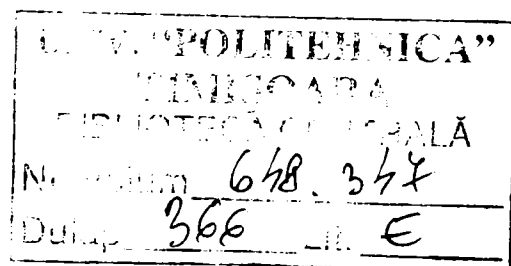


UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MECANICĂ
CATEDRA DE REZISTENȚA MATERIALELOR

ING. PÎRVULESCU LIVIU DANIEL

TEZĂ DE DOCTORAT

STUDII DE MECANICA RUPERII PENTRU ALIAJE UȘOARE



Conducător științific:

Prof. dr. ing. EurIng. **TIBERIU DIMITRIE BABEU**
Membru fondator al Academiei de Științe Tehnice din România

2006

PREFAȚĂ

Dezvoltarea rapidă a tehnicii moderne, prin construcția navelor cosmice, prin motoare cu performanțe deosebite, prin procese tehnologice care se desfășoară în condiții de temperatură și presiune ridicată sau în medii corozive, este strâns legată de folosirea unor materiale adecvate și de îmbunătățirea substanțială a proprietăților acestora.

În lucrarea de față, se aduce un aport important la studiul mecanicii ruperii pentru aliaje ușoare. Din această categorie s-a ales, pentru studiu, aliajul de aluminiu cel mai des folosit în tehnică.

În ansamblul ei, teza reprezintă o sinteză a activității de cercetare depusă sub coordonarea atentă și competentă a conducătorului științific, Prof. dr. ing. EurIng. Tiberiu Dimitrie Babeu, membru fondator al Academiei de Științe Tehnice din România, căruia îi mulțumesc pentru înțelegerea și răbdarea dovedită ori de câte ori a fost solicitat, precum și pentru încurajările și sprijinul acordat în timpul elaborării acestei lucrări, mai ales în momentele de cumpănă.

Exprim profunde mulțumiri d-lor conf. dr. ing. Liviu Marșavina și Ionel Brediceanu care, cu pasiune, pricepere și înalt profesionalism, mi-au deschis noi perspective privind Mecanica Ruperii aplicate la aliajele ușoare și m-au ajutat la realizarea părții experimentale a lucrării.

Cele mai calde mulțumiri exprim, de asemenea, d-lui prof. dr. ing. Nicolae Neguț, tuturor cadrelor didactice de la Catedra de Rezistența Materialelor și personalului tehnic al acesteia care m-au sprijinit în elaborarea lucrării.

Tot timpul voi avea o recunoștință deosebită pentru domnii prof. dr. ing. Nicolae Faur, Ion Dunitru și C-tin Cristuinea, care mi-au îndrumat primii

pași în deslușirea tainelor Mecanicii Ruperii și analiza câmpului de tensiune și deplasări cu ajutorul Metodei Elementului Finit.

Gândurile mele de mulțumire se îndreaptă spre dascălii de la Catedra de Mașini Hidraulice și Pneumatice, oameni de o deosebită probitate morală și profesională, pentru sprijinul acordat în formarea mea ca inginer mecanic și indicațiile prețioase pe care le-am primit pentru finalizarea lucrării.

Mulțumesc d-lor prof. dr. ing. Aurel Gh. Gherman și prof. dr. ing. EurIng. Tiberiu Ștefan Mănescu pentru sugestiile și sfaturile acordate la redactarea finală a lucrării.

Un gând de înaltă prețuire îl adresez d-lui prof. dr. ing. Liviu Eugen Anton care m-a pus în legătură cu tehnica modernă, prin natura serviciului și, de asemenea, le mulțumesc colegilor de servicii care au fost mereu alături de mine, m-au ajutat și m-au înțeles în tot acest timp de cercetare și elaborare a lucrării.

Nu în ultimul rând, doresc să exprim cele mai calde mulțumiri și adâncă recunoștință *familiei mele, soția și fiul, părinților și socrilor mei* și nașilor mei pentru sprijinul moral și material acordat.

Aduc calde mulțumiri tuturor celor care au dorit să rămână în anonimat, punându-și la dispoziție talentul și cunoștințele lor și m-au ajutat la realizarea acestei lucrări cu propuneri, recomandări și sfaturi, îndreptând greșelile și contribuind, în acest fel, la reușita acestei teze.

ing. Liviu Daniel Pîrvulescu

CUPRINS

CUPRINS.....	1
Capitolul 1. INTRODUCERE	
1.1. Contextul industrial al ruperii mecanice	2
1.2. Studii de mecanica ruperii pentru aliaje ușoare	4
1.3. Obiectul și problemele mecanicii ruperii.....	5
1.4. Domenii de utilizare a aliajelor ușoare	7
1.5. Aluminii și aliaje din aluminii	12
Capitolul 2. STADIUL ACTUAL AL UTILIZĂRII CONCEPTELOR DE MECANICA RUPERII PENTRU ALIAJE UȘOARE	
2.1. Generalități	25
2.2. Moduri de rupere. Fazele ruperii	25
2.3. Fisuri în material. Tipuri de fisuri.....	29
2.4. Modul de propagare a unei fisuri.....	34
2.5. Istoricul dezvoltării standardelor de mecanica ruperii	35
Capitolul 3 NOȚIUNI TEORETICE DE MECANICA RUPERII PENTRU ALIAJE UȘOARE	
3.1. Noțiuni introductive	39
3.2. Analiza câmpului de tensiune în vecinătatea unei fisuri.....	42
3.2.1. Definiția câmpului de tensiuni	42
3.2.2. Calculul deplasărilor	53
3.3. Alegerea tipului de aliaj pe baza conceptelor de mecanica ruperii	63
Capitolul 4. METODE NUMERICE UTILIZATE ÎN STUDIUL MECANICII RUPERII PENTRU ALIAJE UȘOARE	
4.1. Noțiuni introductive.....	68
4.2. Principiul metodei elementului finit	73
4.3. Modelarea singularității vârfului fisurii	77
4.3.1. Modelarea singularității vârfului fisurii utilizând elemente finite triunghiulare	78
4.3.2. Elemente finite izoparametrice	85
4.4. Calculul parametrilor din mecanica ruperii liniar elastice	92
4.5. Etape de rezolvare a unei probleme cu ajutorul metodei elementului finit.....	96
4.6. Contribuții privind starea de tensiune din elemente aparținând domeniului auto	100
4.6.1. Studiul stării de tensiune și deformație dintr-o fuzetă din domeniul auto.....	100
4.6.2. Analiza numerică a stării de tensiune dintr-un braț	108
4.6.3. Contribuții privind durabilitatea brațului	113
Capitolul 5. ÎNCERCĂRI EXPERIMENTALE DE DETERMINARE A PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII	
5.1. Încercările mecanice ale materialelor	124
5.2. Determinarea caracteristicilor mecanice.....	125
5.3. Determinarea limitei de prag a propagării fisurii de oboseală	132
5.4. Determinarea tenacității la rupere. Metoda K_{IC}	136
Capitolul 6. CONCLUZII ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE	
Concluzii și contribuții personale	146
Capitolul 7. BIBLIOGRAFIE	
Bibliografie	149

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

1.1 CONTEXTUL INDUSTRIAL AL RUPERII MECANICE

Mecanica Ruperii Materialelor, constituită în ultimele decenii ca un domeniu distinct de cercetare, la intersecția cu alte discipline clasice ale mecanicii mediului continuu (teoria elasticității și plasticității) și ale fizicii solidului, își propune să descrie cantitativ diferite ipostaze ale fenomenului ruperii materialelor.

Ruperea este un proces complex de deformare în urma căruia se separă regiuni ale materialului, iar capacitatea portantă a structurii descrește la zero sub anumite încărcări, putând ajunge la distrugerea totală sau parțială a structurii [138].

Teoria elasticității liniare, acceptă printre alte ipoteze și pe cea referitoare la omogenizarea și izotropia materialelor, lucru ce nu mai este valabil în cazul structurilor sudate sau a pieselor turnate. Cu ajutorul microscopului electronic s-a evidențiat faptul că în zonele în care rețeaua cristalină este puternic distorsionată, apare concentrația dislocațiilor a căror mișcare și coalescență poate duce la rupere. Asemenea defecte de material pot să existe și în elementele de rezistență nesolicitate care nu au fost supuse unor tratamente termice sau mecanice.

Ruperile mecanice au cauzat de-a lungul timpului multe pagube materiale și pierderi de vieți omenești. Multe accidente, au arătat că prezența acestor defecte în anumite împrejurări pot duce la ruperi fragile (brutale), în unele cazuri catastrofale.

Ca exemple semnificative, putem aminti ruperea în anul 1919 a unui rezervor plin cu melasă. Prin ruperea acestui rezervor, 7,5 milioane de litri de melasă au fost deversați în râul Boston (SUA) iar 12 persoane au decedat.

Ruperea numeroaselor poduri, în special în condițiile unor temperaturi joase au produs multe victime. Dintre acestea putem aminti podul Vierendeel din Belgia rupt în anul 1938 pe un timp foarte geros.

O nouă eră a accidentelor a apărut odată cu extinderea construcțiilor sudate. Din cele aproximativ 2500 de vapoare „Libertatea”, construite în timpul celui de-al doilea război mondial, peste 800 dintre acestea au suferit avarii deosebit de serioase, lucru foarte ciudat, având în vedere faptul că aceste avarii aveau loc în condiții de mică solicitare – multe din aceste nave cedând în timp ce erau ancorate în porturi. În toate cazurile, ruperile au apărut în zonele cu concentratori puternici de tensiune.

Evident, aceste „manifestări aparent ciudate” din punct de vedere tehnic nu au ocolit nici domeniul aerospațial. În acest caz, problema a dat și mai mult de gândit datorită urmărilor catastrofale care însoțeau aceste accidente. Primul avion cu reacție „The Comet”, dat în exploatare în anul 1952, după aproximativ 300 ore de teste de zbor, s-a prăbușit în Marea Mediterană în anul 1954 la numai 4 zile de la o inspecție tehnică destul de minuțioasă [21]. Expertizele au arătat că ruperea prin oboseală s-a inițiat în zona găurilor niturilor din apropierea hublourilor.

Un alt accident important, a fost determinat de ruperea fragilă în anul 1967 a podului „Point Pleasant” din Virginia (SUA), ducând la decesul a peste 40 de persoane.

Seria acestor exemple ar putea continua și în alte domenii, cum ar fi cel minier, transporturi, platforme maritime, etc.

Trebuie reținut faptul că ruperile fragile sunt mult mai periculoase decât cele datorate suprasolicitărilor sau pierderilor de stabilitate deoarece nu pot fi detectate, în cursul avansării lor lipsind deformațiile permanente.

Toate cele prezentate mai sus justifică imensul volum de studii teoretice și experimentale având ca finalitate apariția unei noi discipline denumită „MECANICA RUPERII”, în prezent având peste 75 de ani de existență, primele studii privind propagarea fisurilor în bare de sticlă fiind efectuate de Griffith în anul 1920.

1.2. STUDII DE MECANICA RUPERII PENTRU ALIAJE UȘOARE

Datorită importanței deosebite pe care o are studiul fenomenului de oboseală și implicit, studiul propagării fisurilor de oboseală pentru cercetarea și practica inginerescă, există azi o serie de centre de cercetare de mare reputație a căror activitate este puternic concentrată pe această temă. De-a lungul întregii perioade de doctorat am căutat să țin o legătură cu aceste centre, prin intermediul rețelei internaționale de calculatoare INTERNET, de la care am obținut o documentare bibliografică importantă și sugestii vis-a-vis de anumite elemente de interes în subiectul abordat. Dintre aceste centre de cercetare care se ocupă cu studiul propagării fisurilor de oboseală pot aminti:

- Prof. H. Noguchi, prof. Y. Murakami și prof. N. Nisitani – Departamentul de inginerie și știință, Universitatea KYUSHU din Japonia, un centru cu o experiență de peste 70 de ani în studiul propagării fisurilor de oboseală;

- Prof. David Taylor, Departamentul de inginerie mecanică, Universitatea din Dublin, autor a două cărți de renume privind datele experimentale de propagare a fisurilor de oboseală pentru un număr destul de mare de materiale investigate, precum și autor a o serie de articole publicate în reviste importante din domeniu;

- Dr. ing. Michael Hudson, Șeful Departamentului de mecanica ruperii – Langley Research Center – NASA, autor a celui mai complet compendium

privind sursele bibliografice ce cuprind date numerice referitoare la vitezele de propagare a fisurilor de oboseală în diverse medii;

- Dr. ing. J. L. Chaboche, Oficiul Național de Studii și Cercetări Aerospațiale – Paris, unul din fondatorii Jurnalului Internațional De Degradare Mecanică, cu mari contribuții în surprinderea fenomenului de oboseală prin prisma universală a noțiunii foarte moderne de degradare mecanică;

- Prof. K. J. Miller, Facultatea de inginerie, Universitatea din Sheffield, Anglia, un mare entuziast al noii metodologii de abordare a fenomenului de oboseală – potrivit căreia studiul fenomenului de oboseală trebuie condus în totalitate pe ideea studiului propagării fisurilor de oboseală;

- Dr. ing. Julia King, Departamentul de știința materialelor și metalurgie, Universitatea din Cambridge, cu preocupări privind propagarea fisurilor de oboseală în diverse medii.

1.3. OBIECTUL ȘI PROBLEMELE MECANICII RUPERII

Mecanica Ruperii încearcă să dea un răspuns privind rezistența unei structuri în care există sau au apărut fisuri (defecte). Considerând o structură de rezistență în care există o fisură, sau s-a inițializat o fisură, rezistența structurii scade pe măsură ce fisura se extinde în timp.

După o anumită perioadă, rezistența reziduală se diminuează atât de mult încât structura nu mai poate fi menținută în serviciu.

Având în vedere observațiile de mai sus, Mecanica Ruperii încearcă să dea un răspuns la următoarele întrebări:

* cum variază rezistența structurii (rezistența reziduală) pe măsură ce o fisură inițială se propagă în timp?

* care este lungimea maximă a fisurii acceptată în serviciu, sau care este mărimea admisibilă a acesteia?

* care este durata de timp necesară, pentru ca o fisură cu o anumită lungime (lungime minimă detectabilă) să atingă valoarea maximă admisă?

* cât de lungă este perioada de timp până la care detectarea fisurii devine posibilă și cât de des este necesar să se facă controlul fisurilor din structura de rezistență respectivă?

* cât este durata de serviciu a unei structuri în condițiile existenței unei fisuri cu o anumită mărime?

Cele arătate mai sus sunt prezentate explicit în fig. 1.1. Curba de propagare a fisurii (fig. 1.1.a) este pusă în corespondență directă cu diagrama de variație a rezistenței reziduale din care rezultă tensiunea maximă admisă într-un calcul de proiectare în condițiile extinderii în timp a unei fisuri detectată prin încercări nedistructive [35].

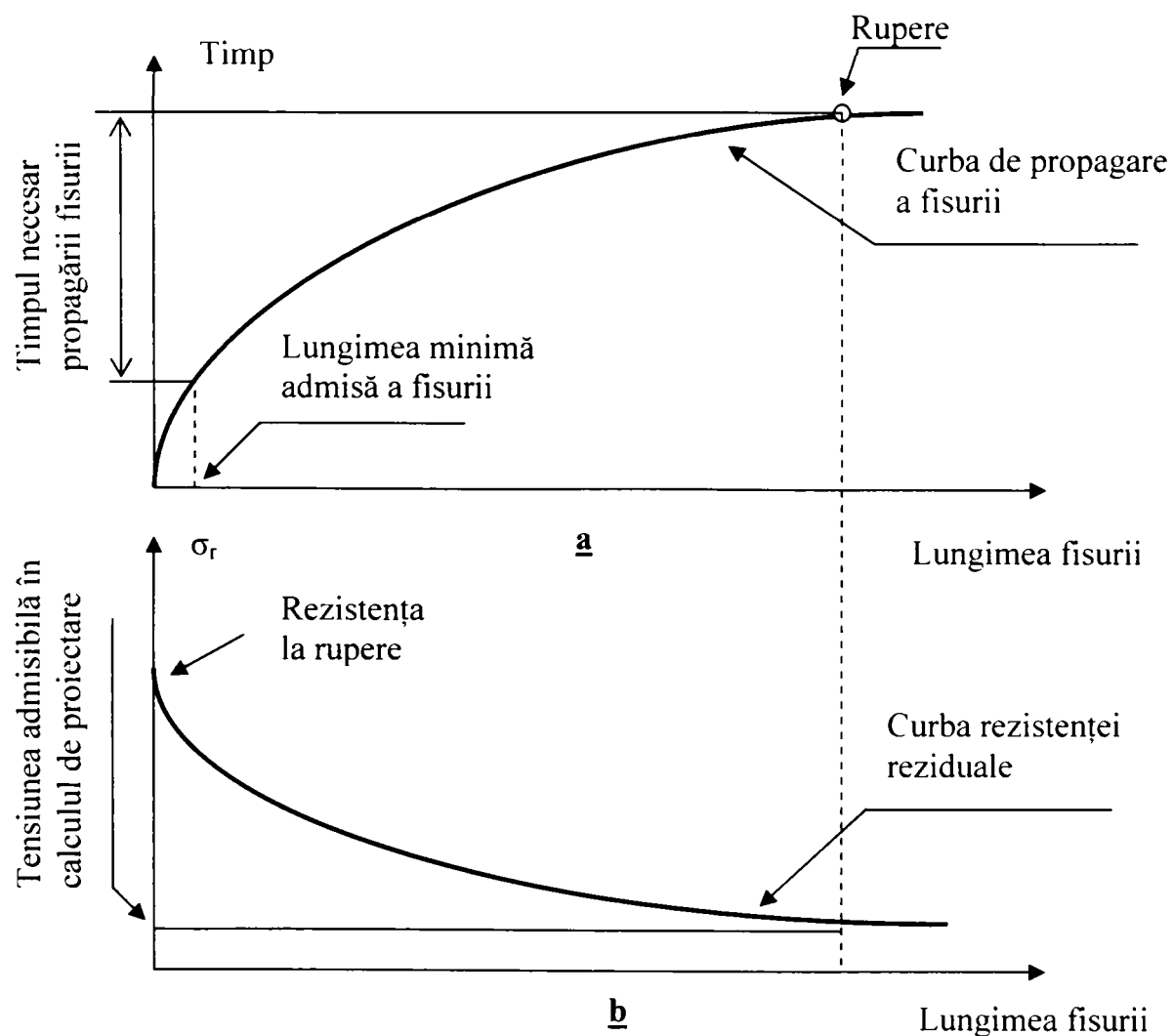


Fig 1.1

1.4. DOMENII DE UTILIZARE A ALIAJELOR UȘOARE

Dezvoltarea rapidă a tehnicii moderne, de exemplu prin construcția navelor cosmice, prin motoare cu performanțe deosebite, prin procese tehnologice care se desfășoară în condiții de temperatură și presiune ridicată sau în medii corozive, este strâns legată de folosirea unor materiale adecvate și de îmbunătățirea substanțială a proprietăților acestora. Calitatea oricărui produs, (semifabricat, piesă finită) este determinată în primul rând de proprietățile materialului utilizat la fabricarea sa. Utilizarea aliajelor ușoare în tehnica modernă câștigă tot mai mult teren datorită avantajelor care le oferă aceste aliaje cum ar fi: greutate specifică mică, ușor de prelucrat și turnat. Aliajele de aluminiu se folosesc în fabricația motoarelor, la fabricarea pistoanelor, a carterelor, a chiulaselor, la elementele de legătură de la puntea față/spate a autoturismelor, etc.

La motocicletele Honda CRF 450X, cadrul este realizat din aliaj de aluminiu, ducând astfel la reducerea greutății acesteia, fiind acum mai ușoară și rezistentă în același timp.

Firma SC Altur SA produce și comercializează pistoane auto, seturi motor auto, piese turnate gravitațional și sub presiune din aliaje de aluminiu concepute pentru autoturisme, tractoare sau autocamioane – fig. 1.2. Utilizarea aliajelor din aluminiu la fabricarea pistoanelor a fost posibilă deoarece aliajul de aluminiu are o conductibilitate termică ridicată și un coeficient mic de dilatare liniară.

În cadrul concernului BMW, pentru modelul Z4, masa mașinii este distribuită egal între punți, iar arhitectura suspensiilor menține stabilitatea mașinii. Pentru puntea față, Z4 folosește arhitectura McPherson, însă există îmbunătățiri cum ar fi brațele inferioare realizate acum din aluminiu forjat. La puntea posterioară totul este nou, configurația este multibraț, acestea fiind din aluminiu.



Fig. 1.2

BMW Seria 1 dispune de tracțiune spate și motor amplasat în față, soluția, permițând o distribuție ideală a maselor automobilului și obținerea unui raport 50:50 asigurând tracțiune optimă în condiții de încărcătură maximă. Mai mult, arhitectura suspensiilor vine să întărească imaginea sportivă. La partea din față, Seria 1 dispune de suspensii din aluminiu iar puntea din spate adoptă soluția multibraț.

Firma Audi, la modelul „nuvolari”, configurația mașinii este din aluminiu, folosind un proces avansat de extrudare și de turnare a unor componente.

R-D6 de la Jaguar are un spațiu generos pentru călătorie atât pentru ocupanții locurilor din față cât și pentru pasagerii din spate. La acest aspect aducându-și contribuția și șasiul realizat din aluminiu, care conferă structurii rezistența și rigiditatea necesară, pe fondul scăderii greutatei. Tot cu gândul la silueta acestui model s-a extins utilizarea aluminiului la realizarea caroseriei, ceea ce a făcut ca, în final, acul cântarului să se oprească la 1500 Kg, o valoare foarte bună pentru un coupe cu motor diesel.

Modelul Jaguar S Type 2,7 D a coborât puțin partea frontală iar capacul portbagajului a fost ușor ridicat, capota motorului este din aluminiu (reducând astfel greutatea la sol cu 11 Kg.), întreaga mașină cântărind 1722 Kg.

La Aston Martin DB9, structura este din aluminiu și oferă o rigiditate crescută cu 25 % față de modelul DB7. "Nu cunoaștem încă un alt automobil sportiv care să aibă un șasiu atât de rigid", spunea Jeremy Main, Directorul Departamentului de Dezvoltare și Motorsport. Panourile caroseriei, majoritatea din aluminiu, sunt lipite de șasiu cu ajutorul unor adezivi de către singurul robot existent în incinta uzinei, ceea ce înseamnă că DB9 va fi manufacturat conform tradiției, pentru definitivarea fiecărui exemplar fiind necesare aproximativ 200 ore. În premieră la automobile, stâlpii caroseriei au fost sudați folosind o tehnologie pe bază de ultrasunete, care mărește rezistența acestora cu 90 % decât la cei sudați clasic.

Modelul ML de la Mercedes-Benz folosește la suspensia față brațe duble independente având brațul superior din aluminiu de înaltă rezistență, geometrie care reduce efectul de tangaj. Suspensia spate este independentă cu 4 brațe, cele superioare fiind forjate din aluminiu, geometria punții asigurând stabilitatea pe traiectorie și asista autovehiculului.

În continuarea lucrării se prezintă o serie de piese din domeniul auto din aliaje de aluminiu, fapt ce a condus la alegerea pentru elaborarea tezei de doctorat "studii de mecanica ruperii pentru aliaje ușoare", a aliajului de aluminiu.

În fig. 1.3 se prezintă puntea față de la un autoturism Mercedes-Benz C 200 CDI, având brațele numerotate cu numerele 90 și respectiv 140 din aliaj de aluminiu; iar fig. 1.4 prezintă puntea spate pentru același autoturism având brațele numerotate cu numerele 260 și respectiv 400 din aluminiu.

Fig. 1.5 prezintă capacul motor față pentru un autoturism Mercedes-Benz SL 350 dotat cu motor M 112, obținut prin turnare dintr-un aliaj de aluminiu.

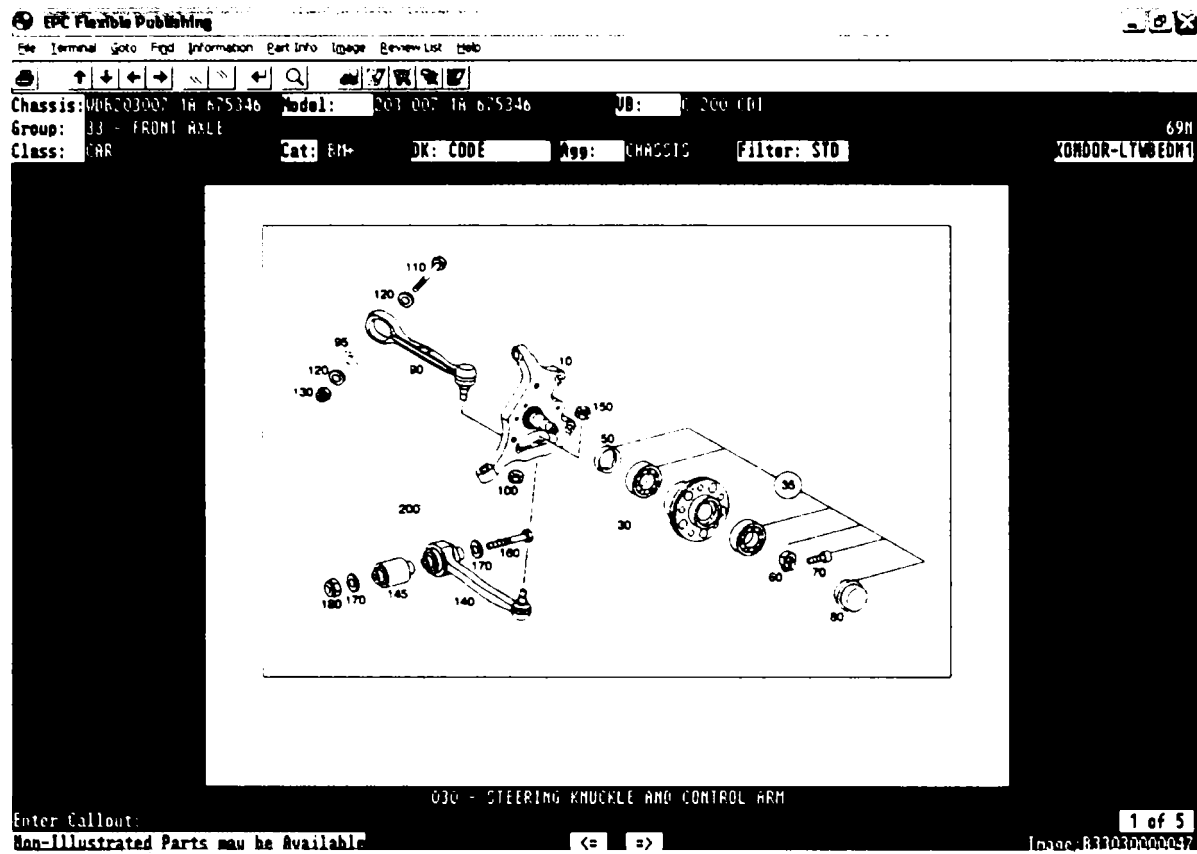


Fig. 1.3

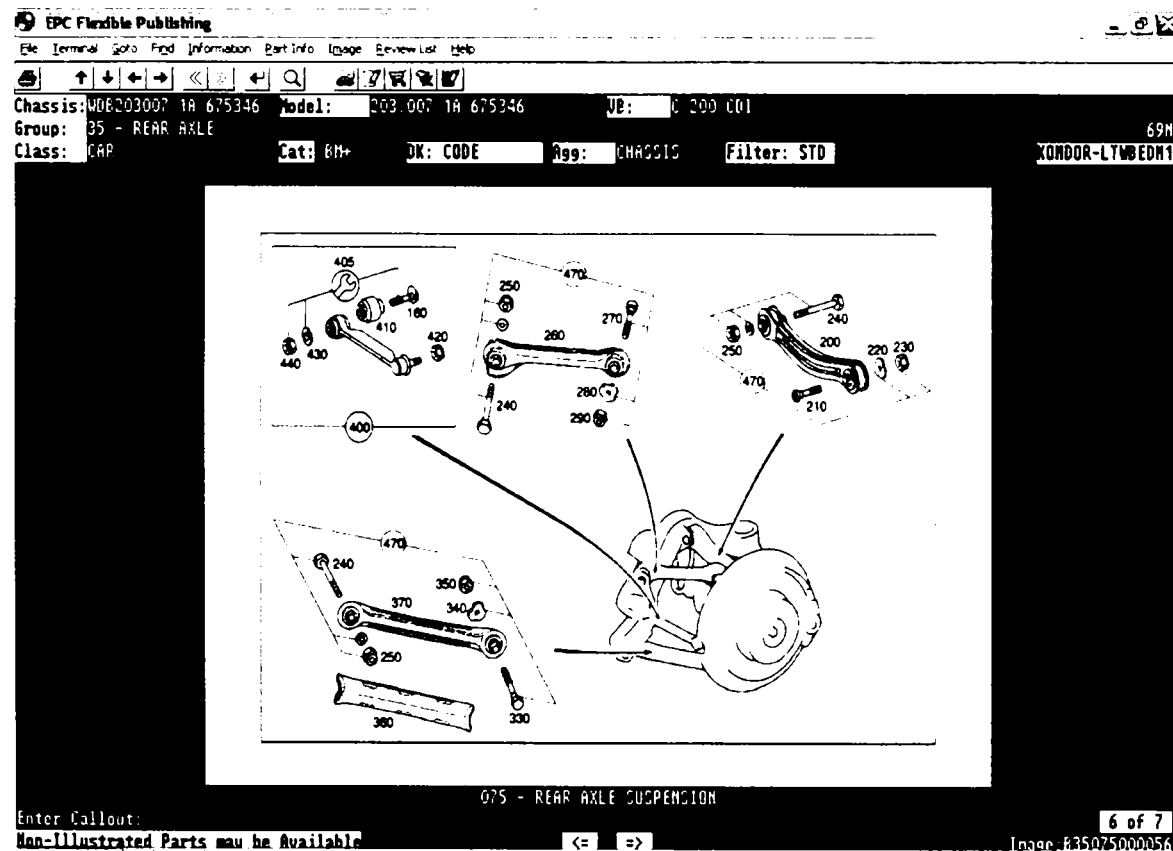


Fig. 1.4

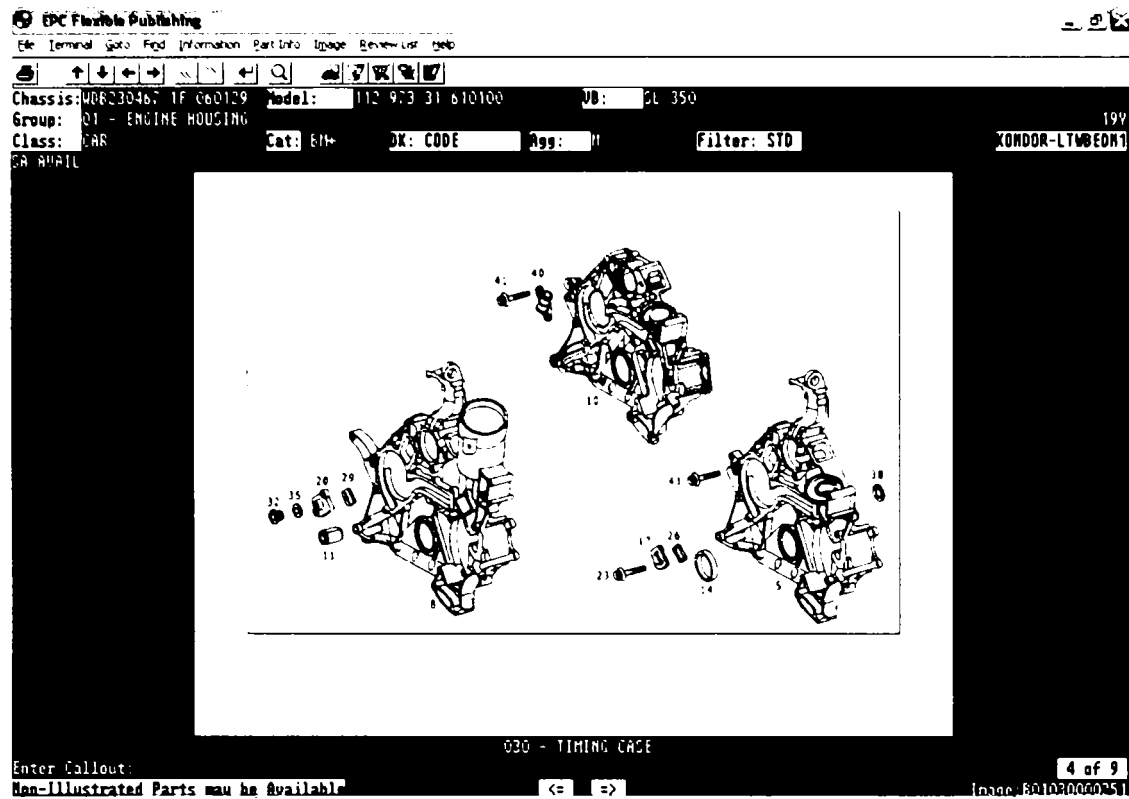


Fig. 1.5

În fig. 1.6 se prezintă puntea spate a unui autoturism Mercedes-Benz S 320, tip caroserie WDB 140, având brațele 92 și respectiv 62 din aliaj de aluminiu. Aceste brațe vor face obiectul studiului în cadrul tezei de doctorat.

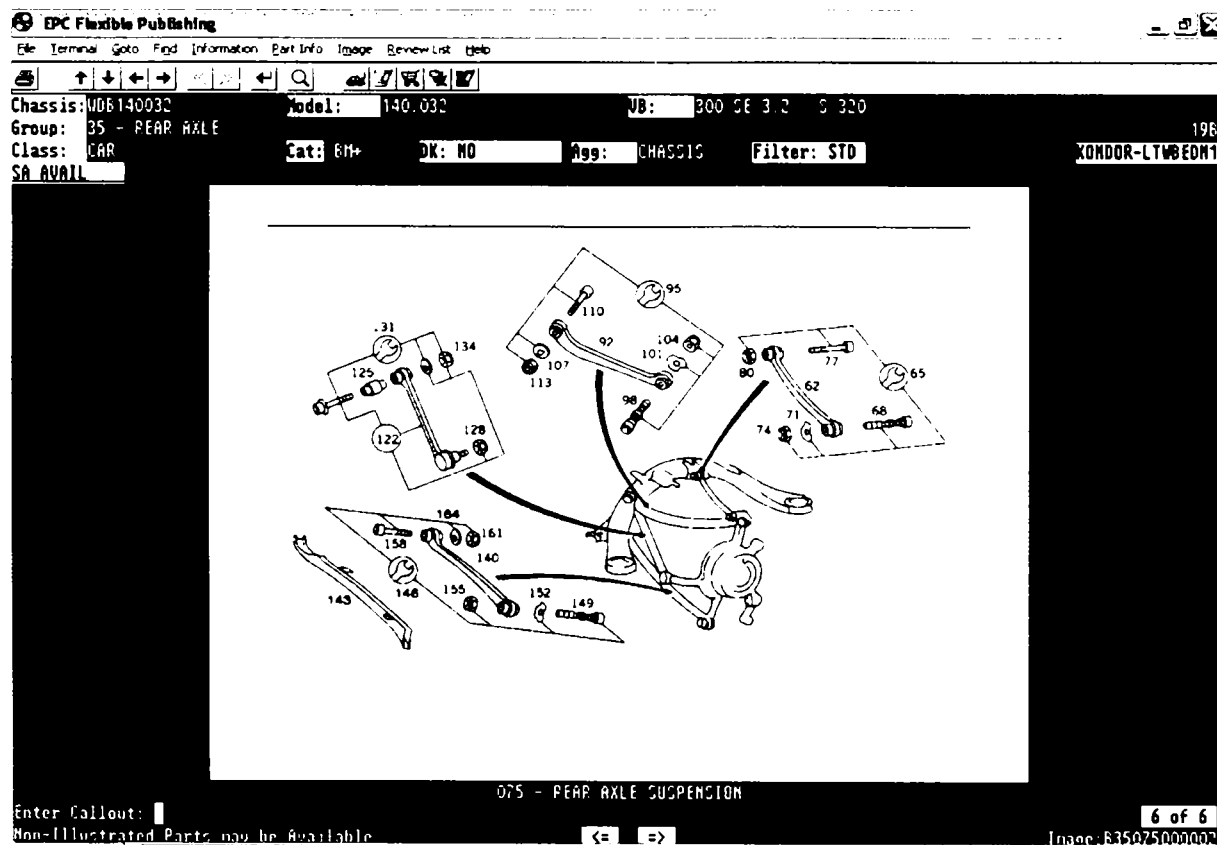


Fig. 1.6

Puntea de spate la autoturismele Mercedes-Benz din clasa E, în cazul de față E 220 CDI având caroserie tip WDB 211, numerotată cu 10 este din aliaj de aluminiu – fig. 1.7.

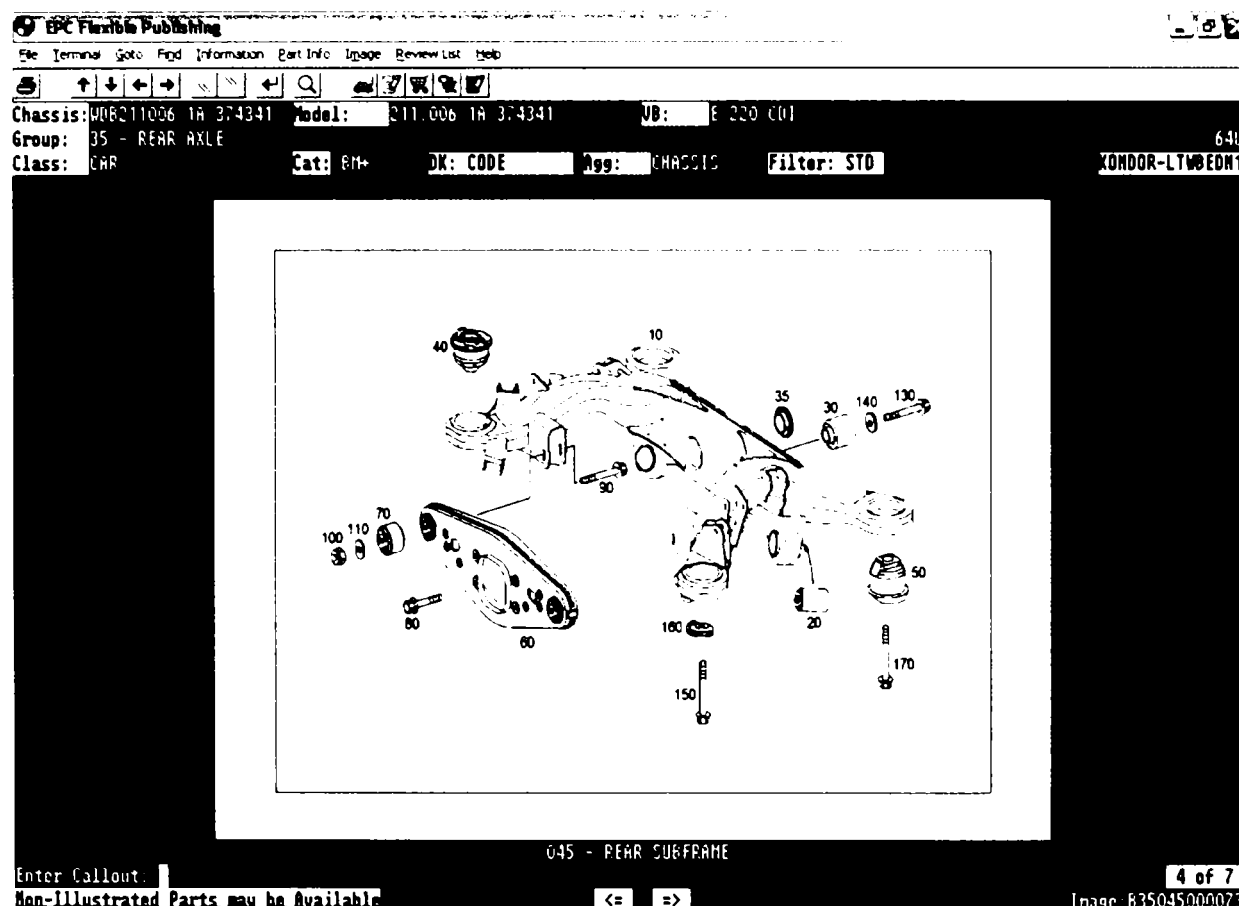


Fig. 1.7

1.5. ALUMINIU ȘI ALIAJE DIN ALUMINIU

Aluminiul este cel mai răspândit metal din scoarța terestră, ocupând printre elemente locul 3 după oxigen și siliciu. Din cauza activității chimice se găsește în natură sub formă de compuși, împreună cu oxigenul și siliciul formând peste 80 % din scoarța terestră. Aluminiul este cunoscut din antichitate, denumirea venind de la latinescul „*alumen*” care este folosit pentru a denumi substanțe astringente.

Aluminiul este un metal foarte electropozitiv și reactiv cu greutatea atomică 26,974; posedă o rețea cubică cu fețe centrate ($a=4,0412 \text{ \AA}$), ceea ce

îl face maleabil și ductil, având punctul de fuziune situat la 658°C . Se caracterizează printr-o densitate foarte redusă (2720 Kg/m^3) și o conductibilitate termică și electrică foarte ridicată. În stare pură, aluminiul este foarte rezistent la coroziune, fapt explicabil prin formarea la suprafață a unei pelicule compacte de oxid de aluminiu Al_2O_3 .

În natură, se găsește numai sub formă de combinații într-un număr foarte mare de minerale ce conțin oxizi, silicați. Din mineralele ce conțin aluminiu amintim: bauxita, corindonul, hidrargilitul, ortoclazul, albitul, alunitul.

Industrial, aluminiul se obține în întregime prin descompunerea electrolică a aluminei pure dizolvate într-o topitură de criolit cu adaos de fluorură de calciu.

Prin electroliză se obține "aluminiul tehnic primar" numit și "aluminiul tehnic pur" care conține de la 0,2 % la 1 % impurități metalice (Fe, Si, Ca, Ti, Na) și nemetalice (alumina, electrolit, carbura de aluminiu, gaze). La noi în țară sunt standardizate următoarele mărci de aluminiu pur: Al 99,8; Al 99,7; Al 99,6; Al 99,5; Al 99,4; Al 99.

Aluminiul industrial este livrat sub formă de table, profile, bare, sârme, folii, etc. În stare recoaptă, are următoarele proprietăți mecanice: $R_m=50\div 100 \text{ N/mm}^2$; $R_{p0,2}=15\div 30 \text{ N/mm}^2$; $\text{HB}=20\div 25 \text{ daN/mm}^2$. Prin ecruisare la rece se favorizează o creștere a rezistenței la rupere până la $150\div 190 \text{ N/mm}^2$, dar și o diminuare a alungirii la rupere până la $6\div 15 \%$.

Aluminiul are următoarele proprietăți:

- culoare – argintie
- duritate – mică
- temperatura de topire – 660°C ($933,52^{\circ}\text{K}$, $1220,66^{\circ}\text{F}$)
- număr atomic – 13
- punct de fierbere – 2467°C ($2740,15^{\circ}\text{K}$, $4472,6^{\circ}\text{F}$).

Aluminiul se utilizează mai mult sub forma diferitelor aliaje, care se caracterizează atât prin densitatea lor mică, cât și prin excelente proprietăți mecanice. Ele se folosesc în industria aerospațială și de autovehicule, lucru evidențiat în paragraful precedent. Cele mai răspândite aliaje de aluminiu sunt: Al-Cu; Al-Si; Al-Mg; Al-Cu-Mg; Al-Cu-Mg-Si; Al-Zn-Mg-Cu.

Clasificarea aliajelor de aluminiu se face după felul turnării, elementul principal de aliere și compoziția chimică.

Duraluminiul, numit și *dural* conține 92÷96 % aluminiu, 3,5÷4,5 % cupru, 0,4÷0,5 % magneziu și 0,3÷0,75 % mangan. Când se mai adaugă 0,5 % nichel se obține *duraluminiul special*. Ambele aliaje se laminează ușor, iar prin călire își măresc foarte mult duritatea. Datorită acestor calități și fiind și ușoare se folosesc foarte frecvent, cum am arătat, în industria de automobile și avioane. Duraluminiul este valoros prin faptul că piesele confecționate din aliaj de aluminiu sunt aproape de 3 ori mai ușoare decât piesele din oțel, la o rezistență egală. Prezența manganului în compoziție este obligatorie deoarece mărește rezistența la coroziune iar particulele disperse de faza T ridică temperatura de recristalizare și îmbunătățește proprietățile mecanice.

Fără a mai vorbi de industria aeronautică, pentru care greutatea specifică mică a materialului este foarte importantă, reducerea greutății construcțiilor metalice prezintă o importanță deosebită pentru numeroase domenii ale tehnicii moderne. Evident, înlocuirea oțelului cu duraluminiu are și un efect tehnico-economic foarte important. Din această cauză și datorită rezervelor practic inepuizabile de aluminiu, el este denumit pe bună dreptate „metalul viitorului”, posibilitatea înlocuirii pe scară mare a fierului cu aluminiul fiind limitată în special de costul ridicat al aluminiului.

Printre domeniile de utilizare menționăm piesele cu rezistență medie și ridicată supuse unor sarcini alternante, cuple și lonjeroane ale avioanelor, caroserii, etc, menționate în paragraful anterior.

Siluminul este un aliaj al aluminiului cu siliciu și se caracterizează prin bune proprietăți de turnare. Aceste aliaje conțin obișnuit de la 2÷14 % siliciu și diferite impurități: fier până la aproximativ 1,4 %, magneziu până la circa 0,15 %, cupru maxim 0,6 %. Îmbunătățirea caracteristicilor mecanice și tehnologice a acestor aliaje poate fi realizată cu magneziu, mangan, cupru, nichel.

Piesele turnate din silumin se caracterizează prin duritate mare și concentrație mică (reducere mică a volumului după turnare). Sunt utilizate în industria constructoare de mașini și aviație, la piesele turnate supuse la solicitări mari cum ar fi: carcase, capete de cilindri, blocuri de motor, pistoane și alte piese rezistente la solicitări la cald în timpul exploatării.

Utilizând imensa rețea de informație, care este internetul, prin accesarea adresei www.matweb.com voi descrie în continuare câteva caracteristici pentru anumite aliaje de aluminiu folosite în construcția de mașini:

Aliaj aluminiu, General

Subcategorie: Aliaj aluminiu; Metal neferos

Denumire: Aliaj aluminiu, General

Component Wt %

Al 87÷100

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.7 g/cm ³	0.0975 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	25 μm/m- ⁰ C	13.9 μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Modulul de elasticitate longitudinal	70000 MPa	10200 ksi
Modul de elasticitate transversal	26000 MPa	3770 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0.33
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	5e-006 ohm-cm	5e-006 ohm-cm

Aliaj aluminiu 1060-H12**Subcategorie:** 1000 Serie Aluminiu; Aliaj Aluminiu; Metal neferos**Denumire:** Aluminiu 1060-H12; UNS A91060; AA1060-H12

Component	%	Component	%	Component	%
Al	Min 99.6	Mn	Max 0.03	Ti	Max 0.03
Cu	Max 0.05	Other. each	Max 0.03	V	Max 0.05
Fe	Max 0.35	Si	Max 0.25	Zn	Max 0.05
Mg	Max 0.03				

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.705 g/cm ³	0.0977 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	25.5 μm/m- ⁰ C	14.2 μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	23	23
Rezistența la rupere	82.7 MPa	12000 psi
Limita de curgere	75.8 MPa	11000 psi
Rezistența la forfecare	55.2 MPa	8000 psi
Limita de oboseală	27.6 MPa	4000 psi
Modul de elasticitate longitudinal	68900 MPa	10000 ksi
Modul de elasticitate transversal	26000 MPa	3770 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0.33
Alungirea la rupere	16 %	16 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	2.8e-006 ohm-cm	2.8e-006 ohm-cm

Aliaj Aluminiu 2011-T3**Subcategorie:** 2000 Serie aliaj aluminiu; Aliaj aluminiu; Metal neferos**Denumire:** UNS A92011; QQ-A-225/3; NF A-U4Pb (France); DIN AlCuBiPb; BS FC1; AA2011-T3

Component	%	Component	%	Component	%
Al	91,2÷94,6	Fe	Max 0,7	Pb	0,2÷0,6
Bi	0,2÷0,6	Other. each	Max 0,05	Si	Max 0,4
Cu	5÷6	Other. total	Max 0,15	Zn	Max 0,3

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.83 g/cm ³	0,102 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	25,5 μm/m- ⁰ C	14,2 μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	95	95
Rezistența la rupere	379 MPa	55000 psi
Limita de curgere	296 MPa	43000 psi
Rezistența la forfecare	221 MPa	32000 psi
Limita de oboseală	124 MPa	18000 psi
Modul de elasticitate longitudinal	70300 MPa	10200 ksi
Modul de elasticitate transversal	26000 MPa	3770 ksi
Coeficientul lui Poisson	0,33	0,33
Alungirea la rupere	15 %	15 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	4,49e-006 ohm-cm	4,49e-006 ohm-cm

Aliaj Aluminiu 2024-O

Subcategorie: 2000 Serie aliaj aluminiu; Aliaj aluminiu; Metal neferos

Denumire: Aluminiu 2024-O; UNS A92024; ISO AlCu4Mg1; NF A-U4G1 (France); DIN AlCuMg2; AA2024-O, ASME SB211; CSA CG42 (Canada)

Component	%	Component	%	Component	%
Al	90,7÷94,7	Mg	1,2÷1,8	Si	Max 0,5
Cr	Max 0,1	Mn	0,3÷0,9	Ti	Max 0,5
Cu	3,8÷4,9	Other, each	Max 0,05	Zn	Max 0,25
Fe	Max 0,5	Other, total	Max 0,15		

648. 374
566 E

UNIV. "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA
BIBLIOTECA CENTRALĂ

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.78 g/cm ³	0.1 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	24.7 μm/m- ⁰ C	13.7 μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	47	47
Rezistența la rupere	186 MPa	27000 psi
Limita de curgere	75.8 MPa	11000 psi
Rezistența la forfecare	124 MPa	18000 psi
Limita de oboseală	89.6 MPa	13000 psi
Modul de elasticitate longitudinal	73100 MPa	10600 ksi
Modul de elasticitate transversal	28000 MPa	4060 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0.33
Alungirea la rupere	20 %	20 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	3.49e-006 ohm-cm	3.49e-006 ohm-cm

Aluminum 5050-O

Subcategory: 5000 Serie aluminiu aliaj; Aliaj aluminiu; Metal neferos

Denumire: UNS A95050; ISO AlMg1.5; Aluminiu 5050-O; AA5050-O

Component	%	Component	%	Component	%
Al	96,3÷98,9	Mg	1,1÷1,8	Other, total	Max 0,15
Cr	Max 0,1	Mn	Max 0,1	Si	Max 0,4
Cu	Max 0,2	Other, each	Max 0,05	Zn	Max 0,25
Fe	Max 0,7				

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.69 g/cm ³	0.0972 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	25.4 μm/m- ⁰ C	14.1 μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	36	36
Rezistența la rupere	145 MPa	21000 psi
Limita de curgere	55.2 MPa	8000 psi
Rezistența la forfecare	103 MPa	15000 psi
Limita de oboseală	82.7 MPa	12000 psi
Modul de elasticitate longitudinal	68900 MPa	10000 ksi
Modul de elasticitate transversal	25900 MPa	3760 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0.33
Alungirea la rupere	24 %	24 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	3.49e-006 ohm-cm	3.49e-006 ohm-cm

Aluminum 5083-O

Subcategory: 5000 Serie aluminiu aliaj; Aliaj aluminiu; Metal neferos

Denumire: UNS A95083; ISO AlMg4,5; Aluminiu 5083-O; AA5083-O

Component	%	Component	%	Component	%
Al	92,4÷95,6	Mg	4,0÷4,9	Si	Max 0,4
Cr	0,05÷0,25	Mn	0,4÷1,0	Ti	Max 0,15
Cu	Max 0,1	Altele	Max 0,05	Zn	Max 0,25
Fe	Max 0,4				

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.66 g/cm ³	0.0961 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	26 μm/m- ⁰ C	14.4μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	77	77
Rezistența la rupere	290 MPa	43500 psi
Limita de curgere	145 MPa	21000 psi
Rezistența la forfecare	172 MPa	25000 psi
Limita de oboseală	150 MPa	21800 psi
Modul de elasticitate longitudinal	71000 MPa	10300 ksi
Modul de elasticitate transversal	26400 MPa	3830 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0.33
Alungirea la rupere	22 %	22 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	5.98e-006 ohm-cm	5.98e-006 ohm-cm

Aliaj Aluminiu 6005-T1

Subcategorie: 6000 Serie aliaj aluminiu; Aliaj aluminiu; Metal; Metal neferos

Denumire: UNS A96005; ISO AlSiMg; Aluminiu 6005-T1; AA6005-T1

Component	%	Component	%	Component	%
Al	97,5÷99	Mg	0,4÷0,6	Si	0,6÷0,9
Cr	Max 0,1	Mn	Max 0,1	Ti	Max 0,1
Cu	Max 0,1	Altele	Max 0,05	Zn	Max 0,1
Fe	Max 0,35				

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.7 g/cm ³	0.0975 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	25 μm/m- ⁰ C	13.9 μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	46	46
Rezistența la rupere	170 MPa	24700 psi
Limita de curgere	105 MPa	15200 psi
Rezistența la forfecare	105 MPa	15200 psi
Limita de oboseală	100 MPa	14500 psi
Modul de elasticitate longitudinal	69000 MPa	10000 ksi
Modul de elasticitate transversal	26000 MPa	3770 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0.33
Alungirea la rupere	16 %	16 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	3.66e-006 ohm-cm	3.66e-006 ohm-cm

Aliaj Aluminiu 6061-O

Subcategorie: 6000 Serie aliaj aluminiu; Aliaj aluminiu; Metal neferos

Denumire: al6061; UNS A96061; ISO AlMg1SiCu; Aluminiu 6061-O; AD-33; AA6061-O

Component	%	Component	%	Component	%
Al	95,8÷98,6	Mg	0,8÷1,2	Si	0,4÷0,8
Cr	0,04÷0,35	Mn	Max 0,15	Ti	Max 0,15
Cu	0,15÷0,4	Altele	Max 0,05	Zn	Max 0,25
Fe	Max 0,7				

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.7 g/cm ³	0.0975 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	25.2 μm/m- ⁰ C	14 μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	30	30
Rezistența la rupere	124 MPa	18000 psi
Limita de curgere	55.2 MPa	8000 psi
Rezistența la forfecare	82.7 MPa	12000 psi
Limita de oboseală	62.1 MPa	9000 psi
Modul de elasticitate longitudinal	68900 MPa	10000 ksi
Modul de elasticitate transversal	26000 MPa	3770 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0.33
Alungirea la rupere	24 %	24 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	3.66e-006 ohm-cm	3.66e-006 ohm-cm

Aliaj Aluminiu 7039-T64

Subcategorie: 7000 Serie Aliaj Aluminiu; Aliaj aluminiu; Metal neferos

Denumire: UNS A97039; Aluminiu 7039-T64; AA7039-T64

Component	%	Component	%	Component	%
Al	90,5÷94	Mg	2,3÷3,3	Si	Max 0,3
Cr	0,15÷0,25	Mn	0,1÷0,4	Ti	Max 0,1
Cu	Max 0,1	Other, each	Max 0,05	Zn	3,5÷4,5
Fe	Max 0,4	Other, total	Max 0,15		

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.74 g/cm ³	0.099 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	25.2 μm/m- ⁰ C	14μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	133	133
Rezistența la rupere	450 MPa	65300 psi
Limita de curgere	380 MPa	55100 psi
Rezistența la forfecare	260 MPa	37700 psi
Limita de oboseală	180 MPa	26100 psi
Modul de elasticitate longitudinal	69600 MPa	10100 ksi
Modul de elasticitate transversal	26000 MPa	3770 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0.33
Alungirea la rupere	13 %	13 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	4.5e-006 ohm-cm	4.5e-006 ohm-cm

Aliaj Aluminiu 7075-T6; 7075-T651

Subcategorie: 7000 Serie Aliaj aluminiu; Aliaj aluminiu; Metal neferos

Denumire: Aluminiu 7075-T6; Aluminiu 7075-T651, UNS A97075; ISO AlZn5.5MgCu; Aluminiu 7075-T6; Aluminiu 7075-T651; AA7075-T6

Component	%	Component	%	Component	%
Al	87,1÷91,4	Mg	2,1÷2,9	Si	Max 0,4
Cr	0,18÷0,28	Mn	Max 0,3	Ti	Max 0,2
Cu	1,2÷2	Other, each	Max 0,05	Zn	5,1÷5,6
Fe	Max 0,5	Other, total	Max 0,15		

	Metric	English
Proprietăți fizice		
Densitate	2.81 g/cm ³	0.102 lb/in ³
Coeficientul de dilatare termică (la 250 ⁰ C)	25.2 μm/m- ⁰ C	14 μin/in- ⁰ F
Proprietăți mecanice		
Duritate Brinell	150	150
Rezistența la rupere	572 MPa	83000 psi
Limita de curgere	503 MPa	73000 psi
Rezistența la forfecare	331 MPa	48000 psi
Limita de oboseală	159 MPa	23000 psi
Modul de elasticitate longitudinal	71700 MPa	10400 ksi
Modul de elasticitate transversal	26900 MPa	3900 ksi
Coeficientul lui Poisson	0.33	0,33
Alungirea la rupere	11 %	11 %
Proprietăți electrice		
Rezistența electrică	5.15e-006 ohm-cm	5.15e-006 ohm-cm

Caracteristicile ultimului aliaj de aluminiu descris mai sus, utilizând baza de date de material de pe internet, în cadrul tezei de doctorat, se va face o comparație între acesta și materialul analizat în cadrul lucrării.

CAPITOLUL 2

STADIUL ACTUAL AL UTILIZĂRII CONCEPTELOR DE MECANICA RUPERII PENTRU ALIAJE UȘOARE

2.1. GENERALITĂȚI

În cercetarea contemporană, studiul fenomenului de oboseală a început să ocupe o cale "diferită" de cea clasică (din cauza imposibilității acoperirii spectrului diversificat al necesităților ingineresti). În acest moment noțiunile de *fisură* și de *propagare a fisurii* ocupă un loc central în noile concepte privind ruperile cauzate de solicitările ciclice, cauza fiind utilizarea tot mai accentuată a materialelor de mare rezistență. Aceste materiale conferă posibilitatea realizării unor structuri ușoare, suple și care să asigure stabilitatea și rezistența necesară sistemelor din care făceau parte. S-a constatat că aceste materiale de mare rezistență sunt foarte sensibile la prezența fisurilor în structura lor.

Gradul de diminuare în timp a capacității portante a unui material de mare rezistență, în care, din anumite motive, a apărut o fisură, este mult mai pronunțată decât în cazul unui material de rezistență medie sau mică [21]. Acest comportament al materialelor de mare rezistență a impus nu numai o nouă latură a studierii fenomenului de oboseală dar a stat și la baza conceptului de *MECANICA RUPERII*.

2.2. MODURI DE RUPERE. FAZELE RUPERII

Sub acțiunea forțelor exterioare, corpurile solide se deformează elastic, elasto-plastic sau plastic, depinzând de nivelul de solicitare.

Comportarea materialelor poate fi:

- ductilă, când curgerea are un rol dominant – fig. 2.1. În figură se exemplifică o rupere ductilă a unei epruvete din aluminiu solicitată la tracțiune. Observăm că secțiunea de rupere are o formă con-cupă și este precedată de deformații plastice importante.

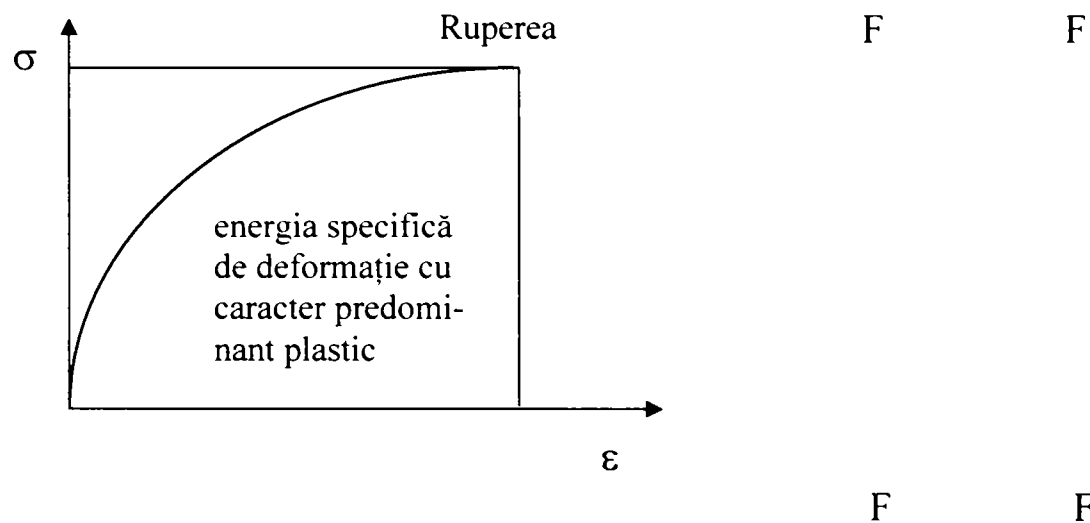


Fig. 2.1.

- fragilă, când ruperea are un rol dominant, aria secțiunii nu suferă modificări până la rupere iar deformațiile plastice lipsesc – fig. 2.2. În figură se prezintă modul de rupere al unei epruvete din fontă și curba caracteristică corespunzătoare.

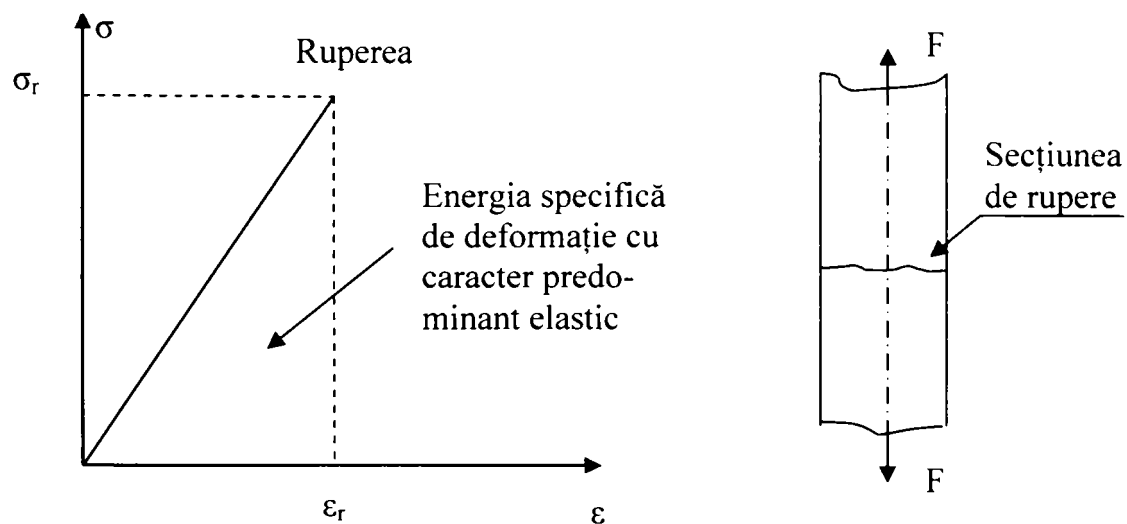


Fig.2.2.

Ductilitatea este o necesitate din punct de vedere tehnic, deoarece permite materialului, prin deformare plastică locală să redistribuie vârfurile de eforturi unitare. La materialele fragile, neexistând această posibilitate, în punctele cu concentratori de tensiune se formează fisuri, care se extind rapid în toată secțiunea piesei, producând ruperea brutală a acesteia.

Mecanismul ruperii trebuie privit la diverse nivele, în funcție de dimensiunile zonei rupte, în tabelul 2.1. definindu-se pentru metale următoarele nivele:

Tab.2.1.

Nivel	Dimensiuni	Mecanismul ruperii
submicroscopic	de ordinul dimensiunilor atomice ($\sim 10^{-6}$ mm)	ruperea legăturilor atomice de-a lungul unui plan de rupere, creând o nouă suprafață
microscopic	de ordinul mărimii grăuntelui ($\sim 10^{-2}$ mm)	trecerea imperfecțiunilor din material în microfisuri
macroscopic	de ordinul orificiilor și fisurilor	propagarea fisurii sub acțiunea unor încărcări și/sau a condițiilor de mediu

Fenomenele ruperii la nivel submicroscopic, unde discontinuitățile rețelei atomice afectează comportarea la rupere, nu sunt complet cunoscute. La nivel macroscopic se disting două moduri fundamentale de rupere:

- rupere prin separare sau clivaj, care implică desfacerea legăturilor atomice perpendiculare pe planele clistalografice cu legăturile cele mai slabe (numite plane de clivaj), sub acțiunea componentei normale a tensiunilor;
- ruperea prin forfecare, produsă în planele cu densitate maximă de atomi, plane în care se produce alunecarea, ruperea fiind o consecință a ruperii legăturilor interatomice din aceste plane.

Pentru ingineri este importantă cunoașterea fenomenelor ruperii macroscopice, legate de comportarea structurii reale cu defecte (de tip orificiu, creștătură sau fisură), sub acțiunea unor încărcări și/sau a mediului ambiant.

Sub aspect macroscopic ruperea se poate clasifica în:

- * ductilă, la care sunt prezente deformații plastice importante înaintea ruperii, respectiv se consumă o energie mare la rupere.

- * fragilă, la care deformațiile plastice premergătoare ruperii sunt neglijabile, ruperea producându-se brusc.

Procesul ruperii are 3 faze: inițierea, propagarea și oprirea, definirea acestor termeni fiind deseori confuză în literatura de specialitate, în cadrul tezei folosind definițiile date de W. Soete [108]:

a) **Inițierea ruperii.** Prin inițierea ruperii se înțelege trecerea unei fisuri din stare statică în stare dinamică. Trecerea poate fi lentă sau progresivă, ducând la o rupere ductilă sau brutală, caz în care ruperea este fragilă. Indiferent dacă ruperea este ductilă sau fragilă, fisura care o generează apare datorită deformațiilor plasice care preced ruperea. Acest fenomen este rezultatul parcurgerii a două etape importante: apariția microfisurilor datorită procesului de deformare plastică și evoluarea și transformarea acestora în microfisuri, adică în amorse de fisuri [91].

b) **Propagarea ruperii.** Propagarea ruperii se poate desfășura ductil sau fragil. În general modul de propagare a ruperii este în funcție de ordinea în care sunt îndeplinite cele două condiții necesare pentru producerea ruperii: condiția de apariție și condiția de propagare a fisurilor. Dacă condiția de apariție a fisurilor este îndeplinită înaintea celei de propagare, avansarea ruperii se produce lent și progresiv, adică ductil; iar când condiția de propagare a fisurii este îndeplinită înaintea condiției de apariție a acesteia, propagarea ruperii se produce fragil. În acest caz, prima microfisură care

apare conduce direct la rupere, în piesa ruptă neobservându-se o altă microfisură.

c) **Oprirea ruperii.** Fenomenul de trecere a unei ruperi ductile sau fragile din starea dinamică în starea statică este denumit oprirea ruperii. În anumite condiții, cum ar fi existența unor câmpuri de tensiune de compresiune, chiar și fisura cu propagarea cea mai rapidă poate fi oprită sau cel puțin încetinită. Prin aceasta se arată că există un mecanism de rupere a fisurii în curs de propagare, din studierea căruia există mijloace de stopare a distrugerilor catastrofale ale structurilor la care a existat posibilitatea inițierii ruperii.

2.3. FISURI ÎN MATERIAL. TIPURI DE FISURI

Considerăm o structură în care a apărut, din anumite motive o fisură. Sub acțiunea unor sarcini repetate (sau sub acțiunea simultană a sarcinilor și a mediului ambiant) această fisură va crește în timp. Cu cât lungimea fisurii este mai mare, cu atât va fi mai mare concentrarea de tensiune indusă de prezența fisurii. Deci, viteza de propagare a fisurii va crește în timp, conform cu reprezentarea din fig.2.3a [21].

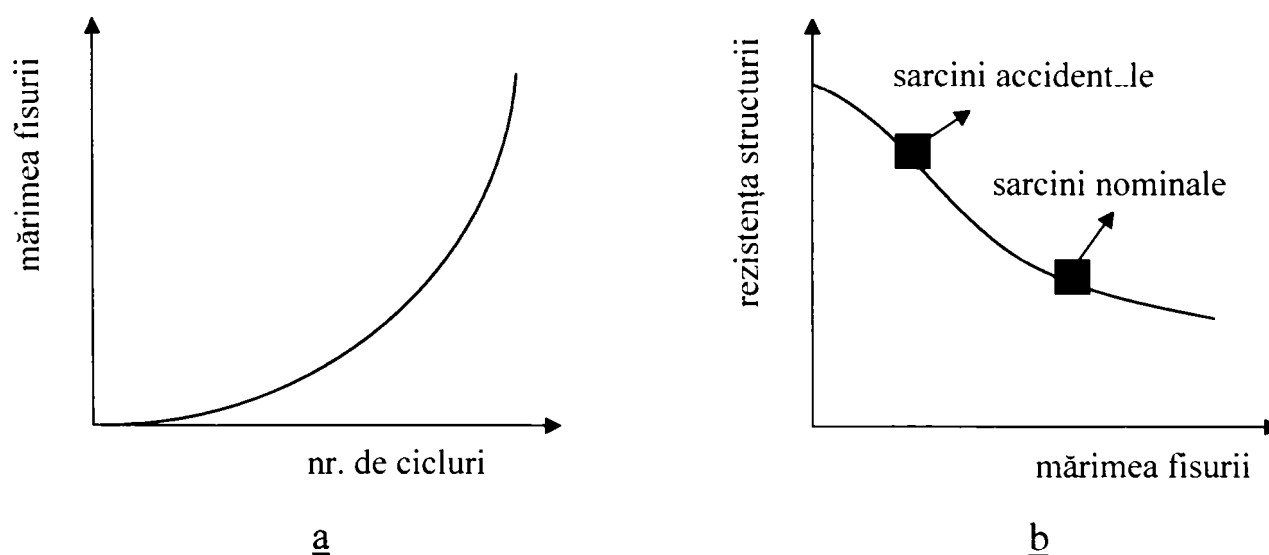


fig.2.3

Prezența fisurii în structură va duce la o scădere a rezistenței acesteia odată cu creșterea mărimii fisurii – fig.2.3.b, ajungând după un anumit timp ca rezistența structurii să scadă sub un anumit nivel la care să nu mai poată suporta sarcini accidentale de valoare ridicată.

Referitor la fig.2.3 se pot naște o serie de întrebări:

- ce legătură există între rezistența structurii și mărimea fisurii?
- cât de mare este lungimea critică a fisurii la care structura nu poate suporta sarcini exterioare nominale?
- cât este timpul de creștere al unei fisuri de la mărimea inițială până la cea critică?
- care este dimensiunea acceptabilă a fisurilor?
- cât de des este necesar să se facă controlul fisurilor prezente în structura materialului exploatat?

Mecanica Ruperii oferă răspunsuri satisfăcătoare la unele din întrebările de mai sus și face unele recomandări la altele. Pentru aceasta ea utilizează un spectru de analiză foarte larg începând de la nivelul atomic și cel al dislocațiilor și terminând cu cel al aplicațiilor ingineresti de la scară microscopică [43], fig. 2.4.

Prin **fisură** se înțelege o discontinuitate în interiorul sau la suprafața corpului, fiind modelată ca un gol de forma unui disc înglobat total sau parțial în volumul corpului, iar în cazul domeniilor plane, ca o tăietură rectilinie în interiorul sau pe conturul domeniului [103]. Conceptul de fisură în sensul mecanicii ruperii este prezentat în fig.2.5.

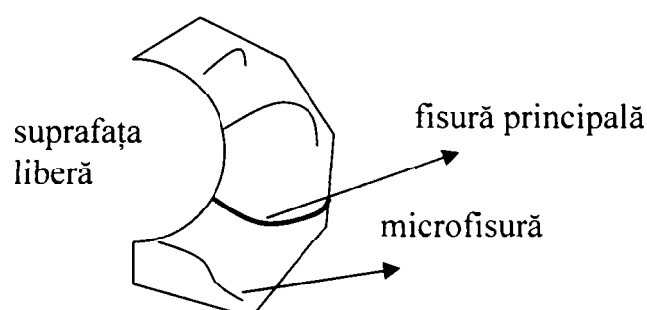


Fig. 2.5.

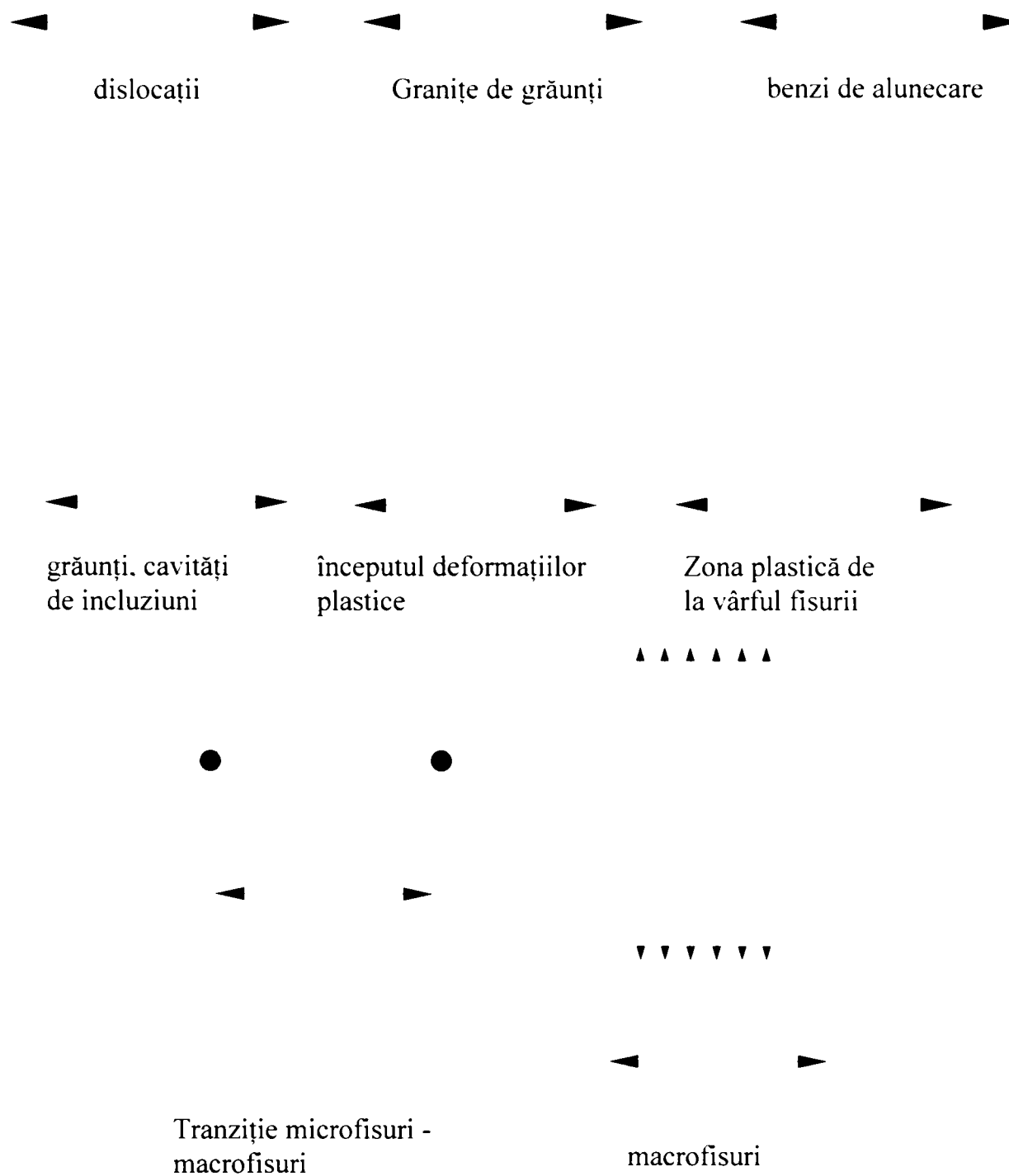


Fig.2.4.

Pentru a vorbi de o fisură macroscopică este necesar ca aceasta să aibă o lungime care să acopere câțiva grăunți și să prezinte o oarecare stabilitate a geometriei și direcției de propagare. Fisurile există în material, sub diverse

forme și mărimi, încă înainte de începerea exploatarei mecanice a materialului respectiv – fiind asimilate diverselor defecte de material, incluziuni, sufluri, etc.

Timpul în care fisurile se propagă de la stadiul inițial – asociat primului ciclu de exploatare mecanică – până la cel care determină ruperea fragilă, reprezintă durata de viață a unei anumite structuri supuse oboselii mecanice. Deci studiul modern al fenomenului de oboseală înseamnă de fapt studiul propagării fisurilor.

Literatura în domeniu definește două tipuri de fisuri[103]:

- macrofisuri, cu o lungime de ~ 1 mm și care conduc inevitabil la rupere după un anumit număr de cicluri de solicitare;

- microfisuri, cu o lungime mai mică de ~ 1 mm și care se pot propaga (transformându-se în macrofisuri), sau se pot opri din propagare în intersecția lor cu constituenți microstructurali ai materialului exploatat (faze, precipitate, incluziuni, granițe de grăunți, etc.).

Evident limita de 1 mm nu este absolut definitorie pentru orice tip de material, ci doar o valoare aproximativă care ne arată doar ordinul de mărime ce definește granița microfisuri – macrofisuri. Pentru a ne crea o imagine asupra acestei granițe, în tabelul 2.2. se prezintă câteva exemple referitoare la aliajele de aluminiu [4].

Tab.2.2.

Nr. crt.	Tip aliaj	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{0,2}}$	R	Frecvența [Hz]	Granița microfisuri-macrofisuri
1.	Al 7075	0,4 – 0,6	0,1 – 0,78	25	$\sim 127 \mu\text{m}$
2.	Al 2024	0,65	-1	5	$\sim 300 \mu\text{m}$
3.	Al 7075	0,6 – 0,9	0, -1	5	5-15 diametre de grăunți
4.	Al 2024	0,29 – 0,52	-1	20000	$\sim 220 - 250 \mu\text{m}$

În tabelul de mai sus σ_a reprezintă amplitudinea tensiunii normale aplicate, $\sigma_{0.2}$ reprezintă limita de curgere tehnică, iar prin R s-a notat coeficientul de asimetrie al ciclului de solicitare utilizat.

Legile care guvernează cele două tipuri de fisuri (macrofisurile și microfisurile) sunt complet diferite [43]. La nivelul macrofisurilor se poate aplica cu succes – totuși în anumite limite – conceptele LEFM (Linear Elastic Fracture Mechanics – Ruperea Mecanică Liniar Elastică), iar în domeniul microfisurilor modelul de analiză este complet diferit. În acest caz (al microfisurilor) propagarea este puternic influențată de constituenții structurali ai materialului investigat (diverse faze, precipitate, granițe de grăunți), constituenți care conduc la "anomalii în propagarea fisurilor scurte" [14].

Fig. 2.6., ne dă o reprezentare simbolică a graniței microfisuri – macrofisuri, reprezentare agreată de mulți cercetători în domeniu [74].

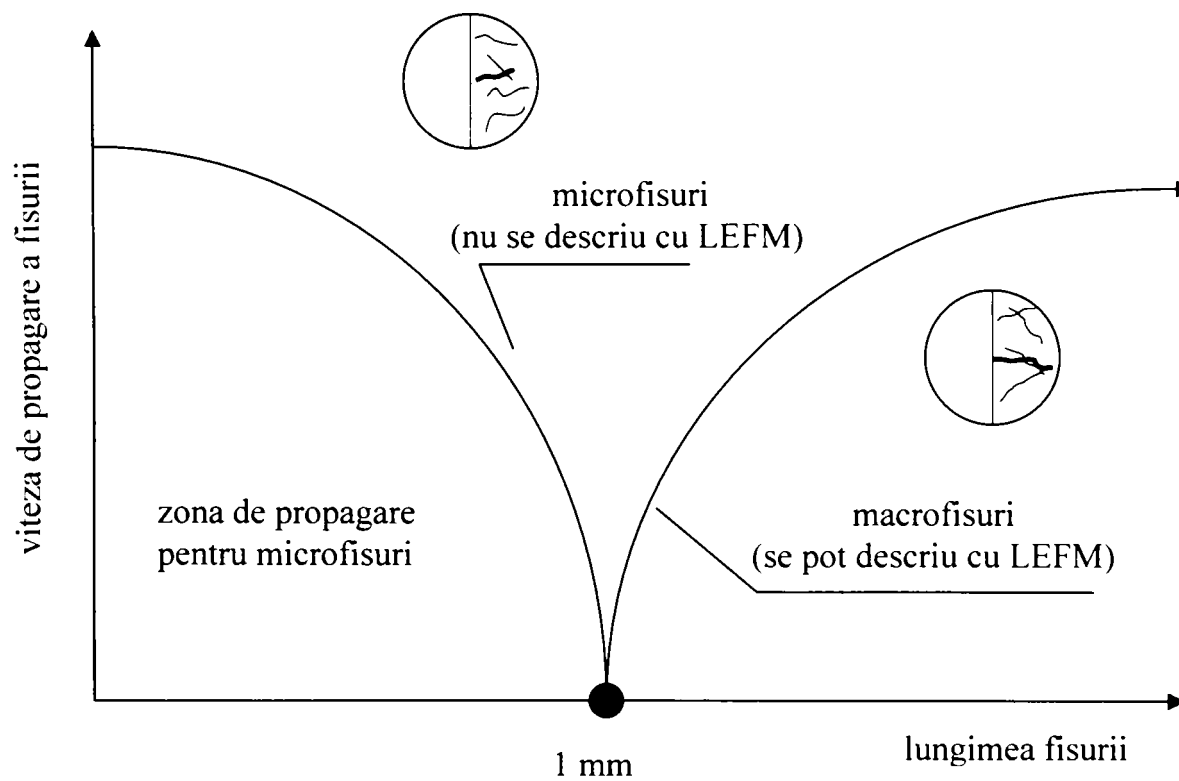


Fig. 2.6.

2.4. MODUL DE PROPAGARE A UNEI FISURI

Felul în care o fisură se extinde depinde de starea de tensiune ce există în regiunea în care aceasta se află. După deplasarea relativă a suprafețelor de rupere situate de o parte și de alta a planului în care fisura se extinde, propagarea acesteia se poate produce în următoarele moduri [119]:

a) **Modul I** = fisura se extinde prin deschidere datorită deplasărilor punctelor de pe suprafața fisurii după o direcție perpendiculară pe planul acesteia – modul de deplasare prin tracționare (suprafețele de rupere se depărtează după direcția y , dar deformațiile sunt simetrice în raport cu planele $x-z$ și $x-y$) – fig. 2.7.a.

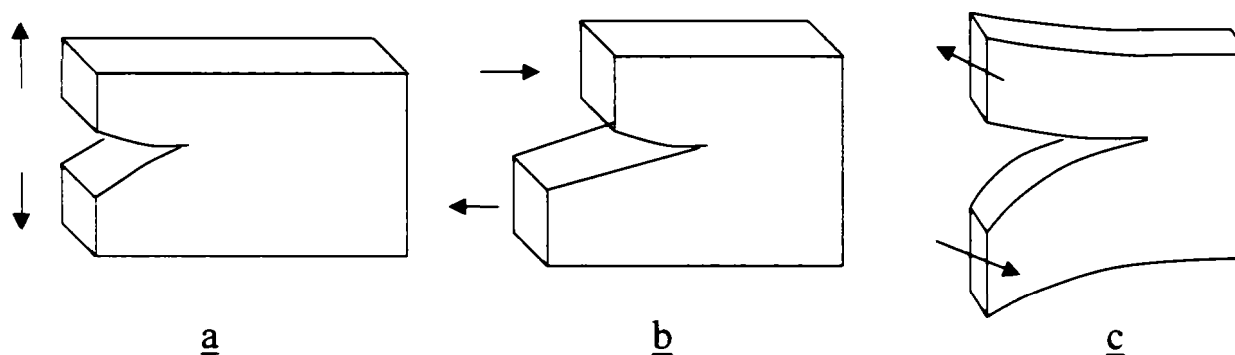


Fig. 2.7.

b) **Modul II** = fisura se extinde prin lunecare frontală, deplasările punctelor de pe suprafața fisurată se fac în planul fisurii, perpendicular pe marginea acesteia, în sensul de avansare al fisurii – modul de alunecare plan (cele 2 suprafețe ale fisurii alunecă una față de cealaltă după direcția x , iar deformațiile sunt simetrice după planul $x-y$ și antisimetrice după planul $x-z$) – fig.2.7.b.

c) **Modul III** = fisura se extinde prin lunecare laterală, deplasarea punctelor de pe suprafața fisurată se face în planul fisurii, paralel cu frontul acesteia – modul de alunecare antiplană – fig.2.7.c.

Toate celelalte cazuri posibile pot fi descrise prin combinarea acestor 3 moduri simple.

Pentru depistarea condițiilor de propagare sau nepropagare a fisurilor, cercetarea contemporană se orientează tot mai mult către fenomenele ce au loc în zona din imediata vecinătate a vârfului fisurii. În acest sens s-a acordat și se acordă o atenție deosebită câmpului de tensiuni de la vârful fisurii și a evoluției acesteia în timpul solicitărilor.

2.5. ISTORICUL DEZVOLTĂRII STANDARDELOR DE MECANICA RUPERII

Introducerea standardelor pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii a devenit o necesitate pentru aprecierea siguranței în exploatare a structurilor de rezistență. Pentru diferiți parametri de Mecanica ruperii (factor de intensitate a tensiunii, deplasarea la deschidere a fisurii, integrala J) și diferite situații în care pot fi aplicați s-au dezvoltat și acceptat diferite proceduri de determinare a valorilor critice a acestor parametri. La utilizarea în practică a standardelor de Mecanica ruperii trebuie să se țină seama de aplicabilitatea lor limitată. Primele limitări sunt legate de mărimea epruvetelor și de transferabilitatea rezultatelor obținute la structuri, deoarece starea de tensiune din epruvetele folosite la determinarea parametrilor de Mecanica ruperii poate diferi de cea din structurile de rezistență. Alte limitări provin din faza de proiectare a structurilor, unde nu poate fi acceptată prezența fisurilor, dar valorile tenacității la rupere ale materialelor trebuie luate în considerare la selecția materialelor. Aplicarea valorilor critice ale parametrilor de Mecanica Ruperii obținute conform standardelor, este mult mai frecventă la evaluarea siguranței în exploatare a structurilor în timpul inspecțiilor în serviciu, atunci când în urma controalelor nedistructive, se detectează fisuri și/sau defecte de anumite dimensiuni în anumite poziții.

Primele tentative de elaborare a unui standard de Mecanica ruperii au fost făcute la sfârșitul anilor '60 și aparțin ASTM (American Society for

Testing and Materials) care propune ASTM E399-70T și BSI (British Standard Institution) care propune DD3. Ambele propuneri au fost acceptate, în urma metodologiei de aprobare, sub același nume „*Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials*” (Metodologia standard de determinare a tenacității la rupere în condițiile stării plane de deformare pentru materialele metalice) și sunt cunoscute ca ASTM E 399 [122], respectiv BS 5447 (actualmente este inclus în noul standard BS 7448,).

BSI a elaborat apoi o nouă propunere DD19 „*Standard Test Method for Crack Opening Displacement*” (Metodologia standard de determinare a deplasării la deschidere a fisurii), acceptată în anul 1972 ca BS 5762, care este de asemenea inclusă în noul standard BS 7448.

Cele mai importante standarde din domeniul Mecanicii ruperii dezvoltate de ASTM sunt:

- ASTM E561 – 86: „*Standard Practice for R – Curve Determination*” (Standard pentru determinarea curbelor R), reaprobat în 1998, [123];
- ASTM E616 – 89: „*Standard Terminology Relating to Fracture*” (Standard privind terminologia din Mecanica ruperii), republicat sub numărul ASTM E1823 – 99, [125];
- ASTM E647 – 88a: „*Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth*” (Metodologia standard de determinare a vitezei de propagare a fisurii), reaprobat în 2000, [126];
- ASTM E740 – 88: „*Standard Practice for Fracture Testing With Surface – Crack Tension Specimen*” (Metodologia de încercare a epruvetelor cu fisura de suprafață), reaprobat în 1995, [127];
- ASTM E812 – 81: „*Standard Test Method for Crack Strength of Slow – Bend Pre-cracked Charpy Specimens of High – Strength Metallic Materials*” (Metodologia standard de determinare a rezistenței la fisurare pe epruvete Charpy prefisurate din materiale de înaltă rezistență), reaprobat în 1997, [133];

- ASTM E813 – 89: „*Standard Test Method for J_{IC} a Measure of Fracture Toughness*” (Metodologia standard de determinare a tenacității la rupere J_{IC}), [128];
- ASTM E992 – 84: „*Standard Practice for Determination of Fracture Toughness of Steels Using Equivalent Energy Methodology*” (Metodologia standard de determinare a tenacității la rupere a oțelurilor utilizând metoda energiei echivalente), [129];
- ASTM E1152 – 87: „*Standard Test Method for Determining J - R Curve*” (Metodologia standard de determinare a curbelor J - R),;
- ASTM E1221 – 88: „*Standard Test Method for Determining Plane Strain Crack - Arrest Fracture Toughness K_{Ia} of Ferritic Steels*” (Metodologia standard de determinare a tenacității la rupere corespunzătoare inhibării fisurii în condițiile stării plane de deformare K_{Ia} pentru oțeluri feritice), reaprobat în 1996, 2002, [130];
- ASTM E1290 – 02: „*Standard Test Method for Crack Tip Opening Displacement (CTOD) Fracture Toughness of Metallic Materials*” (Metodologia standard de determinare a deplasării critice la vârful fisurii, ca măsură a tenacității la rupere pentru materiale metalice);
- ASTM E1304 – 97: „*Standard Test Method for Plain Strain (Chevron Notch) Fracture Toughness of Metallic Materials*” (Metodologia standard de determinare a tenacității la rupere a materialelor metalice utilizând epruvete cu creștătură Chevron), reaprobat în 2002, [132].
- ASTM E1737 – 97: „*Standard Test Method for J Integral Characterization of Fracture*” (Metodologia standard de caracterizare a ruperii prin integrala J);
- ASTM E1820 – 99: „*Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness*” (Metodologia standard de determinare a tenacității

la rupere), reaprobat în 2001. Acest standard combină standardele E813 și E1152, deoarece în mare măsură ele coincideau.

În Europa s-a manifestat o tendință de unificare a standardelor de determinare a tenacității la rupere astfel British Standard Institution propune standardul:

- BS 7448 „*Fracture Mechanics Toughness Tests*” (Încercări pentru determinarea tenacității la rupere) publicat în 1991. Partea 1-a: „*Methods for determination of K_{IC} , critical CTOD and critical J values of metallic materials*” a acestui standard propune metodologia de determinare a parametrilor critici K_{IC} , δ_c și J_{IC} pentru materiale metalice, înglobând standardele BS 5447 și BS 5762 dar și determinarea integralei critice de contur. Partea 2-a „*Methods for determination of K_{IC} , critical CTOD and critical J values of welds in metallic materials*”, publicată în 1997 prescrie metodologia de determinare a parametrilor de Mecanica ruperii pentru îmbinările sudate. Următoarele părți care se află în faza de elaborare aprobare se referă la determinarea tenacității dinamice la rupere (Partea 3-a) și determinarea curbilor R (Partea 4-a).

European Structural Integrity Society (ESIS) propune standardul:

- EFAM GTP 94 „*The GKSS test procedure for determining fracture behaviour of materials*”, (Procedura de testare GKSS pentru determinarea comportării la rupere a materialelor).

La noi în țară primul standard de Mecanica Ruperii a fost elaborat la mijlocul anilor '80:

- STAS 9760-84 „Determinarea tenacității la rupere în condițiile stării plane de deformație. Metoda K_{IC} ”, [139].

urmat apoi de standardul:

- STAS 12803-90 "Determinarea deplasării la deschidere a fisurii", [140].

CAPITOLUL 3

NOȚIUNI TEORETICE DE MECANICA RUPERII PENTRU ALIAJE UȘOARE

3.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Discontinuitățile geometrice de forma fisurilor și creștăturilor adânci, ascuțite, creează dificultăți în integrarea ecuațiilor generale ale teoriei elasticității.

Metodele matematice ale teoriei elasticității consideră materialele reale ca fiind continue. La mediile continue, starea de tensiune poate fi reprezentată prin tensorul tensiune ce acționează într-un punct oarecare al materialului. În general, tensorul tensiune are șase componente, dirijate după direcțiile triedrului de referință, dar, dacă acesta are o poziție particulară, cele trei tensiuni tangențiale se pot anula. În acest caz starea de tensiune este definită numai de tensiunile normale care, ca și direcțiile după care acționează, se numesc principale.

Prezența unui defect prevăzut cu o muchie ascuțită într-un corp aflat în stare liniară uniformă de tensiuni, induce tensiuni în toate cele trei direcții, cu excepția cazului în care planul defectului este paralel cu tensiunile aplicate. Datorită complexității ei, o stare triaxială de tensiune nu poate fi cunoscută cu precizie și, ca urmare, pentru a preîntâmpina apariția curgerii plastice se impune o limitare severă a ductilității materialului.

În stadiul actual de dezvoltare al teoriei elasticității, soluția exactă a problemei stării generale tridimensionale de tensiune nu poate fi obținută. De aceea, pentru studiul distribuției tensiunilor unitare din jurul defectului, care aproape întotdeauna este triaxial, se fac unele ipoteze simplificatoare. Elasticitatea furnizează soluții pentru stări bidimensionale de tensiune care

pot fi aplicate cazurilor cu distribuții tridimensionale, dar este necesar să se verifice în ce măsură aceste soluții „bidimensionale” reprezintă corect sistemele reale de defecte. La o parte din problemele cu simetrie de rotație se pot folosi cele două stări bidimensionale de tensiune cunoscute: starea plană de tensiune și starea plană de deformație.

Măsura în care o soluție descrie condițiile fizice reale, existente în defectul studiat, este hotărâtoare pentru precizia cu care poate fi făcută prognoza ruperii, cu ajutorul principiilor mecanicii ruperii.

Vom face o discuție asupra ruperilor fragile potrivit modului I de solicitare în prezența unor concentratori de tensiune care pot degenera în fisuri. Considerăm o placă subțire de lățime mare prevăzută cu un orificiu eliptic, placa este solicitată la infinit de tensiunile σ , fig.3.1.

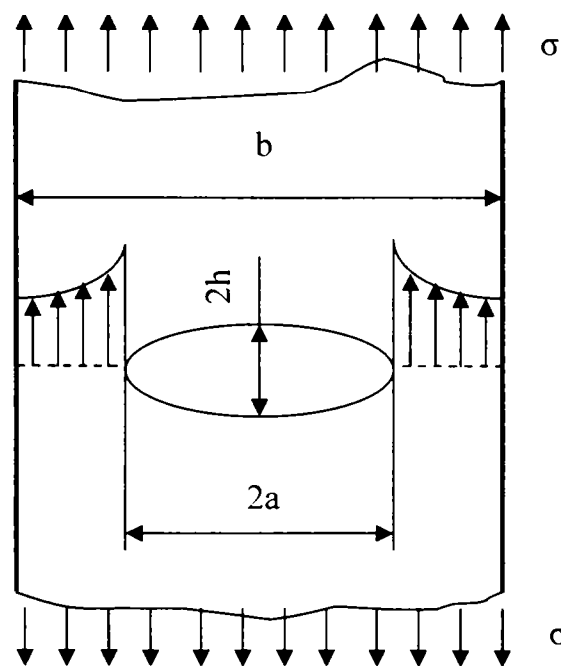


Fig.3.1.

Acest orificiu poate deveni fisură atunci când $h \ll a$. Notând cu ρ raza de curbură:

$$\rho = \frac{h^2}{a} \quad (3.1.)$$

În cazul unei fisuri, raza de curbură îndeplinește condiția:

$$\rho \ll a \quad (3.2.)$$

Din teoria elasticității se obține:

$$\sigma_{\max} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot a}{h}\right) \quad (3.3.)$$

Pe baza relației (3.1.), expresia tensiunii maxime σ_{\max} în funcție de raza de curbură devine:

$$\sigma_{\max} = \sigma \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \approx 2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (3.4.)$$

Pentru ca o astfel de fisură să se propage într-un mediu elastic, este necesar ca tensiunea maximă să atingă valoarea rezistenței teoretice la rupere. Ținând cont de expresia rezistenței teoretice la rupere se poate calcula tensiunea σ care aplicată plăcii poate conduce la rupere fragilă:

$$2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}} = \sqrt{\frac{E \cdot \gamma_c}{d}} \quad (3.5)$$

de unde:

$$\sigma = \sqrt{\frac{E \cdot \gamma_c \cdot \rho}{4 \cdot a \cdot d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot \gamma_c \cdot \rho \cdot \pi}{8 \cdot \pi \cdot a \cdot d}} \cong \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot \gamma_c \cdot \rho}{3 \cdot \pi \cdot a \cdot d}} \quad (3.6.)$$

Comparând această tensiune cu cea obținută pe baza teoriei lui Griffith obținem:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot \gamma_c \cdot \rho}{3 \cdot \pi \cdot a \cdot d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot \gamma_c}{\pi \cdot a}} \quad (3.7.)$$

Rezultă că limita inferioară a razei de curbură a fisurii $\rho = 3 \cdot d$. Raza de curbură trebuie să fie egală cu de trei ori distanța interatomică a cristalului nedeformat.

3.2. ANALIZA CÂMPULUI DE TENSIUNE ÎN VECINĂTATEA UNEI FISURI

3.2.1. DEFINIREA CÂMPULUI DE TENSIUNI

Primele încercări de analiză a câmpului de tensiune din zona situată în imediata apropiere a vârfului unei fisuri, fig. 3.2, îi sunt datorate lui Sneddon [81]. Rezultatele acestuia au fost preluate și dezvoltate mai târziu de către

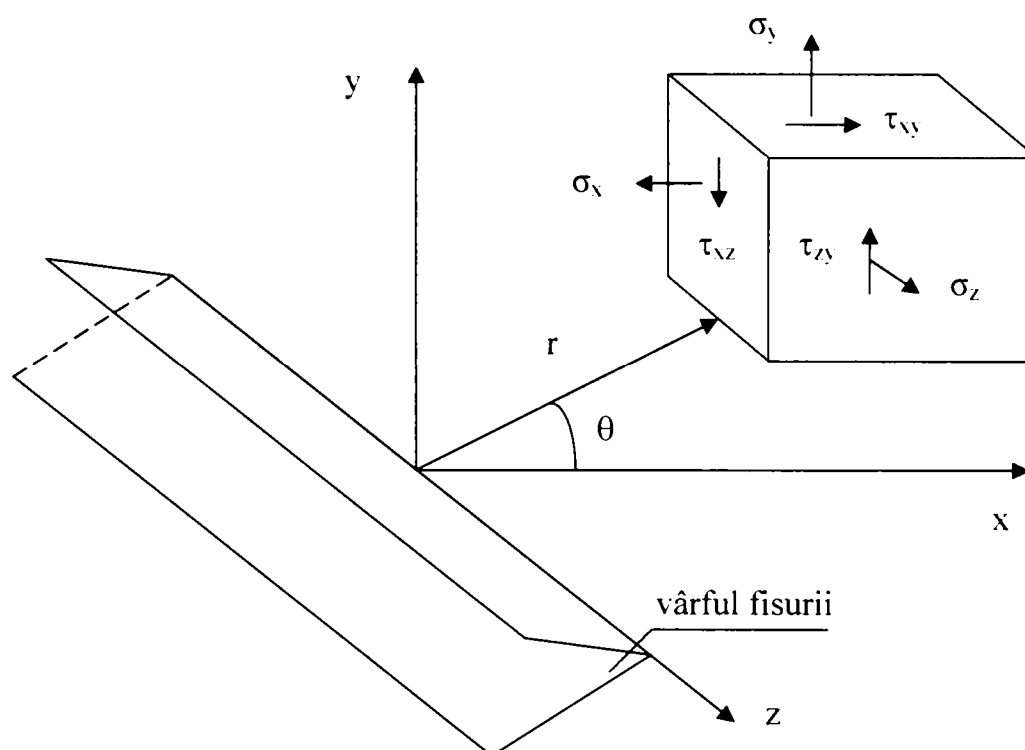


Fig.3.2.

Irwin și Williams. Sih, Rice și Loeber au continuat această analiză utilizând metoda funcțiilor complexe ale lui Muskhelishvili, care se dovedit a fi foarte comodă și precisă în același timp.

Pentru rezolvarea unei probleme de elasticitate plană se pornește de la ecuațiile de echilibru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8.)$$

și condiția de compatibilitate care leagă deformațiile specifice din plane diferite, adică identitatea Saint-Venant:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \quad (3.9.)$$

în care σ_x , σ_y , τ_{xy} sunt componentele tensorului tensiune, iar ε_x , ε_y , γ_{xy} sunt componentele tensorului deformație [40].

Ținând cont de legea lui Hooke pentru starea plană de tensiune:

$$\begin{aligned} E \cdot \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y \\ E \cdot \varepsilon_y &= \sigma_y - \nu \cdot \sigma_x \\ G \cdot \gamma_{xy} &= \tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.10.)$$

și relația dintre constantele elastice E, G și ν :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (3.11.)$$

condiția de compatibilitate devine:

$$\frac{\partial^2 (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)}{\partial y^2} = \frac{E}{G} \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \quad (3.12.)$$

de unde rezultă:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \quad (3.13.)$$

Prin derivarea relațiilor (3.8.) în raport cu x și y, și adunându-le se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= -2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dacă avem în vedere relația (3.14.), ecuația (3.13) devine:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -(1 + \nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \quad (3.15)$$

sau

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.16)$$

ecuație care se mai scrie și sub forma:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.17)$$

ecuație cunoscută în teoria elasticității sub denumirea de condiția lui Levy.

Componentele tensorului tensiune se pot exprima cu ajutorul funcției de tensiune $\psi(x,y)$ a lui Airy [4], folosind relațiile:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \quad (3.18.)$$

Înlocuind aceste relații în ecuația (3.16.) obținem:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (3.19.)$$

care poate fi scrisă concentrat sub forma:

$$\nabla^4 \psi = \nabla^2(\nabla^2 \psi) = 0 \quad (3.20.)$$

Funcțiile care satisfac asemenea ecuații sunt denumite funcții biarmonice.

Deci, întreaga problemă a determinării componentelor câmpului de tensiune într-o zonă situată în imediata apropiere a vârfului fisurii, se reduce la a găsi funcția " ψ " care să conducă la satisfacerea condiției (3.20.) și a condițiilor de contur.

Funcția $\psi(x,y)$ poate fi exprimată cu ajutorul funcției lui Westergaard [119]:

$$\phi(z) = \frac{k}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot z}} \quad (3.21.)$$

unde k este o constantă ce depinde de modul de propagare al fisurii iar $z = x + i \cdot y$, reprezintă variabila complexă a planului la care se referă funcția Airy.

Pentru o placă infinită cu fisură centrală supusă la solicitări biaxiale Westergaard a introdus funcția de tensiune de forma:

$$\psi(x, y) = \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) + y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) \quad (3.22)$$

unde $\bar{\phi}(z)$ și $\phi(z)$ sunt integralele de ordinul I și II ale funcției de variabilă complexă $\phi(z)$, care se exprimă prin:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{d}{dz} \bar{\phi}(z) \\ \bar{\phi}(z) &= \frac{d}{dz} \phi(z) \\ \phi'(z) &= \frac{d}{dz} \phi(z) \end{aligned} \quad (3.23.)$$

astfel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} &= \operatorname{Re} \phi''(z) + y \cdot \operatorname{Im} \phi'''(z) \\ \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} &= \operatorname{Re} \phi''(z) - 4 \cdot i \cdot \operatorname{Im} \phi''(z) + y \cdot \operatorname{Im} \phi'''(z) \\ \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} &= -\operatorname{Re} \phi''(z) + 2 \cdot i \cdot \operatorname{Im} \phi''(z) - y \cdot \operatorname{Im} \phi'''(z) \end{aligned} \quad (3.24.)$$

pentru rezolvarea problemei vom utiliza condițiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\operatorname{Re} \phi(z))}{\partial x} &= \frac{\partial(\operatorname{Im} \phi(z))}{\partial y} \\ \frac{\partial(\operatorname{Re} \phi(z))}{\partial y} &= -\frac{\partial(\operatorname{Im} \phi(z))}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.25.)$$

Efectuând derivatele parțiale ale funcției $\psi(x, y)$ și având în vedere condițiile Cauchy-Riemann obținem:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y^2} \quad (3.26.)$$

Calculăm primul termen al expresiei (3.26.):

$$\frac{\partial(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i \cdot \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) \quad (3.27.)$$

$$\frac{\partial^2(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial y^2} = i \cdot \frac{\partial(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial y} = i \cdot \frac{\partial(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i^2 \cdot \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) = -\operatorname{Re} \bar{\phi}(z) \quad (3.28.)$$

Vom calcula al doilea termen al expresiei (3.26.)

$$\frac{\partial(y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y} = \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) + y \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y} \quad (3.29.)$$

$$\frac{\partial^2(y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y^2} = \frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y} + \frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y^2} \quad (3.30)$$

Având în vedere condițiile Cauchy-Riemann, ecuația (3.25.) devine:

$$\frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial x} = \frac{\partial(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) \quad (3.31.)$$

Analizăm al doilea termen al expresiei (3.30.)

$$\frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) \quad (3.32.)$$

$$y \cdot \frac{\partial^2(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y^2} = y \cdot i \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y} = y \cdot i \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}'(z) \quad (3.33.)$$

Înlocuind relațiile (3.31.) și (3.33.) în (3.30.) se obține:

$$\frac{\partial^2(y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial y^2} = 2 \cdot \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}'(z) \quad (3.34.)$$

Din expresiile (3.28.) și (3.34.) rezultă expresia tensiunii σ_x :

$$\sigma_x = -\operatorname{Re} \bar{\phi}(z) + 2 \cdot \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}'(z) \quad (3.35.)$$

adică

$$\sigma_x = \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}'(z) \quad (3.36.)$$

În mod analog se calculează și tensiunea σ_y :

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z))}{\partial x^2} \quad (3.37.)$$

Dar

$$\frac{\partial(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial x} = \frac{\partial(\operatorname{Re} \bar{\phi}(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) \quad (3.38.)$$

$$\frac{\partial^2(\operatorname{Re}\bar{\phi}(z))}{\partial x^2} = \frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\phi}(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{Re}\phi(z) \quad (3.39.)$$

$$\frac{\partial(y \cdot \operatorname{Im}\bar{\phi}(z))}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\phi}(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \operatorname{Im}\phi(z) \quad (3.40.)$$

$$\frac{\partial^2(y \cdot \operatorname{Im}\bar{\phi}(z))}{\partial x^2} = y \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im}\phi(z))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \operatorname{Im}\phi'(z) \quad (3.41.)$$

Înlocuind relațiile (3.39.) și (3.41.) în expresia tensiunii σ_y (3.37.) obținem:

$$\sigma_y = \operatorname{Re}\phi(z) + y \cdot \operatorname{Im}\phi'(z) \quad (3.42.)$$

Tensiunea tangențială:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x \cdot \partial y} \quad (3.43.)$$

Având în vedere că:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\phi}(z))}{\partial y} + \frac{\partial(y \cdot \operatorname{Im}\bar{\phi}(z))}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\phi}(z))}{\partial y} + \operatorname{Im}\bar{\phi}(z) + y \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\phi}(z))}{\partial y} \quad (3.44.)$$

Vom ține cont de condițiile Cauchy-Riemann (3.25.), obținând:

$$\frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\phi}(z))}{\partial y} = -\frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\phi}(z))}{\partial x} \quad (3.45.)$$

Atunci ecuația (3.44.) devine:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\phi}(z))}{\partial x} + \operatorname{Im}\bar{\phi}(z) + y \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\phi}(z))}{\partial y} = -\operatorname{Im}\bar{\phi}(z) + \operatorname{Im}\bar{\phi}(z) + y \cdot i \cdot \operatorname{Im}\phi(z) \quad (3.46.)$$

adică

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = i \cdot y \cdot \operatorname{Im}\phi(z) \quad (3.47.)$$

Atunci:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x \cdot \partial y} = -i \cdot y \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im}\phi(z))}{\partial x} \quad (3.48.)$$

Dar

$$\frac{\partial(\operatorname{Im}\phi(z))}{\partial x} = -\frac{\partial(\operatorname{Re}\phi(z))}{\partial y} \quad (3.49.)$$

de unde

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} = i \cdot y \cdot \frac{\partial(\operatorname{Re} \phi(z))}{\partial y} = i^2 \cdot y \cdot \operatorname{Re} \phi'(z) = -y \cdot \operatorname{Re} \phi'(z) \quad (3.50.)$$

conducând la expresia tensiunii tangențiale:

$$\tau_{xy} = -y \cdot \operatorname{Re} \phi'(z) \quad (3.51.)$$

Astfel am obținut soluțiile generale:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} \phi(z) - y \cdot \operatorname{Im} \phi'(z) \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} \phi(z) + y \cdot \operatorname{Im} \phi'(z) \quad (3.52.) \\ \tau_{xy} &= -y \cdot \operatorname{Re} \phi'(z) \end{aligned}$$

Pentru problema analizată, funcția $\phi(z)$ trebuie să îndeplinească anumite condiții de contur. Pentru placa infinită cu fisură sollicitată biaxial prin tensiunea σ , condițiile la limită sunt – fig.3.3.

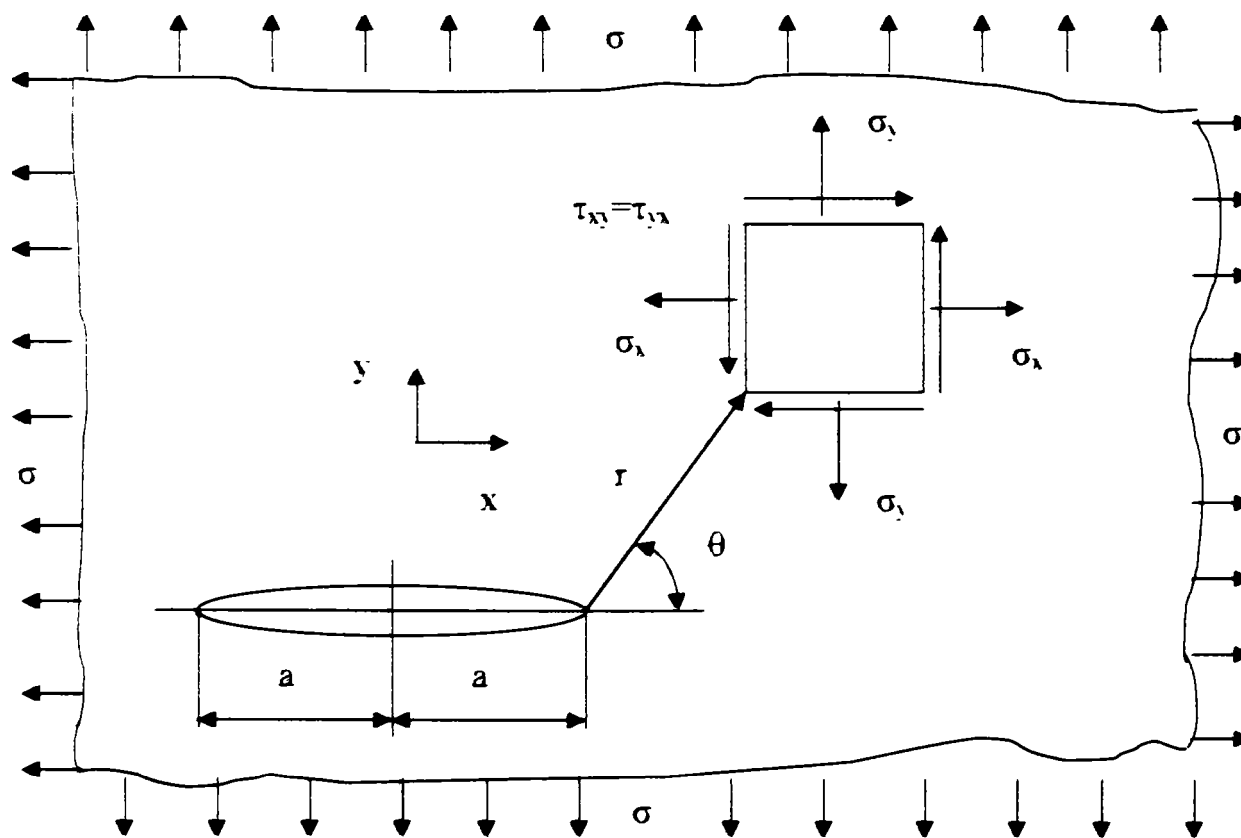


fig.3.3.

- pentru $-a < x < a$ și $y = 0 \Rightarrow \sigma_y = 0$;
- pentru $y = \pm x \Rightarrow \sigma_x = \sigma$;
- pentru $x = \pm a \Rightarrow \sigma_x = \infty$ - condiția de singularitate.

Un exemplu de funcție care satisface aceste condiții este:

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}} \quad (3.53.)$$

Din sistemul (3.52.) pentru $y = 0 \Rightarrow \sigma_x = \operatorname{Re} \phi(z)$

Ținând cont de expresia lui $\phi(z)$ (3.53.) obținem:

$$\phi(z) = \frac{z \cdot \sigma}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{\sigma \cdot (x + i \cdot y)}{\sqrt{(x + i \cdot y)^2 - a^2}} \quad (3.54.)$$

Rezultă:

$$\operatorname{Re} \phi(z) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (3.55.)$$

Pe baza relației de mai sus este evident că pentru $-a < x < a$, deci pentru valori foarte mici ale lui x , $\operatorname{Re} \phi(z) = 0$ și deci prima condiție este îndeplinită.

Când $z \rightarrow \infty$, din relația (3.53.) observăm că $\phi(z) = \sigma$.

Pentru $z = \pm a$, tot din relația (3.54.) observăm că $\sigma_x = \infty$, adică este îndeplinită și condiția de singularitate.

Vom deplasa sistemul de axe, inițial cu originea în centrul fisurii, în vârful acesteia, introducând astfel o nouă variabilă $\eta = z - a$.

Atunci $\phi(z)$ devine:

$$\phi(\eta) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(a + \eta)^2}}} = \frac{\sigma \cdot (a + \eta)}{\sqrt{(a + \eta)^2 - a^2}} \quad (3.56.)$$

Deoarece $\eta \ll a$, într-o primă aproximare relația de mai sus devine:

$$\phi(\eta) \cong \frac{\sigma \cdot a}{\sqrt{2 \cdot a \cdot \eta}} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{2 \cdot \eta}} \quad (3.57.)$$

Trecând de la sistemul de axe cartezian cu originea în vârful fisurii la sistemul de axe polar cu aceeași origine, atunci:

$$\eta = r \cdot e^{i\theta} \quad (3.58.)$$

iar funcția $\phi(\eta)$ dată de relația (3.57.) devine:

$$\phi(\eta) = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot i \cdot \theta} \quad (3.59.)$$

relație care poate fi aplicată pentru $r \ll a$, ținând cont de aproximația făcută la obținerea relației (3.57.)

Pornind de la expresia lui $\phi(\eta)$ dată de relația (3.59.) se pot calcula $\text{Re } \phi(\eta)$, $\text{Re } \phi'(\eta)$, $\text{Im } \phi'(\eta)$, având în vedere formulele lui Euler:

$$e^{-\frac{1}{2} \cdot i \cdot \theta} = \cos \frac{\theta}{2} - i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.60.)$$

Atunci funcția $\phi(\eta)$ dată de relația (3.59.) devine:

$$\phi(\eta) = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.61)$$

care ne conduce la:

$$\text{Re } \phi(\eta) = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.62)$$

$$\text{Im } \phi(\eta) = -\frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

Vom porni de la expresia lui $\phi(\eta)$ dată de relația (3.57) scrisă sub forma:

$$\phi(\eta) = \frac{\sigma \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{2}} \cdot \eta^{-\frac{1}{2}} \quad (3.63)$$

și vom deriva expresia (3.63) în raport cu η :

$$\phi'(\eta) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{2}} \cdot r^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot i \cdot \theta} \quad (3.64)$$

respectiv:

$$\phi'(\eta) = -\frac{1}{2 \cdot r} \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot i \cdot \theta} \quad (3.65)$$

Ținând cont de formulele lui Euler relația de mai sus (3.65) devine:

$$\phi'(\eta) = -\frac{1}{2 \cdot r} \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left(\cos \frac{3 \cdot \theta}{2} - i \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) \quad (3.66)$$

de unde:

$$\operatorname{Re} \phi'(\eta) = -\frac{1}{2 \cdot r} \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \quad (3.67)$$

și

$$y \cdot \operatorname{Re} \phi'(\eta) = -\frac{y}{2 \cdot r} \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \quad (3.68)$$

dar

$$\frac{y}{r} = \sin \theta = 2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.69)$$

care înlocuite în relația (3.68) ne conduc la:

$$y \cdot \operatorname{Re} \phi'(\eta) = -\frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \quad (3.70)$$

Analog din relația (3.66) rezultă:

$$\operatorname{Im} \phi'(\eta) = \frac{1}{2 \cdot r} \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \quad (3.71)$$

de unde:

$$y \cdot \operatorname{Im} \phi'(\eta) = \frac{y}{r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \quad (3.72)$$

Având în vedere relațiile (3.62), (3.70) și (3.72) sistemul (3.52) al soluțiilor generale devine:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Din ecuațiile de mai sus, observăm că tensiunile la vârful unei fisuri se calculează ca produsul dintre un factor geometric $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f(\theta)$, care depinde de poziția în care se calculează tensiunile și de un factor $\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$. Acest factor, $\sigma \sqrt{\pi \cdot a}$, reprezintă o măsură a creșterii tensiunii în prezența unei fisuri

în raport cu tensiunea existentă în placă în absența fisurii denumit „**FACTOR DE INTENSITATE A TENSIUNII**”, notat cu K_I ($K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$).

Conform STAS 1963 – 81, factorul de intensitate al tensiunii reprezintă „valoarea părții principale a singularității câmpului de tensiune într-un corp solid liniar elastic, la vârful unei discontinuități de forma unei fisuri”.

Indicele I este utilizat pentru a preciza că se referă la modul I de solicitare, iar pentru modurile II și III de deschidere a fisurii acest factor s-a notat cu K_{II} și respectiv K_{III} .

Factorul de intensitate a tensiunii K se măsoară de obicei în $MPa\sqrt{m}$.

În aceste condiții, ecuațiile (3.73) devin:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2}\end{aligned} \quad (3.74)$$

Cunoscând tensiunile care acționează pe fețele elementului considerat se pot calcula și tensiunile principale σ_1 și σ_2 pentru starea plană de tensiune:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (3.75)$$

de unde rezultă având în vedere sistemul (3.74):

$$\sigma_{1,2} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot K_I^2}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{3 \cdot \theta}{2} + \frac{4 \cdot K_I^2}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{3 \cdot \theta}{2}} \quad (3.76)$$

obținând:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_2 &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \quad (3.77)$$

Pentru starea plană de deformație mai apare și σ_3 :

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2 \cdot \nu \cdot K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.78)$$

Analog se obțin și expresiile tensiunilor pentru celelalte două moduri de solicitare:

Modul II:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Unde $K_{II} = \tau \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$.

Modul III:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{xz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.80)$$

unde $K_{III} = \tau \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$.

3.2.2. CALCULUL DEPLASĂRILOR

Pentru calculul deplasărilor vom aplica legea lui Hooke generalizată pentru starea plană de deformație:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.81)$$

unde $\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$, rezultând:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x \cdot (1 - \nu^2) - \nu \cdot \sigma_y \cdot (1 + \nu)] \quad (3.82)$$

în care: - E = modulul de elasticitate longitudinal,

- ν = coeficientul lui Poisson.

Vom ține cont de relațiile diferențiale dintre deplasări și deformații specifice:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.83)$$

rezultând:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x \cdot (1 - \nu^2) - \nu \cdot \sigma_y \cdot (1 + \nu)] \quad (3.84)$$

de unde prin integrare obținem:

$$u = \frac{1}{E} \cdot \int [\sigma_x \cdot (1 - \nu^2) - \nu \cdot \sigma_y \cdot (1 + \nu)] \cdot dx \quad (3.85)$$

Având în vedere expresiile tensiunilor σ_x și σ_y date de sistemul (3.52), deplasarea u devine:

$$u = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \int \{ (1 - \nu) \cdot [\operatorname{Re} \phi(z) - y \cdot \operatorname{Im} \phi'(z)] - \nu \cdot [\operatorname{Re} \phi(z) + y \cdot \operatorname{Im} \phi'(z)] \} \cdot dz \quad (3.86)$$

de unde obținem că:

$$u = \frac{1 + \nu}{E} \cdot [(1 - 2 \cdot \nu) \cdot \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - y \cdot \operatorname{Im} \phi(z)] \quad (3.87)$$

Termenul $\operatorname{Im} \phi(z)$ este dat de relația a doua a sistemului (3.62) iar pentru calculul lui $\operatorname{Re} \phi(z)$ pornim de la relația (3.57) scrisă sub forma:

$$\phi(\eta) = \sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \eta^{\frac{1}{2}} \quad (3.88)$$

care prin integrare ne conduce la:

$$\bar{\phi}(\eta) = 2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \eta^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \eta^{\frac{1}{2}} \quad (3.89)$$

Cu notația (3.58), relația (3.89) devine:

$$\bar{\phi}(\eta) = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot r^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \frac{\theta}{2}} = 2 \cdot K_I \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot e^{i \frac{\theta}{2}} \quad (3.90)$$

Prin aplicarea formulelor lui Euler, $\bar{\phi}(\eta)$ capătă următoarea formă:

$$\bar{\phi}(\eta) = 2 \cdot K_I \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.91)$$

de unde obținem:

$$\operatorname{Re} \bar{\phi}(\eta) = 2 \cdot K_I \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.92)$$

Pe baza relațiilor (3.62) și (3.92) obținem o altă expresie a deplasării u , relația (3.87) în funcție de factorul de intensitate a tensiunii K_I :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{E} \cdot \left[2 \cdot (1-2\nu) \cdot K_I \cdot \sqrt{\frac{r}{\pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + y \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot K_I \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{r} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot K_I \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.93)$$

În expresia de mai sus s-a avut în vedere că $\frac{y}{r} = \sin \theta$ și respectiv

$\frac{y}{r} = 2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$, expresia finală a deplasării fiind:

$$u = \frac{2 \cdot K_I \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.94)$$

relație în care s-a avut în vedere faptul că $\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}$.

În mod analog se calculează și deplasarea v , pornind tot de la legea lui Hooke generalizată:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3.95)$$

unde $\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$, obținând:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y \cdot (1-\nu^2) - \nu \cdot \sigma_x \cdot (1+\nu)] \quad (3.96)$$

dar

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.97)$$

atunci prin integrare obținem:

$$v = \frac{1+\nu}{E} \cdot \int [\sigma_y \cdot (1-\nu) - \nu \cdot \sigma_x] \cdot dy \quad (3.98)$$

Revenind la expresiile tensiunilor σ_x și σ_y date de sistemul (3.52), deplasarea v capătă forma:

$$v = \frac{1+\nu}{E} \cdot \int \{ (1-\nu) \cdot [\operatorname{Re} \phi(z) + y \cdot \operatorname{Im} \phi'(z)] - \nu \cdot [\operatorname{Re} \phi(z) - y \cdot \operatorname{Im} \phi'(z)] \} \cdot dy \quad (3.99)$$

de unde:

$$v = \frac{1+\nu}{E} \cdot \int [(1-2\nu) \cdot \operatorname{Re} \phi(z) + y \cdot \operatorname{Im} \phi'(z)] \cdot dy \quad (3.100)$$

În cele ce urmează vom analiza fiecare termen al expresiei de mai sus, ținând cont și de condițiile Cauchy Riemann:

$$(1-2\nu) \cdot \int \operatorname{Re} \phi(z) \cdot dy = (1-2\nu) \cdot \int \operatorname{Im} \phi(z) \cdot dz = (1-2\nu) \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \int y \cdot \operatorname{Im} \phi'(z) \cdot dy &= y \cdot \int \operatorname{Im} \phi'(z) \cdot dy - \iint \operatorname{Im} \phi'(z) \cdot dy \cdot dy = \\ &= -y \cdot \int \operatorname{Re} \phi'(z) \cdot dz + \int \operatorname{Re} \phi(z) \cdot dy = -y \cdot \operatorname{Re} \phi(z) + \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) \end{aligned} \quad (3.102)$$

Înlocuind cei doi termeni (3.101) și (3.102) în relația (3.96) obținem:

$$v = \frac{1+\nu}{E} \cdot [2 \cdot (1-\nu) \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) - y \cdot \operatorname{Re} \phi(z)] \quad (3.103)$$

Dacă în relația (3.103) înlocuim pe $\operatorname{Im} \bar{\phi}(z)$ și $\operatorname{Re} \phi(z)$ cu expresiile date de relațiile (3.91) și respectiv (3.62), rezultă:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1+\nu}{E} \cdot \left[2 \cdot (1-\nu) \cdot 2 \cdot K_I \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - y \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot K_I \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \left[2 \cdot (1-\nu) \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{r} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot K_I \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left[2 \cdot (1-\nu) \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.104)$$

Expresia finală a deplasării fiind:

$$v = \frac{2 \cdot K_I \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.105)$$

Expresiile u și v date de relațiile (3.94) și respectiv (3.105) scrise pentru starea plană de deformație în funcție de modulul de elasticitate transversal $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$ devine:

$$u = \frac{K_I}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.106)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Analog se pot calcula și deplasările pentru starea plană de tensiune:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \quad (3.107)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$

Având în vedere relațiile (3.52) obținem:

$$u = \frac{1}{E} \cdot \int [(1-\nu) \cdot \operatorname{Re} \phi(z) - y \cdot (1+\nu) \cdot \operatorname{Im} \phi'(z)] \cdot dz \quad (3.108)$$

$$v = \frac{1}{E} \cdot \int [(1-\nu) \cdot \operatorname{Re} \phi(z) + y \cdot (1+\nu) \cdot \operatorname{Im} \phi'(z)] \cdot dz$$

De unde se obține:

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - \frac{1+\nu}{E} \cdot y \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) \quad (3.109)$$

Având în vedere relațiile (3.101) și (3.102) obținem:

$$v = \frac{1-\nu}{E} \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) - \frac{1+\nu}{E} \cdot [-y \cdot \operatorname{Re} \phi(z) + \operatorname{Im} \bar{\phi}(z)] \quad (3.110)$$

respectiv :

$$v = \frac{2}{E} \cdot \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) - \frac{1+\nu}{E} \cdot y \cdot \operatorname{Re} \phi(z) \quad (3.111)$$

Dacă în relațiile (3.109) și (3.111) înlocuim pe $\operatorname{Re} \phi(z)$, $\operatorname{Re} \bar{\phi}(z)$ și $\operatorname{Im} \bar{\phi}(z)$ cu expresiile lor date de relațiile (3.62) și (3.91) obținem:

$$u = \frac{2 \cdot K_I \cdot (1-\nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1+\nu}{E} \cdot y \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.112)$$

$$v = \frac{4 \cdot K_I}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1+\nu}{E} \cdot y \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$$

obținând expresiile finale ale deplasărilor:

$$u = \frac{2 \cdot K_I}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \nu \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.113)$$

$$v = \frac{2 \cdot K_I}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \nu \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Deplasările v sunt foarte importante deoarece pe baza lor se pot calcula deschiderile fisurii sau flancurile fisurii – fig. 3.4.

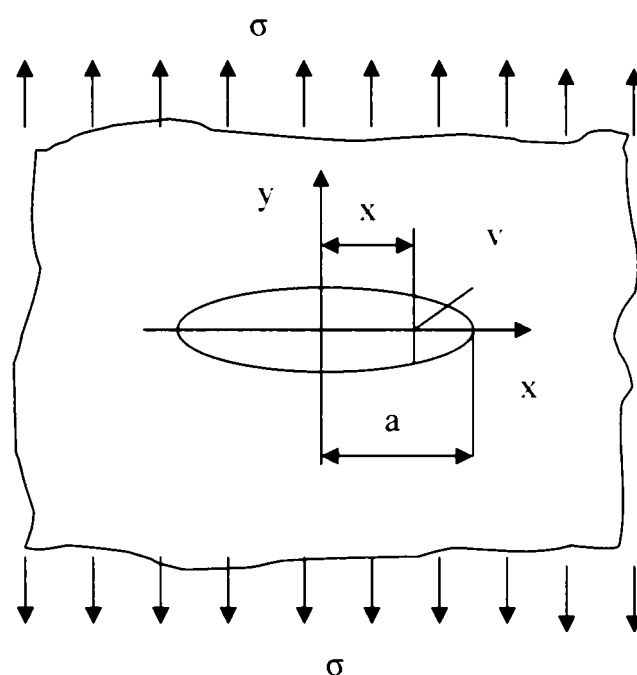


Fig. 3.4

Astfel, deplasarea v , pentru starea plană de deformație, la distanța x față de centrul fisurii, se obține din ecuația (3.103) punând condiția ca $y = 0$ și $-a < x < a$, rezultă:

$$v = \frac{2 \cdot (1 - \nu^2)}{E} \cdot \text{Im} \bar{\phi}(z) = \frac{2 \cdot \sigma}{E} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.114)$$

Analog pentru starea plană de tensiune, ecuația (3.111) devine:

$$v = \frac{2}{E} \cdot \text{Im} \bar{\phi}(z) = \frac{2 \cdot \sigma}{E} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.115)$$

Procedând asemănător se poate stabili câmpul deplasărilor și pentru celelalte două cazuri de solicitare. În condițiile stării plane de deformație se obține:

Modul II:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{K_{II}}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
v &= \frac{K_{II}}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(-1 + 2 \cdot \nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
w &= 0 \quad (\text{starea plană de deformație})
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Modul III:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{K_{III}}{G} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot r}{\pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\
u &= v = 0
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Am obținut astfel câmpul de tensiune și deplasări pentru cele trei moduri de deplasare a flancurilor fisurii:

- pentru Modul I:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{I,x}(\theta) \\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{I,y}(\theta) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{I,xy}(\theta) \\
\tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0
\end{aligned} \tag{3.118}$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{K_I}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - 2 \cdot \nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
v &= \frac{K_I}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
\sigma_z &= \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\
w &= 0
\end{aligned}$$

- pentru Modul II:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{II,x}(\theta) \\
\sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{II,y}(\theta) \\
\sigma_z &= \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)
\end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{II,xy}(\theta)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (3.119)$$

$$u = \frac{K_{II}}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(-1 + 2 \cdot \nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$w = 0$$

- pentru Modul III:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{III,zx}(\theta)$$

(3.120)

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{III,yz}(\theta)$$

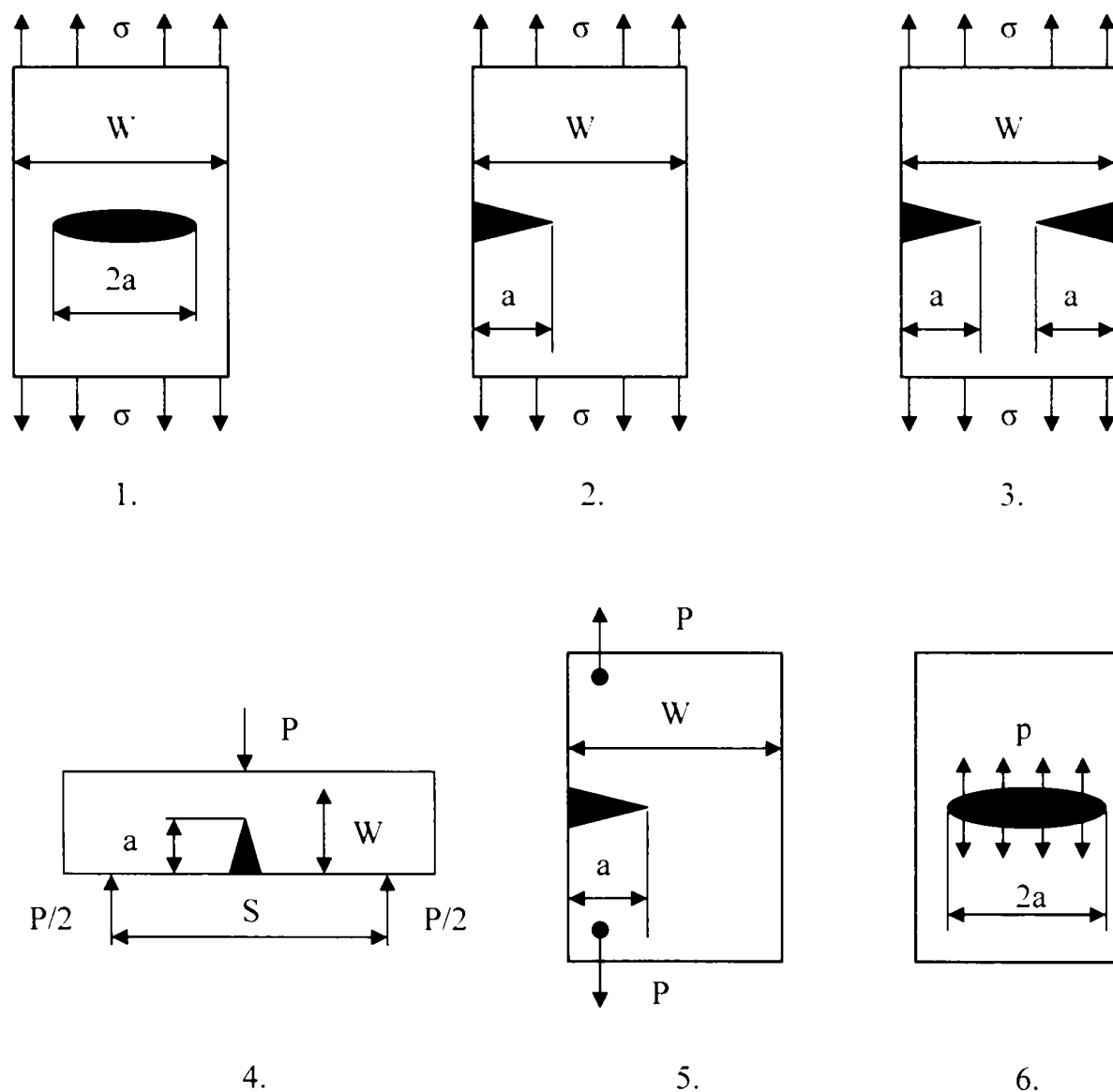
$$w = \frac{K_{III}}{G} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot r}{\pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

Din relațiile de mai sus, apare evidentă concluzia potrivit căreia, întregul câmp de tensiune și deplasări de la vârful unei fisuri este controlat de factorii de intensitate a tensiunii K_I , K_{II} și K_{III} pentru fiecare mod de propagare în parte.

Propagarea unei fisuri apare atunci când componentele câmpului de tensiune și deplasări din imediata vecinătate a vârfului fisurii depășesc anumite valori limită critice, deci atunci când factorii de intensitate a tensiunii corespunzători depășesc și ei anumite valori critice [79]. Factorii de intensitate a tensiunii înglobează în expresiile lor atât date referitoare la câmpul exterior de tensiune cât și date referitoare la dimensiunea fisurii. În literatura de specialitate sunt date foarte multe expresii ale factorilor K pentru diferite cazuri concrete de solicitare și geometrie de tipul celor prezentate în tabelul 3.1.

Tab.3.1.

Expresiile factorului de intensitate a tensiunii pentru câteva situații concrete de sollicitare și geometrie [21]



$$1. K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left(\sec \frac{\pi \cdot a}{W} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2. K_I = 1,12 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{pentru valori mici ale raportului } \frac{a}{W})$$

$$\text{sau } K_I = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{a}$$

$$\text{cu } Y = 1,99 - 0,41 \cdot \frac{a}{W} + 18,7 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 38,48 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 53,85 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^4$$

$$3. K_I = 1,12 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{pentru valori mici ale raportului } \frac{a}{W})$$

$$\text{sau } K_I = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{a}$$

$$\text{cu } Y = 1.99 + 0.76 \cdot \frac{a}{W} - 8.48 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 27.36 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^3$$

4. Pentru grosime B:

$$K_I = \frac{P \cdot S}{B \cdot W^{3/2}} \cdot \left[2.9 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} - 4.6 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{3/2} + 21.8 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{5/2} - 37.6 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{7/2} + 38.7 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{9/2} \right]$$

5. Pentru grosime B:

$$K_I = \frac{P}{B \cdot W^{1/2}} \cdot \left[29.6 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} - 185.5 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{3/2} + 655.7 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{5/2} - 1017 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{7/2} + 63.9 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^{9/2} \right]$$

6. „p”, pe unitate de grosime:

$$K_I = p \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

Utilizarea factorilor de intensitate a tensiunii pentru examinarea stabilității în timp a unei anumite fisuri necesită atât cunoașterea câmpului de tensiune din vecinătatea vârfului fisurii pentru structura geometrică investigată cât și condițiile de încărcare și de contur impuse de o anumită situație concretă.

Din analiza dimensională a relațiilor (3.118), precum și din relațiile din tabelul 3.1 se poate observa că factorul de intensitate a tensiunii asociat modului I de propagare a fisurilor poate fi definit prin forma generalizată:

$$K_I = \Omega \cdot \sigma \cdot \sqrt{a} \quad (3.121)$$

unde Ω este un parametru dependent de domeniul și geometria fisurii iar a este dimensiunea care definește fisura – lungimea fisurii.

În cazul modurilor mixte (compuse) de deplasare a flancurilor fisurii tensiunile și deplasările se pot obține prin suprapunere de efecte, însumând componentele respective.

Soluția Irwin în coordonate polare pentru modul mixt (I+II) de deplasare a flancurilor fisurii are forma:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_I}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left(5 \cdot \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left(5 \cdot \sin \frac{\theta}{2} - 3 \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{K_I}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left(3 \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left(3 \cdot \sin \frac{\theta}{2} + 3 \cdot \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cdot \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right)\end{aligned} \quad (3.122)$$

Din relațiile (3.118), (3.119), (3.120) și (3.122) se observă că dacă se reușește determinarea factorului de intensitate a tensiunii K , prin metode analitice, numerice sau experimentale, se poate determina cu ușurință câmpul de tensiune și deformație din jurul fisurii.

3.3. ALEGEREA TIPULUI DE ALIAJ PE BAZA CONCEPTELOR DE MECANICA RUPERII

Se va prezenta un exemplu de dimensionare a unei plăci din aliaj de aluminiu pe baza conceptelor din Rezistența Materialelor și respectiv, pe baza conceptelor din Mecanica Ruperii.

Se consideră placa din fig. 1.8, frecvent utilizată în industria auto, având următoarele dimensiuni:

- lățimea $2b = 100$ mm;
- lungimea $2h = 200$ mm,

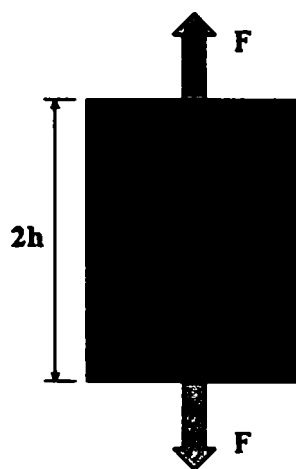


Fig. 1.8.

și care trebuie să suporte o încărcare de $F = 50 \text{ kN}$.

Pentru dimensionarea plăcii avem la dispoziție un număr de 5 tipuri de aliaje de aluminiu ale căror caracteristici sunt prezentate în tabelul 1.1.

Tab.1.1.

Tip aliaj aluminiu	Limita de curgere σ_c [MPa]	Tenacitatea la rupere K_{Ic} [MPa \sqrt{m}]
2024	393	36.3
5083	140	50.0
6061	248	30.0
7075	420	25.3
AlZn5.5MnCu	495	13.3

Calculul se efectuează luând în considerare un coeficient de siguranță $c = 2$.

▪ Pe baza conceptelor din Rezistența Materialelor se calculează:

- tensiunea admisibilă: $\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c}$ [MPa]

- grosimea plăcii: $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{(2b) \cdot t} \Rightarrow t = \frac{F}{(2b) \cdot \sigma_a}$ [mm]

Rezultatele obținute sunt redată în tabelul 1.2:

Tab. 1.2.

Tip aliaj aluminiu	Limita de curgere σ_c [MPa]	Tensiunea admisibilă σ_a [MPa]	Grosimea t [mm]
2024	393	196.5	2.54
5083	140	70,0	7.14
6061	248	124,0	4.03
7075	420	210.0	2.38
AlZn5,5MnCu	495	247,5	2.02

Pentru dimensionarea plăcii ținând cont de conceptele din Mecanica Ruperii acceptăm o fisură având lungimea $2a = 4$ mm iar factorul de intensitate al tensiunii se calculează cu relația:

$$K_I = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (1.1)$$

unde:

$$Y = 1.99 - 0.41 \cdot \frac{a}{2b} + 18.7 \cdot \left(\frac{a}{2b}\right)^2 - 38.48 \cdot \left(\frac{a}{2b}\right)^3 + 53.85 \cdot \left(\frac{a}{2b}\right)^4 \quad (1.2)$$

▪ Pe baza conceptelor de Mecanica Ruperii se calculează:

- tenacitatea admisibilă: $K_I = \frac{K_{IC}}{c} \quad [MPa\sqrt{m}]$

- grosimea plăcii: $K_I = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = Y \cdot \frac{F}{(2b) \cdot t} \Rightarrow t = \frac{Y \cdot F \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{(2b) \cdot K_I}$

Rezultatele obținute sunt redată în tabelul 1.3:

Tab. 1.3.

Tip aliaj aluminu	Tenacitatea la rupere $K_{IC} [MPa\sqrt{m}]$	Tenacitatea admisibilă $K_I [MPa\sqrt{m}]$	Grosimea t [mm]
2024	36,3	18.15	4.35
5083	50,0	25.00	3.15
6061	30,0	15.00	5.26
7075	25,3	12.65	6.24
AlZn5.5MnCu	13,3	6,65	11.88

Prin compararea rezultatelor celor două abordări, obținem valorile din tabelul 1.4.:

Tip aliaj aluminiu	Limita de curgere σ_c [MPa]	Grosimea t [mm]	Tenacitatea la rupere K_{IC} [MPa \sqrt{m}]	Grosimea t [mm]	Grosimea minimă t [mm]
2024	393	2.54	36.3	4.35	
5083	140	7.14	50.0	3.15	7.14
6061	248	4.03	30.0	5.26	5.26
7075	420	2.38	25.3	6.24	6.24
AlZn5.5MnCu	495	2.02	13.3	11.88	11.88

Pentru alegerea tipului de aliaj de aluminiu se reprezintă grafic grosimea calculată în funcție de tipul aliajului de aluminiu pe baza celor două concepte din Mecanica Rupării și, respectiv Mecanica Rupării – fig. 1.9.

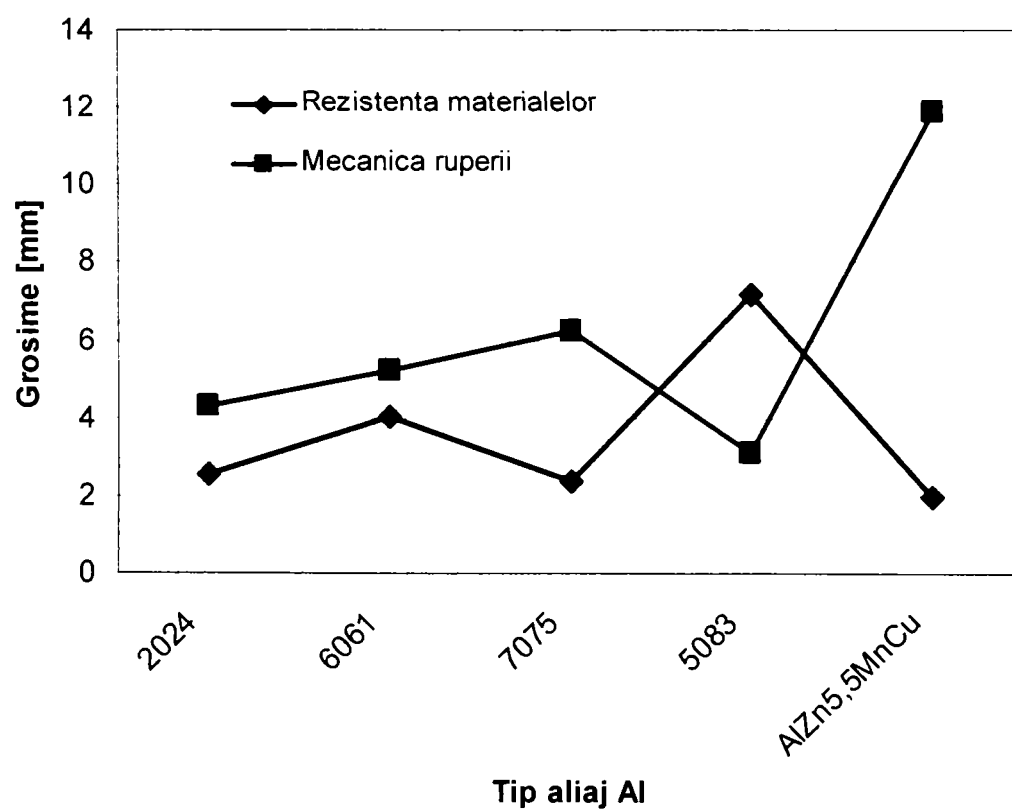


Fig. 1.9.

Analizând graficul din fig. 1.9 se pot trage următoarele concluzii:

○ aliajele de aluminiu având limita de curgere cea mai ridicată dau grosimea plăcii cea mai mică, din conceptele de Rezistența Materialelor, deci putem spune că grosimea plăcii crește odată cu scăderea limitei de curgere σ_c ;

○ aliajul de aluminiu având tenacitatea la rupere cea mai mică, ne conduce la cea mai mare grosime a plăcii, din conceptele de Mecanica Ruperii, deci putem spune că grosimea plăcii scade odată cu creșterea tenacității la rupere

○ grosimea minimă a plăcii se obține pentru aliajul de aluminiu AlZn5,5MnCu, adică aliajul cu cea mai mare limită de curgere, din punctul de vedere al conceptelor din Rezistența Materialelor;

○ grosimea plăcii calculate pe baza conceptelor din Rezistența Materialelor este mult mai mică decât grosimea plăcii calculate pe baza conceptelor din Mecanica Ruperii, evidențiind importanța disciplinei de Mecanica Ruperii.

Pentru dimensionarea plăcii din fig. 1.8 s-a realizat un program de calcul scris în utilitarul matematic Mathcad 2001 Professional conceput de autorul tezei de doctorat.

CAPITOLUL 4

METODE NUMERICE UTILIZATE ÎN STUDIUL MECANICII RUPERII PENTRU ALIAJE UȘOARE

4.1. NOȚIUNI INTRODUCATIVE

Starea de tensiune dintr-un corp se poate determina prin trei tipuri de metode: analitic, numeric și experimental.

Exprimarea analitică a câmpului de tensiuni și deformații în jurul fisurilor se poate face într-un număr limitat de cazuri, soluțiile fiind pertinente unor geometrii și încărcări idealizate, dar în realitate există configurații geometrice de corpuri cu fisuri și încărcări pentru care soluția analitică este foarte greu de obținut sau nu se poate obține deloc. În aceste cazuri se recurge la **Metoda Elementelor Finite** (MEF), care poate furniza soluții numerice aproximative a căror acuratețe în anumite condiții poate fi apropiată de soluția exactă.

Metoda elementelor finite este un instrument foarte eficient în cercetarea științifică și proiectare, cu aplicații multiple și extrem de variate, și un component de bază al cercetării și proiectării asistate de calculator.

Folosită la început în domeniul calculului mecanic al structurilor, în special în industria aeronautică, metoda elementelor finite și-a extins foarte mult aria de utilizare în toată sfera de activitate a inginerului. Extinderea folosirii metodei elementelor finite se datorează pe de o parte caracterului foarte general al formulării conceptelor sale fundamentale, lucru ce a permis pătrunderea ei în numeroase domenii ale științei și tehnicii, iar pe de altă parte, capacității de a modela mai bine fenomenele fizice studiate, față de alte metode de calcul numeric.

Reflectarea cât mai fidelă a comportării structurilor și materialelor este o exigență primordială cerută de proiectanții modelelor de calcul pe care le

folosesc, constituind condiția principală pentru dimensionarea riguroasă și realizarea pe această cale a unor economii importante de materiale, energie și manoperă, metoda elementelor finite fiind din acest punct de vedere superioară tuturor celorlalte metode de calcul.

Fiind o metodă de calcul numeric, bazată pe folosirea calculatorului electronic, metoda elementelor finite s-a dezvoltat odată cu perfecționarea sistemelor de calcul electronic și cu creșterea numărului și a disponibilității produselor software de calcul cu element finit.

Un moment important în evoluția folosirii metodei elementului finit este cel actual, caracterizat prin răspândirea calculatoarelor personale. Datorită disponibilității lor tot mai mari față de sistemele puternice de calcul, calculatoarele mici pot contribui simultan la extinderea în continuare a utilizării metodei și la însușirea ei de către mai mulți tehnicieni.

Metoda elementelor finite este la ora actuală cea mai utilizată metodă pentru determinarea stării de tensiune și deformație din jurul fisurilor și pentru determinarea parametrilor din mecanica ruperii (factorul de intensitate a tensiunii K , deplasarea la deschidere a fisurii δ sau a integralei J).

Metoda elementelor finite se folosește atât pentru probleme bidimensionale cât și pentru probleme tridimensionale. De asemenea se pot determina prin metoda elementului finit parametrii din Mecanica Ruperii atât în domeniul elastic (forța de extensie a fisurii G , factorul de intensitate a tensiunii K) cât în domeniul elasto-plastic (deplasarea la deschidere a fisurii δ sau a integralei J).

Metoda elementelor finite folosește de cele mai multe ori un principiu variațional, potrivit acestuia, rezolvarea unei ecuații diferențiale într-un anumit domeniu și în anumite condiții la limită este echivalentă cu minimizarea în acel domeniu a unei mărimi funcționale corespunzătoare ecuației diferențiale și condițiilor la limită. Specific pentru metoda elementului finit este faptul că minimizarea se face pe subdomenii ale

domeniului studiat, denumite elemente finite, legate între ele în puncte numite noduri.

În inginerie, aplicațiile metodei elementului finit pot fi grupate în trei clase de probleme:

a) *Probleme de echilibru* sau de regim staționar, în care funcția sau funcțiile necunoscute nu depind de timp. Aici putem integra studiul comportării elastice a corpurilor în regim static, probleme de transfer de căldură în regim staționar, studiul regimurilor staționare de curgere a lichidelor, etc.

b) *Probleme de valori proprii* în care parametrii sunt de asemenea independenți de timp și în care se determină anumite valori critice ale parametrilor în condițiile respectării configurației de echilibru.

c) *Probleme de propagare* sau de regim tranzitoriu, în care funcțiile necunoscute sunt dependente de timp. Studiul dinamic al comportării elastice și neelastice a structurilor, transferul căldurii în regim tranzitoriu, regimuri de curgere nestaționară a lichidelor sunt exemple de asemenea probleme.

Metoda elementelor finite constă în discretizarea conceptuală a mediului în elemente finite de o anumită formă, conectate între ele prin nodurile rețelei de discretizare – fig. 4.1.

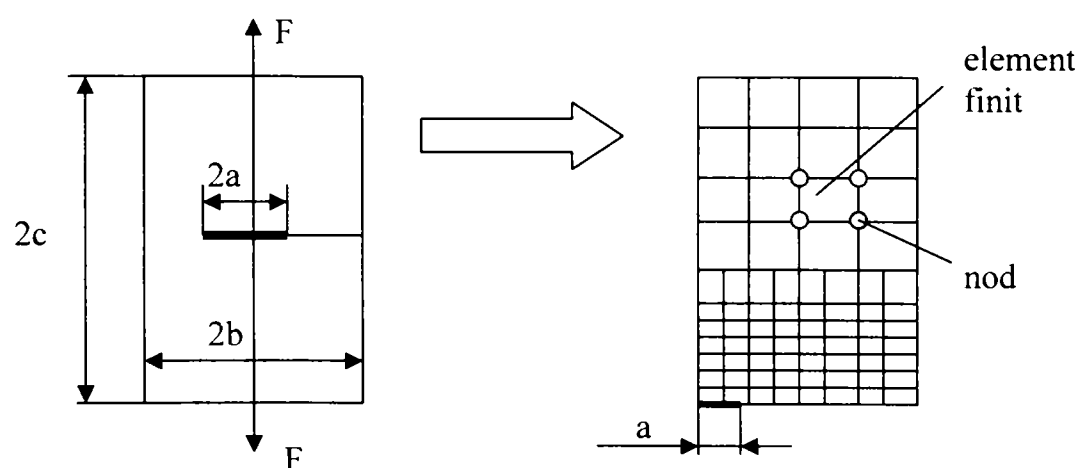


Fig. 4.1.

Se trece apoi la reprezentarea funcțională a deplasărilor nodurilor fiecărui element (deplasări nodale). Dacă funcțiile deplasărilor (funcții de interpolare, funcții de formă) sunt alese în așa fel încât să asigure continuitatea pe frontiera elementelor și în plus satisfac condițiile impuse deplasărilor pe frontiera corpului luat în ansamblu, atunci cea mai bună aproximare a parametrilor ce intră în expresia funcțiilor de formă se obține din condiția minimizării energiei potențiale totale Π_p a întregului corp cu restricțiile impuse.

Prin aplicarea metodei elementului finit în teoria elasticității, necunoscutele problemei sunt deplasările nodale.

Vectorul deplasare $\{f\}$ al unui punct din interiorul unui element finit se exprimă comparativ prin deplasările nodale prin relația:

$$\{f\} = \{u \ v \ w\}' = [N]\{d\}_e \quad (4.1)$$

unde:

- u, v, w reprezintă deplasările pe direcțiile axelor de coordonate;
- $[N]$ reprezintă matricea funcțiilor de formă;
- $\{d\}_e$ este vectorul deplasărilor nodale ale elementului finit.

Relația dintre deformațiile specifice și deplasările nodale este de forma:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}_e \quad (4.2)$$

unde matricea $[B]$ este matricea de transformare a deplasărilor în deformații specifice.

Legătura dintre tensiuni și deformații specifice este dată de legea lui Hooke generalizată, care pentru corpuri liniar elastice și izotrope are următoarea formă matriceală:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (4.3)$$

unde $[E]$ reprezintă matricea constantelor elastice, $\{\sigma\}$ este vectorul tensiunilor iar $\{\varepsilon\}$ este vectorul deformațiilor specifice.

Prin explicitarea matricei constantelor elastice $[E]$, relația (4.3) se poate scrie:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

În relația de mai sus (4.4), E reprezintă modulul de elasticitate longitudinal iar ν este coeficientul lui Poisson.

Prin particularizarea legii lui Hooke pentru starea plană de tensiune și respectiv pentru starea plană de deformație, această relație se poate scrie condensat sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

în care avem:

- pentru starea plană de tensiune:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$$

matricea $[E]$ având forma:

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

- pentru starea plană de deformație:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \quad (4.8)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

matricea $[E]$ având forma:

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

4.2. PRINCIPIUL METODEI ELEMENTULUI FINIT

Pentru determinarea parametrilor din Mecanica Ruperii la corpurile cu fisuri prin metoda elementului finit se utilizează procedee energetice sau reziduale, dintre acestea cea mai utilizată metodă este cea bazată pe teorema energiei potențiale minime.

Teorema energiei potențiale minime se enunță astfel: „*dintre toate configurațiile posibile pentru deplasări, ce satisfac compatibilitatea internă și condițiile la limită, numai cele pentru care energia potențială are o valoare staționară minimă, corespund poziției de echilibru*”. [67]

Energia potențială totală Π_p a unui sistem elastic este format din energia de deformație U și potențialul forțelor exterioare W_p :

$$\Pi_p = U + W_p \quad (4.10)$$

Dacă în relația de mai sus, în locul potențialului forțelor exterioare se introduce lucrul mecanic al forțelor exterioare $W = -W_p$, se obține:

$$\Pi_p = U - W \quad (4.11)$$

Energia de deformație U_e , corespunzătoare unui element finit de volum V_e , se exprimă avându-se în vedere teoria elasticității sub forma:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}' [E] \{\varepsilon\} dV \quad (4.12)$$

unde $\{\varepsilon\}$ este vectorul deformațiilor specifice, iar $[E]$ este matricea constantelor elastice.

Forțele exterioare care produc lucrul mecanic pot fi forțe de volum (ca exemplu avem greutatea) $\{F\}' = \{F_x \ F_y \ F_z\}$, forțele de suprafață (presiuni, sarcini distribuite) $\{Q\}' = \{Q_x \ Q_y \ Q_z\}$ sau forțe concentrate ce acționează în nodurile elementului finit $\{p_n\}$.

Forțele de volum și de suprafață sunt proiectate pe direcția componentelor deplasărilor $\{f\}' = \{u \ v \ w\}$, iar forțele ce acționează în noduri sunt proiectate pe direcția deplasărilor nodale $\{d\}'$. Lucrul mecanic al forțelor exterioare pentru un element finit va fi:

$$W_e = \int_{V_e} \{f\}' \{F\} dV + \int_{S_e} \{f\}' \{Q\} dS + \{d\}' \{p_n\} \quad (4.13)$$

În relația de mai sus prima integrală reprezintă lucrul mecanic pe volumul elementului finit efectuat de forțele de volum, integrala a doua reprezintă lucrul mecanic al forțelor de suprafață, iar ultimul termen este lucrul mecanic al forțelor care acționează în nodurile elementului finit.

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{e\}' [E] \{e\} dV - \int_{V_e} \{f\}' \{F\} dV - \int_{S_e} \{f\}' \{Q\} dS - \{d\}' \{p_n\} \quad (4.14)$$

Prin utilizarea deplasărilor nodale în relația de mai sus și prin utilizarea funcțiilor de formă, obținem:

$$\begin{aligned} \Pi_{pe} = & \frac{1}{2} \{d\}' \left(\int_{V_e} [B]' [E] [B] dV \right) \{d\} + \{d\}' \int_{V_e} [N]' \{F\} dV - \\ & - \{d\}' \int_{S_e} [N]' \{Q\} dS - \{d\}' \{p_n\} \quad (4.15) \end{aligned}$$

Atunci pentru întreaga structură, energia potențială va fi suma energiilor potențiale ale tuturor celor „m” elemente finite:

$$\Pi_p = \sum_1^m \Pi_{p_k} \quad (4.16)$$

Prin aplicarea energiei potențiale minime înseamnă minimizarea funcției de potențial a structurii, adică anularea energiei potențiale totale în raport cu deplasările nodale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_p}{\partial (d_i)} = 0: \quad cu \quad i = \overline{1, n} \\ sau \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial d_1} = \frac{\partial \Pi_p}{\partial d_2} = \dots = \frac{\partial \Pi_p}{\partial d_n} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

„n”, reprezentând numărul gradelor de libertate ale structurii.

Obținem astfel un sistem liniar de „m” ecuații de forma:

$$\left(\sum_1^m \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV \right) \{d\} = \sum_1^m \left(\int_{V_e} [N]^T \{F\} dV + \int_{S_e} [N]^T \{Q\} dS \right) + \{P\} \quad (4.18)$$

Termenul stâng al relației (4.18) reprezintă matricea de rigiditate a structurii notat cu $[K]$:

$$[K] = \sum_1^m \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV = \sum_1^m [k_e] \quad (4.19)$$

și se poate exprima în funcție de matricile de rigiditate ale fiecărui element finit:

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV \quad (4.20)$$

Termenul drept al relației (4.18) reprezintă vectorul forțelor sau încărcărilor, având componentele:

- * $\int_{V_e} [N]^T \{F\}$ vectorul forțelor de volum pe elementul finit,
- * $\int_{S_e} [N]^T \{Q\}$ vectorul forțelor de suprafață pe elementul finit,
- * $\{P\}$ vectorul forțelor aplicate în nodurile structurii

Vom aborda o scriere concentrată a termenului drept al relației (4.18) de următoarea formă:

$$\{R\} = \sum_1^m \{r_i\} + \{P\} \quad (4.21)$$

în care

$$\{r_i\} = \int_{V_i} [N]^T \{F\} dV + \int_{S_i} [N]^T \{Q\} dS \quad (4.22)$$

În aceste condiții sistemul (4.18) se poate scrie concentrat sub următoarea formă:

$$\left(\sum_1^m [k_i] \right) \{d\} = \sum_1^m \{r_i\} + \{P\} \quad (4.23)$$

sau

$$[K] \{d\} = \{R\} \quad (4.24)$$

Ecuția (4.23) stă la baza rezolvării aplicațiilor prin metoda elementului finit. Rezolvarea sistemului de ecuații (4.24), având ca necunoscute componentele vectorului deplasare $\{d\}$, permite cunoașterea deplasărilor nodale ale structurii. Apoi se pot calcula deformațiile specifice $\{\varepsilon\}$, iar prin intermediul legii lui Hooke generalizată, obținem componentele vectorului tensiune. Calculul parametrilor din Mecanica Ruperii se face pe baza rezultatelor obținute în urma analizei cu elemente finite: componentele vectorului deplasare $\{d\}$, componentele vectorului tensiune $\{\sigma\}$, etc.

Specific rezolvării prin metoda elementului finit a corpurilor cu fisuri este modelarea singularității vârfului fisurii și determinarea parametrilor din Mecanica Ruperii pe baza rezultatelor numerice obținute.

Calculul numeric al parametrilor din Mecanica Ruperii abordează două probleme și anume modelarea singularității corespunzătoare vârfului fisurii, respectiv determinarea parametrilor mecanicii ruperii pe baza rezultatelor obținute în urma analizei cu elemente finite.

4.3. MODELAREA SINGULARITĂȚII VÂRFULUI FISURII

Studiile inițiale, de analiză cu elemente finite în probleme de Mecanica Ruperii, au utilizat elemente finite convenționale (în mod special elemente triunghiulare), iar pentru obținerea unei precizii adecvate a câmpurilor singulare de tensiune și deformație de la vârful fisurii a fost necesară o discretizare extrem de fină în jurul vârfului fisurii. Dezvoltările ulterioare au impus utilizarea de elemente finite speciale, prin care să se obțină precizii superioare utilizând o discretizare mai grosieră.

S-au evidențiat în timp două procedee distincte pentru modelarea singularității câmpului de tensiune și deformație de la vârful fisurii și anume:

a)-prin alegerea unor funcții de interpolare speciale pentru aproximarea deplasărilor;

b)-prin schimbarea poziție unor noduri, astfel încât pentru unul din nodurile elementului să se obțină o singularitate a deformațiilor.

Primul procedeu se aplică în general elementelor finite triunghiulare cu 6 noduri, funcțiile de interpolare alegându-se astfel încât la unul din noduri deformațiile specifice să prezinte o singularitate de forma r^{-p} .

Studiile recente, au reliefat faptul că pentru a găsi o soluție numerică eficientă, în cazul problemelor cu discontinuități geometrice de forma fisurilor, este avantajoasă utilizarea unor elemente izoparametrice speciale utilizate în mod special la vârful fisurii, obținute prin deplasarea nodurilor de la mijlocul laturilor (la elementele izoparametrice cu 8 noduri) spre nodul în care se dorește obținerea singularității. Aceste elemente modelează direct singularitatea câmpului elastic de deformație $1/\sqrt{r}$, în vecinătatea vârfului fisurii, prin intermediul matricei de transformare a coordonatelor.

4.3.1. MODELAREA SINGULARITĂȚII VÂRFULUI FISURII UTILIZÂND ELEMENTE FINITE TRIUNGHIULARE

Primele încercări de modelare a problemelor de Mecanica ruperii cu elemente finite au folosit elementele finite triunghiulare cu 3 sau 6 noduri. Singularitatea câmpului de deformație de la vârful fisurii s-a realizat prin alegerea unor funcții de interpolare speciale.

1. ELEMENTUL TRIUNGHIULAR CU 3 NODURI

În anul 1971 Tracey, propune pentru modelarea singularității de la vârful fisurii utilizarea elementelor triunghiulare cu 3 noduri de forma celui din Fig. 4.2. [81]

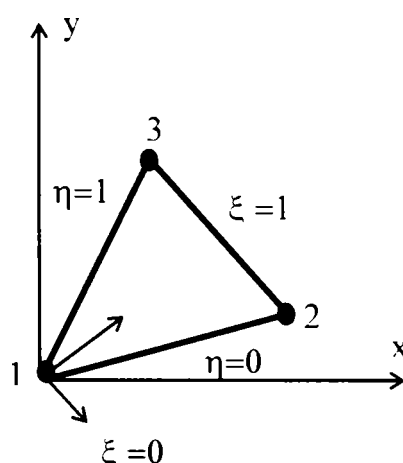


Fig. 4.2.

Pentru a se putea obține o singularitate de ordinul r^{-p} , Tracey propune următoarele expresii pentru funcțiile de interpolare, N_i :

$$N_1 = 1 - \xi^p \quad N_2 = \xi^p (1 - \eta) \quad N_3 = \xi^p \eta \quad (4.25)$$

unde ξ, η reprezintă coordonatele naturale ale elementului.

Cu expresiile (4.25) ale funcțiilor de interpolare câmpul de deplasare în interiorul elementului se exprimă prin relațiile de mai jos:

$$u = (1 - \xi^p)u_1 + \xi^p(1 - \eta)u_2 + \xi^p\eta u_3 \quad (4.26)$$

$$v = (1 - \xi^p)v_1 + \xi^p(1 - \eta)v_2 + \xi^p\eta v_3$$

unde u_i, v_i (cu $i = 1, 2, 3$) reprezintă deplasările nodale ale elementului.

Această reprezentare creează o singularitate de ordinul r^{-p} în nodul 1.

Deoarece obținerea unor precizii acceptabile la estimarea parametrilor de Mecanica ruperii necesită determinarea unui număr sporit de informații cu privire la câmpul de deplasări și tensiuni din vecinătatea vârfului fisurii, elementele triunghiulare cu 3 noduri nu satisfac această condiție. Astfel utilizarea elementelor triunghiulare cu 3 noduri impune o discretizare extrem de fină în jurul vârfului fisurii.

O cale convenabilă de eliminare a acestui dezavantaj constă în utilizarea elementelor triunghiulare cu 6 noduri.

2. ELEMENTUL TRIUNGHIULAR CU 6 NODURI

Swenson prezintă în lucrarea sa [109] metodologia de utilizare a elementelor triunghiulare cu 6 noduri în cazul rezolvării problemelor de Mecanica Ruperii.

În Fig. 4.3 se prezintă un element triunghiular cu 6 noduri.

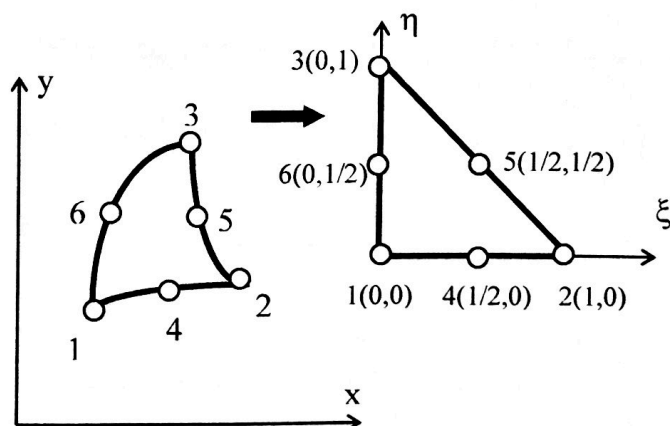


Fig. 4.3

Elementul din Fig. 4.3 este reprezentat mai întâi în sistemul global (x,y) , iar apoi și în sistemul natural având coordonatele ξ,η , considerând nodurile 4, 5 și 6 dispuse la mijlocul laturilor corespunzătoare.

Funcțiile de interpolare $N_i(\xi,\eta)$ (cu $i = 1,\dots,6$) exprimate în coordonate naturale, precum și derivatele acestor funcții în raport cu coordonatele naturale ξ,η sunt prezentate în Tabelul 4.1

Pe baza acestora și a coordonatelor nodurilor x_i, y_i se pot exprima coordonatele globale x, y :

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i, \quad (4.27)$$

Tab. 4.1

NOD	$N_i(\xi,\eta)$	$\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}$
1	$2\xi^2 - \xi$	$4\xi - 1$	0
2	$2\eta^2 - \eta$	0	$4\eta - 1$
3	$2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta - 3\xi - 3\eta + 1$	$4\xi + 4\eta - 3$	$4\eta + 4\xi - 3$
4	$4\xi\eta$	4η	4ξ
5	$4\eta - 4\xi\eta - 4\eta^2$	-4η	$4 - 4\xi - 8\eta$
6	$4\xi - 4\xi\eta - 4\xi^2$	$4 - 4\eta - 8\xi$	-4ξ

Câmpul de deplasare se aproximează prin intermediul funcțiilor de interpolare N_i și a deplasărilor nodale u_i, v_i , cu $i = 1,\dots,6$:

$$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i, \quad (4.28)$$

Deformațiile specifice se exprimă în cazul stării plane de deformație sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

iar pentru cazul stării plane de tensiune:

$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.30)$$

Ținând cont de relațiile (4.28), expresiile deformațiilor specifice (4.29) se pot rescrie:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 & N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} & 0 & N_{5,y} & 0 & N_{6,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} & N_{5,y} & N_{5,x} & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

unde $N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x}$, $N_{i,y} = \frac{\partial N_i}{\partial y}$ cu $i = 1, \dots, 6$

Exprimarea derivatelor funcțiilor de interpolare în raport cu coordonatele x, y se face prin intermediul matricei de transformare a coordonatelor [J]:

$$\begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

sau:

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Coeficienții din matricea transformării se determină pe baza derivatelor funcțiilor de interpolare date în Tabelul 4.1 cu relația:

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} [x, y] \quad (4.34)$$

rezultând:

$$\begin{aligned} J_{11} &= 4\xi(x_1 + x_3 - 2x_6) + 4\eta(x_3 + x_4 - x_5 - x_6) - x_1 - 3x_3 + 4x_6 \\ J_{12} &= 4\xi(y_1 + y_3 - 2y_6) + 4\eta(y_3 + y_4 - y_5 - y_6) - y_1 - 3y_3 + 4y_6 \\ J_{21} &= 4\xi(x_3 + x_4 - x_5 - x_6) + 4\eta(x_2 + x_3 - 2x_5) - x_2 - 3x_3 + 4x_5 \\ J_{22} &= 4\xi(y_3 + y_4 - y_5 - y_6) + 4\eta(y_2 + y_3 - 2y_5) - y_2 - 3y_3 + 4y_5 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pentru elementul triunghiular cu laturi drepte și nodurile 4,5,6 situate la mijlocul laturilor corespunzătoare, coeficienții matricei transformării devin constanți pe element:

$$J_{11} = x_1 - x_3, \quad J_{12} = y_1 - y_3, \quad J_{21} = x_2 - x_3, \quad J_{22} = y_2 - y_3$$

reducându-se foarte mult volumul de calcule.

Pentru a demonstra apariția singularității deformației în nodul 1 se consideră elementul din Fig. 4.4.

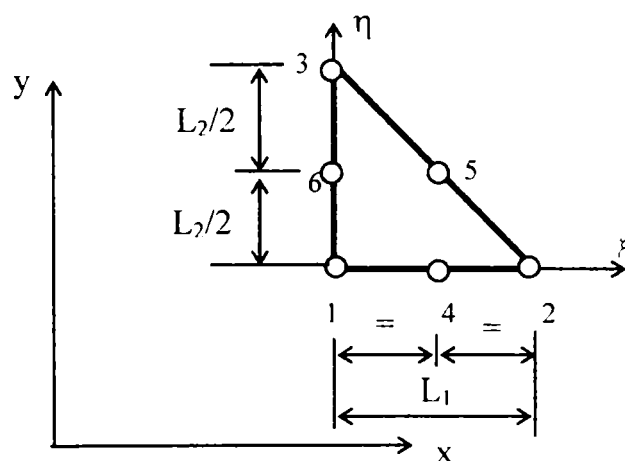


Fig. 4.4.

Exprimând coordonata x pe latura 1-2, unde $\eta = 0$ se obține:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

unde :

$$x_1 = 0, x_2 = L_1, x_3 = L_1 / 2$$

Înlocuind expresiile funcțiilor de interpolare date în Tabelul 4.1 se obține: $x = \xi^2 L_1$, sau prin exprimarea coordonatei naturale ξ :

$$\xi = \sqrt{\frac{x}{L_1}} \quad (4.36)$$

Expresia deplasării după direcția x se exprimă pentru latura 1 - 2, conform relației (4.28):

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = (2\xi^2 - \xi)u_1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = (4\xi - 1)u_1 \quad (4.37)$$

iar deformația specifică:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(4\sqrt{\frac{x}{L_1}} - 1 \right) u_1 \frac{1}{2\sqrt{L_1}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \left(\frac{2}{L_1} - \frac{1}{2\sqrt{L_1 x}} \right) u_1 \quad (4.38)$$

Din relația (4.38) se observă că pentru $x = 0$, în nodul 1 deformația specifică ε_x , prezintă o singularitate de ordinul $x^{-1/2}$. Analog se poate arăta că și celelalte deformații specifice ε_y și γ_{xy} prezintă singularități de același ordin în nodul 1.

Utilizarea acestui tip de element finit este mult mai eficientă decât utilizarea elementului finit triunghiular cu trei noduri.

Foarte mulți cercetători au fost preocupați de găsirea altor funcții de interpolare pentru elementul triunghiular cu 6 noduri - fig. 4.5, pentru modelarea singularității vârfului fisurii. În tabelul 4.2 se prezintă o sinteză a acestora.

Tab. 4.2.

Nod	Funcția de interpolare	Blackburn - 1973	Hellen - 1977	Stern, Becker - 1978
1	N_1	1	1	1
2	N_2	ξ	ξ	ξ
3	N_3	η	η	η
4	N_4	$\frac{\xi}{\sqrt{\xi + \eta}}$	$\frac{\xi}{\sqrt{\xi + \eta}}$	$\frac{\xi}{\sqrt{\xi + \eta}}$
5	N_5	$\frac{\eta}{\sqrt{\xi + \eta}}$	$\frac{\eta}{\sqrt{\xi + \eta}}$	$\frac{\eta}{\sqrt{\xi + \eta}}$
6	N_6	$\frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi + \eta}}$	$\frac{\xi\eta}{\xi + \eta}$	$\frac{3}{2} \frac{\xi\eta}{\xi + \eta}$

Oricare din elementele triunghiulare cu 3, respectiv 6 noduri prezentat anterior, permite modelarea singularității vârfului fisurii prin alegerea unor funcții de interpolare speciale care să aproximeze deplasările elementului.

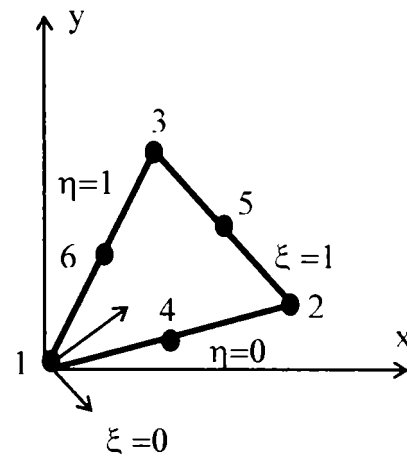


Fig. 4.5.

Cu ajutorul acestor elemente s-au dezvoltat programe speciale de calcul care modelează singularitatea câmpului de deformare și deplasare la elementele din jurul vârfului fisurii.

4.3.2 ELEMENTE FINITE IZOPARAMETRICE

Elementele finite izoparametrice se pot utiliza cu succes în problemele de Mecanica ruperii. Exprimarea funcțiilor de interpolare ale acestora se face în coordonate naturale. Prin coordonate naturale se înțelege exprimarea coordonatelor nodurilor elementelor finite în două sisteme de coordonate unul global pentru întregul domeniu discretizat și unul local pentru fiecare element în parte, Fig. 4.6. Originea sistemului local se alege de obicei în centrul de greutate al elementului iar coordonatele naturale se obțin prin raportarea coordonatelor globale la mărimile caracteristice ale elementului finit (lungimi sau arii), practic aceste coordonate pot fi asimilate ca și coordonate normalizate.

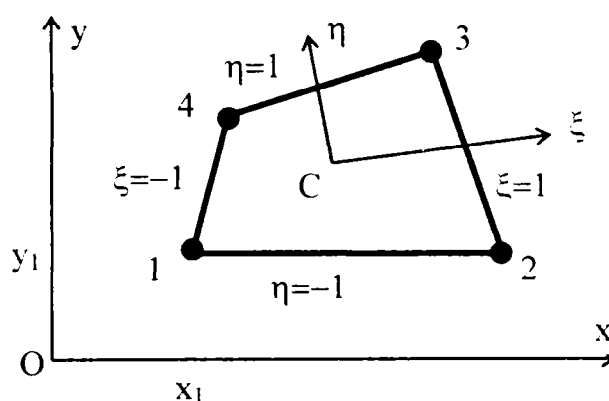


Fig. 4.6.

Dacă se utilizează coordonatele naturale iar originea sistemului de coordonate coincide cu centrul de greutate al elementului finit, domeniul de variație al coordonatelor naturale asociate elementului respectiv este $[-1; 1]$.

Se va considera în continuare un element patrulater oarecare, utilizat în cazul problemelor plane bidimensionale. Pentru acesta relațiile dintre coordonatele globale (x, y) și cele naturale (ξ, η) sunt date de expresiile:

$$x = \frac{l}{4} [(1-\xi)(1-\eta)x_1 + (1+\xi)(1-\eta)x_2 + (1+\xi)(1+\eta)x_3 + (1-\xi)(1+\eta)x_4] \quad (4.39)$$

$$y = \frac{l}{4} [(1-\xi)(1-\eta)y_1 + (1+\xi)(1-\eta)y_2 + (1+\xi)(1+\eta)y_3 + (1-\xi)(1+\eta)y_4]$$

unde x_1, y_1, \dots reprezintă coordonatele nodurilor exprimate în sistemul de coordonate global.

Într-o scriere concentrată relațiile (4.39) se pot exprima prin:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (4.40)$$

în care funcțiile de aproximare au expresia generală:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad (4.41)$$

iar (x_i, y_i) sunt coordonatele nodului i în sistemul de axe xOy , respectiv ξ, η sunt coordonatele nodului i în sistemul $\xi\eta$ ($\xi_i, \eta_i = \pm 1$).

Relația (4.41) este valabilă pentru elementele izoparametrice cu 4 noduri, Fig. 4.7a, numite și elemente izoparametrice 2D liniare.

Un alt tip de element izoparametric este cel cu 8 noduri, Fig.4.7.b,

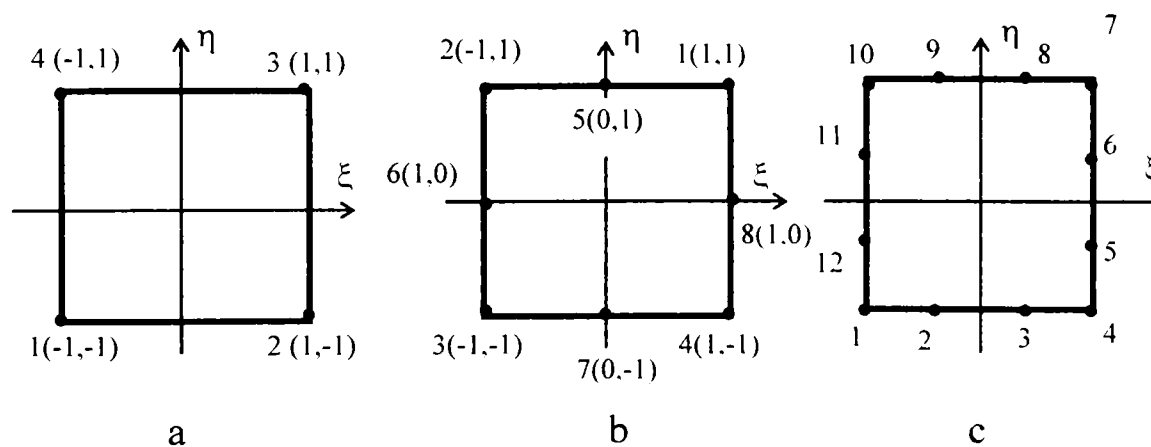


Fig. 4.7.

pentru care forma funcțiilor de aproximare este, conform [107]:

- pentru nodurile $1 \div 4$ cu $\xi_i, \eta_i = \pm 1$:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad (4.42)$$

- pentru nodurile 5,7 la $\xi_i = 0$, $\eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad (4.43)$$

- pentru nodurile 6,8 la $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = 0$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad (4.44)$$

Iar pentru elementul izoparametric cu 12 noduri, Fig. 4.7.c, expresiile funcțiilor de aproximare sunt:

- pentru nodurile 1, 4, 7, 10 cu $\xi_i, \eta_i = \pm 1$:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad (4.45)$$

- pentru nodurile 5, 6, 11, 12 cu $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm \frac{1}{3}$:

$$N_i = \frac{9}{32}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta\eta_i) \quad (4.46)$$

- pentru nodurile 2, 3, 8, 9 cu $\xi_i = \pm \frac{1}{3}$, $\eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{9}{32}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi\xi_i) \quad (4.47)$$

Se consideră elementul patrulater cu 4 noduri din Fig. 4.7.a având 8 grade de libertate : deplasările u_i , v_i ale fiecărui nod i ($i=1,2,3,4$). În sistemul de coordonate naturale $\xi C \eta$ funcțiile de aproximare au forma dată de relația (4.41):

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (4.48)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta); \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

iar componentele vectorului deplasare se exprimă prin intermediul acestora în funcție de deplasările nodale u_i , v_i :

$$u(\xi, \eta) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \quad (4.49)$$

$$v(\xi, \eta) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

Într-o formă concentrată vectorul deplasare devine:

$$f(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

Trecerea de la sistemul de coordonate global xOy la sistemul natural $\xi C \eta$ este dată de relația (4.40), care se poate scrie concentrat:

$$\begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

Pentru calculul matricei de rigiditate și vectorului încărcării elementului este necesară exprimarea matricei de legătură dintre deformații specifice și deplasări, [B] în sistemul natural $\xi C \eta$. Relațiile dintre derivatele deplasărilor în sistemele $\xi C \eta$ și xOy sunt date de relațiile de mai jos:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Utilizând notațiile $(\cdot)_{,\xi}$ derivata parțială în raport cu ξ , respectiv $(\cdot)_{,x}$ derivata parțială în raport cu x etc., relațiile dintre derivatele parțiale pot fi scrise sub forma matriceală:

$$\begin{Bmatrix} (\cdot)_{,\xi} \\ (\cdot)_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\cdot)_{,x} \\ (\cdot)_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} (\cdot)_{,x} \\ (\cdot)_{,y} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

Matricea $[J]$ din relația (4.53) este matricea Jacobianului transformării. Ținând cont de relația (4.51) matricea Jacobianului transformării se poate scrie sub forma:

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

care se poate explicita cu ușurință ținând seama de (4.48).

Prin inversarea relației (4.52) se pot exprima derivatele în raport cu x și y în funcție de derivatele în raport cu ξ și η :

$$\begin{Bmatrix} ()_{,x} \\ ()_{,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} ()_{,\xi} \\ ()_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

Cu ajutorul relației (4.54) se determină derivatele deplasărilor u și v :

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ 0 & 0 & J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

în care derivatele de forma $u_{,x}$ se pot calcula direct din relația (4.50):

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

În continuare ținând cont de relația dintre deformațiile specifice și deplasări, scrisă sub forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

obținând astfel matricea $[B(\xi, \eta)]$ prin înlocuirea relațiilor (4.56) și (4.57). Această operație se realizează numeric fiind ușor de programat pe calculator.

Având calculată matricea $[B(\xi, \eta)]$ și expresia matricei $[E]$, se poate calcula matricea de rigiditate a elementului finit $[k]$:

$$[k] = \int_v [B(\xi, \eta)]^T [E] [B(\xi, \eta)] dV \quad (4.59)$$

În continuare va trebui să calculăm vectorii datorati încărcărilor exterioare: vectorul forțelor de volum $\{F\}$ este uzual constant pe domeniul elementului finit iar vectorul forțelor de suprafață se calculează admitând ipoteza că variația presiunii pe o latură a elementului finit este descrisă tot de funcțiile de aproximare $[N_i, N_j]$ și de valorile presiunii p_i, p_j în noduri:

$$\{Q(\xi, \eta)\} = [N_i(\xi, \eta) \quad N_j(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

în care i și j sunt nodurile ce definesc latura încărcată.

Astfel se obțin integrale, în care $F(\xi, \eta)$ reprezintă o matrice sau un vector, $\det [J(\xi, \eta)]$ determinantul matricei lui Jacobi de trecere de la elementul de arie $dx dy$ la elementul de arie $d\xi d\eta$, de forma:

$$\int_v F(\xi, \eta) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (4.61)$$

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [E] [B(\xi, \eta)] \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta$$

Aceste integrale se efectuează numeric, conform cuadraturii lui Gauss. Aceasta este o metodă numerică de evaluare a integralelor, care aproximează o integrală printr-o sumă de arii de forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^n H_i f(a_i) \quad (4.62)$$

unde H_i se numesc ponderi sau coeficienți de pondere Gauss iar a_i sunt coordonatele punctelor Gauss.

În cazul problemelor plane ce folosesc elemente izoparametrice plane elementul de volum $dV = h dx dy$, unde h reprezintă grosimea elementului.

După evaluarea numerică a integralelor $[k]$ se trece la asamblarea matricei de rigiditate a sistemului $[K]$ și apoi la rezolvarea sistemului de ecuații; obținându-se valorile deplasărilor nodale.

Identific se procedează și în cazul folosirii elementelor izoparametrice cu 8 noduri sau cu 12 noduri, ținând cont de expresiile corespunzătoare ale funcțiilor de aproximare și de numărul gradelor de libertate ale elementului.

Utilizarea acestor tipuri de elemente finite în problemele de Mecanica Ruperii este la ora actuală destul de restrânsă, deoarece nu realizează o singularitate a câmpului de tensiuni și deformații. Totuși, folosind o discretizare suficient de fină în jurul vârfului fisurii se poate pune în evidență puternica concentrare a tensiunilor din jurul fisurii și chiar determinarea parametrilor de rupere prin metoda extrapolării deplasărilor sau tensiunilor, respectiv prin metoda integralei J .

Introducerea unor elemente finite izoparametrice speciale, care să modeleze singularitatea câmpului de deformație și tensiune de la vârful fisurii, a fost necesară deoarece discretizarea structurii, a trebuit făcută într-un număr mare de elemente finite „convenționale”, ceea ce a dus la sisteme algebrice cu foarte multe ecuații, pentru rezolvarea cărora s-a impus necesitatea utilizării unor calculatoare cu o memorie foarte mare și cu o viteză de lucru adecvată. Avantajul principal al elementelor ce pot modela singularitățile de la vârful fisurii, este că prin utilizarea lor scade considerabil numărul de elemente finite în care se discretizează structura. Aceste elemente speciale sunt tratate pe larg în lucrare, iar mulți cercetători sunt preocupați astăzi de găsirea unor noi astfel de elemente.

O cale convenabilă de introducere a unei singularități de forma $1/\sqrt{r}$ într-un element dreptunghiular izoparametric cu 8 noduri, constă în schimbarea poziției nodurilor de la mijlocul laturilor.

4.4. CALCULUL PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII LINIAR ELASTICE

În programele de analiză cu elemente finite utilizate la aplicațiile de Mecanica Ruperii, după determinarea deplasărilor, deformațiilor specifice și a tensiunilor este necesar, calculul parametrilor specifici Mecanicii Ruperii. Parametrii care se utilizează în domeniul mecanicii ruperii liniar elastice sunt factorul de intensitate a tensiunii K și forța de extensie a fisurii G .

La ora actuală factorul de intensitate a tensiunii este unanim acceptat ca parametru ce caracterizează câmpurile de deformații și tensiuni din jurul fisurilor aflate în medii liniar elastice. Pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii sunt utilizate în programele de analiză cu elemente finite diferite metode. Cele mai utilizate metode utilizate vor fi tratate în continuare.

1. METODA EXTRAPOLĂRII DEPLASĂRII

Considerând cunoscute deplasările nodale, în urma rezolvării sistemului algebric de ecuații, pe baza acestor deplasări și a soluției Irwin de reprezentare a tensiunilor și deplasărilor în jurul fisurii se poate trece la determinarea factorului de intensitate a tensiunii.

Să considerăm că discretizarea s-a realizat cu elemente izoparametrice dreptunghiulare având 8 noduri, pentru care avem deplasarea de-a lungul laturii 1-3, care scrisă în funcție de raza polară r devine:

$$u = u_1 + (4u_2 - u_3 - 3u_1) \sqrt{\frac{r}{L}} + (2u_3 + 2u_1 - 4u_2) \frac{r}{L} \quad (4.63)$$

Similar se poate arăta că și pentru deplasarea pe direcția verticală v se obține o expresie de forma (4.63).

Soluția analitică a lui Irwin care dă expresiile deplasării în vecinătatea unei fisuri în funcție de factorul de intensitate a tensiunii K și coordonatele polare (r, θ) este:

$$u = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.64)$$

$$v = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

unde:

- K_I , K_{II} reprezintă factorii de intensitate a tensiunii corespunzători modurilor I, respectiv II de deplasare a flancurilor fisurii

- G modulul de elasticitate transversal

- $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ pentru starea plană de tensiune

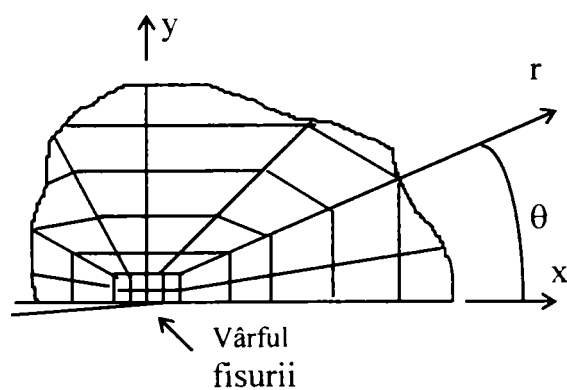
- $\chi = 3-4\nu$ pentru starea plană de deformație

- ν coeficientul lui Poisson

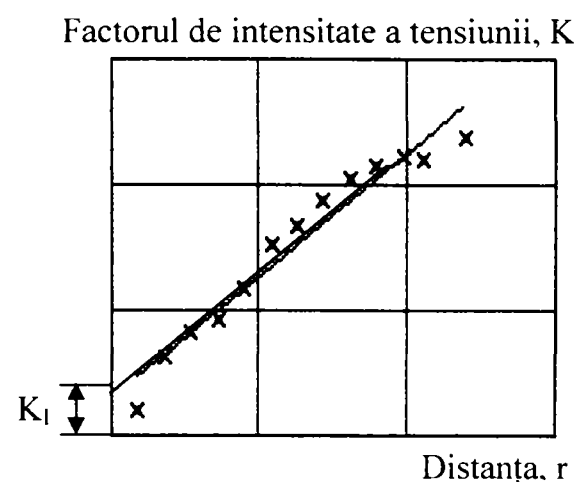
Din relațiile (4.64) se pot exprima factorii de intensitate a tensiunii, după cum urmează:

$$K_I \begin{Bmatrix} (2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \\ (2\chi - 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = 4G \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

$$K_{II} \begin{Bmatrix} -(2\chi + 3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \\ (2\chi - 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = 4G \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$



a.



b.

Fig. 4.8.

Înlocuind valorile deplasărilor u, v din nodurile considerate de-a lungul unei direcții radiale ce pornește din vârful fisurii, care face unghiul θ cu direcția x , se poate trasa variația factorului de intensitate a tensiunii K_I sau K_{II} în funcție de raza polară r , Fig. 4.8.a. Variația factorului de intensitate a tensiunii în funcție de distanța r se poate asimila ca fiind liniară. Apoi prin extrapolare pentru $r = 0$ se obține valoarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful fisurii, Fig. 4.8.b.

Dintre avantajele acestei metode trebuie amintite simplitatea ei, faptul că utilizează ca mărimi de calcul deplasările nodale care se obțin în urma analizei cu elemente finite. Metoda permite calculul factorilor de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} , putând fi utilizată în cazul aplicațiilor la care apare modul mixt de deplasare a flancurilor fisurii. Dezavantajele acestei metode constau în faptul că pentru aplicarea ei este necesară cunoașterea soluției câmpului de deplasări din vecinătatea vârfului fisurii (aceste soluții nefiind cunoscute în cazul anumitor materiale compozite, la interfața dintre materialele multistrat, etc.), iar precizia estimării este influențată de finețea discretizării, de alegerea direcției după care se face extrapolarea, de numărul și poziția nodurilor considerate.

2. METODA FORȚEI DE EXTENSIE A FISURII

Forța de extensie a fisurii, G este un alt parametru al Mecanicii Ruperii în domeniul liniar-elastic. Dacă se consideră că o fisură de lungime a , avansează sub acțiunea încărcărilor exterioare cu o cantitate infimezimală da , în același timp producându-se o eliberare a energiei elastice de deformație dU , forța de extensie a fisurii se definește:

$$G = \frac{dU}{da} \quad [N/mm] \quad (4.66)$$

Această mărime se mai numește și rata de eliberare a energiei de deformație. Legătura dintre forța de extensie a fisurii G și factorul de

intensitate a tensiunii K este dată în Mecanica Ruperii liniar-elastice, [27] sub forma:

$$K_I = \left(\frac{8G_1 G}{l + \chi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad K_{II} = \left(\frac{8G_{II} G}{l + \chi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.67)$$

unde:

- K_I, K_{II} sunt factorii de intensitate ai tensiunii corespunzători modurilor I, respectiv II de deplasare a flancurilor fisurii;

- G_I, G_{II} forțele de extensie a fisurii corespunzătoare modurilor I și II de deplasare a flancurilor fisurii;

- G modulul de elasticitate transversal

- χ un coeficient în funcție de starea plană de tensiune sau de deformație a modelului.

Pentru evaluarea factorului de intensitate al tensiunii prin această metodă se consideră două lungimi diferite ale fisurii a și $a+da$, Fig. 4.9 calculându-se energia specifică de deformație pentru ambele cazuri U_1 , respectiv U_2 . Apoi se calculează variația energiei specifice de deformație:

$$dU = U_1 - U_2 \quad (4.68)$$

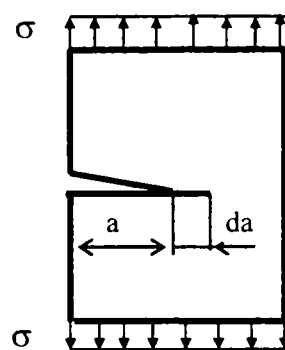


Fig. 4.9.

Energia specifică de deformație se calculează pe baza vectorului deplasărilor totale $\{f\}$ și a matricei de rigiditate a structurii $[K]$ după rezolvarea sistemului algebric de ecuații:

$$U = \{f\}' [K] \{f\} \quad (4.69)$$

Cu relația (4.66) se calculează apoi forța de extensie a fisurii G , iar corespunzător modului de deplasare a flancurilor fisurii cu una din relațiile (4.67) se poate determina valoarea factorului de intensitate a tensiunii K .

Avantajul principal al acestei metode este că obținerea unei precizii ridicate a estimării factorului de intensitate a tensiunii nu este influențată de finețea discretizării, mai mult metoda dând rezultate bune și dacă nu se utilizează elemente finite singulare.

Trebuie subliniat că această metodă necesită rezolvarea numerică a problemei pentru două lungimi diferite ale fisurii a și $a + da$, ceea ce duce la dublarea volumului de calcul, acesta fiind un mare dezavantaj al metodei. Un alt dezavantaj al metodei este acela că permite calculul factorilor de intensitate a tensiunii K_I , respectiv K_{II} doar separat, nu și în cazul modului mixt (I și II) de deplasare a flancurilor fisurii.

Aplicarea acestei metode este prezentată într-o altă lucrare pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii K_I la o placă sollicitată la tracțiune monoaxială, având o creștătură laterală ascuțită. Analiza cu elemente finite sa realizat în programul COSMOS/M, care dă în fișierul datelor de ieșire energia specifică de deformație U .

4.5. ETAPE DE REZOLVARE A UNEI PROBLEME CU AJUTORUL METODEI ELEMENTULUI FINIT

În general obținerea soluțiilor analitice, care furnizează expresiile matematice ale deplasărilor, deformațiilor și tensiunilor în orice punct al corpului este posibilă doar pentru geometrii și încărcări simple ale corpurilor.

O alternativă la calculul analitic este calculul numeric - aproximativ,

care permite obținerea rezultatelor într-un număr de puncte selectate din structura respectivă, denumite *noduri*.

Procedura de împărțire a domeniului de analiză în noduri și elemente simple poartă numele de *discretizare*. Prin discretizare corpul este împărțit într-un număr de *elemente finite* conectate între ele în noduri. Deplasările, deformațiile și tensiunile se vor calcula în nodurile rețelei de discretizare. Pe de altă parte, în interiorul elementelor trebuie să se precizeze modul în care variază necunoscutele problemei. În cadrul Metodei Elementelor Finite câmpul necunoscutelor se exprimă cu ajutorul unor *funcții de interpolare*, care joacă un rol fundamental în cadrul metodei. Astfel, o problemă complexă este redusă la considerarea unui număr finit de probleme mult simplificate.

Etaple necesare pentru rezolvarea unei probleme prin Metoda Elementelor Finite sunt:

A) Modelarea geometriei

Modelarea geometriei trebuie făcută astfel încât modelul să reproducă cât mai fidel structura reală. Precizia rezultatelor obținute în urma analizei cu elemente finite este puternic influențată de modelarea geometriei.

De asemenea este foarte importantă cunoașterea și introducerea în programul de calcul cu elemente finite, a proprietăților materialului: modul de elasticitate longitudinal E ; modul de elasticitate transversal G ; coeficientul de contracție transversală ν ; coeficientul de dilatare termică α_t (la probleme în care apar variații de temperatură); etc.

B) Alegerea tipului de elemente finite

Elementele finite diferă între ele prin forma lor geometrică, prin caracteristicile fizice ale materialului din care sunt alcătuite și prin numărul deplasărilor independente care se atașează nodurilor. Pentru determinarea caracteristicilor unui element finit se acceptă o lege convențională de variație a deplasărilor (câmp de deplasări) sau a tensiunilor (câmp de tensiuni) pe element. Aceste legi se aleg de preferință sub forma unor polinoame, ce introduc un

număr de coeficienți arbitrari și care se determină din condiții de compatibilitate. Întrucât câmpul de deplasări sau de tensiuni ales nu reprezintă exact variația reală a deplasărilor sau tensiunilor pe domeniul elementului finit, aceasta constituie cauza principală a aproximațiilor pe care le introduce metoda elementului finit. De aceea, alegerea tipului de element finit se corelează cu modul în care se face discretizarea structurii și va avea în vedere următoarele aspecte:

- modelul de calcul în care se discretizează structura reală să fie cât mai apropiat de aceasta.

- alegerea tipului de element finit trebuie făcută ținând cont că o precizie mărită a rezultatelor se repercutează în mărirea cantității de calcule.

- forma structurii poate impune utilizarea simultană a mai multor tipuri de elemente finite.

C) Discretizarea structurii

Structura reală se discretizează în elemente finite, precizându-se apartenența fiecărui element la mulțimea nodurilor sale de conexiune. În această etapă se definește topologia modelului pe care se conduce calculul. Alegerea numărului de elemente finite în care se discretizează structura reală rămâne la latitudinea utilizatorului urmărindu-se obținerea unui optim, care să țină seama că o discretizare cât mai fină conduce la obținerea unor precizii ridicate, dar și de faptul că un număr foarte mare de elemente finite duce la mărirea timpului de rezolvare a sistemului sau chiar la depășirea resurselor calculatorului.

D) Alcătuirea matricelor de rigiditate a elementelor finite

Odată precizat tipul elementelor finite și câmpul de deplasări sau tensiuni definit, se poate trece la alcătuirea matricei de rigiditate a elementului finit. Acestea descriu proprietățile individuale ale elementelor finite. Alcătuirea matricelor de rigiditate se poate face prin mai multe metode:

a) metoda directă, bazată pe metoda deplasărilor din analiza structurală, care are avantajul simplității, dar aplicarea ei este limitată doar la calculul mecanic al structurilor alcătuite din elemente simple.

b) metoda variațională, care este cea mai utilizată la ora actuală pentru aplicațiile metodei elementului finit. Această formulare face apel la calculul variațional, care implică determinarea proprietăților elementului finit prin minimizarea unei funcționale. Pentru calculul structurilor funcționala poate fi energia potențială.

c) metoda reziduurilor, folosită în general atunci când metoda variațională nu se poate aplica deoarece nu se cunoaște o mărime funcțională.

E) Determinarea forțelor pe elemente finite

În cadrul acestei etape trebuie evaluate contribuțiile forțelor de volum, de suprafață și forțelor ce acționează pe nod, asupra elementelor finite. Contribuția tuturor încărcărilor este dată de vectorul forțelor generalizate.

F) Asamblarea ecuațiilor elementelor și rezolvarea sistemului de ecuații a structurii.

Comportarea structurii se obține prin „asamblarea” rigidităților elementelor finite, ceea ce matematic revine în a combina ecuațiile matriceale ce exprimă comportarea elementelor finite în parte și în obținerea ecuației matriceale ce exprimă comportarea întregii structuri. În urma operației de asamblare se obține matricea de rigiditate a sistemului.

La baza acestei operații stă faptul că, într-un nod comun mai multor elemente finite valoarea deplasării este aceeași pentru toate elementele cuplate în acel nod. Înainte de a trece la rezolvarea sistemului de ecuații algebrice astfel obținut, acesta se modifică în funcție de condițiile la limită pe care trebuie să le respecte structura. Se obține sistemul de ecuații al structurii.

Rezolvarea sistemului de ecuații obținut se face prin una din metodele de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice: metoda Gauss, metoda Gauss cu pivotare, metoda Choleski, metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel, sau metoda

frontală. Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin valorile deplasărilor nodurilor structurii.

G) Calculul celorlalte mărimi

Soluțiile sistemului de ecuații, adică deplasările nodale se folosesc la determinarea ulterioară a deformațiilor specifice respectiv a tensiunilor.

La ora actuală rezolvarea problemelor de calculul structurilor utilizând MEF se face cu ajutorul unor programe de calcul performante care au implementată metodologia prezentată anterior.

4.6. CONTRIBUȚII PRIVIND STAREA DE TENSIUNE DIN ELEMENTE APARTINÂND DOMENIULUI AUTO

4.6.1. STUDIUL STĂRII DE TENSIUNE ȘI DEFORMAȚIE DINTR-O FUZETĂ DIN DOMENIUL AUTO

Fuzeta face parte din categoria pieselor din domeniul auto care are ca scop principal de a susține puntea față sau spate a autoturismelor și respectiv de prindere a roții în vederea deplasării autoturismului. Aceste fuzete, împreună cu puntea față/spate, formează un ansamblu, care susține practic caroseria autoturismului, Fig. 4.10, poziția 5, fiind un model de ansamblu.

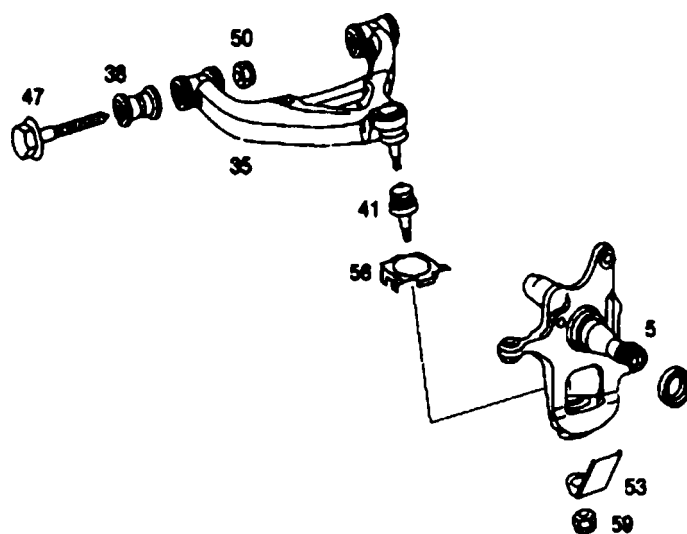


Fig. 4.10.

Pentru a determina modelul de calcul al fuzetei, geometria 3D a acesteia s-a importat din programul SolidWorks, Fig. 4.11.

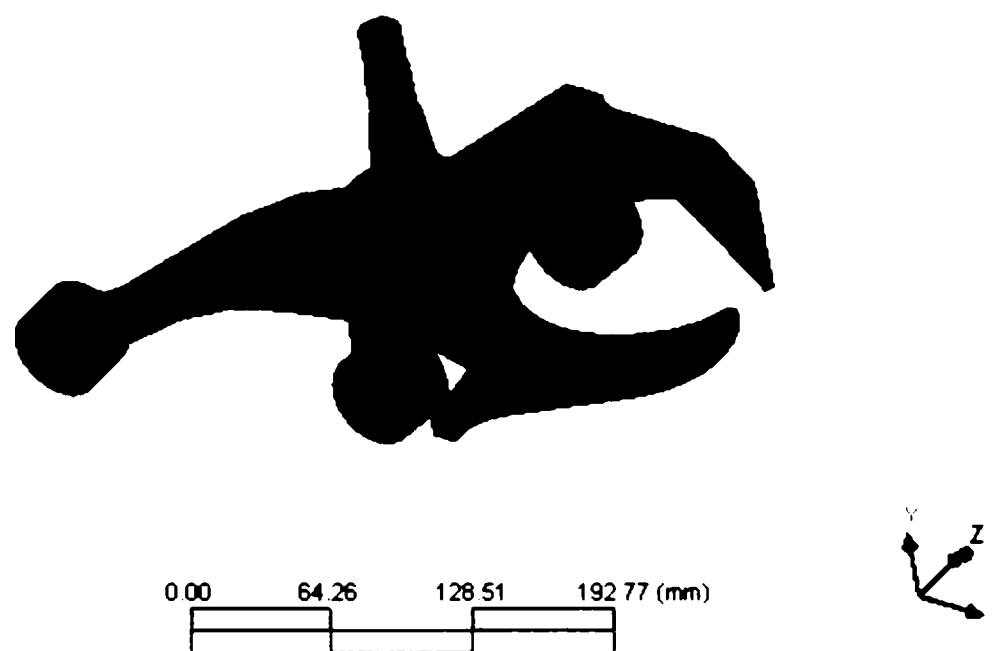


Fig. 4.11.

Modelul geometric tri-dimensional discretizat pentru analiza cu elemente finite este prezentat în Fig. 4.12 și conține un număr de 141275 de elemente tetraedrice conectate în 209845 noduri. În vecinătatea orificiilor de prindere s-a efectuat o discretizare mai fină pentru a evidenția fenomenul de concentrare a tensiunii.

Fuzeta s-a considerat confecționată din aliaj de aluminiu AlZn5,5MnCu având modulul de elasticitate: $E = 71500$ MPa, coeficientul de contracție transversală $\nu = 0,33$, limita de curgere $R_{p0.2} = 495$ MPa și rezistența la rupere $R_m = 574$ MPa.

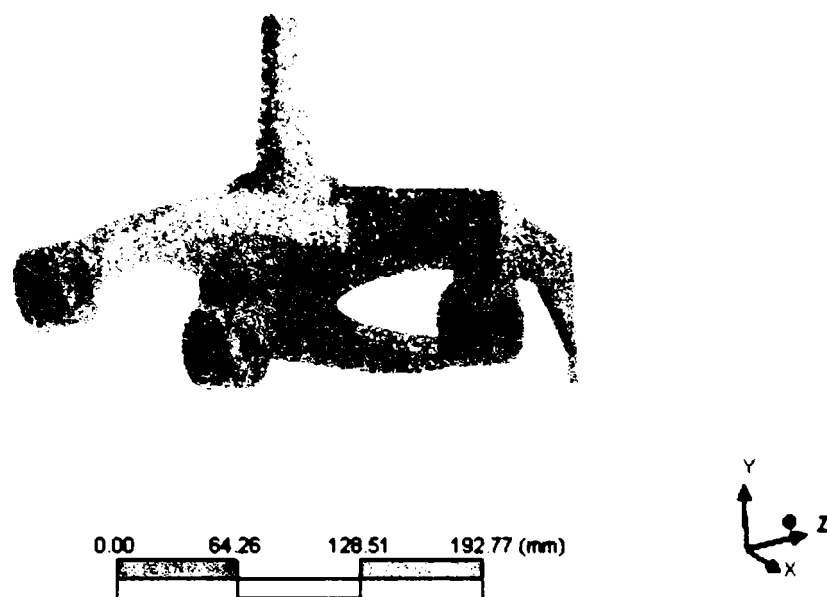


Fig. 4.12.

Fuzeta este fixată de puntea față prin cele 3 găuri de prindere cu ajutorul unor bolțuri, condițiile de rezemare fiind prezentate în Fig. 4.13.

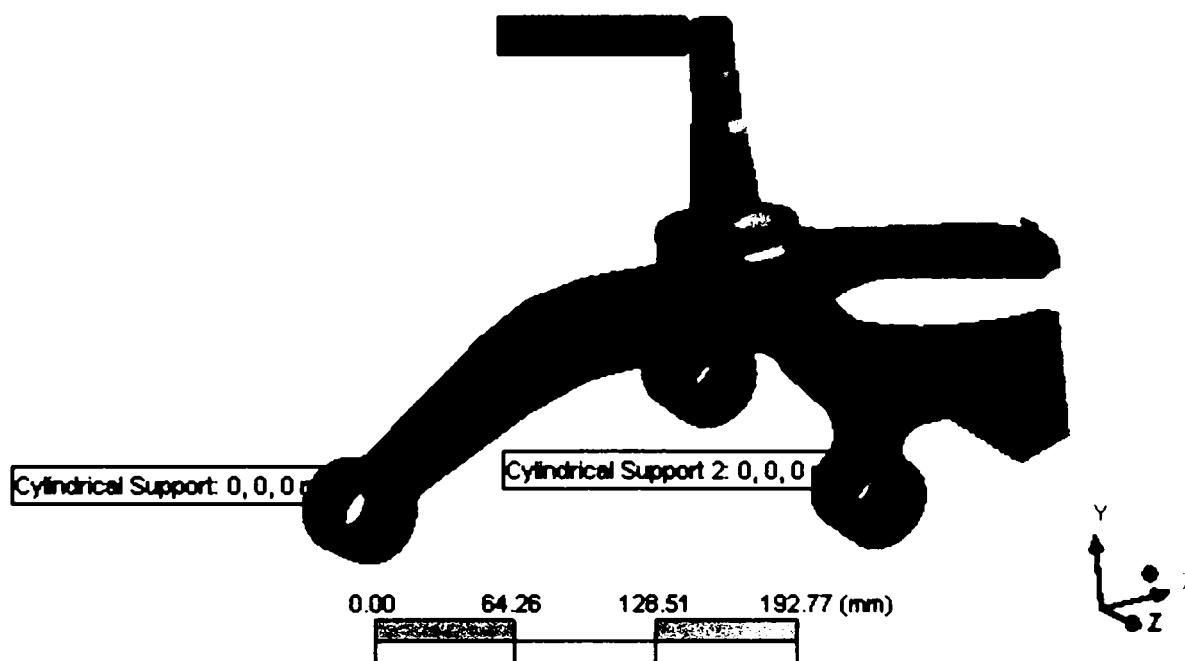


Fig. 4.13.

În continuare sunt prezentate rezultatele obținute în urma analizei cu elemente finite:

A. Deplasări

a) deplasarea pe direcția x, Fig. 4.14.

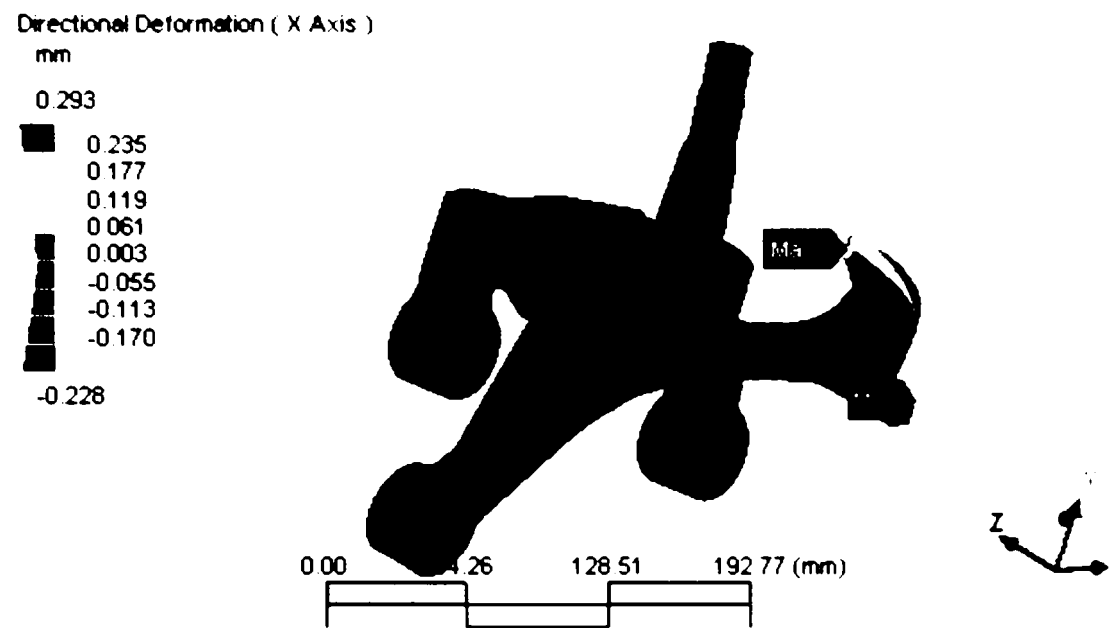


Fig. 4.14.

b) deplasarea pe direcția y, Fig. 4.15.

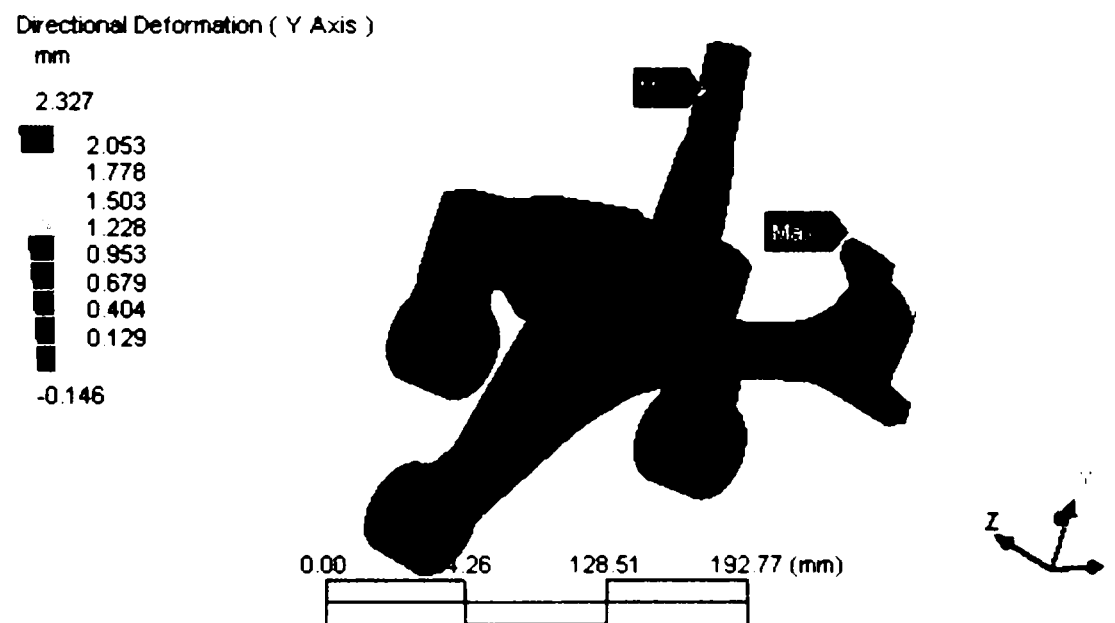


Fig. 4.15.

c) deplasarea pe direcția z, Fig. 4.16.

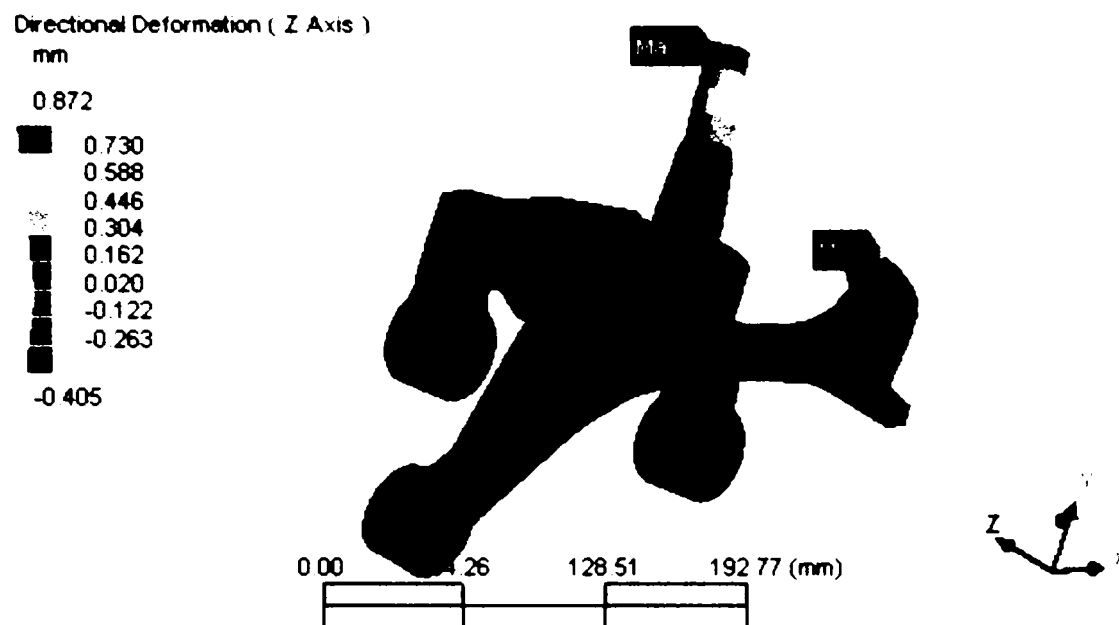


Fig. 4.16.

d) deplasarea totală, Fig. 4.17.

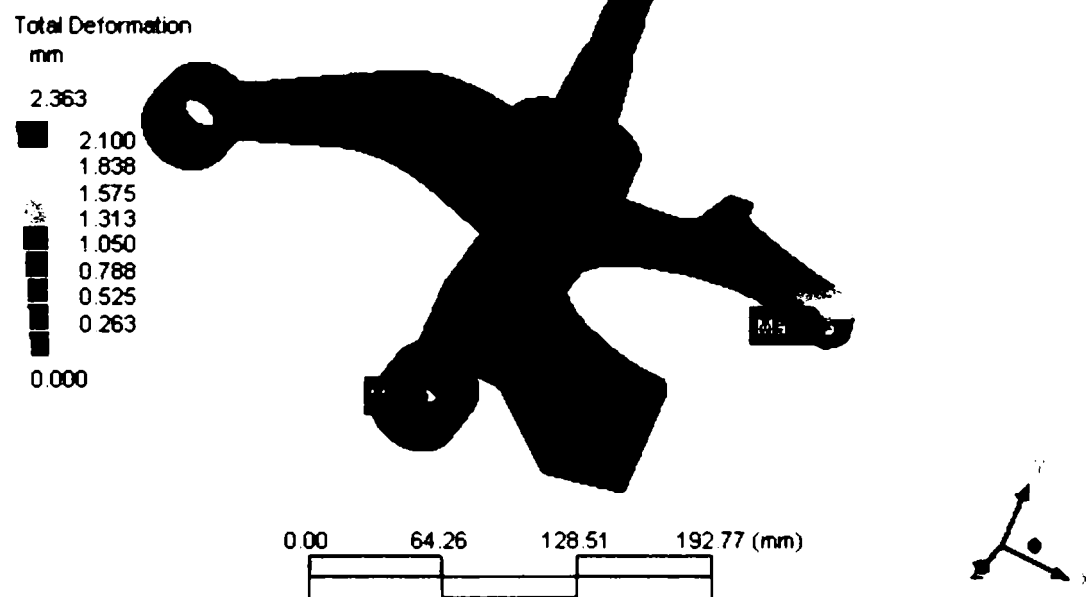


Fig. 4.17.

B. Tensiuni

a) tensiunea echivalentă Von Mises, Fig. 4.18.

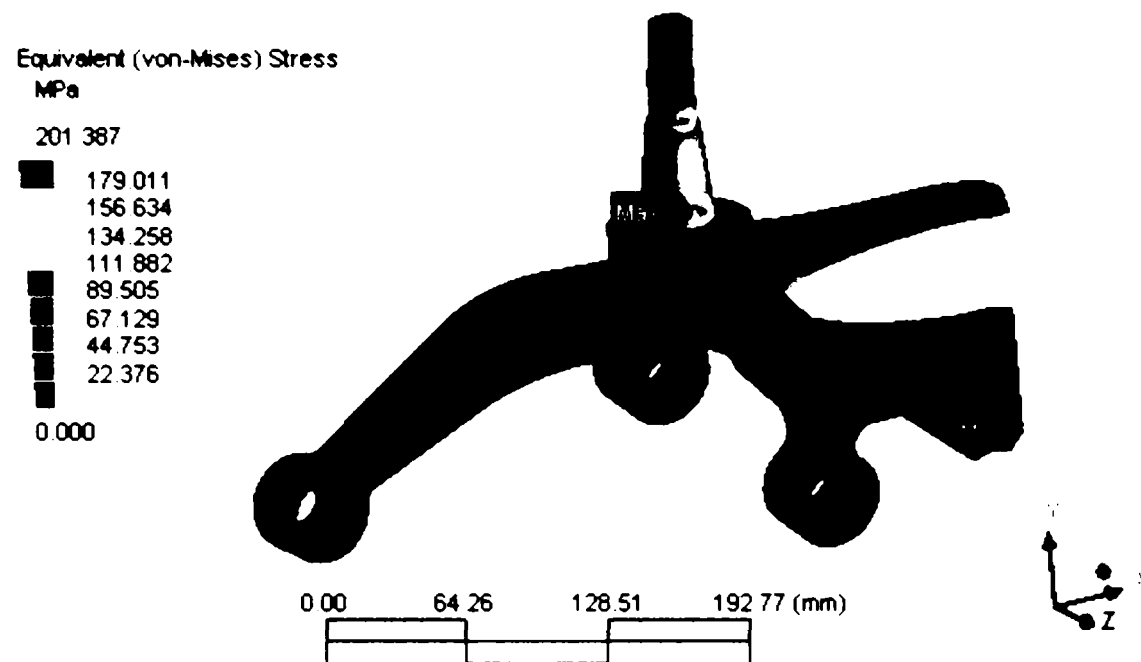
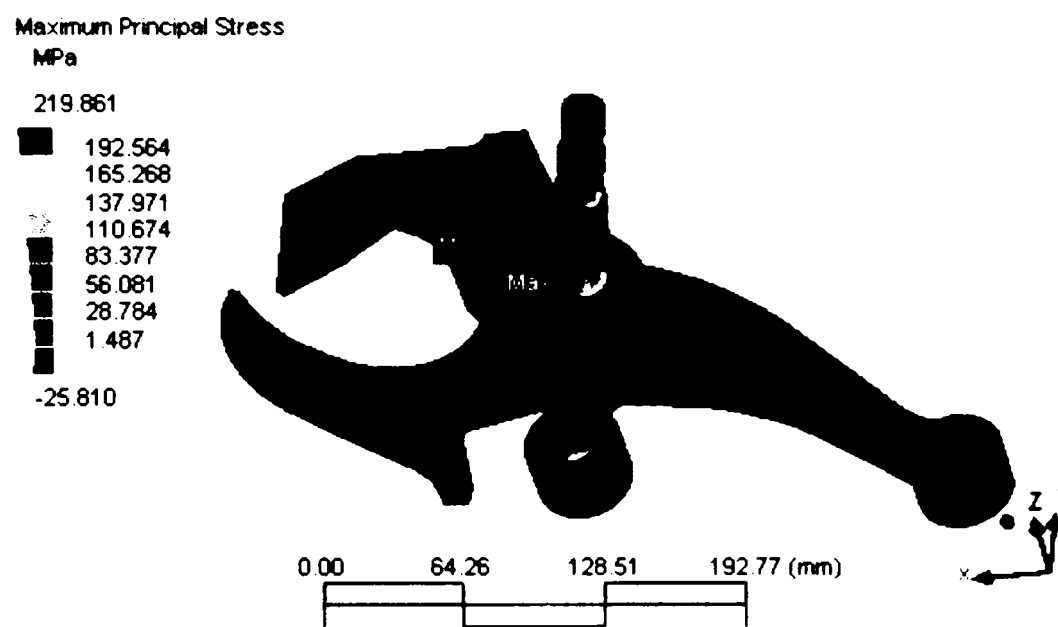
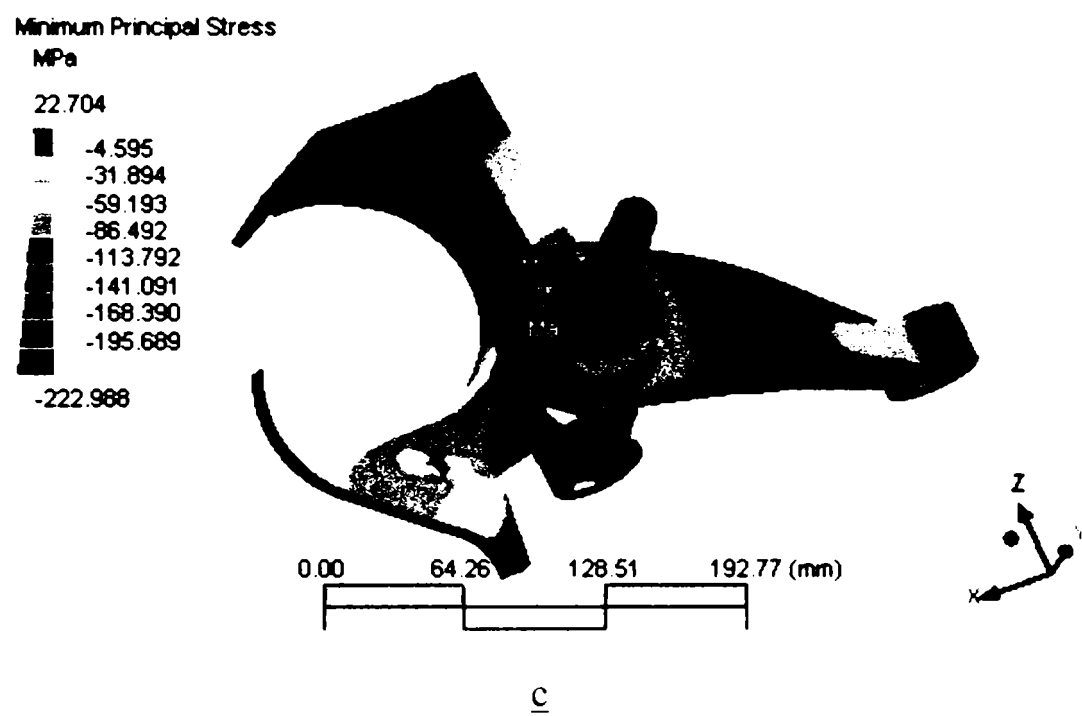
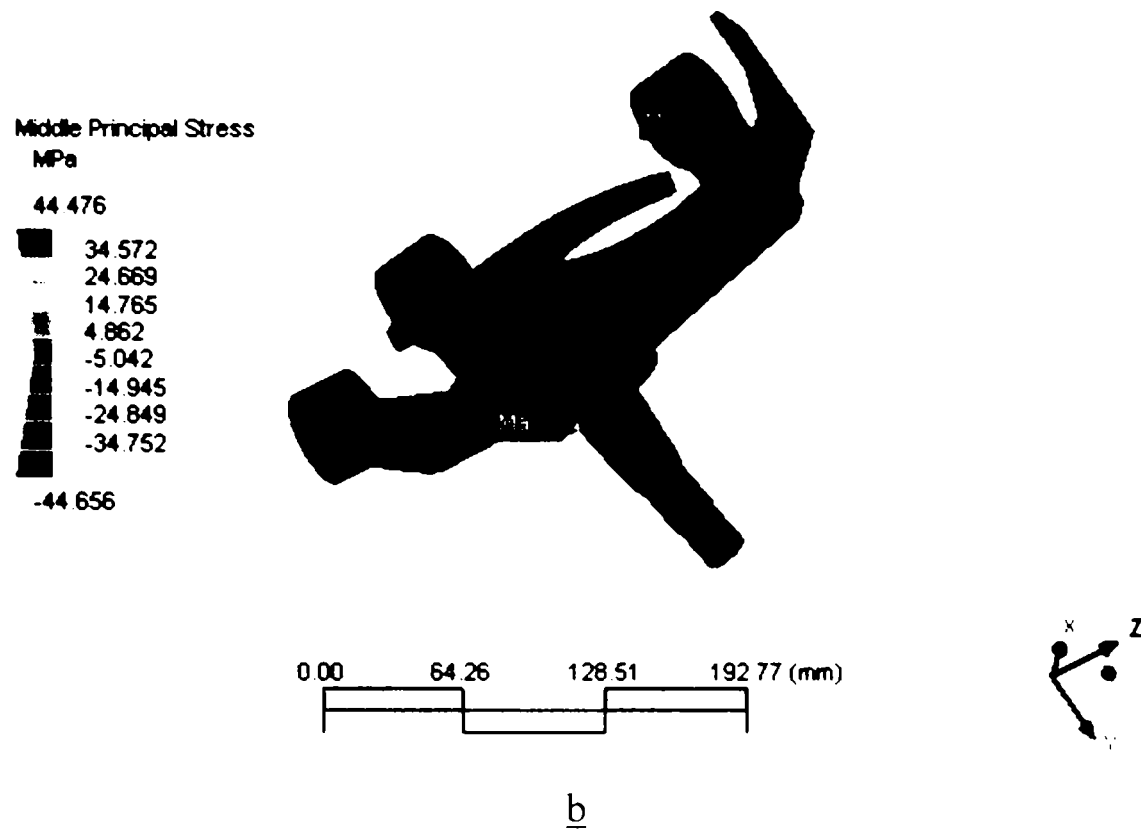


Fig. 4.18.

b) tensiunile principale, σ_1 , σ_2 , σ_3 și tensiunea tangențială maximă τ_{\max} , sunt redată în Fig. 4.19.



a



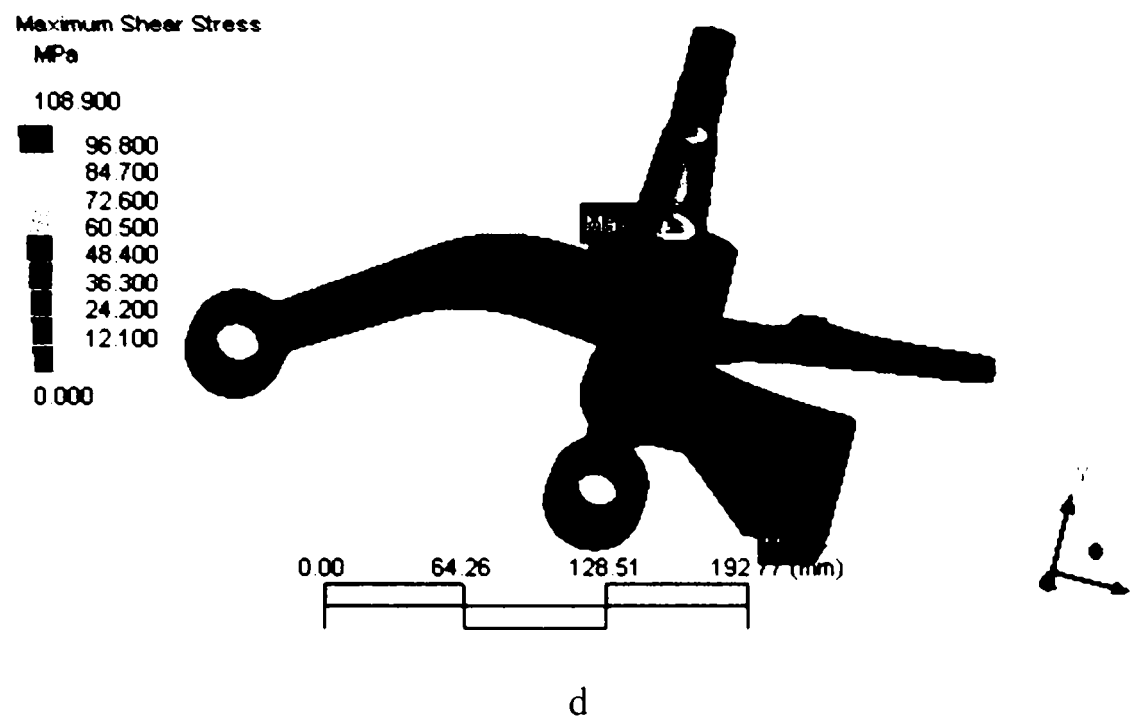


Fig. 4.19.

Din analiza rezultatelor obținute prin Metoda Elementelor Finite se determină valorile maxime ale deplasărilor și tensiunilor corespunzătoare fuzetei, acestea fiind prezentate în tabelul 4.3, conducând la următoarele concluzii:

Tab. 4.3.

Mărime	Unitate de măsură	Valoare
Deplasare după direcția x	[mm]	0,293
Deplasare după direcția y	[mm]	2,327
Deplasare după direcția z	[mm]	0,872
Deplasarea totală maximă	[mm]	2,363
Tensiunea principală σ_1	[MPa]	219,86
Tensiunea principală σ_2	[MPa]	44,48
Tensiunea principală σ_3	[MPa]	22,70
Tensiunea echivalentă σ_{ech}	[MPa]	201,39
Tensiunea tangențială maximă τ_{max}	[MPa]	108,9

- valoarea maximă a deplasării este după direcția y , având valoarea de 2,327 mm iar deplasarea totală maximă este de 2,363 mm;

- valoarea maximă a tensiunii se atinge pentru tensiunea principală 1, având valoarea 219,86 MPa, tensiunea maxima echivalentă fiind 201,39 MPa;

- considerând un aliaj de aluminiu cu limita de curgere de $R_{p0.2} = 495$ MPa, coeficientul de siguranță al fuzetei va fi:

$$c = \frac{R_{p0.2}}{\sigma_{\text{equiv max}}} = \frac{495}{201.39} = 2.46 \quad (4.70)$$

deci $c > 1$, înseamnă că fuzeta rezistă.

4.6.2. ANALIZA NUMERICĂ A STĂRII DE TENSIUNE DINTR-UN BRAȚ

Se va analiza numeric starea de tensiune dintr-un braț aparținând de puntea de spate a unui autoturism Mercedes Benz S 320, model WDB 140, fig.4.20.

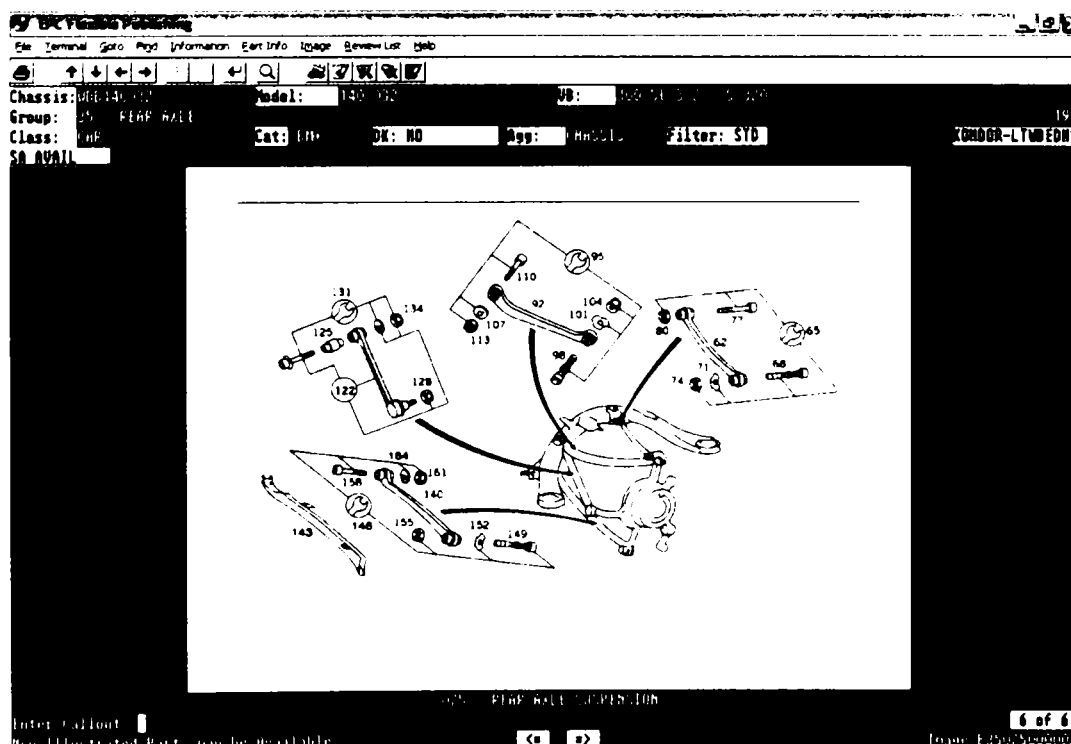


Fig. 4.20.

Forma plană a brațului este prezentată în fig. 4.21, brațul fiind realizat dintr-un material din aliaj de aluminiu AlZn5,5MnCu având $E = 71500$ MPa; $\nu = 0,33$. Analiza numerică a brațului s-a făcut cu ajutorul programului de analiză cu element finit CosmosWorks, modelul 3D, fiind prezentat în fig. 4.22.

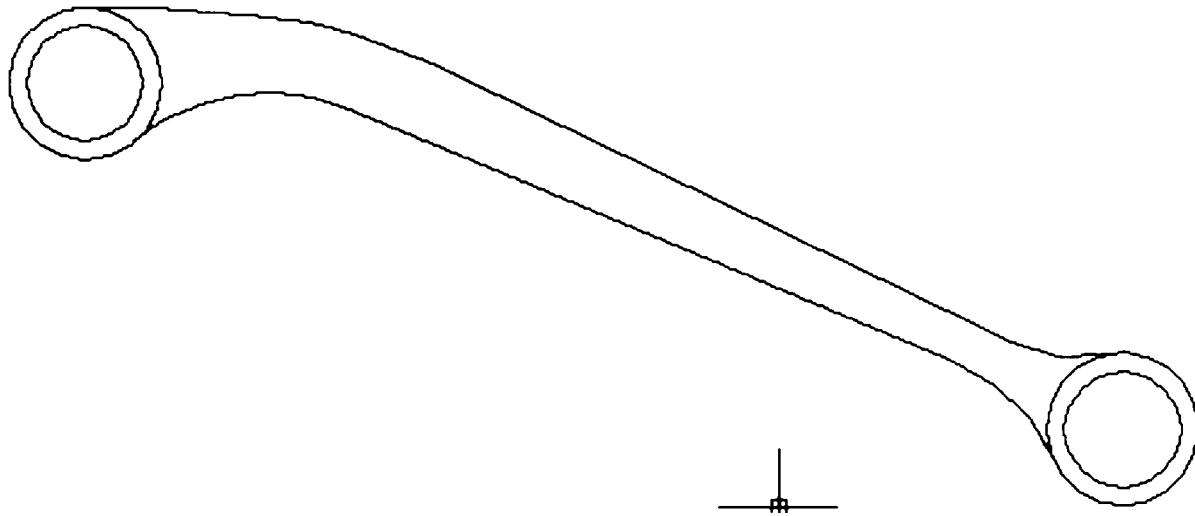


Fig. 4.21.

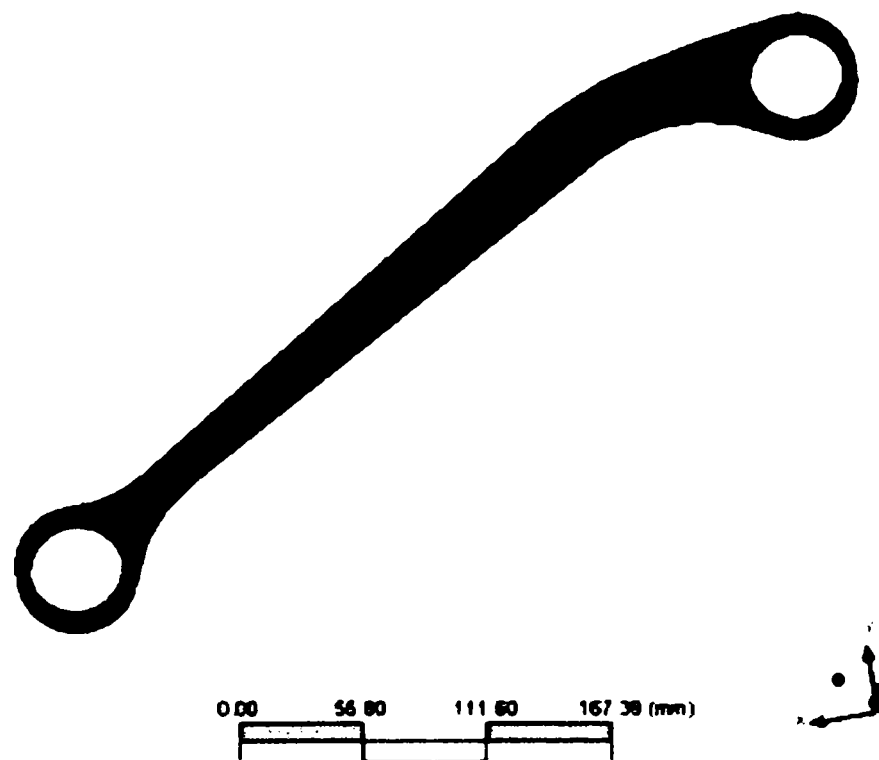


Fig. 4.22.

Discretizarea modelului s-a făcut cu ajutorul a 1872 elemente SOLIDE, având 10703 noduri, discretizarea modelului fiind prezentată în fig. 4.23.

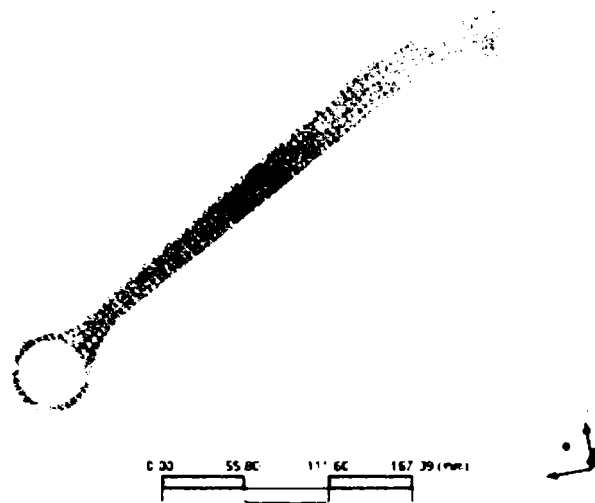


Fig. 4.23.

În figura 4.24 se prezintă condițiile la limită aplicate brațului.

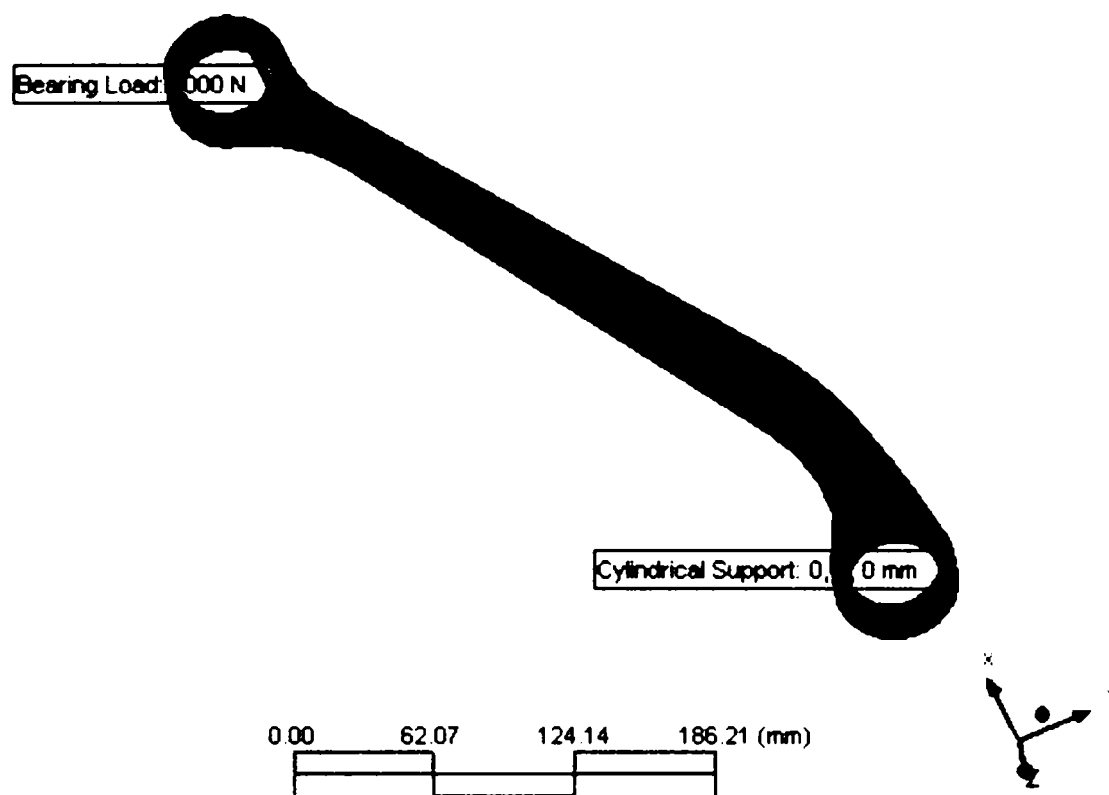


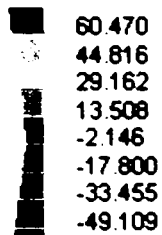
Fig. 4.24.

Prin rularea programului se obțin tensiunile σ_x , σ_y , σ_z , σ_{ech} VM, aceste tensiuni fiind redată în figura 4.25.

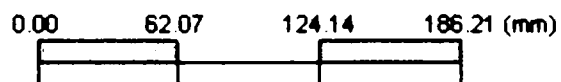
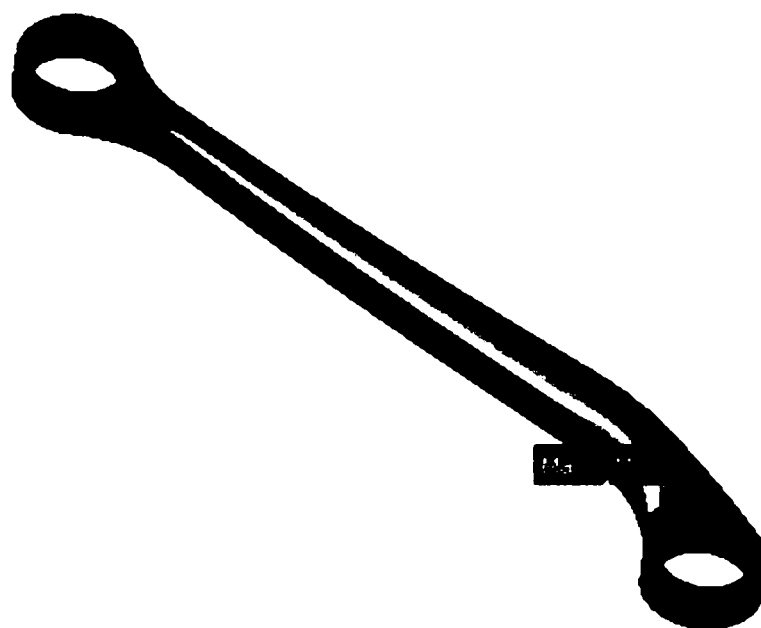
Normal Stress (X Axis)

MPa

76.124



-64.763

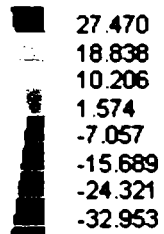


a

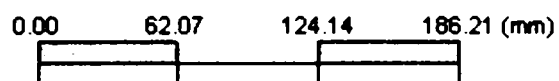
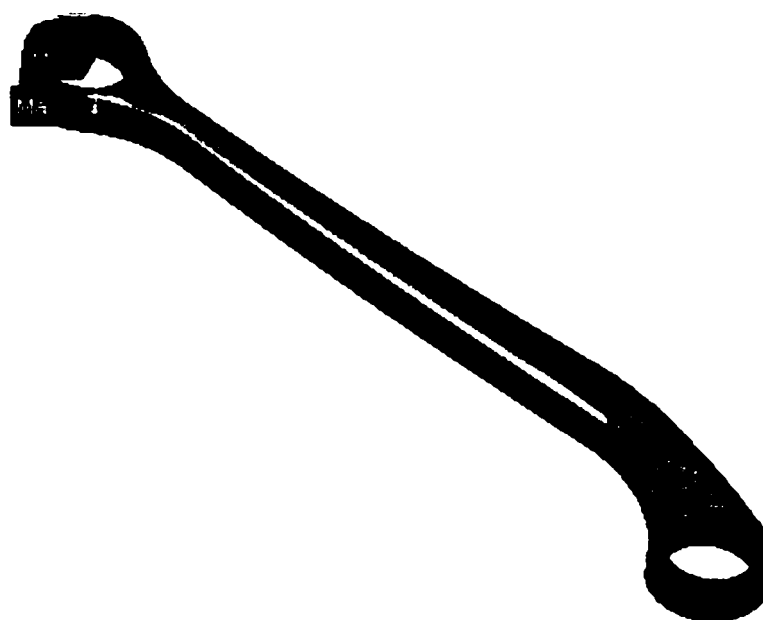
Normal Stress (Y Axis)

MPa

36.101



-41.584

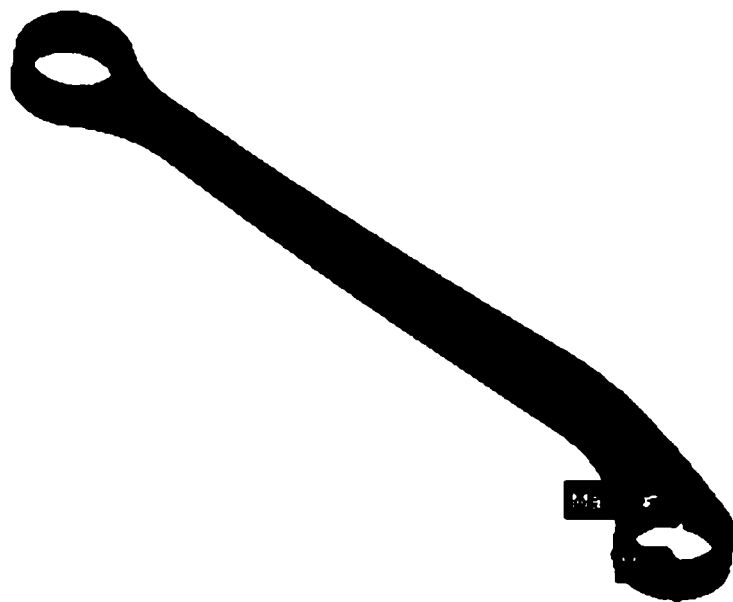
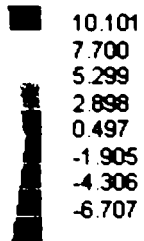


b

Normal Stress (Z Axis)

MPa

12.503



0.00 62.07 124.14 186.21 (mm)

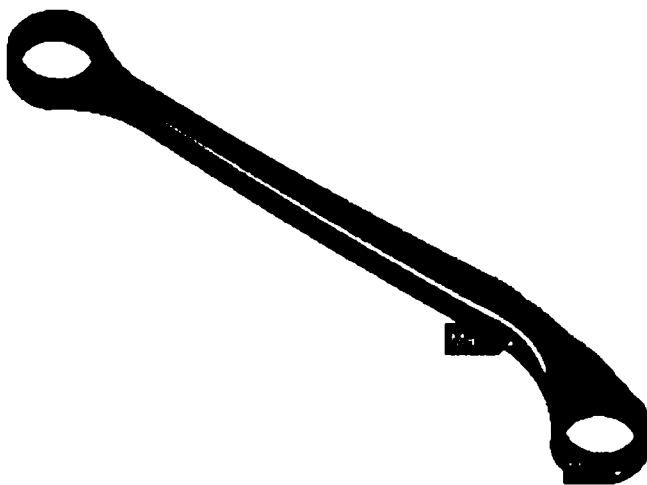
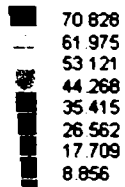


c

Equivalent (von-Mises) Stress

MPa

79.681



0.00 62.07 124.14 186.21 (mm)



d.

Fig.4.25.

Cu ajutorul programului CosmosWorks am realizat analiza numerică a stării de tensiune din brațul utilizat la puntea spate pentru autoturismul Mercedes Benz S 320, caroserie tip WDB 140, obținând următoarele rezultate, prezentate în tabelul 4.4.

Tab. 4.4.

Mărime	Unitate de măsură	Valoare
Tensiunea normală σ_x	[MPa]	76.12
Tensiunea normală σ_y	[MPa]	36.10
Tensiunea normală σ_z	[MPa]	12.50
Tensiunea normală σ_{echM}	[MPa]	79.68

Analizând rezultatele obținute, observăm că tensiunea normală maximă este $\sigma_x = 76.16$ [MPa], tensiunea normală minimă este $\sigma_z = 12.5$ [MPa] iar tensiunea echivalentă Von Mises este $\sigma_{echM} = 79.68$ [MPa].

4.6.3. CONTRIBUȚII PRIVIND DURABILITATEA BRAȚULUI

Pornind de la starea de tensiune din braț, analizat la paragraful 4.6.2, s-a realizat un studiu de propagare a unei fisuri pornită din zona de concentrare maximă.

Durata de viață a unui element de rezistență supus solicitărilor variabile este compusă din două părți: prima necesară inițierii fisurii $N_{iniț}$ iar cea de-a doua reprezentând durata de propagare a acesteia până la ruperea finală, N_{rup} . Exprimând durata de viață în număr de cicluri:

$$N_c = N_{ini} + N_{rup} \quad (4.71)$$

Raportul dintre aceste componente nu este constant, astfel la solicitările de mare durabilitate, în apropierea limitei de oboseală, durata propagării este mică în raport cu cea a inițierii, la solicitările de durabilitate mică durata

propagării constituie o parte importantă a duratei de viață care o poate depăși uneori pe cea destinată inițierii fisurii.

Reprezentând diagrama de variație a vitezei de propagare a fisurii da/dN în funcție de variația factorului de intensitate a tensiunii ΔK , în figura 4.26 se disting trei domenii de propagare a fisurii:

Domeniul I corespunzător unei propagări sub-critice a fisurii, la care forța de extensie a fisurii este mai mică decât tenacitatea la rupere a materialului. Fisurile se dezvoltă datorită degradării materialului, cauzată de coroziune și de solicitările variabile. Acest domeniu este caracterizat de valoarea minimă a variației factorului de intensitate a tensiunii ΔK_{\min} până la care fisurile nu se propagă.

Relația dintre viteza de propagare a fisurii și a variația factorului de intensitate a tensiunii corespunzătoare acestui domeniu este dată de Klesnil sub forma, [33]:

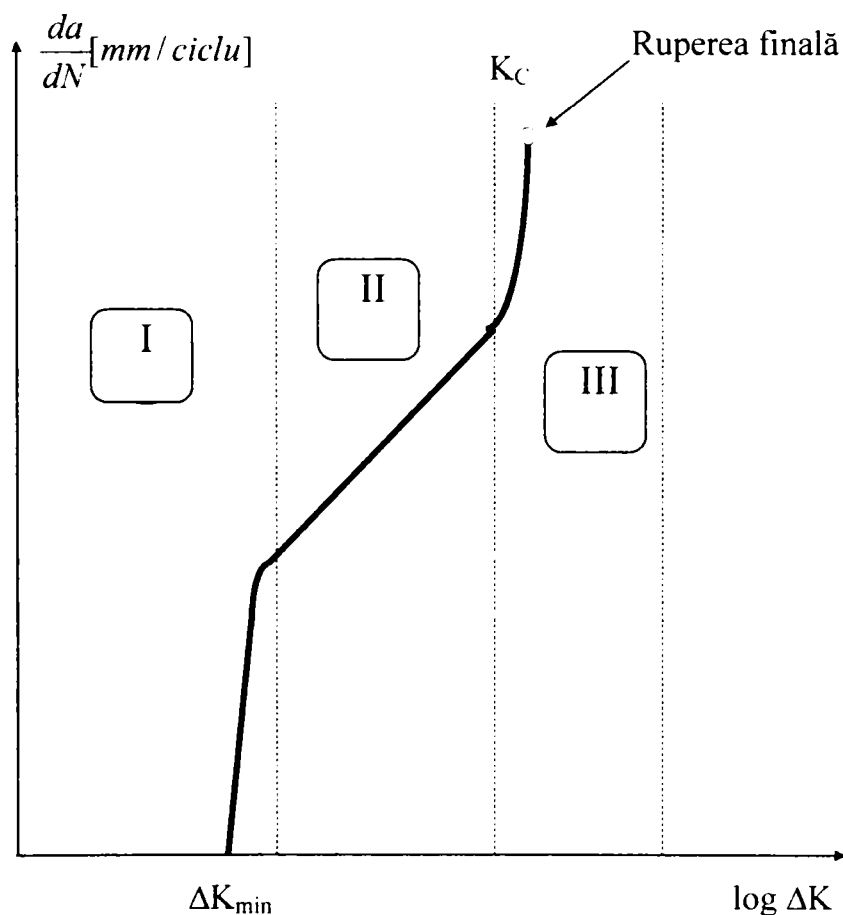


Fig. 4.26.

$$\frac{da}{dN} = C_1 \cdot (\Delta K - \Delta K_{\min})^{n_1} \quad (4.72)$$

unde C_1 și n_1 sunt constante de material.

Domeniul II se caracterizează printr-o propagare stabilă a fisurii. Creșterea stabilă a fisurii se produce dacă sunt îndeplinite următoarele trei condiții:

- forța de extensie a fisurii trebuie să fie egală cu rezistența materialului la propagarea fisurii;
- variația forței de extensie a fisurii în raport cu lungimea fisurii trebuie să fie negativă;
- viteza de creștere a fisurii trebuie să fie suficient de mică astfel încât să poată fi neglijate forțele de inerție.

Corelația dintre variația factorului de intensitate a tensiunii $\Delta K_I = K_{\max} - K_{\min}$ și viteza de propagare a fisurii de oboseală da/dN , pentru acest domeniu este dată de legea lui Paris [11]:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K_I^n \quad [mm/ciclu] \quad (4.73)$$

unde „ C ”, este un coeficient iar „ n ” un exponent specific fiecărui material, care se determină experimental prin încercări de oboseală.

Domeniul III este caracterizat de viteze de propagare a fisurii foarte mari, considerându-se o propagare instabilă a fisurii. Fisura crește rapid de la un ciclu la altul până la atingerea lungimii critice a fisurii la care se produce ruperea finală. Forța de extensie a fisurii devine mai mare decât tenacitatea materialului K_C .

În acest domeniu viteza de propagare a fisurii este corelată cu variația factorului de intensitate a tensiunii prin ecuația propusă de Forman, [33]:

$$\frac{da}{dN} = \frac{A(\Delta K)^p}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad [mm/ciclu] \quad (4.74)$$

unde: A și p sunt constante de material.

$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ variația factorului de intensitate a tensiunii

K_C factorul critic de intensitate a tensiunii (tenacitatea la rupere)

$R = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ reprezintă coeficientul de asimetrie al ciclului de

solicitare;

K_{\min} valoarea factorului de intensitate al tensiunii calculat pentru sarcina minimă din ciclul de solicitare;

K_{\max} valoarea factorului de intensitate al tensiunii calculat pentru sarcina maximă din ciclul de solicitare.

Tenacitatea la rupere a materialului este o caracteristică de material și reprezintă valoarea parametrului de rupere căreia îi corespunde prima extindere sesizabilă a fisurii [138]. Pentru cazul materialelor cu comportare liniar - elastică tenacitatea la rupere se consideră valoarea factorului critic de intensitate a tensiunii K_{IC} determinat în condițiile stării plane de deformație.

Aplicarea metodei elementelor finite a permis modelarea stării de tensiune din braț, unde solicitările de contact favorizează apariția fisurilor, care au condus în unele cazuri la rupere. S-a utilizat metoda elementelor finite și pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii considerând o fisură, care se dezvoltă din zona de concentrare maximă. În final s-a efectuat, tot cu ajutorul metodei elementelor finite un studiu al propagării fisurii, datorită solicitărilor variabile.

Conform metodologiei privind evaluarea siguranței în exploatare a elementelor de rezistență, o analiză a propagării prin oboseală a fisurii trebuie să se facă ținând cont de caracteristicile de material stabilite prin încercări de materiale, de geometria structurii și de ciclurile de solicitare efective.

Analiza propagării prin oboseală a fisurii s-a făcut pe baza conceptelor Mecanicii Ruperii liniar elastice. Ruperea brațului se poate produce dacă:

- factorul de intensitate a tensiunii maxim $K_{I_{max}}$ atinge valoarea tenacității la rupere K_{IC} , producându-se ruperea instabilă;

- fisura a străbătut întreaga lățime a tirantului.

S-a efectuat analiza stării de tensiune, din braț având geometria dată în Fig. 4.21, cu ajutorul programului FRANC2D/L. Preprocesarea s-a realizat cu programul CASCA. Astfel după definirea geometriei, a constantelor de material și a constantelor geometrice, am realizat discretizarea utilizând elemente finite triunghiulare cu 6 noduri pe element de tip placă. Discretizarea s-a făcut în 310 elemente solide cu 769 noduri, Fig. 4.27:

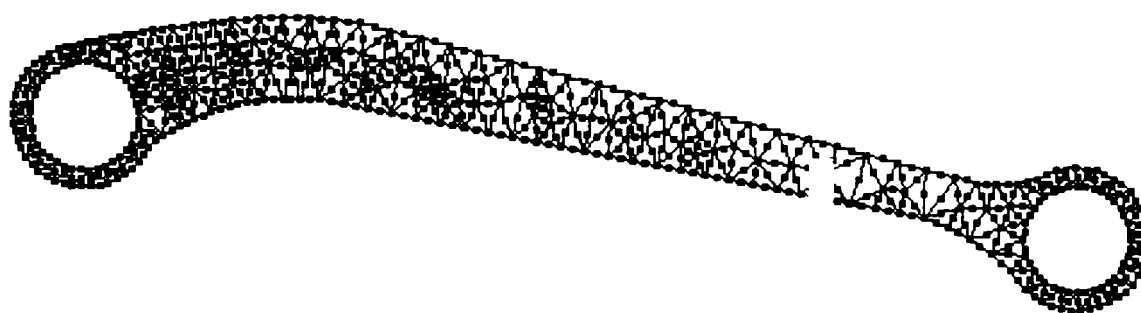


Fig. 4.27.

După discretizare s-a trecut la definirea rezemărilor și încărcărilor. Astfel am blocat deplasările pe direcțiile x și y ale nodurilor din partea dreapta a brațului. Pentru a modela cât mai exact încărcarea care se transmite brațului, datorită îmbinării cu bolț, am considerat următoarele ipoteze:

- calculul brațului s-a efectuat pe baza valorii maxime a încărcării brațului în timpul funcționării;

- întrucât transmiterea sarcinii se realizează prin intermediul unui bolț, s-a considerat că încărcarea se face cu sarcină distribuită, normală pe

suprafața orificiului, iar variația acesteia este după o lege parabolică, Fig. 4.28.

- definirea încărcării s-a făcut pe jumătate din suprafața orificiului astfel: având valoarea 0 la extremități și valoarea p_{\max} la mijloc. Expresia valorii maxime a încărcării p_{\max} , este dată în [67] de relația:

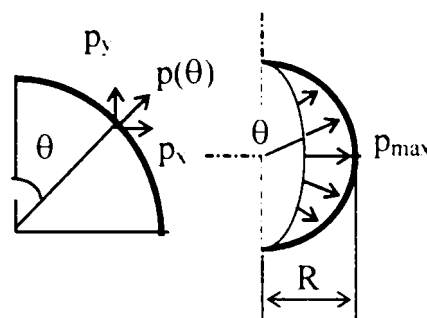


Fig. 4.28.

$$p_{\max} = \frac{F \pi^2}{16 R t} \quad (4.75)$$

unde:

F reprezintă forța axială transmisă de braț;

R = 21 mm, raza brațului;

t = 20 mm grosimea brațului;

Rezultă : $p_{\max} = \frac{1000 \cdot \pi^2}{16 \cdot 21 \cdot 20} = 1,469 \text{ MPa}$

În continuare s-a determinat variația factorului de intensitate a tensiunii K_I în funcție de lungimea unei fisuri, care se dezvoltă din zona de concentrare.

Pentru a studia variația factorului de intensitate a tensiunii K_I în funcție de lungimea fisurii **a** am definit în programul FRANC2D/L fisuri cu lungimea de 2,8 mm în zona de concentrare a tensiunilor, vezi Fig. 4.25, programul a rediscretizat zona adiacentă fisurii, creând singularitatea la vârful acesteia, apoi pentru fiecare lungime a fisurii am rulat programul, înregistrând valoarea factorului de intensitate a tensiunii, obținut prin metoda extrapolării

deplasărilor. Pentru exemplificare în Fig. 4.29. se prezintă zona adiacentă fisurii.

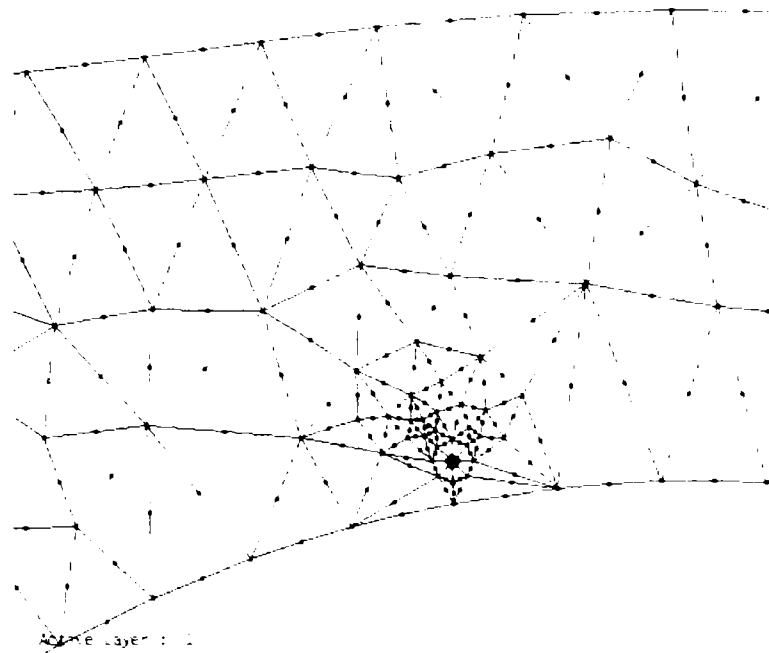


Fig. 4.29.

iar în Fig. 4.30. am prezentat distribuția tensiunii echivalente în vecinătatea fisurii:

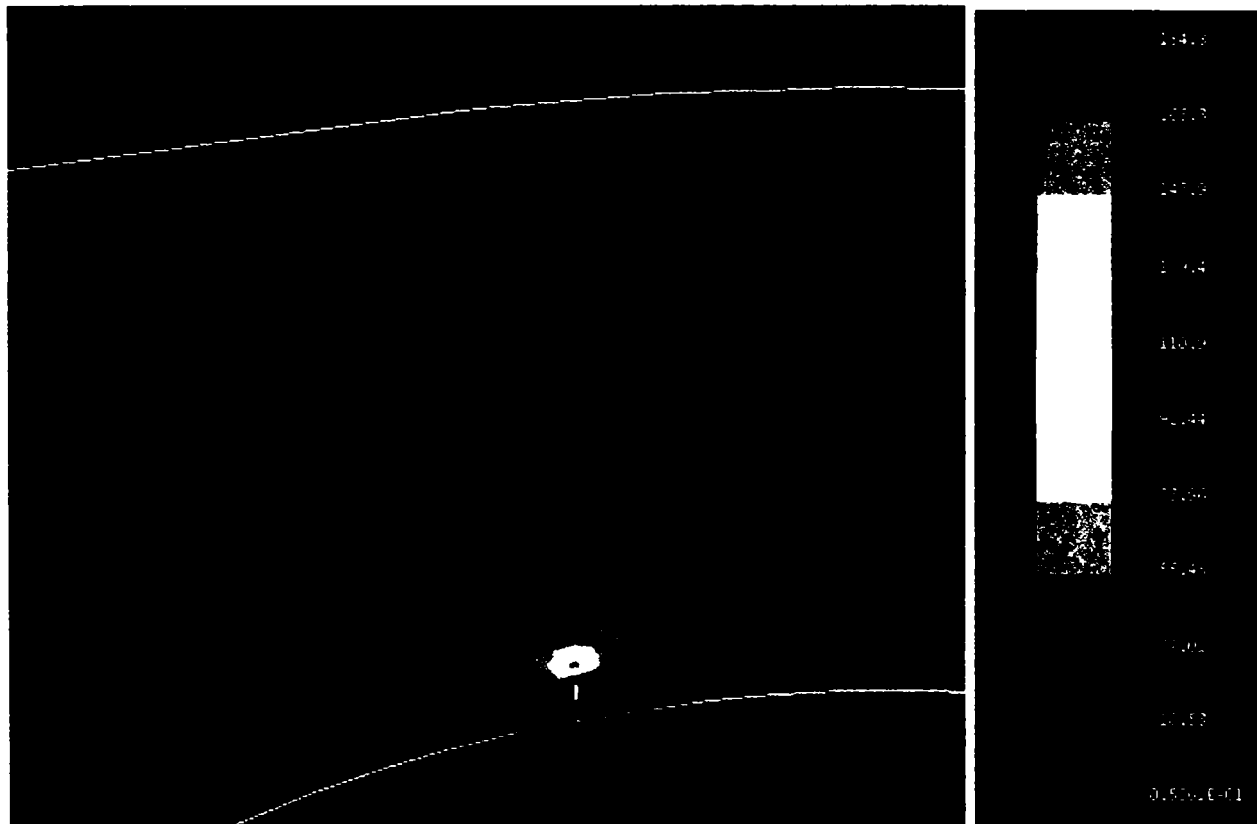


Fig. 4.30.

De asemenea, in Fig. 4.31, am reprezentat deformata zonei din vecinătatea fisurii :

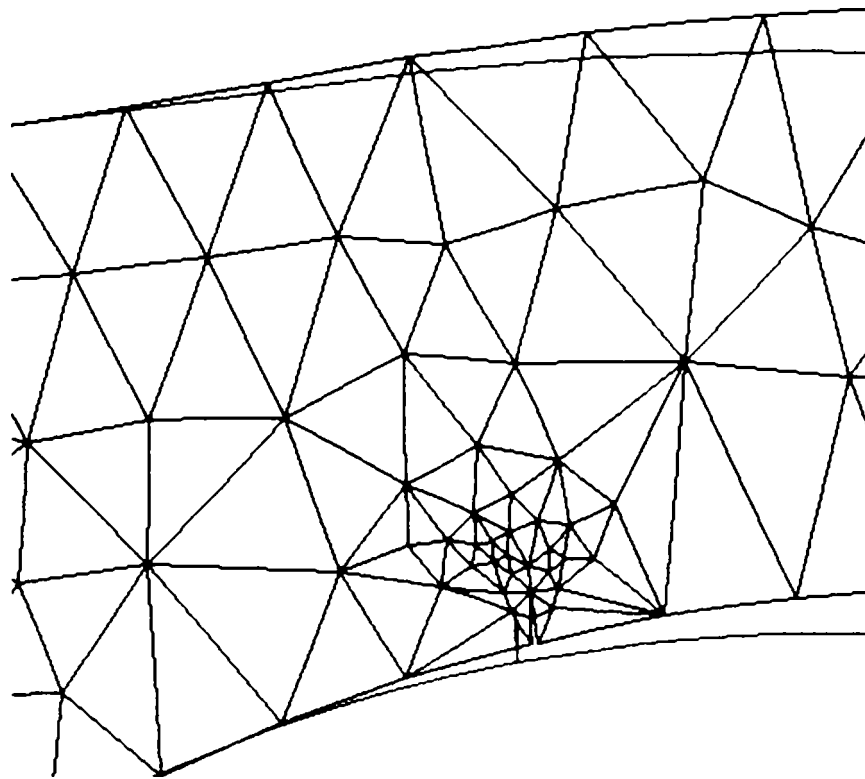


Fig. 4.31.

În Fig. 4.32 se prezintă deformata fisurii propagate:

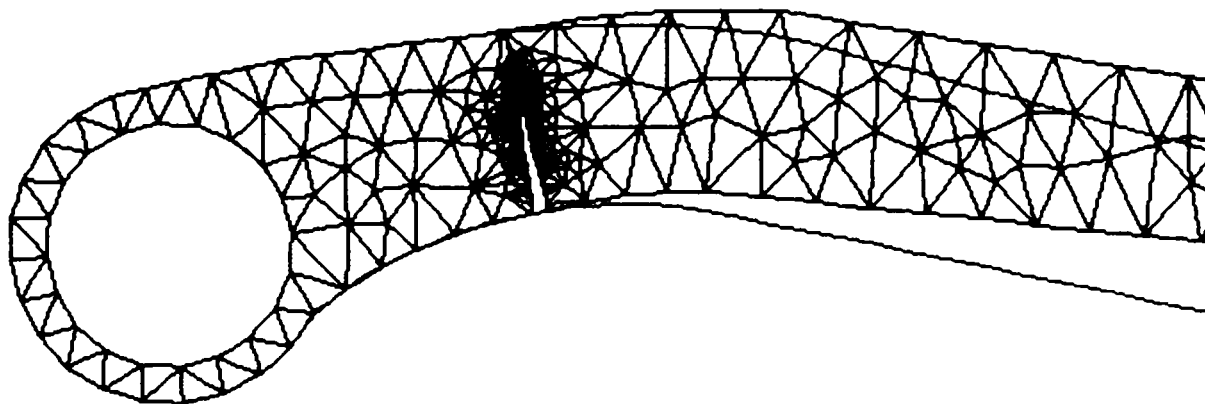


Fig. 4.32.

Rezultatele obținute în urma rulării programului de analiză cu element finit, ne prezintă variația factorului de intensitate a tensiunii K_I în funcție de lungimea fisurii „a” – fig. 4.33, și respectiv variația factorului de intensitate a tensiunii K_{II} în funcție de lungimea fisurii „a” – Fig. 4.34.

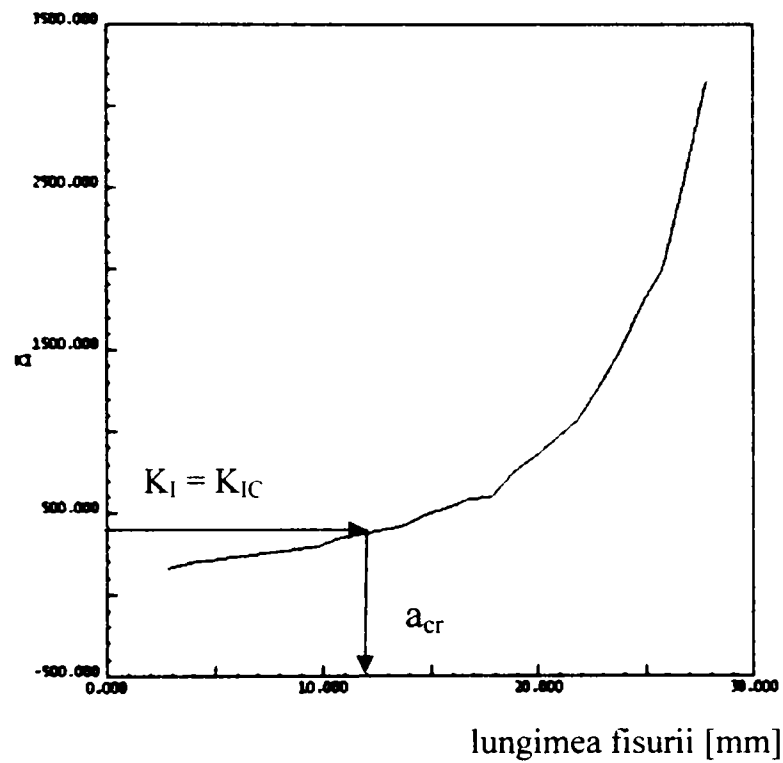


Fig. 4.33.

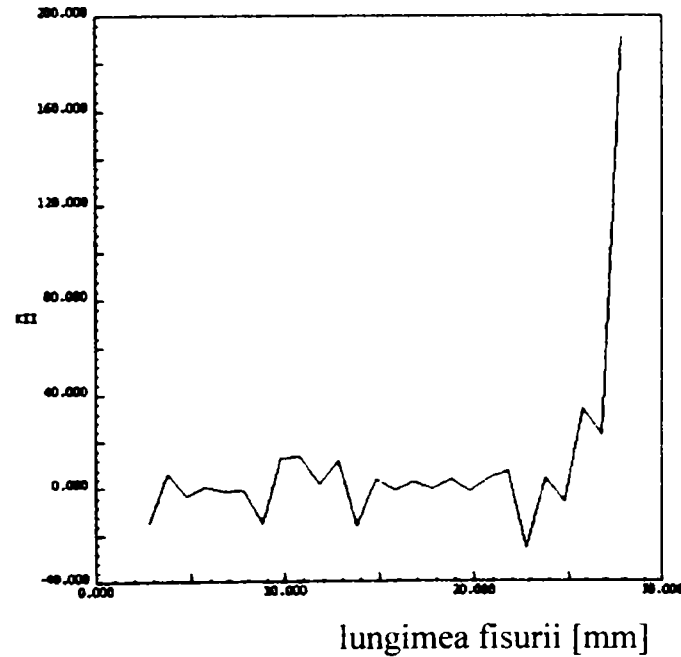


Fig. 4.34.

UNIV. "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA
BIBLIOTECA CENTRALĂ

Determinarea numărului de cicluri în funcție de lungimea fisurii s-a efectuat cu opțiunea PROPAGATE a programului FRANC2D/L. Pentru studiul propagării fisurii, cu ajutorul metodei elementelor finite, programul rediscrétizează și rezolvă sistemul de ecuații pentru fiecare creștere a fisurii.

Programul FRANC2D/L calculează pentru fiecare creștere a fisurii direcția de propagare a acesteia.

Deoarece studiul propagării fisurii se realizează pe baza legii lui Paris, relația (4.72), trebuiesc definiți ca și constante de material: coeficientul din legea lui Paris, C ; exponentul din legea lui Paris, n , și tenacitatea la rupere, K_{IC} . Deoarece brațul este confecționată din aliaj de aluminiu am ales pentru constante următoarele valori: $C = 1,13 \cdot 10^{-9} \text{ mm}^{2.5}/\text{nr. cicluri}$ și $n = 2,31$

Analiza propagării fisurii s-a efectuat pornind de la o lungime inițială a fisurii $a_0 = 2,8 \text{ mm}$ iar propagarea s-a realizat în 25 de pași, pentru fiecare pas considerându-se o creștere a fisurii $da=1 \text{ mm}$.

În final obținem variația numărului de cicluri N în funcție de lungimea fisurii a – Figura 4.35.

Cunoscând $K_{IC} = 13,27 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} = 419,63 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$, determinat experimental în capitolul 5, tabelul 5.9, din diagrama din fig. 4.34 se determină lungimea critică a fisurii: $a_{cr} = 13,3 \text{ mm}$.

Cunoscând lungimea critică a fisurii, $a_{cr} = 13,3 \text{ mm}$, din Fig. 4.33 se poate determina numărul de cicluri până la rupere. Astfel pentru ca fisura inițială să ajungă la lungimea critică $a_{cr} = 13,3 \text{ mm}$ sunt necesare un număr de cicluri:

$$N_c = 27148 \text{ cicluri}.$$

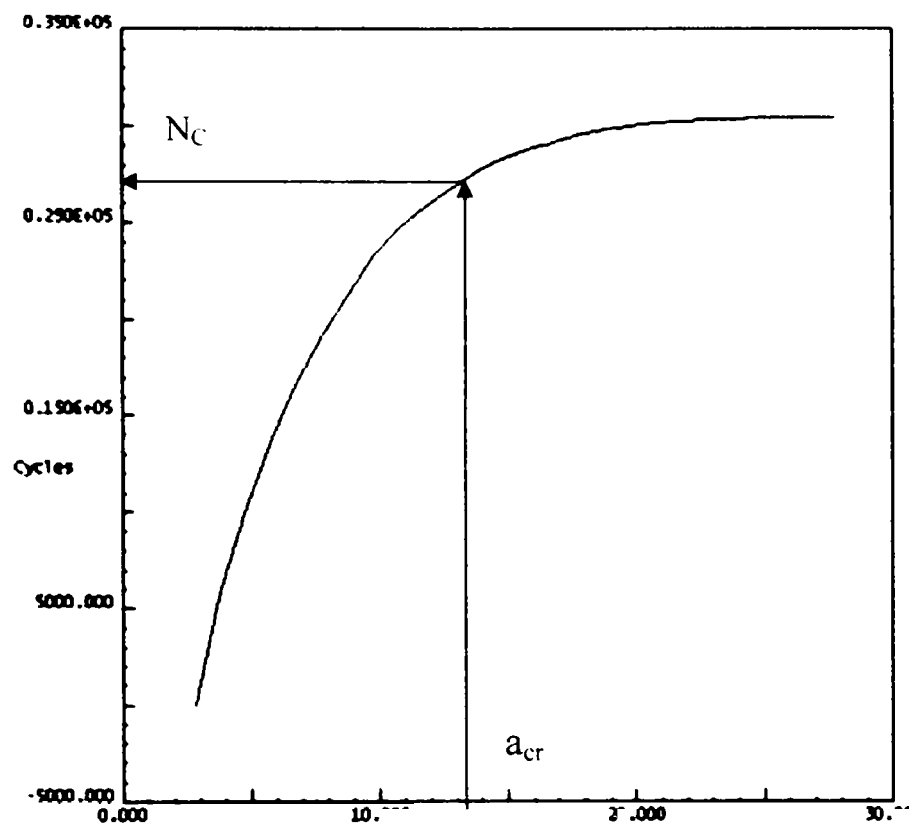


Fig. 4.35.

Fisura crește în modul I de propagare ($K_{II} \approx 0$, vezi figura 4.34). Când lungimea fisurii atinge ≈ 26 mm, K_{II} devine important, fisura în acest caz se propagă mixt după modul I și II de propagare.

CAPITOLUL 5

INCERCĂRI EXPERIMENTALE DE DETERMINARE A PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

5.1. ÎNCERCĂRILE MECANICE ALE MATERIALELOR

Studiul rezistenței materialelor are două aspecte:

- teoretic, care are rolul de a stabili relațiile matematice care să oglindească fenomenele fizice din corpurile elastice, relații ce vor avea un rol hotărâtor în calculul de proiectare a pieselor din construcția de mașini;
- experimental, menit să determine caracteristicile mecanice ale materialelor, în vederea unui calcul corect.

În majoritatea calculelor de proiectare se vorbește de rezistențe admisibile. Determinarea acestora se face în funcție de anumite valori critice, cum sunt: rezistența la rupere, limita de curgere, rezistența la oboseală. Determinarea acestor mărimi critice se face pe cale experimentală, în numeroase aplicații, determinarea deformațiilor fiind extrem de importantă.

Pentru a face încercări de rezistența materialelor, avem nevoie de :

- epruvete, având diferite forme și dimensiuni, de cele mai multe ori standardizate;
- mașini și aparate de încercat, care au rolul de a aplica epruvetelor diverse sarcini, pentru a realiza cazurile de solicitare analoage celor studiate pe cale teoretică;
- aparate de măsurat forțe și deformații.

La încercarea unui material trebuie să se măsoare două tipuri de mărimi: tensiunile și deformațiile. Pentru tensiuni, se măsoară în general sarcinile aplicate epruvetelor și apoi se aplică formulele cunoscute din rezistența materialelor, corespunzătoare felului solicitării, în cazuri complicate recurgându-se la metode experimentale speciale. Pentru măsurarea

deformațiilor se folosesc extensometrele cu care se pot măsura deformații de microni. Având măsurate aceste două mărimi, în continuare se pot trasa curbele caracteristice ale materialelor.

5.2. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR MECANICE

Această încercare este standardizată prin STAS 200-75. Acesta stabilește elementele și condițiile tehnice pentru executarea încercării la tracțiune a metalelor, având ca scop determinarea caracteristicilor mecanice uzuale ale metalului încercat.

Caracteristicile mecanice determinate în Laboratorul de Rezistența Materialelor de la Universitatea Politehnica Timișoara sunt: limita de curgere $R_{p0.2}$ [MPa], rezistența la rupere R_m [MPa] și alungirea la rupere A [%].

Determinarea caracteristicilor mecanice s-a făcut pentru un aliaj de aluminiu, a cărui compoziție chimică a fost determinată de autor în colaborare cu Laboratorul de analiză metalografică din cadrul Uzinelor Mecanice Timișoara, obținând compoziția chimică din tabelul 5.1. În tabel este specificat, ca termen de comparație, aliajul de aluminiu 7075-T651 Al, rezultate culese cu ajutorul poștei electronice Internet, prin accesarea adresei www.matweb.com.

Tab. 5.1.

Material	Zn	Mn	Mg	Cu	Al
AlZn5,5MnCu Prin analiză	5,4	2,0	-	1,79	90,81
7075-T651Al [matweb]	5,1÷6,1	0,4÷1,8	2,1÷2,9	1,2÷2,0	Restul

Standardul STAS 200-75 se aplică produselor și epruvetelor cu diametrul mai mare sau egal cu 4 mm sau cu o grosime mai mare sau egală cu

3 mm. Pentru produse sub aceste dimensiuni și pentru produse speciale (table subțiri, sârme, etc.) prezentul standard se aplică în condițiile specifice prescrise în standardul de încercare la tracțiune a produsului respectiv sau în standardul de produs.

Încercarea constă în aplicarea, până la rupere, pe direcția axei longitudinale a epruvetei, a unei sarcini de tracțiune, în vederea determinării caracteristicilor mecanice enumerate mai sus.

Montajul epruvetei în mașina de încercat trebuie să asigure axialitatea aplicării sarcinii, respectiv lungimea uniformă a epruvetei. Încercarea s-a executat pe o mașină de încercat cu clasa de precizie de 1 %. Măsurarea lungirii s-a executat cu aparate montate pe epruvetă. Epruveta este de secțiune circulară (epruvetă rotundă) – fig. 5.1.

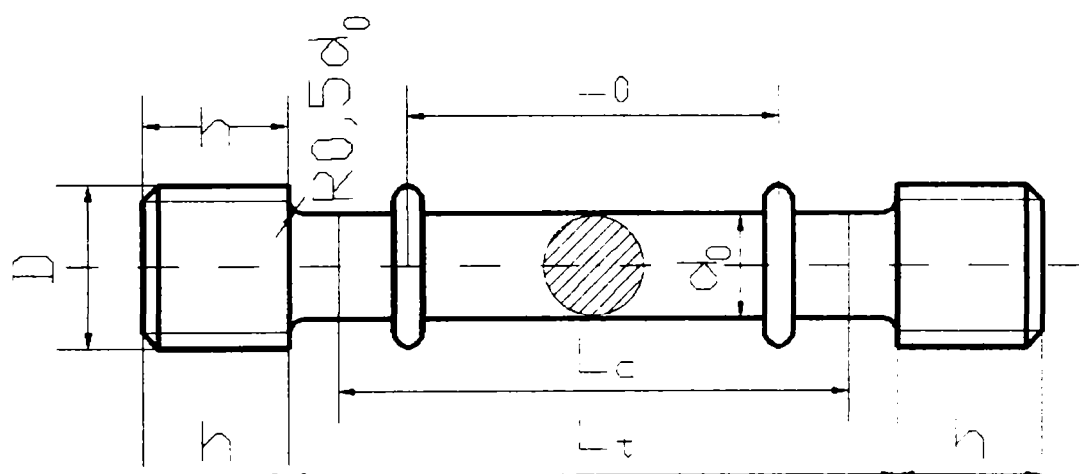


Fig. 5.1.

Lungimea calibrată a epruvetei, pentru epruvete rotunde, trebuie să fie de: $L_{c \min} = L_0 + d_0$.

Capetele de prindere ale epruvetelor au diverse forme și dimensiuni alese corespunzător cu dispozitivelor de fixare ale mașinii de încercat, asigurându-se imobilizarea și evitarea ruperii în fălci prin degradarea accentuată a secțiunii. În cazul de față, pentru epruvetele rotunde prelucrate în Laboratorul de Rezistența Materialelor, capetele de prindere au fost filetate cu diametrul filetului M12.

Mașina de încercat la tracțiune și compresiune este prevăzută cu un sistem melc-roată melcată și cu un motor electric care produce sarcinile necesare încărcărilor, dispozitivul de măsurare a forței fiind cu pendul. Pe batiul mașinii se află fixate cele două coloane, acestea ghidează traversele rigide, pe care sunt montate bacurile de prindere, unul fix iar celălalt mobil. Între cele două bacuri, se fixează un dispozitiv special de care se prinde epruveta, prin deplasarea pe verticală se realizează întinderea epruvetei.



Fig. 5.2.

Încercările s-au realizat pe mașina universală de încercat la tracțiune – compresiune – vedere de ansamblu – fig. 5.2, de 100 kN tip Louis Schopper.

iar achiziția datelor s-a realizat cu ajutorul sistemului ESAM Traveller (Vishai Measurement Group, SUA). – fig. 5.3.

Pentru efectuarea încercării s-au folosit 4 epruvete rotunde având diametrul $\phi 8$, s-au folosit două canale de citire din cele 6 ale sistemului de achiziție, astfel, canalul 4 traductorul de deplasare iar pe canalul 6 traductorul de forță.

Sistemul de achiziție a datelor a furnizat următoarele rezultate, prezentate în tabelul 5.2.

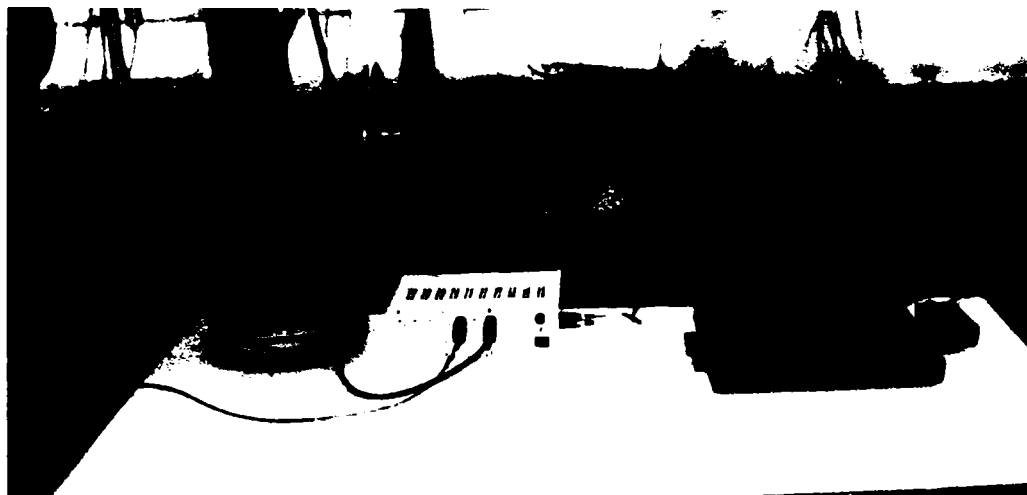
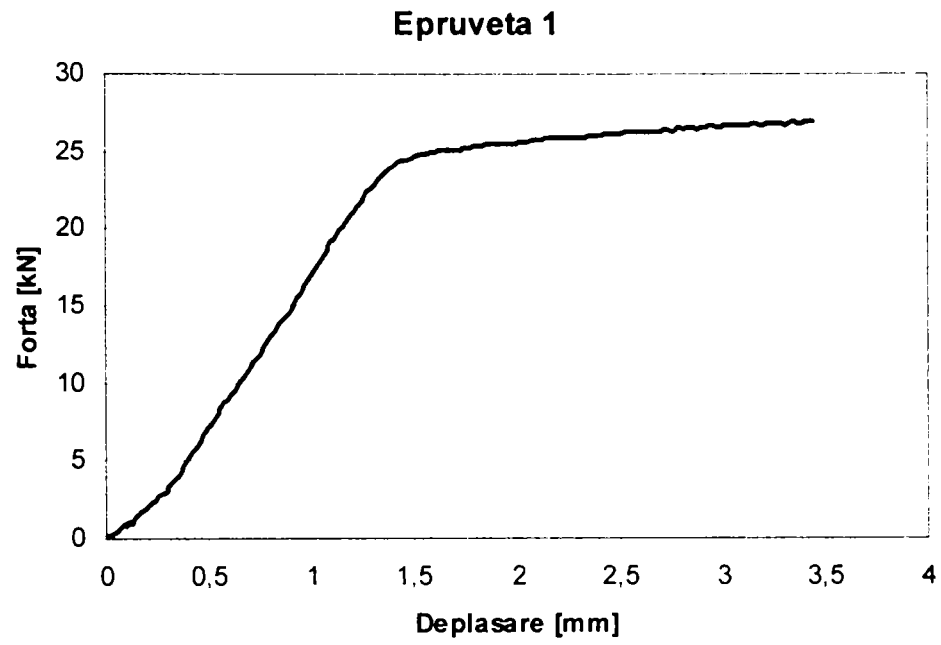


Fig. 5.3.

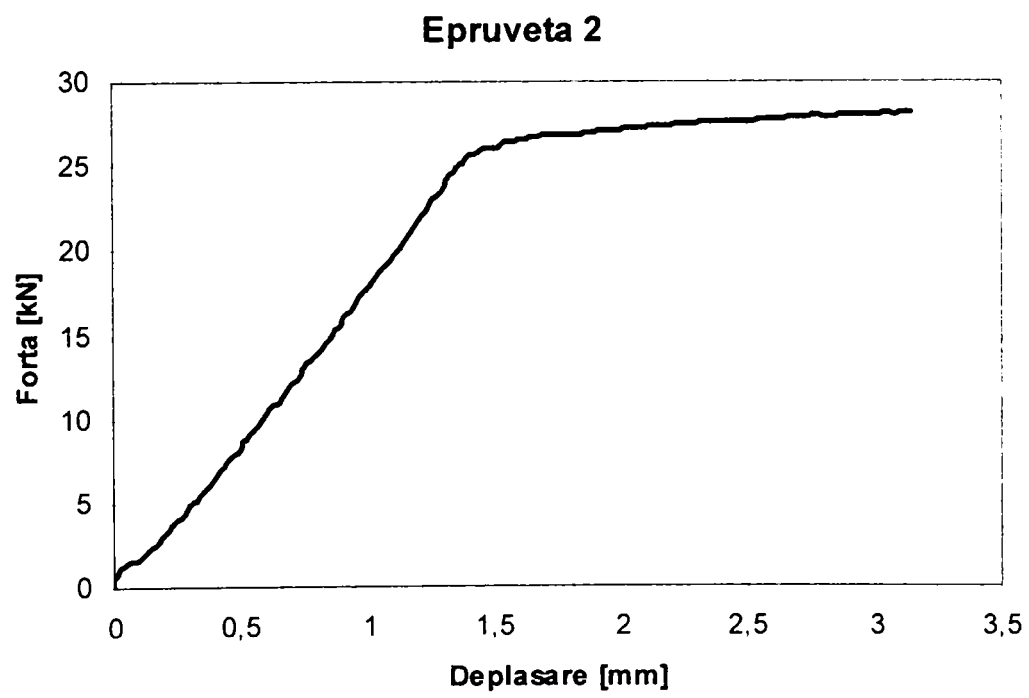
Tab. 5.2.

Epruveta	Diametru [mm]	Aria [mm ²]	Lung. calib. [mm]	Fe [kN]	Fmax [kN]	Lu [mm]
1	8	50.265482	40	24,17	26.913	43.000
2	8	50.265482	40	25.74	28.180	42.667
3	8	50.265482	40	25.35	27.787	42.784
4	8	50.265482	40	24.27	27.107	43.815

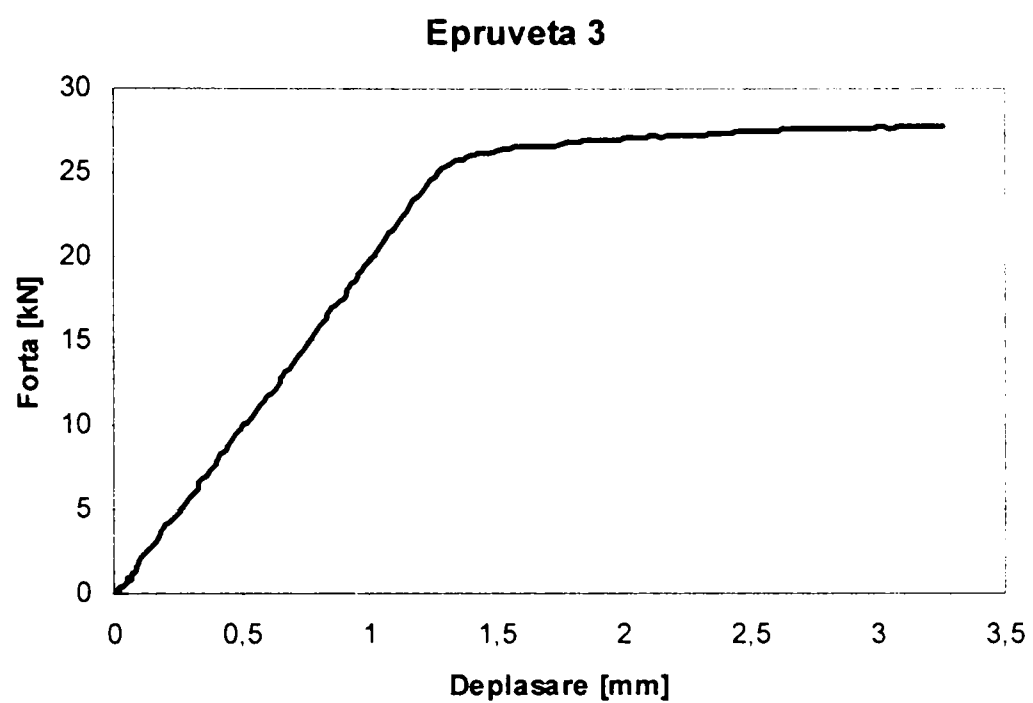
Prin prelucrarea datelor furnizate de sistemul de achiziție ESAM Traveller, rezultate în urma încercărilor s-au trasat diagramele forță deplasare pentru cele 4 epruvete, fig. 5.4.



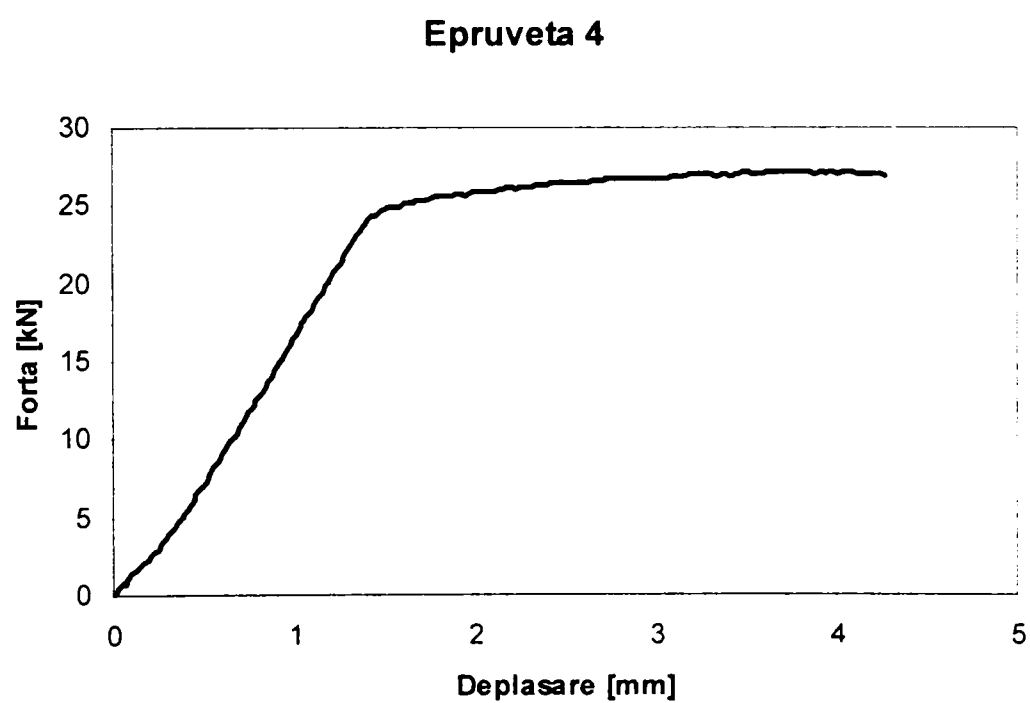
a



b



c



d

Fig. 5.4.

Cu ajutorul diagramelor din fig. 5.4 și datele din tabelul 5.2 se pot calcula următoarele caracteristici mecanice:

$$\text{- limita de curgere: } R_{p0,2} = \frac{F_c}{A} \cdot 1000 \quad [\text{MPa}]$$

$$\text{- rezistența la rupere: } R_m = \frac{F_{\max}}{A} \cdot 1000 \quad [\text{MPa}]$$

$$\text{- alungirea la rupere: } A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100 \quad [\%]$$

Rezultatele caracteristicilor de mai sus au fost grupate în tabelul 5.3.

Tab. 5.3.

Epruveta	Limita de curgere $R_{p0,2}$ [MPa]	Rezistența la rupere R_m [MPa]	Alungirea la rupere A [%]
1	480,91	535,42	7,500
2	512,08	560,62	6,668
3	504,26	552,80	6,960
4	482,9	539,28	9,537

Deci, în urma încercărilor statice, efectuate în Laboratorul de Rezistența Materialelor, s-au determinat caracteristicile mecanice printr-o încercare la tracțiune folosind epruvete circulare, rezultatele obținute fiind prezentate în tabelul 5.4, comparativ în tabel s-au prezentat caracteristicile mecanice ale aliajului 7075-T651 Al, culese de pe Internet:

Tab. 5.4.

Material	Limita de curgere $R_{p0,2}$ [MPa]	Rezistența la rupere R_m [MPa]	Alungirea la rupere A [%]
AlZn5,5MnCu Prin încercări	495	574	7.67
7075-T651 Al [36], [37]	500	550	11

5.3. DETERMINAREA LIMITEI DE PRAG A PROPAGĂRII FISURII DE OBOSEALĂ

Prefisurarea epruvetelor s-a efectuat pe mașina de încercat la oboseală – fig. 5.5. Pentru a evita formarea zonelor plastice da la vârful fisurii sau propagarea rapidă a fisurii, în prealabil s-a efectuat un studiu pentru determinarea limitei de prag, care reprezintă valoarea variației factorului de intensitate a tensiunii pentru care o fisură începe să se propage.



Fig. 5.5.

Determinarea limitei de prag este standardizată prin standardul ASTM E 647 – 86a [126]. Forma și dimensiunile epruvetei cu fisură centrală necesară pentru determinarea limitei de prag este prezentată în fig. 5.6, avantajul acestei metode fiind faptul că determinarea limitei de prag și determinarea tenacității s-a făcut la o singură prindere, modul de prindere împreună cu traductorii de deplasare sunt prezentați în fig. 5.7.

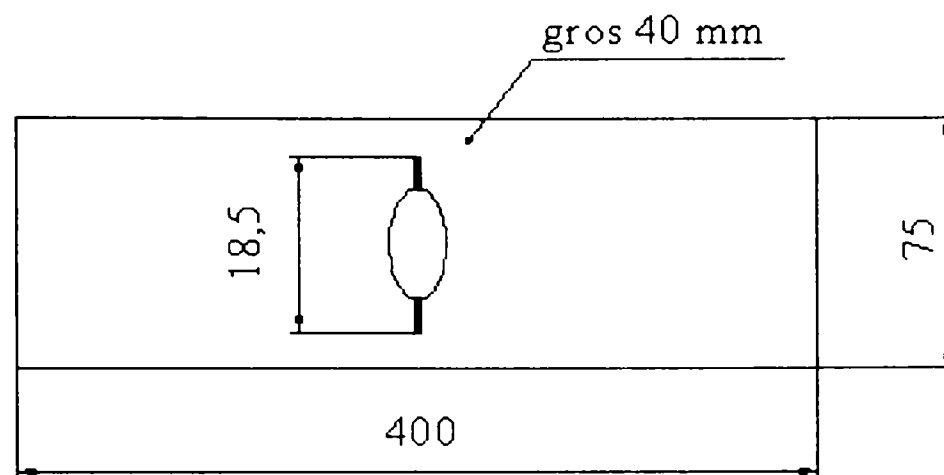


Fig. 5.6.



Fig. 5.7.

Pentru determinarea limitei de prag ΔK_{III} , s-au utilizat un număr de 5 epruvete, sollicitate la oboseală prin 5 regimuri de solicitare, crescând progresiv forța F_{max} , de la primul regim (corespunzător regimului 1, epruvetei 1), până la ultima epruvetă (corespunzătoare regimului 5, epruvetei 5).

Cu ajutorul sistemului de achiziție a datelor au fost înregistrate următoarele date corespunzătoare celor 5 regimuri de solicitare la oboseală, date prezentate în tabelul 5.5., iar în fig. 5.8 este prezentată determinarea limitei de prag.

Pentru determinarea limitei de prag s-au făcut investigații metalografice în cadrul Laboratorului de Știința Materialelor din Cadrul Facultății de Mecanică

Tab. 5.5.

Mărime	Unitate de măsură	Regimuri de solicitare la oboseală				
		1	2	3	4	5
F_{\max}	kN	40	60	80	100	130
F_{\min}	kN	10	15	10	20	32,5
R	-	0,25	0,25	0,125	0,2	0,25
ΔK	MPa m ^{0,5}	1,772	2,657	4,134	4,724	5,905

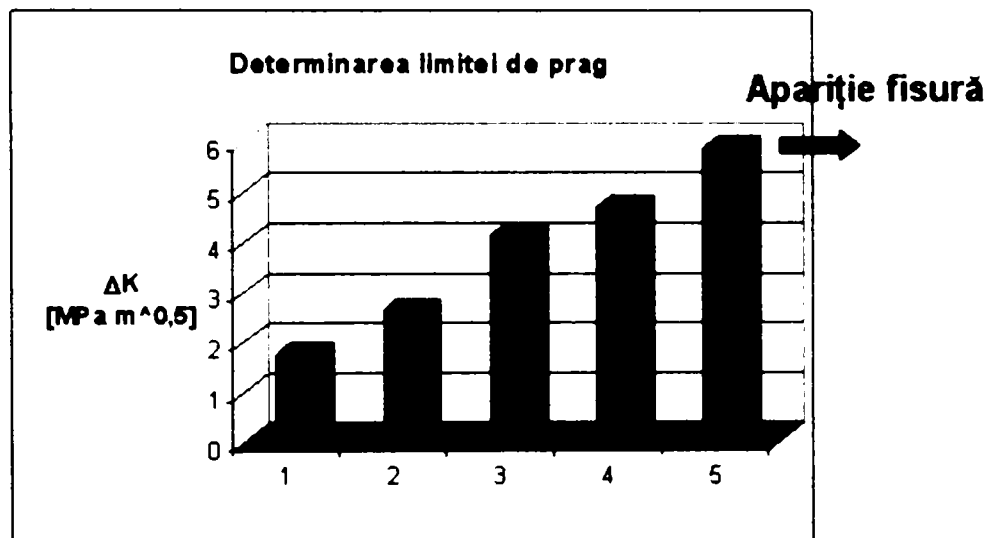


Fig. 5.8.

obținând mărimea grăuntelui ca fiind de $8,8 \mu\text{m}$. Imaginea metalografică corespunzătoare aliajului de aluminiu AlZn5,5MnCu este redată în fig. 5.9.

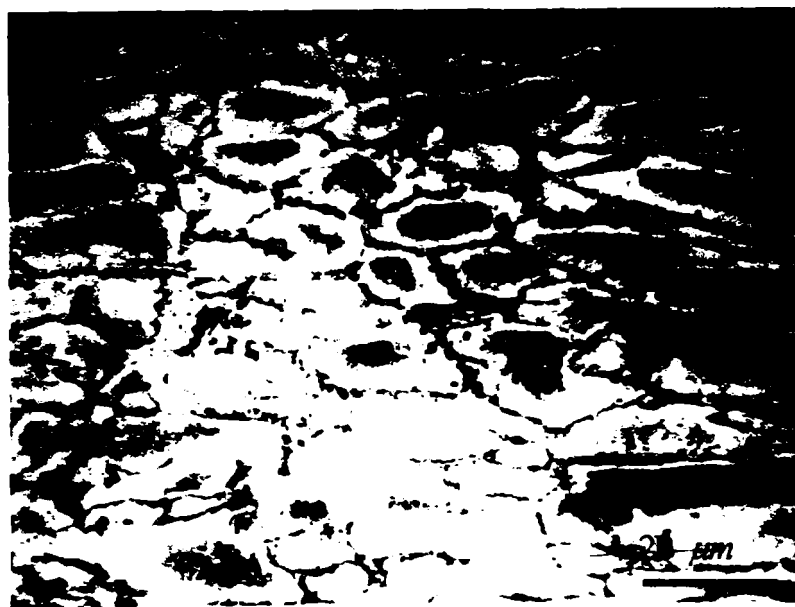


Fig. 5.9.

Pentru calculul limitei de prag ΔK_{th} , există trei soluții teoretice calculate în funcție de mărimea grăuntelui, $d = 8,8 \mu m$, coeficientul de asimetrie al ciclului R, rezistența de rupere la tracțiune σ_r , limita de curgere σ_c , cele trei relații fiind descrise mai jos [70]:

$$- \Delta K_{th} = \sigma_r \sqrt{6 \cdot \pi \cdot d} (1 - R)^{0,3} \quad (5.1)$$

$$- \Delta K_{th} = \sigma_c \cdot \sqrt{d} (1 - R) \quad (5.2)$$

$$- \Delta K_{th} = 6,14 \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{d} \cdot (1 - R)^{0,5} \quad (5.3)$$

Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul 5.6.

Tab 5.6.

Încărcare	Simbol	UM	Ciclul de încărcare		
Forța maximă	F_{max}	kN	26,5	30	32,5
Forța minimă	F_{min}	kN	160	150	130
Rația	$R = F_{max}/F_{min}$	-	0,165	0,2	0,25
Limita de prag a propagării fisurii de oboseală					
Experimental	$\Delta K_{th,exp}$	$MPa\sqrt{m}$	7,9	6,9	5,9
Ecuția 1	$\Delta K_{th,(1)}$	$MPa\sqrt{m}$	7,00	6,91	6,78
Ecuția 2	$\Delta K_{th,(2)}$	$MPa\sqrt{m}$	4,01	3,85	3,61
Ecuția 3	$\Delta K_{th,(3)}$	$MPa\sqrt{m}$	8,23	8,06	7,81

Deci, valoarea limitei de prag a propagării fisurii de oboseală, calculată cu relația (5.1) și având: $d = 8,8 \mu m$, $R = 0,167$, $R_m = 550 MPa$, obținând pentru limita de prag valoarea:

$$\Delta K_{th} = 6,78 MPa\sqrt{m}$$

5.4. DETERMINAREA TENACITĂȚII LA RUPERE.

METODA K_{IC}

Această încercare este standardizată la noi în țară prin STAS 9760-84.

Scopul încercării este determinarea valorii critice a factorului de intensitate a tensiunii K_{IC} în condițiile stării plane de deformare și deplasarea flancurilor fisurii după modul I de deplasare. Ea este aplicabilă metalelor, aliajelor și îmbinărilor sudate în domeniul de temperatură cuprins între -196°C și $+100^{\circ}\text{C}$.

În cadrul Lucrării s-a determinat tenacitatea la rupere prin metoda K_{IC} pentru un aliaj de aluminiu AlZn5,5MnCu, folosit în industria autovehiculelor având compoziția chimică prezentată în tabelul 5.1.

Principiul încercării constă în aplicarea lentă, continuă, progresivă și fără șocuri a unei solicitări de tracțiune, asupra unei epruvete, în care s-a propagat o fisură printr-o solicitare de oboseală.

Tenacitatea la rupere K_{IC} se calculează pe baza înregistrării forță - deplasare obținută în timpul încercării.

Epruveta pe care s-a determinat tenacitatea la rupere K_{IC} este o epruvetă de tracțiune; conținând o creștătură, ce are în prelungire o fisură propagată prin oboseală. Forma epruvetei de tracțiune este dată în Fig. 5.10, iar dimensiunile acesteia sunt date în Tabelul 5.7.

Tab. 5.7.

Tipul	Grosimea B [mm]	Lațimea W [mm]	Lungimea fisurii a [mm]	Lăț. max. crestă N [mm]	Lung. efec. crest. C [mm]
10	10	20	9.0...11.0	1.3	5.0...8.0
25	25	50	22,5...27,5	3.2	12.5...20.0
50	50	100	45.0...55.0	6.5	25.0...40.0
75	75	150	67.5...82.5	9.7	37.5...60.0
100	100	200	90,0...110,0	13.0	50.0...80.0

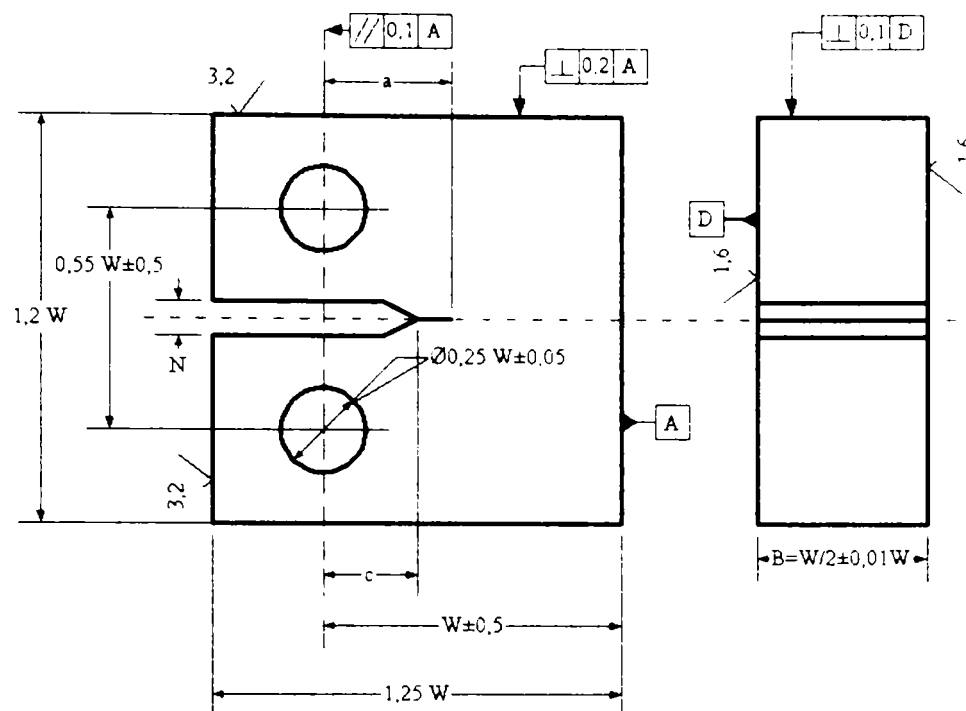


Fig. 5.10.

În cadrul tezei de doctorat, pentru determinarea tenacității la rupere am folosit epruveta din fig. 5.10 având următoarele dimensiuni $B = 40$ mm, $W = 75$ mm și o crestătură de 22,7 mm. Epruveta s-a montat în dispozitivul de prindere al mașinii de încercat la oboseală, Tip VEB Werkstoffprufmaschinen de 1000 kN, Fig. 5.11, modernizată prin adaptarea unui sistem de măsurare a forței prin intermediul unui traductor de presiune tip Hottinger, a unui sistem de achiziție și prelucrare a datelor experimentale tip Spider 8 și a programului de achiziție și prelucrare a datelor Catman. O vedere de ansamblu a mașinii de încercat la oboseală este prezentată în Fig. 5.12 iar sistemul de achiziție a datelor experimentale obținute în urma încercării este prezentat în Fig. 5.13.

Prefisurarea epruvetelor s-a efectuat pe mașina de încercat la oboseală. Pentru a evita formarea zonelor plastice de la vârful fisurii sau propagarea rapidă a fisurii, în prealabil s-a efectuat un studiu pentru determinarea limitei de prag, care reprezintă valoarea variației factorului de intensitate a tensiunii pentru care o fisură începe să se propage.

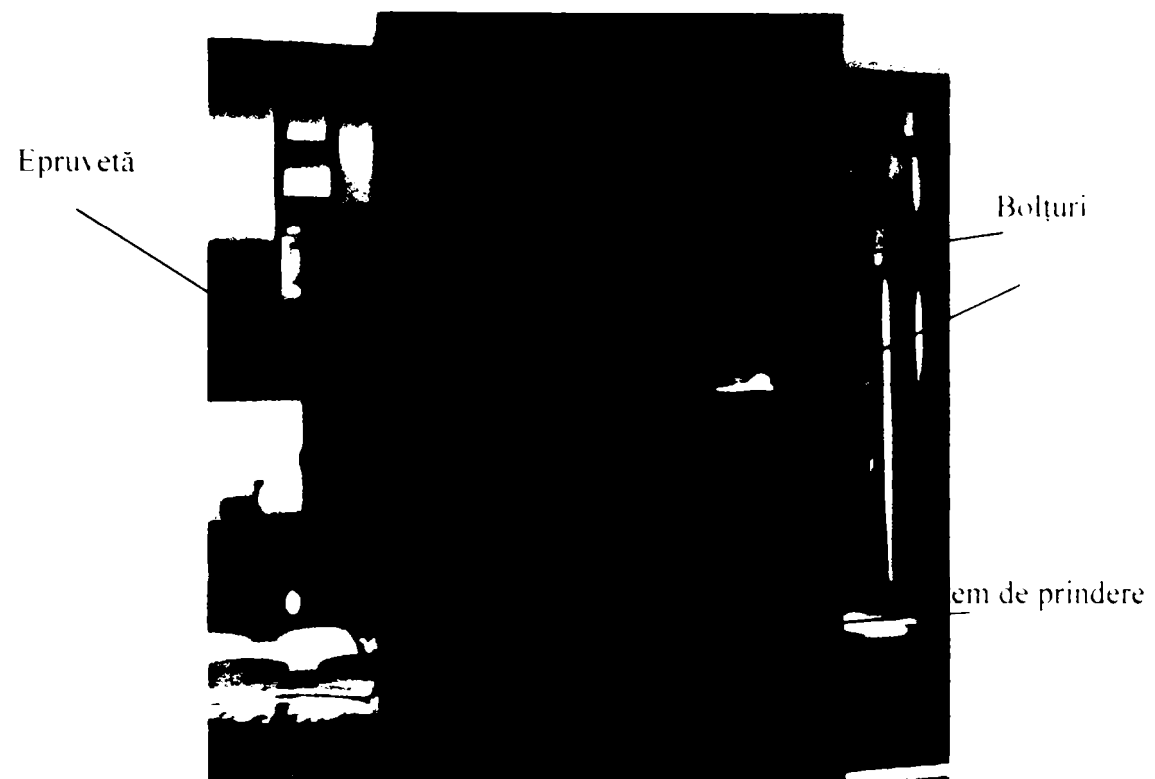


Fig. 5.11.



Fig. 5.12.

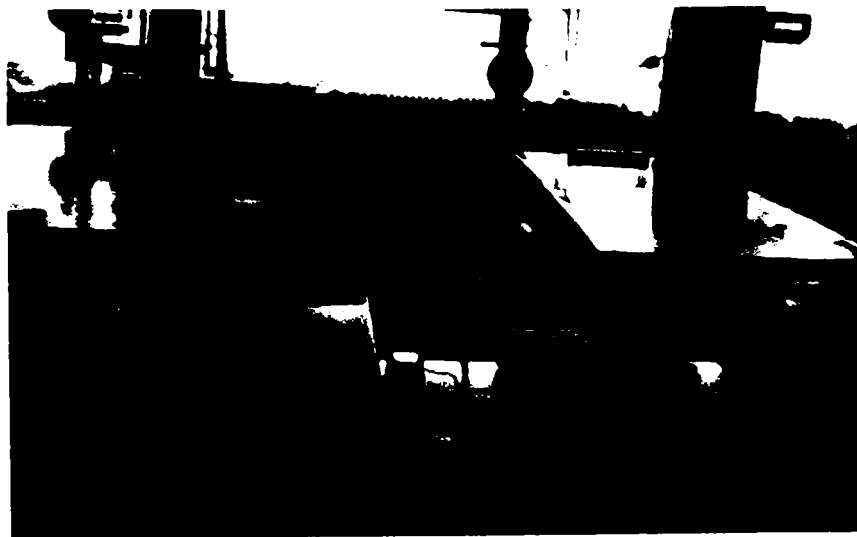


Fig. 5.13.

Determinarea limitei de prag s-a făcut în paragraful 5.3, obținând o valoare de $5,9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

Astfel prefisurarea epruvetelor s-a efectuat după un ciclu având $F_{\text{max}} = 16 \text{ kN}$ respectiv $F_{\text{min}} = 4 \text{ kN}$, rezultând o variație inițială a factorului de intensitate a tensiunii:

$$\Delta K_I = (F_{\text{max}} - F_{\text{min}}) \frac{f\left(\frac{a}{W}\right)}{B \times W^2} = 6,7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \quad (5.4)$$

unde:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 29,6\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 185,5\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 655,7\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 1017,0\left(\frac{a}{W}\right) + 638,9 \quad (5.5)$$

Rezultatele obținute la prefisurarea epruvetei compacte sunt grupate în tabelul 5.8.

Tab. 5.8.

Epruveta compactă			
Dimensiuni			
W	[mm]	75	75
B	[mm]	40.2	40.2
A	[mm]	24.3	24.3
a/W	[-]	0.324	0.324
f(a/W)	[-]	6.136	6.136
Încărcări			
F _{min}	[N]	3000	4000
F _{max}	[N]	12000	16000
R	[-]	0.25	0.25
DP	[N]	9000	12000
DK	[MPa√mm]	158.641	2110522
DK	[MPa√m]	5.017	6.689
Număr cicluri			
		21300	155200
	TOTAL	176500	

După efectuarea prefisurării, ruperea epruvetei s-a realizat pe aceeași mașină de încercat aplicând o sarcină lentă, continuă, progresivă și fără șocuri.

Măsurarea forței și a deplasării la deschidere a fisurii se face printr-o înregistrare continuă, înregistrându-se semnalul de la traductorul de forță în funcție de semnalul traductorului de deplasare.

Pentru măsurarea deschiderii fisurii s-a folosit un traductor de deplasare realizat în cadrul Laboratorului de Rezistența Materialelor format dintr-o lamelă elastică prevăzută cu patru traductoare electrice rezistive EA -06 - 062AA -120 Micro Measurements de 120 Ω legate în punte completă.

Semnalul de la acest traductor a fost înregistrat prin intermediul sistemului Spider8 – Catman și calibrat cu ajutorul unui micrometru.

Disponerea epruvetelor se face pentru solicitare la tracțiune conform Fig. 5.14. Fixarea epruvetelor în mașina de încercat trebuie să asigure aplicarea forței după axa ce unește centrele găurilor de prindere a epruvetei. Se admite o abatere de înclinare între tija superioară, de transmitere a forței și cea inferioară de maximum 1:1000.

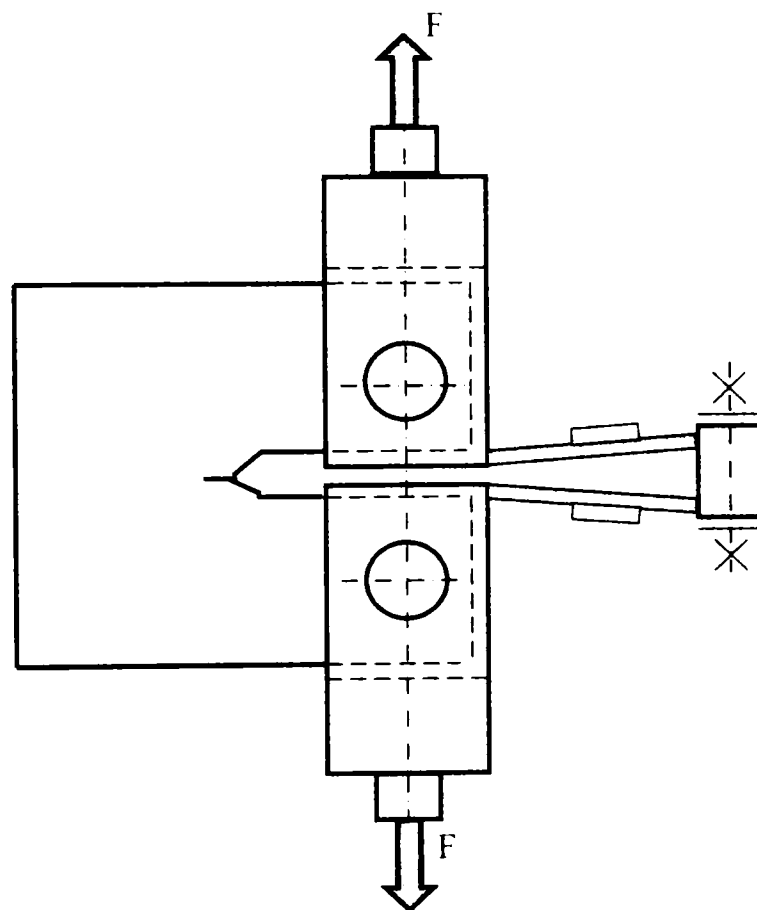


Fig. 5.14.

Cu ajutorul datelor furnizate de sistemul de achiziție și prelucrare a datelor Spider 8, se pot determina punctele corespunzătoare forțelor și deplasărilor.

O înregistrare tipică forță – deplasare obținută pentru prima epruvetă încercată este prezentată în Fig. 5.15.

Conform metodei K_{IC} pe diagrama forță - deplasare s-a trasat o secantă având panta cu 5% mai mică decât panta porțiunii liniare a diagramei forță –

deplasare, intersecția acesteia cu curba $F - \delta$ reprezentând valoarea forței de calcul $F_Q = 15,129$ kN.

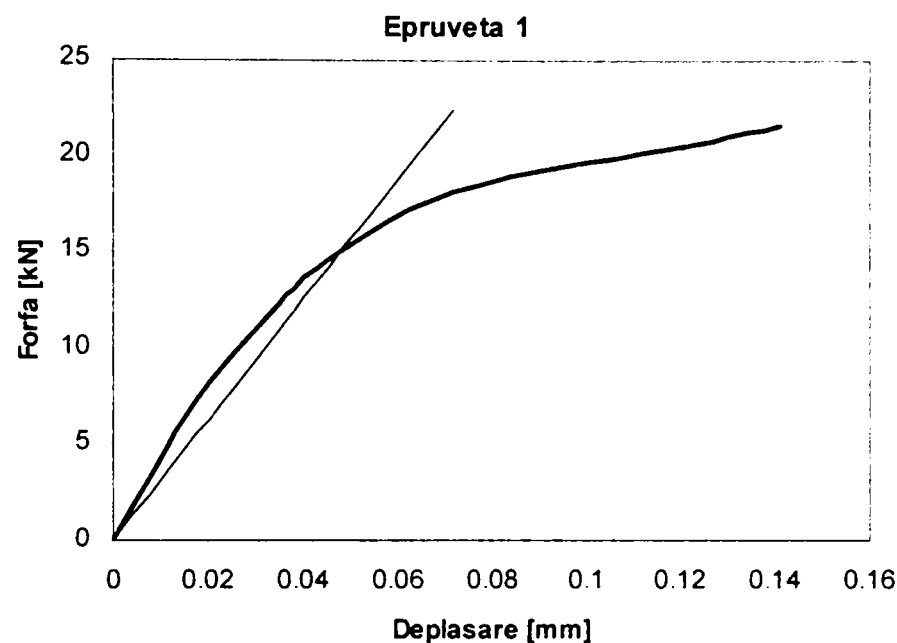


Fig. 5.15.

Tenacitatea la rupere calculată K_Q se determină cu următoarea relație pentru epruveta sollicitată la tracțiune:

$$K_Q = F_Q \frac{f\left(\frac{a}{W}\right)}{B \times W^{\frac{1}{2}}} \quad (5.6)$$

unde

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 29,6\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{1}{2}} - 185,5\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}} + 655,7\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{5}{2}} - 1017,0\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{7}{2}} + 638,9\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{9}{2}} \quad (5.7)$$

După calculul valorii K_Q se verifică dacă:

$$a, B \geq 2,5 \left(\frac{K_Q}{R_{p0.2}} \right)^2 \quad (5.8)$$

În cazul respectării condiției (5.4) valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii K_{IC} se consideră ca fiind egală cu valoarea calculată a factorului de intensitate a tensiunii K_Q , deci:

$$K_{IC} = K_Q \quad (5.9)$$

Dacă nu se respectă condiția (5.5) încercarea trebuie reluată pe epruvete de dimensiuni mai mari, care să respecte condițiile stării plane de deformare .

În cazul meu, cunoscând valoarea forței de calcul, $F_Q = 15,129$ kN, această valoare am introdus-o în relația (5.3), rezultând o valoare a tenacității calculate:

$$K_Q = 377,89 \text{ MPa mm}^{0.5} = 11,95 \text{ MPa m}^{0.5}$$

Pentru validarea rezultatelor încercării s-a calculat raportul:

$$2.5 \left(\frac{K_Q}{R_{p0.2}} \right)^2 = 2.5 \left(\frac{377,89}{490} \right)^2 = 1,487 \quad (5.10)$$

Se observă că $a = 34,77$ mm, $B = 40$ mm $> 1,487$ rezultă că:

$$K_{IC} = K_Q = 11,95 \text{ MPa m}^{0.5}$$

Rezultatele experimentale ale tenacității la rupere K_{IC} obținute de autor în cazul determinării tenacității la rupere prin metoda K_{IC} pentru un aliaj de aluminiu AlZn5,5MnCu folosit în industria autovehiculelor sunt redată în tabelul 5.9.

Fig. 5.16 prezintă epruveta compactă de tracțiune 1 după rupere. Din aceste imagini se observă că ruperea fisurii s-a realizat fără deformații plastice, iar pe suprafața epruvetei se pot identifica fîsura de oboseală și suprafața de rupere datorată încărcării statice.

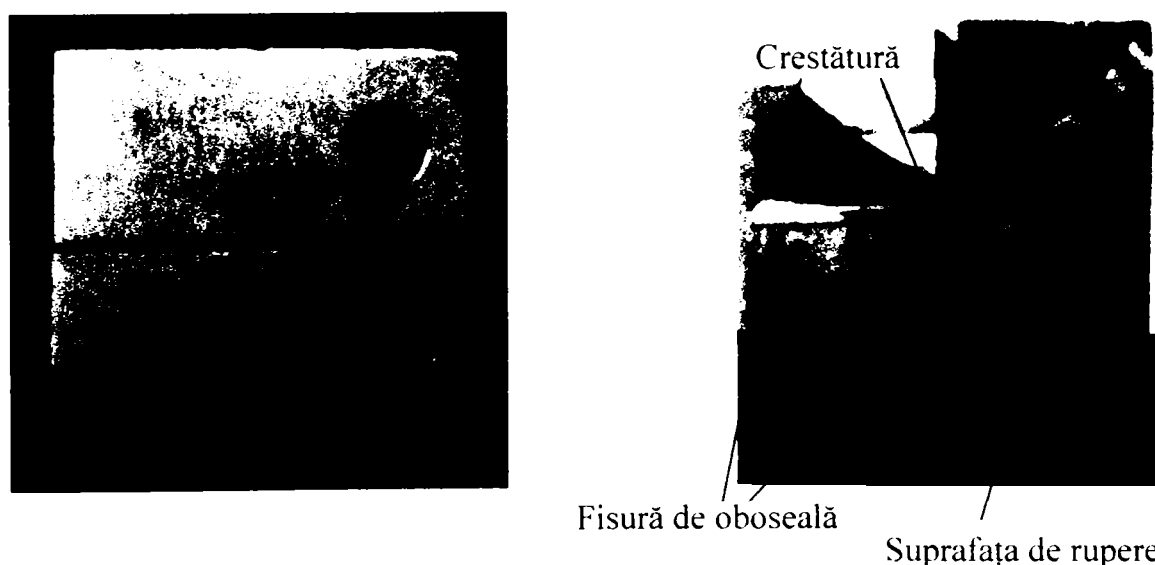


Fig. 5.16.

Tab. 5.9.

Tip epruvetă	Compactă		Număr epruvetă		
	Mărime	Unități de măsură	1	2	3
Denumire					
Lățime	W	mm	70	70	70
Grosime	B	mm	38	38	38
Lungime creștătură	c	mm	22.7	22.5	22.7
Lungime fisură propagată	f	mm	12.07	2.25	12.03
Lungime fisură	a	mm	34.77	24.75	34.73
Raportul	a/W	-	0.4636	0.3327	0.4631
Funcția de formă	f(a/W)	-	8.6526	6.2513	8.6400
Forța maximă	F _{max}	kN	21.139	24.790	18.131
Forța de calcul	F _Q	kN	15.129	22.456	16.569
Tenacitatea calculată	K _Q	MPa mm ^{0.5}	435.00	426.57	397.78
Raportul	$2.5 \left(\frac{K_Q}{R_{p0.2}} \right)^2$	mm	1.4869	1.7100	1.7782
Tenacitatea la rupere	K _{IC}	MPa mm ^{0.5}	435.00	426.57	397.78
Tenacitatea la rupere	K _{IC}	MPa m ^{0.5}	13.76	13.49	12.58
Tenacitatea la rupere	\bar{K}_{IC}	MPa m ^{0.5}	13,27		
Tenacitatea la rupere [36]	K _{IC}	MPa m ^{0.5}	19,78		

Lungimea fisurii propagate a fost calculată ca media aritmetică a lungimii fisurii măsurate în 3 poziții dispuse echidistan.

După ruperea epruvetei se poate calcula lungimea fisurii de oboseală ca medie aritmetică a lungimii fisurii măsurată în trei poziții dispuse echidistant pe suprafața de rupere la 0,25; 0,50 și 0,75 din grosimea epruvetei, valorile a₁, a₂ și a₃, Fig.5.17.

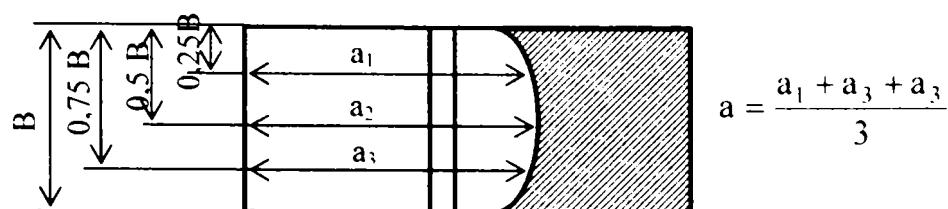


Fig. 5.17.

În urma încercărilor efectuate am tras următoarele concluzii:

- Încercarea permite realizarea prefisurării și apoi a ruperii statice pe aceeași mașină la aceeași prindere, ceea ce duce la eliminarea erorilor legate de montajul și poziționarea epruvetei.

- Măsurarea și monitorizarea cu precizie a forței și deplasării prin intermediul traductorilor de presiune și deplasare și a sistemului de achiziție Spider8 și obținerea automată a diagramei Forță – Deplasare.

- Rezultatele experimentale ale tenacității la rupere sunt în concordanță cu rezultatele publicate în bibliografie pentru aliaje de aluminiu cu compoziție chimică și caracteristici mecanice apropiate.

CAPITOLUL 6

CONCLUZII ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE

La elaborarea tezei de doctorat m-am axat pe ideea potrivit căreia, *un studiu modern al fenomenului de oboseală înseamnă de fapt studiul propagării fisurilor de oboseală*, din stadiul inițial al acestora – înainte de exploatare – și până la stadiul care determină ruperea finală. Prin aceasta se subliniază importanța deosebită pe care o are necesitatea cunoașterii modului de evoluție în timp a fisurilor, dintr-un material supus solicitărilor ciclice, acest comportament fiind modelat cu ajutorul legilor de propagare a fisurilor de oboseală.

Plecând de la considerentele de mai sus, pe parcursul lucrării s-au prezentat o serie de modalități de abordare a unei asemenea probleme, atât pe calea teoretică cât și pe cale experimentală:

- Prezentarea locului și importanței deosebite pe care o au aliajele de aluminiu în construcția de mașini, aeronautică și în special în construcția de automobile;
- S-a pus în evidență compoziția chimică și caracteristicile mecanice pentru câteva aliaje de aluminiu utilizate în industria de automobile;
- S-a realizat un studiu teoretic al stării de tensiune din jurul fisurilor pentru geometrii de corpuri fisurate din industria auto;
- S-au evidențiat expresiile factorului de intensitate a tensiunii K_I , pentru anumite geometrii și situații de solicitare întâlnite în industria auto.
- S-au definit principalele concepte ce intervin în problematica modernă a studiului fenomenului de oboseală: legea de propagare a fisurii, ruperea mecanică liniar elastică și parametrii care definesc aceste concepte;

- S-a pus în evidență importanța domeniului de mecanica ruperii prin cele mai importante standarde ASTM, primele tentative de elaborare a unui standard de Mecanica Ruperii având loc la sfârșitul anilor 60 în SUA.
- S-a realizat un studiu de dimensionare a unei plăci din aliaj de aluminiu pe baza conceptelor din Rezistența Materialelor și pe baza conceptelor de Mecanica Ruperii;
- S-a realizat un program de calcul scris în utilitarul matematic Mathcad 2001 Professional de dimensionare a unei plăci cu fisură laterală din aliaj de aluminiu pe baza conceptelor din Rezistența Materialelor și pe baza conceptelor de Mecanica Ruperii și s-a reprezentat grafic modalitatea de alegere a aliajului de aluminiu;
- S-a realizat un studiu teoretic de analiză cu elemente finite utilizate pentru modelarea singularității vârfului fisurii într-un braț de la puntea de spate de la autoturisme;
- S-au stabilit etapele teoretice de analiză cu element finit pentru determinarea parametrilor din Mecanica Ruperii;
- S-a realizat studiul stării de tensiune și deformație dintr-o fuzetă utilizată în domeniul auto, cu ajutorul metodei elementului finit, utilizând programul CosmosWorks;
- S-au determinat valorile maxime ale deplasărilor și tensiunilor corespunzătoare fuzetei;
- Prin utilizarea metodei elementului finit s-a determinat starea de tensiune și deformație dintr-un braț utilizat la suspensia multibraț de la puntea de spate a autoturismelor moderne;
- S-au evidențiat tensiunile normală maximă, tensiunea normală minimă și tensiunea echivalentă din brațul de la puntea spate a autoturismelor;

- S-a realizat un studiu de propagare a unei fisuri de oboseală dintr-un braț, fisura pornind din zona de concentrare maximă, utilizând metoda elementului finit, cu ajutorul programului Franc2D/L;
- S-a determinat lungimea critică a fisurii și numărul de cicluri până la rupere, de la un braț de la puntea spate a autoturismelor;
- S-a realizat compoziția chimică și caracteristicile mecanice ale aliajului de aluminiu, AlZn5,5MnCu utilizat în industria auto;
- S-a efectuat analiza metalografică a aliajului de aluminiu studiat, determinând mărimea grăuntelui necesară pentru determinarea limitei de prag;
- S-a determinat limita de prag a aliajului de aluminiu studiat pe cale experimentală la o epruvetă cu fisură centrală și pe cale analitică utilizând trei ecuații de determinare;
- S-a determinat tenacitatea la rupere pentru aliajul de aluminiu analizat;
- S-a realizat prefisurarea și ruperea statică pe aceeași mașină universală de încercat la tracțiune și la aceeași prindere diminuând astfel abaterile legate de montajul și poziționarea epruvetei;
- S-a adaptat sistemul de achiziție și prelucrare a datelor Spider 8 la pulsator pentru înregistrarea diagramei forță-deplasare;
- S-a realizat un traductor de deplasare format dintr-o lamelă elastică prevăzute cu 4 traductoare electrice rezistive legate în punte întreagă.

O serie din rezultatele legate de elementele de mai sus care au contribuit la elaborarea tezei de doctorat au constituit obiectul unor lucrări publicate.

Ca o concluzie finală se poate afirma că fenomenul de oboseală și implicit studiul propagării fisurilor de oboseală are o importanță deosebită pentru cercetarea și practica inginerescă. Din acest motiv, el va constitui, pentru o lungă perioadă de timp, obiectul unor ample cercetări în domeniu, ținând cont de faptul că, această disciplină, Mecanica Ruperii, are numai aproximativ 75 ani de existență.

BIBLIOGRAFIE

1. **Aboudi J., Achenbach J. D.**, – „Transition From Brittle To Ductile Fracture For A Rapidly Propagating Crack”, ASME, New York, 1982.
2. **Anderson T. L.**, – „Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications”, CRC Press, Boca Raton, 1991.
3. **Anderson W. E., Lee, A. J.**, – „Estimating Cracking Behavior Of Metallic Structures”, Journal Of The Structural Division, Proceedings Of The American Society Of Civil Engineers, Vol.96, April 1970.
4. **Airy G. B.**, – „On the strain in the interior of beams”, În: Philosophical Transaction of the Royal Society, London, nr. 153, 1863.
5. **Babeu T. D.**, – „Rezistența materialelor”, IPTV Timișoara, 1981.
6. **Babeu T. D.**, – „Teoria elementară a rezistenței materialelor”, Editura Mirton, Timișoara, 1998.
7. **Babeu T. D., Marșavina L.**, – „Culegere de probleme de rezistența materialelor”, Universitatea Politehnica Timișoara, 1995.
8. **Babeu T. D., Dumitru I., Marșavina L., Babeu S., Olariu M.**, – „Analize și încercări de rezistență pentru evaluarea duratei de viață a utilajelor grele”, Editura Mirton, 1999.
9. **Babeu T. D., Marșavina L., Pîrvulescu L. D.**, - „Analiza cu elemente finite a unei plăci cu creștătura laterală”, Zilele academice timișene, Timișoara, mai 2001.
10. **Banks-Sills L., Sherman D.**, – „J_{II} Fracture Testing Of A Plastically Deforming Material”, International Journal Of Fracture, Vol. 50, 1991, pag.15-26.
11. **Barsom J. M., Rolfe S.T.**, – „Fracture And Fatigue Control In Structures. Applications Of Fracture Mechanics”, Prentice-Hall Inc., 1987, New Jersey.

12. **Bass R., Wintle J., Hurst R.C., Taylor N.**, – „Network for Evaluating Structural Components, NESC – I, Project Overview”, EUR 19051 EN, Petten, 2001.
13. **Bejan M.**, – „Rezistența materialelor”, Editura Agir, București, 2004.
14. **Blom A. F.**, - „Ultrasonic Fatigue Studies of Short and Long Surface Cracks”, I Mech E, C 261/86, 1986.
15. **Blumenauer H., Pusch G.**, – „Bruckmechanick”, Verlag, Leipzig, 1973.
16. **Boleanțu L., Marșavina L.**, – „Considerații privind raza zonei plastice de la vârful fisurii”, Al VII lea Simpozion Național de TENSOMETRIE cu participare internațională, vol III, Suceava, 1996.
17. **Boleanțu L., Dobre I.**, – „Aplicații ale mecanicii solidului deformabil în construcția de mașini”, Editura Facla, Timișoara, 1978.
18. **Bordeașu I., Pîrvulescu L. D.**, - „Considerations regardant l'utilisation de la superficie erodee dans l'estimation du parametre MDPR”, Buletinul Științific al UPT, seria 1, fascicula 1, seria mecanică, Tom (44) (58), 1999, pag. 71.
19. **Bouyne E., Joly P., Houssin B., Wiesner C.S., Pineau A.**, – „Mechanical and microstructural investigations into the crack arrest behavior of a modern 2¼ Cr – 1 Mo pressure vessel steel”, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., 24, 2001, p. 105 – 116.
20. **Broek D.**, – „Elementary engineering fracture mechanics”, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
21. **Broek D.**, – „Elementary Engineering Fracture Mechanics”, Martinus Nijhoff Publishers, London, 1982.
22. **Brown K.R.**, – „The Chevron Notched Fracture Toughness Test”, ASTM Standardization News, Nov.1988.
23. **Burdekin F.M., Stone D.E.W.**, – „The crack opening displacement approach to fracture mechanics of yielding materials”, Journal of Strain Analysis 1-2, 1966, p.145-153.

24. **Buzdugan Ghe.**, – „Rezistența Materialelor”, Editura Academiei, București, 1986.
25. **Chapra S., Candle R.**, – „Numerical Methods for Engineers”, Third Edition, Mac Graw Hill, Singapore, 1998.
26. **Chen J.H., Wang G.Z.**, – „On scattering of measured values of fracture toughness parameters”, International Journal of Fracture, Vol. 94, No.1, 1998, p.33 – 49.
27. **Cioclov D.**, – „Mecanica ruperii materialelor”, Ed. Academiei, București, 1977.
28. **Cipleu A., Dumitru I.**, – „A supra unei metode experimentale pentru determinarea factorului dinamic critic de intensitate a tensiunii”, A-IV-a Conf. Nat. Sebes, 2004, pag. 151 - 156.
29. **Cole D, Martin Moran C, Sheard AG, Bhadeshia H.K.H.H., Mackai D.Y.C.**, – „Modelling Creep Rupture Strength of Ferritic Steel Welds”, Proc Of The ASME Int. Joint Power Generation, Conference, 1998.
30. **Couque H., Dexter R. J., Hudak S. J.**, - „Using Small Specimen To Measure Dynamic Fracture Properties Of High-Toughness Steels”, Symposium On Rapid Load Fracture Testing, April 1990, San Francisco.
31. **Dowling A. R., Townley C.**, - „The Effect Of Defects On Structural Failure: A Two Criteria Approach”, International Journal Pressure Vessles & Piping, nr.3, 1975.
32. **Dumitru I., Faur N.**, - „Elemente de calcul și aplicații în rezistența materialelor”, Editura Politehnica, Timișoara, 1999.
33. **Dumitru I., Faur N.**, – „Rezistența Materialelor. Bazele teoretice în Oboseala Materialelor. Mecanica Ruperii, Materiale Compozite și Metode Numerice”, Editura Politehnica, 1997.
34. **Dumitru I., Marșavina L.**, – „Introducere în Mecanica ruperii”, Ed. Mirton, Timișoara, 2001.

35. **Dumitru I., Marșavina L.**, – „Elemente de Mecanica Ruperii”, curs, UPT Timișoara, 2000.
36. **Ewalds H. L., Wanhill R. J. H.**, – „Fracture Mechanics”, Edward Arnold edition, Delftse U.M., 1993.
37. **Faur N., Dumitru I.**, – „Diferențe finite și elemente finite în rezistența materialelor”, Editura Mirton, Timișoara, 1997.
38. **Faur N.**, – „Mecanica materialelor – Noțiuni fundamentale, statistică, solicitări simple”, Edirura Politehnica, 2005.
39. **Faur N.**, – „Elemente finite – fundamente”, Editura Politehnica, 2002.
40. **Filonenco, Borodici M.M.**, – „Teoria elasticității”, București, Editura Tehnică, 1952.
41. **Freudenthal A. M.**, - „New Aspects Of Fatigue And Fracture Mechanics, Engineering Fracture Mechanics”, Vol.6, 1974, p.775-793.
42. **Freund L. B., Duffy J., Rosakis A. J.**, – „Dynamic Fracture Initiations In Metals and Preliminary Results On The Method Of Caustics for Crack Propagation Measurements”, ASME, March 1982, New York.
43. **Fuchs H. O., Stephnes R. I.**, - Metal Fatigue in Engineering”, Fohn Willey & Sons, New York, 1980.
44. **Gârbea D.**, - „Analiza cu elemente finite”, Editura Tehnică, 1990.
45. **Geru N.**, – „Teoria structurală a proprietăților metalelor”, Ed.Didactică și Pedagogică, 1980, București.
46. **Gherman G. A., Nicolau M.**, – „Noțiuni de elasticitate și plasticitate”, Editura Gutenberg, Arad, 2002.
47. **Hahn H. G.**, – „Spannungsverteilung an Rissen in festen Korpern”, VDI-Verlag, Dusseldorf, 1970.
48. **Harter J. A.**, – „AFGROW Users Guide and Technical Manual”, Air Force Research Laboratory, 1999.
49. **Hertzberg W.R.**, – „Deformation and Fracture Mechanics of engineering Materials”, John Wiley and Sons. Inc., New York, Forth Edition, 1996.

50. **Irwin G. R.**, – „Basic Concepts for Dynamic Fracture Testing”, Journal Of Basic Engineering, Sept.1969, p.519-524.
51. **Irwin G. R.**, – „Linear Fracture Mechanics, Fracture Transition and Fracture Control”, Engineering Fracture Mechanics, Vol.1, 1968, p.241-257.
52. **Irwin G. R.**, – „Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys”, Sagamore Research Conference Proceedings, Vol. 2, 1956, p. 289-305.
53. **Kim K. S., Orange T. W.**, – „A Review of Path – Independent Integrals in Elastic-Plastic Fracture Mechanics”, Fracture Mechanics, Eighteenth Symposium, ASTM STP 945, 19888, pag. 713-729.
54. **Kirk M. T., Waskey J. P., Dodds R. H.**, – „A Procedure For Drop Tower Testing Of Shallow Cracked Single Edge Notched Bend Specimens”, Symposium On Rapid Load Fracture Testing, April 1990, San Francisco.
55. **Knauf G., Riedel H.**, – „A comparative study on diffrents methods to measure the crack opening displacement”, ICF 5, Vol.5, 1981, p.2547-2554.
56. **Kobayashi T., Yamamoto I., Niinomi M.**, – „Rapid and Inexpensive Dynamic Fracture Toughness Evaluation. System Computer Aided Instrumented Charpy Impact Testing (CAI) System”, The Proceedings of the 10th Congress On Material Testing, vol. I, Budapest, 1991, p.146-151.
57. **Liebowitz H.**, – „Fracture.An Advanced Treatiste”, Academic Press, 1969, New York.
58. **Mac Gilliavray H. J., Cannon D. F.**, – „The Development Of Standard Methods For Determining The Dynamic Fracture Toughness Of Metallic Materials”, Symposium On Rapid Load Fracture Testing, April 1990, San Francisco.
59. **Mănescu Ș. T., Ardelean A.**, – „Mecanică tehnică în 300 de probleme rezolvate”, Timișoara, 1991.

60. **Mănescu Ș. T., Ghițiu A., Ciorbă I.**, – „Rezistența materialelor în 300 de probleme rezolvate, Reșița, 1992.
61. **Mănescu Ș. T., Nedelcu D.**, – „Analiză structurală prin metoda elementului finit”, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2005.
62. **Marriott D. L., Anderson R. P. G., Garrett G. G.**, – „A Study Of Crack Arrest Related To Nuclear Plant Integrity”, Proceedings of the First National Conference on Fracture, Johannesburg, Nov.1979, p.337-351.
63. **Marșavina L.**, – „Metode experimentale în Mecanica ruperii”, Referat doctorat, Nr.1, Timișoara, 1993
64. **Marșavina L.**, – „Metode numerice utilizate în calculul parametrilor de Mecanica ruperii”, Teză de doctorat, Timișoara, 1998.
65. **Marșavina L., Dumitru I., Boleanțu L.**, – „Analize și încercări asupra materialelor utilajelor grele cu durata de exploatare expirată”, Contract: beneficiar S.C. PROMT S.A., 1996.
66. **Marșavina L., Dumitru I.**, – „Correlation between Fracture Toughness K_{IV} and Impact Energy CVN for St 52 Steel”, Proceedings of the 1st International Conference Physical Metallurgy and Fracture, Kosice, Slovacia, 1999, p. 75 – 78.
67. **Marșavina L.**, - „Metode numerice în Mecanica Ruperii”, Editura Mirton, Timișoara, 1998.
68. **Marșavina L.**, - Metode experimentale de detrminare a tenacitățiila rupere”, Editura Politehnica, 2006.
69. **Marșavina L., Faur N., Neguț N.**, – „Crack growth modeling using finite element analysis”, 24TH Congress of theoretical and applied mechanics, Belgrade, October 9-10, 2003.
70. **Marșavina L., Pîrvulescu L. D.**, – „The determination of fatigue crack growth threshold for AlZn5,5MnCu.
71. **Mc Connell .P**, – „Dynamic Fracture Toughness Of Ductile Iron, Symposium On Rapid Load Fracture Testing”, April 1990, San Francisco.

72. **Miannay D. P.**, – „Fracture Mechanics”, Springer Verlag, New York, 1998.
73. **Milne I., Ainsworth R. A., Dowling A.R., Stewart A.T.**, – „Assesment of the Integrity of Structures Containing Defects”, May 1986.
74. **Miller K. J., Mohamed H. J., de Los Rios E. R.**, – „Fatigue Damage Accumulation and Below the Fatigue Limit”, Mechanical Engineering Publication Limited, London, 1986.
75. **Nedelcu D.**, – „Modelare parametrică prin Autodesk inventor”, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara.
76. **Nedelcu D.**, – „Cosmos/Design Star, analiza funcțională a structurilor”, T & T – Tehnică și Tehnologie, Nr. 3/2002.
77. **Newman J.C. Jr.**, – „An Evaluation of Fracture Analysis Methods”, Elastic Plastic Fracture Technology, ASTM STP 896, ASTM, Philadelphia, 1985, p. 5 – 96.
78. **Newman J.C. Jr., Raju I. S.**, – „Analyses of Surface Cracks in Finite Plate Under Tension and Bending Loads”, NASA TP – 1578, 1979.
79. **Nisitani H., Goto M.**, – „A Small Crack Growth Law and its Application to the Evaluation of Fatigue Life”, Mechanical Engineering Publication Limited, London, 1986.
80. **Norris D. M., Marston T. U., Jones R. L.**, – „Application of Tearing Modulus Stability Concepts To Nuclear Piping”, EPRI NP 2261, Final report, February 1982.
81. **Owen D. R., Fawkes A. J.**, – „Engineering Fracture Mechanics. Numerical Methods and Applications”, Pineridge Press Limited, U.K., 1983.
82. **Pană T.**, – „Aplicații ingineresti ale Mecanicii Ruperii”, Ed.Tehnică, 1974, București.
83. **Pană T.**, – „Mecanica ruperii materialelor”, Ed. T.Pană & Co, 1992, București .

84. **Papakaliatakis G. E., Katsiki O.**, – „A Comparison Of The Strain Energy Density And Crack Tip Opening Displacement Criteria On Ductile Fracture”, The 9th Biennial European Conference On Fracture, 1992, Varna, p.895-905.
85. **Paris P. C., Tada H.**, – „The theory of instability of the tearing mode of elastic – plastic crack growth”, ASTM STP 668 “Elastic – Plastic Fracture”, Eds. Landes J. D., Begley J. A., Clarke G. A., Philadelphia, 1979, p. 5 – 36.
86. **Paris P. C., Sih G. C.**, – „Stress Analysis of Cracks”, In Symposium on Fracture Toughness Testing and Its Application. ASTM Technical Publication Nr. 381, 1965.
87. **Parton V. Z., Morozov E. M.**, – „Elastic-Plastic Fracture Mechanics”, MIR Publishers, 1978, Moscow.
88. **Pluvinage G.**, – „Aspects de la rupture fragile sous sollicitations dynamiques”, Revista Sudura, nr.3, sept.1992, Timișoara, p.17-20.
89. **Pîrvulescu L. D., Marșavina L.**, – „The J integral determination for aluminium plate with edge crack”, Buletin ASTR, Rezistența Materialelor, Timișoara, Vol. 5/2003, pag. 24-27.
90. **Pîrvulescu L. D.**, – „Stadiul actual al problemelor de Mecanica Ruperii pentru aliaje ușoare”, Referat doctorat, Numărul 1, Timișoara, 2000.
91. **Pîrvulescu L. D.**, – „Aspecte teoretice ale mecanicii ruperii pentru aliaje ușoare”, Referat doctorat, Numărul 2, Timișoara, 2000.
92. **Pîrvulescu L. D.**, – „Metode, rezultate experimentale și prelucrarea datelor de Mecanica Ruperii pentru aliaje ușoare”, Referat doctorat, Numărul 3, Timișoara, 2001.
93. **Pîrvulescu L. D., Șest A., Bordeășu I.**, - „Mașina de injectat zamac”, Sesiunea de Comunicări Științifice „Un sfert de veac de la fondarea învățământului superior la Reșița”, fascicola II, Oct. 1996, pag. 27-32.

94. **Pîrvulescu L. D., Bordeășu I., Popoviciu O. M.**, - „Influența tehnologiei de durificare structurală și superficială asupra distrugerii cavitaționale a unor materiale utilizate în construcția sistemelor hidraulice”, Al VII-lea simpozion „Tehnologii, instalații și echipamente pentru îmbunătățirea calității mediului”, Vol. 1, București, 1998, pag. 78.
95. **Popoviciu O. M., Bordeășu I., Pîrvulescu L.D.**, - „Durabilitatea cavitațională a oțelurilor folosite pentru fabricarea elicelor navale”, Sesiunea de Comunicări Științifice „Noutăți în domeniul tehnologiei și utilajelor pentru prelucrări la cald”, Brașov, 1996.
96. **Popoviciu O. M., Bordeășu I., Pîrvulescu L.D.**, - „Comportarea cavitațională a materialelor curent utilizate pentru fabricarea elicelor navale”, Zilele academice timișene, Timișoara, mai 1997.
97. **Radovici A., Sedmak S., Grabulov V., Veljanovski B.**, – „The evaluation of brittle fracture behavior of High Strength Stress Weldments”, The 9th Biennial European Conference on Fracture, Varna, BULGARIA, 1992, p. 926 – 932.
98. **Rațiu M.**, – „Engineering Fracture Mechanics For In-Service Failure Analysis Of Power Plant Components”, Fracture Mechanics Short Course, 1988.
99. **Ray K.K., Poddar G.P.**, – „Estimating of fracture toughness of steel using Chevron notched round bar specimens”, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 27, 2004, p.253 – 261.
100. **Rice J. R.**, – „A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks”, Journal of Applied Mechanics, nr.35, June 1968.
101. **Rice J. R.**, – „Mechanics of Crack Tip Deformations and Extension by Fatigue”, Fatigue Crack Propagation, ASTM STP 415, 1967, p.247-311.

102. **Roberti R., Nicodemi W., La Vecchia G. M., Basha S. H.**, – „J-R Curve Dependence on Specimen Geometry and Microstructure In Two Austenitic-Ferritic Stainless Steels”, The Proceedings Of The 10th Congress on Material Testing, Vol.I, 1991, Budapest, p.158-165.
103. **Rusu O., Teodorescu M.**, – „Oboseala Metalelor, vol I și II, Editura Tehnică, București, 1992.
104. **Schindler H. J., Morf U.**, – „On Estimation Of Fracture Toughness From Instrumented And Standard Charpy V-Notch Tests”, The 10th Congress On Material Testing, Vol.I, 1991, Budapest, p.172-177.
105. **Sedmak S., Burzic Z.**, – „Fracture Mechanics Standard Testing”, IFMASS 8, From Fracture Mechanics to Structural Integrity Assessment, Belgrade, 2004, p. 95 – 122.
106. **Sherman D.**, – „Fracture Toughness Testing Using Chevron-Notched Specimens”, Metals Handbook, Ninth Edition, Vol.8 Mechanical Testing, American Society For Metals, 1985, Ohio.
107. **Shanyi D. U, Lee J. D.**, – „Finite Element Analysis of Slow Crack Growth”, Engineering Fracture Mechanics, vol 16, Nr. 2, 1982.
108. **Soete W.**, – „Etat actuel du probleme de la rupture fragile de l'acier doux”, In: Revue Metallurgie, vol. 1, nr. 4, 1957.
109. **Swenson D. V.**, – „Modeling Mixed-Mode Dynamic Crack Propagation Using Finite Elements”, PhD Thesis Departament of Structural Engineering Report, Nr. 85-10, Cornell University, 1985.
110. **Tada H., Paris P., Irwin G.**, – „The Stress Analysis Of Cracks Handbook”, Second Edition, 1985, St.Louis.
111. **Teodorescu M.**, – „Încercări privind ruperea fragilă și mecanica ruperii”, Încercarea Materialelor, Vol.1, Ed.Tehnică, 1982, București.
112. **Tripa D.**, – „Mecanica ruperii cu aplicații în conducte”, Editura Mirton, Timișoara, 1998.

113. **Underwood J. M.**, – „Crack Arrest Toughness Tests Of A Ship Plate Steel”, Symposium On Rapid Load Fracture Testing, April 1990, San Francisco.
114. **Varga T., Liu Q.**, – „On The Assessment of Dynamic Fracture Characteristics of Weld Metal”, The Proceedings Of The 10th Congress on Material Testing, Vol.I, 1991, Budapest, p.192-200.
115. **Varga T., Schneeweis G.**, – „A New Method To Test Crack Arrest Toughness Using Three-Points Bend Specimens”, Symposium on Rapid Load Fracture Testing, April 1990, San Francisco.
116. **Yoon K.K., Hall J.B., Van Der Sluys W.A., Higuchi M., Iida K.**, – „Japanese Fracture Toughness data analysis using Master curve method”, The 2001 ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Atlanta, SUA, 2001, p.1 – 12.
117. **Wells A.A.**, – „Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture”, East Kilbride, 1962, Glasgow.
118. **Wells A.A., Brudekin F.M.**, – „Discussion the shapeness of crack compared with Well’s COD”, Int. Journal of Fract. Mech. 7, 1971, pag.233-241.
119. **Westergaard H. M.**, – „Bearing Pressures an Crack”, In: Journal of Applied Mechanics, ASME, vol 61, A, 49, 1939.
120. **Wilson A.D.**, – „Characterization of plate steel quality using various toughness measurement techniques”, ASTM STP 668 “Elastic – Plastic Fracture”, Eds. Landes J. D., Begley J. A., Clarke G. A., Philadelphia, 1979, pag. 469 – 492.
121. **Zahoor A.**, – „Ductile Fracture Handbook.Circumferential Throughwall Cracks”,Vol.1, June 1989.
122. **ASTM E 399 - 83 (1997)**, - „Standard Method of Test for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials”.

123. **ASTM E 561 - 86 (1998)**, - „Standard Practice for R-Curve Determination”.
124. **ASTM E 604 - 83 (1994)**, - „Standard Test Method for Dynamic Tear Testing of Metallic Materials”.
125. **ASTM E 616 - 82**, - „Terminology Relating to Fracture Testing”.
126. **ASTM E 647 - 86 (2000)**, - „Measurements of Fatigue Crack Growth Rates”.
127. **ASTM E 740 - 80 (1995)**, - „Standard Practice for Fracture Testing With Surface-Crack Tension Specimens”.
128. **ASTM E 813 - 86**, - „Standard Test Method for J_{IC} a Measure of Fracture Toughness”.
129. **ASTM E 992 - 84**, - „Standard Practice for Determination of Fracture Toughness Using Equivalent Energy Methodology”.
130. **ASTM E 1221-88**, - „Standard Test Method for Determining Plane Strain Crack Arrest Fracture Toughness, K_{Ia} of Ferritic Steels”.
131. **ASTM E 1921 – 2002**, - „Determination of Reference Temperature T_0 for Ferritic Steels in the Transition Range”.
132. **ASTM E 1304 – 97**, - „Standard Test Method for Plain Strain (Chevron Notch) Fracture Toughness of Metallic Materials”.
133. **ASTM E 812 – 81 (1997)**, - ” Standard Test Method for Crack Strength of Slow – Bend Precracked Charpy Specimens of High – Strength Metallic Materials”.
134. **ASTM E 1820–99**, - „Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness”.
135. **ASTM E 1823–96**, - „Fatigue and Fracture Testing”.
136. **BS 6729-1987**, - „Method for determination of the dynamic fracture toughness of metallic materials”.

137. **NESC - II Final Report**, - „Brittle Crack Initiation, Propagation and Arrest of shallow cracks in a clad vessel under PTS Loading”, European Commission DG – JRC/IE, Petten, The Netherlands, 2003.
138. **STAS 1963-81**, - „Rezistența materialelor. Terminologie și simboluri”.
139. **STAS 9760-84**, - „Determinarea tenacității la rupere în condițiile stării plane de deformare. Metoda K_{IC} ”.
140. **STAS E 12803-90**, - „Determinarea deplasării la deschidere a fisurii”.
141. **SR EN 10045 – 1, 1993**, - „Încercarea la încovoiere prin șoc pe epruvete Charpy. Partea 1”- Metoda de încercare (Înlocuiește: STAS 1400 – 75, Încercarea la încovoiere prin șoc pe epruvete cu creștătură în U și STAS 7511 – 81, Încercarea la încovoiere prin șoc pe epruvete cu creștătură în V)
142. **SR EN 10045 – 2, 1994**, - „Încercarea la încovoiere prin șoc pe epruvete Charpy. Partea 2”– Verificarea mașinilor de încercare.
143. **SR EN 10002 – 1, 1995**, - „Încercarea la tracțiune” (înlocuiește STAS 200 – 87, Încercarea la tracțiune și STAS 10290 – 75, Încercarea la tracțiune. Determinarea caracteristicilor elastice)
144. **STAS 8027-78**, - „Încercarea la oboseală cu sarcini axiale”.
145. * * * - Cosmos/M – „Usser Giude”, vol. I II, III, Structural Research and Analysis Corporation, Santa Monica, SUA, 1990.
146. * * * - TerraTek – Fractometer 1 Test System, www.terratek.com
147. * * * - MatWeb, Material Property Data, www.matweb.com