

**CONTRIBUȚII LA STUDIUL
ELEMENTELOR ELASTICE
DE TIP MEMBRANĂ**

TEZA DE DOCTORAT

**Conducător științific:
Prof.dr.ing. Octavian GLIGOR**

**Doctorand:
ing. Liana-Maria DEHELEAN**

PREFAȚĂ

*L'univers est un cercle dont le centre
est partout et la circonférence null part*

Blaise Pascal, Pensées

Mecanica Fină se ocupă de aspectele teoretice și practice referitoare la proiectarea și construcția aparatelor, sculelor și mecanismelor de precizie. Componentele aparatelor pot fi clasificate, în mod asemănător organelor de mașini. Asocierea în clase provine din asemănarea funcțiilor îndeplinite, atât de componentele aparatelor, cât și de cele ale mașinilor.

Elementele (componentele) aparatelor, care îndeplinesc o funcție bazată pe deformația lor elastică sunt grupate în categoria *elementelor elastice* sau a arcurilor¹. Funcția de deformare elastică se referă la acele piese special construite a căror deformație este predictibilă pe baza unei legi cunoscute, iar această deformație este impusă de funcționare aparatului, a mașinii din care face parte. Constructorii de aparate pot folosi aspectul de liniaritate al caracteristicii forță – deformație, dacă îi interesează o atare conversie (eventual una semnal deplasare – semnal electric etc), sau tot constructorii de aparate pot folosi aspectul energetic, care se referă la acumularea energiei potențiale prin deformarea unui arc.

Membranele tehnice împrumută denumirea printr-o asociere morfologică, de la membranele biologice, dar se folosesc în construcția aparatelor, în primul rând, pentru a îndeplini o funcție de element elastic, asemeni arcurilor.

Lucrarea se referă exclusiv la membranele tehnice, drept urmare, în text atributul "tehnice" va fi omis. Având în vedere faptul că, la construcția membranelor se utilizează atât materiale metalice, cât și materiale nemetalice, care conduc la comportamente diferite ale acestora, se vor folosi cu scrupulozitate sintagmele "membrane metalice", respectiv "membrane nemetalice".

Lucrarea își propune, pentru rezolvarea temei, să atingă următoarele obiective, de interes general:

1. Pentru a transforma informațiile existente, în date operaționale, lucrarea își propune să realizeze o sistematizare a stadiului actual privind atât construcția aparatelor, care conțin elemente elastice de tip membrană, soluțiile constructive de membrane, cât și aplicațiile concrete ale acestora.

¹Cele două denumiri sunt sinonime, dar în mod curent se înțelege prin arc un element elastic din sârmă, bară sau lamelă. Membranele dețin funcția arcului, dar nu sunt denumite, în mod curent, arcuri.

2. În aceeași idee, lucrarea trebuie să efectueze și o ordonare a cunoștințelor, referitoare la tehnologiile și materialele utilizate la fabricația elementelor elastice de tip membrană. Astfel, se vor analiza materialele folosite la construcția arcurilor, cu particularitățile cerute de elementele elastice de tip membrană.
3. Datorită caracterului său ingineresc, se impune ca lucrarea să cerceteze nivelul actual al modelelor matematice, care descriu teoretic comportamentul tuturor tipurilor constructive de membrane. Analizarea modelelor poate conduce la realizarea unui pas important înainte, în ceea ce privește metodele actuale de calcul și adaptarea relațiilor existente la metodele moderne de calcul.
4. Tendința actuală în analiza structurilor, presupune modelarea numerică, care combinată cu modelarea experimentală de laborator, face posibilă o simulare a fenomenului, apropiată de realitate. Din cauza gradului de noutate al lucrării, se impune modelarea numerică pentru domeniul elementelor elastice de tip membrană.
5. Stadiul aplicațiilor cu membrane și nivelul de experimentare actual, determină modul în care se abordează latura experimentală, conceperea instalației destinate cercetării membranelor, realizarea ei și efectuarea experimentelor.
6. Instalația experimentală proiectată și realizată practic trebuie să asigure o precizie ridicată și un grad înalt de încredere, pentru măsurătorile efectuate.
7. De asemenea, instalația experimentală trebuie să aibă un grad de generalitate ridicat, pentru a putea fi utilizată la testarea elementelor elastice de tip membrană, indiferent de forma acesteia.
8. Lucrarea își propune, după achiziționarea datelor experimentale, o prelucrare minuțioasă, cu stabilirea gradului de încredere acordat acestora.
9. După realizarea experimentului și modelarea numerică a elementelor testate se impune o analiză comparativă a datelor obținute (prin calcul analitic, modelare numerică și experiment), analiză care va certifica setul de concluzii finale al lucrării.

	Pagina
PREFAȚĂ	2
1. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRII ȘI AL UTILIZĂRII MEMBRANELOR (ELEMENTELOR ELASTICE DE TIP MEMBRANĂ)	6
1.1. Clasificarea aparatelor și dispozitivelor care conțin elemente elastice de tip membrană	6
1.2. Soluții constructive de aparate și dispozitive bazate pe membrane. Aplicații specifice	9
1.2.1. Traductoare de presiune cu membrane	9
1.2.1.1. Traductoare de presiune individuale cu membrane	9
1.2.1.2. Manometre de precizie cu membrane	13
1.2.1.3. Aparate de măsură de bord, care conțin membrane	15
1.2.2. Traductoare de vibrații cu elemente elastice de tip membrană	27
1.2.3. Termometre și termoregulate	31
1.2.4. Ghidaje cu elemente elastice de tip membrană	33
1.2.5. Cuplaje cu elemente elastice de tip membrană	35
1.2.6. Separatoare de medii cu elemente elastice de tip membrană	35
1.2.7. Microfoane cu elemente elastice de tip membrană	36
1.2.8. Aplicații ale traductoarelor cu membrană, din domeniul medical	38
1.3. Soluții constructive de membrane și modalități de încărcare a acestora	42
1.4. Materiale și tehnologii pentru execuția membranelor	49
1.4.1. Materiale pentru elemente elastice	49
1.4.2. Materiale pentru elemente elastice, de tip membrană	54
1.4.3. Procesul tehnologic de execuție al membranelor	56
1.4.3.1. Montarea membranelor în capsule	61
2. CONSIDERAȚII ASUPRA STĂRII DE TENSIUNE ȘI DEFORMAȚIE	65
2.1. Considerații generale	65
2.2. Asupra stării plane de tensiuni și deformații	70
2.3. Tensiunea și deformația într-un punct	71
2.4. Măsurarea suprafeței deformate	76
2.5. Ecuatiile diferențiale de echilibru	77
2.6. Funcția tensiune (Airy)	81
3. CONTRIBUȚII LA PROIECTAREA MEMBRANELOR	83
3.1. Învelișuri flexibile axial-simetrice	83
3.2. Membrane plane de formă circulară	90
3.2.1. Determinarea caracteristicii membranei metalice plane	90
3.2.2. Determinarea săgeții membranei metalice plane	91
3.2.3. Rezolvarea exactă a problemei săgeților mari ale membranei metalice plane	95
3.2.4. Tensiuni unitare într-o membrană plană, în domeniul săgeților mari	98
3.3. Determinarea săgeților membranei perfect elastice	99

3.4. Membrana ondulată	101
3.4.1. Alegerea schemei de calcul pentru membranele ondulate	101
3.4.2. Stabilirea deplasărilor mari ale membranei plane orizontale anizotrope	103
3.4.3. Construirea caracteristicii membranei ondulate	106
3.5. Membrana pocnitoare	108
3.6. Algoritmul general de proiectare al membranelor	115
3.6.1. Parametri de intrare. Parametri de ieșire	115
3.6.2. Algoritmul general de proiectare	116
4. CONSIDERAȚII PRIVIND MODELAREA MEMBRANELOR PRIN METODA ELEMENTULUI FINIT	119
4.1. Metoda elementului finit	119
4.1.1. Principiul metodei elementului finit	119
4.1.2. Algoritmul general al metodei elementului finit	120
4.1.3. Aproximarea cu elemente finite	122
4.2. Modelarea membranei cu element finit	137
4.2.1. Noțiuni de mecanica structurilor	137
4.2.2. Ecuația elementelor finite pentru probleme de elasticitate	139
4.2.3. Ecuația elementelor finite pentru starea plană de tensiuni	142
5. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ, METODICA ȘI REZULTATELE CERCETĂRII MEMBRANELOR	148
5.1. Obiectivele și etapele cercetării experimentale	148
5.2. Concepția și construcția instalației experimentale	149
5.3. Metodica cercetării membranelor	161
5.3.1. Măsurători experimentale ale capsulelor manometrice	167
5.3.2. Modelarea cu element finit a capsulelor manometrice	175
5.3.3. Calculul analitic al capsulelor manometrice	177
5.4. Prelucrarea datelor experimentale. Concluzii	180
6. CONCLUZII ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE	186
6.1. Concluzii finale	186
6.2. Contribuții	187
BIBLIOGRAFIE	189
ANEXE	

1. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRII ȘI AL UTILIZĂRII ELEMENTELOR ELASTICE DE TIP MEMBRANĂ

1.1. CLASIFICAREA APARATELOR ȘI DISPOZITIVELOR CARE CONȚIN ELEMENTE ELASTICE DE TIP MEMBRANĂ

În domeniul mecanicii fine, elementele pentru acumularea energiei și traducerea semnalelor sunt astfel denumite pentru principalele funcțiile pe care le îndeplinesc. În această categorie de elemente constructive sunt cuprinse toate componentele elastice, în cadrul cărora intră, în primul rând, arcurile metalice. Elementele elastice sunt caracterizate prin deformații elastice mari, care apar sub acțiunea unui semnal exterior (forță, moment, presiune, temperatură) revenind, parțial sau total, la forma inițială, la încetarea semnalului exterior. Pe parcursul deformației elastice, ele acumulează o cantitate de energie, care pe parcursul revenirii la forma inițială, este cedată mediului exterior. Acumulând energie în timpul deformațiilor, ele sunt utilizate în diferite scopuri și anume [31], [33]:

- ca acumulate de energie, respectiv motoare, pentru antrenarea diverselor mecanisme din aparate (funcționând prin redarea energiei pe care au înmagazinat-o în timpul deformației);
- ca elemente pentru traducerea semnalelor;
- ca atenuatoare de șocuri, când energia unei mase în mișcare este folosită pentru încărcarea arcului;
- ca elemente pentru exercitarea unei forțe permanente după tensionare;
- ca elemente pentru asigurarea unor legături (îmbinări) elastice, între două sau mai multe elemente constructive.

Criteriile de clasificare ale elementelor elastice sunt diverse. Dintre acestea cel mai sugestiv criteriu este cel *constructiv*, după care, pentru mecanica fină, se poate face următoarea clasificare:

- *arcuri lamelare* - formate din lamele sau foi, care în funcție de forma pe care o au pot fi: simple și drepte, simple curbate preformate, în foi multiple sau lamelare suprapuse;
- *arcuri spirale plane* - sau lamelare înfășurate, formate din bare de secțiune dreptunghiulară sau circulară înfășurate în formă de spirală;
- *arcuri bară de torsiune* - formate din bare drepte (de secțiune circulară sau dreptunghiulară);
- *arcuri elicoidale* - formate din bare de diferite secțiuni preformate ca elice și care pot fi: cilindrice de întindere-compresiune, cilindrice de torsiune, conice sau de alte forme;
- *arcuri bimetalice* - formate din două foi suprapuse și pot fi: lamelare, spirale plane, elicoidale (semnalul este variația de temperatură);

- *membrane plane sau gofrate (ondulate)* - sunt plăci subțiri de formă circulară, încastrate pe contur, având suprafața de lucru plană sau profilată;
- *tuburi ondulate sau silfoane* - care au o formă cilindrică cu ondulații pe suprafața laterală și se deformează elastic sub acțiunea unei presiuni interioare;
- *tuburi manometrice* - care au formă circulară, spirală, elicoidală etc. și își bazează funcționarea pe deplasarea capătului liber, semnalul fiind tot o presiune interioară;
- *arcuri tampon (din cauciuc)* - au diferite forme (dreptunghiulară, cilindrică etc) și pot înmagazina energii mari de șoc, din cauza materialului care are frecare internă mare.

Clasificarea arcurilor se mai poate face și pe baza *solicitării principale* a materialului din care sunt confecționate. Solicitarea la care sunt supuse este încovoierea sau torsiunea. Mai rar, se întâlnește solicitarea de întindere-compresiune, atunci când se urmărește obținerea unei rigidități sporite.

Alegerea *materialelor* pentru elementele elastice trebuie făcută ținând cont de următoarele criterii mai importante:

- variația în timp a proprietăților elastice ale materialelor, după tratamentul termic;
- rezistența la rupere și rezistența la șoc;
- coeficientul de dilatare liniară;
- conductivitatea electrică (la arcurile din electrotehnică);
- rezistența la coroziune.

Materialele folosite pentru construcția arcurilor sunt oțelurile speciale pentru arcuri, metalele neferoase și polimerii elastomeri. Tratamentele termice și de ecruisare sunt folosite în corelație cu marca de material, după cum urmează: arcurile din oțel se pot căli – reveni și ecruisa cu jet de alicie, arcurile din bronz se pot ecruisa prin tragere la rece etc.

Caracteristicile de material necesare efectuării calculelor de dimensionare și verificare sunt redată în Anexa 1.

Elementele elastice de tip membrană sunt plăci elastice, de grosime foarte mică, de formă circulară, cu suprafața de lucru plană sau profilată, încastrate pe contur - rigid sau alunecător. Sub acțiunea unei forțe concentrate sau uniform distribuite, aplicată pe o față a membranei, se realizează deformații vizibile și ușor măsurabile, ale acesteia, ceea ce permite aprecierea caracterului variației sarcinii.

Membranele au o largă răspândire în construcția de aparate. Ele sunt utilizate ca:

- elemente sensibile și echipează traductoarele de presiune, de accelerație, de vibrații etc.;
- elemente de susținere și intră în componența ghidajelor elastice;
- componente de transmisie mecanică: cuplaje;
- pereți separatori;
- elemente de etanșare.

Datorită varietății extrem de mare a soluțiilor constructive de aparate, care au în componența lor elemente elastice de tip membrană, în lucrare se propune o sistematizare a acestora bazată pe tipuri de: aplicații, soluții constructive, membrane și materiale. Sistematizarea propusă este prezentată în schema din fig. 1. 1.

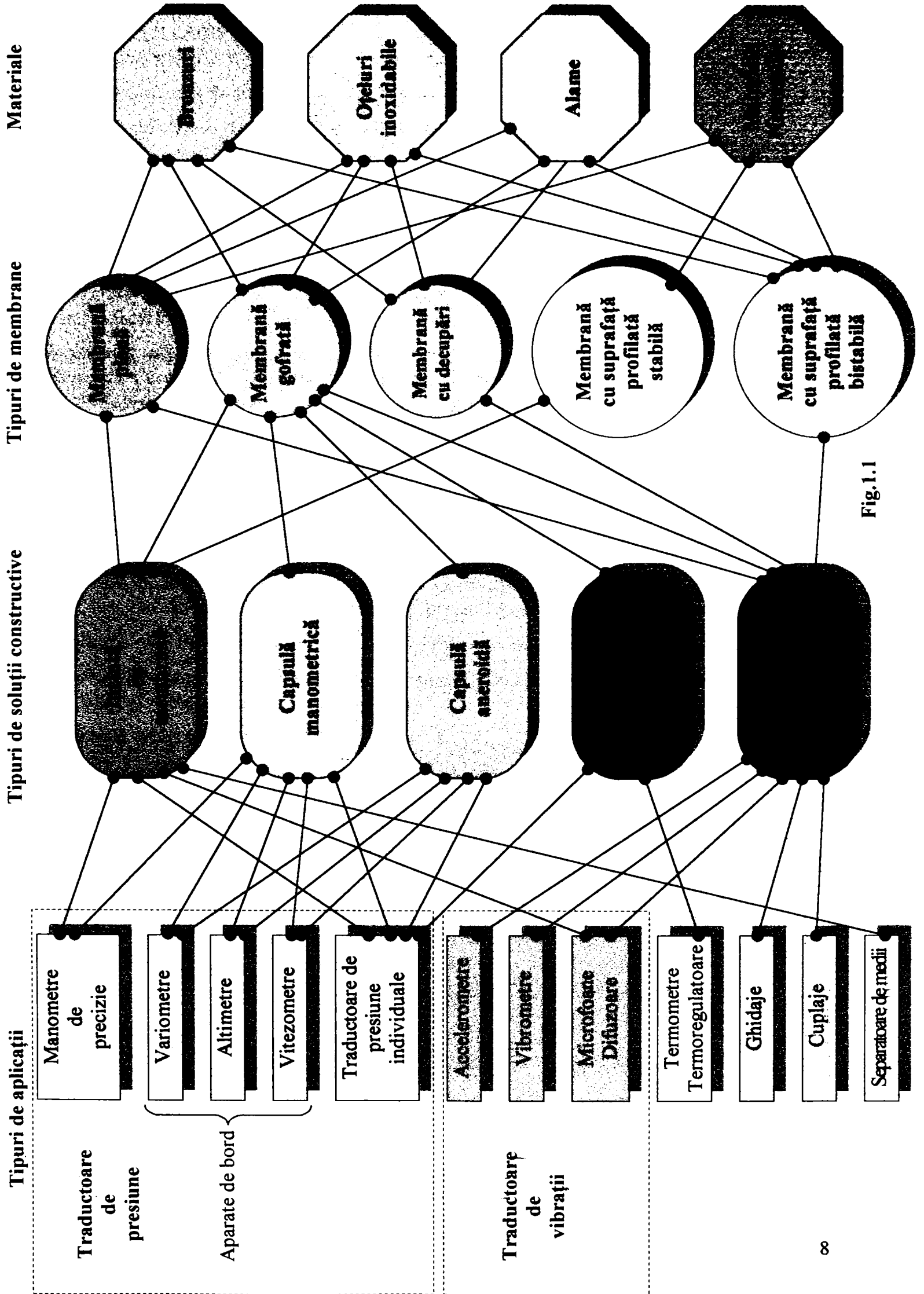


Fig.1.1

element de conversie inductiv cu cuplare directă, cu membrană. Printr-o calibrare adecvată se pot măsura presiuni într-o gamă foarte largă de $0 \div 0,1$ bar sau $0 \div 200$ bar. Membranele sunt executate din bronz cu beriliu, pentru $0,1 \text{ bar} < p < 0,25 \text{ bar}$ sau din oțel, pentru $0,5 \text{ bar} < p < 200 \text{ bar}$. Săgeata maximă a membranei este în jur de $0,1 \text{ mm}$.

Trimerul inductiv prevăzut în schemă poate ajusta sensibilitatea montajului cu $10 \div 20\%$, față de valoarea nominală. Firma Hottinger-Baldwin fabrică astfel de elemente destinate și măsurătorilor de presiune diferențială.

Din cea de a doua grupă de metode fac parte acele elemente de conversie, care se bazează pe modificările inductanței unei bobine, prin modificarea reluctanței circuitului magnetic (în principal, a porțiunilor care se închid prin aer).

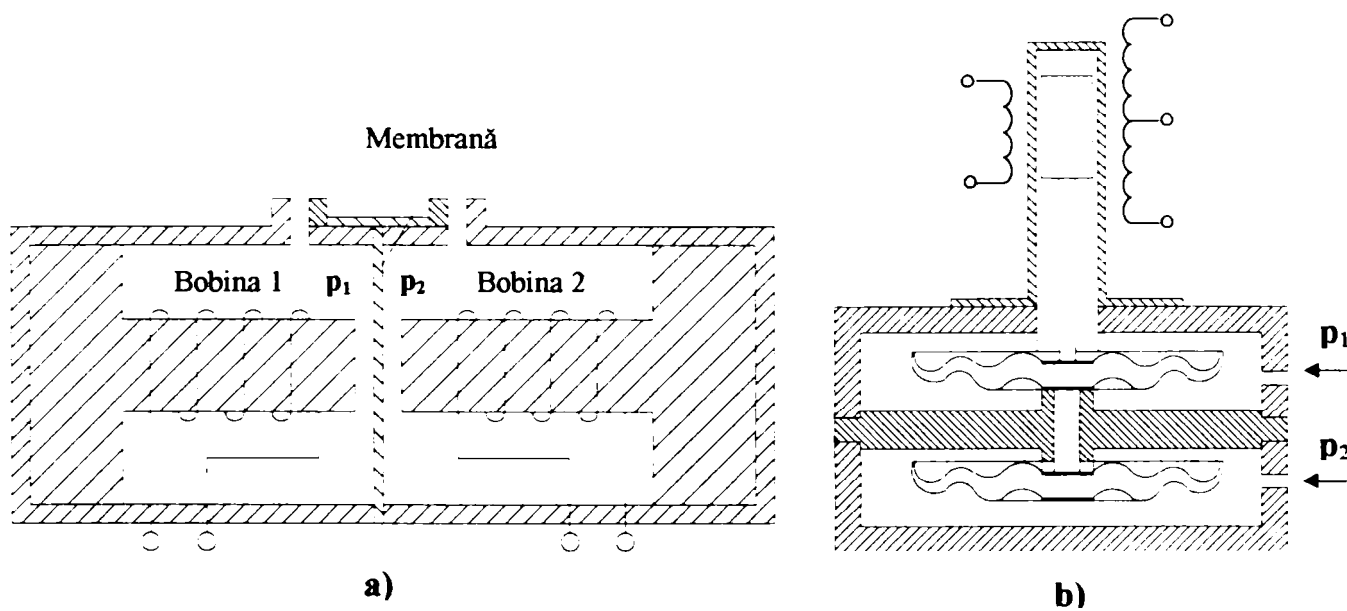


Fig.1.3

În fig. 1.3a este prezentată o astfel de variantă. Membrana este executată dintr-un material cu o permeabilitate magnetică semnificativă, comparabilă cu permeabilitatea magnetică a miezului bobinei. În momentul în care, în traductor se introduc presiunile p_1 și p_2 , membrana se deformează, modificând lungimea circuitului magnetic, care se închide prin aer, pentru ambele bobine. Se modifică astfel, reluctanțele magnetice și deci inductanțele celor două bobine. Dacă se utilizează o schemă de măsurare în punte de impedanțe, cu două brațe active (cele două inductanțe variabile), tensiunea de dezechilibru reprezintă o măsură a diferenței $p_1 - p_2$.

Miezurile magnetice, pe care sunt înfășurate bobinele celor doi electromagneți, sunt de regulă în formă de E, iar tot ansamblul este acoperit cu un material nemagnetic, în așa fel încât, să fie insensibil la variațiile de presiune și să nu aibă de suferit la contactul cu fluidul a cărui presiune este măsurată. Pentru minimizarea erorilor datorate vibrațiilor, membranele sunt subțiri, ușoare și pretensionate. În general, astfel de elemente de conversie se folosesc la măsurarea presiunilor diferențiale joase, dar, la o dimensionare corespunzătoare a membranei, pot fi utilizate și la presiuni înalte.

În fig. 1.3b este prezentată varianta unui traductor inductiv, la care membrana este înlocuită prin capsule [3]. Deformația provocată de presiune este măsurată prin deplasarea unui miez magnetic, în interiorul unei bobine. Înfășurarea secundară se conectează într-o punte inductivă.

Elemente de tip capacitiv

Traductoarele de presiune capacitive se bazează pe conversia presiunii, într-o variație a unei capacități. Această conversie este posibilă, dacă o armătură a capacității respective, este un

element sensibil elastic (de obicei o membrană), astfel încât, săgeata care apare la aplicarea unei presiuni, modifică distanța dintre armături (d) și deci capacitatea inițială.

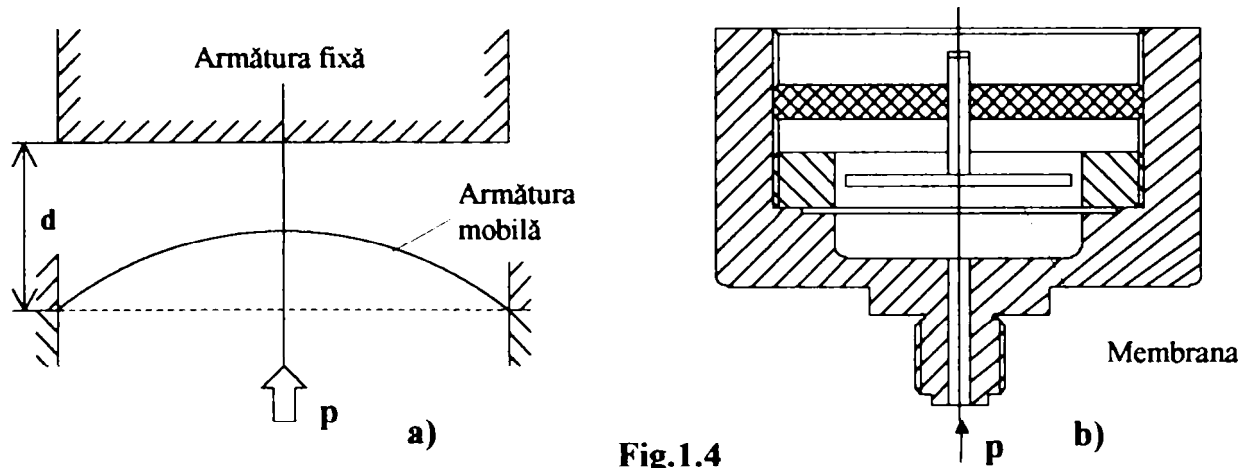


Fig.1.4

În fig. 1.4a este prezentată varianta de principiu a unui traductor capacitiv, care are o armătură fixă, cealaltă fiind constituită dintr-o membrană încastrată la ambele capete, iar în fig.1.4b soluția constructivă a acesteia.

Elemente de tip rezistiv

Traductoarele de presiune rezistive utilizează ca elemente de conversie timbrele tensometrice. În fig.1.5 sunt prezentate două variante constructive de elemente de conversie cu timbre tensometrice (fig. 1.5a - cu membrană, iar fig. 1.5b - cu capsulă).

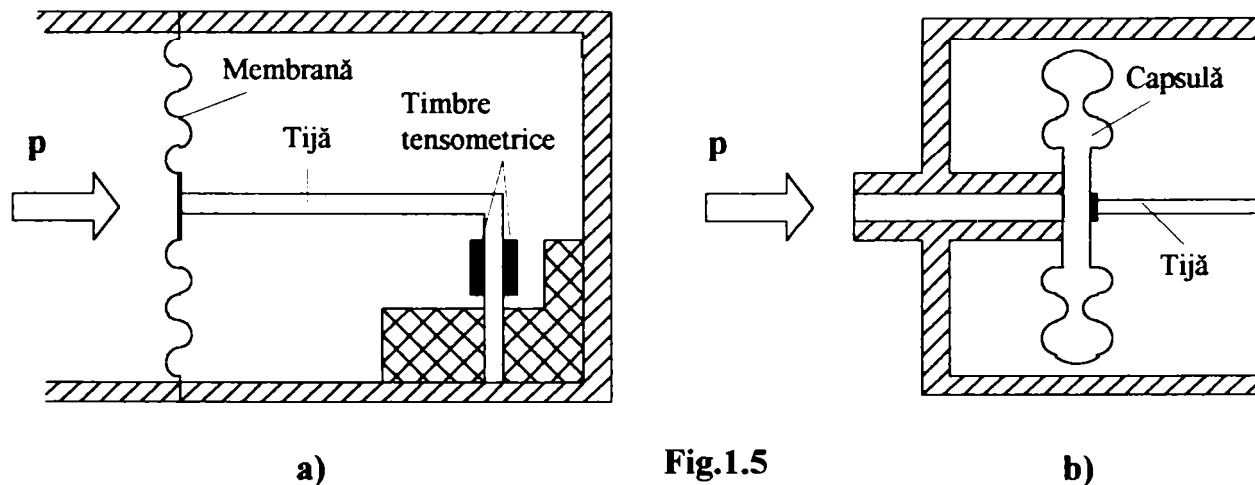


Fig.1.5

Fluidul, la presiunea p, provoacă o deformare a elementului sensibil elastic, care se transmite (ca un moment de încovoiere) tijei rigide, fixată într-un punct. Timbrele tensometrice sunt fixate pe latura supusă la încovoiere a tije; deformația de încovoiere se transformă într-o variație corespunzătoare a rezistenței electrice. Pentru măsurări de presiuni diferențiale, montajul se completează cu a doua cameră de presiune, care funcționează identic, cu prima. Cele două elemente elastice pot fi cuplate la aceeași tijă rigidă sau pot avea tije diferite (situație în care se utilizează patru timbre tensometrice).

O altă variantă constructivă constă în plasarea unor timbre tensometrice, direct pe fața unei membrane. Se poate realiza în acest fel, o punte rezistivă completă, dacă două timbre tensometrice se plasează pe circumferință, iar celelalte două în jurul centrului. Timbrele tensometrice de pe circumferința membranei sunt supuse la compresiune, iar cele din jurul centrului sunt supuse la întindere radială.

Aceste elemente sensibile pot fi proiectate, datorită simetriei montajului, astfel încât, să aibă o bună stabilitate a parametrilor funcționali, la variațiile de temperatură.

Adaptoare pentru elemente sensibile elastice

Traductoarele de presiune cu membrane metalice au nevoie de adaptoare electronice adecvate. Schemele folosite sunt consacrate și se diferențiază prin tipul de punte folosit (punte de rezistențe, de impedanțe etc.).

O variantă de adaptor, care are elementele de conversie intermediare incluse în structura lui, cu modulator magnetic unghi-tensiune, este prezentată în fig. 1.6, sub forma schemei funcționale.

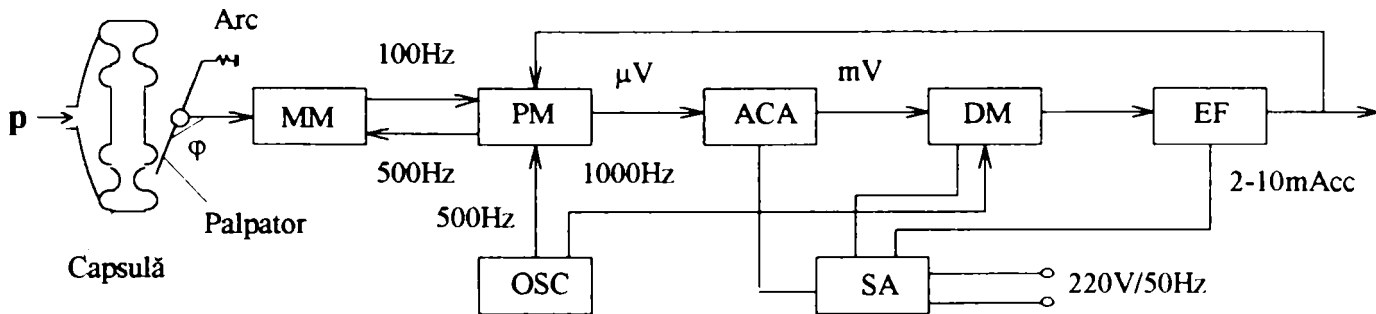


Fig.1.6

Săgeata elementului sensibil este transformată într-o deplasare unghiulară φ , de către un palpator și un sistem de pârghii. Acest sistem este dimensionat astfel încât, să asigure la intrarea modulatorului magnetic MM, o deplasare unghiulară $\varphi = 0 \div 16^\circ$, pentru domeniul de presiuni măsurat (0° este considerată poziție de referință, corespunzătoare unei ieșiri de 2 mA).

Modulatorul magnetic MM transformă această deplasare unghiulară într-un semnal alternativ, modulat în amplitudine. Semnalul este amplificat de amplificatorul de curent alternativ ACA, detectat de demodulatorul sincron DM și transformat în semnal de joasă frecvență de către etajul final EF.

Semnalul necesar excitării modulatorului magnetic și comandării demodulatorului sincron, este furnizat de un oscilator pilot OSC. Toate etajele sunt alimentate de la sursa SA. Această schemă relativ complicată este necesară fiindcă ea se bazează pe stabilitatea amplificării, proprie amplificatoarelor de curent alternativ ACA.

Traductoare de presiune cu elemente piezorezistive

Utilizarea elementelor piezorezistive a permis crearea, în ultimii ani, a unei categorii de elemente sensibile, care au proprietatea remarcabilă de a îngloba, în aceeași unitate constructivă și dispozitivul de conversie intermediară. Aplicarea industrială a acestei metode a condus la construcția unei game foarte variate de traductoare de presiune, atât ca domenii de lucru (game de presiune), cât și ea destinație [45], [46].

Piezorezistivitatea reprezintă, proprietatea unui cristal de a-și modifica rezistivitatea electrică, sub acțiunea unui câmp de tensiuni (mecanice) la care este supus. Fenomenul apare mai puternic, în cazul unor semiconductoare. Modificările de rezistivitate se produc pentru variații ale tensiunii mecanice, atât statice, cât și dinamice.

Fenomenul are la bază modificarea numărului de purtători și mobilitatea lor. Pentru un semiconductor, aceste modificări depind de concentrația de purtători și de orientarea cristalografică, în raport cu direcția de aplicare a solicitărilor.

Efectul piezorezistiv, se explică prin influența deformărilor mecanice, asupra energiilor relative ale benzilor de conducție și de valență, influență care depinde de direcția și mărimea solicitărilor (presiune).

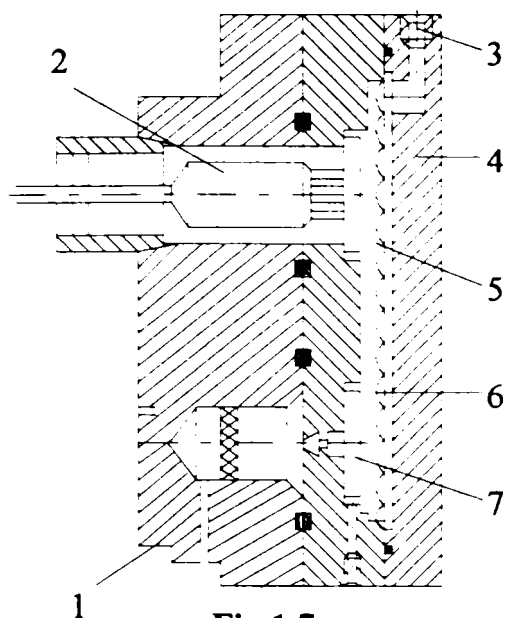


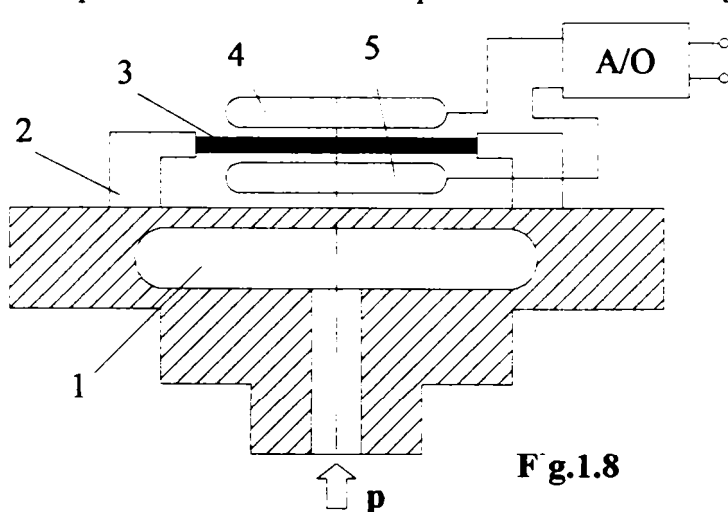
Fig.1.7

Deformările produc o mobilitate mai ridicată a purtătorilor, pe o direcție preferențială. Aplicațiile industriale ale piezorezistivității, în domeniul măsurărilor de presiune, se fac în special, prin elemente rezistive difuzate într-o diafragmă de monocristal de siliciu, dar se pot realiza și senzori individuali separați de membrană.

Pentru exemplificare, în fig.1.7, este prezentat un traductor de presiune alcătuit din corpul (1), conexiunile către adaptor (2), priza de fluid (3), capacul (4), uleiul siliconic (5), membrana (6) și senzorul (7). Traductorul este destinat măsurărilor de presiune absolută, care poate funcționa (prin anumite moduri de construcție) de la 0,1 până la 100 MPa.

Traductoare de presiune cu membrană (coardă) vibrantă

Traductoarele de presiune cu elemente elastice vibrante fac parte din categoria traductoarelor speciale de presiune. Schema de principiu a unui traductor de presiune cu membrană vibrantă este prezentată în fig.1.8. Traductorul este alcătuit dintr-un corp care prezintă o cavitate (1), în care pătrunde fluidul a cărui presiune se măsoară. [46].



Sub acțiunea fluidului sub presiune are loc o modificare a geometriei cavității de măsurare și o deformare a suporturilor de prindere (2). Deformarea se transmite sub forma unei forțe de întindere în membrana vibrantă (3). Inițial, membrana este excitată de un oscilator, prin intermediul unui generator de vibrații electromagnetic (A/O) și are o mișcare vibrațorie de amplitudine constantă; forța de întindere care ia naștere tensionând membrana, duce la modificarea frecvenței de oscilație.

Măsurând noua frecvență, avem o determinare cantitativă a mărimii presiunii p . Modificările de frecvență ale membranei vibrante sunt funcție de rigiditatea pereților cavității de măsurare, a suporturilor de prindere și a membranei vibrante.

1.2.1.2. Manometre de precizie cu membrane

Aparatele pentru măsurarea presiunii cu traductor elastic ocupă primul loc în tehnica măsurării presiunii deoarece, sunt robuste, au un domeniu mare de aplicare și se încadrează în clase ridicate de precizie, au gabarite mici și preț de cost redus.

Eroarea de măsurare a acestor aparate provine, în principal, din comportarea elementului elastic din componența traductorului. Eroarea totală este determinată de eroarea de liniaritate a

caracteristicii presiune-deformație, de eroarea de caracteristică datorată histerezisului și relaxării elastice, de plasarea limitei superioare de măsurare, în proximitatea limitei de proporționalitate a caracteristicii, și de utilizarea unor materiale, care asigură fidelitatea comportamentului elastic, timp îndelungat, chiar și la măsurarea presiunii unor fluide agresive.

Materialele folosite pentru membranele, care echipează aceste traductoare de presiune sunt: bronzul cu beriliu CuBe_2 (Cu 98%, Be 2%), bronzul fosforos, aliajele CuNi și oțelurile inoxidabile.

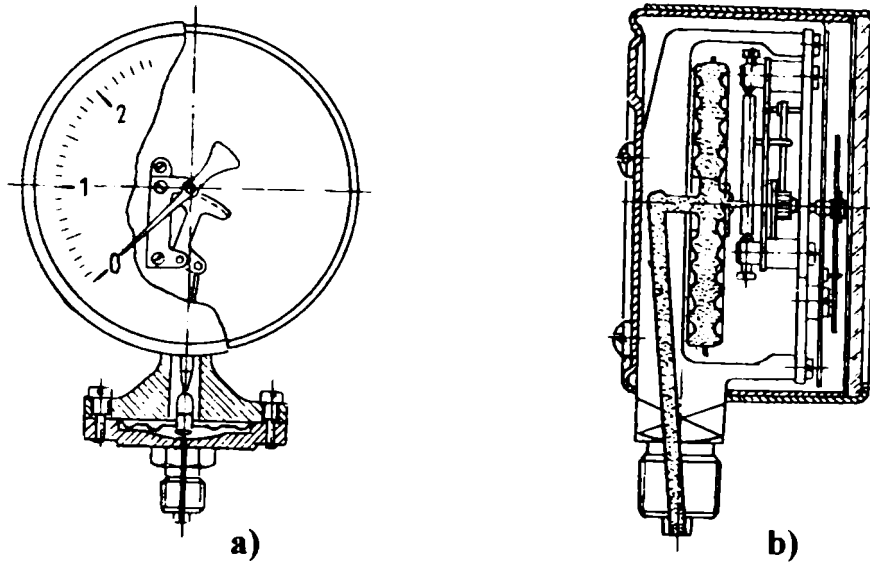


Fig.1.9

Aparatele cu traductor elastic se utilizează, pentru măsurarea presiunii relative însă, există posibilitatea ca, printr-o altă numerotare a scării, din manovacuummetre să se obțină, fără dificultate, aparate pentru măsurarea presiunii absolute. La aparatele etalon cu traductor elastic mecanismul de transmitere și cel de indicație sunt mult mai îngrijit executate, iar traductorul elastic este de cea mai bună calitate [33].

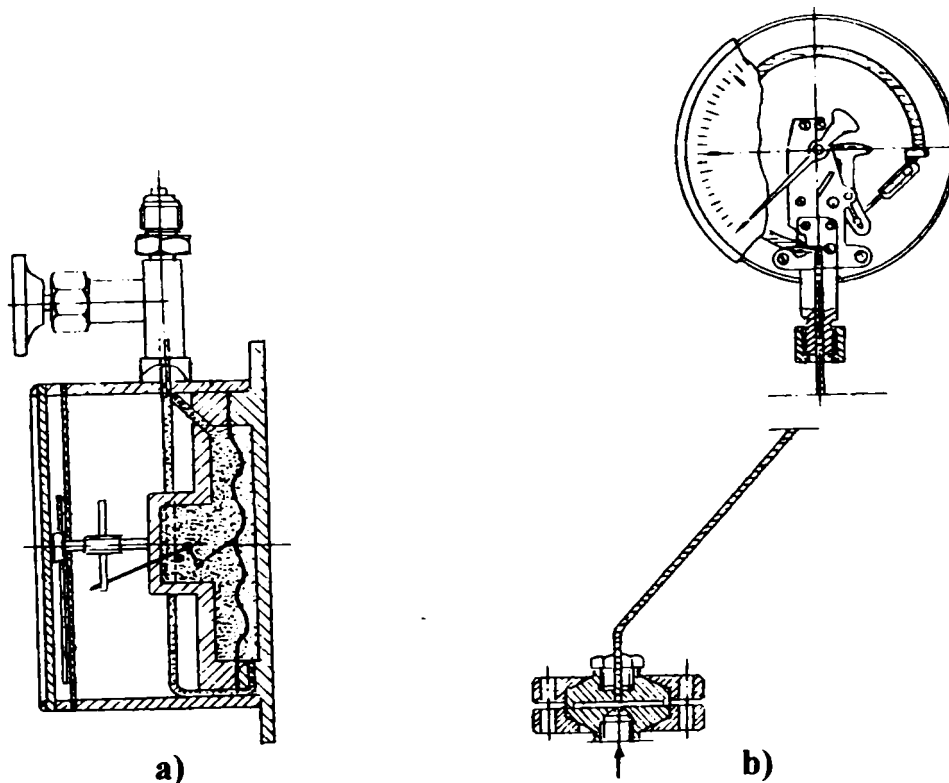


Fig.1.10

Restricțiile impuse permit încadrarea aparatelor în clasele 0,1÷0,6 de precizie. Cele mai mult p r t et lon folosesc ca traductor tubul Bourdon sau la presiuni foarte mari un tub în formă de U; pentru măsurarea presiunilor mici, se folosește capsula manometrică. Capsulele și membranele dotează aparatele manometrice de precizie, cum ar fi: manometre de presiune cu membrană pentru măsurarea presiunii lichid și gaz.

(fig.1.9a), manometre cu capsulă pentru măsurarea presiunilor joase (fig.1.9b), manometre diferențiale cu membrană (fig.1.10a), separatoarele cu membrană (fig.1.10b), altimetre, manovacuummetre ș.a [33].

1.2.1.3. Aparate de măsură de bord, care conțin membrane

Aparate pentru măsurarea presiunilor

Pentru obținerea funcționării normale a unor agregate și instalații de la bordul avionului, este necesară o alimentare continuă și la o presiune determinată, cu combustibili, uleiuri, lichide, gaze etc. Controlul presiunii lichidelor și a gazelor în toate aceste instalații, se face cu ajutorul aparatelor de măsură ca: manometre, vacuummetre, manovacuummetre etc [67].

Aparatele de tip manometric se utilizează la bordul avionului și pentru măsurări indirecte ale unora dintre parametrii de pilotaj și de navigație. Clasificarea acestor aparate poate fi:

A. După natura presiunilor pe care le măsoară:

- *manometre diferențiale* – destinate pentru măsurarea diferenței, între o presiune oarecare p_1 și presiunea atmosferică ($p_2 = p_0$). Manometrul se numește de presiune excedentară, dacă $p_1 > p_0$ și vacuummetru dacă $p_1 < p_0$;
- *manometre pentru măsurarea presiunii absolute* – destinate pentru măsurarea valorii absolute a presiunii. Manometrele de aviație pentru măsurarea presiunii absolute, destinate măsurării presiunilor, de valori mai mari sau mai mici, decât valoarea presiunii atmosferice, se numesc *manovacuummetre*;
- *barometre* – destinate pentru măsurarea presiunii atmosferice.

B. După destinație, aparatele utilizate în aviație pentru măsurarea presiunilor se împart în: indicatoare pentru presiunea uleiului, combustibilului, aerului comprimat, lichidelor sau amestecului carburant de admisie etc. Aparatele de tip manometric utilizate pentru măsurarea altitudinii de zbor, vitezei de zbor se numesc *altimetre* respectiv, *vitezometre*.

C. După metoda de măsurare a presiunii ele se împart în: mecanice, electromecanice, cu lichid (mercur, apă, alcool etc.), electrice etc.

Manometre mecanice

Aparatele de tip manometric se utilizează la bordul avioanelor, nu numai pentru măsurarea presiunilor, dar și pentru măsurarea altor parametri, ca: viteza proprie indicată și cea reală (față de aerul înconjurător), numărul M , viteza verticală (ascensională), altitudinea de zbor etc.

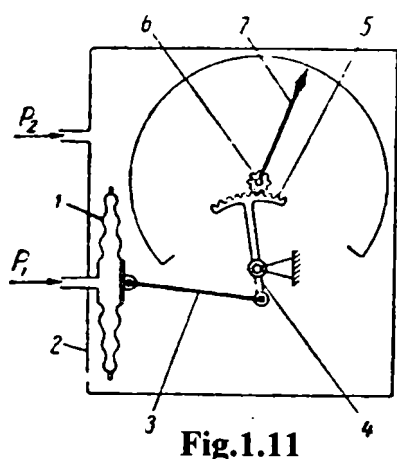


Fig.1.11

Schemă de principiu a manometrului mecanic cu element sensibil construit dintr-o capsulă manometrică (metalică) este prezentat în fig.1.11. Presiunea măsurată p_1 se dirijează în interiorul elementului sensibil (1), care este montat în carcasa (2), în care există presiunea p_2 . Deplasarea centrului elementului sensibil (1) se transmite acului indicator (7), prin mecanismul de transmitere și de multiplicare, compus din tija (3), pârghia (4) și perechea de roți dințate (5) și (6). La unele construcții de manometre, pentru a se micșora dimensiunile, axul capsulei manometrice coincide cu axul carcasei aparatului.

În acest caz, este necesar ca, mișcarea de la o suprafață la cealaltă, să se transmită la distanță cu ajutorul unor pârghii cu știfturi de dirijare. Eliminarea jocurilor din mecanism, se face printr-un arc spiral, legat direct de axul acului indicator (în figură nu este indicat). Manometrul din fig. 1.11 este un manometru diferențial, deoarece măsoară diferența a două presiuni, $p = p_1 - p_2$.

Dacă presiunea din interiorul carcasei manometrului corespunde cu presiunea atmosferică din exterior p_0 , atunci, $p_{supl}^1 = p_1 - p_0 = 0$.

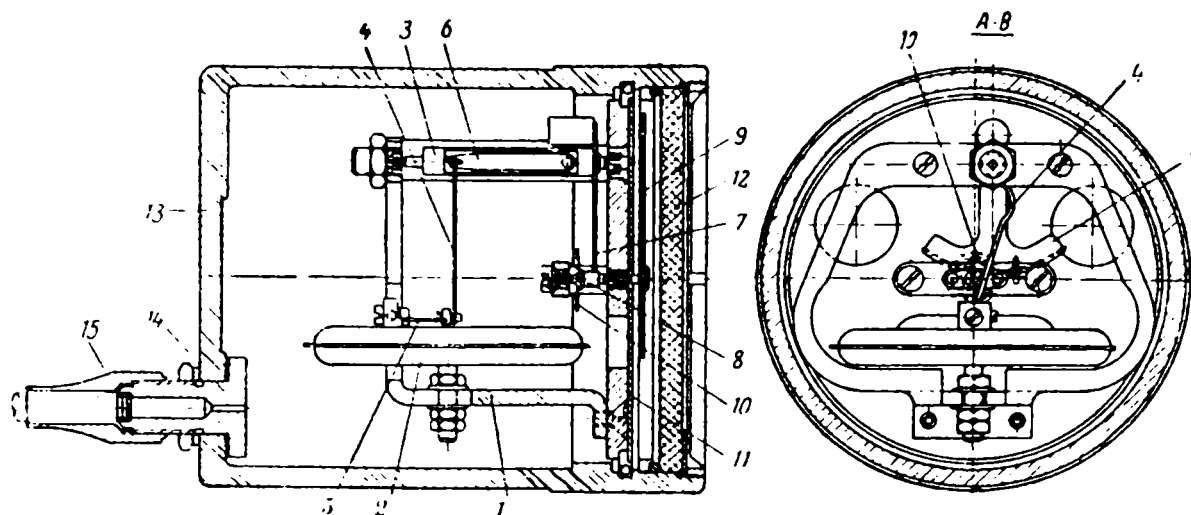


Fig.1.12

Manovacuummetrele se deosebesc, în principiu, de manometrele diferențiale prin aceea că, elementul lor sensibil este constituit dintr-o capsulă aneroidă. (în fig.1.12 este prezentată construcția unui manovacuummetru mecanic cu element sensibil constituit dintr-o capsulă aneroidă). Presiunea la admisie se aduce în interiorul carcasei ermetice (13), prin ștuțul (14) și ea acționează asupra capsulei aneroide (2), care este fixată cu centrul inferior de placa (1). Centrul superior al capsulei este legat de mecanismul de transmisie, care se compune dintr-o transmisie cu două trepte: un ax cu cot și angrenaje. Deplasarea centrului superior al capsulei se transmite brațului (3) al axului cu cot, prin tija (4). Împreună cu axul (3), se rotește și sectorul dințat (7), care la rândul lui rotește pinionul (8), solidar cu acul indicator (9). Pentru compensarea erorilor de temperatură, aparatul are compensatorii bimetalici (6) și (5). Jocurile mecanismului sunt eliminate prin arcul spiral (10). Citirea indicațiilor se face după scala (11), gradată în mm coloană de mercur.

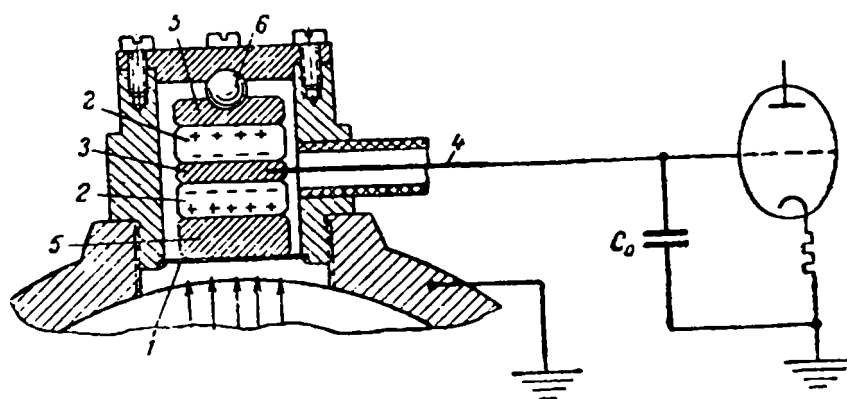


Fig.1.13

În fig.1.13 este prezentată una dintre aplicațiile efectului piezoelectric utilizat ca element sensibil pentru măsurarea presiunilor. Presiunea de măsurat acționează asupra membranei (1), care transmite tensiunea la două plăcuțe de cuarț (2), amplasate astfel că, pe rii lor în rior, care se ating de garnitura metalică (3), iau naștere sarcini electrice de același semn.

Potențialul de pe laturile interioare ale plăcuțelor se culege cu ajutorul unui conductor bine izolat (4), legat de garnitură. Potențialul de pe laturile exterioare se culege prin garniturile metalice (5), membrana (1) și bila (6). Diferența de potențial se culege de pe plăcuțele de cuarț

¹ Excedentar; în surplus

(2) și se dirijează spre grila unui tub electronic amplificator special. Tensiunea amplificată se măsoară cu un voltmetru electronic sau cu un oscilograf cu buclă sau catodic. Această tensiune este proporțională cu mărimea presiunii măsurate, adică această caracteristică a manometrului piezoelectric are o variație liniară. Condensatorul de intrare C_0 , servește pentru micșorarea tensiunii de intrare în tubul electronic amplificator.

Metoda piezoelectrică nu este valabilă pentru măsurători statice. Aceasta se explică prin faptul că, sarcinile electrice care se creează pe plăcuțele de cuarț nu se pot păstra timp îndelungat, din cauza scurgerilor ce se produc în elementele instalației de măsurat. Scurgerea sarcinilor electrice este condiționată de conductibilitatea volumetrică și de suprafață a cristalului, de conductibilitatea izolației conductorului de legătură și de conductibilitatea suprafețelor dintre grila catodului tubului electronic amplificator. Chiar și în cazul celei mai bune izolații, sarcinile electrice dispar în fracțiuni de secundă. De aceea, metoda piezoelectrică este folosită numai la procese de foarte scurtă durată, cum ar fi măsurarea presiunii din cilindrii motoarelor cu ardere internă, a vibrațiilor, a accelerațiilor etc.

Aparate de măsură a altitudinii de zbor (altimetre)

După metoda de măsurare a altitudinii de zbor, altimetrele se împart în:

- *barometrice*;
- *cu ecou acustic*;
- *electronice etc.*

Cu ajutorul acestor aparate de măsură se pot determina următoarele altitudini de zbor, față de nivele de referință bine determinate:

- *altitudinea absolută*, față de nivelul mijlociu al mării² și care nu depinde de relieful survolat;
- *altitudinea de zbor reală*,³ față de nivelul locului peste care se zboară și care este egală cu diferența dintre altitudinea absolută și altitudinea locului, raportată la nivelul mării. În zbor orizontal, altitudinea de zbor reală se schimbă în funcție de relieful locului deasupra căruia se efectuează zborul;
- *altitudinea de zbor relativă*, raportată la un nivel convențional, al unei localități, de exemplu, aeroportul de decolare sau de aterizare.

În timpul pilotării avionului, pentru securitatea avionului și la unele misiuni (de exemplu fotografie aeriană) este necesar să se cunoască *altitudinea de zbor reală*. Măsurarea precisă a altitudinii de zbor reale, mai este foarte importantă, pentru efectuarea aterizării după instrumente de bord, în cazul zborului fără vizibilitate (aterizare oarbă).

Altimetrele barometrice utilizate la bordul avioanelor, indică altitudinea de zbor față de un loc pe sol, pentru care se cunoaște presiunea barometrică a aerului, obținută prin măsurarea ei. Pentru determinarea altitudinii de zbor reale, este necesar să se efectueze o serie de corecții.

Altimetrele cu ecou acustic și radioaltimetrele indică direct altitudinea de zbor reală.

² În condițiile atmosferei normale: presiune atmosferică 760 mm col.Hg, temperatură 15°C la nivelul mării, umezeală relativă zero.

³ În mod curent noțiunile *altitudine* și *înălțime de zbor* sunt folosite de aviatori asemenea unor sinonime, cu preferință în limbajul curent de aerodrom, pentru termenul *înălțime*.

Altimetre barometrice

Metoda barometrică de determinare a altitudinii de zbor, se bazează pe variația presiunii atmosferice cu altitudinea. Această metodă permite determinarea altitudinii de zbor față de orice nivel de referință, dacă se cunosc valorile p_0 , p_H și T_0 (p_0 - presiunea aerului la suprafața Pământului; p_H - presiunea aerului la o altitudine oarecare H ; T_0 - temperatura absolută la sol),

$$H = f(p_H, p_0, T_0, \tau), \quad (1.1)$$

unde τ este gradientul vertical de temperatură, adică mărimea cu care scade temperatura aerului, corespunzător unei creșteri de înălțime egală cu un metru.

Presiunea p_H poate fi măsurată direct la bordul avionului, cu un manometru de presiune absolută (barometru). Dacă scala barometrului este gradată în unități de înălțime el se numește *altimetru barometric*. Altimetrul barometric indică altitudinea, în raport cu acel nivel, pentru care au fost luate în considerare, pentru etalonare, presiunea și temperatura respectivă (p_0 și T_0). Altimetrele barometrice se etalonează pentru condițiile normale, care definesc atmosfera standard, adică pentru $p_0 = 760$ mm Hg și $T_0 = 288^\circ$ ($+15^\circ\text{C}$), aer normal uscat; umezeală relativă = 0. Gradientul de temperatură se ia la valoarea medie anuală, adică $\tau = 0,0065^\circ/\text{m}$.

În condițiile atmosferei normale, altimetrul barometric indică altitudinea de zbor absolută. Altitudinea de zbor reală, poate fi determinată, dacă se cunoaște relieful locului sau dacă se cunosc p_0 și T_0 , la nivelul solului peste care se zboară.

Presiunea și temperatura reală, la nivelul mării, în orice punct de pe glob, precum și repartiția presiunii și temperaturii, la diferite altitudini, nu rămân constante și pot diferi de valorile normale, motiv pentru care indicațiile altimetrului barometric nu corespund altitudinii de zbor absolute. Erorile altimetrului barometric, până la o anumită valoare, se corectează de către echipaj, în timpul zborului.

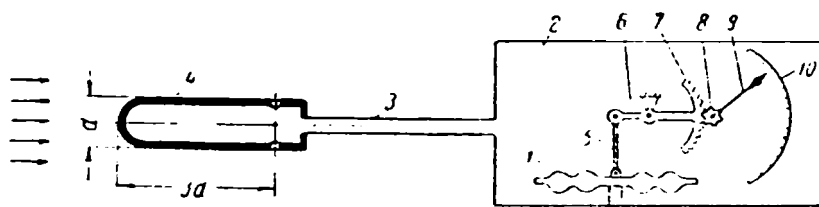


Fig.1.14

Schema de principiu a altimetrului barometric este prezentată în fig.1.14.

Elementul de bază, care reacționează la orice schimbare a presiunii atmosferice, este o capsulă aneroidă (1).

În principiu, având funcția de capsulă aneroidă, pot fi utilizate și alte elemente elastice, ca: tuburi Bourdon, silfoane etc., dar ele nu se folosesc pentru motivele arătate mai jos.

Pentru o măsurare corectă a presiunii atmosferice este necesar ca elementul sensibil (capsula aneroidă) să perceapă presiunea statică a aerului, care acționează în afara avionului, la nivelul altitudinii de zbor. Presiunea aerului în interiorul cabinei avionului, unde este amplasat altimetrul, poate fi mult diferită de presiunea statică a aerului înconjurător din exterior.

Astfel, în cazul în care, cabina avionului este ermetic închisă, atunci, presiunea din cabină va fi superioară celei exterioare, din cauza presiunii ce se creează în interiorul cabinei.

În cazul în care cabina nu este ermetizată, totuși presiunea din interiorul ei poate diferi de cea exterioară, din cauza influenței curenților de aer, care poate crea în cabină o presiune mai mare sau mai mică, în funcție de forma fuselajului și a felului cum sunt dispuse diferite orificii și alte goluri, care fac legătura interiorului cabinei cu aerul din exterior.

Pentru eliminarea erorilor produse de diferența între presiunea din cabină și presiunea aerului din exterior, capsula aneroidă este montată într-un corp ermetic (2), care prin intermediul conductei (3), comunică cu receptorul de presiune statică (4), amplasat în afara avionului, în curentul de aer (tub Pitot). Receptorul de presiune statică (4) are forma unui cilindru, a cărui parte anterioară se termină cu o emisferă. Axa cilindrului este instalată paralel cu axa longitudinală a avionului.

La o distanță, egală aproximativ cu trei diametre, de capătul din față al receptorului, presiunea suplimentară se apropie de zero și ca urmare, presiunea absolută pe suprafața cilindrului devine practic egală cu presiunea statică a aerului înconjurător. În acest loc, se găsesc orificiile care leagă suprafața cilindrului cu partea interioară a camerei ermetice, în care se creează astfel o presiune egală cu cea statică. Practic, receptorul de presiune statică al altimetrului este legat cu receptorul de presiune atmosferică (tubul Pitot) al vitezometrului.

Pentru măsurarea presiunii statice poate fi folosit, de asemenea, ca receptor al presiunii statice, fuselajul avionului, dacă el are o formă aerodinamică corespunzătoare. În acest caz, pe suprafața fuselajului se determină un punct, în care presiunea este egală cu cea statică, în acest punct, se face un orificiu în fuselaj, în care se montează priza de captare a presiunii.

Funcționarea mecanismului altimetrului este analoagă cu aceea a mecanismelor de la manometrele mecanice. În timpul urcării la înălțime, presiunea care acționează asupra capsulei aneroide se micșorează și centrul superior al capsulei (1) se deplasează. Cu centrul superior al capsulei, printr-o articulație este legată tija (5), care prin pârghia de transmisie (6), deplasează sectorul dințat (7). Deplasarea sectorului se transmite roții dințate (8), care se deplasează împreună cu acul indicator (9), fixat de ea. Citirea indicațiilor se face după scala (10), gradată în unități de altitudine (înălțime).

Primele altimetre utilizate în aviație, posedau un singur ac indicator, care executa maxim o singură rotație. Dezavantajul altimetrelor cu un singur ac indicator este imprecizia indicațiilor. Pentru a mări precizia indicațiilor, altimetrele actuale au un mecanism de multiplicare mai dezvoltat și sunt înzestrate cu două ace indicatoare. Unul dintre acele indicatoare execută o singură rotație, putând măsura altitudinii de la 0 ÷ 10 km și servește pentru citiri brute, iar cel de al doilea poate executa 10 - 15 rotații și servește pentru citiri de precizie. O rotație a acestui ac indicator corespunde unei schimbări de înălțime egală cu 1 km, cadranul indicatorului fiind gradat în subdiviziuni de sute și zeci de metri. Citirea altitudinii se face însumând indicațiile ambelor ace indicatoare. Deoarece, elementul sensibil al altimetrului barometric este o capsulă aneroidă, el va indica altitudinea absolută.

Aparate de măsură a vitezelor de zbor (vitezometre)

După construcție și deci după felul vitezelor măsurate și destinație, vitezometrele se clasifică și poartă denumiri, după cum urmează:

1. *Indicator de viteză proprie indicată (față de aer)*. Acesta indică viteza de deplasare a avionului față de aerul înconjurător, fără introducerea corecțiilor de variație a presiunii și temperaturii, în funcție de viteza de zbor;
2. *Indicator de viteză proprie reală*. Acesta indică viteza reală (efectivă) de deplasare a avionului față de aer, corectată pentru densitatea normală a aerului, în funcție de presiunea și temperatura la altitudinea de zbor. Dacă zborul s-ar executa la presiunea normală⁴, viteza proprie reală și cea indicată ar fi egale;

⁴ În condițiile atmosferei standard

3. *Indicator de viteză față de sol (pe drumul urmat)*. Acesta indică viteza de deplasare orizontală a avionului, față de Pământ, care este egală cu suma geometrică a componentelor orizontale ale vitezei proprii reale și a vitezei vântului;
4. *Indicator al numărului M*. Acesta indică valoarea vitezei proprii reale, raportată la viteza sunetului;
5. *Indicator de viteză verticală (variometru)*. Acesta măsoară viteza ascensională sau de coborâre pe verticală (este componenta verticală a vitezei avionului, față de sol).

Indicatorul de viteză proprie indicată

Acest indicator este utilizat ca instrument de bord pentru pilotaj, în scopul menținerii portanței necesare zborului și indirect, pentru măsurarea forțelor aerodinamice, care acționează asupra avionului în zbor. Acțiunea curentului de aer, asupra avionului în zbor, depinde de unghiul de atac⁵, adică de unghiul format de direcția curentului de aer, cu coarda aripii avionului; de valoarea unghiului de atac, depinde portanța avionului în zbor.

Fiecărui regim de zbor (urcare, coborâre, viraj etc.) îi corespunde o valoare minimă a vitezei la care avionul se poate susține în aer și poate zbura la acest regim. Astfel, pentru a păstra echilibrul avionului, în raport cu axa transversală, este necesar un control permanent al vitezei avionului, care se face cu ajutorul *indicatorului de viteză indicată*. De fapt, indicatorul de viteză indicată nu măsoară viteza, ci presiunea curentului de aer întâmpinat, care depinde nu numai de viteza de zbor, dar și de densitatea aerului. Tocmai în aceasta constă calitatea aparatului (în cazul utilizării lui pentru pilotajul avionului), deoarece portanța avionului este și ea proporțională cu presiunea curentului. Această proporționalitate, se menține numai pentru vitezele subsonice; pentru viteze apropiate de viteza sunetului, caracteristicile aerodinamice ale avionului se schimbă și încep să depindă, din ce în ce mai mult, de numărul M.

Mult timp, indicatorul de viteză proprie indicată era folosit nu numai ca aparat de pilotaj, dar și ca aparat de navigație, pentru determinarea vitezei proprii reale, față de aer. Pentru această ultimă utilizare, asupra indicațiilor aparatului se făceau o serie de corecții. În prezent, se construiesc indicatoare, pentru măsurarea vitezei proprii reale, care își fac corecțiile automat. Pe avioanele moderne, indicatorul de viteză proprie reală și cel de viteză proprie indicată constituie un aparat unic, montat în același corp. Funcționarea indicatorului de viteză proprie indicată se bazează pe măsurarea presiunii dinamice, a curentului de aer întâmpinat. Schema de principiu este prezentată în fig. 1.15.

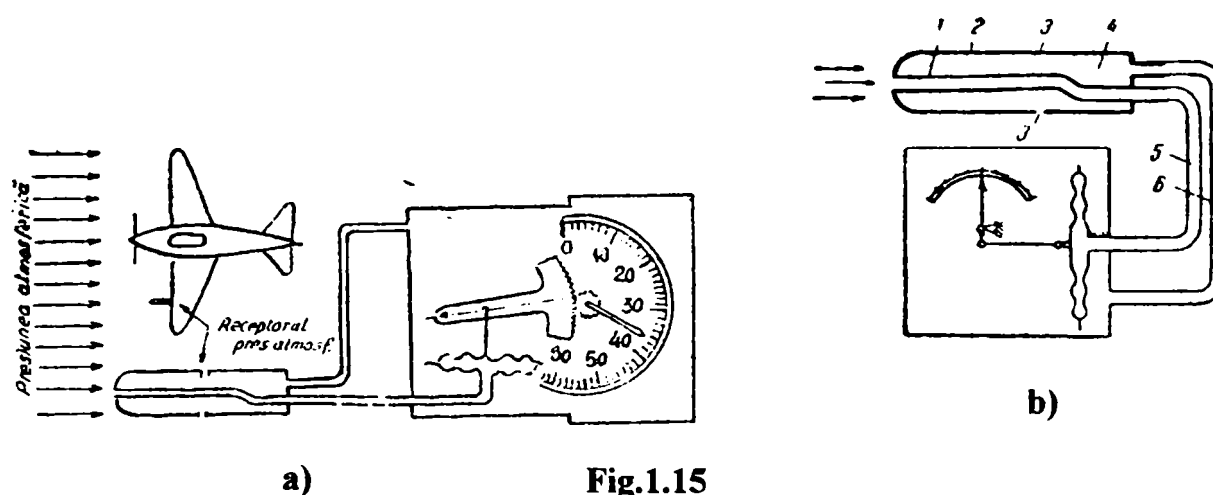


Fig.1.15

⁵ Unghi de atac, sinonim cu unghi de incidență

Aparatul se compune din receptorul presiunii statice, receptorul presiunii totale și indicator. Receptoarele de presiune, totală și statică, sunt montate în afara avionului, în curentul de aer întâmpinat, însă într-o zonă cât mai neturburată de organele avionului și sunt legate cu indicatorul prin conducte speciale. Indicatorul se prezintă sub forma unui manometru diferențial.

Receptorul de presiune totală are forma unui tub dirijat, cu capătul deschis pe direcția de zbor și care corespunde prin intermediul conductei, cu partea interioară a elementului sensibil al manometrului diferențial.

În timpul zborului, curentul de aer întâmpinat, care apasă asupra receptorului presiunii totale, este frânat și ca urmare viteza lui relativă devine zero. Dar energia cinetică a particulelor de aer se transformă în energie potențială, datorită căreia în tub se creează o presiune suplimentară, denumită dinamică.

Presiunea totală a aerului din receptor, și din interiorul elementului sensibil al manometrului, este egală cu suma presiunilor statică și dinamică:

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{st}} + P_{\text{din}} \quad (1.2)$$

În corpul manometrului, se creează o presiune egală cu presiunea statică a aerului, deoarece acesta comunică cu receptorul de presiune statică.

Asupra elementului sensibil al manometrului diferențial va acționa diferența între presiunea statică și presiunea totală:

$$P_{\text{tot}} - P_{\text{st}} = P_{\text{din}} \quad (1.3)$$

Deci, diferența de presiune măsurată cu ajutorul manometrului diferențial, va fi egală cu presiunea dinamică, care se creează prin frânarea curentului de aer întâmpinat în receptorul presiunii totale. Mărimea presiunii dinamice depinde de viteza avionului față de aer; diferența de presiune, măsurată cu ajutorul manometrului, este funcție de viteza proprie de zbor.

Pentru a se calcula scala instrumentului și a se analiza erorile acestuia, trebuie să se cunoască variația presiunii dinamice, a aerului, în funcție de viteza proprie de zbor. Această variație este dată de așa numita *formulă aerodinamică*, iar tabela de calcul determinată pe baza acestei formule, se numește *tabelă aerodinamică*.

La majoritatea avioanelor, receptoarele de presiune dinamică și statică utilizate, se prezintă sub forma unui singur receptor, denumit receptor pentru presiunea aerului, cunoscut și sub numele de *tub Pitot*.

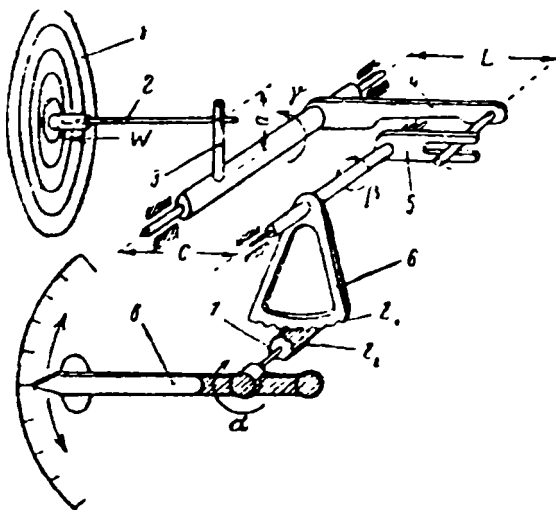


Fig.1.16

Elementul sensibil, al unui indicator pentru viteza proprie indicată, constă dintr-o capsulă manometrică cu membrană triplă (1) (fig.1.16). Cele două membrane inferioare formează o capsulă manometrică închisă, în interiorul căreia este dirijată presiunea totală; în centrul membranei superioare există un orificiu, prin care tija (2), a mecanismului face legătura cu membrana mijlocie. Odată cu viteza de zbor, viteza de apăsare se mărește și începând cu viteza de 300 km/h, membrana mijlocie se suprapune pe cea superioară, fapt datorită căruia se mărește rigiditatea elementului sensibil și se obține amortizarea scalei.

Mecanismul aparatului se compune dintr-o transmisie ce constă dintr-un ax cu cot (tija (2) și cotul (4)), sectorul (5) cu cilindrul dințat (6) și arcul spiral (9). Aparatul este prevăzut cu compensatorul de temperatură, format din lamela bimetalică (3), fixată pe axul cu cot (4) și din mecanismul de corecție al transmisiei, pentru cazul schimbărilor de temperatură. Perfecționarea ulterioară a vitezometrului, indicator de viteză proprie indicată, a fost realizată sub forma unor vitezometre cu două ace indicatoare, care posedă o înaltă precizie a indicațiilor pe toată lungimea scalei, pentru o gamă largă de măsurători.

Dificultatea constructivă, a unui astfel de aparat, constă în necesitatea obținerii unei scale cu gradații uniforme, la o dependență neliniară a presiunii măsurate, față de viteza proprie de zbor (presiunea dinamică este considerată proporțională cu pătratul vitezei). Din cele două ace indicatoare, unul este tăiat la mijloc, iar al doilea este plin. Primul face o rotație la o creștere a vitezei pentru fiecare 100 km/h și dă indicații precise până la 1 km/h. Al doilea face 1/10 rotații, pentru fiecare creștere a vitezei cu 100 km/h și indică sutele de km/h.

Paralel cu vitezometrele, indicatoare de viteză proprie indicată, există vitezometre combinate, care măsoară în același timp, atât viteza proprie indicată, cât și viteza proprie reală. Vitezometrul combinat cuprinde în corpul său două instrumente: indicatorul de viteză proprie indicată și indicatorul de viteză proprie reală a avionului. El este prevăzut cu un cadran cu scală unică, gradată de la 0 ÷ 1000 km/h și cu două ace indicatoare, din care unul indică viteza proprie indicată, în limitele 0 ÷ 1000 km/h, iar al doilea indică viteza proprie reală, în limitele 400 ÷ 1000 km/h.

Când avionul zboară la altitudine mică, viteza proprie indicată și viteza proprie reală coincid și ambele ace indicatoare se deplasează la fel. Pe măsură ce altitudinea crește, viteza proprie reală crește și depășește viteza proprie indicată, iar acele se desfac formând un unghi. Deschiderea unghiului crește cu altitudinea, iar pentru ușurință, viteza proprie reală se citește după acul care indică viteza cea mai mare. De indicațiile acului care arată viteza proprie indicată, pilotul se folosește, în special, la decolare și aterizare. Acul vitezei proprii reale servește pentru probleme de navigație; indirect după acest ac indicator, se pot trage concluzii și asupra numărului M , pentru că la o temperatură determinată, fiecărui număr M , îi corespunde o viteză proprie reală bine definită.

Indicatorul numărului M

Odată cu apropierea vitezei proprii a avionului de viteza sunetului, caracteristicile aerodinamice ale avionului încep să depindă, de numărul M .

$$M = \frac{V}{a}, \quad (1.4)$$

unde a este viteza sunetului, egală cu:

$$a = \sqrt{kgRT} \approx 20\sqrt{T}. \quad (1.5)$$

Din această cauză, pe avioanele moderne de mare viteză, în afară de vitezometrul indicator de viteză proprie indicată și de viteză proprie reală, se montează și indicatorul numărului M , care măsoară raportul dintre viteza proprie reală și viteza sunetului.

Începând cu numărul $M = 0,7 \div 0,8$, în cadrul scurgerii aerului pe aripă se produc schimbări importante. Pe unele porțiuni ale aripii pot apare viteze sonice și se pot produce, așa numitele, *unde de șoc*, și ca urmare, se formează zone unde se micșorează brusc viteza relativă a curentului de aer, iar temperatura și presiunea aerului descresc tot așa, în mod brusc. Ca rezultat, apare o creștere apreciabilă a rezistenței la înaintare și o scădere a portanței.

Stabilitatea și pilotajul avionului suferă o schimbare bruscă, producându-se o așa numită, *criză de undă*. În legătură cu acest fenomen, pilotul în timpul executării zborurilor apropiate de viteza sunetului, trebuie să cunoască mai întâi, valoarea numărului M și apoi, viteza proprie de zbor a avionului. La diferite altitudini, criza de undă apare la viteze diferite, dar la aceeași valoare a numărului M .

Numărul M se poate calcula sau determina după grafice, folosindu-se indicațiile vitezometrului, altimetrului și termometrului, dar aceste calcule necesită o oarecare durată de timp. Din acest motiv, tabloul de bord al postului de pilotaj, al avioanelor de mare viteză, este dotat cu un aparat special, pe al cărui cadran este înscrisă o scală gradată direct în numere M , aparat care se numește *indicatorul numărului M* sau *machmetru*.

Construcțiile actuale ale indicatorului numărului M se bazează pe măsurarea raportului între presiunea dinamică și cea statică. Relația de calcul, după care se construiește schema machmetrului, se obține din relația (1.4), în care se înlocuiesc valorile vitezei avionului și cele ale vitezei sunetului, obținându-se:

$$M = \frac{V}{a} = \frac{\sqrt{\frac{2gRT}{k-1} \left[\left(\frac{P_{t\alpha}}{P_s} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}}{\sqrt{kgRT}} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{P_{t\alpha}}{P_s} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} = f \left(\frac{P_{t\alpha}}{P_s} \right). \quad (1.6)$$

Această formulă demonstrează că numărul M este o funcție a raportului între presiunea totală cu cea statică, independentă de temperatura aerului.

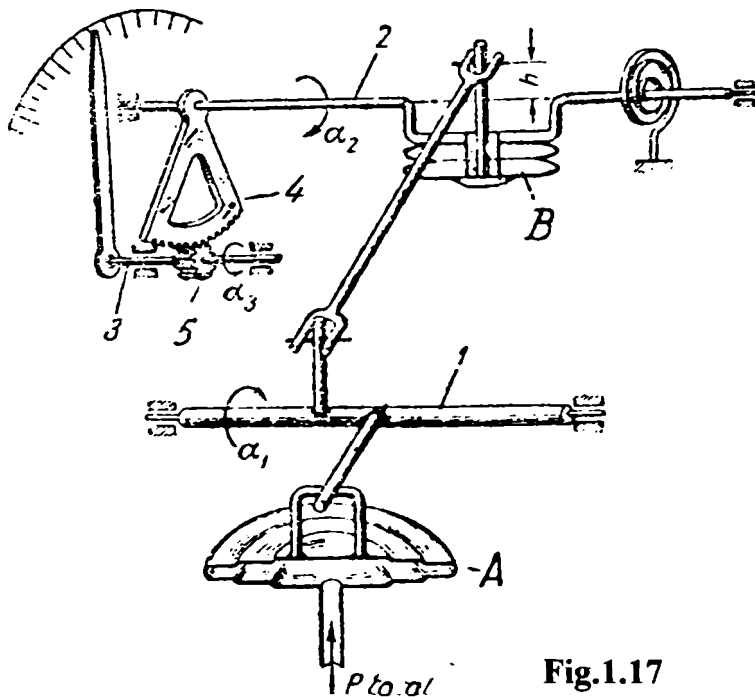


Fig.1.17

În fig.1.17 este prezentată schema cinematică simplificată a unui machmetru; procesul de măsurare a numărului M , de către indicator, poate fi explicat pe această schemă.

În interiorul capsulei manometrice A , de la receptorul presiunilor, sosește presiunea totală p . Asupra exteriorului capsulei A , acționează presiunea statică a atmosferei, la altitudinea dată p_{stH} . Deformația capsulei A și unghiul de rotație α_1 , al axului (1), al mecanismului de transmisie și proporțional cu diferența de presiuni (totală și statică la altitudinea dată).

Această diferență nu este altceva decât presiunea dinamică $p_{din} = \rho \frac{V^2}{2}$, proporțională cu viteza proprie de zbor (V), deci,

$$\alpha_1 = k_1 p_{din}. \quad (1.7)$$

Unghiul de rotație α_2 al axei (2) depinde de două mărimi; el este cu atât mai mare cu cât este mai mare unghiul de rotație α_1 și cu cât este mai mic brațul h , adică:

$$\alpha_2 = k_2 \frac{\alpha_1}{h} \quad (1.8)$$

Mărimea brațului h depinde de gradul de deformare al capsulei aneroide B, sub acțiunea presiunii atmosferice p_{stH} , la altitudinea dată.

Deci, h este cu atât mai mare, cu cât este mai mare presiunea statică atmosferică, la altitudinea dată, și anume:

$$h = k_3 p_{stH}, \quad (1.9)$$

înlocuind valorile α_1 și h în expresia pentru α_2 , se obține:

$$\alpha_2 = k_1 k_2 k_3 \frac{P_{din}}{P_{stH}} \quad (1.10)$$

Unghiul de rotație α_3 al axului (3), al acului indicator, depinde de unghiul de rotație al axului (2) și de raportul de transmitere al angrenajului, compus din sectorul (4) și pinionul (5), adică:

$$\alpha_3 = k_1 k_2 k_3 k_4 \frac{P_{din}}{P_{stH}} \quad (1.11)$$

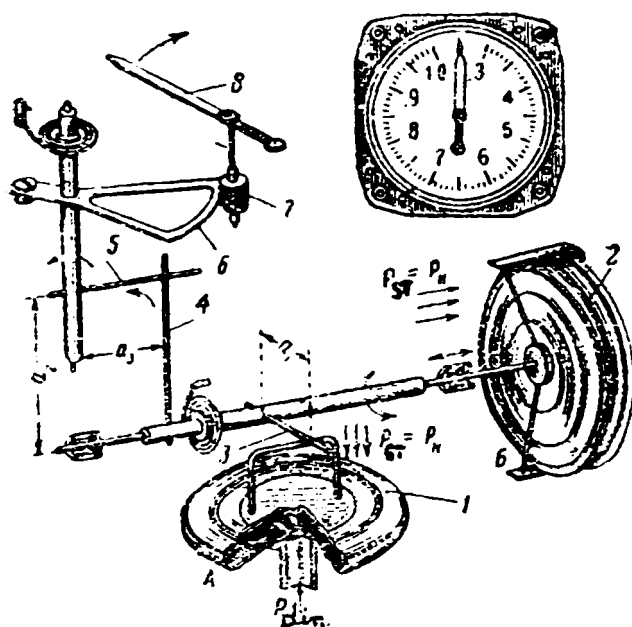


Fig.1.18

Coefficienții k_1, k_2, k_3, k_4 nu depind de p_{din} și p_{stH} . Asupra valorii acestor coeficienți pot influența numai schimbările de temperatură, dar pentru a evita această influență, aparatul este prevăzut cu un compensator de temperatură. Astfel toți acești coeficienți pot fi înlocuiți cu un coeficient constant k , și atunci,

$$\alpha_3 = k \frac{P_{din}}{P_{stH}} \quad (1.12)$$

În fig.1.18 este prezentată schema de principiu a machmetrului cu schema cinematică din fig.1.17.

În concluzie, s-a stabilit că unghiul de rotație al acului indicator depinde de raportul presiunii dinamice și al presiunii statice. Dar, formula numărului M , relația (1.6), poate fi scrisă:

$$\frac{P_{din}}{P_{stH}} = \left(1 + \frac{M^2}{5}\right)^{3,5} \quad (1.13)$$

deci,

$$\alpha_3 = k \left(1 + \frac{M^2}{5}\right)^{3,5} \quad (1.14)$$

aceasta însemnând că fiecărui număr M , îi corespunde un unghi determinat de deplasare al acului indicator, deci scala aparatului poate fi gradată direct în numere M , pentru $k = 7/5 = 1,4$.

Aparate de măsură a vitezei verticale de zbor (variometre)

Variometrul indică viteza verticală a avionului, adică viteza de urcare (ascensională) sau de coborâre, fiind utilizat ca și indicator al zborului orizontal. În timpul zborului orizontal, acul variometrului rămâne tot timpul pe zero; imediat ce avionul își schimbă traiectoria orizontală, fără ca axa longitudinală a acestuia să-și schimbe orientarea (cum ar fi de exemplu sub acțiunea unor curenți ascendenți sau descendenți), acul variometrului deviază în sus sau în jos, indicând în m/s, câștigul sau pierderea de înălțime. El este, de asemenea, folosit în urcare sau coborâre, pentru determinarea vitezei verticale. Cunoscând viteza verticală, în m/s, se poate determina timpul de urcare, până la o anumită altitudine.

Funcționarea variometrului se bazează pe măsurarea presiunii suplimentare (depresiunii) ce se creează prin schimbarea înălțimii de zbor, în interiorul unui volum închis, care face legătură cu atmosfera exterioară, printr-un tub capilar.

Schema de principiu a variometrului este prezentată în fig. 1.19.

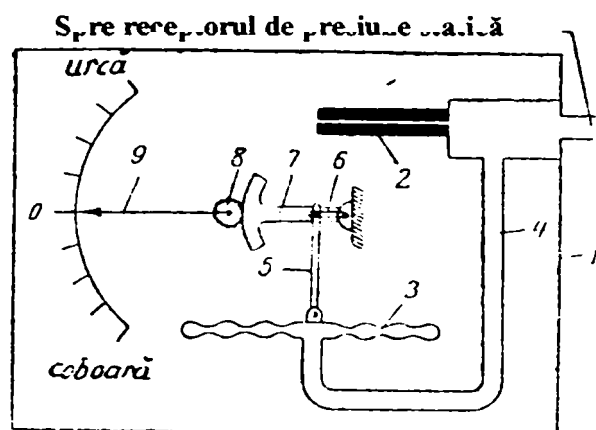


Fig.1.19

Cavitatea interioară a corpului aparatului, care este ermetică, comunică cu exteriorul printr-un tub capilar de sticlă (2). Variometrul, ca și altimetrul, trebuie să primească presiunea statică, a aerului exterior dintr-o zonă liniștită din afara avionului, la altitudinea de zbor. În acest scop, tubul capilar (2), al variometrului, este legat printr-un ștuț cu receptorul presiunii statice.

În interiorul corpului (1) se montează un manometru mecanic, care măsoară diferența dintre presiunea din interiorul corpului și presiunea statică din exterior, la altitudinea de zbor.

Manometrul se compune dintr-o capsulă manometrică (3), a cărei suprafață exterioară suportă presiunea ce acționează în interiorul corpului (1), iar partea interioară a capsulei se găsește sub acțiunea presiunii atmosferice, introduse în interiorul capsulei (3), cu ajutorul conductei (4). Astfel, capsula suportă diferența între presiunea din corpul aparatului și presiunea atmosferică din exterior. Deplasarea centrului capsulei (3) se transmite acului indicator (9), prin mecanismul de transmitere și multiplicare, format din tija (5), cu cotul articulat (6), sectorul (7) și pinionul (8).

Variometrul funcționează în felul următor:

Când avionul zboară orizontal, presiunea din interiorul corpului este egală cu cea atmosferică, exterioară. Diferența de presiune din interiorul și exteriorul capsulei (3), este egală cu zero și acul indicator (9) este pe zero.

Când avionul urcă, presiunea atmosferică se micșorează mereu și aerul din corpul (1) al aparatului, se scurge prin tubul capilar (2), în afară; în consecință, scade și presiunea din interiorul corpului (1).

Din cauza rezistenței secțiunii capilare, presiunea din interiorul corpului nu reușește să se echilibreze cu cea atmosferică și în interiorul corpului rămâne un supliment de presiune, care este cu atât mai mare cu cât avionul urcă mai repede.

1.2.2. Traductoare de vibrații cu elemente elastice de tip membrană

Principiile traductoarelor de vibrații

Structura unui traductor de vibrații, prezentată în fig.1.21, are ca și particularitate, faptul că, elementul sensibil furnizează la ieșire tot o mărime de natură mecanică (deplasare sau forță). Din acest motiv, pentru obținerea unui semnal electric, care să fie prelucrat de către adaptor, este necesar un convertor intermediar [46].

Elementul sensibil la vibrații și convertorul intermediar formează, din punct de vedere constructiv, o singură unitate, fiind însă separate, din punct de vedere funcțional.

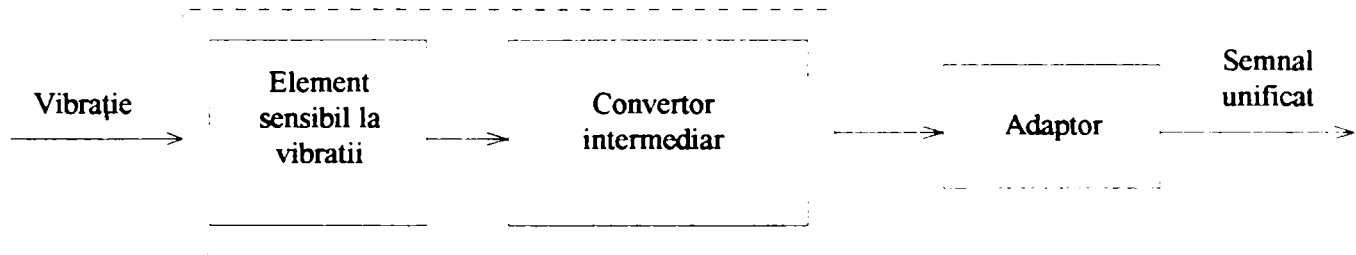


Fig.1.21

Elementele sensibile, folosite la detectarea vibrațiilor liniare, sunt de tipul inerțial (cu masă seismică). Structura generală a unui element sensibil la vibrații este prezentat în fig.1.22, acesta având în componența sa, un sistem oscilant, cu un singur grad de libertate. Tot ansamblul este montat în interiorul unei carcase.

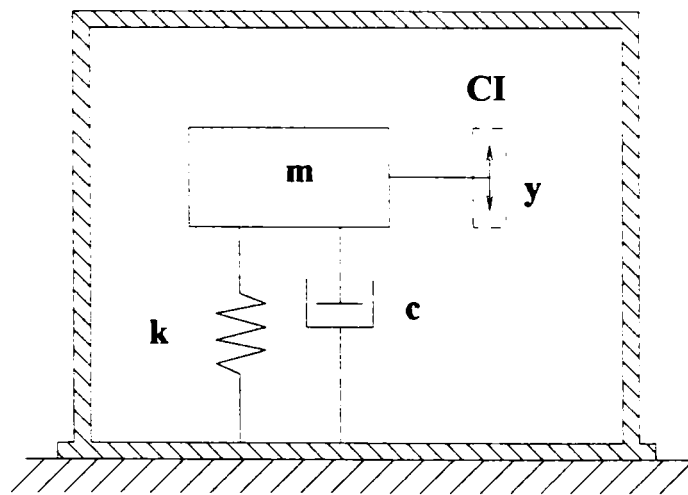


Fig.1.22

Mișcarea este amortizată, iar valoarea amortizării este proporțională cu viteza. Ținând cont că, vibrațiile sunt caracteristice corpurilor în mișcare, analiza funcționării elementelor sensibile este realizată în condițiile regimului dinamic. Analizând schema echivalentă din fig.1.22, se deduc ecuațiile de echilibru ale traductorului de vibrații. La apariția unei deplasări $x(t)$, a carcasei (fixată rigid de suportul ale cărei caracteristici vibratorii se doresc a fi analizate) generată de forța F , de inerție, aplicată corpului mobil de masă m , aceasta se va deplasa pe o direcție y , paralelă cu axa x , după legea:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = -m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.15)$$

În cazul unor vibrații de torsiune ecuația de funcționare este:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = M = Fr, \quad (1.16)$$

în care J , reprezintă momentul de inerție al masei m , față de centrul său de greutate, c și k sunt factori de amortizare respectiv, rigiditate unghiulară a arborelui, iar φ este unghiul de rotație.

La rezolvarea ecuației (1.16) se disting trei situații specifice:

1. masa m este mare, c și k sunt neglijabile (amortizare și arc slabe) - în acest caz masa m nu urmărește mișcarea carcasei, ci rămâne fixă în spațiu, carcasa deplasându-se față de ea, în consecință elementul sensibil este utilizat pentru măsurarea deplasării $x(t)$;
2. c este foarte mare (amortizarea este foarte puternică), m și k sunt neglijabile - deplasarea y este în acest caz proporțională cu viteza de măsurat, elementul sensibil fiind utilizat la măsurarea vitezei (dx/dt);
3. k este mare (arcul este foarte rigid), m și c sunt neglijabile - deplasarea masei este proporțională cu accelerația de măsurat, elementul sensibil fiind utilizat la măsurarea accelerației imprimată carcusei (d^2x/dt^2).

În carcasă se găsește și convertorul intermediar (CI), care transformă deplasarea $y(t)$ sau forța dinamică într-un semnal electric.

Tipuri de convertoare intermediare

Convertoarele intermediare asociate elementelor sensibile cu masă seismică pentru conversie în semnal electric pot fi de două feluri:

- de tip parametric;
- de tip generator.

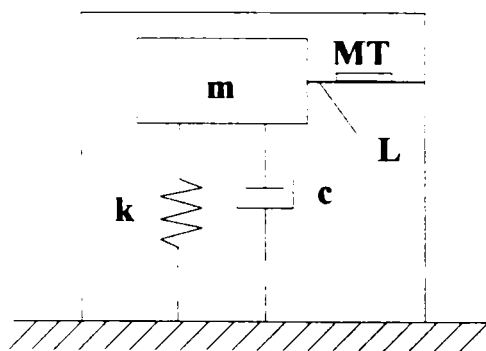


Fig.1.23

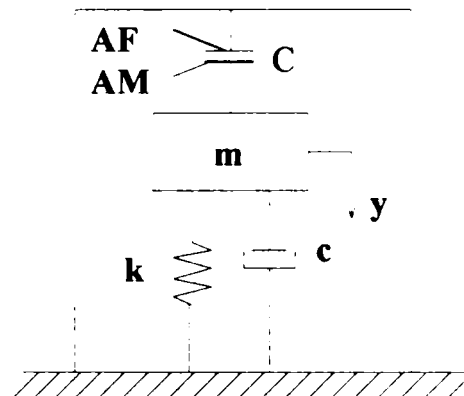


Fig.1.24

Convertoarele intermediare de tip parametric sunt realizate în mai multe variante:

- *convertoare intermediare rezistive* – principalele variante sunt de tip tensorezistiv, fixate fie pe arc, fie pe un alt element elastic influențat de masa vibrată (fig.1.23). Pe lamelă L, prinsă rigid de masa m și de carcasă, este fixată marca tensometrică MT, care prin deformarea generată de mișcarea vibratorie își modifică rezistența;
- *convertoare intermediare capacitive* – (fig.1.24) la care prin deplasarea masei m , se deplasează și armătura mobilă AM, a condensatorului C. Utilizând o schemă de măsurare adecvată, capacitatea $C(y)$ a condensatorului poate fi determinată, obținându-se în final, o informație utilă referitoare la caracteristicile vibrației. Datorită preciziei mai scăzute, convertoarele capacitive sunt folosite mai ales pentru măsurări relative;
- *convertoare intermediare inductive* – se bazează pe modificarea inductanței unei bobine prin deplasarea unui miez mobil (fig.1.25a) sau prin modificarea întrefierului între masa seismică și bobină (fig.1.25b);
- *convertoare intermediare piezorezistive* – sunt bazate pe fenomenul piezorezistivității, datorită căruia modificările de rezistivitate (deci rezistență electrică) se produc sub acțiunea

unui câmp de tensiuni mecanice, la care este supus corpul. Modificările de rezistență apar și în cazul variațiilor statice și dinamice, ale câmpului de tensiuni.

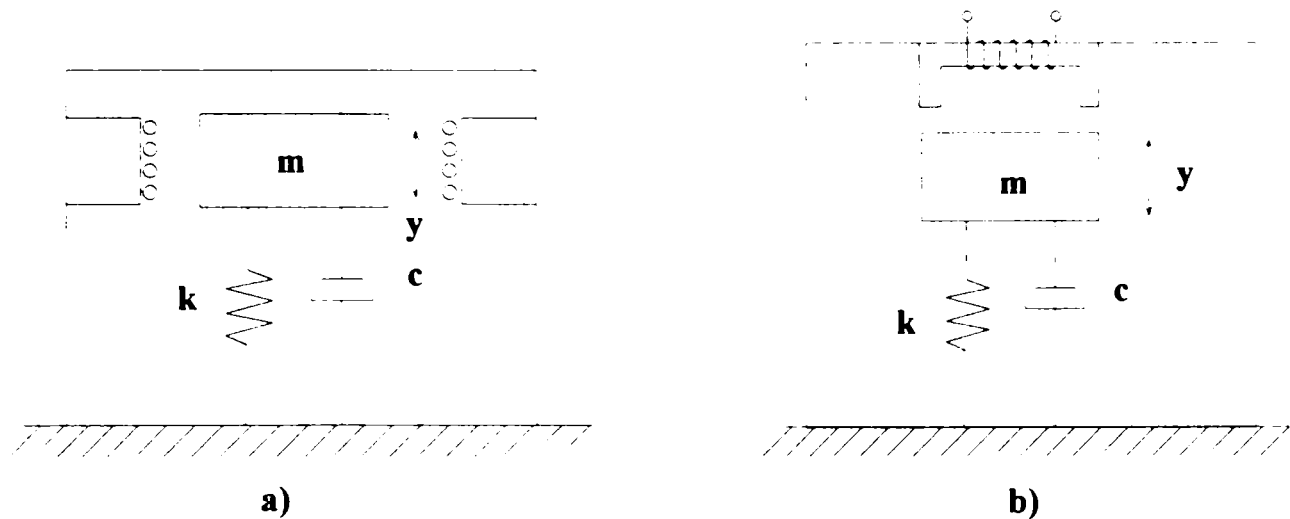


Fig.1.25

Fenomenul de piezorezistivitate apare mai puternic în cazul unor semiconductoare. Convertoarele intermediare de tip generator sunt și ele construite în mai multe variante.

- *convertoare intermediare electro-magnetice* – la aceste convertoare, folosite pentru măsurarea vibrațiilor liniare, fenomenul utilizat constă, în apariția unei tensiuni electromotoare într-un conductor care se deplasează cu viteza v , perpendicular pe liniile de forță ale unui câmp magnetic de inducție B ;
- *convertoare intermediare piezoelectrice* – sunt bazate pe fenomenul piezoelectric, care constă în apariția unei polarizări electrice pe suprafețele unui cristal, atunci când, asupra acestuia acționează o forță F ; polarizarea este proporțională cu mărimea forței aplicate, schimbându-și semnul după sensul forței.

Analizând funcția de transfer a traductorului de vibrații se disting trei zone de funcționare:

1. zona I – în care $\omega < \omega_0$, amplitudinea pulsației este proporțională cu accelerația, elementul sensibil lucrând în regim de accelerometru seismic (suspensia elastică este tare și greutatea totală este mică);
2. zona II – în care pulsația ω este comparabilă cu ω_0 , elementul sensibil este utilizat la măsurarea vitezei;
3. zona III – în care $\omega > \omega_0$, când masa și suportul vibrează în opoziție de fază. Dacă convertorul intermediar este un traductor de deplasare, sistemul seismic funcționează ca vibrometru (suspensia este moale, ea determinând o deplasare mare a masei seismice la frecvențe joase).

În cazurile în care mișcarea vibratorie nu este sinusoidală, răspunsul dinamic la diferite componente spectrale este diferit, apărând distorsiuni. Distorsiunile de amplitudine impun o frecvență limită inferioară de lucru a elementului sensibil pentru vibrații și o frecvență limită superioară a elementului sensibil pentru accelerații.

Traductorul de vibrații (fig.1.26) este alcătuit dintr-o masă seismică susținută de membranele (6) și (7). Masa seismică este alcătuită din masa bobinei de măsură (3), masa bobinei adiționale de amortizare (4), masa cilindrului de amortizare (5), și masa arborelui, pe care sunt fixate acestea. Bobinele se mișcă într-un câmp magnetic creat de magnetul permanent (1) [83].

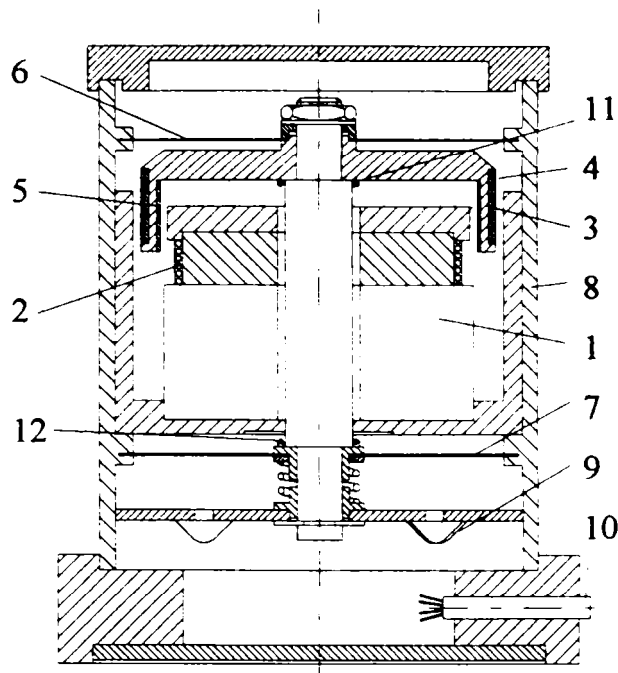


Fig.1.26

Pe suprafața magnetului este amplasat un bobinaj de corecție (2). Semnalul de la bobinele de măsură (care sunt mobile) trece prin conexiunile flexibile (9), până la cablul ecranat (10). Toate părțile componente sunt asamblate în carcasa traductorului (8). Traductorul mai conține două limitatoare de cursă (11) și (12) montate pe arbore, care intră în funcție în cazul vibrațiilor de amplitudine foarte mare. Traductorul este fixat rigid de structura ale cărei vibrații urmează a fi măsurate (în timpul funcționării). Mișcarea relativă, dintre bobinajul de măsură și câmpul magnet c, nuce în bobnă o tensiune electromotoare. Amplitudinea acestei tensiuni este proporțională cu amplitudinea mișcării relative și în același timp, cu viteza de vibrație a structurii testate. Cilindrul de amortizare reduce influența frecvenței naturale asupra semnalului de măsură.

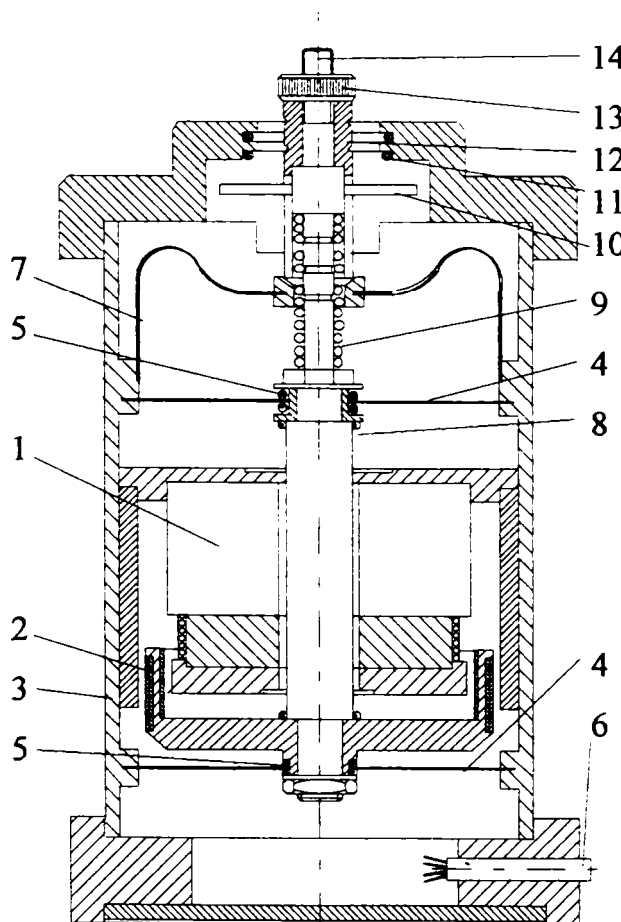


Fig.1.27

Înfășurarea de corecție de pe magnetul permanent elimină influența curenților turbionari. Principiul de funcționare magneto-dinamic face ca semnalul de la ieșire să fie de amplitudine mare deci, ușor de prelucrat electronic.

A doua soluție de traductor este concepută pentru a măsura viteza relativă între două obiecte. Această soluție este prezentată în fig.1.27 [86]. Principial, aceasta este identică cu soluția anterioară și este alcătuită din componente similare: (1) magnet permanent, (2) înfășurare de măsură, (3) carcasă, (4) membrane, (5) inele de fixare, (6) cablu ecranat, (8) limitatoare. Diferențele constructive față de soluția precedentă constau dintr-un știft de contact (14), un dispozitiv de încărcare - descărcare (12), bușca canelată (13), inelele tampon (11), dispozitiv de tensionare (10), arcul de legătură (9) și arcul de încărcare (7).

Principiul de funcționare este identic cu cel al traductorului prezentat anterior, cu diferența că, știftul de contact poate fi fixat rigid de masa care vibrează.

Traductorul poate fi folosit, dacă este necesar și ca excitator de vibrații. Arcul de cuplare are rolul de a permite trecerea spre bobina de măsurare, numai a unei mișcări axiale.

Atunci când traductorul este folosit ca și excitator, el trebuie alimentat cu curent alternativ, iar știftul de contact va executa o mișcare de vibrație cu frecvența egală cu frecvența sursei.

1.2.3. Termometre și termoregulate

Aparate de măsură a temperaturilor la bordul avioanelor

Clasificare

A. După destinație, termometrele montate la bordul avioanelor sunt utilizate pentru măsurarea temperaturii [67]: *uleiului, apei (lichidului de răcire), chiulaselor cilindrilor, aerului din difuzorul carburatorului, aerului ambiant, gazelor de evacuare, gazelor din camere de ardere, ejectoare etc.*

B. După principiul de funcționare, termometrele împart în:

- *mecanice*, care la rândul lor se împart în *dilatometrice, bimetalice, hidraulice, cu gaze, cu lichid și vapori*;
- *electromecanice*, și anume termometre mecanice cu transmisie electrică la distanță a indicațiilor;
- *electrice*, care pot fi cu rezistență electrică și termoelectrice.

Cea mai largă utilizare la bordul avioanelor, o au termometrele cu rezistență electrică, care sunt folosite pentru măsurarea temperaturilor până la $150 \div 200^\circ\text{C}$ (ale uleiului, lichidului de răcire, carburatorului, aerului ambiant), precum și termometrele termoelectrice, care sunt folosite pentru măsurarea temperaturilor până la $300 \div 350^\circ\text{C}$ (ale chiulaselor cilindrilor) sau până la $900 \div 1000^\circ\text{C}$ (pentru gazele de evacuare).

Termometre mecanice

Termometrul dilatometric se bazează pe folosirea proprietăților corpurilor solide de a-și schimba dimensiunile liniare, la variația temperaturii.

Termometrul bimetalic se bazează pe proprietatea corpurilor solide de a-și schimba dimensiunile lor, în funcție de variația temperaturii.

Funcționarea *termometrului hidraulic* se bazează pe dilatarea volumetrică a lichidelor, în funcție de temperatură.

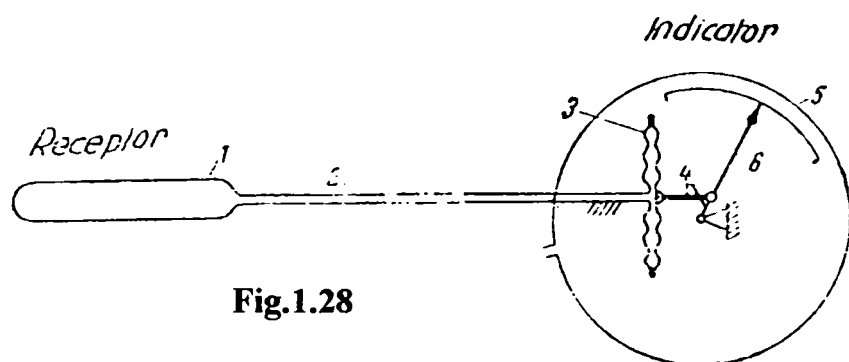


Fig.1.28

Schema termometrului hidraulic cu transmisie la distanță este prezentat în fig.1.28. Aparatul se compune dintr-un receptor (care este un bulb ermetic plasat în mediul a cărui temperatură se măsoară) și un indicator, care este un termometru mecanic, dar care posedă în plus un element elastic foarte sensibil.

Bulbul ermetic (1) comunică cu ajutorul conductei de legătură (2), cu cavitatea interioară a elementului sensibil elastic (3), al indicatorului. Cavitățile interioare ale bulbului, ale conductei de legătură și ale elementului elastic, sunt pline cu lichid. Când temperatura, pe care vrem să o măsurăm crește, lichidul din bulb se dilată și surplusul se scurge prin conductă în elementul elastic (3), creând astfel o deplasare a peretelui elastic, care se măsoară cu ajutorul mecanismului de transmisie și de multiplicare (4), scala (5) și acul indicator (6).

Deplasarea w a elementului sensibil este proporțională cu variația volumului lichidului, în funcție de temperatură, care este:

$$\Delta v = v_0 \beta \Delta t . \quad (1.17)$$

v_0 - volumul inițial al lichidului în receptor, la o temperatură oarecare; β - coeficientul de dilatație volumetrică a lichidelor; Δt - variația de temperatură (față de temperatura inițială t_0). Pentru membrane și silfoare, deplasarea w este aproximativ egală cu:

$$w \approx \frac{\Delta v}{F} , \quad (1.18)$$

unde F este suprafața efectivă a elementului sensibil. Dacă mecanismul are un raport de transmitere constant, unghiul de rotire al acului indicator va fi egal cu:

$$\alpha = i w . \quad (1.19)$$

Indicațiile termometrului hidraulic nu depind de rigiditatea elementului sensibil, ci de forma și de dimensiunile acestuia; de asemenea, indicațiile nu depind de presiunea exterioară, deoarece lichidele, în mod practic, sunt incompresibile și de aceea variația presiunii exterioare nu poate produce deplasarea elementului sensibil (lucru valabil în cazul în care sistemul este complet umplut cu lichid).

La schimbarea temperaturii aerului ambiant, erorile de temperatură ale termometrului hidraulic la distanță, se produc din cauza dilatației anumitor volume de lichid fără acțiune (volumul lichidului din interiorul conductei de legătură). Pentru eliminarea acestor erori, volumul interior al conductei trebuie ales cât mai mic, prin reducerea secțiunii conductei, cât și a cavității elementului sensibil.

Gama temperaturilor, care pot fi măsurate cu termometrul hidraulic, este determinată de proprietățile lichidului utilizat, adică temperatura de solidificare și cea de fierbere; se ține cont de faptul că, la mărirea presiunii interioare crește și temperatura de fierbere.

Termometre electromecanice

Un termometru electromecanic se poate obține din orice receptor de termometru mecanic, legat de un indicator electric; combinarea receptorului termometrului mecanic cu un indicator electric și cu instalația electrică de măsurat, formează *termometrul electromecanic*.

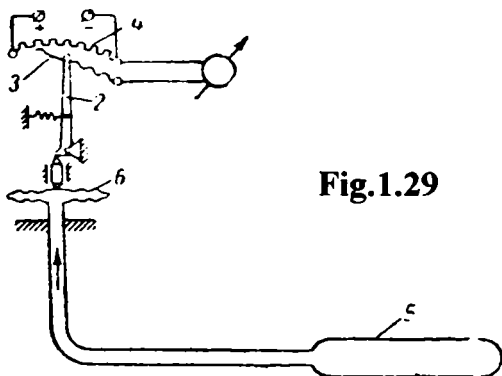


Fig.1.29

În fig.1.29 este prezentat un termometru electromecanic cu receptorul hidraulic (5), care deplasează peria (3), de-a lungul potențiometrului (4), cu ajutorul capsulei manometrice (6) și a tijei transmițătoare (2). În locul potențiometrului se poate utiliza un alt tip de indicator electric, de exemplu cu inducție, cu transformator etc. Un mare neajuns al termometrelor electro-mecanice, de altfel și a celor mecanice, este reglarea și etalonarea dificilă, în timpul fabricației.

Fiecare termometru construit, trebuie să fie etalonat în condiții speciale (într-o baie cu ulei sau cu apă, în care trebuie menținută strict temperatura fixată).

Necesitatea unui asemenea reglaj separat, duce la lipsa unei standardizări a caracteristicilor elementelor sensibile. Procesul de etalonare se poate simplifica numai prin utilizarea unor elemente sensibile care posedă caracteristici standardizate. Această condiție o îndeplinesc termometrele electrice.

Reglatoare

Membranele nemetalice au o largă utilizare în construcția de aparate și echipamente, ele putând fi folosite ca elemente de acționare, ca pereți de separație între două incinte, sau ca elemente de asigurare a etanșării elastice [74].

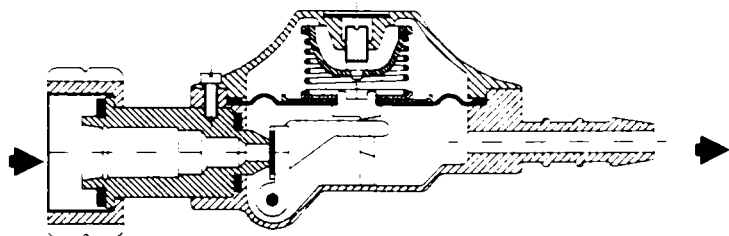


Fig.1.30

În fig.1.30 este prezentată soluția constructivă a unui regulator de presiune. Sensul de scurgere al fluidului prin regulator, este indicat de săgeți. Intrarea în regulator se face printr-o duză și un interstițiu comandat de o pârghie. Pârghia este pusă în mișcare de un ansamblu de măsurare a presiunii, format dintr-o membrană și un arc elicoidal. La tendința de creștere a presiunii, membrana se deformează iar pârghia micșorează interstițiul.

Micșorarea interstițiului împiedică creșterea presiunii în camera de măsură. La scăderea presiunii în camera de măsură, efectul de reglare este invers. La ieșirea regulatorului de presiune fluidul are o presiune cvasi-constantă.

1.2.4. Ghidaje cu elemente elastice de tip membrană

Ghidajele cu membrane fac parte din categoria ghidajelor de precizie. La construcția acestor ghidaje se utilizează membrane plane, membrane gofrate și membrane cu decupări. Ghidajele cu membrane permit deplasări foarte mici și la viteze foarte mici, fără să apară fenomenul de stick-slip, caracteristic ghidajelor cu alunecare [34], [71].

Două membrane așezate în paralel și fixate pe contur sunt utilizate pentru ghidarea mișcării de translație. Schema principală a unui ghidaj de translație cu membrane este prezentată în fig.1.31.

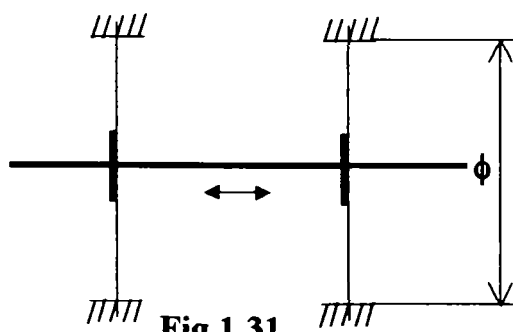


Fig.1.31

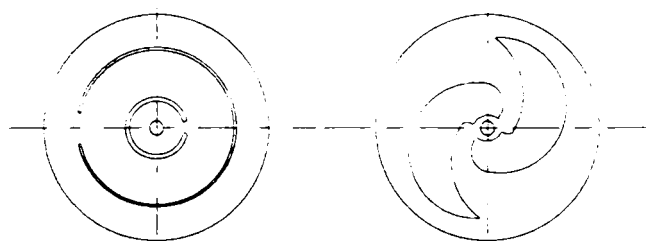


Fig.1.32

În funcție de alura caracteristicii membranelor, la ghidajele de translație se folosesc cu precădere membranele gofrate și membranele plane cu decupări.

Câteva forme constructive de membrane plane cu decupări, utilizate la ghidajele cu membrane sunt prezentate în fig.1.32. Mișcarea ghidată de membrane cu decupări în spirală (fig.1.33a) nu este riguros liniară (din cauza asimetriei decupării), de asemenea, apare în timpul translației și o rotație.

La membrana cu decupări de forma prezentată în fig.1.33b, nu apar dezavantajele membranei cu decupări în spirală, dar această membrană este mult mai rigidă și are o caracteristică neliniară.

Decupările radiale ale membranei (fig.1.33c) permit mărirea domeniului deplasărilor, în comparație cu membranele cu decupări concentrice (fig.1.33b).

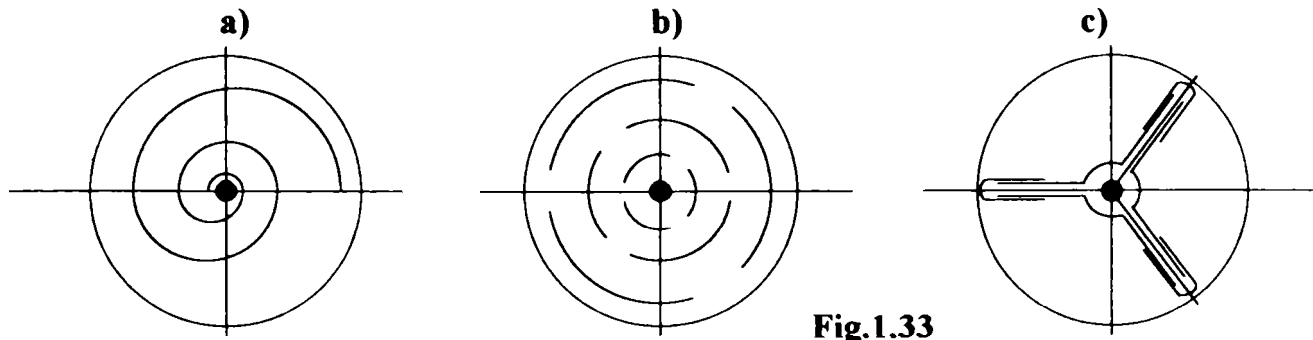


Fig.1.33

Prin decupări practicate în membrane, domeniul de deplasare al ghidajului poate fi mărit, dar rezistența membranei și forța de revenire scad, iar menținerea deplasării rectilinii devine mai dificilă. Pentru păstrarea stabilității transversale și pentru asigurarea forței de revenire se folosesc diverse sisteme, dintre care cele mai simple constau din utilizarea unor contragreutăți (fig.1.34a) sau a unor arcuri elicoidale (fig.1.34b) [34].

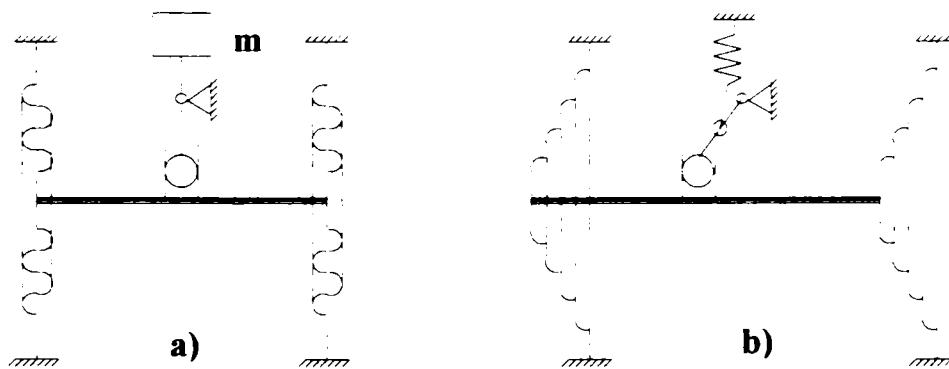


Fig.1.34

Membranele cu decupări se execută din bronz cu beriliu. Decuparea se realizează prin acoperirea membranei cu ceară, însemnarea formei decupărilor (prin trasare) și atacarea cu acid azotic. În timpul tratamentului termic, membranele cu decupări se presează bine între membrane plane, astfel încât să nu apară deformații în zona decupărilor.

Ghidajele cu membrane se utilizează în aparatele de măsură la care trebuie să se obțină o traiectorie liniară foarte exactă și pierderi prin frecare foarte mici. Avantajul major al acestor ghidaje constă în lipsa frecărilor de alunecare. Ghidajele cu membrane au o comportare simetrică după toate direcțiile perpendiculare pe axa ghidajului, ceea ce le recomandă ca și ghidaje de precizie. Pentru un domeniu de utilizare dat, caracteristica poate fi stabilită cu exactitate, diferențele dintre valorile calculate și cele experimentale nu depășesc 20%.

Ghidajele cu elemente elastice au o serie de avantaje, dintre care se pot aminti [71]:

- sunt foarte precise, pentru că nu au jocuri între părțile componente; erorile datorate relaxării elastice, pot fi reduse printr-o fixare adecvată și prin alegerea materialelor;
- au o durată de funcționare îndelungată, acest lucru fiind avantajos în cazul mișcărilor vibratorii, care conduc la distrugerea altor tipuri de ghidaje într-un timp foarte scurt;
- sunt foarte potrivite pentru mișcări efectuate în regim de vibrații exterioare, având rezistență foarte mică la mișcare;
- au frecări deosebit de mici;

- nu necesită întreținere și nici lubrifiere;
- deformațiile suferite de elementele elastice ale ghidajului conduc la o înmagazinare a energiei, care este avantajoasă la utilizarea lor în aparatele și instrumentele de măsură;
- în aparatele și instrumentele de măsură electrice, oferă o modalitate, directă și sigură, de conducere a curentului electric la echipajul mobil.

1.2.5. Cuplaje cu elemente elastice de tip membrană

La aceste cuplaje, momentul de torsiune este transmis prin intermediul unui element elastic, care practic separă, din punct de vedere dinamic, arborele conducător de cel condus [71]. În fig.1.35a este reprezentat un cuplaj elastic la care elementul elastic constă din membrana (2). Flanșa (1) realizează fixarea membranei pe arborele conducător, iar flanșa (3) fixarea pe arborele condus. Acest cuplaj necesită o aliniere exactă a arborilor la asamblare.

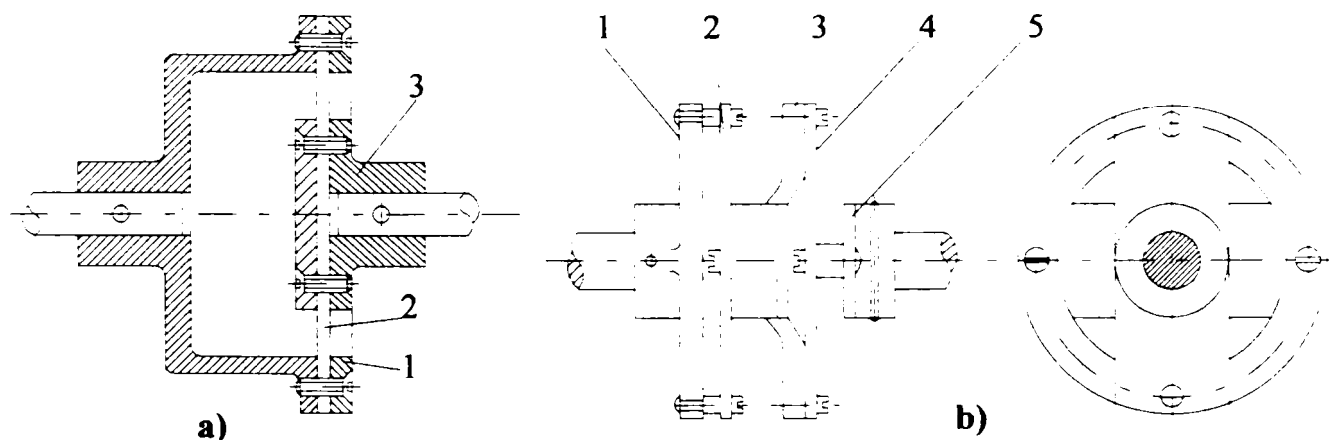


Fig.1.35

Dacă membrana este metalică, cuplajul este foarte rigid pe direcția de rotație. Dacă cuplajul trebuie să fie flexibil și să poată prelua vibrații, membrana se confecționează din cauciuc, material plastic sau piele.

Cuplajul cu elemente elastice prezentat în fig.1.35b conține două membrane plane (2) și (4), legate prin crucea (3). Dacă membranele sunt confecționate dintr-un material cu frecări interne importante, atunci cuplajul permite variații considerabile ale unghiului dintre arbori cu amortizarea vibrațiilor și suprimarea zgomotului. Ambele variante de cuplaje cu membrane atenuează șocurile torsionale. Ele sunt aplicabile la acele dispozitive și acționări de măsurare, unde propagarea șocurilor nu este permisă.

1.2.6. Separatoare de medii cu elemente elastice de tip membrană

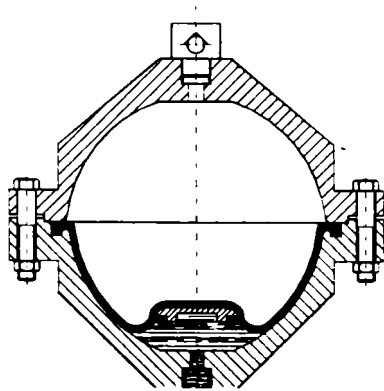


Fig.1.36

În fig.1.36 este prezentată soluția constructivă a unui acumulator de ulei, destinat instalațiilor de acționare hidraulică [75], [85]. Rolul funcțional al acumulatorului este acela de a acoperi fazele de lucru, cu consum mare de debit.

Construcția lui constă dintr-o cavitate separată în două încăperi, de o membrană. Într-o încăpere se introduce prin intermediul unei supape de sens azot sub presiune. În cealaltă încăpere pătrunde, respectiv iese, uleiul instalației hidraulice.

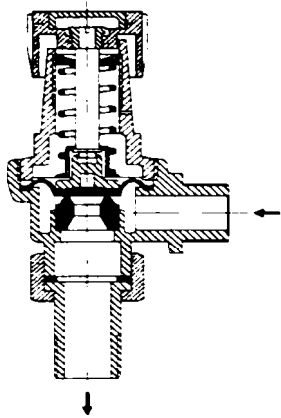


Fig.1.37

În fig.1.37 este prezentată soluția constructivă a unui ventil de siguranță [75]. Ventilul are rol de supapă de siguranță. Starea lui normală este închisă. În această stare se află datorită forței provenită de la arcul elicoidal. Ventilul este închis atâta timp cât presiunea fluidului este sub valoarea sau valoarea prag. Sub această valoare, forța din arc este mai mare decât forța dată de membrană.

La depășirea valorii de prag presiunea fluidului creează pe suprafața membranei o forță, care depășește forța elastică din arc. Rezultanta celor două forțe deschide ventilul și permite evacuarea fluidului.

Echilibrul forțelor se stabilește pentru o valoare nominală dată a fluidului, prin pretensionarea corespunzătoare a arcului.

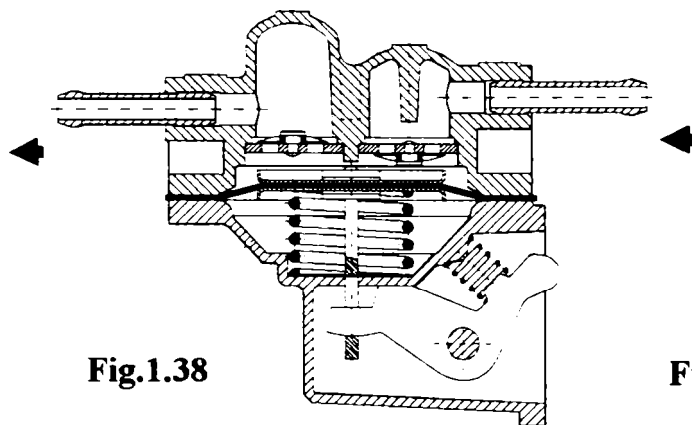


Fig.1.38

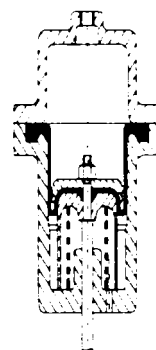


Fig.1.39

În fig.1.38 [75] este prezentată soluția constructivă a unei pompe cu membrană, destinată lichidelor incompresibile (pompa de benzină de la autovehicole).

În principiu, pompa este alcătuită din două supape de sens și un cilindru cu membrană și arc.

Arcul este necesar pentru a face posibilă acționarea tijei pistonului, într-un singur sens. Deci, acționarea arcului realizează absorbția, iar acționarea exterioară realizează refularea.

În fig.1.39 este prezentată soluția constructivă a unui cilindru de acționare, de uz general, (cilindrul fiind în stare acționată) [85]. Cilindrul este alcătuit dintr-un corp și un capac, astfel prelucrate încât să permită fixarea membranei pe periferie. Pistonul cilindrului este alcătuit din două piese rigide, care permit fixarea centrală a membranei. Cilindrul din figură este cu simplă acțiune, cursa de revenire fiind asigurată de către un arc elicoidal. Această soluție de cilindru de acționare are avantajul că nu necesită etanșare cu suprafețe în mișcare relativă.

Toate aplicațiile prezentate în acest paragraf au în componență membrane nemetalice.

1.2.7. Microfoane cu elemente elastice de tip membrană

Elementele elastice de tip membrană sunt elemente elastice esențiale, care intră în componența instrumentelor destinate măsurării presiunilor. Instrumentele care măsoară în valoare absolută componenta statică a presiunii unui fluid formează grupa manometrelor (a traductoarelor manometrice de presiune). Instrumentele care transformă vibrațiile elastice ale unui fluid în semnal electric, destinat măsurătorilor acustice sau reproducerii audio, formează grupa *microfoanelor*. Cerințele tehnice impuse microfoanelor sunt orientate, în primul rând, asupra fidelității conversiei semnalului acustic în semnal electric. Fidelitatea conversiei este exprimată sintetic prin caracteristica de transfer în banda frecvențelor de lucru, mai exact prin uniformitatea caracteristicii în banda de lucru.

Microfoanele funcționează în aer, respectiv în gaze. Atunci când sunt destinate să funcționeze în apă sau în alte lichide se numesc *hidrofoane*. Hidrofoanele echipază sistemele de sonar ale navelor, respectiv echipamentele de cartografie subacvatică.

Tehnica măsurării sunetului devine de importanță majoră în condițiile impuse de crearea mașinilor silențioase. Zgomotul, ca orice poluare, este nociv pentru om și pentru ființele vii, iar la intensități foarte ridicate poate deveni distructiv pentru componentele structurale ale mașinilor și clădirilor.

Cel mai cunoscut instrument folosit pentru măsurarea nivelului sonor se numește *sonometru*. Acesta transformă presiunea sonoră într-un semnal electric folosind microfonul.

Microfonul, în general, folosește o membrană subțire pentru a converti presiunea în mișcare. La rândul ei, mișcarea este convertită în semnal electric, cu ajutorul unui traductor adecvat, de obicei capacitiv, piezoelectric sau magneto-dinamic. Schema bloc a unui sonometru este prezentată în fig. 1.40.

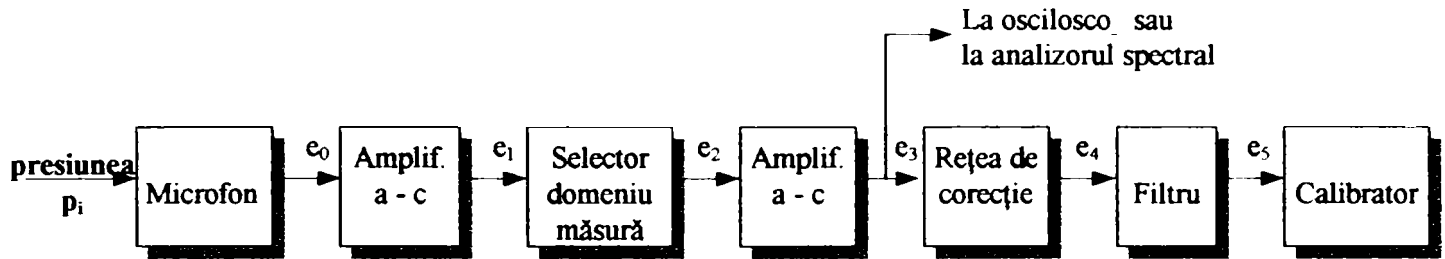


Fig. 1.40

Cele mai performante microfoane sunt cele capacitive. Din punct de vedere electric, condensatorul (care formează traductorul microfonului) este format din membrana propriuzisă, care constituie o armătură și o piesă metalică, care formează a doua armătură. Cele două armături sunt izolate de un strat de aer. Membrana metalică este pusă în mișcare de presiunea sonoră. Prin modificarea distanței față de armătura fixă se modifică, capacitatea condensatorului. Aplicând o polarizare adecvată se obține la ieșire o tensiune, care evoluează în timp, conform cu deformația membranei, respectiv cu presiunea sonoră care o provoacă. Tensiunea respectivă constituie un semnal electric ce urmează a fi prelucrat electronic.

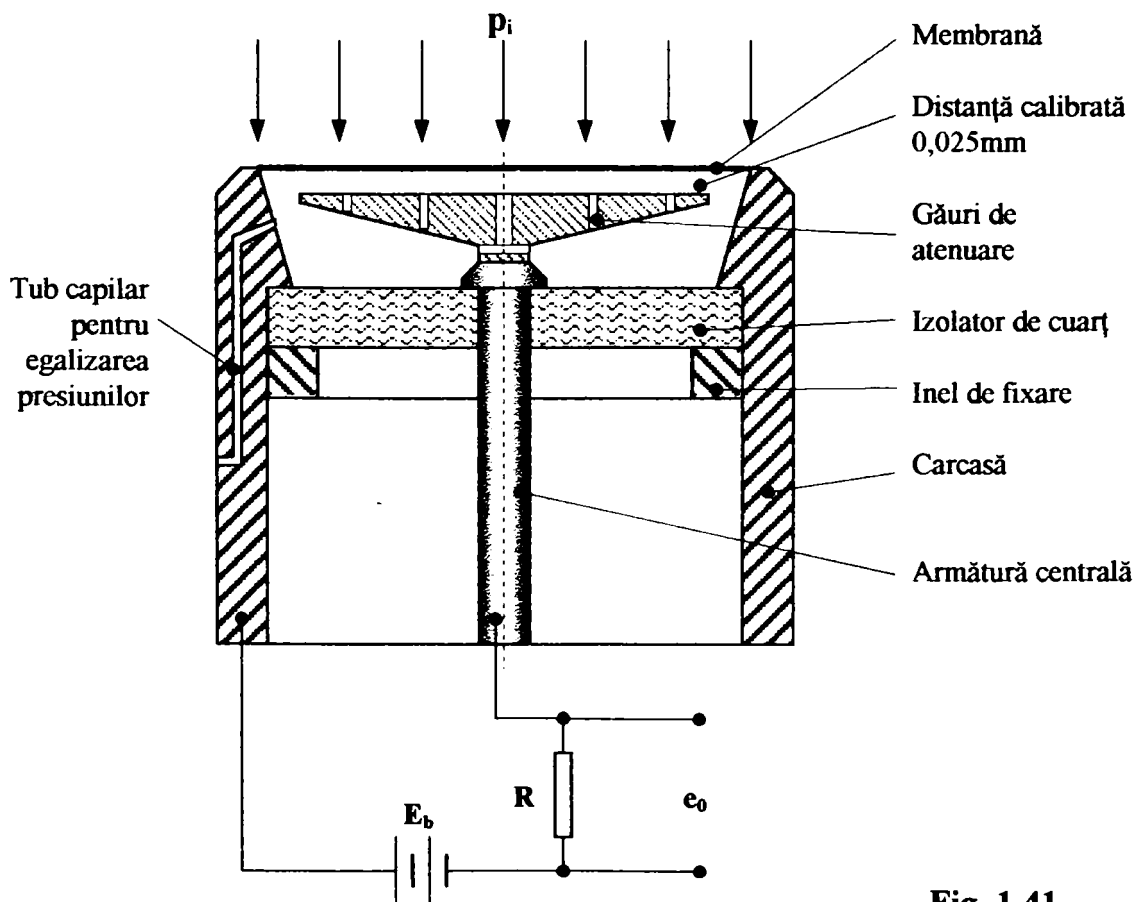


Fig. 1.41

Microfoanele sunt astfel construite încât să nu efectueze conversia semnalului sonor de foarte joasă frecvență (sub 10 Hz). În acest scop, incintele microfoanelor au tuburi capilare, prin care se realizează egalizarea presiunii statice, pe cele două fețe ale membranei. Membranele folosite la construcția microfoanelor capacitive au grosimi cuprinse între $(0,0025 \div 0,05)$ mm.

Construcția unui microfon de tip capacitiv este redată în fig.1.41 [36].

1.2.8. Aplicații ale traductoarelor cu membrană, din domeniul medical

În domeniul medical, presiunea fluidelor din corp, în special presiunea sângelui, constituie un parametru important pentru diagnoză. Din acest motiv, o mare diversitate de instrumente au fost construite pentru măsurarea presiunii, prin transformarea acesteia într-un semnal electric. Asemeni, celorlalte instrumente și acestea pot efectua măsurări directe sau indirecte [49].

Traductoarele de presiune au în componență o membrană, care este deformată de fluidul a cărui presiune se măsoară. Această deformare este transformată în semnal electric. La fel ca și în alte domenii și în domeniul medical, membranele se confecționează din oțel inoxidabil, bronz fosforos și bronz cu beriliu.

Cele mai utilizate traductoare de presiune medicale, care au în componența lor membrane, sunt din următoarele tipuri:

- traductoare capacitive – în care membrana este una dintre armăturile unui condensator;
- traductoare inductive – în care membrana este legată la înfășurarea unui transformator diferențial;
- traductoare rezistive – în care membrana este echipată cu o punte formată din timbre tensometrice.

Traductoare de presiune capacitive

Din punct de vedere electric, traductorul este un condensator, format dintr-o armătură fixă, rigidă și o armătură mobilă, materializată de o membrană. Asupra membranei acționează fluidul a cărui presiune se măsoară.

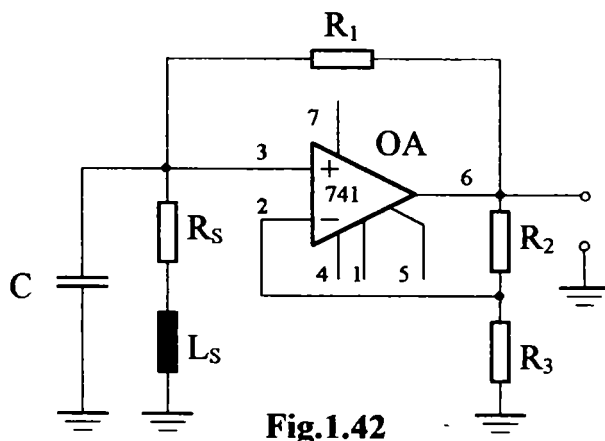


Fig.1.42

Pentru măsurarea presiunii condensatorul face parte dintr-un circuit oscilant LC unde modificarea frecvenței poate fi transformată într-o tensiune de ieșire echivalentă (fig.1.42).

Traductoarele capacitive sunt traductoare de presiune foarte sensibile. De aceea, ele trebuie să fie izolate termic, iar cablurile de legătură să fie cât mai scurte posibil, pentru ca lungimea, prin capacitatea proprie a cablului, să nu influențeze circuitul de măsurare.

Traductoare de presiune inductive

Un fenomen frecvent utilizat în proiectarea traductoarelor este inducția magnetică. Construcția concretă a acestui traductor inductiv (fig.1.43) se bazează pe deplasările unui miez feromagnetic între înfășurările unui transformator diferențial. Semnalul diferențial este aplicat unui amplificator diferențial, după care este procesat astfel încât, să se extragă un parametru proporțional cu deplasarea miezului.

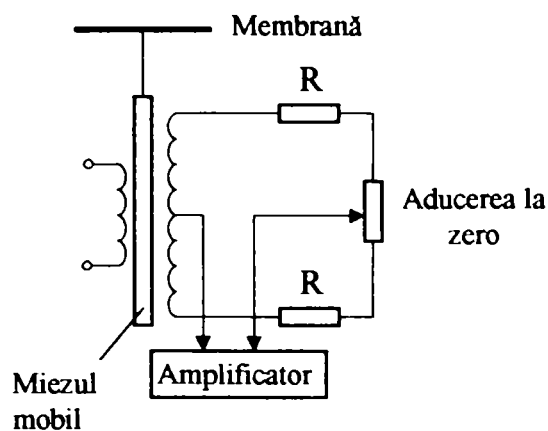


Fig.1.43

Înfășurarea primară a transformatorului este înfășurarea de excitație și este conectată la un oscilator sinusoidal. Celelalte două înfășurări (înfășurările secundare) sunt conectate în opoziție de fază. La o poziție simetrică a miezului feromagnetic, față de înfășurările transformatorului, semnalul de ieșire din transformator este zero. Dacă pe membrana traductorului se aplică o presiune, aceasta provoacă o deplasare a miezului feromagnetic, iar semnalul de ieșire va fi diferit de zero. Trecerea miezului feromagnetic, în mișcare, prin poziția centrală duce la schimbarea de fază a semnalului de ieșire

Detectarea semnalelor diferențiale produse de traductor este posibilă datorită unui circuit de măsurare, cu punte simplă, legat de transformatorul diferențial (fig.1.43). Aceste semnale sunt apoi transformate în semnal de presiune, calibrat direct în unități de presiune (mmHg). Tensiunea de excitație tipică pentru aceste traductoare este de 6V la o frecvență de 2,5kHz.

În afara avantajului construcției simple, traductoarele de presiune inductive, din domeniul medical, dau un semnal de ieșire (pentru o tensiune de excitație dată) mult mai mare decât traductoarele similare cu timbre tensometrice. Un traductor de presiune inductiv, realizat într-o variantă compactă, are trei părți componente:

- o carcasă din material plastic pe care sunt montate două cuple de legătură acceptate în domeniul aparaturii medicale (Luer-Lok);
- ansamblul format din membrana metalică (realizată din oțel inoxidabil) și miezul feromagnetic;
- o carcasă din material plastic, care conține ansamblul înfășurărilor transformatorului diferențial.

Traductoarele inductive, din domeniul medical, sunt produse pentru întreaga gamă de presiuni specifice domeniului, cu sensibilitățile și caracteristicile răspunsului în frecvență, adecvate. Abaterea de la liniaritate a traductorului nu depășește $\pm 1\%$.

Traductoarele de presiune inductive (pentru domeniul medical) sunt realizate în două variante ale ansamblului membrană-miez feromagnetic:

- prima, pentru măsurarea presiunii venoase și pentru alte măsurători generale clinice, are membrana de o dimensiune normalizată, care realizează un volum interior de fluid, între carcasă și membrană, de până la $0,5 \text{ cm}^3$;
- a doua, pentru măsurarea presiunii arteriale, cu caracteristicile de răspuns mult mai bune, la care aria membranei și respectiv a volumului interior s-au redus până la $0,1 \text{ cm}^3$.

Traductoarele inductive de presiune arterială conțin transformatoare foarte mici, cu miezuri deosebit de subțiri. Un astfel de traductor are un diametru exterior de 3,2 mm, o lungime de 9 mm, deplasarea miezului feromagnetic fiind de $\pm 0,5 \text{ mm}$, asigurând un domeniu de semnale de ieșire de 125 mV/mm (62,5 mV/mm în fiecare direcție).

Traductoare de presiune rezistive

Aproape toate sistemele de monitorizare, pentru măsurarea presiunilor intra-arteriale și intra-venoase, folosesc traductoare de presiune rezistive. Principal, traductorul tensometric rezistiv

se bazează pe modificarea rezistenței electrice a unui fir, datorată modificării lungimii acestuia. Traductorul poate fi alcătuit dintr-un fir metalic specializat sau dintr-un ansamblu timbru tensometric. Timbrul tensometric este un traductor de uz general, alcătuit dintr-un film de material plastic, care conține un fir metalic sau o depunere de substanță semiconductoră.

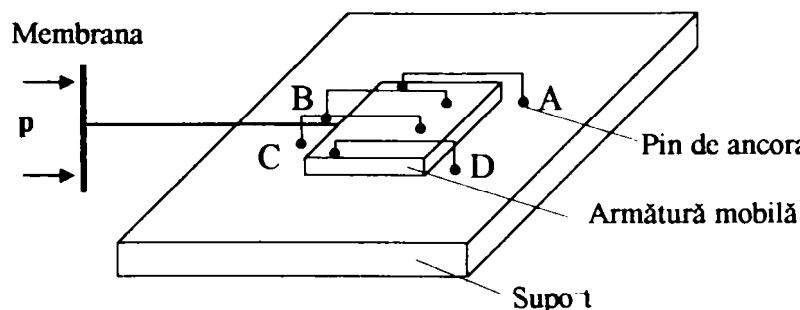


Fig.1.44

Traductoarele specializate pentru măsurarea presiunii sângelui, care au ca cerință efectuarea măsurărilor presiunilor variabile, fără histererezis, pot folosi cu succes o punte tensometrică formată dintr-un ansamblu de fire pre-tensionate, ca în fig. 1.44.

Membrana, asupra căreia acționează presiunea, este conectată la armătura mobilă, care la rândul său este fixată pe suport. O presiune p , aplicată după direcția din fig. 1.44, comprimă firele B și C și relaxează firele A și D. Firele din ansamblu formează o punte tensometrică completă. Armătura mobilă este montată pe arcuri, care o aduc în poziția de referință, când nu acționează presiune pe membrană. Acest traductor rezistiv specializat, pentru măsurarea presiunii sângelui, poate fi realizat la dimensiuni mici, în așa fel încât, să poată fi avantajos de montat la capătul unui cateter cardiac.

Traductoarele de presiune medicale sunt legate, în general, direct de inima pacientului și trebuie să asigure protecția pacientului. Din acest motiv, construcția traductorului trebuie astfel realizată încât să asigure izolarea (de siguranță) pacientului. Pentru măsurarea presiunii sângelui (inima are un ritm de 72 bătăi/min sau 1.2 Hz), sistemul trebuie să aibă un răspuns în frecvență de cel puțin 25 Hz.

În fig. 1.45 este prezentată construcția unui traductor rezistiv medical specializat, pentru măsurarea presiunii sângelui, de la American Optical, USA.

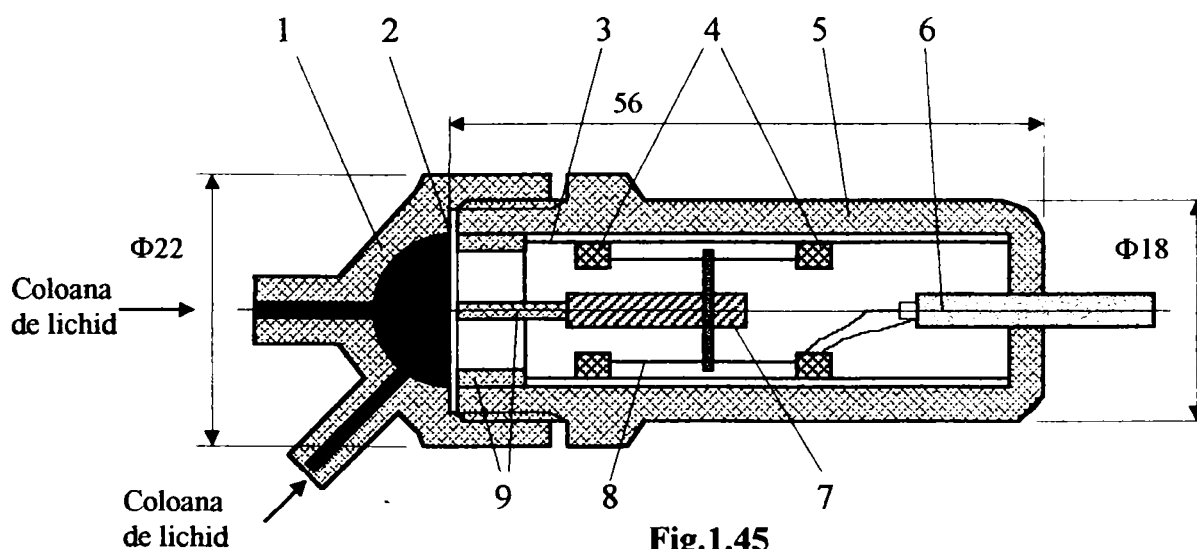


Fig.1.45

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| 1 Carcasa izolată | 5 Carcasa exterioră izolată | 9 Izolație suplimentară |
| 2 Membrană | 6 Cablu electric ecranat | |
| 3 Carcasa metalică interioară | 7 Micș | |
| 4 Izolație standard | 8 Traductor de deplasare | |

Acest traductor are trei izolații:

1. izolația exterioră a carcasei, realizată printr-o învelitoare de plastic, care asigură protecție la tensiunile exterioare;

2. izolația interioară standard a elementelor sensibile (ale punții) față de carcasa interioară a traductorului și față de cadru;
3. izolația interioară suplimentară a cadrului față de carcasă și de membrană, în cazul ruperii firelor.

Deci, izolarea pacientului, respectiv a coloanei de fluid, față de tensiunea electrică de excitație este asigurată, chiar dacă există un defect în izolația interioară standard. Aceste traductoare prezintă un curent rezidual de maxim $2 \mu\text{A}$, la un curent alternativ de 120 V și 60 Hz.

Concluzii

- Aparatele și traductoarele care folosesc membrane tehnice aparțin unui câmp larg de aplicații; cele mai multe dintre acestea sunt orientate înspre măsurarea presiunii fluidelor;
- Extinderea domeniului de aplicații, care au în componență membrane sau capsule, s-a realizat și în domeniul medical, unde în ultimii ani a avut loc o adevărată explozie de traductoare biomedicale;
- Aparatele și traductoarele, care conțin membrane tehnice, transformă deformația membranelor (semnale mecanice) într-un semnal electric, cu ajutorul cunoscutelor traductoare inductive, capacitive, rezistive, piezoelectrice etc.;
- Membranele tehnice din aplicațiile prezentate îndeplinesc funcțiile de element elastic, perete despărțitor a două incinte, armătură de condensator;
- Dintre aplicațiile enumerate lipsesc traductoarele la care deformația membranei este palpată de către un spot laser. Motivul absenței este că aceste traductoare cu plăcuță CCD au apărut recent și nu au fost încă incluse într-un traductor complex de presiune cu membrană;
- Toate traductoarele prezentate (care au în componență membrane metalice sau capsule) sunt de înaltă complexitate, deoarece efectuează două transformări, și anume:
 - a) mărimea de măsură → deformația membranei;
 - b) deformația membranei → semnal electric (sau indicație mecanică).
- Construcția traductoarelor, care conțin membrane sau capsule, este în general destul de laborioasă, dar asigură o precizie de măsurare ridicată și un grad înalt de încredere.

1.3. SOLUȚII CONSTRUCTIVE DE MEMBRANE ȘI MODALITĂȚI DE ÎNCĂRCARE A ACESTORA

Membrana este o placă plană sau ondulată, de obicei rotundă, fixată pe contur, care sub acțiunea unei forțe concentrate sau uniform distribuite, acumulează energie mecanică, pe care apoi o redă mediului înconjurător. Fixarea membranei pe contur este obligatorie, ea făcându-se prin încastrare rigidă sau alunecătoare. Deformația punctului central al unei membrane încărcate pe o față, este o măsură a acestei încărcări; de asemenea, prin intermediul ei se poate aprecia variația încărcării [1].

O dimensiune caracteristică a membranelor este diametrul activ, adică diametrul măsurat pe conturul de fixare. Diametrul activ este determinat de dimensiuni de gabarit, de mărimea necesară a suprafeței efective, de săgeata necesară la centru, de coeficientul de siguranță la rezistență etc. Diametrul membranelor poate avea dimensiuni cuprinse între $10 \div 15$ mm și $200 \div 300$ mm. Cealaltă dimensiune caracteristică a membranelor este grosimea. Grosimea se alege în funcție de sensibilitatea și rezistența necesare, cât și în funcție de caracteristicile mecanice ale materialului; de regulă grosimile membranelor, sunt la membranele metalice de $0.06 \div 1.5$ mm și de $0.1 \div 5$ mm, la membranele nemetalice [31], [32], [33], [71].

Clasificarea membranelor se face după formă, în:

1. **membrane plane** – care au suprafața activă plană și care pot fi fără centru rigidizat (fig.1.44a) sau cu centru rigidizat (fig.1.44b);

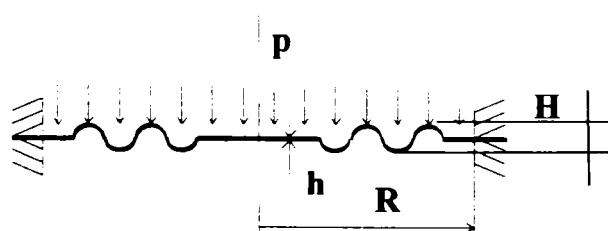
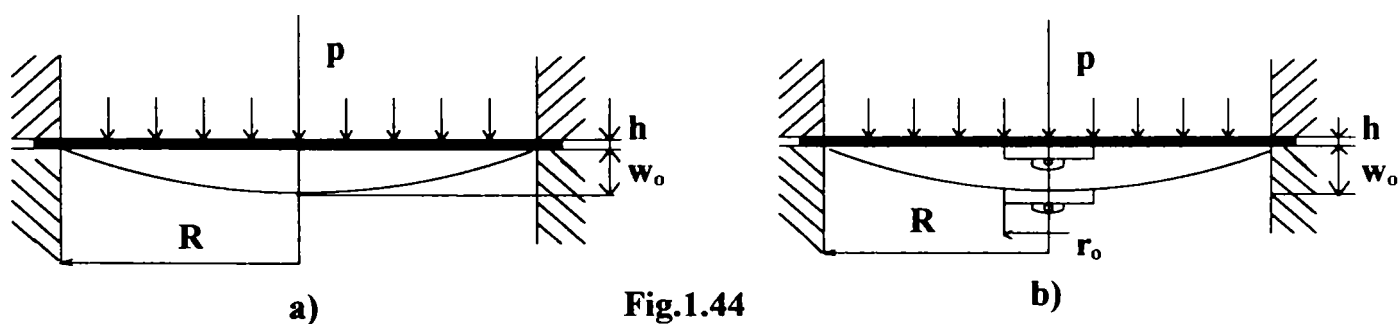


Fig.1.45

2. **membrane ondulate (gofrate)** – care prezintă pe suprafața lor, un număr de ondulații, denumite și gofreuri, concentrice (fig.1.45);

3. **membrane profilate** – care au profilul unei calote sferice (fig.1.46a), cazul cel mai frecvent, sau al unei suprafețe conice de forma unui înveliș subțire (fig.1.46b).

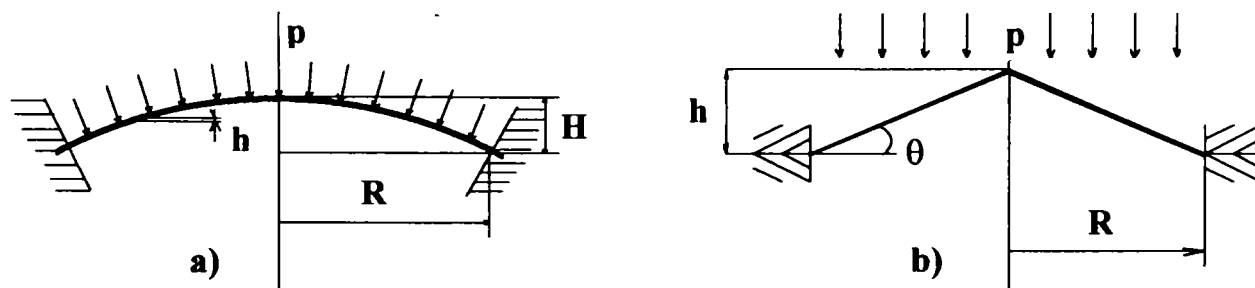


Fig.1.46

Membranele plane se pot clasifica în funcție de:

a). rigiditate, în:

- **metalice** (cu rigiditate mare);
- **nemetalice** (cu rigiditate extrem de mică).

Spre deosebire de membranele metalice, cele nemetalice au avantajul că, la aceeași presiune și dimensiuni caracteristice, realizează o deformație mai mare, dar prezintă dezavantajul instabilității și rociilor elastice cauzată de influența variației factorilor de mediu. Din cauza rigidității reduse la încovoiere, membranele nemetalice se asociază în paralel, cu un arc elicoidal (fig.1.47), care le oferă o rigiditate sporită, astfel încât caracteristica acestora este de fapt, caracteristica arcului.

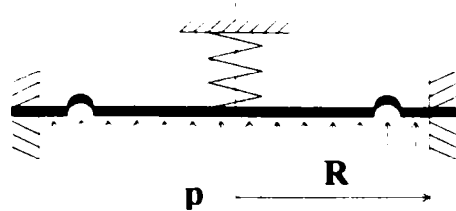


Fig.1.47

b). raportul dintre săgeata w_0 , la mijlocul membranei și grosimea membranei h , în:

- **membrane groase (plăci)** – la care $w_0 \leq h$; preponderente la aceste membrane sunt tensiunile unitare de încovoiere;
- **membrane cu grosime medie** – la care $w_0 \leq 3h$; la aceste membrane tensiunile unitare sunt de încovoiere și întindere;
- **membrane subțiri** – la care $w_0 > 3h$; preponderente la aceste membrane sunt tensiunile unitare de întindere.

Ca mod de fixare, membranele sunt încastrate pe conturul exterior [71]. Se consideră încastrare perfectă numai cazul în care membrana face corp comun cu peretele carcasei în care se încastrază, adică atunci când peretele carcasei și membrana sunt prelucrate din același semifabricat prin îndepărtare de material (fig. 1.48a). Această încărcare este lipsită de pragmatism tehnologic.

Încastrarea realizată prin lipire sau sudare, pe contur (fig.1.48b) este suficient de rigidă pentru a putea fi considerată perfectă, din punct de vedere practic.

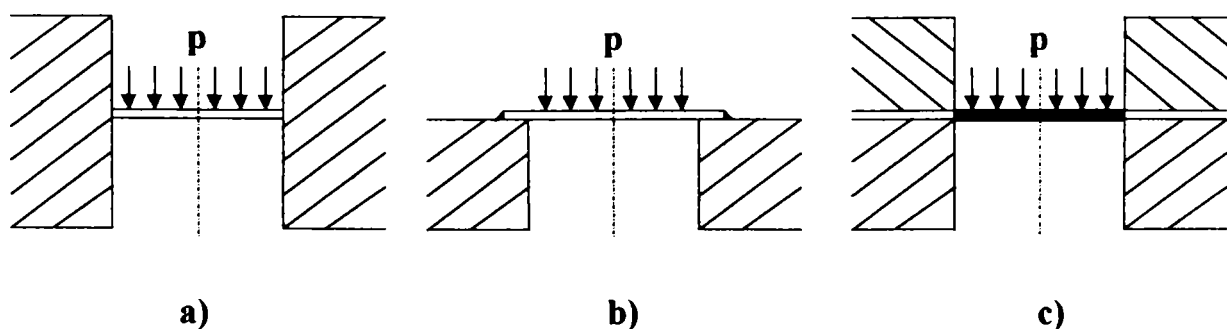


Fig.1.48

Fixarea pe contur realizată prin strângerea membranei, între două inele, cu ajutorul unor garnituri (fig. 1.48c) prezintă o alunecare elastică în zona de prindere; fixarea se consideră, în acest caz, ca și o încastrare alunecătoare (liberă).

Membrane plane metalice

Pentru stabilirea domeniilor de lucru ale membranelor metalice, se va trasa o curbă caracteristică aproximativă în coordonatele: săgeata la mijlocul membranei w_0 și presiunea de lucru p (fig. 1.49). Se observă că, se pot considera trei domenii de lucru, care corespund raportului dintre grosimea h , a membranei și săgeata ei maximă w_0 , și anume (fig. 1.49a) [1]:

- domeniul a – pentru $w_0 < h$, la membranele groase, caracteristica este liniară;
- domeniul b – pentru $w_0 < 3h$, la membranele cu grosime medie, caracteristica este aproape liniară pe prima porțiune, apoi rigiditatea crește cu încărcarea;
- domeniul c – pentru $w_0 > 3h$, la membranele de grosime mică, caracteristica este neliniară și rigiditatea crește mult cu încărcarea.

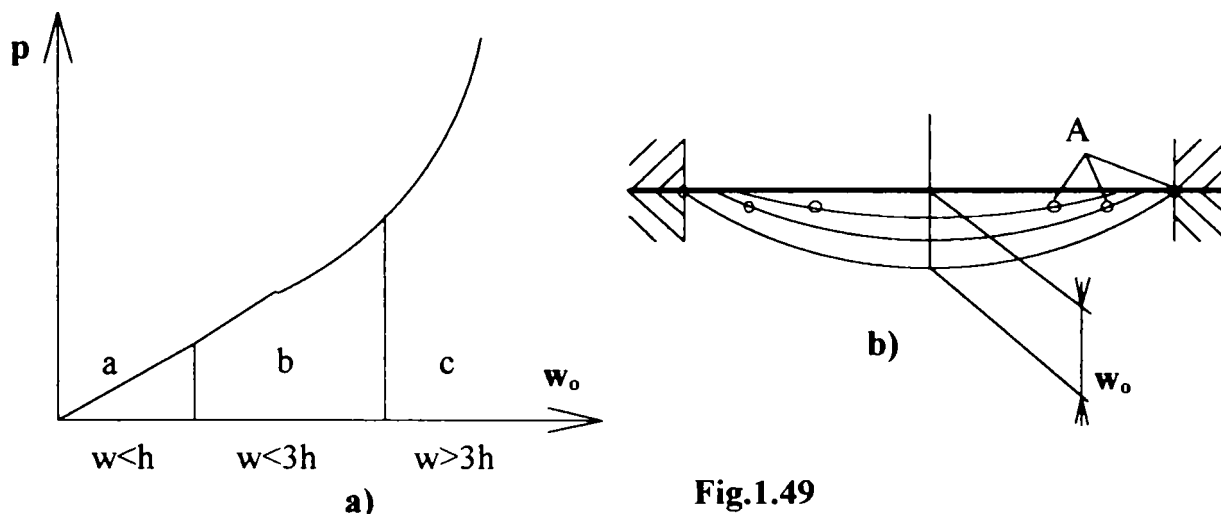


Fig.1.49

Corespunzător celor trei cazuri, în fig. 1.49b se arată schema deformațiilor. Din figură se observă că, forma suprafeței elastice a membranei se schimbă odată cu creșterea săgeții, astfel că, punctul de inflexiune A, dintr-o secțiune axială, se deplasează la creșterea săgeții, dinspre centrul membranei înspre conturul ei. Din examinarea celor trei domenii de lucru rezultă:

- în domeniul a, la variația liniară a caracteristicii, tensiunile unitare de întindere σ_t sunt nule și membrana se poate considera solicitată numai la încovoiere;
- în domeniul b, vor trebui luate în considerare atât tensiunile unitare de întindere σ_t cât și tensiunile unitare de încovoiere σ_i ;
- în domeniul c, când deformația membranei este foarte mare, $\sigma_t > \sigma_i$ și prin urmare se pot neglija tensiunile unitare de încovoiere.

Membrane nemetalice (flexibile)

Membranele nemetalice au forma unui inel plan (fig. 1.50), cu marginea exterioară încastrată în corpul dispozitivului, iar marginea interioară asamblată cu un centru rigidizat, format din discuri metalice [1], [71]. La executarea membranelor nemetalice se utilizează îndeosebi cauciucul, teflonul și masele plastice.

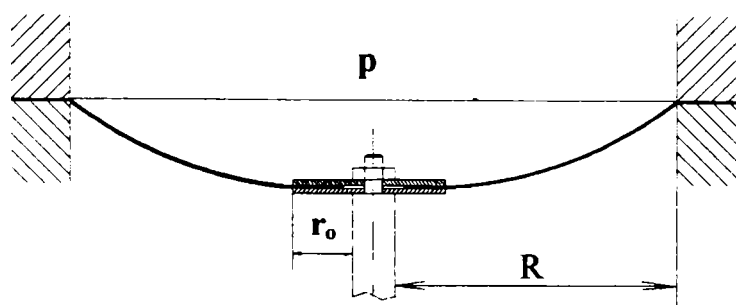


Fig.1.50

Diagrama de variație a caracteristicii unei membrane nemetalice în funcție de raportul r_0/R , este reprezentată în fig. 1.51. Cu cât diametrul centrului rigidizat este mai mic, cu atât deformația membranei este mai mare, la creșterea presiunii.

Ultima curbă, ($r/R = 0$), corespunde membranei perfect flexibile. De centrul rigidizat este legat și elementul mecanismului ce preia deformația membranei.

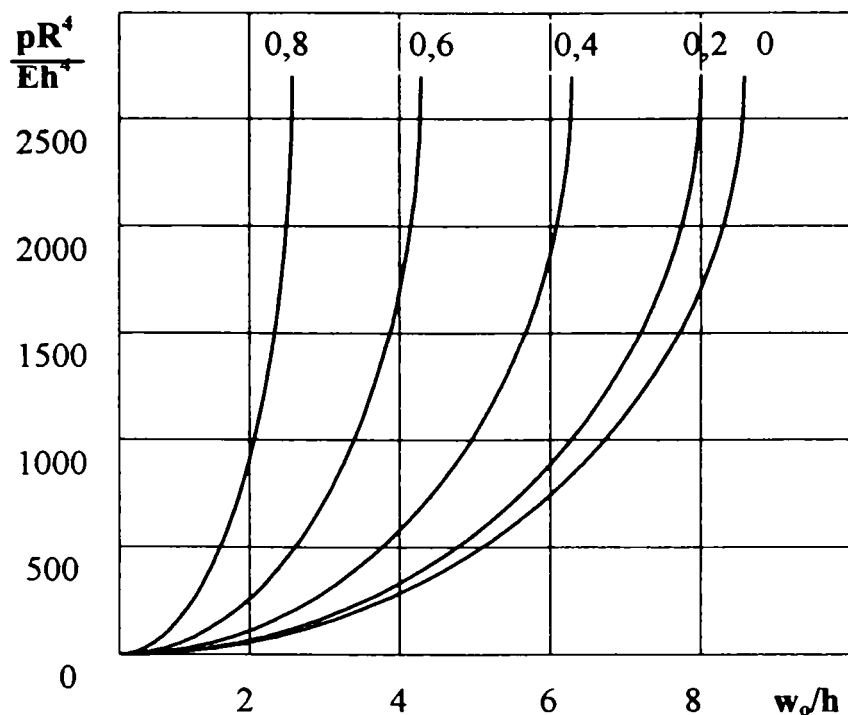


Fig.1.51

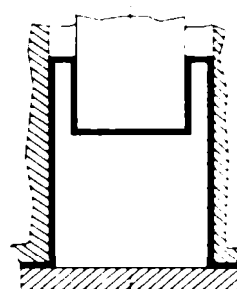


Fig.1.52

În ultimul timp, în dispozitivele de acționare din automatizări se folosesc membranele elastice de forma unor manșete (fig.1.52), care se montează între corpul dispozitivului și elementul mobil.

Cursa elementului mobil este practic nelimitată, iar membrana își păstrează suprafața efectivă constantă.

Funcționarea membranelor nemetalice depinde mult de tipul încadrării, în dispozitiv și în discurile de rigidizare. Soluția cu strângere între două discuri de rigidizare (fig.1.53a) este foarte simplă, dar influențează negativ funcționarea membranei și contribuie la ruperea ei prin oboseală.

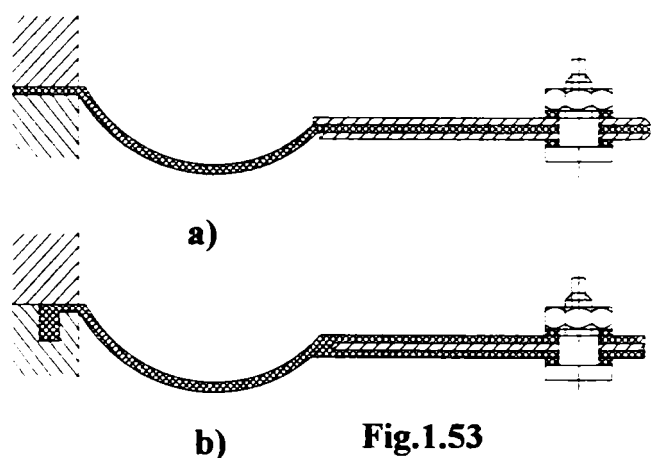


Fig.1.53

Varianta cu un singur disc, introdus între straturile membranei (fig.1.53b), pe parcursul confecționării acesteia, este mai indicată, întrucât realizează o centrare și o etanșare mai bună, împiedicând discul metalic să vină în contact cu mediile agresive. Această soluție prezintă dezavantajul unei tehnologii mai complicate și, în plus, discurile nu mai pot fi schimbate, în funcție de necesitățile intervenite pe parcurs.

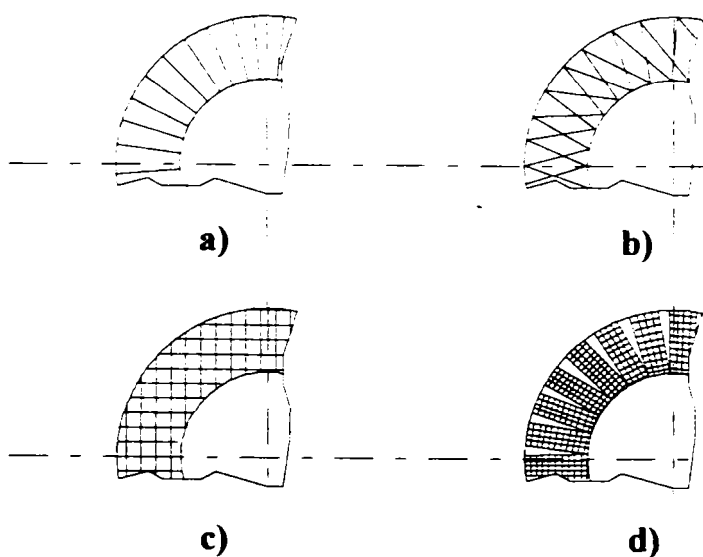


Fig.1.54

Execuția acestor membrane comportă tipuri diferite de rețele ale fibrelor și anume:

- rețeaua drept unghiulară (fig.1.54a);
- rețeaua triunghiulară (fig.1.54b);
- rețeaua rombică (fig.1.54c);
- rețeaua compusă (fig.1.54d).

Rețeaua dreptunghiulară se realizează, din punct de vedere tehnologic ușor, dar într-o țesătură tensiune negativă după diferite direcții. Rețelele triunghiulară, rombică și compusă implică o execuție mai dificilă, dar asigură o funcționare mai stabilă.

Membrane ondulate

Aceste membrane se caracterizează printr-o serie de cute (gofreuri) concentrice, prevăzute pe suprafața lor (fig. 1.45), care le măresc rigiditatea, astfel că la o anumită adâncime H , a gofreurilor, se pot obține chiar caracteristici liniare (fig. 1.55) [1], [71].

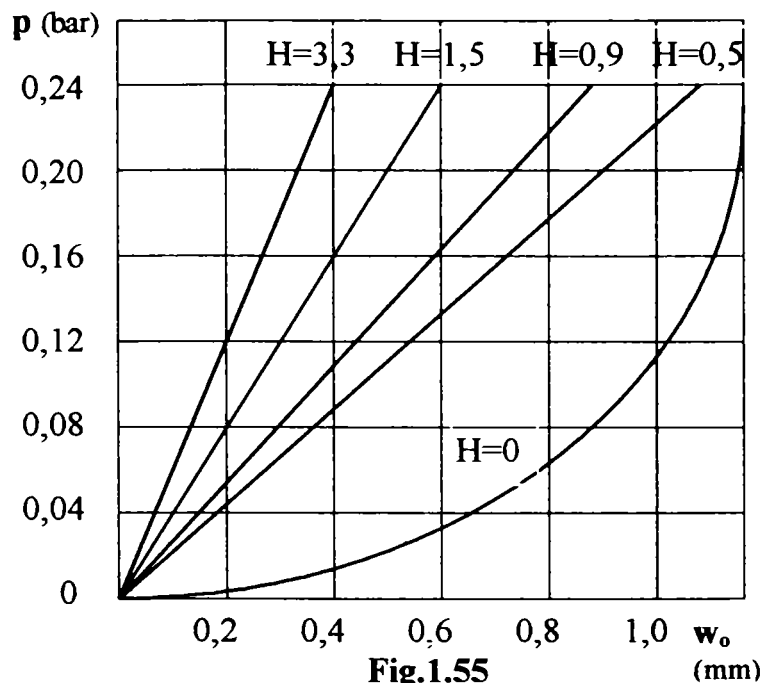


Fig.1.55

- ușurința modelării caracteristicilor prin simpla modificare a înălțimii gofreurilor H , ceea ce permite ușor, compensarea neliniarităților parametrului care se măsoară (respectiv redresarea scalei aparatului de măsură) și constituie un mijloc de a se anihila influența neomogenităților datorate execuției membranelor.

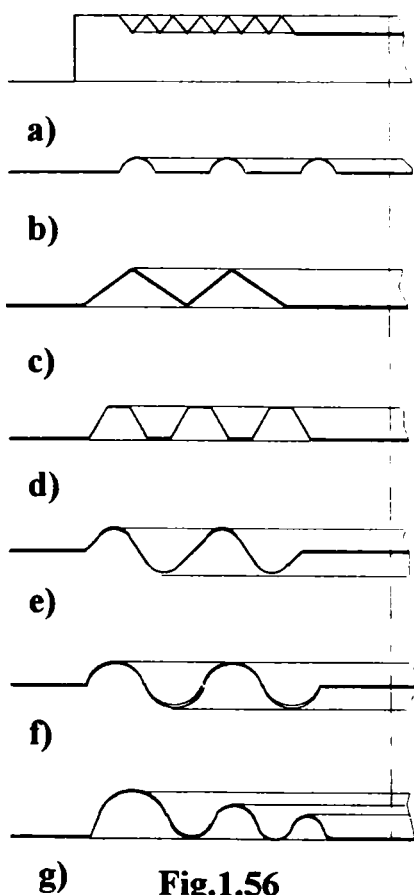


Fig.1.56

Membranele ondulate sunt încastrate pe contur, având în partea centrală o porțiune plană, rigidizată sau nerigidizată, care servește la îmbinarea lor cu alte elemente. Avantajele acestor membrane sunt:

- săgeți mai mari fără apariția deformațiilor permanente, deci posibilitatea de a se măsura presiuni superioare;
- caracteristici mai apropiate de cele liniare, deci o variație mai redusă a suprafeței membranei;
- stabilitate mai mare a caracteristicii la acțiunea deformațiilor;

Principalul dezavantaj al membranelor gofrate constă în tehnologia de execuție, mult mai dificilă decât a membranelor plane.

Datorită dimensiunilor relativ mici, simplității constructive, stabilității indicațiilor și îndeosebi posibilității de realizare a unor caracteristici de lucru convenabile, membranele gofrate au o largă răspândire în construcția de aparate, ca elemente de măsurare, acționare și reglare.

Din punct de vedere al undulațiilor, membranele pot fi:

- *cu profil mărunț constant* – undulațiile fiind ca zimții unei pile (fig. 1.56a), sau având o formă toroidală (fig. 1.56b);
- *cu profil cu adâncime mare constant* – de formă triunghiulară (fig. 1.56c), de formă trapezoidală (fig. 1.56d), de formă sinusoidală (fig. 1.56e), de formă circulară (fig. 1.56f);
- *cu profil cu adâncime mare variabilă* (fig. 1.56g).

O importanță deosebită asupra comportării membranelor o are modul de prindere al acestora, pe conturul exterior. De menționat este faptul că, undulația marginală influențează foarte mult forma caracteristicii.

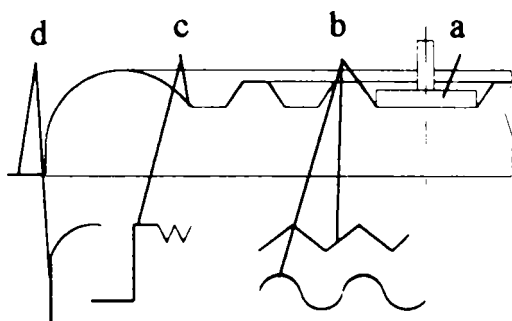


Fig.1.57

Din acest punct de vedere se deosebesc:

- membrane ondulate obișnuite;
- membrane ondulate cu ondulație marginală.

În fig. 1.57 sunt reprezentate, pentru o membrană ondulată, în mod schematic: elementul de fixare (a); diverse forme de gofreuri (b); diverse ondulații marginale (c); diverse margini de montaj (d).

Efectul formei ondulației marginale asupra caracteristicii membranei este determinat doar în mod experimental.

Metodele de calcul ale membranelor ondulate, în general, nu țin cont de influența ondulației marginale a acestora, deși forma caracteristicii depinde în mod considerabil de forma membranei, după cum rezultă evident din fig. 1.58

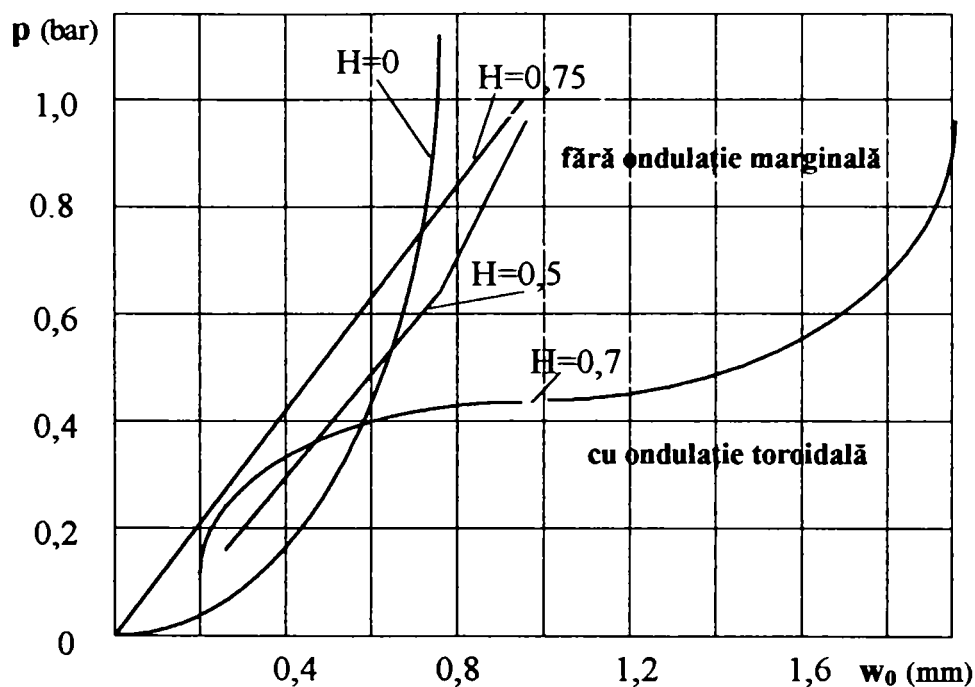


Fig.1.58

Deci, metodele de calcul prezentate în capitolul 3, la fel ca și alte metode de calcul publicate în literatura de specialitate, pot fi aplicate numai în cazul membranelor care nu au nici un fel de ondulație marginală.

Capsule și baterii de capsule

În aplicațiile lor membranele ondulate pot să apară [33]:

- *individuale*;
- *capsule* – îmbinate câte două lipite pe contur;
- *baterie de capsule* – grup de capsule suprapuse.

Capsulele se folosesc la presiuni de la câțiva mmH₂O și până la 0,3 ÷ 0,5 MPa.

Peste această limită, se utilizează membranele gofrate individuale, întrucât este foarte dificilă, realizarea unei îmbinări rezistente, a membranelor în capsule, la această presiune.

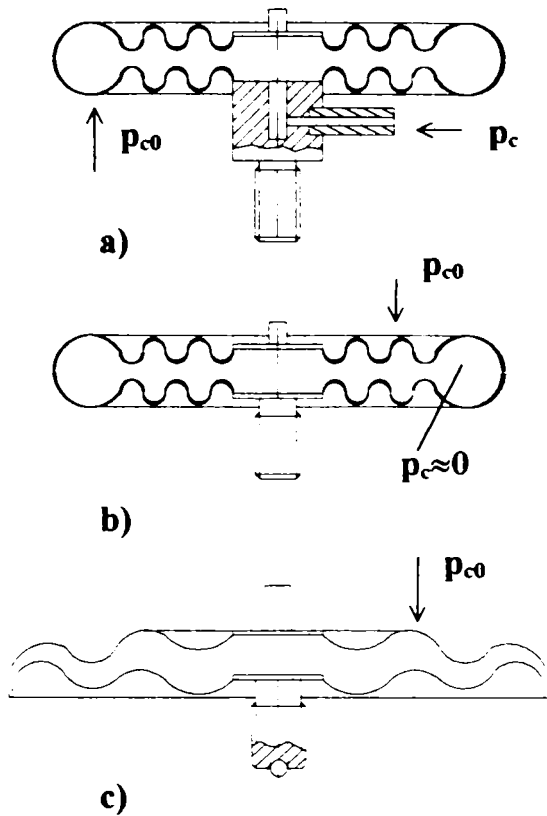


Fig.1.59

Capsulele pot fi:

- *manometrice*;
- *aneroid*;
- *umplute*.

Capsulele manometrice (fig.1.59a) realizate sub forma unor cutii, din două membrane ondulate lipite pe contur, măsoară presiunea mediului care este introdus în interiorul acesteia; cu ajutorul acestor capsule se măsoară diferența de presiune, $(p_c - p_{c0})$, între presiunea din interiorul capsulei și presiunea mediu din exterior.

În cazul capsulelor aneroid (fig.1.59b), în interiorul acestora se realizează o rarefiere, până la $0,3 \div 0,1$ mmHg deci, se măsoară presiunea din exterior, p_{c0} (de exemplu la vacuummetre).

Capsulele umplute (fig.1.59c) au interiorul plin cu gaz, vapori sau lichid și servesc ca elemente sensibile la termometre sau termoregulatori.

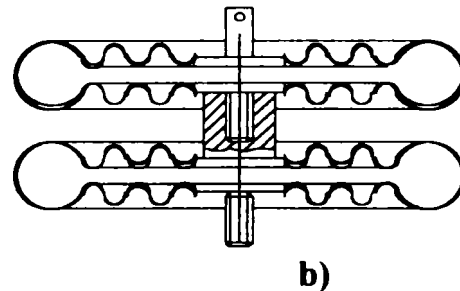
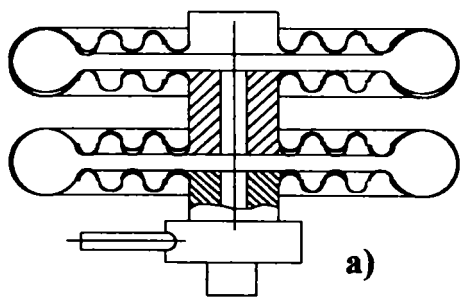
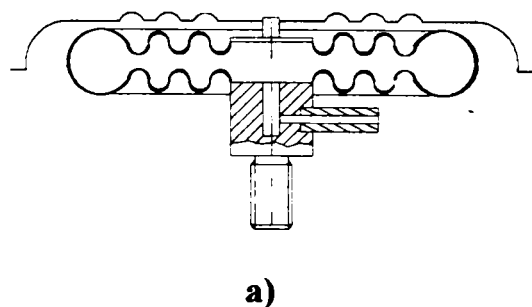


Fig.1.60

Cu ajutorul capsulelor se realizează o săgeată dublă față de cea a membranelor. O săgeată și mai mare se poate realiza, folosindu-se o baterie de capsule manometrice (fig.1.60a) sau aneroid (fig.1.60b). Deplasarea w_b a centrului bateriei are expresia:

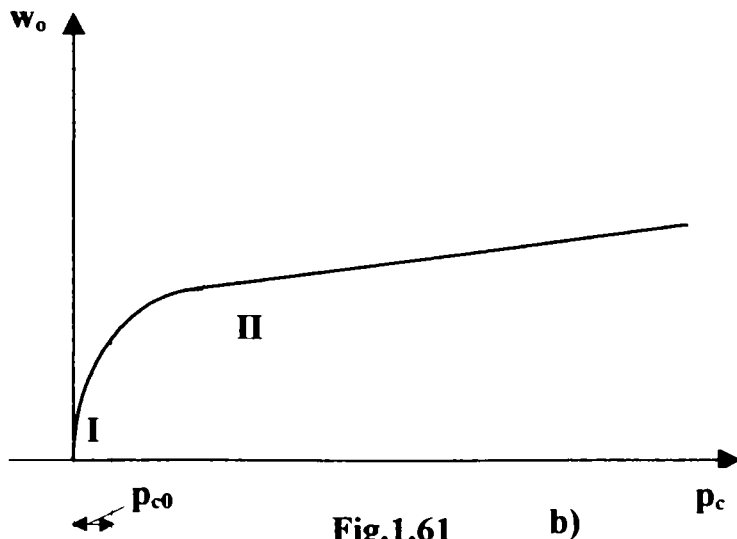
$$w_b = i w_c = 2 i w_o, \tag{1.20}$$



unde: i este numărul capsulelor; w_c este deplasarea centrului unei capsule; w_o este deplasarea centrului unei membrane. Asamblarea capsulelor între ele se execută prin filet sau cu șaibe.

Adeseori sunt utilizate combinațiile de membrane ondulate cu capsule, deoarece permit obținerea unor caracteristici dorite.

Dacă este necesară o caracteristică cu o alură brusc crescătoare (fig.1.61b), se poate utiliza combinația din fig.1.61a, care funcționează la o presiune bine determinată.



Până la presiunea $p_c < p_{c0}$ (domeniul I), se deformează numai capsula și are o caracteristică aproximativ liniară, de pantă mai mare. La atingerea presiunii p_{c0} , capsula vine în contact cu membrana (domeniul II), schimbându-se panta caracteristicii. În această manieră, se pot obține caracteristicile în trepte, la scările aparatelor de măsurare, prin dispunerea elementelor elastice în așa fel, încât să se modifice corespunzător caracteristica: $p_c = f(w_0)$ și odată cu aceasta, numărul diviziunilor pe scară.

Fig.1.61 b)

Membrane profilate cu suprafață de formă convexă

O astfel de membrană, executată din materiale metalice cu limita de elasticitate ridicată, poate avea profilul unei calote sferice (fig. 1.46a), cazul cel mai frecvent, sau al unei suprafețe conice de forma unui înveliș subțire (fig. 1.46b). Aceste membrane profilate sunt solicitate la o presiune uniform distribuită sau la o forță concentrată, pe partea convexă [32], [71].

Sub acțiunea sarcinii, săgeata membranei crește lent, până la o anumită valoare a presiunii, denumită *presiune critică*, după care își schimbă săgeata printr-un salt. Această schimbare a săgeții prin salt constituie, o pierdere a stabilității membranei, care se realizează cu păstrarea proprietăților elastice ale materialului. Dacă fenomenul de pierdere al stabilității, nu este urmat de o degradare a membranei, acesta se numește pocnitură, de unde și denumirea de *membrană pocnitoare*.

Această membrană este un element basculant monostabil cu un comportament analog circuitului basculant monostabil din electronică. Proprietatea unei astfel de membrane, de a-și schimba săgeata în salturi, își găsește aplicații în construcția unor aparate, la unele dispozitive elastice de contact și la diverse obiecte de uz casnic. Cel mai simplu ungător, pentru lubrifiere, funcționează pe principiul acestei membrane. Energia cinetică dezvoltată la pocnirea fundului bombat, se consumă în ejecția uleiului. Pe același principiu lucrează și unele pulverizatoare pentru pulberi. Membrana de acest gen, se folosește într-o serie de cazuri și ca generator de undă, precum și în elementele logice, dar numai în cele cu comportare discretă, obținându-se cu ajutorul ei, timpi mici de comutație.

1.4. MATERIALE ȘI TEHNOLOGII PENTRU EXECUȚIA MEMBRANELOR

1.4.1 Materiale pentru elemente elastice

Materialele destinate executării arcurilor trebuie să corespundă condițiilor de funcționare impuse acestora [35]. Ele trebuie să aibă proprietăți elastice ridicate, rezistență la solicitări statice și dinamice, limită de curgere și rezistență la oboseală ridicate. În anumite condiții de exploatare se mai impune, o rezistență la coroziune și la temperatură înaltă, o stabilitate cât mai ridicată a proprietăților elastice și o dilatare termică redusă a materialului.

Aplicația în care este inclusă membrana poate impune proprietăți suplimentare materialului, cum ar fi: o rezistență electrică specifică foarte mică sau foarte mare și anumite proprietăți magnetice, respectiv, să fie complet nemagnetic (cazul utilizării lui la fabricarea elementelor elastice ale aparatelor magneto-electrice). Alegerea materialului, cât și a procesului tehnologic pentru un caz dat, trebuie să se facă cu luarea în considerare a tuturor factorilor care

caracterizează regimul de funcționare al arcului, comportarea materialului și eventual, modificarea în timp a unor caracteristici ale acestuia.

Din considerente de ordin tehnologic, legate de diversitatea formelor și a semifabricatelor de la care se pornește fabricația, materialelor destinate execuției elementelor elastice li se cer proprietăți plastice ridicate, pentru a putea fi trefilate, laminate, ambutisate adânc sau ambutisate cu subțierea pereților. Tot considerentele tehnologice sunt cele care cer o bună prelucrabilitate prin sudare și lipire, procedee folosite atât în fazele de fabricație ale unor elemente elastice (capsule de membrane și tuburi sudate), cât mai ales în fazele de asamblare ale elementelor elastice cu celelalte elemente constructive ale aparatelor.

Îndeplinirea acestor condiții, în marea lor majoritate contradictorii, de către materialele utilizate la construcția elementelor elastice, face din această alegere o problemă extrem de dificilă. De cele mai multe ori, rezolvarea acestei probleme se face ca urmare a unor compromisuri, rezolvându-se prin alegere, numai condițiile principale cerute elementelor elastice.

Alegerea materialului cât și a procesului tehnologic de fabricație pentru un anumit tip de arc, trebuie să se facă, ținând cont de toate condițiile impuse de regimul de funcționare al arcului, de comportarea materialului și de eventualele modificări în timp, ale caracteristicilor arcului.

La alegerea materialului pentru arc trebuie să se țină seama că:

- modulul de elasticitate este variabil în timp și cu temperatura (tabelul A1.1, Anexa 1) [71];
- în timpul funcționării apar efectele de relaxare și histerezis mecanic;
- poziția de zero a arcului și sarcina se modifică cu timpul.

Caracteristicile unui arc depind de:

- calitatea materialului din care este executat;
- procesul tehnologic de execuție al semifabricatului;
- procesul tehnologic de execuție al arcului.

Arcurile se execută, în general, din trei categorii de materiale:

- metale feroase;
- metale neferoase;
- materiale nemetalice.

Metale feroase

În această categorie intră oțelurile carbon de calitate și oțelurile aliate. Caracteristicile impuse arcului, determină atât alegerea unei anumite compoziții chimice, cât și a unei anumite stări de livrare a semifabricatului respectiv. De exemplu, un oțel laminat la cald, nu poate fi folosit la executarea arcurilor de mare precizie, deoarece cu toleranțele relativ mari cu care se livrează, un asemenea oțel, nu se poate asigura obținerea unor caracteristici predictibile.

Valoarea săgeții poate fi deosebit de importantă pentru o aplicație dată. Aceasta depinde de dimensiunile și forma semifabricatului, din care se execută arcul respectiv. Astfel dacă, se urmărește obținerea unei săgeți, cât mai apropiată de săgeata teoretică, trebuie ca toleranțele admise la dimensiunile semifabricatului, să fie cât mai mici.

Operația de laminare sau tragere la rece, care asigură aceste toleranțe, ridică mult prețul de cost al materialului.

La alegerea materialului pentru arcuri, trebuie să se îmbine considerațiile de ordin tehnic, cu cele de ordin economic și să se aibă în vedere toți factorii care concură la obținerea unor arcuri, corespunzătoare, din punct de vedere al destinației. În mod deosebit, trebuie să se țină seama, atât de proprietățile tehnologice ale materialului, în ceea ce privește posibilitatea de execuție a arcului, de importanța secțiunilor și a parametrilor lor dimensionali, cât și de posibilitatea ridicării indicilor calitativi ai materialului, prin tratamente termice sau mecanice [3].

Alegerea, cu mare atenție, a unui oțel de arc impune, în primul rând, cunoașterea compoziției chimice a oțelului și a influenței elementelor de aliere. În tabelul 1.1 sunt prezentate câteva dintre cele mai utilizate oțeluri carbon și aliate pentru arcuri, iar în tabelul 1.2 principalele caracteristici mecanice ale acestora.

Tabel 1.1 Oțeluri carbon și aliate pentru arcuri

Marca de oțel	Compoziția chimică (%)						Standardul
	C	Mn	Si	Cr	Ni	Alte elemente	
OLC 65A	0,62 ÷ 0,70	0,50 ÷ 0,80	0,17 ÷ 0,37	-	-	-	STAS 795-80 STAS 8371-80
OLC 75A	0,70 ÷ 0,80	0,50 ÷ 0,80	0,17 ÷ 0,37	-	-	-	STAS 795-80
OLC 85A	0,82 ÷ 0,90	0,50 ÷ 0,80	0,17 ÷ 0,37	-	-	-	STAS 795-80
40 Si 17A	0,36 ÷ 0,44	0,60 ÷ 0,90	1,50 ÷ 2,00	-	-	-	STAS 795-80
51 Si 17A	0,47 ÷ 0,55	0,60 ÷ 0,90	1,50 ÷ 2,00	-	-	-	STAS 795-80
51 VCr 11A	0,47 ÷ 0,55	0,70 ÷ 1,10	0,17 ÷ 0,37	0,90 ÷ 1,2	-	V = 0,1 ÷ 0,25	STAS 795-80
56 Si 17A	0,52 ÷ 0,60	0,50 ÷ 1,00	1,40 ÷ 2,00	-	-	-	STAS 795-80
60 Si 15A	0,55 ÷ 0,65	0,80 ÷ 1,10	1,30 ÷ 1,80	-	-	-	STAS 795-80
65 Mn 10	0,60 ÷ 0,70	0,90 ÷ 1,20	0,17 ÷ 0,37	-	-	-	STAS 791-80
67CrSi 12A	0,62 ÷ 0,72	0,40 ÷ 0,60	1,20 ÷ 1,40	0,40 ÷ 0,6	-	-	WL103 DIN
65 Si2WA	0,61 ÷ 0,69	0,70 ÷ 1,00	1,50 ÷ 2,00	-	-	W = 0,8 ÷ 1,20	STAS 11514-80
20 MoCr 130	0,17 ÷ 0,22	Max. 1,00	Max. 1,00	12 ÷ 14	Max. 1,00	Mo = 0,9 ÷ 1,30	WL4120 DIN
40 Cr 130	0,35 ÷ 0,45	Max. 1,00	Max. 1,00	12 ÷ 14	Max. 1,00	-	STAS 3583-80
35 MoCr 165	0,33 ÷ 0,43	Max. 1,00	Max. 1,00	15,5 ÷ 17,5	Max. 1,00	Mo = 0,9 ÷ 1,30	STAS 1152-80
12 TiNiCr 180	Max. 0,12	Max. 2,00	Max. 1,00	17 ÷ 19	9,0 ÷ 11,5	Ti = max. 0,80	STAS 11523-80
10TiMoNiCr 175	Max. 0,10	Max. 2,00	Max. 1,00	16,5 ÷ 18,5	10,5 ÷ 13,5	Mo = 2,0 ÷ 2,5 Ti = min 5×%C	STAS 11523-80

Metale neferoase

Unele arcuri, datorită proprietăților speciale cerute de condițiile de exploatare, se execută din metale neferoase. Dintre acestea, o importanță deosebită prezintă aliajele de cupru: alamele, bronzurile și aliajele cuprului cu nichelul. Aliajele de cupru se împart în două categorii, după modul în care li se pot imprima proprietățile corespunzătoare funcționării lor ca arc [3].

În prima categorie intră aliajele care ajung la proprietăți elastice și la rezistență înaltă în urma durificării prin prelucrare la rece (ecruisare), iar în a doua, aliajele care prezintă posibilități de durificare atât prin ecrusare, cât și prin tratament termic.

Tabel 1.2 Caracteristicile mecanice principale ale oțelurilor pentru arcuri

Nr. ordine	Aliaj	Rezistență la rupere		Alungirea %	Elongația mm	Căderea HB
		RP	MB			
1.	OLC 55 A	8800	10 00	6	285	229
2.	OLC 65 A	7800	9800	10	285	229
3.	OLC 75 A	8800	10800	9	321	241
4.	OLC 85 A	9800	11300	8	363	229
5.	51 Si 17 A	10800	11800	6	321	241
6.	51 VCr 11 A	11800	13200	6	363	235
7.	56 Si 17 A	10800	12700	6	321	235
8.	60 Si 15 A	12700	14700	6	363	235

În tabelul 1.3 sunt indicate compoziția chimică, caracteristicile mecanice și fizice, precum și domeniile de utilizare ale aliajelor de cupru durificate prin ecruisare. Durificarea prin ecruisare presupune înfășurarea arcului la rece. Aliajele de cupru durificate prin ecruisare se pot folosi, numai în cazul în care la formarea arcului nu apar sarcini mari de încovoiere.

Arcurile din aliaje durificate prin ecruisare au proprietăți elastice reduse, instabile în timp și un histerezis foarte ridicat. Aceste deficiențe se datorează solubilității limitate între componenți și tensiunilor remanente considerabile din material, după executarea arcului. Tensiunile remanente, duc nu numai la instabilitatea caracteristicilor arcului, în raport cu timpul, dar și la ruperea arcului, după un timp oarecare de funcționare. Pentru reducerea tensiunilor remanente se aplică acestor arcuri un tratament termic de recoacere de detensionare. Recoacerea de detensionare, făcută în așa fel încât să nu se distrugă ecruisarea, deci proprietățile elastice, nu poate să elimine complet tensiunile din material.

Din grupa aliajelor de cupru, se folosesc pentru arcuri numai acelea care prezintă în structură constituenți maleabili, care pot să suporte un grad înalt de ecruisare. În tabelul 1.4 sunt indicate compoziția chimică, caracteristicile mecanice și fizice, precum și domeniile de utilizare ale aliajelor de cupru, care se durifică prin deformări plastice la rece sau prin tratament termic. Arcurile din aliaje de cupru, tratate termic, posedă caracteristici mult mai bune decât arcurile ale căror proprietăți elastice se datoresc ecruisării.

Prin tratament termic, care constă din călire prin precipitare, se pot durifica unele aliaje de cupru care prezintă în diagramele lor de echilibru, limite de solubilitate în stare solidă. Călire prin precipitare a acestor aliaje constă dintr-o operație de punere în soluție, urmată de o răcire rapidă și în final de o operație de îmbătrânire artificială.

Operația de punere în soluție, constă din încălzirea aliajului, peste temperatura de transformare în stare solidă și din menținerea, un timp suficient, la această temperatură, pentru ca un anumit constituent să treacă total în soluția solidă. Răcirea rapidă care urmează duce la o soluție solidă suprasaturată. În această stare, materialul prezintă o mare plasticitate, fapt care permite utilizarea lui la executarea elementelor elastice de formă complexă, cum ar fi membranele gofrate și silfoanele.

După operațiile de confecționare, elementele elastice se supun operației de îmbătrânire artificială, care constă din reîncălzirea aliajului în vederea precipitării unui anumit constituent,

Tabel 1.3 Aliaje pe bază de cupru durificate prin prelucrare la rece (ecruisare)

Materialul	Compoziția chimică (%)	Limita de proporționare MPa	Limita de curgere MPa	Rezistența la rupere MPa	Modulul de elastic. longit. MPa × 10 ⁸	Modulul de elastic. trans. MPa × 10 ⁸	Duritate Brinell MPa	Alungire %	MPa	Rezistență la rupere MPa
Cupru	Cu 99,9	218	342	400	1,16	0,388	1100	9,8	300	76
Alamă	Cu 70; Zn 30	310	545	680	0,95	0,325	1800	20	300	101
Alamă cu Ni	Ni 18	356	542	700	1,3	0,4	1900-2200	20-30	100	161
Bronz fosforos	Cu 94,7; Sn 5,3	470	665	745	1,06	0,388-0,45	2200	10-15	100	158
Bronz fosforos	Cu 93,3; Sn 6,7	620	805	875	1,06	0,388-0,45	2400	10	100	120
Bronz	Cu 99; Sn 1	234	465	585	1,16	-	1200	10-15	-	-
Bronz cu Si	Cu 96; Si 3; Mn 1	310	620	710	1,0	-	1800	20-30	100	125
Bronz cu Cd	Cu 99; Cd 1	232	470	590	1,16	-	1200	10	-	-
Monel	Ni 60-70; Fe 2-3 Mn 1,2-1,8; Cu	160	390	710-775	1,18	0,65	2000-2200	-	200	230

Tabel 1.4 Aliaje pe bază de cupru durificate prin prelucrare la rece sau tratamente termice

Materialul	Compoziția chimică (%)	Limita de proporționare MPa	Limita de curgere MPa	Rezistența la rupere MPa	Modulul de elastic. longit. MPa × 10 ⁸	Modulul de elastic. trans. MPa × 10 ⁸	Duritate Brinell MPa	Alungire %	MPa	Rezistență la rupere MPa
Alamă specială	Cu 72; Ni 6 Al 1,5; Zn 20,5	400	700	850	1,1	0,4	1570	20	300	128
Bronz cu Cr	Cr 0,6-0,85 Cu 99-99,4	230-400	468	555	1,2	0,45	1500	10	300	158
Bronz cu Al	Cu 88,9; Al rest	450	700	800	1,16	0,4	2000	7	100	160
Bronz cu Be	Be 2; Co 0,5 Cu 97,5	750	1000	1160-1400	1,16-1,3	0,46-0,55	3500	10	300	200
Monel K	Ni 66; Cu 29 Al 5	620	930-1160	1160-1300	1,68	0,6	3300	-	20	230
Nichel Z	Ni 98 Cu, Mn, Fe, Si 2	730	1140	1400	2,1	0,5	-	-	-	-

din soluția solidă suprasaturată. Structura rezultată corespunde unei dispersii fine a unui constituent dur, într-o masă plastică de soluție solidă, care dă materialului proprietăți elastice superioare și o rezistență comparabilă cu a oțelurilor călite și revenite.

Aliajele călibile, comparativ cu cele durificabile prin ecruisare, având caracteristici mecanice superioare, sunt utilizate la scară mai mare. Din ele se pot executa arcuri cu condiții severe de înfășurare, fără pericol de rupere, deoarece durificarea urmează după înfășurarea arcului. De asemenea, aliajele călibile sunt ideale, în ce privește variația proprietăților elastice în timp. Acest lucru se poate explica prin faptul că, tratamentul termic elimină complet tensiunile remanente, în timpul încălzirii pentru îmbătrânirea artificială. Aceste arcuri prezintă o durificare mult mai omogenă în volum.

Materiale nemetalice

Din această categorie de materiale, la executarea elementelor elastice se utilizează îndeosebi: cauciucul, cuarțul și masele plastice [1], [3].

Sticla de cuarț se folosește datorită histerezisului deosebit de mic, a proprietăților elastice deosebit de bune, a constanței modulului de elasticitate în raport cu temperatura și datorită proprietăților anticorosive. Sticla de cuarț prezintă inconvenientul de a fi casantă, motiv pentru care se limitează folosirea acestui material, la confecționarea arcurilor. Din sticlă de cuarț se pot executa elemente elastice de diferite forme: arcuri plate și elicoidale, membrane și arcuri tubulare.

Dintre materialele plastice, la executarea membranelor elastice și a silfoanelor se folosește mai ales fluoroplastul. Acesta nu este atacat de acizi, baze, oxidanți și alte medii agresive. Încălzit până la 200°C, nu prezintă o modificare sensibilă a rezistenței. Principalul dezavantaj al fluoroplastului îl constituie modificarea modulului de elasticitate cu temperatura.

Diferitele tipuri de cauciuc (natural sau sintetic) au o utilizare foarte largă în execuția elementelor elastice. Cauciucul natural are proprietăți elastice superioare cauciucului sintetic. În schimb, sub acțiunea radiației ultraviolete, a căldurii, a oxigenului din aer, a unor agenți externi, cum ar fi uleiurile sau benzina, cauciucul natural își pierde proprietățile elastice. Cauciucul sintetic este mai puțin sensibil la aceste influențe, motiv pentru care tinde să-l înlocuiască pe cel natural, ca material pentru arcuri. Arcurile din cauciuc se execută din plăci, blocuri sau tuburi de cauciuc, combinate cu piese metalice de armare.

Cauciucul nu respectă legea lui Hooke. Caracteristicile mecanice ale cauciucului sunt cu totul deosebite, ca valoare, de cele ale oțelurilor și în general, de cele ale metalelor. Fenomenul de histerezis elastic pronunțat este caracteristic cauciucului. Datorită fenomenului de histerezis și al efectului elastic întârziat, factorul de amortizare al cauciucului este mult mai mare decât cel al oțelului. În consecință, pericolul de rezonanță, pentru sistemele cu arcuri din cauciuc, este redus. Temperatura influențează negativ asupra calităților cauciucului: atât modulul de elasticitate, cât și rezistența la rupere, scad cu creșterea temperaturii.

1.4.2. Materiale pentru elemente elastice, de tip membrană

Datorită condițiilor impuse de regimul de funcționare al membranelor, domeniul materialelor din care se pot executa acestea, este mult restrâns. Membranele metalice sunt executate din oțeluri inoxidabile sau frecvent din aliaje neferoase (bronzuri și alame). Materialele cele mai des folosite la construcția membranelor metalice sunt prezentate în tabelul 1.5 [80].

Materialele folosite la execuția membranelor metalice trebuie să le asigure acestora următoarele caracteristici:

Aliaje utilizate pentru elemente elastice de tip membrană

Aliaj	Compoziția chimică	Densitatea	Proprietăți caracteristice	Aplicații	Rezistența la rupere (MPa)		Elongația [%]		Distanța dintre prețuri (mm)		Volumul		
					Mediu	Tare	Mediu	Tare	Mediu	Tare			
CuSn5	Cu 94,8 Sn 5 P 0,2	8,86	alaj criogenic rezistență la coroziune	membrane gofrate, tuburi Bourdon	335-360	360-500	45-60	25-45	5-25	75-110	110-145	145-175	1,1
CuSn6	Cu 96 Sn 6 P 0,2	8,84	rezistență la coroziune	tuburi Bourdon joasă presiune, membrane	350-400	400-500	45-60	25-40	2-25	83-110	110-145	145-175	1,1
CuSn8	Cu 91,5 Sn 8,5 P 0,2	8,80	rezistență la coroziune, rezistență la oboseală prin încovoltare	tuburi Bourdon medie presiune membrane și tuburi ondulate	400-450	450-550	50-70	30-50	10-30	80-130	130-155	155-215	1,1
CuBe2	Cu 98 Be 2 Co 0,25	8,26	rezistență la oboseală, la relaxare, la uzare abrazivă și la coroziune	membrane ptr. traductoare de precizie, tuburi Bourdon	450-500	500-550	30-40	10-15	6-10	90-120	120-150	150-220	1,315
CuNi18Zn20	Cu 61 Ni 18 Zn 21	8,73	rezistență la coroziune foarte avântajos pentru construcția arcurilor	tuburi Bourdon medie presiune	350-450	450-550	35-50	15-34	6-14	85-115	115-150	150-190	1,33
X5CrNi 18,9	Fe 72 Ni 8,5-10 Cr 17-20 C 5,0,07	7,90	oțel inox austenitic rezistent la fluaj peste 700°C, rezistență la coroziune	instrumente medicale, membrane gofrate	580-650	650-700	40-55	20-40	2-20	150-190	180-250	250-300	2,0
X2CrNi 18,9	Fe 71 Ni 8-12 Cr 18-20 C 5,0,03	7,90	procentul scăzut de C (față de cel anterior) îmbunătățește rezistența la coroziune	componente electromea., tuburi Bourdon	580-650	650-700	40-55	20-40	2-20	150-190	180-250	250-300	2,0
X2CrNi Mo18,1	Fe 68 Ni 11-14 Cr 16,5-18,5 Mo 2,5-3 C 5,0,03	7,95	rezistență la coroziune cu acizi	membrane gofrate, tuburi Bourdon	580-650	650-700	40-55	20-40	5-20	150-190	180-250	250-300	2,0
X2CrNiMo Ti18,9	Fe 68 Ni 10,5-13,5 Cr 16,5-18,5 Mo 2,5-3 Ti 5xC C 5,0,03	7,95	Ti îmbunătățește rezistența la coroziune și reduce fluajul la temperaturi înalte	membrane gofrate, tuburi Bourdon	580-650	650-700	40-55	20-40	5-20	150-190	180-250	250-300	2,0
X10CrNi Ti18,9	Fe 71 Ni 9-11,5 Cr 17-19 Ti 5xC C 5,0,10	7,95	Ti îmbunătățește rezistența la coroziune și reduce fluajul la temperaturi înalte	membrane gofrate, tuburi Bourdon	580-650	650-700	40-55	20-40	5-20	150-190	180-250	250-300	2,0

- prelucrabilitate;
- rezistență la presiune;
- rezistență la temperatură;
- rezistență la coroziune.

Pentru un element elastic, care trebuie să fie elastic chiar și în condiții extreme și care datorită grosimii reduse, trebuie să asigure în mod special o rezistență mare la coroziune, alegerea materialului potrivit este foarte importantă.

Nu există nici un material care să satisfacă singur toate cerințele impuse. Totuși dintre metalele feroase, oțelurile inoxidabile austenitice acoperă o mare parte din necesar.

Dintre metalele neferoase cele mai folosite sunt bronzurile; bronzul cu beriliu este des utilizat, datorită caracteristicii elastice foarte bună, combinată cu un histerezis scăzut.

Toate materialele folosite sunt întărite prin ecrusare. Un tratament termic substanțial nu este necesar (excepție face bronzul cu beriliu) putând fi chiar dezavantajos. Întărirea prin ecrusare, datorită procesului de deformare plastică la rece, asigură elasticitatea necesară.

Pentru cazurile în care temperatura este peste 500°C, se folosesc oțelurile inoxidabile austenitice rezistente la temperatură, alături de câteva aliaje pe bază de nichel (Inconel, Hastelloy, Monel și Incoloy).

1.4.3. Procesul tehnologic de execuție al membranelor

Operațiile procesului tehnologic (pentru materiale care se întăresc prin dispersie) sunt [35]:

- * tăierea tablei în fâșii;
- * prelucrarea găurilor pentru legarea fâșiilor în timpul tratamentului termic;
- * curățirea fâșiilor;
- * călirea;
- * curățirea chimică;
- * laminarea;
- * curățirea chimică;
- * tăierea pe contur;
- * sortarea după grosime;
- * formarea gofrelor membranei;
- * controlul.

Tabla pentru confecționarea membranelor are grosimea 0,15 ÷ 1,5 mm și lățimea 1200 mm. Pentru fiecare lot de material se controlează compoziția chimică, proprietățile mecanice și aspectul fizic exterior. Semifabricatele care prezintă crăpături, sufluri, incluziuni de gaze, bule etc. se rebutează.

Tăierea tablelor în fâșii. Tablele verificate se taie în fâșii, cu foarfeca ghilotină sau cu foarfeca cu role. Lățimea benzilor se calculează în funcție de diametrul semifabricatului și de modul de croire, pe un rând sau pe două rânduri. Relațiile pentru calcularea diametrelor semifabricatelor

pentru membrane se deduc pe baza echivalenței volumului semifabricatului și a volumului membranei.

Dacă materialele nu prezintă suficientă plasticitate în vederea laminării, ele sunt supuse unui tratament termic. În mod frecvent, se utilizează încălzirea semifabricatelor în băi de săruri.

Laminarea. Laminarea se face în scopul obținerii unei ecrisări a materialului pentru realizarea unor proprietăți mecanice necesare, a unei structuri omogene și a obținerii grosimii necesare. Laminarea se face cu un laminor de precizie, a cărui schemă este redată în fig.1.62. Acest laminor permite laminarea tablelor de grosime $1,5 \div 0,02$ mm, cu precizia de $2 \mu\text{m}$.

Valțurile laminorului (2) sunt confecționate din oțel aliat și au porțiuni speciale pentru răcire cu apă rece curgătoare. Valțurile au formă de butoi, formă care este determinată în funcție de proprietățile materialului laminat și de cele ale materialului valțurilor.

Jocul de lucru între valțuri se reglează cu șuruburile (3) și cu arcurile (1), montate în lagărele valțului. Reglajul se face cu un dispozitiv mecanic de reglare fină.

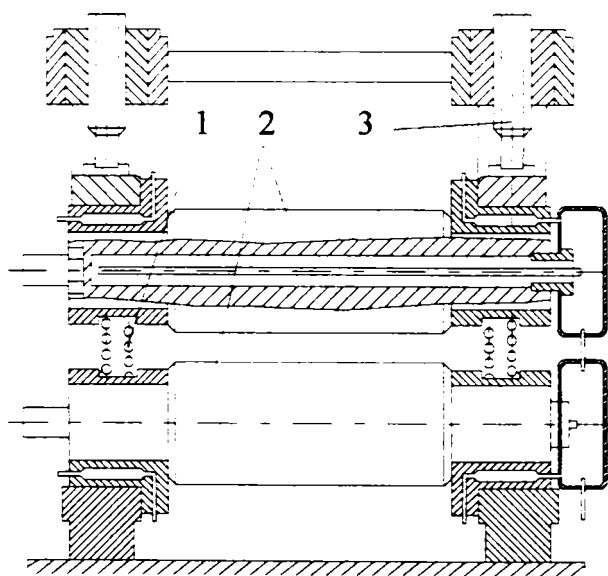


Fig.1.62

Laminarea se face în pachet de 2–10 fâșii, în funcție de gradul de deformație admisibil al laminorului. Numărul de operații (limitate de tratamentul termic) depinde de grosimea și proprietățile semifabricatului și este determinat de mărimea reducerii admisibile a materialului. Numărul de treceri ale semifabricatului printre valțuri, pentru fiecare operație, este de 20–50 de treceri. În tot acest interval de timp, valțurile se reglează de 3–5 ori, astfel că pachetul de benzi trece de câteva ori printre valțuri, fără să se facă de fiecare dată o reglare a acestora, reducerea grosimii realizându-se pe seama forțelor elastice ale valțurilor. Acționarea valțurilor se face de la motor electric de $20 \div 25$ kW, printr-o transmisie cu roți dințate.

Cercetările au arătat că o astfel de laminare duce la obținerea unei precizii mai mari și la reducerea tensiunilor interne. Mărimea reducerii, în timpul utilizării forțelor elastice la laminare, scade după o progresie geometrică. Reglarea valțurilor, la începutul perioadei de reducere, trebuie să țină seama de această lege. Materialele care obțin proprietăți elastice prin ecrisare capătă aceste proprietăți, ca urmare a ultimei laminări.

Penultima trecere trebuie să se facă cu respectarea precisă a toleranțelor, deoarece în urma ei se obțin simultan și ecrisarea și grosimea necesară, a materialului. La ultima trecere, trebuie respectat cu strictețe regimul de torsiune, de care depinde duritatea materialului și stabilitatea caracteristicilor elastice.

Defectele, cele mai frecvente la laminare, sunt crăpăturile și ondulațiile, care apar pe marginea benzilor. Apariția acestor defecte este cauzată, în principal, de valoarea excesivă a coeficientului de reducere. Factorii care influențează precizia de laminare sunt:

- profilul valțurilor, care provoacă ondulația benzii ce se laminează și care determină grosimea ei neuniformă;
- abaterea de la forma de butoi prescrisă valțurilor;

- neparalelismul valțurilor care provoacă încrețirea benzii.

Controlul benzilor laminate, cu grosimea până la 0,1 mm, se face cu micrometrul. Pentru controlul benzilor mai subțiri se utilizează un comparator special, cu valoarea diviziunilor de 0,001 mm, sau un micrometru cu pârghie, cu valoarea diviziunilor de 0,002 mm.

Tratamentul termic. Tratamentul termic, care se face între operațiile de laminare și după operația de laminare, în vederea obținerii plasticității materialului, sau a proprietăților elastice, comportă o serie de particularități.

* Pentru materialele cu întărire prin ecrisare, tratamentele termice se rezumă la recoacerea în cuptoare, cu mufe de reglaj automat și înregistrarea temperaturii. Precizia de încălzire trebuie să fie destul de mare, cu abateri de $\pm 8^{\circ}\text{C}$, față de temperatura prescrisă.

Pentru ca benzile să nu se oxideze, ele sunt așezate în cutii metalice, acoperite cu cărbune, astupate cu azbest și ermetizate cu argilă. După terminarea recoacerii, cutiile se scot din cuptor și se răcesc până la $300\text{--}350^{\circ}\text{C}$, după care benzile se scot din cutie și se răcesc în aer liber.

** Pentru materialele cu întărire prin dispersie, pentru imprimarea proprietăților elastice, benzile se supun unui tratament de înobilare.

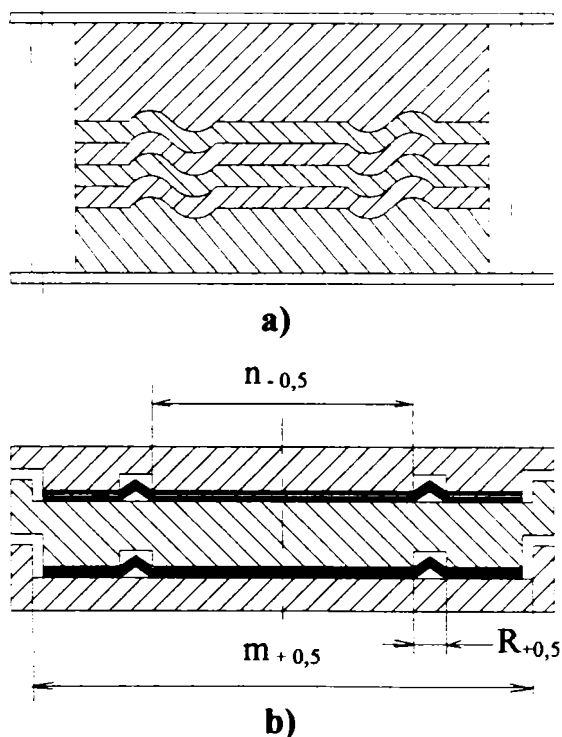


Fig.1.63

O latură a formei are profilul corespunzător profilului exterior al membranei, iar cealaltă profilului interior. Membrana se așează în forma profilată și se strânge cu butoanele laterale. Deoarece materialul membranei, în timpul înobilării se dilată, cotele m și n ale formei trebuie să fie mai mari (m) respectiv, mai mici (n) cu 0,5 mm decât ale membranei (fig. 1.63b - cu plăci distanțiere); distanța care limitează înălțimea undulațiilor trebuie respectată cât mai precis. Cu tot accesul minim al aerului la recoacerea benzilor, nu se poate evita oxidarea. Pentru înlăturarea impurităților oxizilor de pe suprafața benzilor, acestea după tratamentul termic, sunt supuse curățirii chimice și mecanice. Curățirea chimică are rolul de a scoate doar scoriile, fără modificarea grosimii benzii. Curățirea chimică poartă numele de înălbire.

Benzile de bronz fosforos sunt supuse înălbirii în acid clorhidric concentrat timp de $5 \div 10$ min. Pentru a se imprima suprafeței un aspect lucios, benzile se cufundă într-o soluție de anhidridă

Membranele din bronz cu beriliu se înobilează în atmosferă de protecție (amoniac disociat), la temperatura de $300 \div 320^{\circ}\text{C}$. Utilizarea atmosferei de protecție suprimă necesitatea curățirii benzilor de oxizi, între operațiile tratamentului termic. Totuși unele benzi se șlefuiesc cu oxid de crom, pentru îndepărtarea stratului superficial.

Pentru înlăturarea urmelor de grăsime, de pe suprafața benzilor, ele se spală cu benzină, după care se tratează cu anhidridă cromică. Acest tratament se face în forme, pentru a preveni deformarea posibilă a membranelor.

Membranele care au o grosime mai mică de 0,2 mm și o înălțime a undulațiilor sub 1 mm, se imobilizează în forme din aliaj de aluminiu (fig. 1.63a - fără plăci distanțiere).

cromică și acid sulfuric (190 g anhidridă cromică și 30 g acid sulfuric pentru un litru de apă). După aceasta benzile se spală în apă curgătoare, se usucă în rumeguș de lemn de esență foioasă și se suflă cu aer comprimat.

Călirea se face la temperatura de $1000 \div 1020^{\circ}\text{C}$ în baie de săruri de clorat de bariu. În urma tratamentului termic, duritatea trebuie să fie de 120 HB. După tratamentul termic se face o spălare într-o baie de apă cu sodă, timp de 3–4 min, pentru spălarea sărurilor de bariu, urmată de curățire mecanică, prin șlefuire cu peria de pișlă. Întărirea prin dispersie (sau înobilare) se face după operația de formare a gofrelor și operațiile de sudare a membranelor. Operația se face în aceleași cuptoare, însă în vid.

În acest scop, membranele se introduc într-o serie de cilindri de oțel inoxidabil, pentru a nu se produce deformații ale membranei, ca urmare a tratamentului termic. În cilindru se introduc circa 10–15 membrane, distanțate între ele prin inele de oțel inoxidabil. În cuptor se introduc un număr de 15–20 asemenea cilindri. Încălzirea se face la o temperatură de $670 \div 690^{\circ}\text{C}$, în vid. Timpul de menținere în cuptor este de 3 ore, iar după menținere, răcirea până de $50 \div 100^{\circ}\text{C}$ se face lent, tot în vid. Întregul proces durează $12 \div 24$ ore.

Din benzile astfel prelucrate se taie apoi fâșii și se ștanțează rondele. Ștanțarea se face pe prese cu excentric. La proiectarea matrițelor pentru decupare trebuie asigurată o ghidare precisă a avansului, în raport cu matrița, deoarece la folosirea unui material subțire, jocul dintre poanson și matrițe este de câțiva microni.

Pentru a constata lipsa defectelor exterioare (crăpături, fisuri, umflături), se controlează grosimea semifabricatelor decupate și se face o verificare vizuală. Grosimea se verifică în trei puncte, făcându-se o sortare a discurilor.

Formarea gofrelor. Operația de formare a gofrelor este una dintre cele mai importante operații, ținând seama de influența asupra împrăștierii caracteristicii pe care o are forma gofrei și geometria ei. În scopul realizării gofrelor se utilizează mai multe metode ca:

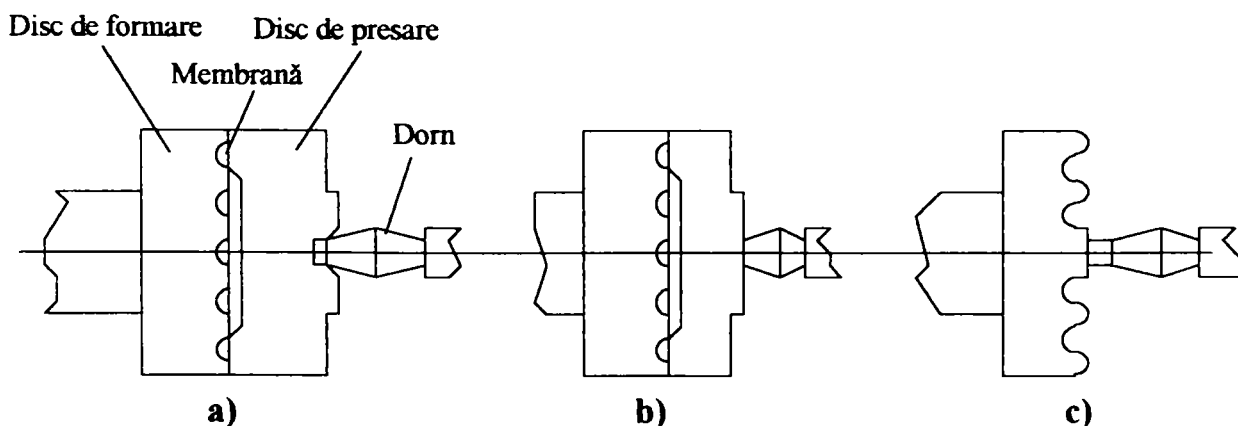


Fig.1.64

- formarea gofrelor prin tragere pe strung, pe calapod (fig.1.64). Gofrarea se face în două etape și anume, în prima etapă se prelucrează bordura membranei, după care prin fixarea centrului se trag gofrele. Metoda are dezavantajul neuniformității geometrice obținute și a unei productivități scăzute, fiind aplicabilă numai în condițiile unei producții de unicat.
- metoda hidraulică de formare a gofrelor permite obținerea unei membrane de calitate, datorită repartiției uniforme a presiunii pe toată suprafața semifabricatului.

Procedeele de formare mecanică a gofrelor, în general, permit o mare productivitate și o precizie ridicată.

O primă metodă (care însă nu se poate utiliza la membranele de mare precizie) este metoda formării gofrelor cu poanson de oțel și matrița din metal moale (plumb sau cositor). Metoda este aplicabilă pentru membrane a căror grosime nu depășește 0,25 mm, fără un profil ascuțit al gofrei (baza de racordare fiind mai mare decât grosimea materialului).

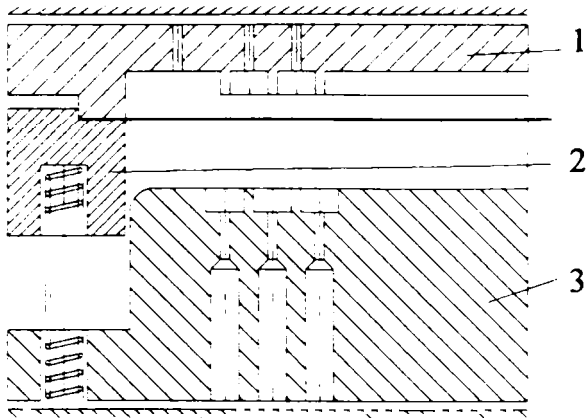


Fig.1.65

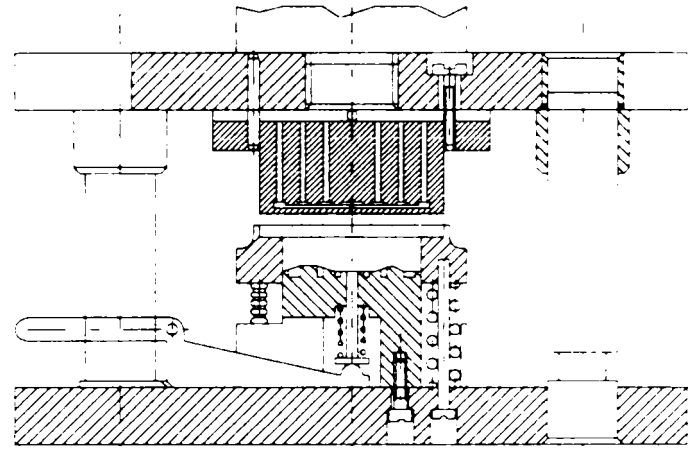


Fig.1.66

În acest scop, în general se utilizează prese hidraulice. Ondularea în matrițe ca cea din fig.1.65 unde poansonul profilat (1) și matrița profilată (3) realizează formarea, iar sistemul de strângere al plăcii (2) exclude formarea cutelor. Formarea se poate face dintr-o operație, când ondulațiile nu sunt adânci, sau din două și chiar trei operații, când înălțimea gofrelor este mare. De obicei, profilarea se face de la margine spre centrul membranei, fixarea la operațiile a doua și a treia făcându-se pe contur.

În fig.1.66 este reprezentată o matriță complexă, montată pe prese cu excentric, pentru formarea membranelor cu grosimea maximă de 0,4 mm.

Ambutisarea pe matriță de cauciuc se face cu o matriță specială, ca cea prezentată în fig.1.67. Semifabricatul se așează pe poansonul (1), în care este introdusă în prealabil o rondela de cauciuc (2), cu grosimea de 8–10 mm și se strânge cu inelul (3). Apoi se coboară poansonul (4), care imprimă membranei forma corespunzătoare gofrelor. În funcție de profilul ondulației și de grosimea materialului, ondularea se face în două, trei sau mai multe operații.

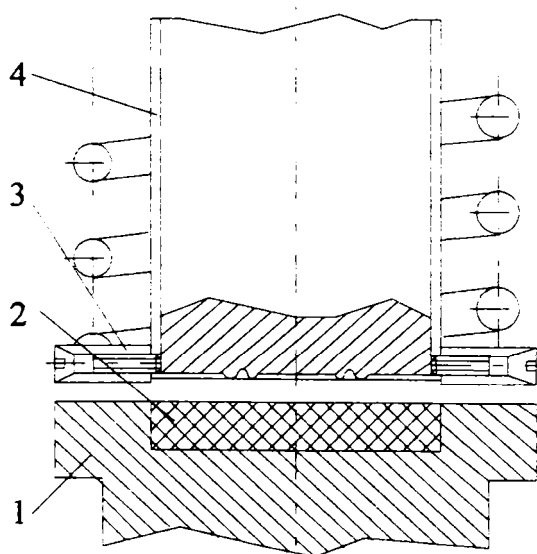


Fig.1.67

La formarea membranei în câteva operații, este necesar să se utilizeze poansonuri cu rigiditate diferită. Astfel, la prima operație se utilizează un poanson cu profil nu prea adânc și un cauciuc dur, iar apoi cu o a doua matriță se face formarea cu poansonul și cu un cauciuc moale. Metoda se aplică membranelor care nu necesită o precizie mare de execuție.

La formarea mecanică, matrițele se pot confecționa ca în fig.1.68, respectându-se numai cotele care determină muchiile profilului. La toate metodele de formare, înălțimea gofrei membranei obținute este mai mică decât înălțimea gofrei matriței, datorată revenirii elastice a materialului membranei.

Astfel, pentru membranele din bronz cu staniu și zinc, această revenire elastică poate să atingă 10–27 %. Un mare accent se pune pe controlarea geometrică a matriței.

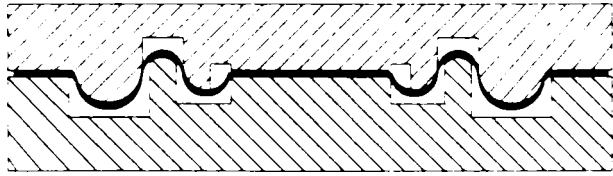


Fig.1.68

Verificările care se fac membranei se referă la aspectul exterior și la verificarea caracteristicii elastice.

Controlul membranei se referă la controlul aspectului exterior, după care se trece, fie la operațiile pentru montarea membranelor în capsule, fie la ambalarea acestora.

Pentru controlul aspectului se folosește metoda verificării prin transparență, care se realizează într-o cameră întunecată, în care membrana se montează într-un dispozitiv și este iluminată deasupra, cu un bec de 60W.

1.4.3.1. Montarea membranelor în capsule

Montarea membranelor sub formă de capsule ridică o serie de probleme tehnologice, care sunt reprezentative, în general, pentru montarea elementelor elastice. Alegerea procesului tehnologic, depinde de forma capsulei și de condițiile tehnice ale ei, precum și de materialul membranei și al armăturilor de legătură ale capsulei [35].

Procesul tehnologic de realizare al capsulelor cuprinde: asamblarea membranelor sub formă de capsulă, stabilizarea capsulelor și controlul.

Asamblarea membranelor sub formă de capsulă și a armăturilor la capsulă se realizează prin lipire sau sudare. Lipirea se face în două faze: cositorirea bordurii membranei și lipirea propriu-zisă. Înaintea cositoririi membranelor și a armăturilor, acestea se curăță în benzină și apoi în spirt. În vederea cositoririi și lipirii, membranele și celelalte repere se decapează pentru îndepărtarea oxizilor și curățirea suprafețelor.

Cositorirea marginilor membranelor se face manual sau automat în dispozitiv. Față de procedeele manuale, cu dispozitive mecanice, se obține o creștere de productivitate cu 20-30%. Pentru realizarea cositoririi membranelor (executate în serii foarte mari) se utilizează, exclusiv, mașinile de cositorit automate. Înainte de îmbinarea în capsule, membranele se spală cu benzină de aviație și apoi se usucă. După aceea, se așează în dispozitive de centrare, care realizează poziționarea pieselor de legătură față de membrană și a membranelor, una față de alta.

În general, asamblarea membranelor prin lipire prezintă o serie de neajunsuri, dintre care se menționează:

- consum mare de aliaj de lipit;
- proprietăți mecanice scăzute ca rezistență;
- creștere a histerezisului și a deformației reziduale,

care toate sunt în mare măsură influențate de calitatea lipirii și compoziția materialului de lipit.

Verificarea lipiturilor se controlează prin cufundarea în apă la temperatura de 90°C, urmărindu-se bulele de aer, care apar în urma creșterii presiunii în interiorul capsulelor.

O problemă tehnologică specială, o constituie problema lipirii orificiului de evacuare a aerului, în cazul capsulelor aneroide. După cositorirea membranelor și retezarea bordurilor, se picură o

picătură de material de lipit, cât mai aproape de centru și într-o zonă unde nu există solicitări mari ale membranei, în timpul funcționării.

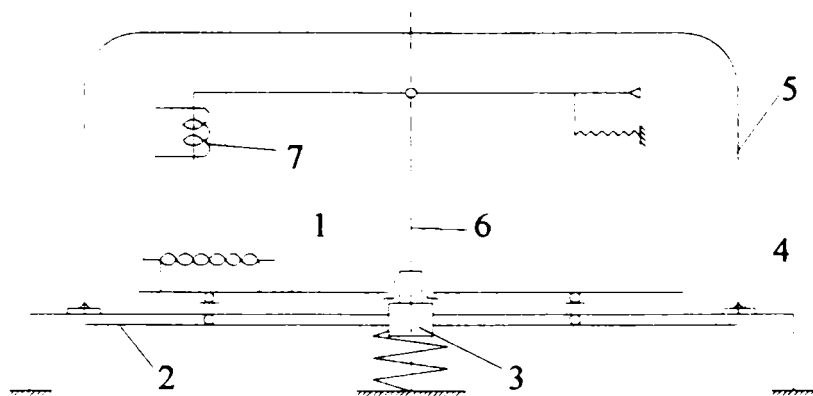


Fig.1.69

Se perforază în ea un orificiu cu un diametru de $0,2 \div 0,4$ mm, apoi se usucă capsula la o temperatură de $100 \pm 10^\circ\text{C}$ și la o presiune de 50 mmHg. Prin acest orificiu se scoate aerul, după care acesta se lipește cu un dispozitiv special, ca și cel din fig.1.69. Dispozitivul se compune din postamentul (4), pe care este fixată masa orientabilă (1).

Masa cu elementele sensibile fixate pe ea, se rotește în jurul axei (3). Ciocanul electric (7) este fixat pe montantul (6), care se deplasează pe direcție verticală, prin acționarea pârghiei (2).

Etanșeitatea îmbinărilor mobile se realizează cu ajutorul unor tuburi ondulate. Aerul de sub clopotul (5) este evacuat printr-un racord înșurubat pe postament. Un al doilea racord înșurubat în postament face legătura cu instalația de măsurat vidul. Procedeu cel mai bun, sub aspectul productivității, al rezistenței și obținerii caracteristicilor elastice, la îmbinarea membranelor, este procedeu îmbinării etanșe nedemontabile prin sudură.

Înainte de sudare, suprafața membranelor se curăță și se spală cu benzină, câteodată folosindu-se și lustruirea electrolică. Prin această lustruire se obține o calitate mai bună a sudurii și este necesară o presiune mai mică în zona lipirii.

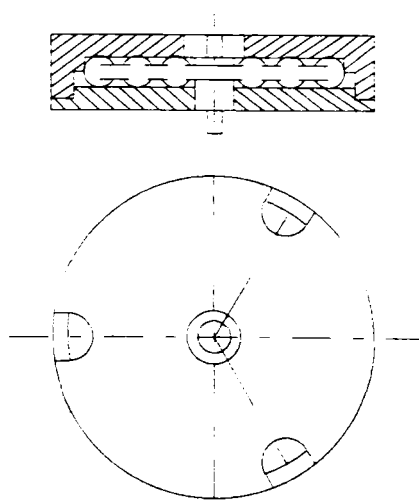


Fig.1.70

Pentru lustruirea membranelor din oțel inoxidabil, rezultate foarte bune dau soluțiile de lustruire electrolică, compuse din 100 ml acid azotic și 100 ml acid clorhidric, la un litru de apă, timpul de lustruire fiind de 1-5 min, la temperatura de $70 \div 100^\circ\text{C}$.

Înainte de sudarea capsulei pe contur se realizează o aranjare a membranelor componente, în poziția cerută de sudarea capsulei. Acest lucru se obține prin sudarea membranelor în 3-8 puncte, dispuse simetric pe contur, fixarea membranelor realizându-se în dispozitivul de poziționare, prezentat în fig.1.70. Sudarea punctelor pe contur se face într-o ordine bine stabilită, în așa fel încât, tensiunile care apar în urma încălzirii să nu ducă la deformarea membranelor. Sudarea pe contur a membranelor în capsule se face, în general, cu mașini speciale de sudat cu role.

În principiu, aceste mașini de sudat sunt similare celor de sudat prin puncte, însă datorită unor generatoare electronice de impulsuri, punctele de sudură se pot regla, în așa fel încât, ele să se suprapună pe o porțiune de 60% din suprafața lor (cordonul de sudură privit cu lupa pare a fi o sudură continuă, dar în realitate este o sudură prin puncte suprapusă).

Mașina de sudat cu role poate suda metale feroase și neferoase, cu grosimi de $0,03 \div 0,4$ mm, cu viteze de sudare de 0,2-0,8 m/min, la o frecvență a impulsurilor de curent de 100 Hz.

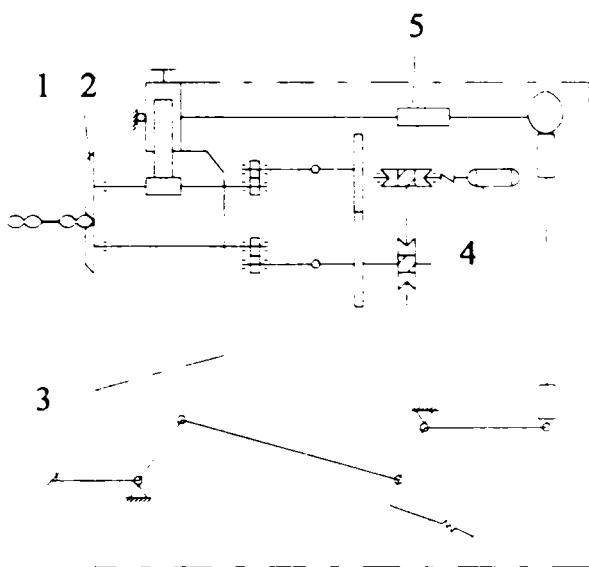


Fig.1.71

Mașina de sudat cu role a cărei schemă cinematică este prezentată în fig.1.71, se compune din rolele (2), cu diametrul de $50 \div 80$ mm, între care se află membranele (1). Rolele realizează o strângere cu forța de $5 \div 100$ kgf și sunt puse în mișcare cu sistemul cinematic din figură. Forța de apăsare se reglează prin deplasarea greutății (5). Cu ajutorul pedalei (3) se ridică sau se coboară rola (2).

Viteza de rotație este corelată cu frecvența impulsurilor de la generator, pentru ca punctele de sudură să se suprapună și să rezulte o cusătură continuă. Pe această instalație se pot suda membrane ale căror diametre sunt cuprinse între 15 și 100 mm.

Pentru grosimi ale membranelor sub 0,1 mm, în locul rolei de jos, se utilizează o piesă specială, de formă concavă.

Sudarea capsulelor manometrice se poate executa și prin alte procedee de sudare, cum ar fi:

- sudarea cu fascicol de electroni în vid;
- sudarea cu arc în mediu de argon.

Sudarea cu fascicol de electroni în vid este caracterizată printr-o mare concentrare a energiei termice, printr-un mediu pur, în care se realizează sudura și prin presiunea mică a fascicolului de electroni. Cordonul de sudură nu depășește 1,5 mm lățime, fiind uniform pe toată suprafața. Defectele de sudare, cum ar fi, fisurile, porii sau alte tipuri de defecte, lipsesc.

La sudarea cu arc în mediu de argon, se folosește un electrod de wolfram, care nu se topește în mediul de protecție, iar arcul voltaic se stabilește între electrod și piesă. Pentru realizarea unei cusături circulare, la sudarea capsulelor, becul de sudat se instalează fix, iar piesa se rotește.

Stabilizarea duce la obținerea caracteristicilor elastice stabile în timp și realizează eliminarea tensiunilor interne, care au apărut datorită încălzirii neuniforme a materialului, la lipire sau sudare. Aceste tensiuni interne, dacă nu ar fi eliminate, s-ar manifesta în timp, ducând la modificarea caracteristicilor elastice. Stabilizarea se poate realiza prin încărcarea ciclică sau statică, și de asemenea prin supunerea capsulei la un ciclu de temperatură.

Stabilizarea mecanică a capsulelor la o solicitare periodică ciclică (pulsare) se realizează prin comutarea directă a membranelor capsulelor care se stabilizează, de la vid la presiune și viceversa. Instalația de stabilizare permite protecția elementelor care se stabilizează, contra unor presiuni excesive. Instalația permite realizarea unei pulsații ciclice, intervalul de variație al presiunilor fiind de $0,3 \div 5$ bar. Perioada oscilației complete a pulsației este de 10–12s. Pentru realizarea stabilizării ciclice, în domeniul presiunilor până la 600 bar, se utilizează instalații hidraulice; în acest caz, ciclul de stabilizare se stabilește pe baza condițiilor tehnice și este de câteva ore.

Stabilizarea la sarcină constantă se face timp de $3 \div 6$ ore, la o presiune care o depășește pe cea maximă cu 20–30%. Stabilizarea pe cale termică se face prin cufundarea alternativă a membranelor, în lichide cu temperatura de 100°C , respectiv -50°C . În fiecare bazin, capsula se ține $5 \div 10$ s.

Controlul capsulelor constă în verificarea aspectului interior, a dimensiunilor geometrice, a mărării cursei, la presiunea de lucru caracteristică capsulei și a etanșeității ei.

Controlul aspectului exterior se face geometric, înălțimea elementului sensibil trebuie măsurată separat, în condiții de neinfluențare a sarcinii aparatului de măsurat. La măsurarea înălțimii capsulelor aneroide trebuie să se țină seama de abaterea presiunii atmosferice de la presiunea normală. Abaterea de la paralelism a capsulelor se măsoară prin abaterea cotei de înălțime, pe contur. Pentru verificarea caracteristicii capsulelor se utilizează comparatoare, catetometre, microscopie instrumentale și micrometre cu contact.

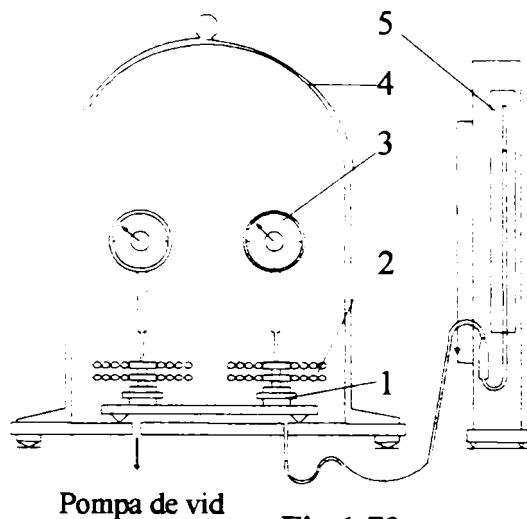


Fig.1.72

În fig.1.72 este prezentat un stand de control al capsulelor aneroide. Capsulele (2) sunt fixate în suporturile (1). Din punct de vedere al măsurării se utilizează comparatoarele (3), care palpează centrul membranei. Întregul dispozitiv este acoperit de clopotul de sticlă (4), în interiorul căruia se face vidul necesar, a cărui mărime se citește la barometrul (5).

La variațiile presiunii de sub clopot, capsula se deformează și comparatorul indică deplasarea centrului membranei. Deplasarea capsulei se măsoară la cursa directă și la cea inversă, în același punct al domeniului de presiune. Această metodă, deși simplă, nu conferă o precizie ridicată, datorită influenței forței de apăsare a comparatorului.

Concluzii

- Din multitudinea materialelor utilizate în construcția arcurilor, doar câteva se pretează la construcția elementelor elastice de tip membrană, și anume: bronzul fosforos, bronzul cu beriliu și oțelurile inoxidabile austenitice;
- Un rol important, la obținerea stabilității caracteristicilor elastice ale materialelor utilizate la membranele metalice, îl au operațiile de prelucrare mecanică și tratamentele termice, din procesul tehnologic de fabricație al acestora;
- Procesul tehnologic de fabricație al capsulelor și membranelor metalice gofrate este destul de laborios, pentru că trebuie să asigure acestora proprietăți deosebite, având în vedere faptul că, sunt utilizate la construcția unor aparate pentru măsurarea presiunilor;
- Procesul tehnologic de fabricație al membranelor metalice gofrate conține, cel puțin o operație de ambutisare, care contribuie la îmbunătățirea proprietăților elastice ale materialului, din care sunt confecționate acestea.

2. CONSIDERAȚII ASUPRA STĂRII DE TENSIUNE ȘI DEFORMAȚIE

2.1. CONSIDERAȚII GENERALE

Elasticitatea

Toate materialele posedă proprietatea de elasticitate; aceea că, sub acțiunea forțelor exterioare se produce o deformare, care dispare la încetarea forțelor, dacă aceasta nu depășește o anumită limită [69], [70]. În această lucrare se consideră că toate corpurile, care se află sub acțiunea forțelor exterioare sunt *perfect elastice*, adică își reiau forma inițială la încetarea forțelor.

Structura moleculară a corpurilor elastice nu se ia în considerare, în schimb se va considera că toate *corpurile elastice sunt omogene și izotrope*; cel mai mic element decupat din corp prezintă aceleași proprietăți ca și întregul corp, proprietățile elastice fiind aceleași în toate direcțiile.

Materialele, în general, sunt foarte departe de a fi omogene, dar experiența arată că soluțiile din teoria elasticității, în ipotezele de omogenitate și izotropie, pot fi aplicate la structurile oțelurilor cu rezultate foarte exacte. Explicația constă în faptul că, dimensiunile unui cristal sunt foarte mici, de obicei, într-un cm^3 sunt milioane de cristale de oțel. În timp ce proprietățile elastice ale unui singur cristal pot fi foarte diferite după diferite direcții, cristalele sunt distribuite la întâmplare iar proprietățile elastice ale unei piese mai mari reprezintă o medie a proprietăților cristalelor. Deoarece dimensiunile corpului sunt mari comparativ cu dimensiunile cristalului, ipoteza de omogenitate poate fi folosită cu mare exactitate; de asemenea dacă toate cristalele, în medie, sunt orientate, materialul poate fi tratat ca izotrop. Când, printr-un procedeu tehnologic concret, ca de exemplu roluirea, se obține o orientare clară a cristalelor materialului, proprietățile elastice ale acestuia se diferențiază în funcție de direcția de măsurare și se impune luarea în considerare a ipotezei de anizotropie

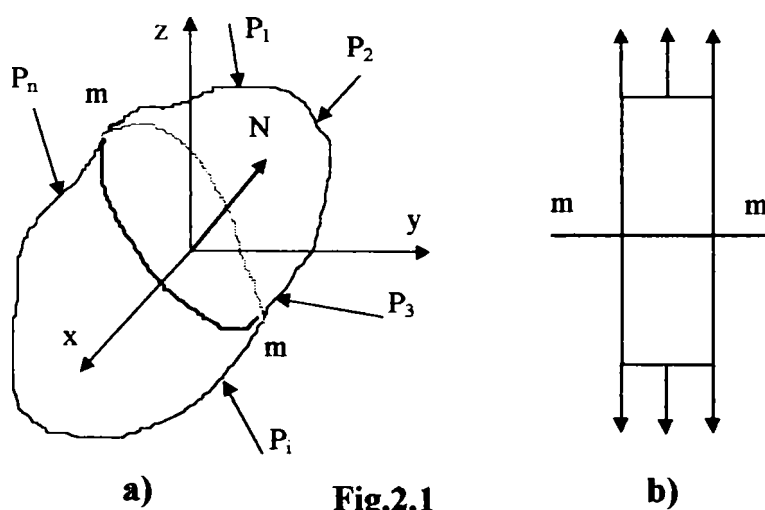


Fig.2.1

Tensiunea

Corpul prezentat în fig.2.1a se află în echilibru. Sub acțiunea forțelor exterioare de încărcare ($P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$) iau naștere forțe interioare în material [69], [70].

Mărimea acestor forțe interioare este, în general, definită de intensitatea lor, exprimată prin valoarea forței pe unitatea de arie, pe care acționează. În cazul din fig.2.1b forța exterioară este uniform distribuită (P/A).

În cazul general, tensiunea nu este uniform distribuită; acțiunea forțelor exterioare pe unitatea de arie se exprimă prin rezultanta δP , iar dacă se consideră elementul de arie pe care acționează rezultanta ca fiind δA , rezultă că, mărimea tensiunii este dată de raportul $\delta P/\delta A$.

Direcția rezultantei δP este și direcția tensiunii. În cazul general, direcția tensiunii este înclinată pe aria δA , de aici rezultând două componente ale tensiunii:

- ◆ o componentă normală a tensiunii σ , perpendiculară pe elementul de arie δA ;
- ◆ o componentă tangențială (tăietoare) a tensiunii τ , în planul elementului de arie δA .

Există două tipuri de forțe care pot acționa asupra corpurilor, și anume :

- *forțe distribuite pe suprafața corpului* – presiunea unui corp asupra altui corp, sau presiunea hidrostatică - denumite și *forțe de suprafață*;
- *forțe distribuite în volumul corpului* – forțe gravitaționale, forțe magnetice, sau forțe de inerție, pentru corpuri aflate în mișcare – denumite și *forțe de volum*.

Forțele de suprafață se descompun după trei componente, paralele cu axele unui sistem de axe de coordonate atașat corpului. Aceste componente se notează cu $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ în timp ce componentele forțelor de volum se notează cu X, Y, Z .

Tensiunile normale se notează cu litera σ urmată de un indice. De exemplu : σ_y este tensiunea normală ce acționează într-un plan perpendicular pe axa y . Tensiunile normale se consideră pozitive (+) când produc solicitarea de întindere și negative (-) când produc solicitarea de compresiune.

Tensiunile tangențiale se descompun în două componente, paralele cu axele de coordonate; ele se notează cu litera τ urmată de doi indici care semnifică:

- primul, indică direcția normalei la planul luat în considerație;
- al doilea, indică direcția componentei tensiunii.

De exemplu: τ_{xy} este tensiunea tangențială ce acționează în planul yOz (a cărui normală este axa x) având direcția axei y .

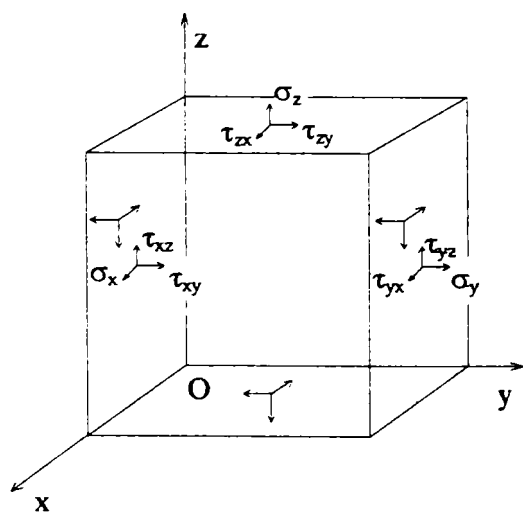


Fig.2.2

Componentele tensiunii

Pentru a descrie acțiunea tensiunilor, pe cele șase fețe ale unui element cubic, sunt necesare trei simboluri pentru tensiunile normale ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) și șase simboluri pentru tensiunile tangențiale ($\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$). Dintr-o considerație simplă, de echilibru a elementului, numărul

Direcția pozitivă a componentelor tensiunii tangențiale, pe fiecare față a unui element cubic, se ia a și direcția pozitivă a axelor de coordonate, dacă o tensiune de întindere ce acționează pe aceeași parte ar avea direcția pozitivă a axei corespunzătoare. Dacă tensiunea de întindere are o direcție opusă cu direcția pozitivă a axei de coordonate, atunci direcția pozitivă a tensiunii tangențiale va fi inversată.

Urmând această regulă, direcțiile pozitive ale tuturor componentelor tensiunii, acționând pe fața dreaptă a unui element cubic (fig.2.2), coincid cu direcțiile pozitive ale axelor sistemului de coordonate, atașat elementului cubic considerat.

simbolurilor pentru tensiunile tangențiale pot fi reduse la trei. Unele forțe de volum, ca de exemplu greutatea elementului, pot fi neglijate [69], [70].

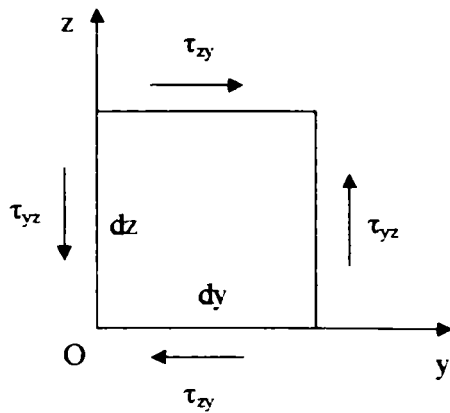


Fig.2.3

Din fig.2.3 se pot scrie ecuațiile de echilibru referitor la fiecare dintre fețele elementului cubic, considerând suma momentelor forțelor față de axa Ox,

$$\tau_{xy} dx dy dz = \tau_{yx} dx dy dz .$$

Celelalte două ecuații de echilibru se obțin în mod asemănător, considerând suma momentelor forțelor față de axele Oy și Oz. Din aceste ecuații se deduce că:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} . \quad (2.1)$$

Deci, pentru două fețe perpendiculare ale unui element cubic, componentele tensiunii tangențiale perpendiculare pe linia de intersecție a celor două fețe, sunt egale.

Componentele deformației

Nici o deplasare a particolelor unui corp nu este posibilă fără o deformație a lor. Deplasările, foarte mici ale particolelor unui corp deformat, se reduc la componentele u, v, w, paralele cu axele de coordonate x, y, z. Se va considera că aceste componente sunt cantități foarte mici, care variază în mod continuu, în volumul corpului [69], [70].

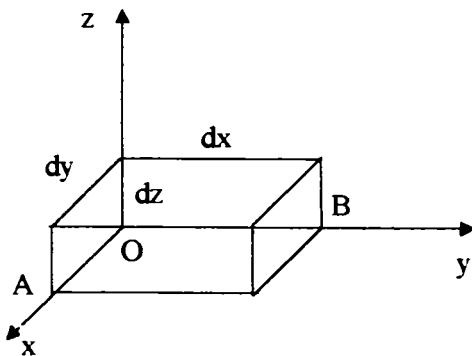


Fig.2.4

Considerăm un element infinit mic (dx dy dz), dintr-un corp (fig.2.4). Dacă corpul suferă o deformație și u, v, w sunt componentele deplasării punctului O', deplasarea pe direcția x a punctului A este: $\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)$. Alungirea elementului OA este: $\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \right)$. Deci, alungirea unitară în

punctul O', în direcția x, y, z este, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$.

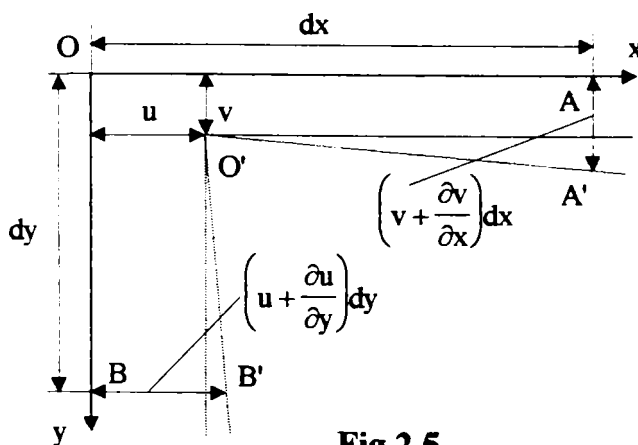


Fig.2.5

Vom considera unghiul dintre elementele OA și OB (fig.2.5). Dacă u și v sunt deplasările punctului O', pe direcțiile x și y, deplasarea punctului A, pe direcția y și a punctului B, pe direcția x, sunt: $\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)$ și $\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)$.

Datorită acestor deplasări noua direcție O'A' este înclinată față de direcția inițială OA cu un unghi mic, egal cu $\frac{\partial v}{\partial x}$.

La fel O'B' este înclinată față de OB cu un unghi egal cu $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Rezultă că, unghiul AOB drept se micșorează la unghiul A'O'B' cu un unghi egal cu $\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Aceasta este tensiunea tăietoare dintre planele xOz și yOz.

Se notează cu: ε - alungirea specifică și cu γ - lunecarea specifică. Pentru a sugera direcția acestora simbolizarea conține doi indici (ca și în cazul tensiunilor tangențiale).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Cele șase entități, redate prin relațiile (2.2), se numesc *componentele deformațiilor specifice*.

Legea lui Hooke

Legea lui Hooke ne dă relațiile dintre componentele tensiunii unitare și componentele deformațiilor specifice [69], [70].

Considerăm un element rectangular paralelipipedic, cu fețele paralele cu axele de coordonate și încărcate cu tensiunea normală σ_x , pe fețele opuse. Mărimea alungirii specifice este:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (2.3)$$

(ε are valori foarte mici; pentru oțel $\varepsilon < 0,001$).

Întinderea pe direcție x este însoțită de contracții laterale:

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (2.4)$$

unde: ν este coeficientul lui Poisson (pentru unele materiale $\nu = 0,25$; pentru oțel $\nu = 0,3$).

Relațiile (2.3) și (2.4) sunt valabile și pentru solicitarea de compresiune.

Dacă elementul este supus la acțiunea tensiunilor normale $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, uniform distribuite pe fețe, prin metoda suprapunerii efectelor se obține:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right].\end{aligned}\quad (2.5)$$

În calcule se folosește frecvent această metodă a suprapunerii efectelor, pentru determinarea deformațiilor și a tensiunilor unitare produse de mai multe forțe. Această metodă este valabilă atâta timp, cât deformațiile sunt foarte mici și deplasările foarte mici corespunzătoare, nu afectează substanțial acțiunea forțelor exterioare. În aceste cazuri se neglijează micile modificări ale dimensiunilor corpurilor deformate și de asemenea, micile deplasări ale punctelor

de aplicație ale forțelor exterioare, bazând calculele pe dimensiunile inițiale și pe forma inițială a corpului.

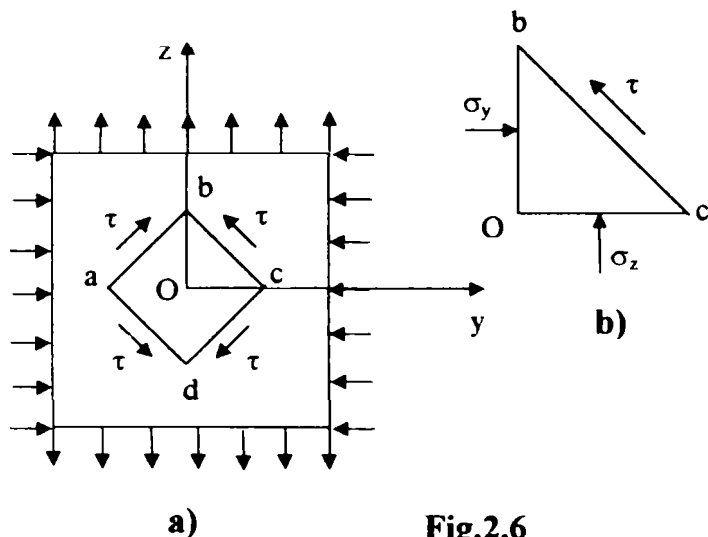


Fig.2.6

Există și cazuri în care deformațiile mici nu pot fi neglijate și trebuie luate în considerare. Pentru tensiuni tangențiale și alunecări, speci...ce considerăm cazul fig.2.6.

$$\sigma_y = -\sigma_x; \quad \sigma_x = 0. \quad (2.6)$$

Tensiunea tangențială pe fețe este:

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \sigma_x. \quad (2.7)$$

Această condiție de tensiune (2.7) este numită *forfecare pură*.

Alungirea elementului Ob este egală cu scurtarea elementelor Oa și Oc; unghiul dintre ab și bc se modifică, iar γ se deduce din triunghiul Obc. După deformație avem:

$$\frac{Oc}{Ob} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_x}. \quad (2.8)$$

Înlocuind în relațiile (2.5) rezultă că:

$$\gamma = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_x = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau. \quad (2.9)$$

Adeseori se notează $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$, în care G - modul de elasticitate transversal (de rigiditate).

Astfel avem: $\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (2.10)$

Dacă o tensiune tangențială acționează ca în fig.2.2, modificarea unghiului dintre două axe de coordonate depinde doar de componentele tensiunii tangențiale paralele cu acele axe.

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \quad (2.11)$$

Relațiile (2.5) și (2.11) sunt independente. Pentru a obține cazul general se aplică metoda suprapunerii efectelor. Dacă se notează:

$$\begin{aligned} e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ \theta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \end{aligned} \quad (2.12)$$

se obține relația dintre mărirea volumului e și suma tensiunilor unitare normale

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} \theta. \quad (2.13)$$

În cazul unei presiuni hidrostatice uniforme de valoare p, avem:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \\ e = -\frac{3(1-2\nu)}{E} p,\end{aligned}\quad (2.14)$$

relație care reprezintă dependența dintre creșterea volumului e și presiunea hidrostatică p . Cantitatea $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ este modulul de creștere volumică. Folosind relațiile (2.14) și rezolvând ecuațiile (2.5) pentru $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ găsim:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z,\end{aligned}\quad (2.15)$$

sau folosind notațiile:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad (2.16)$$

și relațiile (2.14), vom avea:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z.\end{aligned}\quad (2.17)$$

2.2. ASUPRA STĂRII PLANE DE TENSIUNI ȘI DEFORMAȚII

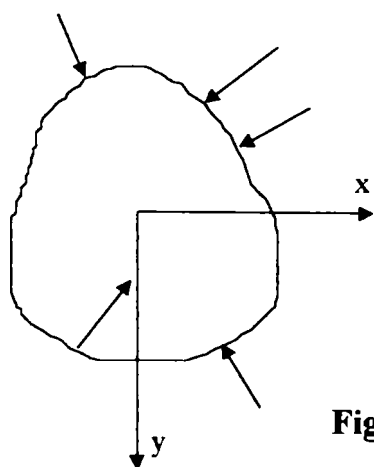


Fig.2.7

Dacă un corp cilindric sau prismatic este încărcat cu forțe aplicate pe contur, paralele cu planul plăcii și uniform distribuite pe grosimea plăcii (fig.2.7), componentele tensiunii $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ sunt zero pe ambele fețe ale plăcii, și se poate presupune că ele sunt zero, de asemenea, și în interiorul plăcii [69], [70]. Starea de tensiune este atunci caracterizată numai de σ_x, σ_y și τ_{xy} și se numește *stare plană de tensiune*.

Se presupune că, aceste trei componente sunt independente de z , d.c. nu variază cu grosimea, și sunt funcții doar de x și y .

O simplificare similară este posibilă, la cealaltă extremă când dimensiunea corpului, pe direcția z este foarte mare. Dacă un corp cilindric sau prismatic este încărcat cu forțe, care sunt perpendiculare pe elementele longitudinale și nu variază pe lungime, se poate considera că toate secțiunile transversale se bucură de aceleași condiții. Cel mai simplu este de a presupune, la început, că secțiunile de capăt sunt limitate de plane fixe rigide, astfel încât, deplasarea pe direcție axială poate fi prevăzută. Deci, nu există deplasare axială a capetelor și datorită

simetriei, în secțiunea centrală, se poate presupune că, aceeași încărcare acționează pe fiecare secțiune transversală. Desigur, încărcarea nu trebuie să varieze pe lungime.

Asemenea condiții sunt identice în toate secțiunile transversale, și este suficient să se considere o felie între două secțiuni unitare, apropiate. Componentele u și v ale deplasării sunt funcții numai de x și y , dar sunt independente de z . Deci, componenta longitudinală w , este zero și ecuațiile (2.2) ne dau:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Tensiunea normală longitudinală σ_z poate fi dedusă funcție de σ_x și σ_y din legea lui Hooke, ecuațiile (2.3). Dacă $\epsilon_z = 0$, găsim:

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{sau} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \tag{2.19}$$

Aceste tensiuni normale acționează în secțiuni transversale, inclusiv pe capete, unde ele reprezintă forțe necesare menținerii formei plane, și care provin din planele fixe rigide și netede. Din ecuațiile (2.18) și (2.19) componentele tensiunii τ_{xz} și τ_{yz} sunt zero, iar din (2.19) σ_z se poate deduce funcție de σ_x și σ_y . Deci, problema stării plane de deformație, ca și problema stării plane de tensiune, se reduce la determinarea σ_x , σ_y și τ_{xy} , numai ca funcții de x și y .

2.3. TENSIUNEA ȘI DEFORMAȚIA ÎNTR-UN PUNCT

Cunoscând componentele tensiunii σ_x , σ_y și τ_{xy} în orice punct al unei plăci, în condițiile unei stări plane de tensiune sau deformație, tensiunea care apare în fiecare plan, care trece prin acel punct, perpendicular pe placă și înclinat față de axele x și y , poate fi calculată din ecuațiile statistice [69], [70].

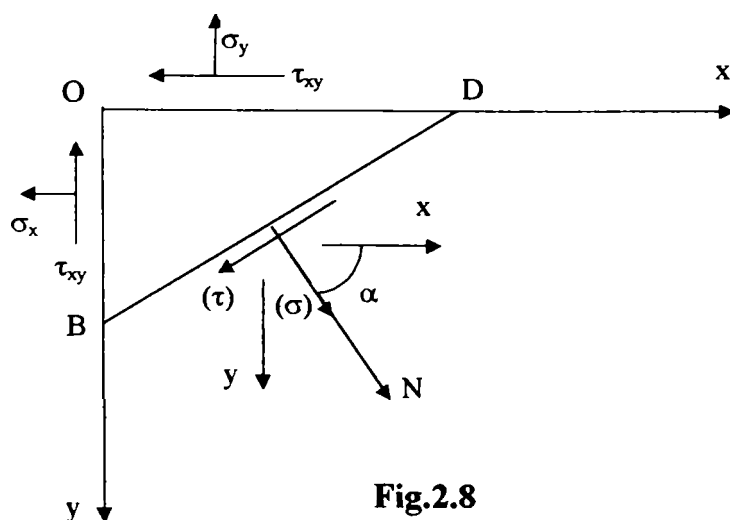


Fig.2.8

Fie un punct O , al unei plăci încărcate, și componentele tensiunii σ_x , σ_y și τ_{xy} cunoscute (fig.2.8); N este direcția normalei la BD , iar α este unghiul dintre normală și axa x . Pentru a găsi starea plană de tensiune, pentru orice plan ce trece prin axa z , plan înclinat față de axele x și y , se ia un plan BD , paralel cu planul considerat, la o distanță mică față de O . Acest plan împreună cu planele de coordonate delimitează în lacă o risă triunghiulară OBD , foarte mică.

Dacă tensiunile variază continuu cu volumul corpului, tensiunea ce acționează în planul BD va aproxima, cu atât mai exact tensiunea din planul paralel, ce trece prin O , cu cât elementul va fi mai mic. În discutarea condițiilor de echilibru ale prisme triunghiulare, forțele volumice pot fi neglijate, ca o cantitate mică de ordin superior.

De asemenea, dacă elementul este foarte mic, putem neglija variația tensiunilor pe fețe și deci, putem admite că, tensiunile sunt uniform distribuite.

Forțele ce acționează pe prisma triunghiulară pot fi determinate prin multiplicarea componentelor tensiunii cu aria fețelor. Se notează:

$$\cos N_x = l; \quad \cos N_y = m. \quad (2.20)$$

Atunci dacă, A este aria feței BD a elementului, ariile celorlalte două fețe sunt A_l și A_m . Dacă notăm \bar{X} și \bar{Y} componentele tensiunii, care acționează pe fața BD , ecuațiile de echilibru ale elementului prismatic ne dau :

$$\begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy} \end{cases} \quad (2.21)$$

Deci, componentele tensiunii dintr-un plan oarecare sunt definite de direcțiile $(\cos l)$ și $(\cos m)$ și pot fi ușor calculate din ecuațiile (2.21), cu condiția ca cele trei componente ale tensiunii σ_x , σ_y și τ_{xy} în punctul O , să fie cunoscute. Luând α , astfel încât; $l = \cos \alpha$ și $m = \sin \alpha$, componentele tensiunii în planul BD sunt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau &= \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se observă că unghiul α poate fi ales în așa fel încât, tensiunea tangențială τ să devină zero.

$$\tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad (2.23')$$

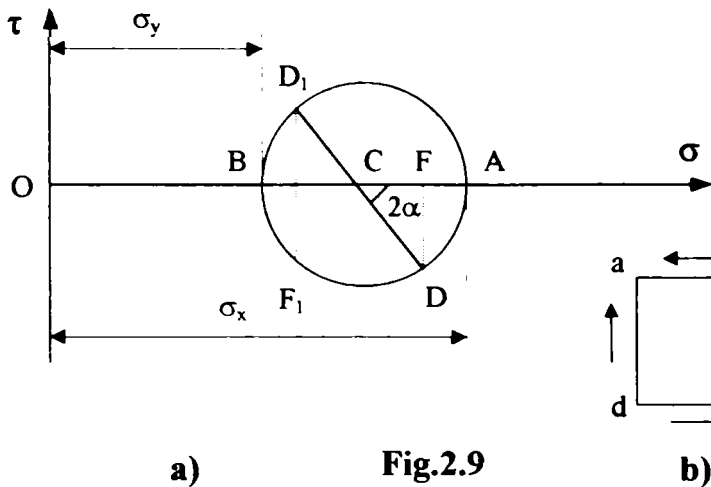
Din această ecuație se pot găsi două direcții perpendiculare, pentru care tensiunea tangențială este zero. Aceste direcții se numesc *direcții principale* și tensiunile normale corespunzătoare se numesc *tensiuni principale*. Dacă direcțiile principale se iau ca axe x și y , $\tau_{xy} = 0$ și ecuațiile (2.22) se simplifică la:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha, \\ \tau &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sigma_y - \sigma_x). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Variația componentelor tensiunii σ și τ , cu variația unghiului α poate fi ușor reprezentată grafic, ridicând o diagramă, în care σ și τ sunt axe de coordonate (cercul lui Mohr). Pentru fiecare plan va corespunde un punct pe această diagramă, ale cărui coordonate sunt valorile σ și τ , ale planului (fig.2.9). Pentru plane perpendiculare pe direcțiile principale, vom obține punctele A și B , cu abscisele σ_x și respectiv σ_y . Se poate demonstra că, componentele tensiunii pentru orice plan BD , care face unghiul α (fig.2.8) cu direcția axei x , pot fi reprezentate prin coordonatele unui punct de pe cercul cu diametrul AB . Pentru a găsi acest punct este necesar să se măsoare din punctul A (în aceeași direcție în care este măsurat unghiul α , în fig.2.8) un arc care subîntinde un unghi egal cu 2α . Dacă D este punctul obținut în acest fel, atunci din fig.2.9 vom avea:

$$OF = OC + CF = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha, \quad (2.25)$$

$$DF = CD \sin 2\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha.$$



Comparând aceste relații cu ecuațiile (2.24) se vede că, coordonatele punctului D dau valorile numerice ale componentelor tensiunii în planul BC, la unghiul α . Pentru a fi coincidență de semn pentru componenta tangențială, vom lua τ pozitiv în sus și vom considera tensiunea tangențială ca pozitivă, când dă un cuplu ce rotește în sens orar fețele bc și ad, ale elementului abcd (fig. 2.9b).

Tensiunile tangențiale pe direcțiile opuse (ca pe fețele ab și dc ale elementului) sunt considerate negative. Dacă BC se rotește după o axă perpendiculară pe planul xy (fig. 2.8), în sens orar, și α variază de la 0 la $\pi/2$, punctul D (din fig. 2.9a) se mută din A spre B, astfel încât, jumătatea de jos a cercului determină variația tensiunii, pentru toate valorile lui α , între aceste limite. Jumătatea de sus a cercului dă tensiunile pentru $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$.

Prelungind raza CD, până în punctul D_1 (fig. 2.9a), de exemplu, luând unghiul $(\pi + 2\alpha)$, în loc de 2α , se obțin tensiunile dintr-un plan perpendicular pe BC (fig. 2.8). Aceasta arată că tensiunile tangențiale, în două plane perpendiculare sunt numeric egale.

Pentru tensiunile normale, vedem din figură că, $OF_1 + OF = 2OC$, deci suma tensiunilor normale din două secțiuni transversale rămâne constantă, când unghiul α se modifică. Tensiunea tăietoare maximă este dată în diagramă (fig. 2.9) de ordonata maximă a cercului, de exemplu este egală cu raza cercului. Deci,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}. \quad (2.26)$$

Ea acționează într-un plan pentru care, $\alpha = \pi/4$, de exemplu, în planul bisector pentru tensiunile principale.

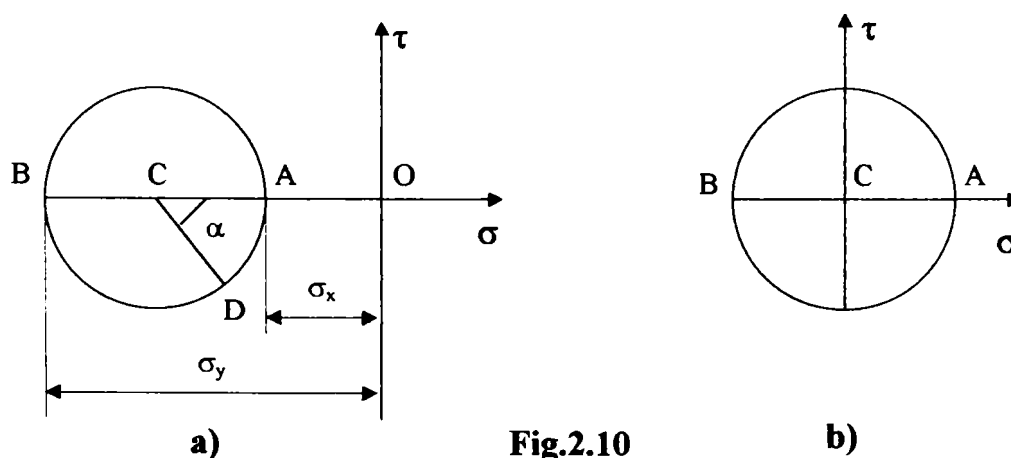


Diagrama poate fi folosită și în cazul în care, una sau ambele tensiuni principale sunt negative (compresiune); este numai necesar să se schimbe semnul abscisei, pentru tensiunea de compresiune. În acest fel, fig.2.10a reprezintă cazul când ambele tensiuni principale sunt negative și fig.2.10b când avem tăiere pură.

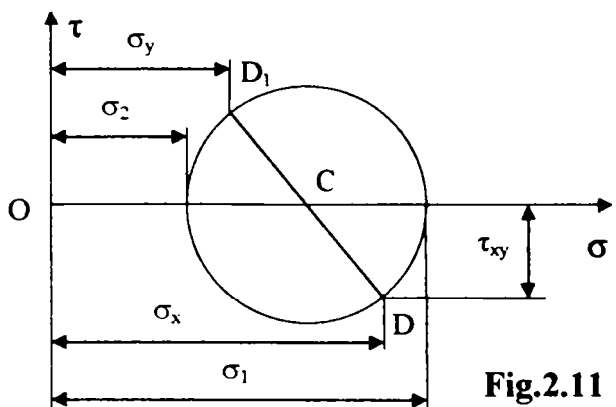


Fig.2.11

O diagramă, ca cea din fig.2.9, poate fi folosită pentru determinarea tensiunilor principale, dacă componentele tensiunii σ_x , σ_y și τ_{xy} sunt cunoscute, pentru orice două plane perpendiculare. În acest caz, vom începe cu marcarea celor două puncte D și D₁, care reprezintă condițiile de tensiune, în cele două plane d-d (fig.2.11). Așadar, σ_1 și σ_2 sunt diametrul cercului DD₁. Construind cercul, tensiunile principale σ_1 și σ_2 se obțin din intersecția cercului cu axa absciselor. Din fig.2.11 rezultă:

$$\sigma_1 = OC + CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (2.27)$$

$$\sigma_2 = OC - CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Tensiunea tangențială maximă este dată de raza cercului:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (2.28)$$

Deci, toate mărimile necesare ale distribuției de tensiuni într-un punct se pot obține, dacă se cunosc numai cele trei componente ale tensiunii σ_x , σ_y și τ_{xy} .

Când componentele deformației ϵ_x , ϵ_y și γ_{xy} într-un punct sunt cunoscute, pot fi determinate: alungirea specifică, pentru orice direcție, și micșorarea unghiului drept (lunecarea specifică) de orice orientare, față de un punct.

Un element liniar PQ între punctele P(x, y) și Q(x+dx, y+dy), este translatat, întins (contractat) și rotit, în elementul P'Q', în timpul deformației. Componentele de deplasare ale lui P sunt:

(u, v), iar cele ale lui Q sunt: $(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy)$ (fig.2.12a).

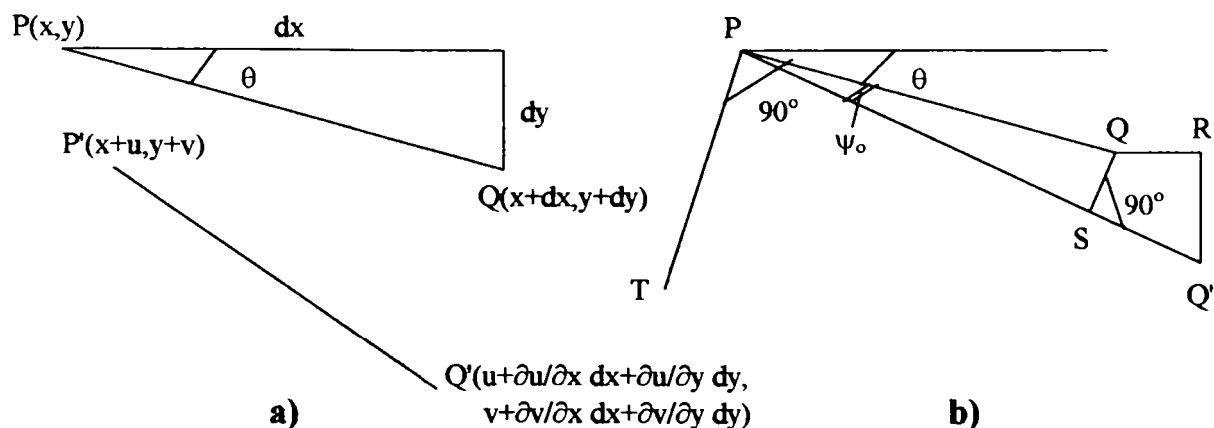


Fig.2.12

Dacă P'Q' este traslatat astfel încât, P' ajunge din nou în P, elementul este în poziția PQ'' (fig.2.12b) și QR, RQ'' sunt componentele deplasării lui Q, relativ la P. Deci:

$$\mathbf{QR} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{dx} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{dy}, \quad \mathbf{RQ}'' = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{dx} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{dy}. \quad (2.29)$$

Componentele deplasării relative (ignorând ψ_0 în comparație cu θ), sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{QR} &= -\mathbf{QR} \sin \theta + \mathbf{RQ}'' \cos \theta, \\ \mathbf{SQ}'' &= \mathbf{QR} \cos \theta + \mathbf{RQ}'' \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dacă QS se poate considera ca un arc de cerc cu centrul în P, SQ'' ne dă alungirea lui PQ. Alungirea specifică P'Q', notată cu ε_θ este SQ''/PQ. Folosind relațiile (2.29) și (2.30) avem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \cos \theta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ds}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{ds}} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ds}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{ds}} \right) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (2.31)$$

sau

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta, \quad (2.31')$$

care ne dă alungirea specifică pentru orice direcție θ .

Unghiul ψ_0 , cu care PQ este rotit, este QS/PQ. Din relațiile (2.29) și (2.30) rezultă:

$$\psi_0 = -\sin \theta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ds}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{ds}} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ds}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{ds}} \right), \quad (2.32)$$

sau

$$\psi_0 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \sin^2 \theta. \quad (1.32')$$

Elementul liniar PT, perpendicular pe PQ, face un unghi $(\theta + \pi/2)$ cu direcția axei x, iar rotația sa $\psi_{\theta+\pi/2}$ este dată de relația (2.32'), când θ se înlocuiește $(\theta + \pi/2)$.

Deoarece $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$ și $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$, avem:

$$\psi_{\theta+\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \sin^2 \theta - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \cos^2 \theta. \quad (2.33)$$

Lunecarea specifică γ_θ , pentru PQ este:

$$\gamma_\theta = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) 2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2.34)$$

sau

$$\frac{1}{2} \gamma_\theta = \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta. \quad (2.34')$$

Comparând relațiile (2.31') și (2.34') cu (2.22) se observă că ele se pot obține din relațiile (2.22), înlocuind σ cu ε_θ , τ cu $\gamma_\theta/2$, σ_x cu ε_x , σ_y cu ε_y , τ_{xy} cu $\gamma_{xy}/2$ și α cu θ . În consecință,

pentru fiecare relație dedusă din (2.22) pentru σ și τ , există o relație corespunzătoare pentru ε_0 și $\gamma_0/2$. Deci există două valori pentru θ , diferite cu $\pi/2$, pentru care γ_0 este zero. Acestea sunt:

$$\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \operatorname{tg}2\theta. \quad (2.35)$$

Deformațiile corespunzătoare ε_0 sunt *deformații principale*. O diagramă cu cercul lui Mohr, analogă celor din fig.2.9 sau fig.2.12 se poate reprezenta, având abscisele ε_0 și ordonatele $\gamma_0/2$. Deformațiile principale ε_1 și ε_2 vor fi valorile algebrice cele mai mari și cele mai mici ale lui ε_0 ca funcții de θ . Cea mai mare valoare a lui $\gamma_0/2$ este reprezentată prin raza cercului. Deci, deformația tăietoare (tangentială) cea mai mare $\gamma_{0\max}$, va fi dată de:

$$\gamma_{0\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (2.36)$$

2.4. MĂSURAREA SUPRAFETEI DEFORMATE

Deformațiile sau alungirile specifice pe o suprafață sunt măsurate, cel mai convenabil, folosindu-se traductoare de deformare rezistive (TER). Forma cea mai simplă, a unui astfel de traductor, este o sârmă scurtă, izolată, lipită de suprafață. Deformația suprafeței determină lungirea/scurtarea firului și implicit modificarea rezistenței electrice. Astfel se poate măsura deformația pe cale electrică; TER se montează într-o punte electrică. Efectul este frecvent mărit prin îndoirea firului, înainte și înapoi de câteva ori, pentru a forma câteva traductoare conectate în serie. Firul este lipit între două folii de hârtie și este apoi lipit pe suprafață. Folosirea acestor traductoare este simplă atunci când, direcțiile principale sunt cunoscute. Câte un traductor este plasat de-a lungul fiecărei direcții principale, obținându-se astfel măsurarea directă a deformațiilor ε_1 și ε_2 [69], [70].

Tensiunile principale se calculează din legea lui Hooke, cu $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ și $\sigma_z = 0$, ultima ținând cont de presupunerea că, nu există tensiune care să acționeze pe suprafața pe care sunt amplasate traductoarele. Atunci:

$$\begin{aligned} (1 - \nu^2)\sigma_1 &= E(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \\ (1 - \nu^2)\sigma_2 &= E(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Când direcțiile principale nu se cunosc dinainte, sunt necesare trei măsurători. Deci, starea de deformare este complet determinată dacă, ε_x , ε_y și γ_{xy} pot fi măsurate. Dacă însă traductoarele de deformare măsoară direct întinderi și nu forfecări, este convenabil să se măsoare alungirile specifice, în trei direcții, în jurul unui punct. Un astfel de set de traductoare se numește *rozetă tensometrică*.

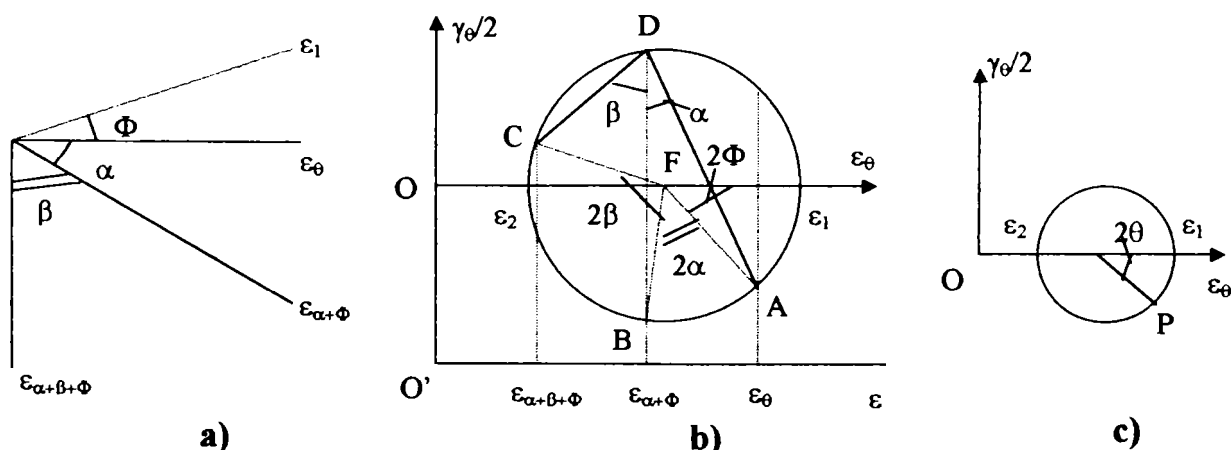


Fig.2.13

Se poate construi simplu cercul lui Mohr și de pe el se pot citi deformațiile principale. Cele trei traductoare sunt reprezentate, prin linii pline, în fig.2.13a. Linia întreruptă reprezintă direcția necunoscută a celei mai mari deformații principale ε_1 , care se obține prin rotirea, în sens orar cu unghiul Φ , de la direcția primului traductor.

Dacă direcțiile x și y din relațiile (2.31') și (2.34') s-au luat ca direcții principale, ε_x ar putea fi ε_1 , ε_y ar putea fi ε_2 și γ_{xy} ar putea fi zero. Ecuațiile devin atunci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta, \\ \frac{1}{2} \gamma_\theta &= -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta,\end{aligned}\tag{2.38}$$

unde θ este unghiul măsurat de la direcția lui ε_1 . Ecuațiile (2.38) pot fi scrise:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta, \\ \frac{1}{2} \gamma_\theta &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\theta,\end{aligned}\tag{2.38'}$$

și aceste valori sunt reprezentate prin punctul P din fig.2.13c.

Dacă unghiul θ ia valoarea Φ , punctul P corespunde punctului A din fig.2.13b, deplasarea unghiulară de la axa ε_θ fiind egală cu 2Φ . Abscisa acestui punct este ε_Φ .

Dacă unghiul θ ia valoarea $(\Phi + \alpha)$, punctul P se deplasează în punctul B, cu $\angle AFB = 2\alpha$, iar abscisa are valoarea $\varepsilon_{\alpha+\Phi}$.

Dacă unghiul θ ia valoarea $(\Phi + \alpha + \beta)$, punctul P se deplasează în punctul C, cu $\angle BFC = 2\beta$, și abscisa are valoarea $\varepsilon_{\alpha+\beta+\Phi}$.

Problema se reduce la a desena cercul lui Mohr, când aceste trei abscise și două unghiuri sunt cunoscute. Se desenează o axă orizontală temporară ε din originea O' (fig.2.13b) și cele trei deformații măsurate ε_Φ , $\varepsilon_{\alpha+\Phi}$, $\varepsilon_{\alpha+\beta+\Phi}$, de-a lungul ei. Se ridică verticalele prin aceste puncte. Se alege un punct oarecare D, pe verticala ce trece prin punctul $\varepsilon_{\alpha+\Phi}$.

Liniiile DA și DC se desenează sub unghiurile α și β față de verticala ce trece prin D (fig.2.13b) și întâlnesc celelalte două verticale duse în A și C. Cercul desenat care trece prin D, A și C este cel dorit. Centrul său F, se determină la intersecția mediatoarelor perpendiculare CD și DA.

Punctele unde se montează cele trei traductoare sunt A, B și C ($\angle AFB$ este dublul $\angle ADB$ și este egal cu 2α , iar $\angle BFC$ este egal cu 2β).

Axa ε_θ poate fi desenată acum ca dreapta OF, iar distanțele de la punctul O, la intersecțiile cu cercul, ne dau deformațiile ε_1 și ε_2 . Unghiul 2Φ este unghiul de sub axă până la dreapta FA.

2.5. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE ECHILIBRU

Se consideră echilibrul elementului de dimensiuni h , k și unitatea (fig.2.14). Tensiunile care acționează pe fețele 1, 2, 3, 4 și direcțiile lor pozitive sunt indicate pe figură. Ținând cont de variația tensiunii în material, valoarea lui σ_x nu este chiar aceeași, pentru fața 1 și pentru fața 3.

Simbolurile σ_x , σ_y , τ_{xy} se referă la punctele x , y , puncte situate la mijloacele laturilor. Valorile în punctele mijlocii ale fețelor se notează cu $(\sigma_x)_1$, $(\sigma_x)_3$ etc.

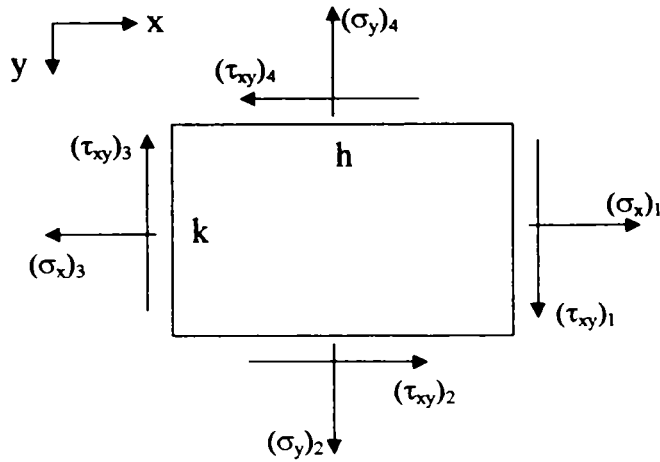


Fig.2.14

Dacă fețele sunt foarte mici, forța corespunzătoare unei fețe se obține prin multiplicarea valorii ei cu aria feței pe care acționează. Forțele volumice ale elementului, care au fost neglijate, ca și o cantitate mică de ordin superior, la echilibrul prisme triunghiulare (fig.2.8), trebuie luate acum în considerare, deoarece au același ordin de mărime cu termenii, care dau variațiile componentelor de tensiune, ce se iau acum în calcul. Dacă se notează cu X și Y, componentele forțelor volumice pe unitatea de volum, ecuația de echilibru pentru forțe, pe direcția x, este:

$$(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + Xhk = 0; \quad (2.39)$$

sau împărțind cu hk:

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0. \quad (2.39')$$

Dacă elementul se ia din ce în ce mai mic, $h \rightarrow 0$; $k \rightarrow 0$, limita lui $\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, după

definiția derivatelor. În mod similar $\frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$.

Ecuația de echilibru pentru forțe după axa y se obține în același fel. Deci:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

În aplicațiile practice, greutatea este de obicei singura forță volumică. Atunci, luând axa y, cu sensul pozitiv în jos și notând cu ρ , masa pe unitatea de volum, ecuațiile (2.40) devin:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0. \end{cases} \quad (2.40')$$

Acestea sunt ecuațiile diferențiale de echilibru, pentru problemele bidimensionale.

Ecuațiile (2.40) sau (2.40') trebuie să fie îndeplinite în toate punctele din întregul volum al corpului. Componentele tensiunii variază în volumul plăcii și când se ajunge pe contur, ele trebuie să fie în așa fel încât, să fie în echilibru cu forțele exterioare de pe conturul corpului; forțele exterioare pot fi considerate ca o continuare a distribuției de tensiuni interne. Aceste condiții de echilibru pot fi luate din relațiile (2.21).

Luând o prismă triunghiulară mică OBC (fig.2.8) astfel încât latura BC să coincidă cu conturul plăcii, ca în fig.2.15 și notând cu \bar{X} și \bar{Y} , componentele forțelor de suprafață pe unitatea de arie, în acest punct de pe contur vom avea:

$$\begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy} \end{cases} \quad (2.41)$$

în care l și m sunt cosinusurile directoare ale normalei N , la contur.

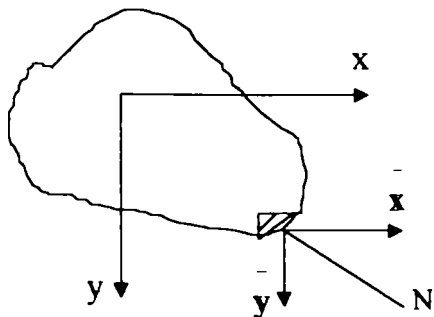


Fig.2.15

În cazul particular al plăcii dreptunghiulare, axele de coordonate se iau, de obicei, paralele cu fețele plăcii și condițiile de margine (2.41) se pot simplifica.

Luând de exemplu, o față a plăcii paralelă cu axa x , vom avea pentru această parte a conturului normala N paralelă cu axa y .

Deci, $l = 0$ și $m = \pm 1$.

Ecuatiile (2.41) devin atunci:

$$\begin{cases} \bar{X} = \pm\tau_{xy} \\ \bar{Y} = \pm\sigma_y \end{cases} \quad (2.41')$$

Aici semnul pozitiv se poate lua dacă normala N are direcția pozitivă a axei y și semn negativ pentru direcția opusă a lui N . Se observă de aici că, pe contur componentele tensiunii devin egale cu componentele forțelor de suprafață pe unitatea de arie, de pe contur.

În general, problema teoriei de elasticitate presupune determinarea stării de tensiune, într-un corp supus acțiunii unor forțe date. În cazul problemei bidimensionale, este necesar să se rezolve ecuațiile diferențiale de echilibru (2.40) și soluția trebuie să fie astfel încât, să satisfacă condițiile de margine (2.41). Aceste ecuații, derivate din aplicarea ecuațiilor statice pentru corpuri absolut rigide, care conțin trei componente ale tensiunii σ_x , σ_y și τ_{xy} , nu sunt suficiente pentru determinarea acestor componente. Problema este static nedeterminată și cu scopul de a obține soluția, trebuie considerată și deformația elastică a corpului.

Formularea matematică a condiției de compatibilitate, pentru distribuția de tensiune cu existența funcțiilor continue u , v , w , care definesc deformația, se vor obține din ecuațiile (2.41). În cazul problemei bidimensionale trebuie considerate numai trei componente ale deformației, și anume:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.42)$$

Aceste trei componente de deformație sunt date prin două funcții u și v , deci ele nu se pot lua arbitrar, ci există o relație certă între ele, care poate fi ușor obținută din (2.42). Derivând prima dintre ecuațiile (2.42) de două ori în raport cu y , a doua în raport cu x și a treia o dată în raport cu x și o dată în raport cu y găsim:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.43)$$

Această relație diferențială, numită *condiția de compatibilitate*, trebuie satisfăcută de componentele deformației, astfel încât, să asigure existența funcțiilor u și v , legate de componentele deformației prin ecuațiile (2.42).

Folosind legea lui Hooke, condiția (2.43) poate fi transformată într-o relație între componentele tensiunii. În cazul distribuției plane de tensiuni, avem:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y]; \quad (2.44)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad (2.45)$$

înlocuind ecuațiile (2.44) și (2.45) în (2.43) vom găsi:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu\sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.46)$$

Această ecuație poate fi scrisă într-o formă diferită folosind ecuațiile de echilibru. Pentru cazul în care, greutatea este singura forță volumică, derivând prima ecuație (2.40') în raport cu x și a doua ecuație în raport cu y și adunându-le obținem:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}, \quad (2.47)$$

care înlocuită în ecuația (2.46) ne dă ecuația de compatibilitate în componentele tensiunii:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.48)$$

Procedând la fel cu ecuațiile de echilibru (2.40) vom avea:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (2.49)$$

În cazul stării plane de deformație avem:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (2.50)$$

și din legea lui Hooke găsim:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y]; \quad (2.51)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \quad (2.52)$$

Înlocuind în ecuația (2.43) ecuațiile de echilibru (2.40'), găsim că, condiția de compatibilitate (2.48) cuprinde, de asemenea, starea de deformație plană. Pentru cazul general, cu forțe volumice, se obține condiția de compatibilitate, în componentele deformației, de forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \quad (2.53)$$

Ecuțiile de echilibru (2.40) sau (2.40'), împreună cu condițiile de margine (2.41) și una dintre formele condiției de compatibilitate, deduse mai sus, conduc la un sistem de ecuații, care este în general, suficient pentru determinarea completă a distribuției de tensiune, în problema bidimensională.

Este interesant de notat că, în cazul forțelor volumice constante, ecuațiile care determină distribuția de tensiune, nu conțin constante elastice de material. Deci, distribuția de tensiune este aceeași, pentru toate materialele izotrope, precizând că ecuațiile sunt suficiente pentru determinarea completă a tensiunilor. Această concluzie are o importanță practică deoarece, în cazul materialelor transparente, cum ar fi sticla sau xilonitul, este posibilă determinarea tensiunilor printr-o metodă optică, folosind lumina polarizată. Este evident că rezultatele experimentale obținute cu un material transparent, având în vedere discuția anterioară, pot fi aplicate imediat la orice material, cum ar fi oțelul.

Trebuie menționat de asemenea că, în cazul forțelor volumice constante, condiția de compatibilitate (2.48) cuprinde, atât cazul stării de deformație plană, cât și cazul stării de tensiune plană. Deci, distribuția de tensiune este aceeași în aceste două cazuri, presupunând că, forma conturului exterior și a forțelor exterioare este aceeași.

2.6. FUNCȚIA TENSIUNE (AIRY)

A fost arătat că, o soluție a problemelor bidimensionale se reduce la integrarea ecuațiilor diferențiale de echilibru, împreună cu ecuația de compatibilitate și condițiile de margine [69], [70]. Dacă începem cu cazul când greutatea este singura forță volumică, ecuațiile care trebuie îndeplinite sunt (2.40') și (2.48). La aceste relații se adaugă condițiile de margine (2.41). Metoda folosită, în general, pentru rezolvarea acestor ecuații este să se introducă o nouă funcție numită *funcția tensiune (Airy)*. Se poate verifica ușor, că ecuațiile (2.40') sunt îndeplinite luând orice funcție $\Phi(x, y)$ și punând următoarele expresii pentru componentele tensiunii:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \rho g y, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho g y, \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

În acest fel se găsesc o varietate de soluții ale ecuațiilor de echilibru (2.40'). Soluția adevărată a problemei este aceea care satisface de asemenea și ecuația de compatibilitate (2.48). Înlocuind expresiile (2.54), pentru componentele tensiunii în ecuația (2.48), se găsește că funcția tensiune $\Phi(x, y)$, trebuie să satisfacă ecuația :

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (2.55)$$

Deci, soluția problemei bidimensionale, când greutatea este singura forță volumică, se reduce la găsirea unei soluții a ecuației (2.55), care să satisfacă condițiile de margine (2.41) ale problemei.

Dar, $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \Delta$ este operatorul lui Laplace. Cu această notație ecuația (2.55) se mai poate scrie:

$$\Delta\Delta\Phi = 0. \quad (2.55')$$

O funcție care satisface condiția $\Delta\Phi = 0$, este o funcție armonică, iar dacă satisface condiția $\Delta\Delta\Phi = 0$, este o funcție biarmonică.

În concluzie, soluționarea unei probleme de elasticitate plană revine la găsirea unei funcții biarmonice $\Phi(x, y)$, astfel încât, tensiunile σ_x , σ_y , τ_{xy} calculate cu relațiile (2.54) să satisfacă condițiile la limită (2.41).

Ecuațiile stării plane de tensiuni în coordonate polare sunt prezentate în Anexa 2 [69], [70].

Concluzii

- ❖ O placă de grosime constantă foarte mică, raportată la axele Ox și Oy , situate în planul ei median și la axa Oz , normală la acest plan se află:
 - într-o stare plană de tensiuni dacă:
 - nu este încărcată pe cele două fețe;
 - pe suprafața laterală încărcarea nu variază cu grosimea;
 - forțele masice sunt paralele cu planul median.
 - într-o stare plană de deformații dacă:
 - nu sunt posibile deplasări pe direcția axei Oz ;
 - pe suprafața laterală încărcarea nu variază cu grosimea;
 - forțele masice sunt paralele cu planul median.
- ❖ În general, în cazul stării plane de tensiune $\varepsilon_z = 0$, iar în cazul stării plane de deformații specifice apar tensiuni normale (pe planul meridian) $\sigma_z \neq 0$;
- ❖ Starea plană de tensiuni și starea plană de deformații specifice nu sunt distincte, din punct de vedere matematic;
- ❖ Este suficient să se studieze o singură stare plană, de exemplu cea de tensiuni, starea plană de deformații deducându-se din aceasta prin înlocuirea constantelor elastice E și ν , respectiv cu $E_1 = \frac{E}{1-\nu}$ și $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ și adăugând tensiunea $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$;
- ❖ Soluționarea unei probleme de elasticitate plană revine la găsirea unei funcții biarmonice $\Phi(x,y)$, astfel încât, componentele tensiunii σ_x , σ_y , τ_{xy} calculate cu relațiile (2.54) să satisfacă condițiile la limită (2.41).

3. CONTRIBUȚII LA PROIECTAREA MEMBRANELOR

3.1. ÎNVELIȘURI FLEXIBILE AXIAL-SIMETRICE

Învelișurile flexibile sunt acele învelișuri care sunt capabile să-și schimbe mult forma, sub acțiunea forțelor exterioare, fără ca prin aceasta să fie depășite proprietățile elastice ale materialului. În acest sens, noțiunea de "înveliș flexibil" este similară cu noțiunea de "bară" [63]

Calculul mai multor elemente elastice (cum ar fi membranele elastice, plane și gofrate și capsulele elastice) se reduce la schema unui înveliș flexibil. La calculul unor asemenea elemente, se pune problema caracteristicii învelișului flexibil, adică a relației între deplasări și forțele care le produc. Pentru învelișuri această problemă este mult mai complicată decât pentru bare, motiv pentru care, la rezolvarea acestei probleme se folosesc metode aproximative.

Rezolvarea problemei deplasărilor mari ale învelișurilor, în forma ei generală, prezintă mari dificultăți; de aceea, în ceea ce urmează, se va studia un caz particular, cel al învelișului care prezintă simetria axială a formei și a încărcării corpului.

Se consideră că, suprafața mediană a învelișului este o suprafață de rotație, iar sarcina care acționează asupra acestuia, este dispusă simetric, în raport cu axa suprafeței mediane. Se consideră de asemenea că și după deformare, învelișul păstrează simetria axială - la deplasările mici această situație se subînțelege - dar în domeniul deplasărilor mari și a problemei de stabilitate, simetria deformațiilor nu este, în general, o consecință a simetriei formei și a încărcării corpului.

Forma învelișului în stare nedeformată, este definită prin unghiul de pantă θ (unghiul dintre normala la suprafața mediană și axa de simetrie).

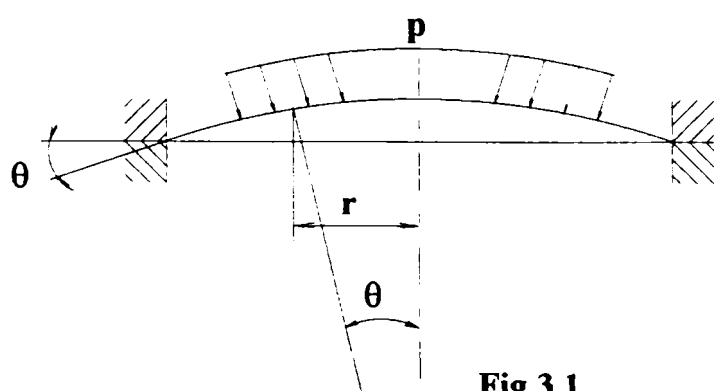


Fig.3.1

În cazul general, acest unghi este funcție de raza r (fig.3.1). Pentru o membrană plană, $\theta = 0$, pentru una conică $\theta \neq 0 = \text{const}$. După deformația învelișului, unghiul θ variază cu cantitatea $\vartheta = f(r)$, unghiul de pantă al învelișului fiind $(\theta + \vartheta)$. Se consideră pozitiv, unghiul de deformație ϑ , care mărește unghiul inițial de pantă θ . În prezentarea problemei se consideră că, unghiul de pantă al învelișului deformat este mic. În acest caz se presupune:

$$\sin(\theta + \vartheta) \approx \text{tg}(\theta + \vartheta) \approx \theta + \vartheta . \quad (3.1)$$

Se știe de asemenea că:

$$\sin \alpha = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} - \dots \right). \quad (3.2)$$

Din relația (3.2) rezultă că se poate neglija mărimea $(\theta+\vartheta)^2$ și puterile superioare ale lui $(\theta+\vartheta)$, în comparație cu unitatea. Se mai consideră că unghiurile θ și ϑ sunt de același ordin de mărime, ceea ce înseamnă că, condiția enunțată mai sus, se extinde nu numai asupra sumei lor ci și asupra fiecăruia în parte. Aceasta este deosebirea principală a acestei probleme, față de cea obișnuită, la care deplasările sunt mici. În cazul deplasărilor mici, s-ar fi considerat că unghiul de rotire al arcului meridianului ϑ , este cu mult mai mic decât unghiul θ . Deci, rezolvarea problemei cu deplasări mici, poate fi obținută ca un caz particular, prin neglijarea unghiului ϑ , în raport cu unghiul θ .

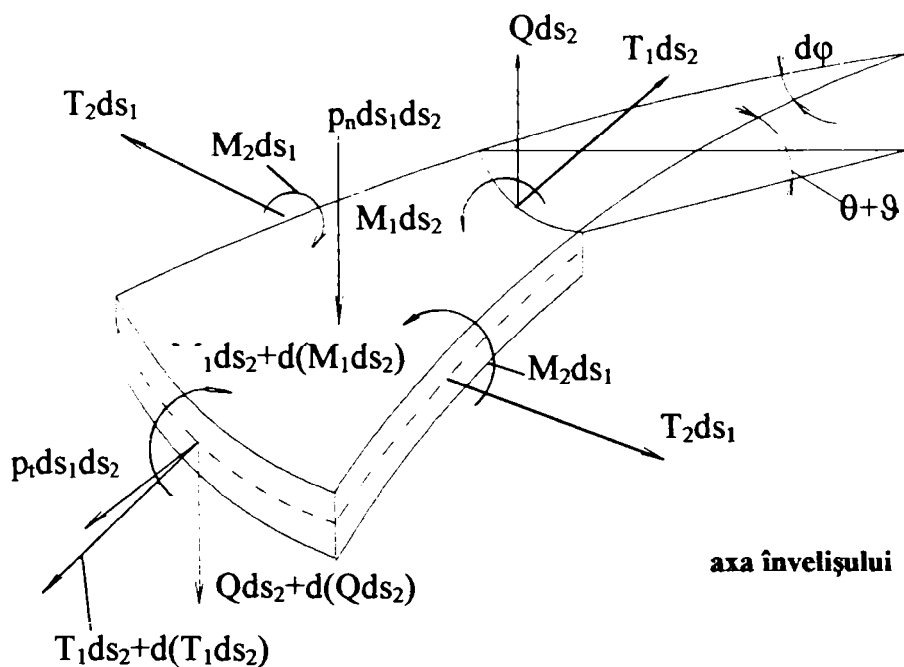


Fig.3.2

La stabilirea ecuațiilor de bază, se menționează [63]:

- ipoteza înverșinării normalei față de suprafața mediană;
- nu se vor lua în considerare tensiunile unitare normale, din suprafețele elementare, paralele cu suprafața mediană;
- se consideră că materialul respectă legea lui Hooke;
- că învelișul lucrează în zona deformațiilor mici (dar, al deplasărilor mari).

Pentru scrierea ecuațiilor de echilibru se decupează, prin două perechi de secțiuni conice meridianale normale, un element al învelișului deformat, având dimensiunile ds_1 și ds_2 și se aplică în secțiunile respective, forțele interioare (fig.3.2). Se fac următoarele notații:

- T_1 și T_2 - intensitățile forțelor normale pe unitatea de lungime;
- Q - intensitatea forțelor tăietoare pe unitatea de lungime;
- M_1 și M_2 - intensitățile momentelor încovoietoare pe unitatea de lungime. Celelalte forțe interioare sunt nule, datorită simetriei.

Se descompune sarcina exterioară p , care acționează pe suprafața învelișului, după normala și tangenta la arc meridianului, în componentele p_n și p_t (fig.3.2). A treia componentă este nulă, din cauza simetriei. Dacă învelișul este numai sub acțiunea presiunii unui gaz sau lichid, atunci și $p_t = 0$. Egalând cu zero, suma momentelor tuturor forțelor, în raport cu axa y , tangenta la arcul cercului de rază r , se obține (fig.3.2):

$$p_n ds_1 ds_2 \frac{ds_1}{2} - [Q ds_2 + d(Q ds_2)] ds_1 + [M_1 ds_2 + d(M_1 ds_2)] - M_1 ds_2 - M_2 ds_1 d\varphi = 0. \quad (3.3)$$

Se neglijează momentele forțelor $p_t ds_1 ds_2$ și $T_1 ds_2 + d(T_1 ds_2)$ în raport cu axa y , ca infinități mici de ordin superior și se obține:

$$-Q ds_1 ds_2 + d(M_1 ds_2) - M_2 ds_1 d\varphi = 0. \quad (3.4)$$

Deoarece

$$ds_1 = \left(\frac{dr}{\cos(\theta + \vartheta)} \right) \approx dr; \quad ds_2 = r d\varphi, \quad (3.5)$$

rezultă:

$$-Q r + (M_1 r)' - M_2 = 0, \quad (3.6)$$

unde (') însemnează derivata în raport cu raza r . Proiectând toate forțele pe axa de simetrie a învelișului rezultă:

$$p_n ds_1 ds_2 + p_t ds_1 ds_2 (\theta + \vartheta) - Q ds_2 + [Q ds_2 + d(Q ds_2)] + [T_1 ds_2 + d(T_1 ds_2)] [(\theta + \vartheta) + d(\theta + \vartheta)] - T_1 ds_2 (\theta + \vartheta) = 0 \quad (3.7)$$

$$p_n r + p_t r (\theta + \vartheta) + (Qr)' + [T_1 r (\theta + \vartheta)]' = 0. \quad (3.7')$$

Această ecuație se mai poate scrie și sub următoarea formă:

$$\{r[T_1 (\theta + \vartheta) + Q]\}' = -r[p_n + p_t (\theta + \vartheta)], \quad (3.8)$$

$$r[T_1 (\theta + \vartheta) + Q] = C - \int r[p_t (\theta + \vartheta) + p_n] dr, \quad (3.8')$$

unde C este o constantă oarecare. Se notează:

$$\begin{aligned} r[T_1 (\theta + \vartheta) + Q] &= F(r), \\ C - \int r[p_t (\theta + \vartheta) + p_n] dr &= F(r). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Funcția $F(r)$ se determină numai cu ajutorul forțelor exterioare și în cazurile principale poate fi determinată din condițiile de echilibru a părții învelișului secționată printr-o suprafață conică, pe cercul de rază r .

Ultima ecuație de echilibru se scrie, proiectând sistemul de forțe pe normala la suprafața mediană a învelișului (fig.3.2):

$$p_n ds_1 ds_2 + [T_1 ds_2 + d(T_1 ds_2)] d(\theta + \vartheta) - Q ds_2 + Q ds_2 + d(Q ds_2) + T_2 ds_1 (\theta + \vartheta) d\varphi = 0, \quad (3.10)$$

de unde rezultă:

$$p_n r + T_1 r (\theta + \vartheta)' + (Qr)' + T_2 (\theta + \vartheta) = 0. \quad (3.11)$$

Din ecuațiile (3.6), (3.10) și (3.11) se elimină Q . Pentru aceasta se înlocuiește expresia:

$$Qr = F(r) - T_1 r (\theta + \vartheta), \quad (3.12)$$

obținută din prima ecuație (3.10), în ecuația (3.11)

$$p_n r + T_1 r (\theta + \vartheta)' + F'(r) - [T_1 r (\theta + \vartheta)]' + T_2 (\theta + \vartheta) = 0. \quad (3.13)$$

Dar deoarece din ecuația (3.10)

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{p}_t \mathbf{r}(\theta + \vartheta) - \mathbf{p}_n \mathbf{r}, \quad (3.14)$$

rezultă:

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{r} \mathbf{p}_t + (\mathbf{T}_1 \mathbf{r})'. \quad (3.15)$$

Ecuația (3.6) capătă astfel forma:

$$(\mathbf{M}_1 \mathbf{r})' - \mathbf{M}_2 = -\mathbf{T}_1 \mathbf{r}(\theta + \vartheta) + \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (3.16)$$

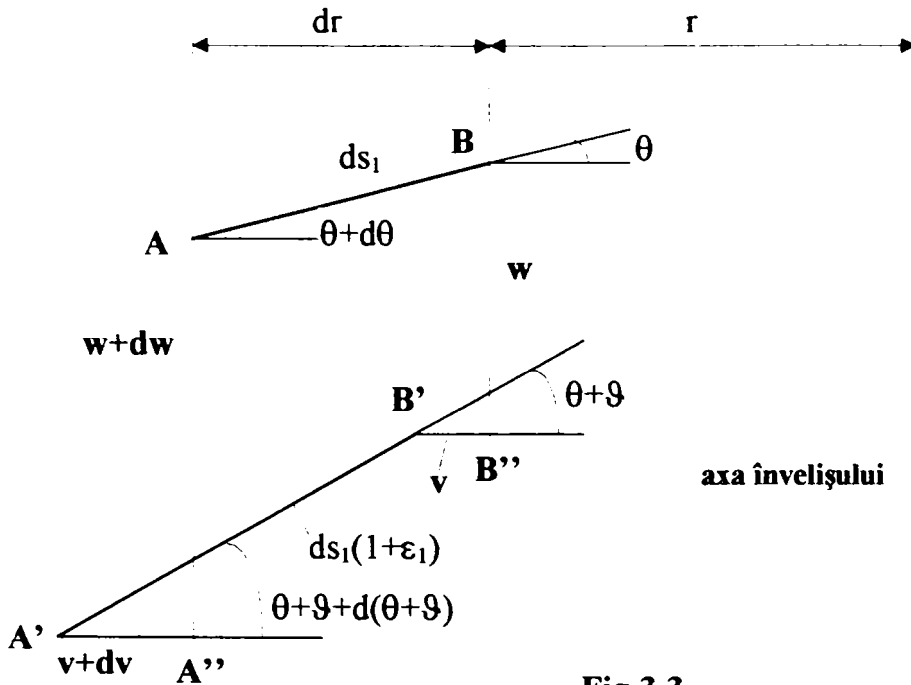


Fig.3.3

Rezultă deci, că în urma transformării condițiilor de echilibru, se obțin două ecuații (3.15) și (3.16), cu cinci necunoscute M_1 , M_2 , T_1 , T_2 și ϑ .

În fig.3.3 este reprezentat elementul de arc al meridianului A^- , înainte și după deformație.

Deplasarea oricărui punct al arcului de meridian, de exemplu al punctului B, se poate descompune în două componente:

- una după direcția axei de simetrie, w ;
- cealaltă după direcția razei, v .

A treia componentă este nulă, din cauza simetriei. Lungimea elementului de arc AB după deformație devine:

$$A'B' = ds_1(1 + \varepsilon_1), \quad (3.17)$$

unde ε_1 este lungimea specifică a suprafeței mediane pe direcția meridianului. Se folosește teorema potrivit căreia, suma algebrică a proiecțiilor unei linii frânte este egală cu proiecția liniei de închidere. Proiectând hexagonul închis $BB''B'A'A''A$, pe direcția razei r , se obține:

$$v + ds(1 + \varepsilon) \cos(\theta + \vartheta) - \frac{dv}{ds_1} - \cos\theta = 0, \quad (3.18)$$

$$(1 + \varepsilon_1) \cos(\theta + \vartheta) - \frac{dv}{ds_1} - \cos\theta = 0. \quad (3.19)$$

Înlocuind în această relație

$$\begin{aligned} ds_1 &= dr; & \cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2}; \\ \cos(\theta + \vartheta) &= 1 - \frac{1}{2}(\theta + \vartheta)^2; \end{aligned} \quad (3.20)$$

rezultă:

$$\varepsilon_1 = v' + \vartheta \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (3.21)$$

Proiectând același poligon pe axa de simetrie, se obține:

$$\mathbf{w} + d\mathbf{s}_1 (1 + \varepsilon_1) (\theta + \vartheta) - (\mathbf{w} + d\mathbf{w}) - d\mathbf{s}_1 \theta = 0, \quad (3.22)$$

de unde rezultă:

$$\mathbf{w}' = \vartheta. \quad (3.23)$$

Se calculează lungirea specifică ε_2 , a suprafeței mediane, în direcția axei y . Când învelișul se deformează, circumferința $2\pi r$ se va lungi, din cauza măririi cu v a razei, de unde rezultă:

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi(r + v) - 2\pi r}{2\pi r}, \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{v}{r}. \quad (3.25)$$

Înlocuind pe v , din această relație în relația (3.21), se obține:

$$\varepsilon_1 - (\varepsilon_2 r)' = \vartheta \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (3.26)$$

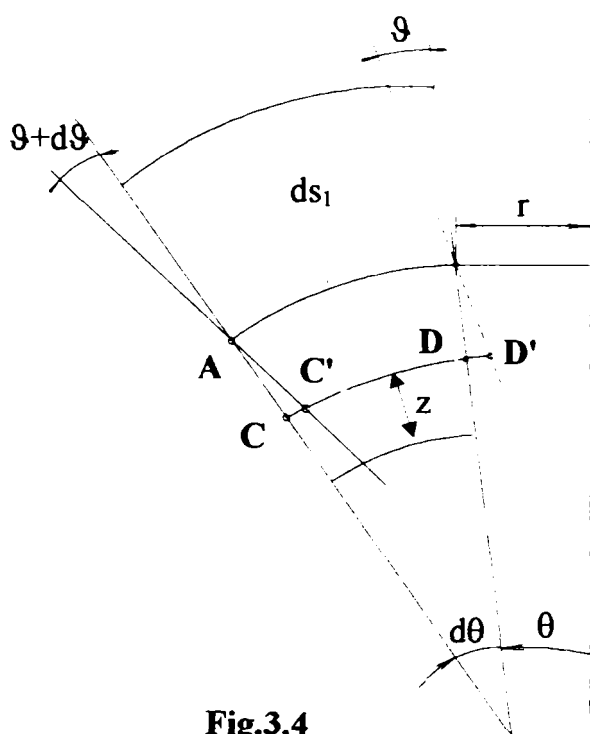


Fig.3.4

În continuare se determină lungirile specifice ε_{1z} și ε_{2z} , în puncte ale învelișului care se găsesc la distanța z , de suprafața mediană. Aceste deformații se compun din deformațiile suprafeței mediane ε_1 și ε_2 și din deformațiile suplimentare, datorate încovoierii învelișului.

Din fig.3.4, care reprezintă elementul secțiunii meridiane a învelișului, se poate determina variația lungimii segmentului CD , care se află la distanța z de suprafața mediană. Normala I, se rotește cu unghiul ϑ , iar normala II cu unghiul $(\vartheta + d\vartheta)$. Alungirea segmentului CD , din cauza modificării formei învelișului, are valoarea:

$$DD' - CC' = -z d\vartheta. \quad (3.27)$$

Adăugând lungirea specifică a suprafeței mediane:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 - z \frac{\vartheta}{r}. \quad (3.28)$$

Alungirea în direcție circumferențială, în punctul D , care apare în urma rotirii normalei, este:

$$\frac{2\pi(r - z\vartheta \cos\theta) - 2\pi r}{2\pi r} \approx -z \frac{\vartheta}{r}. \quad (3.29)$$

Rezultă:

$$\varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 - z \frac{\vartheta}{r}. \quad (3.30)$$

În baza legii lui Hooke:

$$\begin{aligned}\sigma_{1z} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) - z \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) \right]; \\ \sigma_{2z} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) - z \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \vartheta' \right) \right].\end{aligned}\quad (3.31)$$

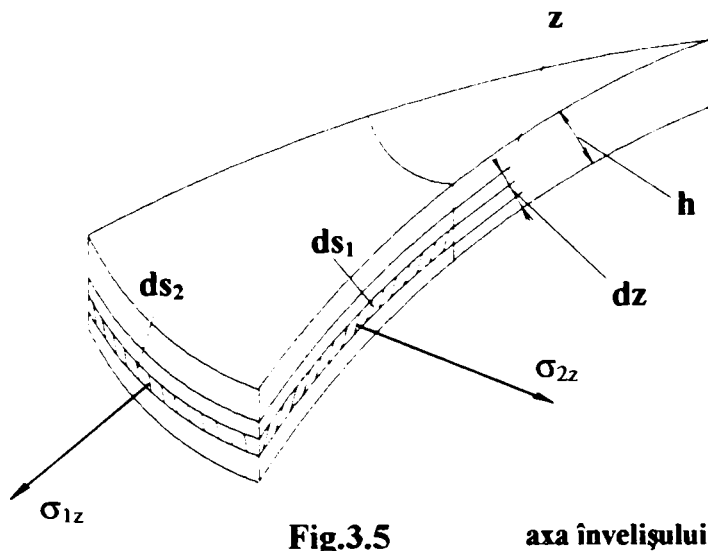


Fig.3.5 axa învelișului

Se exprimă tensiunile T_1 și T_2 , cât și momentele M_1 și M_2 , ca funcții de tensiunile unitare σ_{1z} și σ_{2z} (fig.3.5).

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{1z} dz; \quad T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{2z} dz; \quad (3.32)$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2); \quad (3.33)$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1).$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1).\end{aligned}\quad (3.34)$$

Momentele încovoietoare au expresiile:

$$\begin{aligned}M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{1z} z dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{2z} z dz; \\ M_1 &= -D \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{r} \right); \\ M_2 &= -D \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \vartheta' \right);\end{aligned}\quad (3.35)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (3.36)$$

Admițând că grosimea h este constantă, înlocuind în expresia (3.26) pe ε_1 și ε_2 din relațiile (3.34), se obține:

$$T_1 - \mu T_1 - (T_2 r)' + \mu (T_1 r)' = Eh \vartheta \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (3.37)$$

În această relație înlocuind pe T_2 din ecuația (3.15) se obține:

$$T_1 - \mu [r p_t + (T_1 r)'] - (r^2 p_t)' - [r (T_1 r)'] + \mu (T_1 r)' = Eh \vartheta \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right); \quad (3.38)$$

$$-r(T_1 r)' - (T_1 r)' + \frac{T_1 r}{r} = Eh\vartheta \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right) + (r^2 p_t)' + \mu r p_t. \quad (3.38')$$

Revenind acum la ecuația de echilibru (3.16) și eliminând din ea pe M_1 și M_2 , rezultă:

$$-D \left[r \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{2} \right) \right]' + D \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \vartheta' \right) = -T_1 r (\theta + \vartheta) + F(r). \quad (3.39)$$

După unele transformări se obține:

$$r \vartheta'' + \vartheta' - \frac{\vartheta}{r} = \frac{T_1 r}{D} (\theta + \vartheta) - \frac{F(r)}{D}. \quad (3.40)$$

S-au obținut astfel, două ecuații, (3.38') și (3.40), cu două necunoscute, T_1 și ϑ . Aceste ecuații pot fi reduse la ecuațiile sferei cu înclinație mică, a conului ($\theta = \text{const.}$) sau a membranei plane ($\theta = 0$), în deplasări mari, dacă se înlocuiește funcția respectivă $\theta = \theta(r)$. Aceleași relații (3.38'), (3.40) s-au obținut, aproximativ în aceeași formă, la calculul membranelor ondulate.

Pentru ușurința calculelor, se introduc următoarele mărimi adimensionale:

$$\rho = \frac{r}{r_1}; \quad \psi = -\frac{T_1 r}{Ehr_1}; \quad (3.41)$$

unde r_1 este raza conturului exterior al învelișului; ρ este raza adimensională; ψ este noua funcție necunoscută, care se determină cu ajutorul tensiunii de întindere T_1 . Rezultă:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\psi}{\rho} &= \vartheta \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right) + \frac{1}{Eh} [(r^2 p_t)' + \mu r p_t]; \\ \rho \frac{d^2 \vartheta}{d\rho^2} + \frac{d\vartheta}{d\rho} - \frac{\vartheta}{\rho} &= -\frac{Ehr_1^2}{D} \psi (\theta + \vartheta) - \frac{F(r)}{D} r_1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Mărimea adimensională $\frac{Ehr_1^2}{D} = 12(1 - \mu^2) \frac{r_1^2}{h^2}$, se notează cu k ,

$$k = 12(1 - \mu^2) \frac{r_1^2}{h^2}, \quad (3.43)$$

aceasta caracterizând pereții relativ subțiri ai învelișului. Ecuațiile (3.38') și (3.40) capătă acum forma finală:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\psi} + \dot{\psi} - \frac{\psi}{\rho} &= \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right) \vartheta + f; \\ \rho \ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} - \frac{\vartheta}{\rho} &= -k\psi(\theta + \vartheta) - \varphi; \end{aligned} \quad (3.44)$$

unde:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{Eh} [(r^2 p_t)' + \mu r p_t]; \\ \varphi &= \frac{F(r)}{D} r_1. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Mărimile $\psi, \vartheta, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}$, reprezintă prima și a doua derivată a lui ψ și ϑ în raport cu ρ , spre deosebire $\psi', \vartheta', \psi'', \vartheta''$, care reprezintă derivatele în raport cu r .

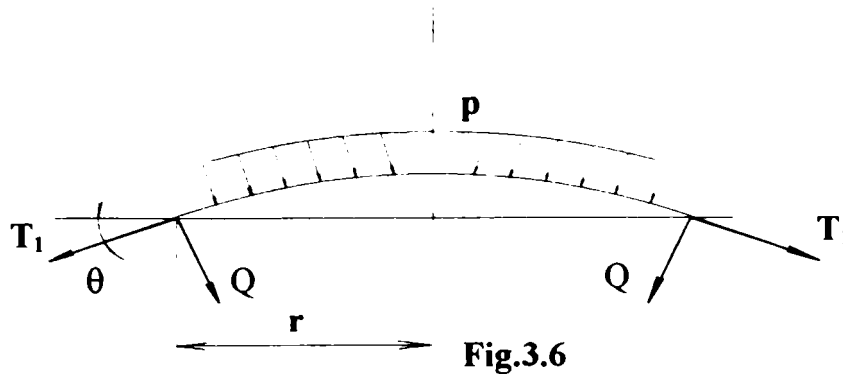


Fig.3.6

Ecuatiile (3.44) sunt neliniare, deoarece în prima ecuație apare pătratul funcției necunoscute ϑ , iar în cea de-a doua apare produsul necunoscutelor $\psi\vartheta$. În aceste ecuații, după cum s-a arătat mai sus, forma învelișului nedeformat, se determină cu ajutorul funcției θ , care este unghiul de pantă al arcului meridianului, iar sistemul de forțe exterioare se determină cu ajutorul funcțiilor f și φ . Acestea din urmă pot fi obținute din condiția de echilibru, a părții centrale a învelișului.

De exemplu, (fig.3.6) dacă învelișul închis la vârf este supus unei presiuni hidrostatice, atunci $p_t = 0$ și $p_n = p$. În acest caz, în baza relațiilor (3.45), $f = 0$. Din condiția de echilibru a părții centrale a învelișului (fig.3.6) rezultă:

$$Q2\pi r + T_1(\theta + \vartheta)2\pi r + p\pi r^2 = 0. \quad (3.46)$$

În conformitate cu relațiile (3.9) avem:

$$r[Q + T_1(\theta + \vartheta)] = F(r) = -\frac{pr^2}{2}, \quad (3.47)$$

de unde φ (vezi și relațiile (3.45) are expresia:

$$\varphi = -\frac{pr^2}{2D} r_1 = -\frac{pr_1^3}{2D} \rho^2. \quad (3.48)$$

Notând $\frac{pr_1^3}{2D} = v$, și ținând cont că $\frac{Ehr_1^2}{D} = k$, se obține:

$$v = k \frac{pr_1}{2Eh}; \quad \varphi = -v\rho^2. \quad (3.49)$$

3.2. MEMBRANE PLANE DE FORMĂ CIRCULARĂ

3.2.1. Determinarea caracteristicii membranei metalice plane

Se consideră o membrană încastrată pe contur și încărcată cu o sarcină (presiune) uniform distribuită, la care se determină variația formei membranei, în funcție de presiune [63]. Calculele se pornesc luând în considerare relațiile (3.44).

Pentru o membrană plană, unghiul θ , de înclinare al arcului meridianului față de planul conturului, este nul. Funcția f , dată de relația (3.45) devine nulă, pentru $p_t = 0$, iar φ se exprimă ca funcție de ρ prin relația (3.49). În acest caz ecuațiile (3.44) capătă forma:

$$\begin{aligned} \rho\ddot{\psi} + \dot{\psi} - \frac{\psi}{\rho} &= \frac{\vartheta^2}{2}; \\ \rho\ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} - \frac{\vartheta}{\rho} &= -k\psi\vartheta + v\rho^2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Relațiile (3.50) sunt cunoscute ca și ecuațiile plăcii cu deplasări mari. Ele sunt neliniare, deoarece în prima apare pătratul funcției ϑ , iar în adoua apare produsul $\psi\vartheta$. Dacă săgețile sunt suficient de mici, în suprafața mediană a plăcii nu apar alungiri și în acest caz:

$$\psi = -\frac{\mathbf{T}_1 \mathbf{r}}{E h r_1} = 0, \quad (3.51)$$

și prima dintre ecuațiile (3.44) dispare, iar cea de-a doua are forma:

$$\rho\ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} - \frac{\vartheta}{\rho} = v\rho^2. \quad (3.52)$$

Integrând de două ori se obține:

$$\vartheta = C_1 \rho + C_2 + \frac{C_2}{\rho} + \frac{v\rho^3}{8}. \quad (3.53)$$

Pentru cazul considerat, condițiile la limită sunt:

- pentru $\vartheta = 0$; $r = 0$; $\vartheta \neq \infty$;
- pentru $\rho = 1$; $r = r_1$; $\vartheta = 0$. Rezultă că: $C_2 = 0$; $C_1 = v/8$

$$\vartheta = \frac{v}{8}(\rho^3 - \rho). \quad (3.54)$$

3.2.2. Determinarea săgeții membranei metalice plane

În baza relației (3.23) se poate scrie:

$$\vartheta = \mathbf{w}' = \frac{d\mathbf{w}}{d\rho} \frac{1}{r_1}; \quad (3.55)$$

$$\mathbf{w} = \frac{v r_1}{8} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} + C_3 \right). \quad (3.56)$$

Constanta C_3 se determină din condiția că, pentru $\rho = 1$; $r = r_1$; $w = 0$, de unde:

$$\mathbf{w} = \frac{v r_1}{32} (1 - \rho^2)^2. \quad (3.57)$$

Dacă se înlocuiește aici $\rho = \frac{r}{r_1}$ și $v = \frac{p r_1^3}{2D}$, se obține:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{p}{64D} (r_1^2 - r^2)^2; \\ \mathbf{w}_0 &= \frac{p r_1^4}{64D} = \frac{3}{16} p \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{r_1^4}{h^3}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Astfel, cât timp săgețile membranei sunt atât de mici încât, întinderea suprafeței sale mediane poate fi neglijată, deplasarea centrului w_0 , este proporțională cu presiunea care acționează. Acest lucru este adevărat, numai atâta timp, cât săgețile membranei rămân cu mult mai mici decât grosimea ei, respectiv, când raportul w_0/h , se poate neglija, în raport cu unitatea. Se înțelege că această limitare este esențială și nu permite folosirea soluției liniare, în practică, deoarece, pentru membranele subțiri obișnuite, săgețile nu numai că sunt de același ordin de mărime cu grosimea, dar o și depășesc, de câteva ori.

De obicei, membranele având grosimea de $0,2 \div 0,3$ mm, au săgeți de lucru de $1,5 \div 2$ mm, iar într-o serie de cazuri și mai mari. De aceea este evident că pentru o rezolvare accesibilă, din punct de vedere practic, ipoteza neîntinderii suprafeței mediane este necorespunzătoare și sistemul de ecuații (3.50) trebuie rezolvat fără ipoteza referitoare la funcția ψ .

Se consideră că, este dată suprafața elastică a membranei. Se presupune că, suprafața ei are aceeași formă și în cazul unor săgeți mari, ca și în cazul săgeților mici. Valoarea săgeții maxime, în funcție de presiunea care acționează, va fi o funcție oarecare. În baza relației (3.54) se presupune că:

$$\vartheta = C(\rho^3 - \rho), \quad (3.59)$$

unde mărimea C , nu depinde de ρ și este funcție de presiunea p , sau de parametrul v , proporțional cu p .

Funcția ϑ , dată de relația (3.59), satisface condițiile la limită date, adică devine nulă în centrul membranei și pe conturul ei. Este evident că, după ce am adoptat pentru ϑ legea de variație (3.59), se poate obține o rezolvare cu atât mai exactă, cu cât săgețile membranei vor fi mai mici. În cazul săgeților foarte mici, soluția coincide cu cea exactă. Se înlocuiește ϑ din relația (3.59) în prima ecuație (3.50) și se obține:

$$\rho \left[\frac{1}{\rho} (\psi \rho) \right]' = \frac{C^2}{2} (\rho^3 - \rho)^2. \quad (3.60)$$

Integrând această expresie rezultă:

$$\psi = -\frac{C^2}{96} \left(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - a\rho + \frac{b}{\rho} \right). \quad (3.61)$$

Funcția ψ are expresia:

$$\psi = -\frac{T_1 r}{Ehr}. \quad (3.62)$$

În centrul plăcii, tensiunea de întindere are valoare finită. De aceea, funcția φ , pentru $r = 0$, trebuie să devină nulă. Acest lucru este posibil, numai în cazul în care, constanta b are valoarea zero. Discuția se face în două cazuri de fixare a membranei și anume, încastrare perfectă și încastrare liberă. Atât în primul caz, cât și în al doilea, unghiul de rotire pe contur ϑ , este nul.

La încastrarea perfectă, deplasarea radială pe contur este nulă, iar la încastrarea liberă tensiunea radială T_1 , este nulă. Primul caz, corespunde unei lipiri perfecte a membranei, pe contur, de inelul cu mare rigiditate, iar cel de-al doilea, corespunde unei încastrări între două inele cu garnitură. Cu aceste două cazuri, nu se epuizează toate posibilitățile de fixare ale membranei, pe contur putând să apară, în același timp și deplasări și tensiuni. Cele două exemple sunt numai două cazuri limită.

Astfel, pentru încăstrarea perfectă, la $\rho = 0$, $r = r_1$ avem $\mathfrak{S} = 0$ și $v = 0$. Dacă $v = 0$, atunci și $\varepsilon_2 = 0$ și ținând cont de relațiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 - \mu \mathbf{T}_1 &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{T}_2 &= r \mathbf{p}_t + (\mathbf{T}_1 \mathbf{r})'; \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= -\frac{\mathbf{E} h r_1}{r} \psi; \\ \dot{\psi} - \mu \frac{\psi}{\rho} &= \frac{r_1 \mathbf{p}_t}{\mathbf{E} h} \rho. \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\text{Dacă } \mathbf{p}_t = 0, \dot{\psi} - \mu \frac{\psi}{\rho} = 0. \quad (3.64')$$

Prin urmare, condiția de încăstrare perfectă, pentru $\rho = 1$, se scrie sub forma:

$$\mathfrak{S} = 0; \quad \dot{\psi} - \mu \frac{\psi}{\rho} = 0. \quad (3.64'')$$

Pentru încăstrarea liberă, avem $\mathbf{T}_1 = 0$; de aceea pentru $\rho = 1$ rezultă:

$$\mathfrak{S} = 0; \quad \psi = 0. \quad (3.65)$$

Pentru ambele cazuri de încăstrare se determină constanta a , din relația (3.61). În cazul încăstrării perfecte (3.66), iar pentru încăstrarea liberă (3.66'):

$$\mathbf{a} = \frac{5 - 3\mu}{1 - \mu}; \quad (3.66)$$

$$\mathbf{a} = 3. \quad (3.66')$$

Astfel funcțiile \mathfrak{S} și ψ , satisfac condițiile la limită și prima dintre relațiile (3.50), pentru orice valoare a lui C . Se alege constanta C , astfel încât, ea să satisfacă și cea de-a doua relație (3.50). Dacă se înlocuiește în această ecuație \mathfrak{S} și ψ , rezultă:

$$8C\rho^2 + \frac{kC^3}{96}(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - a\rho)(\rho^3 - \rho) - v\rho^2 \neq 0. \quad (3.67)$$

Înmulțind această expresie cu $(\rho^3 - \rho)$, integrând în funcție de ρ , iar integrala obținută astfel egalând-o cu zero, rezultă o ecuație din care se determină constanta C . După integrarea ecuației se obține relația (3.68) și în baza relației (3.23) se obține relația (3.69):

$$-\frac{8}{12}C + \frac{kC^3}{96} \left(\frac{1}{14} - \frac{a}{24} \right) + \frac{v}{12} = 0; \quad (3.68)$$

$$\mathbf{w} = C r_1 \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} \right) + C_3. \quad (3.69)$$

Pentru $\rho = 1$, $w = 0$, de aceea $C_3 = \frac{r_1}{4}$, cu care:

$$\mathbf{w} = \frac{C r_1}{4} (1 - \rho^2)^2; \quad (3.70)$$

$$w_0 = \frac{Cr_1}{4} \quad (3.71)$$

Dacă în relația (3.68) se notează:

$$C = \frac{4w_0}{r_1}; \quad v = \frac{pr^3}{2D}; \quad (3.72)$$

$$k = 12(1-\mu^2) \frac{r_1^2}{h^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)};$$

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{16}{3(1-\mu^2)} \cdot \frac{w_0}{h} + \frac{6}{7} \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 \quad (3.73)$$

Aceasta este relația dintre săgeata membranei w_0 și presiunea p , care o acționează.

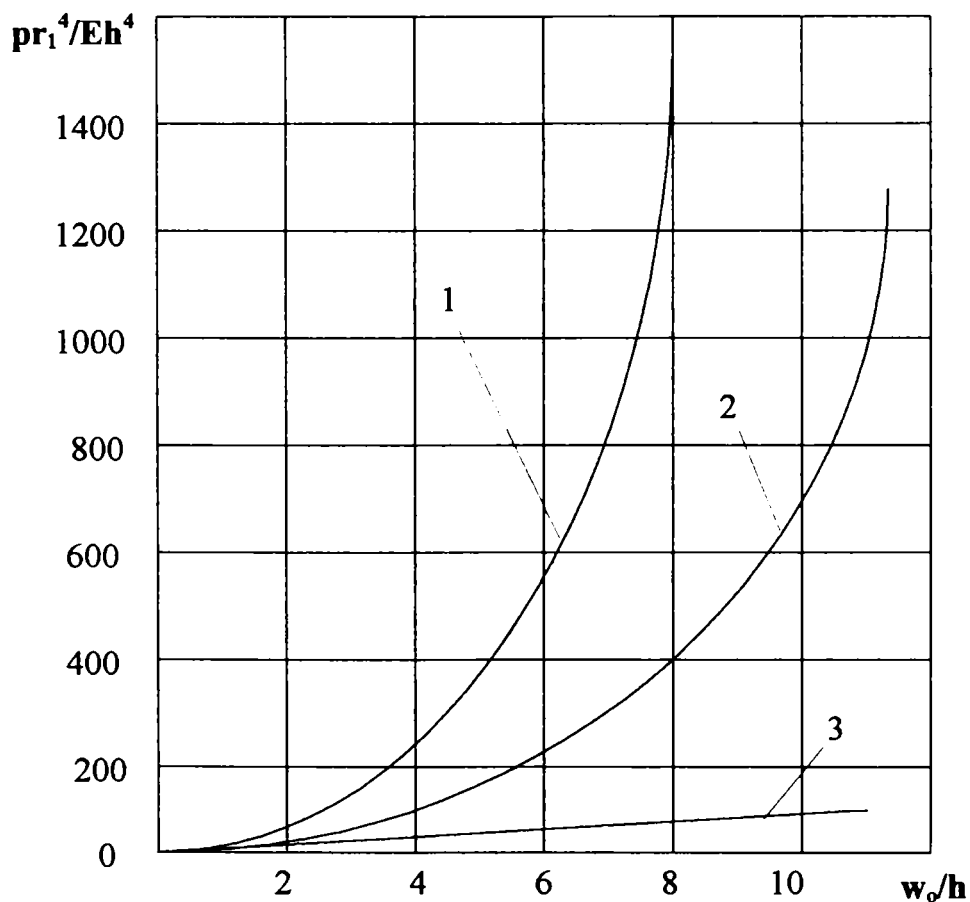


Fig.3.7

- pentru încadrarea liberă,

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{16}{3(1-\mu^2)} \cdot \frac{w_0}{h} + \frac{6}{7} \left(\frac{w_0}{h} \right)^3; \quad (3.73')$$

- pentru încadrarea perfectă,

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{16}{3(1-\mu^2)} \cdot \frac{w_0}{h} + \frac{2}{21} \cdot \frac{23-9\mu}{1-\mu} \left(\frac{w_0}{h} \right)^3. \quad (3.73'')$$

În fig.3.7 sunt reprezentate caracteristicile membranelor plane după modul de fixare al acestora pe contur și anume:

- curba 1 - încastrare perfectă;
- curba 2 - încastrare liberă;
- curba 3 - caracteristica arcului de tip membrană plană, după teoria deformațiilor mici.

Din acest grafic se poate observa ușor că, la săgeți mici, termenul care conține raportul (w_0/h), la puterea a treia se poate neglija; în acest caz relațiile (3.73') și (3.73'') devin identice cu relația (3.58), care a fost dedusă în ipoteza deplasărilor mici ale membranei. Este de remarcat faptul că, aceasta se referă, atât la încastrarea liberă, cât și la încastrarea perfectă.

În cazul curbelor 1 și 2 se observă că, la creșterea săgeții rigiditatea membranei crește și că, domeniul de aplicare al teoriei liniare, în intervalul de săgeți considerat, este restrâns.

3.2.3. Rezolvarea exactă a problemei săgeților mari ale membranei metalice plane

Problema săgeților mari, ale unei membrane circulare, a fost rezolvată de o serie de cercetători, rezultatele obținute de aceștia deosebindu-se, destul de puțin [63]. În toate cazurile, au fost stabilite relații de tipul (3.73), care se pot scrie sub forma:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{A_1}{1-\mu^2} \cdot \frac{w_0}{h} + A_3 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 \quad (3.74)$$

unde coeficientul A_1 al termenului liniar, este același la toate soluțiile date și are valoarea $A_1=16/3$; problema neliniară, se leagă astfel, în toate cazurile, de cea liniară. În ceea ce privește coeficientul A_3 , valoarea lui pentru încastrarea periferică, variază de la 2,76 până la 3,4 în funcție de metoda de aproximare. Verificările experimentale ale relațiilor de mai sus au arătat că, acestea reflectă cu destulă precizie caracteristica membranei, numai pentru săgeți, a căror valoare nu depășește de trei-patru ori grosimea ei, adică $w_0 < 3h$.

La rezolvare s-a pornit de la ipoteza că, suprafața elastică a membranei, care lucrează la deformații mari, este aceeași suprafață de gradul patru, care apare și în cazul deformațiilor mici. De fapt, suprafața elastică a membranei își schimbă forma, pe măsura creșterii săgeții, respectiv, punctul de inflexiune se deplasează de la centru spre contur (fig.1.49b). La deplasări foarte mari, punctul de inflexiune, coincide aproape cu conturul. La calculul tensiunilor unitare este nevoie să se țină cont de acest aspect, de asemenea, trebuie să se țină seama de el și în cazul deplasărilor, când $w_0 > 3h$.

Se admite de această dată ecuația suprafeței elastice, sub forma:

$$\vartheta = C(\rho^z - \rho), \quad (3.75)$$

unde z , este un exponent nedeterminat. Pe măsura măririi lui z , punctul de inflexiune se deplasează spre contur. La limită, dacă $z = \infty$, punctul de inflexiune se află chiar pe contur. Astfel, prin alegerea în mod corespunzător, a lui z , există posibilitatea de a rezolva problema. Din prima ecuație (3.50) după integrare se obține:

$$\psi = \frac{1}{2} C^2 \left[\frac{\rho^{2z+1}}{2z(2z+2)} - \frac{2\rho^{z+2}}{(z+1)(z+3)} + \frac{\rho^3}{8} + a\rho \right], \quad (3.76)$$

- pentru încastrarea perfectă,

$$\left(\dot{\psi} - \frac{\psi}{\rho} \right)_{\rho=1} = 0; \quad (3.77)$$

$$\mathbf{a} = \frac{(z-1)^2}{4(z+1)(z+3)} \left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{z+6}{2z} \right];$$

- pentru încăstrarea liberă,

$$\psi_{\rho=1} = 0; \quad (3.78)$$

$$\mathbf{a} = \frac{(z-1)^2(z+6)}{8z(z+1)(z+3)};$$

înlocuind pe ψ și ϑ , în cea de-a doua ecuație (3.50), se obține o relație de forma:

$$C^3 \frac{1}{2} \left[\frac{\rho^{2z+1}}{4z(z+1)} - \frac{2\rho^{z+2}}{(z+1)(z+3)} + \frac{\rho^3}{8} - a\rho \right] (\rho^z - \rho) + \quad (3.79)$$

$$\frac{C}{k} (z^2 - 1)\rho^{z-1} - \frac{v}{k}\rho^2 = f(\rho).$$

În această relație, există doi parametri nedeterminați C și z , pentru a căror determinare se înmulțește $f(\rho)$ cu:

$$\delta\vartheta_c = \frac{\partial\vartheta}{\partial C} \delta C = (\rho^z - \rho)\delta C; \quad (3.80)$$

$$\delta\vartheta_z = \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \delta z = C\rho^z \ln \rho \delta z.$$

Integrând produsele astfel obținute, în raport cu ρ , în limitele de integrare de la zero până la unitate, se obțin următoarele ecuații:

$$C^3 \mathbf{a}_3 + \frac{C}{k} \mathbf{a}_1 = \frac{v}{k} \mathbf{a}_0; \quad (3.81)$$

$$C^3 \mathbf{b}_3 + \frac{C}{k} \mathbf{b}_1 = \frac{v}{k} \mathbf{b}_0;$$

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{z-1}{4(z+3)}; \quad \mathbf{a}_1 = -\frac{(z-1)^2}{2z}. \quad (3.82)$$

- pentru încăstrarea perfectă,

$$\mathbf{a}_3 = -\frac{1}{32} \cdot \frac{(z-1)^4}{(z+1)^2(z+3)^2} \left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{2z^3 + 39z^2 + 167z + 174}{6(2z+1)(z+2)(z+5)} \right]; \quad (3.83)$$

- pentru încăstrarea liberă,

$$\mathbf{a}_3 = -\frac{1}{192} \cdot \frac{(z-1)^4(2z^3 + 39z^2 + 167z + 174)}{(z+1)^2(z+3)^2(2z+1)(z+2)(z+5)}; \quad (3.83')$$

$$\mathbf{b}_0 = -\frac{1}{(z+3)^2}; \quad \mathbf{b}_1 = -\frac{z^2-1}{4z^2}. \quad (3.84)$$

- pentru încadrarea perfectă,

$$b_3 = \frac{z-1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{7z+5}{144z(z+1)^3(2z+1)^2} - \frac{5z+7}{18(z+1)^3(z+2)^2(z+3)} + \\ + \frac{3(z+3)}{32(z+2)^2(z+5)^2} - \frac{(z-1)^2(3z+5)}{16(z+1)^3(z+3)^3} \left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{z+6}{2z} \right] \end{array} \right\} \quad (3.85)$$

- pentru încadrarea liberă,

$$b_3 = \frac{z-1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{7z+5}{144z(z+1)^3(2z+1)^2} - \frac{5z+7}{18(z+1)^3(z+2)^2(z+3)} + \\ + \frac{3(z+3)}{32(z+2)^2(z+5)^2} - \frac{(z-1)^2(3z+5)(z+6)}{32z(z+1)^3(z+3)^3} \end{array} \right\} \quad (3.85')$$

Deplasarea w are valoarea:

$$\begin{aligned} w &= Cr_1 \int (\rho^2 - \rho) d\rho + C_3; \\ w &= Cr_1 \left(\frac{\rho^{z+1} - 1}{z+1} - \frac{\rho^2 - 1}{2} \right); \end{aligned} \quad (3.86)$$

unde constanta C_3 , se determină din condiția ca săgeata w , pe contur, să fie nulă. În centrul membranei, w_0 are valoarea:

$$w_0 = Cr_1 \frac{z-1}{2(z+1)}. \quad (3.87)$$

Dacă eliminăm din prima ecuație (3.81) mărimile C , v și k , se obține:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{A_1}{1-\mu^2} \left(\frac{w_0}{h} \right) + A_3 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3; \quad (3.88)$$

relație în care coeficienții A_1 și A_3 , depind de z . Într-adevăr:

$$A_1 = \frac{2}{3z} (z+1)(z+3); \quad (3.89)$$

- pentru încadrarea perfectă,

$$A_3 = 2 \frac{z+1}{z+3} \left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{2z^3 + 39z^2 + 167z + 174}{6(2z+1)(z+2)(z+5)} \right]; \quad (3.90)$$

- pentru încadrarea liberă,

$$A_3 = \frac{1}{3} \frac{(z+1)(2z^3 + 39z^2 + 167z + 174)}{(2z+1)(z+2)(z+3)(z+5)}. \quad (3.90')$$

Revenind la ecuația (3.81) și eliminând din ele raportul (v/k) , se obține:

$$C^2 \left(\frac{a_3}{a_0} - \frac{b_3}{b_0} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right). \quad (3.91)$$

Eliminând de aici pe C și k și ținând cont de relația (5.87), se obține:

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 = \frac{B}{1-\mu^2}, \quad (3.92)$$

unde B depinde de z , astfel:

$$B = \frac{1}{48} \cdot \frac{\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}}{\frac{a_3}{a_0} - \frac{b_3}{b_0}} \cdot \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}, \quad (3.93)$$

- pentru încadrarea perfectă,

$$B = \frac{(z^2 - 9)(z+1)(z+3)}{z^2} \cdot \left\{ \frac{6}{1-\mu} + \frac{16z^6 + 296z^5 + 2178z^4 + 7892z^3 + 14533z^2 + 12726z + 4011}{(2z+1)^2(z+2)^2(z+5)^2} \right\} \quad (3.93')$$

- pentru încadrarea liberă,

$$B = \frac{(z^2 - 9)(z+1)(z+3)(2z+1)^2(z+2)^2(z+5)^2}{z^2(16z^6 + 296z^5 + 2178z^4 + 7892z^3 + 14533z^2 + 12726z + 4011)}. \quad (3.93'')$$

Dacă este dat exponentul z , se poate afla, din relațiile (3.93') sau (3.93'') coeficientul B , iar apoi raportul (w_0/h) ; dacă sunt cunoscute z și (w_0/h) se determină p , din relația (3.88). Se observă, de altfel, că dacă $z = 3$, rezultă $B = 0$ și $(w_0/h) = 0$, adică soluția dată coincide cu cea exactă. Dacă se efectuează calculele indicate, caracteristica membranei se poate prezenta sub forma tabelului 3.1 (Anexa 3), care este alcătuit pentru coeficientul lui Poisson $\mu = 0,3$.

Pe baza acestui tabel, se poate trasa caracteristica membranei, pentru cele două cazuri de fixare pe contur (încadrare perfectă și încadrare liberă). Experiența arată că, diagramele astfel obținute, coincid cu rezultatele experimentale, până la săgeți de ordinul 15–20 grosimi, adică practic, pe toată gama de deplasări elastice ale membranelor.

3.2.4. Tensiuni unitare într-o membrană plană, în domeniul săgeților mari.

Tensiunile unitare maxime, în domeniul săgeților mari, apar pe conturul de încadrare, ele putând fi scrise, ca o sumă de tensiuni unitare de întindere și încovoire [63].

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{T_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2}; \\ \sigma_2 &= \frac{T_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Semnul plus sau minus se ia în funcție de fața (superioară sau inferioară) pentru care se determină tensiunea unitară. De obicei, se calculează tensiunea unitară maximă (în valoare absolută) și se examinează acea față, pentru care termenii se însumează.

Pentru determinarea tensiunilor unitare, se studiază cazul de încadrare perfectă, ca având cea mai mare importanță practică. În acest caz, pe conturul membranei $\varepsilon_2 = 0$, adică:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) = 0; \Rightarrow \sigma_2 = \mu\sigma_1. \quad (3.95)$$

Se determină tensiunea unitară $\sigma_1 = \sigma_{ech}$, tensiunea radială având valoarea:

$$T_1 = -\frac{Ehr_1}{r} \psi. \quad (3.96)$$

Pentru încastrarea perfectă, în cazul $\rho = 1$, din relația (3.76) se obține:

$$T_1 = C^2 \frac{Eh}{8(1-\mu)} \cdot \frac{(z-1)^2}{(z+1)(z+3)}. \quad (3.97)$$

În baza relațiilor (3.35) se poate scrie:

$$M_1 = -\frac{D}{r_1} \left(\dot{\vartheta} + \mu \frac{\vartheta}{\rho} \right). \quad (3.98)$$

Înlocuind în această relație pe ϑ , eliminând din relațiile obținute pentru T_1 și M_1 parametrul C , după unele transformări se obține:

$$\sigma_1 = \sigma_{ech} = \frac{Eh^2}{r_1^2} \cdot \frac{z+1}{1-\mu} \cdot \frac{w_0}{h} \left[\frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+3} \cdot \frac{w_0}{h} \right]. \quad (3.99)$$

Calculul tensiunii unitare se face cu ajutorul tabelului 3.1; cunoscând presiunea p , se calculează mărimea $\frac{pr_1^4}{Eh^4}$, apoi din tabelul A3.1 (Anexa 3), pentru încastrarea perfectă, se află z și (w_0/h) , cu ajutorul cărora din relația (3.99) se determină tensiunea unitară σ_{ech} .

3.3. DETERMINAREA SĂGETILOR MEMBRANEI PERFECT ELASTICE

Problema determinării caracteristicii membranei, care are o rigiditate mică la încovoiere, se rezolvă cu ajutorul relațiilor (3.50) [63]. La o grosime extrem de mică h , placa se comportă ca o membrană perfect flexibilă; dacă se consideră $k = \infty$, ecuațiile (3.50) capătă forma:

$$\rho \ddot{\psi} + \dot{\psi} - \frac{\psi}{\rho} = \frac{\vartheta^2}{2}; \quad (3.100)$$

$$\psi \vartheta = v_0 \rho^2; \quad v_0 = \frac{pr_1}{2Eh}. \quad (3.101)$$

Acestea sunt ecuațiile unei membrane perfect flexibile, în cazul încărcării cu o sarcină uniform repartizată, p . Se examinează o membrană nemetalică cu centrul rigidizat. Se presupune că, profilul secțiunii axiale al membranei, poate fi reprezentat printr-o funcție pătratică de rază r , adică unghiul ϑ , trebuie să fie o funcție liniară de ρ ,

$$\vartheta = C\rho. \quad (3.102)$$

Înlocuind pe ϑ , în ecuația (3.100) și integrând în raport cu ρ , rezultă:

$$\psi = \frac{C^2}{16} \left(\rho^3 + a\rho + \frac{b}{\rho} \right), \quad (3.103)$$

unde constantele a și b , se determină din condițiile la limită.

Pentru membrana încastrată pe contur și având o legătură rigidă cu centrul ce se deplasează, condițiile sunt: pentru $\rho = \rho_2$ ($r = r_2$) și pentru $\rho = \rho_1$ ($r = r_1$) deplasarea radială este nulă. Prin urmare, ca și la încastrarea perfectă:

$$\dot{\psi} - \mu \frac{\psi}{\rho} = 0; \quad \rho = \rho_2; \quad \rho = 1. \quad (3.104)$$

$$\mathbf{a} = -\frac{3-\mu}{1-\mu}(\mathbf{1} + \rho_2^2);$$

$$\mathbf{b} = -\frac{3-\mu}{1+\mu}\rho_2. \quad (3.105)$$

Din relațiile (3.100), (3.102), (3.103) se determină săgeata membranei, care va fi:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{C} r_1 (\rho^2 + \mathbf{C}_3), \quad (3.106)$$

unde constanta \mathbf{C}_3 rezultă din condiția ca săgeata \mathbf{w} , pe conturul exterior să fie nulă, deci:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{C} r_1 (\rho^2 - 1). \quad (3.106')$$

Deplasarea centrului membranei este:

$$\mathbf{w}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{C} r_1 (1 - \rho_2^2), \quad (3.107)$$

de unde rezultă:

$$\mathbf{C} = -\frac{2\mathbf{w}_0}{r_1(1 - \rho_2^2)}. \quad (3.108)$$

Se obține cu ajutorul relațiilor determinate, caracteristica membranei perfect flexibile de forma:

$$\frac{\mathbf{p} r_1^4}{\mathbf{E} h^4} = \mathbf{A}_3 \left(\frac{\mathbf{w}_0}{\mathbf{h}} \right)^3, \quad (3.109)$$

unde:

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{(1 - \rho_2^2)^3 (1 - \rho_2^4)} \left[-\frac{2}{3} (1 - \rho_2^6) + \frac{3-\mu}{1-\mu} (1 + \rho_2^2) (1 - \rho_2^4) + 2 \frac{3-\mu}{1+\mu} \rho_2^2 (1 - \rho_2^2) \right]. \quad (3.110)$$

Astfel, caracteristica unei membrane perfect flexibile este o cubică; dacă centrul plan lipsește, $\rho_2 = 0$, avem:

$$\mathbf{A}_3 = -\frac{2}{3} + \frac{3-\mu}{1-\mu}, \quad (3.110')$$

și se obține astfel, rezolvarea așa numitei probleme a lui Hencky, adică problema săgeților membranei perfect flexibile, fără centru rigid:

$$\frac{\mathbf{p} r_1^4}{\mathbf{E} h^4} = \left(\frac{\mathbf{w}_0}{\mathbf{h}} \right)^3 \left(\frac{3-\mu}{1-\mu} - \frac{2}{3} \right). \quad (3.109')$$

Pentru $\mu = 0,3$

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = 3,19 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 ; \quad w_0 = 0,68r_1 \sqrt[3]{\frac{pr_1}{Eh}} \quad (3.109'')$$

Soluția exactă Hencky, obținută cu ajutorul seriilor este:

$$w_0 = 0,662r_1 \sqrt[3]{\frac{pr_1}{Eh}} \quad (3.107')$$

Relația între săgeata membranei și presiune, dată de relația (3.109') este reprezentată grafic în fig.3.7. Se observă că, curba construită, este tangentă, în originea coordonatelor, la axa (w_0/h). Prin urmare, membrana perfect flexibilă are rigiditatea nulă, la săgeți mici.

Capacitatea membranei de a reacționa la presiunea exterioară, apare pe măsura producerii săgeții w_0 . Creșterea razei adimensionale ρ , are efect asupra variației coeficientului A_3 , dar alura curbei se păstrează. Este important de remarcat că, la săgeți foarte mici, orice membrană se comportă la fel ca cea perfect flexibilă.

3.4. MEMBRANA ONDULATĂ

Problema principală, legată de calculul membranei ondulate, este determinarea caracteristicii ei, în cazul unei forme date a gofrajului. Este foarte greu de apreciat, cum influențează forma gofrajului, asupra caracteristicii. Studiul experimental al acestei influențe este legat de mari greutăți tehnologice [63].

De aceea, este evident că, la construirea unor membrane noi, de caracteristică dată, are mare importanță cercetarea teoretică a membranei și crearea teoriei membranelor ondulate, care permite să se pună în evidență, legile destul de complexe, ale acestui element elastic.

Deși, pentru membranele ondulate s-au obținut primele formule de calcul, teoria acestui element elastic, nu a fost încă definitiv realizată. Modelarea matematică a membranelor cu gofraj marginal, nu este finalizată, de asemenea nu s-a progresat cu rezolvarea problemei inverse, și anume, determinarea celei mai simple forme de membrană, pentru obținerea caracteristicii date.

3.4.1. Alegerea schemei de calcul pentru membranele ondulate

Ideea de bază a metodei de calcul a caracteristicii membranei (propusă de L.E. Andreeva), constă în, înlocuirea membranei ondulate, printr-o membrană plană, influența gofrajului fiind luată în considerare, prin introducerea coeficienților de anizotropie ai membranei, la întindere și încovoiere, pe direcție circumferențială și radială.

Considerarea membranei ondulate ca membrană anizotropă, este posibilă numai în cazurile în care membrana are gofraj uniform, iar numărul de ondulații ale gofrajului este destul de mare. Felul cum influențează acest număr, se poate aprecia numai pe baza experiențelor.

Experiența arată că, această abordare a determinării caracteristicii membranei, dă rezultate acceptabile, chiar și în cazul în care, pe raza membranei sunt dispuse trei sau mai multe ondulații pline ale gofrajului.

Se examinează elementul de dimensiuni finite, decupat dintr-o membrană ondulată (fig.3.8), care se înlocuiește cu un element plan, de aceeași grosime, h , element plan care are proprietăți

anizotrope. Coeficienții săi de elasticitate, se determină din condiția de egalitate a rigidității la încovoiere și întindere, a elementului plan și a elementului ondulat.

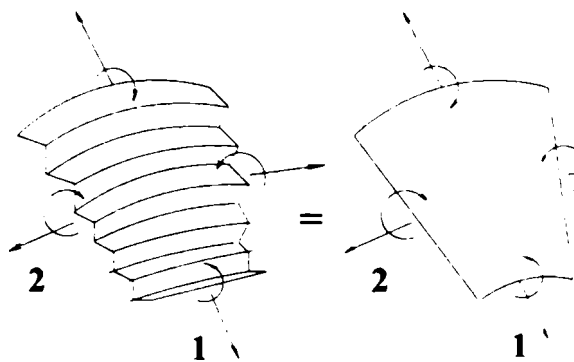


Fig.3.8

Se notează cu $(E_1)_t$ și $(E_2)_t$ modulul de elasticitate la întindere ale membranei anizotrope, pe direcție radială și circumferențială. În direcție radială, solicitată la întindere, membrana ondulată are o alungire mai mare decât membrana plană de aceeași grosime, $(E_1)_t < E$. Pe direcție circumferențială, membrana ondulată este mai rigidă decât membrana plană, respectiv, $(E_2)_t > E$.

Se introduc coeficienții $(k_1)_t$ și $(k_2)_t$, mai mari decât unitatea și se presupune că:

$$(E_1)_t = \frac{E}{(k_1)_t}; \quad (E_2)_t = E(k_2)_t; \quad (3.111)$$

$$(E_1)_i = \frac{E}{(k_1)_i}; \quad (E_2)_i = E(k_2)_i. \quad (3.111')$$

Legea lui Hooke, pentru întindere și încovoiere, cu aceste relații devine:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1)_t &= \frac{(\sigma_1)_t}{(E_1)_t} - (\mu_2)_t \frac{(\sigma_2)_t}{(E_2)_t}; & (\varepsilon_2)_t &= \frac{(\sigma_2)_t}{(E_2)_t} - (\mu_1)_t \frac{(\sigma_1)_t}{(E_1)_t}; \\ (\varepsilon_1)_i &= \frac{(\sigma_1)_i}{(E_1)_i} - (\mu_2)_i \frac{(\sigma_2)_i}{(E_2)_i}; & (\varepsilon_2)_i &= \frac{(\sigma_2)_i}{(E_2)_i} - (\mu_1)_i \frac{(\sigma_1)_i}{(E_1)_i}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Se examinează valorile coeficienților lui Poisson $(\mu_1)_t$, $(\mu_2)_t$, $(\mu_1)_i$ și $(\mu_2)_i$. Se presupune că, asupra elementului ondulat s-au aplicat numai tensiuni unitare circumferențiale $(\sigma_2)_t$ și $(\sigma_2)_i$ - în lungul gofrajului. Contractia transversală, va fi aceeași ca și pentru membrana plană, deci:

$$(\mu_2)_t = (\mu_2)_i = \mu, \quad (3.113)$$

unde μ , este coeficientul lui Poisson. Conform principiului reciprocității, lungirea specifică pe direcție radială, provocată de tensiuni unitare σ , aplicate pe direcție circumferențială, este egală cu cea produsă pe direcție circumferențială sub acțiunea acelorași tensiuni unitare radiale, deci:

$$\frac{(\mu_2)_t}{(E_2)_t} = \frac{(\mu_1)_t}{(E_1)_t}; \quad \frac{(\mu_2)_i}{(E_2)_i} = \frac{(\mu_1)_i}{(E_1)_i}; \quad (3.114)$$

$$(\varepsilon_1)_t = \frac{(k_1)_t}{E} \left[(\sigma_1)_t - \frac{\mu}{(k_1)_t (k_2)_t} (\sigma_2)_t \right]; \quad (3.115)$$

$$(\varepsilon_2)_t = \frac{1}{(k_2)_t E} [(\sigma_2)_t - \mu(\sigma_1)_t];$$

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_1)_i &= \frac{(\mathbf{k}_1)_i}{\mathbf{E}} \left[(\sigma_1)_i - \frac{\mu}{(\mathbf{k}_1)_i (\mathbf{k}_2)_i} (\sigma_2)_i \right]; \\
 (\varepsilon_2)_i &= \frac{1}{(\mathbf{k}_2)_i \mathbf{E}} [(\sigma_2)_i - \mu (\sigma_1)_i].
 \end{aligned}
 \tag{3.116}$$

3.4.2. Stabilirea ecuațiilor deplasărilor mari ale membranei plane orizontale anizotrope

Toate ecuațiile de echilibru și de continuitate ale deformațiilor și deplasărilor rămân neschimbate, independent de faptul că, învelișul este izotrop sau anizotrop. Introducându-se coeficienții de anizotropie în ecuația (3.34) și ținându-se cont de relațiile (3.115), rezultă:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_1)_t &= \frac{(\mathbf{k}_1)_t}{\mathbf{E}h} \left[\mathbf{T}_1 - \frac{\mu}{(\mathbf{k}_1)_t (\mathbf{k}_2)_t} \mathbf{T}_2 \right]; \\
 (\varepsilon_2)_t &= \frac{1}{(\mathbf{k}_2)_t \mathbf{E}h} [\mathbf{T}_2 - \mu \mathbf{T}_1];
 \end{aligned}
 \tag{3.117}$$

$$(\varepsilon_1)_i = -z\vartheta'; \quad (\varepsilon_2)_i = -z \frac{\vartheta}{r};
 \tag{3.118}$$

și rezolvând relațiile (3.117) în funcție de $(\sigma_1)_i$ și $(\sigma_2)_i$, se obține:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1)_i &= -\frac{\mathbf{E}z}{(\mathbf{k}_1)_i \left[1 - \frac{\mu^2}{(\mathbf{k}_1)_i (\mathbf{k}_2)_i} \right]} \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{r} \right); \\
 (\sigma_2)_i &= -\frac{(\mathbf{k}_2)_i \mathbf{E}z}{1 - \frac{\mu^2}{(\mathbf{k}_1)_i (\mathbf{k}_2)_i}} \left[\frac{\vartheta}{r} + \frac{\mu}{(\mathbf{k}_1)_i (\mathbf{k}_2)_i} \vartheta' \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.119}$$

Pentru momentele încovoietoare, în locul relațiilor (3.35) se obține:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_1 &= -\frac{\mathbf{D}_\bullet}{(\mathbf{k}_1)_i} \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{r} \right); \\
 \mathbf{M}_2 &= -(\mathbf{k}_2)_i \mathbf{D}_\bullet \left[\frac{\vartheta}{r} + \frac{\mu}{(\mathbf{k}_1)_i (\mathbf{k}_2)_i} \vartheta' \right];
 \end{aligned}
 \tag{3.120}$$

$$\mathbf{D}_\bullet = \frac{\mathbf{E}h^3}{12 \left[1 - \frac{\mu^2}{(\mathbf{k}_1)_i (\mathbf{k}_2)_i} \right]}.
 \tag{3.121}$$

Înlocuind pe $(\varepsilon_1)_t$ și $(\varepsilon_2)_t$ din relațiile (3.117), în locul relației (3.26), se obține:

$$-r(\mathbf{T}_1 r)'' - (\mathbf{T}_1 r)' + (\mathbf{k}_1)_t \cdot (\mathbf{k}_2)_t \frac{\mathbf{T}_1 r}{r} = \mathbf{E}h(\mathbf{k}_2)_t \frac{\vartheta^2}{2}.
 \tag{3.122}$$

În această ecuație, unghiul θ și sarcina p_t , se presupun a fi nule. Cea de-a doua ecuație se obține din ecuația de echilibru (3.16), eliminând pe M_1 și M_2 .

$$r\vartheta'' + \vartheta' - (k_1)_t \cdot (k_2)_t \frac{\vartheta}{r} = \frac{(k_1)_t}{D_s} T_1 r \vartheta = \frac{(k_1)_t p r^2}{2D_s}; \quad (3.123)$$

în care de asemenea $\theta = 0$, iar $F(r) = -\frac{pr^2}{2}$. Se introduc mărimile adimensionale:

$$\rho = \frac{r}{r_1}; \quad \psi_s = -\frac{T_1 r}{E h r_1 (k_2)_t}; \quad k_s = 12 \left[(k_1)_t (k_2)_t - \mu^2 \right] \frac{r_1^2}{h^2}; \quad (3.124)$$

$$v_s = \frac{p r_1^3}{2D_s} (k_1)_t; \quad m^2 = (k_1)_t (k_2)_t; \quad n = (k_1)_t (k_2)_t.$$

Ecuatiile (3.122) și (3.123) capătă acum forma:

$$\rho \ddot{\psi} + \dot{\psi} - m^2 \frac{\psi}{\rho} = \frac{\vartheta^2}{2}; \quad (3.125)$$

$$\rho \ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} - n \frac{\vartheta}{\rho} = -k_s \psi \vartheta + v_s \rho^2.$$

Acestea sunt ecuațiile membranei anizotrope plane, care are săgeți mari. În cazul în care, coeficienții de anizotropie sunt egali cu unitatea, sistemul (3.125) se reduce la sistemul (3.50).

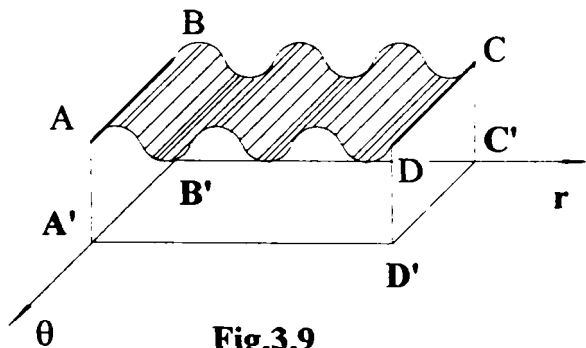


Fig.3.9

Se examinează porțiunea dreptunghiulară ABCD, a membranei ondulate, din fig.3.9 și se determină cum diferă rigiditatea ei la încovoiere și întindere, pe direcție radială și circumferențială, față de rigiditatea aceleiași porțiuni A'B'C'D', plană.

Gofrajul studiat se consideră un gofraj omogen, care are periodicitate la un număr destul de mare de undulații, în lungul razei membranei.

Evident că la întinderea dreptunghiurilor considerate pe direcția AB și A'B', adică pe direcție circumferențială, rigiditatea plăcii ondulate va fi mai mare decât rigiditatea dreptunghiului plan, deoarece, lungimea arcului AD, este mai mare decât segmentul A'D'.

Astfel, coeficientul $(k_2)_t$ se poate determina, ca și raportul dintre lungimea arcului meridianului și proiecția lui pe direcția razei

$$(k_2)_t = \frac{AD}{A'D'}.$$

Dacă notăm, ca și mai înainte, prin θ unghiul de pantă al arcului meridianului (fig.3.9) atunci:

$$(k_2)_t = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{dr}{\cos \theta}, \quad (3.126)$$

unde l , este lungimea ondulației gofrajului.

La încovoierea plăcilor în planul radial, rigiditatea benzii ondulate va fi mai mică decât a celei neondulate, de atâtea ori de câte ori lungimea arcului AD este mai mare decât a lui A'D'. Rezultă deci:

$$(k_1)_t = (k_2)_t \quad (3.127)$$

Pentru determinarea coeficientului $(k_1)_t$ se determină alungirea benzii ondulate (fig.3.10) sub acțiunea forței radiale F . Alungirea se determină cu ajutorul metodei lui Mohr.

$$\Delta l = \int_s \frac{M_p M_1}{EI} ds + \int_s \frac{N_p N_1}{EA} ds$$

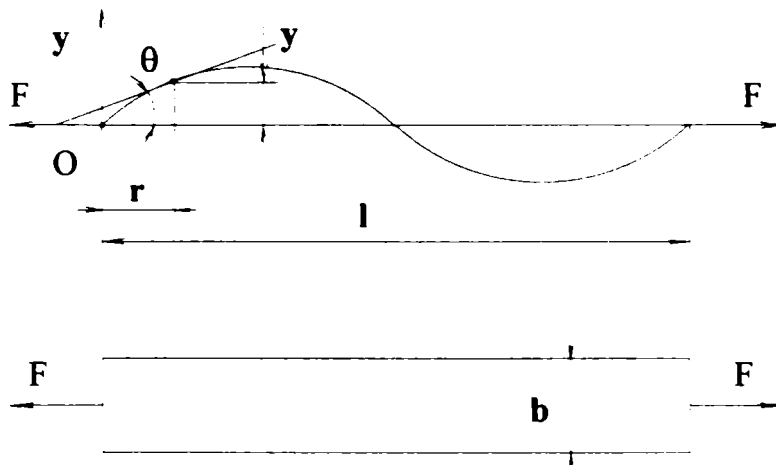


Fig.3.10

- $I = \frac{bh^3}{12}$ este momentul de inerție al benzii de lățime b ;
- $A = bh$ este aria secțiunii transversale a benzii;
- s lungimea arcului meridianului;
- M_p și N_p sunt momentul încovoiător și forța normală în secțiunea transversală a benzii (apar sub acțiunea forței F);
- M_1, N_1 reprezintă aceleași mărimi, ca și în cazul sarcinii unitare adică: $M_p = Fy$; $M_1 = ly$; $N_p = F \cos \theta$; $N_1 = l \cos \theta$.

Se notează cu y , distanța de la linia de acțiune a forței F , până la punctul curent al arcului meridian (fig.3.10).

Ținând cont că $ds = \frac{dr}{\cos \theta}$, se obține:

$$\Delta l = \frac{F}{EI} \int_0^l \frac{y^2 dr}{\cos \theta} + \frac{F}{EA} \int_0^l \cos \theta dr$$

Dacă gofrajul lipsește, atunci: $\Delta l = \frac{Fl}{EA}$. Raportul primei valori a lui Δl față de a doua, dă valoarea coeficientului căutat.

$$(k_1)_t = \frac{12}{h^2 l} \int_0^l \frac{y^2 dr}{\cos \theta} + \frac{1}{l} \int_0^l \cos \theta dr \quad (3.128)$$

Relațiile (3.127) și (3.128) depind de forma gofrajului. Rămâne de aflat coeficientul $(k_2)_t$ care arată de câte ori rigiditatea benzii ondulate la încovoiere pe direcție circumferențială, este mai mare decât rigiditatea benzii neondulate. Este evident că $(k_2)_t = \frac{I_z}{12lh^3}$, unde I_z este momentul

de inerție al secțiunii curbilini (fig.3.10), în raport cu axa absciselor; $\frac{lh^3}{12}$ reprezintă momentul de inerție al secțiunii benzii plane, de lățime l . Pentru dreptunghiul elementar din fig.3.11, momentul de inerție are valoarea:

$$\frac{dr}{12} \left(\frac{h}{\cos\theta} \right)^3 + \frac{h dr}{\cos\theta} y^2.$$

Efectuând integrarea în raport cu l , rezultă:

$$I_2 = h \int_0^l \frac{y^2 dr}{\cos\theta} + \frac{h^3}{12} \int_0^l \frac{dr}{\cos^3\theta}.$$

Cu aceste relații coeficientul căutat are valoarea:

$$(k_2)_i = \frac{12}{h^2 l} \int_0^l \frac{y^2 dr}{\cos\theta} + \frac{1}{l} \int_0^l \frac{dr}{\cos^3\theta}. \quad (3.129)$$

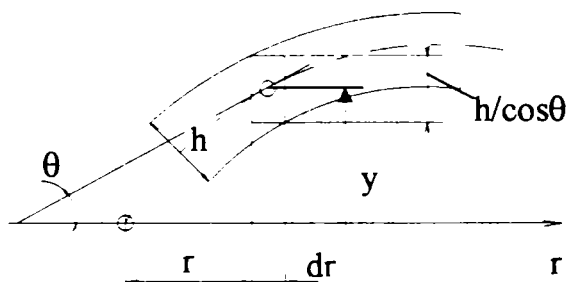


Fig.3.11

Astfel expresiile (3.126) ÷ (3.129) permit determinarea celor patru coeficienți de anizotropie constructivă, pentru orice formă de gofraj.

În tabelul A3.2 din Anexa 3 sunt date rezultatele calculului acestor coeficienți pentru câteva forme de gofraj, mai des întâlnite.

3.4.3. Construirea caracteristicii membranei ondulate

Revenind la ecuațiile (3.125), care se rezolvă prin aproximații, ca și în cazul membranei plane, o primă problemă care apare, constă în alegerea funcției ϑ . Pentru membrana plană, într-o primă aproximație, a fost adoptată relația (3.59), adică: $\vartheta = C(\rho^3 - \rho)$. S-a stabilit apoi că, prin această alegere a funcției ϑ , se obțin rezultate acceptabile, pentru săgețile care nu depășesc de trei ori grosimea membranei. Mai departe, soluția a fost îmbunătățită și relația dintre ϑ și ρ , a fost adoptată sub forma (3.75), adică: $\vartheta = C(\rho^z - \rho)$. Cunoscând exponentul z , există posibilitatea de a determina, prin calcul, caracteristica membranei, pentru o gamă foarte largă și practic nelimitată, de variație a săgeții w_0 .

În cazul membranei ondulate, dacă se adoptă pentru funcția ϑ forma simplificată (3.59), atunci domeniul de aplicare al soluției va fi foarte limitat și soluția nu va avea valoare, din punct de vedere practic. Deci, se va alege funcția ϑ de forma (3.75). În acest caz, relațiile de calcul devin extrem de greoaie și incomode pentru folosirea în practică. L.E. Andreeva a propus o metodă combinată de construire a funcției ϑ . Independent de alegerea funcției ϑ pentru placă, presiunea, în funcție de săgeată se exprimă conform relației (3.88), adică:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{A_1}{1-\mu^2} \cdot \frac{w_0}{h} + A_3 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3.$$

Același rezultat poate fi obținut și pentru placa anizotropă, deosebirea constând numai în valorile coeficienților A_1 și A_3 .

Pentru început, se admite că săgețile nu sunt prea mari, deci termenul predominant, din relația (3.88) este primul, cel care are coeficientul A_1 . Alegând funcția ϑ de forma (3.59), se determină bine primul termen, însă al doilea nu se dovedește a fi suficient de precis.

Se presupune apoi că, săgețile sunt foarte mari, deci forma plăcii încovoiate, se apropie de forma unei membranei deformate perfect flexibile și în expresia (3.88) devine predominant termenul al doilea, având coeficientul A_3 . Forma membranei perfect flexibile se determină bine prin funcția (3.75) pentru $z \rightarrow \infty$, adică:

$$\mathfrak{S} = -C\rho. \quad (3.130)$$

Deci, ca urmare a celor prezentate mai înainte, ecuația (3.88) se poate forma alegând funcția \mathfrak{S} în două variante: pentru primul termen relația (3.59), iar pentru al doilea termen relația (3.75). Așadar, revenind la ecuațiile (3.125) și înlocuind succesiv în partea dreaptă a primei ecuații formele corespunzătoare ale funcției \mathfrak{S} , se obține:

$$\begin{aligned} \rho^m \left[\frac{1}{\rho^{2m-1}} (\psi \rho^m) \right] &= \frac{C^2}{2} (\rho^6 - 2\rho^4 + \rho^2); \\ \rho^m \left[\frac{1}{\rho^{2m-1}} (\psi \rho^m) \right] &= \frac{C^2}{2} \rho^2; \end{aligned} \quad (3.131)$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{C^2}{2} \left(\frac{\rho^7}{49 - m^2} - \frac{2\rho^5}{25 - m^2} + \frac{\rho^3}{9 - m^2} + a\rho^m + b\rho^{-m} \right); \\ \psi &= \frac{C^2}{2} \left(\frac{\rho^3}{9 - m^2} + a\rho^m + b\rho^{-m} \right). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Din condiția pusă ca funcția ψ , în originea axelor de coordonate să fie nulă, rezultă pentru constanta b , valoarea zero. Constanta a se determină din condiția de încastrare perfectă pe contur, de unde se deduc succesiv valorile:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{m - \mu} \left[\frac{7 - \mu}{49 - m^2} - \frac{2(5 - \mu)}{25 - m^2} + \frac{3 - \mu}{9 - m^2} \right]; \\ a &= -\frac{3 - \mu}{(m - \mu)(9 - m^2)}. \end{aligned} \quad (3.132')$$

Înlocuind funcțiile ψ , în cea de-a doua ecuație (3.125), înmulțind rezultatul, în primul caz cu $(\rho^3 - \rho)$, iar în cel de-al doilea caz cu ρ , apoi integrând în raport cu ρ , între limitele zero și unitatea, se obțin următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \frac{C}{2} \left(1 + \frac{n}{3} \right) &= \frac{C^3}{2} k_s \left[\frac{1}{210(49 - m^2)} - \frac{1}{60(25 - m^2)} + \frac{1}{60[9 - m^2]} + \frac{8a}{(m + 7)(m + 5)(m + 3)} \right] + \frac{v_s}{12}; \\ -\frac{C}{2} (1 - n) &= \frac{C^3}{2} k_s \left[\frac{1}{6(9 - m^2)} + \frac{a}{m + 3} \right] + \frac{v_s}{4}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Săgeata, corespunzător formei adoptate pentru funcția \mathfrak{S} va fi:

$$w = \frac{Cr_1}{4} (1 - \rho^2)^2; \quad w = \frac{Cr_1}{2} (1 - \rho^2). \quad (3.134)$$

Săgeata maximă pentru cele două cazuri, este:

$$w_0 = \frac{Cr_1}{4}; \quad w_0 = \frac{Cr_1}{2}. \quad (3.134')$$

Folosind notațiile din relațiile (5.124) și eliminând din ultimele ecuații pe k_a , v_a și C , se obține:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{4(3+n)}{3(k_2)_t \left(1 - \frac{\mu^2}{n}\right)} \cdot \frac{w_0}{h} + 128(k_2)_t \cdot \left[\frac{48}{(m+7)(m+5)(m+3)(m-\mu)} \left(\frac{7-\mu}{49-m^2} - \frac{2(5-\mu)}{25-m^2} + \frac{3-\mu}{9-m^2} \right) - \frac{1}{35(49-m^2)} + \frac{1}{10(25-m^2)} - \frac{1}{10(9-m^2)} \right] \left(\frac{w_0}{h} \right)^3;$$

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{2(n-1)}{3(k_2)_t \left(1 - \frac{\mu^2}{n}\right)} \cdot \frac{w_0}{h} + \frac{32(k_2)_t}{m^2-9} \left[\frac{1}{6} - \frac{3-\mu}{(m-\mu)(m+3)} \right] \left(\frac{w_0}{h} \right)^3. \quad (3.135)$$

Din cele două ecuații obținute se alcătuieste o ecuație combinată, luând termenul linear din prima ecuație, iar cel cubic din a doua, obținându-se caracteristica membranei, în următoarea formă:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \frac{4(3+n)}{3(k_2)_t \left(1 - \frac{\mu^2}{n}\right)} \cdot \frac{w_0}{h} + \frac{32(k_2)_t}{m^2-9} \left[\frac{1}{6} - \frac{3-\mu}{(m-\mu)(m+3)} \right] \left(\frac{w_0}{h} \right)^3. \quad (3.136)$$

Construirea caracteristicii membranei se realizează în modul următor: pentru forma respectivă a profilului, se determină coeficienții anizotropiei constructive, din relațiile (3.126) ÷ (3.129), apoi se determină coeficienții m și n , din relațiile (3.124), iar apoi cu ajutorul expresiei (3.136) se stabilește relația între presiune și săgeată, deci caracteristica membranei.

3.5. MEMBRANA POCNITOARE

Prin membrană pocnitoare se înțelege, o calotă sferică, cu pereții subțiri, având un unghi la centru mic, executată dintr-un material cu limita de elasticitate ridicată.

Membrana pocnitoare, aflată sub acțiunea sarcinilor aplicate, și în special, a sarcinii uniform distribuite pe partea convexă, își pierde stabilitatea, în anumite condiții. Grosimea mică a pereților învelișului, cât și limita de elasticitate ridicată, a materialului, asigură menținerea completă a proprietăților elastice. O asemenea pierdere a stabilității, care nu este urmată de degradarea piesei, este denumită *pocnitură* și membrana, *membrană pocnitoare*.

Proprietatea membranei pocnitoare de a-și schima săgeata în salturi, își găsește aplicații în construcția de aparate, folosindu-se într-o serie de cazuri și ca generator de undă elastică.

În continuare, se deduce caracteristica membranei pocnitoare, adică, se determină relația între săgeata ei și presiunea exterioară [63].

Pentru învelișul sferic (fig.3.12), se obține:

$$\sin \theta = \frac{r}{R} = \frac{r_1}{R} \rho. \quad (3.137)$$

Deoarece unghiul θ este mic,

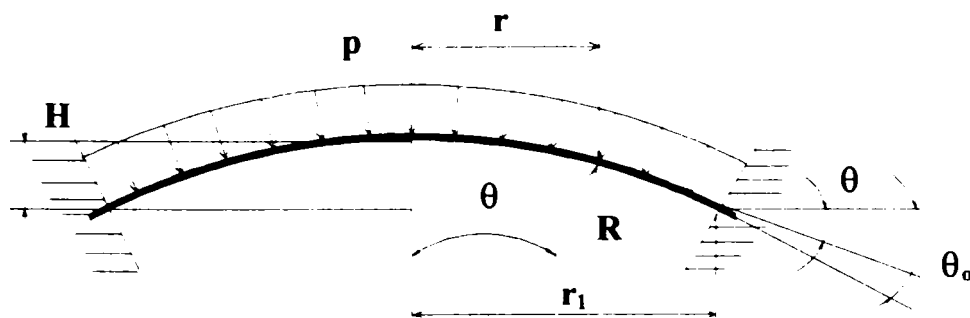


Fig.3.12

$$\theta = \frac{r_1}{R} \rho; \quad \theta_1 = \frac{r_1}{R}; \quad \theta = \theta_1 \rho; \quad (3.138)$$

se poate scrie, de asemenea:

$$H = R(1 - \cos \theta_1) \approx \frac{R\theta_1^2}{2}. \quad (3.139)$$

Din această expresie și din relația (3.138) rezultă:

$$\theta_1 = \frac{2H}{r_1}. \quad (3.140)$$

Dacă învelișul se află sub acțiunea presiunii p , (sarcină uniform distribuită) pe partea lui bombată, atunci funcția f , dată de prima relație (3.45) devine nulă, iar funcția φ , dată de cea de-a doua relație (3.45) devine (3.141), iar ecuațiile (3.44) capătă forma (3.142).

$$\varphi = -v\rho^2. \quad (3.141)$$

$$\rho\ddot{\psi} + \dot{\psi} - \frac{\psi}{\rho} = \vartheta \left(\theta_1 \rho + \frac{\vartheta}{2} \right); \quad (3.142)$$

$$\rho\ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} - \frac{\vartheta}{\rho} = -k\psi(\theta_1 \rho + \vartheta) + v\rho^2.$$

Pentru $\theta = 0$, aceste relații devin identice cu ecuațiile (3.50) ale membranei plane, care a fost examinată mai înainte.

Pentru revolvarea sistemului de ecuații (3.142), se presupune că, este dată ecuația suprafeței elastice a învelișului. De asemenea, se consideră că, deplasările verticale ale învelișului variază, în funcție de rază, după aceeași lege ca și placa circulară, în cazul săgeților mici, adică, după o curbă de gradul al patrulea; în acest caz, unghiul de rotire ϑ , al arcului de meridian se exprimă, în funcție de raza ρ , printr-o ecuație de gradul al treilea, $\vartheta = C(\rho^3 - \rho)$, unde C este o constantă arbitrară, care depinde de presiunea p , sau de parametrul presiunii ϑ .

Pentru $\rho = 0$ și $\rho = 1$, unghiul ϑ devine nul, în baza condițiilor de simetrie și de încastrare marginală.

Înlocuind expresia adoptată pentru ϑ , în prima ecuație a sistemului (3.142), se obține:

$$\rho \left[\frac{1}{\rho} (\psi \rho) \right]' = C(\rho^3 - \rho) \left[\theta_1 \rho + \frac{1}{2} C(\rho^3 - \rho) \right]. \quad (3.143)$$

Integrând de două ori, se determină ψ :

$$\psi = \frac{1}{96} C^2 (\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3) + \frac{1}{24} C\theta_1 (\rho^5 - 3\rho^3) + A\rho + \frac{B}{\rho}, \quad (3.144)$$

unde A și B , sunt constante arbitrare, care trebuie determinate din condiții la limită.

Întrucât, $\psi = -\frac{T_1 r}{Ehr_1}$, iar efortul de întindere T_1 , din centrul învelișului, are o mărime finită,

rezultă că, pentru $\rho = 0$, $\psi = 0$. Această condiție este îndeplinită, numai în cazul în care, $B = 0$. Ca și pentru membranele metalice, se vor examina două cazuri de fixare și anume, încastrarea perfectă și încastrarea liberă.

În primul caz, unghiul de rotire și deplasarea radială pe contur sunt nule; de aceea, în baza relației (3.64") dacă, $\rho = 1$, se obține:

$$\dot{\psi} - \mu \frac{\psi}{\rho} = 0. \quad (3.145)$$

Pentru încastrarea liberă, tensiunea T_1 , pe contur este nulă și pentru $\rho = 1$, $\psi = 0$. Din aceste condiții, se determină valoarea lui A :

- pentru încastrarea liberă,

$$A = -\frac{3}{96} C^2 + \frac{2}{24} C\theta_1; \quad (3.146)$$

- pentru încastrarea perfectă,

$$A = -\frac{1}{96} C^2 \frac{5-3\mu}{1-\mu} + \frac{1}{24} C\theta_1 \frac{4-2\mu}{1-\mu}. \quad (3.146')$$

Astfel, funcțiile ϑ și ψ , satisfac condițiile la limită și prima dintre ecuațiile (3.142). Dacă se înlocuiesc funcțiile ψ și ϑ , în cea de-a doua ecuație (3.142) și se efectează calculele, se obține pentru încastrarea liberă:

$$-C^3 \frac{1}{1792} + C^2 \theta_1 \frac{1}{384} + C \left(-\frac{\theta_1^2}{360} - \frac{2}{3k} \right) = -\frac{1}{12} \frac{v}{k}; \quad (3.147)$$

$$w = Cr_1 \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} \right) + C_3. \quad (3.148)$$

Pentru $\rho = 1$, vom avea:

$$\begin{aligned} \psi &= 0; & C_3 &= \frac{Cr_1}{4}; \\ w &= \frac{Cr_1}{4} (1 - \rho^2)^2. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Săgeata maximă w_0 , se află în centrul membranei, la $\rho = 0$, având valoarea:

$$w_0 = \frac{Cr_1}{4}. \quad (3.150)$$

În baza ultimei expresii și a celor expuse anterior:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{2H}{r_1}; & C &= \frac{4w_0}{r_1}; \\ k &= 12(1-\mu^2)\frac{r_1^2}{h^2}; & v &= k\frac{pr_1}{2Eh}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

După înlocuirea acestor expresii în relația (3.147), rezultă:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \left(\frac{16}{15} \frac{H^2}{h^2} + \frac{16}{3(1-\mu)} \right) \frac{w_0}{h} - 2 \frac{H}{h} \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 \quad (3.152)$$

Dacă se efectuează o transformare similară, pentru cazul încastrării perfecte, se obține o relație analogă, care leagă presiunea p de săgeata w_0 , și anume:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \left(\frac{8}{15} \frac{7-2\mu}{1-\mu} \frac{H^2}{h^2} + \frac{16}{3(1-\mu^2)} \right) \frac{w_0}{h} - 2 \frac{3-\mu}{1-\mu} \frac{H}{h} \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 + \frac{2}{21} \frac{23-9\mu}{1-\mu} \left(\frac{w_0}{h} \right)^3, \quad (3.153)$$

sau pentru $\mu = 0,3$

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \left(4,88 \frac{H^2}{h^2} + 5,87 \right) \frac{w_0}{h} - 7,71 \frac{H}{h} \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 + 2,76 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 \quad (3.153')$$

Astfel, în ambele cazuri, s-a obținut o relație cubică între presiunea p și săgeata w_0 , a membranei.

În fig.3.13 este reprezentată familia de curbe $\frac{pr_1^4}{Eh^4} = f\left(\frac{w_0}{h}\right)$, pentru diferite valori ale parametrului $\frac{H}{h}$, în cazul încastrării perfecte [63].

Din figură se observă că:

- pentru, $H/h = 0$, și valori mici ale lui H , comportarea este similară membranei plane, caracteristica având un caracter monoton crescător.
- odată cu creșterea înălțimii H , la început, apare o mărire a rigidității inițiale, iar mai apoi, deranjarea alurii monoton crescătoare, a curbei. La o anumită valoare a lui H/h (în cazul încastrării perfecte pentru $H/h \approx 1,6$ iar în cazul încastrării libere pentru $H/h \approx 3,5$) apare pe curbă, o porțiune cu derivata negativă, situată între două puncte extreme. Această zonă poate fi numită porțiunea de rigiditate negativă, întrucât creșterea săgeții se produce odată cu micșorarea sarcinii.

Se poate arăta că, acest regim de lucru al membranei este instabil, iar presiunile care corespund punctelor extreme, sunt *presiuni critice*.

După ce presiunea atinge prima valoare extremă a caracteristicii, evitând porțiunea instabilă, membrana își modifică săgeata printr-un salt; mai departe, se lucrează pe partea din dreapta, ascendentă, stabilă, a curbei.

Descărcarea membranei provoacă o variație în formă de salt a săgeții, care corespunde celei de a doua presiuni critice, numai dacă tensiunile unitare din ea au rămas în regim elastic, cu ocazia primului salt.

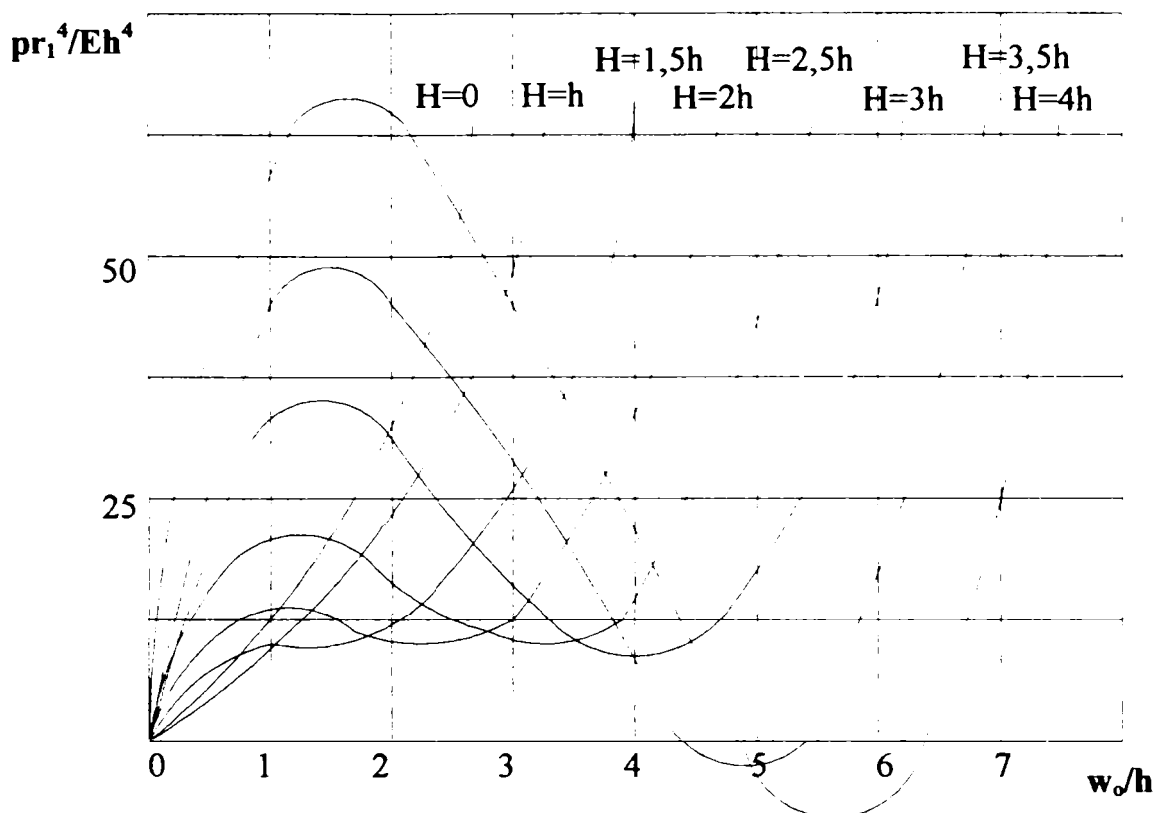


Fig.3.13

De exemplu, pentru $H/h = 2$, la aceeași presiune de încărcare există două valori ale săgeții, deci are loc un salt de săgeată (se produce o pocnitură); tot pentru $H/h = 2$, la aceeași presiune de descărcare există două săgeți (se produce a doua pocnitură). Salturile de săgeată reprezintă pierderea stabilității membranei.

Valoarea raportului H/h , care determină apariția primei pocnituri, se numește valoare critică. Pentru caracteristica dată, pentru fiecare raport H/h , vor exista două presiuni critice, la încărcare și la descărcare, corespunzătoare saltului de săgeată.

- c) creșterea continuă a înălțimii H , după cum se observă din curba de pe fig.3.13, provoacă o accentuare a modificării formei caracteristicii și pentru un anumit raport H/h ($H/h = 7,6$ - la încastrarea liberă și $H/h = 3,4$ - la încastrarea perfectă) curba începe să intersecteze axa absciselor.

Învelișul are, prin urmare, la presiunea $p = 0$, trei forme de echilibru, din care două stabile, iar a treia (cea intermediară) instabilă (unde la cea mai mică perturbație, trece într-una stabilă).

După deformare, membrana nu mai revine în poziția inițială, după pocnitură, chiar dacă este descărcată și chiar dacă tensiunile unitare din ea, rămân în domeniul elastic. Pentru a readuce membrana în poziția inițială, este necesar să i se aplice o sarcină de semn contrar, până la producerea celei de-a doua pocnituri, când sarcina este înlăturată.

Se va determina valoarea raportului H/h , la care membrana sferică primește capacitatea de a pocni. Pentru aceasta, se scriu relațiile (3.152) și (3.153) într-o formă generalizată:

$$\frac{pr_1^4}{Eh^4} = \left(A_1 \frac{H^2}{h^2} + A_0 \frac{1}{1-\mu^2} \right) \frac{w_0}{h} - A_2 \frac{H}{h} \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 + A_3 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3, \quad (3.154)$$

- pentru încastrarea liberă,

$$A_0 = \frac{16}{3}; \quad A_1 = \frac{16}{15}; \quad A_2 = 2; \quad A_3 = \frac{6}{7}; \quad (3.154')$$

- pentru încastrarea perfectă,

$$A_0 = \frac{16}{3}; \quad A_1 = \frac{8}{15} \frac{7-2\mu}{1-\mu}; \quad A_2 = 2 \frac{3-\mu}{1-\mu}; \quad A_3 = \frac{2}{21} \frac{23-9\mu}{1-\mu}. \quad (3.154'')$$

Derivând relația (3.154) în raport cu w_0/h și egalând cu zero derivata obținută, rezultă:

$$\left(A_1 \frac{H^2}{h^2} + A_0 \frac{1}{1-\mu^2} \right) + A_2 \frac{H}{h} \frac{w_0}{h} + 3A_3 \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 = 0. \quad (3.155)$$

Rezolvând această ecuație în w_0/h , se determină, pentru caracteristica dată, soluțiile care, în funcție de valoarea raportului H/h pot fi, ambele reale sau ambele imaginare. Dacă soluția are o valoare reală, atunci membrana sferică produce pocnitura, la o presiune suficient de mare. Pentru aceasta discriminantul ecuației (3.155) trebuie să fie pozitiv, adică:

$$4A_2^2 \frac{H^2}{h^2} - 12A_3 \left(A_1 \frac{H^2}{h^2} + A_0 \frac{1}{1-\mu^2} \right) \geq 0, \quad (3.156)$$

$$\frac{H}{h} \geq \sqrt{\frac{3A_0A_3}{(1-\mu^2)(A_2^2 - 3A_1A_3)}}. \quad (3.157)$$

Valoarea critică a parametrului H/h , care determină apariția pocniturii, este:

- în cazul încastrării libere,

$$\left(\frac{H}{h} \right)_{cr} = \sqrt{\frac{120}{11(1-\mu^2)}} \approx 3,5; \quad (3.157')$$

- în cazul încastrării perfecte,

$$\left(\frac{H}{h} \right)_{cr} = \sqrt{\frac{40(23-9\mu)}{(1+\mu)[105(3-\mu)^2 - 4(7-2\mu)(23-9\mu)]}} \approx 1,6. \quad (3.157'')$$

Din ecuația (3.155) rezultă:

$$\frac{w_0}{h} = \frac{1}{3A_3} \left[A_2 \frac{H}{h} \pm \sqrt{\frac{H^2}{h^2} (A_2^2 - 3A_1A_3) - A_0A_3 \frac{3}{1-\mu^2}} \right]. \quad (3.158)$$

Înlocuind această valoare în relația (3.154), se obține:

$$\left(\frac{pr_1^4}{Eh^4}\right)_{cr_2} = k_1 \frac{H}{h} \left(k_2 \frac{H^2}{h^2} + \frac{1}{1-\mu^2}\right) \pm k_3 \left(k_4 \frac{H^2}{h^2} - \frac{1}{1-\mu^2}\right)^2; \quad (3.159)$$

$$k_1 = \frac{A_0 A_2}{A_3}; \quad k_2 = \frac{A_1 A_3 - \frac{2}{9} A_2^2}{A_0 A_3};$$

$$k_3 = 2A_3 \left(\frac{A_0}{3A_3}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad k_4 = \frac{\frac{1}{3} A_2^2 - A_1 A_3}{A_0 A_3}. \quad (3.160)$$

Semnul plus din relația (3.159) corespunde presiunii critice superioare, iar semnul minus celei inferioare.

- pentru încastrarea liberă,

$$k_1 = \frac{112}{27}; \quad k_2 = \frac{1}{180}; \quad k_3 = \frac{12}{7} \left(\frac{56}{27}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 5,121; \quad k_4 = \frac{11}{120}; \quad (3.160')$$

- pentru încastrarea perfectă,

$$k_1 = \frac{112(3-\mu)}{3(23-9\mu)} \approx 4,96;$$

$$k_2 = \frac{7-2\mu}{10(1-\mu)} - \frac{7(3-\mu)^2}{4(1-\mu)(23-9\mu)} \approx 0,0165;$$

$$k_3 = \frac{4(23-9\mu)}{21(1-\mu)} \left[\frac{56(1-\mu)}{3(23-9\mu)}\right]^{\frac{3}{2}} \approx 2,85;$$

$$k_4 = \frac{21(3-\mu)^2}{8(1-\mu)(23-9\mu)} - \frac{7-2\mu}{10(1-\mu)} \approx 0,432. \quad (3.160'')$$

Folosind valorile numerice ale coeficientului k , date de relațiile (3.160') și (3.160''), se pot calcula valorile presiunii critice superioare și a celei inferioare.

În baza relației (3.159), pentru încastrarea liberă, dacă raportul $H/h > 7,6$ și pentru cea perfectă, dacă $H/h > 3,4$, a doua presiune critică, p_{cr2} devine negativă. În acest caz, membrana sferică după pocnitură, nu mai revine la forma inițială, după înlăturarea presiunii exterioare.

Compararea curbelor obținute prin calcul, cu datele experimentale, arată că, pocnirea membranei sferice, atât într-un sens, cât și în celălalt, se produce în intervalul dintre presiunea critică superioară și cea inferioară.

Astfel, la încărcare, pocnitura se produce la o presiune p , ceva mai mică decât presiunea critică superioară, iar la descărcare, la o presiune mai mare, decât cea critică inferioară. Diferența dintre curba teoretică și cea experimentală se datorează, pe de o parte aproximației introdusă în calcul, iar pe de altă parte imperfecțiunii formei membranei, adică abaterilor inevitabile ale formei obiectului real, de la schema de calcul adoptată.

3.6. ALGORITMUL GENERAL DE PROIECTARE AL MEMBRANELOR

3.6.1. Parametri de intrare. Parametri de ieșire

Decelarea parametrilor de intrare, în algoritmul de proiectare, se poate face pornind de la funcțiile îndeplinite de membranele metalice în sistemele tehnice (aparate, traductoare etc.) din care fac parte. În cele mai multe cazuri de utilizare a lor, membranele îndeplinesc simultan mai multe funcții elementare, sau, cu alte cuvinte, îndeplinesc funcții compuse.

a) **funcția de element elastic** este funcția de bază a membranelor metalice. Această funcție introduce caracteristica elastică sau de rigiditate exprimată ca $w = w(F)$, conform fig.3.13, sau $w = w(p)$, conform fig.3.14.

Dacă aplicația o cere caracteristica poate avea o exprimare mai generală, $w = w(F, x)$, conform fig.3.15, respectiv $w = w(p, x)$, conform fig.3.16.

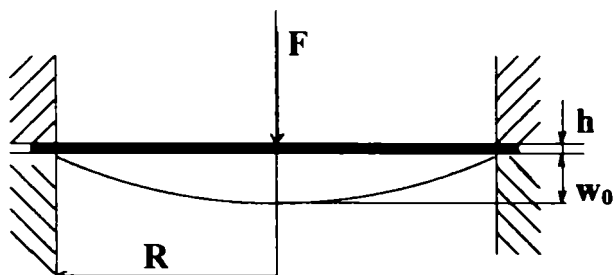


Fig.3.13

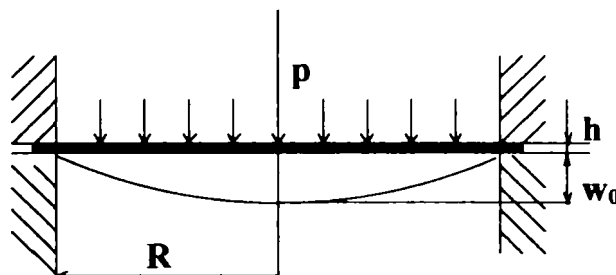


Fig.3.14

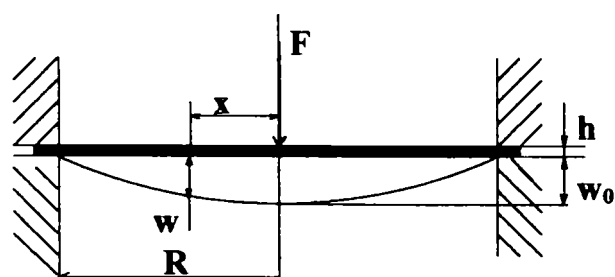


Fig.3.15

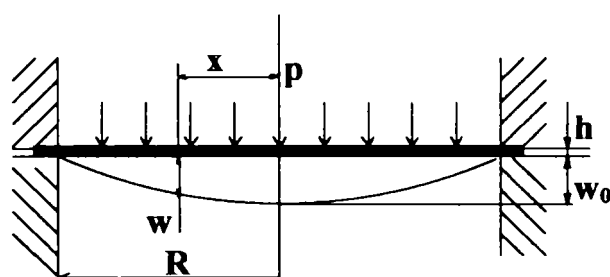


Fig.3.16

Tot legat de funcția de element elastic este necesar pentru proiectare să se cunoască, cel puțin o valoare limită F_{max} , sau p_{max} , sau w_{max} . Valorile maxime sunt corelate și ele trebuie să verifice menținerea membranei în interiorul domeniului de elasticitate, adică $\sigma_{ef} \leq \sigma_p$.

Această funcție impune alocarea unei intrări în algoritmul de proiectare.

b) **funcția de excitator**. Această funcție este importantă în cazul membranelor care intră în componența traductoarelor de presiune capacitive și a microfoanelor. Îndeplinirea acestei funcții presupune să se efectueze o dimensionare din punct de vedere electric, a membranei și a aparatului din care face parte, dimensionare care necesită următorii parametri:

- S – suprafața membranei;
- d – distanța față de armătura fixă;
- f_0 – frecvența proprie
- ϵ_r – permitivitatea relativă a mediului, din incinta "condensator" (vezi fig.3.17).

Valorile acestor parametri pot fi date de intrare în algoritmul de proiectare sau pot rezulta ca urmare a unei dimensionări, din alte condiții.

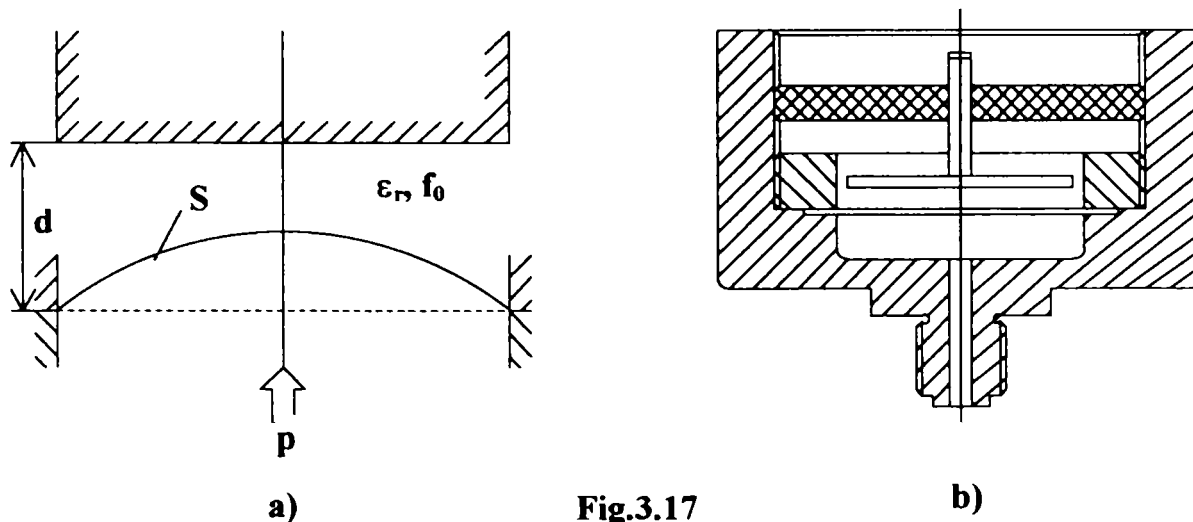


Fig.3.17

Dacă măsurarea deformației se realizează magnetic sau optic, atunci membrana trebuie să aibă permeabilitate magnetică μ_r remarcabilă (materiale feromagnetice), respectiv suprafață corespunzătoare și coeficient de reflexie R acceptabil. Astfel, membrana trebuie să comande o bobină, un fotodetector sau un alt traductor, cu scopul de a obține un semnal proporțional cu deformația membranei.

c) funcția de rezonator elastic. Fiecare corp elastic are o frecvență naturală și un set de armonici. În acest fel se comportă toate membranele. În general, această funcție este o funcție parazită dar poate fi și o funcție utilă, dacă se urmărește obținerea unui generator sonor, ultrasonor etc. Clacsonul automobilului este un rezonator cu membrană metalică.

Parametri introduși de această funcție sunt frecvențele proprii de oscilație ale membranei, respectiv ale capsulei în care este montată membrana ($\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$).

d) funcția de etanșare. Membranele tehnice sunt elemente de forme plane sau ondulate. Ele, în general, sunt utilizate ca și perete de separație a unei camere față de exterior sau între două camere interioare. Este o funcție neparametrizabilă și necesită, în cazul membranelor metalice tehnice, condiții speciale. Ea poate să fie cerută sau nu de către aplicație. Această funcție este o funcție realizabilă de către membranele nemetalice (din cauciuc).

3.6.2. Algoritmul general de proiectare

Alcătuirea acestuia pornește de la cerințele unei aplicații generalizate, de la limitele elastice ale materialelor folosite și de la limitele impuse de tehnologia de execuție a membranelor. Schema bloc a unui algoritm general de proiectare pentru o membrană este prezentat în fig.3.18.

Aplicația concretă mai poate impune un set de restricții specifice, cum ar fi :

- restricții de gabarit;
- restricții privind domeniul de temperaturi de funcționare;
- restricții provenite de la mediul în care se utilizează etc.

Algoritmul general de proiectare include pentru datele de ieșire recomandări generale, privind tehnologia de execuție, precum și condițiile tehnice de calitate.

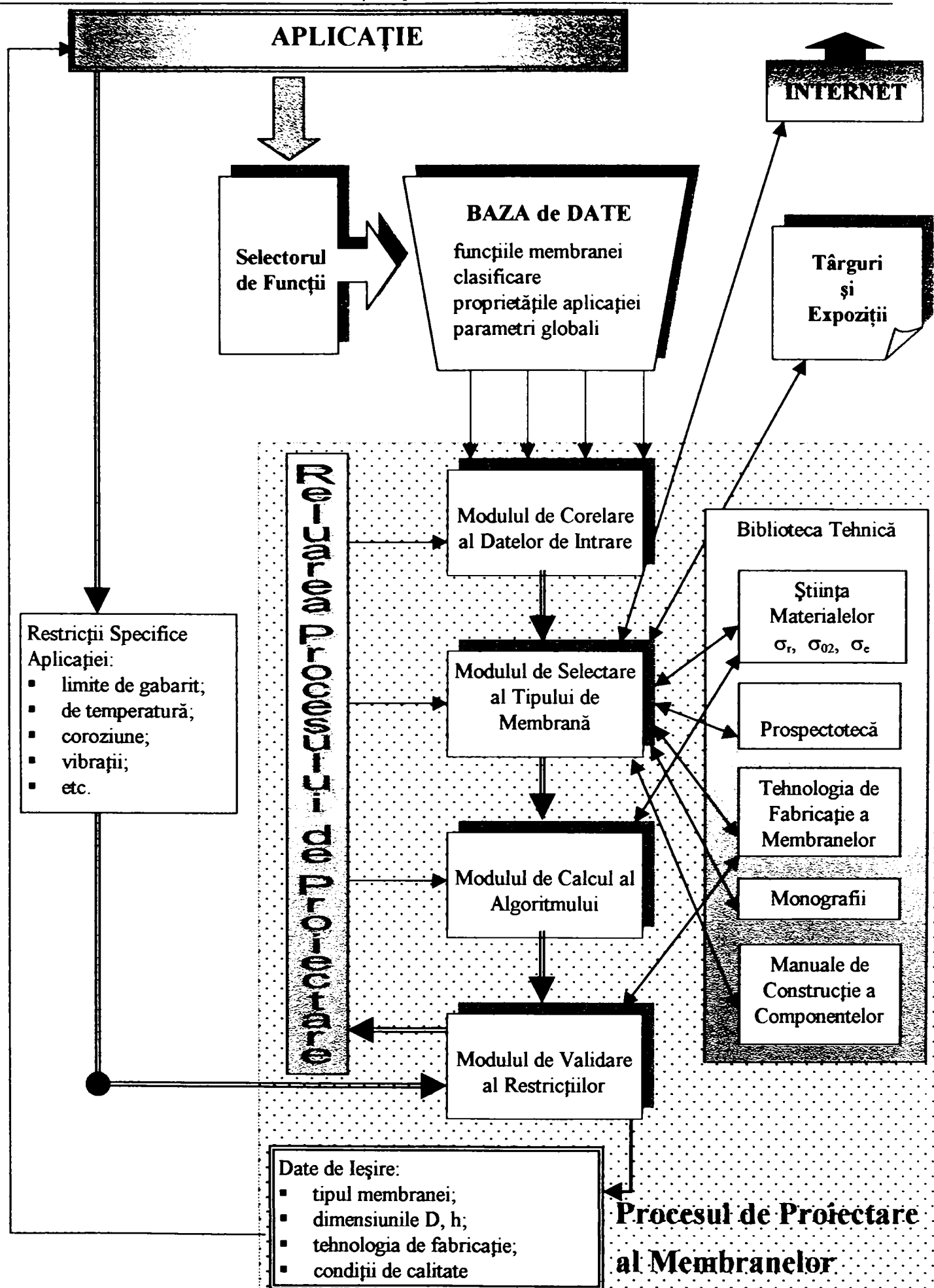


Fig.3.18

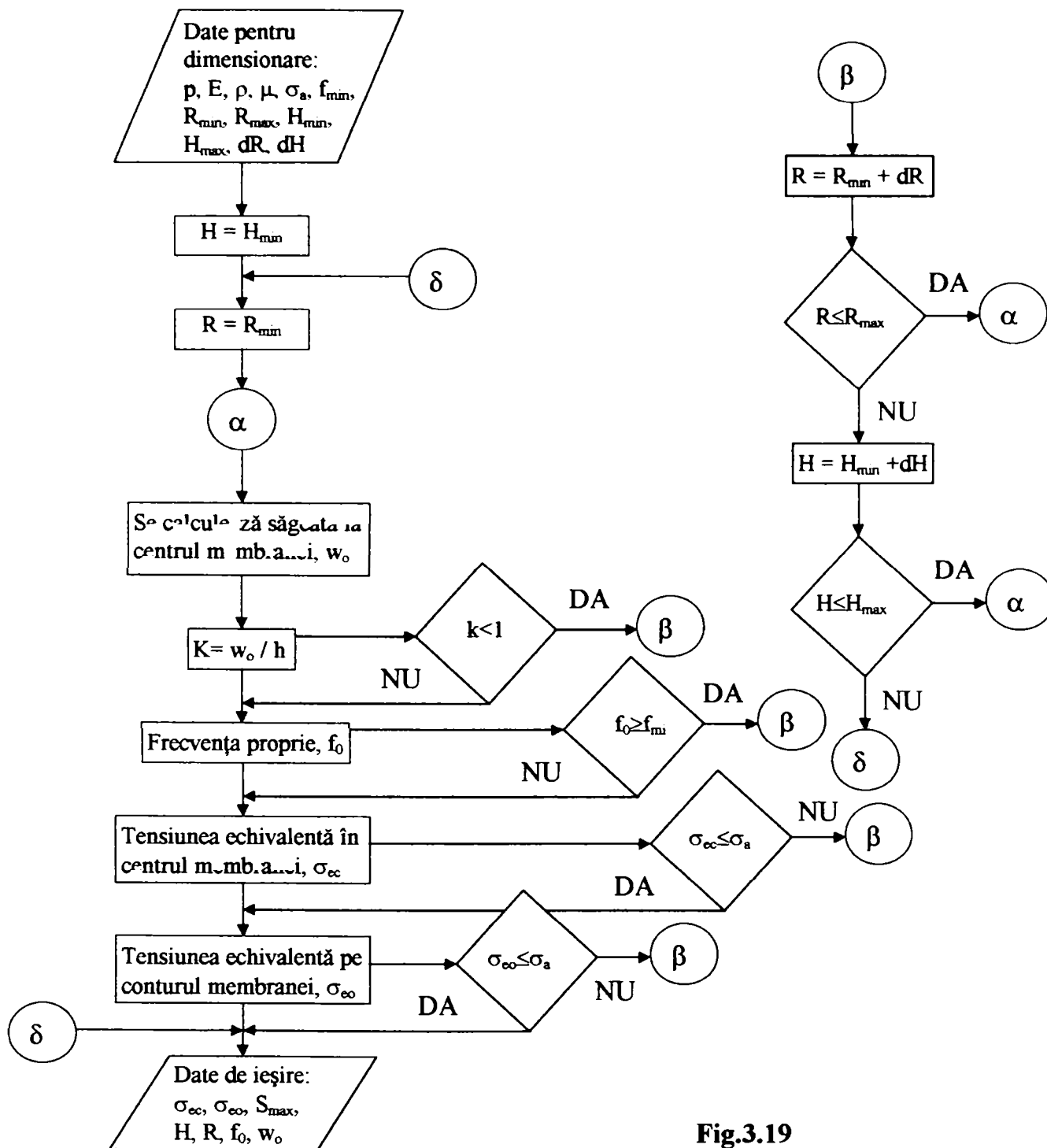


Fig.3.19

Tipul membranei, dimensiunile geometrice generale ale acesteia, parametri geometrici ai gofreurilor (dacă este cazul) și materialul, sunt datele de ieșire principale. Acestea folosesc la întocmirea desenului de execuție, în corelație cu ansamblul aplicației, din care face parte membrana.

Dimensionarea propriu-zisă, a unei membrane plane, cu ajutorul algoritmului de proiectare menționat în schema din Fig.3.18, prin *Algoritmul de dimensionare*, se realizează cu ordinograma propusă în Fig.3.19.

4. CONSIDERAȚII PRIVIND MODELAREA MEMBRANEI PRIN METODA ELEMENTULUI FINIT

4.1. METODA ELEMENTULUI FINIT

4.1.1. Principiul metodei elementului finit

La începuturile sale, calculul ingineresc, necesar la proiectarea și verificarea obiectivelor construite, s-a dezvoltat în mod sistematic pe baze experimentale [9]. Creșterea complexității sistemelor tehnice a condus la atingerea limitelor de aplicabilitate ale calculului ingineresc tradițional. Gândirea analitică îl ajută pe inginerul cercetător să modeleze fenomenele fizice cu ajutorul ecuațiilor și a relațiilor constitutive. Îmbinarea gândirii analitice cu cea experimentală a condus la conceptul de *experiment numeric*. Acesta modelează evoluția unui proces fizic pornind de la modelul său analitic, transpus într-o formă accesibilă implementării pe calculator. Modelarea numerică, combinată cu modelarea experimentală de laborator, face posibilă o simulare a fenomenului, calibrată direct cu parametri proveniți din experiment. Modelarea numerică s-a dezvoltat pe trei direcții, generând trei metode:

- a. metoda diferențelor finite;
- b. metoda elementului finit;
- c. metoda elementelor de frontieră.

Metoda diferențelor finite are ca punct de plecare *modelul diferențial* al fenomenului studiat, care este transformat într-unul numeric folosind procedeul de *aproximare locală punctiformă* a variabilelor de câmp. Sistemul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale se transformă într-un sistem de ecuații algebrice, valabile numai pentru anumite puncte ale domeniului, care definesc rețeaua de discretizare a modelului.

Dezavantajul principal al acestei metode îl constituie utilizarea unei *rețele rectangulare* de discretizare a domeniului de analiză. Forma rețelei constituie un dezavantaj, în cazul domeniilor cu contururi sau suprafețe curbe. Un dezavantaj suplimentar constă din problemele de stabilitate și convergență ale soluțiilor.

Metoda elementului finit are ca punct de plecare un *model integral* al fenomenului de studiat. Acest model poate fi obținut în mod direct, prin calcul sau poate fi derivat din modelul diferențial corespunzător, cu ajutorul calculului variațional sau al metodei reziduurilor ponderate.

Această metodă se bazează pe *aproximarea locală pe porțiuni* sau subdomenii, a variabilelor de câmp. Datorită folosirii unui model integral, ca bază de plecare, și a unor seturi de funcții continue pe porțiuni, metoda elementului finit nu mai este condiționată de existența unei rețele

rectangulare. Cu ajutorul ei se poate discretiza practic, orice corp geometric, indiferent de formă.

La început, metoda elementului finit a fost folosită la calculul structurilor mecanice, în industria aeronautică; ulterior, aria de utilizare s-a extins la întreaga sferă de activitate inginerescă, fiind folosită cu succes la soluționarea tuturor problemelor continuului material. Extinderea folosirii metodei elementului finit se datorează, pe de o parte, caracterului general al formulării conceptelor teoretice fundamentale, iar pe de altă parte, capacității de a modela (cu mai mare acuratețe) fenomenele fizice, comparativ cu alte metode de calcul numeric.

Modelarea, cât mai fidelă a comportării structurilor și materialelor este o cerință majoră, cerută de proiectanții metodelor de calcul folosite, iar din acest punct de vedere, metoda elementului finit este net superioară tuturor celorlalte metode.

Fiind o metodă de calcul, bazată pe utilizarea calculatoarelor electronice, metoda elementului finit a luat o mare amploare odată cu perfecționarea sistemelor hardware, dar și cu dezvoltarea rapidă a disponibilităților software.

Metoda elementelor de frontieră este limitată în alegerea funcțiilor de formă, la acelea care satisfac operatorul diferențial, în interiorul domeniului. Metoda își are originea în fizica matematică, în metoda ecuațiilor integrale, metoda integralei de frontieră, metoda singularității și metoda funcției Green.

Structurile de rezistență sunt alcătuite din elemente structurale - bare, plăci, blocuri - legate între ele. Rezultă că, o structură se poate *discretiza* prin împărțire, într-un număr finit de elemente structurale sau *elemente finite*, legate între ele prin *noduri* sau *conexiuni*. Analiza modului de comportare al structurii, sub efectul acțiunilor exterioare, urmând să se facă pe *modelul fizic discret*.

În prima secvență a procedurii de calcul se analizează comportarea *unui singur element finit*; în următoarea, rezultatele obținute pentru elementul considerat se extind la *toate elementele finite*, în care a fost discretizată structura și se pune *condiția de echilibru static al nodurilor*; în secvența finală, echilibrul static al întregii structuri rezultă prin *asamblarea (însurarea)* condițiilor de echilibru, pentru noduri.

4.1.2. Algoritmul general al metodei elementului finit

Pentru a fi eficientă, o metodă de calcul numeric trebuie să îndeplinească următoarele cerințe :

- să aibă un suport matematic și o bază fizică;
- să nu fie limitată de complexitatea domeniului, de structura lui fizică și de natura acțiunii;
- formularea trebuie să fie independentă de condițiile de contur;
- metoda trebuie să fie flexibilă, permițând alegerea gradului dorit de aproximare, fără reformularea întregii probleme;
- metoda trebuie să fie sistematizată, astfel încât, să poată fi implementată pe calculator.

Metoda elementului finit satisface aceste cerințe, astfel încât rezolvarea unei probleme, cu ajutorul ei, constă în efectuarea unui set de operații, care pot fi grupate convențional, într-un număr de etape, care alcătuiesc algoritmul ei general, prezentat în cele ce urmează [9].

Etapa 1 - Împărțirea domeniului de analiză în elemente finite

În această etapă analistul alege tipul sau tipurile de elemente finite adecvate problemei de studiat, apoi împarte structura în elemente finite; operația mai poartă numele de *discretizare*.

După construirea rețelei de elemente finite urmează numerotarea nodurilor, respectiv a elementelor și generarea proprietăților geometrice (coordonate, suprafețele secțiunilor transversale etc). Programele moderne de element finit efectuează automat discretizarea.

Funcția necunoscută pe domeniul considerat este aproximată pe fiecare element finit, printr-o funcție denumită *funcție de aproximare* sau *funcție de interpolare*. Discretizarea este urmată de alegerea funcției de aproximare sau interpolare.

Etapa 2 - Deducerea ecuațiilor elementelor finite

Etapa începe cu formularea ecuației diferențiale, pentru fiecare tip de element. Metoda elementelor finite cunoaște, până în prezent, patru procedee de formulare a ecuației fundamentale:

- *Formularea directă*, derivă din mecanica structurilor, pe baza formulării matriceale a metodei deplasărilor. Ea este foarte simplă, dar nu poate fi folosită decât în cazul calculului mecanic al structurilor alcătuite din elemente simple (cum ar fi de exemplu barele);
- *Formularea variațională*, constă în minimizarea energiei potențiale a solidului elastic, având la bază principiul valorii staționare a energiei potențiale. Spre deosebire de procedeul direct, formularea variațională a extins aplicarea metodei și la alte categorii de probleme, pentru care se poate defini o funcțională și un criteriu de staționaritate. Ea este folosită la analiza cu elemente finite a problemelor mecanice și termice;
- *Formularea reziduală*, se bazează pe teoria reziduurilor ponderate. Ea permite abordarea problemelor liniare, neliniare, de propagare și de valori proprii, într-o exprimare unitară, cu caracter generalizat, și dă posibilitatea rezolvării unor probleme ce nu pot fi caracterizate variațional, înlocuind criteriul de minimizare al energiei potențiale prin minimizarea reziduului. Formularea poate fi folosită la analiza regimurilor termice tranzitorii;
- *Formularea pe baza bilanțului energetic*, pornește de la prima lege a termodinamicii, permițând abordarea problemelor liniare și neliniare, ce caracterizează fenomenele din mecanica câmpurilor continue, ale câmpurilor termice și electromagnetice. Formularea dezvoltă considerabil gama de probleme ce pot fi investigate cu metoda elementelor finite.

Comportarea materialului sau mediului, în cuprinsul unui element finit, este descrisă de ecuațiile elementelor finite, denumite și *ecuații elementale*, care se obțin prin substituirea funcției de interpolare în ecuația diferențială fundamentală a elementului finit. Ecuațiile elementale alcătuiesc un sistem de ecuații al elementului (numărul ecuațiilor din sistem este egal cu numărul gradelor de libertate pe element).

Ca urmare a substituiri în ecuația fundamentală a elementului finit (formulată într-una dintre cele patru variante) se deduc sau se alege, dacă există în literatură, funcțiile de interpolare, se calculează termenii matricei de rigiditate a elementelor, se deduce vectorul funcțiilor nodale necunoscute pe elementul finit și se deduce vectorul încărcărilor pe elementul finit. Apoi, se scrie sistemul de ecuații elementale atașat elementului finit.

Etapa 3 - Asamblarea ecuațiilor elementale în sistemul de ecuații al structurii

În această etapă, mai întâi, se identifică condițiile de continuitate între elemente pentru variabilele primare (relația dintre gradele de libertate locale și globale și conectivitatea elementelor) care leagă nodurile sistemului de sistemul global.

Apoi, se identifică condițiile de echilibru pentru variabilele secundare (relația dintre sursă sau componentele locale ale forței și componentele globale specificate ale sursei sau forței). În final, se realizează asamblarea sistemelor de ecuații elementale în sistemul de ecuații al

structurii, care modelează comportarea întregii structuri. Aceasta înseamnă, din punct de vedere fizic că, echilibrul structurii este condiționat de echilibrul elementelor finite.

Prin asamblare se impune ca, în nodurile comune elementelor, funcția sau funcțiile necunoscute să aibă aceeași valoare. Asamblarea ecuațiilor constă în asamblarea matricelor de rigiditate ale elementelor finite în matricea de rigiditate a structurii și a vectorilor încărcării pe elemente în vectorul încărcării pe toată structura.

Se obține astfel, sistemul de ecuații al structurii, care are atâtea ecuații câte grade de libertate are structura, adică produsul dintre numărul total de noduri și numărul gradelor de libertate pe nod.

Pentru a putea rezolva sistemul de ecuații, se elimină ecuațiile corespunzătoare funcțiilor cu valori impuse, prin condițiile la limită. Se obține în acest fel, un sistem de ecuații redus care poate fi rezolvat.

Etapa 4 - Rezolvarea sistemului de ecuații al structurii

Sistemul de ecuații redus este revolvat, printr-unul din procedeele obișnuite, obținându-se valorile funcțiilor sau gradelor de libertate din noduri. Acestea se numesc și *necunoscute primare* sau *de ordinul întâi*.

Etapa 5 - Postprocesarea rezultatelor

Această etapă presupune efectuarea de calcule suplimentare, pentru determinarea *necunoscutelor secundare* sau *de ordinul doi*. Acestea sunt derivate de ordin superior ale necunoscutelor primare; de asemenea, se poate face reprezentarea rezultatelor sub formă grafică sau tabelară.

4.1.3. Aproximarea cu elemente finite

Metoda elementului finit poate fi descrisă ca un procedeu sistematic, prin care orice funcție continuă este aproximată printr-un model discret. Acest model este format dintr-un set de valori ale funcției date, într-un număr finit de puncte alese în domeniul ei, împreună cu aproximări locale, pe porțiuni, ale funcției peste un număr finit de subdomenii, denumite *elemente finite*.

Aproximările locale ale funcției, pe fiecare subdomeniu, sunt definite în raport cu valorile discrete ale acesteia, în punctele selectate inițial. Aceste puncte se numesc *noduri* sau *noduri de interpolare*, iar valorile corespunzătoare ale funcției *valori nodale*.

Modelul discret cu elemente finite rezultă prin conectarea acestora împreună la noduri, pe frontierele comune.

Funcția dată este aproximată local, pe fiecare element, prin funcții continue, numite *funcții de interpolare*. Funcțiile de interpolare se definesc univoc, în raport cu valorile funcției inițiale, sau cu valorile acesteia și derivatele ei, până la un anumit ordin, în nodurile ce aparțin fiecărui element.

Elementele finite, definite în acest mod, se numesc *elemente finite nodale*, întrucât pot fi caracterizate, în exclusivitate, prin nodurile lor - spre deosebire de *elementele finite hibride* și *mixte*.

Geometria elementelor finite se definește analitic, iar funcțiile de interpolare se construiesc pentru fiecare tip de element în parte.

Discretizarea în elemente finite a unui domeniu, trebuie să satisfacă câteva *condiții de formă* importante:

- două elemente finite distincte pot avea noduri comune, numai pe frontierele comune, suprapunerile nefiind permise; frontierele comune pot fi puncte, linii sau suprafețe;
- la asamblarea elementelor finite se va evita, printr-o alegere adecvată a geometriei lor, apariția unor goluri între acestea;
- atunci când frontiera domeniului nu poate fi acoperită, în mod exact de elementele finite utilizate, în aproximare se introduce o *eroare de aproximare*. Această eroare poate fi redusă, prin creșterea *fineței de discretizare* sau prin introducerea unor elemente finite cu *contur curbiliniu*.

Elemente finite și noduri

Tipul de element finit este definit de un set de caracteristici ce conține: numărul de dimensiuni (uni-, bi-, tridimensional), numărul de noduri ale elementului, funcțiile de aproximare asociate etc. Alegerea tipului de element finit are o mare importanță pentru efortul de calcul, pentru necesarul de memorie internă a calculatorului și pentru calitatea rezultatelor [57].

Elementele finite se definesc în cadrul procesului de discretizare, unde apar ca rezultat al descompunerii unui domeniu de studiu în mai multe subdomenii compatibile și cu interior disjunct. Conexiunea acestor domenii se face prin intermediul nodurilor, care nu sunt altceva decât puncte selectate în domeniul considerat, la care se specifică variabilele studiate sau derivate ale acestora. Într-un sens mai larg, elementul finit apare ca un model de aproximare cu proprietăți fizice, geometrice și funcționale.

Din punct de vedere geometric, elementul finit reproduce într-o formă idealizată, părți dintr-un corp real, supus analizei. El are dimensiuni și i se pot atașa proprietăți fizice (densitatea, viscozitatea, elasticitatea, conductibilitatea termică etc.) în funcție de scopul urmărit.

Din punct de vedere funcțional, elementul finit aproximează una sau mai multe variabile ale problemei, în spațiul ocupat de corpul real pe care îl modelează.

Conform [9], există două tipuri de elemente finite și anume:

1. elemente finite *nodale*;
2. elemente finite *hibride* sau *mixte*.

Elemente finite nodale

Aceste elemente constituie cele mai larg folosite tipuri de elemente finite, având proprietatea că pot reprezenta variația unui câmp oarecare, utilizând în mod exclusiv:

- o mulțime de valori nodale ale funcției de aproximat sau ale funcției și derivatelor sale, până la un anumit ordin;
- o mulțime de funcții asociate fiecărui tip de element finit în parte.

Pentru alte tipuri de elemente finite, cum ar fi cele hibride sau mixte, această structură nodală devine insuficientă. Ea trebuie completată și cu o mulțime de parametri independenți, definiți în interiorul elementului finit, pentru satisfacerea unor condiții suplimentare.

Elemente finite hibride sau mixte

Problemele în care se urmărește analiza unor fenomene fizice, caracterizate prin mai multe câmpuri de variabile, se numesc *probleme multicâmp*. De exemplu, analiza fenomenelor

termohidraulice presupune, cunoașterea câmpurilor de viteze, presiuni și temperaturi, iar modelarea fenomenelor termoelastice, înseamnă luarea în considerație a câmpurilor de tensiuni, deplasări și temperaturi.

Relaxarea restricțiilor ivite în procesul modelării și simulării problemelor multicâmp, a condus la dezvoltarea unor modele numerice mai generale, pentru care modelele cu elemente finite nodale apar ca niște cazuri particulare. Aceste modele se numesc *hibride* sau *mixte*, după cum au fost modificate principiile variaționale, care au stat la bază. Deoarece, nu se poate vorbi încă de o definiție riguroasă, unanim acceptată, a modelelor cu elemente finite hibride sau mixte, se apelează pentru caracterizarea lor, la opiniile unor specialiști [9], [57].

T.H.H. Pian, unul dintre pionierii modelelor hibride, propune următoarea definiție: *Un model hibrid este acel model care implică câmpuri independente de variabile, în interiorul și pe frontiera elementelor, în formularea variațională a problemei.* Pe de altă parte: *modelele mixte sunt acele modele, care se bazează pe aproximări cu mai mult de un singur câmp în interiorul elementului finit.*

S.N. Atluri subliniază faptul că: *la baza modelelor cu elemente finite hibride se află întotdeauna un principiu variațional modificat.* În cazul acestui principiu, restricțiile de continuitate pentru deplasări la frontiera dintre două elemente vecine sunt relaxate apriori, permițând astfel, o alegere mai ușoară a funcțiilor de aproximare pentru tensiuni. Condițiile de continuitate vor fi însă impuse după aceea, prin intermediul multiplicatorilor lui Lagrange și a formulării variaționale.

J.T. Oden consideră *modelele cu elemente finite mixte ca aproximări ale unor probleme cu constrângeri generate de fizica fenomenului respectiv.* Modelul hibrid apare ca un caz particular al modelului mixt, în care constrângerile sunt asociate cu condițiile de continuitate, la frontiera dintre elementele finite vecine.

Din punct de vedere geometric, elementele finite nodale și cele hibride sau mixte sunt asemănătoare, din punct de vedere funcțional însă, apar deosebiri fundamentale. La elementele finite hibride și mixte, numai o parte dintre mărimile de câmp sunt definite cu ajutorul funcțiilor de formă nodale; celelalte mărimi sunt approximate la nivel elemental, cu ajutorul unor funcții polinomiale, cu coeficienți nedeterminați, definite în spațiul interior al elementului finit și nu pe suprafața lui.

În fig.4.1 sunt prezentate câteva elemente finite unidimensionale. Caracteristica de bază o constituie posibilitatea neglijării a două dintre cele trei dimensiuni ale lor; există deci, o variație exclusiv longitudinală a funcției f , de aproximat. Cu alte cuvinte, se admite anticipat că, această funcție ia valori constante, în secțiuni transversale oarecare și deci, f , este o funcție în scară. Aceasta nu înseamnă că din punct de vedere fizic nu există și mici variații transversale ale funcției respective; aceste variații transversale sunt însă mici, în comparație cu cele longitudinale și de aceea ele se neglijează. Nodurile marginale ale elementelor asigură conexiunea cu elementele alăturate.

În fig.4.2 sunt prezentate câteva exemple dintre cele mai utilizate elemente finite bidimensionale. Cele mai simple elemente sunt triunghiul cu 3 noduri și dreptunghiul cu 4 noduri, dar cu laturi paralele cu axele de coordonate (așa numitul interval bidimensional). Deoarece, asigură realizarea unei variații liniare, de-a lungul unei laturi, acestea se numesc în mod curent elemente finite liniare. Patrulaterul oarecare cu 4 noduri se poate obține printr-o transformare de coordonate, dintr-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate. Elementele din fig.4.2b se caracterizează prin existența unor laturi formate din drumuri curbe,

fapt care, le permite o acoperire adecvată a suprafețelor cu contururi curbilinii. Particularitatea elementelor din fig.4.2c, o constituie prezența nodurilor interioare.

În fig.4.3 sunt prezentate câteva exemple de elemente finite tridimensionale. Este ușor de văzut corespondența dintre aceste elemente și cele prezentate în fig.4.2a și fig.4.2b. Un tip special de element tridimensional îl constituie elementul axisimetric (fig.4.3c).

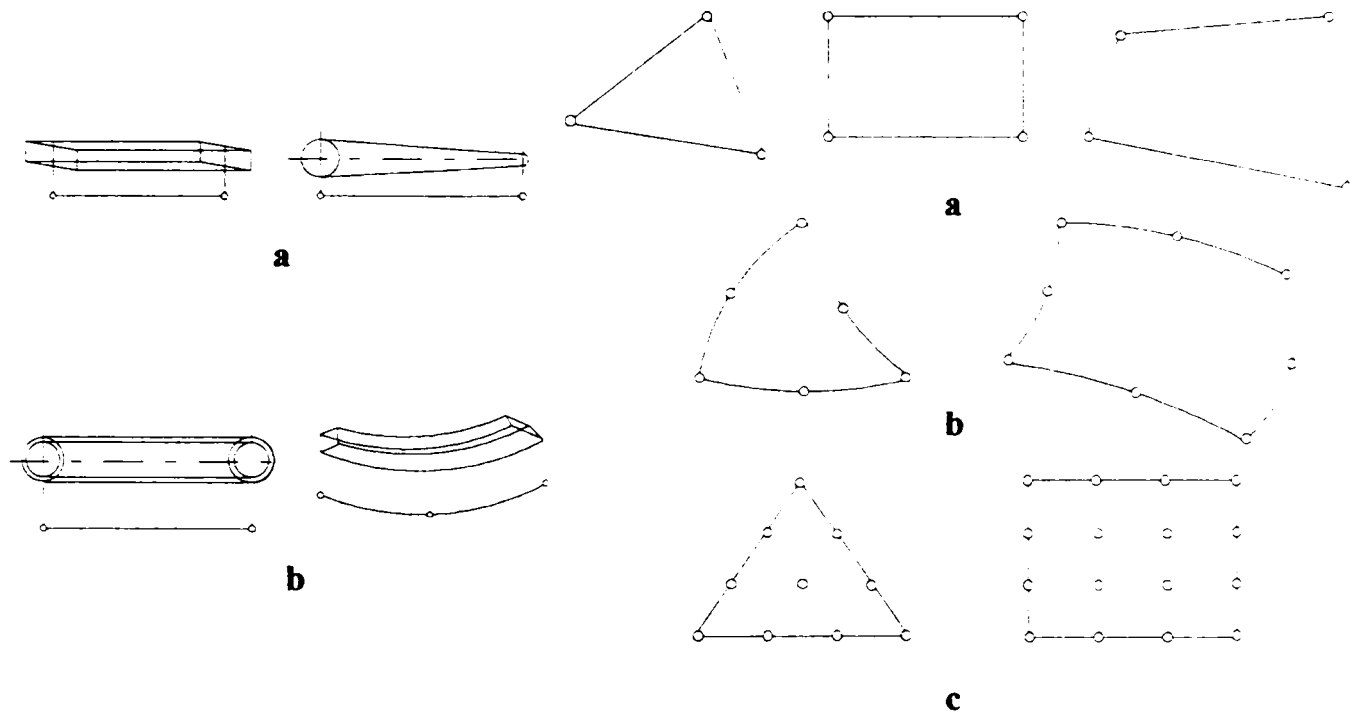


Fig.4.1 Elemente finite unidimensionale
(a) liniare (b) pătratice

Fig.4.2 Elemente finite bidimensionale
(a) liniare (b) pătratice (c) cubice

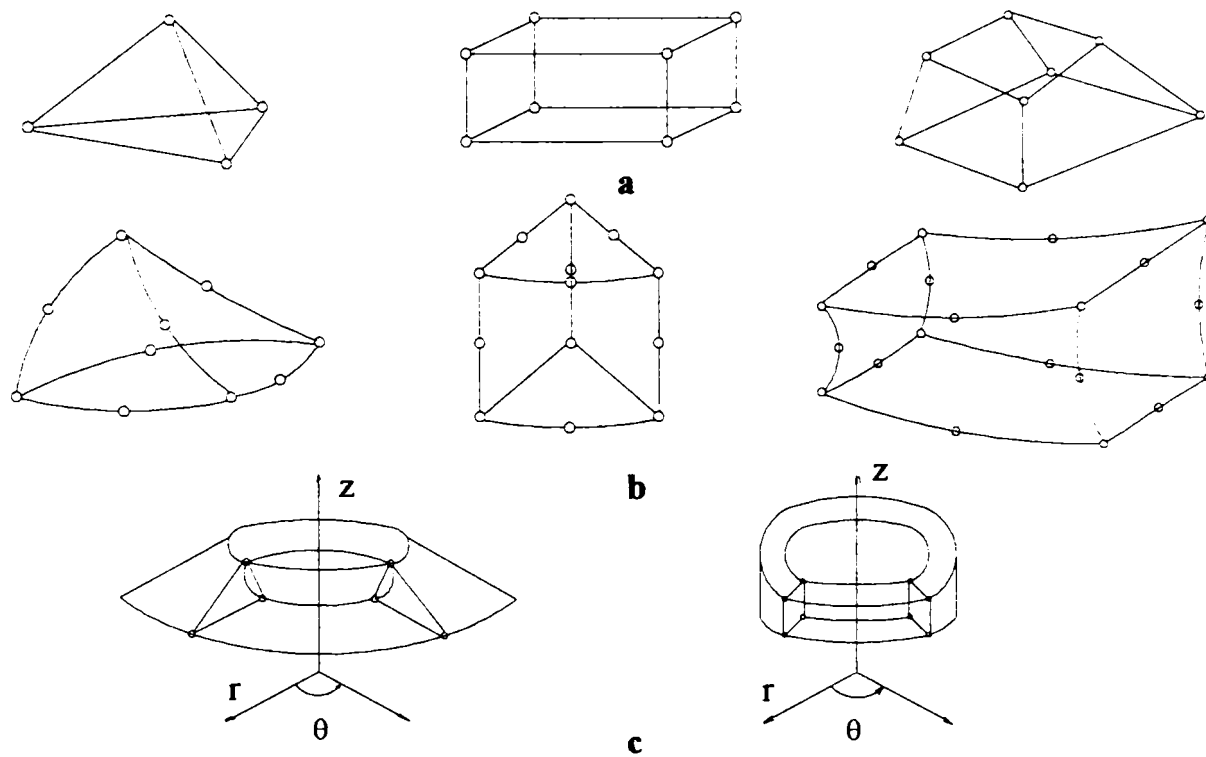


Fig.4.3 Elemente finite tridimensionale
(a) drepte (b) curbilinii (c) axisimetrice

Deși este un element tridimensional, elementul axisimetric, poate fi tratat ca și un element de suprafață, de exemplu triunghiular, datorită simetriei sale.

Fie, în procesul de discretizare al unei structuri, o funcție continuă,

$$U : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{ unde } I = [a, b] \text{ și fie } \hat{U} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

un model de aproximare cu elemente finite pentru funcția dată, cu $\hat{I} \subseteq I$, un alt interval. Construirea modelului cu elemente finite nodale implică etapele:

1. selectarea unui număr finit de noduri, $Q \in \mathbb{N}$, având *coordonatele globale*, $X_N \in \hat{I}$, unde ($N = 1, 2, \dots, Q$). Valorile globale ale funcției în aceste puncte $\hat{U}_N = \hat{U}(X_N)$ se numesc *valori nodale*.
2. selectarea unui număr finit de elemente, $E \in \mathbb{N}$, fiecărui element asociindu-i un anumit număr de noduri, $q \in \mathbb{N}$ ($q \leq Q$). Pentru același număr de noduri, selecționate în domeniul de analiză, se pot alege diferite variante de elemente finite.
3. fiecare element e ($e = 1, 2, \dots, E$) se caracterizează, pe plan local, prin *coordonatele nodurilor*, x_i^e, x_j^e și prin *valorile nodale* ale funcției de aproximare u_i^e, u_j^e .

Grade de libertate și coordonate generalizate

Dacă pentru definirea configurației unui sistem este necesară determinarea a n parametri, atunci vom spune (preluând un limbaj din mecanica analitică) că acel sistem are n grade de libertate. Parametri ce trebuie determinați poartă denumirea de *coordonate generalizate* ale sistemului. Gradele de libertate pot fi de natură diferită: deplasări liniare, rotații sau chiar deformări [57].

Această terminologie specifică mecanicii s-a extins și asupra elementelor finite, indiferent dacă ele sunt folosite la discretizarea unor corpuri solide sau fluide, respectiv dacă se studiază deformarea corpurilor, mișcarea fluidelor sau transmisia căldurii. Astfel, numărul parametrilor asociați nodurilor unui element finit definesc gradele lui de libertate.

Dacă funcția de aproximare a variabilelor este de forma:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \dots + \alpha_n y^n. \quad (4.2)$$

atunci parametri α_i se numesc *coordonatele generalizate* ale elementului. Aceste coordonate formează o mulțime de parametri independenți, care definesc mărimea distribuției prescise \hat{u} , în timp ce forma analitică a acestei funcții este determinată de polinomul de interpolare ales.

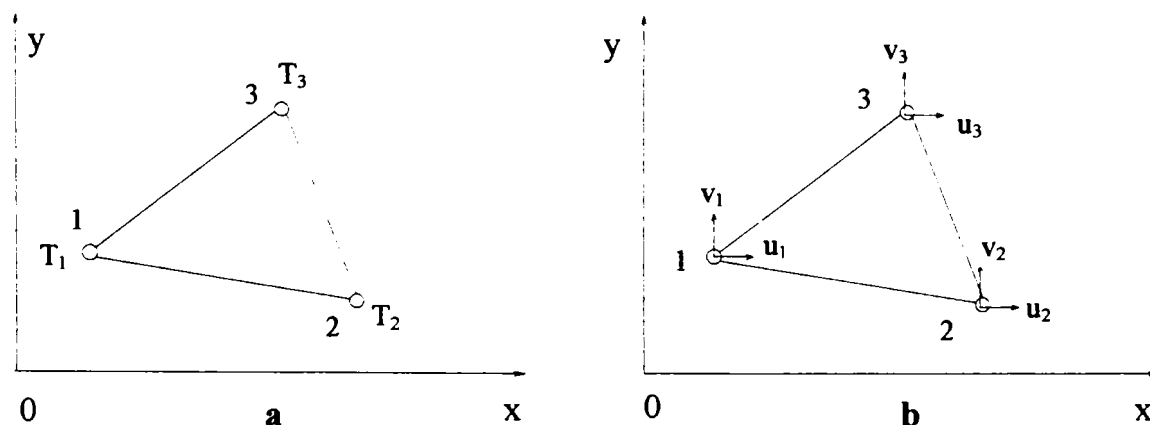


Fig.4.4 Reprezentarea câmpurilor scalare (a) și vectoriale (b)

Pentru exemplificare se consideră elementele finite din fig.4.4. Elementul din fig.4.4a are trei grade de libertate și poate fi folosit la determinarea unui câmp scalar (de exemplu

temperatura), iar elementul din fig.4.4b are șase grade de libertate și poate fi folosit la determinarea unui câmp vectorial (de exemplu viteza unui fluid).

Coordonatele generalizate sunt date în primul caz de coeficienții α_i ai polinomului,

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y, \quad (4.3)$$

iar în cel de-al doilea caz, de coeficienții α_i și β_i din funcțiile:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y, \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2x + \beta_3y. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dacă între coeficienții din ultimele două funcții există anumite relații, atunci numărul coordonatelor generalizate se micșorează, în raport cu cel al coeficienților inițiali.

Observație. Utilizarea coordonatelor generalizate nu trebuie confundată cu cea a coordonatelor geometrice, care au un sens fizic bine determinat.

Sisteme de coordonate

Coordonate globale

În modelarea numerică cu elemente finite se folosesc, în mod curent două sisteme de referință:

- un sistem global, asociat domeniului de analiză considerat;
- un sistem local, asociat fiecărui element finit în parte.

Ca sisteme de coordonate se utilizează frecvent sistemul cartezian, sistemul cilindric și sistemul sferic (în R^3); mai rar se utilizează sisteme de coordonate curbilini speciale (parabolic-cilindrice, eliptic-cilindrice, toroidale etc) [57].

Coordonate locale normale

Fiecărui element finit i se atașează câte un sistem de *coordoanate locale*. Acestea pot fi coordonate generale, nespecifice elementului respectiv (coordoanate carteziene, cilindrice, sferice), când se numesc *coordoanate locale normale* sau pot fi coordonate specifice elementului finit considerat, când se numesc *coordoanate locale naturale*. Deci, pentru o aplicație dată, coordoanatele locale normale se deosebesc de cele globale numai prin poziția lor, respectiv, printr-o translație, rotație sau roto-translație.

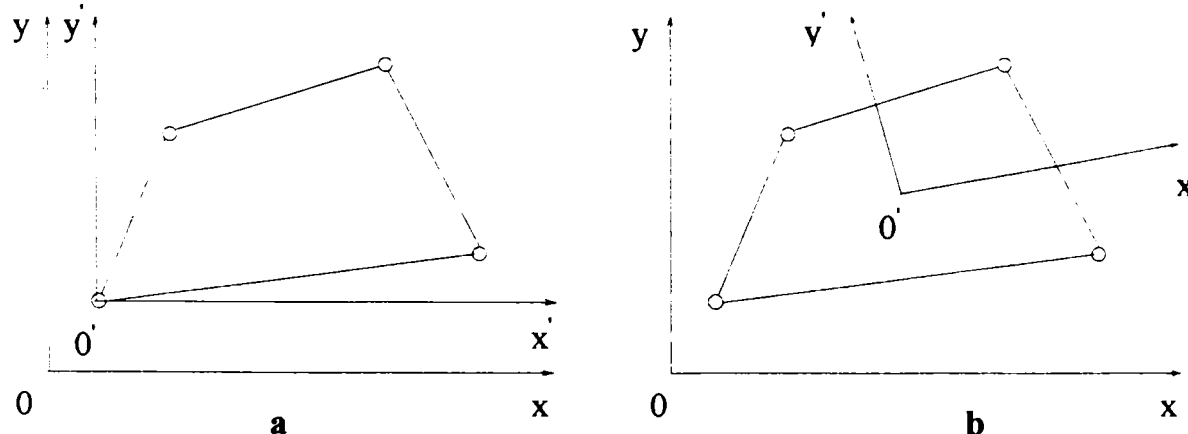


Fig.4.5 Coordonate locale normale

(a) unul din noduri ca origine

(b) centrul de greutate ca origine

Originea sistemelor locale de referință se alege, de obicei, într-unul din nodurile elementului finit (fig.4.5a) sau în centrul de greutate al acestuia (fig.4.5b).

Coordonate locale naturale

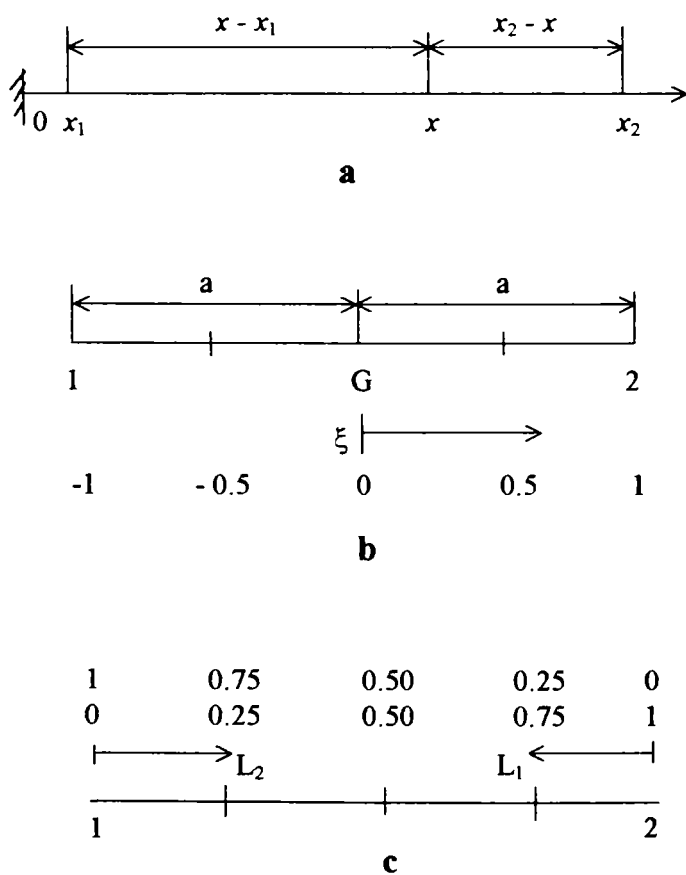
Coordonatele locale naturale sunt coordonate adimensionale normalizate, deoarece se obțin prin raportarea coordonatelor globale, sau a unor arii și volume determinate, la mărimi caracteristice elementului finit (lungimi, arii sau volume).

Dacă se alege drept origine, pentru coordonatele naturale, centrul de greutate al elementului finit, atunci intervalul lor de variație este $[-1, 1]$ și ele se numesc *coordonațe ξ -naturale*.

Dacă în loc de un singur punct de origine se aleg mai multe puncte (nodurile elementului), atunci intervalul de variație este $[0, 1]$ și se obțin *coordonațele L-naturale* ale elementului finit.

Spre deosebire de coordonatele locale normale sau globale, coordonatele naturale au avantajul unei evaluări mai eficiente a matricelor elementale. Coordonatele naturale se preferă atunci când expresiile integrale caracteristice elementului finit se evaluează direct (analitic).

Observație. Pentru elementele de tip patrulater și paralelipiped se preferă coordonatele ξ -naturale, în timp ce pentru elementele de tip triunghi și tetraedru se preferă coordonatele L-naturale.



Fie un element finit unidimensional de tip liniar (fig.4.6). Dacă se alege drept origine a sistemului local de referință centrul de greutate al elementului se obține sistemul ξ -natural.

Pentru un punct oarecare cu $x \in [x_1, x_2]$ și $a = (x_2 - x_1)/2$, se poate scrie:

$$\xi = \frac{(x - x_G)}{a} \tag{4.5}$$

Alegând drept punct de origine chiar nodurile elementului, se obține sistemul de coordonate L-naturale. Pentru un punct oarecare x se poate scrie $x = L_1x_1 + L_2x_2$; $L_1 + L_2 = 1$;

$$L_1 \geq 0 ; L_2 \geq 0. \tag{4.6}$$

Relația (4.5) arată caracterul de funcție de pondere a coordonatelor, în timp ce relațiile (4.6) arată că L_1 și L_2 nu sunt independente. Din relațiile (4.6) rezultă:

Fig.4.6 Coordonate globale (a), ξ -naturale (b) și L-naturale (c), la elemente finite unidimensionale

$$L_1(x) = (x_2 - x)/2a,$$

$$L_2(x) = (x - x_1)/2a. \tag{4.7}$$

În fig.4.7 sunt prezentate coordonatele L-naturale pentru elemente finite triunghiulare, care se mai numesc și *coordonațe de arie*, datorită semnificației lor geometrice.

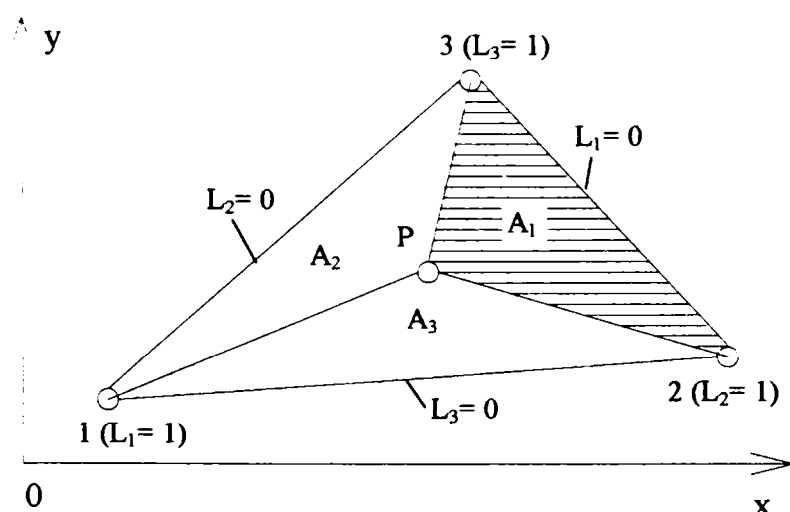
$$\begin{aligned} x &= x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3; \\ y &= y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3; \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3. \end{aligned} \tag{4.8}$$

În relațiile (4.8) $L_i \geq 0, i = 1, 2, 3$.

Primele două relații definesc corespondența dintre coordonatele globale (x, y) ale unui punct oarecare P și coordonatele lui naturale (L_1, L_2, L_3) . Cea de-a treia relație arată că numai două dintre cele trei coordonate naturale sunt independente.

Rezolvând sistemul de ecuații (4.8) se determină coordonatele naturale (L_1, L_2, L_3) cu ajutorul relațiilor (4.9):

$$L_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad L_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad L_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}. \quad (4.9)$$



Rearanjând termenii, și ținând seama că aria A_1 este aria a unui triunghi cu vârfurile în punctele (x_i, y_i) , (x_j, y_j) și (x_k, y_k) este dată de relația:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}. \quad (4.10)$$

Se obține semnificația geometrică a coordonatelor L_1, L_2 și L_3 :

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, L_2 = \frac{A_2}{A}, L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad (4.11)$$

Fig.4.7 Coordonate L-naturale pentru elemente finite triunghiulare

unde A este aria elementului finit 123 , iar A_1, A_2, A_3 sunt ariile triunghiurilor formate de vârfurile elementului și un punct interior P (fig.4.7).

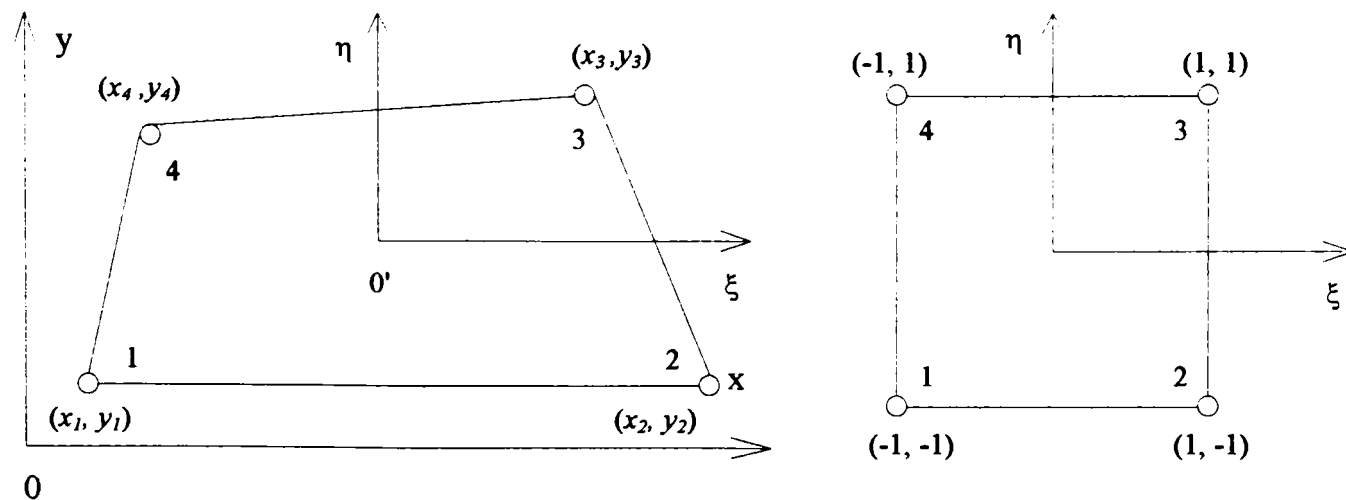


Fig.4.8 Coordonate globale (a) și ξ -naturale (b) pentru elemente finite patrulatere

Se observă că intervalul de variație al acestor coordonate este $[0, 1]$, cu valoarea egală cu unitatea, în nodul cu același indice și valoare zero, pe latura opusă nodului respectiv.

În fig.4.8a sunt prezentate coordonatele globale ale unui patrulater oarecare și în fig.4.8b coordonatele ξ -naturale ale unui pătrat. Relațiile de transformare dintre coordonatele naturale (ξ, η) și (x, y) sunt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)x_1 + (1+\xi)(1-\eta)x_2 + (1+\xi)(1+\eta)x_3 + (1-\xi)(1+\eta)x_4}{4}; \\ y &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)y_1 + (1+\xi)(1-\eta)y_2 + (1+\xi)(1+\eta)y_3 + (1-\xi)(1+\eta)y_4}{4}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

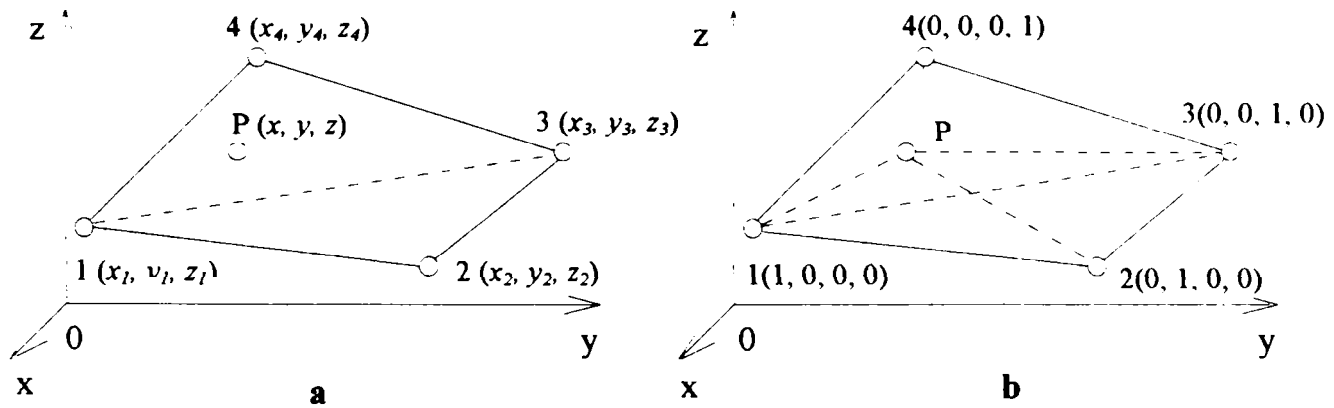


Fig.4.9 Coordonate globale (a) și L-naturale (b) pentru elemente finite tetraedrice

Pentru elementele finite tridimensionale sunt prezentate în fig.4.9a un sistem de coordonate globale și în fig.4.9b un sistem de coordonate L-naturale. Cele două sisteme de coordonate (global și local) sunt legate între ele prin relațiile:

$$\begin{aligned} x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 + L_4x_4; \\ y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 + L_4y_4; \\ z &= L_1z_1 + L_2z_2 + L_3z_3 + L_4z_4; \end{aligned} \quad (4.13)$$

cu condiția:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1, L_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.14)$$

Explicitând coordonatele naturale L_i , se obțin egalitățile:

$$L_i = \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z), \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (4.15)$$

unde V reprezintă volumul tetraedrului din R^3 , definit prin punctele (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, iar coeficienții a, b, c, d sunt de forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; & b_1 &= \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \\ c_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}; & d_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ceilalți coeficienți, pentru $i = 2, 3, 4$, se obțin în mod asemănător, prin permutarea ciclică a indicilor. Datorită semnificației geometrice aparente, aceste coordonate se mai numesc și *coordoanate de volum*.

Se mai consideră încă un exemplu pentru elemente finite tridimensionale hexaedrale, folosind coordonate ξ -naturale (fig.4.10).

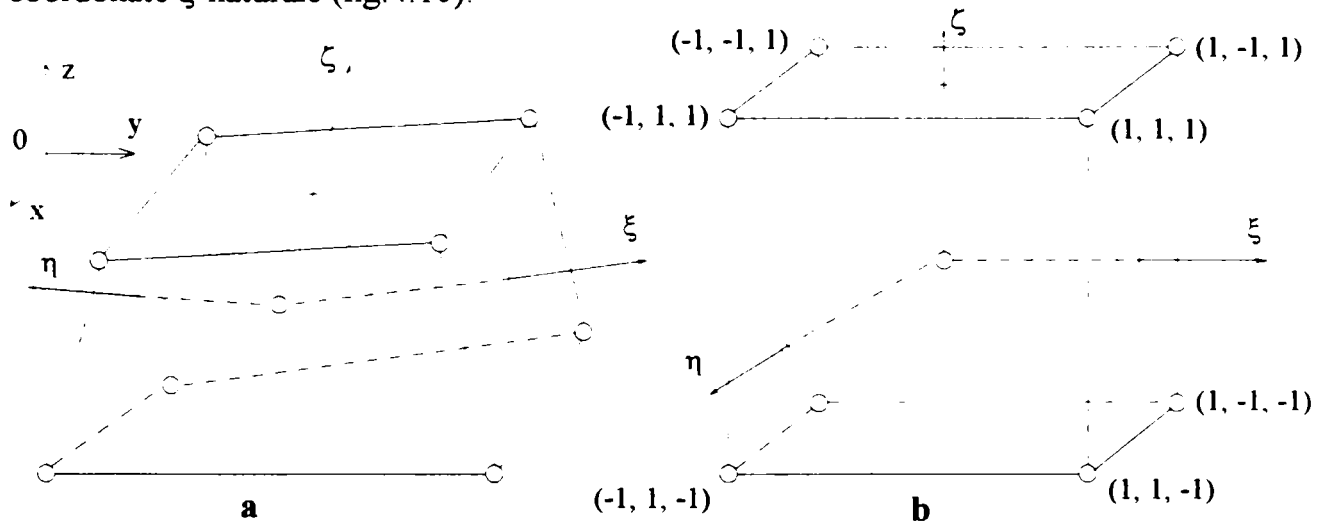


Fig.4.10 Coordonate globale (a) și ξ -naturale (b) pentru elemente finite hexaedrale

Relațiile de legătură dintre cele două sisteme de coordonate sunt de forma:

$$x = \sum_{i=1}^8 L_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^8 L_i y_i; \quad z = \sum_{i=1}^8 L_i z_i; \quad (4.17)$$

unde:

$$L_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \zeta \zeta_i) (1 + \eta \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (4.18)$$

Funcții de interpolare

Funcțiile de interpolare permit aproximarea variabilelor pe domeniul unui element finit. Ele au ca puncte de reper valorile nodale ale funcției sau valorile nodale ale funcției și ale derivatelor ei, până la un anumit ordin [57]. Deoarece, structura acestor funcții de interpolare depinde de structura nodală a elementului, respectiv de forma lui, ele se mai numesc și *funcții de formă*.

Pentru a se putea încadra sau a putea fi admise în structura modelului de aproximare, funcțiile de interpolare trebuie să satisfacă anumite *condiții de admisibilitate* [9]. Aceste condiții se pun în scopul asigurării convergenței soluției aproximative spre soluția reală a problemei, pe măsură ce crește finețea discretizării.

Presupunând că funcțiile de interpolare sunt de clasa C^{n+1} (conțin derivate până la ordinul $n+1$) se impune îndeplinirea următoarelor condiții [9]:

- *Condiția de compatibilitate*, care presupune că la interfața elementelor finite trebuie asigurată o continuitate de ordinul C^n . În mecanica structurilor această continuitate se referă la deplasări. Asigurarea continuității deplasărilor presupune deformații specifice finite între elemente. Alegerea funcției de interpolare (funcția de deplasări) se face astfel încât, să fie satisfăcută condiția legată de deformațiile specifice, ea fiind determinată de legătura între

deplasări și deformații specifice. Pentru cazul stării de tensiune plană, în care deformațiile specifice sunt definite de derivatele de ordinul întâi ale deplasărilor, condiția de continuitate se impune numai deplasărilor. În cazul plăcilor curbe, la care deformațiile specifice sunt definite de derivatele de ordinul al doilea ale săgeților, se impune condiția ca și primele derivate ale săgeților, rotirile să fie continue; discontinuitatea va conduce la valori, care tind la infinit pentru deformații specifice la interfețele elementelor finite.

- **Condiția de completitudine**, care presupune că în interiorul elementelor finite trebuie asigurată o continuitate de clasa C^{n+1} . Semnificația fizică în mecanica structurilor a acestei condiții constă în, ipoteza că este posibilă deplasarea de corp rigid (rototranslația) elementului finit. Funcția de interpolare se alege astfel încât, la deplasarea nodurilor să nu se producă o deformare a elementului finit. Alegerea unor funcții, care dau deformații specifice variabile, în interiorul elementelor finite, când deplasările nodurilor sunt compatibile cu deformații specifice constante, nu dă o bună convergență și nici nu reprezintă distribuția reală a deformațiilor specifice.

În anumite situații, de analiză a structurilor, este dificil să se determine funcții de interpolare, care să aibă asigurată continuitatea, în lungul tuturor suprafețelor de separare dintre elementele finite. Experiența a demonstrat că se pot utiliza și funcții incompatibile, dacă se satisface condiția de deformații specifice constante. Crescând finețea discretizării, la limită, când elementul finit tinde către un punct, ambele criterii se satisfac simultan.

Deși se pot concepe multe tipuri de funcții de interpolare, se folosesc aproape în exclusivitate funcțiile polinomiale, datorită ușurinței cu care pot fi derivate, respectiv integrate. Folosirea funcțiilor trigonometrice și a celor logaritmice apare ca un fenomen izolat.

Funcții de interpolare Pascal

Funcțiile de interpolare de tip Pascal au proprietatea de a fi funcții polinomiale complete, cu un număr de coeficienți egal cu cel al nodurilor asociate elementului finit respectiv [57]. Termenii acestor funcții polinomiale, pentru figuri plane, pot fi așezați în forma triunghiului lui Pascal, de unde provine și denumirea lor.

O altă caracteristică a acestor funcții de interpolare constă în aceea că, ele se pot obține direct, prin rezolvarea unor sisteme de ecuații liniare.

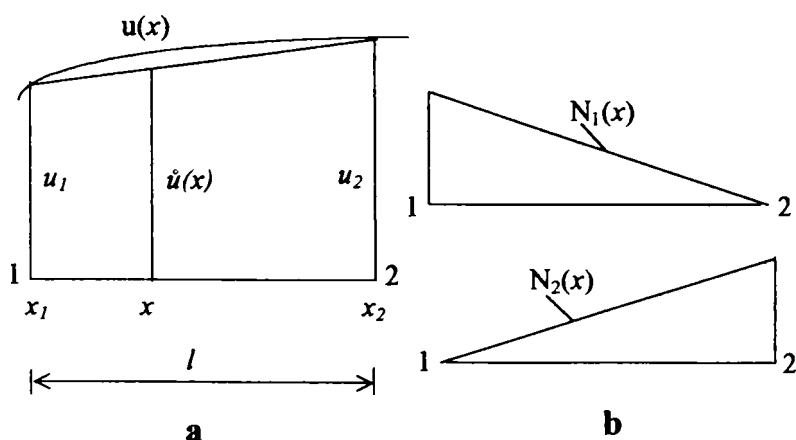


Fig.4.11 Aproximare cu elemente finite liniare
(a) element finit **(b)** funcții de formă

Pentru cazul unidimensional o funcție polinomială completă (fără coeficienți nuli) de gradul n , se scrie sub forma:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{T_n^1} \alpha_i x^i ; \quad (4.19)$$

unde numărul termenilor în polinom este $T_n^1 = n + 1$. De exemplu, pentru:

$$n = 1, T_1^1 = 2 \Rightarrow P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

$$n = 2, T_2^1 = 3 \Rightarrow P_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Se consideră un element finit liniar cu nodurile i și j (fig.4.11). Pentru a determina funcția sa de aproximare $\hat{u}(x)$, pornind de la $P_2(x)$, se scrie:

$$\hat{u}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x. \quad (4.20)$$

La determinarea coeficienților α_0 și α_1 se ține cont de structura nodală a elementului și de valorile nodale ale funcției.

$$u_1 = \hat{u}(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1;$$

$$u_2 = \hat{u}(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1 x_2.$$

Scriind aceste relații matriceal:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad (4.21)$$

rezultă soluția unică a sistemului:

$$\alpha_0 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{l}, \alpha_1 = \frac{u_2 - u_1}{l}. \quad (4.22)$$

Folosind notațiile consacrate ale funcțiilor de formă,

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{l}, N_2(x) = \frac{x - x_1}{l}; \quad (4.23)$$

se obține funcția:

$$\hat{u}(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2. \quad (4.24)$$

Proprietatea esențială a funcțiilor de forma (4.20) este aceea că ele au între noduri valori cuprinse în intervalul]0,1[iar la noduri rezultă:

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2. \quad (4.25)$$

Aceste proprietăți sunt ilustrate în fig.4.11. Se observă totodată asemănarea acestor funcții de formă cu coordonatele L-naturale ale elementului finit considerat.

Pentru geometrii bidimensionale, funcția polinomială Pascal de gradul n are forma:

$$P_n(x, y) = \sum_{k=1}^{T_n^2} \alpha_k x^i y^j; \quad (4.26)$$

unde numărul termenilor din P_n este $T_n^2 = (n + 1)(n + 2)/2$. De exemplu, pentru:

$$n = 1, T_1^2 = 3, \Rightarrow P_1(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

$$n = 2, T_2^2 = 6, \Rightarrow P_2(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2.$$

Formarea triunghiului lui Pascal, cu termenii acestor funcții P_n , este indicată în fig.4.12.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & x & y \\ & & & & & & x^2 & xy & y^2 \\ & & & & & & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ & & & & & & x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \\ & & & & & & x^5 & x^4y & x^3y^2 & x^2y^3 & xy^4 & y^5 \end{array}$$

Fig.4.12 Triunghiul lui Pascal

Pentru geometrii tridimensionale, funcția polinomială Pascal de gradul n poate fi scrisă sub forma generală:

$$P_n(x, y, z) = \sum_{i=1}^{T_n^3} \alpha_i x^i y^j z^k ; \tag{4.27}$$

unde numărul de termeni din P_n este: $T_n^3 = (n + 1)(n + 2)(n + 3)/6$. De exemplu, pentru:

$$n = 1, T_1^3 = 4, \Rightarrow P_1(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z,$$

$$n = 2, T_2^3 = 10, \Rightarrow P_2(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 yz + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 y^2 + \alpha_{10} z^2.$$

Termenii lui P_n , pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ în trei variabile, pot fi aranjați similar cazului bidimensional, obținându-se în locul triunghiului lui Pascal un tetraedru.

Funcții de interpolare Lagrange

Aceste funcții de interpolare au la bază forma generativă binecunoscută a polinomului Lagrange, de ordinul n [57]:

$$L_k^n(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \frac{x - x_m}{x_k - x_m} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} ; \tag{4.28}$$

întrucât $L_k^n(x_k)$ este un produs de n factori liniari rezultă că, această funcție polinomială este de gradul n . Se observă că:

$$L_k^n(x_k) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} = 1 ; \tag{4.29}$$

iar dacă $x = x_m, m \neq k, L_k^n(x_m) = 0$. Considerând k și m ca fiind nodurile unui element finit unidimensional, iar x_k, x_m coordonatele acestora, rezultă că putem considera:

$$L_k^n(x) = N_k(x)$$

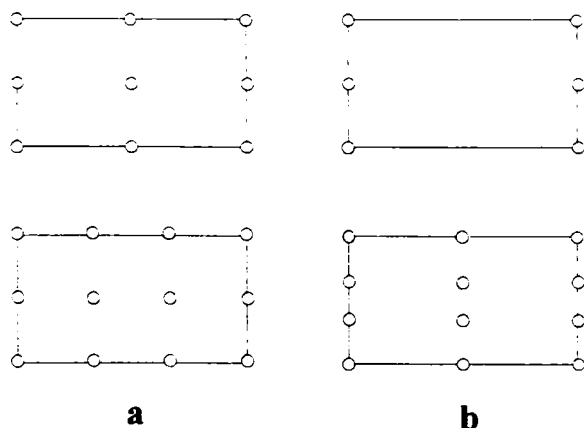


Fig.4.13 Elemente finite bidimensionale de ordin superior, tip Lagrange

Două mențiuni importante se impun pentru aceste funcții de interpolare:

- a) folosirea lor conduce la elemente finite cu noduri interioare, ceea ce constituie, în general, un dezavantaj (fig.4.13a);
- b) elementele finite pot avea un număr diferit de noduri pe cele două direcții (fig.4.13b).

În timp ce funcțiile de interpolare Pascal constituiau funcții polinomiale complete de gradul n , funcțiile de interpolare Lagrange sunt polinoame complete, până la gradul n și incomplete între n și $2n$.

Funcții de interpolare Hermite

Ca și în cazul polinoamelor Lagrange, polinoamele Hermite permit generarea funcțiilor de interpolare pentru o interesantă clasă de elemente finite. Deosebirea, față de cazul precedent constă în aceea că, de data aceasta vectorul valorilor nodale, ale elementului finit considerat, conține atât valori ale funcției, cât și a derivatelor ei, până la un anumit ordin [57].

Un polinom Hermite de gradul n în x , se notează cu $H^n_{mi}(x)$ și constituie un polinom de gradul $2n + 1$ în x .

De exemplu, $H^1_{mi}(x)$ este un polinom Hermite de gradul întâi, dar reprezintă un polinom de gradul trei în x . Ceilalți doi indici m și i reprezintă ordinul derivatei, a cărei valoare se evaluează și, respectiv, nodul 1 sau 2, al unui element liniar (fig.4.14).



Polinoamele Hermite pot fi întrebuințate pentru generarea funcțiilor de interpolare, deoarece se bucură de proprietatea de a lua valoarea 0 sau 1, la extremitățile intervalului considerat. Astfel, pentru:

$x = x_2$, sau când $m \neq n$ și $x \neq x_1$, avem:

$$d^m H^n_{mi}(x)/dx^m = 0. \tag{4.30}$$

Fig.4.14 Element finit unidimensional de ordin superior

Când $x = x_1$ și $m = n$, se obține:

$$d^m H^n_{mi}(x)/dx^m = 1. \tag{4.31}$$

Egalități similare se pot scrie și pentru nodul 2 ($x = x_2$).

Funcții de interpolare Serendip

Funcțiile de interpolare, prezentate până acum, au marele avantaj că pot fi generate în mod sistematic, pornind de la câte o expresie unică (o funcție polinomială completă, un polinom Lagrange sau unul Hermite). În același timp însă prezintă și un dezavantaj substanțial: conduc la elemente finite cu noduri interioare [57].

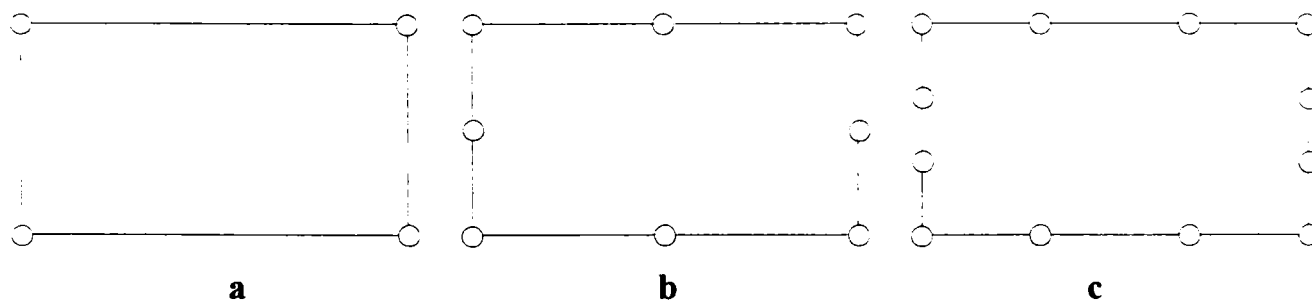


Fig.4.15 Elemente finite serendipiene
a) liniar b) pătratic c) cubic

Cercetătorii din acest domeniu au încercat să construiască elemente finite de grad superior, fără noduri interioare (sau cu un număr foarte redus al acestora) și să obțină pentru ele funcții de interpolare adecvate. Deși nu au obținut o formă generală pentru ele, au reușit să construiască - pentru fiecare element în parte - setul necesar al funcțiilor de formă, pe bază de observație și de încercări.

În fig.4.15 sunt prezentate primele trei elemente finite, din această familie. Se observă că, pornind de la elementul biliniar (fig.4.15a), gradul elementelor finite a fost mărit, prin adăugare de noi noduri pe contur. Pentru primul element, funcțiile de formă sunt aceleași ca și pentru elementul langrangian corespunzător, adică:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)}{4}, \tag{4.32}$$

unde ξ_i, η_i sunt coordonatele nodului generic i și au valori ± 1 .

Pentru elementul pătratic, funcțiile de formă sunt:

- pentru nodurile de vârf

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i)}{4}, \quad (4.33)$$

- pentru nodurile mediane de pe laturi

$$\begin{aligned} \xi_i = 0, N_i(\xi, \eta) &= \frac{(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)}{2}, \\ \eta_i = 0, N_i(\xi, \eta) &= \frac{(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)}{2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Pe baza acestui algoritm pot fi construite și alte elemente finite de grad superior. De asemenea, se pot obține așa-numitele elemente finite de tranziție, folosite între regiuni cu variații diferite ale parametrilor, respectiv cu diferite modele de aproximare.

Elemente finite izoparametrice

Elementele finite cu laturi rectilinii pot fi folosite la discretizarea oricăror forme geometrice. Totuși, acestea nu pot urmări bine contururile și suprafețele curbe, fapt pentru care numărul lor trebuie sporit în astfel de situații. O alternativă la această soluție o constituie construirea unor elemente finite curbilinii, capabile să urmărească aproape integral un contur sau o suprafață curbă. Cu ajutorul acestor elemente curbilinii, discretizarea domeniilor de analiză poate fi îmbunătățită în mod simțitor.

Elementele finite care folosesc aceleași funcții de interpolare, atât pentru coordonate, cât și pentru reprezentarea variabilelor de câmp, permițând modelarea conturilor curbilinii, se numesc *elemente finite izoparametrice* [57].

Dacă ordinul transformărilor geometrice este superior celui al reprezentărilor variabilelor câmpului de deplasări, elementele se numesc *supraparametrice*. Dacă ordinul reprezentărilor geometrice este inferior celor de câmp, elementele se numesc *subparametrice*.

De exemplu, dacă se determină distribuția temperaturii într-un domeniu plan, în care se folosesc elemente finite curbilinii cu 8 noduri, utilizând deci, aceleași funcții de interpolare pentru definirea geometriei și a câmpului termic. Dacă se consideră o geometrie rectangulară, pentru care sunt suficiente nodurile de vârf și se folosesc toate cele 8 noduri, pentru definirea câmpului termic atunci avem elemente subparametrice. Elementele la care geometria se definește prin funcții de interpolare de grad superior celor care aproximează variabilele de câmp, sunt supraparametrice.

În unele probleme complexe, cu mai multe câmpuri de variabile, același element finit poate fi izoparametric, în raport cu o anumită variabilă și sub- sau supraparametric, în raport cu celelalte. Un exemplu în acest sens îl constituie elementele din fig.4.16, folosite îndeosebi în mecanica fluidelor.

În primul caz, geometria rectangulară permite folosirea unor funcții de interpolare liniare pentru coordonate.

De asemenea, se recomandă ca și presiunea să fie aproximată tot cu funcții liniare, în timp ce viteza se aproximează cu funcții pătratice. Deci, elementul din fig.4.16a este izoparametric, în raport cu presiunea și subparametric, în raport cu viteza. Spre deosebire de acesta, elementul

finit curbiliniu din fig. 4.16b, este izoparametric, în raport cu viteza și supraparametric, în raport cu presiunea.

Se menționează că unii autori folosesc această terminologie numai pentru determinarea aproximărilor de câmp. De exemplu, elementele prezentate sunt subparametrice, pentru presiune și ar fi izoparametrice, dacă s-ar folosi 8 noduri pentru definirea atât a câmpului de viteze, cât și a câmpului de presiuni.

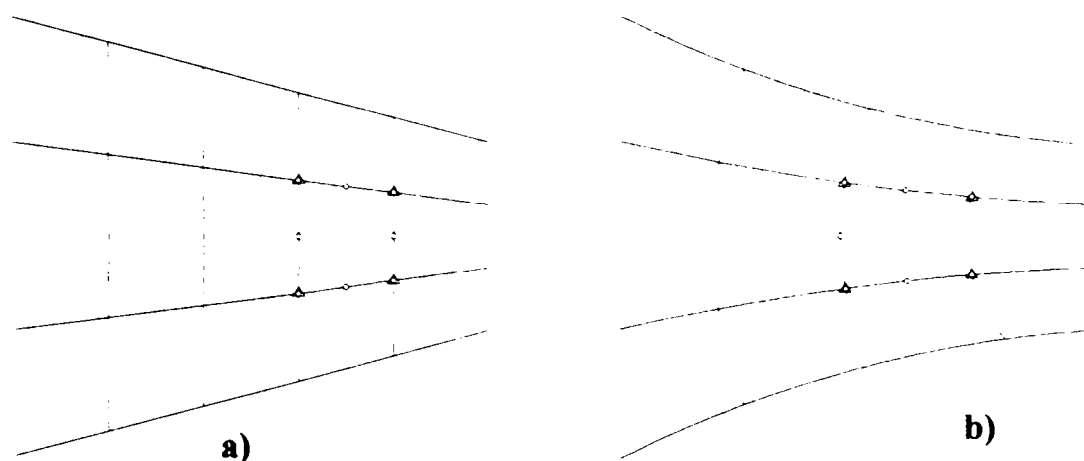


Fig.2.16 Elemente finite izoparametrice
 a) subparametric b) supraparametric

Considerațiile făcute sunt valabile pentru toate tipurile de elemente finite respectiv, uni-, bi- și tridimensionale. În cazul elementelor tridimensionale, contururile curbilinii devin pânze ale unor suprafețe. În Anexa 4 sunt prezentate două exemple de elemente finite:

- elementul finit triunghiular cu trei noduri,
- elementul finit quadratic cu opt noduri.

4.2. MODELAREA MEMBRANEI CU ELEMENT FINIT

4.2.1. Noțiuni de mecanica structurilor

În aplicațiile ingineresti, metoda elementului finit a fost folosită la început, în special, pentru calculul mecanic al structurilor. Și în prezent, când gama utilizărilor metodei s-a extins foarte mult, ea continuă să fie larg folosită pentru studiul comportării mecanice a structurilor [39].

Metoda s-a extins și la probleme din teoria elasticității, la calculul cu elemente finite în probleme de stare plană de tensiuni și deformații specifice, la calculele cu elemente finite în probleme de conducție a căldurii etc. Analiza se va limita doar la domeniul elastic.

La aplicarea metodei elementului finit pentru rezolvarea problemelor de mecanica structurilor, funcțiile necunoscute sau parametri problemei sunt de obicei deplasările. Deplasările $\{f\}$, ale unui punct din cuprinsul elementului finit, sunt exprimate în raport cu deplasările nodale, prin:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N]\{d\}_e, \quad (4.35)$$

unde u , v , w sunt deplasările în direcțiile axelor de coordonate, respectiv x , y , z , $[N]$ este matricea funcțiilor de formă și $\{f\}$ este vectorul deplasărilor nodale ale elementului finit.

Relația care exprimă deformațiile specifice în raport cu deplasările este:

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\{d\}_e, \quad (4.36)$$

unde $\{\varepsilon\}$ este vectorul deformațiilor specifice și $[\mathbf{B}]$ este matricea de transformare a deplasărilor în deformații specifice.

Relația care face legătura dintre tensiuni și deformații specifice este exprimată prin legea lui Hooke, care se scrie matriceal:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}]\{\varepsilon\}, \quad (4.37)$$

în care $[\mathbf{E}]$ este matricea modulelor de elasticitate.

Dacă se iau în considerare și deformațiile $\{\varepsilon_0\}$ produse de diferența de temperatură se obține:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (4.38)$$

în care $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0z}, \gamma_{0xy}, \gamma_{0yz}, \gamma_{0zx}\}$.

Pentru corpul izotrop $\varepsilon_{0x} = \varepsilon_{0y} = \varepsilon_{0z} = \alpha\Delta T$, respectiv $\gamma_{0xy} = \gamma_{0yz} = \gamma_{0zx} = 0$, în care α este coeficientul de dilatare liniară, iar ΔT este diferența de temperatură. Relația (4.38) se scrie:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} - \alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

în care E este modulul de elasticitate și ν este coeficientul lui Poisson.

Relația (4.39) reprezintă legea lui Hooke generalizată pentru corpul elastic izotrop, exprimată în tensiuni.

Aceeași lege exprimată în deformații specifice este:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} + \alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.40)$$

Cazul particular, care prezintă interes în activitatea practică inginerescă, este cel al stării plane, ce poate fi stare plană de tensiuni și stare plană de deformații specifice.

La starea plană de tensiuni $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. Relația (4.40) se reduce la:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (4.41)$$

din care neglijând deformația $\varepsilon_z = \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha \Delta T$, se obține:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.42)$$

La starea plană de deformații specifice $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Ecuația (4.39) se reduce la (4.43), în care σ_z a fost neglijat.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - (1+\nu)\alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.43)$$

Legea lui Hooke pentru starea plană de tensiuni și deformații specifice poate fi concentrată sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix}; \quad (4.44)$$

a) pentru starea plană de tensiuni

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad (4.45)$$

$$\varepsilon_{0x} = \varepsilon_{0y} = \alpha \Delta T; \quad \gamma_{0xy} = 0. \quad (4.46)$$

b) pentru starea plană de deformații specifice

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad (4.47)$$

$$\varepsilon_{0x} = \varepsilon_{0y} = \alpha \Delta T; \quad \gamma_{0xy} = 0. \quad (4.48)$$

4.2.2. Ecuația elementelor finite pentru probleme de elasticitate

În scopul deducerii ecuației elementelor finite pentru probleme de mecanica structurilor în domeniul elastic, se folosesc procedee energetice sau reziduale [39]. Dintre metodele energetice se folosește, mai ales, cea bazată pe teorema energiei potențiale minime, în care caz

parametri problemei sunt deplasările. Metodele energetice folosesc principii variaționale, potrivit cărora ecuațiile integrale, care exprimă echilibrul structurii, se obțin prin minimizarea unei mărimi funcționale. Dacă se folosește teorema energiei potențiale minime, funcționala care trebuie minimizată este energia potențială sau potențialul elementului finit.

Teorema energiei potențiale se enunță astfel: dintre toate configurațiile posibile pentru deplasări, care satisfac compatibilitatea internă și condițiile la limită, numai cele pentru care energia potențială are o valoare staționară (minimă), corespund poziției de echilibru. Potențialul total π_p al unui sistem elastic, se compune din energia de deformație U și potențialul forțelor exterioare W_p .

$$\pi_p = U + W_p. \quad (4.49)$$

Între lucrul mecanic al forțelor exterioare W și potențialul acestora W_p există relația $W = -W_p$, încât potențialul total este:

$$\pi_p = U - W. \quad (4.50)$$

Energia de deformație pentru un element finit de volum V_e , dacă se ia în considerație și energia de deformație, corespunzătoare tensiunilor inițiale, este:

$$U_e = \int_{V_e} \left(\frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \right) dV. \quad (4.51)$$

Forțele exterioare, care produc lucru mecanic, sunt forțe de volum $\{\mathbf{F}\}^T = \{F_x F_y F_z\}$, cum este de exemplu greutatea, forțe de suprafață $\{\mathbf{Q}\}^T = \{Q_x Q_y Q_z\}$, cum sunt presiunile și forțe care acționează în nodurile elementului finit $\{p_n\}$, care sunt forțe exterioare concentrate.

Forțele care acționează în noduri sunt dirijate în direcția deplasărilor nodale $\{d\}_e$, iar forțele de volum și de suprafață sunt dirijate în lungul componentelor deplasărilor $\{f\}^T = \{u v w\}$. Lucrul mecanic al forțelor exterioare, pentru un element finit, este:

$$W_e = \int_{V_e} \{f\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int_{S_e} \{f\}^T \{\mathbf{Q}\} dS + \{d\}_e^T \{p_n\}. \quad (4.52)$$

Prima integrală este lucrul mecanic pe elementul finit al forțelor de volum, a doua integrală este lucrul mecanic pe elementul finit al forțelor de suprafață, iar ultimul termen este lucrul mecanic al forțelor care acționează în nodurile elementului finit. Introduscând relațiile (4.52) și (4.51) în relația (4.50), scrisă pentru un element finit, se obține funcționala potențialului total pentru un element finit:

$$\pi_{pe} = \int_{V_e} \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV + \int_{V_e} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV + \int_{V_e} \{f\}^T \{\mathbf{F}\} dV - \int_{S_e} \{f\}^T \{\mathbf{Q}\} dS - \{d\}_e^T \{p_n\}. \quad (4.53)$$

Exprimând în relația (4.53) pe $\{f\}$ conform relației (4.35), pe $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ conform relației (4.36) și ținând cont că, transpusa unui produs matriceal este egală cu produsul comutat al transpuselor, se obține:

$$\begin{aligned} \pi_{pe} = & \frac{1}{2} \{d\}_e^T \left(\int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \right) \{d\}_e + \{d\}_e^T \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV - \{d\}_e^T \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{F}\} dV - \\ & - \{d\}_e^T \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{Q}\} dS - \{d\}_e^T \{p_n\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Pentru întreaga structură energia potențială sau potențialul este suma potențialelor elementelor finite. În cazul unei structuri divizate în m elemente finite

$$\pi_p = \sum_1^m \pi_{pe}; \quad (4.55)$$

sau

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \{d\}^T \left(\sum_1^m \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \right) \{d\} + \\ & + \{d\}^T \sum_1^m \left(\int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} dV - \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{F}\} dV - \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{Q}\} dS - \right) - \{d\}^T \{\mathbf{P}\}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

În funcționala (4.56) a potențialului structurii avem:

- $\{d\} = \sum_1^m \{d\}_e$ - deplasările nodale ale întregii structuri;
- $\{\mathbf{P}\} = \sum_1^m \{p_n\}$ - forțele nodale pentru întreaga structură;
- $\{d\}^T \{\mathbf{P}\}$ - lucrul mecanic al forțelor nodale pentru întreaga structură.

Aplicarea teoremei energiei potențiale minime înseamnă minimizarea funcționalei (4.56) a potențialului structurii, adică anularea derivatei potențialului în raport cu toate deplasările nodale:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial (d_i)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

sau

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial (d_1)} = \frac{\partial \pi_p}{\partial (d_{2i})} = \dots = \frac{\partial \pi_p}{\partial (d_n)} = 0. \quad (4.57)$$

unde n este numărul de grade de libertate ale structurii.

Se obține:

$$\left(\sum_1^m \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \right) \{d\} = \sum_1^m \left(- \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} dV + \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{F}\} dV + \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{Q}\} dS \right) + \{\mathbf{P}\}. \quad (4.58)$$

Relația (4.58) reprezintă sistemul de ecuații al structurii. Este un sistem liniar cu m ecuații. În membrul stâng al sistemului de ecuații (4.58),

$$[\mathbf{K}] = \sum_1^m \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV = \sum_1^m [k_i]; \quad (4.59)$$

reprezintă matricea de rigiditate a structurii, iar

$$[k] = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV, \quad (4.60)$$

este matricea de rigiditate a elementului finit.

Membrul drept al sistemului de ecuații (4.58), adică termenul liber, este vectorul forțelor sau încărcărilor:

$$\sum_1^m \{r_i\} + \{P\}, \quad (4.61)$$

în care:

$$\{r_i\} = - \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} dV + \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{F\} dV + \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \{Q\} dS, \quad (4.62)$$

reprezintă forțele aplicate pe elementul finit, iar $\{P\}$ este vectorul forțelor aplicate în nodurile structurii.

Termenii din membrul drept al ecuației (4.62) reprezintă:

$$- \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} dV = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\epsilon_0\} dV; \quad (4.63)$$

vectorul forțelor corespunzătoare tensiunilor inițiale, pe elementul finit;

$$\int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{F\} dV; \quad (4.64)$$

vectorul forțelor de volum, pe elementul finit;

$$\int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \{Q\} dS; \quad (4.65)$$

vectorul forțelor de suprafață, pe elementul finit.

Sistemul de ecuații al structurii (4.58) se scrie concentrat:

$$\left(\sum_1^m [k_i] \right) \{d\} = \sum_1^m \{r_i\} + \{P\}, \quad (4.66)$$

sau

$$[\mathbf{K}] \{d\} = \{R\}, \quad (4.67)$$

adică într-o formă identică cu ecuația metodei deplasărilor.

Însumarea din (4.66) a matricelor de rigiditate ale elementelor finite $[k_i]$ și a vectorilor forțelor pe elementele finite $\{r_i\}$ se face prin operația de asamblare.

4.2.3. Ecuația elementelor finite pentru starea plană de tensiuni

În practica activității ingineresti de proiectare, multe probleme se încadrează în categoria celor de stare plană de tensiuni și deformații specifice [39], [72].

În unele cazuri, chiar și problemele în care intervin stări spațiale, pot fi tratate, într-o primă aproximație, tot ca probleme de stare plană. Pentru rezolvarea problemelor de stare plană de tensiuni și deformații specifice, prin metoda elementului finit, s-a ales ca tip de element finit elementul triunghiular cu trei noduri (liniar), care pentru unele probleme de stare plană oferă suficientă precizie.

În continuare se arată forma pe care o capătă termenii ecuației (4.58), a elementelor finite, în cazul folosirii elementului finit cu trei noduri, pentru probleme de stare plană.

Matricea de rigiditate a elementului finit triunghiular cu trei noduri

Matricea de rigiditate a elementului finit are forma generală (4.60), în care $[E]$ este matricea constantelor elastice de forma (4.47), în cazul problemelor de stare plană de tensiuni și (4.49), în cazul problemelor de stare plană de deformății specifice.

Matricea $[B]$, de transformare a deplasărilor nodale în deformății specifice, conform relației (4.36), este specifică pentru fiecare tip de element finit și pentru fiecare categorie de problemă. La problemele de stare plană, în fiecare nod, sunt două deplasări necunoscute u și v (vezi fig.5 din Anexa 4.3). Câmpul de deplasărilor $\{f\}$, pe cuprinsul elementului finit, este de forma:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = [N]\{d\}_e, \quad (4.68)$$

în care funcțiile de formă sunt date de relațiile (7) din Anexa 4.3, iar $\{d\}_e$ este vectorul deplasărilor nodale, ale elementului finit.

Pentru starea plană, deformățiile specifice sunt:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_x \\ v'_y \\ u'_y + v'_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ()'_x & 0 \\ 0 & ()'_y \\ ()'_y & ()'_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (4.69)$$

Introducând relația (4.68) în relația (4.69) se obține:

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} ()'_x & 0 \\ 0 & ()'_y \\ ()'_y & ()'_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \{d\}_e. \quad (4.70)$$

Comparând relația (4.70) cu relația (4.36) rezultă:

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{ix} & 0 & N'_{jx} & 0 & N'_{kx} & 0 \\ 0 & N'_{iy} & 0 & N'_{jy} & 0 & N'_{ky} \\ N'_{iy} & N'_{ix} & N'_{jy} & N'_{jx} & N'_{ky} & N'_{kx} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Derivând expresiile funcțiilor de formă, expresiile (7) din Anexa 4.3, se obține:

$$[B] = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}, \quad (4.72)$$

și înlocuind coeficienții b și c cu valorile lor din expresiile (5) din Anexa 4.3, se obține:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} (y_j - y_k) & 0 & (y_k - y_i) & 0 & (y_i - y_j) & 0 \\ 0 & (x_k - x_j) & 0 & (x_i - x_k) & 0 & (x_j - x_i) \\ (x_k - x_j) & (y_j - y_k) & (x_i - x_k) & (y_k - y_i) & (x_j - x_i) & (y_i - y_j) \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Matricea $[\mathbf{B}]$ este compusă din constante, care sunt coordonatele nodurilor elementului finit, încât matricea de rigiditate a elementului finit (4.50) se scrie:

$$[\mathbf{k}] = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] \int_{A_e} h dA = \mathbf{A}_e h [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}], \quad (4.74)$$

unde A_e este aria elementului finit, iar h grosimea constantă a acestuia. La problemele de stare plană de deformații specifice h se ia egal cu unitatea.

Vectorul forțelor pe elementul finit

Tensiunile inițiale sunt provocate, de obicei, de diferențele de temperatură. Forțele corespunzătoare tensiunilor inițiale sunt exprimate de relația (4.53):

$$\{t\} = - \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} dV = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\varepsilon_0\} dV = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\varepsilon_0\} \mathbf{A}_e h. \quad (4.75)$$

Introducând în relația (4.75) transpusa matricei $[\mathbf{B}]$ se obține:

pentru starea plană de tensiuni

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_{ix} \\ t_{iy} \\ t_{jx} \\ t_{jy} \\ t_{kx} \\ t_{ky} \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{E}h\alpha\Delta T}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (4.76)$$

pentru starea plană de deformații specifice

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_{ix} \\ t_{iy} \\ t_{jx} \\ t_{jy} \\ t_{kx} \\ t_{ky} \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{E}h\alpha\Delta T}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.77)$$

Luarea în considerare a tensiunilor inițiale se poate face și calculând la început deformațiile specifice $\{\varepsilon\}$ provocate de toate celelalte forțe și apoi folosind relația (4.44).

Forțele masice sau de volum sunt exprimate de relația (4.64), care dezvoltată este:

$$\{f_m\} = \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{F}\} dV = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i \\ \mathbf{N}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_j \\ \mathbf{N}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} dV = h \int_{A_e} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_i F_x \\ \mathbf{N}_i F_y \\ \mathbf{N}_j F_x \\ \mathbf{N}_j F_y \\ \mathbf{N}_k F_x \\ \mathbf{N}_k F_y \end{Bmatrix} dA; \quad (4.78)$$

în care F_x și F_y sunt componentele forței masice sau de volum, după direcțiile axelor de coordonate, cum sunt greutatea, forțele de inerție etc. și care se măsoară în N/m^3 sau daN/cm^3 .

Calculând integralele cu ajutorul coordonatelor de arie (Anexa 4) se obține:

$$\{f_m\} = \begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ f_{kx} \\ f_{ky} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} h A_e \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_x \\ F_y \\ F_x \\ F_y \end{Bmatrix}, \quad (4.79)$$

relație care exprimă repartizarea egală, pe cele trei noduri, a forței masice.

Dacă forța masică este greutatea și structura este raportată la un sistem de coordonate, astfel încât, forța gravitației să acționeze pe direcția axei y , sensul negativ al acesteia, relația (4.79) devine:

$$\{f_m\} = -\frac{1}{3} h A_e \gamma \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (4.79')$$

unde γ este greutatea specifică a materialului, considerat omogen.

Forțele de suprafață sau de contur sunt exprimate de relația (4.65), care dezvoltată se scrie:

$$\{q\} = \int_{S_e} [N]^T \{Q\} dS = \int_{S_e} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} dS, \quad (4.80)$$

înlocuind $dS = h dl$, se obține:

$$\{q\} = h \int_{l_e} \begin{Bmatrix} N_i Q_x \\ N_i Q_y \\ N_j Q_x \\ N_j Q_y \\ N_k Q_x \\ N_k Q_y \end{Bmatrix} dl, \quad (4.81)$$

în care Q_x și Q_y sunt componentele forței de suprafață după axele sistemului global de coordonate. Ele au dimensiunile unor presiuni.

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{kx} \\ q_{ky} \end{Bmatrix} = \frac{h l_e}{2} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_x \\ Q_y \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}. \quad (4.82)$$

Relația (4.82) exprimă repartizarea egală a forței de suprafață, pe nodurile laturii încărcate, a elementului finit triunghiular. Ea se obține calculând integralele cu ajutorul coordonatelor de lungime (Anexa 4).

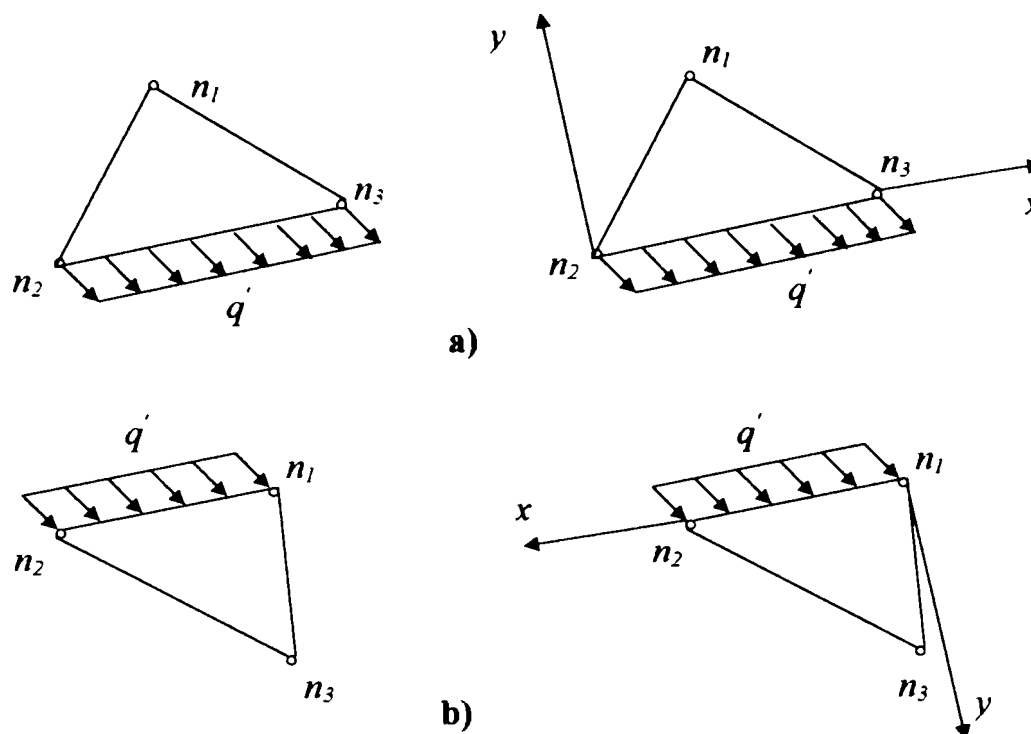


Fig.4.17

În cazul în care, forțele sunt aplicate pe laturile elementului finit, este util ca acestea să nu fie raportate la un sistem de coordonate global, ci la un sistem local al elementului finit, lucru care facilitează rezolvarea problemei. În acest scop se stabilesc convenții, care să asigure transformarea univocă de la sistemul local de coordonate, la cel global. În fig.4.17 sunt date două exemple de alegere a sistemului local de coordonate.

Fiind dat un element finit klm , în care latura încărcată cu o forță de suprafață este latura kl , sistemul local de coordonate se alege astfel încât, axa Ox a sistemului local să coincidă cu latura încărcată kl . Originea sistemului local de coordonate se alege astfel încât, al treilea nod al elementului, nodul m , să se găsească în primul cadran al sistemului local. Nodul care coincide cu originea sistemului local se notează cu k .

Forța de suprafață se consideră uniform repartizată pe latura elementului finit și se introduce prin componentele sale, pe direcțiile x și y ale sistemului local de coordonate.

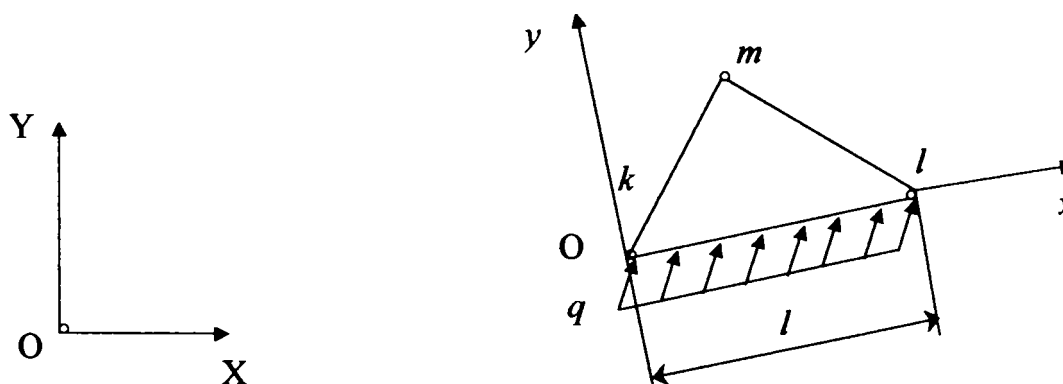


Fig.4.18

În fig. 4.18 se prezintă un element finit având o latură încărcată cu forță de suprafață, raportat la sistemul global de coordonate XOY și la sistemul local xOy (originea sistemului local coincide cu nodul k).

Vectorul componentelor forței de suprafață într-un nod, în sistemul global este $\{q\}_n^T = \{q_x \ q_y\}$, iar în sistemul local de coordonate este $\{q'\}_n^T = \{q'_x \ q'_y\}$. Relația de transformare este:

$$\{q'\}_n = [T]\{q\}_n; \quad \{q\}_n = [T]\{q'\}_n, \quad (4.83)$$

unde [T] este matricea cosinusurilor directoare:

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_{xX} & \lambda_{xY} \\ \lambda_{yX} & \lambda_{yY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Asamblarea ecuațiilor elementelor și rezolvarea sistemului de ecuații al structurii

Prin constituirea, în modul arătat, a matricei de rigiditate a elementului finit și a vectorului forțelor pe element, se constituie sistemul de ecuații elementale. Asamblarea ecuațiilor elementale, în sistemul de ecuații al structurii și rezolvarea acestui sistem, conduce la determinarea deplasărilor din nodurile structurii. Cunoscând deplasările nodale, se poate trece la calculul deformațiilor specifice și al tensiunilor.

Calculul deformațiilor specifice și al tensiunilor

Deformațiile specifice se calculează cu ajutorul relației de transformare (4.36). Introducând matricea [B] din relația (4.72) în relația (4.36) se obține:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}. \quad (4.85)$$

Cunoscând deformațiile specifice, se pot calcula tensiunile folosind relațiile (4.42) și (4.43). În acest fel se obțin tensiunile σ_x , σ_y , și τ_{xy} în sistemul global de coordonate. Este utilă în continuare calcularea tensiunilor principale:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \quad (4.86)$$

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

și determinarea direcțiilor principale, cu ajutorul relației:

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (4.87)$$

5. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE.

INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ, METODICA ȘI REZULTATELE CERCETĂRII MEMBRANELOR

5.1. OBIECTIVELE ȘI ETAPELE CERCETĂRII EXPERIMENTALE

Elementele elastice de tip membrană au fost modelate matematic, în cadrul lucrărilor de teoria elasticității și de organe de mașini. Matematicienii, care au descris comportamentul elastic al pieselor de tip membrană, ne-au lăsat un număr important de ecuații, care modelează piesele amintite, fără să stabilească cu precizie domeniul de valabilitate al acestora. Din acest motiv, folosirea aparatului matematic existent, în proiectare, este imposibilă sau lipsită de încredere. Eliminarea acestei deficiențe se poate face prin completarea și validarea teoriei existente, pe calea experimentului.

Acest capitol al lucrării, își propune să organizeze un experiment, care să urmărească comportamentul elastic al unui set de capsule manometrice, utilizate în aparatele de măsurare a presiunii. Capsulele manometrice îndeplinesc funcția de senzor de presiune, în aparatele de măsură menționate, adică sub acțiunea unei presiuni cunoscute, introdusă în capsulă, aceasta se deformează. Deformația este maximă în centrul capsulei, fiind proporțională cu presiunea de încărcare. Variația presiunii, introdusă în capsulă, cu deformația corespunzătoare a acesteia, reprezintă caracteristica elementului elastic. Construcția aparatelor de măsură impune traductorului de presiune o caracteristică cât mai liniară cu putință. Această cerință ne îndrumă spre a cerceta caracteristica elementului elastic și de a cuantifica abaterea acesteia, față de caracteristica ideală (care este o dreaptă).

A doilea obiectiv experimental, impus tot de construcția aparatelor de măsură, se referă la ridicarea experimentală a erorii de caracteristică, reprezentată prin histerezisul mecanic.

Etapele organizării experimentului sunt:

- alegerea capsulelor manometrice, care urmează a fi măsurate;
- conceperea schemei de principiu a instalației experimentale;
- alegerea aparatelor de măsură;
- realizarea și reglarea instalației experimentale;
- întocmirea programului de experimentare (succesiunea operațiilor de experimentare);
- efectuarea experimentului și înregistrarea datelor primare;
- concluzii preliminare, modificarea instalației experimentale, refacerea reglajelor și etalonărilor;

- reluarea experimentului în noile condiții (preluarea unor noi date primare);
- prelucrarea statistică a rezultatelor experimentale;
- interpretarea rezultatelor obținute în urma experimentului.

Concluziile, ce derivă din interpretarea rezultatelor, se vor folosi la completarea, validarea și îmbogățirea modelelor matematice și algoritmilor de proiectare a componentelor, care au în construcția lor elemente elastice de tip membrană.

5.2. CONCEPȚIA ȘI CONSTRUCȚIA INSTALAȚIEI EXPERIMENTALE

În vederea atingerii obiectivelor cercetării, instalația experimentală trebuie să permită realizarea unei presiuni controlabile într-o incintă, pe care sunt montate capsulele manometrice destinate cercetării și să permită măsurarea deformației maxime, în centrul acestora.

Restricțiile impuse de experiența din metrologie se referă și la mărimea forței perturbatoare creată de palpatoarele instrumentelor universale de măsurare a deplasărilor. Aceste restricții, precum și cele de dotare materială, au fost luate în considerare la conceperea variantelor schemelor de principiu și la alegerea schemei optime.

Concepția instalației are ca și elemente de pornire:

- ◆ un set de capsule manometrice, care intră în componența manometrelor de presiune fabricate de S.C. Badotherm – AMC S.A. Vaslui, România, membră a Badotherm Group;
- ◆ un set de traductoare tensorezistive pentru realizarea unui dispozitiv de măsurare a deplasărilor, de la firma Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt;
- ◆ aparate și instrumente de măsură, de precizie;
- ◆ tuburi de sticlă, furtun, supape, robinete, rezervor de aer, pompă etc.;
- ◆ placă de achiziție a datelor;
- ◆ componente electronice.

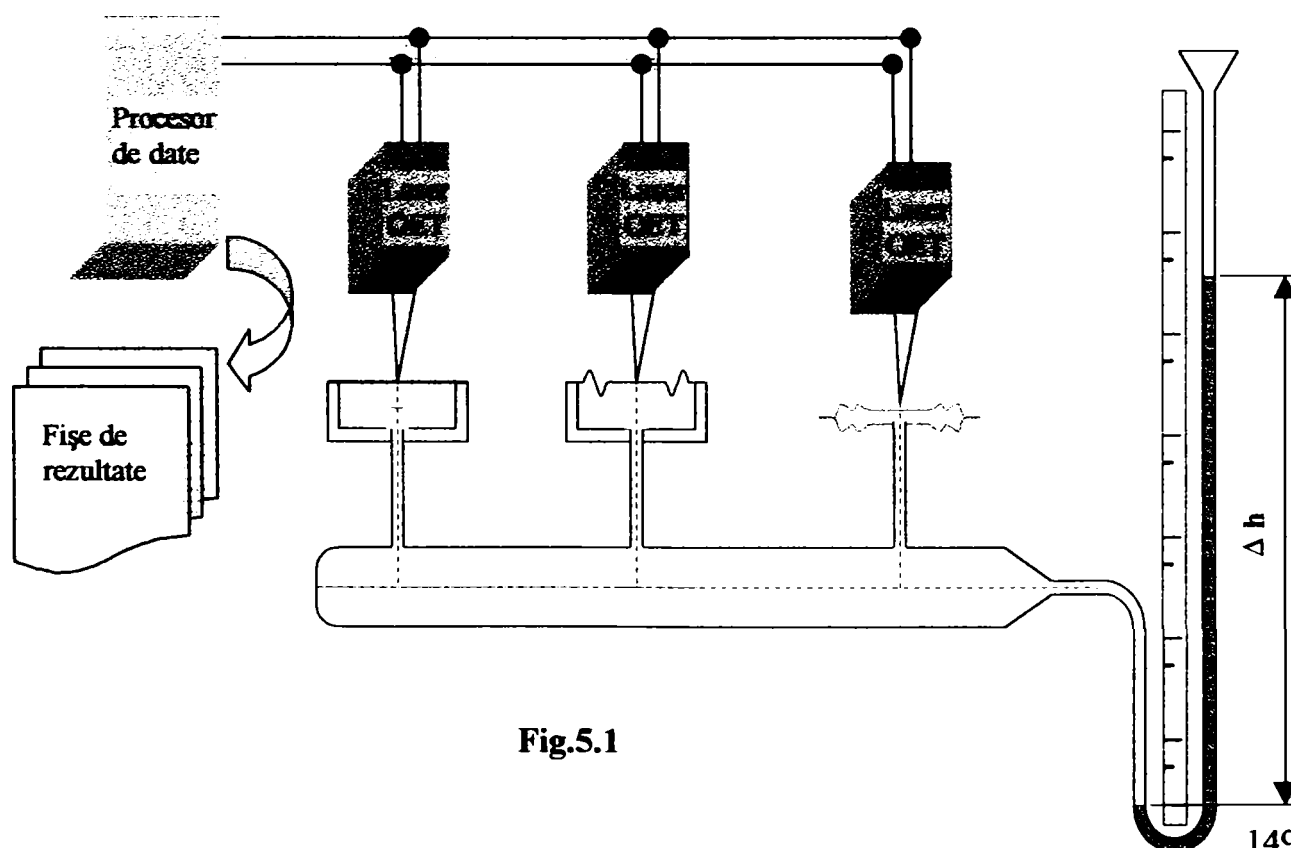


Fig.5.1

Pornind de la aceste seturi de restricții au fost concepute câteva scheme de principiu, care au fost supuse unei analize critice. Prima schemă propusă este prezentată în fig.5.1 și reprezintă schema de principiu a standului de măsurare a deformațiilor membranelor și capsulelor, cu traductoare optoelectronice CCD cu spot laser. Propunerea de folosire a acestor traductoare este determinată de realizările remarcabile în domeniul traductoarelor numerice cu spot laser, în special, ale firmei Micro-Epsilon Messtechnik GmbH&Co KG, Ortenburg.

Acest tip de traductoare, îndeplinește cu prisosință cerința metrologică, referitoare la nealterarea deformației, provocată de forța de apăsare a palpatorului. Rezoluția acestui tip de traductoare coboară la nivel de fracțiuni de micron. Aceste două proprietăți fac traductorul deosebit de adecvat cerințelor acestui experiment.

Folosirea traductorului optoelectronic CCD cu spot laser, cere o placă de achiziție de date și soft-ul aferent. Lipsa fondurilor necesare achiziționării acestui sistem de măsurare modern și performant este singurul argument al abandonării schemei din fig.5.1.

A doua schemă de principiu, care respectă cerințele inițiale impuse instalației experimentale, este prezentată în fig.5.2. Această figură prezintă schema de principiu a standului de măsurare a deformațiilor membranelor și capsulelor cu traductoare tensorezistive (TER).

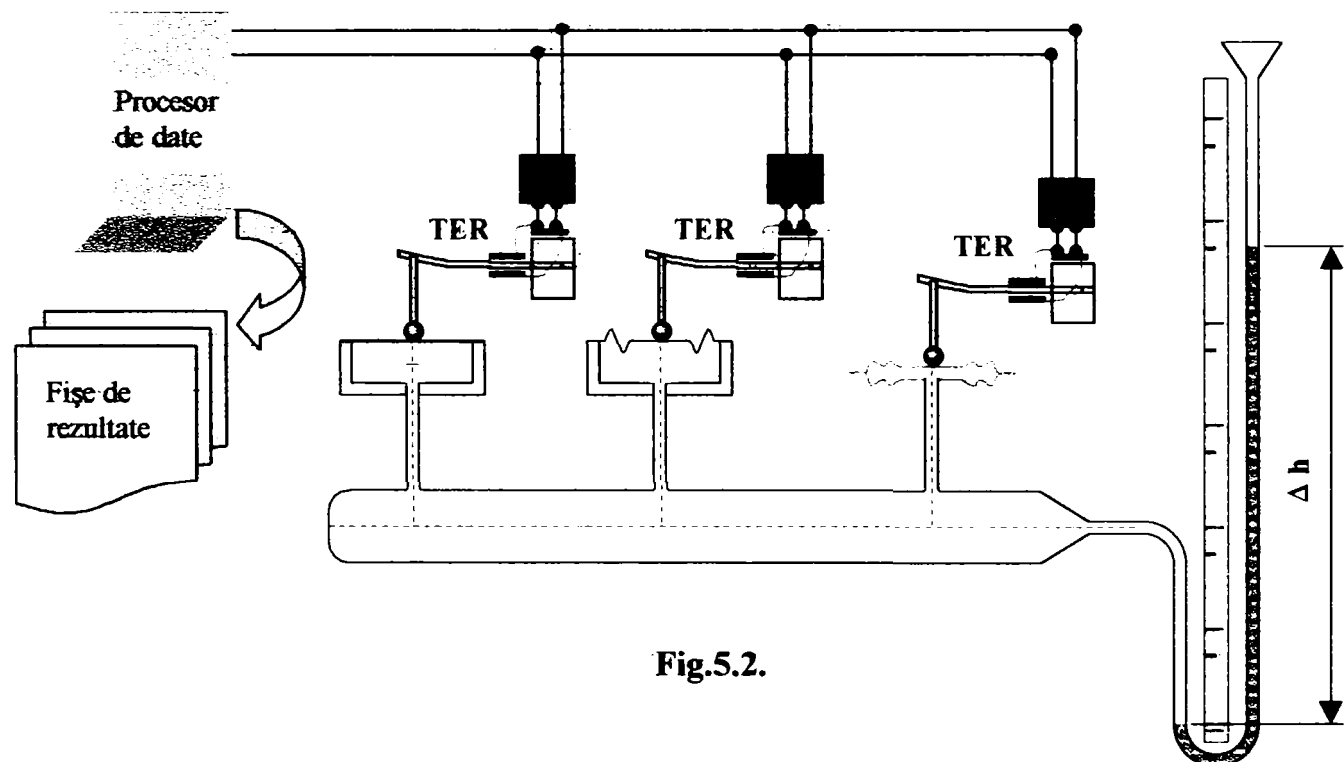


Fig.5.2.

Pornind de la această schemă de principiu, în care presiunea de încărcare se măsoară cu ajutorul unui manometru etalon, prin înălțimea unei coloane de apă, iar deformația membranelor și a capsulelor se măsoară cu un traductor tensorezistiv de deplasare, au fost concepute câteva variante de standuri experimentale, care sunt prezentate în continuare.

Traductorul tensorezistiv de deplasare este alcătuit dintr-o lamelă elastică și o punte tensometrică completă. Puntea este formată din patru timbre tensometrice TER (de la firma Hottinger Baldwin Messtechnik), legate într-un circuit electric amplificator. Pentru îmbunătățirea sensibilității și liniarizarea caracteristicii traductorului lipirea timbrelor tensometrice s-a realizat în stare pretensionată.

Prima variantă a standului pentru verificarea capsulelor manometrice este prezentată în schema din fig.5.3.

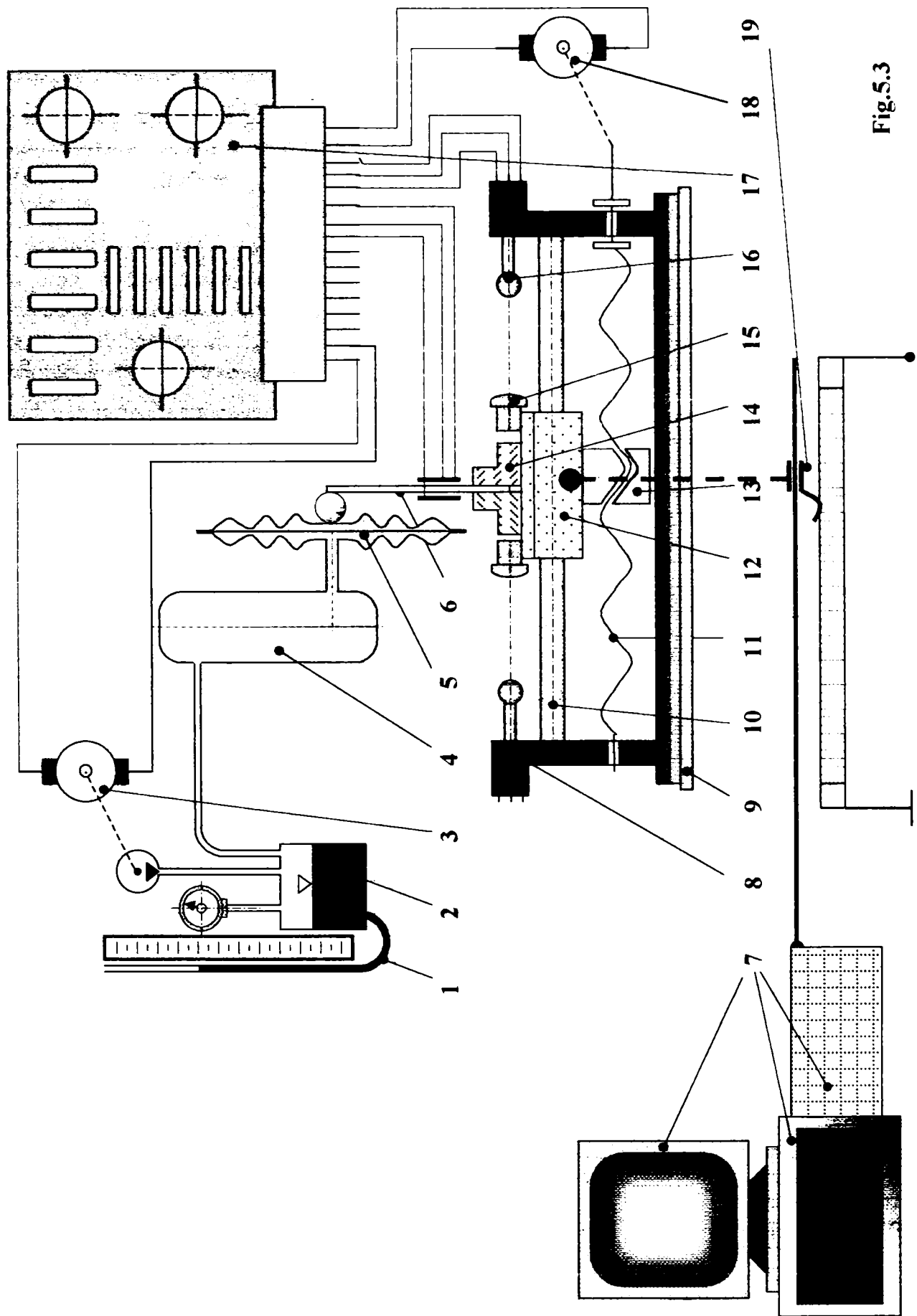


Fig.5.3

Această schemă a fost concepută având la bază principiul măsurării indirecte. Conform acestui principiu, sistemul de măsură trebuie să cuprindă un echipaj mobil, care să se deplaseze proporțional cu deplasarea, ce urmează a fi măsurată. Deplasarea proporțională devine posibilă datorită unui traductor de eroare. Semnalul de eroare este transmis la un element de execuție (de obicei motor electric), care deplasează echipajul mobil în sensul anulării erorii.

Standul are următoarea alcătuire și funcționare:

1. Manometru cu coloană de apă – a fost ales acest tip de manometru deoarece capsulele manometrice folosite în experiment funcționează în domeniul de măsură al acestuia. Al doilea argument al alegerii acestui tip de manometru este precizia ridicată, care derivă din principiul constructiv.
2. Rezervor de apă – introducerea rezervorului de apă în alcătuirea standului este necesară datorită modului de încărcare cu presiune a instalației. Existența acestui rezervor face ca la modificarea presiunii, cota de referință să se deplaseze pe verticală, cu o valoare foarte mică. Acest fapt, permite ca rigla de măsură să aibă poziție fixă, iar cota de referință să constituie o valoare de corecție a măsurării.
3. Agregat de încărcare cu presiune – încărcarea instalației cu o presiune variabilă este realizată de un mini agregat alcătuit dintr-un motor electric și o pompă volumetrică.
4. Incintă cu aer – rolul funcțional al acestei incinte este acela de rezervor de aer și de suport al capsulelor, care urmează să fie testate. Capacitatea sa volumică mare, în comparație cu a capsulelor, are rolul de a atenua vibrațiile din coloana de aer, provocate de pompa agregatului.
5. Capsulă manometrică – incinta standului poate să fixeze una sau mai multe capsule, care au caracteristici asemănătoare, în ceea ce privește presiunea maximă de încărcare. Montarea simultană, a mai multor capsule pe incintă, se face cu scopul comparării rapide a deformației lor, prin reducerea timpilor de montare-demontare.
6. Traductor de deplasare – standul folosește ca și traductor de deplasare, mai exact traductor de eroare, o lamelă elastică din oțel arc, pe care sunt lipite patru timbre tensometrice conectate în punte completă. Lamela este încastrată, iar la celălalt capăt are montat un palpator.
7. Calculator cu placă de achiziție a datelor – înregistrarea în timp real a datelor referitoare la deformația capsulelor se poate efectua prin introducerea semnalului provenit de la un traductor de deplasare (19) în placa de achiziție a datelor. Aceasta efectuează conversia semnalului analogic în semnal digital. Semnalul digital se prezintă sub forma unui set de date numerice, care este procesat de calculator cu ajutorul unui soft specializat.
8. Limitatoare de cursă – acestea au rolul de a întrerupe semnalul de comandă, provenit de la amplificatorul de eroare destinat servomotorului, atunci când, cursa de măsurare este epuizată la unul dintre capete. Se evită astfel comanda servomotorului în stare blocată.
9. Corp dispozitiv de măsurare – corpul dispozitivului este construit astfel încât să susțină ghidajele și antrenarea echipajului mobil. Corpul trebuie să asigure poziția geometrică corectă a componentelor antrenării și să permită câteva reglaje de apropiere de obiectul de măsurat (capsula manometrică).
10. Ghidaj – are rolul de a susține sania și de a-i permite o deplasare axială precisă. Ghidajul folosit este un ghidaj "închis", care materializează o cuplă cinematică de translație, C5.
11. Șurub de antrenare – este un șurub de mișcare, care transformă mișcarea de rotație a servomotorului, în mișcare de translație a saniei. Cerința principală impusă șurubului este precizia geometrică a pasului.

12. Sania – constituie echipajul mobil al dispozitivului de măsurare. Sania se poate deplasa după o singură direcție, cea a ghidajului, este antrenată în mișcare de către șurub și susține dispozitivul de prindere al lamei elastice.
13. Piuliță – este al doilea element al cuplei elicoidale șurub-piuliță. Cerința principală impusă piuliței, identică cu cea de la șurub, se referă la precizia geometrică a pasului.
14. Dispozitiv de prindere al lamei elastice – dispozitivul are rolul de a realiza o prindere de tip încastrare, a lamei elastice.
15. Tampon – acționează limitatoarele de cursă la epuizarea acestora; pot fi reglabile sau fixe.
16. Palpatör limitator de cursă – limitatoarele de cursă specializate conțin, atât traductorul de proximitate, cât și palpatorul. Schema conține, figurate separat, cele două componente.
17. Dispozitiv electronic de comandă – asigură amplificarea în tensiune a semnalului provenit de la puntea de traductoare și generarea unui semnal de putere, necesar servomotorului de antrenare. Schema de principiu cu câteva detalii este prezentată în fig.5.4, iar schema electronică completă în fig.5.5. Cerințele principale impuse dispozitivului electronic sunt: liniaritatea caracteristicii de amplificare, stabilitatea termică ridicată și stabilitatea de lungă durată. Alte cerințe sunt: posibilitatea de reglare a derivei de tensiune și a reglării simetriei amplificatorului diferențial.

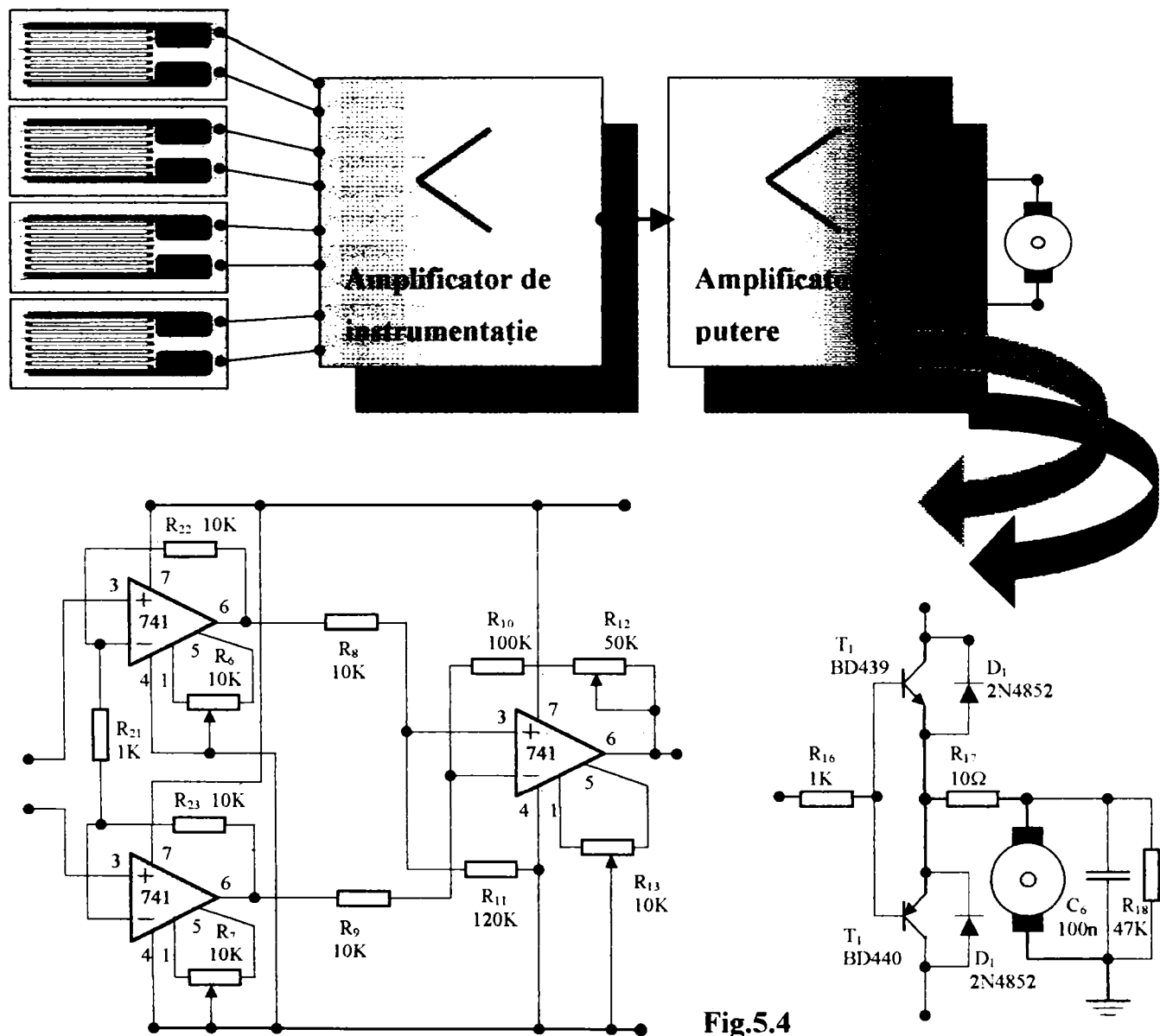
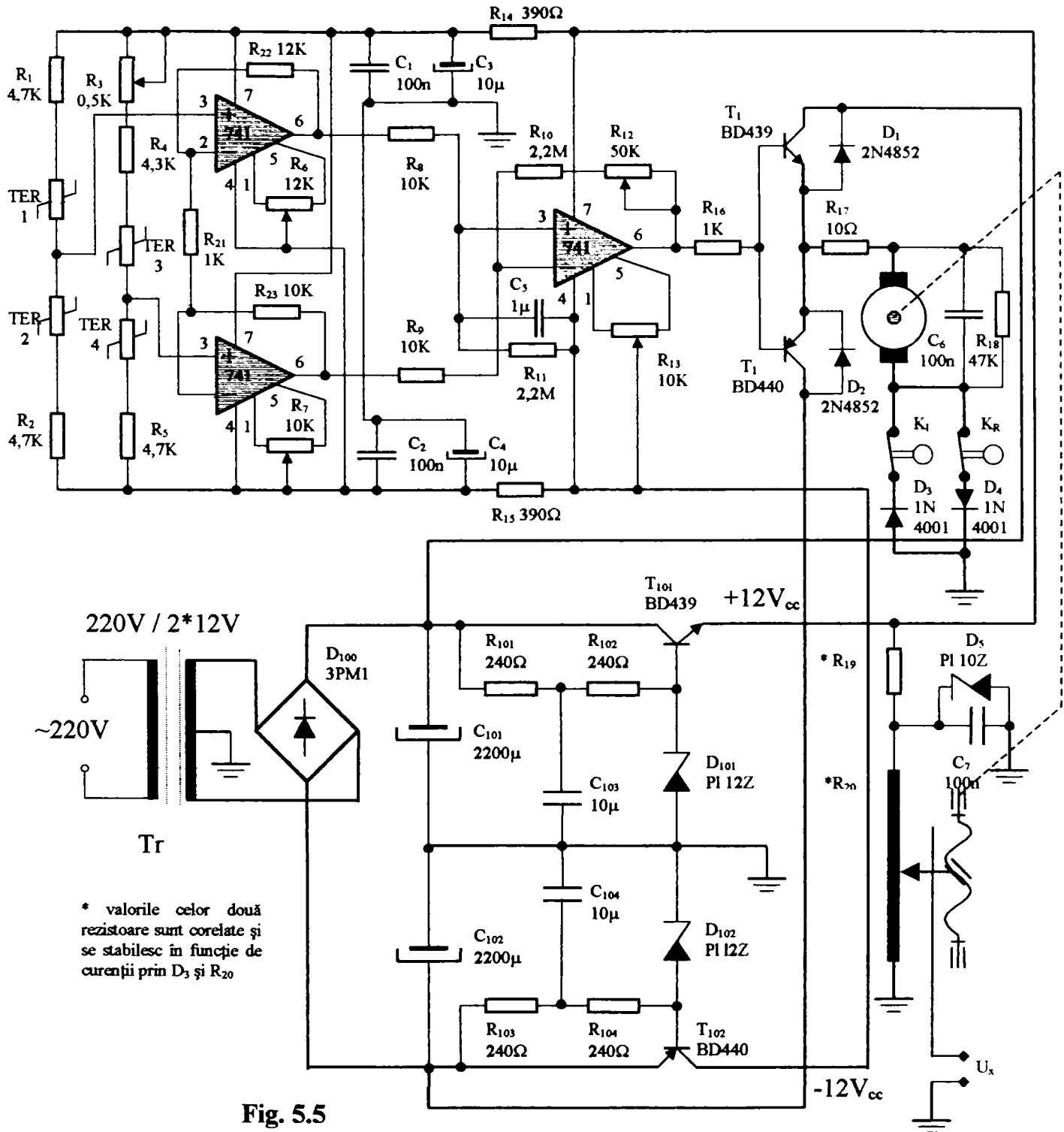


Fig.5.4

18. Servomotor – este elementul efector al instalației de măsură. Principala sa proprietate este cuplul ridicat la turație scăzută (turație zero). Se poate folosi, pentru îmbunătățirea caracteristicii de cuplu, un motoreductor planetar, de tip miniatură.

19. Traductor rezistiv de deplasare – are rolul de a genera un semnal de tensiune proporțional cu poziția cursorului. Dacă cursorul se mișcă solidar cu sania, atunci el devine un traductor absolut de deplasare.



Standul experimental, a cărui schemă a fost prezentată în fig.5.3, îndeplinește principal toate cerințele cerute de experiment. Procedând la o analiză critică a detaliilor schemei am constatat următoarele limitări și deficiențe ale acesteia:

- manometrul cu coloană de apă (1), cu o singură coloană, poate fi folosit rațional până la presiuni echivalente unei înălțimi de 2 m (0,2 bar) coloană de apă. Această limitare îl face

inutilizabil în experimentul curent în care este necesară o presiune mai mare de încărcare (0,6 bar);

- rezervorul de apă (2) are și rol de rezervor de aer, în care se creează presiunea necesară experimentului. Realizarea fizică a acestui dispozitiv este dificilă, datorită complexității constructive;
- măsurarea deformației, prin compensare, are dezavantajul că introduce o eroare datorată pragului de sensibilitate al traductoarelor, a frecărilor mecanice care apar etc.

Înlăturarea deficiențelor de mai sus a condus la conceperea unei scheme îmbunătățite, prin introducerea următoarelor modificări:

- s-a înlocuit manometrul cu coloană de apă (1) cu un manometru cu 6 coloane de apă legate în serie, care să satisfacă cerința referitoare la domeniul de presiune;
- pentru folosirea judicioasă a întregului domeniu de înălțimi de coloană de apă, între manometrele elementare s-au introdus supape de sens, necesare realizării unei suprapresiuni între ramurile manometrelor;
- s-a folosit o planșetă, pentru poziționarea exactă a ansamblului de manometre, pentru fixarea incintei cu capsule și a dispozitivului electronic de măsurare;
- s-a introdus un dispozitiv de poziționare și reglare, care să permită deplasarea traductorului tensorezistiv de la o capsulă la alta;
- s-a introdus un rezervor suplimentar de aer, conectat la incinta cu capsule;
- s-a modificat schema sursei stabilizate, prin introducerea unei filtrări suplimentare și schema de alimentare a punții tensometrice, prin introducerea unui filtru trece jos, cu scopul eliminării perturbațiilor ce pot fi induse pe punte.

Toate aceste modificări majore, plus câteva de detaliu, au eliminat deficiențele standului prezentat în schema din fig.5.3 și au condus la conceperea unui nou stand, prezentat în schema din fig.5.6. Standul conform noii scheme are următoarea alcătuire:

1. Multimetru digital – necesar măsurării cu o bună rezoluție a semnalului electric, provenit de la dispozitivul electronic de măsurare.
2. Dispozitiv de poziționare și reglare – acest dispozitiv este un ansamblu format din suport, ghidaje, șurub-piuliță, sanie, dispozitiv de reglare cu excentric, după două axe. Dispozitivul a fost introdus pentru a permite poziționarea traductorului în centrul capsulelor montate pe incinta cu aer.
3. Traductor tensorezistiv – traductorul este identic cu cel prezentat în schema din fig.5.3.
4. Incintă cu aer – are rolul identic cu al incintei prezentată în schema din fig.5.3.
5. Capsulă manometrică – constructiv și funcțional este identică cu cea din schema din fig.5.3.
6. Planșetă suport – această planșetă a fost introdusă pentru a permite poziționarea exactă a celor trei manometre elementare și realizarea manometrului cu coloane multiple. Pe suprafața excedentară a plașetei s-a prevăzut fixarea celorlalte componente ale standului, pentru a se obține o construcție cât mai unitară.
7. Supape de încărcare cu suprapresiune – supapele au fost prevăzute pentru a încărca cu suprapresiune ramurile de conectare ale manometrului. Introducerea suprapresiunii este necesară pentru folosirea întregului domeniu de măsură al manometrului.

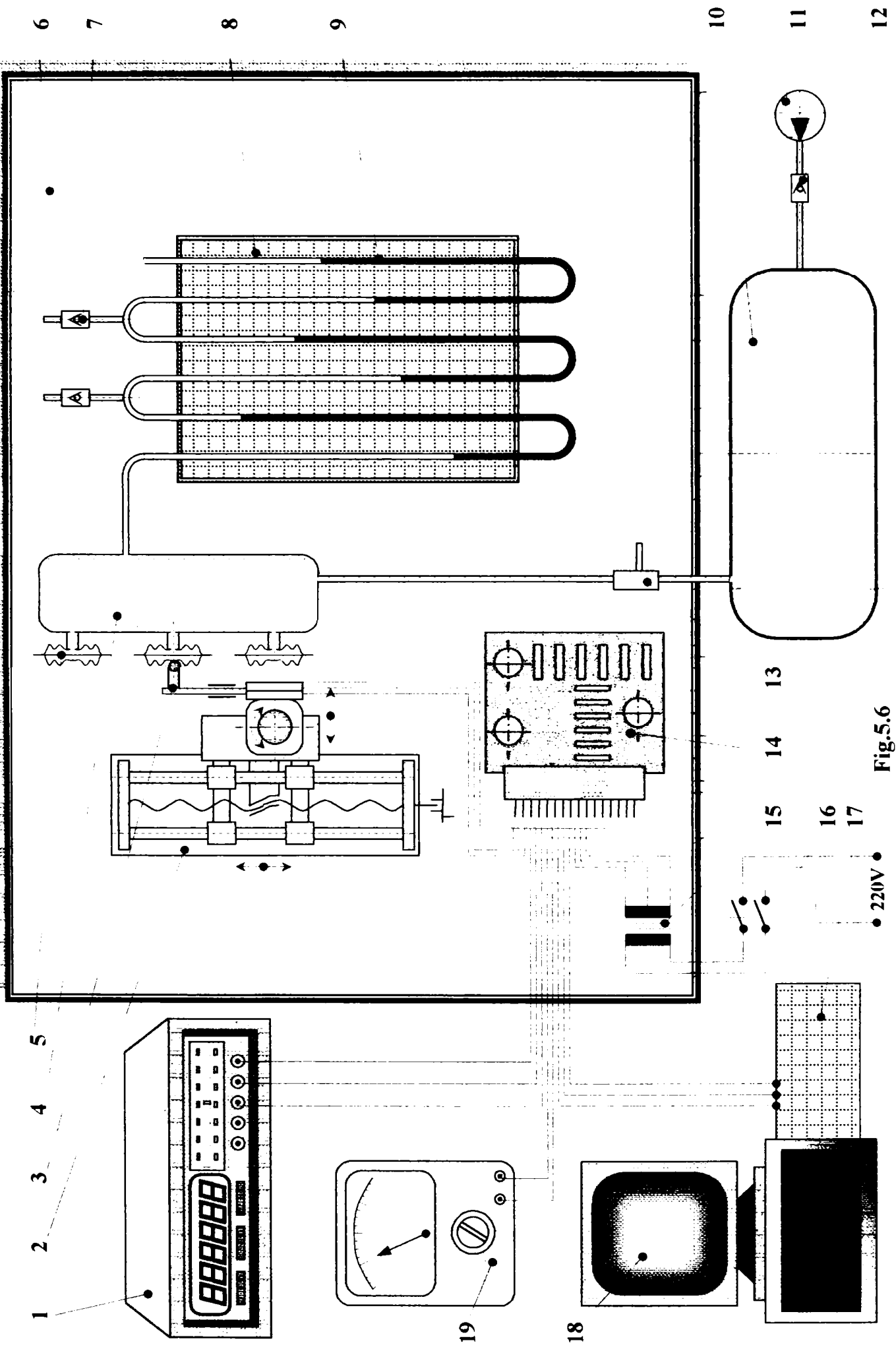


Fig.5.6

8. Riglă gradată – rigla are rolul de a permite măsurarea înălțimii celor șase coloane de apă. Pentru înlăturarea erorilor de poziționare și eliminarea reglajelor s-a prevăzut o riglă unică pentru cele șase tuburi. În acest caz, reglajul unic, care trebuie efectuat este acela de aducere la verticală a axei Oy, a riglei gradate (axa Oy a riglei este poziționată paralel cu cele 6 tuburi ale manometrului).

9. Manometru cu coloane multiple – acest manometru este alcătuit din șase tuburi de sticlă, legate în serie și încărcate cu apă distilată pigmentată. La montaj tuburile trebuie să se încadreze într-o abatere de la paralelism de 1:1000. Verticalitatea ansamblului se reglează în două plane perpendiculare, cu ajutorul unui fir cu plumb și a unei rigle gradate. Reglajul trebuie să se încadreze în abaterea de la verticalitate de 1:1000.

10. Rezervor de aer – acest rezervor are rolul de a atenua variațiile de presiune provocate de pompă și de a compensa pierderile de neetanșitate ale circuitului de încărcare.

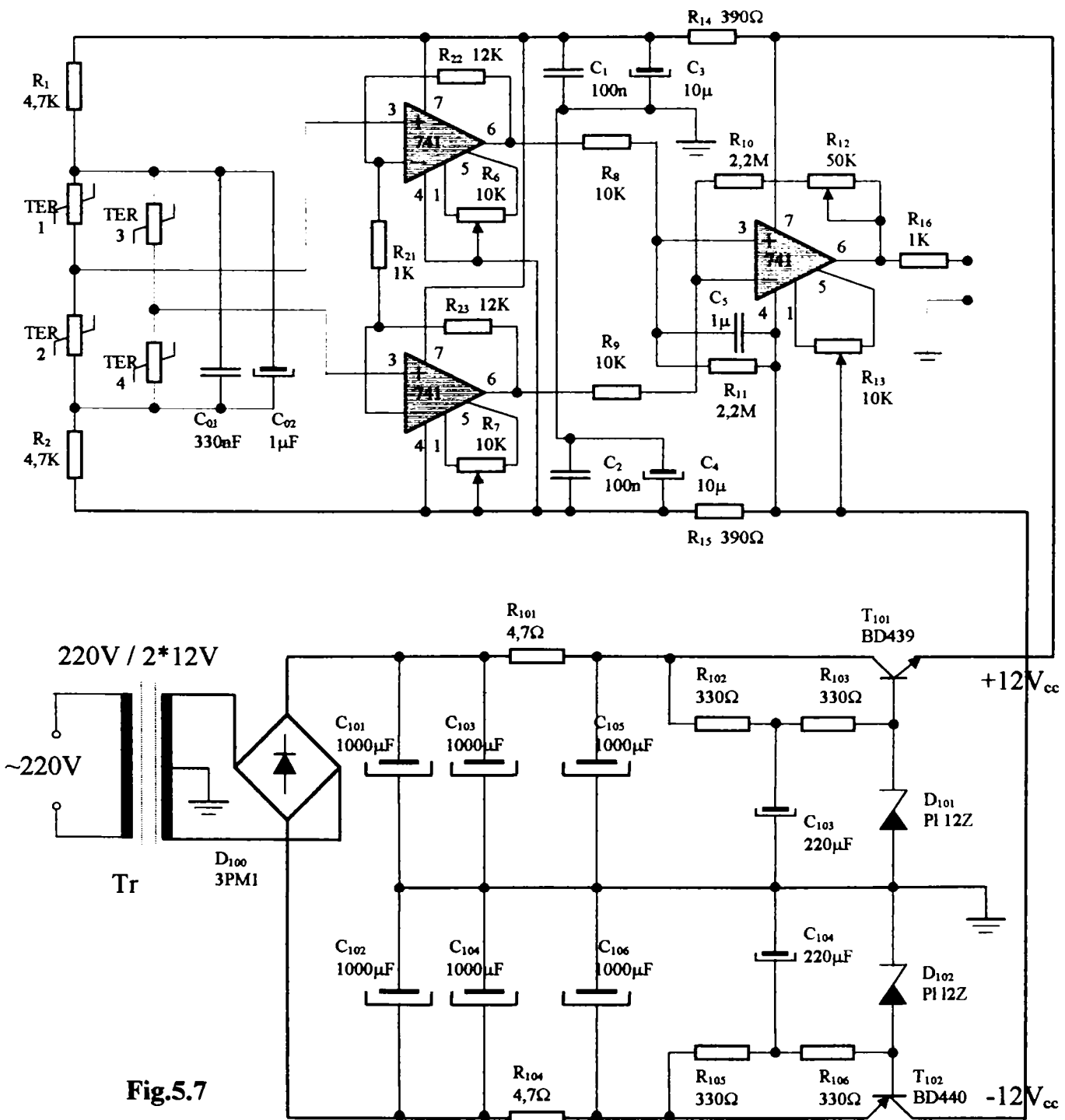


Fig.5.7

11. Pompă de aer – este utilizată pentru încărcarea circuitului pneumatic cu presiunea de lucru. Încărcarea ideală este o încărcare continuă și din acest motiv, este preferabilă o pompă cu capacitate cilindrică mică.

12. Supapă – supapa de sens folosește la încărcarea rezervorului, iar în caz de necesitate și la descărcarea acestuia.

13. Robinet de descărcare – are rolul de a realiza descărcarea droselată a instalației, pentru a obține viteze de descărcare variabile.

14. Dispozitiv electronic de măsurare – funcția dispozitivului este aceea de a furniza la ieșire un semnal electric proporțional cu deformarea traductorului tensorezistiv, respectiv a capsulei. Dispozitivul are în componență următoarele blocuri funcționale: sursă de tensiune stabilizată, amplificator de instrumentație, realizat cu amplificatoare operaționale. Cerințele funcționale ale acestui dispozitiv de măsurare sunt similare cu cele ale dispozitivului corespunzător din schema prezentată în fig.5.3. Schema electronică completă a dispozitivului electronic de măsurare, după modificările menționate mai sus, este prezentată în fig.5.7.

15. Transformator de rețea – este un transformator cu secundar cu priză mediană, astfel dimensionat încât să alimenteze stabilizatorul cu tensiune dublă.

16. Întrerupător general – servește la pornirea și oprirea standului.

17. Placă de achiziție a datelor

18. Calculator PC pentru procesarea datelor

19. Voltmetru etalon – este un voltmetru de precizie clasă 0,2 %, necesar verificării exactității indicației multimetrului digital.

Principiile care au stat la baza concepției standului experimental sunt: o construcție unitară, realizată modular și utilizarea unor componente existente, ușor de procurat și achiziționat.

Piesa suport a standului a fost astfel concepută încât să satisfacă, în primul rând, cerințele impuse de instrumentul de măsurare al presiunii (manometrul cu 6 coloane de apă). Geometria manometrului cu coloane multiple a impus alegerea unei planșete de înălțime dublă, ca suport pentru toate componentele standului.

Pe o planșetă normală, cu suport clasic cu contragreutate, s-a atașat și rigidizat, pe verticală, încă o planșetă. Suportul astfel obținut a fost reglat în poziție verticală. Pe planșeta suport s-au fixat apoi modulele componente ale standului (aceste module sunt cele prezentate în fig.5.6). Modulele au fost interconectate electric și pneumatic.

Celelalte aparate, necesare măsurătorilor (multimetrul digital, multimetrul analogic și calculatorul) s-au amplasat pe o masă în apropierea suportului planșetă. Deci, ansamblul standului este alcătuit din planșeta suport (cu înălțime dublă) cu componentele montate pe ea și din masa cu aparate de măsură.

Pentru efectuarea măsurătorilor, cu ajutorul pompei, se încarcă cu presiune rezervorul de aer. Pe rezervor sunt montate trei capsule destinate probelor. Prin încărcare fiecare capsulă se deformează, iar deformarea (semnalul mecanic) este convertită în semnal electric, de către traductorul tensorezistiv de deplasare. Semnalul electric este transmis de la dispozitivul electronic de măsurare la multimetrul digital. Acesta măsoară semnalul electric, care este proporțional cu mărimea deformăției capsulei manometrice.

În continuare sunt prezentate, mai în detaliu, câteva dintre componentele standului experimental.

Standul experimental utilizat pentru măsurători, prezentat în fig.5.6 a fost realizat practic și este prezentat în fotografia din fig.5.9a. În fig.5.9b este prezentat sistemul de prindere al capsulelor manometrice pe incinta (4), prin intermediul căreia sunt încărcate cu presiune.

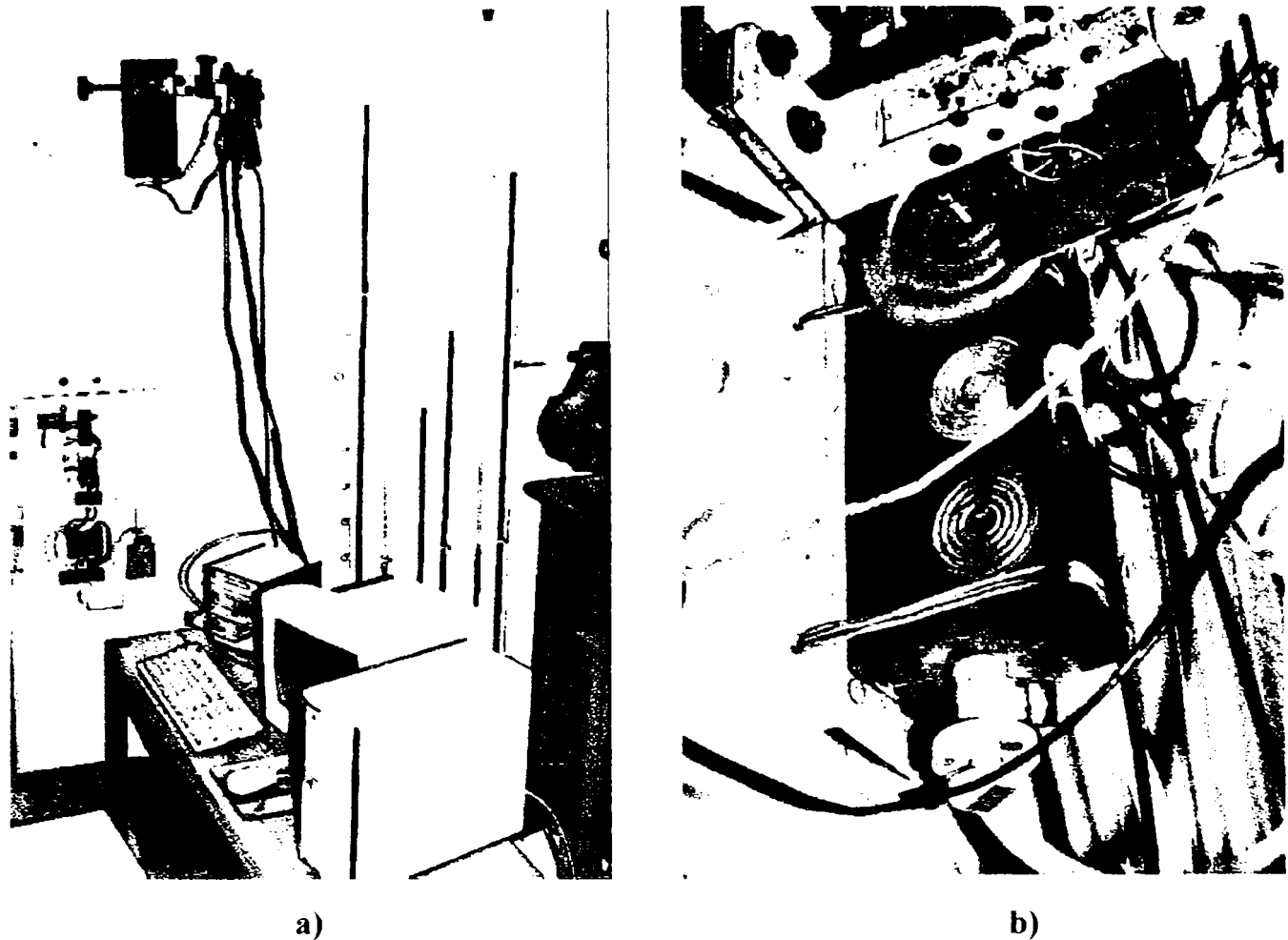


Fig.5.9

Din această figură se pot observa cele trei capsule măsurate (de jos în sus): prima capsulă este cea care are presiunea maximă de încărcare, $p_1 = 250$ mbar, a doua are $p_2 = 600$ mbar (având aceeași geometrie, dar grosime de tablă diferită) și a treia capsulă de alte dimensiuni și geometrie și care are presiunea maximă de încărcare $p_3 = 400$ mbar.

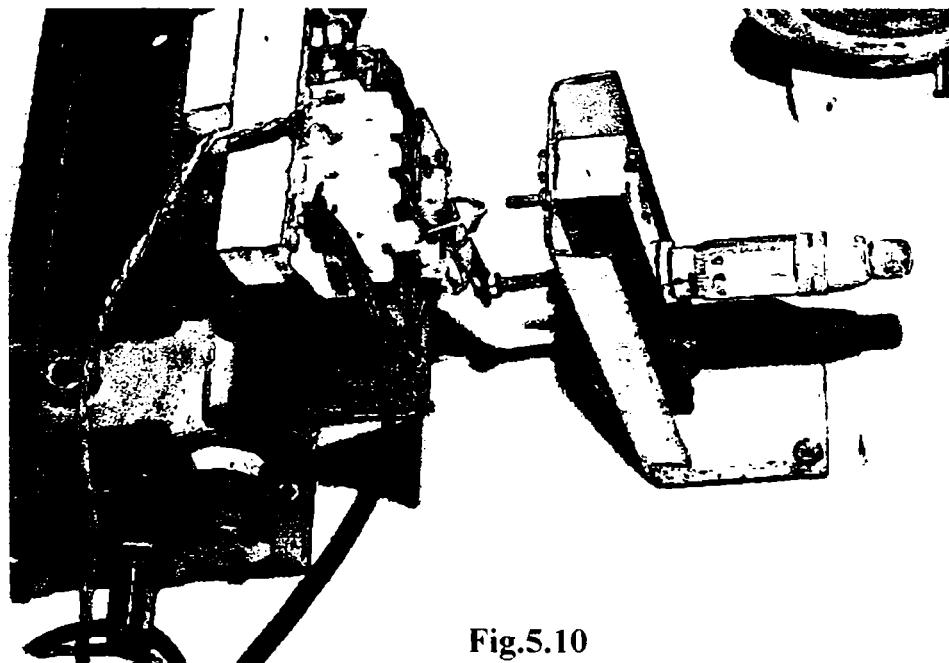


Fig.5.10

În fig.5.10 este prezentat dispozitivul de etalonare al traductorului de deplasare. Dispozitivul conține un micrometru, cu ajutorul căruia se etalonează traductorul de deplasare, prin deplasarea impusă la palpatorul micrometrului, de la șurubul micrometric. Pentru etalonare au fost efectuate 10 măsurători, pe cursa de $0 \div 2$ mm a micrometrului, cu pasul de 0,2 mm.

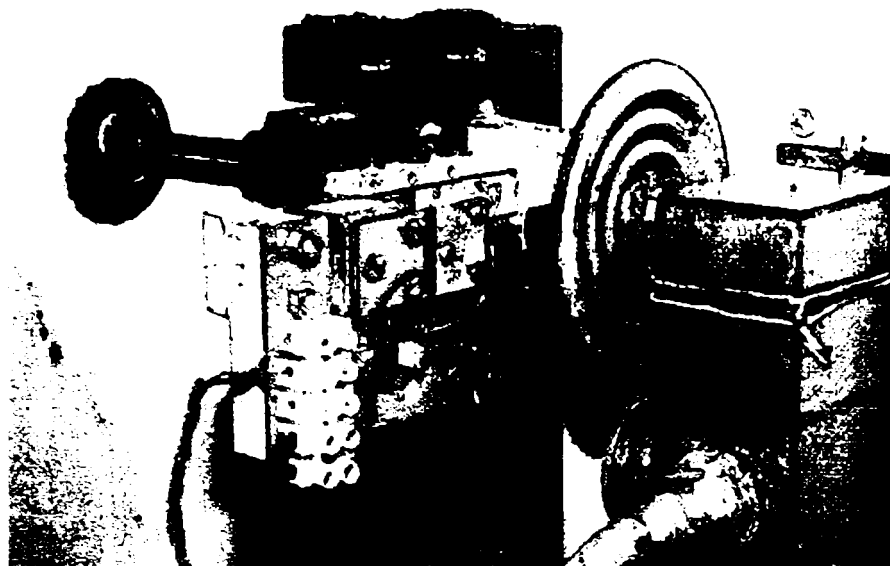


Fig.5.11

În fig.5.11 se pot vedea dispozitivul de poziționare și reglare al traductorului tensorezistiv de deplasare, cât și fixarea lamei elastice (pe care sunt lipite timbrele tensometrice) a traductorului tensorezistiv.

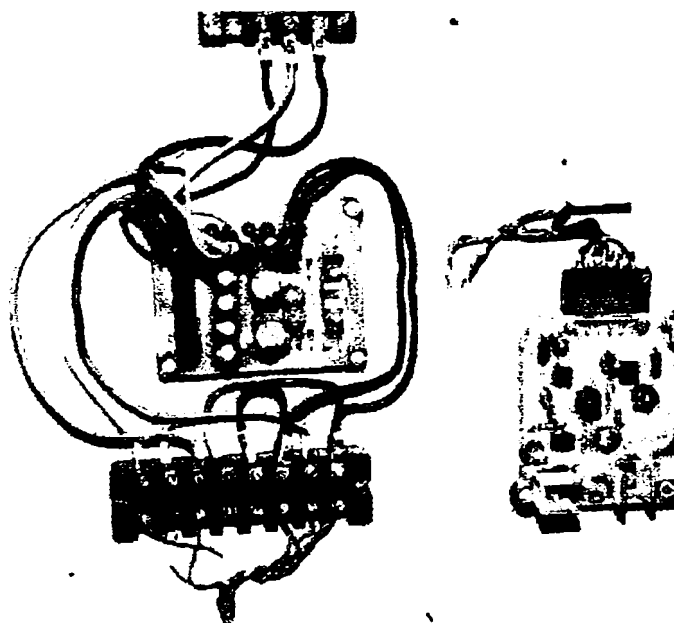


Fig.5.12

Dispozitivul electronic al standului este prezentat în fig.5.12. El este alcătuit dintr-o sursă (în partea stângă) stabilizată dublă $\pm 12V_{cc}$ cu ieșire suplimentară de tensiune nestabilizată $\pm 15V_{cc}$ și un etaj de amplificare (în partea dreaptă). Sursele de tensiune sunt foarte meticulos filtrate, atât în zona nestabilizată, cât și în cea stabilizată. Etajul de amplificare cuprinde: un amplificator de instrumentație (realizat cu trei amplificatoare operaționale), destinat exclusiv prelucrării semnalului provenit de la puntea tensometrică, și un amplificator de putere, destinat unei dezvoltări ulterioare a standului cu un sistem de măsurare cu compensare.

5.3. METODICA CERCETĂRII MEMBRANELOR

La cercetarea membranelor gofrate, componente ale capsulelor manometrice din aparatele de măsurare a presiunii, s-au urmat trei direcții, și anume:

1. măsurătorile experimentale ale parametrilor funcționali ai capsulelor manometrice, pe standul experimental realizat practic în Laboratorul de Tribologie al Departamentului de Mecatronică (Catedra de Organe de Mașini și Mecanisme, Facultatea de Mecanică);
2. modelarea și analiza cu element finit a capsulelor manometrice, utilizând programul COSMOS/M – Versiunea 2.5;
3. calculul analitic al membranelor componente ale capsulelor manometrice, pe baza relațiilor existente în literatura de specialitate, utilizând programul MathCAD6.

După efectuarea măsurătorilor experimentale, a modelării și analizei cu element finit și a calculului analitic au putut fi comparate rezultatele obținute, cu extragerea unor concluzii deosebit de importante privind comportamentul acestor membrane.

Pentru experimentare pe stand, modelare cu element finit și calcul analitic, s-au folosit două tipuri de capsule manometrice, și anume:

1. un set de 4 tipodimensiuni de capsulă cu diametrul exterior $\Phi = 47$ mm, cu 4 gofreuri pe rază, profil sinusoidal uniform, care au desenul de execuție prezentat în fig. 5.13;
2. o capsulă cu diametrul exterior $\Phi = 100$ mm, cu 3 gofreuri pe rază, profil sinusoidal uniform și cu profil toroidal de capăt, care are desenul de execuție prezentat în fig. 5.14.

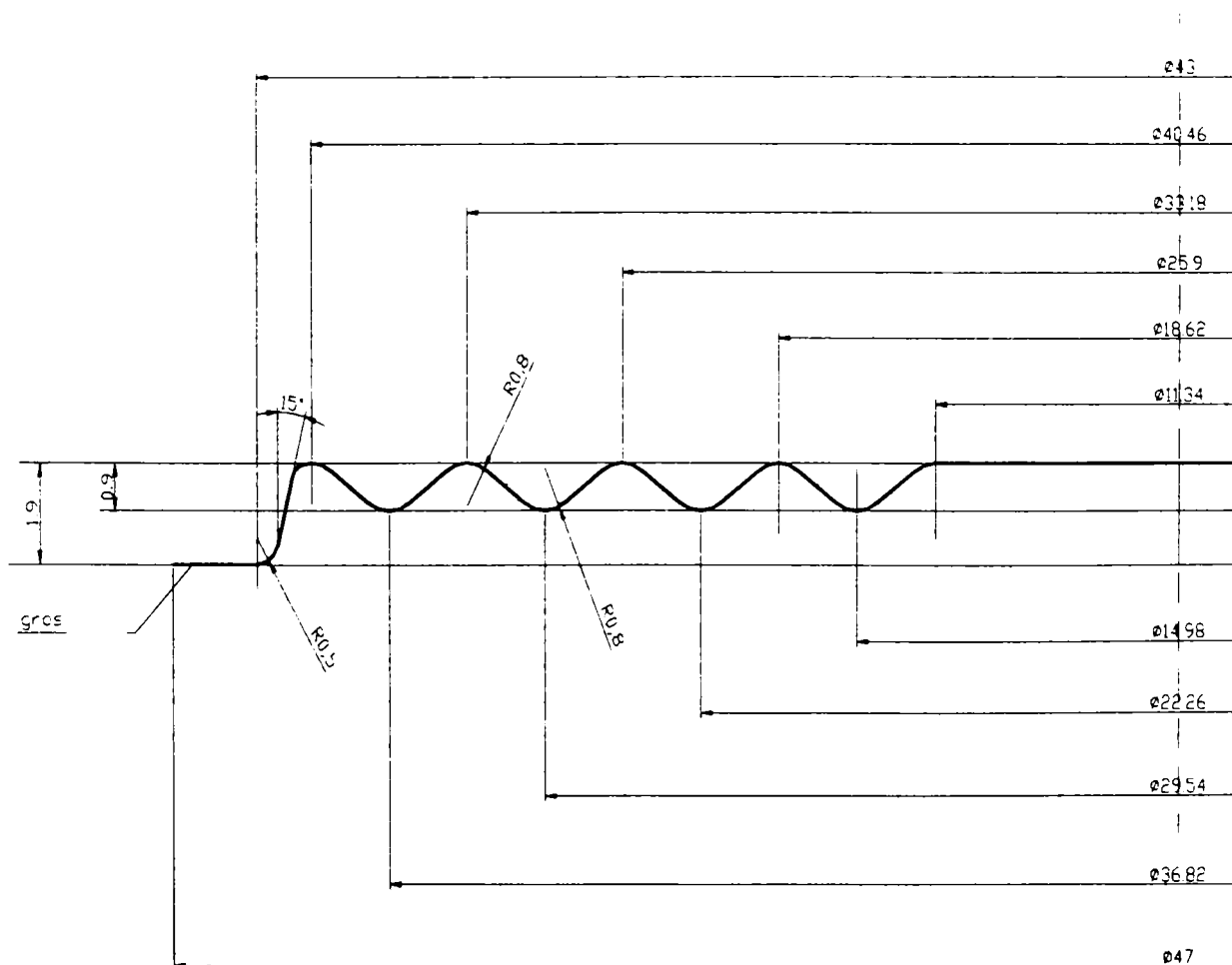


Fig.5.13

Nr.crt.	Grosimea [mm]	Presiunea [mbar]	Înălțimea profil [mm]	Notare în lucrare
1.	0,06	250	0,9 – 0,05	capsula d47/p250
2.	0,08	400	0,9 – 0,05	capsula d47/p400
3.	0,12	600	0,9 ± 0,03	capsula d47/p600
4.	0,18	1000	0,9 + 0,05	capsula d47/p1000

Condiții tehnice:

- Abateri limită – clasa 1, STAS 11111-86;
- Diametrul discului pentru gofrare $\Phi = 54$ mm;
- Rugozitate generală $\sqrt[1,6]{}$;
- Materialul membranei CuBe2 DIN 17671.

Din setul de capsule mici ($\Phi = 47$ mm) capsulele cu grosimea $g_1 = 0,06$ mm și $g_3 = 0,12$ mm au fost testate pe standul experimental și modelate cu element finit, iar cele cu grosimea $g_2 = 0,08$ mm și $g_4 = 0,18$ mm au fost modelate doar teoretic, pentru compararea cu celelalte două, în vederea unor concluzii, ce rezultă din analiza cu element finit. La toate capsulele din acest set s-au făcut calcule analitice pentru membranele componente.

Capsula cu diametrul mare ($\Phi = 100$ mm) există și ea fizic și a fost testată pe standul experimental, rezultatele obținute în urma analizei cu element finit putând fi comparate cu cele obținute prin încercări experimentale. Profilul și dimensiunile geometrice ale acestei capsule sunt prezentate în fig.5.14. Materialul din care este confecționată această capsulă este tot CuBe2, iar notarea ei în lucrare va fi “Capsula d100/p400”.

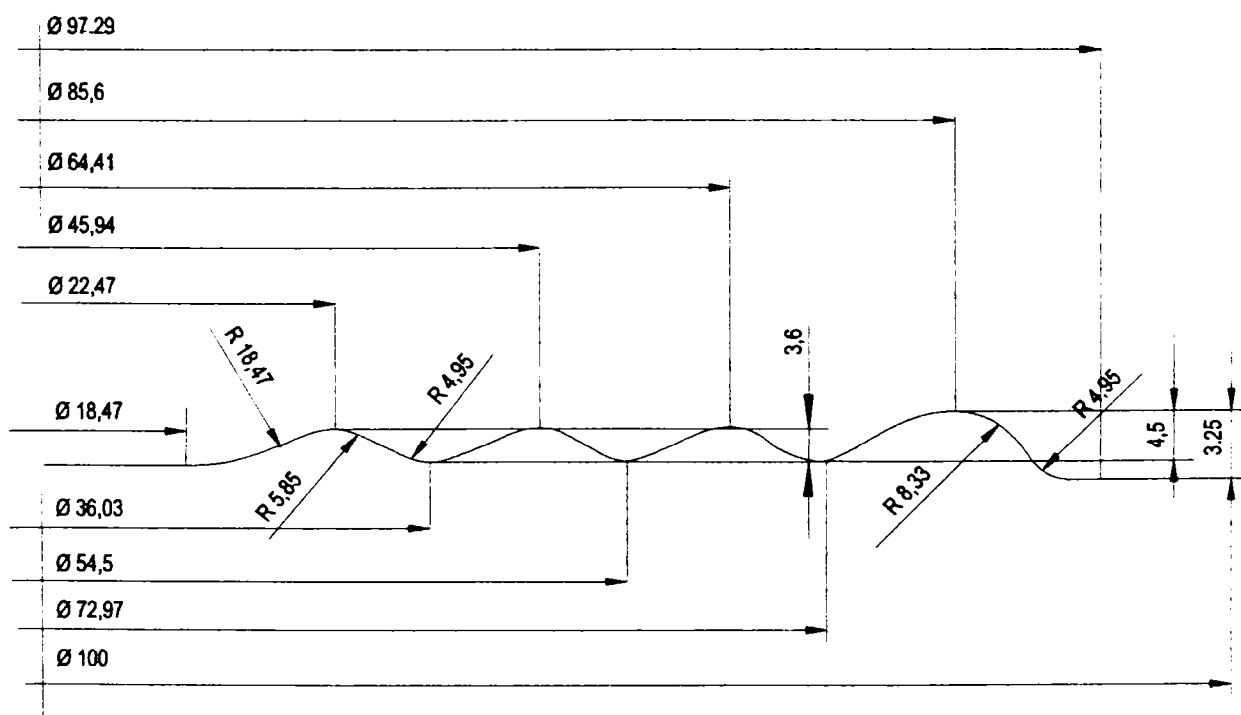


Fig. 5.14

Capsulele se obțin prin cositorirea pe contur a două membrane, iar presiunea se introduce în capsulă printr-un ștuț filetat, cositorit în centrul uneia dintre membrane. Acest ștuț are și rol de fixare, prin intermediul său capsula montându-se în aparatul de măsură din care face parte, respectiv la măsurători s-a montat pe incinta de alimentare cu presiune de la pompă.

Pentru analiza cu element finit a fost utilizat programul COSMOS/M - Versiunea 2.5, al firmei Structural Research & Analysis Corporation, 12121 Wilshire Boulevard, Suite 700, Los Angeles, CA 90025, e-mail: info@srac.com. Structural Research & Analysis Corporation (SRAC) dezvoltă și vinde, produse necesare proiectării asistate de calculator, de piața ingineriei mecanice. A fost înființată în 1982 de către dr. Victor I. Weingarten.

Programele COSMOS sunt la ora actuală pe locul I printre programele software destinate analizei structurale în proiectarea asistată de calculator, din domeniul ingineriei. La început, COSMOS/M a fost primul program de analiză cu element finit, care lucra cu programe CAD – pentru AutoCAD și Pro/ENGINEER.

Începând cu anul 1995 SRAC au început să colaboreze cu Bentley Systems și SolidWorks, și au creat COSMOS/Work, unul dintre primele *produse de aur* SolidWorks.

La începutul anului 1998 SRAC ofereau soluții de analiză individuală pentru AutoCAD/Mechanical Desktop, CADNEY, Eureka Gold, IronCAD, MicroStation Modeler, Pro/DESKTOP, Pro/ENGINEER, SolidDesigner, Solid Edge și SolidWorks. În aprilie 1999, SRAC au început să construiască COSMOS/DesignSTAR, un nou program de analiză pentru proiectare, care operează cu toate programele de proiectare existente – folosind o soluție unică de analiză, pentru inginerii din orice companie, indiferent de complexitatea și diversitatea programelor CAD folosite.

COSMOS/M este un sistem complet, modular, care conține element finit, dezvoltat de (SRAC) pentru calculatoare personale și stații grafice. Programul conține module pentru rezolvarea problemelor de analiză liniară și neliniară, statică și dinamică, transfer termic, mecanica fluidelor, câmpuri electromagnetice și optimizare. De asemenea, oferă și module pentru opțiuni de analiză specială, cum ar fi comportarea la oboseală.

Sistemul COSMOS/M este format dintr-un pre- și un post-procesor, diferite module pentru analiză, interfețe, translatoare și interfețe utilitare. Programul este complet modulată, permițând utilizatorului achiziționarea și încărcarea modulelor de care are nevoie.

GEOSTAR este pre- și post-procesorul de bază al sistemului cu element finit COSMOS/M; este un MODELER CAD grafic în 3D pentru geometrie, generator de rețea de discretizare și pre- și post-procesor de analiză rapidă a elementelor (FEA). GEOSTAR poate: crea modelul geometric, discretiza, furniza toate informațiile necesare analizei, executa tipul dorit de analiză, reveni, tipări rezultatele, fără a fi nevoie să se părăsească ecranul său. Programul este puternic, intuitiv, ușor de învățat și utilizat.

Programul GEOSTAR (fig.5.15) controlează executarea diferitelor module de analiză din pachetul COSMOS/M și asigură un cadru interactiv între ele. Aceste module sunt:

- | | |
|-----------------|---|
| ❖ STAR | analiza statică liniară |
| ❖ FFE STATIC | analiza statică liniară rapidă cu element finit |
| ❖ DSTAR | analiza flambajului, frecvenței și a modului de vibrație |
| ❖ FFE FREQUENCY | analiza rapidă a frecvenței cu element finit |
| ❖ NSTAR | analiza statică neliniară și analiza dinamică |
| ❖ HSTAR | analiza transferului de căldură |
| ❖ FFE THERMAL | analiza rapidă a transferului de căldură cu element finit |
| ❖ FSTAR | analiza la oboseală |
| ❖ ASTAR | analiza dinamică avansată |
| ❖ OPTSTAR | optimizare |
| ❖ FLOWSTAR | analiza curgerii laminare |

- ❖ FLOWPLUS analiza 2D și 3D a curgerii laminare și turbulente
- ❖ ESTAR analiza frecvenței scăzute a câmpului electromagnetic
- ❖ HFS 2D analiza 2D a frecvenței înalte a câmpului electromagnetic
- ❖ HFS 3D analiza 3D a frecvenței înalte a câmpului electromagnetic
- ❖ HFS CAVITY analiza cavităților rezonante

Modulele rapide cu element finit sunt dezvoltate pentru soluționarea problemelor mari, folosind tehnica matricelor rare rezolvate prin metode iterative, combinate cu tehnici de gestionare specifice bazelor de date. Toate aceste măsuri conduc la reducerea timpului necesar rezolvării problemei, a spațiului pe disc și a necesarului de memorie.

Pentru analiză, GEOSTAR furnizează o interfață cu 2 căi pentru diversele sisteme CAD și SolidModeling. Modelele create de următoarele sisteme CAD pot fi importate în GEOSTAR: SolidWorks, SolidEdge, MicroStation Modeler, AutoCAD, Pro/ENGINEER, PT/Modeler, Helix Design System, Computervision CADD5, Unigraphics, IDEAS (SDRC) și Eureka. Geometria pentru alte pachete CAD poate fi încărcată în fișiere IGES. Produsele integrate total sunt disponibile pentru SolidWorks și MicroStation Modeler iar interfețele SEAMLESS sunt disponibile pentru Pro/ENGINEER, PT/Modeler, SolidEdge, Helix și Eureka.

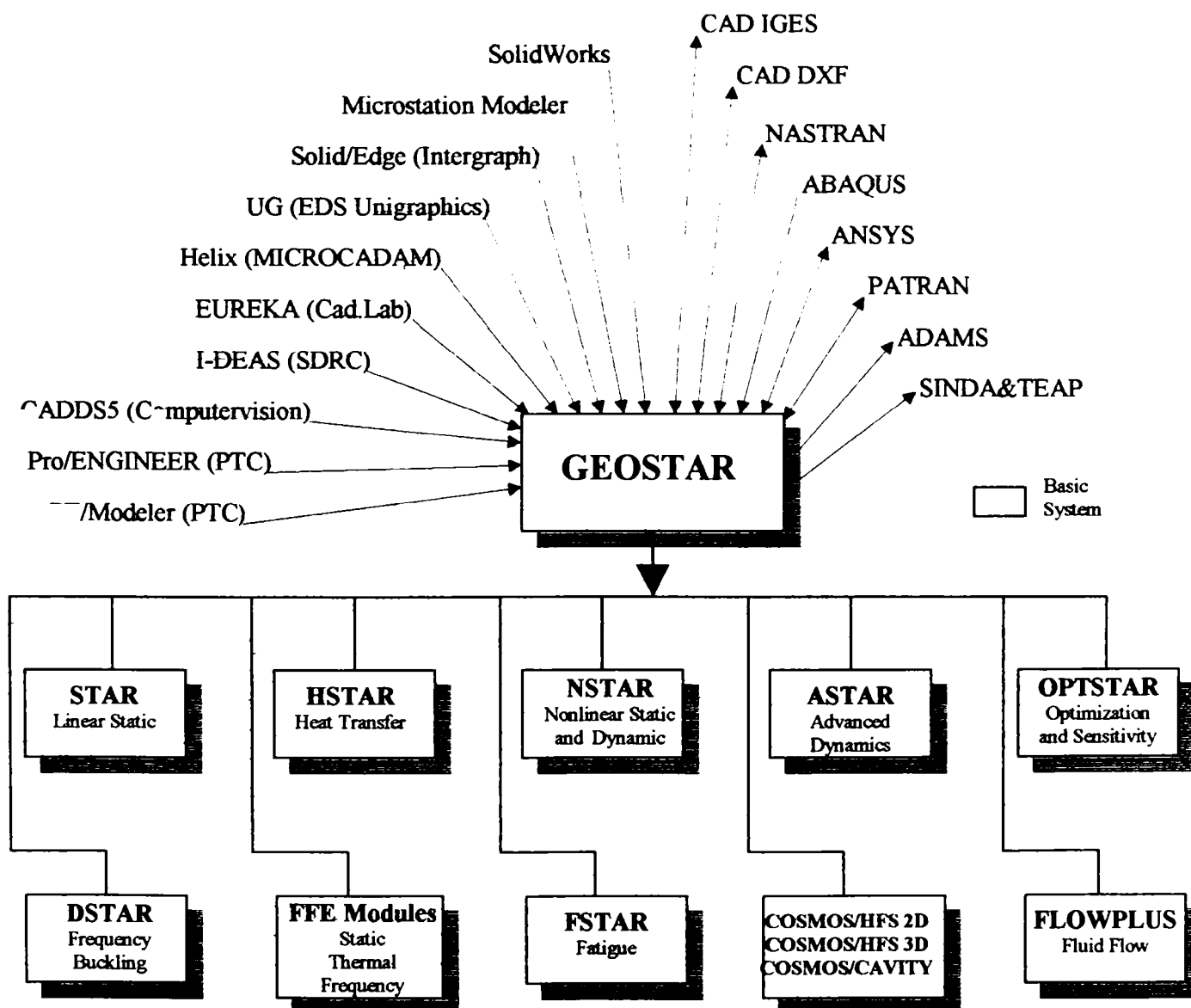


Fig.5.15

De asemenea, se pot importa/exporta modelele de analiză de la/spre următoarele sisteme de analiză cu element finit, prin translație cu 1 sau 2 căi, cum se arată în fig.5.15: ABAQUS,

ANSYS, NASTRAN, PATRAN și SINDA. În plus, COSMOS/M poate avea interfață cu ADAMS pentru analiză liniară de tensiuni din problemele de cinematică.

Sistemul COSMOS/M necesită următoarele configurații de calculatoare:

- Pentium și compatibile pentru rularea Windows 95, 98 sau NT;
- seria NEC PC-9800;
- stații seria SUN SPARC;
- seria HP 9000/700;
- seria IBM RS/6000;
- stații seria SILICON GRAPHICS IRIS și INDIGO;
- DEC 3000 modelele 400, 500 AXP (Alpha OSF 2.X);
- seria NEC EWS-4800.

Posibilitățile geometrice ale modulului GEOSTAR se bazează pe reprezentarea conturului structurii analizate, combinată cu ecuații cubice parametrizate.

Pentru crearea și discretizarea ușoară a modelelor complexe GEOSTAR conține un set de accesorii pentru modelare geometrică, combinat cu opțiuni flexibile de discretizare. Condițiile inițiale, de încărcare și pe contur pot fi aplicate, în mod convenabil, prin asociere cu entitățile geometrice analizate în orice sistem de coordonate definit.

Proprietățile importante ale modulului GEOSTAR sunt:

- dezvoltarea modelelor 1D, 2D și 3D printr-o aranjare completă cu atribuire parametrică a comenzilor pentru modificări rapide și posibilități de modelare geometrică avansată, cum ar fi: explozarea, curățirea, intersecția, interpolarea pentru crearea modelelor și ansamblelor complexe;
- importarea ansamblelor sau a părților modelelor din toate mediile CAD. Suportul NURBS al lui GEOSTAR permite programului să citească modele complexe și să le reprezinte imediat cu acuratețe, ca suprafețe de element finit sau rețea solidă și să le analizeze;
- discretizarea parametrică și automată a modelelor complexe 2D/3D. GEOSTAR oferă una dintre cele mai rapide și robuste discretizări automate pentru industrie. Posibilitatea rafinării automate a rețelei de discretizare asigură controlul utilizatorului asupra evaluării rapide și exacte a răspunsului sistemului în zonele critice. De asemenea, programul asigură discretizarea automată cu elemente fine, în zonele critice, pentru o analiză cât mai exactă;
- verificarea soluțiilor prin tehnici convergente (H, P sau HP) pentru analiză rapidă și exactă;
- aplicarea tuturor încărcărilor și a condițiilor restrictive de pe contur ca și entități de element finit; definirea încărcării parametrice pentru modificarea rapidă și ușoară, în timpul proiectării;
- posibilități puternice de selectare pentru toate entitățile geometrice și de element finit, care asigură utilizatorului flexibilitate, în faza de modelare, sau încărcări speciale și aplicații de contur;
- suport pentru legătura geometrică, unde discretizarea incompatibilă asociată cu entitățile geometrice legate pot fi asamblate pentru a crea o structură unitară pentru analiză;
- selectarea părții critice a unei structuri din etapa de sub-modelare, pentru analize mai eficiente și mai exacte;

- evaluarea rezultatelor analizei utilizând un aranjament complet al opțiunilor pentru vizualizarea rezultatelor de pe toate suporturile de analiză. Rezultatele obținute pot fi animate.

Posibilitățile de selectare ale GEOSTAR pot fi folosite și în faza de post-procesare, pentru a evalua rezultatele analizei în ariile specifice ale modelului. Sistemul permite listarea unui număr important de parametri cum ar fi: valorile maxime și minime și alte caracteristici, pentru a se asigura că utilizatorii folosesc sistemul în mod adecvat.

Pentru modelarea capsulelor manometrice s-a utilizat elementul structural, de tip înveliș, liniar axisimetric, SHELLAX.

Elementul structural, de tip înveliș, liniar axisimetric (SHELLAX)

SHELLAX este un element finit cu 2 noduri, de tip înveliș conic drept, cu grosime constantă, utilizat pentru analiza modelelor structurale axial simetrice. Elementul înveliș este simetric din punct de vedere geometric, dar încărcarea poate fi, atât axial simetrică cât și axial nesimetrică; în cazul analizei frecvenței și a flambajului, formele modurilor pot fi, de asemenea, axial simetrice sau axial nesimetrice.

Deformațiile tăietoare sunt neglijate făcând elementul finit potrivit pentru problemele de învelișuri subțiri.

Structurile trebuie să fie modelate în jumătatea pozitivă a planului X, unde X reprezintă direcția radială, iar Y se referă la axa de simetrie axială.

În general, se consideră patru grade de libertate pe fiecare nod: trei translații de-a lungul axelor globale X, Y și Z și o rotație în jurul axei globale Z. Pentru analiză statică cu încărcare axial simetrică, sunt considerate doar trei grade de libertate, acestea sunt: două translații după axele X și Y și o rotație în jurul axei Z. Elementul finit poate fi folosit pentru modele considerate, din materiale izotrope, și din materiale anizotrope.

Forma elementului cu nodurile de intrare este prezentată în fig.5.16. Pentru sistemul de coordonate atașat elementului, axa x pornește de la primul nod spre al doilea. Axa y a elementului este perpendiculară pe axa x, în exterior. Axa z a elementului (direcția circumferențială) este paralelă cu axa Z, a sistemului global și formează împreună cu acesta, un sistem de axe de coordonate carteziane.

Constantele reale necesare elementului sunt: r_1 = grosimea învelișului.

Proprietățile de material, utilizate de acest element în analiză, sunt:

EX = Modulul de elasticitate pe direcție meridiană (direcția x)

EY = Modulul de elasticitate pe direcție circumferențială (direcția Z)

NUXY = coeficientul lui Poisson

DENS = densitatea

DAMP = coeficientul de amortizare al materialului

Încărcarea elementului în analiză poate fi:

- gravitațională (pe direcția axială);
- încărcări nodale pe unitate radian (simetrice sau asimetrice);
- presiune (aplicată normal pe fața elementului) (simetrică sau asimetrică).

Rezultatele de ieșire obținute în urma analizei sunt: forțele și momentele pe unitatea de lungime pentru fiecare element, în sistemul de coordonate al elementului, pentru două noduri finale așa

cum este reprezentat în fig.5.16. Componentele tensiunii, în centrul elementului, sunt calculate și tipărite în sistemul de coordonate atașat elementului.

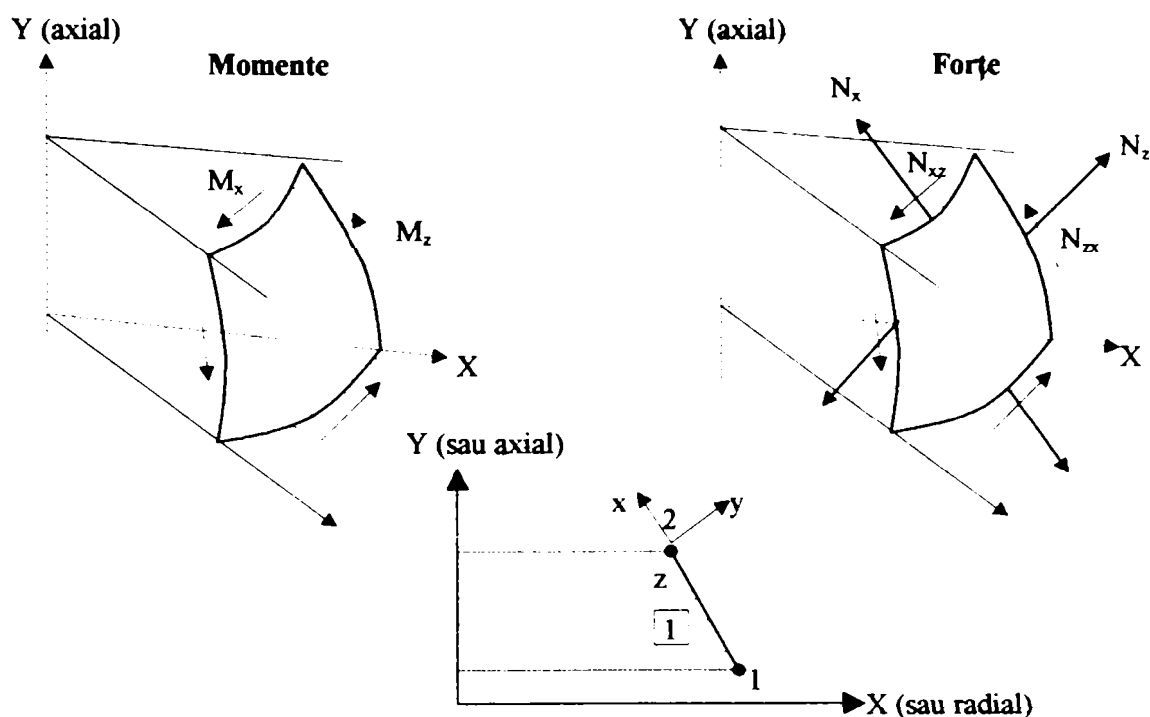


Fig.5.16

Pentru calculul analitic, pe baza formulelor existente în literatura de specialitate, s-a utilizat programul MathCAD6.

5.3.1. Măsurarea experimentală a capsulelor manometrice

Efectuarea măsurătorilor experimentale, pentru fiecare dintre capsulele verificate, s-a făcut urmând etapele:

1. etalonarea manometrului cu 6 coloane de apă;
2. etalonarea traductorului tensorezistiv de deplasare;
3. încărcarea capsulei manometrice cu presiune de aer, de la presiunea $p_0 = 0$ mbar, până la o presiune ce depășește presiunea maximă (indicată de producător) cu 25%;
4. descărcarea capsulei manometrice urmând ordinea inversă a treptelor de încărcare;
5. achiziționarea datelor experimentale primare;
6. prelucrarea datelor experimentale;
7. compararea rezultatelor și extragerea concluziilor.

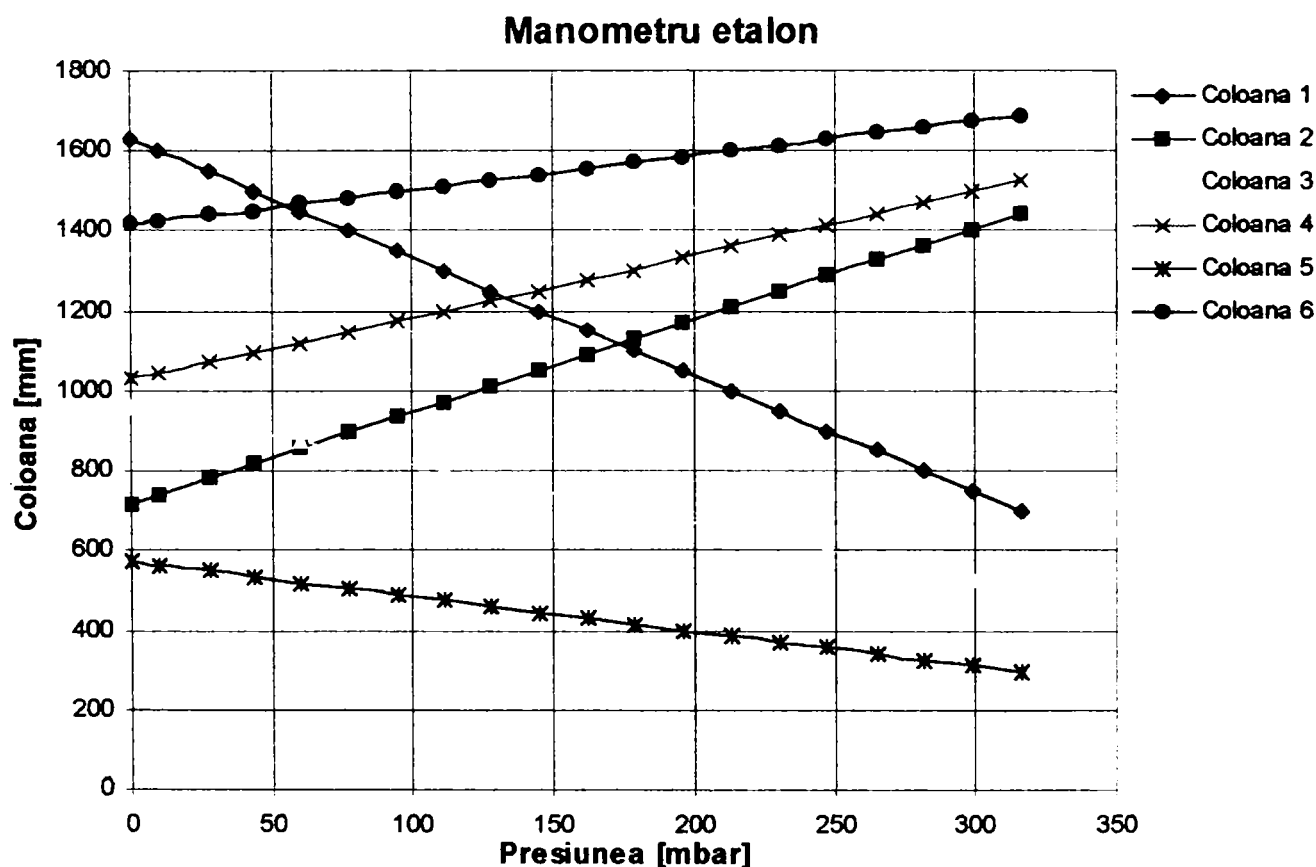
Etalonarea manometrului cu 6 coloane

Pentru toate măsurătorile efectuate asupra capsulelor manometrice, în fiecare zi au fost făcute măsurători pentru etalonarea manometrului cu 6 coloane de apă (acest lucru s-a făcut pentru a nu apare diferențe între valorile măsurate în zile diferite, datorită variației parametrilor presiunii atmosferice). Un model de măsurători pentru etalonarea manometrului cu 6 coloane este prezentat în tabelul 5.1. În toate tabelele de rezultate s-a aproximat $1 \text{ bar} = 10^4 \text{ mmH}_2\text{O}$.

Variația înălțimii coloanelor de apă este proporțională cu modificarea presiunii introdusă în circuit, cu ajutorul pompei, având o evoluție liniară (fig.5.17); înălțimea coloanei de lichid corespunzătoare presiunii de încărcare este egală cu suma diferențelor de înălțime pe fiecare ramură. În următoarele tabele de rezultate va fi consemnată doar una dintre coloanele manometrului (coloana 2) putând determina din aceasta, valoarea presiunii de încărcare.

Tabel 5.1

Nr. crt.	Coloana 1 [mm]	Coloana 2 [mm]	Coloana 3 [mm]	Coloana 4 [mm]	Coloana 5 [mm]	Coloana 6 [mm]	Suma [mm]	Presiunea [mbar]
1	1630	714	958	1031	572	1417	2	0,20
2	1600	737	944	1045	563	1426	101	10,10
3	1550	786	920	1071	548	1440	279	27,90
4	1500	817	895	1097	533	1450	436	43,60
5	1450	855	873	1121	519	1469	603	60,30
6	1400	896	847	1147	503	1484	777	77,70
7	1350	935	824	1174	490	1498	943	94,30
8	1300	973	800	1198	475	1512	1108	110,80
9	1250	1013	775	1225	460	1526	1279	127,90
10	1200	1053	752	1250	445	1540	1446	144,60
11	1150	1093	726	1277	430	1555	1619	161,90
12	1100	1132	702	1303	416	1571	1788	178,80
13	1050	1171	677	1333	399	1585	1963	196,30
14	1000	1210	652	1360	385	1599	2132	213,20
15	950	1249	628	1390	369	1615	2307	230,70
16	900	1288	603	1416	355	1628	2474	247,40
17	850	1327	578	1444	339	1645	2649	264,90
18	800	1365	554	1473	324	1660	2820	282,00
19	750	1404	529	1498	310	1674	2987	298,70
20	700	1442	503	1527	295	1689	3160	316,00



Etalonarea traductorului tensorezistiv de deplasare

Etalonarea traductorului tensorezistiv de deplasare a fost făcută înainte de începerea măsurătorilor utilizând dispozitivul de etalonare prezentat în fig.5.10. Acest dispozitiv conține un

micrometru, fixat rigid într-un suport de prindere, care se montează pe stand în locul capsulei manometrice. Prin rotirea șurubului micrometrului palpatorul se deplasează controlat, tensionând lamela elastică a traductorului tensorezistiv de deplasare.

Soluția constructivă utilizată pentru traductorul tensorezistiv de deplasare, deși este cu măsurare prin contact, nu introduce erori de măsurare. Considerând capsula d47/p250 care are diametrul $d = 47$ mm, presiunea maximă $p = 250$ mbar și deformația în centrul capsulei la presiunea maximă $w_0 = 1,677$ mm. Forța care apasă pe membranele capsulei este egală cu:

$$F_{\text{capsula}} = pA = p \frac{\pi d^2}{4} \quad (5.1)$$

Lamela elastică pe care sunt lipite timbrele tensometrice are dimensiunile: lățimea $b = 13,4$ mm, grosimea $h = 0,3$ mm, lungimea $l = 55$ mm, lamela fiind confecționată din oțel cu modulul de elasticitate longitudinal $E = 2,1 \times 10^5$ MPa. Forța ce apare în lamelă când capsula este deformată la maxim este egală cu:

$$F_{\text{lamela}} = \frac{w_0 b h^3 E}{4l^3}; \quad (5.2)$$

$$\frac{F_{\text{lamela}}}{F_{\text{capsula}}} = 3 \times 10^{-3}. \quad (5.3)$$

Deci forța de apăsare a lamelei elastice pe capsula manometrică, în timpul măsurătorilor, poate fi neglijată și nu introduce erori de măsurare.

Pentru etalonare a fost făcut un set de 10 măsurători (deplasări ale lamelei elastice) în domeniul 0 – 2 mm, cu pas de 0,2 mm. Măsurătorile pentru etalonarea traductorului de deplasare sunt în tabelul 5.2, iar curba de etalonare a traductorului este prezentată în fig.5.18. Dispozitivul utilizat la etalonarea senzorului de deformație dovedește comportarea liniară a senzorului, pe întregul domeniu de măsurare.

Tabel 5.2

Nr. crt.	Deplas. [mm]	Măs.1 [V]	Măs.2 [V]	Măs.3 [V]	Măs.4 [V]	Măs.5 [V]	Măs.6 [V]	Măs.7 [V]	Măs.8 [V]	Măs.9 [V]	Măs.10 [V]	Tensiune medie [V]
1	0,00	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,261
2	0,20	0,60	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,58	0,590
3	0,40	0,91	0,90	0,90	0,91	0,90	0,91	0,90	0,91	0,91	0,90	0,905
4	0,60	1,24	1,23	1,23	1,23	1,24	1,24	1,23	1,24	1,23	1,23	1,234
5	0,80	1,56	1,54	1,54	1,55	1,54	1,54	1,55	1,54	1,54	1,54	1,544
6	1,00	1,87	1,86	1,86	1,85	1,87	1,87	1,88	1,87	1,85	1,86	1,864
7	1,20	2,19	2,18	2,18	2,18	2,18	2,18	2,18	2,19	2,19	2,19	2,184
8	1,40	2,50	2,48	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,498
9	1,60	2,82	2,81	2,82	2,82	2,82	2,82	2,81	2,81	2,82	2,82	2,817
10	1,80	3,14	3,12	3,13	3,13	3,13	3,13	3,14	3,13	3,13	3,13	3,131
11	2,00	3,46	3,44	3,44	3,45	3,44	3,45	3,43	3,44	3,43	3,44	3,442

Caracteristica elementului elastic

În cadrul măsurătorilor experimentale pentru fiecare capsulă s-au efectuat un număr de 6 cicluri încărcare-descărcare, de la presiunea de 0 mbar până la o presiune ce depășea presiunea maximă de încărcare (indicată de producător) cu 25%, în 30 de trepte de măsurare.

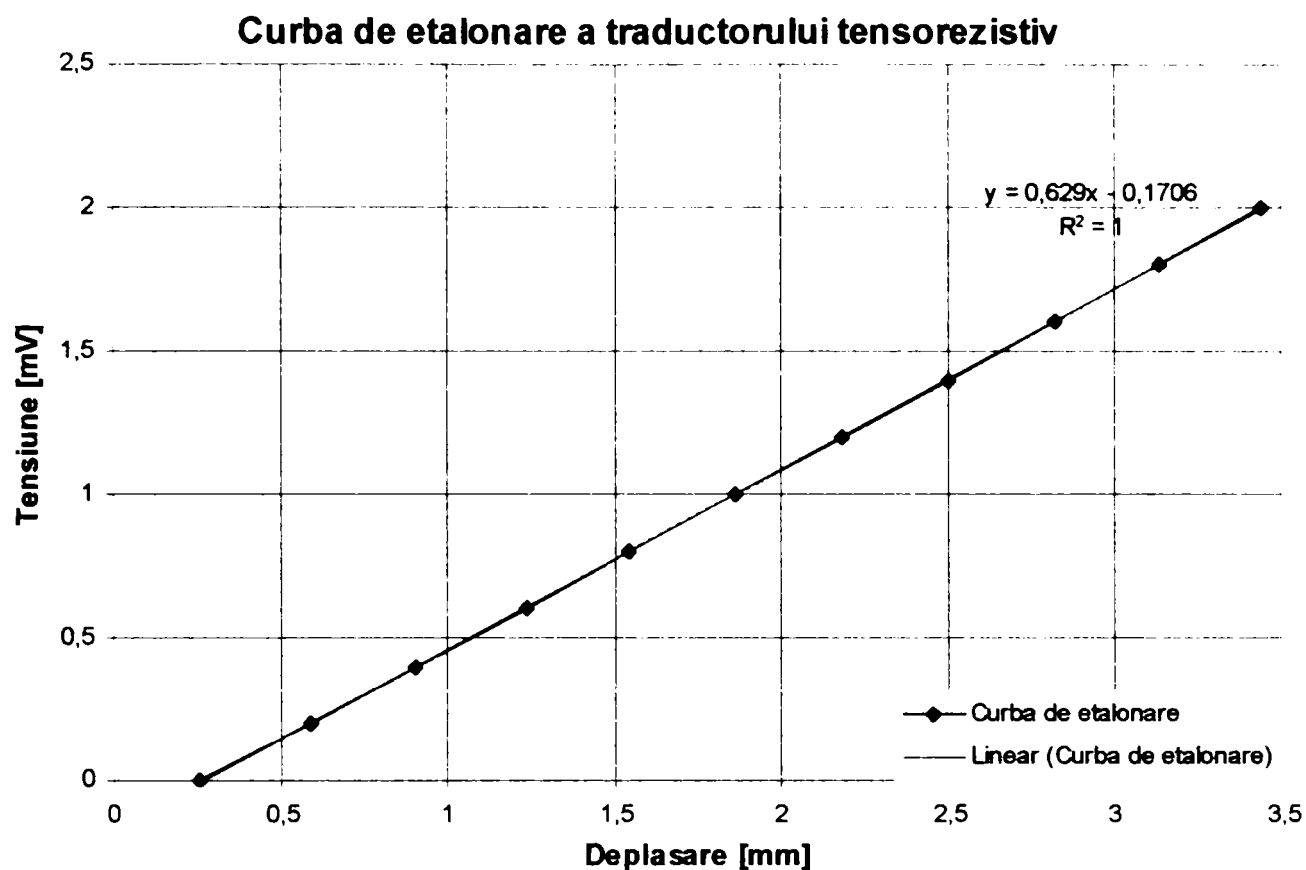


Fig.5.18

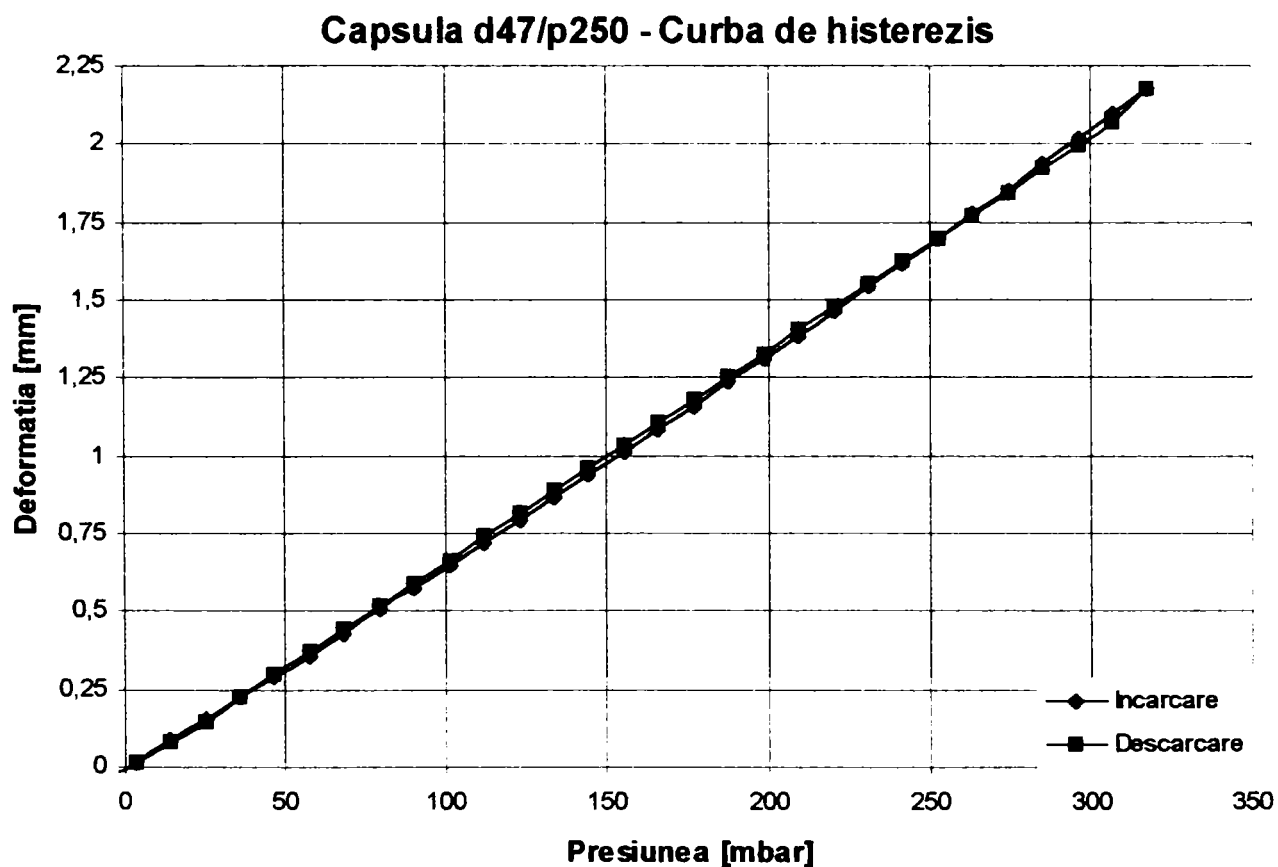
Datele rezultate din măsurători, pentru capsula d47/p250 sunt centralizate în tabelul 5.3; pentru celelalte capsule măsurate tabelele cu măsurători sunt prezentate în Anexa 5.

Tabel 5.3

Nr.crt.	Coloana2 [mm]	Incarcare medie [V]	Descarcare medie [V]	Presiunea [mbar]	Deform. incarc [mm]	Deform. descarc. [mm]	Eroarea max. histerezis [mm]
1	710	0,238	0,242	-3,213	-0,021	-0,018	0,003
2	725	0,298	0,290	3,298	0,017	0,012	-0,005
3	750	0,412	0,396	14,151	0,089	0,079	-0,010
4	775	0,516	0,508	25,003	0,154	0,149	-0,005
5	800	0,626	0,626	35,856	0,223	0,223	0,000
6	825	0,736	0,746	46,708	0,292	0,299	0,006
7	850	0,838	0,860	57,561	0,357	0,370	0,014
8	875	0,956	0,980	68,413	0,431	0,446	0,015
9	900	1,076	1,094	79,266	0,506	0,518	0,011
10	925	1,186	1,212	90,118	0,575	0,592	0,016
11	950	1,302	1,328	100,971	0,648	0,665	0,016
12	975	1,414	1,452	111,823	0,719	0,743	0,024
13	1000	1,532	1,568	122,676	0,793	0,816	0,023
14	1025	1,646	1,680	133,528	0,865	0,886	0,021
15	1050	1,764	1,798	144,381	0,939	0,960	0,021
16	1075	1,884	1,914	155,233	1,015	1,033	0,019
17	1100	1,998	2,030	166,086	1,086	1,106	0,020
18	1125	2,110	2,146	176,938	1,157	1,179	0,023
19	1150	2,234	2,264	187,791	1,235	1,254	0,019
20	1175	2,360	2,380	198,643	1,314	1,327	0,013
21	1200	2,472	2,504	209,496	1,384	1,405	0,020
22	1225	2,598	2,620	220,348	1,464	1,477	0,014

23	1250	2,724	2,734	231,201	1,543	1,549	0,006
24	1275	2,838	2,852	242,053	1,615	1,623	0,009
25	1300	2,972	2,968	252,906	1,699	1,696	-0,003
26	1325	3,094	3,084	263,758	1,776	1,769	-0,006
27	1350	3,214	3,200	274,611	1,851	1,842	-0,009
28	1375	3,348	3,326	285,463	1,935	1,922	-0,014
29	1400	3,472	3,448	296,316	2,013	1,998	-0,015
30	1425	3,608	3,560	307,168	2,099	2,069	-0,030
31	1450	3,736	3,736	318,021	2,180	2,180	0,000

Curbele de încărcare, descărcare și eroarea de caracteristică (curba de histerezis) pentru capsula d47/p250 sunt prezentate în fig. 5.19, iar eroarea maximă de histerezis în fig. 5.20.



Pentru șirurile de valori măsurate pentru presiune și deformație s-a aplicat testul Fisher, pentru stabilirea coeficientului de corelație neliniară. În urma testului Fisher, aplicat cu probabilitatea de 95%, (care este prezentat în Anexa 5) valoarea calculată a coeficientului corelației neliniare (0,01204) este mult, mult mai mică decât valoarea critică a coeficientului (2,45); deci, cele două șiruri de valori sunt în dependență liniară.

Caracteristica elementului elastic, de tip membrană (componentă a capsulei manometrice) este liniară, pe domeniul de măsurare (fig.5.19), deci capsula manometrică poate fi folosită ca traductor de presiune în aparatele și instrumentele de măsurare.

Eroarea de caracteristică a elementului elastic, de tip membrană, materializată prin eroarea maximă de histerezis (fig.5.20) se situează între $\pm 0,030$ [mm], ceea ce permite utilizarea

acestor capsule manometrice în construcția unor aparate de măsurare a presiunilor, în domeniul Mecanicii Fine.

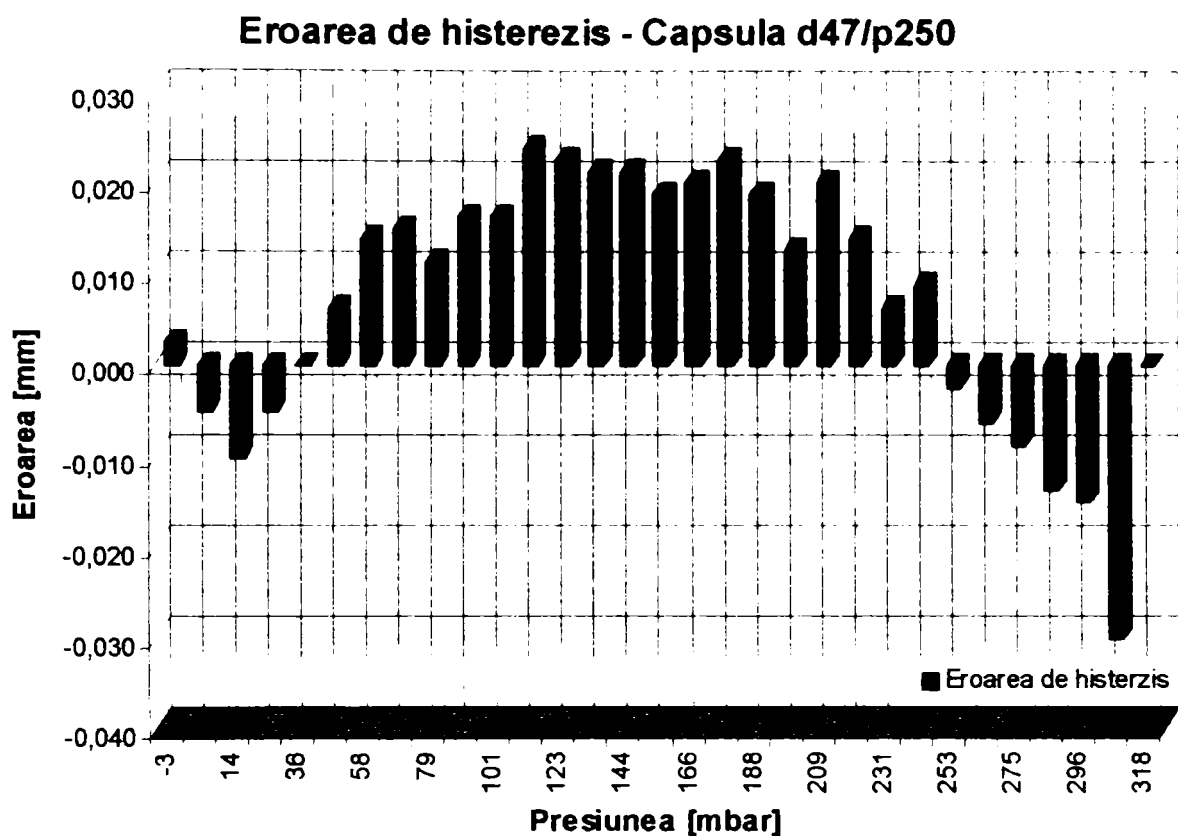


Fig.5.20

Tabel 5.4

Nr. crt.	Coloana2 [mm]	Incarcare7 [V]	Descarcare7 [V]	Presiunea [mbar]	Deformatia incarcare 7 [mm]	Deformatia descarcare7 [mm]	Eroarea max. histerzis [mm]
1	660	0,25	0,30	-1,054	-0,013	0,018	0,031
2	700	0,44	0,49	16,093	0,106	0,138	0,031
3	725	0,55	0,60	26,810	0,175	0,207	0,031
4	750	0,66	0,72	37,527	0,245	0,282	0,038
5	775	0,77	0,84	48,244	0,314	0,358	0,044
6	800	0,89	0,96	58,961	0,389	0,433	0,044
7	825	1,01	1,08	69,677	0,465	0,509	0,044
8	850	1,12	1,20	80,394	0,534	0,584	0,050
9	875	1,23	1,32	91,111	0,603	0,660	0,057
10	900	1,34	1,44	101,828	0,672	0,735	0,063
11	925	1,45	1,58	112,545	0,742	0,823	0,082
12	950	1,58	1,68	123,261	0,823	0,886	0,063
13	975	1,70	1,81	133,978	0,899	0,968	0,069
14	1000	1,81	1,93	144,695	0,968	1,043	0,075
15	1025	1,93	2,06	155,412	1,043	1,125	0,082
16	1050	2,05	2,16	166,129	1,119	1,188	0,069
17	1075	2,16	2,29	176,845	1,188	1,270	0,082
18	1100	2,29	2,41	187,562	1,270	1,345	0,075
19	1125	2,41	2,52	198,279	1,345	1,415	0,069
20	1150	2,53	2,63	208,996	1,421	1,484	0,063
21	1175	2,65	2,75	219,713	1,496	1,559	0,063

22	1200	2,77	2,87	230,429	1,572	1,635	0,063
23	1225	2,91	2,99	241,146	1,660	1,710	0,050
24	1250	3,03	3,11	251,863	1,735	1,786	0,050
25	1275	3,15	3,23	262,580	1,811	1,861	0,050
26	1300	3,26	3,35	273,297	1,880	1,937	0,057
27	1325	3,40	3,48	284,013	1,968	2,018	0,050
28	1350	3,54	3,59	294,730	2,056	2,088	0,031
29	1375	3,67	3,72	305,447	2,138	2,169	0,031
30	1400	3,79	3,83	316,164	2,213	2,239	0,025
31	1425	3,91	3,96	326,881	2,289	2,320	0,031
32	1450	4,05	4,08	337,597	2,377	2,396	0,019
33	1475	4,18	4,17	348,314	2,459	2,453	-0,006
34	1500	4,32	4,26	359,031	2,547	2,509	-0,038
35	1525	4,45	4,39	369,748	2,629	2,591	-0,038
36	1550	4,57	4,50	380,465	2,704	2,660	-0,044
37	1575	4,71	4,62	391,181	2,792	2,736	-0,057
38	1600	4,86	4,75	401,898	2,887	2,817	-0,069
39	1625	5,01	4,88	412,615	2,981	2,899	-0,082
40	1650	5,15	4,99	423,332	3,069	2,968	-0,101
41	1675	5,30	5,13	434,049	3,163	3,056	-0,107
42	1700	5,42	5,27	444,765	3,239	3,144	-0,094
43	1725	5,55	5,40	455,482	3,321	3,226	-0,094
44	1750	5,70	5,52	466,199	3,415	3,302	-0,113
45	1775	5,85	5,67	476,916	3,509	3,396	-0,113
46	1800	5,98	5,78	487,632	3,591	3,465	-0,126
47	1825	6,15	5,92	498,349	3,698	3,553	-0,145
48	1850	6,30	6,06	509,066	3,792	3,641	-0,151
49	1875	6,45	6,22	519,783	3,887	3,742	-0,145
50	1900	6,59	6,40	530,500	3,975	3,855	-0,120
51	1925	6,74	6,60	541,216	4,069	3,981	-0,088
52	1950	6,88	6,74	551,933	4,157	4,069	-0,088
53	1970	7,03	7,03	560,507	4,252	4,252	0,000

Pentru capsula d47/p250 s-au făcut măsurători la suprasarcină, încărcând capsula cu presiune de aer mult peste valoarea presiunii maxime dată de producător ($p = 560$ mbar). Rezultatele măsurătorilor sunt consemnate în tabelul 5.4, caracteristica elementului elastic și eroarea de caracteristică este prezentată în fig.5.21 iar eroarea de histerezis în fig.5.22.

Pentru setul de măsurători efectuate în suprasarcină, până la presiunea de 560 mbar, s-a aplicat testul Fisher, pentru determinarea coeficientului de corelație neliniară.

În urma testului Fisher aplicat cu probabilitatea de 95%, șirurilor de valori măsurate pentru capsula d47/p250 încărcată la suprasarcină (care este prezentat în Anexa 5) valoarea calculată a coeficientului corelației neliniare (1,5889) este mai mică decât valoarea critică a coeficientului (2,18); deci, cele două șiruri de valori sunt în dependență liniară.

Aplicarea testului Fisher dovedește existența unei liniarități a caracteristicii elastice a capsulei, pe un domeniu extins până la mai mult de dublul domeniului recomandat de producătorul capsulei (fig.5.21).

Folosită în domeniul extins de presiune capsula manifestă un histerezis caracterizat printr-o eroare maximă de histerezis de $(+ 0,08 \div - 0,15)$ [mm] (fig.5.22), care este mai mare decât în cazul folosirii în domeniul recomandat de presiuni.

Capsula d47/p250 - Incarcata la suprasarcina - Curba de histerezis

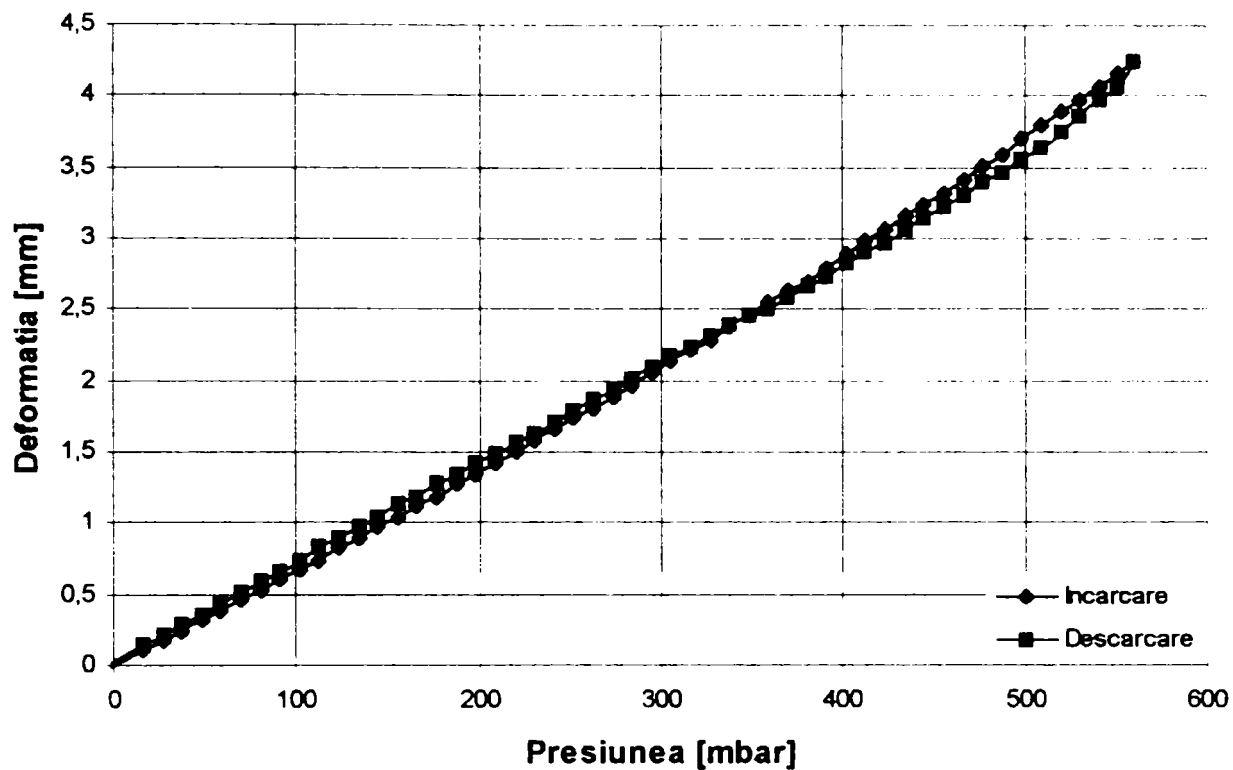


Fig.5.21

Eroarea de histerezis - Capsula d47/p250 - incarcata la suprasarcina

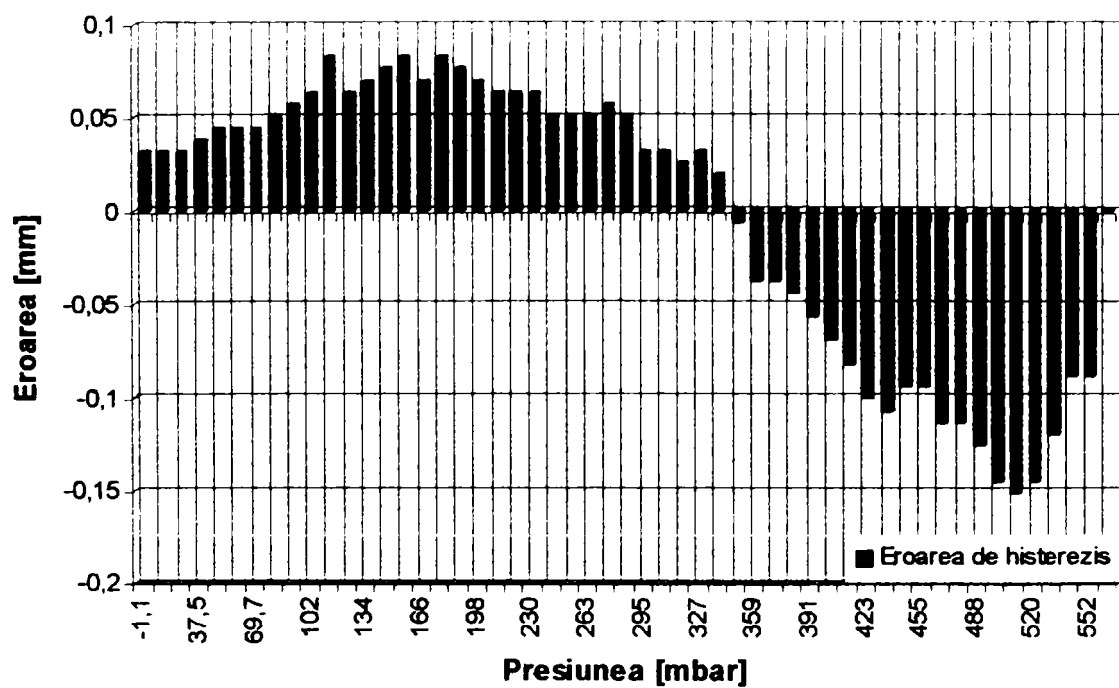


Fig.5.22

5.3.2. Modelarea cu element finit a capsulelor manometrice

Pentru analiza cu element finit s-a pornit de la desenele de execuție ale membranelor gofrate (fig.5.13 și fig.5.14) componente ale capsulelor manometrice. Materialul membranelor este bronz cu beriliu, pentru care constantele de material utilizate la analiză sunt următoarele:

- modulul de elasticitate longitudinal, $E = 131.500 \text{ N/mm}^2$;
- coeficientul contracției transversale, $\nu = 0,343$;
- presiunea maximă de încărcare la valoarea indicată de producător.

În lucrare se prezintă în continuare, rezultatele analizei cu element finit pentru capsula d47/p250. Pentru celelalte capsule, rezultatele analizei cu element finit sunt prezentate în Anexa 5.

Modelul de calcul pentru capsula d47/p250 utilizat în analiza cu element finit este prezentat în fig.5.23. Acest model s-a realizat pornind de la profilul membranei gofrate din fig.5.13.

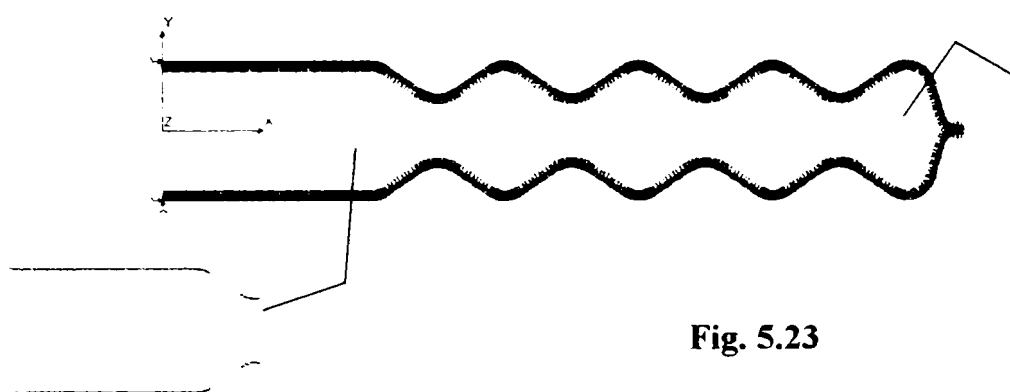


Fig. 5.23

Deplasările rezultante pentru capsula d47/p250 sunt prezentate în fig.5.24.

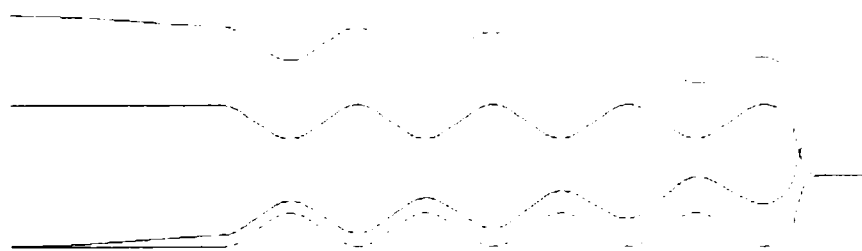


Fig. 5.24

Starea de tensiuni, după von Mises, pentru capsula d47/p250, fig.5.25.

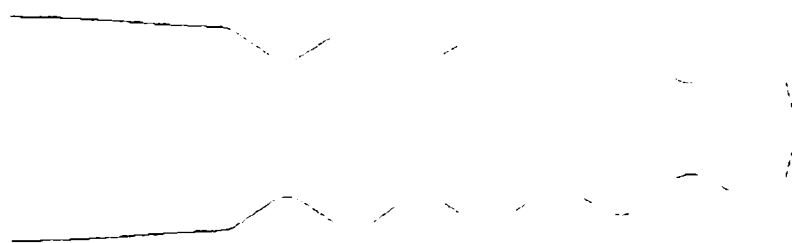


Fig. 5.25



Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de sus a diagramei), pentru capsula d47/p250 sunt prezentate în fig. 5.26.



Fig. 5.26

Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de jos a diagramei), pentru capsula d47/p250 sunt prezentate în fig. 5.27.



Fig. 5.27

Tensiunile de întindere, după axa X (considerând efectul de membrană), pentru capsula d47/p250 sunt redată în fig. 5.28.



Fig. 5.28



Din diagramele rezultate în urma analizei cu element finit se pot extrage următoarele concluzii:

- deformația maximă a capsulei d47/p250 este $w_0 = 1,7041$ mm, fiind în centrul membranei;
- tensiunea echivalentă maximă apare pe gofreul 1, în adâncitura 1 și pe gofreul 2 al profilului gofrat (fig. 5.25) și indică locurile cele mai probabile de rupere ale membranelor;
- tensiunile maxime de întindere (după axa X) apar în zona centrală a membranei și pe flancul drept al primului gofreu;
- considerând și efectul de membrană, tensiunile maxime de întindere apar în zona centrală plană a membranei gofrate și pe flancul drept al fiecărui gofreu.

Analizând distribuția tensiunilor în peretele membranei se constată că zonele cele mai periclitare la rupere sunt gofreul 1 și 2 și adâncitura dintre ele.

5.3.3. Calculul analitic al capsulelor manometrice

Calculul s-a făcut cu relațiile existente în literatura de specialitate și care sunt prezentate în capitolul 3 (relațiile (3.136) și (3.124)). Relațiile de calcul sunt pentru membrana gofrată, componentă a capsulei manometrice.

Pentru determinarea deformației maxime a capsulei, în centrul acesteia, se calculează deformația maximă a membranei componente și apoi se ține seama de faptul că, în construcția capsulei intră două membrane; deci se consideră de două ori deformația membranei gofrate.

Pentru calculul analitic al membranelor gofrate s-a considerat profilul membranei (fig.5.13) materialul membranei (bronz cu beriliu) și constantele de material utilizate și la analiza cu element finit, adică:

- modulul de elasticitate longitudinal, $E = 131.500 \text{ N/mm}^2$;
- coeficientul contracției transversale, $\nu = 0,343$;
- presiunea maximă de încărcare la valoarea indicată de producător.

Din setul de capsule cu diametrul exterior $\Phi = 47 \text{ mm}$, cu 4 gofreuri pe rază, profil sinusoidal uniform, care au desenul de execuție prezentat în fig.5.13, se prezintă în lucrare calculul pentru capsula d47/p250. Calculele pentru celelalte trei capsule din set sunt prezentate în Anexa 5.

Pentru calcul s-a utilizat programul MathCAD6, cu ajutorul căruia s-a determinat valoarea maximă a deformației în centrul membranei.

De asemenea, s-a studiat influența termenului de gradul trei, din ecuația caracteristicii membranei, asupra valorii deformației maxime (fig.5.29).

Capsula d47/p250

Valorile coeficienților care intervin în ecuația caracteristicii membranei s-au calculat în funcție de parametri geometrici ai profilului, iar constantele de material sunt conform DIN17671, pentru materialul considerat (CuBe_2).

$$\begin{array}{l}
 h = .06 \quad \nu = 0.343 \quad m = \sqrt{338.5} \quad k_2 = 1 \\
 n = 338.5 \quad r = 23.5 \quad E = 131500 \quad w = 0,005 \cdot 2 \\
 p(w) = \frac{E \cdot h^4}{r^4} \cdot \left[\frac{4 \cdot (3 + n)}{3 \cdot k_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu^2}{n}\right)} \cdot \frac{w}{h} + \frac{32 \cdot k_2}{m^2 - 9} \cdot \left[\frac{1}{6} - \frac{3 - \nu}{(m - \nu) \cdot (m + 3)} \right] \cdot \left(\frac{w}{h}\right)^3 \right] \\
 p_{lin}(w) = \frac{E \cdot h^4}{r^4} \cdot \left[\frac{4 \cdot (3 + n)}{3 \cdot k_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu^2}{n}\right)} \cdot \frac{w}{h} \right] \\
 e(w) = p(w) - p_{lin}(w)
 \end{array}$$

w [mm]	p(w) [MPa]	plim(w)[MPa]	e(w)[MPa]
0	0	0	0
0.05	2.1211410^{-3}	2.1210910^{-3}	5.0183210^{-8}
0.1	4.2425810^{-3}	4.2421710^{-3}	4.0146610^{-7}
0.15	6.3646210^{-3}	6.3632610^{-3}	1.3549510^{-6}
0.2	8.4875610^{-3}	8.4843510^{-3}	3.2117310^{-6}
0.25	0.01061	0.01061	6.272910^{-6}
0.3	0.01274	0.01273	1.0839610^{-5}
0.35	0.01486	0.01485	1.7212810^{-5}
0.4	0.01699	0.01697	2.5693810^{-5}
0.45	0.01913	0.01909	3.6583610^{-5}
0.5	0.02126	0.02121	5.0183210^{-5}
0.55	0.0234	0.02333	6.6793910^{-5}
0.6	0.02554	0.02545	8.6716610^{-5}
0.65	0.02768	0.02757	1.1025310^{-4}
0.7	0.02983	0.0297	1.3770310^{-4}
0.75	0.03199	0.03182	1.6936810^{-4}
0.8	0.03414	0.03394	2.055510^{-4}
0.85	0.03631	0.03606	2.465510^{-4}
0.9	0.03847	0.03818	2.9266910^{-4}
0.95	0.04064	0.0403	3.4420710^{-4}
1	0.04282	0.04242	4.0146610^{-4}
1.05	0.04501	0.04454	4.6474710^{-4}
1.1	0.0472	0.04666	5.3435110^{-4}
1.15	0.0494	0.04879	6.1057910^{-4}
1.2	0.0516	0.05091	6.9373310^{-4}
1.25	0.05381	0.05303	7.8411310^{-4}
1.3	0.05603	0.05515	8.820210^{-4}
1.35	0.05826	0.05727	9.8775610^{-4}
1.4	0.06049	0.05939	1.1016210^{-3}
1.45	0.06274	0.06151	1.2239210^{-3}
1.5	0.06499	0.06363	1.3549510^{-3}
1.55	0.06725	0.06575	1.4950110^{-3}
1.6	0.06952	0.06787	1.644410^{-3}
1.65	0.0718	0.07	1.8034310^{-3}
1.7	0.07409	0.07212	1.972410^{-3}
1.75	0.07639	0.07424	2.1516110^{-3}
1.8	0.0787	0.07636	2.3413510^{-3}
1.85	0.08102	0.07848	2.5419310^{-3}
1.9	0.08335	0.0806	2.7536510^{-3}
1.95	0.0857	0.08272	2.9768210^{-3}
2	0.08806	0.08484	3.2117310^{-3}

Influența termenului de gradul trei din ecuația caracteristicii membranei asupra deformației maxime a membranei este redată în fig.5.29 (în partea de jos a graficului este reprezentată, cu culoarea verde, eroarea absolută între forma cubică și cea liniară a ecuației caracteristicii).

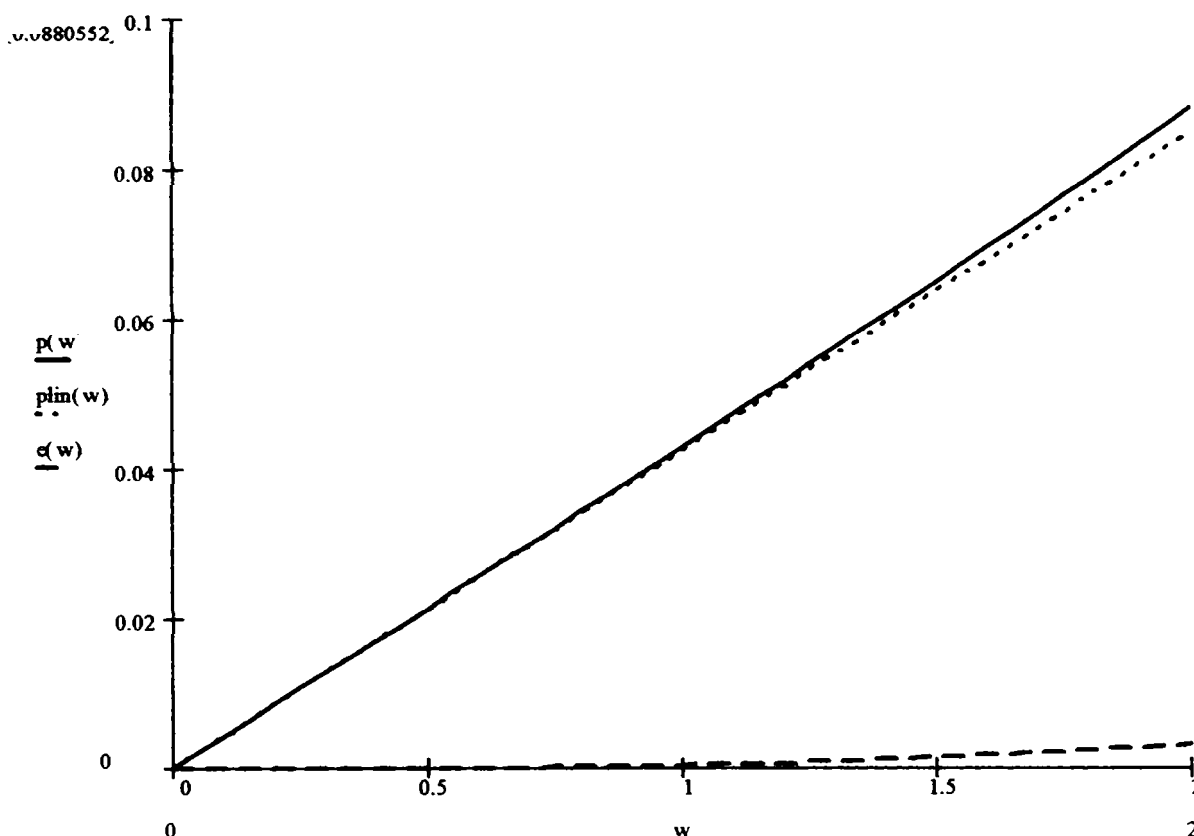


Fig.5.29

Pentru compararea rezultatelor obținute din calcul și pentru celelalte capsule din setul dimensional considerat, s-a determinat deformația membranei pentru presiunea $p = 250$ mbar.

$$k = 0..10$$

$$p_{0_k} = 0.0025k$$

$$w_0 = 1$$

$$w_{1_k} = \text{root}(p(w_0) - p_{0_k}, w_0)$$

p_{0_k} [MPa]

0
$2.5 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^{-3}$
$7.5 \cdot 10^{-3}$
0.01
0.0125
0.015
0.0175
0.02
0.0225
0.025

w_{1_k} [mm]

0.01843
0.07574
0.13304
0.19034
0.24765
0.30495
0.36225
0.41956
0.47686
0.53416
0.59147

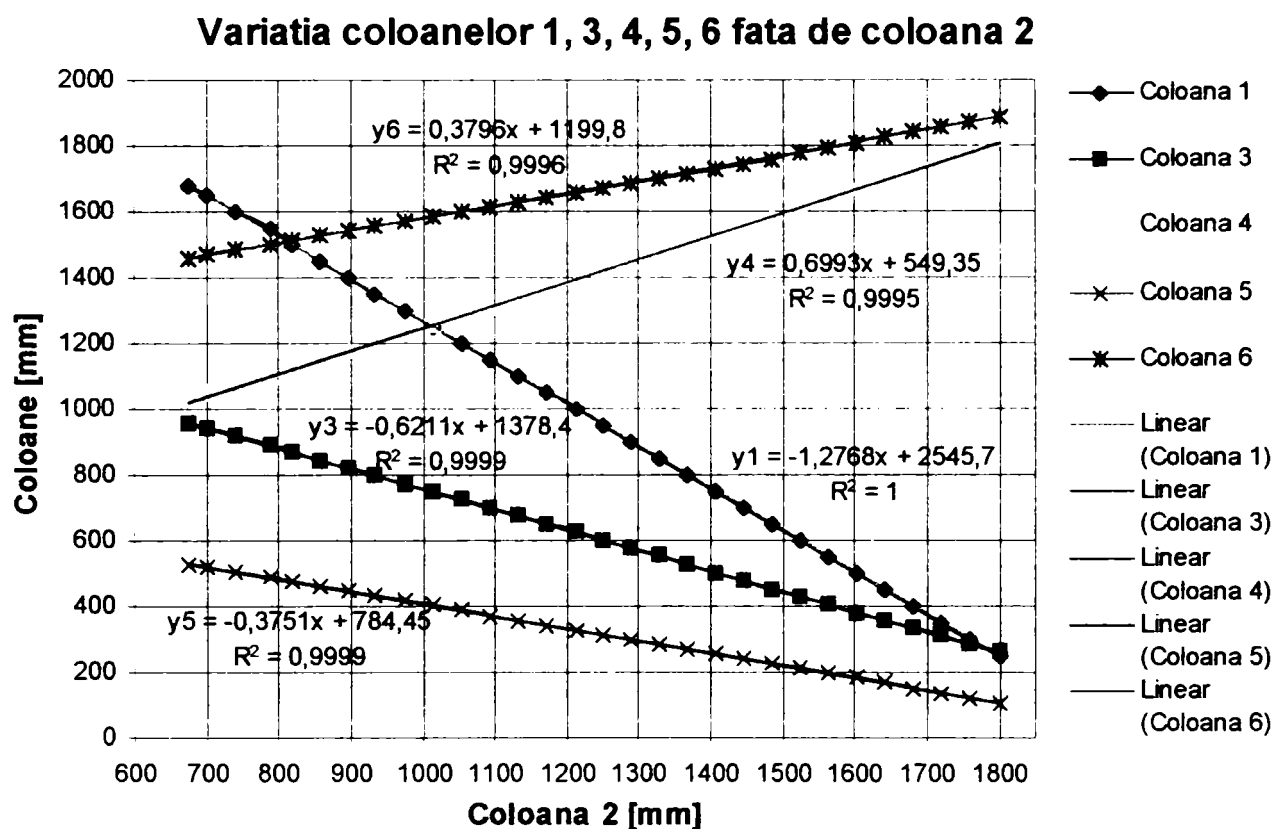
$p(w_{1_k})$ [MPa]

7.8191710^{-4}
$3.213 \cdot 10^{-3}$
5.6446910^{-3}
8.0774310^{-3}
0.01051
0.01295
0.01539
0.01783
0.02027
0.02272
0.02517

5.4. PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE. CONCLUZII

Din prelucrarea datelor experimentale primare se pot desprinde o serie de concluzii, care sistematizate sunt prezentate în continuare:

1. La etalonarea manometrului cu coloane multiple se constată variația liniară a înălțimii coloanelor de apă cu presiunea; de asemenea, se constată proporționalitatea variației înălțimii coloanelor de apă de la o coloană la alta. Acest lucru este evidențiat în fig.5.30, în care este prezentată variația coloanelor de apă 1, 3, 4, 5 și 6 față de coloana 2 (pe grafic sunt trasate și dreptele de regresie). Graficul este ridicat folosind valorile măsurate pentru etalonarea manometrului cu 6 coloane de apă, etalonare realizată pentru testarea capsulei d47/p600.



Datorită acestei concluzii la măsurători, tabelele de date au trecută explicit numai valorile presiunii de apă de pe Coloana 2. În concluzie, pe întregul domeniu de măsurare înălțimea coloanelor de apă are o variație liniară și este proporțională cu presiunea de încărcare, realizată de la pompa de aer.

2. La etalonarea traductorului tensorezistiv de deplasare (tabel 5.2 și fig.5.18) se constată variația liniară a semnalului electric de ieșire (tensiune măsurată la multimetrul digital) în funcție de semnalul mecanic de intrare (deplasarea micrometrului care apasă pe lamela elastică). Deci, comportarea traductorului tensorezistiv de deplasare este liniară pe întregul domeniu de măsurare.

3. Pentru toate capsulele testate se observă liniaritatea caracteristicii elastice a membranelor metalice gofrate, componente ale capsulelor manometrice. Dependența liniară între șirurile de valori măsurate (presiune – deformație) a fost verificată prin determinarea coeficientului corelației neliniare, aplicând testul Fisher. Deci, în concluzie membrana metalică gofrată cu profil sinusoidal, componentă a capsulelor manometrice testate, are o caracteristică liniară pe întregul domeniu de lucru indicat de producător, până la presiunea maximă.

4. Pentru toate capsulele manometrice testate încărcarea s-a făcut pe un domeniu extins, depășind valoarea presiunii maxime (dată de producător) cu 25% din domeniul maxim. Pe acest domeniu extins s-a constatat liniaritatea caracteristicii elastice a membranelor. Deci, și pe un domeniu de presiune mai extins caracteristica membranelor metalice gofrate cu profil sinusoidal este liniară.

5. Pentru capsula manometrică d47/p250 testarea s-a realizat pe un domeniu de măsurare extins până la dublul presiunii maxime de încărcare, dată de producător; și pe acest domeniu foarte extins caracteristica elastică a membranei s-a dovedit a fi tot liniară.

6. La testarea capsulelor manometrice s-au realizat 6 cicluri încărcare-descărcare, putându-se pune apoi în evidență eroarea de caracteristică, materializată prin histerezisul mecanic. La prelucrarea datelor experimentale curbele de histerezis arată diferența între curba de încărcare și cea de descărcare, diferență care este concretizată prin eroarea de histerezis, reprezentată grafic în lucrare. Se constată că, pe măsura creșterii presiunii de încărcare eroarea absolută pozitivă are tendința de creștere, pe când eroarea absolută negativă are tendința de scădere.

7. Din încercările experimentale realizate pentru capsulele manometrice s-au obținut valorile deformațiilor maxime, în centrul membranei:

- pentru capsula d47/p250, cu grosimea $g = 0,06$ mm, $w_{0exp} = 1,6776$ mm;
- pentru capsula d47/p600, cu grosimea $g = 0,12$ mm, $w_{0exp} = 1,8985$ mm.

Se constată că, prin creșterea presiunii de încărcare și a grosimii tablei membranei, deformația maximă în centrul membranei are tendința de creștere.

Pentru capsula d100/p400 cu grosimea de 0,3 mm, $w_{0exp} = 1,6692$ mm

8. Din analiza cu element finit asupra setului de capsule cu diametrul exterior $d = 47$ mm (fig.5.13) rezultă că deplasările maxime apar în centrul membranei și au următoarele valori:

- pentru capsula d47/p250, cu grosimea $g = 0,06$ mm, $w_{0m} = 1,7041$ mm;
- pentru capsula d47/p400, cu grosimea $g = 0,08$ mm, $w_{0m} = 1,7371$ mm;
- pentru capsula d47/p600, cu grosimea $g = 0,12$ mm, $w_{0m} = 1,4455$ mm;
- pentru capsula d47/p1000, cu grosimea $g = 0,18$ mm, $w_{0m} = 1,3396$ mm.

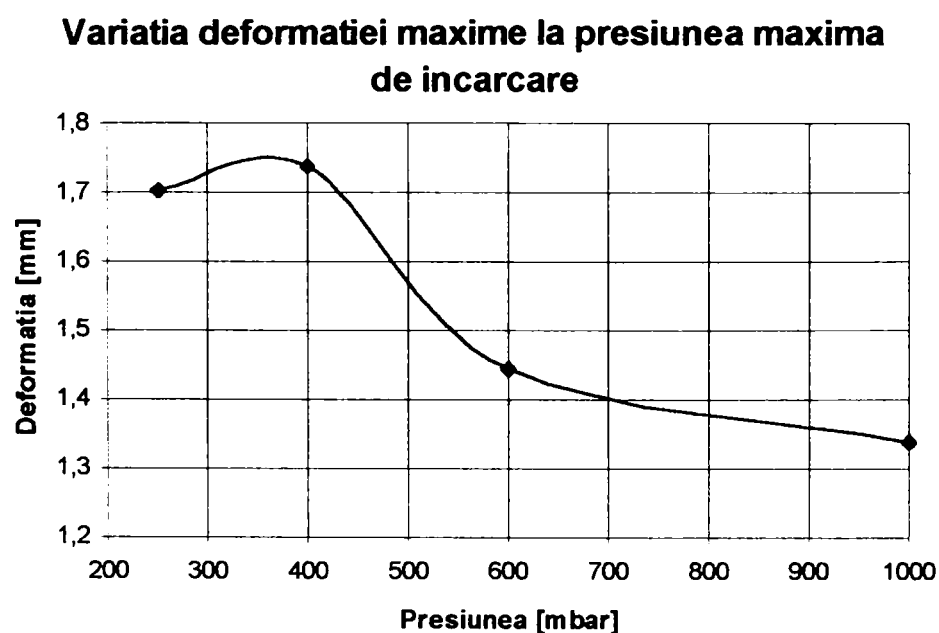


Fig.5.31

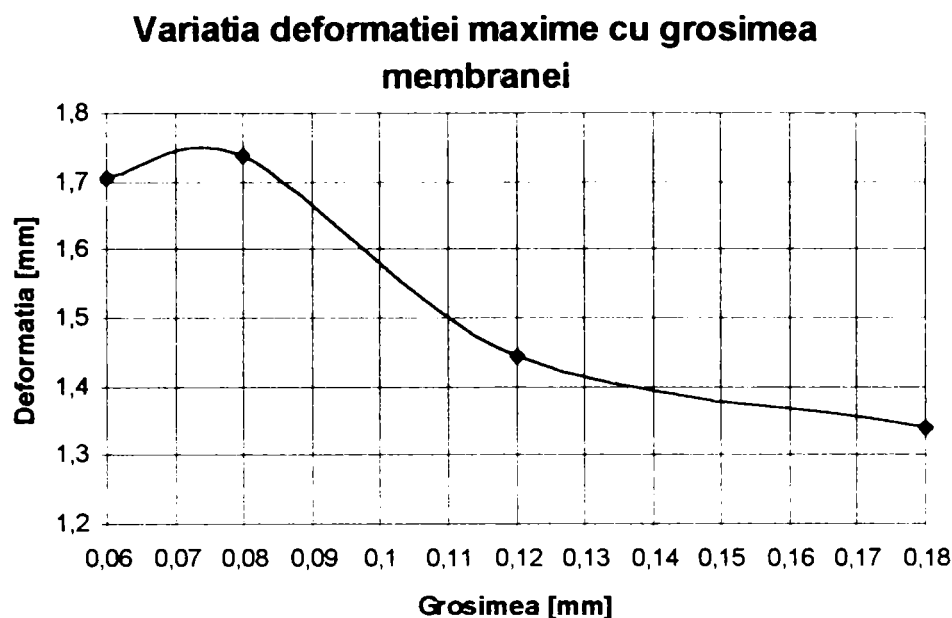


Fig.5.32

Se constată că, pe măsura creșterii presiunii de încărcare și a grosimii tablei membranei, deformația maximă scade (fig.5.31 și fig.5.32).

9. Tot din analiza cu element finit se constată că tensiunea echivalentă maximă (după von Mises) apare pe gofreul 1, în adâncitura 1 și pe gofreul 2 al profilului gofrat sinusoidal, iar pe măsura creșterii presiunii de încărcare domeniul se extinde fiind afectată și adâncitura 2 (de la capsula d47/p400) și gofreul 3 (la capsula d47/p1000).

10. Tensiunile maxime de întindere (după axa X) apar pe flancul drept al primului gofreu și în zona centrală, pentru capsula d47/p250. Pe măsura creșterii presiunii de încărcare zona centrală nu mai este afectată de valori maxime ale tensiunii de întindere, dar se constată deplasarea zonei afectată de tensiuni maxime de pe flancul drept al primului gofreu spre zona de lipire a celor două membrane ce formează capsula manometrică.

11. Dacă se consideră efectul de membrană, tensiunile maxime de întindere apar, la toate capsulele, în zona centrală, plană, a membranei gofrate și pe flancul drept al fiecărui gofreu.

12. Analizând distribuția tensiunilor, în membranele componente ale capsulelor manometrice modelate (din setul de capsule cu diametrul maxim $d = 47$ mm) folosind metoda elementului finit, se constată că zonele cele mai periclitare la rupere sunt: gofreurile (la înălțimea maximă și minimă a acestora) pornind de la primul gofreu și extinzându-se, pe măsura creșterii presiunii de încărcare, și la următoarele gofreuri.

13. Pentru capsula d100/p400 deformația maximă are valoarea $w_0 = 1,9895$ mm și apare în centrul capsulei.

14. Tensiunea echivalentă maximă (după von Mises), pentru capsula d100/p400, apare în prima adâncitură, pe gofreul 2, în adâncitura a doua și în zona lipirii celor două membrane.

15. Tensiunile maxime de întindere (după axa X), pentru capsula d100/p400, apar în zona de lipire a celor două membrane, pe flancul drept al gofreului 1, în prima adâncitură, pe gofreul 2, în a doua adâncitură și pe gofreul 3, al profilului gofrat. Se constată la această capsulă că, tensiunea de întindere maximă de pe gofreul 1 se deplasează spre flancul drept al acestui gofreu, datorită faptului că acest prim gofreu are o rază mai mare decât raza celorlalte gofreuri.

16. Dacă se consideră efectul de membrană, tensiunile maxime de întindere apar, la capsula d100/p400, pe flancul drept al fiecărui gofreu. De asemenea, se constată că valorile minime ale tensiunilor apar în zona centrală, plană, a capsulei.

17. Analizând distribuția tensiunilor, în membranele componente ale capsulei manometrice d100/p400, folosind metoda elementului finit, se constată că zonele cele mai periclitate la rupere sunt: gofreurile 2 și 3, adânciturile 1 și 2 și zona de lipire a celor două membrane gofrate componente ale capsulei manometrice d100/p400.

18. Din calculul analitic cu formulele existente în literatura de specialitate, pentru setul de capsule manometrice cu diametrul exterior $d = 47$ mm (fig.5.13), rezultă deformațiile maxime din centrul membranei, cu următoarele valori:

- pentru capsula d47/p250, cu grosimea $g = 0,06$ mm, $w_{0c} = (0,6 \times 2)$ mm = 1,2 mm;
- pentru capsula d47/p400, cu grosimea $g = 0,08$ mm, $w_{0c} = (0,7 \times 2)$ mm = 1,4 mm;
- pentru capsula d47/p600, cu grosimea $g = 0,12$ mm, $w_{0c} = (0,68 \times 2)$ mm = 1,36 mm;
- pentru capsula d47/p1000, cu grosimea $g = 0,18$ mm, $w_{0c} = (0,7 \times 2)$ mm = 1,4 mm.

Valorile calculate, cu ajutorul relațiilor de calcul, se referă la deformația unei membrane componentă a capsulei manometrice. Pentru a se obține deformația capsulei se ține cont de faptul că, sunt două membrane componente într-o capsulă.

Din calculul cu formulele propuse de L. Andreeva, la presiunea maximă de încărcare, toate membranele studiate (cele din setul cu diametrul exterior $d = 47$ mm) au deformația maximă cuprinsă între $(0,6 \div 0,7)$ mm, adică aproximativ aceeași valoare a deformației maxime.

19. Din compararea cele trei metode folosite la analizarea capsulelor manometrice rezultă:

- caracteristica elastică a membranelor studiate este liniară pe întregul domeniu de măsurare, liniaritate verificată prin aplicarea testului Fisher (cu probabilitatea de 95%);
- diferențele care apar între valorile deformațiilor determinate cu ajutorul celor trei metode folosite, sunt exemplificate în fig.5.33 și fig.5.34;

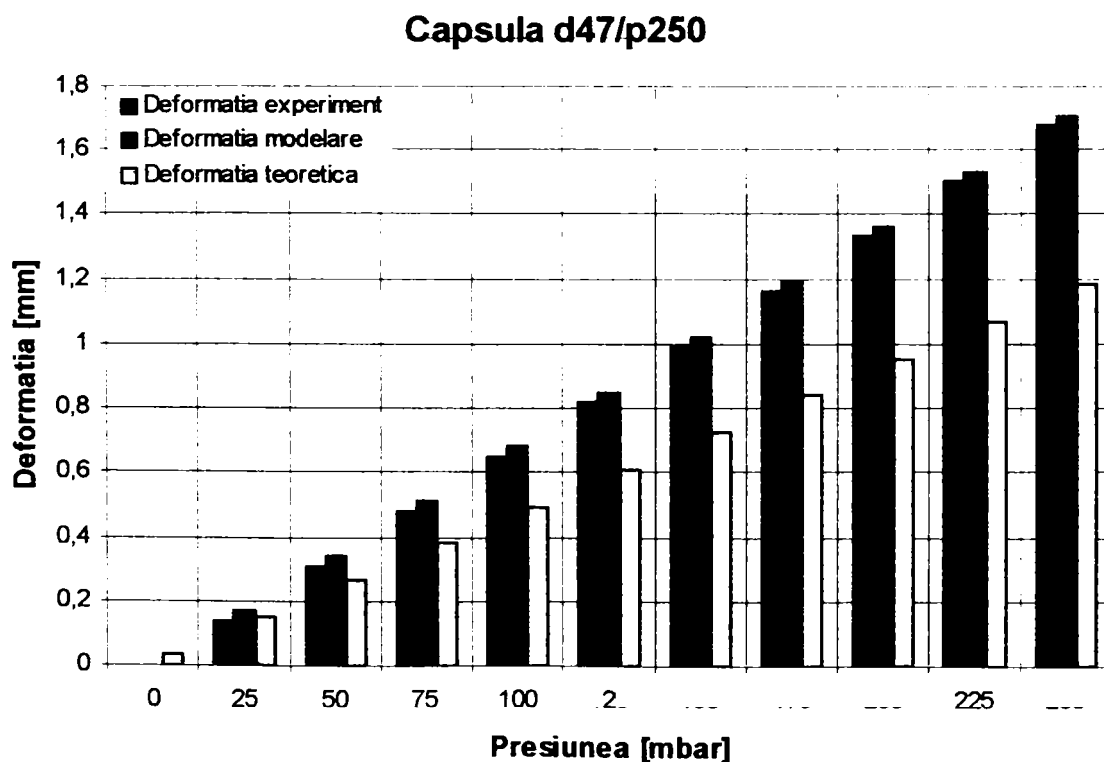


Fig.5.33

Capsula d47/p600

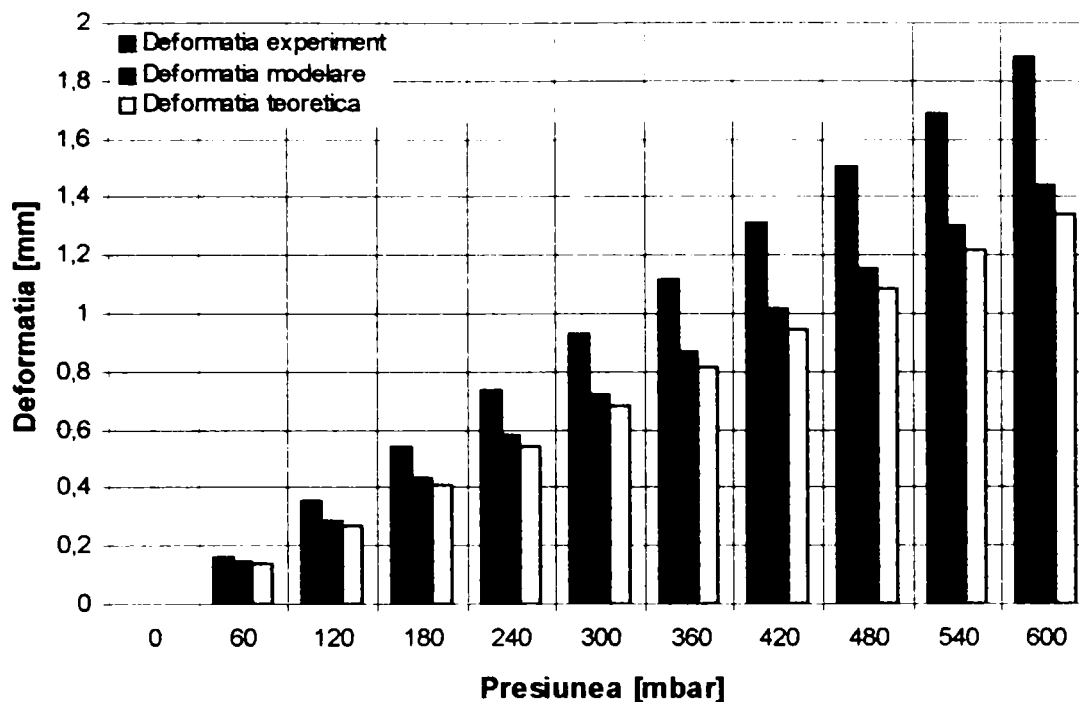


Fig.5.34

- se constată din analiza graficelor din fig.5.33 și fig.5.34 că, deformațiile membranelor determinate prin cele trei metode de lucru, deși sunt diferite, au aceeași alură; pentru capsula d47/p250 valorile deformațiilor determinate experimental și prin modelare cu element finit sunt mai apropiate, pe când la capsula d47/p600 deformațiile determinate prin modelare și prin calcul au valori mai apropiate. Nesuprapunerea valorilor apare datorită influențelor tehnologice (prin creșterea grosimii tablei, valorile constantelor de material, luate în considerare la modelare și la calculul analitic, nu mai au în toată grosimea membranei valoarea admisă constantă) și de asemenea, datorită aproximărilor introduse prin coeficienții de anizotropie, considerați în relațiile de calcul;

20. Studiind influența termenului de gradul trei din ecuația caracteristică a membranei se constată că, pentru cele patru capsule manometrice, cu diametrul exterior $d = 47$ mm, până în apropierea presiunii maxime de încărcare (dată de producător), acest termen nu influențează, în mod semnificativ, valoarea deformației maxime.

21. Studiind comparativ cele trei metode de investigare folosite – experiment, analiză cu element finit și calcul analitic – variația deformației capsulelor manometrice la presiunea constantă, $p = 250$ mbar, este redată în tabelul 5.5 și fig.5.35.

Tabel 5.5

Nr. crt.	Grosimea [mm]	Presiunea [mbar]	Deformatia experiment [mm]	Deformatia modelare [mm]	Deformatia calcul [mm]
1	0,06	250	1,6776	1,7041	1,1829
2	0,08	250	–	1,0857	0,8974
3	0,12	250	0,7579	0,6023	0,5683
4	0,18	250	–	0,3349	0,3707

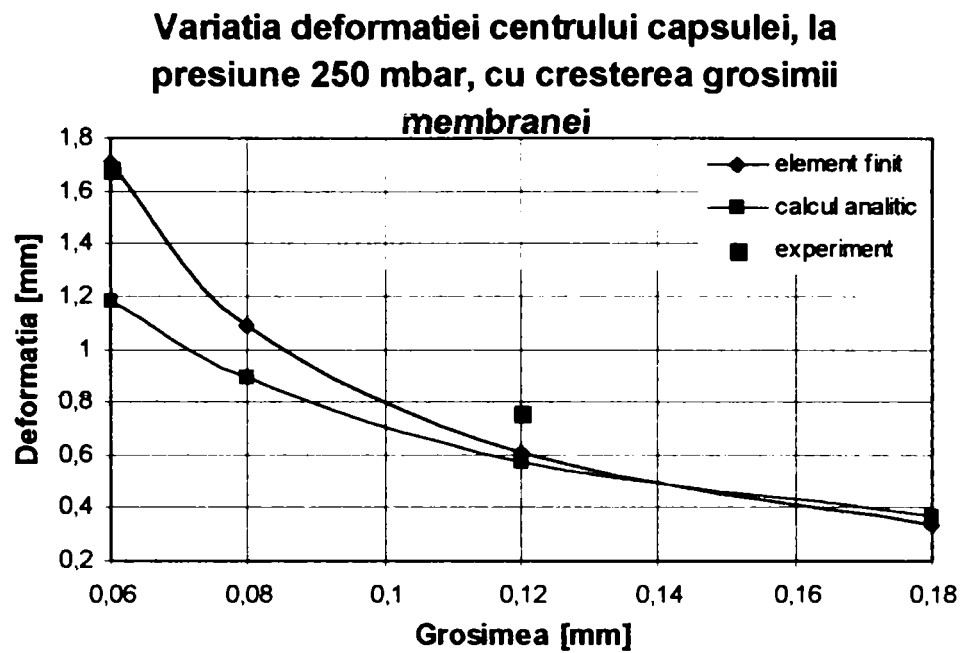


Fig.5.35

Se constată din acest grafic că, deformația capsulei manometrice scade la creșterea grosimii tablei, din care sunt confecționate membranele componente, scădere care are aceeași formă de variație în cele trei cazuri considerate.

6. CONCLUZII ȘI CONTRIBUȚII

6.1. CONCLUZII FINALE

1. Cea mai importantă sistematizare a aplicațiilor membranelor tehnice conține un graf, care ilustrează totalitatea aplicațiilor posibile, la ora actuală, pornind de la relațiile dintre: tipurile de aplicații, tipurile de soluții constructive și grupele de materiale.
2. Finalitatea, pe plan ingineresc a acestei lucrări, se concretizează printr-un algoritm general de proiectare al pieselor de tip membrană metalică.
3. Algoritmii general de proiectare este orientat pe îndeplinirea optimă a funcțiilor, pe care membranele metalice le îndeplinesc în aparatele și dispozitivele în care sunt incluse.
4. Standul experimental utilizat la încercarea capsulelor manometrice, deși are o procedură laborioasă de etalonare, asigură o precizie ridicată a măsurătorilor și un grad înalt de încredere în măsurătorile efectuate.
5. Rezultatele experimentului pot fi folosite ca date inițiale pentru proiectarea optimă a mecanismului manometrului.
6. Caracteristica elastică, a capsulelor manometrice studiate (capsule metalice gofrate cu profil sinusoidal), este liniară pe întregul domeniu de măsurare, liniaritate obținută prin cele trei metode de investigare: experimentare, modelare cu element finit și calcul analitic.
7. Posibilitatea extinderii domeniului de măsurare la capsulele manometrice cu grosime mică, datorită liniarității caracteristicii elastice pe un domeniu extins de presiune.
8. Din analiza cu element finit a capsulelor manometrice pot fi identificate zonele cele mai periclitate la rupere, care sunt la valorile maxime și minime ale profilului gofrat sinusoidal; dacă la presiuni și grosimi de tablă mici este afectat primul gofreu de la margine, la presiuni și grosimi de tablă mai mari sunt predispuse la rupere și gofreurile următoare, înspre zona centrală plană a capsulei.
9. La capsulele metalice gofrate cu profil sinusoidal uniform nu apare tendința de rupere a capsulei în zona lipirii celor două membrane componente. În schimb, în cazul modificării profilului (la capsula gofrată cu primul gofreu cu rază mai mare decât următoarele două) apare posibilitatea ruperii capsulei în zona lipiturii.
10. Modelul cu element finit se apropie mai mult de comportarea reală a capsulei în timpul experimentării, decât modelul matematic utilizat în calculul analitic. Acest lucru apare datorită modului în care modelul matematic aproximează comportamentul membranei, prin utilizarea unor coeficienți de anizotropie, considerați în relațiile de calcul.

11. Diferențele între comportarea reală a capsulei și modelul cu element finit apar din motive tehnologice, având în vedere că, toate constantele de material utilizate în modelare sunt determinate în condiții impuse, care nu mai coincid cu condițiile de încercare.
12. În vederea optimizării relațiilor de calcul se mai pot face îmbunătățiri ulterioare, prin determinarea unor relații, care să se apropie mai mult de comportarea reală a elementelor elastice de tip membrană metalică gofrată cu profil sinusoidal.
13. În concluzie, modelul cu element finit și modelul matematic pentru calculul analitic mai pot fi îmbunătățite în viitor, printr-o activitate experimentală și de cercetare.

6.2. CONTRIBUȚII

Lucrarea se întregeste cu un set important de elemente de originalitate, care pot fi ordonate și enumerate succint, după cum urmează:

1. Sistematizarea materialului bibliografic privind stadiul actual al aplicațiilor, materialelor, tehnologiei și tipurilor de elemente elastice de tip membrană.
2. Conceperea unei clasificări extinse a aplicațiilor tehnice cu membrane prin folosirea tehnicilor combinatorice. Realizarea unei clasificări originale a elementelor elastice de tip membrană, după tipuri de aplicații, soluții constructive și materiale (fig. 1.1, capitolul 1).
3. Conceperea unui algoritm original pentru proiectarea elementelor elastice de tip membrană, ce intră în componența unor aparate și dispozitive de Mecanică Fină;
 - 3.1. realizarea unei clasificări a elementelor elastice de tip membrană după funcțiile pe care le îndeplinesc, în aparatele și dispozitivele din care fac parte;
 - 3.2. conceperea algoritmului generalizat pentru proiectarea elementelor elastice de tip membrană (fig. 3.18, capitolul 3);
 - 3.3. realizarea ordinogramei generalizate și a programului, corespunzător algoritmului generalizat pentru proiectarea membranelor (fig. 3.19, capitolul 3).
4. Conceperea soluțiilor de principiu ale standului experimental utilizat pentru verificarea capsulelor manometrice;
 - 4.1. schema de principiu a standului de măsurare a deformațiilor capsulelor manometrice, cu traductoare optoelectronice CCD cu spot laser (fig. 5.1, capitolul 5);
 - 4.2. schema de principiu a standului de măsurare a deformațiilor capsulelor manometrice cu traductoare tensorezistive TER (fig. 5.2, capitolul 5).
5. Conceperea și proiectarea variantelor originale și a componentelor acestora, pentru standul experimental de verificare a capsulelor manometrice (fig. 5.3 și fig. 5.6, capitolul 5);
 - 5.1. traductorul de deformație, alcătuit din lamela elastică cu timbre tensometrice, lipite pretensionat și amplificatorul de instrumentație – soluția constructivă (fig. 5.4, capitolul 5);
 - 5.2. dispozitiv de etalonare a traductorului de deformație cu șurub micrometric – soluția constructivă (fig. 5.10, capitolul 5);
 - 5.3. manometrul cu 6 coloane de apă – soluția constructivă (fig. 5.9a, capitolul 5);
 - 5.4. etalonarea manometrului cu 6 coloane de apă;

- 5.5. sistemul de încărcare cu presiune de aer – soluția constructivă (fig.5.6, capitolul 5);
- 5.6. schemele electronice ale dispozitivului de comandă electronică (fig.5.4, fig.5.5 și fig.5.5.7, capitolul 5);
- 5.7. schema electronică a sursei de alimentare a standului experimental (fig.5.7 și fig.5.12, capitolul 5);
- 5.8. incinta cu capsule – soluția constructivă (fig.5.9b și fig.5.11, capitolul 5);
- 5.9. dispozitiv de poziționare și reglare a traductorului de deformare față de capsulele montate pe incintă – soluția constructivă (fig.5.11, capitolul 5);
- 5.10. planșeta suport – soluția constructivă (fig.5.9a, capitolul 5).
6. Realizarea practică a standului experimental pentru verificarea capsulelor manometrice, care va intra în dotarea unui laborator al departamentului Mecatronică, pentru realizarea unor lucrări practice cu studenții.
7. Conceperea și realizarea modelării elementelor elastice de tip membrană, din componența capsulelor manometrice, prin metoda elementului finit;
 - 7.1. alegerea mediului de programare COSMOS 2.5;
 - 7.2. alegerea elementului finit (SHELLAX);
 - 7.3. realizarea practică a modelării;
 - 7.4. prelucrarea datelor obținute prin modelare și extragerea concluziilor rezultate din analiza cu element finit a elementelor elastice de tip membrană.
8. Conceperea și realizarea modelului matematic pentru elementele elastice de tip membrană, din componența capsulelor manometrice, cu ajutorul mediului de programare MathCAD;
 - 8.1. rezolvarea ecuației caracteristicii membranei metalice gofrate, cu profil sinusoidal, care intră în componența capsulelor manometrice;
 - 8.2. studierea influenței termenului de gradul 3, din ecuația caracteristicii membranei metalice gofrate, cu profil sinusoidal, asupra neliniarității caracteristicii elementului elastic de tip membrană;
 - 8.3. prelucrarea datelor obținute din modelarea matematică și extragerea concluziilor aferente acestei modelări, referitor la membranele metalice gofrate cu profil sinusoidal.
9. Studiul comparativ referitor la rezultatele obținute prin cele trei metode de investigare a capsulelor manometrice, componente ale manometrelor de presiune.

BIBLIOGRAFIA

- | | | | | |
|----|---|---|--|------|
| 1 | Andreeva, L.E. | <i>Uprughie elementii priborov</i> | Mashgiz, Moskwa | 1962 |
| 2 | Balekics, M.,
Rădulescu, C.,
Gligor, O. | <i>Calculul și construcția îmbinărilor elastice</i> | Seria Mecatronica și Mecanică
Fină, Editura Mirton, Timișoara | 2001 |
| 3 | Boiangiu, D., ș.a. | <i>Elementele elastice ale mașinilor</i> | Editura Tehnică, București | 1967 |
| 4 | Breitinger, R. | <i>Losungskataloge fur Sensoren, Teil I, Federfuhungen und Federgelenke</i> | Mainz | 1976 |
| 5 | Buzdugan, Gh. | <i>Rezistența materialelor</i> | Editura Tehnică, București | 1980 |
| 6 | Cioară, Gh.T. | <i>Tehnici experimentale în ingineria mecanică. Traductoare și senzori</i> | Editura Politehnica, Timișoara | 1999 |
| 7 | Cheșa, I., ș.a. | <i>Alegerea și utilizarea oțelurilor</i> | Editura Tehnică, București | 1984 |
| 8 | Constantinescu,
I.N., ș.a. | <i>Măsurarea mărimilor mecanice cu ajutorul tensometriei</i> | Editura Tehnică, București | 1989 |
| 9 | Cuteanu, E., ș.a. | <i>Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor</i> | Editura "Facla", Timișoara | 1980 |
| 10 | Davidescu, A. | <i>Metrologie generală</i> | Editura Politehnica, Timișoara | 2001 |
| 11 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Sinteza dimensională a unei membrane elastice din construcția unui dispozitiv de complianță</i> | Revista "Construcția de Mașini"
(45), nr.10-11-12, pag.64 | 1993 |
| 12 | Dehelean
(Mureșan), L.M.,
Dolga, V. | <i>Considerații privind utilizarea membranelor elastice în construcția dispozitivelor de complianță</i> | Analele Universității, pag 195,
Oradea | 1993 |
| 13 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Optimizarea membranei elastice dintr-un traductor de presiune</i> | Analele Universității, vol.I, pg 57,
Oradea. | 1994 |
| 14 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Sinteza dimensională a unei membrane elastice pentru un dispozitiv de complianță (al unui RI)</i> | Revista Română de Mecanică
Fină și Optică - Supliment vol.1,
pag 131, București. | 1994 |
| 15 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Calculul automatizat al unei membrane elastice</i> | PRASIC'94, vol. "Organe de
Mașini II", pag.69, Brașov. | 1994 |
| 16 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Considerații privind optimizarea constructivă a unor module ce au în componență membrane elastice</i> | PRASIC'94, vol. "Organe de
Mașini II", pag.77, Brașov. | 1994 |
| 17 | Dehelean
(Mureșan), L.M.,
Ardelean, A. | <i>Considerații privind camerele cu membrană ale dispozitivelor de prehensiune</i> | al XII-lea Simpozion Național de
Roboți Industriali, vol. 4, p.215,
Timișoara. | 1994 |
| 18 | Dehelean
(Mureșan), L.M.,
Radu, A.G. | <i>Analiza posibilităților de realizare a unor micromodule de poziționare locală</i> | al XII-lea Simpozion Național de
Roboți Industriali, vol. 4, p.221,
Timișoara. | 1994 |
| 19 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Considerații privind sinteza dimensională a unei membrane elastice dintr-un dispozitiv de complianță, al unui robot industrial</i> | a III-a Conferință MTeM'95,
vol.I, pag.309, Cluj-Napoca. | 1995 |
| 20 | Dehelean | <i>Cuplajul compensator cu membrană.</i> | "Acta Universitas Cibiensis", | 1995 |

- | | | | | |
|----|---|--|---|------|
| | (Mureșan), L.M. | <i>Elemente constructive și de calcul</i> | vol.XIII, pag.203, ISSN 1221-4957, Sibiu. | |
| 21 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Senzori optici cu membrană folosiți la detectarea presiunilor variabile</i> | PCCM Universitatea "Aurel Vlaicu", vol.3, pag.103, Arad. | 1995 |
| 22 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Traductoare de vibrații cu membrane (partea I)</i> | MTM' 96, vol.3, pag.184, Reșița. | 1996 |
| 23 | Dehelean
(Mureșan), L.M. | <i>Traductoare de vibrații cu membrane (partea II)</i> | MTM' 96 vol.3, pag.193, Reșița. | 1996 |
| 24 | Dehelean, L.M. | <i>Algoritmul general de proiectare al membranelor</i> | Buletinul Științific al Universității "Politehnica", tom 45(57), p.131, ISSN 1224-6077, Timișoara | 2000 |
| 25 | Dehelean, L.M. | <i>Diaphragm Pressure Transducer for Medical Applications</i> | MTM'2000, vol.III, p.75, ISBN 973-585-179-2, 973-585-182-2, Timișoara. | 2000 |
| 26 | Dehelean, L.M. | <i>Blood Pressure Transducer</i> | MTM'2000, vol.III, p.81, ISBN 973-585-179-2, 973-585-182-2, Timișoara. | 2000 |
| 27 | Dehelean, L.M. | <i>Stand pentru verificarea capsulelor manometrice – Partea I-a</i> | COMEFIM'6, vol.1-20a, p.227, ISSN 1220-6830, Brașov. | 2002 |
| 28 | Dehelean, L.M. | <i>Stand pentru verificarea capsulelor manometrice – Partea a II-a</i> | COMEFIM'6, vol.1-20a, p.233, ISSN 1220-6830, Brașov. | 2002 |
| 29 | Dehelean, L.M. | <i>Stand pentru verificarea capsulelor manometrice – Evaluarea măsurătorilor</i> | COMEFIM'6, vol.1-20a, p.239, ISSN 1220-6830, Brașov. | 2002 |
| 30 | Dehelean, L.M. | <i>On Diaphragm Pieces Technical Applications</i> | PRASIC'02, vol.3 Design de Prods, p. 271, ISBN 973-635-076-2, Brașov. | 2002 |
| 31 | Demian, T. | <i>Elemente constructive de mecanică fină</i> | EDP București | 1980 |
| 32 | Demian, T., ș.a. | <i>Bazele proiectării aparatelor de mecanică fină, vol. I</i> | Editura Tehnică, București | 1984 |
| 33 | Demian, T., ș.a. | <i>Elemente elastice în construcția aparatelor de mecanică fină</i> | Editura Tehnică, București | 1996 |
| 34 | Demian, T., ș.a. | <i>Lagăre și ghidaje pentru aparate</i> | Editura Academiei, București | 1980 |
| 35 | Diaconescu, Gh., ș.a. | <i>Tehnologia mecanicii fine</i> | Editura Tehnică, București | 1969 |
| 36 | Doebelin, E.O. | <i>Measurement Systems: Application and Design</i> | McGraw-Hill Book Company | 1966 |
| 37 | Dolga, V. | <i>Sinteza dimensională a mecanismelor cu cuple cinematice elastice cu aplicații la construcția dispozitivelor de complianță</i> | Teza de doctorat, Lito UT Timișoara | 1992 |
| 38 | Gafițanu, M., ș.a. | <i>Elemente finite și de frontieră cu aplicații la calculul organelor de mașini</i> | Editura Tehnică, București | 1987 |
| 39 | Gârbea, D. | <i>Analiză cu elemente finite</i> | Editura Tehnică, București | 1990 |
| 40 | Gligor, O., Rădulescu, C. | <i>Elemente constructive de mecanică fină</i> | Litografia IPTV Timișoara | 1986 |
| 41 | Gligor, O., Rădulescu, C., Balekics, M. | <i>Bazele proiectării și designul produselor</i> | Seria Mecatronică și Mecanică Fină, Editura Mirton, Timișoara | 1998 |
| 42 | Heubner, K.H. | <i>The Finite Element Method for Engineers</i> | John Wiley, New York | 1975 |
| 43 | Hildebrand, S. | <i>Feinmechanische Bauelemente</i> | VEB Verlag Technik, Berlin | 1980 |
| 44 | Hinton, E., ș.a. | <i>Finite Element Software for Plates and Shells</i> | Pineridge Press, Swansea, U.K. | 1984 |
| 45 | Ignea, A. | <i>Măsurarea electrică a mărimilor</i> | Editura de Vest, Timișoara | 1996 |

- 46 Ionescu, G., ș.a. *neelectrice Traductoare pentru automatizări industriale, vol. I* Editura Tehnică, București 1985
- 47 Iosifescu, M., ș.a. *Mică enciclopedie de statistică* Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985
- 48 Jutard, A., ș.a. *Geometric Model of the DCR-LAI Compliant Device, Robotica, vol.7/1989, pag.151* Cambridge University Press 1989
- 49 Khandpur, R.S. *Handbook of Biomedical Instrumentation* Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Dehli 1993
- 50 Kovacs, Fr. *Roboți Industriali, vol.I* Lito UT Timișoara 1992
- 51 Larionescu, D. *Metode numerice* Editura Tehnică, București 1989
- 52 Micu, C., ș.a. *Aparate și sisteme de măsurare în construcții de mașini* Editura Tehnică, București 1980
- 53 Mocanu, D. *Analiza experimentală a tensiunilor* Editura Tehnică, București 1977
- 54 Mogan, Gh.L. *Metoda elementelor finite. Bazele teortice* Editura Lux Libris, Brașov 1997
- 55 Mogan, Gh.L. *Metoda elementelor finite. Aplicații practice* Editura Lux Libris, Brașov 1999
- 56 Munteanu, I.I. *Calculul statistic al structurilor* Editura "Facla", Timișoara 1977
- 57 Olariu, V., Brătianu, C. *Modelare numerică cu elemente finite* Editura Tehnică, București 1986
- 58 Pacoste, C., ș.a. *Metode moderne în mecanica structurilor* Editura Științifică și Enciclopedică, București 1988
- 59 Pascariu, I. *Analiza experimentală a tensiunilor* Editura Tehnică, București 1977
- 60 Pascariu, I. *Elemente finite. Concepte. Aplicații* Editura Militară, București 1985
- 61 Pascariu, I. *Introducere în analiza tensiunilor prin elemente finite* Editura Tehnică, București 1977
- 62 Perju, D. *Măsurări mecanice, vol. I* Editura Politehnica, Timișoara 2001
- 63 Ponomariov, S.D., ș.a. *Calculul de rezistență în construcția de mașini, vol. II* Editura Tehnică, București 1963
- 64 Posea, N. *Rezistența materialelor* EDP București 1979
- 65 Stammberger, K. *Die Membrankupplungeine drehstarre Kupplung fur getriebebewegliche, 11/1967, pag.357* Verbindungen WZ der Technischen Hochschule Magdeburg 1967
- 66 Stanciu, D. *Senzori, prezent și perspectivă* Editura Tehnică, București 1987
- 67 Stîngăciu, V. *Instrumente și instalații la bordul avioanelor moderne* Direcția Generală a Flotei Aeriene Civile, București 1959
- 68 Teodorescu, P.P., ș.a. *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile, vol.I* Editura Dacia, Cluj-Napoca 1976
- 69 Timoshenko, S. *Theory of Plates and Shells* McGraw-Hill Book Company Inc. 1959
- 70 Timoshenko, S., ș.a. *Teoria plăcilor plane și curbe* Editura Tehnică, București 1968
- 71 Trylinski, W. *Fine Mechanisms and Precision Instruments* Wydawnictwa Naukovo-Techniczne, Warszawa 1971
- 72 Zienkiewicz, O.C. *The Finit Element Method* McGraw-Hill Book Company Inc. 1977
- 73 * * * *COSMOS/M Version 2.5 – User's Guide* Structural Research&Analysis Corporation, 12121 Wilshire Boulevard, Suite 700, Los Angeles, CA 90025
<http://www.cosmos.com>
e-mail: info@srac.com 2002
- 74 * * * *BELLOFRAM Diaphragm Design Manual* Massachusetts, U.S.A. 1990
- 75 * * * *EFFBE – Membranen – bewahrte Functionselemente in Pneumatik und Hydraulik* Habsheim, France

- | | | | | |
|-----|-----|--|---|------|
| 76 | *** | <i>GOODFELLOW Metals and Materials for Research and Industry - Catalogue 1992/1993</i> | Cambridge, England | 1992 |
| 77 | *** | <i>GOODFELLOW Metals, Alloy, Compounds, Ceramics, Polymers, Composites - Catalogue 1993/1994</i> | Cambridge, England | 1993 |
| 78 | *** | <i>HBM Catalogue - Strain Gauges and Accessories</i> | Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt | 1995 |
| 79 | *** | <i>HEIDENHAIN Kupplungen, pag.83</i> | | |
| 80 | *** | <i>High Precision Tubes and Profiles - Production Programme</i> | LN Industries SA, Grandson, Switzerland | |
| 81 | *** | <i>MICRO-EPSILON</i> | Messtechnik GmbH&Co KG, Ortenburg | 2001 |
| 82 | *** | <i>OMEGA Complete Pressure, Strain & Force Measurement Handbook and Encyclopedia, Volume 28</i> | U.S.A. | 1992 |
| 83 | *** | <i>PHILIPS Electronics Measurement of Mechanical Quantities Catalogue 1979/1980</i> | Hamburg, Germany | 1979 |
| 84 | *** | <i>MEASUREMENTS GROUP - Tech Note TN 510, Diaphragm Pressure Transducers</i> | Raleigh, North Carolina, USA | 1982 |
| 85 | *** | <i>REICHELSCHEIM – Membranen als Konstruktionselemente in der Pneumatik</i> | Reichelsheim, Germany | |
| 86 | *** | <i>SANDVIK Stahlbander fur Federn</i> | Sandvik, Schweden | 1980 |
| 87 | | mgnews.msfc.nasa.gov/ATD/israelsson.html | | |
| 88 | | www.badotherm.com | | |
| 89 | | www.ni.com/devzone/advisors/pressure_sensors.htm | | |
| 90 | | www.rdpe.com/pressure/menu-pressure.htm | | |
| 91 | | www.winters.ca/seals.htm | | |
| 92 | | www.omegadyne.com/press-trans.html | | |
| 93 | | www.sensornet.com/prodcat.html | | |
| 94 | | www.msiusa.com/pressure_transducers.htm | | |
| 95 | | www.campbellsci.com/waterlevel.html | | |
| 96 | | fbox.vt.edu/eng/mech/writing/workbooks/labreport2.html | | |
| 97 | | www.endevco.com/main/news/news-index.php | | |
| 98 | | fbox.vt.edu/eng/mech/writing/workbooks/labhandout2.html | | |
| 99 | | www.vdc-corp.com/components/works/br02-38a.html | | |
| 100 | | www.adinstruments.com/research/rapps/bp.html | | |
| 101 | | xtronics.com/reference/xprimer.htm | | |
| 102 | | www.professionalequipment.com/xq/ASP/id.9/subID.186/qx/default.htm | | |
| 103 | | www.radonsupplies.com/manometer.html | | |
| 104 | | www.mksinst.com/baratronHOME.html | | |

A N E X E

A1. ANEXA 1

A1.1. PARAMETRI DE BAZĂ AI ELEMENTELOR ELASTICE

În cazul general, elementele elastice lucrează în domeniul de elasticitate al materialului, putând fi încărcate cu forțe sau momente, de valori constante sau variabile. Din acest motiv, între încărcări și deformații există o anumită dependență, care poate fi exprimată printr-o relație de forma:

$$\begin{aligned} F &= \varphi(f), \\ M &= \varphi'(\theta), \end{aligned} \tag{A1.1}$$

unde F este sarcina, în N; M este momentul, în Nm; f este săgeata, în mm; iar θ este deformația unghiulară, în rad.

Un parametru de bază al elementelor elastice este *încărcarea*. Încărcarea poate fi exterioară, de tipul forță exterioară, moment exterior, presiune, sau poate fi interioară, de tipul solicitare termică. Departajarea menționată este parțial improprie deoarece, în cazul încărcării interioare este adevărat că nu se intervine cu o solicitare mecanică exterioară și că aceasta apare în interiorul pieselor, datorită efectului de dilatare termică, dar cauza acestei dilatări este tot un semnal extern de natură termică.

Săgeata, care reprezintă cursa arcului sau deformația acestuia, este al doilea parametru de bază. Săgeata poate fi o deplasare (f) sau o rotire (θ), în funcție de solicitare și de forma constructivă a elementului elastic.

Dependența dintre acești doi parametri, reprezentată grafic, se numește *caracteristica elementului elastic* și are una dintre formele analitice date în relația (1.1). Reprezentările grafice (caracteristicile) elementelor elastice pot fi liniare (constante) sau neliniare, progresive sau regresive.

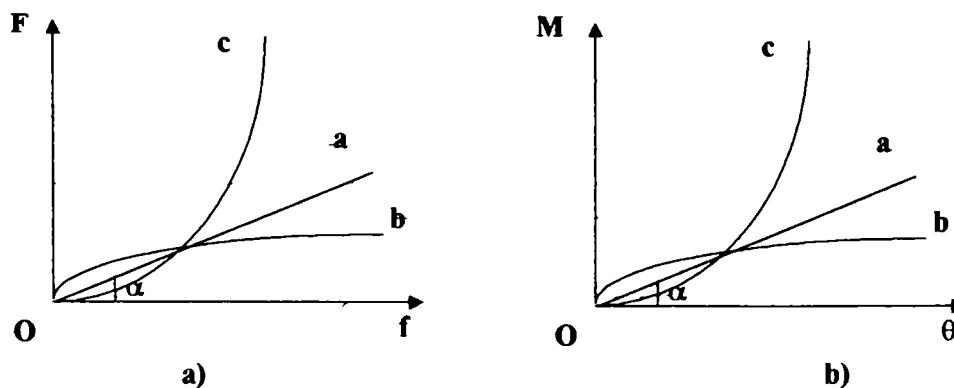


Fig. A1.1

În fig.A1.1, sunt prezentate principalele tipuri de curbe caracteristice pentru elementele elastice. Caracteristica elementelor elastice poate fi:

- neliniară (moale - curba b);
- neliniară (rigidă - curba c);
- liniară (constantă - curba a).

Toate caracteristicile reprezentate grafic sunt fără sarcină inițială. Multe elemente elastice activează numai pe o parte din curba caracteristică sarcină - deformație.

Raportul dintre creșterea încărcării și creșterea deformației, este un alt parametru de bază, care se numește *rigiditatea elementului elastic*. Ea este de forma:

$$c = \frac{dF}{df},$$

$$c' = \frac{dM}{d\theta}.$$
(A1.2)

În cazul în care, c sau c' , are o valoare constantă, rigiditatea mai poartă denumirea și de *constanta elementului elastic*. Din punct de vedere geometric, rigiditatea elementului elastic este reprezentată prin tangenta unghiului α (fig. 1.1) la curba caracteristică, și semnifică *panta caracteristicii*, ea având relația:

$$tg\alpha = \frac{dF \cdot k_f}{df \cdot k_r},$$

$$tg\alpha = \frac{dM \cdot k_M}{d\theta \cdot k_\theta},$$
(A1.3)

unde k_f , k_r , k_M și k_θ reprezintă factorii de scară (la reprezentarea grafică).

Inversa rigidității este *sensibilitatea elementului elastic*. Aceasta are o relație de forma:

$$s = \frac{df}{dF},$$

$$s' = \frac{d\theta}{dM}.$$
(A1.4)

Posibilitățile de utilizare ale elementelor elastice, depind în mare măsură de un alt parametru de bază, care este *lucrul mecanic acumulat sau lucrul mecanic de deformare (energia acumulată în procesul de deformare elastică)*. Pentru un element elastic de secțiune constantă, confecționat din material izotrop, având modulul lui Young E , încărcat până la limita de elasticitate (respectă legea lui Hooke), lucrul mecanic acumulat sau lucrul mecanic de deformare (energia acumulată în procesul de deformare plastică E_a), se poate calcula cu relația:

$$E_a = L = \int_0^{f_n} F df,$$

$$E_a = M = \int_0^{\theta_n} M d\theta.$$
(A1.5)

Dacă rigiditatea este constantă, ($F = c \cdot f$) caracteristica este liniară, iar lucrul mecanic acumulat este:

$$E_a = L = \frac{1}{2} F f_n = \frac{1}{2} c f_n^2,$$

$$E_a = L = \frac{1}{2} M \theta_n = \frac{1}{2} c \theta_n^2.$$
(A1.6)

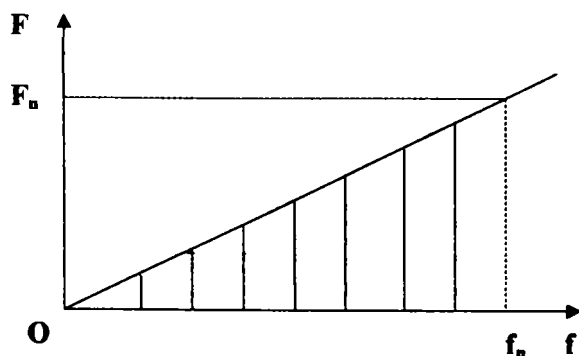


Fig. A1.2

În fig.A1.2. este reprezentat lucrul mecanic de deformare (energia acumulată în procesul de deformare elastică) - pentru cazul unui element elastic cu rigiditate constantă. Acesta este dat de aria suprafeței închise între caracteristica elementului elastic și axa absciselor.

Un parametru important, de care se ține seama la proiectarea și la calculul elementelor elastice, îl reprezintă *erorile de caracteristică*. Erorile de caracteristică, pentru elementele elastice, sunt provocate următoarele fenomene: *axarea elastică și histerezisul elastic*.

Legea lui Hooke se referă la un material ideal care are un comportament elastic liniar și reversibil. Materialele reale prezintă abateri de la caracteristica elastică ideală, abateri care pot fi ciclice și dependente de sensul solicitării, respectiv abateri de lungă durată. Datorită fenomenului de relaxare elastică, după încetarea acțiunii semnalului

exterior^{*}, elementul elastic continuă să se deformeze (fig. A1.3.a), durata relaxării fiind mult mai mare decât perioada semnalului.

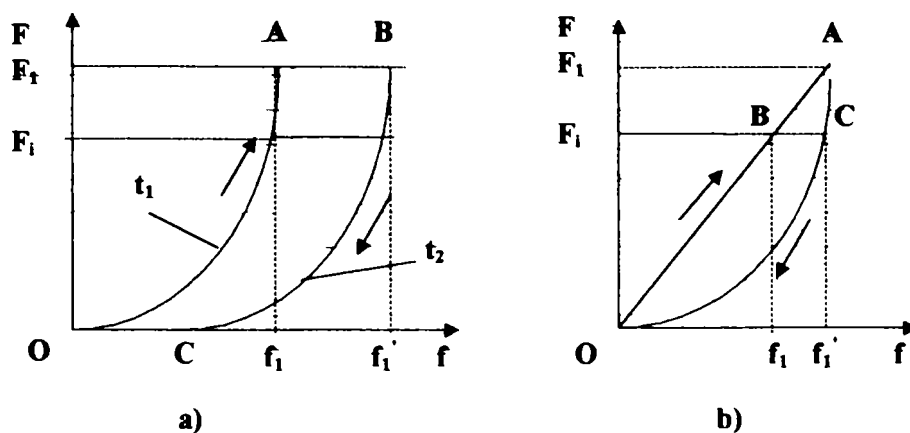


Fig. A1.3

Fenomenul de histeresis elastic, apare în cicluri închise, și constă din existența unei curbe de încărcare care nu coincide cu curba de descărcare (fig. A1.3.b).

În practică, cele două fenomene apar simultan și sunt inseparabile. Cumulând aceste erori de caracteristică (fig. A1.3) se poate calcula eroarea absolută:

$$\Delta\gamma = f_1' - f_1, \quad (A1.7)$$

și eroarea relativă:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\gamma}{f_{\max}} \cdot 100[\%]. \quad (A1.8)$$

unde f_{\max} este valoarea maximă a deformației, în timpul exploatării elementului elastic, în mm.

Fenomenele de relaxare elastică și histeresis elastic, se explică prin faptul că o parte din energia primită de elementul elastic se disipează prin frecarea internă dintre moleculele materialului. Energia disipată reprezintă un dezavantaj, pentru elementele elastice din structura aparatelor de măsură; în schimb, pentru elementele elastice folosite ca amortizoare, histereza constituie un avantaj. Astfel, mărimea lucrului mecanic disipat prin fenomenul de histeresis devine un criteriu de alegere al materialului de arc, funcție de aplicația concretă.

Frecările interne care apar în metale depind de compoziția chimică, structura metalografică, tratamentul termic, deformațiile plastice (compresiune), forța de pretensionare, rata încărcării, valoarea încărcării, câmpul magnetic și temperatura mediului ambiant.

În sistemele elastice, care lucrează în regim vibratoriu (sau oscilant), la care momentul de torsiune controlat este realizat cu elemente elastice - arcuri spirale fir de păr din construcția ceasurilor, arcuri bară de torsiune pentru susținerea echipajelor mobile din aparatele de măsură - frecările interne trebuie să fie cât mai mici, astfel încât, energia necesară menținerii mișcării de vibrație (sau oscilație) să fie minimă.

În vederea eliminării erorilor de caracteristică - fenomenul de relaxare elastică se manifestă și la aplicarea îndelungată a sarcinii - înainte de montarea elementului elastic, acesta este supus la o operație de stabilizare. Operația de stabilizare a elementelor elastice constă din supunerea repetată a arcului la sarcini și uneori, la temperaturi variabile. Al treilea factor, care introduce anumite erori, este reprezentat de variația temperaturii mediului în care lucrează elementul elastic, ce duce la modificarea modului lui Young, care are ca efect apariția *erorilor datorate modificării temperaturii*. Acestea se pot lua în considerare prin relația:

$$\begin{aligned} E_t &= E_0 (1 \pm \alpha_E \Delta t), \\ G_t &= G_0 (1 \pm \alpha_G \Delta t), \end{aligned} \quad (A1.9)$$

în care E_0 și E_t , respectiv G_t și G_0 sunt modulele de elasticitate longitudinal, respectiv transversal, la temperatura normală t_0 și la temperatura oarecare t , în daN/mm²; α_E , α_G este coeficientul termic al modului de elasticitate longitudinal, respectiv transversal; $\Delta t = t - t_0$, este diferența de temperatură, în °Celsius.

Eroarea absolută a modului de elasticitate longitudinal, respectiv transversal, la temperatura oarecare t , este dată de relația:

$$\begin{aligned} \Delta E_t &= \pm E_0 \alpha_E \Delta t, \\ \Delta G_t &= \pm G_0 \alpha_G \Delta t. \end{aligned} \quad (A1.10)$$

* se înțelege prin semnal exterior o variație rapidă a forței sau a momentului.

Eroarea relativă a acelorăși module devine:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{\Delta E_t}{E_{\max}} 100[\%], \\ \varepsilon_{\alpha} &= \frac{\Delta G_t}{G_{\max}} 100[\%], \end{aligned} \tag{A1.11}$$

unde E_{\max} și G_{\max} reprezintă valorile maxime ale lui E și G, din timpul exploatării, în daN/mm².

Modificarea modului de elasticitate E, respectiv G, datorită variației temperaturii, se repercutează asupra semnalului, relația acestuia devenind:

$$\begin{aligned} F_t &= F_0 (1 \pm \alpha_E \Delta t), \\ F_t &= F_0 (1 \pm \alpha_G \Delta t), \end{aligned} \tag{A1.12}$$

în care F_t este semnalul la temperatura oarecare, t, iar F_0 este semnalul la temperatura de referință t_0 , în daN. Eroarea absolută a semnalului, la temperatura oarecare t, va fi:

$$\begin{aligned} \Delta F_t &= F_0 \alpha_E \Delta t, \\ \Delta F_t &= F_0 \alpha_G \Delta t. \end{aligned} \tag{A1.13}$$

Eroarea relativă a semnalului va fi:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\Delta F_t}{F_{\max}} 100[\%], \tag{A1.14}$$

unde F_{\max} este valoarea maximă a semnalului în timpul exploatării, în daN.

Variația deformației elementului elastic, datorată modificării temperaturii, pentru un arc cu o caracteristică constantă, se poate determina cu relația:

$$\begin{aligned} f_t &= f_0 (1 \pm \alpha_f \Delta t), \\ f_t &= f_0 (1 \pm \alpha_g \Delta t), \end{aligned} \tag{A1.15}$$

Eroarea absolută a deformației, la temperatura oarecare t, este:

$$\begin{aligned} \Delta f_t &= f_0 \alpha_f \Delta t, \\ \Delta f_t &= f_0 \alpha_g \Delta t, \end{aligned} \tag{A1.16}$$

în care f_t este săgeata la o temperatură oarecare, t și f_0 este săgeata la temperatura de referință (normală), t_0 , în mm. Eroarea relativă în acest caz va fi:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\Delta f_t}{f_{\max}} 100[\%]. \tag{A1.17}$$

Tabelul A1.1. conține valorile uzuale ale modului de elasticitate longitudinal și transversal, ale factorului de variație a modului lui Young și a coeficienților de dilatare termică liniară, pentru câteva materiale folosite în construcția elementelor elastice.

Tabelul A1.1

Nr. crt	Materialul	Compoziția chimică [%]	$E \times 10^4$ [MPa]	$G \times 10^4$ [MPa]	$\delta = E/B$	α^*	α_r^*
1.	Alamă	Cu - 68 ÷ 70 Zn - restul	1,05	0,39	550	20,5	- 480
2.	Alamă cu Ni (Neusilber)	Zn - 18 ÷ 22 Ni - 13,5 ÷ 16,5 Cu - restul	1,25	0,694	415	18,0	- 400

* Valorile notate cu *, se vor amplifica cu 10⁻⁶.

3.	Bronz beriliu	Si - 6,5 P - 0,3 Cu - restul	1,25	0,406	280	17,7	- 480
4.	Bronz cu beriliu	Be - 2 +2,3 Al - 0,25 Ni - 0,6 Si - 0,25 Fe - 0,4 Cu - restul	1,26	0,41+0,48	157	18,5	- 310
5.	Oțel inox	Ni - 8 +11 Cr - 16 +20 Ti - 0,8 Si - 1,2 Mn - 0,7 C - 0,14 Fe - restul	1,86	-	420	16,0	- 350
6.	Oțel carbon	-	2,1	0,85	600	11,0	- 280
7.	Alumin	Cr - 12 Ni - 36 Fe - restul	1,45	-	-	-	0,0

În vederea comparării diferitelor soluții constructive ale elementelor elastice, sunt utilizați anumiți *parametri indicatori*, legați de energia acumulată în procesul de deformare elastică. Aceștia sunt:

1. *coeficientul specific de utilizare sau de formă, k_f* , care arată influența formei constructive a elementului elastic și a felului solicitării, asupra înmagazinării energiei, în procesul de deformare elastică. Astfel în cazul arcului tampon solicitat la întindere - compresiune rezultă:

$$E_s = L = \frac{Ff}{2} = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{A^2 \sigma_s^2 l}{2EA} = k_f \frac{\sigma_s^2 V}{2E}; \tag{A1.18}$$

2. *coeficientul de utilizare volumetrică, k_v* , care exprimă raportul dintre cantitatea de energie acumulată de elementul elastic și volumul acestuia, având relația de definiție:

$$k_v = \frac{E_s}{V} = \frac{L}{V} = k_f \frac{\sigma_s^2}{2E}; \tag{A1.19}$$

Acest coeficient oferă informații asupra utilizării volumului pentru acumularea energiei, în procesul de deformare elastică.

3. *coeficientul de utilizare gravimetrică, k_G* , care dă indicații asupra folosirii greutateii elementului elastic, din punct de vedere al acumulării energiei, în procesul de deformare elastică. Expresia analitică a acestui coeficient este:

$$k_G = \frac{E_s}{G} = \frac{L}{G} = k_f \frac{\sigma_s^2 V}{2EG} = \frac{k_v}{\gamma}; \tag{A1.20}$$

unde G este greutatea elementului elastic, iar γ este greutatea specifică a materialului acestuia.

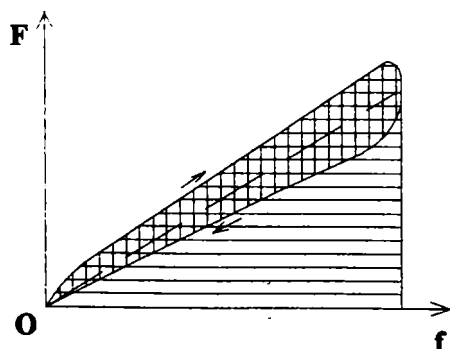


Fig. A1.4

Relațiile pentru energia acumulată în procesul de deformare elastică, stabilite anterior, sunt valabile dacă părțile componente ale elementului elastic nu se află în contact, deci este evitată frecarea dintre acestea. La unele tipuri de elemente elastice, curba caracteristică are forma similară cu cea din fig.A1.4. Suprafața hașurată dublu, cuprinsă de această curbă, reprezintă energia consumată de elementul elastic pentru învingerea frecării.

Un alt parametru de bază este *randamentul elementului elastic*, η . Dacă se consideră diagrama din fig.A1.4 și se notează cu A aria suprafeței de sub linia de încărcare, care semnifică energia E_a absorbită de elementul elastic la încărcare, aria suprafeței A' de sub linia de descărcare, care este energia E_c cedată de elementul elastic la descărcare. În consecință, aria suprafeței închisă de buclă, adică aria $(A - A')$, reprezintă energia consumată prin frecare.

Deci, randamentul elementului elastic se poate exprima ca un raport, astfel:

$$\eta = \frac{A'}{A} = \frac{E_c}{E_a} \quad (A1.21)$$

Un alt parametru de bază, corespunzător elementelor elastice care lucrează în procese vibratorii și de amortizare, este *coeficientul (capacitatea) de amortizare*. Acest coeficient este egal cu raportul dintre lucrul mecanic de frecare (interioară și exterioară) și totalul lucrului mecanic de încărcare și descărcare.

$$\delta = \frac{L - L_c}{L + L_c} = \frac{A - A'}{A + A'} = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (A1.22)$$

Dacă elementul elastic este utilizat la amortizarea unei sarcini variabile sau a unui șoc, coeficientul de amortizare va fi cât mai mare, deci L_c va fi cât mai mic. În cazul elementelor elastice folosite în construcția de aparate de mecanică fină, un fenomen important îl constituie *vibrațiile* [31]. Coeficientul de amortizare devine parametru de selecție a tipului de arc, în cazul folosirii acestuia în regim intens de vibrații. Comportamentul la vibrații poate fi studiat numai analizând comportamentul întregului sistem elastic din care face parte arcul.

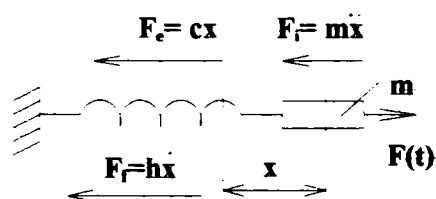


Fig. A1.5

Un sistem elastic cu un singur grad de libertate este reprezentat simbolic în fig.A1.5. Arcul reprezintă elasticitatea echivalentă a sistemului, m este masa redusă a sistemului, iar $F(t)$ este o forță perturbatoare. Masa execută oscilații în jurul unei poziții de echilibru, sub influența forței perturbatoare. Pentru studiul mișcării acestui sistem elastic, se vor lua în considerare, forțele care acționează asupra sistemului:

- forța perturbatoare $F(t)$, care poate avea o variație periodică și poate fi descompusă cu ajutorul seriei Fourier de sinus sau cosinus, sau poate fi o forță cu evoluție aleatoare;
- forța de inerție F_i care are sens opus accelerației;
- forța elastică F_e de întoarcere a sistemului, care tinde să readucă sistemul în poziția inițială și care este produsul dintre constanta elastică și distanța cu care s-a deplasat arcul;
- forța de frecare de amortizare F_f care se va considera de tip "vâscos" și care este proporțională cu viteza de deplasare x .

Pentru cazul particular, când forța F , este variabilă în timp, având o variație armonică cosinusoidală

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (A1.23)$$

ecuația echilibrului dinamic al sistemului va fi,

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + cx = F_0 \cos \omega t, \quad (A1.24)$$

o ecuație de ordinul doi și cu partea dreaptă diferită de zero. Dacă se înmulțește cu $1/m$ se obține,

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (A1.25)$$

iar dacă se fac notațiile (fiecare notație având un sens fizic de sine stătător),

$$\begin{aligned} \frac{c}{m} &= p^2 \\ \frac{h}{m} &= 2\delta \end{aligned} \quad (A1.26)$$

ecuația capătă forma:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + p^2x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \quad (A1.27)$$

unde p este pulsația proprie a sistemului; c este rigiditatea arcului; δ , h este factorul de amortizare, respectiv, coeficientul factorului de amortizare; F_0 este amplitudinea forței perturbatoare, iar ω pulsația forței perturbatoare.

Soluția acestei ecuații este:

$$x = e^{-\alpha t} \cos(p_1 t + \varphi_1) + \frac{F_0}{c} A \cos(\omega t - \varphi). \quad (A1.28)$$

și se vede că este formată din doi termeni.

Primul termen reprezintă soluția ecuației (A1.27) fără partea dreaptă.

$$x_1 = e^{-\alpha t} \cos(p_1 t + \varphi_1), \quad (A1.29)$$

adică expresia *vibrației libere*, care ajunge repede la amortizare, în trei situații determinate de valorile factorului:

$$\chi = \frac{\delta}{p} = \frac{h}{2\sqrt{mc}}. \quad (A1.30)$$

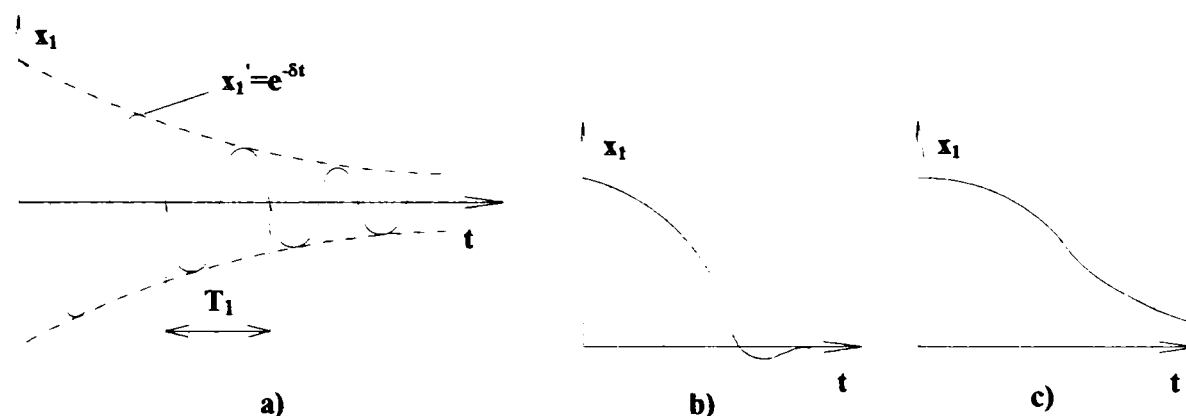


Fig. A1.6

1. dacă $\chi < 1$, deci $\delta < p$, amplitudinea este variabilă, micșorându-se exponențial după fiecare pseudo-perioadă:

$$T_1 = \frac{2\pi}{p_1}, \quad (A1.31)$$

unde p_1 este pseudo-pulsația vibrației amortizate (fig.A1.6a)

2. dacă $\chi > 1$, deci δ este mare în raport cu p , funcția x_1 tinde către zero cu atât mai repede, cu cât factorul de amortizare este mai mare (fig.A1.6c).
3. dacă $\chi = 1$, deci și $\delta = p$, amplitudinea se micșorează rapid prin aplicarea unei forțe rezistente practic constante (de frecare uscată) - (fig.A1.6b).

Cel de-al doilea termen, de forma părții drepte a ecuației (A1.27), corespunde *vibrației forțate*,

$$x_2 = f_s A \cos(\omega t - \varphi), \quad (A1.32)$$

unde $F_0/c = f_s$ este săgeata statică; φ este unghiul de defazăj, dintre forța perturbatoare și deplasare; iar prin A , s-a notat amplitudinea vibrației forțate (fig.A1.7), care are expresia:

$$A = \frac{\frac{F_0}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(2\delta\frac{\omega}{p}\right)^2}}. \quad (A1.33)$$

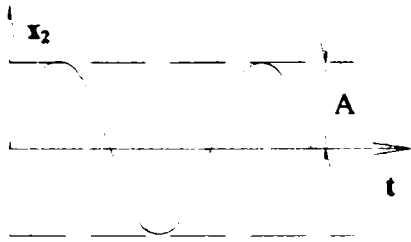


Fig. A1.7

Pentru amortizarea vibrațiilor este necesar să se compare, prin valorile săgeților, regimul de funcționare dinamic cu cel static. În acest sens se poate scrie valoarea coeficientului dinamic β , unde f_d este săgeata dinamică, adică săgeata, în stare de vibrație egală cu amplitudinea A (fig. A1.7).

$$\beta = \frac{f_d}{f_s} \tag{A1.34}$$

Dacă se fac înlocuirile necesare, în expresiile enumerate anterior, se obține relația coeficientului dinamic, funcție de pulsația forței perturbatoare, de pulsația proprie sistemului și de factorul de amortizare:

$$\beta = \frac{f_d}{f_s} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{p}\right)^2}} \tag{A1.35}$$

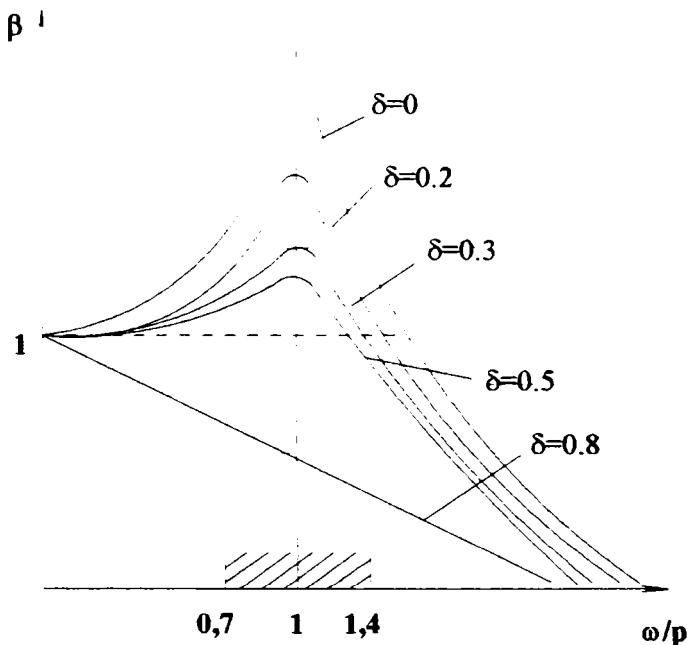


Fig. A1.8

Reprezentarea grafică a funcției β (fig. A1.8) se face menținând δ ca parametru. Fascicolul de curbe își are originea în punctul $\omega = 0$ și $\beta = 1$.

Rezonanța se produce dacă, pulsația forței exterioare este egală cu pulsația arcului, adică atunci când, $\omega = 0$, $\omega/p = 1$ și când:

$$\beta_{\max} = \frac{1}{2\delta} \tag{A1.36}$$

Din relația (A1.36) rezultă, în mod firesc, că β scade cu creșterea gradului de amortizare δ . În zona de rezonanță este importantă amortizarea vibrațiilor arcului. Se consideră, așa cum se observă și din fig. 1.8, că zona de influență a lui δ este:

$$0,7p < \omega < 1,4p \tag{A1.37}$$

Pentru $\omega/p = \sqrt{2}$, influența amortizării arcului scade mult, deci β este aprox. o funcție de ω/p și $\beta < 1$, deci și $f_d < f_s$.

În această zonă se produce o amortizare prin elasticitatea sistemului. Dacă $\delta = 0$, sistemul vibratoriu este neamortizat. În general, trebuie subliniat că, efectul amortizor al arcului, se menține în câmpul de valori, menționat mai sus și că în rest, el poate fi neglijat (zona hașurată din fig. A1.8).

Din analiza comportării sistemului elastic cu un grad de libertate rezultă, care sunt măsurile practice, care trebuie luate pentru evitarea fenomenului de rezonanță.

- punctul de funcționare al agregatului, mașinii, aparatului, se stabilește departe de frecvența critică;
- amortizarea internă a arcului este completată, în funcție de necesitate, cu o amortizare externă realizată de un amortizor specializat;
- traversarea rapidă zonei frecvenței critice ($0,7 \div 1,4 \omega/p$).

A2. ANEXA 2

A2.1. STAREA PLANĂ DE TENSIUNI

O placă de grosime constantă foarte mică, raportată la axele Ox și Oy , situate în planul ei median și la axa Oz , normală la acest plan, se află într-o stare plană de tensiuni dacă:

- nu este încărcată pe cele două fețe (inferioară și superioară);
- pe suprafața laterală încărcarea nu variază cu grosimea;
- forțele masice sunt paralele cu planul median.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(\mathbf{x}, y); & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(\mathbf{x}, y); \\ \sigma_y &= \sigma_y(\mathbf{x}, y); & \tau_{xz} &= 0; \\ \sigma_z &= 0; & \tau_{yz} &= 0; \\ z &= 0.\end{aligned}\tag{A2.1}$$

Ecuțiile generale ale teoriei elasticității se reduc la:

a) Ecuțiile lui Cauchy (de echilibru) se reduc la două:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \mathbf{x} &= \mathbf{0}; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \mathbf{y} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{A2.2}$$

b) Ecuțiile lui de Saint-Venant (de compatibilitate sau continuitate a deformațiilor) se reduc la una singură:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};\tag{A2.3}$$

c) Relațiile lui Hooke generalizate (între deformații specifice și tensiuni) devin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2[1+\nu]}{E} \tau_{xy}; \\ \gamma_{xz} &= 0; \\ \gamma_{yz} &= 0.\end{aligned}\tag{A2.4}$$

Remarcă - în cazul stării plane de tensiune, în general, $\varepsilon_z = 0$.

A2.2. STAREA PLANĂ DE DEFORMAȚII SPECIFICE

O placă plană de grosime constantă foarte mică, raportată la axele Ox și Oy , situate în planul median și la axa Oz , normală la acest plan, se află într-o stare plană de deformații dacă:

- nu sunt posibile deplasări în direcția axei Oz ($w = 0$);
- pe suprafața laterală încărcarea nu variază cu grosimea;
- forțele masice sunt paralele cu planul median.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y); & \varepsilon_z &= 0; \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y); & \gamma_{xz} &= 0; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y) & \gamma_{yz} &= 0; \\ z &= 0.\end{aligned}\tag{A2.5}$$

Ecuțiile generale ale teoriei elasticității se reduc la:

a) Ecuțiile lui Cauchy (de echilibru) se reduc la două:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0.\end{aligned}\tag{A2.6}$$

b) Ecuțiile lui de Saint-Venant (de compatibilitate sau continuitate a deformațiilor) se reduc la una singură:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};\tag{A2.7}$$

c) Relațiile lui Hooke generalizate (între deformații specifice și tensiuni) devin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ 0 &= -\frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \\ \gamma_{xz} &= 0; \\ \gamma_{yz} &= 0.\end{aligned}\tag{A2.8}$$

Remarcă - în general, în starea de deformații specifice există tensiuni normale (pe planul meridian) $\sigma_z \neq 0$.

Observație : cele două stări (starea plană de tensiuni și starea plană de deformații specifice) nu sunt distincte din punct de vedere matematic.

Înlocuind $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$, rezultă:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right].\end{aligned}\tag{A2.9}$$

Notând:

$$\begin{aligned}\frac{1-\nu^2}{E} &= \frac{1}{E_1}; \\ \frac{\nu}{1-\nu} &= \nu_1;\end{aligned}\tag{A2.10}$$

se obțin relațiile:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} [\sigma_x - \nu_1 \sigma_y]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} [\sigma_y - \nu_1 \sigma_x].\end{aligned}\tag{A2.11}$$

Rezultă că, din punct de vedere matematic, este suficient să studiem o singură stare plană, de exemplu cea de tensiuni, starea plană de deformații deducându-se din aceasta prin înlocuirea constantelor elastice E și ν , respectiv cu $E_1 = \frac{E}{1-\nu}$ și $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ și adăugând tensiunea $\sigma_x = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

A2.3. FUNCȚIA TENSIUNILOR (FUNCȚIA AIRY)

În cazul în care forțele masice sunt nule ($x = 0; y = 0$), ecuațiile lui Cauchy se simplifică și devin:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{A2.12}$$

Acestea sunt identic satisfăcute dacă există o funcție $\Phi(x,y)$, astfel încât:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{A2.13}$$

Este important ca și celelalte ecuații cu derivate parțiale să fie satisfăcute și anume:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]; \\ \gamma_{xy} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{A2.14}$$

Din relația (A2.14) se poate deduce ecuația lui de Saint-Venant

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0,\tag{A2.15}$$

pe care trebuie să o satisfacă funcția Φ (funcția lui Airy).

Considerând operatorul lui Laplace, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, relația (A2.15) se mai poate scrie:

$$\Delta \Delta \Phi = 0.\tag{A2.16}$$

O funcție care satisface condiția:

- $\Delta \Phi = 0$ - este o funcție armonică;
- $\Delta \Delta \Phi = 0$ - este o funcție biarmonică.

Concluzie : Soluționarea unei probleme de elasticitate plană revine la găsirea unei funcții biarmonice $\Phi(x,y)$, astfel încât, tensiunile $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ calculate cu relațiile (A2.13) să satisfacă condițiile la limită.

A2.4. ECUAȚIILE STĂRII PLANE DE TENSIUNI ÎN COORDONATE POLARE

Relațiile de transformare între coordonate carteziene și polare sunt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \theta &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (\text{A2.17})$$

a) Ecuațiile lui Cauchy (de echilibru) (în coordonate polare) sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\alpha \tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0; \end{aligned} \quad (\text{A2.18})$$

unde F_r și F_θ sunt componentele forței volumice F .

b) Relațiile între deformații specifice și deplasări (în coordonate polare) sunt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \end{aligned} \quad (\text{A2.18})$$

c) Relațiile lui Hooke generalizate (în coordonate polare) sunt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r); \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (\text{A2.19})$$

d) Expresiile tensiunilor σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ în funcție de σ_x , σ_y , τ_{xy} . Folosind ecuațiile de la legea variației tensiunilor în jurul unui punct (scrisă în coordonate polare) vom avea:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta; \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta; \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (\text{A2.20})$$

e) Expresiile tensiunilor σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, în raport cu funcția lui Airy (în coordonate polare) sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \\ \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A2.21})$$

f) Ecuația cu derivate parțiale, pe care o satisface funcția lui Airy, în coordonate polare (operatorul Laplace în coordonate polare) este:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad (\text{A2.22})$$

g) $\Delta \Delta \Phi = 0$ - se va scrie în coordonate polare:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right). \quad (\text{A2.23})$$

În cazul unei stări plane de tensiuni, axial-simetrică, $\Phi = \Phi(r)$, ecuația (A2.23) devine:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}\right) = 0; \quad (A2.24)$$

care scrisă dezvoltat este:

$$\frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0. \quad (A2.25)$$

Ecuația este ordinară, liniară, omogenă cu coeficienți variabili, de tip Euler și se încearcă soluția de forma:

$$\Phi = r^p. \quad (A2.26)$$

Ecuația transformată după substituție este:

$$p(p-1)(p-2)(p-3)r^{p-4} + 2p(p-1)(p-2)r^{p-4} - p(p-1)r^{p-4} + pr^{p-4} = 0; \quad (A2.27)$$

care dacă se împarte cu r^{p-4} se obține ecuația:

$$p^2(p-2)^2 = 0, \quad (A2.28)$$

cu rădăcinile: $p_1 = p_2 = 0$; $p_3 = p_4 = 2$.

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$\Phi = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r, \quad (A2.29)$$

pentru care rezultă starea de tensiune (2.21)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2C_3 + \frac{C_2}{r^2} + C_4 r^2 \ln r, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 2C_3 - \frac{C_2}{r^2} + C_4 (2 \ln r + 1), \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (A2.30)$$

unde constantele de integrare C_1, C_2, C_3, C_4 se determină din condițiile la limită.

A3. ANEXA 3

A3.1. DIFERITE SCHEME DE ÎNCARCARE A MEMBRANELOR PLANE

Notății

F	- forța normală;	Θ	- deformația unghiulară (în radiani);
Q	- forța tăietoare;	Φ	- diametrul membranei;
q	- forța tăietoare pe suprafața membranei;	a	- raza (membranei);
σ	- tensiunea unitară normală;	r_0	- raza pe care se realizează încărcarea;
σ_r	- tensiunea unitară pe direcție radială;	$\delta_{(r)}$	- deformația pe rază;
σ_t	- tensiunea unitară pe direcție tangențială;	ν	- coeficientul lui Poisson (aprox. 0,3 pentru oțel);
E	- modulul de elasticitate longitudinală;	m	= 1/ ν ;
t	- grosimea;		

1. Membrană circulară, simplu rezemată pe contur, încărcată cu forță uniform distribuită pe toată suprafața membranei

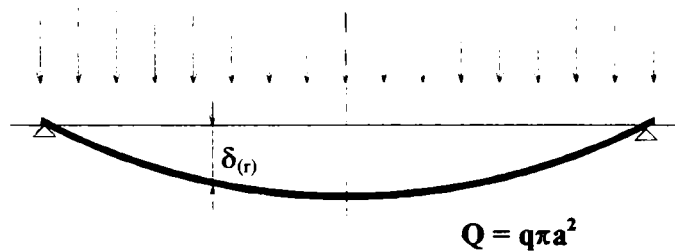


Fig. A3.1

La o distanță oarecare r , de centru:

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{8\pi m t^2} \left[(3m+1) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right]; \quad \sigma_t = -\frac{3Q}{8\pi m t^2} \left[(3m+1) - (m+3) \frac{r^2}{a^2} \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{8\pi E m^2 t^2} \left[\frac{(5m+1)a^2}{2(m+1)} + \frac{r^4}{2a^2} - \frac{(3m+1)r^2}{m+1} \right].$$

În centrul membranei:

$$\sigma_{r(\max)} = \sigma_{t(\max)} = -\frac{3Q}{8\pi m t^2} (3m+1); \quad \delta_{(\max)} = -\frac{3Q(m-1)(5m+1)a^2}{16\pi E m^2 t^3}.$$

Pe conturul membranei:

$$\Theta = \frac{3Q(m-1)a}{2\pi E m t^2}.$$

2. Membrană circulară, simplu rezemată pe contur, încărcată cu forță uniform distribuită pe o suprafață de rază r_0

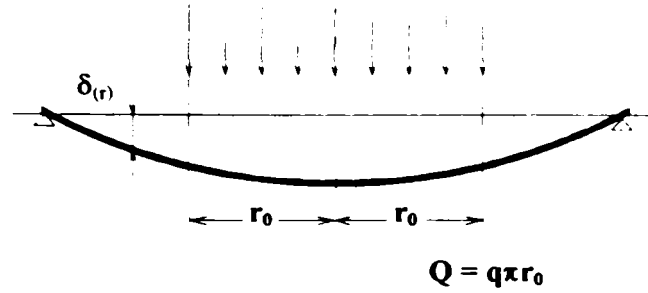


Fig. A3.2

La o distanță oarecare r , de centru:

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi m t^2} \left[m + (m+1) \ln \frac{a}{r_0} - (m-1) \frac{r_0^2}{4a^2} - (3m+1) \frac{r^2}{4r_0^2} \right];$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi m t^2} \left[m + (m+1) \ln \frac{a}{r_0} - (m-1) \frac{r_0^2}{4a^2} - (m+3) \frac{r^2}{4r_0^2} \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3} \left[4a^2 - 5r_0^2 + \frac{r^4}{r_0^2} - (8r^2 + 4r_0^2) \ln \frac{a}{r_0} - \frac{2(m-1)r_0^2(a^2-r^2)}{(m+1)a^2} + \frac{8m(a^2-r^2)}{m+1} \right].$$

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi m t} \left[(m+1) \ln \frac{a}{r} - (m-1) \frac{r_0^2}{4a^2} + (m-1) \frac{r_0^2}{4r^2} \right];$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi m t^2} \left[(m-1) + (m+1) \ln \frac{a}{r} - (m-1) \frac{r_0^2}{4a^2} - (m-1) \frac{r_0^2}{4r^2} \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3} \left[\frac{(12m+4)(a^2-r^2)}{m+1} - \frac{2(m-1)r_0^2(a^2-r^2)}{(m+1)a^2} - (8r^2 + 4r_0^2) \ln \frac{a}{r} \right].$$

În centrul membranei:

$$\sigma_{r(\max)} = \sigma_{t(\max)} = -\frac{3Q}{2\pi m t^2} \left[m + (m+1) \ln \frac{a}{r_0} - (m-1) \frac{r_0^2}{4a^2} \right].$$

Pe conturul cercului de rază r_0 :

$$\delta_{(\max)} = -\frac{3Q(m-1)(3m+1)a^2}{4\pi E m^2 t^3}.$$

Pe conturul membranei:

$$\Theta = \frac{3Q(m-1)a}{\pi E m t^3}.$$

3. Membrană circulară, simplu rezemată pe contur, încărcată cu forță concentrată la distanța r_0 , de centrul membranei

La o distanță oarecare r , de centru:

$r < r_0$

$$\sigma_{r(\max)} = \sigma_{t(\max)} = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[\frac{1}{2}(m-1) + (m+1) \ln \frac{a}{r_0} - (m-1) \frac{r_0^2}{2a^2} \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi Em^2 t^3} \left[\frac{(3m+1)(a^2-r^2)}{2(m+1)} - (r^2+r_0^2) \ln \frac{a}{r} - \frac{(m-1)r_0^2(a^2-r^2)}{2(m+1)a^2} + (r^2-r_0^2) \right].$$

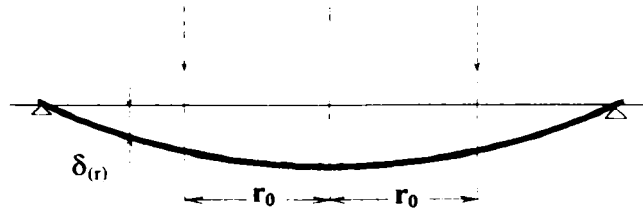


Fig. A3.3

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[(m+1) \ln \frac{a}{r} + (m-1) \frac{r_0^2}{4a^2} - (m-1) \frac{r_0^2}{4r^2} \right];$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[(m-1) + (m+1) \ln \frac{a}{r} - (m-1) \frac{r_0^2}{2a^2} - (m-1) \frac{r_0^2}{2r^2} \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi Em^2 t^3} \left[\frac{(3m+1)(a^2-r^2)}{2(m+1)} - (r^2+r_0^2) \ln \frac{a}{r} - \frac{(m-1)r_0^2(a^2-r^2)}{2(m+1)a^2} \right].$$

În centrul membranei:

$$\delta_{(\max)} = -\frac{3Q(m-1)}{2\pi Em^2 t^3} \left[\frac{(3m+1)a^2 - (m-1)r_0^2}{2(m+1)} - r_0^2 \left(\ln \frac{a}{r_0} + 1 \right) \right].$$

4. Membrană circulară, încastrată pe contur, încărcată cu forță uniform distribuită pe suprafață

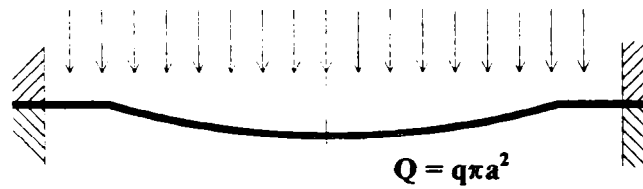


Fig. A3.4

La o distanță oarecare r , de centru:

$$\sigma_r = \frac{3Q}{8\pi mt^2} \left[(3m+1) \frac{r^2}{a^2} - (m+1) \right]; \quad \sigma_t = \frac{3Q}{8\pi mt^2} \left[(m+3) \frac{r^2}{a^2} - (m+1) \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi Em^2 t^3} \left[\frac{(a^2-r^2)^2}{a^2} \right].$$

În centrul membranei:

$$\sigma_{r(\max)} = \sigma_{t(\max)} = -\frac{3Q}{8\pi mt^2} (3m+1);$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)a^2}{16\pi Em^2 t^3}.$$

Pe conturul membranei:

$$\sigma_r = \frac{3Q}{4\pi t^2}; \quad \sigma_t = \frac{3Q}{4\pi mt^2}.$$

5. Membrană circulară, încastrată pe contur, încărcată cu forță uniform distribuită pe o suprafață de rază r_0

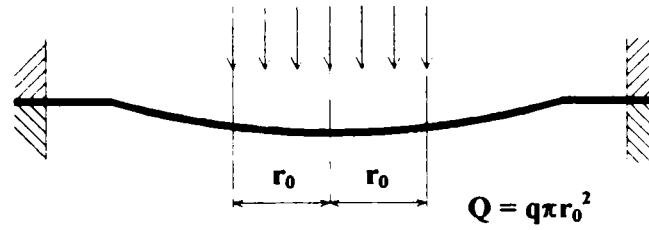


Fig. A3.5

La o distanță oarecare r , de centru:

$r < r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[(m+1) \ln \frac{a}{r_0} + (m+1) \frac{r_0^2}{4a^2} - (3m+1) \frac{r^2}{4r_0^2} \right];$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[(m+1) \ln \frac{a}{r_0} + (m+1) \frac{r_0^2}{4a^2} - (m+3) \frac{r^2}{4r_0^2} \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi Em^2 t^3} \left[4a^2 - (8r^2 + 4r_0^2) \ln \frac{a}{r_0} - \frac{2r^2 r_0^2}{a^2} + \frac{r^4}{r_0^2} - 3r_0^2 \right].$$

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[(m+1) \ln \frac{a}{r} + (m+1) \frac{r_0^2}{4a^2} + (m-1) \frac{r_0^2}{4r^2} - m \right];$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[(m+1) \ln \frac{a}{r} + (m+1) \frac{r_0^2}{4a^2} - (m-1) \frac{r_0^2}{4r^2} - 1 \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi Em^2 t^3} \left[4a^2 - (8r^2 + 4r_0^2) \ln \frac{a}{r} - \frac{2r^2 r_0^2}{a^2} - 4r^2 + 2r_0^2 \right].$$

În centrul membranei:

$$\sigma_r = \sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[(m+1) \ln \frac{a}{r_0} + (m+1) \frac{r_0^2}{4a^2} \right]; \quad \sigma_r \text{ este max pentru } r_0 < 0,588a$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi Em^2 t^3} \left[4a^2 - 4r_0^2 \ln \frac{a}{r_0} - 3r_0^2 \right].$$

Deformația maximă pe conturul cercului de rază r_0 :

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)a^2}{4\pi Em^2 t^3}.$$

Pe conturul membranei:

$$\sigma_r = \frac{3Q}{2\pi t^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{2a^2} \right); \quad \sigma_r \text{ este max pentru } r_0 > 0,588a$$

$$\sigma_t = \frac{3Q}{2\pi mt^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{2a^2} \right).$$

6. Membrană circulară, încastrată pe contur, încărcată cu forță concentrată la distanța r_0 , de centrul membranei

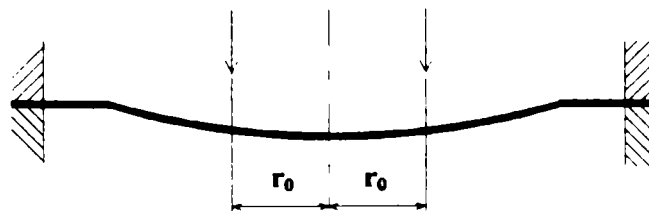


Fig. A3.6

La o rază oarecare r , față de centru:

$r < r_0$

$$\sigma_r = \sigma_t = -\frac{3Q}{4\pi m t^2} \left[(m+1) \left(2 \ln \frac{a}{r_0} + \frac{r_0^2}{a^2} - 1 \right) \right]; \quad \sigma_r, \sigma_t \text{ este max pentru } r_0 < 0,31a$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{a^2} \right) (a^2 - r^2) - (r^2 + r_0^2) \ln \frac{a}{r_0} + (r^2 - r_0^2) \right].$$

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{4\pi m t^2} \left[(m+1) \left(2 \ln \frac{a}{r_0} + \frac{r_0^2}{a^2} \right) + (m-1) \frac{r_0^2}{r^2} - 2m \right];$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{4\pi m t^2} \left[(m+1) \left(2 \ln \frac{a}{r_0} + \frac{r_0^2}{a^2} \right) - (m-1) \frac{r_0^2}{r^2} - 2 \right];$$

$$\delta_{(r)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{a^2} \right) (a^2 - r^2) - (r^2 + r_0^2) \ln \frac{a}{r_0} \right].$$

În centrul membranei:

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3} \left[\frac{1}{2} (a^2 - r^2) - r_0^2 \ln \frac{a}{r_0} \right].$$

7. Membrană circulară, cu gaură centrală, simplu rezemată pe contur, încărcată cu forță uniform distribuită pe suprafața inelară

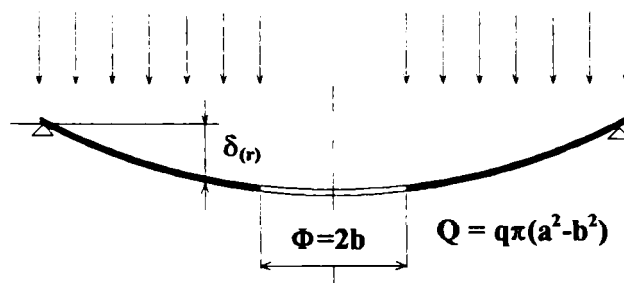


Fig. A3.7

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{t_{max}} = -\frac{3q}{4m t^2 (a^2 - b^2)} \left[a^4 (3m+1) + b^4 (m-1) - 4ma^2 b^2 - 4(m+1)a^2 b^2 \ln \frac{a}{b} \right].$$

Când b este foarte mic,

$$\sigma_{t_{max}} = -\frac{3qa^2(3m+1)}{4m t^2};$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3q(m^2-1)}{2m^2Et^3} \left[\frac{a^4[5m+1]}{8(m+1)} + \frac{b^4(7m+3)}{8(m+1)} - \frac{a^2b^2(3m+1)}{2(m+1)} + \frac{a^2b^2(3m+1)}{2(m-1)} \ln \frac{a}{b} - \frac{2a^2b^4(m+1)}{(a^2-b^2)(m-1)} \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2 \right]$$

8. Membrană circulară, cu gaură centrală, simplu rezemată pe contur, încărcată cu forță concentrată la distanța b, de centrul membranei

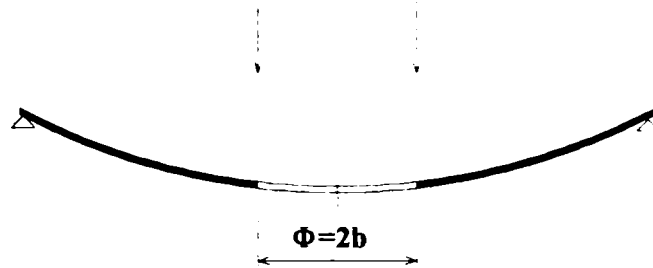


Fig. A3.8

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{t(max)} = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[\frac{2a^2(m+1)}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} + (m-1) \right];$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{4\pi Em^2t^3} \left[\frac{(a^2-b^2)(3m+1)}{(m+1)} + \frac{4a^2b^2(m+1)}{(m-1)(a^2-b^2)} \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2 \right].$$

9. Membrană circulară, cu gaură centrală, simplu rezemată pe un cerc de rază c, încărcată cu forță concentrată la distanța d, de centrul membranei

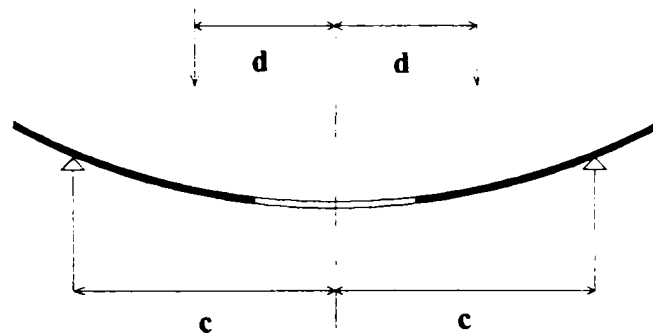


Fig. A3.9

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{t(max)} = -\frac{3Q}{2\pi mt^2} \left[\frac{2a^2(m+1)}{a^2-b^2} \ln \frac{c}{d} + (m-1) \frac{c^2-d^2}{a^2-b^2} \right].$$

10. Membrană circulară, cu gaură centrală, simplu rezemată pe conturul găurii, încărcată cu forță uniform distribuită pe suprafața inelară

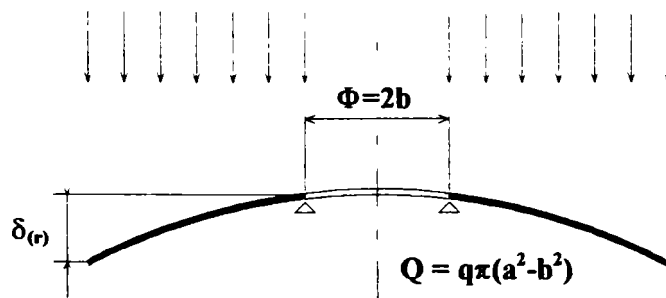


Fig. A3.10

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{t_{(m)}} = \frac{3q}{4mt^2(a^2 - b^2)} \left[4a^4(m+1) \ln \frac{a}{b} + 4a^2b^2 + b^4(m-1) - a^4(m+3) \right].$$

Pe conturul exterior al membranei:

$$\delta_{(m)} = \frac{3q(m-1)}{16Em^2t^3} \left[\frac{a^4(7m+3) + b^4(5m+1) - a^2b^2(12m+4)}{(m-1)} - \frac{4a^2b^2(3m+1)(m+1)}{(m-1)} \ln \frac{a}{b} + \frac{16a^4b^2(m+1)}{(a^2 - b^2)(m-1)} \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2 \right].$$

11. Membrană circulară, cu gaură centrală, încastrată pe contur, încărcată cu forță uniform distribuită pe suprafața inelară

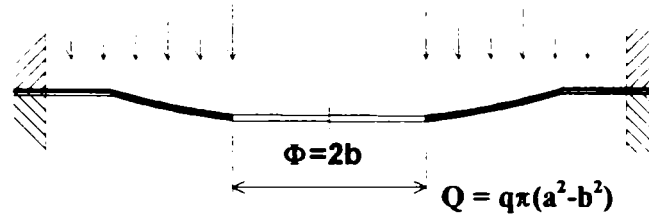


Fig. A3.11

Pe conturul exterior al membranei:

$$\sigma_{t_{(m)}} = \frac{3q}{4t^2} \left[a^2 - 2b^2 + \frac{b^4(m-1) - 4b^4(m+1) \ln \frac{a}{b}}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} + \frac{a^2b^2(m+1)}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} \right].$$

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{t_{(m)}} = -\frac{3q(m^2-1)}{4mt^2} \left[\frac{a^4 - b^4 - 4a^2b^2 \ln \frac{a}{b}}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} + \right. \\ \left. \frac{a^4 + 5b^4 - 6a^2b^2 + 8b^4 \ln \frac{a}{b} - \frac{8b^4(m+1)}{a^2(m-1) + b^2(m+1)}}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} - \frac{4a^2b^4(3m+1) - 4a^4b^2(m+1) \ln \frac{a}{b} + 16a^2b^4(m+1) \ln \left(\frac{a}{b} \right)^2}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} \right. \\ \left. - \frac{4a^2b^4 + 2a^4b^2(m+1) - 2b^4(m-1)}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} \right].$$

12. Membrană circulară, cu gaură centrală, încastrată pe contur, încărcată cu forță concentrată la distanța b, de centrul membranei

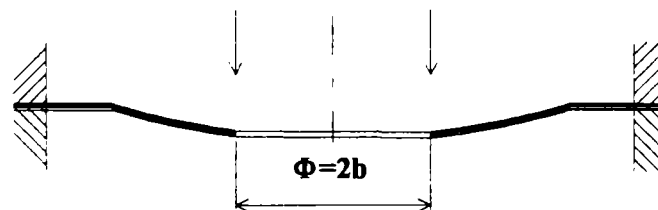


Fig. A3.12

Pe conturul exterior al membranei:

$$\sigma_{r_{\text{ext}}} = \frac{3Q}{2\pi t^2} \left[1 - \frac{2mb^2 - 2b^2(m+1) \ln \frac{a}{b}}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} \right] = \sigma_{r_{\text{ext}}}; \quad \text{când } a/b < 2,4.$$

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{r_{\text{int}}} = \frac{3Q}{2\pi m t^2} \left[1 + \frac{2ma^2(m-1) - mb^2(m+1) - 2(m^2-1)a^2 \ln \frac{a}{b}}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} \right] = \sigma_{r_{\text{int}}}; \quad \text{când } a/b > 2,4.$$

$$\delta_{r_{\text{ext}}} = \frac{3Q(m^2-1)}{4\pi m^2 E t^3} \left[a^2 - b^2 + \frac{2mb^2(a^2 - b^2) - 8ma^2b^2 \ln \frac{a}{b} + 4a^2b^2(m+1) \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2}{a^2(m-1) + b^2(m+1)} \right].$$

13. Membrană circulară, cu centrul rigidizat, încastrată pe contur, încărcată cu forță uniform distribuită pe suprafața inelară

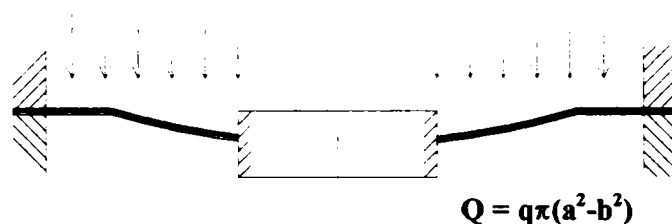


Fig. A3.13

Pe conturul exterior al membranei:

$$\sigma_{r_{\text{ext}}} = \frac{3q}{4t^2} \left[(a^2 - 3b^2) + \frac{4b^4}{a^2 - b^2} \ln \frac{a}{b} \right].$$

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_r = \frac{3q}{4t^2} \left[(a^2 + b^2) - \frac{4a^2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{a}{b} \right];$$

$$\delta_{r_{\text{ext}}} = -\frac{3q(m^2-1)}{16m^2 E t^3} \left[a^4 + 3b^4 - 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \ln \frac{a}{b} + \frac{16a^2b^4}{a^2 - b^2} \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2 \right].$$

14. Membrană circulară, cu centrul rigidizat, încastrată pe contur, încărcată cu forță concentrată la distanța b , de centrul membranei

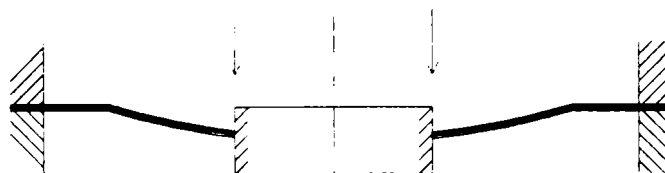


Fig. A3.14

Pe conturul exterior al membranei:

$$\sigma_r = \frac{3Q}{2\pi t^2} \left[1 - \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{a}{b} \right].$$

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{r_{\text{ext}}} = \frac{3Q}{2\pi t^2} \left[1 - \frac{2a^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{a}{b} \right];$$

$$\delta_{(max)} = \frac{3Q(m^2 - 1)}{4\pi m^2 Et^3} \left[a^2 - b^2 - \frac{4a^2 b^2}{a^2 - b^2} \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2 \right].$$

15. Membrană circulară, încastrată pe centru, încărcată cu forță uniform distribuită pe suprafața inelară

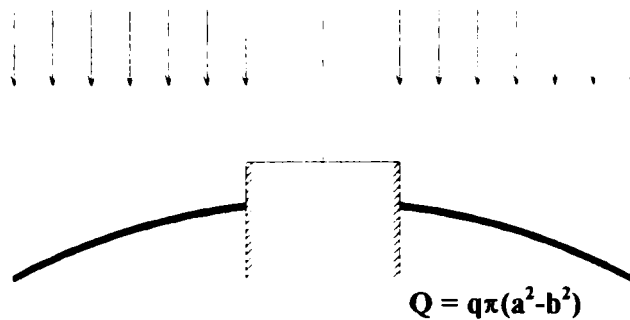


Fig. A3.15

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{r_{(int)}} = \frac{3q}{4t^2} \left[\frac{4a^4(m+1) \ln \frac{a}{b} - a^4(m+3) + b^4(m-1) + 4a^2 b^2}{a^2(m+1) + b^2(m-1)} \right].$$

Pe conturul exterior al membranei:

$$\delta_{(max)} = -\frac{3q(m^2 - 1)}{16m^2 Et^3} \left\{ \frac{a^4(7m+3) + b^4(m-1) - a^4 b^2(m+7) - a^2 b^4(7m-5)}{a^2(m+1) + b^2(m-1)} - \frac{4a^2 b^2 [a^2(5m-1) - b^2(m+1)] \ln \frac{a}{b} + 16a^4 b^2(m+1) \ln \left(\frac{a}{b} \right)^2}{a^2(m+1) + b^2(m-1)} \right\}.$$

16. Membrană circulară, încastrată pe centru, încărcată cu forță concentrată pe conturul membranei

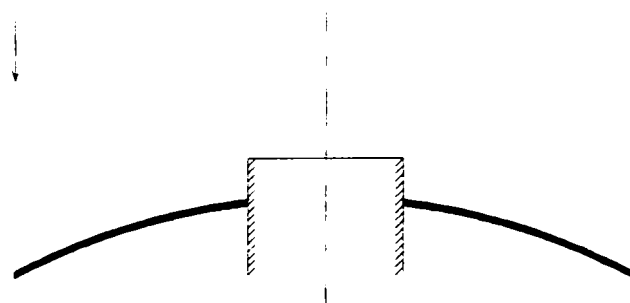


Fig. A3.16

Pe conturul interior al membranei:

$$\sigma_{r_{(int)}} = \frac{3Q}{2\pi t^2} \left[\frac{2a^2(m+1) \ln \frac{a}{b} + a^2(m-1) - b^2(m-1)}{a^2(m+1) + b^2(m-1)} \right];$$

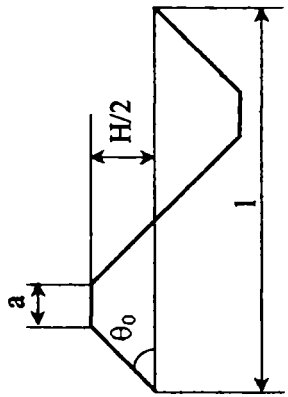
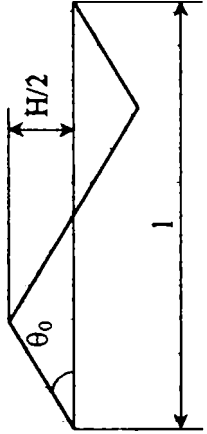
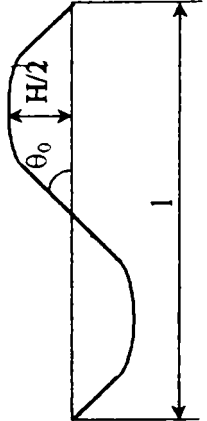
$$\delta_{(\max)} = -\frac{3Q(m^2 - 1)}{4m^2 \pi E t^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^4(3m + 1) - b^4(m - 1) - 2a^2b^2(m + 1) - 8ma^2b^2 \ln \frac{a}{b}}{a^2(m + 1) + b^2(m - 1)} \\ - \frac{4a^2b^2(m + 1) \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2}{a^2(m + 1) + b^2(m - 1)} \end{array} \right\}$$

Tabel A3.1

z	Încastrare liberă		Încastrare perfectă		z	Încastrare liberă		Încastrare perfectă	
	w ₀ /h	pr ₁ ⁴ /Eh ⁴	w ₀ /h	pr ₁ ⁴ /Eh ⁴		w ₀ /h	pr ₁ ⁴ /Eh ⁴	w ₀ /h	pr ₁ ⁴ /Eh ⁴
4	1,521	12,49	1,029	8,569	19	9,979	646,4	5,953	749,9
5	2,250	24,08	1,488	19,91	21	11,04	833,2	6,554	989,3
7	3,474	56,27	2,224	50,88	23	12,09	1050	7,151	1273
9	4,605	103,3	2,884	99,56	25	13,15	1299	7,748	1607
11	5,701	167,7	3,514	169,8	27	14,19	1587	8,346	1995
13	6,782	251,9	4,134	266,4	29	15,26	1915	8,942	2442
15	7,876	365,2	4,759	395,8	31	16,30	2276	9,534	2944
17	8,917	488,9	5,351	552,5	33	17,36	2690	10,13	3518

Coefficienții de anizotropie constructivă pentru câteva profile de membrane gofrate

Tabel A3.2

Profil	$(k_1)_t$	$(k_2)_f=(k_1)_f$	$(k_2)_t$
<p>Trapezoidal</p> 	$\frac{H^2}{h^2} \left(\frac{1 - \frac{2a}{l}}{\cos \theta_0} + \frac{6a}{l} \right) + \left(1 - \frac{2a}{l} \right) \cos \theta_0 + \frac{2a}{l}$	$1 - \frac{2a}{l} + \frac{2a}{\cos \theta_0}$	$\frac{H^2}{h^2} \left(\frac{1 - \frac{2a}{l}}{\cos \theta_0} + \frac{6a}{l} \right) + \left(1 - \frac{2a}{l} \right) \cos \theta_0 + \frac{2a}{l}$
<p>Dințat</p> 	$\frac{H^2}{h^2} \frac{1}{\cos \theta_0} + \cos \theta_0$	$\frac{1}{\cos \theta_0}$	$\frac{H^2}{h^2} \frac{1}{\cos \theta_0} + \frac{1}{\cos^3 \theta_0}$
<p>Sinusoidal cu înclinare mică</p> 	$\frac{3H^2}{2h^2} + 1$	1	$\frac{3H^2}{2h^2} + 1$

A4. ANEXA 4

A4.1. ELEMENTUL FINIT TRIUNghiULAR CU TREI NODURI

Caracteristici generale. Funcții de interpolare

În fig.A4.1 este reprezentat un element finit triunghiular cu trei noduri sau triunghi cu trei noduri i, j, k , raportat la un sistem global de coordonate xOy .

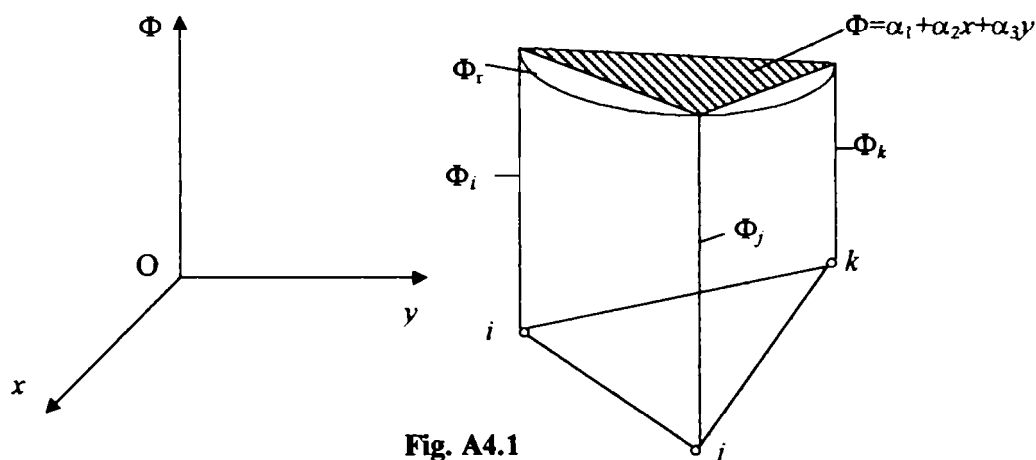


Fig. A4.1

Se notează cu Φ , funcția necunoscută care se studiază. Variația reală a funcției necunoscute Φ , este aproximată printr-o variație simplificată, exprimată printr-o funcție de aproximare Φ , în acest caz un polinom de interpolare. Din fig. A4.1 se observă că, numai în nodurile elementului finit, valoarea funcției de aproximare coincide cu valoarea funcției reale. Funcția de aproximare este un polinom de gradul întâi, deci o funcție liniară de forma:

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y. \quad (A4.1)$$

Polinomul de interpolare trebuie să fie în acest caz de ordinul întâi deoarece, pe o latură a elementului finit sunt două noduri și polinomul de gradul întâi interpolează în două puncte. Numărul de coeficienți α_i , numiți *coordonate generalizate*, respectiv numărul de termeni este trei, deoarece triunghiul are trei noduri. Coeficienții α_i se determină impunând ca în noduri funcția să aibă valorile nodale Φ_i, Φ_j, Φ_k :

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2x_i + \alpha_3y_i, \\ \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2x_j + \alpha_3y_j, \\ \Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2x_k + \alpha_3y_k. \end{aligned} \quad (A4.2)$$

Rezolvând sistemul (A4.2), în raport cu coordonatele generalizate α_i , se obține:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A_e} (a_i\Phi_i + a_j\Phi_j + a_k\Phi_k), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A_e} (a_i\Phi_i + a_j\Phi_j + a_k\Phi_k), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A_e} (a_i\Phi_i + a_j\Phi_j + a_k\Phi_k), \end{aligned} \quad (A4.3)$$

în care A_e este aria elementului finit:

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}; \quad (A4.4)$$

iar coeficienții a, b, c au valorile:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j; \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k; \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i; \\ b_i &= y_j - y_k; \\ b_j &= y_k - y_i; \\ b_k &= y_i - y_j; \\ c_i &= x_k - x_j; \\ c_j &= x_i - x_k; \\ c_k &= x_j - x_i. \end{aligned} \quad (A4.5)$$

Acești coeficienți sunt constanți deoarece depind numai de coordonatele constante ale nodurilor. Introducând relațiile (A4.3) în relația (A4.1), se obține:

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k = [N_i \ N_j \ N_k] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = [N] \{\Phi\}_e; \quad (A4.6)$$

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A_e} (a_i + b_i x + c_i y); \\ N_j &= \frac{1}{2A_e} (a_j + b_j x + c_j y); \\ N_k &= \frac{1}{2A_e} (a_k + b_k x + c_k y). \end{aligned} \quad (A4.7)$$

În relațiile (A4.7) N_i, N_j, N_k sunt funcțiile de formă ale elementului finit triunghiular cu trei noduri, iar $[N]$ din relația (A4.6) este matricea funcțiilor de formă a aceluiași element.

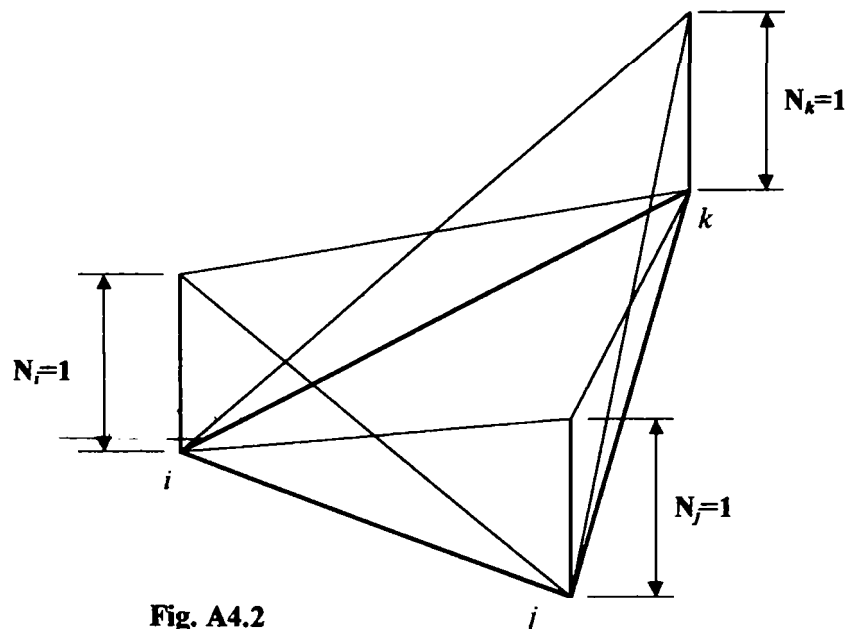


Fig. A4.2

Relația (A4.6) exprimă variația aproximată Φ a funcției necunoscute, în raport cu valorile acestei funcții în nodurile elementului finit $\{\Phi\}_e$, prin intermediul funcțiilor de formă din matricea $[N]$. Această variație este liniară, funcțiile de formă sunt și ele liniare și elementul finit cu trei noduri se numește *liniar*.

Valoarea funcțiilor de formă variază între 0 și 1. Ele au valoarea 1 în nodul la care se referă și 0 în celelalte noduri (fig.A4.2). Astfel $N_i = 1$, în nodul i și $N_i = 0$, în nodurile j și k .

Funcția de interpolare fiind liniară, derivatele ei în raport cu coordonatele x și y (gradientii) sunt constante. Derivând relațiile (A4.6) se obține:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{N}] \{\Phi\}_e = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad \frac{\partial N_k}{\partial x} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{N}] \{\Phi\}_e = \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \quad \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad \frac{\partial N_k}{\partial y} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k)$$

(A4.8)

În fig.A4.3a s-a reprezentat un domeniu bidimensional D , împărțit în elemente finite triunghiulare cu trei noduri, raportat la un sistem global de coordonate xOy . Variația continuă a funcției necunoscute pe cuprinsul domeniului D , este aproximată prin variații liniare, continue numai pe cuprinsul elementelor finite.

În fig.A4.3b s-a reprezentat derivata în raport cu x (gradientul) funcției de aproximare. Gradientul fiind constant pe elemente, iar între elemente se produc salturi ale gradientului, care determină creșterea globală a funcției Φ . O reprezentare asemănătoare are și derivata în raport cu y a funcției de aproximare. Această reprezentare evidențiază limitările elementului finit liniar. El nu este adecvat pentru problemele la care se cere continuitate între elementele finite pentru derivata de ordinul întâi.

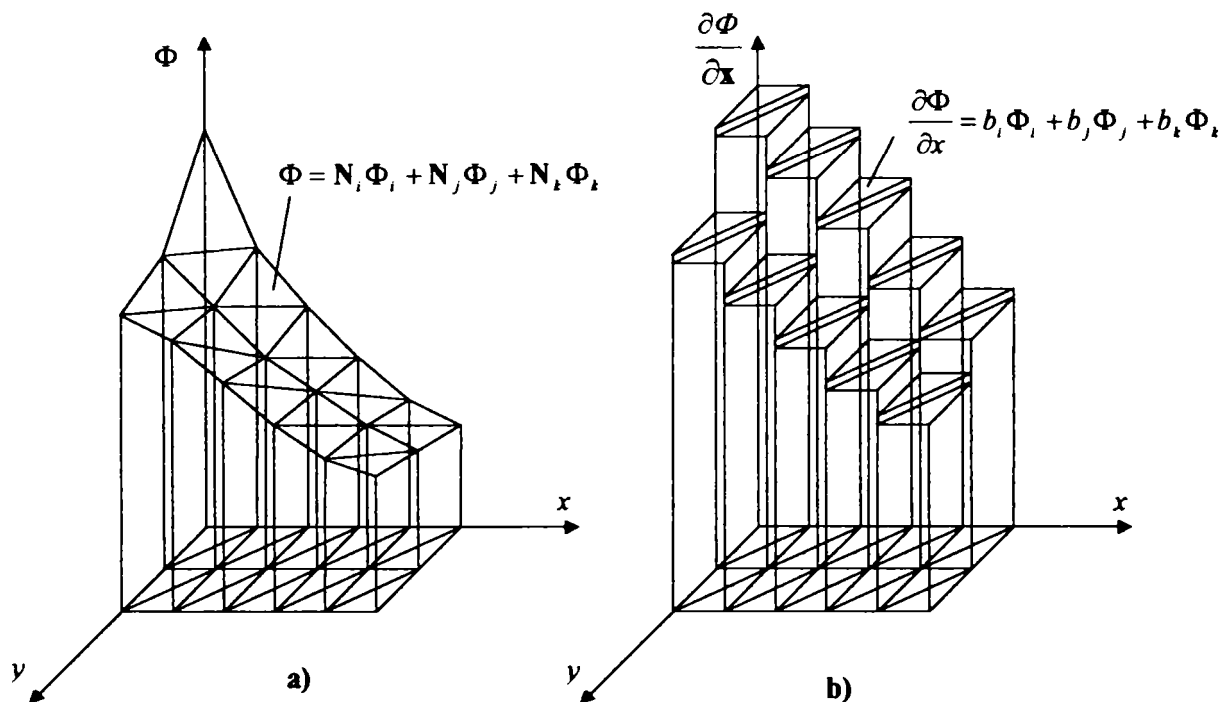


Fig. A4.3

Coordonate naturale

În afara sistemului global de coordonate, în analiza cu elemente finite se folosesc adeseori sisteme de coordonate locale, care au originea, de obicei, în centrul de greutate al elementului.

La folosirea coordonatelor naturale, poziția unui punct, din cuprinsul elementului finit, este exprimată printr-un set de mărimi adimensionale, care sunt rapoarte de lungimi, de arii sau de volume, după cum elementele finite sunt uni-, bi-, sau tridimensionale.

Coordonatele naturale au valoarea cuprinsă între zero și unu. Ele au valoarea unu într-un nod al elementului finit și zero în toate celelalte noduri, ca și funcțiile de formă.

Avantajul coordonatelor naturale constă în special în simplificarea operațiilor de integrare pe cuprinsul elementului finit. Coordonatele naturale se notează L_i ($i = 1, 2, \dots, n$), n fiind numărul de noduri exterioare elementului finit.

Pentru elementul finit triunghiular cu trei noduri, coordonatele naturale ale unui punct $P(x, y)$ de pe elementul finit ijk (fig.4.4) sunt rapoartele de arie L_i, L_j, L_k :

$$L_i = \frac{A_i}{A_e}; \quad L_j = \frac{A_j}{A_e}; \quad L_k = \frac{A_k}{A_e}; \quad (A4.9)$$

unde A_e este aria elementului finit iar A_i, A_j, A_k sunt porțiuni din această arie, determinate de punctul P . Între coordonatele naturale există relația:

$$L_i + L_j + L_k = 1. \quad (A4.10)$$

Coordonatele globale x, y ale punctului P , sunt exprimate cu ajutorul coordonatelor naturale, prin relațiile:

$$\begin{aligned} x &= L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k; \\ y &= L_i y_i + L_j y_j + L_k y_k. \end{aligned} \quad (A4.11)$$

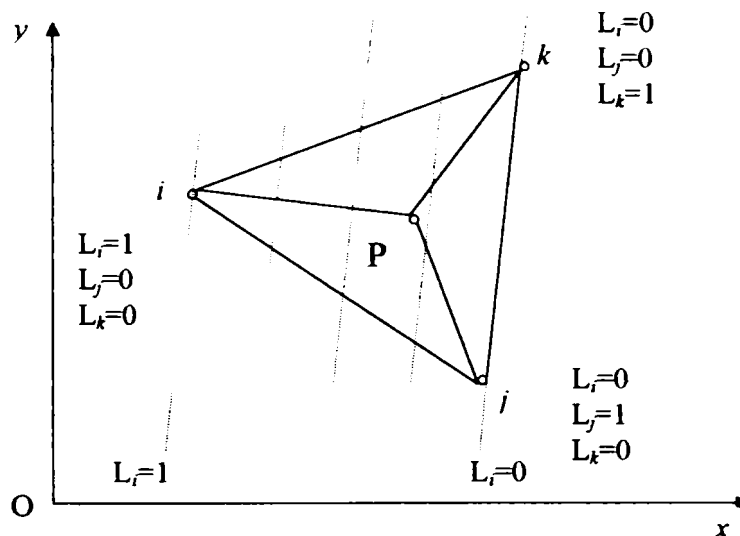


Fig. A4.4

Rezolvând sistemul de ecuații format din ecuațiile (A4.10) și (A4.11), în raport cu coordonatele naturale avem:

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2A_e} (a_i + b_i x + c_i y); \\ L_j &= \frac{1}{2A_e} (a_j + b_j x + c_j y); \\ L_k &= \frac{1}{2A_e} (a_k + b_k x + c_k y). \end{aligned} \quad (A4.12)$$

Comparând relațiile (A4.12) cu relațiile (A4.7) se constată că $L_i = N_i, L_j = N_j, L_k = N_k$, deci coordonatele naturale sunt egale cu funcțiile de formă. Funcția Φ poate fi exprimată cu ajutorul coordonatelor naturale printr-o relație asemănătoare cu relația (A4.6):

$$\Phi = L_i \Phi_i + L_j \Phi_j + L_k \Phi_k = [L_i \ L_j \ L_k] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = [L] \{\Phi\}_e. \quad (A4.13)$$

Integrarea coordonatelor de arie, pe suprafața triunghiului de arie A_e , necesară în calculele cu elemente finite, se face simplu, cu ajutorul formulei:

$$\int_{A_e} L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A_e. \quad (A4.14)$$

Cu ajutorul unor formule asemănătoare se face și integrarea coordonatelor de lungime și a celor de volum.

Polinoame de interpolare și funcții de formă pentru mărimi vectoriale

În expresiile polinoamelor de interpolare (A4.1), (A4.6), (A4.13), funcția necunoscută a fost considerată o mărime scalară. În orice punct al elementului finit există un singur parametru necunoscut, sau un singur grad

de libertate. Acesta este cazul, de exemplu, al problemelor de conducție termică, la care există o singură necunoscută - temperatura. În alte probleme, cum sunt cele de elasticitate, în fiecare punct al corpului și deci în fiecare nod de element finit, funcția necunoscută poate avea mai multe componente, fiind deci o mărime vectorială.

În problemele de elasticitate funcția necunoscută este de regulă deplasarea iar componentele ei sunt componentele vectorului deplasare.

Când funcția necunoscută este o mărime vectorială, problema se rezolvă în același fel, dar în raport cu componentele după direcțiile axelor de coordonate ale funcției. Aceste componente se notează cu u după direcția x , cu v după direcția y și cu w după direcția z .

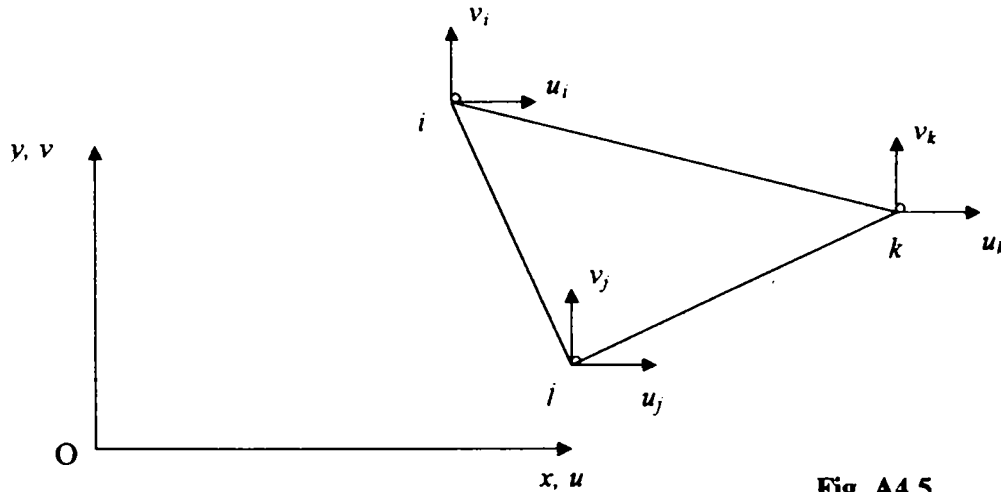


Fig. A4.5

În fig.A4.5, în nodurile elementului finit triunghiular s-au reprezentat componentele u și v ale funcției necunoscute. Pentru fiecare componentă există un model de aproximare de același fel cu ecuația (A4.6):

$$\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k ; \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k ; \end{aligned} \tag{A4.15}$$

funcțiile de forma N fiind aceleași din (A4.7). Vectorul funcției necunoscute se scrie matriceal:

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = [N] \{\Phi\}_e, \tag{A4.16}$$

în care $[N]$ este matricea funcțiilor de formă. Elementul finit triunghiular cu trei noduri este izoparametric. Variația coordonatelor unui punct de pe element finit se exprimă în raport cu coordonatele nodale, prin intermediul aceleiași matrice a funcțiilor de formă:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \end{Bmatrix}. \tag{A4.17}$$

A4.2. ELEMENTUL FINIT CUADRATIC CU OPT NODURI

Funcții de formă

Acest element finit este un element izoparametric, de ordin superior. Nodurile elementului finit sunt plasate patru în colțurile elementului și patru în mijloacele laturilor (fig.A4.6). Elementul este raportat la un sistem de coordonate global xOy și la un sistem de coordonate naturale, adimensionale $\xi\zeta\eta$, cu originea în centrul de greutate al elementului. În acest sistem de coordonate, laturile elementului sunt reprezentate de ecuațiile $\xi = -1, \xi = 1, \eta = -1, \eta = 1$.

Funcția de aproximare trebuie să fie un polinom care să conțină toți termenii de gradul doi, deoarece pe o latură a elementului finit sunt trei noduri și un polinom de gradul doi interpolează în trei puncte. De asemenea, polinomul de interpolare trebuie să aibă opt termeni, deoarece elementul are opt noduri.

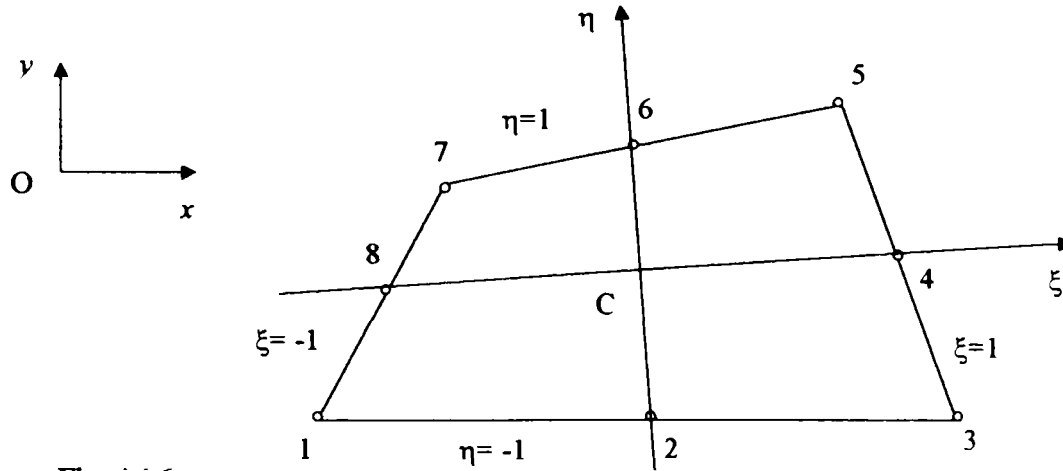


Fig. 1.6

Funcția studiată este aproximată pe elementul finit prin polinomul:

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \quad (A4.18)$$

Ultimii doi termeni sunt de gradul trei. Ei au fost introduși numai pentru a avea opt coordonate generalizate α_i , necesare pentru determinarea funcțiilor de formă, prin procedeul cunoscut: se impune ca în noduri funcția să capete valorile nodale sau coordonatele să capete valoarea coordonatelor nodale. Se obține:

$$\begin{aligned} N_1 &= -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)/4, \\ N_2 &= -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)/4, \\ N_3 &= -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta)/4, \\ N_4 &= -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)/4, \\ N_5 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2, \\ N_6 &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2, \\ N_7 &= (1 + \xi)(1 + \eta^2)/2, \\ N_8 &= (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2. \end{aligned} \quad (A4.19)$$

Funcția Φ se exprimă în raport cu valorile nodale, prin intermediul funcțiilor de formă, prin relația:

$$\Phi = \sum_1^8 N_i \Phi_i = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \end{Bmatrix} = [N] \{\Phi\}. \quad (A4.20)$$

Geometria bidimensională a elementului finit se exprimă prin relațiile:

$$x = \sum_1^8 N_i x_i, \quad y = \sum_1^8 N_i y_i. \quad (A4.21)$$

Câmpul bidimensional al funcțiilor de deplasare, în cazul problemelor de elasticitate, se exprimă prin relațiile:

$$u = \sum_1^8 N_i u_i, \quad v = \sum_1^8 N_i v_i. \quad (A4.22)$$

Acest element finit se numește *cuadratic* sau *parabolic*. El are avantajul că laturile pot fi curbe, ceea ce permite modelarea mai fidelă a structurilor. Pentru îmbunătățirea preciziei se folosește un al nouălea nod, amplasat în

centrul elementului. Acest nod, fiind în interiorul elementului și în consecință nelegat cu nodurile elementelor vecine, gradele lui de libertate se condensează înainte de asamblarea ecuațiilor elementale în sistemul de ecuații al structurii. Funcția de formă corespunzătoare nodului central este:

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2). \tag{A4.23}$$

Integrarea Gauss-Legendre

S-a arătat în paragrafele precedente că pentru efectuarea integrărilor pe suprafața elementelor finite bidimensionale, de tip triunghi, se folosesc concepte de coordonate de arie și formule de integrare specifice. În mod asemănător se procedează în cazul elementelor uni- și tridimensionale, pentru calculul integralelor de lungime și de volum. O altă alternativă, pentru rezolvarea numerică a integralelor, o oferă metoda Gauss-Legendre, care aproximează o integrală definită printr-o sumă de arii de forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) dx \cong \sum_{i=1}^n H_i f(a_i), \tag{A4.24}$$

în care H se numesc *ponderi* sau *coeficienți de pondere Gauss*, iar a sunt *coordoatele punctelor Gauss*.

Limitele de integrare pot fi oarecare, dar dacă se folosesc coordonate naturale ele sunt $-1, 1$. Funcția integrand $f(\xi)$ este un polinom. Dacă integrarea se face în n puncte Gauss, gradul polinomului trebuie să fie cel mult $2n-1$, pentru a se obține rezultatul exact al integrării. În funcție de numărul n de puncte Gauss de integrare, ponderile H_i și coordonatele a_i au valorile din tabelul A4.1.

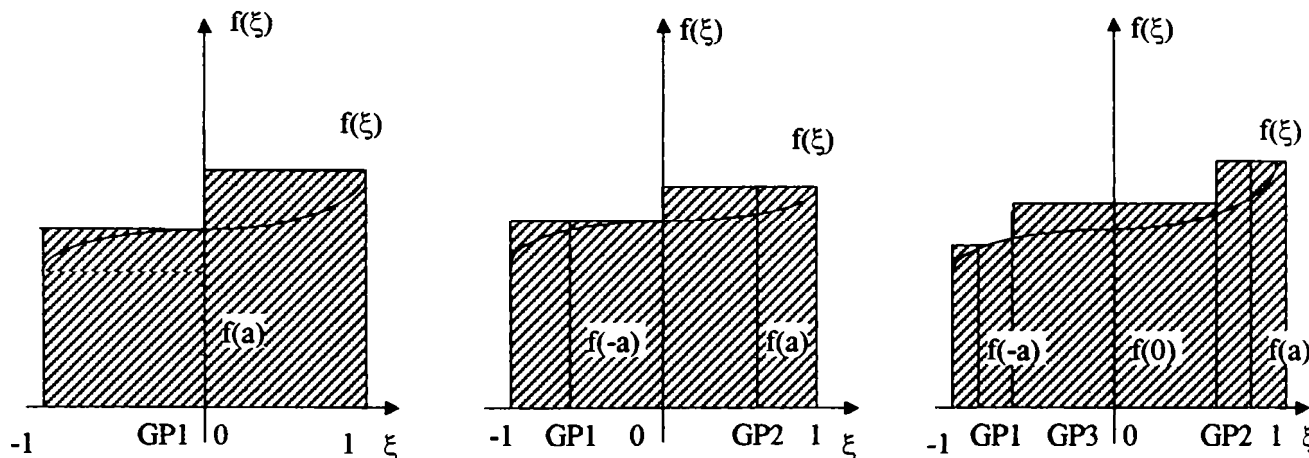


Fig. A4.7

În fig.A4.7 este redată semnificația geometrică a *formulei de integrare Gauss-Legendre* sau de *cuadratură Gauss*, în 1, 2 și 3 puncte Gauss. Valoarea exactă a integralei (A4.24), egală cu aria de sub curba $f(\xi)$ cuprinsă între punctele de abscisă -1 și 1 , este aproximată prin ariile suprafețelor dreptunghiulare hașurate. Aproximarea integralelor duble se face cu formula (A4.25) iar a integralelor triple cu formula (A4.26).

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(a_i) f(b_j), \tag{A4.25}$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(a_i) f(b_j) f(c_k). \tag{A4.26}$$

Tabel A4.1

$\pm a$		H
0,00000000	$n = 1$	2,00000000
0,577350269	$n = 2$	1,00000000
0,774596692	$n = 3$	0,55555555
0,00000000		0,88888888
0,861136311	$n = 4$	0,347854841
0,339981043		0,652145154

A5. ANEXA 5

A5.1. MĂSURĂTORI EXPERIMENTALE ALE CAPSULELOR MANOMETRICE

Capsula d47/p600

Datele rezultate din măsurători, pentru capsula d47/p600 sunt centralizate în tabelul A5.1

Tabel A5.1

Nr.crt.	Coloana2 [mm]	Incarcare medie [V]	Descarcare medie [V]	Presiunea [mbar]	Deformatia incarcare [mm]	Deformatia descarcare [mm]	Eroarea max histerezis [mm]
1	671	0,238	0,267	-3,928	-0,021	-0,003	0,018
2	720	0,342	0,372	17,396	0,044	0,063	0,019
3	760	0,422	0,467	34,804	0,095	0,123	0,028
4	805	0,513	0,578	54,387	0,152	0,193	0,041
5	850	0,610	0,687	73,971	0,213	0,261	0,048
6	900	0,705	0,798	95,730	0,273	0,332	0,059
7	940	0,792	0,895	113,138	0,327	0,392	0,065
8	985	0,890	0,987	132,721	0,389	0,450	0,061
9	1030	0,983	1,090	152,305	0,448	0,515	0,067
10	1075	1,082	1,182	171,889	0,510	0,573	0,063
11	1115	1,168	1,270	189,296	0,564	0,628	0,064
12	1165	1,278	1,380	211,056	0,634	0,697	0,064
13	1205	1,368	1,465	228,463	0,690	0,751	0,061
14	1250	1,467	1,560	248,047	0,752	0,811	0,059
15	1290	1,560	1,645	265,455	0,811	0,864	0,053
16	1330	1,648	1,727	282,862	0,866	0,916	0,049
17	1375	1,747	1,832	302,446	0,928	0,982	0,053
18	1415	1,837	1,915	319,854	0,985	1,034	0,049
19	1460	1,937	2,010	339,437	1,048	1,094	0,046
20	1500	2,042	2,087	356,845	1,114	1,142	0,028
21	1540	2,132	2,170	374,252	1,170	1,194	0,024
22	1585	2,232	2,257	393,836	1,233	1,249	0,016
23	1630	2,328	2,362	413,420	1,294	1,315	0,021
24	1670	2,413	2,437	430,827	1,347	1,362	0,015
25	1710	2,503	2,510	448,235	1,404	1,408	0,004
26	1750	2,587	2,593	465,642	1,457	1,461	0,004
27	1790	2,675	2,665	483,050	1,512	1,506	-0,006
28	1830	2,763	2,738	500,458	1,568	1,552	-0,016
29	1870	2,850	2,830	517,865	1,622	1,610	-0,013
30	1910	2,947	2,910	535,273	1,683	1,660	-0,023
31	1970	3,088	3,088	561,384	1,772	1,772	0,000

Curbele de încărcare, descărcare și eroarea de caracteristică (curba de histererezis) pentru capsula d47/p600 sunt prezentate în fig.A5.1, iar eroarea maximă de histererezis în fig.A5.2.

Capsula d47/p600 - Curba de histererezis

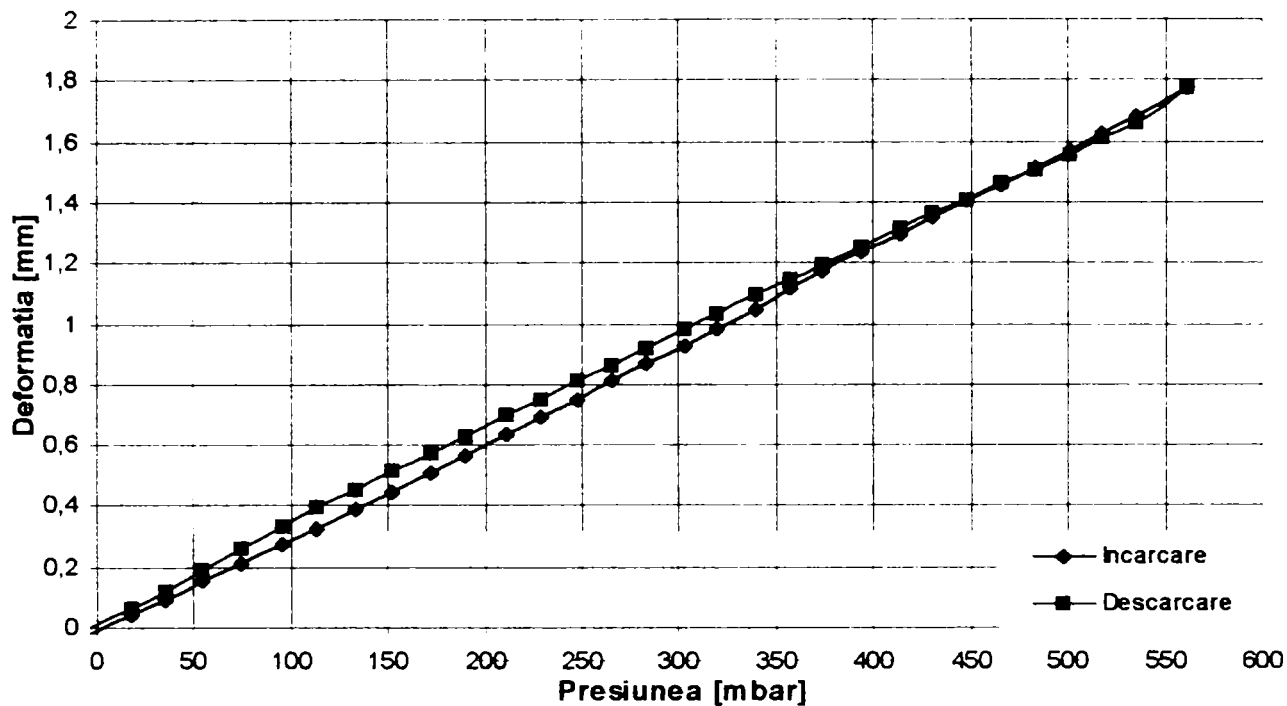


Fig. A5.1

Eroarea de histererezis - Capsula d47/p600

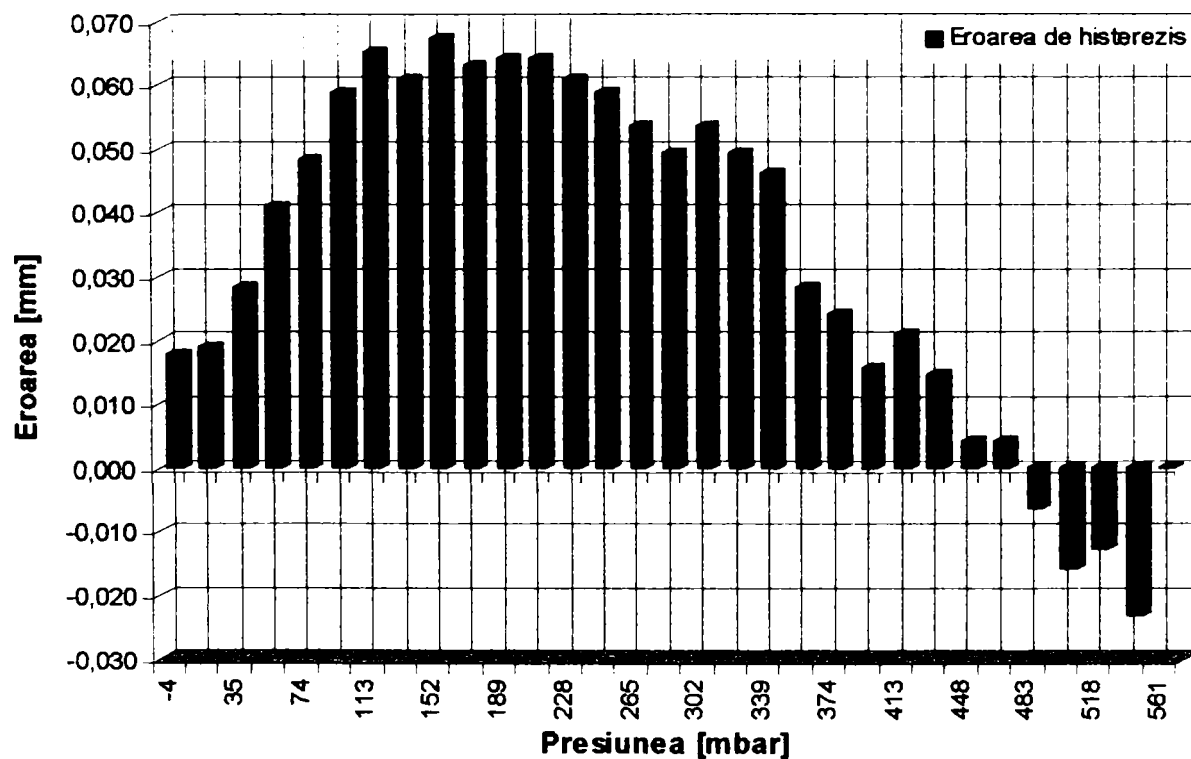


Fig. A5.2

Capsula d100/p400

Datele rezultate din măsurători, pentru capsula d100/p400 sunt centralizate în tabelul A5.2.

Tabel A5.2

Nr.crt.	Coloana2 [mm]	Incarcare medie [V]	Descarcare medie [V]	Presiunea [mbar]	Deformatia incarcare [mm]	Deformatia descarcare [mm]	Eroarea max histerezis [mm]
1	698	0,245	0,272	-2,531	-0,016	0,000	0,017
2	700	0,248	0,285	-1,660	-0,014	0,009	0,023
3	735	0,350	0,378	13,583	0,050	0,067	0,018
4	770	0,448	0,480	28,827	0,111	0,131	0,020
5	805	0,547	0,593	44,071	0,173	0,203	0,029
6	840	0,638	0,690	59,314	0,231	0,263	0,033
7	875	0,733	0,797	74,558	0,291	0,331	0,040
8	910	0,828	0,903	89,801	0,350	0,398	0,047
9	945	0,922	1,007	105,045	0,409	0,463	0,053
10	980	1,030	1,113	120,289	0,477	0,530	0,052
11	1015	1,128	1,215	135,532	0,539	0,594	0,055
12	1050	1,233	1,317	150,776	0,605	0,658	0,052
13	1085	1,328	1,422	166,020	0,665	0,724	0,059
14	1120	1,430	1,522	181,263	0,729	0,787	0,058
15	1155	1,537	1,620	196,507	0,796	0,848	0,052
16	1190	1,640	1,720	211,751	0,861	0,911	0,050
17	1225	1,737	1,822	226,994	0,922	0,975	0,053
18	1260	1,845	1,918	242,238	0,990	1,036	0,046
19	1295	1,958	2,015	257,482	1,061	1,097	0,036
20	1330	2,063	2,115	272,725	1,127	1,160	0,033
21	1365	2,163	2,217	287,969	1,190	1,224	0,034
22	1400	2,267	2,313	303,212	1,255	1,285	0,029
23	1435	2,375	2,407	318,456	1,323	1,343	0,020
24	1470	2,475	2,505	333,700	1,386	1,405	0,019
25	1505	2,583	2,600	348,943	1,454	1,465	0,010
26	1540	2,687	2,695	364,187	1,519	1,525	0,005
27	1575	2,793	2,792	379,431	1,587	1,585	-0,001
28	1610	2,895	2,895	394,674	1,650	1,650	0,000
29	1645	3,013	2,987	409,918	1,725	1,708	-0,017
30	1680	3,120	3,088	425,162	1,792	1,772	-0,020
31	1715	3,228	3,228	440,405	1,860	1,860	0,000

Curbele de încărcare, descărcare și eroarea de caracteristică (curba de histerezis) pentru capsula d100/p400 sunt prezentate în fig. A5.3, iar eroarea maximă de histerezis în fig. A5.4.

Verificarea ipotezei de liniaritate (Testul Fisher)

Pentru interpretarea corectă a rezultatelor trebuie să se cunoască tipul corelației, adică faptul că există o corelație liniară sau neliniară între variabilele experimentale.

Verificarea ipotezei de liniaritate, ce presupune că valorile \bar{y} considerate pentru fiecare valoare a lui x se află pe o dreaptă, se face în felul următor:

- se împarte șirul de valori x în k clase; se recomandă $k \geq 8$;
- pentru fiecare interval de rang j , cu centrul în x_j , se calculează media experimentală $\bar{y}(x_j)$ și dispersia $S_y^2(x_j)$, numite medie, respectiv dispersie condiționată, cu ajutorul relațiilor:

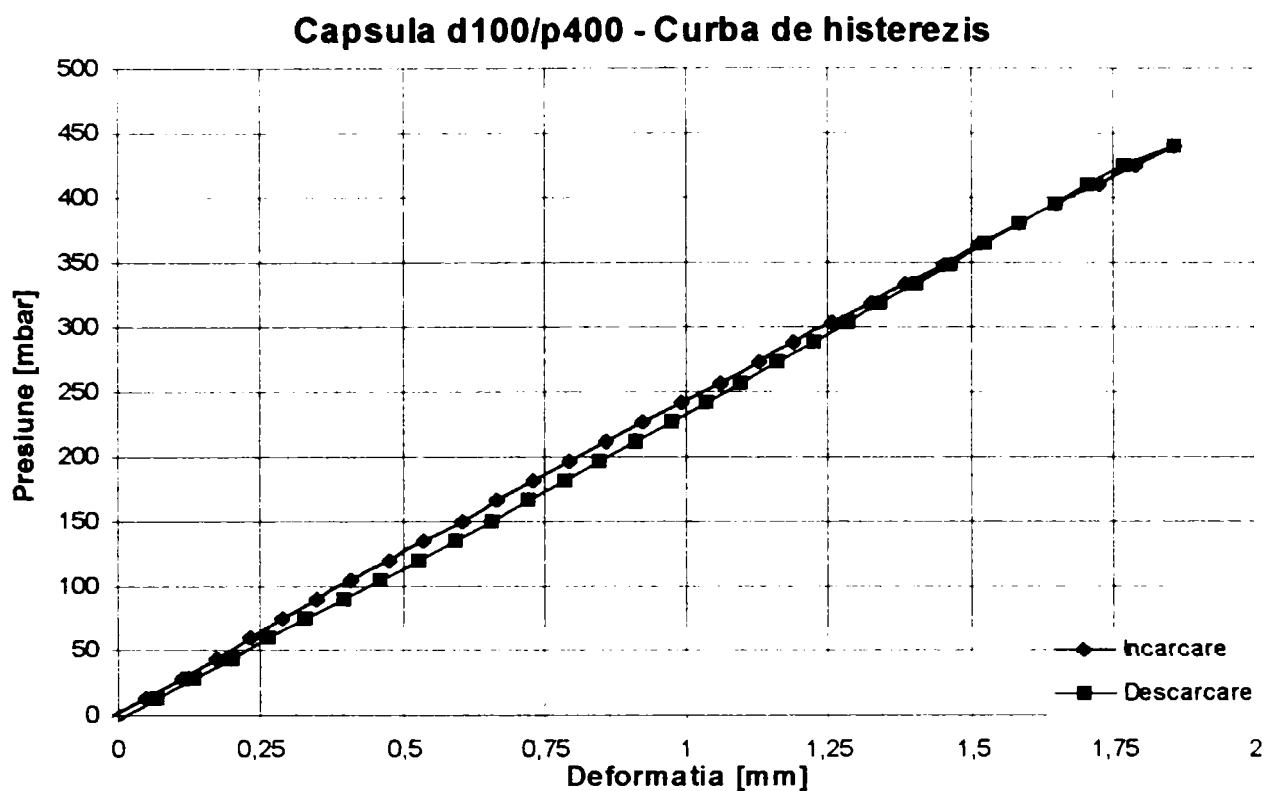


Fig. A5.3

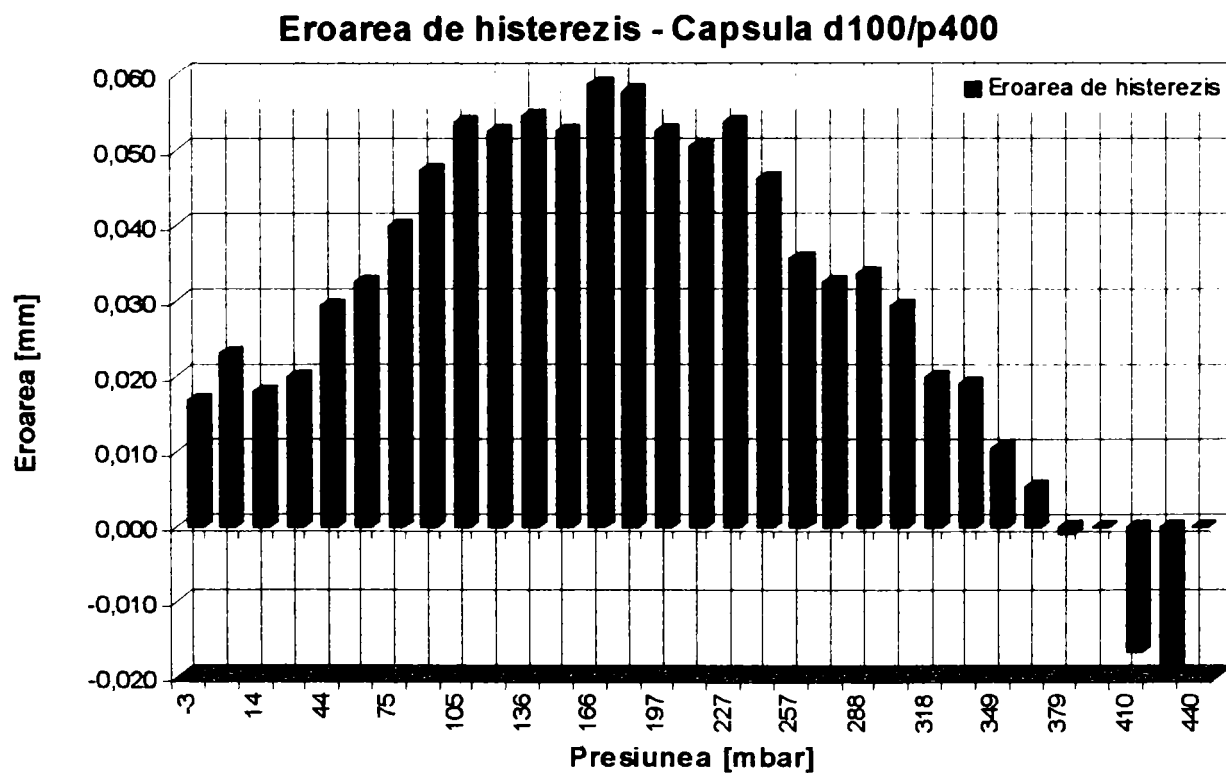


Fig. A5.4

$$\bar{y}(x_j) = \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{m_j} y_{ij} \tag{A5.1}$$

$$S_y^2(x_j) = \frac{1}{m_j - 1} \sum_{i=1}^{m_j} (y_{ij} - \bar{y}(x_j))^2 \tag{A5.2}$$

unde: m_j este numărul de valori x și y aflate în clasa de rang j .

- se calculează media experimentală și abaterea medie pătratică a șirurilor de valori $x_i, y_i, i = 1, n$, deci pentru întregul set de date;
- se calculează coeficientul corelației simple de sondaj $r_{x,y}$ a șirului de date;
- se calculează testul Fisher:

$$F = \frac{\frac{1}{k-2} \sum_{j=1}^k m_j \left[\bar{y}(x_j) - \bar{y} - r_{x,y} \frac{S_y}{S_x} (x_j - \bar{x}) \right]^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^k (m_j - 1) S_y^2(x_j)}; \tag{A5.3}$$

- se compară F cu $F_{critic}(\alpha, v_1, v_2)$, unde $v_1 = k-2, v_2 = n-k$, iar α este nivelul de încredere ($\alpha = 0,05$). Dacă, $F > F_{critic}$ cu nivelul de încredere α se respinge ipoteza privind caracterul liniar al dependenței lui y de x , iar dacă, $F \leq F_{critic}$, ipoteza se acceptă.

Capsula d47/p250 – Testul Fisher

Pentru această capsulă s-a aplicat testul Fisher de două ori: o dată pentru setul de măsurători până la presiunea de 318 mbar și o dată pentru setul de măsurători când capsula a fost supraîncărcată. În tabelul A5.3 sunt valorile testului Fisher pentru capsula d47/p250 încărcată la presiunea de lucru, iar în tabelul A5.4 sunt valorile testului Fisher pentru capsula d47/p250 încărcată la suprasarcină.

Tabel A5.3

Nr. crt.	Presiunea [mbar] x	Deformatia [mm] y	Media interval $\bar{y}(x_j)$	Dispersia interval $S_y(x_j)$	$S_y^2(x_j)$
1	-3,213	-0,021			
2	3,298	0,017	0,08648	0,06859	0,00470
3	14,151	0,089			
4	25,003	0,154			
5	35,856	0,223	0,29071	0,06669	0,00445
6	46,708	0,292			
7	57,561	0,357			
8	68,413	0,431	0,50416	0,07236	0,00524
9	79,266	0,506			
10	90,118	0,575			
11	100,971	0,648	0,72013	0,07235	0,00523
12	111,823	0,719			
13	122,676	0,793			
14	133,528	0,865	0,93946	0,07486	0,00560
15	144,381	0,939			
16	155,233	1,015			
17	166,086	1,086	1,15920	0,07426	0,00551
18	176,938	1,157			
19	187,791	1,235			
20	198,643	1,314	1,38734	0,07490	0,00561
21	209,496	1,384			
22	220,348	1,464			
23	231,201	1,543	1,61882	0,07809	0,00610
24	242,053	1,615			
25	252,906	1,699			
26	263,758	1,776	1,85408	0,07993	0,00639
27	274,611	1,851			

28	285,463	1,935			
29	296,316	2,013	2,09731	0,08305	0,00690
30	307,168	2,099			
31	318,021	2,180			

$\bar{x} = 160,65945$; $\bar{y} = 1,06577$; $S_x = 95,53904$; $S_y = 0,65531$; $r_{xy} = 0,9997$

$F_{calc} = 0,01204$; $F_{critic} = 2,45$ (pentru $\alpha = 0,05$; $v_1 = 8$; $v_2 = 20$) \Rightarrow cele două șiruri sunt în corelație liniară.

Tabel A5.4

Nr. crt.	Presiunea [mbar] x	Deformatia [mm] y	Media interval $\bar{y}(x_j)$	Dispersia interval $S_y(x_j)$	$S_y^2(x_j)$
1	-1,054	-0,020	0,08103	0,09266	0,00859
2	16,093	0,100			
3	26,810	0,163			
4	37,527	0,232	0,37039	0,11147	0,01242
5	48,244	0,301			
6	58,961	0,364			
7	69,677	0,440			
8	80,394	0,515			
9	91,111	0,584	0,72643	0,11345	0,01287
10	101,828	0,653			
11	112,545	0,729			
12	123,261	0,792			
13	133,978	0,874			
14	144,695	0,949	1,09378	0,11641	0,01355
15	155,412	1,018			
16	166,129	1,094			
17	176,845	1,163			
18	187,562	1,245			
19	198,279	1,320	1,47121	0,11935	0,01424
20	208,996	1,396			
21	219,713	1,471			
22	230,429	1,547			
23	241,146	1,622			
24	251,863	1,698	1,85744	0,12934	0,01673
25	262,580	1,773			
26	273,297	1,855			
27	284,013	1,937			
28	294,730	2,025			
29	305,447	2,107	2,26505	0,12537	0,01572
30	316,164	2,188			
31	326,881	2,264			
32	337,597	2,339			
33	348,314	2,427			
34	359,031	2,522	2,67645	0,12850	0,01651
35	369,748	2,585			
36	380,465	2,679			
37	391,181	2,754			
38	401,898	2,843			
39	412,615	2,937	3,10923	0,13728	0,01885

40	423,332	3,019			
41	434,049	3,113			
42	444,765	3,195			
43	455,482	3,283			
44	466,199	3,383	3,56591	0,14932	0,02230
45	476,916	3,465			
46	487,632	3,560			
47	498,349	3,667			
48	509,066	3,755			
49	519,783	3,855	4,05530	0,15526	0,02411
50	530,500	3,956			
51	541,216	4,063			
52	551,933	4,157			
53	560,507	4,245			

$$\bar{x} = 283,85157; \bar{y} = 2,00375; S_x = 165,6456; S_y = 1,2473; r_{xy} = 0,99869$$

$F_{\text{calc}} = 1,588998; F_{\text{critic}} = 2,18$ (pentru $\alpha = 0,05; v_1 = 9; v_2 = 42$) \Rightarrow cele două șiruri sunt în corelație liniară.

Capsula d47/p600 – Testul Fisher

Valorile pentru testul Fisher aplicat capsulei d47/p600 sunt prezentate în tabelul A5.5.

Tabel A5.5

Nr. crt.	Presiunea [mbar] x	Deformatia [mm] y	Media interval $\bar{y}(x_j)$	Dispersia interval $S_y(x_j)$	$S_y^2(x_j)$
1	-3,928	-0,021			
2	17,396	0,044	0,09711	0,05403	0,00292
3	34,804	0,095			
4	54,387	0,152			
5	73,971	0,213	0,27114	0,05716	0,00327
6	95,730	0,273			
7	113,138	0,327			
8	132,721	0,389	0,44902	0,06029	0,00363
9	152,305	0,448			
10	171,889	0,510			
11	189,296	0,564	0,62934	0,06301	0,00397
12	211,056	0,634			
13	228,463	0,690			
14	248,047	0,752	0,80967	0,05714	0,00327
15	265,455	0,811			
16	282,862	0,866			
17	302,446	0,928	0,98685	0,05979	0,00357
18	319,854	0,985			
19	339,437	1,048			
20	356,845	1,114	1,17241	0,05979	0,00357
21	374,252	1,170			
22	393,836	1,233			
23	413,420	1,294	1,34854	0,05505	0,00303
24	430,827	1,347			
25	448,235	1,404			
26	465,642	1,457	1,51210	0,05557	0,00309

27	483,050	1,512			
28	500,458	1,568			
29	517,865	1,622	1,69242	0,07540	0,00569
30	535,273	1,683			
31	561,384	1,772			

$$\bar{x} = 290,47813; \bar{y} = 0,89686; S_x = 163,46871; S_y = 0,52203; r_{xy} = 0,99989$$

$F_{calc} = 0,131051; F_{critic} = 2,45$ (pentru $\alpha = 0,05; v_1 = 8; v_2 = 40$) \Rightarrow cele două șiruri sunt în corelație liniară.

Capsula d100/p400

Valorile pentru testul Fisher aplicat capsulei d100/p400 sunt prezentate în tabelul A5.6.

Tabel A5.6

Nr. crt.	Presiunea [mbar] x	Deformatia [mm] y	Media interval $\bar{y}(x_j)$	Dispersia interval $S_y(x_j)$	$S_y^2(x_j)$
1	-2,531	-0,016			
2	-1,660	-0,014	0,04888	0,06291	0,00396
3	13,583	0,050			
4	28,827	0,111			
5	44,071	0,173	0,23165	0,05871	0,00345
6	59,314	0,231			
7	74,558	0,291			
8	89,801	0,350	0,41232	0,06349	0,00403
9	105,045	0,409			
10	120,289	0,477			
11	135,532	0,539	0,60313	0,06293	0,00396
12	150,776	0,605			
13	166,020	0,665			
14	181,263	0,729	0,79534	0,06605	0,00436
15	196,507	0,796			
16	211,751	0,861			
17	226,994	0,922	0,99104	0,06972	0,00486
18	242,238	0,990			
19	257,482	1,061			
20	272,725	1,127	1,19094	0,06396	0,00409
21	287,969	1,190			
22	303,212	1,255			
23	318,456	1,323	1,38803	0,06554	0,00430
24	333,700	1,386			
25	348,943	1,454			
26	364,187	1,519	1,58548	0,06553	0,00429
27	379,431	1,587			
28	394,674	1,650			
29	409,918	1,725	1,79237	0,06762	0,00457
30	425,162	1,792			
31	440,405	1,860			

$$\bar{x} = 219,37243; \bar{y} = 0,90392; S_x = 134,19604; S_y = 0,56931; r_{xy} = 0,99983$$

$F_{calc} = 0,129938; F_{critic} = 2,45$ (pentru $\alpha = 0,05; v_1 = 8; v_2 = 40$) \Rightarrow cele două șiruri sunt în corelație liniară.

A5.2. MODELAREA CU ELEMENT FINIT A CAPSULELOR MANOMETRICE

Capsula d47/p400

Modelul de calcul pentru capsula d47/p400 utilizat în analiza cu element finit este prezentat în fig. A5.5. Acest model s-a realizat pornind de la profilul membranei gofrate, componentă a acestei capsule, din fig. 5.13.



Fig. A5.5

Deplasările rezultate pentru modelul d47/p400 sunt prezentate în fig. A5.6.

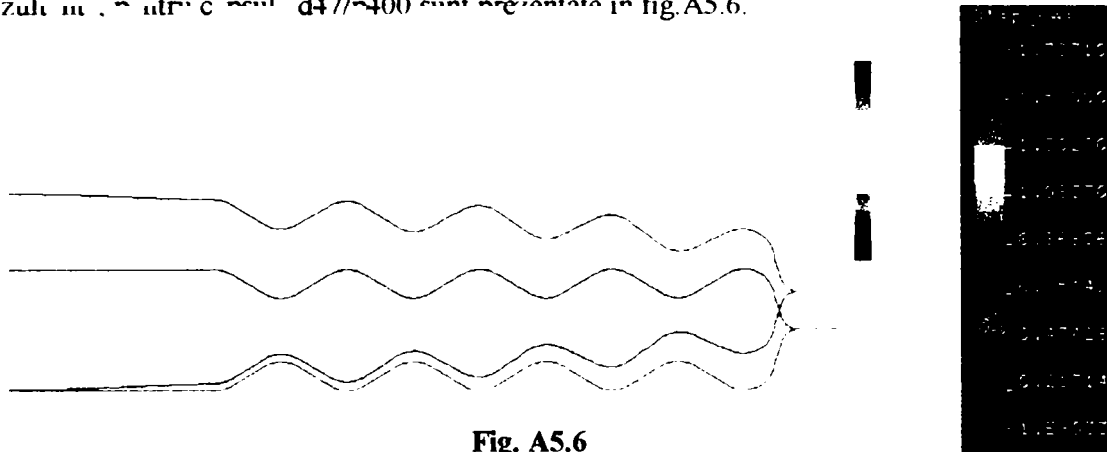


Fig. A5.6

Starea de tensiuni, după von Mises, pentru capsula d47/p400 este re'ată în fig. A5.7

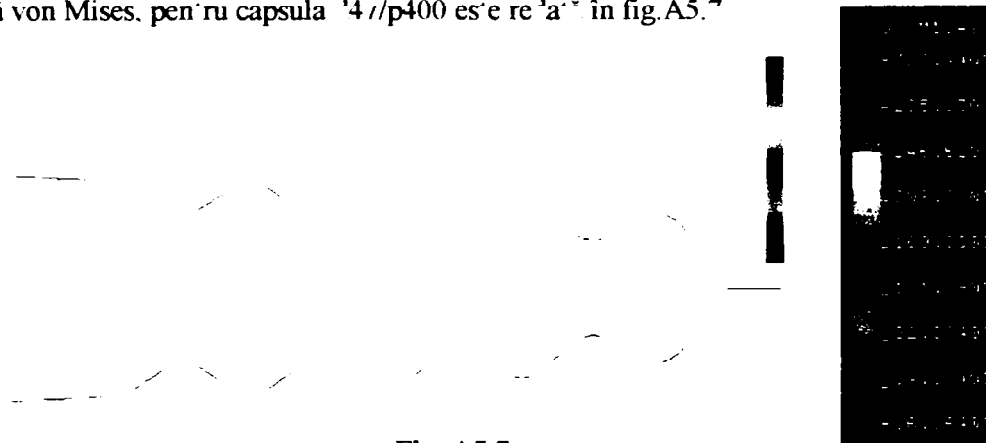


Fig. A5.7

Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de sus a diagramei), pentru capsula d47/p400 sunt prezentate în fig. A5.8.

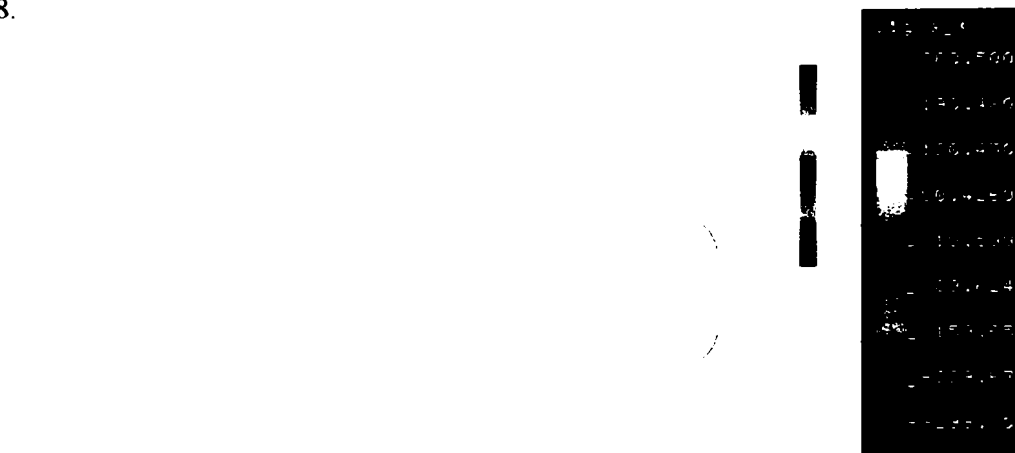


Fig. A5.8

Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de jos a diagramei), pentru capsula d47/p400 sunt redată în fig. 5.9.



Fig. A5.9

Tensiunile de întindere, după axa X (considerând efectul de membrană), pentru capsula d47/p400 sunt prezentate în fig. A5.10.

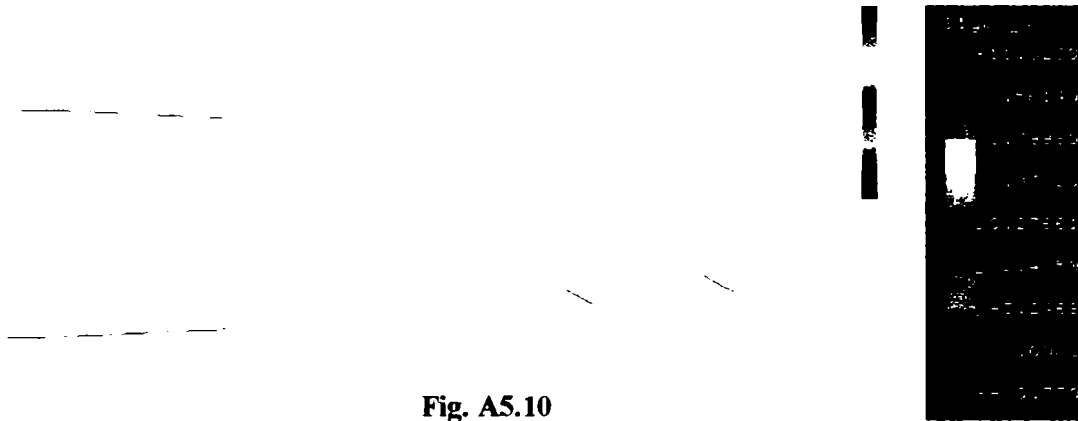


Fig. A5.10

Capsula d47/p600

Modelul de calcul pentru capsula d47/p600 utilizat în analiza cu element finit este prezentat în fig. A5.11. Acest model s-a realizat pornind de la profilul membranei gofrate, componentă a acestei capsule, din fig. 5.13.

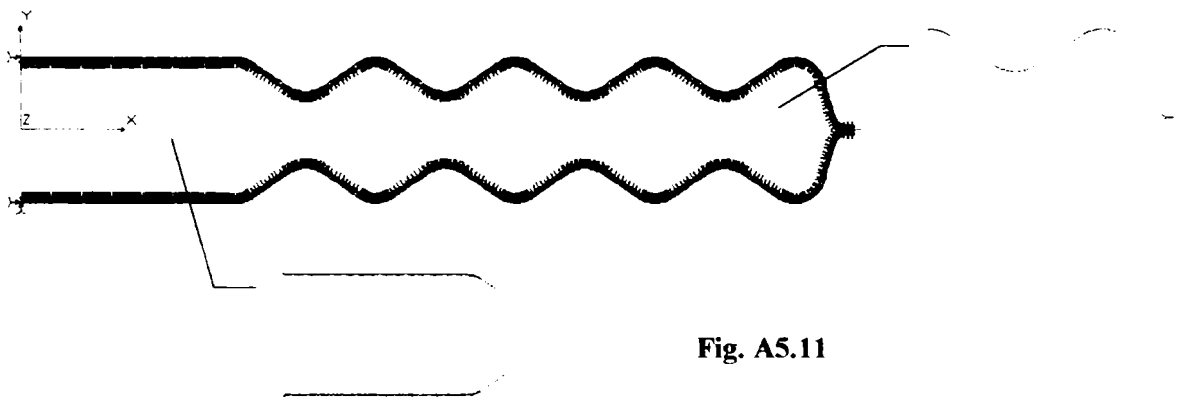


Fig. A5.11

Deplasările rezultante, pentru capsula d47/p600 sunt prezentate în fig. A5.12

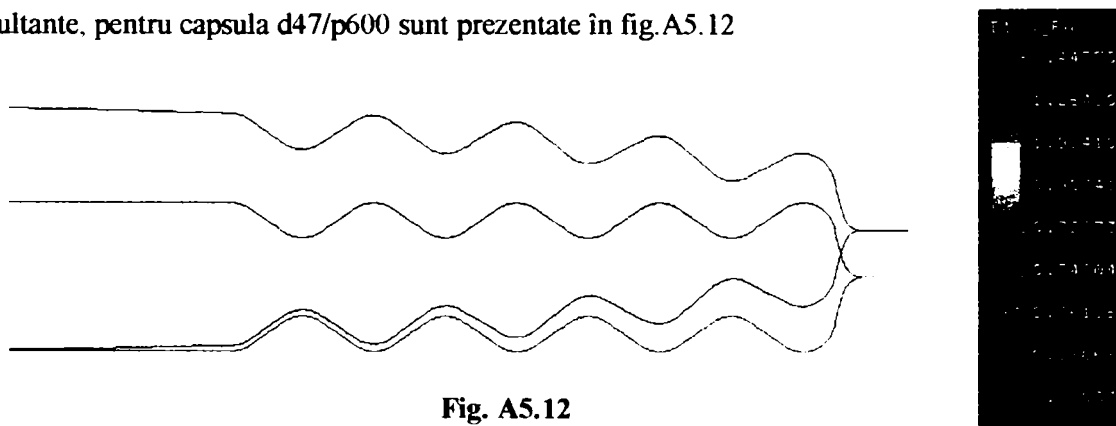


Fig. A5.12

Starea de tensiune după von Mises, pentru capsula d47/p600 este prezentată în fig.A5.13.

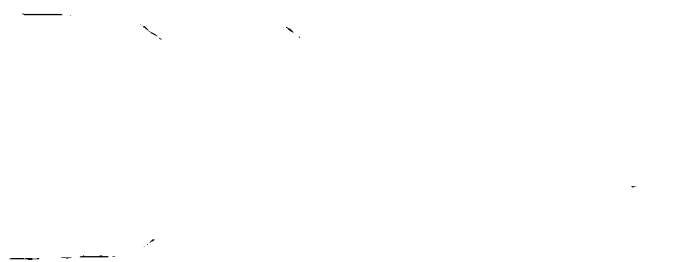


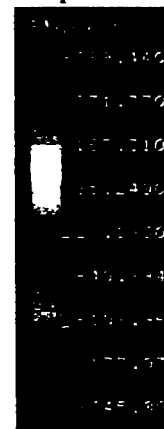
Fig. A5.13



Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de sus a diagramei), pentru capsula d47/p600 sunt prezentate în fig.A5.14.



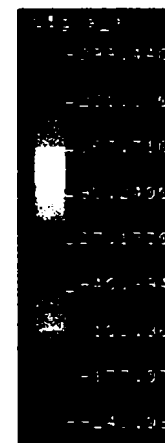
Fig. A5.14



Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de jos a diagramei), pentru capsula d47/p600 sunt prezentate în fig. A5.15.



Fig. A5.15



Tensiunile de întindere, după axa X (considerând efectul de membrană), pentru capsula d47/p600 sunt redată în fig.A5.16.

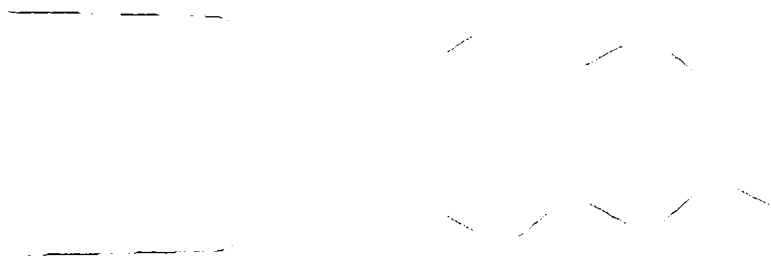


Fig. A5.16



Capsula d47/p1000

Modelul de calcul pentru capsula d47/p600 utilizat în analiza cu element finit este prezentat în fig. A5.17. Acest model s-a realizat pornind de la profilul membranei gofrate, componentă a acestei capsule, din fig. 5.13.

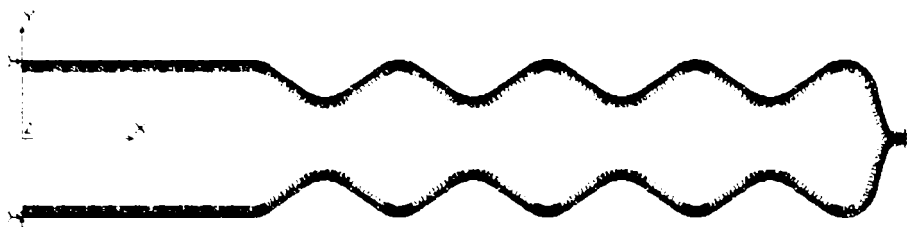


Fig. A5.17

Deplasările rezulante, pentru capsula d47/p1000 sunt prezente în fig. A5.18.

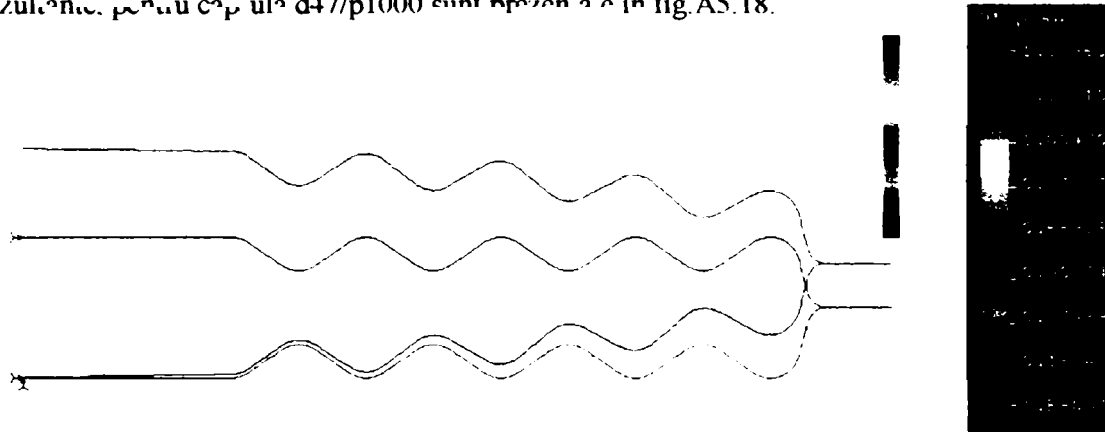


Fig. A5.18

Starea de tensiuni, după von Mises, pentru capsula d47/p1000 este redată în fig. A5.19.

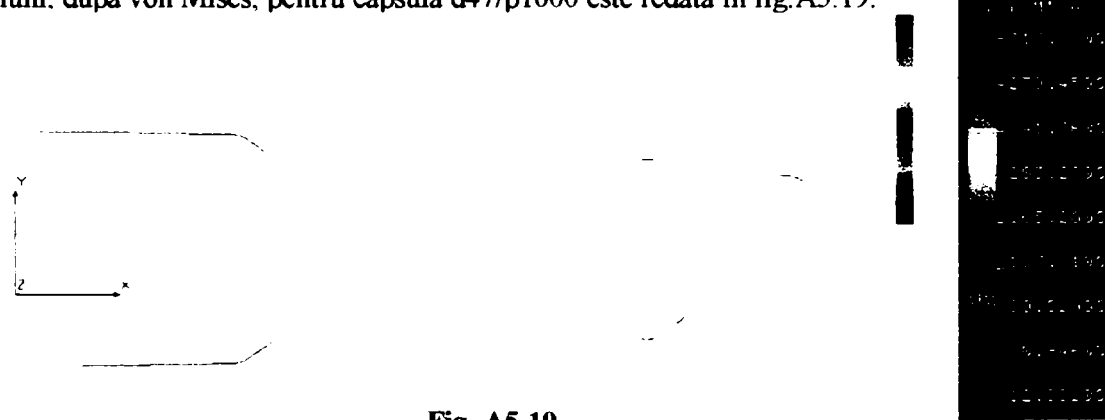


Fig. A5.19

Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de sus a diagramei), pentru capsula d47/p1000 sunt prezentate în fig. A5.20.

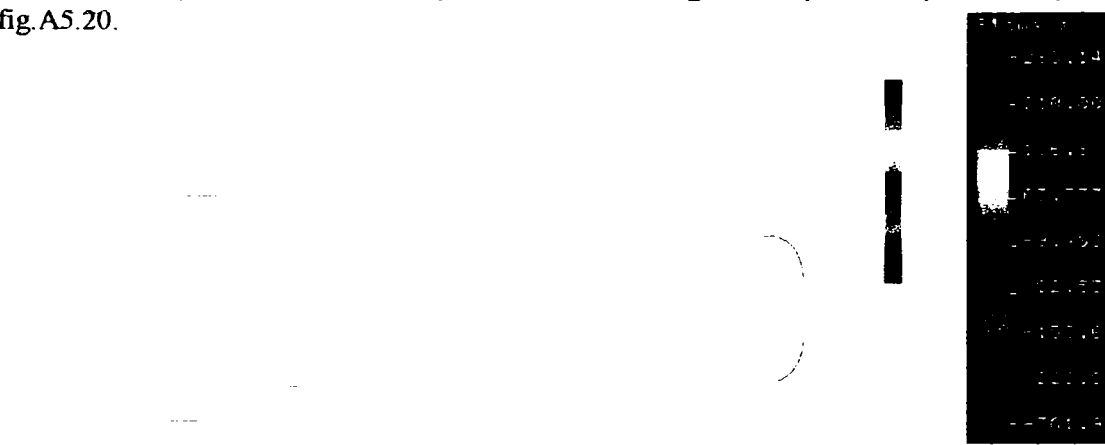


Fig. A5.20

Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de jos a diagramei), pentru capsula d47/p1000 sunt prezentate în fig.A5.21.

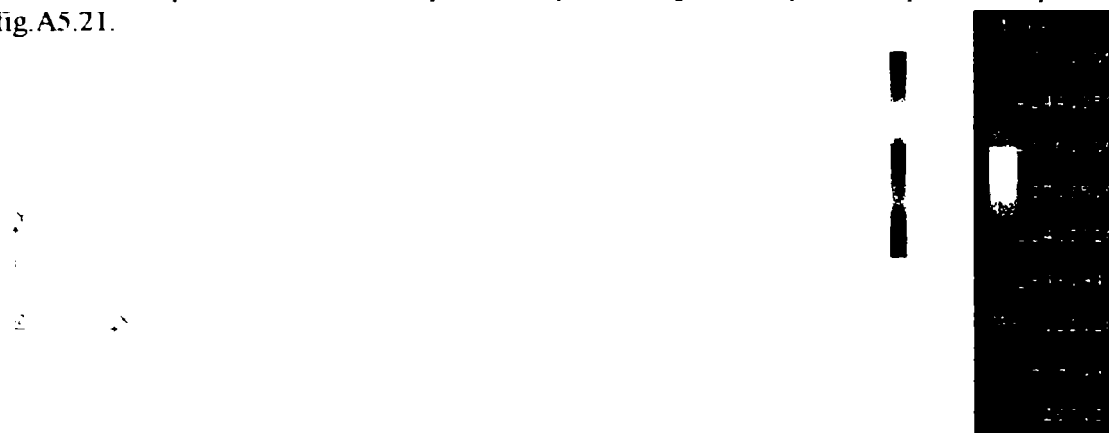


Fig. A5.21

Tensiunile de întindere, după axa X (considerând efectul de membrană), pentru capsula d47/p1000 sunt prezentate în fig.A5.22.

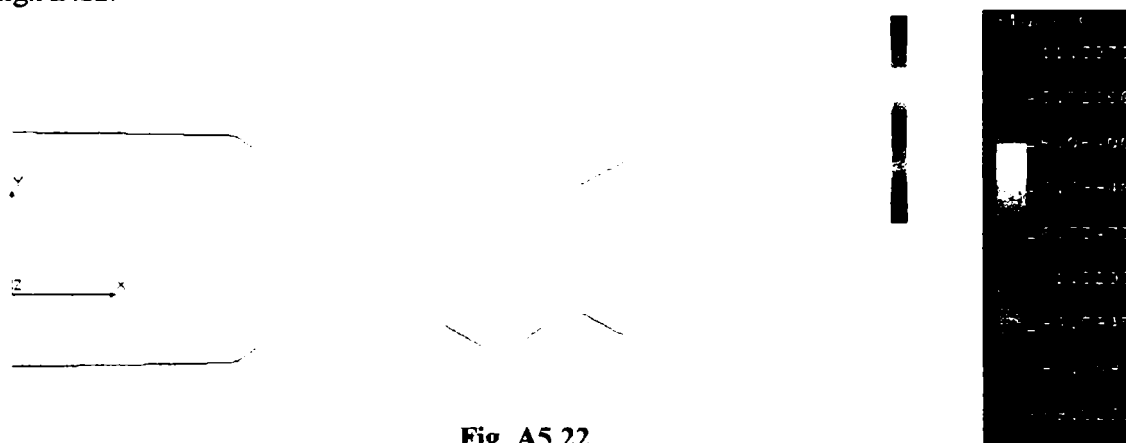


Fig. A5.22

Capsula d100/p400

Modelul de calcul pentru capsula d100/p400 utilizat în analiza cu element finit este prezentat în fig.A5.23. Acest model s-a realizat pornind de la profilul membranei gofrate, componentă a acestei capsule, din fig.5.14.

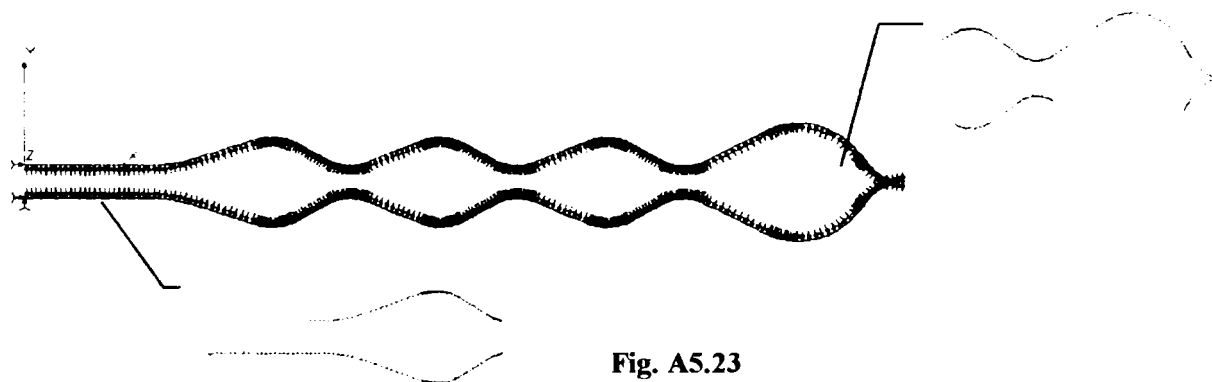


Fig. A5.23

Deplasările rezultante, pentru capsula d100/p400 sunt redată în fig.A5.24

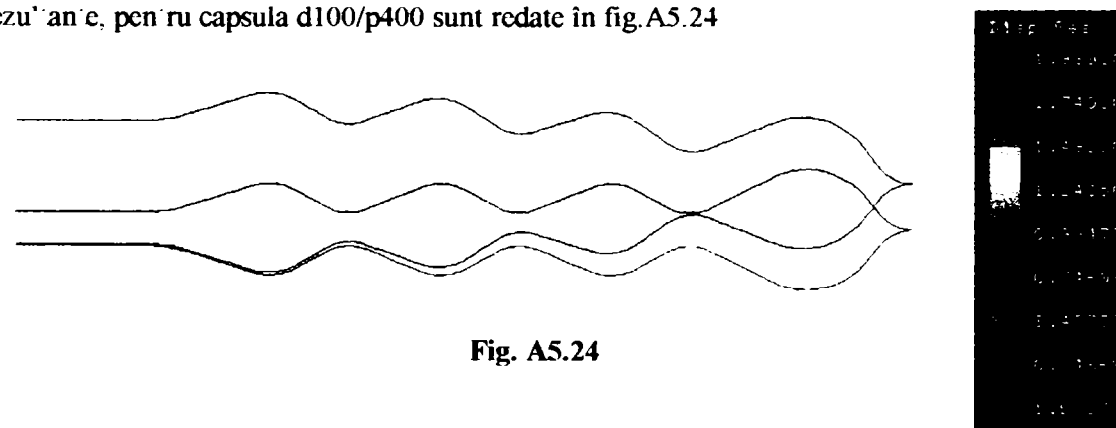


Fig. A5.24

Starea de tensiuni, după von Mises, pentru capsula d100/p400 este prezentată în fig.A5.25.

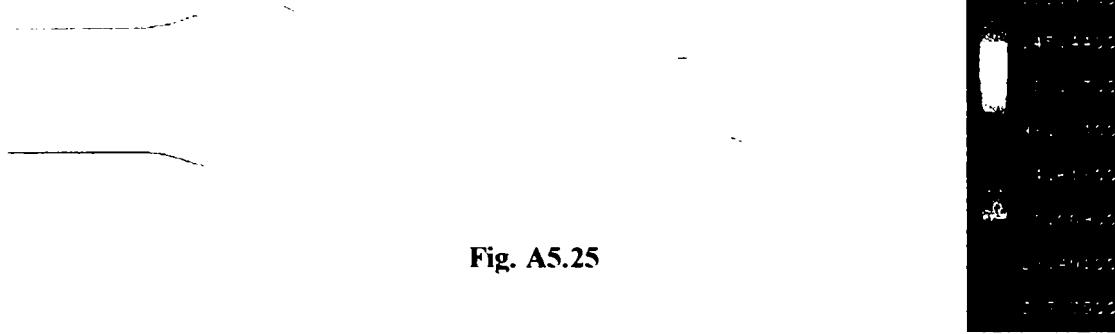


Fig. A5.25

Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de sus a diagramei), pentru capsula d100/p400 sunt prezentate în fig.A5.26.



Fig. A5.26

Tensiunile de întindere, după axa X (citite în partea de jos a diagramei), pentru capsula d47/p400 sunt prezentate în fig.A5.27.



Fig. A5.27

Tensiunile de întindere, după axa X (considerând efectul de membrană), sunt redată în fig.A5.28.

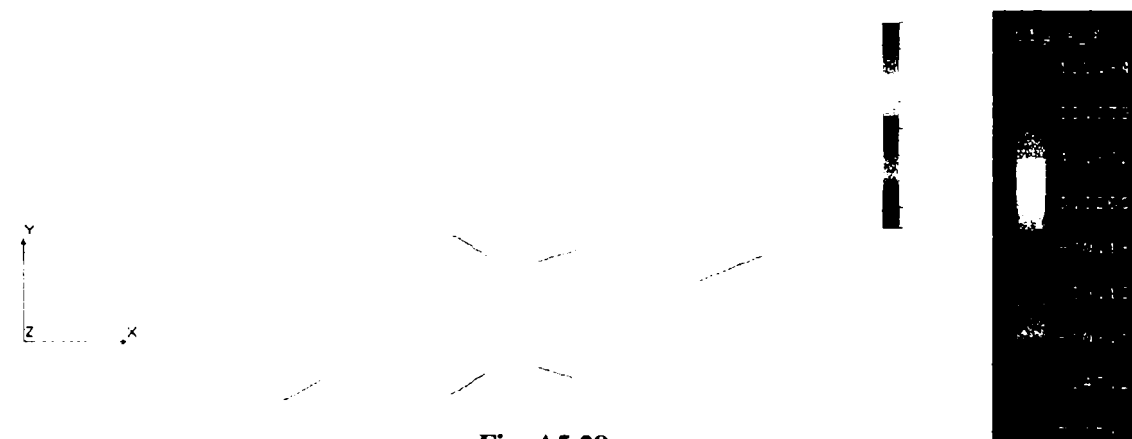


Fig. A5.28

A5.3. CALCULUL ANALITIC AL CAPSULELOR MANOMETRICE

Pentru calcul s-a utilizat programul MathCAD6, cu ajutorul căruia s-a determinat valoarea maximă a deformației în centrul membranei. De asemenea, s-a studiat influența termenului de gradul trei, din ecuația caracteristicii membranei, asupra valorii deformației maxime (fig.A5.29).

Capsula d47/p400

Valorile coeficienților care intervin în ecuația caracteristicii membranei s-au calculat în funcție de parametri geometrici ai profilului, iar constantele de material sunt conform DIN17671, pentru materialul considerat.

$h = .08$ $\nu = 0.343$ $m = 190.8437$ $k_2 = 1$
 $n = 190.8437$ $r = 23.5$ $E = 131500$ $w = 0.05..2$

$$p(w) = \frac{E \cdot h^4}{r^4} \cdot \frac{4 \cdot (3 - \nu) \cdot w}{3 \cdot k_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu^2}{n}\right) \cdot h} \cdot \frac{32 \cdot k_2 \cdot 1}{m^2 - 9 \cdot 6} \cdot \frac{3 - \nu}{(m - \nu) \cdot (m - 3)} \cdot \frac{w^3}{h}$$

$$p_{lin}(w) = \frac{E \cdot h^4}{r^4} \cdot \frac{4 \cdot (3 - \nu) \cdot w}{3 \cdot k_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu^2}{n}\right) \cdot h}$$

$e(w) = p(w) - p_{lin}(w)$

Influența termenului de gradul trei din ecuația caracteristicii membranei asupra deformației maxime a membranei este redată în fig.A5.29.

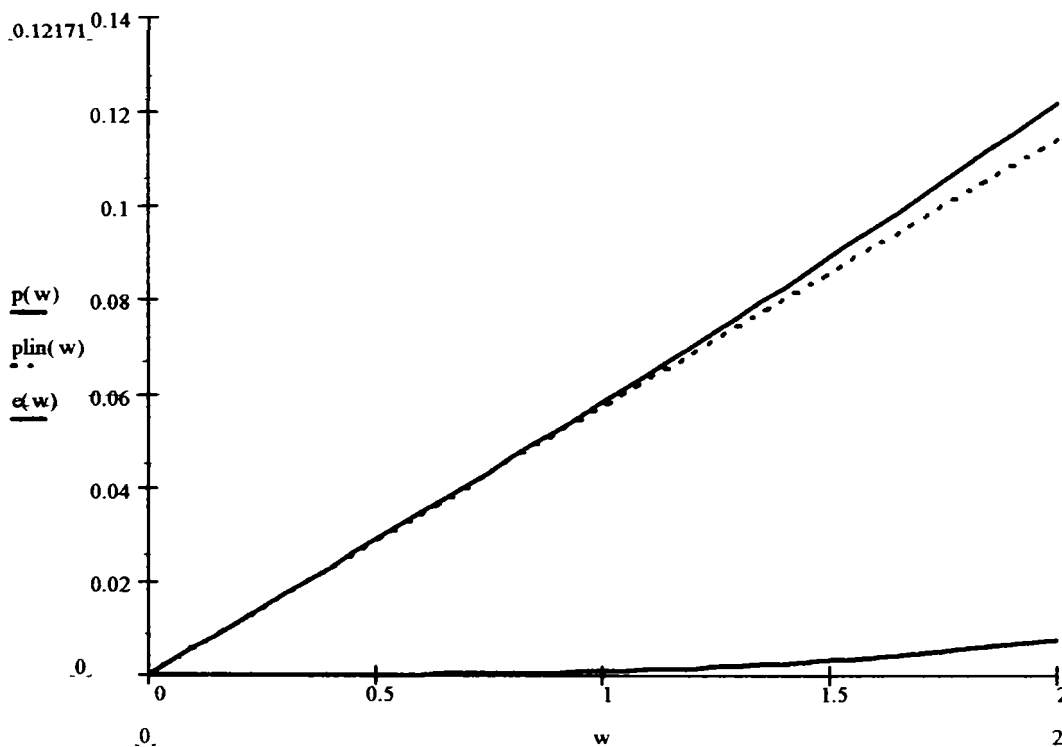


Fig. A5.29

p(w)[MPa]	plin(w)[MPa]	w[mm]	e(w)[MPa]
0	0	0	0
2.8547710^{-3}	2.8546510^{-3}	0.05	1.175610^{-7}
5.7102410^{-3}	5.709310^{-3}	0.1	9.4048310^{-7}
8.5671210^{-3}	8.5639510^{-3}	0.15	3.1741310^{-6}
0.01143	0.01142	0.2	7.5238710^{-6}
0.01429	0.01427	0.25	1.4695110^{-5}
0.01715	0.01713	0.3	2.5393110^{-5}
0.02002	0.01998	0.35	4.0323210^{-5}
0.0229	0.02284	0.4	6.0190910^{-5}
0.02578	0.02569	0.45	8.5701510^{-5}
0.02866	0.02855	0.5	1.175610^{-4}
0.03156	0.0314	0.55	1.5647310^{-4}
0.03446	0.03426	0.6	2.0314410^{-4}
0.03737	0.03711	0.65	2.582810^{-4}
0.04029	0.03997	0.7	3.2258610^{-4}
0.04322	0.04282	0.75	3.9676610^{-4}
0.04616	0.04567	0.8	4.8152710^{-4}
0.04911	0.04853	0.85	5.7757410^{-4}
0.05207	0.05138	0.9	6.8561210^{-4}
0.05504	0.05424	0.95	8.0634710^{-4}
0.05803	0.05709	1	9.4048310^{-4}
0.06104	0.05995	1.05	1.0887310^{-3}
0.06405	0.0628	1.1	1.2517810^{-3}
0.06709	0.06566	1.15	1.4303610^{-3}
0.07014	0.06851	1.2	1.6251610^{-3}
0.0732	0.07137	1.25	1.8368810^{-3}
0.07629	0.07422	1.3	2.0662410^{-3}
0.07939	0.07708	1.35	2.3139410^{-3}
0.08251	0.07993	1.4	2.5806910^{-3}
0.08565	0.08278	1.45	2.8671810^{-3}
0.08881	0.08564	1.5	3.1741310^{-3}
0.092	0.08849	1.55	3.5022410^{-3}
0.0952	0.09135	1.6	3.8522210^{-3}
0.09843	0.0942	1.65	4.2247710^{-3}
0.10168	0.09706	1.7	4.6205910^{-3}
0.10495	0.09991	1.75	5.040410^{-3}
0.10825	0.10277	1.8	5.484910^{-3}
0.11158	0.10562	1.85	5.9547910^{-3}
0.11493	0.10848	1.9	6.4507810^{-3}
0.1183	0.11133	1.95	6.9735710^{-3}
0.12171	0.11419	2	7.5238710^{-3}

Pentru compararea rezultatelor obținute din calcul și pentru celelalte capsule din setul dimensional considerat, s-a determinat deformația membranei pentru presiunea $p = 250$ mbar.

$k = 0..10$

$P_{0_k} = 0.0025k$ $w_0 = 1$ $w_{1_k} = \text{root}(P(w_0) - P_{0_k}, w_0)$

P_{0_k} [MPa]	w_{1_k} [mm]	$P(w_{1_k})$ [MPa]
0	5.2627110^{-4}	3.0046410^{-5}
$2.5 \cdot 10^{-3}$	0.0443	2.5290510^{-3}
$5 \cdot 10^{-3}$	0.08805	5.0277410^{-3}
$7.5 \cdot 10^{-3}$	0.13179	7.5261710^{-3}
0.01	0.17549	0.01002
0.0125	0.21916	0.01252
0.015	0.26279	0.01502
0.0175	0.30636	0.01752
0.02	0.36523	0.0209
0.0225	0.40696	0.0233
0.025	0.44868	0.0257

Capsula d47/p600

$h = .12$ $\nu = 0.343$ $m = \sqrt{85.37}$ $k_2 = 1$
 $n = 85.37$ $r = 23.5$ $E = 131500$ $w = 0,005..2$

$$p(w) = \frac{E \cdot h^4}{r^4} \left[\frac{4(3+n)}{3 \cdot k_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu^2}{n}\right)} \cdot \frac{w}{h} + \frac{32 \cdot k_2}{m^2 - 9} \left[\frac{1}{6} - \frac{3 - \nu}{(m - \nu) \cdot (m + 3)} \right] \cdot \left(\frac{w}{h}\right)^3 \right]$$

$$p_{lin}(w) = \frac{E \cdot h^4}{r^4} \left[\frac{4(3+n)}{3 \cdot k_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu^2}{n}\right)} \cdot \frac{w}{h} \right]$$

$e(w) = p(w) - p_{lin}(w)$

Influența termenului de gradul trei din ecuația caracteristicii membranei asupra deformației maxime a membranei este redată în fig.A5.30.

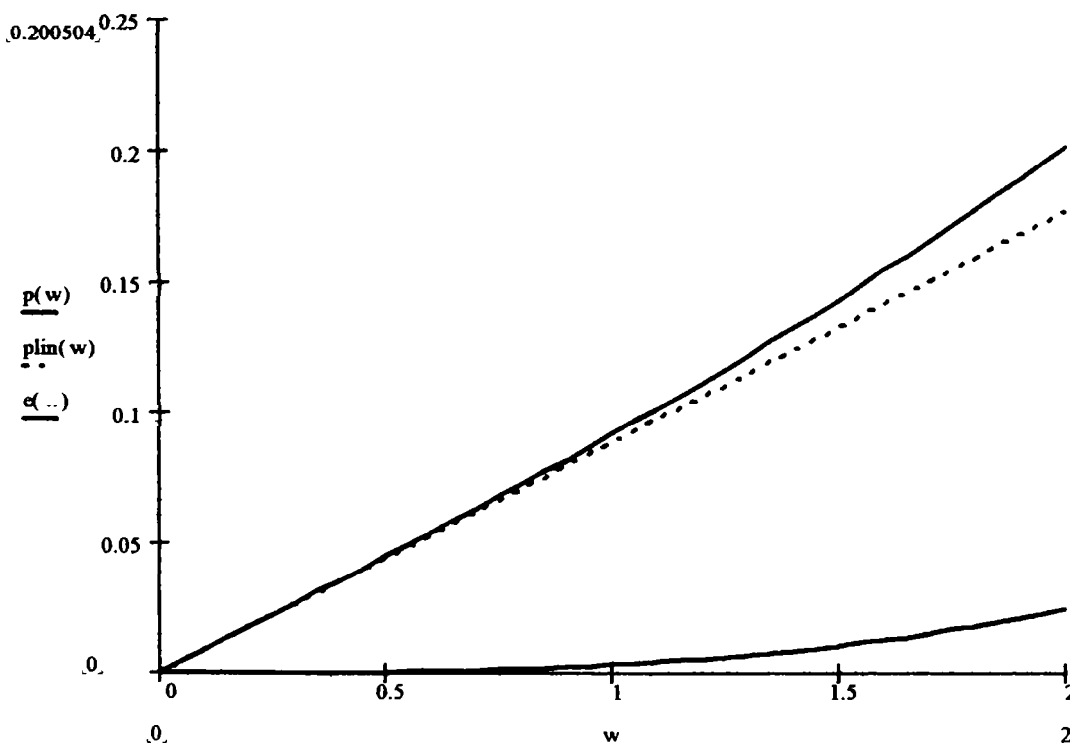


Fig. A5.30

p(w)[MPa]	plin(w)[MPa]	w[mm]	e(w)[MPa]
0	0	0	0
4.3961610^{-3}	4.3957710^{-3}	0.05	3.8552210^{-7}
8.7946310^{-3}	8.7915410^{-3}	0.1	3.0841810^{-6}
0.0132	0.01319	0.15	1.0409110^{-5}
0.01761	0.01758	0.2	2.4673410^{-5}
0.02203	0.02198	0.25	4.8190310^{-5}
0.02646	0.02637	0.3	8.3272810^{-5}
0.0309	0.03077	0.35	1.3223410^{-4}
0.03536	0.03517	0.4	1.9738710^{-4}
0.03984	0.03956	0.45	2.8104610^{-4}
0.04434	0.04396	0.5	3.8552210^{-4}
0.04887	0.04835	0.55	5.131310^{-4}
0.05342	0.05275	0.6	6.6618210^{-4}
0.05799	0.05715	0.65	8.4699210^{-4}
0.0626	0.06154	0.7	1.0578710^{-3}
0.06724	0.06594	0.75	1.3011410^{-3}
0.07191	0.07033	0.8	1.579110^{-3}
0.07662	0.07473	0.85	1.8940710^{-3}
0.08137	0.07912	0.9	2.2483710^{-3}
0.08616	0.08352	0.95	2.644310^{-3}
0.091	0.08792	1	3.0841810^{-3}
0.09588	0.09231	1.05	4.1050410^{-3}
0.10081	0.09671	1.1	4.6906510^{-3}
0.10579	0.1011	1.15	5.3294610^{-3}
0.11083	0.1055	1.2	6.0237810^{-3}
0.11592	0.10989	1.25	6.7759410^{-3}
0.12107	0.11429	1.3	7.5882310^{-3}
0.12627	0.11869	1.35	8.4629810^{-3}
0.13154	0.12308	1.4	9.402510^{-3}
0.13688	0.12748	1.45	0.01041
0.14228	0.13187	1.5	0.01149
0.14775	0.13627	1.55	0.01263
0.1533	0.14066	1.6	0.01385
0.15891	0.14506	1.65	0.01515
0.16461	0.14946	1.7	0.01653
0.17038	0.15385	1.75	0.01799
0.17623	0.15825	1.8	0.01953
0.18217	0.16264	1.85	0.02115
0.18819	0.16704	1.9	0.02287
0.1943	0.17144	1.95	0.02467
0.2005	0.17583	2	

Pentru compararea rezultatelor obținute din calcul și pentru celelalte capsule din setul dimensional considerat, s-a determinat deformația membranei pentru presiunea $p = 250$ mbar.

$k = 0..10$

$p_{0k} = 0.0025k$ $w_0 = 2$ $w_{1k} = \text{root}(p(w_0) - p_{0k}, w_0)$

p_{0k} [MPa]	w_{1k} [mm]	$p(w_{1k})$ [MPa]
0	3.5366310^{-4}	3.1092510^{-5}
$2.5 \cdot 10^{-3}$	0.02883	2.5348810^{-3}
$5 \cdot 10^{-3}$	0.0573	5.0382710^{-3}
$7.5 \cdot 10^{-3}$	0.08576	7.5412510^{-3}
0.01	0.11419	0.01004
0.0125	0.1426	0.01255
0.015	0.17099	0.01505
0.0175	0.19934	0.01755
0.02	0.22765	0.02005
0.0225	0.25592	0.02255
0.025	0.28415	0.02505

Capsula d47/p1000

$h = .18$ $\nu = 0.343$ $m = \sqrt{38.5}$ $k_2 = 1$
 $n = 38.5$ $r = 23.5$ $E = 131500$ $w = 0, 0.05..2$

$$p(w) = \frac{E \cdot h^4}{r^4} \left[\frac{4 \cdot (3 + n)}{3 \cdot k_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu^2}{n}\right)} \frac{w}{h} + \frac{32 \cdot k_2}{m^2 - 9} \left[\frac{1}{6} - \frac{3 - \nu}{(m - \nu) \cdot (m + 3)} \right] \frac{w^3}{h} \right]$$

$$p_{lin}(w) = \frac{E \cdot h^4}{r^4} \left[\frac{4 \cdot (3 + n)}{3 \cdot k_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu^2}{n}\right)} \frac{w}{h} \right]$$

$e(w) = p(w) - p_{lin}(w)$

Influența termenului de gradul trei din ecuația caracteristicii membranei asupra deformației maxime a membranei este redată în fig.A5.30.

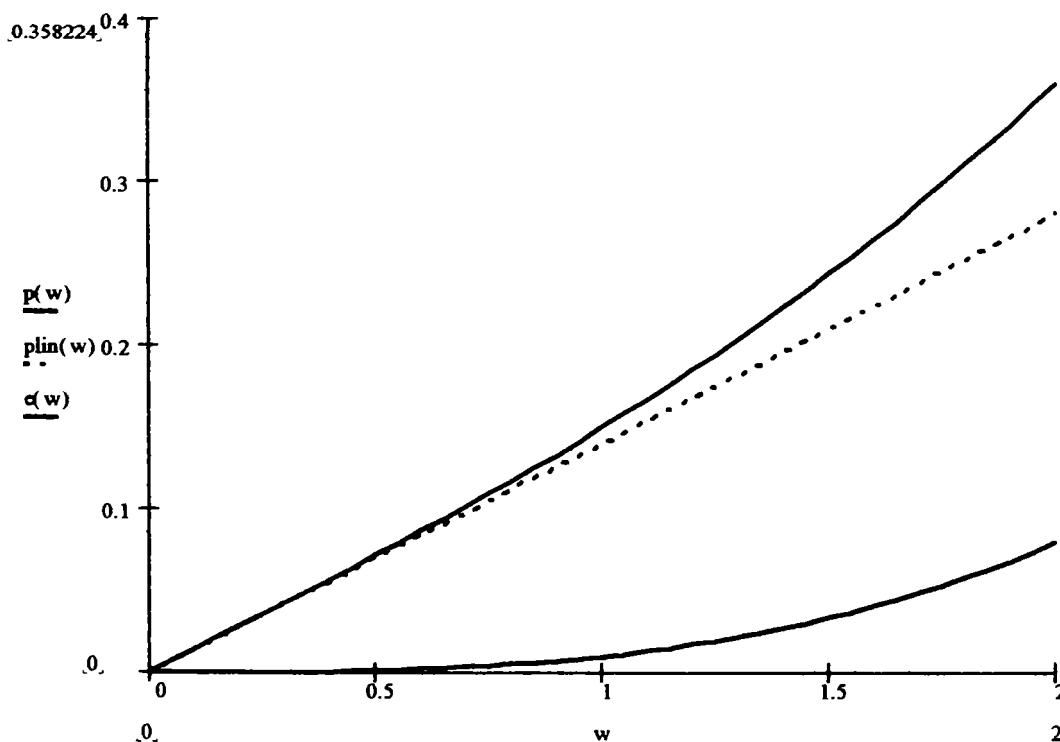


Fig. A5.31

p(w) [MPa]	plin(w)[MPa]	w[mm]	e(w)[MPa]
0	0	0	0
6.9796710 ⁻³	6.9784310 ⁻³	0.05	1.2357210 ⁻⁶
0.01397	0.01396	0.1	9.8857910 ⁻⁶
0.02097	0.02094	0.15	3.3364610 ⁻⁵
0.02799	0.02791	0.2	7.9086410 ⁻⁵
0.03505	0.03489	0.25	1.5446610 ⁻⁴
0.04214	0.04187	0.3	2.6691610 ⁻⁴
0.04927	0.04885	0.35	4.2385310 ⁻⁴
0.05646	0.05583	0.4	6.3269110 ⁻⁴
0.06371	0.06281	0.45	9.0084310 ⁻⁴
0.07102	0.06978	0.5	1.2357210 ⁻³
0.07841	0.07676	0.55	1.6447510 ⁻³
0.08588	0.08374	0.6	2.1353310 ⁻³
0.09343	0.09072	0.65	2.7148910 ⁻³
0.10109	0.0977	0.7	3.3908310 ⁻³
0.10885	0.10468	0.75	4.1705710 ⁻³
0.11672	0.11165	0.8	5.0615310 ⁻³
0.1247	0.11863	0.85	6.0711110 ⁻³
0.13282	0.12561	0.9	7.2067410 ⁻³
0.14107	0.13259	0.95	8.4758310 ⁻³
0.14945	0.13957	1	9.8857910 ⁻³
0.15799	0.14655	1.05	0.01144
0.16668	0.15353	1.1	0.01316
0.17554	0.1605	1.15	0.01504
0.18457	0.16748	1.2	0.01708
0.19377	0.17446	1.25	0.01931
0.20316	0.18144	1.3	0.02172
0.21274	0.18842	1.35	0.02432
0.22252	0.1954	1.4	0.02713
0.23251	0.20237	1.45	0.03014
0.24272	0.20935	1.5	0.03336
0.25314	0.21633	1.55	0.03681
0.2638	0.22331	1.6	0.04049
0.2747	0.23029	1.65	0.04441
0.28584	0.23727	1.7	0.04857
0.29723	0.24425	1.75	0.05298
0.30888	0.25122	1.8	0.05765
0.3208	0.2582	1.85	0.06259
0.33299	0.26518	1.9	0.06781
0.34546	0.27216	1.95	0.0733
0.35822	0.27914	2	0.07909

Pentru compararea rezultatelor obținute din calcul și pentru celelalte capsule din setul dimensional considerat, s-a determinat deformația membranei pentru presiunea $p = 250$ mbar.

$$k = 0.. 10$$

$$p_{0_k} = 0.0025k$$

$$w_0 = 1$$

$$w_{1_k} = \text{root}(p(w_0) - p_{0_k}, w_0)$$

p_{0_k} [MPa]

w_{1_k} [mm]

$p(w_{1_k})$ [MPa]

0
$2.5 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^{-3}$
$7.5 \cdot 10^{-3}$
0.01
0.0125
0.015
0.0175
0.02
0.0225
0.025

8.9237710^{-6}
0.01792
0.03584
0.05374
0.07164
0.08953
0.10741
0.12527
0.15016
0.16776
0.18533

1.2454810^{-6}
2.5016710^{-3}
5.0020510^{-3}
7.5023810^{-3}
0.01
0.0125
0.015
0.0175
0.02099
0.02346
0.02593