

Ing. HULE VOICHIȚA IONELA

**SISTEME DINAMICE CU INTERACȚIUNI PERCUTANTE.
APLICAȚII ÎN CAZUL BARELOR DE LUNGIMI MARI**

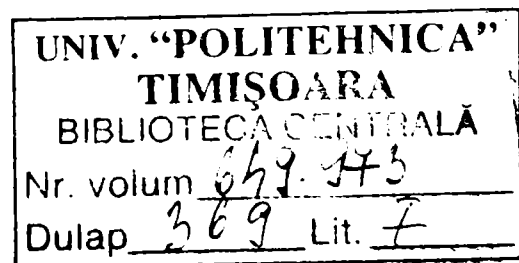
TEZĂ DE DOCTORAT

Conducători științifici:

Prof. dr. ing. LIVIU BRINDEU

Prof. dr. ing. TITUS CIOARĂ

2006



CUPRINS

CAPITOLUL 1. INTRODUCERE.....	6
1.1. Obiectivele și descrierea tezei.....	6
1.2. Scurt istoric privind studiul fenomenelor de ciocnire și de propagare a undei.....	10
1.3. Efecte dinamice care apar între elementele garniturii de foraj.....	18
1.4. Concluzii.....	27
CAPITOLUL 2. MODELE DINAMICE PENTRU STUDIUL CIOCNIRII CORPURILOR DE TIP BARĂ.....	29
2.1. Ipoteze fundamentale.....	29
2.2. Caracteristicile mediului solid.....	31
2.3. Ecuațiile generale ale dinamicii corpurilor elastice.....	36
2.3.1. Starea generală de deformație.....	36
2.3.2. Starea generală de tensiune.....	38
2.3.3. Ecuații de mișcare.....	39
2.3.4. Relații între tensiuni și deformații specifice.....	40
2.3.5. Ecuațiile fundamentale ale elastodinamicii.....	43
2.4. Ciocnirea și propagarea unidimensională a undei.....	47
2.4.1. Unda unidimensională.....	47
2.4.2. Tehnici de soluționare a ecuației undei longitudinale.....	52
2.4.3. Teoria unidimensională a propagării undei în bare elastice.....	62
2.4.4. Transmiterea și reflexia undei pe o interfață.....	71
2.4.5. Ciocnirea longitudinală coliniară a două bare.....	74
2.4.6. Forță constantă aplicată unei bare.....	79
2.4.7. Ciocnirea unei bare elastice cu o masă rigidă.....	83

2.5. Concluzii.....	92
CAPITOLUL 3. METODĂ APROXIMATIVĂ ÎN STUDIUL CIOCNIRII	
CORPURILOR PE BAZA PROPAGĂRII UNDELOR.....	
3.1. Ciocnirea plană.....	96
3.2. Rezolvarea elementară a sistemului de ecuații ondulatorii ale ciocnirii plane.....	99
3.2.1. Ciocnirea plană a barelor având lungimea infinită.....	99
3.2.2. Ciocnirea plană în cazul unui sistem percutant alcătuit din mai multe bare.....	107
3.2.3. Ciocnirea plană pentru un sistem format dintr-o bară plină și o bară de formă tubulară.....	110
3.3. Transmiterea și reflexia undelor de ciocnire pe suprafețele limită. Diagramele ondulatorii	113
3.4. Calculul sistemelor percutante pe baza diagramelor ondulatorii.....	116
3.4.1. Calculul sistemului percutant cu două suprafețe limită.....	116
3.4.2. Calculul sistemului percutant format dintr-o bară cu lungime finită și o bară cu lungime infinită.....	139
3.4.3. Calculul sistemului percutant având trei suprafețe limită.....	155
3.4.4. Calculul sistemului percutant format din două bare având lungimi finite.....	162
3.5. Concluzii.....	188
CAPITOLUL 4. STUDII EXPERIMENTALE PRIVIND CIOCNIREA	
BARELOR.....	
4.1. Considerații generale.....	192
4.2. Descrierea standului experimental.....	199
4.3. Realizarea experimentelor.....	202
4.4. Prelucrarea datelor experimentale.....	211
4.4.1. Transformări integrale.....	211
4.4.2. Analiza "wavelet".....	212
4.4.3. Analiza experimentală a propagării undei generate la	

ciocnirea barelor.....	216
4.4.4. Măsurarea timpului de ciocnire.....	222
4.4.5. Analiza undelor reflectate.....	223
4.4.5.1. Analiza undelor reflectate de la capătul barei percutoare, măsurate pe timbrul T1, amplasat pe bara receptoare.....	223
4.4.5.2. Analiza unei reflectate de la capătul barei receptoare, măsurată pe timbrul T1.....	225
4.5. Concluzii.....	232
CAPITOLUL 5. CONCLUZII FINALE ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE	235
5.1. Concluzii finale.....	235
5.2. Contribuții personale.....	242
ANEXA.....	244
BIBLIOGRAFIE.....	258

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

1.1. Obiectivele și descrierea tezei

În teza de doctorat cu titlul „*Sisteme dinamice cu interacțiuni percutante. Aplicații în cazul barelor de lungimi mari*” se urmărește studiul teoretic și experimental al fenomenului de ciocnire coaxială a corpurilor elastice având dimensiunile longitudinale mult mai mari decât cele transversale (cum sunt barele cilindrice subțiri), pe baza teoriei de propagare a undelor longitudinale.

Astfel de solicitări apar, de exemplu, în timpul operațiilor de foraj minier sau geotermal, asupra elementelor garniturii de foraj. Garnitura de foraj are în componență țevi din oțel (numite prăjini), cu diferite diametre și lungimi de 9 metri, și care sunt asamblate la lungimile cerute de adâncimea de foraj. Prăjinile de foraj sunt solicitate, în principal, la tracțiune, torsiune, presiune interioară și exterioară, dar există și solicitări dinamice, de tipul șocurilor longitudinale, care generează unde elastice. Aceste unde se propagă de-a lungul lanțului de tronsoane și prin interferare pot să dezvolte, în anumite secțiuni, tensiuni periculoase.

Fenomenul de ciocnire este foarte complex și îndelung studiat. Calculul sistemelor elastice de ciocnire presupune determinarea tensiunilor și deformațiilor care apar în corpuri, în urma contactului dintre acestea. Aceste mărimi pot fi urmărite cu ajutorul teoriei de propagare unidimensională a undei prin corpurile elastice, teorie ce pornește de la ecuația undei longitudinale. Aceasta este o ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul doi, care admite o familie largă de soluții, ce reprezintă legea de mișcare longitudinală a punctelor materiale aflate, la un moment dat, într-o anumită secțiune a corpului considerat. Soluționarea ecuației undei, prin metode exacte, este destul de dificilă și de aceea s-au găsit o serie de metode aproximative de rezolvare a ecuației.

În lucrarea de față se propune o metodă aproximativă de calcul a sistemelor de ciocnire formate din bare cilindrice lungi, cu secțiune constantă sau bare

formate din tronsoane ce secțiuni transversale diferite, dar cu rigiditate constantă pe fiecare dintre ele. Metoda se bazează pe fenomenul de propagare a undei longitudinale prin bare, fără a fi necesară soluționarea ecuației undei. De asemenea, metoda presupune rezolvarea unor sisteme de ecuații liniare de ordinul întâi, cu ajutorul cărora se pot determina vitezele și tensiunile punctelor materiale situate într-o secțiune oarecare a barelor studiate, folosind o diagramă ondulatorie care arată succesiunea temporală a undelor pe suprafața de ciocnire și pe suprafețele libere ale barelor.

Pornind de la modelul teoretic studiat, respectiv ciocnirea barelor având lungimi finite, s-a realizat un stand experimental cu scopul de a pune în evidență fenomenele care apar în timpul ciocnirii barelor, respectiv propagarea undelor longitudinale prin bare, urmărindu-se deplasarea undei incidente și a celei reflectate prin bară și determinarea, teoretică și experimentală, a timpului de contact dintre bare.

Lucrarea conține cinci capitole și o Anexă.

În *Capitolul întâi* este prezentată o descriere cronologică a studiului fenomenelor de impact dintre corpuri, începând cu teoria clasică a ciocnirii, continuând cu teoria deformațiilor locale de contact a lui Hertz, cu teoria ciocnirii corpurilor elastice și încheind cu teoria mixtă, care ține cont atât de deformațiile locale de contact, cât și de deformațiile de ansamblu care apar la ciocnire. Fenomenele de ciocnire între structuri cilindrice au fost studiate pe baza fenomenului de propagare a undelor în corpuri elastice sau vâscoelastice, încă din secolul al IX-lea și continuă și în prezent, fiind propuse, spre comparație, diferite metode, analitice sau experimentale. În același capitol sunt prezentate elementele garniturii de foraj și solicitările care apar în timpul forajului, cu referire inclusiv la solicitarea de ciocnire coaxială a prăjinilor de foraj.

Capitolul al doilea descrie modele dinamice pentru studiul ciocnirii corpurilor solide deformabile, în special a celor de tipul barelor cilindrice, pornind de la stabilirea unor ipoteze fundamentale de calcul, necesare pentru simplificarea și generalizarea fenomenelor, dar și pentru accesibilitatea calculelor matematice.

Sunt prezentate apoi caracteristicile mediului solid, ținând cont de faptul că fenomenele de ciocnire a corpurilor nu pot fi explicate prin metodele teoriei clasice a ciocnirii, care consideră corpurile a fi rigide, dar pot fi înțelese pe baza fenomenelor de propagare a undelor, atunci când corpurile au o formă suficient de simplă. Pentru modelele de solide liniar-vâscoelastice (Kelvin-Voight, Maxwell, solidul standard liniar) sunt precizate relațiile între tensiuni și deformații. Teoria elasticității oferă bazele pentru studiul undelor în solidele elastice. Sunt deduse ecuațiile de propagare a undei, prin combinarea relațiilor tridimensionale între tensiuni și deformații, a condițiilor de compatibilitate și a ecuațiilor de mișcare. De asemenea, sunt prezentate câteva modalități de soluționare a ecuației undei, insistându-se asupra teoriei unidimensionale de propagare a undei în bare elastice, precum și aplicarea acestei teorii în cazul ciocnirii longitudinale coliniare a două bare și în cazul ciocnirii unei bare elastice cu o masă rigidă.

Capitolul al treilea prezintă o metodă aproximativă de calcul a sistemelor de ciocnire alcătuite din bare cilindrice având dimensiunile longitudinale mult mai mari decât cele transversale, cu ajutorul teoriei de propagare a undelor în medii elastice, dar fără a necesita soluționarea ecuației undei. Metoda pornește de la legile fundamentale ale dinamicii și principiile de bază ale teoriei ciocnirii plane și constă în rezolvarea unor sisteme de ecuații liniare, cu ajutorul cărora se pot determina cu precizie vitezele, tensiunile și deformațiile în orice secțiune transversală prin care trece unda de deformație, la un moment dat. Sunt studiate modele de ciocnire formate din bare cilindrice de lungime infinită sau finită, cu ajutorul unor diagrame de propagare a undelor longitudinale prin bare, după care se trece la calculul parametrilor de ciocnire și la reprezentarea lor grafică, folosind programe de calcul în limbaj MATLAB.

Capitolul patru este dedicat studiului experimental al ciocnirii și prezintă un stand de încercări cu ajutorul căruia să se poată valida rezultatele teoretice privind ciocnirea coaxială a două bare cilindrice, de lungimi finite, pe baza metodei aproximative descrise în Capitolul 3, prin analiza fenomenului de propagare a undelor longitudinale prin bare. Prin acest experiment se urmărește punerea în

evidență a undelor de deformație în barele cilindrice supuse ciocnirii, precum și determinarea timpului de ciocnire.

Capitolul cinci prezintă conținutul și concluziile generale ale tezei, pe capitole, precum și un extras al contribuțiilor personale ale autoarei tezei, în domeniul teoretic și experimental.

ANEXA conține o serie de programe de calcul utilizate pentru construcția unor diagrame și pentru studiul experimental efectuat.

Lucrarea se extinde pe 271 pagini și conține:

- 347 ecuații matematice;
- 95 figuri ilustrative și grafice;
- 10 tabele;
- 8 anexe;
- 164 titluri bibliografice.

1.2. Scurt istoric privind studiul fenomenelor de ciocnire și de propagare a undei longitudinale

- Ciocnirea corpurilor solide reprezintă un fenomen complex, studiat începând cu *Galileo Galilei* (1638). Conform teoriei clasice a ciocnirii, corpurile care se ciocnesc sunt perfect rigide, iar procesul de ciocnire are loc, practic, instantaneu. Se poate pune în evidență astfel doar rezultatul șocului (modificarea vitezelor corpurilor supuse ciocnirii), fără a fi stabilite legile interne ale ciocnirii (durata ciocnirii, forțele de contact, deformațiile) [114].
- *Newton* (1848) ne oferă, pe lângă legile mișcării, și noțiunea de coeficient de restituire, foarte răspândită și în prezent [56].
- *H. Hertz* (1895) a stabilit, cu ajutorul teoriei deformațiilor locale de contact ale corpurilor elastice, valoarea forței de contact și a timpului de ciocnire, în funcție de masele și vitezele corpurilor, precum și de geometria acestora în zonele învecinate punctului de contact. Hertz a neglijat forțele de inerție ale particulelor corpurilor în timpul mișcării lor condiționate de deformația locală, precum și deformația particulelor din corp, mai îndepărtate de suprafața de contact. Teoria lui Hertz se poate aplica corpurilor masive scurte aflate în mișcare, de exemplu cazul ciocnirii a două sfere, presupunând că sferile sunt corpuri rigide, cu excepția zonei din jurul punctului de contact, considerată elastică. Hertz a calculat deformațiile locale de contact pentru corpuri omogene, izotropice, având suprafețe sferice, într-o aproximație statică, liniară și elastică; pentru aceste condiții statice s-au stabilit relațiile dintre suma deplasărilor din punctul de contact în direcția deplasării comune și presiunea totală rezultantă ([77], [72], [65]).
- De această problemă s-au preocupat, de asemenea, și *A. E. Love* (1944), *L. D. Landau și E. M. Lifshitz* (1959), *J. F. Bell* (1973), *B. Leroy* (1985) ([62], [99]).

- *A. N. Dinnik* (1909) a verificat experimental teoria lui Hertz, obținând rezultate satisfăcătoare.
- *J. P. Andrews* (1930) dezvoltă teoria deformației a lui Hertz, în cazul ciocnirii plastice a sferelor, modelul său conducând la diminuarea coeficientului de restituire odată cu viteza de ciocnire [62].
- *I. I. Ștaerman* (1949) rezolvă problema statică generalizată a contactului strâns dintre corpuri, iar *N. A. Kilcevschi* (1949) rezolvă problema dinamică a ciocnirii corpurilor al căror contact inițial este mult mai strâns decât în problema lui Hertz [114].
- Experimente mai recente, ținând cont de teoria lui Hertz, au realizat *R. Cross* (1999), *D. Gugan* (2000), *R. Hessel* (2006) ([35], [62], [70]).

Pe lângă teoria lui Hertz, a ciocnirii corpurilor pe baza deformațiilor locale de contact, s-a dezvoltat și teoria ciocnirii corpurilor elastice, care neglijează deformațiile locale și ține cont numai de deformațiile generale ale corpurilor.

- *Navier* (1823) se ocupă pentru prima dată de această teorie, aplicând-o la ciocnirea longitudinală a barelor având secțiune constantă și obținând soluțiile sub formă de serii trigonometrice, dar fără a putea determina eforturile unitare.
- Vibrațiile produse în bare elastice supuse impactului longitudinal au fost studiate inițial de *Navier*, *Bernoulli*, *Poisson*. Ulterior s-au dezvoltat cercetări privind atât vibrațiile longitudinale cât și cele transversale care apar în urma șocului longitudinal în bare lungi ([41], [143], [12]).
- *Young* (1807) și *Cox* (1849) au obținut relații simple pentru cazul încovoierii barelor [56].
- *Barré de Saint-Venant* (1867) și *Boussinescq* (1885) rezolvă problema ciocnirii longitudinale a barelor cu ajutorul funcțiilor discontinue, studiind propagarea undelor de deformație în lungul barei. Teoria ondulatorie a ciocnirii elastice, fără considerarea deformațiilor locale, necesită calcule destul de laborioase, dar care pot fi eliminate folosind

metoda analitică - cu ajutorul funcțiilor discontinue [vezi paragraful 2.4] sau metoda grafică a caracteristicilor [114].

Teoria lui Saint-Venant a fost verificată, mai târziu, pentru corpuri subțiri (bare, plăci) [3] sau folosind tehnici moderne, cu elemente finite, în cazul impactului axial în bare flexibile [49].

Verificarea experimentală a teoriei ondulatorii a ciocnirii a fost făcută de către o serie de cercetători, fără a se obține însă rezultate perfect satisfăcătoare, datorită ipotezelor care au stat la baza acestei teorii:

Ipoteza I: Secțiunile sunt plane și se neglijează deplasările transversale ale particulelor barei. Datorită acestor aproximări apar abateri, vizibile în apropierea frontului undei, care se pierde treptat. Abaterile se manifestă cu atât mai mult cu cât raportul dintre diametrul și lungimea barei este mai mare.

Ipoteza II: Suprafețele de contact sunt plane paralele. În realitate apar neregularități inevitabile pe suprafețele frontale ale barelor care se ciocnesc sau poate să existe un strat de ulei între acestea. Din cauza neregularităților, efortul de contact nu crește instantaneu, ci într-un interval de timp, necesar deformării acestor imperfecțiuni. Acest interval de timp este cu atât mai mic cu cât este mai mare viteza de ciocnire. Timpul de propagare a undei de deformare în bară nu depinde de viteza de ciocnire; de aceea, abaterile ciocnirii longitudinale de la teoria ondulatorie scad odată cu creșterea vitezei de ciocnire (în cazul în care viteza de ciocnire nu atinge valori care să producă deformații plastice) [114].

Teoria ciocnirii longitudinale se poate aplica pentru calculul arcului supus la ciocnire, înlocuindu-l cu o grindă echivalentă. Deși această echivalare are un caracter aproximativ, rezultatele experimentale sunt mai apropiate de cele teoretice decât în cazul barelor, datorită faptului că deformațiile locale joacă un rol mai mic.

Neajunsurile teoriei care ține cont numai de deformațiile locale și le neglijează pe cele generale, dar și ale teoriei care ia în calcul deformațiile generale, neglijându-le pe cele locale, au condus la elaborarea unei teorii mixte, care consideră ambele tipuri de deformații (locale și de ansamblu).

- *J. E. Sears* (1908) a elaborat o astfel de teorie, pentru cazul ciocnirii longitudinale a barelor având capete sferice. El a admis prima ipoteză – cea a suprafețelor plane – pentru întreaga bară, cu excepția unor secțiuni aflate la capătul barei. Pentru aceste secțiuni inițiale de contact se calculează deformațiile cu relațiile lui Hertz, iar pentru celelalte (care sunt plane) se aplică teoria undelor. S-au obținut astfel rezultate experimentale apropiate de cele teoretice.
- *S. P. Timoșenko* (1913) a elaborat o teorie asemănătoare cu cea a lui Sears, pentru cazul ciocnirii transversale a unei bare cu o sferă [56]. Mai târziu, *J. Lee* analizează propagarea undelor de încovoiere folosind teoria lui Timoșenko [94].

Aproximațiile folosite în problemele de ciocnire pe baza propagării undei au fost comparate cu soluțiile riguroase ale teoriei elasticității. *J. W. S. Rayleigh* (1945) adaugă ecuației unidimensionale a undei longitudinale în bare, unele corecții pentru inerția laterală, iar *S. P. Timoșenko* (1921) adaugă ecuației undei termeni care țin cont de efectele inerției de rotație și ale forfecării.

În general, metodele de calcul la ciocnire sunt aproximative și de aceea sunt necesare verificări experimentale. Studiul experimental al ciocnirii este foarte laborios, mai ales datorită faptului că durata ciocnirii este foarte mică (de ordinul 10^{-4} ... 10^{-2} s), ceea ce presupune existența unei aparaturi de înaltă precizie și fidelitate, care să surprindă cu exactitate fenomene desfășurate în câteva fracțiuni de secundă. Pentru calculul parametrilor care apar la ciocnire (deplasare, forță percutantă, deformație, timp de ciocnire) se pot folosi diferite metode experimentale (metoda fotografierii, metoda fotoelastică, metoda electrică cu ajutorul traductoarelor rezistive, etc.).

Fenomenul de propagare a undelor în bare elastice și vâscoelastice este întâlnit în numeroase aplicații referitoare la studiul ciocnirilor și ruperilor cauzate de valori mari ale deformațiilor, precum și la caracterizarea comportării dinamice a materialelor vâscoelastice. În cazul materialelor vâscoelastice, viteza de fază crește odată cu creșterea frecvenței. De aceea, când un impuls de deformație se

deplasează de-a lungul barei, componentele de frecvență înaltă se propagă mai repede decât componentele de frecvență scăzută, conducând la dispersia impulsului. Acest fenomen conduce deseori la dispersia vâscoelastică, cât și la dispersia materiei. În plus, pentru frecvențe în care lungimea undei este de același ordin de mărime cu diametrul barei, dispersiile geometrice dispar. Deci, sunt posibile atât dispersia geometrică, cât și cea materială în barele vâscoelastice. Deoarece analiza dispersiei geometrice în bare vâscoelastice nu este încă destul de dezvoltată, este necesară asigurarea că analiza unidimensională a undei este destul de precisă pentru rezultatele urmărite. În general, acest lucru necesită folosirea barelor cu diametre mici și limitează domeniul de frecvență folosit astfel încât lungimea undei să fie întotdeauna mult mai mare decât diametrul barei [11].

- Descrierea analitică a fenomenului de propagare a undelor longitudinale în structuri cilindrice a fost dezvoltată independent de doi cercetători, *L. Pochhammer* (1876) și *C. Chree* (1889), care au formulat ecuațiile și soluțiile pentru propagarea undei într-o bară elastică, de formă cilindrică, semiinfinită, liberă la capete. Pochhammer și Chree prezintă de fapt forma soluției ecuației undei dar nu includ calculul rădăcinilor ecuațiilor de frecvență. Au fost dezvoltate o serie de modele analitice în vederea soluționării acestei ecuații.
- *Bertram Hopkinson* (1914) a introdus o tehnică ingenioasă pentru a determina forma impulsurilor cauzate de impactul cu proiectile sau a încărcăturilor explozive asupra capătului unei bare lungi și subțiri, pe baza fenomenului de propagare a undei longitudinale în bară. Deoarece el a inițiat studiile pentru determinarea formei impulsurilor care traversează barele, mecanismul - constând într-o bară lungă, o epruvetă cilindrică, de lungime mică, ambele din oțel, prin care se transmite un impuls de forță unui traductor de forță - a devenit cunoscut sub numele de „bară de presiune Hopkinson” („Hopkinson pressure bar”) ([85], [53]).

- *Dennison Bancroft* (1941) a calculat primele trei rădăcini (moduri) ale ecuației de frecvență a lui Pochhammer, în cazul unei bare elastice și a stabilit o relație între viteza de fază și numărul de undă ([11], [93], [85]).
- *G. E. Hudson* (1943) confirmă unele rezultate ale lui Bancroft;
- *R. M. Davies* (1948) dezvoltă un studiu amănunțit, teoretic și experimental, al propagării undei în bare cilindrice. Totodată, descrie o metodă electrică pentru stabilirea dependenței între tensiune și timp, în cazul barelor supuse la tensiuni mari, pe durată scurtă (după metoda lui Hopkinson). El afirmă existența unei infinități de soluții în cazul ecuației Pochhammer – Chree și calculează primele trei; fiecare soluție corespunde unui mod de propagare [37]. De asemenea, arată că soluțiile Pochhammer – Chree nu sunt exacte pentru o bară de lungime finită, dar sunt suficient de apropiate de cele exacte, în cele mai multe cazuri [11]. Totuși, este evidentă o dispersie semnificativă a semnalului obținut. Davies folosește însumarea frecvențelor pentru a calcula semnalul dispersat [93]. Folosind rezultatele lui Davies, s-au propus mai târziu, teorii de analiză numerică și transformări integrale pentru studiul undelor de șoc în bare circulare, elastice [10].
- *H. Kolsky* (1949), dezvoltă cercetările experimentale privind comportamentul dinamic al materialelor supuse compresiunii, folosind teoria propagării undelor în bare, adăugând încă o bară de presiune Hopkinson dispozitivului inițial și așezând epruveta între cele două bare (noul dispozitiv a fost denumit „bară de presiune Hopkinson divizată” („split Hopkinson pressure bar”) sau „bară Kolsky”) ([85], [53]). Acest dispozitiv este aplicat și în prezent într-o serie de cercetări experimentale, pentru a determina caracteristicile elastice ale materialelor [85] sau propagarea deformației în probe elastice supuse alungirii [131], dar și pentru calibrarea dinamică a traductoarelor de forță [50].
- *C. W. Curtis* (1954), *G. Fox & C. W. Curtis* (1958), *J. Miklowitz & C. R. Nisewanger* (1957) au continuat cercetările lui Davies de soluționare a

ecuației Pochhammer – Chree și au pus experimental în evidență existența modurilor de propagare ([111], [107]);

Cele mai multe studii teoretice și experimentale referitoare la propagarea undelor și impulsurilor în bare vâscoelastice s-au limitat la cazul unidimensional, neglijându-se astfel dispersia geometrică.

- *H. Kolsky* (1956, 1976) se numără printre primii cercetători care au studiat propagarea unor impulsuri mecanice scurte prin bare polimerice. Pe baza analizei unidimensionale, el a folosit forma impulsurilor pentru a determina viteza de fază și amortizarea ca o funcție de frecvență [11].
- *J. Zemanek* (1972) a reușit, printr-o metodă simplă, să măsoare până la șase moduri simetrice și antisimetrice într-o bară elastică, de formă cilindrică, măsurând frecvențele undelor staționare [159].
- *B. Lundberg și R. H. Blanc* (1988), *R. H. Blanc* (1993) au folosit impulsuri tranzitorii și tehnici de transformare Fourier pentru a măsura viteza de fază ([112], [11]).

În multe cazuri, mai ales când se iau în considerare frecvențe mai înalte, soluțiile unidimensionale nu mai sunt adecvate deoarece lungimea de undă la frecvențe mai înalte poate fi de același ordin sau mai mică decât diametrul barei.

- *G. A. Coquin* (1964) găsește ecuațiile de bază și soluțiile pentru propagarea unei unde armonice într-o bară vâscoelastică, infinită, folosind modelul Voigt. Din păcate, așa cum arăta și Kolsky, niciunul din modelele Voigt sau Maxwell nu descriu în mod adecvat comportarea polimerilor reali [11].
- *H. Zhao și G. Gary* (1995) extind soluțiile Pochhammer – Chree corespunzătoare barelor cilindrice elastice, la bare vâscoelastice. Ei au aratat că în cazul propagării undelor armonice într-o bară infinită, folosind transformări Fourier, soluțiile ecuației de propagare și ale celei de frecvență sunt identice cu cele corespunzătoare cazului elastic, exceptând faptul că modulul și ceilalți parametri sunt complecși. De asemenea, au propus corecții pentru dispersia geometrică [162].

- *C. Bacon* (1999) propune un algoritm de rezolvare, pe baza relațiilor obținute de Zhao și Gary, folosind metoda de separare a undelor [9], [161].
- *R. Othman* (2001) folosește metoda de separare a undelor, în cazul barelor elastice și vâscoelastice, ținând cont și de efectele dispersiei; metode asemănătoare au propus și *Hillstrom* (2000) și *Collins & Vasudev* (2001) ([112], [71], [25], [29]). Tehnici de corectare a dispersiei în problemele de propagare a undei au fost introduse ulterior și de alți cercetători, folosind funcții analitice [154], elemente finite [91], analiza spectrelor de frecvență [146] sau alte metode aproximative [57].

Studiul fenomenului de propagare a undei longitudinale continuă să preocupe o serie de cercetători, care elaborează teorii noi, comparând rezultatele obținute cu cele ale teoriei Pochhammer-Chree ([5], [101], [127], [147]). S-au făcut studii privind teoria propagării undei în bare elastice ([90], [60], [58], [2], [162], [18], [19],[74], [75], [76]), în bare vâscoelastice [11], în bare elastice răsucite [96], în straturi subțiri [46], în corpuri elastice neomogene [120].

De asemenea, problema șocului longitudinal s-a studiat pentru diverse corpuri, ca de exemplu: bare cilindrice semiinfinite și tuburi ([87], [123]), stâlpi ([89], [152]), materiale cu pori (în care unda plană se propagă asemănător cu cea longitudinală în bare cilindrice) [155], bare cu modificări bruște de secțiune [125], bare de lungime finită [119], bare cilindrice groase [149], impactul barelor subțiri cu o masă rigidă ([73], [124]). S-au făcut comparații între ciocnirea barelor și cea a bilelor [7]. Pe baza studierii propagării undelor în bare se pot determina o serie de caracteristici dinamice ale corpurilor (forța normală și viteza particulei, tensiunea, deformația, deplasarea) într-o secțiune oarecare a unei bare elastice [102], frecvențele de rezonanță, cunoscând caracteristicile materialului barei [117], viteza de propagare a sunetului [51], precum și coeficientul de restituire la ciocnire ([126], [135]). Pentru determinarea unor asemenea caracteristici este utilă studierea undei reflectate ([58], [43], [141], [138], [145], [30], [69]).

1.3. Efecte dinamice între elementele garniturii de foraj

În tehnică, noțiunea de „foraj” semnifică totalitatea lucrărilor care se execută la suprafață și în scoarța pământului pentru a identifica și deschide prin sonde zăcămintele de minerale utile [92].

Sondele sunt forate prin metode mecanice, în urma cărora roca este dislocată din masivul geologic, sub formă de așchii sau fragmente. Detritusul format (roca dislocată de sapă) este evacuat de fluidul circulat în sondă [104].

Elementul principal prin intermediul căruia se efectuează procesele de săpare este garnitura de foraj.

Prin *garnitură de foraj* se înțelege ansamblul de țevi, înșurubate între ele, care fac legătura între elementul de dislocare (sapa) și instalația de suprafață. Elementele componente ale acestui ansamblu se numesc *prăjini*.

În cazul forajului cu masă rotativă sau cu cap hidraulic motor, garnitura de prăjini reprezintă arborele de transmisie a mișcării de rotație de la suprafață la sapă; prin intermediul ei se transmite energia necesară dislocării rocii din talpa sondei.

La forajul cu motor de fund, amplasat deasupra sapei, garnitura de prăjini nu se rotește, dar ea preia momentul reactiv al motorului și îl transmite prin frecare pereților sondei. Dacă frecările nu sunt suficient de mari ca să preia momentul reactiv (în cazul sondelor puțin adânci) garnitura trebuie blocată la suprafață. În caz contrar, ea se rotește spre stânga și sapa rămâne nemișcată.

Garnitura de foraj formează un dublu canal de circulație a fluidului de spălare și evacuare a detritusului dislocat de sapă: fluidul este pompat prin interiorul prăjinilor spre talpă și iese înapoi la suprafață prin spațiul inelar format de garnitură cu pereții sondei.

Dacă se folosește un motor de fund hidraulic, fluidul de foraj pompat prin prăjini transmite energia necesară pentru antrenarea sapei.

Pentru ca sapa să avanseze, ea trebuie rotită și apăsată pe talpa sondei. Apăsarea axială este creată lăsând pe sapă o parte din greutatea garniturii. La

instalații de mică adâncime (sondeze) prin intermediul garniturii se transmite de la suprafață apăsarea axială creată prin mijloace hidraulice sau mecanice.

În afara forajului propriu-zis, cu ajutorul garniturii de prăjini se execută în sonde și alte operații: carotaj mecanic, lărgirea găurii de sondă, controlul găurii de sondă, etc. [104]

O garnitură de foraj este prezentată schematic în figura 1.1 [121].

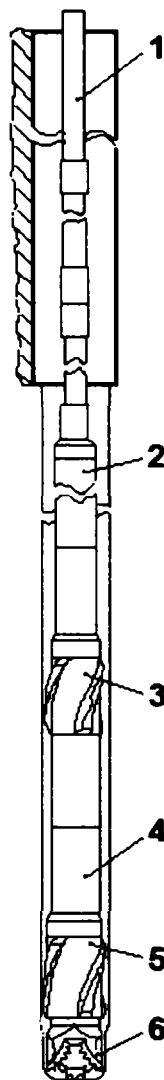


Figura 1.1. Garnitură de foraj

De prăjina pătrată sunt atașate prin înșurubare, pe rând, pe măsură ce crește adâncimea găurii, prăjinile de foraj cilindrice (1), care sunt țevi de oțel filetate la ambele capete, de diferite diametre (în funcție de diametrul și adâncimea găurii de sondă), cu lungimea de 9 m. În partea inferioară sunt atașate două prăjini grele (2), stabilizatorul superior (3), alte două prăjini grele (4) și stabilizatorul inferior (5). Stabilizatoarele (3) și (5) sunt de fapt freze cilindrice care au rolul de a uniformiza

diametrul găurii săpate și de a atenua vibrațiile garniturii de foraj, pentru a păstra direcția de înaintare a sapei (6), atașată de stabilizatorul inferior. Prăjinile grele sunt țevi de oțel cu pereți groși, cu greutate și rigiditate mare, având rolul de a asigura rigiditatea garniturii în apropierea sapei și greutatea necesară sfărâmării rocii. Sapa de foraj este prevăzută cu trei roți conice, având fiecare câteva rânduri de dinți, care se pot roti liber, fiind fixate în consolă în lagăre de rostogolire (cu rulmenți).

Într-o garnitură de foraj mai pot fi întâlnite reducții și racorduri de legătură (fac legătura între două prăjini cu filet diferit sau între prăjini și sapă), amortizoare de vibrații (se montează deasupra sapei pentru a proteja garnitura de foraj de vibrațiile periculoase ce iau naștere atunci când se forează în roci tari), geale de foraj (creează șocuri în garnitură pentru eliberarea ei dacă aceasta este înțepenită în gaura de sondă sub geală), etc.

Solicitările garniturii de foraj

Elementele componente ale garniturii de foraj sunt supuse la o stare de solicitare complexă, cu un accentuat caracter variabil. Natura și mărimea solicitărilor sunt determinate de operația executată în sondă, regimul de lucru, metoda de foraj, adâncimea și diametrul sondei, proprietățile rocilor traversate, etc. [104].

Principalele solicitări la care sunt supuse diferitele elemente ale garniturii de foraj se referă la [8]: tracțiune, torsiune, presiune interioară, presiune exterioară, solicitări combinate (tracțiune – torsiune, tracțiune – presiune), solicitări dinamice – forte de inerție, șocuri și vibrații.

În timpul forajului practic toate solicitările au un caracter variabil, cauzat de lucrul neuniform al sapei pe talpă, rotirea garniturii și pulsațiile pompelor de noroi.

Deoarece lungimea garniturilor de foraj este foarte mare în raport cu dimensiunile transversale, aspectul fenomenologic principal, corespunzător specificului proceselor reale de lucru ale garniturilor, este asociat stării de instabilitate [92]. Aceasta este provocată de forțele de compresiune, forțele

centrifuge create prin rotire, momentul de torsiune, presiunea interioară și circulația fluidului de foraj.

- Solicitarea la tracțiune și compresiune:

Această solicitare este creată de greutatea proprie a prăjinilor, greutatea ansamblurilor introduse în sondă, reacțiunea tălpii în timpul forajului, forțele de frecare cu pereții și cu noroiul din sondă, forțele de presiune create de prezența și circulația noroiului, etc.

- Solicitarea la torsiune:

Garnitura de foraj este solicitată la torsiune în procesul de foraj sau de carotaj mecanic, la frezarea dopurilor de ciment sau a diverselor scule nerecuperabile rămase în sondă, când se încearcă degajarea unei garnituri prinse prin răsucire, în cursul unei instrumentații.

- Solicitarea la încovoiere:

Garnitura este solicitată la încovoiere când sonda este curbată, când își pierde, în timpul lucrului, forma rectilinie de echilibru stabil și când este supusă la vibrații transversale.

- Solicitarea la presiune interioară și exterioară:

De-a lungul garniturii de foraj, presiunea din interior și cea din exterior nu sunt uniforme și, de obicei, nici egale. Acestea sunt determinate de înălțimea și densitatea coloanelor de lichid, de presiunea aplicată la suprafață și de căderile de presiune de-a lungul circuitului.

- Alungirea garniturii de foraj:

Garnitura de foraj suferă alungiri sub acțiunea greutatei și a temperaturii ridicate. Datorită lungimii mari a garniturii, alungirea ei în sonde adânci este semnificativă.

- Stabilitatea garniturii de foraj:

O garnitură de foraj cu lungimea de 3000 m și diametrul de 127 mm (5 inch) este echivalentă, ca zveltețe, cu un fir de păr cu lungimea de 5 m și diametrul de 0,1 mm. De aceea, în timpul lucrului, garnitura își pierde cu ușurință forma de

echilibru inițială, rectilie. Uneori, când prăjinile sunt uzate, subțiate, ele își pot pierde și forma transversală circulară, turtindu-se sau răsucindu-se.

- Solicitări dinamice:

În afara solicitărilor statice, garnitura de foraj este solicitată și dinamic: la forțe de inerție, șocuri și vibrații.

a). *Forțele de inerție* se manifestă atunci când garnitura are o mișcare accelerată, dar fără discontinuități de viteză. În general, forțele de inerție nu sunt periculoase, deoarece la adâncimi mici, rezistența garniturii este suficient de mare, iar la adâncimi mari, vitezele de ridicare și de coborâre se micșorează, frânarea este mai lentă, reducându-se ponderea forțelor de inerție. De asemenea, din categoria forțelor de inerție fac parte și forțele centrifuge ce iau naștere la rotirea garniturii cu turație uniformă, având și acestea o pondere redusă, datorită diametrului mic al prăjinilor.

b). *Șocurile* sunt provocate de variațiile bruște de viteză. Ele pot fi axiale sau de torsiune.

Șocurile axiale se produc atunci când se încearcă degajarea garniturii prinse prin bătaie cu geala [1]. Accidental, un șoc puternic se manifestă când o garnitură prinsă și tracționată se desprinde brusc. Același lucru se întâmplă și când se smulge un cep sau o sculă de prindere, când se rupe o prăjină. Când garnitura se sprijină în gaura de sondă, la introducerea, pe diferite praguri, elevatorul coboară sub mufă și apoi garnitura scapă brusc: mufa lovește elevatorul și în garnitură ia naștere un șoc. Poate să apară un șoc periculos și datorită unei frânări bruște.

Șocurile de torsiune apar atunci când sapa se înțepenește sau se desprinde brusc în timpul forajului, sau când, prin răsucire, garnitura scapă brusc dintr-o prindere.

Șocurile produc tensiuni locale foarte mari, însoțite de deformații remanente. Ele sunt urmate de vibrații, ce se amortizează destul de repede.

Forțele și tensiunile ce iau naștere în cazul șocurilor sunt dificil de evaluat. De obicei, ele se asimilează – pe considerații energetice – cu forțe, respectiv tensiuni statice. Aceste soluții sunt însă aproximative.

De multe ori, mai periculoase sunt unele efecte secundare ale șocurilor. Astfel, o garnitură care scapă dintr-o prindere sau se rupe poate sălta din elevator datorită energiei acumulate, elevatorul se deschide accidental și garnitura scapă în sondă. Când garnitura este prinsă în timpul forajului și apoi scapă brusc, datorită energiei de rotație acumulată, partea inferioară a garniturii se rotește mai repede decât este rotită la suprafață și ea se poate deșuruba.

Un exemplu îl poate constitui oprirea bruscă a garniturii de foraj în timpul manevrei.

Viteza garniturii scade de la o valoare v_0 la zero atunci când este frânată brusc și atunci când scapă pe o înălțime h ($v_0 = \sqrt{2gh}$). Interesează tensiunile maxime care iau naștere și în ce situație acestea devin periculoase. Ele se obțin prin însumarea tensiunilor statice cu cele dinamice provocate de șoc:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{st} + \sigma_d \quad (1.1)$$

Se definește coeficientul dinamic de șoc:

$$\psi_s = \frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} = \frac{F_d}{F_{st}} = \frac{\Delta l_d}{\Delta l_{st}} \quad (1.2)$$

F_{st} reprezintă forța statică, corespunzătoare masei m ce produce șocul, care, aplicată pe direcția de ciocnire, produce deplasarea Δl_{st} ;

F_d reprezintă forța dinamică (echivalentă), care, aplicată static pe aceeași direcție, produce deplasarea Δl_d , egală cu cea produsă de șoc [118].

Rezultă:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{st} + \psi_s \sigma_{st} = (1 + \psi_s) \sigma_{st} \quad (1.3)$$

Coeficientul de șoc se poate determina din ipoteza că întreaga energie cinetică se transformă în energie potențială (se neglijează frecările cu pereții și noroiul din sondă).

Energia cinetică are expresia:

$$E_c = \frac{mv_0^2}{2} \quad (1.4)$$

Energia potențială de deformație în cazul unei bare de lungime l , sollicitată axial de forța dinamică F_d este:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F_d^2}{ES} dz = \frac{\psi_s^2}{2} \int_0^l \frac{F_{st}^2}{ES} dz \quad (1.5)$$

(E = modulul de elasticitate, S = aria secțiunii transversale)

Cazuri particulare:

- garnitură obișnuită, formată din prăjini grele, cu lungimea l_1 , aria S_1 și masa unitară q_1 și prăjini de foraj cu lungimea l_2 , aria S_2 și masa unitară q_2 :

$$E_p = \frac{g^2 \psi_s^2}{2E} \left[\int_0^{l_1} \frac{q_1^2 z^2}{S_1} dz + \int_0^{l_2} \frac{(q_1 l_1 + q_2 z)^2}{S_2} dz \right] =$$

$$= \frac{g^2 \psi_s^2}{6E} \left[\frac{q_1^2 l_1^3}{S_1} + 3 \frac{q_1^2 l_1^2 l_2}{S_2} + 3 \frac{q_1 q_2 l_1 l_2^2}{S_2} + \frac{q_2^2 l_2^3}{S_2} \right] \quad (1.6)$$

- garnitură cu secțiune uniformă, cu lungimea L , aria S și greutatea G :

Din (1.6) pentru $S_1 = S_2 = S$, $l_1 + l_2 = L$, $q_1 = q_2 = q = \frac{m}{L}$, rezultă:

$$E_p = \frac{g^2 \psi_s^2}{6E} \frac{q^2 (l_1 + l_2)^3}{S} = \frac{g^2 \psi_s^2}{6E} \frac{m^2 L^3}{L^2 S} = \frac{\psi_s^2}{6E} \frac{G^2 L}{S}$$

$$E_p = \frac{G^2 \psi_s^2 L}{6ES} \quad (1.7)$$

Egalând expresiile (1.4) și (1.7) pentru energia cinetică și cea potențială în acest caz se poate determina coeficientul dinamic de șoc:

$$\psi^2 = \frac{3mv_0^2 ES}{G^2 L} = \frac{3mv_0^2 ES}{m^2 g^2 L} = \frac{3v_0^2 E S}{g^2 L m} = \frac{3v_0^2 E}{g^2 L \rho L} = \frac{3v_0^2 E}{g^2 L^2 \rho}$$

$$\psi = \frac{v_0}{gL} \sqrt{\frac{3E}{\rho}} \quad (1.8)$$

Garnitura fiind scufundată în noroi, în relațiile (1.6) și (1.7) greutatea sunt afectate de flotabilitate. Prin egalarea tensiunii maxime, din (1.1), cu limita de

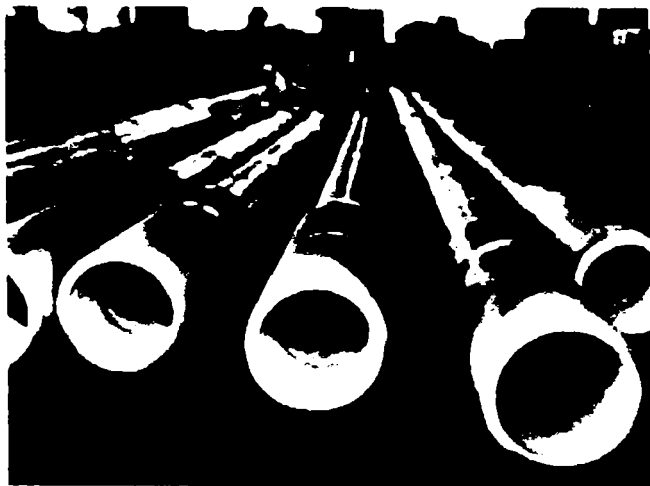
curgere a materialului se poate determina o viteză critică maximă. În condiții dinamice, limita de curgere a materialului este mai mare decât în condiții statice.

Unda de tracțiune provocată de șoc se propagă spre capătul inferior al garniturii și apoi se întoarce ca o undă de compresiune la suprafață. Dacă unda de compresiune o depășește pe cea statică, capătul superior al garniturii poate sălta din pene sau din elevator.

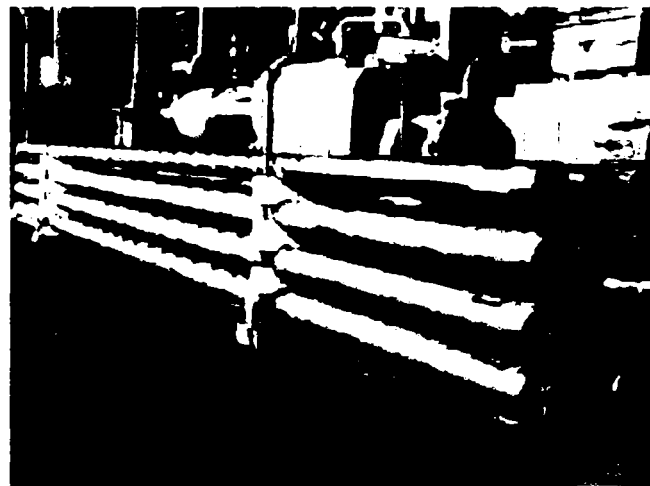
c) *Vibrațiile* reprezintă variații periodice ale deformațiilor sau deplasărilor provocate de variații periodice ale forțelor. În garniturile de foraj apar vibrații și, uneori, acestea sunt foarte severe și periculoase pentru integritatea echipamentului de foraj. Vibrațiile se manifestă mai ales în timpul forajului în roci dure, în conglomerate, sau în perioada manevrelor și conduc la avarierea prăjinilor și a îmbinărilor filetate, precum și la uzura prematură a sapei și prăjinilor.

Vibrațiile care apar în garnitura de foraj pot fi axiale, torsionale, laterale sau compuse. Ele creează tensiuni suplimentare cu caracter dinamic (axiale, tangențiale și de încovoiere).

În figurile 1.2, 1.3 sunt prezentate câteva tipuri de prăjini de foraj.



a)

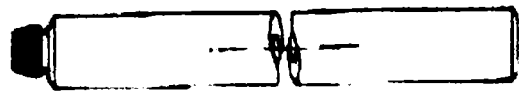


b)

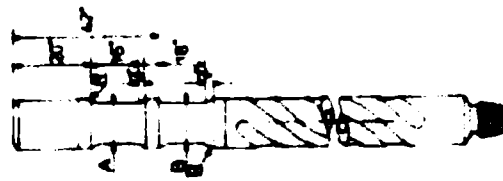


c)

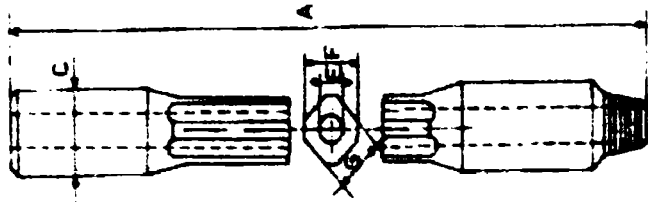
Figura 1.2. Prăjini de foraj



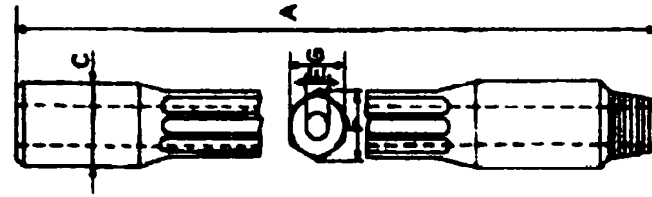
a). Prăjini grele de foraj rotunde



b). Prăjini grele de foraj elicoidale



c). Prăjini de antrenare cu secțiune pătrată



d). Prăjini de antrenare cu secțiune hexagonală

Figura 1.3. Prăjini de foraj

1.4. CONCLUZII

- S-au descris obiectivele tezei:
 - calculul sistemelor de ciocnire formate din bare cilindrice lungi, cu secțiune constantă sau bare formate din tronsoane cu secțiuni diferite, dar având, fiecare, rigiditate constantă Pentru aceasta se folosește o metodă aproximativă, bazată pe fenomenul de propagare a undei longitudinale prin bare, fără a fi necesară soluționarea ecuației undei. Metoda constă în:
 - rezolvarea unor sisteme de ecuații liniare de ordinul întâi, cu ajutorul cărora se pot determina vitezele și tensiunile punctelor materiale situate într-o secțiune oarecare a barei studiate;
 - construirea unei diagrame, care urmărește modul de propagare a undelor prin bare.
 - realizarea unui stand experimental, cu ajutorul căruia se monitorizează propagarea undelor longitudinale prin barele supuse ciocnirii coaxiale și se determină timpul de ciocnire;
 - compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale.
- S-a realizat o descriere succintă a studiului fenomenelor de ciocnire între corpuri, invocând teoria clasică a ciocnirii, teoria deformațiilor locale de contact a lui Hertz, teoria ciocnirii corpurilor elastice și teoria mixtă, care ține cont atât de deformațiile locale de contact, cât și de cele generale. De asemenea, studiul fenomenului de propagare a undelor de deformație ce apar în cazul ciocnirii corpurilor de tipul barelor lungi a fost prezentat în mod cronologic, începând cu cercetări din secolul al IX-lea și până în prezent. S-au făcut trimiteri repetate la surse bibliografice consacrate, dar și de actualitate.
- O aplicație directă a studiului ciocnirii barelor cilindrice lungi este în domeniul forajului minier, în cadrul sondelor de foraj, care au în componență un ansamblu de țevi (prăjini), înșurubate între ele. Acestea

alcătuiesc garnitura de foraj și fac legătura între elementul de dislocare (sapa) și instalația de suprafață. Prăjinile de foraj sunt supuse (pe lângă solicitările principale de tracțiune, torsiune, presiune interioară și exterioară) și la solicitări dinamice, de tipul șocurilor longitudinale, atunci când se încearcă degajarea garniturii de foraj prin bătaie cu geala, când se înțepenește garnitura sau se desprinde brusc în timpul rotirii ori când este scăpată pe o anumită înălțime. Sunt prezentate pe larg elementele garniturii de foraj, cât și solicitările la care acestea sunt supuse.

CAPITOLUL 2

MODELE DINAMICE PENTRU STUDIUL CIOCNIRII CORPURILOR DE TIP BARĂ

2.1. Ipoteze fundamentale

Mecanica solidelor deformabile are la bază unele ipoteze fundamentale, care permit simplificarea și generalizarea fenomenelor, precum și accesibilitatea calculului matematic. Aceste ipoteze sunt necesare pentru precizarea modelului matematic ce urmează a fi studiat, cât și pentru cunoașterea posibilităților de aplicare practică a rezultatelor obținute. Se pot face astfel următoarele ipoteze fundamentale de calcul:

1. Corpul solid (considerat în repaus față de un sistem de referință presupus fix), este supus acțiunii unor sarcini exterioare în echilibru. În cazul corpului aflat în mișcare, se mai introduc și forțele de inerție, deci sarcinile exterioare sunt în echilibru dinamic. Fiecare parte a corpului și orice element infinitezimal detașat din corp sunt supuse unor sarcini în echilibru. Această ipoteză servește pentru scrierea ecuațiilor cu derivate parțiale pe care le verifică tensiunile din interiorul corpului și pentru a scrie condițiile la limită.
2. Corpul solid se consideră un mediu continuu (fără goluri sau crăpături microscopice interioare). Această ipoteză asigură, din punct de vedere fizic, o descriere fenomenologică a mediului continuu studiat și, din punct de vedere matematic, permite descrierea corpurilor cu ajutorul unui sistem de funcții continue (tensiuni și deformații), utilizându-se calculul integral și diferențial.
3. Corpul solid este izotrop, ceea ce înseamnă că are aceleași proprietăți fizice și mecanice pe orice direcție în vecinătatea fiecărui punct al său. Pe baza acestei proprietăți se poate exprima relația între tensiuni și deformațiile specifice.

4. Corpul solid este omogen, deci are aceleași proprietăți în fiecare punct al său. Pe baza acestei proprietăți, toți coeficienții mecanici ai materialului, ce apar în legile constitutive, sunt constanți în raport cu variabilele spațiale.
5. Corpul este perfect elastic. Sub acțiunea unor forțe exterioare corpul se deformează. Deformația solidului elastic se efectuează reversibil și fără rezistențe pasive apreciabile. Forma deformată a corpului este influențată numai de sarcinile exterioare ce acționează într-un anumit moment asupra sa. Între tensiuni și deformații specifice există o legătură biunivocă, exprimată printr-o relație liniară, numită Legea lui Hooke. În realitate, corpurile prezintă fie fenomenul de histerezis (revenirea la starea inițială are loc printr-un ciclu de rezistențe pasive), fie fenomenul de ecruisare (deformare permanentă), fie fenomenul de fluaj (deformație care evoluează în timp, în cazul unei sarcini constante).
6. Corpul solid supus acțiunii sarcinilor exterioare suferă deformații și deplasări foarte mici în raport cu dimensiunile sale, adică deformațiile specifice se neglijează în raport cu unitatea. Din punct de vedere geometric termenii de ordinul al doilea sunt neglijabili în raport cu cei de ordinul întâi, iar din punct de vedere mecanic, se pot scrie ecuațiile de echilibru static sau dinamic pe forma nedeformată a corpului.
7. Corpul studiat nu prezintă tensiuni inițiale. Aceste tensiuni apar, în general, din cauza unor deformații inițiale ale materialului, rezultate la prelucrare sau la montaj.

2.2. Caracteristicile mediului solid

În tratarea fenomenelor de impact din punctul de vedere al teoriei clasice a ciocnirii, obiectele aflate în coliziune pot fi considerate în esență ca și puncte materiale. Se presupune că elementele fiecărui corp sunt unite în mod rigid și astfel, vor fi supuse instantaneu aceleiași modificări de mișcare, ca rezultat al impactului. În realitate, perturbația produsă din punctul de contact se propagă înspre interiorul corpurilor cu o viteză finită, iar reflexia acesteia pe suprafețele de frontieră produce oscilații sau vibrații în corpuri. Astfel, nu toate secțiunile corpurilor sunt supuse în mod simultan aceleiași forțe de acțiune. Deformațiile locale tranzitorii și tensiunile create de această perturbație nu pot fi precizate prin metodele teoriei clasice a ciocnirii, dar pot fi determinate printr-o examinare a fenomenelor de undă, în cazul în care corpurile au o formă suficient de simplă. În mod uzual, procesele de ciocnire pot fi longitudinale, transversale sau torsionale, și depind de natura undei predominante generate.

În afara cazului când suprafețele de contact sunt perfect plane – condiție practic greu de obținut – se vor produce deformații suplimentare în vecinătatea punctului de contact. Această caracteristică poate să implice o fracțiune însemnată din energia cinetică. Dezvoltarea teoretică prezentată în continuare se ocupă exclusiv de transferul de energie mecanică, neglijând efecte cum ar fi lumina, căldura și sunetul produse în timpul ciocnirii. Această omisiune este justificată, din moment ce acești factori iau în considerare doar o mică parte din energia totală a procesului. În mod evident, energia necesară pentru a produce atât deformații locale de contact cât și vibrații este disipată, în cele din urmă, sub formă de căldură.

Prevederile teoriei clasice a ciocnirii generează erori semnificative când o parte importantă din energia totală este transformată în vibrații. În general, acest efect va fi nesemnificativ atunci când perioada de acțiune a forței aplicate, cu alte cuvinte, durata contactului, este mare în comparație cu perioada celei mai mici frecvențe proprii a fiecărui corp. În acest caz, se vor produce reflexii ale undei în

timpul perioadei de contact, iar corpurile pot fi considerate a fi în stare de cvasiechilibru. Acest caz este experimentat la ciocnirea cu viteze relativ mici a două sfere. S-a demonstrat [56] că raportul dintre energia transmisă vibrației și energia totală pentru o astfel de ciocnire este $\frac{1}{50} \frac{v_0}{c_0}$, unde v_0 este viteza de ciocnire

și c_0 este „viteza de propagare a undei în bară” și este dată de:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1)$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal și ρ este densitatea corpului. Pe de altă parte, o cantitate considerabilă de energie este transformată în vibrații, la ciocnirea corpurilor cu frecvențe proprii mici. Astfel de corpuri prezintă, în general, un raport mare între suprafață și volum, ca în cazul grinzilor și barelor subțiri. Aici este neadecvată tratarea corpului ca rigid și ea trebuie înlocuită cu o analiză care să țină cont de efectele vibrațiilor.

Studierea celor mai multe probleme de impact presupune, așadar, o descriere cantitativă a fenomenelor de undă însoțitoare. O astfel de formulare matematică este determinată de geometria corpurilor care se ciocnesc, și de proprietățile fizice care sunt descrise printr-o relație între tensiunea nominală uniaxială și deformația nominală. În regimul micilor deformații acești termeni sunt definiți astfel:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{Z_i}{A_0} \\ p_i &= \frac{F_i}{A_0} = -\sigma_i \\ \varepsilon_i &= \frac{\partial u_i}{\partial i} \\ \varepsilon_i^* &= -\frac{\partial u_i}{\partial i} = -\varepsilon_i \end{aligned} \quad (2.2)$$

unde A_0 este aria secțiunii transversale inițiale, iar Z_i, F_i, u_i reprezintă respectiv forța de întindere, forța de compresiune aplicată și deformația după direcția i ($i = x, y$ sau z).

În general se disting trei categorii de medii după forma relațiilor unidimensionale tensiune – deformație și anume: materiale elastice, vâscoelastice și plastice. În continuare se vor face aprecieri asupra corpurilor elastice și vâscoelastice.

Corpul elastic este privit ca un arc liniar având tensiunea proporțională cu deformația, sau:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.3)$$

Constanta de proporționalitate este modulul de elasticitate E , care s-a demonstrat a fi aproape independent de gradul de solicitare. Multe materiale folosite în inginerie, incluzând majoritatea metalelor, pot fi considerate ca fiind elastice numai dacă tensiunea aplicată nu depășește o anumită valoare critică (limita de curgere), peste care corpul va suferi o deformație permanentă.

Corpurile vâscoelastice sunt reprezentate de o serie de materiale sintetice, cum ar fi polimerii macromoleculari, și sunt caracterizate printr-o relație între tensiune și deformație, dependentă de timp. Se pot realiza modele ale acestor materiale prin combinații adecvate de arcuri și amortizoare. Ultimele introduc un tip de rezistență vâscoasă în circuit, definită prin ecuația:

$$\sigma = c \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (2.4)$$

unde c este o constantă de amortizare.

Fiecare element al oricăruia dintre aceste modele contribuie cu un parametru adițional la ecuația tensiune – deformație. Dintre numeroasele modele postulate cele mai cunoscute sunt solidele Kelvin – Voigt, respectiv Maxwell (cu doi parametri) și solidul standard – liniar (cu trei parametri), care sunt exemplificate în figura 2.1.

Modelul Kelvin – Voigt constă într-un arc liniar (E) și un amortizor liniar (c), legate în paralel; modelul Maxwell este format din aceleași elemente, înseriate; solidul standard liniar constă dintr-un arc liniar (E_1) și un element Maxwell (E_2, c), legate în paralel.

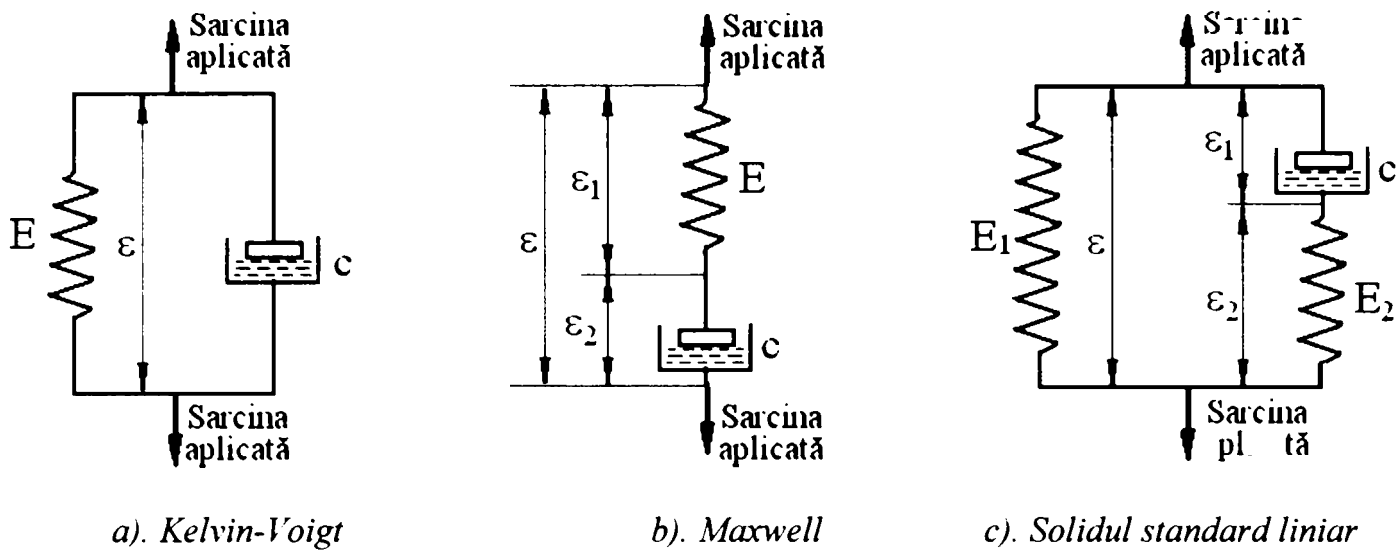


Figura 2.1. Modele de solide liniar – vâscoelastice

Relațiile între tensiuni și deformații, precum și condițiile de echilibru pentru aceste solide sunt:

a). Kelvin – Voigt:

$$\sigma = E\varepsilon + c \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.5)$$

b). Maxwell:

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{c}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} &= c \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \frac{d\sigma}{dt} &= E \frac{d\varepsilon_1}{dt} \\ \sigma &= c \frac{d\varepsilon_2}{dt} \end{aligned} \quad (2.6)$$

c). Solidul standard liniar:

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{c}{E_2} \cdot \frac{d\sigma}{dt} &= E_1\varepsilon + \frac{c}{E_2} (E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma &= E_1\varepsilon + E_2\varepsilon_2 \\ E_2\varepsilon_2 &= c \frac{d\varepsilon_1}{dt} \end{aligned} \quad (2.7)$$

O formă echivalentă pentru relația tensiune – deformație (2.7) este:

$$\sigma = E_1\varepsilon + E_2 \int_0^t e^{-\frac{E_2}{c}(t-\tau)} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.8)$$

și o generalizare a ecuației (8) care ține cont de comportamentul neliniar este:

$$\sigma = f\langle \varepsilon \rangle + \int_0^t \Phi\langle t - \tau \rangle \frac{d\varepsilon\langle \tau \rangle}{d\tau} d\tau \quad (2.9)$$

Ultima relație definește un „solid Boltzmann” și presupune că $\sigma\langle t \rangle$ poate fi exprimată în funcție de deformația instantanee și o integrală care exprimă efectele deformărilor anterioare. Funcția $\Phi\langle t - \tau \rangle$ se poate adesea aproxima prin termenul $Ae^{-B(t-\tau)}$, unde A și B sunt constante.

O tensiune constantă aplicată unui corp vâscoelastic va produce o creștere uniformă a deformației în raport cu timpul, în vreme ce o deformare constantă aplicată va produce, în general, o scădere continuă a tensiunii. Aceste fenomene sunt denumite fluaj, respectiv relaxare. Din ecuațiile (2.5) și (2.6), curbele de fluaj și relaxare pentru solidele Kelvin – Voigt și Maxwell sunt date de:

a). Kelvin – Voigt:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - e^{-\frac{Et}{c}} \right] \quad (2.10)$$

$$\sigma = E\varepsilon_0$$

b). Maxwell:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{c} t \quad (2.11)$$

$$\sigma = E\varepsilon_0 e^{-\frac{Et}{c}}$$

unde σ_0 și ε_0 sunt tensiunea aplicată constant, respectiv deformația.

Există o bogată literatură de specialitate care se ocupă de propagarea undelor în solide, aici fiind menționate doar fenomenele care apar la ciocnire. Există unele dificultăți în soluționarea riguroasă a problemelor de propagare a undei, la ciocnire. Sunt necesare ipoteze simplificatoare pentru rezolvarea matematică, chiar și în cazul corpurilor având forme bine precizate (bare, grinzi, plăci), limitându-se analizele la considerații unidimensionale.

2.3. Ecuațiile generale ale corpului solid deformabil

2.3.1. Starea generală de deformație

Se consideră solidul deformabil raportat la un sistem de coordonate fix. Sarcinile exterioare care acționează asupra solidului sunt în echilibru dinamic, la un moment dat, t . În urma deformării corpului, deplasarea unui punct oarecare al corpului va fi exprimată prin mărimea vectorială \vec{u} , având componentele u_x, u_y, u_z . Fenomenul având un caracter dinamic, aceste componente sunt și funcții de timp. Starea de deformație în jurul punctului material considerat va fi caracterizată de cele trei funcții:

$$\begin{aligned}u_x &= u_x(x, y, z; t) \\u_y &= u_y(x, y, z; t) \\u_z &= u_z(x, y, z; t)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Starea de deformație a întregului corp va fi dată de stările de deformație ale fiecărui punct al corpului.

Deformațiile specifice liniare sau lungirile specifice ale unui element liniar într-un punct, după direcțiile axelor de coordonate, se definesc prin [115]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Lungirile sunt produse de eforturile unitare normale σ și determină modificarea volumului corpului. Dacă $\varepsilon > 0$ se obține o alungire, corespunzătoare unei tensiuni normale de întindere, iar dacă $\varepsilon < 0$ se obține o scurtare, corespunzând unei tensiuni normale de compresiune.

Suma celor trei deformații specifice liniare date de relațiile (2.13) se numește *deformație specifică volumică* și reprezintă dilatarea unității de volum:

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.14)$$

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{u} \quad (2.15)$$

Deformațiile specifice unghiulare sau *lunecările specifice* sunt produse de eforturile unitare tangențiale și determină modificarea formei corpului. Ele sunt pozitive dacă reprezintă o micșorare a unghiului drept și corespund la tensiuni tangențiale pozitive și sunt negative în caz contrar. În cazul deformațiilor infinitezimale se pot scrie următoarele relații pentru deformațiile specifice unghiulare:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Asociată vectorului deplasare, \bar{u} , se introduce mărimea notată cu $\bar{\omega}$ și numită *vectorul rotație locală de corp rigid*:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{u}, \quad (2.17)$$

având componentele:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \omega_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Prin *stare de deformație* se înțelege totalitatea deplasărilor și rotațiilor în vecinătatea unui punct sau în tot domeniul ocupat de corpul solid deformabil.

Sistemul complet de ecuații pentru deformații liniare, dilatație, deformații unghiulare și rotații locale, în sistem de coordonate rectangulare x, y, z se poate

exprima prin relațiile (2.13), (2.14), (2.16) și (2.18). În sistem de coordonate cilindrice r, θ, z , mărimile devin [140]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \Delta &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\end{aligned}\quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ \overline{2\omega_r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \overline{2\omega_\theta} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \overline{2\omega_z} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]\end{aligned}\quad (2.22)$$

2.3.2. Starea generală de tensiune

Se consideră un corp elastic aflat în echilibru static sub acțiunea forțelor exterioare. În teoria elasticității este convenabil să se lucreze cu tensiuni, care se definesc prin raportarea forței la suprafața pe care aceasta acționează.

Prin *stare de tensiune* a corpului în jurul unui punct oarecare se înțelege totalitatea tensiunilor $\overline{p_n}$ pentru toate direcțiile \vec{n} în jurul punctului. Starea de tensiune a întregului corp este dată de stările de tensiune ale tuturor punctelor care alcătuiesc corpul.

În cazul general de solicitare, starea de tensiuni se caracterizează prin trei tensiuni normale: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ și șase tensiuni tangențiale care, conform principiului dualității, sunt egale două câte două:

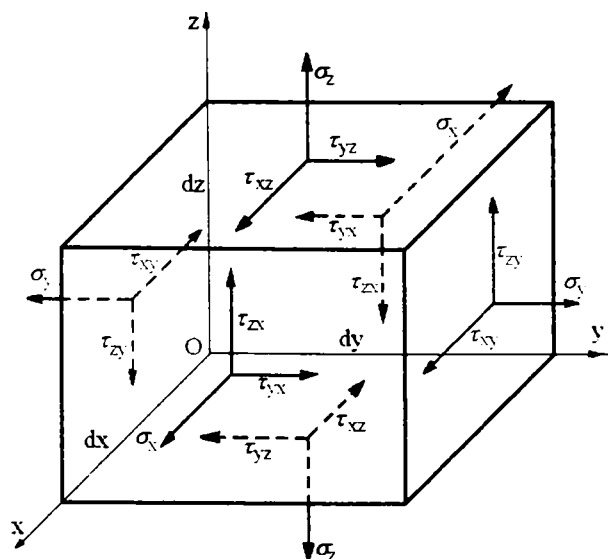
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.23)$$

Starea de tensiune în jurul unui punct oarecare este caracterizată de cele șase funcții:

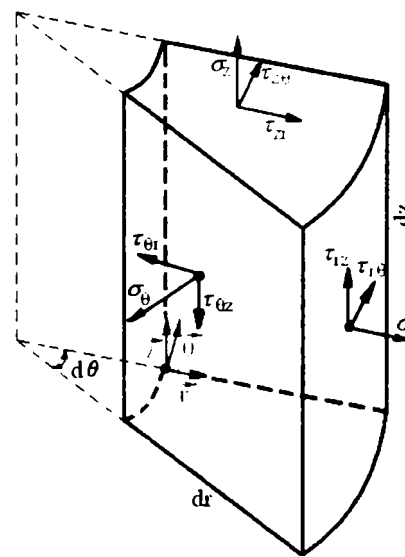
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z; t) \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z; t) \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z; t) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z; t) \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y, z; t) \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z; t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.3.3. Ecuații de mișcare

Ecuațiile mișcării sunt derivate din echilibrul forțelor care acționează asupra unui element de volum, așa cum este prezentat în figura 2.2, pentru cele două sisteme de coordonate menționate anterior.



a) Sistem de coordonate carteziene



b) Sistem de coordonate cilindrice

Figura 2.2. Acțiunea tensiunilor asupra unui element de volum

În absența forțelor volumice, pentru elementul de volum $dx dy dz$ echilibrul de forțe conduce la ecuațiile:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.25)$$

în timp ce relațiile corespunzătoare pentru un element de volum cilindric sunt:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r}\end{aligned}\quad (2.26)$$

Trecerea de la tensiunile în coordonate carteziene ortogonale la tensiunile în coordonate cilindrice se poate face prin relații de forma [140]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_z &= \sigma_z\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z} &= \tau_{yz}\cos\theta - \tau_{zx}\sin\theta \\ \tau_{zr} &= \tau_{yz}\sin\theta + \tau_{zx}\cos\theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.28)$$

2.3.4. Relații între tensiuni și deformații specifice

Legea lui Hooke

Pentru a preciza modelul matematic al corpului elastic este necesară introducerea unei legi constitutive, o relație între tensiuni și deformații specifice,

care să fie cât mai simplă, în limita ipotezelor admise pentru corpul considerat. O astfel de lege constitutivă o reprezintă legea lui Hooke, care ține cont de suprapunerea efectelor (în general, o tensiune pe o direcție dă deformații pe toate direcțiile). Corpul, sollicitat la tracțiune, suferă o alungire în direcția forței de tracțiune și, simultan, suferă și o contracție laterală, care este proporțională cu alungirea. Când asupra corpului acționează mai multe forțe, se aplică principiul suprapunerii efectelor.

Relațiile între tensiuni și deformații pentru medii omogene și izotrope reprezintă legea lui Hooke generalizată raportată la direcțiile sistemului de coordonate $Oxyz$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{2.29}$$

unde: E = modul de elasticitate longitudinală;

μ = coeficient de contracție transversală (coeficientul lui Poisson).

La aceste relații se mai adaugă și următoarele:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{zx}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Se notează:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}\tag{2.31}$$

și G se numește modul de elasticitate transversală.

Astfel, relațiile (2.30) devin:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{zx}\end{aligned}\tag{2.32}$$

Relațiile (2.29) împreună cu (2.32) constituie *legea lui Hooke generalizată*.

În coordonate cilindrice, legea lui Hooke generalizată se exprimă prin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)]\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{\theta z} \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{zr}\end{aligned}\tag{2.34}$$

Legătura între constantele elastice

Exprimând tensiunile în funcție de alungiri, din relațiile (2.14), (2.29) și (2.34) se ajunge la următoarele expresii:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\Delta + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda\Delta + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda\Delta + 2G\varepsilon_z\end{aligned}$$

sau, echivalent (folosind relația (2.15)):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
\sigma_y &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
\sigma_z &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

respectiv:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

sau, echivalent (folosind relațiile (2.16)):

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} &= G \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\
\tau_{zx} = \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

unde s-au folosit constantele elastice ale lui Lamé, λ și G :

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \cdot E \\
G &= \frac{1}{2(1 + \mu)} \cdot E
\end{aligned} \tag{2.38}$$

2.3.5. Ecuațiile fundamentale ale elastodinamicii

Sistemul complet de ecuații al elastodinamicii conține 15 funcții necunoscute (6 tensiuni, 6 deformații specifice și 3 deplasări) și este alcătuit din:

- 3 ecuații de mișcare – (2.25);
- 6 relații între deformații specifice și deplasări (ecuațiile lui Cauchy) – relațiile (2.13) și (2.16);

- 6 relații ale lui Hooke – (2.29) și (2.32) sau (2.35) și (2.36),
la care trebuie adăugate condițiile la limită (condițiile pe contur și condițiile inițiale).

Acest sistem se rezolvă alegând ca necunoscute numai tensiunile sau numai deplasările, după cum se pun condițiile la limită și eliminând, apoi, celelalte necunoscute dintre cele 15 precizate mai sus. Se obține astfel rezolvarea în tensiuni, respectiv în deplasări a acestei probleme.

Eliminând tensiunile și deformațiile specifice între ecuațiile de mișcare (2.25), legea lui Hooke (2.29) și (2.32) și ecuațiile lui Cauchy (2.13) și (2.16), se obțin următoarele ecuații de mișcare:

- pentru sistemul de coordonate rectangulare:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G \nabla^2 u_y \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 u_z\end{aligned}\tag{2.39}$$

unde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ este operatorul Laplace de ordinul doi;

- pentru sistemul de coordonate cilindrice:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2G}{r} \frac{\partial \overline{\omega_z}}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \overline{\omega_\theta}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2G \frac{\partial \overline{\omega_r}}{\partial z} + 2G \frac{\partial \overline{\omega_z}}{\partial r} \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{\omega_\theta}) + \frac{2G}{r} \frac{\partial \overline{\omega_r}}{\partial \theta}\end{aligned}\tag{2.40}$$

Soluțiile acestor ecuații pentru condiții inițiale și la limită date permit determinarea mărimii perturbației în orice punct. În practică, o soluție exactă a acestor relații poate fi obținută doar pentru un număr limitat de cazuri speciale.

După calcule corespunzătoare, ecuațiile (2.39) se pot exprima sub forma:

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \Delta \quad (2.41)$$

sau

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = c_L^2 \nabla^2 \Delta \quad (2.42)$$

unde:

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \stackrel{(2.39)}{=} \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \cdot \frac{E}{\rho} \quad (2.43)$$

și astfel dilatația Δ se propagă cu viteza c_L (numită viteză de propagare a undei longitudinale).

De asemenea, ecuațiile (2.40) se pot scrie astfel:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\omega}_i}{\partial t^2} = G \nabla^2 \bar{\omega}_i ; i = x, y, z \quad (2.44)$$

sau

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_i}{\partial t^2} = c_T^2 \nabla^2 \bar{\omega}_i ; i = x, y, z \quad (2.45)$$

unde:

$$c_T^2 = \frac{G}{\rho} = \frac{1}{2(1 + \mu)} \cdot \frac{E}{\rho}, \quad (2.46)$$

care arată că rotația locală $\bar{\omega}$ se propagă cu viteza c_T (numită viteză de propagare a undei transversale).

În cazul când toate rotațiile locale $\bar{\omega}_i$ se anulează, ecuațiile (2.39) devin:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_L^2 \nabla^2 u_i ; i = x, y, z \quad (2.47)$$

în timp ce în lipsa dilatării ($\Delta = 0$), relațiile devin:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_T^2 \nabla^2 u_i ; i = x, y, z \quad (2.48)$$

Ecuațiile (2.47) și (2.48) reprezintă forma clasică a ecuației undei. Aceasta arată că o perturbație se poate propaga într-un mediu elastic cu două viteze diferite.

Deplasarea particulei se face în direcția propagării undei în cazul undelor longitudinale și perpendicular pe această direcție în cazul undelor transversale.

În cazul particular $\mu = 0$, vitezele de propagare a undei (2.43), (2.46) devin:

$$c_L^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2.49)$$

$$c_T^2 = \frac{G}{\rho} = \frac{E}{2\rho}, \quad (2.50)$$

În cazul unidimensional, ecuația undei longitudinale devine (din (2.47)):

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (2.51)$$

2.4. Ciocnirea și propagarea unidimensională a undei

2.4.1. Unda unidimensională

Acest paragraf se ocupă cu propagarea undelor sau impulsurilor într-un mediu elastic. Cea mai utilizată aplicație a acestei teorii este în studiul ciocnirii. Fenomenele tranzitorii pot fi tratate folosind metode vibraționale, dar pentru ciocniri de scurtă durată au fost luate în considerare un număr mare de moduri normale și în aceste cazuri o tehnică ondulatorie conduce adeseori la o soluție simplă.

Cea mai simplă formă a propagării undei este unda non-dispersivă. O undă non-dispersivă este acea undă care traversează mediul cu o viteză constantă fără a-și modifica forma, de exemplu un impuls având forma unei unde semi-sinusoidale va rămâne întotdeauna o undă semi-sinusoidală. Sistemele fizice care se apropie de această condiție sunt undele longitudinale, unde torsionale într-o bară uniformă și undele de mică amplitudine într-un arc de întindere. Undele de transversale dintr-o bară sunt dispersive, astfel că forma undei transversale va fi în continuă schimbare. Aceasta corespunde la diferite lungimi de undă ce se deplasează cu viteze diferite, astfel nu există viteză constantă de propagare. În interiorul unui mediu elastic undele plane sunt non-dispersive; acestea vor fi tratate în continuare.

O undă poate fi descrisă prin variația în timp a unei mărimi fizice, u , pentru o poziție dată, sau ca variație în raport cu distanța pentru un timp dat [67].

Figura 2.3 prezintă câteva impulsuri pentru timp constant și poziții constante.

În figura 2.4 este reprezentată o funcție arbitrară, de argument z , exprimată matematic: $u = f(z)$.

Figura 2.5 redă mărimea u funcție de timp pentru o poziție dată $x = 0$. Presupunând că impulsul se deplasează în sensul pozitiv al axei x cu o viteză constantă c , va exista un timp de întârziere egal cu x/c . Vom schimba variabila

timp din t în ct , astfel încât ambele axe au dimensiunile unei lungimi. Astfel, pentru $x=0$ putem reprezenta impulsul ca $u=f(ct)$ și pentru $x=x$ ca $u=f(ct-x)$.

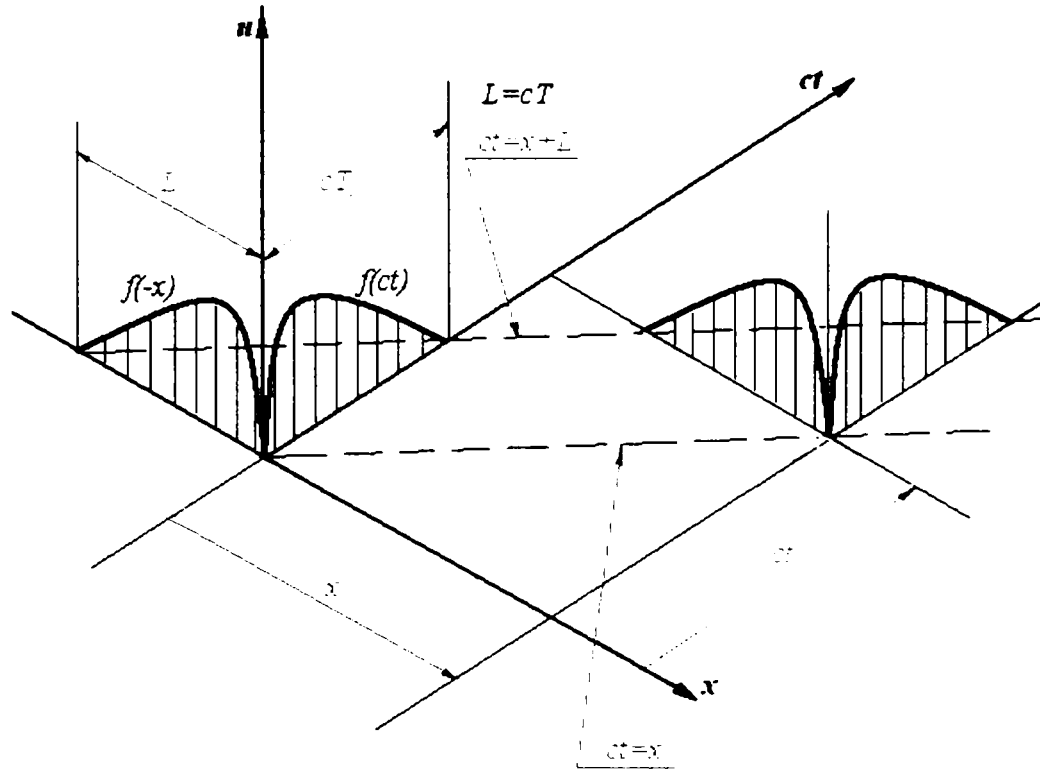


Figura 2.3

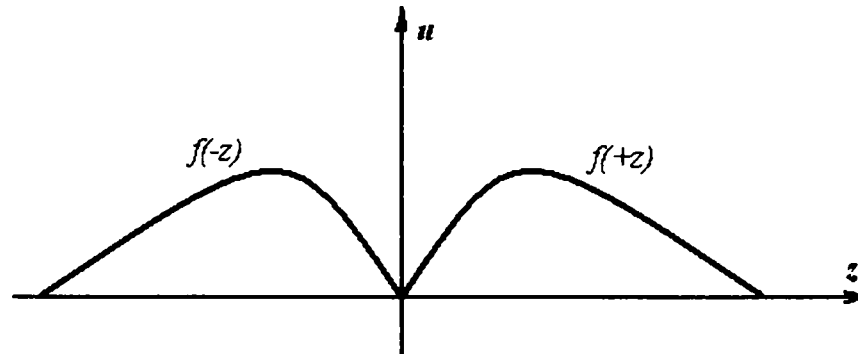


Figura 2.4

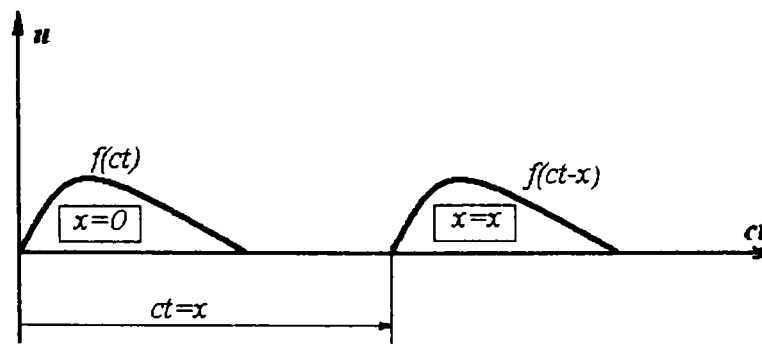


Figura 2.5

Putem scrie acum pentru un impuls arbitrar ce se deplasează cu o viteză constantă c de-a lungul axei pozitive x :

$$u = f(ct - (x - \beta)) \quad (2.52)$$

unde β este poziția de început a impulsului când $t = 0$. În acest caz argumentul este:

$$z = ct - (x - \beta) \quad (2.53)$$

Figura 2.6 redă aceeași situație, dar în acest caz impulsul este reprezentat ca variație a lui u în raport cu distanța.

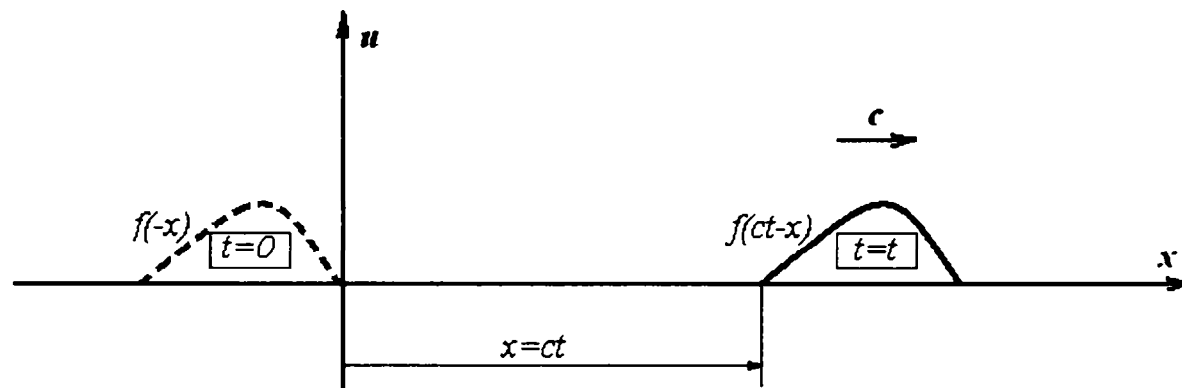


Figura 2.6

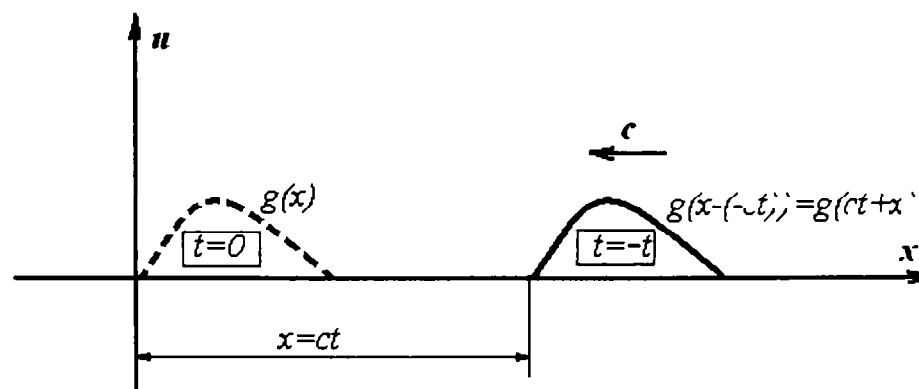


Figura 2.7

Un impuls ce se deplasează în sensul negativ al axei x (ca în figura 2.7), cu aceeași viteză c , se poate exprima prin $u = g(x)$ la $t = 0$ și prin $u = g(x - (-ct)) = g(x + ct)$ la $t = -t$. După cum se va vedea în continuare, este convenabil să se exprime impulsurile care se deplasează în sensul negativ prin

$$u = g(z) = g(ct + x)$$

La fel ca și pentru impulsul care se deplasează în sens pozitiv, se poate generaliza:

$$u = g(ct + (x - \gamma)) \quad (2.54)$$

De asemenea, argumentul este, în acest caz:

$$z = ct + (x - \gamma) \quad (2.55)$$

unde γ este poziția de început a impulsului, când $t = 0$.

În ambele cazuri, la începutul impulsului $z = 0$. Dacă impulsul are o lungime finită L în spațiu, atunci durata sa τ va fi egală cu L/c , astfel încât:

$$c\tau = c(L/c) = L$$

Astfel, pentru ambele unde, la sfârșitul impulsului $z = L$.

În general undele se pot deplasa simultan în ambele direcții și astfel:

$$u = f(ct - (x - \beta)) + g(ct + (x - \gamma)) \quad (2.56)$$

Vom exprima acum derivatele parțiale ale lui u în raport cu x și cu t :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dg}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}(-1) + \frac{dg}{dz}(+1) = -f' + g' \quad (2.57)$$

unde ' semnifică derivata în raport cu argumentul. În mod similar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{dg}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{df}{dz} \cdot c + \frac{dg}{dz} \cdot c = cf' + cg' \quad (2.58)$$

Se observă că pentru ambele funcții f și g , diferențierea în raport cu timpul, produce o multiplicare cu factorul c , pe când diferențierea în raport cu x impune un factor „-1” pentru funcțiile f și „+1” pentru funcțiile g . Acesta este motivul pentru care se utilizează simboluri diferite pentru undele care se deplasează înainte și înapoi, deoarece în acest fel se poate face ușor orice diferențiere.

Repetând procedeul de mai sus se obțin derivatele parțiale de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-f' + g') = -\frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial g'}{\partial x} = -\frac{df'}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dg'}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \\ &= -f''(-1) + g''(+1) = f'' + g'' \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (cf' + cg') = c \frac{\partial f'}{\partial t} + c \frac{\partial g'}{\partial t} = c \frac{df'}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{dg'}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \\ &= c^2 f'' + c^2 g'' \end{aligned} \quad (2.60)$$

Examinând ecuațiile (2.59) și (2.60) se observă că:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.61)$$

Această ecuație importantă este bine cunoscută în multe ramuri ale fizicii și se numește *ecuația undei*. Rezultă imediat că orice sistem fizic care verifică această ecuație va avea ca soluție unde non-dispersive care se deplasează cu viteza c .

2.4.2. Tehnici de soluționare a ecuației undei

Au fost dezvoltate numeroase tehnici pentru soluționarea ecuațiilor undei, printre care soluții funcționale, de separare a variabilelor, ecuații integrale și metode operaționale [56]. Prima dintre acestea este utilizată în special pentru analiza undelor progresive, întâlnite la ciocnirea longitudinală a barelor, în timp ce a doua își găsește o largă aplicabilitate în studiul ciocnirilor transversale, când deplasarea barei este, de obicei, privită prin prisma undelor staționare.

Unidimensional, ecuația undei are forma (2.61) și soluția funcțională a acesteia este dată de (2.56), pentru cazul particular $\beta = \gamma = 0$, care semnifică faptul că începutul undei se află în origine, la momentul $t = 0$

$$u = f\langle ct - x \rangle + g\langle ct + x \rangle, \quad (2.62)$$

care reprezintă două trenuri de undă care se deplasează cu viteza c , unul în sensul pozitiv al axei x și celălalt în sensul negativ. Forma acestor funcții f și g este determinată de condițiile inițiale.

Soluția corespunzătoare pentru unda staționară se obține prin metoda separării variabilelor, ținând cont că u se poate exprima prin produsul

$$u = X \cdot T,$$

unde X este o funcție numai de coordonata x , iar T este o funcție numai de timpul t .

$$X = X(x)$$

$$T = T(t)$$

Soluția generală pentru u se poate exprima sub forma:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (\sin \omega_i t + A_i \cos \omega_i t) \left(B_i \sin \frac{\omega_i}{c} x + C_i \cos \frac{\omega_i}{c} x \right); \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.63)$$

Fiecare termen al sumei din ecuația de mai sus este format din doi factori; primul factor reprezintă ecuația de mod, iar al doilea factor reprezintă ecuația de formă a modului [32]. Pentru determinarea celor trei constante A_i, B_i, C_i și a pulsației ω_i sunt necesare două condiții inițiale și două condiții de frontieră.

Condițiile pentru reflexia undei de deplasare sunt:

a) La capetele libere ale corpului, se anulează tensiunea normală și cele două tensiuni tangențiale;

b). Pentru un capăt încastrat: anularea ori a deplasării, ori a vitezei particulei pe direcție normală pe astfel de suprafețe.

Pentru unde staționare condițiile la limită corespunzătoare sunt:

a). La un capăt liber, anularea momentului și a forței tăietoare;

b). La un capăt fix, anularea deplasării și a înclinării;

c). La un capăt simplu rezemat, anularea deplasării și a momentului.

Studiul comportării trenurilor de undă armonice infinite, având frecvența $\frac{p^*}{2\pi}$ (p^* = pulsație) și lungimea de undă $\Lambda = \frac{2\pi}{f}$ (f = număr de undă), s-a dovedit a fi util pentru examinarea fenomenelor de propagare în medii finite. Deplasarea acestor trenuri de undă se poate exprima prin relația [56]:

$$u_j = A_j e^{i(fx - p^*t)} = A_j e^{if(x - ct)} \quad (2.64)$$

$$(j = x, y, z \text{ sau } r, \theta, z)$$

unde $i = \sqrt{-1}$ și A_j sunt funcții ce depind de coordonate și de pulsația p^* , fiind determinate de tipul de undă considerat și de natura condițiilor la limită.

Ultima ecuație specifică, de asemenea, o relație între p^* și f , cunoscută ca *ecuația de frecvență*.

Viteza de propagare a unei singure componente a undei se definește ca *viteză de undă* sau *viteză de fază*, c , unde:

$$c = \frac{p^*}{f} \quad (2.65)$$

Viteza de propagare a energiei, sau *viteza de grup*, c_g , se definește ca viteza de propagare a unui fascicul de unde având lungimi de undă apropiate de o valoare dată, Λ :

$$c_g = c - \Lambda \frac{dc}{d\Lambda} = \frac{p^*}{f} - \Lambda \frac{dc}{d\Lambda} \quad (2.66)$$

Ecuatia de frecvență determină, de asemenea, modul de variație a lui c și c_g cu lungimea de undă, Λ .

Nu s-au găsit încă soluții exacte ale ecuațiilor de undă tridimensionale pentru o bară elastică finită, din cauza imposibilității satisfacerii simultane a condițiilor la limită pe suprafața și la capetele barei. Cea mai bună aproximație este dezvoltarea datorată lui Pochhammer și Chree [56] pentru o bară infinită de secțiune transversală circulară, constantă, prin care se propagă un tren de undă sinusoidal infinit, armonic, în lungul axei z și în timpul t . Precizia unor astfel de soluții, numite în literatura de specialitate „exacte”, se îmbunătățește pe măsură ce raportul dintre raza (R) și lungimea (L) barei scade.

Deplasările, conform soluției Pochhammer – Chree sunt date sub forma :

$$\begin{aligned} u_r &= Ue^{i(fz + p^*t)} \\ u_\theta &= Ve^{i(fz + p^*t)} \\ u_z &= We^{i(fz + p^*t)} \end{aligned} \quad (2.67)$$

unde U , V și W sunt funcții numai de coordonatele r și θ . Particularizări ale formelor acestor funcții conduc la reprezentarea undelor longitudinale, transversale și de torsiune în bară. Deplasările reale și ecuația de frecvență se obțin prin înlocuirea relațiilor (2.67) în ecuațiile de mișcare (vezi paragraful 2.3.3) și prin satisfacerea condițiilor la limită $r = R$, pentru care $\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$ [56].

Pentru *unde longitudinale*, când elementele barei se deformează în direcția propagării undei, fără deplasări laterale ale axei barei, se consideră că $u_\theta = V = 0$ și că există o mișcare simetrică în jurul axei z , astfel încât $U = U\langle r \rangle$, $W = W\langle r \rangle$. Deplasările u_r și u_z sunt exprimate cu ajutorul funcțiilor Bessel de ordinul 0 și de ordinul 1, J_0 și J_1 , și o constantă B_0 , astfel:

$$\begin{aligned}
u_r &= B_0 \left[\frac{\partial}{\partial r} (J_0 \langle h' r \rangle) - \frac{2f^2}{2f^2 - \frac{p^{*2} \rho}{G}} \frac{\partial}{\partial R} (J_0 \langle h' R \rangle) \frac{J_1 \langle k' r \rangle}{J_1 \langle k' R \rangle} \right] e^{i(fz + p^* t)} \\
u_z &= iB_0 \left[fJ_0 \langle h' r \rangle - \frac{2f}{r \left(2f^2 - \frac{p^{*2} \rho}{G} \right)} \frac{\partial}{\partial R} (J_0 \langle h' R \rangle) \frac{\partial}{\partial r} (rJ_1 \langle k' r \rangle) \right] e^{i(fz + p^* t)}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

unde:

$$h'^2 = \frac{p^{*2} \rho}{\lambda + 2G} - f^2; \quad k'^2 = \frac{p^{*2} \rho}{G} - f^2 \quad \text{și} \quad \frac{\partial}{\partial R} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

Ecuția de frecvență este:

$$\begin{aligned}
F &\equiv \left(\frac{p^{*2} \rho}{G} - 2f^2 \right) J_1 \langle k' R \rangle \left[2G \frac{\partial^2}{\partial R^2} (J_0 \langle h' R \rangle) - \frac{p^{*2} \rho \lambda}{\lambda + 2G} J_0 \langle h' R \rangle \right] + \\
&+ 4f^2 G \frac{\partial}{\partial R} (J_0 \langle h' R \rangle) \frac{\partial}{\partial R} (J_1 \langle k' R \rangle) = 0
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Dezvoltarea în serie a funcțiilor Bessel din ecuația (2.69) conduce la aproximarea:

$$\begin{aligned}
\frac{p^*}{f} &= c_0 \left(1 - \frac{1}{4} \mu^2 f^2 R^2 \right) \text{ sau} \\
\frac{c}{c_0} &= 1 - \mu^2 \pi \left(\frac{R}{\Lambda} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.70}$$

unde

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{2.71}$$

Dacă se neglijează al doilea termen al ecuației (2.70), se obține o viteză a undei non-dispersive

$$c = c_0, \tag{2.72}$$

care reprezintă aproximarea de ordinul zero pentru unde longitudinale.

Ecuția de frecvență (2.70), respectiv variația vitezei de fază cu lungimea de undă pentru unda longitudinală, în cazul unei bare cu secțiunea circulară este reprezentată în figura 2.8 pentru $\mu = 0,29$, valoare corespunzătoare oțelului. Cu linie întreruptă s-a reprezentat ecuația (2.72), care corespunde teoriei elementare.

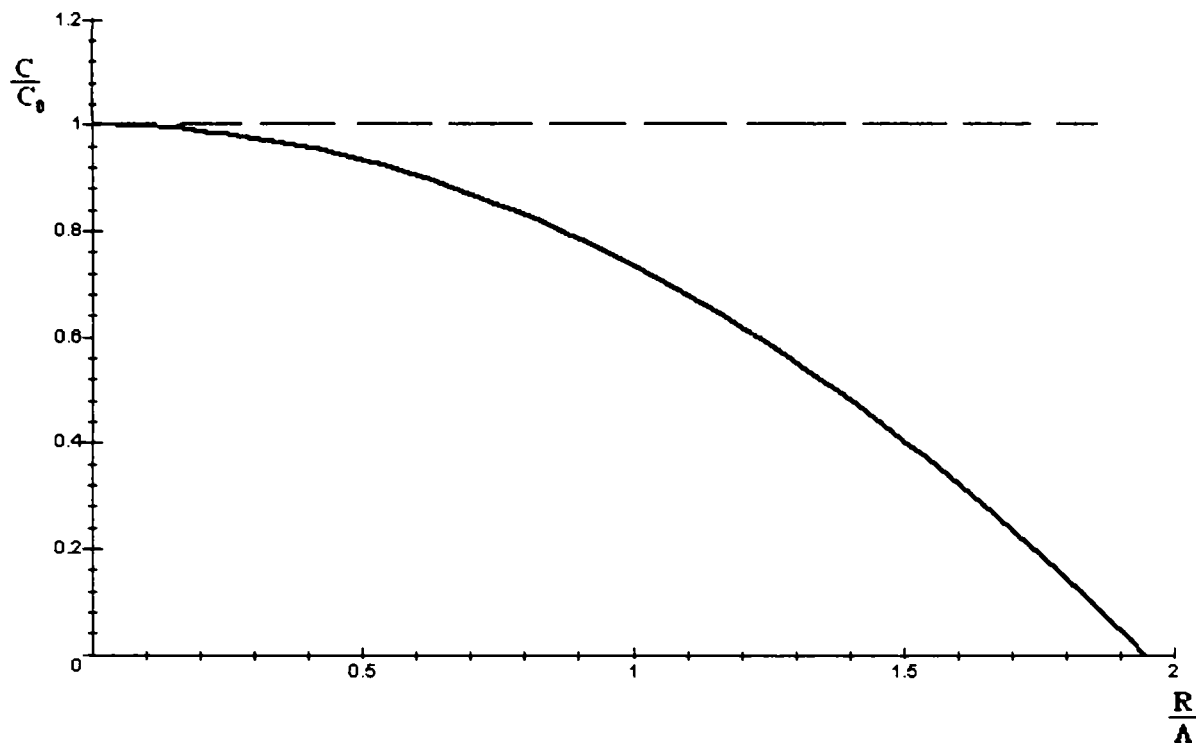


Figura 2.8. Viteza de fază a undelor longitudinale în bare cilindrice cu lungime infinită

Undele transversale implică încovoierea barei, împreună cu o deplasare transversală a axei și se obțin atunci când deplasările sunt de forma:

$$\begin{aligned} u_r &= U \cos \theta e^{i(fz + p^*t)} \\ u_\theta &= V \sin \theta e^{i(fz + p^*t)} \\ u_z &= W \cos \theta e^{i(fz + p^*t)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Făcând înlocuirile corespunzătoare în ecuațiile mișcării, se determină u_r , u_θ și u_z :

$$\begin{aligned}
u_r &= \left[B_1 \frac{\partial}{\partial r} (J_1 \langle h' r \rangle) + B_2 f \frac{\partial}{\partial r} (J_1 \langle k' r \rangle) + \frac{B_3}{r} J_1 \langle k' r \rangle \right] \cos \theta e^{i(fz + p^* t)} \\
u_\theta &= - \left[\frac{B_1}{r} J_1 \langle h' r \rangle + \frac{B_2 f}{r} J_1 \langle k' r \rangle + B_3 \frac{\partial}{\partial r} (J_1 \langle k' r \rangle) \right] \sin \theta e^{i(fz + p^* t)} \\
u_z &= i \left[B_1 f J_1 \langle h' r \rangle - B_2 k'^2 J_1 \langle k' r \rangle \right] \cos \theta e^{i(fz + p^* t)}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Din condițiile la limită se obțin constantele B_1 , B_2 și B_3 împreună cu o ecuație de frecvență extrem de complicată.

Pentru *unde torsionale*, fiecare element prezintă o rotație pură în jurul axei, într-un plan perpendicular pe aceasta. În acest caz, $U = W = 0$ și $V = V \langle r \rangle$, astfel încât:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \left(\frac{p^{*2} \rho}{G} - f^2 - \frac{1}{r^2} \right) V = 0 \tag{2.75}$$

O soluție a ecuației (2.75) este

$$V = B J_1 \langle k' r \rangle \tag{2.76}$$

unde B este o constantă, iar ecuația de frecvență corespunzătoare este:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{J_1 \langle k' r \rangle}{r} \right) \right|_{r=R} = 0 \tag{2.77}$$

Soluția particulară a ecuației (2.77), prin înlocuire în ecuația (2.76), pentru $k' = 0$ conduce la valoarea $V = Br$. Viteza de fază în acest caz este:

$$\frac{p^*}{f} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = c_T, \tag{2.78}$$

care reprezintă, de asemenea, o undă non-dispersivă.

Toate cele trei ecuații de frecvență discutate mai sus au un număr infinit de rădăcini. Fiecare soluție corespunde unui model particular de deformare a barei, cunoscut ca „mod de vibrație” al barei.

Când este luată în considerare *inerția în direcție radială*, ecuația (2.61) ia forma [56]:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \mu^2 \frac{I}{A} \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^2 \partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (2.79)$$

unde I este momentul de inerție axial, având, pentru o bară de secțiune circulară, cu raza R , expresia:

$$I = \frac{1}{2} m R^2 \quad (2.80)$$

Relația (2.79) prezintă o viteză de fază dispersivă și conduce la o expresie pentru c identică cu aproximarea de ordinul întâi a soluției exacte, ecuația (2.70).

În ecuația (2.79) s-a ținut cont, de asemenea, de efectele de forfecare pe direcție radială.

Ecuatii asemănătoare cu (2.61) se pot obține în cazul propagării undelor în bare cu secțiuni transversale necirculare sau în bare conice.

Ecuatia pentru *vibrații de torsiune* într-o singură coordonată θ se poate scrie, prin considerații similare cu cele anterioare, sub forma:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2.81)$$

Cele mai elementare descrieri ale *undelor de încovoiere* iau în considerare doar energia de deformare la încovoiere și inerția transversală, conducând la binecunoscuta ecuație a vibrațiilor libere ale barei:

$$\rho A \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-EI \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) \quad (2.82)$$

Pentru o bară uniformă se obține:

$$\rho A \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} \quad (2.83)$$

În aceste ecuații Q este forța de forfecare în direcție verticală, M este momentul forței, I este momentul de inerție în raport cu axa neutră.

În cazul unui tren sinusoidal de unde de încovoiere, dat de ecuația (2.64), se obțin, pentru c și c_g , valorile [56]:

$$c = \frac{\pi c_0 R}{\Lambda} \quad (2.84)$$

$$c_g = \frac{2\pi c_0 R}{\Lambda} = 2c \quad (2.85)$$

care corespund unei bare circulare, ceea ce denotă faptul că acele componente ale unde având lungimi de undă infinit mici se deplasează cu viteză infinită.

Pentru a preîntâmpina această deficiență evidentă, au fost adăugați ecuației (2.82), în mod succesiv, un număr de termeni de corecție, printre care: inerția de rotație, forța de forfecare transversală, deformarea secțiunii transversale și efectele contracției laterale [56].

O relație des utilizată pentru o bară cu secțiune transversală uniformă, cunoscută sub numele de *ecuația barei a lui Timoșenko*, conține primele două dintre aceste corecții și va fi determinată în cele ce urmează.

Pentru un element al unei astfel de bare sollicitată la încovoiere, înclinarea totală $\frac{du_y}{dx}$ față de axa neutră este formată din unghiul ψ , datorat încovoierii și o rotație suplimentară β_0 , datorată forfecării, după cum se vede în figura 2.9.

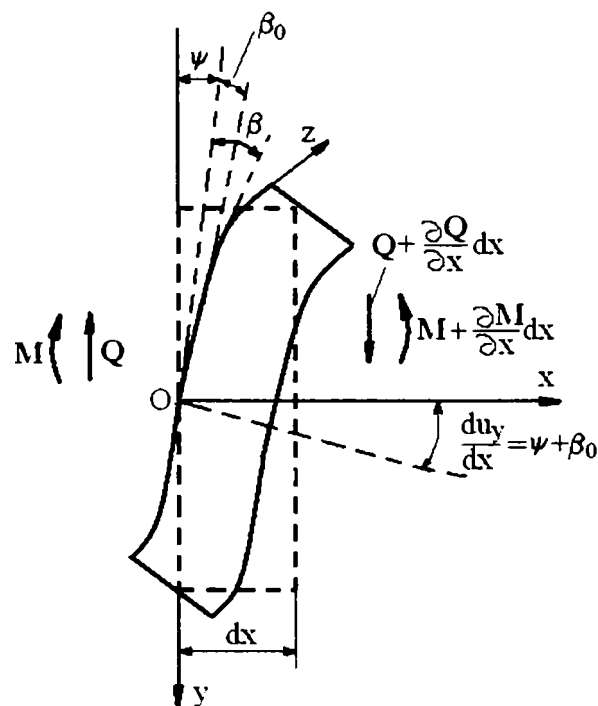


Figura 2.9. Deformația unui element de bară datorită încovoierii și forfecării

Ecuatiile mișcării de rotație și de translație sunt:

$$-\frac{\partial M}{\partial x} dx + Q dx = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = \rho A \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} dx$$

iar momentul de încovoiere M și forța tăietoare Q sunt exprimate prin:

$$M = -\frac{\partial}{\partial x}(EI\psi) \quad (2.87)$$

$$Q = AG \int_{Sectiune} \beta dz = \eta^* AG \beta_0 = \eta^* AG \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \psi \right)$$

η^* fiind un parametru care ține cont de repartizarea neuniformă a tensiunii tangențiale pe secțiune și reprezintă raportul dintre tensiunea tangențială medie și tensiunea tangențială în raport cu axa neutră, pentru încărcarea statică.

Eliminând β_0 și ψ din ecuațiile (2.86) și (2.87), prin diferențiere, se ajunge la ecuația lui Timoșenko [56]:

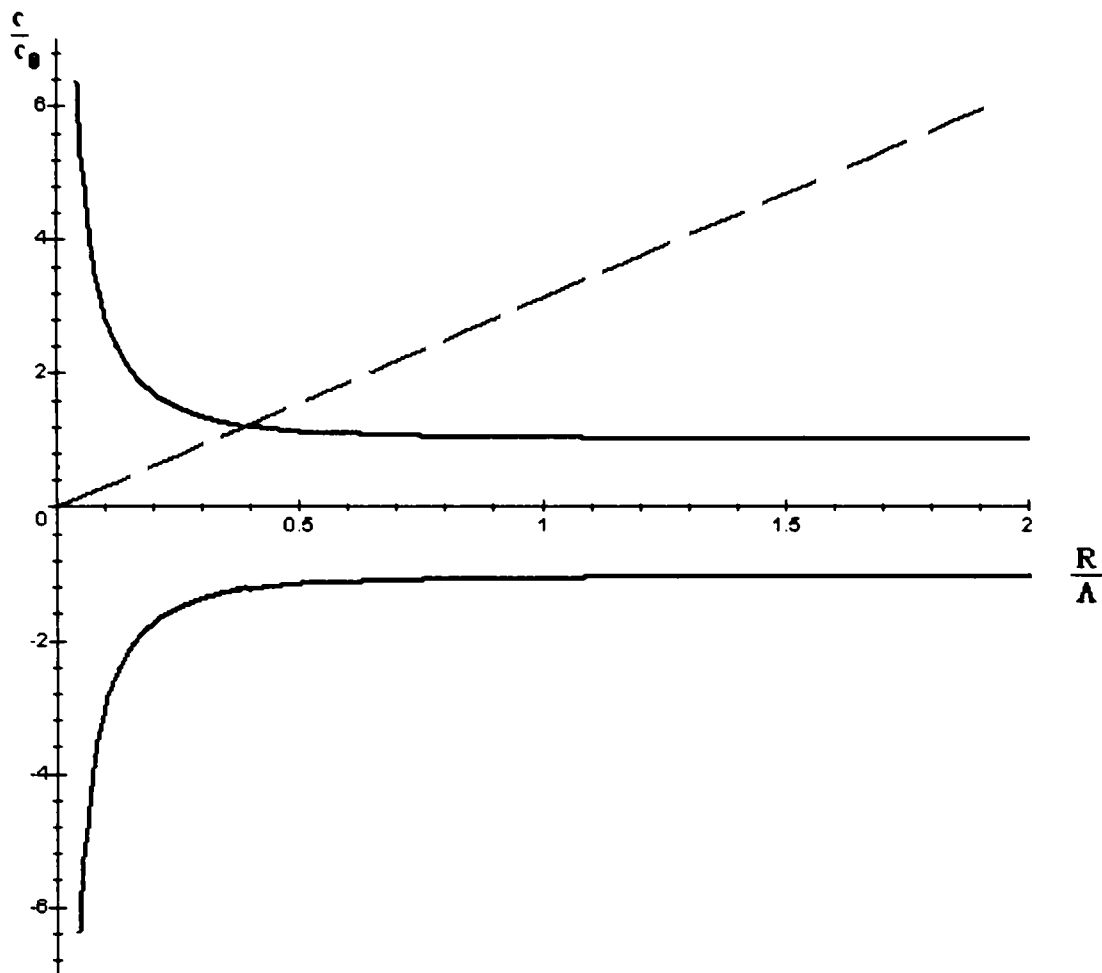
$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{\eta^* G} \right) \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{\eta^* AG} \frac{\partial^4 u_y}{\partial t^4} = 0 \quad (2.88)$$

care prezintă două moduri de transmitere. Pentru un tren de undă sinusoidal având forma ecuației (2.64), ce se propagă într-o bară circulară de rază R , spectrul vitezei de fază pentru ecuația (2.88) se obține din soluția ecuației:

$$\left(\frac{c}{c_0} \right)^2 + \frac{E}{\eta^* G} \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 = 1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2 R^2} + \frac{E}{\eta^* G} \quad (2.89)$$

care admite două rădăcini reale.

Ecuatia de frecvență (2.89), reprezentată grafic în figura 2.10, pentru $\mu = 0,29$, este în concordanță perfectă cu rezultatele date de relațiile Pochhammer-Chree. Din acest motiv, ecuația (2.89) a fost subiectul a numeroase investigații și este recomandată a fi aplicată în problemele de ciocnire. În figura 2.10 s-a reprezentat, cu linie întreruptă și ecuația de frecvență (2.84), corespunzătoare teoriei elementare.



*Figura 2.10. Viteza de fază pentru unde transversale
în bare cilindrice de lungime infinită*

Ecuțiile Pochhammer – Chree nu pot satisface condițiile la limită pentru deplasări sau tensiuni specificate la capetele barelor finite sau semiinfinite. În plus, forma complicată a ecuației de frecvență împiedică de fapt o analiză a problemelor de ciocnire prin aceste metode. Prin urmare, s-au dezvoltat teorii mai puțin riguroase, care încearcă să rețină cele mai importante aspecte ale tratării „exacte”, simplificând totodată soluțiile matematice [37], [159]. Acceptarea unor astfel de teorii aproximative este, în general, hotărâtă prin compararea spectrului vitezelor de fază și de grup al acestora cu cele ale analizei Pochhammer – Chree.

Ecuțiile Pochhammer – Chree sunt valabile numai în cazul barelor de secțiune circulară. Au fost stabilite ecuații asemănătoare pentru bare de secțiune dreptunghiulară [108] sau bare având secțiuni oarecare [138].

2.4.3. Teoria unidimensională a propagării undei în bare elastice

Pentru studierea oscilațiilor longitudinale ale unei bare se admit următoarele ipoteze: secțiunile transversale rămân plane, distribuția tensiunilor pe suprafața barei este uniformă și se neglijează deplasările în direcție radială [56]. Soluționarea problemei oscilațiilor longitudinale ale barelor de secțiune circulară, fără folosirea acestor ipoteze, a fost dată de Pochhammer. Această soluționare arată că deplasările transversale joacă un rol esențial dacă lungimea undelor longitudinale este mică în comparație cu dimensiunile transversale ale barei. În acest caz, valoarea exactă a frecvenței oscilațiilor proprii este cu ceva mai mică decât cea obținută prin metoda aproximativă [114].

În cazul sistemelor continue se utilizează diverse modele dinamice (de exemplu, modelul pe baza echilibrului dinamic al elementului infinitezimal), care conduc la ecuații cu derivate parțiale. Majoritatea acestor ecuații diferențiale ridică probleme legate de integrarea lor pe cale analitică și de aceea se apelează la metode discrete, care conduc la un sistem dinamic cu un număr mare de grade de libertate, guvernat de un sistem de ecuații diferențiale.

În figura 2.11 este prezentată o porțiune dintr-o bară uniform elastică, de lungime mare, având modulul de elasticitate E , densitatea ρ și aria secțiunii transversale, constantă, A . Se izolează, prin două secțiuni transversale, un element infinitezimal de bară, de lungime dx . Coordonata x este poziția unei secțiuni transversale date în stare de repaus. O deplasare mică a particulelor față de această poziție este notată cu u și această deplasare se presupune a fi constantă pe secțiunea transversală (astfel încât secțiunile plane rămân plane) [67]. În acest sistem, cu x este denumit, în consecință, grupul de particule dintr-o secțiune transversală dată, iar u este deplasarea acestora. Astfel de coordonate sunt cunoscute ca și coordonate lagrangiene, spre deosebire de coordonatele euleriene, unde x este o poziție fixă în spațiu (vezi [68]).

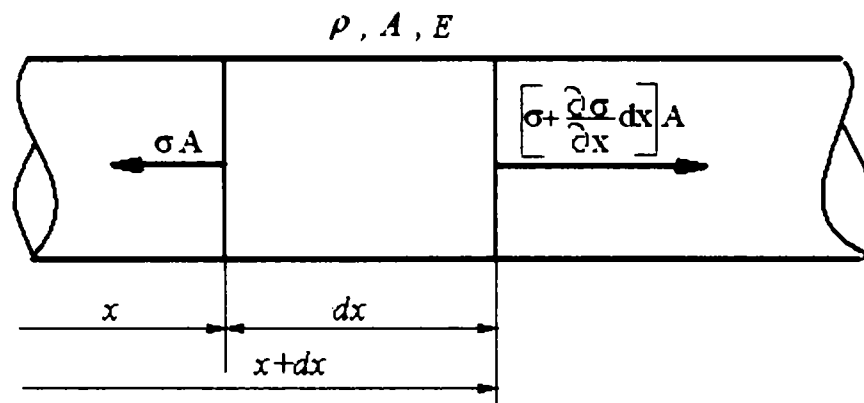


Figura 2.11. Forțele ce acționează asupra unui element unidimensional

Masa elementului izolat din bară este $dm = \rho \cdot A \cdot dx$. (Aceasta este, de asemenea, constantă, chiar dacă A și ρ variază odată cu tensiunea, deoarece ea reprezintă masa între două marcaje ale barei. Măsurători asupra barei se fac, de obicei, cu ajutorul timbrelor tensometrice sau a accelerometrelor care sunt atașate barei și se deplasează odată cu ea. Acest lucru este diferit față de majoritatea măsurătorilor în fluide, unde instrumentul de măsurare, de exemplu un senzor de presiune, este atașat vasului ce conține fluidul.)

Forța de acțiune pe secțiunea transversală este produsul dintre tensiunea σ și aria secțiunii transversale inițiale, A . Conform principiului fundamental al dinamicii, egalând forța rezultantă cu variația impulsului, se obține:

$$\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) A - \sigma A = \frac{\partial}{\partial t} \left(dm \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) A - \sigma A = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \cdot A \cdot dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

sau

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.90)$$

Secțiunea din stânga elementului considerat se deplasează în lungul axei x pe lungimea u , iar secțiunea din dreapta se deplasează pe lungimea $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$,

astfel că deformația totală a elementului este $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, iar deformația specifică este:

$$\varepsilon = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.91)$$

Lege lui Hooke ne dă:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.92)$$

Înlocuind ecuațiile (2.92) și (2.91) în ecuația (2.90) se obține:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.93)$$

Se obține astfel ecuația undei (2.61), unde

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.94)$$

reprezintă viteza de propagare a undei longitudinale (pentru oțel și aluminiu, această viteză a undei este de ordinul a 5000 m/s sau $5 \text{ mm} / \mu\text{s}$).

Sunt cunoscute mai multe metode de rezolvare a ecuației (2.93): prin serii trigonometrice, prin metoda caracteristicilor [114], cu ajutorul funcțiilor discontinue, cu ajutorul transformatei Laplace, etc. Rezolvarea prin serii trigonometrice nu este utilă pentru studiul șocului, deoarece seriile pentru determinarea vitezelor și a eforturilor unitare converg foarte lent, ele fiind exprimate prin funcții discontinue (Într-adevăr, deoarece deformațiile se propagă în metale cu viteză finită, după un interval oarecare de timp de la ciocnire se deformează numai o porțiune a sistemului elastic din apropierea punctului în care se produce șocul, restul sistemului rămânând încă nedeformat. La frontiera părților deformate și nedeformate ale sistemului, vitezele și deformațiile au discontinuități).

- *Rezolvarea ecuației undei cu ajutorul transformatei Laplace [33]*

Din punct de vedere matematic, ecuația diferențială (2.93) admite o familie largă de soluții $u(x,t)$, reprezentând legea de mișcarea longitudinală a punctelor

din secțiunea situată la cota x , în momentul t . Soluțiile depind de condițiile inițiale la momentul $t=0$, impuse deplasărilor și vitezelor:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x); \\ \dot{u}(x,0) &= g(x) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale se poate determina utilizând metoda transformatei Laplace.

Transformata Laplace pentru $u(x,t)$ este dată de integrala:

$$\mathcal{L}(u(x,t)) = u_{\mathcal{L}}(x,s) = \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-st} dt \quad (2.96)$$

care transformă funcția de spațiu și timp $u(x,t)$ într-o funcție spațiu și variabila Laplace complexă s , adică $u(x,s)$.

Pe baza transformatei Laplace a derivatei de ordinul al doilea

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right) = s^2 u_{\mathcal{L}}(x,s) - su(x,0) - \dot{u}(x,0) \quad (2.97)$$

aplicând transformata Laplace asupra ecuației diferențiale (2.93), și ținând cont de (2.95), se va obține ecuația diferențială ordinară

$$c^2 \frac{d^2 u_{\mathcal{L}}(x,s)}{dx^2} - s^2 u_{\mathcal{L}}(x,s) = -sf(x) - g(x) \quad (2.98)$$

În continuare, multiplicând cu exponențiala complexă $e^{i\alpha x}$, unde α este o nouă variabilă, iar $i = \sqrt{-1}$, și considerând că lungimea barei este infinită, se poate integra relația (2.98) și se obține:

$$c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 u_{\mathcal{L}}}{dx^2} e^{i\alpha x} dx - s^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{\mathcal{L}} e^{i\alpha x} dx = -s \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx \quad (2.99)$$

Prima integrală din membrul stâng se poate scrie ca o sumă de integrale prin părți, astfel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 u_{\mathcal{L}}}{dx^2} e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\left(\frac{du_{\mathcal{L}}}{dx}\right) = \left(e^{i\alpha x} \frac{du_{\mathcal{L}}}{dx}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{du_{\mathcal{L}}}{dx} dx, \quad (2.100)$$

iar ultima integrală se poate scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{du_L}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} du_L = \left(e^{i\alpha x} u_L \right)_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} u_L dx$$

Relația (2.100) devine:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 u_L}{dx^2} e^{i\alpha x} dx = e^{i\alpha x} \left(\frac{du_L}{dx} - i\alpha u_L \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_L e^{i\alpha x} dx \quad (2.101)$$

Primul termen devine zero, la limită anulându-se atât pentru $x = -\infty$, cât și pentru

$x = +\infty$ (unde avem: $u_L(x, s) \rightarrow 0$ și $\frac{du_L(x, s)}{dx} \rightarrow 0$) și (2.101) devine:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 u_L}{dx^2} e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_L e^{i\alpha x} dx \quad (2.102)$$

Înlocuind în (2.99) obținem:

$$\left(\alpha^2 c^2 + s^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} u_L(x, s) e^{i\alpha x} dx = s \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx \quad (2.103)$$

care, cu ajutorul funcțiilor integrale:

$$\begin{aligned} u_L^*(\alpha, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_L(x, s) e^{i\alpha x} dx \\ f^*(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \\ g^*(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx, \end{aligned} \quad (2.104)$$

se transformă în ecuația algebrică:

$$u_L^*(\alpha, s) (\alpha^2 c^2 + s^2) = s f^*(\alpha) + g^*(\alpha) \quad (2.105)$$

De aici se obține funcția:

$$u_L^*(\alpha, s) = \frac{s}{s^2 + c^2 \alpha^2} f^*(\alpha) + \frac{1}{s^2 + c^2 \alpha^2} g^*(\alpha). \quad (2.106)$$

Acum, prin transformarea inversă Laplace a funcției (2.106) avem:

$$u^0(\alpha, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(u_L^*(\alpha, s) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} u_L^*(\alpha, s) e^{ist} ds = f^*(\alpha) \cos(\alpha ct) + g^*(\alpha) \sin(\alpha ct) \quad (2.107)$$

Am folosit relațiile:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{\alpha^2 c^2 + s^2}\right) &= \cos(\alpha ct) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha ct} + e^{-i\alpha ct}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^2 c^2 + s^2}\right) &= \sin(\alpha ct) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha ct} - e^{-i\alpha ct}\right) \end{aligned} \quad (2.108)$$

Cu o nouă transformare integrală:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^o(\alpha, t) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.109)$$

se revine la legea de distribuție a mișcărilor punctelor barei de-a lungul ei, care va avea forma explicită:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha) \left(e^{-i(x+ct)\alpha} + e^{-i(x-ct)\alpha} \right) d\alpha \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^*(\alpha)}{i\alpha} \left(e^{-i(x+ct)\alpha} - e^{-i(x-ct)\alpha} \right) d\alpha \right] \end{aligned} \quad (2.110)$$

Dar ținând cont de forma integrală a funcției imagine $f^*(\alpha)$ (2.104) a condițiilor inițiale de deplasare, va rezulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha) e^{-i(x\pm ct)\alpha} d\alpha = f(x \pm ct) \quad (2.111)$$

și considerând, în primă instanță, condiții inițiale de viteze nule, $g(x) = \dot{u}(x, 0) = 0$ se va obține soluția generală a ecuației diferențiale (2.93) de forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] \quad (2.112)$$

Astfel, dacă într-o regiune mărginită de cotele x_{01} și x_{02} se creează o stare constrânsă care produce deplasări statice, după legea de repartiție $f(x)$, (vezi figura 2.12), atunci la eliberarea constrângerii iau naștere două unde având legile

$$\begin{aligned} u_+(x, t) &= \frac{1}{2} f(x - ct) \\ u_-(x, t) &= \frac{1}{2} f(x + ct) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Cele două unde se deplasează în sensuri opuse cu viteză constantă c , numită viteză de propagare a undei elastice a cărei relație de calcul este de forma (2.94). Forma $f(x)$ a undei inițiale nu se modifică în timpul propagării undelor, ci numai nivelurile lor se reduc la jumătate, fiecare dintre ele preluând jumătate din energia introdusă pe bară prin constrângerea inițială.

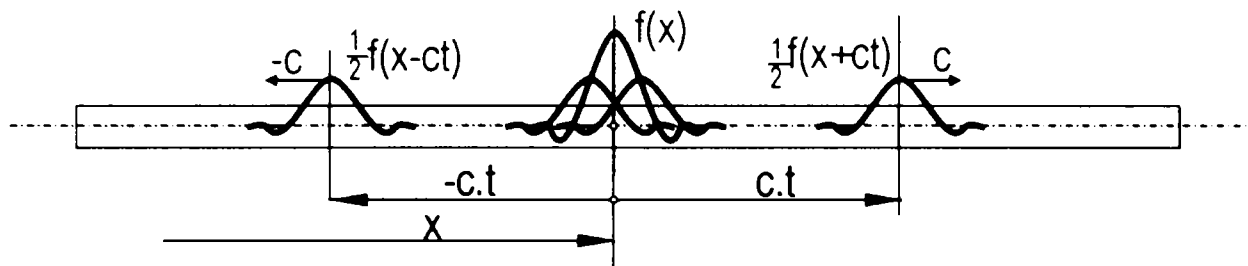


Figura 2.12. Ilustrarea modului de compunere a undelor în bare de lungimi infinite

În cazul când condițiile inițiale sunt impuse la viteze, prin funcția $g(x) = \dot{u}(x,0)$, atunci legea de mișcare va rezulta de forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = \frac{1}{2} h(x+ct) + \frac{1}{2} h(x-ct) \quad (2.114)$$

prin care se vor dezvolta două unde identice ce se propagă în sens invers cu aceeași viteză de propagare.

După cum se observă, determinarea soluției generale a ecuației diferențiale prin metode analitice, în cazul barei având secțiune transversală constantă și lungime infinită, este dificil de realizat.

Pentru bara având secțiune transversală constantă, dar de lungime finită, soluția analitică se complică datorită condițiilor de margine ce se impun la capetele barei. În acest caz sunt dezvoltate soluții particulare pentru care funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ ale condițiilor inițiale sunt extinse pe întreaga lungime finită a barei. Cele două unde elastice ce se propagă în direcții opuse se reflectă la capetele barei, iar prin interferența lor se creează mișcări vibratorii staționare, după modurile naturale de vibrații ale barei, mișcări vibratorii modulate de formele modurilor naturale de vibrații.

- *Rezolvarea ecuației undei cu ajutorul funcțiilor discontinue:*

Soluția ecuației (2.93) are forma celei prezentate în ecuația (2.62), adică:

$$u = u_x = f\langle c_0 t - x \rangle + g\langle c_0 t + x \rangle, \quad (2.115)$$

ecuație care reprezintă două unde suprapuse care se deplasează în sensul pozitiv, respectiv negativ al axei x . Prin derivarea succesivă a ecuației (2.115) se obțin deformația $\varepsilon = \varepsilon_x$, tensiunea $\sigma = \sigma_x$ și viteza particulei, v , astfel:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} = -f'\langle c_0 t - x \rangle + g'\langle c_0 t + x \rangle \\ v &= \frac{\partial u}{\partial t} = c_0 [f'\langle c_0 t - x \rangle + g'\langle c_0 t + x \rangle] \\ \sigma &= E\varepsilon = E[-f'\langle c_0 t - x \rangle + g'\langle c_0 t + x \rangle] \end{aligned} \quad (2.116)$$

Când unda se propagă doar în sensul pozitiv al axei x , ecuațiile (2.116) devin:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -f' \\ v &= c_0 f' \\ \sigma &= -Ef' \end{aligned} \quad (2.117)$$

Se observă că:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{v}{c_0} \\ \sigma &= -\frac{Ev}{c_0} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Din ecuația (2.94) avem:

$$E = \rho c_0^2 \quad (2.94')$$

și, ca urmare:

$$\sigma = -(\rho c_0)v \quad (2.119)$$

Produsul dintre densitatea materialului și viteza de propagare a undei longitudinale în acel material se numește *impedanță caracteristică* a materialului [67] sau *rigiditate acustică* sau *rezistență de undă* a materialului [4]. Astfel:

$$K_c = \rho c_0 = \frac{E}{c_0} = \sqrt{E\rho} \quad (2.120)$$

Impedanța K este definită ca produsul dintre impedanța caracteristică și aria secțiunii transversale. Așadar:

$$K = K_c A = \rho c_0 A = \frac{EA}{c_0} \quad (2.121)$$

și atunci tensiunea se poate scrie ca:

$$\sigma = -K_c v = -\frac{K}{A} v \quad (2.122)$$

iar forța ce acționează pe suprafața respectivă va fi:

$$F = \sigma A = -Kv \quad (2.123)$$

Observație:

Din (2.123) rezultă:

$$K = -\frac{F}{v} \quad (2.127')$$

Impedanța (impedanța mecanică) se mai poate defini ca și raportul dintre forța ce acționează asupra unei suprafețe și viteza imprimată acelei suprafețe, pe direcția forței [65].

2.4.4. Transmiterea și reflexia undei pe o interfață

O interfață (frontieră) este o poziție în care există o modificare bruscă a caracteristicilor materialului și aceasta poate fi asociată cu o variație mică a ariei secțiunii transversale. O variație mare a ariei va duce la ipoteza, mai puțin acceptată, a undelor plane. Figura 2.13 prezintă o porțiune dintr-o bară în trepte, la care se observă, în secțiunea corespunzătoare coordonatei $x=0$, o discontinuitate atât a ariei secțiunii transversale, cât și a materialului (densitate și modul de elasticitate longitudinal).

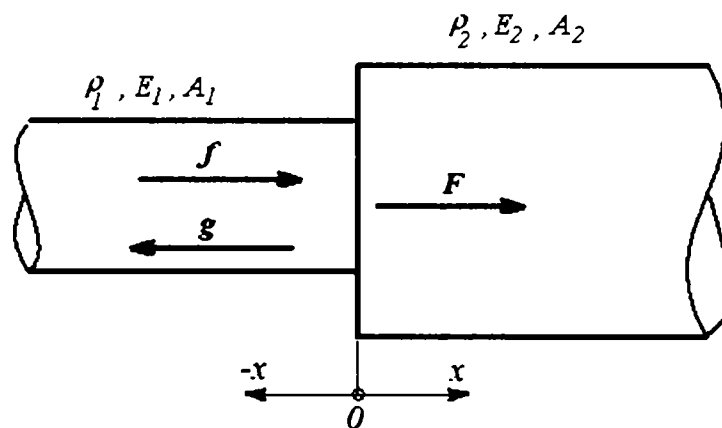


Figura 2.13. Acțiunea undei unidimensionale pe o interfață

La interfața $x=0$ ajung următoarele unde:

- unda incidentă $u_i = f(c_1 t - x)$;
- unda reflectată $u_r = g(c_1 t + x)$;
- unda transmisă $u_t = F(c_2 t - x)$,

care se propagă, în bară, în sensurile indicate în figura 2.13. În această secțiune trebuie să fie satisfăcute condițiile de continuitate a vitezei și a forței. Astfel, conform cu relațiile (2.116) sau (2.117) și pentru continuitatea vitezei avem:

$$v_i + v_r = v_t \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_t}{\partial t}$$

$$c_1 f' + c_1 g' = c_2 F' \quad (2.125)$$

iar pentru forță:

$$\sigma_i A_1 + \sigma_r A_1 = \sigma_t A_2 \quad (2.126)$$

$$E_1 \varepsilon_i A_1 + E_1 \varepsilon_r A_1 = E_2 \varepsilon_t A_2$$

$$(EA)_1 \frac{\partial u_i}{\partial x} + (EA)_1 \frac{\partial u_r}{\partial x} = (EA)_2 \frac{\partial u_t}{\partial x}$$

$$-(EA)_1 f' + (EA)_1 g' = -(EA)_2 F' \quad (2.127)$$

Eliminând F' din ecuațiile (2.125) și (2.127) rezultă:

$$-(EA)_1 f' + (EA)_1 g' = -(EA)_2 \left(\frac{c_1}{c_2} f' + \frac{c_1}{c_2} g' \right)$$

$$\frac{(EA)_1}{(EA)_2} f' - \frac{(EA)_1}{(EA)_2} g' = \frac{c_1}{c_2} f' + \frac{c_1}{c_2} g'$$

$$f' \left(\frac{c_1}{c_2} - \frac{(EA)_1}{(EA)_2} \right) + g' \left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{(EA)_1}{(EA)_2} \right) = 0 \quad (2.128)$$

Înmulțind ecuația (2.128) cu $\frac{c_2}{c_1}$ și introducând impedanța (relația (2.121)),

se obține:

$$f' \left(1 - \frac{K_1}{K_2} \right) + g' \left(1 + \frac{K_1}{K_2} \right) = 0$$

$$g' = -f' \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right) \quad (2.129)$$

Din ecuația (2.125) rezultă:

$$F' = \frac{c_1}{c_2} (f' + g') \quad (2.125')$$

și înlocuind g' din ecuația (2.129):

$$F' = \frac{c_1}{c_2} f' \left(1 - \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)$$

$$F' = \frac{c_1}{c_2} f' \left(\frac{2K_1}{K_2 + K_1} \right) \quad (2.130)$$

Din ecuațiile de mai sus rezultă:

$$\frac{\text{deformația reflectată}}{\text{deformația incidentă}} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = \frac{-g'}{-f'} = \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \quad (2.131)$$

$$\frac{\text{viteza reflectată}}{\text{viteza incidentă}} = \frac{v_r}{v_i} = \frac{c_1 g'}{c_1 f'} = -\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \quad (2.132)$$

$$\frac{\text{forta transmisă}}{\text{forta incidentă}} = \frac{(\sigma A)_t}{(\sigma A)_i} = \frac{(EA)_2 F'}{(EA)_1 f'} = \frac{K_2}{K_1} \frac{2K_1}{K_2 + K_1} \quad (2.133)$$

$$\frac{\text{viteza transmisă}}{\text{viteza incidentă}} = \frac{v_t}{v_i} = \frac{c_2 F'}{c_1 f'} = \frac{2K_1}{K_2 + K_1} \quad (2.134)$$

Cazuri particulare:

- În cazul unui capăt liber, adică pentru $K_2 = 0$:

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = \frac{-K_1}{K_1} = -1 \Rightarrow \varepsilon_r = -\varepsilon_i$$

$$\varepsilon_{total} = 0 \Rightarrow \sigma = 0$$

Se observă că deformația reflectată are semn opus celei incidente, făcând așadar ca deformația la capăt să fie nulă și, de asemenea, tensiunea este nulă.

$$\frac{v_r}{v_i} = -\frac{-K_1}{K_1} = 1 \Rightarrow v_r = v_i$$

$$v_{totala} = v_r + v_i = 2v_i$$

Viteza corespunzătoare în acest caz are același semn, dublându-se astfel viteza la capătul liber.

- Un capăt încastrat real nu este posibil, dar pentru $K_2 \gg K_1$, se obține

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} = \frac{1 - \frac{K_1}{K_2}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \approx 1 \Rightarrow \varepsilon_r = \varepsilon_i \Rightarrow \varepsilon_{totala} = 2\varepsilon_i$$

$$\frac{v_r}{v_i} = -\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} = -\frac{1 - \frac{K_1}{K_2}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \approx -1 \Rightarrow v_r = -v_i \Rightarrow v_{totala} = 0$$

Viteza la capătul „încastrat” va fi zero, în timp ce deformația se va dubla. Pentru impulsul transmis, atât deformația cât și viteza vor avea același semn ca și cel al impulsului incident.

2.4.5. Ciocnirea longitudinală coaxială a două bare

În figura 2.14 sunt prezentate două bare. Prima bară are lungimea finită L , iar cea de-a doua are lungimea foarte mare, astfel încât unda reflectată de la capătul său îndepărtat va sosi după ce s-a încheiat ciocnirea. Se presupune că ciocnirea are loc pe o suprafață plană.

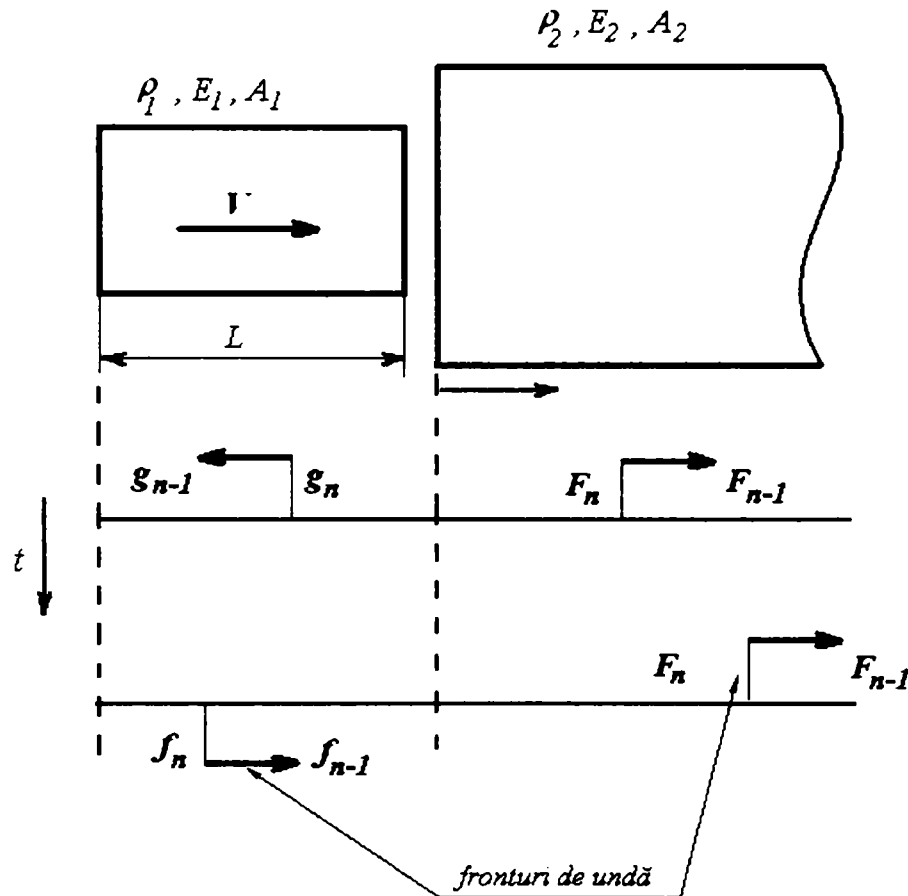


Figura 2.14. Ciocnirea longitudinală a două bare

Barele se ciocnesc cu o viteză de ciocnire V . Se presupune că ambele bare sunt detensionate înainte de ciocnire și că bara lungă este în repaus. La ciocnire, o undă g_0 se deplasează spre stânga în bara de lungime mică și o undă F_0 se deplasează spre dreapta în bara de lungime mare. Prima undă ajunge la capătul barei de lungime mică și este generată o undă reflectată f_1 astfel încât deformația la acel capăt este nulă. Când această undă se întoarce spre suprafața de ciocnire, se va genera un nou set de unde (g_1, F_1, f_2), în mod asemănător. Acest proces este prezentat în diagrama din figura 2.15.

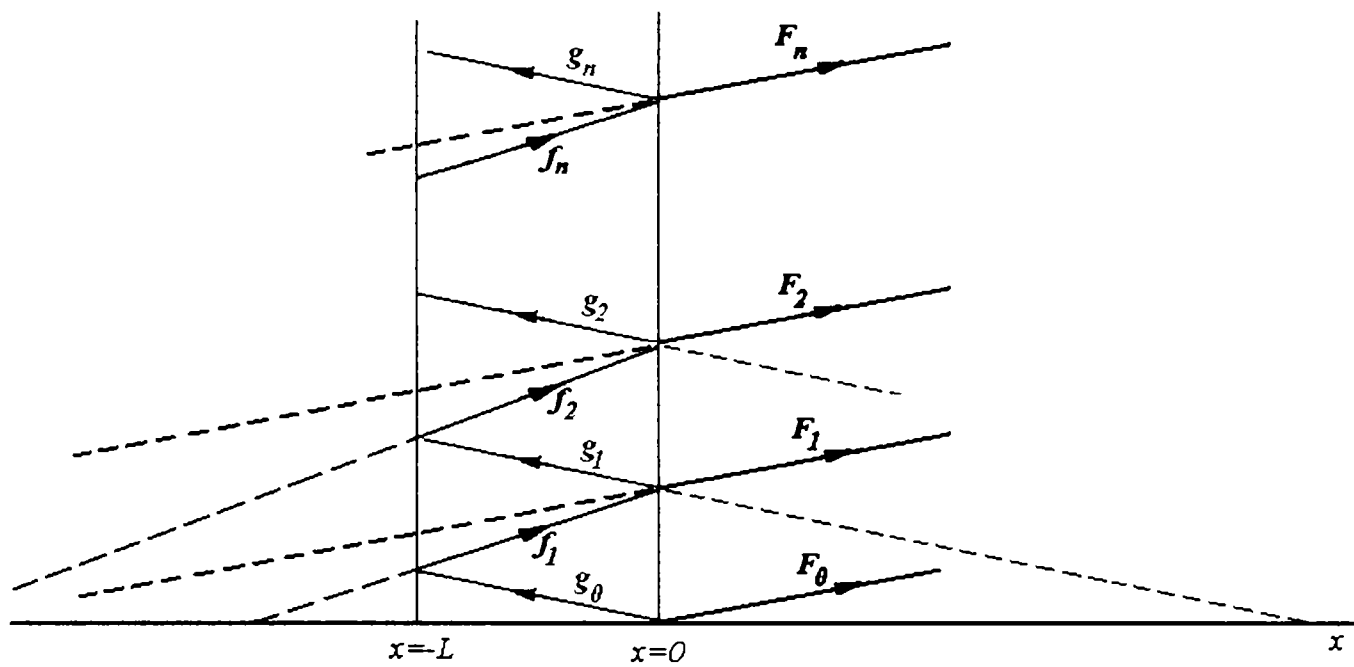


Figura 2.15. Diagrama de propagare a undelor la ciocnire

În general:

$$\begin{aligned} f_n &= f_n(c_1 t - x - n2L) \text{ (unda incidentă)} \\ g_n &= g_n(c_1 t + x - n2L) \text{ (unda reflectată)} \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$F_n = F_n \left(c_2 t - x - n2L \frac{c_2}{c_1} \right) \text{ (unda transmisă),}$$

unde $n=0, 1, 2, \dots$, cu $f_0 = 0$.

Argumentele pot fi verificate observând diagramele (vezi și relațiile (2.53) și (2.55)). Constanta este poziția aparentă, de început, a frontului de undă, la $t = 0$. Alternativ este dat timpul când iau naștere undele: la $x = 0$ (pentru g_n sau F_n) ori la $x = -L$ (pentru f_n).

La $x = -L$ deformația este întotdeauna nulă și de aici rezultă:

$$g'_{n-1}(c_1 t + (-L) - (n-1)2L) - f'_n(c_1 t - (-L) - n2L) = 0$$

sau

$$f'_n = g'_{n-1} \quad (2.136)$$

La $x = 0$ trebuie să existe continuitatea vitezei. Pentru bara de lungime mică la viteza particulei se adaugă viteza inițială de ciocnire, V . Astfel:

$$V + c_1 f'_n + c_1 g'_n = c_2 F'_n \quad (2.137)$$

și forța de contact este

$$c_1 K_1 f'_n - c_1 K_1 g'_n = c_2 K_2 F'_n \quad (2.138)$$

(K =impedanța, vezi (2.121), (2.123)).

Din ecuațiile (2.136), (2.137) și (2.138) obținem:

$$g'_n = \frac{-\frac{V}{c_1} - \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right) g'_{n-1}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \quad (2.139)$$

și

$$F'_n = \frac{c_1 K_1}{c_2 K_2} \left(\frac{\frac{V}{c_1} + 2g'_{n-1}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \right) \quad (2.140)$$

Întrucât primele unde sunt g_0 și F_0 rezultă că $f_0 = 0$, $g_{-1} = 0$ și $F_{-1} = 0$.

Să examinăm mai întâi undele imediat după ciocnire, adică pentru $n = 0$:

$$g'_0 = \frac{-\frac{V}{c_1}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \quad (2.141)$$

$$F'_0 = \frac{c_1 K_1}{c_2 K_2} \cdot \frac{\frac{V}{c_1}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \quad (2.142)$$

și pentru $n = 1$:

$$F'_1 = \frac{V}{c_2} \cdot \frac{\frac{K_1}{K_2}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \cdot \frac{\frac{K_1}{K_2} - 1}{\frac{K_1}{K_2} + 1} \quad (2.143)$$

$$f'_1 = g'_0 = \frac{-\frac{V}{c_1}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \quad (2.144)$$

- Dacă $K_1 \leq K_2$ atunci $F'_1 \leq 0$. Aceasta înseamnă că deformația este pozitivă sau nulă, adică avem întindere. Deoarece o deformație de întindere nu este posibilă pe interfață, contactul este încheiat, timpul de contact fiind $\frac{2L}{c_1}$.

Viteza pe interfață este:

$$v = V + c_1 g'_0 = c_2 F'_0 = V \frac{\frac{K_1}{K_2}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} \quad (2.145)$$

- În cazul particular când $K_1 = K_2$, rezultă $v = \frac{V}{2}$.

Figura 2.16 prezintă propagarea undei, în această situație (bare din același material, având aceeași secțiune transversală).

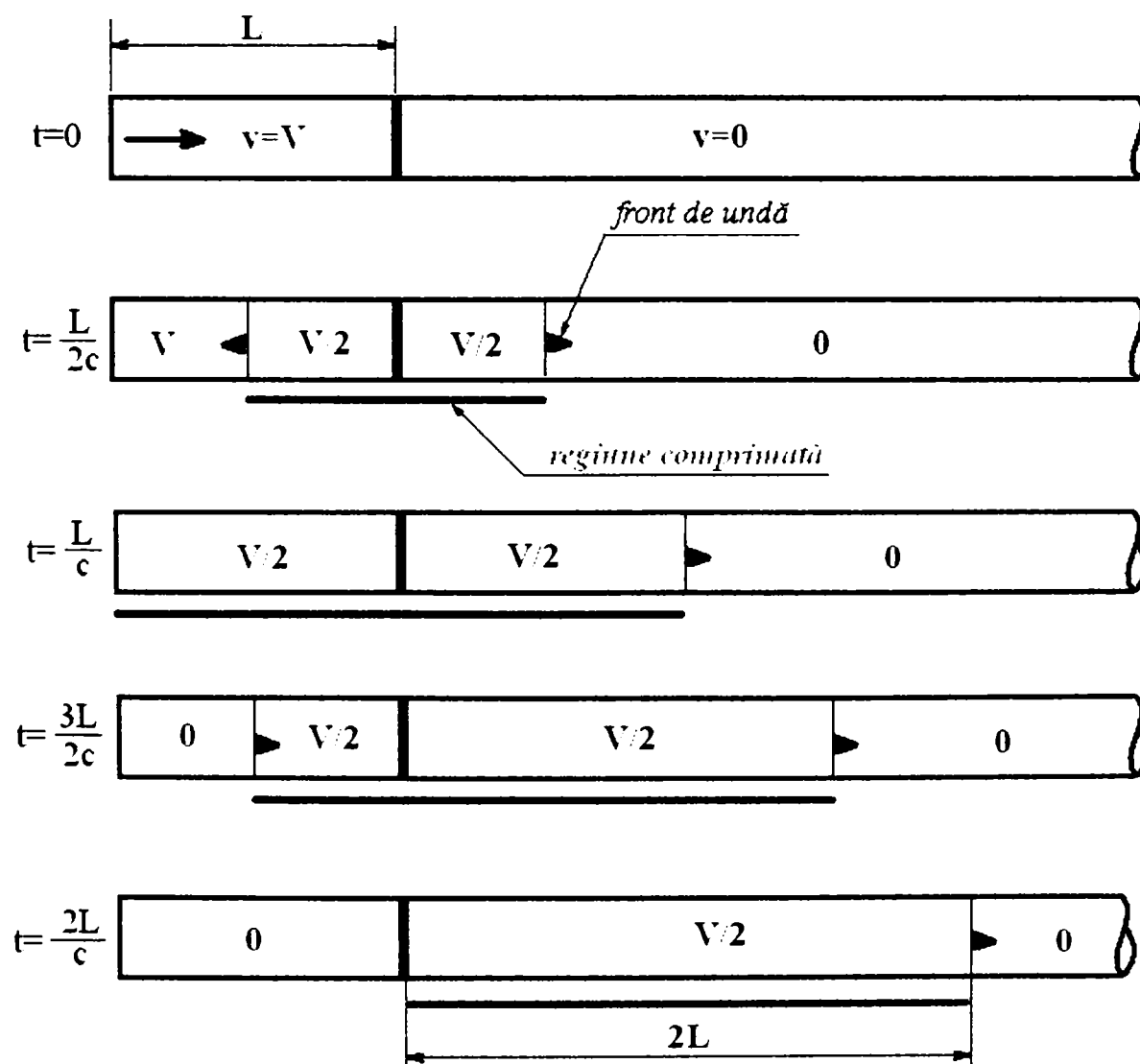


Figura 2.16. Propagarea fronturilor de undă în barele supuse ciocnirii

Dacă $K_1 > K_2$, atunci ecuațiile (2.139) și (2.140) se pot folosi în mod repetat pentru a determina funcțiile de undă. După calcule algebrice se poate arăta că

$$g'_n = \frac{V}{2c} \left[1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{n+1} \right] \quad (2.146)$$

și

$$F'_n = \frac{K_1 \frac{V}{c_2}}{K_1 + K_2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^n \quad (2.147)$$

astfel încât forța transmisă este:

$$(EA)_2 F'_n = \frac{K_1 K_2 V}{K_1 + K_2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^n \quad (2.148)$$

de unde se observă că forța descrește exponențial. De asemenea, vitezele descresc către zero și astfel, coeficientul de restituire, definit în general pentru corpul rigid, este zero. În cazul în care cele două bare au aceleași proprietăți și cea de-a doua bară are aceeași lungime ca și prima, coeficientul de restituire este unitar, ceea ce arată că această cantitate poate varia între 0 și 1 chiar dacă procesul este elastic.

2.4.6. Forță constantă aplicată unei bare de lungime mare

Se consideră o bară de lungime mare, la capătul căreia, la $x = 0$, acționează o forță constantă X , așa cum se vede în figura 2.17.

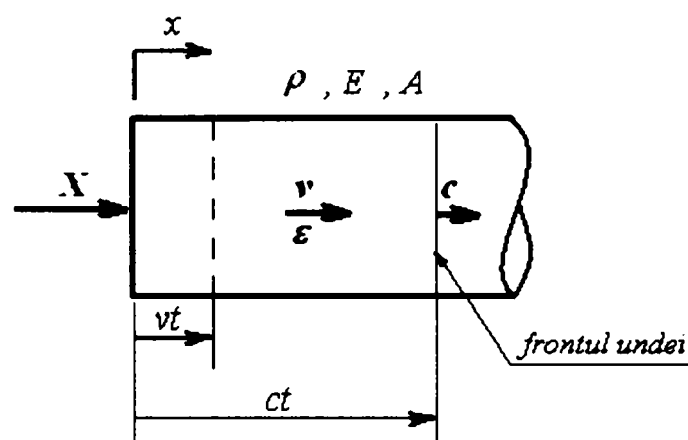


Figura 2.17. Forță constantă aplicată unei bare infinite

Se presupune că o undă se propagă în bară cu viteza c și, scriind legea fundamentală a dinamicii (forța reprezintă variația impulsului în timp) se obține:

$$X = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(\rho V \cdot v) = \frac{d}{dt}(\rho A(ct)v) = \rho Avc$$

Din Legea lui Hooke rezultă:

$$\sigma = -\varepsilon E \Rightarrow \varepsilon = -\sigma \frac{1}{E} = -\frac{X}{A} \frac{1}{E}$$

și astfel:

$$\varepsilon = -\frac{X}{AE} = -\frac{\rho v c}{E}$$

$$\varepsilon = -\frac{v}{c} \text{ (din (2.118))}$$

Egalând ultimele două expresii pentru ε se obține:

$$\frac{\rho v c}{E} = \frac{v}{c}$$

sau

$$c^2 = \frac{E}{\rho}$$

așa cum s-a văzut și mai înainte.

Considerăm acum o bară de lungime finită L , ca în figura 2.18.

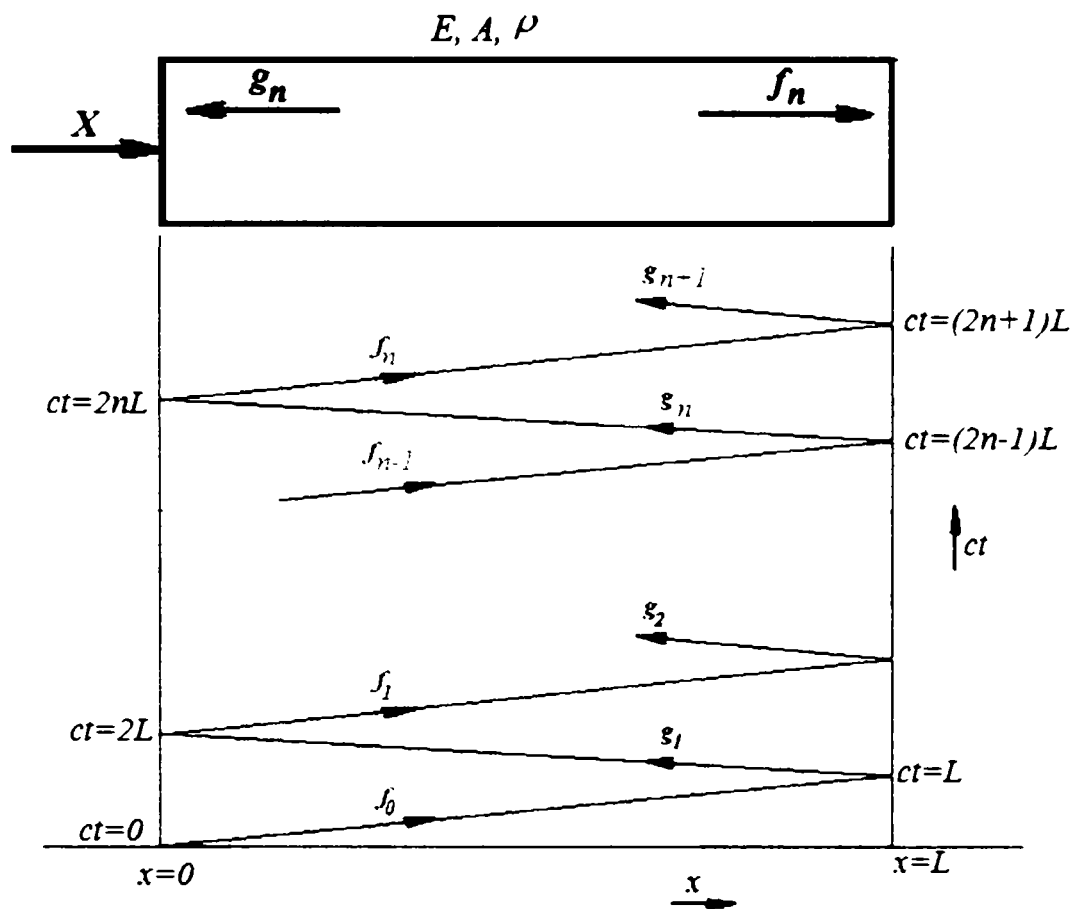


Figura 2.18. Forță constantă aplicată unei bare de lungime finită

La $x = L$ deformația trebuie să fie nulă. De aceea, în orice moment:

$$\varepsilon = -f'_{n-1} + g'_n = 0 \quad (\text{din (2.116)})$$

sau

$$g'_n = f'_{n-1}$$

La $x = 0$ forța X este constantă și, ca urmare:

$$X = -EA(-f'_n + g'_n) = EA(f'_n - f'_{n-1}) \quad (2.149)$$

și din (2.116):

$$v = c(f'_n + g'_n) = c(f'_n + f'_{n-1}) \quad (2.150)$$

Din ecuația (2.149)

$$f'_n = \frac{X}{EA} + f'_{n-1}$$

Astfel:

$$f'_0 = \frac{X}{EA}$$

$$f'_1 = \frac{X}{EA} + f'_0 = \frac{2X}{EA}$$

și de aici

$$f'_n = \frac{(n+1)X}{EA}$$

Înlocuind în ecuația (2.150):

$$v = c \left(\frac{(n+1)X}{EA} + \frac{nX}{EA} \right) = \frac{cX}{EA} (2n+1)$$

Timpul este $t = \frac{n2L}{c}$ și, deci, accelerația medie este:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{\frac{cX}{EA} (2n+1)}{\frac{2nL}{c}} = \frac{c^2}{E} \frac{X}{AL} \frac{2n+1}{2n} = \frac{X}{\rho AL} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)$$

Când $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{v}{t} = \frac{X}{\rho AL}$$

Se vede astfel că rezultatul este același cu cel obținut prin mijloace elementare (forța este masa ori accelerația). O concluzie importantă este aceea că se poate presupune comportarea corpului ca rigid atunci când variația forței este mică în comparație cu timpul necesar undei pentru a străbate corpul și a se întoarce. După câteva reflexii corpul se comportă ca și un corp cu caracteristici vibratorii suprapuse peste caracteristicile corpului rigid [67].

Deplasările unei bare, produse de o sarcină dinamică, pot fi exprimate, de asemenea, sub forma undelor staționare. Dacă o bară de lungime L , arie A și moment de inerție I este supusă instantaneu unei tensiuni constante de compresiune $-\sigma_0$ în punctul $x=0$, capătul $x=L$ fiind liber, o soluție a ecuației undei (2.93), supusă următoarelor condițiilor inițiale și de frontieră:

$$t = 0; \quad 0 \leq x \leq L$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$$

$$x = 0; \quad t \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sigma_0}{E}; \quad (2.151)$$

$$x = L; \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

poate fi obținută fie prin separarea variabilelor, fie prin transformare Laplace [56], astfel:

$$u = -\left[\frac{\sigma_0 t^2}{2\rho L} + \frac{2\sigma_0 L}{\pi^2 E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \left(1 - \cos \frac{k\pi c_0 t}{L} \right) \right]; \quad k = 1, 2, 3, \dots (2.152)$$

Soluția similară pentru ecuația (2.79), care ia în considerare inerția în direcție radială și condițiile de frontieră modificate corespunzător, este [56]:

$$u = -\left\{ \frac{\sigma_0 t^2}{2\rho L} + \frac{2\sigma_0 L}{\pi^2 E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \left(1 - \cos \frac{k\pi c_0 t}{L\sqrt{1+k^2\nu^2}} \right) \right\}; \quad k = 1, 2, 3, \dots (2.153)$$

$$\text{unde } \nu = \frac{\pi\mu}{L} \sqrt{\frac{I}{A}}.$$

2.4.7. Ciocnirea unei bare elastice cu o masă rigidă

În acest paragraf se presupune că bara are lungimea L , iar perculatorul are lungimea mult mai mică decât bara, dar are masa comparabilă cu aceasta. Reflexiile undelor de deformație în perculator se presupune că au o durată atât de mică încât acesta poate fi aproximat cu un corp rigid. Pentru acest exemplu, redat în figura 2.19, capătul îndepărtat al barei se consideră încastrat. Originea axei x se alege în punctul în care are loc impactul.

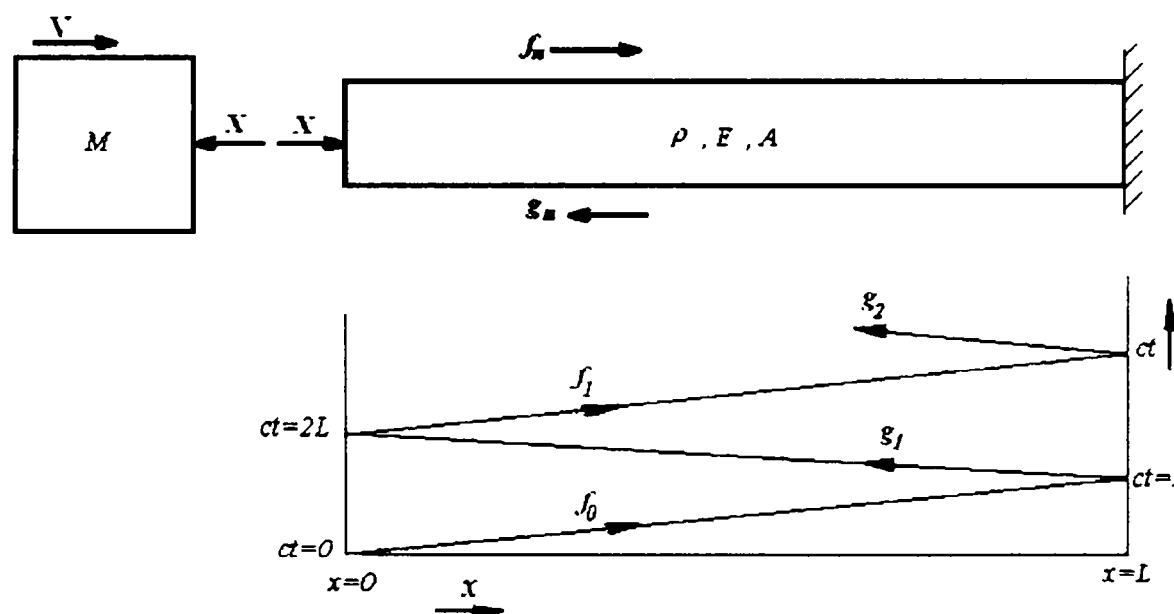


Figura 2.19. Ciocnirea unei bare elastice cu o masă rigidă

Reamintim că forma soluției ecuației de propagare a unei longitudinale în bară (2.93) este:

$$u(x,t) = f(ct - x) + g(ct + x) \quad (2.62)$$

argumentele funcțiilor f și g fiind $z = ct - x$, respectiv $z = ct + x$.

Viteza de deformație și deformația barei, precum și tensiunea și forța în orice secțiune și în orice moment sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} v &= cf' + cg' \\ \varepsilon &= -f' + g' \\ \sigma &= E(-f' + g') \\ F &= EA(-f' + g') \end{aligned} \quad (2.116)$$

- Pentru capătul încastrat al barei ($x = L$) se obține condiția la limită ca deplasarea să fie nulă și atunci (2.62) devine:

$$u_n = f_{n-1} + g_n = 0 \quad (2.154)$$

$$\Rightarrow g_n = -f_{n-1} \quad (2.155)$$

- La capătul îndepărtat viteza particulei este zero și astfel, pentru $x = L$:

$$v = cf'_{n-1} + cg'_n = 0 \quad (2.156)$$

sau

$$g'_n = -f'_{n-1} \quad (2.157)$$

- La $x = 0$ forța de contact pentru bară, respectiv corp rigid, este:

$$X = -(-Eaf'_n + EAg'_n) \quad (2.158)$$

$$X = -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -M(c^2 f''_n + c^2 g''_n) \quad (2.159)$$

și egalând cele două expresii, rezultă:

$$-\frac{EA}{Mc^2} f'_n + \frac{EA}{Mc^2} g'_n = f''_n + g''_n \quad (2.160)$$

Notăm raportul dintre masa barei și masa corpului rigid:

$$\mu = \frac{\rho AL}{M} \quad (2.161)$$

și atunci

$$\frac{EA}{Mc^2} = \frac{\rho A}{M} = \frac{\rho AL}{ML} = \frac{\mu}{L}$$

și se obține din (2.160):

$$-\frac{\mu}{L} f'_n + \frac{\mu}{L} g'_n = f''_n + g''_n$$

$$f''_n + \frac{\mu}{L} f'_n = -g''_n + \frac{\mu}{L} g'_n$$

$$\begin{aligned} (2.157) \\ \Rightarrow f''_n + \frac{\mu}{L} f'_n = +f''_{n-1} - \frac{\mu}{L} f'_{n-1} \end{aligned} \quad (2.162)$$

Prin înmulțire cu $e^{\frac{\mu x}{L}}$ obținem:

$$\frac{d}{dz} \left(e^{\frac{\mu z}{L}} f'_n \right) = e^{\frac{\mu z}{L}} \left(f''_{n-1} - \frac{\mu}{L} f'_{n-1} \right)$$

iar prin integrare:

$$f'_n = e^{-\frac{\mu z}{L}} \left[\int e^{\frac{\mu z}{L}} \left(f''_{n-1} - \frac{\mu}{L} f'_{n-1} \right) dz + \mathcal{B}_n \right], \quad (2.163)$$

unde \mathcal{B}_n este o constantă de integrare.

Dacă $f_{-1} = 0$, prima funcție este:

$$f'_0 = e^{-\frac{\mu z}{L}} (0 + \mathcal{B}_0) \quad (2.164)$$

Constanta \mathcal{B}_0 se găsește din condiția ca în momentul inițial ($t = 0$) viteza capătului barei ($x = 0$) să fie egală cu viteza V a perculatorului, astfel:

- pentru $z = 0, v = V$ și astfel

$$v = c f'_0(0) = c e^0 \mathcal{B}_0 = V$$

$$\text{Așadar } \mathcal{B}_0 = \frac{V}{c} \quad (2.165)$$

$$f'_0 = \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu z}{L}} \text{ pentru } 0 < x < 2L, \quad 0 < t < \frac{2L}{c} \quad (2.166)$$

(Această funcție este valabilă până când unda se întoarce de la capătul îndepărtat, adică până când $z = 2L$ sau $t = \frac{2L}{c}$ la $x = 0$.)

Pentru $t > \frac{2L}{c}$:

$$\begin{aligned} f'_1 &= e^{-\frac{\mu z}{L}} \left[\int e^{\frac{\mu z}{L}} \left(f''_0 - \frac{\mu}{L} f'_0 \right) dz + \mathcal{B}_1 \right] = \\ &= e^{-\frac{\mu z}{L}} \left[\int e^{\frac{\mu z}{L}} \left(-\frac{\mu V}{Lc} e^{-\frac{\mu z}{L}} - \frac{\mu V}{Lc} e^{-\frac{\mu z}{L}} \right) dz + \mathcal{B}_1 \right] = e^{-\frac{\mu z}{L}} \left(\int -\frac{2\mu V}{Lc} dz + \mathcal{B}_1 \right) = \\ &= e^{-\frac{\mu z}{L}} \left(-\frac{2\mu V}{Lc} z + \mathcal{B}_1 \right) \end{aligned} \quad (2.167)$$

Din condiția de continuitate a funcției viteză, în capătul în care are loc ciocnirea, avem:

$$\begin{aligned} v_0(2L) &= v_1(0) \\ cf'_0(2L) + cg'_0(2L) &= cf'_1(0) + cg'_1(0) \end{aligned} \quad (2.168)$$

Folosind ecuația (2.155), obținem:

$$f'_1(0) = f'_0(2L) + f'_0(0) - f'_{-1}(2L) \quad (2.169)$$

Dar $f'_1(0) = \mathcal{B}_1$ și $f'_{-1} = 0$. Așadar:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu \cdot 2L}{L}} + \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu \cdot 0}{L}} \\ \Rightarrow \mathcal{B}_1 &= \frac{V}{c} e^{-2\mu} + \frac{V}{c} \end{aligned} \quad (2.170)$$

și de aici:

$$\begin{aligned} f'_1 &= e^{-\frac{\mu z}{L}} \left(-\frac{2\mu V}{Lc} z + \frac{V}{c} e^{-2\mu} + \frac{V}{c} \right) \\ f'_1 &= \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu z}{L}} \left(-\frac{2\mu}{L} z + e^{-2\mu} + 1 \right), \text{ pentru } 2L < x < 4L \end{aligned} \quad (2.171)$$

Aceași procedură se poate folosi pentru a determina funcțiile următoare.

Expresiile pentru următoarele două funcții sunt date mai jos:

$$f'_2 = \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu z}{L}} \left[-\frac{\mu}{L} (4 + 2e^{-2\mu}) z + 2 \left(\frac{\mu}{L} \right)^2 z^2 + \mathcal{B}_2 \right] \quad (2.172)$$

unde:

$$\mathcal{B}_2 = 1 + e^{-2\mu} (1 - 4\mu) + e^{-4\mu} \quad (2.173)$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} f'_3 &= \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu z}{L}} \left\{ -\frac{2\mu}{L} \left[e^{-4\mu} + e^{-2\mu} (2 - 4\mu) + 3 \right] z + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\mu}{L} \right)^2 (3 + e^{-2\mu}) z^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{\mu}{L} \right)^3 z^3 + \mathcal{B}_3 \right\} \end{aligned} \quad (2.174)$$

unde:

$$\mathcal{B}_3 = e^{-6\mu} + e^{-4\mu}(1 - 8\mu) + e^{-2\mu}(1 - 8\mu + 8\mu^2) + 1 \quad (2.175)$$

În mod asemănător se pot construi funcțiile f'_n și pentru celelalte perioade.

Cunoscând funcțiile f'_n se pot determina viteza de deformare și deformația în orice moment. Având funcția $f'_n(z)$, se poate obține, prin integrare, funcția $f_n(z)$, care este continuă. Cunoscând f_n se poate determina deplasarea în orice moment.

În Tabelul 2.1 sunt sistematizate expresiile pentru funcțiile $f'_n(z)$ pentru primele trei perioade.

Tabelul 2.1

$\begin{aligned} 0 < x < 2L \\ 0 < t < \frac{2L}{c} \end{aligned}$	$\begin{aligned} f'_0(z) &= \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu z}{L}} \\ f_0(z) &= \frac{V}{c} \cdot \frac{L}{\mu} \cdot \left(1 - e^{-\mu \frac{z}{L}} \right) \end{aligned} \quad (2.166)$
$\begin{aligned} 2L < x < 4L \\ \frac{2L}{c} < t < \frac{4L}{c} \end{aligned}$	$\begin{aligned} f'_1(z) &= \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu z}{L}} \left(-\frac{2\mu}{L} z + e^{-2\mu} + 1 \right) \\ f_1(z) &= \frac{V}{c} \cdot \frac{L}{\mu} \cdot e^{-\frac{\mu z}{L}} \left\{ -1 + e^{2\mu} \left[1 + 2\mu \left(\frac{z}{L} - 2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.171)$
$\begin{aligned} 4L < x < 6L \\ \frac{4L}{c} < t < \frac{6L}{c} \end{aligned}$	$\begin{aligned} f'_2(z) &= \frac{V}{c} e^{-\frac{\mu z}{L}} \left[-\frac{\mu}{L} (4 + 2e^{-2\mu}) z + 2 \left(\frac{\mu}{L} \right)^2 z^2 + e^{-4\mu} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-2\mu} (1 - 4\mu) + 1 \right] \\ f_2(z) &= \frac{V}{c} \frac{L}{\mu} \left\{ 1 - e^{-\frac{\mu z}{L}} + \left[1 + 2\mu \left(\frac{z}{L} - 2 \right) \right] \cdot e^{-\frac{\mu z}{L}} \cdot e^{2\mu} + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 + 2\mu^2 \left(\frac{z}{L} - 4 \right)^2 \right] \cdot e^{-\frac{\mu z}{L}} \cdot e^{4\mu} \right\} \end{aligned} \quad (2.172)$

În punctul de contact, $x = 0$, viteza, deformația și deplasarea sunt date de:

$$v_n |_{(x=0)} = cf'_n + cg'_n = c(f'_n - f'_{n-1}) \quad (2.176)$$

$$\varepsilon_n |_{(x=0)} = -f'_n + g'_n = -(f'_n + f'_{n-1}) \quad (2.177)$$

$$u_n |_{(x=0)} = f_n + g_n \quad (2.178)$$

La capătul fix viteza și deplasarea sunt nule, dar deformația este:

$$\varepsilon_n |_{(x=L)} = -f'_n + g'_{n+1} = -2f'_n \quad (2.179)$$

$$v_n |_{(x=L)} = u_n |_{(x=L)} = 0 \quad (2.180)$$

Figurile 2.20, 2.21, 2.22, 2.23 prezintă graficele acestor funcții în raport cu timpul, pentru $\mu = 0,5$. Din aceste grafice reiese că cele mai mari deformații se produc la capătul fix la începutul perioadelor, adică pentru $t = \frac{(2k-1)L}{c}$ și $x = L$.

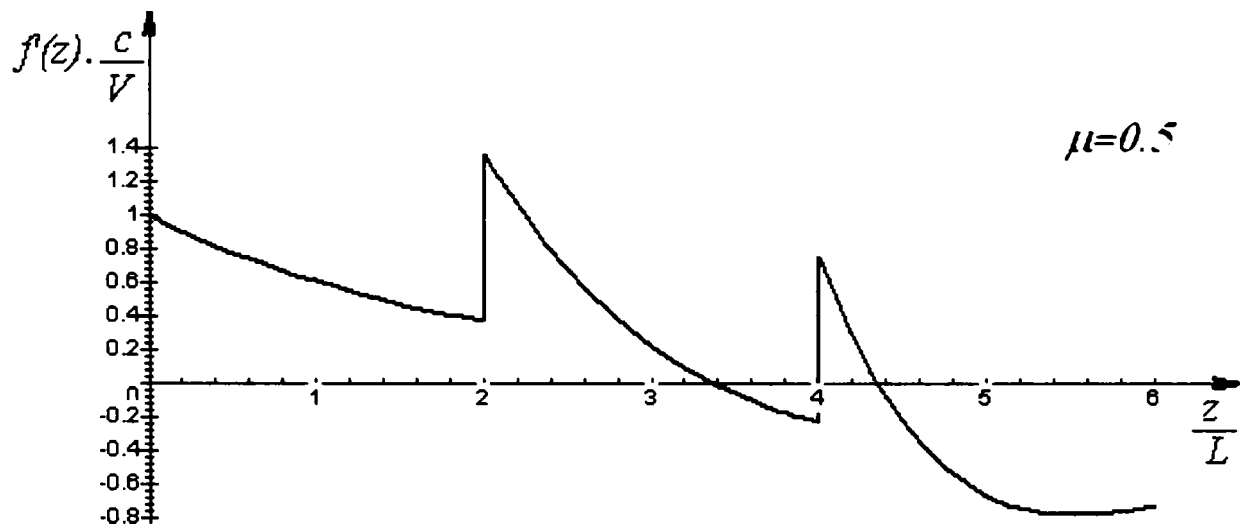


Figura 2.20

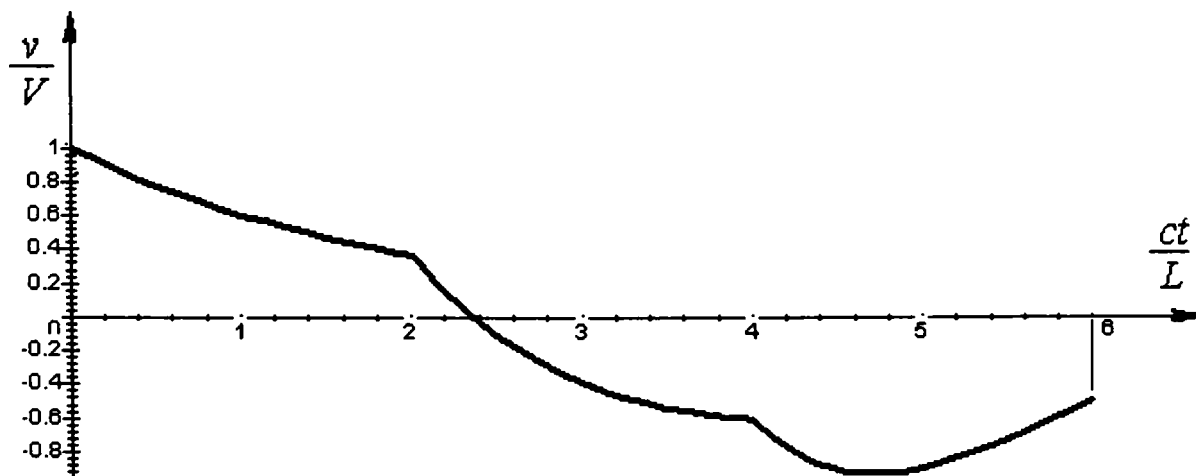


Figura 2.21. Variația vitezei

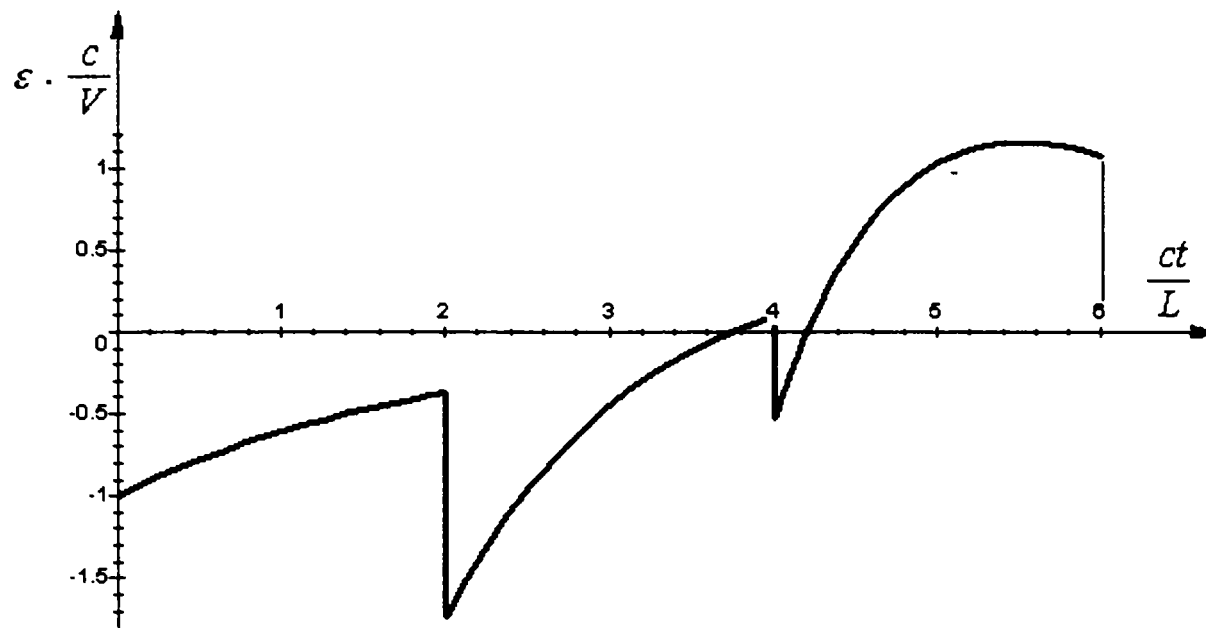


Figura 2.22. Deformațiile la capătul liber

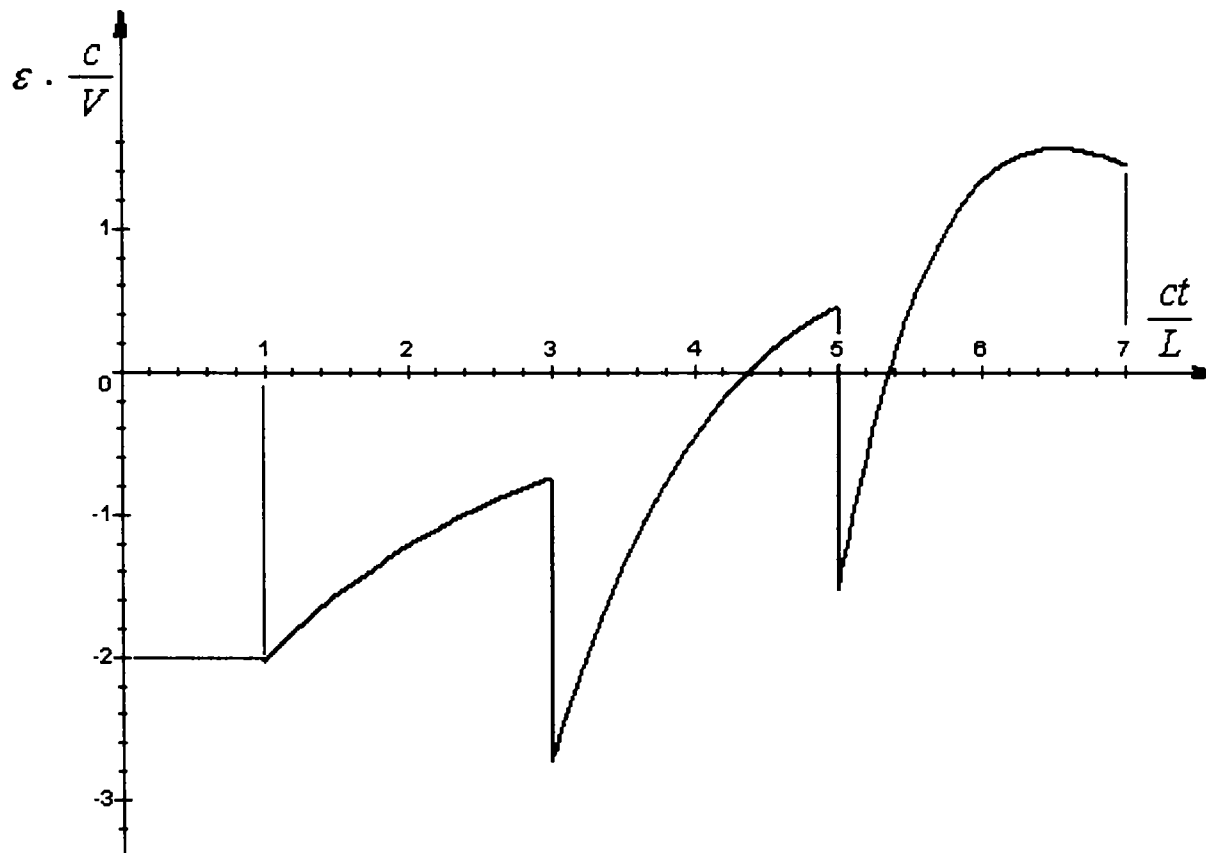


Figura 2.23. Deformațiile la capătul fix

Graficele prezentate în figurile 2.20 – 2.23 au fost construite cu ajutorul unor programe realizate în codul Maple.

Din cele prezentate, se vede că metoda analitică de rezolvare a ecuației unde, cu ajutorul funcțiilor discontinue este destul de dificilă, mai ales pentru valori mici ale raportului maselor (μ).

Cu cât raportul dintre masa perculatorului și masa barei crește (odată cu scăderea lui μ), este posibilă utilizarea unei metode aproximative pentru a determina deformația maximă [67]. Este bine cunoscut din teoria vibrațiilor că o primă aproximație în acest tip de problemă este de a adăuga o treime din masa barei la cea a masei rigidului. Egalând energia cinetică inițială cu energia de deformație finală se obține:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(M + \frac{\rho AL}{3} \right) V^2 &= \frac{1}{2} k \varepsilon^2 \\ \frac{1}{2} \left(M + \frac{\rho AL}{3} \right) V^2 &= \frac{1}{2} E A L \varepsilon^2 = \frac{1}{2} c^2 \rho A L \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (2.181)$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{V^2}{c^2} \left(\frac{M + \frac{\rho AL}{3}}{\rho AL} \right) \\ \varepsilon &= \frac{V}{c} \left(\frac{M + \frac{\rho AL}{3}}{\rho AL} \right)^{1/2} \\ \varepsilon &= \frac{V}{c} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.182)$$

unde

$$\mu = \frac{\rho AL}{M} \quad (2.161)$$

Această aproximație este valabilă doar pentru valori mari ale raportului $\frac{1}{\mu}$, nu și pentru valori mici.

O aproximație mai bună se poate face adăugând rezultatul obținut în analiza anterioară, conform căreia deformația inițială este $\frac{V}{c}$. Așadar:

$$\varepsilon = \frac{V}{c} \left[1 + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3} \right)^{1/2} \right] \quad (2.183)$$

Graficul acestei aproximări este redat în figura 2.24. Cu linie întreruptă s-a reprezentat deformația maximă pentru $x=L$ și $n=0$.

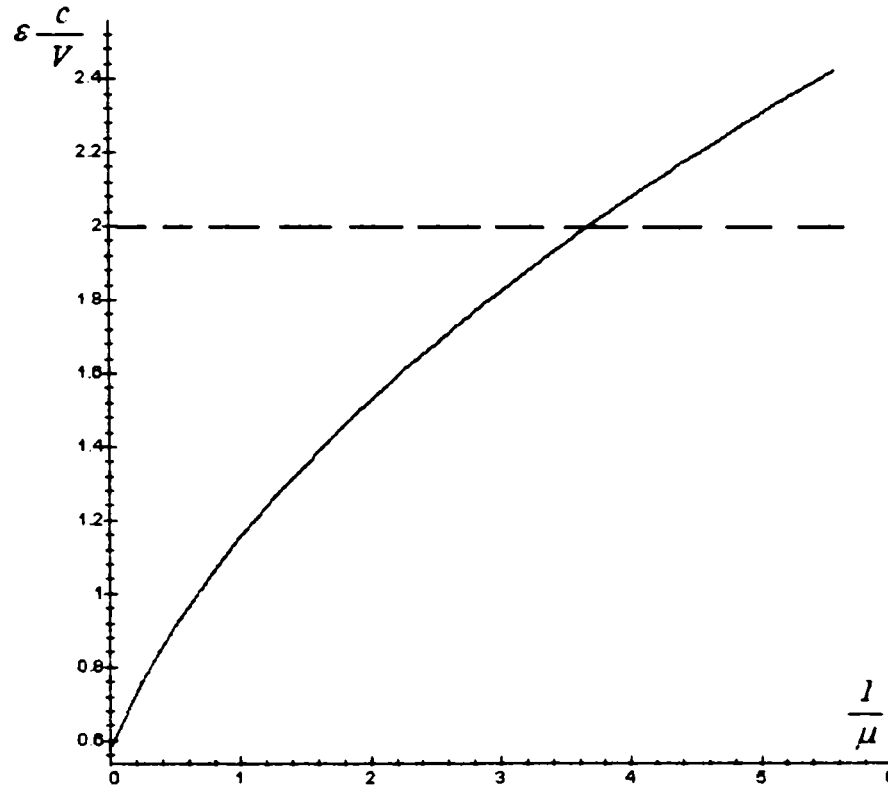


Figura 2.24. Deformația maximă obținută prin metoda aproximativă

2.5. CONCLUZII

- S-au stabilit *ipotezele fundamentale* necesare pentru precizarea modelului matematic care urmează a fi studiat și pentru cunoașterea posibilităților de aplicare practică a rezultatelor obținute. Aceste ipoteze permit simplificarea și generalizarea fenomenelor, dar și accesibilitatea calculelor matematice. Conform acestor ipoteze, corpul solid îndeplinește următoarele condiții:
 - este supus acțiunii unor sarcini exterioare în echilibru;
 - este un mediu continuu;
 - este izotrop;
 - este omogen;
 - este perfect elastic;
 - nu prezintă tensiuni inițiale;
 - sub acțiunea sarcinilor exterioare, suferă deformații și deplasări foarte mici în raport cu dimensiunile sale.
- S-a studiat fenomenul de impact între corpuri de tipul barelor, *din punctul de vedere al teoriei elasticității* și nu al teoriei clasice a corpurilor rigide, ținând cont de faptul că perturbația produsă din punctul de impact se propagă înspre interiorul corpurilor cu o viteză finită și, datorită reflexiilor acesteia pe suprafețele de frontieră, apar oscilații sau vibrații în corpuri. Perturbația produce deformații și tensiuni, care pot fi determinate examinând *fenomenul de propagare a undelor*. Sunt aduse argumente în favoarea utilizării teoriei undelor, în cazul corpurilor elastice, în special a celor care au dimensiunile transversale mult mai mici decât cele longitudinale. Se fac aprecieri referitoare la corpurile elastice și vâscoelastice, prezentându-se, spre comparație, modelele Kelvin – Voight, Maxwell și solidul standard liniar, împreună cu relațiile corespunzătoare între tensiune și deformație.
- Pornind de la corpul solid deformabil, s-au descris, în sistemul de coordonate rectangular (x, y, z) , comparativ cu sistemul de coordonate cilindrice (r, θ, z) , starea de deformație (ecuațiile corespunzătoare

deformațiilor liniare și unghiulare, respectiv dilatării), starea de tensiune, legătura între tensiuni și deformații specifice (legea lui Hooke) și ecuațiile de mișcare ale punctului material. Toate acestea, la care se adaugă condițiile la limită, constituie ecuațiile fundamentale ale elastodinamicii și pornind de la acestea, s-au determinat ecuațiile undei longitudinale sau transversale.

S-a acordat un spațiu amplu fenomenului de propagare a undei, având aplicabilitate directă în studiul ciocnirii corpurilor elastice.

- Pornind de la unda nondispersivă – cea mai simplă formă a propagării undei – s-au descris grafic evoluțiile în timp sau spațiu ale impulsurilor și, ținând cont de faptul că, în general, undele se pot deplasa, cu o viteză finită, în ambele sensuri ale axei de propagare, s-a arătat că orice sistem fizic care verifică ecuația undei va avea ca soluții unde nondispersive, care se deplasează cu viteza sunetului prin mediul respectiv.
- Au fost prezentate unele tehnici pentru soluționarea ecuației undei, folosite în literatura de specialitate (soluții funcționale, metode de separare a variabilelor, etc.). Pentru examinarea fenomenelor de propagare a impulsurilor în medii mărginite, s-a dovedit a fi utilă studierea comportării trenurilor de undă armonice infinite, ale căror deplasări sunt exprimate printr-o relație între pulsație și numărul de undă, cunoscută ca ecuație de frecvență (ecuația 2.64). Ecuația de frecvență se poate exprima și în funcție de vitezele de fază sau de grup. Cunoscut fiind faptul că nu s-au găsit soluții exacte pentru ecuația de undă, s-a pornit de la aproximarea dată de Pochhammer și Chree pentru o *bară infinită, de secțiune circulară constantă*, aproximare exprimată sub formă de deplasări. Particularizând funcțiile care descriu aceste deplasări s-au obținut soluțiile pentru unde longitudinale, transversale, torsionale.

S-au reprezentat grafic ecuațiile de frecvență (respectiv viteza de fază funcție de lungimea de undă) pentru cazul undelor longitudinale (figura 2.8) și transversale (figura 2.10).

Teoria aceasta nu este adecvată pentru bare de lungimi finite sau semiinfinite și, drept urmare, s-au dezvoltat teorii aproximative, care pot fi acceptate prin comparare cu teoria propusă de Pochhammer – Chree.

○ În studiul *propagării undei longitudinale în bare elastice* s-au admis câteva ipoteze de bază, și anume:

- Secțiunile transversale rămân plane;
- Distribuția tensiunilor pe suprafața barei este uniformă;
- Se neglijează deplasările în direcție radială.

Pornind de la modelul bazat pe echilibrul dinamic al elementului infinitezimal detașat dintr-o bară de lungime infinită, se arată că acesta verifică ecuația undei.

S-au prezentat două modalități de soluționare a ecuației undei: cu ajutorul transformatei Laplace și cu ajutorul funcțiilor discontinue.

- S-a constatat că soluția generală a ecuației diferențiale în cazul barei având secțiune constantă și lungime infinită, este dificil de obținut pe cale analitică, iar pentru bara cu secțiune constantă, dar de lungime finită, soluția analitică se complică, datorită condițiilor de margine care se impun la capete.
- Metoda bazată pe funcții discontinue s-a utilizat și în cazurile ulterioare.

○ În cazul *barelor care prezintă o modificare bruscă de secțiune și/sau material*, s-a arătat că pe frontierele corespunzătoare apar: unda incidentă, unda reflectată și cea transmisă, cu ajutorul cărora se pot stabili relații între deformațiile, vitezele și forțele reflectate, incidente

sau transmise. S-au studiat și cazurile particulare: un capăt liber, un capăt încastrat.

- În cazul *ciocnirii coaxiale a două bare*, una de lungime finită și una de lungime infinită s-a realizat o diagramă care urmărește propagarea în spațiu și timp a undelor incidentă, reflectată și transmisă (figura 2.15).
- Pentru studiul *impactului dintre o bară elastică (având un capăt încastrat și unul liber) și o masă rigidă* s-au realizat:
 - trasarea diagramei de propagare a undelor incidentă și reflectată.
 - determinarea expresiilor corespunzătoare funcțiilor care descriu deplasările undelor. Aceste expresii depind de numărul perioadei de timp în care se manifestă funcțiile respective și de constante de integrare, care se obțin din condiții la limită.
 - determinarea valorilor acestor constante (și implicit a expresiilor funcțiilor) pentru primele trei perioade de timp. Cu ajutorul funcțiilor respective se pot calcula vitezele, deformațiile și deplasările punctelor materiale dintr-o anumită secțiune a barei.
 - *s-au realizat reprezentările grafice ale acestor mărimi discontinue, cu ajutorul unor programe, scrise în cod Maple.*

CAPITOLUL 3

METODĂ APROXIMATIVĂ ÎN STUDIUL CIOCNIRII

CORPURILOR PE BAZA PROPAGĂRII UNDELOR

3.1. Ciocnirea plană

Metodele de calcul ale proceselor de ciocnire cu ajutorul teoriei transmiterii undelor se bazează pe ecuațiile de echilibru dinamic ale teoriei elasticității. Starea corpului deformabil poate fi descrisă printr-un sistem de ecuații neomogene (ecuațiile (2.25) din paragraful 2.3.3), ale cărui soluții se obțin sub forma unei sume de unde de diferite tipuri, decalate în timp. Problema se simplifică în mod esențial dacă condițiile ei concrete permit neglijarea acțiunii tuturor tipurilor de unde, cu excepția uneia dintre ele.

Considerând, spre exemplu, o placă destul de subțire, lovită pe o direcție perpendiculară, se pot neglija toate undele, în afară de cea transversală. Invers, în cazul unei bare subțiri, cu lungime mare, supusă la o ciocnire axială, se poate lua în calcul, cu destulă aproximație, numai acțiunea undei longitudinale. În această situație, vitezele și tensiunile punctelor aparținând aceleiași secțiuni transversale a corpului sunt identice.

Erorile de calcul datorate acestor aproximări sunt, mai mici decât cele admise de mecanica solidului rigid, care se bazează pe faptul că vitezele tuturor punctelor corpului sunt identice, iar distribuția tensiunilor se face instantaneu.

Teoria ciocnirii, ce pornește de la faptul că vitezele și tensiunile sunt constante pe suprafețele perpendiculare pe direcția undei alese, se numește *teoria ciocnirii plane*.

În acest capitol se va acorda o atenție deosebită teoriei ciocnirii plane longitudinale, în care se calculează numai unda longitudinală.

Teoria ciocnirii plane longitudinale se poate aplica în cazul ciocnirii a două corpuri izotrope, omogene și infinite, considerând următoarele ipoteze:

- toate punctele aflate pe suprafețele de contact ale corpurilor care se ciocnesc se găsesc în condiții identice și, ca urmare, vitezele și tensiunile punctelor de pe fiecare suprafață de contact vor fi identice;
- distribuția vitezelor și tensiunilor în fiecare secțiune perpendiculară pe direcția undei, ce se propagă longitudinal de la suprafața de contact, este uniformă.

Corpurile reale sunt mărginite și, de aceea, nu se pot produce unde plane ideale. Totuși, corpuri cum sunt barele suficient de subțiri și de lungi, corespund în bună măsură condițiilor producerii ciocnirii plane. Pentru exemplificare, se va examina ciocnirea coaxială a două bare cilindrice.

Analiza ecuației undei:

$$\frac{d^2 u_x}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 u_x}{dx^2}, \quad (3.1)$$

arată că tensiunile și deformațiile de la suprafața de contact se răspândesc în tot corpul cu viteza de propagare a undei longitudinale:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.2)$$

Această concluzie importantă stă la baza teoriei ondulatorii a ciocnirii longitudinale.

După cum se vede din expresia (3.2), viteza undei depinde numai de proprietățile materialului corpului.

Experiența arată că rezultatele bazate pe această teorie au o bună verificare practică dacă dimensiunile longitudinale ale corpului sunt mai mari decât cele transversale (mai precis dacă lungimea undei de lovire este mai mare decât dimensiunile transversale ale corpului).

Astfel de sisteme percutante, întâlnite în special în activitățile de foraj minier, sunt prezentate în figura 3.1 și constau, în general, din bare, având dimensiunile longitudinale mult mai mari decât cele transversale. Pe figură s-au notat: 1 - percutor, 2 - tijă, 3 - masă intermediară, 4 - perforator, 5 - garnitură de prindere, 6 - manșon filetat.

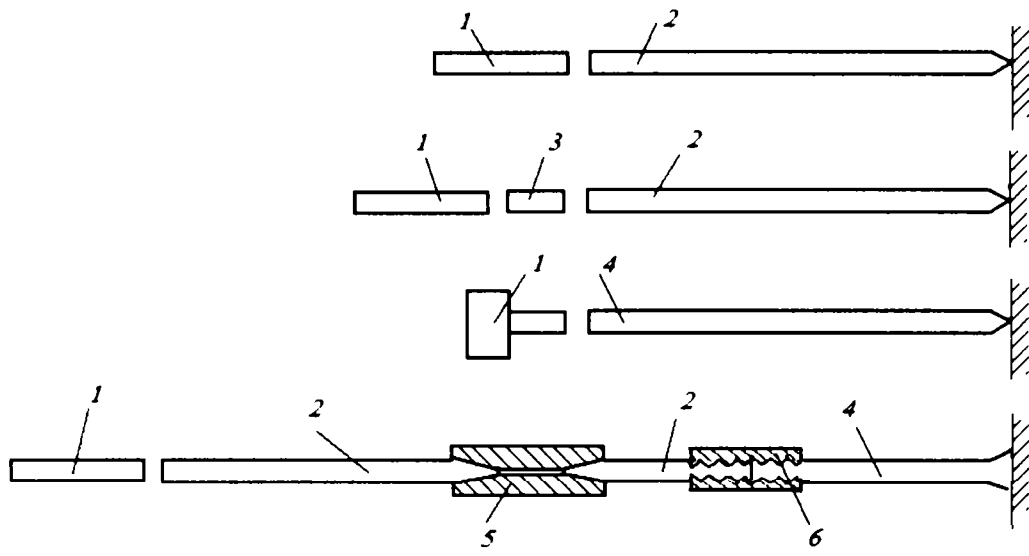


Figura 3.1. Exemple de sistemă percutantă

3.2. Rezolvarea elementară a sistemului de ecuații ondulatorii ale ciocnirii plane

3.2.1. Ciocnirea plană a barelor având lungimea infinită

După cum s-a arătat în capitolele anterioare, rezolvarea ecuațiilor de undă cu derivate parțiale ale mediului continuu deformabil, prin metode exacte, este destul de dificilă. De aceea se recurge la o tratare elementară a acestei probleme, folosind numai legile fundamentale ale dinamicii și principiile de bază ale teoriei ondulatorii a ciocnirii. Cu ajutorul acestora se pot determina cu precizie vitezele, tensiunile și deformațiile în orice secțiune transversală a barei.

Ipotezelor teoriei ciocnirii plane longitudinale le corespunde ciocnirea coaxială a două bare cu lungime infinită, având secțiuni transversale apropiate și suprafețele frontale plane, perfect perpendiculare pe axele barelor (vezi figura 3.2). În acest caz, se poate admite că ciocnirea se produce simultan pe întreaga suprafață frontală. Prin urmare, toate punctele aflate pe suprafața de contact, chiar de la început, se vor afla în situații identice sau aproape identice. Ele suferă aceleași transformări, vor avea aceleași viteze și tensiuni și astfel corespund pe deplin ipotezelor de bază ale ciocnirii longitudinale plane.

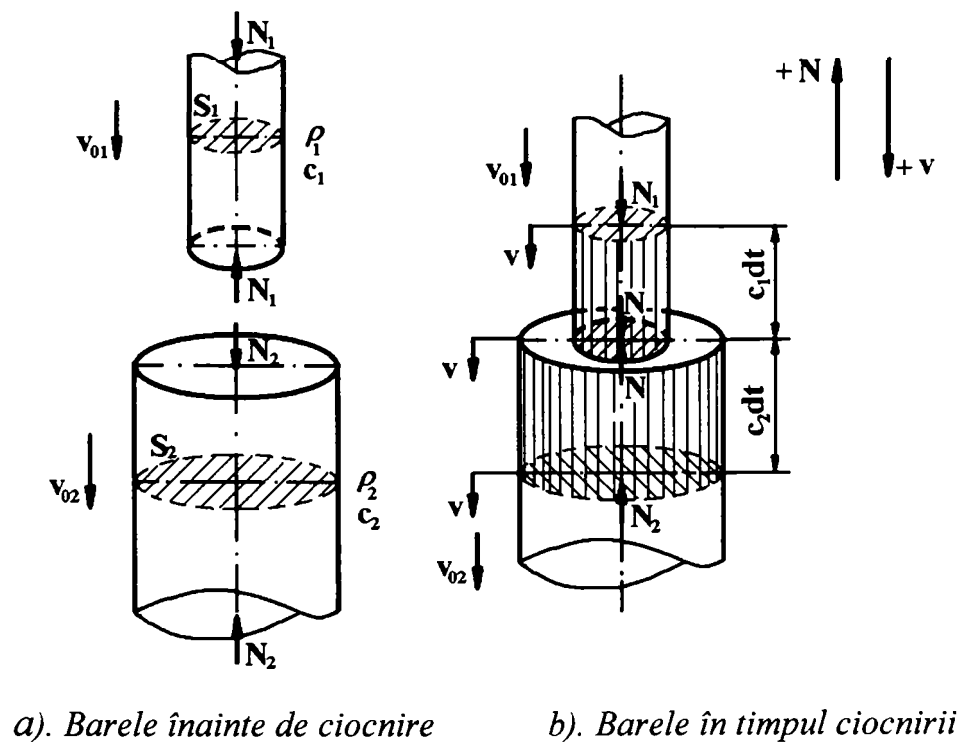


Figura 3.2. Ciocnirea plană a barelor infinite

În figura 3.2 s-au folosit următoarele notații:

S_1, S_2 = ariile suprafețelor secțiunilor transversale ale barelor;

ρ_1, ρ_2 = densitățile materialelor din care sunt confecționate barele;

N_1, N_2 = forțele inițiale care comprimă barele înainte de ciocnire;

v_{01}, v_{02} = vitezele inițiale ale barelor (ele pot fi și în sensuri opuse);

c_1, c_2 = vitezele de propagare ale undei longitudinale prin bare;

v = viteza instantanee a punctelor suprafeței de contact;

N = forța de acțiune reciprocă la ciocnirea dintre bare.

Sunt indicate, de asemenea, sensurile pozitive ale forțelor și vitezelor.

În urma ciocnirii corpurilor apar tensiuni pe suprafețele frontale ale barelor. Conform principiului de bază al teoriei ondulatorii a ciocnirii, aceste tensiuni se propagă de la suprafața de contact, prin bare, cu viteza sunetului. Propagarea se face sub forma ciocnirilor consecutive în secțiunile vecine ale barelor, identice cu ciocnirile anterioare ale suprafețelor frontale ale barelor. Întrucât nici secțiunea și nici proprietățile materialului nu se modifică de-a lungul barelor în urma ciocnirii, în toate secțiunile apar aceleași forțe și viteze ca și în suprafețele frontale.

Toate punctele materiale aflate pe suprafața de contact au, în momentul ciocnirii, viteza v și forța N . Acestea (v, N) se transmit și punctelor din secțiunile imediat învecinate suprafeței de contact, din aproape în aproape, cu viteză finită (c), sub forma unei unde, numită „*undă de ciocnire*” și ai cărei parametri sunt viteza v și forța N .

După o durată elementară dt , *unda de ciocnire*, care se propagă în cele două bare cu vitezele c_1 , respectiv c_2 , traversează volumele: $S_1 c_1 dt$ în prima bară și $S_2 c_2 dt$ în a doua bară, ceea ce corespunde maselor reduse:

$$\begin{aligned} dm_1 &= S_1 \rho_1 c_1 dt \\ dm_2 &= S_2 \rho_2 c_2 dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

Datorită modificării vitezelor, de la v_{01} la v în prima bară și de la v_{02} la v în a doua bară, impulsurile corespunzătoare vor fi:

$$\begin{aligned} dm_1 (v_{01} - v) &= S_1 \rho_1 c_1 dt (v_{01} - v) \text{ în prima bară,} \\ dm_2 (v_{02} - v) &= S_2 \rho_2 c_2 dt (v_{02} - v) \text{ în a doua bară.} \end{aligned}$$

Această variație a cantităților de mișcare se va petrece sub acțiunea forțelor $N - N_1$ pentru prima bară și $N_2 - N$ pentru a doua bară (semnul forțelor se determină prin sensul pozitiv considerat), care acționează pe durata dt .

Din legea fundamentală a dinamicii, se obține, pentru fiecare bară în parte:

$$\begin{aligned}(N - N_1)dt &= S_1 \rho_1 c_1 dt (v_{01} - v) \\ (-N + N_2)dt &= S_2 \rho_2 c_2 dt (v_{02} - v)\end{aligned}\tag{3.4}$$

sau împărțind cu dt :

$$\begin{aligned}N - N_1 &= S_1 \rho_1 c_1 (v_{01} - v) \\ -N + N_2 &= S_2 \rho_2 c_2 (v_{02} - v)\end{aligned}\tag{3.5}$$

Produsul dintre densitatea corpului (ρ) și viteza undei longitudinale (c), care intervine în relațiile (3.4) și (3.5) se definește ca *impedanță caracteristică* sau *rigiditate acustică* sau *rezistență de undă* a materialului.

$$K_c = \rho \cdot c\tag{3.6}$$

Produsul dintre impedanța caracteristică și aria secțiunii transversale a corpului se numește *impedanță* sau *rigiditate la ciocnire* a corpului și o vom nota (vezi și § 2.4.3):

$$K = K_c S = \rho c S\tag{3.7}$$

Se obține:

$$\begin{aligned}K_1 &= S_1 \rho_1 c_1 \\ K_2 &= S_2 \rho_2 c_2\end{aligned}\tag{3.8}$$

Atunci expresiile (3.5) devin:

$$\begin{aligned}N - N_1 &= K_1 (v_{01} - v) \\ -N + N_2 &= K_2 (v_{02} - v)\end{aligned}\tag{3.9}$$

sau sub formă generalizată:

$$N - N_0 = \pm K (v_0 - v),\tag{3.10}$$

unde N_0 și v_0 reprezintă forța, respectiv viteza inițială a barei (înainte de ciocnire).

Din aceste expresii se vede că variația forței de ciocnire este proporțională cu impedanța corpului și cu scăderea vitezei inițiale.

Relațiile (3.10), care fac legătura între viteza și forța de ciocnire în orice secțiune a barei, sunt esențiale în teoria ondulatorie a ciocnirii plane. În ceea ce privește *sensul rigidității la ciocnire* a corpului, el poate fi determinat cu ajutorul unei reguli simple: dacă se așează elementele sistemului percutant pe direcția vitezei mai mari, de sus în jos, atunci rigiditatea la ciocnire a corpurilor care se află deasupra suprafeței de contact examinate, va avea, în ecuații, semnul plus, iar pentru cele aflate sub această suprafață, semnul minus.

Ne vom ocupa în continuare de calculul forței, a vitezei și a tensiunii ce apar la ciocnire.

- *Determinarea forței:*

Pentru rezolvarea sistemului (3.9), în care intervine forța de ciocnire, împărțim prima ecuație cu K_1 și a doua cu K_2 . Se obține:

$$\frac{N}{K_1} - \frac{N_1}{K_1} = v_{01} - v$$

$$\frac{N}{K_2} - \frac{N_2}{K_2} = -v_{02} + v$$

Adunând cele două egalități și dând factor comun pe N , găsim:

$$N \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) = \frac{N_1}{K_1} + \frac{N_2}{K_2} + v_{01} - v_{02},$$

de unde rezultă:

$$N = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \left(\frac{N_1}{K_1} + \frac{N_2}{K_2} \right) + \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} (v_{01} - v_{02}) \quad (3.11)$$

- *Determinarea vitezei:*

Viteza suprafeței de contact a barelor antrenate în ciocnire se determină din sistemul (3.9), adunând cele două ecuații și se obține:

$$v = \frac{K_1 v_{01} + K_2 v_{02} + N_1 - N_2}{K_1 + K_2} \quad (3.12)$$

Cazuri particulare:

- În bare nu există tensiuni inițiale, adică:

$$N_1 = 0, N_2 = 0$$

Notăm:

$$v_0 = v_{01} - v_{02} \text{ viteza relativă a barelor înainte de ciocnire.}$$

Atunci:

$$N = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0 \quad (3.13)$$

$$v = \frac{K_1 v_{01} + K_2 v_{02}}{K_1 + K_2} \quad (3.14)$$

- Dacă cea de-a doua bară se află în repaus înainte de ciocnire, adică:

$$v_{02} = 0$$

$$v_{01} = v_0$$

atunci:

$$v = \frac{K_1 v_0}{K_1 + K_2} \quad (3.15)$$

- *Deplasarea suprafeței de contact într-o perioadă de timp t , este:*

$$u = v \cdot t$$

$$u = \frac{K_1 v_0 t}{K_1 + K_2} \quad (3.16)$$

- *Energia transmisă de la o bară la cealaltă prin suprafața de contact, în timpul t , este:*

$$E = N \cdot u$$

și cu relațiile (3.13) și (3.16) rezultă:

$$E = \frac{K_1^2 K_2}{(K_1 + K_2)^2} \cdot v_0^2 t \quad (3.17)$$

- *Puterea de ciocnire este:*

$$P = \frac{E}{t}$$

$$P = \frac{K_1^2 K_2}{(K_1 + K_2)^2} \cdot v_0^2 \quad (3.18)$$

- Tensiunile în bare, la ciocnire, se determină prin relațiile cunoscute:

$$\sigma_1 = \frac{N}{S_1}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{S_2}$$

sau, substituind aici valoarea forței de ciocnire din formula (3.13) și conform ipotezelor făcute obținem:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{v_0}{S_1} = \frac{S_1 \rho_1 c_1 K_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{v_0}{S_1} = \frac{K_2}{K_1 + K_2} \rho_1 c_1 v_0 \\ \sigma_2 &= \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{v_0}{S_2} = \frac{K_1 S_2 \rho_2 c_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{v_0}{S_2} = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \rho_2 c_2 v_0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vom considera următoarele trei *cazuri particulare*:

1). Ciocnirea unei bare foarte moi (bara 1) cu una foarte rigidă (bara 2), adică impedanța barei lovite (K_2) este mult mai mare decât impedanța percutorului (K_1).

$$K_2 \gg K_1 \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} \cong 0$$

- Atunci forța de ciocnire, determinată cu formula (3.13), este:

$$N = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0 = \frac{K_1}{\frac{K_1}{K_2} + 1} v_0 \cong K_1 v_0.$$

- Viteza suprafeței de contact este, conform relației (3.15):

$$v = \frac{K_1 v_0}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{K_1}{K_2} v_0}{\frac{K_1}{K_2} + 1} \cong 0.$$

- Energia transmisă se calculează din relația (3.17):

$$E = N \cdot u = N \cdot v \cdot t = 0.$$

Astfel, prin ciocnirea percutorului cu o bară foarte rigidă, suprafața frontală a percutorului se oprește instantaneu, forța de ciocnire atinge valoarea maximă pentru sistemul de bare dat, iar schimbul de energie nu se mai produce.

$$\begin{cases} N = N_{\max} \\ v = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

2). Impedanța barei lovite este cu mult mai mică decât a perculatorului.

$$K_1 \gg K_2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} \approx 0$$

- Atunci forța de ciocnire este:

$$N = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0 = \frac{K_2}{1 + \frac{K_2}{K_1}} v_0 \cong K_2 v_0.$$

- Viteza suprafeței de contact:

$$v = \frac{K_1 v_0}{K_1 + K_2} = \frac{v_0}{1 + \frac{K_2}{K_1}} \cong v_0$$

- Energia transmisă :

$$E = N \cdot u = N \cdot v \cdot t = K_2 v_0 v_0 t = K_2 v_0^2 t .$$

Pentru o valoare absolută a lui K_2 foarte mică:

$$\begin{cases} N = 0 \\ v = v_0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Cele două cazuri arată că rigiditatea excesivă a barei lovite, ca și rigiditatea foarte mică a acesteia, conduc, în egală măsură, la înrăutățirea transmiterii energiei.

3). Un caz intermediar este cel în care impedanțele barelor sunt identice:

$$K_1 = K_2 = K$$

- Forța de ciocnire este:

$$N = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0 = \frac{K^2}{2K} v_0 = \frac{K}{2} v_0$$

- viteza suprafeței de contact este:

$$v = \frac{K_1 v_0}{K_1 + K_2} = \frac{K v_0}{2K} = \frac{v_0}{2} ,$$

↳ energia transmisă este:

$$E = N \cdot u = N \cdot v \cdot t = \frac{K}{2} v_0 \frac{v_0}{2} t = \frac{K}{4} v_0^2 t.$$

Vom arăta că, dacă impedanțele sunt egale ($K_1 = K_2$), transmiterea de energie, determinată în același timp t , va fi maximă pentru sistemul dat. Pentru aceasta, revenim la relația (3.18). Notând:

$$K_2 = \lambda K_1$$

și înlocuind în (3.18), avem:

$$P = \frac{K_1^2 K_2 v_0^2}{(K_1 + K_2)^2} = \frac{K_1^2 \lambda K_1 v_0^2}{(K_1 + \lambda K_1)^2} = \frac{\lambda K_1 v_0^2}{(1 + \lambda)^2}.$$

Derivând în raport cu λ , avem:

$$\frac{dP}{d\lambda} = K_1 v_0^2 \left[\frac{(1 + \lambda)^2 - \lambda \cdot 2(1 + \lambda)}{(1 + \lambda)^4} \right] = \frac{1 - \lambda}{(1 + \lambda)^3} K_1 v_0^2.$$

Egalând derivata $\frac{dP}{d\lambda}$ cu zero, găsim corelația între K_2 și K_1 , care corespunde

maximului de energie transmisă:

$$1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$K_2 = \lambda K_1 = K_1,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Așadar, pentru cazul $K_1 = K_2 = K$ se obțin următoarele:

$$\begin{cases} N = \frac{K v_0}{2} \\ v = \frac{v_0}{2} \\ E = E_{\max} \end{cases}$$

3.2.2. Ciocnirea plană în cazul unui sistem percutant alcătuit din mai multe bare

Soluțiile obținute în cazul anterior constituie baza pentru calculul unor sisteme mai complicate, când la ciocnire participă mai mult de două bare. Considerăm un sistem alcătuit din trei bare (figura 3.3). Bara 1, având viteza inițială $v_{01} = v_0$ și impedanța K_1 , ciocnește barele 2 și 3, fixe înainte de ciocnire și având vitezele inițiale $v_{02} = 0, v_{03} = 0$ și impedanțele K_2 și K_3 . Contactul barelor se face prin intermediul garniturii rigide 4.

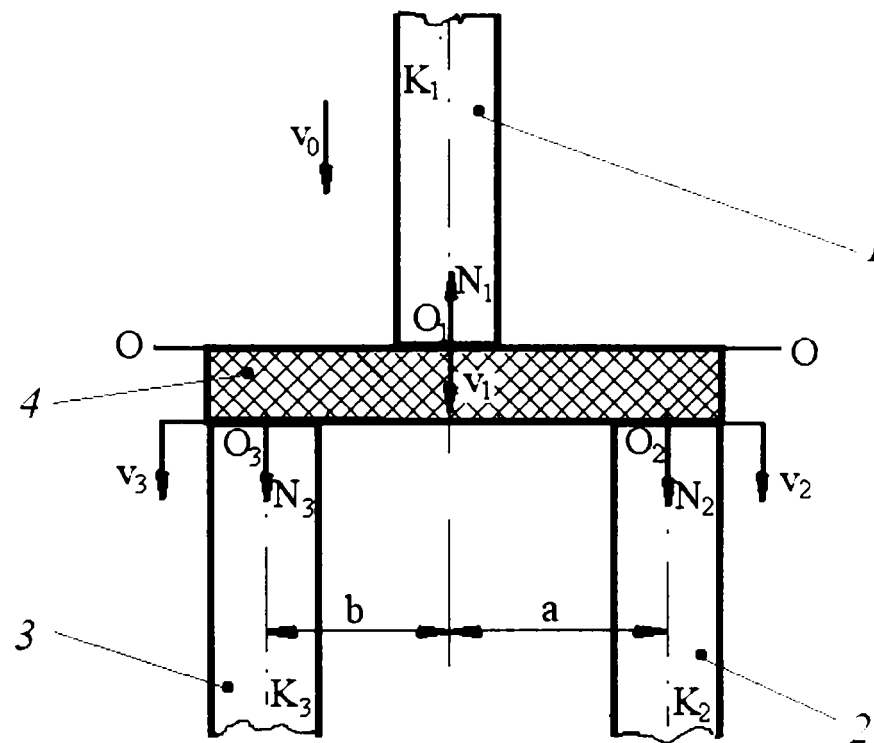


Figura 3.3. Sistem percutant alcătuit din trei bare

N_1, N_2, N_3 sunt forțele care acționează asupra barelor în momentul ciocnirii, iar v_1, v_2, v_3 sunt vitezele suprafețelor frontale ale barelor în momentul ciocnirii. Se consideră că în bare nu există tensiuni inițiale.

Punctul de ciocnire se găsește la distanța a față de axa barei 2 și la distanța b față de axa barei 3.

Mai întâi vom determina ecuațiile ondulatorii pentru cele trei bare. Pentru că barele 2 și 3 sunt așezate sub suprafața de ciocnire $0-0$, impedanțele lor vor avea

semnul minus. Prin analogie cu sistemul de ecuații (3.9), considerând că vitezele inițiale ale barelor 2 și 3 sunt egale cu zero și că în bare nu există tensiuni inițiale, se poate scrie:

$$\begin{aligned} N_1 &= K_1(v_0 - v_1) \\ N_2 &= -K_2(0 - v_2) = K_2v_2 \\ N_3 &= -K_3(0 - v_3) = K_3v_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

La sistemul obținut din cele trei ecuații cu șase necunoscute, trebuie să adăugăm ecuațiile care fac legătura între forțele N_1 , N_2 , N_3 . În ipoteza ciocnirii plane, conform căreia poziția barelor în timpul ciocnirii nu se modifică, adică flambajul este imposibil, se poate scrie teorema momentelor cinetice față de punctele O_2 , respectiv O_3 :

$$\begin{aligned} N_2(a + b) = N_1b &\Leftrightarrow N_2 = \frac{b}{a + b} N_1 \\ N_1a = N_3(a + b) &\Leftrightarrow N_3 = \frac{a}{a + b} N_1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pentru a obține încă o ecuație, folosim legea conservării energiei, pentru sistemul format din cele trei bare:

$$E_1 = E_2 + E_3,$$

în care:

$$\begin{aligned} E_1 &= N_1v_1t \\ E_2 &= N_2v_2t \\ E_3 &= N_3v_3t, \end{aligned}$$

și de unde avem că:

$$N_1v_1 = N_2v_2 + N_3v_3 \quad (3.22)$$

Cu ecuațiile (3.20), (3.21), (3.22) obținem un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute, prin a cărui rezolvare se obțin soluțiile N_1 , N_2 , N_3 , respectiv v_1 , v_2 , v_3 :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{K_1v_0}{1 + n} \\ N_2 &= \frac{b}{a + b} \cdot \frac{K_1v_0}{1 + n} \\ N_3 &= \frac{a}{a + b} \cdot \frac{K_1v_0}{1 + n} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$v_1 = v_0 \cdot \frac{n}{1+n}$$

$$v_2 = \frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{v_0}{1+n} \quad (3.24)$$

$$v_3 = \frac{K_1}{K_3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{v_0}{1+n}$$

$$\text{unde: } n = \frac{K_1(K_2a^2 + K_3b^2)}{K_2K_3(a+b)^2} \quad (3.25)$$

Caz particular:

Barele 2 și 3 sunt identice și așezate la aceeași distanță față de axa barei 1, adică:

$$K_2 = K_3 = K$$

$$a = b$$

Atunci:

$$n = \frac{K_1}{2K}$$

$$N_1 = \frac{2K_1K}{K_1 + 2K} v_0$$

$$N_2 = N_3 = \frac{K_1K}{K_1 + 2K} v_0 = \frac{N_1}{2}$$

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{K_1}{K_1 + 2K} v_0$$

Prin metode asemănătoare se rezolvă sisteme format din mai multe bare.

3.2.3. Ciocnirea plană pentru un sistem format dintr-o bară plină și o bară de formă tubulară

Un exemplu de sistem percutant în care are loc ciocnire fără suprafețe frontale este ilustrat în figura 3.4. Percutorul (1) are formă tubulară. Bara lovită (2) are secțiunea în trepte și se consideră în repaus înainte de ciocnire.

Bara 2 este împărțită imaginar, de suprafața $0-0$, în două semibare: cea situată deasupra suprafeței $0-0$ având impedanța K_3 (pozitivă), iar cea situată sub suprafața $0-0$, impedanța K_2 (negativă).

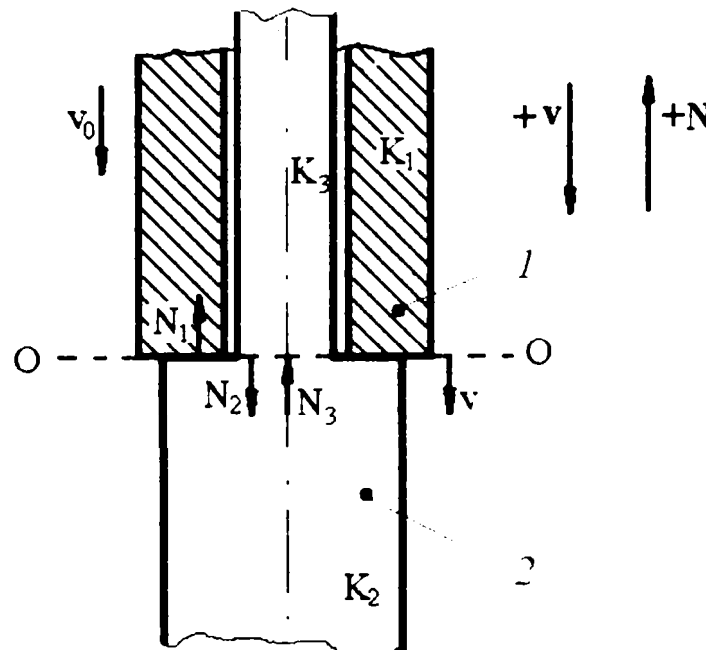


Figura 3.4: Sistem percutant fără suprafețe frontale

Notăm: N_1 = forța de acțiune a semibarei inferioare asupra percutorului;
 N_2 = forța de acțiune a percutorului asupra semibarei inferioare;
 N_3 = forța de acțiune a semibarei inferioare asupra celei superioare;
 v = viteza suprafeței de contact de la nivelul $0-0$, aceeași, în cazul ciocnirii plane, pentru toate punctele.

Alcătuiind sistemul de ecuații ondulatorii pentru percutor, pentru semibara inferioară, respectiv pentru semibara superioară, se obține:

$$\begin{aligned}
N_1 &= K_1(v_0 - v) \\
N_2 &= -K_2(0 - v) = K_2v \\
N_3 &= K_3(0 - v) = -K_3v
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

Celor trei ecuații cu patru necunoscute (N_1, N_2, N_3, v) de mai sus le vom adăuga încă o ecuație, de echilibru a proiecțiilor forțelor ce acționează asupra barelor, pe axa lor.

$$N_1 + N_3 - N_2 = 0 \tag{3.27}$$

Rezolvând sistemul de ecuații (3.26), (3.27), obținem:

$$v = \frac{K_1 v_0}{K_1 + K_2 + K_3} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= K_1(v_0 - v) = \frac{K_1(K_2 + K_3)}{K_1 + K_2 + K_3} v_0 \\
N_2 &= K_2 v = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2 + K_3} v_0 \\
N_3 &= -K_3 v = -\frac{K_1 K_3}{K_1 + K_2 + K_3} v_0
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

Caz particular:

Dacă cele două tronsoane ale barei lovite au secțiuni apropiate, adică avem: $K_2 = K_3 = K$, atunci:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{2K_1 K}{K_1 + 2K} v_0 \\
N_2 &= \frac{K_1 K}{K_1 + 2K} v_0 \\
N_3 &= -\frac{K_1 K}{K_1 + 2K} v_0
\end{aligned}
\tag{3.30}$$

Semnul minus din ultima ecuație a sistemului (3.29)sau (3.30) arată că pe suprafața ce separă bara în cele două semibare acționează o forță de întindere.

Tensiunile de întindere ce apar în acest caz se determină cu relația:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = -\frac{K_1 \rho_3 c_3 v_0}{K_1 + K_2 + K_3} \quad (3.31)$$

Expresiile analitice obținute dovedesc că în toate cazurile studiate (ciocnirea a două bare, a mai multor bare, ciocnirea fără suprafețe frontale), modul în care variază forța de ciocnire, viteza barelor și tensiunile este același; parametrii ciocnirii se modifică brusc și pe durata ciocnirii rămân constanți.

Până acum, durata ciocnirii nu a fost determinată. Pentru aflarea ei este necesar să se ia în considerare faptul că, în afara suprafețelor frontale, care participă în primul rând la ciocnire, la ciocnirea reciprocă a barelor există și alte suprafețe limită (frontiere), de exemplu un capăt liber al barei sau o suprafață în care se modifică impedanța barei.

3.3. Transmiterea și reflexia undelor de ciocnire pe suprafețele limită.

Diagramele undulatorii

Prin deplasarea undei longitudinale prin bară, pornind de la suprafața plană de ciocnire, parametrii ei (forța de ciocnire, viteza, tensiunea) se modifică puțin, ca urmare a dispersiei undelor în mediul înconjurător, a pierderii de energie prin histerezis și prin frecarea exterioară. Mărimile acestor parametri depind de proprietățile materialului barei, de valorile tensiunilor, de proprietățile mediului înconjurător și, de asemenea, de lungimea barei.

Totuși, pentru multe materiale, printre care și oțelurile, pentru sarcini care nu depășesc limita de elasticitate, distorsiunile undei sunt mici, chiar și în bare cu lungimi semnificative. Astfel, se poate presupune că parametrii undei, în cazul deplasării prin bară, rămân neschimbați până când ea va atinge suprafața limită.

Suprafețele limită sunt acele suprafețe prin care trece unda și în care se modifică impedanța. Suprafețe limită pot fi suprafețele frontale ale barelor supuse ciocnirii longitudinale, suprafețe în care au loc modificări bruște de secțiune, precum și suprafețele inițiale de contact ale barelor.

În figura 3.5 sunt prezentate exemple de suprafețe limită.

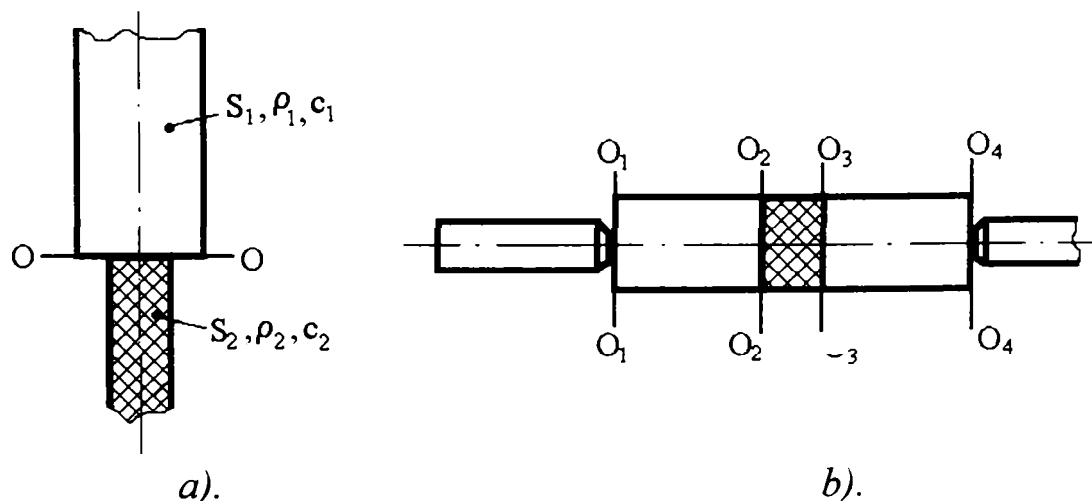


Figura 3.5. Exemple de suprafețe limită

Din punctul de vedere al fizicii transmiterii undei, tipul suprafeței limită nu are o însemnătate deosebită. Însă, suprafețe de tipul celor din figura 3.5.b nu sunt în stare să se opună forțelor de întindere, de aceea apariția pe asemenea suprafețe a

undelor de întindere conduce imediat la separarea corpurilor aflate în contact - sistemul percutant se descompune.

În cazul existenței câtorva suprafețe limită se produc reflexii repetate, refracția și suprapunerea undelor de ciocnire, în funcție de care, tabloul general al procesului ondulatoriu se modifică semnificativ, în timp. În legătură cu aceasta, e utilă construirea unor diagrame de propagare a undelor (diagrame ondulatorii).

Diagramele ondulatorii constituie baza pentru alcătuirea sistemului de ecuații ondulatorii, arătând succesiunea temporală a undelor la suprafața limită dată.

Vom expune metoda de calcul pentru diferite sisteme percutante. În primul caz este prezentat un sistem cu două suprafețe limită (figura 3.6).

În figura 3.6 este redat un percutor 1, având o proeminență de lungime l . Percutorul cu proeminență ciocnește bara 2. Se cunosc: impedanța percutorului (K_1), a proeminenței (K_0), a barei lovite (K_2) și, de asemenea, viteza de propagare a unei prin proeminență (c_0).

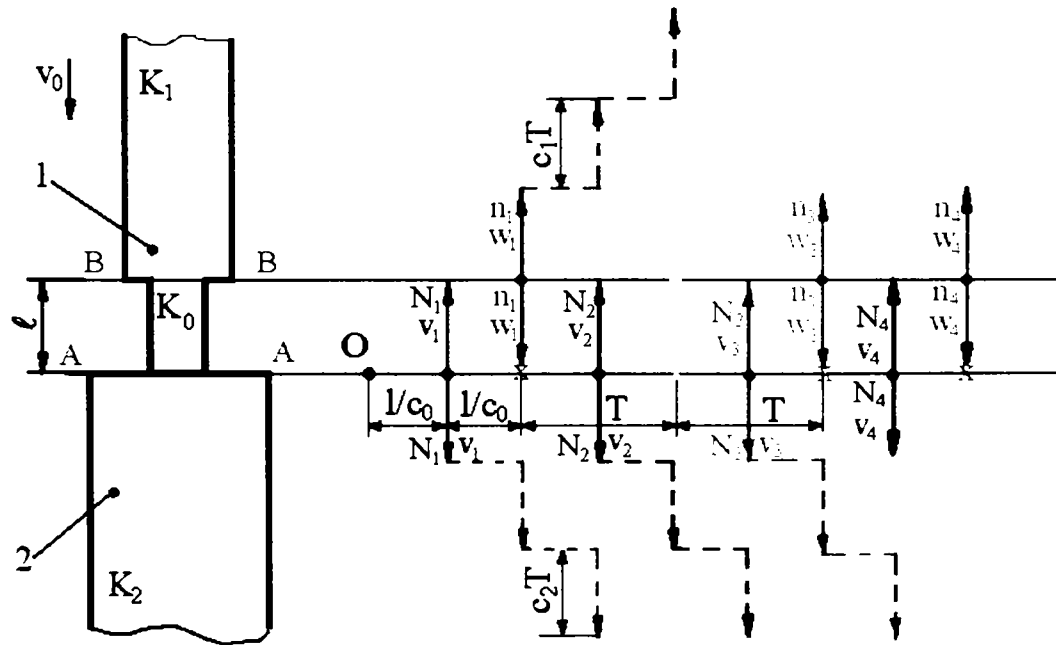


Figura 3.6. Sistem cu două suprafețe limită. Diagrama ondulatorie

Construcția diagramei ondulatorii se face astfel:

1. Se trasează suprafețele limită A și B.
2. Pe linia suprafeței de contact inițial, A, se fixează un punct arbitrar O, care servește drept punct inițial pentru calculul timpului t .

3. La scara considerată pentru timp se măsoară, din punctul O, timpul de deplasare a undei de ciocnire către suprafața limită, care este egal cu $\frac{l}{c_0} = \frac{T}{2}$, unde

$$T = \frac{2l}{c_0} \text{ este perioada vibrațiilor proprii ale proeminenței.}$$

4. Din acest punct, $t = \frac{l}{c_0}$, se construiesc vectorii orientați în sens opus, care indică direcția deplasării undelor inițiale de ciocnire de la suprafața de contact. În apropierea vectorilor undelor se notează parametrii lor - forța N și viteza v . Parametrii undelor ce străbat concomitent suprafața plană dată sunt identici: atât forțele (acțiunea este egală cu reacțiunea), cât și vitezele (suprafața de contact comună).
5. Se obține punctul de intersecție al vectorului undei cu linia suprafeței limită B, corespunzător momentului atingerii de către undă a acestei suprafețe.
6. În acest moment, din cauza reflexiei și refracției, pe suprafața B pătrund noi unde, cu parametrii n_1 și w_1 , dintre care una se propagă mai departe prin perculator, iar cealaltă, în sens invers, prin proeminență, spre suprafața plană A.
7. Această ultimă undă atinge suprafața plană A, după timpul $t = \frac{l}{c_0}$ de la sosirea undei N_1, v_1 , pe linia B.
8. Analog se construiesc vectorii undelor N_2, v_2 ; N_3, v_3 ; N_4, v_4 ș.a.m.d., care apar succesiv pe suprafața limită A și vectorii undelor n_2, w_2 ; n_3, w_3 ; n_4, w_4 , etc., care apar pe suprafața limită B.

În timpul apariției unor noi unde, undele anterioare continuă să se propage prin bară și prin perculator - în diagramă ele sunt marcate prin linie întreruptă. Însă, marcarea deplasării lor pe diagrama ondulatorie dată nu este obligatorie, deoarece ele nu se întorc spre suprafețele limită. Cu alte cuvinte, undele exterioare, ce se propagă dincolo de suprafețele limită, interesează numai în momentul apariției lor.

3.4. Calculul sistemelor percutante pe baza diagramelor ondulatorii

3.4.1. Calculul sistemului percutant cu două suprafețe limită

După construirea diagramei ondulatorii se poate trece și la calculul sistemului din figura 3.6. Problema de calcul constă în determinarea forțelor ce acționează pe suprafețele limită și a vitezelor de deplasare a lor, în orice moment. Pentru aceasta, trebuie să determinăm parametrii undelor ce apar pe aceste suprafețe. Calculul parametrilor se poate face prin metoda directă, inversă sau semiinversă.

În primul caz, parametrii undelor se calculează în ordinea lor cronologică. În al doilea caz, în ordine inversă, începând cu un moment determinat. Pentru stabilirea acestui moment este indicat să se aleagă momentul când procesul ondulatoriu s-a stabilizat, fapt concretizat prin repetarea unor porțiuni din diagrama ondulatorie pentru perioade determinate. În al treilea caz, o parte a undelor (de obicei undele exterioare), se calculează prin metoda directă, iar celelalte (undele interioare), prin metoda inversă.

Metoda a doua și a treia sunt preferate pentru alcătuirea legilor generale.

Pentru determinarea parametrilor unei folosim ecuația generală (3.10), care leagă parametrii inițiali și cei curenți ai undelor. Forma ei este:

$$N - N_0 = \pm K(v_0 - v), \quad (3.10)$$

unde:

N_0 = valoarea inițială (anterioară) a forței;

v_0 = valoarea inițială (anterioară) a vitezei;

N = valoarea curentă a forței;

v = valoarea curentă a vitezei;

K = impedanța barei pentru care se scrie ecuația.

Pentru a nu îngreuna calculul cu termeni suplimentari, admitem că percutorul și bara nu au avut tensiuni inițiale ($N_{2,0} = 0$, $N_{1,0} = 0$), bara 2 a fost în

repaus înainte de ciocnire, adică nu a avut viteză inițială ($v_{2,0} = 0$), iar viteza inițială a perculatorului cu proeminență este $v_{1,0} = v_0$.

- Ecuațiile pentru determinarea valorilor N_I , v_I (pe suprafața limită A) sunt următoarele:

- pentru proeminență:

$$N_I - 0 = K_0(v_0 - v_I)$$

- pentru bară:

$$N_I - 0 = -K_2(0 - v_I)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_I = K_0(v_0 - v_I) \\ N_I = K_2 v_I \end{cases} \quad (3.32)$$

$$K_2 v_I = K_0 v_0 - K_0 v_I$$

$$v_I(K_2 + K_0) = K_0 v_0$$

Soluția sistemului (3.32) este:

$$\Rightarrow \begin{cases} v_I = \frac{K_0}{K_0 + K_2} v_0 \\ N_I = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Observăm că:

$$N_I - K_2 v_I = 0 \quad (3.34)$$

- În continuare alcătuim sistemul de ecuații pentru determinarea lui n_I și w_I (la suprafața limită B):

- pentru perculator:

$$n_I - 0 = K_I(v_0 - w_I)$$

- pentru proeminență (vezi figura 3.6):

$$n_I - N_I = -K_0(v_I - w_I)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_I = K_I(v_0 - w_I) \\ n_I - N_I = -K_0(v_I - w_I) \end{cases} \quad (3.35)$$

Rezolvând acest sistem, obținem:

$$\begin{cases} n_1 = \frac{2K_0K_1K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)}v_0 \\ w_1 = \left[1 - \frac{2K_0K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \right]v_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Se observă că:

$$v_0 = \frac{n_1}{K_1} + w_1 \quad (3.37)$$

- Sistemul de ecuații pentru determinarea valorilor N_2 și v_2 (la suprafața limită A):

$$\begin{cases} N_2 - n_1 = K_0(w_1 - v_2) \\ N_2 - N_1 = -K_2(v_1 - v_2) \end{cases} \quad (3.38)$$

Rezolvăm acest sistem, folosind și relația (3.37) și obținem:

$$N_2 - K_2v_2 = N_1 - K_2v_1 = 0 \quad (3.39)$$

Din (3.39), (3.36) avem:

$$\begin{aligned} K_2v_2 - \frac{2K_0K_1K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)}v_0 &= K_0v_0 - \frac{2K_0^2K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)}v_0 - K_0v_2 \\ v_2(K_0 + K_2) &= v_0K_0 \left[\frac{2K_1K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} + 1 - \frac{2K_0K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \right] \\ v_2 &= v_0 \frac{K_0}{K_0 + K_2} \left[1 + \frac{2K_2(K_1 - K_0)}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \right] \end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{K_0K_2}{K_0 + K_2} \left[1 + \frac{2K_2(K_1 - K_0)}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \right]v_0 \\ v_2 &= \frac{K_0}{K_0 + K_2} \left[1 + \frac{2K_2(K_1 - K_0)}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \right]v_0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Sau:

$$\begin{cases} N_2 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{(K_1 - K_0)(K_2 - K_0)}{(K_1 + K_0)(K_2 + K_0)} \right] v_0 \\ v_2 = \frac{K_0}{K_0 + K_2} \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{(K_1 - K_0)(K_2 - K_0)}{(K_1 + K_0)(K_2 + K_0)} \right] v_0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Astfel, trecând succesiv din nod în nod, se pot determina parametrii undelor de ciocnire. Se observă că expresiile pentru forță și viteze devin din ce în ce mai complicate și calcularea lor cere eforturi mari. Corespunzător se complică și forma legilor generale.

Pentru rezolvarea unei asemenea probleme e mai comod să se *utilizeze metoda semiinversă*.

- Vom determina N_4 și v_4 , alcătuind sistemul de ecuații pe suprafața limită A:

$$\begin{cases} N_4 - n_3 = K_0(w_3 - v_4) \\ N_4 - N_3 = -K_2(v_3 - v_4) \end{cases} \quad (3.42)$$

Vom exprima N_4 din a doua ecuație a sistemului (3.42):

$$N_4 = N_3 - K_2 v_3 + K_2 v_4 ,$$

unde N_3 și v_3 sunt parametrii undei exterioare ce se propagă prin bară. Unda anterioară acestei unde este cea având parametrii N_2 și v_2 , iar unda anterioară acesteia din urmă este cea cu parametrii N_1 și v_1 . Alcătuind ecuațiile pentru fiecare undă ce trece prin bară, obținem:

$$\begin{aligned} N_3 - N_2 &= -K_2(v_2 - v_3) \text{ sau } N_3 - K_2 v_3 = N_2 - K_2 v_2; \\ N_2 - N_1 &= -K_2(v_1 - v_2) \text{ sau } N_2 - K_2 v_2 = N_1 - K_2 v_1; \\ N_1 - 0 &= -K_2(0 - v_1) \text{ sau } N_1 - K_2 v_1 = 0, \end{aligned}$$

de unde:

$$N_4 - K_2 v_4 = N_3 - K_2 v_3 = N_2 - K_2 v_2 = N_1 - K_2 v_1 = 0$$

și, în general,

$$N_i - K_2 v_i = 0, \quad (3.43)$$

ceea ce simplifică considerabil rezolvarea ecuațiilor.

Cu această condiție, putem rezolva sistemul de ecuații (3.42) și obținem:

$$\begin{aligned}
N_4 &= n_3 + K_0 w_3 - K_0 \frac{N_4}{K_2} \\
N_4 \left(\frac{K_2 + K_0}{K_2} \right) &= n_3 + K_0 w_3 \\
\Rightarrow \begin{cases} N_4 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_3}{K_0} + w_3 \right) \\ v_4 = \frac{N_4}{K_2} \end{cases} & \quad (3.44)
\end{aligned}$$

- Pentru determinarea lui n_3 și w_3 , alcătuim sistemul de ecuații pentru undele corespunzătoare suprafeței plane B.

$$\begin{cases} n_3 - n_2 = K_1(w_2 - w_3) \\ n_3 - N_3 = -K_0(v_3 - w_3) \end{cases} \quad (3.45)$$

Pe suprafața limită B, ecuațiile corespunzătoare perculatorului sunt:

$$n_2 - n_1 = K_1(w_1 - w_2) \Rightarrow n_2 + K_1 w_2 = n_1 + K_1 w_1.$$

$$n_1 - 0 = K_1(v_0 - w_1) \Rightarrow n_1 + K_1 w_1 = K_1 v_0,$$

de unde:

$$n_2 + K_1 w_2 = n_1 + K_1 w_1 = K_1 v_0,$$

Determinăm n_3 din prima ecuație (3.45):

$$n_3 + K_1 w_3 = n_2 + K_1 w_2 = K_1 v_0,$$

sau, în general,

$$n_i + K_1 w_i = K_1 v_0, \quad (3.46)$$

cea ce simplifică mult rezolvarea ecuațiilor.

Din (3.46) avem:

$$w_3 = \frac{K_1 v_0 - n_3}{K_1} = v_0 - \frac{n_3}{K_1} \quad (3.47)$$

În aceste condiții, din sistemul de ecuații (3.45) se ajunge la:

$$\Rightarrow \begin{cases} n_3 = \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_3}{K_0} - v_3 \right) \\ w_3 = v_0 - \frac{n_3}{K_1} \end{cases} \quad (3.48)$$

În relația (3.44) apare suma $\frac{n_3}{K_0} + w_3$. Din (3.48) rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{n_3}{K_0} + w_3 &= \frac{K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_3}{K_0} - v_3 \right) + v_0 - \frac{K_0}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_3}{K_0} - v_3 \right) \\ \frac{n_3}{K_0} + w_3 &= v_0 + \left(v_0 + \frac{N_3}{K_0} - v_3 \right) \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right) \\ \Rightarrow \frac{n_3}{K_0} + w_3 &= v_0 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \left(v_0 + \frac{N_3}{K_0} - v_3 \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Vom calcula valoarea $\frac{N_3}{K_0} - v_3$, ce apare în relația (3.49).

- Scriem ecuațiile pentru suprafața limită A (unde intervin mărimile N_3 , respectiv v_3):

$$\begin{cases} N_3 - n_2 = K_0(w_2 - v_3) \\ N_3 - N_2 = -K_2(v_2 - v_3) \end{cases} \quad (3.50)$$

Ținând cont de relația (3.43):

$$N_2 - K_2 v_2 = 0,$$

obținem:

$$\begin{aligned} N_3 &= N_2 - K_2 v_2 + K_2 v_3 \Rightarrow N_3 = K_2 v_3 \\ \Rightarrow v_3 &= \frac{N_3}{K_2} \end{aligned}$$

De asemenea,

$$\Rightarrow \begin{cases} N_3 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_2}{K_0} + w_2 \right) \\ v_3 = \frac{N_3}{K_2} \end{cases} \quad (3.51)$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned}
\frac{N_3}{K_0} - v_3 &= \frac{K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_2}{K_0} + w_2 \right) - \frac{N_3}{K_2} \\
\frac{N_3}{K_0} - v_3 &= \frac{K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_2}{K_0} + w_2 \right) - \frac{K_0}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_2}{K_0} + w_2 \right) \\
\frac{N_3}{K_0} - v_3 &= \left(\frac{n_2}{K_0} + w_2 \right) \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right) \\
\Rightarrow \frac{N_3}{K_0} - v_3 &= \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \left(\frac{n_2}{K_0} + w_2 \right) \tag{3.52}
\end{aligned}$$

- Pentru a determina $\frac{n_2}{K_0} + w_2$, rezolvăm sistemul de ecuații corespunzător

suprafeței limită B, unde apar mărimile n_2 și w_2 :

$$\begin{cases} n_2 - n_1 = K_1(w_1 - w_2) \\ n_2 - N_2 = -K_0(v_2 - w_2) \end{cases} \tag{3.53}$$

Ținând cont de relația (3.46), avem:

$$n_2 + K_1 w_2 = K_1 v_0 \Rightarrow w_2 = v_0 - \frac{n_2}{K_1}$$

iar din (3.53):

$$n_2 - N_2 = -K_0 v_2 + K_0 w_2$$

$$n_2 - N_2 = -K_0 v_2 + K_0 v_0 - \frac{K_0}{K_1} n_2$$

$$n_2 \left(1 + \frac{K_0}{K_1} \right) = N_2 - K_0 v_2 + K_0 v_0$$

$$n_2 \frac{K_1 + K_0}{K_1} = N_2 - K_0 v_2 + K_0 v_0$$

$$n_2 = \frac{K_1 K_0}{K_1 + K_0} \left(v_0 + \frac{N_2}{K_0} - v_2 \right)$$

$$\begin{cases} n_2 = \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_2}{K_0} - v_2 \right) \\ w_2 = v_0 - \frac{n_2}{K_1} \end{cases} \tag{3.54}$$

Rezultă că:

$$\begin{aligned}
 \frac{n_2}{K_0} + w_2 &= \frac{K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_2}{K_0} - v_2 \right) + v_0 - \frac{n_2}{K_1} \\
 \frac{n_2}{K_0} + w_2 &= \frac{K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_2}{K_0} - v_2 \right) + v_0 - \frac{K_0}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_2}{K_0} - v_2 \right) \\
 \frac{n_2}{K_0} + w_2 &= v_0 + \left(v_0 + \frac{N_2}{K_0} - v_2 \right) \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right) \\
 \Rightarrow \frac{n_2}{K_0} + w_2 &= v_0 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right) \left(v_0 + \frac{N_2}{K_0} - v_2 \right) \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

- $\frac{N_2}{K_0} - v_2$ rezultă din ecuațiile de pe suprafața limită A, unde apar N_2 și v_2 :

$$\begin{cases} N_2 - n_1 = K_0(w_1 - v_2) \\ N_2 - N_1 = -K_2(v_1 - v_2) \end{cases} \tag{3.38}$$

și folosind relația (3.43), se obține:

$$N_2 - K_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{N_2}{K_2}$$

Din (3.38) avem:

$$\begin{aligned}
 N_2 - n_1 &= K_0 w_1 - K_0 \frac{N_2}{K_2} \\
 N_2 \left(1 + \frac{K_0}{K_2} \right) &= n_1 + K_0 w_1 \\
 N_2 \frac{K_0 + K_2}{K_2} &= n_1 + K_0 w_1 \\
 \Rightarrow \begin{cases} N_2 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_1}{K_0} + w_1 \right) \\ v_2 = \frac{N_2}{K_2} \end{cases} \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Atunci:

$$\begin{aligned}
\frac{N_2}{K_0} - v_2 &= \frac{K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_1}{K_0} + w_1 \right) - \frac{N_2}{K_2} \\
\frac{N_2}{K_0} - v_2 &= \frac{K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_1}{K_0} + w_1 \right) - \frac{K_0}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_1}{K_0} + w_1 \right) \\
\frac{N_2}{K_0} - v_2 &= \left(\frac{n_1}{K_0} + w_1 \right) \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right) \\
\Rightarrow \frac{N_2}{K_0} - v_2 &= \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \left(\frac{n_1}{K_0} + w_1 \right) \tag{3.57}
\end{aligned}$$

- Scriem acum ecuațiile pe suprafața limită B - apar aici mărimile n_1 și w_1 , necesare pentru determinarea sumei $\frac{n_1}{K_0} + w_1$:

$$\begin{cases} n_1 - 0 = K_1(v_0 - w_1) \\ n_1 - N_1 = -K_0(v_1 - w_1) \end{cases} \tag{3.35}$$

Din prima ecuație:

$$n_1 = K_1 v_0 - K_1 w_1 \Rightarrow w_1 = v_0 - \frac{n_1}{K_1}$$

Din a doua ecuație:

$$\begin{aligned}
n_1 - N_1 &= -K_0 v_1 + K_0 \left(v_0 - \frac{n_1}{K_1} \right) \\
n_1 - N_1 &= -K_0 v_1 + K_0 v_0 - n_1 \frac{K_0}{K_1} \\
n_1 \left(1 + \frac{K_0}{K_1} \right) &= N_1 - K_0 v_1 + K_0 v_0 \\
n_1 &= \frac{K_1}{K_0 + K_1} (N_1 - K_0 v_1 + K_0 v_0) \\
\Rightarrow \begin{cases} n_1 = \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_1}{K_0} - v_1 \right) \\ w_1 = v_0 - \frac{n_1}{K_1} \end{cases} \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Rezultă că:

$$\begin{aligned}
\frac{n_1}{K_0} + w_1 &= \frac{K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_1}{K_0} - v_1 \right) + v_0 - \frac{n_1}{K_1} \\
\frac{n_1}{K_0} + w_1 &= \frac{K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_1}{K_0} - v_1 \right) + v_0 - \frac{K_0}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{N_1}{K_0} - v_1 \right) \\
\frac{n_1}{K_0} + w_1 &= v_0 + \left(v_0 + \frac{N_1}{K_0} - v_1 \right) \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \\
\Rightarrow \frac{n_1}{K_0} + w_1 &= v_0 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \left(v_0 + \frac{N_1}{K_0} - v_1 \right) \tag{3.59}
\end{aligned}$$

- Mai trebuie exprimată valoarea $\frac{N_1}{K_0} - v_1$. Scriem ecuațiile pe suprafața limită A,

pentru a determina parametrii N_1, v_1 :

$$\begin{cases} N_1 - 0 = K_0(v_0 - v_1) \\ N_1 - 0 = -K_2(0 - v_1) \end{cases} \tag{3.32}$$

Avem:

$$N_1 = K_2 v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{N_1}{K_2}$$

$$N_1 = K_0 v_0 - K_0 v_1 = K_0 v_0 - K_0 \frac{N_1}{K_2}$$

$$N_1 \left(1 + \frac{K_0}{K_2} \right) = K_0 v_0 \Rightarrow N_1 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \\ v_1 = \frac{N_1}{K_2} \end{cases} \tag{3.60}$$

Așadar:

$$\frac{N_1}{K_0} - v_1 = \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} v_0 \tag{3.61}$$

Înlocuim (3.61) în (3.58):

$$n_1 = \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \left(v_0 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} v_0 \right)$$

$$\Rightarrow n_1 = v_0 \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \left(1 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right) \quad (3.62)$$

Cu (3.61) în (3.59) avem:

$$\frac{n_1}{K_0} + w_1 = v_0 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \left(v_0 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} v_0 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{K_0} + w_1 = v_0 \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \left(1 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right) \right] \quad (3.63)$$

Cu această ultimă expresie în (3.56) și (3.57), obținem:

$$N_2 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \cdot v_0 \cdot \left(1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right) \quad (3.64)$$

$$\frac{N_2}{K_0} - v_2 = \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \cdot v_0 \cdot \left(1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right) \quad (3.65)$$

și de aici, înlocuind în (3.54) și (3.55), avem:

$$n_2 = \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \cdot v_0 \cdot \left[1 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \cdot \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 \cdot \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right] \quad (3.66)$$

$$\frac{n_2}{K_0} + w_2 = v_0 \cdot \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 \right] \quad (3.67)$$

Înlocuim (3.67) în (3.51) și în (3.52):

$$N_3 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 \right] \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
\frac{N_3}{K_0} - v_3 = v_0 & \left[\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \right. \\
& + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \\
& \left. + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^3 \right] \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Înlocuim acum (3.69) în relațiile (3.48) și (3.49) și obținem:

$$\begin{aligned}
n_3 = \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \cdot v_0 \cdot & \left[1 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \right. \\
& + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \\
& \left. + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^3 \right] \quad (3.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{n_3}{K_0} + w_3 = v_0 \cdot & \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \right. \\
& + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \\
& \left. + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^3 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^3 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^3 \right] \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Cu (3.71) în relația (3.44) obținem valoarea forței N_4 :

$$\begin{aligned}
N_4 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 & \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \right. \\
& + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \\
& \left. + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^3 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^3 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^3 \right] \quad (3.72)
\end{aligned}$$

Am obținut, deci, următoarele valori pentru forțele N_i și n_i :

$$N_1 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \quad (3.60)$$

$$N_2 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \cdot v_0 \cdot \left(1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right) \quad (3.64)$$

$$N_3 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 \right] \quad (3.68)$$

$$N_4 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^3 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^3 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^3 \right] \quad (3.72)$$

$$n_1 = v_0 \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \left(1 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right) \quad (3.62)$$

$$n_2 = \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \cdot v_0 \cdot \left[1 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \cdot \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} + \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 \cdot \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right] \quad (3.63)$$

$$n_3 = \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \cdot v_0 \cdot \left[1 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \right)^3 \right] \quad (3.70)$$

Revenind la relația (3.70), grupăm termenii din paranteza dreaptă, doi câte

doi și dăm factor comun pe $\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0}$, respectiv $\left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0}\right)^2$.

Găsim:

$$n_3 = v_0 \cdot \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \cdot \left(1 + \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0}\right) \cdot \left[1 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} + \left(\frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0}\right)^2\right] \quad (3.73)$$

Termenii din paranteza dreaptă reprezintă suma termenilor unei progresii geometrice descrescătoare, cu rația

$$q = \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} < 1 \quad (3.74)$$

Suma acestor termeni este:

$$S = 1 + q + q^2 = \frac{1 - q^3}{1 - q}$$

În S apar, în acest caz, 3 termeni, 3 fiind numărul perioadei în care acționează forța n_3 . În general, avem:

$$S = \frac{1 - q^i}{1 - q}, \quad (3.75)$$

unde i = numărul perioadei în care acționează forța n_i .

Din (3.74) avem:

$$\begin{aligned} 1 - q &= 1 - \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \\ 1 - q &= \frac{K_1 K_2 + K_0 K_2 + K_1 K_0 + K_0^2 - K_1 K_2 + K_0 K_2 + K_1 K_0 - K_0^2}{(K_1 + K_0)(K_2 + K_0)} \\ \Rightarrow 1 - q &= \frac{2K_0(K_1 + K_2)}{(K_1 + K_0)(K_2 + K_0)} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Având în vedere relațiile (3.73), (3.75), (3.74), (3.76), calculăm n_3 :

$$\begin{aligned}
n_3 &= v_0 \cdot \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \cdot \frac{K_2 + K_0 + K_2 - K_0}{K_2 + K_0} \cdot \frac{1 - q^3}{\frac{2K_0(K_1 + K_2)}{(K_1 + K_0)(K_2 + K_0)}} \\
n_3 &= v_0 \cdot \frac{K_0 K_1}{K_0 + K_1} \cdot \frac{2K_2}{K_2 + K_0} \cdot \frac{(K_1 + K_0)(K_2 + K_0)}{2K_0(K_1 + K_2)} \cdot (1 - q^3) \\
\Rightarrow n_3 &= v_0 \cdot \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \cdot (1 - q^3) \tag{3.77}
\end{aligned}$$

În general, pentru forța ce acționează asupra perculatorului în decursul perioadei i , obținem expresia:

$$n_i = v_0 \cdot \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \cdot (1 - q^i), \tag{3.78}$$

unde q este dat de (3.74).

Viteza suprafeței B corespunde condiției (3.46):

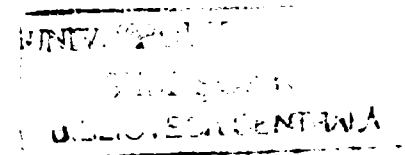
$$w_i = v_0 - \frac{n_i}{K_1} = v_0 \left[1 - \frac{K_2}{K_1 + K_2} (1 - q^i) \right] \tag{3.79}$$

Pentru determinarea expresiei generale a forțelor N_i care acționează asupra barei, folosim relațiile (3.51), (3.56), din care rezultă relația de dependență dintre N_i și n_i .

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_{i-1}}{K_0} + w_{i-1} \right) \\
N_i &= \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left(\frac{n_{i-1}}{K_0} + v_0 - \frac{n_i}{K_1} \right) \\
\Rightarrow N_i &= \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left(v_0 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 K_0} \cdot n_{i-1} \right) \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Înlocuind aici n_{i-1} din (3.78), avem:

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left[v_0 + \frac{K_1 - K_0}{K_1 K_0} \cdot v_0 \cdot \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} (1 - q^{i-1}) \right] \\
\Rightarrow N_i &= v_0 \cdot \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left[1 + \frac{K_2}{K_0} \cdot \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_2} \cdot (1 - q^{i-1}) \right] \tag{3.81}
\end{aligned}$$



$$v_i = \frac{N_i}{K_2}$$

$$\Rightarrow v_i = v_0 \cdot \frac{K_0}{K_0 + K_2} \left[1 + \frac{K_2}{K_0} \cdot \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_2} \cdot (1 - q^{i-1}) \right] \quad (3.82)$$

În acest caz trebuie să avem în vedere că în percutor forța de ciocnire apare ceva mai târziu decât în bară. Această întârziere depinde de lungimea proeminenței și se determină cu relația:

$$\Delta t = l / c_0.$$

Caz particular:

Pentru $K_0 = K_1$, se obține sistemul percutant din figura 3.2, care corespunde ciocnirii unei bare infinite de către un percutor cu lungime infinită, fără proeminență.

Înlocuind K_0 cu K_1 în relațiile (3.74), obținem $q=0$ și, prin urmare, din (3.78), respectiv (3.81), avem:

$$n_i = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0$$

$$N_i = v_0 \cdot \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left(1 + \frac{K_2}{K_0} \cdot 0 \right) = v_0 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} = n_i$$

ceea ce, după cum era de așteptat, corespunde cu exactitate expresiei (3.13).

APLICAȚIE:

Pentru sistemul de ciocnire cu două suprafețe limită, prezentat în figura 3.6, s-au redat, în variantă tabelară (tabelele 3.1, 3.2) și grafică (figurile 3.7 ... 3.14), forțele și vitezele punctelor materiale aflate pe suprafețele limită, pentru diferite perioade de timp (i), intervalul de timp pentru fiecare perioadă fiind $t = l/c_0$. Forțele și vitezele au fost determinate pe baza relațiilor (3.78), (3.79), (3.81), (3.82). Programul de calcul a fost realizat în MATLAB și este prezentat în Anexa 3.1.

Se consideră barele cilindrice având diametre diferite și confecționate din același material (de exemplu oțel), astfel $c_1 = c_2 = c_0 = c$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0 = \rho$. Se efectuează calcule pentru două cazuri: $v_0 = 5m/s$, respectiv $v_0 = 2m/s$.

- **Cazul I:**

$$d_0 = 0,010m$$

$$d_1 = 0,030m$$

$$d_2 = 0,040m$$

$$v_0 = 5m/s$$

$$\rho = 7800kg/m^3$$

$$c = 5188m/s$$

Tabelul 3.1

i	$N_i [N]$	$v_i [m/s]$	$n_i [N]$	$w_i [m/s]$
1.	50851,5779828904	1,0000000000	70409,8772070790	2,5384615385
2.	82144,8567415922	1,6153846154	86658,3104087126	1,9704142012
3.	89366,3826089849	1,7573964497	90407,9488398589	1,8393263541
4.	91032,8885783833	1,7901684115	91273,2500162772	1,8090753125
5.	91417,4668790136	1,7977311719	91472,9349031430	1,8020943029
6.	91506,2157176206	1,7994764243	91519,0160308812	1,8004833007
7.	91526,6962188376	1,7998791748	91529,6501372824	1,8001115309
8.	91531,4224883492	1,7999721173	91532,1041618365	1,8000257379
9.	91532,5131659288	1,7999935655	91532,6704751951	1,8000059395
10.	91532,7648607549	1,7999985151	91532,8011628933	1,8000013707
11.	91532,8229441763	1,7999996573	91532,8313215928	1,8000003163
12.	91532,8363480428	1,7999999209	91532,8382812927	1,8000000730
13.	91532,8394412427	1,7999999818	91532,8398873773	1,8000000168
14.	91532,8401550581	1,7999999958	91532,8402580122	1,8000000039
15.	91532,8403197847	1,7999999990	91532,8403435434	1,8000000009
16.	91532,8403577986	1,7999999998	91532,8403632813	1,8000000002
17.	91532,8403665710	1,7999999999	91532,8403678362	1,8000000000
18.	91532,8403685954	1,8000000000	91532,8403688874	1,8000000000
19.	91532,8403690626	1,8000000000	91532,8403691299	1,8000000000
20.	91532,8403691704	1,8000000000	91532,8403691859	1,8000000000
21.	91532,8403691953	1,8000000000	91532,8403691988	1,8000000000
22.	91532,8403692010	1,8000000000	91532,8403692018	1,8000000000
23.	91532,8403692023	1,8000000000	91532,8403692025	1,8000000000
24.	91532,8403692026	1,8000000000	91532,8403692027	1,8000000000
25.	91532,8403692027	1,8000000000	91532,8403692027	1,8000000000
26.	91532,8403692027	1,8000000000	91532,8403692027	1,8000000000
27.	91532,8403692027	1,8000000000	91532,8403692027	1,8000000000
28.	91532,8403692027	1,8000000000	91532,8403692027	1,8000000000
29.	91532,8403692027	1,8000000000	91532,8403692027	1,8000000000
30.	91532,8403692027	1,8000000000	91532,8403692027	1,8000000000

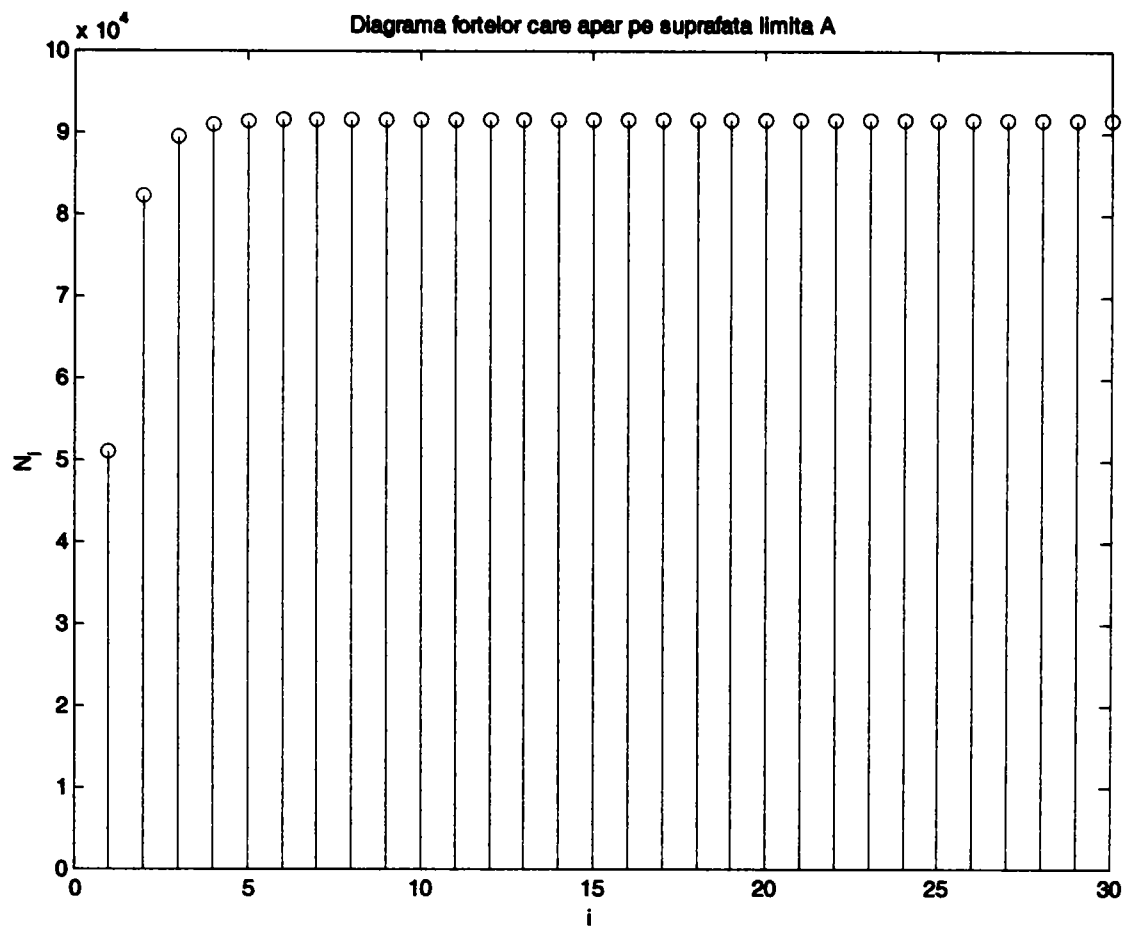


Figura 3.7

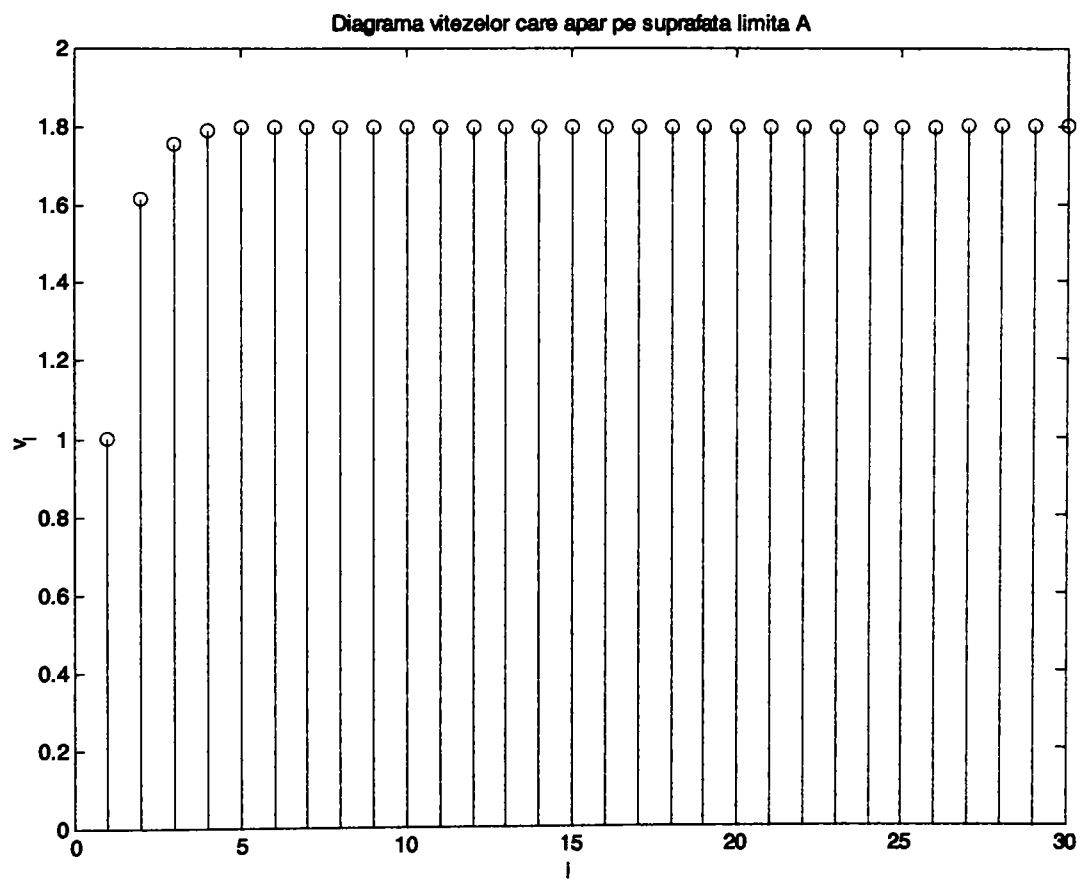


Figura 3.8

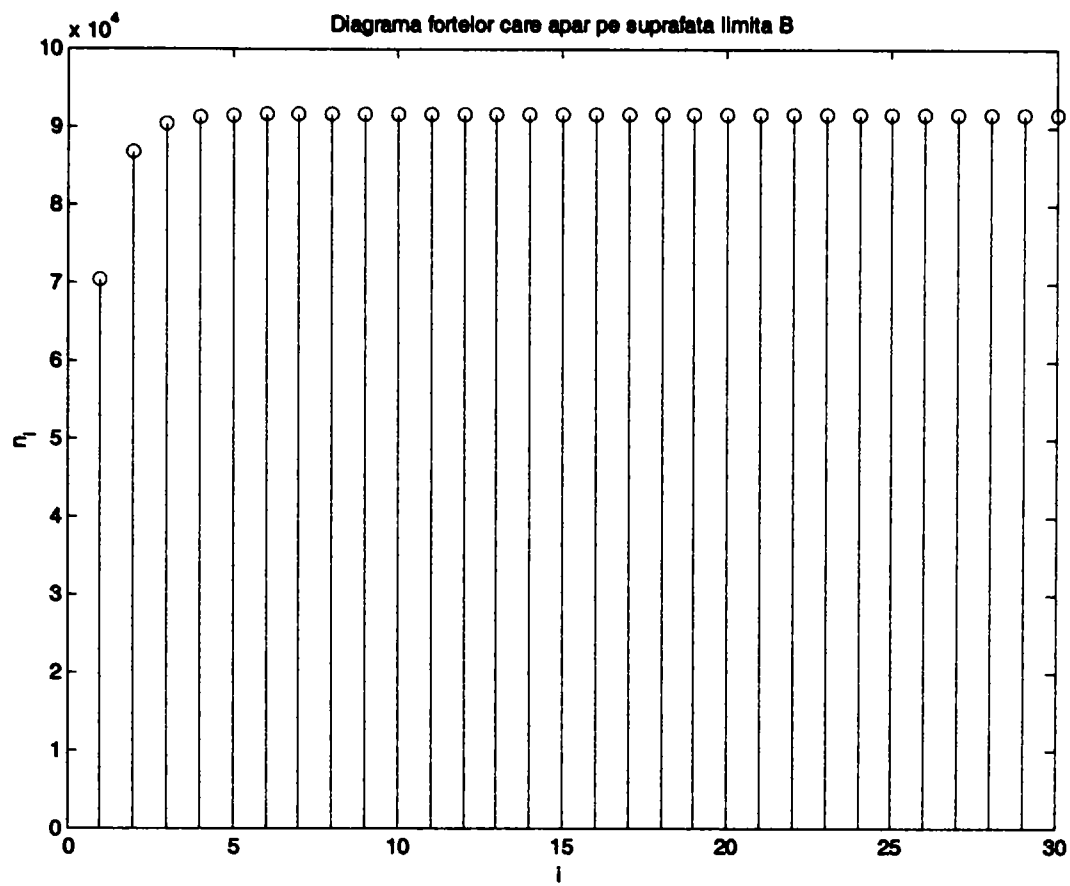


Figura 3.9

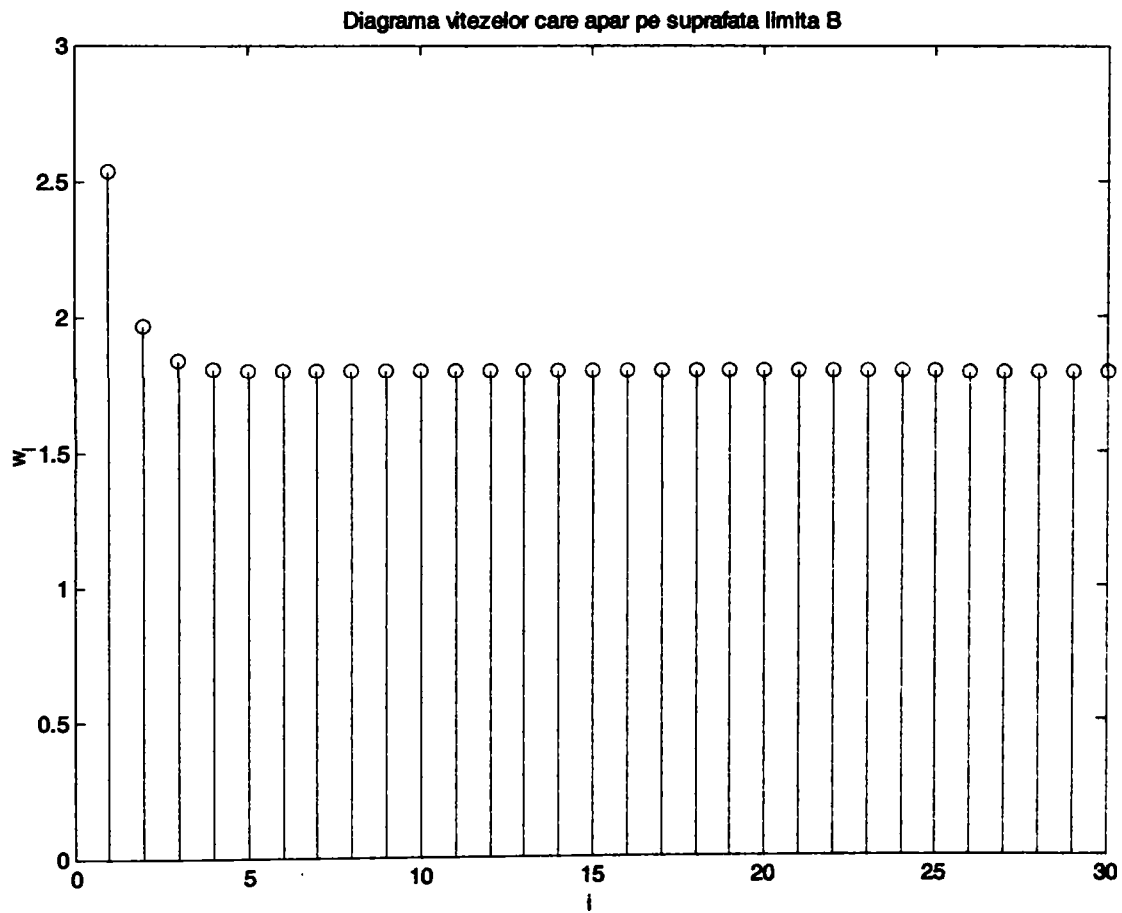


Figura 3.10

• **Cazul II:**

$$d_0 = 0,010m$$

$$d_1 = 0,030m$$

$$d_2 = 0,040m$$

$$v_0 = 2m/s$$

$$\rho = 7800kg/m^3$$

$$c = 5188m/s$$

Tabelul 3.2

i	$N_i [N]$	$v_i [m/s]$	$n_i [N]$	$w_i [m/s]$
1.	20340,6311931562	0,4000000000	28163,9508828316	1,0153846154
2.	32857,9426966369	0,6461538462	34663,3241634851	0,7881656805
3.	35746,5530435940	0,7029585799	36163,1795359435	0,7357305416
4.	36413,1554313533	0,7160673646	36509,3000065109	0,7236301250
5.	36566,9867516054	0,7190924688	36589,1739612572	0,7208377212
6.	36602,4862870482	0,7197905697	36607,6064123525	0,7201933203
7.	36610,6784875350	0,7199516699	36611,8600549129	0,7200446124
8.	36612,5689953397	0,7199888469	36612,8416647346	0,7200102952
9.	36613,0052663715	0,7199974262	36613,0681900780	0,7200023758
10.	36613,1059443020	0,7199994060	36613,1204651573	0,7200005483
11.	36613,1291776705	0,7199998629	36613,1325286371	0,7200001265
12.	36613,1345392171	0,7199999684	36613,1353125171	0,7200000292
13.	36613,1357764971	0,7199999927	36613,1359549509	0,7200000067
14.	36613,1360620232	0,7199999983	36613,1361032049	0,7200000016
15.	36613,1361279139	0,7199999996	36613,1361374174	0,7200000004
16.	36613,1361431194	0,7199999999	36613,1361453125	0,7200000001
17.	36613,1361466284	0,7200000000	36613,1361471345	0,7200000000
18.	36613,1361474382	0,7200000000	36613,1361475549	0,7200000000
19.	36613,1361476250	0,7200000000	36613,1361476520	0,7200000000
20.	36613,1361476682	0,7200000000	36613,1361476744	0,7200000000
21.	36613,1361476781	0,7200000000	36613,1361476795	0,7200000000
22.	36613,1361476804	0,7200000000	36613,1361476807	0,7200000000
23.	36613,1361476809	0,7200000000	36613,1361476810	0,7200000000
24.	36613,1361476811	0,7200000000	36613,1361476811	0,7200000000
25.	36613,1361476811	0,7200000000	36613,1361476811	0,7200000000
26.	36613,1361476811	0,7200000000	36613,1361476811	0,7200000000
27.	36613,1361476811	0,7200000000	36613,1361476811	0,7200000000
28.	36613,1361476811	0,7200000000	3.66131361476811	0,7200000000
29.	36613,1361476811	0,7200000000	3.66131361476811	0,7200000000
30.	36613,1361476811	0,7200000000	3.66131361476811	0,7200000000

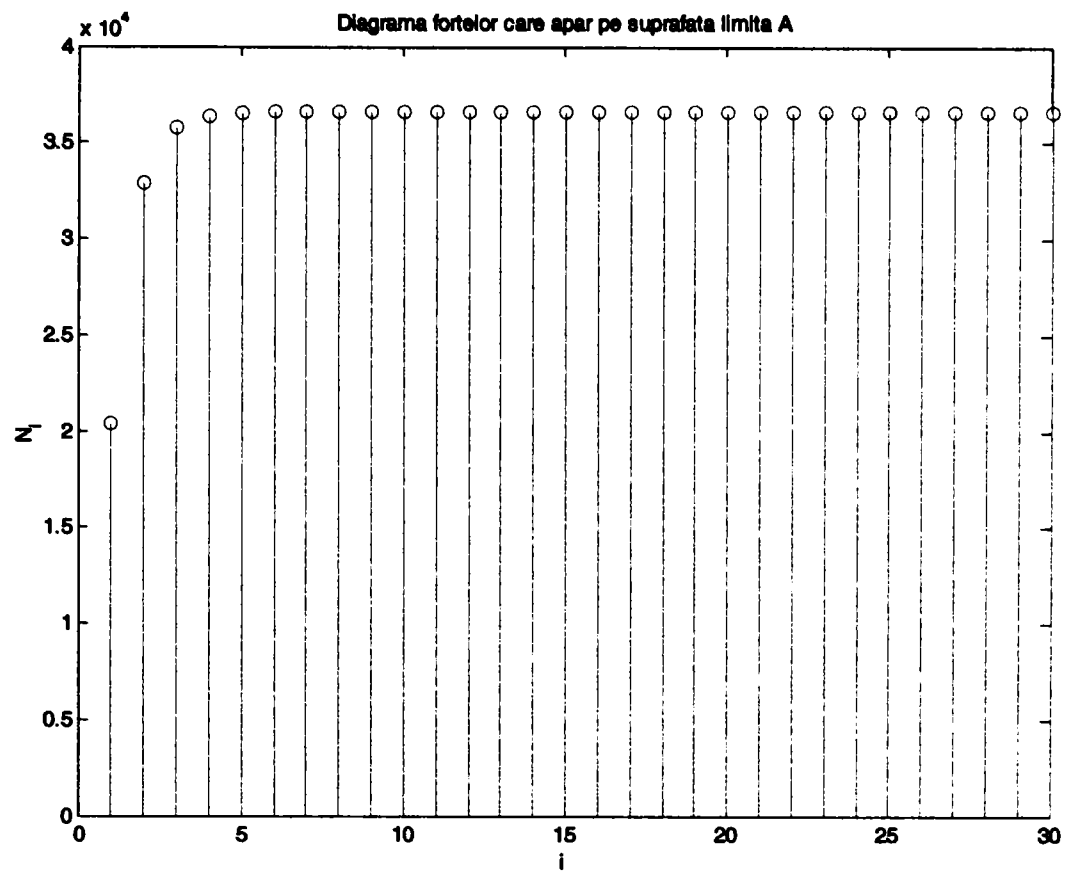


Figura 3.11

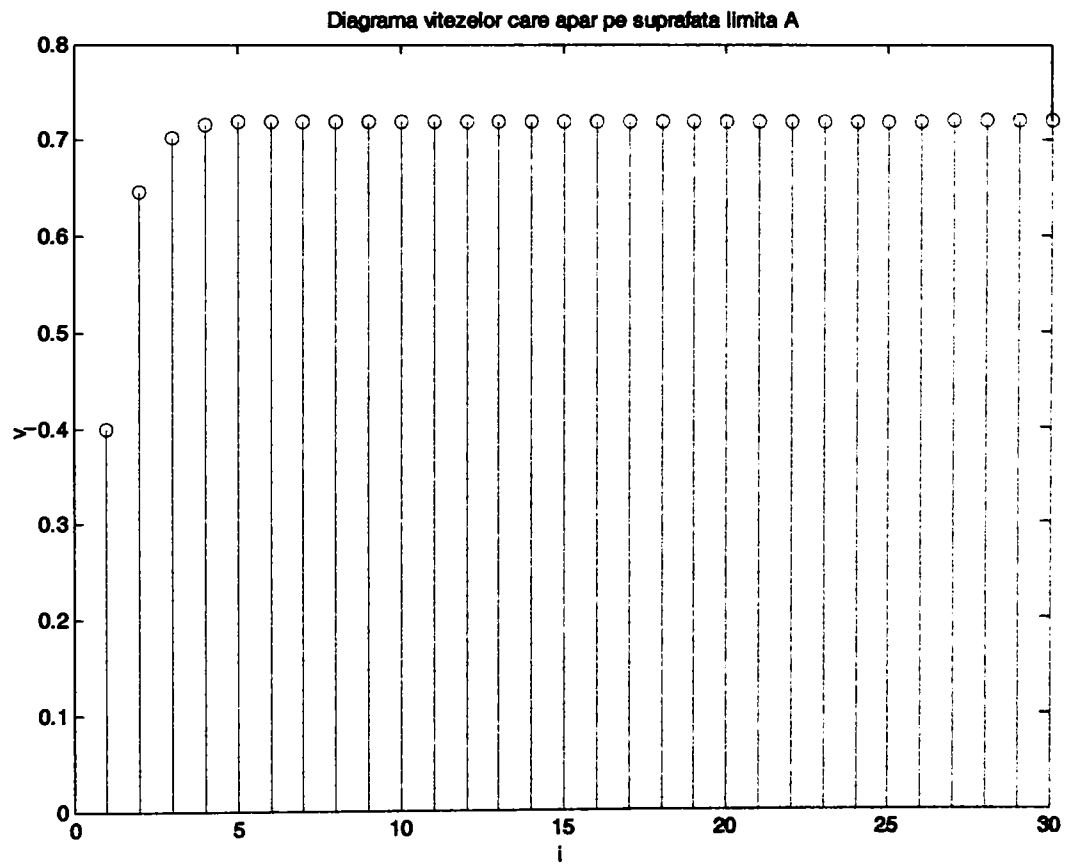


Figura 3.12

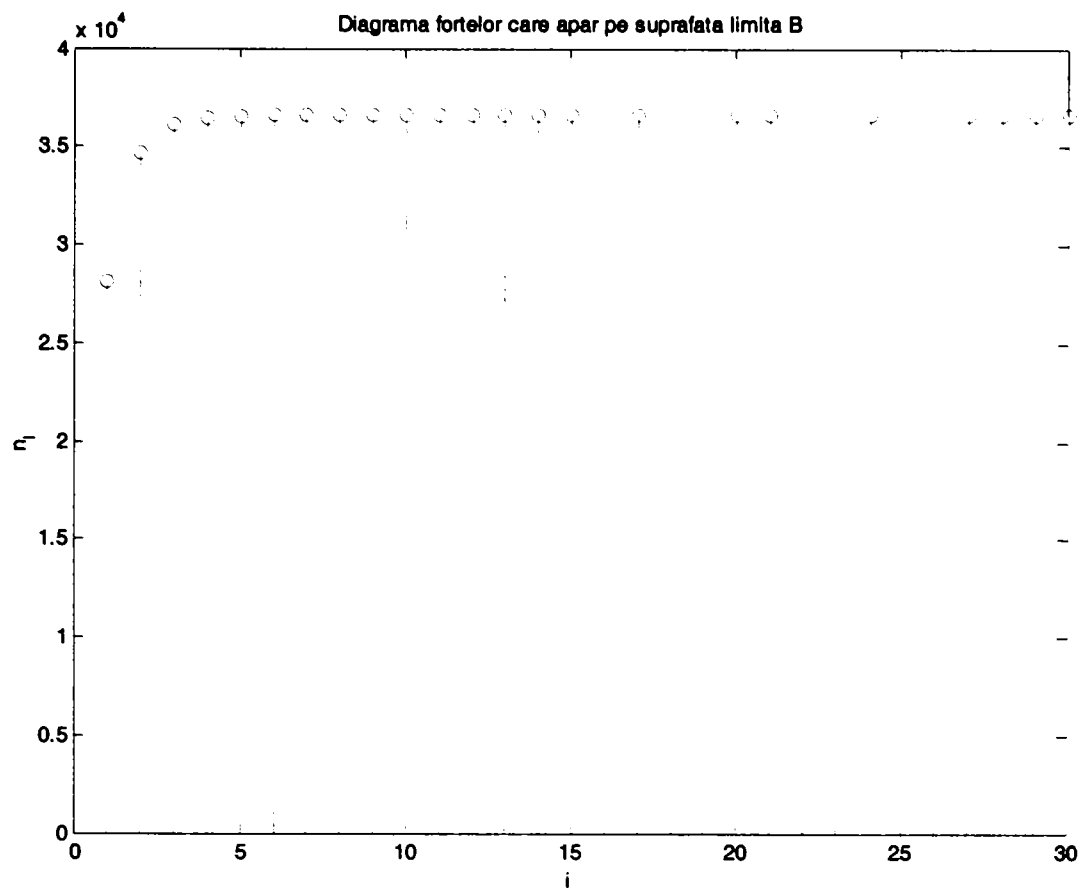


Figura 3.13

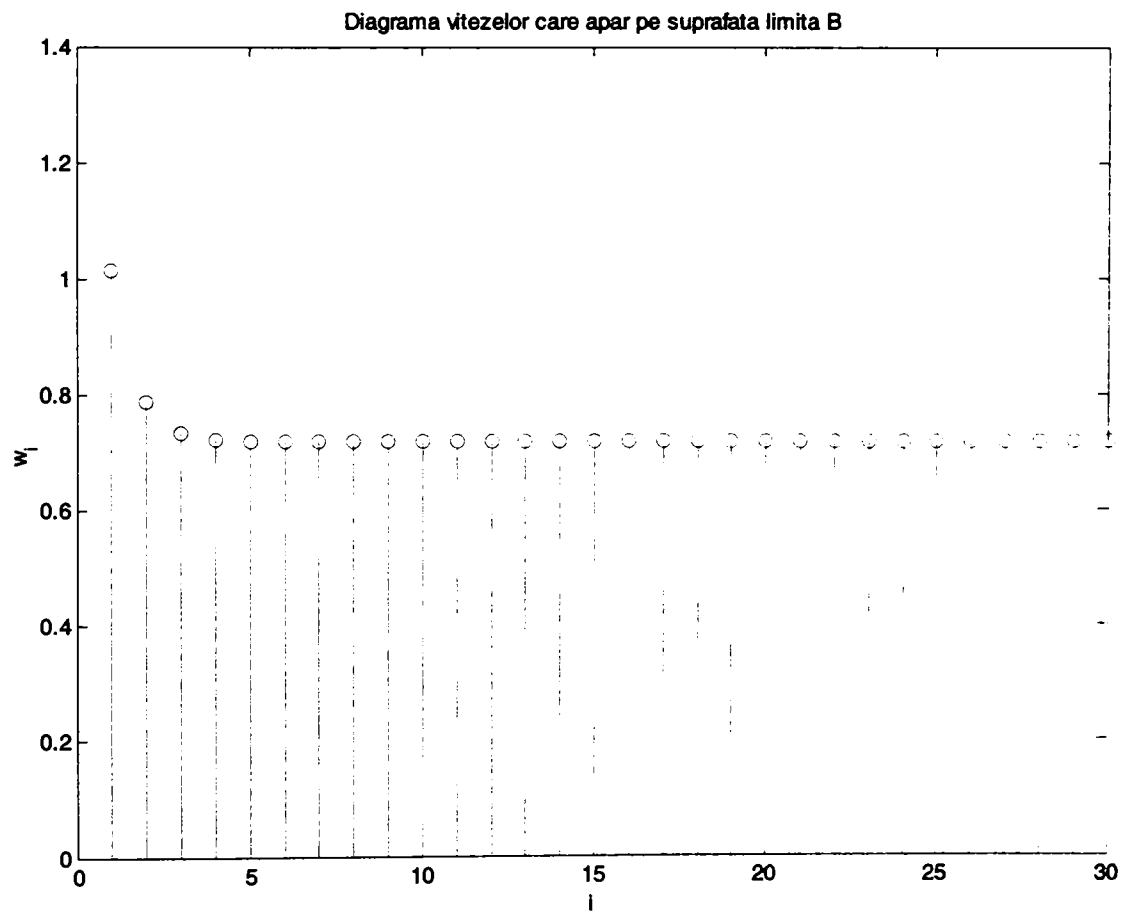


Figura 3.14

3.4.2. Calculul sistemului percutant format dintr-o bară cu lungime finită și o bară cu lungime infinită

Pornind de la expresiile generale obținute, se poate da o soluție a problemei referitoare la ciocnirea plană a unui percutor având lungimea finită (l), cu o bară de lungime infinită (figura 3.15).

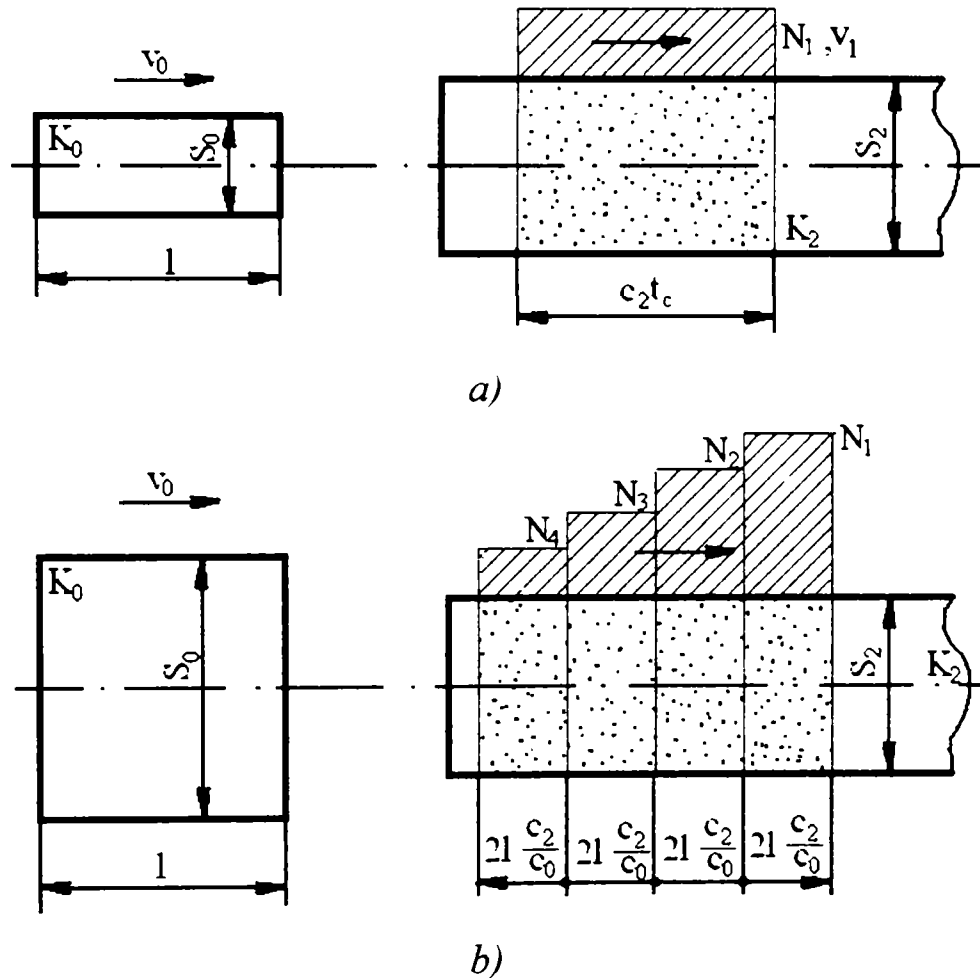


Figura 3.15. Ciocnirea unei bare cu lungime finită
de o bară cu lungime infinită
a) $K_2 > K_0$; b) $K_0 \geq K_2$

În acest caz, forța de interacțiune a percutorului cu bara se determină din expresia (3.81), dacă se presupune $K_1 = 0$.

Atunci:

$$N_i = v_0 \cdot \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \left[1 + \frac{K_2}{K_0} \cdot \frac{-K_0}{K_2} \cdot (1 - q^{i-1}) \right]$$

$$\Rightarrow N_i = v_0 \cdot \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \cdot q^{i-1} \quad (3.83)$$

Din (3.74), pentru $K_1 = 0$, obținem:

$$q = -\frac{K_0}{K_0} \cdot \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} = \frac{K_0 - K_2}{K_0 + K_2} \quad (3.84)$$

și atunci, în (3.83) avem:

$$N_i = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \cdot \left(\frac{K_0 - K_2}{K_0 + K_2} \right)^{i-1} \cdot v_0 \quad (3.85)$$

Din (3.82):

$$v_i = \frac{N_i}{K_2} = \frac{K_0}{K_0 + K_2} \cdot \left(\frac{K_0 - K_2}{K_0 + K_2} \right)^{i-1} \cdot v_0 \quad (3.86)$$

Conform expresiei (3.85), în decursul primei perioade de oscilații proprii ale perculatorului, adică pentru $i=1$, ceea ce corespunde unei perioade de timp

$0 < t < \frac{2l}{c_0}$, avem:

$$N_1 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \quad (3.87)$$

Modul în care se modifică forța în cursul următoarelor perioade depinde de mărimea lui q . Astfel, vom avea două cazuri:

- **Cazul I: $q < 0$**

$$q < 0 \Rightarrow K_0 < K_2 \text{ (vezi figura 3.15a)}$$

Atunci, din (3.85):

$$N_2 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} \cdot \left(\frac{K_0 - K_2}{K_0 + K_2} \right) \cdot v_0 < 0 \quad (3.88)$$

adică N_2 , forța de ciocnire din a doua perioadă, devine negativă și, deci, forța de compresiune $N_1 > 0$ se înlocuiește cu forța de întindere $N_2 < 0$.

Deoarece suprafața de contact a perculatorului și a barei lovite nu este în măsură să opună rezistență forțelor de întindere, perculatorul ricoșează de pe bară, imediat după sosirea primei unde reflectate, adică la momentul:

$$t = \frac{2l}{c_0} = t_c, \quad (3.89)$$

unde: l = lungimea perculatorului;

c_0 = viteza de propagare a undei în perculator.

În acest caz, prin bară va trece un impuls dreptunghiular, a cărui intensitate este:

$$N_1 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0, \quad (3.87)$$

pe durata t_c .

Atunci lungimea impulsului (undei) de ciocnire în bară este (figura 3.15.a):

$$l_u = t_c \cdot c_2 = \frac{2lc_2}{c_0}. \quad (3.90)$$

Energia primită de bară în timpul ciocnirii se compune din energia cinetică a particulelor și energia potențială de comprimare. În undă, după cum se cunoaște, componenta cinetică a energiei este egală cu cea potențială [4].

- Energia totală primită de bară în timpul ciocnirii $\left(t_c = \frac{2l}{c_0}\right)$, se determină

din relația (3.17):

$$E_2 = \frac{K_0^2 K_2}{(K_0 + K_2)^2} \cdot v_0^2 \cdot t_c$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{K_0^2 K_2}{(K_0 + K_2)^2} \cdot \frac{2l}{c_0} \cdot v_0^2. \quad (3.91)$$

- Energia perculatorului, înainte de ciocnire, este:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{\rho_0 S_0 l v_0^2}{2} = \frac{K_0}{c_0} \cdot \frac{l v_0^2}{2}, \quad (3.92)$$

unde $m = \rho_0 S_0 l$ = masa perculatorului.

- Coeficientul de transmitere a loviturii, η , se obține cu relația:

$$\eta = \frac{E_2}{E_0} \quad (3.93)$$

$$\eta = \frac{K_0^2 K_2}{(K_0 + K_2)^2} \cdot \frac{2l}{c_0} \cdot v_0^2 \cdot \frac{2c_0}{K_0 l v_0^2}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{4K_0 K_2}{(K_0 + K_2)^2} \quad (3.94)$$

Din relația (3.94) se vede că transmiterea de energie este completă ($\eta = 1$) când $K_0 = K_2$.

În acest caz, viteza de recul, $v_{rec} = 0$.

Conform expresiei (3.87), pentru $K_0 = K_2 = K$, avem:

$$N_1 = \frac{K v_0}{2}$$

$$v_1 = \frac{N_1}{K} = \frac{v_0}{2}.$$

Trebuie să observăm că lungimea barei, l_2 , s-a considerat infinită. Totuși, această condiție nu este obligatorie. Este suficient dacă $\frac{l_2}{c_2} > \frac{l}{c_0}$ (unde l , l_2

reprezintă lungimea perculatorului, respectiv a barei), deoarece, în acest caz, unda reflectată de la capătul opus al barei se îndreaptă spre suprafața de contact numai după reculul perculatorului și, prin urmare, nu poate avea nici o influență asupra ciocnirii. De aceea, lungimea $l_2 = l \frac{c_2}{c_0} = l_{cr}$ se numește *lungime critică*,

iar masa barei, corespunzătoare acestei lungimi, se numește *masă critică*, m_{cr} .

$$m_{cr} = \rho S_2 l_{cr} = \rho S_2 l \frac{c_2}{c_0}.$$

- **Cazul II: $0 < q < 1$**

În cazul $q > 0$, adică $K_0 > K_2$, modificarea forței are loc treptat (figura 3.15.b).

Deoarece, conform formulei (3.85), forța rămâne întotdeauna pozitivă pe parcursul ciocnirii și devine nulă numai când $i \rightarrow \infty$, durata ciocnirii este infinită.

$$t_c \rightarrow \infty.$$

- Energia totală, E_2 , primită de bară, se compune, în acest caz, din energiile tuturor tronsoanelor de lungime $2l$, adică, în conformitate cu relațiile (3.17), (3.85), (3.86):

$$\begin{aligned} E_2 &= N_1 v_1 t_c + N_2 v_2 t_c + \dots + N_i v_i t_c + \dots = \frac{2l}{c_0} (N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots + N_i v_i + \dots) = \\ &= \frac{2l}{c_0} \sum_{i=1}^{\infty} N_i v_i = \frac{2l}{c_0} \sum_{i=1}^{\infty} N_i \cdot \frac{N_i}{K_2} = \frac{2l}{c_0 K_2} \sum_{i=1}^{\infty} N_i^2 = \frac{2l}{c_0 K_2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_0^2 K_2^2 v_0^2}{(K_0 + K_2)^2} q^{2(i-1)} = \\ &= \frac{2l}{c_0 K_2} \cdot \frac{K_0^2 K_2^2 v_0^2}{(K_0 + K_2)^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} q^{2(i-1)} = \frac{2l}{c_0} \cdot \frac{K_0^2 K_2}{(K_0 + K_2)^2} \cdot v_0^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} q^{2(i-1)} \end{aligned}$$

Expresia $\sum_{i=1}^{\infty} q^{2(i-1)}$ reprezintă suma termenilor unei progresii geometrice

descrescătoare ($q < 1$), care se determină prin relația:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} q^{2(i-1)} &= 1 + q^2 + (q^2)^2 + (q^2)^3 + \dots = \frac{1 - (q^2)^{\infty}}{1 - q^2} = \frac{1}{1 - q^2} = \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{K_0 - K_2}{K_0 + K_2}\right)^2} = \frac{(K_0 + K_2)^2}{4K_0 K_2} \end{aligned}$$

și atunci:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{2l}{c_0} \cdot \frac{K_0^2 K_2}{(K_0 + K_2)^2} \cdot v_0^2 \cdot \frac{(K_0 + K_2)^2}{4K_0 K_2} = \frac{K_0 l v_0^2}{2c_0} = \frac{\rho_0 S_0 c_0 l v_0^2}{2c_0} = \frac{\rho_0 S_0 l v_0^2}{2} = \\ &= \frac{m v_0^2}{2} = E_0 \end{aligned} \tag{3.95}$$

($m = \rho_0 l S_0 =$ masa perculatorului)

- Coeficientul de transmitere a energiei de ciocnire este:

$$\eta = \frac{E_2}{E_0} = 1.$$

Viteza de recul este egală cu zero.

Astfel, analizând rezultatele obținute în cazul ciocnirii plane dintre un percutor cu secțiune constantă și lungime finită și o bară cu lungime infinită, putem trasa următoarele *concluzii*:

1). Intensitatea ciocnirii și tensiunile, sunt proporționale cu viteza de ciocnire, dar nu depind de lungimea percutorului.

2). Durata ciocnirii poate fi infinit de mare (dacă $K_0 > K_2$) sau poate fi egală cu perioada de oscilații a percutorului (dacă $K_0 < K_2$), adică depinde numai de lungimea percutorului și de viteza undei.

3). Dacă $K_0 \geq K_2$, ciocnirea se transmite în totalitate, reculul lipsește.

4). Forma impulsului de ciocnire este sau dreptunghiulară sau treaptă.

Totuși, nici una din aceste concluzii teoretice nu se confirmă prin experimente.

S-a demonstrat [4] că:

1). Intensitatea ciocnirii depinde în mod esențial de lungimea percutorului.

2). Durata ciocnirii nu este egală niciodată cu perioada de oscilații a percutorului și nici nu este infinită, ci se află în intervalul dintre aceste extreme. În plus, durata ciocnirii depinde, exceptând lungimea, de raportul tuturor parametrilor elastici și geometrici ai percutorului, și chiar de viteza de ciocnire

3). Ciocnirea elastică nu se transmite niciodată complet; întotdeauna există recul. În plus, mărimea coeficientului de transmitere a ciocnirii depinde nu numai de secțiune și de proprietățile elastice ale barei și percutorului, ci chiar de lungimea percutorului și de viteza de ciocnire.

4). Forma impulsului de ciocnire nu este niciodată dreptunghiulară sau treaptă; ea are întotdeauna aspect continuu și rotunjit.

Deosebirea evidentă dintre concluziile teoretice și cele practice a fost deseori subliniată de către cercetători și a stat la baza criticării principiilor de bază.

Totuși, analizând expresia (3.81), obținută în cazul ciocnirii unei bare cu un percutor având o proeminență, se observă ușor că scăderea treptată a forței de ciocnire în timp, poate fi relativ explicată printr-o proeminență mai moale la

capătul barei. O asemenea proeminență poate fi socotită și marginea unei bare în condițiile unei inevitabile necoaxialități ale barelor care se ciocnesc.

Relația (3.81) se poate scrie și astfel:

$$N_i = v_0 \left[\frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} + \frac{K_2^2 (K_1 - K_0)}{(K_0 + K_2)(K_1 + K_2)} (1 - q^{i-1}) \right] =$$

$$= v_0 K_2 \left[\frac{\frac{K_0}{K_2}}{1 + \frac{K_0}{K_2}} + \frac{\frac{K_1}{K_2} - \frac{K_0}{K_2}}{\left(1 + \frac{K_0}{K_2}\right) \left(1 + \frac{K_1}{K_2}\right)} (1 - q^{i-1}) \right]$$

Presupunând impedanța proeminenței, K_0 , mult mai mică decât impedanța barelor, adică:

$$K_0 \ll K_2 \quad \left(\frac{K_0}{K_2} \approx 0 \right)$$

$$K_0 \ll K_1$$

putem scrie:

$$N_i \cong v_0 K_2 \frac{\frac{K_1}{K_2}}{1 + \frac{K_1}{K_2}} (1 - q^{i-1}) = v_0 K_2 \cdot \frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{K_2}{K_1 + K_2} (1 - q^{i-1})$$

$$N_i \cong v_0 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} (1 - q^{i-1}) \quad (3.96)$$

Comparând cu relația

$$n_i = v_0 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} (1 - q^i), \quad (3.78)$$

rezultă că forța ce acționează asupra perculatorului (n_i), este aproape egală cu forța ce acționează asupra barei (N_i), având, totuși, o variație în timp, egală cu perioada oscilațiilor proprii ale proeminenței. (Dacă pentru proeminență frecvența oscilațiilor proprii este mare, adică perioada este mică, se poate spune că aceste forțe sunt egale în orice moment).

Vom nota:

$$N_0 = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0 \quad (3.97)$$

$$i = \frac{t}{T} = \frac{t}{\frac{2l}{c_0}} = \frac{c_0 t}{2l} \quad (3.98)$$

Expresiile (3.78), (3.83) se pot scrie:

$$N_i = n_i = N = N_0 \left(1 - q^{\frac{c_0 t}{2l}} \right)$$

sau $N = N_0 (1 - e^{-\varphi})$, (3.99)

unde:

t = timpul scurs de la începutul ciocnirii,

iar φ rezultă din:

$$q^{\frac{c_0 t}{2l}} = e^{-\varphi t} \Rightarrow \frac{c_0 t}{2l} \ln(q) = -\varphi t \Rightarrow \varphi = -\frac{c_0}{2l} \ln(q) = \frac{c_0}{2l} \ln(q)^{-1}$$

$$\varphi = \frac{c_0}{2l} \ln\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{c_0}{2l} \ln\left(\frac{(S_1 + S_0)(S_2 + S_0)}{(S_1 - S_0)(S_2 - S_0)}\right). \quad (3.90)$$

Așadar, dependența forței în timp, în prezența proeminenței cu secțiune constantă, are un caracter exponențial.

Neconcordanța dintre rezultatele teoriei elementare prezentate și cele experimentale, nu dovedește faptul că principiul propagării treptate a tensiunilor, care stă la baza teoriei ondulatorii ar fi neadevărat, ci că teoria ondulatorie a ciocnirii trebuie să țină cont de imposibilitatea practică de a se atinge concomitent întreaga suprafață frontală a barelor.

APLICAȚIE:

Pentru sistemul de ciocnire prezentat în figura 3.15, format din două bare, una cu lungime finită și una cu lungime infinită, s-au redat, în variantă tabelară (tabelele 3.3, 3.4) și grafică (figurile 3.16 ... 3.23), valorile forțelor și vitezelor punctelor materiale de pe suprafața de ciocnire (calculate pe baza relațiilor (3.83) și (3.86)), pentru diferite perioade de timp (i), intervalul de timp pentru fiecare perioadă fiind $t = 2l/c_0$. Programul de calcul a fost realizat în MATLAB și este prezentat în Anexa 3.2.

Se consideră barele cilindrice având diametre diferite și confecționate din același material (de exemplu oțel), astfel $c_2 = c_0 = c$, $\rho_2 = \rho_0 = \rho$. Se efectuează calcule pentru două valori ale vitezei inițiale: $v_0 = 5m/s$, respectiv $v_0 = 2m/s$, considerându-se cazurile $K_0 < K_2$ și $K_0 \geq K_2$.

- **Cazul I.1:** $K_0 < K_2$
 $d_0 = 0,030m$
 $d_2 = 0,040m$
 $v_0 = 5m/s$
 $\rho = 7800kg/m^3$
 $c = 5188m/s$

Tabelul 3.3

i	$N_i [N]$	$v_i [m/s]$
1	91532,8403692027	1,8000000000
2	-25629,1953033768	-0,5040000000
3	7176,1746849455	0,1411200000
4	-2009,3289117847	-0,0395136000
5	562,6120952997	0,0110638080
6	-157,5313866839	-0,0030978662
7	44,1087882715	0,0008674025
8	-12,3504607160	-0,0002428727
9	3,4581290005	0,0000680044
10	-0,9682761201	-0,0000190412

După prima perioadă, se oprește ciocnirea, pt. că $N_2 < 0$: $t_c = 2l/c$

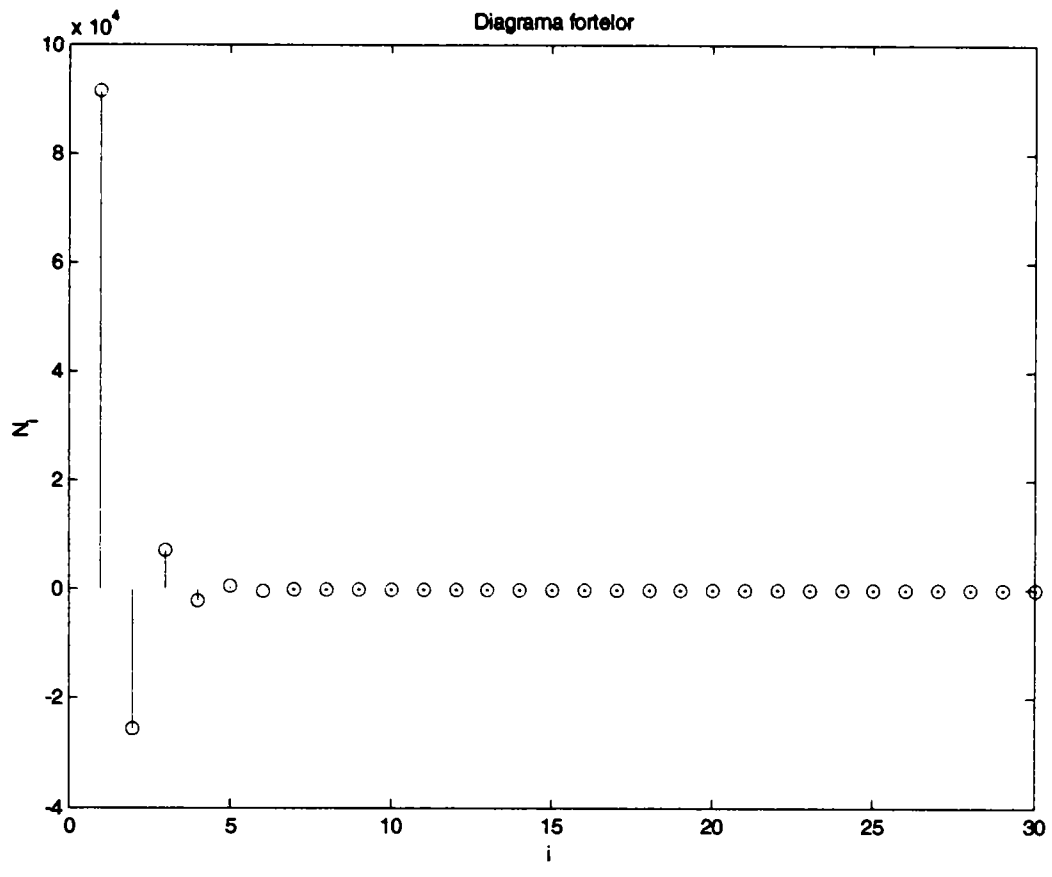


Figura 3.16

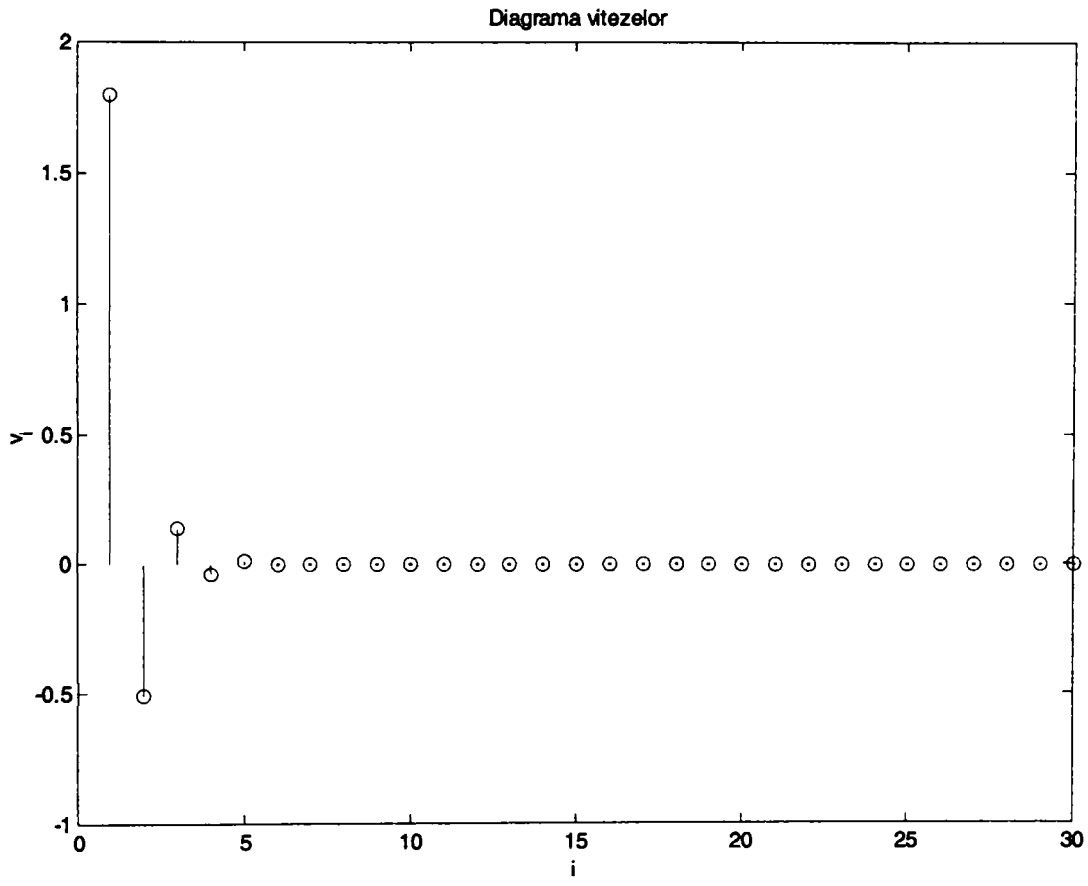


Figura 3.17

- **Cazul II.1:** $K_0 \geq K_2$

$$d_0 = 0,040m$$

$$d_2 = 0,030m$$

$$v_0 = 5m/s$$

$$\rho = 7800kg/m^3$$

$$c = 5188m/s$$

Tabelul 3.4

i	$N_i [N]$	$v_i [m/s]$
1	91532,8403692027	3,2000000000
2	25629,1953033768	0,8960000000
3	7176,1746849455	0,2508800000
4	2009,3289117847	0,0702464000
5	562,6120952997	0,0196689920
6	157,5313866839	0,0055073178
7	44,1087882715	0,0015420490
8	12,3504607160	0,0004317737
9	3,4581290005	0,0001208966
10	0,9682761201	0,0000338511

$$N_i > 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots$$

$$t_c \rightarrow \infty$$

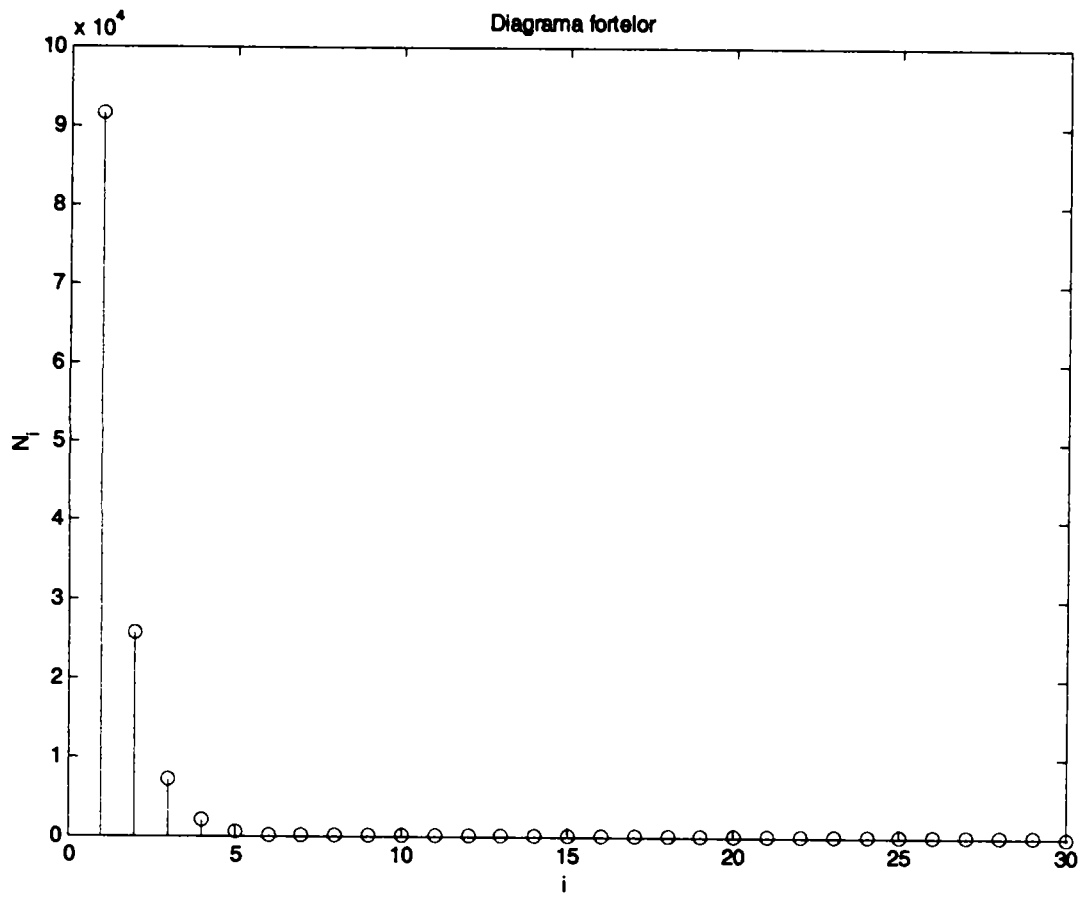


Figura 3.18

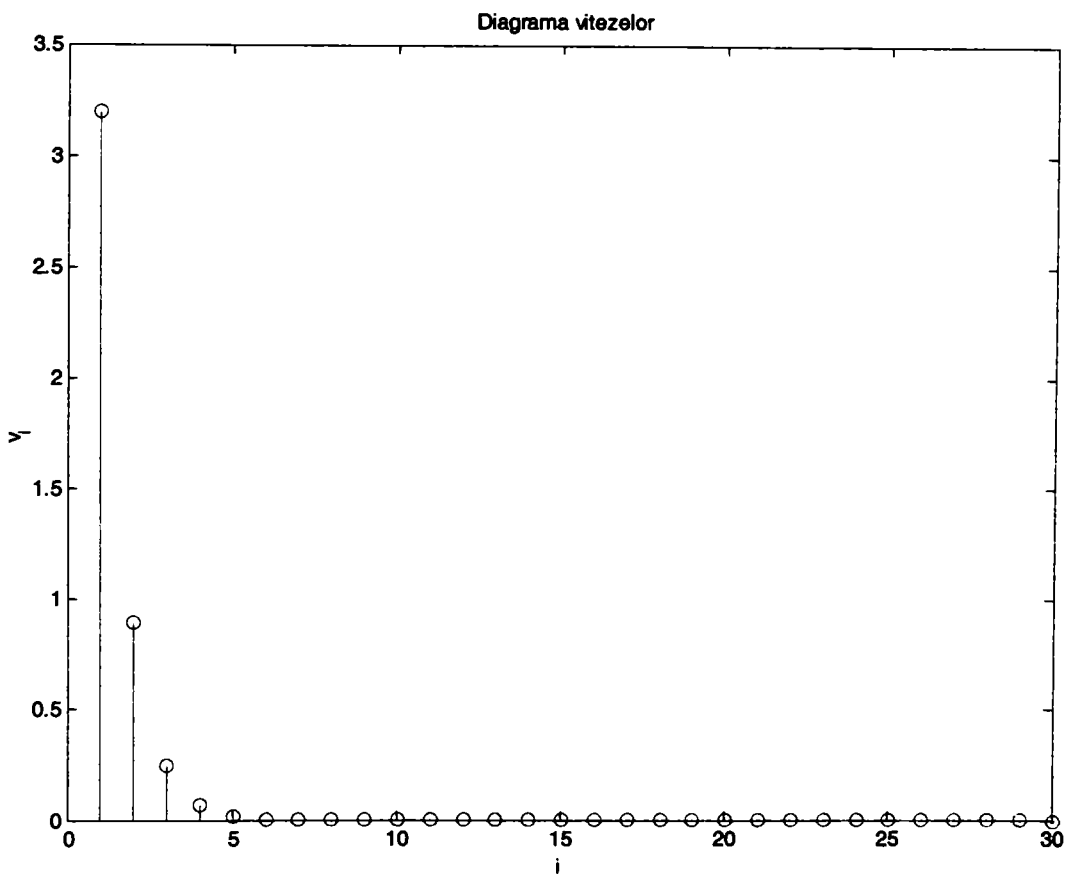


Figura 3.19

- **Cazul I.2:** $K_0 < K_2$

$$d_0 = 0,030m$$

$$d_2 = 0,040m$$

$$v_0 = 2m/s$$

$$\rho = 7800kg/m^3$$

$$c = 5188m/s$$

Tabelul 3.5

i	$N_i [N]$	$v_i [m/s]$
1	36613,1361476811	0,7200000000
2	-10251,6781213507	-0,2016000000
3	2870,4698739782	0,0564480000
4	-803,7315647139	-0,0158054400
5	225,0448381199	0,0044255232
6	-63,0125546736	-0,0012391465
7	17,6435153086	0,0003469610
8	-4,9401842864	-0,0000971491
9	1,3832516002	0,0000272017
10	-0,3873104481	-0,0000076165

După prima perioadă, se oprește ciocnirea, pt. că $N_2 < 0$; $t_c = 2l/c$

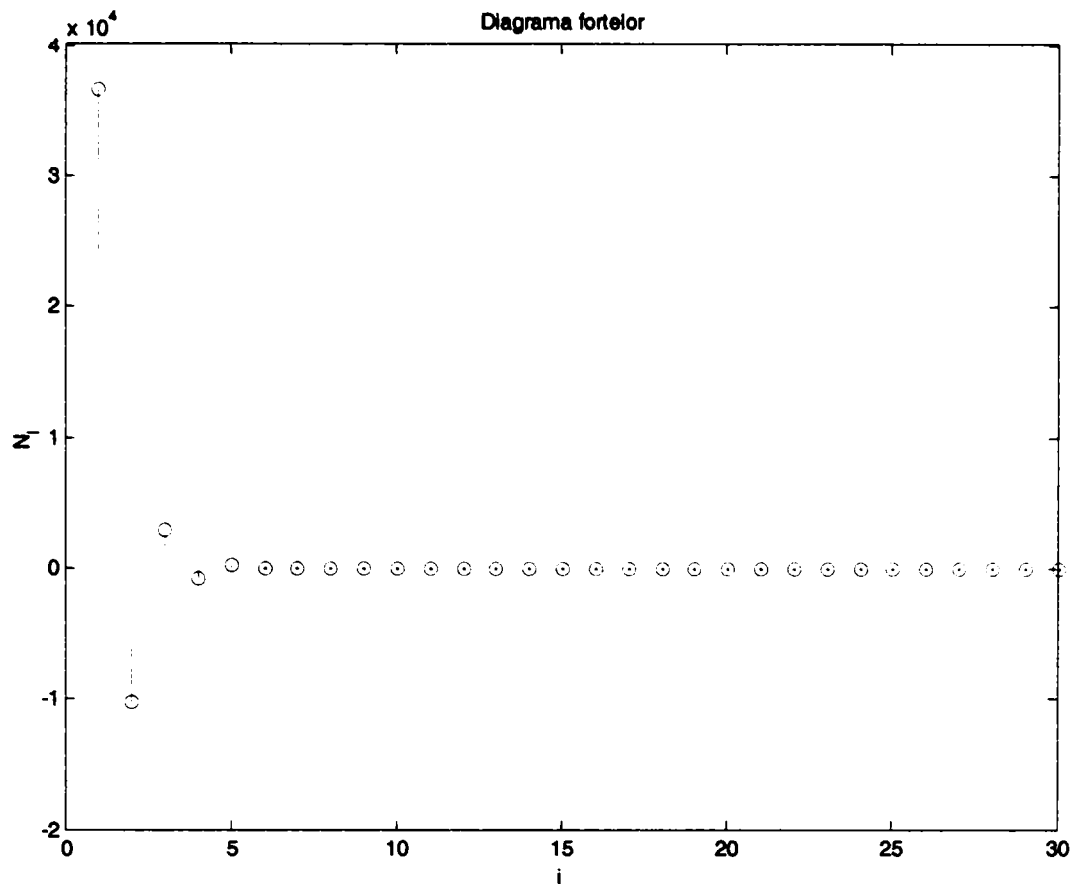


Figura 3.20

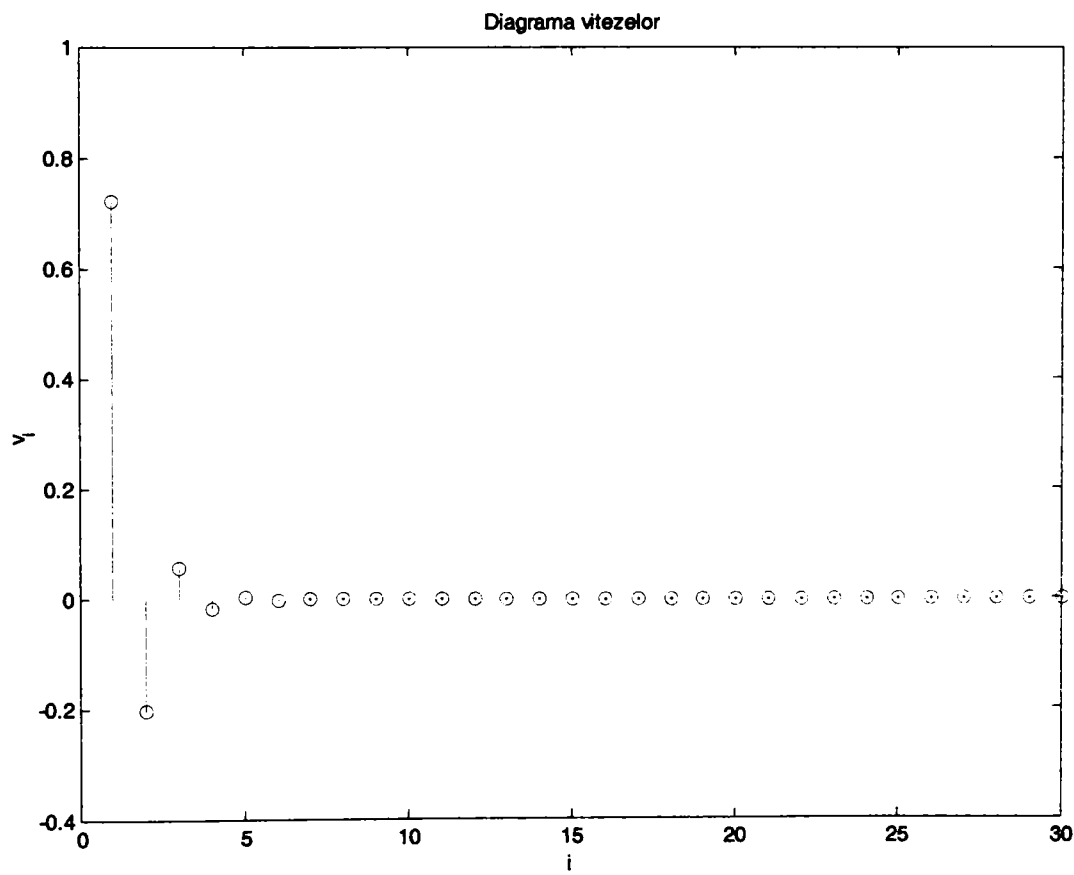


Figura 3.21

- **Cazul II.2,** $K_0 > K_2$
 $d_0 = 0,040m$
 $d_2 = 0,030m$
 $v_0 = 2m/s$
 $\rho = 7800kg/m^3$
 $c = 5188m/s$

Tabelul 3.6

i	$N_i [N]$	$v_i [m/s]$
1	36613,1361476811	1,2800000000
2	10251,6781213507	0,3584000000
3	2870,4698739782	0,1003520000
4	803,7315647139	0,0280985600
5	225,0448381199	0,0078675968
6	63,0125546736	0,0022029271
7	17,6435153086	0,0006168196
8	4,9401842864	0,0001727095
9	1,3832516002	0,0000483587
10	0,3873104481	0,0000135404

$$N_i > 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots$$

$$t_c \rightarrow \infty$$

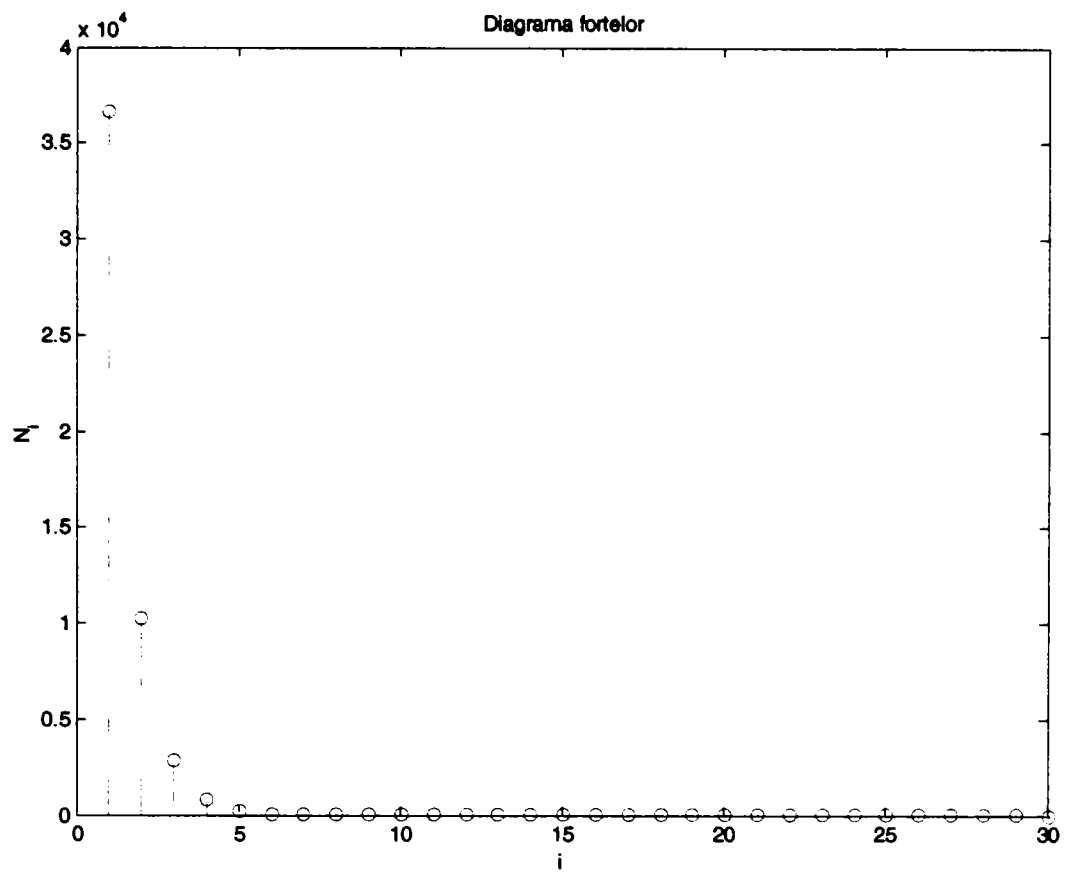


Figura 3.22

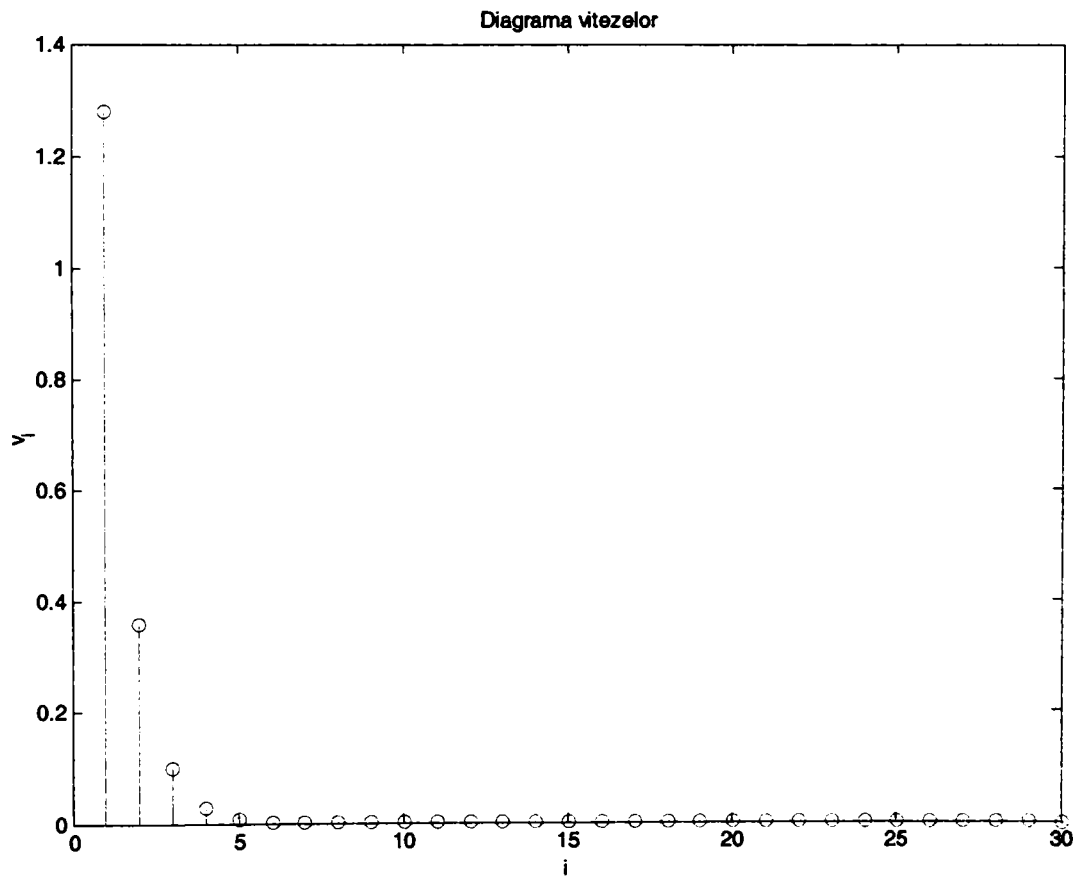


Figura 3.23

3.4.3. Calculul sistemului percutant având trei suprafețe limită

Considerăm ciocnirea dintre un percutor în trepte și o bară de lungime infinită (figura 3.24), percutor folosit adesea în construcția perforatoarelor pneumatice.

Notăm impedanțele pentru cele două tronsoane ale percutorului și pentru bară cu:

$$K_0 = \rho_0 S_0 c_0$$

$$K_1 = \rho_1 S_1 c_1$$

$$K_2 = \rho_2 S_2 c_2$$

v_0 = viteza percutorului înainte de ciocnire.

Presupunem că percutorul în trepte este omogen, adică: $\rho_0 c_0 = \rho_1 c_1$.

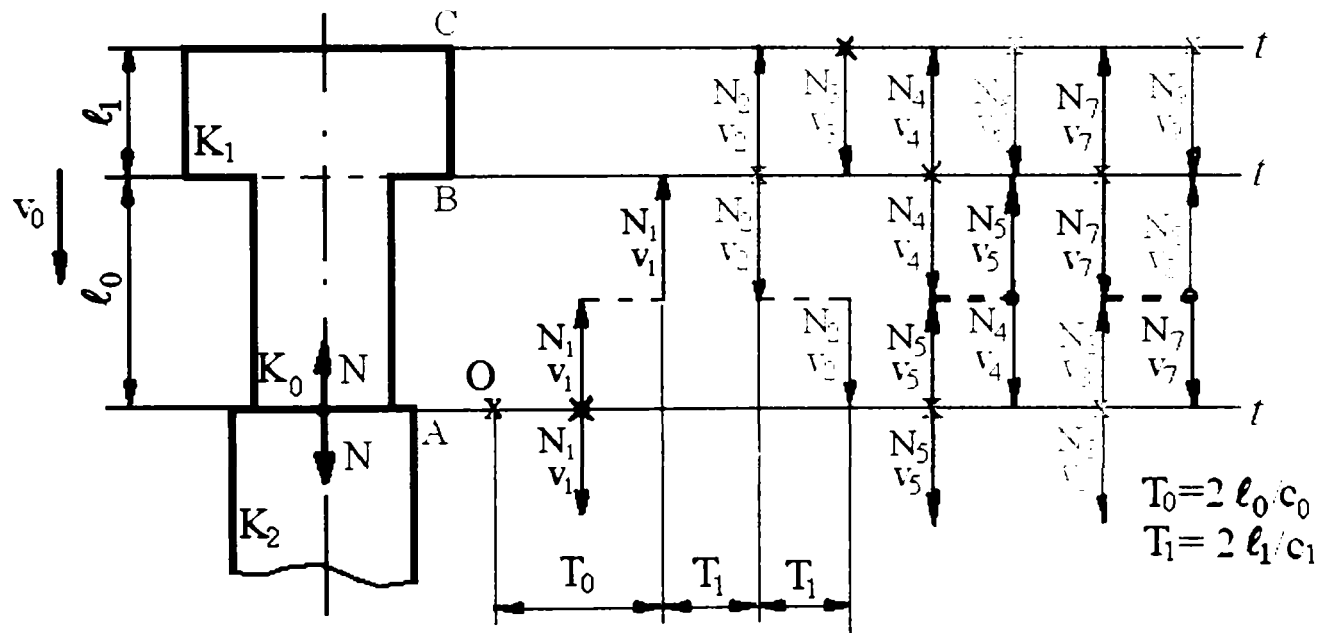


Figura 3.24. Sistem de ciocnire cu percutor în trepte

Pentru construirea diagramei ondulatorii, vom avea în vedere existența a trei suprafețe limită (notate cu A, B, C).

1. Cazul $l_0 = 2l_1$;

Luăm pe scara timpului cea mai mică perioadă de oscilații a percutorului, adică

$$T_1 = \frac{2l_1}{c_1}.$$

Alcătuiim sistemul de ecuații ondulatorii:

- Pentru primul nod, suprafața limită A:

$$\begin{cases} N_1 - 0 = K_0(v_0 - v_1) \\ N_1 = -K_2(0 - v_1) \end{cases} \quad (3.101)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = K_0(v_0 - v_1) \\ N_1 = K_2 v_1 \end{cases} \quad (3.102)$$

$$v_1 = \frac{N_1}{K_2}$$

$$N_1 = K_0 v_0 - \frac{K_0 N_1}{K_2}$$

$$N_1 \left(1 + \frac{K_0}{K_2} \right) = K_0 v_0$$

$$N_1 \frac{K_2 + K_0}{K_2} = K_0 v_0$$

de unde:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \\ v_1 = \frac{K_0}{K_0 + K_2} v_0 \end{cases} \quad (3.103)$$

- Pentru al doilea nod, la suprafața limită B:

$$\begin{cases} N_2 - 0 = K_1(v_0 - v_2) \\ N_2 - N_1 = -K_0(v_1 - v_2) \end{cases} \quad (3.104)$$

$$\begin{cases} N_2 = K_1 v_0 - K_1 v_2 \\ N_2 - N_1 = -K_0(v_1 - v_2) \end{cases} \quad (3.105)$$

$$\Rightarrow v_2 = v_0 - \frac{N_2}{K_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_2 = \frac{2K_0 K_1 K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \cdot v_0 \\ v_2 = v_0 \frac{K_0^2 + K_0 K_1 + K_1 K_2 - K_0 K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \end{cases} \quad (3.106)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_2 = \frac{2K_1}{K_0 + K_1} N_1 \\ v_2 = v_0 - \frac{2N_1}{K_0 + K_1} \end{cases} \quad (3.117)$$

- Alcătuiim sistemul de ecuații pentru al treilea nod, pe suprafața limită C, care separă aerul și perculatorul.

Notând impedența caracteristică a aerului $\rho_{aer} c_{aer}$, obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} N_3 - 0 = \rho_{aer} c_{aer} S_1 (0 - v_3) \\ N_3 - N_2 = -K_1 (v_2 - v_3) \end{cases} \quad (3.108)$$

$$N_3 = -\rho_{aer} c_{aer} S_1 v_3 \Rightarrow v_3 = -\frac{N_3}{\rho_{aer} c_{aer} S_1}$$

$$N_3 - N_2 = -K_1 v_2 - K_1 \frac{N_3}{\rho_{aer} c_{aer} S_1}$$

$$N_3 + \frac{K_1 N_3}{\rho_{aer} c_{aer} S_1} = N_2 - K_1 v_2$$

$$N_3 \left(1 + \frac{K_1}{\rho_{aer} c_{aer} S_1} \right) = N_2 - K_1 v_2$$

$$N_3 = \frac{\rho_{aer} c_{aer} S_1}{\rho_{aer} c_{aer} S_1 + K_1} (N_2 - K_1 v_2)$$

$$N_3 = \frac{\rho_{aer} c_{aer} S_1}{1 + \frac{\rho_{aer} c_{aer} S_1}{K_1}} \left(\frac{N_2}{K_1} - v_2 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_3 = \frac{\rho_{aer} c_{aer} S_1}{1 + \frac{\rho_{aer} c_{aer} S_1}{K_1}} \left(\frac{N_2}{K_1} - v_2 \right) \\ v_3 = -\frac{1}{1 + \frac{\rho_{aer} c_{aer} S_1}{K_1}} \left(\frac{N_2}{K_1} - v_2 \right) \end{cases} \quad (3.109)$$

În relațiile (3.109) intervine impedența caracteristică a aerului, care este foarte mică în comparație cu cea a materialelor dure. De exemplu, pentru oțel

$\rho c \approx 4 \cdot 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$, pentru aer $\rho_{aer} c_{aer} \approx 0,0009 \cdot 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$, și astfel

$$\frac{\rho_{aer} c_{aer}}{\rho c} = 0,000225 \ll 1.$$

Ca urmare, se poate aproxima:

$$\begin{cases} N_3 \approx 0 \\ v_3 \approx v_2 - \frac{N_2}{K_1} \end{cases}$$

Din (3.105) avem:

$$\begin{aligned} v_3 &\approx v_2 - \frac{N_2}{K_1} = v_2 - v_0 + v_2 = 2v_2 - v_0 = 2v_0 - \frac{4N_1}{K_0 + K_1} - v_0 = \\ &= v_0 - \frac{4N_1}{K_0 + K_1} = v_0 - \frac{4}{K_0 + K_1} \cdot \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 = \\ &= v_0 \left[1 - \frac{4K_0 K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} N_3 \approx 0 \\ v_3 \approx v_0 \left[1 - \frac{4K_0 K_2}{(K_0 + K_1)(K_0 + K_2)} \right] \end{cases} \quad (3.110)$$

- Nodul 4, suprafața limită B:

Unda care se reflectă de la capătul liber al percutorului, având parametrii N_3 , v_3 calculați mai sus, sosește la marginea treptei percutorului. Ca urmare a reflexiei și refracției la margine ia naștere o nouă undă, cu parametrii N_4 , v_4 , care se determină din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} N_4 - N_3 = K_1(v_3 - v_4) \Rightarrow \frac{N_4}{K_1} = v_3 - v_4 \\ N_4 - N_2 = -K_0(v_2 - v_4) \Rightarrow \frac{N_4}{K_0} = \frac{N_2}{K_0} - v_2 + v_4 \end{cases} \quad (3.111)$$

și pentru $N_3 = 0$ rezultă că:

$$\begin{cases} \frac{N_4}{K_1} = v_3 - v_4 \\ \frac{N_4}{K_0} = \frac{N_2}{K_0} - v_2 + v_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_4 = \frac{2K_0K_1K_2(K_1 - K_0)}{(K_1 + K_0)^2(K_2 + K_0)} \cdot v_0 \quad (3.112)$$

Această expresie arată că dacă $K_0 > K_1$, adică $N_4 < 0$, pe suprafața B-B a perculatorului apar tensiuni de întindere.

- Unda N_2 , v_2 , care se reflectă de la treapta perculatorului în timpul $\frac{2l_0}{c_0}$, se întoarce spre suprafața de contact (bară – perculator). Ca urmare, se formează unda N_5 , v_5 , pe suprafața limită A (figura 3.24).

Vom stabili sistemul de ecuații pentru acest nod:

$$\begin{cases} N_5 - N_2 = K_0(v_2 - v_5) \\ N_5 - N_1 = -K_2(v_1 - v_5) \end{cases} \quad (3.113)$$

de unde:

$$\begin{cases} \frac{N_5}{K_0} = \frac{N_2}{K_0} + v_2 - v_5 \\ \frac{N_5}{K_2} = \frac{N_1}{K_2} - v_1 + v_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_5 = N_1 \left(1 + \frac{2K_2}{K_0 + K_2} \cdot \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \right) \quad (3.114)$$

Introducem notațiile:

$$\begin{cases} b = \frac{2K_2}{K_0 + K_2} \\ R = \frac{K_1 - K_0}{K_1 + K_0} \end{cases} \quad (3.115)$$

și obținem:

$$N_5 = N_1(1 + bR) \quad (3.116)$$

Din (3.113) avem:

$$N_5 - N_1 = -K_2 v_1 + K_2 v_5$$

(din (3.102) $N_1 = K_2 v_1$) și se obține:

$$v_5 = \frac{N_5}{K_2} \quad (3.117)$$

Calculând în continuare, se obține, pentru $l_0 = 2l_1$:

$$N_8 = N_1 [1 + b(R^2 + R - 1)]. \quad (3.118)$$

Renumerotăm undele care ajung pe suprafața barei, astfel:

- prima undă: N_1 , v_1 ;
- a doua undă: N_5 , v_5 o notăm cu N_2 , v_2 ;
- a treia undă: N_8 , v_8 o notăm cu N_3 , v_3 ; ș.a.m.d.

După calcule, se obțin următorii parametri ai undelor:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \\ v_1 = \frac{N_1}{K_2} = \frac{K_0}{K_0 + K_2} v_0 \end{cases} \quad (3.119)$$

$$\begin{cases} N_2 = N_1(1 + bR) \\ v_2 = \frac{N_2}{K_2} = \frac{N_1(1 + bR)}{K_2} \end{cases} \quad (3.120)$$

$$\begin{cases} N_3 = N_1 [1 + b(R^2 + R - 1)] \\ v_3 = \frac{N_3}{K_2} = \frac{N_1 [1 + b(R^2 + R - 1)]}{K_2} \end{cases} \quad (3.121)$$

$$N_4 = N_1 (1 - b + bR^3 + b^2 R^3) \quad (3.122)$$

$$N_5 = N_1 (1 - b + 2bR + bR^2 - 2b^2 R + b^2 R^2 + 2b^2 R^3 - bR^3 + bR^4) \quad (3.123)$$

$$N_6 = N_1 (1 - b + 2bR - 3b^2 R^2 + 3bR^2 - 2b^2 R - bR^3 + b^3 R^3 + 3b^2 R^4 - 2bR^4 + bR^5) \quad (3.124)$$

Viteza în orice perioadă (n) se determină cu relația:

$$v_n = \frac{N_n}{K_2}. \quad (3.125)$$

2. Cazul $l_0 = 3l_1$; În mod asemănător, forța de ciocnire pentru fiecare perioadă se determină cu relațiile:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{K_0 K_2}{K_0 + K_2} v_0 \\
 N_2 &= N_1(1 + bR) \\
 N_3 &= N_1 \left[1 + b(R^2 + R - 1) \right] \\
 N_4 &= N_1 \left[1 + b(R^3 + R^2 - 1) \right] \\
 N_5 &= N_1 (1 - b - bR^2 + b^2 R^2 + bR^3 + bR^4) \\
 N_6 &= N_1 (1 - b + 2bR - 2b^2 R - bR^2 + b^2 R^2 - 2bR^3 + 2b^2 R^3 + bR^4 + bR^5) \\
 v_n &= \frac{N_n}{K_2}
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

În plus, forța N_1 se modifică în N_2 după $T = \frac{2l_0}{c_0} = \frac{6l_1}{c_0}$, iar forțele rămase

se modifică după $T_1 = \frac{2l_1}{c_1}$.

Comparând relațiile pentru forțe în cele două cazuri ($l_0 = 2l_1, l_0 = 3l_1$) se observă că forța de ciocnire este aceeași după primele trei perioade, adică nu depinde de raportul l_0/l_1 dintre lungimile celor două trepte ale percutorului. În plus, două din aceste forțe sunt maxime:

$$N_1 = N_{1max} \text{ la } R < 0 \text{ (adică } K_1 < K_0 \text{)}$$

$$N_2 = N_{2max} \text{ la } R > 0 \text{ (adică } K_1 > K_0 \text{)}.$$

În fine, se poate demonstra inegalitatea $N_2 > N_3$ (din (3.126)):

$$N_1(1 + bR) > N_1 \left[1 + b(R^2 + R - 1) \right] \Leftrightarrow 1 + bR > 1 + b(R^2 + R - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^2 < 1 \Leftrightarrow R < 1$$

Această inegalitate se păstrează întotdeauna și prin urmare, $N_2 > N_3$.

Din relațiile (3.119)-(3.126) rezultă că mărimea efortului maximal (și a tensiunilor maxime) nu depinde de lungimile treptelor barelor.

3.4.4. Calculul sistemului percutant format din două bare având lungimi finite

Sistemul percutant format din două bare de lungimi l_1 , respectiv l_2 , are trei suprafețe limită - una de contact (B) și două libere, terminale (A, C). În figura 3.25.a sunt prezentate barele care se ciocnesc și diagrama ondulatorie a acestui sistem.

Undele reflectate de la suprafața liberă a perculatorului (suprafața C) le vom nota cu indice ' (prim). (De exemplu, unda $N_1; v_1$, prin reflexie dă unda $N_1'; v_1'$. Unda $N_2; v_2$ va da unda $N_2'; v_2'$ ș.a.m.d.). Undele reflectate de la capătul liber al barei lovite (suprafața A) le notăm cu indice " (secund). Mai notăm:

$$T_1 = \frac{2l_1}{c_1} = \text{timpul după care unda reflectată de la capătul liber al}$$

perculatorului (C) atinge suprafața de contact (B);

$$T_2 = \frac{2l_2}{c_2} = \text{timpul după care unda reflectată de la capătul liber al barei (A)}$$

atinge suprafața de contact (B).

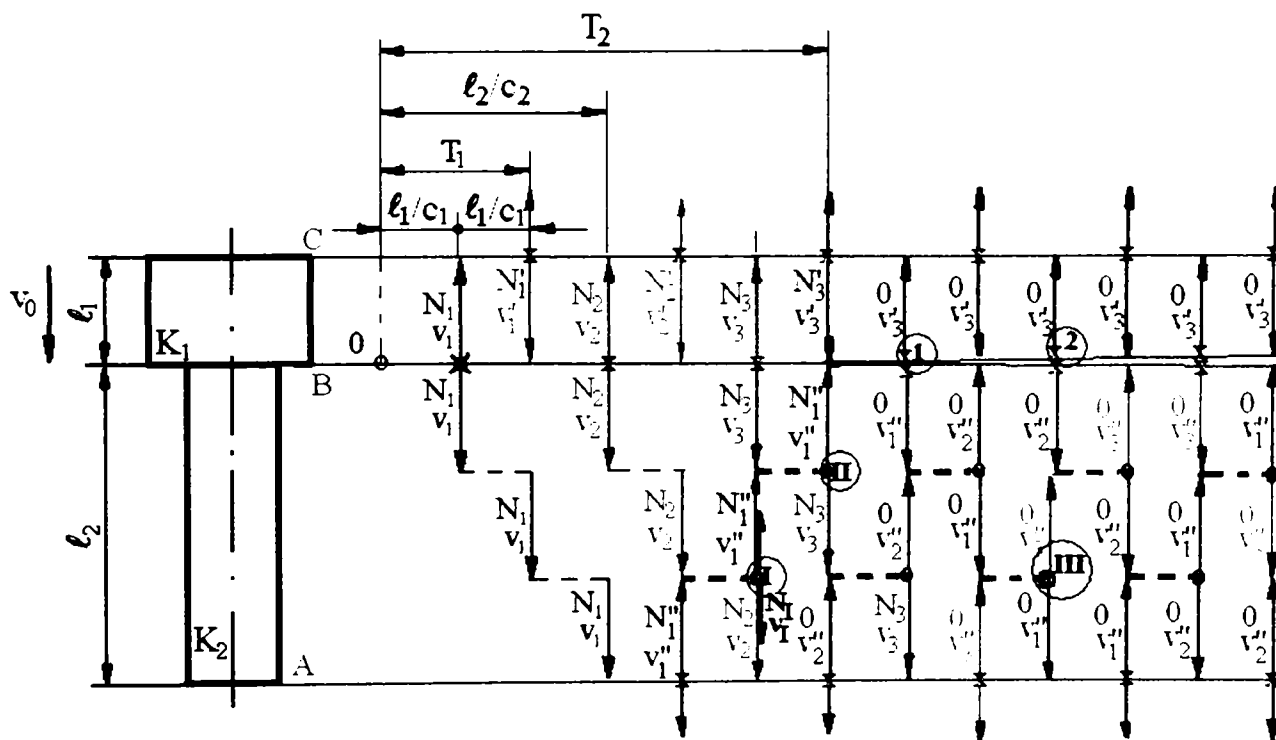


Figura 3.25.a. Ciocnirea a două bare de lungime finită
(Cazul $l_1/c_1 < l_2/c_2$)

CAZUL I: $T_1 < T_2$

Vom examina situația când unda reflectată de la capătul liber al perculatorului atinge suprafața plană de contact mai devreme decât unda reflectată din bara lovită, adică:

$$\frac{2l_1}{c_1} < \frac{2l_2}{c_2},$$

respectiv cazul particular :

$$\frac{l_2}{c_2} = 3\frac{l_1}{c_1} \text{ (sau } T_2 = 3T_1)$$

Prin construcția diagramei ondulatorii se observă imediat că procesul ondulatoriu în perculator, până la momentul sosirii primei unde reflectate de la capătul liber inferior al barei lovite (A), este același ca și în cazul ciocnirii unei bare de lungime finită cu o bară de lungime infinită (vezi § 3.4.2), caz în care forța de ciocnire și viteza suprafeței de contact se determină prin expresiile (3.85) și (3.86):

$$\begin{cases} N_i = N_1 \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{i-1} \\ v_i = \frac{N_i}{K_2} \end{cases}$$

În primul nod, pe suprafața de contact B, ecuațiile pentru perculator, respectiv bară sunt:

$$\begin{cases} N_1 - 0 = K_1(v_0 - v_1) \Rightarrow N_1 = K_1v_0 - K_1v_1 \\ N_1 - 0 = -K_2(0 - v_1) \Rightarrow N_1 = K_2v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{N_1}{K_2} \end{cases}$$

$$N_1 = K_1v_0 - K_1\frac{N_1}{K_2} \Rightarrow N_1\left(1 + \frac{K_1}{K_2}\right) = K_1v_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}v_0 \\ v_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2}v_0 \end{cases} \quad (3.127)$$

și atunci expresiile pentru forța și viteza de ciocnire în percutor, pe suprafața de contact B, (înainte de a ajunge unda reflectată de la capătul A al barei lovite) vor fi:

$$\begin{cases} N_i = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \cdot \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{i-1} \cdot v_0 \\ v_i = \frac{K_1}{K_1 + K_2} v_0 \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{i-1} \end{cases} \quad (3.128)$$

Observații:

- dacă $K_2 > K_1$, forța N_2 devine negativă (forță de întindere) și, după timpul

$$t = \frac{2l_1}{c_1}, \text{ percutorul ricoșează de pe bara lovită.}$$

- dacă $K_1 > K_2$, ciocnirea are loc în continuare; procesul de ciocnire se

încheie după o perioadă $t = \frac{2l_2}{c_2}$ de la sosirea undei reflectate de la capătul

liber (A) al barei lovite. (Acest lucru se va demonstra mai departe).

Vom determina parametrii N_1'' și v_1'' , ai undei reflectate de pe suprafața A a barei lovite. Alcătuim, ca și până acum, sistemul de ecuații corespunzătoare și vom avea:

$$N_1'' - N_1 = K_2(v_1 - v_1'').$$

Așa cum s-a arătat în paragraful anterior, § 3.4.3, relația (3.110), undele reflectate de la un capăt liber se pot considera nule, adică: $N'_i = 0$ și $N''_i = 0$ (vezi și figura 3.25.b). Atunci $N_1'' = 0$

Rezultă că:

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1'' = \frac{2N_1}{K_2} \\ N_1'' = 0 \end{cases} \quad (3.129)$$

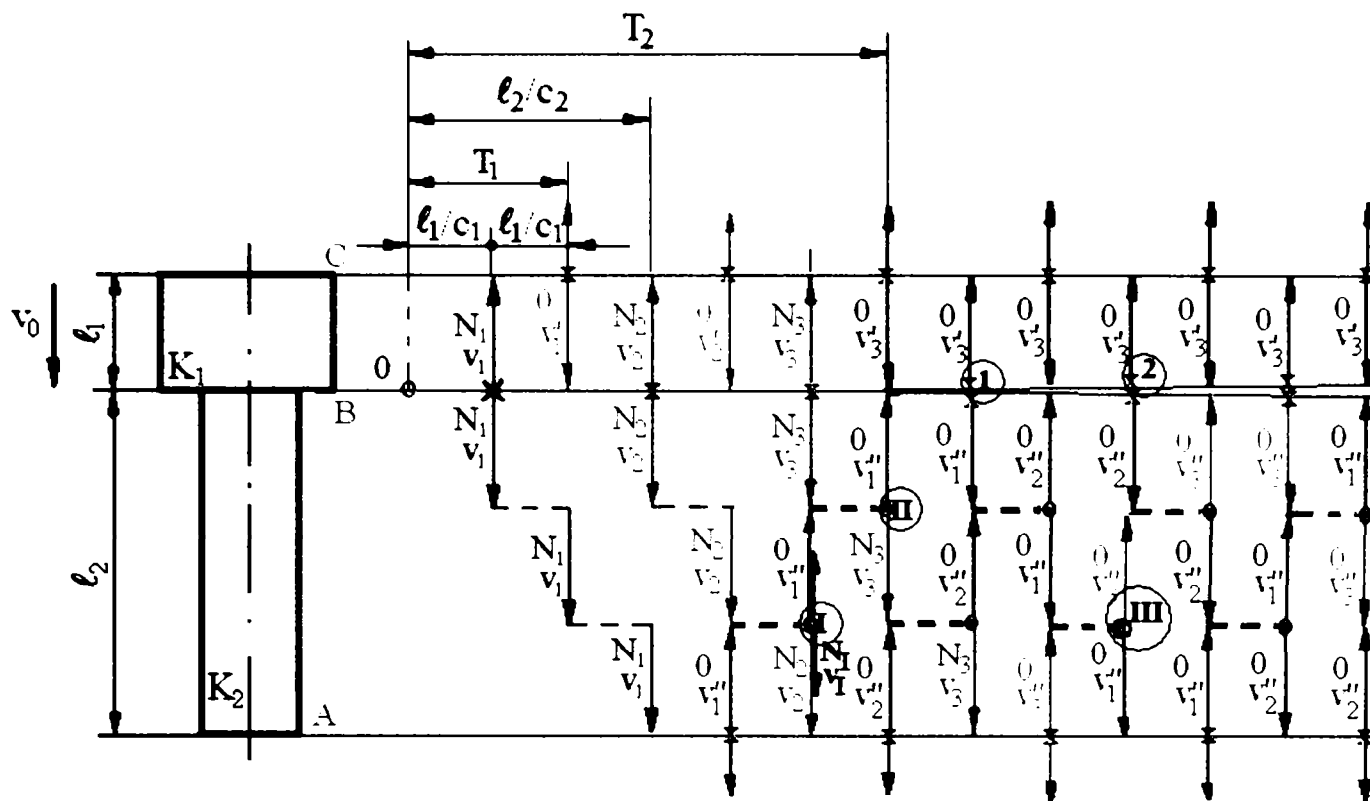


Figura 3.25.b

Până când prima undă reflectată de la capătul liber (A) al barei lovite (unda $N_1''=0, v_1''$) sosește pe suprafața de contact bară – percutor (suprafața B), mai sosesc, pe aceeași suprafață, un număr “n” de unde, reflectate de la capătul liber (C) al percutorului adică undele având parametrii: $(N_1'=0, v_1')$, $(N_2'=0, v_2')$, $(N_3'=0, v_3')$, etc.

“n” se determină din relația:

$$T_1 n = T_2 \Rightarrow \frac{2l_1}{c_1} \cdot n = \frac{2l_2}{c_2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{l_2 c_1}{l_1 c_2} \quad (3.130)$$

În cazul nostru $n=3$ și rezultă că odată cu unda având parametrii $N_1''=0; v_1''$, ce se reflectă de la suprafața liberă a barei, pe suprafața de contact B va sosi unda a treia, reflectată de pe suprafața liberă a percutorului, și având parametrii $N_3'=0; v_3'$ (vezi figura 3.25.c).

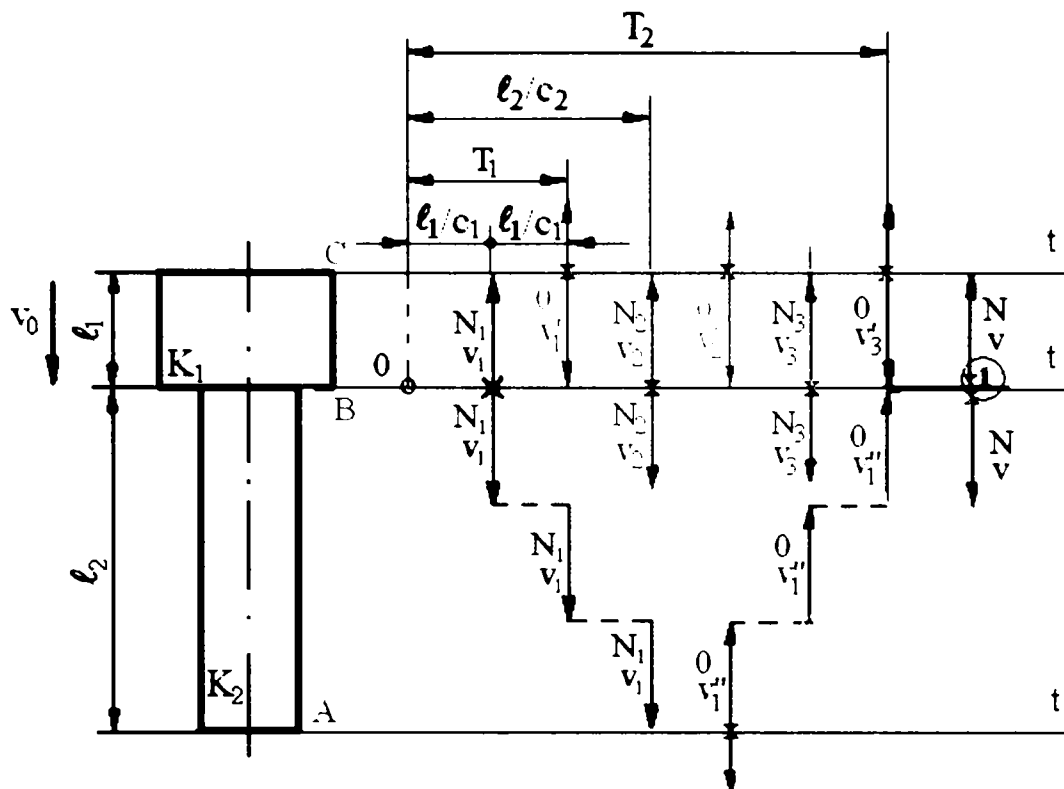


Figura 3.25.c

Alcătuiind sistemul de ecuații corespunzătoare, vom găsi parametrii undelor:

Pe suprafața B avem următoarele ecuații:

$$N_1 - 0 = K_1(v_0 - v_1)$$

$$\Rightarrow v_1 = v_0 - \frac{N_1}{K_1} \quad (3.131)$$

$$N_2 - 0 = K_1(v_0 - v_2) \Rightarrow N_2 = K_1 v_0 - K_1 v_2$$

$$\frac{N_2}{K_1} = v_0 - v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = v_0 - \frac{N_2}{K_1} \quad (3.132)$$

$$N_3 - 0 = K_1(v_0 - v_3) \Rightarrow N_3 = K_1 v_0 - K_1 v_3$$

$$\frac{N_3}{K_1} = v_0 - v_3$$

$$\Rightarrow v_3 = v_0 - \frac{N_3}{K_1} \quad (3.133)$$

Pe suprafața C avem ecuațiile:

$$N_1' - N_1 = -K_1(v_1 - v_1')$$

$$\text{Dar } N_1' = 0 \text{ (reflexia de la capatul liber)} \Rightarrow N_1 = K_1 v_1 - K_1 v_1'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_1' &= v_1 - \frac{N_1}{K_1} \\ \Rightarrow v_1' &= v_0 - \frac{2N_1}{K_1} \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} 0 - N_2 &= -K_1(v_2 - v_2') \Rightarrow N_2 = K_1 v_2 - K_1 v_2' \Rightarrow v_2' = v_2 - \frac{N_2}{K_1} \\ \Rightarrow v_2' &= v_0 - \frac{2N_2}{K_1} \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} 0 - N_3 &= -K_1(v_3 - v_3') \Rightarrow N_3 = K_1 v_3 - K_1 v_3' \Rightarrow v_3' = v_3 - \frac{N_3}{K_1} \\ \Rightarrow v_3' &= v_0 - \frac{2N_3}{K_1} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Se poate deduce că forța de ciocnire și viteza undei reflectate sunt legate prin relațiile:

$$\begin{aligned} v_n' &= v_n - \frac{N_n}{K_1}; v_n = v_0 - \frac{N_n}{K_1} \\ \Rightarrow v_n' &= v_0 - \frac{2N_n}{K_1} \end{aligned} \quad (3.137)$$

Cu această egalitate (3.137) alcătuim sistemul de ecuații care leagă parametrii N, v ai undei formate pe suprafața de contact după sosirea ambelor unde reflectate (de la capetele libere ale perculatorului, respectiv barei) de parametrii N_n', v_n' , respectiv N_1'', v_1'' .

Pe suprafața de contact (B), după sosirea undelor reflectate de la capătul liber al barei ($N_1''; v_1''$)

$$\begin{cases} N_1'' = 0 \\ v_1'' = \frac{2N_1}{K_2} \end{cases} \quad (3.129)$$

și de la capătul liber al perculatorului ($N_n'; v_n'$)

$$\begin{cases} N_n' = 0 \\ v_n' = v_0 - \frac{2N_n}{K_1} \end{cases} \quad (3.138)$$

se formează unda cu parametrii $N; v$ (în nodul 1 de pe diagramă – figura 3.25.c):

$$\begin{cases} N - 0 = K_1(v_n' - v) \\ N - 0 = -K_2(v_l'' - v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = K_1(v_n' - v) \\ N = -K_2(v_l'' - v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{N}{K_1} = v_n' - v \\ \frac{N}{K_2} = -v_l'' + v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N \cdot \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} &= v_0 \left[1 - \frac{2K_1}{K_1 + K_2} - \frac{2K_2}{K_1 + K_2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{n-1} \right] = \\ &= \left[\frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2} - \frac{2K_2}{K_1 + K_2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{n-1} \right] v_0 = \left[-\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} - \frac{2K_2}{K_1 + K_2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{n-1} \right] v_0 \\ &= -\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \left[1 + \frac{2K_2}{K_1 + K_2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{n-2} \right] v_0 \\ N \cdot \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} &= -\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \left[1 + \frac{2K_2}{K_1 + K_2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{n-2} \right] v_0 \quad (3.139) \end{aligned}$$

S-a arătat că este necesară condiția $\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} > 0$ pentru ca perculatorul să nu

ricoșeze înainte de timpul $t = \frac{2l_1}{c_1}$. Cu această condiție, membrul drept din

expresia (3.139) este negativ (adică $N < 0$ este o forță de întindere).

De aici se pot desprinde următoarele concluzii:

1) Dacă $\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \leq 0$, (adică $K_1 \leq K_2$), ciocnirea se încheie după timpul

$$t_c = \frac{2l_1}{c_1}.$$

2) Dacă $\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} > 0$, (adică $K_1 > K_2$), ciocnirea se va încheia după o

perioadă de timp egală cu $t_c = \frac{2l_2}{c_2}$.

Calculăm *coeficientul de transmitere a energiei*:

- în cazul 1), η se calculează din relația (3.94), pentru $K_0 = K_1$:

$$\eta = \frac{4K_1K_2}{(K_1 + K_2)^2} \quad (3.140)$$

- în cazul 2), η se va determina în continuare:

În timpul ciocnirii, barei lovite i se transmit unde, având parametrii: (N_i, v_i) ;

$(N_2, v_2); (N_3, v_3); \dots; (N_n, v_n)$. Durata fiecărei unde este $t = \frac{2l_1}{c_1}$.

- Energia totală transmisă este :

$$E_2 = \sum_{i=1}^n N_i \cdot v_i \cdot t = \frac{2l_1}{c_1} \cdot \sum_{i=1}^n N_i \cdot v_i = \frac{2l_1}{c_1} \cdot \sum_{i=1}^n N_i \cdot \frac{N_i}{K_2} = \frac{2l_1}{c_1 K_2} \cdot \sum_{i=1}^n N_i^2$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{2l_1 K_1^2 K_2 v_0^2}{c_1 (K_1 + K_2)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{2(i-1)}, \quad (3.141)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad n = \frac{l_2 c_1}{l_1 c_2}$$

În (3.141) apare suma termenilor unei progresii geometrice cu rația

$$\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2.$$

$$E_2 = \frac{2l_1 K_1^2 K_2 v_0^2}{c_1 (K_1 + K_2)^2} \left[\frac{1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{2n}}{1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2} \right]$$

$$E_2 = \frac{2l_1 K_1^2 K_2 v_0^2}{c_1 (K_1 + K_2)^2} \cdot \frac{(K_1 + K_2)^2}{4K_1 K_2} \cdot \left[1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{2l_2 c_1}{l_1 c_2}} \right]$$

Rezultă că:

$$E_2 = \frac{K_1 l_1 v_0^2}{2c_1} \left[1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{2l_2 c_1}{l_1 c_2}} \right] \quad (3.142)$$

- Energia perculatorului, înainte de ciocnire:

$$E_0 = \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{\rho_1 S_1 l_1 v_0^2}{2} = \frac{K_1}{c_1} \cdot \frac{l_1 v_0^2}{2} = \frac{K_1 l_1 v_0^2}{2c_1} \quad (3.143)$$

$$(K_1 = \rho_1 S_1 c_1)$$

- Coeficientul de transmitere a energiei:

$$\eta = \frac{E_2}{E_0} = \frac{E_2}{\frac{K_1 l_1 v_0^2}{2c_1}} = 1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{2l_2 c_1}{l_1 c_2}} \quad (3.144)$$

- Energia rămasă în perculator după ciocnire:

$$E_1 = E_0 - E_2 = E_0 - E_0 \eta = E_0 (1 - \eta)$$

$$E_1 = \frac{m_1 v_0^2}{2} (1 - \eta) = \frac{m_1 v_0^2}{2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{2l_2 c_1}{l_1 c_2}} \quad (3.145)$$

- Coeficientul de pierdere a energiei, prin ciocnire:

$$\theta = \frac{E_1}{E_0} = 1 - \eta = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{2l_2 c_1}{l_1 c_2}} \quad (3.146)$$

Din această expresie se observă că numai în cazul $K_1 = K_2$ se ajunge la *transmiterea completă a energiei* (adică $\theta = 0$). (De exemplu, în cazul barelor cu aceeași secțiune și din același material, cu observația că această concluzie este adevărată numai în cazul $\frac{l_2}{c_2} > \frac{l_1}{c_1}$).

Observații:

- În relația (3.144) nu intervin masele barelor care se ciocnesc, de aceea se poate susține, contrar teoriei mecanicii clasice a ciocnirii elastice, că mărimea energiei transmise nu depinde de masele barelor care se ciocnesc.

- Dacă masele barelor sunt egale, nu are loc transmiterea completă a energiei (contrar ipotezei că la ciocnirea corpurilor de aceeași masă transmiterea energiei este completă).
- Viteza percutorului, după ciocnire, se poate determina din expresia:

$$E_c = E_1$$

$$\frac{m_1 v_p^2}{2} = \frac{m_1 v_0^2}{2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{2l_2 c_1}{l_1 c_2}},$$

de unde:

$$v_p = v_0 \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{l_2 c_1}{l_1 c_2}}. \quad (3.147)$$

- Viteza de deplasare a suprafeței frontale a barei lovite, care a fost în contact cu percutorul după sosirea undei reflectate de la capătul liber, este (din (3.129)):

$$v_1'' = \frac{2N_1}{K_2} = \frac{2K_1}{K_1 + K_2} v_0 = \left(1 + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) v_0 \quad (3.148)$$

$$\text{Cum } \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} < 1 \Rightarrow v_1'' > v_p.$$

Astfel, separarea are loc ca urmare a faptului că bara lovită devansează percutorul. După ciocnire (separare), percutorul continuă să se miște în aceeași direcție, dar cu o viteză mai mică.

În ceea ce privește bara lovită, viteza celor două suprafețe frontale se va micșora treptat. Astfel, după sosirea undei N_2 , v_2 la capătul liber al barei (suprafața A), după timpul $\frac{4l_1}{c_1}$, viteza ei scade până la valoarea v_2'' .

Ecuțiile de undă, pe suprafețele A, B sunt:

$$0 - N_2 = K_2 (v_2 - v_2'') \Rightarrow v_2'' = v_2 + \frac{N_2}{K_2}$$

$$N_2 - N_1 = -K_2 (v_1 - v_2) \Rightarrow v_2 = \frac{N_2}{K_2}$$

$$\Rightarrow v_2'' = \frac{2N_2}{K_2}. \quad (3.149)$$

După timpul $\frac{2l_1}{c_1}$, ajunge pe suprafața de contact (B) unda de viteză v_2'' .

După ce barele s-au despărțit, la capetele libere se produc doar undele $N=0$.

Ecuția undei în bara lovită (suprafața B) va fi de forma:

$$0 - 0 = -K_2(v_2'' - v_1''),$$

de unde:

$$v_2'' = v_1''$$

De aici se vede că viteza undei reflectate de la suprafața liberă a barei (când forța este nulă) nu se modifică.

Din diagrama ondulatorie (figura 3.25.b) se observă că undele din percutor, având durata $\frac{l_1}{c_1}$, alternează cu undele din bară, cu o periodicitate egală cu $\frac{2l_2}{c_2}$

Numărul acestor unde este egal cu $n = \frac{l_2 c_1}{l_1 c_2}$ (din (3.130)).

În cazul nostru $n = 3$ și la un moment dat, suprafața B a barei se va mișca cu viteza v_1'' sau v_2'' sau v_3'' .

$$v_1'' = \frac{2N_1}{K_2} \text{ (din (3.129))}$$

$$v_2'' = \frac{2N_2}{K_2} \quad (3.149)$$

iar din (3.85):

$$N_2 = N_1 \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}.$$

și rezultă că:

$$v_3'' = \frac{2N_1}{K_2} \cdot \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2$$

În general:

$$v_n'' = \frac{2N_n}{K_2} \quad (3.150)$$

Vom arăta că pe suprafețele limită se formează unde de întindere și de compresiune. Determinăm parametrii acestor unde.

Alcătuiim sistemul de ecuații la momentul trecerii undei prin fiecare secțiune (figura 3.25.b).

Pe diagrama ondulatorie, notăm cu prin cruciuliță (x) nodurile în care iau naștere undele pe suprafețele frontale ale barelor; prin cerculeț (o) notăm nodurile în care se întâlnesc unda reflectată și unda transmisă în bara 2.

După cum rezultă din diagrama ondulatorie, pentru calculul unor parametri instantanei ai undelor, la marginile corpurilor și pe fronturilor undelor se aplică aceleași metode de calcul.

- În nodul I(o), ecuațiile ondulatorii sunt următoarele:

(deasupra nodului I(o) avem unda N_2, v_2 , iar sub nod, unda $N_1''=0, v_1''$)

$$\begin{cases} N_{I(o)} - N_2 = K_2(v_2 - v_{I(o)}) \\ N_{I(o)} - 0 = -K_2(v_1'' - v_{I(o)}) \end{cases} \quad (3.151)$$

de unde:

$$N_{I(o)} = -\frac{2K_2}{K_1 + K_2} N_1 \quad (3.152)$$

Semnul minus indică o *tensiune de întindere*. Vom arăta că în nod, a doua undă de întindere va fi și mai intensă.

- În nodul II(o):

$$\begin{cases} N_{II} - N_3 = K_2(v_3 - v_{II}) \\ N_{II} - 0 = -K_2(v_1'' - v_{II}) \end{cases} \quad (3.153)$$

de unde rezultă că:

$$\Rightarrow N_{II} = N_3 - N_1$$

$$N_{II} = N_1 \left[\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.154)$$

Dacă $\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} < 1$ rezultă că:

$$N_{II} < 0 \text{ și } |N_{II}| > |N_I|, \quad (3.155)$$

adică a doua undă de întindere este și mai intensă decât prima.

Vom arăta că în nodul III are loc o compresiune.

• Pentru nodul III (o), condițiile inițiale sunt:

- deasupra nodului se află unda cu parametrii:

$$N = 0$$

$$v_1'' = \frac{2N_1}{K_2}$$

- sub nod se află unda cu parametrii:

$$N = 0$$

$$v_3'' = \frac{2N_3}{K_2}$$

Alcătuiim sistemul de ecuații ondulatorii:

$$\begin{cases} N_{III} - 0 = K_2(v_1'' - v_{III}) \\ N_{III} - 0 = -K_2(v_3'' - v_{III}) \end{cases} \quad (3.156)$$

$$\Rightarrow N_{III} = N_1 \left[1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2 \right] > 0, \quad (3.157)$$

adică unda de întindere din bară se transformă în undă de compresiune și invers, ca și cum bara pulsează.

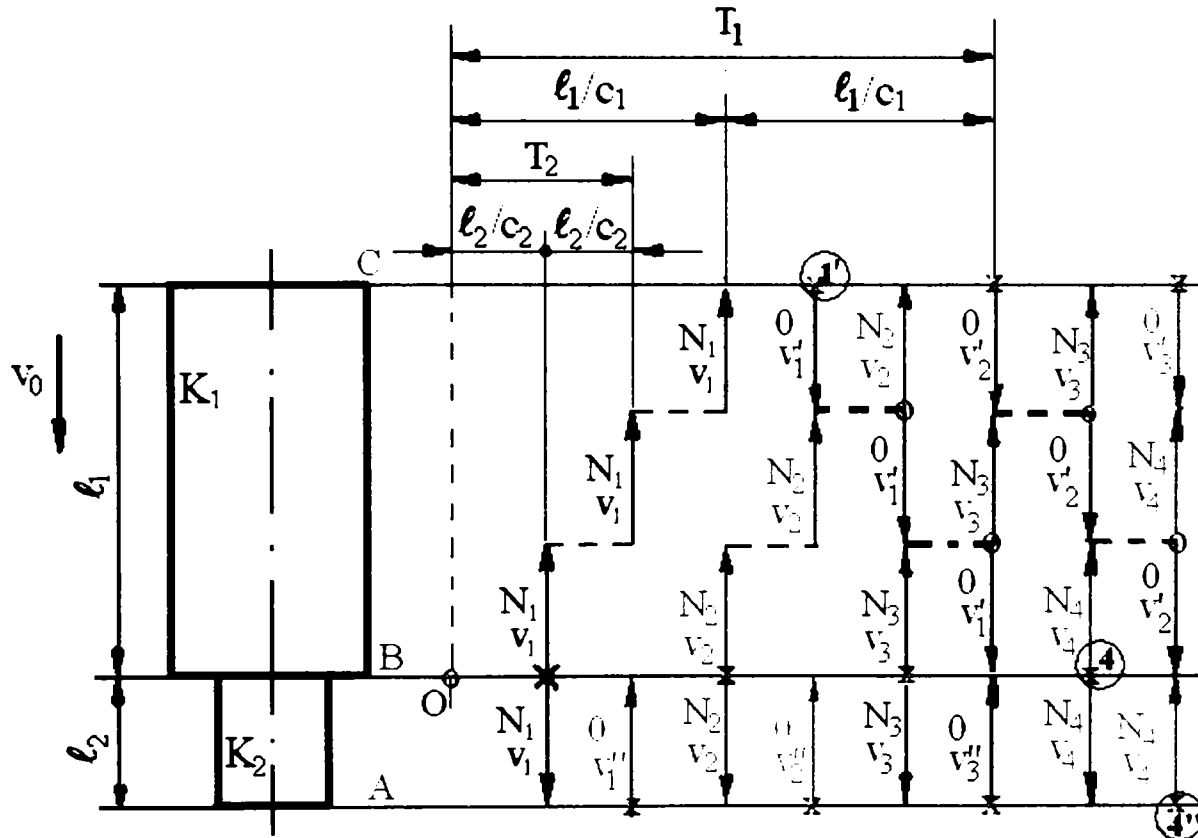
Acest aspect al mișcării barei se poate observa concret în cazul ciocnirii unui arc.

CAZUL II: $T_1 > T_2$

Vom examina în continuare cazul în care perculatorul are lungime mai mare decât bara lovită (figura 3.26) sau, mai precis, dacă barele sunt executate din materiale diferite, $\frac{l_1}{c_1} > \frac{l_2}{c_2}$.

$$\text{Vom avea: } \frac{l_1}{c_1} = n \cdot \frac{l_2}{c_2} \Rightarrow n = \frac{l_1 c_2}{l_2 c_1}. \quad (3.158)$$

Caz particular: $n = 3$.



*Figura 3.26. Ciocnirea a două bare de lungime finită
(Cazul $l_1/c_1 > l_2/c_2$)*

Avem 3 suprafețe limită: A, B, C.

- Ecuațiile undulatorii în nodul B:

$$\begin{cases} N_1 - 0 = K_1(v_0 - v_1) \\ N_1 - 0 = -K_2(0 - v_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = K_1 v_0 - K_1 v_1 \\ N_1 = K_2 v_1 \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{N_1}{K_2}$$

$$N_1 = K_1 v_0 - K_1 \frac{N_1}{K_2} \Rightarrow N_1 \left(1 + \frac{K_1}{K_2} \right) = K_1 v_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0 \\ v_1 = \frac{N_1}{K_2} = \frac{K_1}{K_1 + K_2} v_0 \end{cases} \quad (3.159)$$

Unda N_1, v_1 , reflectându-se de la suprafața liberă a barei lovite, dă naștere unei noi unde cu parametrii $N=0, v_1''$.

- Viteza v_1'' se determină din ecuația pe suprafața A:

$$0 - N_1 = K_2 (v_1 - v_1'')$$

$$K_2 v_1'' = N_1 + K_2 v_1 = 2N_1$$

$$\Rightarrow v_1'' = \frac{2N_1}{K_2}. \quad (3.160)$$

- Parametrii unde N_2, v_2 se determină din sistemul de ecuații pe suprafața limită B:

$$\begin{cases} N_2 - N_1 = K_1 (v_1 - v_2) \\ N_2 - 0 = -K_2 (v_1'' - v_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{N_2}{K_1} - \frac{N_1}{K_1} = v_1 - v_2 \\ \frac{N_2}{K_2} = -v_1'' + v_2, \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} v_2 = \frac{2N_1}{K_2} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} + 1 \right) - \frac{N_1}{K_2} \cdot \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \\ N_2 = N_1 \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \end{cases} \quad (3.161)$$

Observații:

- Dacă $K_1 > K_2$ rezultă $N_2 < 0$ și, deci, imediat după trecerea unde reflectate de la capătul liber al barei lovite, perculatorul depășește bara și ciocnirea se va încheia. Ca rezultat, prin această ciocnire se transmite numai energia primei unde.

Energia transmisă barei va fi:

$$E_2 = N_1 v_1 t = N_1 \cdot \frac{N_1}{K_2} \cdot \frac{2l_2}{c_2} = \frac{N_1^2 \cdot 2l_2}{K_2 c_2} = \frac{K_1^2 K_2^2 v_0^2}{(K_1 + K_2)^2} \cdot \frac{2l_2}{c_2 K_2}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{2K_1^2 K_2}{(K_1 + K_2)^2} \cdot \frac{v_0^2 l_2}{c_2} \quad (3.162)$$

Dacă energia inițială a perculatorului este:

$$E_0 = \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{K_1 l_1 v_0^2}{2c_1}, \quad (3.143)$$

atunci coeficientul de transmitere a energiei de ciocnire va fi, în acest caz:

$$\eta = \frac{E_2}{E_0} = \frac{2K_1^2 K_2}{(K_1 + K_2)^2} \cdot \frac{v_0^2 l_2}{c_2} \cdot \frac{2c_1}{K_1 l_1 v_0^2}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} \quad (3.163)$$

- În cazul ciocnirii reciproce a două bare din același material și având secțiuni egale, adică: $K_1 = K_2 = K$; $c_1 = c_2$, avem:

$$\eta = \frac{4K^2}{4K^2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{c_1}{c_1}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{l_2}{l_1}. \quad (3.164)$$

Astfel de rezultate se obțin pentru $K_1 \geq K_2$.

- În caz contrar, când $K_1 < K_2$, rezultă, din (3.161), $N_2 > 0$ și ciocnirea va continua.

Unda cu parametrii N_2 , v_2 , reflectându-se de pe suprafața liberă, va da o nouă undă, cu $N=0$, v_2'' .

- Parametrii ei se determină din ecuația ondulatorie de pe suprafața limită A:

$$\begin{aligned}
0 - N_2 &= K_2(v_2 - v_2'') \Rightarrow \\
\Rightarrow K_2 v_2'' &= N_2 + K_2 v_2 \stackrel{(3.181)}{=} N_1 \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} + N_1 \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} + 2 \right) \\
&= 2N_1 \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} + 1 \right) \\
\Rightarrow v_2'' &= \frac{2N_1}{K_2} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} + 1 \right) \tag{3.165}
\end{aligned}$$

- Determinăm N_3 și v_3 (suprafața limită B):

$$\begin{aligned}
\begin{cases} N_3 - N_2 = K_1(v_2 - v_3) \\ N_3 - 0 = -K_2(v_2'' - v_3) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{N_3}{K_1} = \frac{N_2}{K_1} + v_2 - v_3 \\ \frac{N_3}{K_2} = -v_2'' + v_3 \end{cases} \\
\Rightarrow N_3 &= N_1 \frac{(K_2 - K_1)^2}{(K_2 + K_1)K_1K_2} \cdot \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2} = N_1 \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^2 \\
\begin{cases} v_3 = \frac{2N_1}{K_2} \left[\left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^2 + \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} + 1 \right] - \frac{N_1}{K_2} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^2 \\ N_3 = N_1 \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^2 \end{cases} &\tag{3.166}
\end{aligned}$$

Pentru a verifica legea menționată, scriem ecuația pentru determinarea lui v_3'' :

- Ecuația pe suprafața limită A este:

$$\begin{aligned}
0 - N_3 &= K_2(v_3 - v_3'') \\
\Rightarrow v_3'' &= \frac{2N_1}{K_2} \left[\left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^2 + \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} + 1 \right] \tag{3.167}
\end{aligned}$$

Din (3.159):

$$\Rightarrow v_3'' = \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^3 \right] \cdot v_0 \tag{3.168}$$

Analog, din (3.165) avem:

$$v_2'' = \frac{2K_1}{K_1 + K_2} \cdot v_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)}$$

$$\Rightarrow v_2'' = \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^2\right] \cdot v_0 \quad (3.169)$$

Comparând valorile vitezei suprafeței de contact pentru diferite perioade, putem scrie, pentru perioada i :

$$v_i = \frac{2N_1}{K_2} \left[1 + \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} + \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1}\right] - \frac{N_1}{K_2} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1}$$

(3.170)

Observăm că primul termen reprezintă suma termenilor unei progresii geometrice. Obținem:

$$v_i = \frac{\frac{2N_1}{K_2} \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^i\right]}{1 - \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}} - \frac{N_1}{K_2} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1}$$

$$\stackrel{(3.170)}{=} \frac{2 \frac{K_1}{K_1 + K_2} v_0}{\frac{2K_1}{K_1 + K_2}} \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^i\right] - \frac{K_1}{K_1 + K_2} v_0 \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1} =$$

$$= v_0 \left[1 - \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1} - \frac{K_1}{K_1 + K_2} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1}\right] =$$

$$= v_0 \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1} \left(\frac{K_2 - K_1 + K_1}{K_2 + K_1}\right)\right] = v_0 \left[1 - \frac{K_2}{K_2 + K_1} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1}\right]$$

Astfel, pentru perioada i de ciocnire se obțin următoarele valori:

$$v_i = \left[1 - \frac{K_2}{K_2 + K_1} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right)^{i-1}\right] v_0 \quad (3.171)$$

Din (3.159), (3.166), (3.161) se deduce:

$$N_i = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0 \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^{i-1} \quad (3.172)$$

Din (3.160), (3.169), (3.168):

$$v_i'' = \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^i \right] v_0. \quad (3.173)$$

Verificăm dacă ciocnirea va continua după sosirea, pe suprafața de contact B, a undei cu parametrii $N_1' = 0$, v_1' , reflectată de la capătul liber al perculatorului, după timpul $t = \frac{2l_1}{c_1}$.

Unda N_1' , v_1' ia naștere în nodul 1'.

- Determinăm v_1' , din ecuația pentru nodul 1' (suprafața C):

$$\begin{aligned} 0 - N_1 &= -K_1(v_1 - v_1') \\ \Rightarrow v_1' &= -\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} v_0 \end{aligned} \quad (3.174)$$

- Alcătuim și rezolvăm sistemul de ecuații pentru nodul 4 (unda N_4 , v_4), care corespunde momentului sosirii undei reflectate de la capătul liber al perculatorului, cu parametrii $N=0$, v_1' , pe suprafața de contact B.

$$\begin{cases} N_4 - 0 = K_1(v_1' - v_4) \\ N_4 - 0 = -K_2(v_3'' - v_4) \end{cases}$$

Rezultă că:

$$\begin{aligned} \frac{N_4}{K_1} + \frac{N_4}{K_2} &= v_1' - v_4 - v_3'' + v_4 = v_1' - v_3'' \\ N_4 &= \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \cdot \left[\left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^3 - \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} - 1 \right] \cdot v_0 \end{aligned} \quad (3.175)$$

După cum s-a arătat mai sus, pentru ca ciocnirea să nu înceteze după timpul $t = \frac{2l_2}{c_2}$, este necesar ca $K_2 > K_1$ sau $1 > \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} > 0$. În acest caz, $N_4 < 0$.

Astfel s-a arătat că dacă bara ciocnită nu e ruptă de către percutor în timpul $\frac{2l_2}{c_2}$, deci dacă ciocnirea continuă, după un timp $\frac{2l_1}{c_1}$, percutorul va ricoșa de pe

bara ciocnită. În acest moment, unda reflectată având parametrii $N_3''=0$, v_3'' , întâlnește suprafața liberă de contact, adică $N_4=0$ și viteza ei, v_4 , se determină din:

- Ecuația pentru nodul 4:

$$0 - 0 = -K_2(v_3'' - v_4) \Rightarrow v_4 = v_3''$$

- În nodul 4'':

$$0 - 0 = K_2(v_4 - v_4'')$$

$$\Rightarrow v_4'' = v_4 = v_3'', \quad (3.176)$$

adică vitezele ambelor capete ale barei ciocnite vor atinge valoarea:

$$v_3'' = \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^3 \right] v_0 \quad (3.168)$$

sau, în general, din (3.173):

$$v_n'' = \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^n \right] v_0, \quad (3.177)$$

unde:

$$n = \frac{l_1 c_2}{l_2 c_1}. \quad (3.158)$$

- Energia barei ciocnite:

$$E_2 = \frac{m_2 v_n^2}{2} = \frac{m_2 v_n''^2}{2} = \frac{\rho_2 S_2 l_2 v_n''^2}{2} = \frac{K_2 l_2}{2c_2} v_n''^2$$

$$E_2 = \frac{K_2 l_2}{2c_2} \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^n \right]^2 v_0^2$$

- Energia inițială a percutorului (3.143):

$$E = \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{\rho_1 S_1 l_1 v_0^2}{2} = \frac{K_1 l_1}{2c_1} v_0^2.$$

- Coeficientul de transmitere a energiei la ciocnire este:

$$\eta = \frac{E_2}{E_0} = \frac{K_2 l_2}{2c_2} \cdot \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^n \right]^2 \cdot v_0^2 \cdot \frac{2c_1}{K_1 l_1 v_0^2}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{K_2 l_2 c_1}{K_1 l_1 c_2} \left[1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right)^{\frac{l_1 c_2}{l_2 c_1}} \right]^2 \quad (3.178)$$

sau, considerând:

$$\frac{l_1 c_2}{l_2 c_1} = n \quad (3.158)$$

$$\frac{K_1}{K_2} = r, \quad (3.179)$$

obținem:

$$\eta = \frac{1}{rn} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right]^2 = \frac{1}{rn} (1-a^n)^2, \quad (3.180)$$

unde:

$$a = \frac{1-r}{1+r}. \quad (3.181)$$

Folosind expresia obținută, se pot alege, pentru sistemul dat, parametrii care asigură obținerea unor valori maxime pentru coeficientul de transmitere a energiei la ciocnire. De exemplu, pentru a obține un coeficient maxim, raportul lungimilor barelor care se ciocnesc, având materiale și dimensiuni transversale date, se poate obține din condiția $\frac{d\eta}{dn} = 0$, care conduce la ecuația transcendentă:

$$a^n (1 + 2 \cdot n \cdot \ln a) = 1. \quad (3.182)$$

Astfel, în cazul ciocnirii plane a două bare, se pot determina valorile forței, energiei cedate și ale altor parametri, în funcție de raportul dintre dimensiunile lor geometrice și de proprietățile materialelor (vezi Tabelul 3.7).

În tabelul 3.7 sunt prezentate relațiile pentru calculul următorilor parametri ai ciocnirii: forța de ciocnire, timpul de ciocnire, deplasarea suprafeței de contact, coeficientul de transmitere a ciocnirii, viteza perculatorului după ciocnire.

TABELUL 3.7

Parametrii sistemului de ciocnire		Formule pentru determinarea parametrilor de ciocnire					
longitudinali	transversali	Forța maximă	Timp de ciocnire	Deplasarea	Coefficientul de transmitere a energiei	Viteza percutorului după ciocnire	
$\frac{l_2}{c_2} \geq \frac{l_1}{c_1}$	$K_2 > K_1$	$\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0$	$\frac{2l_1}{c_1}$	$\frac{2K_1 l_1}{(K_1 + K_2)} v_0$	$\frac{4K_1 K_2}{(K_1 + K_2)^2}$	$\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) v_0 < 0$	
$\frac{l_2}{c_2} \geq \frac{l_1}{c_1}$	$K_2 < K_1$	$\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0$	$\frac{2l_2}{c_2}$	$\frac{l_1}{c_1} \frac{K_1}{K_2} \left[1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{2l_2 c_1}{l_1 c_2} \right] v_0$	$1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{2l_2 c_1}{l_1 c_2}$	$\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{l_2 c_1}{l_1 c_2} v_0 > 0$	
$\frac{l_2}{c_2} \leq \frac{l_1}{c_1}$	$K_2 < K_1$	$\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0$	$\frac{2l_2}{c_2}$	$\frac{2K_1 l_2}{(K_1 + K_2)} v_0$	$\frac{4K_1 K_2 l_2 c_1}{(K_1 + K_2)^2 l_1 c_2}$	$\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \cdot \sqrt{\frac{l_2 c_1}{l_1 c_2}} v_0 > 0$	
$\frac{l_2}{c_2} \leq \frac{l_1}{c_1}$	$K_2 > K_1$	$\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} v_0$	$\frac{2l_1}{c_1}$	$\frac{l_2}{2} \left\{ \frac{l_1 c_2}{l_2 c_1} - \frac{K_2}{2K_1} \right\} \left[1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{l_1 c_2}{l_2 c_1} \right] v_0$	$\frac{K_2 c_1 l_2}{K_1 c_2 l_1} \cdot \left[1 - \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{l_1 c_2}{l_2 c_1} \right]^2$	$\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) v_0 < 0$	

Notă: $K_1 = \rho_1 c_1 S_1$; $K_2 = \rho_2 c_2 S_2$

APLICAȚIE:

Pentru sistemul de ciocnire format din două bare de lungimi finite, prezentat în figura 3.25, s-au calculat, într-un caz concret, valorile parametrilor de ciocnire, respectiv timpul de ciocnire, precum și forța și viteza care apar pe suprafața de ciocnire, până în momentul separării barelor. Pentru calculul parametrilor de ciocnire s-a realizat un program în limbajul MATLAB, care este redat în Anexa 3.3.

Această situație de ciocnire s-a realizat și practic, folosind un stand experimental, care va fi descris în Capitolul 4, după care se vor compara valorile teoretice cu cele experimentale.

Sunt redate rezultatele teoretice pentru cazurile tratate anterior pe parcursul acestui paragraf: $K_1 > K_2$ și $K_1 < K_2$

- **Caz I:**

$$K_1 > K_2$$

$$v_0 = 2m/s$$

$$d_1 = 0,040m$$

$$d_2 = 0,035m$$

$$l_1 = 2m$$

$$l_2 = 6m$$

$$c_1 = c_2 = 5188m/s$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 7800kg/m^3$$

$$K_1 = \rho_1 c_1 S_1 = \rho_1 c_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \approx 50851kg/s$$

$$K_2 = \rho_2 c_2 S_2 = \rho_2 c_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \approx 38933kg/s$$

Ciocnirea încetează după timpul:

$$t = T_2 = 2l_2 / c_2 = 2,313ms \quad (3.183)$$

Valorile forțelor și vitezelor care apar pe suprafața de ciocnire, pe durata ciocnirii sunt redate în tabelul 3.8:

Tabelul 3.8

i	$N_i [N]$	$v_i [m/s]$
1	44101,3685161350	1,1327433628
2	5854,1639623188	0,1503641632
3	777,1014109273	0,0199598447

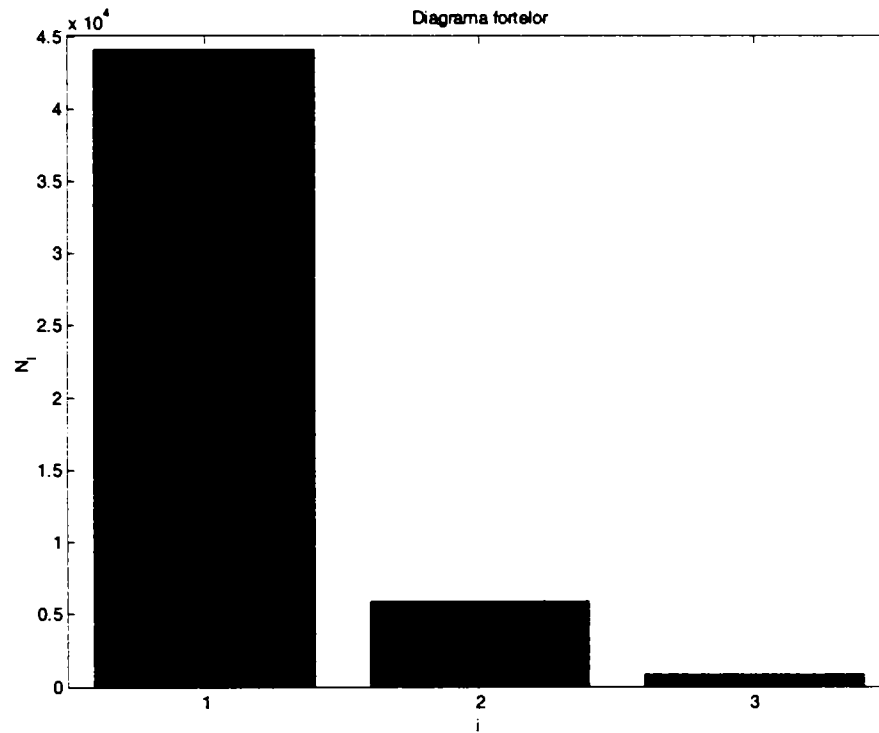


Figura 3.27

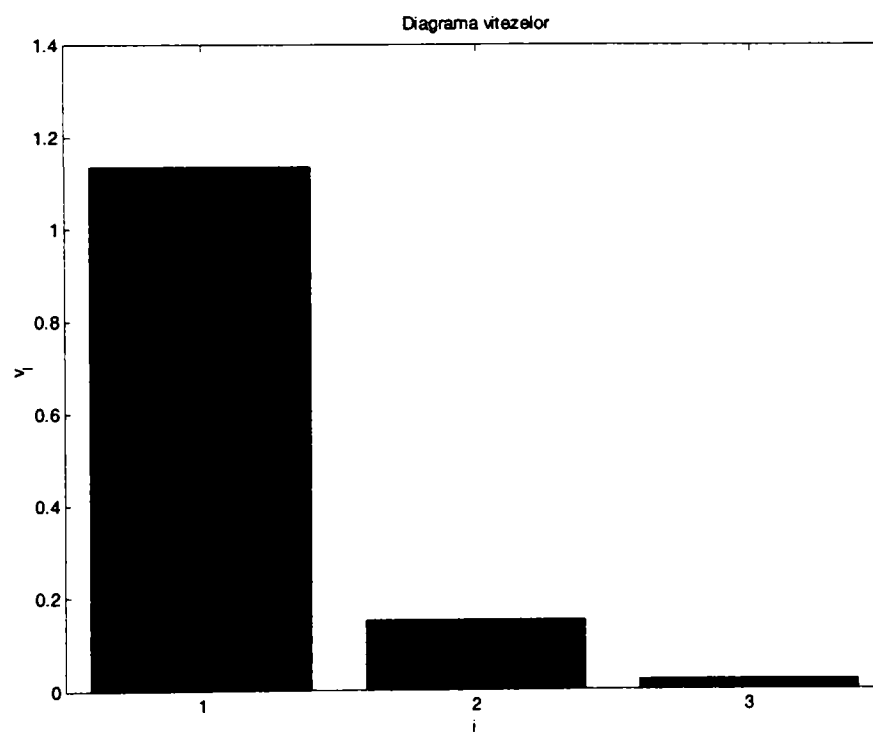


Figura 3.28

• **CazII:**

$$K_1 < K_2$$

$$v_0 = 2m/s$$

$$d_1 = 0,035m$$

$$d_2 = 0,040m$$

$$l_1 = 2m$$

$$l_2 = 6m$$

$$c_1 = c_2 = 5188m/s$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 7800kg/m^3$$

$$K_1 = \rho_1 c_1 S_1 = \rho_1 c_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \approx 38933kg/s$$

$$K_2 = \rho_2 c_2 S_2 = \rho_2 c_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \approx 50851kg/s$$

Ciocnirea încetează după timpul:

$$t = T_1 = 2l_1 / c_1 = 0,771ms \quad (3.184)$$

Valorile forțelor și vitezelor care apar pe suprafața de ciocnire sunt redată în tabelul 3.9. Ciocnirea încetează după prima perioadă, deoarece în a doua perioadă forța de ciocnire devine negativă.

Tabelul 3.9

<i>i</i>	$N_i [N]$	$v_i [m/s]$
1	44101,3685161350	0,8672566372
2	-5854,1639623188	-0,1151225625
3	777,1014109273	0,0152817561

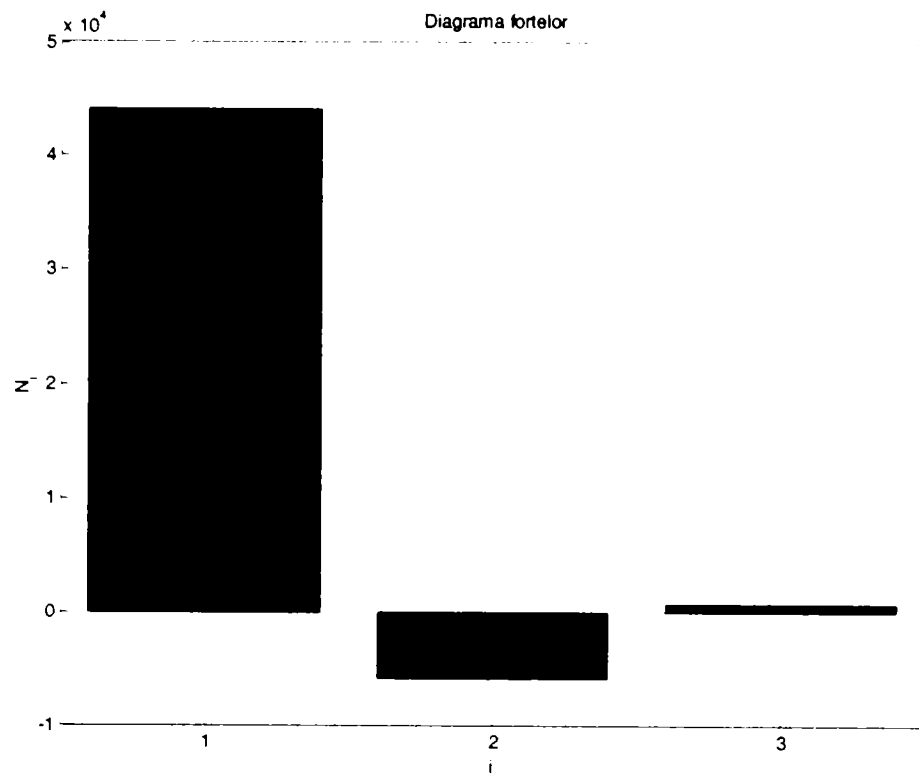


Figura 3.29

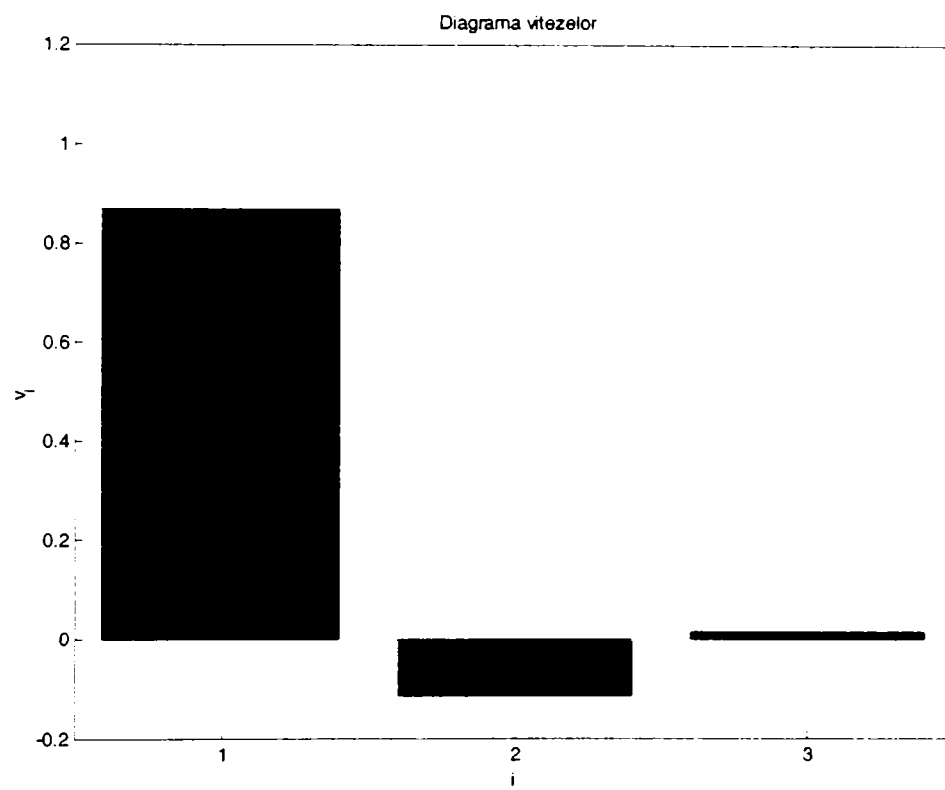


Figura 3.30

3.5. CONCLUZII

- După cum s-a văzut în capitolul anterior, se poate studia ciocnirea corpurilor, pe baza fenomenului de propagare a undelor, respectiv prin analiza ecuației undei. Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul doi, care admite o familie largă de soluții și care, uneori, sunt destul de dificil de obținut pe cale analitică. De aceea, s-a recurs la o metodă aproximativă de calcul a sistemelor de ciocnire, cu ajutorul teoriei de propagare a undelor în medii elastice, dar fără a necesita soluționarea ecuației undei.
- S-au stabilit condițiile în care poate fi aplicată metoda aproximativă de calcul a procesului de ciocnire pe baza teoriei de propagare a undelor și anume, în cazul corpurilor izotrope, omogene și infinite, supuse ciocnirii. În esență, *teoria ciocnirii plane longitudinale* se poate aplica în cazul ciocnirii coaxiale a două bare, având dimensiuni longitudinale mult mai mari decât cele transversale și se bazează pe următoarele ipoteze:
 - vitezele punctelor materiale și tensiunile sunt constante pe fiecare suprafață perpendiculară pe direcția undei longitudinale, inclusiv pe suprafețele inițiale de contact;
 - tensiunile și deformațiile de la suprafața de contact se răspândesc în tot corpul, sub forma unei unde, care se deplasează cu viteză constantă, respectiv cu viteza de propagare a undei longitudinale (c) prin materialul dat.
- În concluzie, toate punctele materiale aflate pe suprafața de contact au, în momentul ciocnirii, viteza v și forța N . Acestea (v , N) se transmit și punctelor din secțiunile imediat învecinate suprafeței de contact, din aproape în aproape, cu viteză finită (c), sub forma unei unde, numită „undă de ciocnire” și ai cărei parametri sunt viteza v și forța N .
- S-a trecut la *rezolvarea elementară a sistemului de ecuații* corespunzător ciocnirii plane, folosind în acest scop legile fundamentale ale dinamicii și principiile de bază ale teoriei ciocnirii plane. Ecuațiile liniare obținute

reprezintă o relație între forțele de ciocnire, vitezele corpurilor, înainte și după ciocnire, și impedanța acestora (care depinde de secțiune, densitate și viteza de propagare a undei prin bare). Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații, se obțin valorile *vitezelor și forțelor de ciocnire* din fiecare secțiune transversală prin care trece unda de deformație, la un moment dat.

- Cu ajutorul parametrilor calculați (forță și viteză) se pot determina ulterior și alte mărimi: tensiunile din bare, deplasarea suprafeței de contact, energia transmisă, puterea de ciocnire.
- S-au prezentat trei modele de sisteme de ciocnire, având în componență:
 - A. două bare cilindrice, cu lungimi infinite;
 - B. mai multe bare, de lungimi infinite, separate printr-o garnitură rigidă;
 - C. o bară plină și una de formă tubulară, ambele cu lungimi infinite.
- În fiecare caz studiat s-a arătat că, *în cazul barelor de lungimi infinite, dar având secțiuni constante*, parametrii ciocnirii (forța și viteza) se modifică brusc în momentul impactului, dar rămân constanți pe toată lungimea barei.
- De asemenea, pentru fiecare sistem prezentat s-au tratat anumite cazuri particulare, în funcție de raportul dintre impedanțele barelor studiate.
- S-a arătat că atunci când unda de deformație întâlnește anumite secțiuni – numite *suprafețe limită sau frontiere* - în care există o modificare bruscă de diametru sau de material, apar unde reflectate, unde transmise sau suprapuneri de unde și, ca urmare, se modifică parametrii ciocnirii.
- Pentru a ilustra procesul de propagare a undelor, cât și succesiunea temporală a acestora pe suprafețele limită, s-a construit o *diagramă de propagare a undelor (diagrama ondulatorie)*. Pe baza acesteia se pot stabili cu ușurință *sistemele de ecuații pentru calculul parametrilor de ciocnire* (și

care se pot rezolva prin metoda directă, inversă sau semiinversă). De asemenea, se poate determina *timpul de ciocnire*.

- S-a trecut la calculul sistemelor percutante cu ajutorul diagramelor de propagare a undelor, considerându-se *patru situații de ciocnire*:
 - I. Sistem percutant cu două suprafețe limită, format din două bare de lungimi infinite, dintre care una având secțiune constantă și cealaltă fiind prevăzută cu o proeminență de lungime finită;
 - II. Sistem percutant format dintr-o bară de lungime finită și una de lungime infinită, ambele având secțiuni constante;
 - III. Sistem percutant cu trei suprafețe limită, compus din perculator de lungime finită și prevăzut cu o proeminență, și o bară de lungime infinită;
 - IV. Sistem de ciocnire alcătuit din două bare de lungimi finite.
- Toate aceste sisteme de ciocnire au în comun faptul că prezintă cel puțin câte un element de lungime finită. În fiecare caz s-a constatat că după o perioadă de timp (care depinde de lungimea proeminenței sau a barei finite și de viteza de propagare a undelor), iau naștere noi unde pe suprafețele limită ale sistemului percutant. Pentru fiecare astfel de perioadă de timp i , se calculează *parametrii corespunzători ai undelor de ciocnire (respectiv forța N_i și viteza v_i)*. S-au determinat expresiile pentru acești parametri ai ciocnirii, în funcție de numărul perioadei de timp în care apar. Astfel, se pot calcula, în orice moment, forța și viteza punctelor materiale dintr-o anumită secțiune transversală a barei supusă ciocnirii longitudinale.
- S-au realizat, în limbaj MATLAB, programe pentru calculul parametrilor de ciocnire (forță și viteză) în funcție de perioada de timp în care apar aceștia.
- *S-au reprezentat, în formă grafică și numerică, parametrii de ciocnire ai punctelor situate pe suprafețele limită ale sistemului percutant, pentru diferite valori ale vitezei inițiale de ciocnire.*

În funcție de lungimea finită a barelor sau a proeminenței și de viteza de propagare a undei longitudinale, s-a determinat *perioada de contact dintre bare*, adică timpul de ciocnire.

S-a arătat că, în cazul ciocnirii barelor de lungimi finite, timpul de ciocnire depinde de raportul dintre impedanțele barelor și de lungimile barelor. Totodată, timpul de ciocnire coincide cu timpul după care unda reflectată de la capătul îndepărtat al uneia dintre bare (după caz), ajunge la suprafața inițială de contact dintre bare.

În funcție de raportul dintre impedanțele barelor, s-a determinat expresia pentru coeficientul de transmitere a energiei prin ciocnire. Astfel, se pot alege, pentru un anumit sistem de ciocnire, parametrii corespunzători pentru a obține un coeficient maxim de transmitere a energiei la ciocnire (de exemplu, pentru materiale și dimensiuni transversale date, se poate stabili raportul optim dintre lungimile barelor).

4.1. Considerații generale

Până în prezent s-au realizat o serie de cercetări experimentale în domeniul ciocnirilor, cu diferite scopuri, ca de exemplu, stabilirea validității unei anumite teorii sau a unui anumit model propus în vederea determinării comportării materialelor sau analiza unor fenomene. Această categorie include studiile experimentale în legătură cu teoria de contact a lui Hertz, aproximările analitice ale proceselor ondulatorii în solidele elastice și teoriile propagării undei plastice sau vâsco-elastice. În ultimul caz, astfel de experimente au fost foarte utile în demonstrarea aplicabilității limitate sau chiar a invalidității unora dintre studiile propuse.

În continuare vor fi descrise câteva tehnici pentru analiza fenomenului de ciocnire și dispozitivele pentru măsurarea efectelor ciocnirii.

Impactul cu viteze mici poate fi ușor obținut cu ajutorul unui aparat ghilotină în cazul ciocnirii transversale a barelor (Arnold, 1937) [6]. Pe de altă parte, Goldsmith (1960), [56], realizează o serie de experimente prin deplasarea unor corpuri balistice suspendate. Exemple reprezentative care folosesc această tehnică sunt ciocnirea a două sfere sau ciocnirea longitudinală coliniară a două bare (figura 4.1).

Ciocniri cu viteze mari se obțin în mod obișnuit prin lansarea de proiectile cu ajutorul tunurilor pneumatice sau a unor dispozitive special proiectate pentru astfel de viteze, utilizând reacția unui gaz ușor comprimat sau metode electromagnetice de accelerare a unui proiectil.

În general, într-un experiment de ciocnire se urmăresc: determinarea mărimii deplasărilor corpurilor supuse ciocnirii, fenomenele de contact (de exemplu durata ciocnirii) sau undele de tensiune generate în corpuri, ca rezultat al impactului.

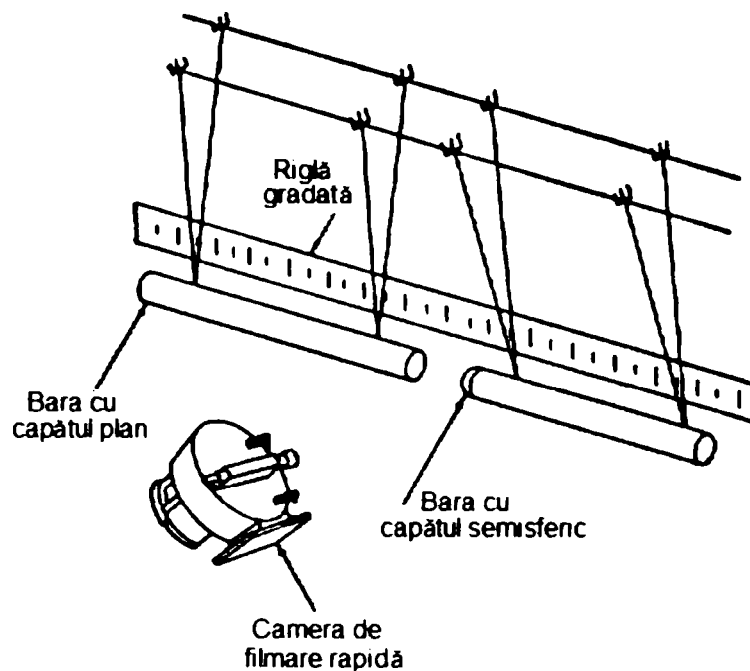


Figura 4.1. Dispozitiv balistic pentru ciocnirea longitudinală a două bare

Primele măsurări ale deplasării corpurilor supuse ciocnirii în timpul testelor experimentale s-au obținut prin observări vizuale ale înălțimii de cădere și întoarcere. Micile deplasări, cum sunt deformațiile transversale ale barei s-au determinat cu ajutorul instrumentelor mecanice cum ar fi extensometrele sau comparatoarele cu cadran. Totuși, inerția și frecarea care apar în aceste dispozitive influențează precizia măsurătorilor. Rezultate satisfăcătoare s-au obținut prin dezvoltarea metodelor electrice, fotoelectrice sau fotografice. Primele două metode presupun închiderea unui circuit electric. Fotografierea completă a evenimentului permite observarea deplasării obiectelor supuse ciocnirii, fără o cunoaștere anterioară a traiectoriilor lor exacte înainte și după impact. Distribuția deformației permanente produse pe suprafața corpurilor poate fi determinată ușor cu ajutorul unei rețele trasate pe suprafețele respective.

Durata contactului se poate măsura cu precizie cu un impuls produs prin închiderea unui circuit electric format din obiectele supuse ciocnirii și o sursă de tensiune.

Observarea undei de tensiune se poate face prin metode electrice, optice sau mecanice.

Cele mai practice dispozitive electrice pentru măsurarea impulsului de

tensiune sunt mărcile tensometrice cu fir rezistiv, traductoarele piezoelectrice și traductoarele capacitive. Semnalele primite de la acestea sunt, de obicei, înregistrate de un osciloscop sau o placă de achiziție a datelor. Timbrele tensometrice au început să fie folosite pentru a măsura deplasările suprafețelor de către Peterson (1953), Campbell (1956), Hauser (1961), etc., [53]. Mărcile tensometrice au dezavantajul că trebuie lipite pe suprafața corpurilor studiate și legea lor intrinsecă necesită amplificarea semnalului rezistiv. Alte dezavantaje includ caracteristica lor de integrator în cazul unei lungimi mari a timbrului, folosirea lor cu restricție la deformațiile elastice sau a celor mai mici deformații plastice ale probei și fidelitatea formei impulsului înregistrat datorită amplificării caracteristicilor și a substanței de impregnare. Timbrul în sine are un excelent răspuns de frecvență. Avantajele folosirii timbrelor tensometrice includ simplitatea operației și posibilitatea amplasării mai multor timbre pentru a înregistra doar o componentă particulară a impulsului. S-au făcut numeroase cercetări pentru a determina caracteristicile dinamice ale mărcilor tensometrice, prin compararea directă a semnalului lor cu răspunsul altor traductoare ([56], [88]).

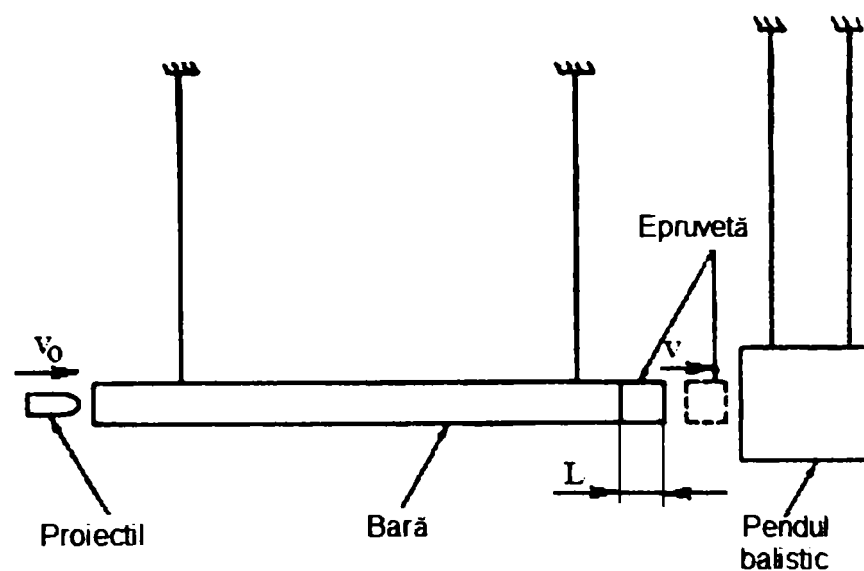
Una dintre cele mai comune metode de măsurare a tensiunii pe cale optică este folosirea tehnicii fotoelastice, în care o bară cu lumină polarizată monocromatică este așezată cu un capăt în direcția unui corp tensionat ([56], [134]).

De asemenea, dependența tensiune – timp a unui impuls elastic generat printr-o ciocnire longitudinală se poate obține prin măsurări mecanice. Hopkinson a inițiat studiile pentru determinarea formei impulsurilor care traversează barele, iar mecanismul - constând într-o bară lungă și o epruvetă cilindrică, de lungime mică, ambele din oțel, prin care se transmite un impuls de forță unui traductor de forță - a devenit cunoscut sub numele de „bară de presiune Hopkinson”. Prin lovirea unui capăt al barei este generată o undă de compresie, de lungime finită. La celălalt capăt al barei este atașată o epruvetă, prinsă de bară doar printr-un strat subțire de vaselină. Ideea lui Hopkinson a fost că unda de compresie care se propagă de-a lungul barei, prin stratul lubrifiant de contact, și prin epruvetă, va fi

reflectată de la capătul îndepărtat ca o undă de întindere. Deoarece stratul de vaselină nu se poate opune unei forțe de întindere apreciabile, epruveta se va desprinde la un moment dat, măsurat cu un pendul balistic. Timpul în care se desfășoară acest proces este timpul necesar undei să parcurgă epruveta dus – întors. Repetând aceste teste pentru epruvete cilindrice de diferite lungimi, s-au trasat o serie de curbe de dependență tensiune – timp, care descriu fenomenul de impact, dar care sunt doar aproximative. Hopkinson a reușit să determine tensiunea maximă și timpul total de ciocnire.

Dispozitivul inițial al lui Hopkinson a fost completat cu încă o bară, obținându-se varianta lui Kolsky, bara de presiune Hopkinson divizată ([85], [53], vezi și paragraful 1.2).

Un astfel de model, în varianta lui Goldsmith [56], este prezentat în figura 4.2.



*Figura 4. 2. Stand experimental pentru bara Hopkinson
(cu sistem de suspendare prin fire)*

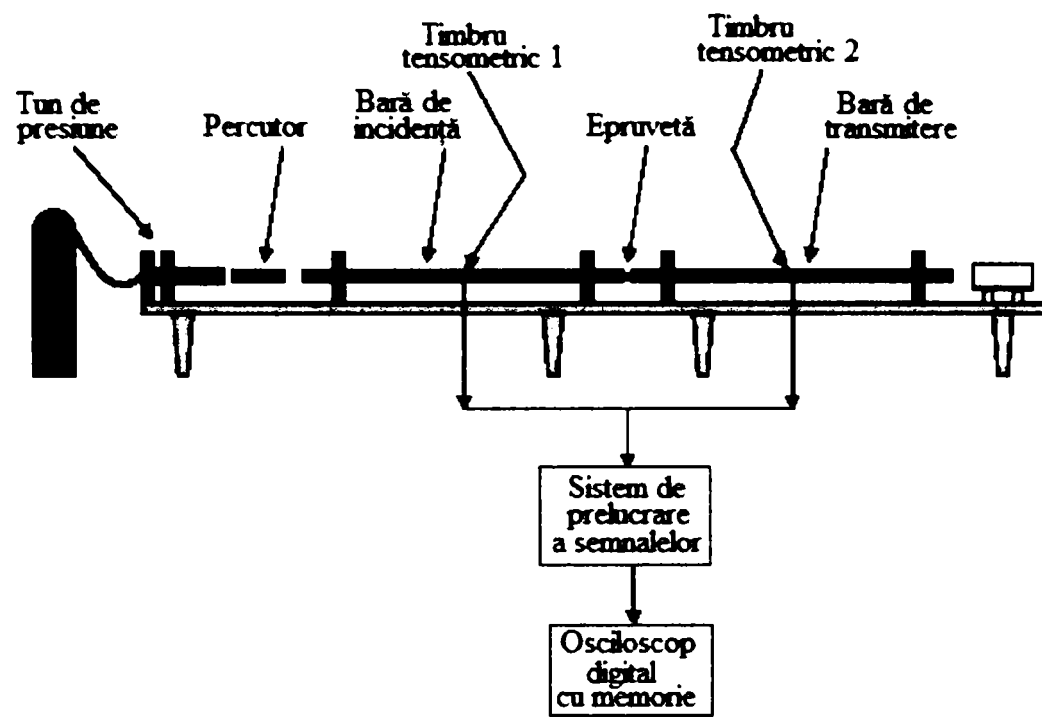
Acesta constă într-o bară cilindrică, suspendată, la care unul din capete servește ca suprafață de ciocnire, iar celălalt capăt este așezat în contact direct cu o bară scurtă (epruvetă), de lungime L . După reflexia de la capătul liber, unda incidentă de compresiune se întoarce ca o undă de întindere și epruveta se va desprinde de bară când tensiunea pe suprafață devine nulă. Viteza epruvetei se

poate determina prin metode fotografice sau cu ajutorul pendulului balistic. Repetarea experimentului pentru diferite lungimi ale epruvetei permite o descriere aproximativă a impulsului de tensiune. Totuși, se vor obține unele distorsiuni față de semnalul inițial, ca urmare a efectelor dispersive în bară, și care pot fi semnificative atunci când lungimea impulsului nu este foarte mare comparativ cu diametrul barei.

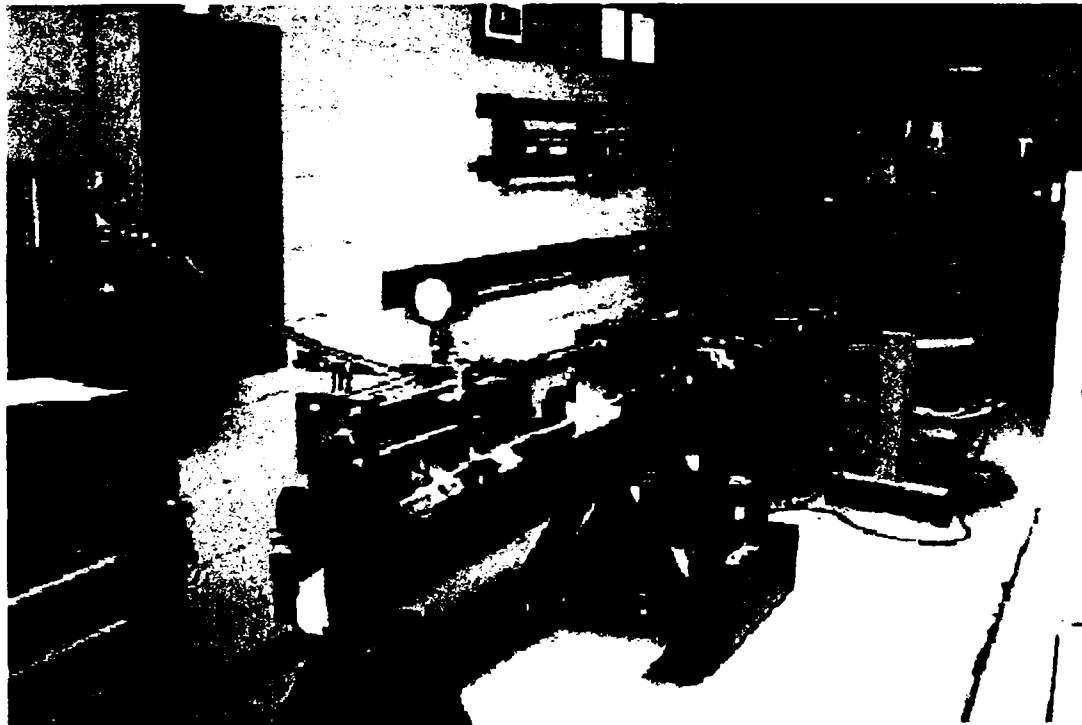
Pe parcurs, o serie de cercetători s-au ocupat de studiul propagării undelor longitudinale ca urmare a ciocnirii barelor, folosind dispozitive de tip Hopkinson din ce în ce mai performante. Cu un astfel de dispozitiv cu bare Hopkinson se pot determina proprietățile materialului pentru valori mari ale deformației. Dispozitivul de măsurare, în varianta lui Kaiser, 1998 [85], este prezentat în figura 4.3 (a – schema de principiu; b – vedere de ansamblu) și este compus din două bare subțiri, ghidate, între care este interpusă o epruvetă de formă cilindrică cu lungime dată. Lovind, cu un percutor, capătul primei bare se generează o undă de compresie, care va traversa bara, către epruvetă. Aici are loc o reflexie a undei incidente, către capătul de contact inițial, dar și o transmitere, prin epruvetă și cea de-a doua bară, producând o deformare plastică a epruvetei. Unda reflectată și cea transmisă sunt proporționale cu valorile deformației și tensiunii din epruvetă, cu ajutorul cărora se pot calcula constantele de material.

Soluția constructivă cu bare ghidate, necesită bare calibrate perfect rectilinii, lagăre de ghidare pretențioase, pentru a se evita contactul între bare și lagăre (care ar duce la disiparea energiei unde prin lagăre)

Prezentarea sumară de mai sus este doar o trecere în revistă a principalelor metode de măsurare a fenomenelor de ciocnire. Trebuie admis faptul că stabilirea unei tehnici corespunzătoare pentru înregistrarea efectelor ciocnirilor este o problemă foarte dificilă. Interpretarea adecvată a rezultatelor experimentale necesită, de asemenea, o înțelegere amănunțită a caracteristicilor, recunoașterea neajunsurilor echipamentului de măsurare și deseori cunoștințe temeinice ale fenomenelor care apar la ciocnire.



a).



b).

*Figura 4.3. Dispozitiv de tip Hopkinson
(variantea cu sistem de ghidare a barelor)*

În teza de doctorat s-a ales pentru standul experimental o variantă în care barele sunt suspendate, prin intermediul unor cabluri elastice, de inele metalice

fixate pe niște suportți. Această soluție prezintă o serie de avantaje față de soluția cu bare ghidate, printre care:

- sistemul de prindere a barelor prin cabluri elastice nu preia din energia undei elastice;
- inelul de fixare a cablurilor pe suportți asigură o și mai bună izolare a sistemului;
- construcția este simplă, fiind adaptată posibilităților existente în Laboratorul de Mecanică, în care s-au efectuat măsurările;
- prin această variantă constructivă se pot experimenta bare de diferite lungimi și secțiuni.

Descrierea standului experimental și a modului în care s-au realizat măsurările sunt prezentate în paragrafele următoare.

4.2. Descrierea standului experimental

Pentru experimentele privind studiul ciocnirii barelor și a propagării undelor longitudinale s-a utilizat standul prezentat în figura 4.4.

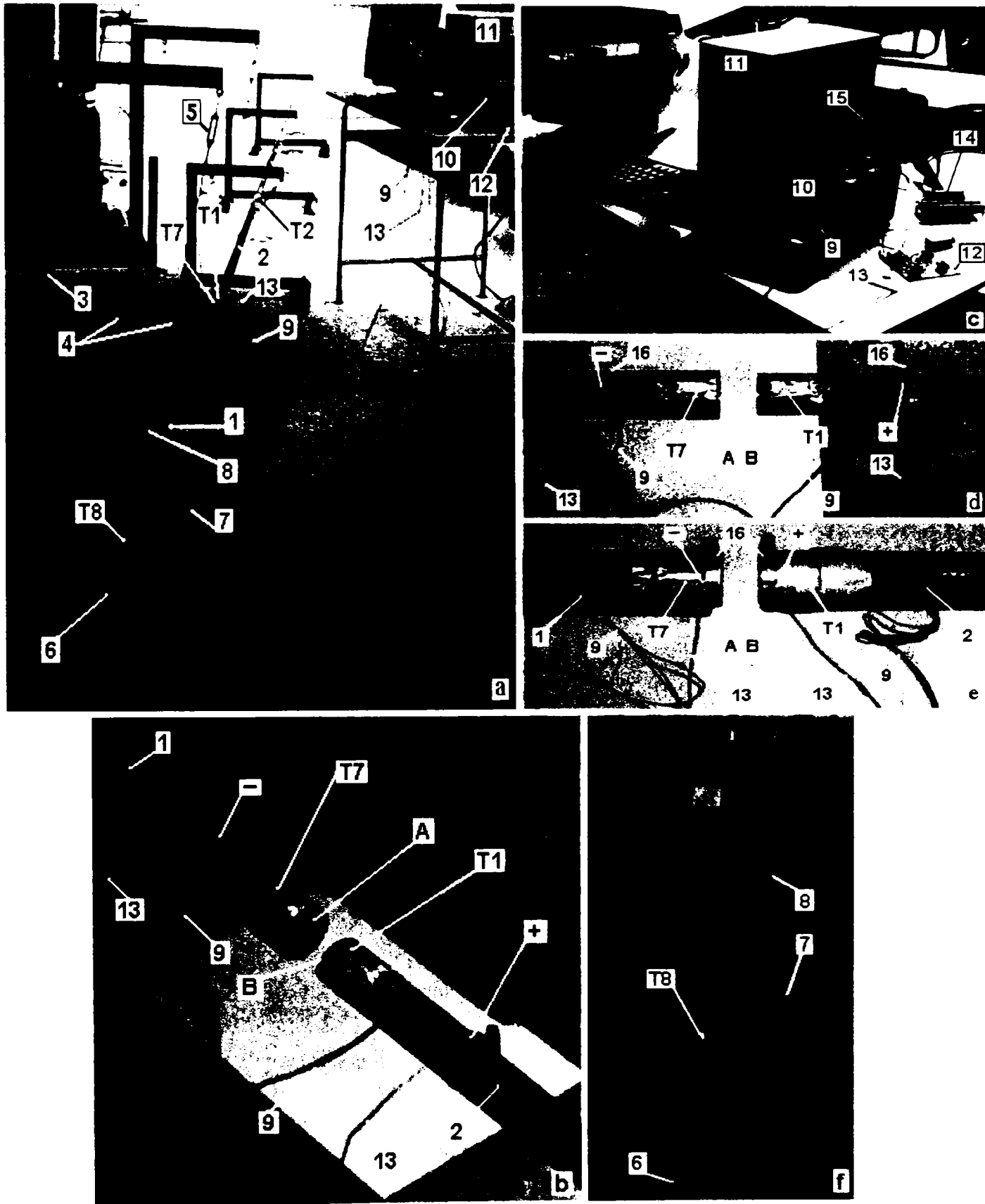


Figura 4.4. Stand experimental pentru studiul propagării undelor longitudinale la ciocnirea barelor

Standul experimental proiectat pentru studiul ciocnirii barelor este de tip pendul balistic și este reprezentat în figura 4.4. Acesta se compune din bara percutor 1 și bara receptoare 2, suspendate de suportii 3 prin intermediul firelor inextensibile 4. Pentru asigurarea orizontalității barelor s-au prevăzut dispozitivele de reglare 5 la fiecare punct de suspendare al barelor. Pe bara percutor au fost lipite timbrele tensometrice T7 și T8, iar pe bara receptoare timbrele T1, T2, T3, T4, T5 și T6, conform cu schița din figura 4.5.

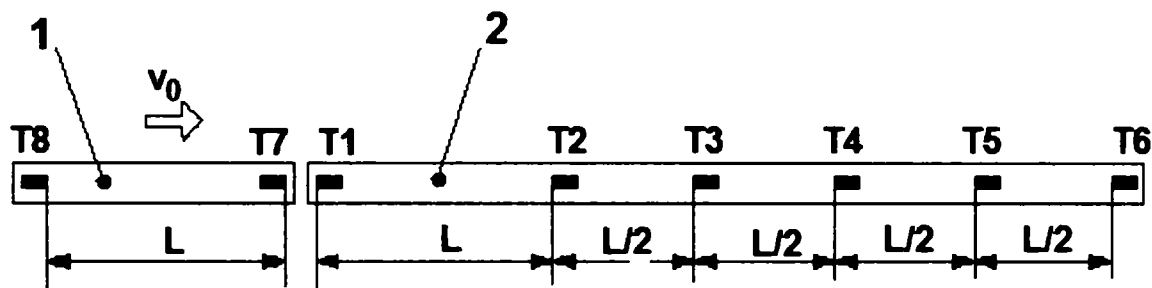


Figura 4.5. Schema amplasării timbrei tensometrice pe bara percutor (1) și pe bara receptoare (2)

Punerea barei percutor în mișcare se realizează prin tragerea și ridicarea acesteia până la o anumită înălțime cu ajutorul coardei 6, după care se eliberează brusc coarda, asigurând mișcarea de tip pendul a barei percutoare. Pentru a asigura aceeași viteză de ciocnire a barelor la toate încercările, standul a fost prevăzut cu indicatorul de înălțime 7 cu scala 8, gradată în centimetri.

Semnalele electrice date de timbrele tensometrice sunt preluate prin cablurile de legătură 9 de puntea tensometrică 10. De la puntea tensometrică semnalul electric (tensiune electrică continuă) este transmis prin cablul special de legătură 15 la blocul conector 14 și achiziționat de placa de achiziții tip PCI 1200 (National Instruments) a sistemului de calcul 11 (Pentium II) și transformat în fișiere de date pe 16 biți.

Pentru sincronizarea înregistrării semnalelor date de timbrele tensometrice, de către placa de achiziții de date, s-a introdus dispozitivul electronic declanșator

12 (trigger), care la rândul lui este conectat la placa de achiziții de date prin intermediul blocului conector 14. Închiderea circuitului electronic se produce în momentul contactului dintre cele două bare, prin intermediul cablurilor de alimentare cu tensiune electrică continuă 13, închidere care declanșează practic achiziția semnalelor de către placa de achiziții de date. Conectarea cablurilor de alimentare 13 la barele 1 (polaritate negativă) și 2 (polaritate pozitivă), s-a realizat prin colierele 16 (figura 4.4.d).

Pentru realizarea ciocnirii pe suprafețele frontale A și B ale barelor, este necesar ca cele două bare să fie aliniat în cele două plane: orizontal și vertical, aliniere efectuată prin metoda petei de contact.

4. 3. Realizarea experimentelor

Standul experimental realizat urmărește construirea modelului de ciocnire prezentat în capitolul 3, paragraful 3.4.4., și care presupune ciocnirea a două bare de lungime finită, cazul I – bara percutor are lungime mai mică și diametru mai mare decât bara receptoare, ca în figura 3.25.a.

Pentru punerea în evidență a efectelor ciocnirii barelor, respectiv deplasarea unde de șoc în barele metalice și a timpului de contact în conformitate cu acest caz, s-a propus efectuarea mai multor măsurări. În acest scop s-au ales două bare cilindrice din oțel OLC 45, de diametre diferite. Diametrul barei percutor 1 este $\phi = 40$ [mm], iar al barei receptoare 2 este $\phi = 35$ [mm]. Pentru simplificarea calculului, achiziția datelor, interpretarea rezultatelor și în conformitate cu modelul teoretic prezentat în figura 3.25.a, paragraful 3.4.4, s-au ales lungimile barelor astfel încât să fie multipli de L (figura 4.5), iar distanța dintre timbre să fie număr întreg, astfel:

- bara percutor are lungimea totală de 2020 [mm], iar timbrele T7 și T8 (figura 4.4.a) s-au lipit la distanța $L=2000$ [mm];

- bara receptoare are lungimea totală de 6020 [mm], iar timbrele tensometrice T1, T2, T3, T4, T5 și T6 s-au lipit la distanțele: $L=2000$ [mm] și $L/2=1000$ [mm], în conformitate cu schema din figura 4.5.

Studiul efectelor ciocnirii barelor s-a efectuat în zona vitezelor mici de ciocnire respectiv $v = 2$ [m/sec]. Pentru realizarea acestei viteze de ciocnire, bara percutor s-a ridicat la înălțimea $h = 0,20$ [m] cu ajutorul coardei 6 (figura 4.4.a), asemănător cu un pendul, după care s-a eliberat brusc coarda. Bara receptoare este astfel poziționată încât intră în contact cu bara percutor în momentul în care bara percutor va avea viteza maximă ($v = 2$ [m/sec]). În momentul ciocnirii, în cele două bare iau naștere tensiuni de compresiune și unde mecanice care se propagă în interiorul materialului. Tensiunile de compresiune vor deforma timbrele tensometrice proporțional cu mărimea acestora, generând semnale sub formă de tensiuni electrice spre puntea tensometrică.

Pentru punerea în evidență a propagării undelor de deformație prin materialele metalice, ca efect al ciocnirii, s-au efectuat o serie de măsurări la fiecare timbru.

Pentru măsurări s-au utilizat două variante de plasare a timbrelor pe bara receptoare, o variantă conform cu schița prezentată în figura 4.6.a, respectiv cu legarea la puntea tensometrică în „semipunte” și a doua variantă cu legarea timbrelor în „punte întregă” pentru a compensa deformațiile transversale, conform cu schema prezentată în figura 4.6.b.

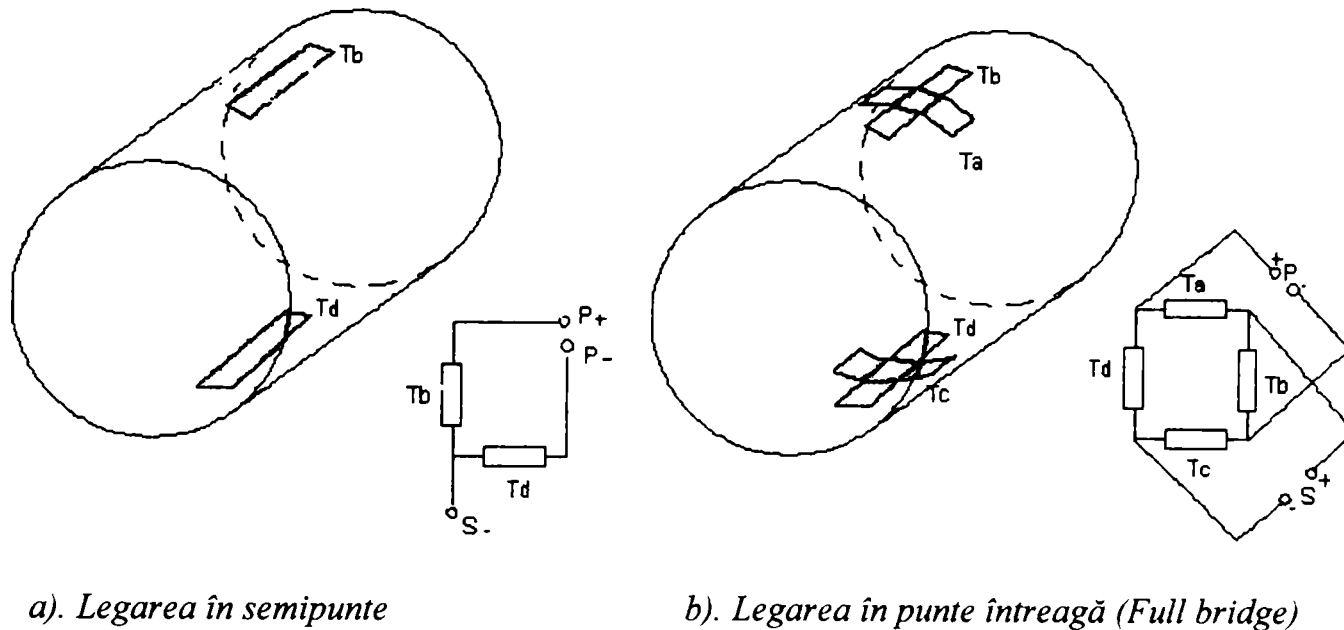


Figura 4.6. Variante de amplasare a timbrelor tensometrice

Al doilea set de măsurări a fost necesar a fi efectuat deoarece, la primul set, datorită neechilibrării complete a punții, s-au înregistrat zgomote provocate de deformațiile transversale, în special la semnalele date de timbrele T3 și T5.

Circuitele de măsurare pentru timbrele tensometrice sunt punțile alimentate în curent continuu sau curent alternativ. În ceea ce privește circuitele în punte – se folosesc punți Wheatstone - de obicei cu două sau patru timbre tensometrice. În cazul de față s-a utilizat o punte Wheatstone (10), (figura 4.4 a, c) tip P_3500 fabricată de firma Vishay Measurements Group cu două timbre tensometrice (pe secțiune) tip M120 (120Ω) fabricate de Mikrotechna Praga, pentru setul întâi de măsurări și cu patru timbre tensometrice (pe secțiune) de același tip, pentru setul al

doilea de măsurări.

La alegerea configurației punții tensometrice, adică la dispunerea timbrelor în punte, trebuie să se țină seama de structura mărimii de măsurat, posibilitatea compensării unor erori prin varianta de conectare diferențială și de creșterea sensibilității punții. Trebuie reținut și faptul că pentru timbrele tensometrice care lucrează în regim dinamic nu este necesară compensarea la variația de temperatură a mediului ambiant [79], iar forța care deformează timbrul este de compresiune, ca efect al transmiterii undei mecanice prin metale. Având în vedere aceste observații s-au plasat timbrele tensometrice diametral opuse pentru compensarea deformațiilor de încovoiere care apar în bară datorită forței de greutate (a suspendării barelor). Acest montaj nu asigură compensarea termică, nefiind necesar acest lucru deoarece solicitările sunt în regim dinamic, dar conduce la creșterea sensibilității punții de două ori [79].

Alt aspect al măsurării cu timbre tensometrice se referă la faptul că în urma montării are loc o tensionare inițială a timbrului, care modifică punctul static de funcționare necesitând o reajustare a valorii de referință a punții, reajustare posibilă prin acționarea butoanelor de balans ale punții.

De asemenea, la măsurarea cu timbre tensometrice trebuie avut în vedere că în valoarea semnalului electric intervin rezistențele interne ale circuitelor, rezistențe care sunt influențate de rezistivitățile conductorilor, modulul de elasticitate al materialelor din care sunt confecționate timbrele tensometrice și a elementului elastic pe care sunt lipite timbrele (bara). Având în vedere aceste constrângeri a trebuit să fie limitată lungimea cablurilor de legătură 9 dintre timbre și punte, iar măsurările s-au efectuat la fiecare timbru în parte.

Pentru achiziția semnalelor de la timbrele tensometrice s-au utilizat metode moderne utilizând tehnicile de calcul și transmisiile digitale de date (calculator și placă de achiziții de date), cu avantaje mari în ceea ce privește precizia, volumul și viteza prelucrărilor ce se pot obține, lucru ce a determinat orientarea spre utilizarea și prelucrarea semnalelor digitale.

Semnalele digitale sunt funcții în care atât argumentul, cât și valoarea

funcției sunt valori discrete ([132], [158]). Discretizarea argumentului funcției sau eșantionarea semnalului reprezintă primul pas în trecerea de la semnalul analogic la semnalul digital.

Discretizarea unui semnal analogic poate fi făcută printr-un set de valori discrete în condițiile unui semnal limitat în bandă, adică al unui semnal care nu are frecvențe superioare unei frecvențe maxime, iar pe baza setului de valori discrete ale funcției se poate reconstitui semnalul continuu.

Avantajul utilizării semnalelor digitale rezidă în special în posibilitatea supunerii lor prelucrării și analizei ([132], [158]), cu ajutorul instrumentelor matematice incluse în programul MATLAB [164] și, de aici, posibilitatea obținerii unor date prelucrate automat într-un timp scurt sau chiar în timp real, lucru deosebit de important în analiza fenomenelor dinamice.

Din acest motiv, utilizarea tehnicilor de calcul la achiziția și prelucrarea semnalelor este de un real folos ([47], [48], [80], [84]).

Pentru achiziția semnalelor rezultate în timpul prelucrărilor, în funcție de parametrul urmărit, se utilizează traductoare consacrate (timbre tensometrice, accelerometre, etc.) și plăci de achiziții de date compatibile cu traductoarele și softul utilizat. Caracteristicile plăcii de achiziții de date sunt foarte importante [163], deoarece de acestea depind posibilitățile de achiziționare a semnalelor și prelucrarea lor ulterioară.

Eroarea de cuantizare a semnalului scade pe măsura creșterii capacității de achiziție a plăcii, de exemplu, la o achiziție de date cu o placă pe 12 bit în unitatea de timp considerată se înregistrează semnal treaptă, în timp ce cu o placă de achiziție pe 24 bit, în aceeași unitate de timp semnalul este de tip sinusoidal, apropiat de cel real.

Având în vedere aceste observații și dotările existente, s-a ales ca tip de traductor timbrele tensometrice, placa de achiziții de date pe 12 bit, tip PCI 1200 (National Instruments) și ca soft pentru prelucrarea datelor achiziționate în standul experimental din figura 4.4. programul MATLAB[®], iar ca sistem de operare la achiziția datelor Windows 95.

Semnalul analog este de tip tensiune analogică, preluat de placa de achiziții de date PCI 1200 prin convertorul analog/digital (A/D) și transformat în semnal digital cuantizat în numere întregi, numere care vor fi înscrise de sistemul de operare (Windows 95) într-un fișier binar pe 16 biți și salvate în memoria calculatorului.

Intervalul de cuantizare a semnalului digital pentru placa de achiziții utilizată este dat de domeniul maxim al tensiunii măsurate (10V) împărțită la numărul maxim de intervale de cuantizare (diviziuni), respectiv rezoluția plăcii. Astfel pentru placa PCI 1200 :

$$10[\text{V}] / 2^{12} \text{ bit} = 10 / 4096 = 0,0024[\text{V}] \quad (4.1)$$

Orice tensiune din domeniul de măsură poate fi aproximată cu un număr întreg care va fi înscris în fișierul binar, astfel:

$$x[\text{V}] / 0,0024 \approx 0,0024 \times n \quad (4.2)$$

unde:

n = număr întreg din intervalul $[0, 4095]$, aproximat prin rotunjirea zecimalelor în plus sau minus până la unitate [1LSB];

x = valoarea tensiunii digitale, în volți.

Întrucât semnalul este temporal, placa trebuie programată pentru o anumită durată în care să achiziționeze semnale. Pentru acest lucru trebuie avut în vedere proveniența tipului de semnal analogic, în cazul de față semnalul provine de la timbrele tensometrice sub formă de tensiuni.

Durata de achiziție mai este determinată de performanțele sistemului de calcul, a softului de prelucrare a datelor utilizat (Matlab, LabView). O durată mare de achiziție înseamnă fișiere binare foarte lungi, lucru care conduce la o durată mare de prelucrare sau chiar blocarea sistemului.

De asemenea, trebuie avut în vedere și durata în care au loc fenomenele studiate, în cazul de față, ciocniri, fenomene care se produc într-un timp foarte scurt, de ordinul a $10^{-3} - 10^{-5}$ secunde.

Având în vedere aceste precizări, durata de achiziție a fost stabilită la $T=6[\text{s}]$, pentru a putea înregistra fenomenele până la amortizarea completă a mișcării barei,

iar numărul de eșantioane care vor fi achiziționate pe secundă va fi egal cu numărul maxim de eșantioane dat de placa de achiziții de date:

$$F_s = 100000 \text{ [eșantioane/secundă]}$$

Semnalele electrice sub formă de tensiuni analogice sunt preluate de la puntea tensometrică prin cupla 15, tip BNC și blocul conector 14 (figura 4.4.c) de placa de achiziții de date și convertite în semnale digitale care vor fi stocate de sistemul de calcul sub formă de fișiere de întregi pe 16 biți.

Schema de principiu a sistemului de achiziție computerizată a datelor de la traductoarele tensometrice, este prezentată în figura 4.7.

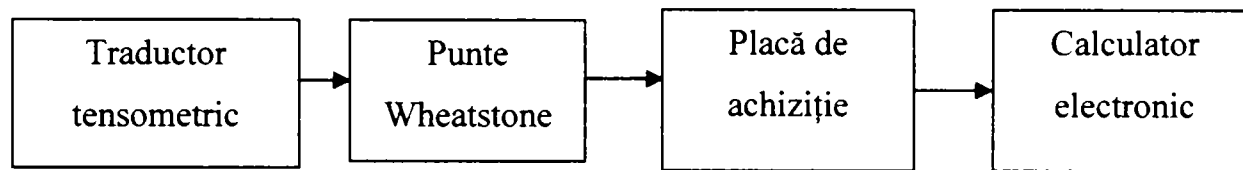


Figura 4.7. Schemă utilizată la achiziția computerizată a datelor

Înscrierea datelor achiziționate în fișiere de către unitatea de calcul se face cu ajutorul unui program de achiziție C++ „*ach_bare.cpp*”, scris în limbajul Visual C++, folosind funcții din biblioteca de funcții a plăcii de achiziție, program prezentat în Anexa 4.1. Schema logică a programului de achiziție este redată în figura 4.8.

Convertorul A/D pe 12 biți al plăcii de achiziție, prin programul „Visual C++”, a fost setat să achiziționeze date cu o eșantionare de $F_s = 100000$ [semnale/sec], pe o durată $T = 6$ [sec].

Alt parametru urmărit în cadrul experimentelor privind ciocnirea barelor a fost timpul de contact al barelor.

Pentru achiziția datelor privitoare la timpul de contact este necesar ca baza de timp pentru achiziție să fie aceeași pentru toate măsurările efectuate. Realizarea acestui deziderat se poate face prin comanda automată a declanșării achiziției datelor de către placa de achiziții prin intercalarea în circuitul de măsurare a unui dispozitiv electronic (trigger) care să declanșeze achiziția datelor în momentul

începerii contactului dintre bare.

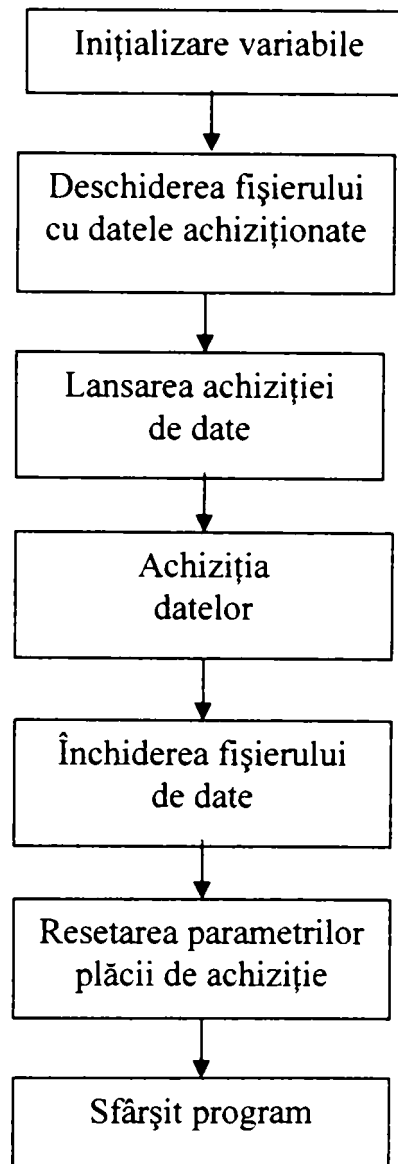


Figura 4.8. Schema logică a programului de achiziție date „ach_bare.cpp”

Declanșatorul (sau „trigger”), la închiderea circuitului (contactul dintre bara percutor și bara receptoare), dă semnalul de comandă de pornire a achiziției datelor de către placa de achiziție de date, astfel ea este comandată să achiziționeze datele întotdeauna în momentul intrării în contact a celor două bare. Semnalul dat de trigger plăcii este sub forma unui impuls de tensiune tip treaptă (figura 4.9) de durată foarte scurtă. Legarea trigger-ului la placa de achiziție s-a făcut prin intermediul pinilor 13 și 38 a blocului de conectare 14 (figura 4.4.c).

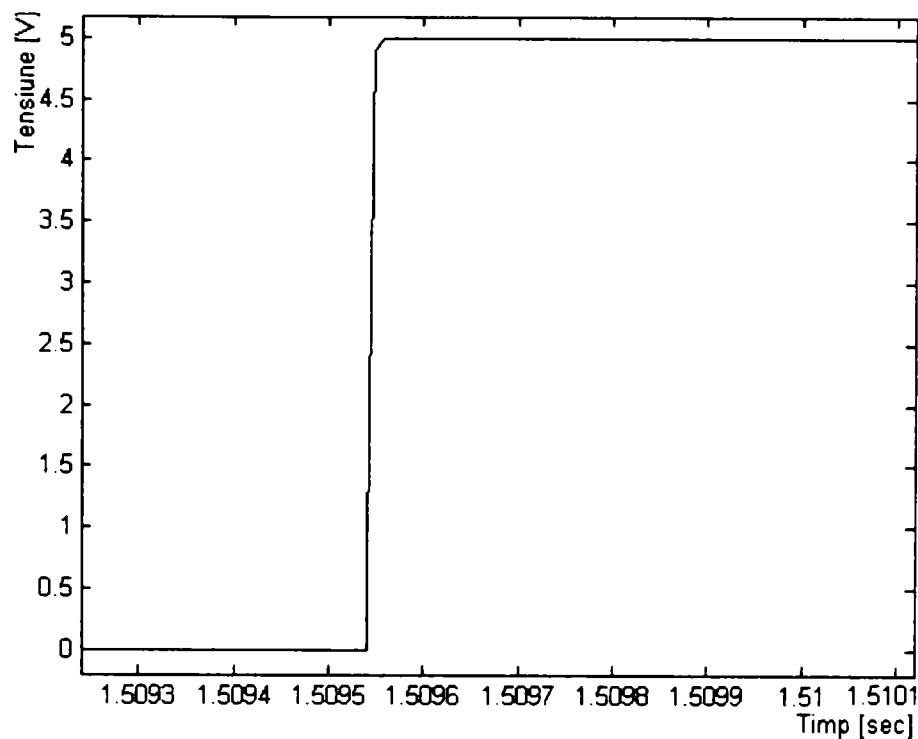


Figura 4.9. Impulsul de comandă dat de trigger

Schema electronică de principiu a declanșatorului este prezentată în figura 4.10.

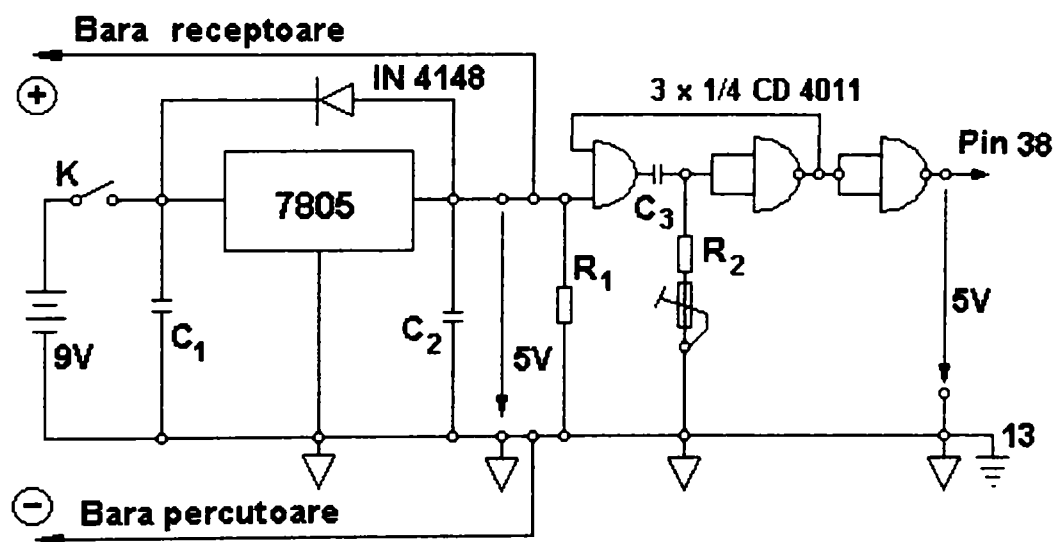


Figura 4.10. Schema electronică de principiu a declanșatorului

În timpul experimentelor s-a verificat dacă cuplarea declanșatorului după poziția timbrelor T1 și T7 (figura 4.4.d.) sau în fața lor (figura 4.4.e) are influență

asupra timpului de declanșare a achiziției semnalelor de către placa de achiziții de date, verificare făcută prin compararea diagramelor semnalelor temporale obținute în urma achiziției de date în condițiile de cuplare amintite mai sus. Din compararea diagramelor rezultă că nu există diferențe, iar baza de timp este aceeași.

După stabilirea modului de achiziție a datelor și reglarea aparaturii, s-a trecut la achiziția de date pentru experimentele propuse și prelucrarea lor.

4.4. Prelucrarea datelor experimentale

Datele experimentale achiziționate se referă la verificarea experimentală a teoriei propagării și reflexiei undelor mecanice în barele metalice libere, ca urmare a ciocnirii lor cu viteze mici și la stabilirea timpului de ciocnire în aceste condiții. În acest sens, cu ajutorul standului proiectat, s-au achiziționat următoarele seturi de măsurări:

- setul I de măsurări și setul II de măsurări s-au realizat pentru observarea și analiza propagării undei prin bara cu lungime de 6 m și ,de asemenea, pentru determinarea timpului de ciocnire.
- setul III de măsurări s-a realizat pentru validarea experimentală a analizei prin metoda aproximativă de calcul a sistemului de ciocnire descris în paragraful 3.4.4 (ciocnirea a două bare de lungime finită, cazul I).

Pentru punerea în evidență a fenomenelor analizate, s-au folosit metode de prelucrare a datelor în domeniul timp, în domeniul frecvențial, cât și în domeniul scară - frecvență.

În funcție de complexitatea semnalului achiziționat sunt cunoscute mai multe metode de prelucrare a semnalului. În cazul ciocnirii corpurilor solide semnalele rezultate sunt de obicei semnale complexe, datorită compunerilor șocurilor cu vibrațiile barei, rezultate în urma șocului, motiv pentru care la analiza semnalelor achiziționate se utilizează, pe lângă analiza în domeniul timp și transformările integrale și metoda analizei „wavelet” („undișoare”).

4.4.1. Transformări integrale

Cea mai utilizată metodă de descompunere a unui semnal complex în semnale mai simple este transformarea Fourier. Elementul esențial al transformării Fourier este faptul că semnalul este descompus într-o serie de sinusoidale. În practică, folosind prelucrarea computerizată a datelor, singurul tip de transformare utilizat este Transformarea Fourier Discretă, întâlnit în majoritatea documentațiilor

sub denumirea de DFT („Discret Fourier Transform”). Prin intermediul DFT semnalul inițial se descompune într-un set de $N/2+1$ cosinusoide și un set de $N/2+1$ sinusoide. Fiecare dintre acestea are o frecvență predefinită, notată cu k , semnificând numărul de perioade ce se regăsesc în cele N valori ale semnalului inițial.

Amplitudinile funcțiilor cosinus sunt notate $\text{Re } \bar{X}[k]$, iar amplitudinile funcțiilor sinus sunt notate $\text{Im } \bar{X}[k]$. Ecuația sintezei Fourier (IDFT) este dată de relația :

$$x[i] = \sum_{k=0}^{N/2} \text{Re } \bar{X}[k] \cos(2\pi ki / N) + \sum_{k=0}^{N/2} \text{Im } \bar{X}[k] \sin(2\pi ki / N) \quad (4.3)$$

în care:

- $x[i]$ reprezintă valoarea i a setului de date de intrare (date achiziționate);
- i este indicele valorilor de intrare ($i = 0 \dots N-1$);
- k reprezintă frecvența cosinusoidei sau sinusoidei curente;
- N este numărul eșantioanelor setului de intrare;
- $\text{Re } \bar{X}[k]$ este amplitudinea cosinusoidei de frecvență k ;
- $\text{Im } \bar{X}[k]$ este amplitudinea sinusoidei de frecvență k .

În practică se utilizează rezultatul calculului transformatei Fourier reprezentat de coeficienții $\text{Re } \bar{X}[k]$ și $\text{Im } \bar{X}[k]$ folosiți la realizarea spectrogramelor.

4.4.2. Analiza "wavelet"

Metoda wavelet este o metodă dezvoltată din analiza Fourier, ce se folosește pentru un domeniu larg de aplicații în prelucrarea semnalelor. Principalele aplicații se referă la compresie și filtrare. O descriere completă a utilizării wavelet este dată în [38].

Analiza Fourier este utilă pentru prelucrarea semnalelor în diferite aplicații, dar această metodă frecvențială prezintă dezavantajul major al pierderii

informațiilor locale (informațiile de timp în cazul semnalelor temporale).

În 1946, Dennis Gabor a adaptat transformarea Fourier, pentru analiza unei ferestre din semnal care se deplasează de-a lungul coordonatei timp, obținând astfel o serie de spectre ce oferă și o aproximare a caracteristicilor locale. Această tehnică a fost denumită „transformată Fourier pe timp scurt” (STFT – „Short Time Fourier Transform”), sau „representare timp-frecvență”. Această metodă stă la baza unor studii de cercetare în scopul segmentării texturilor prin construirea unor filtre Gabor optimale [144]. Problema de bază a acestui tip de transformare este dimensiunea fixă a ferestrei de scanare.

Analiza wavelet reprezintă următorul pas în dezvoltarea metodelor de analiză prin utilizarea unor tehnici ce sunt similare utilizării unei ferestre de dimensiuni variabile. Sinteza dezvoltării analizei wavelet este dată în figura 4.11.

Se poate observa că analiza wavelet utilizează o reprezentare timp - scară în loc de reprezentarea timp-frecvență.

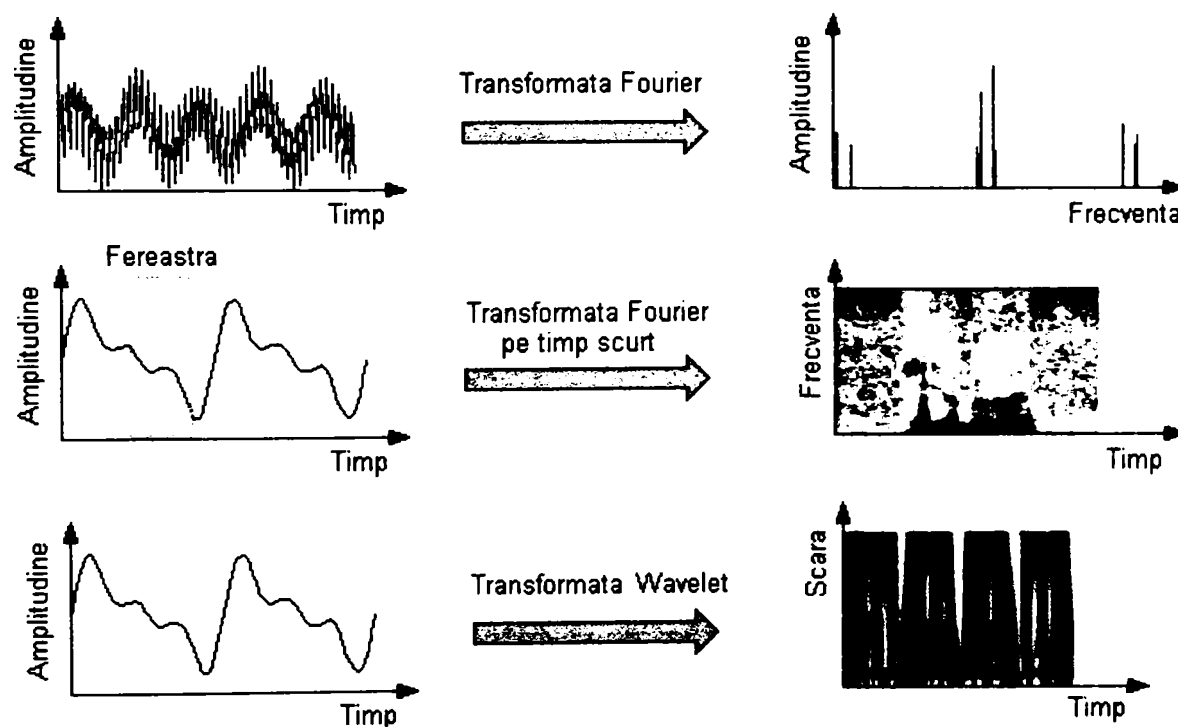


Figura 4.11. Sinteza dezvoltării analizei wavelet

După cum se cunoaște, transformata Fourier descompune un semnal în sinusoidale de diferite frecvențe. În mod similar transformata wavelet descompune

un semnal în așa numita „wavelet de bază” (mother wavelet) și în variante scalate (comprimate sau extinse în domeniul timp) și deplasate (sau defazate în domeniul timp) ale acesteia.

Matematic transformata wavelet se poate defini ca :

$$C(a, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(a, k)dt \quad (4.4)$$

în care:

$C(a, k)$ – coeficienții wavelet;

$f(t)$ – semnalul;

ψ – funcția wavelet;

a – scara;

k – deplasarea în domeniul timp.

Alegerea funcției wavelet $\psi(a, k)$ are o importanță deosebită și depinde de aplicația concretă la care se utilizează. Un exemplu de funcție wavelet (Daubechies) este arătat în figura 4.12.

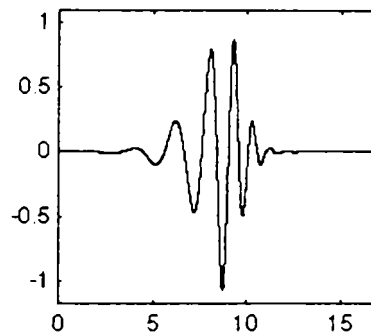


Figura 4.12. Reprezentarea grafică a funcției wavelet Daubechies de ordinul 7

Există o serie de tipuri consacrate de funcții wavelet utilizate în special în aplicații de compresie și filtrare a semnalelor cum ar fi: Haar, Daubechies, Meyer BIOR, RBIO. Proiectarea unor funcții wavelet specializate face în continuare obiectul unor studii, ca de exemplu analiza vibrațiilor și a sunetelor, estimarea și caracterizarea rugozității suprafețelor utilizând funcții wavelet spline biortogonale [156] sau transformări wavelet normalizate în frecvență [82] și analiza suprafețelor tridimensionale [81].

O altă clasă de aplicații se concentrează asupra filtrării semnalelor și a eliminării zgomotelor [160].

Transformarea wavelet continuă (CWT), realizată pentru o variație continuă a lui a și k este dificil de utilizat în practică, din care cauză se utilizează transformata wavelet discretă (DWT) ce se realizează pentru valori ale lui a și k , ce sunt puteri ale lui 2.

DWT se implementează printr-un algoritm foarte eficient (dat de Mallat în 1988) numit „codificator sub-bandă pe două canale” (two-channel subband coder) sau „transformarea wavelet rapidă” (fast wavelet transform).

Algoritmul DWT de bază constă în filtrarea semnalului (figura 4.13.a), ce are ca rezultat obținerea coeficienților wavelet ai „aproximatei” semnalului (cA), corespunzând componentelor de frecvență joasă și ai coeficienților wavelet a „detaliilor” acestuia (cD), corespunzând componentelor de frecvență înaltă. Algoritmul de bază poate fi aplicat succesiv (figura 4.13.b), obținându-se mai multe trepte de aproximare. Se observă că după operația de filtrare se realizează o subeșantionare (se elimină fiecare al doilea coeficient obținut) pentru ca, în final, numărul de coeficienți după transformare să rămână același cu numărul de eșantioane ale semnalului inițial.

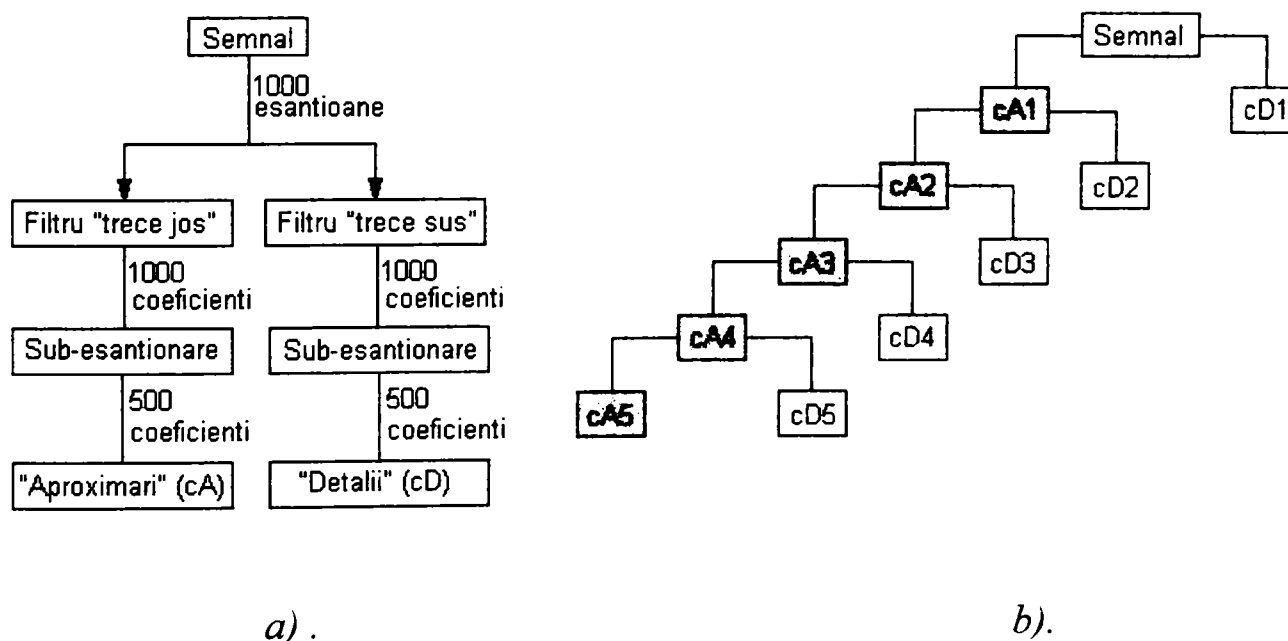


Figura 4.13. Schemele de implementare a transformatei wavelet:
a). Transformata wavelet pe un nivel; b). Transformata wavelet multi-nivel

4.4.3. Analiza experimentală a propagării undei generate

la ciocnirea barelor

În cadrul primului set de experimente realizate cu standul descris în paragrafele anterioare, s-a utilizat un mod de legare a timbrelor tensometrice în semipunte, specificat în figura 4.6.a. S-a măsurat tensiunea generată în timpul ciocnirii barelor pe fiecare timbru în parte, utilizând un singur canal analogic al plăcii de achiziție, corelarea măsurărilor în timp, realizându-se cu ajutorul declanșatorului descris anterior. Pentru achiziția semnalelor s-a utilizat programul „*ach_bare.cpp*” scris în limbajul C++, prezentat în ANEXA 4.1. Programul de achiziție înscrie valorile măsurate într-un fișier de date. Datele s-au prelucrat și afișat grafic cu ajutorul programului „*a1.m*” realizat în limbajul MATLAB (vezi ANEXA 4.2). Pentru prelucrarea datelor s-a utilizat limbajul MATLAB, deoarece acesta posedă o serie de funcții predefinite de prelucrare a semnalelor, ce se pot utiliza pentru analiza fenomenelor studiate (FFT, wavelet). Diagramele semnalelor sunt prezentate în figurile 4.14.- 4.19.

În vederea comparării mai bune a diagramelelor semnalelor de la cele 6 timbre tensometrice, s-a realizat afișarea acestora pe o singură diagramă, cu ajutorul programului „*a6.m*”, prezentat în ANEXA 4.3. Diagrama astfel obținută este prezentată în figura 4.20, iar un detaliu al acestei diagrame este prezentat în figura 4.21.

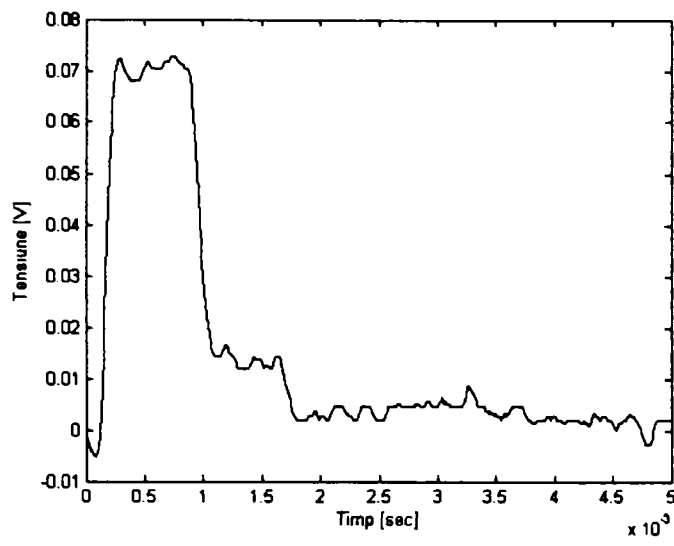


Figura 4.14. Semnal măsurat pe timbrul T1;

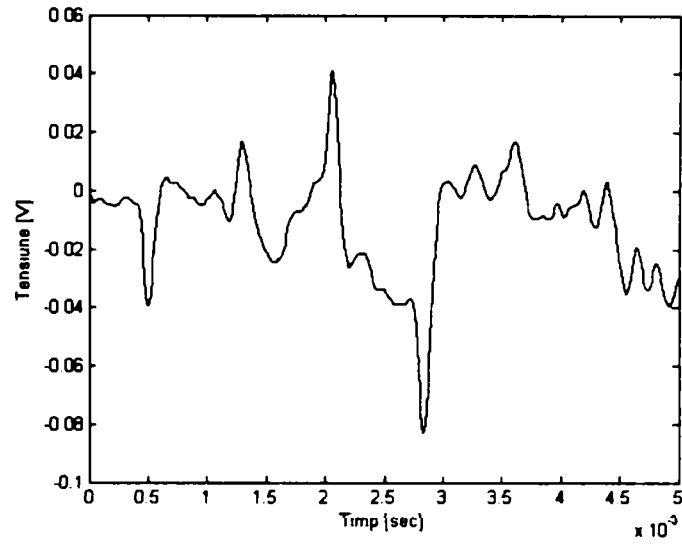


Figura 4.15. Semnal măsurat pe timbrul T2

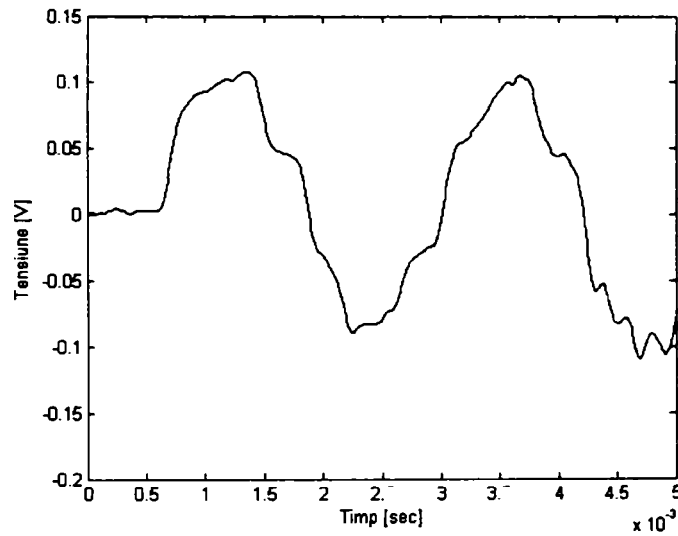


Figura 4.16. Semnal măsurat pe timbrul T3;

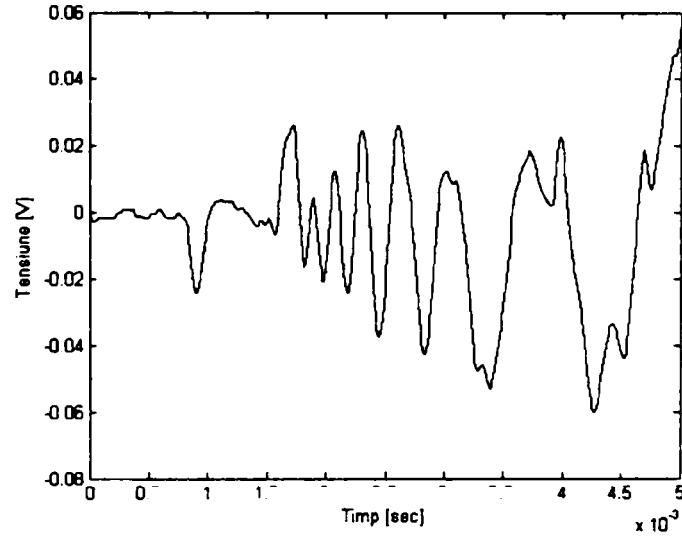


Figura 4.17. Semnal măsurat pe timbrul T4

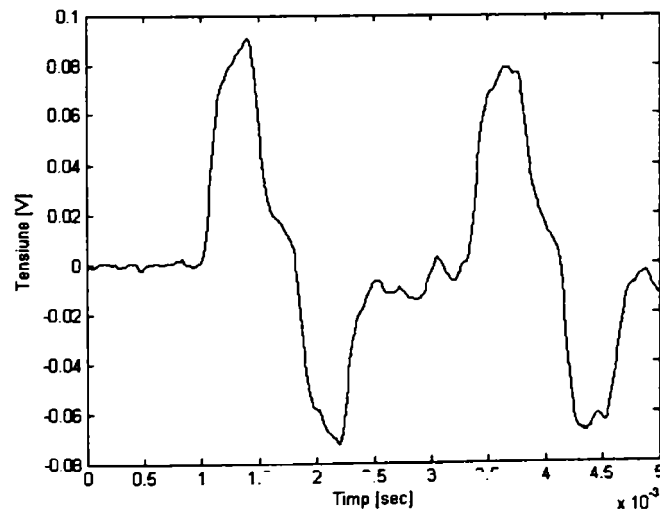


Figura 4.18. Semnal măsurat pe timbrul T5;

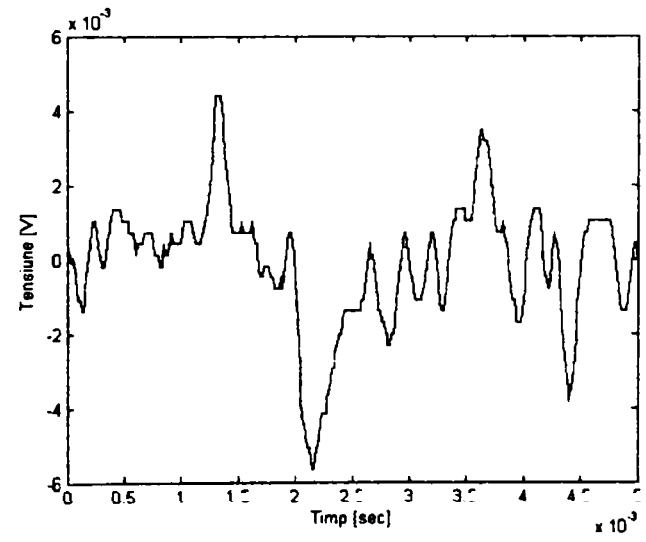


Figura 4.19. Semnal măsurat pe timbrul T6

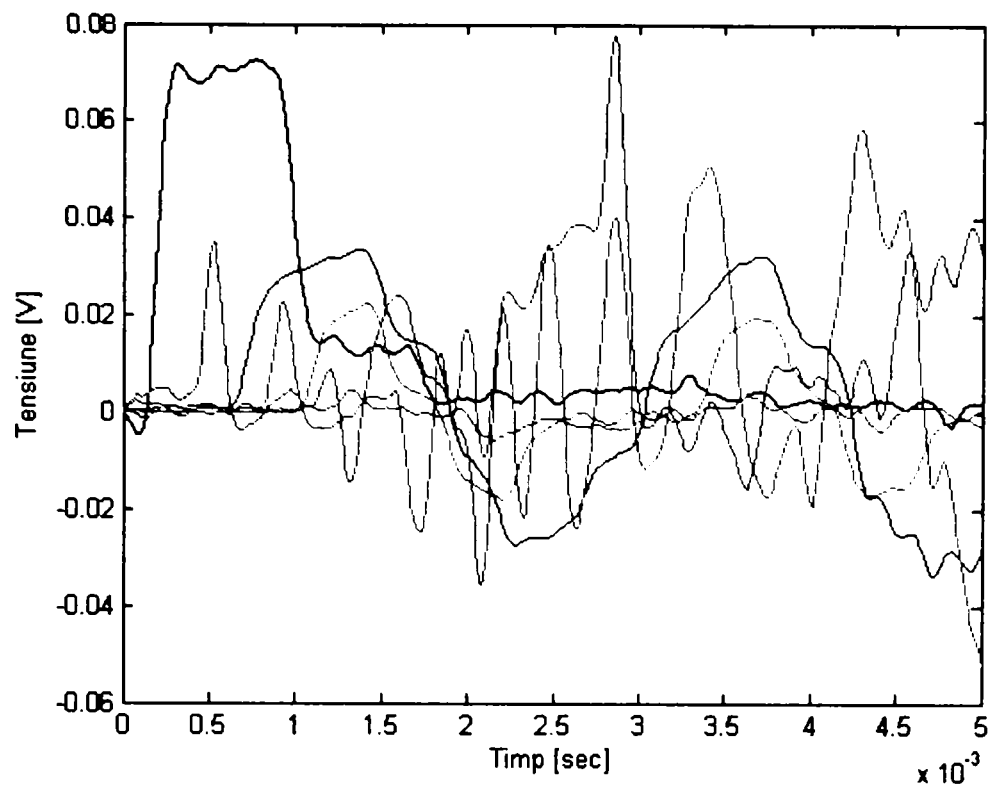


Figura 4. 20. Diagrama cumulată a semnalelor achiziționate de la 6 timbre tensometrice (primul set de măsurări):

T1 –negru ;T2 –roșu; T3 – albastru;T4 – albastru deschis;T5 - mov;T6 - verde

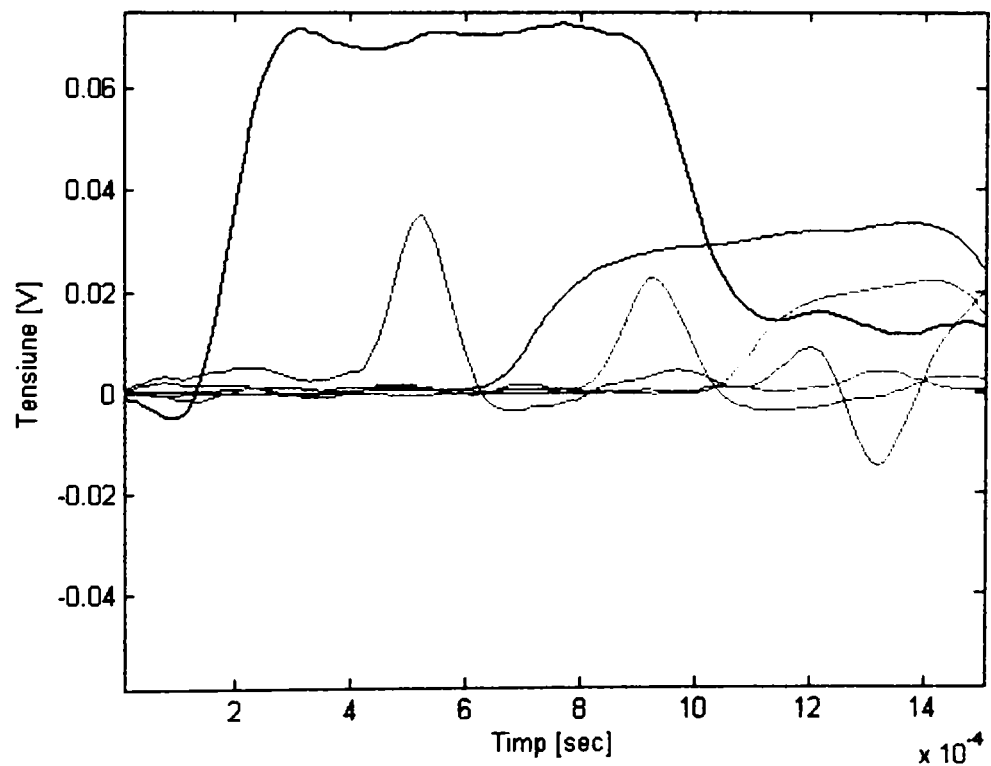


Figura 4.21. Detaliu al diagramei cumulate a semnalelor achiziționate de la 6 timbre tensometrice (primul set de măsurări):

T1 –negru ;T2 –roșu; T3 – albastru;T4 – albastru deschis;T5 - mov;T6 - verde

Din diagramele prezentate se observă că semnalele măsurate respectă modul în care se propagă unda de șoc generată de ciocnirea barelor (decalajul de amplasare al timbrelor arătat în figura 4.5 este în concordanță cu momentul de apariție al undei de șoc pe fiecare timbru) iar amplitudinea semnalului este proporțională cu deformația de compresiune a barei, acesta scăzând pe măsură ce unda avansează în bară.

Totuși, alura semnalelor nu este similară pentru toate timbrele, ceea ce a dus la realizarea celui de-al doilea set de măsurări, de data aceasta utilizând modul de legare în punte prezentat în figura 4.6.b. Un alt motiv pentru care s-a realizat al doilea set de măsurări este acela de a avea siguranța corectitudinii semnalelor obținute. Locul de amplasare al timbrelor pe bară este același ca și în cazul primului set de măsurări. Pentru realizarea diagramelor din cel de-al doilea set s-au utilizat aceleași programe de achiziție și prelucrare ca și pentru primul set de măsurări. În figurile 4.22 - 4.27 sunt prezentate separat diagramele măsurate pe fiecare timbru în parte, iar în figura 4.28 și 4.29 este prezentată diagrama semnalelor cumulate pentru cele 6 timbre.

Din diagramele prezentate în figurile 4.28 și 4.29 se observă că alura semnalelor achiziționate este similară pe toate timbrele, decalajul dintre semnale corespunde cu amplasarea timbrelor pe bară și amplitudinile semnalelor sunt descrescătoare, corespunzător amortizării undei de șoc generate la ciocnire, pe măsură ce aceasta înaintează în materialul barei.

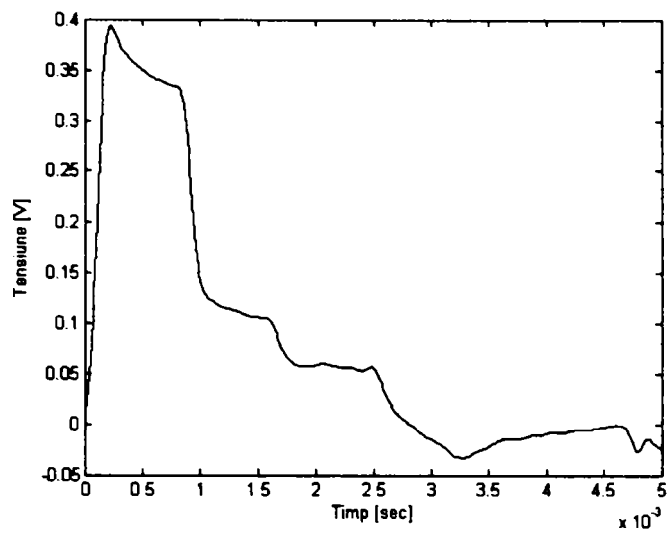


Figura 4.22. Semnal măsurat pe timbrul T1

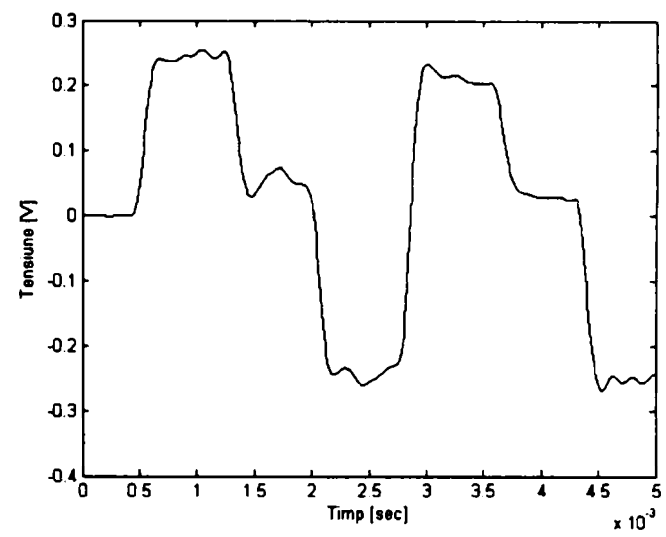


Figura 4.23. Semnal măsurat pe timbrul T2

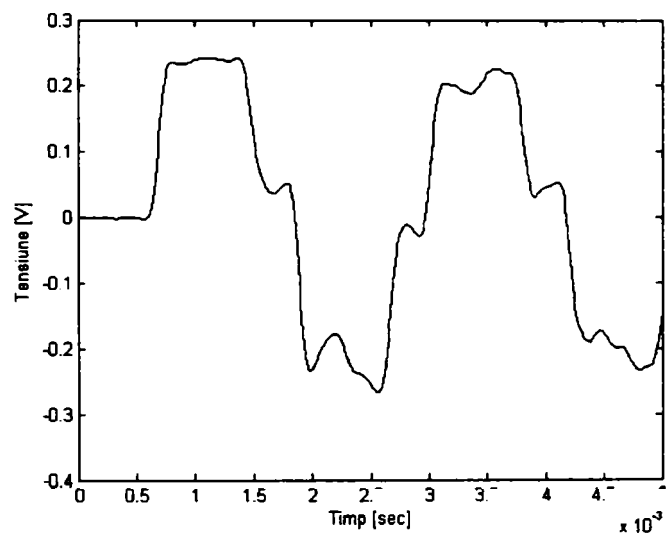


Figura 4.24. Semnal măsurat pe timbrul T3

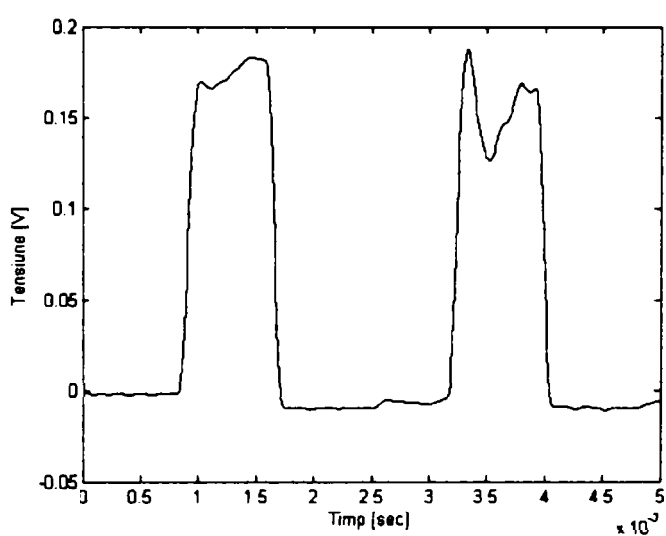


Figura 4.25. Semnal măsurat pe timbrul T4

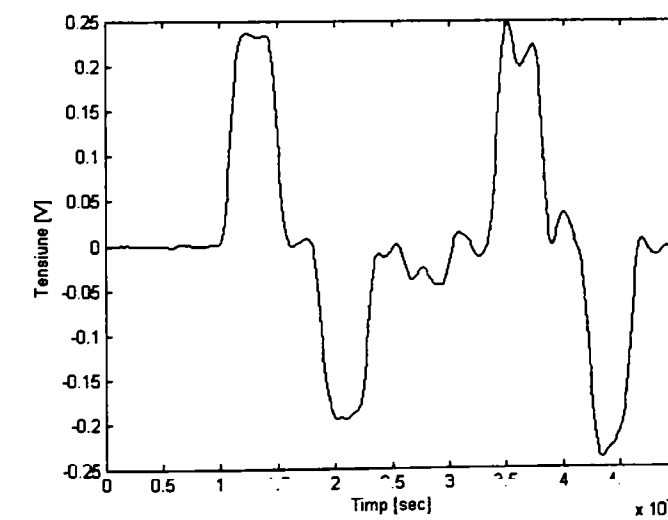


Figura 4.26. Semnal măsurat pe timbrul T5

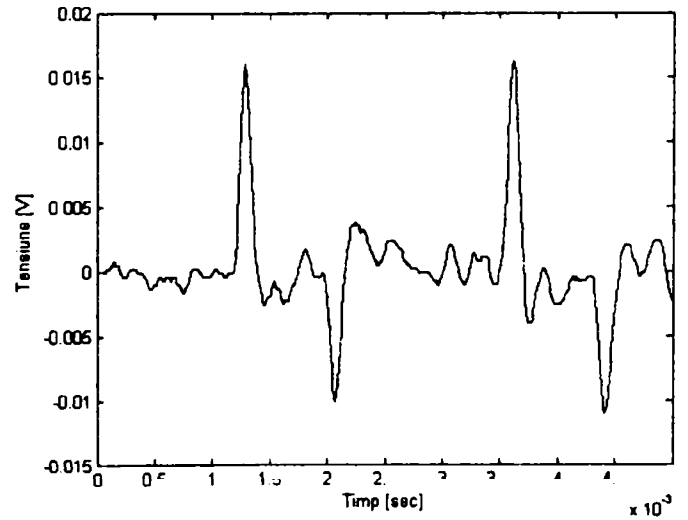


Figura 4.27. Semnal măsurat pe timbrul T6

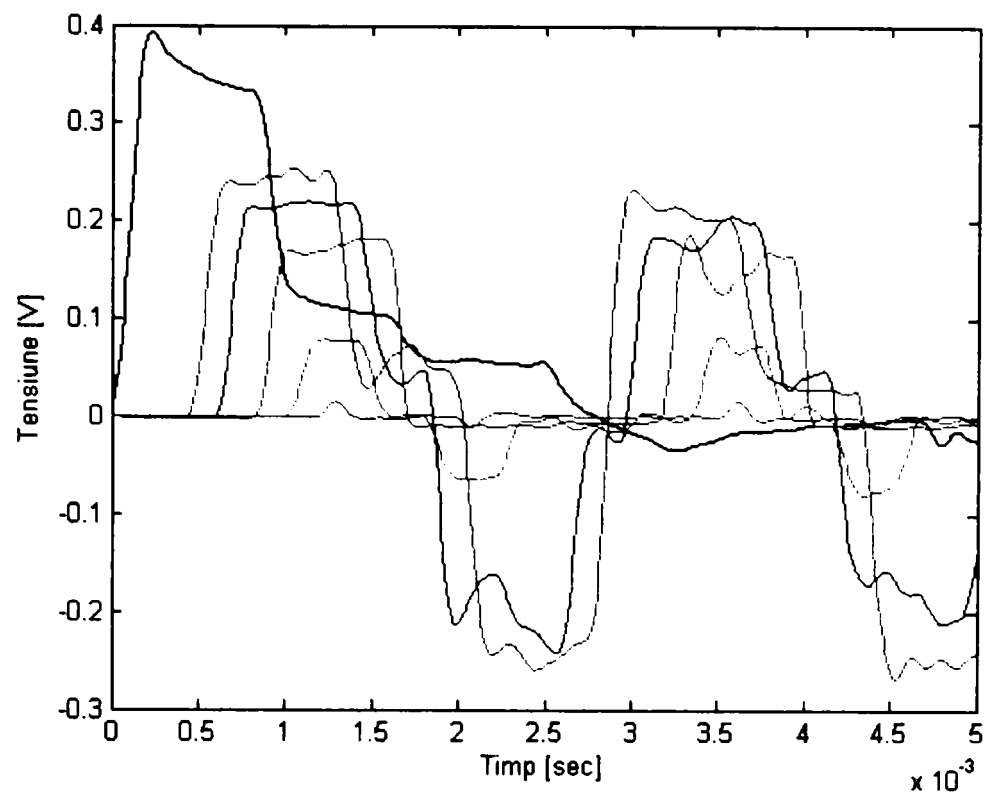


Figura 4. 28. Diagrama cumulată a semnalelor achiziționate de la 6 timbre tensometrice (al doilea set de măsurări):
T1 –negru ;T2 –roșu; T3 – albastru;T4 – albastru deschis;T5 - mov;T6 – verde

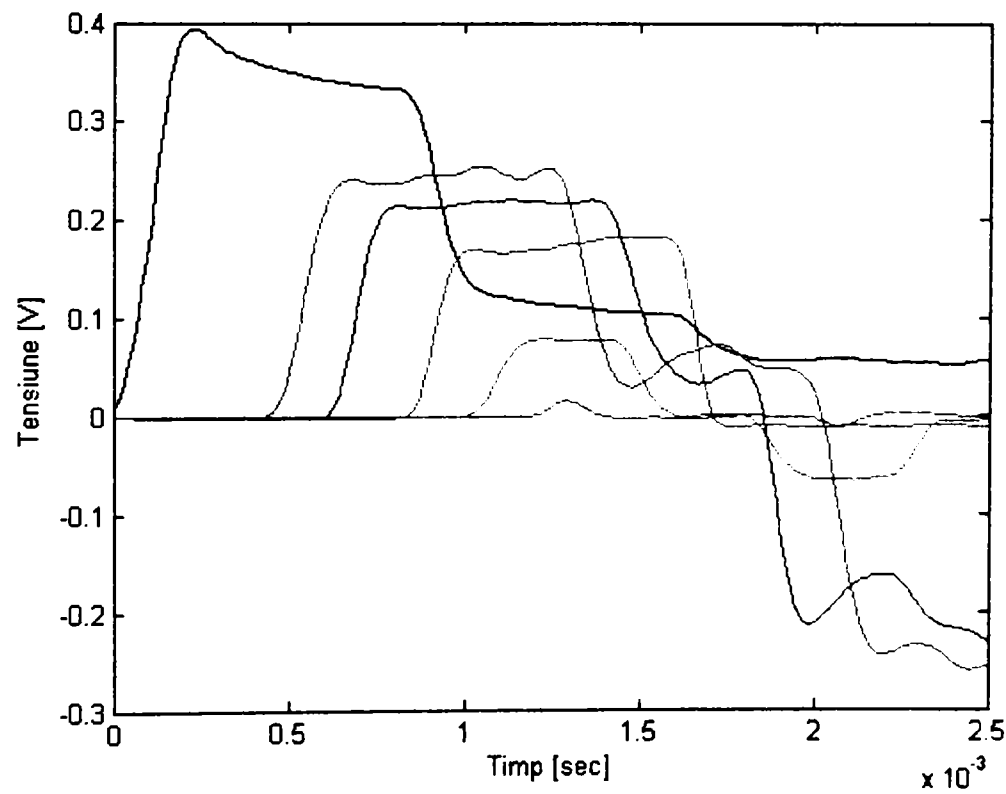


Figura 4. 29. Detaliu al diagramei cumulate a semnalelor achiziționate de la 6 timbre tensometrice (al doilea set de măsurări):
T1 –negru ;T2 –roșu; T3 – albastru;T4 – albastru deschis;T5 - mov;T6 - verde

4.4.4. Măsurarea timpului de ciocnire

Inițial, dispozitivul declanșator s-a utilizat pentru sincronizarea semnalelor achiziționate de la cele 6 timbre plasate de-a lungul barei 2. Pe parcursul experimentărilor s-a observat, însă, că modul de legare a polarității dispozitivului declanșator influențează semnalul măsurat de timbru, deși timbrul este izolat electric de bara prin care trece curentul generat de tensiunea dispozitivului declanșator. Influențarea electrică a timbrului tensometric se explică prin încărcarea acestuia în mod similar unui condensator. Influența declanșatorului se observă atunci când contactul declanșatorului este legat după timbrul tensometric (figura 4.4.d), și polaritatea pozitivă a declanșatorului este legată pe bara pe care este amplasat timbrul de la care se achiziționează semnalul, iar la legarea inversă (figura 4.4.e) această influență dispăre. În figura 4.30 sunt prezentate două diagrame în care această influență apare în mod evident.

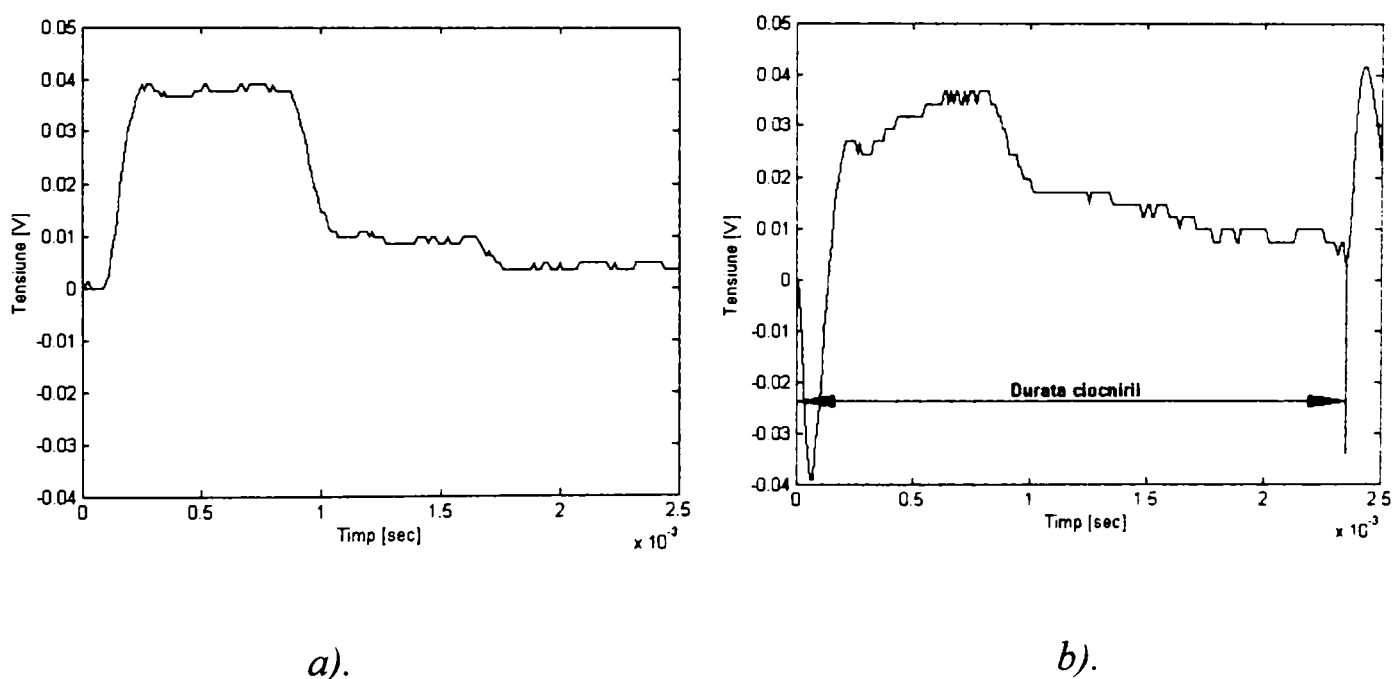


Figura 4.30. Influența declanșatorului asupra semnalului achiziționat de la timbrul tensometric T1:

- a) masa declanșatorului este legată pe bara pe care este amplasat timbrul;*
- b) polaritatea pozitivă a declanșatorului este legată pe bara pe care este amplasat timbrul*

Cele două vârfuri de semnal ce apar pe diagrama din figura 4.30.b semnifică momentele de început, respectiv de sfârșit ale contactului dintre bare, iar intervalul dintre acestea este chiar durata contactului dintre bare în urma ciocnirii.

Durata ciocnirii astfel măsurată, $t \cong 2,35ms$ (vezi figura 4.30.b) este în concordanță cu durata calculată luând în considerare viteza de propagare a undei prin oțel ($c \cong 5188m/s$). Timpul de ciocnire calculat pentru sistemul percutant prezentat în paragraful 3.4.4, Cazul I, este $t = T_2 = 2l_2 / c_2 = 2,313ms$.

De menționat că în toate celelalte măsurări s-a lucrat cu masa declanșatorului legată pe bara pe care este amplasat timbrul de la care se achiziționează semnalul, tocmai pentru ca acest semnal să nu fie influențat de tensiunea declanșatorului.

4.4.5. Analiza undelor reflectate

Punerea în evidență a undelor reflectate este importantă pentru validarea experimentală a analizei prin metoda aproximativă de calcul a sistemului de ciocnire descris în capitolul 3. Experimentările au fost realizate pentru cazul ciocnirii a două bare de lungime finită (cazul I, paragraful 3.4.4). Bara percutoare (1) are un diametru mai mare și o lungime „L” de 3 ori mai mică decât bara receptoare (2). Diagrama corespunzătoare acestui caz este prezentată în figura 3.25. Timbrele tensometrice au fost legate în punte întreagă, similar cu setul II de măsurări descris anterior.

4.4.5.1. Analiza undelor reflectate de la capătul barei percutoare, măsurate pe timbrul T1, amplasat pe bara receptoare

Semnalul măsurat pe primul timbru al barei receptoare (T1, figura 4.5) prezintă variații de amplitudine ce pot fi justificate prin receptarea de către timbru a undei reflectate de pe capătul liber al barei percutoare. Acest fenomen se poate observa pe diagrama comparativă arătată în figura 4.31.

În figura 4.31.a. se prezintă diagrama de ciocnire teoretică (similară cu cea din figura 3.25, paragraful 3.4.4) iar în figura 4.31.b este prezentată diagrama semnalului măsurat pe timbrul T1.

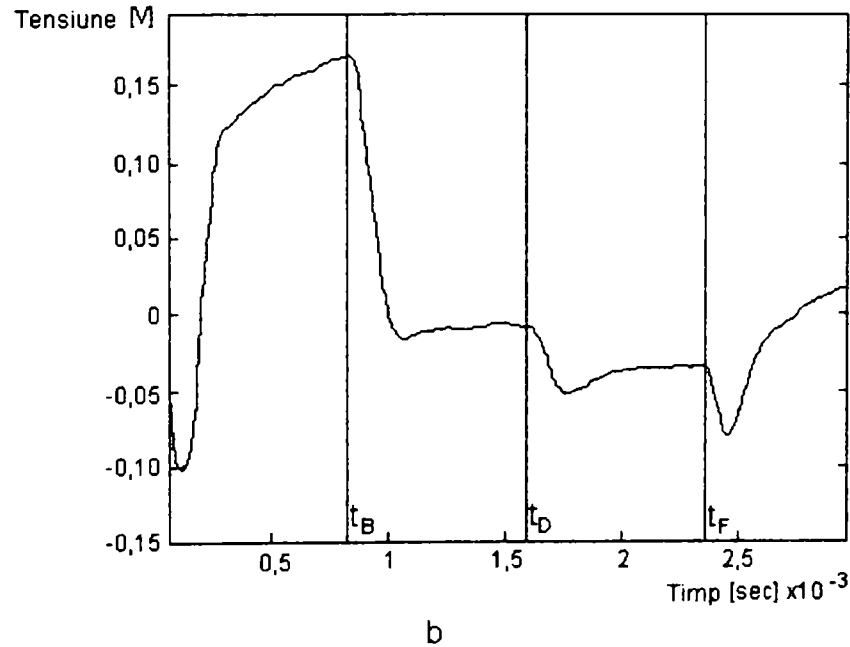
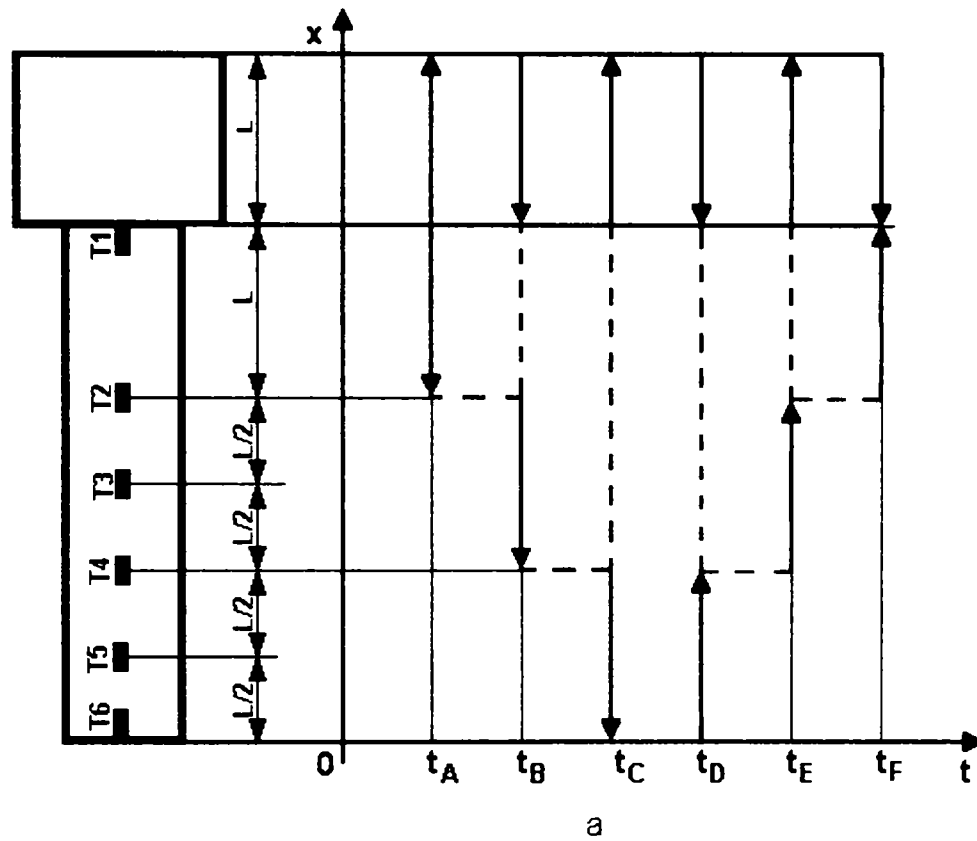


Figura 4.31. Diagrame comparative pentru punerea în evidență a undelor reflectate

a). Diagramă obținută prin calcul; b). Diagramă obținută prin măsurare

Modificările de amplitudine ale semnalului măsurat sunt în concordanță cu apariția undei reflectate de la bara percutoare (punctele t_B , t_D , t_F). Valorile calculate pentru momentele în care undele reflectate de la bara percutoare ating suprafața de ciocnire sunt:

$$t_B = T_1 = 2l_1 / c_1 = 0,771ms$$

$$t_D = 2 \cdot T_1 = 1,542ms$$

$$t_F = 3 \cdot T_1 = 2,313ms$$

În punctele t_B și t_D se observă pe diagrama din figura 4.31.b o scădere a amplitudinii semnalului, ceea ce corespunde cu momentele în care prima și a doua undă reflectată de la capătul liber al barei percutoare ating suprafața de ciocnire (vezi figura 4.31.a). Modificarea amplitudinii semnalului în punctul t_F corespunde cu apariția simultană pe suprafața de ciocnire a celei de-a treia unde reflectate de la bara percutoare cât și a undei reflectate de la bara receptoare. De asemenea, coincide și cu sfârșitul perioadei de contact dintre bare. Durata ciocnirii astfel rezultată, prin experiment, corespunde cu durata ciocnirii obținută prin calcul, prin metoda descrisă în paragraful 3.4.4.

4.4.5.2. Analiza undei reflectate de la capătul barei receptoare, măsurată pe timbrul T1

Unda reflectată de la capătul liber al barei receptoare este dificil de pus în evidență, datorită lungimii mari a barei, lungime pe care această undă se amortizează semnificativ. În afară de amortizare, intervin o serie de efecte (reflexii laterale, vibrații de încovoiere a barei), ce diminuează semnificativ posibilitatea observării undei reflectate.

Pentru observarea și analiza undei reflectate s-au realizat două seturi a câte 5 măsurări. În primul set s-a măsurat semnalul de la timbrul T1 la o ciocnire realizată în condițiile descrise în paragrafele anterioare. Al doilea set de măsurări s-a realizat în aceleași condiții, singura diferență fiind aplicarea pe capătul liber al barei

receptoare a unui strat de vaselină. Acest strat de material vâscos preia o parte din energia undei reflectate, semnalul obținut în acest caz trebuind să fie amortizat într-o oarecare măsură. S-a realizat media celor 5 semnale neamortizate (fără aplicarea stratului de vaselină – ms_{fa}) și media celor 5 semnale amortizate (cu aplicarea stratului de vaselină – ms_a). Diagramele celor două medii sunt prezentate în figura 4.32.

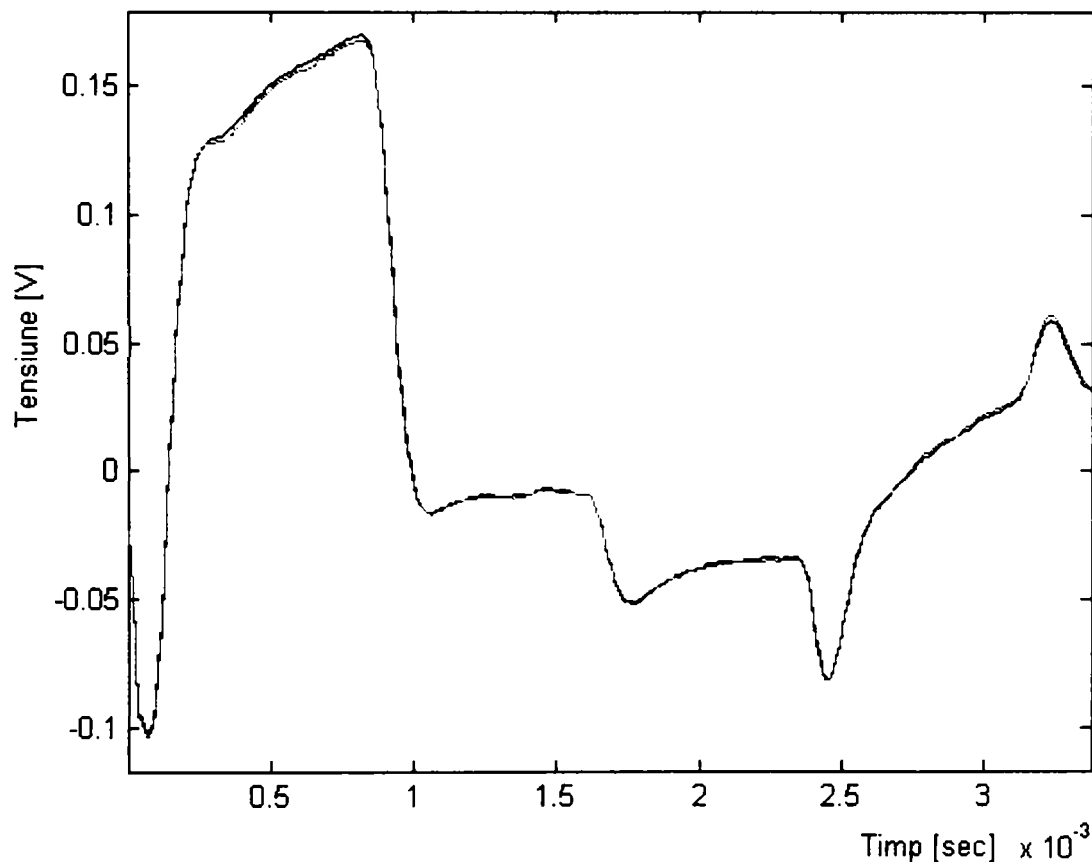


Figura 4.32. Diagrama mediilor semnalelor neamortizate (negru) și amortizate (roșu)

Diferența dintre cele două semnale ar trebui să fi observabilă la momentul $t = 2,313 \times 10^{-3}$ [sec], moment în care are loc (conform calculelor cât și măsurărilor descrise în paragrafele anterioare), atât desprinderea barelor, cât și revenirea undei reflectate în secțiunea în care este amplasat timbrul T1. Datorită amortizării foarte mici introduse de stratul de vaselină această diferență nu poate fi observată pe diagrama din figura 4.32.

Din această cauză, s-a realizat un program de analiză în domeniul frecvențial „*a8_med_ift_filt.m*”, în limbajul MATLAB, program redat în ANEXA 4.4.

Acest program („*a8_med_ift_filt.m*”) calculează și afișează spectrul de frecvență. Programul dă posibilitatea filtrării semnalului prin eliminarea unor intervale de frecvențe (nesemnificative din punctul de vedere al fenomenului studiat) și apoi transformarea inversă din domeniul frecvențial în domeniul timp. În acest fel se pot elimina și unele zgomote, ca de exemplu componenta frecvențială de 50 Hz, indusă de zgomotele de rețea (figura 4.33).

În figura 4.34 s-au reprezentat spectrele de frecvență ale semnalelor ms_{fa} (negru) și $-ms_a$ (roșu).

Pe diagrama din figura 4.34 există trei domenii în care apar diferențe semnificative între cele două tipuri de semnale. În domeniul A se observă un decalaj de fază, iar în zonele B și C se observă o diferență de amplitudine semnificativă.

Păstrând aceste domenii de frecvență și eliminând celelalte domenii în care nu se observă diferențe și efectuându-se transformarea Fourier inversă se obține diagrama prezentată în figura 4.35, respectiv în detaliu în figura 4.36, în care cu roșu s-a reprezentat semnalul amortizat (sm_a), cu negru s-a reprezentat semnalul neamortizat (sm_{fa}), iar cu albastru (dif_{sm}) s-a reprezentat semnalul temporal obținut după transformarea inversă Fourier, diferența dintre primele două.

În diagramele din figurile 4.35 și 4.36 se observă o variație pronunțată a diferenței dintre cele două semnale (punctul A1), dar asemenea variații se pot observa și în alte domenii de timp în care nu este estimată apariția undei reflectate de exemplu în domeniul de la 0 la 1×10^{-3} secunde. În acest caz se observă limitarea transformării Fourier, adică faptul că ea este utilă pentru filtrarea semnalelor, dar prezintă dezavantajul major al pierderii informațiilor despre localizarea în timp a fenomenelor.

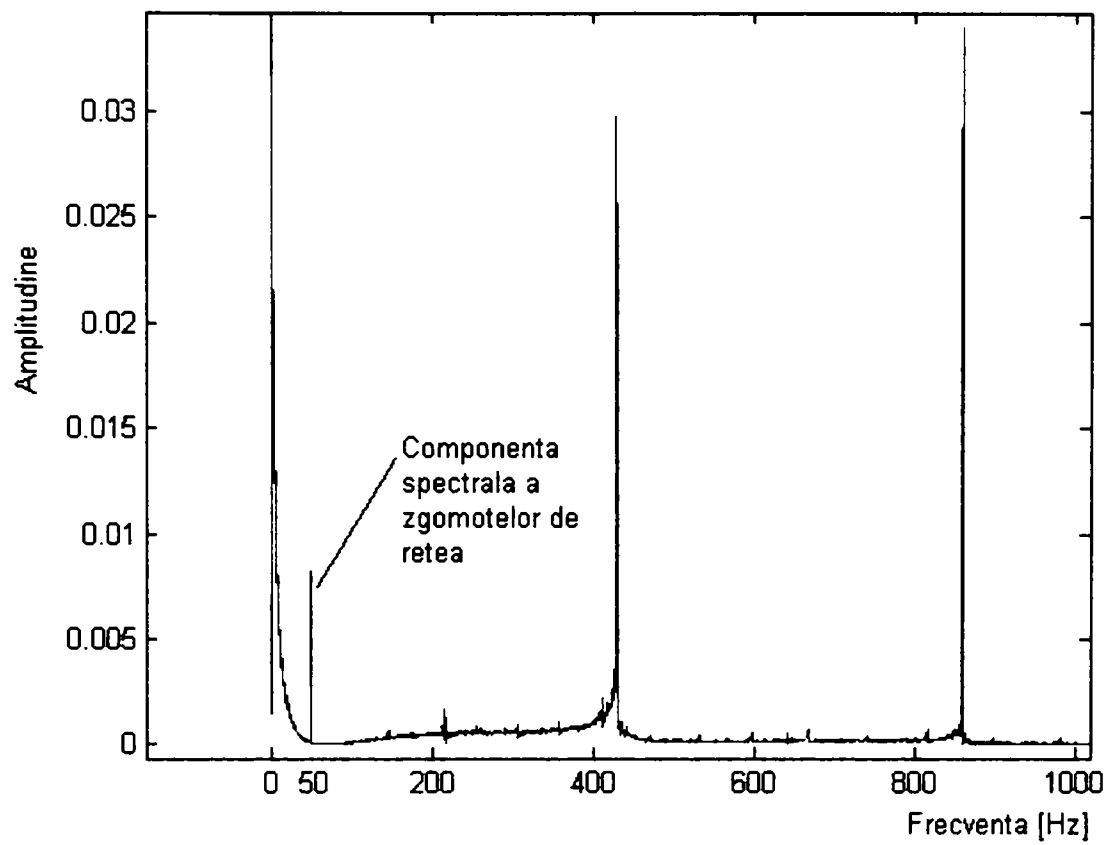


Figura 4.33. Diagrama spectrală a semnalului pentru timbrul T1 (detaliu)

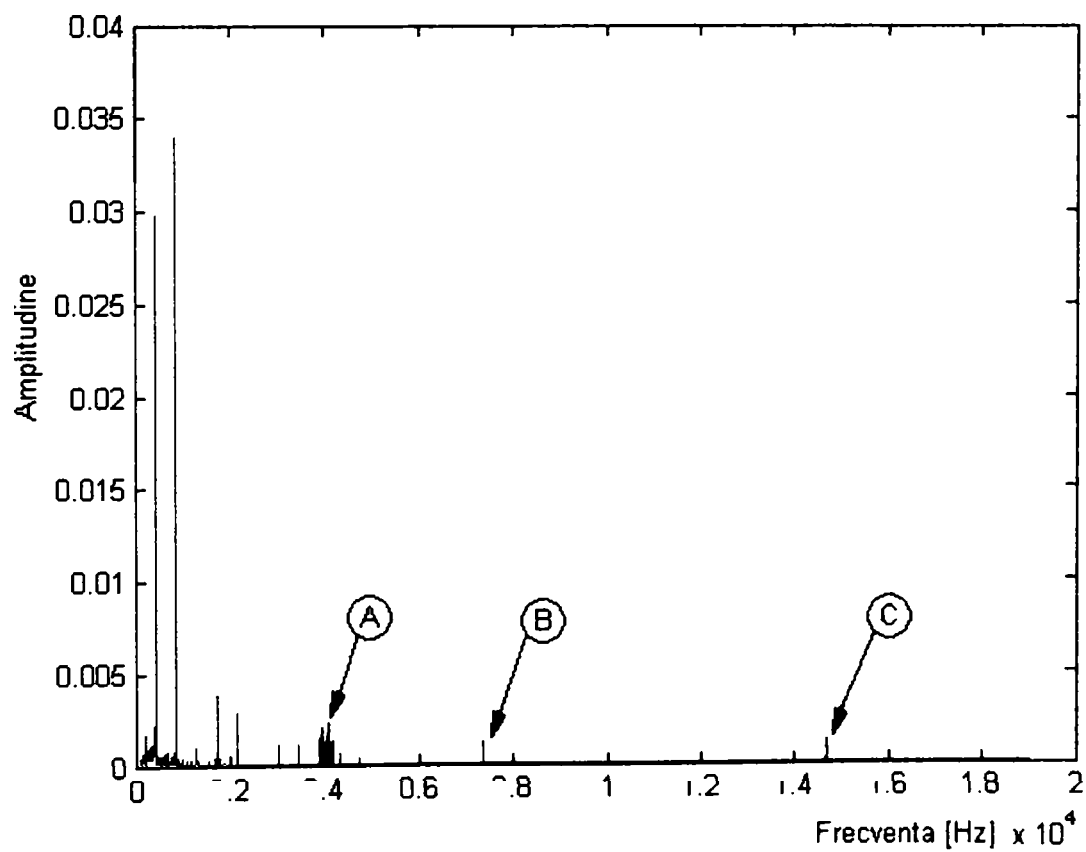


Figura 4.34. Diagrama spectrală a semnalelor cu amortizare (roșu) și fără amortizare (negru) pentru timbrul T1.

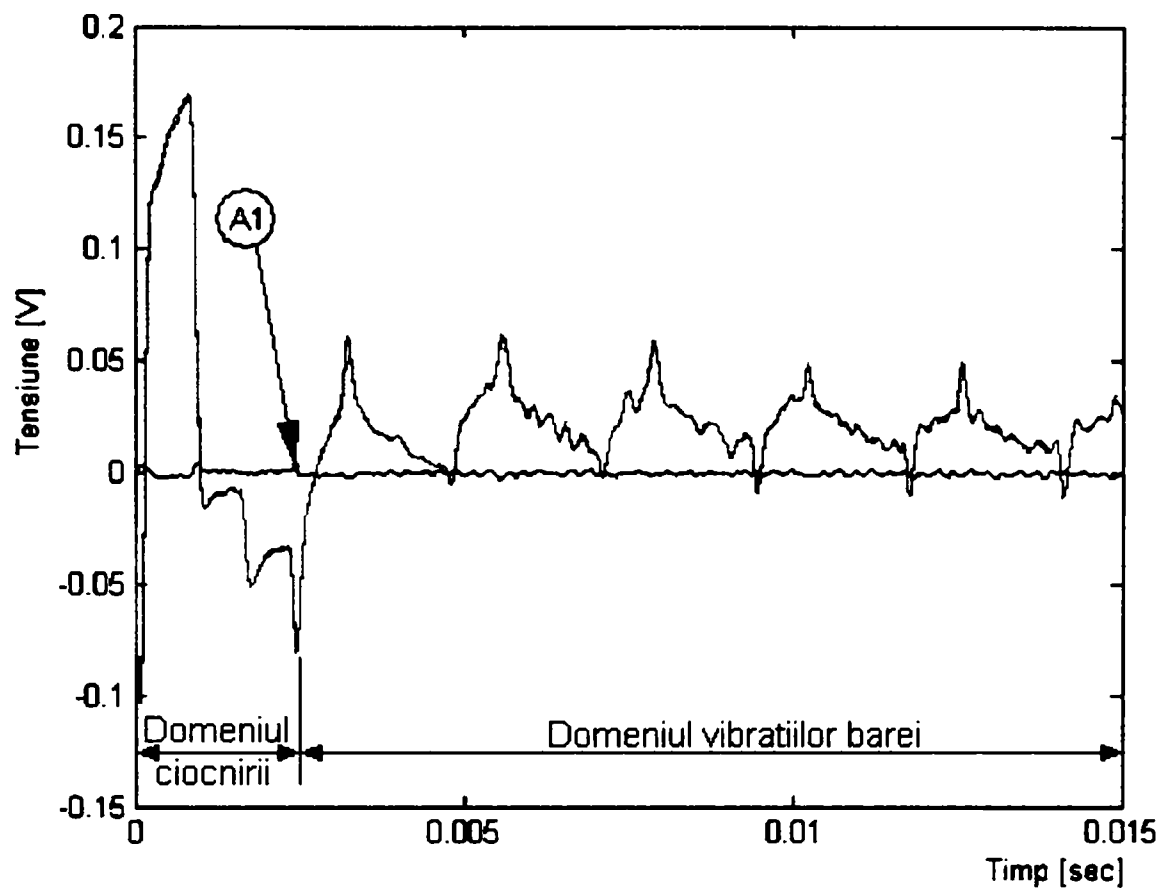


Figura 4.35. Diagrama semnalului obținută după filtrarea în domeniul frecvență

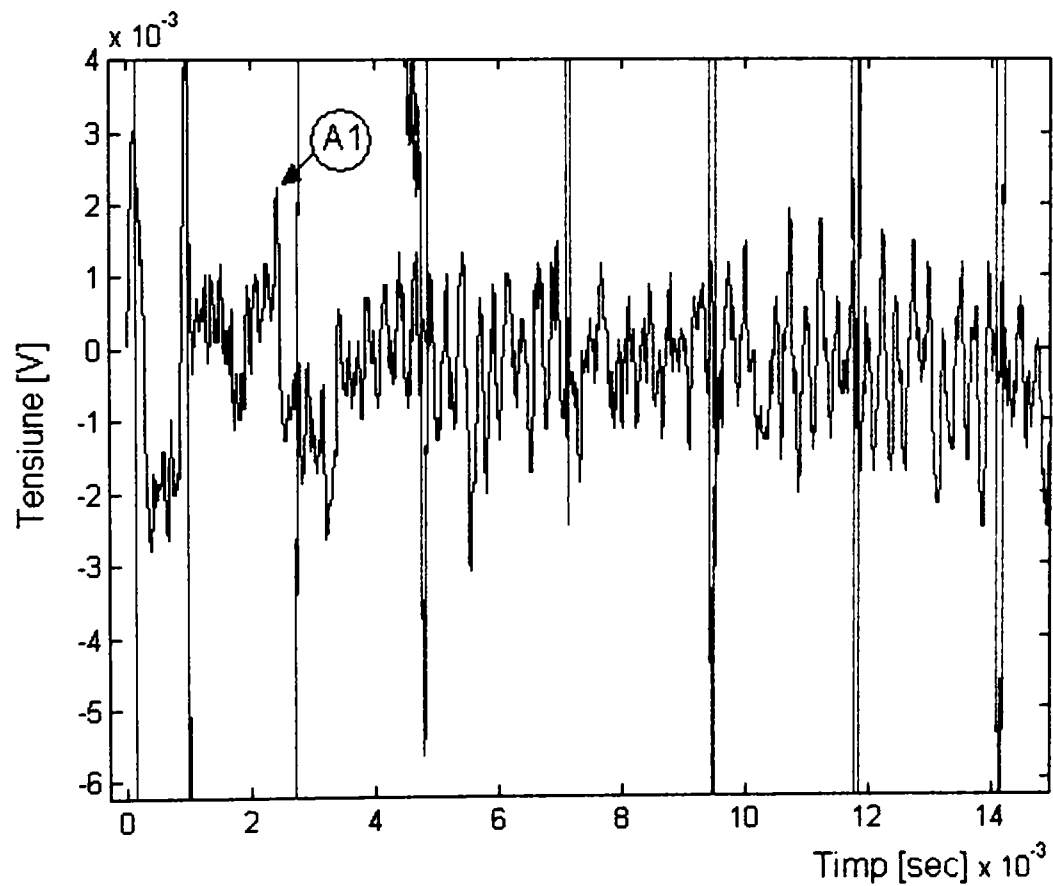


Figura 4.36. Diagrama semnalului obținută după filtrarea în domeniul frecvență
(detaliu)

Pentru localizarea în timp a apariției undei reflectate s-a realizat o analiză a semnalului dif_{sm} utilizând un program MATLAB, „*a6_med_wave*” prezentat în ANEXA 4.5. Cu ajutorul acestui program s-a realizat diagrama prezentată în figura 4.37. Programul utilizează tipul de wavelet „*rbio 3.1*” (Reverse Biorthogonal wavelets versiunea 3.1.).

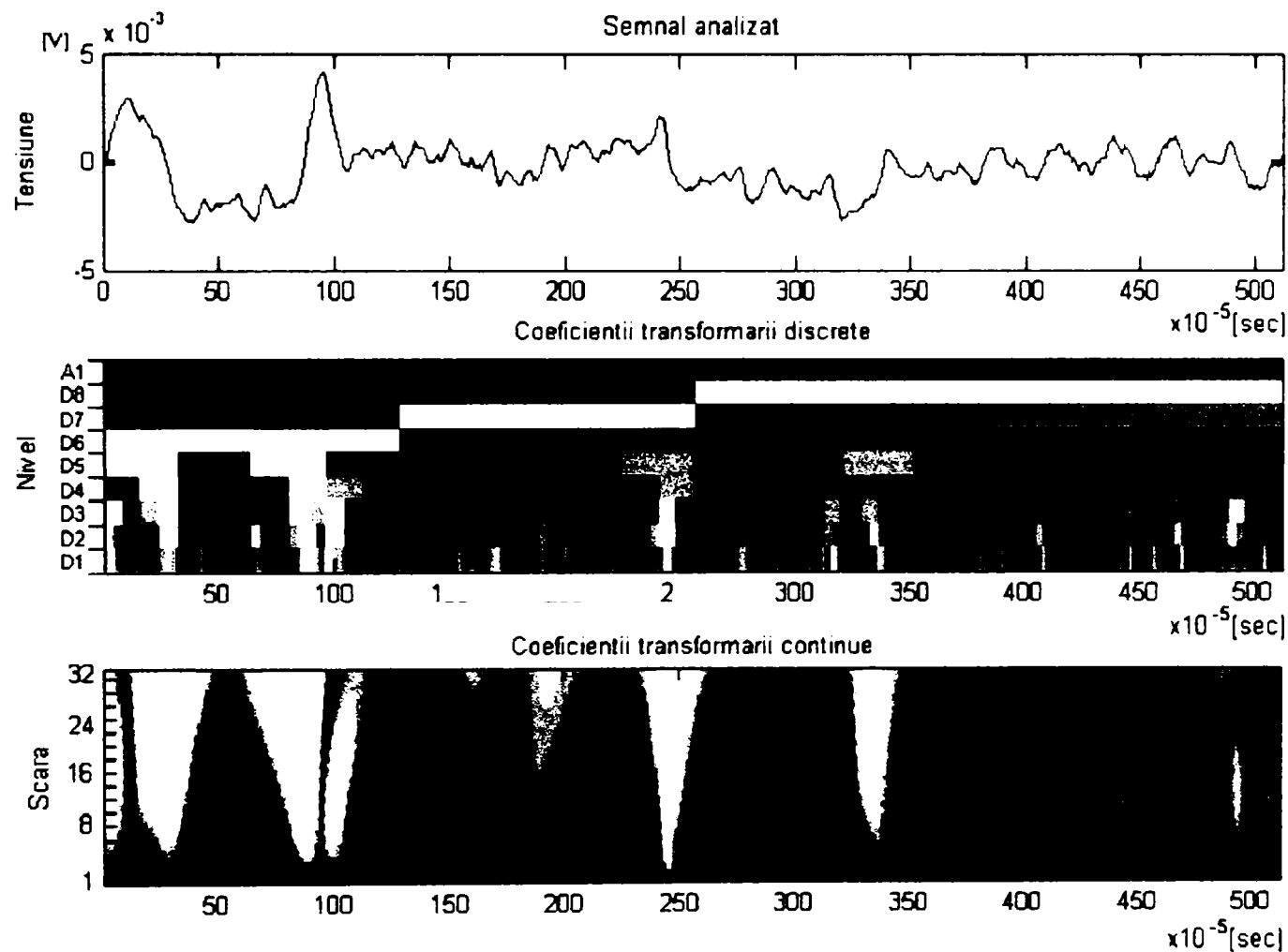


Figura 4.37. Diagrama semnalului dif_{sm} obținută prin utilizarea transformării wavelet „*rbio3.1*”

Din diagrama timp-nivele se observă că în cadrul domeniului de interes (în jurul valorii de $2,4 \times 10^{-3}$ secunde), există o amplitudine pronunțată a semnalului pe nivelele detaliilor D1, D2.

Utilizând această constatare, s-a realizat sinteza semnalului undei reflectate prin selectarea coeficienților transformării wavelet „*rbio3.1*”, corespunzători

detaliilor D1 și D2. Etapele transformării, selectării coeficienților și diagrama în domeniul timp rezultată sunt prezentate în figura 4.38.

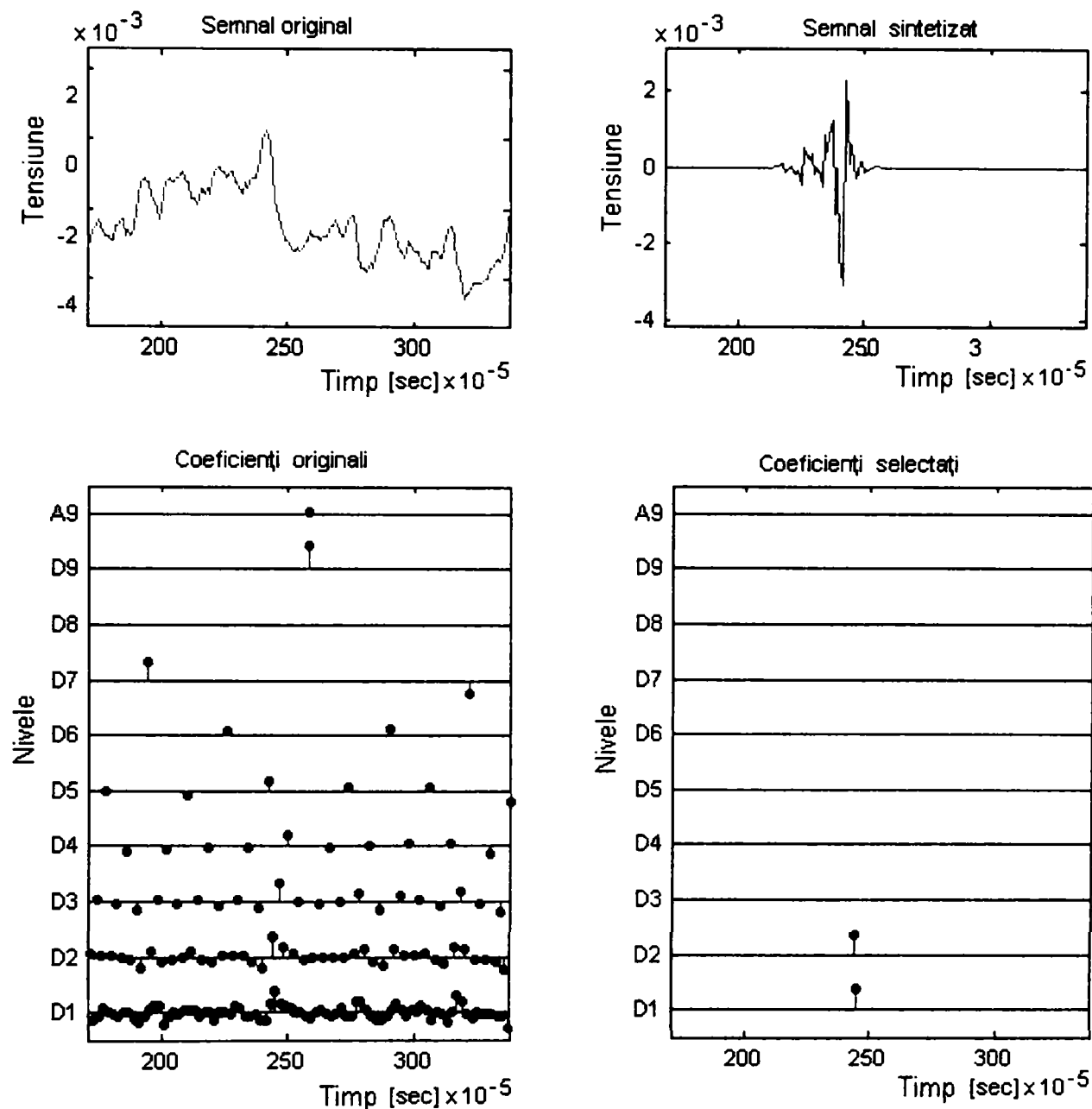


Figura 4.38. Sintetizarea semnalului unei reflectate utilizând selectarea coeficienților wavelet

Prin sinteza semnalului corespunzător unei reflectate obținut din semnalul dif_{sm} , utilizând transformarea wavelet, se poate aprecia aportul acesteia la semnalul de bază (este posibilă estimarea amplitudinii unei reflectate), forma probabilă a semnalului și domeniul de frecvențe în care apare acest semnal.

4.5. Concluzii

- S-au prezentat scopurile ce urmează a fi îndeplinite, în principal, într-un experiment de ciocnire și mijloacele de realizare a acestora. Câteva dintre acestea sunt:
 - determinarea mărimii deplasărilor corpurilor supuse ciocnirii - prin mijloace mecanice, electrice, fotoelectrice sau fotografice;
 - urmărirea fenomenelor de contact, de exemplu determinarea timpului de ciocnire – prin mijloace electrice;
 - observarea undelor de tensiune generate în corpuri, ca urmare a impactului – prin metode electrice, optice, mecanice.
- S-au descris și comparat două dintre modelele experimentale întâlnite în literatura de specialitate și utilizate pentru analiza fenomenului de ciocnire și a propagării undelor de deformație în bare cilindrice: modelul în care barele sunt suspendate prin fire elastice, respectiv cel în care barele sunt ghidate.
- În cadrul tezei s-a proiectat și realizat un *stand experimental cu ajutorul căruia să se poată valida rezultatele teoretice privind ciocnirea coaxială a două bare cilindrice, de lungimi finite*, pe baza metodei aproximative descrise în Capitolul 3, prin analiza fenomenului de propagare a undelor longitudinale prin bare. Prin acest experiment s-a urmărit:
 - punerea în evidență a undelor de deformație în barele cilindrice supuse ciocnirii;
 - determinarea timpului de ciocnire.

Se poate aprecia că standul realizat corespunde scopului propus.

- S-a ales pentru standul experimental o variantă în care barele sunt suspendate, prin intermediul unor fire elastice din oțel, datorită modului relativ simplu de realizare și ținând cont de posibilitățile existente. Sistemul de măsurare dotat cu timbre tensometrice, cât și sistemul de achiziție a datelor este performant, îndeplinind cerințele aplicației.
- S-au realizat *două modalități de amplasare a timbrelor tensometrice pe bare*

și s-au constatat următoarele:

- Modul de legare a timbrelor tensometrice în semipunte (figura 4.6.a, setul I de măsurări) dă rezultate mai slabe (diagramele din figurile 4.20 și 4.21), iar modul de legare în punte întreagă (figura 4.6.b, setul II de măsurări) dă rezultate satisfăcătoare (diagramele din figurile 4.28 și 4.29).
- În ambele seturi de încercări se observă că semnalele măsurate respectă modul în care se propagă unda de șoc generată de ciocnirea barelor (decalajul de amplasare al timbrelor este în concordanță cu momentul de apariție al undei de șoc pe fiecare timbru) iar amplitudinea semnalului este proporțională cu deformația de compresiune a barei, acesta scăzând pe măsură ce unda avansează în bară.
- O observație importantă este că la acest tip de construcție a standului, datorită modului de rezemare (suspendarea cu ajutorul unor fire elastice din oțel), se introduc vibrații de încovoiere ale barei, ce sunt percepute ca zgomote nedorite, deși aceste vibrații apar după momentul de desprindere a barelor. Pentru eliminarea acestor zgomote, este indicat să se utilizeze modul de rezemare descris pentru standurile de tip Hopkinson, deși construcția acestor tipuri de standuri implică anumite costuri mai mari și complicații tehnologice majore.
- Parametrii utilizați pentru achiziția datelor au fost definiți în mod corect, fenomenele studiate putând fi puse în evidență satisfăcător. Se poate recomanda, totuși, ca în experimentele viitoare să se utilizeze o rezoluție mai mare a cuantizării, fie printr-o amplificare a semnalului (utilizând facilitățile de amplificare ale plăcii de achiziție existente, fie prin utilizarea unei plăci de achiziție mai performante (cu o cuantizare de 16 sau 24 biți).
- Metoda utilizată *pentru măsurarea timpului de contact* dintre cele două bare supuse impactului se dovedește a fi corectă, deoarece concordă atât cu rezultatele obținute prin calcul cât și cu testările ulterioare. Un element

relativ nou este faptul că nu s-a măsurat direct tensiunea aplicată pe bare, ci prin intermediul timbrului tensometric influențat de această tensiune.

- În ceea ce privește *analiza undelor reflectate*, s-au studiat două aspecte ce se consideră importante din punctul de vedere al analizei fenomenelor de ciocnire a barelor:
 - analiza *undelor reflectate de la capătul barei percutoare* măsurate pe timbrul T1, amplasat pe bara receptoare;
 - analiza *undeii reflectate de la capătul barei receptoare* măsurate pe timbrul T1.

S-au obținut următoarele rezultate:

- În primul caz s-a realizat *corelarea dintre diagramele de propagare a undelor în bare, cea obținută pe cale teoretică* (paragraful 3.4.4), *cu cea obținută prin măsurare* (diagrama din figura 4.31), evidențiindu-se o corespondență clară a rezultatelor experimentale cu cele teoretice.
- În al doilea caz, unda reflectată de la capătul liber al barei receptoare este dificil de pus în evidență datorită lungimii mari a barei, lungime pe care această undă se amortizează semnificativ. În afară de amortizare, intervin o serie de efecte secundare (reflexii laterale, vibrații de încovoiere a barei), ce diminuează semnificativ posibilitatea observării undeii reflectate. Pentru aceasta, s-a încercat *punerea în evidență a undeii reflectate prin aplicarea unui strat vâcos pe capătul liber al barei* și observarea diferenței dintre semnalele captate cu și fără amortizarea introdusă de către acest strat vâcos. Acest procedeu nu a produs rezultate remarcabile la analiza în domeniul timp și nici în cazul analizei în domeniul frecvențial. De aceea, s-a trecut la *analiza wavelet (în domeniul timp-scară) obținându-se filtrarea semnalelor și reconstruirea componentei datorate undeii reflectate*.
- Pentru analiza fenomenelor ce au făcut obiectul studiului experimental s-au realizat o serie de programe de achiziție și prelucrare a datelor ce pot fi utilizate și în cadrul unor cercetări ulterioare.

CAPITOLUL 5

CONCLUZII FINALE ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE

5.1. Concluzii finale

CAPITOLUL 1: INTRODUCERE

- Descrierea obiectivelor tezei:
 - calculul sistemelor de ciocnire formate din bare cilindrice de lungimi mari;
 - utilizarea unei metode aproximative de calcul, bazată pe fenomenul de propagare a undei longitudinale prin bare, fără a fi necesară soluționarea ecuației undei;
 - realizarea unui stand experimental, cu ajutorul căruia se monitorizează propagarea undelor longitudinale prin barele supuse ciocnirii coaxiale și se determină timpul de ciocnire;
 - compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale.
- Prezentarea teoriilor și metodelor propuse de cercetătorii care s-au ocupat de studiul fenomenelor de ciocnire între corpuri.
- Prezentarea cronologică, pe baza surselor bibliografice, a cercetărilor referitoare la fenomenul de propagare a undelor de deformare ce apar în cazul ciocnirii corpurilor de tipul barelor lungi.
- Precizarea domeniului de aplicabilitate a studiului ciocnirii coaxiale a barelor cilindrice lungi.

CAPITOLUL 2: MODELE DINAMICE PENTRU STUDIUL CIOCNIRII CORPURILOR DE TIP BARĂ

- Stabilirea ipotezelor fundamentale necesare pentru precizarea modelului matematic care urmează a fi studiat și pentru cunoașterea posibilităților de aplicare practică a rezultatelor obținute. Aceste ipoteze permit simplificarea și generalizarea fenomenelor, dar și accesibilitatea calculelor matematice.

- Studiul fenomenului de impact între corpuri de tipul barelor, din punctul de vedere al teoriei elasticității și nu al teoriei clasice a corpurilor rigide, ținând cont de faptul că perturbația produsă din punctul de impact se propagă înspre interiorul corpurilor cu o viteză finită. Perturbația produce deformații și tensiuni, care pot fi determinate examinând fenomenul de propagare a undelor.
- Prezentarea, comparativă, în sistemele de coordonate rectangulare (x, y, z) și cilindrice (r, θ, z) , a stării de deformație, a stării de tensiune și a ecuațiilor de mișcare ale punctului material.
- Stabilirea ecuațiilor fundamentale ale elastodinamicii și, pornind de la acestea, determinarea ecuațiilor undei longitudinale și transversale.
- Descrierea fenomenului de propagare a undei, cu aplicabilitate directă în studiul ciocnirii corpurilor elastice.
 - Prezentarea grafică a evoluțiilor în timp sau spațiu ale undei nondispersive.
 - Prezentarea tehnicilor pentru soluționarea ecuației undei, folosite în literatura de specialitate (soluții funcționale, metode de separare a variabilelor, etc.).
 - Studiarea comportării trenurilor de undă armonice infinite, ale căror deplasări sunt exprimate printr-o relație între pulsație și numărul de undă, cunoscută ca ecuație de frecvență.
 - Reprezentarea grafică a ecuațiilor de frecvență (respectiv viteza de fază în funcție de lungimea de undă) pentru cazul undelor longitudinale și transversale.
 - Descrierea soluțiilor corespunzătoare ecuațiilor undelor longitudinale, transversale și de torsiune, pornind de la aproximarea dată de Pochhammer și Chree pentru o bară infinită, de secțiune circulară constantă (aproximare exprimată sub formă de deplasări).

- Prezentarea a două modalități de soluționare a ecuației undei: cu ajutorul transformatei Laplace și cu ajutorul funcțiilor discontinue, pentru cazul propagării undei longitudinale în bare elastice.
- Aplicarea metodei de rezolvare a ecuației undei cu ajutorul funcțiilor discontinue pentru următoarele situații:
 - propagarea undei în bare care prezintă o modificare bruscă de secțiune și/sau material (S-au studiat și cazurile particulare: un capăt liber, un capăt încastrat);
 - ciocnirea coaxială a două bare, una de lungime finită și una de lungime infinită;
 - impactul dintre o bară elastică și o masă rigidă.
- Realizarea diagramelor de propagare a undelor incidente și reflectate.
- Stabilirea expresiilor corespunzătoare funcțiilor care descriu deplasările undelor. (Cu ajutorul funcțiilor respective se pot calcula vitezele, deformațiile și deplasările punctelor materiale dintr-o anumită secțiune a barei.)
- Reprezentarea grafică, cu ajutorul unor programe, scrise în cod Maple a funcțiilor discontinue corespunzătoare deformației și vitezei.

CAPITOLUL 3: METODĂ APROXIMATIVĂ ÎN STUDIUL CIOCNIRII CORPURILOR PE BAZA PROPAGĂRII UNDELOR

- Descrierea modelului matematic și precizarea condițiilor de aplicabilitate a metodei aproximative de calcul a sistemelor de ciocnire.
 - Metoda are la bază teoria de propagare a undelor în medii elastice, fără a fi necesară soluționarea ecuației undei.
 - Metoda aproximativă se aplică în cazul ciocnirii coaxiale a barelor având dimensiuni transversale mult mai mici decât cele longitudinale.
 - Principiul de bază al acestei metode este următorul: toate punctele materiale aflate pe suprafața de contact sunt caracterizate, în

momentul ciocnirii, printr-o anumită viteză instantanee v și o forță de ciocnire N . Acestea (v , N) se transmit și punctelor din secțiunile imediat învecinate suprafeței de contact, din aproape în aproape, cu viteză finită (viteza de propagare a undei longitudinale), sub forma unei unde. Unda de ciocnire este caracterizată prin parametrii: viteza v și forța N .

- Rezolvarea elementară a sistemului de ecuații liniare corespunzător ciocnirii plane, folosind în acest scop legile fundamentale ale dinamicii și principiile de bază ale teoriei ciocnirii plane. Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații, se obțin valorile vitezelor și forțelor de ciocnire ale punctelor materiale din fiecare secțiune transversală prin care trece unda de deformație, la un moment dat.
 - Cu ajutorul parametrilor calculați (forță și viteză) se pot determina ulterior și alte mărimi: tensiunile din bare, deplasarea suprafeței de contact, energia transmisă, puterea de ciocnire.
 - S-au prezentat trei modele de sisteme de ciocnire, având în componență bare de lungimi infinite și secțiuni constante. În aceste cazuri, parametrii ciocnirii (forța și viteza) se modifică brusc în momentul impactului, dar rămân constanți pe toată lungimea barei.
- Definirea suprafețelor limită (frontierelor), adică a acelor suprafețe în care există o modificare bruscă de diametru sau de material și pe care apar unde reflectate, unde transmise sau suprapuneri de unde. Ca urmare, are loc modificarea parametrilor ciocnirii.
- Construirea diagramei de propagare a undelor (diagrama ondulatorie), care permite urmărirea procesului de propagare a undelor, cât și succesiunea temporală a acestora pe suprafețele limită.
- Stabilirea, pe baza diagramei, a sistemelor de ecuații pentru calculul parametrilor de ciocnire și determinarea timpului de ciocnire.

- Calculul sistemelor percutante cu ajutorul diagramelor de propagare a undelor, considerând patru situații de ciocnire, fiecare având cel puțin un element de lungime finită.
- Realizarea, în limbaj MATLAB, a programelor pentru calculul parametrilor de ciocnire (forță și viteză) în funcție de timp, pentru situațiile de ciocnire prezentate.
- Reprezentarea, în formă grafică și numerică, a parametrilor de ciocnire ai punctelor situate pe suprafețele limită ale sistemului percutant, pentru diferite valori ale vitezei inițiale de ciocnire.
- Determinarea timpului de ciocnire prin urmărirea apariției pe diagrama ondulatorie a undei reflectate de la capătul îndepărtat al uneia dintre bare (după caz).
- Stabilirea expresiei pentru coeficientul de transmitere a energiei prin ciocnire în funcție de raportul dintre impedanțele barelor.

CAPITOLUL 4: STUDII EXPERIMENTALE PRIVIND CIOCNIREA BARELOR

- Prezentarea fenomenelor urmărite, în general, într-un experiment de ciocnire și a mărimilor măsurate.
- Descrierea și compararea a două modele experimentale întâlnite în literatura de specialitate și utilizate pentru analiza fenomenului de ciocnire și a propagării undelor de deformare în bare cilindrice (modelul cu bare suspendate prin fire elastice și cel cu bare ghidate).
- Proiectarea și realizarea unui stand experimental cu ajutorul căruia să se poată valida rezultatele teoretice privind ciocnirea coaxială a două bare cilindrice, de lungimi finite, pe baza metodei aproximative descrise în Capitolul 3, prin analiza fenomenului de propagare a undelor longitudinale prin bare. Prin acest experiment s-a urmărit:
 - punerea în evidență a undelor de deformare în barele cilindrice supuse ciocnirii;
 - determinarea timpului de ciocnire.

- Realizarea sistemului de achiziție a datelor obținute de la standul de încercări.
- Realizarea a două variante de amplasare a timbrelor tensometrice pe barele studiate. Prin compararea semnalelor obținute s-a arătat că:
 - modul de legare a timbrelor tensometrice în punte întregă dă rezultate mai bune decât în cazul legării lor în semipunte;
 - în ambele seturi de încercări semnalele măsurate respectă modul de propagare a undei de șoc, generată de ciocnirea barelor;
 - în ambele variante, amplitudinea semnalului este proporțională cu deformația de compresiune a barei, aceasta scăzând pe măsură ce unda avansează în bară.
- Măsurarea timpului de contact dintre cele două bare supuse impactului se dovedește a fi corectă, deoarece concordă atât cu rezultatele obținute prin calcul cât și cu testările ulterioare
- Evidențierea undelor reflectate de la capătul barei percutoare, respectiv de la capătul barei receptoare, prin analiza semnalelor obținute de la primul timbru așezat pe bara receptoare. S-au obținut următoarele rezultate:
 - În primul caz s-a realizat corelarea dintre diagramele de propagare a undelor în bare, cea obținută pe cale teoretică, cu cea obținută prin măsurare, evidențiindu-se o corespondență clară a rezultatelor experimentale cu cele teoretice.
 - În al doilea caz, unda reflectată de la capătul liber al barei receptoare este dificil de pus în evidență datorită lungimii mari a barei, lungime pe care această undă se amortizează semnificativ. În afară de amortizare, intervin o serie de efecte secundare, ce diminuează semnificativ posibilitatea observării undei reflectate. Punerea în evidență a undei reflectate s-a realizat prin aplicarea unui strat vâcos pe capătul liber al barei, după care s-a urmărit diferența dintre semnalele captate cu și fără amortizarea introdusă de către acest strat vâcos. Acest procedeu nu a produs rezultate remarcabile la analiza în

domeniul timp și nici în cazul analizei în domeniul frecvențial. De aceea, s-a trecut la analiza wavelet (în domeniul timp-scară) obținându-se filtrarea semnalelor și reconstruirea componentei datorate undei reflectate.

- Pentru analiza fenomenelor ce au făcut obiectul studiului experimental s-au realizat o serie de programe de achiziție și prelucrare a datelor ce pot fi utilizate și în cadrul unor cercetări ulterioare.

5.2. Contribuții personale

- *CONTRIBUȚII ÎN DOMENIUL TEORETIC:*
 - Sistematizarea informațiilor cu privire la teoriile și metodele utilizate în studiul fenomenelor de ciocnire între corpuri;
 - Realizarea unei descrieri cronologice, pe baza surselor bibliografice, a cercetărilor referitoare la fenomenul de propagare a undelor de deformare ce apar în cazul ciocnirii corpurilor de tipul barelor lungi;
 - Prezentarea, pe baza teoriei elasticității, a noțiunilor teoretice fundamentale necesare descrierii modelului matematic studiat;
 - Reprezentarea grafică a ecuațiilor de frecvență pentru cazul undelor longitudinale și transversale;
 - Trasarea curbelor de variație a deformațiilor și vitezelor, în cazul ciocnirii unei bare elastice cu o masă rigidă, pe baza unor programe realizate în codul Maple;
 - Aplicarea unei metode aproximative de calcul și construirea diagramelor ondulatorii în cazul ciocnirii a două bare de lungimi finite, pe baza teoriei de propagare a undelor longitudinale, dar fără a fi necesară soluționarea ecuației undei;
 - Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare necesare pentru calculul parametrilor de ciocnire;
 - Elaborarea unor programe în limbaj MATLAB, destinate calculului și reprezentărilor grafice ale parametrilor de ciocnire (forță și viteză).
- *CONTRIBUȚII ÎN DOMENIUL EXPERIMENTAL:*
 - Proiectarea și realizarea unui stand experimental, care urmărește modelul teoretic descris în paragraful 3.4.4, respectiv ciocnirea coaxială a două bare cilindrice, de lungimi finite. Cu ajutorul standului propus se poate analiza fenomenul de propagare a undelor longitudinale prin bare, precum și determinarea timpului de ciocnire;

- Realizarea sistemului de achiziție a datelor provenite de la standul de măsurări;
- Construirea dispozitivului electronic declanșator, necesar pentru sincronizarea înregistrării semnalelor de la timbrele tensometrice, de către placa de achiziții de date;
- Întocmirea programelor de achiziție a datelor, în limbaj Visual C++;
- Realizarea unor programe de calcul, în limbaj MATLAB, necesare pentru prelucrarea datelor experimentale și afișarea lor grafică;
- Realizarea diagramelor comparative pentru punerea în evidență a undelor reflectate de la bara percutoare (compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale fiind satisfăcătoare);
- Realizarea a câte două seturi de măsurări, cu și fără amortizare vâscoasă, pentru evidențierea undei reflectate de la capătul liber al barei receptoare;
- Întocmirea unui program de analiză în domeniul frecvențial, în limbaj MATLAB, care dă posibilitatea filtrării semnalului pe anumite domenii selectate și apoi transformarea din domeniul frecvență în domeniul timp, precum și calculul și afișarea diferenței dintre semnalul amortizat și neamortizat.
- Întocmirea unui program de calcul în MATLAB, pentru localizarea în timp a undei reflectate, cu ajutorul transformării wavelet rbio3.1.

ANEXA

ANEXA 3.1

Program „par.3.4.1”

- determinarea valorilor forțelor și vitezelor pe suprafețele limită A și B

```
ro = 7800;
c = 5188;
diametru1 = 0.03;
diametru2 = 0.04;
diametru3 = 0.02;
v0 = 5;
%*****
format long
S(1) = pi*diametru1^2/4;
S(2) = pi*diametru2^2/4;
S(3) = pi*diametru3^2/4;
K(1) = ro*c*S(1);
K(2) = ro*c*S(2);
K(3) = ro*c*S(3);
i = (1:30);
q = ((K(1) - K(3))/(K(1) + K(3)))*((K(2) - K(3))/(K(2) + K(3)));
n(i) = (K(1)*K(2))/(K(1) + K(2))*(1-q.^i)*v0;
w(i) = v0-n(i)/K(1);
N(i) = (K(3)*K(2))/(K(3) + K(2))*(1+(K(2)/K(3))*(K(1)-K(3))/(K(1)+K(2))*(1-q.^(i -
1))))*v0;
v(i) = N(i)/K(2);
col1 = i;
col2 = N;
col3 = v;
col4 = n;
col5 = w;

tab = [col1' col2' col3' col4' col5']
```

```

stem(N,'ob');
hold on;
stem(N,'b');
title('Diagrama fortelor care apar pe suprafata limita A');
ylabel('N_i');
xlabel('i');
figure;
stem(v,'ob');
hold on;
stem(v,'b');
title('Diagrama vitezelor care apar pe suprafata limita A');
ylabel('v_i');
xlabel('i');
figure;
stem(n,'ob');
hold on;
stem(n,'b');
title('Diagrama fortelor care apar pe suprafata limita B');
ylabel('n_i');
xlabel('i');
figure;
stem(w,'ob');
hold on;
stem(w,'b');
title('Diagrama vitezelor care apar pe suprafata limita B');
ylabel('w_i');
xlabel('i');

```

Program „par.3.4.2”

- **determinarea valorilor forțelor și vitezelor pe suprafața de ciocnire**

```

ro = 7800;
c = 5188;
diametru1 = 0.04;
diametru2 = 0.03;
v0 = 2;
%*****
format long
S(1) = pi*diametru1^2/4;
S(2) = pi*diametru2^2/4;
K(1) = ro*c*S(1);
K(2) = ro*c*S(2);
i = (1:30);
q = (K(1) - K(2))/(K(1) + K(2));
N(i) = (K(1)*K(2))/(K(1) + K(2))*q.^(i - 1)*v0;
v(i) = N(i)/K(2);
col1 = i;
col2 = N;
col3 = v;

tab = [col1' col2' col3']

stem(N,'or');
hold on;
stem(N,'r');
title('Diagrama fortelor');
ylabel('N_i');
xlabel('i');
figure;
stem(v,'or');
hold on;
stem(v,'r');
title('Diagrama vitezelor');
ylabel('v_i');
xlabel('i');

```

Program „par_3.4.4”**- determinarea valorilor forțelor și vitezelor pe suprafața de ciocnire**

```

ro = 7800;
c = 5188;
diametru2 = 0.035;
diametru1 = 0.040;
v0 = 2;
%*****

format long;
S(1) = pi*diametru1^2/4;
S(2) = pi*diametru2^2/4;
K(1) = ro*c*S(1);
K(2) = ro*c*S(2);
i = (1:3);
q = (K(1) - K(2))/(K(1) + K(2));
N(i) = (K(1)*K(2))/(K(1) + K(2))*q.^(i - 1)*v0;
v(i) = N(i)/K(2);
col1 = i;
col2 = N;
col3 = v;

tab = [col1' col2' col3']

bar(N,'ob');
hold on;
bar(N,'b');
title('Diagrama fortelor');
ylabel('N_i');
xlabel('i');
figure;
bar(v,'ob');
hold on;
bar(v,'b');
title('Diagrama vitezelor');
ylabel('v_i');
xlabel('i');

```

ANEXA 4.1

Program de achiziție a datelor „ach_bare.cpp”

```
/* Biblioteci utilizate*/
/*biblioteca de functii a placii de achizitie Nat. Instr. PCI1200 */
#include "nidaqex.h"
/* bibliotecile standard Visual C*/
#include <fcntl.h>
#include <io.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <ctype.h>
#include <math.h>
#include <string.h>
#include <sys/types.h>
#include <sys/stat.h>
#include <string.h>
/*Inceput program*/
void main(void)
{
    /*Variabile locale:*/
    i16 iStatus = 0;
    /*Valoare returnate in caz de eroare*/
    i16 iRetVal = 0;
    /*Identificatorul placii de achizitie*/
    i16 iDevice = 1;
    /*Timpul total de achizitie.
    In cazul aparitiei unei erori
    achizitia se opreste automat dupa
    expirarea acestui timp*/
    i32 lTimeout = 600;
    /*Numarul de canale pe care se achizitioneaza*/
    i16 inumChans = 1;
    /* Amplificarea placii de achzitie*/
    i16 iGain = 1;
    /* Numarul de achizitii pe secunda pentru mai multe canale*/
    f64 dSampRate = 20000.0;
    /* Numarul de achizitii pe secunda pe un canal*/
    f64 dScanRate = 0;
    /*Numarul total de achizitii*/
    u32 ulCount = 300000;
    /* Declansator*/
    i16 iStartTrig = 1;
    i16 iExtConv = 0;
    /*Nume fisier cu date achzitionate*/
    char* strFilename = "a";
    i16 iIgnoreWarning = 0;
    /*Setare declansator extern*/
    iStatus = DAQ_Config(iDevice, iStartTrig, iExtConv);
```



```

iRetVal = NIDAQErrorHandler(iStatus, "DAQ_Config", iIgnoreWarning);
/* Setarea limitei de timp :nr. secunde * 18tacturi/sec.) */
iStatus = Timeout_Config(iDevice, lTimeout);
iRetVal = NIDAQErrorHandler(iStatus, "Timeout_Config",
iIgnoreWarning);
/* Specificarea numelui de fisier in care se inscriu datele*/
printf("\n Numele fisierului : ");
scanf("%s",strFilename);
printf("\n");
/* Achizitie pe disc.*/
iStatus = Lab_ISCAN_to_Disk (iDevice, inumChans, iGain, strFilename, ulCount,
dSampRate, dScanRate, 0);
iRetVal = NIDAQErrorHandler(iStatus, "Lab_ISCAN_to_Disk", iIgnoreWarning);
/*Daca achizitia s-a terminat cu succes scrie "OK" pe ecran*/
if (iStatus == 0) printf(" O.K.!");
/*Reseteaza limita de timp*/
iStatus = Timeout_Config(iDevice, -1);
/* Afiseaza pe ecran mesajul de terminare a achizitiei*/
printf("Terminat achzitie!\n");
}
/* Sfarsit program */

```

Program „a1.m”**- afișare grafică a diagramei semnalului achiziționat de la 1 timbru**

```
nr_cit = 500;
h = [1 1 1 1 1 1 1 1]/8;
figure;
[filename,pathname] = uigetfile('*.*.',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x1,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    timp = [1:600000]/100000;
    x1 = x1.*(10/4096);
    x1 = x1 - mean(x1);
    x1 = conv(h,x1);
    plot(timp(1:nr_cit),x1(1:nr_cit),'k');
    xlabel('Timp [sec]')
    ylabel('Tensiune [V]')
end
```

Program „a6.m”

- afișare grafică a diagramei semnalelor achiziționate de la 6 timbre

```

nr_cit = 500;
h = [1 1 1 1 1 1 1]/8;
timp = [1:600000]/100000;
figure;
%1
[filename,pathname] = uigetfile('*. *',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x1,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x1 = x1.*(10/4096);
    x1 = x1 - mean(x1);
    x1 = conv(h,x1);
    plot(timp(1:nr_cit),x1(1:nr_cit),'k');
    xlabel('Timp [sec]')
    ylabel('Tensiune [V]')
    hold on
end
%2
[filename,pathname] = uigetfile('*. *',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x1,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x1 = x1.*(10/4096);
    x1 = x1 - mean(x1);
    x1 = conv(h,x1);
    plot(timp(1:nr_cit),x1(1:nr_cit),'r');
end
%3
[filename,pathname] = uigetfile('*. *',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x1,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x1 = x1.*(10/4096);
    x1 = x1 - mean(x1);
    x1 = conv(h,x1);
    plot(timp(1:nr_cit),x1(1:nr_cit),'b');
end
%4
[filename,pathname] = uigetfile('*. *',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');

```

```

[x1,count] = fread(fid,inf,'int16');
fclose('all');
x1 = x1.*(10/4096);
x1 = x1 - mean(x1);
x1 = conv(h,x1);
plot(timp(1:nr_cit),x1(1:nr_cit),'m');
end
%5
[filename,pathname] = uigetfile('*.*.',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x1,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x1 = x1.*(10/4096);
    x1 = x1 - mean(x1);
    x1 = conv(h,x1);
    plot(timp(1:nr_cit),x1(1:nr_cit),'c');
end
%6
[filename,pathname] = uigetfile('*.*.',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x1,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x1 = x1.*(10/4096);
    x1 = x1 - mean(x1);
    x1 = conv(h,x1);
    plot(timp(1:nr_cit),x1(1:nr_cit),'g');
end

```

Program „a8_med_ifft_filt.m”:

- Calculul și afișarea transformatei Fourier rapide (fft);
- Calculul și afișarea mediei celor 5 semnale amortizate și a celor cinci semnale neamortizate;
- Filtrarea semnalului pe domeniile selectate;
- Calculul și afișarea transformatei Fourier inverse (ifft);
- Calculul și afișarea diferenței dintre semnalul amortizat și neamortizat.

```

nr_cit = 1500;
n_plot_timp = nr_cit;
timp = [1:600000]/100000;
h = [1 1 1]/4;
Fs = 100000;
n_fft = 2^18;
int_timp = (1/Fs:1/Fs:n_fft/Fs);
f = Fs*(0:n_fft/2-1)/n_fft;
n_plot1 = 1;
n_plot2 = 50000;
%1
[filename,pathname] = uigetfile('*.wav',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x1,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x1 = x1.*(10/4096);
    x1 = x1 - mean(x1);
    x1 = conv(h,x1);
    y1 = fft(x1(1:n_fft),n_fft);
    Py1 = y1.*conj(y1)/n_fft;
end
%2
[filename,pathname] = uigetfile('*.wav',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x2,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x2 = x2.*(10/4096);
    x2 = x2 - mean(x2);
    x2 = conv(h,x2);
    y2 = fft(x2(1:n_fft),n_fft);
    Py2 = y2.*conj(y2)/n_fft;
end
%3
[filename,pathname] = uigetfile('*.wav',' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x3,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x3 = x3.*(10/4096);

```

```

x3 = x3 - mean(x3);
x3 = conv(h,x3);
y3 = fft(x3(1:n_fft),n_fft);
Py3 = y3.*conj(y3) / n_fft;
end
%4
[filename,pathname] = uigetfile('*. *', ' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x4,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x4 = x4.*(10/4096);
    x4 = x4 - mean(x4);
    x4 = conv(h,x4);
    y4 = fft(x4(1:n_fft),n_fft);
    Py4 = y4.*conj(y4) / n_fft;
end
%5
[filename,pathname] = uigetfile('*. *', ' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x5,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x5 = x5.*(10/4096);
    x5 = x5 - mean(x5);
    x5 = conv(h,x5);
    y5 = fft(x5(1:n_fft),n_fft);
    Py5 = y5.*conj(y5) / n_fft;
end
%6
[filename,pathname] = uigetfile('*. *', ' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x6,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x6 = x6.*(10/4096);
    x6 = x6 - mean(x6);
    x6 = conv(h,x6);
    y6 = fft(x6(1:n_fft),n_fft);
    Py6 = y6.*conj(y6) / n_fft;
end
%7
[filename,pathname] = uigetfile('*. *', ' ',300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x7,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x7 = x7.*(10/4096);
    x7 = x7 - mean(x7);
    x7 = conv(h,x7);

```

```

y7 = fft(x7(1:n_fft),n_fft);
Py7 = y7.*conj(y7) / n_fft;
end
%8
[filename,pathname] = uigetfile('*.!*' ,300,100);
if filename ~=0
    fid = fopen(strcat(pathname,filename),'r');
    [x8,count] = fread(fid,inf,'int16');
    fclose('all');
    x8 = x8.*(10/4096);
    x8 = x8 - mean(x8);
    x8 = conv(h,x8);
    y8 = fft(x8(1:n_fft),n_fft);
    Py8 = y8.*conj(y8) / n_fft;
end
xmed = mean([x1 x2 x3 x4],2);
xmed_v = mean([x5 x6 x7 x8],2);
Pymed = mean([Py1 Py2 Py3 Py4],2);
Pymed_v = mean([Py5 Py6 Py7 Py8],2);
figure;
plot(timp(1:nr_cit),xmed(1:nr_cit),'k');
hold on;
plot(timp(1:nr_cit),xmed_v(1:nr_cit),'r');
figure;
plot(f(n_plot1:n_plot2),Pymed(n_plot1:n_plot2),'k');
hold on;
plot(f(n_plot1:n_plot2),Pymed_v(n_plot1:n_plot2),'r');
ymed = fft(xmed(1:n_fft),n_fft);
Pymed1 = ymed.*conj(ymed) / n_fft;
ymed_v = fft(xmed_v(1:n_fft),n_fft);
Pymed1_v = ymed_v.*conj(ymed_v) / n_fft;
figure;
plot(f(n_plot1:n_plot2),Pymed1(n_plot1:n_plot2),'k');
hold on;
plot(f(n_plot1:n_plot2),Pymed1_v(n_plot1:n_plot2),'r');
% Se elimina intervalele ce nu contin unda reflectata
ymed(1:7000) = 0;
ymed(8000:14000) = 0;
ymed(15000:length(ymed)) = 0;
ymed_v(1:7000) = 0;
ymed_v(8000:14000) = 0;
ymed_v(15000:length(ymed)) = 0;
iymed = real(ifft(ymed));
iymed_v = real(ifft(ymed_v));
figure;
plot(timp(1:n_plot_timp),iymed(1:n_plot_timp),'k');
hold on;
plot(timp(1:n_plot_timp),iymed_v(1:n_plot_timp),'r');
iymed0 = real(ifft(ymed - ymed_v));
plot(timp(1:n_plot_timp),iymed0(1:n_plot_timp),'b');

```

ANEXA 4.5

Program : „a6_med_wave.m”

- **Calculul transformării wavelet rbio3.1.;**
- **Afisarea diagramelor aproximării și detaliilor în domeniu continuu și discret.**

```
load iymed01024m
viy = iymed01024(1:512)';
lv = length(viy);
nivele = 9;
tip_wl = 'rbio3.1';
subplot(311), plot(viy);title('Semnal analizat');
set(gca,'Xlim',[0 lv])
[c,l] = wavedec(viy,nivele,tip_wl);
cfd = zeros(nivele,lv);
for k = 1:nivele
    d = detcoef(c,l,k);
    d = d(ones(1,2^k),:);
    cfd(k,:) = wkeep(d(:)',lv);
end
cfd = cfd(:);
I = find(abs(cfd)<sqrt(eps));
cfd(I)=zeros(size(I));
cfd = reshape(cfd,nivele,lv);
subplot(312), colormap(pink(64));
img = image(flipud(wcodemat(cfd,64,'row')));
set(get(img,'parent'),'YtickLabel',[]);
title('Coeficientii transformarii discrete')
ylabel('Nivel')
subplot(313)
ccfs = cwt(viy,1:32,tip_wl,'plot');
title('Coeficientii transformarii continue')
colormap(pink(64));
ylabel('Scara')
figure;
subplot(8,1,1);
plot(ccfs(1,:),'k');
hold on
subplot(8,1,2);
plot(ccfs(2,:),'k');
subplot(8,1,3);
plot(ccfs(3,:),'k');
subplot(8,1,4);
plot(ccfs(4,:),'k');
subplot(8,1,5);
plot(ccfs(5,:),'k');
subplot(8,1,6);
plot(ccfs(6,:),'k');
subplot(8,1,7);
plot(ccfs(7,:),'k');
subplot(8,1,8);
plot(ccfs(8,:),'k');
```


BIBLIOGRAFIE

1. Aarrestad, T. V., Kyllingstad, A., Loads on drill-pipe during jarring operations, SPE Drilling Completion, Dec. 1994, pg.271-275
2. Achenbach, J.D., Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1999.
3. Agalovyan L.A., The Solution Asymptotics of Classical and Nonclassical, Static and Dynamic Boundary-Value Problems for Thin Bodies, International Applied Mechanics, Volume 38, Nr 7, July 2002, pp. 765-782
4. Alecsandrov, E. V., Sokolinski, V. B., Teorie aplicată și calculul sistemelor percutante, Editura Nauka, Moscova, 1969
5. Anderson, S. P., Higher-order rod approximations for the propagation of longitudinal stress waves in elastic bars, Journal of Sound and Vibration Volume 290, Issues 1-2 , 21 February 2006, Pages 290-308
6. Arnold, V. I. Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1989.
7. Auerbach, D., Colliding rods: Dynamics and relevance to colliding balls, American Journal of Physics , 06/1994, Volume 62, Issue 6, pp. 522-525
8. Avram, L., Tehnologia forării sondelor, Editura Universal Cartfil, Ploiești. 1996
9. Bacon, C., Separation of waves propagating in an elastic or viscoelastic Hopkinson pressure bar with three-dimensional effects, International Journal of Impact Engineering ,Volume 22, Issue 1 , January 1999, Pages 55-69
10. Bai , Y. P., Lei, Y. J., The model of impact waves in a circular elastic bar and application in measuring dynamic characteristic of microstructure, Applied Mathematics and Computation Volume 173, Issue 2, 15 February 2006, Pp 1350-1356
11. Benatar, A. , Rittel, D., Yarin, A. L., Theoretical and experimental analysis of longitudinal wave propagation in cylindrical viscoelastic rods, Journal of the

12. Bishop, T. C.; Cortez, R.; Zhmudsky, O. O., Investigation of bend and shear waves in a geometrically exact elastic rod model, *Journal of Computational Physics*, Volume 193, Issue 2, p. 642-665., 2004
13. Blaj, Liliana, Modelarea comportării elasto – vâsco – plastice a materialelor, Editura Minton, Timișoara, 1999
14. Boianțiu, D., Caragheorghe, E., ș. a., *Mecanica și rezistența materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
15. Boresi, A. P., Chong, K. P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, 2nd Edition, New York, Wiley, 1999.
16. Brîndeu, L., Buzilă, T., Herișanu, N., *Dinamica structurilor mecanice*, Editura Politehnica, Timișoara, 2000
17. Brindeu L., **Hule V.**, Tătaru B., Hora H., *Vibrațiile longitudinale ale barelor vâsco-elastice cu mase concentrate la extremități*, *Analele Univ. Oradea* 2004, Fascicola Inginerie Managerială și Tehnologică, Secțiunea: Mecanică, 2004, ISSN 1583-0691, (CD)
18. Brindeu L., **Hule V.**, Petcovici O., *Model dinamic al ciocnirii considerând propagarea undelor de tensiune în corpul deformabil*, *Analele Universității din Oradea*, Secțiunea Mecanică, 2003, ISSN 1583-0691, (CD), pag. 29
19. Brindeu L., **Hule V.**, Petcovici O., *Dynamic model of impact, considering the propagation of the stress waves in the deformable body*, *Buletinul științific al Universității Politehnica din Timișoara*, Seria Mecanica, Tom 48, Fascicola 1, 2003
20. Brindeu L., **Hule V.**, *Considerații privind rezonanța în sistemele liniare*, *Lucrările celui de-al XV-lea Simpozion Național cu participare internațională, Robotica 2000*, Oradea, 2000, ISBN 973-8083-67-2
21. Brîndeu, L., *Mecanică – Cinematică*, Inst. Politehnic „Traian Vuia”, Timișoara, 1977
22. Brîndeu, L., *Mecanică – Dinamică*, Inst. Politehnic „Traian Vuia”, Timișoara, 1975
23. Brîndeu, L., *Vibrații și vibropercuții. Bazele mecanicii vibrațiilor și a vibropercuțiilor*, Editura Politehnica, Timișoara, 2001

24. Brîndeu, L., Vibrații. Mecanica analitică. Vibrații mecanice, Universitatea Tehnică din Timișoara, Timișoara, 1994
25. Bussac, Marie-Noëlle , Collet, P., Gary, G. and Othman, R., An optimization method for separating and rebuilding one-dimensional dispersive waves from multi-point measurements. Application to elastic or viscoelastic bars, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 50, Issue 2 , February 2002, Pages 321-349
26. Buzdugan, Gh., Blumenfeld, M., Tensometrie electrică rezistivă, Editura Tehnică, București, 1966
27. Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeș, M., Vibrații mecanice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
28. Buzdugan, Gh., Rezistența materialelor, Editura Academiei R.S.R., București, 1986
29. Casem, D. T.; Fourny W.; Chang P., Wave separation in viscoelastic pressure bars using single-point measurements of strain and velocity, Polymer Testing, Volume 22, Number 2, April 2003, pp. 155-164
30. Chiffolleau, G. J. A.; Steinberg T.A.; Veidt M, Reflection of structural waves at a solid/liquid interface, Ultrasonics, Volume 41, Number 5, July 2003, pp. 347-356
31. Cioară, T., Tehnici experimentale în inginerie. Traductoare și senzori, Editura Politehnica Timișoara, 1999, ISBN 9739389-33-3
32. Cioară, T., Vibration Monitoring of Mechanical System. Fault Diagnosis and Vibration Level Reduction, Ed. University of South Carolina Columbia U. S. A, 1999, ISBN 973-9485-09-X
33. Cioară, T., Vibrații și zgomote. Note de curs, Ediție electronică, Universitatea Politehnica Timișoara
34. Cox, Stephen E., Nonlinear Stability of Traveling Waves for a Model of Viscoelastic Materials with Memory, Thesis (PH.D.), UNIVERSITY OF MARYLAND COLLEGE PARK, 1988
35. Cross, R., "The bounce of a ball," American Journal of Physics, Volume 67, 1999, pp. 222-227
36. Darabont, A., Văiteanu, D., ș. a., Șocuri și vibrații. Aplicații în tehnică, Editura

37. Davies, R. M., A Critical Study of the Hopkinson Pressure Bar, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, Volume 240, Issue 821, pp. 375-457, 01/1948
38. Davis, G. M., Nosratinia, A., Wavelet-based Image Coding: An Overview, www.geoffreydavis.com, 2001
39. De Silva, Clarence W., Vibration. Fundamentals and Practice, Library of Congress Cataloging in Publication Data, USA, 2000
40. Del Pedro, M., Pahud, P., Vibrations Mechanics. Liniar discrete systems, Published by Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991
41. Dem'yanov, Yu., On the theory of longitudinal and transverse vibrations of preliminary stressed beams and rods, Doklady Physics, Volume 50, Number 4, April 2005, pp. 184-187
42. Doyle, J.F., Wave Propagation in Structures, Springer, 2nd edition, 1997
43. Dreiden, G.; Porubov, A.; Samsonov, A.; Semenova, I., Reflection of a longitudinal strain soliton from the end face of a nonlinearly elastic rod, Technical Physics, Volume 46, Number 5, May 2001, pp. 505-511
44. Dual, J., Experimental Methods in Wave Propagation in Solids and Dynamic Viscometry, Diss. ETH No. 8659, Zürich, 1988
45. Dübbel, Manualul Inginerului Mecanic. Fundamente, Editura Tehnică, București, 1998
46. El-Raheb, M., Wave propagation in a weak viscoelastic layer produced by prescribed velocity on the boundary, Journal of Sound and Vibration Volume 275, Issues 1-2, 6 August 2004, Pages 89-106
47. Ertunc, H. M., Loparo, K. A., A decision fusion algorithm for tool wear condition monitoring in drilling, International Journal of Machine Tools & Manufacture, no. 41, p.1347 – 1362, Elsevier Science Ltd, 2001
48. Ertunc, H. M., Loparo, K. A., Ocak, H., Tool wear condition monitoring in drilling operations using hidden Markov models (HMMs), International Journal of Machine

49. Escalona, J. L., Mayo, J. and Domínguez, J., A new numerical method for the dynamic analysis of impact loads in flexible beams, *Mechanism and Machine Theory*, Volume 34, Issue 5, July 1999, Pages 765-780
50. Färm, J., Split Hopkinson pressure bar technique for dynamic calibration on force transducers, XVII IMECO World Congress Metrology in the 3rd Millennium, June 22-27, 2003, Dubrovnik, Croatia
51. Fazio, C.; Guastella, I.; Sperandeo-Mineo, R.M.; Tarantino, G., Measuring longitudinal wave speed in solids: two methods and a half, *European Journal of Physics*, Volume 27, Number 4, July 2006, pp. 687-701
52. Field, J. E., Walley, S. M., Bourne, N. K., Huntley, J. M., Review of Experimental Techniques for High Rate Deformation Studies, Part of the Keynote Lecture delivered at "Acoustics and Vibrations ASIA 98", Singapore, 11-13 November 1998, pp. 9-38
53. Field, J.E., Proud, W.G., Walley, S.M., Goldrein, H.T., "Review of experimental techniques for high rate deformation and shock studies" in "New Experimental Methods in Material Dynamics and Impact", ed. W.K. Nowacki and J.R. Klepaczko, publ. Warsaw, Poland, Institute of Fundamental Technological Research: pp. 109-177, 2001
54. Georgin J. F.; Reynouard J.M., Modeling of structures subjected to impact: concrete behaviour under high strain rate, *Cement and Concrete Composites*, Volume 25, Number 1, January 2003, pp. 131-143
55. Ghinea, M., Firețeanu, V., - MATLAB. Calcul numeric. Grafică. Aplicații, Editura Teora, București, 1997
56. Goldsmith, W., Impact. The theory and physical behavior of colliding solids, Edward Arnold (Publishers) Ltd, London, 1960
57. Gorham, D. A.; Wu, X. J., An empirical method for correcting dispersion in pressure bar measurements of impact stress, *Measurement Science and Technology*, Volume 7, Issue 9, pp. 1227-1232 (1996)
58. Graff, K. F. Wave Motion in Elastic Solids. New York: Dover, 1991
59. Green, A. E., Zerna, W. Theoretical Elasticity, 2nd Ed., New York: Dover, 1992.

60. Green, A. E.; Laws, N.; Naghdi, P. M., A linear theory of straight elastic rods, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 25, Issue 4, p.285-298, 1967
61. Groșanu, I., Brîndeu, L., *Vibrații mecanice*, Institutul Politehnic „Traian Vuia”, Timișoara, 1986
62. Gugan, D., Inelastic collision and the Hertz theory of impact, *American Journal of Physics*, Vol. 68, No. 10, pp. 920-924, October 2000
63. Haimovici, M., *Teoria elasticității*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1969
64. Halanay, A., *Ecuatii diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972
65. Harris, C. M., Crede C. E., - *Șocuri și vibrații*, Vol. I, II, III, Editura Tehnică, București, 1968 – 1969
66. Harris, C. M., Piersol, A.G., – *Shock and Vibrations Handbook*, 5th Edition, McGraw–Hill, New York, 2002
67. Harrison, H. R., Nettleton, T., *Advanced Engineering Dynamics*, John Wiley&Sons Inc., New York, 1997
68. Harrison, H. R., Nettleton, T., *Principles of Engineering Mechanics*, 2nd Edition, Edward Arnold, London, 1994
69. Henderson, L. F., On the refraction of shock waves, *Journal of Fluid Mechanics* (ISSN 0022-1120), vol. 198, Jan. 1989, p. 365-386.
70. Hessel, R., Perinotto, A. C., Alfaro, R. A. M., Freschi, A. A., Force-versus-time curves during collisions between two identical steel balls, *American Journal of Physics*, Vol. 74, No. 3, pp. 176–179, 03/2006
71. Hillström, L. , Mossberg, M. and Lundberg, B., Identification of complex modulus from measured strains on an axially impacted bar using least squares, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 230, Issue 3 , 24 February 2000, Pages 689-707
72. **Hora (Hule) V.**, Bodea R., Determinarea coeficientului de restituire pe baza teoriei generalizate a deformațiilor locale de contact, *Analele Universității din Oradea, Fascicula Mecanică*, 1996, pag. 57-60
73. Hu, B., Eberhard, P., Symbolic computation of longitudinal impact waves , *Computer*

74. **Hule V.**, Brindeu L., Blaga F., Bodea R., Rezolvarea elementară a ecuațiilor de undă corespunzătoare ciocnirii plane, Analele Univ. Oradea 2004, Fascicola Inginerie Managerială și Tehnologică, Secțiunea: Mecanică, 2004, ISSN 1583-0691, (CD)
75. **Hule V.**, Brindeu L., Blaga F., Bodea R., Ciocnirea corpurilor bazată pe propagarea undelor longitudinale. Construirea diagramelor ondulatorii, Analele Univ. Oradea 2004, Fascicola Inginerie Managerială și Tehnologică, Secțiunea: Mecanică, 2004, ISSN 1583-0691, (CD)
76. **Hule, V.**, Trip, D., Abrudan, G., Studiu experimental al propagării undelor prin bare de secțiune circulară, Analele Univ. Oradea 2006, Fascicola Inginerie Managerială și Tehnologică, Secțiunea: Mecanică, 2006, ISSN 1583-0691, (CD)
77. **Hule, V.**, Studiul ciocnirii corpurilor pe baza deformațiilor locale de contact, Referat nr. 2, Universitatea Tehnică Timișoara, 2000
78. Hütte, Manualul inginerului. Fundamente, Editura Tehnică, București, 1995
79. Ignea, A., Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice, Editura de Vest Timisoara, 1996
80. James, M. L., Smith, G. M., Wolford, J. C., Whaley, P. W., Vibration of Mechanical and Structural Systems: with microcomputer applications. Copyright by Harper Collins College Publishers, New York, 1994
81. Jiang, Z., Wang, H., Fei, B., Research into the application of fractal geometry in characterising machined surfaces, Xi'an Jiaotong University, People's Republic of China, Intenational Journal of Machine tools & Manufacture. Elsevier Science Ltd, 2001
82. Josso, B., Burton, D.R., Lalor, M.J., Wavelet strategy for surface roughness analysis and characterisation, Liverpool Jhon Moores University, UK, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science, 2001
83. Journaux, S., Gouton, P., Thauvin, G., Evaluating Creep in metals by grain boundary extraction using directional wavelets and mathematical morphology Universite de Bourgogne, France, ALSTOM energy and Serma Technologies, Belfort, France.

84. Juhchin, A., et al. A new dynamic model for drilling and reaming processes. International Journal of the Machine Tools & Manufacture, no. 42, Elsevier Science Ltd, 2002
85. Kaiser, M. A.; Wilson, L. T.; Wicks, A. L., Experimental Techniques in Hopkinson Bar Testing. American Physical Society, Conference on Shock Compression of Condensed Matter June 28-July 2, 1999 Snowbird, Utah
86. Kari, L., Axially symmetric modes in finite cylinders—the wave guide solution. Wave Motion, Volume 37, Issue 2, February 2003, Pages 191-206
87. Klepaczko, J. R.; Matysiak, S. J., Analysis of longitudinal impact on semi-infinite circular bars and tubes. Appendix no. 2, Final Technical Report Metz Univ. (France), 10/1992
88. Knapp J.; Altmann E.; Niemann J.; Werner K.-D., Measurement of shock events by means of strain gauges and accelerometers, Measurement, Volume 24, Number 2, September 1998, pp. 87-96
89. Kolymbas, D., Longitudinal impact on piles, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Volume 10, Issue 5 , July 1991, Pages 264-270
90. Krawczuk, M., Grabowska, J., Palacz, M., Longitudinal wave propagation. Part I - Comparison of rod theories, Journal of Sound and Vibration, Volume 295, Issues 3-5 , 22 August 2006, Pages 461-478
91. Krenk S., Dispersion-corrected explicit integration of the wave equation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 191, Number 8. 21 December 2001, pp. 975-987
92. Lari, I., Garnitura de foraj. Bazele științifice și practica exploatării. Editura Tehnică, București, 1961
93. Laverty, R., Mechanics of layered cylindrical elastic waveguides, Dissertation, Colorado State University, Fall 2001
94. Lee, J. P., Elastic waves produced by longitudinal impact on a system with symmetrically branched rods, International Journal of Solids and Structures Volume 8, Issue 5, May 1972, Pages 699-707

95. Lee, C. K. B.; Crawford, R. C., A new method for analysing dispersed bar gauge data, *Measurement Science and Technology*, Volume 4, Issue 9, pp. 931-937 (1993)
96. Lega J.; Goriely A., Pulses, fronts and oscillations of an elastic rod, *Physica D*, Volume 132, Number 3, 1 August 1999, pp. 373-391
97. Lembo M., On the free shapes of elastic rods, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, Volume 20, Number 3, May 2001, pp. 469-483
98. Lembo M., On the stability of elastic annular rods. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 40, Number 2, January 2003, pp. 317-330
99. Leroy, B., Collision between two balls accompanied by deformation: A qualitative approach to Hertz's theory, *American Journal of Physics*, Vol. 53, pp. 346-349, 1985
100. Levy, M., Bass, H., Stern, R., *Experimental Methods In The Physical Sciences*, Volume 39 : Modern Acoustical Techniques for the Measurement of Mechanical Properties, Academic Press Inc., New York, 2001
101. Li, B., Chen, Y., Zhang, H., Travelling Wave Solutions for Generalized Pochhammer-Chree Equations, *Z. Naturforsch.* 57 a, 874–882, 2002
102. Lundberg, B., Carlsson, J., Sundin, K. G., Analysis of elastic waves in non-uniform rods from two-point strain measurement, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 137, Issue 3 , 22 March 1990, Pages 483-493
103. Lurie, K. A., Low Frequency Longitudinal Vibrations of an Elastic Bar Made of a Dynamic Material and Excited at One End, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 251, Issue 1 , 1 November 2000, Pages 364-375
104. Macovei, N., *Echipament de foraj*, Editura Universității din Ploiești, 1996
105. Mangeron, D., Irimiciuc, N., *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, Vol.I-III, Editura Tehnică, București, 1981
106. Michelotti, Leo. *Intermediate Classical Dynamics with Applications to Beam Physics*. New York: Wiley, 1995.
107. Miklowitz, J., Transient Wave Propagation in Elastic Rods and Plates. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 68, p.1190,1963

108. Nayfeh, A. H., Abdelrahman, W. G., An approximate model for wave propagation in rectangular rods and their geometric limits, *Journal of Vibration and Control*, Number 6, 2000, pp. 3-17
109. Nicolescu, L.J., Stoka, M. I., *Mathematics for Engineers*, Vol. I, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, English Edition, 1974
110. O'Reilly, O.M., On coupled longitudinal and lateral vibrations of elastic rods, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 247, Number 5, November 2001, pp. 835-856
111. Othman, R., Blanc, R.H., Bussac, M.N., Collet, P., Gary, G., Identification of the dispersion relation in rods, *Comptes Rendus Mecanique* Volume 330, Issue 12 , December 2002, Pages 849-855
112. Othman, R., ș.a., Séparation et reconstruction des ondes dans les barres élastiques et viscoélastiques à partir de mesures redondantes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, Volume 329, Issue 5 , May 2001, Pages 369-376
113. Palmov, V., *Vibration of elasto – plastic Bodies*, Springer – Verlag, New York 1998
114. Ponomariov, S. D., Biderman, V. L., ș. a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, Vol. III, Editura Tehnică, București, 1964
115. Popescu, I., *Fizică*, Vol.I, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
116. Popov, E. P., *Engineering Mechanics of Solids*, Prentice Hall, 2nd Edition, 1998
117. Popovics, J. S. , Rose, J. L., An approach for wave velocity measurement in solid cylindrical rods subjected to elastic impact, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 33, Issue 26 , November 1996, Pages 3925-3935
118. Posea, N., Anghel, A., Popa, I., *Probleme de dinamica structurilor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1994
119. Ramamurti, V., Ramanamurti, P. V., Impact on short length bars, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 53, Issue 4 , 22 August 1977, Pages 529-543
120. Romkes, A., Oden, J. T., Adaptive modeling of wave propagation in heterogeneous elastic solids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 193, Issues 6-8 , 13 February 2004, Pages 539-559

121. Roșca, M., Contribuții la modelarea transferului de căldură în sondele geotermale, teza de doctorat, Universitatea din Oradea, 1998
122. Saccomandi G., Elastic rods, Weierstrass' theory and special travelling waves solutions with compact support, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 39, Number 2, March 2004, pp. 331-339
123. Sackman J. L., Goldsmith, W., Longitudinal impact on a circular cylindrical tube International Journal of Solids and Structures, Volume 8, Issue 2 , February 1972, Pages 261-267
124. Sankin Y.N.; Yuganova N.A., Longitudinal vibrations of elastic rods of stepwise-variable cross-section colliding with a rigid obstacle, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Volume 65, Number 3, 2001, pp. 427-433
125. Seemann, W., Transmission and reflection coefficients for longitudinal waves obtained by a combination of refined rod theory and FEM, Journal of Sound and Vibration, Volume 198, Issue 5, 19 December 1996, Pages 571-587
126. Seifried, R., Schiehlen, W., Eberhard, P., Numerical and experimental evaluation of the coefficient of restitution for repeated impacts, International Journal of Impact Engineering Volume 32, Issues 1-4, December 2005, Pages 508-524, Fifth International Symposium on Impact Engineering
127. Shawagfeh, N., Kaya, D., Series solution to the Pochhammer-Chreeequation and comparison with exact solutions, Computers & Mathematics with Applications Volume 47, Issue 12, June 2004, Pages 1915-1920
128. Silaș, Gh., Brândeșu, L., Sisteme vibropercutante, Editura Tehnică, București, 1986
129. Silaș, Gh., Mecanică. Vibrații mecanice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
130. Silaș, Gh., Rădoi, M., Brândeșu, L. ș. a., Culegere de probleme de vibrații mecanice, Vol. II, Editura Tehnică, București, 1973
131. Siviour, C., Measurements of strain propagation in Hopkinson bar specimens. American Physical Society, 14th APS Topical Conference on Shock Compression of Condensed Matter, July 31-August 5, 2005
132. Smith, W. S., The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. Second

133. Smoller, J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1994.
134. Stevenson, M. G.; Campbell, J. D., An optical method for direct measurement of strain in a torsional Hopkinson-bar apparatus, *Journal of Strain Analysis*, vol. 10, July 1975, p. 172-179.
135. Stronge, W. J., Contact Problems for Elasto-Plastic Impact in Multi-Body Systems. Impacts in Mechanical Systems. Analysis and Modelling, Edited by B. Brogliato, *Lecture Notes in Physics*, vol. 551, p.189, 2000
136. Şabac, Gh., Ion, V., *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică. București, 1981
137. Tănăsescu, F.,T., Stanciu, V., Nițu, S., Nițu, C., *Agenda tehnică*, Editura Tehnică, București, 1990.
138. Taweel H.; Dong S.B.; Kazic M., Wave reflection from the free end of a cylinder with an arbitrary cross-section, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 37, Number 12, March 2000, pp. 1701-1726
139. Teodorescu, P. P., *Dinamica corpurilor liniar – elastice*, Editura Academiei Române. București, 1972
140. Teodorescu, P. P., Ilie, V., *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*, Vol. I - III, Editura Dacia, Cluj Napoca, 1976
141. Teshima, T., Kado, A., Miyoshi, S., Yokoyama, T., Hasegawa, A., The Separation of Multipath Reflection Waves in Water, *Japanese Journal of Applied Physics* , Vol.39, 2000 (3188-3192)
142. Thomson, T. W., *Theory of Vibration with Application*, Chapman & Hall, New York, 1993
143. Tkach, K. B.; Sher, E.N., Bending Vibrations of Long Rod during Face Impact, *Journal of Mining Science*, Volume 38, Number 2, March 2002, pp. 156-160
144. Tsai, D. M., Wu, S.K., Chen, M.C., Optimal Gabor filter design for texture segmentation using stochastic optimization, *Image and Vision Computing*, Elsevier

145. Twu S.-W.: Duann J.-J., An approach for eliminating re-reflected waves, *Ocean Engineering*, Volume 22, Number 5, July 1995, pp. 421-437
146. Tyas A.; Watson A.J., An investigation of frequency domain dispersion correction of pressure bar signals, *International Journal of Impact Engineering*, Volume 25, Number 1, January 2001, pp. 87-101
147. Tyas, A., Watson, A. J., Experimental Evidence of Pochhammer-Chree Strain Variations in Elastic Cylinders, *Experimental Mechanics*, Vol. 40, No. 3, 331-337, 2000
148. V. Ramamurti and P. V. Ramanamurti, Impact on short length bars, *Journal of Sound and Vibration* , Volume 53, Issue 4 , 22 August 1977, Pages 529-543
149. Valeš F., Morávka Š., Brepta R., Červ J., Wave propagation in a thick cylindrical bar due to longitudinal impact, *JSME International Journal (A)*, Japan, Vol. 39, No. 1, 1996, pp. 60-70.
150. Vladimirov, V.,S., *Ecuatiile fizicii matematice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980
151. Vollmann, J., Profunser, D.M., Dual, J., Device for filtering electrical high frequency signals, *International Patent Application*, PCT/CH 02/00605, ETH Zürich, Switzerland, November 2002
152. Warrington, D. C., Development and potential of the wave equation in closed form as applied to pile dynamics, *Fifth International Conference on the Application of Stress-Wave Theory to Piles*, 11-13 September, 1996, Orlando, Fl.
153. Wei H.; Yida Z., Finite element analysis on collision between two moving elastic bodies at low velocities, *Computers and Structures*, Volume 57, Number 3, November 1995, pp. 379-382
154. Widehammar, S., Gradin , P. A., Lundberg, B., Approximate determination of dispersion relations and displacement fields associated with elastic waves in bars Method based on matrix formulation of Hamilton's principle, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 246, Issue 5, October 2001, Pages 853-876
155. Wright, T. W., Elastic wave propagation through a material with voids.

156. Xiao, S. J.; Jiang, X. Q.; Blunt, L.; Scott, P. J., Comparison study of the biorthogonal spline wavelet filtering for areal rough surfaces, University of Huddersfield, UK
157. Xu, Z-W.; Wu, J.; Wu, Z-S., Statistical temporal behaviour of pulse wave propagation through continuous random media, Waves in Random Media, Volume 13, Number 1, 2003, pp. 59-73
158. Zaciú, R., Prelucrarea digitală a semnalelor, Editura Albastră, Cluj Napoca, 2003
159. Zemanek, J., An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 51 (1), pp. 265-283, 1972
160. Zervakis, M., E., Sundararajan, V., Parhi, K., K., Vector processing of wavelet coefficients for robust image denoising, Technical University of Crete, Greece University of Minnesota, Minneapolis, USA, Image and Vision Computing, Elsevier Science 2001
161. Zhao P.J.; Lok T.S., A new method for separating longitudinal waves in a large diameter Hopkinson bar. Journal of Sound and Vibration, Volume 257. Number 1, October 2002, pp. 119-130
162. Zhao, H., Gary, G., A three dimensional analytical solution of the longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar. Application to experimental techniques, Journal of the Mechanics and Physics of Solids Volume 43, Issue 8 , August 1995, Pages 1335-1348
163. ***** Catalog, The Measurements and Automation, National Instruments, 2004
164. ***** Mediu de programare MATLAB[®] V 6.0.0.88.R12, Licență Universitatea din Oradea