot 10^{-7}$	0.99054939 79	0.990613861 7	0.00006446 37
16/5	2.55232546 82	2.55236114 25	0.00003567 42	0.99918603 66	0.999177929 2	$8.10 \cdot 10^{-6}$
4	3.35210935 76	3.35211057 70	$1.21 \cdot 10^{-6}$	0.99995842 93	0.999914587 2	0.00004384 20
24/5	4.15209983 32	4.15210055 19	$7.18 \cdot 10^{-7}$	0.99999877 75	1.000041410 8	0.00004263 33
28/5	4.95209959 03	4.95214621 23	0.00004662 19	0.99999998 12	1.000053993 6	0.00005401 24
32/5	5.75209958 89	5.75216845 24	0.00006886 34	1.00000000 29	0.999998917 6	$1.08 \cdot 10^{-6}$
36/5	6.55209959 17	6.55215101 10	0.00005141 92	1.00000000 39	0.999965518 3	0.00003448 56
8	7.35209959 53	7.35212638 93	0.00002679 40	1.00000000 49	0.999979586 5	0.00002041 84

Dacă se compară rezultatele prezentate în Tabelele 4.6 și 4.8, se deduce că rezultatele analitice obținute cu MHAO sunt mai bune, atunci când crește numărul parametrilor de control ai convergenței din expresia funcției auxiliare H_1 . Aceleași

concluzii se deduc dacă se compară rezultatele prezentate în Tabelele 4.7 și respectiv 4.9.

Tabelul 4.10. Rezultate comparative între valoarea $\bar{F}''(0)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\beta = 1$

Tipul relației	(4.1.38)	(4.1.39)	(4.1.40)	(4.1.41)	Numeric
$\bar{F}''_{MHAO}(0)$	1.23258247	1.23257895	1.23262084	1.23257391	1.232558769

În Tabelul 4.10 se prezintă o comparație între valorile $\bar{F}''(0)$ obținute cu MHAO din relațiile (4.1.38), (4.1.39), (4.1.40), respectiv (4.1.41) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1$. Se poate deduce că rezultatele noastre sunt într-o concordanță foarte bună cu rezultatele numerice.

Exemplul 4.1.3.3 În ultimul caz se consideră $\beta = 1.6$.

• a) Pentru relația (4.1.22) valorile parametrilor de control se obțin din sistemul (4.1.31):

$$C_1 = -4.4749746430, C_2 = 2.6648959478, C_3 = -0.5277449747,$$

$$C_4 = 0.0344313836, C_5 = 0.9084258281, C_6 = 11.1816458907,$$

$$C_7 = -0.5492649796, C_8 = 1.5695573134, K = 1.7389825314$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi pentru funcția de curent (4.1.22) poate fi scrisă astfel:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\eta) = & -0.5440478033 + \eta + (1.6577374986 - 0.4175138596\eta - 0.4722933401\eta^2 + \\ & + 0.2774993818\eta^3 - 0.05544381588\eta^4 + 0.0039599458\eta^5)e^{-1.7389825314\eta} + \\ & + (-1.1629370587 - 1.5183251610\eta - 0.7578665325\eta^2 - \\ & - 0.1287736808\eta^3)e^{-3.4779650629\eta} + (0.0455165672 + 0.0373698159\eta - \\ & - 0.0034815689\eta^2)e^{-5.2169475944\eta} + 0.0037307962e^{-6.9559301258\eta} \quad (4.1.42) \end{aligned}$$

În Tabelul 4.11 se prezintă câteva valori ale funcției de curent (4.1.42), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.42) pentru diferite valori ale variabilei η . De asemenea, sunt date și abaterile corespunzătoare în acest caz.

Tabelul 4.11. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.42), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.42) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1.6$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.42)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.42)	$\varepsilon_{F'}$
0	-1.69 $\cdot 10^{-25}$	-1.11 $\cdot 10^{-16}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	$4.07 \cdot 10^{-20}$	$9.99 \cdot 10^{-16}$	$9.99 \cdot 10^{-16}$
4/5	0.35997849 56	0.35997827 96	$2.16 \cdot 10^{-7}$	0.76092253 81	0.760924024 7	$1.48 \cdot 10^{-6}$

8/5	1.06961476 41	1.06961567 34	$9.09 \cdot 10^{-7}$	0.96197803 39	0.961970681 3	$7.35 \cdot 10^{-6}$
12/5	1.85716232 64	1.85716332 42	$9.97 \cdot 10^{-7}$	0.99605671 87	0.996065737 2	$9.01 \cdot 10^{-6}$
16/5	2.65604349 64	2.65604637 45	$2.87 \cdot 10^{-6}$	0.99974392 84	0.999736515 1	$7.41 \cdot 10^{-6}$
4	3.45598042 11	3.45597698 48	$3.43 \cdot 10^{-6}$	0.99998997 25	0.999987248 2	$2.72 \cdot 10^{-6}$
24/5	4.25597827 14	4.25597826 10	$1.03 \cdot 10^{-8}$	0.99999978 37	1.000008144 4	$8.36 \cdot 10^{-6}$
28/5	5.05597824 27	5.05598292 83	$4.68 \cdot 10^{-6}$	1.00000002 06	1.000001359 1	$1.33 \cdot 10^{-6}$
32/5	5.85597826 60	5.85597984 84	$1.58 \cdot 10^{-6}$	1.00000003 68	0.999991812 9	$8.22 \cdot 10^{-6}$
36/5	6.65597830 23	6.65597178 63	$6.51 \cdot 10^{-6}$	1.00000005 41	0.999989190 5	0.00001086 35
8	7.45597835 45	7.45596385 00	0.00001450 44	1.00000007 64	0.999991410 6	$8.66 \cdot 10^{-6}$

• b) Pentru relația (4.1.25), parametrii de control a convergenței obținuți din sistemul (4.1.31) au valorile:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 12.1397319477, C_2 = -14.7300094090, C_3 = 6.0298078722, \\
 C_4 &= -1.0787489057, C_5 = 0.0852147302, C_6 = -14.8695758423, \\
 C_7 &= -7.8344847253, C_8 = -2.4044068709, K = 2.0881719331
 \end{aligned}$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi pentru funcția de curent (4.1.25) devine

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(\eta) &= -0.544241252 + \eta + (0.398631080 - 1.040810133\eta + 1.69949761\eta^2 - \\
 &\quad - 1.248940652\eta^3 + 0.460677086\eta^4 - 0.086297165\eta^5 + \\
 &\quad + 0.00680138\eta^6)e^{-2.088171933\eta} + (0.219770025 + 1.364996288\eta + 1.025546039\eta^2 + \\
 &\quad + 0.114703592\eta^3 + 0.001403806\eta^4)e^{-4.176343866\eta} + (-0.0741598535 - \\
 &\quad - 0.038516290\eta - 0.008802133\eta^2)e^{-6.264515799\eta} \quad (4.1.43)
 \end{aligned}$$

În Tabelul 4.12 sunt date câteva valori ale funcției de curent (4.1.43), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.43) pentru diferite valori ale variabilei η și abaterile corespunzătoare, în comparație cu rezultatele numerice.

Tabelul 4.12. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.43), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.43) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1.6$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.43)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.43)	$\varepsilon_{F'}$
0	-1.69 $\cdot 10^{-25}$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$4.07 \cdot 10^{-20}$	$-3.55 \cdot 10^{-15}$	$3.55 \cdot 10^{-15}$
4/5	0.35997849 56	0.35997984 14	$1.34 \cdot 10^{-6}$	0.76092253 81	0.760919020 1	$3.51 \cdot 10^{-6}$
8/5	1.06961476 41	1.06961681 99	$2.05 \cdot 10^{-6}$	0.96197803 39	0.961987272 5	$9.23 \cdot 10^{-6}$
12/5	1.85716232 64	1.85715957 18	$2.75 \cdot 10^{-6}$	0.99605671 87	0.996039783 3	0.00001693 54
16/5	2.65604349 64	2.65603606 29	$7.43 \cdot 10^{-6}$	0.99974392 84	0.999751337 3	$7.40 \cdot 10^{-6}$
4	3.45598042 11	3.45597698 53	$3.43 \cdot 10^{-6}$	0.99998997 25	0.999981772 3	$8.20 \cdot 10^{-6}$
24/5	4.25597827 14	4.25594864 88	0.00002962 26	0.99999978 37	0.999943397 9	0.00005638 57
28/5	5.05597824 27	5.05589295 43	0.00008528 84	1.00000002 06	0.999924231 7	0.00007578 89
32/5	5.85597826 60	5.85583665 05	0.00014161 54	1.00000003 68	0.999938697 7	0.00006133 91
36/5	6.65597830 23	6.65579733 27	0.00018096 96	1.00000005 41	0.999962861 4	0.00003719 26
8	7.45597835 45	7.45577561 53	0.00020273 91	1.00000007 64	0.999981432 8	0.00001864 36

• c) Pentru relația (4.1.27), cu funcția auxiliară H_1 dată de relația (4.1.26), sistemul (4.1.31) are soluția:

$$C_1 = 3.7343092835, C_2 = -1.6919201004, C_3 = 0.2585003215, C_4 = -0.0131947678, \\ C_5 = 26.9486507241, C_6 = -47.5028568351, C_7 = 5.3389432018, C_8 = -8.7586264382, \\ C_9 = 0.2924008927, K = 1.4882721635, a = 1974.2364175690$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi pentru funcția de curent (4.1.27) poate fi scrisă prin:

$$\bar{F}(\eta) = -0.544001931 + \eta + (-4.354906951 + 1.3261535367\eta + 0.3072449473\eta^2 - \\ -0.1940259496\eta^3 + 0.0315309032\eta^4 - 0.0017731659\eta^5)e^{-1.4882721635\eta} + \\ + (4.8182102767 + 6.0137273891\eta + 2.4451256821\eta^2 + 0.8109067414\eta^3 - \\ -0.0330030433\eta^4)e^{-2.976544327\eta} + (0.1139109044 - 0.168675728\eta + 0.060940104\eta^2 + \\ + 0.0029567211\eta^3)e^{-4.4648164905\eta} - 0.033212299e^{-5.9530886541\eta} \quad (4.1.44)$$

În Tabelul 4.13 se prezintă câteva valori ale funcției de curent (4.1.44), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.44) pentru diferite valori ale variabilei η și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.13. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.44), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.44) și rezultatele numerice, pentru

$$\beta = 1.6 \quad (\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|, \quad \varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|)$$

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.44)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.44)	$\varepsilon_{F'}$
0	$-1.69 \cdot 10^{-25}$	$-1.69 \cdot 10^{-15}$	$1.69 \cdot 10^{-15}$	$-2.83 \cdot 10^{-21}$	$2.66 \cdot 10^{-15}$	$2.66 \cdot 10^{-15}$
4/5	0.3599784956	0.3599790235	$5.27 \cdot 10^{-7}$	0.7609225380	0.7609232141	$6.76 \cdot 10^{-7}$
8/5	1.0696147640	1.0696154385	$6.74 \cdot 10^{-7}$	0.9619780338	0.9619796540	$1.62 \cdot 10^{-6}$
12/5	1.8571623261	1.8571642418	$1.91 \cdot 10^{-6}$	0.9960567183	0.9960575197	$8.01 \cdot 10^{-7}$
16/5	2.6560434955	2.6560445435	$1.04 \cdot 10^{-6}$	0.9997439274	0.9997418375	$2.08 \cdot 10^{-6}$
4	3.4559804190	3.4559816246	$1.20 \cdot 10^{-6}$	0.9999899704	0.9999929170	$2.94 \cdot 10^{-6}$
24/5	4.2559782671	4.2559820737	$3.80 \cdot 10^{-6}$	0.9999997799	1.0000016372	$1.85 \cdot 10^{-6}$
28/5	5.0559782344	5.0559813610	$3.12 \cdot 10^{-6}$	1.0000000145	0.9999969829	$3.03 \cdot 10^{-6}$
32/5	5.8559782515	5.8559788900	$6.38 \cdot 10^{-7}$	1.0000000272	0.9999978766	$2.15 \cdot 10^{-6}$
36/5	6.6559782783	6.6559788961	$6.17 \cdot 10^{-7}$	1.0000000399	1.0000022282	$2.18 \cdot 10^{-6}$
8	7.4559783175	7.4559820586	$3.74 \cdot 10^{-6}$	1.0000000667	1.0000052427	$5.17 \cdot 10^{-6}$

• d) Dacă se are în vedere relația (4.1.29), cu funcția auxiliară H_1 dată de relația (4.1.28), atunci parametrii de control a convergenței obținuți din sistemul (4.1.31) sunt:

$$C_1 = -9.9309813061, C_2 = 6.8914081433, C_3 = -1.7496966452, C_4 = 0.2003197512, \\ C_5 = -0.0103677381, C_6 = 10.1134115449, C_7 = 7.0897290367, C_8 = 1.9899138244, \\ C_9 = 0.0159776712, K = 1.5329158534, a = -0.9799303286.$$

În acest caz, soluția aproximativă de ordinul întâi pentru funcția de curent (4.1.29) devine

$$\begin{aligned} \bar{F}(\eta) = & -0.5439219913 + \eta + (4.650996506 - 2.0398248866\eta - 0.4858446135\eta^2 + \\ & + 0.550362856\eta^3 - 0.1603616877\eta^4 + 0.0213068753\eta^5 - \\ & - 0.0011272349\eta^6)e^{-1.5329158534\eta} + \\ & + (-4.2651113968 - 4.2739140037\eta - 1.660992309\eta^2 - 0.2098183934\eta^3 - \\ & - 0.0021316125\eta^4)e^{-3.0658317069\eta} + (0.158036881 + 0.0939831378\eta + \\ & + 0.0187520087\eta^2 + 0.0001478554\eta^3)e^{-4.5987475603\eta} \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

În Tabelul 4.14 se prezintă câteva valori ale funcției de curent (4.1.25), și respectiv viteza obținută din relația (4.1.25) pentru diferite valori ale variabilei η . De asemenea, sunt date abaterile corespunzătoare în acest caz.

Tabelul 4.14. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (4.1.45), respectiv a vitezei $\bar{F}'(\eta)$ obținută din relația (4.1.45) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1.6$ ($\varepsilon_F = |F_{numeric}(\eta) - \bar{F}_{MHAO}(\eta)|$, $\varepsilon_{F'} = |F'_{numeric}(\eta) - \bar{F}'_{MHAO}(\eta)|$)

η	$F_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (4.1.45)	ε_F	$F'_{numeric}(\eta)$	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din(4.1.45)	$\varepsilon_{F'}$
0	-1.69 $\cdot 10^{-25}$	-2.33 $\cdot 10^{-15}$	$2.33 \cdot 10^{-15}$	-2.83 $\cdot 10^{-21}$	$3.55 \cdot 10^{-15}$	$3.55 \cdot 10^{-15}$
4/5	0.35997849	0.35997840 37	$9.19 \cdot 10^{-8}$	0.76092253 80	0.760923291 9	$7.53 \cdot 10^{-7}$
8/5	1.06961476	1.06961443 85	$3.25 \cdot 10^{-7}$	0.96197803 38	0.961976148 8	$1.88 \cdot 10^{-6}$
12/5	1.85716232	1.85716343 46	$1.10 \cdot 10^{-6}$	0.99605671 83	0.996059435 3	$2.71 \cdot 10^{-6}$
16/5	2.65604349	2.65604302 60	$4.69 \cdot 10^{-7}$	0.99974392 74	0.999739834 2	$4.09 \cdot 10^{-6}$
4	3.45598041 9	3.45598103 82	$6.19 \cdot 10^{-7}$	0.99998997 04	0.999997175 1	$7.20 \cdot 10^{-6}$
24/5	4.25597826	4.25598452 99	$6.26 \cdot 10^{-6}$	0.99999977 99	1.000003284 3	$3.50 \cdot 10^{-6}$
28/5	5.05597823	5.05598322 66	$4.99 \cdot 10^{-6}$	1.00000001 45	0.999995198 6	$4.81 \cdot 10^{-6}$
32/5	5.85597825	5.85598129 15	$3.03 \cdot 10^{-6}$	1.00000002 72	1.000002452 5	$2.42 \cdot 10^{-6}$
36/5	6.65597827	6.65598906 26	0.00001078 42	1.00000003 99	1.000016829 6	0.00001678 96
8	7.45597831 75	7.45600655 54	0.00002823 78	1.00000006 67	1.000025383 2	0.00002531 65

În Tabelul 4.15 se prezintă o comparație între valorile $\bar{F}''(0)$ obținute cu MHAO din relațiile (4.1.42), (4.1.43), (4.1.44) și (4.1.45) și rezultatele numerice, pentru $\beta = 1.6$. Se poate observa că rezultatele aproximative sunt în concordanță foarte bună cu rezultatele numerice.

Tabelul 4.15. Rezultate comparative între valoarea $\bar{F}''(0)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\beta = 1.6$

Tipul relației	(4.1.42)	(4.1.43)	(4.1.44)	(4.1.45)	Numeric
$\bar{F}''_{MHAO}(0)$	1.52151589	1.52151820	1.52151245	1.52151403	1.52151402

Acuratețea rezultatelor obținute cu metoda MHAO se deduce din Figurile 4.1-4.8. Soluțiile aproximative obținute cu metoda MHAO, folosind funcția auxiliară H_1 , date de relațiile (4.1.20), (4.1.23), (4.1.26) și (4.1.28) sunt comparate cu rezultatele numerice, pentru diferite valori ale parametrului β în Figurile 4.1, 4.3, 4.5 și 4.7 respectiv. Pe de altă parte, profilul vitezelor obținute din soluțiile aproximative corespunzătoare, sunt comparate cu rezultatele numerice în Figurile 4.2, 4.4, 4.6 și respectiv 4.8. În toate cazurile prezentate în Figurile 4.1-4.8, este arătat că soluțiile aproximative de ordinul întâi și vitezele cresc odată cu creșterea parametrului β .

La fel ca și în cazurile menționate mai sus, prin comparația rezultatelor prezentate în Tabelele 4.11 și 4.13, se poate afirma că rezultatele obținute cu MHAO sunt mai precise, odată cu creșterea numărului de termeni în funcția auxiliară H_1 de control a convergenței. Acum, comparația rezultatelor din Tabelele 4.12 și 4.14 ne conduc la aceleași concluzii.

Pentru a da o semnificație soluțiilor analitice aproximative date de relațiile (4.1.37) (în cazul $\beta = \frac{1}{2}$), respectiv (4.1.45) (în cazul $\beta = 1.6$), se consideră curgerea laminară bi-dimensională a unui fluid vâscos Newtonian, caracterizat prin $\nu = 2 \cdot 10^{-6} [m^2/s]$ - vâscozitatea cinematică și $a = 0.3625 [m/s]$ - viteza medie de curent. Din relațiile (4.1.4), (4.1.6), (4.1.7) și (4.1.37) (în cazul $\beta = \frac{1}{2}$), respectiv (4.1.45) (în cazul $\beta = 1.6$), se obțin expresiile componentelor vitezei: u - în direcția axei Ox , respectiv v - în direcția axei Oy . Graficele componentelor vitezei sunt prezentate în Figurile 4.9 și 4.10 (în cazul $\beta = \frac{1}{2}$), respectiv Figurile 4.11 și 4.12 (în cazul $\beta = 1.6$). De asemenea, profilul câmpurilor de vectori (u, v) este prezentat în Figurile 4.13 și 4.14, pentru $\beta = \frac{1}{2}$, respectiv $\beta = 1.6$. Din aceste grafice, se observă în cazul $\beta = \frac{1}{2}$, curgerea este mai lentă, iar în cazul $\beta = 1.6$ (valoare apropiată de limita maximă admisă $\beta = 2$) apare fenomenul de dispersie a fluidului.

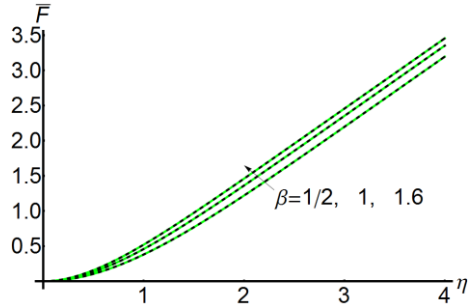


Fig. 4.1 Rezultate comparative între soluțiile aproximative (4.1.34), (4.1.38) și (4.1.42) și rezultatele numerice cu funcția auxiliară (4.1.20) în cazul $\beta = 1/2, 1$, și respectiv 1.6: --- soluția numerică;.... soluția MHAO

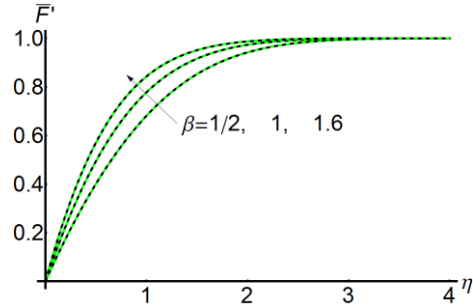


Fig 4.2 Rezultate comparative între profilul vitezelor obținut din relațiile (4.1.34), (4.1.38) și (4.1.42) și rezultatele numerice cu funcția auxiliară (4.1.20) în cazul $\beta = 1/2, 1$, și respectiv 1.6: --- soluția numerică;.... soluția MHAO

Discuții

În această secțiune au fost prezentate rezultate foarte bune obținute cu MHAO pentru diferite valori reprezentative ale coeficientului β pentru coeficientul superficial la limită $\bar{F}''(0)$ ale ecuației Falkner-Skan în comparație cu rezultatele numerice.

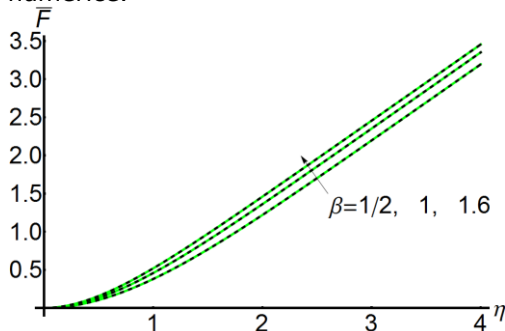


Fig. 4.3 Rezultate comparative între soluțiile aproximative (4.1.35), (4.1.39) și (4.1.43) și rezultatele numerice cu funcția auxiliară (4.1.23), $\beta = 1/2, 1$, și respectiv 1.6: --- soluția numerică;.... soluția MHAO

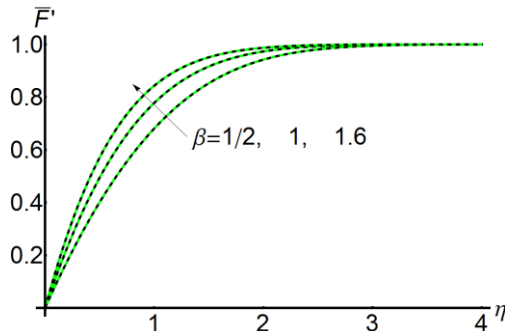


Fig 4.4 Rezultate comparative între profilul vitezelor obținut din relațiile (4.1.35), (4.1.39) și (4.1.43) și rezultatele numerice cu funcția auxiliară (4.1.23), $\beta = 1/2, 1$, și respectiv 1.6: --- soluția numerică;.... soluția MHAO

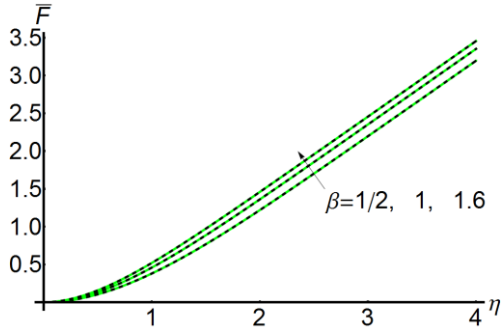


Fig. 4.5 Rezultate comparative între soluțiile aproximative (4.1.36), (4.1.40) (4.1.44) și rezultatele numerice cu funcția auxiliară (4.1.26), $\beta = 1/2, 1$, și respectiv 1.6:
 -- soluția numerică;.... soluția MHAO

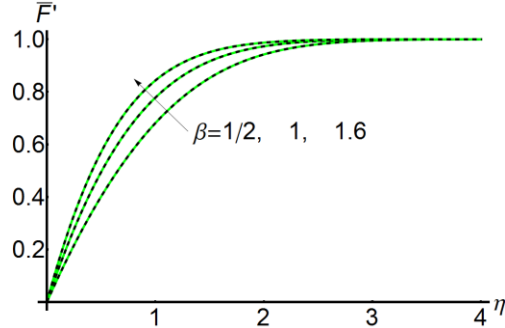


Fig 4.6 Rezultate comparative între profilul vitezelor obținut din relațiile și (4.1.36), (4.1.40) și (4.1.44) și rezultatele numerice cu funcția auxiliară (4.1.26), $\beta = 1/2, 1$, și respectiv 1.6:
 --- soluția numerică;.... soluția MHAO

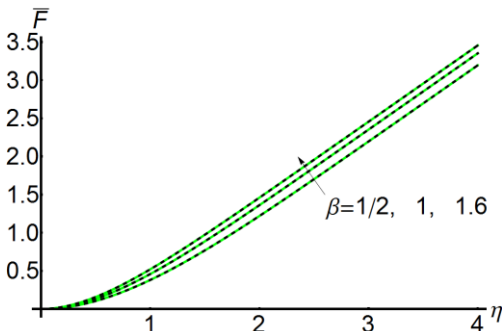


Fig. 4.7 Rezultate comparative între soluțiile aproximative (4.1.37), (4.1.41) (4.1.45) și rezultatele numerice cu funcția auxiliară (4.1.28), $\beta = 1/2, 1$, și respectiv 1.6:
 -- soluția numerică;.... soluția MHAO

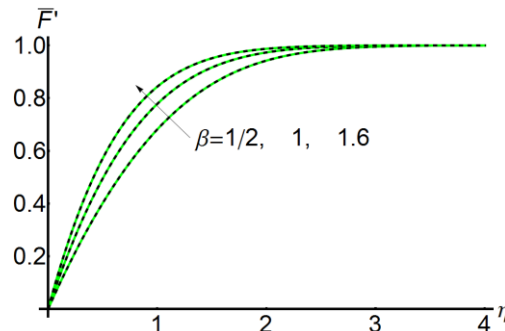


Fig 4.8 Rezultate comparative între profilul vitezelor obținut din relațiile și (4.1.37), (4.1.41) și (4.1.45) și rezultatele numerice cu funcția auxiliară (4.1.28), $\beta = 1/2, 1$, și respectiv 1.6:
 --- soluția numerică;.... soluția MHAO

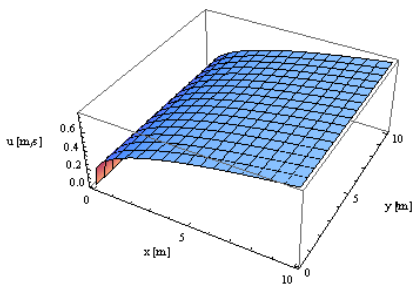


Fig. 4.9 Profilul vitezei u în direcția axei Ox în cazul $\beta = 1/2$

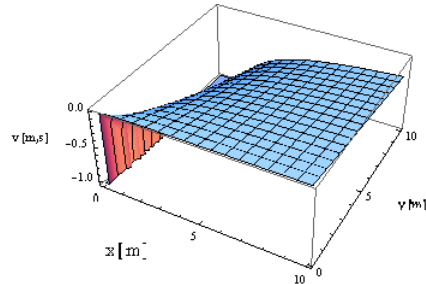
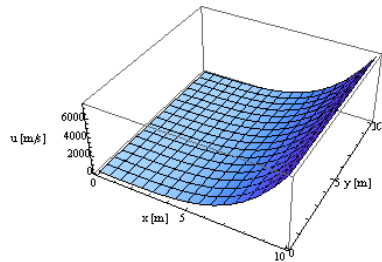
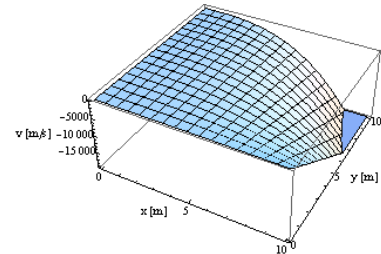
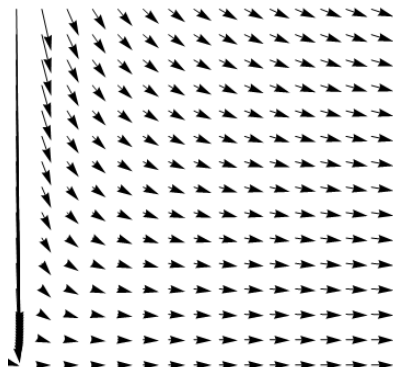
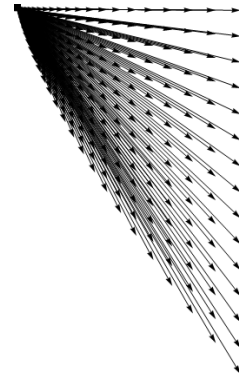


Fig. 4.10 Profilul vitezei v în direcția axei Oy în cazul $\beta = 1/2$

Fig. 4.11 Profilul vitezei u în direcția axei Ox în cazul $\beta = 1.6$ Fig. 4.12 Profilul vitezei v în direcția axei Oy în cazul $\beta = 1.6$ Fig. 4.13 Câmpul de vectori (u, v) , asociat cazului $\beta = 1/2$ Fig. 4.14 Câmpul de vectori (u, v) , asociat cazului $\beta = 1.6$

Este interesant de remarcat faptul că un număr mare de parametri C_j în funcțiile auxiliare H_1 de control a convergenței conduce la o precizie mai bună a rezultatelor (pentru funcția de curent și pentru viteză). Pe de altă parte, rezultatele obținute cu MHAO sunt mai precise, pentru valori crescute ale parametrului β .

4.2 Curgerea vâscoasă a unui fluid Newtonian pe o suprafață întinsă cu alunecare parțială

Este bine cunoscut faptul că studiul stratului limită de curgere vâscoasă ca urmare a unei suprafețe întinse este foarte important, datorită mai multor aplicații ale sale în inginerie sau procese industriale, cum sunt: materiale fabricate prin extrudare din foi de polimer, producția de hârtie, desene pe pelicule elastice, fibră de sticlă, cultivarea cristalelor, tratamente termice ale materialelor care rulează între o rolă de alimentare și rola de vânt sau o bandă transportoare ce prezintă caracteristicile unei suprafețe în continuă mișcare. De asemenea, există unele situații în care ar putea exista o alunecare parțială între fluid și frontieră, de exemplu, lichidul ar putea fi un gaz rarefiat. Condiția limită non-alunecare este cunoscută ca un principiu important al teoriei Navier-Stokes. Sakiadis [153], [154] a studiat mai întâi fluxul stratului limită pe o suprafață întinsă continuă. În urma acestor lucrări, mai multe studii au fost efectuate. Crane [35] a găsit o soluție exponențială sub formă exactă pentru fluxul vâscos plan a unui caz liniar de întindere. Sparrow și colaboratorii săi [160], [161] au analizat o serie de probleme de flux luând în considerare viteza de alunecare. Ackroyd [5] a dat un algoritm pentru limitele în mișcare și pentru fluxul unui fluid trecut peste un disc rotativ, care elimină condiția pe frontiera la infinit. Rajagopal și colab. [141] au obținut soluția numerică pentru curgerea unui fluid vâscoelastic de gradul al doilea trecut pe o foaie întinsă. Ariel [14] și Anderson [12] au raportat soluții analitice sub formă exactă pentru ecuațiile diferențiale neliniare care descriu curgerea unui fluid MHD de gradul al doilea și respectiv de gradul al patrulea.

Mai recent, Wang [178] a luat în considerare cazurile bidimensionale și asimetric pentru curgerea vâscoasă pe o foaie întinsă cu alunecare și aspirație. Pentru cazul bidimensional, este găsită o soluție exactă și unicitatea sa este dovedită. Pentru curgerea asimetrică pe o foaie întinsă, atât existența cât și unicitatea sunt prezentate, cu toate că nu există nici o soluție sub formă exactă. Un număr de fluxuri ale stratului limită induse asimetric de o foaie întinsă sunt studiate în [132]. Foaia este întinsă cu o viteză proporțională cu distanța de la axa verticală. Curgerea asimetrică instabilă și transferul de căldură a unui fluid vâscos a fost considerat de Sajid și colab. [149]. Soluția analitică pentru curgerea asimetrică a unui fluid vâscos pe o foaie întinsă a fost considerat în [148]. Sahoo în [147] a investigat efectele alunecării parțiale privind transferul de debit și de căldură a unui fluid MHD de gradul doi conductor electric pe o foaie întinsă asimetrică. Miklavčič și Wang [131] au studiat în primul rând proprietăți ale fluxului de la o foaie subțire cu absorbție. Absorbția se produce atunci când lichidul condensează pe suprafață. O atenție considerabilă a fost acordată în alt domeniu, inclusiv cel al fluxurilor magnetice [140], diferite condiții la limită termale și de curgere în [169], nanofluidice și fluide ne-Newtoniene [105], fluxul de alunecare pe cilindru alungit [179], sau curgerilor punctelor de stagnare asimetrică a unui fluid vâscos pe o suprafață gresată [152] și altele.

În general, în mecanica fluidelor vâscoase, ecuațiile care guvernează mișcarea sunt ecuații cu derivate parțiale puternic neliniare în cele două sau trei componente ale vitezei. Prin intermediul unor transformări de similaritate, un set de ecuații cu derivate parțiale sunt reduse la cel al ecuațiilor diferențiale ordinare. În ultimii ani atenția mai multor cercetători a fost concentrată în obținerea de soluții analitice pentru problemele neliniare sub forma unei serii. Aspectele cheie ale metodelor aproximative a fost întotdeauna precizia soluțiilor. Dar, în afară de câteva

excepții, problemele neliniare nu pot fi rezolvate analitic prin utilizarea metodelor tradiționale.

Rezultatul secțiunii are ca scop atât studiul curgerii plane vâscoase cu alunecare parțială [62], cât și studiul curgerii asimetrice vâscoase, în general [66].

4.2.1 Ecuațiile de mișcare

Se consideră curgerea 3-dimensională a unui fluid vâscos limitat de o suprafață întinsă. Dacă (u, v, w) sunt componentele vitezei în sistemul Cartezian (x, y, z) , atunci ecuația de continuitate și ecuațiile Navier-Stokes proprii curgerii stabile constante sunt [141], [178], [148]:

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (4.2.1)$$

$$uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{\rho_x}{\rho} + \nu \nabla^2 u \quad (4.2.2)$$

$$uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{\rho_y}{\rho} + \nu \nabla^2 v \quad (4.2.3)$$

$$uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{\rho_z}{\rho} + \nu \nabla^2 w \quad (4.2.4)$$

unde ρ este densitatea, p este presiunea și ν este vâscozitatea cinematică. Dacă a este constanta de întindere, $a > 0$, W este viteza de aspirație și m este un parametru ce descrie tipul de întindere, atunci componentele vitezei pe suprafața întinsă sunt:

$$u = ax, \quad v = a(m-1)y, \quad w = -W \quad (4.2.5)$$

Pentru $m = 1$, avem cazul întinderii plane, în timp ce pentru $m = 2$ avem cazul întinderii asimetrice. În vederea simplificării ecuațiilor de guvernare folosim transformările de similaritate:

$$u = ax\Phi'(\eta), \quad v = a(m-1)y\Phi'(\eta), \quad w = -m\sqrt{av}\Phi(\eta) \quad (4.2.6)$$

unde $\eta = z\sqrt{\frac{a}{\nu}}$ și cu simbolul se notează derivarea în raport cu η .

Ecuația (4.2.1) este automat satisfăcută și ecuația (4.2.4) poate fi scrisă în forma

$$p = \nu\rho w_z - \frac{1}{2}\rho W^2 + C \quad (4.2.7)$$

unde C este o constantă. Ecuațiile (4.2.2) și (4.2.3) se reduc la ecuația diferențială ordinară

$$\Phi'''(\eta) + m\Phi(\eta)\Phi''(\eta) - \Phi'(\eta)^2 = 0 \quad (4.2.8)$$

Dacă N este constanta de alunecare, atunci pe suprafața foii întinse, viteza de alunecare este presupusă a fi proporțională cu tensiunea de forfecare locală

$$u - ax = \rho\nu Nu_z < 0, \quad v - a(m-1)y = \rho\nu Nv_z < 0 \quad (4.2.9)$$

Din transformările de similaritate (4.2.6) se obține

$$\Phi'(0) = 1 + \lambda\Phi''(0) \quad (4.2.10)$$

cu $\lambda = \rho N \sqrt{av} > 0$ un parametru adimensional indicând importanța relativă a alunecării parțiale. Dacă $\lambda = 0$ nu există alunecare. Dată o viteză de aspirație $-W$ pe suprafața de întindere, avem condițiile la limită

$$\Phi(0) = a \quad (4.2.11)$$

unde $a = \frac{W}{m\sqrt{av}}$ este o constantă adimensională care determină rata de transpirație la suprafață și $a < 0$ dacă are loc injectarea pe suprafață, $a > 0$ pentru aspirație și $a = 0$ pentru foaie impermeabilă. De asemenea, deoarece nu există nicio viteză laterală la infinit, avem condiția

$$\Phi'(\infty) = 0 \quad (4.2.12)$$

4.2.2 Rezolvarea problemei fluidelor vâscoase cu alunecare parțială

Se introduc ideile de bază ale metodei MHAO prin considerarea ecuației (4.2.8) cu condițiile la limită date de ecuațiile (4.2.10), (4.2.11) și (4.2.12). Se alege operatorul liniar L sub forma

$$L(\Phi(\eta)) = \Phi''' + K\Phi'' \quad (4.2.13)$$

O altă posibilitate de a alege operatorul liniar este $L(\Phi(\eta)) = \Phi''' + K^2\Phi'$, unde $K > 0$ este un parametru necunoscut.

Ecuatia (2.2.4) devine:

$$\Phi_0'''(\eta) + K\Phi_0''(\eta) = 0, \quad \Phi_0(0) = a, \quad \Phi_0'(0) = 1 + \lambda\Phi_0''(0), \quad \Phi_0'(\infty) = 0 \quad (4.2.14)$$

care are următoarea soluție

$$\Phi_0(\eta) = a + \frac{1 - e^{-K\eta}}{K(1 + \lambda K)} \quad (4.2.15)$$

Operatorul neliniar $N(\Phi(\eta))$ se obține din ecuația (4.2.8)

$$N(\Phi(\eta)) = -K\Phi''(\eta) + m\Phi(\eta)\Phi''(\eta) - \Phi'(\eta)^2 \quad (4.2.16)$$

astfel încât substituind relația (4.2.15) în (4.2.16), se obține

$$N(\Phi_0(\eta)) = \frac{\beta e^{-K\eta} + (m-1)e^{-2K\eta}}{(1 + \lambda K)^2} \quad (4.2.17)$$

unde

$$\beta = K(K - ma)(1 + \lambda K) - m. \quad (4.2.18)$$

Având în vedere relația (2.2.9), funcția auxiliară $H(\eta, C_i)$ trebuie să fie de forma termenilor ce apar în relația (4.2.17), astfel încât se poate alege funcția $H(\eta, C_i)$ în următoarea formă:

$$H(\eta, C_i) = \frac{1}{(1 + \lambda K)^2} [C_1 + C_2\eta + (C_3 + C_4\eta)e^{-K\eta} + (C_5 + C_6\eta)e^{-2K\eta}] \quad (4.2.19)$$

sau

$$H^*(\eta, C_i) = \frac{1}{(1 + \lambda K)^2} (C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + C_4e^{-K\eta} + C_5e^{-2K\eta}) \quad (4.2.20)$$

sau încă

$$H^{**}(\eta, C_i) = \frac{1}{(1 + \lambda K)^2} [C_1 + (C_2 + C_3 \eta)e^{-K\eta} + (C_4 + C_5 \eta)e^{-2K\eta} + C_6 e^{-3K\eta}] \quad (4.2.21)$$

și așa mai departe, unde C_1, C_2, \dots sunt parametri necunoscuți la acest moment.

Dacă se alege numai expresia (4.2.19) pentru $H(\eta, C_i)$, atunci prin utilizarea relațiilor (4.2.17), (4.2.19) și (2.2.9) se obține ecuația pentru $\Phi_1(\eta, C_i)$

$$\begin{aligned} \Phi_1'' + K\Phi_1' &= (\beta C_2 \eta + \beta C_1)e^{-K\eta} + [(mC_2 - C_2 + \beta C_4)\eta + (m-1)C_1 + \beta C_3]e^{-2K\eta} + \\ &+ [(mC_4 - C_4 + \beta C_6)\eta + (m-1)C_3 + \beta C_5]e^{-3K\eta} + [(m-1)C_6 \eta + (m-1)C_5]e^{-4K\eta} \\ \Phi_1(0) &= 0, \Phi_1'(0) = \lambda \Phi_1''(0), \Phi_1'(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Este interesant a remarca că dacă se consideră $m=1, a=0$ și $\beta=0$ (cazul întinderii plane cu foaie impermeabilă), în ecuația (4.2.22), atunci

$$\Phi_1'' + K\Phi_1' = 0, \Phi_1(0) = 0, \Phi_1'(0) = \lambda \Phi_1''(0), \Phi_1'(\infty) = 0 \quad (4.2.23)$$

astfel încât $\Phi_1(\eta) = 0$, și prin urmare se poate obține soluția exactă a ecuației

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' - \Phi'^2 = 0, \Phi(0) = 0, \Phi'(0) = 1 + \lambda \Phi''(0), \Phi'(\infty) = 0 \quad (4.2.24)$$

în forma dată de relația (4.2.15):

$$\Phi(\eta) = \frac{1 - e^{-K\eta}}{K(1 + \lambda K)} \quad (4.2.25)$$

unde K este obținut din condiția $\beta=0$ în relația (4.2.18)

$$\lambda K^3 + K^2 - 1 = 0. \quad (4.2.26)$$

Dincolo de acest caz remarcabil, rezolvând ecuația (4.2.22) și apoi substituind acest rezultat și relația (4.2.15) în ecuația (2.2.5), se obține soluția aproximativă de ordinul întâi în forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\eta, C_i) &= A + a + \frac{1}{K(1 + \lambda K)} + \left[\frac{\beta C_2}{2K^2} \eta^2 + \left(\frac{\beta C_1}{K^2} + \frac{2\beta C_2}{K^3} \right) \eta + B - \frac{1}{K(1 + \lambda K)} \right] e^{-K\eta} + \\ &+ \left[\frac{(1-m)C_2 - \beta C_4}{4K^3} \eta + \frac{1-m}{4K^3} C_1 + \frac{1-m}{2K^4} C_2 - \frac{\beta}{4K^3} C_3 - \frac{\beta}{2K^4} C_4 \right] e^{-2K\eta} + \\ &+ \left[\frac{(1-m)C_4 - \beta C_6}{18K^3} \eta + \frac{1-m}{18K^3} C_3 + \frac{7(1-m)}{108K^4} C_4 - \frac{\beta}{18K^3} C_5 - \frac{7\beta}{108K^4} C_6 \right] e^{-3K\eta} + \\ &+ \left[\frac{1-m}{48K^3} C_6 \eta + \frac{1-m}{48K^3} C_5 + \frac{5(1-m)}{288K^4} C_6 \right] e^{-4K\eta} \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

unde

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-m-4\beta + \lambda K(3-3m-8\beta)}{4K^3(1+\lambda K)} C_1 + \frac{1-m-8\beta + \lambda K(2-2m-12\beta)}{4K^4(1+\lambda K)} C_2 + \\ &+ \frac{4-4m + \lambda K(16-16m-27\beta)}{36K^3(1+\lambda K)} C_3 + \frac{8-8m-27\beta + \lambda K(20-20m-54\beta)}{108K^4(1+\lambda K)} C_4 + \\ &+ \frac{9-9m-16\beta + \lambda K(45-45m-64\beta)}{144K^3(1+\lambda K)} C_5 + \frac{27-27m-64\beta + \lambda K(81-81m-160\beta)}{864K^4(1+\lambda K)} C_6 \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

$$\begin{aligned}
B = & \frac{(2\beta + m - 1)(1 + 2\lambda K)}{2K^3(1 + \lambda K)} C_1 + \frac{8\beta + 3m - 3 + 4\lambda K(m - 1 + 3\beta)}{9K^4(1 + \lambda K)} C_2 + \\
& + \frac{3\beta + m - 1 + 3\lambda K(m + 2\beta - 1)}{6K^3(1 + \lambda K)} C_3 + \frac{27\beta + 5m - 5 + 9\lambda K(m - 1 + 4\beta)}{36K^4(1 + \lambda K)} C_4 + \\
& + \frac{2\beta + m - 1 + \lambda K(6\beta + 4m - 4)}{12K^3(1 + \lambda K)} C_5 + \frac{20\beta + 7m - 7 + \lambda K(36\beta + 16m - 16)}{144K^4(1 + \lambda K)} C_6
\end{aligned}$$

4.2.3 Exemple numerice

În continuare, acuratețea metodei MHAO este ilustrată prin comparația soluțiilor aproximative obținute cu rezultatele integrării numerice obținute cu ajutorul metodei Runge-Kutta de ordin patru în combinație cu metoda shooting. În toate cazurile, parametri necunoscuți sunt identificați optimal cu metoda Galerkin. Pentru aceasta, se vor folosi următoarele funcții pondere f_j

$$\begin{aligned}
f_1(\eta) &= \gamma e^{-3K\eta} + \eta^2 e^{-2K\eta} + \delta \eta e^{-K\eta}, f_2(\eta) = \eta e^{-K\eta}, f_3(\eta) = \eta^2 e^{-K\eta}, \\
f_4(\eta) &= 1 + \gamma \eta e^{-K\eta}, f_5(\eta) = e^{-2K\eta}, f_6(\eta) = e^{-K\eta}, f_7(\eta) = \eta e^{-4K\eta}, \\
f_8(\eta) &= e^{-4K\eta}, f_9(\eta) = \delta \eta e^{-2K\eta} + \eta^3 e^{-2K\eta}, \quad (4.2.29)
\end{aligned}$$

unde γ și δ sunt parametri necunoscuți.

Parametrii de control a convergenței K , γ , δ , C_1 , ..., C_6 sunt determinați din ecuațiile:

$$J_j = \int_0^\infty R(\eta, C_i) f_j(\eta) d\eta = 0, \quad i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 9 \quad (4.2.30)$$

unde restul aproximării $R(\eta, C_i)$ este dat de relația:

$$R(\eta, C_i) = \bar{\phi}'''(\eta) + m\bar{\phi}(\eta)\bar{\phi}''(\eta) - \bar{\phi}'(\eta)^2. \quad (4.2.31)$$

și $\bar{\phi}(\eta)$ este dată de relația (4.2.27).

Exemplul 4.2.3.1 Se consideră cazul alugierii plane cu pânză impermeabilă, $m = 1$, $a = 0$ and $\lambda = 1$. În acest caz, din ecuațiile (4.2.30) și (4.2.31) se obțin

$$\begin{aligned}
K &= 0.4631238249, \gamma = 0.6858214854, \delta = -0.1052314539, \\
C_1 &= -0.0119658357, C_2 = 0.0007396024, C_3 = -0.0936132872, \\
C_4 &= -0.0475837579, C_5 = -0.0772995955, C_6 = -0.0149226174.
\end{aligned}$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi dată prin relația (4.2.27) poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(\eta) &= 0.7549045180 + (-0.0011830813\eta^2 + \\
&+ 0.0280632559\eta - 0.1942637382)e^{-0.4631238249\eta} - \\
&- (0.0821765397\eta + 0.5165482911)e^{-0.9262476499\eta} - \\
&- 0.0440924886e^{-1.3893714748\eta}. \quad (4.2.32)
\end{aligned}$$

Este ușor a verifica acuratețea soluției obținute dacă se compară soluția analitică aproximativă (4.2.32) cu soluția numerică. Se poate observa din Tabelul

4.16 că soluțiile aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.32) și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.32) sunt foarte precise.

Tabelul 4.16. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.32), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.32), în comparație cu soluția numerică, pentru cazul $m = 1, a = 0, \lambda = 1$,
($\varepsilon_{\phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|$, $\varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|$)

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.32)	ε_{ϕ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.32)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	-1.469 $\cdot 10^{-21}$	$3.330 \cdot 10^{-16}$	$3.330 \cdot 10^{-16}$	0.5698402909	0.5698404419	$1.509 \cdot 10^{-7}$
4/5	0.3422054517	0.3422055158	$6.412 \cdot 10^{-8}$	0.3115170361	0.3115171244	$8.831 \cdot 10^{-8}$
8/5	0.5292803844	0.5292802974	$8.696 \cdot 10^{-8}$	0.1702983601	0.1702976402	$7.19 \cdot 10^{-7}$
12/5	0.6315494379	0.6315484434	$9.945 \cdot 10^{-7}$	0.0930977404	0.0930965030	$1.237 \cdot 10^{-6}$
16/5	0.6874573050	0.6874558597	$1.445 \cdot 10^{-6}$	0.0508941277	0.0508945198	$3.920 \cdot 10^{-7}$
4	0.7180206952	0.7180203943	$3.008 \cdot 10^{-7}$	0.0278225054	0.0278248245	$2.319 \cdot 10^{-6}$
24/5	0.7347289032	0.7347306790	$1.775 \cdot 10^{-6}$	0.0152098506	0.0152123356	$2.484 \cdot 10^{-6}$
28/5	0.7438628555	0.7438659956	$3.140 \cdot 10^{-6}$	0.0083148326	0.0083154964	$6.638 \cdot 10^{-7}$
32/5	0.7488561521	0.7488587475	$2.595 \cdot 10^{-6}$	0.0045455059	0.0045434479	$2.057 \cdot 10^{-6}$
36/5	0.7515858591	0.7515858161	$4.305 \cdot 10^{-8}$	0.0024849112	0.0024805243	$4.386 \cdot 10^{-6}$
8	0.7530781197	0.7530740167	$4.102 \cdot 10^{-6}$	0.0013584343	0.0013529018	$5.532 \cdot 10^{-6}$

Exemplul 4.2.3.2 În al doilea caz pentru acelaș tip de curgere (alungire plană cu pânză impermeabilă) $m = 1, a = 0$ dar $\lambda = 5$, din ecuațiile (4.2.30) valorile parametrilor sunt

$$K = 0.5252370049, \gamma = 4.8796805607, \delta = -1.2890550305,$$

$$C_1 = -0.0279185716, C_2 = -1.9918945423 \cdot 10^{-6}, C_3 = 1.6897196188 \cdot 10^{-8},$$

$$C_4 = -1.0550664807 \cdot 10^{-8}, C_5 = -2.601365111 \cdot 10^{-8}, C_6 = -6.4375057414 \cdot 10^{-9}.$$

Soluția aproximativă (4.2.27) devine:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\eta) = & 0.5251657155 + (-1.3352013705 \cdot 10^{-9} \eta^2 - 0.0000374387 \eta - \\ & - 0.5251657155) e^{-0.5252370049 \eta} + (6.7324779815 \cdot 10^{-12} \eta + \\ & + 1.4853703052 \cdot 10^{-11}) e^{-1.0504740099 \eta} + \\ & + (9.1285170601 \cdot 10^{-13} \eta + 5.7164338355 \cdot 10^{-12}) e^{-1.5757110148 \eta} \quad (4.2.33) \end{aligned}$$

Soluțiile analitice aproximative $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.33) și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.33) sunt comparate în Tabelul 4.17 cu rezultatele numerice.

Tabelul 4.17. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.33), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.33), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 1$, $a = 0$, $\lambda = 5$,

$$(\varepsilon_{\phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|)$$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.33)	ε_{ϕ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.33)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	-3.699 $\cdot 10^{-21}$	$1.110 \cdot 10^{-16}$	$1.110 \cdot 10^{-16}$	0.2757990287	0.2757990287	$2.220 \cdot 10^{-16}$
4/5	0.1801529748	0.1801529944	$1.956 \cdot 10^{-8}$	0.1811889384	0.1811888525	$8.594 \cdot 10^{-8}$
8/5	0.2985062397	0.2985062551	$1.531 \cdot 10^{-8}$	0.1190337497	0.1190337776	$2.788 \cdot 10^{-8}$
12/5	0.3762595705	0.3762595800	$9.478 \cdot 10^{-9}$	0.0782004298	0.0782003971	$3.268 \cdot 10^{-8}$
16/5	0.4273403785	0.4273403825	$3.999 \cdot 10^{-9}$	0.0513745131	0.0513745109	$2.133 \cdot 10^{-9}$
4	0.4608984141	0.4608984122	$1.941 \cdot 10^{-9}$	0.0337509879	0.0337509843	$3.600 \cdot 10^{-9}$
24/5	0.4829446930	0.4829446859	$7.085 \cdot 10^{-9}$	0.0221730406	0.0221730371	$3.513 \cdot 10^{-9}$
28/5	0.4974282071	0.4974281997	$7.399 \cdot 10^{-9}$	0.0145667928	0.0145667922	$5.860 \cdot 10^{-10}$
32/5	0.5069432900	0.5069432849	$5.118 \cdot 10^{-9}$	0.0095697621	0.0095697957	$3.360 \cdot 10^{-8}$
36/5	0.5131943125	0.5131943126	$1.071 \cdot 10^{-10}$	0.0062869728	0.0062869703	$2.482 \cdot 10^{-9}$
8	0.5173009861	0.5173009860	$1.022 \cdot 10^{-10}$	0.0041302880	0.0041302862	$1.824 \cdot 10^{-9}$

Exemplul 4.2.3.3 În al treilea caz pentru acelaș tip de curgere (alungire plană cu pânză impermeabilă) $m = 1$, $a = 0$ și cu parametru de alunecare $\lambda = 10$, din ecuațiile (4.2.30) se obțin

$$K = 0.4331821853, \gamma = 3.0639340595, \delta = -0.5722383481,$$

$$C_1 = -0.0125089730, C_2 = -9.6275057188 \cdot 10^{-7}, C_3 = 1.3219663971 \cdot 10^{-8}, \\ C_4 = -6.7307907487 \cdot 10^{-9}, C_5 = -2.0218988984 \cdot 10^{-8}, C_6 = -4.1394827886 \cdot 10^{-9}.$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi (4.2.27) este

$$\bar{\phi}(\eta) = 0.4331053011 + (-1.2809679965 \cdot 10^{-9} \eta^2 - 0.0000332989 \eta - \\ - 0.4331053011) e^{-0.433182185 \eta} + (1.0336892501 \cdot 10^{-11} \eta + \\ + 2.7423124117 \cdot 10^{-11}) e^{-0.8663643706 \eta} + \\ + (1.4127245039 \cdot 10^{-12} \eta + 1.070516162 \cdot 10^{-11}) e^{-1.2995465559 \eta} \quad (4.2.34)$$

În Tabelul 4.18 se prezintă câteva valori ale funcției $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.34) și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.34), în comparație cu rezultatele numerice.

Tabelul 4.18. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.34), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.34), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 1$, $a = 0$, $\lambda = 10$,

$$(\varepsilon_{\phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|)$$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.34)	ε_{ϕ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.34)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	$1.502 \cdot 10^{-21}$	0	$1.502 \cdot 10^{-21}$	0.1875802018	0.1875802018	$1.110 \cdot 10^{-16}$
4/5	0.1268262363	0.1268262411	$4.720 \cdot 10^{-9}$	0.1326509468	0.1326510845	$1.377 \cdot 10^{-7}$
8/5	0.2165139331	0.2165139494	$1.628 \cdot 10^{-8}$	0.0938068684	0.0938068626	$5.887 \cdot 10^{-9}$
12/5	0.2799383807	0.2799384028	$2.205 \cdot 10^{-8}$	0.0663374780	0.0663373956	$8.247 \cdot 10^{-8}$
16/5	0.3247902719	0.3247902712	$7.518 \cdot 10^{-10}$	0.0469118131	0.0469118136	$5.295 \cdot 10^{-10}$
4	0.3565081685	0.3565081653	$3.148 \cdot 10^{-9}$	0.0331746279	0.0331746255	$2.410 \cdot 10^{-9}$
24/5	0.3789381153	0.3789381074	$7.870 \cdot 10^{-9}$	0.0234601074	0.0234600987	$8.697 \cdot 10^{-9}$
28/5	0.3947998981	0.3947998887	$9.438 \cdot 10^{-9}$	0.0165902831	0.0165902771	$5.954 \cdot 10^{-9}$
32/5	0.4060168733	0.4060168640	$9.342 \cdot 10^{-9}$	0.0117321466	0.0117321456	$9.209 \cdot 10^{-10}$

36/5	0.4139491814	0.4139491720	9.425 $\cdot 10^{-9}$	0.0082966254	0.0082966210	4.450 $\cdot 10^{-9}$
8	0.4195586644	0.4195586620	2.446 $\cdot 10^{-9}$	0.0058671110	0.0058671212	1.015 $\cdot 10^{-8}$

Tabelul 4.19. Valori numerice pentru $\Phi''(0)$ și $\Phi(\infty)$ în cazul întinderii plane cu pânză impermeabilă $m = 1$, $a = 0$

λ	1	5	10
$\Phi''_{numeric}(0)$	-0.4301597090	-0.1448401942	-0.0812419798
$\Phi''_{MHAO}(0)$	-0.4301595580	-0.1448401942	-0.0812419798
$\Phi_{numeric}(\infty)$	0.7548776662	0.5251657154	0.4331053011
$\Phi_{MHAO}(\infty)$	0.7549045180	0.5251657155	0.4331053011

Valorile $\Phi''(0)$ și $\Phi(\infty)$, calculate cu ajutorul metodei MHAO, și rezultatele de integrare numerică, sunt comparate în Tabelul 4.19 pentru același caz al întinderii plane cu foaie impermeabilă.

Din Tabelele 4.16-4.19, se poate observa că soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{\phi}$ și respectiv $\bar{\phi}'$ obținute cu MHAO în comparație cu rezultatele numerice sunt foarte precise.

Exemplul 4.2.3.4 În acest caz, se consideră cazul alungirii plane cu pânză de aspirație, $m = 1$, $a = 3$ și cu parametrul de alunecare $\lambda = 1$. Parametrii obținuți cu ajutorul ecuațiilor (4.2.30) sunt:

$$K = 1.0265261151, \gamma = 3.011278740, \delta = -0.9721507488,$$

$$C_1 = 2.7091920761 \cdot 10^{-11}, C_2 = -4.3645109956 \cdot 10^{-12}, C_3 = 9.1196480013 \cdot 10^{-10},$$

$$C_4 = -3.3227889086 \cdot 10^{-10}, C_5 = 1.3649192039, C_6 = -0.0000235888$$

și soluția aproximativă de ordinul întâi (4.2.27) devine

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\eta) = & 3.0795956234 + (-2.3514669361 \cdot 10^{-12} \eta^2 + \\ & + 2.0029806302 \cdot 10^{-11} \eta - 4.9211079655 \cdot 10^{-11}) e^{-1.0265261151 \eta} + \\ & + (8.7197902556 \cdot 10^{-11} \eta - 6.9432003042 \cdot 10^{-11}) e^{-2.0530522302 \eta} + \\ & + (1.3753249143 \cdot 10^{-6} \eta - 0.0795956233) e^{-3.0795783454 \eta} \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

În Tabelul 4.20 sunt date valori ale funcției $\bar{\phi}(\eta)$ și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$, din relația (4.2.35) în comparație cu rezultatele numerice.

Tabelul 4.20. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.35), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.35), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 1$, $a = 3$, $\lambda = 1$,

$$(\varepsilon_{\phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|)$$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.35)	ε_{ϕ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.35)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	3	3	0	0.2451223337	0.2451223337	3.330 $\cdot 10^{-16}$

4/5	3.0728203311	3.0728203305	6.548 $\cdot 10^{-10}$	0.0208651636	0.0208651626	1.062 $\cdot 10^{-9}$
8/5	3.0790189008	3.0790189008	7.097 $\cdot 10^{-11}$	0.0017760720	0.0017760724	3.183 $\cdot 10^{-10}$
12/5	3.0795465321	3.0795465320	6.988 $\cdot 10^{-11}$	0.0001511816	0.0001511818	2.060 $\cdot 10^{-10}$
16/5	3.0795914447	3.0795914447	1.960 $\cdot 10^{-11}$	0.0000128678	0.0000128688	9.511 $\cdot 10^{-10}$
4	3.0795952677	3.0795952677	6.594 $\cdot 10^{-13}$	$1.095 \cdot 10^{-6}$	$1.095 \cdot 10^{-6}$	9.548 $\cdot 10^{-12}$
24/5	3.0795955932	3.0795955932	7.611 $\cdot 10^{-12}$	$9.304 \cdot 10^{-8}$	$9.324 \cdot 10^{-8}$	2.002 $\cdot 10^{-10}$
28/5	3.0795956209	3.0795956209	1.132 $\cdot 10^{-11}$	$8.353 \cdot 10^{-9}$	$7.936 \cdot 10^{-9}$	4.160 $\cdot 10^{-10}$
32/5	3.0795956232	3.0795956232	8.887 $\cdot 10^{-12}$	$6.755 \cdot 10^{-10}$	$6.756 \cdot 10^{-10}$	7.306 $\cdot 10^{-14}$
36/5	3.0795956234	3.0795956234	9.428 $\cdot 10^{-13}$	$1.091 \cdot 10^{-10}$	$5.751 \cdot 10^{-11}$	5.159 $\cdot 10^{-11}$
8	3.0795956235	3.0795956234	1.596 $\cdot 10^{-11}$	$-3.225 \cdot 10^{-11}$	$4.901 \cdot 10^{-12}$	3.715 $\cdot 10^{-11}$

Exemplul 4.2.3.5 Pentru cazul alungirii plane cu pânză de aspirație, $m = 1$, $a = 3$ și parametrul de alunecare $\lambda = 5$, se obțin:

$$K = 1.0016112565, \gamma = 2.9079023283, \delta = -0.9038557714,$$

$$C_1 = 1.3658235079 \cdot 10^{-6}, C_2 = -2.1653508962 \cdot 10^{-7}, C_3 = 0.0000445395,$$

$$C_4 = -0.0000160260, C_5 = 0.0752835577, C_6 = -0.0012155499$$

și prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.2.27) are forma

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\eta) = & 3.0205594824 + (-5.4255801019 \cdot 10^{-7} \eta^2 + 4.6777709040 \cdot 10^{-6} \eta - \\ & - 0.0000118225)e^{-1.0016112565\eta} + (0.0000200454\eta - \\ & - 0.0000156837)e^{-2.0032225131\eta} + \\ & + (0.0003378695\eta - 0.0205319761)e^{-3.0048337696\eta} \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

În Tabelul 4.21 se prezintă câteva valori ale funcției $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.36) și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.36), în comparație cu rezultatele numerice.

Tabelul 4.21. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.36), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.36), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 1$, $a = 3$, $\lambda = 5$,
 $(\varepsilon_{\phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|)$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.36)	ε_{ϕ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.36)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	3	3.0000000000	$8.881 \cdot 10^{-16}$	0.0621010118	0.0621010277	$1.587 \cdot 10^{-8}$
4/5	3.0187247563	3.0187247676	$1.124 \cdot 10^{-8}$	0.0055417735	0.0055417870	$1.357 \cdot 10^{-8}$
8/5	3.0203957172	3.0203957372	$2.004 \cdot 10^{-8}$	0.0004945360	0.0004945468	$1.088 \cdot 10^{-8}$
12/5	3.0205448301	3.0205448573	$2.721 \cdot 10^{-8}$	0.0000441313	0.0000441381	$6.752 \cdot 10^{-9}$
16/5	3.0205581365	3.0205581673	$3.072 \cdot 10^{-8}$	$3.938 \cdot 10^{-6}$	$3.940 \cdot 10^{-6}$	$2.017 \cdot 10^{-9}$
4	3.0205593241	3.0205593556	$3.151 \cdot 10^{-8}$	$3.518 \cdot 10^{-7}$	$3.520 \cdot 10^{-7}$	$1.809 \cdot 10^{-10}$
24/5	3.0205594299	3.0205594622	$3.231 \cdot 10^{-8}$	$3.125 \cdot 10^{-8}$	$3.266 \cdot 10^{-8}$	$1.414 \cdot 10^{-9}$
28/5	3.0205594395	3.0205594731	$3.365 \cdot 10^{-8}$	$2.704 \cdot 10^{-9}$	$5.014 \cdot 10^{-9}$	$2.309 \cdot 10^{-9}$
32/5	3.0205594403	3.0205594759	$3.561 \cdot 10^{-8}$	$2.588 \cdot 10^{-10}$	$2.729 \cdot 10^{-9}$	$2.470 \cdot 10^{-9}$
36/5	3.0205594404	3.0205594779	$3.747 \cdot 10^{-8}$	$1.082 \cdot 10^{-10}$	$2.212 \cdot 10^{-9}$	$2.104 \cdot 10^{-9}$
8	3.0205594404	3.0205594794	$3.905 \cdot 10^{-8}$	$-3.958 \cdot 10^{-11}$	$1.673 \cdot 10^{-9}$	$1.712 \cdot 10^{-9}$

Exemplul 4.2.3.6 În cazul alungirii plane cu pânză de aspirație, $m = 1$, $a = 3$, dar parametrul de alunecare $\lambda = 10$, din ecuațiile (4.2.30) se obțin:

$$K = 1.1395297367, \gamma = 2.9650196892, \delta = -0.9588570845,$$

$$C_1 = 0.0000646091, C_2 = -0.0000113762, C_3 = 0.0031645975,$$

$$C_4 = -0.0010792973, C_5 = 0.0087672199, C_6 = 0.0022371918$$

și soluția aproximativă de ordinul întâi (4.2.27) poate fi scrisă prin

$$\bar{\phi}(\eta) = 3.0106792212 + (-0.0000661253\eta^2 + 0.0005189796\eta -$$

$$- 0.0011722736)e^{-1.1395297367\eta} + (0.0027526798\eta -$$

$$- 0.0032398505)e^{-2.2790594735\eta} +$$

$$+ (-0.0012679592\eta - 0.0062670970)e^{-3.4185892103\eta} \quad (4.2.37)$$

În Tabelul 4.22, pentru $m=1$, $a=3$, $\lambda=10$ sunt comparate soluția numerică cu soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{\phi}$ și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$, obținută din relația (4.2.37).

Tabelul 4.22. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.37), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.37), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m=1$, $a=3$, $\lambda=10$,
 $(\varepsilon_{\phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\phi}'_{MHAO}|)$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\phi}_{MHAO}$ (4.2.37)	ε_{ϕ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\phi}'_{MHAO}$ din(4.2.37)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	3	2.9999999999	4.440 $\cdot 10^{-16}$	0.0321473348	0.0321479832	6.484 $\cdot 10^{-7}$
4/5	3.0097173475	3.0097177871	4.395 $\cdot 10^{-7}$	0.0028915342	0.0028919142	3.799 $\cdot 10^{-7}$
8/5	3.0105913868	3.0105920909	7.040 $\cdot 10^{-7}$	0.0002600819	0.0002604166	3.347 $\cdot 10^{-7}$
12/5	3.0106700032	3.0106708927	8.895 $\cdot 10^{-7}$	0.0000233938	0.0000234630	6.916 $\cdot 10^{-8}$
16/5	3.0106770744	3.0106779056	8.312 $\cdot 10^{-7}$	$2.104 \cdot 10^{-6}$	$1.947 \cdot 10^{-6}$	1.565 $\cdot 10^{-7}$
4	3.0106777105	3.0106784439	7.334 $\cdot 10^{-7}$	$1.891 \cdot 10^{-7}$	$1.384 \cdot 10^{-7}$	5.068 $\cdot 10^{-8}$
24/5	3.0106777676	3.0106785350	7.673 $\cdot 10^{-7}$	$1.755 \cdot 10^{-8}$	$1.432 \cdot 10^{-7}$	1.257 $\cdot 10^{-7}$
28/5	3.0106777728	3.0106786810	9.082 $\cdot 10^{-7}$	$1.335 \cdot 10^{-9}$	$2.086 \cdot 10^{-7}$	2.073 $\cdot 10^{-7}$
32/5	3.0106777732	3.0106788473	1.074 $\cdot 10^{-6}$	$1.473 \cdot 10^{-10}$	$1.969 \cdot 10^{-7}$	1.968 $\cdot 10^{-7}$
36/5	3.0106777733	3.0106789863	1.213 $\cdot 10^{-6}$	-6.148 $\cdot 10^{-11}$	$1.479 \cdot 10^{-7}$	1.480 $\cdot 10^{-7}$
8	3.0106777733	3.0106790838	1.310 $\cdot 10^{-6}$	-2.113 $\cdot 10^{-11}$	$9.709 \cdot 10^{-8}$	9.712 $\cdot 10^{-8}$

Tabelul 4.23. Valori numerice pentru $\phi''(0)$ și $\phi(\infty)$ în cazul întinderii plane cu pânză de aspirație $m=1$, $a=3$

λ	1	5	10
$\phi''_{numeric}(0)$	-0.7548776662	-0.1875797976	-0.0967852665
$\phi''_{MHAO}(0)$	-0.7548776662	-0.1875797944	-0.0967852016
$\phi_{numeric}(\infty)$	3.0795956235	3.0205594824	3.0106792212
$\phi_{MHAO}(\infty)$	3.0795956235	3.0205594404	3.0106777733

În Tabelul 4.23, se prezintă valorile pentru $\Phi''(0)$ și $\Phi(\infty)$ în cazul alungirii plane cu pânză de aspirație.

Rezultatele prezentate în Tabelele 4.20-4.23 indică o concordanță foarte bună între rezultatele numerice și rezultatele obținute cu ajutorul metodei MHAO.

Exemplul 4.2.3.7 Acum, se consideră cazul curgerii asimetrică cu pânză impermeabilă, $m = 2$, $a = 0$ și cu parametru de alunecare $\lambda = 1$. Din ecuațiile (4.2.30) se obțin următoarele valori ale parametrilor

$$\begin{aligned} K &= 1.2284861855, \gamma = -1.2107679860, \delta = 5.9462560050, \\ C_1 &= -0.0272717347, C_2 = -0.0098884303, C_3 = -0.0096082725, \\ C_4 &= -0.1430856756, C_5 = -0.0461779063, C_6 = 0.0013806913. \end{aligned}$$

În acest caz, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.2.27) este

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\eta) &= 0.5509446955 + (-0.0077420177\eta^2 - 0.0679124177\eta - \\ &\quad - 0.6421304231)e^{-1.2284861855\eta} + (0.0469289624\eta + \\ &\quad + 0.0831404603)e^{-2.4569723711\eta} + (0.0041898146\eta + \\ &\quad + 0.0075368933)e^{-3.6854585567\eta} + (0.0000155147\eta + \\ &\quad + 0.0005083739)e^{-4.9139447423\eta} \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

În Tabelul 4.24 se prezintă o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{\Phi}$ dată de relația (4.2.38) și respectiv $\bar{\Phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.38), și soluția numerică în cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 1$.

Tabelul 4.24. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\Phi}$ dată de relația (4.2.38), respectiv a derivatei $\bar{\Phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.38), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 1$,

$$(\varepsilon_{\Phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\Phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|)$$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.38)	ε_{Φ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.38)	$\varepsilon_{\Phi'}$
0	$4.532 \cdot 10^{-21}$	0	$4.532 \cdot 10^{-21}$	0.5374903499	0.5374903555	$5.591 \cdot 10^{-9}$
4/5	0.3059142785	0.3059142583	$2.024 \cdot 10^{-8}$	0.2555506238	0.2555503452	$2.785 \cdot 10^{-7}$
8/5	0.4461452851	0.4461454761	$1.910 \cdot 10^{-7}$	0.1127824708	0.1127828241	$3.533 \cdot 10^{-7}$
12/5	0.5069389666	0.5069388037	$1.629 \cdot 10^{-7}$	0.0480153265	0.0480144420	$8.845 \cdot 10^{-7}$
16/5	0.5326162622	0.5326159023	$3.599 \cdot 10^{-7}$	0.0201187063	0.0201193276	$6.213 \cdot 10^{-7}$
4	0.5433388098	0.5433393496	$5.398 \cdot 10^{-7}$	0.0083728499	0.0083740894	$1.239 \cdot 10^{-6}$
24/5	0.5477949007	0.5477960148	$1.114 \cdot 10^{-6}$	0.0034746602	0.0034746801	$1.988 \cdot 10^{-8}$

28/5	0.5496430435	0.5496436022	5.587 .10 ⁻⁷	0.0014402426	0.0014389244	1.318 .10 ⁻⁶
32/5	0.5504089078	0.5504081313	7.765 .10 ⁻⁷	0.0005966811	0.0005948028	1.878 .10 ⁻⁶
36/5	0.5507261667	0.5507239003	2.266 .10 ⁻⁶	0.0002471495	0.0002453854	1.764 .10 ⁻⁶
8	0.5508575704	0.5508540509	3.519 .10 ⁻⁶	0.0001023595	0.0001010119	1.347 .10 ⁻⁶

Exemplul 4.2.3.8 Pentru cazul curgerii asimetrice cu pânză impermeabilă, $m = 2$, $a = 0$ și cu parametru de alunecare $\lambda = 5$, din ecuațiile (4.2.30) se obțin:

$$K = 0.8408529662, \gamma = -2.5936764722, \delta = 12.6879512489,$$

$$C_1 = -0.0053548861, C_2 = -0.0012448162, C_3 = -0.0048905544,$$

$$C_4 = -0.0180483421, C_5 = -0.0064961222, C_6 = 0.0010523763$$

și prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.2.27) devine

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\eta) = & 0.3780173693 + (-0.0023588678\eta^2 - 0.0315158198\eta - \\ & - 0.4396463038)e^{-0.8408529662\eta} + (0.0208604015\eta + \\ & + 0.0573797361)e^{-1.6817059324\eta} + (0.001423055078\eta + \\ & + 0.0040581045)e^{-2.5225588986\eta} + (-0.0000368781\eta + \\ & + 0.0001910937)e^{-3.3634118648\eta} \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

În Tabelul 4.25 este comparată soluția numerică pentru $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 5$ cu soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{\Phi}$ și respectiv $\bar{\Phi}'(\eta)$, obținută din relația (4.2.39).

Tabelul 4.25. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\Phi}$ dată de relația (4.2.39), respectiv a derivatei $\bar{\Phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.39), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 5$,

$$(\varepsilon_{\Phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\Phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|)$$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.39)	ε_{Φ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.39)	$\varepsilon_{\Phi'}$
0	-5.657 .10 ⁻²¹	5.551 .10 ⁻¹⁷	5.551 .10 ⁻¹⁷	0.2530332735	0.2530332797	6.295 .10 ⁻⁹
4/5	0.1600040676	0.1600041067	3.910 .10 ⁻⁸	0.1535171630	0.1535171106	5.239 .10 ⁻⁸
8/5	0.2550767447	0.2550767290	1.567 .10 ⁻⁸	0.0892746569	0.0892747527	9.579 .10 ⁻⁸
12/5	0.3096381374	0.3096382859	1.485 .10 ⁻⁷	0.0505489758	0.0505490965	1.207 .10 ⁻⁷
16/5	0.3402900384	0.3402900681	2.968 .10 ⁻⁸	0.0281733373	0.0281729632	3.740 .10 ⁻⁷

4	0.3572971242	0.3572968761	2.480 .10 ⁻⁷	0.0155613273	0.0155611338	1.934 .10 ⁻⁷
24/5	0.3666672040	0.3666670201	1.838 .10 ⁻⁷	0.0085518839	0.0085522312	3.472 .10 ⁻⁷
28/5	0.3718094321	0.3718096527	2.206 .10 ⁻⁷	0.0046866399	0.0046872209	5.810 .10 ⁻⁷
32/5	0.3746253326	0.3746259498	6.172 .10 ⁻⁷	0.0025644425	0.0025647958	3.533 .10 ⁻⁷
36/5	0.3761654885	0.3761662159	7.273 .10 ⁻⁷	0.0014020278	0.0014019372	9.055 .10 ⁻⁸
8	0.3770073263	0.3770078077	4.813 .10 ⁻⁷	0.0007661537	0.0007656582	4.955 .10 ⁻⁷

Exemplul 4.2.3.9 În acest caz se consideră curgerea asimetrică cu pânză impermeabilă, $m = 2$, $a = 0$ și cu parametrul de alunecare $\lambda = 10$. Din ecuațiile (4.2.30) se obțin:

$$K = 0.5239724222, \gamma = 1.6648535124, \delta = -1.8794890289,$$

$$C_1 = 0.0112870692, C_2 = -0.0004699006, C_3 = -0.1276778030,$$

$$C_4 = 0.0206177280, C_5 = 0.1080628083, C_6 = 0.02844119967$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\eta) = & 0.3106373548 + (-0.0006102510\eta^2 + 0.0246579539\eta - \\ & - 0.3170175340)e^{-0.5239724222\eta} + (-0.0247341994\eta + \\ & + 0.0442009306)e^{-1.0479448445\eta} + (-0.0157948648\eta - \\ & - 0.0156201575)e^{-1.5719172668\eta} + (-0.0041189012\eta - \\ & - 0.0222005938)e^{-2.095889689\eta} \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

În Tabelul 4.26 se prezintă o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.40) și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.40), cu rezultatele numerice în cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 10$.

Tabelul 4.26. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.40), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.40), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 10$,

$$(\varepsilon_{\phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|)$$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.40)	ε_{ϕ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.40)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	-6.465 .10 ⁻²¹	-2.775 .10 ⁻¹⁶	2.775 .10 ⁻¹⁶	0.1708836323	0.1708818873	1.745 .10 ⁻⁶
4/5	0.1126417938	0.1126404827	1.311 .10 ⁻⁶	0.1137440701	0.1137428294	1.240 .10 ⁻⁶

8/5	0.1864912649	0.1864889581	2.306 .10 ⁻⁶	0.0734177895	0.0734164390	1.350 .10 ⁻⁶
12/5	0.2336569168	0.2336539425	2.974 .10 ⁻⁶	0.0463876465	0.0463876308	1.563 .10 ⁻⁸
16/5	0.2632492851	0.2632470296	2.255 .10 ⁻⁶	0.0288985239	0.0289001166	1.592 .10 ⁻⁶
4	0.2816018688	0.2816009735	8.952 .10 ⁻⁷	0.0178411952	0.0178426995	1.504 .10 ⁻⁶
24/5	0.2929002361	0.2929000387	1.973 .10 ⁻⁷	0.0109523552	0.0109524790	1.237 .10 ⁻⁷
28/5	0.2998238959	0.2998231514	7.444 .10 ⁻⁷	0.0066998042	0.0066983503	1.453 .10 ⁻⁶
32/5	0.3040546698	0.3040522683	2.401 .10 ⁻⁶	0.0040895458	0.0040869503	2.595 .10 ⁻⁶
36/5	0.3066354098	0.3066306698	4.739 .10 ⁻⁶	0.0024929328	0.0024897729	3.159 .10 ⁻⁶
8	0.3082079556	0.3082006277	7.327 .10 ⁻⁶	0.0015184181	0.0015151809	3.237 .10 ⁻⁶

Tabelul 4.27. Valori numerice pentru $\Phi''(0)$ și $\Phi(\infty)$ în cazul curgerii asimetrice cu pânză impermeabilă $m = 2$, $a = 0$

λ	1	5	10
$\Phi''_{numeric}(0)$	-0.4625096500	-0.1493933452	-0.0829116367
$\Phi''_{MHAO}(0)$	-0.4625096444	-0.1493933440	-0.0829118112
$\Phi_{numeric}(\infty)$	0.5509502913	0.37801840311	0.31065126857
$\Phi_{MHAO}(\infty)$	0.5509446955	0.3780173693	0.31063735488

În Tabelul 4.27 se prezintă valorile pentru $\Phi''(0)$ și $\Phi(\infty)$ în cazul curgerii asimetrice cu pânză impermeabilă.

Exemplul 4.2.3.10 Pentru cazul curgerii asimetrice cu pânză de aspirație $m = 2$, $a = 3$ și cu parametrul de alunecare $\lambda = 1$ se obțin următoarele valori ale parametrilor:

$$K = 1.5574274146, \gamma = -0.7860056759, \delta = 3.6690514687,$$

$$C_1 = 0.0107133300, C_2 = -0.0024557002, C_3 = 0.4688574884,$$

$$C_4 = -0.2507161620, C_5 = 0.1381947406, C_6 = -1.1772137282$$

cu soluția aproximativă de ordinul întâi obținută din relația (4.2.27):

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\eta) = & 3.0235364880 + (0.0026339287\eta^2 + 0.0162169332\eta - \\ & - 0.0279371463)e^{-1.5574274146\eta} + (0.0864947892\eta - \\ & - 0.0510827083)e^{-3.1148548292\eta} + (0.0937682076\eta + \\ & + 0.0527717186)e^{-4.6722822438\eta} + (0.0064921812\eta + \\ & + 0.0027116480)e^{-6.2297096585\eta} \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

În Tabelul 4.28 se prezintă o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{\phi}$ și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$, obținută din relația (4.2.41), cu soluția numerică în cazul $m = 2$, $a = 3$, $\lambda = 1$.

Tabelul 4.28. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.41), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.41), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 2$, $a = 3$, $\lambda = 1$,
 $(\varepsilon_{\phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\phi}'_{MHAO}|)$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\phi}_{MHAO}$ (4.2.41)	ε_{ϕ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\phi}'_{MHAO}$ din(4.2.41)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	3	3.0000000000	4.440 $\cdot 10^{-16}$	0.1421402629	0.1421402659	3.066 $\cdot 10^{-9}$
4/5	3.0233419039	3.0233421081	2.041 $\cdot 10^{-7}$	0.0011287363	0.0011270165	1.719 $\cdot 10^{-6}$
8/5	3.0235270847	3.0235272605	1.757 $\cdot 10^{-7}$	$8.946 \cdot 10^{-6}$	0.0000126036	3.657 $\cdot 10^{-6}$
12/5	3.0235285524	3.0235292386	6.861 $\cdot 10^{-7}$	$7.061 \cdot 10^{-8}$	$-3.176 \cdot 10^{-6}$	3.247 $\cdot 10^{-6}$
16/5	3.0235285641	3.0235265431	2.020 $\cdot 10^{-6}$	$4.844 \cdot 10^{-10}$	$-1.647 \cdot 10^{-6}$	1.648 $\cdot 10^{-6}$
4	3.0235285642	3.0235273675	1.196 $\cdot 10^{-6}$	-4.961 $\cdot 10^{-11}$	$3.184 \cdot 10^{-6}$	3.184 $\cdot 10^{-6}$
24/5	3.0235285642	3.0235304949	1.930 $\cdot 10^{-6}$	-1.529 $\cdot 10^{-12}$	$4.039 \cdot 10^{-6}$	4.039 $\cdot 10^{-6}$
28/5	3.0235285642	3.0235332843	4.720 $\cdot 10^{-6}$	-8.255 $\cdot 10^{-13}$	$2.808 \cdot 10^{-6}$	2.808 $\cdot 10^{-6}$
32/5	3.0235285642	3.0235349868	6.422 $\cdot 10^{-6}$	$9.363 \cdot 10^{-14}$	$1.515 \cdot 10^{-6}$	1.515 $\cdot 10^{-6}$
36/5	3.0235285642	3.0235358443	7.280 $\cdot 10^{-6}$	$3.445 \cdot 10^{-14}$	$7.094 \cdot 10^{-7}$	7.094 $\cdot 10^{-7}$
8	3.0235285642	3.0235362289	7.664 $\cdot 10^{-6}$	-2.562 $\cdot 10^{-14}$	$3.029 \cdot 10^{-7}$	3.029 $\cdot 10^{-7}$

Exemplul 4.2.3.11 Pentru cazul curgerii asimetrice cu pânză de aspirație $m = 2$, $a = 3$ și parametrul de alunecare $\lambda = 5$, parametrii sunt

$$K = 1.7780169491, \gamma = -0.5957717503, \delta = 2.8222930255,$$

$$C_1 = 0.0000862400, C_2 = -0.0000222658, C_3 = 0.0046073879,$$

$$C_4 = -0.0026158399, C_5 = 0.0214772965, C_6 = -0.0217910850$$

și prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.2.27) are forma

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\eta) = & 3.0053612258 + (-0.0001065840\eta^2 + 0.0005858601\eta - \\ & - 0.0008994531)e^{-1.7780169491\eta} + (0.0035222493\eta - \\ & - 0.0022439786)e^{-3.55603389829\eta} + (0.0065444365\eta - \\ & - 0.0021760449)e^{-5.3340508474\eta} + (0.0000807662\eta - \\ & - 0.0000417491)e^{-7.1120677965\eta} \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

În Tabelul 4.29, este comparată soluția numerică pentru cazul $m = 2$, $a = 3$, $\lambda = 5$ cu soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{\Phi}$ și respectiv $\bar{\Phi}'(\eta)$, obținută din relația (4.2.42).

Tabelul 4.29. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\Phi}$ dată de relația (4.2.42), respectiv a derivatei $\bar{\Phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.42), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 2$, $a = 3$, $\lambda = 5$,
 $(\varepsilon_{\Phi} = |\Phi_{numeric} - \bar{\Phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\Phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\Phi}'_{MHAO}|)$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\Phi}_{MHAO}$ (4.2.42)	ε_{Φ}	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\Phi}'_{MHAO}$ din(4.2.42)	$\varepsilon_{\Phi'}$
0	3	2.9999999999	4.440 $\cdot 10^{-16}$	0.0322162764	0.0322162764	3.591 $\cdot 10^{-11}$
4/5	3.0053172442	3.0053172436	6.174 $\cdot 10^{-10}$	0.0002629857	0.0002629038	8.184 $\cdot 10^{-8}$
8/5	3.0053606396	3.0053606637	2.405 $\cdot 10^{-8}$	$2.145 \cdot 10^{-6}$	$2.237 \cdot 10^{-6}$	9.116 $\cdot 10^{-8}$
12/5	3.0053609937	3.0053609790	1.457 $\cdot 10^{-8}$	$1.731 \cdot 10^{-8}$	$-1.127 \cdot 10^{-7}$	1.300 $\cdot 10^{-7}$
16/5	3.0053609960	3.0053609371	5.948 $\cdot 10^{-8}$	$1.513 \cdot 10^{-10}$	$4.225 \cdot 10^{-8}$	4.210 $\cdot 10^{-8}$
4	3.0053609966	3.0053610206	2.398 $\cdot 10^{-8}$	$3.453 \cdot 10^{-11}$	$1.356 \cdot 10^{-7}$	1.355 $\cdot 10^{-7}$
24/5	3.0053609966	3.0053611190	1.229 $\cdot 10^{-7}$	-6.394 $\cdot 10^{-12}$	$1.019 \cdot 10^{-7}$	1.019 $\cdot 10^{-7}$
28/5	3.0053609966	3.0053611803	1.836 $\cdot 10^{-7}$	-1.775 $\cdot 10^{-12}$	$5.205 \cdot 10^{-8}$	5.205 $\cdot 10^{-8}$
32/5	3.0053609966	3.0053612080	2.118 $\cdot 10^{-7}$	-3.148 $\cdot 10^{-13}$	$2.189 \cdot 10^{-8}$	2.189 $\cdot 10^{-8}$
36/5	3.0053609960	3.0053612197	2.230 $\cdot 10^{-7}$	-2.767 $\cdot 10^{-14}$	$8.196 \cdot 10^{-9}$	8.196 $\cdot 10^{-9}$
8	3.0053609966	3.0053612238	2.271 $\cdot 10^{-7}$	-1.188 $\cdot 10^{-16}$	$2.840 \cdot 10^{-9}$	2.840 $\cdot 10^{-9}$

Exemplul 4.2.3.12 În ultimul caz se consideră curgerea asimetrică cu pânză de aspirație $m = 2$, $a = 3$ și parametrul de alunecare $\lambda = 10$, astfel încât parametrii sunt

$$\begin{aligned}
K &= 1.8412120648, \gamma = -0.554362126, \delta = 2.6330245292, \\
C_1 &= 9.5831454966 \cdot 10^{-6}, C_2 = -2.5525898638 \cdot 10^{-6}, C_3 = 0.0005454355, \\
C_4 &= -0.0003132222, C_5 = 0.0056651734, C_6 = -0.0035106130.
\end{aligned}$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi (4.2.27) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(\eta) &= 3.0027282856 + (-0.0000243991\eta^2 + 0.0001301957\eta - \\
&\quad - 0.0001939768)e^{-1.8412120648\eta} + (0.0008131418\eta - \\
&\quad - 0.0005329181)e^{-3.6824241297\eta} + (0.0020278091\eta - \\
&\quad - 0.0019877853)e^{-5.5236361946\eta} + (0.0000117173\eta - \\
&\quad - 0.0000136053)e^{-7.3648482595\eta}
\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

În Tabelul 4.30 se prezintă soluția numerică pentru $m = 2$, $a = 3$, $\lambda = 10$ care este comparată cu soluția aproximativă de ordinul întâi $\bar{\phi}$ și respectiv $\bar{\phi}'(\eta)$, obținută din relația (4.2.43).

Tabelul 4.30. Valori numerice ale soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{\phi}$ dată de relația (4.2.43), respectiv a derivatei $\bar{\phi}'(\eta)$ obținută din relația (4.2.43), în comparație cu soluția numerică pentru cazul $m = 2$, $a = 3$, $\lambda = 10$,
 $(\varepsilon_\phi = |\Phi_{numeric} - \bar{\phi}_{MHAO}|, \varepsilon_{\phi'} = |\Phi'_{numeric} - \bar{\phi}'_{MHAO}|)$

η	$\Phi_{numeric}$	$\bar{\phi}_{MHAO}$ (4.2.43)	ε_ϕ	$\Phi'_{numeric}$	$\bar{\phi}'_{MHAO}$ din(4.2.43)	$\varepsilon_{\phi'}$
0	3	3	0	0.0163824516	0.0163824515	$5.792 \cdot 10^{-12}$
4/5	3.0027058802	3.0027058796	$6.211 \cdot 10^{-10}$	0.0001342659	0.0001342487	$1.717 \cdot 10^{-8}$
8/5	3.0027280544	3.0027280603	$5.873 \cdot 10^{-9}$	$1.1003 \cdot 10^{-6}$	$1.116 \cdot 10^{-6}$	$1.593 \cdot 10^{-8}$
12/5	3.0027282361	3.0027282309	$5.146 \cdot 10^{-9}$	$9.229 \cdot 10^{-9}$	$-1.784 \cdot 10^{-8}$	$2.707 \cdot 10^{-8}$
16/5	3.0027282376	3.0027282263	$1.122 \cdot 10^{-8}$	$7.673 \cdot 10^{-11}$	$1.421 \cdot 10^{-8}$	$1.413 \cdot 10^{-8}$
4	3.0027282376	3.0027282464	$8.833 \cdot 10^{-9}$	$2.223 \cdot 10^{-11}$	$2.926 \cdot 10^{-8}$	$2.924 \cdot 10^{-8}$
24/5	3.0027282376	3.0027282666	$2.903 \cdot 10^{-8}$	$-4.152 \cdot 10^{-12}$	$1.971 \cdot 10^{-8}$	$1.971 \cdot 10^{-8}$
28/5	3.0027282376	3.0027282779	$4.035 \cdot 10^{-8}$	$-1.203 \cdot 10^{-12}$	$9.316 \cdot 10^{-9}$	$9.317 \cdot 10^{-9}$
32/5	3.0027282376	3.0027282828	$4.525 \cdot 10^{-8}$	$-2.523 \cdot 10^{-13}$	$3.667 \cdot 10^{-9}$	$3.667 \cdot 10^{-9}$

36/5	3.0027282376	3.0027282847	4.709 $\cdot 10^{-8}$	-2.765 $\cdot 10^{-14}$	1.291 $\cdot 10^{-9}$	1.291 $\cdot 10^{-9}$
8	3.0027282376	3.0027282853	4.771 $\cdot 10^{-8}$	1.973 $\cdot 10^{-15}$	4.226 $\cdot 10^{-10}$	4.226 $\cdot 10^{-10}$

În Tabelul 4.31 se prezintă valorile pentru $\Phi''(0)$ și $\Phi(\infty)$ pentru cazul curgerii asimetrice cu pânză de aspirație.

Din Tabelele 4.28-4.31 rezultă că există o concordanță foarte bună între rezultatele numerice și rezultatele obținute cu ajutorul metodei MHAO.

Tabelul 4.31. Valori numerice pentru $\Phi''(0)$ și $\Phi(\infty)$ în cazul întinderii asimetrice cu pânză de aspirație $m = 2, a = 3$

λ	1	5	10
$\Phi''_{numeric}(0)$	-0.8578597370	-0.1935567447	0.0163824516
$\Phi''_{MHAO}(0)$	-0.8578597340	-0.1935567447	0.0163824515
$\Phi_{numeric}(\infty)$	3.0235285642	3.005309966	3.0027282376
$\Phi_{MHAO}(\infty)$	3.0235364880	3.0053612258	3.0027282856

În altă ordine de idei, în Figurile 4.15 - 4.22 este prezentat efectul parametrului de alunecare λ asupra deplasării $\bar{\Phi}(\eta)$ și asupra vitezei $\bar{\Phi}'(\eta)$ în ambele tipuri de curgeri. În Figurile 4.15 și 4.16 este prezentată variația funcțiilor $\bar{\Phi}$ și respectiv $\bar{\Phi}'$ pentru cazul curgerii plane cu pânză impermeabilă. În Figurile 4.17 și 4.18 au fost trasate variațiile funcțiilor $\bar{\Phi}$ și respectiv $\bar{\Phi}'$ pentru cazul curgerii plane cu pânză de aspirație.

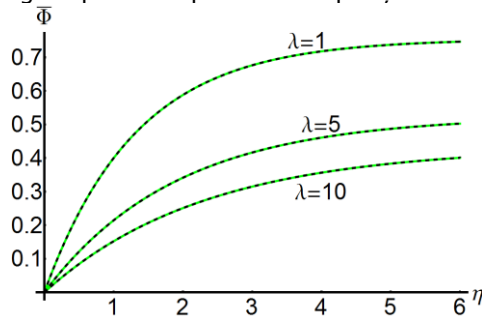


Fig. 4.15 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea parametrului de alunecare λ în cazul întinderii plane cu pânză impermeabilă ($m = 1, a = 0$): ---- soluția numerică; soluția MHAO

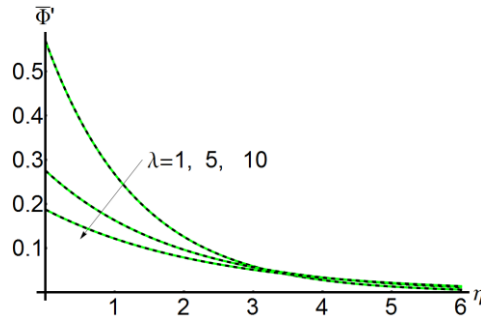


Fig. 4.16 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea parametrului de alunecare λ în cazul întinderii plane cu pânză impermeabilă ($m = 1, a = 0$): ---- soluția numerică; soluția MHAO

În Figurile 4.19 și 4.20 este prezentată variația funcțiilor $\bar{\Phi}$ și respectiv $\bar{\Phi}'$ pentru cazul curgerii asimetrice cu pânză impermeabilă. În Figurile 4.21 și 4.22 au fost prezentate variațiile funcțiilor $\bar{\Phi}$ și respectiv $\bar{\Phi}'$ pentru cazul curgerii asimetrice cu pânză de aspirație. Din aceste comparații este clară afirmația: componentele vitezei descresc odată cu creșterea parametrului de alunecare pentru toate cazurile.

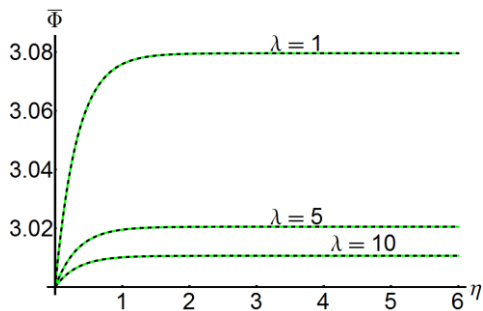


Fig. 4.17 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea parametrului de alunecare λ în cazul întinderii plane cu pânză de aspirație ($m = 1, a = 3$): ---- soluția numerică; soluția MHAO

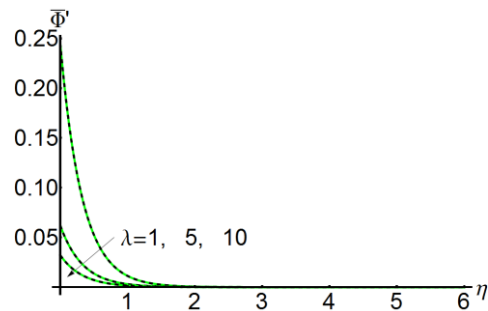


Fig. 4.18 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea parametrului de alunecare λ în cazul întinderii plane cu pânză de aspirație ($m = 1, a = 3$): ---- soluția numerică; soluția MHAO

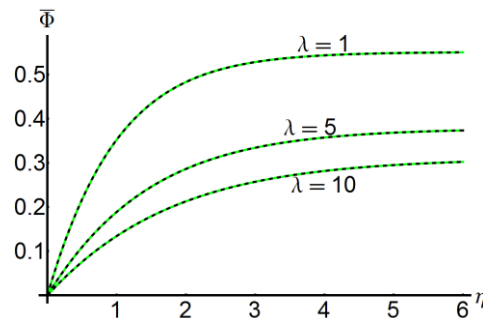


Fig. 4.19 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea parametrului de alunecare λ în cazul întinderii asimetrice cu pânză impermeabilă ($m = 2, a = 0$): ---- soluția numerică; soluția MHAO

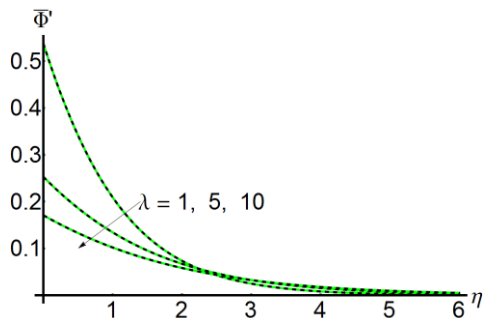


Fig. 4.20 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea parametrului de alunecare λ în cazul întinderii asimetrice cu pânză impermeabilă ($m = 2, a = 0$): ---- soluția numerică; soluția MHAO

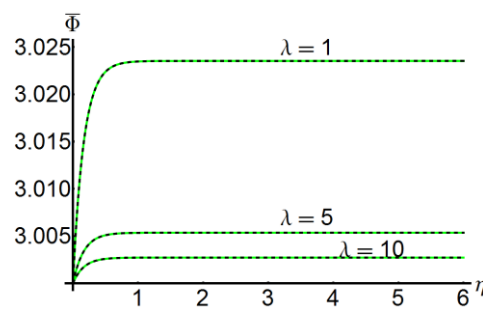


Fig. 4.21 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea parametrului de alunecare λ în cazul întinderii asimetrice cu pânză de aspirație ($m = 2, a = 3$): ---- soluția numerică; soluția MHAO

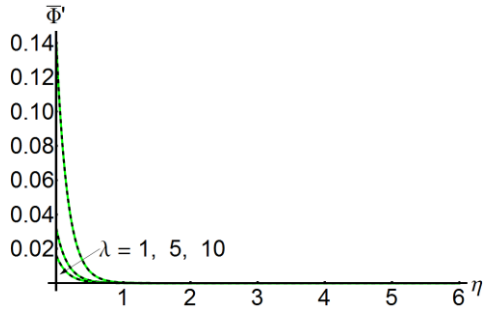


Fig. 4.22 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea parametrului de alunecare λ în cazul întinderii asimetrice cu pânză de aspirație ($m = 2, a = 3$): ---- soluția numerică; soluția MHAO

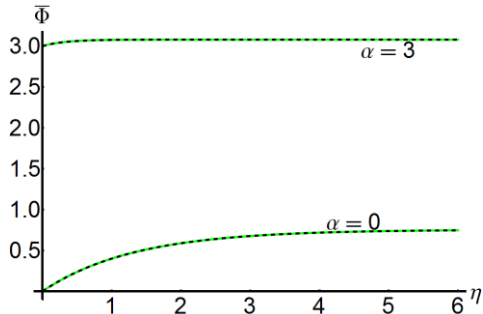


Fig. 4.23 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii plane ($m = 1, \lambda = 1$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

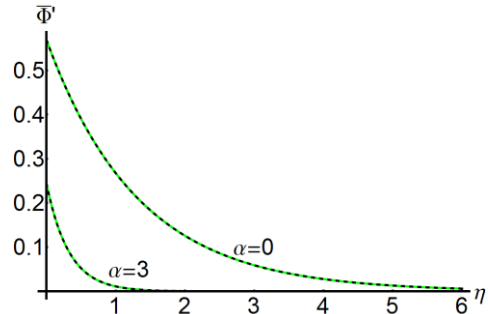


Fig. 4.24 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii plane ($m = 1, \lambda = 1$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

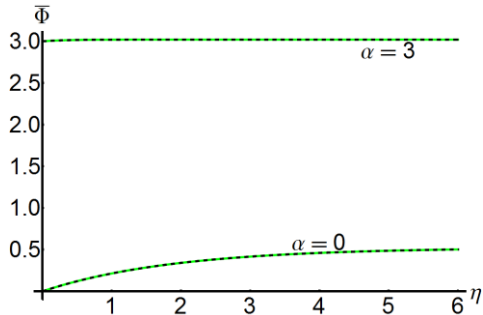


Fig. 4.25 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii plane ($m = 1, \lambda = 5$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

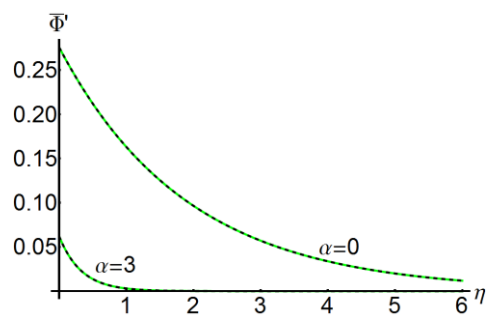


Fig. 4.26 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii plane ($m = 1, \lambda = 5$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

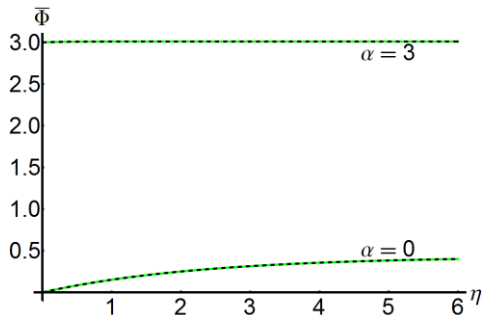


Fig. 4.27 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii plane ($m = 1, \lambda = 10$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

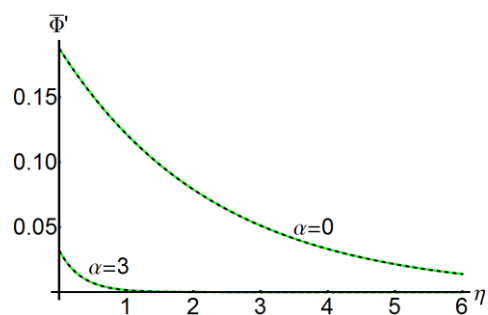


Fig. 4.28 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii plane ($m = 1, \lambda = 10$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

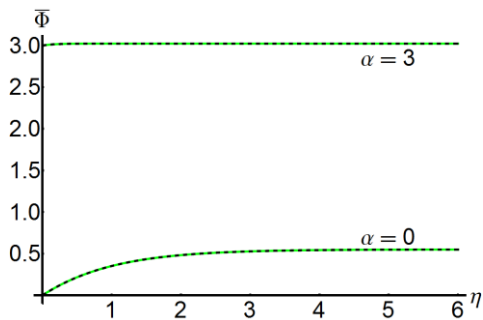


Fig. 4.29 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii asimetrice ($m = 2, \lambda = 1$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

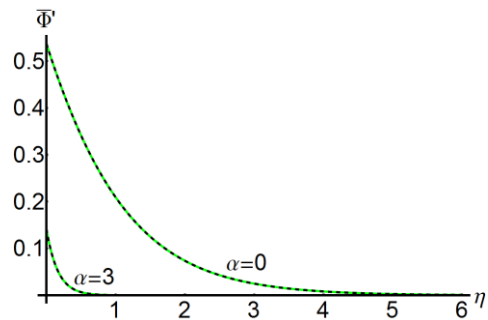


Fig. 4.30 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii asimetrice ($m = 2, \lambda = 1$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

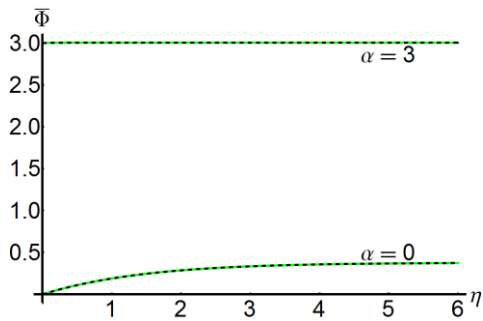


Fig. 4.31 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii asimetrice ($m = 2, \lambda = 5$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

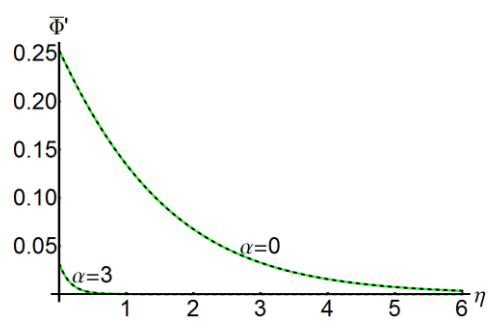


Fig. 4.32 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii asimetrice ($m = 2, \lambda = 5$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

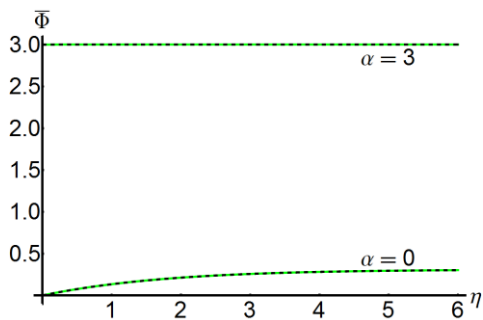


Fig. 4.33 Variația lui $\bar{\Phi}$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii asimetrice ($m = 2, \lambda = 10$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

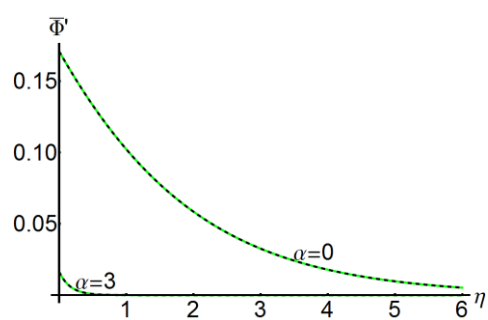


Fig. 4.34 Variația lui $\bar{\Phi}'$ prin creșterea coeficientului α în cazul întinderii asimetrice ($m = 2, \lambda = 10$):

---- soluția numerică; soluția MHAO

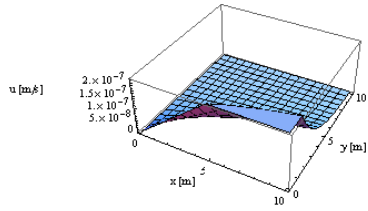


Fig. 4.35 Profilul vitezei u în direcția axei Ox , în cazul $m = 1$, $a = 0$, $\lambda = 1$ asociat curgerii plane

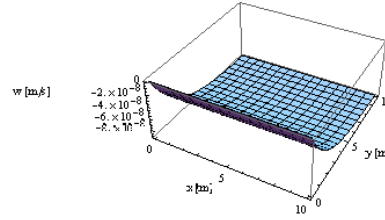


Fig. 4.36 Profilul vitezei w în direcția axei Oz , în cazul $m = 1$, $a = 0$, $\lambda = 1$ asociat curgerii plane

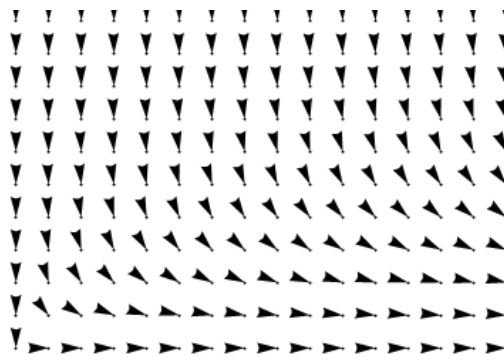


Fig. 4.37 Câmpul de vectori (u, w) , în cazul $m = 1$, $a = 0$, $\lambda = 1$ asociat curgerii plane

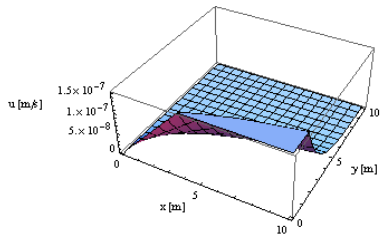


Fig. 4.38 Profilul vitezei u în direcția axei Ox , în cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 1$ asociat curgerii asimetrice

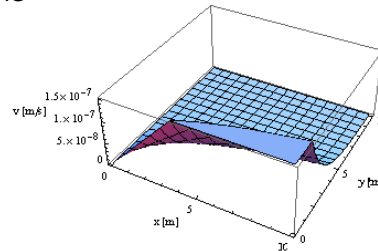


Fig. 4.39 Profilul vitezei w în direcția axei Oz , în cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 1$ asociat curgerii asimetrice

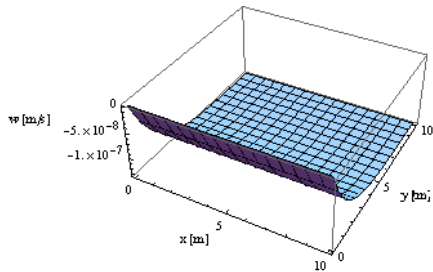


Fig. 4.40 Profilul vitezei w în direcția axei Oz , în cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 1$ asociat curgerii asimetrice

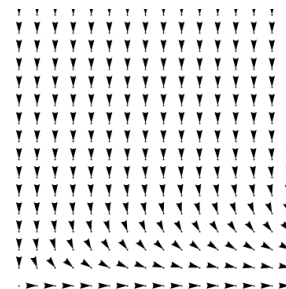


Fig. 4.41 Câmpul de vectori (u, w) , în cazul $m = 2$, $a = 0$, $\lambda = 1$ asociat curgerii asimetrice

În Figurile 4.23-4.28 au fost prezentate traiectoriile în cazul întinderii plane pentru fiecare valoare a parametrului de alunecare λ , iar în Figurile 4.29-4.34 au fost prezentate traiectoriile pentru cazul întinderii asimetrice pentru diferite valori ale lui λ . Este evident, din aceste grafice, că viteza este mai mică în cazul întinderii asimetrice decât în cazul întinderii plane.

În cazul fluidelor Newtoniene, este cunoscut faptul că vâscozitatea cinematică este de mărime de ordin între 10^{-9} și 10^{-6} (aceste fluide curg fără să acționeze asupra lor vreo forță, nu sunt supuse unor tensiuni externe). Pentru a da o semnificație soluțiilor analitice aproximative, determinate cu MHAO, se consideră curgerea laminară tri-dimensională cu alunecare parțială a unui fluid vâscos Newtonian caracterizat prin vâscozitatea cinematică $\nu = 2 \cdot 10^{-7} [m^2/s]$ și constanta de întindere $a = 75.2 \cdot 10^{-9} [1/s]$. Cu ajutorul relațiilor (4.2.6) se obțin expresiile componentelor vitezei (u, v, w) . Pentru **Exemplele 4.2.3.1 și 4.2.3.7**, aceste componente sunt reprezentate grafic în Figurile 4.35 și 4.36, în cazul curgerii plane cu pânză impermeabilă, respectiv Figurile 4.38-4.40, în cazul curgerii asimetrice cu pânză impermeabilă. În altă ordine de idei, în Figurile 4.37 și 4.41 este prezentat câmpul de vectori (u, w) pentru cele două cazuri amintite. Din aceste grafice se observă că fluidul curge mai repede în cazul curgerii plane decât în cazul curgerii asimetrice.

4.3 Curgerea unui fluid Newtonian vâscos pe o suprafață întinsă instabilă și transferul de căldură

Transferul de căldură și curgerea unui fluid vâscos, pe o suprafață întinsă este o problemă relevantă în multe procese industriale și inginerie. Exemple sunt fabricarea și desenearea foilor de plastic și cauciuc, foi de extrudare polimerică, producția de fibră de sticlă și hârtie, cultivări de cristale, turnare continuă, și așa mai departe. Răcirea suprafeței întinse necesită un control destinat temperaturii și, în consecință, cunoașterea debitului și transferului de căldură într-un fluid vâscos. Sakiadis [153], [154], a studiat fluxul la nivelul stratului limită pe o suprafață continuă și solidă în mișcare cu viteză constantă. Crane [35] a analizat problema întinderii având în vedere fluxul de fluid pe o suprafață liniară întinsă. Tsou și alții [168] au studiat viteza superficială constantă și temperatura. Gupta și Gupta [79] și Maneschy și alții [116] au extins activitatea lui Crane, a problemei întinderii cu o temperatură constantă de suprafață, inclusiv de aspirație sau suflare și la fluide care prezintă un comportament ne-newtonian. Grubka și Bobba [77] au studiat problema curgerii pe o suprafață întinsă în mișcare, cu o viteză liniară și cu o temperatură de suprafață variabilă. Wang [177] a introdus o transformare de similaritate care reduce ecuația impuls, în funcție de timp, la o ecuație diferențială neliniară de ordinul trei. El a analizat comportamentul hidrodinamic al unui corp fluid finit condus de o suprafață întinsă instabilă. Aceeași problemă a fost considerată de către Usha și Rukamani [172] pentru cazul asimetric. Anderson și alții [13] au analizat transferul de căldură pe o peliculă de lichid ce se deplasează pe o suprafață întinsă instabilă. Ali [9] și Magyari și ceilalți [111] au considerat suprafețe permeabile și diferite distribuții ale temperaturii de suprafață. Vajravelu [173] a studiat curgerea și transferul de căldură într-un fluid vâscos pe o foaie plană neliniară întinsă. Magyari și Keller [112] au aplicat metoda de transformare Merkin la problemele de transfer de căldură la nivelul stratului limită de echilibru a fluxurilor induse de suprafețe întinse. Elbashbeshy și Bazid [40] au studiat soluție ecuațiilor de strat laminar de frontieră corespunzătoare unei suprafețe întinse instabile. Dandapat și alții [36] au considerat efectul de inerție al lichidului. Căldura nestaționară și fluxul de fluid au fost investigate de către Ali și Magyari [10]. Liu și Anderson [32] au explorat caracteristicile termice ale unei pelicule vâscoase pe o suprafață întinsă instabilă. Chen [30] a analizat problema curgerii convective mixte a unui fluid MHD și transferul de căldură a unui fluid conductor electric de putere-joasă pe o suprafață întinsă în prezența căldurii generate / absorbite și radiația termică. Dandapat și alții [37] au studiat curgerea unei pelicule subțiri de lichid vâscos pe o foaie întinsă supusă diferitelor viteze neliniare de întindere în prezența unui câmp magnetic uniform transversal. Cortell [34] a prezentat momentul și transferul de căldură pentru curgerea unui fluid în stare de repaus pe o foaie neliniară întinsă permeabilă cu o distribuție prescrisă a temperaturii de putere joasă.

4.3.1 Ecuațiile de mișcare

Se consideră curgerea bi-dimensională instabilă, pe o suprafață continuă întinsă a unui fluid incompresibil, cu ecuațiile de continuitate, de moment și energiei termice [177], [13], [112], [10], [32]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.3.3)$$

unde u și v sunt componentele vitezei în direcțiile x și respectiv y , T este temperatura și k este conductivitatea termică a fluidului incompresibil. Condițiile la limită sunt:

$$u = \frac{u_0}{1+\gamma t} \frac{x}{l}, \quad v = 0, \quad T = T_\infty + \frac{T_0}{(1+\gamma t)^c} \left(\frac{x}{l}\right)^n \quad \text{la } y = 0 \quad (4.3.4)$$

$$u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty \quad \text{la } y \rightarrow \infty \quad (4.3.5)$$

unde u_0 , T_0 , T_∞ , γ sunt constante pozitive, c și n sunt arbitrare și l este lungimea de referință.

Dacă $Re = \frac{u_0 l}{\nu}$ și $Pr = \frac{\nu}{k}$ sunt numărul lui Reynolds și respectiv numărul lui Prandtl și dacă se alege funcția curent $\Psi(x, y)$ astfel încât

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.3.6)$$

atunci ecuația de continuitate (4.3.1) este satisfăcută și analiza matematică a problemelor (4.3.2) și (4.3.3) este simplificată prin introducerea următoarei transformări de similaritate:

$$\Psi = \frac{x}{l} \frac{f(\eta)}{\sqrt{Re}(1+\gamma t)^{1/2}} \quad (4.3.7)$$

$$\eta = \sqrt{Re} \frac{y}{l(1+\gamma t)^{1/2}} \quad (4.3.8)$$

$$T = T_\infty + T_0 \left(\frac{x}{l}\right)^n \frac{\theta(\eta)}{(1+\gamma t)^c} \quad (4.3.9)$$

T_0 fiind o temperatură de referință. Pe această cale relațiile (4.3.6) pot fi scrise în forma:

$$u(x, y, t) = \frac{u_0}{l} \frac{x}{(1+\gamma t)} f'(\eta) \quad (4.3.10)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{Re}(1+\gamma t)^{1/2}} f(\eta) \quad (4.3.11)$$

unde simbolul prim notează derivarea în raport cu η .

Substituind relațiile (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9), (4.3.10) și (4.3.11) în ecuațiile (4.3.2) și (4.3.3), se obține

$$f''' + ff'' - f'^2 + \Lambda(f' + \frac{1}{2}\eta f'') = 0 \quad (4.3.12)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' - n f'\theta + \Lambda(c\theta + \frac{1}{2}\eta \theta') = 0. \quad (4.3.13)$$

Aici $\Lambda = \frac{\gamma l}{u_0}$ este o măsură adimensională a instabilității.

Condițiile la limită în formă dimensională (4.3.4) și (4.3.5) devin

$$u = \frac{u_0}{l} \frac{x}{(1+yt)} f'(0) \quad \text{la } y = 0 \quad (4.3.14)$$

$$v = -\frac{u_0}{\sqrt{Re}(1+yt)^{1/2}} f'(0) \quad \text{la } y = 0 \quad (4.3.15)$$

$$T = T_\infty + T_0 \left(\frac{x}{l}\right)^n \frac{\theta(0)}{(1+yt)^c} \quad \text{la } y = 0 \quad (4.3.16)$$

astfel încât pentru funcțiile adimensionale f și θ , condițiile inițiale / la limită devin

$$f(0) = f_w, \quad f'(0) = 1, \quad f'(\infty) = 0 \quad (4.3.17)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0. \quad (4.3.18)$$

În plus, pe lângă condițiile (4.3.17) și (4.3.18), condițiile

$$f'(\eta) \geq 0, \quad \theta(\eta) \geq 0, \quad \forall \eta \geq 0 \quad (4.3.19)$$

trebuie, de asemenea, satisfăcute [10].

4.3.2 Soluții analitice aproximative pentru curgerea fluidului vâscos Newtonian și a transferul de căldură

Se vor folosi ideile de bază ale metodei MHAO considerând ecuația (4.3.12) cu condițiile inițiale/ la limită date de relația (4.3.17). Se poate alege operatorul liniar în două forme [67].

Cazul 4.3.2.1. Dacă $K > 0$ este un parametru necunoscut la acest moment, atunci se presupune că operatorul liniar are expresia:

$$L_f(\Phi(\eta)) = \Phi''' - K^2 \Phi'. \quad (4.3.20)$$

Ecuția (2.2.4) devine

$$\Phi_0''' - K^2 \Phi_0' = 0, \quad \Phi_0(0) = f_w, \quad \Phi_0'(0) = 1, \quad \Phi_0'(\infty) = 0.$$

care are următoarea soluție

$$\Phi_0(\eta) = f_w + \frac{1 - e^{-K\eta}}{K}. \quad (4.3.21)$$

Operatorul neliniar $N_f(\Phi(\eta))$ este obținut din ecuația (4.3.12):

$$N_f(\Phi(\eta)) = K^2 \Phi'(\eta) + \Phi(\eta) \Phi''(\eta) - \Phi'(\eta)^2 + \Lambda(\Phi'(\eta) + \frac{1}{2} \eta \Phi''(\eta)) = 0 \quad (4.3.22)$$

astfel încât substituind relația (4.3.21) în relația (4.3.22), se obține

$$N_f(\Phi_0(\eta)) = (a\eta + \beta) e^{-K\eta} \quad (4.3.23)$$

unde

$$a = -\frac{1}{2} K \Lambda; \quad \beta = K^2 - 1 - K f_w + \Lambda. \quad (4.3.24)$$

Având în vedere că în relația (4.3.23) apare o funcție exponențială și că funcția auxiliară $H_f(\eta, C_i)$ trebuie să fie de forma termenilor ce apar în relația (4.3.23), atunci se poate alege funcția $H_f(\eta, C_i)$ în următoarea formă:

$$H_f(\eta, C_i) = C_1 + C_2 \eta + C_3 \eta^2 + (C_4 + C_5 \eta + C_6 \eta^2) e^{-K\eta} + (C_7 + C_8 \eta + C_9 \eta^2) e^{-2K\eta} \quad (4.3.25)$$

sau

$$H_f^*(\eta, C_i) = C_1 + (C_2 + C_3\eta + C_4\eta^2)e^{-K\eta} \quad (4.3.26)$$

sau încă

$$H_f^{**}(\eta, C_i) = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + (C_4 + C_5\eta)e^{-K\eta} + (C_6 + C_7\eta + C_8\eta^2)e^{-2K\eta} \quad (4.3.27)$$

și așa mai departe, unde C_1, C_2, \dots sunt parametri necunoscuți la acest moment.

Dacă se alege numai expresia (4.3.25) pentru $H_f(\eta, C_i)$, atunci prin utilizarea relațiilor (4.3.23), (4.3.25) și (2.2.9), se poate obține ecuația pentru $\Phi_1(\eta, C_i)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1''' - K^2\Phi_1' = & [\beta C_1 + (aC_1 + \beta C_2)\eta + (aC_2 + \beta C_3)\eta^2 + aC_3\eta^3]e^{-K\eta} + \\ & + [\beta C_4 + (aC_4 + \beta C_5)\eta + (aC_5 + \beta C_6)\eta^2 + aC_6\eta^3]e^{-2K\eta} + [\beta C_7 + (aC_7 + \beta C_8)\eta + \\ & + (aC_8 + \beta C_9)\eta^2 + aC_9\eta^3]e^{-3K\eta}, \quad \Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = \Phi_1'(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Soluția ecuației (4.3.28) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \Phi_1(\eta) = & M_1 + [N_1 + (\frac{7aC_2}{4K^4} + \frac{3aC_1}{4K^3} + \frac{3\beta C_2}{4K^3} + \frac{\beta C_1}{2K^2} + \frac{45aC_3}{8K^5})\eta + \\ & + (\frac{3aC_2}{4K^3} + \frac{aC_1}{4K^2} + \frac{\beta C_2}{4K^2} + \frac{21aC_3}{8K^4})\eta^2 + (\frac{aC_2}{6K^2} + \frac{3aC_3}{4K^3} + \frac{\beta C_3}{6K^2})\eta^3 + \\ & + \frac{aC_3}{8K^2}\eta^4]e^{-K\eta} + [-\frac{85aC_5}{108K^5} - \frac{11aC_4}{36K^4} - \frac{11\beta C_5}{36K^4} - \frac{\beta C_4}{6K^3} - \frac{575aC_6}{216K^6} - \frac{85\beta C_6}{108K^5} - \\ & - (\frac{11aC_5}{18K^4} + \frac{aC_4}{6K^3} + \frac{\beta C_5}{6K^3} + \frac{85aC_6}{36K^5} + \frac{11\beta C_6}{18K^4})\eta - (\frac{aC_5}{6K^3} + \frac{11aC_6}{12K^4} + \\ & + \frac{\beta C_6}{6K^3})\eta^2 - \frac{aC_6}{6K^3}\eta^3]e^{-2K\eta} + [-\frac{115aC_8}{1728K^5} - \frac{13aC_7}{288K^4} - \frac{13\beta C_8}{288K^4} - \frac{\beta C_7}{24K^3} - \\ & - \frac{865aC_9}{6912K^6} - \frac{115\beta C_9}{1278K^5} - (\frac{aC_7}{24K^3} + \frac{13aC_8}{144K^4} + \frac{\beta C_8}{24K^3} + \frac{115aC_9}{576K^5} + \\ & + \frac{13\beta C_9}{144K^4})\eta - (\frac{aC_8}{24K^3} + \frac{13aC_9}{96K^4} + \frac{\beta C_9}{24K^3})\eta^2 - \frac{aC_9}{24K^3}\eta^3]e^{-3K\eta} \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

unde

$$\begin{aligned} M_1 = & -\frac{3a + 2K\beta}{4K^4}C_1 - \frac{7a + 3K\beta}{4K^5}C_2 - \frac{45a}{8K^6}C_3 - \frac{5a + 6K\beta}{36K^4}C_4 - \frac{19a + 15K\beta}{108K^4}C_5 - \\ & - \frac{65a + 38K\beta}{216K^6}C_6 - \frac{7a + 12K\beta}{144K^4}C_7 - \frac{37a + 42K\beta}{864K^5}C_8 - \frac{175a + 148K\beta}{3456K^6}C_9 \\ N_1 = & \frac{3a + 2K\beta}{4K^4}C_1 + \frac{7a + 3K\beta}{4K^5}C_2 + \frac{45a}{8K^6}C_3 + \frac{4a + 3K\beta}{9K^4}C_4 + \frac{26a + 12K\beta}{27K^5}C_5 + \\ & + \frac{80a + 26K\beta}{27K^6}C_6 + \frac{3a + 4K\beta}{32K^4}C_7 + \frac{7a + 6K\beta}{64K^5}C_8 + \frac{45a + 28K\beta}{256K^6}C_9. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi (2.2.5) pentru ecuațiile (4.3.12) și (4.3.17) este obținută din relațiile (4.3.21) și (4.3.30):

$$\bar{f}(\eta) = \bar{\Phi}(\eta) = \Phi_0(\eta) + \Phi_1(\eta). \quad (4.3.31)$$

În cele ce urmează, se consideră ecuațiile (4.3.13) și (4.3.18). În acest caz, se alege operatorul liniar în forma

$$L_\theta(\varphi(\eta)) = \varphi' + K\varphi \quad (4.3.32)$$

unde parametrul K este definit în ecuația (4.3.20).

Ecuția (2.2.4) devine

$$\varphi_0'' + K\varphi_0' = 0, \quad \varphi_0(0) = 1, \quad \varphi_0(\infty) = 0. \quad (4.3.33)$$

Ecuția (4.3.33) are soluția

$$\varphi_0(\eta) = e^{-K\eta}. \quad (4.3.34)$$

Operatorul nelinier $N_\theta(\varphi(\eta))$ este obținut din ecuația (4.3.12):

$$N_\theta(\varphi(\eta)) = \frac{-K}{Pr} \varphi' + \varphi \varphi' - n \varphi' \varphi + \Lambda(c\varphi + \frac{1}{2} \eta \varphi'). \quad (4.3.35)$$

Substituind relația (4.3.34) în relația (4.3.35), se obține

$$N_\theta(\varphi_0(\eta)) = (m_1\eta + m_2)e^{-K\eta} + m_3e^{-2K\eta} \quad (4.3.36)$$

unde

$$m_1 = -\frac{1}{2}K\Lambda; \quad m_2 = \frac{K^2}{Pr} - Kf_w - 1 + c\Lambda; \quad m_3 = 1 - n. \quad (4.3.37)$$

Funcția auxiliară $H_\theta(\eta, D_i)$ poate fi aleasă într-una din formele:

$$H_\theta(\eta, D_i) = D_1 + D_2\eta + D_3\eta^2 + (D_4 + D_5\eta + D_6\eta^2)e^{-K\eta} + (D_7 + D_8\eta)e^{-2K\eta} \quad (4.3.38)$$

sau

$$H_\theta^*(\eta, D_i) = D_1 + D_2\eta + D_3\eta^2 + (D_4 + D_5\eta)e^{-K\eta} + D_6e^{-2K\eta} \quad (4.3.39)$$

sau încă

$$H_\theta^{**}(\eta, D_i) = D_1 + (D_2 + D_3\eta)e^{-K\eta} + (D_4 + D_5\eta)e^{-2K\eta} \quad (4.3.40)$$

și așa mai departe, unde D_1, D_2, \dots sunt parametri necunoscuți.

Dacă se alege relația (4.3.38) pentru H_θ , atunci din relațiile (4.3.36), (4.3.38) și (2.2.9) se obține ecuația în $\varphi_1(\eta, D_i)$ astfel

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + K\varphi_1' = & [m_2D_1 + (m_1D_1 + m_2D_2)\eta + (m_1D_2 + m_2D_3)\eta^2 + m_1D_3\eta^3]e^{-K\eta} + \\ & + [m_2D_4 + m_3D_1 + (m_1D_4 + m_2D_5 + m_3D_2)\eta + (m_1D_5 + m_2D_6 + m_3D_3)\eta^2 + \\ & + m_1D_6\eta^3]e^{-2K\eta} + [m_3D_4 + m_2D_7 + (m_3D_5 + m_1D_7 + m_2D_8)\eta + \\ & + (m_1D_8 + m_3D_6)\eta^2]e^{-3K\eta} + (m_3D_7 + m_3D_8\eta)e^{-4K\eta}, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

Rezolvarea ecuației (4.3.41), conduce la soluția

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) = & [P_1 - (\frac{2m_1D_2}{K^3} + \frac{m_1D_1}{K^2} + \frac{m_2D_2}{K^2} + \frac{m_2D_1}{K} - \frac{2m_1D_3}{K^3} - \frac{6m_1D_3}{K^4})\eta - \\ & - (\frac{m_1D_2}{K^2} + \frac{m_1D_1}{2K} + \frac{m_2D_2}{2K} - \frac{m_2D_3}{K^2} - \frac{3m_1D_3}{K^3})\eta^2 - (\frac{m_1D_2}{3K} + \frac{m_2D_3}{3K} + \frac{m_1D_3}{K^2})\eta^3 - \\ & - \frac{m_1D_3}{4K}\eta^4]e^{-K\eta} + [\frac{45m_1D_6}{8K^5} + \frac{7m_2D_6}{4K^4} + \frac{7m_3D_3}{4K^4} + \frac{7m_1D_5}{4K^4} + \frac{3m_1D_4}{4K^3} + \frac{3m_2D_5}{4K^3} + \\ & + \frac{3m_3D_2}{4K^3} + \frac{m_2D_4}{2K^2} + \frac{m_3D_1}{2K^2} + (\frac{21m_1D_6}{4K^4} + \frac{3m_2D_6}{2K^3} + \frac{3m_3D_3}{2K^3} + \frac{3m_1D_2}{2K^3} + \frac{m_1D_4}{2K^2} + \\ & + \frac{m_2D_5}{2K^2} + \frac{m_3D_2}{2K^2})\eta + (\frac{9m_1D_6}{4K^3} + \frac{m_2D_6}{2K^2} + \frac{m_3D_3}{2K^2} + \frac{m_1D_5}{2K^2})\eta^2 + \frac{m_1D_6}{2K^2}\eta^3]e^{-2K\eta} + \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{19m_3D_6}{108K^4} + \frac{5(m_3D_5 + m_1D_7 + m_2D_8)}{36K^3} + \frac{6m_3D_4 + m_2D_7}{36K^2} + \left(\frac{m_3D_5 + m_1D_7 + m_2D_8}{6K^2} + \frac{5(m_1D_8 + m_3D_6)}{18K^3} \right) \eta + \frac{(m_1D_8 + m_3D_6)}{6K^2} \eta^2 \right] e^{-3K\eta} + \left(\frac{m_3D_7}{12K^2} + \frac{7m_3D_8}{144K^3} + \frac{m_3D_8}{12K^2} \eta \right) e^{-4K\eta}, \quad (4.3.42)$$

unde

$$P_1 = -\frac{m_3D_1}{2K^2} - \frac{3m_3D_2}{4K^3} - \frac{7m_3D_3}{4K^4} - \frac{9m_1 + 6Km_2 + 2Km_3}{12K^3} D_4 - \frac{63m_1 + 27Km_2 + 5Km_3}{36K^4} D_5 - \frac{1215m_1 + 378Km_2 + 38Km_3}{216K^5} D_6 - \frac{5m_1 + Km_2}{36K^3} D_7 - \frac{20m_2 + 7m_3}{144K^3} D_8. \quad (4.3.43)$$

Pe această cale, soluția aproximativă de ordinul întâi (2.2.5) pentru ecuațiile (4.3.13) și (4.3.18) devine

$$\bar{\theta}(\eta) = \bar{\varphi}(\eta) = \varphi_0(\eta) + \varphi_1(\eta, D_i). \quad (4.3.44)$$

Cazul 4.3.2.2 A doua variantă pentru alegerea operatorului liniar este

$$L_f(\Phi(\eta)) = \Phi''' + \frac{3K}{K\eta + 1} \Phi''. \quad (4.3.45)$$

Aproximarea inițială φ_0 poate fi obținută din ecuația

$$\varphi_0''' + \frac{3K}{K\eta + 1} \varphi_0'' = 0; \quad \varphi_0(0) = f_w, \quad \varphi_0'(0) = 1, \quad \varphi_0'(\infty) = 0 \quad (4.3.46)$$

și prin urmare:

$$\varphi_0(\eta) = \frac{1}{K} + f_w - \frac{1}{K(K\eta + 1)}. \quad (4.3.47)$$

Operatorul neliniar N_f pentru expresia dată de ecuația (4.3.47) poate fi scris prin

$$N_f(\varphi_0(\eta)) = \frac{\Lambda}{(K\eta + 1)^2} - \frac{K\Lambda\eta + 2 + 2Kf_w}{(K\eta + 1)^3} + \frac{1 + 6K^2}{(K\eta + 1)^4} \quad (4.3.48)$$

astfel încât se poate alege funcția auxiliară H_f în forma

$$H_f(\eta, C_i) = \frac{C_1}{(K\eta + 1)^2} + \frac{C_2}{(K\eta + 1)^3} + \frac{C_3}{(K\eta + 1)^4} + \frac{C_4}{(K\eta + 1)^5} + \frac{C_5}{(K\eta + 1)^6} + \frac{C_6}{(K\eta + 1)^7} + \frac{C_7}{(K\eta + 1)^8}. \quad (4.3.49)$$

Ecuația (2.2.9) devine

$$\begin{aligned} \varphi_1''' + \frac{3K}{K\eta + 1} \varphi_1'' &= \frac{\Lambda C_1}{(K\eta + 1)^4} - \frac{K\Lambda C_1 \eta}{(K\eta + 1)^5} + \frac{\Lambda C_2 - (2 + 2Kf_w)C_1}{(K\eta + 1)^5} - \\ &- \frac{K\Lambda C_2 \eta}{(K\eta + 1)^6} + \frac{(1 + 6K^2)C_1 - (2 + 2Kf_w)C_2 + \Lambda C_3}{(K\eta + 1)^6} - \\ &- \frac{K\Lambda C_3 \eta}{(K\eta + 1)^7} + \frac{(1 + 6K^2)C_2 - (2 + 2Kf_w)C_3 + \Lambda C_4}{(K\eta + 1)^7} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{K\Lambda C_4 \eta}{(K\eta + 1)^8} + \frac{(1 + 6K^2)C_3 - (2 + 2Kf_w)C_4 + \Lambda C_5}{(K\eta + 1)^8} - \\
& - \frac{K\Lambda C_5 \eta}{(K\eta + 1)^9} + \frac{(1 + 6K^2)C_4 - (2 + 2Kf_w)C_5 + \Lambda C_6}{(K\eta + 1)^9} - \\
& - \frac{K\Lambda C_6 \eta}{(K\eta + 1)^{10}} + \frac{(1 + 6K^2)C_5 - (2 + 2Kf_w)C_6 + \Lambda C_7}{(K\eta + 1)^{10}} - \\
& - \frac{K\Lambda C_7 \eta}{(K\eta + 1)^{11}} + \frac{(1 + 6K^2)C_6 - (2 + 2Kf_w)C_7}{(K\eta + 1)^{11}} + \\
& + \frac{(1 + 6K^2)C_7}{(K\eta + 1)^{12}}, \quad \Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = \Phi_1'(\infty) = 0. \quad (4.3.50)
\end{aligned}$$

Soluția ecuației (4.3.50) are forma

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\eta) = M_2 + \frac{N_2}{K\eta + 1} - \frac{(2 - \Lambda + 2Kf_w)C_1}{12K^3(K\eta + 1)^2} - \\
- \frac{(1 + 6K^2)C_1 + (2 - \Lambda + 2Kf_w)C_2}{36K^3(K\eta + 1)^3} - \frac{(1 + 6K^2)C_2 + (2 - \Lambda + 2Kf_w)C_3}{80K^3(K\eta + 1)^4} - \\
- \frac{(1 + 6K^2)C_3 + (2 - \Lambda + 2Kf_w)C_4}{150K^3(K\eta + 1)^5} - \frac{(1 + 6K^2)C_4 + (2 - \Lambda + 2Kf_w)C_5}{252K^3(K\eta + 1)^6} - \\
- \frac{(1 + 6K^2)C_5 + (2 - \Lambda + 2Kf_w)C_6}{392K^3(K\eta + 1)^7} - \frac{(1 + 6K^2)C_6 + (2 - \Lambda + 2Kf_w)C_7}{576K^3(K\eta + 1)^8} - \\
- \frac{(1 + 6K^2)C_7}{810K^3(K\eta + 1)^9}, \quad (4.3.51)
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
M_2 = - \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{12K^3} + \frac{1 + 6K^2}{18K^3} \right) C_1 - \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{18K^3} + \frac{3 + 18K^2}{80K^3} \right) C_2 - \\
- \left(\frac{3(2 - \Lambda + 2Kf_w)}{80K^3} + \frac{2 + 12K^2}{75K^3} \right) C_3 - \left(\frac{2(2 - \Lambda + 2Kf_w)}{75K^3} + \frac{5 + 30K^2}{252K^3} \right) C_4 - \\
- \left(\frac{5(2 - \Lambda + 2Kf_w)}{252K^3} + \frac{3 + 18K^2}{196K^3} \right) C_5 - \left(\frac{3(2 - \Lambda + 2Kf_w)}{196K^3} + \frac{7 + 42K^2}{576K^3} \right) C_6 - \\
- \left(\frac{7(2 - \Lambda + 2Kf_w)}{576K^3} + \frac{4 + 24K^2}{405K^3} \right) C_7 \quad (4.3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 = \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{6K^3} + \frac{1 + 6K^2}{12K^3} \right) C_1 + \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{12K^3} + \frac{1 + 6K^2}{20K^3} \right) C_2 + \\
+ \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{20K^3} + \frac{1 + 6K^2}{30K^3} \right) C_3 + \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{30K^3} + \frac{1 + 6K^2}{42K^3} \right) C_4 +
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{42K^3} + \frac{1 + 6K^2}{56K^3} \right) C_5 + \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{56K^3} + \frac{1 + 6K^2}{72K^3} \right) C_6 + \\ + \left(\frac{2 - \Lambda + 2Kf_w}{72K^3} + \frac{1 + 6K^2}{90K^3} \right) C_7$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi (2.2.5) pentru a doua variantă a ecuațiilor (4.3.12) și (4.3.17) este obținută din relațiile (4.3.47) și (4.3.51):

$$\bar{f}(\eta) = \bar{\phi}(\eta) = \phi_0(\eta) + \phi_1(\eta). \quad (4.3.53)$$

Pentru ecuațiile (4.3.13) și (4.3.18), operatorul linear în această a doua variantă, poate fi ales în forma:

$$L_\theta(\eta) = \varphi'' + \frac{2K}{K\eta + 1} \varphi'. \quad (4.3.54)$$

Ecuația (2.2.4) poate fi scrisă în forma

$$\varphi_0'' + \frac{2K}{K\eta + 1} \varphi_0' = 0, \quad \varphi_0(0) = 1, \quad \varphi_0(\infty) = 0 \quad (4.3.55)$$

și are soluția

$$\varphi_0(\eta) = \frac{1}{K\eta + 1}. \quad (4.3.56)$$

Pentru expresia (4.3.56), operatorul nelinier devine

$$N_\theta(\varphi_0(\eta)) = \frac{c\Lambda}{K\eta + 1} - \frac{K\Lambda\eta}{2(K\eta + 1)^2} - \frac{1 + Kf_w}{(K\eta + 1)^2} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)}{(K\eta + 1)^3}. \quad (4.3.57)$$

Ținând cont de relația (4.3.57), se alege funcția auxiliară H_θ prin

$$H_\theta(\eta, D_i) = \frac{D_1}{(\eta + 1)^2} + \frac{D_2}{(\eta + 1)^3} + \frac{D_3}{(\eta + 1)^4} + \frac{D_4}{(\eta + 1)^5} + \frac{D_5}{(\eta + 1)^6} + \frac{D_6}{(\eta + 1)^7} + \\ + \frac{D_7}{(\eta + 1)^8} + \frac{D_8}{(\eta + 1)^9} + \frac{D_9}{(\eta + 1)^{10}} + \frac{D_{10}}{(\eta + 1)^{11}} + \frac{D_{11}}{(\eta + 1)^{12}} + \frac{D_{12}}{(\eta + 1)^{13}} \quad (4.3.58)$$

astfel încât ecuația (2.2.9) poate fi scrisă în forma:

$$\varphi_1'' + \frac{2K}{K\eta + 1} \varphi_1' = \frac{c\Lambda D_1}{(K\eta + 1)^3} - \frac{K\Lambda D_1 \eta}{2(K\eta + 1)^4} + \frac{c\Lambda D_2 - (1 + Kf_w)D_1}{(K\eta + 1)^4} - \\ - \frac{K\Lambda D_2 \eta}{2(K\eta + 1)^5} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right) D_1 - (1 + Kf_w)D_2 + c\Lambda D_3}{(K\eta + 1)^5} - \\ - \frac{K\Lambda D_3 \eta}{2(K\eta + 1)^6} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right) D_2 - (1 + Kf_w)D_3 + c\Lambda D_4}{(K\eta + 1)^6} - \\ - \frac{K\Lambda D_4 \eta}{2(K\eta + 1)^7} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right) D_3 - (1 + Kf_w)D_4 + c\Lambda D_5}{(K\eta + 1)^7} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{K\Delta D_5\eta}{2(K\eta+1)^8} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_4 - (1 + Kf_w)D_5 + c\Delta D_6}{(K\eta+1)^7} - \\
& -\frac{K\Delta D_6\eta}{2(K\eta+1)^9} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_5 - (1 + Kf_w)D_6 + c\Delta D_7}{(K\eta+1)^9} - \\
& -\frac{K\Delta D_7\eta}{2(K\eta+1)^{10}} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_6 - (1 + Kf_w)D_7 + c\Delta D_8}{(K\eta+1)^{10}} - \\
& -\frac{K\Delta D_8\eta}{2(K\eta+1)^{11}} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_7 - (1 + Kf_w)D_8 + c\Delta D_9}{(K\eta+1)^{11}} - \\
& -\frac{K\Delta D_9\eta}{2(K\eta+1)^{12}} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_8 - (1 + Kf_w)D_9 + c\Delta D_{10}}{(K\eta+1)^{12}} - \\
& -\frac{K\Delta D_{10}\eta}{2(K\eta+1)^{13}} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_9 - (1 + Kf_w)D_{10} + c\Delta D_{11}}{(K\eta+1)^{13}} - \\
& -\frac{K\Delta D_{11}\eta}{2(K\eta+1)^{14}} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_{10} - (1 + Kf_w)D_{11} + c\Delta D_{12}}{(K\eta+1)^{14}} - \\
& -\frac{K\Delta D_{12}\eta}{2(K\eta+1)^{15}} + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_{11} - (1 + Kf_w)D_{12}}{(K\eta+1)^{15}} + \\
& + \frac{\left(\frac{2K^2}{Pr} + 1 - n\right)D_{12}}{(K\eta+1)^{16}}, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(\infty) = 0. \tag{4.3.59}
\end{aligned}$$

Soluția ecuației (4.3.59) cu soluția dată prin relațiile (4.3.57), conduc la soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuațiilor (4.3.13) și (4.3.18) în forma:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\eta) = \bar{\varphi}(\eta) = \varphi_0(\eta) + \varphi_1(\eta) = & \frac{1 + P_2}{K\eta + 1} + \frac{m_3 D_1}{2(K\eta + 1)^2} + \frac{m_2 D_1 + m_3 D_2}{6(K\eta + 1)^3} + \\
& + \frac{m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3}{12(K\eta + 1)^4} + \frac{m_1 D_2 + m_2 D_3 + m_3 D_4}{20(K\eta + 1)^5} + \frac{m_1 D_3 + m_2 D_4 + m_3 D_5}{30(K\eta + 1)^6} + \\
& + \frac{m_1 D_4 + m_2 D_5 + m_3 D_6}{42(K\eta + 1)^7} + \frac{m_1 D_5 + m_2 D_6 + m_3 D_7}{56(K\eta + 1)^8} + \frac{m_1 D_6 + m_2 D_7 + m_3 D_8}{72(K\eta + 1)^9} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_1 D_7 + m_2 D_8 + m_3 D_9}{90(K\eta + 1)^{10}} + \frac{m_1 D_8 + m_2 D_9 + m_3 D_{10}}{110(K\eta + 1)^{11}} + \frac{m_1 D_9 + m_2 D_{10} + m_3 D_{11}}{132(K\eta + 1)^{12}} + \\
& + \frac{m_1 D_{10} + m_2 D_{11} + m_3 D_{12}}{156(K\eta + 1)^{13}} + \frac{m_1 D_{11} + m_2 D_{12}}{182(K\eta + 1)^{14}} + \frac{m_1 D_{12}}{210(K\eta + 1)^{15}}, \quad (4.3.60)
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{2}{Pr} + \frac{1-n}{K^2}; \quad m_2 = \frac{\Lambda}{2K^2} - \frac{1}{K^3} - \frac{f_w}{K^2}; \quad m_3 = \frac{\Lambda}{K^2} \left(c - \frac{1}{2} \right); \\
P_2 &= -\left(\frac{m_1}{12} + \frac{m_2}{6} + \frac{m_3}{2} \right) D_1 - \left(\frac{m_1}{20} + \frac{m_2}{12} + \frac{m_3}{6} \right) D_2 - \left(\frac{m_1}{30} + \frac{m_2}{20} + \frac{m_3}{12} \right) D_3 - \\
& - \left(\frac{m_1}{42} + \frac{m_2}{30} + \frac{m_3}{20} \right) D_4 - \left(\frac{m_1}{56} + \frac{m_2}{42} + \frac{m_3}{30} \right) D_5 - \left(\frac{m_1}{72} + \frac{m_2}{56} + \frac{m_3}{42} \right) D_6 - \\
& - \left(\frac{m_1}{90} + \frac{m_2}{72} + \frac{m_3}{56} \right) D_7 - \left(\frac{m_1}{110} + \frac{m_2}{90} + \frac{m_3}{72} \right) D_8 - \left(\frac{m_1}{132} + \frac{m_2}{110} + \frac{m_3}{90} \right) D_9 - \\
& - \left(\frac{m_1}{156} + \frac{m_2}{132} + \frac{m_3}{110} \right) D_{10} - \left(\frac{m_1}{182} + \frac{m_2}{156} + \frac{m_3}{132} \right) D_{11} - \left(\frac{m_1}{210} + \frac{m_2}{182} + \frac{m_3}{156} \right) D_{12}. \quad (4.3.61)
\end{aligned}$$

4.3.3 Exemple numerice

În vederea arătării acurateții rezultatelor obținute, se vor determina parametrii de control ai convergenței K și C_i care apar în relațiile (4.3.31), (4.3.44), (4.3.53) și (4.3.60) cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate. Pe această cale, parametrii de control ai convergenței sunt determinați optimal și soluțiile aproximative de ordinul întâi sunt determinate pentru diferite valori ale coeficienților cunoscuți f_w , Λ , Pr , n și c . În cele ce urmează, se ilustrează acuratețea metodei MHAO comparând soluțiile aproximative obținute cu rezultatele integrării numerice calculate cu ajutorul metodei shooting combinată cu meota Runge-Kutta de ordin 4 folosind soft-ul Wolfram Mathematica 6.0.

Exemplul 4.3.3.1 Pentru prima variantă dată în subsecțiunea 4.1, se consideră $f_w = -1$, $\Lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $Pr = 0.7$. Pentru ecuația (4.3.31), urmând procedura descrisă mai sus sunt obținuți parametrii de control ai convergenței: $C_1 = 9.6452968755$, $C_2 = 0.1097422956$, $C_3 = -0.1193121348$, $C_4 = -20.9241100889$, $C_5 = 94.9807962191$, $C_6 = -69.7422167093$, $C_7 = 10.6458650144$, $C_8 = -93.7824327712$, $C_9 = -78.5221460579$, $K = 1.2635440003$

și în consecință, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.31) poate fi scrisă în forma:

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\eta) &= 0.4921441442 + (-13.0032535811 + 6.5746416764\eta - \\
& - 0.8531916063\eta^2 - 0.0148365254\eta^3 + 0.0059016610\eta^4) e^{-1.2635440003\eta} + \\
& + (5.3801670145 + 6.3720335263\eta + 5.5919507063\eta^2 - \\
& - 3.6402713785\eta^3) e^{-2.5270880007\eta} + (6.1309424223 + 8.4594437971\eta + \\
& + 0.7793533299\eta^2 - 1.0246373515\eta^3) e^{-3.7906320011\eta} \quad (4.3.62)
\end{aligned}$$

Acum, pentru ecuația (4.3.44), parametrii de control ai convergenței sunt:
 $D_1 = -6.6921310048$, $D_2 = 1.5495404722$, $D_3 = -0.0585397574$, $D_4 = -2.8927190000$,
 $D_5 = 16.5956433751$, $D_6 = -1.8970024371$, $D_7 = 90.5668746055$, $D_8 = 22.3875510963$

și prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.44) devine:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (-12.1849128512 + 11.4017666446\eta - 2.9831783642\eta^2 + \\ & + 0.2821061030\eta^3 - 0.0073174696\eta^4)e^{-1.2635440003\eta} + (7.6348206753 + \\ & + 13.8411701476\eta - 3.7554538548\eta^2 + 0.3753336719\eta^3)e^{-2.5270880007\eta} + \\ & + (5.5500921758 - 0.8058065356\eta - 1.4765051770\eta^2)e^{-3.7906320011\eta} \quad (4.3.63) \end{aligned}$$

În Tabelele 4.32 și 4.33 se prezintă o comparație între soluțiile aproximative de ordinul întâi date de relațiile (4.3.62) și respectiv (4.3.63), cu rezultatele numerice pentru câteva valori ale variabilei η , precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.32. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relația (4.3.62) și rezultatele numerice, pentru $f_w = -1$, $\Lambda = 1$ ($\varepsilon_f = |f_{numeric} - \bar{f}_{MHAO}|$)

η	$f_{numeric}$	\bar{f}_{MHAO} , (4.3.62)	ε_f
0	-1	-1.00	$3.55 \cdot 10^{-15}$
1	-0.1497942276	-0.1498344102	$4.01 \cdot 10^{-5}$
2	0.3108643384	0.3109544567	$9.01 \cdot 10^{-5}$
3	0.4604991620	0.4604195294	$7.96 \cdot 10^{-5}$
4	0.4887865463	0.4888639524	$7.74 \cdot 10^{-5}$
5	0.4919308455	0.4919139907	$1.68 \cdot 10^{-5}$
6	0.4921388939	0.4920918624	$4.70 \cdot 10^{-5}$
7	0.4921471111	0.4921672825	$2.01 \cdot 10^{-5}$
8	0.4921472622	0.4922055552	$5.82 \cdot 10^{-5}$
9	0.4921472290	0.4922010303	$5.38 \cdot 10^{-5}$
10	0.4921472001	0.4921818790	$3.46 \cdot 10^{-5}$

Exemplul 4.3.3.2 În acest caz, se consideră $f_w = -1$, $\Lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$,

$n = 1$, $Pr = 2$. Soluția $\bar{f}(\eta)$ este dată de relația (4.3.62). Parametrii de control ai convergenței pentru ecuația (4.3.44) sunt:

$D_1 = 30.0451241235$, $D_2 = -9.3295076070$, $D_3 = 0.7087908262$, $D_4 = -56.8560242711$,
 $D_5 = 14.9052101750$, $D_6 = -35.7551937615$, $D_7 = 202.9733744147$, $D_8 = 73.8738456424$,

astfel încât soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.44) devine:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (7.5223382835 - 21.9218912323\eta + 9.6128365232\eta^2 - \\ & - 1.5664765389\eta^3 + 0.0885988532\eta^4)e^{-1.2635440003\eta} + (-11.1527575799 + \\ & + 27.9256280939\eta + 4.7569854384\eta^2 + 7.0743863591\eta^3)e^{-2.5270880007\eta} + \\ & + (4.6304192964 - 7.7685639892\eta - 4.872132511\eta^2)e^{-3.7906320011\eta} \quad (4.3.64) \end{aligned}$$

În Tabelul 4.34 se prezintă o comparație între soluțiile aproximative de ordinul întâi date de relațiile (4.3.64) cu rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.33. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relațiile (4.3.63), respectiv (4.3.64) și rezultatele numerice, pentru $f_w = -1$, $\lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$,

$$n = 1, (\varepsilon_\theta = |\theta_{numeric} - \bar{\theta}_{MHAO}|)$$

η	$Pr = 0.7$			$Pr = 2$		
	$\eta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO},$ (4.3.63)	ε_θ	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO},$ (4.3.64)	ε_θ
0	1	1.0000000000	$5.32 \cdot 10^{-15}$	1	1.00	$4.4 \cdot 10^{-15}$
1	0.5326742751	0.5326094013	$6.48 \cdot 10^{-5}$	0.3342437188	0.3336572672	$5.86 \cdot 10^{-4}$
2	0.2137126209	0.2136635578	$4.90 \cdot 10^{-5}$	0.0347397038	0.0346981189	$4.15 \cdot 10^{-5}$
3	0.0624455901	0.0624695312	$2.39 \cdot 10^{-5}$	0.0011292869	0.0011292869	$1.83 \cdot 10^{-4}$
4	0.0129760976	0.0130451746	$6.90 \cdot 10^{-5}$	0.0000127051	0.0005111089	$4.98 \cdot 10^{-4}$
5	0.0019028731	0.0017825465	$1.20 \cdot 10^{-4}$	$-7.03 \cdot 10^{-8}$	0.0002892869	$2.89 \cdot 10^{-4}$
6	0.0001964797	0.0001536740	$4.28 \cdot 10^{-5}$	$-1.05 \cdot 10^{-7}$	0.0002730640	$2.72 \cdot 10^{-4}$
7	0.0000141245	0.0000939655	$7.98 \cdot 10^{-5}$	$-9.14 \cdot 10^{-8}$	0.0001343804	$1.34 \cdot 10^{-4}$
8	$5.56 \cdot 10^{-7}$	0.0001048851	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$-8.15 \cdot 10^{-8}$	0.0003422905	$3.42 \cdot 10^{-4}$
9	$-1.33 \cdot 10^{-7}$	0.0000741555	$7.42 \cdot 10^{-5}$	$-7.54 \cdot 10^{-8}$	0.0003254867	$3.25 \cdot 10^{-4}$
10	$-1.43 \cdot 10^{-7}$	0.0000405093	$4.06 \cdot 10^{-5}$	$-6.89 \cdot 10^{-8}$	0.0002249729	$2.25 \cdot 10^{-4}$

Exemplul 4.3.3 Pentru $f_w = 0$, $\Lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $Pr = 0.7$, parametrii de control ai convergenței pentru ecuația (4.3.31) sunt:

$$\begin{aligned} C_1 &= -25.0117201741, C_2 = 6.6137319587, C_3 = -19.6198516695, \\ C_4 &= 10.2458750670, C_5 = -14.5125817256, C_6 = 110.2766434456, \\ C_7 &= 16.4700689255, C_8 = 98.4254858353, \\ C_9 &= 175.2340779848, K = 2.7429608601 \end{aligned}$$

și prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.31) poate fi scrisă în forma:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) &= 0.9662741803 + (3.6114466434 - 8.7564860947\eta + \\ &+ 3.7113826615\eta^2 - 2.4930207584\eta^3 + 0.4470500279\eta^4)e^{-2.7429608601\eta} + \\ &+ (-3.3184342100 - 5.8768121011\eta - 4.4122265025\eta^2 + \\ &+ 1.2214145001\eta^3)e^{-5.4859217203\eta} + (-1.2592866137 - 3.0278370028\eta - \\ &- 1.8144246850\eta^2 + 0.4852193471\eta^3)e^{-8.2288825805\eta} \quad (4.3.65) \end{aligned}$$

Pentru ecuația (4.3.44), parametrii de control ai convergenței sunt:

$$\begin{aligned} D_1 &= -162.5504084166, D_2 = 85.2172492101, D_3 = -46.4287699827, \\ D_4 &= 508.1703952920, D_5 = -354.5685124251, D_6 = 786.5035291540, \\ D_7 &= -2220.5827908553, D_8 = -577.6054765061, \end{aligned}$$

și soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.44) este:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) &= (-309.4860987610 + 433.5833040526\eta - 238.2844781153\eta^2 + \\ &+ 63.5624829213\eta^3 - 5.8035962478\eta^4)e^{-2.7429608601\eta} + (413.8470916973 + \\ &+ 189.5182352991\eta + 450.3689197225\eta^2 - 71.6838089606\eta^3)e^{-5.4859217203\eta} + \\ &+ (-103.3609929363 - 53.0020202602\eta + 17.5481139404\eta^2)e^{-8.2288825805\eta} \quad (4.3.66) \end{aligned}$$

În Tabelele 4.35 și 4.36 se prezintă o comparație între soluțiile aproximative de ordinul întâi date de relațiile (4.3.65) și respectiv (4.3.66), cu rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.34. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relația (4.3.65) și rezultatele numerice, pentru $f_w = 0$, $\Lambda = 1$ ($\varepsilon_f = |f_{numeric} - \bar{f}_{MHAO}|$)

η	$f_{numeric}$	$\bar{f}_{MHAO}, (4.3.65)$	ε_f
0	$-2.72 \cdot 10^{-21}$	$-2.22 \cdot 10^{-16}$	$2.22 \cdot 10^{-16}$
1	0.6894348681	0.6894237664	$1.11 \cdot 10^{-5}$
2	0.9167697025	0.9167686777	$1.02 \cdot 10^{-6}$
3	0.9608822313	0.9608821622	$6.91 \cdot 10^{-8}$

4	0.9659198252	0.9659240893	$4.26 \cdot 10^{-6}$
5	0.9662621701	0.9662467814	$1.53 \cdot 10^{-5}$
6	0.9662761187	0.9662763785	$2.59 \cdot 10^{-7}$
7	0.9662764567	0.9662882274	$1.17 \cdot 10^{-5}$
8	0.9662764581	0.9662872359	$1.07 \cdot 10^{-5}$
9	0.9662764551	0.9662825969	$6.14 \cdot 10^{-6}$
10	0.9662764527	0.9662790666	$2.61 \cdot 10^{-6}$

Exemplul 4.3.3.4 Pentru $f_w = 0$, $\lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $Pr = 2$ soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.31) este dată de relația (4.3.65). Parametrii de control ai convergenței pentru ecuația (4.3.44) sunt determinați prin:

$$D_1 = -6.1397789751, D_2 = 4.5056075965, D_3 = -0.5220736728,$$

$$D_4 = -35.5868730308, D_5 = 113.2854944599,$$

$$D_6 = -114.1037778967, D_7 = 350.9820431138, D_8 = 162.9773924832,$$

astfel încât soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.44) poate fi scrisă prin:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (-0.4134528457 + 4.7385301362\eta - 3.5149237889\eta^2 + \\ & + 0.8627177660\eta^3 - 0.0652592091\eta^4)e^{-2.7429608601\eta} + (-3.1515927315 + \\ & + 14.8125629408\eta - 17.9982969580\eta^2 + 10.3996906730\eta^3)e^{-5.4859217203\eta} + \\ & + (4.5650455772 - 1.8953267703\eta - 4.9513828544\eta^2)e^{-8.2288825805\eta} \quad (4.3.67) \end{aligned}$$

În Tabelul 4.37 se compară soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (4.3.67) cu rezultatele numeric. De asemenea, sunt prezentate și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.35 Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relațiile (4.3.66), respectiv (4.3.67) și rezultatele numerice, pentru $f_w = 0$, $\lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$,

$$n = 1, (\varepsilon_\theta = |\theta_{numeric} - \bar{\theta}_{MHAO}|)$$

η	$Pr = 0.7$			$Pr = 2$		
	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO}$, (4.3.66)	ε_θ	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO}$, (4.3.67)	ε_θ
0	1	1.0000000000	$2.84 \cdot 10^{-14}$	1	0.9999999999	$8.88 \cdot 10^{-16}$
1	0.4003247620	0.4004484539	$1.23 \cdot 10^{-4}$	0.1197331463	0.1197256799	$7.46 \cdot 10^{-6}$
2	0.1184316476	0.1183669267	$6.47 \cdot 10^{-5}$	0.0042245165	0.0042165993	$7.91 \cdot 10^{-6}$
3	0.0250381505	0.0249827647	$5.53 \cdot 10^{-5}$	0.0000508826	0.0000581491	$7.26 \cdot 10^{-6}$

4	0.0037388119	0.0033436318	$3.95 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-7}$	0.0000140335	$1.38 \cdot 10^{-5}$
5	0.0003936490	0.0002426294	$1.51 \cdot 10^{-4}$	$-1.40 \cdot 10^{-8}$	$2.72 \cdot 10^{-6}$	$2.73 \cdot 10^{-6}$
6	0.0000293256	$-5.56 \cdot 10^{-6}$	$3.48 \cdot 10^{-5}$	$-1.25 \cdot 10^{-8}$	$2.31 \cdot 10^{-7}$	$2.44 \cdot 10^{-7}$
7	$1.64 \cdot 10^{-6}$	$-4.96 \cdot 10^{-6}$	$6.61 \cdot 10^{-6}$	$-1.10 \cdot 10^{-8}$	$-1.14 \cdot 10^{-9}$	$9.88 \cdot 10^{-9}$
8	$1.66 \cdot 10^{-7}$	$-9.79 \cdot 10^{-7}$	$1.14 \cdot 10^{-6}$	$-1.01 \cdot 10^{-8}$	$-3.85 \cdot 10^{-9}$	$6.32 \cdot 10^{-9}$
9	$1.01 \cdot 10^{-7}$	$-1.41 \cdot 10^{-7}$	$2.42 \cdot 10^{-7}$	$-9.72 \cdot 10^{-9}$	$-7.92 \cdot 10^{-10}$	$8.93 \cdot 10^{-9}$
10	$9.12 \cdot 10^{-8}$	$-1.74 \cdot 10^{-8}$	$1.08 \cdot 10^{-7}$	$-9.23 \cdot 10^{-9}$	$-1.15 \cdot 10^{-10}$	$9.12 \cdot 10^{-9}$

Exemplul 4.3.3.5 Se consideră $f_w = 1$, $\Lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $Pr = 0.7$.

Parametrii de control ai convergenței pentru ecuația (4.3.31) sunt dați prin:

$$C_1 = 0.0896409781, C_2 = -6.7409754539, C_3 = -8.2094550260, \\ C_4 = -0.4938997135, C_5 = -2.5507847956, C_6 = -17.8757706647, \\ C_7 = -0.0794196188, C_8 = -3.2167864927, C_9 = 4.3212597652, K = 3.2735461689.$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.31) se poate scrie astfel:

$$\bar{f}(\eta) = 1.6119227643 + (-0.8884126339 - 0.6754353143\eta - \\ -0.6308104346\eta^2 - 0.4913885608\eta^3 + 0.1567385680\eta^4)e^{-3.2735461689\eta} + \\ + (0.2723347361 + 0.5883664238\eta + 0.3787001472\eta^2 - \\ -0.1390101741\eta^3)e^{-6.5470923379\eta} + (0.0041551334 + 0.0026158441\eta - \\ -0.0361134342\eta^2 + 0.0084010234\eta^3)e^{-9.8206385068\eta} \quad (4.3.68)$$

Parametrii de control ai convergenței pentru ecuația (4.3.44) sunt:

$$D_1 = -109.3048316983, D_2 = 67.7129511272, D_3 = -41.6850053604, \\ D_4 = 381.1698243654, D_5 = -360.4698971005, D_6 = 816.0658192188, \\ D_7 = -1741.3618639076, D_8 = -524.9835767955,$$

și soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.44) devine:

$$\bar{\theta}(\eta) = (-169.6126739547 + 278.0490758824\eta - 175.3219141601\eta^2 + \\ + 53.8811240663\eta^3 - 5.2106256700\eta^4)e^{-3.2735461689\eta} + (235.3726180577 + \\ + 113.5920574435\eta + 381.0769578373\eta^2 - 62.3227668940\eta^3)e^{-6.5470923379\eta} + \\ + (-64.7599441030 - 43.0516620812\eta + 13.3642933814\eta^2)e^{-9.8206385068\eta} \quad (4.3.69)$$

În Tabelele 4.38 și 4.39 se prezintă o comparație între soluțiile aproximative de ordinul întâi date de relațiile (4.3.68) și respectiv (4.3.69), cu rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 4.36. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relația (4.3.68) și rezultatele numerice, pentru $f_w = 1$, $\lambda = 1$ ($\varepsilon_f = |f_{numeric} - \bar{f}_{MHAO}|$)

η	$f_{numeric}$	\bar{f}_{MHAO} , (4.3.68)	ε_f
0	1	1	0
1	1.5177074192	1.5177102108	$2.79 \cdot 10^{-6}$
2	1.6030516967	1.6030543811	$2.68 \cdot 10^{-6}$
3	1.6114161917	1.6114250084	$8.81 \cdot 10^{-6}$
4	1.6119056438	1.6119124642	$6.82 \cdot 10^{-6}$
5	1.6119228465	1.6119240499	$1.20 \cdot 10^{-6}$
6	1.6119232066	1.6119229689	$2.37 \cdot 10^{-7}$
7	1.6119232084	1.6119227834	$4.25 \cdot 10^{-7}$
8	1.6119232063	1.6119227657	$4.40 \cdot 10^{-7}$
9	1.6119232045	1.6119227644	$4.40 \cdot 10^{-7}$
10	1.6119232031	1.6119227643	$4.38 \cdot 10^{-7}$

Exemplul 4.3.3.6 Pentru $f_w = 1$, $\lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $Pr = 2$ soluția aproximativă de ordinul întâi pentru $\bar{f}(\eta)$ este dată de relația (4.3.68).

Pentru ecuația (4.3.44) parametrii de control ai convergenței sunt dați prin:

$$D_1 = -2.8367036538, D_2 = 1.6885612882, D_3 = -0.2429637782,$$

$$D_4 = 1.0483056239, D_5 = 66.7794092539,$$

$$D_6 = -107.0774020659, D_7 = 116.5916922691, D_8 = 87.5482503888.$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi (4.3.44) poate fi scrisă în forma:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.0531334758 + 0.8465102419\eta - 0.8618419294\eta^2 + 0.2835175722\eta^3 - \\ & - 0.0303704722\eta^4)e^{-3.2735461689\eta} + (0.6743212346 + 5.4965670108\eta - \\ & - 1.7750564463\eta^2 + 8.1774776144\eta^3)e^{-6.5470923379\eta} + (0.2725452894 - \\ & - 1.9452075278\eta - 2.2286802005\eta^2)e^{-9.8206385068\eta} \end{aligned} \quad (4.3.70)$$

În Tabelul 4.40 se prezintă o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (4.3.70) cu rezultatele numerice. De asemenea, se prezintă și abaterile corespunzătoare.

În Figurile 4.42 și 4.43 sunt reprezentate profilul funcției $\bar{f}(\eta)$ și respectiv profilul vitezei $\bar{f}'(\eta)$ pentru diferite valori ale coeficientului f_w . Este clar că soluția $\bar{f}(\eta)$ crește odată cu creșterea coeficientului f_w , iar viteza descrește odată cu creșterea lui f_w .

În Figurile 4.44 - 4.48 sunt reprezentate profilele temperaturii date pentru două valori ale numărului Prandtl $Pr = 0.7$ respectiv $Pr = 2$ și diferite valori ale

coeficientului f_w . Din Figurile 4.44 și 4.45 se observă că temperatura $\bar{\theta}(\eta)$ descrește odată cu creșterea lui f_w pentru orice valoare a numărului Pr .

Tablelul 4.37. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relațiile (4.3.69), respectiv (4.3.70) și rezultatele numerice, pentru $f_w = 1$, $\lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$,

$$n = 1, (\varepsilon_\theta = |\theta_{numeric} - \bar{\theta}_{MHAO}|)$$

η	$Pr = 0.7$			$Pr = 2$		
	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO},$ (4.3.69)	ε_θ	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO},$ (4.3.70)	ε_θ
0	1	1	0	1	1.00	$2.22 \cdot 10^{-16}$
1	0.2625846355	0.2627285301	$1.43 \cdot 10^{-4}$	0.0288438340	0.0288405127	$3.32 \cdot 10^{-6}$
2	0.0500297082	0.0502158852	$1.86 \cdot 10^{-4}$	0.0002626174	0.0002601131	$2.50 \cdot 10^{-6}$
3	0.0067456382	0.0064907372	$2.54 \cdot 10^{-4}$	$8.78 \cdot 10^{-7}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$1.46 \cdot 10^{-6}$
4	0.0006411974	0.0005182199	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-8}$	$4.33 \cdot 10^{-8}$	$2.64 \cdot 10^{-8}$
5	0.0000429733	0.0000246256	$1.83 \cdot 10^{-5}$	$1.38 \cdot 10^{-8}$	$-6.24 \cdot 10^{-8}$	$7.63 \cdot 10^{-8}$
6	$2.05 \cdot 10^{-6}$	$2.13 \cdot 10^{-7}$	$1.83 \cdot 10^{-6}$	$1.23 \cdot 10^{-8}$	$-1.18 \cdot 10^{-8}$	$2.42 \cdot 10^{-8}$
7	$8.85 \cdot 10^{-8}$	$-9.42 \cdot 10^{-8}$	$1.82 \cdot 10^{-7}$	$1.12 \cdot 10^{-8}$	$-1.33 \cdot 10^{-9}$	$1.25 \cdot 10^{-8}$
8	$2.04 \cdot 10^{-8}$	$-1.23 \cdot 10^{-8}$	$3.28 \cdot 10^{-8}$	$1.06 \cdot 10^{-8}$	$-1.16 \cdot 10^{-10}$	$1.07 \cdot 10^{-8}$
9	$1.72 \cdot 10^{-8}$	$-1.08 \cdot 10^{-9}$	$1.83 \cdot 10^{-8}$	$1.02 \cdot 10^{-8}$	$-8.76 \cdot 10^{-12}$	$1.02 \cdot 10^{-8}$
10	$1.58 \cdot 10^{-8}$	$-7.97 \cdot 10^{-11}$	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$9.70 \cdot 10^{-9}$	$-5.93 \cdot 10^{-13}$	$9.70 \cdot 10^{-9}$

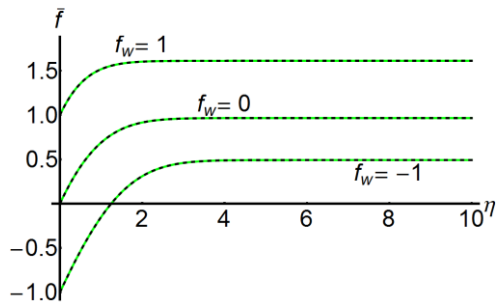


Fig. 4.42 Soluțiile $\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ date de relațiile (4.3.62), (4.3.65) și (4.3.68) pentru diferite valori ale lui f_w :
 -----soluția numerică; soluția MHAO

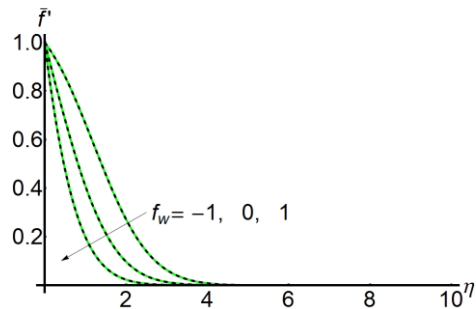


Fig. 4.43 Soluțiile $\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ obținute din relațiile (4.3.62), (4.3.65) și (4.3.68) pentru diferite valori ale lui f_w :
 -----soluția numerică;soluția MHAO

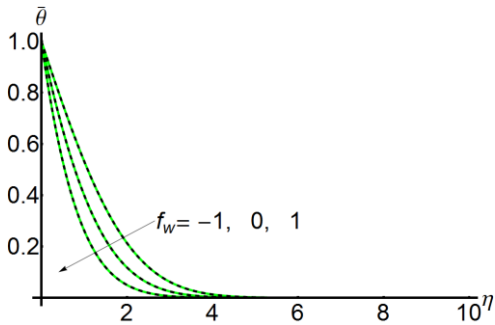


Fig. 4.44 Soluțiile $\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$ date de relațiile (4.3.63), (4.3.66) și (4.3.69) pentru $\lambda = 1, c = 1/2, n = 1, Pr = 0.7$ și trei valori ale lui f_w :
 -----soluția numerică;soluția MHAO

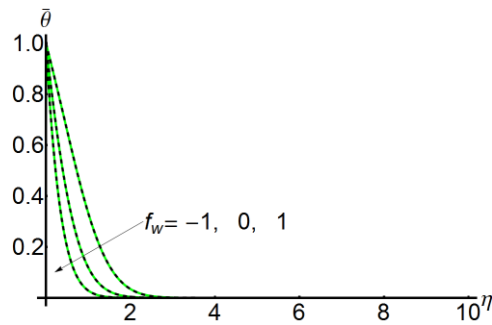


Fig. 4.45 Soluțiile $\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$ date de relațiile (4.3.63), (4.3.66) și (4.3.69) pentru $\lambda = 1, c = 1/2, n = 1, Pr = 2$ și trei valori ale lui f_w :
 -----soluția numerică;soluția MHAO

Din Figurile 4.46 - 4.48 se poate concluziona că temperatura descrește odată cu creșterea numărului Prandtl și pentru diferite valori ale lui f_w .

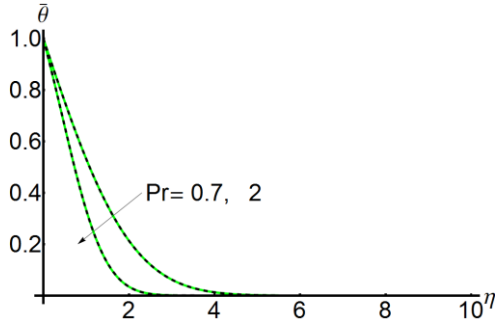


Fig. 4.46 Soluțiile $\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$ date de relațiile (4.3.63) și (4.3.64) pentru $\lambda = 1, c = 1/2, n = 1, f_w = -1$ și două valori ale numărului Pr: -----soluția numerică;soluția MHAO

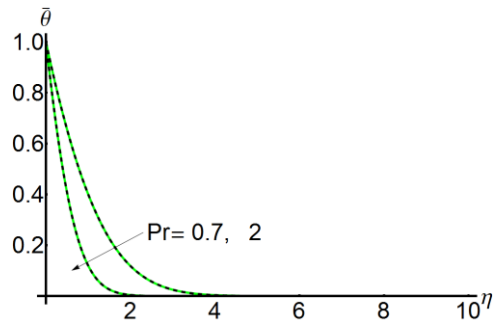


Fig. 4.47 Soluțiile $\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$ date de relațiile (4.3.66) și (4.3.67) pentru $\lambda = 1, c = 1/2, n = 1, f_w = 0$ și două valori ale numărului Pr: -----soluția numerică;soluția MHAO

Pentru a doua variantă dată în Subsecțiunea 4.2, se prezintă numai soluțiile aproximative de ordinul întâi $\bar{f}(\eta)$ și $\bar{\theta}(\eta)$ date prin ecuațiile (4.3.53) și respectiv (4.3.60). Se menționează că valorile coeficienților din Exemplul 4.3.3.β sunt aceleași cu coeficienții din Exemplul 4.3.3.β', β = 1, 2, ..., 6.

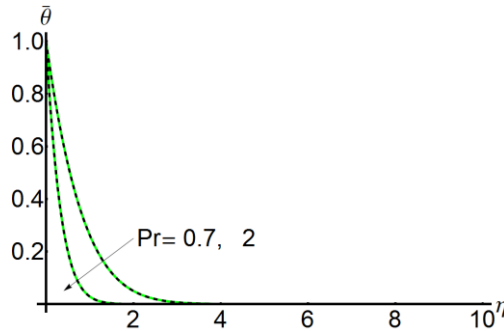


Fig. 4.48 Soluțiile $\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$ date de relațiile (4.3.69) și (4.3.70) pentru $\lambda = 1, c = 1/2, n = 1, f_w = 1$ și două valori ale numărului Pr : ----- soluția numerică; soluția MHAO

Exemplul 4.3.3.1'

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 0.4835407781 - \frac{160.6727530823}{(1+0.7469211860\eta)^9} + \frac{633.1433635563}{(1+0.7469211860\eta)^8} - \\ & - \frac{892.4875001383}{(1+0.7469211860\eta)^7} + \frac{426.4144218646}{(1+0.7469211860\eta)^6} + \frac{159.3296084991}{(1+0.7469211860\eta)^5} - \\ & - \frac{235.7972895388}{(1+0.7469211860\eta)^4} + \frac{78.4024369095}{(1+0.7469211860\eta)^3} - \frac{10.3553564922}{(1+0.7469211860\eta)^2} + \\ & + \frac{0.5395276438}{1+0.7469211860\eta} \end{aligned} \quad (4.3.71)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\eta) = & \frac{5776.4812527607}{(1+0.7469211860\eta)^{12}} - \frac{31369.2664427790}{(1+0.7469211860\eta)^{11}} + \frac{71958.8814604830}{(1+0.7469211860\eta)^{10}} - \\
& - \frac{89923.1448725742}{(1+0.7469211860\eta)^9} + \frac{65355.5376310228}{(1+0.7469211860\eta)^8} - \frac{26746.1538968436}{(1+0.7469211860\eta)^7} + \\
& + \frac{4965.4696216472}{(1+0.7469211860\eta)^6} + \frac{132.5980830091}{(1+0.7469211860\eta)^5} - \frac{164.5468864556}{(1+0.7469211860\eta)^4} + \\
& + \frac{15.1631963445}{(1+0.7469211860\eta)^3} - \frac{0.0191466148}{1+0.7469211860\eta} \quad (4.3.72)
\end{aligned}$$

Exemplul 4.3.3.2'

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\eta) = & -\frac{2774.0167245485}{(1+0.7469211860\eta)^{12}} + \frac{14175.2434254252}{(1+0.7469211860\eta)^{11}} - \\
& - \frac{29579.9446633193}{(1+0.7469211860\eta)^{10}} + \frac{31500.0785269703}{(1+0.7469211860\eta)^9} - \frac{16564.3693045166}{(1+0.7469211860\eta)^8} + \\
& + \frac{1958.3672090004}{(1+0.7469211860\eta)^7} + \frac{2217.7863982347}{(1+0.7469211860\eta)^6} - \frac{1125.5665403671}{(1+0.7469211860\eta)^5} + \\
& + \frac{207.3901565820}{(1+0.7469211860\eta)^4} - \frac{13.9840036775}{(1+0.7469211860\eta)^3} + \frac{0.0155202164}{1+0.7469211860\eta} \quad (4.3.73)
\end{aligned}$$

Tabelul 4.38. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relația (4.3.71) și rezultatele numerice, pentru $f_w = -1$, $\Lambda = 1$ ($\varepsilon_f = |f_{numeric} - \bar{f}_{MHAO}|$)

η	$f_{numeric}$	$\bar{f}_{MHAO}, (4.3.71)$	ε_f
0	-1	-1.00	$2.19 \cdot 10^{-12}$
1	-0.1497942044	-0.1529007368	$3.10 \cdot 10^{-3}$
2	0.3108644420	0.3104344026	$4.30 \cdot 10^{-4}$
3	0.4604993765	0.4538634998	$6.63 \cdot 10^{-3}$
4	0.4887868562	0.4892067993	$4.19 \cdot 10^{-4}$
5	0.4919312215	0.4954735834	$3.54 \cdot 10^{-3}$
6	0.4921393144	0.4948271475	$2.68 \cdot 10^{-3}$
7	0.4921475634	0.4931440674	$9.96 \cdot 10^{-4}$
8	0.4921477384	0.4918139645	$3.33 \cdot 10^{-4}$
9	0.4921477238	0.4910192311	$1.12 \cdot 10^{-3}$
10	0.4921477099	0.4906553086	$1.49 \cdot 10^{-3}$

Tabelul 4.39. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relațiile (4.3.72), respectiv (4.3.73) și rezultatele numerice, pentru $f_w = -1$, $\Lambda = 1$,

$$c = \frac{1}{2}, \quad n = 1, \quad (\varepsilon_\theta = |\theta_{numeric} - \bar{\theta}_{MHAO}|)$$

η	$Pr = 0.7$			$Pr = 2$		
	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO},$ (4.3.72)	ε_θ	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO},$ (4.3.73)	ε_θ
0	1	1.00	$6.36 \cdot 10^{-12}$	1	1.00	$8.41 \cdot 10^{-12}$
1	0.5330730009	0.5322232473	$8.49 \cdot 10^{-4}$	0.3347045498	0.3345263562	$1.78 \cdot 10^{-4}$
2	0.2146584465	0.2129729862	$1.68 \cdot 10^{-3}$	0.0348756972	0.0363459695	$1.47 \cdot 10^{-3}$
3	0.0628614705	0.0636111016	$7.49 \cdot 10^{-4}$	0.0011477450	- 0.0004370307	$1.58 \cdot 10^{-3}$
4	0.0130346763	0.0147892863	$1.75 \cdot 10^{-3}$	0.0000128032	- 0.0003197189	$3.32 \cdot 10^{-4}$
5	0.0019066843	0.0016130301	$2.93 \cdot 10^{-4}$	$-1.70 \cdot 10^{-7}$	0.0007745297	$7.74 \cdot 10^{-4}$
6	0.0001967000	- 0.0009503492	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$-1.90 \cdot 10^{-7}$	0.0007470530	$7.47 \cdot 10^{-4}$
7	0.0000142565	- 0.0007669977	$7.81 \cdot 10^{-4}$	$-1.66 \cdot 10^{-7}$	0.0003234150	$3.23 \cdot 10^{-4}$
8	$6.74 \cdot 10^{-7}$	- 0.0001148534	$1.15 \cdot 10^{-4}$	$-1.46 \cdot 10^{-7}$	- 0.0000957322	$9.55 \cdot 10^{-5}$
9	$-2.78 \cdot 10^{-8}$	0.0004251870	$4.25 \cdot 10^{-4}$	$-1.30 \cdot 10^{-7}$	- 0.0003953363	$3.95 \cdot 10^{-4}$
10	$-4.86 \cdot 10^{-8}$	0.0007622847	$7.62 \cdot 10^{-4}$	$-1.17 \cdot 10^{-7}$	- 0.0005724549	$5.72 \cdot 10^{-4}$

Exemplul 4.3.3.3'

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(\eta) = & 0.9621568509 - \frac{40.4435319395}{(1+0.2350916817\eta)^9} + \frac{116.0406686825}{(1+0.2350916817\eta)^8} - \\
 & - \frac{66.6539187472}{(1+0.2350916817\eta)^7} - \frac{101.0600483755}{(1+0.2350916817\eta)^6} + \frac{157.2214635275}{(1+0.2350916817\eta)^5} - \\
 & - \frac{86.2725049816}{(1+0.2350916817\eta)^4} + \frac{23.1122830793}{(1+0.2350916817\eta)^3} - \frac{3.0970790202}{(1+0.2350916817\eta)^2} + \\
 & + \frac{0.1905109238}{1+0.2350916817\eta} \quad (4.3.74) \\
 \bar{\theta}(\eta) = & \frac{8.6480822639}{(1+0.2350916817\eta)^{12}} - \frac{278.4205849661}{(1+0.2350916817\eta)^{11}} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{960.0799007261}{(1+0.2350916817\eta)^{10}} - \frac{1139.8489060253}{(1+0.2350916817\eta)^9} + \frac{157.1027538440}{(1+0.2350916817\eta)^8} + \\
& + \frac{802.5519134898}{(1+0.2350916817\eta)^7} - \frac{758.3086510430}{(1+0.2350916817\eta)^6} + \frac{302.9379777076}{(1+0.2350916817\eta)^5} - \\
& - \frac{58.3046748949}{(1+0.2350916817\eta)^4} + \frac{4.5726605819}{(1+0.2350916817\eta)^3} - \frac{0.0104716840}{1+0.2350916817\eta} \quad (4.3.75)
\end{aligned}$$

Exemplul 4.3.3.4'

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\eta) = & - \frac{15.3585464656}{(1+0.2350916817\eta)^{12}} + \frac{1324.9629387994}{(1+0.2350916817\eta)^{11}} - \\
& - \frac{6224.7965545045}{(1+0.2350916817\eta)^{10}} + \frac{12551.9849904292}{(1+0.2350916817\eta)^9} - \frac{13938.7342183360}{(1+0.2350916817\eta)^8} + \\
& + \frac{9296.1388960946}{(1+0.2350916817\eta)^7} - \frac{3815.8964759625}{(1+0.2350916817\eta)^6} + \frac{945.6792910964}{(1+0.2350916817\eta)^5} - \\
& - \frac{131.0527100223}{(1+0.2350916817\eta)^4} + \frac{8.0860093938}{(1+0.2350916817\eta)^3} - \frac{0.0136205223}{1+0.2350916817\eta} \quad (4.3.76)
\end{aligned}$$

Tabelul 4.40. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relația (4.3.74) și rezultatele numerice, pentru $f_w = 0$, $\Lambda = 1$ ($\varepsilon_f = |f_{numeric} - \bar{f}_{MHAO}|$)

η	$f_{numeric}$	$\bar{f}_{MHAO}, (4.3.74)$	ε_f
0	$-5.50 \cdot 10^{-21}$	$-1.27 \cdot 10^{-12}$	$1.27 \cdot 10^{-12}$
1	0.6894348341	0.6920308645	$2.59 \cdot 10^{-3}$
2	0.9167696529	0.9143867087	$2.38 \cdot 10^{-3}$
3	0.9608821303	0.9621083391	$1.22 \cdot 10^{-3}$
4	0.9659196704	0.9679260271	$2.00 \cdot 10^{-3}$
5	0.9662619960	0.9668394760	$5.77 \cdot 10^{-4}$
6	0.9662759513	0.9658454054	$4.30 \cdot 10^{-4}$
7	0.9662762950	0.9656226339	$6.53 \cdot 10^{-4}$
8	0.9662763018	0.9658253914	$4.51 \cdot 10^{-4}$
9	0.9662763032	0.9661465828	$1.29 \cdot 10^{-4}$
10	0.9662763043	0.9664313764	$1.55 \cdot 10^{-4}$

Tabelul 4.41. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relațiile (4.3.75), respectiv (4.3.76) și rezultatele numerice, pentru $f_w = 0$, $\lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$,
 $n = 1$, $(\varepsilon_\theta = |\theta_{numeric} - \bar{\theta}_{MHAO}|)$

η	$Pr = 0.7$			$Pr = 2$		
	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO}$, (4.3.75)	ε_θ	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO}$, (4.3.76)	ε_θ
0	1	1.00	$1.13 \cdot 10^{-13}$	1	0.9999999999	$1.36 \cdot 10^{-12}$
1	0.4004439081	0.4010649748	$6.21 \cdot 10^{-4}$	0.1193941521	0.1195658111	$1.71 \cdot 10^{-4}$
2	0.1185598839	0.1184236150	$1.36 \cdot 10^{-4}$	0.0042304240	0.0036984294	$5.31 \cdot 10^{-4}$
3	0.0250249964	0.0257450396	$7.20 \cdot 10^{-4}$	0.0000508647	0.0003939409	$3.43 \cdot 10^{-4}$
4	0.0037325749	0.0033592672	$3.73 \cdot 10^{-4}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	0.0001801267	$1.79 \cdot 10^{-4}$
5	0.0003927240	- 0.0001646366	$5.57 \cdot 10^{-4}$	$-1.41 \cdot 10^{-8}$	- 0.0002168337	$2.16 \cdot 10^{-4}$
6	0.0000290673	- 0.0000366134	$6.56 \cdot 10^{-5}$	$-1.25 \cdot 10^{-8}$	- 0.0001880096	$1.87 \cdot 10^{-4}$
7	$1.45 \cdot 10^{-6}$	0.0002647668	$2.63 \cdot 10^{-4}$	$-1.11 \cdot 10^{-8}$	$1.94 \cdot 10^{-6}$	$1.95 \cdot 10^{-6}$
8	$-4.85 \cdot 10^{-9}$	0.0002800726	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$-1.02 \cdot 10^{-8}$	0.0001329460	$1.32 \cdot 10^{-4}$
9	$-5.37 \cdot 10^{-8}$	0.0001278041	$1.27 \cdot 10^{-4}$	$-9.83 \cdot 10^{-9}$	0.0001566250	$1.56 \cdot 10^{-4}$
10	$-5.03 \cdot 10^{-8}$	- 0.0000578886	$5.78 \cdot 10^{-5}$	$-9.25 \cdot 10^{-9}$	0.0001038247	$1.03 \cdot 10^{-4}$

Exemplul 4.3.3.5'

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(\eta) = & 1.6105433181 - \frac{11.7580011934}{(1+0.3223046368\eta)^9} + \\
 & + \frac{29.8301473184}{(1+0.3223046368\eta)^8} - \frac{1.6143096961}{(1+0.3223046368\eta)^7} - \frac{59.3976259403}{(1+0.3223046368\eta)^6} + \\
 & + \frac{69.0721922017}{(1+0.3223046368\eta)^5} - \frac{34.3372361715}{(1+0.3223046368\eta)^4} + \frac{8.6285265528}{(1+0.3223046368\eta)^3} - \\
 & - \frac{1.0992585934}{(1+0.3223046368\eta)^2} + \frac{0.0650222037}{1+0.3223046368\eta} \quad (4.3.77) \\
 \bar{\theta}(\eta) = & - \frac{3.5244772845}{(1+0.3223046368\eta)^{12}} + \frac{82.4835925018}{(1+0.3223046368\eta)^{11}} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{560.0298081734}{(1+0.3223046368\eta)^{10}} + \frac{1639.7057028600}{(1+0.3223046368\eta)^9} - \frac{2528.2754012320}{(1+0.3223046368\eta)^8} + \\
& + \frac{2222.6091071034}{(1+0.3223046368\eta)^7} - \frac{1135.2615273237}{(1+0.3223046368\eta)^6} + \frac{331.3512102608}{(1+0.3223046368\eta)^5} - \\
& - \frac{51.4442236255}{(1+0.3223046368\eta)^4} + \frac{3.3913372651}{(1+0.3223046368\eta)^3} - \frac{0.0055123518}{1+0.3223046368\eta} \quad (4.3.78)
\end{aligned}$$

Exemplul 4.3.3.6'

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}(\eta) = & - \frac{10.3673796978}{(1+0.3223046368\eta)^{12}} + \frac{482.8585838577}{(1+0.3223046368\eta)^{11}} - \\
& - \frac{2284.5038236813}{(1+0.3223046368\eta)^{10}} + \frac{4704.3920875677}{(1+0.3223046368\eta)^9} - \frac{5322.4805989766}{(1+0.3223046368\eta)^8} + \\
& + \frac{3596.4529013927}{(1+0.3223046368\eta)^7} - \frac{1485.3963216692}{(1+0.3223046368\eta)^6} + \frac{367.2429052041}{(1+0.3223046368\eta)^5} - \\
& - \frac{50.2000243720}{(1+0.3223046368\eta)^4} + \frac{3.0055038826}{(1+0.3223046368\eta)^3} - \frac{0.0038335076}{1+0.3223046368\eta} \quad (4.3.79)
\end{aligned}$$

Tabelul 4.42. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relația (4.3.77) și rezultatele numerice, pentru $f_w = 1$, $\Lambda = 1$ ($\varepsilon_f = |f_{numeric} - \bar{f}_{MHAO}|$)

η	$f_{numeric}$	$\bar{f}_{MHAO}, (4.3.77)$	ε_f
0	1	1.00	$7.10 \cdot 10^{-14}$
1	1.5177074192	1.5178179504	$1.10 \cdot 10^{-4}$
2	1.6030516967	1.6030704647	$1.87 \cdot 10^{-5}$
3	1.6114161917	1.6119936425	$5.77 \cdot 10^{-4}$
4	1.6119056438	1.6119213150	$1.56 \cdot 10^{-5}$
5	1.6119228465	1.6116417023	$2.81 \cdot 10^{-4}$
6	1.6119232066	1.6116883119	$2.34 \cdot 10^{-4}$
7	1.6119232084	1.6118378302	$8.53 \cdot 10^{-5}$
8	1.6119232063	1.6119648304	$4.16 \cdot 10^{-5}$
9	1.6119232045	1.6120377026	$1.14 \cdot 10^{-4}$
10	1.6119232031	1.6120627833	$1.39 \cdot 10^{-4}$

Tabelul 4.43. Rezultate comparative între rezultatele MHAO date de relațiile (4.3.78), respectiv (4.3.79) și rezultatele numerice, pentru $f_w = 1$, $\lambda = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $n = 1$, ($\varepsilon_\theta = |\theta_{numeric} - \bar{\theta}_{MHAO}|$)

η	$Pr = 0.7$			$Pr = 2$		
	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO}$, (4.3.78)	ε_θ	$\theta_{numeric}$	$\bar{\theta}_{MHAO}$, (4.3.79)	ε_θ
0	1	1.00	$7.95 \cdot 10^{-13}$	1	1.00	$1.81 \cdot 10^{-12}$
1	0.2626142132	0.2625812869	$3.29 \cdot 10^{-5}$	0.0292003919	0.0292096747	$9.28 \cdot 10^{-6}$
2	0.0500241709	0.0503057086	$2.81 \cdot 10^{-4}$	0.0005730502	0.0007562468	$1.83 \cdot 10^{-4}$
3	0.0067427056	0.0067065432	$3.61 \cdot 10^{-5}$	0.0002597282	0.0002271428	$3.25 \cdot 10^{-5}$
4	0.0006409254	0.0003360891	$3.04 \cdot 10^{-4}$	0.0002214295	0.0000566272	$1.64 \cdot 10^{-4}$
5	0.0000429288	0.0000198651	$2.30 \cdot 10^{-5}$	0.0001935582	0.0001758501	$1.77 \cdot 10^{-5}$
6	$2.01 \cdot 10^{-6}$	0.0001596003	$1.57 \cdot 10^{-4}$	0.0001720066	0.0002527193	$8.07 \cdot 10^{-5}$
7	$5.78 \cdot 10^{-8}$	0.0001312550	$1.31 \cdot 10^{-4}$	0.0001548229	0.0002317234	$7.69 \cdot 10^{-5}$
8	$-7.26 \cdot 10^{-9}$	0.0000224552	$2.24 \cdot 10^{-5}$	0.0001407890	0.0001639037	$2.31 \cdot 10^{-5}$
9	$-8.05 \cdot 10^{-9}$	- 0.0000781005	$7.80 \cdot 10^{-5}$	0.0001291050	0.0000941465	$3.49 \cdot 10^{-5}$
10	$-7.46 \cdot 10^{-9}$	- 0.0001393169	$1.39 \cdot 10^{-4}$	0.0001192225	0.0000427725	$7.64 \cdot 10^{-5}$

Din Tablele 4.32-4.43 pentru ambele variante se poate concluziona că rezultatele obținute cu ajutorul metodei MHAO sunt foarte precise în comparație cu rezultatele numerice.

Mai mult, dacă se reprezintă grafic \bar{f} și $\bar{\theta}$ din a doua variantă, rezultatele obținute sunt nemodificate în comparație cu rezultatele din Figurile 4.29-4.35.

5 Fluide ne-Newtoniene

5.1 Soluții multiple pentru curgerea unui fluid Maxwell superior-convectiv pe o placă poroasă întinsă

Curgerea fluidelor ne-Newtoniene a fost analizată de numeroși cercetători, deoarece în aplicații practice fluidele ne-Newtoniene sunt mai adecvate decât fluidele newtoniene. Pentru astfel de fluide teoria Navier-Stokes devine inadecvată și, evident, există mai multe ecuații constitutive care au fost propuse pentru diferite tipuri de fluide ne-newtoniene. Exemple de curgeri ale fluidelor ne-newtoniene apar într-o mare varietate de aplicații: fibre sintetice, noroaie de foraj, prelucrarea produselor alimentare, polimeri plastici și altele. Un tip de fluide, în care se consideră fenomene de tip relaxare, este cunoscut ca modelul Maxwell. Unele investigații în acest domeniu sunt realizate de către matematicieni, ingineri, medici și informaticieni. Sakiadis [153], [154] este primul care a studiat diferite aspecte ale problemei de întindere: fluxul datorită unui perete semi - infinit deplasat pe orizontală într-un mediu fluid. Phan-Thien [139] și Zheng și alții [190] au considerat curgerea stagnară planară și asimetrică pentru un fluid Maxwell utilizând metoda shooting și metoda elementului de frontieră. Sadeghy și alții [146] au considerat problema fluxului hidrodinamic Sakiadis a unui fluid Maxwell superior convectiv, peste o placă rigidă ce se mișcă constant într-un fluid staționar. Metoda Homotopy Analysis Method este utilizată de Hayat și alții [83] pentru a rezolva ecuația diferențială neliniară a fluidului Maxwell superior convectiv. De asemenea, aceeași metodă este considerată de către Hayat și Sajid [89], Abbas și alții [1], [2], Hayat și alții [84]. Soluțiile duale, în problema curgerii convective mixte în apropierea punctului de stagnare pe o placă poroasă verticală, au fost prezentate de Ishak și alții [96]. Sahoo [147] a investigat efectele alunecării parțiale pe curgerea MHD și transferul de masă în conducerea electrică a unui fluid de gradul doi.

Luând în considerare aceste studii și analize, obiectivul prezentei secțiuni este a propune o procedură corectă pentru ecuația diferențială neliniară a problemei de flux magnetohidrodinamic a unui fluid Maxwell superior convectiv pe o placă poroasă întinsă folosind MHAO.

5.1.1 Ecuațiile de mișcare

Dacă se ia în considerare curgerea stabilă, incompresibilă, bidimensională a unui fluid Maxwell superior-convectiv pe o placă poroasă întinsă, atunci ecuațiile constitutive pentru tensorul tensiune Cauchy \mathbf{T} sunt

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S} \quad (5.1.1)$$

astfel încât extra-tensorul \mathbf{S} satisface condiția

$$\mathbf{S} + \lambda \left(\frac{d\mathbf{S}}{dt} - \mathbf{L}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}^T \right) = \mu \mathbf{A}_I \quad (5.1.2)$$

unde μ este vâscozitatea, λ este timpul de relaxare, iar tensorul Rivlin-Ericksen de speța I, \mathbf{A}_I este definit prin:

$$\mathbf{A}_I = (\mathit{grad}\mathbf{V}) + (\mathit{grad}\mathbf{V})^T. \quad (5.1.3)$$

în care $\frac{d}{dt}$ este derivata materială în raport cu timpul, iar \mathbf{V} este viteza.

Pentru curgerea de tip Sakiadis a unui fluid MHD, prin impunerea unui câmp magnetic uniform B_0 de-a lungul axei Oy și neglijând câmpul magnetic indus, ecuațiile care guvernează curgerea stabilă pot fi scrise prin

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1.4)$$

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - \delta B_0^2 u \quad (5.1.5)$$

$$\rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \quad (5.1.6)$$

unde u , v sunt componentele vitezei, p este presiunea, ρ este densitatea, δ este conductivitatea electrică și S_{xx} , S_{xy} , S_{yx} , S_{yy} sunt componentele extra-tensorului \mathbf{S} .

Folosind aproximările stratului limită [146], [157]

$$u = O(1), \quad v = O(\delta), \quad x = O(1), \quad y = O(\delta) \quad (5.1.7)$$

$$\frac{T_{xx}}{\rho} = O(1), \quad \frac{T_{xy}}{\rho} = O(\delta), \quad \frac{T_{yy}}{\rho} = O(\delta^2) \quad (5.1.8)$$

în absența gradientului de presiune, curgerea este guvernată de ecuația (5.1.4) și

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda(u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2uv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\delta B_0^2}{\rho} u \quad (5.1.9)$$

unde ν este vâscozitatea cinematică a fluidului.

Condițiile inițiale / la limită relevante pentru problema curgerii sunt

$$\begin{aligned} u &= Cx, \quad v = -V_0, \quad \text{la } y = 0 \\ u &\rightarrow 0, \quad \text{pentru } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

în care C este rata de alungire, iar $V_0 > 0$ este viteza de aspirație și $V_0 < 0$ este viteza de imersie.

Introducând funcția de curent Ψ astfel încât

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5.1.11)$$

atunci ecuația (5.1.4) este identic satisfăcută, iar ecuația (5.1.9) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \lambda \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} \right] = \\ = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} - \frac{\delta B_0^2}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Introducând transformările de similaritate

$$\eta = \sqrt{\frac{C}{\nu}} y, \quad \Psi = \sqrt{\nu C} x f(\eta) \quad (5.1.13)$$

relațiile (5.1.11) devin

$$u = Cx f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\nu C} f(\eta). \quad (5.1.14)$$

Substituind relațiile (5.1.14) în ecuația (5.1.12), se obține ecuația de guvernare în forma

$$f''' - M^2 f' - f'^2 + ff'' + \beta(2ff'' - f^2 f''') = 0 \quad (5.1.15)$$

unde $M^2 = \frac{\delta B_0^2}{\rho C}$ și $\beta = \lambda C$.

Acum, condițiile inițiale / la limită (5.1.10) sunt

$$f(0) = R, \quad f'(0) = 1, \quad f'(\infty) = 0 \quad (5.1.16)$$

cu $R = \frac{V_0}{\sqrt{VC}}$, unde $R > 0$ corespunde la viteza de aspirație și $R < 0$ pentru viteza de imersie.

În cele ce urmează, ecuația diferențială neliniară (5.1.15) cu condițiile inițiale / la limită (5.1.16) poate fi rezolvată analitic cu ajutorul metodei MHAO.

5.1.2 Soluții multiple pentru curgerea unui fluid Maxwell superior-convectiv

În cele ce urmează, se va aplica întreaga procedură pentru a obține soluții aproximative ale ecuațiilor (5.1.15)-(5.1.16). Pentru aceasta, se alege operatorul liniar în forma [120], [63]

$$L[f(\eta)] = f'''(\eta) - K^2 f'(\eta). \quad (5.1.17)$$

Operatorul liniar nu este unic. De asemenea, se mai pot alege:

$$L[f(\eta)] = f'''(\eta) + K f'(\eta). \quad (5.1.18)$$

$$L[f(\eta)] = f'''(\eta) + \frac{3K}{K\eta + 1} f''(\eta). \quad (5.1.19)$$

$$L[f(\eta)] = f'''(\eta) - \frac{6K^2}{(K\eta + 1)^2} f'(\eta). \quad (5.1.20)$$

unde K este un parametru pozitiv necunoscut și va fi determinat mai târziu. Aproximarea inițială $f_0(\eta)$ poate fi obținută din ecuația (2.3.3) cu condițiile inițiale / la limită

$$f_0(0) = R, \quad f_0'(0) = 1, \quad f_0'(\infty) = 0. \quad (5.1.21)$$

Ecuația (2.3.3) cu operatorii liniari (5.1.17) și (5.1.18) admite soluția:

$$f_0(\eta) = R + \frac{1}{K}(1 - e^{-K\eta}) \quad (5.1.22)$$

în timp ce ecuația (2.3.3) cu operatorii liniari (5.1.19) și (5.1.20) are soluția:

$$f_0(\eta) = R + \frac{1}{K} \ln(K\eta + 1) \quad (5.1.23)$$

În cele ce urmează se consideră numai operatorul liniar dat de relația (5.1.17) și aproximarea inițială dată de relația (5.1.22).

Operatorul neliniar corespunzător ecuației diferențiale neliniare (5.1.15) este definit prin

$$N[f(\eta)] = f''' - M^2 f' - f'^2 + ff'' + \beta(2fff'' - f^2 f'''). \quad (5.1.24)$$

Prin substituirea relației (5.1.22) în relația (5.1.24) are loc

$$N[f_0(\eta)] = [K^2 - M^2 - 1 - KR - \beta(1 + KR)^2] e^{-K\eta} + \beta e^{-3K\eta} \quad (5.1.25)$$

Pentru $\beta = 0$ și $K = \frac{1}{2}(R + \sqrt{R^2 + 4M^2 + 4})$, MHAO permite găsirea soluției exacte a ecuației (5.1.15) dată de relația (5.1.22).

Comparând relațiile (2.3.13) și (5.1.25), se poate găsi

$$\begin{aligned} h_1(\eta) &= K^2 - M^2 - 1 - KR - \beta(1 + KR)^2, \quad g_1(\eta) = e^{-K\eta}, \\ h_2(\eta) &= \beta, \quad g_2(\eta) = e^{-3K\eta}. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Funcția $f_1(\eta)$ dată de relația (2.3.14) devine

$$f_1(\eta, C_i) = H_1(\eta, C_i)e^{-K\eta} + H_2(\eta, C_i)e^{-3K\eta} \quad (5.1.27)$$

unde se pot alege o mulțime de posibilități pentru funcțiile auxiliare necunoscute H_i , $i = 1, \dots, j$ după cum urmează:

$$\begin{aligned} H_1(\eta, C_i) &= -\frac{C_1 + C_3 + C_5}{K} + C_1\eta + C_2\eta^2 + \left(\frac{C_1 + C_3 + C_5}{K} + C_3\eta + C_4\eta^2\right)e^{-K\eta}; \\ H_2(\eta, C_i) &= C_5\eta + C_6\eta^2 \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Substituind relațiile (5.1.28) în relația (5.1.27) se obține

$$\begin{aligned} f_1(\eta, C_i) &= -\left(\frac{C_1 + C_3 + C_5}{K} + C_1\eta + C_2\eta^2\right)e^{-K\eta} + \left(\frac{C_1 + C_3 + C_5}{K} + \right. \\ &\left. + C_3\eta + C_4\eta^2\right)e^{-2K\eta} + (C_5\eta + C_6\eta^2)e^{-3K\eta} \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (2.3.5) este obținută din relațiile (5.1.22) și (5.1.29)

$$\begin{aligned} (A_1) \quad \bar{f}(\eta, C_i) &= R + \frac{1}{K} + \left(-\frac{1 + C_1 + C_3 + C_5}{K} + C_1\eta + C_2\eta^2\right)e^{-K\eta} + \\ &+ \left(\frac{C_1 + C_3 + C_5}{K} + C_3\eta + C_4\eta^2\right)e^{-2K\eta} + (C_5\eta + C_6\eta^2)e^{-3K\eta} \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

În această direcție, se pot găsi și alte soluții:

$$\begin{aligned} (A_2) \quad \bar{f}(\eta, C_i) &= \frac{1}{K} + (2R - \frac{1 + C_1 + C_3 + C_5}{K} + C_1\eta + C_2\eta^2)e^{-K\eta} + \\ &+ \left(\frac{C_1 + C_3 + C_5}{K} - R + C_3\eta + C_4\eta^2\right)e^{-2K\eta} + (C_5\eta + C_6\eta^2)e^{-3K\eta} \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

$$\begin{aligned} (A_3) \quad \bar{f}(\eta, C_i) &= R + \frac{1}{K^2} + \left(-\frac{C_1 + C_3 + C_5}{2K} + \frac{K-3}{2K^2} + C_1\eta + C_2\eta^2\right)e^{-K\eta} + \\ &+ (C_3\eta + C_4\eta^2)e^{-2K\eta} + \left(\frac{1-K}{2K^2} + \frac{C_1 + C_3 + C_5}{2K} + C_5\eta + C_6\eta^2\right)e^{-3K\eta} \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

$$\begin{aligned} (A_4) \quad \bar{f}(\eta, C_i) &= R + \frac{1}{K} + \left(-\frac{1}{K} + C_1\eta^2 + C_2\eta^3 + C_3\eta^4\right)e^{-K\eta} + \\ &+ (C_4\eta^2 + C_5\eta^3 + C_6\eta^4)e^{-2K\eta} \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

$$\begin{aligned} (A_5) \quad \bar{f}(\eta, C_i) &= R + \frac{1}{K} + \left(-\frac{1}{K} + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + C_4\eta^4\right)e^{-K\eta} + \\ &+ (-C_1\eta + C_5\eta^2 + C_6\eta^3)e^{-2K\eta} \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

$$\begin{aligned} (A_6) \quad \bar{f}(\eta, C_i) &= R + \frac{1}{K^2} + \left(-\frac{1}{K^2} + \left(1 - \frac{1}{K}\right)\eta + C_1\eta^2 + C_2\eta^3 + C_3\eta^4\right)e^{-K\eta} + \\ &+ (C_4\eta^2 + C_5\eta^3 + C_6\eta^4)e^{-2K\eta} \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

$$\begin{aligned} (A_7) \quad \bar{f}(\eta, C_i) &= R + \frac{1 - e^{-K\eta}}{K} + (C_1\eta^2 + C_2\eta^3 + C_3\eta^4)e^{-2K\eta} + \\ &+ (C_4\eta^2 + C_5\eta^3 + C_6\eta^4)e^{-3K\eta} \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

$$(A_8) \quad \bar{f}(\eta, C_i) = R + \frac{1}{K}(1 - e^{-K\eta}) + (3C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3)e^{-2K\eta} + (-2C_1\eta + C_4\eta^2 + C_5\eta^3 + C_6\eta^4)e^{-3K\eta} \quad (5.1.37)$$

$$(A_9) \quad \bar{f}(\eta, C_i) = R + \frac{1}{K^2}(1 - e^{-K\eta}) + \left[\left(1 - \frac{1}{K}\right)\eta + C_1\eta^2 + C_2\eta^3 + C_3\eta^4\right]e^{-2K\eta} + (C_4\eta^2 + C_5\eta^3 + C_6\eta^4)e^{-3K\eta} \quad (5.1.38)$$

$$(A_{10}) \quad \bar{f}(\eta, C_i) = R + \frac{1}{K} + \left(-\frac{1}{K} + C_1\eta^2 + C_2\eta^3 + C_3\eta^4\right)e^{-K\eta} + (C_4\eta^2 + C_5\eta^3 + C_6\eta^4)e^{-3K\eta} \quad (5.1.39)$$

$$(A_{11}) \quad \bar{f}(\eta, C_i) = R + \frac{1}{K} + \left(-\frac{1}{K} + C_1\eta + C_2\eta^2\right)e^{-K\eta} + (C_3\eta + C_4\eta^2)e^{-2K\eta} + (C_5\eta + C_6\eta^2)e^{-3K\eta} + [(-C_1 - C_3 - C_5)\eta + C_7\eta^2]e^{-4K\eta} \quad (5.1.40)$$

$$(A_{12}) \quad \bar{f}(\eta, C_i) = R + \frac{1}{K} + \left(-\frac{1}{K} + C_1\eta^2\right)e^{-K\eta} + (C_2\eta^2 + C_3\eta^3)e^{-2K\eta} + (C_4\eta^2 + C_5\eta^3 + C_6\eta^4)e^{-3K\eta} \quad (5.1.41)$$

Este clar că pe această cale, se pot obține multe alte soluții.

5.1.3 Rezultate numerice

Se ilustrează acuratețea procedurii pentru diferite valori ale coeficienților R , β și M . De asemenea, reprezentăm grafic comportarea funcțiilor f și f' și se compară rezultatele obținute prin procedura prezentată cu rezultatele numerice. Parametrii optimali de control a convergenței C_i sunt determinați cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate, folosind soft-ul Matematica 6.0.

Exemplul 5.1.3.1 Pentru început, se consideră $\beta = 0.5$, $M = 0.75$, și $R = 0.25$ care corespunde la viteza de aspirație. Parametrii optimali de control a convergenței au valorile:

$$(A_1) \quad K = 1.7223999348, C_1 = 0.0203632630, C_2 = -0.0003551855, \\ C_3 = -0.0046442857, C_4 = 0.0021151819, \\ C_5 = -0.0040337933, C_6 = -0.0030441083 \quad (5.1.42)$$

$$(A_2) \quad K = 1.2039668671, C_1 = 0.0484595533, C_2 = -0.0035879577, \\ C_3 = -0.1933189832, C_4 = -0.0613273780, \\ C_5 = -0.0321447762, C_6 = -0.0048370121 \quad (5.1.43)$$

și așa mai departe.

Soluțiile aproximative de ordinul întâi obținute cu ajutorul metodei MHAO, pentru cazurile de mai sus (A_1)-(A_{12}) devin:

$$(A_1) \quad \bar{f}(\eta) = 0.8305852518 + (-0.5873694973 + 0.0203632630\eta - \\ -0.0003551855\eta^2)e^{-1.7223999348\eta} + (0.0067842454 - 0.0046442857\eta + \\ + 0.0021151819\eta^2)e^{-3.4447998696\eta} + (-0.0040337933\eta - \\ -0.0030441083\eta^2)e^{-5.1671998044\eta} \quad (5.1.44)$$

$$(A_2) \quad \bar{f}(\eta) = 0.8305876410 + (-0.1835701350 + 0.0484595533\eta -$$

$$\begin{aligned}
& -0.0035879577\eta^2)e^{-1.2039668671\eta} + (-0.3970175060 - 0.1933189832\eta - \\
& - 0.0613273780\eta^2)e^{-2.4079337342\eta} + (-0.0321447762\eta - \\
& - 0.0048370121\eta^2)e^{-3.6119006013\eta} \quad (5.1.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_3) \quad \bar{f}(\eta) &= 0.8305880207 + (-0.3420493544 + 0.0892570980\eta - \\
& - 0.0066950727\eta^2)e^{-1.3123992230\eta} + (-0.2899683613\eta - \\
& - 0.0166914996\eta^2)e^{-2.6247984460\eta} + \\
& + (-0.2385386662 - 0.1873679245\eta - 0.0454910883\eta^2)e^{-3.9371976690\eta} \quad (5.1.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_4) \quad \bar{f}(\eta) &= 0.8305846668 + (-0.5805846668 + 0.0113141332\eta^2 - \\
& - 0.0026254854\eta^3 + 0.0002157623\eta^4)e^{-1.7224016705\eta} + (0.0194551449\eta^2 + \\
& + 0.0055884706\eta^3 + 0.0021434013\eta^4)e^{-3.4448033410\eta} \quad (5.1.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_5) \quad \bar{f}(\eta) &= 0.8305850786 + (-0.5805850786 + 0.0129138333\eta + \\
& + 0.0029826874\eta^2 - 0.0007022807\eta^3 + 0.0000575450\eta^4)e^{-1.7224004488\eta} + \\
& + (-0.0129138333\eta + 0.0055128320\eta^2 - 0.0009540905\eta^3)e^{-3.4448008976\eta} \quad (5.1.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_6) \quad \bar{f}(\eta) &= 0.8305896186 + (-0.5805896186 + 0.2380356841\eta - \\
& - 0.0458010823\eta^2 + 0.0050361161\eta^3 - 0.0002634636\eta^4)e^{-1.3123974169\eta} + \\
& + (0.0276184306\eta^2 - 0.0042554588\eta^3 + 0.0040951218\eta^4)e^{-2.6247948339\eta} \quad (5.1.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_7) \quad \bar{f}(\eta) &= 0.25 + 0.5805981621(1 - e^{-1.7223616352\eta}) + (3.7465003467\eta^2 - \\
& - 2.5918747904\eta^3 + 0.5688873710\eta^4)e^{-3.4447232705\eta} + (-3.7216397470\eta^2 - \\
& - 3.7194132780\eta^3 - 1.7743745762\eta^4)e^{-5.1670849057\eta} \quad (5.1.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_8) \quad \bar{f}(\eta) &= 0.25 + 0.5806004947(1 - e^{-1.7223547156\eta}) + (28.6559933963\eta - \\
& - 17.1574454736\eta^2 + 3.0755892307\eta^3)e^{-3.4447094313\eta} + (-28.6559933963\eta - \\
& - 32.1751588943\eta^2 - 15.8637665758\eta^3 - 4.4540759880\eta^4)e^{-5.1670641469\eta} \quad (5.1.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_9) \quad \bar{f}(\eta) &= 0.25 + 0.5807600837(1 - e^{-1.3122047950\eta}) + (0.2379238333\eta + \\
& + 14.3490983671\eta^2 - 7.4936309491\eta^3 + 1.3346589985\eta^4)e^{-2.6244095900\eta} + \\
& + (-14.0803697555\eta^2 - 10.6121821644\eta^3 - 3.7974679259\eta^4)e^{-3.9366143850\eta} \quad (5.1.52)
\end{aligned}$$

$$(A_{10}) \quad \bar{f}(\eta) = 0.8305805525 + (-0.5805805525 + 0.0163027398\eta^2 - 0.0053622456\eta^3 + 0.0006113624\eta^4)e^{-1.7224138763\eta} + (0.0153758771\eta^2 + 0.0170806180\eta^3 + 0.0369073209\eta^4)e^{-5.1672416289\eta} \quad (5.1.53)$$

$$(A_{11}) \quad \bar{f}(\eta) = 0.8305850069 + (-0.5805850069 + 0.0167016213\eta + 0.0001742425\eta^2)e^{-1.7224006615\eta} + (-0.0115884531\eta - 0.0052672814\eta^2)e^{-3.4448013230\eta} + (-0.0193966267\eta + 0.0114385136\eta^2)e^{-5.1672019845\eta} + (0.0142834585\eta + 0.0114385136\eta^2)e^{-6.8896026460\eta} \quad (5.1.54)$$

$$(A_{12}) \quad \bar{f}(\eta) = 0.8305751642 + (-0.5805751642 + 0.0012101182\eta^3)e^{-1.7224298620\eta} + (-0.4645923536\eta^2 + 0.2718146543\eta^3)e^{-3.4448597240\eta} + (0.4983783090\eta^2 + 0.5722116290\eta^3 + 0.4013983403\eta^4)e^{-5.1672895860\eta} \quad (5.1.55)$$

Exemplul 5.1.3.2 În ultimul caz, se consideră $\beta = 0.5$, $M = 0.75$, și $R = -2$ pentru viteza de imersie. Parametrii optimali de control a convergenței vor fi:

$$(A_1) \quad K = 3.4039784470, C_1 = -0.0073489093, C_2 = -0.0000300879, \\ C_3 = 0.0019346837, C_4 = -0.0028434644, \\ C_5 = 0.0004870868, C_6 = 0.0008838343 \quad (5.1.56)$$

$$(A_2) \quad K = 0.3235777833, C_1 = 193.0767116481, C_2 = -9.2315115218, \\ C_3 = 269.5805006985, C_4 = 10.4423160474, \\ C_5 = -36.4073561981, C_6 = -8.0939438081 \quad (5.1.57)$$

și așa mai departe.

Soluțiile aproximative de ordinul întâi scrise numai pentru trei cazuri, au forma:

$$(A_1) \quad \bar{f}(\eta) = -1.7062261070 + (-0.2923264282 - 0.0073489093\eta - 0.0000300879\eta^2)e^{-3.4039784470\eta} + (-0.0014474647 + 0.0019346837\eta - 0.0028434644\eta^2)e^{-6.8079568940\eta} + (0.0004870868\eta + 0.0008838343\eta^2)e^{-10.2119353411\eta} \quad (5.1.58)$$

$$(A_4) \quad \bar{f}(\eta) = -1.7062260957 + (-0.2937739042 - 0.0079483534\eta^2 + 0.0033559204\eta^3 - 0.0005109100\eta^4)e^{-3.4039783163\eta} + (-0.0123589233\eta^2 - 0.0091292547\eta^3 - 0.0057558384\eta^4)e^{-6.8079566326\eta} \quad (5.1.59)$$

$$\begin{aligned}
 (A_{11}) \quad \bar{f}(\eta) = & -1.7062260959 + (-0.2937739040 - 0.0058506315\eta - \\
 & - 0.0004400135\eta^2)e^{-3.4039783189\eta} + (0.0043294258\eta + \\
 & + 0.0042247893\eta^2)e^{-6.8079566378\eta} + (0.0072464953\eta - \\
 & - 0.0092559326\eta^2)e^{-10.2119349567\eta} + \\
 & + (-0.0057252895\eta - 0.0092559326\eta^2)e^{-13.6159132756\eta} \quad (5.1.60)
 \end{aligned}$$

În Figurile 5.1 și 5.2 sunt reprezentate grafic soluțiile aproximative de ordinul întâi $\bar{f}(\eta)$, precum și $\bar{f}'(\eta)$ în comparație cu rezultatele numerice obținute cu metoda Runge-Kutta de ordin patru în combinație cu metoda shooting, pentru viteza de aspirație în cazul (A_1), în timp ce în Figurile 5.3 și 5.4 sunt reprezentate

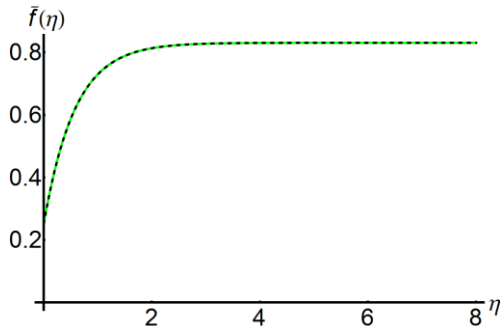


Fig. 5.1 Rezultate comparative între soluția aproximativă dată de relația (5.1.44) și soluția numerică în cazul: $\beta = 0.5, M = 0.75, R = 0.25$:
 -----soluția numerică;soluția MHAO

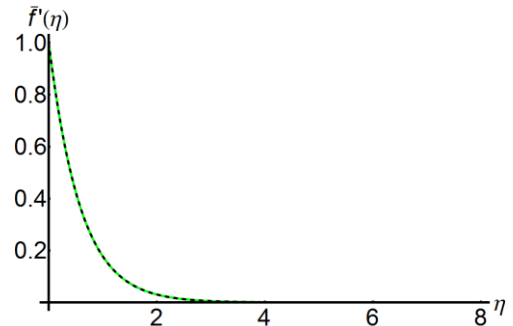


Fig. 5.2 Rezultate comparative între derivata soluției aproximative dată de relația (5.1.44) și soluția numerică în cazul: $\beta = 0.5, M = 0.75, R = 0.25$:
 -----soluția numerică;soluția MHAO

grafic soluțiile aproximative de ordinul întâi $\bar{f}(\eta)$, precum și $\bar{f}'(\eta)$ în comparație cu rezultatele numerice, pentru viteza de imersie în cazul (A_1).

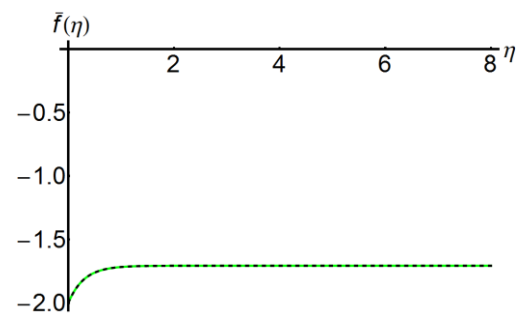


Fig. 5.3 Rezultate comparative între soluția aproximativă dată de relația (5.1.58) și soluția numerică în cazul: $\beta = 0.5, M = 0.75, R = -2$:
 -----soluția numerică;soluția MHAO

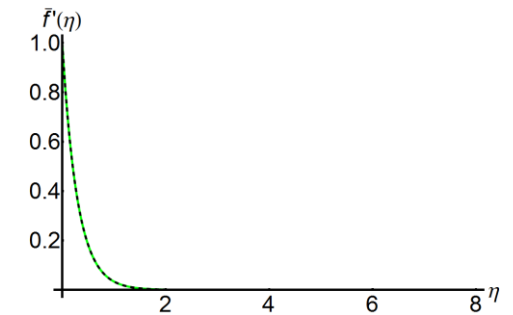


Fig. 5.4 Rezultate comparative între derivata soluției aproximative dată de relația (5.1.58) și soluția numerică în cazul: $\beta = 0.5, M = 0.75, R = -2$:
 -----soluția numerică;soluția MHAO

În Tabelele 5.1-5.5 se prezintă o comparație între soluțiile aproximative de ordinul întâi \bar{f} date de relațiile (5.1.44)-(5.1.60), și rezultatele numerice pentru câteva valori ale variabilei η .

Tabelul 5.1. Rezultate comparative între soluțiile aproximative de ordinul întâi (5.1.44)-(5.1.46) obținute cu MHAO și rezultatele numerice

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.44)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.45)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.46)	$f_{numeric}(\eta)$
0	0.25	0.25	0.25	0.25
4/5	0.6867557456	0.6867558261	0.6867555458	0.6867557531
8/5	0.7952831540	0.7952832405	0.7952835769	0.7952831536
12/5	0.8219262765	0.8219262098	0.8219258666	0.8219262711
16/5	0.8284614196	0.8284613427	0.8284615570	0.8284614131
4	0.8300643020	0.8300645259	0.8300647355	0.8300642946
24/5	0.8304574558	0.8304574869	0.8304573214	0.8304574344
28/5	0.8305538969	0.8305537376	0.8305535912	0.8305538603
32/5	0.8305775573	0.8305776155	0.8305777588	0.8305775112
36/5	0.8305833631	0.8305839424	0.8305843430	0.8305833139
8	0.8305847881	0.8305859411	0.8305864617	0.8305847388

Tabelul 5.2. Rezultate comparative între soluțiile aproximative de ordinul întâi \bar{f} date de relațiile (5.1.47)-(5.1.49) obținute cu MHAO și rezultatele numerice

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.47)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.48)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.49)	$f_{numeric}(\eta)$
0	0.25	0.25	0.25	0.25
4/5	0.6867559559	0.6867558676	0.6867559421	0.6867557531
8/5	0.7952829566	0.7952830577	0.7952832693	0.7952831536
12/5	0.8219264714	0.8219263597	0.8219262460	0.8219262711
16/5	0.8284612774	0.8284613647	0.8284612078	0.8284614131
4	0.8300641916	0.8300642631	0.8300646204	0.8300642946
24/5	0.8304575489	0.8304574866	0.8304575594	0.8304574344
28/5	0.8305539626	0.8305539177	0.8305536600	0.8305538603
32/5	0.8305774335	0.8305775190	0.8305775904	0.8305775112
36/5	0.8305830455	0.8305832668	0.8305842233	0.8305833139
8	0.8305843381	0.8305846532	0.8305866484	0.8305847388

Tabelul 5.3. Rezultate comparative între soluțiile aproximative de ordinul întâi \bar{f} date de relațiile (5.1.50)-(5.1.52) obținute cu MHAO și rezultatele numerice

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.50)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.51)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.52)	$f_{numeric}(\eta)$
0	0.25	0.25	0.25	0.25
4/5	0.6867604947	0.6867642071	0.6866887026	0.6867557531
8/5	0.7952711920	0.7952698391	0.7952830603	0.7952831536
12/5	0.8219400081	0.8219414386	0.8219258072	0.8219262711
16/5	0.8284434011	0.8284360789	0.8285164738	0.8284614131
4	0.8300472216	0.8300445299	0.8299931937	0.8300642946

24/5	0.8304557614	0.8304567567	0.8303854806	0.8304574344
28/5	0.8305615064	0.8305635876	0.8305702204	0.8305538603
32/5	0.8305888008	0.8305910952	0.8306729872	0.8305775112
36/5	0.8305957861	0.8305981136	0.8307238267	0.8305833139
8	0.8305975612	0.8305998931	0.8307459962	0.8305847388

Tabelul 5.4. Rezultate comparative între soluțiile aproximative de ordinul întâi \bar{f} date de relațiile (5.1.53)-(5.1.55) obținute cu MHAO și rezultatele numerice

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.53)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.54)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.55)	$f_{numeric}(\eta)$
0	0.25	0.25	0.25	0.25
4/5	0.6867577703	0.6867556858	0.6867565108	0.6867557531
8/5	0.7952835590	0.7952833690	0.7952904892	0.7952831536
12/5	0.8219267050	0.8219260684	0.8219182801	0.8219262711
16/5	0.8284593204	0.8284614530	0.8284624519	0.8284614131
4	0.8300649028	0.8300645204	0.8300733641	0.8300642946
24/5	0.8304590162	0.8304575585	0.8304617717	0.8304574344
28/5	0.8305540337	0.8305538374	0.8305514864	0.8305538603
32/5	0.8305757755	0.8305773944	0.8305708821	0.8305775112
36/5	0.8305801662	0.8305831505	0.8305746354	0.8305833139
8	0.8305807821	0.8305845549	0.8305752047	0.8305847388

Tabelul 5.5. Rezultate comparative între soluțiile aproximative de ordinul întâi \bar{f} date de relațiile (5.1.58)-(5.1.60) obținute cu MHAO și rezultatele numerice

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.58)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.59)	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.1.60)	$f_{numeric}(\eta)$
0	-2	-2	-2	0
4/5	-1.7258163099	-1.7258162625	-1.7258163629	-1.7258163121
8/5	-1.7075377409	-1.7075377235	-1.7075377264	-1.7075377364
12/5	-1.7063139221	-1.7063139346	-1.7063139675	-1.7063139251
16/5	-1.7062319851	-1.7062320229	-1.7062319899	-1.7062319847
4	-1.7062265004	-1.7062265071	-1.7062264918	-1.7062264984
24/5	-1.7062261333	-1.7062261259	-1.7062261225	-1.7062261309
28/5	-1.7062261087	-1.7062260981	-1.7062260977	-1.7062261063
32/5	-1.7062261071	-1.7062260959	-1.7062260960	-1.7062261046
36/5	-1.7062261070	-1.7062260957	-1.7062260959	-1.7062261044
8	-1.7062261070	-1.7062260957	-1.7062260959	-1.7062261044

Tabelele 5.6-5.8 prezintă abaterile dintre soluțiile aproximative de ordinul întâi date de relațiile (5.1.44)-(5.1.60) și rezultatele numerice, $\varepsilon = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|$ pentru câteva valori ale variabilei η .

Tabelul 5.6. Comparația abaterilor $\varepsilon = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|$

η	ε (5.1.44)	ε (5.1.45)	ε (5.1.46)	ε (5.1.47)	ε (5.1.48)
0	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	0	0	0

4/5	$7.8 \cdot 10^{-9}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
8/5	$9.0 \cdot 10^{-10}$	$8.5 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$9.7 \cdot 10^{-8}$
12/5	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$6.4 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$8.5 \cdot 10^{-8}$
16/5	$4.0 \cdot 10^{-10}$	$7.7 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$
4	$4.7 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-8}$
24/5	$1.2 \cdot 10^{-9}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$9.4 \cdot 10^{-8}$	$3.1 \cdot 10^{-8}$
28/5	$4.5 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$	$7.0 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$
32/5	$3.5 \cdot 10^{-9}$	$5.4 \cdot 10^{-8}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$4.1 \cdot 10^{-8}$
36/5	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$3.4 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$
8	$6.4 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$5.1 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$

Tabelul 5.7. Comparația abaterilor $\varepsilon = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|$

η	ε (5.1.49)	ε (5.1.50)	ε (5.1.51)	ε (5.1.52)	ε (5.1.53)
0	0	0	0	0	0
4/5	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$4.7 \cdot 10^{-6}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$
8/5	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$
12/5	$2.8 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-7}$
16/5	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$
4	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$5.9 \cdot 10^{-7}$
24/5	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$6.9 \cdot 10^{-7}$	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$
28/5	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$7.6 \cdot 10^{-6}$	$9.6 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$
32/5	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$
36/5	$8.3 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-6}$
8	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-6}$

Tabelul 5.8. Comparația abaterilor $\varepsilon = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|$

η	ε (5.1.54)	ε (5.1.55)	ε (5.1.58)	ε (5.1.59)	ε (5.1.60)
0	0	0	0	0	0
4/5	$6.7 \cdot 10^{-8}$	$7.5 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$4.9 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^{-8}$
8/5	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-6}$	$3.8 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$9.9 \cdot 10^{-9}$
12/5	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$7.9 \cdot 10^{-6}$	$4.0 \cdot 10^{-9}$	$8.5 \cdot 10^{-9}$	$4.2 \cdot 10^{-8}$
16/5	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$8.8 \cdot 10^{-10}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$	$5.1 \cdot 10^{-9}$
4	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$	$4.9 \cdot 10^{-10}$	$7.2 \cdot 10^{-9}$	$6.6 \cdot 10^{-9}$
24/5	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$7.2 \cdot 10^{-10}$	$6.6 \cdot 10^{-9}$	$8.3 \cdot 10^{-9}$

28/5	$5.4 \cdot 10^{-8}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$6.8 \cdot 10^{-10}$	$9.9 \cdot 10^{-9}$	$8.5 \cdot 10^{-9}$
32/5	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$6.6 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-9}$
36/5	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$8.7 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-9}$
8	$2.9 \cdot 10^{-7}$	$9.6 \cdot 10^{-6}$	$5.8 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$8.4 \cdot 10^{-9}$

În Tabelele 5.9 și 5.10 se prezintă o comparație între coeficientul superficial la limită $\bar{F}''(0)$, valoarea limită $\bar{F}(\infty)$ cu ajutorul metodei MHAO și rezultatele integrării numerice. Se observă că toate aceste comparații sunt găsite a fi în concordanță foarte bună pentru soluțiile aproximative de ordinul întâi obținute cu MHAO.

Tabelul 5.9. Valorile $F''(0)$ și $F(\infty)$ pentru $\beta = 0.5$, $M = 0.75$, $R = 0.25$

Relația	(5.1.44)	(5.1.47)	(5.1.53)
$F''_{numeric}(0)$	-1.6610234543	-1.6610234543	-1.6610234543
$\bar{F}''_{MHAO}(0)$	-1.6610517418	-1.6608631140	-1.6608887452
$F_{numeric}(\infty)$	0.8305852596	0.8305852596	0.8305852596
$\bar{F}_{MHAO}(\infty)$	0.8305852518	0.8305846668	0.8305850069

Tabelul 5.10. Valorile $F''(0)$ și $F(\infty)$ pentru $\beta = 0.5$, $M = 0.75$, $R = -2$

Relația	(5.1.58)	(5.1.59)	(5.1.60)
$F''_{numeric}(0)$	-3.4445300498	-3.4445300498	-3.4445300498
$\bar{F}''_{MHAO}(0)$	-3.4445331335	-3.4445928699	-3.4446421233
$F_{numeric}(\infty)$	-1.7062261065	-1.7062261065	-1.7062261065
$\bar{F}_{MHAO}(\infty)$	-1.7062261070	-1.7062260957	-1.7062260959

Din Tabelele de mai sus se poate observa că soluțiile aproximative de ordinul întâi obținute prin procedura propusă sunt aproape identice cu rezultatele numerice obținute cu ajutorul metodei Runge-Kutta de ordinul 4 în combinație cu metoda shooting.

În cazul fluidelor ne-Newtoniene, este cunoscut faptul că vâscozitatea cinematică este mult mai mare decât la fluidele Newtoniene (fluidele ne-Newtoniene curg numai dacă sunt supuse unor tensiuni externe, în unele cazuri chiar supuse acțiunii câmpului termic). Pentru a da o semnificație soluțiilor analitice aproximative (5.1.44) - pentru curgerea cu viteză de aspirație ($R > 0$), respectiv (5.1.58) - pentru curgerea cu viteză de imersie ($R < 0$), se consideră un fluid Maxwell superior-convectiv caracterizat prin vâscozitatea cinematică $\nu = 5 [m^2/s]$ și constanta de întindere $C = 0.75 [1/s]$. Din relațiile (5.1.11), (5.1.13) și (5.1.14) se obțin expresiile componentelor vitezei de curgere u , respectiv v , a căror grafice sunt reprezentate în Figurile 5.5 și 5.6 (cazul curgerii cu viteză de aspirație), respectiv Figurile 5.7 și 5.8 (cazul curgerii cu viteză de imersie). În altă ordine de idei, în Figurile 5.9 și 5.10 se prezintă câmpul de vectori (u, v) asociat curgerii cu viteză de aspirație, respectiv curgerii cu viteză de imersie. Aceste grafice completează lista de rezultate adimensionale obținute cu MHAO.

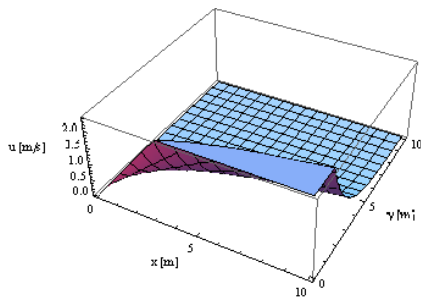


Fig. 5.5 Profilul vitezei u în cazul $\beta = 0.5$, $R = 0.25$, $M = 0.75$, asociat curgerii cu viteză de aspirație

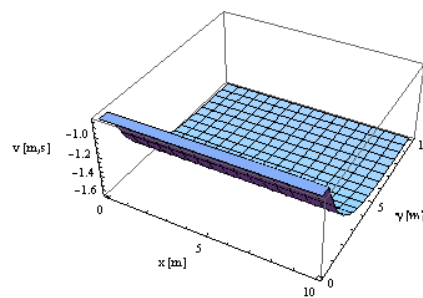


Fig. 5.6 Profilul vitezei v în cazul $\beta = 0.5$, $R = 0.25$, $M = 0.75$, asociat curgerii cu viteză de aspirație

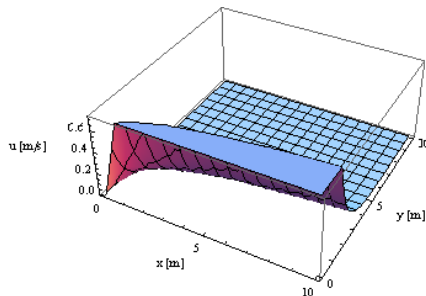


Fig. 5.7 Profilul vitezei u în cazul $\beta = 0.5$, $R = -2$, $M = 0.75$, asociat curgerii cu viteză de imersie

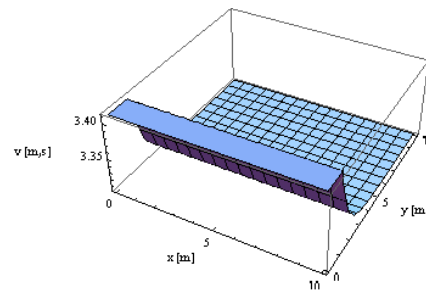


Fig. 5.8 Profilul vitezei v în cazul $\beta = 0.5$, $R = -2$, $M = 0.75$, asociat curgerii cu viteză de imersie

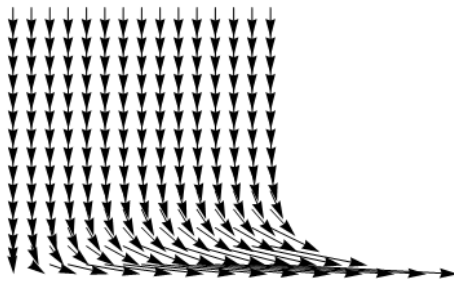


Fig. 5.9 Câmpul de vectori (u, v) , în cazul $\beta = 0.5$, $R = 0.25$, $M = 0.75$, asociat curgerii cu viteză de aspirație

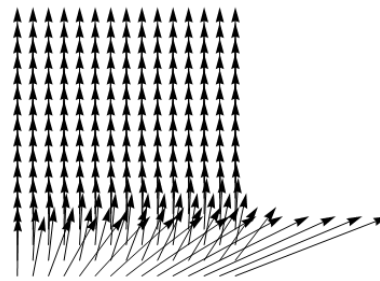


Fig. 5.10 Câmpul de vectori (u, v) , în cazul $\beta = 0.5$, $R = -2$, $M = 0.75$, asociat curgerii cu viteză de imersie

De asemenea, notăm că se pot determina multe alte soluții aproximative cu ajutorul metodei MHAO folosind aproximarea inițială dată de relația (5.1.23).

Câteva teste statistice sunt necesare a susține câteva proprietăți asimptotice. Două teste statistice sunt mai importante: testul homoscedasticității (varianță constantă) și testul autocorelațiilor (legătura între valori consecutive). Așadar, calculăm testul Durbin-Watson pentru autocorelații și testul Barlett pentru homoscedasticitate:

$$F_{calc} = \frac{\sum_{i=1}^{n/2} \varepsilon_i^2}{\sum_{i=[n/2]+1}^n \varepsilon_i^2} \quad (\text{testul Barlett})$$

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{2n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad (\text{testul Durbin-Wattson})$$

Limitele reprezentative pentru testul Barlett sunt $F_{inf} = 0.000162$, $F_{sup} = 8.6831168141$ (abaterile $\varepsilon_i = \bar{f}_{MHAO}(\eta_i) - f_{numeric}(\eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ trec testul Barlett dacă $F_{inf} < F < F_{sup}$). Acest test statistic asigură că abaterile au varianță constantă, dar în același timp un control al soluțiilor analitice aproximative pentru orice interval real.

Limitele reprezentative pentru testul Durbin-Wattson sunt $d_{inf} = 1.36$, $d_{sup} = 2.92$ (analog, abaterile $\varepsilon_i = \bar{f}_{MHAO}(\eta_i) - f_{numeric}(\eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ trec testul Durbin-Wattson dacă $d_{inf} < d < d_{sup}$). Acest test statistic asigură că abaterile nu sunt corelate, iar aceasta înseamnă că se obține cea mai bună soluție analitică aproximativă.

Pentru toate cele 12 soluții aproximative date de relațiile (5.1.44)-(5.1.55) și pentru $n = 30$ puncte, toate abaterile au trecut ambele teste (mai exact am obținut valorile {1.87448, 1.87448, 5.86776, 2.13935, 1.48597, 1.68839} pentru testul Barlett, respectiv {1.81622, 1.81622, 1.92555, 2.64548, 1.83306, 1.96373} pentru testul Durbin-Wattson).

5.2 Curgerea peliculei subțiri a unui fluid Oldroyd cu 6-constante pe o bandă în mișcare

Este cunoscut faptul că în aplicațiile practice comportamentul fluidelor vâscoelastice nu poate fi reprezentat de cel al fluidelor newtoniene. Caracterul inadecvat al modelului clasic Navier-Stokes pentru a descrie fluidele care nu se supun postulatului newtonian "că tensorul tensiune este multiplu de tensiunea de forfecare", a condus la dezvoltarea mai multor modele de fluide ne-newtoniene. Pe parcursul ultimelor decenii, au fost propuse diferite ecuații constitutive pentru aceste fluide ne-newtoniene. Ecuațiile diferențiale ce descriu fluide non-newtoniene sunt în general neliniare și extrem de complicate, dar nu există o singură ecuație constitutivă disponibilă în literatura de specialitate prin care se poate studia comportamentul de curgere a fluidelor vâscoelastice. Curgerile peliculelor subțiri au atras atenția a numeroși cercetători, ca urmare a cererilor lor largi în inginerie și știință. Astfel de aplicații includ producția de microcipuri, fluxul de materiale active de suprafață sau generatoare MHD, acceleratoare, pompe și debitmetre.

În ultimii ani, mulți cercetători au avut în vedere diferite probleme legate de astfel de fluide ne-newtoniene. Fluidul Oldroyd a dobândit un statut special în rândul mai multor fluide de tip Newtonian clasic și Maxwell [137]. Acest tip de fluid ia în considerare proprietățile tensiunii de relaxare și întârziere. Curgerea bidimensională stabilă a unui fluid incompresibil Maxwell într-o zonă formată din două plane, dintre care unul este trecut glisant de celălalt la un anumit unghi, a fost investigată pentru prima dată de către Strauss [165]. Hancock și colaboratorii au investigat efectele forțelor de inerție prin construirea seriei de perturbare regulată pentru funcția de curent în [80]. Rajagopal și Bhatnagar [142] au prezentat două soluții pentru curgerea fluidelor de tip Oldroyd-B: curgerea pe o placă poroasă infinită și oscilațiile longitudinale și de torsiune pe o tijă infinit lungă de rază finită. Echilibrul bi-dimensional și curgerea lentă bidimensională a unui fluid de tip Oldroyd cu 6-constante între plane care se intersectează, dintre care unul este fix și celălalt în mișcare, a fost analizat de Baris [18]. Efectele parametrului ne-newtonian în modelul de curgere sunt atent delimitate. Există, spre deosebire de cazul fluidelor newtoniene, un curent secundar pe lângă axa comună a celor două plane. O astfel de curgere este de mare interes, așa cum apare la nivel local într-un cilindru cu un piston în mișcare, sau la marginea unei lame folosite pentru a îndepărta lichidul de pe o suprafață.

Foarte recent, Hayat și alții [86] au studiat curgerea unidimensională stabilă a unui fluid Oldroyd MHD cu 8-constante într-un domeniu mărginit. Soluțiile MHD pentru un fluid Newtonian, precum și cele corespunzătoare fluidelor de tip Oldroyd cu 3 și 6-constante, a unui fluid Maxwell și al unui fluid de gradul al doilea, apar ca și cazuri limită a soluțiilor obținute. Hayat și alții [88] și Wang și alții [181] au considerat curgeri Couette și Poiseuille ale unui fluid Oldroyd cu 6-constante cu câmp magnetic. Khan și alții [100] au discutat curgerea unui fluid MHD Oldroyd cu 8-constante, dar între cilindri coaxiali supuși la alunecare parțială pe frontieră. Trei probleme la limită neliniare pentru fluide Oldroyd cu 6-constante și pentru fluide cu alunecare sunt studiate de către Hayat și alții în [87]. Ellahi și alții [42] au investigat un fluid Oldroyd cu 8-constante pe o placă ce se deplasează, iar Sajid și Hayat [151] au obținut o soluție exactă pentru curgerea peliculei subțiri a unui fluid Oldroyd cu 8-constante. Folosind transformata Laplace și transformata Fourier prin funcția sinus, Vieru și alții [176], au stabilit soluții exacte pentru curgerea instabilă a unui fluid incompresibil generalizat Oldroyd-B pe o placă infinită accelerată în mod constant. Hayat și alții [85] au obținut soluția exactă a curgerii unei pelicule subțiri a

unui fluid Oldroyd cu 6-constante și Ellahi și alții [43] pentru curgerile unui fluid Oldroyd cu 8-constante cu condiții de alunecare neliniare. Echilibrul energetic, pentru mișcarea unui fluid Oldroyd-B pe o plăcă acționată impulsiv, este prezentat de Fetecău și alții în [74]. Curgerea 3D a unui fluid generalizat Oldroyd-B, ca urmare a unui gradient de presiune constantă între doi pereți laterali perpendiculari pe o placă, este prezentat de Zheng și alții în [189]. Shah și alții [158] au folosit metoda MHAO în studiul fluidului Oldroyd cu 8-constante cu gradient de presiune. În [90], efectul alunecării asupra curgerilor rotative a unui fluid Oldroyd-B într-un spațiu poros este examinat de Hayat și alții. Fluidul este acționat de un câmp magnetic transversal. Ecuațiile care guvernează curgerea includ legea Darcy modificată pentru un fluid Oldroyd-B.

În această secțiune se ia în considerare curgerea unui fluid Oldroyd cu 6-constante pe o bandă în mișcare. A doua versiune a metodei MHAO este aplicată, în acest studiu, pentru a obține expresii analitice de mare precizie pentru soluții.

5.2.1 Ecuațiile de mișcare

Tensorul tensiune Cauchy \mathbf{T} este:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}, \quad (5.2.1)$$

unde $-p\mathbf{I}$ - partea nedeterminată a tensiunii datorită tensiunilor superficiale de incompresibilitate și extra-tensorul tensiune \mathbf{S} este definit prin

$$\begin{aligned} \mathbf{S} + \lambda_1 \frac{D\mathbf{S}}{Dt} + \frac{\lambda_3}{2} (\mathbf{S}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{S}) + \frac{\lambda_5}{2} (\text{tr}\mathbf{S})\mathbf{A}_1 + \frac{\lambda_6}{2} [\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{A}_1)]\mathbf{I} = \\ = \mu[\mathbf{A}_1 + \lambda_2 \frac{D\mathbf{A}_1}{Dt} + \lambda_4 \mathbf{A}_1^2 + \frac{\lambda_7}{2} (\text{tr}(\mathbf{A}_1)^2)\mathbf{I}], \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \mu$ sunt constante materiale, \mathbf{A}_1 - este primul tensor Rivlin-Ericksen definit prin

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T, \quad (5.2.3)$$

unde \mathbf{L} este gradientul vitezei spațiale, $\mathbf{L} = \text{grad}\mathbf{V}$, \mathbf{V} fiind vectorul viteză. Derivata contravariantă D/Dt în termeni de derivată materială d/dt este definită prin

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} - \mathbf{L}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}^T \quad (5.2.4)$$

Se notează că dacă $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, 7$, modelul se reduce la modelul clasic liniar a unui fluid Newtonian vâscos. Când $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$ modelul se reduce la un model cu 3-constante a unui fluid de tip Oldroyd-B, în timp ce pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$ modelul se reduce la un model pentru un fluid Maxwell. Pentru $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$ modelul descrie un fluid de gradul doi și pentru $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$ modelul se reduce la un model pentru un fluid de tip Johnson-Seagalman. Pentru $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$ modelul se reduce la un model pentru un fluid de tip Oldroyd cu 6-constante.

Neglijând efectele termice și forțele masice, ecuațiile de mișcare a unui fluid incompresibil sunt:

$$\text{div}\mathbf{V} = 0 \quad (5.2.5)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho[\mathbf{V} \cdot \text{grad}\mathbf{V}] = \text{div}\mathbf{T} \quad (5.2.6)$$

unde ρ este densitatea și t este timpul.

Dacă extra-tensorul și respectiv viteza sunt:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ v(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.7)$$

Din relațiile (5.2.7), ecuația de continuitate (5.2.5) este identic satisfăcută, iar ecuația de moment (5.2.6) devine:

$$\frac{d\hat{p}}{dy} = \frac{d}{dx} S_{xy} \quad (5.2.8)$$

unde

$$S_{xy} = \frac{1}{M} \left[\mu \frac{dv}{dx} + \mu a_1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^3 \right] \quad (5.2.9)$$

$$M = 1 + a_2 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (5.2.10)$$

$$a_1 = \lambda_1 \lambda_4 - (\lambda_3 + \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2) \quad (5.2.11)$$

$$a_2 = \lambda_1 \lambda_3 - (\lambda_3 + \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_1) \quad (5.2.12)$$

și presiunea modificată \hat{p} devine

$$\hat{p} = p_1 - \frac{1}{M} \left[\mu(\lambda_4 - \lambda_3) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \mu(\lambda_4 a_2 - a_1 \lambda_3) \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right]. \quad (5.2.13)$$

Din relațiile (5.2.9) și (5.2.8) după adimensionalizare se obține:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + (3a_1 - a_2) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + a_1 a_2 \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \frac{d^2 v}{dx^2} - m \left[1 + a_2 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^2 = 0 \quad (5.2.14)$$

unde a_1 și a_2 sunt dați în termeni de constante materiale adimensionale și m este un parametru adimensional al gravității. Condițiile inițială și la limită sunt

$$v(0) = 1, \quad \left[\frac{dv}{dx} + a_1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^3 \right]_{x=1} = 0. \quad (5.2.15)$$

5.2.2 Soluții analitice aproximative pentru curgerea peliculei subțiri a unui fluid Oldroyd cu 6-constante

În cele ce urmează se va aplica procedura cunoscută la obținerea soluțiilor aproximative ale ecuațiilor (5.2.14)-(5.2.15). Pentru aceasta propunem să se aleagă, operatorul liniar în două moduri [68].

Cazul 5.2.2.1. În primul caz se presupune că operatorul liniar are forma

$$L(v) = v'' \quad (5.2.16)$$

unde simbolul ' semnifică derivarea în raport cu x , și $\phi(x) = v(x)$, și prin urmare operatorul neliniar devine

$$N(v) = v'' + (3a_1 - a_2)v'^2 v'' + a_1 a_2 v'^4 v'' - m(1 + a_2 v'^2)^2. \quad (5.2.17)$$

Condițiile inițiale (5.2.15) devin

$$v(0) = 1, \quad v'(1) + a_1 v'^3(1) = 0. \quad (5.2.18)$$

Din relația (5.2.18) se obțin două subcazuri:

5.2.2.1.a În primul subcaz se consideră următoarele condiții inițiale

$$v(0) = 1, \quad v'(1) = 0. \quad (5.2.19)$$

Ecuția (2.2.4) poate fi scrisă prin

$$v_0'' - m = 0, \quad v_0(0) = 0, \quad v_0'(1) = 0, \quad f(x) = m. \quad (5.2.20)$$

Soluția acesteia este

$$v_0(x) = m\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + 1. \quad (5.2.21)$$

A doua funcție $v_1(x)$ este obținută din ecuația (2.2.9):

$$v_1''(x) = H^1(x, C_i)N(v_0), \quad v_1(0) = 0, \quad v_1'(1) = 0 \quad (5.2.22)$$

unde

$$N(v_0) = v_0'' + (3a_1 - a_2)v_0'^2 + a_1a_2v_0'^4 - m(1 + a_2v_0'^2)^2. \quad (5.2.23)$$

Substituind relațiile (5.2.21) în (5.2.23), operatorul neliniar N devine

$$N(v_0) = K_1(x-1)^2 + K_2(x-1)^4 \quad (5.2.24)$$

unde

$$K_1 = 3(a_1 - a_2)m^3, \quad K_2 = a_2(a_1 - a_2)m^5. \quad (5.2.25)$$

Expresia (5.2.24) este un polinom și prin urmare funcția auxiliară $H^1(x, C_i)$ din ecuația (5.2.22) se alege astfel încât produsul H^1N să fie de aceeași formă cu N [126]. Se alege funcția auxiliară $H^1(x, C_i)$ în forma

$$H^1(x, C_i) = C_1(x-1)^{-2} + C_2(x-1)^{-1} + C_3 + C_4(x-1) + C_5(x-1)^2 \quad (5.2.26)$$

unde C_1, C_2, \dots, C_5 sunt parametri necunoscuți.

Există multe posibilități în a alege funcția auxiliară $H^1(x, C_i)$ care apare în ecuația (5.2.22).

De asemenea, se pot considera următoarele posibilități:

$$H^1(x, C_i) = C_1^*(x-1)^{-1} + C_2^* + C_3^*(x-1) + C_4^*(x-1)^3$$

sau

$$H^1(x, C_i) = C_1' + C_2'(x-1) + C_3'(x-1)^2 + C_4'(x-1)^3 + C_5'(x-1)^4 + C_6'(x-1)^5$$

și altele.

Înlocuind relațiile (5.2.26) și (5.2.24) în ecuația (5.2.22) se obține ecuația:

$$\begin{aligned} v_1'' = & K_1C_1 + K_1C_2(x-1) + (K_1C_3 + K_2C_1)(x-1)^2 + (K_1C_4 + K_2C_2)(x-1)^3 + \\ & + (K_1C_5 + K_2C_3)(x-1)^4 + K_2C_4(x-1)^5 + K_2C_5(x-1)^6, \quad (5.2.27) \\ v_1(0) = & v_1'(1) = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând ecuația (5.2.27) se obține

$$\begin{aligned} v_1(x) = & \frac{1}{2}K_1C_1[(x-1)^2 - 1] + \frac{1}{6}K_1C_2[(x-1)^3 + 1] + \frac{1}{12}(K_1C_3 + K_2C_1)[(x-1)^4 - 1] + \\ & + \frac{1}{20}(K_1C_4 + K_2C_2)[(x-1)^5 + 1] + \frac{1}{30}(K_1C_5 + K_2C_3)[(x-1)^6 - 1] + \\ & + \frac{1}{42}K_2C_4[(x-1)^7 + 1] + \frac{1}{56}K_2C_5[(x-1)^8 - 1]. \quad (5.2.28) \end{aligned}$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuațiilor (5.2.14)-(5.2.19) este obținută din relația (2.2.5):

$$\bar{v}(x) = v_0(x) + v_1(x) \quad (5.2.29)$$

unde $v_0(x)$ și $v_1(x)$ sunt date de relațiile (5.2.21) și respectiv (5.2.28).

Restul aproximării definit de relația (2.2.11) devine

$$R^1(x, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \bar{v}'' + (3a_1 - a_2)\bar{v}'^2 \bar{v}'' + a_1 a_2 \bar{v}'^4 \bar{v}'' - m(1 + a_2 \bar{v}'^2)^2 \quad (5.2.30)$$

cu \bar{v} obținută din relația (5.2.29).

5.2.2.1.b În al doilea subcaz, din ecuația (5.2.18) se consideră

$$v(0) = 1, \quad v'(1) = \pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}}, \quad \text{daca } a_1 < 0. \quad (5.2.31)$$

Ecuația (2.2.9) devine

$$v_0'' - m = 0, \quad v_0(0) = 0, \quad v_0'(1) = \pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} \quad (5.2.32)$$

cu soluția

$$v_0(x) = \frac{m}{2}(x-1)^2 \pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}}(x-1) - \frac{m}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + 1. \quad (5.2.33)$$

Pentru expresia (5.2.33) a funcției $v_0(x)$, operatorul nelinier N devine

$$N(v_0) = m(a_1 - a_2)[K_3 + K_4(x-1) + K_5(x-1)^2 + K_6(x-1)^3 + K_7(x-1)^4] \quad (5.2.34)$$

unde

$$K_3 = -\frac{1}{a_1}\left(3 - \frac{a_2}{a_1}\right); \quad K_4 = \pm \frac{2m}{\sqrt{-a_1}}\left(3 - \frac{2a_2}{a_1}\right); \quad K_5 = -3m^2\left(1 - \frac{2a_2}{a_1}\right);$$

$$K_6 = \pm \frac{4m^3 a_2}{\sqrt{-a_1}}; \quad K_7 = m^4 a_2. \quad (5.2.35)$$

Ecuația (2.2.9) pentru funcția $v_1(x)$ este

$$v_1'' = H^1(x, C_i)N(v_0), \quad v_1(0) = 0, \quad v_1'(1) = 0 \quad (5.2.36)$$

unde funcția auxiliară $H^1(x, C_i)$ este aleasă în forma

$$H^1(x, C_i) = \frac{1}{m(a_1 - a_2)}[C_6 + C_7(x-1) + C_8(x-1)^2 + C_9(x-1)^3 + C_{10}(x-1)^4]. \quad (5.2.37)$$

Substituind relațiile (5.2.34) și (5.2.37) în ecuația (5.2.36), și după aceea rezolvând această ecuație, se obține soluția

$$v_1(x) = \frac{1}{2}K_3C_6[(x-1)^2 - 1] + \frac{1}{6}(K_4C_6 + K_3C_7)[(x-1)^3 + 1] +$$

$$+ \frac{1}{12}(K_5C_6 + K_4C_7 + K_3C_8)[(x-1)^4 - 1] +$$

$$+ \frac{1}{20}(K_6C_6 + K_5C_7 + K_4C_8 + K_3C_9)[(x-1)^5 + 1] +$$

$$+ \frac{1}{30}(K_7C_6 + K_6C_7 + K_5C_8 + K_4C_9 + K_3C_{10})[(x-1)^6 - 1] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{42}(K_7C_7 + K_6C_8 + K_5C_9 + K_6C_{10})[(x-1)^7 + 1] + \\
& + \frac{1}{56}(K_7C_8 + K_6C_9 + K_5C_{10})[(x-1)^8 - 1] + \\
& + \frac{1}{72}(K_7C_9 + K_6C_8)[(x-1)^9 + 1] + \frac{1}{90}K_7C_{10}[(x-1)^{10} - 1]. \quad (5.2.38)
\end{aligned}$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuațiilor (5.2.14)-(5.2.31) este

$$\bar{v}(x) = v_0(x) + v_1(x) \quad (5.2.39)$$

unde $v_0(x)$ și $v_1(x)$ sunt date de relațiile (5.2.33) și respectiv (5.2.38).

Cazul 5.2.2.2. În al doilea caz, operatorul liniar poate fi ales în forma:

$$Lv = v'' + \lambda v' \quad (5.2.40)$$

unde λ este un parametru necunoscut, iar operatorul neliniar N este definit în relația (5.2.17).

Din ecuația (5.2.15)₂ sau ecuația (5.2.18) se consideră următoarele două subcazuri:

5.2.2.2.a În primul subcaz, condițiile inițiale sunt

$$v(0) = 1, \quad v'(1) = 0. \quad (5.2.41)$$

Ecuația (2.2.4) devine

$$v_0'' + \lambda v_0' - \lambda^2 e^{-\lambda} = 0, \quad v_0(0) = 1, v_0'(1) = 0, f(x) = \lambda^2 e^{-\lambda}. \quad (5.2.42)$$

Soluția ecuației (5.2.42) are forma

$$v_0(x) = \lambda e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}. \quad (5.2.43)$$

Substituind relația (5.103) în relația (5.2.17), operatorul neliniar $N(v_0)$ devine:

$$N(v_0) = M_0 + M_1 e^{-\lambda x} + M_2 e^{-2\lambda x} + M_3 e^{-3\lambda x} + M_4 e^{-4\lambda x} + M_5 e^{-5\lambda x} \quad (5.2.44)$$

unde

$$\begin{aligned}
M_0 &= -m(1 + a_2 \lambda^2 e^{-2\lambda})^2; \\
M_1 &= \lambda^2 + (3a_1 - a_2)\lambda^4 e^{-2\lambda} + a_1 a_2 \lambda^6 e^{-4\lambda} + 4m(a_2 \lambda^2 e^{-\lambda} + a_2^2 \lambda^4 e^{-3\lambda}); \\
M_2 &= -2(3a_1 - a_2)\lambda^4 e^{-\lambda} - 4a_1 a_2 \lambda^6 e^{-3\lambda} - 2m(a_2 \lambda^2 + 3a_2^2 \lambda^4 e^{-2\lambda}) - 4ma_2^2 \lambda^4 e^{-2\lambda}; \\
M_3 &= (3a_1 - a_2)\lambda^4 + 6a_1 a_2 \lambda^6 e^{-2\lambda} + 4ma_2^2 \lambda^4 e^{-\lambda}; \\
M_4 &= -4a_1 a_2 \lambda^6 e^{-\lambda} - ma_2^2 \lambda^4; \quad M_5 = a_1 a_2 \lambda^6. \quad (5.2.45)
\end{aligned}$$

A doua funcție $v_1(x)$ se obține din ecuația (2.2.9):

$$v_1'' + \lambda v_1' = H^2(x, C_j)N(v_0), \quad v_1(0) = 0, v_1'(1) = 0. \quad (5.2.46)$$

Expresia (5.2.44) a operatorului neliniar $N(v_0)$ este o funcție exponențială și prin urmare, funcția auxiliară $H^2(x, C_j)$ se poate alege în forma

$$H^2(x, C_j) = C_1 + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 e^{-2\lambda x}. \quad (5.2.47)$$

unde C_1 , C_2 , și C_3 parametri necunoscuți. De asemenea se pot folosi următoarele expresii pentru funcția auxiliară:

$$H^2(x, C_i) = C_1' + C_2' e^{-\lambda x} + C_3' e^{-2\lambda x} + C_4' e^{-3\lambda x}$$

sau

$$H^2(x, C_i) = C_1^* + C_2^* e^{-\lambda x} + C_3^* e^{-4\lambda x} + C_4^* e^{-5\lambda x}$$

și altele.

Acum, substituind relațiile (5.2.47) și (5.2.44) în ecuația (5.2.46), se obține ecuația

$$\begin{aligned} v_1'' + \lambda v_1' = & M_0 C_1 + (M_1 C_1 + M_0 C_2) e^{-\lambda x} + \\ & + (M_2 C_1 + M_1 C_2 + M_0 C_3) e^{-2\lambda x} + (M_3 C_1 + M_2 C_2 + M_1 C_3) e^{-3\lambda x} + \\ & + (M_4 C_1 + M_3 C_2 + M_2 C_3) e^{-4\lambda x} + (M_5 C_1 + M_4 C_2 + M_3 C_3) e^{-5\lambda x} + \\ & + (M_5 C_2 + M_4 C_3) e^{-6\lambda x} + M_5 C_3 e^{-7\lambda x}, \quad v_1(0) = v_1'(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

Din ecuația (5.2.48) se obține soluția $v_1(x)$, astfel încât soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuațiilor (5.2.14)-(5.2.41) în acest subcaz, poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned} \bar{v}(x) = v_0(x) + v_1(x) = & A + \left(\frac{M_0 C_1}{\lambda} + \lambda e^{-\lambda}\right) x + \left(B + 1 - \frac{M_1 C_1 + M_0 C_2}{\lambda} x\right) e^{-\lambda x} + \\ & + \frac{M_2 C_1 + M_1 C_2 + M_0 C_3}{2\lambda^2} e^{-2\lambda x} + \frac{M_3 C_1 + M_2 C_2 + M_1 C_3}{6\lambda^2} e^{-3\lambda x} + \\ & + \frac{M_4 C_1 + M_3 C_2 + M_2 C_3}{12\lambda^2} e^{-4\lambda x} + \frac{M_5 C_1 + M_4 C_2 + M_3 C_3}{20\lambda^2} e^{-5\lambda x} + \\ & + \frac{M_5 C_2 + M_4 C_3}{30\lambda^2} e^{-6\lambda x} + \frac{M_5 C_3}{42\lambda^2} e^{-7\lambda x} \end{aligned} \quad (5.2.49)$$

unde $v_0(x)$ este dată de relația (5.4.43) iar

$$\begin{aligned} A = & \left(-\frac{e^\lambda}{\lambda^2} M_0 + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} M_1 + \frac{2e^{-\lambda}-1}{2\lambda^2} M_2 + \frac{3e^{-2\lambda}-1}{6\lambda^2} M_3 + \frac{4e^{-3\lambda}-1}{12\lambda^2} M_4 + \right. \\ & + \left. \frac{5e^{-4\lambda}-1}{20\lambda^2} M_5\right) C_1 + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda^2} M_0 + \frac{2e^{-\lambda}-1}{2\lambda^2} M_1 + \frac{3e^{-2\lambda}-1}{6\lambda^2} M_2 + \frac{4e^{-3\lambda}-1}{12\lambda^2} M_3 + \right. \\ & + \left. \frac{5e^{-4\lambda}-1}{20\lambda^2} M_4 + \frac{6e^{-5\lambda}-1}{30\lambda^2} M_5\right) C_2 + \left(\frac{2e^{-\lambda}-1}{2\lambda^2} M_0 + \frac{3e^{-2\lambda}-1}{6\lambda^2} M_1 + \frac{4e^{-3\lambda}-1}{12\lambda^2} M_2 + \right. \\ & + \left. \frac{5e^{-4\lambda}-1}{20\lambda^2} M_3 + \frac{6e^{-5\lambda}-1}{30\lambda^2} M_4 + \frac{7e^{-6\lambda}-1}{42\lambda^2} M_5\right) C_3; \\ B = & \left(\frac{e^\lambda}{\lambda^2} M_0 + \frac{\lambda-1}{\lambda^2} M_1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} M_2 - \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda^2} M_3 - \frac{e^{-3\lambda}}{3\lambda^2} M_4 - \frac{e^{-4\lambda}}{4\lambda^2} M_5\right) C_1 + \\ & + \left(\frac{\lambda-1}{\lambda^2} M_0 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} M_1 - \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda^2} M_2 - \frac{e^{-3\lambda}}{3\lambda^2} M_3 - \frac{e^{-4\lambda}}{4\lambda^2} M_4 - \frac{e^{-5\lambda}}{5\lambda^2} M_5\right) C_2 + \\ & + \left(-\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} M_0 - \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda^2} M_1 - \frac{e^{-3\lambda}}{3\lambda^2} M_2 - \frac{e^{-4\lambda}}{4\lambda^2} M_3 - \frac{e^{-5\lambda}}{5\lambda^2} M_4 - \frac{e^{-6\lambda}}{6\lambda^2} M_5\right) C_3. \end{aligned} \quad (5.2.50)$$

5.2.2.2.b În ultimul subcaz, condițiile inițiale sunt

$$v(0) = 1, \quad v'(1) = \pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}}, \quad \text{daca } a_1 < 0. \quad (5.2.51)$$

Ecuția (2.2.4) are forma

$$v_0'' + \lambda v_0' - \lambda^2 e^{-\lambda} = 0, \quad v_0(0) = 1, v_0'(1) = \pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}}, \quad (5.2.52)$$

și are soluția

$$v_0(x) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right) x + e^{-\lambda x}. \quad (5.2.53)$$

Din relația (5.2.53), operatorul nelinier $N(v_0)$ devine:

$$N(v_0) = N_0 + N_1 e^{-\lambda x} + N_2 e^{-2\lambda x} + N_3 e^{-3\lambda x} + N_4 e^{-4\lambda x} + N_5 e^{-5\lambda x} \quad (5.2.54)$$

unde

$$\begin{aligned} N_0 &= -m \left[1 + a_2 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right)^2 \right]^2; \\ N_1 &= \lambda^2 + \lambda^2 (3a_1 - a_2) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right)^2 + a_1 a_2 \lambda^2 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right)^4 + \\ &\quad + 4ma_2 \lambda \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right) + 4ma_2^2 \lambda \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right)^3; \\ N_2 &= -2(3a_1 - a_2) \lambda^3 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right) - 4a_1 a_2 \lambda^3 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right)^3 - \\ &\quad - 2ma_2 \lambda^2 - 6ma_2^2 \lambda^2 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right)^2; \\ N_3 &= (3a_1 - a_2) \lambda^4 + 6a_1 a_2 \lambda^4 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right)^2 + 4ma_2^2 \lambda^3 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right); \\ N_4 &= -4a_1 a_2 \lambda^5 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} + \lambda e^{-\lambda} \right) - ma_2^2 \lambda^4; \quad N_5 = a_1 a_2 \lambda^6. \end{aligned} \quad (5.2.55)$$

Pentru ecuația în $v_1(x)$ se alege funcția auxiliară $H^2(x, C_i)$ în forma

$$H^2(x, C_i) = C_4 + C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{-2\lambda x}. \quad (5.2.56)$$

Cu ajutorul relațiilor (5.2.56) și (5.2.54), ecuația (2.2.9) poate fi scrisă prin

$$\begin{aligned} v_1'' + \lambda v_1' &= N_0 C_4 + (N_1 C_4 + N_0 C_5) e^{-\lambda x} + \\ &\quad + (N_2 C_4 + N_1 C_5 + N_0 C_6) e^{-2\lambda x} + (N_3 C_4 + N_2 C_5 + N_1 C_6) e^{-3\lambda x} + \\ &\quad + (N_4 C_4 + N_3 C_5 + N_2 C_6) e^{-4\lambda x} + (N_5 C_4 + N_4 C_5 + N_3 C_6) e^{-5\lambda x} + \\ &\quad + (N_5 C_5 + N_4 C_6) e^{-6\lambda x} + N_5 C_6 e^{-7\lambda x}, \quad v_1(0) = v_1'(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.57)$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi, în ultimul subcaz, are forma

$$\bar{v}(x) = v_0(x) + v_1(x) = D + \left(\frac{N_0 C_4}{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \pm \frac{1}{\sqrt{-a_1}} \right) x + \left(E + 1 - \frac{N_1 C_4 + N_0 C_5}{\lambda} \right) x e^{-\lambda x} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{N_2 C_4 + N_1 C_5 + N_0 C_6}{2\lambda^2} e^{-2\lambda x} + \frac{N_3 C_4 + N_2 C_5 + N_1 C_6}{6\lambda^2} e^{-3\lambda x} + \frac{N_4 C_4 + N_3 C_5 + N_2 C_6}{12\lambda^2} e^{-4\lambda x} + \\
 & + \frac{N_5 C_4 + N_4 C_5 + N_3 C_6}{20\lambda^2} e^{-5\lambda x} + \frac{N_5 C_5 + N_4 C_6}{30\lambda^2} e^{-6\lambda x} + \frac{N_5 C_6}{42\lambda^2} e^{-7\lambda x} \quad (5.2.58)
 \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
 D = & \left(-\frac{e^\lambda}{\lambda^2} N_0 + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} N_1 + \frac{2e^{-\lambda}-1}{2\lambda^2} N_2 + \frac{3e^{-2\lambda}-1}{6\lambda^2} N_3 + \frac{4e^{-3\lambda}-1}{12\lambda^2} N_4 + \right. \\
 & + \frac{5e^{-4\lambda}-1}{20\lambda} N_5 \Big) C_4 + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda^2} N_0 + \frac{2e^{-\lambda}-1}{2\lambda^2} N_1 + \frac{3e^{-2\lambda}-1}{6\lambda^2} N_2 + \frac{4e^{-3\lambda}-1}{12\lambda^2} N_3 + \right. \\
 & + \frac{5e^{-4\lambda}-1}{20\lambda^2} N_4 + \frac{6e^{-5\lambda}-1}{30\lambda^2} N_5 \Big) C_5 + \left(\frac{2e^{-\lambda}-1}{2\lambda^2} N_0 + \frac{3e^{-2\lambda}-1}{6\lambda^2} N_1 + \frac{4e^{-3\lambda}-1}{12\lambda^2} N_2 + \right. \\
 & \left. + \frac{5e^{-4\lambda}-1}{20\lambda^2} N_3 + \frac{6e^{-5\lambda}-1}{30\lambda^2} N_4 + \frac{7e^{-6\lambda}-1}{42\lambda^2} N_5 \right) C_6; \\
 E = & \left(\frac{e^\lambda}{\lambda^2} N_0 + \frac{\lambda-1}{\lambda^2} N_1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} N_2 - \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda^2} N_3 - \frac{e^{-3\lambda}}{3\lambda^2} N_4 - \frac{e^{-4\lambda}}{4\lambda^2} N_5 \right) C_4 + \\
 & + \left(\frac{\lambda-1}{\lambda^2} N_0 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} N_1 - \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda^2} N_2 - \frac{e^{-3\lambda}}{3\lambda^2} N_3 - \frac{e^{-4\lambda}}{4\lambda^2} N_4 - \frac{e^{-5\lambda}}{5\lambda^2} N_5 \right) C_5 + \\
 & + \left(-\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} N_0 - \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda^2} N_1 - \frac{e^{-3\lambda}}{3\lambda^2} N_2 - \frac{e^{-4\lambda}}{4\lambda^2} N_3 - \frac{e^{-5\lambda}}{5\lambda^2} N_4 - \frac{e^{-6\lambda}}{6\lambda^2} N_5 \right) C_6. \quad (5.2.59)
 \end{aligned}$$

5.2.3 Rezultate numerice și discuții

Se va ilustra acuratețea procedurii propuse pentru diferite valori ale coeficienților a_1 , a_2 și m și pentru fiecare funcție auxiliară H^1 și H^2 . De asemenea, se reprezintă grafic variația profilului vitezei problemei benzii în mișcare pentru un fluid Oldroyd cu 6-constante. În toate cazurile și subcazurile, valorile parametrilor C_1 , C_2 , ... și λ sunt determinate cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate utilizând soft-ul Wolfram Mathematica 6.0.

Exemplul 5.2.3.1 Dacă se ia în considerare soluția dată de relația (5.2.29), pentru $a_1 = a_2$ (cazul Newtonian), este de remarcat că din ecuația (5.2.25) rezultă $K_1 = K_2 = 0$ și prin urmare $v_1(x) = 0$. Urmează că $\bar{v} = v_0(x) = m\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + 1$, care este soluția exactă a ecuațiilor (5.2.14)-(5.2.15).

Exemplul 5.2.3.2 În acest exemplu se consideră $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$ (cazul ne-Newtonian). Valorile parametrilor de control a convergenței pentru cazul **5.2.2.1.a** sunt

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0.0309007883, C_2 = 0.5673047654, C_3 = 1.7430618401, \\
 C_4 &= 4.9462074642, C_5 = 3.3490697012.
 \end{aligned}$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi (5.2.29) poate fi scrisă în forma

$$\bar{v}(x) = 0.4430506264 + 0.4884122043(x-1)^2 - 0.0709130956(x-1)^3 - 0.1094241888(x-1)^4 - 0.1908012620(x-1)^5 - 0.0946208790(x-1)^6 - 0.0220812833(x-1)^7 - 0.0112134030(x-1)^8 \quad (5.2.60)$$

În Tabelul 5.11 se prezintă o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (5.2.60) și rezultatele numerice pentru câteva valori ale variabilei x , precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 5.11. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.60) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.26)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.60)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	0.8866085725	0.8866821774	$7.3 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.7875621671	0.7875887398	$2.6 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.7025338925	0.7025310249	$2.8 \cdot 10^{-6}$
0.4	0.6308917264	0.6308667405	$2.4 \cdot 10^{-5}$
0.5	0.5717826705	0.5717915984	$8.9 \cdot 10^{-6}$
0.6	0.5245086113	0.5245288249	$2.0 \cdot 10^{-5}$
0.7	0.4884393924	0.4884348043	$4.5 \cdot 10^{-6}$
0.8	0.4630600752	0.4630345952	$2.5 \cdot 10^{-5}$
0.9	0.4480006226	0.4479965346	$4.0 \cdot 10^{-6}$
1	0.4430235508	0.4430506264	$2.7 \cdot 10^{-5}$

Exemplul 5.2.3.3 Pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$ se obține din ecuația (5.2.29)

$$C_1 = 0.0145037003, C_2 = 0.3432811995, C_3 = 1.1572350528, \\ C_4 = 5.139827506, C_5 = 3.777891404$$

și soluția aproximativă de ordinul întâi în forma:

$$\bar{v}(x) = 0.3569716548 + 0.4891222247(-1+x)^2 - 0.0858202998(x-1)^3 - 0.1452587024(x-1)^4 - 0.3940690977(x-1)^5 - 0.2081818243(x-1)^6 - 0.0611884234(x-1)^7 - 0.0337311738(x-1)^8. \quad (5.2.61)$$

În Tabelul 5.12 este prezentată o comparație între soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (5.2.61) și rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 5.12. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.61) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.26)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.61)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	0.8571788783	0.8572229943	$4.4 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.7361604138	0.7361798440	$1.9 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.6360415408	0.6360346979	$6.8 \cdot 10^{-6}$
0.4	0.5548519523	0.5548435245	$8.4 \cdot 10^{-6}$
0.5	0.4903083144	0.4903091700	$8.5 \cdot 10^{-7}$
0.6	0.4402488104	0.4402657870	$1.6 \cdot 10^{-5}$
0.7	0.4029480153	0.4029501998	$2.1 \cdot 10^{-6}$
0.8	0.3771255723	0.3771041676	$2.1 \cdot 10^{-5}$
0.9	0.3619470473	0.3619379098	$9.1 \cdot 10^{-6}$
1	0.3569430437	0.3569716548	$2.8 \cdot 10^{-5}$

Exemplul 5.2.3.4 Dacă se consideră $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$, parametrii de control a convergenței pentru cazul **5.2.2.1.a** sunt

$$C_1 = -0.0103555184, C_2 = -0.2555006995, C_3 = -2.5463142522, \\ C_4 = -3.1417178283, C_5 = -1.0373234408$$

și prin urmare soluția aproximativă de ordinul întâi are forma:

$$\bar{v}(x) = 0.0939116440 + 0.7631062030(x-1)^2 + 0.1077893576(x-1)^3 + \\ + 0.5383418091(x-1)^4 + 0.4158131167(x-1)^5 + 0.2083746269(x-1)^6 + \\ + 0.1065063382(x-1)^7 + 0.0263744094(x-1)^8. \quad (5.2.62)$$

Această soluție aproximativă este comparată în Tabelul 5.13 cu rezultatele numerice.

Tabelul 5.13. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.62) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.26)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.62)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	0.8122030427	0.8122723528	$6.9 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.6480524030	0.6480757122	$2.3 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.5075106818	0.5074963533	$1.4 \cdot 10^{-5}$
0.4	0.3899587013	0.3899662747	$7.5 \cdot 10^{-6}$
0.5	0.2943579028	0.2943935300	$3.5 \cdot 10^{-5}$

0.6	0.2193544932	0.2193300304	$2.4 \cdot 10^{-5}$
0.7	0.1631889587	0.1631613755	$2.7 \cdot 10^{-5}$
0.8	0.1243031560	0.1243139043	$1.0 \cdot 10^{-5}$
0.9	0.1014691098	0.1014847907	$1.5 \cdot 10^{-5}$
1	0.0939598983	0.0939116440	$4.8 \cdot 10^{-5}$

Exemplul 5.2.3.5 În cazul $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$, parametrii de control a convergenței pentru cazul **5.2.2.1.a** sunt

$$C_1 = -0.0430647, C_2 = -0.997138, C_3 = -6.40181,$$

$$C_4 = -9.14949, C_5 = -3.90268.$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi devine:

$$\begin{aligned} \bar{v}(x) = & -0.1330803613 + 0.8590076019(x-1)^2 + 0.8413350971(x-1)^3 + \\ & + 2.7143908882(x-1)^4 + 2.5052659024(x-1)^5 + 1.4688065504(x-1)^6 + \\ & + 0.8271305377(x-1)^7 + 0.2646068580(x-1)^8. \end{aligned} \quad (5.2.63)$$

Soluția MHAO (5.2.63) este comparată în Tabelul 5.14 cu rezultatele numerice.

Tabelul 5.14. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.63) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.26)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.63)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	0.9999999999	$2.2 \cdot 10^{-16}$
0.1	0.7497063820	0.7498345352	$1.2 \cdot 10^{-4}$
0.2	0.5327963111	0.5327805533	$1.5 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.3498945869	0.3498605615	$3.4 \cdot 10^{-5}$
0.4	0.2010814564	0.2012282330	$1.4 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.0852885962	0.0853862885	$9.7 \cdot 10^{-5}$
0.6	-0.0006296037	-0.0008156336	$1.8 \cdot 10^{-4}$
0.7	-0.0615295648	-0.0616797274	$1.5 \cdot 10^{-4}$
0.8	-0.1020045446	-0.1018253040	$1.7 \cdot 10^{-4}$
0.9	-0.1251782938	-0.1250838453	$9.4 \cdot 10^{-5}$
1	-0.1327530483	-0.133080361	$3.2 \cdot 10^{-4}$

Exemplul 5.2.3.6 Pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$,

pentru cazul **5.2.2.1.b**, parametrii de control a convergenței sunt

$$C_1 = -0.2487584861, C_2 = 0.3794941533, C_3 = -0.4121126222,$$

$$C_4 = 0.4150647670, C_5 = -0.5193428345$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (5.2.39) poate fi scrisă prin

$$\begin{aligned} \bar{v}(x) = & 2.4142135623 + 1.4142135623(x-1) - 0.4950339447[(x-1)^2 - 1] - \\ & - 0.0803371704[(x-1)^3 + 1] - 0.0140724640[(x-1)^4 - 1] + \\ & + 0.0102108835[(x-1)^5 + 1] - 0.0603676324[(x-1)^6 - 1] - \\ & - 0.1091646985[(x-1)^7 + 1] - 0.0661814531[(x-1)^8 - 1] - \\ & - 0.0175193191[(x-1)^9 + 1] - 0.0028852379[(x-1)^{10} - 1]. \end{aligned} \quad (5.2.64)$$

În Tabelul 5.15 se prezintă o comparație între soluția aproximativă (5.2.64) obținută cu ajutorul metodei MHAO, și rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 5.15. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.64) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.37)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.64)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	1.2229062807	1.2229013971	$4.8 \cdot 10^{-6}$
0.2	1.4377929759	1.4377807450	$1.2 \cdot 10^{-5}$
0.3	1.6445808407	1.6445867997	$5.9 \cdot 10^{-6}$
0.4	1.8432159625	1.8432255865	$9.6 \cdot 10^{-6}$
0.5	2.0336046251	2.0336047334	$1.0 \cdot 10^{-7}$
0.6	2.2156306053	2.2156224054	$8.1 \cdot 10^{-6}$
0.7	2.3891355914	2.3891330225	$2.5 \cdot 10^{-6}$
0.8	2.5539053793	2.5539142068	$8.8 \cdot 10^{-6}$
0.9	2.7096483135	2.7096510721	$2.7 \cdot 10^{-6}$
1	2.8559539636	2.8559439901	$9.9 \cdot 10^{-6}$

Exemplul 5.2.3.7 În acest caz se consideră $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$, astfel încât pentru ecuația (5.2.39), parametrii de control a convergenței sunt

$$\begin{aligned} C_1 = & -0.2484286614, C_2 = 0.4310993122, C_3 = -0.4720538492, \\ C_4 = & 0.5090078876, C_5 = -0.6742203389 \end{aligned}$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (5.2.39) este

$$\bar{v}(x) = 2.4142135623 + 1.4142135623(x-1) - 0.6179289764[(x-1)^2 - 1] -$$

$$\begin{aligned}
& -0.0560133962[(x-1)^3 + 1] + 0.0071974457[(x-1)^4 - 1] + \\
& + 0.0344624859[(x-1)^5 + 1] - 0.0793096739[(x-1)^6 - 1] - \\
& - 0.1669817690[(x-1)^7 + 1] - 0.1122347657[(x-1)^8 - 1] + \\
& + 0.0344266489[(x-1)^9 + 1] - 0.0056185028[(x-1)^{10} - 1]. \quad (5.2.65)
\end{aligned}$$

În Tabelul 5.16 se prezintă o comparație între soluția (5.2.65) și rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 5.16. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.65) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.37)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.65)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	1.2518351629	1.2518238888	$1.1 \cdot 10^{-5}$
0.2	1.4920691495	1.4920531530	$1.5 \cdot 10^{-5}$
0.3	1.7207387643	1.72074398947	$5.2 \cdot 10^{-6}$
0.4	1.9379031842	1.93792002203	$1.6 \cdot 10^{-5}$
0.5	2.1436214696	2.14362291135	$1.4 \cdot 10^{-6}$
0.6	2.3379068070	2.33789447422	$1.2 \cdot 10^{-5}$
0.7	2.5207347633	2.52072993082	$4.8 \cdot 10^{-6}$
0.8	2.6920220811	2.69203422220	$1.2 \cdot 10^{-5}$
0.9	2.8516000667	2.85160438618	$4.3 \cdot 10^{-6}$
1	2.9991636824	2.99914870737	$1.4 \cdot 10^{-5}$

Exemplul 5.2.3.8 Pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$,

parametrii de control a convergenței sunt

$$C_1 = -0.2481244286, C_2 = 0.4823327023, C_3 = -0.5396781473,$$

$$C_4 = 0.6132014735, C_5 = -0.8540900975$$

și soluția aproximativă de ordinul întâi dată de relația (5.2.39) este

$$\begin{aligned}
\bar{v}(x) = & 2.4142135623 + 1.4142135623(x-1) - 0.7406221430[(x-1)^2 - 1] - \\
& - 0.0148810042[(x-1)^3 + 1] + 0.03592103224[(x-1)^4 - 1] + \\
& + 0.06391596843[(x-1)^5 + 1] - 0.10448164910[(x-1)^6 - 1] - \\
& - 0.24482492876[(x-1)^7 + 1] - 0.17646854016[(x-1)^8 - 1] - \\
& - 0.0585869683[(x-1)^9 + 1] - 0.0094898899[(x-1)^{10} - 1]. \quad (5.2.66)
\end{aligned}$$

În Tabelul 5.17 se prezintă o comparație între soluția (5.2.66) și rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare.

Tabelul 5.17. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.66) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.37)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.66)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	1.2839691268	1.2839541027	$1.5 \cdot 10^{-5}$
0.2	1.5522080417	1.5521893463	$1.8 \cdot 10^{-5}$
0.3	1.8048997685	1.8049032366	$3.4 \cdot 10^{-6}$
0.4	2.0422481654	2.0422731488	$2.4 \cdot 10^{-5}$
0.5	2.2645158331	2.2645193174	$3.4 \cdot 10^{-6}$
0.6	2.4718989261	2.4718821917	$1.6 \cdot 10^{-5}$
0.7	2.6645698769	2.6645620846	$7.7 \cdot 10^{-6}$
0.8	2.8426469875	2.8426623139	$1.5 \cdot 10^{-5}$
0.9	3.0061618853	3.0061679939	$6.1 \cdot 10^{-6}$
1	3.1549980906	3.1549778194	$2.0 \cdot 10^{-5}$

În următoarele Tabele, se prezintă doar comparații între soluțiile aproximative obținute cu ajutorul metodei MHAO și rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare.

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1.5$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$$C_1 = -0.2991376967, C_2 = 2.4583107977, C_3 = 5.2555661233,$$

$$C_4 = 6.0202275514, C_5 = -12.6533275753$$

$$\begin{aligned} v(x) = & 1.6642135623 - 1.1965507868(-1 + (-1 + x)^2) + \\ & + 2.2201362610(1 + (-1 + x)^3) + 7.3446364741(-1 + (-1 + x)^4) + \\ & + 10.328722822(1 + (-1 + x)^5) + 5.0614870587(-1 + (-1 + x)^6) - \\ & - 2.1456209015(1 + (-1 + x)^7) - 3.3117498455(-1 + (-1 + x)^8) - \\ & - 1.4659614501(1 + (-1 + x)^9) - 0.3558748380(-1 + (-1 + x)^{10}) + \\ & + 1.4142135623(-1 + x) + 0.75(-1 + x)^2 \end{aligned} \quad (5.2.67)$$

Tabelul 5.18. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.39) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1.5$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.37)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.67)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	1.2609509091	1.2607564771	$1.9 \cdot 10^{-4}$
0.2	1.5099315977	1.5092509182	$6.8 \cdot 10^{-4}$
0.3	1.7469050126	1.7471433465	$2.3 \cdot 10^{-4}$
0.4	1.9718544689	1.9726191668	$7.6 \cdot 10^{-4}$
0.5	2.1847229322	2.1849754601	$2.5 \cdot 10^{-4}$
0.6	2.3853998014	2.3850003567	$3.9 \cdot 10^{-4}$
0.7	2.5737023327	2.5735062125	$1.9 \cdot 10^{-4}$
0.8	2.7493402910	2.7498662597	$5.2 \cdot 10^{-4}$
0.9	2.9118599070	2.9120716519	$2.1 \cdot 10^{-4}$
1	3.0605243186	3.0595422315	$9.8 \cdot 10^{-4}$

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$$C_1 = -0.29764244847, C_2 = 2.6201023242, C_3 = 5.31818944600,$$

$$C_4 = 6.69409485360, C_5 = -14.3643101036$$

$$\begin{aligned} v(x) = & -0.2793732717 + 1.0025908499(-1+x)^2 + \\ & + 0.1014702162(-1+x)^3 + 1.1045098047(-1+x)^4 + \\ & + 1.1880799215(-1+x)^5 + 0.8137369737(-1+x)^6 + \\ & + 0.5512565984(-1+x)^7 + 0.1993423795(-1+x)^8 \end{aligned} \quad (5.2.68)$$

Tabelul 5.19. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.39) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.37)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.68)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	1.3085076286	1.3086293331	$1.2 \cdot 10^{-4}$
0.2	1.5989200672	1.5982295694	$6.9 \cdot 10^{-4}$
0.3	1.8714226404	1.8715831764	$1.6 \cdot 10^{-4}$
0.4	2.1262167929	2.1270250021	$8.0 \cdot 10^{-4}$

0.5	2.3635521486	2.3638995934	$3.4 \cdot 10^{-4}$
0.6	2.5835932960	2.5832535309	$3.3 \cdot 10^{-4}$
0.7	2.7864530758	2.7863211230	$1.3 \cdot 10^{-4}$
0.8	2.9721424944	2.9728245480	$6.8 \cdot 10^{-4}$
0.9	3.1405027991	3.1408732113	$3.7 \cdot 10^{-4}$
1	3.2910606175	3.2900917909	$9.6 \cdot 10^{-4}$

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$$C_1 = -0.3710877971, C_2 = 0.7120197915, C_3 = -0.9165178318,$$

$$C_4 = 0.9364529813, C_5 = -1.3116305417$$

$$\begin{aligned} v(x) = & 1.6642135623 - 1.8554389855(-1 + (-1+x)^2) - \\ & - 0.0378276036(1 + (-1+x)^3) - 0.0528518861(-1 + (-1+x)^4) - \\ & - 0.0100245083(1 + (-1+x)^5) - 0.2144786235(-1 + (-1+x)^6) - \\ & - 0.3903512641(1 + (-1+x)^7) - 0.2730999630(-1 + (-1+x)^8) - \\ & - 0.0900451364(1 + (-1+x)^9) - 0.0145736726(-1 + (-1+x)^{10}) + \\ & + 1.4142135623(-1+x) + 0.75(-1+x)^2 \end{aligned} \quad (5.2.69)$$

Tabelul 5.20. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.39) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.37)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.69)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	1.3620021521	1.3619942603	$7.8 \cdot 10^{-6}$
0.2	1.6989187493	1.6989013673	$1.7 \cdot 10^{-5}$
0.3	2.0111542818	2.0111557494	$1.4 \cdot 10^{-6}$
0.4	2.2991388016	2.2991755901	$3.6 \cdot 10^{-5}$
0.5	2.5634672715	2.5634733579	$6.0 \cdot 10^{-6}$
0.6	2.8046481809	2.8046272723	$2.0 \cdot 10^{-5}$
0.7	3.0231881146	3.0231849910	$3.1 \cdot 10^{-6}$
0.8	3.2195266334	3.2195597898	$3.3 \cdot 10^{-5}$
0.9	3.3939541762	3.3939648992	$1.0 \cdot 10^{-5}$
1	3.5464381070	3.5464081807	$2.9 \cdot 10^{-5}$

Cazul: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$

$$C_1 = -1.8307484930, C_2 = 1.1413167407, C_3 = 0.1068806016, \lambda = 0.3737314886$$

$$v(x) = -27.9262480974 + 5.4851302601x + 0.0000124116e^{-2.6161204206x} +$$

$$+ 0.0000133156e^{-2.2423889319x} - 0.0018711093e^{-1.8686574433x} +$$

$$+ 0.0195606511e^{-1.4949259546x} - 0.2787056745e^{-1.1211944659x} + \quad (5.2.70)$$

$$+ 2.2000709837e^{-0.7474629773x} + (26.9871675191 +$$

$$+ 4.9622300640x)e^{-0.3737314886x}$$

Tabelul 5.21. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.49) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.47)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.70)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	0.9053448275	0.9052579961	$8.6 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.8203448275	0.8203616740	$1.6 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.7453448275	0.7453758909	$3.1 \cdot 10^{-5}$
0.4	0.6803448275	0.6803496596	$4.8 \cdot 10^{-6}$
0.5	0.6253448275	0.6253174083	$2.7 \cdot 10^{-5}$
0.6	0.5803448275	0.5803001231	$4.4 \cdot 10^{-5}$
0.7	0.5453448275	0.5453063866	$3.8 \cdot 10^{-5}$
0.8	0.5203448275	0.5203333245	$1.1 \cdot 10^{-5}$
0.9	0.5053448275	0.5053674704	$2.2 \cdot 10^{-5}$
1	0.5003448275	0.5003855577	$4.0 \cdot 10^{-5}$

Cazul: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$

$$C_1 = -1.3675462728, C_2 = 1.0172119995, C_3 = 0.2645719485, \lambda = 0.9775524088$$

$$v(x) = -5.1037009649 + 2.0649782339x + 0.0021571779e^{-6.8428668617x} +$$

$$+ 0.0023258690e^{-5.8653144529x} - 0.0529362594e^{-4.8877620441x} +$$

$$+ 0.2173329922e^{-3.9102096353x} - 0.7458274064e^{-2.9326572264x} + \quad (5.2.71)$$

$$+ 2.7845008177e^{-1.9551048176x} + (3.8961477738 +$$

$$+ 4.4060207470x)e^{-0.9775524088x}$$

Tabelul 5.22. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.49) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.47)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.71)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	0.8866085725	0.8863361236	$2.7 \cdot 10^{-4}$
0.2	0.7875621671	0.7875077487	$5.4 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.7025338925	0.7026438847	$1.0 \cdot 10^{-4}$
0.4	0.6308917264	0.6309536994	$6.1 \cdot 10^{-5}$
0.5	0.5717826705	0.5717301604	$5.2 \cdot 10^{-5}$
0.6	0.5245086113	0.5243482669	$1.6 \cdot 10^{-4}$
0.7	0.4884393924	0.4882588929	$1.8 \cdot 10^{-4}$
0.8	0.4630600752	0.4629799268	$8.0 \cdot 10^{-5}$
0.9	0.4480006226	0.4480861921	$8.5 \cdot 10^{-5}$
1	0.4430235508	0.4431992337	$1.7 \cdot 10^{-4}$

Cazul: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$

$$C_1 = 0.1033802263, C_2 = -5.0743662926, C_3 = 5.2464723929, \lambda = 1.8331484470$$

$$v(x) = 0.2111834849 + 0.2266342026x + 0.7053077352e^{-12.8320391293x} -$$

$$- 2.1743171901e^{-10.9988906822x} + 3.0299671556e^{-9.1657422352x} -$$

$$- 3.4209553712e^{-7.3325937881x} + 4.2635498889e^{-5.4994453411x} - \quad (5.2.72)$$

$$- 5.5010162983e^{-3.6662968940x} + (3.8862805950 -$$

$$- 3.5942688618x)e^{-1.8331484470x}$$

Tabelul 5.23. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.49) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.47)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.72)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1.0000000000	$6.6 \cdot 10^{-16}$
0.1	0.8571788783	0.8574415758	$2.6 \cdot 10^{-4}$
0.2	0.7361604138	0.7371670017	$1.0 \cdot 10^{-3}$
0.3	0.6360415408	0.6363653381	$3.2 \cdot 10^{-4}$
0.4	0.5548519523	0.5540906717	$7.6 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.4903083144	0.4886618248	$1.6 \cdot 10^{-3}$
0.6	0.4402488104	0.4383723210	$1.8 \cdot 10^{-3}$

0.7	0.4029480153	0.4016994772	$1.2 \cdot 10^{-3}$
0.8	0.3771255723	0.3772291464	$1.0 \cdot 10^{-4}$
0.9	0.3619470473	0.3635699289	$1.6 \cdot 10^{-3}$
1	0.3569430437	0.3593259550	$2.3 \cdot 10^{-3}$

Cazul: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 241.2719494984, C_2 = -481.7748847748, \\
 C_3 &= 239.5033784381, \lambda = -0.0125598994 \\
 v(x) &= 5.7378645517 \cdot 10^6 + 28819.2044379842x - \\
 &\quad - 1.1400151072 \cdot 10^6 e^{0.0251197989x} + \\
 &\quad + 281.7133215411 e^{0.0376796984x} - 29.9687086669 e^{0.0502395978x} + \\
 &\quad + 0.0061847040 e^{0.0627994973x} - 0.0004725750 e^{0.0753593968x} + \quad (5.2.73) \\
 &\quad + 3.5477010402 \cdot 10^{-8} e^{0.0879192962x} + (-4.5981001947 \cdot 10^6 + \\
 &\quad + 57558.8153937638x) e^{0.0125598994x}
 \end{aligned}$$

Tabelul 5.24. Comparare între soluția MHAO dată de relația (5.2.49) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.47)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.73)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1.0000000018	$1.8 \cdot 10^{-9}$
0.1	0.8577489626	0.8577105235	$3.8 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.7302489626	0.7302905954	$4.1 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.6177489626	0.6177941197	$4.5 \cdot 10^{-5}$
0.4	0.5202489626	0.5202636998	$1.4 \cdot 10^{-5}$
0.5	0.4377489626	0.4377305945	$1.8 \cdot 10^{-5}$
0.6	0.3702489626	0.3702146522	$3.4 \cdot 10^{-5}$
0.7	0.3177489626	0.3177242586	$2.4 \cdot 10^{-5}$
0.8	0.2802489626	0.2802562722	$7.3 \cdot 10^{-6}$
0.9	0.2577489626	0.2577959802	$4.7 \cdot 10^{-5}$
1	0.2502489626	0.2503170184	$6.8 \cdot 10^{-5}$

Cazul: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -0.9049315626, C_2 = -0.7563262593, C_3 = 2.7503540814, \lambda = 1.3273794158 \\
 v(x) &= -3.0536213915 + 1.5734670034x + 0.0762343848 e^{-9.2916559109x} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -0.2788466496e^{-7.9642764950x} + 0.5163505222e^{-6.6368970792x} - \\
 & -0.8483714278e^{-5.3095176633x} + 1.0522022749e^{-3.9821382475x} - \quad (5.2.74) \\
 & -0.6488528023e^{-2.6547588316x} + (4.1849050893 + \\
 & + 1.8653455757x)e^{-1.3273794158x}
 \end{aligned}$$

Tabelul 5.25. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.49) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.47)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.74)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	0.8122030427	0.8121518633	$5.1 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.6480524030	0.6479781411	$7.4 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.5075106818	0.5075931624	$8.2 \cdot 10^{-5}$
0.4	0.3899587013	0.3902155536	$2.5 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.2943579028	0.2945933839	$2.3 \cdot 10^{-4}$
0.6	0.2193544932	0.2193140489	$4.0 \cdot 10^{-5}$
0.7	0.1631889587	0.1629677570	$2.2 \cdot 10^{-4}$
0.8	0.1243031560	0.1242157441	$8.7 \cdot 10^{-5}$
0.9	0.1014691098	0.1018089431	$3.3 \cdot 10^{-4}$
1	0.0939598983	0.0945851040	$6.2 \cdot 10^{-4}$

Cazul: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$

$$\begin{aligned}
 C_1 = 1.9455561514, C_2 = -11.7228022355, C_3 = 10.5052760606, \lambda = 1.1331567890 \\
 v(x) = 10.6950856010 - 2.9419815376x + 0.2061997829e^{-7.9320975235x} - \\
 - 1.3684356029e^{-6.7989407344x} + 3.7412977258e^{-5.6657839453x} - \\
 - 8.1700104947e^{-4.5326271562x} + 16.1208654645e^{-3.3994703672x} - \quad (5.2.75) \\
 - 31.6083943785e^{-2.2663135781x} + (11.3833919017 - \\
 - 27.1229300183x)e^{-1.1331567890x}
 \end{aligned}$$

Tabelul 5.26. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.49) și rezultatele numerice pentru $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1.5$ și $v'(1) = 0$ folosind funcția auxiliară (5.2.47)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.75)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	0.9999999999	$3.5 \cdot 10^{-15}$

0.1	0.7497063820	0.7498561224	$1.4 \cdot 10^{-4}$
0.2	0.5327963111	0.5319377563	$8.5 \cdot 10^{-4}$
0.3	0.3498945869	0.3497527318	$1.4 \cdot 10^{-4}$
0.4	0.2010814564	0.2022779050	$1.1 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.0852885962	0.0867149009	$1.4 \cdot 10^{-3}$
0.6	-0.0006296037	-0.0003046742	$3.2 \cdot 10^{-4}$
0.7	-0.0615295648	-0.0622411985	$7.1 \cdot 10^{-4}$
0.8	-0.1020045446	-0.1024854604	$4.8 \cdot 10^{-4}$
0.9	-0.1251782938	-0.1243191394	$8.5 \cdot 10^{-4}$
1	-0.1327530483	-0.1309114642	$1.8 \cdot 10^{-3}$

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$$C_1 = 1.1777226999, C_2 = -1.6172172824, C_3 = 0.8222347150, \lambda = 0.6072038300$$

$$v(x) = 28.8931999726 - 5.05584121250x - 0.0006653107e^{-4.2504268102x} +$$

$$+ 0.0100132278e^{-3.6432229802x} - 0.0821298497e^{-3.0360191502x} +$$

$$+ 0.2058072573e^{-2.4288153201x} + 0.7320606336e^{-1.8216114901x} - \quad (5.2.76)$$

$$- 9.7039572626e^{-1.2144076600x} + (-19.0543286683 -$$

$$- 14.4095898395x)e^{-0.6072038300x}$$

Tabelul 5.27. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.58) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.56)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.76)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1.0000000000	$3.5 \cdot 10^{-15}$
0.1	1.2229384382	1.2230063532	$6.7 \cdot 10^{-5}$
0.2	1.4378247530	1.4378525565	$2.7 \cdot 10^{-5}$
0.3	1.6446154175	1.6445994145	$1.6 \cdot 10^{-5}$
0.4	1.8432480259	1.8432271985	$2.0 \cdot 10^{-5}$
0.5	2.0336362803	2.0336453830	$9.1 \cdot 10^{-6}$
0.6	2.2156629647	2.2157024590	$3.9 \cdot 10^{-5}$
0.7	2.3891700476	2.3891957459	$2.5 \cdot 10^{-5}$
0.8	2.5539441869	2.5538810605	$6.3 \cdot 10^{-5}$
0.9	2.7096939733	2.7094820881	$2.1 \cdot 10^{-4}$
1	2.8560115627	2.8556993037	$3.1 \cdot 10^{-4}$

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$$C_1 = 1.6914710676, C_2 = -3.3341823878, C_3 = 2.6714116437, \lambda = 0.5566540396$$

$$v(x) = 82.4331386023 - 14.3402337753x - 0.0022901517e^{-3.8965782778x} +$$

$$+ 0.0284134476e^{-3.3399242381x} - 0.1316706700e^{-2.7832701984x} -$$

$$- 1.1133538656e^{-2.2266161587x} + 12.5896525103e^{-1.6699621190x} - \quad (5.2.77)$$

$$- 63.2490203594e^{-1.1133080793x} + (-29.5548695133 -$$

$$- 51.6860006579x)e^{-0.5566540396x}$$

Tabelul 5.28. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.58) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.56)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.77)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	1.2518656079	1.2518515888	$1.4 \cdot 10^{-5}$
0.2	1.4920877143	1.4920910613	$3.3 \cdot 10^{-6}$
0.3	1.7207480054	1.7207531923	$5.1 \cdot 10^{-6}$
0.4	1.9379133831	1.9379068594	$6.5 \cdot 10^{-6}$
0.5	2.1436299399	2.1436163389	$1.3 \cdot 10^{-5}$
0.6	2.3379146593	2.3379104050	$4.2 \cdot 10^{-6}$
0.7	2.5207436438	2.5207591446	$1.5 \cdot 10^{-5}$
0.8	2.6920346069	2.6920579596	$2.3 \cdot 10^{-5}$
0.9	2.8516191935	2.8516179705	$1.2 \cdot 10^{-6}$
1	2.9991957021	2.9991619152	$3.3 \cdot 10^{-5}$

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$$C_1 = 1.2258273801, C_2 = -1.3452540574, C_3 = 0.4133320161, \lambda = -0.3733008608$$

$$v(x) = 39.0583183025 + 12.3793427759x - 1.1079434710e^{0.7466017216x} +$$

$$+ 1.2268437531e^{1.1199025824x} - 0.2397634627e^{1.4932034432x} -$$

$$- 0.0257979021e^{1.8665043040x} - 0.0027345301e^{2.2398051648x} - \quad (5.2.78)$$

$$- 0.0000955555e^{2.6131060257x} + (-37.9088271341 +$$

$$+ 4.5573048335x)e^{0.3733008608x}$$

Tabelul 5.29. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.58) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.56)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.78)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1.0000000000	$7.1 \cdot 10^{-15}$
0.1	1.2839954362	1.2839898927	$5.5 \cdot 10^{-6}$
0.2	1.5522090538	1.5522083786	$6.7 \cdot 10^{-7}$
0.3	1.8048758830	1.8048779484	$2.0 \cdot 10^{-6}$
0.4	2.0422291469	2.0422291573	$1.0 \cdot 10^{-8}$
0.5	2.2644931580	2.2644898117	$3.3 \cdot 10^{-6}$
0.6	2.4718738134	2.4718705633	$3.2 \cdot 10^{-6}$
0.7	2.6645442766	2.6645460387	$1.7 \cdot 10^{-6}$
0.8	2.8426240012	2.8426304402	$6.4 \cdot 10^{-6}$
0.9	3.0061452466	3.0061463212	$1.0 \cdot 10^{-6}$
1	3.1549957250	3.1549849565	$1.0 \cdot 10^{-5}$

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1.5$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$C_1 = 19.6251473530$, $C_2 = -3.1997120838$, $C_3 = -16.171511667$, $\lambda = 0.0017687260$

$$\begin{aligned}
 v(x) = & 4.3297645233 \cdot 10^7 - 48551.3583846689x + \\
 & + 9.4207094870 \cdot 10^{-13} e^{-0.0123810822x} + \\
 & + 6.2816210929 \cdot 10^{-7} e^{-0.0106123562x} - 0.0030247380 e^{-0.0088436301x} + \\
 & + 12.1225185110 e^{-0.0070749041x} - 12946.8791006314 e^{-0.0053061781x} + \\
 & + 1.1302186682 \cdot 10^7 e^{-0.0035374520x} + (-5.4586896157 \cdot 10^7 - \\
 & - 8082.9154735784x) e^{-0.0017687260x} \quad (5.2.79)
 \end{aligned}$$

Tabelul 5.30. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.58) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $m = 1.5$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.56)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.79)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	1	0
0.1	1.2609808120	1.2603664398	$6.1 \cdot 10^{-4}$

0.2	1.5099516324	1.5093655735	$5.8 \cdot 10^{-4}$
0.3	1.7469198626	1.7467254400	$1.9 \cdot 10^{-4}$
0.4	1.9718652899	1.9721741750	$3.0 \cdot 10^{-4}$
0.5	2.1847302867	2.1854400932	$7.0 \cdot 10^{-4}$
0.6	2.3854057847	2.3862516582	$8.4 \cdot 10^{-4}$
0.7	2.5737099736	2.5743374079	$6.2 \cdot 10^{-4}$
0.8	2.7493549252	2.7494260892	$7.1 \cdot 10^{-5}$
0.9	2.9118887501	2.9112465530	$6.4 \cdot 10^{-4}$
1	3.0605838497	3.0595277920	$1.0 \cdot 10^{-3}$

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1.5$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$$C_1 = 2.4003549004, C_2 = -5.4181599178, C_3 = 4.2976372715, \lambda = 0.5212725213$$

$$\begin{aligned}
 v(x) = & 205.9677986298 - 34.5867825603x - 0.0028331997e^{-3.6489076496x} + \\
 & + 0.0246210506e^{-3.1276351282x} + 0.0894914811e^{-2.6063626068x} - \\
 & - 5.1677676558e^{-2.0850900854x} + 40.6195090727e^{-1.5638175641x} - \\
 & - 184.6278544652e^{-1.0425450427x} + (-55.9029649526 - \\
 & - 130.8153531224x)e^{-0.5212725213x}
 \end{aligned} \quad (5.2.80)$$

Tabelul 5.31. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.58) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $m = 1.5$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

folosind funcția auxiliară (5.2.56)

x	$v_{numeric}$	\bar{v}_{MHAO} , (5.2.80)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	0.9999999999	$2.8 \cdot 10^{-14}$
0.1	1.3085289178	1.3084934573	$3.5 \cdot 10^{-5}$
0.2	1.5989107009	1.5989174796	$6.7 \cdot 10^{-6}$
0.3	1.8713842220	1.8713975406	$1.3 \cdot 10^{-5}$
0.4	2.1261798486	2.1261654650	$1.4 \cdot 10^{-5}$
0.5	2.3635084974	2.3634750640	$3.3 \cdot 10^{-5}$
0.6	2.5835451658	2.5835323438	$1.2 \cdot 10^{-5}$
0.7	2.7864041509	2.7864403839	$3.6 \cdot 10^{-5}$
0.8	2.9720990828	2.9721581992	$5.9 \cdot 10^{-5}$
0.9	3.1404738992	3.1404724101	$1.4 \cdot 10^{-6}$
1	3.2910682398	3.2909802656	$8.7 \cdot 10^{-5}$

Cazul: $a_1 = -0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1.5$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

$$C_1 = 3.1233458559, C_2 = -7.5004782346, C_3 = 5.6760540005, \lambda = 0.3778585627$$

$$v(x) = 693.6056628139 - 86.9271626923x - 0.0013774768e^{-2.6450099391x} -$$

$$- 0.0038149232e^{-2.2671513763x} + 0.6459656917e^{-1.8892928136x} -$$

$$- 14.4121974091e^{-1.51143425092x} + 121.6488341020e^{-1.1335756881x} -$$

$$- 597.3765251022e^{-0.7557171254x} + (-203.1065476963 -$$

$$- 320.1972835808x)e^{-0.3778585627x} \quad (5.2.81)$$

Tabelul 5.32. Rezultate comparative între soluția MHAO dată de relația (5.2.58) și rezultatele numerice pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 1$, $m = 1.5$ și $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$ folosind

funcția auxiliară (5.2.56)

x	$v_{numeric}$	$\bar{v}_{MHAO},$ (5.2.81)	$\varepsilon_v =$ $ v_{numeric} - \bar{v}_{MHAO} $
0	1	0.9999999999	$2.2 \cdot 10^{-13}$
0.1	1.3620158757	1.3619756005	$4.0 \cdot 10^{-5}$
0.2	1.6988832705	1.6988902831	$7.0 \cdot 10^{-6}$
0.3	2.0110642417	2.0110793966	$1.5 \cdot 10^{-5}$
0.4	2.2990536573	2.2990383227	$1.5 \cdot 10^{-5}$
0.5	2.5633704925	2.5633333487	$3.7 \cdot 10^{-5}$
0.6	2.8045422031	2.8045269744	$1.5 \cdot 10^{-5}$
0.7	3.0230772590	3.0231164379	$3.9 \cdot 10^{-5}$
0.8	3.2194185417	3.2194842324	$6.5 \cdot 10^{-5}$
0.9	3.3938604328	3.3938593947	$1.0 \cdot 10^{-6}$
1	3.5463864691	3.5462883840	$9.8 \cdot 10^{-5}$

În Figurile 5.11 - 5.33 sunt prezentate graficele vitezelor \bar{v} în funcție de distanța orizontală x . Figurile 5.11 și 5.12 arată variația profilului vitezei pentru cazul fluidelor Newtoniene, iar Figurile 5.13 - 5.16 arată variația profilului vitezei pentru cazul ne-Newtonian, pentru diferite valori ale parameterului a_2 și $a_1 = 0.5$. Se observă că viteza benzii descrește odată cu creșterea parametrului m . În Figurile 5.17 - 5.22 sunt reprezentate variațiile profilului vitezei pentru valoarea $a_1 = -0.5$ și diferite valori ale parametrului a_2 . În aceste cazuri viteza benzii crește odată cu creșterea parametrului m pentru diferite valori ale funcției auxiliare. În Figurile 5.23 - 5.26 se prezintă variațiile profilului vitezei pentru $a_1 = 0.5$ și diferite valori ale parametrilor m și a_2 .

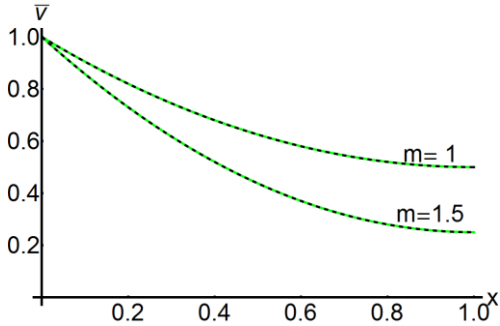


Fig. 5.11 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = 0.5, a_2 = 0.5, v'(1) = 0$ cu funcția auxiliară (5.2.26) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

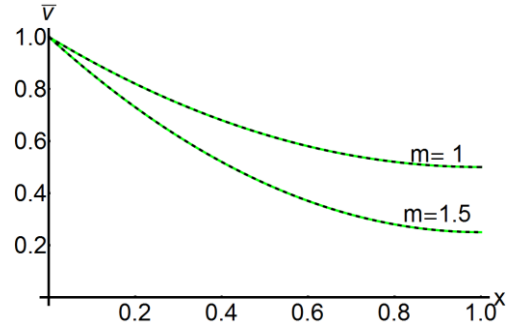


Fig. 5.12 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = 0.5, a_2 = 0.5, v'(1) = 0$ cu funcția auxiliară (5.2.47) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

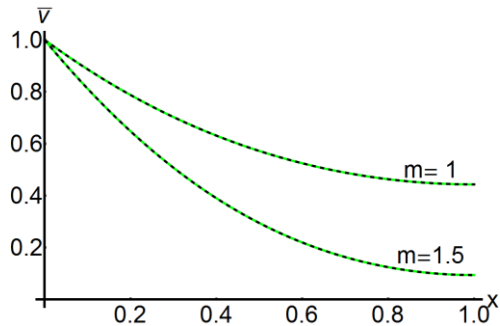


Fig. 5.13 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = 0.5, a_2 = 0.75, v'(1) = 0$ cu funcția auxiliară (5.2.26) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

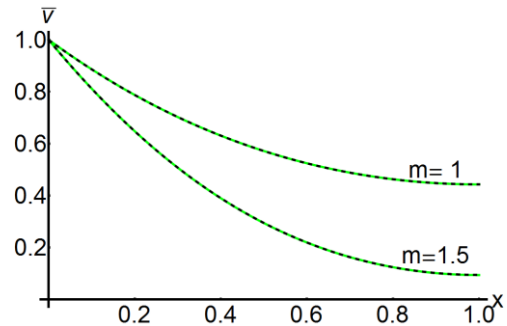


Fig. 5.14 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = 0.5, a_2 = 0.75, v'(1) = 0$ cu funcția auxiliară (5.2.47) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

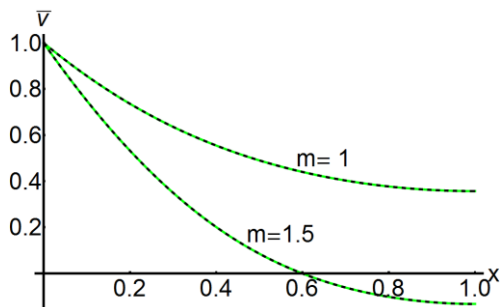


Fig. 5.15 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = 0.5, a_2 = 1, v'(1) = 0$ cu funcția auxiliară (5.2.26) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

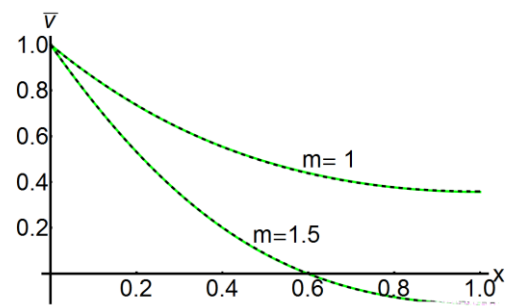


Fig. 5.16 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = 0.5, a_2 = 1, v'(1) = 0$ cu funcția auxiliară (5.2.47) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

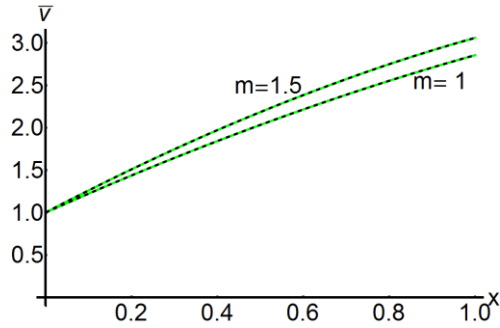


Fig. 5.17 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

cu funcția auxiliară (5.2.37) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

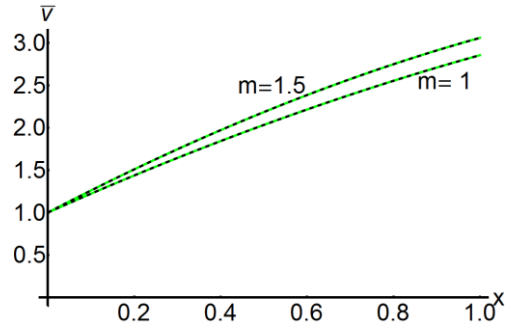


Fig. 5.18 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$, $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

cu funcția auxiliară (5.2.56) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

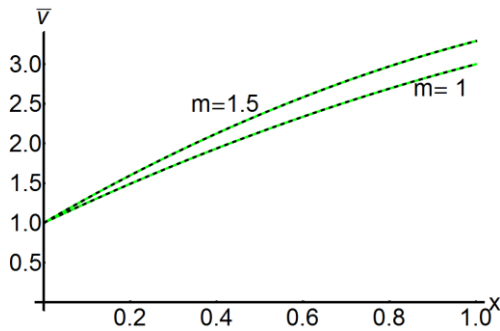


Fig. 5.19 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

cu funcția auxiliară (5.2.37) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

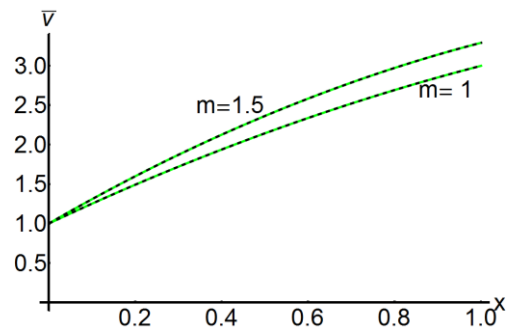


Fig. 5.20 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.75$, $v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

cu funcția auxiliară (5.2.56) :
 --- soluția numerică; soluția MHAO

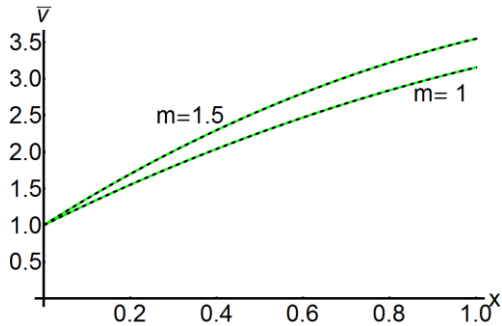


Fig. 5.21 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru

$$a_1 = -0.5, a_2 = 1, v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$$

cu funcția auxiliară (5.2.37) :

--- soluția numerică; soluția MHAO

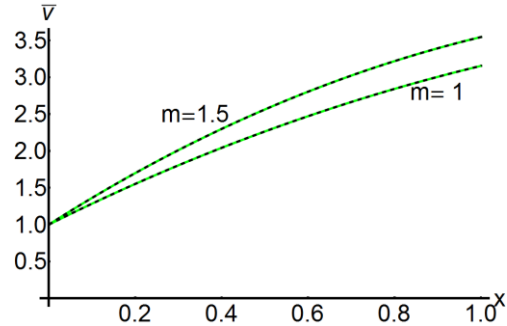


Fig. 5.22 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului m pentru

$$a_1 = -0.5, a_2 = 1, v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$$

cu funcția auxiliară (5.2.56) :

--- soluția numerică; soluția MHAO

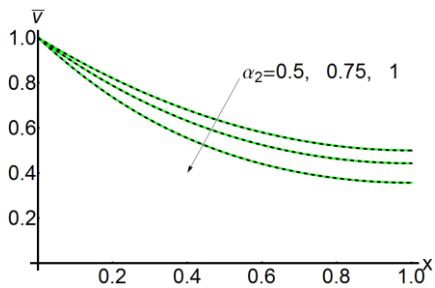


Fig. 5.23 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului a_2 pentru

$$a_1 = 0.5, m = 1, v'(1) = 0$$

cu funcția auxiliară (5.2.26) :

--- soluția numerică; soluția MHAO

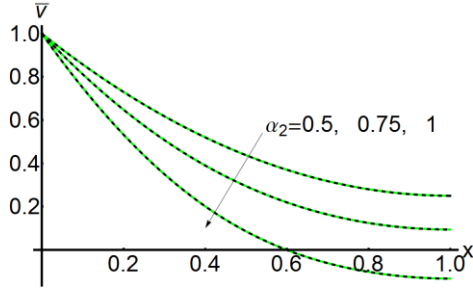


Fig. 5.24 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului a_2 pentru

$$a_1 = 0.5, m = 1.5, v'(1) = 0$$

cu funcția auxiliară (5.2.26) :

--- soluția numerică; soluția MHAO

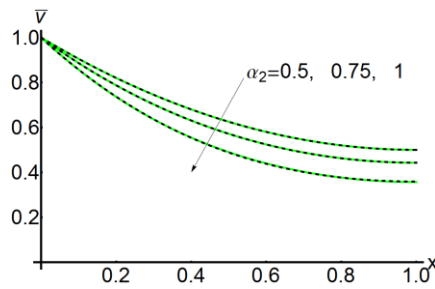


Fig. 5.25 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului a_2 pentru

$$a_1 = 0.5, m = 1, v'(1) = 0$$

cu funcția auxiliară (5.2.47) :

--- soluția numerică; soluția MHAO

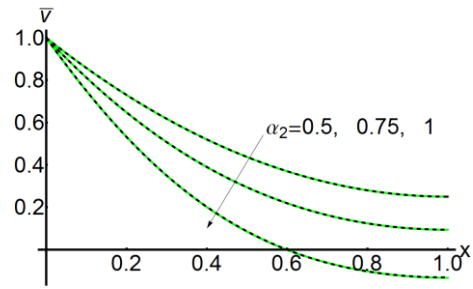


Fig. 5.26 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului a_2 pentru

$$a_1 = 0.5, m = 1.5, v'(1) = 0$$

cu funcția auxiliară (5.2.47) :

--- soluția numerică; soluția MHAO

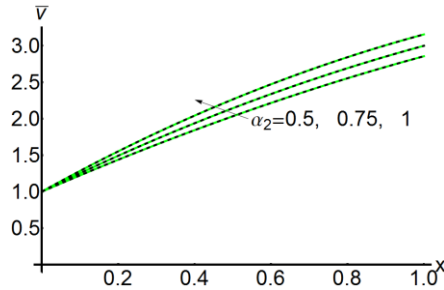


Fig. 5.27 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului α_2 pentru

$$\alpha_1 = -0.5, m = 1, v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$$

cu funcția auxiliară (5.2.37):

--- soluția numerică; soluția MHAO

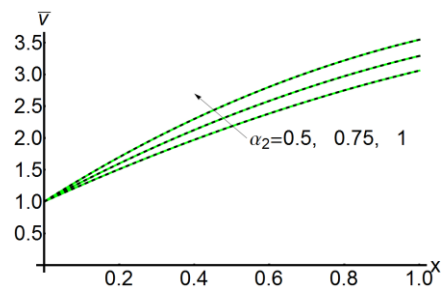


Fig. 5.28 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului α_2 pentru

$$\alpha_1 = -0.5, m = 1.5, v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$$

cu funcția auxiliară (5.2.37):

--- soluția numerică; soluția MHAO

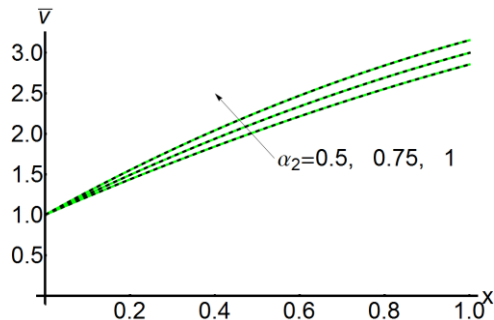


Fig. 5.29 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului α_2 pentru

$$\alpha_1 = -0.5, m = 1, v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$$

cu funcția auxiliară (5.2.56):

--- soluția numerică; soluția MHAO

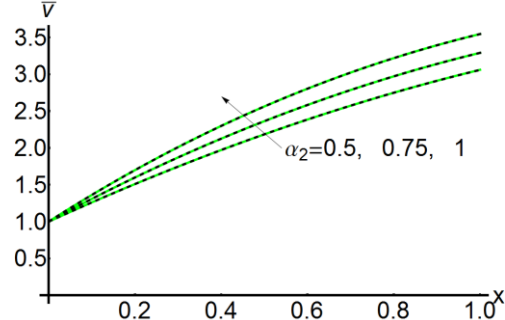


Fig. 5.30 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului α_2 pentru

$$\alpha_1 = -0.5, m = 1.5, v'(1) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$$

cu funcția auxiliară (5.2.56):

--- soluția numerică; soluția MHAO

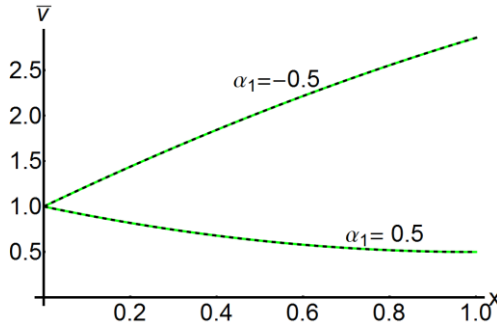


Fig. 5.31 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului α_1 pentru

$$\alpha_2 = 0.5, m = 1, \text{Cazul 5.2.2.1:}$$

---- soluția numerică; soluția MHAO

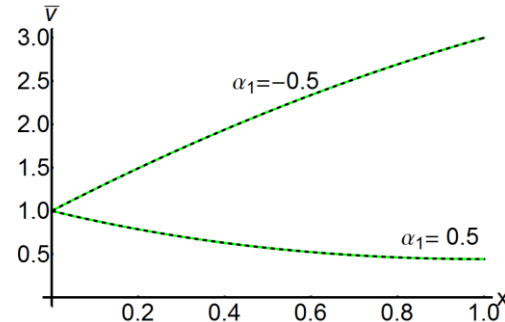


Fig. 5.32 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului α_1 pentru

$$\alpha_2 = 0.75, m = 1, \text{Cazul 5.2.2.1:}$$

---- soluția numerică; soluția MHAO

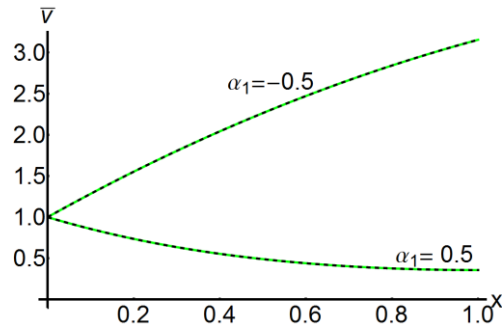


Fig. 5.33 Variația profilului vitezei cu creșterea parametrului a_1 pentru $a_2 = 1$, $m = 1$, **Cazul 5.2.2.1**: ---- soluția numerică; soluția MHAO

Aici se observă că pentru orice valoare a parametrului m , viteza benzii crește odată cu creșterea parametrului a_2 . Pe de altă parte, din Figurile 5.23 - 5.26 se deduce că viteza benzii descrește pentru orice valoare a parametrului $a_1 > 0$. Dar, din Figurile 5.27 - 5.30 se deduce că viteza benzii crește pentru orice valoare a parametrului $a_1 < 0$. În aceste ultime cazuri prezentate în Figurile 5.23 - 5.26 se observă că viteza benzii crește odată cu creșterea parametrului a_2 . În Figurile 5.31 - 5.33 sunt prezentate grafic variațiile profilului vitezei cu creșterea coeficientului a_1 . Se observă că viteza benzii descrește cu creșterea coeficientului a_1 . În toate cazurile, se deduce că viteza benzii descrește pentru $a_1 = 0.5$ și viteza benzii crește pentru $a_1 = -0.5$ și pentru orice valoare a coeficientului m .

5.3 Curgerea stabilă a unui fluid MHD vâscos la nivelul stratului limită și transfer de căldură prin radiație

Fluxul de fluid vâscos incompresibil și transferul de căldură în cazul curgerii unui fluid vâscos pe o foaie întinsă exponențial are mai multe aplicații în inginerie, de exemplu prelucrarea polimerilor, procesul de răcire a plăcilor metalice, procesul de desenare pe folii de plastic, fire din fibre de sticlă, fabricarea de produse alimentare, culturi de cristale, etc. Pornind de la munca de pionierat a lui Sakiadis [153] și Crane [35], Magyari și Keller [113] au studiat ecuațiile de echilibru ale stratului limită de pe o suprafață întinsă continuă exponențial cu o distribuție exponențială a temperaturii. Wang [178] a investigat efectele alunecării parțiale de debit pe plane întinse. Raptis și colab. [144] au studiat efectul radiației termice pe fluxul unui fluid MHD vâscos trecut pe o placă semi-infinită staționară. Contribuții ale disipării vâscoase și ale deformării elastice în curgerea la nivelul stratului-limită a unui fluid vâsco-elastic pe o foaie întinsă exponențial folosind soluții hipergeometrice au fost investigate de Sanjayanand and Khan [155]. Sahoo [147] a investigat efectele alunecării parțiale pentru transferul de debit MHD și transferul de masă a unui fluid de gradul doi conductor electric pe o foaie întinsă asimetrică. Un alt aspect important este investigarea mai multor soluții pentru fluxul hidrodinamic al unui fluid de gradul doi, pe o foaie întinsă sau în scurtare, de Van Gorder și Vajravelu [76]. Fang și alții [73] au luat în considerare efectele alunecării de ordinul doi cu privire la fluxul pe o foaie în cădere. Efectul radiațiilor asupra fluxului pe stratul limită și transferul de căldură a unui fluid vâscos pe o foaie întinsă exponențial este studiat de către Sajid și Hayat [150]. Soluții analitice exacte pentru debitul și transferul de căldură pe o suprafață permeabilă întinsă / în scurtare, luând în considerare un model de alunecare de ordinul al doilea, este propus de Turkilmazoglu [170]. În [133] Mukhopadhyay a studiat curgerea la nivelul stratului-limită și transferul de căldură spre o foaie poroasă întinsă exponențial, în prezența câmpului magnetic și luând în considerare viteza de alunecare.

5.3.1 Ecuațiile de mișcare

În cele ce urmează, se consideră curgerea laminară bi-dimensională a unui fluid vâscos incompresibil conductor electric trecut pe o foaie întinsă ce coincide cu planul $y = 0$, curgerea fiind limitată la $y > 0$ [150], [170], [133]. Axa x este luată în lungul suprafeței întinse în direcția mișcării, în timp ce axa y este perpendiculară pe aceasta. Două forțe egale și opuse sunt aplicate de-a lungul axei x , astfel încât peretele este întins păstrând originea fixă, iar viteza foii limită este de ordin exponențial prin raport cu coordonata x a direcției de curgere. Un câmp magnetic variabil $B(x) = B_0 e^{\frac{x}{2L}}$ este aplicat normal la foaie, B_0 fiind o constantă. Dacă u și v sunt componentele vitezei în direcțiile x și respectiv y , $v = \frac{\mu}{\rho}$ este vâscozitatea cinematică, ρ este densitatea constantă a fluidului, μ este vâscozitatea dinamică, σ este conductivitatea electrică, c_p este căldura specifică la presiune constantă, k este conductivitatea termică a fluidului și q_r este fluxul de căldură prin radiație, atunci ecuația de continuitate, ecuațiile de moment și ecuația energiei ce guvernează mișcarea sunt scrise în forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.3.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} u \quad (5.3.2)$$

$$\rho c_p (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial q_r}{\partial y} \quad (5.3.3)$$

Condițiile inițiale / la limită pentru această problemă sunt date prin

$$u = U_0 e^{\frac{x}{L}} + N_0 e^{-\frac{x}{2L}} \nu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = -V_0 e^{-\frac{x}{2L}}, \quad \text{la } y = 0 \quad (5.3.4)$$

$$T = T_\infty + T_0 e^{\frac{x}{2L}} + D_0 e^{-\frac{x}{2L}} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5.3.5)$$

în care U_0 este viteza de referință, N_0 este valoarea inițială a factorului vitezei de alunecare, V_0 este valoarea inițială a puterii de aspirație ($V_0 > 0$) sau de imersie ($V_0 < 0$), T_0 și T_∞ sunt respectiv temperatura în apropierea plăcii și respectiv la distanță de placă, L este o constantă, D_0 este valoarea inițială a factorului termic de alunecare.

Cu ajutorul aproximării Rosseland pentru radiație:

$$q_r = -\frac{4\delta^*}{3k^*} \frac{\partial T^4}{\partial y} \quad (5.3.6)$$

unde δ^* este constanta Stefan-Boltzman și k^* este coeficientul de absorpție, admițând că T^4 este funcție liniară de temperatură, atunci

$$T^4 = 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4 \quad (5.3.7)$$

Din relațiile (5.3.7) și (5.3.3) are loc

$$\rho c_p (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = \left(k + \frac{16\delta^* T_\infty^3}{3k^*} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.3.8)$$

Introducând variabilele de similaritate,

$$\eta = \sqrt{\frac{U_0}{2\nu L}} e^{\frac{x}{2L}} y, \quad u = U_0 e^{\frac{x}{2L}} f'(\eta) \quad (5.3.9)$$

$$v = -\sqrt{\frac{\nu U_0}{2L}} e^{\frac{x}{2L}} [f(\eta) + f'(\eta)], \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_0} e^{-\frac{x}{2L}}$$

ecuația (5.3.1) este automat satisfăcută și ecuațiile (5.3.2) și (5.3.8) se reduc la

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - 2[f'(\eta)]^2 - M^2 f'(\eta) = 0 \quad (5.3.10)$$

$$\left(1 + \frac{4}{3} R \right) \theta''(\eta) + Pr [f(\eta)\theta'(\eta) - f'(\eta)\theta(\eta)] = 0 \quad (5.3.11)$$

cu condițiile inițiale / la limită:

$$f(0) = S, \quad f'(0) = 1 + \lambda f''(0), \quad f'(\infty) = 0 \quad (5.3.12)$$

$$\theta(0) = 1 + \delta\theta'(0), \quad \theta(\infty) = 0 \quad (5.3.13)$$

unde simbolul ' semnifică derivarea în raport cu η , $M = \sqrt{\frac{2\sigma B_0^2 L}{\rho U_0}}$ este coeficientul magnetic, $\lambda = N_0 \sqrt{\frac{\nu U_0}{2L}}$ coeficientul vitezei de alunecare, $\delta = D_0 \sqrt{\frac{U_0}{2\nu L}}$ coeficientul termic de alunecare, $S = V_0 \sqrt{\frac{2L}{U_0}}$ este coeficientul de aspirație ($V_0 > 0$) sau de imersie ($V_0 < 0$), $R = \frac{4\delta^* T_\infty^3}{kk^*}$ este coeficientul de radiație, $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$ este numărul Prandtl.

În cele ce urmează, ecuațiile diferențiale neliniare (5.3.10) și (5.3.11) cu condițiile inițiale / la limită (5.3.12) și (5.3.13) pot fi rezolvate analitic cu metoda MHAO - a doua variantă.

5.3.2 Aplicarea metodei MHAO - a doua variantă la curgerea stabilă a unui fluid MHD vâscos la nivelul stratului limită și transferul de căldură prin radiație

În cele ce urmează se aplică procedura MHAO la obținerea de soluții aproximative ale ecuațiilor (5.3.10), (5.3.11), (5.3.12) și (5.3.13). Pentru acesta, se alege operatorul liniar pentru ecuațiile (5.3.10) și (5.3.12) în forma [69]:

$$L[f(\eta)] = f'''(\eta) - K^2 f'(\eta) \quad (5.3.14)$$

unde K este un parametru pozitiv necunoscut și va fi determinat ulterior. Se menționează că operatorul liniar nu este unic. De asemenea, există libertatea de a alege

$$L[f(\eta)] = f'''(\eta) + Kf'(\eta). \quad (5.3.15)$$

$$L[f(\eta)] = f'''(\eta) + \frac{3K}{K\eta + 1} f''(\eta). \quad (5.3.16)$$

$$L[f(\eta)] = f'''(\eta) - \frac{6K^2}{(K\eta + 1)^2} f'(\eta). \quad (5.3.17)$$

Aproximarea inițială $f_0(\eta)$ poate fi obținută din ecuația (2.3.3) cu condițiile inițiale / la limită:

$$f_0(0) = S, \quad f_0'(0) = 1 + \lambda f_0''(0), \quad f_0(\infty) = 0. \quad (5.3.18)$$

Ecuația (2.3.3) cu operatorul liniar (5.3.14) are soluția

$$f_0(\eta) = S + \frac{1 - e^{-K\eta}}{K(K\eta + 1)} \quad (5.3.19)$$

Operatorul neliniar corespunzător ecuației diferențiale (5.3.10) și operatorului liniar dat de relația (5.3.14) este definit prin

$$N[f(\eta)] = (K^2 - M^2)f'(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - 2[f'(\eta)]^2 \quad (5.3.20)$$

Prin substituirea relației (5.3.19) în relația (5.3.20) se va obține

$$N[f_0(\eta)] = \frac{(K^2 - M^2 - KS)(K\lambda + 1) - 1}{(K\lambda + 1)^2} e^{-K\eta} - \frac{1}{(K\lambda + 1)^2} e^{-2K\eta} \quad (5.3.21)$$

Comparând relațiile (2.3.13) și (5.3.21), se poate găsi

$$\begin{aligned} h_1(\eta) &= \frac{(K^2 - M^2 - KS)(K\lambda + 1) - 1}{(K\lambda + 1)^2}, \quad g_1(\eta) = e^{-K\eta}, \\ h_2(\eta) &= -\frac{1}{(K\lambda + 1)^2}, \quad g_2(\eta) = e^{-2K\eta}, \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Prima aproximare $f_1(\eta)$ dată de relația (2.3.14) devine

$$\begin{aligned} f_1(\eta, C_j) &= H_1(\eta, C_j)e^{-K\eta} + H_2(\eta, C_j)e^{-2K\eta} \\ f_1(0, C_j) &= 0, \quad f_1'(0, C_j) = \lambda f_1''(0, C_j), \quad f_1(\infty, C_j) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

unde există o mulțime de posibilități pentru funcțiile auxiliare necunoscute H_1 și H_2 . Dacă se alege

$$H_1(\eta, C_j) = C_1\eta + \frac{2\lambda K + 1}{2\lambda} C_1\eta^2 + C_2\eta^3 + C_3\eta^4 \quad (5.3.24)$$

$$H_2(\eta, C_j) = C_4\eta + \frac{4\lambda K + 1}{2\lambda} C_4\eta^2 + C_5\eta^3 \quad (5.3.25)$$

atunci prima aproximare devine

$$\begin{aligned} f_1(\eta, C_j) &= \left(C_1\eta + \frac{2\lambda K + 1}{2\lambda} C_1\eta^2 + C_2\eta^3 + C_3\eta^4 \right) e^{-K\eta} + \\ &+ \left(C_4\eta + \frac{4\lambda K + 1}{2\lambda} C_4\eta^2 + C_5\eta^3 \right) e^{-2K\eta} \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuațiilor (5.3.10)-(5.3.12) dată de relația (2.3.5) este obținută din relațiile (5.3.19) și (5.3.26):

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta, C_j) &= S + \frac{1}{K(K\lambda + 1)} + \left(-\frac{1}{K(K\lambda + 1)} + C_1\eta + \frac{2\lambda K + 1}{2\lambda} C_1\eta^2 + \right. \\ &\left. + C_2\eta^3 + C_3\eta^4 \right) e^{-K\eta} + \left(C_4\eta + \frac{4\lambda K + 1}{2\lambda} C_4\eta^2 + C_5\eta^3 \right) e^{-2K\eta} \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

unde C_j , $j = 1, 2, 3, 4$ și $K > 0$ sunt parametri necunoscuți.

Acum, pentru ecuațiile (5.3.11) și (5.3.13), operatorul liniar poate fi scris prin

$$L[\theta(\eta)] = \theta''(\eta) + K^*\theta'(\eta) \quad (5.3.28)$$

unde K^* este un parametru pozitiv necunoscut.

Aproximarea inițială $\theta_0(\eta)$ poate fi obținută din ecuația

$$\theta_0'(\eta) + K^*\theta_0(\eta) = 0, \quad \theta_0(0) = 1 + \delta\theta_0'(0), \quad \theta_0(\infty) = 0 \quad (5.3.29)$$

care are soluția

$$\theta_0(\eta) = \frac{1}{1 + \delta K^*} e^{-K^*\eta} \quad (5.3.30)$$

Operatorul neliniar pentru ecuația (5.3.11) cu operatorul liniar dat de relația (5.3.28) devine

$$N[\theta(\eta)] = -K^* \left(1 + \frac{4}{3}R\right) \theta'(\eta) + Pr[f(\eta)\theta'(\eta) - f'(\eta)\theta(\eta)] \quad (5.3.31)$$

Prin substituirea relațiilor (5.3.30) și (5.3.29) în relația (5.3.31) se obține expresia

$$N[\theta_0(\eta)] = \left[\frac{K^{*2} - 3K^*S + 4RK^{*2}}{3(1 + \delta K^*)} - \frac{K^*}{K(K\lambda + 1)(1 + K^*\delta)} \right] e^{-K^*\eta} + \frac{K^* - K}{K(K\lambda + 1)(1 + K^*\delta)} e^{-(K+K^*)\eta} \quad (5.3.32)$$

Comparând relațiile (2.3.13) și (5.3.32) se găsește

$$h^*_1(\eta) = \frac{K^{*2} - 3K^*S + 4RK^{*2}}{3(1 + \delta K^*)} - \frac{K^*}{K(K\lambda + 1)(1 + K^*\delta)}, \quad g^*_1(\eta) = e^{-K^*\eta}, \quad h^*_2(\eta) = \frac{K^* - K}{K(K\lambda + 1)(1 + K^*\delta)}, \quad g^*_2(\eta) = e^{-(K+K^*)\eta} \quad (5.3.33)$$

Prima aproximare $\theta_1(\eta, D_j)$ dată de relația (2.3.14) devine

$$\theta_1(\eta, D_j) = H_3(\eta, D_j)e^{-K^*\eta} + H_4(\eta, D_j)e^{-(K+K^*)\eta}, \quad \theta_1(0) = \delta\theta'_1(0), \quad \theta_1(\infty) = 0 \quad (5.3.34)$$

Se aleg funcțiile auxiliare H_3 și H_4 în forma

$$H_3(\eta, D_j) = D_1\eta + D_2\eta^2 + D_3\eta^3 + D_4\eta^4 \quad (5.3.35)$$

$$H_4(\eta, D_j) = -D_1\eta + D_5\eta^2 + D_6\eta^3 \quad (5.3.36)$$

astfel încât soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuațiilor (5.3.11) și (5.3.13) este obținută din ecuațiile (2.3.5), (5.3.30), (5.3.34) și (5.3.35):

$$\bar{\theta}(\eta, D_j) = \left(\frac{1}{1 + \delta K^*} + D_1\eta + D_2\eta^2 + D_3\eta^3 + D_4\eta^4 \right) e^{-K^*\eta} + \left(-D_1\eta + D_5\eta^2 + D_6\eta^3 \right) e^{-(K+K^*)\eta} \quad (5.3.37)$$

unde D_j , $j = 1, 2, \dots, 6$ și $K^* > 0$ sunt parametri necunoscuți.

În această direcție, se pot găsi multe alte soluții aproximative.

5.3.3 Rezultate numerice

Se ilustrează acuratețea procedurii propuse pentru diferite valori ale coeficienților S , M , λ , R , Pr și δ . Se reprezintă grafic comportarea funcțiilor \bar{f} și $\bar{\theta}$, și se compară rezultatele obținute cu ajutorul procedurii propuse cu rezultatele numerice. De asemenea, în câteva cazuri se reprezintă grafic comportarea restului de aproximare $R_{\bar{f}}$ și respectiv $R_{\bar{\theta}}$.

Cazul 5.3.3.1. În primul caz, se consideră $S = 0.1$, $M = 0$, $\lambda = 0.1$, $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$

Parametrii optimali de control a convergenței C_j și D_j în toate cazurile sunt determinați cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate și au valorile:

$$C_1 = -0.0088492634, C_2 = 0.0056210808, C_3 = -0.0004350582, \\ C_4 = -0.0029961570, C_5 = -0.0038069657, K = 1.1076523227, \\ D_1 = 0.0514240617, D_2 = 0.0140292628, D_3 = -0.0004662431, \\ D_4 = 0.0000315621, D_5 = -0.0119793890, D_6 = -0.0044331549,$$

$$K^* = 0.6816198449$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi obținută cu ajutorul metodei MHAO devine

$$\bar{f}(\eta) = 0.9127823420 + (-0.8127823420 - 0.0088492634\eta - \\ -0.0540482243\eta^2 + 0.0056210808\eta^3 - 0.0004350582\eta^4)e^{-1.1076523227\eta} + \\ + (-0.0029961570\eta - 0.0216181859\eta^2 - 0.0038069657\eta^3)e^{-2.2153046455\eta}$$

$$\bar{\theta}(\eta) = (0.9361875956 + 0.0514240617\eta + 0.0140292628\eta^2 - \\ -0.0004662431\eta^3 + 0.0000315621\eta^4)e^{-0.6816198449\eta} +$$

$$(-0.0514240617\eta - 0.0119793890\eta^2 - 0.0044331549\eta^3)e^{-1.7892721677\eta}$$

Tabelul 5.23. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.38) și (5.3.39) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	0.099999999	0.1	$2.77 \cdot 10^{-17}$	0.93618759	0.93618758	$1.00 \cdot 10^{-8}$
1	0.62212767	0.62213388	$6.205 \cdot 10^{-6}$	0.49507287	0.49507222	$6.44 \cdot 10^{-7}$
2	0.80125278	0.80125013	$2.64 \cdot 10^{-6}$	0.27414969	0.27414983	$1.44 \cdot 10^{-7}$
3	0.86879612	0.86880551	$9.38 \cdot 10^{-6}$	0.15436310	0.15436231	$7.91 \cdot 10^{-7}$
4	0.89525800	0.89525520	$2.79 \cdot 10^{-6}$	0.08747185	0.08747248	$6.34 \cdot 10^{-7}$
5	0.90577480	0.90576671	$8.08 \cdot 10^{-6}$	0.04969305	0.04969351	$4.61 \cdot 10^{-7}$
6	0.90997139	0.90996921	$2.17 \cdot 10^{-6}$	0.02826001	0.02825963	$3.76 \cdot 10^{-7}$
7	0.91164894	0.91165341	$4.46 \cdot 10^{-6}$	0.01607752	0.01607714	$3.87 \cdot 10^{-7}$
8	0.91232195	0.91232902	$7.06 \cdot 10^{-6}$	0.00914776	0.00914791	$1.46 \cdot 10^{-7}$
9	0.91259372	0.91260014	$6.42 \cdot 10^{-6}$	0.00520500	0.00520553	$5.25 \cdot 10^{-7}$
10	0.91270443	0.91270896	$4.53 \cdot 10^{-6}$	0.00296176	0.00296227	$5.08 \cdot 10^{-7}$

Cazul 5.3.3.2. Pentru $S = 0.5$, $M = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$, Parametrii optimali de control a convergenței sunt

$$C_1 = -0.0071875319, C_2 = 0.0065323642, C_3 = -0.0005043266, \\ C_4 = -0.0025346928, C_5 = -0.0054136041, K = 1.3355505019, \\ D_1 = 0.0457401659, D_2 = 0.0119544326, D_3 = -0.0006295169, \\ D_4 = 0.0000318274, D_5 = -0.0141812138, D_6 = -0.0052909996,$$

$$K^* = 0.8142449950$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi obținută cu MHAO poate fi scrisă prin

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 1.1605368772 + (-0.6605368772 - 0.0071875319\eta - \\ & - 0.0455369718\eta^2 + 0.0065323642\eta^3 - 0.0005043266\eta^4)e^{-1.3355505019\eta} + \\ & + (-0.0025346928\eta - 0.0194438849\eta^2 - 0.0054136041\eta^3)e^{-2.6711010038\eta} \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9247062559 + 0.0457401659\eta + 0.0119544326\eta^2 - \\ & - 0.0006295169\eta^3 + 0.0000318274\eta^4)e^{-0.8142449950\eta} + \\ & + (-0.0457401659\eta - 0.0141812138\eta^2 - 0.0052909996\eta^3)e^{-2.1497954970\eta} \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

Tabelul 5.24. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.40) și (5.3.41) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	0.499999999	0.5	$1.11 \cdot 10^{-16}$	0.92470625	0.92470625	$9.99 \cdot 10^{-10}$
1	0.97263018	0.97262872	$1.45 \cdot 10^{-6}$	0.42731516	0.42731549	$3.24 \cdot 10^{-7}$
2	1.10370206	1.10370679	$4.72 \cdot 10^{-6}$	0.20531033	0.20530974	$5.88 \cdot 10^{-7}$
3	1.14302693	1.14302890	$1.96 \cdot 10^{-6}$	0.20531033	0.20530974	$5.88 \cdot 10^{-7}$
4	1.15511936	1.15511279	$6.57 \cdot 10^{-6}$	0.04863946	0.04863966	$1.98 \cdot 10^{-7}$
5	1.15885659	1.15885402	$2.57 \cdot 10^{-6}$	0.02374098	0.02374018	$7.99 \cdot 10^{-7}$
6	1.16001178	1.16001499	$3.20 \cdot 10^{-6}$	0.01159131	0.01159100	$3.15 \cdot 10^{-7}$
7	1.16037034	1.16037550	$5.15 \cdot 10^{-6}$	0.00565931	0.00565983	$5.23 \cdot 10^{-7}$
8	1.16048298	1.16048746	$4.47 \cdot 10^{-6}$	0.00276307	0.00276379	$7.16 \cdot 10^{-7}$
9	1.16051904	1.16052220	$3.16 \cdot 10^{-6}$	0.00134932	0.00134965	$3.26 \cdot 10^{-7}$
10	1.16053086	1.16053297	$2.11 \cdot 10^{-6}$	0.00065931	0.00065911	$2.01 \cdot 10^{-7}$

Cazul 5.3.3.3. În cazul $S = 0.3$, $M = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$, se dă numai soluția aproximativă de ordinul întâi:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 1.0306379756 + (-0.7306379756 - 0.0079946059\eta - \\ & - 0.0497253361\eta^2 + 0.0062090225\eta^3 - 0.0004743630\eta^4)e^{-1.2198608360\eta} + \\ & + (-0.0027287522\eta - 0.0203011572\eta^2 - 0.0044690471\eta^3)e^{-2.4397216720\eta} \end{aligned} \quad (5.3.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9307222412 + 0.0490143654\eta + 0.0130216563\eta^2 - \\ & - 0.0005497484\eta^3 + 0.0000309591\eta^4)e^{-0.7443440767\eta} + \\ & + (-0.0490143654\eta - 0.0134044621\eta^2 - 0.0049285032\eta^3)e^{-1.9642049127\eta} \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

Tabelul 5.25. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.42) și (5.3.43) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	0.3	0.3	$5.55 \cdot 10^{-17}$	0.93072224	0.93072223	$1.00 \cdot 10^{-8}$
1	0.79715432	0.79715466	$3.41 \cdot 10^{-7}$	0.46191255	0.46191255	$4.79 \cdot 10^{-9}$
2	0.95094041	0.95094370	$3.28 \cdot 10^{-6}$	0.23927092	0.23927038	$5.32 \cdot 10^{-7}$
3	1.00281079	1.00281658	$5.79 \cdot 10^{-6}$	0.12567479	0.12567485	$6.39 \cdot 10^{-8}$
4	1.02085511	1.02084860	$6.51 \cdot 10^{-6}$	0.06632381	0.06632456	$7.48 \cdot 10^{-7}$
5	1.02718937	1.02718372	$5.64 \cdot 10^{-6}$	0.03506147	0.03506110	$3.61 \cdot 10^{-7}$
6	1.02941627	1.02941777	$1.49 \cdot 10^{-6}$	0.01854589	0.01854526	$6.33 \cdot 10^{-7}$
7	1.03020104	1.03020664	$5.59 \cdot 10^{-6}$	0.00981131	0.00981141	$1.08 \cdot 10^{-7}$
8	1.03047959	1.03048533	$5.73 \cdot 10^{-6}$	0.00519045	0.00519118	$7.30 \cdot 10^{-7}$
9	1.03057969	1.03058380	$4.11 \cdot 10^{-6}$	0.00274602	0.00274675	$7.30 \cdot 10^{-7}$
10	1.03061622	1.03061859	$2.37 \cdot 10^{-6}$	0.00145312	0.00145343	$3.07 \cdot 10^{-7}$

Cazul 5.3.3.4. Pentru $S = 0.1$, $M = 0.1$, $\lambda = 0.1$ se consideră următoarele șase subcazuri

- $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$, și prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi poate fi scrisă în forma:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 0.9086599850 + (-0.8086599850 - 0.0088108488\eta - \\ & - 0.0538587912\eta^2 + 0.0057414582\eta^3 - 0.0004443943\eta^4) e^{-1.1127847009\eta} + \\ & + (-0.0029367177\eta - 0.0212194580\eta^2 - 0.0035688107\eta^3) e^{-2.2255694019\eta} \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9362951489 + 0.0517012567\eta + 0.0143527176\eta^2 - \\ & - 0.0004817767\eta^3 + 0.0000329395\eta^4) e^{-0.6803928341\eta} + \\ & + (-0.0517012567\eta - 0.0122130857\eta^2 - 0.0044706180\eta^3) e^{-1.7931775351\eta} \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

Tabelul 5.26. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.44) și (5.3.45) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	0.09999999	0.1	$2.77 \cdot 10^{-17}$	0.93629522	0.93629521	$1.00 \cdot 10^{-8}$
1	0.62104749	0.62105349	$5.99 \cdot 10^{-6}$	0.49599875	0.49599815	$6.01 \cdot 10^{-7}$
2	0.79895243	0.79894999	$2.43 \cdot 10^{-6}$	0.27530194	0.27530203	$8.99 \cdot 10^{-8}$
3	0.86566489	0.86567412	$9.23 \cdot 10^{-6}$	0.15540153	0.15540077	$7.62 \cdot 10^{-7}$
4	0.89164231	0.89163934	$2.97 \cdot 10^{-6}$	0.08828572	0.08828640	$6.78 \cdot 10^{-7}$

5	0.90190018	0.90189219	$7.98 \cdot 10^{-6}$	0.05028410	0.05028453	$4.30 \cdot 10^{-7}$
6	0.90596634	0.90596434	$2.00 \cdot 10^{-6}$	0.02866936	0.02866894	$4.16 \cdot 10^{-7}$
7	0.90758090	0.90758543	$4.52 \cdot 10^{-6}$	0.01635206	0.01635168	$3.79 \cdot 10^{-7}$
8	0.90822437	0.90823137	$6.99 \cdot 10^{-6}$	0.00932769	0.00932788	$1.90 \cdot 10^{-7}$
9	0.90848256	0.90848885	$6.28 \cdot 10^{-6}$	0.00532093	0.00532149	$5.68 \cdot 10^{-7}$
10	0.90858710	0.90859149	$4.39 \cdot 10^{-6}$	0.00303546	0.00303597	$5.26 \cdot 10^{-7}$

• $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 1.5$. În toate aceste subcazuri, $\bar{f}(\eta)$ este dată de relația (5.3.44), și $\bar{\theta}(\eta)$ este dată prin relația

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.4949052479 + 0.0272990270\eta + 0.0075988502\eta^2 - \\ & - 0.0002564681\eta^3 + 0.0000175029\eta^4)e^{-0.6803925317\eta} + \\ & + (-0.0272990270\eta - 0.0064382297\eta^2 - 0.0023541136\eta^3)e^{-1.7931772327\eta} \end{aligned} \quad (5.3.46)$$

• Pentru $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 2.5$ se obține

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.3702358704 + 0.0204737355\eta + 0.0056607294\eta^2 - \\ & - 0.0001880282\eta^3 + 0.0000128787\eta^4)e^{-0.6803923442\eta} + \\ & + (-0.0204737355\eta - 0.0048502248\eta^2 - 0.0017718181\eta^3)e^{-1.7931770452\eta} \end{aligned} \quad (5.3.47)$$

• În subcazul $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 4$ se determină

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.2687040604 + 0.0147247239\eta + 0.0041681494\eta^2 - \\ & - 0.0001456796\eta^3 + 9.8422473175 \cdot 10^{-6}\eta^4)e^{-0.6803915971\eta} + \\ & + (-0.0147247239\eta - 0.0034357919\eta^2 - 0.0012515131\eta^3)e^{-1.7931762981\eta} \end{aligned} \quad (5.3.48)$$

• Dacă se consideră $R = 0.3$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$ atunci se găsește

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9449058420 + 0.0538547422\eta + 0.0164071328\eta^2 - \\ & - 0.0005328548\eta^3 + 0.0000409977\eta^4)e^{-0.5830650580\eta} + \\ & + (-0.0538547422\eta - 0.0134379628\eta^2 - 0.0046953084\eta^3)e^{-1.6958497590\eta} \end{aligned} \quad (5.3.49)$$

• În ultimul subcaz, pentru $R = 0.6$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$ se obține

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9539870838 + 0.0540095706\eta + 0.0166131451\eta^2 - \\ & - 0.0005365462\eta^3 + 0.0000413706\eta^4)e^{-0.4823222133\eta} + \\ & + (-0.0540095706\eta - 0.0140050053\eta^2 - 0.0047743605\eta^3)e^{-1.5951069143\eta} \end{aligned} \quad (5.3.50)$$

Cazul 5.3.3.5. Pentru $S = 0$, $M = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$, soluția aproximativă de ordinul întâi este:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 0.8507603570 + (-0.8507603570 - 0.0092222223\eta - \\ & - 0.0559099398\eta^2 + 0.0054863768\eta^3 - 0.0004348803\eta^4)e^{-1.0625235105\eta} + \\ & + (-0.0030376081\eta - 0.0216431007\eta^2 - 0.0031008859\eta^3)e^{-2.1250470210\eta} \end{aligned} \quad (5.3.51)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9389047069 + 0.0525544702\eta + 0.0151864803\eta^2 - \\ & - 0.0004622337\eta^3 + 0.0000356287\eta^4)e^{-0.6507081350\eta} + \\ & + (-0.0525544702\eta - 0.0113572926\eta^2 - 0.0041778981\eta^3)e^{-1.7132316455\eta} \end{aligned} \quad (5.3.52)$$

Tabelul 5.27. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.51) și (5.3.52) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	0	$-6.07 \cdot 10^{-21}$	$6.07 \cdot 10^{-21}$	0.93890470	0.93890469	$1.00 \cdot 10^{-8}$
1	0.53267164	0.53267647	$4.83 \cdot 10^{-6}$	0.51264520	0.51264416	$1.04 \cdot 10^{-6}$
2	0.72298038	0.72297863	$1.75 \cdot 10^{-6}$	0.29382572	0.29382638	$6.67 \cdot 10^{-7}$
3	0.79790821	0.79791987	$1.16 \cdot 10^{-5}$	0.17154078	0.17153978	$9.97 \cdot 10^{-7}$
4	0.82864784	0.82864568	$2.15 \cdot 10^{-6}$	0.10089228	0.10089247	$1.91 \cdot 10^{-7}$
5	0.84146781	0.84145814	$9.67 \cdot 10^{-6}$	0.05952283	0.05952350	$6.71 \cdot 10^{-7}$
6	0.84684275	0.84683906	$3.69 \cdot 10^{-6}$	0.03516242	0.03516239	$3.64 \cdot 10^{-8}$
7	0.84910123	0.84910572	$4.49 \cdot 10^{-6}$	0.02078316	0.02078277	$3.91 \cdot 10^{-7}$
8	0.85005330	0.85006174	$8.43 \cdot 10^{-6}$	0.01228663	0.01228648	$1.44 \cdot 10^{-7}$
9	0.85045690	0.85046519	$8.28 \cdot 10^{-6}$	0.00726412	0.00726431	$1.94 \cdot 10^{-7}$
10	0.85062924	0.85063548	$6.23 \cdot 10^{-6}$	0.00429488	0.00429518	$3.02 \cdot 10^{-7}$

Cazul 5.3.3.6. Dacă $S = -0.3$, $M = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$, se obține:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 0.6897905868 + (-0.9897905868 - 0.0104598318\eta - \\ & -0.0619723165\eta^2 + 0.0047564051\eta^3 - 0.0004390001\eta^4)e^{-0.9247908996\eta} + \\ & + (-0.0032915263\eta - 0.0225455791\eta^2 - 0.0015636266\eta^3)e^{-1.8495817992\eta} \end{aligned} \quad (5.3.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9459958284 + 0.050101643760\eta + 0.0192015824\eta^2 - \\ & -0.000571852564\eta^3 + 0.0000557533\eta^4)e^{-0.5708711389\eta} + \\ & + (-0.0501016437\eta - 0.0065704464\eta^2 - 0.0027775363\eta^3)e^{-1.4956620385\eta} \end{aligned} \quad (5.3.54)$$

Tabelul 5.28. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.53) și (5.3.54) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	-0.2999999	-0.3	$5.55 \cdot 10^{-17}$	0.94599582	0.94599581	$1.00 \cdot 10^{-8}$
1	0.26589994	0.26591078	$1.08 \cdot 10^{-5}$	0.56006318	0.56006082	$2.36 \cdot 10^{-6}$
2	0.49398595	0.49397695	$8.99 \cdot 10^{-6}$	0.34988940	0.34989245	$3.05 \cdot 10^{-6}$
3	0.59608501	0.59609759	$1.25 \cdot 10^{-5}$	0.22376862	0.22377080	$2.18 \cdot 10^{-6}$
4	0.64418974	0.64419604	$6.30 \cdot 10^{-6}$	0.14467140	0.14466807	$3.32 \cdot 10^{-6}$
5	0.66742632	0.66741848	$7.83 \cdot 10^{-6}$	0.09401640	0.09401395	$2.45 \cdot 10^{-6}$
6	0.67877657	0.67876826	$8.31 \cdot 10^{-6}$	0.06124947	0.06125030	$8.23 \cdot 10^{-7}$

7	0.68434913	0.68434893	$1.97 \cdot 10^{-7}$	0.03995170	0.03995409	$2.39 \cdot 10^{-6}$
8	0.68709415	0.68710113	$6.98 \cdot 10^{-6}$	0.02607650	0.02607821	$1.71 \cdot 10^{-6}$
9	0.68845078	0.68846043	$9.65 \cdot 10^{-6}$	0.01702652	0.01702645	$7.23 \cdot 10^{-8}$
10	0.68912356	0.68913228	$8.71 \cdot 10^{-6}$	0.01111996	0.01111821	$1.74 \cdot 10^{-6}$

Cazul 5.3.3.7. În cazul $S = -0.5$, $M = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$, soluția aproximativă de ordinul întâi a ecuațiilor (5.3.10), (5.3.11), (5.3.12) și (5.3.14) este:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 0.5932102075 + (-1.0932102075 - 0.0111087816\eta - \\ & - 0.0649150014\eta^2 + 0.0040974729\eta^3 - 0.0004500438\eta^4)e^{-0.8435752407\eta} + \\ & + (-0.0034922697\eta - 0.0233533332\eta^2 - 0.0016696977\eta^3)e^{-1.6871504815\eta} \end{aligned} \quad (5.3.55)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9501040463 + 0.0376050133\eta + 0.0249758984\eta^2 - \\ & - 0.0009924090\eta^3 + 0.0000871197\eta^4)e^{-0.5251630471\eta} + \\ & + (-0.0376050133\eta + 0.0010097896\eta^2 - 0.0007813015\eta^3)e^{-1.3687382879\eta} \end{aligned} \quad (5.3.56)$$

Tabelul 5.29. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.55) și (5.3.56) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	-0.5	-0.5	0	0.95010404	0.95010403	$1.00 \cdot 10^{-8}$
1	0.08653341	0.08653702	$3.61 \cdot 10^{-6}$	0.58891648	0.58892069	$4.21 \cdot 10^{-6}$
2	0.33959371	0.33958906	$4.65 \cdot 10^{-6}$	0.38632628	0.38632338	$2.91 \cdot 10^{-6}$
3	0.46125154	0.46125153	$1.82 \cdot 10^{-8}$	0.26029391	0.26030459	$1.06 \cdot 10^{-5}$
4	0.52314446	0.52314894	$4.48 \cdot 10^{-6}$	0.17776634	0.17776517	$1.17 \cdot 10^{-6}$
5	0.55560988	0.55560928	$6.01 \cdot 10^{-7}$	0.12225748	0.12224802	$9.46 \cdot 10^{-6}$
6	0.57291643	0.57291342	$3.01 \cdot 10^{-6}$	0.08438514	0.08438091	$4.22 \cdot 10^{-6}$
7	0.58222103	0.58222033	$6.96 \cdot 10^{-7}$	0.05835419	0.05835903	$4.84 \cdot 10^{-6}$
8	0.58724807	0.58725019	$2.12 \cdot 10^{-6}$	0.04039611	0.04040509	$8.98 \cdot 10^{-6}$
9	0.58997279	0.58997566	$2.86 \cdot 10^{-6}$	0.02798421	0.02799080	$6.59 \cdot 10^{-6}$
10	0.59145283	0.59145457	$1.73 \cdot 10^{-6}$	0.01939625	0.01939685	$5.99 \cdot 10^{-7}$

Cazul 5.3.3.8. Pentru $S = 0.1$, $M = 0.6$, $\lambda = 0.1$, $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$, se obțin:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 0.7965964439 + (-0.6965964439 - 0.0070302206\eta - \\ & - 0.0441033674\eta^2 + 0.0066673174\eta^3 - 0.0005509236\eta^4)e^{-1.2733973248\eta} + \\ & + (-0.00226190097\eta - 0.0170701022\eta^2 - 0.0036403974\eta^3)e^{-2.5467946497\eta} \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9397127073 + 0.0617627386\eta + 0.0219888320\eta^2 - \quad (5.3.58) \\ & - 0.0008183675\eta^3 + 0.0000731113\eta^4)e^{-0.6415502542\eta} + \\ & + (-0.0617627386\eta - 0.0206043665\eta^2 - 0.0067231497\eta^3)e^{-1.9149475790\eta} \end{aligned}$$

Tabelul 5.30. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.57) și (5.3.58) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	0.09999999	0.1	$2.77 \cdot 10^{-17}$	0.93971270	0.93971270	$1.00 \cdot 10^{-9}$
1	0.58723475	0.58723397	$7.83 \cdot 10^{-7}$	0.52530922	0.52531078	$1.55 \cdot 10^{-6}$
2	0.72997237	0.72997514	$2.77 \cdot 10^{-6}$	0.31195426	0.31195173	$2.53 \cdot 10^{-6}$
3	0.77500397	0.77500331	$6.65 \cdot 10^{-7}$	0.18891951	0.18892031	$8.03 \cdot 10^{-7}$
4	0.78955322	0.78954966	$3.55 \cdot 10^{-6}$	0.11514402	0.11514677	$2.74 \cdot 10^{-6}$
5	0.79428358	0.79428539	$1.81 \cdot 10^{-6}$	0.07032955	0.07032864	$9.14 \cdot 10^{-7}$
6	0.79582691	0.79583107	$5.15 \cdot 10^{-6}$	0.04298612	0.04298389	$2.23 \cdot 10^{-6}$
7	0.79633506	0.79633598	$9.24 \cdot 10^{-7}$	0.02627701	0.02627673	$2.71 \cdot 10^{-7}$
8	0.79650538	0.79650098	$4.41 \cdot 10^{-6}$	0.01606247	0.01606433	$1.86 \cdot 10^{-6}$
9	0.79656392	0.79655492	$9.00 \cdot 10^{-6}$	0.00981858	0.00982099	$2.41 \cdot 10^{-6}$
10	0.79658459	0.79657258	$1.20 \cdot 10^{-5}$	0.00600237	0.00600396	$1.58 \cdot 10^{-6}$

Cazul 5.3.3.9. În ultimul caz, se consideră $S = 0.1$, $M = 0.3$, $\lambda = 0.1$, $R = 0.1$, $Pr = 0.7$, $\delta = 0.1$, și prin urmare, soluția aproximativă de ordinul întâi este scrisă prin:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 0.8780236617 + (-0.7780236617 - 0.0082359519\eta - \quad (5.3.59) \\ & - 0.0506715762\eta^2 + 0.0058647919\eta^3 - 0.0004474304\eta^4)e^{-1.1524856382\eta} + \\ & + (-0.0028031851\eta - 0.0204771942\eta^2 - 0.0040416806\eta^3)e^{-2.3049712764\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(\eta) = & (0.9371335972 + 0.0542997895\eta + 0.0165468521\eta^2 - \quad (5.3.60) \\ & - 0.0005734010\eta^3 + 0.0000427240\eta^4)e^{-0.6708371460\eta} + \\ & + (-0.0542997895\eta - 0.0143185202\eta^2 - 0.0049761140\eta^3)e^{-1.8233227842\eta} \end{aligned}$$

Tabelul 5.31. Rezultate comparative între rezultatele numerice și soluțiile aproximative de ordinul întâi (\bar{f} , $\bar{\theta}$) date de relațiile (5.3.59) și (5.3.60) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$	$f_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_f(\eta)$	$\bar{\theta}_{MHAO}(\eta)$	$\theta_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_\theta(\eta)$
0	0.09999999	0.1	$2.77 \cdot 10^{-17}$	0.93713359	0.93713358	$1.00 \cdot 10^{-8}$
1	0.61266374	0.61266882	$5.08 \cdot 10^{-6}$	0.50320456	0.50320437	$1.85 \cdot 10^{-7}$

2	0.78131682	0.78131542	$1.40 \cdot 10^{-6}$	0.28428020	0.28427975	$4.43 \cdot 10^{-7}$
3	0.84190780	0.84191411	$6.31 \cdot 10^{-6}$	0.16352481	0.16352430	$5.03 \cdot 10^{-7}$
4	0.86442018	0.86441632	$3.86 \cdot 10^{-6}$	0.09469109	0.09469222	$1.13 \cdot 10^{-6}$
5	0.87288163	0.87287626	$5.37 \cdot 10^{-6}$	0.05497105	0.05497123	$1.84 \cdot 10^{-7}$
6	0.87607138	0.87607181	$4.37 \cdot 10^{-7}$	0.03194322	0.03194241	$8.05 \cdot 10^{-7}$
7	0.87727667	0.87728101	$4.33 \cdot 10^{-6}$	0.01856793	0.01856756	$3.71 \cdot 10^{-7}$
8	0.87773471	0.87773888	$4.16 \cdot 10^{-6}$	0.01079389	0.01079445	$5.52 \cdot 10^{-7}$
9	0.87791050	0.87791231	$1.80 \cdot 10^{-6}$	0.00627482	0.00627580	$9.85 \cdot 10^{-7}$
10	0.87797882	0.87797801	$8.16 \cdot 10^{-7}$	0.00364802	0.00364879	$7.72 \cdot 10^{-7}$

În Tabelele 5.23-5.31 se prezintă o comparație între soluțiile aproximative de ordinul întâi (5.3.38)-(5.3.60) și rezultatele numerice pentru câteva valori ale variabilei η , precum și abaterile corespunzătoare

$$\varepsilon_f(\eta) = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|, \quad \varepsilon_\theta(\eta) = |\bar{\theta}_{MHAO}(\eta) - \theta_{numeric}(\eta)|.$$

În Tabelele 5.32-5.40 se prezintă o comparație între derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (5.3.38)-(5.3.60) și rezultatele numerice pentru câteva valori ale variabilei η , precum și abaterile corespunzătoare

$$\varepsilon_{f'}(\eta) = |\bar{f}'_{MHAO}(\eta) - f'_{numeric}(\eta)|, \quad \varepsilon_{\theta'}(\eta) = |\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta) - \theta'_{numeric}(\eta)|.$$

Tabelul 5.32. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.38) și (5.3.39) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.38)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.39)	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.88843482	0.88843481	$9.99 \cdot 10^{-9}$	-0.63812404	-0.63812414	$9.99 \cdot 10^{-8}$
1	0.28545290	0.28541390	$3.90 \cdot 10^{-5}$	-0.30015583	-0.30015412	$1.71 \cdot 10^{-6}$
2	0.10483255	0.10485346	$2.09 \cdot 10^{-5}$	-0.15902631	-0.15902833	$2.01 \cdot 10^{-6}$
3	0.04062500	0.04062055	$4.45 \cdot 10^{-6}$	-0.08801940	-0.08801839	$1.01 \cdot 10^{-6}$
4	0.01608714	0.01607463	$1.25 \cdot 10^{-5}$	-0.04953981	-0.04953894	$8.73 \cdot 10^{-7}$
5	0.00641367	0.00641565	$1.97 \cdot 10^{-6}$	-0.02806573	-0.02806663	$9.06 \cdot 10^{-7}$
6	0.00256161	0.00256937	$7.75 \cdot 10^{-6}$	-0.01594297	-0.01594346	$4.96 \cdot 10^{-7}$
7	0.00102562	0.00103041	$4.78 \cdot 10^{-6}$	-0.00906679	-0.00906639	$3.96 \cdot 10^{-7}$
8	0.00041282	0.00041346	$6.33 \cdot 10^{-7}$	-0.00515840	-0.00515785	$5.43 \cdot 10^{-7}$
9	0.00016750	0.00016593	$1.57 \cdot 10^{-6}$	-0.00293496	-0.00293478	$1.80 \cdot 10^{-7}$
10	0.00006860	0.00006660	$1.99 \cdot 10^{-6}$	-0.00166979	-0.00166998	$1.84 \cdot 10^{-7}$

Tabelul 5.33. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.40) și (5.3.41) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.40)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.41)	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.87245813	0.87245812	$1.00 \cdot 10^{-8}$	-0.75293744	-0.75293745	$9.99 \cdot 10^{-9}$
1	0.22828030	0.22825759	$2.27 \cdot 10^{-5}$	-0.31820241	-0.31820124	$1.16 \cdot 10^{-6}$
2	0.06722555	0.06723918	$1.36 \cdot 10^{-5}$	-0.14889548	-0.14889559	$1.08 \cdot 10^{-7}$
3	0.02055908	0.02054601	$1.31 \cdot 10^{-5}$	-0.07176848	-0.07176748	$9.99 \cdot 10^{-7}$
4	0.00635117	0.00634994	$1.22 \cdot 10^{-6}$	-0.03490253	-0.03490395	$1.41 \cdot 10^{-6}$
5	0.00196270	0.00196944	$6.73 \cdot 10^{-6}$	-0.01702253	-0.01702275	$2.21 \cdot 10^{-7}$
6	0.00060749	0.00061147	$3.97 \cdot 10^{-6}$	-0.00831015	-0.00830922	$9.24 \cdot 10^{-7}$
7	0.00018965	0.00018989	$2.39 \cdot 10^{-7}$	-0.00405759	-0.00405701	$5.79 \cdot 10^{-7}$
8	0.00006020	0.00005895	$1.24 \cdot 10^{-6}$	-0.00198084	-0.00198101	$1.66 \cdot 10^{-7}$
9	0.00001953	0.00001828	$1.25 \cdot 10^{-6}$	-0.00096681	-0.00096734	$5.27 \cdot 10^{-7}$
10	$6.48 \cdot 10^{-6}$	$5.65 \cdot 10^{-6}$	$8.34 \cdot 10^{-7}$	-0.00047188	-0.00047236	$4.75 \cdot 10^{-7}$

Tabelul 5.34. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.42) și (5.3.43) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.42)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.43)	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.88055329	0.88055328	$1.00 \cdot 10^{-8}$	-0.69277758	-0.69277768	$1.00 \cdot 10^{-7}$
1	0.25600972	0.25598142	$2.82 \cdot 10^{-5}$	-0.31007655	-0.31007448	$2.07 \cdot 10^{-6}$
2	0.08444370	0.08446263	$1.89 \cdot 10^{-5}$	-0.15514672	-0.15514822	$1.50 \cdot 10^{-6}$
3	0.02914513	0.02913259	$1.25 \cdot 10^{-5}$	-0.08052316	-0.08052139	$1.77 \cdot 10^{-6}$
4	0.01021339	0.01020682	$6.57 \cdot 10^{-6}$	-0.04231594	-0.04231659	$6.52 \cdot 10^{-7}$
5	0.00358957	0.00359586	$6.28 \cdot 10^{-6}$	-0.02233555	-0.02233653	$9.81 \cdot 10^{-7}$
6	0.00126294	0.00126930	$6.35 \cdot 10^{-6}$	-0.01180890	-0.01180848	$4.12 \cdot 10^{-7}$
7	0.00044654	0.00044836	$1.82 \cdot 10^{-6}$	-0.00624694	-0.00624610	$8.43 \cdot 10^{-7}$
8	0.00015953	0.00015841	$1.11 \cdot 10^{-6}$	-0.00330482	-0.00330450	$3.18 \cdot 10^{-7}$
9	0.00005783	0.00005597	$1.85 \cdot 10^{-6}$	-0.00174809	-0.00174836	$2.73 \cdot 10^{-7}$
10	0.00002130	0.00001978	$1.52 \cdot 10^{-6}$	-0.00092454	-0.00092505	$5.07 \cdot 10^{-7}$

Tabelul 5.35. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.44) și (5.3.45) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.44)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.45)	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.88843482	0.88843481	$9.99 \cdot 10^{-9}$	-0.63812404	-0.63812414	$9.99 \cdot 10^{-8}$
1	0.28545290	0.28541390	$3.90 \cdot 10^{-5}$	-0.30015583	-0.30015412	$1.71 \cdot 10^{-6}$
2	0.10483255	0.10485346	$2.09 \cdot 10^{-5}$	-0.15902631	-0.15902833	$2.01 \cdot 10^{-6}$
3	0.04062500	0.04062055	$4.45 \cdot 10^{-6}$	-0.08801940	-0.08801839	$1.01 \cdot 10^{-6}$
4	0.01608714	0.01607463	$1.25 \cdot 10^{-5}$	-0.04953981	-0.04953894	$8.73 \cdot 10^{-7}$
5	0.00641367	0.00641565	$1.97 \cdot 10^{-6}$	-0.02806573	-0.02806663	$9.06 \cdot 10^{-7}$
6	0.00256161	0.00256937	$7.75 \cdot 10^{-6}$	-0.01594297	-0.01594346	$4.96 \cdot 10^{-7}$
7	0.00102562	0.00103041	$4.78 \cdot 10^{-6}$	-0.01594297	-0.01594346	$4.96 \cdot 10^{-7}$
8	0.00041282	0.00041346	$6.33 \cdot 10^{-7}$	-0.00515840	-0.00515785	$5.43 \cdot 10^{-7}$
9	0.00016750	0.00016593	$1.57 \cdot 10^{-6}$	-0.00293496	-0.00293478	$1.80 \cdot 10^{-7}$
10	0.00006860	0.00006660	$1.99 \cdot 10^{-6}$	-0.00166979	-0.00166998	$1.84 \cdot 10^{-7}$

Tabelul 5.36. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.51) și (5.3.52) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.51)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.52)	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.89169305	0.89169304	$1.00 \cdot 10^{-8}$	-0.61095293	-0.61095303	$1.00 \cdot 10^{-7}$
1	0.29811553	0.29807936	$3.61 \cdot 10^{-5}$	-0.29375661	-0.29375586	$7.54 \cdot 10^{-7}$
2	0.11413100	0.11415378	$2.27 \cdot 10^{-5}$	-0.16002100	-0.16002252	$1.51 \cdot 10^{-6}$
3	0.04625779	0.04625340	$4.38 \cdot 10^{-6}$	-0.09149886	-0.09149890	$3.83 \cdot 10^{-8}$
4	0.01920647	0.01919124	$1.52 \cdot 10^{-5}$	-0.05335199	-0.05335060	$1.39 \cdot 10^{-6}$
5	0.00804207	0.00804286	$7.86 \cdot 10^{-7}$	-0.03135997	-0.03136038	$4.03 \cdot 10^{-7}$
6	0.00337607	0.00338496	$8.89 \cdot 10^{-6}$	-0.01849636	-0.01849706	$6.99 \cdot 10^{-7}$
7	0.00142071	0.00142715	$6.44 \cdot 10^{-6}$	-0.01092565	-0.01092564	$1.24 \cdot 10^{-8}$
8	0.00060059	0.00060216	$1.56 \cdot 10^{-6}$	-0.00645769	-0.00645731	$3.78 \cdot 10^{-7}$
9	0.00025561	0.00025415	$1.46 \cdot 10^{-6}$	-0.00381762	-0.00381737	$2.45 \cdot 10^{-7}$
10	0.00010964	0.00010728	$2.35 \cdot 10^{-6}$	-0.00225693	-0.00225695	$2.11 \cdot 10^{-8}$

Tabelul 5.37. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.53) și (5.3.54) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ <i>din(5.3.53)</i>	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ <i>din(5.3.54)</i>	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.90159796	0.90159795	$1.00 \cdot 10^{-8}$	-0.54004171	-0.54004181	$9.99 \cdot 10^{-8}$
1	0.33930381	0.33926472	$3.91 \cdot 10^{-5}$	-0.27427842	-0.27428992	$1.15 \cdot 10^{-5}$
2	0.14693116	0.14694775	$1.65 \cdot 10^{-5}$	-0.15944957	-0.15944153	$8.03 \cdot 10^{-6}$
3	0.06807568	0.06808589	$1.02 \cdot 10^{-5}$	-0.09851219	-0.09851904	$6.84 \cdot 10^{-6}$
4	0.03262317	0.03260661	$1.65 \cdot 10^{-5}$	-0.06263539	-0.06263771	$2.31 \cdot 10^{-6}$
5	0.01588022	0.01587222	$8.00 \cdot 10^{-6}$	-0.04037652	-0.04037344	$3.07 \cdot 10^{-6}$
6	0.00778312	0.00778882	$5.69 \cdot 10^{-6}$	-0.02620023	-0.02619745	$2.77 \cdot 10^{-6}$
7	0.00382860	0.00383740	$8.79 \cdot 10^{-6}$	-0.01705526	-0.01705494	$3.24 \cdot 10^{-7}$
8	0.00188933	0.00189435	$5.01 \cdot 10^{-6}$	-0.01111951	-0.01112097	$1.46 \cdot 10^{-6}$
9	0.00093553	0.00093607	$5.33 \cdot 10^{-7}$	-0.00725547	-0.00725737	$1.89 \cdot 10^{-6}$
10	0.00046480	0.00046277	$2.02 \cdot 10^{-6}$	-0.00473654	-0.00473789	$1.34 \cdot 10^{-6}$

Tabelul 5.38. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.55) și (5.3.56) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ <i>din(5.3.55)</i>	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ <i>din(5.3.56)</i>	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.90760401	0.90753575	$6.82 \cdot 10^{-5}$	-0.49895953	-0.49895963	$1.00 \cdot 10^{-7}$
1	0.36554105	0.36556515	$2.41 \cdot 10^{-5}$	-0.26067390	-0.26072257	$4.86 \cdot 10^{-5}$
2	0.16955520	0.16954571	$9.49 \cdot 10^{-6}$	-0.15652325	-0.15650050	$2.27 \cdot 10^{-5}$
3	0.08459112	0.08460172	$1.06 \cdot 10^{-5}$	-0.10064006	-0.10064251	$2.45 \cdot 10^{-6}$
4	0.04390434	0.04390197	$2.37 \cdot 10^{-6}$	-0.06703229	-0.06704681	$1.45 \cdot 10^{-5}$
5	0.02327491	0.02326974	$5.17 \cdot 10^{-6}$	-0.04549751	-0.04549820	$6.91 \cdot 10^{-7}$
6	0.01247599	0.01247651	$5.12 \cdot 10^{-7}$	-0.03118928	-0.03118013	$9.15 \cdot 10^{-6}$
7	0.00672815	0.00673143	$3.27 \cdot 10^{-6}$	-0.01484185	-0.01484123	$6.19 \cdot 10^{-7}$
8	0.00364219	0.00364413	$1.93 \cdot 10^{-6}$	-0.01026473	-0.01026958	$4.84 \cdot 10^{-6}$
9	0.00197679	0.00197642	$3.72 \cdot 10^{-7}$	-0.01026473	-0.01026958	$4.84 \cdot 10^{-6}$
10	0.00107461	0.00107298	$1.63 \cdot 10^{-6}$	-0.00710558	-0.00711208	$6.49 \cdot 10^{-6}$

Tabelul 5.39. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.57) și (5.3.58) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.57)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.58)	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.87775192	0.87775191	$1.00 \cdot 10^{-8}$	-0.60287292	-0.60287293	$9.99 \cdot 10^{-9}$
1	0.24351164	0.24349799	$1.36 \cdot 10^{-5}$	-0.28390945	-0.28390455	$4.90 \cdot 10^{-6}$
2	0.07545109	0.07545760	$6.51 \cdot 10^{-6}$	-0.15841067	-0.15841392	$3.24 \cdot 10^{-6}$
3	0.02424320	0.02423514	$8.06 \cdot 10^{-6}$	-0.09393214	-0.09392629	$5.85 \cdot 10^{-6}$
4	0.00787194	0.00787501	$3.07 \cdot 10^{-6}$	-0.05684538	-0.05684765	$2.26 \cdot 10^{-6}$
5	0.00256344	0.00256869	$5.24 \cdot 10^{-6}$	-0.03463827	-0.03464164	$3.37 \cdot 10^{-6}$
6	0.00083974	0.00083891	$8.35 \cdot 10^{-7}$	-0.02115775	-0.02115698	$7.64 \cdot 10^{-7}$
7	0.00027903	0.00027410	$4.92 \cdot 10^{-6}$	-0.01293327	-0.01293073	$2.54 \cdot 10^{-6}$
8	0.00009483	0.00008958	$5.25 \cdot 10^{-6}$	-0.00790629	-0.00790485	$1.43 \cdot 10^{-6}$
9	0.00003311	0.00002930	$3.81 \cdot 10^{-6}$	-0.00483250	-0.00483278	$2.77 \cdot 10^{-7}$
10	0.00001187	$9.61 \cdot 10^{-6}$	$2.25 \cdot 10^{-6}$	-0.00295347	-0.00295469	$1.21 \cdot 10^{-6}$

Tabelul 5.40. Rezultate comparative între rezultatele numerice și derivatele soluțiilor aproximative de ordinul întâi (\bar{f}' , $\bar{\theta}'$) date de relațiile (5.3.59) și (5.3.60) obținute cu metoda MHAO

η	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.59)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}(\eta)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(\eta)$ din(5.3.60)	$\theta'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{\theta'}(\eta)$
0	0.88562195	0.88562194	$1.00 \cdot 10^{-8}$	-0.62866402	-0.62866412	$9.99 \cdot 10^{-8}$
1	0.27377115	0.27373630	$3.48 \cdot 10^{-5}$	-0.29578506	-0.29578250	$2.56 \cdot 10^{-6}$
2	0.09605277	0.09607040	$1.76 \cdot 10^{-5}$	-0.15893586	-0.15893830	$2.44 \cdot 10^{-6}$
3	0.03536276	0.03535643	$6.33 \cdot 10^{-6}$	-0.08971262	-0.08971047	$2.15 \cdot 10^{-6}$
4	0.01325563	0.01324762	$8.01 \cdot 10^{-6}$	-0.05157732	-0.05157708	$2.39 \cdot 10^{-7}$
5	0.00499351	0.00499755	$4.04 \cdot 10^{-6}$	-0.02985883	-0.02986033	$1.50 \cdot 10^{-6}$
6	0.00188430	0.00189014	$5.83 \cdot 10^{-6}$	-0.01733301	-0.01733325	$2.39 \cdot 10^{-7}$
7	0.00071388	0.00071558	$1.70 \cdot 10^{-6}$	-0.01007250	-0.01007160	$9.01 \cdot 10^{-7}$
8	0.00027268	0.00027101	$1.66 \cdot 10^{-6}$	-0.00585513	-0.00585436	$7.71 \cdot 10^{-7}$
9	0.00010538	0.00010266	$2.72 \cdot 10^{-6}$	-0.00340354	-0.00340346	$7.78 \cdot 10^{-8}$
10	0.00004127	0.00003889	$2.37 \cdot 10^{-6}$	-0.00197828	-0.00197872	$4.39 \cdot 10^{-7}$

Soluțiile numerice ale ecuațiilor (5.3.10)-(5.3.13) sunt obținute cu ajutorul metodei shooting în combinație cu metoda Runge-Kutta de ordin patru, folosind soft-ul Wolfram Mathematica 6.0. Pentru această metodă sunt foarte importante valorile coeficientului superficial la limită $\bar{f}''(0)$ și coeficientul de transfer termic $\bar{\theta}'(0)$.

În Tabelul 5.41 se prezintă o comparație între acești coeficienți obținuți cu metoda MHAO și rezultatele numerice, precum și abaterile corespunzătoare pentru fiecare din cazurile (5.3.3.1)-(5.3.3.9).

Tabelul 5.41. Rezultate comparative între rezultatele numerice și coeficienții $\bar{f}''(0)$, respectiv $\bar{\theta}'(0)$ pentru cazurile (5.3.3.1)-(5.3.3.9) obținuți cu metoda MHAO

Cazul	$\bar{f}''_{MHAO}(0)$	$f''_{numeric}(0)$	$\varepsilon_{f''}(0)$	$\bar{\theta}'_{MHAO}(0)$	$\theta'_{numeric}(0)$	$\varepsilon_{\theta'}(0)$
5.3.3.1	- 1.11565171	- 1.11565181	$1.00 \cdot 10^{-7}$	- 0.63812404	- 0.63812414	$9.99 \cdot 10^{-8}$
5.3.3.2	- 1.27541866	- 1.27541876	$1.00 \cdot 10^{-7}$	- 0.75293744	- 0.75293745	$9.99 \cdot 10^{-9}$
5.3.3.3	- 1.19446706	- 1.19446716	$9.99 \cdot 10^{-8}$	- 0.69277758	- 0.69277768	$1.00 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.4	- 1.11883101	- 1.11883111	$1.00 \cdot 10^{-7}$	- 0.63704777	- 0.63704787	$1.00 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.5	- 1.08306949	- 1.08306959	$9.99 \cdot 10^{-8}$	- 0.61095293	- 0.61095303	$1.00 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.6	- 0.98402031	- 0.98402041	$1.00 \cdot 10^{-7}$	- 0.54004171	- 0.54004181	$9.99 \cdot 10^{-8}$
5.3.3.7	- 0.92395987	- 0.92464248	$6.82 \cdot 10^{-4}$	- 0.49895953	- 0.49895963	$1.00 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.8	- 1.22248073	- 1.22248083	$9.99 \cdot 10^{-8}$	- 0.60287292	- 0.60287293	$9.99 \cdot 10^{-9}$
5.3.3.9	- 1.14378041	- 1.14378051	$1.00 \cdot 10^{-7}$	- 0.62866402	- 0.62866412	$9.99 \cdot 10^{-8}$

În Tabelul 5.42 este prezentată o comparație între valorile-limită $\bar{f}_{MHAO}(\infty)$ și $f_{numeric}(\infty)$ pentru fiecare din cazuri (5.3.3.1)-(5.3.3.9).

Dacă resturile de aproximare pentru ecuațiile (5.151) și (5.152) sunt

$$R_f(\eta) = \bar{f}'''(\eta) + \bar{f}(\eta)\bar{f}''(\eta) - 2[\bar{f}'(\eta)]^2 - M^2\bar{f}'(\eta) \quad (5.3.61)$$

respectiv

$$R_\theta(\eta) = \left(1 + \frac{4}{3}R\right)\bar{\theta}''(\eta) + Pr[\bar{f}(\eta)\bar{\theta}'(\eta) - \bar{f}'(\eta)\bar{\theta}(\eta)] \quad (5.3.62)$$

atunci în Figurile 5.34 - 5.37 se reprezintă grafic aceste resturi pentru două cazuri arbitrare **5.3.3.2** și **5.3.3.9**.

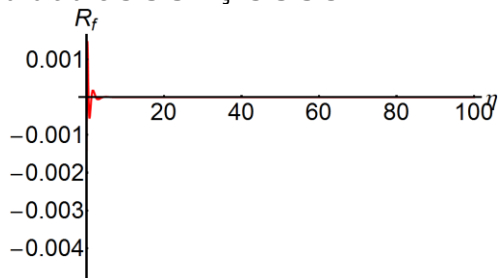


Fig. 5.34 Restul $R_f(\eta)$ pentru cazul **5.3.3.2**

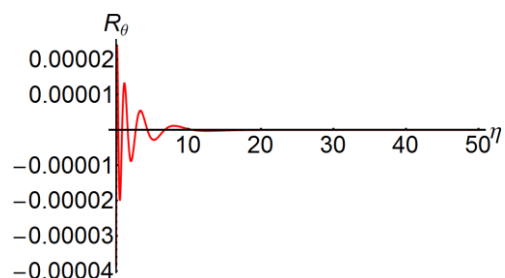


Fig. 5.35 Restul $R_\theta(\eta)$ pentru cazul **5.3.3.2**

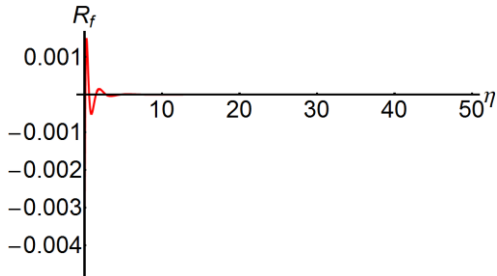


Fig. 5.36 Restul $R_f(\eta)$ pentru cazul **5.3.3.9**

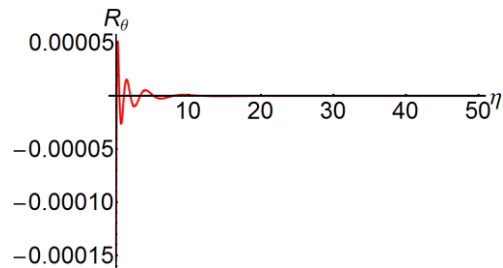


Fig. 5.37 Restul $R_\theta(\eta)$ pentru cazul **5.3.3.9**

Se poate observa din Tabele 5.23-5.42 și Figurile 5.34 - 5.37 că soluțiile aproximative obținute procedura propusă sunt aproape identice cu soluțiile numerice obținute cu ajutorul metodei shooting în combinație cu metoda Runge-Kutta de ordin patru.

În vederea analizării rezultateor obținute cu MHAO și a rezultatelor obținute prin integrare numerică, în Figurile 5.38 - 5.44 sunt arătate variațiile deplasării f , profilul vitezelor f' și temperatura θ pentru diferite valori ale coeficienților. Variația deplasării $f(\eta)$ pentru diferite valori ale coeficientului de aspirație / de imersie S și pentru diferite valori ale coeficientului magnetic M sunt prezentate în Figurile 5.38 și 5.39. Aceste figuri arată că deplasarea crește odată cu creșterea coeficientului de aspirație / de imersie S și pe de altă parte, deplasarea descrește odată cu creșterea coeficientului magnetic M .

Profilul vitezelor pentru diferite valori ale coeficientului de aspirație / de imersie S și pentru diferite valori ale coeficientului magnetic M sunt prezentate în Figurile 5.40 și respectiv 5.41. Este clar că rata de transport se reduce considerabil odată cu creșterea coeficientului S sau M . De asemenea, profilul vitezelor descrește odată cu creșterea coeficientului S sau M . În aceste cazuri viteza se anulează relativ la distanță mare de foaie (la $\eta = 6$).

Profilele temperaturii sunt prezentate în Figurile 5.42 - 5.44 pentru variația coeficientului magnetic M , coeficientul termic de alunecare δ și respectiv coeficientul de aspirație / de imersie S . Odată cu creșterea coeficientului magnetic M , temperatura crește (Fig. 5.42). Din ecuațiile (5.3.10) și (5.3.11) se observă că temperatura descrește odată cu creșterea coeficientului termic de alunecare și cu creșterea coeficientului de aspirație / de imersie.

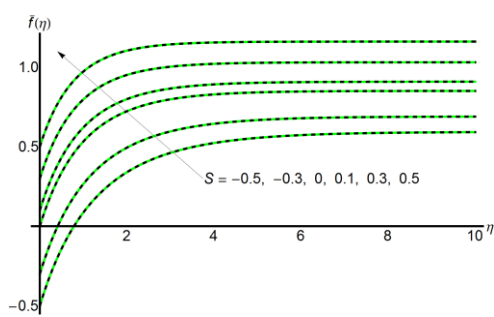


Fig. 5.38 Variația deplasării $f(\eta)$ cu η pentru $M = 0.1$, $\lambda = 0.1$ și câteva valori ale coeficientului de aspirație / de imersie S : ----- $f_{numeric}$; \bar{f}_{MHAO}

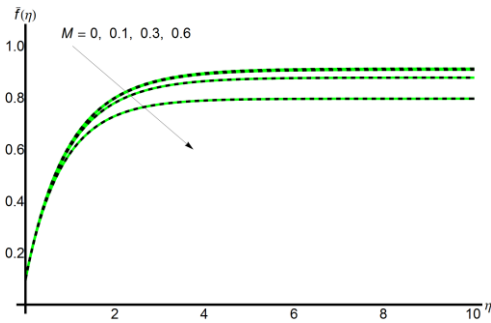


Fig. 5.39 Variația deplasării $f(\eta)$ cu η pentru $S = 0.1$, $\lambda = 0.1$ și câteva valori ale coeficientului magnetic M : ----- $f_{numeric}$; \bar{f}_{MHAO}

Tabelul 5.42. Rezultate comparative între rezultatele numerice $f_{numeric}(\infty)$ și valorile limită $\bar{f}_{MHAO}(\infty)$ pentru cazurile (5.3.3.1)-(5.3.3.9)

Cazul	$\bar{f}_{MHAO}(\infty)$	$f_{numeric}(\infty)$	$\varepsilon = \bar{f}_{MHAO}(\infty) - f_{numeric}(\infty) $
5.3.3.1	0.91278234	0.91278193	$4.05 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.2	1.16053687	1.16053696	$8.45 \cdot 10^{-8}$
5.3.3.3	1.03063797	1.03063764	$3.27 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.4	0.90865998	0.90865957	$4.07 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.5	0.85076035	0.85075988	$4.73 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.6	0.68979058	0.68978987	$7.16 \cdot 10^{-7}$
5.3.3.7	0.59321020	0.59321176	$1.55 \cdot 10^{-6}$
5.3.3.8	0.79659644	0.79665546	$5.90 \cdot 10^{-5}$
5.3.3.9	0.87802366	0.87801910	$4.55 \cdot 10^{-6}$

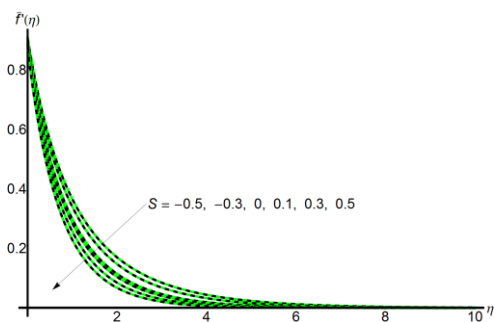


Fig. 5.40 Variația vitezei orizontale $f'(\eta)$ cu η pentru $M = 0.1$, $\lambda = 0.1$ și câteva valori ale coeficientului de aspirație / imersie S : ----- $f'_{numeric}$; \bar{f}'_{MHAO}

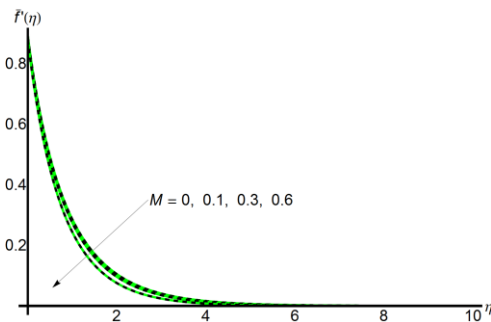


Fig. 5.41 Variația vitezei orizontale $f'(\eta)$ pentru $S = 0.1$, $\lambda = 0.1$ și câteva valori ale coeficientului magnetic M : ----- $f'_{numeric}$; \bar{f}'_{MHAO}

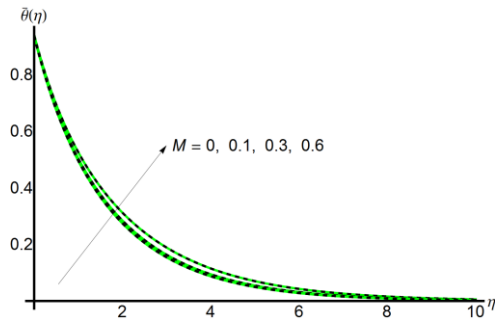


Fig. 5.42 Variația temperaturii $\theta(\eta)$ cu η pentru câteva valori ale coeficientului magnetic M și pentru $R = 0.1, Pr = 0.7, \delta = 0.1, S = 0.1, \lambda = 0.1$: ----- $\theta_{numeric}$; $\bar{\theta}'_{MHAO}$

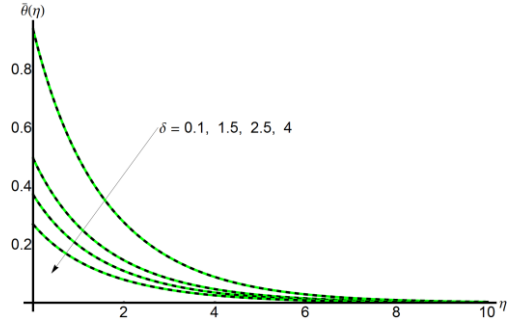


Fig. 5.43 Variația temperaturii $\theta(\eta)$ cu η pentru câteva valori ale coeficientului termic de alunecare δ și pentru $R = 0.1, Pr = 0.7, S = 0.1, M = 0.1, \lambda = 0.1$: ----- $\theta_{numeric}$; $\bar{\theta}'_{MHAO}$

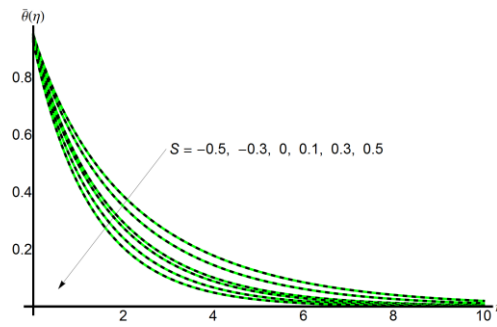


Fig. 5.44 Variația temperaturii $\theta(\eta)$ cu η pentru câteva valori ale coeficientului de aspirație / de imersie S și pentru $R = 0.1, Pr = 0.7, \delta = 0.1, S = 0.1, M = 0.1, \lambda = 0.1$: ----- $\theta_{numeric}$; $\bar{\theta}'_{MHAO}$

5.4 Soluții duale pentru problema curgerii vâscoase instabile printr-un cilindru contractat

Primele lucrări din domeniul curgerii în interiorul unui tub cu diametru dependent de timp au fost [171], [159], unde Uchida și Aoki, Skalak și Wang au studiat viteza internă de curgere și presiunea datorită expansiunii sau contracției tubului. Miklavčič și Wang [131] au investigat curgerea pe o foaie înclinată, obținând o soluție exactă a ecuațiilor Navier-Stokes. Ishak și alții [97] au raportat că procesul de imersie reduce frecarea, precum și rata de transfer de căldură de la suprafață, în timp ce aspirația acționează în sens opus. Fang și alții [72] au obținut soluția exactă a ecuațiilor Navier-Stokes ale stării instabile. Fang și alții [73] au propus modelul cu alunecare de ordinul II, studiind curgerea pe o foaie înclinată. Ei au arătat că soluția exactă a ecuațiilor Navier-Stokes are două ramuri într-un anumit domeniu al parametrilor. Problema curgerii vâscoase instabile, printr-un cilindru permeabil contractat, a fost rezolvată numeric de Zaimi ș.a. [185] folosind metoda shooting. Efectul aspirației și a parametrului de instabilitate asupra vitezei de curgere și a coeficientului de frecare superficial au fost analizate și reprezentate grafic în [186]. Aceiași autori au studiat efectele parametrului de instabilitate și a parametrului mișcării Browniene cu privire la terenul de curgere și a caracteristicilor transferului de căldură. În anumite condiții sunt găsite soluții duale.

În această ultimă secțiune se consideră curgerea vâscoasă instabilă a unui fluid incompresibil printr-un cilindru contractat.

5.4.1 Ecuațiile de mișcare

În cele ce urmează, se consideră curgerea laminară instabilă la nivelul stratului limită a unui nanofluid printr-un cilindru infinit sau printr-un tub a cărui rază variază în timp, în mișcare de contractare după cum se arată în figura Fig. 5.45.

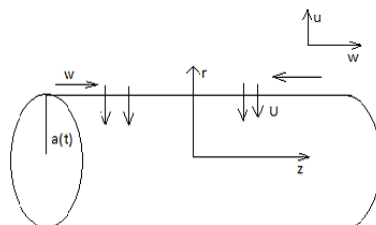


Fig 5.45. Un model schematic de curgere printr-un cilindru având raza dependentă de timp

Se consideră ecuațiile tri-dimensionale Navier-Stokes pentru fluide incompresibile, în absența forțelor masice. Se presupune că nu există nicio componentă a vitezei azimutale, iar curgerea este asimetrică. În aceste ipoteze ecuațiile sunt:

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (5.4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.4.2)$$

unde \mathbf{v} este vectorul vitează, $\rho(r)$ este densitatea fluidului, p este presiunea și ν este vâscozitatea cinematică. Diametrul cilindrului este presupus a fi funcție de

timp cu raza variabilă $a(t) = a_0 \sqrt{1 - \beta t}$. Pentru o valoare pozitivă a lui β , raza cilindrului devine mai mică în timp, adică cilindrul se contractă, în timp ce pentru o valoare negativă a lui β , diametrul se mărește în timp, adică cilindrul se extinde. Dacă se trece la coordonate cilindrice r și z măsurate în direcțiile radială și respectiv axială, ecuațiile (5.4.1) și (5.4.2) pot fi scrise sub forma [72], [73], [185], [186]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (5.4.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (5.4.5)$$

Dacă se ia în considerare viteza de transfer de masă constantă U ($U < 0$) și a_0 o constantă pozitivă, atunci condițiile la limită vor avea forma:

$$u = \frac{U}{\sqrt{1 - \beta t}}, \quad w = -\frac{4\nu z}{a_0^2(1 - \beta t)} \text{ pentru } r = a(t), \quad (5.4.6)$$

$$w = 0 \text{ cand } r \rightarrow \infty.$$

Cu ajutorul variabilelor de similaritate [186]

$$u = -\frac{2\nu}{a(t)} \frac{f(\eta)}{\sqrt{\eta}}, \quad w = \frac{4\nu z}{a^2(t)} f'(\eta), \quad \eta = \left(\frac{r}{a(t)} \right)^2. \quad (5.4.7)$$

este clar că $\eta \geq 1$, și pe de altă parte, ecuația (5.4.3) este automat satisfăcută. Pe baza componentelor vitezei definite, din ecuația (5.4.4) se deduce că gradientul de presiune $\frac{\partial p}{\partial r}$ este funcție de t și r și nu depinde de z , astfel încât, din ecuația (5.4.4) se obține

$$\frac{p}{\rho} = G(t, r) + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{1}{2} u^2 + \int \frac{\partial u}{\partial t} dr \quad (5.4.8)$$

sau folosind relațiile (5.4.7) presiunea poate fi scrisă în forma

$$\frac{p}{\rho} = G(t, r) - \frac{2\nu^2}{a^2(t) \left[f'(\eta) + \frac{1}{\eta} f^2(\eta) + 2Sf(\eta) \right]} \quad (5.4.9)$$

unde $G(t, r)$ este constantă de integrare în raport cu z și $S = \frac{a_0^2 \beta}{4\nu}$ este coeficient de instabilitate pentru cazul de extindere ($\beta < 0$) sau contracție ($\beta > 0$) a cilindrului, arătând forța de extindere sau de contracție. Substituind relațiile (5.4.7) în ecuația (5.4.5) și rearanjând termenii, se obține ecuația diferențială neliniară:

$$\eta f'''(\eta) + f''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) - f'^2(\eta) - S[\eta f''(\eta) - f'(\eta)] = 0 \quad (5.4.10)$$

cu condițiile inițiale / la limită:

$$f(1) = \gamma, \quad f'(1) = -1, \quad f'(\infty) = 0 \quad (5.4.11)$$

unde $\gamma = \frac{d}{d\eta}$ și $\gamma = -\frac{a_0 U}{2\nu} > 0$ este coeficientul de absorbție (sub formă adimensională).

5.4.2 Soluții aproximative multiple ale fluxului vâscos instabil

Operatorul liniar poate fi ales într-una din formele [119]:

$$L(f(\eta)) = f'''(\eta) + Kf''(\eta) \quad (5.4.12)$$

$$L(f(\eta)) = f'''(\eta) - K^2 f'(\eta) \quad (5.4.13)$$

$$L(f(\eta)) = f'''(\eta) + \frac{2K}{K\eta + 1 - K} f''(\eta) \quad (5.4.14)$$

unde $K > 0$ este un parametru pozitiv necunoscut, care va fi determinat ulterior.

Aproximarea inițială $f_0(\eta)$ poate fi obținută din ecuația (2.3.3), cu condițiile inițiale / la limită

$$f_0(1) = \gamma, \quad f_0'(1) = -1, \quad f_0'(\infty) = 0 \quad (5.4.15)$$

Ecuația (2.3.3) cu operatorii liniari (5.4.12) sau (5.4.13) are soluția:

$$f_0(\eta) = \gamma + \frac{e^{-K(\eta-1)} - 1}{K} \quad (5.4.16)$$

în timp ce ecuația (2.3.3) cu operatorul liniar (5.4.14) are soluția:

$$f_0(\eta) = \gamma - \frac{1}{K} + \frac{1}{K(K\eta + 1 - K)} \quad (5.4.17)$$

Operatorul neliniar corespunzător ecuației diferențiale neliniare (5.4.10) este definit prin

$$N(f(\eta)) = (1 - K\eta)f''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - f'^2(\eta) - S[\eta f''(\eta) - f'(\eta)] \quad (5.4.18)$$

pentru operatorul liniar definit de relația (5.4.12).

Același operator neliniar corespunzător operatorului liniar definit de relațiile (5.4.13) și (5.4.14) are respectiv una din expresiile:

$$N(f(\eta)) = f''(\eta) + K^2 f'(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - f'^2(\eta) - S[\eta f''(\eta) - f'(\eta)] \quad (5.4.19)$$

$$N(f(\eta)) = \left(1 - \frac{2K}{K\eta + 1 - K}\right)f''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - f'^2(\eta) - S[\eta f''(\eta) - f'(\eta)] \quad (5.4.20)$$

Substituind relația (5.4.16) în relația (5.4.18) se constată că

$$N(f_0(\eta)) = [-K(K+S)\eta + K(\gamma+1) - S - 1]e^{-K(\eta-1)} \quad (5.4.21)$$

Din ecuația (5.4.21) se observă că pentru $K = -S$ și $\gamma = -\frac{1}{S}$, $S < 0$ se obține soluția exactă

$$f(\eta) = -\frac{1}{S} e^{S(\eta-1)} \quad (5.4.22)$$

Acum, comparând relațiile (2.3.13) și (5.4.21), se obțin funcțiile

$$\begin{aligned} h_1(\eta) &= -K(K+S)\eta + K(\gamma+1) - S - 1, \quad g_1(\eta) = e^{-K(\eta-1)}, \\ h_j(\eta) &= g_j(\eta) = 0, \quad \text{pentru } j \geq 2. \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Prima aproximare $f_1(\eta, C_j)$ poate fi scrisă în forma

$$f_1(\eta, C_j) = H_1(\eta, C_j)e^{-K(\eta-1)}, \quad f_1(1) = f_1'(1) = f_1'(\infty) = 0 \quad (5.4.24)$$

unde $H_1(\eta, C_i)$ este o funcție auxiliară arbitrară. Desigur, se pot alege aceste funcții auxiliare cu condițiile obținute din relația (5.4.24)_b:

$$H_1(1, C_i) = H'_1(1, C_i) = 0. \quad (5.4.25)$$

De exemplu, H_1 poate fi aleasă astfel:

$$\begin{aligned} H_1(\eta, C_i) = & C_1(\eta-1)^2 + C_2(\eta-1)^3 + C_3(\eta-1)^4 + C_4(\eta-1)^2 e^{-(K+a_1)(\eta-1)} + \\ & + C_5(\eta-1)^2 e^{-(2K+a_2)(\eta-1)} + C_6(\eta-1)^2 e^{-Ka_3(\eta-1)} + \\ & + C_7(\eta-1)^2 e^{-Ka_4(\eta-1)} + C_8(\eta-1)^2 e^{-Ka_5(\eta-1)} \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

$$\begin{aligned} H_1(\eta, C_i) = & C_1(\eta-1)^2 + C_2(\eta-1)^3 + C_3(\eta-1)^4 + C_4(\eta-1)^5 + \\ & + [C_5(\eta-1)^2 + C_6(\eta-1)^3 + C_7(\eta-1)^4] e^{-K(\eta-1)} + \\ & + [C_8(\eta-1)^2 + C_9(\eta-1)^3 + C_{10}(\eta-1)^4 + C_{11}(\eta-1)^5] e^{-2K(\eta-1)} \end{aligned} \quad (5.4.27)$$

$$\begin{aligned} H_1(\eta, C_i) = & C_1(\eta-1) + C_2(\eta-1)^2 + C_3(\eta-1)^3 + C_4(\eta-1)^4 + [-C_1(\eta-1) + \\ & + C_5(\eta-1)^2 + C_6(\eta-1)^3 + C_7(\eta-1)^4 + C_8(\eta-1)^5 + C_9(\eta-1)^6] e^{-K(\eta-1)} + \\ & + [C_{10}(\eta-1)^2 + C_{11}(\eta-1)^3] e^{-2K(\eta-1)}. \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

Luând în considerare doar expresia dată de relația (5.4.26), din relațiile (5.4.16), (5.4.24) și (2.3.5) se obține soluția aproximativă de ordinul întâi a problemei (5.4.10) - (5.4.11) în forma

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta, C_i) = & \gamma - \frac{1}{K} + \left[\frac{1}{K} + C_1(\eta-1)^2 + C_2(\eta-1)^3 + C_3(\eta-1)^4 \right] e^{-K(\eta-1)} + \\ & + C_4(\eta-1)^2 e^{-(2K+a_1)(\eta-1)} + C_5(\eta-1)^2 e^{-(3K+a_2)(\eta-1)} + C_6(\eta-1)^2 e^{-K(a_3+1)(\eta-1)} + \\ & + C_7(\eta-1)^2 e^{-K(a_4+1)(\eta-1)} + C_8(\eta-1)^2 e^{-K(a_5+1)(\eta-1)} \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

unde $C_1, C_2, \dots, a_1, a_2, \dots$ sunt parametri necunoscuți.

Multe alte soluții aproximative pot fi obținute cu ajutorul unor combinații între aproximări inițiale date de relațiile (5.4.16), (5.4.17) și de operatorii neliniari (5.4.19), (5.4.20).

5.4.3 Exemple numerice

În scopul de a demonstra validitatea și acuratețea metodei MHAO, se vor compara soluțiile aproximative obținute în prealabil (5.4.29), cu rezultatele numerice obținute cu metoda Runge-Kutta de ordin IV în combinație cu metoda shooting, folosind soft-ul Wolfram Mathematica 6.0. Folosind metoda celor mai mici pătrate pentru determinarea parametrilor C_i și a_i , se prezintă următoarele patru cazuri pentru diferite valori ale coeficienților γ și S :

Cazul 5.4.3.1. Pentru $\gamma = 1$ și $S = -1$ se vor găsi parametri optimali C_i , și respectiv soluțiile duale:

a) Prima soluție:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.3333335814, C_2 = 0.0210985545, C_3 = 7.0349253510 \cdot 10^{-6}, \\ C_4 &= -1.2078582888, C_5 = 1.1007711694, \\ C_6 &= 1.2527962825, C_7 = -1.4794094663, \\ C_8 &= 0.0003670989, K = 1, a_1 = -1.0044596362, a_2 = -1.9960995780, \\ a_3 &= 0.0039364947, a_4 = -0.0044067908, a_5 = -0.0876855705 \end{aligned}$$

Prima expresie a soluției aproximative de ordinul întâi dată de relația (5.4.29) poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) &= [1 + 0.3333335814(\eta - 1)^2 + 0.0210985545(\eta - 1)^3 + 7.034925351 \cdot 10^{-6}(\eta - 1)^4] e^{1-\eta} + \\ &+ 1.2527962825(\eta - 1)^2 e^{-1.0039364947(\eta - 1)} + 1.1007711694(\eta - 1)^2 e^{-1.0039004219(\eta - 1)} - \\ &- 1.4794094663(\eta - 1)^2 e^{-0.9955932091(\eta - 1)} - 1.2078582888(\eta - 1)^2 e^{-0.9955403637(\eta - 1)} + \\ &+ 0.0003670989(\eta - 1)^2 e^{-0.9123144295(\eta - 1)} \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

b) A doua soluție:

$$\begin{aligned} C_1 &= -2.1103792246, C_2 = -0.1209917376, C_3 = 0.0016464844, C_4 = -0.0401496995, \\ C_5 &= 5.1986534028, C_6 = 2.9102631733, C_7 = -3.1870328789, C_8 = -3.0376107137, \\ K &= 0.6170257079, a_1 = 1.5253390642, a_2 = -1.2342665630, a_3 = 1.0337532632, \\ a_4 &= 0.0700064931, a_5 = 1.0337537195. \end{aligned}$$

A doua expresie a soluției aproximative de ordinul întâi este

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) &= -0.6206780156 + [1.6206780156 - 2.1103792246(\eta - 1)^2 - 0.1209917376(\eta - 1)^3 + \\ &+ 0.0016464844(\eta - 1)^4] e^{-0.6170257079(\eta - 1)} - 0.0401496995(\eta - 1)^2 e^{-2.7593904801(\eta - 1)} - \\ &- 3.0376107137(\eta - 1)^2 e^{-1.2548783286(\eta - 1)} + 2.9102631733(\eta - 1)^2 e^{-1.2548780470(\eta - 1)} - \\ &- 3.1870328789(\eta - 1)^2 e^{-0.6602215139(\eta - 1)} + 5.1986534028(\eta - 1)^2 e^{-0.6168105608(\eta - 1)} \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

Cazul 5.4.3.2. Pentru $\gamma = 1$ și $S = -2$ soluțiile duale sunt

a) Prima soluție

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) &= 0.5913897892 + [0.4086102107 - 1.0365306560(\eta - 1)^2 - 0.0340475469(\eta - 1)^3 - \\ &- 0.0208575441(\eta - 1)^4] e^{-2.4473201442(\eta - 1)} + 0.9265758596(\eta - 1)^2 e^{-5.1900153052(\eta - 1)} - \\ &- 0.9181338819(\eta - 1)^2 e^{-5.1900088912(\eta - 1)} + 0.3978132072(\eta - 1)^2 e^{-2.7650851899(\eta - 1)} - \\ &- 0.2705600173(\eta - 1)^2 e^{-2.4471963928(\eta - 1)} + 0.9777857487(\eta - 1)^2 e^{-2.3078302052(\eta - 1)} \end{aligned} \quad (5.4.32)$$

b) A doua soluție

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) &= -2.2653986945 + [3.2653986945 - 5.2607190849(\eta - 1)^2 - 0.0827319763(\eta - 1)^3 - \\ &- 0.0012312519(\eta - 1)^4] e^{-0.3062413179(\eta - 1)} - 0.0121539864(\eta - 1)^2 e^{-8.2295440677 \cdot 10^6(\eta - 1)} - \\ &- 0.2925877070(\eta - 1)^2 e^{-3.5914249798(\eta - 1)} - 2.1949262210(\eta - 1)^2 e^{-1.3550840661(\eta - 1)} - \\ &- 0.7516910873(\eta - 1)^2 e^{-0.7893951308(\eta - 1)} + 5.1689397253(\eta - 1)^2 e^{-0.2883024664(\eta - 1)} \end{aligned} \quad (5.4.33)$$

Cazul 5.4.3.3. Pentru $\gamma = 2$ și $S = -1$, soluțiile duale corespunzătoare sunt:

a) Prima soluție

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 1.5235393146 + [0.4764606853 + 21.46184925584(\eta - 1)^2 - 4.43762024048(\eta - 1)^3 + \\ & + 0.29490275681(\eta - 1)^4] e^{-2.0988090531(\eta - 1)} - 2.53472639092(\eta - 1)^2 e^{-3.6896808591(\eta - 1)} + \\ & + 6.52289425339(\eta - 1)^2 e^{-3.5588615870(\eta - 1)} - 10.3740164628(\eta - 1)^2 e^{-3.2031469638(\eta - 1)} + \\ & + 16.2245606899(\eta - 1)^2 e^{-2.7947822439(\eta - 1)} - 31.0683634535(\eta - 1)^2 e^{-2.4082455720(\eta - 1)} \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

b) A doua soluție

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & -0.9034898463 + [2.9034898463 - 10.4395166917(\eta - 1)^2 + 0.0004971369(\eta - 1)^3 - \\ & - 5.0246397821 \cdot 10^{-6}(\eta - 1)^4] e^{-0.3444131210(\eta - 1)} - 0.1550351871(\eta - 1)^2 e^{-3.6164143875(\eta - 1)} - \\ & - 0.3301513414(\eta - 1)^2 e^{-1.7295917121(\eta - 1)} - 0.5465749334(\eta - 1)^2 e^{-0.9240575546(\eta - 1)} - \\ & - 0.1988704213(\eta - 1)^2 e^{-0.5891517113(\eta - 1)} + 10.4244457170(\eta - 1)^2 e^{-0.3444067343(\eta - 1)} \end{aligned} \quad (5.4.35)$$

Cazul 5.4.3.4. În ultimul caz, se consideră $\gamma = 2$ și $S = -2$. Soluțiile duale sunt:

a) Prima soluție

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & 1.7019613535 + [0.2980386464 - 0.8562787938(\eta - 1)^2 + 0.0106882665(\eta - 1)^3 + \\ & + 0.0310882235(\eta - 1)^4] e^{-3.3552695664(\eta - 1)} - 0.8757867742(\eta - 1)^2 e^{-6.3225573014(\eta - 1)} + \\ & + 0.9017666577(\eta - 1)^2 e^{-6.3225571694(\eta - 1)} + 1.1112669004(\eta - 1)^2 e^{-3.3547932645(\eta - 1)} - \\ & - 0.9948349570(\eta - 1)^2 e^{-2.7022990501(\eta - 1)} + 0.8937777528(\eta - 1)^2 e^{-2.6833589327(\eta - 1)} \end{aligned} \quad (5.4.36)$$

b) A doua soluție

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta) = & -2.0992008391 + [4.0992008391 - 0.0204738147(\eta - 1)^2 + 0.0008263633(\eta - 1)^3 - \\ & - 9.5217500205 \cdot 10^{-6}(\eta - 1)^4] e^{-0.2439499890(\eta - 1)} - 0.3773706801(\eta - 1)^2 e^{-5.2745243636(\eta - 1)} - \\ & - 0.8947192974(\eta - 1)^2 e^{-2.7755705539(\eta - 1)} - 3.1860621314(\eta - 1)^2 e^{-1.3987895675(\eta - 1)} - \\ & - 1.0872627477(\eta - 1)^2 e^{-0.8222938433(\eta - 1)} - 0.2399812958(\eta - 1)^2 e^{-0.4723317954(\eta - 1)} \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

În Tabelul 5.43 se prezintă o comparație între coeficientul superficial la limită $\bar{f}''(1)$ obținut cu ajutorul metodei MHAO și rezultatele numerice. Comparațiile se dovedesc a fi de o acuratețe foarte bună pentru prima și a doua soluție.

Tabelul 5.43. Rezultate comparative între coeficientul superficial la limită $\bar{f}''_{MHAO}(1)$ și $f''_{numeric}(1)$ (abatere = $|\bar{f}''_{MHAO}(1) - f''_{numeric}(1)|$).

Y	S	prima expresie a soluției			a doua expresie a soluției		
		$\bar{f}''_{MHAO}(1)$	$f''_{numeric}(1)$	abatere	$\bar{f}''_{MHAO}(1)$	$f''_{numeric}(1)$	abatere
1	-1	1.0000007544	0.9999999999	7.5 $\cdot 10^{-7}$	0.0845138264	0.0845128264	1 $\cdot 10^{-6}$
1	-2	2.6012206647	2.6012206637	9.9 $\cdot 10^{-10}$	-6.3800354048	-6.3800364048	1 $\cdot 10^{-6}$
2	-1	2.5632048369	2.5632048269	9.9 $\cdot 10^{-9}$	-2.1469925948	-2.1469935948	1 $\cdot 10^{-9}$
2	-2	3.7150911381	3.7150910381	9.9 $\cdot 10^{-8}$	-11.367789945	-11.367790945	9.9 $\cdot 10^{-7}$

În Tabelele 5.44-5.49 se prezintă o comparație între fiecare dintre soluțiile aproximative $\bar{f}(\eta)$ și $\bar{f}'(\eta)$ și rezultatele numerice obținute cu metoda Runge-Kutta de ordin IV în combinație cu metoda shooting pentru diferite valori ale variabilei η și diferite valori ale coeficienților γ și S .

Se poate observa că soluțiile obținute cu metoda MHAO sunt în bun acord cu rezultatele numerice.

Figurile 5.46 și 5.47 prezintă deplasarea $\bar{f}(\eta)$ pentru diferite valori ale coeficientului de instabilitate S , $\gamma = 1$ și respectiv $\gamma = 2$. Se observă că pentru o valoare fixată a coeficientului γ deplasarea $\bar{f}(\eta)$ scade dacă coeficientul de instabilitate S crește, pentru primele soluții. Situația opusă este observată pentru soluțiile duale.

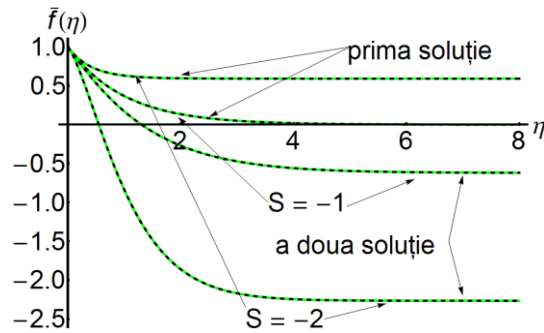


Fig. 5.46 Deplasarea pentru diferite valori ale coeficientului de instabilitate S pentru $\gamma = 1$.

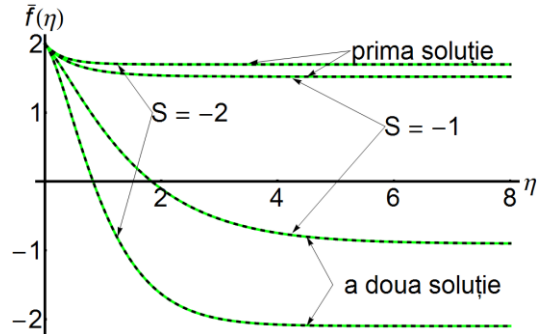


Fig. 5.47 Deplasarea pentru diferite valori ale coeficientului de instabilitate S pentru $\gamma = 2$.

Figurile 5.48 și 5.49 descriu profilele vitezei $\bar{f}'(\eta)$ pentru o valoare fixată a coeficientului γ și unele valori ale coeficientului de instabilitate S . Se observă că, în toate cazurile, viteza fluidului este amortizată mai repede odată cu creșterea coeficientului de instabilitate. Grosimea stratului limită de viteză scade dacă coeficientul de instabilitate S scade, ceea ce implică o creștere a gradientului de viteză. Pentru prima soluție, gradientul de viteză este pozitiv (în toate cazurile), în contrast cu soluția duală. Aceste concluzii sunt în concordanță cu rezultatele obținute în [185] și [186].

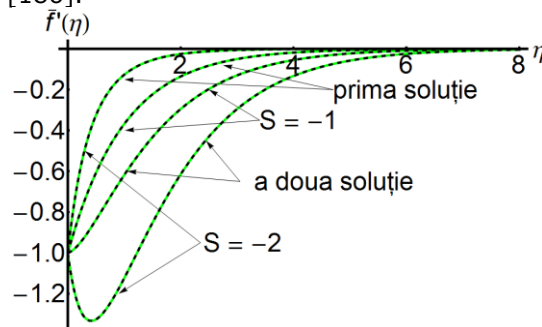


Fig. 5.48 Profilul vitezelor pentru diferite valori ale coeficientului de instabilitate S când $\gamma = 1$.

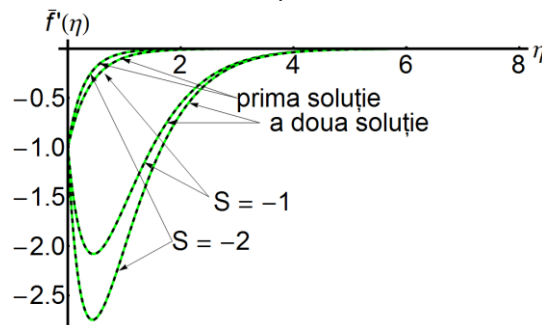


Fig. 5.49 Profilul vitezelor pentru diferite valori ale coeficientului de instabilitate S când $\gamma = 2$.

Tabelul 5.44. Rezultate comparative între prima expresie a soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{f}(\eta)$ dată de relația (5.4.30), respectiv a derivatei acesteia $\bar{f}'(\eta)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\gamma = 1$, $S = -1$
 $(\varepsilon_f = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|, \varepsilon_{f'} = |\bar{f}'_{MHAO}(\eta) - f'_{numeric}(\eta)|)$.

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.4.30)	$f_{numeric}(\eta)$	ε_f	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din (5.4.30)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}$
1	1	1	0	-1	-1	0
9/5	0.4493290026	0.4493289954	$7.1 \cdot 10^{-9}$	-	-	$2.1 \cdot 10^{-8}$
13/5	0.2018965295	0.2018965301	$6.4 \cdot 10^{-10}$	-	-	$2.1 \cdot 10^{-8}$
21/5	0.0407622028	0.0407622034	$6.02 \cdot 10^{-10}$	-	-	$2.003 \cdot 10^{-8}$
29/5	0.0082297496	0.0082297482	$1.4 \cdot 10^{-9}$	-	-	$2.5 \cdot 10^{-9}$
37/5	0.0016615551	0.0016615578	$2.6 \cdot 10^{-9}$	-	-	$1.1 \cdot 10^{-9}$
41/5	0.0007465838	0.0007465853	$1.5 \cdot 10^{-9}$	-	-	$3.8 \cdot 10^{-9}$
9	0.0003354620	0.0003354620	$1.4 \cdot 10^{-11}$	-	-	$1.5 \cdot 10^{-9}$
∞	6.6613 $\cdot 10^{-16}$	8.7647 $\cdot 10^{-16}$	$2.1 \cdot 10^{-14}$	0	0	0

Tabelul 5.45. Rezultate comparative între a doua expresie a soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{f}(\eta)$ dată de relația (5.4.31), respectiv a derivatei acesteia $\bar{f}'(\eta)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\gamma = 1$, $S = -1$
 $(\varepsilon_f = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|, \varepsilon_{f'} = |\bar{f}'_{MHAO}(\eta) - f'_{numeric}(\eta)|)$.

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.4.31)	$f_{numeric}(\eta)$	ε_f	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din (5.4.31)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}$
1	1	1	0	-1	-1	0
9/5	0.3025681133	0.3025729017	$4.7 \cdot 10^{-6}$	-0.7034979138	-	$1.2 \cdot 10^{-4}$
13/5	-	-	$4.6 \cdot 10^{-6}$	-0.4016692734	-	$6.6 \cdot 10^{-5}$
21/5	-	-	$1.1 \cdot 10^{-5}$	-0.1094954512	-	$1.9 \cdot 10^{-5}$
29/5	-	-	$8.2 \cdot 10^{-6}$	-0.0270353065	-	$1.4 \cdot 10^{-5}$

37/5	- 0.6138226907	- 0.6138228346	1.4 $\cdot 10^{-7}$	-0.0063314620	- 0.0063462255	1.4 $\cdot 10^{-5}$
41/5	- 0.6174089320	- 0.6174180498	9.1 $\cdot 10^{-6}$	-0.0030330955	- 0.0030391496	6.05 $\cdot 10^{-6}$
9	- 0.6191261345	- 0.6191351201	8.9 $\cdot 10^{-6}$	-0.0014527986	- 0.0014468075	5.9 $\cdot 10^{-6}$
∞	- 0.6206780156	- 0.6206780156	4.5 $\cdot 10^{-14}$	0	0	0

Tabelul 5.46. Rezultate comparative între prima expresie a soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{f}(\eta)$ dată de relația (5.4.32), respectiv a derivatei acesteia $\bar{f}'(\eta)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\gamma = 1$, $S = -2$

$$(\varepsilon_f = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|, \varepsilon_{f'} = |\bar{f}'_{MHAO}(\eta) - f'_{numeric}(\eta)|).$$

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.4.32)	$f_{numeric}(\eta)$	ε_f	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din (5.4.32)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}$
1	1	1	0	-1	-1	0
9/5	0.6540357246	0.6540356881	3.6 $\cdot 10^{-8}$	0.1423061993	0.1423072726	1.07 $\cdot 10^{-6}$
13/5	0.6019106890	0.6019108087	1.1 $\cdot 10^{-7}$	-	-	6.9 $\cdot 10^{-8}$
21/5	0.5917231482	0.5917232409	9.2 $\cdot 10^{-8}$	-	-	9.04 $\cdot 10^{-8}$
29/5	0.5914012763	0.5914011910	8.5 $\cdot 10^{-8}$	-	-	5.8 $\cdot 10^{-8}$
37/5	0.5913902415	0.5913901904	5.1 $\cdot 10^{-8}$	-8.8615 $\cdot 10^{-7}$	-8.4307 $\cdot 10^{-7}$	4.3 $\cdot 10^{-8}$
41/5	0.5913898860	0.5913898617	2.4 $\cdot 10^{-8}$	-1.8368 $\cdot 10^{-7}$	-1.5887 $\cdot 10^{-7}$	2.4 $\cdot 10^{-8}$
9	0.5913898108	0.5913897995	1.1 $\cdot 10^{-8}$	-1.8368 $\cdot 10^{-7}$	-1.5887 $\cdot 10^{-7}$	2.4 $\cdot 10^{-8}$
∞	0.5913897892	0.5913897892	6.9 $\cdot 10^{-14}$	0	0	0

Tabelul 5.47. Rezultate comparative între a doua expresie a soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{F}(\eta)$ dată de relația (5.4.33), respectiv a derivatei acesteia $\bar{F}'(\eta)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\gamma = 1$, $S = -2$

$$(\varepsilon_f = |\bar{F}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|, \varepsilon_{f'} = |\bar{F}'_{MHAO}(\eta) - f'_{numeric}(\eta)|).$$

η	$\bar{F}_{MHAO}(\eta)$ (5.4.33)	$f_{numeric}(\eta)$	ε_f	$\bar{F}'_{MHAO}(\eta)$ din (5.4.33)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}$
1	1	1	0	-1	-1	0

5.4 - Soluții duale pentru problema curgerii vâscoase instabile 203

9/5	- 0.4931638904	- 0.4931976737	3.3 $\cdot 10^{-5}$	- 1.8404107968	- 1.8405104714	9.9 $\cdot 10^{-5}$
13/5	- 1.5746868741	- 1.5746416452	4.5 $\cdot 10^{-5}$	- 0.8900821972	- 0.8900516447	3.05 $\cdot 10^{-5}$
21/5	- 2.1944651392	- 2.1944897035	2.4 $\cdot 10^{-5}$	- 0.1082080071	- 0.1081247967	8.3 $\cdot 10^{-5}$
29/5	- 2.2598561227	- 2.2598257759	3.0 $\cdot 10^{-5}$	- 0.0091018331	- 0.0091580377	5.6 $\cdot 10^{-5}$
37/5	- 2.2649614997	- 2.2650206599	5.9 $\cdot 10^{-5}$	- 0.0006415895	- 0.0006482600	6.6 $\cdot 10^{-6}$
41/5	- 2.2652663671	- 2.2653038433	3.7 $\cdot 10^{-5}$	- 0.0002202957	- 0.0001651469	5.5 $\cdot 10^{-5}$
9	- 2.2653903391	- 2.2653753555	1.4 $\cdot 10^{-5}$	- 0.0001070484	- 0.0000411696	6.5 $\cdot 10^{-5}$
∞	- 2.2653986945	- 2.2653986945	5.1 $\cdot 10^{-14}$	0	0	0

Tabelul 5.48. Rezultate comparative între prima expresie a soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{f}(\eta)$ dată de relația (5.4.34), respectiv a derivatei acesteia $\bar{f}'(\eta)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\gamma = 2$, $S = -1$

$$(\varepsilon_f = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|, \varepsilon_{f'} = |\bar{f}'_{MHAO}(\eta) - f'_{numeric}(\eta)|).$$

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.4.34)	$f_{numeric}(\eta)$	ε_f	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din (5.4.34)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}$
1	2	2	0	-1	-1	0
9/5	1.6330858924	1.6330861523	2.5 $\cdot 10^{-7}$	- 0.1815921958	- 0.1816077514	1.5 $\cdot 10^{-5}$
13/5	1.5550512928	1.5550531316	1.8 $\cdot 10^{-6}$	- 0.0465577528	- 0.0465561725	1.5 $\cdot 10^{-6}$
21/5	1.5269871985	1.5269891353	1.9 $\cdot 10^{-6}$	- 0.0045275785	- 0.0045260284	1.5 $\cdot 10^{-6}$
29/5	1.5239948037	1.5239925608	2.2 $\cdot 10^{-6}$	- 0.0005600263	- 0.0005588247	1.2 $\cdot 10^{-6}$
37/5	1.5236020621	1.5236049410	2.8 $\cdot 10^{-6}$	- 0.0000797560	- 0.0000778400	1.9 $\cdot 10^{-6}$
41/5	1.5235615146	1.5235649024	3.3 $\cdot 10^{-6}$	- 0.0000294916	- 0.0000299133	4.2 $\cdot 10^{-7}$
9	1.5235467934	1.5235494172	2.6 $\cdot 10^{-6}$	- 0.0000104089	- 0.0000116668	1.2 $\cdot 10^{-6}$
∞	1.5235393146	1.5235393145	1.07 $\cdot 10^{-11}$	0	0	0

Tabelul 5.49. Rezultate comparative între prima expresie a soluției aproximative de ordinul întâi $\bar{f}(\eta)$ dată de relația (5.4.35), respectiv a derivatei acesteia $\bar{f}'(\eta)$ obținută cu MHAO și rezultatele numerice pentru $\gamma = 2$, $S = -2$
 $(\varepsilon_f = |\bar{f}_{MHAO}(\eta) - f_{numeric}(\eta)|, \varepsilon_{f'} = |\bar{f}'_{MHAO}(\eta) - f'_{numeric}(\eta)|)$.

η	$\bar{f}_{MHAO}(\eta)$ (5.4.35)	$f_{numeric}(\eta)$	ε_f	$\bar{f}'_{MHAO}(\eta)$ din (5.4.35)	$f'_{numeric}(\eta)$	$\varepsilon_{f'}$
1	2	2	0	-1	-1	0
9/5	1.7283791967	1.7283789517	$2.4 \cdot 10^{-7}$	0.0740545041	0.0740547752	$2.7 \cdot 10^{-7}$
13/5	1.7050648140	1.7050648331	$1.9 \cdot 10^{-8}$	0.0079946060	0.0079954465	$8.4 \cdot 10^{-7}$
21/5	1.7020220942	1.7020221347	$4.04 \cdot 10^{-8}$	0.0001438623	0.0001440860	$2.2 \cdot 10^{-7}$
29/5	1.7019629186	1.7019628448	$7.3 \cdot 10^{-8}$	-3.4550 $\cdot 10^{-6}$	-3.3915 $\cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-8}$
37/5	1.7019614024	1.7019613948	$7.5 \cdot 10^{-9}$	-1.0521 $\cdot 10^{-7}$	-9.3066 $\cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$
41/5	1.7019613622	1.7019613605	$1.7 \cdot 10^{-9}$	-1.0521 $\cdot 10^{-7}$	-9.3066 $\cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$
9	1.7019613550	1.7019613548	$2.1 \cdot 10^{-10}$	-1.8882 $\cdot 10^{-8}$	-1.5206 $\cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$
∞	1.7019613535	1.7019613535	$4.4 \cdot 10^{-13}$	0	0	0

Din Tabelul 5.43 se observă că magnitudinea lui $\bar{f}''(1)$ crește pe măsură ce parametrul γ crește în cazul primei soluții dată de subcazurile 5.4.3.1.a), 5.4.3.2.a), 5.4.3.3.a) și 5.4.3.4.a). Tendința opusă este pentru variația lui S , adică creșterea lui S duce la diminuarea magnitudinii coeficientului superficial la limită $\bar{f}''(1)$. În cazul soluțiilor duale date de subcazurile 5.4.3.1.b), 5.4.3.2.b), 5.4.3.3.b) și 5.4.3.4.b) variația coeficientului superficial la limită $\bar{f}''(1)$ se inversează.

Pentru a da o interpretare soluțiilor analitice aproximative, obținute cu metoda MHAO, se consideră curgerea printr-un cilindru contractat (care la momentul inițial are diametrul $a_0 = 7 [m]$), a unui fluid vâscos caracterizat prin vâscozitatea cinematică $\nu = 5 \cdot 10^{-7} [m^2/s]$. În continuare, pentru două din cele patru cazuri studiate, se prezintă grafic componentele vitezei, și anume: u - componenta vitezei în direcția axei radiale Or , respectiv w - componenta vitezei în direcția axei Oz . Sunt cazurile în care coeficientul de instabilitate are valoare $S = -2$, și astfel se poate observa pe grafice influența acestui coeficient asupra curgerii. Din relațiile (5.4.7) și (5.4.32), respectiv (5.4.33) se obțin expresiile componentelor vitezei (u, w) pentru **Cazul 5.4.3.2**, corespunzătoare celor două soluții. În mod asemănător, din relațiile (5.4.7) și (5.4.36), respectiv (5.4.37)

se obțin expresiile componentelor vitezei (u, w) pentru **Cazul 5.4.3.4**. Variațiile componentelor vitezei de curgere a fluidului sunt prezentate în Figurile 5.50 - 5.53 (pentru **Cazul 5.4.3.2**), respectiv în Figurile 5.56 - 5.59 (pentru **Cazul 5.4.3.4**). Influența coeficientului de instabilitate S asupra curgerii fluidului se poate observa din Figurile 5.54 și 5.55 (pentru **Cazul 5.4.3.2**), respectiv din Figurile 5.60 - 5.61 (pentru **Cazul 5.4.3.4**). Aceste figuri prezintă variațiile câmpului (u, w) și sunt în concordanță cu rezultate obținute pe cale empirică.

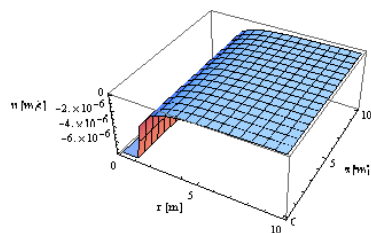


Fig. 5.50 Profilul vitezei u în direcția axei radiale Or , în cazul $S = -2$, $\gamma = 1$, corespunzător primei soluții

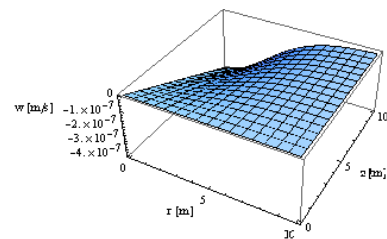


Fig. 5.51 Profilul vitezei w în direcția axei Oz , în cazul $S = -2$, $\gamma = 1$, corespunzător primei soluții

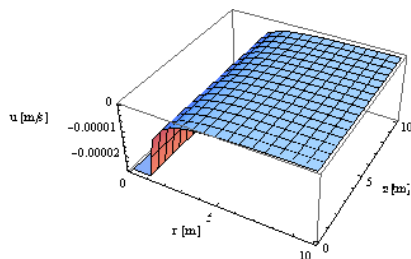


Fig. 5.52 Profilul vitezei u în direcția axei radiale Or , în cazul $S = -2$, $\gamma = 1$, corespunzător celei de-a doua soluții

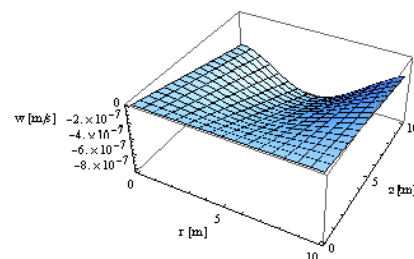


Fig. 5.53 Profilul vitezei w în direcția axei Oz , în cazul $S = -2$, $\gamma = 1$, corespunzător celei de-a doua soluții

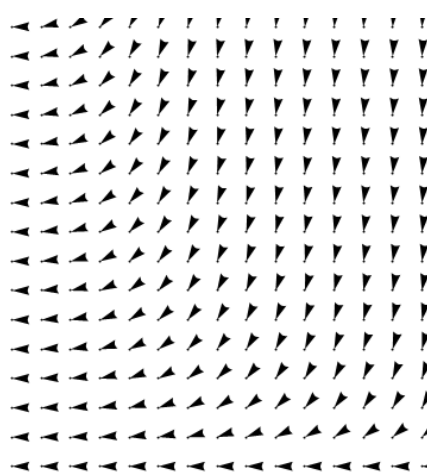
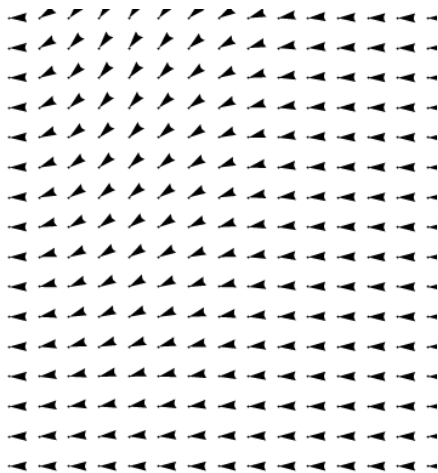


Fig. 5.54 Câmpul de vectori (u, w) , asociat cazului $S = -2, \gamma = 1$, corespunzător primei soluții

Fig. 5.55 Câmpul de vectori (u, w) , asociat cazului $S = -2, \gamma = 1$, corespunzător celei de-a doua soluții

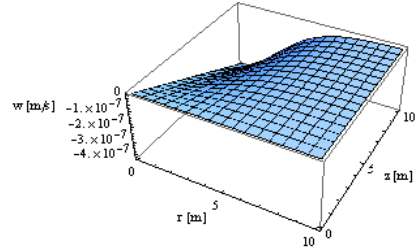
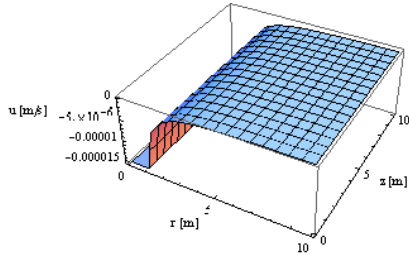


Fig. 5.56 Profilul vitezei u în direcția axei radiale Or , în cazul $S = -2, \gamma = 2$, corespunzător primei soluții

Fig. 5.57 Profilul vitezei w în direcția axei Oz , în cazul $S = -2, \gamma = 2$, corespunzător primei soluții

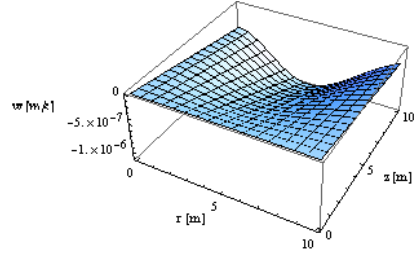
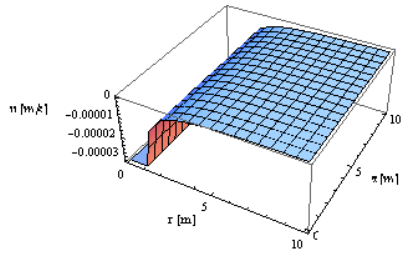


Fig. 5.58 Profilul vitezei u în direcția axei radiale Or , în cazul $S = -2, \gamma = 2$, corespunzător celei de-a doua soluții

Fig. 5.59 Profilul vitezei w în direcția axei Oz , în cazul $S = -2, \gamma = 2$, corespunzător celei de-a doua soluții

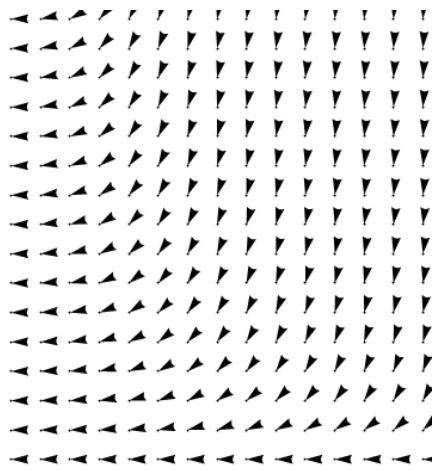
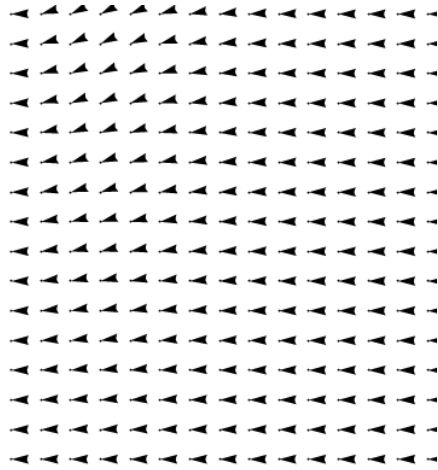


Fig. 5.60 Câmpul de vectori (u, w) , asociat cazului $S = -2, \gamma = 2$, corespunzător primei soluții

Fig. 5.61 Câmpul de vectori (u, w) , asociat cazului $S = -2, \gamma = 2$, corespunzător celei de-a doua soluții

Alte abordări ale autorului pot fi găsite în articolele [38] - pentru un fluid micropolar, [56] - pentru un fluid Newtonian vâscos incompresibil, [57] - pentru un fluid Maxwell superior-convectiv, [24] - studiul câmpului de conuri pe o varietate polisimplectică, [117] - studiul unor oscilatori neliniari cu forță de revenire de ordin fracționară.

Concluzii. Contribuții originale. Perspective de viitor.

Practica științei ingineresti poate fi descrisă ca un proces evolutiv: de la simpla observație la construcția unui model matematic care să explice observațiile sau invers. Folosirea diferitelor modele matematice implică relații constitutive precum și un număr de principii, legi, tehnici și metode. Unele principii sunt mai ușor de înțeles altele mai dificile, adesea imposibile. O serie de experimente pot trezi un deosebit interes, pot stimula inteligența și curiozitatea. Mecanica mediilor continue este un domeniu vast aflat în atenția multor cercetători, intens cercetat din multe puncte de vedere. Obiectivul prezentei teze este de a propune o abordare corectă a ecuațiilor diferențiale neliniare ce guvernează curgerea diferitelor tipuri de fluide precum și transferul de căldură utilizând o nouă tehnică analitică numită "Metoda homotopică asimptotică optimală" (MHAO).

Concluzii

Soluțiile analitice ale ecuațiilor diferențiale neliniare sau a ecuațiilor diferențiale cu coeficienți variabili joacă un rol important în studiul sistemelor dinamice neliniare, dar în același timp este deosebit de dificil de a găsi soluțiile analitice, în special pentru probleme neliniare cu neliniarități moderate sau mari. În general, metodele analitice cunoscute în literatura de specialitate sunt restricționate la un număr limitat de cazuri depinzând de un parametru care apare în ecuațiile de mișcare și sunt valide numai pentru acele probleme cu neliniarități tari (mari). Există un mare număr de metode analitice aproximative care permit rezolvarea anumitor tipuri particulare de ecuații diferențiale neliniare, cum ar fi: metoda parametrului mic, metoda de tip Lindstedt-Poincaré, metoda dezvoltării δ , metoda scării multiple, metoda Krilov-Bogoliubov-Mitropolski, metoda iterativ-variațională, metoda balanței armonice, metoda perturbatoare cu funcții eliptice, etc. Adesea, aceste metode nu sunt convergente pe întregul domeniu de definiție. În particular, este mai greu de obținut soluții analitice aproximative decât unele numerice. Uneori metodele numerice dau puncte de discontinuitate deosebite.

Metoda MHAO care o folosim în cadrul prezentei lucrări are câteva caracteristici care o deosebesc în totalitate de celelalte metode cunoscute. Un avantaj foarte important al acestei proceduri este independența de orice parametru mic sau mare. Un alt avantaj este garantarea convergenței soluțiilor prin metode riguros demonstrate: metoda minimizării restului, metoda Galerkin, metoda Ritz, metoda cologației, metoda celor mai mici pătrate, metoda Kolmogorov, etc. Pe de altă parte metoda permite o mare libertate în alegerea operatorului liniar și a funcțiilor auxiliare de asigurare a convergenței soluțiilor. În toată teza folosim o singură iterație, lucru care este absolut nou deci și surprinzător. Metoda folosită este generală și se poate aplica în orice domeniu în care apar fenomene descrise de ecuații diferențiale neliniare. În toate cazurile pe care le exemplificăm, abaterile soluțiilor analitice aproximative sunt deosebit de mici în comparație cu soluțiile numerice. Alte avantaje sunt: scrierea soluțiilor analitice pe câteva rânduri spre deosebire de alte metode a căror soluție se scrie pe câteva pagini. Soluțiile sunt efective, ușor de obținut prin rezolvarea unei singure ecuații liniare. Pentru obținerea soluțiilor și a anumitor parametri de convergență nu este necesar un calculator cu performanțe deosebite (în comparație, de exemplu, cu metoda Homotopy Analysis Method, unde este nevoie de câteva pagini pentru scrierea soluției analitice aproximative). În fine, nu avem nevoie de legi deosebite sau de

îmbunătățirea abaterii cu procedee suplimentare cum ar fi aproximanta Padé. Nu există limitări sau probleme deschise.

Pentru a scoate în evidență eficiența deosebită a metodei MHAO, se prezintă un număr mare de tabele și grafice comparând în permanență rezultatele proprii obținute cu cele numerice. Aplicând metoda MHAO se pot obține și soluții exacte pentru unele cazuri (a se vedea 4.2.2, 5.1.2, 5.2.3 și 5.4.2), ceea ce nu se întâmplă la nici o altă metodă cunoscută în literatura de specialitate. Acuratețea rezultatelor obținute cu metoda MHAO este demonstrată prin mai multe metode: comparația soluțiilor și a derivatei soluțiilor astfel obținute cu valorile numerice corespunzătoare obținute aplicând metoda Runge-Kutta de ordinul patru în combinație cu metoda shooting folosind softul Wolfram Mathematica 6.0, prin comparația coeficienților $f''(0)$ și $f(\infty)$ obținute cu cele două metode, apoi construind graficul restului dar și aplicând câteva teste statistice precum testele Durbin-Wattson sau Barlett. Pentru prima dată se obțin soluții duale (paragraful 5.4) pentru un sistem dinamic puternic neliniar. În fiecare caz prezentat în această lucrare se discută influența diferiților parametri asupra soluțiilor aproximative obținute. Este pentru prima dată în literatura științifică că se determină soluții duale pentru ecuații diferențiale neliniare total diferite între ele. Mai mult, graficele celor două soluții sunt diferite (a se vedea secțiunea 5.4).

Contribuții originale

Toate rezultatele prezentei lucrări sunt contribuții originale ale autorului. Lucrarea conține cinci capitole. **Primul capitol** se referă la fundamentarea teoretică a mediilor continue, proprietăților mecanice, ecuațiilor constitutive. Se descriu sumar câteva tipuri de fluide (vâscoelastice, Newtoniene, incompresibile, Maxwell, Oldroyd) și se descriu ecuațiile de bază.

În **capitolul 2** se prezintă detaliat metoda MHAO cu două variante. Se construiește homotopia corespunzătoare dinamicii studiate, se arată modul de construcție al funcției auxiliare de control al convergenței și se consideră metode optimale de determinare a parametrilor ce asigură convergența soluțiilor. Fiecare variantă este exemplificată pe cazuri practice.

În **capitolul 3** se aplică metoda MHAO în studiul amortizoarelor fluide neliniare de tip Bingham. După o prezentare a mai multor tipuri de modele Bingham, se propune rezolvarea unei ecuații neliniare cubice cu amortizare nevâscoasă. Se folosesc trei pași și o funcție auxiliară cu nouă parametri de control al convergenței. În literatură nu este cunoscută o altă soluție a acestui model propus.

În **secțiunea 1 a capitolului 4**, ecuația neliniară de tip Falkner-Skan, descrie curgerea unui fluid Newtonian vâscos sub acțiunea unui gradient de presiune. Problema este rezolvată aproximativ cu metoda MHAO. La obținerea soluțiilor aproximative de înaltă precizie s-au folosit patru funcții auxiliare de control a convergenței, dintre care două cu nouă parametri optimali, și două cu zece parametri optimali. Parametrii optimali au fost determinați cu metoda Galerkin. Din cele abordate s-a observat că precizia soluțiilor aproximative crește odată cu creșterea numărului de parametri optimali. Pe de altă parte, în fiecare din cele patru cazuri și doisprezece exemple, acuratețea soluțiilor aproximative crește odată cu creșterea valorii gradientului de presiune β . Concluzia este că viteza de curgere crește dacă gradientul de presiune se mărește. Pentru a pune în evidență importanța soluțiilor analitice aproximative, determinate cu MHAO, se prezintă graficele tri-dimensionale ale componentelor vitezei fluidului, respectiv graficul

câmpului de vectori (u, v) , pentru un fluid vâscos Newtonian, în cazurile $\beta = 1/2$ și $\beta = 1.6$. Din aceste grafice se poate observa influența valorii gradientului de presiune β asupra curgerii, și anume: pe măsură ce β crește apare fenomenul de dispersie a fluidului. Aceste concluzii semnifică impotanța soluțiilor aproximative, astfel obținute. Pe baza observațiilor din prima secțiune a capitolului de față, în secțiunea a doua, problema curgerii unui fluid Newtonian vâscos pe o suprafață întinsă cu alunecare parțială, am rezolvat-o cu metoda MHAO, folosind nouă parametri optimali. și la această problemă s-a folosit metoda Galerkin pentru optimizarea parametrilor introduși. Precizia soluțiilor aproximative, a coeficientului superficial la limită $\Phi''(0)$ și a valorii limită $\Phi(\infty)$, s-a dovedit a fi la fel de mare și pentru această problemă. Am studiat patru cazuri și doisprezece exemple: întinderea plană cu pânză impemeabilă ($m = 1, a = 0$), întinderea asimetrică cu pânză impermeabilă ($m = 2, a = 0$), întinderea plană cu pânză de aspirație ($m = 1, a = 3$), întinderea asimetrică cu pânză de aspirație ($m = 2, a = 3$). Validitatea rezultatelor obținute cu metoda MHAO sunt prezentate în șaisprezece tabele și douăzeci de figuri. În toate cele patru cazuri componentele vitezei descresc la o creștere a parametrului de alunecare λ . De asemenea, s-a obținut că viteza de curgere este mai mică în cazul întinderii asimetrice ($m = 2$) decât în cazul întinderii plane ($m = 1$). Un rezultat remarcabil este obținut în cazul întinderii plane pentru o foaie impermeabilă: cu metoda MHAO am obținut soluția exactă a fluidului considerat. Un alt rezultat important este folosirea metodei Galerkin pentru optimizarea parametrilor, cu funcții pondere dependente la rândul lor de doi parametri. Importanța soluțiilor aproximative este pusă în evidență prin graficele tridimensionale (ale componentelor vitezei fluidului), dar și prin graficele câmpului de vectori (u, w) , în doar două cazuri: cazul curgerii plane cu pânză impermeabilă și cazul curgerii asimetrice cu pânză impermeabilă. S-a considerat curgerea laminară cu alunecare parțială a unui fluid vâscos Newtonian pe o suprafață întinsă. Aceste rezultate completează rezultatele adimensionale obținute cu MHAO. Problema transferului de căldură și a curgerii instabile a unui fluid Newtonian vâscos pe o suprafață întinsă, este studiată în secțiunea a treia. Pentru rezolvarea aproximativă cu metoda MHAO s-au folosit două tipuri de aproximări: una bazată pe funcții exponențiale și a doua cu funcții raționale. În cazul soluției aproximative a ecuației transferului de masă s-au folosit zece parametri optimali, la aproximarea cu funcții exponențiale (respectiv, șapte parametri optimali, la aproximarea cu funcții raționale). Pentru rezolvarea aproximativă a ecuației transferului de căldură s-au folosit nouă parametri optimali, la aproximarea cu funcții exponențiale (respectiv, doisprezece parametri optimali, la aproximarea cu funcții raționale). Parametrii optimali au fost determinați cu metoda celor mai mici pătrate. Acuratețea celor doisprezece soluțiilor aproximative este verificată prin comparațiile prezentate în doisprezece tabele și șapte grafice. Din aceste comparații am putut trage următoarele concluzii: 1) deplasarea $\bar{f}(\eta)$ crește odată cu creșterea condiției inițiale f_w ; 2) viteza $\bar{f}'(\eta)$ descrește odată cu creșterea coeficientului f_w ; 3) temperatura descrește odată cu creșterea coeficientului f_w , pentru orice valoare a numărului Prandtl; 4) temperatura descrește odată cu creșterea numărului Prandtl, pentru orice valoare a condiției inițiale f_w . Pentru prima dată în domeniul mediilor continue sunt prezentate doisprezece soluții distincte pentru un sistem neliniar diferențial în două variabile.

În **Capitolul 5** sunt studiate patru probleme. Problema curgerii unui fluid Maxwell superior-convectiv pe o placă poroasă întinsă cu aspirație ($R > 0$) sau cu imersie ($R < 0$) este rezolvată aproximativ în *prima secțiune*. Folosind a doua variantă a metodei MHAO (a se vedea *capitolul 2, secțiune a doua*) am determinat soluții aproximative multiple, atât în cazul problemei cu aspirație, cât și în cazul problemei cu imersie. Ca și în cazul curgerii unui fluid Newtonian, soluțiile aproximative determinate cu metoda MHAO sunt foarte precise, dacă numărul de parametri optimali crește. Valorile parametrilor optimali au fost determinate cu metoda celor mai mici pătrate. Validitatea acurateței soluțiilor aproximative (pentru deplasarea $\bar{f}(\eta)$ și viteza $\bar{f}'(\eta)$) este arătată în zece tabele și patru grafice, pentru valori fixate ale coeficienților M și β . Cu ajutorul metodei MHAO se poate obține un alt rezultat deosebit: pentru $\beta = 0$ se obține soluția exactă a ecuației Maxwell considerată în această secțiune. Convergența soluțiilor aproximative este întărită prin două teste statistice efectuate asupra abaterilor în 30 de puncte: testul Durbin-Wattson pentru autocorelații (legătura între valori consecutive) și testul Barlett pentru homoscedasticitate (varianță constantă). Aceste teste statistice caracterizează proprietățile asimptotice ale soluțiilor aproximative determinate cu metoda MHAO. Pentru toate soluțiile aproximative ambele teste statistice se încadrează între limitele unanim acceptate. De asemenea, din comparațiile coeficienților $F''(0)$ și $F(\infty)$ se poate întări concluzia despre eficiența metodei MHAO. Importanța soluțiilor aproximative se prezintă în teză pentru curgerea unui fluid Maxwell superior-convectiv. Sunt prezentate graficele tri-dimensionale (ale componentelor vitezei fluidului), precum și graficul câmpului de vectori (u, v) , atât în cazul curgerii cu viteză de aspirație, cât și în cazul curgerii cu viteză de imersie, rezultate care completează lista de rezultate adimensionale obținute cu MHAO. În *a doua secțiune* este rezolvată problema curgerii peliculei subțiri a unui fluid Oldroyd cu 6-constante pe o bandă în mișcare. Problema a fost redusă la o problemă neliniară ce depinde de trei coeficienți adimensionali a_1 și a_2 (constante materiale) și m (coeficient adimensional al gravitației). Din condițiile fizice la limită au fost deduse două condiții: una omogenă și alta neomogenă. Metoda MHAO am aplicat-o cu succes pentru determinarea de soluții aproximative a problemei neliniare cu fiecare condiție la limită, folosind două alternative: o aproximare cu funcții polinomiale, iar alta cu funcții exponențiale. În cazul primei alternative s-a folosit o funcție auxiliară cu cinci parametri optimali, iar la a doua variantă s-a folosit o funcție auxiliară cu patru parametri optimali. Parametrii optimali au fost determinați cu metoda celor mai mici pătrate. Precizia soluțiilor aproximative este validată prin comparația lor cu soluția numerică. Aceste comparații sunt prezentate în douăzeci și două de tabele și douăzeci și trei de grafice. Din aceste comparații se poate concluziona: 1) viteza benzii $\bar{v}(x)$ descrește odată cu creșterea coeficientului m , pentru orice valoare a parametrului a_2 și $a_1 = 0.5 > 0$; 2) viteza benzii $\bar{v}(x)$ crește odată cu creșterea coeficientului m , pentru orice valoare a parametrului a_2 și $a_1 = -0.5 < 0$; 3) pentru orice valoare a coeficientului m , viteza benzii crește odată cu creșterea coeficientului a_2 ; 3) viteza benzii descrește pentru orice valoare a coeficientului $a_1 > 0$; 4) viteza benzii crește pentru orice valoare a coeficientului $a_1 < 0$; 5) viteza benzii crește odată cu creșterea coeficientului a_2 ; 6) viteza benzii descrește pentru odată cu creșterea coeficientului a_1 ; 7) în toate cazurile viteza

benzii descrește pentru $a_1 = 0.5 > 0$ și crește pentru $a_1 = -0.5 < 0$ și pentru orice valoare a coeficientului m . Pentru cazul $a_1 = a_2$ MHAO pune în evidență soluția exactă a unui fluid de tip Oldroyd cu 6 constante, ceea ce este încă un rezultat puțin cunoscut în literatura de specialitate. Problema transferului de căldură și curgerea stabilă a unui fluid MHD vâscos la nivelul stratului limiă este studiată cu a doua variantă a metodei MHAO (a se vedea *capitolul 2, secțiunea a doua*) în *secțiunea a treia*. Problema neliniară a transferului de masă depinde de trei coeficienți fizici: M - coeficientul magnetic, λ - coeficientul vitezei de alunecare, S - coeficientul de aspirație ($S > 0$) sau de imersie ($S < 0$). Problema neliniară a transferului de căldură prin radiație depinde de trei coeficienți fizici: δ - coeficientul termic de alunecare, R - coeficientul de radiație și Pr - numărul lui Prandtl. Soluția aproximativă $\bar{f}(\eta)$, ce descrie transferul de masă, am obținut-o cu MHAO folosind două funcții auxiliare depinzând de șase parametri optimali, iar soluția aproximativă $\bar{\theta}(\eta)$, ce descrie transferul de căldură prin radiație, am obținut-o cu MHAO folosind două funcții auxiliare depinzând de șapte parametri optimali. Cu metoda celor mai mici pătrate am determinat valorile numerice ale parametrilor optimali. Precizia soluțiilor aproximative este motivată prin comparația dintre rezultatele aproximative și soluția numerică, prin comparația dintre vitezei de curgere $\bar{f}'(\eta)$ și a vitezei de transfer $\bar{\theta}'(\eta)$, prezentate în nouăsprezece tabele și unsprezece grafice, dar și prin comparația coeficientului superficial la limită $\bar{f}''(0)$ și a coeficientului de transfer termic $\bar{\theta}'(0)$, pentru nouă cazuri ale coeficienților fizici. Mai mult decât atât, acuratețea rezultatelor aproximative este întărită prin reprezentarea grafică a restului de aproximare (pentru $R_{\bar{f}}$ și $R_{\bar{\theta}}$). Soluțiile aproximative astfel determinate au condus la următoarele concluzii: 1) deplasarea $\bar{f}(\eta)$ crește odată cu creșterea coeficientului de aspirație / de imersie S ; 2) deplasarea $\bar{f}(\eta)$ descrește odată cu creșterea coeficientului magnetic M ; 3) rata de transport se reduce simțitor odată cu creșterea coeficientului de aspirație / de imersie S sau a coeficientului magnetic M ; 4) viteza de curgere $\bar{f}'(\eta)$ descrește odată cu creșterea coeficientului de aspirație / de imersie S sau a coeficientului magnetic M ; 5) temperatura $\bar{\theta}(\eta)$ crește odată cu creșterea coeficientului magnetic M ; 6) temperatura $\bar{\theta}(\eta)$ descrește odată cu creșterea coeficientului de alunecare δ ; 7) temperatura $\bar{\theta}(\eta)$ descrește odată cu creșterea coeficientului de aspirație / de imersie S . *Ultima secțiune* a acestui capitol prezintă soluții duale pentru problema curgerii vâscoase instabile a unui fluid incompresibil printr-un cilindru contractiv. Problema de transport de masă depinde de doi coeficienți fizici: γ - coeficientul de absorbție și S - coeficientul de instabilitate. Sunt discutate patru cazuri. În fiecare dintre cele patru cazuri, aproximările soluțiilor duale au fost determinate cu ajutorul metodei MHAO (a doua variantă) folosind o funcție auxiliară cu paisprezece parametri optimali. Acuratețea soluțiilor aproximative este ilustrată prin comparația rezultatelor aproximative și a rezultatelor numerice pentru deplasarea $\bar{f}(\eta)$, a vitezei de transfer de masă $\bar{f}'(\eta)$, dar și a coeficientului superficial la limită $\bar{f}''(1)$. Aceste comparații sunt prezentate în șapte tabele și patru grafice, atât pentru prima

soluție, cât și pentru a doua soluție. Astfel, din aceste comparații, metoda MHAO ne conduce la următoarele concluzii: 1) oricare ar fi valoarea fixată a coeficientului de absorbție γ , pentru prima soluție, deplasarea $\bar{f}(\eta)$ scade dacă coeficientul de instabilitate S crește; situația opusă având loc pentru soluția duală; 2) în toate cazurile viteza fluidului $\bar{f}'(\eta)$ este amortizată mai repede odată cu creșterea coeficientului de instabilitate S ; 3) grosimea stratului-limită de curgere scade dacă coeficientul de instabilitate S scade, ceea ce implică o creștere a gradientului de viteză; 4) pentru prima soluție gradientul de viteză este pozitiv (în toate cazurile), tendința opusă fiind pentru a doua soluție. Ca și la problemele studiate în secțiunile precedente, se pune în evidență importanța soluțiilor aproximative, pentru curgerea instabilă a unui fluid vâscos printr-un cilindru contractat. Pentru aceasta, se prezintă graficele tri-dimensionale (ale componentelor vitezei), precum și graficele câmpului (u, w) în doar două din cele patru cazuri studiate, și anume: cazurile în care coeficientul de instabilitate este $S = -2$, pentru soluțiile duale corespunzătoare fiecărui caz. Aceste grafice completează rezultatele adimensionale obținute cu MHAO.

În consecință, principalul avantaj al acestei abordări este controlul convergenței soluțiilor aproximative într-un mod foarte riguros. O foarte bună precizie a fost găsită între soluțiile noastre aproximative și rezultatele numerice, ceea ce dovedește că metoda noastră este corectă și foarte eficientă în practică.

Este interesant de remarcat faptul că un număr mare de parametri C_j în funcțiile auxiliare H de control a convergenței conduce la o precizie mai bună a rezultatelor aproximative. Este de remarcat convergența soluțiilor și a derivatelor acestora în comparație cu soluțiile numerice. Pe de altă parte, coeficientul superficial la limită $f''(0)$, valoarea limită $f(\infty)$ și restul $R_f(\eta)$ al diferitelor soluții au valori extrem de apropiate de valorile numerice corespunzătoare.

Un număr de zece lucrări științifice au fost publicate în diferite reviste de prestigiu: The Scientific World Journal, Advances in Mathematical Physics, Abstract and Applied Analysis, Central European Journal of Physics, Materiale Plastice, iar lucrările [118], [120] au fost premiate de MEN. Alte lucrări au fost trimise pentru publicare la reviste prestigioase și se află în stadiul de recenzie. Menționez că lucrarea [60] este citată de un grup de cercetători străini.

Perspective de viitor

- curgerea unui fluid Oldroyd cu 8-constante;
- curgerea unui fluid de tip Bürger;
- studiul vibrațiilor neliniare cu amortizare nevâscoasă;
- studiul transferului de căldură și al curgerii unor fluide de tip Maxwell, cu aplicații în procesul de producție a materialelor polimerice;
- studiul dinamicii mașinilor electrice;
- studiul oscilatoarelor cu discontinuități;
- studiul oscilațiilor barelor de tip Euler și Timošenko cu mase adiționale.

Bibliografie

- [1] Z. Abbas, T. Hayat, M. Sajid, S. Asghar, *Unsteady flow of a second grade fluid over an unsteady stretching sheet*, Mathematical and Computer Modelling, 48, 2008, 518–526.
- [2] Z. Abbas, Y. Wang, T. Hayat, M. Oberlack, *Mixed convection in the stagnation-point flow of a Maxwell fluid towards a vertical stretching surface*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11, 2010, 3218–3228.
- [3] S. Abbasbandy, T. Hayat, *Solution of the MHD Falkner-Skan flow by Hankel- $Pade'$ method*, Physics Letters A, 373 (3), 2009, 731–734.
- [4] S. Abbasbandy, T. Hayat, *Solution of MHD Falkner-Skan flow by homotopy analysis method*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14 (9-10), 2009, 3591–3598.
- [5] J. A. D. Ackroyd, *A series method for the solution of laminar boundary layers on moving surfaces*, Z. Angew Math. Phys. (ZAMP) 29, 1978, 729–741.
- [6] S. Adhikari, *Structural Dynamic Analysis with Generalized Damping Models*, Wiley, 2014.
- [7] G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, J. Math. Anal. Appl., 135, 1988, 501–544.
- [8] K. Ahmad, R. Nazar, I. Pop, *Falkner-Skan for gravity-driven film flow of micropolar fluid*, Sains Malaysiana, 40 (11), 2011, 1293–1296.
- [9] M. E. Ali, *On thermal boundary layer on a power-law stretched surface with suction or injection*, Int. J. Heat Fluid Flow, 16, 1995, 280–290.
- [10] M. E. Ali, E. Magyari, *Unsteady fluid and heat flow induced by a submerged stretching surface while its steady motion is slowed down gradually*, Heat Mass Transfer, 50, 2007, 188–195.
- [11] E. Alizadeh, M. Farhadi, K. Sedighi, N. R. E. Kebria, A. Ghafourian *Solution of the Falkner-Skan equation for wedge by Adomian decomposition method*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14, 2009, 724–733.
- [12] H. I. Anderson, *Slip flow of a viscoelastic fluid past a stretching surface*, Acta Mech., 95, 1992, 227–230.
- [13] H. J. Anderson, J. B. Aaresth, D. S. Dandapat, *Heat transfer in a liquid film on an unsteady stretching surface*, Int. J. Heat Mass Transfer, 43, 2000, 69–74.
- [14] P. D. Ariel, *MHD flow of a viscoelastic fluid past a stretching sheet with suction*, Acta Mech., 105, 1994, 49–56.
- [15] A. Asaithambi, *A finite difference method for the Falkner-Skan equation*, Applied Mathematics and Computation, 92 (23), 1998, 135–141.
- [16] O. Ashour, A. Craig, *Magneto-rheological fluids: materials, characterization and devices*, J. Int. Mater. Syst. Struct., 7, 1996, 123–130.
- [17] șt. Balint, *Lectii de mecanica teoretica. Mecanica mediilor continue*, Universitatea de Vest din Timisoara, Timișoara, 1996.
- [18] S. Barış, *Flow of an Oldroyd 6-constant fluid between intersecting planes, one of which is moving*, Acta Mechanica, 147, 2001, 125–135.
- [19] A. Beléndez, C. Pascual, C. Neipp, T. Beléndez, A. Hernández, *An equivalent linearization method for conservative nonlinear oscillators*, Int. J. Non-Linear Numer. Simulat., 9, 2001, 9–19.

- [20] C. M. Bender, K. A. Milton, S. S. Pinky, L. M. Simmons jr., *A new perturbative approach to nonlinear problems*, J. Math. Phys., 30(7), 1989, 1447–1455.
- [21] S. Bernhard, S. Mohlenkamp, A. Tilgner *Transient integral boundary layer method to calculate the translesional pressure drop and the fractional flow reserve in myocardial bridges*, BioMedical Engineering On Line, 2006, doi: 10.1186.1478-925x-5-42.
- [22] M. A. Biot, *Linear thermodynamics and the mechanics of solids*, Proceedings of the Third U. S. National Congress on Applied Mechanics, 1958, 1–18.
- [23] R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1, Wiley, ISBN 0-471-80245-X, New York, 1987.
- [24] Adara Monica Blaga, **Remus-Daniel Ene**, *Field of cones on a polysymplectic manifold*, An. științ. Univ. Al. I. Cuza Iași, Ser. Nouă, Mat., vol. 53, no. 1, 2007, pag. 119-126.
- [25] Nicolae Boja, Georgeta Brăiloiu, **Remus-Daniel Ene**, *Some approximations in the bar deflection analysis. II, Modelling and development of intelligent systems*, Proceedings of the first International Conference MDIS, Sibiu, Romania, 2009, Sibiu: "Lucian Blaga", 2009, pag. 33-45.
- [26] E. F. F. Botta, F. J. Hut, A. E. P. Veldman *The role of periodic solution in the Falknar-Skan problem for $\lambda \geq 0$* , Journal of Engineering Mathematics, 20(1), 1986, 81–93.
- [27] T. Butz, O. Von Stryk *Modelling and Simulation of ER and MR Fluid Dampers*, ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. 78, 1998, 1–22.
- [28] J. D. Carlson, M. R. Jolly, *MR fluid, foam and elastomer devices*, Mechatronics, 10, 2000, 555-564.
- [29] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover, ISBN 0-486-64071-X, New York, 1981.
- [30] C. H. Chen, *Magneto-hydrodynamic mixed convection of a power-law fluid past a stretching surface in the presence of thermal radiation and internal heat generation/absorption*, Int. J. Non-Linear Mechanics, 44, 2009, 596–603.
- [31] Y. K. Cheung, S. H. Chen, S. L. Lau, *A modified Lindstedt-Poincaré method for certain strongly nonlinear oscillations*, Int. J. Nonlinear Mech., 26, 1991, 367–378.
- [32] I.- Chung Liu, H. I. Anderson, *Heat transfer in a liquid film on an unsteady stretching sheet*, Int. J. Thermal Sciences, 47, 2008, 766–772.
- [33] B. D. Coleman, H. Markovitz,, *Normal stress effects in second-order fluids*, Journal of Applied Physics, 35(1), 1964, 1–9.
- [34] R. Cortell, *Heta and fluid flow due to non-linearly stretching surfaces*, Appl. Math. and Comput., 217, 2011, 7564–7572.
- [35] L. J. Crane, *Flow past a stretching plate*, Z. Angew. Math. Phys., 21, 1970, 645–647.
- [36] B. S. Dandapat, A. Kitamura, B. Santra, *Transient film profile on thin liquid film flow on a stretching surface*, Z. Angew. Math. Phys., 57, 2006, 623–635.
- [37] B. S. Dandapat, B. Santra, S. K Singh, *Thin film flow over a nonlinear stretching sheet in presence of uniform transverse magnetic field*, Z. Angew. Math. Phys., 61, 2010, 685–695.
- [38] F. I. Dragomirescu, P. G. Siddheshwar, **Remus-Daniel Ene**, *Influence of micropolar parameters on the stability domain in a Rayleigh-Benard convection problem - A reliable numerical study*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 31, 2013, pag. 49-62.

- [39] J. E. Dunn, K. R. Rajagopal, *Fluids of differential type: Critical review and thermodynamic analysis*, International Journal of Engineering Science, 33(5), 1995, 689–729.
- [40] E. M. Elbashbeshy, M. A. A. Bazid, *Heat transfer an unsteady stretching surface*, Heat Mass Transfer, 41, 2004, 1-4.
- [41] N. S. Elgazery, *Numerical solution for the Falkner-Skan equation*, Chaos, Solitons and Fractals, 35, 2008, 738–746.
- [42] R. Ellahi, T. Hayat, T. Javed, S. Asghar, *On the analytic solution of nonlinear flow problem involving Oldroyd 8-constant fluid*, Mathematical and Computer Modelling, 48, 2008, 1191–1200.
- [43] R. Ellahi, T. Hayat, F. M. Mahomed, A. Zeeshan, *Exact solutions for flow of an Oldroyd 8-constant fluid with nonlinear slip conditions*, Commun. Nonl. Sci. Numer. Simulat., 15, 2010, 322-330.
- [44] **Remus-Daniel Ene**, Adara Monica Blaga, *Thermal radiation transport in a thin porous plate*, Proceedings of the 5th International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI 2007, Alba Iulia, Romania, 2007, Alba Iulia: Aeternitas Publishing House, 2007, pag. 105-113.
- [45] **Remus-Daniel Ene**, Adara Monica Blaga, *Finite elements method to the study of porous plates*, Proceedings of the 11th symposium of mathematics and its applications, Politehnica University of Timișoara, Timișoara, Romania, 2006, Timișoara: Editura Politehnica, 2007, pag. 104-110.
- [46] **Remus-Daniel Ene**, Adara Monica Blaga, *Lagrangian formulation for the elasticity equations in the homogenous case*, Proceedings of the International Conference NAV-MAR-EDU 2007, Mircea cel Batran Naval Academy, Constanța, Romania, 2007, pag. 151-156.
- [47] **Remus-Daniel Ene**, Adara Monica Blaga, *Applications of the biharmonic equations to the study of porous plate*, Analele Universității de Vest Timișoara, Seria Matematică-Informatică, vol. 45, no. 1, 2007, pag. 221-230.
- [48] **Remus-Daniel Ene**, Ioana Dragomirescu, *Thermal stability problems in a thin porous plate*, Rev. Ana. Numer. Theor. Approx., vol. 37, no. 2, 2008, pag. 151-157.
- [49] **Remus-Daniel Ene**, Ioana Dragomirescu, *On the deformation of a thin thermoelastic plate*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 6, 2008, pag. 45-55.
- [50] **Remus-Daniel Ene**, Adara Monica Blaga, *On the geometry of a thin porous plate*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 7, 2009, pag. 183-192.
- [51] **Remus-Daniel Ene**, Adara Monica Blaga, *Thermal stresses in a thin porous plate*, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, vol. 54, no. 4, 2009, pag. 63-72.
- [52] **Remus-Daniel Ene**, Ioana Dragomirescu, *Numerical investigations of the dynamic problem in thin thermoelastic plate*, Creative Mathematics and Informatics, vol. 17, no. 3, 2009, pag. 399-405.
- [53] **Remus-Daniel Ene**, *On the existence and uniqueness of a generalized solution in a thin porous plate problem*, Proceedings of the 12th Symposium of Mathematics and its Applications, 2010, pag. 326-331.
- [54] **Remus-Daniel Ene**, Ioana Dragomirescu, *Approximative solutions for the equilibrium problem of a thermoelastic thin porous plate*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 8, 2010, pag. 113-123.

- [55] **Remus-Daniel Ene**, Ioana Dragomirescu, *On the uniqueness of the solution for the dynamic problem in thin thermoelastic plates*, Analele Universității de Vest Timișoara, Seria Matematică-Informatică, vol. 48, no. 3, 2010, pag.59-67.
- [56] **Remus-Daniel Ene**, *Analytical investigations of the viscous flow due to a planar stretching surfaces with partial slip*, Buletinul științific al Universității "Politehnica" din Timișoara, Seria Matematică-Fizică, Tom 58(72), Fascicula 1, 2013, pag. 53-59.
- [57] **Remus-Daniel Ene**, *Multiple approximate analytic solutions of the unsteady viscous flow*, Buletinul științific al Universității "Politehnica" din Timișoara, Seria Matematică-Fizică, Tom 58(72), Fascicula 2, 2013, pag. 7-19.
- [58] **Remus-Daniel Ene**, Tudor Bînzar, *On the convergence of the solution of dynamic problem of periodic elastic media*, Proceedings of the 13th International Conference on Mathematics and its Applications, 2013, pag. 223-228.
- [59] **R.-D. Ene**, V. Marinca, B. Căruntu, *Optimal homotopy perturbation method for solving a nonlinear problem in elasticity*, Proceedings of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2012), 1479, 2012, 2094-2097.
- [60] **R.-D. Ene**, V. Marinca, R. Negrea, B. Căruntu, *Optimal homotopy asymptotic method for solving a nonlinear problem in elasticity*, 14th SYNASC (2012), DOI: 10.1109/SYNASC.2012.12., Proceedings of the 14th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2012), 2012, 98-102.
- [61] **R.-D. Ene**, V. Marinca, B. Marinca, *Approximate analytical solutions of nonlinear vibrations of a thin elastic plate*, Acoustic & Vibration of Mechanical Structures, Book series: Applied Mechanics and Materials, 430, 2013, 40-44.
- [62] **R.-D. Ene**, V. Marinca, R. Negrea, *Planar stretching flows with partial slip*, Proceedings of the 15th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2013), 2013, 127-131.
- [63] **R.-D. Ene**, *Contributions on the extension of the optimal homotopy asymptotic method in solution of the flow of the polymeric materials*, Materiale Plastice, 51(2), 2014, 194-200.
- [64] **R.-D. Ene**, V. Marinca, R. Negrea, *Optimal Homotopy Asymptotic Method for viscous boundary layer flow in unbounded domain*, The 16th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2014), 2014, (**acceptată pentru publicare**).
- [65] **R.-D. Ene**, V. Marinca, L. Bereteu, *Application of optimal homotopy asymptotic method to nonlinear Bingham fluid dampers*, The Scientific World Journal, Special Issue: Nonlinear Evolution Equations Modeling Complex Phenomena: Recent and Future Trends (NEEM), 2014, (**acceptată spre publicare**).
- [66] **R.-D. Ene**, V. Marinca, B. Marinca, *Viscous flow due to a stretching surfaces with partial slip*, Mathematical Problems in Engineering, Special Issue: Recent Advances in Solution Methods for Nonlinear Evolution Equations, Fluid Flow, and Heat and Mass Transfer (RASM), 2014, (**în curs de evaluare**).
- [67] **R.-D. Ene**, V. Marinca, B. Marinca, *The flow and heat transfer in a viscous fluid over an unsteady stretching surface*, The Scientific World Journal, Special Issue: Analytical Approximations of Trajectories of Dynamical Systems Modelled by Differential Equations with Applications (SMEA), 2014, (**în curs de evaluare**).

- [68] **R.-D. Ene**, V. Marinca, B. Marinca, *Thin film flow of an Oldroyd 6-constant fluid over a moving belt: an analytic approximate solution*, J. Differential Equations, 2013, (**în curs de evaluare**).
- [69] **R.-D. Ene**, V. Marinca, *Approximate solutions for steady boundary layer MHD viscous flow and radiative heat transfer over an exponentially porous plate*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 2014, (**în curs de evaluare**).
- [70] A. C. Eringen, *Mechanics of continua*, John Wiley and Sons, New York, 1967.
- [71] V. M. Falkner, S. W. Skan, *Some approximate solutions of the boundary layer equations*, Phil. Magazine, 12, 1931, 865–816.
- [72] T. G. Fang, J. Zang, S. S. Yao, *Viscous flow over an unsteady shrinking sheet with mass transfer*, Chin. Phys. Lett., 26, no 1, 2009, 1–4.
- [73] T. G. Fang, S. S. Yao, J. Zang, A. Aziz, *Viscous flow over a shrinking sheet with a second order slip flow model*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 15, 2010, 1831–1842.
- [74] C. Fetecău, T. Hayat, J. Zierep, M. Sajid, *Energetic balance for the Rayleigh-Stokes problem of an Oldroyd-B fluid*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12, 2011, 1–13.
- [75] D. R. Gamota, F. E. Filisko, *Dynamic mechanical studies of electrorheological materials: Moderate frequency*, Journal of Rheology, 35, 1991, 399–425.
- [76] R. A. Van Gorder, K. Vajravelu, *Multiple solutions for hydrodynamic flow of a second grade fluid over a stretching or shrinking sheet*, Quart. Appl. Math., 69, 2011, 404–424.
- [77] L. J. Grubka, K. M. Bobba, *Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variabel temperature*, J. Heat Mass Transfer, 107, 1985, 248–250.
- [78] R. Gul, Z. H. Khan, W. A. Khan, "Heat transfer from solids with variable thermal conductivity and uniform internal heat generation using homotopy perturbation method", *ASME Proceedings, Heat Transfer Theory and Fundamental Research*, vol. 1, pp. 311–319, 2008.
- [79] P. S. Gupta, A. S. Gupta, *Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing*, Can. J. Chem. Eng., 55, 1977, 744–746.
- [80] C. Hancock, E. Lewis, N. K. Moffat, *Effects of inertia in forced corner flows*, J. Fluid Mech., 112, 1981, 315–327.
- [81] D. R. Hartree, *On the equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 33, 1937, 223–239.
- [82] S. P. Hastings, *Reversed flow solutions of the Falkner-Skan equation*, SIAM, Journal of Applied Mathematics, 22 (2), 1972, 329–334.
- [83] T. Hayat, Z. Abbas, M. Sajid, *Series solution for the upper-convected Maxwell fluid over a porous stretching plate*, Physics Letters A, 358, 2006, 396–403.
- [84] T. Hayat, M. Awais, M. Qasim, A. H. Hendi, *Effects of mass transfer on the stagnation-point flow of an upper-convected Maxwell fluid*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 54, 2011, 3777–3782.
- [85] T. Hayat, R. Ellahi, F. M. Mahomed, *Exact solution of a thin film flow of an Oldroyd 6-constant fluid over a moving belt*, Commun. Nonl. Sci. Numer. Simulat., 14, 2009, 133–139.
- [86] T. Hayat, M. Khan, S. Asghar, *Homotopy analysis of MHD flows of an Oldroyd 8-constant fluid*, Acta Mechanica, 168, 2004, 213–232.

- [87] T. Hayat, M. Khan, M. Ayub, *The effect of the slip condition on flows of an Oldroyd 6-constant fluid*, J. Comput. Appl. Math., 202, 2007, 402–413.
- [88] T. Hayat, M. Khan, M. Ayub, *Couette and Poiseuille flows of an Oldroyd 6-constant fluid with magnetic field*, J. Math. Anal. Appl., 298, 2004, 225–244.
- [89] T. Hayat, M. Sajid, *Homotopy analysis of MHD boundary layer flow of an upper-convected Maxwell fluid*, Int. J. of Eng. Science, 45, 2007, 393–401.
- [90] T. Hayat, S. Zaib, S. Asghar, A. A. Hendi, *Exact solutions in generalized Oldroyd-B fluid*, Appl. Math. Mech. - Engl. Ed., 34 (4), 2012, 411–426.
- [91] J. N. He, *Modified L-P methods for some strongly nonlinear oscillations. Part I expansion of a constant*, Int. J. Non-Linear Mechanics, 37, 2002, 309–314.
- [92] J. N. He, *Variational iteration method - Some recent results and new interpretations*, J. Comput. and Appl. Math., 207, 2007, 3–17.
- [93] F. A. Hendi, M. Hussian, *Analytic solution for MHD Falkner-Skan flow over a porous surface*, Journal of Applied Mathematics, 2012, Article ID 123185, 9 pages.
- [94] N. Herişanu, V. Marinca, *Optimal homotopy perturbation method for non-conservative dynamical system of a rotating electrical machine*, Z. Naturforsch, 670, 2012, 509–516.
- [95] D. Ieşan, *Teoria termoelasticităţii*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1979.
- [96] A. Ishak, R. Nazar, N. M. Arifin, I. Pop, *Dual solutions in mixed convection flow near a stagnation point on a vertical porous plate*, Int. J. of Thermal Sciences, 47, 2008, 417–422.
- [97] A. Ishak, R. Nazar, I. Pop, *Uniform suction / blowing effect on flow and heat transfer due to a stretching cylinder*, Appl. Math. Model., 32, 2008, 2059–2066.
- [98] H. Jeffrey, *The stability of a layer of fluid heated from below*, Philosophical Magazine Series 7, 2(10), 1926, 833–844.
- [99] M. R. Jolly, J. W. Bender, J. D. Carlson, *Properties and Applications of Commercial Magnetorheological Fluids*, SPIE 5th Annual Int. Symposium on Smart Structures and Materials, San Diego CA, 15 March 1998.
- [100] M. Khan, T. Hayat, M. Ayub, *Numerical study of partial slip of the MHD flow of an Oldroyd 8-constant fluid*, Computers and Mathematics with Applications, 53, 2007, 1088–1097.
- [101] Z. H. Khan, R. Gul, W. A. Khan, *Effect of variable thermal conductivity on heat transfer from a hollow sphere with heat generation using homotopy perturbation method*, ASME Proceedings, Heat Transfer Theory and Fundamental Research, 1, 2008, 301–309.
- [102] S. Kobayashi, et al., *Some coefficients of the TFD function*, J. Phys. Soc. Japan, 10, 1955, 759–765.
- [103] W. I. Kordonsky, *Magneto-rheological fluids and their applications*, Mater. Technol., 8(11), 1993, 240–242.
- [104] B. L. Kuo, *Application of the differential transformation method to the solutions of Falkner-Skan flow*, Acta Mechanica, 164, 2003, 161–174.
- [105] F. Labropulu, D. Li, I. Pop, *Non-orthogonal stagnation-point flow over a stretching surface in a non-Newtonian fluid with heat transfer*, Int. J. Therm. Sci., 49, 2010, 1042–1050.
- [106] M. Lakestani, *Numerical solution for the Falkner-Skan equation using Chebyshev cardinal functions*, Acta Universitatis Apulensis, 27, 2011, 229–238.

- [107] D. Y. Lee, N. M. Wereley, *Analysis of electro- and magneto-rheological flow mode dampers using Herschel-Bulkley model*, Proceedings of SPIE Smart Structure and Materials Conference, Vol. 3989 Newport Beach, California 2000, 244–252.
- [108] C. Li, Q. Liu, S. Lan, *Application of Support Vector Machine - Based Semiactive Control for Seismic Protection of Structures with Magnetorheological Dampers*, Mathematical Problems in Engineering, 2012, Article ID 268938, 18 pages.
- [109] W. H. Li, G. Z. Yao, G. Chen, S. H. Yeo, F. F. Yap, *Testing and steady state modelling of a linear MR damper under sinusoidal loading*, Smart Mater. Struct., 9, 2000, 95–102.
- [110] S. J. Liao, *Beyond Perturbation. Introduction to the Homotopy Analysis Method*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [111] E. Magyari, M. E. Ali, B. Keller, *Heat and mass transfer characteristics of the self-similar boundary-layer flows induced by continuous surface stretched with rapidly decreasing velocities*, Heat Mass Transfer, 38, 2001, 65–74.
- [112] E. Magyari, B. Keller, *A direct method to calculate the heat transfer coefficient of steady similar boundary layer flows induced by continuous moving surfaces*, Int. J. Therm. Sci., 44, 2005, 245–254.
- [113] E. Magyari, B. Keller, *Heat and mass transfer in the boundary layers on an exponentially stretching continuous surface*, J. Phys. D Appl. Phys., 32, 1999, 577–585.
- [114] N. Makris, S. A. Burton, D. P. Taylor *Electrorheological damper with annular ducts for seismic protection applications*, Smart Mater. Struct., 5, 1996, 551–564.
- [115] W. V. R. Malkus, G. Veronis, *Finite amplitude cellular convection*, Journal of Fluid Mechanics, 4(3), 1958, 225–260.
- [116] C. E. Maneschy, M. Massoudi, K. R. Rajagopal, *Flow of a second-grade fluid over a porous elastic sheet due to stretching*, J. Math. Phys. Sci., 27, 1993, 353–367.
- [117] Vasile Marinca, **Remus-Daniel Ene**, *Optimal Homotopy Perturbation Method for nonlinear oscillators with a fractional-order restoring force*, Proceedings of the 4-th International Conference Noise and Vibration, Nis, Serbia, 2012, pag. 117-120.
- [118] V. Marinca, **R.-D. Ene**, B. Marinca, *Analytic approximate solution for Falkner-Skan equation*, The Scientific World Journal, Special Issue: Dynamics of Nonlinear Systems, 2014, Article ID 617453, 22 pages.
- [119] V. Marinca, **R.-D. Ene**, *Dual approximate solutions of the unsteady viscous flow over a shrinking cylinder with Optimal Homotopy Asymptotic Method*, Advances in Mathematical Physics, Special Issue: Nonlinear Fluid Flow and Heat Transfer, 2014, Article ID 417643, 11 pages.
- [120] V. Marinca, **R.-D. Ene**, B. Marinca, R. Negrea, *Different approximations to the solution of upper-convected Maxwell fluid over a porous stretching plate*, Abstract and Applied Analysis, 2014, Article ID 139314.
- [121] V. Marinca, **R.-D. Ene**, *Analytical approximate solutions to the Thomas-Fermi equation*, Central Eur. J. of Physics, 12(7), 2014, 503–510.
- [122] V. Marinca, N. Herişanu, I. Nemeş, *Optimal homotopy asymptotic method with application to thin film flow*, Cent. Eur. J. Phys., 6, 2008, 648–653.
- [123] V. Marinca, N. Herişanu, C. Bota, B. Marinca, *An optimal homotopy asymptotic method applied to the steady flow of a fourth grade fluid past a porous plate*, Applied Mathematics Letters, 22, 2009, 245–251.

- [124] V. Marinca, N. Herişanu, *Determination of periodic solutions for the motion of particle on a rotating parabola by means of the optimal homotopy asymptotic method*, J. of Sound and Vibration, 329, 2010, 1450–1459.
- [125] V. Marinca, N. Herişanu, *An optimal homotopy asymptotic approach applied to nonlinear MHD Jeffery-Hamel flow*, Mathematical Problems in Engineering, 2011, Article ID 169056, 16 pages.
- [126] V. Marinca, N. Herişanu, *Nonlinear Dynamical Systems in Engineering - Some Approximate Approaches*, Springer Verlag, Heidelberg, 2011.
- [127] V. Marinca, N. Herişanu, *An optimal homotopy perturbation approach to thin film flow of a fourth grade fluid*, Numerical Analysis and Appl. Math. ICNAAM, AIP Conf. Proc., 1479, 2012, 2383–2386.
- [128] V. Marinca, N. Herişanu, *Optimal variational method for truly nonlinear oscillators*, Journal of Applied Mathematics, 2012, Article ID 620267, 10 pages.
- [129] V. Marinca, N. Herişanu, *Optimal homotopy asymptotic approach to nonlinear oscillators with discontinuities*, Scientific Research and Essays, vol. 8(4), 2013, 161–167.
- [130] H. Markovitz, B. D. Coleman, *Incompressible Second-Order Fluids*, Advances in Applied Mechanics, 8, 1964, 69–102.
- [131] M. Miklavčič, C. Y. Wang *Viscous flow due to a shrinking sheet*, Quarterly of Applied Mathematics, 64, 2006, 283–290.
- [132] H. Mirogolbabei, D. D. Ganji, M. M. Etghani, A. Sobati, *Adapted variational iteration method and axisymmetric flow over a stretching sheet*, World Journal of Modelling and Simulation, 5(4), 2009, 307–314.
- [133] S. Mukhopadhyay, *Slip effects on MHD boundary layer flow over an exponentially stretching sheet with suction / blowing and thermal radiation*, Ain Shans Engineering Journal, 4, 2013, 485–491.
- [134] A. Nayfeh, *Problems in Perturbation*, Wiley New York, 1985.
- [135] Q.-H. Nguyen, S.-B. Choi *Optimal Design Methodology of Magnetorheological Fluid Based Mechanisms*, Chap. 14 from Smart Actuation and Sensing Systems-Recent Advances and Future Challenges, INTECH 2012, <http://dx.doi.org/10.5772/51078>.
- [136] W. Noll, *The Foundation of Mechanics and Thermodynamics, Selected papers*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.
- [137] J. G. Oldroyd, *On the formulation of rheological equations of state*, Proceedings of the Royal Society of London A, 200(1063), 2000, 523–541.
- [138] A. Pirkhedri, H. H. S. Javadi, K. Parand, N. Fatahi, S. Lotfi, *Solving MHD Falkner-Skan boundary-layer equation using collocation method based on rational Legendre function with transformed Hermite-Gauss node*, World Applied Sciences Journal, 13 (10), 2011, 2224–2230.
- [139] N. Phan-Thien, *Plane and axisymmetric stagnation flow of a Maxwellian fluid*, Rheol. Acta, 22, 1983, 127–130.
- [140] K. V. Prasad, K. Vajravelu, P. S. Dutt, *The effects of variable fluid properties on the hydro-magnetic flow and heat transfer over a non-linearity stretching sheet*, Int. J. Therm. Sci., 40, 2010, 603–610.
- [141] K. R. Rajagopal, T. Y. Na, A. S. Gupta *Flow of a viscoelastic fluid over a stretching sheet*, Rheo. Acta, 23 (2), 1984, 213–215.
- [142] K. R. Rajagopal, R. K. Bhatnagar, *Exact solutions for some simple flows of an Oldroyd-B fluid*, Acta Mechanica, 113, 1995, 233–239.

- [143] J. I. Ramos, *Linearized Galerkin and artificial parameter techniques for determination of periodic solutions of nonlinear oscillators*, Appl. Math. Comput., 196, 2008, 483–493.
- [144] A. Raptis, C. Perdikis, H. S. Takhar, *Effects of thermal radiation on MHD flow*, Appl. Math. Comput., 153, 2004, 645–649.
- [145] Lord Rayleigh, *On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side*, Philosophical Magazine Series 6, 32(192), 1961, 529–546.
- [146] K. Sadeghy, A. H. Najafi, M. Saffaripour, *Sakiadis flow of an upper-convected Maxwell fluid*, Int. J. Non-Linear Mech., 40, 2005, 1220–1228.
- [147] B. Sahoo, *Effect of slip viscous dissipation and Joule heating on MHD flow and heat transfer of a second grade fluid past a radially stretching sheet*, Appl. Math. and Mechanics, Engl. Ed., 31(2), 2010, 159–173.
- [148] M. Sajid, T. Hayat, S. Asghar, K. Vajravelu, *Analytic solution for axisymmetric flow over a nonlinearity stretching sheet*, Arch. Appl. Mech., 78 (2), 2007, 127–134.
- [149] M. Sajid, I. Ahmed, T. Hayat, M. Ayub, *Series solution for unsteady axisymmetric flow and heat transfer over a radially stretching sheet*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13 (10), 2008, 2193–2202.
- [150] M. Sajid, P. Hayat, *Influence of thermal radiation on the boundary layer flow due to an exponentially stretching sheet*, Int. Commun. in Heat and Mass Transfer, 35, 2008, 347–356.
- [151] M. Sajid, T. Hayat, *Thin film flow of an Oldroyd 8-constant fluid: an exact solution*, Physics Letters A, 372, 2008, 1827–1830.
- [152] M. Sajid, K. Mahmood, Z. Abbas, *Axisymmetric stagnation-point flow with a general slip boundary condition over a lubricated surface*, Chin. Phys. Lett., 29 (2), 2012, 307–310.
- [153] B. C. Sakiadis, *Boundary-layer behavior on continuous solid surface, I. Boundary layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow*, A. I. Ch. E. J., 7, 1961, 26–28.
- [154] B. C. Sakiadis, *Boundary-layer behavior on continuous solid surface, II. Boundary layer behavior on continuous flat surface*, A. I. Ch. E. J., 7, 1961, 221–225.
- [155] E. Sanjayamand, S. K. Khan, *On heat and mass transfer in a viscoelastic boundary layer flow over an exponentially stretching sheet*, Int. J. of Thermal Science, 45, 2006, 819–828.
- [156] B. Sapiński, J. Filus, *Analysis of parametric models of MR linear damper*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 41(2), 2003, 215–240.
- [157] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, sixth ed. McGraw-Hill, New York, 1964.
- [158] R. A. Shah, S. Islam, A. M. Siddiqui, T. Haroon *Wire coating analysis with Oldroyd 8-constant fluid by optimal homotopy asymptotic method*, Computers and Mathematics with Applications, 63, 2012, 695–707.
- [159] F. M. Skalak, C. Y. Wang, "On the unsteady squeezing of viscous fluid from a tube", *J. Aust. Math. Soc. B*, pp. 65–74, 1979.
- [160] E. M. Sparrow, G. S. Beavers, L. Y. Hung, *Flow about a porous-surfaced rotating disk*, Int. J. Heat Mass Trans., 14, 1971, 993–996.
- [161] E. M. Sparrow, G. S. Beavers, L. Y. Hung, *Channel and tube flows with surface mass transfer and velocity slip*, Phys. Fluids, 14, 1971, 1312–1319.

- [162] B. F. Spencer, S. J. Dyke, M. K. Sain, J. D. Carlson, *Phenomenological model for magnetorheological dampers*, Journal of Engineering Mechanics, 123(3), 1997, 230–238.
- [163] R. Stanway, J. L. Sproston, N. G. Stevens, *Non-linear modelling of an electro-rheological vibration damper*, Journal of Electrostatics, 20(2), 1987, 167–184.
- [164] K. Stewartson, *Further solutions of the Falkner-Skan equation*, Proc. Cambr. Phil. Soc., 50, 1954, 454–465.
- [165] K. Strauss, *Model der Strömung die sich am Rakelnesser einer Beschichtungs-anlage einstellt*, Rheol. Acta, 14, 1975, 1058–1065.
- [166] C. Truesdell, W. Noll, *The non-linear field theory of mechanics*, In vol. III/3 of the Handbuch der Physik, edited by S. Flügge, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1965.
- [167] C. Truesdell, *The Elements of Continuum Mechanics*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1966.
- [168] F. K. Tsou, E. M. Sparrow, R. J. Goldstein, *Flow and heat transfer in the boundary layer on a continuous moving surface*, Int. J. Heat Mass Transfer, 10, 1967, 219–235.
- [169] M. Turkyilmazoglu, *Multiple solutions of heat and mass transfer of MHD slip flow for the viscoelastic fluid over a stretching sheet*, Int. J. Therm. Sci., 50, 2011, 2264–2276.
- [170] M. Turkyilmazoglu, *Heat and mass transfer on MHD second order slip flow*, Computers and Fluids, 71, 2013, 426–434.
- [171] S. Uchida, H. Aoki, *Unsteady flows in a semi-infinite contracting or expanding pipe*, J. Fluid Mech., 82, 1977, 371–387.
- [172] R. Usha, S. Rukmani, *The axisymmetric motion of a liquid film on an unsteady stretching surface*, ASME, J. Fluids Eng., 117, 1995, 81–85.
- [173] K. Vajravelu, *Viscous flow over a nonlinear stretching sheet*, Appl. Math. Comput., 124, 2001, 281–288.
- [174] G. Veronis, *Large amplitude Bénard convection*, J. of Fluid Mechanics, 26(1), 1966, 49–68.
- [175] J. de Vicente (editor), *Viscoelasticity - From theory to biological applications*, <http://dx.doi.org/10.5772/3188> (online www.interchopen.com).
- [176] D. Vieru, C. Fetecău, C. Fetecău, *Flow of a generalized Oldroyd-B fluid due to a constantly accelerating plate*, Appl. Math. Comput., 201, 2008, 834–842.
- [177] C. Y. Wang, *Liquid film on an unsteady stretching surface*, Quart. Appl. Math., XLVIII, 1990, 601–610.
- [178] C. Y. Wang, *Analysis of viscous flow due to a stretching sheet with surface slip and suction*, Nonlinear Anal. Real World Appl., 10, 2009, 375–380.
- [179] C. Y. Wang, C. -O. Ng, *Slip flow due to a stretching cylinder*, Int. J. of Non-Linear Mech., 46, 2011, 1191–1194.
- [180] X. Wang, F. Gordaninejad *Study of field-controllable, electro- and magneto- rheological fluid dampers in flow mode using Herschel-Bulkley theory*, Proceedings of SPIE Smart Structure and Materials Conferince, Vol. 3989 Newport Beach, California 2000, 232–243.
- [181] Y. Wang, T. Hayat, K. Hutter, *On non-linear magnetohydrodynamic problems of an Oldroyd 6-constant fluid*, Int. J. Non-Linear Mech., 40, 2005, 49–58.
- [182] G. Yang, B. F. Spencer Jr., J. D. Carlson, M. K. Sain, *Large-scale MR fluid dampers: modelling and dynamic performance considerations*, Engineering Structures, 24(3), 2002, 309–323.

- [183] K. Y. Yih, *Uniform suction/blowing effect on forced convection about a wedge uniform heat flow*, Acta Mechanica, 128 (3-4), 1998, 173–181.
- [184] B. Y. Yun, *New approximate analytical solutions of the Falkner-Skan equation*, Journal of Applied Mathematics, 2012, Article ID 170802, 12 pages.
- [185] W. M. K. A. Wan Zaimi, A. Ishak, I. Pop, *Unsteady viscous flow over a shrinking cylinder*, Journal of Kind Saud University-Science, 25, 2013, 143–148.
- [186] K. Zaimi, A. Ishak, I. Pop, *Unsteady flow due to a contracting cylinder in a nanofluid using Buongiorno's model*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 68, 2014, 509–513.
- [187] M. B. Zatorska, W. N. Banks, *A new method of the Falkner-Skan equation*, Acta Mechanica, 152, 2001, 197–201.
- [188] F. O. Zengin, M. D. Kaya, S. A. Demirbag, *Application of parameter-expansion method to nonlinear oscillators with discontinuities*, Int. J. Non-Linear Science and Numerical Simulation, 9, 2008, 267–270.
- [189] L. Zheng, Z. Guo, X. Zhang, *3D flow of a generalized Oldroyd-B fluid induced by a constant pressure gradient between two side walls perpendicular to a plate*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12, 2011, 3499–3508.
- [190] R. Zheng, N. Phan-Thien, R. I. Tanner *On the flow past a sphere in a cylindrical tube: Limiting Weissenberg number*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 36, 1990, 27–49.
- [191] M. Zubieta, S. Eceolaza, M. J. Elejabarrieta, M. Bou-Ali, *Magnetorheological fluids: characterization and modelling of magnetization*, Smart Mater. Struct., 18, 2009.