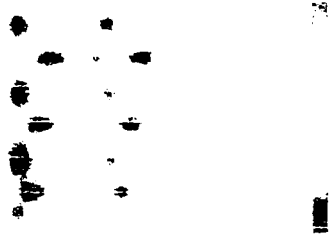
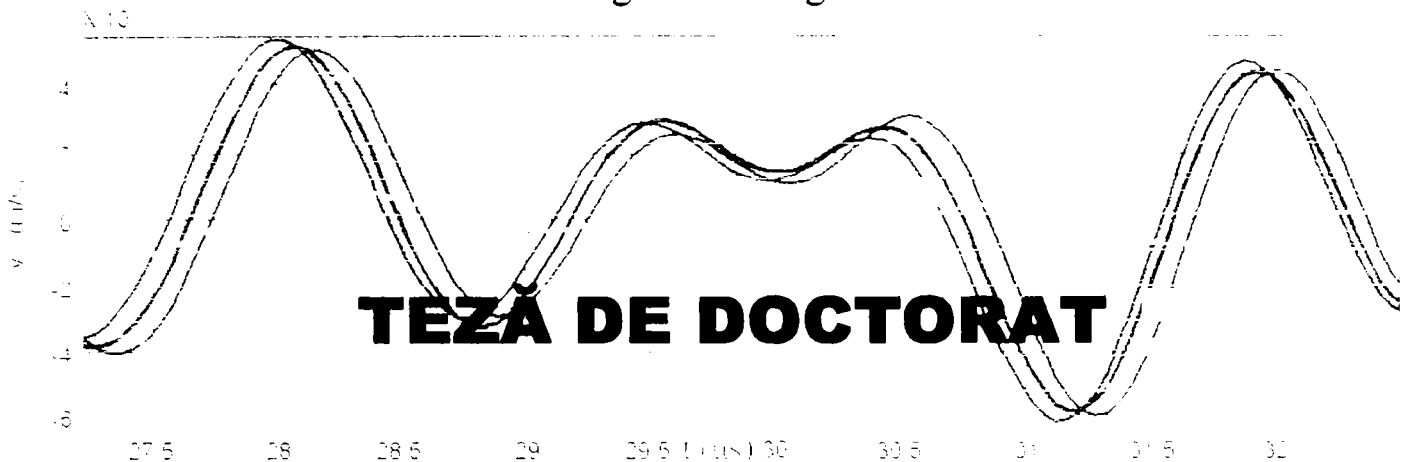


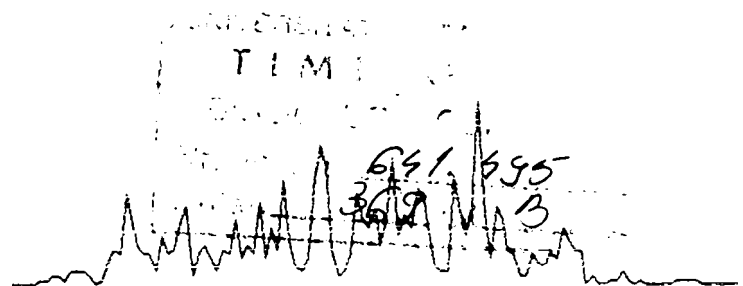
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE MECANICĂ



ing. Lazăr Bogdan



## Analiza interacțiunii ultrasunetelor cu neomogenitățile din materialele metalice



CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC  
Prof. dr. Liviu Brîndeu  
Membru al Academiei de Științe Tehnice

- Februarie 2004 -

# Cuprins

Analiza interacțiunii ultrasunetelor cu neomogenitățile din materialele metalice.....	1
1. Introducere.....	1
1.1. Tipuri de neomogenități.....	4
1.2. Stadiul actual al cercetărilor privind investigarea nedistructivă a materialelor metalice prin metoda ultrasunetelor.....	5
1.3. Descrierea capitolelor.....	10
2. Modele numerice pentru simularea propagării undelor elastice în medii fluide.....	13
2.1. Considerații generale.....	13
2.2. Ecuațiile acustice.....	13
2.3. Cavitatea rezonantă.....	17
2.4. Frontiere Absorbante. Simularea spațiului infinit.....	19
2.5. Avantajele folosirii marginilor absorbante. O problemă de acustică care se rezolvată folosind conceptul de frontieră absorbantă sau transparentă.....	20
2.6. Concluzii.....	22
3. Unde elastice în medii liniare și izotrope.....	23
3.1. Ecuațiile elastostaticii.....	23
3.1.1. Tensiuni.....	23
3.1.2. Deformații.....	25
3.1.3. Legea lui Hook generalizată.....	26
3.2. Ecuațiile elastodinamicii.....	27
3.2.1. Stabilirea relației dintre viteze și tensiuni.....	27
3.2.2. Legea lui Hook în cazul elastodinamicii.....	28
3.2.3. Ecuația elastodinamică de propagare.....	29
3.2.4. Expresia tensiunilor funcție de potențiale.....	30
4. Frontiere absorbante.....	30
4.1. Ecuațiile elastodinamicii în coordonate extinse.....	31
4.2. Problema interfeței dintre două semispații.....	32
4.2.1. Unda compresională P.....	32
4.2.2. Unda S.....	33
4.3. Descompunerea ecuațiilor elastodinamicii.....	34
4.4. Discretizarea ecuațiilor elastodinamicii cu frontiere absorbante.....	36
5. Metode de generare și detecție a perturbațiilor elastice. Unde de suprafață Rayleigh și Lamb.....	41
5.1. Considerații generale.....	41
5.2. Surse și detectori de ultrasunete bazați pe efectul piezoelectric.....	41
5.2.1. Descrierea matematică simplificată a piezoelectricității.....	41
5.3. Reflexia și transmisia undelor elastice. Rezultate Numerice.....	42
5.4. Undele de suprafață corespunzătoare unui solid. Rezultate numerice.....	47
5.5. Undele elastice în plăci solide. Rezultate numerice.....	51
5.6. Generarea ultrasunetelor prin efect termoelastic.....	55
5.6.1. Introducere.....	55
5.6.2. Transformarea energiei câmpului electromagnetic în energie elastică.....	56
5.6.3. Absorbția energiei electromagnetice în substanță cu generare de căldură.....	56
5.6.4. Difuzia termică.....	63
5.6.5. Ecuația termoelastică.....	63
5.6.6. Metodă spectrală de rezolvare a sistemului format din ecuația de difuzie termică și cea termoelastică.....	63
5.6.7. Rezultate numerice.....	66
5.6.8. Concluzii.....	71
6. Analiza interacțiunii undelor elastice cu neomogenitățile din materialele metalice.....	72
6.1. Tipuri de semnale excitatoare și spectrele lor.....	72
6.2. Ultrasunetele și detecția nedistructivă a defectelor de material.....	79
6.2.1. Considerații generale.....	79
6.2.2. Unde ultrasonore de volum și de suprafață. Modelări pe calculator.....	80
6.2.3. Semnăturile AB scan, prin reflexie și transmisie, ale unor defecte de material. Rezultate obținute prin modelare numerică.....	92
6.3. Materiale compozite cu benzi elastodinamice interzise.....	100
6.3.1. Considerații generale.....	100
6.3.2. Metoda FDTD aplicată la studiul cristalelor elastice. Rezultate numerice.....	103
6.3.3. Concluzii referitoare la "cristalele elastice".....	120
7. Tehnici de vizualizare a formei defectelor de material.....	121
7.1. Introducere.....	121
7.2. Tomografierea cu unde elastice ce se propagă în linie dreaptă.....	121
7.3. Tomografierea cu unde elastice ținând cont de fenomenul de difracție.....	123
7.3.1. Introducere.....	123
7.3.2. Ecuația omogenă a undei.....	124
7.3.3. Ecuația neomogenă a undei. Teorema Fourier a Difrakției.....	125
7.3.4. Interpolarea în domeniul frecvență.....	128
7.4. Simulări numerice.....	131
7.4.1. Forma analitică a transformatei Fourier a unei elipse. Aproximarea defectelor de material prin elipse.....	132
7.5. Concluzii.....	135
8. Concluzii Generale.....	136
9. Contribuții.....	138
Bibliografie.....	139

# Analiza interacțiunii ultrasunetelor cu neomogenitățile din materialele metalice

## 1. Introducere

Elaborarea de metode viabile pentru localizarea neomogenităților ascunse în interiorul obiectelor metalice a constituit o preocupare constantă pe parcursul ultimilor cincizeci de ani, datorită consecințelor negative ce decurg din neidentificarea la timp a defectelor, invizibile în mod direct, care apar în structurile mecanice existente în tehnică [1-1], [1-2]. Este de la sine înțeles că procedeul de investigare trebuie să fie nedistructiv lucru ce conduce la idea folosirii undelor ca instrument de vizualizare, știut fiind faptul că "interacțiunea" acestora cu materia nu produce în general schimbări ireversibile de proprietăți fizice.

Date fiind proprietățile ultrasunetelor de a fi sensibile, de o manieră sesizabilă pentru aparatele de măsură, la schimbarea proprietăților elastice ale unui mediu oarecare: solid, lichid sau gazos, acestea se anunță ca un instrument de investigație promițător. Există însă și alte căi de vizualizare a defectelor ce nu se bazează pe folosirea perturbațiilor elastice de înaltă frecvență. Se impune așadar enumerarea motivelor pentru care s-a ales, ca subiect al lucrării, cercetarea, prin simulări pe calculator, a interacțiunii ultrasunetelor cu neregularitățile unui mediu omogen și liniar de natură metalică:

a) Rațiuni ce țin de viabilitatea folosirii ultrasunetelor ca instrument de detecție:

- 1) Puterea mare de penetrare în interiorul metalelor, mult mai ridicată decât a altor tipuri de radiații [1-9], [1-2].
- 2) Lungime de undă mică, comparabilă cu dimensiunile neomogenităților de material, ceea ce se traduce printr-o rezoluție de localizare satisfăcătoare.
- 3) Inexistența efectelor nocive asupra utilizatorului ce operează cu o sursă de ultrasunete [1-2].

b) Motive pentru care este necesară studierea interacțiunii undelor elastice de înaltă frecvență cu corpurile metalice:

- 1) Nu există încă un procedeu "spectaculos", de radiografiere a corpurilor metalice, de genul celor folosite pentru scanarea mediilor slab conductoare cu proprietăți de lichid (corpuri moi).
- 2) Interacțiunea ultrasunetelor cu metalele și neomogenitățile lor este greu de analizat fără o aparatură de calcul extrem de performantă, devenită accesibilă pe scară largă abia în ultimii ani.
- 3) Inexistența în trecut nu prea îndepărtat (10 -15 ani) a unor sisteme de procesare a datelor de mare putere care totodată să aibă costuri și dimensiuni mici i-a determinat pe mulți să abandoneze tehnica ultrasunetelor și să se reorienteze spre procedee ce folosesc radiații de natură electromagnetică, rămânând așadar destul de puține preocupări în ceea ce privește analiza "interacțiunii" ultrasunetelor cu solidele.

c) Motive pentru care s-au folosit doar simulările pe calculator:

- 1) Implementarea pe calculator a algoritmilor bazați pe discretizarea ecuațiilor elastodinamicii este cel puțin până în prezent singura metodă de vizualizare a câmpului elastic tranzitoriu din interiorul corpurilor metalice.
- 2) Simulările pe calculator permit încetinirea proceselor de interacție făcând posibilă redarea câmpului elastic ultrasonor la orice moment de timp din intervalul de lucru.
- 3) Se poate analiza în detaliu cum se reflectă forma, dimensiunile și proprietățile unei neomogenități în câmpul elastic de suprafață (fizic măsurabil).
- 4) Modelarea numerică permite înlăturarea zgometelor inerente în experimentele practice.
- 5) Costul efectuării simulărilor este redus, rezumându-se la achiziționarea unui Calculator Personal și a unor utilitare matematice cum ar fi de exemplu MATLAB 6.5 sau MATHCAD 2001.
- 6) Rezultatele simulărilor efectuate în lucrare sunt în acord (nu contrazic) rezultate la care s-a ajuns în diverse articole citate în bibliografie fie că este vorba despre cercetări experimentale sau doar numerice.
- 7) Obținerea unor rezultate practice la nivelul celor obținute prin modelări ar fi implicat folosirea unei aparaturi extrem de scumpe.
- 8) Simulările pe calculator sunt în general o modalitate ieftină și totodată relativ simplă de cercetare primară a unor fenomene fizice. În multe situații, cazul prezentei lucrări, modelările numerice

permit o studiere mai profundă a fenomenelor, ce se petrec în cadrul interacțiunii ultrasunetelor cu neomogenitățile din materialele metalice, decât experimentele practice.

Spre deosebire de undele electromagnetice de înaltă frecvență cu propagare în linie dreaptă, ultrasunetele nu beneficiază de o astfel de calitate fiind difractate de obstacole, cu alte cuvinte umbra geometrică a unui obiect oarecare poate fi foarte diferită, de umbra lăsată de acesta când este "iluminat" cu un câmp ultrasonor. Înțelegerea modului în care perturbațiile elastice interacționează cu neregularitățile unui mediu oarecare constituie cheia dezvoltării unor metode eficiente de detecție ultrasonoră.

***Evoluția în timp a câmpului elastic din interiorul și de pe suprafața de separație a unui corp, cu sau fără neomogenități și mărginit de un mediu fluid este însă un lucru greu sau, în multe situații, imposibil de măsurat.*** Pe de altă parte aparatura de detecție este extrem de complexă și scumpă, multe dispozitive fiind încă în stadiu experimental. Creșterea masivă, în ultimii șapte - opt ani, a puterii de procesare a calculatoarelor personale a făcut viabilă implementarea unor algoritmi de simulare a propagării câmpului elastic prin diverse medii cu geometrii și proprietăți complicate. *Avantajele simulării pe calculator sunt extrem de mari, evoluția perturbației elastice în orice punct spațial și la orice moment de timp fiind accesibilă măsurătorilor. Interacțiunea ultrasunetelor cu defectele, poate fi așadar urmărită în detaliu. Se evaluează astfel amploarea perturbației fizic sesizabile într-un loc accesibil de pe suprafața obiectului testat, și calea prin care rezultatele măsurătorilor pot fi puse în relație cu forma, mărimea, proprietățile sau locația neomogenității.*

***Lucrarea își propune să analizeze, prin simulări pe calculator, viabilitatea tehnicilor de investigare ultrasonoră a defectelor ascunse în interiorul maselor metalice.***

Testarea nedistructivă este o metodă de examinare a unui material sau obiect folosind un procedeu care să nu îi afecteze în nici un fel funcționalitatea ulterioară. Există mai multe căi de evaluare neinvazivă bazate atât pe utilizarea radiațiilor de natură electromagnetică cât și pe cea a undelor elastice. *Lucrarea de față se va concentra asupra celei de-a doua categorii de metode, cu precădere pe folosirea ultrasunetelor ca radiație de sondaj.*

Avantajele radiografierii cu unde elastice nu sunt multe, principalul lor neajuns fiind lungimea de undă mare, în comparație cu majoritatea neomogenităților de substanță, lucru care conduce la apariția fenomenului de difracție ce afectează, în unele situații, dramatic claritatea "radiografiei" realizate. În comparație cu razele X, capabile să detecteze detalii fine ale unor neregularități ascunse, ultrasunetele au performanțe net inferioare. *Cu toate acestea, îndeosebi în tehnică unde se folosesc materiale metalice, procedeele de investigare bazate pe radiații electromagnetice penetrante (cum sunt razele X) sunt de puțin folos, adâncimea de pătrundere a acestora în mediile conductoare fiind neglijabilă, suprafața exterioară a metalului acționând ca un scut (ecran) [1-15]. Aceasta nu înseamnă că ultrasunetele sunt singura alternativă. Există tehnici care deși nu implică în nici un fel undele mecanice, sunt capabile de a genera o hartă de neomogenități, de exemplu, prin încălzirea unei suprafețe cu un flash infraroșu și filmarea acesteia în timp ce se răcește. În cazul inexistenței defectelor (aflate la adâncimi nu prea mari sub suprafața luminată), imaginea înregistrată va avea la fiecare moment de timp o culoare uniformă. În situația contrară, datorită proprietăților termice diferite, neomogenitățile vor induce gradienti de temperatură în jurul lor, lucru observabil cu camera infraroșie [1-19], [1-20]. Acuratețea procedurii nu este însă foarte ridicată concurând ca precizie cu tehnicile ultrasonore.*

Revenind la ultrasunete, se pot enumera următoarele avantaje și dezavantaje ale folosirii lor ca instrument de investigare nedistructivă.

Avantaje:

- Metoda este sensibilă atât la defectele de suprafață cât și la cele interioare.
- Adâncimea de investigare este superioară altor metode.
- În multe situații este suficient doar accesul la o singură parte a obiectului investigat (totuși nu întotdeauna)
- Odată cu dezvoltarea aparaturii de achiziție, procesare și afișare de date, se pot produce hărți de defecte, cu claritate acceptabilă, folosind un sistem automat de scanare a materialului cu neomogenități.

Dezavantaje:

- Suprafața investigată trebuie să fie în general accesibilă pentru contactul direct cu traductorul excitator și senzorul receptor. Prin folosirea laserului se poate înlătura acest neajuns însă se introduc alte inconveniente care vor fi analizate pe parcursul lucrării.
- De cele mai multe ori este necesară folosirea unui mediu de cuplare (de exemplu: apa) pentru a facilita transferul energiei de la excitator la corpul testat.



- Corpurile aspre, extrem de neregulate, cele foarte mici sau neomogene (ex.: o structură fagure cu defecte) sunt dificil de testat.
- Materialele cu structură granulară sunt greu de inspectat din cauza împrăștierei ultrasunetelor pe particulele fine de material
- *Evaluarea defectelor pe baza "radiografiilor" ultrasonore necesită înțelegerea comportamentului undelor elastice în raport cu structura investigată.*

Testarea ultrasonică se bazează pe microdeformațiile, dependente de timp și de caracteristicile de material, ce se propagă din aproape în aproape în mediile cu proprietăți elastice. Atunci când un material oarecare este supus într-unul sau mai multe puncte, la întinderi sau compresiuni dependente de timp în limitele producerii deformațiilor elastice, particulele constituente încep să execute mișcări periodice în jurul pozițiilor de echilibru. Forțele care stau la baza procesului de vibrație sunt cele interne (elastice - de natură electrostatică) cu tendința de restaurare a echilibrului și cele inerțiale ce își au originea în masa particulei vibrante.

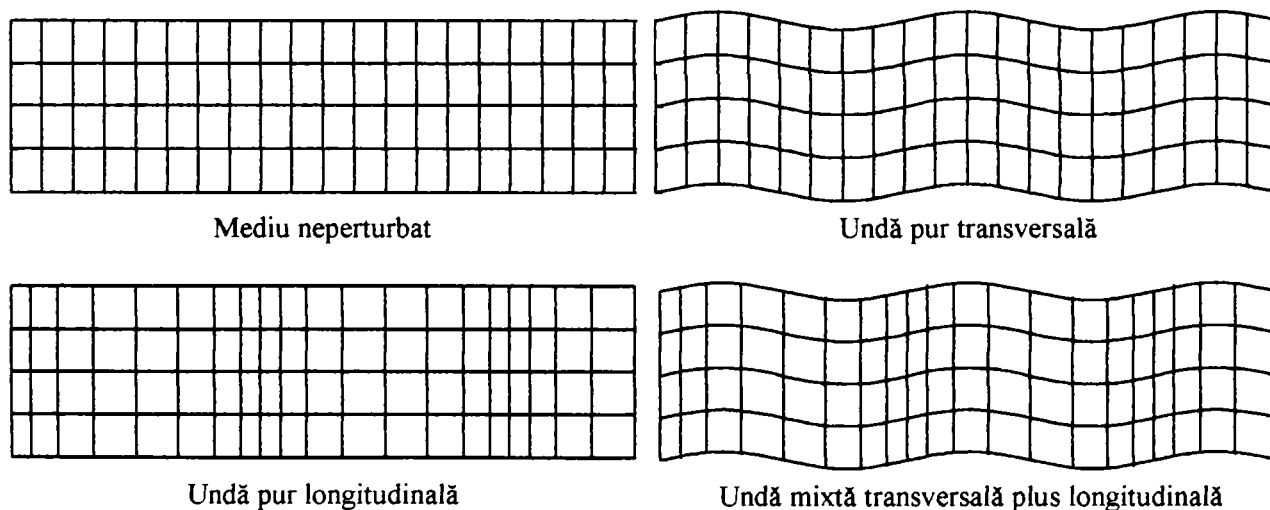
În funcție de direcția pe care oscilează entitățile elementare ale unui mediu oarecare relativ la direcția de transmitere a unei elastice, se disting mai multe tipuri de perturbații. În corpurile solide se propagă în principal patru tipuri de unde: (1) longitudinale, (2) transversale (shear), (3) de suprafață, (4) undele Lamb existente în plăcile subțiri [1-21], [1-22], [1-2], [5-7].

1) În cazul undelor longitudinale particulele mediului oscilează în lungul direcției de propagare, sub acțiunea forțelor compresionale sau dilataționale, un nume alternativ fiind acela de unde compresionale. Sunt cel mai răspândit tip de vibrații, putând fi întâlnite atât în solide cât și în lichide sau gaze.

2) La undele shear particulele elementare oscilează pe o direcție la  $90^{\circ}$  cu cea de propagare. Sunt specifice solidelor, propagarea lor în fluide fiind imposibilă.

3) Undele Rayleigh se propagă la suprafața de separație dintre două medii din care cel puțin unul este solid, penetrându-l pe o distanță de ordinul unei lungimi de undă. Reprezintă un tip de perturbație extrem de utilizat la detectarea defectelor îngropate la mică adâncime. De asemenea sunt relative ușor de sesizat prezentând o componentă care vibrează perpendicular pe suprafața de separație, creând astfel mici ondulații ale acesteia.

4) Undele Lamb sunt perturbații ghidate care călătoresc de-a lungul plăcilor subțiri cu grosimi de ordinul unei lungimi de undă. Implică mișcări vibratorii complicate. Ca și perturbațiile Rayleigh produc ondulații pe cele două suprafețe libere ale laminatului, fiind astfel ușor de detectat.



**Fig. 1-1.** Reprezentare schematică a modului în care undele longitudinale și cele transversale produc deformații asupra elementelor elastice de bază ce compun un solid.

Detectia defectelor cu ajutorul ultrasunetelor se bazează în principal: (1) pe schimbarea vitezei de propagare a undelor elastice și (2) pe atenuarea acestora. În primul caz unda care parcurge distanța dintre punctele A și B între care se află un defect oarecare va fi încetinită sau accelerată datorită fenomenului de dependență a vitezei de transmisie de proprietățile elastice ale mediului prin care are loc propagarea. Astfel, perturbația ce își are originea în punctual A va ajunge mai repede sau mai încet în B față de situația în care defectul nu există, apărând astfel un defazaj care poate fi pus în relație cu existența unei neomogenități. În cel de-al doilea caz, o parte din energia undei este reflectată de corpul străin astfel încât perturbația care ajunge în B are o amplitudine mai mică. De această dată, diferența de amplitudini dintre situațiile cu și fără defect, este o măsură a existenței acestuia.

Cele două concepte de mai sus stau la baza procedeeleor de scanare ultrasonoră a obiectelor în vederea identificării defectelor pe care acestea le conțin. Cele mai utilizate procedee de scanare sunt așa numitele : (1) A-scan, (2) B-scan, (3) C-scan [1-23].

1) La scanarea de tip A (amplitudine scan), se măsoară amplitudinea undei, reflectare sau transmise de neomogenități, funcție de timp. Datele sunt prezentate utilizatorului sub forma unei familii de grafice cu axa orizontală reprezentând timpul iar cu cea verticală amplitudinea. Pentru fiecare poziție a perechii de traductoare excitator - receptor, se obține câte o astfel de diagramă. Puse unul lângă altul ca niște felii, cele  $N$  grafice 2D formează o suprafață 3D cu axele reprezentând: timpul, amplitudinea și respectiv poziția traductorului excitator. Neregularitățile suprafeței astfel formate sunt o măsură a existenței defectelor. Osciloscopul obișnuit, fără memorie sau alte facilități de procesare a datelor sunt capabile de afișarea unei singure diagrame A – scan.

2) De data aceasta mărimea măsurată este timpul necesar pulsului ultrasonor să traverseze distanța dintre excitator și receptor sau să se întoarcă în locul de unde a fost emis. Se ajunge astfel la un grafic bidimensional, una din coordonate fiind poziția traductorului iar cealaltă timpul în care impulsul excitator ajunge la traductorul receptor. Folosind un osciloscop minim dotat se poate afișa pe ecranul acestuia o diagramă B – scan.

Odată cu dezvoltarea aparatului de achiziție, procesare și afișare a datelor cele două metode descrise tind să se contopească într-una singură. Clasificarea făcută ține mai mult de posibilitățile de afișare ale unui osciloscop obișnuit.

3) Scanarea de tip C se bazează fie pe cea de tip A fie pe B sau pe amândouă. Procedul poate fi explicat cel mai bine pe un exemplu. Astfel, se presupune că este supusă testării o placă groasă de material ce conține neomogenități ascunse. Cu ajutorul unui sistem automat, asemănător celui care plimbă capul de scriere al unei imprimante, pe rânduri succesive, se efectuează câte o măsurătoare de amplitudine (tip A) sau a timpului de răspuns (tip B), pentru un număr mare de puncte care acoperă întreaga suprafață a obiectului investigat. Astfel, afișând amplitudinea sau timpul de răspuns funcție de poziția în coordonate  $(x, y)$  a sistemului de măsură, se poate obține pe ecranul unui dispozitiv de procesare a datelor, o hartă în nuanțe de gri sau color ale cărei variații de culoare pot fi puse în relație directă cu forma defectelor căutate. În general rezoluția unei astfel de reprezentări este direct proporțională cu lungimea de undă a radiației de sondaj utilizate.

Spre deosebire de alte metode de investigare nedistructivă, tehnica ultrasunetelor pune o serie întreagă de probleme legate îndeosebi de: modul în care ultrasunetele trebuie generate, de procedul ales pentru scanare și nu în ultimul rând de interpretare a rezultatelor măsurătorilor. Cele mai multe sisteme ultrasonice utilizează scanarea în imersiune din cauza reflexiilor extrem de mari care se produc în cazul interfețelor aer - metal, lucru ce constituie în multe situații un impediment major. În ceea ce privește sistemul de scanare, el trebuie să fie suficient de rapid pentru ca balearea obiectului de interes să dureze un timp rezonabil și în același timp suficient de precis pentru ca erorile de poziționare a traductorilor excitator și receptor să nu inducă false defecte. *Relativ la interpretarea rezultatelor, trebuie precizat faptul că în majoritatea cazurilor forma reală a defectelor nu este reflectată fidel de imaginile computerizate realizate prin procesarea datelor A, B sau C scan. În consecință operatorul sistemului de detecție trebuie să aibă cunoștințe temeinice despre tipurile de defecte existente într-un anumit tip de structură mecanică și corelațiile care se pot face între imaginea ultrasonoră și neomogenitatea în sine.*

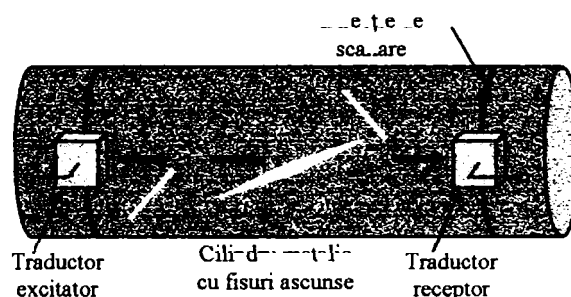
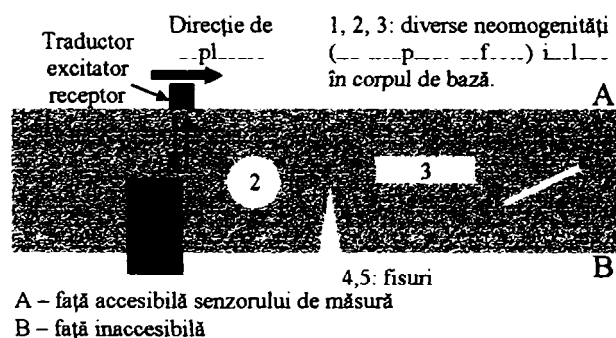
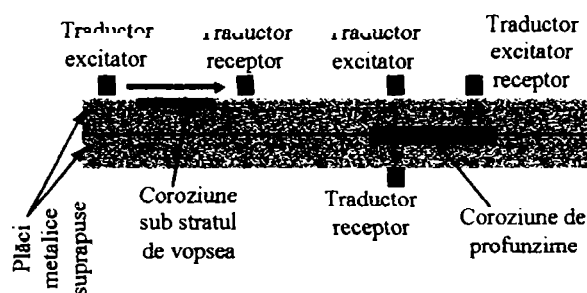
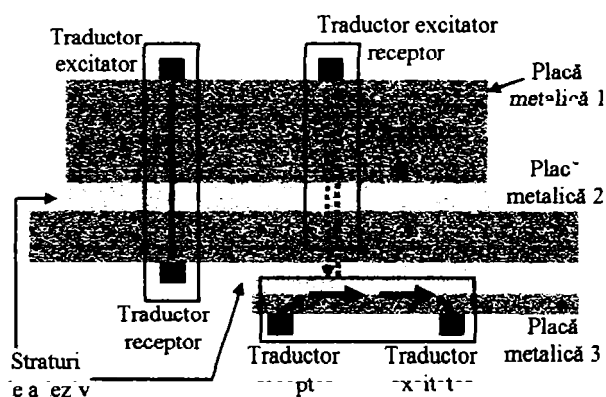
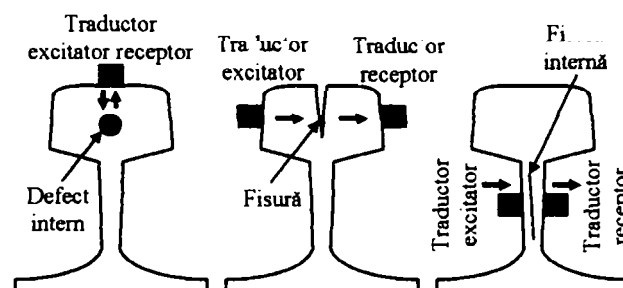
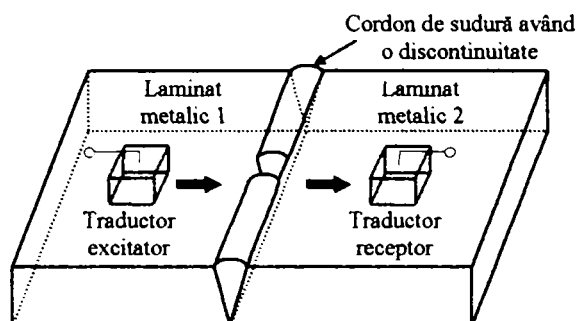
## 1.1. Tipuri de neomogenități

Neomogenitățile din materialele metalice au în general un rol nedorit fiind sinonime cu defectele, concretizându-se în: fisuri, incluziuni de corpuri străine, zone de dezlipire, porțiuni corodate etc. Cuvântul “neomogenitate” are însă un sens mai larg desemnând orice abatere de la un set dat de proprietăți fizice. Astfel, din punct de vedere al undelor elastice, diversele deviații de modul de elasticitate, densitate sau coeficient Poisson (de exemplu: niturile sau șuruburile, găurile, zonele sudate, straturile de adeziv etc.) constituie neomogenități.

Orice procedeu de detecție a unor entități invizibile în mod direct, este cu atât mai bun cu cât răspunde la o clasă mai largă de probleme, la limită dacă este capabil să identifice orice oriunde. Exemplele ce urmează au scopul de a ilustra câteva tipuri de defecte des întâlnite în practică și pentru a căror identificare se pot folosi ultrasunetele.

- O primă categorie de defecte, și totodată una dintre cele mai periculoase pentru buna funcționare a ansamblului mecanic care le conține, este reprezentată de *fisuri* [1-3].

- Des întâlnite în practică sunt și *neomogenitățile din cordoanele de sudură*: penetrare insuficientă, întreruperi, porozitate, găuri ascunse în cordon, diverse incluziuni orientate transversal sau longitudinal [1-6].
- O altă clasă de defecte, oarecum învecinată cu cea anterioară, sunt *neomogenitățile ce apar în straturile de adeziv* dintre două laminate: dezlipiri (cel mai des întâlnite), incluziuni de corpuri străine în materialul de lipire, etc. [1-8].
- *Schimbarea locală a proprietăților elastice* ale unui corp, prin încălzire accidentală constituie de asemenea un tip distinct de neomogenitate.
- Un grup aparte de defecte sunt cele generate de *coroziune*, fenomen ce acționează încet, în multe cazuri de-a lungul îmbinărilor sau sub straturile de vopsea protectoare, fiind așadar greu de identificat în mod direct [1-24].



## 1.2. Stadiul actual al cercetărilor privind investigarea nedistructivă a materialelor metalice prin metoda ultrasunetelor

O metodă de investigare nedistructivă trebuie să îndeplinească o serie de cerințe pentru a putea fi implementată cu succes în practică. Dintre acestea se pot enumera:

- capacitatea de a furniza cât mai multe informații despre defectele investigate (formă, dimensiune, proprietăți elastice, etc.).
- universalitatea → proprietatea de a identifica diverse tipuri de neomogenități ascunse în structuri mecanice variate).
- viteza mare de investigare → posibilitatea de a cerceta suprafețe mari de material într-un timp scurt.

- cost scăzut de implementare → aparatele electronice, structurile de scanare mecanice și traductorii folosiți nu trebuie să aibă prețuri prohibitive.
- ușurință în exploatare → trebuie evitate condițiile de măsură deosebite (demontarea unor piese, necesitatea accesului în zone la care se ajunge greu, folosirea unei aparaturi voluminoase cu instalare greoaie la fața locului).

Tehnica de vizualizare a defectelor cu ajutorul ultrasunetelor, cel puțin până în prezent, nu excelează în satisfacerea nici uneia din cerințele enumerate anterior [1-4]. Astfel, informațiile furnizate utilizatorului sunt mai mult concentrate asupra existenței unei neomogenități oarecare decât asupra formei sau proprietăților sale. În ceea ce privește universalitatea, deși ultrasunetele sunt capabile să detecteze orice tip de corp străin care face contrast cu mediul de bază, aparatura de scanare și traductorii trebuie în general adaptați unei anumite clase de defecte. Viteza de investigare poate fi destul de mare în unele situații, însă, trebuie ținut cont de faptul că volumul de informații furnizate este de regulă invers proporțional cu viteza de scanare și direct proporțional cu prețul aparaturii folosite, ce include atât componente mecanice cât și electronice. Nici la ușurința în exploatare lucrurile nu stau foarte bine, fiind nevoie de folosirea unor lichide de cuplare a energiei traductorului excitator la proba de material. În unele situații testele trebuie făcute în imersiune lucru ce presupune demontarea unor subansambluri. De asemenea, scannerul mecanic este un dispozitiv complicat [1-4], [1-25], [1-26], [5-2], [6-9] în multe situații el trebuind să fie fixat într-un loc și mutat manual pentru a investiga următoarea porțiune de material.

În prezent se fac cercetări de îmbunătățire a performanțelor sistemelor bazate pe ultrasunete urmărindu-se realizarea unei excitări și captări cât mai eficiente a undelor elastice, creșterea vitezei de investigare, reducerea costului aparatelor utilizate odată cu sporirea gamei de defecte investigabile. *Modelările pe calculator, care au devenit posibile în ultimii ani, joacă un rol important în înțelegerea modului în care ultrasunetele interacționează cu diverse tipuri de neomogenități contribuind la stabilirea unor procedee, de excitare, măsură și extragere de informații utile, mai eficiente.*

O configurație minimală [1-14], [1-29] a unui sistem de detecție nedistructivă a defectelor de material este prezentată în Fig. 1-2. Cu excepția traductorilor, ansambluri special proiectate pentru generarea și captarea undelor elastice ultrasonore, restul aparatelor sunt dispozitive electronice generale ce nu lipsesc din nici un laborator de electronică minim dotat. Cantitatea de informații colectată nu este prea mare. Se pot executa doar măsurători de tip A, B - scan. Volumul și greutatea mare a aparatelor constituie de asemenea un dezavantaj.

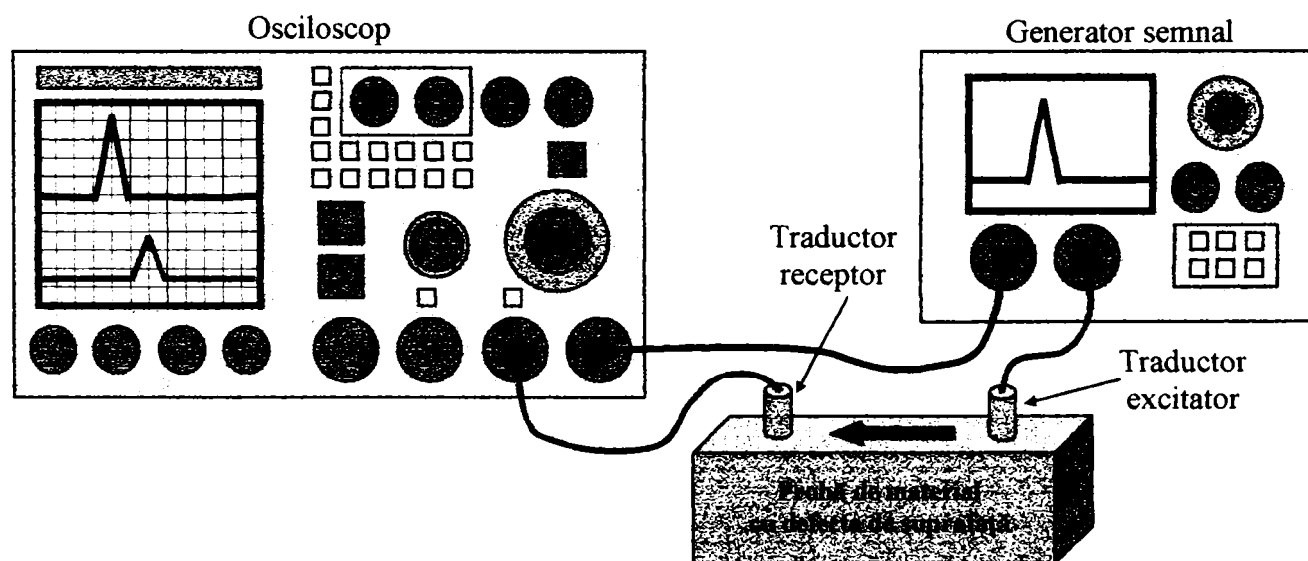


Fig. 1-2. Aparatura minimă necesară pentru detecția neomogenităților de material prin metoda ultrasunetelor: (1) Generator semnal, (2) Traductor excitator, (3) Traductor receptor, (4) Osciloscop.

Prin comasarea osciloscopului cu generatorul de semnal și adăugarea unui sistem de calcul, achiziție, stocare și afișare a datelor se obține un aparat complex [1-26], [1-27], [1-28] cu aspect de calculator electronic portabil, așa cum este cel din Fig. 1-3 (a). Cu ajutorul său se afișază fără dificultăți toate cele trei tipuri de diagrame (A, B, C - scan). *În momentul de față partea electronică a sistemelor de investigare nedistructivă a ajuns la un nivel suficient de compact, cercetările pentru îmbunătățirea performanțelor acestora fiind deja pe un plan secundar. Rămân totuși o serie de probleme legate în special de: (1) modalitatea de culegere a datelor și (2) de punere în evidență (filtrare) a informației utile.*

În ceea ce privește punctul (1) cercetările trebuie concentrate pe următoarele direcții:

- Dezvoltarea unei aparaturi de scanare care să poată fi cu ușurință folosită pentru o clasă cât mai largă de obiecte. Folosirea aparatelor de baleere orientate pe aplicație (pentru inspectarea laminatelor, pentru



investigarea suprafețelor curbe cum ar fi conductele, etc.) este un impediment major al tehnicii ultrasunetelor. În momentul de față scannerul este un dispozitiv scump, schimbarea sa de la un caz la altul implicând costuri ce de multe ori devin prohibitive.

- Perfecționarea traductorilor piezoelectrice în special pe două direcții: (a) realizarea unui cuplaj mai bun cu suprafața investigată, cu scopul creșterii randamentului de excitare și captare a ultrasunetelor, (b) proiectarea unor arii integrate de traductori, de tip vector sau chiar matrice care să simplifice sau la limită chiar să elimine necesitatea folosirii unui scanner mecanic (Fig. 1-4, Fig. 1-5, Fig. 1-6).
- Extinderea cercetărilor în domeniul excitării, respectiv măsurării noncontact a câmpurilor elastodinamice de frecvență ultrasonoră. Este cunoscut faptul că undele mecanice pot fi excitate prin efect termoelastic. Pe de altă parte amplitudinea sau viteza de oscilație a unui punct oarecare de pe o suprafață metalică sau de altă natură poate fi măsurată cu ajutorul unui interferometru. Odată cu scăderea rapidă a costului și dimensiunilor laserilor, a devenit viabilă utilizarea lor atât pentru generarea cât și la sesizarea ultrasunetelor, folosind efectul termoelastic, respectiv interferometria laser.

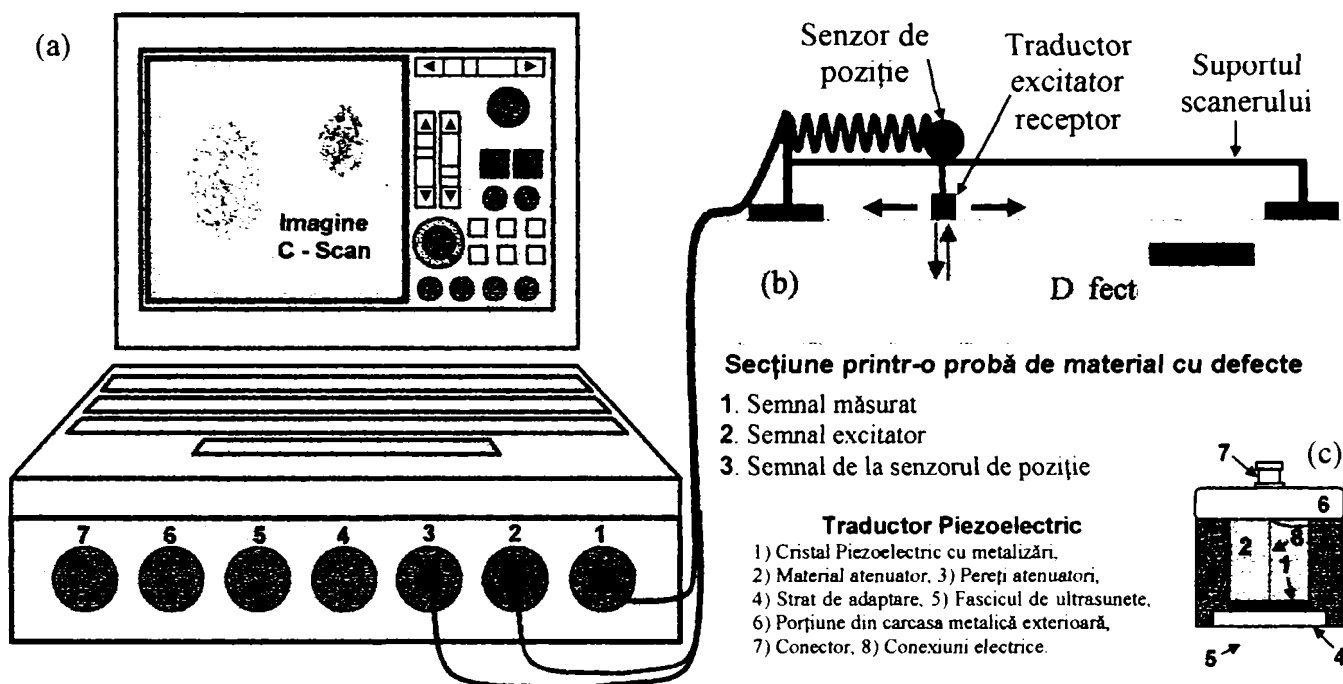


Fig. 1-3. (a) Calculator electronic cu placă de achiziție a datelor, (b) Probă de material cu defecte având montată deasupra sa un scanner mecanic, (c) Traductor piezoelectric de ultrasunete.

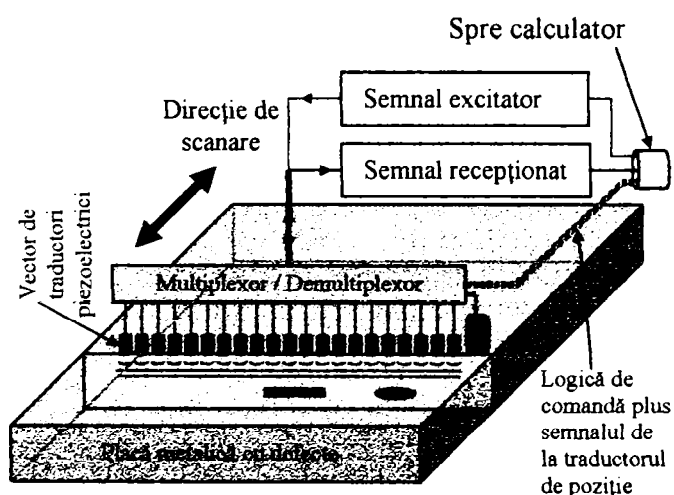


Fig. 1-4. Vector de traductori piezoelectrice sincronizați ce trimet o undă plană, perpendicular, pe fața opusă a plăcii metalice.

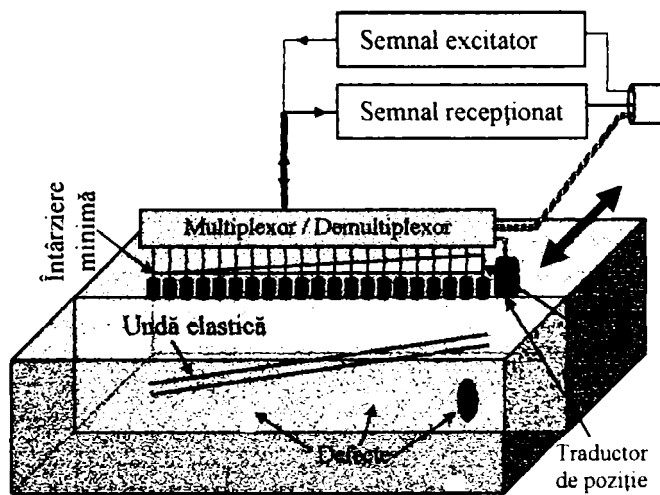


Fig. 1-5. Vector de traductori piezoelectrice defazați ce trimet o undă plană, oblic, pe fața opusă a plăcii metalice.



Utilizând traductorul piezoelectric din Fig. 1-3 (c) se pot face doar scanări secvențiale punct cu punct până la acoperirea întregii suprafețe 2D supusă procesului de investigație. Cea mai flexibilă modalitate de scanare este cea manuală, folosind eventual și un senzor de poziție pentru stabilirea precisă a coordonatelor punctului în care se face măsurătoarea. Baleerea are loc însă foarte încet devenind impractică pentru suprafețe mari de ordinul metrilor pătrați. Sistemele de scanare motorizată pot mișca sonda ultrasonoră extrem de repede însă vitezele mari de translație pot induce probleme legate de cuplare, de asemenea trebuie ținut cont de viteza finită a undelor elastice. Traductorul nu se poate deplasa într-o nouă poziție până ce pulsul ultrasonor nu s-a întors.

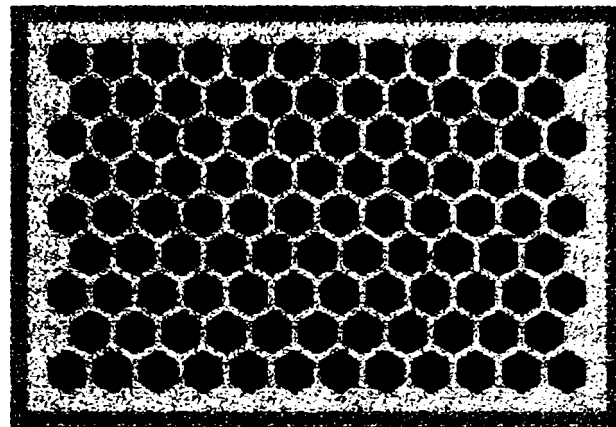


Fig. 1-6. Matrice de traductori piezoelectrice.

Prin folosirea ariilor integrate de traductori ( 1D sau 2D ) [5-15] viteza de investigare crește cu până la câteva ordine de mărime putându-se renunța la scanerile automate. Prin excitarea defazată a traductorilor se obțin unde elastice focalizate într-un punct, existând de asemenea posibilitatea schimbării direcției de propagare a fasciculului elastic, fără modificarea poziției ariei de senzori. Dispozitivele excitatoare și receptoare multiple prezintă și unele dezavantaje: (a) este greu de realizat un coeficient de cuplaj egal pentru toate elementele piezoelectrice din componența ariei integrate, (b) matricea de traductori nu poate pătrunde în anumite locuri strâmte, datorită dimensiunilor sale mari.

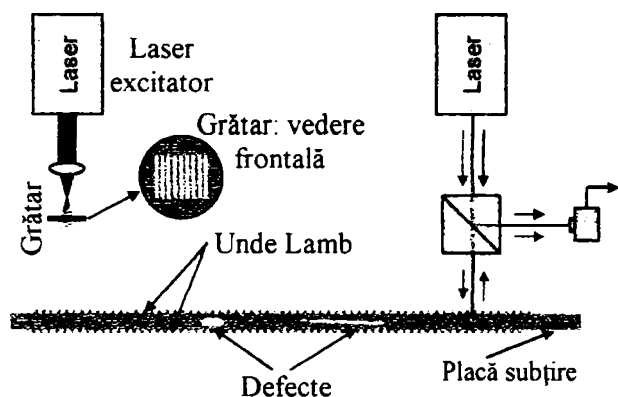


Fig. 1-7. Metodă de excitare termoelastică a undelor Lamb (stânga). Interferometru laser ce măsoară amplitudinea undelor elastice de suprafață în raport cu planul neperturbat (dreapta).

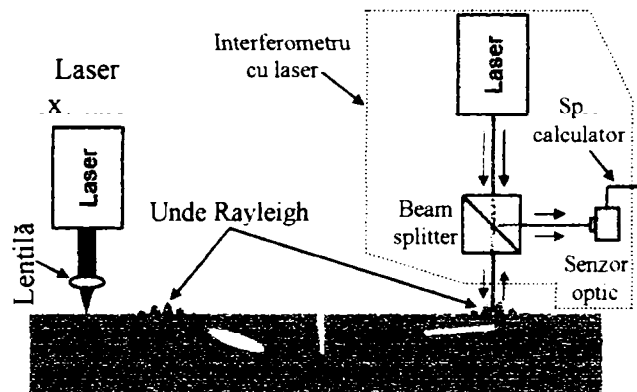


Fig. 1-8. Metodă de excitare termoelastică a undelor Rayleigh (stânga). Interferometru laser ce măsoară amplitudinea undelor elastice de suprafață în raport cu planul neperturbat (dreapta).

O alternativă la utilizarea traductorilor piezoelectrice este folosirea celor bazați pe radiația laser, care prezintă avantajul excitării respectiv măsurării noncontact a câmpurilor elastice [1-5], [1-18], [5-10], [6-7]. Apar însă unele probleme legate îndeosebi de excitarea ultrasunetelor prin încălzirea rapidă a uneia sau mai multor zone de pe suprafața materialului cercetat. Gradientul de temperatură poate induce modificări ireversibile de proprietăți elastice, lucru ce nu este de dorit, punându-se astfel la îndoială chiar noțiunea de “investigare nedistructivă”. În rest, laserii satisfac cerințele detectării neinvazive. Astfel, există posibilitatea generării unor semnale de bandă îngustă necesare excitării undelor Lamb pe modurile simetric,  $S_0$ , și antisimetric,  $A_0$ , prin folosirea unui grătar capabil să împartă fasciculul inițial în mai multe raze distanțate la o lungime de undă ultrasonoră (Fig. 1-7). Este, de asemenea posibilă, excitarea pulsurilor ultrasonore scurte, de bandă largă (Fig. 1-8). În ceea ce privește detectarea caracteristicilor câmpului elastic de înaltă frecvență, măsurătorile pot fi făcute atât secvențial punct cu punct prin interferometrie (Fig. 1-7, Fig. 1-8) cât și simultan cu ajutorul holografiei [1-30], [1-32], [5-5], [5-6].

Făcând o comparație între senzorii de ultrasunete, cu laser și cei piezoelectrice se poate spune că interferometru simplu este echivalentul traductorului din Fig. 1-3 (c) iar cel holografic (Fig. 1-9) este perechea detectorului multiplu din Fig. 1-6.

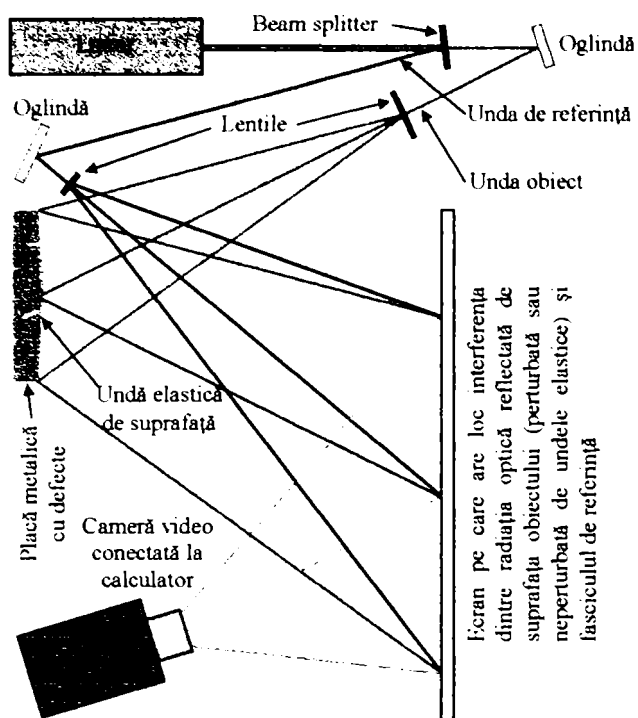


Fig. 1-9. Schemă de fotografiere a undelor elastice de suprafață cu ajutorul unui interferometru holografic.

Se realizează astfel, pe ecranul de interferență și implicit pe obiectivul camerei de luat vederi, o imagine stabilă de franje ce indică zone cu caracteristici elastice similare (amplitudine de oscilație, tensiune, etc.). Teoretic perturbațiile elastodinamice ar putea fi fotografiate fără “oprirea” câmpului prin stroboscopare. Practic timpii de expunere trebuie să fie atât de mici încât sunt imposibili de realizat cu camere de luat vederi obișnuite.

*Cea de-a doua problemă – punerea în evidență (filtrare) a informațiilor utile – este de o importanță majoră, de rezolvarea sa depinzând în esență viabilitatea întregului proces de investigare ultrasonoră a corpurilor metalice.* Similar cu punctul (1) se disting și aici o serie de direcții de studiu:

- Pe de o parte există zgomotele inerente procesului de măsură: vibrații parazite, perturbații provenite din necuplarea eficientă a traductorilor la mediul investigat, erori de măsură etc. Împotriva acestor fenomene nedorite se poate acționa prin: filtrarea numerică a semnalului captat, repetarea măsurătorilor, schimbarea dispozitivului de excitație sau a senzorului de detecție (existând posibilitatea ca ei să nu fi fost bine aleși pentru aplicația dată), etc.
- Pe de altă parte trebuie ținut cont de întinderea finită a obiectelor investigate ale căror frontiere cu mediul înconjurător produc, în punctul sau punctele de măsură, o serie de ecouri care se suprapun peste unda ce vine direct de la defect (purtaoarea informației utile). Ca urmare apare un “zgomot” intrinsec fără legătură cu procesul de măsură. De asemenea există neomogenități cu aspect extrem de neregulat capabile să împrăștie câmpul elastodinamic incident, trecând astfel nedetectate la investigarea prin reflexie dar nu și la cea prin transmisie. **Este greu de luptat împotriva unor asemenea fenomene nedorite doar efectuând teste experimentale. Se pot enumera următoarele motive: (a) zgomotele inerente procesului de măsură se amestecă cu cele intrinseci, (b) localizarea principalelor surse de ecouri este dificilă, numărul de puncte accesibile măsurătorilor fiind limitat, (c) este imposibil de studiat în detaliu interacțiunea undelor elastice cu o anumită neomogenitate. Modelarea pe calculator înlătură dezavantajele de mai sus făcând posibilă vizualizarea câmpului elastic în orice punct al corpului investigat și la orice moment de timp.**

Viitoarele studii privind perfecționarea tehnicii de identificare nedistructivă a neomogenităților de material trebuie să se concentreze, așadar, pe două mari direcții: (1) dezvoltarea unor traductori (excitatori și receptori) mai performanți și (2) **elaborarea unor programe de modelare a propagării câmpului elastic în corpuri având geometrii și proprietăți complexe, cu scopul înțelegerii mai exacte a modului în care ultrasunetele interacționează cu defectele de material.**

Marele avantaj al tehnicii holografice constă în obținerea unei cantități extrem de mari de informație printr-o singură măsurătoare de mare rezoluție (se poate atinge o rezoluție de jumătate de lungime de undă optică), superioară oricărei imagini obținute cu detectori piezoelectrics. Vizualizarea câmpului ultrasonor pe o suprafață largă permite observarea directă a perturbațiilor induse în structura sa de către neomogenitățile aflate la o anumită adâncime în material. Laserii folosiți pentru fotografierea câmpurilor elastice tranzitorii trebuie să aibă o funcționare în impulsuri cu interval de repetiție reglabil pentru a putea fi sincronizați cu perturbațiile elastice ultrasonore ce traversează suprafața probei de material [1-10], [1-31]. Considerând pentru exemplificare o sursă de ultrasunete de tip impulsiv ce excită un corp oarecare la intervale regulate de timp și un laser autopulsant, se impune sincronizarea frecvențelor de repetiție a celor două surse (ultrasonice și optică) pentru ca iluminarea suprafeței investigate să se producă mereu în același stadiu de evoluție al câmpului elastic.

Vizibilitatea unei neomogenități în câmp ultrasonor depinde de o multitudine de factori: proprietăți elastice, dimensiune, contrastul care îl realizează cu mediul de bază, apropierea de o suprafață de separație, forma geometrică, poziția sa în raport cu unda incidentă, etc. Deși la o primă vedere s-ar părea că un defect mare, contrastând puternic cu materia înconjurătoare și aflat în apropierea sursei de excitație ar trebui să genereze întotdeauna un ecou puternic în direcția pe care a fost "iluminat", lucrurile nu stau deloc așa, fapt dovedit de exemplul din Fig. 1-10. Astfel:

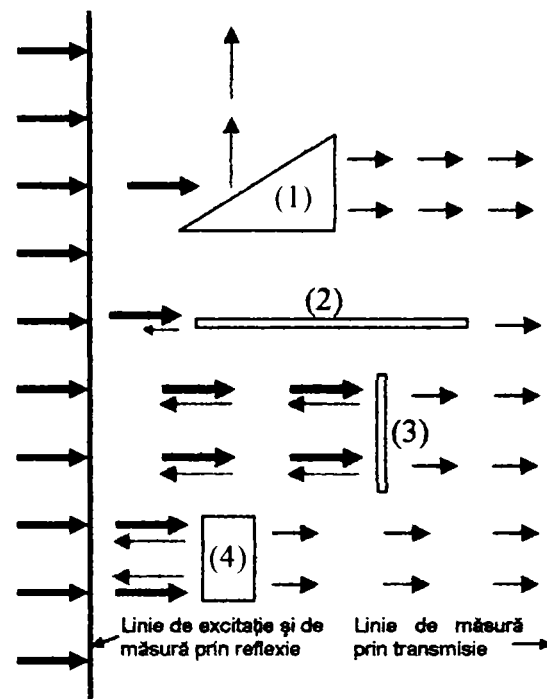


Fig. 1-10. Vizibilitatea prin transmisie și reflexie a unui defect depinde extrem de mult de forma sa.

În ceea ce privește neomogenitatea (4) identificarea prin transmisie este de asemenea facilă, unda elastică ce trece în cealaltă parte a sa fiind puternic atenuată și întârziată. Același lucru se poate spune despre detecția prin transmisie a neomogenității (1) și într-o oarecare măsură despre (2). **Evaluarea cu grad mare de precizie a semnăturii unui defect oarecare necesită însă folosirea unui program de modelarea a interacțiunii ultrasunetelor cu neomogenitățile de material.**

### 1.3. Descrierea capitolelor

**Așa cum s-a precizat în rezumatul de la început, scopul lucrării este să analizeze, pe cale numerică prin simulări pe calculator, comportamentul undelor elastice în interacțiune cu defectele de material, cu intenția de a înțelege mai bine corelațiile care se pot face între forma geometrică a unei neomogenități oarecare și perturbația, fizic detectabilă cu un instrument de măsură, pe care aceasta o produce.**

Unul dintre cei mai folosiți algoritmi de simulare a propagării undelor elastice este FDTD (Finite Difference Time Domain). Metoda se bazează pe discretizarea spațială, a domeniului pe care se face simularea, în celule elementare și pe eșantionarea intervalului de timp, luat în considerație, într-un număr finit de pași [2-5]. Este suficientă introducerea în memoria calculatorului a proprietăților elastice ale fiecărei celule în parte, fie ea parte a materialului de bază sau a defectului, pentru ca acesta să calculeze evoluția în timp a câmpului elastic excitat de una sau mai multe surse de oscilații cu parametri cunoscuți. Principalele probleme, cu care se confruntă implementarea pe calculator a algoritmului sunt: necesarul mare de memorie și numărul crescut de procesări, lucruri ce conduce la timpi de calcul foarte mari. Pe scurt, pentru a cunoaște caracteristicile unei elastice la momentul  $(n+1)\Delta t$  cu  $n \in [0, N]$  în celula elementară  $m$  unde  $m \in [1, M]$ , trebuie calculat câmpul elastic la momentul  $n\Delta t$  în toate elementele  $m \in [1, M]$ , lucru care face ca implementarea procedurii FDTD, pentru corpuri tridimensionale (cu multe elemente de discretizare), să nu fie viabilă pe un calculator personal. Spațiile 2D cu dimensiuni de ordinul zecilor de lungimi de undă minimă se pretează, totuși, la aplicarea metodei de mai sus. Obiectele reale sunt însă tridimensionale, cazul 2D având mai mult importanță teoretică. Pentru anumite geometrii, când derivatele spațiale și temporale ale câmpului în raport cu una din cele trei axe de coordonate sunt nule, modelele bidimensionale descriu foarte bine pe cele 3D corespondente. *În toate problemele de simulare, care vor surveni pe parcursul lucrării, fie că se referă la corpuri 2D sau 3D, se vor folosi doar algoritmi bidimensionali.*

Deși lucrarea are ca scop investigarea modalităților de detecția ultrasonoră a neomogenităților din metale, prima sa parte (Cap. 2) "Modele numerice pentru simularea propagării undelor elastice în medii fluide" se ocupă, așa după cum o spune și titlul, de modelarea perturbațiilor elastice în lichide și gaze, întrucât

ecuația de propagare a undelor mecanice în astfel de medii este mai simplă, câmpul elastic ondulatoriu având un aspect mai "curat" decât în solide la care apar cel puțin două tipuri de unde: cele longitudinale și cele transversale. Influența neomogenităților fluide, incluse în fluidul de bază, asupra câmpului elastic generat de sursă, poate fi mai ușor urmărită (Fig. 1-11).

Partea a doua și a treia (Cap. 3, Cap. 4) "Unde elastice în medii liniare și izotrope" și respectiv "Frontiere Absorbante", au ca scop final stabilirea unui algoritm bidimensional, general, capabil să țină seama de toate tipurile de perturbații ce se propagă prin mediile solide, lichide și gazoase. Un accent deosebit este pus pe conceptul de "frontieră absorbantă" cu ajutorul căruia se înlătură fenomenul de margine perfect reflectătoare [2-8]. Pe Fig. 1-11 se observă cum undele elastice traversează pereții domeniului de calcul ca și cum aceștia nu ar exista. Simpla aplicare a algoritmului FDTD pe o regiune discretizată a spațiului în vederea calculării evoluției în timp a unui câmp elastic nu este suficientă, frontierele trebuie numerizate aținând la reflexii perfecte. Astfel, orice analiză numerică care are ca scop tratarea "interacțiunii" undelor elastice cu diverse obiecte dintr-o anumită regiune a spațiului, se transformă într-o simulare de cavitate rezonantă, rezultatele finale fiind dramatic afectate sau complet distorsionate. Implementarea conceptului de "margine transparentă" complică, totuși, calculele măbind timpul de procesare și necesarul de memorie.

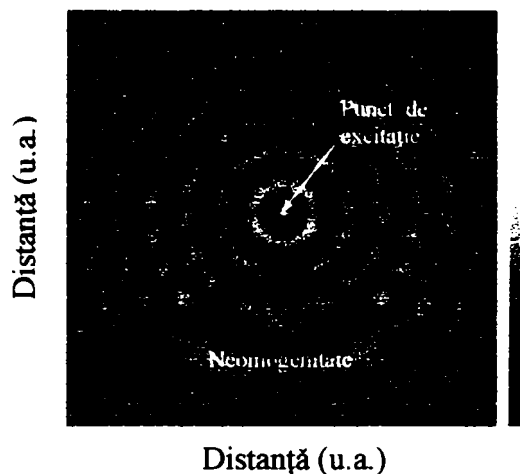


Fig. 1-11. Imagine în nuanțe de gri reprezentând o undă elastică monocromatică în interacțiune cu o neomogenitate. Negru semnifică amplitudinea minimă, iar alb pe cea maximă.

Investigarea neomogenităților de material cu ajutorul ultrasunetelor prezintă interes în măsura în care există metode eficiente de excitare a lor în corpul de studiat și de captare a radiației ultrasonore emise de acesta ca răspuns la oscilația perturbatoare. Scopul celei de-a patra părți (Cap. 5) "Metode de generare și detecție a perturbațiilor elastice. Unde de suprafață Rayleigh și Lamb" este să analizeze, cu ajutorul calculatorului, două metode de generarea - măsurare a oscilațiilor mecanice de înaltă frecvență. Primul procedeu are la bază cristalele piezoelectrice iar cel de-al doilea laserii. Ambele au avantaje și dezavantaje. Astfel, traductorii piezoelectrice necesită, în cele mai multe cazuri, folosirea unui lichid de cuplaj pentru ca unda ultrasonoră produsă să pătrundă în proporție cât mai mare în corpul investigat. De asemenea aceștia trebuie să fie în imediata vecinătate a suprafeței obiectului. Un alt neajuns apare din necesitatea mutării lor din loc în loc cu un sistem mecanic de mare precizie. Traductorii piezoelectrice prezintă avantajul de a fi relativ ieftini, pot fi stimulați să genereze ultrasunete în benzi de frecvență bine definite, au dimensiuni mici, de cele mai multe ori pot fi folosiți atât ca excitatori cât și ca receptori, etc. În ceea ce privește traductorii bazați pe efectul laser, avantajul lor major este acela de a nu necesita contactul direct cu materialul testat, excitarea ultrasunetelor și măsurarea câmpului, în punctele de interes, putând fi efectuate de la distanță mare.

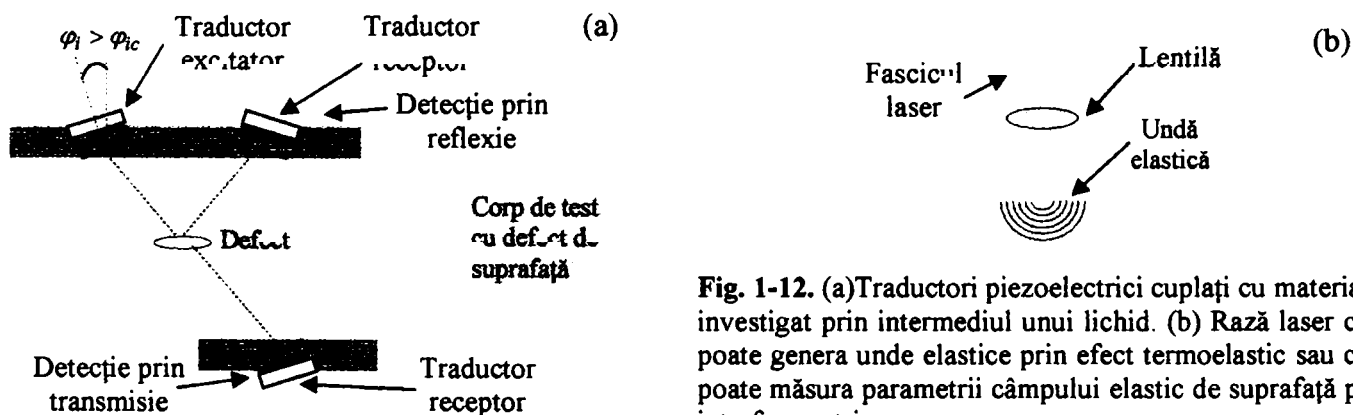


Fig. 1-12. (a) Traductori piezoelectrice cuplați cu materialul investigat prin intermediul unui lichid. (b) Rază laser care poate genera unde elastice prin efect termoelastic sau care poate măsura parametrii câmpului elastic de suprafață prin interferometrie.

Apar însă dezavantaje mai ales legate de dispozitivul excitator. Stimularea ultrasunetelor se face pe baza efectului termoelastic care presupune încălzirea rapidă a unui volum mic de substanță, ce se dilată, produce tensiuni locale și mai departe unde elastice. Cantitatea de căldură necesară procesului de stimulare poate duce însă, în anumite condiții, la deteriorarea locală a corpului examinat, de asemenea banda de frecvență a



excitației se controlează mai greu. În ceea ce privește mecanismul de scanare, el se menține în continuare complicat.

Partea a cincia (Cap. 6) "*Analiza virtuală a interacțiunii undelor elastice cu neomogenitățile de material*" are ca scop principal studierea influenței defectelor asupra câmpului elastic fizic detectabil, pe suprafața exterioară a unui corp metalic, constituind elementul central al lucrării. Sunt prezentate o serie de semnale excitatoare, spectrele lor, condițiile de stabilitate a algoritmului numeric și ce se întâmplă dacă nu se ține cont de ele, de asemenea sunt ilustrate numeroase hărți de câmp elastic, alb negru sau color și imagini computerizate obținute în urma *scanării virtuale* a obiectelor cu defecte prin metodele A – B și C scan. Spre final este abordată problema cristalelor elastice (neomogenități periodice incluse într-o substanță de bază) ce au proprietatea de a atenua selectiv benzi întregi din spectrul semnalului excitator. Un puls ultrasonor ce traversează o zonă de cristal elastic, (care poate fi o structură periodică făcând parte din componența unui anumit ansamblu mecanic, nu neapărat ceva nedorit), în drumul său către un defect, va fi puternic distorsionat nemaiputând să ducă suficientă informație spre senzorul de măsură, pentru ca un sistem de procesare afișare a datelor în cooperare cu un operator calificat, să poată extrage informația utilă relativă la defectul propriuzis.

Metodele de punere în evidență a neomogenităților de material analizate până acum dau indicații îndeosebi despre existența acestora, fără a putea furniza informații clare asupra aspectului lor. În cea de-a șasea parte (Cap. 7) "*Tehnici de vizualizare a formei defectelor de material*" se analizează viabilitatea folosirii unui procedeu de detecție numit tomografiere prin care geometria defectului este pusă în evidență. Tomografierea este o modalitate de calculare a formei unui obiect pornindu-se de la proiecțiile generate prin "iluminarea" sa sub diverse unghiuri cu o radiație oarecare, ce poate fi de natură electromagnetică sau elastică. În cazul în care radiația folosită are o lungime de undă mult mai mică decât dimensiunile corpului studiat metoda matematică de reconstrucție pe baza cunoașterii proiecțiilor este mai simplă, neînregistrându-se fenomene de difracție. Pentru lungimi de undă mari, cazul undelor mecanice, difracția trebuie luată în considerație în majoritatea situațiilor.

După cum se știe tehnica tomografică nu este o noutate ea fiind utilizată de mai mult timp îndeosebi pentru medii "moi" care pot fi approximate prin lichide. *Cap 7 încearcă să stabilească prin simulări numerice, viabilitatea aplicării acestui procedeu la investigarea neomogenităților incluse în metale.*



## 2. Modele numerice pentru simularea propagării undelor elastice în medii fluide

### 2.1. Considerații generale

Simularea propagării câmpurilor elastodinamice și în particular a celor acustice este o metodă din ce în ce mai folosită pentru studierea comportamentului diverselor structuri mecanice excitate de surse de oscilații (ex: [2-1], [2-2], [2-3], [2-4]). Creșterea remarcabilă a puterii de calcul a computerelor a făcut posibilă vizualizarea câmpurilor elastice dinamice în obiecte cu geometrii și proprietăți fizice complicate [2-10], [2-11]. Capitolul prezent se ocupă de rezolvarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale ce descrie propagarea perturbațiilor acustice în mediile fluide, pentru cazul bidimensional. Algoritmul de calcul este prezentat în două variante: 1) fără strat absorbant (transparent) la frontierele domeniului de calcul, 2) cu strat absorbant. În primul caz calculele sunt mai puțin laborioase, simularea se face într-un timp relativ scurt, însă marginile gridului de discretizare acționează ca frontiere perfect reflectătoare, lucru care nu este de dorit în multe probleme practice. Cel de-al doilea caz înlătură neajunsul anterior introducând însă o nouă ecuație și crescând timpul de obținere a soluției. În majoritatea problemelor de propagare, implementarea frontierelor absorbante nu poate fi însă evitată și ca urmare cel de-al doilea algoritm are o utilitate mai mare.

Atunci când o sursă de perturbații elastice acționează asupra unui punct sau puncte aparținând unui corp format din părți în stare lichidă solidă și gazoasă, apar câteva tipuri de unde elastice [1-11], [1-12] ce călătoresc cu viteze diferite [1-21], [2-5]. În interiorul solidelor se propagă două tipuri de perturbații: una determinată de vibrația particulelor mediului, paralelă cu direcția de propagare, numită undă compresională, sau primară și o alta în care oscilația are loc pe direcție perpendiculară pe deplasare, numită undă transversală sau secundară. Un tip special de câmpuri ghidate, undele Rayleigh, se propagă la suprafața de separație dintre două medii din care cel puțin unul este solid iar în plăcile solide subțiri apar niște perturbații cu proprietăți aparte numite unde Lamb.

În interiorul fluidelor singurul tip de unde sunt cele compresionale și în consecință sistemul de ecuații diferențiale ce descrie propagarea perturbațiilor elastice este mai simplu. Ori de câte ori este posibil se preferă utilizarea acestor ecuații numite *sistemul acustic* sau *aproximația acustică*, chiar dacă mediile luate în calcul nu sunt întotdeauna fluide.

### 2.2. Ecuațiile acustice

Ecuațiile acustice într-un fluid omogen au următoarea formă [2-6]:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \nabla p(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2-1)$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2-2)$$

unde  $p$  este câmpul de presiune,  $\mathbf{v}$  câmpul vectorial al vitezelor de oscilație,  $\rho$  densitatea fluidului,  $\kappa$  compresibilitatea mediului ( $\kappa = 1/c^2 \rho$ ) iar  $c$  viteza unei acustice.

Rezolvarea sistemului de mai sus pentru situația tridimensional ar necesita un timp de calcul extrem de mare (ore, zile) pe un calculator personal de ultimă generație. Din acest considerent simulările vor fi efectuate numai pentru cazul 2D, considerându-se egale cu zero toate derivatele în raport cu  $y$ . Pentru cazul bidimensional sistemul (2-1) - (2-2) devine:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v_x(x, z, t) + \frac{\partial}{\partial x} p(x, z, t) = 0, \quad (2-3)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v_z(x, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} p(x, z, t) = 0, \quad (2-4)$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial t} p(x, z, t) + \frac{\partial}{\partial x} v_x(x, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} v_z(x, z, t) = 0. \quad (2-5)$$

Derivatele spațiale și cele în raport cu timpul ale unei funcții arbitrare  $f(x, z, t)$  pot fi approximate prin diferențe finite centrate după cum urmează:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, z, t) = \frac{f(x + \Delta x / 2, z, t) - f(x - \Delta x / 2, z, t)}{\Delta x}, \quad (2-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, z, t) = \frac{f(x, z + \Delta z / 2, t) - f(x, z - \Delta z / 2, t)}{\Delta z}, \quad (2-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, z, t) = \frac{f(x, z, t + \Delta t / 2) - f(x, z, t - \Delta t / 2)}{\Delta t}, \quad (2-8)$$

unde  $\Delta t$  este pasul temporal discret iar  $\Delta x, \Delta z$  sunt intervalele spațiale pe axele  $x$  și respectiv  $z$ .  
 Adoptând pentru rezolvarea sistemul ( 2-3 ) - ( 2-5 ) algoritmul "Staggered Grid" descris în [2-5], [2-6] cu  $\Delta x = \Delta z = \Delta h$  și schema de discretizare din Fig. 2-1, rezultă următoarele ecuații cu diferențe finite:

$$V_x^{k+1/2}(i, j) = V_x^{k-1/2}(i, j) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta h} [P^k(i+1/2, j) - P^k(i-1/2, j)], \quad (2-9)$$

$$V_z^{k+1/2}(i+1/2, j+1/2) = V_z^{k-1/2}(i+1/2, j+1/2) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta h} [P^k(i+1/2, j+1) - P^k(i+1/2, j)], \quad (2-10)$$

$$P^{k+1}(i+1/2, j) = P^k(i+1/2, j) - \frac{\Delta t}{\kappa \Delta h} [V_x^{k+1/2}(i+1, j) - V_x^{k+1/2}(i, j) + V_z^{k+1/2}(i+1/2, j+1/2) - V_z^{k+1/2}(i+1/2, j-1/2)], \quad (2-11)$$

unde  $\Delta h$  este pasul spațial al gridului pătratic iar  $k-1/2, k, k+1/2, k+1$  reprezintă pașii temporali.

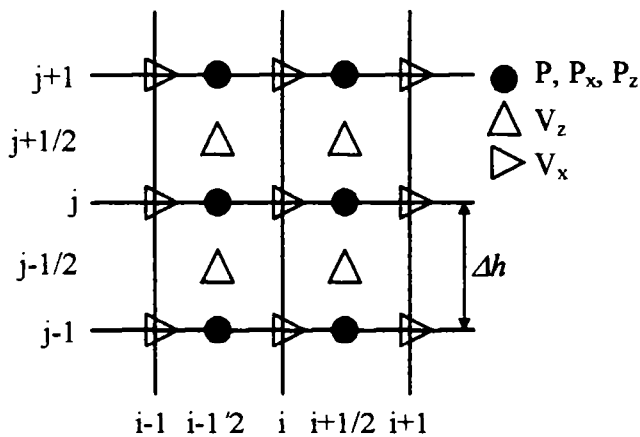


Fig. 2-1. Grid de discretizare corespunzător sistemului ( 2-3 ) - ( 2-5 ) și de asemenea sistemului (A, B, C, D).  $P_x, P_z$  au sene doar pentru ultimul set de ecuații.

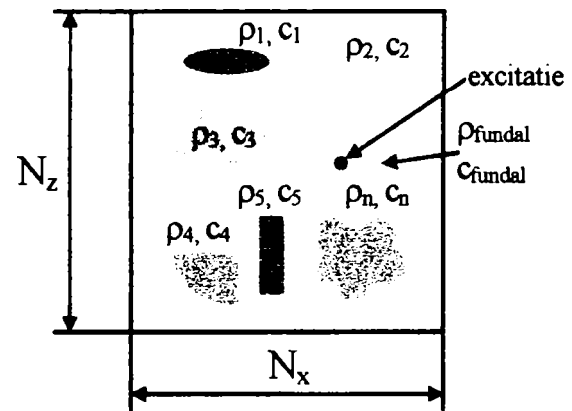


Fig. 2-2. Exemplu de domeniu de calcul. Conține o distribuție de densități și viteze de propagare. Gridul de discretizare este de  $N_x \times N_z$  eșantioane.

Un element cheie în rezolvarea pe bază de diferențe finite a unei probleme ce implică undele elastice, este alegerea corectă a pașilor de eșantionare spațială și temporală. Cei doi parametri sunt de mare importanță influențând în mod direct timpul de calcul și necesarul de memorie. O rezoluție prea mare conduce la o creștere inacceptabilă a timpului de procesare fără o îmbunătățire importantă a rezultatelor (graficelor).

O forma generală sub care se prezintă problemele de acustică este dată în Fig. 2-2. Sursă de oscilații excită un obiect având o distribuție cunoscută de densitate și viteze de propagare. Se cere răspunsul acestuia la perturbația considerată. Răspunsul poate îmbrăca mai multe forme: aflarea diagramei funcție de timp a mișcării oscilatorii a unui punct al mediului situat la o distanță oarecare de sursă, poate fi un spectru de frecvențe, un coeficient de reflexie la interfața dintre două medii diferite, modurile cavității rezonante cu sau fără pierderi pot de asemenea constitui un răspuns ( de exemplu atunci când sursa de perturbații este plasată în interiorul unuia din obiectele  $[\rho_i, c_i]$  din Fig. 2-2 apare fenomenul de cavitate rezonantă) etc.

În cele ce urmează se consideră pentru exemplificare cazul unei unde acustice ce se propagă într-un mediu ce densitate  $\rho_m = 1 \text{ Kg/m}^3$ , viteză de propagare  $c_m = 350 \text{ m/s}$  și care interacționează cu un obiect (zid) semitransparent având  $\rho_w = 1 \text{ Kg/m}^3$  și  $c_w = 700 \text{ m/s}$ . Semnalul excitator are forma  $s(t) = 0.5 \sin(2\pi f t)$  Pa unde  $f = f_{max} = 1 \text{ KHz}$  și acționează în punctul marcat în Fig. 2-3.

Pentru alegerea parametrilor gridului este importantă găsirea minimului lungimii de undă a perturbației elastice:  $\lambda_{min} = c_{min} / f_{max} = c_m / f_{max}$ . Pasul spațial se alege ca fiind:  $\Delta x = \Delta z = \Delta h = \lambda_{min} / 10$ . Se poate

demonstra [2-9] că trebuie satisfăcută inegalitatea,  $c_{\max} \Delta t \sqrt{1/\Delta x^2 + 1/\Delta z^2} < 1$ , pentru ca algoritmul (2-9) - (2-11) să fie stabil. În consecință :  $\Delta t < \Delta h / 2c_{\max}$ .

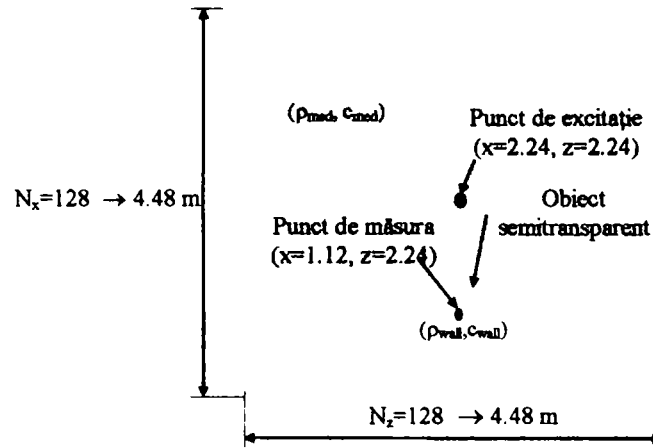


Fig. 2-3. Domeniul de calcul este un grid cu dimensiunea  $128 \times 128$  elemente  $\rightarrow 4.48 \times 4.48$  mxm.

Figurile Fig. 2-4 - Fig. 2-7 arată evoluția undei în domeniul de calcul prezentat în Fig. 2-3. Sunt afișate patru momente de timp diferite. Primele două grafice reprezintă o undă care se propagă fără a interacționa cu nimic. În cea de-a treia imagine deja apar trei clase de perturbații: undă directă din mediu de bază, cea din obiect, și cea reflectată de către acesta. Câmpul ondulatoriu atinge frontierele gridului de calcul după aproximativ șapte perioade de oscilație ( Fig. 2-7 ).

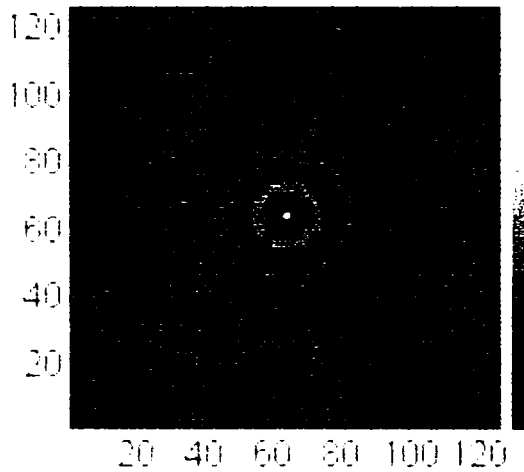


Fig. 2-4. Presiune(t).  $t=2$  ms,  $4.48 \times 4.48$  mxm,  $(P_{\min}, P_{\max}) = (-0.172, 0.449)$  Pa.

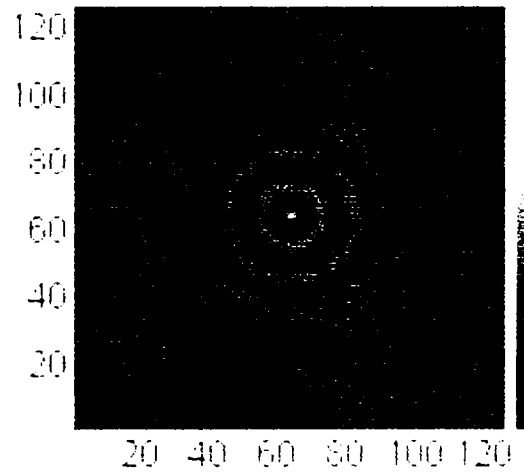


Fig. 2-5. Presiune(t).  $t=3$  ms,  $4.48 \times 4.48$  mxm,  $(P_{\min}, P_{\max}) = (-0.162, 0.442)$  Pa.

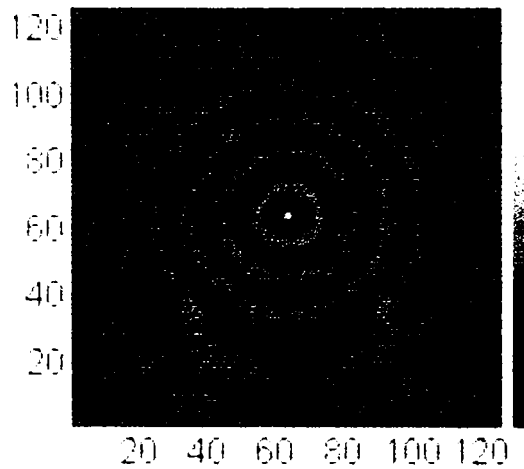


Fig. 2-6. Presiune(t).  $t=5$  ms,  $4.48 \times 4.48$  mxm,  $(P_{\min}, P_{\max}) = (-0.163, 0.440)$  Pa. Interacțiunea dintre undă și obiect poate fi observată în partea de jos a imaginii.

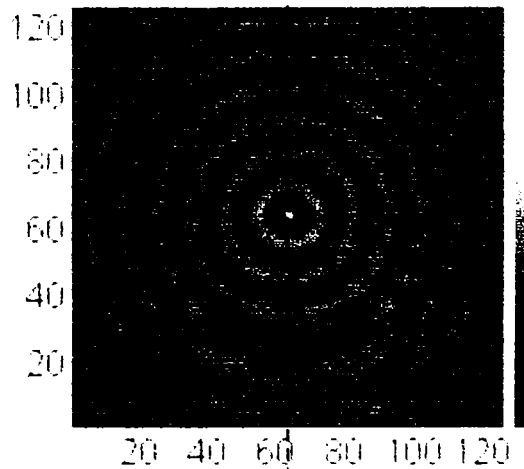


Fig. 2-7. Presiune(t).  $t=7$  ms,  $4.48 \times 4.48$  mxm,  $(P_{\min}, P_{\max}) = (-0.178, 0.436)$  Pa.

Graficul din Fig. 2-8 reprezintă amplitudinea undei într-o secțiune prin coordonata  $z=2.24$  m la momentul de timp  $t=7$  ms. Se disting câteva zone de interes: (1) unda care deja a traversat obiectul, (2) unda din obiect (lungimea de undă este dublă), (3) suma dintre unda incidentă și cea reflectată de corp, (4) unda directă neperturbată care se propagă în direcția opusă obiectului. Din datele furnizate de un astfel de grafic se pot calcula coeficienții de reflexie și transmisie ai undei pe neomogenitatea mediului, prin comparația profilului perturbației în două cazuri diferite: propagare neperturbată și propagare atunci când un obiect a fost introdus în mediul de bază.

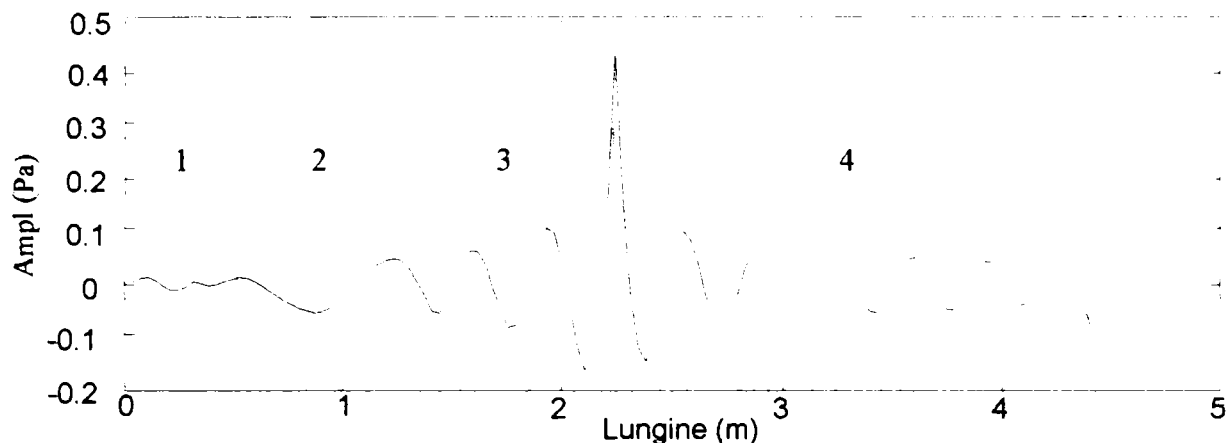


Fig. 2-8. Amplitudinea semnalului într-o secțiune prin coordonata  $z=2.24$  m la timpul  $t=7$  ms (s se vedea Fig. 2-7).

Un lucru de mare importanță în cazul propagării undelor elastice într-un mediu cu o distribuție de densitate și viteze de propagare dată, este aflarea spectrului de frecvență al oscilației unui punct ce aparține domeniului de calcul, atunci când o sursă excită mediul într-o anumită locație. În continuare se consideră o excitație sinusoidală de durată *finită* (Fig. 2-9) al cărei spectru se găsește în Fig. 2-10. Graficele din Fig. 2-11, Fig. 2-12 afișează amplitudinea funcție de timp, respectiv spectrul semnalului măsurat într-un punct având coordonatele  $(x=1.12$  m,  $z=2.24$  m). Se poate vedea din Fig. 2-11 că nu se atinge regimul continuu în intervalul temporal luat în discuție. Aceasta este cauza diferenței în componente de frecvență dintre cele două spectrele din Fig. 2-10 și Fig. 2-12.

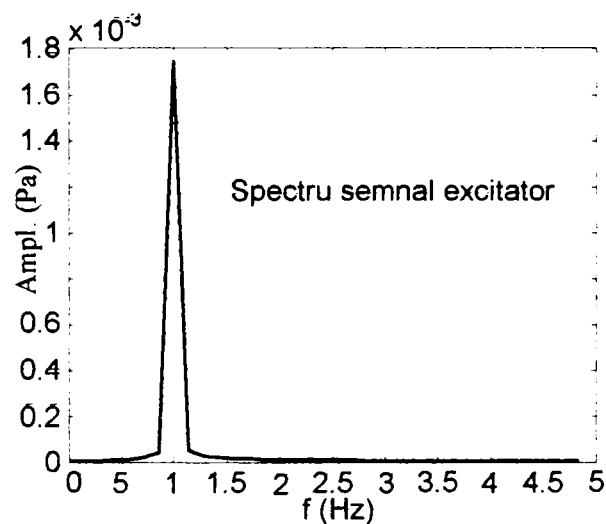
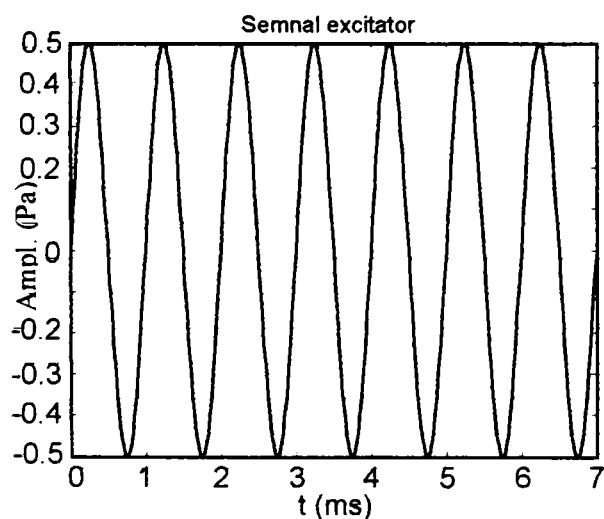


Fig. 2-9. Semnal de excitație corespunzător Fig. 2-7.

Fig. 2-10. Spectrul de frecvență al oscilației din Fig. 2-9.

Spectrele din Fig. 2-10 și Fig. 2-12 ar deveni aproximativ egale din punct de vedere al compoziției spectrale dacă s-ar alege un interval temporal de lucru mult mai mare decât șapte perioade. Totuși apare o mare problemă ilustrată în Fig. 2-13, ce constituie un impediment major al algoritmului (2-9) - (2-11). *Frontierele gridului de discretizare se comportă ca reflectori perfecți*, lucru care limitează aplicabilitatea setului de ecuații cu diferențe finite de mai sus la o serie restrânsă de aplicații, complexitatea lui (2-9) - (2-11) crescând cu  $N^2$  unde  $N$  este numărul de elemente de discretizare pe axa  $x$  sau  $z$  ( $N_x=N_z=N$ ). Domeniul de calcul nu poate fi prea extins deoarece s-ar ajunge repede la un grid cu un număr  $N^2$  extrem de mare de elemente, cu alte cuvinte la un timp de calcul prohibitiv. Aplicațiile lui (2-9) - (2-11) țin mai mult de evaluarea primară a interacțiunii dintre unda elastică și diverse neomogenități de material.

Imaginile din Fig. 2-6, Fig. 2-7 arată în mod evident apariția unei perturbații în câmpul de presiune al undei în locul în care se găsește obiectul semitransparent. Chiar forma dreptunghiulară a acestuia poate fi "ghicită" din analiza vizuală a celor două imagini, lungimea de undă fiind aproximativ dublă în interiorul neomogenității. Așadar prin simularea propagării unei unde elastice într-un mediu se pot obține o serie de informații utile chiar dacă domeniul temporal luat în calcul este extrem de mic, de ordinul timpului necesar perturbației elastice să parcurgă o distanță de câteva (se poate merge până la zeci) lungimi de undă minimă.

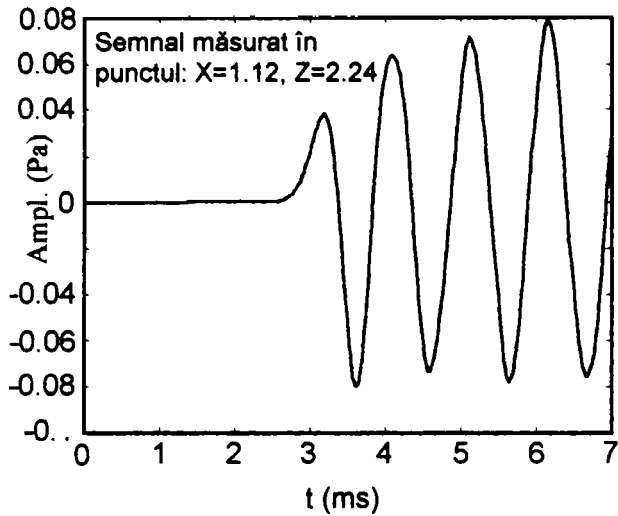


Fig. 2-11. Amplitudinea semnalului măsurată în punctul  $x=1.12\text{ m}$ ,  $z=2.24\text{ m}$  ( Fig. 2-7 ).

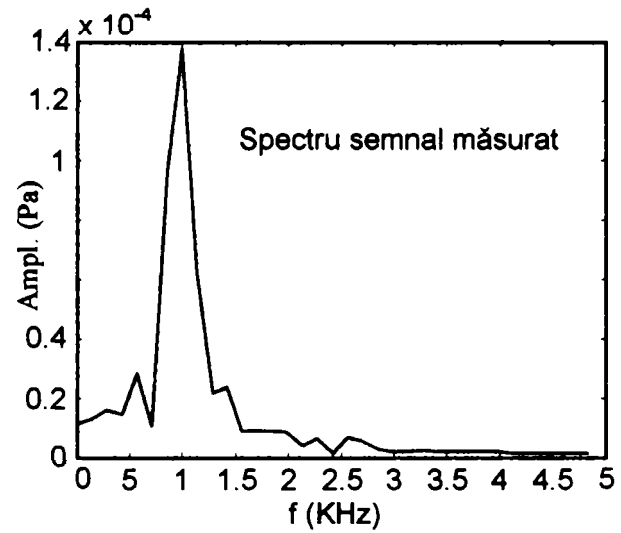


Fig. 2-12. Spectrul de frecvențe al semnalului măsurat în punctul de coordonate:  $x=1.12\text{ m}$ ,  $z=2.24\text{ m}$ .

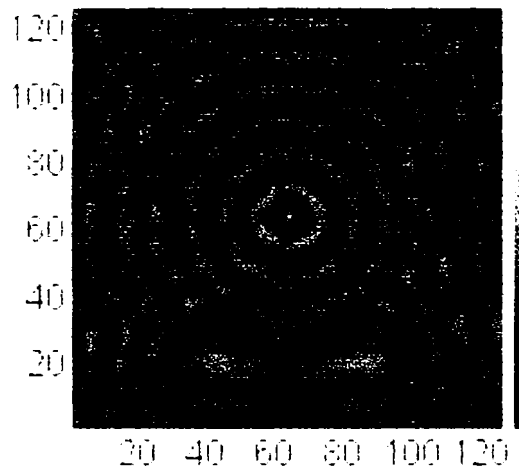


Fig. 2-13. Presiune( $t$ ).  $t=10\text{ ms}$ ,  $4.48 \times 4.48\text{ m} \times \text{m}$ ,  $(P_{\min}, P_{\max})=(-0.172, 0.440)\text{ Pa}$ . Apare problema frontierelor reflectătoare.

### 2.3. Cavitatea rezonantă

O problemă de acustică care poate fi tratată pe deplin cu ajutorul ecuațiilor ( 2-9 ) - ( 2-11 ) este găsirea răspunsului unei cavități rezonante rectangulare la o excitație de tip impuls. Se utilizează aceeași configurație ca la paragraful precedent.(Fig. 2-3). Excitația este însă de această dată un puls a cărui diagramă temporală și spectru sunt date în Fig. 2-14 respectiv Fig. 2-15. Ceea ce se cere este spectrul semnalului în punctul de coordonate:  $x=1.12\text{ m}$ ,  $z=2.24\text{ m}$  și harta distribuției de presiune la momentul  $t=50\text{ ms}$ .

Datorită suprapunerii dintre reflexii multiple, amplitudinea oscilației, în punctul de coordonate specificat anterior, ca funcție de timp, are o variație complicată (Fig. 2-16). Pe intervalul de temporal luat în calcul se atinge doar un regim aproximativ periodic. Ca urmare spectrul corespunzător funcției din Fig. 2-16 va avea un caracter continuu prezentând însă maxime de amplitudine așa cu se vede în Fig. 2-17. Ca o observație trebuie spus că o cavitate rezonantă ideală are un spectru discret. Pentru a obține în mod practic un astfel de spectru este necesară mărirea intervalului de timp pe care se efectuează simularea, lucru care conduce însă la creșterea timpului de calcul. Totuși, chiar folosind reprezentarea temporală a semnalului pe  $50\text{ ms}$  se conturează clar vârfurile spectrale (modurile) cavității rezonante.

641.495  
369.003  
17



În ceea ce privește harta de presiune, aceasta este ilustrată în Fig. 2-19. Fig. 2-18 reprezintă o secțiune a Fig. 2-19 prin coordonata  $z=2.24$ . Cele două grafice nu oferă totuși prea multe informații cu privire la neomogenitatea dreptunghiulară inclusă în mediu.

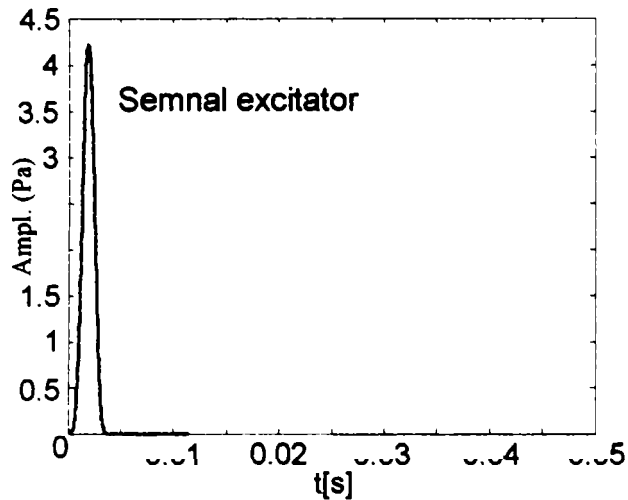


Fig. 2-14. Semnal excitator de tip impuls al cavității rezonante din Fig. 2-3.

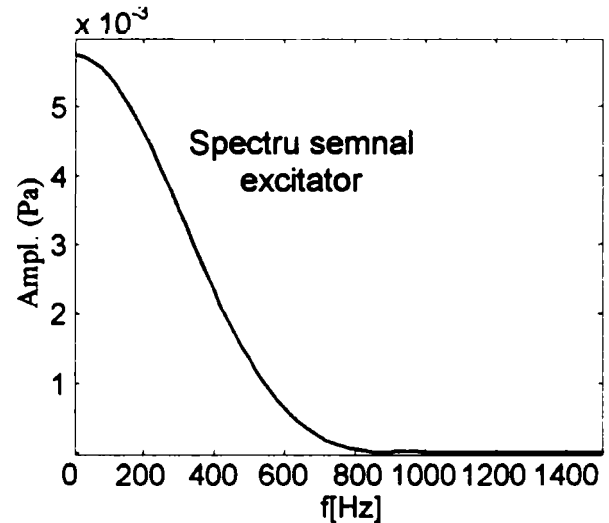


Fig. 2-15. Spectrul semnalului din Fig. 2-14.

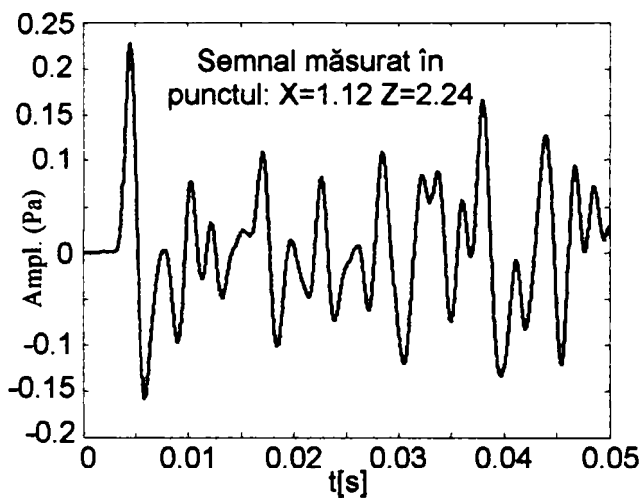


Fig. 2-16. Amplitudinea semnalului măsurată în punctul de coordonate  $x=1.12$  m,  $z=2.24$  m.

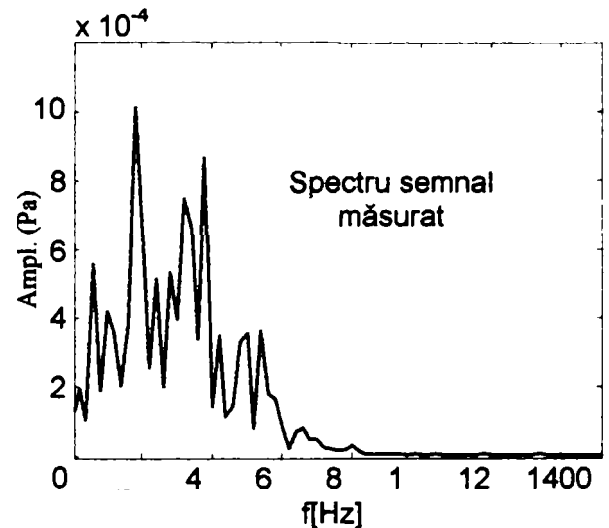


Fig. 2-17. Spectrul semnalului din Fig. 2-16  $x=1.12$  m,  $z=2.24$  m.

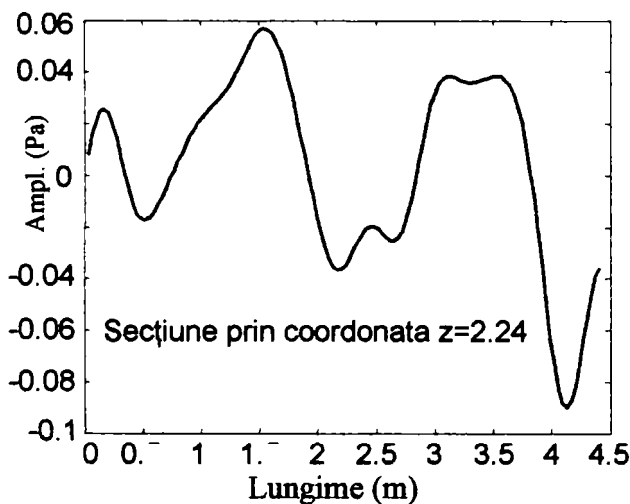


Fig. 2-18. Amplitudinea unei într-o secțiune prin coordonata  $z=2.24$  m la timpul  $t=50$  ms.

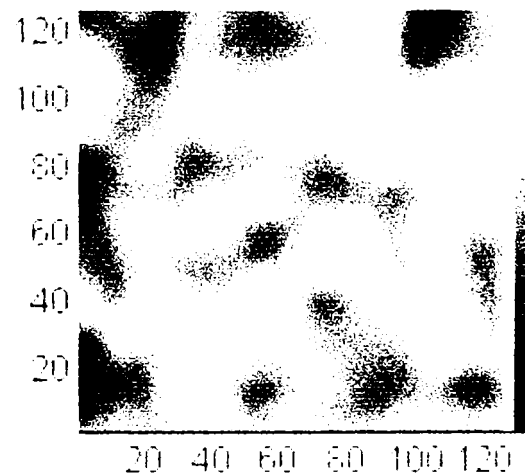


Fig. 2-19. Presiunea( $t$ ).  $t=50$  ms,  $4.48 \times 4.48$  mxm,  $(P_{min}, P_{max}) = (-0.297, 0.168)$  Pa. Câmpul de presiune din cavitatea rezonantă din Fig. 2-3 la momentul  $t=50$  ms.

## 2.4. Frontiere Absorbante. Simularea spațiului infinit.

Așa cum s-a văzut, sistemul ( 2-9 ) - ( 2-11 ) transformă practic orice domeniu de calcul într-o cavitate rezonantă, lucru care nu este de dorit în majoritatea situațiilor practice.

În paragraful de față se arată, că este posibilă simularea unui mediu infinit prin împărțirea gridului de discretizare în două zone diferite: una guvernată de ecuațiile acustice ( 2-3 ) - ( 2-5 ) reprezentată de regiunea centrală a Fig. 2-20 și o a doua formată din ariile C1, L, C2, T, C3, R, C4, B în care este valid un set de ecuații cu atenuare mare și proprietăți nereflectătoare. Se poate arăta [2-7], [2-8], [2-12], [2-13] că este posibilă găsirea unui singur sistem de ecuații (expresiile ( 2-12 ) - ( 2-15)) care în funcție de niște parametri să satisfacă ambele zone. Ideea de bază în deducerea expresiilor în cauză este împărțirea nefizică a presiunii,  $p$  în două componente aditive:  $p_x$  corespunzătoare lui  $(\partial/\partial x)v_x$  și  $p_z$  lui  $(\partial/\partial z)v_z$  astfel încât  $p=p_x+p_z$ . De asemenea se mai introduce un coeficient de atenuare  $\alpha$  de componente  $\alpha_x$  și  $\alpha_z$  ce are rolul de a amortiza progresiv undele din regiunea absorbantă.

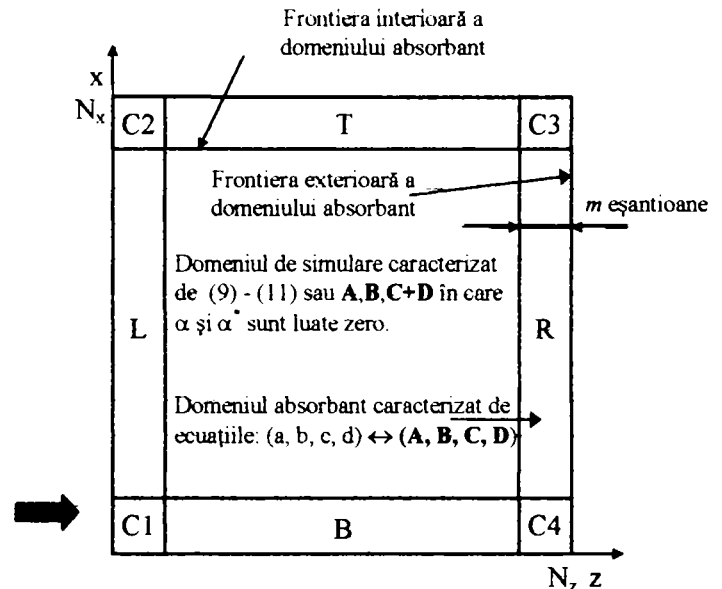
$$-\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{\alpha_x \rho}{\kappa} v_x = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (\text{a}), \quad (2-12)$$

$$-\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{\alpha_z \rho}{\kappa} v_z = \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad (\text{b}), \quad (2-13)$$

$$-\kappa \frac{\partial \hat{p}_x}{\partial t} - \alpha_x p_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (\text{c}), \quad (2-14)$$

$$-\kappa \frac{\partial \hat{p}_z}{\partial t} - \alpha_z p_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{d}). \quad (2-15)$$

Fig. 2-20. Împărțirea domeniului de calcul în subzone cu scopul implementării conceptului de frontieră absorbantă.



Se observă că dacă  $\alpha_x = \alpha_z = 0$  ( 2-14 ), ( 2-15 ) dau prin adunare ecuația ( 2-5 ) iar ( 2-12 ) ( 2-13 ) sunt ( 2-4 ) respectiv ( 2-5 ). Se poate demonstra [2-7], [2-8] că o interfață normală pe axa  $z$  între un mediu real cu parametrii ( $\alpha_x=0, \alpha_z=0, \kappa, \rho$ ) și unul ireal absorbant având ( $\alpha_x=0, \alpha_z, \kappa, \rho$ ) este nereflectătoare indiferent de unghiul de incidență. O interfață normală la axa  $x$  este de asemenea nereflectătoare dacă același mediu acustic este interfațat cu unul având ( $\alpha_x, \alpha_z=0, \kappa, \rho$ ).

Ecuațiile ( 2-12 ) - ( 2-15 ) pot fi transformate într-un sistem cu diferențe finite urmând schema de discretizare din Fig. 2-1, după cum urmează:

$$-\rho(i,j) \frac{V_x^{k+1/2}(i,j) - V_x^{k-1/2}(i,j)}{\Delta t} - \frac{\alpha_x(i,j)\rho(i,j)}{\kappa(i,j)} \frac{V_x^{k+1/2}(i,j) + V_x^{k-1/2}(i,j)}{2} = \frac{P^k(i+1/2,j) - P^k(i-1/2,j)}{\Delta x},$$

$$V_x^{k+1/2}(i,j) \left( -\frac{\rho(i,j)}{\Delta t} - \frac{\alpha_x(i,j)\rho(i,j)}{2\kappa(i,j)} \right) + V_x^{k-1/2}(i,j) \left( \frac{\rho(i,j)}{\Delta t} - \frac{\alpha_x(i,j)\rho(i,j)}{2\kappa(i,j)} \right) = \frac{P^k(i+1/2,j) - P^k(i-1/2,j)}{\Delta x},$$

$$V_x^{k+1/2}(i,j) = \frac{\left( \frac{\rho(i,j)}{\Delta t} - \frac{\alpha_x(i,j)\rho(i,j)}{2\kappa(i,j)} \right)}{\left( \frac{\rho(i,j)}{\Delta t} + \frac{\alpha_x(i,j)\rho(i,j)}{2\kappa(i,j)} \right)} V_x^{k-1/2}(i,j) - \frac{1}{\Delta x \left( \frac{\rho(i,j)}{\Delta t} + \frac{\alpha_x(i,j)\rho(i,j)}{2\kappa(i,j)} \right)} \left( P^k(i+1/2,j) - P^k(i-1/2,j) \right),$$

Făcând notațiile:

$$\gamma_{vx}^- = \left( \frac{\rho(i,j)}{\Delta t} - \frac{\alpha_x(i,j)\rho(i,j)}{2\kappa(i,j)} \right), \quad \gamma_{vx}^+ = \left( \frac{\rho(i,j)}{\Delta t} + \frac{\alpha_x(i,j)\rho(i,j)}{2\kappa(i,j)} \right),$$

se ajunge la următoarea formă cu diferențe finite corespunzătoare ecuației ( 2-12 ):

$$V_x^{k+1/2}(i,j) = \frac{\gamma_{vx}^-}{\gamma_{vx}^+} V_x^{k-1/2}(i,j) - \frac{1}{\gamma_{vx}^+ \Delta x} \left( P^k(i+1/2,j) - P^k(i-1/2,j) \right) \quad (\text{A}) \leftrightarrow (\text{a}) \quad (2-16)$$

Cu ajutorul notațiilor:

$$\begin{aligned} \gamma_{vz}^- &= \left( \frac{\rho(i+1/2, j+1/2)}{\Delta t} - \frac{\alpha_z(i+1/2, j+1/2)\rho(i+1/2, j+1/2)}{2k(i+1/2, j+1/2)} \right) \\ \gamma_{vz}^+ &= \left( \frac{\rho(i+1/2, j+1/2)}{\Delta t} + \frac{\alpha_z(i+1/2, j+1/2)\rho(i+1/2, j+1/2)}{2k(i+1/2, j+1/2)} \right) \end{aligned} \quad (2-17)$$

se găsește corespondentul cu diferențe finite al ecuației ( 2-13 ) ca fiind:

$$V_z^{k+1, 2}(i+1/2, j+1/2) = \frac{\gamma_{vz}^-}{\gamma_{vz}^+} V_z^{k-1, 2}(i+1/2, j+1/2) - \frac{1}{\gamma_{vz}^+ \Delta z} \left( P^k(i+1/2, j+1) - P^k(i+1/2, j) \right) (\mathbf{B}) \leftrightarrow (b) \quad (2-18)$$

Într-un mod similar cu ( 2-12 ) ecuația ( 2-14 ) se scrie:

$$-\kappa(i+1/2, j) \frac{P_x^{k+1}(i+1/2, j) - P_x^k(i+1/2, j)}{\Delta t} - \alpha_x(i+1/2, j) \frac{P_x^{k+1}(i+1/2, j) + P_x^k(i+1/2, j)}{2} = \frac{V_x^{k+1, 2}(i+1, j) - V_x^{k+1, 2}(i, j)}{\Delta x}$$

în care:

$$\gamma_{px}^- = \left( \frac{\kappa(i+1/2, j)}{\Delta t} - \frac{\alpha_x(i+1/2, j)}{2} \right), \quad \gamma_{px}^+ = \left( \frac{\kappa(i+1/2, j)}{\Delta t} + \frac{\alpha_x(i+1/2, j)}{2} \right), \quad (2-19)$$

Rezultă astfel forma discretă:

$$P_x^{k+1}(i+1/2, j) = \frac{\gamma_{px}^-}{\gamma_{px}^+} P_x^k(i+1/2, j) - \frac{1}{\gamma_{px}^+ \Delta x} \left( V_x^{k+1, 2}(i+1, j) - V_x^{k+1, 2}(i, j) \right) (\mathbf{C}) \leftrightarrow (c) \quad (2-20)$$

Folosind notațiile:

$$\gamma_{pz}^- = \left( \frac{\kappa(i+1/2, j)}{\Delta t} - \frac{\alpha_z(i+1/2, j)}{2} \right), \quad \gamma_{pz}^+ = \left( \frac{\kappa(i+1/2, j)}{\Delta t} + \frac{\alpha_z(i+1/2, j)}{2} \right), \quad (2-21)$$

ecuația ( 2-15 ) ia următoarea formă:

$$P_z^{k+1}(i+1/2, j) = \frac{\gamma_{pz}^-}{\gamma_{pz}^+} P_z^k(i+1/2, j) - \frac{1}{\gamma_{pz}^+ \Delta z} \left( V_z^{k+1, 2}(i+1/2, j+1/2) - V_z^{k+1, 2}(i+1/2, j-1/2) \right) (\mathbf{D}) \leftrightarrow (d) \quad (2-22)$$

Formulele cu diferențe finite A, B, C, D pot fi folosite atât pentru aria absorbantă cât și pentru domeniul de calcul propriu zis, caz în care coeficienții  $\alpha$  sunt egalați cu zero. Totuși, utilizarea a patru ecuații în loc de trei conduce la o oarecare risipă a resurselor de calcul. Un alt dezavantaj al setului ( 2-12 ) - ( 2-15 ) este faptul că nu poate fi folosit la simularea unui mediu care prezintă pierderi.

## 2.5. Avantajele folosirii marginilor absorbante. O problemă de acustică care se rezolvată folosind conceptul de frontieră absorbantă sau transparentă.

Frontierele absorbante fac posibilă rezolvarea unui mare număr de probleme de acustică, permițând undelor elastice să părăsească spațiul de calcul, făcând astfel posibilă tratarea interacțiunii acestora cu obiecte aflate într-un domeniu larg (infinit). În general, perturbațiile elastice se reflectă de suprafețele de separație, intră în interiorul obiectelor, produc fenomene de rezonanță etc., totuși ce trece de un anumit corp nu se mai întoarce. Extinderea gridul de discretizare peste o anumită limită care în general este foarte redusă, cu scopul simulării unui spațiu deschis, nu este o alternativă viabilă.

Pentru a pune în evidență utilitatea frontierelor absorbante, se vor realiza câteva simulări pe calculator bazate pe ecuațiile cu diferențe finite A, B, C, D. Mai întâi algoritmul marginilor transparente se testează în condițiile din Fig. 2-13. Se poate vedea din Fig. 2-21 că de această dată unda acustică trece prin marginile ariei de lucru ca și cum acestea nu ar exista. Nu se produce nici o reflexie astfel fiind simulată o zonă deschisă.

Un test mai relevant se execută excitând domeniul de calcul cu o sursă de presiune impulsivă [2-3], [2-9] ca în Fig. 2-22, transparenta frontierelor, la întreaga bandă de frecvențe capabilă a se propaga în grid, putând fi astfel testată. Impulsul este considerat ca acționând în mijlocul unei arii  $128 \times 128$  elemente  $\rightarrow 12.8 \times 12.8$  mxm. Nu există nici un obstacol. Se dau densitatea  $\rho = 1000$  Kg/m<sup>3</sup> și viteza de propagare  $c = 1000$  m/s.

Fig. 2-23 prezintă harta de presiune după timpul  $t=30\text{ ms}$  de la începutul excitației. Se remarcă presiunea extrem de scăzută care rămâne în interiorul frontierelor transparente. Fig. 2-24 înfățișează diagrama temporală a evoluției presiunii într-un anumit punct. Graficul temporal arată o scădere considerabilă a presiunii dovedind transparența de bandă largă a frontierelor utilizate.

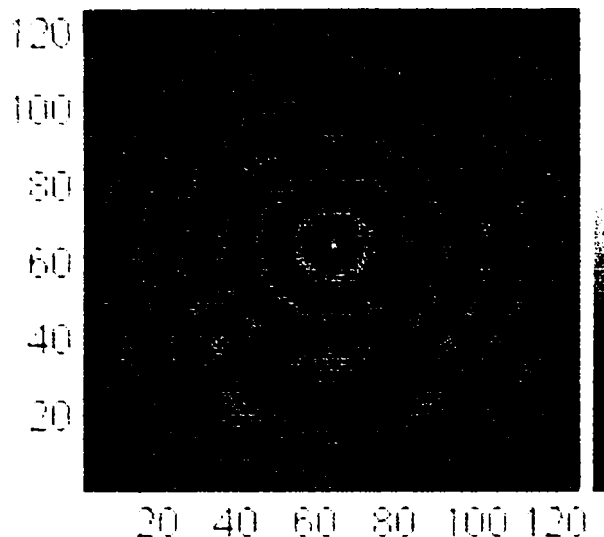


Fig. 2-21. Presiunea( $t$ ).  $t=10\text{ ms}$ ,  $4.48 \times 4.48\text{ m}$ ,  $(P_{\min}, P_{\max})=(-0.173, 0.434)\text{ Pa}$ . Spre deosebire de Fig. 2-13 unda elastică traversează frontierele gridului ca și cum nu ar exista nici o margine. Excitația este aceeași ca în Fig. 2-13.

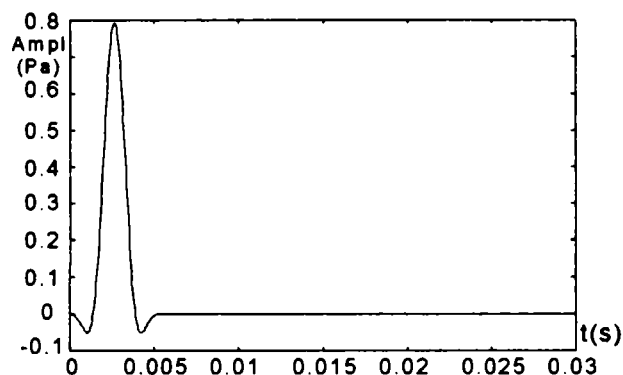


Fig. 2-22. Semnal de excitație legat de Fig. 2-23, Fig. 2-24.

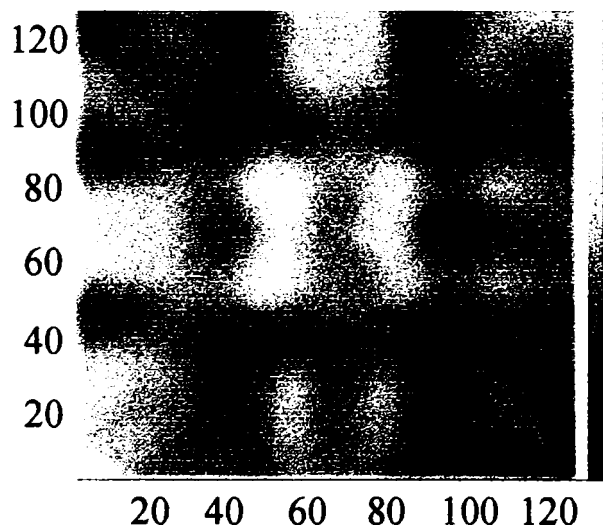


Fig. 2-23. Harta de presiune la  $t=30\text{ ms}$ .  $12.8 \times 12.8\text{ m}$ ,  $(P_{\min}, P_{\max})=(-0.0001133, 0.00006566)\text{ Pa}$ . Presiunea în interiorul domeniului de calcul deschis descrește rapid în timp.

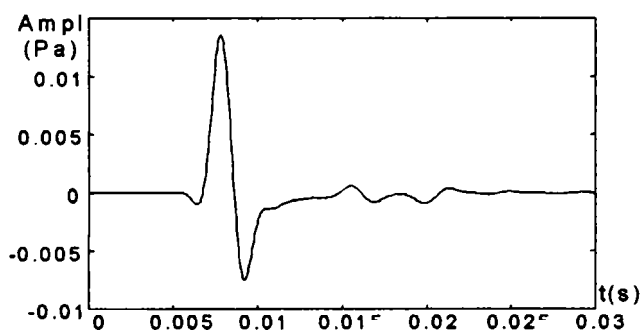


Fig. 2-24. Semnalul de presiune în punctual:  $(x,z)=(6.4\text{ m}, 1\text{ m})$ . Se vede cum pulsul părăsește aria de calcul (nu mai apare efectul de cavitate rezonantă).

În ultima parte a capitolului curent, toate aspectele tratate până acum: algoritm cu diferențe finite folosit pentru rezolvarea ecuațiilor acustice, conceptul de frontieră absorbantă, răspunsul la impuls al unei cavități, vor fi folosite împreună pentru a rezolva o problemă de interacțiune dintre o undă elastică și un obiect situat într-un mediu deschis. Enunțul sau este următorul: Dându-se excitația din Fig. 2-26 care acționează în mijlocul structurii din Fig. 2-25, se cere evoluția în timp a presiunii într-un punct având coordonatele  $(x,z)=(6,4\text{ m}, 1\text{ m})$  pe intervalul  $(0, 30\text{ ms})$ . Se cere de asemenea harta de presiune la  $t=30\text{ ms}$ .

Răspunsul la problema de mai sus este prezentat în graficele din Fig. 2-28 și Fig. 2-27.

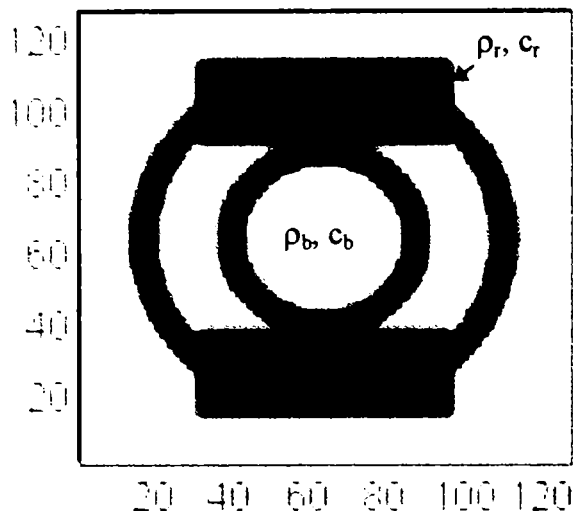


Fig. 2-25. Domeniu de calcul este un grid cu dimensiunea  $128 \times 128$  elemente  $\rightarrow 12.8 \times 12.8$  mxm. Forma colorată în negru reprezintă o cavitate rezonantă semitransparentă a având  $\rho_r=1000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $c_r=1000 \text{ m/s}$ . Densitatea și viteza de propagare corespunzătoare mediului de bază sunt  $\rho_b=3000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $c=3000 \text{ m/s}$ .

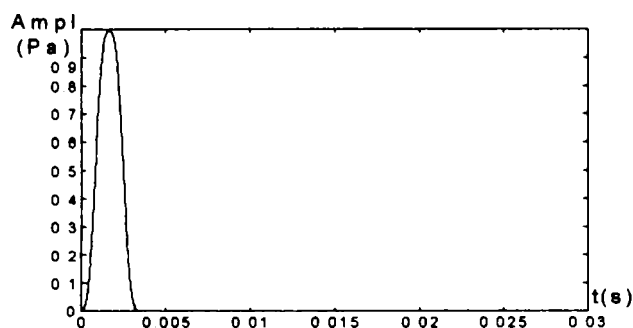


Fig. 2-26. Semnal de excitare.

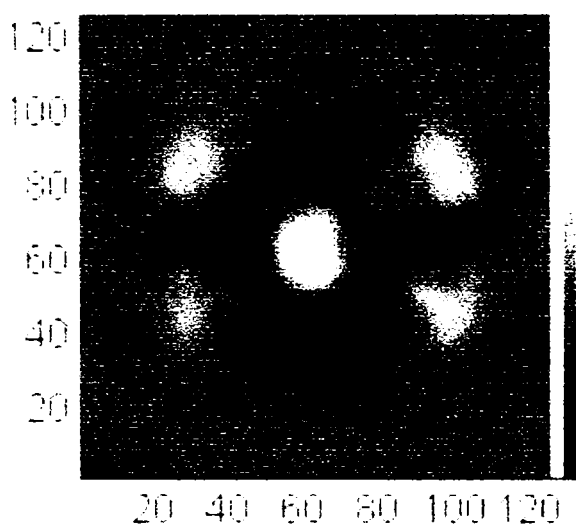


Fig. 2-27. Harta de presiune la  $t=30 \text{ ms}$ .  $12.8 \times 12.8$  mxm,  $(P_{min}, P_{max})=(-0.08889, 0.1652) \text{ Pa}$ . Spre deosebire de Fig. 2-23, o cantitate considerabilă de energie încă se mai află în interiorul domeniului de calcul.

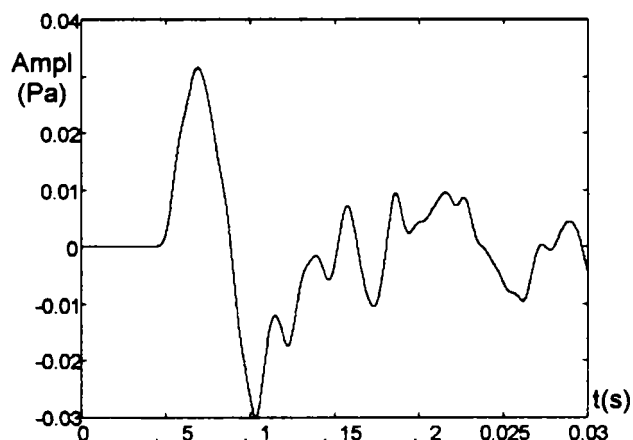


Fig. 2-28. Evoluția în timp a presiunii în punctul de coordonate  $(x,z)=(6,4m, 1m)$ . Spre deosebire de Fig. 2-24, punctul respectiv încă mai oscilează. cavitatea rezonantă cu pierderi menține energia pulsului excitator radiind-o relativ încet.

## 2.6. Concluzii

S-a arătat așadar că ecuațiile acustice în cazul 2D pot fi rezolvate cu succes de către un calculator utilizând algoritmi cu diferențe finite. Toate simulările numerice au fost realizate în MATLAB 6.5 pe un computer personal de 1.2 GHz și 128 M memorie RAM în intervale de timp variind de la câteva secunde la aproximativ 3 minute (timpul necesar pentru generarea imaginii din Fig. 2-27). Tratarea numerică a cazului general 3D nu este abordabilă timpul de calcul fiind enorm. Pentru cazul 1D se pot însă investiga structuri mecanice a căror dimensiuni sunt de până la câteva mii de lungimi de undă.



### 3. Unde elastice în medii liniare și izotrope

#### 3.1. Ecuațiile elastostaticii

##### 3.1.1. Tensiuni

Ecuațiile elastodinamicii al căror caz particular sunt ecuațiile acustice prezentate în capitolul 2 se deduc [3-1], [3-10], [3-2,3,4,5,6,7,8,9], [5-3] pornind de la împărțirea domeniului spațial de studiu în paralelipede elementare cu laturile  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  ca în Fig. 3-1. Pentru început se consideră un corp elastic aflat în echilibru static sub acțiunea a trei forțe exterioare  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  (Fig. 3-1). Asupra fețelor fiecărui element de volum elementar vor acționa forțe de direcție oarecare care se pot descompune fiecare în câte trei componente paralele cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . În teoria elasticității este convenabil să se lucreze cu tensiuni care se definesc prin raportarea forței la suprafața pe care aceasta acționează. Astfel, notând cu  $f_{zz}$  forța normală care acționează pe suprafața superioară a volumului elementar din Fig. 3-3 și cu  $f_{xz}$  una din cele două forțe tangențiale corespunzătoare aceleiași suprafețe, au loc relațiile  $f_{zz} = \tau_{zz} dx dy$ ,  $f_{xz} = \tau_{xz} dx dy$ .  $\tau_{zz}$  poartă denumirea de tensiune normală iar  $\tau_{xz}$  se numește tensiune tangențială. Analog se definesc și celelalte tensiuni din Fig. 3-3.

Din principiul acțiunii și reacțiunii rezultă că forțele normale care acționează pe fiecare două fețe paralele sunt egale și de semn contrar, ca urmare și eforturile unitare corespunzătoare sunt egale. Pentru a vedea în ce relație există între tensiunile tangențiale se folosește ecuația momentelor. De exemplu pentru  $\tau_{yx}$  și  $\tau_{xy}$  are loc relația:

$$2\tau_{yx} dy dz \frac{dx}{2} - 2\tau_{xy} dx dz \frac{dy}{2} = 0, \text{ deci: } \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad (3-1)$$

analog:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (3-2)$$

Concomitent cu tensiunile în corp apare și o stare de deformație caracterizată prin alungirile  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  și lunecările  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ ,  $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ .

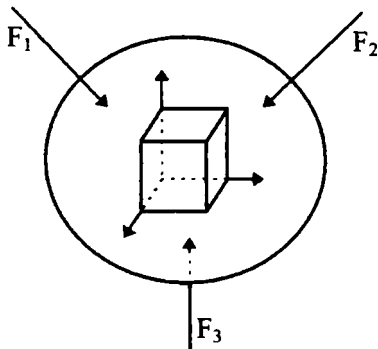


Fig. 3-1.

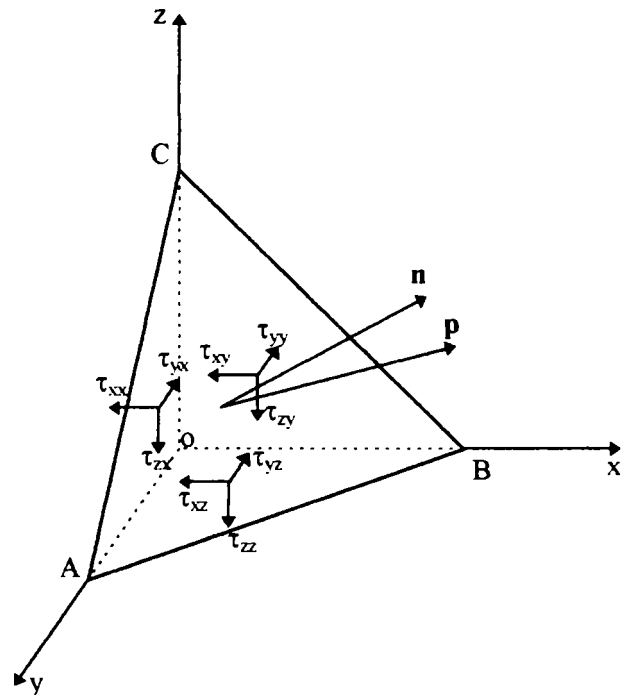


Fig. 3-2.

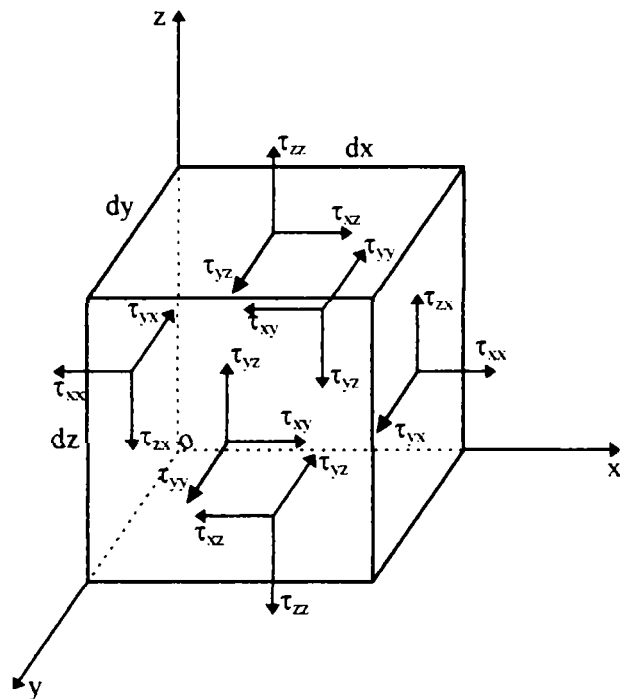


Fig. 3-3.

În continuare se pune problema găsirii unei direcții speciale de acțiune a unei forțe  $F$  astfel încât componentele tangențiale ale tensiunii ce acționează asupra unui volum elementar să se anuleze rămânând doar cele normale.

Pentru aceasta se alege un element infinitezimal de formă tetraedrică ca în Fig. 3-2. Cunoscând tensiunile normale și tangențiale pe fețele tetraedrului din planele de coordonate, se cere determinarea tensiunii  $p$  de componente  $p_x, p_y, p_z$  ce acționează pe fața ABC.

Notând cu  $dS$  suprafața triunghiului ABC, cu  $n$  versorul normalei pe suprafața ABC, cu  $\alpha = \cos(n, i), \beta = \cos(n, j), \gamma = \cos(n, k)$ , unde  $i, j, k$  sunt versorii axelor  $Ox, Oy, Oz$ , atunci se pot scrie următoarele relații:

$$dA_{x(AOC)} = \alpha dA; \quad dA_{y(BOC)} = \beta dA; \quad dA_{z(AOB)} = \gamma dA, \quad (3-3)$$

cosinuzii unghiurilor diedre dintre ABC și AOC, BOC, AOB fiind egali cu  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Scriind echilibrul forțelor pe axa  $Ox$  se ajunge la:

$$p_x dA = \tau_{xx} dA_x + \tau_{xy} dA_y + \tau_{xz} dA_z. \quad (3-4)$$

Înlocuind (3-3) în (3-4) se obține expresia lui  $p_x$ :

$$p_x = \tau_{xx} \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma. \quad (3-5)$$

Analog  $p_y, p_z$  sunt date de:

$$p_y = \tau_{yx} \alpha + \tau_{yy} \beta + \tau_{yz} \gamma, \quad (3-6)$$

$$p_z = \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta + \tau_{zz} \gamma. \quad (3-7)$$

Expresiile (3-5), (3-6), (3-7) se pot scrie matricial:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}. \quad (3-8)$$

Tensiunea  $p$  se descompune relativ la suprafața ABC în două componente: una normală pe ABC notată cu  $\tau_n$  și una tangențială,  $\tau_t$ . Se pune problema dacă există o direcție  $n(\alpha, \beta, \gamma)$  astfel încât pe suprafața normală pe aceasta, tensiunea tangențială să fie zero,  $\tau_t = 0$ .

Relația ( 3-8 ) fiind generală, este valabilă pentru orice suprafață ABC de orientare dată de normala  $\mathbf{n}$  pe aceasta, deci și pentru cazul în care suprafața ABC are o astfel de poziție încât  $\tau_t=0$ .

Ținând seama de cele prezentate mai sus se pot scrie așadar relațiile:

$$\begin{aligned} p_x &= \tau_{xx}\alpha + \tau_{xy}\beta + \tau_{xz}\gamma = \tau_n\alpha \\ p_y &= \tau_{yx}\alpha + \tau_{yy}\beta + \tau_{yz}\gamma = \tau_n\beta, \\ p_z &= \tau_{zx}\alpha + \tau_{zy}\beta + \tau_{zz}\gamma = \tau_n\gamma \end{aligned} \quad (3-9)$$

necunoscutele fiind cosinușii directori  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Pentru ca sistemul algebric ( 3-9 ) să aibă soluții nebanale trebuie ca:

$$\begin{vmatrix} \tau_{xx} - \tau_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} - \tau_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} - \tau_n \end{vmatrix} = 0. \quad (3-10)$$

Expresia ( 3-10 ) reprezintă o ecuație algebrică de ordinul trei de forma:

$$\tau_n^3 - J_1\tau_n^2 + J_2\tau_n - J_3 = 0, \quad (3-11)$$

unde:

$$\begin{aligned} J_1 &= \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} \\ J_2 &= \tau_{xx}\tau_{yy} - \tau_{xy}^2 + \tau_{yy}\tau_{zz} - \tau_{yz}^2 + \tau_{zz}\tau_{xx} - \tau_{zx}^2 \\ J_3 &= \tau_{xx}\tau_{yy}\tau_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xx}\tau_{yz}^2 - \tau_{yy}\tau_{zx}^2 - \tau_{zz}\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (3-12)$$

Soluțiile ecuației ( 3-11 ) care se notează cu  $\tau_{n1}, \tau_{n2}, \tau_{n3}$  se numesc tensiuni normale principale. Acestea introduse în ( 3-9 ) conduc la trei seturi de cosinuși directori corespunzători la trei normale pe suprafețe de tip ABC. Vectorii  $\mathbf{n}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  cu  $i = 1, 2, 3$  se normalizează astfel încât:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1. \quad (3-13)$$

Se poate demonstra că cele trei direcții, astfel obținute sunt perpendiculare între ele formând un sistem de coordonate.

Componentele tensiunii din sistemul de coordonate inițial  $xyz$  se pot exprima prin tensiunile principale  $\tau_{n\mu}$  cu  $\mu=1, 2, 3$  și cosinușii directori ai axelor principale  $\mu$  cu axele  $x, y, z$ :  $\cos(x, \mu), \cos(y, \mu), \cos(z, \mu)$ , folosind următoarele formule:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \sum_{\mu=1}^3 \tau_{n\mu} \cos^2(x, \mu); & \tau_{xy} &= \sum_{\mu=1}^3 \tau_{n\mu} \cos(x, \mu) \cos(y, \mu); \\ \tau_{yy} &= \sum_{\mu=1}^3 \tau_{n\mu} \cos^2(y, \mu); & \tau_{yz} &= \sum_{\mu=1}^3 \tau_{n\mu} \cos(y, \mu) \cos(z, \mu); & (a) & & (b) \\ \tau_{zz} &= \sum_{\mu=1}^3 \tau_{n\mu} \cos^2(z, \mu); & \tau_{zx} &= \sum_{\mu=1}^3 \tau_{n\mu} \cos(z, \mu) \cos(x, \mu); \end{aligned} \quad (3-14)$$

Rezultă în final că, dacă se izolează dintr-un corp elastic un element de volum paralelipedic având muchiile paralele cu direcțiile principale ale tensiunilor normale, pe fețele elementului acționează numai eforturi unitare normale de valori  $\tau_{n1}, \tau_{n2}, \tau_{n3}$ .

### 3.1.2. Deformații

Tensiunile normale și tangențiale care acționează asupra paralelipipedului elementar produc deformații ale formei și volumului acestuia. În general prin deformarea unui corp elastic variază atât distanța dintre punctele sale cât și unghiul dintre două drepte. Variația distanței dintre două puncte este pusă în evidență prin expresia:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (3-15)$$

unde  $\varepsilon$  se numește alungire relativă, denumit pe scurt alungire,  $\Delta l$  este diferența dintre lungimea finală și cea inițială (alungirea absolută) iar  $l$  lungimea finală. Variația unghiului dintre două drepte se pune în evidență prin deformația unghiulară  $\gamma$  care este diferența unghiurilor de dinainte și de după deformare.

În cazul general al paralelipipedului din Fig. 3-3., Fig. 3-4. există trei alungiri, deformații longitudinale  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  și trei deformații unghiulare notate cu  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

La fel ca la tensiuni se poate găsi un sistem de coordonate privilegiat pentru care deformațiile unghiulare se anulează. Relațiile dintre deformațiile principale  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  din sistemul de coordonate principal  $\mu$ , cu  $\mu=1, 2, 3$  și cele din sistemul de coordonate  $xyz$  au următoarea formă:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{\mu=1}^3 \varepsilon_{\mu} \cos^2(x, \mu); & \gamma_{xy} &= 2 \sum_{\mu=1}^3 \varepsilon_{\mu} \cos(x, \mu) \cos(y, \mu); \\ \varepsilon_y &= \sum_{\mu=1}^3 \varepsilon_{\mu} \cos^2(y, \mu); & \gamma_{yz} &= 2 \sum_{\mu=1}^3 \varepsilon_{\mu} \cos(y, \mu) \cos(z, \mu); & (a) & & (b) \\ \varepsilon_z &= \sum_{\mu=1}^3 \varepsilon_{\mu} \cos^2(z, \mu); & \gamma_{zx} &= 2 \sum_{\mu=1}^3 \varepsilon_{\mu} \cos(z, \mu) \cos(x, \mu); \end{aligned} \quad (3-16)$$

### 3.1.3. Legea lui Hook generalizată

Fie un element de volum paralelipedic având muchiile paralele cu direcțiile principale ale tensiunilor, pe fețele cărui acționează tensiunile principale  $\tau_{n1}, \tau_{n2}, \tau_{n3}$ . Fiecare din cele trei tensiuni produce câte o alungire pe direcția pe care acționează și câte o contracție pe direcțiile de acțiune a celorlalte două tensiuni principale.

Tab. 1. Tensiuni și deformații.

Tensiunea	Direcția $\tau_{n1}$	Direcția $\tau_{n2}$	Direcția $\tau_{n3}$
$\tau_{n1}$	$\varepsilon_{11} = \frac{\tau_{n1}}{E}$ (alungire)	$\varepsilon_{12} = -\nu \frac{\tau_{n1}}{E}$ (contracție)	$\varepsilon_{13} = -\nu \frac{\tau_{n1}}{E}$ (contracție)
$\tau_{n2}$	$\varepsilon_{21} = -\nu \frac{\tau_{n2}}{E}$ (contracție)	$\varepsilon_{22} = \frac{\tau_{n2}}{E}$ (alungire)	$\varepsilon_{23} = -\nu \frac{\tau_{n2}}{E}$ (contracție)
$\tau_{n3}$	$\varepsilon_{31} = -\nu \frac{\tau_{n3}}{E}$ (contracție)	$\varepsilon_{32} = -\nu \frac{\tau_{n3}}{E}$ (contracție)	$\varepsilon_{33} = \frac{\tau_{n3}}{E}$ (alungire)

Alungirea totală pe o direcție este suma dintre alungirea datorată tensiunii ce acționează pe direcția respectivă și contracțiile corespunzătoare direcției date, generate de celelalte două tensiuni principale.

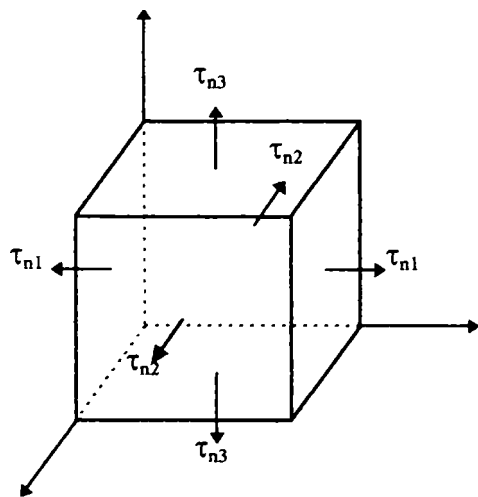


Fig. 3-4.

Se poate scrie așadar:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} = \frac{1}{E} [\tau_{n1} - \nu(\tau_{n2} + \tau_{n3})] \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} = \frac{1}{E} [\tau_{n2} - \nu(\tau_{n3} + \tau_{n1})], \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\tau_{n3} - \nu(\tau_{n1} + \tau_{n2})] \end{aligned} \quad (3-17)$$

unde  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sunt alungirile totale pe cele trei direcții principale iar  $E$  și  $\nu$  sunt două constante de material denumite modul de elasticitate longitudinal, respectiv coeficient de contracție transversală.

Relațiile ( 3-17 ) reprezintă legea lui Hook generalizată raportată la direcțiile principale.

Cu ajutorul seturilor de formule de transformare ( 3-14 - a ) și ( 3-16 - a ) legea lui Hook , ( 3-17 ) se poate raporta la sistemul de coordonate  $xyz$  rezultând în final **Legea lui Hook Generalizată**:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\tau_{xx} - \nu(\tau_{yy} + \tau_{zz})] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\tau_{yy} - \nu(\tau_{zz} + \tau_{xx})] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})]\end{aligned}\quad (3-18)$$

De asemenea din expresiile ( 3-14 - b), ( 3-16 - b) se obține:

$$\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tau_{zx} \quad (3-19)$$

## 3.2. Ecuațiile elastodinamicii

### 3.2.1. Stabilirea relației dintre viteze și tensiuni

Legea a doua a dinamicii pentru orice masă cuprinsă în volumul  $V$  al unui mediu continuu are forma [3-1]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{v} dm = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{v} \rho dV = \int_V \mathbf{f} dV + \oint_{\Sigma} \mathbf{p}_n dS, \quad (3-20)$$

unde  $\mathbf{v}$  este viteza masei respective,  $\mathbf{f}$  forță volumică din spațiul considerat (greutatea fiind un exemplu de forță volumică),  $\mathbf{p}$  este tensiunea exercitată asupra suprafeței ce înconjoară volumul luat în calcul,  $\mathbf{n}$  normala la suprafață, corespunzătoare ariei pe care acționează tensiunea iar  $\Sigma$  este suprafața ce înconjoară volumul  $V$ . Forța masică se definește astfel:  $\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_V}{\Delta V}$  unde  $\mathbf{F}_V$  este forța volumică totală ce acționează

asupra masei  $\Delta m = \rho \Delta V$ . Tensiunea  $\mathbf{p}$  este dată de expresia  $\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_S}{\Delta S}$  unde  $\mathbf{F}_S$  este forța ce acționează

asupra elementului de suprafață  $\Delta S$ .

Formula ( 3-20 ) arată că asupra unei mase oarecare aparținând unui mediu continuu acționează două forțe: una volumică,  $\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{f} dV$ , și una ce se datorează tensiunilor aplicate pe suprafața ce mărginește masa în

cauză,  $\mathbf{F}_S = \oint_{\Sigma} \mathbf{p} n dS$ . În cazul în care  $\mathbf{F}_S = 0$ , atât membrul drept cât și cel stâng din ( 3-20 ) sunt integrale de

volum. Ca urmare punând condiția ca legea a doua a dinamicii să fie valabilă pentru orice volum  $V$  se ajunge imediat la forma sa locală:  $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}$  ce poate fi scrisă pe componente  $x, y, z$ , integrată și folosită în

diverse calcule (de exemplu aflarea vitezei finale a unei mase oarecare atunci când se cunoaște viteza sa inițială și densitatea volumică de forță  $\mathbf{f}$ ).

În cazul elastodinamicii  $\mathbf{F}_S \neq 0$ , deoarece aceasta se bazează pe transmiterea din aproape în aproape a mișcării între masele elementare ce compun un mediu continuu, prin tensiuni aplicate pe suprafețele exterioare care înconjoară aceste mase. Pentru obținerea unei forme locale a ecuației ( 3-20 ) se impune transformarea tensiunilor de suprafață în forțe de volum.

În general forța care se exercită asupra unui element de suprafață  $dS$  depinde de poziția și orientarea lui  $dS$ , adică este nu numai funcție de punct ci și de orientarea normalei  $\mathbf{n}$  la suprafața  $dS$  [3-11]. Fiecare suprafață elementară  $dS$  de orientare arbitrară se poate descompune în trei suprafețe de normale  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (Fig. 3-2). Forța  $\mathbf{F}_{Sn}$  care acționează asupra suprafeței  $dS$  se descompune și ea în trei forțe  $\mathbf{F}_{Si}, \mathbf{F}_{Sj}, \mathbf{F}_{Sk}$  corespunzătoare celor trei suprafețe fiecare având în general o orientare diferită de normalele la suprafețele perpendiculare considerate. La rândul lor fiecare din forțele  $\mathbf{F}_{Si}, \mathbf{F}_{Sj}, \mathbf{F}_{Sk}$  se descompun în alte trei forțe. De exemplu  $\mathbf{F}_{Si}$  va avea o componentă paralelă cu direcția  $\mathbf{i}$  ( $\mathbf{F}_{Sii}$ ) și câte o componentă paralelă cu direcțiile  $\mathbf{j}$  ( $\mathbf{F}_{Sij}$ ) și  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{F}_{Sik}$ ). Ca urmare:  $\mathbf{F}_{Si} = \mathbf{i}F_{Sii} + \mathbf{j}F_{Sij} + \mathbf{k}F_{Sik}$ . Ținând seama de definiția tensiunii (forța raportată la suprafață), și de faptul că toate cele patru forțe se raportează la aceeași arie se poate scrie:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{i} \tau_{xx} + \mathbf{j} \tau_{xy} + \mathbf{k} \tau_{xz}, \quad (3-21)$$

și analog:

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{i} \tau_{yx} + \mathbf{j} \tau_{yy} + \mathbf{k} \tau_{yz}, \quad (3-22)$$



$$\mathbf{p}_k = i\tau_{zx} + j\tau_{zy} + k\tau_{zz} . \quad (3-23)$$

Cum  $\mathbf{F}_{S_n} = \mathbf{F}_{s_i} + \mathbf{F}_{s_j} + \mathbf{F}_{s_k}$ , rezultă că este adevărată următoarea egalitate:  $\mathbf{p}_n dS = \mathbf{p}_i \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) dS + \mathbf{p}_j \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) dS + \mathbf{p}_k \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) dS$ . Notând cele trei unghiuri cu  $\alpha, \beta, \gamma$  formulele (3-21) - (3-23) se completează cu relația:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_i \cos \alpha + \mathbf{p}_j \cos \beta + \mathbf{p}_k \cos \gamma . \quad (3-24)$$

Înlocuind (3-21) - (3-23) în (3-24) rezultă:

$$\mathbf{p}_n = i(\tau_{xx} \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma) + j(\tau_{xy} \cos \alpha + \tau_{yy} \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma) + k(\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \tau_{zz} \cos \gamma) \quad (3-25)$$

Notând componentele vectorului  $\mathbf{p}_n$  din (3-25) cu  $\mathbf{p}_{nx}, \mathbf{p}_{ny}, \mathbf{p}_{nz}$ , se poate aplica formula Gauss - Ostrogradsky pentru fiecare din componentele lui  $\mathbf{F}_S$ . Astfel, pentru  $\mathbf{F}_{S_x}$  are loc relația:

$$\mathbf{F}_{S_x} = \oint_{\Sigma} \mathbf{p}_{nx} dS = \oint_{\Sigma} [\tau_{xx} \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma] dS = \int_V \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dV . \quad (3-26)$$

Formule analoge se deduc pentru  $\mathbf{F}_{S_y}$  și  $\mathbf{F}_{S_z}$ . Înlocuind expresiile lui  $\mathbf{F}_{S_x}, \mathbf{F}_{S_y}, \mathbf{F}_{S_z}$  în legea a doua a dinamicii și punând condiția ca integrala să fie valabilă pentru orice volum  $V$  se ajunge la forma locală a legii a doua a dinamicii (3-20) scrisă pe componente:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= F_{V_x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= F_{V_y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= F_{V_z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3-27)$$

Se poate demonstra că:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (3-28)$$

Definind operatorul  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ , ecuațiile (3-27), la care se adaugă observația (3-28), capătă forma matricială:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \nabla \cdot \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} + \mathbf{F}_V \\ \text{sau prescurtat} & \\ \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} &= \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \mathbf{F}_V \end{aligned} \quad (3-29)$$

În cazul problemelor de propagare a undelor elastice tratate în această lucrare forțele volumice se vor neglija în majoritatea cazurilor.

### 3.2.2. Legea lui Hook în cazul elastodinamicii

Formulele (3-18), (3-19) reprezentând legea lui Hook generalizată pentru elastostatică se extind și la cazul elastodinamicii ținând cont de următoarele relații:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (3-30)$$

Exprimând tensiunile funcție de alungiri se ajunge la expresiile:

$$\tau_{xx} = \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3-31) \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (3-32)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (3-33) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (3-34)$$

$$\tau_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3-35) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (3-36)$$

unde  $\lambda$  și  $\mu$  sunt coeficienții lui Lamé care se exprimă în funcție de modulul de elasticitate,  $E$ , și coeficientul de contracție transversal,  $\nu$ , după cum urmează:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \quad (3-37)$$

Ecuatiile ( 3-31 ), ( 3-36 ) pot fi scrise matricial sub următoarea formă:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \mu \left( \nabla \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \nabla \right)$$

sau prescurtat

$$\bar{\tau} = \lambda \bar{\mathbf{I}}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (3-38)$$

unde prin  $\mathbf{u} \nabla$  s-a notat  $(\nabla \mathbf{u})^T$ , iar  $\bar{\mathbf{I}}$  este matricea unitate.

Ecuatiile ( 3-29 ), ( 3-38 ) constituie ecuațiile elastodinamicii pentru un mediu continuu, omogen și izotrop. Prin particularizare ele conduc la ecuațiile acustice specifice fluidelor a căror rezolvare numerică a fost tratată în capitolul 2. Astfel, înlocuind tensorul general al tensiunilor cu forma sa particulară specifică lichidelor și gazelor:  $\bar{\tau} = -p\bar{\mathbf{I}}$ , unde  $p$  este presiunea, se obțin următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p \\ -\kappa \frac{\partial p}{\partial t} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3-39)$$

unde  $\kappa=1/\lambda$ .

### 3.2.3. Ecuația elastodinamică de propagare

Cuplând ( 3-29 ) cu ( 3-38 ) se ajunge la ecuația de propagare a lui Navier-Lamé:

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \mu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F}_V, \quad (3-40)$$

care se mai poate scrie și sub următoarea formă:

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F}_V. \quad (3-41)$$

Cu ajutorul teoremei lui Helmholtz vectorii  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{F}_V$  pot fi scriși astfel:

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \Psi \quad (a) \quad \mathbf{F}_V = \nabla \varphi_V + \nabla \times \Psi_V \quad (b), \quad (3-42)$$

în care  $\varphi$ ,  $\varphi_V$  sunt potențiale scalare iar  $\Psi$ ,  $\Psi_V$  potențiale vectoriale satisfăcând condiția  $\nabla \cdot \Psi = 0$ ,  $\nabla \cdot \Psi_V = 0$ .

Pe de altă parte folosind notațiile:  $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ,  $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ , și operând asupra ecuației ( 3-41 ) cu operatorul divergență și respectiv cu operatorul rotor, se obțin două noi ecuații [1-22]:

$$\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t^2} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{F}_f}{\lambda + 2\mu}, \quad (3-43)$$

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2(\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} = -\frac{\nabla \times \mathbf{F}_f}{\mu}. \quad (3-44)$$

Indicii  $p$  și  $s$  vin de la *pressure wave* (undă compresională sau longitudinală) și respectiv *shear wave* (undă transversală).

Considerând  $\mathbf{F}_v=0$  (caz des întâlnit în aplicațiile de detecție a defectelor cu ajutorul undelor elastice), și înlocuind (3-42) (a) în (3-43), (3-44) rezultă următoarele expresii:

$$\nabla^2(\nabla^2 \varphi) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2(\nabla^2 \varphi)}{\partial t^2} = 0, \quad (a) \quad \nabla^2(\nabla^2 \Psi) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2(\nabla^2 \Psi)}{\partial t^2} = 0 \quad (b), \quad (3-45)$$

Soluții particulare importante se obțin dacă potențialele  $\varphi$  și  $\Psi$  satisfac ecuațiile de undă:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (a) \quad \nabla^2 \Psi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (b). \quad (3-46)$$

Relațiile (3-46) (a), (b) arată că  $\varphi$  satisface ecuația unei unde ce se deplasează cu viteza  $c_p$  iar  $\Psi$  pe cea a uneia care se deplasează cu viteza  $c_s$ .

### 3.2.4. Expresia tensiunilor funcție de potențiale

Ceea ce interesează în continuare este exprimarea tensiunilor funcție de potențiale.

Scrisă pe componente (3-42) (a) devine:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}, \quad (3-47)$$

în care  $\varphi$  satisface ecuația scalară (3-46) (a) iar cele trei componente ale lui  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$ ,  $\Psi_z$  satisfac (3-46) (b) scrisă pe componente.

Folosind (3-47) tensiunile (3-31) - (3-36) pot fi exprimate funcție de potențiale cu ajutorul relațiilor de mai jos:

$$\tau_{xx} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \right) \quad (3-48) \quad \tau_{xy} = \mu \left[ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \right] \quad (3-49)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \right) \quad (3-50) \quad \tau_{xz} = \mu \left[ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} \right) \right] \quad (3-51)$$

$$\tau_{zz} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) \right) \quad (3-52) \quad \tau_{yz} = \mu \left[ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \right] \quad (3-53)$$

## 4. Frontiere absorbante

Sistemul (3-39) a fost rezolvat în capitolul 2 cu ajutorul metodei diferențelor finite. Marginile gridului de discretizare, corespunzător domeniului pe care se fac calculele, acționează însă ca frontiere perfect reflectătoare ceea ce este un impediment major în rezolvarea multor probleme de acustică. Este de așteptat ca și problemele de elastodinamică, rezolvate pe baza discretizării ecuațiilor (3-29), (3-38), să se lovească de același neajuns. Tot în capitolul 2 s-a folosit (fără demonstrație) un set special de ecuații derivate din cele acustice care permiteau ieșirea undelor elastice din spațiul delimitat de gridul numeric, fără a se produce nici un fel de reflexie pe frontierele domeniului de calcul.

## 4.1. Ecuațiile elastodinamicii în coordonate extinse

În continuare pe baza lui ( 3-29 ), ( 3-38 ) se va deduce un set de ecuații care să satisfacă condiția de margine absorbantă sau transparentă pentru cazul ecuațiilor elastodinamicii și care prin particularizare să poată fi aplicat și în situația mediilor acustice.

Pentru demonstrație se consideră un spațiu format din două semispații: semispațiul din care vine unda și care este umplut cu un mediu elastic fără pierderi și semispațiul în care se duce unda. Acesta din urmă trebuie să aibă astfel de proprietăți încât să absoarbă toate undele ce ajung la suprafața de separație dintre el și mediul elastic, indiferent de unghiul de incidență și frecvență, astfel încât să nu existe nici un fel de reflexie. De asemenea unda care a pătruns în mediul absorbant trebuie să se atenueze repede la valori nesemnificative.

Pentru a introduce un astfel de mediu fictiv, absorbant sau perfect adaptat se va folosi conceptul de extindere a coordonatelor [2-8]. Maniera în care extinderea coordonatelor induce pierderi se poate înțelege plecând de la următorul exemplu: Fie  $e^{ikx}$  o undă plană dintr-un mediu fără pierderi unde  $x$  este coordonata. Făcând schimbarea de variabilă  $x=x'(a+i\alpha)$ , acțiune numită și extindere de coordonată, unda  $e^{ikx}$  devine  $e^{ikax'-k\alpha x'}$ . Cu alte cuvinte o perturbație se atenuează într-un sistem de coordonate extinse,  $x'$ , dacă variabila de extindere este complexă.

Pentru a scrie ecuațiile elastodinamicii ( 3-29 ), ( 3-38 ) în coordonate extinse se definește un operator nabla pentru coordonate extinse ca fiind:

$$\nabla_e = \hat{i} \frac{1}{e_x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{1}{e_y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{1}{e_z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4-1)$$

S-a folosit semnul “^” pus deasupra versorilor axelor de coordonate pentru că notațiile  $i$  și  $k$  se mai folosesc și pentru desemnarea numerelor complexe, respectiv pentru vectorul de propagare.

Ținând cont de ( 4-1 ) ecuațiile de mișcare în coordonate extinse se scriu:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} &= \nabla_e \cdot \bar{\tau} \\ \bar{\tau} &= \lambda \bar{\mathbb{I}} (\nabla_e \cdot \mathbf{u}) + \mu (\nabla_e \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla_e) \end{aligned} \quad (4-2)$$

În domeniul frecvență ( 4-2 ) ia forma:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho \mathbf{u} &= \nabla_e \cdot \bar{\tau} \\ \bar{\tau} &= \lambda \bar{\mathbb{I}} (\nabla_e \cdot \mathbf{u}) + \mu (\nabla_e \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla_e) \end{aligned} \quad (4-3)$$

Presupunând că ( 4-3 ) admite o soluție de forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}} \\ \bar{\tau} &= \bar{\tau}_0 e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (4-4)$$

cu

$$\mathbf{k}_e = \hat{i} \frac{1}{e_x} k_x + \hat{j} \frac{1}{e_y} k_y + \hat{k} \frac{1}{e_z} k_z, \quad (4-5)$$

rezultă:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho \mathbf{u} &= i \mathbf{k}_e \cdot \bar{\tau} \\ \bar{\tau} &= i \lambda \bar{\mathbb{I}} (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}) + \mu (\mathbf{k}_e \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{k}_e) \end{aligned} \quad (4-6)$$

Combinând relațiile ( 4-6 ) se ajunge la:

$$\omega^2 \rho \mathbf{u} = \lambda \mathbf{k}_e (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}) + \mu \mathbf{k}_e \cdot (\mathbf{k}_e \mathbf{u}) + \mu \mathbf{k}_e (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}). \quad (4-7)$$

Dacă se presupune că unda este pur transversală, adică  $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u} = 0$ , atunci:

$$\frac{\omega^2 \rho}{\mu} = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{k}_e = k_s^2 = \frac{1}{e_x^2} k_x^2 + \frac{1}{e_y^2} k_y^2 + \frac{1}{e_z^2} k_z^2. \quad (4-8)$$

Relația de dispersie ( 4-8 ) poate fi satisfăcută dacă:

$$\begin{aligned}k_x &= k_s e_x \sin \theta \cos \varphi \\k_y &= k_s e_y \sin \theta \sin \varphi \\k_z &= k_s e_z \cos \theta\end{aligned}\quad (4-9)$$

Constantele  $e_x, e_y, e_z$  pot fi numere complexe în domeniul frecvență. Așadar,  $k_x, k_y, k_z$  pot fi complexe corespunzând unor unde ce se atenuează, chiar dacă  $k_s$  este real.

Relația (4-7) are și următoarea formă alternativă:

$$\omega^2 \rho \mathbf{u} = (\lambda + 2\mu) \mathbf{k}_e (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}) + \mu \mathbf{k}_e \times \mathbf{k}_e \times \mathbf{u} \quad (4-10)$$

Dacă de data aceasta se presupune că unda este pur longitudinală, adică  $\mathbf{k}_e \times \mathbf{u} = 0$ , și  $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{k}_e$ , atunci expresia de dispersie pentru unda longitudinală sau compresională este:

$$\frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{k}_e = k_p^2 = \frac{1}{e_x^2} k_x^2 + \frac{1}{e_y^2} k_y^2 + \frac{1}{e_z^2} k_z^2, \quad (4-11)$$

care poate fi satisfăcută de:

$$\begin{aligned}k_x &= k_p e_x \sin \theta \cos \varphi \\k_y &= k_p e_y \sin \theta \sin \varphi \\k_z &= k_p e_z \cos \theta\end{aligned}\quad (4-12)$$

$k_x, k_y, k_z$  pot fi complexe.

## 4.2. Problema interfeței dintre două semispații

În continuare se presupune că avem de-a face cu o undă elastică plană incidentă pe suprafața de separație dintre două semispații solide. Se ia planul  $xz$  ca fiind frontiera dintre acestea. Ca urmare  $\partial/\partial y = 0$ . Ținând cont de (3-41) ecuația elastodinamică în domeniul frecvență și coordonate extinse este [2-8]:

$$\rho \omega^2 = (\lambda + 2\mu) \nabla_e (\nabla_e \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla_e \times \nabla_e \times \mathbf{u}. \quad (4-13)$$

Vectorul  $\mathbf{u}$  poate fi scris conform teoremei lui Helmholtz ca o sumă dintre gradientul unui potențial scalar  $\phi$  și rotorul unui potențial vector  $\psi$ :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi. \quad (4-14)$$

Potențialul  $\phi$  va fi folosit pentru descrierea undelor compresionale  $\psi$  pentru cele transversale.

Se presupune, fără pierdere de generalitate că:  $\psi = \hat{\mathbf{j}} \psi$  descrie unda de suprafață din planul  $xz$ . Condițiile de continuitate la interfață necesită continuitatea lui  $u_x, u_z, \tau_{zx}$  și  $\tau_{zz}$ .

Expresiile celor patru mărimi de mai sus se găsesc înlocuind (4-14) în (4-2). Se ajunge astfel la următorul set de ecuații:

$$u_x = \frac{1}{e_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{e_z} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (4-15)$$

$$u_z = \frac{1}{e_z} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{e_x} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4-16)$$

$$\tau_{zx} = 2\mu \frac{1}{e_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{1}{e_z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{1}{e_x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{e_z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (4-17)$$

$$\tau_{zz} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left( \frac{1}{e_z^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{e_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{e_z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right). \quad (4-18)$$

### 4.2.1. Unda compresională P

Se consideră că unda din semispațiul  $l$  este descrisă de potențialul scalar  $\phi_l$  și potențialul vector  $\psi_l$  [2-8]:



$$\phi_1 = A_1 e^{i k_{1p} \cdot r} + A_1 R_{pp} e^{i k_{1p} \cdot r} \quad (4-19)$$

$$\psi_1 = A_1 R_{vp} e^{i k_{1v} \cdot r}$$

Expresia ( 4-19 ) arată că unda  $P$  incidentă pe interfață generează atât o undă  $P$  reflectată cât și o undă de suprafață reflectată. În regiunea 2 se va considera așadar existența tot a două unde, transmise de data aceasta, unda  $P$  și  $S$ . Acestea au expresiile:

$$\phi_2 = A_1 T_{pp} e^{i k_{2p} \cdot r} \quad (4-20)$$

$$\psi_2 = A_1 T_{vp} e^{i k_{2v} \cdot r}$$

În ecuațiile de mai sus:  $k_{1p}^{\pm} = \hat{i} k_{1px} \pm \hat{k} k_{1pz}$ ,  $k_{1v}^{\pm} = \hat{i} k_{1vx} \pm \hat{k} k_{1vz}$  iar  $k_{1px}^2 + k_{1pz}^2 = k_{1p}^2$ ,  $k_{1vx}^2 + k_{1vz}^2 = k_{1s}^2$ .

Condiția de continuitate a lui  $u_x$  se obține prin înlocuirea expresiilor ( 4-19 ), ( 4-20 ) în ( 4-15 ), egalând componenta  $u_x$  din spațiul 1 cu cea din spațiul 2. În consecință:

$$\text{continuitate } u_x: \frac{k_{1px}}{e_{1x}} (1 + R_{pp}) - \frac{k_{1vz}}{e_{1z}} R_{vp} = \frac{k_{2px}}{e_{2x}} T_{pp} + \frac{k_{2vz}}{e_{2z}} T_{vp}, \quad (4-21)$$

Pentru  $u_z$ ,  $\tau_{zx}$  și  $\tau_{zz}$  se ajunge la următoarele condiții de continuitate:

$$\text{continuitate } u_z: \frac{k_{1pz}}{e_{1z}} (-1 + R_{pp}) + \frac{k_{1vz}}{e_{1x}} R_{vp} = -\frac{k_{2pz}}{e_{2z}} T_{pp} + \frac{k_{2vx}}{e_{2x}} T_{vp}, \quad (4-22)$$

$$\text{continuitate } \tau_{zx}: -\frac{2\mu_1 k_{1px} k_{1pz}}{e_{1x} e_{1z}} (-1 + R_{pp}) - \mu_1 \left( \frac{k_{1vx}^2}{e_{1x}^2} - \frac{k_{1vz}^2}{e_{1z}^2} \right) R_{vp} = \frac{2\mu_2 k_{2px} k_{2pz}}{e_{2x} e_{2z}} T_{pp} - \mu_2 \left( \frac{k_{2vx}^2}{e_{2x}^2} - \frac{k_{2vz}^2}{e_{2z}^2} \right) T_{vp}, \quad (4-23)$$

$$\text{continuitate } \tau_{zz}: -\lambda_1 k_{1p}^2 (1 + R_{pp}) - 2\mu_1 \frac{k_{1pz}^2}{e_{1z}} (1 + R_{pp}) - 2\mu_1 \frac{k_{1vx} k_{1vz}}{e_{1x} e_{1z}} R_{vp} = -\lambda_2 k_{2p}^2 T_{pp} - 2\mu_2 \frac{k_{2pz}^2}{e_{2z}} T_{pp} + 2\mu_2 \frac{k_{2vx} k_{2vz}}{e_{2x} e_{2z}} T_{vp} \quad (4-24)$$

Cele patru ecuații de continuitate de mai sus se rezolvă în necunoscutele:  $R_{vp}$ ,  $R_{pp}$ ,  $T_{vp}$ ,  $T_{pp}$ . După unele calcule se ajunge la concluzia că valorile celor patru variabile, care satisfac condiția de continuitate, sunt:  $R_{vp}=0$ ,  $R_{pp}=0$ ,  $T_{vp}=0$ ,  $T_{pp}=1$ . În consecință setul ( 4-21 ), ( 4-24 ) se transformă în:

$$\frac{k_{1px}}{e_{1x}} = \frac{k_{2px}}{e_{2x}}, \quad (4-25)$$

$$\frac{k_{1pz}}{e_{1z}} = \frac{k_{2pz}}{e_{2z}}, \quad (4-26)$$

$$\frac{\mu_1 k_{1px} k_{1pz}}{e_{1x} e_{1z}} = \frac{\mu_2 k_{2px} k_{2pz}}{e_{2x} e_{2z}}, \quad (4-27)$$

$$\lambda_1 k_{1p}^2 + 2\mu_1 \frac{k_{1pz}^2}{e_{1z}^2} = \lambda_2 k_{2p}^2 + 2\mu_2 \frac{k_{2pz}^2}{e_{2z}^2}. \quad (4-28)$$

Pentru a avea adaptare de fază trebuie ca  $k_{1px} = k_{2px}$ . Așadar, ( 4-25 ) poate fi satisfăcută dacă  $e_{1x} = e_{2x}$ . Mai mult, dacă facem ca:  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\rho_1 = \rho_2$  atunci ( 4-26 ) - ( 4-28 ) sunt satisfăcute chiar dacă  $e_{1x} \neq e_{2x}$ . Deci, pentru unda  $P$  există o interfață perfect adaptată dacă:

$$\mu_1 = \mu_2, \lambda_1 = \lambda_2, \rho_1 = \rho_2, e_{1x} = e_{2x}, e_{1y} = e_{2y}, e_{1z} \neq e_{2z}. \quad (4-29)$$

Așadar variabila de extindere în direcția normală la interfață nu trebuie să fie identică în cele două semispații. De exemplu dacă se iau:  $e_{1x} = e_{2x} = e_{1y} = e_{2y} = e_{1z} = 1$  și  $e_{2z}$  un număr complex, atunci semispațiul 1 este un mediu fizic real în timp ce semispațiul 2 este un material fictiv în care unda va suferi o atenuare în direcția  $z$ .

#### 4.2.2. Unda S

În acest caz câmpul din regiunea 1 se ia de următoarea formă [2-8]:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A_1 e^{ik_1 \cdot r} + A_1 R_{vv} e^{ik_1 \cdot r} \\ \phi_1 &= A_1 R_{pv} e^{ik_1 \cdot r}\end{aligned}\quad (4-30)$$

cel din semispațiul 2 fiind:

$$\begin{aligned}\psi_2 &= A_1 T_{pv} e^{ik_2 \cdot r} \\ \phi_2 &= A_1 T_{pp} e^{ik_2 \cdot r}\end{aligned}\quad (4-31)$$

S-a presupus că o undă  $S$  incidentă pe frontiera dintre cele două semispații generează două unde  $S$ , una reflectată și una transmisă și două unde  $P$  cea reflectată și cea transmisă. Condițiile de continuitate la interfață sunt:

$$\text{continuitate } u_x: \frac{k_{1px}}{e_{1x}} R_{pv} + \frac{k_{1vz}}{e_{1z}} (1 - R_{vv}) = \frac{k_{2px}}{e_{2x}} T_{pv} + \frac{k_{2vz}}{e_{2z}} T_{vv}, \quad (4-32)$$

$$\text{continuitate } u_z: \frac{k_{1pz}}{e_{1z}} R_{pv} + \frac{k_{1vx}}{e_{1x}} (1 + R_{vv}) = -\frac{k_{2pz}}{e_{2z}} T_{pv} + \frac{k_{2vx}}{e_{2x}} T_{vv}, \quad (4-33)$$

$$\text{continuitate } \tau_{zx}: -\frac{2\mu_1 k_{1px} k_{1pz}}{e_{1x} e_{1z}} R_{pv} - \mu_1 \left( \frac{k_{1vx}^2}{e_{1x}^2} - \frac{k_{1vz}^2}{e_{1z}^2} \right) (1 + R_{vv}) = \frac{2\mu_2 k_{2px} k_{2pz}}{e_{2x} e_{2z}} T_{pv} - \mu_2 \left( \frac{k_{2vx}^2}{e_{2x}^2} - \frac{k_{2vz}^2}{e_{2z}^2} \right) T_{vv}, \quad (4-34)$$

$$\text{continuitate } \tau_{zz}: -\lambda_1 k_{1p}^2 R_{pv} - 2\mu_1 \frac{k_{1pz}^2}{e_{1z}^2} R_{pv} - 2\mu_1 \frac{k_{1vx} k_{1vz}}{e_{1x} e_{1z}} (-1 + R_{vv}) = -\lambda_2 k_{2p}^2 T_{pv} - 2\mu_2 \frac{k_{2pz}^2}{e_{2z}^2} T_{pv} + 2\mu_2 \frac{k_{2vx} k_{2vz}}{e_{2x} e_{2z}} T_{vv}. \quad (4-35)$$

Asemănător cu cazul unde  $P$  tratat anterior se ajunge la concluzia că:  $R_{vp}=0$ ,  $R_{vv}=0$ ,  $T_{pv}=0$ ,  $T_{vv}=1$ , satisfac cele patru ecuații de mai sus. Prin înlocuirea celor patru coeficienți în (4-32) - (4-35) se ajunge la:

$$\frac{k_{1vz}}{e_{1z}} = \frac{k_{2vz}}{e_{2z}}, \quad (4-36)$$

$$\frac{k_{1vx}}{e_{1x}} = \frac{k_{2vx}}{e_{2x}}, \quad (4-37)$$

$$\mu_1 \left( \frac{k_{1vx}^2}{e_{1x}^2} - \frac{k_{1vz}^2}{e_{1z}^2} \right) = \mu_2 \left( \frac{k_{2vx}^2}{e_{2x}^2} - \frac{k_{2vz}^2}{e_{2z}^2} \right), \quad (4-38)$$

$$\mu_1 \frac{k_{1vx} k_{1vz}}{e_{1x} e_{1z}} = \mu_2 \frac{k_{2vx} k_{2vz}}{e_{2x} e_{2z}}. \quad (4-39)$$

Pentru adaptare de fază trebuie ca  $k_{1vz} = k_{2vz}$ . În final se ajunge la condițiile (4-29) de existență a interfeței perfect adaptate. Cu alte cuvinte există un același mediu fictiv (semispațiul 2) care este perfect adaptat cu  $l$  atât pentru unda  $P$  cât și pentru unda  $S$ .

### 4.3. Descompunerea ecuațiilor elastodinamicii

În cazul rezolvării ecuațiilor de discretizare prin metoda diferențelor finite, așa cum s-a procedat în capitolul 2, este de preferat înlăturarea derivatelor de ordinul doi. Notând:  $\mathbf{v} = \hat{a}_i / \hat{a}$  sau pentru domeniul frecvență  $\mathbf{v} = -i\omega \mathbf{u}$ , ecuațiile (4-3) devin:

$$-i\omega \rho \mathbf{v} = \nabla_e \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4-40)$$

$$-i\omega \bar{\boldsymbol{\tau}} = \lambda \bar{\nabla} (\nabla_e \cdot \mathbf{u}) + \mu (\nabla_e \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla_e). \quad (4-41)$$

Așa cum s-a mai spus, coeficienții de extindere a coordonatelor  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  trebuie să fie complecși. Ei se aleg de următoarea formă:

$$e_x = a_x + \frac{i\Omega_x}{\omega}, \quad e_y = a_y + \frac{i\Omega_y}{\omega}, \quad e_z = a_z + \frac{i\Omega_z}{\omega}. \quad (4-42)$$

Cele trei variabile s-au luat ca fiind dependente de frecvență deoarece transformata Fourier a unei valori reale va avea întotdeauna produse de tipul  $i\omega$ .

Relația, (4-40) se poate scrie sub forma:

$$-i\omega\rho\mathbf{v}_{sx} = \hat{\mathbf{i}} \frac{1}{e_x} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4-43)$$

$$-i\omega\rho\mathbf{v}_{sy} = \hat{\mathbf{j}} \frac{1}{e_y} \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4-44)$$

$$-i\omega\rho\mathbf{v}_{sz} = \hat{\mathbf{k}} \frac{1}{e_z} \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}. \quad (4-45)$$

În mod similar (4-41) capătă forma:

$$-i\omega\bar{\boldsymbol{\tau}} = \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{1}{e_x} \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{1}{e_x} \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\mathbf{i}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{i}}) \right] + \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{1}{e_y} \frac{\partial}{\partial y} + \mu \frac{1}{e_y} \frac{\partial}{\partial y} (\hat{\mathbf{j}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{j}}) \right] + \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{1}{e_z} \frac{\partial}{\partial z} + \mu \frac{1}{e_z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{k}}) \right], \quad (4-46)$$

sau desfășurat:

$$-i\omega\bar{\tau}_{sx} = \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{1}{e_x} \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{1}{e_x} \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\mathbf{i}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{i}}) \right], \quad (4-47)$$

$$-i\omega\bar{\tau}_{sy} = \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{1}{e_y} \frac{\partial}{\partial y} + \mu \frac{1}{e_y} \frac{\partial}{\partial y} (\hat{\mathbf{j}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{j}}) \right], \quad (4-48)$$

$$-i\omega\bar{\tau}_{sz} = \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{1}{e_z} \frac{\partial}{\partial z} + \mu \frac{1}{e_z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{k}}) \right]. \quad (4-49)$$

Întrucât seturile de ecuații (4-43) - (4-45) și (4-47) - (4-49) cu variabilele de extindere (4-42) corespundătoare fiecărei ecuații și trecând la domeniul timp, se obține [2-8]:

$$\rho a_x \frac{\partial \mathbf{v}_{sx}}{\partial t} + \rho \Omega_x \mathbf{v}_{sx} = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4-50)$$

$$\rho a_y \frac{\partial \mathbf{v}_{sy}}{\partial t} + \rho \Omega_y \mathbf{v}_{sy} = \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4-51)$$

$$\rho a_z \frac{\partial \mathbf{v}_{sz}}{\partial t} + \rho \Omega_z \mathbf{v}_{sz} = \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4-52)$$

$$a_x \frac{\partial}{\partial t} \bar{\tau}_{sx} + \Omega_x \bar{\tau}_{sx} = \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\mathbf{i}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{i}}) \right], \quad (4-53)$$

$$a_y \frac{\partial}{\partial t} \bar{\tau}_{sy} + \Omega_y \bar{\tau}_{sy} = \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y} (\hat{\mathbf{j}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{j}}) \right], \quad (4-54)$$

$$a_z \frac{\partial}{\partial t} \bar{\tau}_{sz} + \Omega_z \bar{\tau}_{sz} = \left[ \lambda\bar{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\hat{\mathbf{k}}) \right]. \quad (4-55)$$

unde:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{sx} + \mathbf{v}_{sy} + \mathbf{v}_{sz}, \quad (4-56)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\tau}_{sx} + \bar{\tau}_{sy} + \bar{\tau}_{sz}. \quad (4-57)$$

sau, scris desfășurat:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x,sx} \\ v_{y,sx} \\ v_{z,sx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x,sy} \\ v_{y,sy} \\ v_{z,sy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x,sz} \\ v_{y,sz} \\ v_{z,sz} \end{bmatrix}, \quad (4-58)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx,sx} & \tau_{xy,sx} & \tau_{xz,sx} \\ \tau_{yx,sx} & \tau_{yy,sx} & \tau_{yz,sx} \\ \tau_{zx,sx} & \tau_{zy,sx} & \tau_{zz,sx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx,sy} & \tau_{xy,sy} & \tau_{xz,sy} \\ \tau_{yx,sy} & \tau_{yy,sy} & \tau_{yz,sy} \\ \tau_{zx,sy} & \tau_{zy,sy} & \tau_{zz,sy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx,sz} & \tau_{xy,sz} & \tau_{xz,sz} \\ \tau_{yx,sz} & \tau_{yy,sz} & \tau_{yz,sz} \\ \tau_{zx,sz} & \tau_{zy,sz} & \tau_{zz,sz} \end{bmatrix}. \quad (4-59)$$

Constantele  $a_x, a_y, a_z$  se iau egale cu unitatea.

De notat că în cazul în care  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$ , prin adunarea expresiilor (4-50) - (4-52), (4-53) - (4-55) se obțin ecuațiile elastodinamicii (4-2).

#### 4.4. Discretizarea ecuațiilor elastodinamicii cu frontiere absorbante

Ca și în capitolul 2, se va studia doar cazul bidimensional, rezolvarea ecuațiilor elastodinamicii cu frontiere absorbante pentru situația tridimensională fiind neviabilă pe un calculator PC de nivelul anului 2003, [4-1], [4-2]. Considerând  $\partial/\partial z = 0$  ecuațiile (4-50), (4-51); (4-53), (4-54) se scriu desfășurat astfel:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v_{x,sx} \\ v_{y,sx} \end{bmatrix} + \rho \Omega_x \begin{bmatrix} v_{x,sx} \\ v_{y,sx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{xx,sx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx,sy}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{xy,sx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy,sy}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (4-60)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v_{x,sy} \\ v_{y,sy} \end{bmatrix} + \rho \Omega_y \begin{bmatrix} v_{x,sy} \\ v_{y,sy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{yx,sx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx,sy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{yy,sx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy,sy}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (4-61)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tau_{xx,sx} & \tau_{xy,sx} \\ \tau_{yx,sx} & \tau_{yy,sx} \end{bmatrix} + \Omega_x \begin{bmatrix} \tau_{xx,sx} & \tau_{xy,sx} \\ \tau_{yx,sx} & \tau_{yy,sx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} & \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (4-62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tau_{xx,sy} & \tau_{xy,sy} \\ \tau_{yx,sy} & \tau_{yy,sy} \end{bmatrix} + \Omega_y \begin{bmatrix} \tau_{xx,sy} & \tau_{xy,sy} \\ \tau_{yx,sy} & \tau_{yy,sy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} & \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4-63)$$

Adunând (4-60) cu (4-61) și (4-62) cu (4-63) și făcând  $\Omega_x = \Omega_y = 0$  se ajunge la ecuațiile elastodinamicii pentru cazul bidimensional:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (4-64)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4-65)$$

În cazul acustic tensorul tensiunilor are forma  $\bar{\tau} = -p\bar{I}$ . Ca urmare,  $\tau_{xx,sx} + \tau_{xx,sy} = -p$  și  $\tau_{yy,sx} + \tau_{yy,sy} = -p$  iar  $\tau_{xy,sx} = \tau_{yx,sy} = \tau_{xy,sy} = \tau_{yx,sy} = 0$ . Aceste valori înlocuite în (4-60) - (4-63) conduc la următoarele ecuații:

$$-\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \rho \Omega_x v_x = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} - \rho \Omega_y v_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (4-66)$$

$$-\kappa \frac{\partial p_x}{\partial t} - \Omega_x p_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad -\kappa \frac{\partial p_y}{\partial t} - \Omega_y p_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (4-67)$$

unde:  $\kappa = 1/\lambda$ ,  $\tau_{xx,xx} = \tau_{yy,yy} = p_{,xx}$ ,  $\tau_{xx,yy} = \tau_{yy,xx} = p_{,xy}$ .

De remarcat că descompunerea vitezelor  $v_x$  și  $v_y$  în câte două componente fiecare, nu mai este necesară pentru sistemul acustic. Ecuațiile ( 4-66 ), ( 4-67 ) sunt identice cu cele folosite în capitolul 2 fără demonstrație.

Folosind gridul de discretizare din Fig. 4-1, ecuațiile elastodinamice fără frontieră absorbantă, ( 4-64 ), ( 4-65 ) se discretizează în vederea rezolvării numerice după cum urmează

$$V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2} = V_{x(i+1/2,j)}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (T_{xx(i+1,j)}^k - T_{xx(i,j)}^k) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (T_{yx(i+1/2,j+1/2)}^k - T_{yx(i+1/2,j-1/2)}^k) \quad (1), \quad (4-68)$$

$$V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2} = V_{y(i,j+1/2)}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (T_{xy(i+1/2,j+1/2)}^k - T_{xy(i-1/2,j+1/2)}^k) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (T_{yy(i,j+1)}^k - T_{yy(i,j)}^k) \quad (2), \quad (4-69)$$

$$T_{xx(i,j)}^{k+1} = T_{xx(i,j)}^k + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2} - V_{x(i-1/2,j)}^{k+1/2}) + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y(i,j-1/2)}^{k+1/2}) \quad (3), \quad (4-70)$$

$$T_{xy(i+1/2,j+1/2)}^{k+1} = T_{xy(i+1/2,j+1/2)}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{y(i+1,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2}) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{x(i+1/2,j+1)}^{k+1/2} - V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2}) \quad (4), \quad (4-71)$$

$$T_{yx(i+1/2,j+1/2)}^{k+1} = T_{yx(i+1/2,j+1/2)}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{y(i+1,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2}) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{x(i+1/2,j+1)}^{k+1/2} - V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2}) \quad (5), \quad (4-72)$$

$$T_{yy(i,j)}^{k+1} = T_{yy(i,j)}^k + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y(i,j-1/2)}^{k+1/2}) + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2} - V_{x(i-1/2,j)}^{k+1/2}) \quad (6). \quad (4-73)$$

Sistemul de ecuații elastodinamice cu frontiere absorbante ( 4-60 ) - ( 4-63 ) se discretizează analog cu ( 4-64 ), ( 4-65 ) utilizând Fig. 4-1 obținându-se astfel ecuațiile ( 4-74 ) - ( 4-85 ) care se pot implementa direct pe calculator (ex: folosind utilitarul MATLAB). Cunoscând așadar excitația (ex: tensorul tensiunilor funcție de timp) într-o anumită zonă a domeniului de calcul se poate studia interacțiunea undelor elastice astfel generate cu diverse obiecte situate în interiorul zonei de discretizate, frontiera absorbantă având rolul de a lăsa undele elastice să iasă din domeniul de calcul, înlăturând astfel efectul de cavitate rezonantă întâlnit la numerizarea directă a ecuațiilor elastodinamicii.

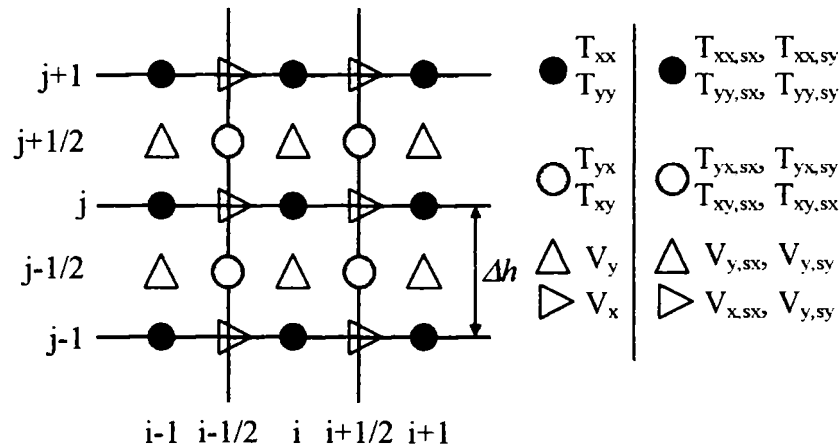


Fig. 4-1. Gridul de discretizare pentru sistemul de ecuații elastodinamice fără și cu frontiere absorbante.

$$V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2} = V_{x(i+1/2,j)}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (T_{xx(i+1,j)}^k - T_{xx(i,j)}^k) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (T_{yx(i+1/2,j+1/2)}^k - T_{yx(i+1/2,j-1/2)}^k) \quad (1) \quad (4-74)$$

$$V_{x,xx(i+1/2,j)}^{k+1/2} = (1 - \Delta t \Omega_x) V_{x,xx(i+1/2,j)}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (T_{xx,xx(i+1,j)}^k - T_{xx,xx(i,j)}^k + T_{xx,sy(i+1,j)}^k - T_{xx,sy(i,j)}^k), \quad (4-74)$$

$$V_{x,sy(i+1/2,j)}^{k+1/2} = (1 - \Delta t \Omega_y) V_{x,sy(i+1/2,j)}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left( T_{yx,xx(i+1/2,j+1/2)}^k - T_{yx,sy(i+1/2,j-1/2)}^k + T_{yx,xx(i+1/2,j-1/2)}^k - T_{yx,sy(i+1/2,j+1/2)}^k \right), \quad (4-75)$$



$$V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2} = V_{y(i,j+1/2)}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left( T_{xy(i+1/2,j+1/2)}^k - T_{xy(i-1/2,j-1/2)}^k \right) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left( T_{yy(i,j+1)}^k - T_{yy(i,j)}^k \right) \quad (2)$$

$$V_{y,xx(i,j+1/2)}^{k+1/2} = (1 - \Delta t \Omega_x) V_{y,xx(i,j+1/2)}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left( T_{xy,xx(i+1/2,j+1/2)}^k - T_{xy,xx(i-1/2,j-1/2)}^k + T_{xy,yy(i+1/2,j+1/2)}^k - T_{xy,yy(i-1/2,j-1/2)}^k \right), \quad (4-76)$$

$$V_{y,yy(i,j+1/2)}^{k+1/2} = (1 - \Delta t \Omega_y) V_{y,yy(i,j+1/2)}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left( T_{yy,xx(i,j+1)}^k - T_{yy,xx(i,j+1)}^k + T_{yy,yy(i,j)}^k - T_{yy,yy(i,j)}^k \right), \quad (4-77)$$

$$T_{xx(i,j)}^{k+1} = T_{xx(i,j)}^k + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2} - V_{x(i-1/2,j)}^{k+1/2} \right) + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y(i,j-1/2)}^{k+1/2} \right) \quad (3)$$

$$T_{xx,xx(i,j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_x) T_{xx,xx(i,j)}^k + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{x,xx(i+1/2,j)}^{k+1/2} - V_{x,xx(i-1/2,j)}^{k+1/2} + V_{x,yy(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{x,yy(i,j-1/2)}^{k+1/2} \right), \quad (4-78)$$

$$T_{xx,yy(i,j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_y) T_{xx,yy(i,j)}^k + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( V_{y,xx(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y,xx(i,j-1/2)}^{k+1/2} + V_{y,yy(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y,yy(i,j-1/2)}^{k+1/2} \right), \quad (4-79)$$

$$T_{xy(i+1/2,j+1/2)}^{k+1} = T_{xy(i+1/2,j+1/2)}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{y(i+1/2,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2} \right) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( V_{x(i+1/2,j+1)}^{k+1/2} - V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2} \right) \quad (4)$$

$$T_{xy,xx(i+1/2,j+1/2)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_x) T_{xy,xx(i+1/2,j+1/2)}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{y,xx(i+1/2,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y,xx(i,j+1/2)}^{k+1/2} + V_{y,yy(i+1/2,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y,yy(i,j+1/2)}^{k+1/2} \right), \quad (4-80)$$

$$T_{xy,yy(i+1/2,j+1/2)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_y) T_{xy,yy(i+1/2,j+1/2)}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( V_{x,xx(i+1/2,j+1)}^{k+1/2} - V_{x,xx(i+1/2,j)}^{k+1/2} + V_{x,yy(i+1/2,j+1)}^{k+1/2} - V_{x,yy(i+1/2,j)}^{k+1/2} \right), \quad (4-81)$$

$$T_{yx(i+1/2,j+1/2)}^{k+1} = T_{yx(i+1/2,j+1/2)}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{y(i+1/2,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2} \right) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( V_{x(i+1/2,j+1)}^{k+1/2} - V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2} \right) \quad (5)$$

$$T_{yx,xx(i+1/2,j+1/2)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_x) T_{yx,xx(i+1/2,j+1/2)}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{y,xx(i+1/2,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y,xx(i,j+1/2)}^{k+1/2} + V_{y,yy(i+1/2,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y,yy(i,j+1/2)}^{k+1/2} \right), \quad (4-82)$$

$$T_{yx,yy(i+1/2,j+1/2)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_y) T_{yx,yy(i+1/2,j+1/2)}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( V_{x,xx(i+1/2,j+1)}^{k+1/2} - V_{x,xx(i+1/2,j)}^{k+1/2} + V_{x,yy(i+1/2,j+1)}^{k+1/2} - V_{x,yy(i+1/2,j)}^{k+1/2} \right), \quad (4-83)$$

$$T_{yy(i,j)}^{k+1} = T_{yy(i,j)}^k + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( V_{y(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y(i,j-1/2)}^{k+1/2} \right) + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{x(i+1/2,j)}^{k+1/2} - V_{x(i-1/2,j)}^{k+1/2} \right) \quad (6)$$

$$T_{yy,xx(i,j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_x) T_{yy,xx(i,j)}^k + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{x,xx(i+1/2,j)}^{k+1/2} - V_{x,xx(i-1/2,j)}^{k+1/2} + V_{x,yy(i+1/2,j)}^{k+1/2} - V_{x,yy(i-1/2,j)}^{k+1/2} \right), \quad (4-84)$$

$$T_{yy,yy(i,j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_y) T_{yy,yy(i,j)}^k + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( V_{y,yy(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y,yy(i,j-1/2)}^{k+1/2} + V_{y,xx(i,j+1/2)}^{k+1/2} - V_{y,xx(i,j-1/2)}^{k+1/2} \right), \quad (4-85)$$

De remarcat că setul format din cele douăsprezece expresii numerice este general valabil putând fi aplicat atât pentru frontiera absorbantă cât și pentru domeniul normal, caz în care  $\Omega_x$  și  $\Omega_y$  se egalează cu zero. Ca urmare este nevoie doar de un singur set de ecuații pentru întreg gridul de discretizare fie că acesta se referă la mediul elastic sau la mediul absorbant fictiv. Totuși, folosirea a douăsprezece ecuații în loc de cinci, conduce la o creștere considerabilă a timpului de calcul ținând cont că frontiera absorbantă ocupă un spațiu mult mai mic relativ la întinderea mediului elastic propriuzis. De aceea setul ( 4-74 ) - (

4-85) este de preferat a se folosi doar pentru frontiera absorbantă, rămânând ca pentru restul spațiului de calcul să fie utilizate formele cu diferențe finite obținute prin discretizarea sistemului (4-64), (4-65) sau prin egalarea cu zero a lui  $\Omega_x$  și  $\Omega_y$  și adunarea două câte două a ecuațiilor: (4-74), (4-75); (4-76), (4-77); (4-78), (4-79); (4-80), (4-81); (4-82), (4-83); (4-84), (4-85).

Ecuțiile (4-74) - (4-85) nu pot fi implementate direct în MATLAB deoarece conțin indici fracționari. Pentru a înlătura acest neajuns gridul din Fig. 4-1 este împărțit în 4 careuri ce își au originile în punctele de coordonată  $(i, j)$  ca în Fig. 4-2, rezultând astfel sistemul (4-86) - (4-97).

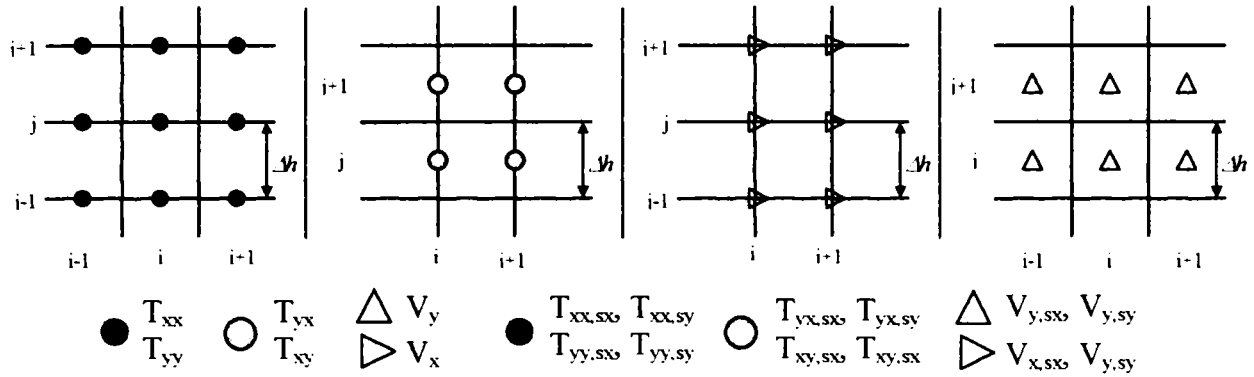


Fig. 4-2. Cele patru careuri în care este descompus gridul din Fig. 4-1 în scopul înlăturării indicilor fracționari.

$$V_{x(i+1,j)}^{k+1} = V_{x(i+1,j)}^k + \frac{\Delta t}{\rho_{(i,j)}\Delta x} (T_{xx(i+1,j)}^k - T_{xx(i,j)}^k) + \frac{\Delta t}{\rho_{(i+1,j)}\Delta y} (T_{yx(i+1,j+1)}^k - T_{yx(i+1,j)}^k) \quad (1),$$

$$V_{x,xx(i+1,j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{x(i+1,j)}) V_{x,xx(i+1,j)}^k + \frac{\Delta t}{\rho_{(i,j)}\Delta x} (T_{xx,xx(i+1,j)}^k - T_{xx,xx(i,j)}^k + T_{xx,xy(i+1,j)}^k - T_{xx,xy(i,j)}^k), \quad (4-86)$$

$$V_{x,xy(i+1,j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{y(i+1,j)}) V_{x,xy(i+1,j)}^k + \frac{\Delta t}{\rho_{(i+1,j)}\Delta y} (T_{yx,xx(i+1,j+1)}^k - T_{yx,xy(i+1,j)}^k + T_{yx,xx(i+1,j+1)}^k - T_{yx,xy(i+1,j)}^k), \quad (4-87)$$

$$V_{y(i,j+1)}^{k+1} = V_{y(i,j+1)}^k + \frac{\Delta t}{\rho_{(i,j+1)}\Delta x} (T_{xy(i+1,j+1)}^k - T_{xy(i,j+1)}^k) + \frac{\Delta t}{\rho_{(i,j)}\Delta y} (T_{yy(i,j+1)}^k - T_{yy(i,j)}^k) \quad (2),$$

$$V_{y,xx(i,j+1)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{x(i,j+1)}) V_{y,xx(i,j+1)}^k + \frac{\Delta t}{\rho_{(i,j+1)}\Delta x} \left( T_{xy,xx(i+1,j+1)}^k - T_{xy,xx(i,j+1)}^k + T_{xy,xy(i+1,j+1)}^k - T_{xy,xy(i,j+1)}^k \right), \quad (4-88)$$

$$V_{y,xy(i,j+1)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{y(i,j+1)}) V_{y,xy(i,j+1)}^k + \frac{\Delta t}{\rho_{(i,j)}\Delta y} (T_{yy,xx(i,j+1)}^k - T_{yy,xx(i,j)}^k + T_{yy,xy(i,j+1)}^k - T_{yy,xy(i,j)}^k), \quad (4-89)$$

$$T_{xx(i,j)}^{k+1} = T_{xx(i,j)}^k + (\lambda_{(i,j)} + 2\mu_{(i,j)}) \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{x(i+1,j)}^{k+1} - V_{x(i,j)}^{k+1}) + \lambda_{(i,j)} \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{y(i,j+1)}^{k+1} - V_{y(i,j)}^{k+1}) \quad (3),$$

$$T_{xx,xx(i,j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{x(i,j)}) T_{xx,xx(i,j)}^k + (\lambda_{(i,j)} + 2\mu_{(i,j)}) \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{x,xx(i+1,j)}^{k+1} - V_{x,xx(i,j)}^{k+1} + V_{x,xy(i+1,j)}^{k+1} - V_{x,xy(i,j)}^{k+1}), \quad (4-90)$$

$$T_{xx,xy(i,j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{y(i,j)}) T_{xx,xy(i,j)}^k + \lambda_{(i,j)} \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{y,xx(i,j+1)}^{k+1} - V_{y,xx(i,j)}^{k+1} + V_{y,xy(i,j+1)}^{k+1} - V_{y,xy(i,j)}^{k+1}), \quad (4-91)$$

$$T_{xy(i+1,j+1)}^{k+1} = T_{xy(i+1,j+1)}^k + \mu_{(i,j+1)} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{y(i+1,j+1)}^{k+1} - V_{y(i,j+1)}^{k+1}) + \mu_{(i+1,j)} \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{x(i+1,j+1)}^{k+1} - V_{x(i+1,j)}^{k+1}) \quad (4),$$

$$T_{xy,xx(i+1,j+1)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{x(i+1,j+1)}) T_{xy,xx(i+1,j+1)}^k + \mu_{(i,j+1)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{y,xx(i+1,j+1)}^{k+1} - V_{y,xx(i,j+1)}^{k+1} + V_{y,xy(i+1,j+1)}^{k+1} - V_{y,xy(i,j+1)}^{k+1} \right), \quad (4-92)$$

$$T_{xy, sy(i+1, j+1)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{y(i+1, j+1)}) T_{xy, sy(i+1, j+1)}^k + \mu_{(i+1, j)} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \begin{array}{l} V_{x, sx(i+1, j+1)}^{k+1} - V_{x, sx(i+1, j)}^{k+1} + \\ + V_{x, sy(i+1, j+1)}^{k+1} - V_{x, sy(i+1, j)}^{k+1} \end{array} \right), \quad (4-93)$$


---

$$T_{yx(i+1, j+1)}^{k+1} = T_{yx(i+1, j+1)}^k + \mu_{(i, j+1)} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{y(i+1, j+1)}^{k+1} - V_{y(i, j+1)}^{k+1}) + \mu_{(i+1, j)} \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{x(i+1, j+1)}^{k+1} - V_{x(i+1, j)}^{k+1}) \quad (5),$$

$$T_{yx, sx(i+1, j+1)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{x(i+1, j+1)}) T_{yx, sx(i+1, j+1)}^k + \mu_{(i, j+1)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \begin{array}{l} V_{y, sx(i+1, j+1)}^{k+1} - V_{y, sx(i, j+1)}^{k+1} + \\ + V_{y, sy(i+1, j+1)}^{k+1} - V_{y, sy(i, j+1)}^{k+1} \end{array} \right), \quad (4-94)$$

$$T_{yx, sy(i+1, j+1)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{(i+1, j+1)}) T_{yx, sy(i+1, j+1)}^k + \mu_{(i+1, j)} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \begin{array}{l} V_{x, sx(i+1, j+1)}^{k+1} - V_{x, sx(i+1, j)}^{k+1/2} + \\ + V_{x, sy(i+1, j+1)}^{k+1/2} - V_{x, sy(i+1, j)}^{k+1/2} \end{array} \right), \quad (4-95)$$


---

$$T_{yy(i, j)}^{k+1} = T_{yy(i, j)}^k + (\lambda_{(i, j)} + 2\mu_{(i, j)}) \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{y(i, j+1)}^{k+1} - V_{y(i, j)}^{k+1}) + \lambda_{(i, j)} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{x(i+1, j)}^{k+1} - V_{x(i, j)}^{k+1}) \quad (6),$$

$$T_{yy, sx(i, j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{x(i, j)}) T_{yy, sx(i, j)}^k + \lambda_{(i, j)} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{x, sx(i+1, j)}^{k+1} - V_{x, sx(i, j)}^{k+1} + V_{x, sy(i+1, j)}^{k+1} - V_{x, sy(i, j)}^{k+1}), \quad (4-96)$$

$$T_{yy, sy(i, j)}^{k+1} = (1 - \Delta t \Omega_{y(i, j)}) T_{yy, sy(i, j)}^k + (\lambda_{(i, j)} + 2\mu_{(i, j)}) \frac{\Delta t}{\Delta y} (V_{y, sx(i, j+1)}^{k+1} - V_{y, sx(i, j)}^{k+1} + V_{y, sy(i, j+1)}^{k+1} - V_{y, sy(i, j)}^{k+1}), \quad (4-97)$$


---

# 5. Metode de generare și detecție a perturbațiilor elastice. Unde de suprafață Rayleigh și Lamb.

## 5.1. Considerații generale

Investigarea neomogenităților de material cu ajutorul ultrasunetelor prezintă interes în măsura în care există metode eficiente de excitare și captare a radiației ultrasonore.

În prezentul capitol se studiază, două metode de generarea - măsurare a oscilațiilor mecanice de înaltă frecvență. Primul procedeu are la bază cristalele piezoelectrice iar cel de-al doilea laserii. Un spațiu mai larg va fi acordat generării câmpurilor elastice de înaltă frecvență cu ajutorul laserilor, prin efect termoelastice.

## 5.2. Surse și detectori de ultrasunete bazați pe efectul piezoelectric

### 5.2.1. Descrierea matematică simplificată a piezoelectricității

În general un câmp electric polarizează orice tip de material inducând un moment de dipol. Deplasarea sarcinilor electrice de la poziția lor de echilibru introduce o deformare mecanică numită electrostricțiune. Fenomenul invers prin care o deformare mecanică produce un moment electric de dipol și în consecință un câmp electric nu se manifestă decât pentru o clasă redusă de materiale numite cristale piezoelectrice [5-14]. Dacă o plachetă tăiată dintr-un astfel de material este deformată mecanic se constată apariția unei tensiuni electrice între cele două fețe ale sale. Invers, dacă se aplică o tensiune electrică între cele două fețe placheta se va deforma. Materialele piezoelectrice sunt anizotrope ceea ce înseamnă că proprietățile lor depind de direcție, de asemenea se înregistrează efecte de cuplaj între direcții diferite. Astfel, un câmp electric aplicat pe o direcție oarecare poate genera o deformare pe o altă direcție. Inversa afirmației precedente este de asemenea valabilă. În continuare se consideră un cristal piezoelectric în formă de disc polarizat pe o direcție perpendiculară pe fețele sale și asupra căruia se aplică o tensiune de aceeași direcție cu polarizarea permanentă. O astfel de configurație favorizează generarea de unde mecanice pe o linie paralelă cu axa de simetrie a discului.

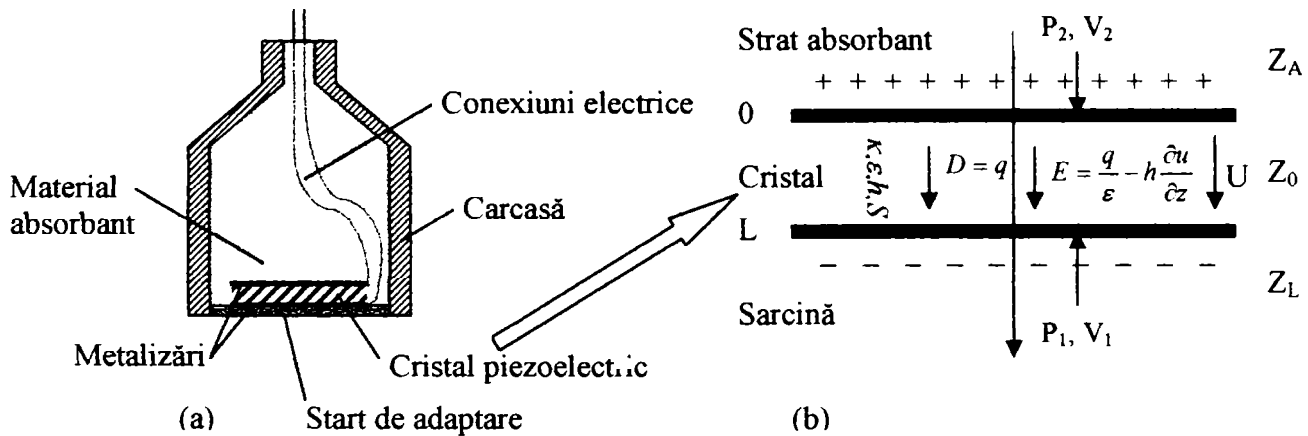


Fig. 5-1. (a) Traductor piezoelectric. (b) Secțiune transversală printr-un cristal piezoelectric folosit ca generator de unde de volum.

Deși lucrarea nu își propune să studieze amănunțit cristalele piezoelectrice totuși este necesară găsirea unor relații matematice simplificate care să stabilească legătura dintre mărimile mecanice și cele electrice (ex.: presiunea acustică funcție de tensiunea aplicată pe fețele cristalului și invers).

Într-un material solid legătura dintre tensiunea mecanică și deformare este în general o relație tensorială [5-16]. Pentru descrierea undelor longitudinale normale pe fețele cristalului din Fig. 5-1 (b) este însă suficientă considerarea unei dependențe scalare a tensiunii de deformare așa cum se întâmplă la fluide. Pentru un dielectric nepiezoelectric, ținând cont de cuplajul slab dintre câmpul electric și tensiunea mecanică, se pot scrie următoarele relații aproximative

$$\begin{aligned} p(z,t) &= -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \quad \text{(a) Mecanică} \\ E(z,t) &= \frac{1}{\varepsilon} D(z,t) \quad \text{(b) Electrică} \end{aligned} \quad (5-1)$$

unde  $p$  este tensiunea mecanică pe direcția  $z$ ,  $\kappa$  compresibilitatea dielectricului,  $u$  deplasamentul față de poziția de echilibru a unui punct de coordonată  $z$ ,  $E$  intensitatea câmpului electric,  $\varepsilon$  permitivitatea electrică a materialului,  $D$  inducția electrică. Relația ( 5-1 a ) rezultă din ( 3-39 ) iar ( 5-1 b ) este expresia de legătură între intensitatea câmpului electric și inducția electrică în cazul unui material omogen, liniar și izotrop. Se observă că nu există nici o legătură de dependență între tensiunea  $p$  și câmpul electric din material.

Tensiunea electrică  $U$  ce apare între fețele plachetei nepiezoelectrice se calculează integrând expresia ( 5-1 ) ( b ) pe intervalul  $[0,L]$ . Astfel se obține:

$$U(t) = \int_0^L E(z,t) dz = \int_0^L \frac{\rho_s(t)}{\varepsilon} dz = \frac{\rho_s(t)L}{\varepsilon}, \quad (5-2)$$

în care  $\rho_s$  este densitatea superficială de sarcină (în interiorul materialului nu există sarcină electrică ci doar pe fețele plachetei). La stabilirea lui ( 5-2 ) s-a ținut cont de legea fluxului inducției electrice:

$$\oint_{\Sigma} D \cdot u_n dS = \int_{V_{\Sigma}} \rho_v dV, \quad (5-3)$$

care aplicată pentru niște suprafețe ce înconjoară fețele plăcii dielectrice dă:  $\oint_S D(z,t) dS = \int_S \rho_s(z,t) dS$  adică:

$$D(z,t) = \rho_s(t). \quad (5-4)$$

S-au folosit notațiile:  $\rho$ , densitatea de volum a sarcinii electrice,  $u_n$  vectorul unitar normal la suprafață și orientat spre înafară,  $\Sigma$  suprafața care înconjoară volumul  $V_{\Sigma}$ .

La dielectricii piezoelectrice ecuațiile ( 5-1 a, b ) nu mai sunt independente, ele transformându-se în următorul sistem:

$$\begin{aligned} p(z,t) &= -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + hD(z,t) \quad \text{(a) Mecanică} \\ E(z,t) &= \frac{1}{\varepsilon} D(z,t) - h \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \quad \text{(b) Electrică} \end{aligned} \quad (5-5)$$

unde  $h$  este constanta piezoelectrică. Integrând pe ( 5-5 b ) după modelul expresiei ( 5-2 ) se obține:

$$U(t) = \frac{\rho_s(t)L}{\varepsilon} - h[u(L,t) - u(0,t)], \quad (5-6)$$

care arată că o modificare a grosimii plăcii generează o variație de tensiune electrică și invers.

### 5.3. Reflexia și transmisia undelor elastice. Rezultate numerice

Pentru ca undele elastice generate de un cristal piezoelectric să se cupleze la un material oarecare este inevitabilă trecerea lor prin cel puțin o suprafață de separație. De cele mai multe ori între cristal și corpul iradiat trebuiesc interpuși mai multe straturi de adaptare în vederea realizării unui cuplaj cât mai eficient. În continuare se va studia problema reflexiei și transmisiei unei unde elastice armonice plane de

forma  $u(t, \vec{r}) = U \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega \hat{u}}{v} \cdot \vec{r}\right)\right] = U \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  ce vine sub unghiul de incidență  $\varphi_i$  dintr-un mediu de

densitatea  $\rho_1$  și viteză de propagare  $v_1$  și trece într-un mediu cu parametrii  $\rho_2$ ,  $v_2$  [1-15]. S-au utilizat notațiile:  $u$  amplitudinea undei la momentul  $t$  și poziția  $\vec{r}$ ,  $U$  amplitudinea maximă,  $\hat{u}$  versorul direcției de propagare,  $\vec{r}$  vectorul de poziție,  $v$  viteza de fază,  $\vec{k}$  vectorul de propagare.



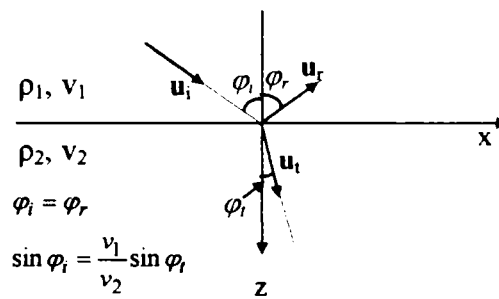


Fig. 5-2. Reflexia și transmisia undelor elastice.

Punând condiția de continuitate pentru componentele normale ale deplasărilor particulelor pe suprafața de separație se obține următoarea egalitate:

$$U_i \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega \hat{u}_i}{v_i} \cdot \vec{r}\right)\right] \cos \varphi_i + U_r \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega \hat{u}_r}{v_r} \cdot \vec{r}\right)\right] \cos \varphi_r = U_t \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega \hat{u}_t}{v_t} \cdot \vec{r}\right)\right] \cos \varphi_t. \quad (5-7)$$

Proiectând pe axa  $Ox$  relația  $\rho \hat{c}^2 u / \hat{c} t^2 = -\nabla \cdot p$  (a cărei deducere s-a făcut în capitolul 3) rezultă:

$$\rho_1 \omega^2 U_i \hat{u}_i \cdot \vec{i} \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}\right)\right] = P_i \frac{\omega}{v_i} \hat{u}_i \cdot \vec{i} \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}\right)\right] \text{ adică } P_i = U_i \rho_1 v_i \omega, \quad (5-8)$$

plus încă două expresii analoge pentru unda transmisă și cea reflectată.

Cum amplitudinile undelor incidentă, reflectată și transmisă sunt constante, expresia (5-7) este adevărată pentru orice moment de timp  $t$  numai dacă argumentele exponențialelor sunt egale și în consecință:

$$U_i \cos \varphi_i + U_r \cos \varphi_r = U_t \cos \varphi_t. \quad (5-9)$$

Punând condiția ca pe suprafața de separație  $P_i = P_r + P_t$  și ținând cont de (5-8) se poate scrie o nouă relație de legătură între cele trei amplitudini:

$$U_i \rho_1 v_1 = U_r \rho_1 v_1 + U_t \rho_2 v_2. \quad (5-10)$$

Rezolvând sistemul algebric (5-9) - (5-10) pentru necunoscutele  $U_r$ ,  $U_t$  se ajunge la următoarele dependențe [5-15]:

$$U_r = \frac{\rho_1 u_1 \cos \varphi_t - \rho_2 u_2 \cos \varphi_i}{\rho_1 u_1 \cos \varphi_i + \rho_2 u_2 \cos \varphi_t} U_i = r U_i (a), \quad U_t = \frac{2 \rho_1 u_1 \cos \varphi_i}{\rho_1 u_1 \cos \varphi_i + \rho_2 u_2 \cos \varphi_t} U_i = t U_i (b). \quad (5-11)$$

Produsele de tip  $\rho u$  se notează de obicei cu  $Z$  purtând denumirea de impedanță sau rezistență specifică a mediului. Cu  $r$  și  $t$  s-au notat coeficienții de reflexie și transmisie. Din (5-11) rezultă că  $U_t > 0$  indiferent de valorile impedanțelor  $Z_1$  și  $Z_2$  ceea ce înseamnă că unda transmisă este întotdeauna în fază cu unda incidentă. În ceea ce privește pe  $U_r$ , aceasta este pozitivă dacă  $Z_1 \cos \varphi_r > Z_2 \cos \varphi_i$  și negativă dacă  $Z_1 \cos \varphi_r < Z_2 \cos \varphi_i$ . Deoarece amplitudinea este o mărime pozitivă înseamnă că trebuie să apară o diferență de fază  $\theta$  între unda reflectată și cea incidentă. Din (5-12) se vede că  $\theta$  trebuie să fie egal cu  $\pi$  întrucât  $\exp(i\pi) = -1$  și astfel se compensează semnul minus din fața modulului.

$$U_r \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \theta\right)\right] = -\frac{Z_1 \cos \varphi_r - Z_2 \cos \varphi_i}{Z_1 \cos \varphi_r + Z_2 \cos \varphi_i} U_i \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right]. \quad (5-12)$$

Cu ajutorul formulilor (5-11) se stabilesc eficiențele de transmisie, în aproximația acustică, ale diverselor tipuri de interfețe: aer-metal, aer-apă, apă-metal etc. Tab. 5-2, Tab. 5-3 prezintă coeficienții de reflexie și transmisie la incidență normală pentru cinci suprafețe de separație distincte. Semnul minus din fața unor coeficienți de reflexie semnifică faptul că unda reflectată este defazată cu  $\pi$  față de unda incidentă. Se remarcă o transmisie extrem de ineficientă a undei elastice din aer, lucru care constituie un mare handicap al folosirii traductoarelor piezoelectrice în scopul inducerii de unde elastice de înaltă frecvență într-un corp oarecare. Interfețele apă metal beneficiază de un coeficient de transmisie mult îmbunătățit.

**Tab. 5-1. Constante de material**

Material	Densitate (kg/m <sup>3</sup> )	Modul de elasticitate (dN/cm <sup>2</sup> )	Coefficientul lui Poisson	Viteză de propagare longitudinală (m/s)
Aer	1	1.15	-	340
Apă	1000	2.19 · 10 <sup>4</sup>	-	1480
Aluminiu	2800	0.7 · 10 <sup>6</sup>	0.32	5886
Fier	7850	2.1 · 10 <sup>6</sup>	0.29	5920
Cupru	8900	0.9 · 10 <sup>6</sup>	0.32	3804

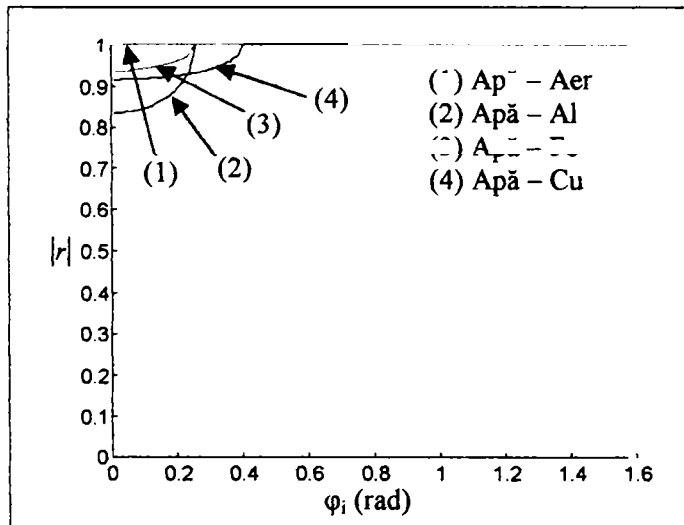
**Tab. 5-2. Coeficienți de reflexie. (1) → (2)**

(1) → (2)	(2) Aer	(2) Apă	(2) Aluminiu	(2) Fier	(2) Cupru
(1) Aer	0	-0.9995	-1.0000	-1.0000	-1.0000
(1) Apă	0.9995	0	-0.8352	-0.9383	-0.9162
(1) Aluminiu	1.0000	0.8352	0	-0.4764	-0.3451
(1) Fier	1.0000	0.9383	0.4764	0	-0.1571
(1) Cupru	1.0000	0.9162	0.3451	-0.1571	0

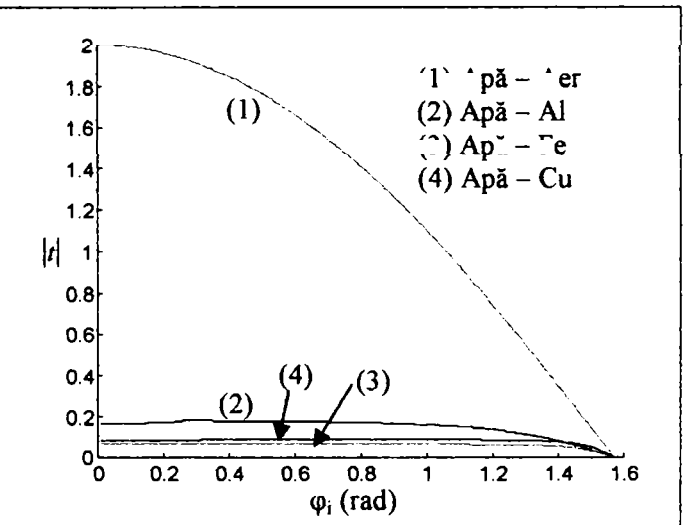
**Tab. 5-3. Coeficienți de transmisie. (1) → (2)**

(1) → (2)	(2) Aer	(2) Apă	(2) Aluminiu	(2) Fier	(2) Cupru
(1) Aer	1.0000	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
(1) Apă	1.9995	1.0000	0.1648	0.0617	0.0838
(1) Aluminiu	2.0000	1.8352	1.0000	0.5236	0.6549
(1) Fier	2.0000	1.9383	1.4764	1.0000	1.1571
(1) Cupru	2.0000	1.9162	1.3451	0.8429	1.0000

**Tab. 5-4. Modulul coeficienților de reflexie și transmisie.**



**Fig. 5-3. Modulul coeficientului de reflexie funcție de unghiul de incidență pentru interfețele Apă - Aer, Al, Fe, Cu.**



**Fig. 5-4. Modulul coeficientului de transmisie funcție de unghiul de incidență pentru interfețele Apă - Aer, Al, Fe, Cu.**

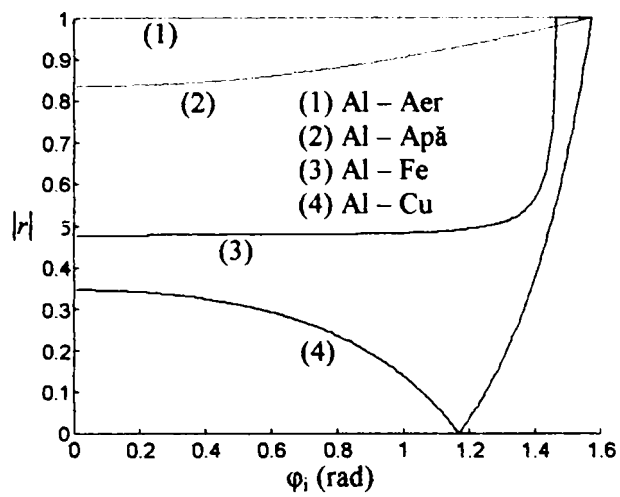


Fig. 5-5. Modulul coeficientului de reflexie funcție de unghiul de incidență pentru interfețele Al - Aer, Apă, Fe, Cu.

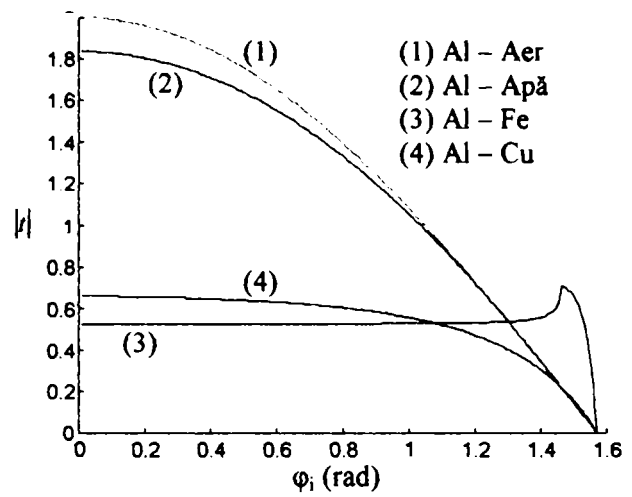


Fig. 5-6. Modulul coeficientului de transmisie funcție de unghiul de incidență pentru interfețele Al - Aer, Apă, Fe, Cu.

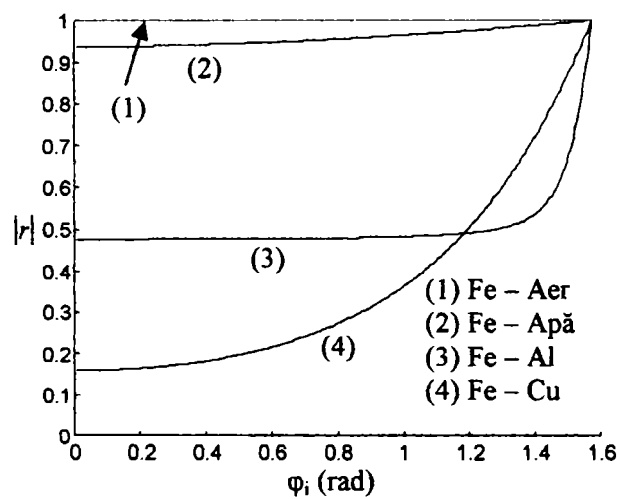


Fig. 5-7. Modulul coeficientului de reflexie funcție de unghiul de incidență pentru interfețele Fe - Aer, Apă, Al, Cu.

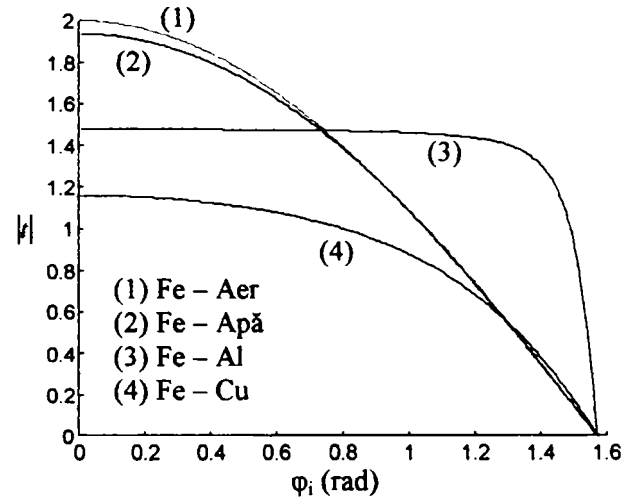


Fig. 5-8. Modulul coeficientului de transmisie funcție de unghiul de incidență pentru interfețele Fe - Aer, Apă, Al, Cu.

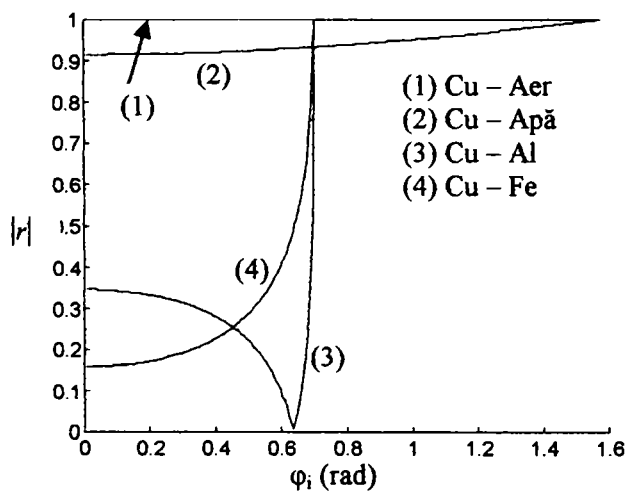


Fig. 5-9. Modulul coeficientului de reflexie funcție de unghiul de incidență pentru interfețele Cu - Aer, Apă, Al, Fe.

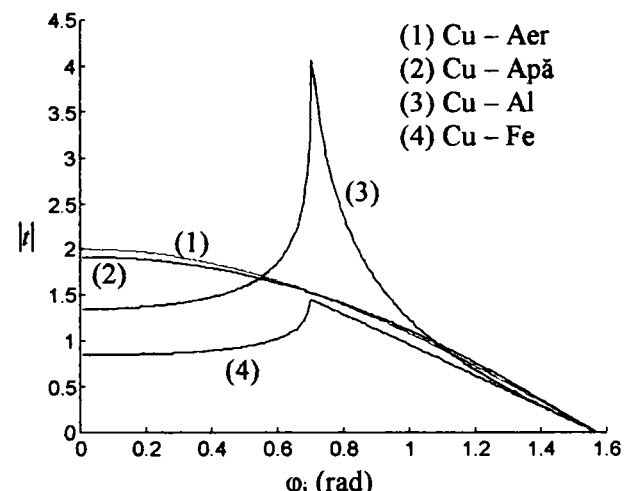


Fig. 5-10. Modulul coeficientului de transmisie funcție de unghiul de incidență pentru interfețele Cu - Aer, Apă, Al, Fe.

În cazul în care oscilația elastică trece dintr-un mediu cu viteză de propagare mai mică într-unul cu viteză mai mare se mai constată că începând de la un anumit unghi de incidență coeficienții de reflexie și transmisie devin complecși lucru care rezultă imediat calculând  $\cos(\varphi_t)$  cu ajutorul legii a treia a refracției (Fig. 5-2) și înlocuindu-l în ( 5-11 ). Astfel:

$$\cos \varphi_t = \pm i \sqrt{\frac{v_2^2}{v_1^2} \sin^2 \varphi_i - 1} \text{ pentru } \sin \varphi_i > \frac{v_1}{v_2}. \quad (5-13)$$

Ca urmare  $t$  devine complex putând fi scris de forma:  $t = T \exp(i\theta)$ , unde:

$$T = |t| = \frac{2\rho_1 v_1 \cos \varphi_i}{(\rho_1 v_1 |\cos \varphi_t|)^2 + (\rho_2 v_2 \cos \varphi_i)^2} \text{ și } \theta = \arg(t) = \arctg\left(-\frac{\rho_1 v_1 |\cos \varphi_t|}{\rho_2 v_2 \cos \varphi_i}\right). \quad (5-14)$$

Ținând cont de notațiile de mai sus, unda transmisă are expresia:

$$u_t(t, r) = A_t T \exp(i\theta) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \quad (5-15)$$

Produsul scalar  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  se dezvoltă sub forma:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = x \frac{\omega}{v_2} \sin \varphi_t + z \frac{\omega}{v_2} \cos \varphi_t = x \frac{\omega}{v_1} \sin \varphi_i + z \frac{\omega}{v_2} \left( \pm i \sqrt{\frac{v_2^2}{v_1^2} \sin^2 \varphi_i - 1} \right). \quad (5-16)$$

Înlocuind ( 5-16 ) în ( 5-15 ) rezultă următoarea expresie pentru unda transmisă:

$$u_t(t, x, z) = A_t T \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda_i} \left( \sqrt{\sin^2 \varphi_i - \frac{v_1^2}{v_2^2}} \right) z\right] \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{v_1} x \sin \varphi_i + \theta\right)\right]. \quad (5-17)$$

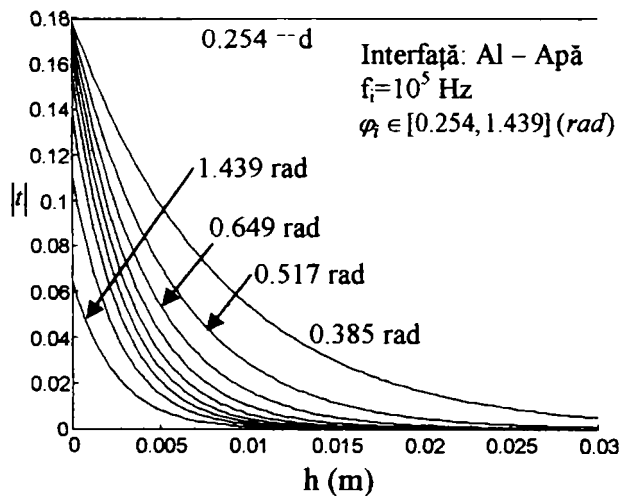
Se obține astfel o undă transmisă ce se propagă paralel cu suprafața de separație cu viteza:  $v_1 / \sin \varphi_i$  și a cărei amplitudine scade exponențial cu distanța în mediul al doilea și frecvența undei incidente. Când unghiul de atac se apropie de  $\pi/2$  viteza de propagare a undei de suprafață tinde să fie egală cu cea a undei incidente.

Unda reflectată corespunzătoare undei transmise ( 5-17 ) are expresia:

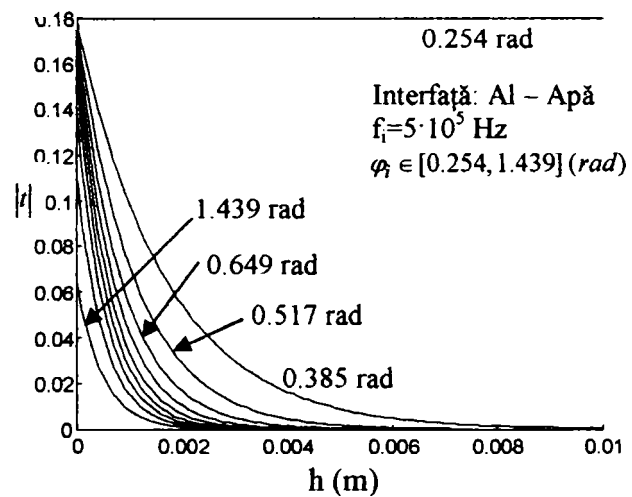
$$u_r(t, r) = A_t \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + 2\theta + \pi)]. \quad (5-18)$$

La stabilirea lui ( 5-18 ) s-a ținut seama de faptul că  $|r| = 1$ , egalitate care rezultă din ( 5-11 ), și de asemenea de legătura care există între argumentele coeficienților de reflexie și transmisie  $\arg(r) = 2 \arg(t) = 2\theta$ , relație ce se deduce tot din ( 5-11 ) folosind identitatea:  $\operatorname{tg} 2\theta = 2 \operatorname{tg} \theta / (1 - \operatorname{tg}^2 \theta)$ .

**Tab. 5-5.** Modulul coeficientului de transmisie pentru  $\varphi_i \geq \varphi_{ic}$ , funcție de unghiul de incidență, frecvența undei incidente,  $f_i$ , și adâncimea în material,  $h$ .



**Fig. 5-11.** Familie de curbe reprezentând modulul coeficientului de transmisie la 10 unghiuri de incidență  $\varphi_i \in [0.254, 1.439] \text{ (rad)}$ , al interfeței Apă - Al funcție de adâncimea în material, pentru  $\varphi_i \geq \varphi_{ic}$ . Frecvența undei incidente este:  $f_i = 10^5 \text{ Hz}$ .



**Fig. 5-12.** Familie de curbe reprezentând modulul coeficientului de transmisie la 10 unghiuri de incidență  $\varphi_i \in [0.254, 1.439] \text{ (rad)}$ , al interfeței Apă - Al funcție de adâncimea în material, pentru  $\varphi_i \geq \varphi_{ic}$ . Frecvența undei incidente este:  $f_i = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ .

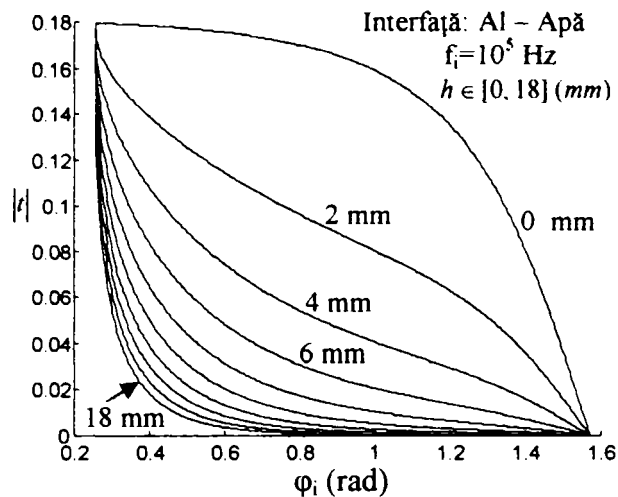


Fig. 5-13. Familie de curbe reprezentând modulul coeficientului de transmisie la 10 adâncimi  $h \in [0, 18] (mm)$ , al interfeței Apă - Al funcție de unghiul de incidență pentru  $\varphi_i \geq \varphi_{ic}$ . Frecvența unei incidente este:  $f_i = 10^5 \text{ Hz}$ .

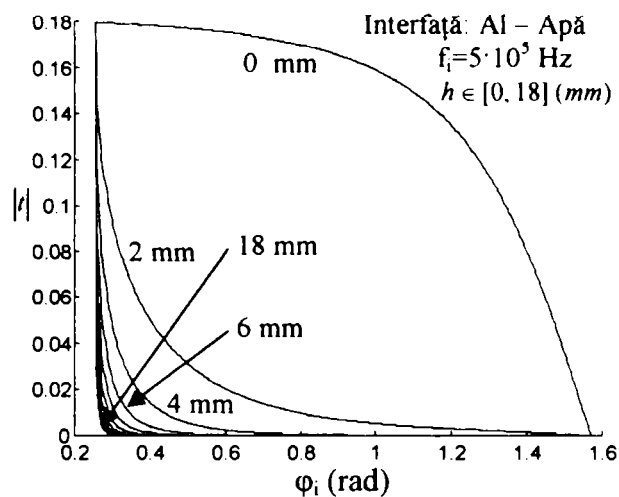


Fig. 5-14. Familie de curbe reprezentând modulul coeficientului de transmisie la 10 adâncimi  $h \in [0, 18] (mm)$ , al interfeței Apă - Al funcție de unghiul de incidență pentru  $\varphi_i \geq \varphi_{ic}$ . Frecvența unei incidente este:  $f_i = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ .

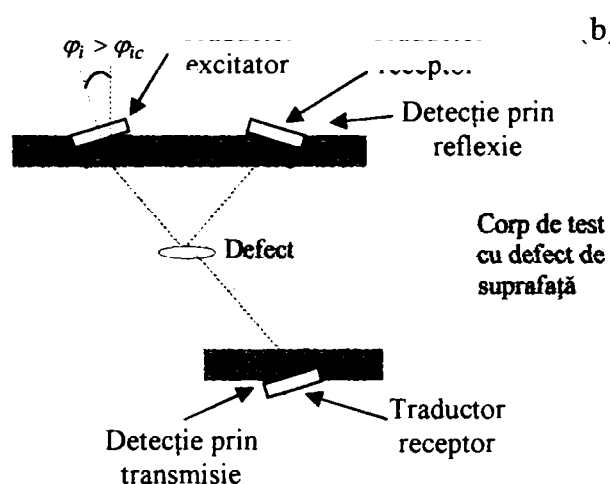
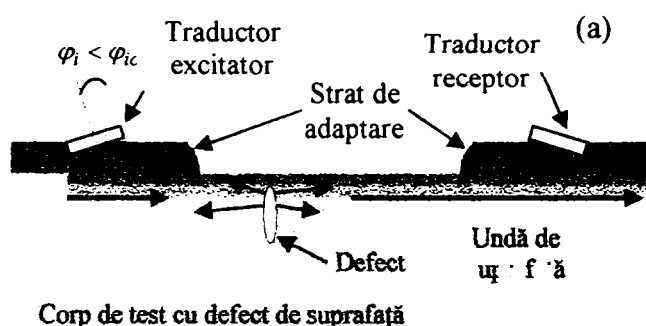


Fig. 5-15. (a) Poziționarea traductorului excitator și a celui receptor în cazul investigării defectelor de material cu unde de suprafață. (b) Detectia defectelor prin transmisie și reflexie cu ajutorul undelor de volum.

Curbele din Tab. 5-2 - Tab. 5-5 prezintă doar o aproximare a realității de vreme ce la deducerea coeficienților de reflexie și refracție s-a folosit aproximația acustică. Utilizarea modelului elastodinamic conduce la expresii complicate ale celor doi coeficienți. Cu ajutorul descompunerii Helmholtz a câmpului total  $u$  într-un potențial scalar și unul vectorial (capitolul 3) se poate stabili o matrice de coeficienți de reflexie și transmisie. Astfel o undă transversală incidentă pe o suprafață de separație generează două unde reflectate (una transversală și una longitudinală) și două transmise. Același lucru este valabil pentru o undă longitudinală.

#### 5.4. Undele de suprafață corespunzătoare unui solid. Rezultate numerice

Așa cum s-a mai precizat undele care se propagă în imediata vecinătate a suprafeței de separație dintre un solid și un alt mediu (de obicei aerul) prezintă un mare potențial de detecție a defectelor de material [1-1], [5-1], [5-2]. De aceea se impune găsirea unei expresii [5-7] care să descrie comportamentul acestora în cazul elastodinamic general și nu doar în aproximația acustică așa cum s-a procedat în paragraful precedent (formula ( 5-17 )). Pentru aceasta se apelează la expresiile componentelor câmpului elastic scrise în funcție de potențiale ( a se vedea capitolul 3) și la legea lui Hook generalizată în formularea din același capitol.



La fel ca în paragraful precedent se consideră doar cazul bidimensional în care unda de suprafață are componente numai pe direcții  $x$  și  $z$ .

Mediu solid de grosime mare în comparație cu lungimea de undă a perturbațiilor elastice ce se propagă în interiorul său.

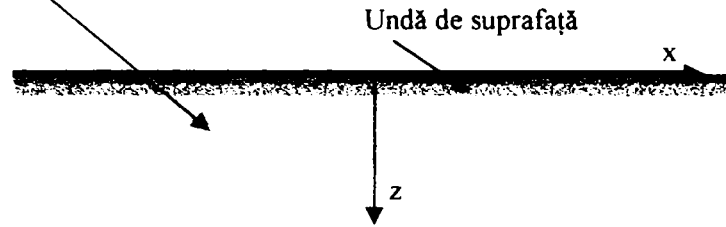


Fig. 5-16. Dispunerea axelor de coordonate în raport semispațiul solid infinit.

Punând condițiile:  $u_y=0$ ,  $\partial/\partial y=0$  și folosind ( 3-47 ) rezultă:  $\partial\varphi/\partial y=0$ ,  $\partial\Psi_x/\partial z=0$ ,  $\partial\Psi_z/\partial x=0$ . Ca urmare  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,y,t)$ , unde:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial x}, \quad (5-19)$$

iar tensiunile ( 3-48 ) - ( 3-53 ) se reduc la:

$$\tau_{xx} = \lambda \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial x\partial z} \right), \quad (5-20)$$

$$\tau_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial x\partial z} \right), \quad (5-21)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left[ 2 \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\Psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_y}{\partial z^2} \right]. \quad (5-22)$$

Prin analogie cu ( 5-17 ) se presupune că fiecare din cele două potențiale  $\varphi$  și  $\Psi_y$  prezintă soluții de forma [5-7]:

$$\varphi(x,z,t) = A \exp(-kaz) \exp(i(\omega t - kx)), \quad \text{cu } a = \sqrt{1-\alpha^2}, \quad \alpha = c/c_p, \quad (5-23)$$

$$\Psi_y(x,z,t) = B \exp(-kbz) \exp(i(\omega t - kx)), \quad \text{cu } b = \sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = c/c_s, \quad (5-24)$$

unde  $c_s$  este viteza undei transversale,  $c_p$  cea a undei longitudinale,  $k = \omega/c$  în care  $\omega$  este pulsația iar  $c$  viteza undei de suprafață. Vitezele s-au notat cu  $c$  în loc de  $v$  pentru a nu apărea confuzie între acestea și coeficientul lui Poisson,  $\nu$ . Valorile lui  $a$  și  $b$  sunt presupuse reale și pozitive,  $A$  și  $B$  sunt constante arbitrare iar viteza  $c$  satisface relația:  $0 < c < c_s < c_p$ .

Înlocuind ( 5-23 ), ( 5-24 ) în ( 5-21 ), ( 5-22 ) scrise pentru  $z=0$  cu condițiile de frontieră  $\tau_{zz}=0$ ,  $\tau_{xz}=0$ , rezultă:

$$(b^2 + 1)A + i2bB = 0, \quad (5-25)$$

$$i2aA - (b^2 + 1)B = 0. \quad (5-26)$$

Sistemul ( 5-25 ), ( 5-26 ) are o soluție banală când  $A=B=0$  care se traduce prin inexistența unei unde de suprafață. Egalând determinantul său cu zero se obține condiția ca acesta să fie satisfăcut de oricare două valori arbitrare  $A$  și  $B$ . Astfel:

$$(b^2 + 1) - 4ab = 0, \quad (5-27)$$

conduce la:

$$\left(2 - \left(\frac{c}{c_s}\right)^2\right)^2 - 4 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{c}{c_s}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{c}{c_p}\right)^2\right)} = 0. \quad (5-28)$$

Făcând notația  $m = (c_p/c_s)^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$  și dezvoltând (5-28) se obține în final ecuația lui Rayleigh:

$$\beta^6 - 8\beta^4 + \beta^2 \left(24 - \frac{16}{m}\right) - 16 \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 0, \quad (5-29)$$

care se rezolvă numeric rezultând viteza de propagare  $c$  notată și  $c_r$  ca funcție de parametrii de material  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  sau  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ .

În situația unui mediu incompresibil ( $c_p \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$ ) soluția lui (5-29) este  $\beta = 0.955$  ceea ce înseamnă că  $c_r = 0.955c_s$ . Pentru un material cu coeficientul lui Poisson egal cu zero,  $m = 2$  și în acest caz viteza undelor Rayleigh devine  $c_r = 0.874c_s$ . Graficul din Fig. 5-17, realizat prin rezolvarea numerică în Matlab a ecuației (5-29), ilustrează dependența raportului  $c_r/c_s$  (viteza unei de suprafață normalizată la viteza unei shear), de coeficientul lui Poisson.

În problemele de detecție a defectelor și neomogenităților de material ceea ce interesează este îndeosebi sensibilitatea vitezei de deplasare a undelor Rayleigh la variația parametrilor de material pe de-o parte și de la material la material pe de altă parte. Undele de suprafață vor fi încetinite sau accelerate atunci când acestea întâlnesc porțiuni zone cu o structură (densitate, modul de elasticitate, coeficient Poisson), diferite de cele ale materialului de bază.

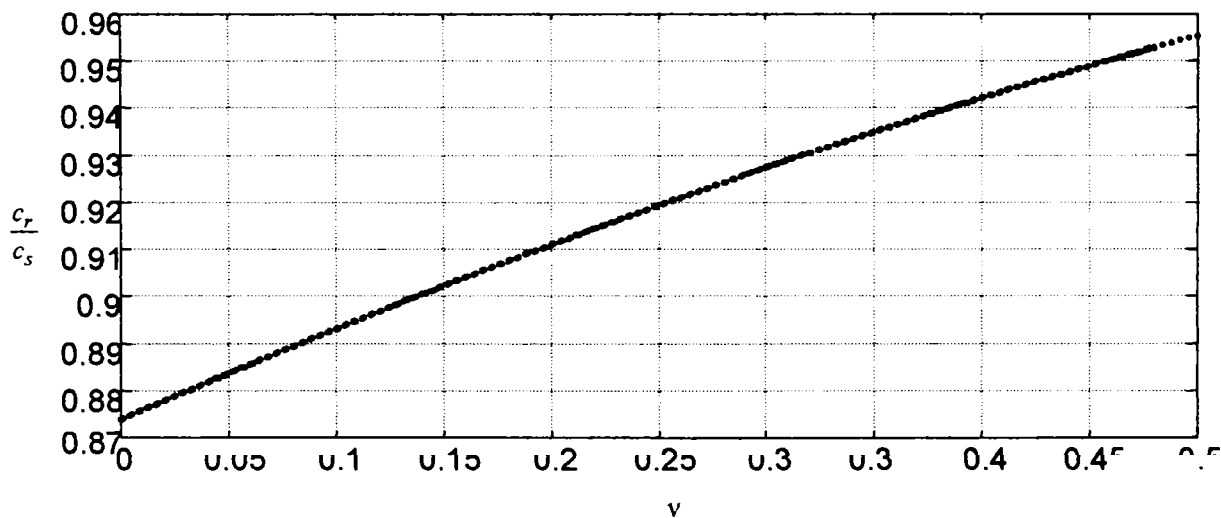
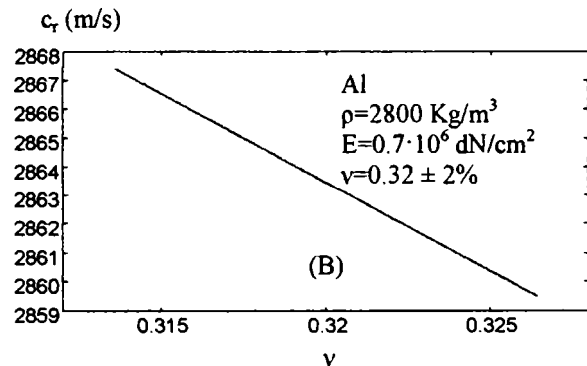
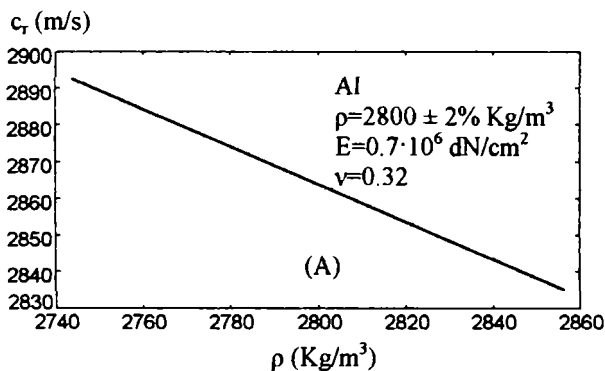
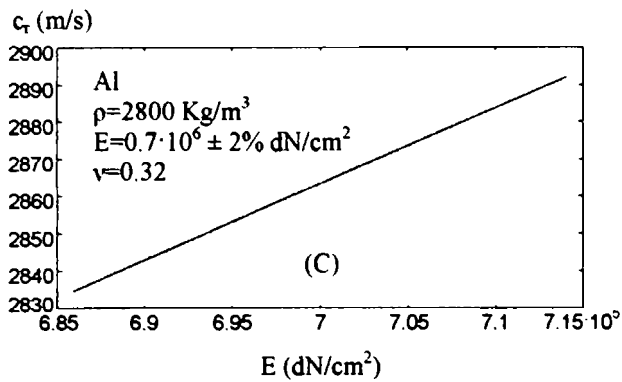


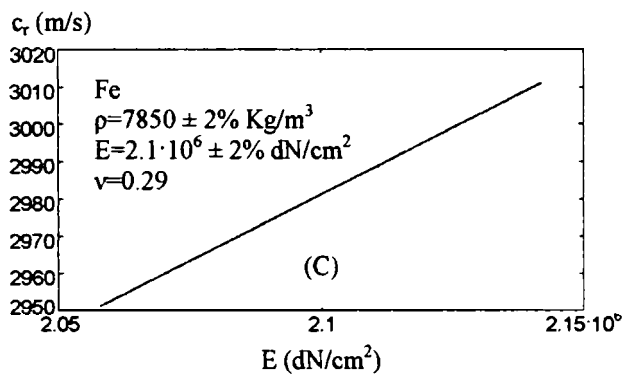
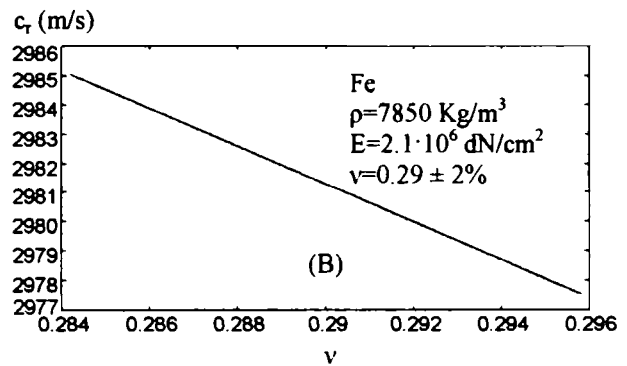
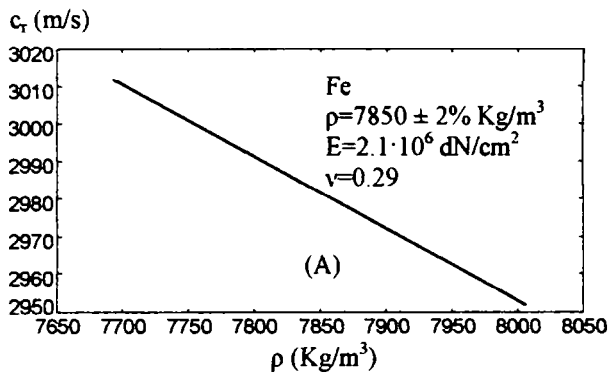
Fig. 5-17. Dependența raportului  $c_r/c_s$  de coeficientul lui Poisson.





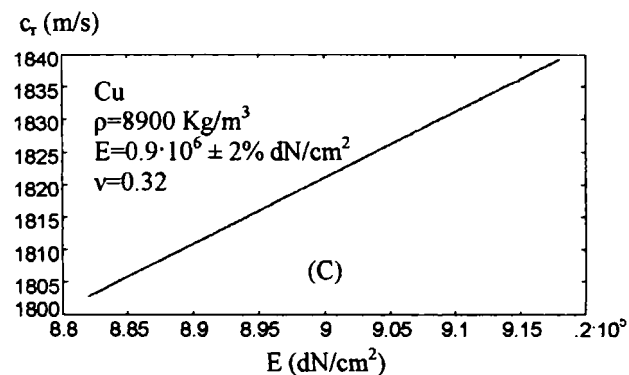
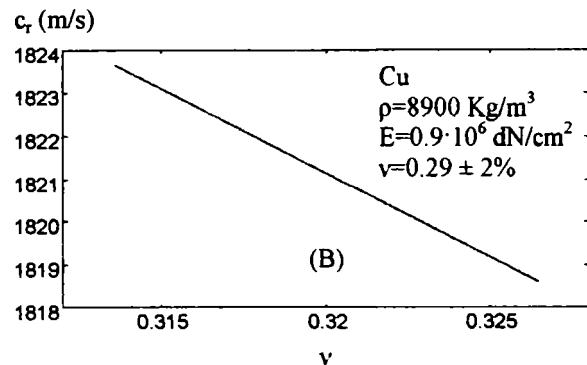
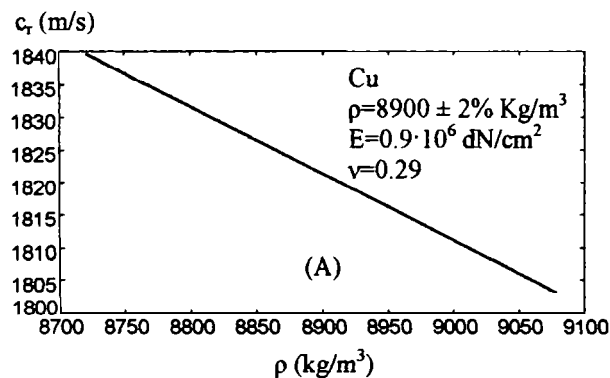
**Fig. 5-18.** Dependența vitezei de propagare a undelor Rayleigh de ( $\rho$ ,  $\nu$ ,  $E$ ) pentru cazul aluminiului, în situațiile:

- A) densitatea variază cu  $\pm 2\%$
- B) coeficientul lui Poisson variază cu  $\pm 2\%$
- C) modulul de elasticitate variază cu  $\pm 2\%$



**Fig. 5-19.** Dependența vitezei de propagare a undelor Rayleigh de ( $\rho$ ,  $\nu$ ,  $E$ ) pentru cazul fierului, în situațiile:

- D) densitatea variază cu  $\pm 2\%$
- E) coeficientul lui Poisson variază cu  $\pm 2\%$
- F) modulul de elasticitate variază cu  $\pm 2\%$



**Fig. 5-20.** Dependența vitezei de propagare a undelor Rayleigh de ( $\rho$ ,  $\nu$ ,  $E$ ) pentru cazul cuprului, în situațiile:

- A) densitatea variază cu  $\pm 2\%$
- B) coeficientul lui Poisson variază cu  $\pm 2\%$
- C) modulul de elasticitate variază cu  $\pm 2\%$

## 5.5. Undele elastice în plăci solide. Rezultate numerice

Perturbațiile elastice ce se propagă în plăcile solide cu frontiere libere (aflate într-un mediu de impedanță neglijabilă, de exemplu: aer) poartă numele de unde Lamb. Pentru găsirea unei expresii care să descrie comportamentul lor se procedează asemănător ca la paragraful anterior [5-7], [5-8]. Perturbația din placă se consideră ca având componente doar pe  $x$  și  $z$ , relațiile ( 5-19 ), ( 5-20 ) - ( 5-22 ) rămânând valabile. Poziția axelor de coordonate în raport placa de grosime  $2d$  este dată în Fig. 5-21.

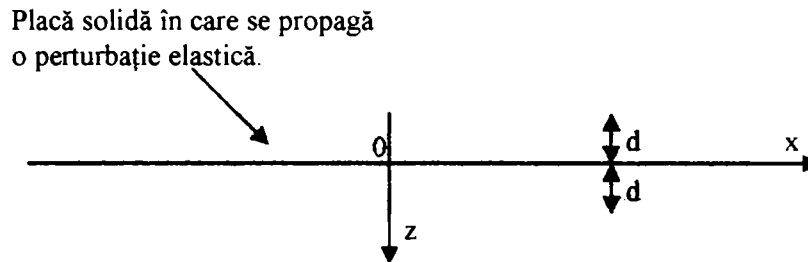


Fig. 5-21. Placă solidă în care se propagă o perturbație elastică Lamb.

Prin analogie cu ( 5-23 ), ( 5-24 ) se presupune că fiecare din cele două potențiale  $\varphi$  și  $\Psi_y$  prezintă soluții de forma:

$$\varphi(x, z, t) = A_1 \exp(-kaz) \exp(i(\omega t - kx)) + A_2 \exp(kaz) \exp(i(\omega t - kx)), \text{ cu } a = \sqrt{1 - \alpha^2}, \alpha = c/c_p, \quad (5-30)$$

$$\Psi_y(x, z, t) = B_1 \exp(-kbz) \exp(i(\omega t - kx)) + B_2 \exp(kbz) \exp(i(\omega t - kx)), \text{ cu } b = \sqrt{1 - \beta^2}, \beta = c/c_s, \quad (5-31)$$

unde  $k = \omega/c$ ,  $c < c_s < c_p$ .

Potențialele prezintă câte doi termeni datorită faptului că există două suprafețe de separație și deci două unde de "suprafață", una ce se atenuază în direcția pozitivă a lui  $z$  și cea de-a doua în direcția negativă.

Făcând notațiile:  $\kappa_p = ka$ ,  $\kappa_s = kb$ ,  $A_s = A_2 + A_1$ ,  $A_a = A_2 - A_1$ ,  $B_s = B_2 - B_1$  și  $B_a = B_2 + B_1$ , expresiile ( 5-30 ), ( 5-31 ) se scriu sub următoarea formă simetrică:

$$\varphi(x, z, t) = (A_s \cosh(\kappa_p z) + A_a \sinh(\kappa_p z)) \exp(i(\omega t - kx)), \quad (5-32)$$

$$\Psi_y(x, z, t) = (B_s \sinh(\kappa_s z) + B_a \cosh(\kappa_s z)) \exp(i(\omega t - kx)). \quad (5-33)$$

Condițiile pe frontieră sunt:  $\tau_{zz}(z=d) = 0$ ,  $\tau_{zz}(z=-d) = 0$ ,  $\tau_{zx}(z=d) = 0$ ,  $\tau_{zx}(z=-d) = 0$ . Înlocuind ( 5-32 ), ( 5-33 ) în ( 5-21 ), ( 5-22 ) pentru fiecare condiție de frontieră în parte, se obține un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute de genul lui ( 5-25 ) - ( 5-26 ) din rezolvarea căruia se determină caracteristicile perturbației din placa solidă. Astfel, pentru cazul  $\tau_{zz}(z=d) = 0$ , ( 5-21 ) se pune sub forma:

$$\frac{\tau_{zz}}{\mu} = \frac{c_p^2}{c_s^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \quad (5-34)$$

în care derivatele parțiale au expresiile:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = k^2 [A_s \cosh(\kappa_p z) + A_a \sinh(\kappa_p z)] \exp[i(\omega t - kx)], \quad (5-35)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \kappa_p^2 [A_s \cosh(\kappa_p z) + A_a \sinh(\kappa_p z)] \exp[i(\omega t - kx)], \quad (5-36)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial z} = -ik \kappa_s [B_s \cosh(\kappa_s z) + B_a \sinh(\kappa_s z)] \exp[i(\omega t - kx)], \quad (5-37)$$

Substituind ( 5-35 ) - ( 5-37 ) în ( 5-34 ) se ajunge la:

$$(k^2 + \kappa_s^2) \cosh(\kappa_p d) A_s + (k^2 + \kappa_s^2) \sinh(\kappa_p d) A_a + 2ik \kappa_s \cosh(\kappa_s d) B_s + 2ik \kappa_s \sinh(\kappa_s d) B_a = 0. \quad (5-38)$$

Celelalte trei condiții de frontieră conduc la expresii asemănătoare. Rezultă în final următorul sistem de ecuații:

$$\begin{bmatrix} (k^2 + \kappa_s^2) \cosh(\kappa_p d) & (k^2 + \kappa_s^2) \sinh(\kappa_p d) & 2ik\kappa_s \cosh(\kappa_s d) & 2ik\kappa_s \sinh(\kappa_s d) \\ (k^2 + \kappa_s^2) \cosh(\kappa_p d) & -(k^2 + \kappa_s^2) \sinh(\kappa_p d) & 2ik\kappa_s \cosh(\kappa_s d) & -2ik\kappa_s \sinh(\kappa_s d) \\ 2ik\kappa_p \sinh(\kappa_p d) & 2ik\kappa_p \cosh(\kappa_p d) & -(k^2 + \kappa_s^2) \sinh(\kappa_s d) & -(k^2 + \kappa_s^2) \cosh(\kappa_s d) \\ -2ik\kappa_p \sinh(\kappa_p d) & 2ik\kappa_p \cosh(\kappa_p d) & (k^2 + \kappa_s^2) \sinh(\kappa_s d) & -(k^2 + \kappa_s^2) \cosh(\kappa_s d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s \\ A_a \\ B_s \\ B_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5-39)$$

care prin operații simple de adunări de linii și coloane se descompune în două sisteme mai simple:

$$\begin{bmatrix} (k^2 + \kappa_s^2) \cosh(\kappa_p d) & 2ik\kappa_s \cosh(\kappa_s d) \\ 2ik\kappa_p \sinh(\kappa_p d) & -(k^2 + \kappa_s^2) \sinh(\kappa_s d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s \\ B_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5-40)$$

și

$$\begin{bmatrix} (k^2 + \kappa_s^2) \sinh(\kappa_p d) & 2ik\kappa_s \sinh(\kappa_s d) \\ 2ik\kappa_p \cosh(\kappa_p d) & -(k^2 + \kappa_s^2) \cosh(\kappa_s d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ B_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5-41)$$

ce au soluții nebanale doar dacă determinanții lor sunt egali cu zero. Se ajunge astfel la două ecuații din care se pot determina valorile numărului de undă  $k$  sau viteza  $c$  a undelor Lamb ca funcție de frecvență. Astfel, din ( 5-40 ) rezultă ecuația caracteristică a modurilor simetrice:

$$(k^2 + \kappa_s^2)^2 \tanh(\kappa_s d) - 4k^2 \kappa_d \kappa_s \tanh(\kappa_d d) = 0 \quad (5-42)$$

iar din ( 5-41 ) cea a modurilor antisimetrice:

$$(k^2 + \kappa_s^2)^2 \tanh(\kappa_p d) - 4k^2 \kappa_d \kappa_s \tanh(\kappa_s d) = 0. \quad (5-43)$$

Înlocuind  $k$ ,  $\kappa_p$ ,  $\kappa_s$ , expresiile de definiție ale acestora ( 5-42 ) - ( 5-43 ) pot fi rescrise sub o formă mai explicită din care să rezulte clar dependența vitezei de fază  $c$  de frecvența semnalului excitator. Se obțin astfel următoarele patru ecuații echivalente două câte două.

Moduri simetrice.

$$(2 - \beta^2)^2 \sinh\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}\right) \cosh\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \gamma^2 \beta^2}\right) - 4\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \gamma^2 \beta^2} \sinh\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \gamma^2 \beta^2}\right) \cosh\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}\right) = 0, \quad (5-44)$$

sau

$$*(2 - \beta^2)^2 \sin\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 - 1}\right) \cos\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{\gamma^2 \beta^2 - 1}\right) + 4\sqrt{\beta^2 - 1} \sqrt{\gamma^2 \beta^2 - 1} \sin\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{\gamma^2 \beta^2 - 1}\right) \cos\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 - 1}\right) = 0. \quad (5-45)$$

Moduri asimetrice:

$$*(2 - \beta^2)^2 \sinh\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \gamma^2 \beta^2}\right) \cosh\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}\right) - 4\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \gamma^2 \beta^2} \sinh\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}\right) \cosh\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \gamma^2 \beta^2}\right) = 0, \quad (5-46)$$

sau

$$(2 - \beta^2)^2 \sin\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{\gamma^2 \beta^2 - 1}\right) \cos\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 - 1}\right) + 4\sqrt{\beta^2 - 1} \sqrt{\gamma^2 \beta^2 - 1} \sin\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 - 1}\right) \cos\left(k_s d \frac{1}{\beta} \sqrt{\gamma^2 \beta^2 - 1}\right) = 0. \quad (5-47)$$

Pentru realizarea graficelor următoare care dau dependența  $\beta = f(k_s d)$  adică:  $\frac{c}{c_s} = f\left(\frac{\omega}{c_s} d\right)$ , s-a folosit un

program în Matlab 6.5 ce rezolvă ecuațiile notate cu “ \* ”. Expresiile ( 5-44 ) și ( 5-47 ) introduc o serie de soluții false care perturbă într-o oarecare măsură rezultatele. De asemenea, alte exprimări echivalente cum ar fi cele care folosesc tangenta hiperbolică sau pe cea simplă, introduc de asemenea unele valori false. Ca metodă generală ecuațiile transcendente de mai sus au fost rezolvate dând valori variabilei  $\frac{\omega}{c_s} d$  pe

domeniul de interes și căutând soluția  $\frac{c}{c_s}$  pe intervalul  $[0, 10]$  prin inițierea unei funcții Matlab de rezolvare

a ecuațiilor transcendente cu valori crescând de la 0 la 10 cu un anumit pas a cărui alegere este de multe ori critică.

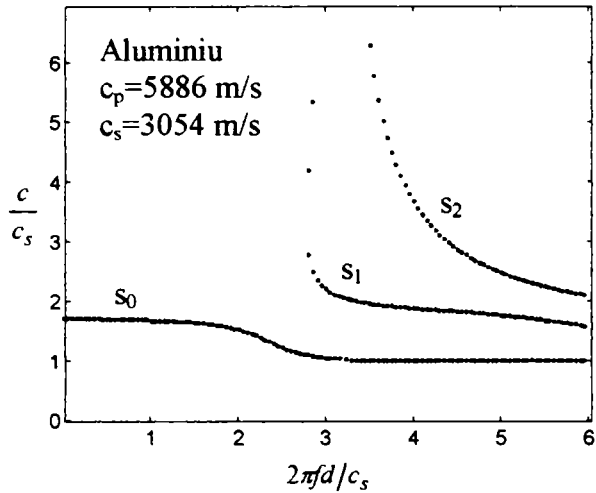


Fig. 5-22. Viteza de fază a undelor Lamb normalizată la viteza undei  $s$  funcție de produsul  $k_s d = 2\pi f d / c_s$ , pentru modurile simetrice.

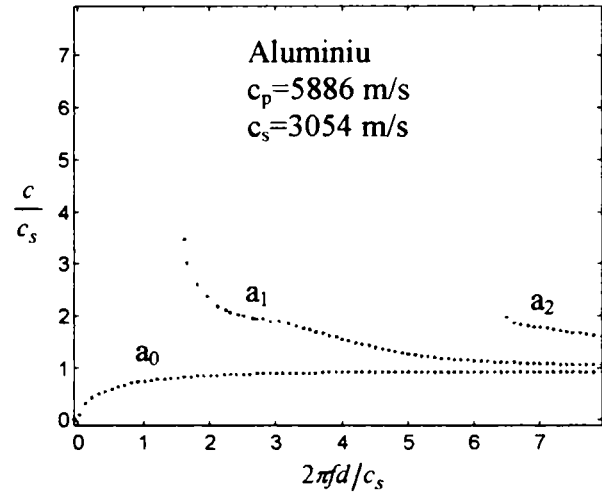


Fig. 5-23. Viteza de fază a undelor Lamb normalizată la viteza undei  $s$  funcție de produsul  $k_s d = 2\pi f d / c_s$ , pentru modurile asimetrice.

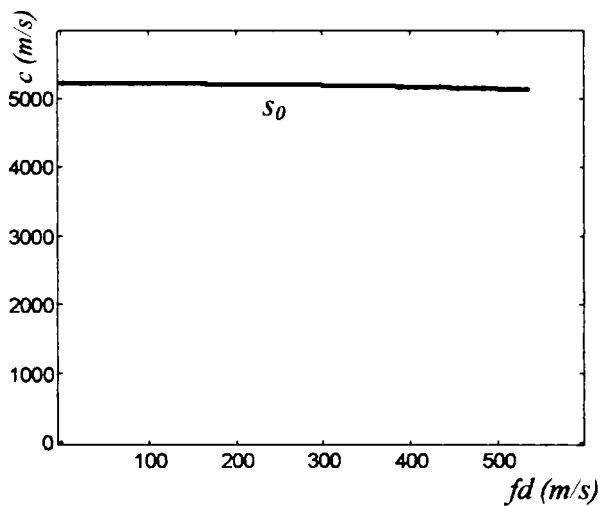


Fig. 5-24. Viteza de fază a modului  $s_0$  funcție de produsul dintre frecvența excitatoare și grosimea plăcii de Al.

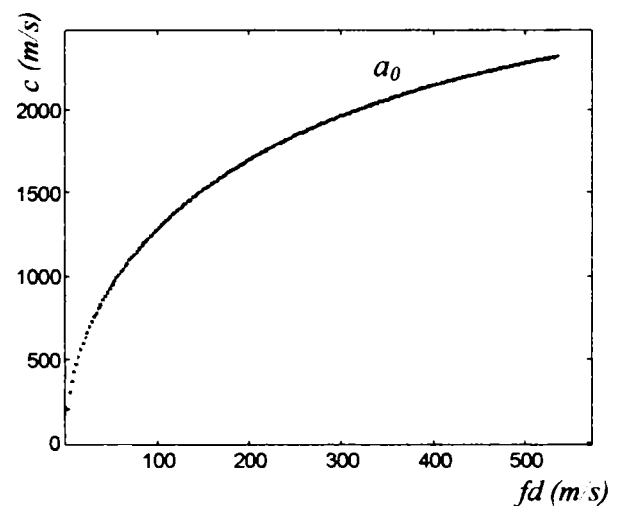


Fig. 5-25. Viteza de fază a modului  $a_0$  funcție de produsul dintre frecvența excitatoare și grosimea plăcii de Al.

În cazul unor plăci făcute din fier sau cupru, graficele care reprezintă viteza de fază normalizată funcție de produsul  $k_s d$  prezintă diferențe insesizabile vizual față de Fig. 5-22, Fig. 5-23 și de aceea nu s-au mai prezentat.

Concluzia care se poate trage din cele două diagrame de mai sus este aceea că până la o anumită valoare a produsului  $k_s d$  ( $\approx 1.8$ ), în placa metalică se propagă doar două moduri  $s_0$  și  $a_0$  fiecare cu propria sa viteză de fază. Dependența vitezei  $c$  de grosimea foi de material este puternică doar pentru modul  $a_0$  în regiunea  $k_s d < 1$  ( $fd < 500$ ) (Fig. 5-23, Fig. 5-25). Viteza cu care se propagă primul mod asimetric poate fi considerată ca o măsură a grosimii plăcii. Dacă grosimea acesteia este variabilă, porțiunile mai subțiri conduc la o încetinire a undei  $a_0$  iar cele mai groase la o accelerare a acesteia față de unda care se propagă într-o foaie având  $d$  constant (Fig. 5-1, Fig. 5-26).



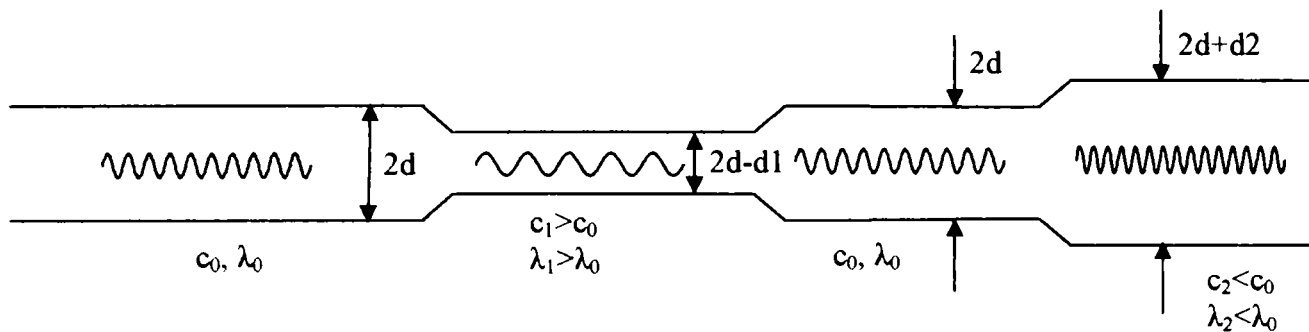


Fig. 5-26. Variația vitezei modului Lamb asimetric fundamental funcție de grosimea plăcii (desen orientativ).

În continuare se va analiza un exemplu concret, considerând o placă de Al cu grosimea  $2d < 10 \text{ mm}$  ( $d < 5 \text{ mm}$ ). Din condiția  $k_s d_{max} < 1$  rezultă  $f < 97 \text{ KHz}$ . Se cere dependența vitezei de fază  $c$  a modurilor fundamentale  $a_0, s_0$  de grosimea plăcii de Al atunci când frecvența excitatoare ia valorile 5, 20, 35, 50, 65, 80, 95 KHz.

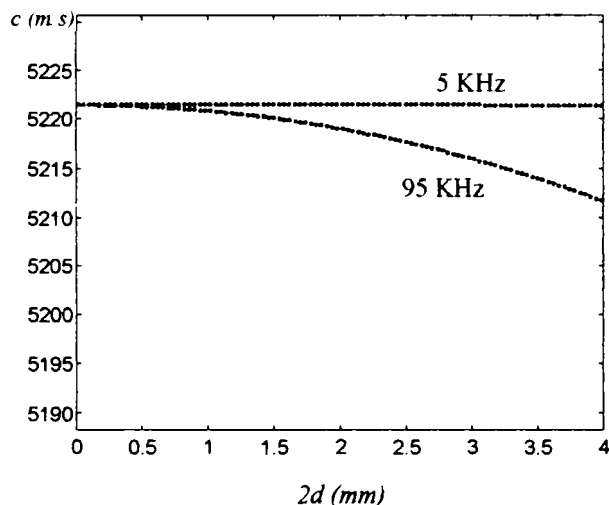


Fig. 5-27. Dependența vitezei de fază a modului  $s_0$  de grosimea plăcii de Al pentru frecvențe excitatoare de: 5, 95 KHz.

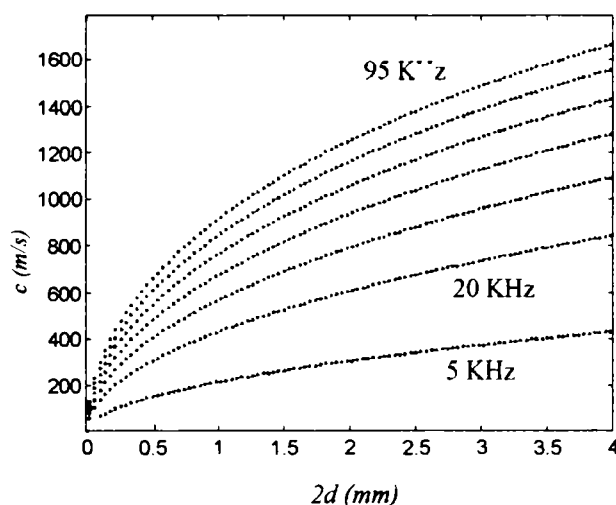


Fig. 5-28. Dependența vitezei de fază a modului  $a_0$  de grosimea plăcii de Al pentru frecvențe excitatoare de: 5, 20, 35, 50, 65, 80, 95 KHz.

Diagramele din Fig. 5-27, Fig. 5-28 dau răspunsul la problema precedentă. În cazul modului  $a_0$  se constată că variația vitezei sale de fază este cu atât mai sensibilă la modificarea grosimii plăcii de metal cu o cantitate  $\Delta d$  dată, cu cât frecvența excitatoare este mai mare și cu cât grosimea de bază a foii de aluminiu este mai mică.

Pentru cazul particular când  $2d = 2 \text{ mm}$ , Tab. 5-6., Tab. 5-7. prezintă în detaliu variația vitezei de fază a modurilor  $a_0$  și  $s_0$  atunci când grosimea plăcii de aluminiu variază cu  $\pm 1\%$ . Se constată un ecart sesizabil de viteză de fază doar pentru modul  $a_0$ , și cu precădere în zona frecvențelor de excitație mari.

Tab. 5-6. Dependența vitezei de fază,  $c$ , a modului  $a_0$  funcție de frecvența de excitație, atunci când grosimea foii de Al ( $2d = 2 \text{ mm}$ ) variază cu  $\pm 20 \mu\text{m}$ .

f (KHz)	c(2d-20 $\mu\text{m}$ ) (m/s)	c(2d) (m/s)	c(2d+20 $\mu\text{m}$ ) (m/s)	$\Delta c$ (m/s)	$\Delta c_+$ (m/s)
5	305.1	306.6	308.1	1.5	1.5
20	603.5	606.4	609.4	2.9	3.0
35	789.7	793.5	797.3	3.8	3.8
50	933.9	938.3	942.6	4.4	4.3
65	1053.7	1058.7	1063.7	5.0	5.0
80	1156.9	1162.1	1167.3	5.2	5.2
95	1248.0	1253.5	1258.9	5.5	5.4

Tab. 5-7. Dependența vitezei de fază,  $c$ , a modului  $s_0$  funcție de frecvența de excitație, atunci când grosimea foii de Al ( $2d=2\text{ mm}$ ) variază cu  $\pm 20\ \mu\text{m}$ .

f (KHz)	$c(d-20\ \mu\text{m})$ (m/s)	$c(d)$ (m/s)	$c(d+20\ \mu\text{m})$ (m/s)	$\Delta c_-$ (m/s)	$\Delta c_+$ (m/s)
5	5221.5	5221.5	5221.5	0	0
20	5221.4	5221.4	5221.4	0	0
35	5221.2	5221.2	5221.2	0	0
50	5220.8	5220.8	5220.8	0	0
65	5220.4	5220.3	5220.3	0.1	0
80	5219.8	5219.8	5219.7	0	0.1
95	5219.1	5219.1	5219.0	0	0.1

## 5.6. Generarea ultrasunetelor prin efect termoelastic

### 5.6.1. Introducere

Transmiterea undelor elastice de la traductorul piezoelectric generator la corpul de excitat, prin tehnici noncontact prezintă probleme de cuplaj deosebite îndeosebi în cazul când se dorește inducerea unor oscilații de înaltă frecvență. Mare parte din energia undelor incidente se reflectă înapoi în mediul din care a venit și ca urmare perturbațiile elastice generate vor avea amplitudini extrem de mici fiind greu de detectat. Se impune așadar găsirea unui procedeu de excitație mai eficient.

Paragraful studiază posibilitatea generării de unde elastice de intensitate rezonabil de mare, prin dilatarea rapidă a unei mici porțiuni din volumul corpului de test. Prin încălzire bruscă, elementul de volum considerat se dilată generând tensiuni pe fețele elementelor învecinate. Tensiunile se propagă mai departe din aproape în aproape sub forma unor unde elastice [5-10]. Este de preferat ca încălzirea să nu implice contact mecanic, să fie cât mai localizată și de asemenea este obligatoriu ca gradientul de temperatură format să nu conducă la avarierea corpului studiat. Un dispozitiv de încălzire care întrunește calitățile enumerate anterior este laserul. Acesta poate focaliza o cantitate mare de energie pe un spațiu restrâns și într-un timp foarte scurt. Pulsul laser creează o sursă de oscilații de înaltă frecvență localizată pe suprafața și / sau în volumul probei luminate. Procedeu are totuși limitele sale fiind util în condițiile în care materialul din care este făcut obiectul de probă suportă șocuri termice relativ mari, fără ca acestea să-i inducă modificarea ireversibilă a unor proprietăți.

Atât calculele teoretice cât și diversele încercări experimentale pun în evidență trei mecanisme importante de generare a ultrasunetelor cu ajutorul căldurii [5-4],[5-17]:

1) *Mecanismul termoelastic*, în care absorbția energiei unui puls termic cauzează o ridicare rapidă a temperaturii ce induce mai departe un stres de natură dilatațională. Componentele normale ale tensiunii de la suprafață liberă sunt mult mai puțin excitate decât cele tangențiale. Unda care ia naștere are un puternic caracter superficial. Avantajul metodei este lipsa oricărui contact fizic între sursa excitatoare și corpul testa a cărui suprafață nu trebuie pregătită în nici un fel.

2) *Sursa termoelastică constrânsă*. Producerea de ultrasunete necesită acoperirea în prealabil a corpului iradiat cu un strat de material transparent sau semitransparent pentru lumină care se opune mecanic dilatării materialului pe direcția normală creând astfel o tensiune perpendiculară pe suprafață, de valori mai mari ca în primul caz și excitând în acest fel unde de volum. Procedeu are aplicabilitate îndeosebi în cazul în care stratul superficial a fost depus în alte scopuri decât special pentru testare (de exemplu: o peliculă de vopsea).

3) *Formarea bruscă a plasmei*. La densități mari ale energiei incidente se produce topirea și evaporarea locală a suprafeței ducând la formarea unei plume deasupra obiectului testat. Aplicând principiul conservării impulsului și legea a doua a dinamicii pentru masa evaporată și masele elementelor de volum din vecinătatea minicraterului format se ajunge la concluzia că o forță intensă acționează cu precădere normal pe suprafață pentru o perioadă scurtă de timp generând un puls ultrasonic de mare frecvență.

Pentru ca mecanismul să fie util pentru investigarea nedistructivă ar trebui, de exemplu, ca materialul testat să fie acoperit cu un strat protector din care raza laser să evaporeze instantaneu substanță și să creeze astfel ultrasunete. Procedeu seamănă cu folosirea stratului lichid de adaptare folosit în cazul traductorilor piezoelectrice.

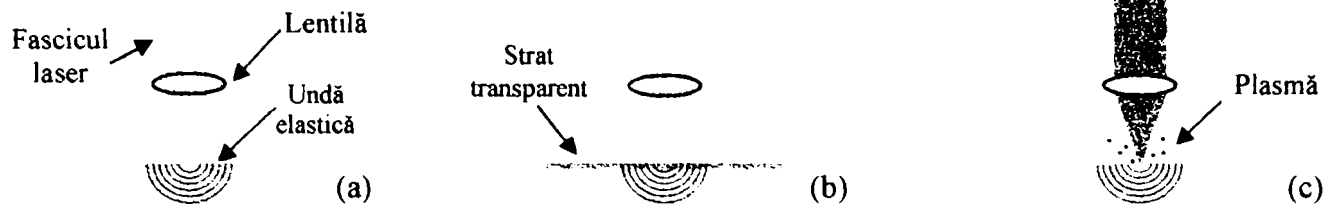


Fig. 5-29. Generarea ultrasunetelor prin efect termoelastic: a) sursă simplă, b) sursă constrânsă, c) sursă cu formare bruscă a plasmă.

Primul procedeu de generare a ultrasunetelor prezintă interes deosebit în testarea nedistructivă [5-4], [5-5] și va face obiectul paragrafului în curs.

### 5.6.2. Transformarea energiei câmpului electromagnetic în energie elastică

Generarea ultrasunetelor și în general a undelor elastice pe baza conversiei energiei câmpului electromagnetic luminos în energie elastodinamică poate fi analizată cantitativ plecând de la studierea a trei procese fizice:

- 1) *Absorbția energiei electromagnetice în substanță cu generare de căldură.*
- 2) *Difuzia termică având drept sursă de căldură energia electromagnetică.*
- 3) *Generarea de unde elastodinamice prin expansiunea volumului unor porțiuni de material datorită dilatării termice.*

În continuare se presupune că absorbția câmpului electromagnetic nu schimbă proprietățile termice, elastice sau electromagnetice ale corpului de studiat.

### 5.6.3. Absorbția energiei electromagnetice în substanță cu generare de căldură

Punctul de plecare al interacției dintre câmp și substanță sunt ecuațiile lui Maxwell, care pentru un mediu liniar și izotrop fără polarizație și magnetizație permanentă, neaccelerat și fără distribuție de sarcină, sunt:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (5-48)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5-49)$$

$$\mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (5-50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (5-51)$$

$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$  care este valabilă și pentru  $\mathbf{H}$ , rezultă:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (5-52)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (5-53)$$

Aplicând operatorul rotor ecuațiilor ( 5-48 ), ( 5-49 ) și ținând cont de identitatea :  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} =$

În ecuațiile ( 5-48 ) - ( 5-53 )  $\mathbf{E}$  este intensitatea câmpului electric,  $\mathbf{H}$  intensitatea câmpului magnetic,  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  permitivitatea electrică a mediului,  $\mu = \mu_0 \mu_r$  permeabilitatea magnetică,  $\sigma$  conductivitatea,  $\varepsilon_0$  este permitivitatea vidului,  $\mu_0$  permeabilitatea magnetică a vidului iar  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  permitivitatea respectiv permeabilitatea relativă.

Se va considera în continuare cazul unei unde electromagnetice plane monocromatice polarizate liniar care vine dintr-un semispațiu fără pierderi (ex: aer) și cade sub un unghi oarecare de incidență pe un al doilea semispațiu caracterizat de un anumit coeficient de absorbție. Cantitatea de căldură generată în materialul absorbant este proporțională cu energia unei luminoase absorbite. Ideal ar fi dacă întreaga cantitate de energie existentă în câmpul optic incident s-ar transforma în căldură, care la rândul ei ar genera un gradient de temperatură cât mai localizat și totodată suficient de intens capabil să producă prin dilatare bruscă o undă elastodinamică ultrasonoră de intensitate relativ mare. Mediile care au *coeficienți de reflexie*

mari sau coeficienți de absorbție mici nu convertesc foarte eficient energia electromagnetică în cea ultrasonoră.

### a) Reflexia și refracția în cazul mediilor dielectrice ( $\sigma=0$ )

În această situație expresiile ( 5-52 ) - ( 5-53 ) pierd termenul central devenind:

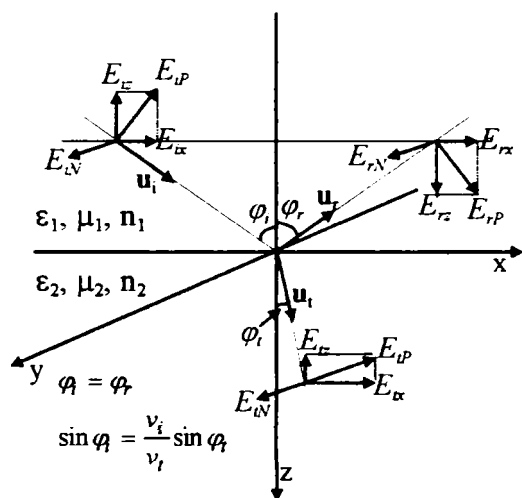
$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ (a)} \quad \Delta \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \text{ (b)}. \quad (5-54)$$

Se caută o soluție de forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp \left[ i \omega \left( t - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{v} \right) \right], \quad (5-55)$$

unde  $\mathbf{u}$  este versorul direcției de propagare,  $\mathbf{r}$  vectorul de poziție și  $v$  viteza de propagare a undei în mediul considerat. Punând  $v=c/n$ , în care  $c$  este viteza luminii în vid iar  $n$  un număr supraunitar numit coeficient de refracție și înlocuind ( 5-55 ) în ( 5-54 - a ) se obține  $n = c\sqrt{\varepsilon\mu}$ .

Pentru a afla amplitudinile undelor reflectată și transmisă, se presupune că atât intensitatea câmpului electric cât și cea a câmpului magnetic au o componentă în planul de incidență ( $E_{iP}$ ,  $E_{rP}$ ,  $E_{tP}$ ;  $H_{iP}$ ,  $H_{rP}$ ,  $H_{tP}$ ) și una normală la acest plan ( $E_{iN}$ ,  $E_{rN}$ ,  $E_{tN}$ ;  $H_{iN}$ ,  $H_{rN}$ ,  $H_{tN}$ ) ca în Fig. 5-30 [3-1].



$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{u}_i \times \mathbf{E}_i, \\ \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t) &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{u}_r \times \mathbf{E}_r, \\ \mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \mathbf{u}_t \times \mathbf{E}_t. \end{aligned} \quad (5-56)$$

Pe suprafața de separație  $z=0$  au loc următoarele condiții de continuitate:

$$\begin{aligned} E_{ix} + E_{rx} &= E_{tx}, H_{ix} + H_{rx} = H_{tx}, \\ E_{iy} + E_{ry} &= E_{ty}, H_{iy} + H_{ry} = H_{ty}. \end{aligned} \quad (5-57)$$

Fig. 5-30. Reflexia și refracția câmpului electromagnetic.

Ținând cont de Fig. 5-30, expresiile de legătură dintre câmpul magnetic și cel electric ( 5-56 ) și condițiile de continuitate pe suprafața de separație ( 5-57 ), se pot scrie următoarele egalități:

$$E_{iP} \cos \varphi_i + E_{rP} \cos \varphi_i = E_{tP} \cos \varphi_t, \quad (5-58)$$

$$E_{iN} + E_{rN} = E_{tN}, \quad (5-59)$$

$$E_{iN} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_i - E_{rN} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_i = E_{tN} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_t, \quad (5-60)$$

$$E_{iP} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - E_{rP} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} = E_{tP} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}. \quad (5-61)$$

Rezolvând ( 5-58 ) - ( 5-61 ) se obțin următoarele expresii pentru undele reflectate și transmise:

$$E_{rP} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_t}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_t} E_{iP}$$

sau

$$E_{rP} = R_P E_{iP} \quad (5-62)$$

$$E_{rN} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_t}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_t} E_{iP}$$

sau

$$E_{rN} = R_N E_{iP} \quad (5-64)$$

$$E_{iP} = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{\cos \varphi_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_t} E_{iP}$$

sau

$$E_{iP} = T_P E_{iP} \quad (5-63)$$

$$E_{iN} = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{\cos \varphi_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_t} E_{iN}$$

sau

$$E_{iN} = T_N E_{iN} \quad (5-65)$$

unde  $\varphi_t$  se calculează din legea refracției:

$$\sin \varphi_i = \frac{v_1}{v_2} \sin \varphi_t = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_t \quad (5-66)$$

$R_P, R_N, T_P, T_N$  sunt coeficienții de reflexie și transmisie paraleli și respectiv perpendiculari.

În cazul dielectricilor transparenți  $\mu_{r1} \approx \mu_{r2} \approx 1$  și ca urmare  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ ,  $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ . Expresiile (5-62) - (5-65), ținând cont de (5-66), devin:

$$E_{rP} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi_i - \varphi_t)}{\operatorname{tg}(\varphi_i + \varphi_t)} E_{iP}, E_{iP} = \frac{2 \cos \varphi_i \sin \varphi_t}{\sin(\varphi_i + \varphi_t) \cos(\varphi_i - \varphi_t)} E_{iP}, \quad (5-67)$$

$$E_{rN} = -\frac{\sin(\varphi_i - \varphi_t)}{\sin(\varphi_i + \varphi_t)} E_{iN}, E_{iN} = \frac{2 \cos \varphi_i \sin \varphi_t}{\sin(\varphi_i + \varphi_t)} E_{iN}. \quad (5-68)$$

Dacă intensitatea câmpului electric al unei incidente are numai componentă situată în planul de incidență iar unghiul de incidență  $\varphi_i \rightarrow 0$ , atunci din (5-58) - (5-61) rezultă:

$$E_{rP} = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{iP}, E_{iP} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{iP}. \quad (5-69)$$

În cazul în care unda incidentă posedă doar componentă normală a câmpului electric pe planul de incidență iar unghiul  $\varphi_i \rightarrow 0$ , atunci din (5-58) - (5-61) rezultă:

$$E_{rN} = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{iN}, E_{iN} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{iN}. \quad (5-70)$$

## b) Reflexia refracția și absorbția în cazul mediilor conductoare ( $\sigma \neq 0$ )

Căutând o soluție de forma (5-55) pentru (5-52) se obține:

$$n^2 = c^2 \epsilon \mu - i \sigma \mu \frac{c^2}{\omega}. \quad (5-71)$$

Expresia (5-71) arată că indicele de refracție al corpurilor conductoare este complex putând fi pus așadar sub forma:

$$n = n_r - i \chi, \quad (5-72)$$

în care  $n_r$  este indicele de refracție real iar  $\chi$  poartă numele de indice de extincție.

Prin înlocuirea lui (5-72) în (5-55) în care de data aceasta  $v = c / (n_r - i \chi)$  se ajunge la următoarea expresie a unei progresive:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp\left(-\frac{\chi \omega}{c} \mathbf{r}\right) \exp\left[i\left(\omega t + \frac{n_r \omega}{c} \mathbf{r}\right)\right]. \quad (5-73)$$

Se face notația:  $\alpha = \chi \omega / c$  unde  $\alpha$  reprezintă un factor de atenuare numit coeficient de absorbție:

$$n_r = c \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right)}, \quad (5-74)$$

$$\alpha = \frac{\chi\omega}{c} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right)}. \quad (5-76)$$

$$\chi = c \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right)}, \quad (5-75)$$

Dacă cel puțin unu din cele două medii din Fig. 5-30 prezintă conductivitate, formulele (5-62) - (5-65), plus (5-66) rămân valabile cu deosebirea că  $n$  este acum complex ( $n_1 = n_{r1} - i\chi_1$  și  $n_2 = n_{r2} - i\chi_2$ ). De mare interes pentru conversia energiei electromagnetice în căldură este cazul când  $n_1$  este real (raza laser vine din aer) și  $n_2$  este complex (mediul pe care cade raza este un conductor).

### c) Transformarea energiei optice în căldură pentru materiale cu ( $\sigma \neq 0$ ).

Înmulțind ecuațiile lui Maxwell (5-48), (5-49) cu  $\mathbf{H}$  respectiv  $\mathbf{E}$ , scăzând pe a doua din prima și folosind identitatea  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \nabla \times \mathbf{H}$ , rezultă:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \sigma \mathbf{E}^2 = -\epsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (5-77)$$

Integrând (5-77) pe un volum  $V$  limitat de o suprafață  $\Sigma$  se obține:

$$\oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \mathbf{n}_n dS + \int_{V_{\Sigma}} \sigma \mathbf{E}^2 dV = - \int_{V_{\Sigma}} \left( \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dV. \quad (5-78)$$

Relația (5-78) cunoscută sub numele de teorema lui Poynting spune că: *rata de scădere în timp a energiei înmagazinate în câmpul electromagnetic din volumul  $V$  este egală cu fluxul energiei electromagnetice prin suprafața  $\Sigma$  plus pierderile prin efect Joule.*

$P_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \mathbf{n}_n dS$  este puterea transportată de câmpul electromagnetic prin suprafața închisă  $\Sigma$ . Mărimea

$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}$  se numește vectorul lui Poynting și are dimensiunea unei puteri transportată prin unitatea de arie,  $\langle |\mathbf{S}| \rangle = J/m^2 \cdot s$ .  $P_Q = \int_{V_{\Sigma}} \sigma \mathbf{E}^2 dV$  este puterea disipată prin efect Joule în volumul închis de suprafața  $\Sigma$ . Mărimea

$\sigma \mathbf{E}^2$  reprezintă *densitate de putere disipată în unitatea de volum*, având ca unitate de măsură:  $J/m^3 \cdot s$ . În calculele ce urmează se va folosi notația:

$$Q(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t), \quad (5-79)$$

Pentru situația în care  $\mathbf{E}$  are o variație armonică densitatea de putere medie disipată în unitatea de volum este:

$$Q_m(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}). \quad (5-80)$$

### d) Procedura de calcul a căldurii din interiorul unui material conductor funcție de parametrii de material și caracteristicile razei laser incidente

Ținând cont de cele prezentate la punctele a), b), c), distribuția de căldură generată în materialul supus acțiunii razei laser depinde de o serie de factori: intensitatea câmpului electric, unghiul de incidență al luminii față de normala la suprafața de test, constantele de material (permitivitate electrică, permeabilitate magnetică și conductivitate electrică, din care ultima are un rol hotărâtor), etc.

Pentru a găsi o relație cantitativă între  $Q(\mathbf{r}, t)$  și mărimile fizice mai sus menționate se presupune că raza laser are secțiune pătrată cu latura  $a$ , frecvența  $\omega$  iar câmpul său electric posedă două componente: una paralelă cu planul de incidență și una normală pe acest plan, ambele componente fiind perpendiculare în același timp pe direcția de propagare și având amplitudinile  $E_{IP}$  și respectiv  $E_{IN}$ . Sunt cunoscuți



parametrii  $\varepsilon_1, \mu_1$  corespunzătorii mediului din care vine lumina (de obicei aer) și  $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma$  ai mediului în care raza transmisă generează căldură. Unghiul de incidență  $\varphi_i$  este de asemenea cunoscut.

Ceea ce se cere este distribuția de căldură  $Q(\mathbf{r}, t)$  (Fig. 5-31) atunci când unghiul de incidență variază.

Relațiile ( 5-63 ), ( 5-65 ) dau legătura dintre intensitatea câmpului transmis și cel reflectat într-un anumit punct de pe suprafața de separație. Astfel:

$$E_{iP}(\mathbf{r}_s, t) = T_P E_{iP}(\mathbf{r}_s, t) = E_{0P}(\mathbf{r}_s, t), \quad E_{iN}(\mathbf{r}_s, t) = T_N E_{iN}(\mathbf{r}_s, t) = E_{0N}(\mathbf{r}_s, t), \quad (5-81)$$

$$E_{rP}(\mathbf{r}_s, t) = R_P E_{iP}(\mathbf{r}_s, t), \quad E_{rN}(\mathbf{r}_s, t) = R_N E_{iN}(\mathbf{r}_s, t), \quad (5-82)$$

în care  $\mathbf{r}_s$  are originea în centrul proiecției secțiunii transversale a razei de lumină pe planul suprafeței testate și desemnează doar puncte în acest plan (Fig. 5-31). Particularizând teorema lui Poynting, ( 5-78 ), pentru situația descrisă în Fig. 5-31, se observă că energia electromagnetică doar intră în obiect și numai prin suprafața exterioară a cilindrului înclinat figurat în degradă. Ținând seama de faptul că  $E_{0P}(\mathbf{r}_s, t)$ ,  $E_{0N}(\mathbf{r}_s, t)$  sunt semnale armonice iar amplitudinea lor este constantă pe toată suprafața luminată de fasciculul laser, rezultă puterea electromagnetică medie care intră în corpul testat ( puterea transmisă ) ca fiind:

$$P_{tm} = a^2 \frac{\cos \varphi_t}{\cos \varphi_i} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} (E_{0P}^2 + E_{0N}^2) = a^2 \frac{\cos \varphi_t}{\cos \varphi_i} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} (T_P^2 E_{iP}^2 + T_N^2 E_{iN}^2). \quad (5-83)$$

O expresie analogă se stabilește pentru puterea medie reflectată:

$$P_{rm} = a^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (R_P^2 E_{iP}^2 + R_N^2 E_{iN}^2). \quad (5-84)$$

De asemenea puterea medie incidentă se scrie sub forma:

$$P_{im} = a^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_{iP}^2 + E_{iN}^2). \quad (5-85)$$

Dacă expresiile ( 5-83 ), ( 5-84 ), ( 5-85 ) se împart la  $a^2$  se obțin expresiile densităților de putere transmisă reflectată și incidentă notate cu:  $P_{tm}, P_{rm}, P_{im}$ .

Coeficienții de transmisie și reflexie pentru putere, sau densitate de putere de suprafața, se definesc analog cu cei pentru amplitudini putându-se scrie:

$$T = \frac{P_{tm}}{P_{im}} = \frac{\cos \varphi_t}{\cos \varphi_i} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\mu_2 \varepsilon_1}} \left( \frac{T_P^2 + \frac{E_{iN}}{E_{iP}} T_N^2}{1 + \frac{E_{iN}}{E_{iP}}} \right), \quad R = \frac{P_{rm}}{P_{im}} = \left( \frac{R_P^2 + \frac{E_{iN}}{E_{iP}} R_N^2}{1 + \frac{E_{iN}}{E_{iP}}} \right). \quad (5-86)$$

În multe situații se cunoaște doar puterea medie a laserului. În acest caz cele două intensități ale câmpului electric se calculează din ( 5-85 ) făcând presupunerea că modulele lor sunt egale.

Densitatea medie de putere disipată sub formă de căldură , într-un punct cu vectorul de poziție  $\mathbf{r}$  paralel cu  $\mathbf{u}_i$  și cu originea în vârful vectorului  $\mathbf{r}_s$  corespunzător (Fig. 5-31), este:

$$Q_m(\mathbf{r}) = \sigma (E_P(\mathbf{r}, t) E_P^*(\mathbf{r}, t) + E_N(\mathbf{r}, t) E_N^*(\mathbf{r}, t)), \quad (5-87)$$

în care:

$$E_P(\mathbf{r}, t) = E_{0P} \exp\left(-\frac{\chi\omega}{c} \mathbf{r}\right) \exp\left[i\left(\omega t + \frac{n_r\omega}{c} \mathbf{r}\right)\right] \text{ și } E_N(\mathbf{r}, t) = E_{0N} \exp\left(-\frac{\chi\omega}{c} \mathbf{r}\right) \exp\left[i\left(\omega t + \frac{n_r\omega}{c} \mathbf{r}\right)\right]. \quad (5-88)$$

Ca urmare:

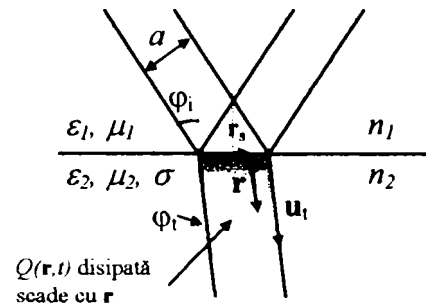
$$Q_m(\mathbf{r}) = \sigma (E_{0P}^2 + E_{0N}^2) \exp\left(-\frac{2\chi\omega}{c} \mathbf{r}\right) = \sigma (T_P^2 E_{iP}^2 + T_N^2 E_{iN}^2) \exp\left(-\frac{2\chi\omega}{c} \mathbf{r}\right) = \sigma P_{im} \frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_t} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \exp\left(-\frac{2\chi\omega}{c} \mathbf{r}\right) \quad (5-89)$$

sau

$$Q_m(\mathbf{r}) = \sigma_{im}^p \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \left( \frac{T_P^2 + \frac{E_{iN}}{E_{iP}} T_N^2}{1 + \frac{E_{iN}}{E_{iP}}} \right) \exp\left(-\frac{2\chi\omega}{c} r\right). \quad (5-90)$$

**Algoritm e ca cu a distribuției e că ură**

Cu ajutorul parametrilor dați la începutul punctului *d*) se calculează mai întâi indicii de refracție în formatul ( 5-72 ) cu ajutorul expresiilor ( 5-74 ), ( 5-75 ). În continuare se evaluează  $\varphi_i$  din ( 5-66 ) și coeficienții de transmisie  $T_P$  și  $T_N$  folosind formulele ( 5-63 ) și ( 5-65 ). În final  $Q_m(\mathbf{r})$  este dat de ( 5-89 ), ( 5-90 ).

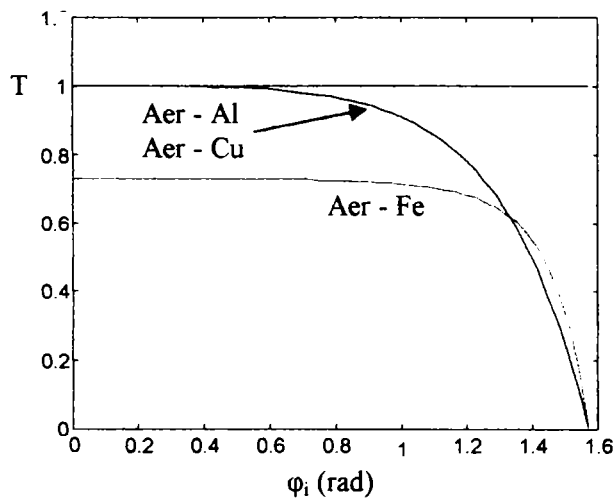


**Fig. 5-31.** Transformarea energiei electromagnetice în căldură

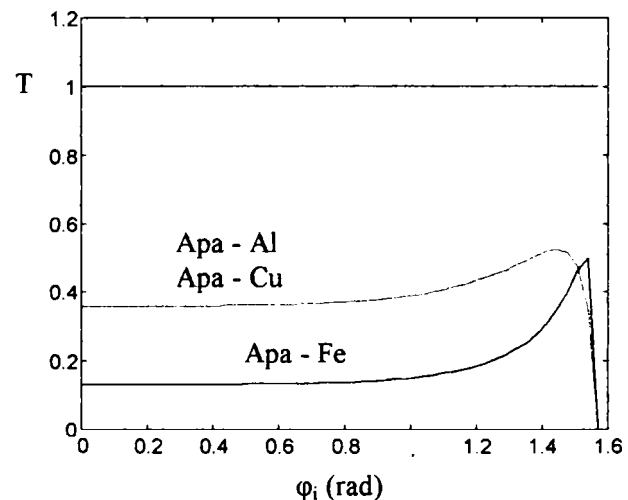
**e) Rezultate numerice**

Experimental se constată că un fascicul laser incident pe o suprafață *metalică* nu duce la deteriorarea acesteia dacă rază luminoasă are în secțiunea transversală o densitate de putere mai mică ca  $10^6$  W/cm<sup>2</sup>. Pentru calculele următoare se presupune că raza incidentă are o secțiune de formă pătrată, și o densitate de putere, constantă în toată secțiunea, mai mică decât cea critică. Ceea ce se urmărește este reprezentarea grafică a dependenței densității de putere disipată sub formă de căldură de: unghiul de incidență, adâncimea în material, caracteristicile de material, puterea incidentă.

Folosind datele din Tab. 5-8 se vor calcula coeficienții de transmisie ai puterii incidente pentru două tipuri mari de interfețe: Aer - Metal și Apă - Metal. După cum se observă din graficele Fig. 5-32, Fig. 5-33, coeficientul de transmisie al puterii optice corespunzător interfeței Aer - Metal este constant pe o plajă mare a unghiurilor de incidență, scăzând puternic doar pentru unghiuri apropiate de  $90^\circ$ . În cazul metalelor cu conductivitate foarte mare cum sunt Cu și Al se realizează o transmisie aproape integrală a puterii pentru unghiuri de incidență aparținând intervalului  $[0, \sim\pi/4]$ . Randamentul interfeței Apă - Metal este mai slab, cu o creștere puternică spre unghiuri de incidență mari. Acest tip de interfață este totuși de mai mică importanță întrucât în majoritatea situațiilor de generare termoelastică a ultrasunetelor, raza laser vine din aer.



**Fig. 5-32.** Coeficientul de transmisie al puterii optice funcție de unghiul de incidență pentru cazul când raza laser cade pe o suprafață metalică venind din aer.

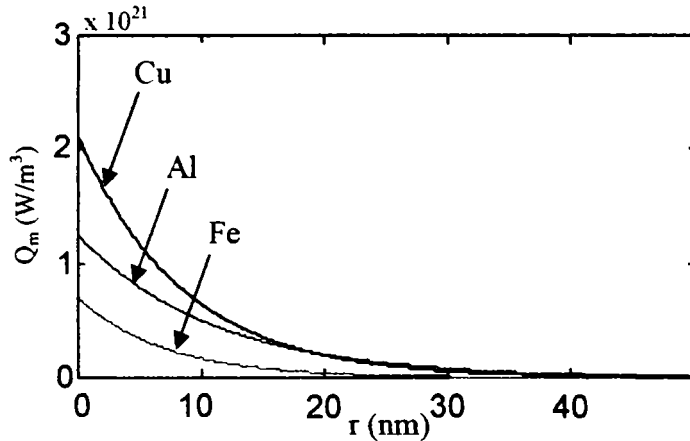


**Fig. 5-33.** Coeficientul de transmisie al puterii optice funcție de unghiul de incidență pentru cazul când raza laser cade pe o suprafață metalică venind din apă.

Puterea transmisă generează căldură în metal doar pe o distanță, măsurată pe direcția normalei la suprafață, extrem de mică (Fig. 5-34), sub  $40\text{ nm}$ . (unghiurile de refracție în cazul interfeței aer - metal fiind extrem de mici indiferent de  $\varphi_i$  se considera  $r$  ca fiind perpendicular pe suprafața de separație).

Densitatea de putere disipată sub formă de căldură funcție de adâncimea în material este dependentă de tipul metalului utilizat având același ordin de mărime pentru cele trei metale considerate indiferent de adâncime. În ceea ce privește dependența lui  $Q_m$  de unghiul de incidență, aceasta este foarte slabă (Fig. 5-35) crescând pentru unghiuri extrem de mari. Din ( 5-90 ) se constată direct o dependență liniară a lui  $Q_m$  funcție de puterea incidentă.

Tab. 5-8. Constante de material.



	$\epsilon_r$	$\mu_r$	$\sigma (l \cdot \Omega \cdot m)$
Aer	1.00060	1	$10^{-10}$
Apă	81	1	20
Aluminiu	1	1	$3.3 \cdot 10^9$
Fier	1	10	$0.8 \cdot 10^9$
Cupru	1	1	$5.6 \cdot 10^9$

$\epsilon_0 = 8.8541 \cdot 10^{-12} (C^2/N \cdot m^2)$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} (N/A^2)$

Fig. 5-34. Densitatea de putere disipată sub formă de căldură funcție de adâncimea în material pentru situația în care o rază laser cu densitatea de putere în secțiunea transversală de  $10^5\text{ W/cm}^2$  și frecvența  $10^{12}\text{ Hz}$  cade perpendicular pe o suprafață metalică de: Al, Fe, Cu.

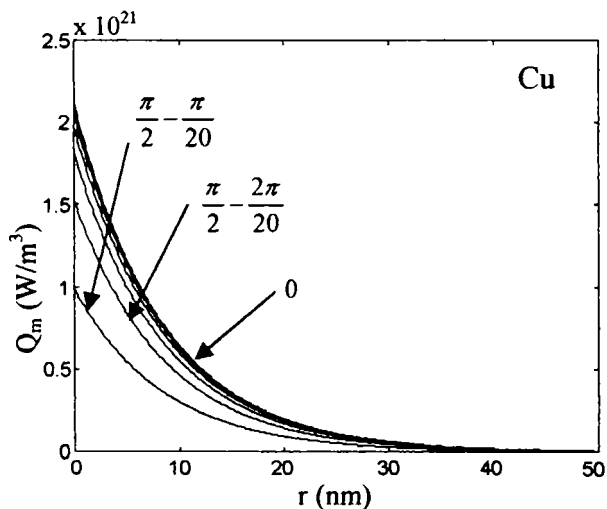
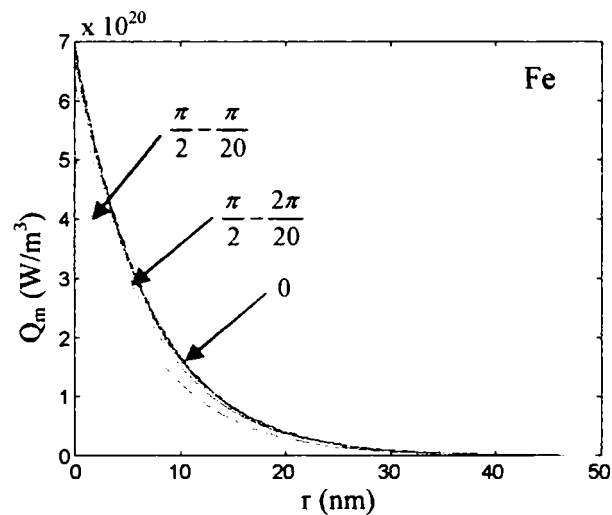
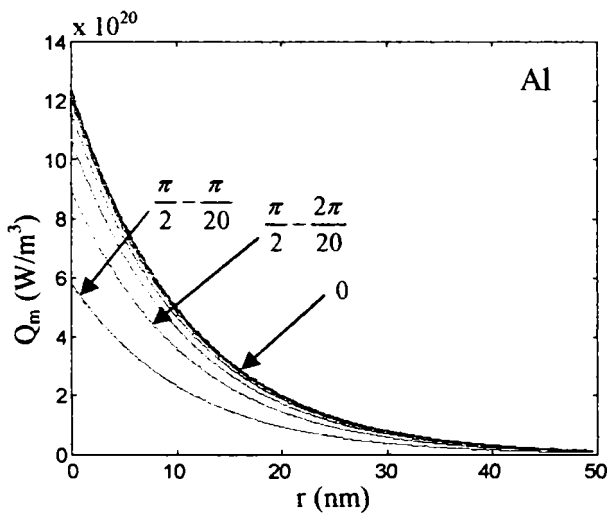


Fig. 5-35. Densitatea de putere disipată sub formă de căldură funcție de adâncimea în material pentru cazurile în care o rază laser cu densitatea de putere în secțiunea transversală de  $10^5\text{ W/cm}^2$  și frecvența  $10^{12}\text{ Hz}$  cade sub unghiurile de incidență:  $0, \pi/20, 2\pi/20, \dots, \pi/2 - \pi/20$  pe o suprafață metalică de: Al, Fe, Cu.

#### 5.6.4. Difuzia termică

Dacă se cunoaște distribuția  $Q(\mathbf{r}, t)$  în interiorul unui obiect oarecare, atunci distribuția de temperatură ce apare se calculează cu ajutorul *ecuației de difuzie termică*, care are forma [1-15], [3-1], [5-10]:

$$\rho c_T \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - K \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) = Q(\mathbf{r}, t), \quad (5-91)$$

unde  $\rho$  este densitatea materialului,  $c_T$  căldura specifică și  $K$  conductivitatea termică.

Ecuația ( 5-91 ) s-ar simplifica substanțial dacă constanta  $K$  ar putea fi neglijată. În cazul mediilor puternic conductoare de căldură și care în același timp sunt caracterizate de adâncimi mici de penetrare optică (metalele), conductivitatea termică are valori mari, de ordinul sutelor de unități, fiind de așteptat să prezinte o contribuție majoră la stabilirea distribuției de temperatură din interiorul corpului iradiat.

Pentru materialele caracterizate de adâncimi de pătrundere optică mari și totodată de conductivități termice mici de ordinul  $10^{-1}$  cum este cazul sticlei, termenul  $K \nabla^2 T(\mathbf{r}, t)$  din ( 5-91 ) se poate neglija în condițiile în care durata pulsului laser este de ordinul zecilor de nanosecunde, rezultând o relație explicită a distribuției de temperatură în timp și spațiu funcție de parametrii de material și  $Q(\mathbf{r}, t)$ . Astfel:

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho c_T} \int Q(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + Ct. \quad (5-92)$$

În general, pentru un material oarecare, excitat de un puls laser ce induce un  $Q(\mathbf{r}, t)$  cunoscut, este necesară rezolvarea numerică a ecuației ( 5-91 ). Numai după aceea se poate stabili dacă gradientul de temperatură, pentru un anumit interval de timp, rămâne confinat în zona de penetrare a câmpului sau distribuția de temperatură migrează pe distanțe care nu mai pot fi neglijate.

#### 5.6.5. Ecuația termoelastică

Pentru a găsi o legătură cantitativă între energia laser absorbită de proba metalică supusă investigării și caracteristicile undei ultrasonore excitate prin expansiune termică rapidă se apelează la ecuația termoelastică ( 5-93 ).

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = (3\lambda + 2\mu) \alpha_t \nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (5-93)$$

cu condițiile inițiale:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (t = 0) \quad (5-94)$$

și condițiile de frontieră:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_{\text{frontieră}}, t) = 0, \quad (5-95)$$

unde  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  este deplasarea particulelor de material,  $\lambda$  și  $\mu$  sunt constantele lui Lamé,  $\alpha_t$  este coeficientul liniar de dilatare termică.

Ecuațiile ( 5-91 ) și ( 5-93 ) formează un sistem în care datele de intrare sunt constantele de material și  $Q(\mathbf{r}, t)$  iar necunoscuta este reprezentată de  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Dacă constanta de difuzie termică are valori neglijabile sistemul se transformă într-o singură ecuație ce rezultă prin înlocuirea lui ( 5-92 ) în ( 5-93 ).

#### 5.6.6. Metodă spectrală de rezolvare a sistemului format din ecuația de difuzie termică și cea termoelastică

O primă idee de rezolvare a sistemului ( 5-91 ), ( 5-93 ) este discretizarea sa după o procedură asemănătoare celei dezvoltate în capitolele 3 și 4. Totuși trebuie ținut cont că în ecuația de difuzie termică și cea termoelastică intervin fenomene fizice ce acționează la sacră extrem de diferită. Astfel, o sursă de

căldură de câteva zeci de nanometri grosime conduce la generarea unui ultrasunet cu lungime de undă de ordinul centimetrilor. Algoritmii cu diferențe finite și grid de numerizare uniform poate fi aplicat cu succes doar dacă dimensiunile zonei de penetrare a câmpului sunt comparabile cu lungimea de undă a ultrasunetului generat. Din analiza graficelor din Fig. 5-34, Fig. 5-35 se constată însă că adâncimea de penetrare a metalului (Al, Fe, Cu) este extrem de mică de ordinul zecilor de nanometri. Apar astfel mai multe domenii: cel în care este absorbită energia laser (o zonă extrem de subțire), cel în care se produce difuzia căldurii (cu dimensiuni care rămân a fi estimate) și cel în care se propagă unda elastică ultrasonoră. Dacă se discretizează primul domeniu în vederea aplicării algoritmului FDTD ar fi necesar un grid cu pas foarte mic care extins în cea de-a doua și a treia zonă ar conduce la un număr enorm de celule de discretizare, imposibil de gestionat de către un PC actual.

O soluție viabilă de rezolvare a ecuației termoelastice cu termen sursă de întindere spațială extrem de mică (pe cel puțin una din dimensiuni) se bazează pe descompunerea ecuației termoelastice în două ecuații mai simple așa cum s-a procedat în capitolul 3:

$$c_p^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t^2} = c_p^2 \frac{\nabla \cdot ((3\lambda + 2\mu)\alpha_t \nabla T(\mathbf{r}, t))}{\lambda + 2\mu} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \quad (5-96)$$

$$c_s^2 \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{\partial^2 (\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\nabla \times (3\lambda + 2\mu)\alpha_t \nabla T(\mathbf{r}, t)}{\mu} = 0. \quad (5-97)$$

și dezvoltarea entității  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  într-o serie spectrală [5-13] de forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \varphi_i(\mathbf{r}), \quad (5-98)$$

unde  $a_i(t)$  sunt coeficienții seriei iar  $\varphi_i(\mathbf{r})$  un set de funcții ortogonale.

În ceea ce privește expresia (5-97) prezența sa nu mai contează atâta vreme cât se lucrează cu condițiile de frontieră (5-94). De remarcat că termenul sursă:  $c_s^2 \nabla \times (3\lambda + 2\mu)\alpha_t \nabla T(\mathbf{r}, t) / \mu$  este egal cu zero deoarece rotorul unui gradient este întotdeauna nul.

Dacă se alege ca domeniu de calcul o bucată de material de formă paralelipipedică de dimensiuni:  $h_1, h_2, h_3$  atunci funcțiile proprii  $\varphi_i(\mathbf{r})$  se pot lua după cum urmează [5-13]:

$$\varphi_i(x, y, z) = \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) = \sin\left(\frac{m_1 \pi x}{h_1}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi y}{h_2}\right) \sin\left(\frac{m_3 \pi z}{h_3}\right). \quad (5-99)$$

Se vede că  $\varphi_i(x, y, z) = 0$  oriunde pe frontiera paralelipipedului, unde cel puțin una din egalitățile  $x=h_1, y=h_2, z=h_3$  este satisfăcută.

De asemenea:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_{m_1, m_2, m_3}, \varphi_{m_1, m_2, m_3} \rangle = \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \int_0^{h_3} \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) dz dy dx = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (5-100)$$

Înlocuind (5-99) în (5-98) și pe acesta din urmă în (5-96) rezultă:

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 a_{m_1, m_2, m_3}(t)}{dt^2} + \alpha_{m_1, m_2, m_3} c_p^2 a_{m_1, m_2, m_3}(t) \right) \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) = -\mathbf{P}(x, y, z, t), \quad (5-101)$$

unde

$$\alpha_{m_1, m_2, m_3} = \left(\frac{m_1 \pi}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \pi}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{m_3 \pi}{h_3}\right)^2. \quad (5-102)$$

Pe de altă parte presupunând că funcția cunoscută  $P(x, y, z, t) = \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\rho}\right) \alpha_t F(x, y, z) G(t)$ , se poate scrie următoarea relație de dezvoltare în serie a lui  $\mathbf{P}$  în raport cu  $\varphi_i$ :

$$P(x, y, z, t) = \left( \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \alpha_t \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} G(t) \frac{\langle F(x, y, z), \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) \rangle}{\langle \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z), \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) \rangle} \cdot \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z). \quad (5-103)$$

Identificând coeficienții dezvoltării ( 5-101 ) cu cei din ( 5-103 ) rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_{m_1, m_2, m_3}(t)}{dt^2} + \alpha_{m_1, m_2, m_3} c_p^2 a_{m_1, m_2, m_3}(t) = \\ = - \left( \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \alpha_t \frac{8G(t)}{h_1 h_2 h_3} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \int_0^{h_3} F(x, y, z) \cdot \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) dz dy dx = - \left( \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \alpha_t C_{m_1, m_2, m_3} G(t) \end{aligned} \quad (5-104)$$

$$\text{unde } C_{m_1, m_2, m_3} = \frac{8}{h_1 h_2 h_3} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \int_0^{h_3} F(x, y, z) \cdot \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) dz dy dx.$$

Aplicând transformata Laplace egalității ( 5-104 ) se ajunge la următoarea expresie a lui  $a_{m_1, m_2, m_3}(t)$ :

$$a_{m_1, m_2, m_3}(t) = - \left( \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \alpha_t C_{m_1, m_2, m_3} L^{-1} \left( \frac{G(s)}{(s^2 + \alpha_{m_1, m_2, m_3} c_p^2)} \right). \quad (5-105)$$

Ca urmare:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = - \left( \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \alpha_t \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \varphi_{m_1, m_2, m_3}(\mathbf{r}) C_{m_1, m_2, m_3} \cdot L^{-1} \left( \frac{G(s)}{(s^2 + \alpha_{m_1, m_2, m_3} c_p^2)} \right). \quad (5-106)$$

Formula de calcul ( 5-106 ) este eficientă dacă  $L^{-1} \left( \frac{G(s)}{(s^2 + \alpha_{m_1, m_2, m_3} c_p^2)} \right)$  are o expresie analitică cât mai simplă și de asemenea dacă integrala ce conduce la aflarea coeficienților  $C_{m_1, m_2, m_3}$ , poate fi redusă la o integrală de ordin inferior sau la o formulă analitică.

Metoda dezvoltării în serie spectrală se poate aplica și ecuației ( 5-91 ), de această dată cantitatea ce urmează a fi expandată în serie fiind  $T(\mathbf{r}, t)$ . Astfel, se scrie:

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N b_i(t) \varphi_i(\mathbf{r}), \quad (5-107)$$

în care  $\varphi_i(\mathbf{r})$  sunt date de ( 5-99 ) și satisfac ( 5-100 ).

Analog cu ( 5-101 ) se poate scrie următoarea relație de descompunere a ecuației ( 5-91 ):

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \left( \rho c_T \frac{db_{m_1, m_2, m_3}(t)}{dt} + \alpha_{m_1, m_2, m_3} K b_{m_1, m_2, m_3}(t) \right) \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) = Q(x, y, z, t) = F'(x, y, z) G'(t) \quad (5-108)$$

Folosind din nou metoda identificării coeficienților rezultă:

$$\frac{db_{m_1, m_2, m_3}(t)}{dt} + \alpha_{m_1, m_2, m_3} \frac{K}{\rho c_T} b_{m_1, m_2, m_3}(t) = \frac{1}{\rho c_T} \frac{8G'(t)}{h_1 h_2 h_3} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \int_0^{h_3} F'(x, y, z) \cdot \varphi_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) dz dy dx = \frac{C'_{m_1, m_2, m_3} G'(t)}{\rho c_T} \quad (5-109)$$

Aplicând transformata Laplace egalității ( 5-109 ) se ajunge la următoarea expresie a lui  $b_{m_1, m_2, m_3}(t)$ :

$$b_{m_1, m_2, m_3}(t) = \frac{C'_{m_1, m_2, m_3}}{\rho c_T} L^{-1} \left( \frac{G'(s)}{\left( s + \alpha_{m_1, m_2, m_3} \frac{K}{\rho c_T} \right)} \right). \quad (5-110)$$

Ca urmare:



$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho c_T} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \varphi_{m_1, m_2, m_3}(\mathbf{r}) C'_{m_1, m_2, m_3} \cdot L^{-1} \left( \frac{G'(s)}{\left( s + \alpha_{m_1, m_2, m_3} \frac{K}{\rho c_T} \right)} \right). \quad (5-111)$$

Ținând cont de acest lucru,  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  din ( 5-96 ) sau ( 5-101 ) se scrie sub forma:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = -\frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_t}{\rho^2 c_T} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \alpha_{m_1, m_2, m_3} \varphi_{m_1, m_2, m_3}(\mathbf{r}) C'_{m_1, m_2, m_3} \cdot L^{-1} \left( \frac{G'(s)}{\left( s + \alpha_{m_1, m_2, m_3} \frac{K}{\rho c_T} \right)} \right). \quad (5-112)$$

Egalând coeficienții dezvoltării ( 5-101 ) cu cei ai expansiunii ( 5-112 ) rezultă:

$$a_{m_1, m_2, m_3}(t) = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_t}{\rho^2 c_T} \alpha_{m_1, m_2, m_3} C'_{m_1, m_2, m_3} L^{-1} \left( \frac{G'(s)}{\left( s^2 + \alpha_{m_1, m_2, m_3} c_p^2 \right) \left( s + \alpha_{m_1, m_2, m_3} \frac{K}{\rho c_T} \right)} \right). \quad (5-113)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_t}{\rho^2 c_T} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \varphi_{m_1, m_2, m_3}(\mathbf{r}) \alpha_{m_1, m_2, m_3} C'_{m_1, m_2, m_3} L^{-1} \left( \frac{G'(s)}{\left( s^2 + \alpha_{m_1, m_2, m_3} c_p^2 \right) \left( s + \alpha_{m_1, m_2, m_3} \frac{K}{\rho c_T} \right)} \right). \quad (5-114)$$

Formula ( 5-113 ) de determinare a coeficienților  $a_{m_1, m_2, m_3}(t)$  se folosește atunci când distribuția de temperatură  $T(\mathbf{r}, t)$ , ce rezultă din rezolvarea ecuației de difuzie termică, nu are o expresie explicită. Dacă temperatura se exprimă ca o funcție de  $Q(\mathbf{r}, t)$  și constantele de material, atunci este indicată utilizarea relația ( 5-105 ).

### 5.6.7. Rezultate numerice

Formula ( 5-114 ) a fost dedusă în condițiile în care se consideră îndeplinite două ipoteze: (1) temperatura, respectiv amplitudinea de oscilație pe frontiera domeniului spațial luat în considerație, sunt nule, (2) de asemenea valorile inițiale ale lui  $T$  respectiv  $\mathbf{u}$  sunt presupuse zero în orice punct. Totuși, așa cum se distinge din Fig. 36 condițiile de frontieră (cel puțin în interiorul zonei marcate cu linie întreruptă), nu au cum să fie zero nici măcar pe un interval de timp foarte scurt. Pe marginile din stânga, dreapta și jos, restricțiile (1) pot fi acceptabil satisfăcute doar pentru intervale temporale extrem de scurte, egale cu timpul în care unda elastică atinge frontiera.

Pe de altă parte trebuie menționat că pentru un corp paralelipipedic de dimensiuni relativ mici, de ordinul milimetrilor sau centimetrilor caracterizat de o adâncime de pătrundere infimă (zeci de nanometri), dezvoltarea ( 5-114 ) este extrem de greu de evaluat numeric cu un PC din cauza numărului enorm de coeficienți  $C_{m_1, m_2, m_3}$  de valoare neneglijabilă (se poate ajunge la sute de mii). Prin analogie cu transformata Fourier simplă, sursa de căldură  $Q(\mathbf{r}, t)$  are efectul unui impuls de durată foarte scurtă, al cărui spectru se întinde pe un interval de frecvențe foarte mare.

Date fiind motivele enumerate anterior, simulările numerice cantitative se vor face considerând doar un model unidimensional, Fig. 37, în care sursa laser produce o distribuție de căldură dată de relația ( 5-115 ). Spre deosebire de modelul din Fig. 36 în care modalitatea de excitare este perfect viabilă fizic dar în care condițiile de frontieră nu corespund realității, Fig. 37 descrie un model în care lucrurile stau pe dos, în sensul că este greu de imaginat, deși nu imposibil, un procedeu prin care raza laser să încălzească simetric capetele interioare ale celor două jumătăți de spațiu.

$$Q(z, t) = F(z) \cdot G(t) = Q_0 e^{-\eta^2 \left(z - \frac{h}{2}\right)^2} \frac{t}{t_0} e^{-t/t_0} \quad (5-115)$$

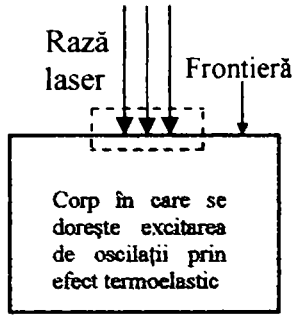


Fig. 36. Remarcă asupra condițiilor de frontieră

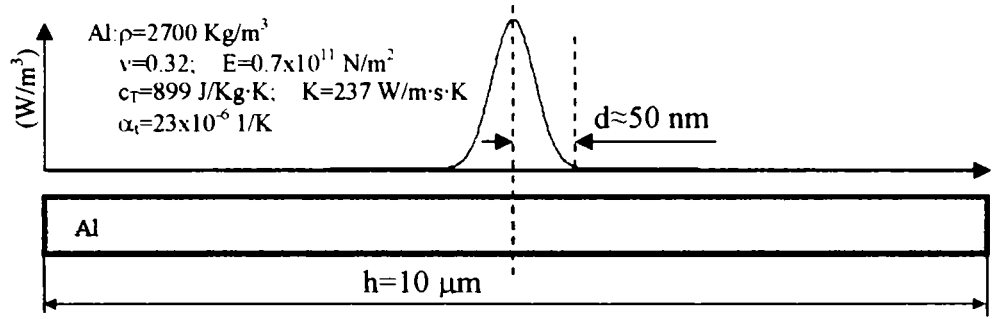


Fig. 37. Model unidimensional cu sursă de încălzire centrală.

$G(t)$  s-a ales ca fiind  $(t/t_0)\exp(-t/t_0)$  datorită proprietăților acestei funcții de a avea primitivă exprimabilă analitic și de asemenea transformată Laplace inversă a primitivei cu o formă analitică acceptabilă (nu este foarte simplă însă poate fi calculată fie manual fie cu facilitatea de calcul simbolic a programelor Mathcad sau Matlab).

Pentru a avea o imagine cât mai clară asupra aspectului celor două funcții  $G(t)$ , respectiv  $F(z)$  se procedează la reprezentarea lor grafică pentru  $t_0 = 10 \text{ ns}$ ,  $\eta = 10^8$ ,  $Q_0 = 1 \times 10^{16} \text{ W}\cdot\text{m}^3$ .

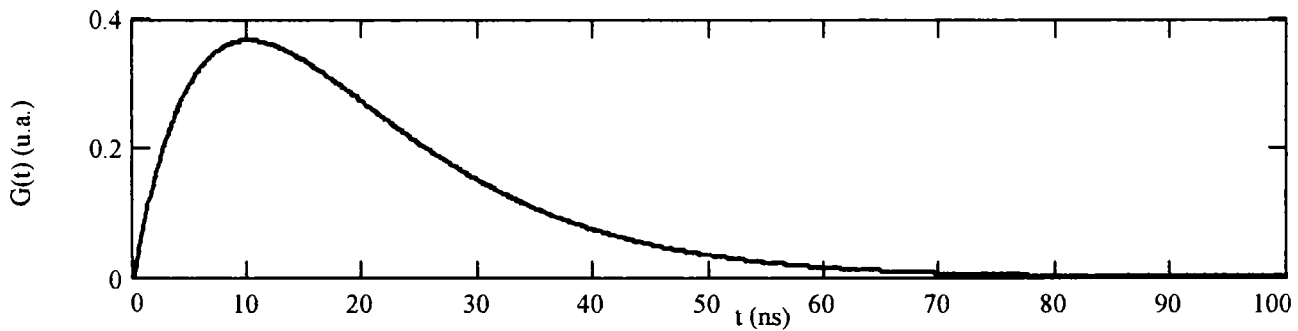


Fig. 38. Partea temporală a funcției  $Q(z, t)$ .

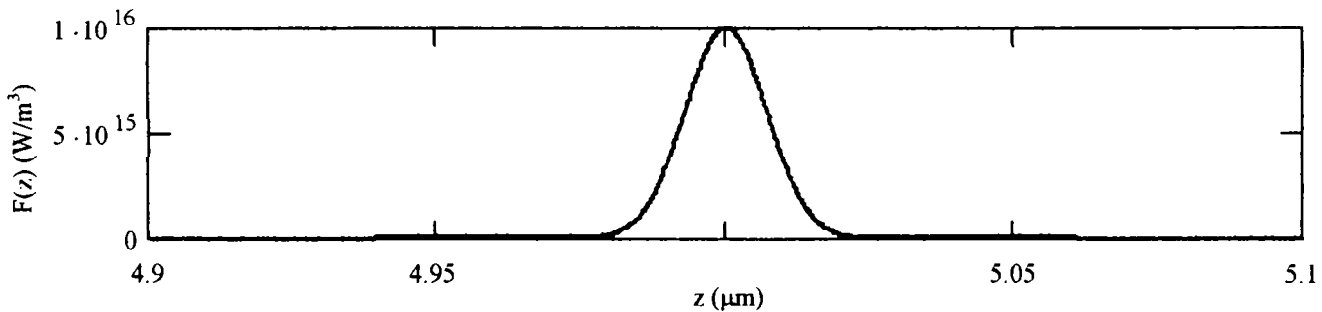
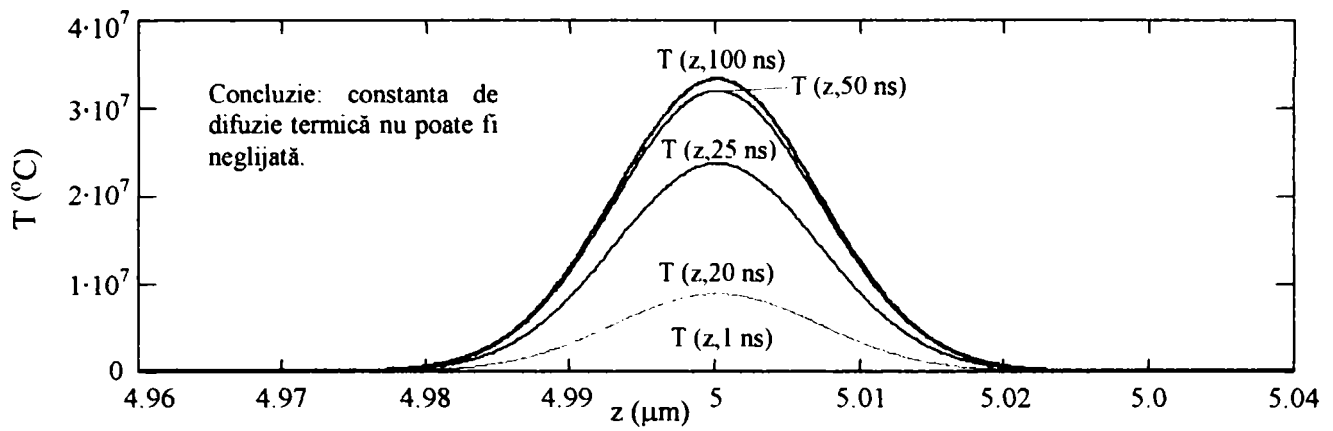


Fig. 39. Partea spațială a funcției  $Q(z, t)$ .

Folosind parametrii din Fig. 37, cu excepția coeficientului de difuzie termică care se ia egal cu zero, se poate face o primă evaluare a temperaturii metalului în zona de penetrare a câmpului optic. În cazul modelului unidimensional, relația (5-92), în care  $Q(r, t)$  are forma (5-115), se transformă în:

$$T(z, t) = Q_0 \frac{1}{\rho c_T} t_0 e^{-\eta^2 \left(z - \frac{h}{2}\right)^2} \left( e^{\left(\frac{-t}{t_0}\right)} \left(\frac{t}{t_0} + 1\right) - 1 \right), \quad (5-116)$$

Rezultă așadar următoarea familie de grafice  $T(z)$  pentru cinci momente de timp:



**Fig. 40.** Distribuția de temperatură corespunzătoare modelului din Fig. 37 în cazul neglijării constantei de difuzie, cu scopul simplificării calculului.

Temperaturile de milioane de grade din Fig. 40 arată că neglijarea lui  $K$  nu este posibilă la metale. În concluzie pentru aflarea distribuției de temperatură trebuie folosită formula:

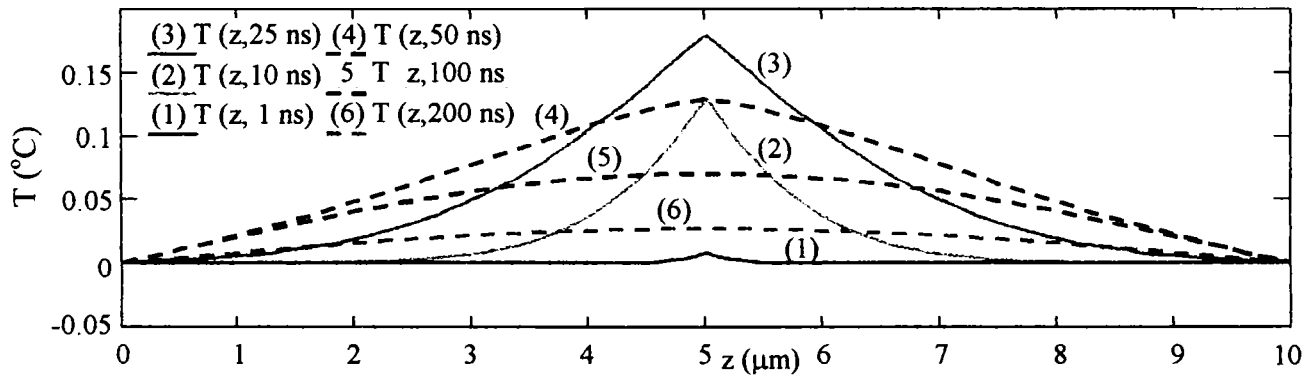
$$T(z, t) = \frac{1}{\rho c_T} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \left( \frac{2}{h} \int_0^h F(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz \right) L^{-1} \left( \frac{G(s)}{\left( s + \frac{K}{\rho c_T} \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 \right)} \right), \quad (5-117)$$

unde:

$$G(s) = L(G(t)) = \frac{t_0}{(st_0 + 1)^2}. \quad (5-118)$$

Transformata Laplace inversă din (5-117) are următoarea expresie analitică:

$$L^{-1} \left( \frac{t_0}{(st_0 + 1)^2} \frac{1}{\left( s + \frac{K}{\rho c_T} \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 \right)} \right) = \frac{\left( e^{-\frac{t}{t_0} \left( t \frac{K}{\rho c_T} \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 - \frac{t}{t_0} - 1 \right)} + e^{-\frac{K}{\rho c_T} \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 t} \right)}{t_0 \left( \frac{K}{\rho c_T} \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 - \frac{1}{t_0} \right)^2}. \quad (5-119)$$



**Fig. 41.** Distribuția de temperatură corespunzătoare modelului din Fig. 37 în situația în care constanta de difuzie termică nu se mai neglijază.

Cu ajutorul lui (5-117) deplasamentul  $u(z, t)$  capătă forma:

$$u(z, t) = \int \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} dz = \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho^2 c_T} \alpha_t \sum_{n=1}^N \left( -\cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \right) \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 \left( \frac{2}{h} \int_0^h F(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz \right) L^{-1} \left( \frac{t_0}{(st_0 + 1)^2} \frac{1}{\left( s^2 + c_p^2 \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 \right) \left( s + \frac{K}{\rho c_T} \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 \right)} \right) \quad (5-120)$$

Transformata Laplace inversă ce apare în expresia ( 5-120 ) are o expresie destul de complicată și de aceea nu va mai fi redată în continuare. Procesorul simbolic din cadrul utilităților matematice Matchad sau Matlab este capabil să afle formula analitică respectivă pornind de la argumentul lui  $L^{-1}$ .

Așa cum s-a mai menționat, perturbația  $u(z,t)$  dată de dezvoltarea în serie ( 5-120 ) poate fi urmărită doar pe un interval de timp foarte mic în condițiile în care lungimea domeniului de calcul este de asemenea extrem de mică. Ceea ce se poate realiza practic este reprezentarea grafică a începutului oscilației, putându-se astfel stabili ordinul de mărime al amplitudinii de oscilație induse prin efect termoelastic, fără a fi posibilă vizualizarea unui profil de undă ce se propagă.

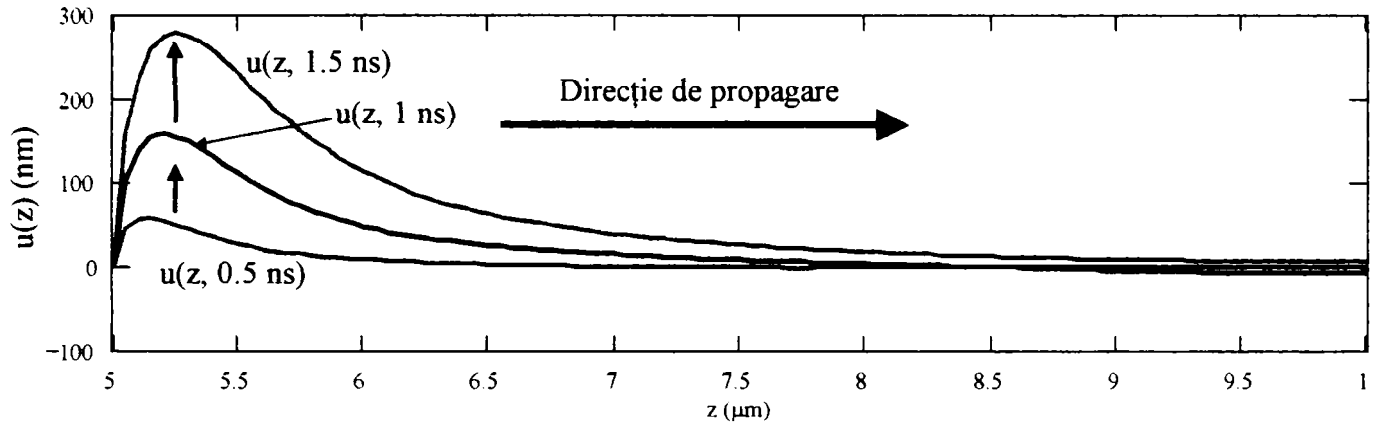
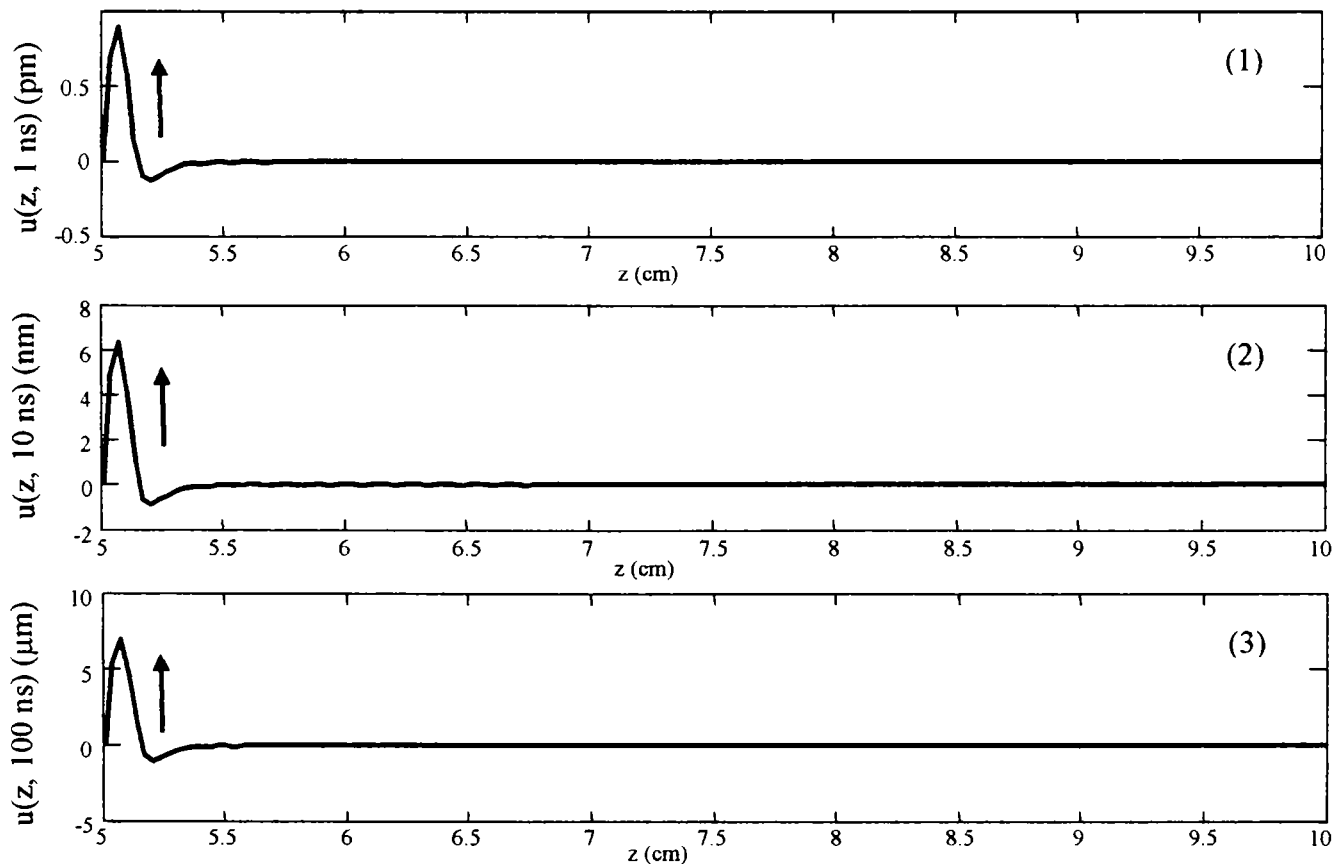


Fig. 42, Începutul oscilației ultrasonore, primele 1.5 ns.

Dacă laserul excitator este folosit pentru generarea de oscilații ultrasonore într-o substanță cu adâncimea de pătrundere de ordinul sau cu unu două ordine de mărime mai mică ca lungime de undă corespunzătoare ultrasunetului generat, atunci ( 5-120 ) implementată pe calculator, conduce la obținerea unor grafice în care este evident fenomenul de generare și propagare al unei unde elastice. Pentru exemplificare se consideră modelul descris de Fig. 37 în care materialul de bază este un anumit tip de sticlă cu următorii parametri :  $\rho=2500 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\nu=0.31$ ;  $E=0.3 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $c_T=837 \text{ J/Kg}\cdot\text{K}$ ;  $K=0.8 \text{ W/m}\cdot\text{s}\cdot\text{K}$ ,  $\alpha_T=9 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$ ,  $\eta=10^3$ . Caracteristicile pulsului laser  $t_0=10 \text{ ns}$ ,  $Q_0=1 \times 10^{15} \text{ W}\cdot\text{m}^3$ , iar  $h=10 \text{ cm}$ .



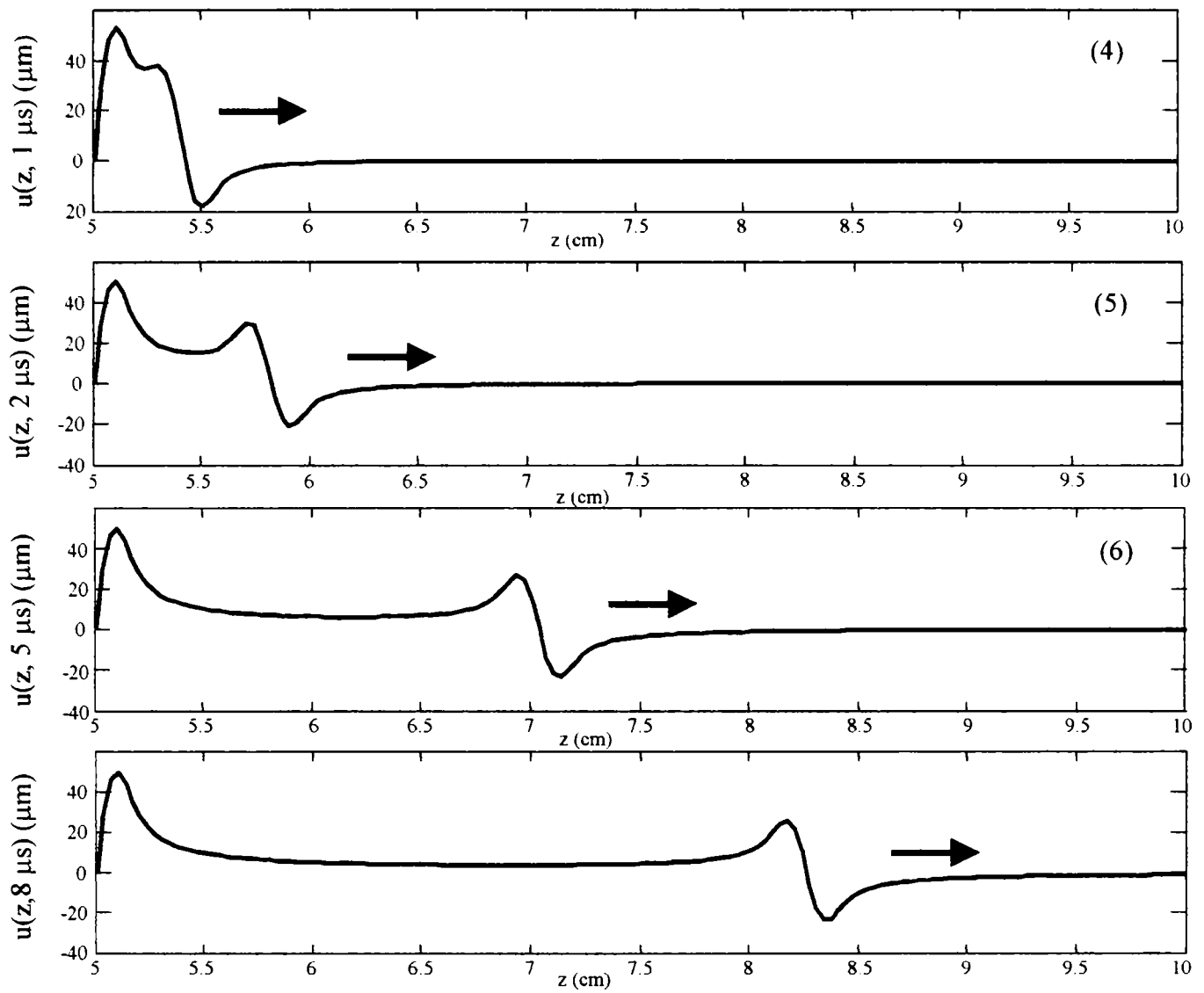


Fig. 43. Generarea prin efect termoelastice a unei unde ultrasonore în sticlă.

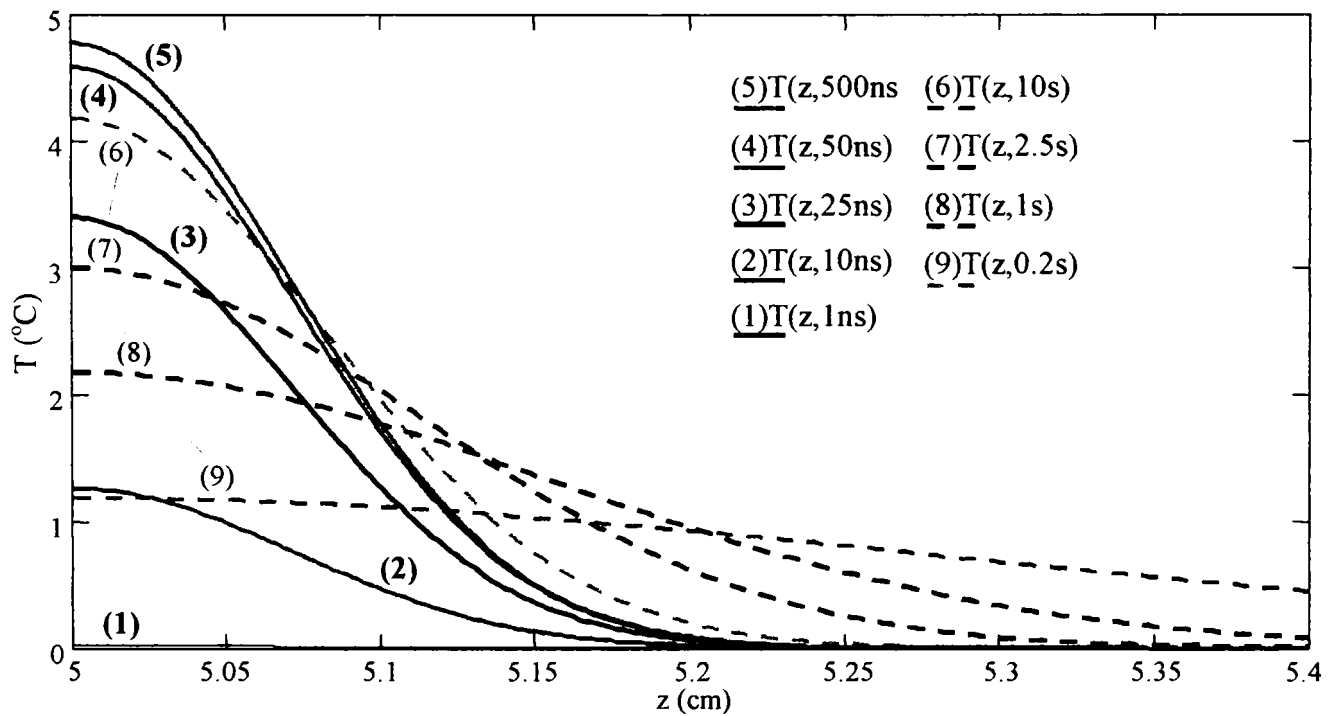


Fig. 44, Distribuția de temperatură corespunzătoare modelului din Fig. 37 în situația în care materialul stimulat prin efect termoelastice este sticla.

### 5.6.8. Concluzii

Se demonstrează așadar, prin evaluări numerice cantitative, viabilitatea procedurii de generare a undelor elastice ultrasonore folosind pulsuri laser de scurtă durată, lucru care de altfel era de așteptat, graficul din Fig. 5-32 indicând un coeficient mare de transmisie a puterii laser prin suprafața metalelor în cazul incidenței normale. Randamentul de transformare a energiei optice în energie termică și mai departe în cea de undă elastică se menține ridicat și pentru unghiuri de incidență mari ( $70^\circ$ ,  $80^\circ$ ), lucru care permite amplasarea laserului excitator într-o plajă foarte mare de poziții în raport cu corpul metalic excitat. Spre deosebire de traductorii piezoelectrice care au nevoie de contactul direct sau prin intermediul unui lichid cu suprafața obiectului în care se dorește generarea undelor elastice, laserii pot fi practic amplasați oriunde, la orice distanță și aproape la orice unghi de incidență.

Deși superioară schemelor cu diferențe finite în ceea ce privește precizia soluției, metoda spectrală descrisă în lucrare nu este totuși capabilă să conducă la vizualizarea întregului proces de formare – propagare a ultrasunetelor din metale. Faptul că energia razei laser este absorbită într-o zonă având o adâncime cu multe ordine de mărime mai mică ca lungimea de undă ultrasonoră, conduce la apariția unei singularități cu un spectru ce conține un număr extrem de mare de coeficienți neneglijabili, calculele numerice fiind prohibitive.

Pentru substanțe cu adâncimi de pătrundere mari [5-18], de ordinul lungimilor de undă ultrasonore, formula ( 5-120 ) dă rezultate foarte bune, perturbația mecanică putând fi urmărită atât în faza dezvoltării cât și în cea a propagării.

Algoritmul spectral folosit are însă dezavantajul utilizării unor condiții de frontieră nenaturale atât pentru ecuația de difuzie termică cât și pentru cea termoelastică, el fiind dedus în ipoteza condițiilor de frontieră nule la orice moment de timp. Este greu de crezut că temperatura și amplitudinea pe frontiera pe care cade raza laser, pot fi nule, chiar și pentru intervale foarte mici de timp. Din acest motiv s-a ales configurația de excitație din Fig. 37. care deși ridică unele semne de întrebare asupra posibilității fizice de excitație termică, totuși conduce la rezultate corecte cu satisfacerea restricțiilor de margine.



# 6. Analiza interacțiunii undelor elastice cu neomogenitățile din materialele metalice

## 6.1. Tipuri de semnale excitatoare și spectrele lor

În problemele de simulare a propagării perturbațiilor elastice prin diverse corpuri, ca și în testele reale, este nevoie de surse de excitație cu o anumită întindere spațială și posedând un spectru de frecvențe corespunzător [1-7], [1-13], [3-7]. De exemplu, presupunând că se dorește analiza capacității de filtrare în banda 0 - 500 Hz a unui geam dublu cu geometrie și proprietăți elastice date, este necesar un excitator ce generează o bandă plată de frecvențe care să se întindă exact pe domeniul de interes, ca în Fig. 6-1. În acest mod, după efectuarea măsurătorilor, putându-se clar aprecia ce componente de frecvență au fost atenuate și cu cât.

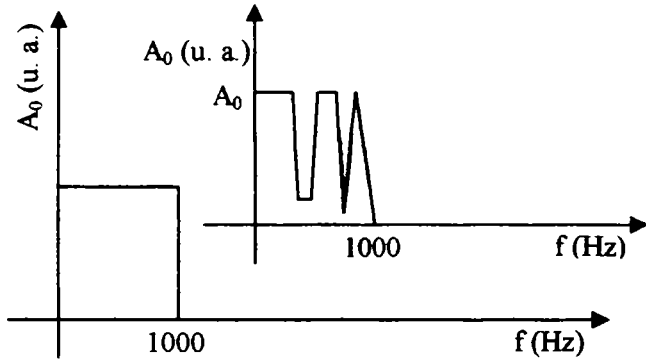


Fig. 6-1. Spectrul ideal al semnalului excitator (plan apropiat). Un exemplu de spectru filtrat (plan îndepărtat).

Practic nu există semnale fizic realizabile care să aibă o imagine Fourier de tipul celei din Fig. 6-1. O idee simplă de rezolvare a problemei ferestrei duble, este iradierea secvențială a acestora cu semnale sinusoidale de amplitudine constantă și frecvențe liniar crescătoare în domeniul 0 - 500 Hz. Metoda prezintă însă un dezavantaj major legat de timpul de testare care este mare pentru situația unui experiment real și prohibitiv în cazul efectuării unei simulări numerice. Așa cum rezultă din exemplele și teoria dezvoltată în capitolele 4, 5, 6, pentru fiecare armonică în parte este necesară propagarea semnalului în întreg domeniul de calcul pe un

interval temporal suficient de lung. Dacă se ține seama că fiecare propagare are nevoie de un timp de procesare de ordinul unui minut, chiar pentru griduri de slabă rezoluție, se ajunge ușor la câteva ore de calcul considerând doar o "eșantionare" cu sinusoidă din trei în trei Hz. Trebuie găsit așadar un procedeu de excitație mai eficient, sau altfel spus, un stimul al cărui spectru să se apropie cât de cât de cel de tip fereastră dreptunghiulară.

Un prim exemplu de semnal excitator cu spectru de bandă largă [3-8] este cel descris de expresia ( 6-1 ) (a) și având spectrul exprimat prin formula analitică ( 6-1 ) (b).

$$s(t) = \begin{cases} A_0 \sin \frac{\pi}{t_0} t & \text{pt. } t \in [0, t_0] \\ 0 & \text{pt. } t > t_0 \end{cases} \quad (a), \quad F\{s(t)\}(\omega) = \frac{2\pi A_0 t_0}{\pi^2 - (\omega t_0)^2} \cos\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) \quad (b) \quad (6-1)$$

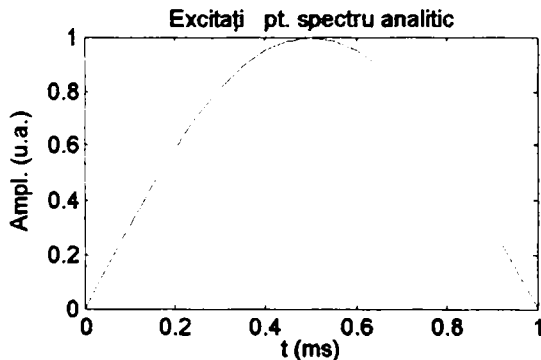


Fig. 6-2. Amplitudinea excitației \$s(t)\$ funcție de timp pentru cazul particular când \$t\_0=1\$ ms și \$A\_0=1\$ u.a.

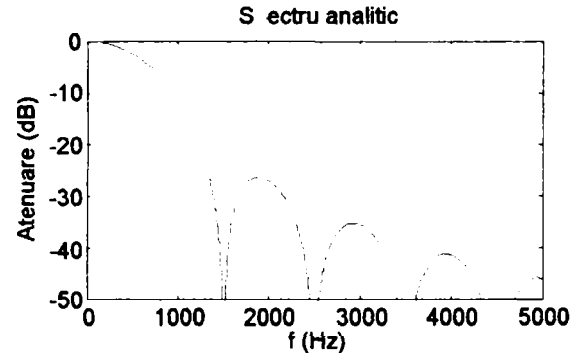


Fig. 6-3. Atenuarea spectrală = \$10 \log|F(f)/F(0)|\$ corespunzătoare semnalului din ( 6-1 ) (a) cu parametrii din Fig. 6-2.

Există mai multe modalități de prezentare grafică a spectrului, funcție de ceea ce se dorește a fi evidențiat. Fig. 6-4 înfățișează spectrul de amplitudine al lui \$s(t)\$ folosind direct formula ( 6-1 ) (b). Este

însă greu de apreciat nivelul atenuării componentelor de frecvență aflate în afara benzii plate față de cele aflate în interior. De asemenea, este dificil de evaluat întinderea propriuzisă a palierului spectral. Prin reprezentarea atenuării (Fig. 6-3) definite ca:  $10 \log \left| \frac{F(f)}{F(0)} \right|$  se aduce o îmbunătățire față de Fig. 6-4,

domeniul de componente cu amplitudinea constantă fiind în continuare greu de delimitat. Acest ultim neajuns este înlăturat folosind scara logaritmică pentru frecvență, ca în Fig. 6-5.

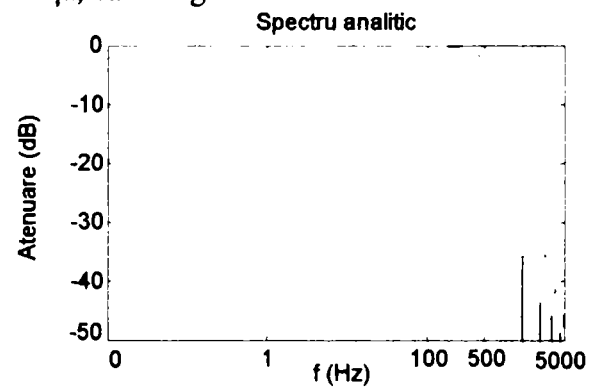
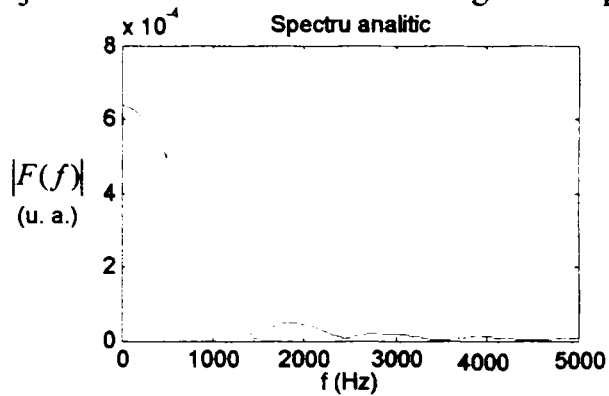


Fig. 6-4. Spectrul de amplitudine al funcției ( 6-1 ) (a) parametrului din Fig. 6-2.

Fig. 6-5. Atenuarea spectrală =  $10 \log |F(f)/F(0)|$  cu scară logaritmică de frecvență corespunzătoare semnalului din ( 6-1 ) (a) cu parametrul din Fig. 6-2.

Excitația impulsivă descrisă anterior este o situație fericită, admitând o expresie analitică relativ simplă pentru dezvoltarea spectrală. În majoritatea cazurilor semnalele reale fie că nu admit expresii matematice exacte pentru imaginile lor Fourier, fie că acestea se prezintă sub forma unor formule foarte complicate. De aceea în astfel de cazuri se folosește algoritmul numeric numit Transformata Fourier Rapidă (FFT) cu ajutorul căruia se evaluează compoziția spectrală a oricărui semnal fizic realizabil indiferent de forma sa. Spre deosebire de spectrul obținut pe cale analitică în Fig. 6-4, metoda FFT are nevoie de un interval eșantionat suficient de larg care pe lângă pulsul propriuzis să mai cuprindă o porțiune ce se întinde pe cel puțin câteva “lungimi ale acestuia”, cu scopul de a simula un domeniu temporal infinit. Întrucât spectrele obținute pe cale analitică trebuie să coincidă cu cele numerice s-a folosit, pentru testare, același semnal ca în Fig. 6-2 la care s-a adăugat o durată cu amplitudine zero, egală cu cinci perioade (Fig. 6-6 ). Se observă o coincidență foarte bună între Fig. 6-4 și Fig. 6-7.

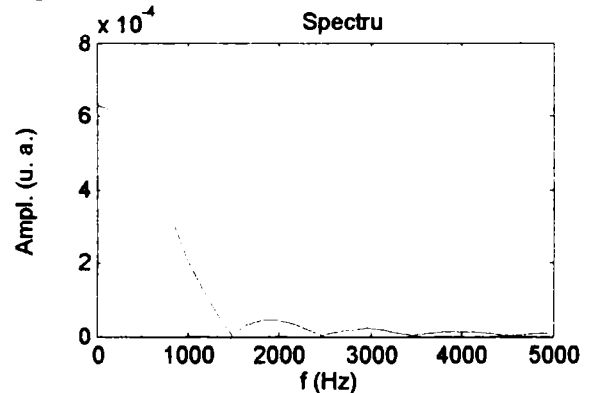
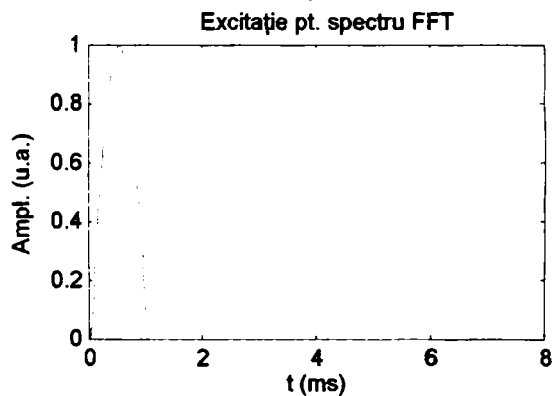


Fig. 6-6. Amplitudinea excitației  $s(t)$  funcție de timp pentru cazul particular când  $t_0=1 \text{ ms}$  și  $A_0=1 \text{ u. a.}$

Fig. 6-7. Spectrul FFT al semnalului din Fig. 6-6.

Așa cum s-a stabilit în capitolele 2, 3, 4 frecvența maximă din spectrul semnalului excitator are un rol hotărâtor în stabilirea unor parametri ai gridului, fiind factorul ce determină stabilitatea algoritmului de propagare. Un domeniu numeric proiectat să “reziste” până la  $f_{max}$  nu trebuie excitat cu frecvențe superioare, în caz contrar apărând fenomene care nu mai reflectă realitatea. Astfel considerând satisfăcătoare o atenuare cu  $30 \text{ dB}$  a frecvențelor cu  $f > f_{max}$  rezultă că pentru semnalul din Fig. 6-2 o alegere a lui  $f_{max} \approx 2500 \text{ Hz}$  este suficientă. Dacă însă se folosește excitația din Fig. 6-8 atunci  $f_{max}$  trebuie luat  $5000 \text{ Hz}$  ceea ce conduce la o dublare a dimensiunii gridului întrucât pasul acestuia  $h$  este proporțional cu  $1/f_{max}$ . Se ajunge astfel la o creștere de patru ori a necesarului de memorie și de șaisprezece ori a timpului de

calcul, fără a se obține nici un avantaj. Obs: Excitațiile de tip fereastră dreptunghiulară prezintă un mare dezavantaj generând armonici superioare de amplitudini neneglijabile.

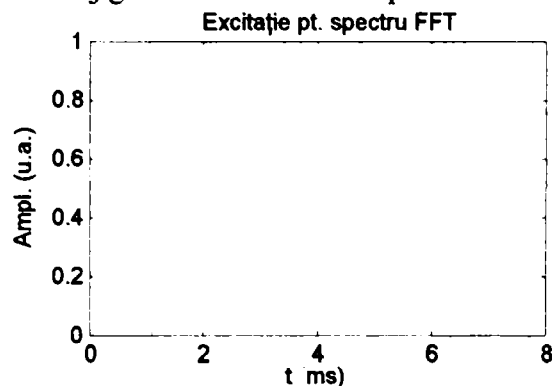


Fig. 6-8. Excitație de tip fereastră dreptunghiulară.

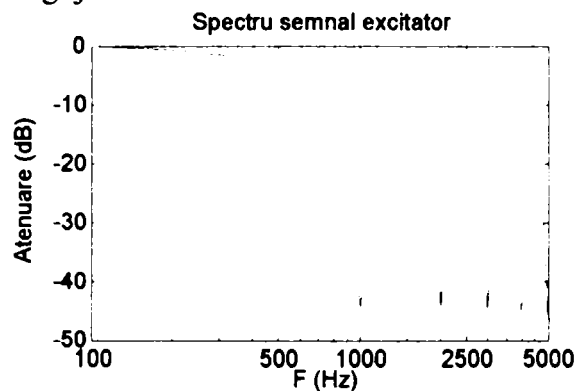


Fig. 6-9. Atenuarea spectrală =  $10 \log|F(f)/F(0)|$  cu scară logaritmică de frecvență corespunzătoare semnalului din Fig. 6-8.

Se poate porni totuși de la un semnal dreptunghiular de bază căruia i se aplică o filtrare numerică a armonicilor superioare unei frecvențe limită  $f_{max}$  rezultând o excitație de bandă restrânsă. Un exemplu în acest sens îl constituie Fig. 6-10 ce reprezintă impulsul din Fig. 6-8 trecut printr-un filtru FIR (Finite Impulse Response) cu 100 de coeficienți și frecvența de tăiere de 1000 Hz. Calculul parametrilor acestuia se face, de exemplu, folosind utilitarul Matlab. În general un puls dreptunghiular de lungime  $\tau$  are lobul principal al frecvențelor în domeniul  $[0, 1/\tau]$ . Folosind un filtru digital cu frecvența de tăiere setată la valoarea  $1/\tau$  se realizează o atenuare puternică a armonicilor cu  $f > 1/\tau$ .

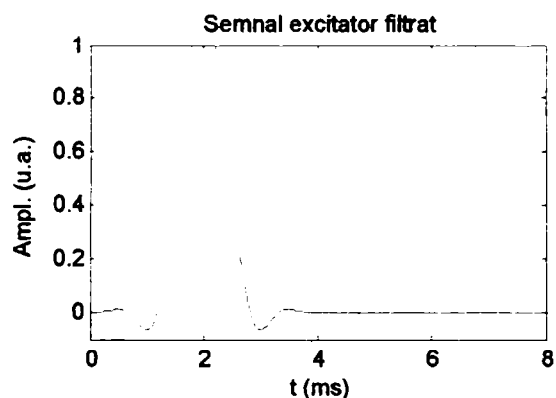


Fig. 6-10. Excitația dreptunghiulară din Fig. 6-8 trecută printr-un filtru FIR cu 100 coeficienți și frecvența de tăiere, 1 KHz.

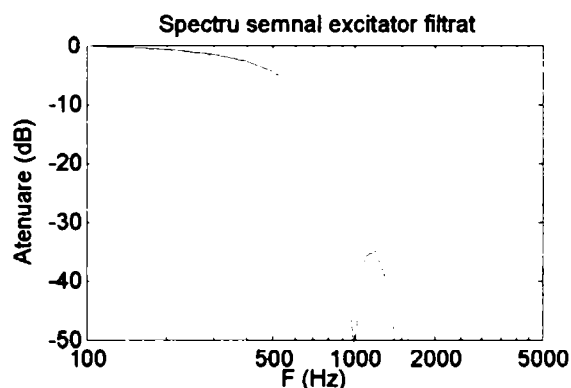


Fig. 6-11. Atenuarea spectrală =  $10 \log|F(f)/F(0)|$  cu scară logaritmică de frecvență corespunzătoare semnalului din Fig. 6-10.

Pentru a sublinia efectele negative pe care le are o alegere necorespunzătoare a excitației în raport cu un domeniu de calcul cu parametrii dați se va considera o problemă de propagare în care un stimul dreptunghiular de tipul celui din Fig. 6-8 dar de durată  $\tau=1 \mu s$  acționează în mijlocul unui grid pentru care se cunosc:

Tab. 6-1. Parametrii domeniului de calcul. Constantele efective ale gridului sunt doar h (pasul temporal) și dt (pasul spațial) care se aleg funcție de  $\rho, E, \nu, f_{max}$ .

$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	E (Pa)	$\nu$	$\lambda_{Lame}$ (Pa)	$\mu$ (Pa)	$c_p$ (m/s)	$c_s$ (m/s)	$f_{max}$ (Hz)	$\lambda_{min}$ (m)	h (m)	dt (s)
2700	$6.85 \cdot 10^{10}$	0.33	$\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\sqrt{\frac{\lambda_{Lame} + 2\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	$10^6$	$\frac{c}{f_{max}}$	$\frac{\lambda_{min}}{10}$	$\frac{h}{2c}$

Atâta vreme cât  $f_{max}$  a fost ales  $10^6$  Hz ar trebui ca pulsul dreptunghiular de  $1 \mu s$ , să inducă o undă elastică neconformă cu realitatea. În același timp, excitația provenită din filtrarea sa, cu un FIR cu  $f_{stop}=10^6$ , trebuie să genereze o perturbație în acord cu soluția analitică a ecuației de propagare a lui Navier - Lamé. Cu

ajutorul graficelor ce urmează se poate sesiza vizual diferența evidentă între perturbațiile generate de cele două excitații. Imaginile aparținând coloanei din stânga prezintă în partea centrală un fenomen de tip “zgomot TV” datorat unei instabilități numerice.

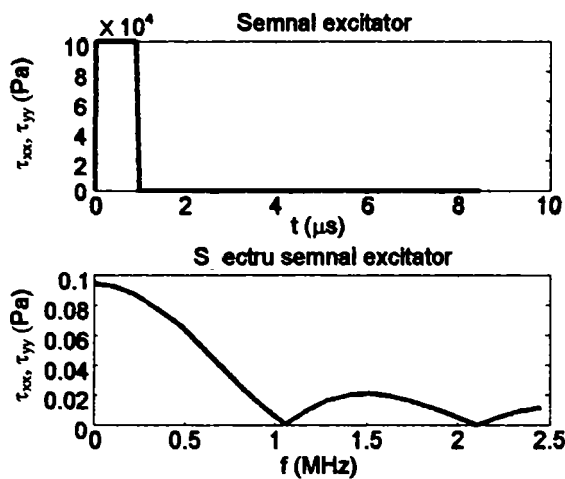


Fig. 6-12. Semnal excitator și spectrul său, corespunzător imaginilor: Fig. 6-14, Fig. 6-16, Fig. 6-18, Fig. 6-20.

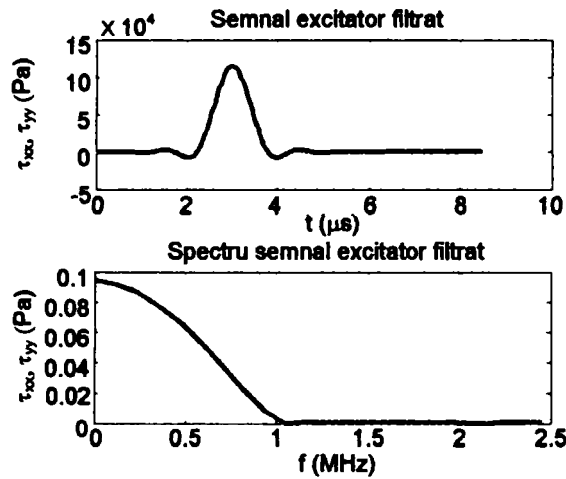


Fig. 6-13. Semnal excitator și spectrul său, corespunzător imaginilor: Fig. 6-15, Fig. 6-17, Fig. 6-19, Fig. 6-21.

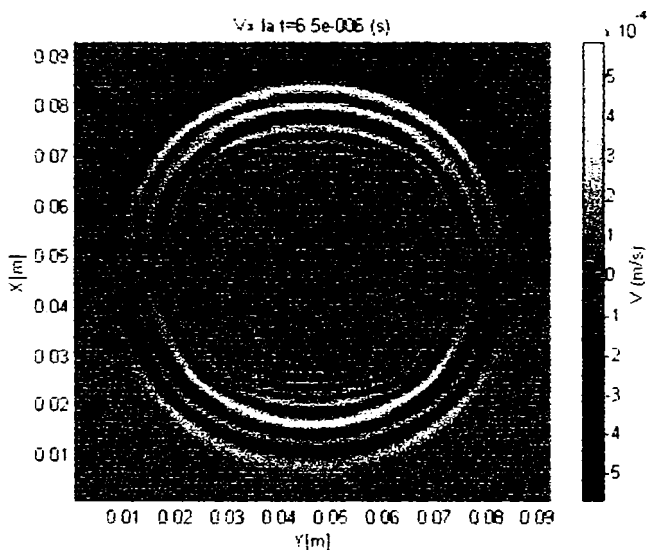


Fig. 6-14.  $v_x$  la  $t=6.5 \mu s$ .

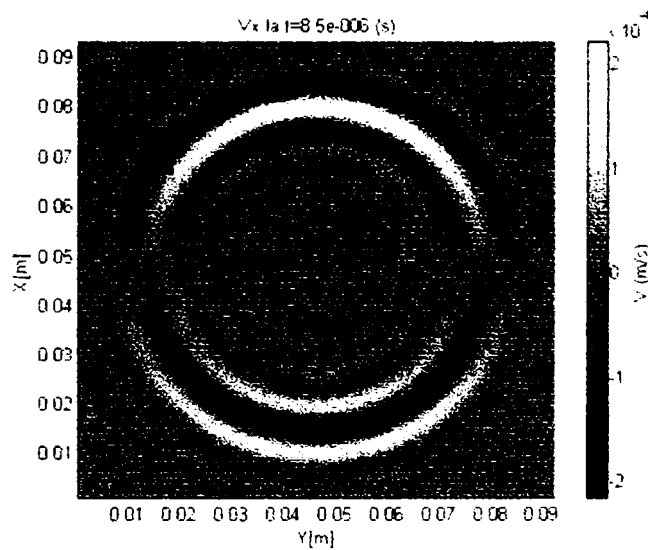


Fig. 6-15.  $v_x$  la  $t=8.5 \mu s$ .

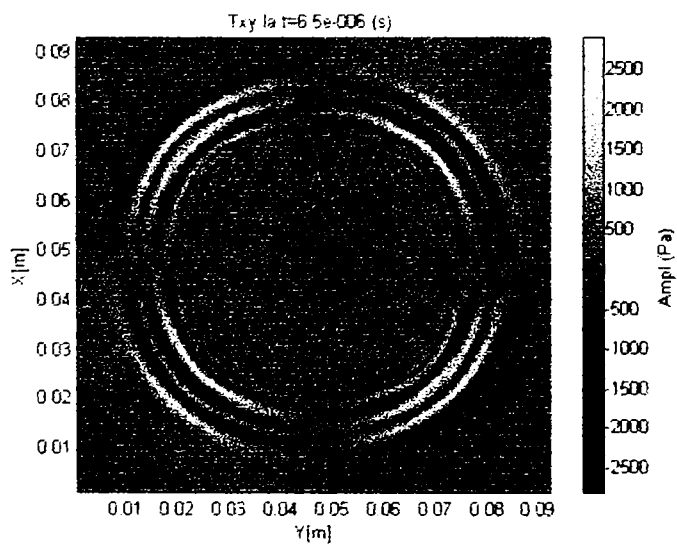


Fig. 6-16.  $\tau_{xy}$  la  $t=6.5 \mu s$ .

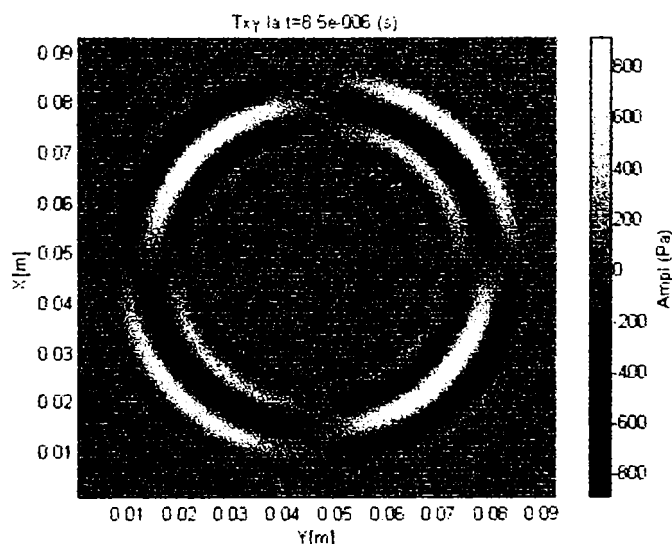


Fig. 6-17.  $\tau_{xy}$  la  $t=8.5 \mu s$ .

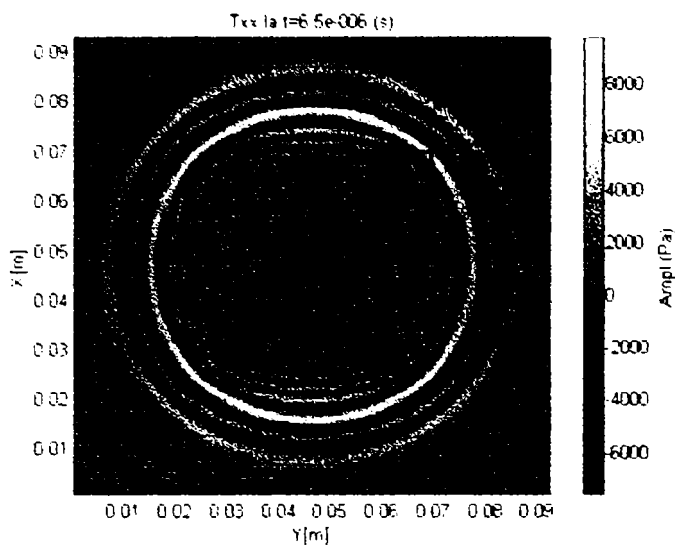


Fig. 6-18.  $\tau_{xx}$  la  $t=6.5 \mu s$ .

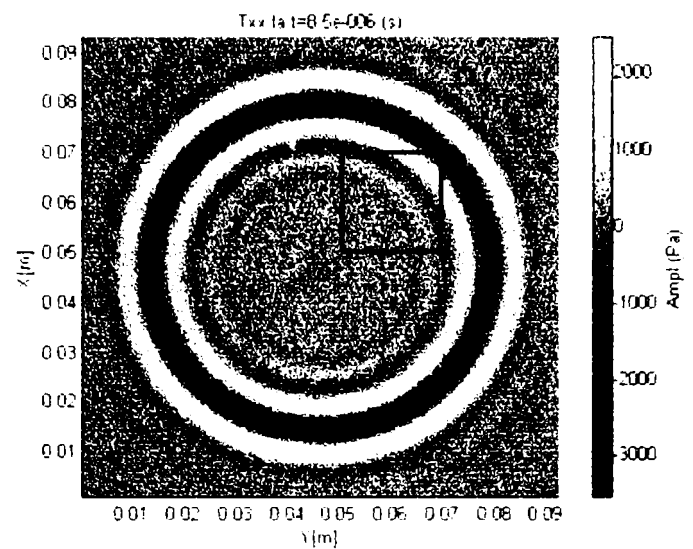


Fig. 6-19.  $\tau_{xx}$  la  $t=8.5 \mu s$ .

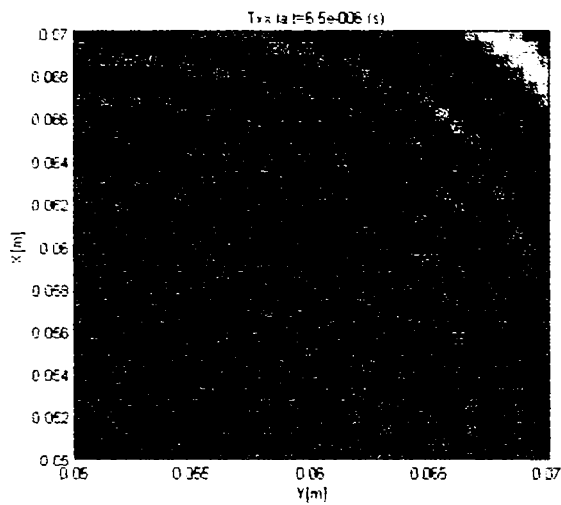


Fig. 6-20.  $\tau_{xx}$  la  $t=6.5 \mu s$  (detaliu al Fig. 6-18). Se observă clar aspectul zgomotos nenatural al imaginii ce își are cauza în excitarea gridului cu frecvențe peste limita la care acesta a fost proiectat să reziste.

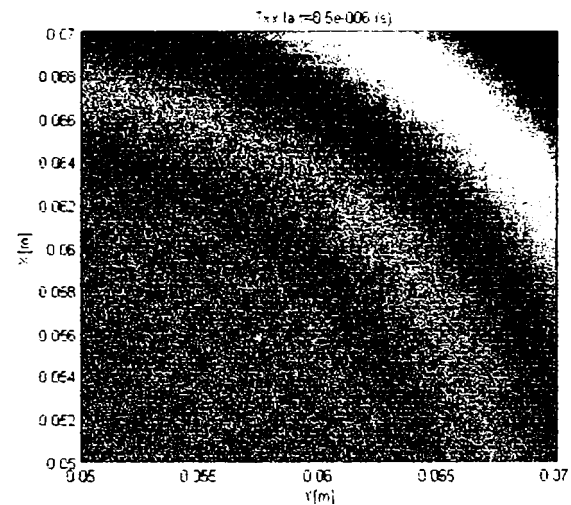


Fig. 6-21.  $\tau_{xx}$  la  $t=8.5 \mu s$ . (detaliu al Fig. 6-19)

Un alt tip de semnal excitator de tip impulsiv, care prezintă avantajul inexistenței practice a lobilor secundari, este cel Gaussian descris de următoarea expresie matematică:

$$g(t) = A_0 e^{-\alpha(t-t_0)^2}, \quad (6-2)$$

în care  $A_0$ ,  $\alpha$  și  $t_0$  sunt niște parametri ce determină: amplitudinea, durata și forma pulsului. Fig. 6-22 (c) prezintă spectrul semnalului (6-2) în cazul particular din Fig. 6-22 (a), astfel ales, încât durata și amplitudinea maximă a semnalului Gaussian să fie apropiate de cele ale impulsului din Fig. 6-2. Se constată un palier aproape identic cu cel din Fig. 6-5 și o dispariție a lobilor secundari.

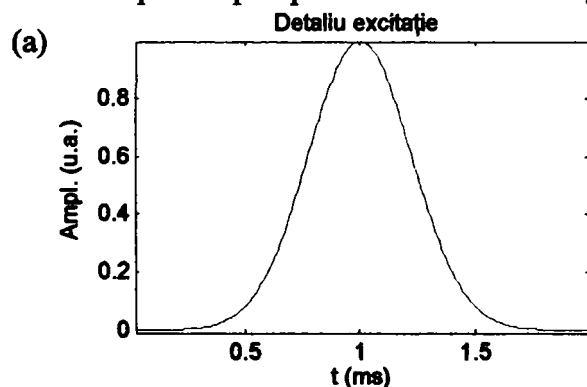
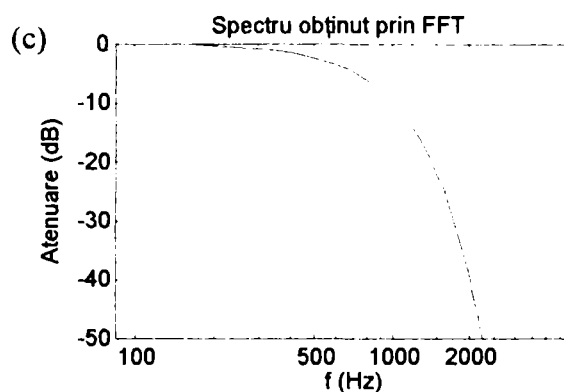
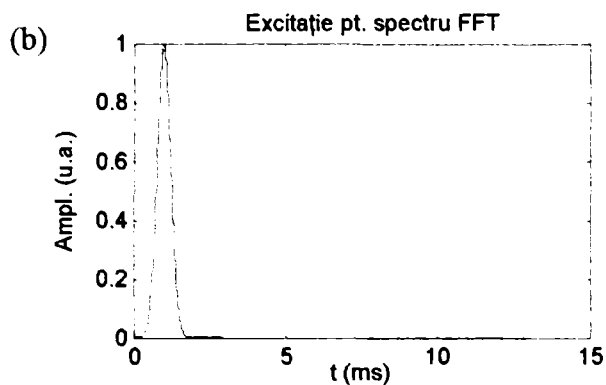


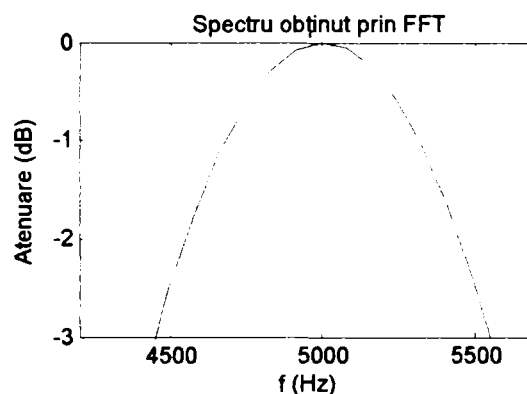
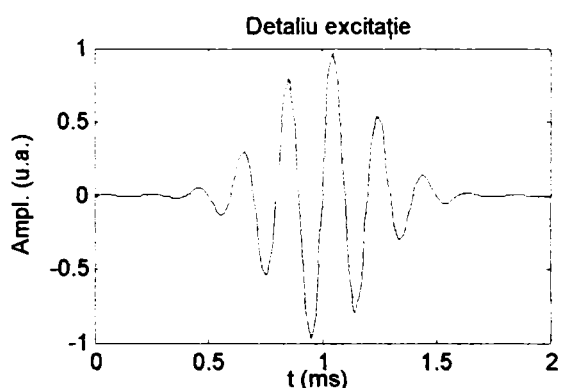
Fig. 6-22. (a) Amplitudinea excitației  $g(t)$  funcție de timp pentru cazul particular când  $t_0=1 \text{ ms}$  și  $A_0=1 \text{ u.a}$  și  $\alpha=10^7$  (detaliu pe intervalul de timp  $[0, 2] \text{ ms}$ ). (b) Semnalul temporal propriu-zis căruia i se aplică FFT. (c) Atenuarea spectrală  $= 10 \log|G(f)/G(0)|$ , cu scară logaritmică de frecvență, corespunzătoare semnalului de la punctual (b).



În problemele de simulare a propagării undelor elastice, apar și situații în care se dorește aflarea răspunsului sistemului într-un anumit domeniu de frecvențe,  $f_{min} < f < f_{max}$ . Este nevoie așadar de un semnal excitator a cărui transformată Fourier să aibă un palier în banda de interes și să se atenueze rapid în afara acesteia. O astfel de excitație este următoarea:

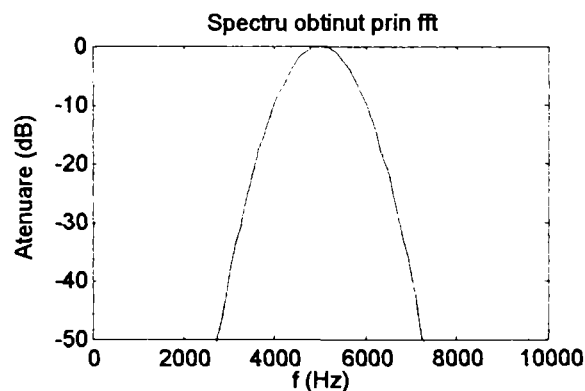
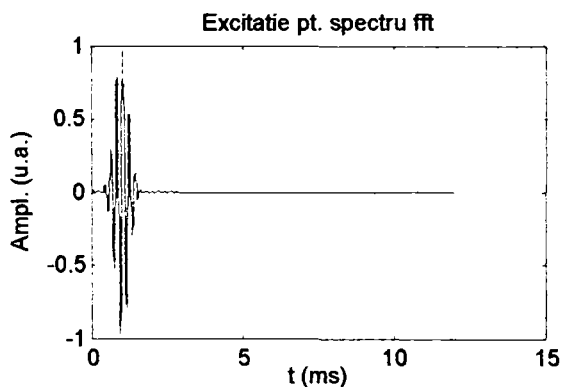
$$g_s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) e^{-\alpha(t-t_0)^2}, \quad (6-3)$$

în care  $\omega_0$  este pulsația semnalului sinusoidal modulat de anvelopa Gaussiană. Prin modificarea pulsației "purtătoare",  $\sin(\omega_0 t)$ , banda pulsului din Fig. 6-22 (a) cu aspect de filtru trece jos, poate fi mutată oriunde pe axa frecvențelor așa cum se remarcă în Fig. 6-23 - Fig. 6-26.



**Fig. 6-23.** Amplitudinea excitației  $g_s(t)$  funcție de timp pentru cazul particular când  $t_0=1$  ms și  $A_0=1$  u.a.,  $\alpha=10^7$  și  $\omega_0=2\pi f_0=2\pi 5000$  rad/s (detaliu pe intervalul de timp  $[0, 2]$  ms).

**Fig. 6-24.** Atenuarea spectrală =  $10 \log|G_s(f)/G_s(0)|$ , cu scară logaritmică de frecvență, corespunzătoare semnalului din Fig. 6-25. (detaliu).



**Fig. 6-25.** Semnalul temporal propriuzis căruia i se aplică FFT.

**Fig. 6-26.** Atenuarea spectrală =  $10 \log|G_s(f)/G_s(0)|$ , cu scară logaritmică de frecvență, corespunzătoare semnalului din Fig. 6-25.

În final graficele din Fig. 6-27, Fig. 6-28 prezintă diagrama temporală respectiv spectrul unui semnal sinusoidal, folosit uneori ca excitație în problemele de simulare numerică a propagării perturbațiilor elastice.



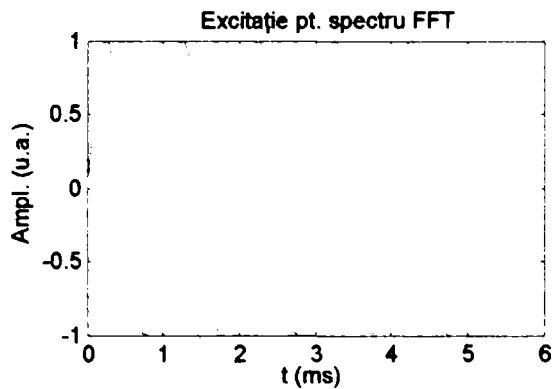


Fig. 6-27. Semnal excitator sinusoidal de amplitudine unitară și frecvență  $f=1$  KHz.

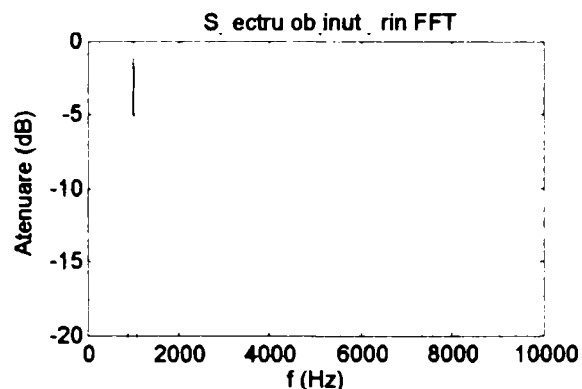


Fig. 6-28. Atenuarea spectrală a semnalului din Fig. 6-27 definit ca  $10 \log|F(f)/F(0)|$ .

Exemplele de mai sus se referă la excitații de tip punctiform, în expresiile matematice ale acestora neintervenind variabile  $x, y, z$ . În practică, orice sursă de perturbații are o anumită întindere spațială prezentându-se sub forma generală  $g=g(x, y, z, t)$ , sau  $g=g(x, y, t)$ . Pentru cazul bidimensional, un exemplu este constituit de sursa dublu Gaussiană în timp și spațiu cu simetrie circulară, descrisă de următoarea formulă:

$$g_{2G}(x, y, t) = A_0 e^{-\alpha_s [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} e^{-\alpha_t (t-t_0)^2}, \quad (6-4)$$

unde  $A_0$  este amplitudinea maximă a pulsului,  $(x_0, y_0)$ ,  $t_0$  centrul de simetrie spațială respectiv temporală al acestuia iar  $\alpha_s, \alpha_t$  două constante care determină întinderea în spațiu și timp a excitației.

Imaginile din Fig. 6-29, Fig. 6-30 prezintă evoluția în timp a excitației din (6-4) pentru niște valori particulare ale parametrilor săi. Un exemplu fizic concret de sursă cu o astfel de distribuție ar fi o presiune de tip exploziv care se exercită pe suprafața plană a unui corp elastic.

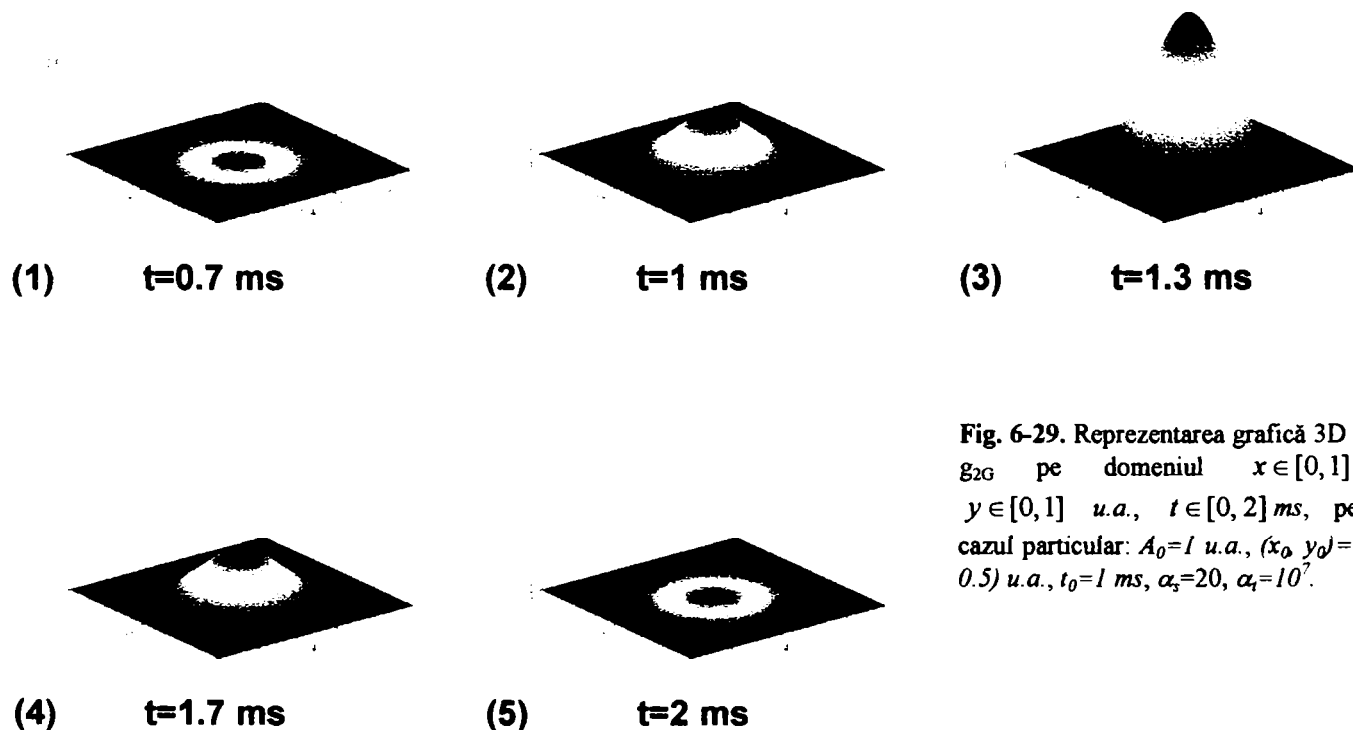


Fig. 6-29. Reprezentarea grafică 3D a lui  $g_{2G}$  pe domeniul  $x \in [0, 1]$  u.a.,  $y \in [0, 1]$  u.a.,  $t \in [0, 2]$  ms, pentru cazul particular:  $A_0=1$  u.a.,  $(x_0, y_0)=(0.5, 0.5)$  u.a.,  $t_0=1$  ms,  $\alpha_s=20$ ,  $\alpha_t=10^7$ .

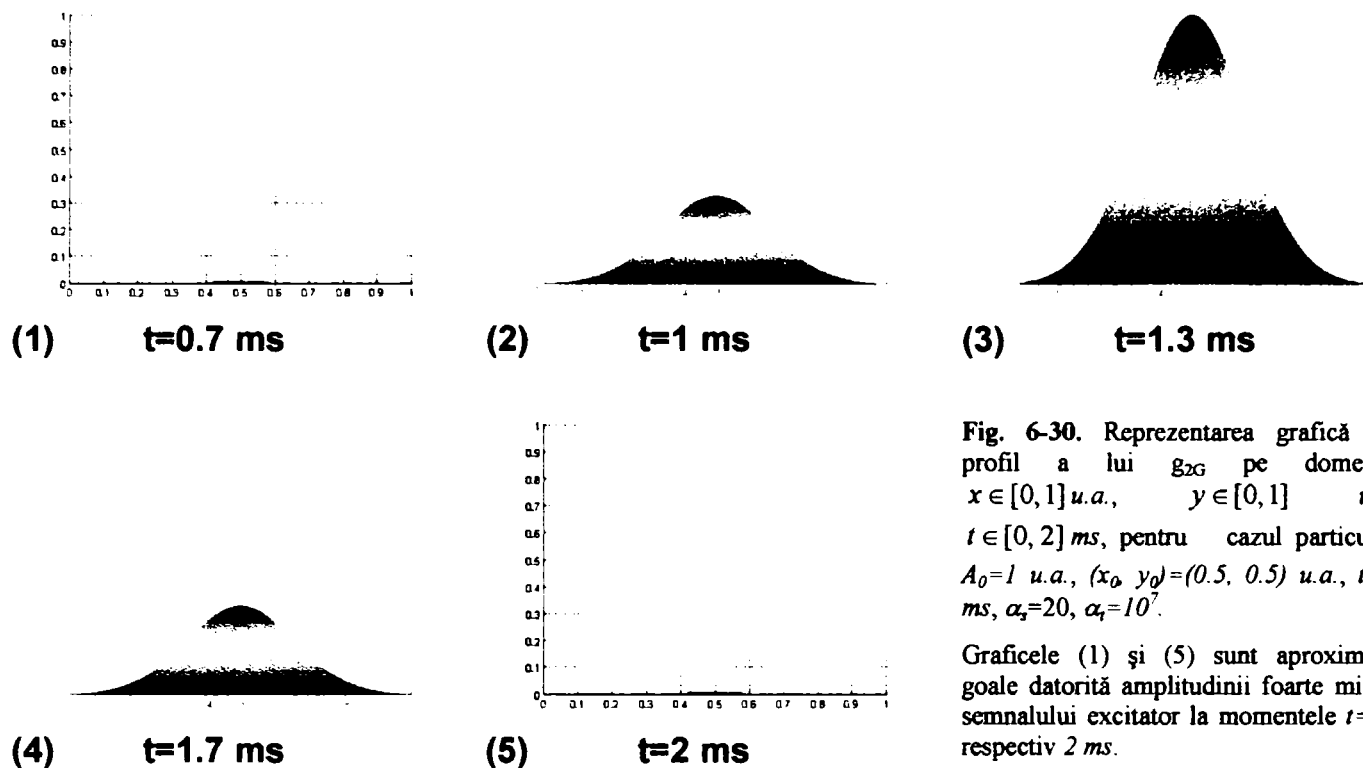


Fig. 6-30. Reprezentarea grafică din profil a lui  $g_{2G}$  pe domeniul  $x \in [0, 1]$  u.a.,  $y \in [0, 1]$  u.a.,  $t \in [0, 2]$  ms, pentru cazul particular:  $A_0=1$  u.a.,  $(x_0, y_0)=(0.5, 0.5)$  u.a.,  $t_0=1$  ms,  $\alpha_x=20$ ,  $\alpha_y=10^7$ .

Graficele (1) și (5) sunt aproximativ goale datorită amplitudinii foarte mici a semnalului excitator la momentele  $t=0.7$  respectiv  $2$  ms.

## 6.2. Ultrasunetele și detecția nedistructivă a defectelor de material

### 6.2.1. Considerații generale

Proprietatea ultrasunetelor de a călători pe distanțe suficient de mari, prin masele metalice, sub formă de perturbații de volum sau de suprafață, precum și lungimile de undă mici ale acestora, comparabile cu dimensiunile neomogenităților de material, fac din ele un instrument serios de investigare a defectelor din structurile metalice [1-3] în general și cu precădere din cele laminate [6-4], [6-5], [6-9]. Trebuie totuși spus de la început că tehnicile de investigare ultrasonoră nu se compară din punct de vedere al rezoluției de detecție cu metodele de scanare cu raze X ce se aplică cu succes mediilor slab conductoare. *Din păcate câmpurile electromagnetice, chiar și cele de frecvențe extrem de ridicate, nu pot penetra corpurile conductoare (cum sunt metalele) decât pe distanțe de ordinal nanometrilor, fiind așadar inutile la radiografierea acestora.*

Utilizarea ultrasunetelor la detecția defectelor de material implică folosirea unei aparaturi de calcul cu capacități de procesare de semnal, cu alte cuvinte a unui sistem hardware - software complex.

O primă metodă de punere în evidență a unei neomogenități, este scanarea de tip A (Amplitude Scan) în care un puls ultrasonor, generat de un traductor, traversează corpul investigat reflectându-se și fiind difractat de orice abatere a proprietăților acestuia (variații de densitate, modul de elasticitate, coeficient Poisson). Astfel, dacă sursa de ultrasunete este plasată în originea sistemului de axe din Fig. 6-31, radiind de-a lungul direcției  $z$ , iar detectorul de radiație este situat în același punct, atunci pe ecranul unui osciloscop sau alt dispozitiv de afișare, se obține diagrama din Fig. 6-32 care în principiu conține două ecouri: unul corespunzător "defectului 2" iar celălalt feței B a paralelipipedului. Fig. 6-32 reprezintă amplitudinea semnalului recepționat funcție de timp. Pe de altă parte cunoscând viteza de propagare a pulsului și timpul după care apar ecourile și folosind formula  $v = d/t$  axa orizontală a graficului din Fig. 6-32 poate la fel de bine reprezenta și distanța la care se află defectul, respective suprafața B, în raport cu fața A.

Un alt procedeu de scanare, capabil de a aduce mai multe informații privitoare la localizarea diverselor neomogenități, este scanarea de tip B (Fig. 6-33) la care se înregistrează timpul de tranzit al pulsului de unde. În esență procedeul are de fapt la bază o multitudine de scanări de tip A efectuate

de-a lungul unei axe. Afișarea datelor se face în funcție de un prag de intensitate stabilit de utilizator. Astfel, dacă pentru o anumită poziție a perechii de traductoare excitator receptor intensitatea pulsului măsurat depășește o anumită valoare, acesta se consideră recepționat iar pe imaginea în coordonate  $(x, t)$  sau  $(x, z)$  (Fig. 6-33) apare un punct. Sistemele de calcul actuale pot produce imagini care sunt în același timp reprezentări A cât și B scan, folosind hărți de culoare sau grafice cascade.

La scanarea de tip C (Fig. 6-34) traductorul excitator – receptor se deplasează atât pe axa  $x$  cât și pe  $y$ . Acest tip de metodă este la rândul ei o generalizare a scanării B, implicând însă un sistem mecanic de deplasare a senzorilor destul de complicat, la care se adaugă o parte de achiziție, procesare și afișare a datelor de complexitate ridicată.

Impulsurile ecou din Fig. 6-32 au o formă simplificată, în realitate aspectul lor temporal fiind mult mai complicat. În cele ce urmează se va folosi schema cu diferențe finite elaborată în capitolul 3 pentru a simula propagarea ultrasunetelor prin diverse combinații de medii și a stabili astfel în ce măsură neomogenitățile de material sunt capabile de a produce în câmpul ultrasunor incident perturbații sesizabile și detectabile cu mijloace practice.

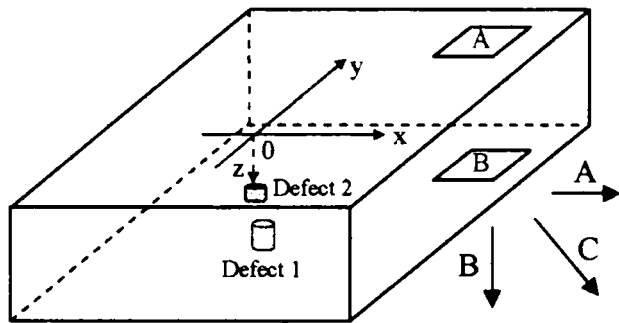


Fig. 6-31. Obiect metalic de formă paralelipedică care prezintă două defecte interioare.

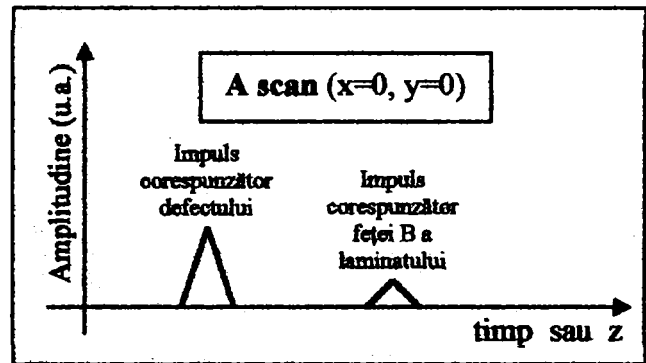


Fig. 6-32. Oscilogramă specifică scanării de tip A. (a se vedea Fig. 6-31).

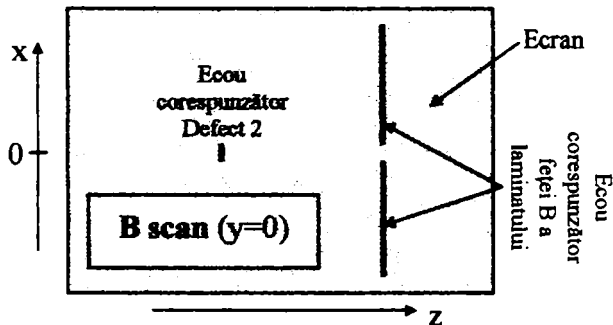


Fig. 6-33. Imagine computerizată schematizată rezultată în urma plimbării traductorului excitator - receptor de-a lungul axei  $x$  (Fig. 6-31).

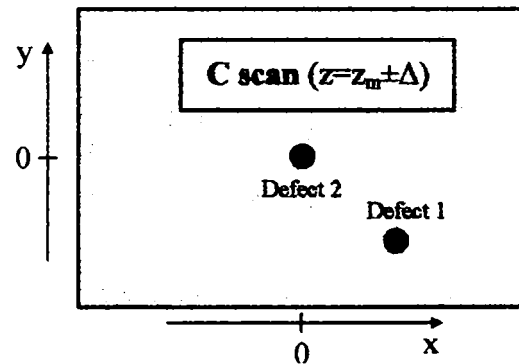


Fig. 6-34. Imagine computerizată schematizată rezultată în urma plimbării traductorului excitator - receptor de-a lungul axelor  $x$  și  $y$  (Fig. 6-31).

## 6.2.2. Unde ultrasonore de volum și de suprafață. Modelări pe calculator

Se consideră pentru început cazul unui mediu metalic semiinfințit în contact cu unul lichid care ocupă cealaltă jumătate a spațiului [2-5], [6-6]. Sursa de excitație este presupusă ca acționând pe suprafața de separație dintre cele două substanțe. Ceea ce se cere este reprezentarea hărților de viteză de oscilație și tensiune într-o secțiune perpendiculară pe suprafața de separație. În acord cu teoria elastodinamicii ar trebui să apară unde compresionale, transversale și de suprafață ce se propagă cu viteze diferite.

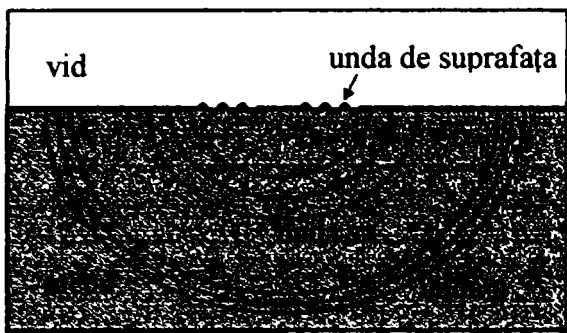


Fig. 6-35. Reprezentare schematică a undelor s, p și de suprafață în cazul excitării cu un impuls a unui semispațiu metallic cu suprafața de separație liberă.

Cu alte cuvinte undele ce se propagă pe suprafața de separație a solidelor cu un alt mediu se comportă oarecum asemănător cu cele din interiorul fluidelor. Undele superficiale au de asemenea avantajul de a fi detectabile în mod direct prin măsurarea deplasamentului sau a vitezei de oscilație a suprafeței. Intuitiv vorbind detecția unui defect îngropat la mică adâncime în solid (comparativ cu lungimea de undă excitatoare), pare mult mai ușor de realizat decât cea a unui defect aflat departe în interiorul mediului solid de investigat. Fig. 6-35 ilustrează însă o imagine idealizată pentru cazul în care deasupra metalului nu se găsește nimic. În realitate mediul solid se interfațează de cele mai multe ori cu unul gazos sau lichid suprafața de separație nemaiputând fi considerată liberă. Singura modalitate de a vedea cum se distribuie de fapt energia undelor ultrasonore în interacțiune cu defectele de material dintr-o masă solidă interfațată cu un fluid sau cu vidul este simularea pe calculator.

Pentru început se consideră o masă de aluminiu de mare întindere interfațată cu un mediu lichid (apa), ca în Fig. 6-37. Se vor lua în calcul două tipuri de excitație: (1) perpendiculară pe suprafața de separație (Fig. 6-37) la care diagrama temporală și spectrul perturbației  $\tau_{xx}$  sunt date în Fig. 6-36 și (2) la un unghi de 45° cu orizontala (Fig. 6-47) unde excitația compusă din semnalele  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  este afișată în Fig. 6-46. Folosind datele din Tab. 6-2 se cer hărțile componentelor  $v_x$  ale vitezelor de oscilație ale punctelor masei de substanță, hărțile tensiunilor  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$ , ca și evoluția temporală a vitezelor  $v_x$  în punctele 1, 2, 3, 4, 5, 6 indicate în Fig. 6-44 și Fig. 6-54 pentru ambele tipuri de excitații (1) respective (2).

Tab. 6-2. Parametri de material corespunzători Fig. 6-37 și Fig. 6-47.

	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	E (Pa)	$\nu$	$c_p$ (m/s)
Al	2700	$6.895 \cdot 10^{10}$	0.33	Rezultă din: $\rho$ , E, $\nu$
Apă	1000	0	-	1500

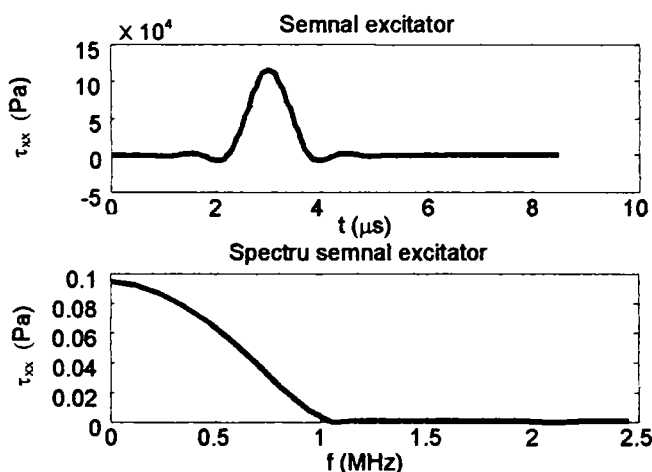


Fig. 6-36. Semnalul excitator (și spectrul său) folosit pentru stimularea structurii din Fig. 6-37 descrisă de parametri din Tab. 6-2.

Spre deosebire de fluide în interiorul cărora se propagă doar unde compresionale solidele manifestă două tipuri de perturbații de volum (compresionale și shear) ceea ce înseamnă că un puls excitator se transformă repede în cazul propagării ultrasunetelor prin metale, în două grupuri de unde care călătoresc cu viteze diferite producând prin interacțiune cu un defect patru ecouri distincte, fenomen ce îngreunează localizarea neomogenității. În ceea ce privește undele de suprafață acestea nu prezintă proprietatea de disociere fiind unice, unui puls excitator corespunzându-i un singur grup de unde superficiale

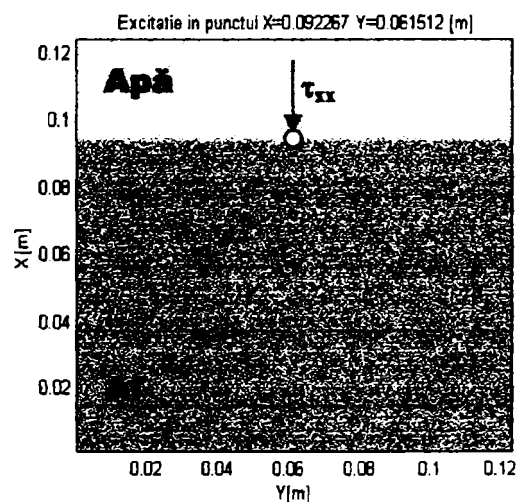


Fig. 6-37. Semispațiu metallic cuplat cu unul lichid. Excitația are direcție perpendiculară pe suprafața de separație.

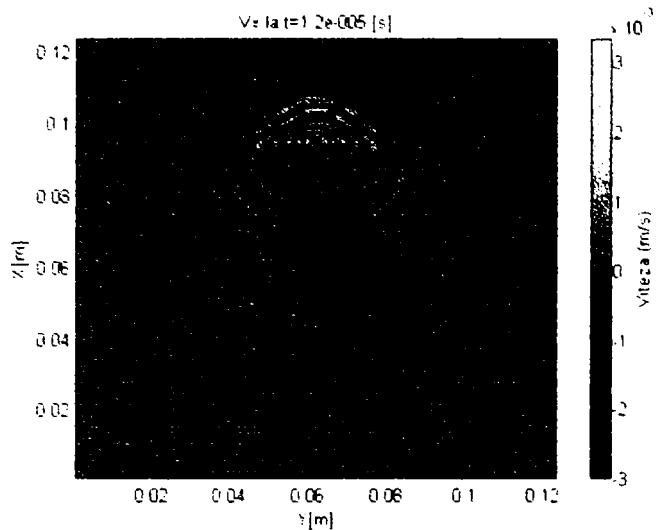


Fig. 6-38. Harta componenteii  $v_x$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-37 cu excitația din Fig. 6-36 și parametrii din Tab. 6-2.

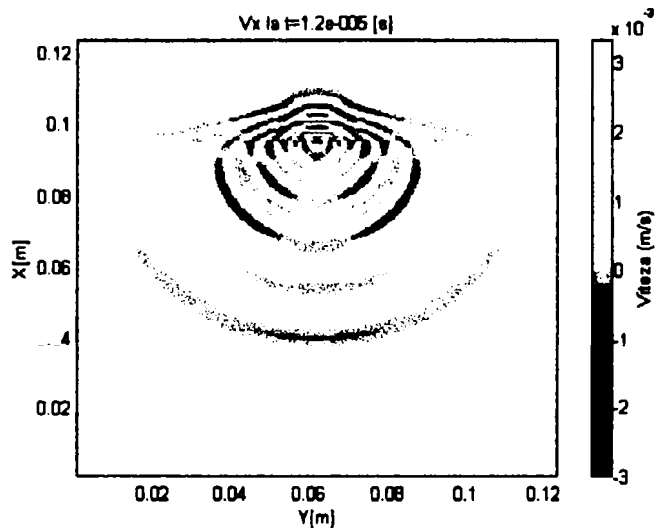


Fig. 6-39. Harta componenteii  $v_x$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-37 cu excitația din Fig. 6-36 și parametrii din Tab. 6-2 (imagine cu contrast ridicat).

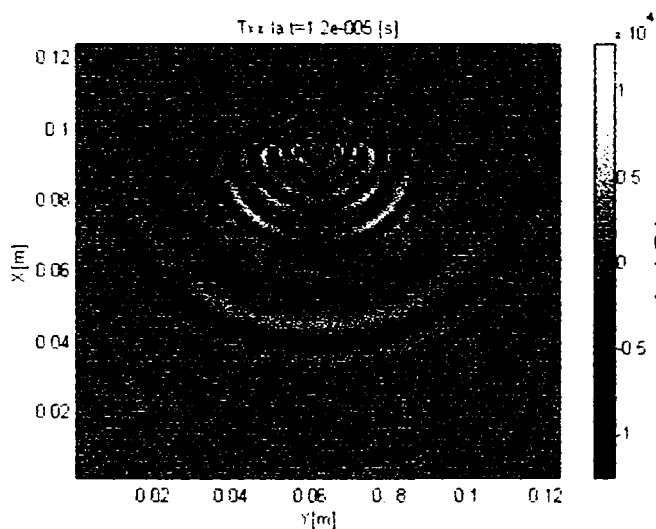


Fig. 6-40. Harta tensiunii  $\tau_{xx}$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-37 cu excitația din Fig. 6-36 și parametrii din Tab. 6-2.

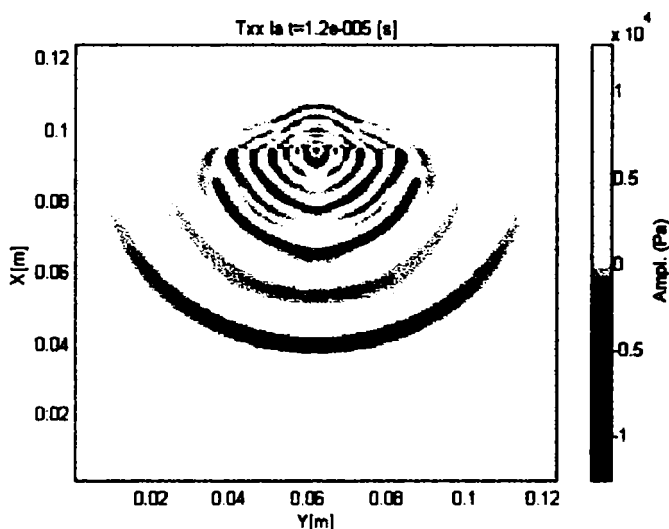


Fig. 6-41. Harta tensiunii  $\tau_{xx}$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-37 cu excitația din Fig. 6-36 și parametrii din Tab. 6-2 (imagine cu contrast ridicat pentru a pune în evidență principalele tipuri de undă ce apar în structură).

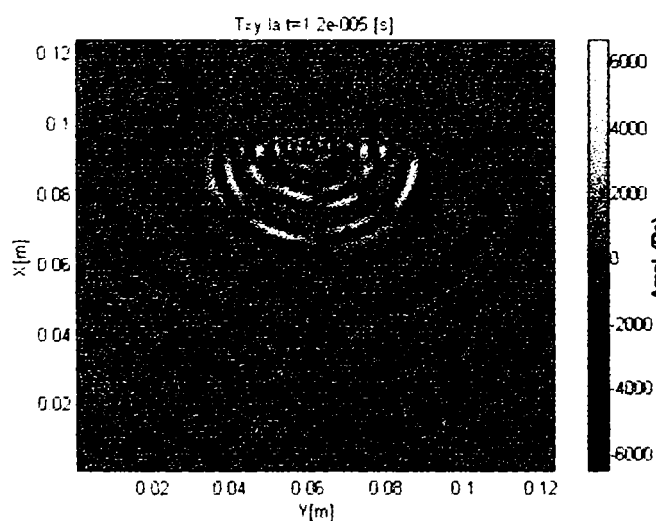


Fig. 6-42. Harta tensiunii  $\tau_{yy}$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-37 cu excitația din Fig. 6-36 și parametrii din Tab. 6-2.

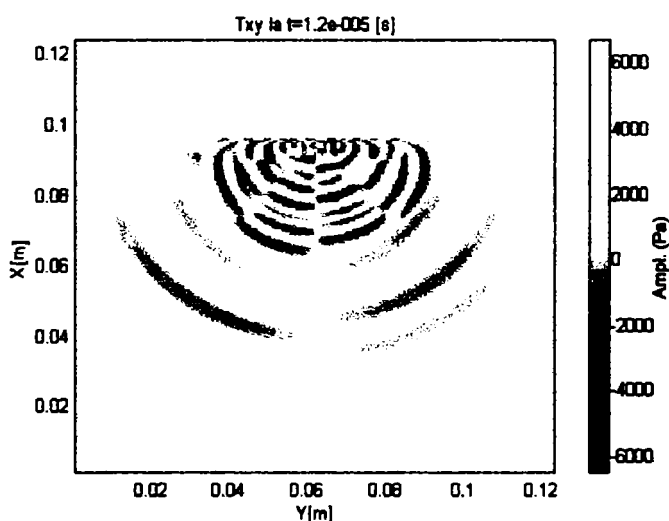
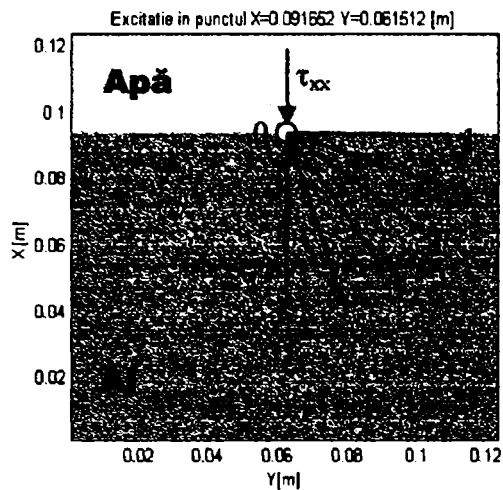
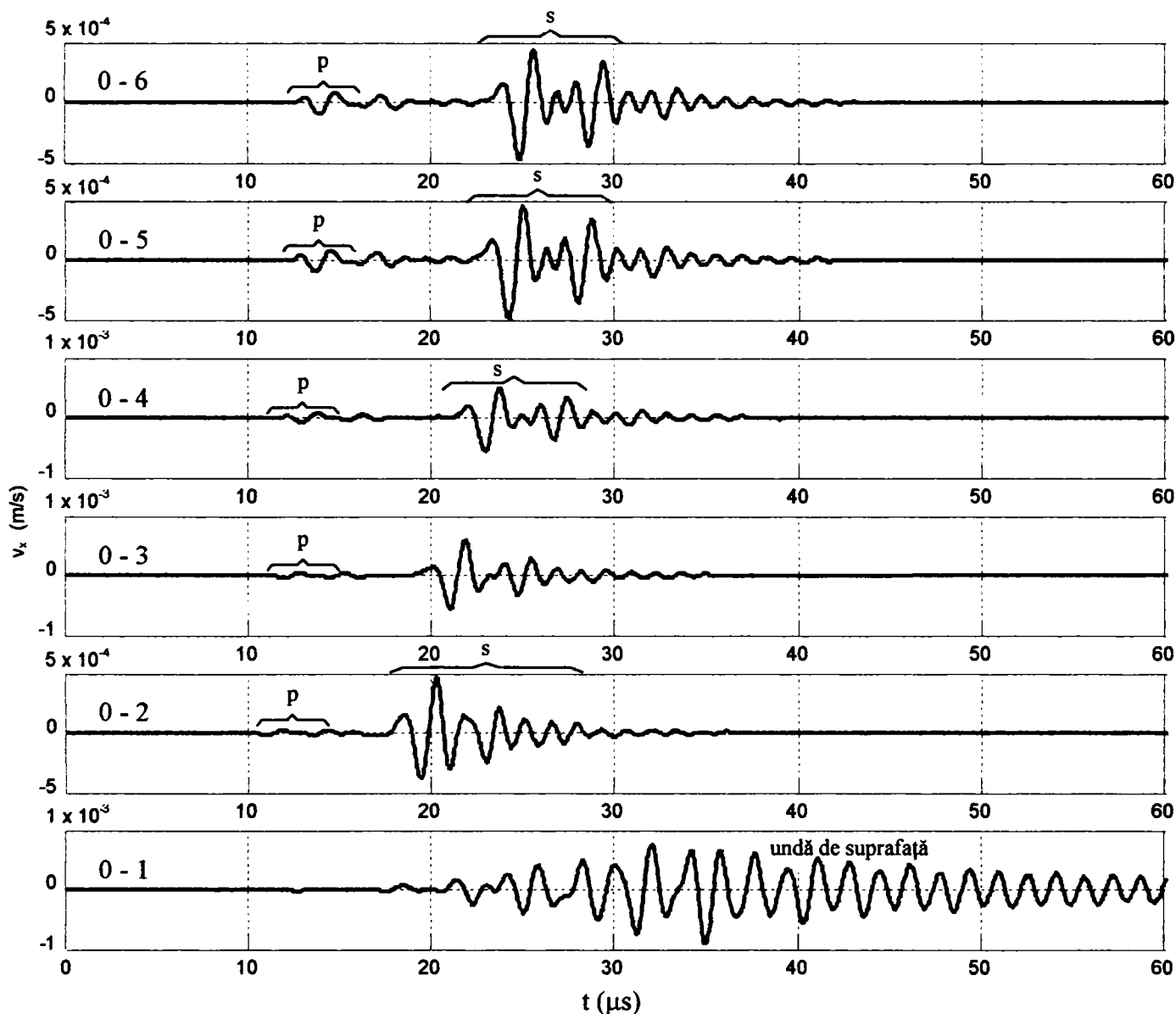


Fig. 6-43. Harta tensiunii  $\tau_{yy}$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-37 cu excitația din Fig. 6-36 și parametrii din Tab. 6-2.



**Fig. 6-44.** Aceeași configurație ca în Fig. 6-37 pe care însă s-au figurat punctele de măsură ale componentei  $v_x$  a vitezei de oscilație. Graficele temporale ale celor șase viteze sunt reprezentate în Fig. 6-45.

Deși pe harta de viteze din Fig. 6-38 se distinge apariția a trei tipuri de unde: p, s și de suprafață, magnitudinea acestora este mai greu de observat fiind dificilă o comparație între amplitudinile unei compresionale, transversale și de suprafață. De asemenea Fig. 6-45 oferă o imagine clară a duratei celor trei tipuri de pulsuri ultrasonore.



**Fig. 6-45.** Semnalele  $v_x$  înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, 6 marcate pe Fig. 6-44 atunci când excitația din Fig. 6-36 acționează în 0. Așa cum era de așteptat în masa de aluminiu se propagă două tipuri de unde: s și p iar în imediata vecinătate a acesteia doar o singură perturbație de suprafață cu viteză mai mică decât a celorlalte două. Se remarcă amplitudinea extrem de mică a undei compresionale în comparație cu cea transversală cu toate că perturbația acționează perpendicular pe suprafața de separație. O a doua observație este durata destul de lungă a pulsului ultrasonor de suprafață comparative cu durata excitației, 30 – 40  $\mu$ s față de 1  $\mu$ s.



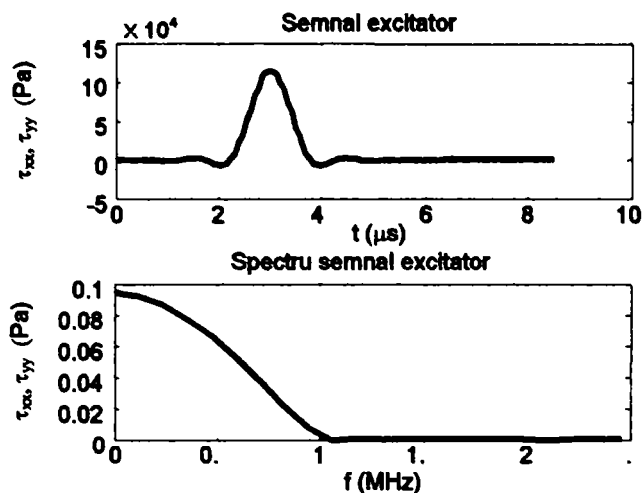


Fig. 6-46. Semnalul excitator (și spectrul său) folosit pentru stimularea structurii din Fig. 6-47 descrisă de parametrii din Tab. 6-2.

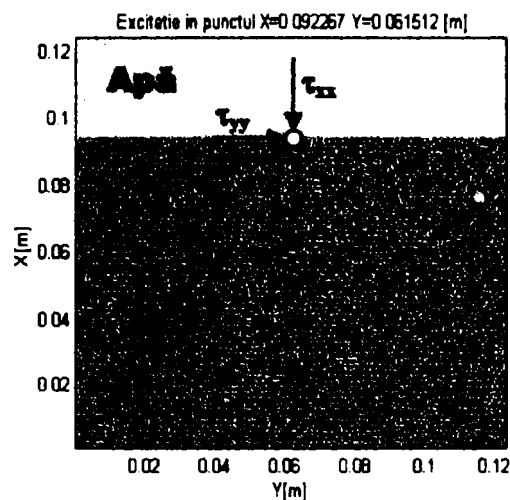


Fig. 6-47. Semispațiu metalic cuplat cu unul lichid. Excitația rezultantă are direcție oblică la  $45^\circ$  pe suprafața de separație.

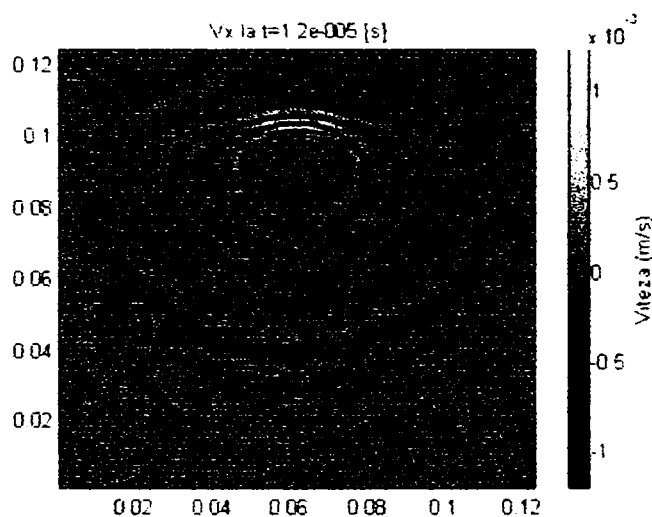


Fig. 6-48. Harta componentei  $v_x$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-47 cu excitația din Fig. 6-46 și parametrii din Tab. 6-2.

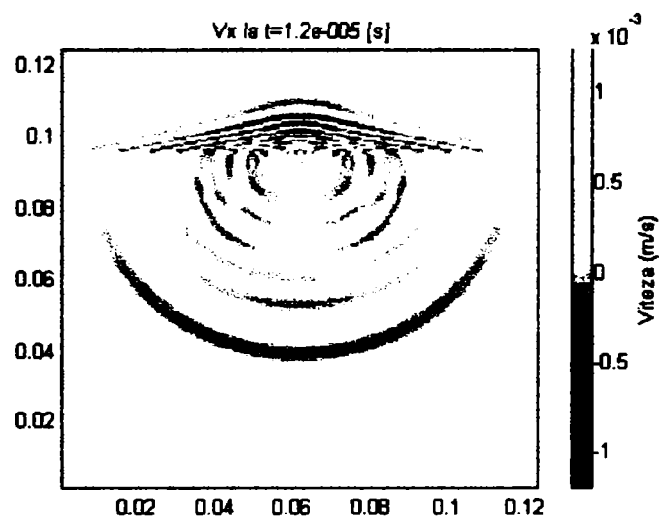


Fig. 6-49. Harta componentei  $v_x$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-47 cu excitația din Fig. 6-46 și parametrii din Tab. 6-2 (imagine cu contrast ridicat).

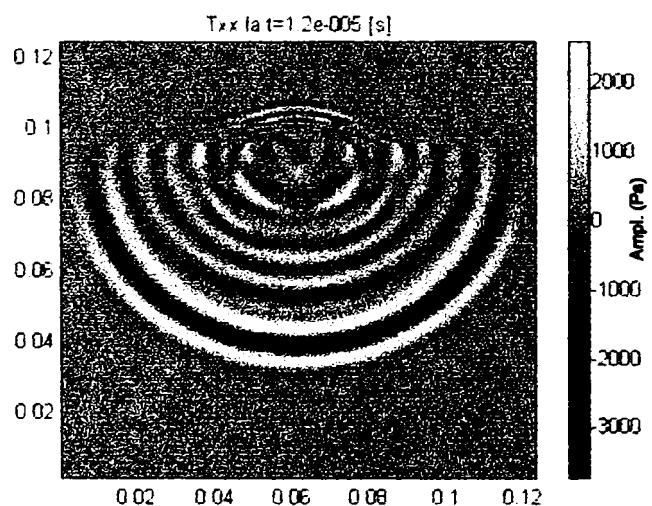


Fig. 6-50. Harta componentei  $\tau_{xx}$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-47 cu excitația din Fig. 6-46 și parametrii din Tab. 6-2.

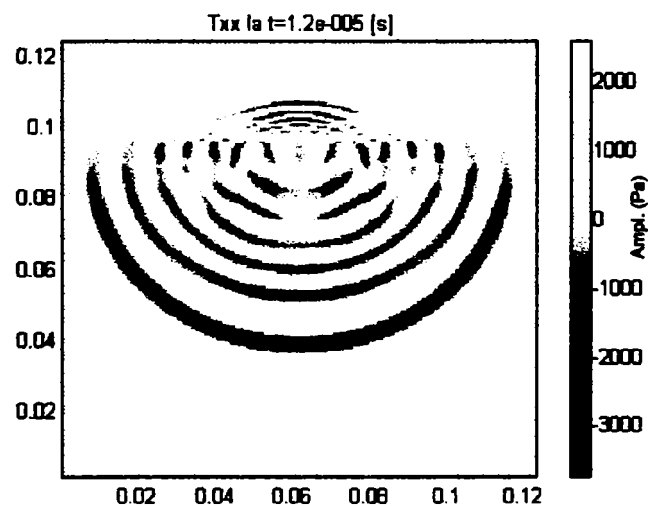
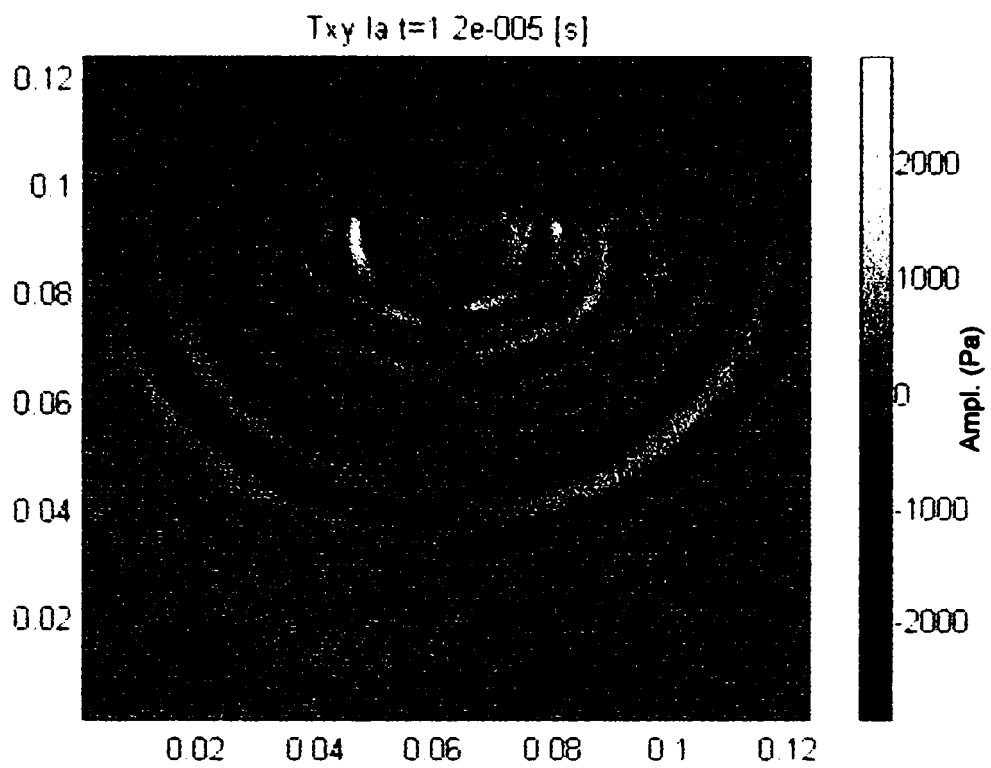
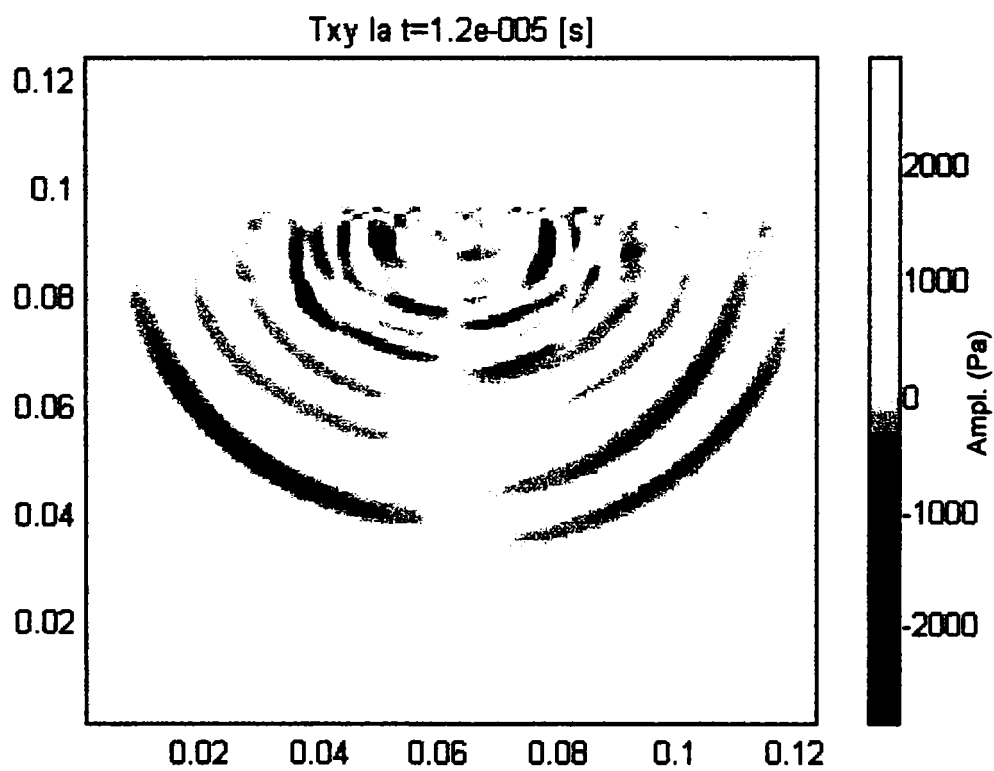


Fig. 6-51. Harta componentei  $\tau_{xx}$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-47 cu excitația din Fig. 6-46 și parametrii din Tab. 6-2 (imagine cu contrast ridicat).



**Fig. 6-52.** Harta componentei  $\tau_{xy}$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-47 cu excitația din Fig. 6-46 și parametrii din Tab. 6-2.



**Fig. 6-53.** Harta componentei  $\tau_{xy}$  corespunzătoare configurației din Fig. 6-47 cu excitația din Fig. 6-46 și parametrii din Tab. 6-2 (imagine cu contrast ridicat).

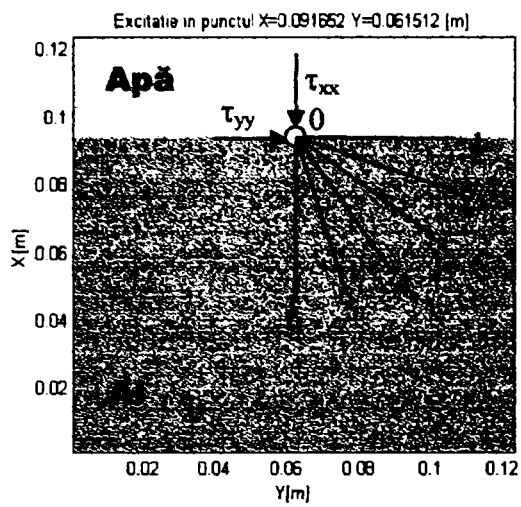


Fig. 6-54. Aceeași configurație ca în Fig. 6-47 pe care însă s-au figurat punctele de măsură a componentei  $v_x$  a vitezei de oscilație. Graficele temporale ale celor șase viteze sunt reprezentate în Fig. 6-55

Deși pe harta de viteze din Fig. 6-48 se distinge apariția a trei tipuri de unde:  $p$ ,  $s$  și de suprafață, magnitudinea acestora este mai greu de observat fiind dificilă o comparație între amplitudinile unei compresionale, transversale și de suprafață. De asemenea Fig. 6-55 oferă o imagine clară a duratei celor trei tipuri de pulsuri ultrasonore.

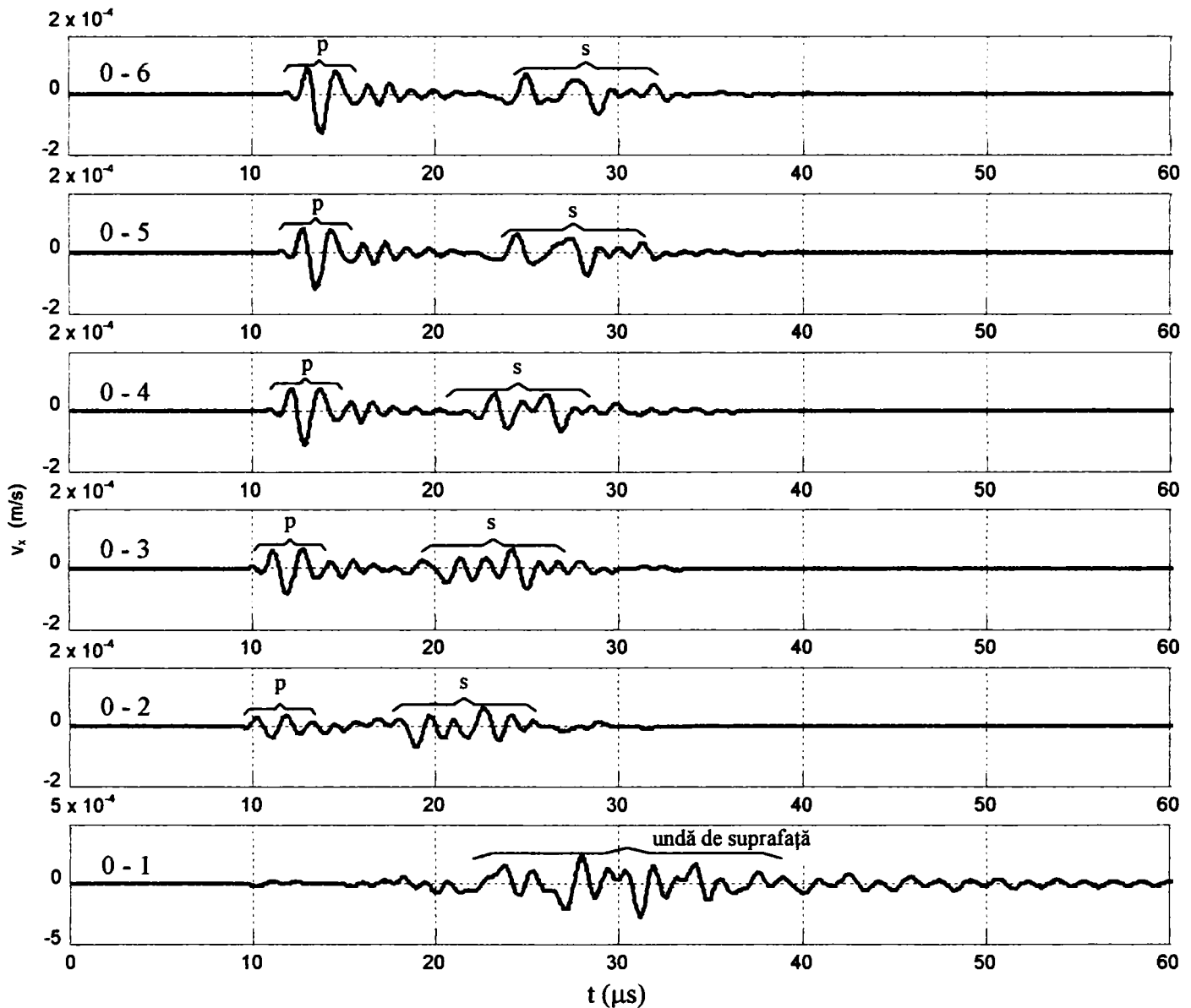


Fig. 6-55. Semnalele  $v_x$  înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, 6 marcate pe Fig. 6-54 atunci când excitația din Fig. 6-46 acționează în 0. Așa cum era de așteptat în masa de aluminiu se propagă două tipuri de unde:  $s$  și  $p$  iar în imediata vecinătate a acestora doar o singură perturbație de suprafață cu viteză mai mică decât a celorlalte două. Durata pachetului ultrasonor de suprafață este aproximativ jumătate din cel din Fig. 6-45, de unde se poate trage concluzia că excitația la  $45^\circ$  generează un puls mai localizat în timp decât cea perpendiculară. Totuși întinderea temporală a undei de suprafață rămâne destul de mare.

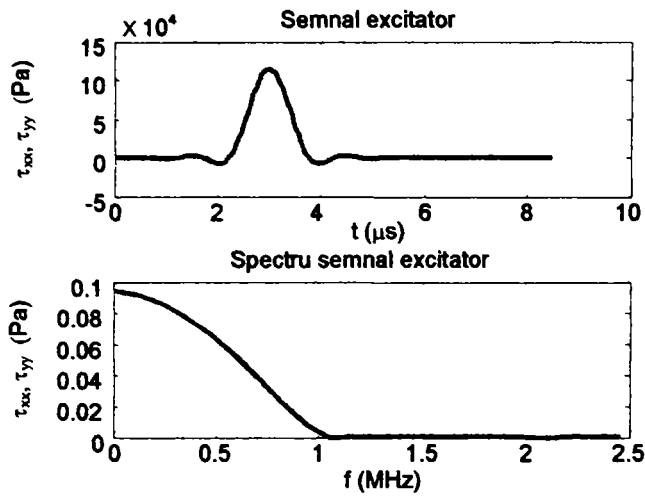


Fig. 6-56. Excitația corespunzătoare structurii din Fig. 6-57.

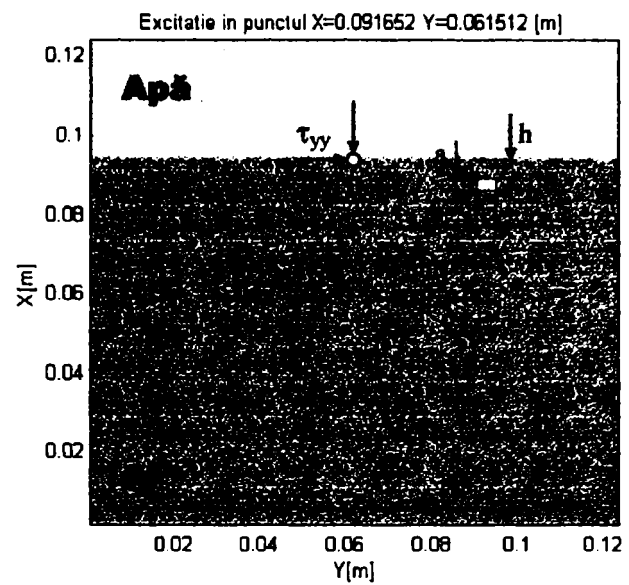


Fig. 6-57. Semispațiu de Al cuplat cu un lichid și prezentând un defect de suprafață.

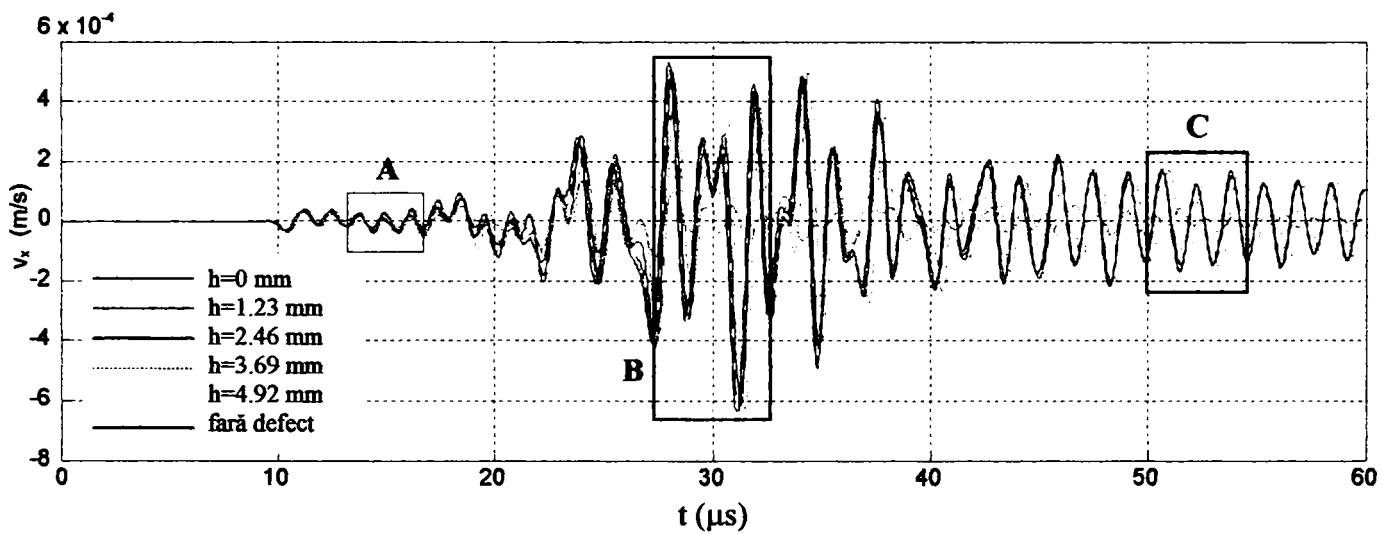


Fig. 6-58. Semnalele  $v_x$  înregistrate în punctul 1 (Fig. 6-57) atunci când excitația din Fig. 6-56 acționează în zero. Sunt reprezentate grafic situațiile în care defectul (o incluziune de apă de formă paralelipipedică), este situat la adâncimile  $h=0, 1.23, 2.46, 3.69, 4.92$  mm, plus cazul fără defect.

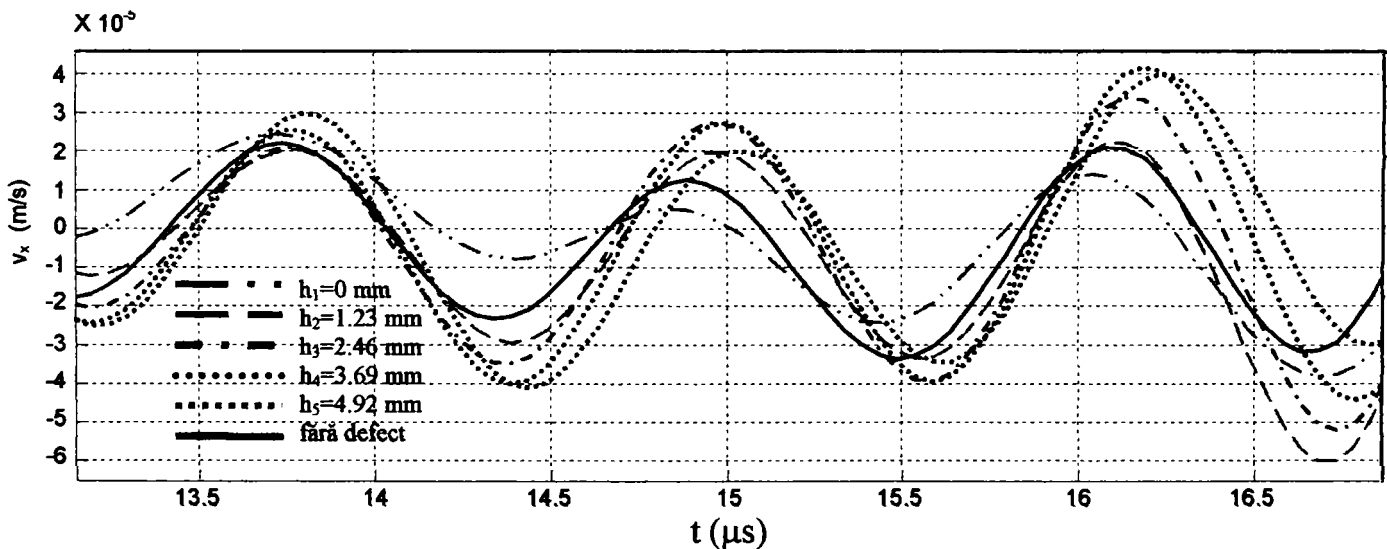
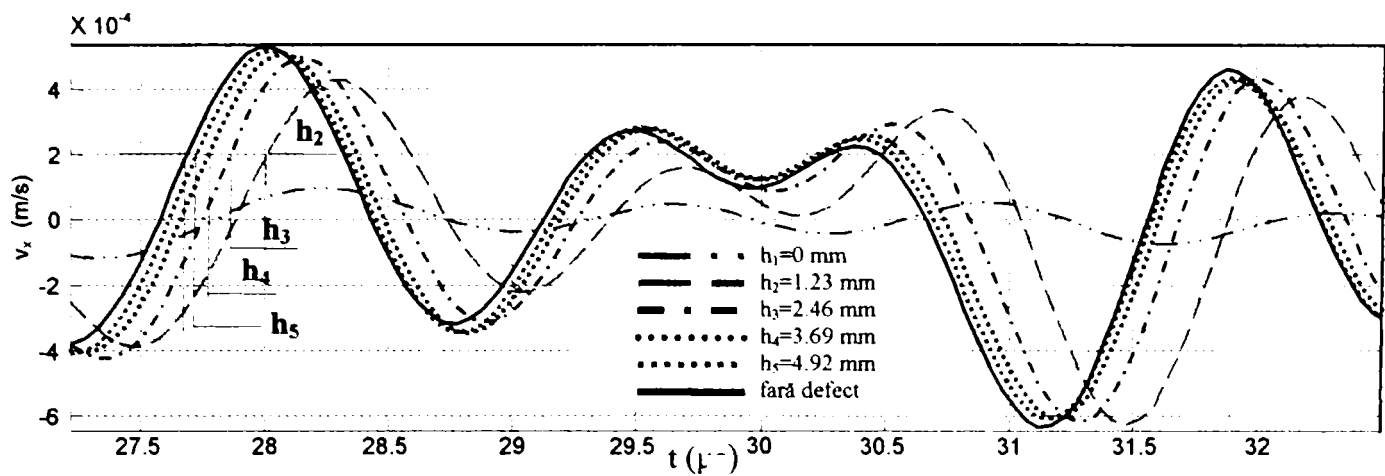
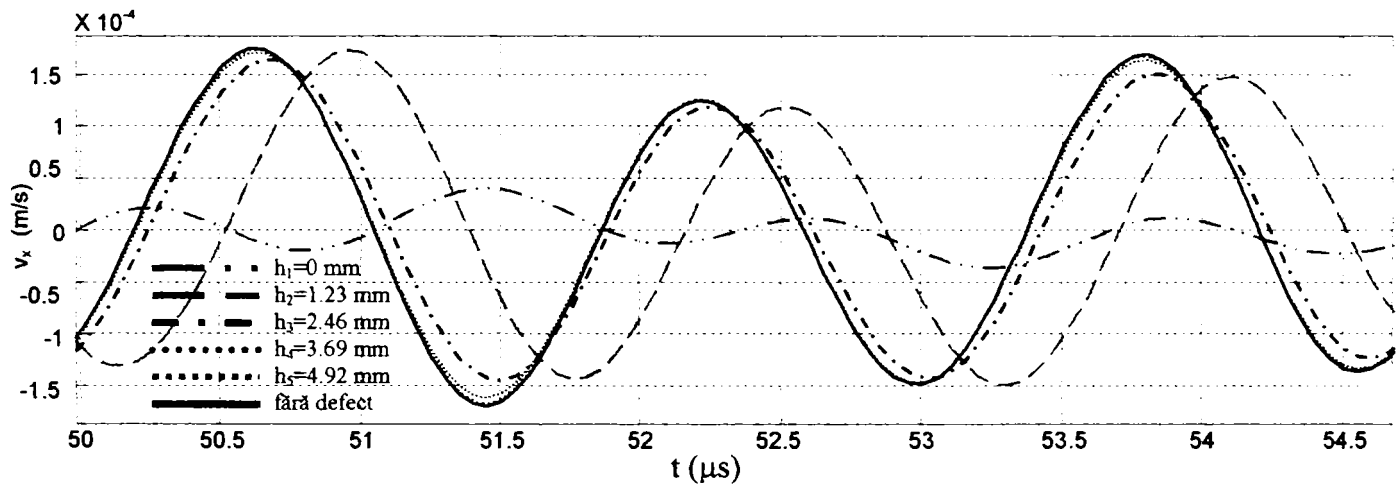


Fig. 6-59. Reprezentare detaliată a ferestrei marcate cu A pe Fig. 6-58. Remarcă: La începutul pulsului ultrasonor cele cinci semnale  $v_x$  au poziții relative destul de complicate nefiind de prea mare ajutor la detecția defectelor de material.



**Fig. 6-60.** Reprezentare detaliată a ferestrei marcate cu B pe Fig. 6-58. Observație: Pe măsură ce adâncimea la care se află defectul crește unda de suprafață este din ce în ce mai puțin influențată de acesta tinzând către forma exactă a perturbației superficiale în cazul în care nu există nici o neomogenitate de material. Defazaje semnificative, de ordinal a  $200 - 250 \text{ ns}$ , care pot fi relative ușor puse în evidență cu un sistem de procesare de semnal, apar doar pentru adâncimi mici în domeniul  $[0, 2.50] \text{ mm}$ .



**Fig. 6-61.** Reprezentare detaliată a ferestrei marcate cu C pe Fig. 6-58. Sunt valabile aceleași comentarii ca la Fig. 6-60 cu deosebirea că diferențele (defazajele) dintre unda de suprafață neperturbată și cele perturbate de defect sunt mai mici, cu excepția unei corespunzătoare defectului situat la  $h=1.23 \text{ mm}$  (adâncimea minimă) care are un defazaj comparativ cu cel din Fig. 6-60.

Din analiza Fig. 6-58 - Fig. 6-61 rezultă că partea de amplitudine mare a pulsului ultrasonor (Fig. 6-60) este cea mai sensibilă la defectele de material îngropate la mică adâncime. Folosind o aparatură de procesare de semnal adecvată, se poate măsura defazajul dintre semnalul referință, fără defect, și cele întârziate și atenuate de acesta. Un exemplu practic de detecție a defectelor de suprafață cu ajutorul procedurii descris mai sus este scanarea tip AB (Fig. 6-33), la care sursa de pulsuri și senzorul de măsură se plimbă pe două linii paralele, între care se găsește o suprafață cu corpuri străine. Ori de câte ori se ivește o neomogenitate între excitator și receptor apare o întârziere a semnalului măsurat ce este înregistrată și memorată de aparatura de procesare de semnal care supervizează cei doi traductori. Este posibilă, fără nici o dificultate, înregistrarea întregului semnal recepționat pentru o poziție dată a traductorilor, ca în Fig. 6-58. Prin alăturarea unei serii întregi de grafice corespunzătoare tuturor perechilor de poziții se poate obține, cu ajutorul prelucrărilor de imagine pe calculator, graficul 2D corespunzător scanării AB. În acest mod se poate spune sigur doar că un defect se află de-a lungul unei anumite drepte ale cărei capete au coordonate cunoscute (poziția sursei de pulsuri și a senzorului de măsură fiind știute), neputându-se preciza și locația sa exactă de-a lungul liniei. Localizarea precisă a neomogenității se face efectuând o a doua baleare pe o direcție perpendiculară pe prima.

Formele de undă din Fig. 6-58 - Fig. 6-61 sunt obținute în ipoteza existenței unui mediu bidimensional infinit, cu alte cuvinte frontierele domeniului din Fig. 6-57 sunt presupuse perfect absorbante și nereflectătoare, programul MATLAB de simulare fiind setat să imite un spațiu extins la nesfârșit.

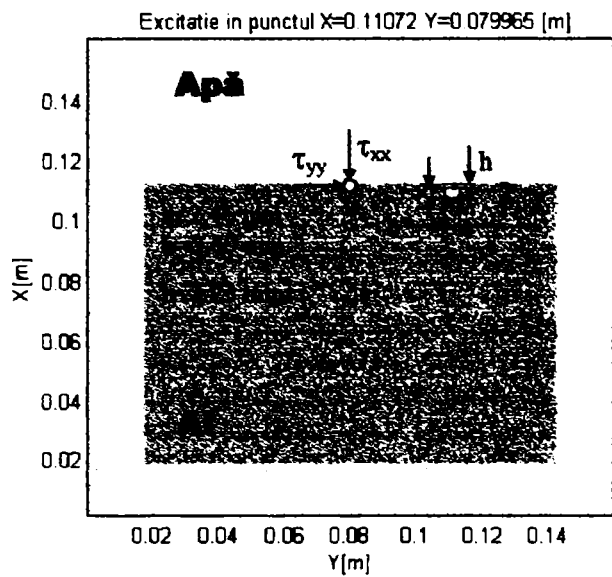


Fig. 6-62. Corp din Al cu defect de suprafață, scufundat în apă.

Simularea MATLAB ce urmează are rolul de a demonstra că defazajul introdus de neomogenitatea de material rămâne clar detectabil chiar dacă partea de început a pulsului (care deja se întoarce) se suprapune în punctul de măsură peste cea care încă se mai duce spre frontieră.

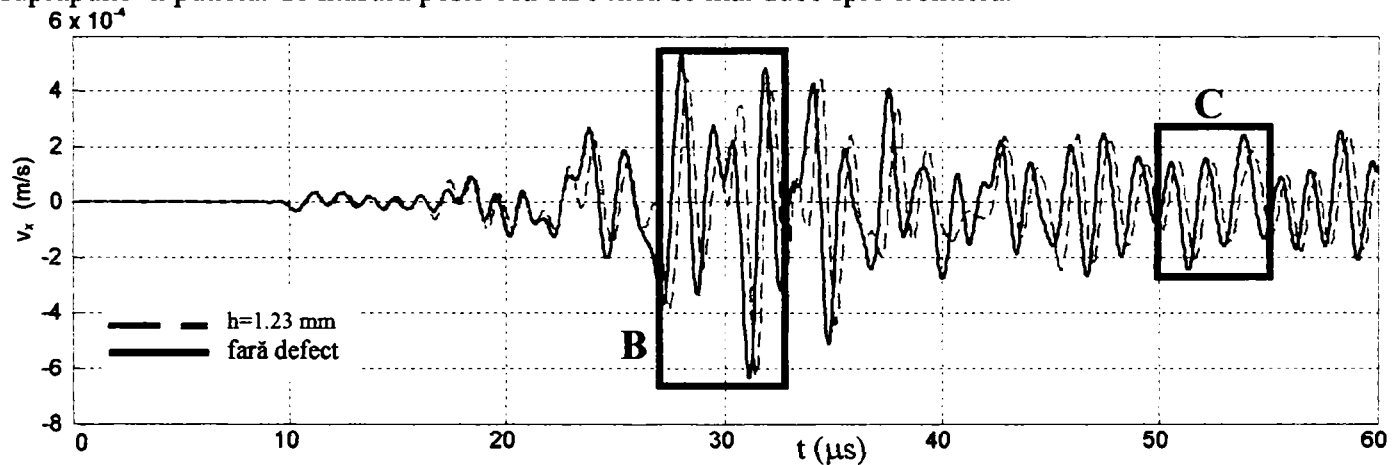


Fig. 6-63. Semnalele  $v_x$  înregistrate în punctul 1 (Fig. 6-62) atunci când excitația din Fig. 6-56 acționează în zero. Spre deosebire de Fig. 6-58 sunt reprezentate doar două cazuri: (1) defectul (o incluziune de apă de formă paralelipipedică), este situat la adâncimea  $h=1.23\text{ mm}$ , (2) nu există defect. Obs: Ultima parte a graficului (intervalul  $[45\ 60]\ \mu\text{s}$ ) diferă, datorită luării în considerare a reflexiilor, de partea analogă a Fig. 6-58. Totuși, așa cum se vede mai bine pe detaliul din Fig. 6-65, defazajul se păstrează în mod clar.

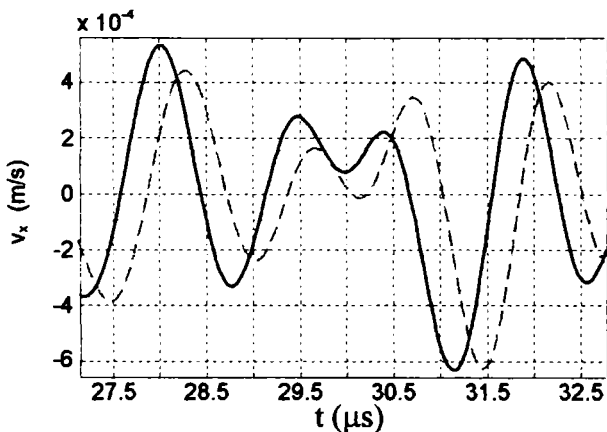


Fig. 6-64. Reprezentare detaliată a ferestrei marcate cu B pe Fig. 6-63.

În realitate masa de Al are dimensiuni finite pe  $x$  și  $y$  ca în Fig. 6-62 fiind înconjurată de un mediu fluid în majoritatea cazurilor. Ca urmare apar semnale reflectate care se suprapun peste pulsul incident perturbându-l. Astfel, profilul măsurat în punctul 1 va fi influențat de reflexii. Pentru a înlătura acest neajuns o idee simplă ar fi folosirea unui impuls foarte scurt care să poată fi clar detectat înainte ca reflexia sa, pe cel mai apropiat perete, să se întoarcă. Semnalele excitatoare cu durate foarte scurte de timp au însă un spectru cu componente de înaltă frecvență care se atenuază repede în orice mediu. Pe de altă parte defectele pot fi foarte aproape de frontierele masei de metal și ca urmare traductorul receptor este obligat să se afle în apropierea marginilor.

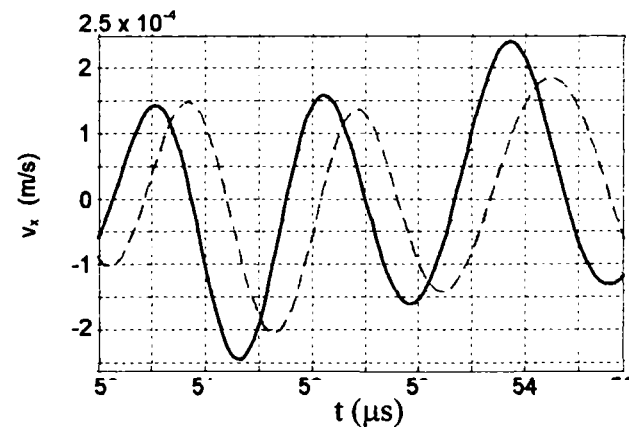


Fig. 6-65. Reprezentare detaliată a ferestrei marcate cu C pe Fig. 6-63.



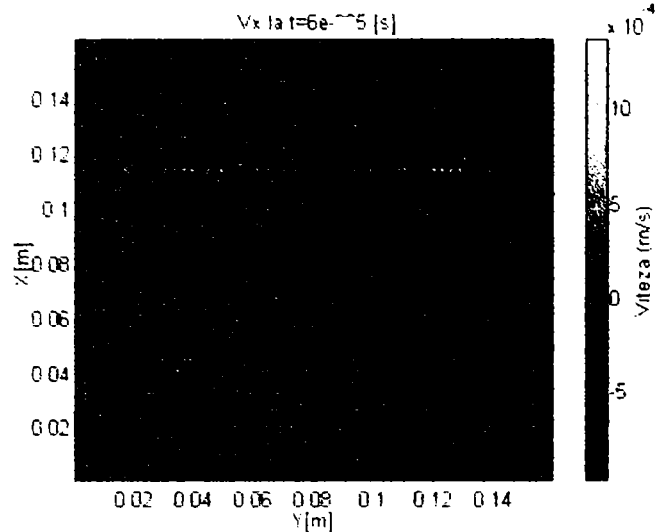


Fig. 6-66. Hartă câmp  $v_x$ .

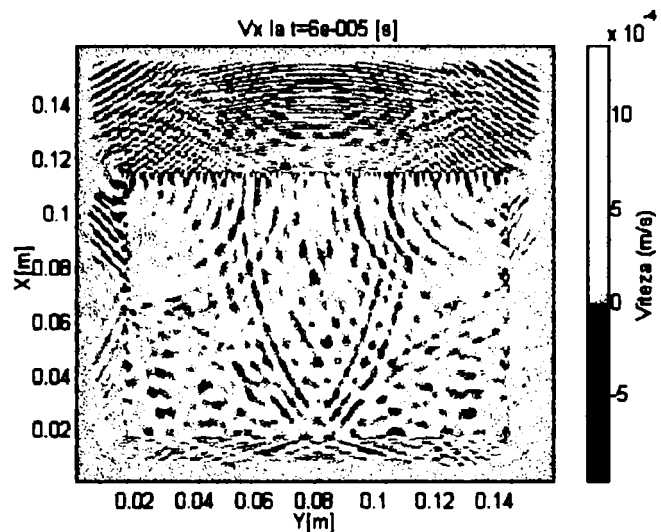


Fig. 6-67. Hartă câmp  $v_x$ . (Contrast).

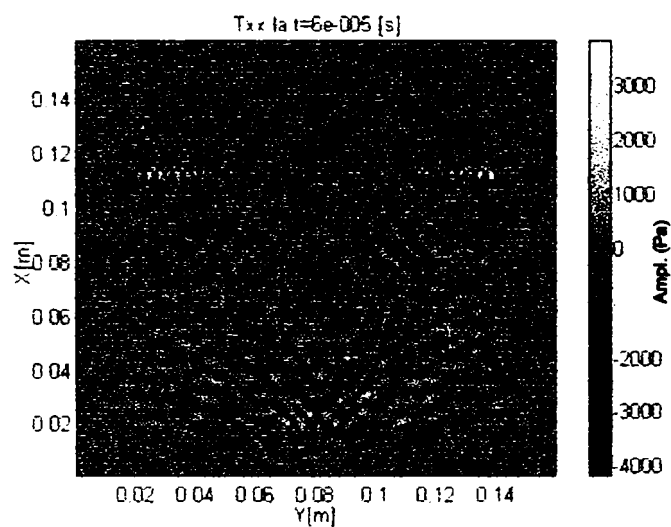


Fig. 6-68. Hartă câmp  $\tau_{xx}$ .

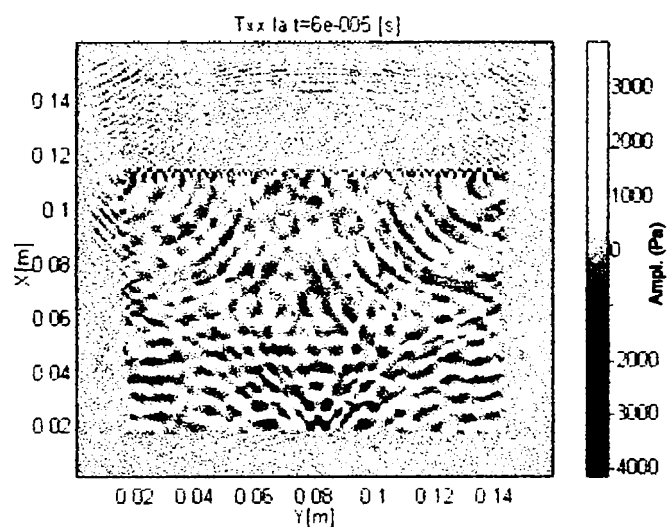


Fig. 6-69. Hartă câmp  $\tau_{xx}$ . (Contrast).

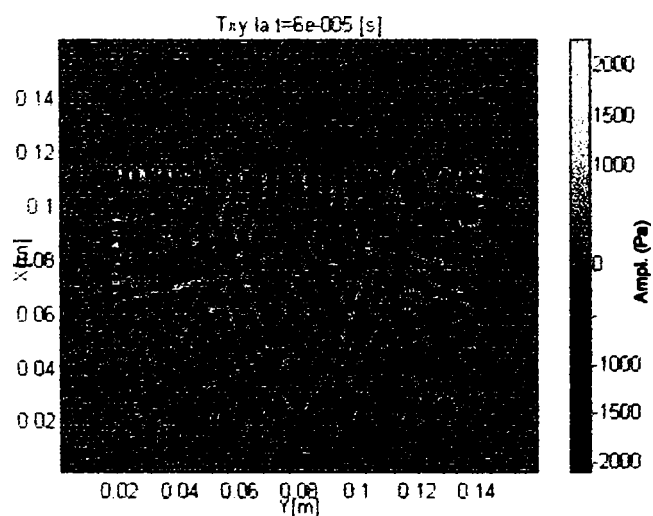


Fig. 6-70. Hartă câmp  $\tau_{xy}$ .

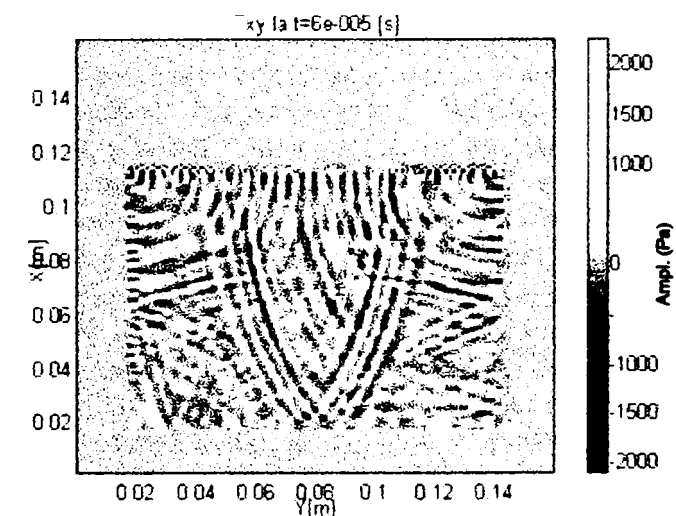


Fig. 6-71. Hartă câmp  $\tau_{xy}$ . (Contrast)

Graficele din Fig. 6-63, Fig. 6-64, Fig. 6-65 deși obținute în ipoteza unui mediu bidimensional sunt valabile și în cazul unuia tridimensional realizat prin translația planului din Fig. 6-62 de-a lungul axei  $z$ . Astfel sursa punctiformă se transformă într-una de forma unei drepte iar defectul într-un tub de secțiune dreptunghiulară. Trebuie precizat că rezultatele simulării efectuate pe structura bidimensională din Fig. 6-62 sau pe extensia sa tridimensională, sunt foarte realiste. Se ține cont de existența a două tipuri de unde de volum (compresională și shear) în interiorul masei solide și de faptul că aceasta are dimensiuni finite pe  $x$  și  $y$ , cu alte cuvinte de reflexiile și transmisiile pe și prin suprafața de separație dintre bucata de Al și mediul lichid înconjurător. De asemenea programul modelează corect apariția undelor de suprafață, extrem de importante, ele fiind singurele ce pot fi măsurate, datorită unduirilor pe care le induc perpendicular pe planul de separație. Perturbațiile care se propagă în fluid sunt de asemenea corect simulate, unda de tip  $s$  lipsind, lucru vizibil indirect pe Fig. 6-70, Fig. 6-71 în care tensiunea  $\tau_y$  este zero în masa lichidă.

Din păcate pentru a crea, pe baza simulării pe calculator, o hartă AB sau C scan a unor defecte de dimensiuni finite pe toate cele trei axe, este nevoie de un algoritm 3D care să nu folosească ipoteza simplificatoare,  $\partial/\partial z = 0$ . Așa cum s-a mai spus un program ce implementează o asemenea schemă matematică ar rula zeci de ore pe un calculator PC de nivelul anului 2003, chiar pentru griduri de discretizare cu număr mic de celule,  $100 \times 100 \times 100$ , fiind deci nepractică.

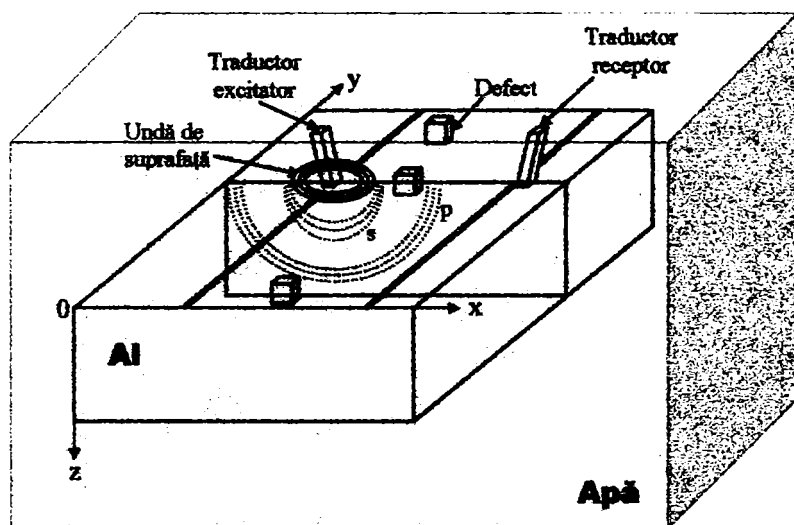


Fig. 6-72. Masă de Al cu defecte, scufundată în apă. Sursa de oscilații induce în metal trei tipuri de perturbații:  $p$ ,  $s$  și unda de suprafață. Ambii traductori se mișcă sincron pe două drepte paralele efectuând o scanare cu unde de suprafață de tip AB. Sistemul de achiziție, procesare și afișare a datelor nu a mai fost reprezentat pentru a nu complica imaginea.

Pentru a obține totuși hărți de defecte folosind doar schema de calcul 2D, este nevoie de niște ipoteze simplificatoare. O primă idee ar fi secționarea paralelipipedului din Fig. 6-72 într-o multitudine de felii de tipul celeia din Fig. 6-62 și aplicarea metodei bidimensionale pentru fiecare în parte. Procedeu nu ține însă cont, printre altele, de împrăștierea în planul  $xOy$  a unei unde de suprafață incidentă pe neomogenitate. Principalul său impediment nu este acesta ci timpul enorm necesar efectuării a  $n$  simulări 2D, echivalente cu una 3D la care excitatorul a fi nu punctiform ci de forma unei linii.

O a doua idee se bazează pe faptul că unda de suprafață este unică (nu se desparte în două componente  $s$  și  $p$ ) și ca urmare seamănă întrucâtva cu perturbația compresională ce se propagă în lichide. Considerând astfel, aluminiul ca un material cu proprietăți de fluid în care viteza unei compresionale este egală cu cea a unei unde de suprafață ce se propagă în aluminiul solid la interfața dintre acesta și apă, se poate efectua o simulare bidimensională în planul  $xOy$  care de această dată ține seama de împrăștierea unei incidente pe neomogenități și, lucru cel mai important, algoritmul 2D folosit are proprietatea de a fi rapid ducând la obținerea unei imagini AB scan dintr-o singură rulare, dacă se folosește o sursă de excitație cu profil de tip linie. Apar însă unele dezavantaje, defectele trebuind plasate în planul  $xOy$ , neexistând posibilitatea luării în considerație a adâncimii la care acestea sunt în realitate îngropate. Este ca și cum toate neomogenitățile s-ar afla la aceeași distanță de suprafață. Un alt neajuns derivă din alegerea neconformă cu realitatea a mediului de simulare (Al – lichid, viteză de propagarea a unei compresionale egală cu viteza perturbației de suprafață în același metal dar solid), lucru care ar ridica semne de întrebare asupra corectitudinii rezultatului final. Din acest motiv se vor efectua simulări cu aluminiu real, solid, considerând undele  $p$  și  $s$  ca o singură perturbație extinsă. Ipoteza este justificată de reprezentările grafice din Fig. 6-45 și Fig. 6-55 unde unda de suprafață are o lățime apropiată de cea a grupului  $p - s$ .

Cu precizările de mai sus se va trece la simularea propriuzisă a propagării undelor elastice, generate de o sursă impulsivă de tip linie, printr-o masă de aluminiu ce prezintă o serie de defecte. Pe o altă dreaptă, paralelă cu excitația și situată la o distanță  $d$  de aceasta, se va înregistra evoluția câmpului elastic într-un număr mare de puncte aflate la distanțe egale.

### 6.2.3. Semnăturile AB scan prin reflexie și transmisie ale unor defecte de material. Rezultate obținute prin modelare numerică

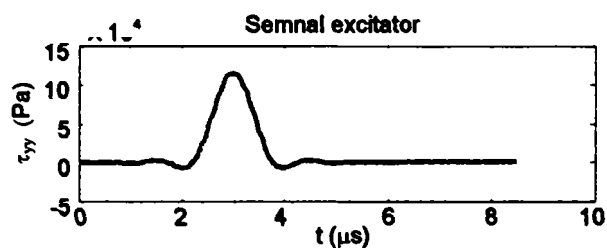


Fig. 6-73. Profilul excitației.

Fig. 6-74. Bucată de Al scufundată în apă, conținând 2 incluziuni de apă. Profilul excitației  $\tau_{yy}$ , care acționează în fiecare punct de pe dreapta "0", este dat în Fig. 6-73.

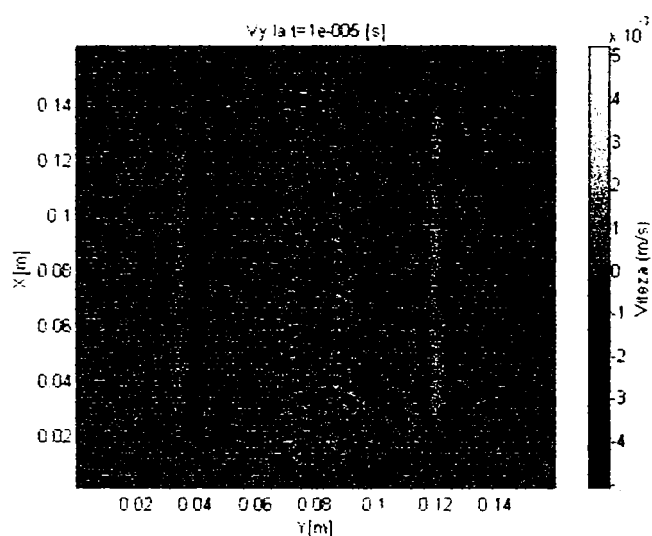
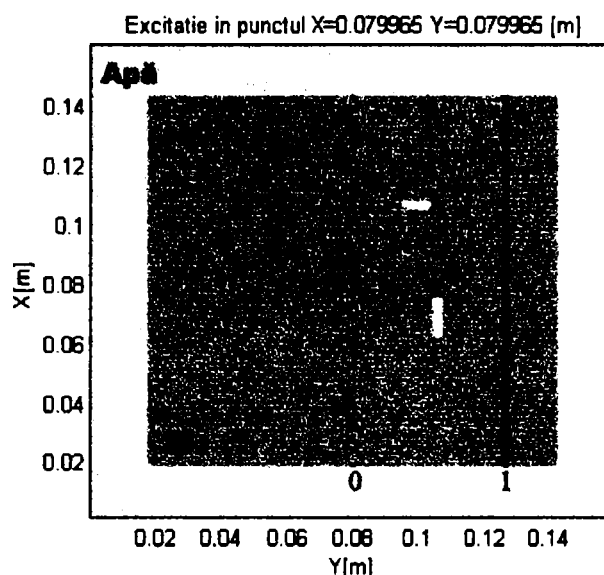


Fig. 6-75. Harta distribuției lui  $v_y$  la momentul  $t=10 \mu s$  corespunzătoare Fig. 6-74 cu excitația din Fig. 6-73

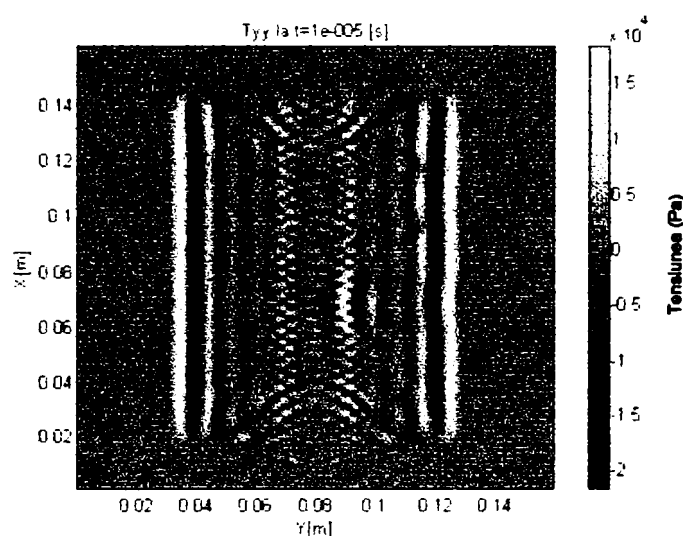


Fig. 6-76. Harta distribuției lui  $\tau_{yy}$  la momentul  $t=10 \mu s$  corespunzătoare Fig. 6-74 cu excitația din Fig. 6-73.

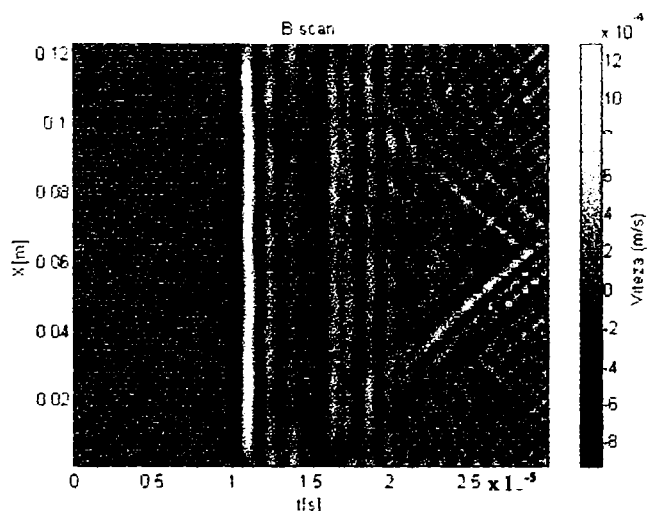


Fig. 6-77. Imagine AB scan alb - negru, obținută prin înregistrarea vitezei de oscilație  $v_y$  funcție de timp, a unei elastice care traversează dreapta "1" din Fig. 6-74.

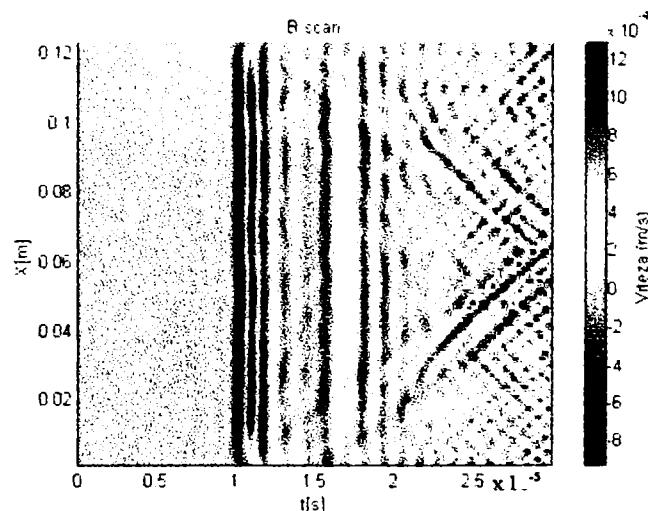
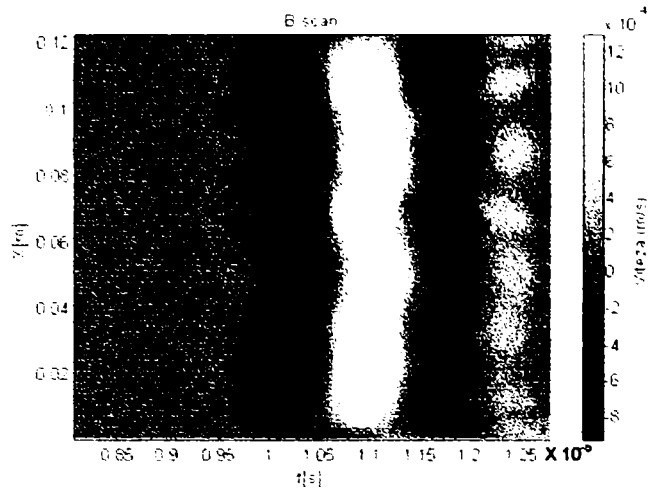
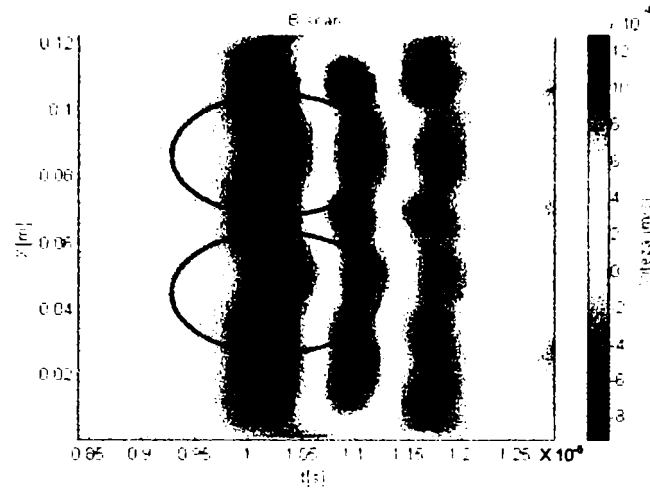


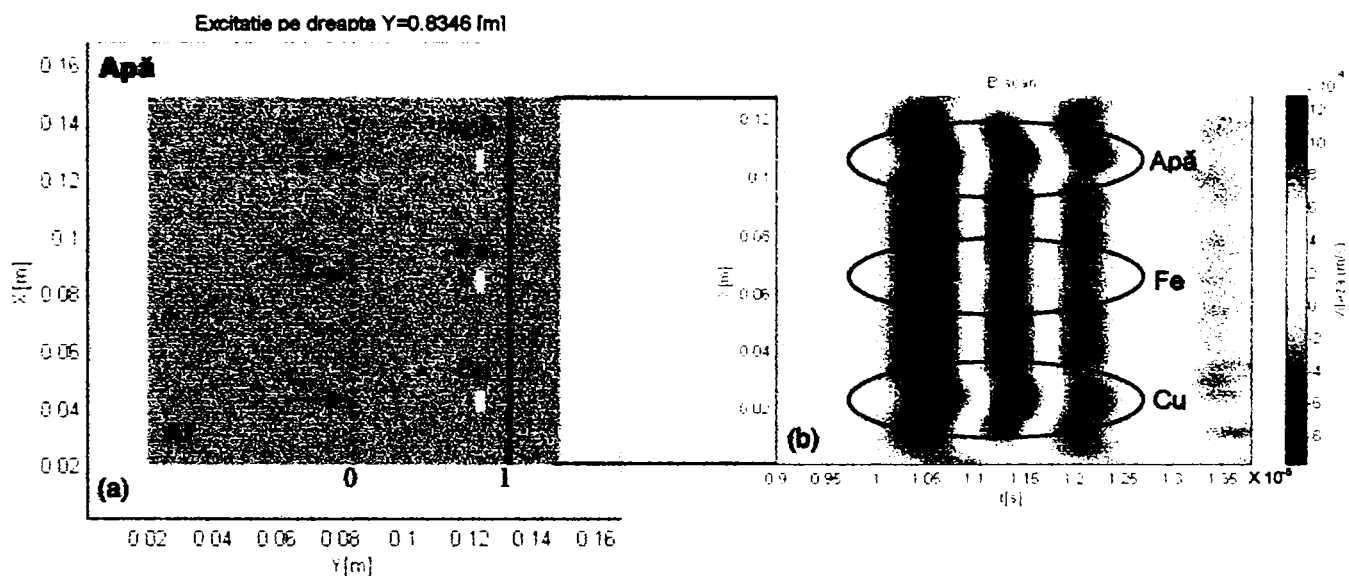
Fig. 6-78. Imagine AB scan color, obținută prin înregistrarea vitezei de oscilație  $v_y$  funcție de timp, a unei elastice care traversează dreapta "1" din Fig. 6-74.



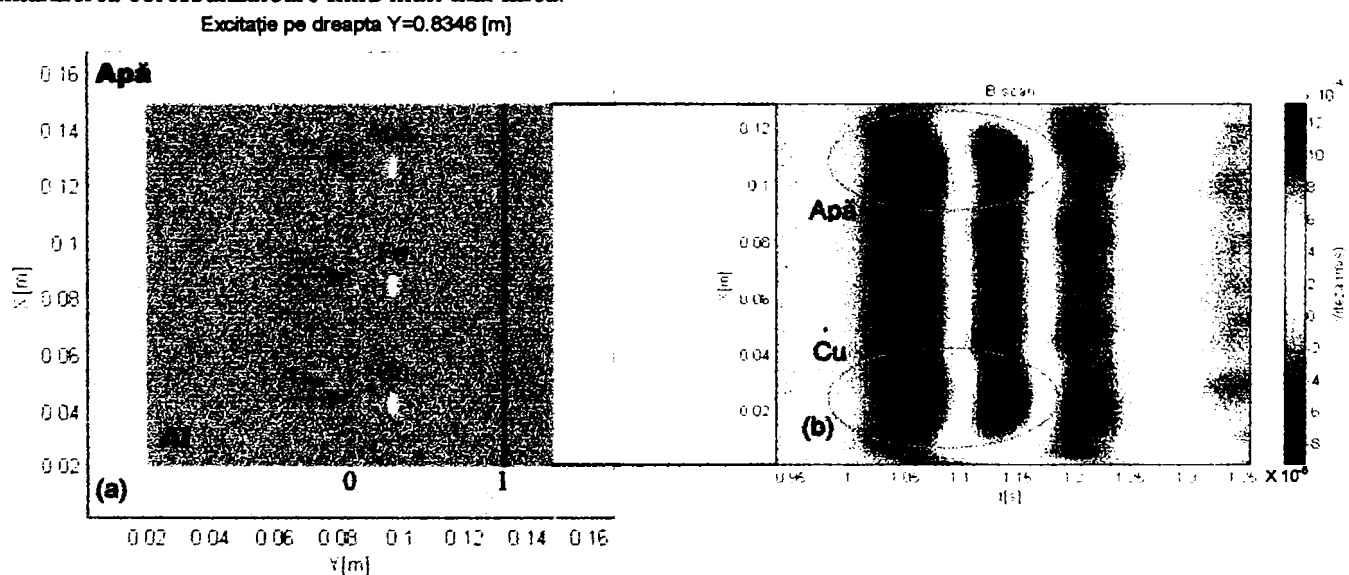
**Fig. 6-79.** Imagine AB scan alb – negru (detaliu), obținută prin înregistrarea vitezei de oscilație  $v_y$  funcție de timp, a unei elastice care traversează dreapta “1” din Fig. 6-74.



**Fig. 6-80.** Imagine AB scan color (detaliu), obținută prin înregistrarea vitezei de oscilație  $v_y$  funcție de timp, a unei elastice care traversează dreapta “1” din Fig. 6-74. Se observă clar întârzierile provocate de cele două defecte.

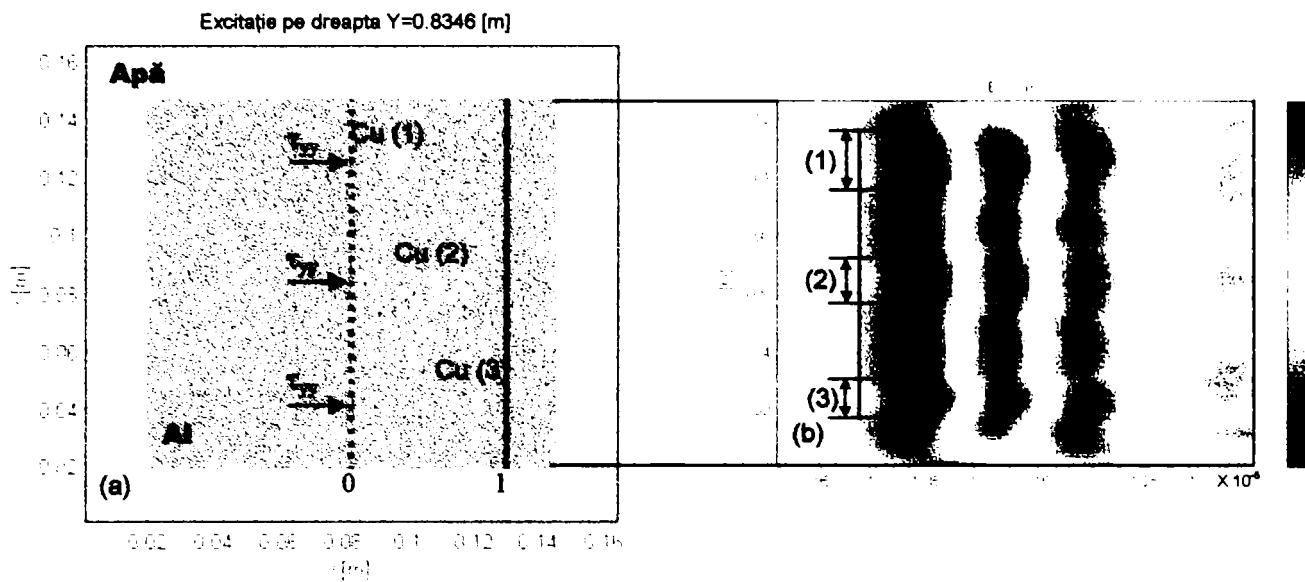


**Fig. 6-81.** (a) Bucată de Al scufundată în apă, conținând 3 incluziuni (defecte) de: Apă, Fe, Cu. Profilul excitației  $\tau_{yy}$ , care acționează în fiecare punct de pe dreapta “0”, este dat în Fig. 6-73. (b) Imagine AB scan, obținută prin înregistrarea vitezei de oscilație  $v_y$  funcție de timp, a unei elastice care traversează dreapta “1”. Remarcă: Doar apa și cuprul produc întârzieri, ale perturbației de sondaj, observabile clar. Neomogenitatea de fier este greu vizibilă, întârzierea corespunzătoare fiind mult mai mică.

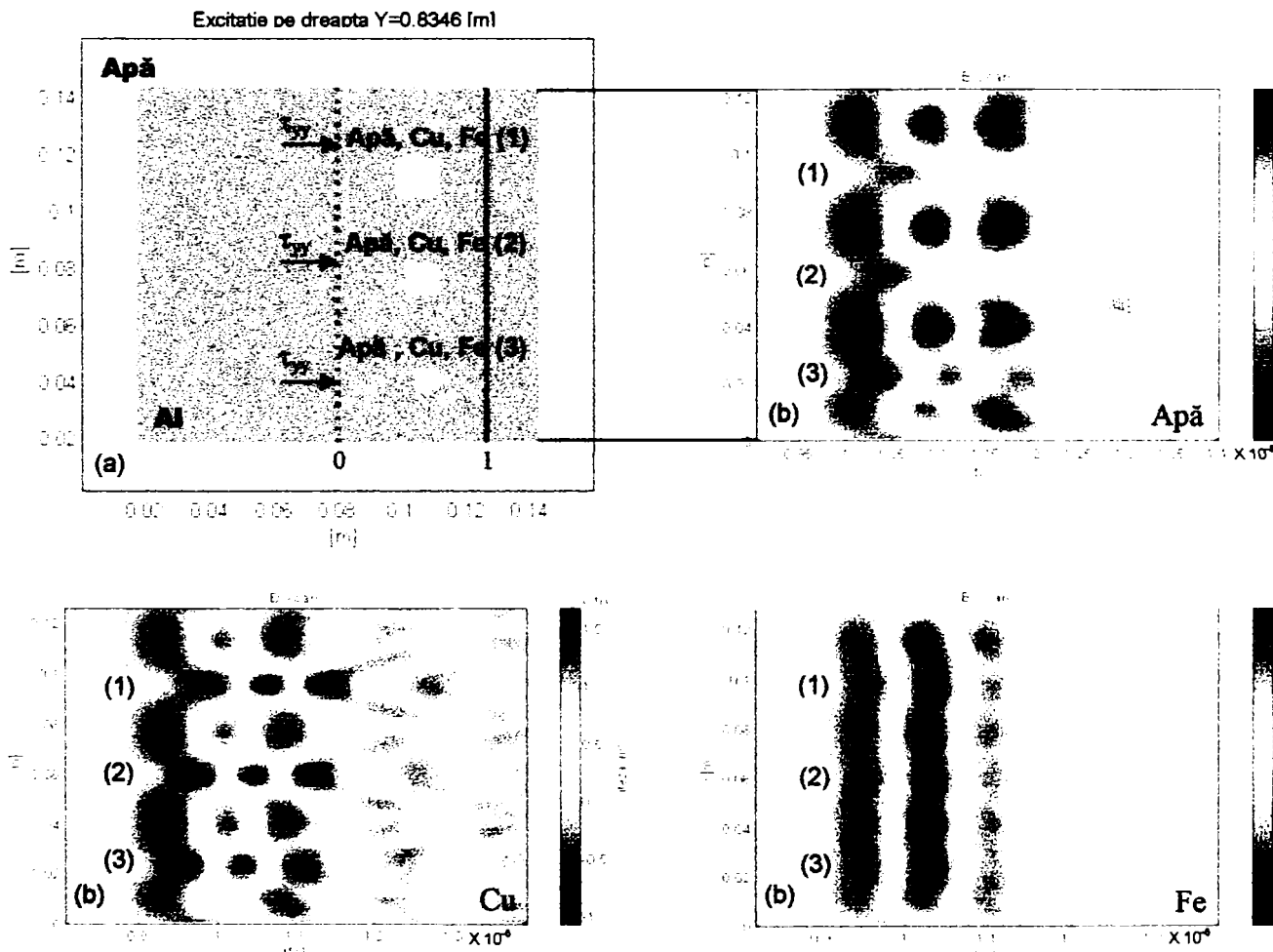


**Fig. 6-82.** Aceeași configurație ca în Fig. 6-81 cu deosebirea că defectele de material sunt situate mai departe de linia de măsură. Se observă că semnătura AB scan a neomogenităților este mai puțin pronunțată.

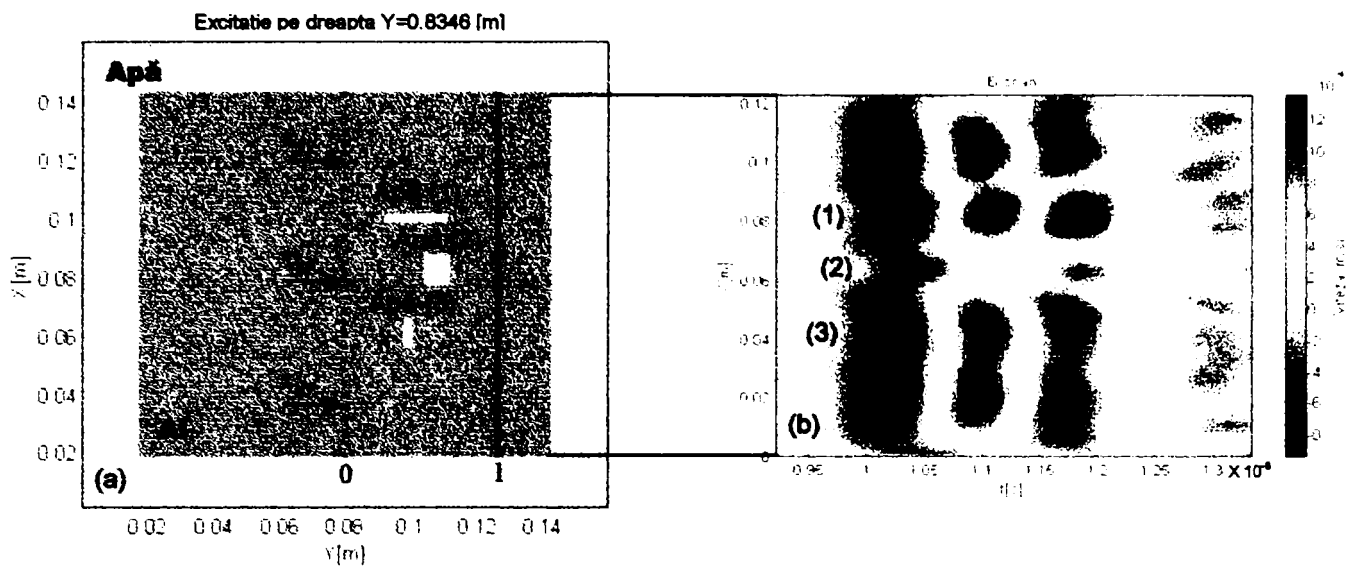




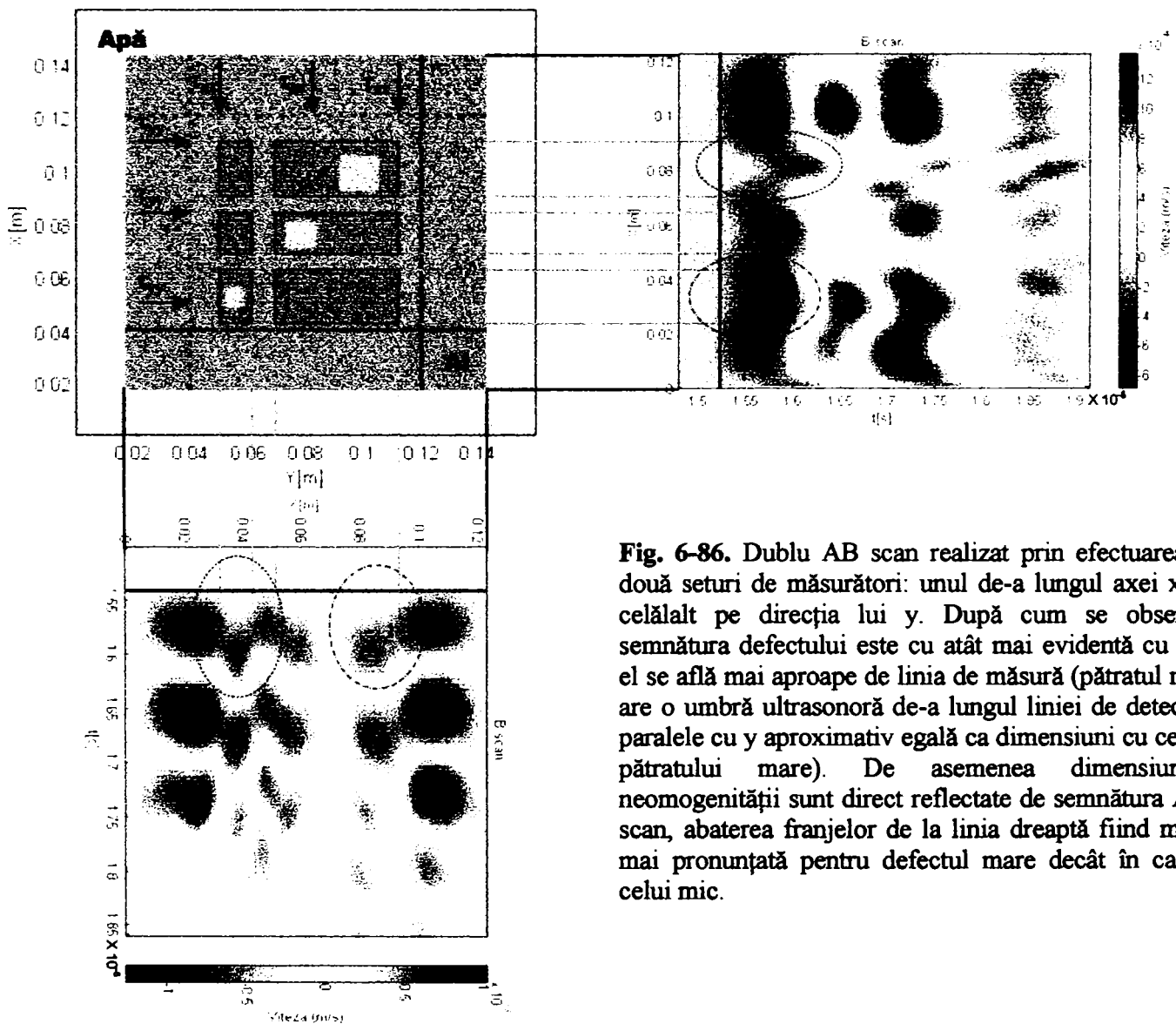
**Fig. 6-83.** Configurație care pune în evidență amploarea semnăturii AB scan funcție de distanța dintre defect și sursa de excitație (sau linia de măsură). După cum se observă pe imaginea de la punctul (b), adâncimea pe orizontală a primelor două franje paralele (cele mai importante) sau, altfel spus, deviația lor de la verticală este cu atât mai mare cu cât defectul este mai aproape de linia de măsură. De asemenea lățimea pe verticală a zonelor cu undă elastică întârziată este cu atât mai mare cu cât defectul se află mai departe de linia de măsură și mai aproape de excitație, lucru explicabil pe baza difracției perturbației ultrasonore de către neomogenități. “Umbră” 3 este cea mai apropiată ca dimensiune (pe verticală) de cea a defectului corespunzător.



**Fig. 6-84.** Configurație care pune în evidență dependența semnăturii AB scan de mărimea și compoziția defectului. După cum se observă pe imaginile de la punctele (b), cu cât dimensiunile neomogenității sunt mai mari cu atât apare o întârziere mai pronunțată a semnalului măsurat, lucru vizibil îndeosebi pe primele două franje paralele. În ceea ce privește natura incluziunii, doar neomogenitățile de Cu și Apa produc întârzieri sesizabile lucru explicabil prin discrepanța dintre viteza de propagare a ultrasunetelor în aceste materiale și cea din aluminiu.



**Fig. 6-85.** Imagine AB scan a unui grup de defecte. Umbrele neomogenităților sunt încă distincte, deși foarte apropiate. Simularea are ca scop punerea în evidență a puterii de separație a metodei B scan. Dacă incluziunile de apă ar fi fost mai apropiate, cele trei semnături distincte s-ar fi contopit într-una singură. O rezoluție mai bună se obține prin folosirea unui puls ultrasonor mai scurt. Trebuie totuși spus că atenuarea undelor elastice este puternic dependentă de frecvență (lucru neluat în calcul de programul de simulare).



**Fig. 6-86.** Dublu AB scan realizat prin efectuarea a două seturi de măsurători: unul de-a lungul axei x și celălalt pe direcția lui y. După cum se observă semnătura defectului este cu atât mai evidentă cu cât el se află mai aproape de linia de măsură (pătratul mic are o umbră ultrasonoră de-a lungul liniei de detecție paralele cu y aproximativ egală ca dimensiuni cu cea a pătratului mare). De asemenea dimensiunile neomogenității sunt direct reflectate de semnătura AB scan, abaterea franjelor de la linia dreaptă fiind mult mai pronunțată pentru defectul mare decât în cazul celui mic.



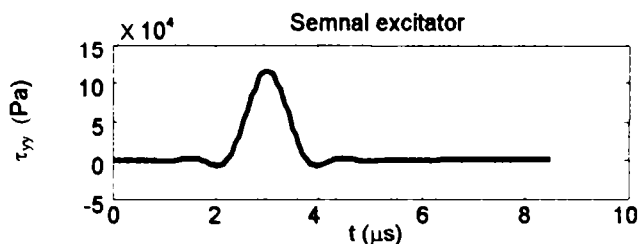


Fig. 6-87. Semnal excitator corespunzător Fig. 6-89.

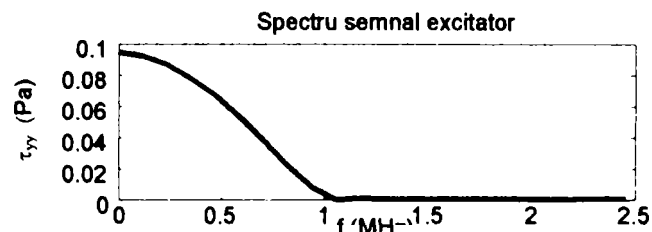


Fig. 6-88. Spectru semnal excitator corespunzător Fig. 6-89.

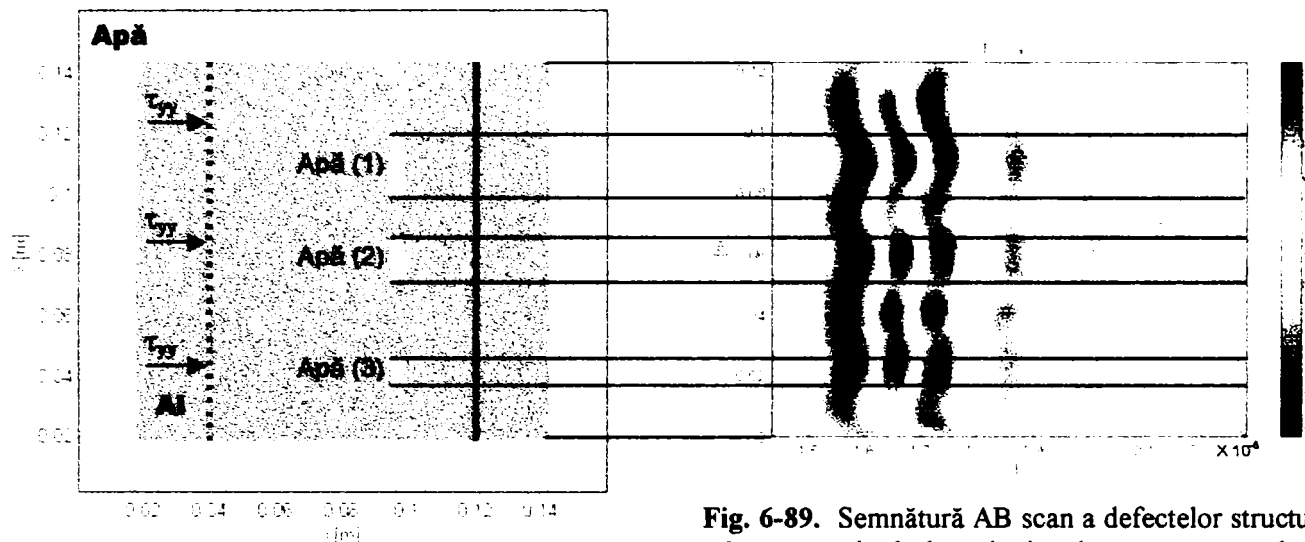


Fig. 6-89. Semnătură AB scan a defectelor structurii din stânga atunci când excitația ultrasonoră este de bandă largă.

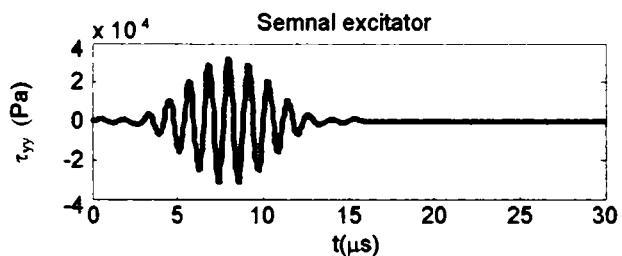


Fig. 6-90. Semnal excitator corespunzător Fig. 6-92.

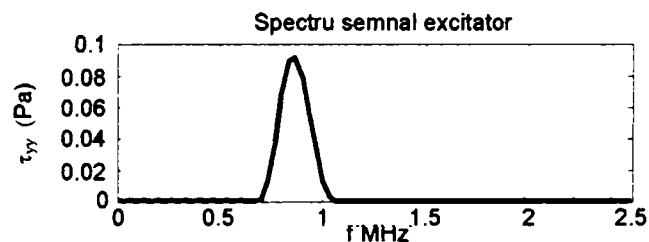


Fig. 6-91. Spectru semnal excitator corespunzător Fig. 6-92.

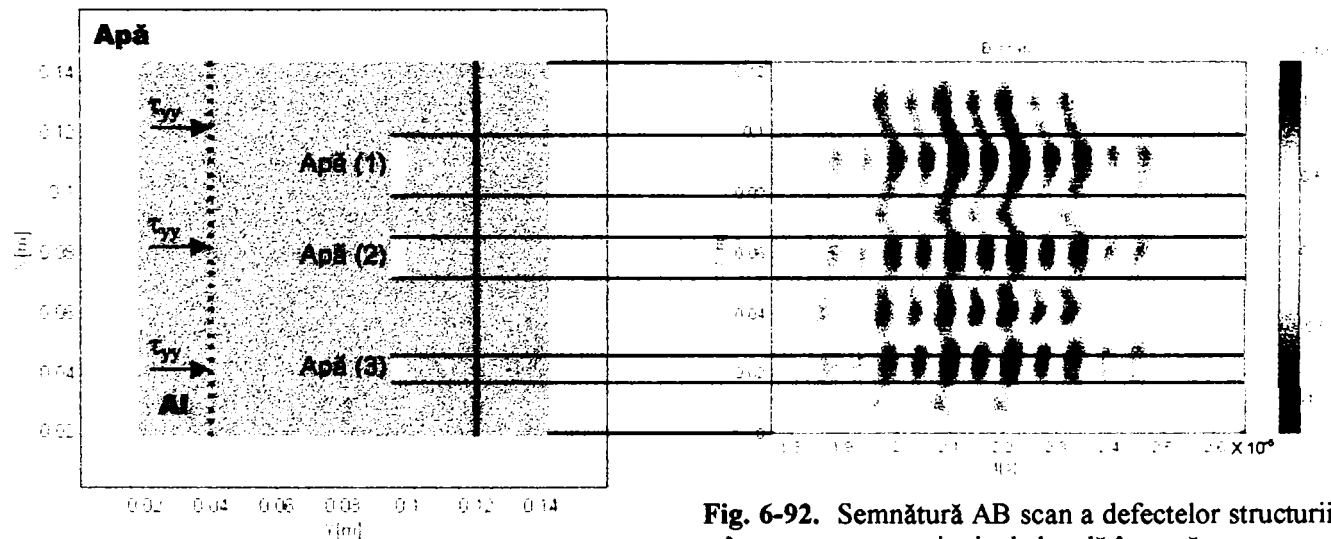


Fig. 6-92. Semnătură AB scan a defectelor structurii din stânga, pentru o excitație de bandă îngustă.

Din compararea Fig. 6-89 cu Fig. 6-92 se poate concluziona că nu rezultă în mod clar o îmbunătățire a clarității semnăturii AB – scan prin iluminarea defectelor cu o radiație elastică de bandă îngustă.

Deși Fig. 6-73 - Fig. 6-92 se referă la interacțiunea undelor de suprafață cu neomogenitățile superficiale, trebuie precizat încă o dată caracterul aproximativ al modelării. În realitate semnăturile AB - scan realizate până acum sunt în realitate umbrele defectelor de volum obținute prin iluminare ultrasonoră cu unde elastice de volum, cu alte cuvinte graficele nu sunt altceva decât secțiuni ale unei *semnături C - scan prin transmisie* obținute prin deplasarea sursei, respectiv receptorului pe două drepte paralele ce trec prin interiorul materialului investigat.

În cele ce urmează se va studia semnătura *C - scan prin reflexie* (sau *semnătura aproximativă AB scan prin reflexie cu unde de suprafață*), a unor defecte înglobate în masa de material. (Observație: semnăturile *C - scan prin transmisie* au fost implicit tratate în Fig. 6-73 - Fig. 6-92. Totuși, pentru corectitudine sută la sută, graficele ar trebui refăcute plasând traductorii doar pe fețele libere ale corpului scanat, de o parte și de alta a neomogenităților, lucru care ar încărcă lucrarea cu pagini suplimentare de informație prea puțin diferită de cea obținută deja).

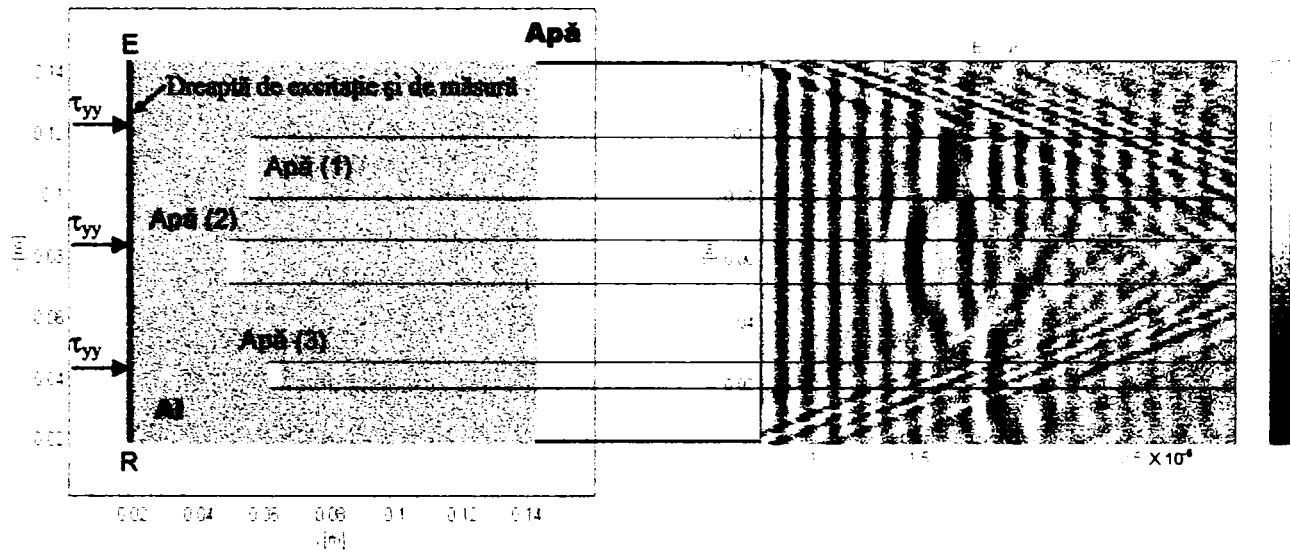


Fig. 6-93. Bucată de Al scufundată în apă, conținând 3 neomogenități. Profilul excitației  $\tau_{yy}$ , care acționează în fiecare punct de pe dreapta "0", este dat în Fig. 6-73 sau Fig. 6-87.

Fig. 6-94. Detaliu al Fig. 6-93. Se observă clar cele trei ecouri corespunzătoare defectelor: (1), (2), (3) din Fig. 6-93.

Din compararea semnăturii prin reflexie prezentată în Fig. 6-94 cu semnăturile AB - scan prin transmisie, de exemplu cu cea corespunzătoare Fig. 6-83, se pot trage două concluzii principale:

- (1) semnătura AB - scan prin reflexie oferă o localizare bună a neomogenităților în raport cu linia de excitație - măsură. Dimensiunile defectului investigat sunt însă mai greu identificabile, ecoul captat având o mărime diferită de cea a corpului pe care se reflectă unda elastică.
- (2) semnătura AB - scan prin transmisie dă puține informații despre adâncimea de localizare a neomogenității înă oferă date mai precise referitoare la dimensiunile sale.

Exemplul din Fig. 6-93 - Fig. 6-94 nu este totuși suficient pentru a concluziona că indiferent de situație semnătura AB - scan prin reflexie are ca principal avantaj puterea mare de localizare a defectelor. Astfel:

1) Analizând semnătura prin reflexie a neomogenităților, de tip fisură paralelă cu direcția de propagare a undelor elastice, (Fig. 6-96), se constată inexistența practică a acesteia. Cele trei defecte nu produc ecouri,

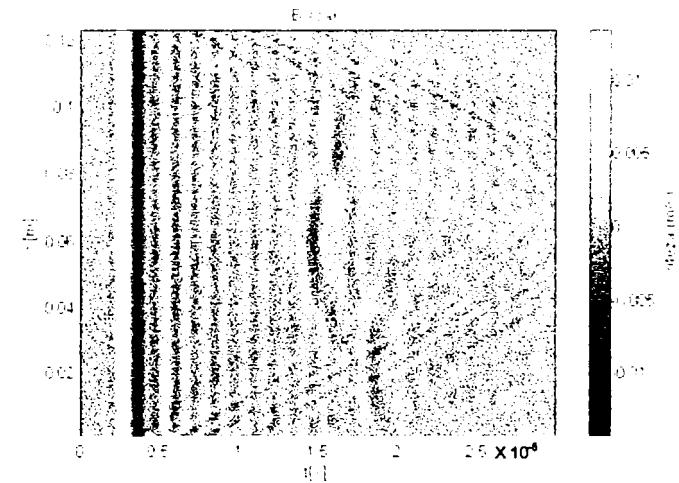


Fig. 6-95. Semnătura AB - scan (sau secțiune a unei semnături C - scan) prin reflexie, a neomogenităților din Fig. 6-93. A fost obținută prin înregistrarea vitezei de oscilație  $v_y$  funcție de timp, corespunzătoare câmpului elastodinamic de pe dreapta ER.

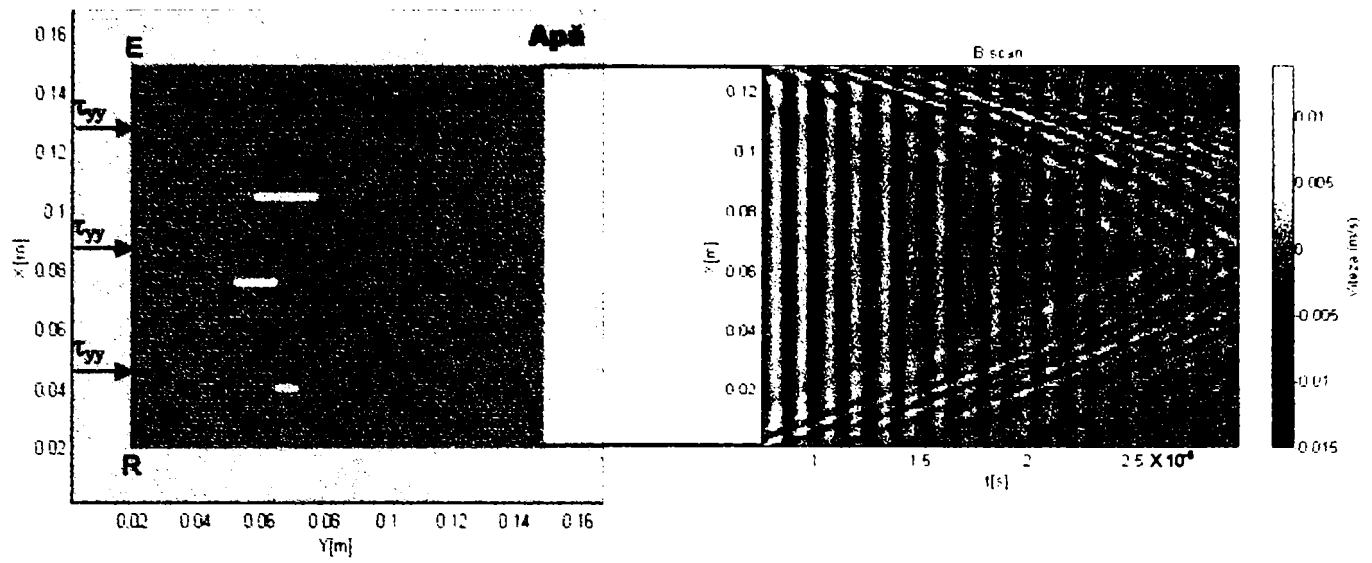


Fig. 6-96. Obiect de Aluminiu cu defecte de material (fisuri în lungul direcției unei incidente).

Fig. 6-97. Semnătură AB – scan prin reflexie, a defectelor structurii din Fig. 6-96.

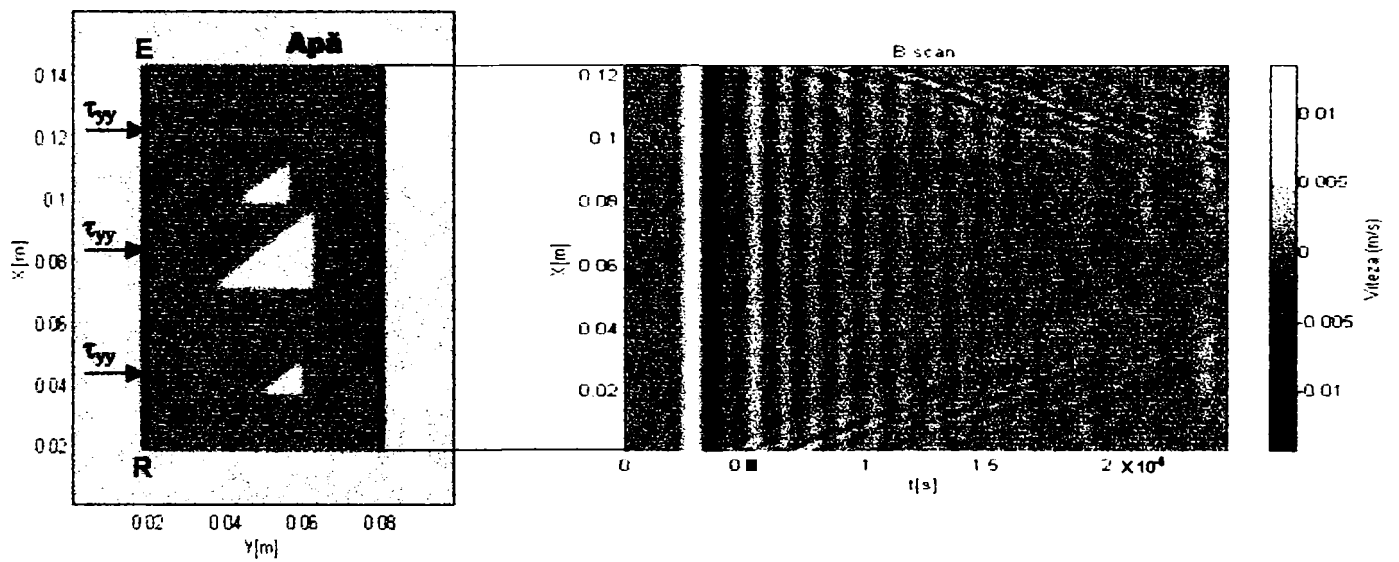


Fig. 6-98. Obiect de Aluminiu cu defecte de material.

Fig. 6-99. Semnătură AB – scan prin reflexie, a defectelor structurii din Fig. 6-98.

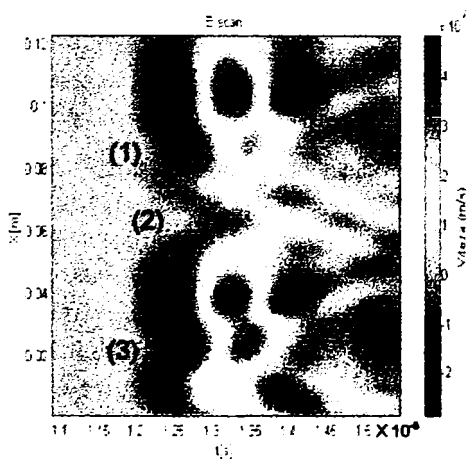


Fig. 6-100. Detaliu pe Fig. 6-98.

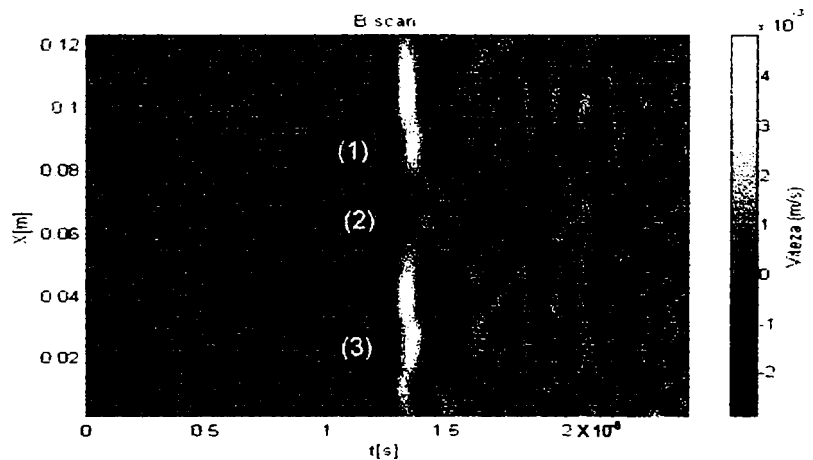
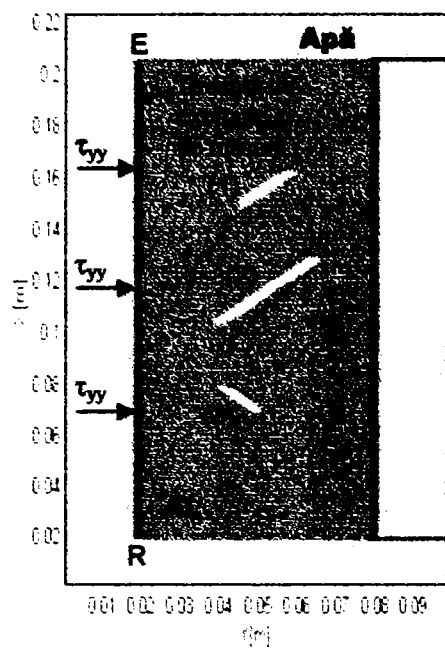
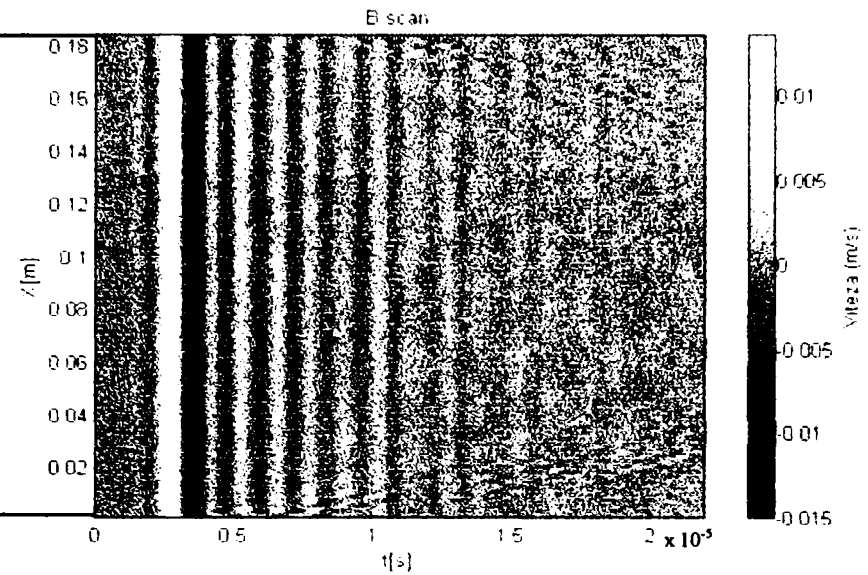


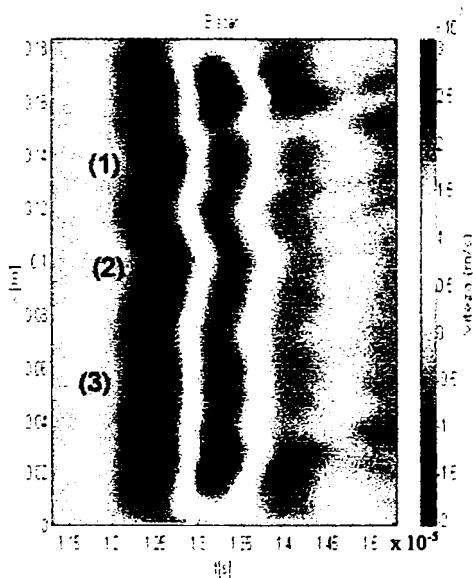
Fig. 6-101. Semnătură AB – scan prin transmisie a defectelor structurii din Fig. 6-100.



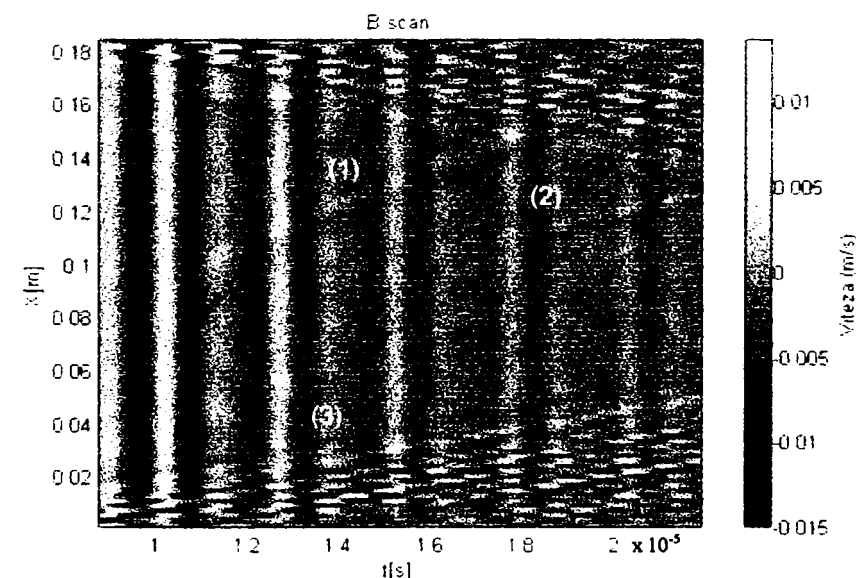
**Fig. 6-102.** Obiect de Aluminiu cu defecte de material (fisuri oblice față de unda elastică incidentă).



**Fig. 6-103.** Semnătură AB – scan prin reflexie a defectelor structurii din Fig. 6-102.



**Fig. 6-104.** Semnătură AB – scan prin transmisie (detaliu) a defectelor structurii din Fig. 6-102.



**Fig. 6-105.** Detaliu pe Fig. 6-103.

fiind așadar invizibile. Ca o paranteză, defectul (1) din Fig. 6-85 (de același fel cu cele din Fig. 6-96) produce o umbră ultrasonoră discernabilă.

II) Semnătura AB – scan prin reflexie, a defectelor cu profil triunghiular din Fig. 6-98 este de asemenea slab vizibilă. Perturbațiile ce apar pe Fig. 6-99 cu greu pot fi puse în conexiune cu forma sau poziția unor neomogenități. În ceea ce privește semnăturile prin transmisie acestea sunt clare fiind în legătură directă cu dimensiunea neomogenităților investigate (Fig. 6-100, Fig. 6-101).

III) Semnătura AB – scan prin reflexie a fisurilor oblice din Fig. 6-102 este observabilă cu greu pe detaliul din Fig. 6-105, direcțiile în care sunt îndreptate cele trei ecouri pot fi puse în relație directă cu orientarea fisurilor, nu și cu dimensiunile și pozițiile lor. Despre semnăturile prin transmisie (Fig. 6-104) se pot face aceleași afirmații ca la punctul precedent.

Semnătura prin reflexie a unei neomogenități oarecare depinde așadar extrem de mult de forma și orientarea sa, existând situații în care defectele de material devin invizibile cu toate că au dimensiuni mari și în același timp prezintă contraste puternice cu mediul înconjurător. În ceea ce privește semnătura prin



transmisie, se înregistrează o dependență mai scăzută în raport cu forma sau orientarea neomogenității, în general la defecte mari, de contrast ridicat, corespunzând umbre ultrasonore mari.

### 6.3. Materiale compozite cu benzi elastodinamice interzise

#### 6.3.1. Considerații generale

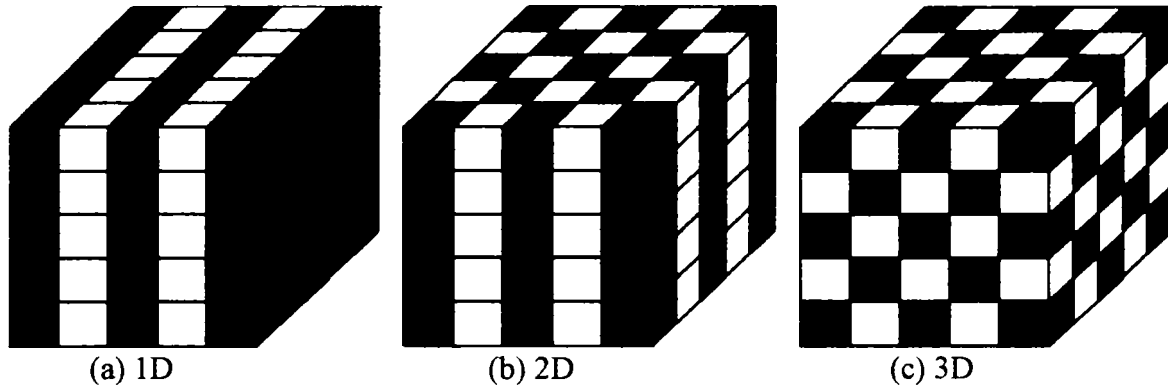


Fig. 6-106. Materiale compozite cu benzi elastodinamice interzise. a) structură unidimensională, b) bidimensională, c) tridimensională.

Materialele cu benzi interzise sunt structuri periodice compuse din cel puțin două medii având proprietăți elastodinamice distincte, ele diferind prin densitate,  $\rho$ , modul de elasticitate,  $E$ , coeficient Poisson,  $\nu$  (Fig. 6-106) [6-2]. Un exemplu de astfel de compozit ar fi o structură realizată dintr-un material de bază, ex. aluminiul, extins la infinit în care a fost înglobată o rețea de cuburi de natură metalică, goale în interior sau umplute cu un lichid (Fig. 6-106 (c)).

Dacă o sursă de perturbații elastice de bandă largă excită un mediu omogen, de mare întindere și fără pierderi, apare o undă ce se propagă prin substanță menținându-și spectrul de frecvențe, întreaga bandă a excitatorului fiind transportată la distanță odată cu perturbația. Totuși în cazul în care mediul are înglobată o structură periodică ca cea descrisă anterior, se constată o sărăcire a spectrului undei, benzi întregi de frecvență lipsind, propagarea lor fiind interzisă de geometria și proprietățile compozitului astfel format.

Matematic vorbind, un mediu periodic cu benzi interzise este descris de următoarele relații:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad \mu(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad \lambda(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad (6-5)$$

sau echivalent

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad E(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad \nu(\mathbf{r}) = \nu(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad (6-6)$$

Expresiile ( 6-5 ), ( 6-6 ) se referă la structuri tridimensionale fizic realizabile cum sunt cele din Fig. 6-115 - Fig. 6-120. Analizarea comportamentului lor prin simulare pe calculator necesită un algoritm cu diferențe finite tridimensional care însă are nevoie de resurse de calcul cu mult peste posibilitățile unui computer personal actual. Algoritmii cu diferențe finite elaborat în capitolul 3 este destinat doar pentru analiza mediilor bidimensionale (fizic nerealizabile) așa cum sunt cele din (Fig. 6-110), (Fig. 6-111), (Fig. 6-113), (Fig. 6-114) numite și compozite periodice cu benzi interzise 2D descrise de ( 6-5 ), ( 6-6 ) în care  $r=r(x,y)$ ,  $R=R(x,y)$ . Există totuși posibilitatea realizării fizice a unui material periodic (Fig. 6-107, Fig. 6-109) care deși tridimensional poate fi studiat făcând apel doar la ecuațiile elastodinamice bidimensionale. În acest caz ( 6-5 ), ( 6-6 ) se rescriu după cum urmează:

$$\rho(x,y) = \rho(x+x', y+y'), \quad \lambda(x,y) = \lambda(x+x', y+y'), \quad \mu(x,y) = \mu(x+x', y+y'), \quad (6-7)$$

$$\rho(z) = ct., \quad \lambda(z) = ct., \quad \mu(z) = ct.,$$

sau echivalent

$$\rho(x,y) = \rho(x+x', y+y'), \quad E(x,y) = E(x+x', y+y'), \quad \nu(x,y) = \nu(x+x', y+y'), \quad (6-8)$$

$$\rho(z) = ct., \quad E(z) = ct., \quad \nu(z) = ct.,$$

În general lărgimea și poziția benzilor interzise depinde atât de geometria structurii periodice cât și de parametrii de material. O undă elastică a cărei frecvență este situată în interiorul unei benzi interzise va fi

complet reflectată de materialul periodic, de unde posibilitatea realizării unor pereți capabili să reflecte total radiația elastică incidentă asupra lor. Realizarea, chiar teoretică, a unor astfel de ziduri nu este însă un lucru foarte ușor din anumite motive ce vor fi expuse pe scurt în continuare:

Într-un mediu omogen și izotrop pot exista în principiu separat două tipuri de unde: una pur longitudinală în care  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  și cealaltă pur transversală cu  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . O structură periodică nu admite în general propagarea separată a celor două moduri. Este de așteptat ca din cauza cuplajului între ele, să fie extrem de dificilă obținerea unor benzi interzise totale. În cazul unui sistem binar în care materialul 2 este distribuit în substanța 1 se pot defini cinci parametri independenți ce caracterizează comportamentul unei astfel de structuri, care datorită periodicității se mai numește uneori cristal elastic:  $\rho_2/\rho_1$ ,  $\mu_2/\mu_1$ ,  $\lambda_2/\lambda_1$ ,  $\mu_2/\lambda_1$ ,  $f=V_2/V_1$  în care  $f$  este procentul volumic ocupat de materialul 2. S-a presupus că, coeficienții Lamé sunt cantități reale diferite de zero, lucru valabil în cazul mediilor solide. Cristalul elastic poate fi însă format din entități solide aranjate într-un mediu lichid lucru ușor realizabil cu configurațiile din (Fig. 6-109) sau Fig. 6-117, Fig. 6-120 și mai greu cu cele din Fig. 6-115, Fig. 6-116, Fig. 6-118, Fig. 6-119 din cauza lipsei unei baze de susținere. Dacă lichidul în care este scufundată matricea periodică este apă pentru care  $\mu_1=0$ , unda transversală în interiorul apei este suprimată rămânând însă în partea solidă a cristalului. O situație asemănătoare are loc când structura periodică este lichidă și restul cristalului solid cum ar fi de exemplu configurația din Fig. 6-115 în care sferele sunt umplute cu apă iar materialul de bază este aluminiul. Deși tehnologic realizarea cristalului este mai dificilă este totuși posibilă. În cazul în care atât materialul 1 cât și 2 sunt lichide cu  $\mu_1=\mu_2=0$  avem de-a face cu o suprimare totală a unei transversale. Teoretic existența doar a perturbației longitudinale favorizează găsirea mai ușoară a unei configurații cu benzi interzise total. Practic o suspensie de particule lichide aranjate ordonat în interiorul altui lichid este extrem de greu de realizat dacă nu imposibil.



Fig. 6-107. Cristal elastic 1D.

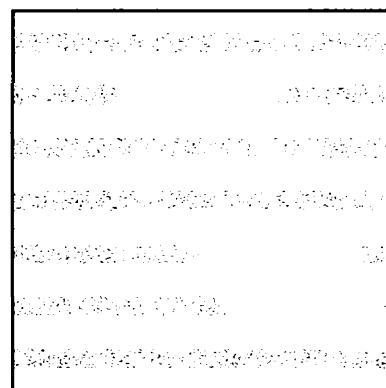


Fig. 6-108. Cristal elastic 1D.

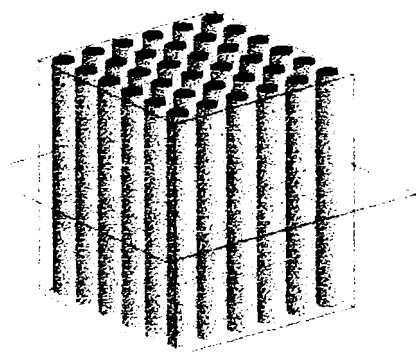


Fig. 6-109. Cristal elastic 2D.

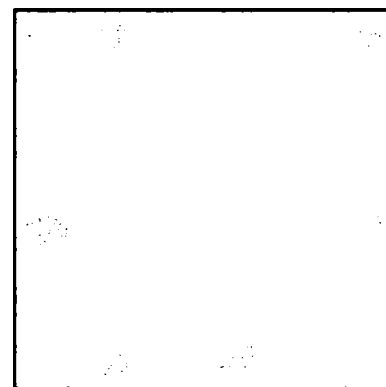


Fig. 6-110. Cristal elastic 2D.



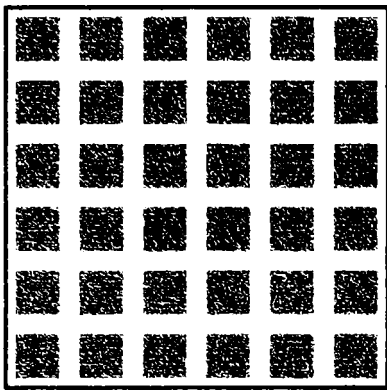


Fig. 6-111. Cristal elastic 2D.

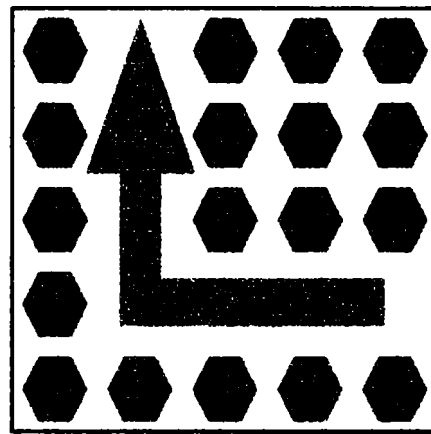


Fig. 6-112. Cristal elastic 2D.

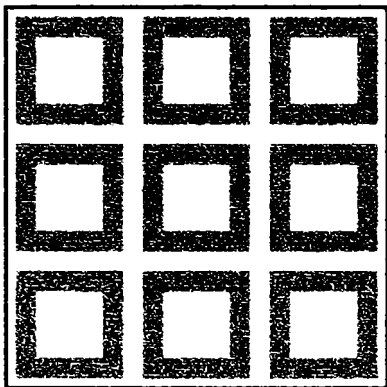


Fig. 6-113. Cristal elastic 2D.

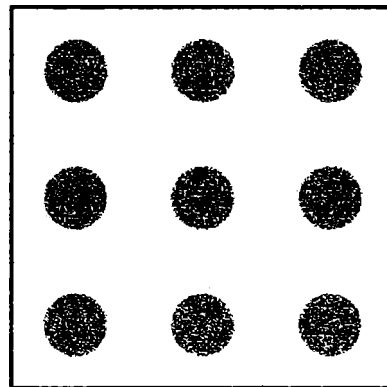


Fig. 6-114. Cristal elastic 2D.

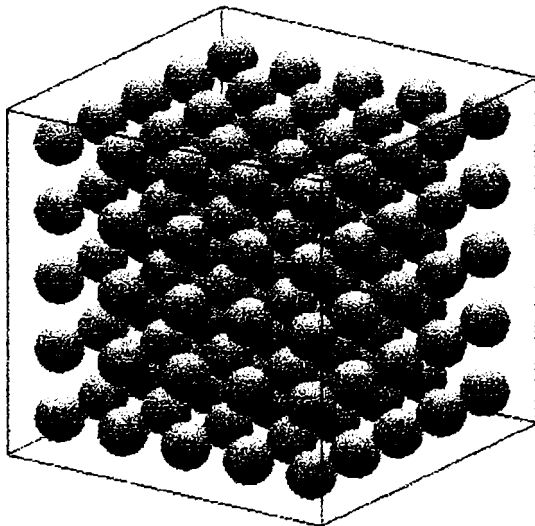


Fig. 6-115. Cristal elastic 3D.

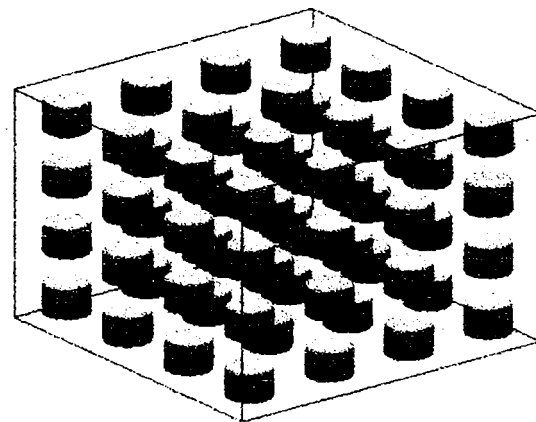


Fig. 6-116. Cristal elastic 3D.

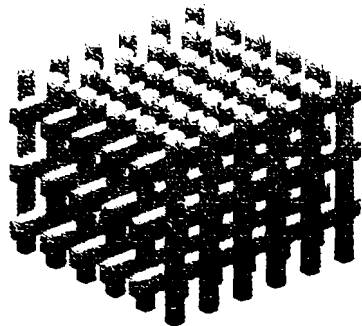


Fig. 6-117. Cristal elastic 3D.

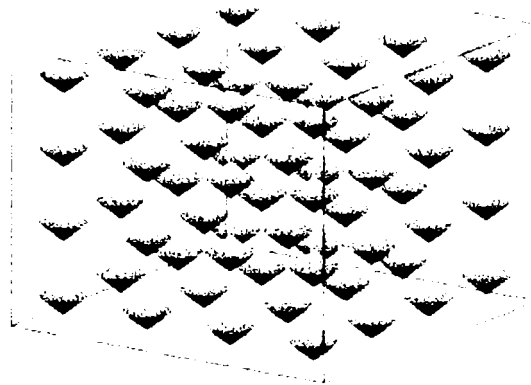


Fig. 6-118. Cristal elastic 3D.

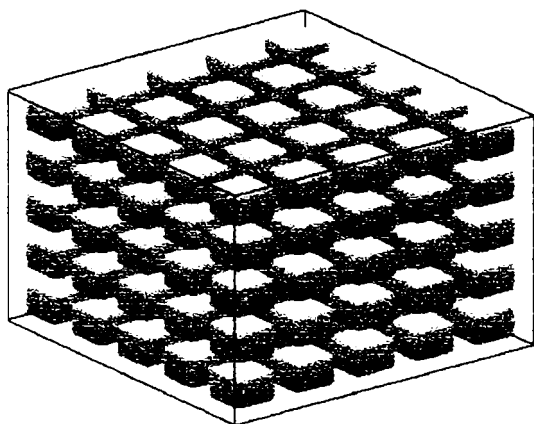


Fig. 6-119. Cristal elastic 3D.

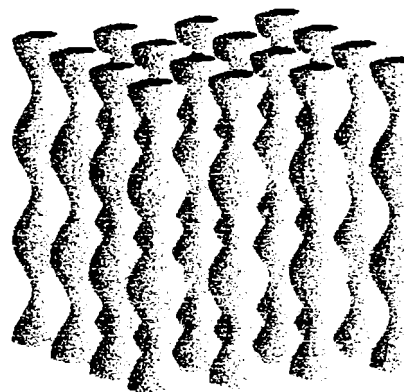


Fig. 6-120. Cristal elastic 3D.

### 6.3.2. Metoda FDTD aplicată la studiul cristalelor elastice. Rezultate numerice

Teoria și algoritmul dezvoltat în capitolul 3 se pot aplica cu succes la studiul structurilor elastice periodice bidimensionale cu benzi interzise, pentru diverse combinații de medii: solid-solid, solid-lichid, solid-gaz, lichid-lichid etc. [6-1], [6-2], [6-3], [6-10]. Analizarea “cristalelor” din Fig. 6-115 - Fig. 6-120 nu va face obiectul studiului următor, deoarece așa cum s-a mai precizat, necesită un volum prea mare de resurse de calcul. Deși tridimensional, compozitul din Fig. 6-109 se pretează foarte bine la algoritmul cu diferențe finite 2D, în același timp realizarea sa fizică fiind relativ facilă, prin simpla găurire a unei bucăți de material solid. Metoda FDTD (Finite Difference Time Domain) are avantajul modelării realiste a unui cristal elastic, finit ca întindere, plasat în interiorul unui mediu și aflat în interacțiune cu o undă elastică de bandă largă [6-7], [6-8]. Viteza de oscilație și implicit deplasarea, oricărui punct al cristalului sunt disponibile la orice moment de timp. Prin memorarea unui mare număr de eșantioane specifice unui punct dat se poate evalua spectrul semnalului în acel loc și odată cu acesta benzile interzise [6-9].

Pentru obținerea unor rezultate cantitative [6-10] se va considera o structură paralelipipedică formată din aluminiu (cu lungimea  $L$  și lățimea  $l$ , cunoscute și având o înălțime  $h \gg L, l$ ) în care s-a perforat o matrice de găuri cilindrice de diametru,  $a$ , ale căror centre sunt situate la distanța,  $b$ , unul de altul. Raportul de umplere,  $f$ , definit anterior se poate modifica prin mărirea diametrului găurilor și / sau prin modificarea distanței dintre cilindri. Se cunosc de asemenea densitățile și coeficienții lui Lamé corespunzând celor două medii. În ceea ce privește excitația aceasta este un pachet de unde plane cu o bogată gamă spectrală lansat dintr-o parte a compozitului de la o distanță oarecare de acesta. Vitezele  $v_x, v_y$  sunt înregistrate ca funcție de timp de cealaltă parte a cristalului. Prin utilizarea transformatei Fourier și

compararea spectrului semnalului de intrare cu cel de ieșire se poate afla coeficientul de transmisie, cu alte cuvinte atenuarea ca o funcție de frecvență.

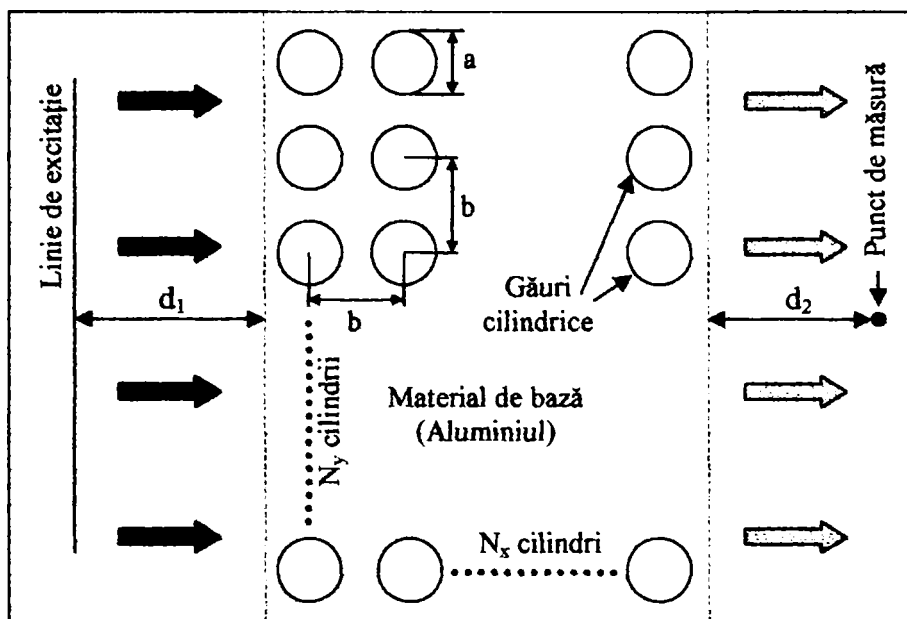


Fig. 6-121. Cristal elastic bidimensional cu matrice de găuri având simetrie pătratică.

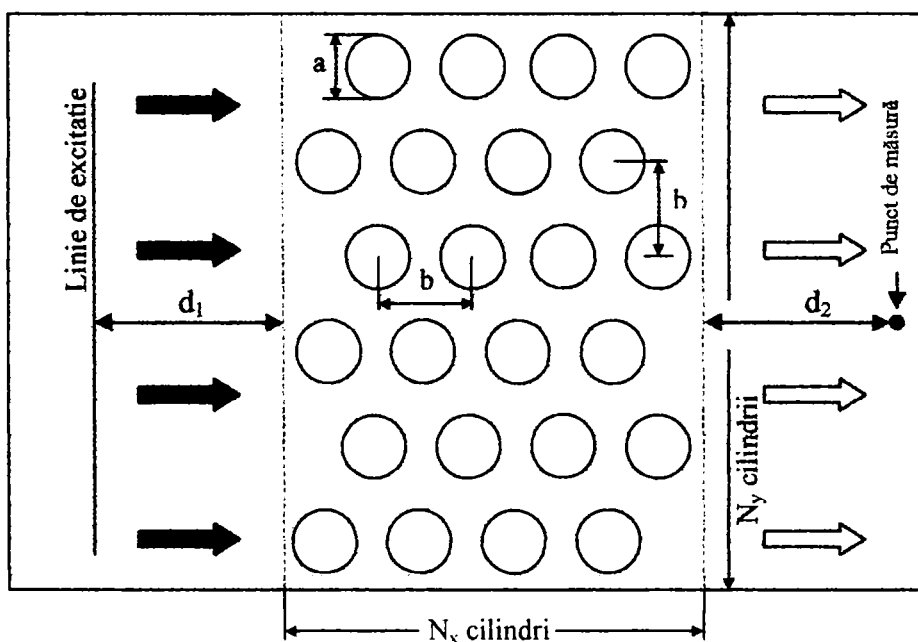


Fig. 6-122. Cristal elastic bidimensional cu matrice de găuri având simetrie rombică.

Constantele de material necesare simulărilor ce urmează sunt date în Tab. 6-3.

Tab. 6-3. Constante de material

	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	E (Pa)	$\nu$
Al (material de bază)	2700	$6.895 \cdot 10^{10}$	0.33
Pb (găuri)	11350	$1.379 \cdot 10^{10}$	0.43

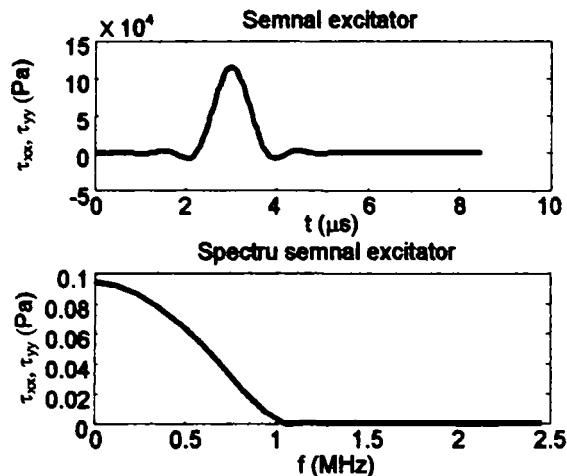


Fig. 6-123. Semnalul excitator folosit pentru stimularea structurilor din Fig. 6-124, Fig. 6-125, Fig. 6-136, Fig. 6-139, Fig. 6-140, Fig. 6-141, Fig. 6-142.

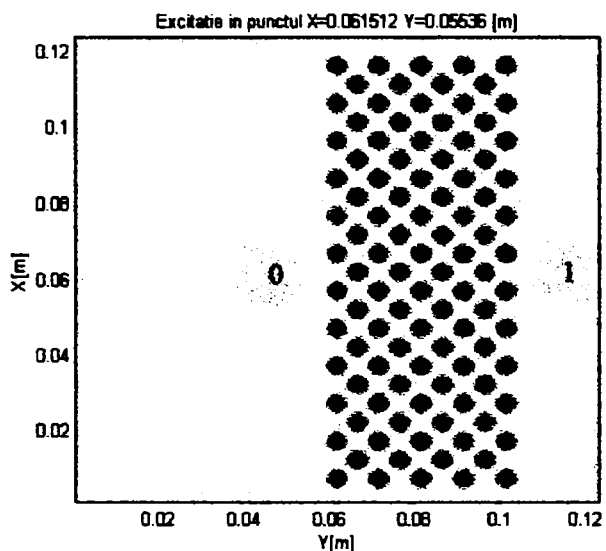


Fig. 6-124. Masă dreptunghiulară de Al (zona gri) având înglobat un cristal elastic format din cilindri de Pb. "0" este punctul de excitație iar "1" cel de măsură.

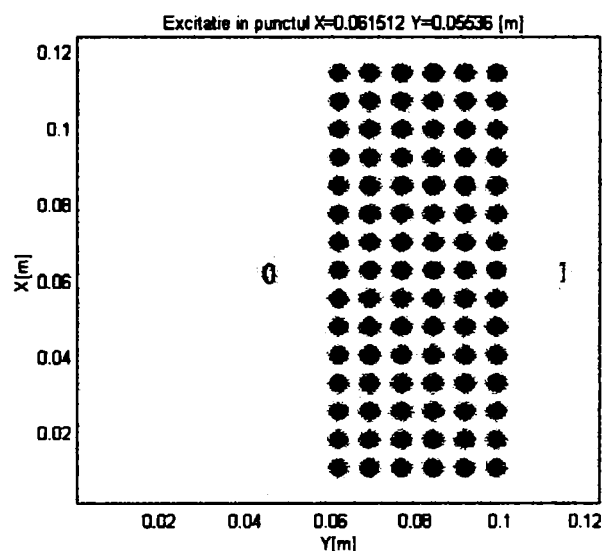


Fig. 6-125. Masă dreptunghiulară de Al (zona gri) având înglobat un cristal elastic format din cilindri de Pb. "0" este punctul de excitație iar "1" cel de măsură.

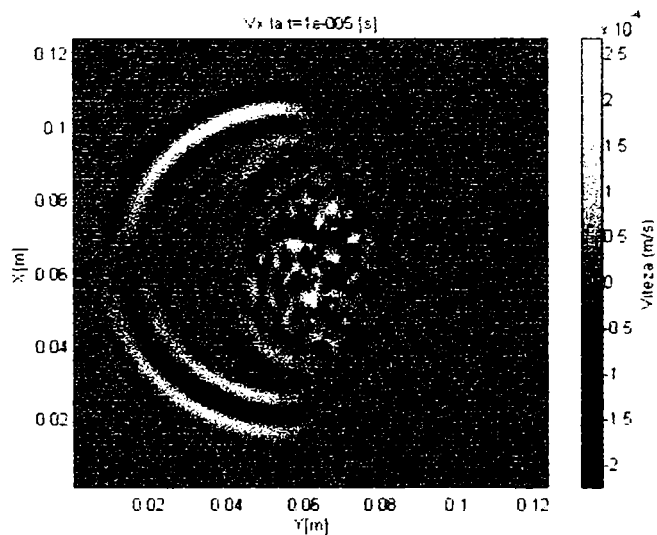


Fig. 6-126. Harta de amplitudine a componentei  $v_x$  a vitezei la  $t=10 \mu s$ , corespunzătoare structurii din Fig. 6-124 stimulată cu excitația din Fig. 6-123.

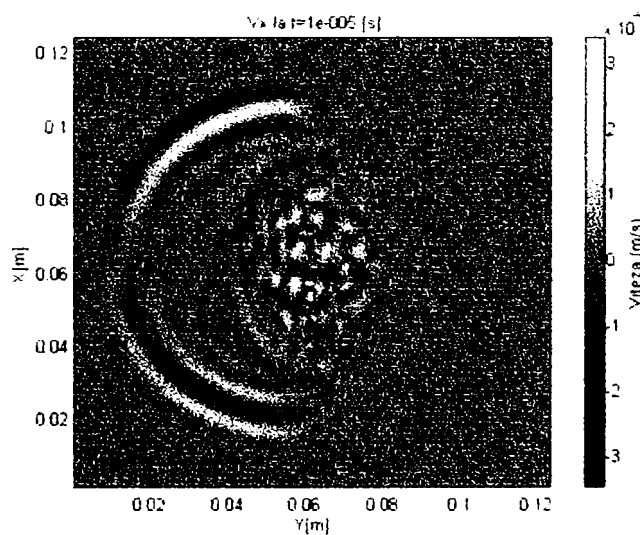


Fig. 6-127. Harta de amplitudine a componentei  $v_x$  a vitezei la  $t=10 \mu s$ , corespunzătoare structurii din Fig. 6-125 stimulată cu excitația din Fig. 6-123.

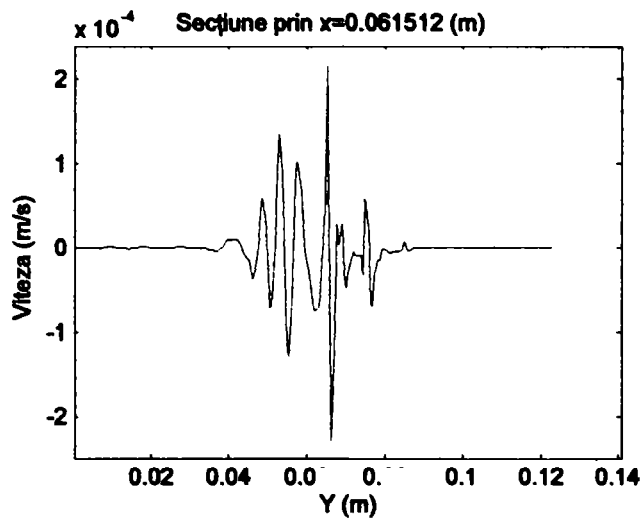


Fig. 6-128. Secțiune a Fig. 6-126 prin coordonata  $x=0.061$  m.

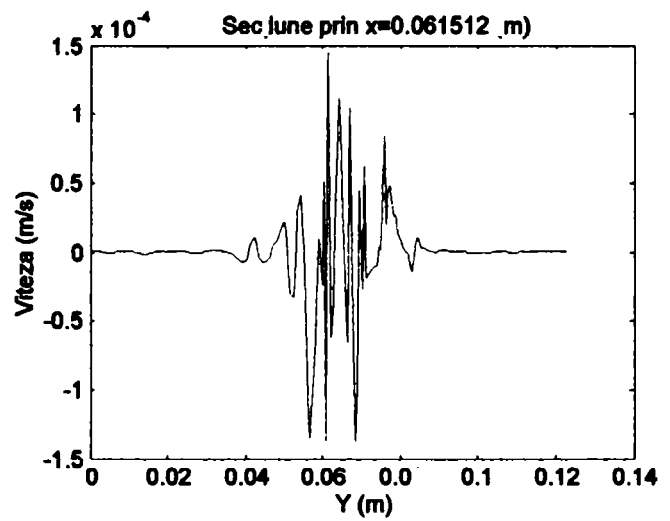


Fig. 6-129. Secțiune a Fig. 6-127 prin coordonata  $x=0.061$  m.

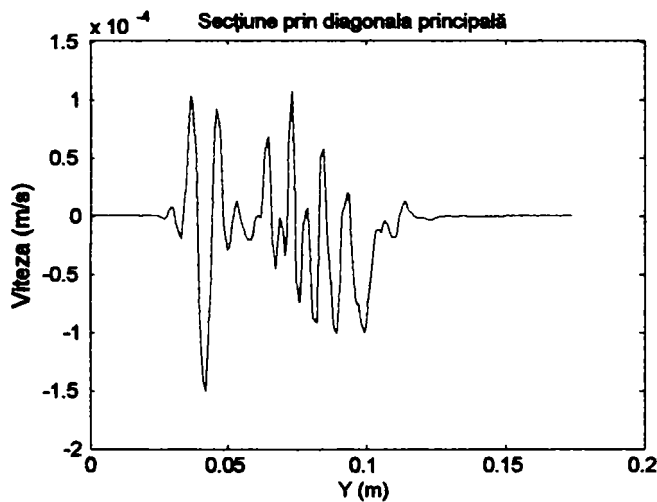


Fig. 6-130. Secțiune a Fig. 6-126 prin diagonala principală.

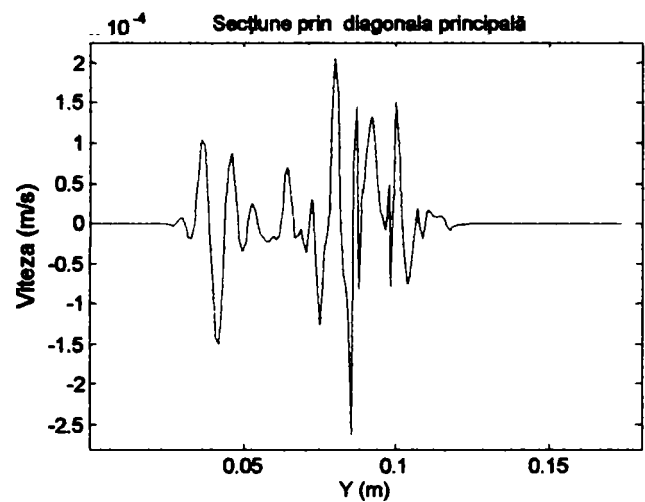


Fig. 6-131. Secțiune a Fig. 6-127 prin diagonala principală.

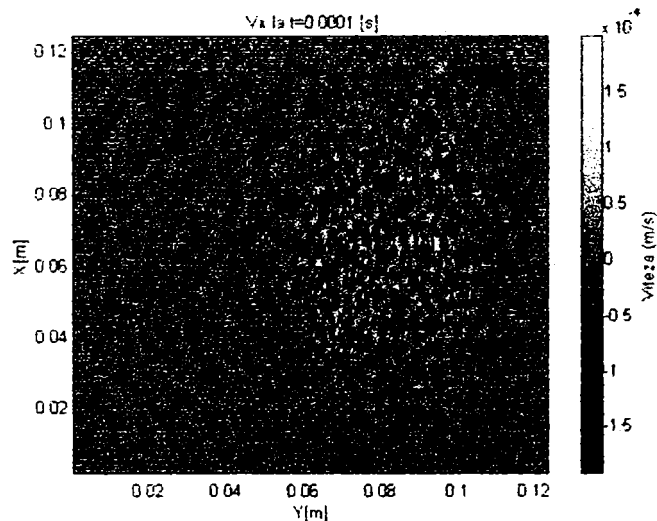


Fig. 6-132. Harta de amplitudine a componentei  $v_x$  a vitezei la  $t=100 \mu s$ , corespunzătoare structurii din Fig. 6-124 stimulată cu excitația din Fig. 6-123.

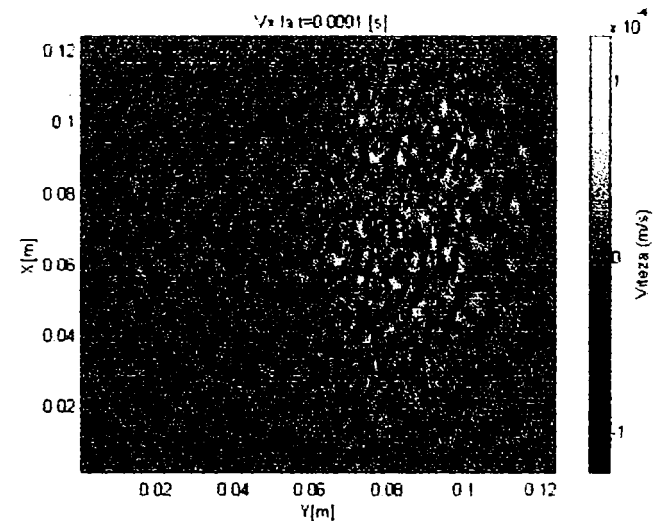


Fig. 6-133. Harta de amplitudine a componentei  $v_x$  a vitezei la  $t=100 \mu s$ , corespunzătoare structurii din Fig. 6-125 stimulată cu excitația din Fig. 6-123.

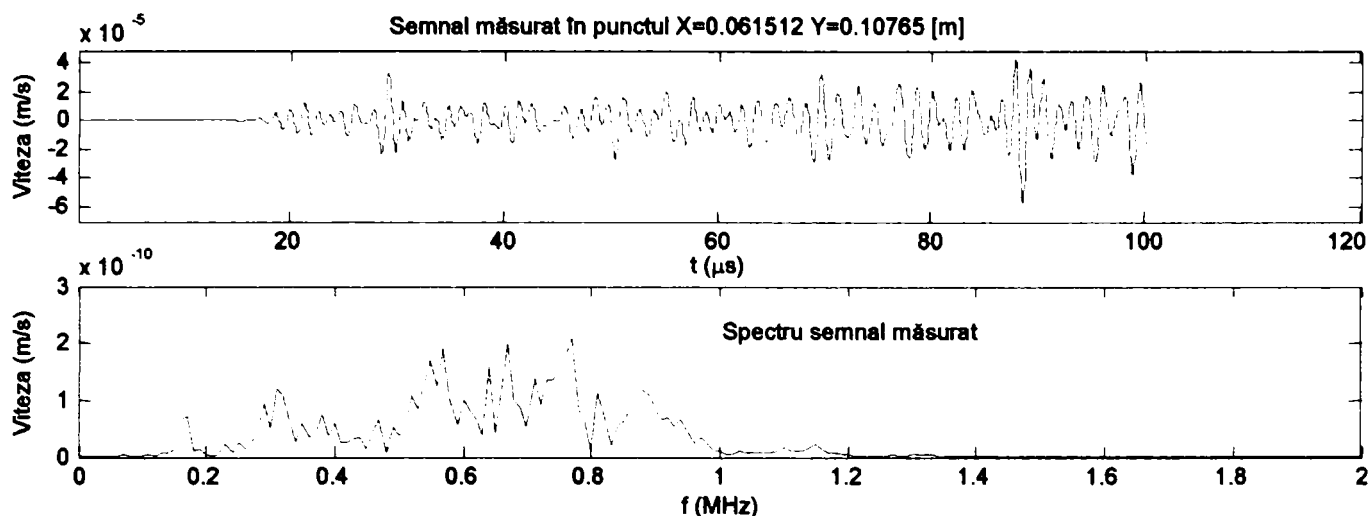


Fig. 6-134. Semnalul măsurat și spectrul său, corespunzătoare punctului "1" din Fig. 6-124. (se folosește excitația din Fig. 6-123 ce acționează în "0").

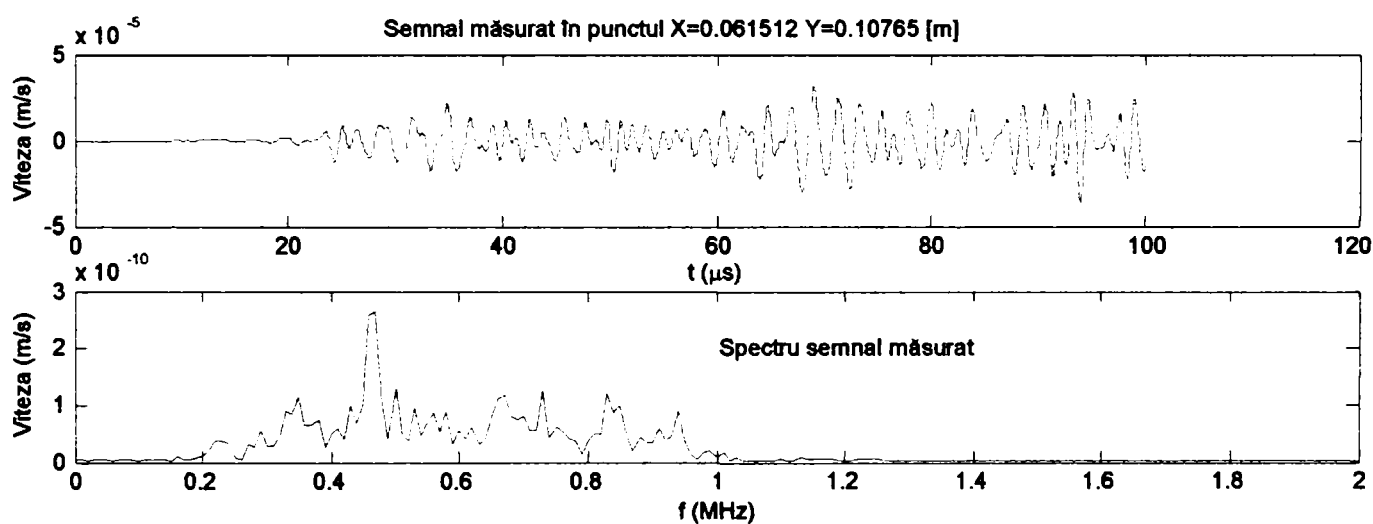


Fig. 6-135. Semnalul măsurat și spectrul său, corespunzătoare punctului "1" din Fig. 6-124. (se folosește excitația din Fig. 6-123 ce acționează în "0").

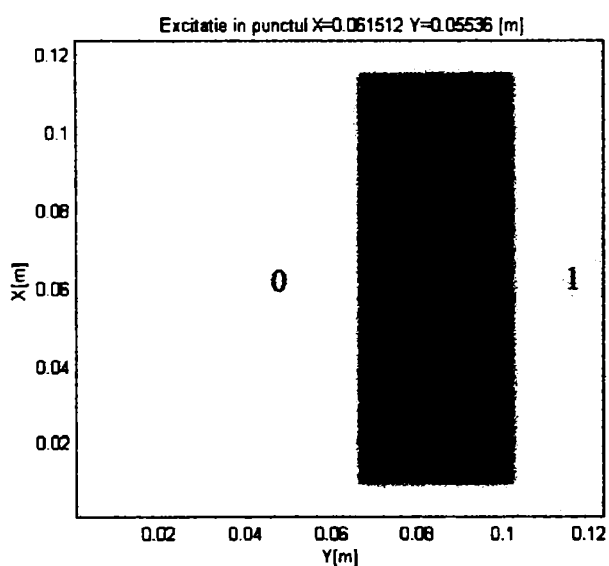


Fig. 6-136. Masă dreptunghiulară de Al (zona gri) având înglobată o bucată de Pb (aria neagră). "0" este punctul de excitație iar "1" cel de măsură.

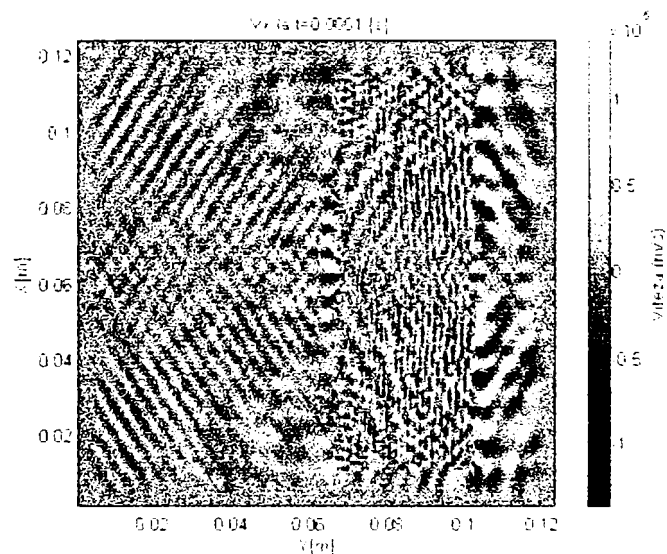


Fig. 6-137. Harta de amplitudine a componentei  $v_x$  a vitezei la  $t=100 \mu s$ , corespunzătoare structurii din Fig. 6-136 stimulată cu excitația din Fig. 6-123.



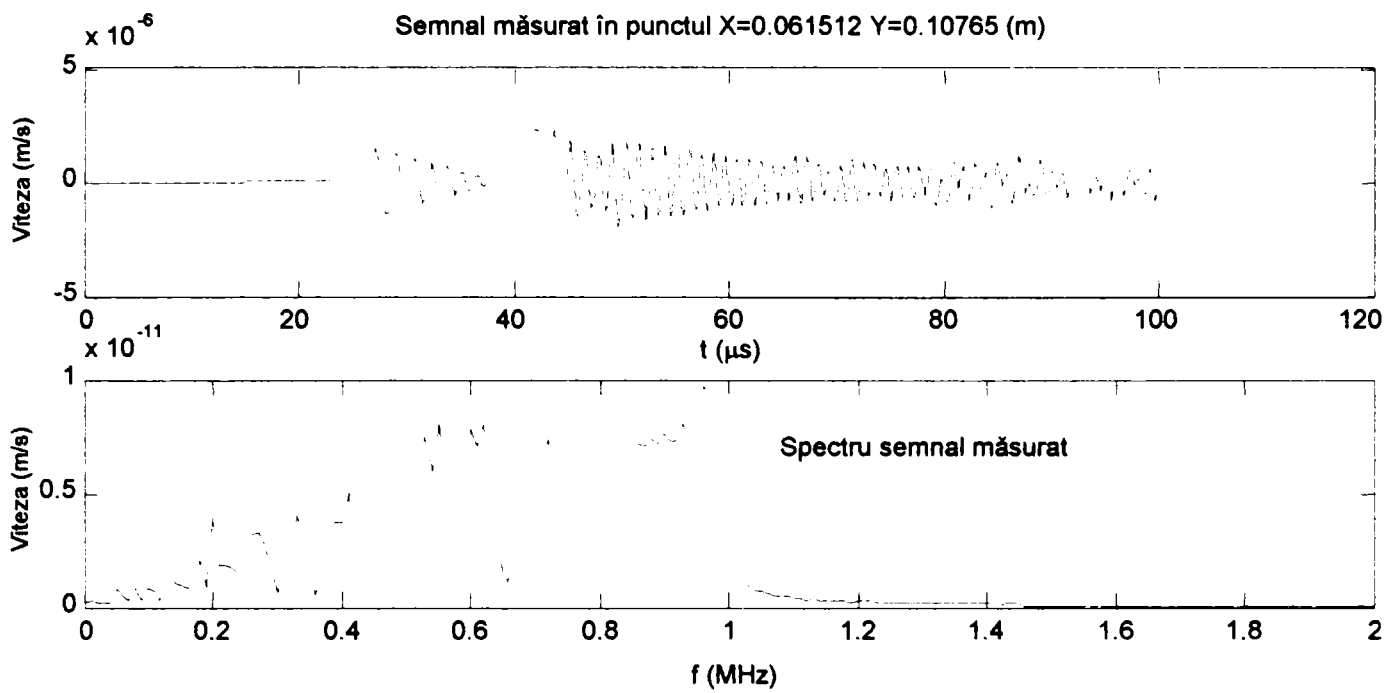


Fig. 6-138. Semnalul măsurat și spectrul său, corespunzătoare punctului "1" din Fig. 6-136. (se folosește excitația din Fig. 6-123 ce acționează în "0").

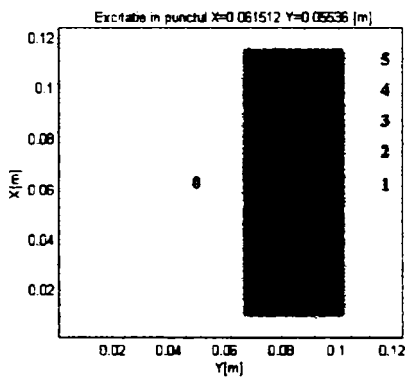


Fig. 6-139. Masă dreptunghiulară de Al (zona gri) având înglobată o bucată de Pb (aria neagră). "0" este punctul de excitație iar "1", "2", "3", "4", "5" punctele de măsură.

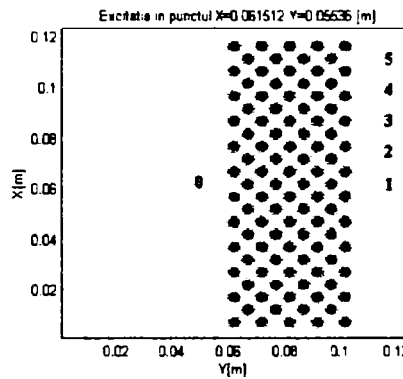


Fig. 6-140. Masă dreptunghiulară de Al (zona gri) având înglobat un cristal elastic format din cilindri de Pb. "0" este punctul de excitație iar "1", "2", "3", "4", "5" punctele de măsură.

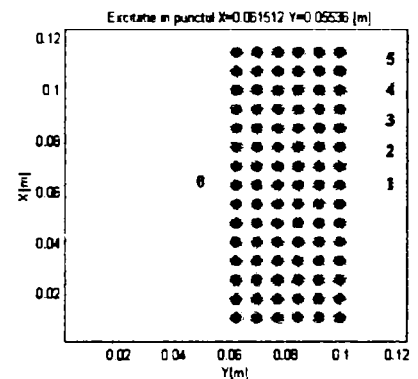


Fig. 6-141. Masă dreptunghiulară de Al (zona gri) având înglobat un cristal elastic format din cilindri de Pb. "0" este punctul de excitație iar "1", "2", "3", "4", "5" punctele de măsură.

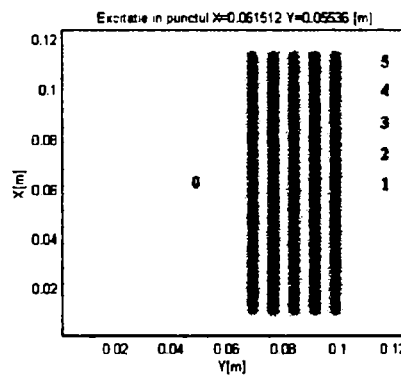
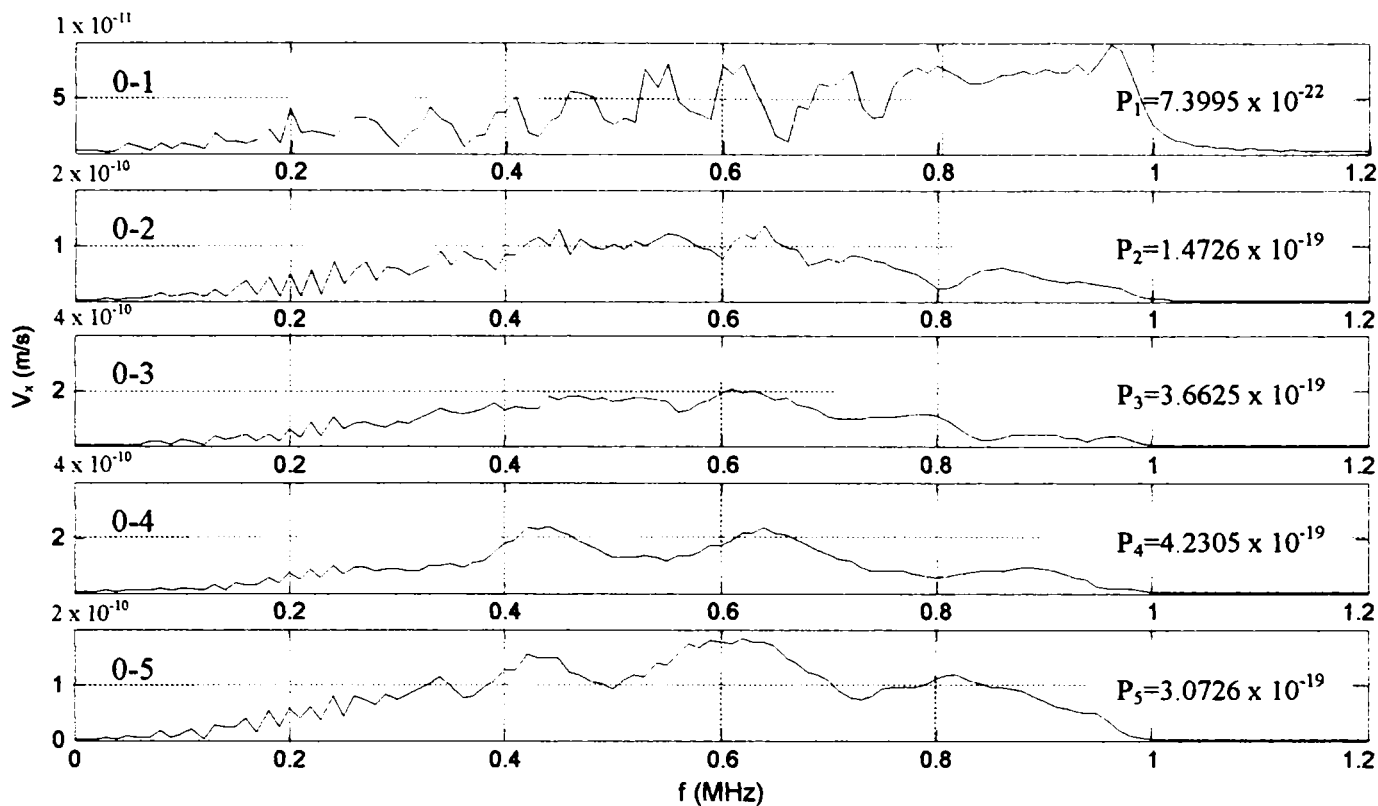
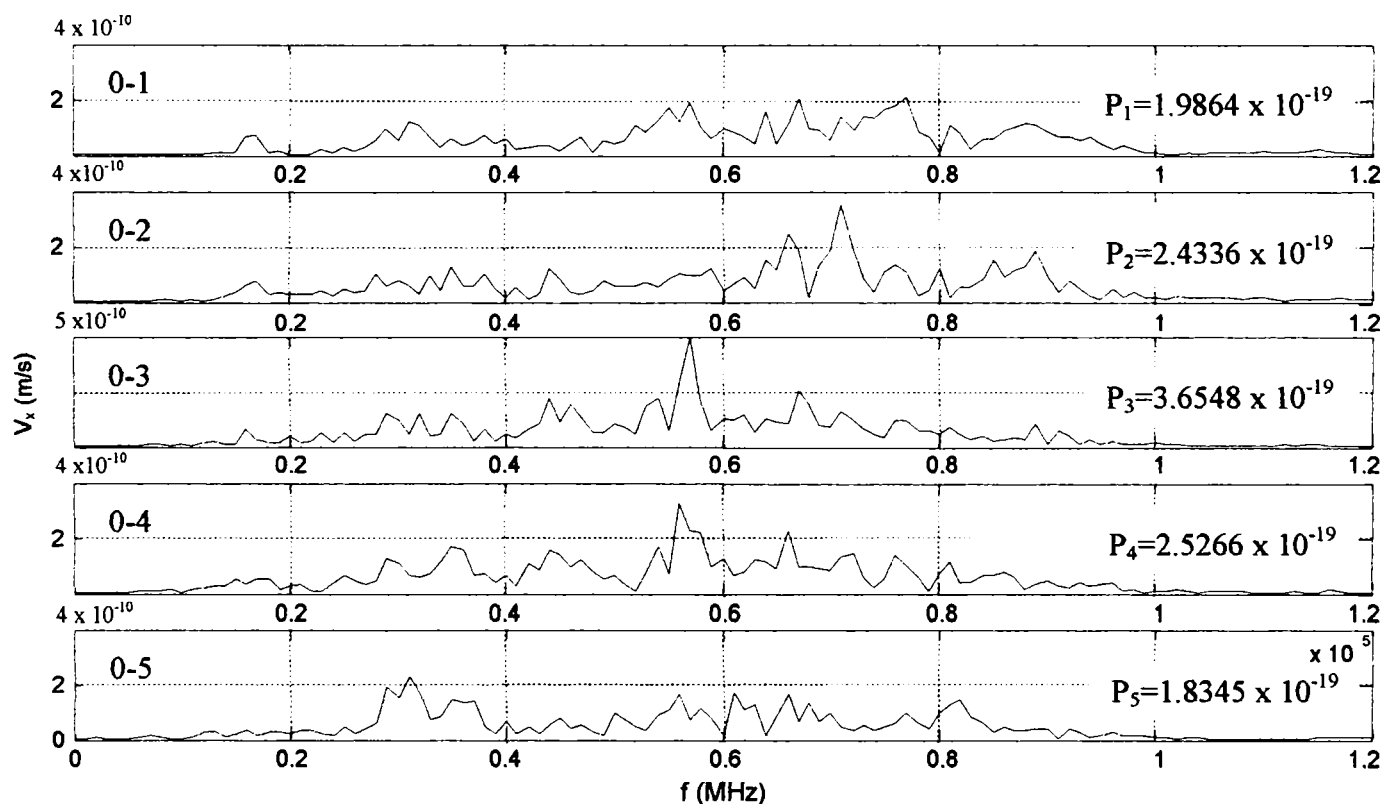


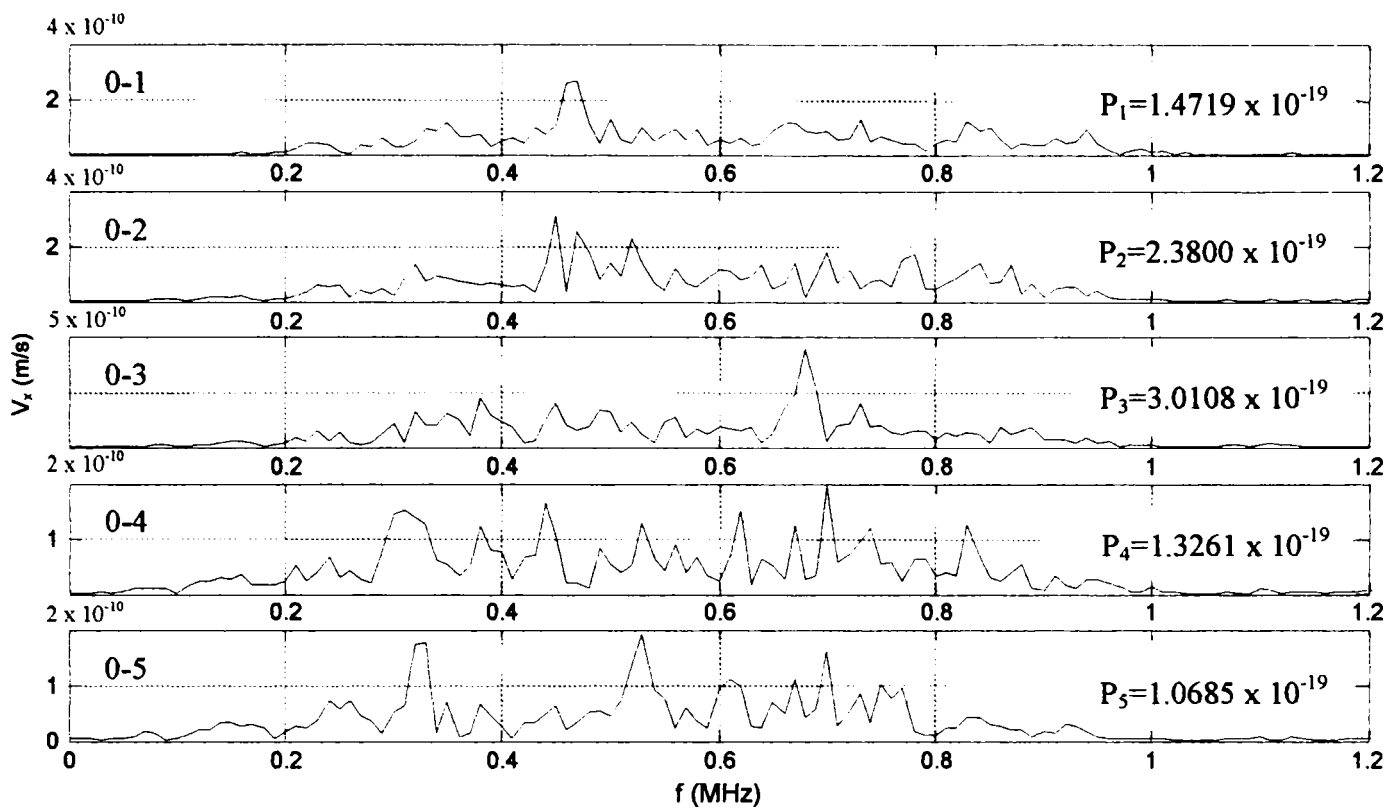
Fig. 6-142. Masă dreptunghiulară de Al (zona gri) având înglobată o structură stratificată formată din lame de Pb. "0" este punctul de excitație iar "1", "2", "3", "4", "5" punctele de măsură.



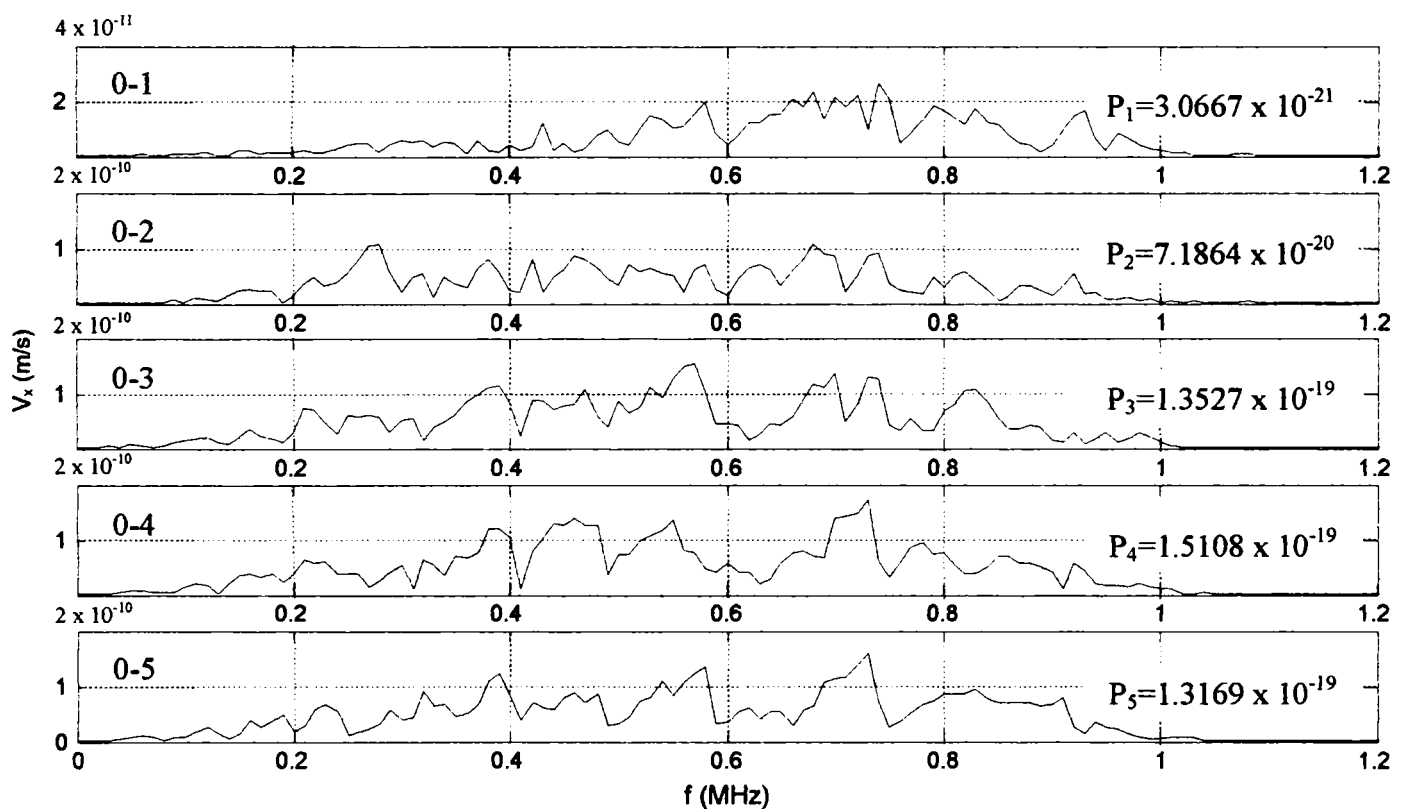
**Fig. 6-143.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în "0", corespunzătoare Fig. 6-139. Se observă că pe direcția 0-1 semnalul transmis de sursă este atenuat puternic, lucru care reiese atât din analiza directă a spectrului de amplitudini, ce conține numeroase benzi cu atenuare puternică, cât și din compararea lui  $P_1$  cu celelalte patru puteri transmise.  $P$  este măsurat în W.



**Fig. 6-144.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în "0", corespunzătoare Fig. 6-140. Puterile transmise pe toate cele cinci direcții sunt foarte apropiate ca valoare. Deși există zone cu atenuare puternică a componentelor spectrale, nu se înregistrează benzi interzise pe nici una din căi și ca urmare nu poate fi identificat un domeniu interzis care să satisfacă toate cele cinci căi de propagare.



**Fig. 6-145.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în “0”, corespunzătoare Fig. 6-141. Puterile transmise pe toate cele cinci direcții sunt foarte apropiate ca valoare. Deși există zone cu atenuare puternică a componentelor spectrale, nu se înregistrează benzi interzise pe nici una din direcții și ca urmare nu poate fi identificat un domeniu de frecvențe interzis care să satisfacă toate cele cinci căi de propagare. Se înregistrează o situație asemănătoare cu cea din Fig. 6-144.



**Fig. 6-146.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în “0”, corespunzătoare Fig. 6-142. Se observă că pe direcția 0-1, 0-2, semnalul transmis de sursă este atenuat puternic, lucru care reiese atât din analiza directă a spectrului de amplitudini ce conține numeroase benzi cu atenuare puternică, cât și din compararea lui  $P_1$ ,  $P_2$  cu celelalte patru puteri transmise. Judecând după puterile transmise apare o situație similară cu cea din Fig. 6-143. Totuși spectrul de amplitudini are mult mai multe neregularități, pe toate cele cinci direcții.

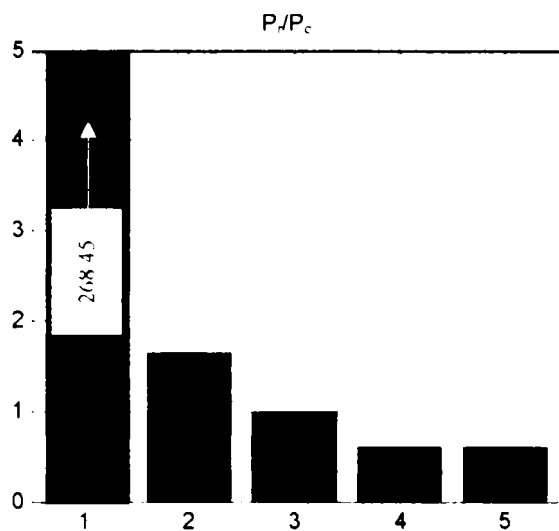


Fig. 6-147. Raportul dintre puterea transmisă prin cristalul elastic din Fig. 6-140 și cea prin masa compactă din Fig. 6-139 pe direcțiile 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5.

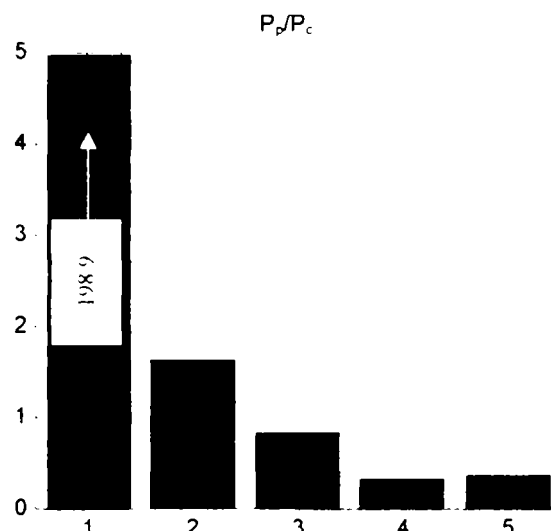


Fig. 6-148. Raportul dintre puterea transmisă prin cristalul elastic din Fig. 6-141 și cea prin masa compactă din Fig. 6-139 pe direcțiile 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5.

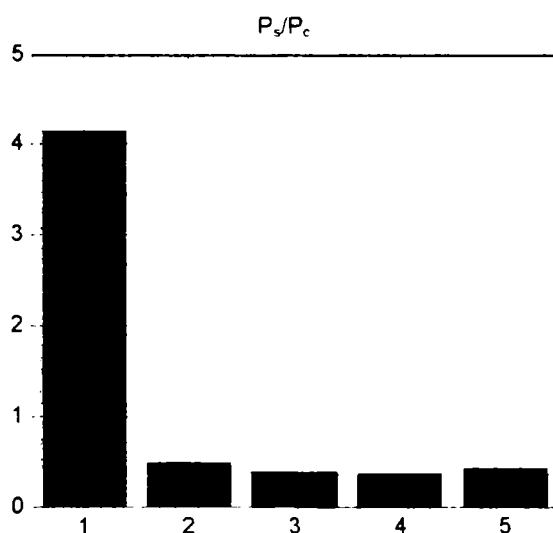


Fig. 6-149. Raportul dintre puterea transmisă prin cristalul elastic (structura stratificată) din Fig. 6-142 și cea prin masa compactă din Fig. 6-139 pe direcțiile 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5.

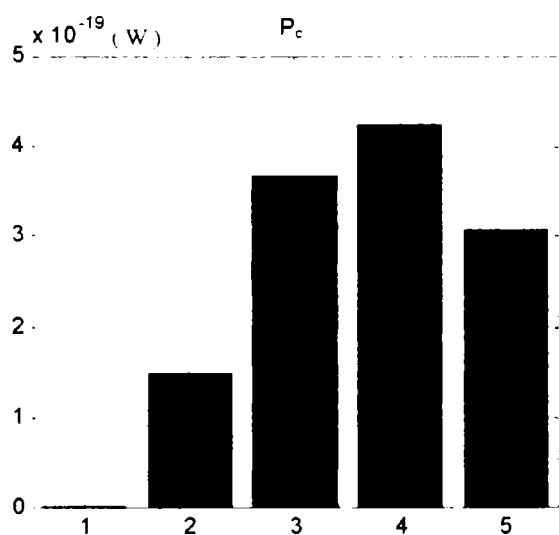


Fig. 6-150. Puterea transmisă prin corpul compact din Fig. 6-139 pe direcțiile 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5.

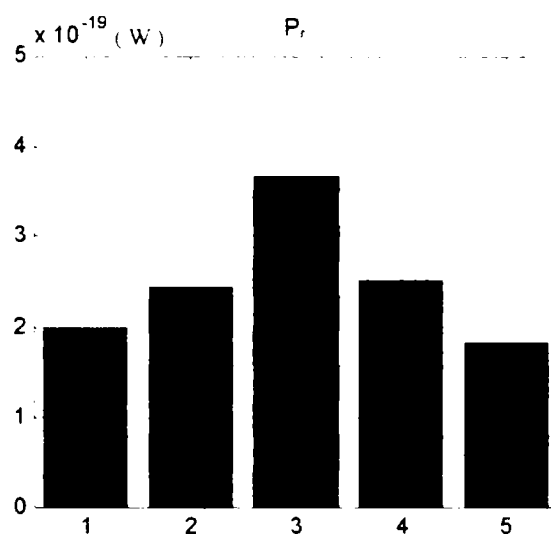


Fig. 6-151. Puterea transmisă prin cristalul elastic din Fig. 6-140 pe direcțiile 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5.

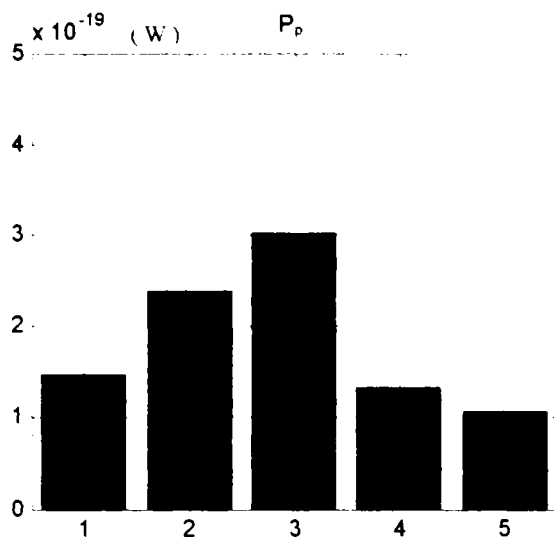


Fig. 6-152. Puterea transmisă prin cristalul elastic din Fig. 6-141 pe direcțiile 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5.

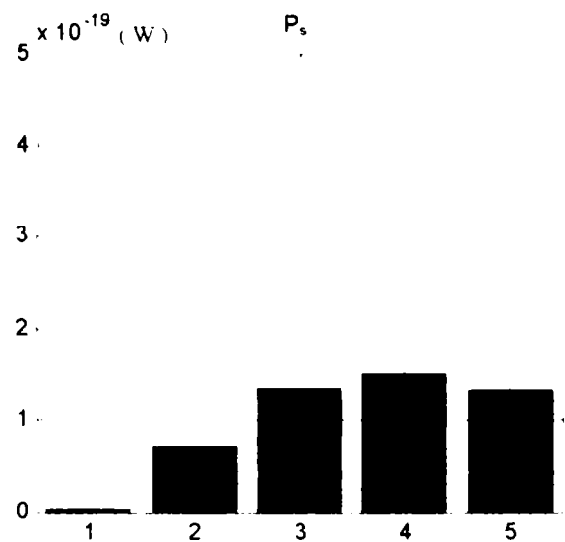


Fig. 6-153. Puterea transmisă prin cristalul elastic din Fig. 6-142 pe direcțiile 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5.

Tab. 6-4. Parametrii de material.

	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	E (Pa)	$\nu$	$c_p$ (m/s)
Al (material de bază)	2700	$6.895 \cdot 10^{10}$	0.33	Rezultă din: $\rho, E, \nu$
Hg (găuri)	13500	0	-	1450

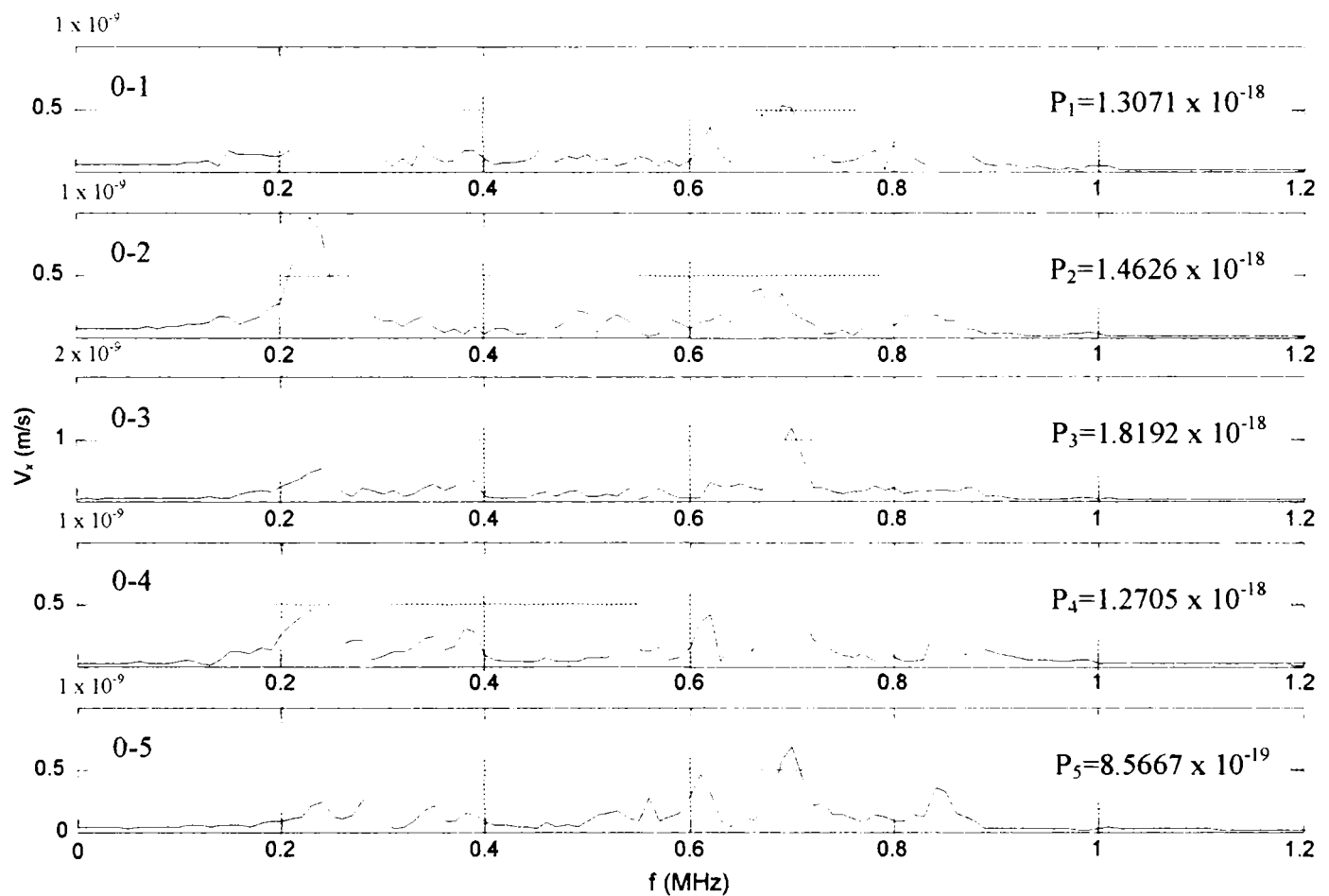
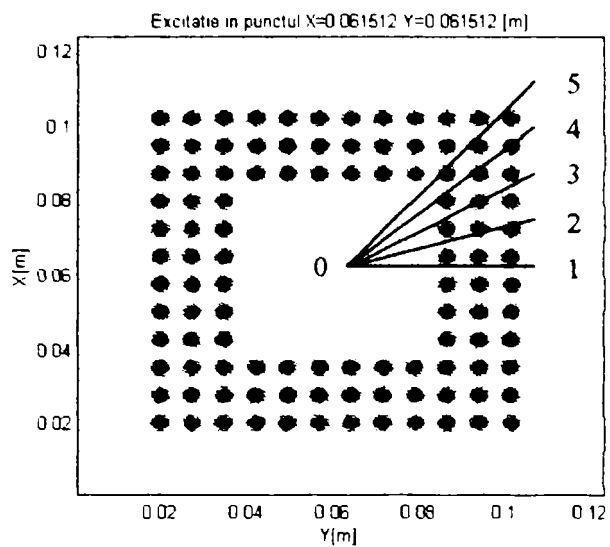
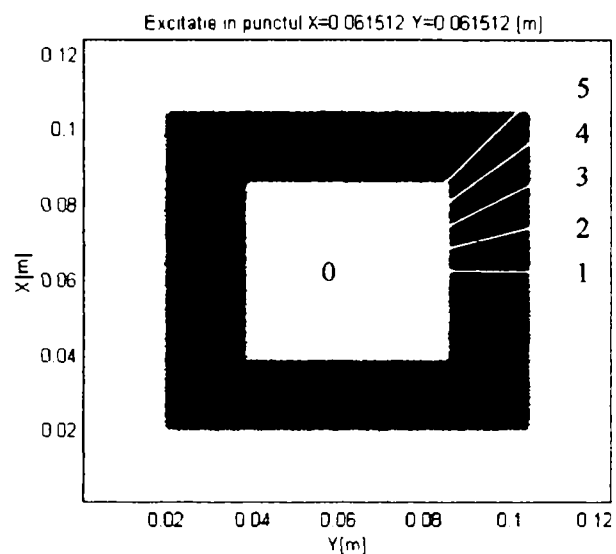


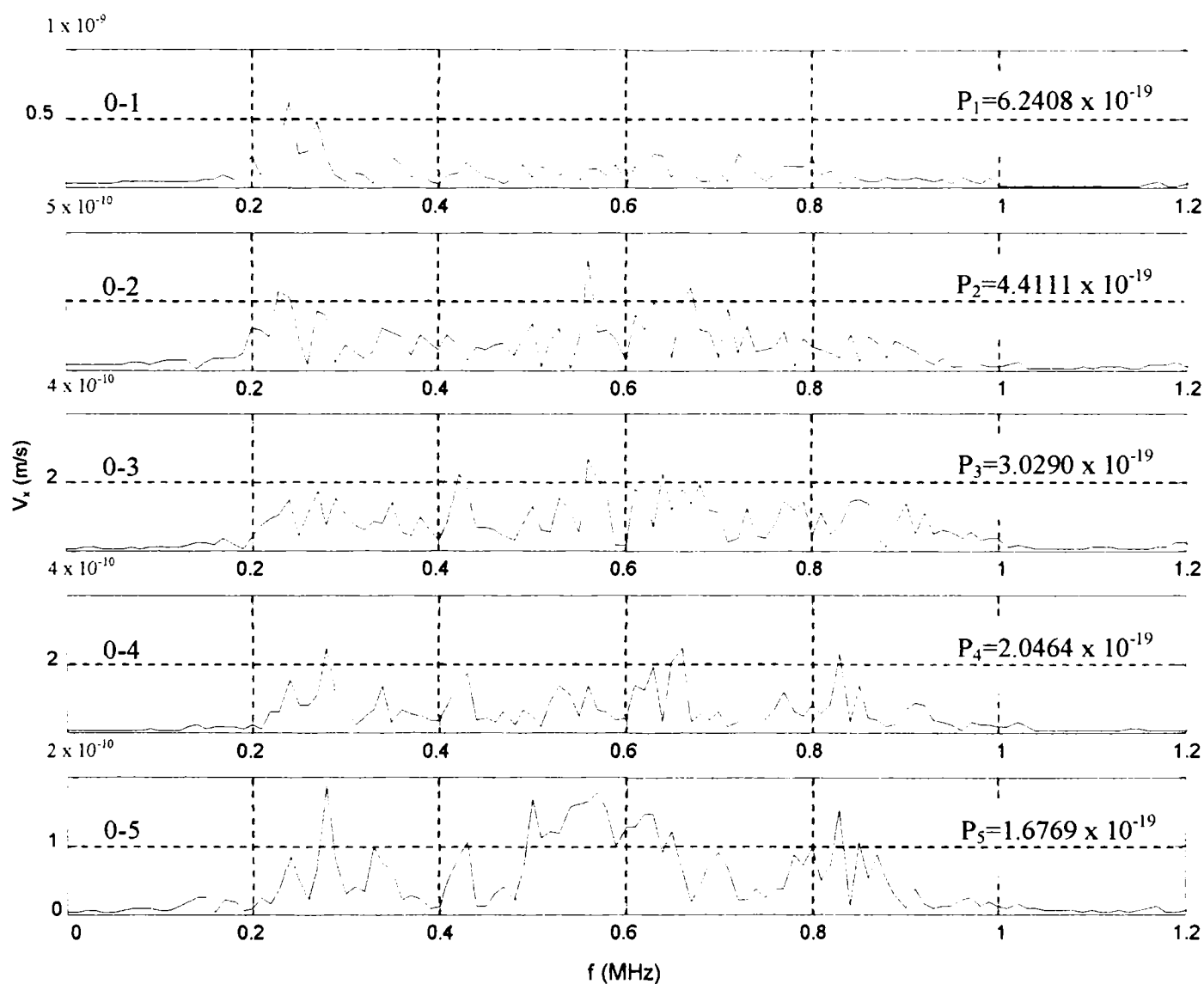
Fig. 6-154. Spectrele de amplitudini ale semnalelor înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în "0", corespunzătoare Fig. 6-140 (de data aceasta cilindrii perforați în masa de aluminiu sunt umpluți cu mercur având parametrii din Tab. 6-4). Puterile transmise pe toate cele cinci direcții sunt foarte apropiate ca valoare. Se observă apariția unei benzi aproximativ interzise între 0.4 - 0.5 MHz pe direcțiile 0-3, 0-4, 0-5.



**Fig. 6-155.** Cavitate rezonantă bidimensională. Al este mediul de bază iar pereții formați din perforații cilindrice sunt umpluți cu Hg.

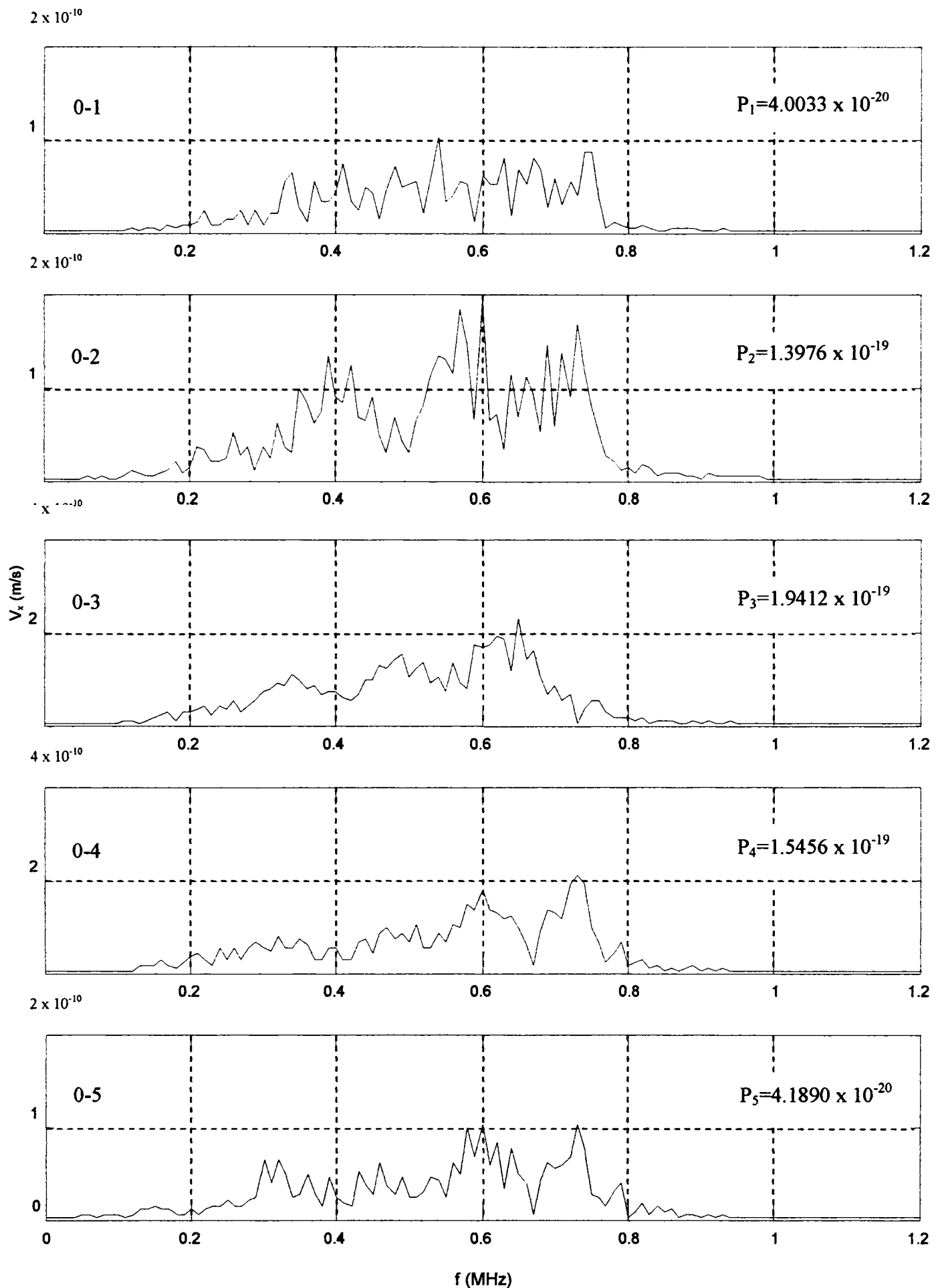


**Fig. 6-156.** Cavitate rezonantă bidimensională din Al cu pereții de mercur.



**Fig. 6-157.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în “0”, corespunzătoare Fig. 6-155 (cilindrii perforați în masa de aluminiu sunt umpluți cu mercur având parametrii din Tab. 6-4). Puterile transmise pe toate cele cinci direcții sunt foarte apropiate ca valoare. Nu apar benzi interzise pe nici una din cele cinci căi. Cu toate acestea pe direcția 0-3 componentele din jurul valorii de 0.6 MHz sunt puternic suprimate.





**Fig. 6-158.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în "0", corespunzătoare Fig. 6-156 (pereții cavității bidimensionale dreptunghiulare sunt umpluți cu mercur având parametrii din Tab. 6-4).

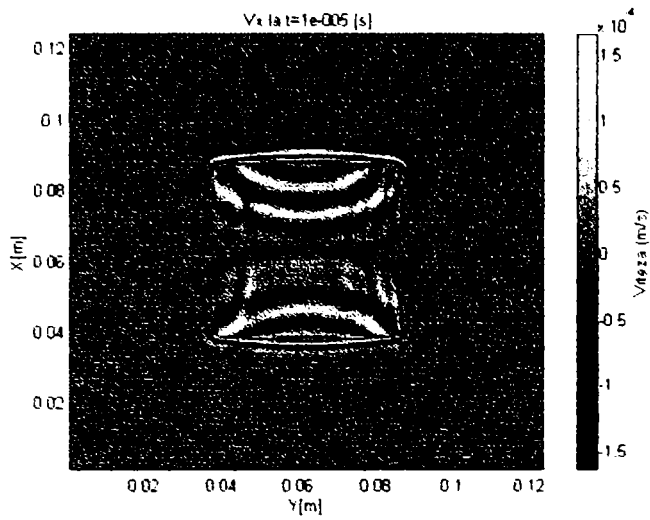


Fig. 6-159. Harta componentei  $v_x$  a vitezei corespunzătoare configurației de cavitate rezonantă din Fig. 6-156, la momentul  $t=10 \mu s$ .

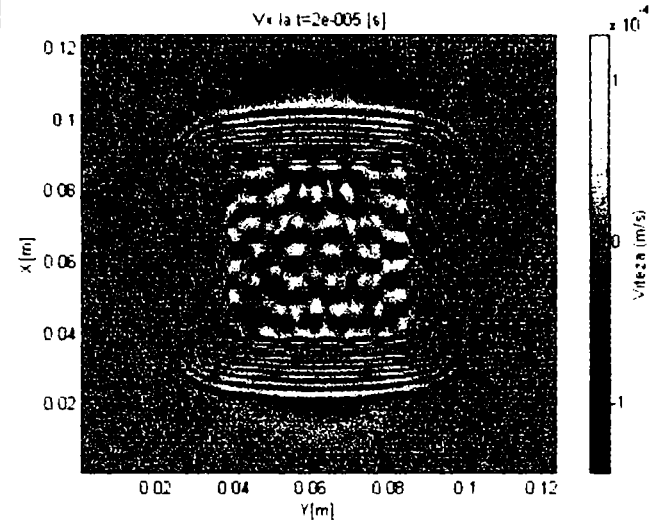


Fig. 6-160. Harta componentei  $v_x$  a vitezei corespunzătoare configurației de cavitate rezonantă din Fig. 6-156, la momentul  $t=20 \mu s$ .

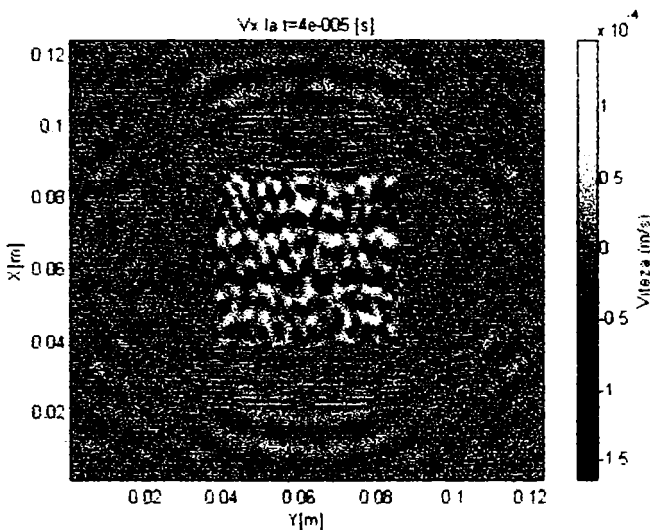


Fig. 6-161. Harta componentei  $v_x$  a vitezei corespunzătoare configurației de cavitate rezonantă din Fig. 6-156, la momentul  $t=40 \mu s$ .

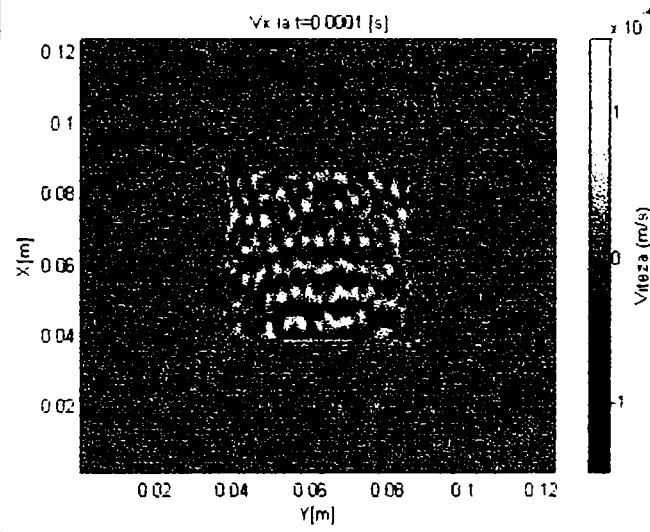


Fig. 6-162. Harta componentei  $v_x$  a vitezei corespunzătoare configurației de cavitate rezonantă din Fig. 6-156, la momentul  $t=100 \mu s$ .

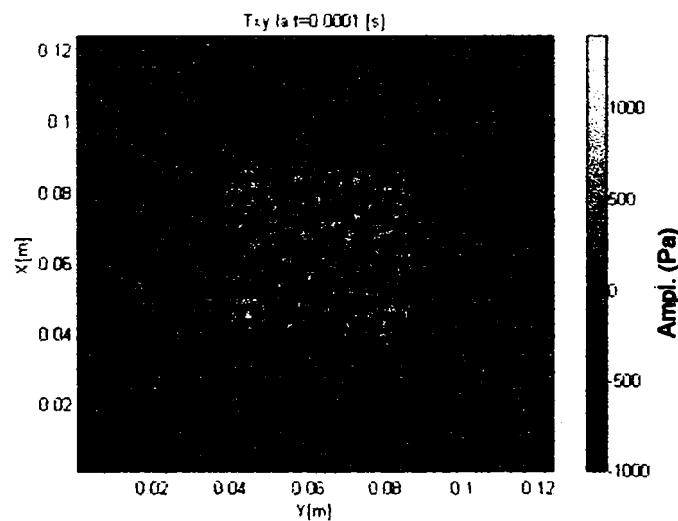
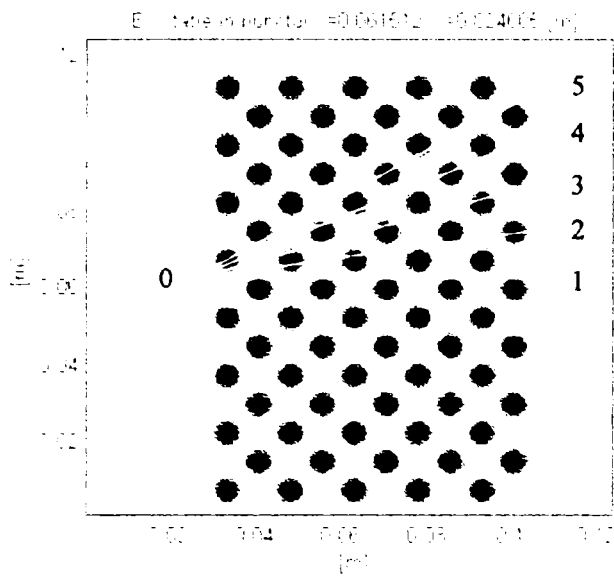
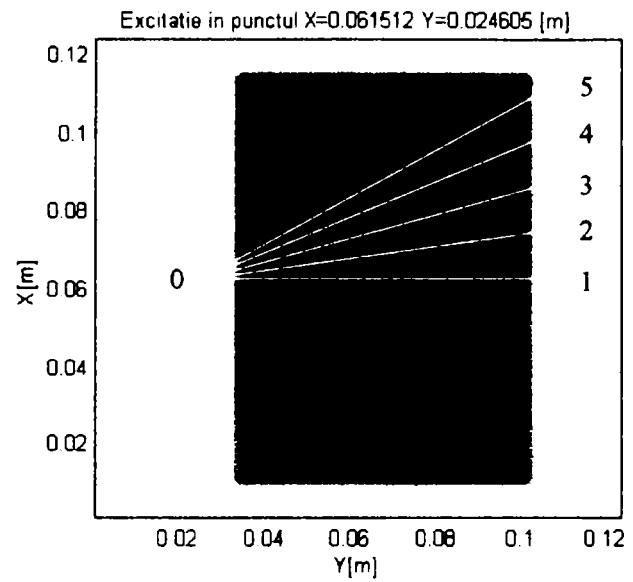


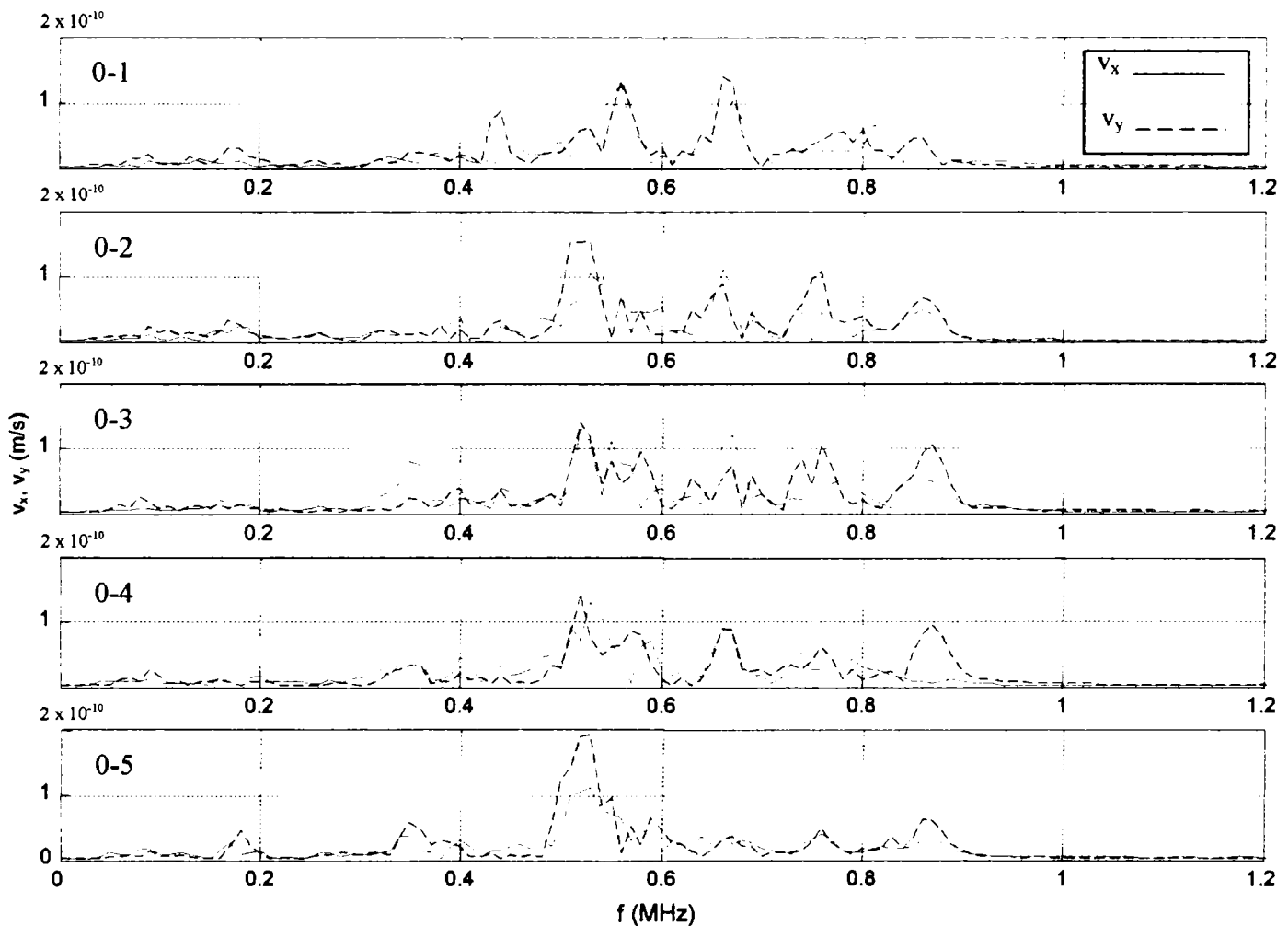
Fig. 6-163. Harta tensiunii  $\tau_{xy}$  corespunzătoare configurației de cavitate rezonantă din Fig. 6-156, la momentul  $t=100 \mu s$ . Așa cum era de așteptat, tensiunea  $\tau_{xy}$  este zero în pereții de mercur (material lichid) ai cavității rezonante. Pe figură acest lucru se traduce prin inexistența variațiilor lui  $\tau_{xy}$  în bordura dreptunghiulară.



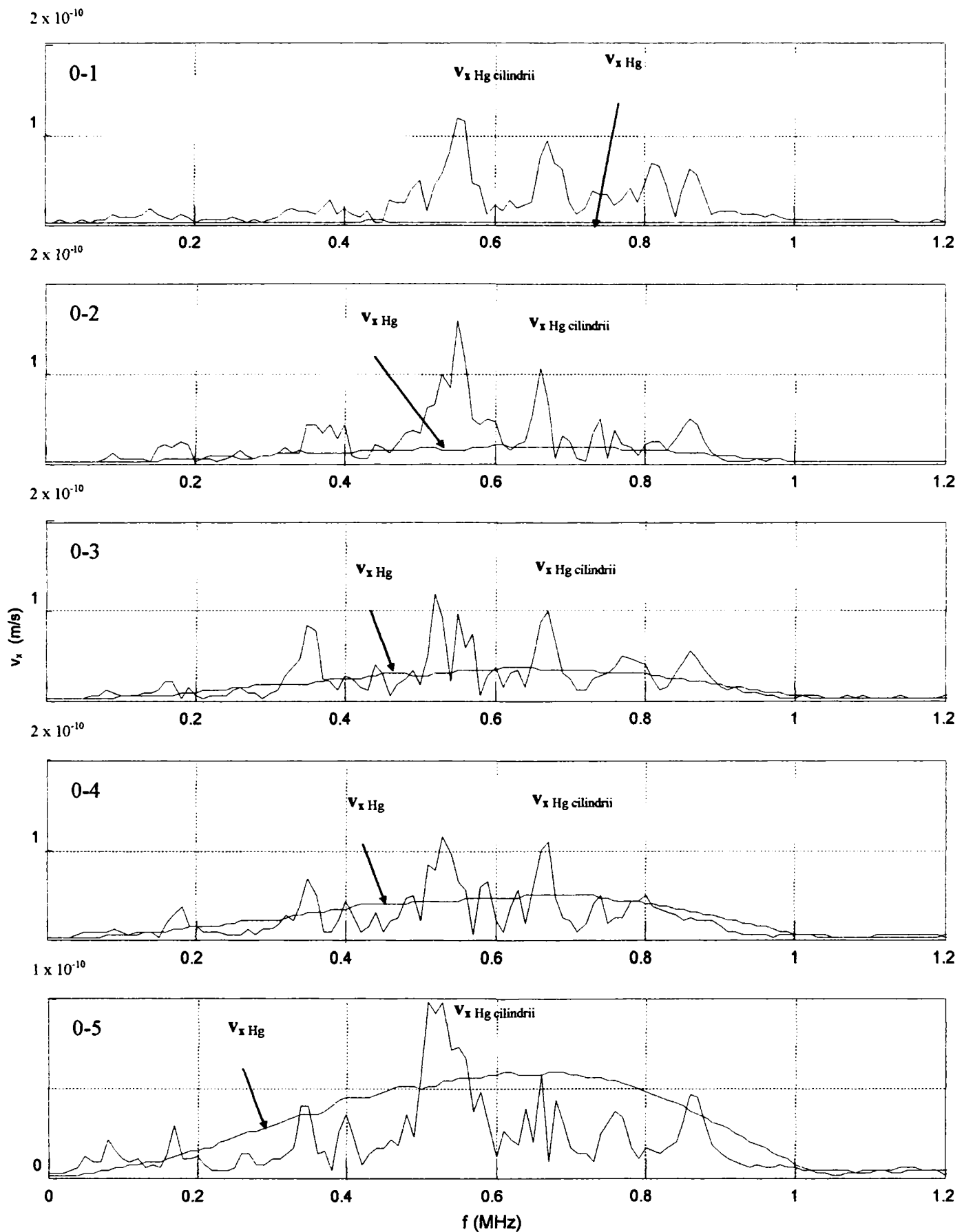
**Fig. 6-164.** Masă dreptunghiulară de Al (zona gri) având înglobat un cristal elastic format din perforații cilindrice. "0" este punctul de excitație iar "1", "2", "3", "4", "5" punctele de măsură.



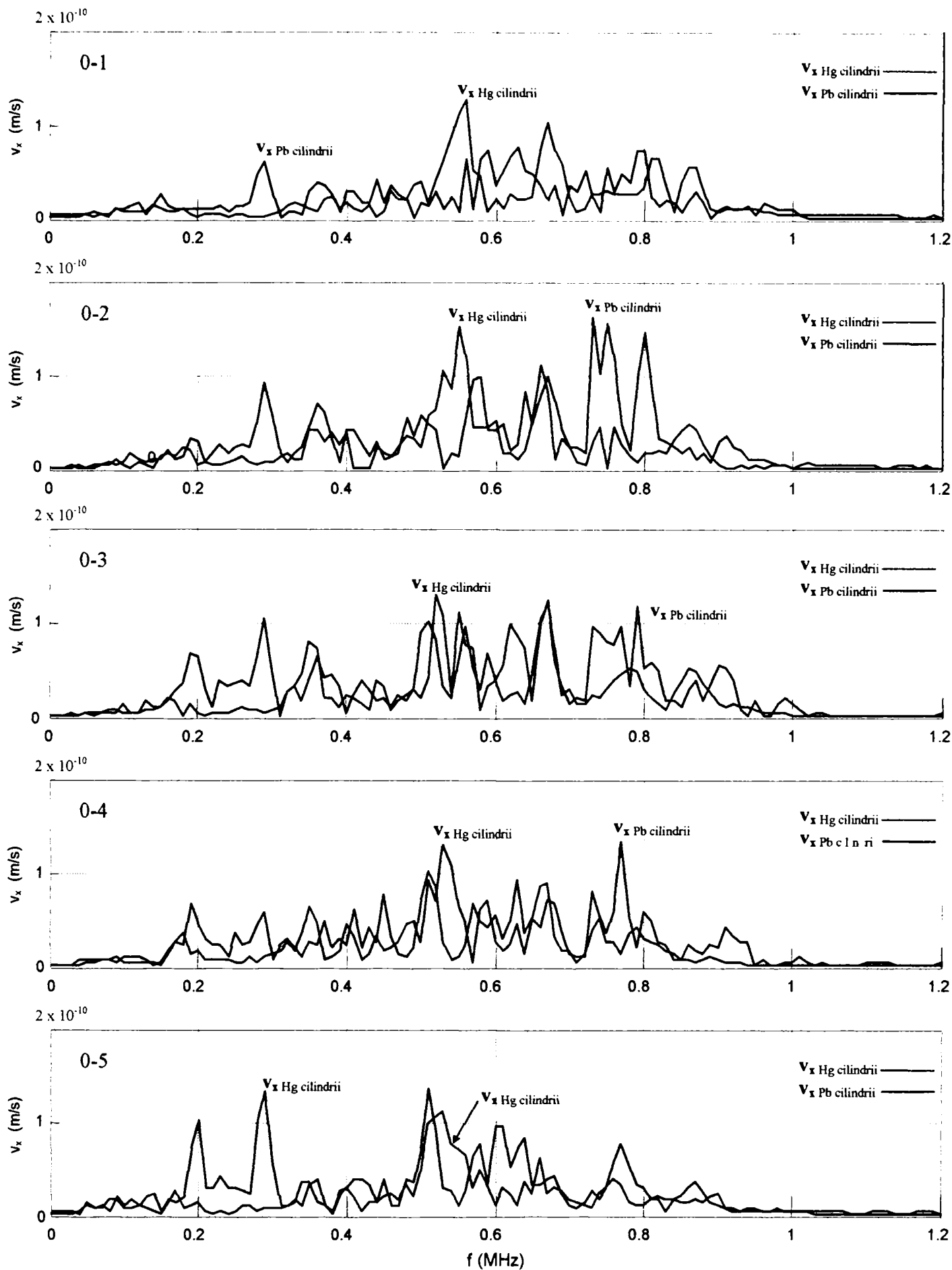
**Fig. 6-165.** Masă de Al (zona gri) având înglobată o alta cu compoziție diferită (Hg sau Pb) "0" este punctul de excitație iar "1", "2", "3", "4", "5" punctele de măsură.



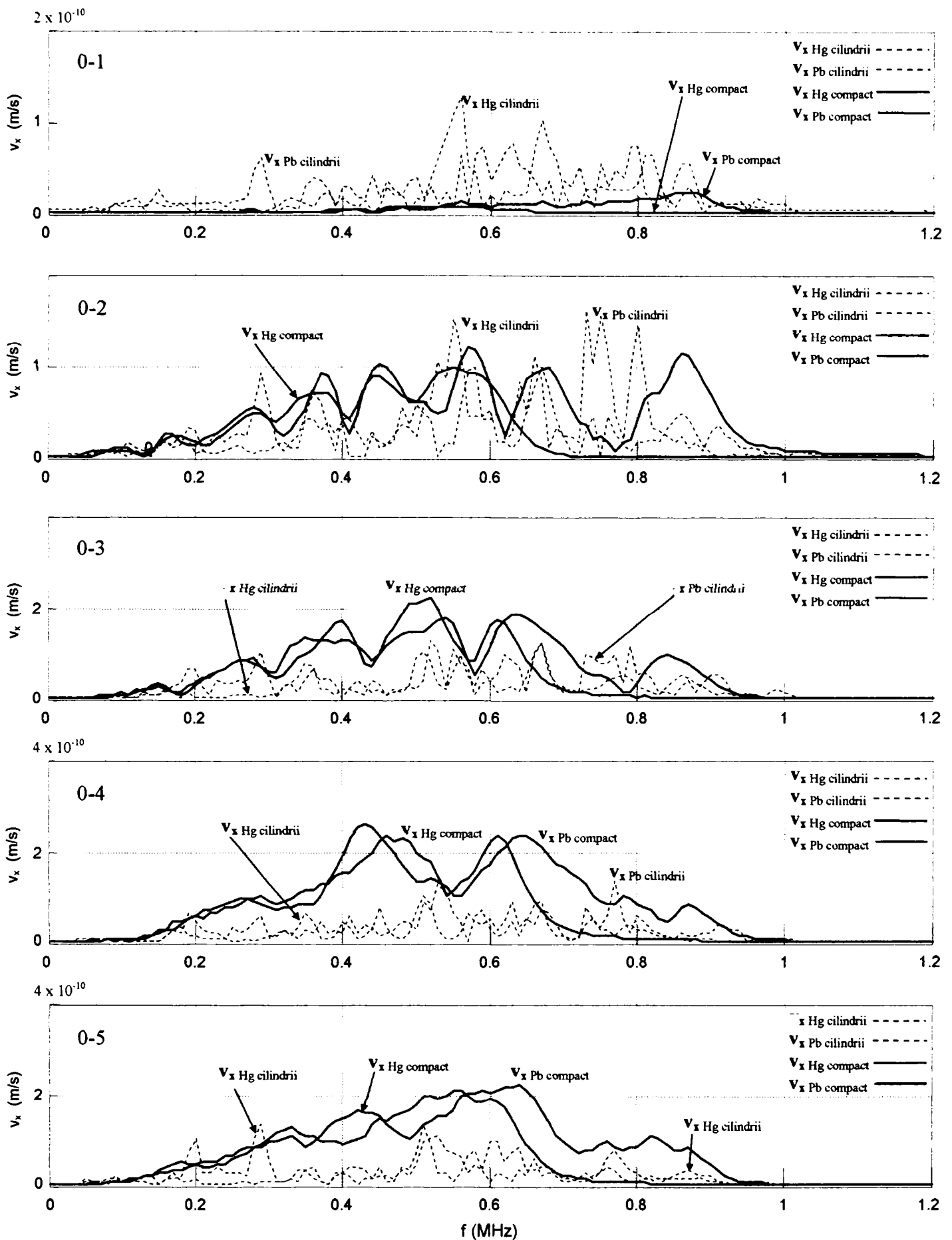
**Fig. 6-166.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor  $v_x$ ,  $v_y$  înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în "0", corespunzătoare Fig. 6-164 (cilindrii perforați în masa de aluminiu sunt umpluți cu mercur având parametrii din Tab. 6-4). Așa cum se observă, cele două spectre nu sunt identice. Cu toate acestea ambele prezintă o bandă aproximativ interzisă pe domeniul  $[0.2, 0.3]$  MHz, ceea ce înseamnă că spectrul vitezei totale  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  are o bandă interzisă în gama de frecvențe mai sus menționată.



**Fig. 6-167. (1)** Spectrele de amplitudine ale semnalelor  $v_x$  Hg cilindrii înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în "0", corespunzătoare Fig. 6-164 (cilindrii perforați în masa de aluminiu sunt umpluți cu mercur având parametrii din Tab. 6-4). **(2)** Spectrele de amplitudine ale semnalelor  $v_x$  Hg înregistrate în aceleași locații ca la punctual 1 atunci când masa de Al se învecinează cu un semispațiu de Hg obținut prin extinderea la infinit sus, jos și dreapta a masei dreptunghiulare din Fig. 6-165.



**Fig. 6-168.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor  $v_x$  înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în “0”, corespunzătoare Fig. 6-164. Sunt luate în considerație două situații: (1) cilindrii sunt umpluți cu Hg, (2) cilindrii sunt umpluți cu Pb. Doar în cazul mercurului se poate spune că avem de-a face cu o bandă (aproximativ) interzisă în intervalul  $[0.2, 0.3]$  MHz.



**Fig. 6-169.** Spectrele de amplitudini ale semnalelor  $v_x$  înregistrate în punctele 1, 2, 3, 4, 5, atunci când excitația se găsește în "0", corespunzătoare Fig. 6-164 (linie punctată) și Fig. 6-165 (linie plină). Pentru fiecare din cele două structuri sunt luate în considerație două situații: (1) materialul de umplere este Hg, (2) materialul de umplere este Pb. Pe ansamblu se observă că structura de cristal elastic din Fig. 6-164 atenuează mai bine semnalele incidente decât cea din Fig. 6-165, excepție făcând direcția 0 – 1.



### 6.3.3. Concluzii referitoare la “cristalele elastice”

Despre structurile periodice compuse din două materiale cu proprietăți elastice distincte se pot face următoarele afirmații:

- Modifică viteza de propagare a undelor elastice. Fig. 6-126, Fig. 6-127 arată clar o încetinire a vitezei de propagare a perturbației elastice ce traversează structura cu perforații repetitive, față de unda care se propagă în zona compactă a structurii.
- Structurile fără repetitivitate (Fig. 6-139) și cele cu periodicitate pe o singură dimensiune (Fig. 6-142) sunt superioare celor cu repetitivitate bidimensională (Fig. 6-140, Fig. 6-141) doar în ceea ce privește atenuarea perturbațiilor elastice pe direcția 0-1. Pe celelalte direcții atenuările celor trei tipuri de structuri sunt asemănătoare.
- Caracteristic cristalelor elastice cu periodicitate bidimensională este capacitatea lor de filtrare selectivă a spectrului semnalului incident, indiferent de direcție. La materialele fără repetitivitate sau cu periodicitate pe o singură direcție, capacitatea de filtrare selectivă se manifestă doar de-a lungul liniei de incidență a câmpului elastic. Pe celelalte direcții spectrul semnalului măsurat se aseamănă ca formă cu cel al semnalului incident.
- O particularitate (performanță) unică a “cristalelor elastice” bidimensionale este capacitatea lor de a suprima benzi întregi din spectrul perturbației incidente, indiferent de direcție și indiferent de cele două componente ale vitezei de oscilație,  $v_x$  și  $v_y$ . (Fig. 6-164, Fig. 6-166).
- O structură periodică bidimensională are caracteristici de filtrare (rejectare de benzi de frecvență) cu atât mai bune cu cât cele două materiale din care este compusă contrastează mai puternic din punct de vedere al parametrilor elastici ( $\rho_1 v_1^2$  mult diferit de  $\rho_2 v_2^2$ ).

## 7. Tehnici de vizualizare a formei defectelor de material

### 7.1. Introducere

Metodele de punere în evidență a neomogenităților de material, analizate până acum, dau indicații îndeosebi despre existența acestora, fără a putea furniza informații clare asupra aspectului lor. În continuare se prezintă un procedeu de detecție numit tomografiere, prin care geometria defectului este pusă în evidență.

Tomografierea este o modalitate de calculare (reconstrucție) a formei unui obiect pornindu-se de la proiecțiile generate prin "iluminarea" sa sub diverse unghiuri cu o radiație oarecare, ce poate fi de natură electromagnetică sau elastică. În cazul în care radiația folosită are o lungime de undă mult mai mică decât dimensiunile corpului studiat, metoda matematică de reconstrucție pe baza cunoașterii proiecțiilor este mai simplă, neînregistrându-se fenomene de difracție. Pentru lungimi de undă mari, cazul undelor mecanice, difracția trebuie luată în considerație în majoritatea situațiilor [7-1], [7-2], [7-4].

### 7.2. Tomografierea cu unde elastice ce se propagă în linie dreaptă

Un lucru important ce trebuie stabilit de la început este ordinul de mărime al unui potențial defect care ar putea fi tomografiat folosindu-se ipoteza simplificatoare a inexistenței difracției. Considerând că undele elastice în solide au viteze cuprinse între 2000 și 6000 m/s, o oscilație cu frecvența de 1 MHz are lungimea de undă,  $\lambda$ , în intervalul 2 – 6 mm. În consecință dimensiunile defectului ar trebui să fie cu minim două ordine de mărime mai mari ca  $\lambda$ , adică în domeniul decimetrelor sau chiar mai mult. Cu aceste precizări se va trece la prezentarea unei metodei matematice de reconstrucție tomografică ce are la bază Teorema Fourier a Secțiunii (Fourier Slice Theorem) care se enunță astfel: *Transformata Fourier monodimensională a proiecției la unghiul  $\theta$  a unui obiect definit prin distribuția  $f(x,y)$ , este egală cu transformata Fourier bidimensională a lui  $f(x,y)$  pe o secțiune radială ce traversează obiectul la unghiul  $\theta$*  (Fig. 7-1) [7-3].

Efectuând așadar transformatele Fourier pentru un număr mare de proiecții, la limită infinit, sub unghiuri ce variază de la 0 la 360° se obține practic transformata Fourier bidimensională a distribuției,  $F_{2D}\{f(x,y)\}$ , care prin inversie furnizează funcția  $f(x,y)$  ce este în relație directă cu forma defectului.

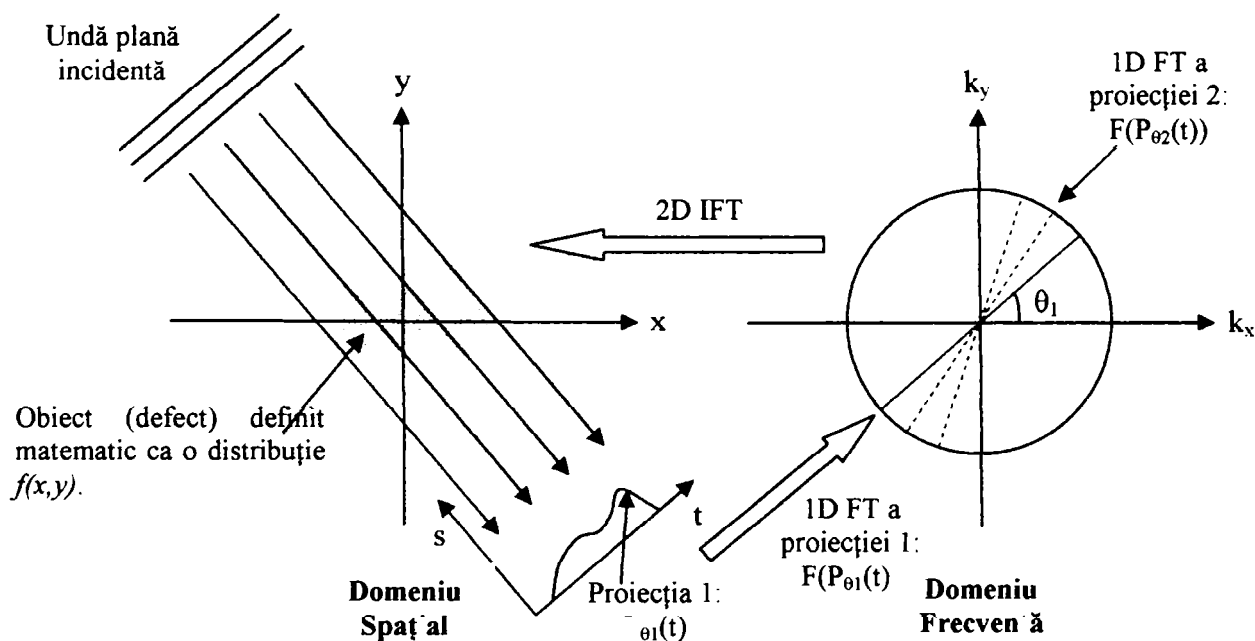


Fig. 7-1. Descrierea schematică a procedurii de reconstrucție tomografică a defectelor, din proiecții.

Pentru demonstrarea teoremei de mai sus se pleacă de la definiția transformatelor Fourier 1D, 2D și a proiecției sub unghiul  $\theta$ . Se pot scrie astfel următoarele expresii în coordonate carteziene:

$$(a) \text{ 1D FT : } F(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jk_x x} dx, \quad (b) \text{ 2D FT : } F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (7-1)$$

Transformata bidimensională inversă are forma:

$$\text{2D IFT : } f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y)e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (7-2)$$

În coordonate polare  $F(k_x, k_y)$  se scrie sub forma  $F(k_r, \theta)$ , în care:

$$\begin{aligned} k_x &= k_r \cos \theta \\ k_y &= k_r \sin \theta \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama arată un sistem de coordonate polare în planul } k_x-k_y. \text{ Axele } k_x \text{ și } k_y \text{ sunt indicate. Un vector } k_r \text{ este desenat în primul cadran, făcând un unghi } \theta \text{ cu axa } k_x. \end{array} \quad (7-3)$$

Trebuie făcută precizarea că unda incidentă pe obiect interacționează cu el suferind atenuări și reflexii pe direcția de propagare. În aceste condiții se definește proiecția  $P_\theta(t)$  ca fiind integrala de linie de-a lungul direcției  $s$  paralelă cu calea de propagare (Fig. 7-1):

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds \quad (7-4)$$

Relațiile de legătură dintre  $(t, s)$  și  $(x, y)$  sunt:

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}, \quad (7-5)$$

$t, s$  sunt ambele coordonate spațiale,  $t$  neavând nici o legătură cu timpul. Ținând seama de ( 7-3 ), ( 7-4 ) transformata Fourier a lui  $P_\theta(t)$  este:

$$F(P_\theta(t)) = S_\theta(k_r) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t)e^{-jk_r t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s)e^{-jk_r t} dt. \quad (7-6)$$

Efectuând schimbările de variabilă din  $(s, t)$  în  $(x, y)$  se ajunge la *Teorema Transformatei Fourier a Secțiunii*:

$$S_\theta(k_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-jk_r(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy = F(k_r, \theta) \quad (7-7)$$

În concluzie efectuând  $F\{P_\theta(t)\}$  la unghiurile  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$  se obține  $F(k_x, k_y)$  pe linii radiale la unghiurile  $\theta_1, \dots, \theta_N$ . Dacă  $N$  este suficient de mare se realizează un estimat  $\hat{F}(k_x, k_y)$  de bună calitate a lui  $F(k_x, k_y)$  pentru orice  $k_x, k_y$ . Inversând pe calculator  $\hat{F}(k_x, k_y)$  prin procedeul IFFT se ajunge la  $\hat{f}(x, y)$  și cu aceasta procesul de identificare a formei defectului este încheiat.

Efectuarea unei transformate Fourier 2D este o operațiune mare consumatoare de resurse de calcul îndeosebi atunci când se dorește obținerea unor rezoluții mari. Există însă o metodă de reconstrucție alternativă care nu implică inversia bidimensională. Astfel, se presupune pentru început că  $F(k_x, k_y)$  este cunoscut în mod exact. Făcând schimbarea de variabilă  $(k_x, k_y) \rightarrow (k_r, \theta)$  expresia ( 7-2 ) scrie după cum urmează:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(k_r, \theta)e^{jk_r(x \cos \theta + y \sin \theta)} k_r dk_r d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(k_r, \theta)e^{jk_r(x \cos \theta + y \sin \theta)} k_r dk_r d\theta + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(k_r, \theta + \pi)e^{jk_r(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))} k_r dk_r d\theta$$

Deoarece:

$$\begin{aligned} F(k_r, \theta + \pi) &= F(-k_r, \theta) \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta \\ \sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama arată două linii radiale în planul } k_x-k_y. \text{ Una este în primul cadran la unghi } \theta \text{ și este etichetată } F(k_r, \theta). \text{ Cealaltă este în al treilea cadran la unghi } \pi + \theta \text{ și este etichetată } F(-k_r, \theta). \end{array} \quad (7-8)$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(k_r, \theta + \pi) e^{jk_r(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))} k_r dk_r d\theta = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 F(k_r, \theta) e^{jk_r(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))} (-k_r) dk_r d\theta \quad (7-9)$$

În consecință:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(k_r, \theta) e^{jk_r(x \cos \theta + y \sin \theta)} |k_r| dk_r d\theta = \int_0^{\pi} \overbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(k_r) e^{jk_r t} |k_r| dk_r \right]}^{Q_{\theta}(t)} d\theta \quad (7-10)$$

$Q_{\theta}(t)$  nu este chiar  $P_{\theta}(t)$  (adică proiecția cunoscută din măsurători fizice), putându-se scrie ca o convoluție între  $P_{\theta}(t)$  și o funcție  $h(t)$ :

$$Q_{\theta}(t) = P_{\theta}(t) * h(t), \quad (7-11)$$

unde  $h(t)$  este dat de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-jk_r t} dt = |k_r| \text{ sau } h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |k_r| e^{jk_r t} dk_r \quad (7-12)$$

Se disting două modalități de evaluare a lui  $Q_{\theta}(t)$  cu ajutorul calculatorului:

- 1) Se calculează  $h(t)$ , se efectuează convoluția  $P_{\theta}(t) * h(t)$  după care  $f(x, y)$  se obține ca fiind  $\int_0^{\pi} [P_{\theta}(t) * h(t)] d\theta$ ,
- 2) Se calculează  $F\{P_{\theta}(t)\}$  după care  $f(x, y)$  se obține ca fiind  $\int_0^{\pi} F^{-1}\{F(P_{\theta}(t))|k_r|\} d\theta$  unde  $t = x \cos \theta + y \sin \theta$ ,  
 $k_x = k_r \cos \theta$ ,  $k_y = k_r \sin \theta$ .

Din punct de vedere al efortului de calcul este mai eficient de realizat convoluția a două funcții  $f(t)$  și  $g(t)$  prin înmulțirea transformatei Fourier rapide și efectuarea inversului rezultatului, decât folosind formula

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau; \text{ și ca urmare metoda a doua este preferată.}$$

Algoritmul de evaluare al distribuției  $f(x, y)$  din proiecții poate fi rezumat după cum urmează:

- a) se setează  $f(x, y) = 0$ , oricare ar fi  $x, y$ .
- b) se măsoară proiecția  $P_{\theta_1}(t)$ .
- c) se efectuează transformata Fourier rapidă a proiecției  $P_{\theta_1}(t)$ .
- d) se efectuează produsul  $F\{P_{\theta_1}(t)\}|k_r|$ .
- e) se calculează transformata Fourier rapidă inversă a produsului de la punctul anterior, rezultatul obținut fiind o secțiune a lui  $f(x, y)$  la unghiul  $\theta_1$ .
- f) Se repetă pașii b), c), d), e) pentru proiecțiile sub unghiurile  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n \in [0, \dots, 360^\circ]$ .

## 7.3. Tomografierea cu unde elastice ținând cont de fenomenul de difracție

### 7.3.1. Introducere

Teoria dezvoltată în paragraful precedent nu ține cont de difracție, fenomen extrem de pregnant în cazul interacțiunii undelor elastice cu diverse corpuri [7-6]. Atunci când dimensiunea defectului de material devine comparabilă cu lungimea de undă, proiecția acestuia nu mai poate fi exprimată ca o integrală de linie ( formula ( 7-4 ) ). Trebuie găsită o altă modalitate de punere în evidență a unei legături matematice între proiecție și proprietățile fizice ale defectului [7-7].

În general interacțiunea dintre un obiect și o perturbație elastică este modelată de o ecuație cu derivate parțiale. În cazul mediilor gazoase sau lichide ce înglobează doar obiecte gazoase sau lichide aceasta se obține eliminând presiunea din sistemul ( 3-39 ). Se ajunge astfel la o ecuația de propagare, numită și ecuația acustică, care are forma:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (7-13)$$

unde  $u$  este deplasamentul de la poziția de echilibru iar  $c$  viteza de propagare a perturbației.

Pentru situația generală în care unda elastică traversează un amestec de corpuri în diverse stări de agregare ecuația de interacțiune este dată de expresiile ( 3-40 ) sau ( 3-41 ), care așa cum s-a arătat conduc în general la apariția a două perturbații elastice ce se propagă cu viteze diferite Totuși în plăcile solide subțiri și pe suprafața de separație a unui mediu solid semiinfinit apare numai o singură undă importantă și în consecință se presupune că este verificată o ecuație de tip acustic. În continuare se lucrează doar cu această ecuație întrucât lucrarea de față își propune să analizeze detecția prin tomografiere doar a defectelor situate la suprafața unui solid sau în imediata vecinătate a acestuia (comparativ cu lungimea de undă a radiației elastice de sondaj).

Pornind de la ( 7-13 ) se demonstrează existența unui procedeu matematic analog Teoremei Fourier a Secțiunii, numit Teorema Fourier a Difracției, care spune în esență că: *Transformata Fourier monodimensională a proiecției la unghiul  $\theta$  a unui obiect definit prin distribuția  $f(x,y)$ , este egală cu transformata Fourier bidimensională a lui  $f(x,y)$  pe o secțiune semicirculară ce traversează obiectul.* (ca în Fig. 7-3 (b) ). Pentru demonstrație [7-3] se încearcă în ( 7-13 ) o soluție de forma:

$$u(\mathbf{r}, t) = U \exp[i(\omega t - \mathbf{k}(\mathbf{r})\mathbf{r})] = U \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r})\mathbf{r}] \exp[i\omega t] = u(\mathbf{r}) \exp[i\omega t]. \quad (7-14)$$

Rezultă astfel următoarea ecuație atemporală:

$$(\nabla^2 + k^2(\mathbf{r}))u(\mathbf{r}) = 0, \quad (7-15)$$

unde  $k(\mathbf{r}) = \omega/c(\mathbf{r})$  este frecvența spațială iar  $\omega$  frecvența temporală.

### 7.3.2. Ecuația omogenă a undei

Pentru medii omogene  $k(\mathbf{r}) = k_0$  și ( 7-15 ) devine:  $(\nabla^2 + k_0^2)u(\mathbf{r}) = 0$ ,  $k_0 = \omega_0 c_0$ . În cazul bidimensional ecuația atemporală pentru medii omogene are forma:

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial y^2} + k_0^2 u(\mathbf{r}) = 0. \quad (7-16)$$

Se presupune că ( 7-16 ) admite o soluție particulară:

$$u(\mathbf{r}) = e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (7-17)$$

unde  $\mathbf{k} = ik_{0x} + jk_{0y}$  este vectorul de propagare bidimensional iar  $u(\mathbf{r})$  o undă plană bidimensională.

Înlocuind pe ( 7-17 ) în ( 7-16 ) se ajunge la condiția pe care trebuie s-o satisfacă  $\mathbf{k}$  astfel încât  $e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}}$  să fie soluție a ecuației ( 7-16 ), și anume:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_0^2. \quad (7-18)$$

Expresia ( 7-16 ) este o ecuație liniară cu derivate parțiale, soluția generală putându-se scrie ca o sumă ponderată de soluții particulare de tip ( 7-17 ). Pentru o frecvență temporală oarecare  $\omega$ ,  $u(\mathbf{r})$  este dat de:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k_y) e^{j(\sqrt{k_0^2 - k_y^2} x + k_y y)} dk_y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(k_y) e^{j(-\sqrt{k_0^2 - k_y^2} x + k_y y)} dk_y. \quad (7-19)$$

Se observă că  $u(\mathbf{r})$  este scris ca o sumă dintre o perturbație directă și una inversă. Pentru  $k_y^2 > k_0^2$ , radicalul devine imaginar și unda plană se transformă într-o undă evanescentă, adică o undă ce se atenuază sau se amplifică pe o direcție (în cazul de față direcția  $x$ ). În practică undele evanescente apar în apropierea frontierelor dintre două medii diferite, descrescând rapid cu distanța.

Cu ajutorul lui ( 7-19 ) se va arăta în continuare că este posibilă exprimarea câmpului acustic oriunde în plan cunoscând câmpul de-a lungul unei linii [7-3] (deja lucrurile încep să semene cu Teorema Fourier a Secțiunii). Dacă se ignoră perturbația inversă, atunci soluția generală a ecuației undei este:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k_y) e^{j(\sqrt{k_0^2 - k_y^2} x + k_y y)} dk_y. \quad (7-20)$$

Fie linia pe care se măsoară câmpul dreapta determinată de ecuația  $x=0$  (Fig. 7-2). Ca o observație, orice linie poate fi descrisă de expresia  $x=0$  alegând convenabil originea sistemului de coordonate. Amplitudinea lui  $u(0, y)$  este deci cunoscută în urma măsurătorii. Pe de altă parte conform ( 7-20 ) are loc egalitatea:

$$u(0, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k_y) e^{jk_y y} dk_y = F^{-1} \{ \alpha(k_y) \} \Rightarrow \alpha(k_y) = F \{ u(0, y) \}, \quad (7-21)$$

$\alpha(k_y)$  se substituie în ( 7-20 ) obținându-se amplitudinea oriunde în dreapta liniei  $x=0$ .

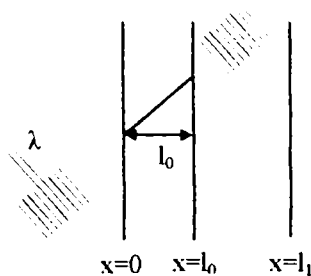


Fig. 7-2. Undă plană ce se propagă spre dreapta.

În cazul general se cunoaște amplitudinea pe dreapta  $u(x=l_0, y)$  și se dorește aflarea lui  $u(x=l_1, y)$ . Folosind ( 7-20 ),  $u(l_1, y)$  poate fi scris ca:

$$u(l_1, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k_y) e^{j(k_x l_0 + k_y y)} e^{jk_x (l_1 - l_0)} dk_y. \quad (7-22)$$

Alegând din nou sistemul de coordonate favorabil astfel ca  $l_0=0$  rezultă:

$$u(l_1, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F \{ u(0, y) \} e^{j(k_x y)} e^{jk_x l_1} dk_y. \quad (7-23)$$

Cu ajutorul lui ( 7-23 ) se poate da următorul algoritm de calcul al lui  $u(l_1, y)$  atunci când se cunoaște  $u(l_0, y)$

- 1) se efectuează transformata Fourier a lui  $u(l_0, y)$  obținându-se  $\alpha(k_y)$ .
- 2) se efectuează produsul  $\alpha(k_y) e^{j\sqrt{k_0^2 - k_y^2} l_1}$ .
- 3) se calculează  $F^{-1} \left\{ \alpha(k_y) e^{j\sqrt{k_0^2 - k_y^2} l_1} \right\}$ .

### 7.3.3. Ecuația neomogenă a undei. Teorema Fourier a Difracției

Defectele reprezintă neomogenități ale mediului de bază, ele inducând fluctuații ale lui  $k$  în raport cu valoarea sa de bază  $k_0$ . Astfel:

$$k(\mathbf{r}) = k_0 n(\mathbf{r}), \quad (7-24)$$

unde  $n(\mathbf{r}) = c_0/c(\mathbf{r})$  este indicele de refracție. În aproximația acustică viteza de propagare  $c(\mathbf{r})$  are expresia:

$$c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r}) \kappa(\mathbf{r})}}. \quad (7-25)$$

în care  $\rho(\mathbf{r})$  este densitatea iar  $\kappa(\mathbf{r})$  compresibilitatea în punctul de mediu cu vectorul de poziție  $\mathbf{r}$ .

Înlocuind ( 7-24 ) în ( 7-15 ) se ajunge la următoarea ecuație:

$$(\nabla^2 + k_0^2) u(\mathbf{r}) = -k_0^2 [n^2(\mathbf{r}) - 1] u(\mathbf{r}), \quad (7-26)$$

care se poate pune sub forma:

$$(\nabla^2 + k_0^2) u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}), \quad (7-27)$$



unde  $f(\mathbf{r}) = f(x, y) = -k_0^2 [n^2(\mathbf{r}) - 1] u(\mathbf{r})$ .

În prezența neomogenităților câmpul  $u(\mathbf{r})$  este considerat ca provenind din sumarea a două componente:

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + u_s(\mathbf{r}). \quad (7-28)$$

Cantitatea  $u_0(\mathbf{r})$ , numită și câmp incident, este perturbația care există atunci când neomogenitățile sunt absente, ea fiind soluția ecuației:  $(\nabla^2 + k_0^2)u_0(\mathbf{r}) = 0$ .  $u_s(\mathbf{r})$  este partea din câmpul total datorată neomogenităților. Înlocuind (7-28) în (7-27) se ajunge la:

$$(\nabla^2 + k_0^2)u_s(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})u(\mathbf{r}). \quad (7-29)$$

Pentru aflarea lui,  $u_s(\mathbf{r})$ , se apelează la funcțiile Green, soluții ale ecuației diferențiale:

$$(\nabla^2 + k_0^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (7-30)$$

$\mathbf{r}$  și  $\mathbf{r}'$  sunt vectorii de poziție ai punctelor destinație și sursă pentru care se intenționează calcularea funcției Green. Pentru un spațiu tridimensional infinit  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  are forma:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (7-31)$$

În cazul bidimensional soluția lui (7-30) este o funcție Hankel de ordinul zero de primul tip:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|). \quad (7-32)$$

Plecând de la definiția distribuției Dirac: "Se numește distribuție Dirac o funcțională care atribuie unei funcții  $h(\mathbf{r})$ , continuă în  $\mathbf{r} = 0$ , valoarea  $h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ ", se poate demonstra proprietatea:

$$h(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (7-33)$$

ținând cont de faptul că  $\delta(\mathbf{r})$  este o funcție pară. Înlocuind pe  $h(\mathbf{r})$  cu  $f(\mathbf{r})u(\mathbf{r})$  termenul din dreapta al ecuației (7-29) ia forma:

$$f(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \quad (7-34)$$

Folosind (7-29), (7-30), (7-34) rezultă că  $u_s(\mathbf{r})$  se scrie ca o sumă de funcții Green ponderate:

$$u_s(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}' \text{ sau } u_s(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}')u_0(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}' + \int f(\mathbf{r}')u_s(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \quad (7-35)$$

Dacă apriori  $u_s(\mathbf{r})$  este presupus mic în comparație cu  $u_0(\mathbf{r})$  ceea ce înseamnă că neomogenitatea are o slabă putere de împrăștiere a undelor elastice atunci factorul  $\int f(\mathbf{r}')u_s(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}'$  se neglijează (aproximația lui Born) și  $u_s(\mathbf{r})$  devine:

$$u_s(\mathbf{r}) \approx \int f(\mathbf{r}')u_0(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \quad (7-36)$$

Pentru a rezolva ecuația (7-36) se apelează la descompunerea funcției Hankel din (7-32) în unde plane.

$$H_0^{(1)}(k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{j[\alpha|x-x'|+\beta|y-y'|]} d\alpha, \quad (7-37)$$

unde  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y')$  iar  $\beta = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2}$ . Expresia de mai sus exprimă de fapt o undă cilindrică,  $H_0$ , ca o superpoziție de unde plane. Substituind ( 7-37 ) în ( 7-32 ) și mai departe în ( 7-36 ) se ajunge la următoarea exprimare a lui  $u_s(\mathbf{r})$ :

$$u_s(\mathbf{r}) = \frac{j}{4\pi} \int f(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{j[\alpha|x-x'| + \beta|y-y'|]} d\alpha dr' . \quad (7-38)$$

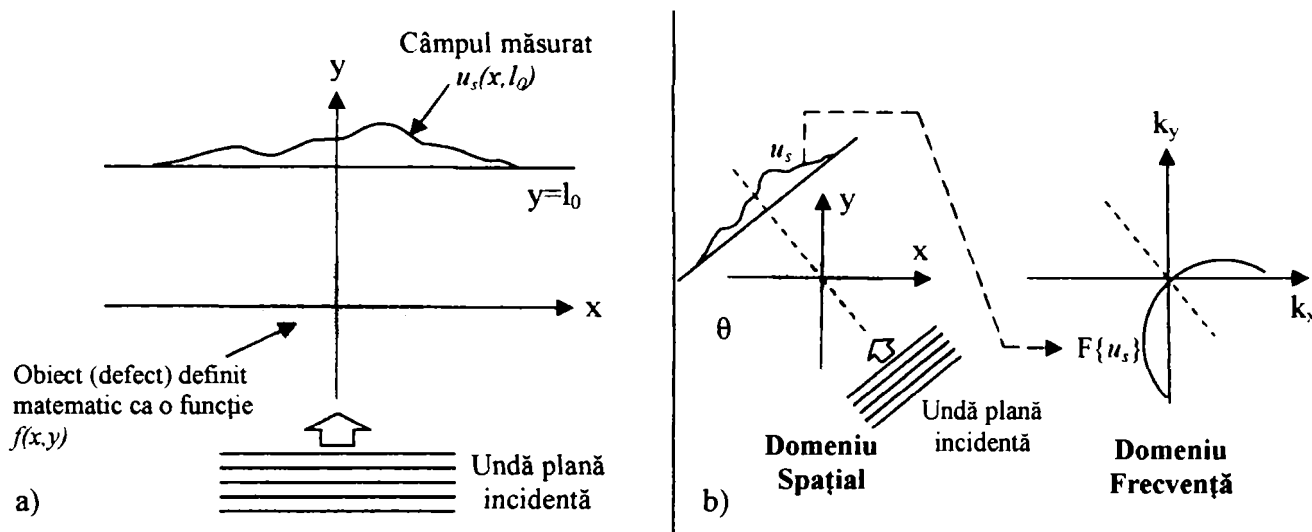


Fig. 7-3. Obiect iradiat de o undă elastică cu lungime comparabilă cu dimensiunile sale.

În continuare se utilizează un sistem de coordonate [7-7] astfel ales încât unda plană incidentă să aibă direcția pozitivă a axei  $y$  ( $u_0(\mathbf{r}) = u_0(y) = e^{jk_0 y}$ ) iar dreapta pe care se măsoară  $u_s$  să fie descrisă de ecuația  $y = l_0$  cu  $l_0 >$  orice coordonată  $y$  a obiectului ( ca în Fig. 7-3 (a) ). Ca urmare  $|y - y'|$  se înlocuiește direct cu  $|l_0 - y'|$  și ( 7-38 ) devine:

$$u_s(x, y = l_0) = \frac{j}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int \frac{f(\mathbf{r}')}{\beta} e^{j[\alpha(x-x') + \beta(l_0 - y')]} e^{jk_0 y'} dr' = \frac{j}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{j(\alpha x + \beta l_0)} \int f(\mathbf{r}') e^{-j[\alpha x' + (\beta - k_0)y']} dr' . \quad (7-39)$$

Recunoscând în cea de-a doua integrală a lui ( 7-39 ) transformata Fourier bidimensională a funcției ce desemnează obiectul, evaluată pentru  $(k_x, k_y) = (\alpha, \beta - k_0)$ ,  $u_s$  se scrie sub următoarea formă:

$$u_s(x, y = l_0) = \frac{j}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{j(\alpha x + \beta l_0)} [F_{2D}\{f(\mathbf{r})\}(\alpha, \beta - k_0)] d\alpha . \quad (7-40)$$

Pe de altă parte, transformata Fourier monodimensională a lui  $u_s(x, l_0)$  (Fig. 7-3) în raport cu  $x$  are expresia:

$$F\{u_s(x, l_0)\}(k_s) = \int_{-\infty}^{\infty} u_s(x, l_0) e^{-jk_s x} dx . \quad (7-41)$$

Substituind ( 7-40 ) în ( 7-41 ) rezultă:

$$F\{u_s(x, l_0)\}(k_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{j(\alpha x + \beta l_0)} [F_{2D}\{f(\mathbf{r})\}(\alpha, \beta - k_0)] e^{-jk_s x} d\alpha dx . \quad (7-42)$$

Folosind următoarea proprietate a integralei Fourier:

$$F\{e^{j\alpha x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha x} e^{-jk_s x} dx = 2\pi \delta(k_s - \alpha) , \quad (7-43)$$

în care  $\alpha$  este pe post de  $\omega_0$  iar  $k_s$  reprezintă  $\omega$ , relația ( 7-42 ) se rescrie sub forma:

$$F\{u_s(x, l_0)\}(k_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{j}{2\beta} e^{j\beta l_0} [F_{2D}\{f(\mathbf{r})\}(\alpha, \beta - k_0)] \right) \delta(k_s - \alpha) d\alpha . \quad (7-44)$$

Aplicând proprietatea ( 7-33 ) a funcției  $\delta$  expresia ( 7-44 ) se transformă în:

$$F\{u_s(x, l_0)\}(\alpha) = \frac{J}{2\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}} e^{j\sqrt{k_0^2 - \alpha^2} l_0} \left[ F_{2D}\{f(\mathbf{r})\}(\alpha, \sqrt{k_0^2 - \alpha^2} - k_0) \right] \text{ cu } |\alpha| < k_0. \quad (7-45)$$

Relația ( 7-45 ) constituie Teorema Fourier a Difrakției punând în legătură transformata Fourier bidimensională a obiectului (neomogenității de material) cu transformata Fourier monodimensională a câmpului perturbat de defect, pe linia de măsură. [7-7] Pe măsură ce  $\alpha$  variază de la  $-k_0$  la  $k_0$  coordonatele  $(\alpha, \sqrt{k_0^2 - \alpha^2} - k_0)$  descriu un arc semicircular în spațiul frecvență  $(k_x, k_y)$  corespunzător obiectului, ale cărui puncte terminale se găsesc la distanța  $k_0\sqrt{2}$  de origine (Fig. 7-3 (b)).

Algoritmul de calcul al funcției obiect  $f(x, y)$  din proiecții poate fi rezumat astfel: ( 7-46 )

- se setează  $f(x, y) = 0$ , oricare ar fi  $x, y$ .
- se măsoară proiecția  $u_s(x, l_0)$ .
- se efectuează transformata Fourier rapidă a proiecției  $u_s(x, l_0)$ .
- se împarte  $FFT\{u_s(x, l_0)\}(\alpha)$  la factorul  $\frac{J}{2\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}} e^{j\sqrt{k_0^2 - \alpha^2} l_0}$  obținându-se transformata Fourier 2D a obiectului pe un arc semicircular ca în Fig. 7-3 (b).
- Se repetă pașii b), c), d) rotind sistemul de coordonate din Fig. 7-3 (a) față de centrul său, cu unghiurile  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n \in [0, \dots, 360^\circ]$ , măsurarea proiecției făcându-se mereu la distanța  $l_0$  de origine. Astfel transformata Fourier bidimensională a defectului devine cunoscută de-a lungul unui mare număr de arce de cerc care acoperă în final un disc. Totuși nu se obțin eșantioane egal distanțate pe axele  $k_x$  și  $k_y$ , astfel încât să se poată aplica direct IFFT 2D.
- Se folosește un algoritm de interpolare a eșantioanelor, obținute la punctul e), pe un grid rectangular.
- Se aplică IFFT 2D eșantioanelor de la punctul f).

### 7.3.4. Interpolarea în domeniul frecvență

În paragraful precedent s-a stabilit un algoritm de calcul al formei unei neomogenități de material atunci când sunt cunoscute proiecțiile sale. Totuși pasul e) nu a fost suficient detaliat. Se alege tratarea sa într-un paragraf separat deoarece acesta constituie un întreg algoritm în sine [7-5].

Măsurarea câmpului proiecție din Fig. 7-3 (a) se face în majoritatea cazurilor cu un dispozitiv care eșantionează cantitatea  $u_s(x, l_0)$  la intervale spațiale echidistante. Așadar,  $FFT\{u_s(x, l_0)\}(\alpha)$  se va obține sub forma unui set de eșantioane egal distanțate în domeniul frecvență. Folosind expresia ( 7-45 ) se constată că eșantioanele transformatei Fourier 2D nu mai reprezintă puncte distribuite uniform ( pe un arc de cerc ).

$$\underbrace{[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]}_{\text{Echidistante}} \xrightarrow{\text{NU implică}} \underbrace{\left[ (\alpha_1, \sqrt{k_0^2 - \alpha_1^2} - k_0), (\alpha_2, \sqrt{k_0^2 - \alpha_2^2} - k_0), \dots, (\alpha_n, \sqrt{k_0^2 - \alpha_n^2} - k_0) \right]}_{\text{Echidistante}} \quad (7-47)$$

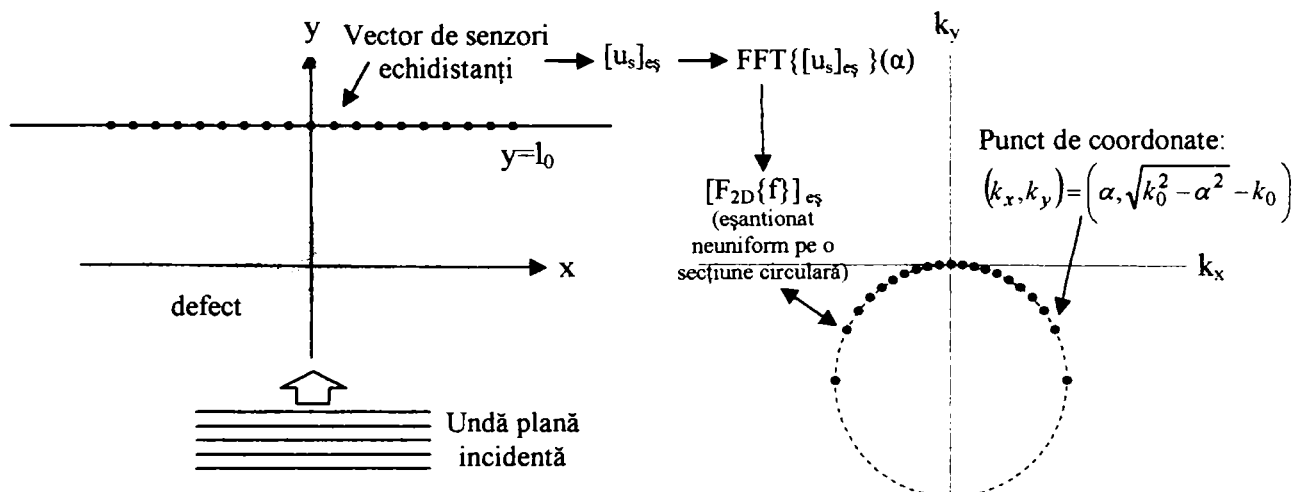


Fig. 7-4. Puncte de coordonate:  $k_x(\alpha), k_y(\alpha)$  pentru cazul particular în care unda incidentă e paralelă cu  $Oy$ .

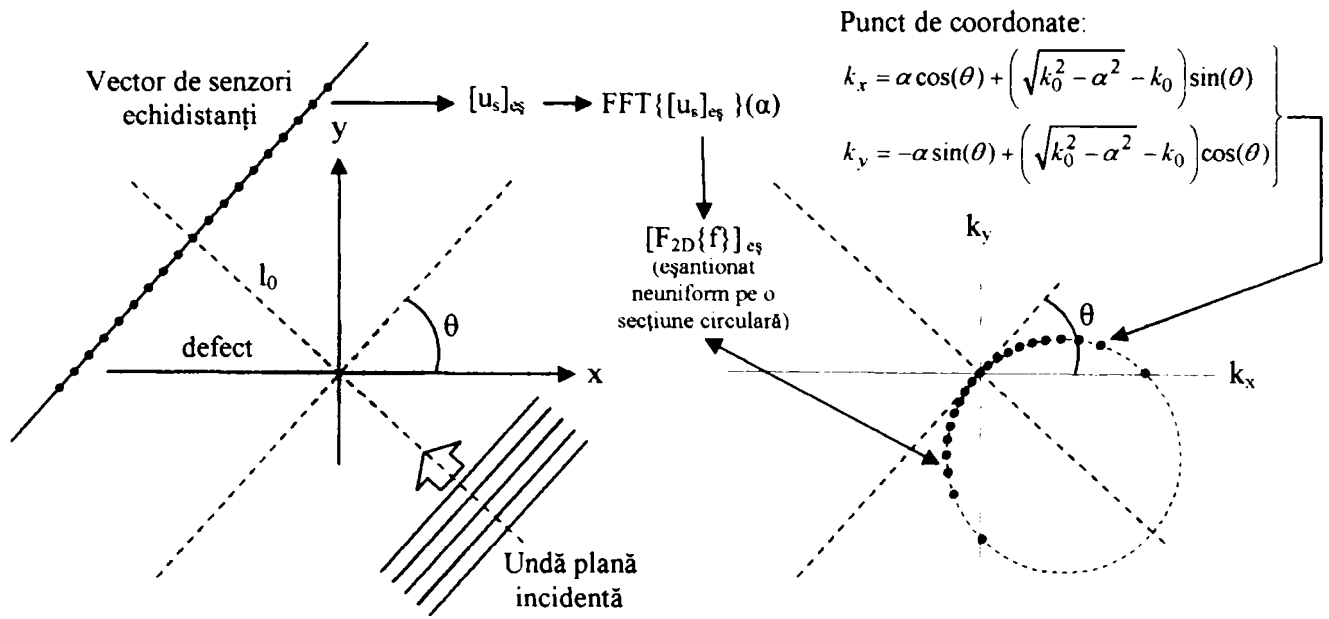


Fig. 7-5. Puncte de coordonate:  $k_x(\alpha, \theta)$ ,  $k_y(\alpha, \theta)$  în cazul general. Pentru  $\theta=0$  rezultă graficul din Fig. 7-4.

Graficele din Fig. 7-6 - Fig. 7-9 pun în evidență configurația eșantioanelor din domeniu frecvență, obținute prin iradierea obiectului testat cu o undă elastică monocromatică incidentă sub opt, respectiv șaisprezece unghiuri. În ambele cazuri se remarcă o densitate de eșantionare, mare spre centrul de rotație și mică spre periferie. În ce măsură acest lucru constituie un impediment sau nu rămâne de dovedit prin simulări numerice. O altă observație care trebuie remarcată se referă la eșantionarea multiplă a aceluiași punct. Așa cum se vede din Fig. 7-6 există opt puncte eșantionate de două ori și unul (cel central) de opt ori. Pentru a aplica un algoritm de interpolare este necesar ca fiecare eșantion să fie distinct și în consecință dublurile trebuie eliminate.

În ceea ce privește algoritmul propriu-zis de transformare a unui domeniu eșantionat neuniform într-unul în care eșantioanele sunt cunoscute la intervale echidistante pe cele două axe de coordonate (Gridding Algorithm), acesta nu va fi prezentat ci doar folosit, așa cum nici procedura de calcul a Transformatei Fourier prin utilizarea metodei FFT, nu este abordată. Ambele metode se găsesc implementate în pachetele software de prelucrări numerice (de exemplu în MATLAB). Este suficientă introducerea valorii și poziției eșantioanelor neuniforme ca argumente ale unei subrutine de calcul, pentru ca utilitarul matematic să returneze valorile eșantioanelor corespunzătoare unui grid uniform.

Pentru a avea o acoperire cât mai bună a spațiului  $(k_x, k_y)$  cu eșantioane, se poate mări numărul de unghiuri sub care este iluminat corpul testat, lucru destul de simplu de realizat. Totuși există și o altă metodă de sporire a gradului de acoperire fără a crește numărul de incidențe, așa cum reiese din graficele

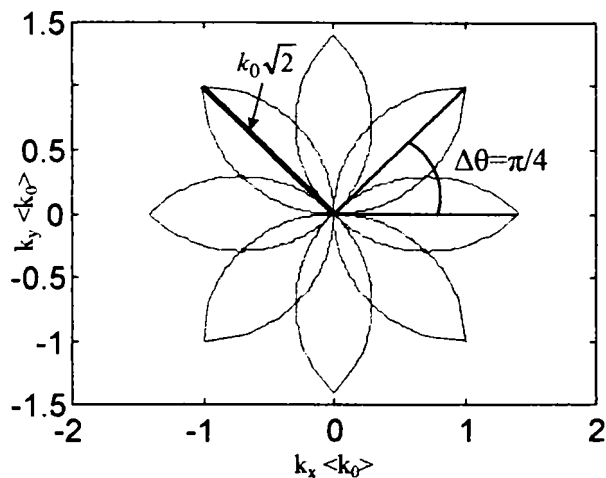


Fig. 7-6. Profilul traseelor în spațiul frecvență obținute în urma iradierii defectului sub opt unghiuri ( $\Delta\theta = \pi/4$ ).

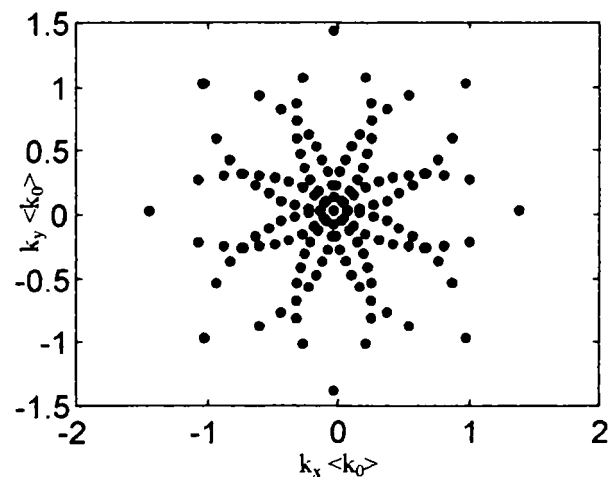


Fig. 7-7. Pozițiile eșantioanelor de-a lungul traseelor din Fig. 7-6.

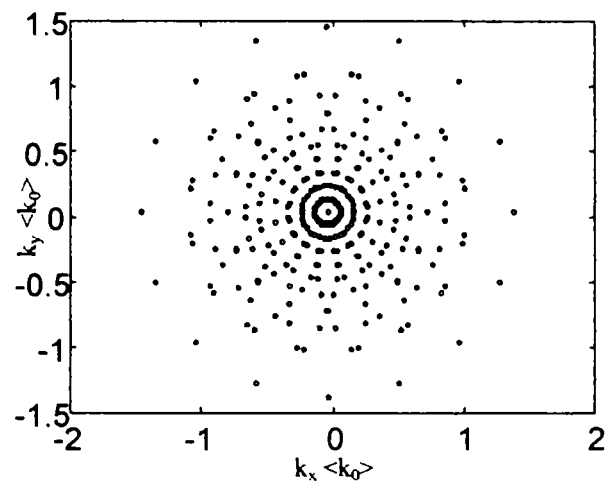
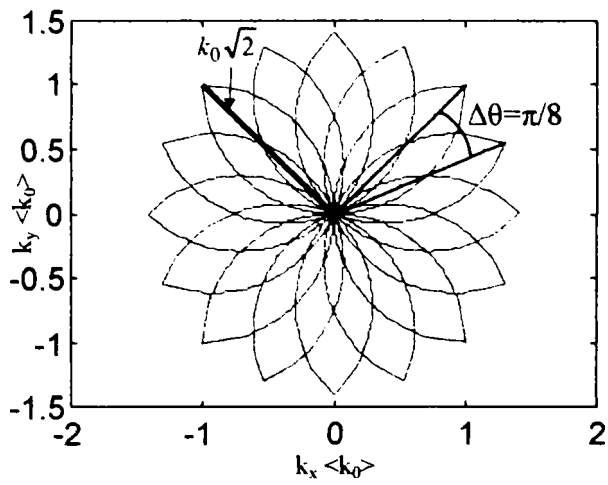


Fig. 7-8. Profilul traseelor în spațiul frecvență obținute în urma iradierii defectului sub șaisprezece unghiuri ( $\Delta\theta = \pi/8$ ).

Fig. 7-9. Pozițiile eșantioanelor de-a lungul traseelor din Fig. 7-8.

Fig. 7-10, Fig. 7-11 în care se folosesc trei unde elastice cu lungimi de undă diferite pentru același unghi de incidență. Zona eșantionată ocupă un spațiu de frecvențe mai mare iar partea centrală de rază  $k_0\sqrt{2}$  este mai bine acoperită (Fig. 7-12 - Fig. 7-17).

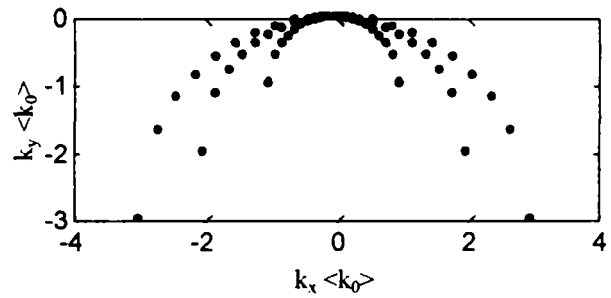
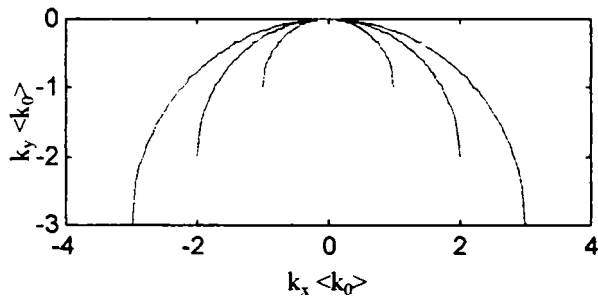


Fig. 7-10. Profilul traseelor în spațiul frecvență obținute în urma iradierii defectului sub unghiul  $\theta=0$ , cu trei unde elastice de frecvențe temporale diferite astfel încât  $k_{01}=k_0$ ,  $k_{02}=2k_0$ ,  $k_{03}=3k_0$ .

Fig. 7-11. Pozițiile eșantioanelor de-a lungul traseelor din Fig. 7-10.

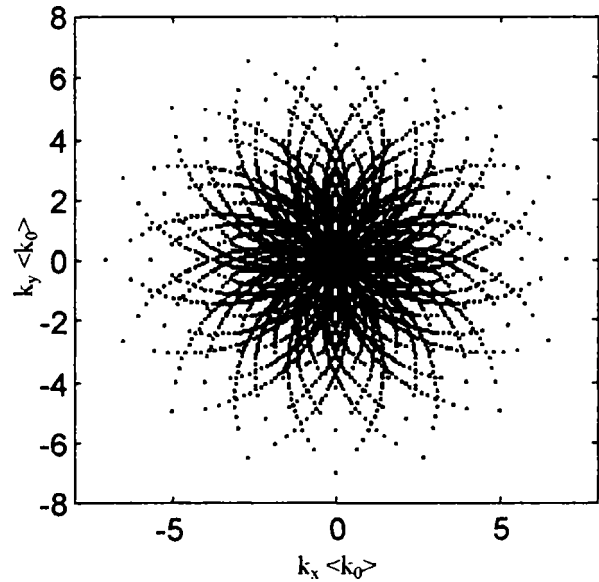
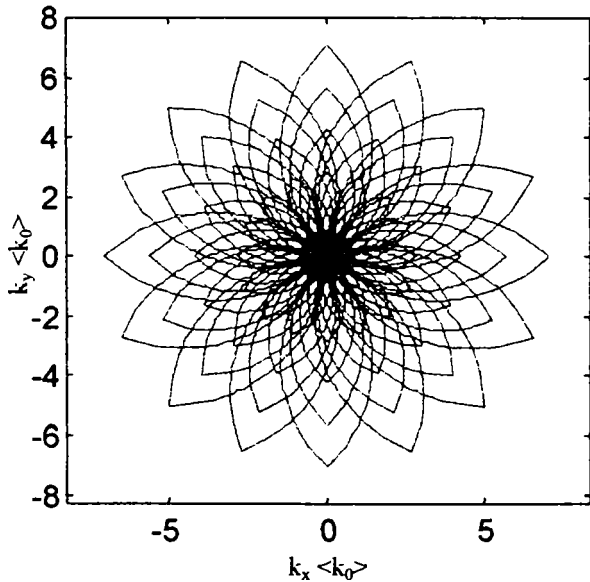


Fig. 7-12. Profilul traseelor în spațiul frecvență obținute în urma iradierii defectului sub șaisprezece unghiuri ( $\Delta\theta = \pi/8$ ), cu trei unde elastice de frecvențe temporale diferite astfel încât  $k_{01}=k_0$ ,  $k_{02}=2k_0$ ,  $k_{03}=3k_0$ .

Fig. 7-13. Pozițiile eșantioanelor de-a lungul traseelor din Fig. 7-12.

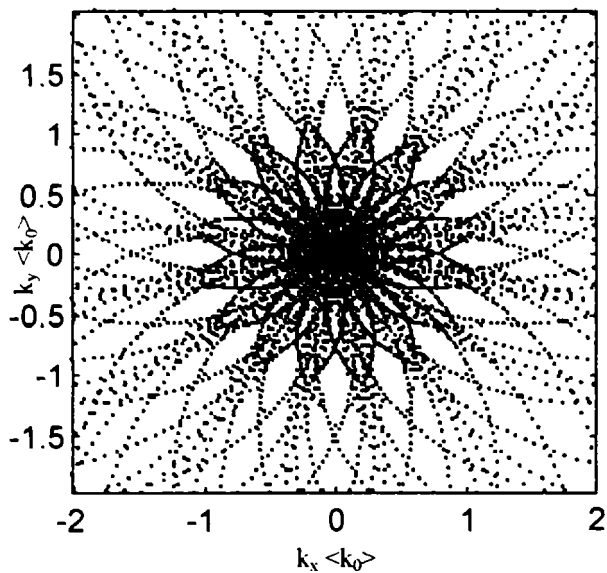


Fig. 7-14. Detaliu central al graficului din Fig. 7-13.

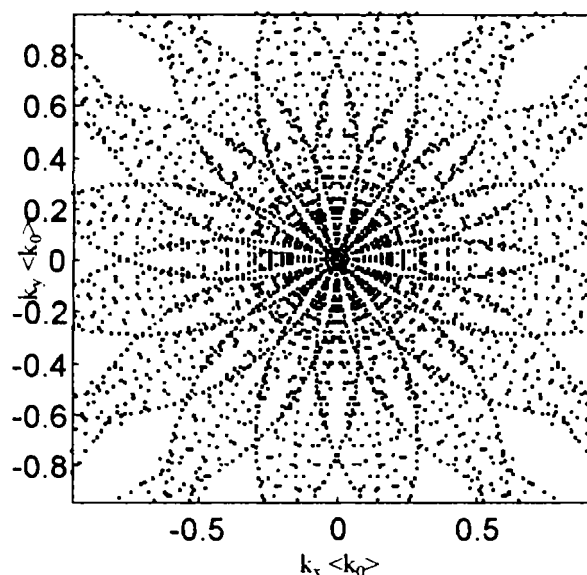


Fig. 7-15. Detaliu central al graficului din Fig. 7-14.

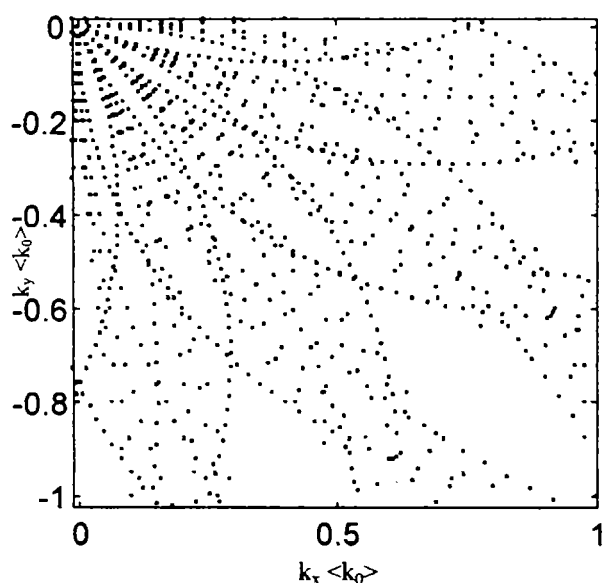


Fig. 7-16. Detaliu lateral al graficului din Fig. 7-15.

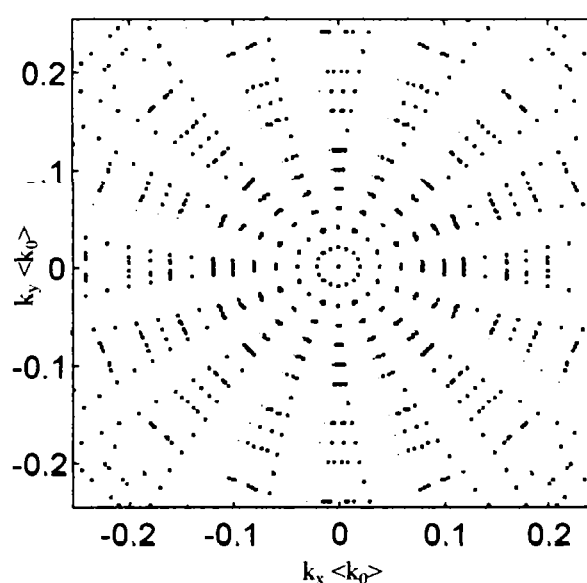


Fig. 7-17. Detaliu central al graficului din Fig. 7-15.

Ca o remarcă, se constată din Fig. 7-10 că Teorema Fourier a Secțiunii este un caz limită a Teoremei Fourier a Difrakției pentru frecvențe foarte mari. Pe măsură ce  $k_0 = 2\pi/\lambda$  crește, adică lungimea de undă a perturbației elastice folosite pentru iradierea neomogenității de material scade, arcurile de cerc presărate cu eșantioane, au raze de curbură tot mai mari tinzând la limită spre o dreaptă eșantionată echidistant.

## 7.4. Simulări numerice

Prezentarea făcută până acum se bazează pe unele concepte și aproximații a căror influență asupra imaginii tomografice trebuie studiată în mod clar. În primul rând formula de reconstituire a formei a fost dedusă utilizând modelul acustic al propagării undelor elastice care este corect doar pentru mediile fluide. În al doilea rând s-a presupus că avem de-a face cu defecte cu o slabă putere de împrăștiere a undelor elastice ceea ce se traduce prin neomogenități cu densități și viteze de propagare apropiate de cea a mediului de bază. Investigarea defectelor îngropate în metale se face însă cu unde Rayleigh sau Lamb a căror propagare este doar aproximativ descrisă de ecuația acustică. De asemenea nu toate neomogenitățile au caracterul de entități slab împrăștiătoare.



Pentru a face o analiză completă a viabilității utilizării undelor elastice în identificarea pe cale tomografică a defectelor de material trebuie urmăriți în esență pașii *algoritmului de calcul al funcției obiect*  $f(x,y)$  din proiecții ( 7-46). Marea diferență constă în inserarea unui pas suplimentar  $a_0$ ) înainte de a), și anume:

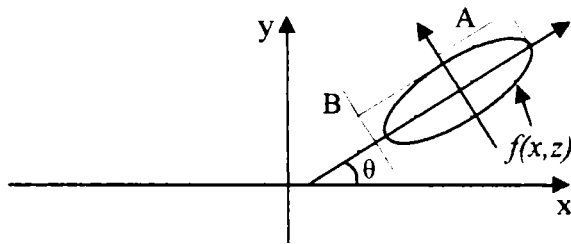
$a_0$ ) realizarea unui program care să simuleze propagarea undelor elastice prin corpul metalic și interacțiunea lor cu defectele.

Executarea integrală pe cale software a pașilor  $a_0) - g$ ) constituie obiectul paragrafului de simulări numerice.

Înainte de aceasta se va studia în ce măsură neuniformitatea eșantioanelor din spațiu frecvență induce erori în forma distribuției  $f(x,y)$ , a defectului, reconstruit.

### 7.4.1. Forma analitică a transformatei Fourier a unei elipse. Aproximarea defectelor de material prin elipse.

Transformata Fourier spațială bidimensională a unei elipse cu semiaxele  $A, B$  centrată în punctul de coordonate  $(x_0, y_0)$ , rotită cu unghiul  $\theta$  și având densitatea  $\rho$  este dată de expresia:



$$F\{f(x,y)\} = \rho e^{-i(k_x x_0 + k_y y_0)} \frac{A J_1 \left( B \sqrt{(uA/B)^2 + v^2} \right)}{\sqrt{(uA/B)^2 + v^2}} \quad (7-48)$$

unde,  $J_1$  este funcția Bessel de ordinul unu iar

$$\begin{aligned} u &= k_x \cos \theta + k_y \sin \theta \\ v &= -k_x \sin \theta + k_y \cos \theta \end{aligned} \quad (7-49)$$

În cazul în care avem de-a face cu mai multe elipse cu diverse: dimensiuni, densități, unghiuri de rotație și coordonate ale centrului, transformata Fourier bidimensională a întregului grup are expresia:

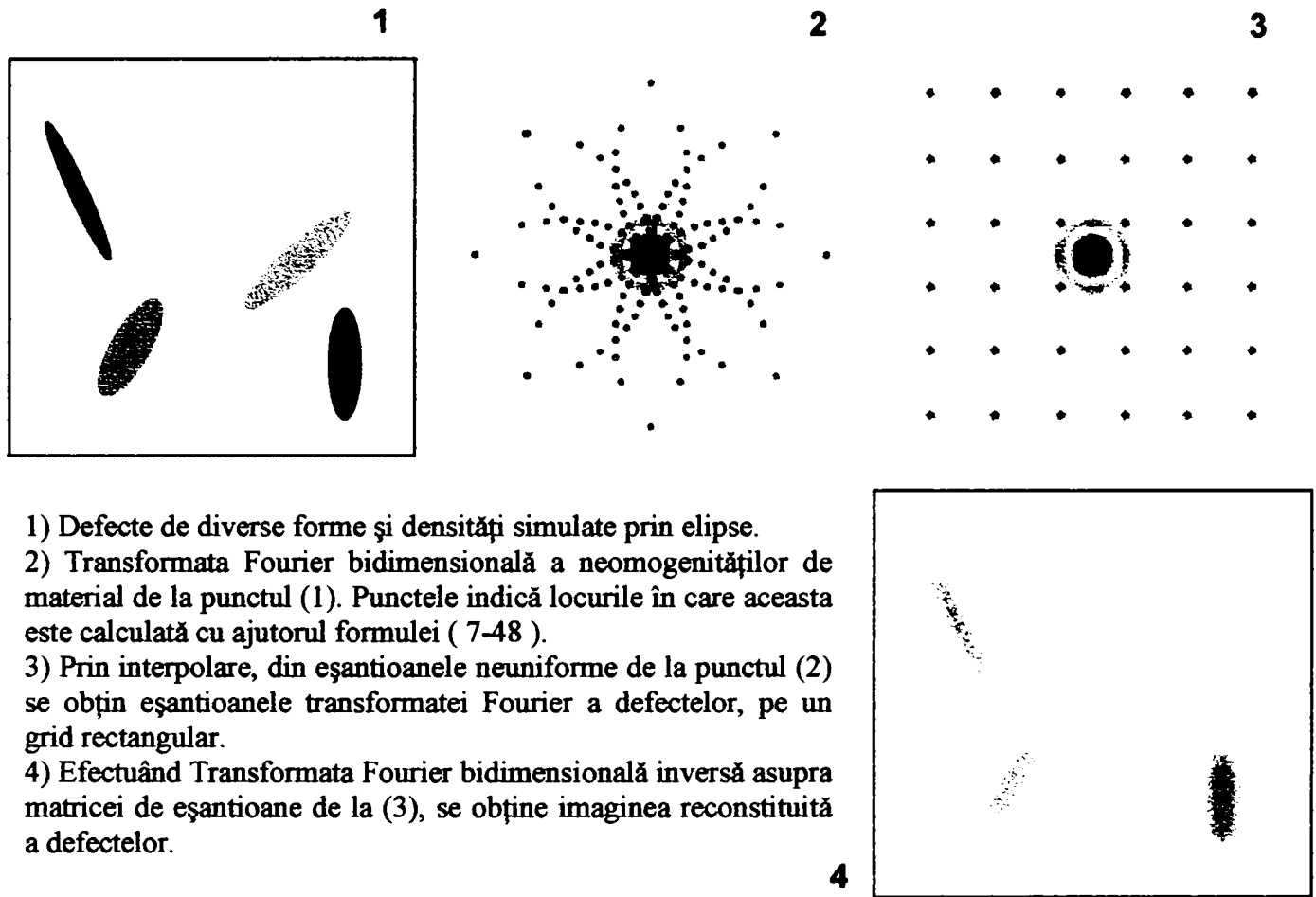
$$F\{f_{Grup}(x,y)\} = \sum_{k=1}^N F\{f_k(x,y)\}. \quad (7-50)$$

Folosind formulele ( 7-48 ) - ( 7-50 ) se găsește valoarea exactă a transformatei în orice punct  $(k_x, k_y)$  al domeniului frecvență. În cazul de față este nevoie de evaluarea eșantioanelor în puncte distribuite neuniform ca în imaginile din Fig. 7-7, Fig. 7-9, Fig. 7-13, pentru a simula datele ce în mod normal ar trebui obținute cu pașii c), d), e) ai algoritmului ( 7-46 ). Odată calculate eșantioanele, pașii f) și g) se efectuează conform lui ( 7-46 ). Astfel este posibilă testarea ultimelor două etape fără a fi nevoie de realizarea unui program care să simuleze propagarea undelor mecanice în plăcile metale. Fig. 7-18 ilustrează pe baza unor imagini intuitive cele expuse în alineatul curent. În mod ideal cadrul, 1, ar trebui să coincidă cu, 4. Apar însă erori datorate atât domeniului finit de frecvențe pe care se realizează eșantionarea cât și algoritmului de reeșantionare de tip gridding. De aceea imaginea refăcută prin inversia domeniului frecvență, 3, în domeniul spațial, 4, suferă unele distorsiuni apărând ca la ieșirea unui filtru trece jos. Fig. 7-18 - 4 prezintă o reconstrucție oarecum idealizată, în realitatea lucrurile putând sta mai rău. Dacă la erorile provenite din efectuarea calculului matematice corespunzătoare punctelor f) și g) din ( 7-46 ) se adaugă și cele provenite de la pașii  $a_0) - e)$  apare posibilitatea unor distorsiuni puternice. Este important de aflat până unde se poate merge cu gradul de distorsionare în așa fel încât ochiul uman să poată distinge forma și poziția defectelor. Apariția artefactelor este prețul plătit pentru folosirea unei radiații de sondaj cu lungimea de undă comparabilă cu cea a neomogenităților de investigat. Nu se pot realiza contururi clare ca ale obiectelor tomografiate cu radiații optice sau raze x. Din păcate acestea din urmă nu penetrează obiectele conductoare decât pe lungimi infime de zeci maxim sute de nanometri și ca urmare nu pot da nici un fel de informații asupra unor defecte îngropate sub suprafața metalelor. Undele mecanice cu toate dezavantajele lor rămân, așadar, unul din puținele procedee de investigare nedistructivă a conductorilor puternici.

Pentru modelarea pașilor  $a_0) - e)$  se utilizează în principal algoritmul cu diferențe finite dezvoltat la sfârșitul capitolului 4. Spre deosebire de capitolul 6 ( a se vedea hărțile AB scan prin transmisie și reflexie), unde neomogenitățile erau iluminate doar pe o direcție, la tomografiere este necesară repetarea iradierii la o multitudine de unghiuri, ceea ce implică o execuție repetată, mare consumatoare de timp, a

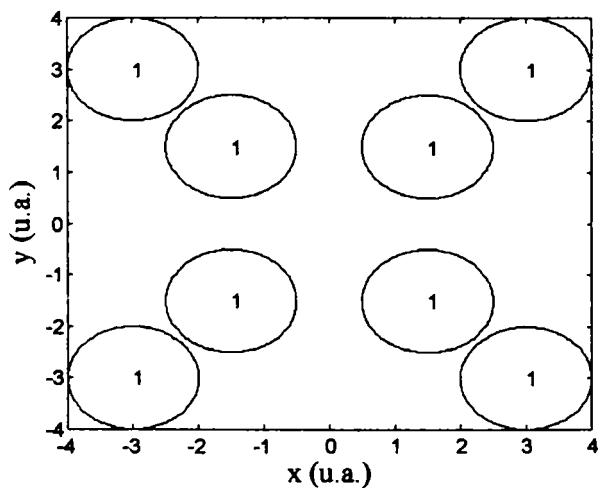
programului de simulare. Ca exemplu concret s-a folosit o masă de aluminiu având niște neomogenități de fluid (apă) dispuse ca în Fig. 7-19, Fig. 7-25. Radiația de sondaj rămâne același impuls de bandă largă din cap. 6. Spre deosebire de capitolul precedent, masa metalică se ia ca fiind înconjurată de o frontieră absorbantă cu scopul păstrării gridului numeric la dimensiuni gestionabile de către un PC.

Efectuând calcule numerice repetate corespunzând tomografiei sub 8, 16, 32, 64 unghiuri distincte, se constată o apropiere foarte bună (trebuie realizată o normare pentru ca, comparația să fie

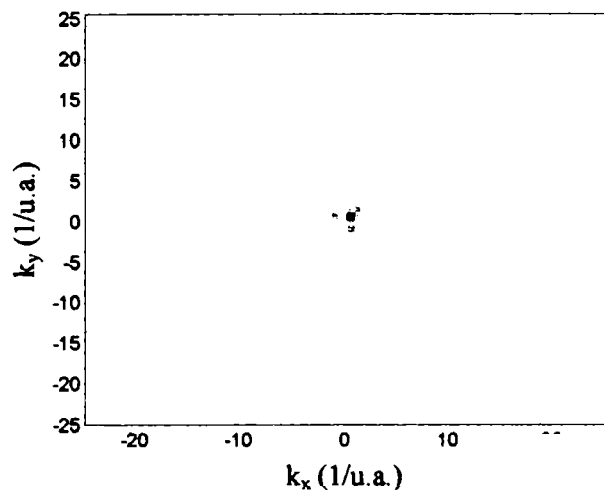


- 1) Defecte de diverse forme și densități simulate prin elipse.
- 2) Transformata Fourier bidimensională a neomogenităților de material de la punctul (1). Punctele indică locurile în care aceasta este calculată cu ajutorul formulei ( 7-48 ).
- 3) Prin interpolare, din eșantioanele neuniforme de la punctul (2) se obțin eșantioanele transformatei Fourier a defectelor, pe un grid rectangular.
- 4) Efectuând Transformata Fourier bidimensională inversă asupra matricei de eșantioane de la (3), se obține imaginea reconstituită a defectelor.

**Fig. 7-18.** Pașii care trebuiesc urmați pentru a vedea în ce măsură neuniformitatea eșantioanelor din spațiu frecvență induce erori în forma distribuției  $f(x,y)$ , a defectului, reconstruit.



**Fig. 7-19.** Cercuri de densitate (contrast)  $\rho=1$  ce reprezintă neomogenități de material. Unitatea de lungime pe  $x$  și  $y$  este arbitrară.



**Fig. 7-20.** Transformata Fourier bidimensională a cercurilor din Fig. 7-19. Negru reprezintă amplitudinea maximă iar alb pe cea minimă. Pentru calculele ce urmează se trucează domeniul de frecvență la  $[-25, 25]$ .

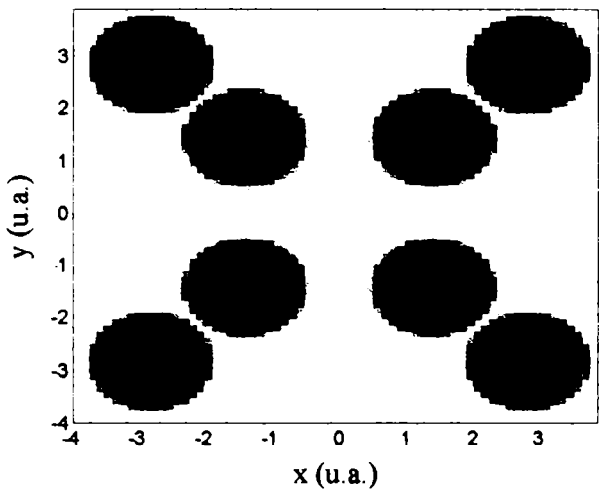


Fig. 7-21. Reconstrucția Fig. 7-19. pe baza eșantionării uniforme cu 0.74 a spectrului din Fig. 7-20. Forma cercurilor se distinge clar. Negru corespunde la  $\rho=1$ .

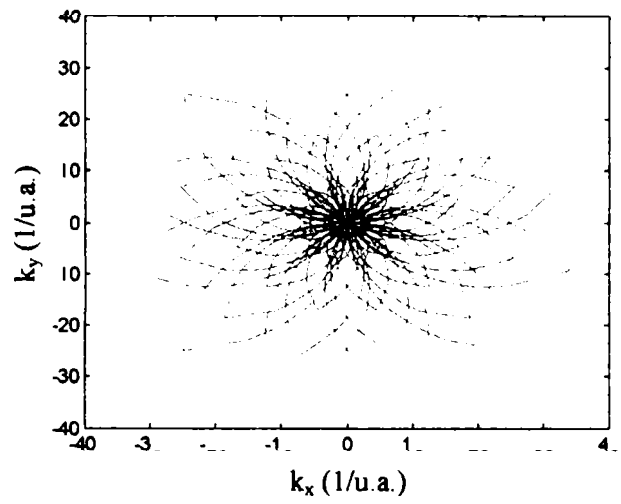


Fig. 7-22. Trasee de eșantionare neuniformă a spațiului frecvență din Fig. 7-20.

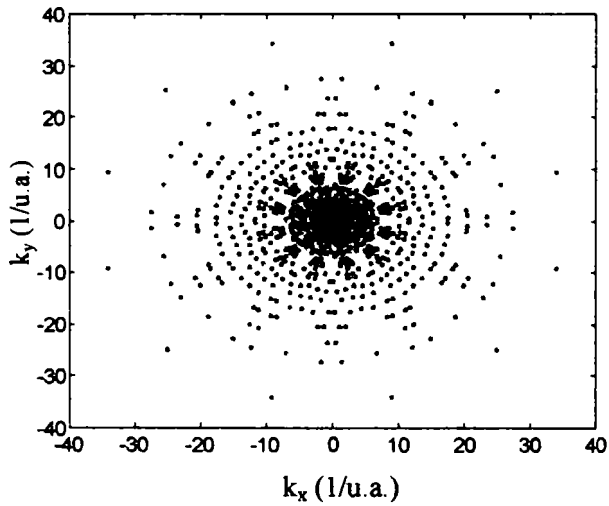


Fig. 7-23. Eșantioane distribuite neuniform de-a lungul traseelor din Fig. 7-22.

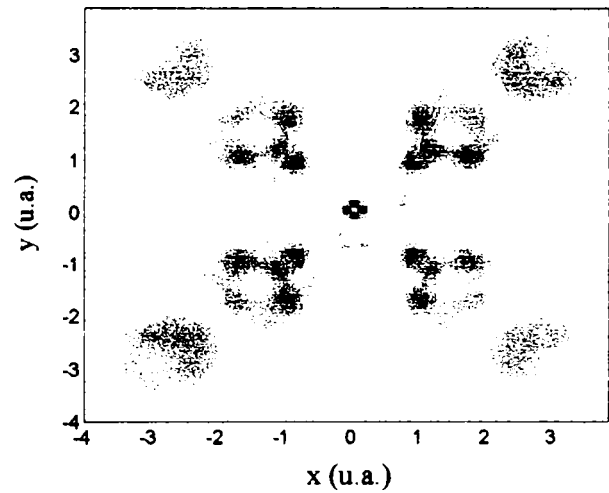


Fig. 7-24. Reconstrucția Fig. 7-19 pe baza eșantioanelor neuniforme din Fig. 7-23. Culoarea gri a cercurilor corespunde la un  $\rho=0.7$ . Apar erori de evaluare mari spre centrul figurii. Totuși se disting clar cele opt cercuri.

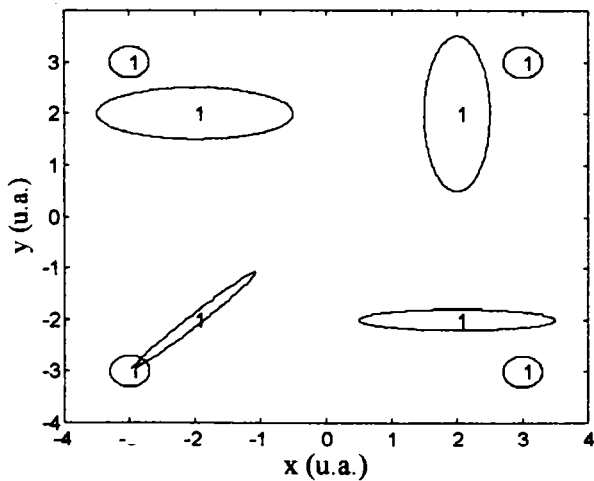


Fig. 7-25. Elipse de densitate (contrast)  $\rho=1$  ce reprezintă neomogenități de material. Unitatea de lungime pe  $x$  și  $y$  este arbitrară.

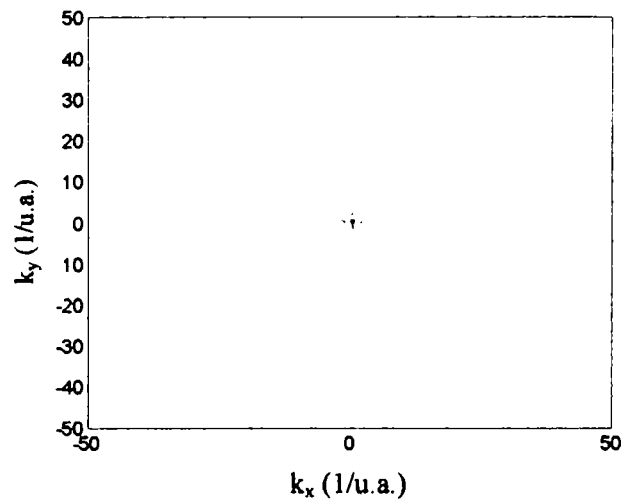


Fig. 7-26. Transformata Fourier bidimensională a elipselor din Fig. 7-25. Negru reprezintă amplitudinea maximă iar alb pe cea minimă. Pentru calculele ce urmează se trucează domeniul de frecvență la  $[-50, 50]$ .

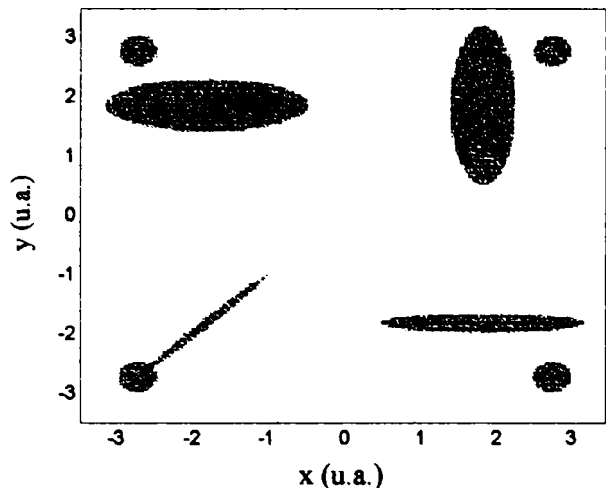


Fig. 7-27. Reconstrucția Fig. 7-25 pe baza eșantionării uniforme cu 0.82 a spectrului din Fig. 7-26. Forma elipselor se distinge clar. Negru corespunde la  $\rho=1$ .

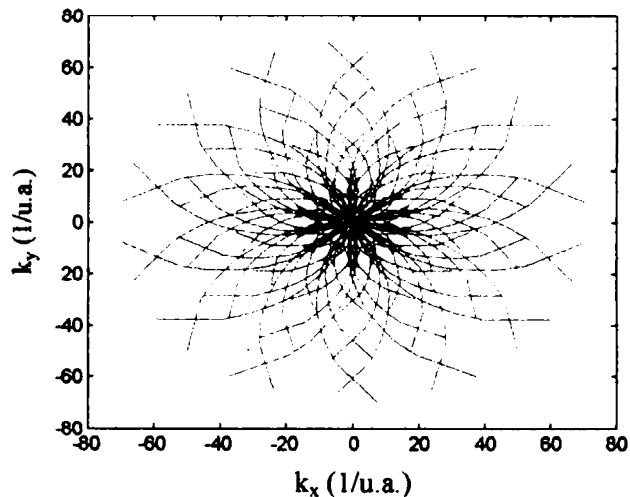


Fig. 7-28. Trasee de eșantionare neuniformă a spațiului frecvență din Fig. 7-26.

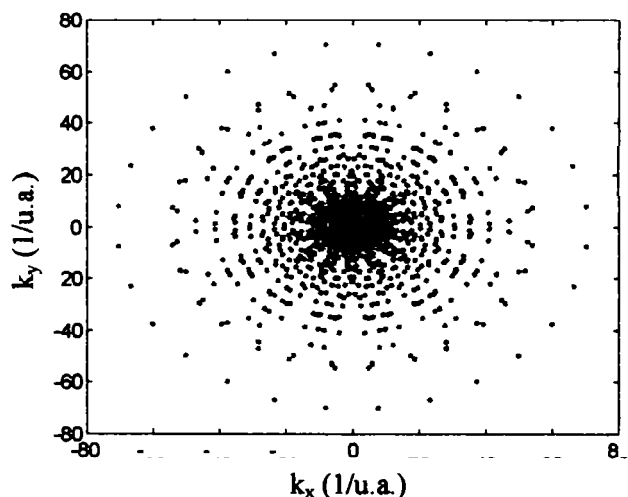


Fig. 7-29. Eșantioane distribuite neuniform de-a lungul traseelor din Fig. 7-28.

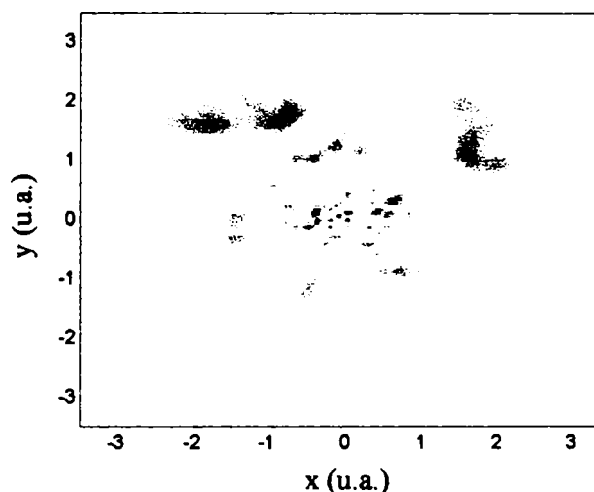


Fig. 7-30. Reconstrucția Fig. 7-25 pe baza eșantioanelor neuniforme din Fig. 7-22. Apar erori de evaluare extrem de mari. Doar două elipse se disting destul de clar.

posibilă) a reconstrucțiilor realizate cu execuția pașilor a) – g) față de imaginile “idealizate” din Fig. 7-24, Fig. 7-30 produse cu urmărirea doar a punctelor f) și g).

## 7.5. Concluzii

Este posibilă, așadar, tomografierea defectelor din materialele metalice folosind ultrasunete cu lungimi de undă relativ mari. Imaginile obținute nu sunt de o claritate deosebită, însă formele neomogenităților se disting suficient de bine. Defectele cu aspect de fisură au în general o vizibilitate destul de slabă, fiind cu greu discernabile din multitudinea de artefacte ce apar pe reconstrucția computerizată (Fig. 7-30). Neomogenitățile cu dimensiuni aproximativ egale pe cele două axe de coordonate au o vizibilitate mai bună.

## 8. Concluzii Generale

Despre detectabilitatea unei neomogenități se poate spune în general că:

- Crește cu creșterea dimensiunilor defectului.
- Este invers proporțională cu durata pulsului produs de un excitator ultrasonor. Cu cât impulsul este mai scurt cu atât detectabilitatea este mai bună.
- Crește cu creșterea contrastului dintre neomogenitate și mediul înconjurător. Astfel, un defect constituit dintr-un material moale caracterizat printr-un produs  $\rho v^2$  mic (unde  $\rho$  este densitatea materialului iar  $v$  viteza de propagare a undelor elastice) este mai ușor sesizabil în interiorul unui metal decât o neomogenitate de natură metalică ce are un  $\rho v^2$  mare.

Cele trei concluzii de mai sus nu reprezintă totuși o noutate în sine, atât calculele teoretice cât și măsurătorile practice venind în sprijinul acestora. Lucrarea de față le demonstrează însă cu ajutorul simulărilor numerice în condiții complexe de geometrie a defectelor și corpurilor care le includ. Apar însă și alți factori care au un cuvânt de spus în detecția neomogenităților, analiza acestora putând fi cu greu imaginată fără folosirea unui calculator pe care rulează un algoritm de simulare. Astfel se constată în general că:

- Defectele multifacetă tind să împrăștie energia unei incidente în toate direcțiile, “derutând” senzorul de măsură care va recepționa o amplitudine mult mai mică decât cea corespunzătoare unui defect de aceleași dimensiuni, cu proprietăți elastice identice, dar cu contururi rotunde.
- Structurile periodice constituite din alternanțe de mase cu proprietăți elastice diferite influențează în mod negativ detecția unui defect aflat în interiorul unui astfel de ansamblu sau chiar la o oarecare distanță de acesta, în cazul când fasciculul ultrasonor este obligat să traverseze zona periodică pentru a interacționa cu neomogenitatea de detectat.
- Defectele ce au una din dimensiuni mult mai mică ca celelalte (ex: fisurile), tind să treacă nedetectate când sunt iluminate ultrasonic perpendicular pe dimensiunea minimă (în lungul fisurii). De asemenea acestea sunt extrem de vizibile dacă sunt iradiate din alte unghiuri.
- În unele situații detectabilitatea unui defect crește dacă unda elastică produce rezonanțe în interiorul acestuia.

Vizibilitatea unui defecte este puternic dependentă de metoda de investigare ( prin reflexie sau prin transmisie). Astfel, se constată că:

- Semnătura prin reflexie oferă, în general, o localizare bună a defectelor în raport cu linia de excitație – măsură. Dimensiunile defectului investigat sunt însă mai greu identificabile, ecoul captat având o mărime diferită de cea a corpului pe care se reflectă unda elastică. Totuși se impun următoarele precizări.
  - Neomogenităților, de tip fisură paralelă cu direcția de propagare a undelor elastice nu produc practic nici un fel de semnătură fiind invizibile.
  - Defectele cu profil triunghiular având vârful îndreptat spre sursa ultrasonoră sunt slab vizibile indiferent de dimensiunile lor. Perturbațiile ce apar pe imaginea computerizată a semnăturii ultrasonore pot fi cu greu puse în conexiune cu forma sau poziția unui entități.
  - Defectele tip fisură oblică pe câmpul ultrasonor incident sunt observabile, însă direcțiile în care sunt îndreptate ecourile de pe imaginea prelucrată pe calculator pot fi puse în relație directă doar cu orientarea fisurilor, nu și cu dimensiunile și pozițiile lor.
- Semnătura prin transmisie dă puține informații despre adâncimea de localizare a neomogenității însă oferă date mai precise referitoare la dimensiunile sale.



- Defectele cu profil triunghiular având vârful îndreptat spre sursa ultrasonoră de excitație sunt vizibile. Umbra ultrasonoră fiind în legătură directă cu dimensiunea neomogenității. Același lucru este valabil și pentru defectele de tip fisură oblică pe câmpul incident.
- În ceea ce privește fisurile paralele cu direcția de propagare a undei incidente, semnătura lor prin transmisie este vizibilă dar dimensiunile sale diferă destul de mult de dimensiunea transversală a fisurii.
- În general tehnica de detectare prin transmisie duce la identificare unei clase mai largi de neomogenități, decât cea prin reflexie.

Tomografierea defectelor din materialele metalice, folosind ultrasunete cu lungimi de undă relativ mari, este posibilă. Imaginile obținute nu sunt de o claritate deosebită, însă formele neomogenităților se disting suficient de bine. Defectele cu aspect de fisură au în general o vizibilitate destul de slabă, fiind cu greu discernabile din multitudinea de artefacte ce apar pe reconstrucția computerizată. Neomogenitățile cu dimensiuni aproximativ egale pe cele două axe de coordonate au o vizibilitate mai bună.

Despre structurile periodice compuse din două materiale cu proprietăți elastice distincte se pot face următoarele afirmații:

- Modifică viteza de propagare a undelor elastice.
- Structurile fără repetitivitate și cele cu periodicitate pe o singură dimensiune sunt superioare celor cu repetitivitate bidimensională doar în ceea ce privește atenuarea perturbațiilor elastice pe direcția 0-1. Pe celelalte direcții atenuările celor trei tipuri de structuri sunt asemănătoare.
- Caracteristic cristalelor elastice cu periodicitate bidimensională este capacitatea lor de filtrare selectivă a spectrului semnalului incident, indiferent de direcție. La materialele fără repetitivitate sau cu periodicitate pe o singură direcție, capacitatea de filtrare selectivă se manifestă doar de-a lungul liniei de incidență a câmpului elastic. Pe celelalte direcții spectrul semnalului măsurat se aseamănă ca formă cu cel al semnalului incident.
- O particularitate (performanță) unică a "cristalelor elastice" bidimensionale este capacitatea lor de a rejecta benzi întregi de frecvență ale perturbației incidente, indiferent de direcție și indiferent de cele două componente ale vitezei de oscilație,  $v_x$  și  $v_y$ .
- O structură periodică bidimensională are caracteristici de filtrare (rejectare de benzi de frecvență) cu atât mai bune cu cât cele două materiale din care este compusă contrastează mai puternic din punct de vedere al parametrilor elastici (produsul  $\rho_1 v_1^2$  mult diferit de  $\rho_2 v_2^2$ ).

Observații relative la generarea ultrasunetelor prin efect termoelastic.

- Randamentul de transformare a energiei optice în energie termică și mai departe în cea de undă elastică se menține ridicat până la unghiuri de incidență de 70, 80°, lucru care permite amplasarea laserului excitator într-o plajă foarte mare de poziții în raport cu corpul metalic excitat.
- Deși superioară schemelor cu diferențe finite, în ceea ce privește precizia soluției, metoda spectrală elaborată în lucrare nu este totuși capabilă să conducă la vizualizarea întregului proces de formare - propagare a ultrasunetelor din metale. Faptul că energia razei luminoase este absorbită într-o zonă având o adâncime cu multe ordine de mărime mai mică ca lungimea de undă ultrasonoră, conduce la apariția unei singularități cu un spectru având un număr extrem de mare de coeficienți neneglijabili, calculele numerice fiind prohibitive.
- Pentru substanțe cu adâncimi de pătrundere mari, de ordinul lungimilor de undă ultrasonore, formula ( 5 - 120 ) dă rezultate foarte bune, perturbația mecanică putând fi urmărită atât în faza dezvoltării cât și în cea a propagării.

Constatări privind utilizarea algoritmilor cu diferențe finite tip FDTD la rezolvarea problemelor de elastodinamică, în situația folosirii unui Calculator Personal de nivelul anului 2003.

- *Discretizarea ecuațiilor elastodinamicii trebuie făcută cu mare atenție. O singură greșeală, în scrierea coeficienților tensiunilor sau vitezelor de oscilație, conduce la rezultate nonconforme cu realitatea. În cele mai multe cazuri apar deviații grosolane de la propagarea normală a undelor elastice și eroarea poate fi ușor constatată, nu însă și localizată. Cunoscuta metodă de identificare a unei greșeli de programare prin încercări din aproape în aproape nu este de nici un folos. Ca urmare sistemul de ecuații diferențiale trebuie rediscretizat iar rezultatele obținute trebuie*



comparate literă cu literă și cifră cu cifră cu prima discretizare (eronată) cu scopul stabilirii poziției greșelii.

- O atenție deosebită trebuie acordată semnalului excitator. Nu trebuie folosite în nici un caz pulsuri dreptunghiulare (excitații cu spectru extreme de întins). *Deși aparent unda elastică generată de un astfel de semnal abrupt, pare să evolueze în acord cu realitatea fizică, o comparație între două perturbații elastice generate de o excitație dreptunghiulară și respective de una de bandă limitată la  $[0, f_{max}]$  scoate în evidență diferențe mari.* Caracteristica generală a unui spațiu de calcul discretizat și excitat necorespunzător este apariția unui “zgomot” pe hărțile de distribuție, a tensiunilor sau vitezelor de oscilație, “fotografiate” la momentul de timp  $t. f_{max}$ , trebuie folosit așadar ca parametru de intrare în relațiile de stabilitate ce calculează pasul temporal, și pe cel spațial maxim.
- Viteza de propagare maximă și frecvența maximă sunt doi parametri critici. Pe de-o parte, ținând cont de condițiile de stabilitate, un exemplu simplu, arată că pentru un  $c_{max}=5000$  m/s și un  $f_{max}=10^6$  Hz pasul spațial al gridului de discretizare este  $h=c_{max}/10 \cdot f_{max}=0.5$  mm. Pe de altă parte, pentru un calculator PC cu procesor de 1.2 GHz cu 128 M RAM și rulând utilitarul Matlab 6.5, un grid de 350 x 350 celule este un maxim a ceea ce poate să gestioneze. Cuplând cele două remarci se ajunge la o dimensiune fizică a spațiului 2D supus simulării, de numai  $(350 \times 0.5) \times (350 \times 0.5) = 15$  cm x 15 cm. Pentru a putea modela un domeniu mai mare trebuie neapărat micșorat  $f_{max}$ . O scădere la jumătate a acestuia conduce la extinderea domeniului de simulare la 30 cm x 30 cm, dar și la amplificarea fenomenelor de difracție (lungimea de undă crește), lucru care se traduce prin ecouri sau umbre ultrasonore, ale unei neomogenități, mai neclare. Dacă dimpotrivă  $f_{max}$  este crescută de două ori, dimensiunile spațiului cu defecte, analizabil numeric, se restrâng la 7.5 cm x 7.5 cm. Se reduce astfel și numărul de neomogenități ce interacționează cu câmpul elastic, noua fereastră de calcul reprezentând doar ¼ din cea inițială.
- În general un avantaj major al algoritmilor FDTD, des citat în articole și lucrări ce se ocupă de analiza interacțiunii undelor elastice cu mediile neomogene (cu defecte), este “satisfacerea implicită a condițiilor de margine dintre neomogenitate și mediul de bază”. Altfel spus, este suficientă definirea parametrilor elastici: E,  $\nu$ ,  $\rho$  sau  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  în fiecare punct al gridului ce discretizează domeniul de interes, fără a mai fi necesară efectuarea unor calcule suplimentare legate de frontiere. Efectuând simulările pe calculator se constată că afirmația de mai sus este valabilă doar dacă neomogenitățile și corpul metalic în care sunt incluse, au proprietăți elastice asemănătoare. Pentru defecte cu caracteristici foarte diferite de acelea ale mediului de bază (ex: interfața apă - metal) trebuie efectuată o mediere a proprietăților de material, în zonele de tranziție, pentru a păstra stabilitatea algoritmului. În caz contrar unda elastică din structură începe să aibă comportamente vizibil nonconforme cu realitatea fizică. Algoritmul de mediere este însă simplu și se poate aplica întregii structuri investigate fără a acorda o atenție deosebită fiecărei frontiere în parte.

## 9. Contribuții

- 1) Elaborarea unui program MATLAB de analiză a propagării perturbațiilor elastice din mediile fluide ce prezintă neomogenități de aceeași natură.
- 2) Generalizarea codului elaborat la punctul (1) cu scopul rezolvării ecuației elastodinamice generale, caracteristică oricărui mediu liniar, fără pierderi, omogen și izotrop, fie el: solid, lichid sau gazos.
- 3) Folosirea softului de simulare creat la punctul anterior, pentru analiza interacțiunii ultrasunetelor cu neomogenități de diverse forme, dimensiuni și proprietăți elastice, aflate în interiorul unor obiecte metalice.
- 4) Punerea în evidență, prin modelare numerică, a capacității de filtrare selectivă, relativ la radiația ultrasonoră, manifestată de structurile compozite periodice compuse din două medii cu proprietăți mult diferite.
- 5) Testarea, prin modelare pe calculator, a viabilității folosirii tehnicii tomografice în scopul reconstrucției formei defectelor din materialele metalice. Se face precizarea că radiația de sondaj folosită este o perturbație elastică de înaltă frecvență cu lungime de undă comparabilă cu dimensiunile defectelor investigate.
- 6) Analiza cantitativă, prin modelare numerică, a fenomenelor de reflexie, transmisie și penetrare superficială, specifice trecerii undelor elastice dintr-un mediu în altul.
- 7) Elaborarea unor subrutine MATLAB cu ajutorul cărora s-au evaluat fluctuațiile de viteză, ale undelor Rayleigh și Lamb, atunci când parametrii de material variază cu cantități mici.
- 8) Întocmirea unui algoritm implementat de un program Matchad, cu scopul studierii formării și propagării pulsurilor ultrasonore care își au originea în fenomenul de expansiune termoelastice rapidă.

## Bibliografie

- [1-1] Tsung-Tsong Wu, “*Elastic Wave Propagation and Nondestructive Evaluation of Materials*”, Proc. Natl. Sci. Council ROC(A) Vol. 23, No. 6, pp. 703-715, (1999).
- [1-2] Bakker, M.C.M., “*Non-Destructive Inspection Techniques based on Elastodynamics: Development and Validation*”, Delft University of Technology, ISBN 90-9013667-3, Apr (2000).
- [1-3] H. Cygan, L. Girardi, P. Aknin, P. Simard, “*B-scan ultrasonic image analysis for internal rail defect detection*”, WCRR 2003 - Edinburgh Scotland, Sep 28th – October 1st, (2003).
- [1-4] Wolfram A. Karl Deutsch, “*Automated Ultrasonic Inspection*”, WCNDT Conference, Rome Italy, Oct. (2000).
- [1-5] John S. Popovics, Associate Member ASCE, Herbert Wigggenhauser, “*Non-Contact Laser Vibrometer Wave Sensing On Concrete*”, 15th ASCE Engineering Mechanics Conference June 2-5, 2002, Columbia University, New York, NY (2002).
- [1-6] Stephen W. Kercel, Marvin B. Klein, Bruno Pouet, “*In-Process Detection of Weld Defects Using Laser-Based Ultrasonic Lamb Waves*”, Prepared by Oak Ridge National Laboratory, Tennessee 37831-6004, U.S. for the Department of Energy under Contract DE-AC05-00OR22725, (2000).
- [1-7]<sup>B</sup> Brîndeu L., “*The Dirrect Method Used for Determination of Stability Conditions of Periodical Movements in the Case of Shock-Vibrations Systems*”, Revue Roumaine de Mathematique Pures of Appliquess. Tom XIX, Nr.6, 725-730, (1974).
- [1-8] Shiuh-Kuang Yang, “*Evaluation of Adhesive Bonded Joints Using Laser-Induced Ultrasound*”, Proc. Natl. Sci. Council ROC(A) Vol. 24, No. 6, pp. 496-501, (2000).
- [1-9] Peter B. Nagy, “*Introduction to Ultrasonics*”, 20-251-728, (2001).
- [1-10]<sup>\*</sup> Paul Sterian, Lazăr Bogdan “*Self pulsating Laser Diodes with Applications in Optical Chaotic Communications*”, Conferința: RomOpto2003 Constanța 8-11 Sep. 2003, to be published in Proceedings of SPIE, ISSN 0277-786x, ISBN 0-8194-5099-5.
- [1-11]<sup>B</sup> Brîndeu L., “*Stability of the periodic motion of the vibro-impact systems*”, Chaos, Solitons and Fractals Nr.11, (2000).
- [1-12]<sup>B</sup> Harris C. M., Crede D. M., “*Socuri și vibrații. Vol. II. Analiza rezultatelor măsurătorilor. Incercări. Metode de combaterea șocurilor și vibrațiilor*”. Traducerea și prelucrarea: Silaș Gh., Brîndeu L., Klepp H., Hegedus A., Ed. Tehnică., București.(1968).
- [1-13]<sup>B</sup> B Brîndeu L., Toader M., Hegedus A., “*Dynamics of the Vehicle Under the Action of the Road Discontinuity, Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies*”, VSDIA'98, Budapest, Hungary, (1998).
- [1-14] U. Qidwai, A. H. Costa, C. H. Chen, “*Detection of Ultrasonic NDE Signals Using Time-Frequency Analysis*”, Department of Electrical and Computer Engineering University of Massachusetts, USA (1998).
- [1-15] Paul Sterian, Mircea Stan, “*Fizica*” Editura Didactică și Pedagogică București, pp 313-324; 58-60, 203-208, (1985).
- [1-16]<sup>\*</sup> Lazăr Bogdan, Paul Sterian, Mihai Octavian Popescu, “*Rate Equations Based Models for Quantum-Well Laser Characterization*”, Proceedings of SPIE, ISSN 0277-786x, ISBN 0-8194-5099-5, Vol.5226 12<sup>th</sup> International School on Quantum Electronics: Laser Physics and Applications, pages 79-83 (2002).
- [1-17]<sup>\*</sup> Paul Sterian, Lazăr Bogdan, “*Electrical Equivalent SPICE Models for Quantum Well Lasers*”, Romanian Journal for Optoelectronics, ISSN 1453-0600, Vol. 10, Iss. 4, Oct-Dec (2002).
- [1-18] Thomas E. Drake, Jr., Mark A. Osterkamp, Michael L. Thomas “*A Look at Laser Ultrasonics and Lockheed Martin's LaserUT™ System*” Nondistructive Testing Information Analysis Center, Vol. 27, No. 5, Sep. (2002).
- [1-19] Clint Logan, “*Advancing Technologies and Applications in Nondestructive Evaluation*” Science & Technology Review, pp. 5-10, December (1997).

- [1-20] Nancy Del Grande, “*Dual Band Infrared computed tomography*” Science & Technology Review, pp. 24-26, May (1996).
- [1-21] John C. Harris, “*Linear Elastic Waves*”, Published by the Press Syndicate of The University of Cambridge, ISBN 0-521-64368-6 – ISBN 0-521-64383-X (ph.), (2001).
- [1-22] Agustín Udías, “*Theoretical Seismology: An Introduction*”, Departamento de Geofísica y Meteorología Universidad Complutense de Madrid, pp.1-55, (2001).
- [1-23] R. J. Freemantle, B. W. Drinkwater, A. M. Robinson, “*New approaches to automated scanning and analysis of engineering structures*”, University of Bristol, Department of Mechanical Engineering, University Walk, Bristol, BS8 1TR, Technical Description of an UT based fault detection device (1999).
- [1-24] Seth S. Kessler, Mark S. Spearing, “*Damage Detection in Composite Materials Using Lamb Wave Method*”, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, USA (2002).
- [1-25] Venugopal K. Varma, Raymond Tucker, Steve Kerckel, “*New Acoustic Wave Pipe Inspection System*” Oak Ridge National Laboratory, Tennessee USA, (2003).
- [1-26] R/D Tech “*Phased Array Ultrasonic System for Inspection of Friction Stir Welds*”, Product Sheet, R/D Quebec Canada, (2002).
- [1-27] Krautkramer, “*KrautKramer USM 25 Ultrasonic Flaw Detector*”, Product Sheet, Printed in USA, (2003).
- [1-28] Sonatest, “*Powerscan 400 Ultrasonic Flaw Detector*”, Product Sheet, Sonatest Inc., San Antonio USA (2003).
- [1-29] Karl Deutsch, “*Echograph 1016 B*”, Product Sheet, Germany, May (2002).
- [1-30] Steven E. Fick, C. Harvey Palmer, “*Precision Ultrasonic Wave Measurements With Simple Equipment*”, Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, Vol. 106, No. 5, Sep. – Oct. (2001).
- [1-31] T. Douglas Mast, Grant A. Gordon, “*Quantitative Flaw Reconstruction from Ultrasonic Surface Wavefields Measured by Electronic Speckle Pattern Interferometry*”, IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 48, No.2, Martie 2001.
- [1-32] K. L. Telschow, V. A. Deason, R. S. Schley and S. M. Watson, “*Direct imaging of traveling Lamb waves in plates using photorefractive dynamic holography*”, J. Acoust. Soc. Am. 106, pp. 2578-2587 (1999).
- [2-1]\* Lazăr Bogdan “*Numerical Models for Simulating Elastic Waves Propagation in Fluid Media*” Romanian Journal for Optoelectronics, ISSN 1453-0600, Vol. 11, Iss. 3, July-Sep (2003).
- [2-2]\* Paul Sterian, Lazăr Bogdan “*A 2D Numerical model For Analysing the Evolution of Phenomena in Laser Structures*”, Fifth General Conference of the Balkan Physical Union BPU-5 din 25-29 Aug. 2003. Published in U.P.B. Scientific Buletin Dec. (2003).
- [2-3] P. Yang, K.N. Liou, “*Finite-difference time domain method for light scattering by small ice crystals in three-dimensional space*”, J. Opt. Soc. Am. A 13, 2072-2085 (1996).
- [2-4]\* Lazăr Bogdan, “*Numerical Models of Electrons Scattering by Green’s Functions*”, Romanian Journal for Optoelectronics, ISSN 1453-0600, Vol. 11, Iss. 1, Ian-Mar (2003).
- [2-5] Jean Virieux, “*P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite difference method*”, Geophysics, Vol. 51, No. 4, pp. 889-901, April (1986).
- [2-6] Xiaojuen Yuan, David Borup, James W. Wiskin, Michael Berggen, Rick Eidens, Steven A. Johnson “*Formulation and Validation of Berenger’s PML Absorbing Boundary for FDTD Simulation of Acoustic Scattering*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Vol. 44, No. 4, pp. 816-822, July (1997).
- [2-7] J. P. Berenger, “*A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*”, J. Comput. Phys., Vol. 114, pp. 185-200, Oct. (1994).
- [2-8] W. C. Chew, Q. H. Liu “*Perfectly matched layer for elastodynamics; a new absorbing boundary condition*”, J. Comput. Acoust., Vol. 4, pp. 341-359, Dec. (1996).

- [2-9] Cristoph T. Schroder, Waymond R. Scott, Jr. "A finite difference model to study the elastic - wave interaction with buried land mines", IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 38, No. 4, pp. 1505-1511, July. (2000).
- [2-10] Shinichi Sakamoto, Takuma Seimiya, Hideki Tachibana, "Visualization of Sound Refection and Diffraction Using Fnite Diference Time Division", Acoust. Sci. & Tech. Vol. 23, pp. 34 -39, (2002).
- [2-11] Ahmad Zakaria, John Penrose, Frank Thomas, Xiuming Wang, "The Two Dimensional Numerical Modeling Of Acoustic Wave Propagation in Shallow Water", Australian Acoustical Society Conference, Joondalup, Australia. 15-17 Nov. (2000).
- [2-12] Jean-Pierre Berenger, "Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves", Journal of Computational Physics, 127, pp. 363-379 (1996).
- [2-13] Yan Qing Zeng, Qing Huo Liu, "A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations", Journal Acoustical Society of America, 109 (6), pp.2571-2580, June (2001).
- [2-14]\* Lazăr Bogdan, Paul Sterian, "Elastic Field Visualisation Method for Various Mechanical Structures", Ovidius University Annals of Physics, ISSN - 1582 - 6724, Vol.3, Nr.1, 12.Dec.(2002).
- [3-1] Ion. M. Popescu, "Fizică", Editura Didactică și Pedagogică - București, Vol. I, pp. 150-167, (1981).
- [3-2]<sup>B</sup> L.Brîndeu, T.Buzilă, N.Herișanu, "Dinamica structurilor mecanice", Ed. "Politehnica" Timișoara, 110 pag, (2000).
- [3-3]<sup>B</sup> Gh.Silaș, L.Brîndeu, "Sisteme vibropercutante", Ed.Tehnică, București, 456 pag, (1986).
- [3-4]<sup>B</sup> Brîndeu L., "Determinarea pe cale operațională a mișcărilor vibropercutante periodice", Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată. Tom 35, Nr.4, pp.539-545, (1976).
- [3-5]<sup>B</sup> Brîndeu L., Vibrations des systemes elastiques a amortissement en serie soumises a une excitation cinematique, Revue Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl., București, Tom 39, nr.6, pp.631-637, (1994).
- [3-6]<sup>B</sup> Brîndeu L., Hule Voichita, Petcovici Oana, "The Dynamic model of impact, considering the propagation of the stress waves in the deformable body", Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering, Volum II (XII), 29, ISSN 1583-0691, (2003).
- [3-7]<sup>B</sup> Brîndeu L., Tămășdan C., Tămășdan M., "Mecanică și vibrații. Culegere de programe pentru calculator". Lit. Inst. Polit. Timișoara, (1993).
- [3-8]<sup>B</sup> Silaș Gh., Rădoi M., Brîndeu L., Klepp H., Hegedus A., "Culegere de probleme de Vibrații mecanice. Vol. II, Sisteme vibropercutante". Aplicații. Ed. Tehnică, București, (1972).
- [3-9]<sup>B</sup> Silaș Gh., Rădoi M., Brîndeu L., Klepp H., Hegedus A., "Culegere de probleme de Vibrații mecanice. Vol. I. Sisteme liniare cu un numar finit de grade de libertate", Ed. Tehică, București, (1978).
- [3-10] Dumitru D. Boiangiu, Emil Caragheorghe, Mircea Radeș, "Mecanică și Rezistența Materialelor ", Editura Didactică și Pedagogică - București, pp. 298-309, (1982).
- [3-11] C. I. Mocanu, "Bazele Electrotehnicii", Editura Didactică și Pedagogică - București, pp. 752-755, (1991).
- [4-1] René Marklein, Karl-Jörg Langenberg, Klaus Mayer, "EFIT Simulations for Ultrasonic NDE", University of Kassel, Department of Electrical and Computer Engineering, Electromagnetic Field Theory, Wilhelmshöher Allee 71, D-34121 Kassel, Germany, (1997).
- [4-2] P. Fellingner, R. Marklein, K.J. Lagenberg, S. Klahotz, "Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT - elastodynamic finite integration technique", Wave Motion 21 pp. 47 - 66 (1995).
- [5-1] Andrea Frass, Gottfried Lehmann, Alexey Lomonosov, Peter Hess, "Linear and Nonlinear Elastic Surface Waves: From Seismic Waves to Materials Science", Analytical Sciences Apr. 2001, Vol. 17, pp. 9 - 12, (2001).
- [5-2] Joseph L. Rose, "A Baseline and Vision of Ultrasonic Guided Wave Inspection Potential", Journal of Pressure Vessel Technology, pp. 174 - 272, Vol. 124, August (2002).



- [5-3]<sup>B</sup> Brîndeu L., “*Stabilitatea mișcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu limitator elastic, avînd un grad de libertate*” Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată. Tom 33, Nr.2, pp.257-266. (1974).
- [5-4] Leonid V. Zhigilei, Avinash M. Dongare, “*Multiscale Modeling of Laser Ablation: Applications to Nanotechnology*”, CMES, Vol.3, No.5, pp.539-555, (2002).
- [5-5] R J Dewhurst, Q Shan “*Optical remote measurement of ultrasound*” Meas. Sci. Technol. 10 1999 R139–R168. Printed in the UK, Oct. (1999).
- [5-6] V. A. Deason, K.L. Telschow, R. S. Schley, S. M. Watson, “*Imaging the Anisotropic Elastic Properties of Paper With The Ineel Laser Ultrasonic Camera*”, 26th Annual Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Montréal, Québec, Canada, July 25-30, (1999).
- [5-7] I. A. Viktorov, “*Rayleigh and Lamb Waves*” Plenum, New York, (1967).
- [5-8] Kritsakorn Luangvilai, Wonsiri Punurai, Laurence J. Jacobs, “*Guided Lamb Wave Propagation in Composite Plate Concrete Component*” Journal of Engineering Mechanics, pp. 1341 - 1341, Dec. (2002).
- [5-9] Michael D. Seale and Barry T. Smith, William H. Prosser, John E. Masters, “*Lamb Wave Response of Fatigued Composite Samples*”, Reveiw of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. 13B, pp. 1261-1266, (1994).
- [5-10] Zhong-hua SHEN, Shu-yi ZHANG, Jian-chun CHENG, “*Theoretical Study on Surface Acoustic Wave Generated by a Laser Pulse in Solids*”, Analytical Science Apr. 2001, Vol.17, pp 204 – 207, (2001).
- [5-11]<sup>B</sup> Brîndeu L., Toader M., Hegedus A., “*Dynamics of the Vehicle Under the Action of the Road Discontinuity, Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies*”, VSDIA'98, Budapest, Hungary, (1998).
- [5-12] Nicolas Felix, Dominique Certon, Leong Ratsimandresy, Marc Lethiecq, Frédéric Patat, “*1D Ultrasound Array : Performances Evaluation and Characterization by Laser Interferometry*”, IEEE Ultrasonics Symposium (2000).
- [5-13] Alexndru Mihail Morega “*Modelare Numerică pentru Probleme la Limită în Inginerie*”, Editura Matrix Rom, București, pp.115-176, (1998).
- [5-14] Wei Xue, “*Piezoelectric Crystals and Applications*”, Louisiana Tech University Internal Publication, Mar, (2002).
- [5-15] Seiichi Kawanami, Masaaki Kurokawa, Masaru Taniguchi, Yoshihisa Tada, “*Development of Phased-Array Ultrasonic Testing Probe*”, Mitsubishi Heavy Industries, Ltd. Technical Review, Vol.38, No.3, Oct. (2001)
- [5-16] Victor Giurgiutiu, Andrei Zagrai and Jing Jing Bao, “*Piezoelectric Wafer Embedded Active Sensors for Aging Aircraft Structural Health Monitoring*”, Sage Publications, SHM Structural Health Monitoring, Vol. 1, pp. 41-61, (2002).
- [5-17] Gaelle Rosa, Pandora Psyllaki, Roland Oltra, Sophie Costil, Christian Coddet, “*Simultaneous laser generation and laser ultrasonic detection of mechanical breakdown of a coating – substrate interface*”, Ultrasonics, 39, pp. 355-365, (2001).
- [5-18] U Storkely, K L Vodopyanovz and W Grillx, “*GHz ultrasound wave packets in water generated by an Er laser*”, J. Phys. D: Appl. Phys. 31, pp. 2258–2263 (1998).
- [6-1] René M. de Ridder, Remco Stoffer, “*Applicability of the Finite-Difference Time-Domain Method to Photonic Crystal Structures*”, Tutorial, presented at the summer school on "Nanoscale linear and non-linear optics" at the International School of Quantum Electronics, Erice, Sicily (Italy), 2-14 July (2000).
- [6-2] I. E. Psarobas, M. M. Sigalas, “*Elastic band gaps in a fcc lattice of mercury spheres in aluminum*”, Physical Review B, Vol. 66, 052302, (2002).
- [6-3] Axel Scherer, Oskar Painter, Jelena Vuckovic, Marko Loncar, Tomoyuki Yoshie, “*Photonic Crystals for Confining, Guiding, and Emitting Light*”, IEEE Transactions on Nanotechnology, Vol. 1, No. 1, Mar. (2002).
- [6-4] V. Agostini, P.P. Delsanto, I. Genesio, “*Simulation of Lamb Wave Propagation in Composites Materials*”, Science and Supercomputing at CINECA – Report (2001).

- [6-5] F. Levent Degertekin, B. T. Khuri-Yakub, "Single mode Lamb wave excitation in thin plates by Hertzian contacts", *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 69, No. 2, July (1996).
- [6-6] James M. Sabatier, Ning Xiang, "An Investigation of Acoustic-to-Seismic Coupling to Detect Buried Antitank Landmines", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 39, No. 6, pp.1154 – 1146, June (2001).
- [6-7] John A. Scales, Alison E. Malcolm, "Laser characterization of ultrasonic wave propagation in random media", *Physical Review E*, 67, 046618, (2003).
- [6-8] Tobias F. Leutenegger, "Detection of defects in cylindrical structures using a time reverse numerical simulation method", A dissertation submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich for the degree of Doctor of Technical Sciences, Zürich, (2002).
- [6-9] W. Hillger, "Ultrasonic Imaging of Defects in Sandwich Composites", 7<sup>th</sup> European Conference on Non-Destructive Testing, Copenhagen, Proceedingd, Vol.1, pp. 88-94, 26-29 Mai (1998).
- [6-10]\* Lazăr Bogdan, "Numerical Analysis of Acoustic field Propagation in Elastic Crystals", *Romanian Journal for Optoelectronics*, ISSN 1453-0600, Vol. 11, Iss. 4, Oct-Dec (2003).
- [7-1] Mark A. Anastasio, Xiaochuan Pan, "A New Reconstruction Approach for Reflection Mode Diffraction Tomography", *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 9, No. 7, pp. 1262 – 1271, July (2000).
- [7-2] Michael Bronstein, Alexander Bronstein, Michael Zibulevsky, "Reconstruction in Diffraction Ultrasound Tomography Using Non-Uniform FFT", Submitted to *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Mar. (2002).
- [7-3] A. C. Kak and M. Slaney, "Principles of Computerized Tomographic Imaging" IEEE Press, New York, (1988).
- [7-4] Greg Gbur, Emil Wolf, "Relation between computed tomography and diffraction tomography", *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 18, No. 9, pp. 2132 – 2137, Sep. (2001).
- [7-5] Hossein Sedarat, Dwight G. Nishimura, "On the Optimality of the Gridding Reconstruction Algorithm", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 19, No. 4, Apr. (2000).
- [7-6] Willi G. Schwarz, Michael E. Read, Matthew J. Kremer, Mark K. Hinders, and Barry T. Smith, "Lamb wave tomographic imaging system for aircraft structural health assessment", *SPIE Vol. 3586*, pp. 292 – 296, (1999).
- [7-7] A. C. Kak, M. Slaney, "Principles of Computerized Tomographic Imaging", IEEE Press, New York, (1988).