

UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN TIMIȘOARA

FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

**CERCETĂRI PRIVIND LĂGĂRELE CILINDRICE
CU LICHID MAGNETIC**

Teza de doctorat

Ing. Marian Greconici

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

Conducător științific

Prof. dr. ing. Ioan De Sabata

2003

Cuprins:

INTRODUCERE

1. LICHIDE MAGNETICE. GENERALITĂȚI	9
1.1 Structura lichidelor magnetice. Generalități despre preparare	9
1.1.1 Tipuri de fluide magnetice	10
1.1.2 Interacțiuni specifice. Dimensiunea medie a particulelor magnetice	11
1.1.3 Metode de stabilizare a lichidelor magnetice	12
1.1.4 Procese de aglomerare	14
1.1.5 Metode de preparare a lichidelor magnetice	15
1.2 Proprietățile lichidelor magnetice	21
1.2.1 Proprietățile magnetice	21
1.2.2 Proprietățile reologice	28
1.3 Acțiuni ponderomotoare în lichide magnetice	34
1.3.1 Forțe de volum exercitate asupra lichidelor magnetice ...	34
1.3.2 Presiunea de natură electromagnetică exercitată în lichid ..	36
1.3.3 Forțe de suprafață	37
1.3.4 Forța exercitată de câmpul magnetic asupra unui corp magnetic imersat într-un lichid magnetic	38
2. LAGĂRE MAGNETICE CU MAGNET PERMANENT ȘI LICHID MAGNETIC	47
2.1 Calculul analitic al unui lagăr cilindric cu lichid magnetic	47
2.1.1 Lagăre cu lichid magnetic. Levitația magnetică	47
2.1.2 Lagărul cilindric cu lichid magnetic	49
2.1.3 Calculul analitic al câmpului magnetic într-un lagăr cilindric cu lichid magnetic	50
2.1.4 Calculul forței de levitație pentru lagărul cilindric cu lichid magnetic	55
2.2 Calculul aproximativ al unui lagăr cilindric cu lichid magnetic ...	63
2.2.1 Calculul analitic al câmpului magnetic generat de un cilindru uniform magnetizat înconjurat de lichid magnetic..	64
2.2.2 Calculul aproximativ al lagărului cilindric cu lichid magnetic	67
2.3 Calculul numeric al lagărului cilindric cu lichid magnetic	73
2.3.1 Stabilirea ecuațiilor câmpului electromagnetic în lagăr ..	73
2.3.2 Calculul numeric al forței de levitație	75
2.3.3 Modelarea numerică și rezultatele obținute	76

3. LAGĂR CU POLI ALTERNANȚI ȘI LICHID MAGNETIC	89
3.1 Calculul analitic al lagărului cu poli alternanți plasați în stator	89
3.2 Calculul analitic aproximativ al lagărului cu poli alternanți plasați în stator	91
3.2.1 Calculul analitic aproximativ al câmpului magnetic într-un lagăr cu lichid magnetic și poli alternanți plasați în stator ...	91
3.2.2 Calculul forței de levitație	94
3.3 Calculul numeric al lagărului cu poli alternanți plasați în stator ...	97
3.3.1 Calculul numeric aproximativ al câmpului magnetic Folosind MEF-2D	97
3.3.2 Calculul numeric al forței de readucere	99
3.4 Calculul analitic al lagărului cu poli alternanți cu $\mu_r=1$, plasați în rotor	102
3.4.1 Calculul analitic aproximativ al câmpului magnetic	102
3.4.2 Calculul forței de levitație	106
3.4.3 Influența dimensiunilor geometrice ale lagărului asupra forței de readucere	113
3.5 Influența magnetizației temporare a polilor asupra forței de readucere la lagărul cu poli alternanți plasați în rotor	119
3.6 Luarea în considerare a armonicilor superioare ale câmpului magnetic la lagărul cu poli alternanți plasați în rotor	129
3.6.1 Calculul analitic aproximativ al câmpului magnetic	129
3.6.2 Calculul forței de levitație	132
3.6.3 Interpretarea rezultatelor	138
3.7 Calculul numeric al lagărului cu poli alternanți plasați în rotor ...	140
3.7.1 Stabilirea ecuațiilor câmpului electromagnetic în lagăr ...	140
3.7.2 Descrierea programului MagNet 5.0 - 3D. Modelarea numerică a lagărului	142
3.7.3 Calculul numeric al forței de levitație	151
 4. CONCLUZII ȘI SUBLINIAREA PRINCIPALELOR CONTRIBUȚII	 157
 5. BIBLIOGRAFIE	 167
 6. ANEXE	 173
6.1 Anexa 1 – Program pentru analiza numerică prin MEF-3D (definirea geometriei)	173
6.2 Anexa 2 – Program pentru analiza numerică prin MEF-3D (definirea materialelor)	178
6.3 Anexa 3 – Program de calcul numeric al forței de levitație pe baza elementelor finite	179
6.4 Anexa 4 – Program de calcul al coordonatelor medii ale elementelor finite și al ariei acestora	180
6.5 Anexa 5 – Program de calcul al valorilor medii ale componentelor câmpului magnetic în fiecare element finit	181

Cuvânt înainte

Lichidele magnetice (ferofluidede) sunt dispersii de particule magnetice subdomenice (~10 nm) într-un lichid de bază. Numărul acestor particule este foarte mare, o valoare de referință fiind 10^{23} particule pe metru cub. Aceste lichide magnetice au proprietățile uzuale ale lichidelor, dar în plus se comportă ca un material puternic magnetizabil.

Primele lichide magnetice au fost preparate în 1960 la NASA, în cadrul cercetărilor de tehnologie spațială, pentru a pune la punct un sistem de curgere controlată a combustibililor fluizi în condiții de imponderabilitate.

Sintetizarea și studiul sistematic al proprietăților lichidelor magnetice a fost început în grupul de cercetare al lui R.E.Rosensweig din SUA. Termenul de ferrofluid propus de Rosensweig s-a încetățenit și în literatura de specialitate.

Studiul asupra lichidelor magnetice a evidențiat o serie de fenomene senzaționale, care fac posibile noi soluționări ale problemelor din știință și tehnologie.

Începând din 1970 au fost impulsionate cercetările legate de obținerea, microstructura, proprietățile, magnetohidrodinamica și aplicațiile lichidelor magnetice, ele fiind azi folosite în numeroase dispozitive și tehnologii: în tehnica spațială, energetica nucleară, electrotehnică, geofizică, medicină, prelucrarea minereurilor neferoase.

Ca urmare a proprietăților lor remarcabile, după 1970 lichidele magnetice au captat și interesul unor grupuri de cercetători români, dintre care îi amintesc pe cei din Iași, și nu în ultimul rând, pe cei din Timișoara.

Formarea, sub conducerea Dlui. Acad. Ioan Anton, a unui puternic colectiv de specialiști în hidrodinamică, fizică, chimie și electrotehnică în cadrul Institutului pentru Fluide Complexe al Universității "Politehnica" din Timișoara, respectiv al Laboratorului de Lichide Magnetice al Centrului de Cercetări Tehnice Fundamentale și Avansate din cadrul Filialei Timișoara a Academiei Române a corespuns pe deplin cerințelor domeniului profund interdisciplinar al lichidelor magnetice. Aceasta a facilitat abordarea eficientă a problemelor științifice fundamentale, precum și a celor orientate spre aplicații tehnice, colectivul timișorean polarizând cercetările în acest domeniu în România.

La Simpozionul "Tendințe actuale în știința și tehnologia lichidelor magnetice", desfășurat în octombrie 1997 în India, reputatul specialist dr. Kuldip Raj, vicepreședinte al companiei Ferrofluidics din SUA, în prelegerea de inaugurare la simpozion, trecând în revistă activitatea științifică internațională în continuă dezvoltare în domeniu, evidențiază Laboratorul de Lichide Magnetice din Timișoara la un loc de frunte printre primele opt centre academice din lume.

Ca o recunoaștere internațională a competenței colectivului de lichide magnetice din Timișoara, a opta Conferință Internațională de Lichide Magnetice,

ICMF-8, a avut loc chiar în Timișoara, în 1998. Conferința, cu o periodicitate trienală, s-a constituit într-o incontestabilă reușită, reunind la Timișoara principalele nume de referință din domeniu, în frunte cu părintele lichidelor magnetice, R.E. Rosensweig.

Activitatea științifică în domeniul lichidelor magnetice la Timișoara a întrunit de-a lungul celor peste două decenii de existență, cercetări preponderent cu caracter fundamental, precum și cercetări orientate spre aplicații tehnice de vârf, grupate în mai multe direcții de cercetare.

Una dintre aceste direcții de cercetare, sub conducerea Dlui. Prof. Ioan De Sabata, o reprezintă cea legată de forțele ponderomotoare magnetice, cu aplicații în domeniul etanșărilor rotitoare, separatoarelor magnetogravimetrice și al lagărelor magnetofluidice. Problema forțelor ponderomotoare magnetice și efectele acestora în cazuri concrete ale unor aplicații de mare interes, considerând lichidul magnetic un mediu fluid cvasiomogen magnetizabil, a făcut obiectul unor cercetări teoretice, rezultatele cărora au servit ulterior la stabilirea unor relații de dimensionare a componentelor unor dispozitive magnetofluidice.

Prezenta lucrare reprezintă o continuitate a activității de cercetare a acestui colectiv, încercând să aducă o contribuție privind cercetarea teoretică în domeniul aplicațiilor inginerești, în particular în domeniul lagărelor cilindrice cu lichid magnetic.

Lucrarea de față este organizată pe patru capitole, cinci anexe și o listă bibliografică cu lucrări din domeniul lichidelor magnetice, al electrotehnicii și al metodelor numerice de calcul, folosite pe parcursul elaborării acestei lucrări.

Primul capitol reprezintă o prezentare generală pe baza bibliografiei consultate a problemelor generale ale lichidelor magnetice. Se fac referiri la prepararea și stabilizarea lichidelor magnetice, la proprietățile de natură magnetică și reologică ce pot influența comportarea lagărelor cilindrice cu lichid magnetic. În ultimul subcapitol sunt prezentate acțiuni ponderomotoare ce se manifestă în lichidele magnetice, (levitația de ordinul 1 și 2).

În capitolul doi se analizează lagărul cilindric cu magnet permanent și lichid magnetic. Sunt propuse expresii analitice noi pentru calculul forței de levitație ce se exercită asupra unității de lungime a arborelui, funcție de dimensiunile geometrice ale lagărului și de proprietățile magnetice ale arborelui și ale lichidului magnetic. În ultimul paragraf al acestui capitol, se determină forța de levitație pe baza modelării numerice a lagărului cilindric. Pentru a demonstra veridicitatea noilor relații obținute, acestea sunt comparate cu cele existente în literatură și cu cele obținute pe cale numerică.

În capitolul trei este tratat lagărul cu poli alternanți. Este propus lagărul cu poli alternanți plasați în rotor. Pentru cazul când polii alternanți nu se magnetizează temporar, s-a realizat un calcul analitic aproximativ al lagărului fiind stabilită o relație analitică aproximativă pentru forța ce se exercită pe unitatea de lungime a arborelui cu poli alternanți. Printr-un calcul numeric s-a analizat influența magnetizației temporare a polilor asupra forței de levitație. De asemenea s-a urmărit influența armonicilor superioare ale câmpului magnetic la calculul analitic aproximativ al lagărului cu poli alternanți plasați în rotor. În

ultimul subcapitol s-a făcut o analiză numerică a lagărului cu poli alternanți plasați în rotor, fiind folosit un program tridimensional bazat pe metoda elementelor finite. Rezultatele referitoare la forța de levitație ce se exercită pe unitatea de lungime a lagărului cu poli alternanți, obținute pe cale numerică au fost comparate cu cele obținute cu relația analitică stabilită. Ele arată veridicitatea relației analitice aproximative determinate.

Capitolul patru prezintă concluziile la care am ajuns în decursul studiului efectuat, fiind subliniate și contribuțiile pe care le-am adus în decursul activității consacrată realizării aceste teme.

Ajuns la sfârșitul unui drum marcat de urcușuri și coborâșuri inerente într-o astfel de încercare, autorul se bucură că reușește, după aproape opt ani de la începutul provocării, să mulțumească celor care, pe parcursul acestui drum, l-au întărit voința și l-au sprijinit finalizarea.

Am avut privilegiul de a elabora această lucrare sub îndrumarea distinsului Prof. Dr. Ing. Ioan De Sabata, care a reprezentat pentru mine un model de muncă și de probitate științifică. Încerc să exprim pe această cale profunda recunoștință nu doar pentru sfaturile și îndrumările susținute de-a lungul elaborării lucrării, ci și pentru formarea mea profesională și nu numai, începută încă în anii studenției și care continuă și azi.

Mulțumesc minunatului colectiv ce alcătuiește Catedra de Electrotehnică a Facultății de Electrotehnică din Timișoara pentru susținerea permanentă pe care am simțit-o din partea lor, pentru discuțiile constructive avute de-a lungul acestei perioade.

Aduc calde mulțumiri întregului colectiv al Centrului de Cercetări Tehnice Fundamentale și Avansate din cadrul Filialei Timișoara a Academiei Române, respectiv și celui al Institutului pentru Fluide Complexe din cadrul Universității Politehnica din Timișoara, a căror existență a făcut posibilă tema acestei lucrări.

Sunt profund recunoscător Dlui. C.P.I .dr. Ladislau Vékás pentru discuțiile și sugestiile pertinente primite în cadrul discuțiilor avute.

Mulțumesc Dlui. Prof. Dr. Ing. Ioan Șora, prin intermediul căruia am beneficiat de o bursă de studii de două luni la Universitatea Catolică din Leuven, Belgia, unde am realizat modelarea numerică tridimensională a lagărului cu poli alternanți plasați în rotor.

Mulțumesc colectivului ELEN din cadrul Universității Catolice din Leuven, Belgia, condus de Prof. Dr. Ing. R. Belmans și Prof. Dr. Ing. K. Hameyer, care mi-au pus la dispoziție programul MagNet cu toată documentația aferentă, precum și întreaga lor experiență.

Îmi exprim dragostea și recunoștința pentru familia mea, pentru tandra încurajare, răbdare și sprijin moral pe care mi le-au acordat, acestea ajutându-mă să depășesc momentele dificile ale acestei perioade.

Nu în ultimul rând, mulțumesc tuturor celor care au văzut în terminarea acestei lucrări un folos direct pentru activitatea de cercetare și didactică.

1 LICHIDE MAGNETICE. GENERALITĂȚI

1.1 Structura lichidelor magnetice. Generalități despre preparare [Rs1],[Bi3]

Lichidele magnetice (ferofluidelor) sunt dispersii de particule magnetice subdomenice într-un lichid de bază. Fiecare particulă coloidală dintr-un fluid magnetic este un mic magnet permanent care tinde să se alinieze în direcția câmpului magnetic. Presupunând că particulele sunt mici ($\sim 100\text{\AA}$), agitația termică preîntâmpină sedimentarea lor. În plus, particulele sunt “învelite” pentru a preveni interacțiunea lor magnetică. În acest fel rezultă un amestec complex care se comportă ca un lichid omogen chiar în prezența unui câmp magnetic aplicat din exterior.

Realizându-se inițial din hidrocarburi ca lichid de bază, lichidele magnetice sunt produse în prezent în diferite lichide, având proprietăți fizice și chimice care variază într-un domeniu foarte larg. Ferofluidelor comerciale sunt produse în apă, silicon, fluorocarburi, esteri, diesteri și alți solvenți. Ele au o gamă largă de vâscozitate, umiditate, densitate, miscibilitate, tensiune superficială și alte proprietăți. Prin controlul densității numerice a particulelor magnetice în suspensie se poate varia în limite largi magnetizația de saturație și permeabilitatea magnetică relativă a lichidelor magnetice.

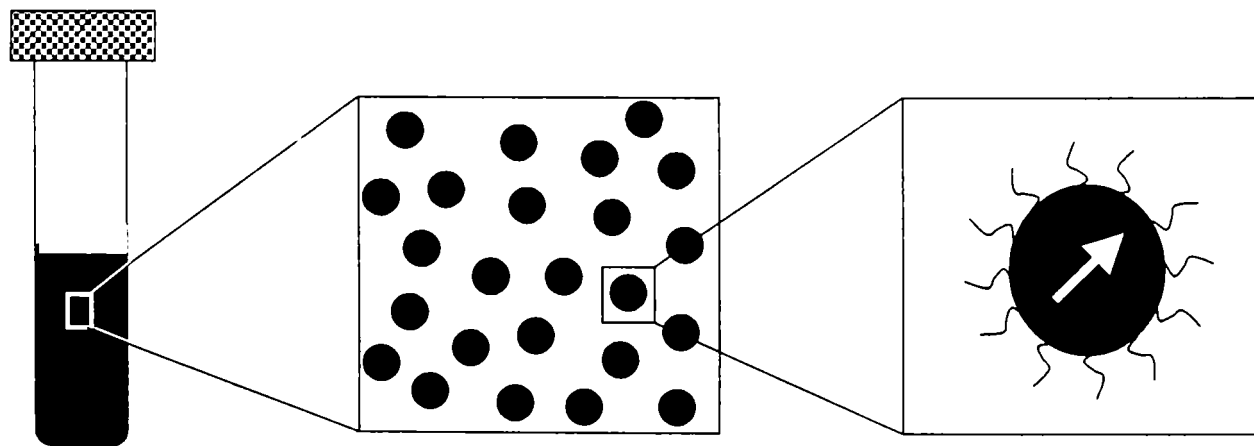


Fig. 1.1.1

Având în vedere componenta de bază a lichidelor magnetice, nanoparticulele magnetice, acestea se încadrează într-o categorie largă a nanoparticulelor inteligente, respectiv în domeniul de vârf al nanoștiințelor și nanotehnologiilor. O reprezentare schematică a unui ferrofluid pe trei scări de lungime specifice este dată în fig.1.1.1, [Ew1]. La scară macroscopică (stânga), ferrofluidul se aseamănă cu un lichid obișnuit. La scara dimensiunilor coloidale (mijloc), lichidul magnetic e format din mici particule solide dispersate într-un solvent. Fiecare particulă este

formată dintr-un miez din material cu proprietăți magnetice având suprafața acoperită cu lanțuri polimerice (dreapta).

1.1.1 Tipuri de fluide magnetice

Principalele tipuri de materiale care întrunesc proprietăți atât magnetice, cât și de fluid – nanofluidele magnetizabile inteligente – sunt următoarele:

- Lichidele magnetice (ferofluide sau fluide magnetice);
- Emulsiile magnetizabile;
- Lichide magnetice (ferofluide) “inverse”;
- Lichide magnetice polimerizabile.

Lichidele magnetice au următoarele componente: particule magnetice (PM) feri- sau feromagnetice, (Fe_3O_4 , $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$, CoFe_2O_4 , Co, Fe ș.a.), lichid de bază (LB) și unul sau mai mulți stabilizanți (S). În principiu lichidul de bază poate fi orice lichid, inclusiv metalic.

Emulsiile magnetizabile se realizează prin dispersia ultrafină a unui lichid magnetic într-un lichid nemagnetic, nemiscibil.

Lichidele magnetice inverse sau compozitele magnetofluidice se obțin prin dispersarea unor particule solide nemagnetice de dimensiuni micrometrice, electroizolante sau electroconductoare, într-un lichid magnetic, considerat ca lichid de bază cvasiomogen, magnetizabil.

Lichidele magnetice polimerizabile au ca mediu de bază o subsatanță organică, inițial în fază lichidă (monomer). Prin polimerizare se obțin monopolimeri magnetizabili. Dacă în faza lichidă se adaugă și se dispersează incluziuni nemagnetice – microsferă sau microfibră – se obțin nano/microcompozite magnetizabile.

Fluidele magnetoreologice sunt suspensii de particule feromagnetice de ordinul $2\text{-}10\ \mu\text{m}$, în diferite lichide de bază, de regulă uleiuri slab volatile (uleiuri siliconice). Particulele au dimensiuni cu 2-3 ordine de mărime mai mari decât cele din componența lichidelor magnetice și au o structură feromagnetică multidomenică, deci aceste tipuri de fluide magnetizabile diferă esențial de lichidele magnetice.

Dintre tipurile de fluide magnetizabile amintite, cel mai important este lichidul magnetic, care stă la baza celorlalte tipuri de fluide magnetizabile. Lichidul magnetic este un sistem bifazic, care din punct de vedere macroscopic este cvasiomogen. Nanoparticulele magnetice “integrate” în lichidul de bază prin intermediul stabilizantului, conferă lichidului magnetic o susceptivitate magnetică de ordinul unității, cu câteva ordine de mărime mai mare decât a soluțiilor paramagnetice.

Problema fundamentală ce trebuie soluționată de metodele de preparare este cea de a asigura omogenitatea macroscopică, adică stabilitatea sistemului sub acțiunea unor forțe externe, de exemplu magnetice, care pot provoca separarea fazei solide de mediul de dispersie lichid (sedimentare). În cazul lichidelor magnetice, datorită dimensiunii foarte reduse a particulelor, mișcarea browniană joacă un rol fundamental în prevenirea sedimentării.

1.1.2 Interacțiuni specifice. Dimensiunea medie a particulelor magnetice

Efectul unui câmp magnetic neuniform este acela de a atrage particule dispersate spre regiunile de câmp mai intens. Mișcarea browniană se opune aglomerării. Particulele se presupun independente și identice, cu momentul magnetic permanent $m = M_d V$, unde M_d este magnetizația monodomenică a materialului solid (magnetizația spontană a particulei monodomeniale), iar V volumul unei particule. Particulele fiind independente, momentul lor magnetic tinde să se orienteze paralel cu câmpul aplicat H . Energia unei particule din sistem, aflată într-o anumită poziție, este egală cu lucrul mecanic care trebuie efectuat pentru a aduce particula dintr-o regiune cu câmp neglijabil în acea poziție (traectoria fiind o curbă C oarecare):

$$\int_0^V dW = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.1.1)$$

Ținând cont că forța ce acționează asupra unui dipol în câmp neuniform este, [DS10], [Ro1]:

$$\mathbf{F} = \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H} \quad (1.1.2)$$

unde $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ este permeabilitatea magnetică a vidului.

Înlocuind (1.1.2) în (1.1.1), se obține:

$$W = \mu_0 M_d V H \quad (1.1.3)$$

Pentru ca sistemul să fie stabil trebuie ca:

$$\frac{k_B T}{\mu_0 M_d V H} \geq 1 \quad (1.1.4)$$

unde k_B este constanta lui Boltzman iar T este temperatura absolută. Diametrul, considerând particula sferică, rezultă din ecuația (1.1.4):

$$D \leq \left(\frac{6k_B T}{\mu_0 \pi M_d H} \right)^{1/3} \quad (1.1.5)$$

La temperatura camerei, la câmpuri de ordinul 10^4 A/m și în cazul particulelor de magnetită ($M_d = 4.46 \cdot 10^4 \text{ A/m}$), D_{max} este aproximativ 10 nm .

În câmp gravitațional, energia particulei (ținând cont și de forța arhimedică) este $\Delta\rho V g L$, unde diferența densităților masice este, $\Delta\rho = \rho_{solid} - \rho_{fluid}$, iar L reprezintă înălțimea în câmp gravitațional. Luând $L = 0.05 \text{ m}$ și $\Delta\rho = 4300 \text{ Kg m}^{-3}$ raportul dintre energia gravitațională și cea magnetică va fi:

$$R = \frac{\Delta\rho g L}{\mu_0 M_d H} = 0.05 \quad (1.1.6)$$

ceea ce arată că influența câmpului gravitațional este în general mult mai slabă decât cea a unui câmp magnetic neuniform.

Interacțiunea dipol-dipol dintre momentele magnetice ale particulelor, poate de asemenea afecta stabilitatea fluidelor. Energia de interacțiune între două particule i și j este, [Ro1]:

$$U_d = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[3 \frac{(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j}{r^3} \right], \quad (1.1.7)$$

unde $\mathbf{r}=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j$. Energia este maximă când momentele particulelor sunt paralele, iar particulele în contact N-S. în acest caz:

$$U_{d_{\max}} = \frac{1}{12} \mu_0 M_d^2 V \quad (1.1.8)$$

$$\text{Condiția de stabilitate: } \frac{12k_B T}{\mu_0 M_d^2 V} \geq 1 \quad (1.1.9)$$

conduce la $D \leq 10 \text{ nm}$, ceea ce înseamnă că pentru majoritatea particulelor din lichidul magnetic, mișcarea browniană se opune cu succes aglomerării datorită interacțiunilor magnetice.

Interacțiunea Van der Waals apare datorită fluctuațiilor orbitalilor electronilor dintr-o particulă, care induc dipoli oscilanți într-o particulă vecină. Notând cu s distanța dintre suprafețele a două particule și cu l raportul $2s/D$, energia de interacțiune dintre două sfere se scrie, [Ro1]:

$$U_W = -\frac{A}{6} \left[\frac{2}{l^2 + 4l} + \frac{2}{(l+2)^2} + \ln \frac{l^2 + 4l}{(l+2)^2} \right] \quad (1.1.10)$$

unde A este constanta lui Hamaker. Pentru particule aflate la distanță, interacțiunea este neglijabilă. Dar când particulele sunt în contact ($l=0$), spre deosebire de cazul interacțiunii dipol-dipol, $U_W \rightarrow \infty$. De aceea contactul particulelor trebuie împiedicat.

1.1.3 Metode de stabilizare a lichidelor magnetice

Există trei metode de stabilizare pentru împiedicarea contactului dintre particule și reducerea interacțiunii dipol-dipol: stabilizarea sterică, stabilizarea electrostatică și stabilizarea mixtă.

Stabilizarea sterică presupune adsorbția unor molecule lungi la suprafața particulelor. Acestea prezintă un capăt polar care este adsorbit și o catenă care trebuie să fie compatibilă cu lichidul de bază. Mecanismul de stabilizare este denumit repulsie sterică.

Compatibilitatea stabilizantului (surfactantului) cu lichidul de bază este esențială și trebuie ca moleculele surfactantului să interacționeze mai puternic cu moleculele de solvent decât între ele. În caz contrar se produce fenomenul de floculare reversibilă care duce la scăderea grosimii surfactantului ca urmare a interacțiunii între catene sau chiar la o atracție între catenele de la particule vecine, încât stabilitatea devine precară. Interacțiunea dintre catene este de tip Van der Waals.

Stabilitatea poate fi refăcută prin înlocuirea lichidului de bază cu unul compatibil. Există și situații de incompatibilitate în care surfactantul se desoarbe, fenomen cunoscut sub numele de floclare ireversibilă.

Energia de repulsie sterică este dată de relația, [Ro1]:

$$U_r = 2\pi D^2 n_s \left[2 - \frac{l+2}{t} \ln \frac{1+t}{1+l/2} - \frac{l}{t} \right] k_B T \quad (1.1.11)$$

în care $t=2\delta_s/D$ și n_s este concentrația superficială de molecule adsorbite, δ_s – grosimea stratului de surfactant.

Lichidele de bază pot fi polare sau nepolare. Pentru fluidele cu particule de magnetită și solvenți nepolari se folosește ca stabilizant acidul oleic, care este adsorbit chimic. Solvenții nepolari au în general vâscozitate redusă și sunt volatili (toluen, benzen) sau vâscozitate medie și rată de evaporare scăzută (uleiuri minerale). Pentru lichidele magnetice cu solvenți polari mai este necesar încă un strat de stabilizant, adsorbit fizic la suprafața primului (de obicei tot acid oleic), care poate fi un polimer sau un acid, [Ro1]. Solvenții în acest caz pot fi uleiuri sintetice (spre exemplu diesteri), alcooli, cetone, uleiuri vegetale sau apă.

Stabilizarea electrostatică a fost aplicată pentru prima dată de Massart, [Ma1], la lichidele magnetice ionice pe bază de apă. În acest caz repulsia sterică este înlocuită de repulsia electrostatică ca urmare a încărcării electrice a particulelor din soluție, formându-se astfel un strat electric dublu.

Din această grupă fac parte lichidele magnetice pe bază de apă. Ele constau din particule de maghemită stabilizate prin repulsie electrostatică rezultând din adsorbția preferențială a ionilor de un anumit tip. Pentru conservarea neutralității electrice, ionii adsorbiți sunt înconjurați de o regiune difuză, formându-se astfel un strat electric dublu.

Principala cale de formare a stratului dublu electric este adsorbția ionilor din soluție. În cazul reacțiilor de condensare, când unul dintre reactanți este în exces, pe suprafața particulei se vor adsorbi ionii care intră și în compoziția acestuia.

Reacția de precipitare realizându-se la pH alcalin, favorizează adsorbția ionilor OH^- la suprafața particulelor, acestea încărcându-se negativ. Suprafața particulelor încărcate negativ atrage ionii de amoniu puternic hidratați și încărcati pozitiv. Ionii negativi din soluție, din imediata vecinătate a suprafeței particulelor, vor fi respinși electrostatic. În acest fel, în soluție scade concentrația ionilor pozitivi și crește cea a ionilor negativi.

Pentru realizarea unui sistem coloidal stabil, particulele trebuie menținute la distanță unele de altele, ceea ce se realizează prin mărirea forțelor de respingere electrostatică până la valori corespunzătoare. Pentru aceasta trebuie avut în vedere: selectarea valorii pH -ului soluției și respectiv a stabilizatorului; obținerea unor particule coloidale cu dimensiuni corespunzătoare.

Stabilizarea mixtă este o combinație de cele două tipuri de stabilizări menționate, caz în care stratul de surfactant este încărcat electric.

În medii polare, cum este apa, prin chemisorbția primului strat de surfactant, suprafața particulei devine hidrofobă, apoi este posibil ca adsorbția să continue cu

rezultatul că suprafața devine hidrofilă. În acest proces coexistă ambele tipuri de repulsie – sterică și electrostatică.

Totuși, aceste fluide pe bază de apă au în general o stabilitate mai mică decât dispersiile în medii nepolare; aglomerările semnificative ce apar în ele pot fi detectate prin experimente de împrăștiere dinamică a luminii, măsurători de susceptivitate, etc. prezența aglomeratelor afectează într-o măsură mare stabilitatea acestor fluide, mai ales în prezența câmpurilor magnetice sau a gradientilor de câmp magnetic.

Recent, s-a evidențiat experimental stabilizarea mixtă (dublu-sterică plus electrostatică) la probele de lichide magnetice pe bază de pentanol, [Rs1].

1.1.4 Procese de aglomerare

Neglijarea interacțiunilor dintre particule este o aproximare bună în cazul lichidelor cu stabilizare foarte bună și cu concentrație mică de particule. Altfel interacțiunea dintre particule trebuie luată în considerare și poate duce la formarea de aglomerate.

Un parametru mult folosit în studiul aglomerărilor este raportul dintre energia maximă dipol-dipol și energia termică, numit parametru de cuplaj, [Ro1]:

$$\varepsilon = \frac{M_d^2 V_m^2 \mu_0}{2\pi D^3 k_B T} \quad (1.1.12)$$

În cazul în care ε este subunitar, probabilitatea de formare a aglomeratelor este redusă. În caz contrar, depinzând de natura lichidului, se pot forma în principal trei tipuri de agregate: lanțuri, agregate de tip picătură de lichid și aglomerate de tip

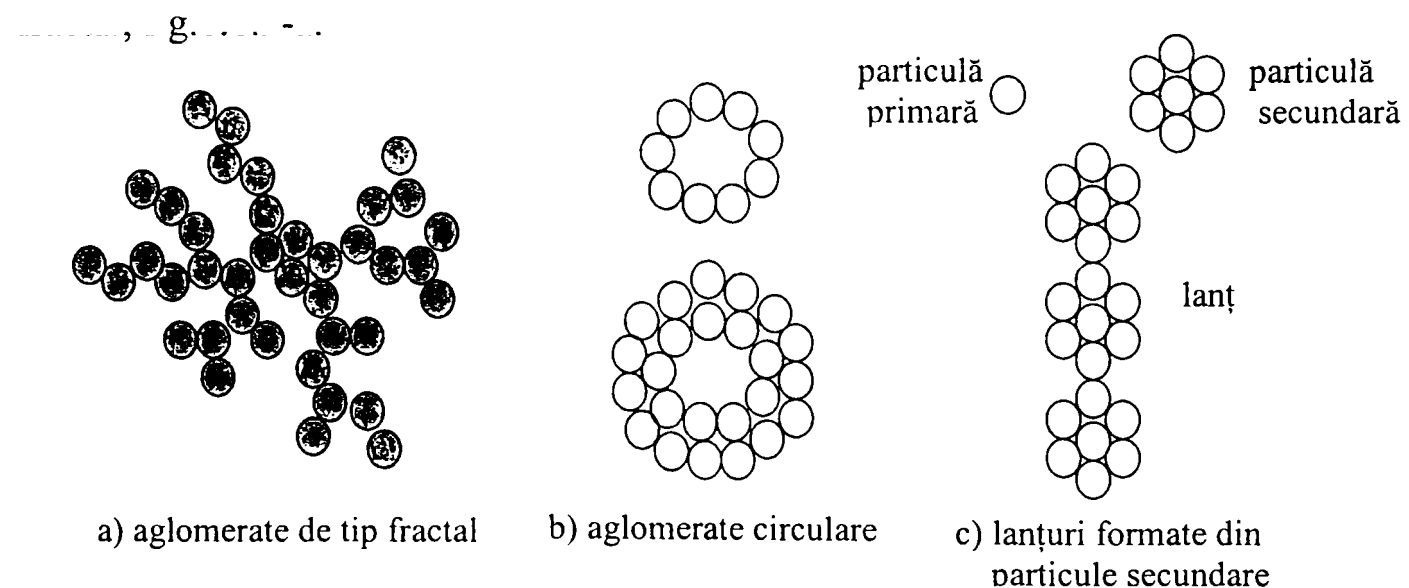


Fig. 1.1.2

Formarea lanțurilor se realizează ca urmare a cuplării particulelor cu momente magnetice paralele, contactul fiind realizat între polii N și S ai particulelor. Aplicarea unui câmp magnetic simulează formarea lanțurilor care se orientează paralele cu direcția câmpului. În absența câmpului orientarea este arbitrară.

La valori mai mari ale constantei de cuplaj are loc o tranziție de fază de tip gaz-lichid. Aceasta duce la formarea unor agregate de mari dimensiuni (10^4 - 10^6) particule numite agregate de tip picătură. Forma agregatelor este sferică în absența câmpului magnetic și alungită în prezența acestuia. Cauzele care pot duce la acest fenomen sunt scăderea temperaturii, intensificarea câmpului magnetic sau creșterea concentrației de particule, apariția aglomeratelor datorându-se interacțiunilor dipol-dipol. O asemenea tranziție poate fi considerată ca rezultat al metastabilității termodinamice a fluidului magnetic.

Recent, [Ph1], s-a pus în evidență influența unor aglomerate de tip fractal asupra proprietăților lichidelor magnetice, care apar ca urmare a interacțiunilor Van der Waals ca în coloizii obișnuiți (fără ca interacțiunea dipol-dipol să joace un rol important), fig.1.1.2-a. Aceasta se poate întâmpla atunci când există o incompatibilitate între solvent și surfactant sau în ferrofluidele ionice, când bariera de repulsie electrostatică e prea mică. Din punct de vedere teoretic această problemă rămâne deschisă.

În afară de aceste tipuri de aglomerate se mai pot forma agregate circulare, fig.1.1.2-b, sau în regim de lanțuri formate din particule secundare, fig.1.1.2-c.

1.1.5 Metode de preparare a lichidelor magnetice

Metodele de preparare a lichidelor magnetice, adică a unor soluții coloidale liofilizate de particule feri- sau feromagnetice, care sunt stabile la aglomerare și sedimentare, chiar și sub acțiunea unor forțe externe, trebuie să satisfacă următoarele cerințe esențiale, [Ro1], [Be2]:

- Materialul magnetic solid trebuie să se prezinte sub formă ultradispersă, adică sub forma unor nanoparticule cu dimensiuni cuprinse între 3 și 15 nm;
- Suprafața nanoparticulelor va fi acoperită de un strat adsorbit mono- sau bimolecular adecvat, natura și compoziția acestuia fiind determinate de proprietățile fizico-chimice ale nanoparticulelor și lichidului de bază.

În vederea preparării unor lichide magnetice performante, de-a lungul anilor au fost experimentate și dezvoltate numeroase procedee fizice și fizico-chimice specifice din domeniul coloizilor. Acest procedee se disting în funcție de modul de obținere a nanoparticulelor magnetice: reducerea mecanică a dimensiunii unor materiale feri- sau feromagnetice pulverulente grosiere (măcinare coloidală); descompunerea termică a carbonililor de *Fe* sau *Co*; electrodepunere (electroliză); metode cu plasmă (evaporare/electrocondensare); coprecipitare chimică, adică obținerea nanocristalelor magnetice prin condensare chimică.

Una din primele metode de obținere a nanoparticulelor magnetice a fost metoda mecanică de dispersare (măcinare coloidală). Papell a preparat pentru prima dată prin metoda măcinării în mori cu bile ferrofluide pe care le-a folosit drept carburanți pentru vehicule spațiale. Pentru aceasta el a utilizat diferite pulberi magnetice de *Fe*, *Co*, *Ni* și unii oxizi metalici feromagnetici. Cele mai bune rezultate le-a dat magnetita (Fe_3O_4).

Experiența acumulată, în special în ultimul deceniu, a evidențiat clar avantajele deosebite ale procedurii bazat pe obținerea nanoparticulelor ferimagnetice (Fe_3O_4 , $CoFe_2O_4$, $\gamma-Fe_2O_3$ ș.a.) prin coprecipitarea chimică, aplicat astăzi pentru producerea practic a tuturor fluidelor comercializate de firmele specializate. În [Be2], cap.7, sunt prezentate, în mod sintetic, numeroase variante ale procedurii, fiind analizate influența compoziției masei reactante și a condițiilor în care se desfășoară reacția de coprecipitare și fazele următoare ale procedurii de preparare, asupra proprietăților și în general, asupra calității lichidului magnetic obținut.

Procedeele aplicate la obținerea lichidelor magnetice nepolare și polare cu excepția apei, sunt prezentate schematic în organigramele din fig.1.1.3 și fig.1.1.4, în care sunt redată principalele faze ce implică obținerea diferitelor tipuri de lichide magnetice.

Principalii factori care influențează sintetizarea nanoparticulelor și apoi a lichidului magnetic sunt: concentrația ionilor metalici în soluție, natura agentului de coprecipitare, valoarea pH -lui a mediului de reacție, temperatura la care are loc reacția de coprecipitare, viteza de adăugare a agentului de coprecipitare, intensitatea agitării/ultrasonării.

Procesul de stabilizare/dispersare a nanoparticulelor magnetice subdomenice trebuie să țină cont de interacțiunile de tip dipol-dipol, Van der Waals, electrostatice și sterice dintre particulele învelite cu mono- sau dublu strat de stabilizant/stabilizanti, în funcție de caracterul nepolar sau polar al lichidului de bază. În această privință este importantă chemisorbția eficientă a stratului primar de stabilizant, proces ce este influențat, printre altele, de caracterul eterogen al suprafeței nanoparticulelor și de încărcarea lor electrică, de temperatura mediului de reacție și a surfactantului adăugat, de valoarea pH a mediului, respectiv de concentrația și gradul de puritate chimică a surfactantului. Cel mai des utilizat surfactant primar este acidul oleic. Chemisorbția acestuia pe suprafața particulelor are loc dacă ionul oleat este în stare monomoleculară și nu micelară. Condițiile de chemisorbție, în particular compoziția, valoarea pH și temperatura mediului de reacție, au făcut obiectul unor investigații sistematice pentru a determina valorile optime ale acestora, respectiv pentru a asigura gradul ridicat de stabilitate al lichidului magnetic rezultat. Gradul de stabilitate, respectiv existența sau absența aglomeratelor, influențează în primul rând proprietățile magnetice și de curgere, care intervin în majoritatea aplicațiilor lichidelor magnetice.

În cazul lichidelor de bază slab polare și polare, de exemplu diesteri sau alcooli, alegerea potrivită a stabilizantului secundar adsorbit fizic la stratul primar, este de importanță deosebită pentru obținerea lichidelor magnetice polare concentrate și în același timp foarte stabile inclusiv la diluții avansate. O problemă specială constă în stabilirea raportului optim al cantității de stabilizant secundar relativ la cantitatea de nanoparticule acoperite cu stabilizant primar, ce urmează a fi dispersate într-un anumit lichid de bază polar.

Lichidul magnetic polar pe bază de apă implică procedee de obținere speciale. Metodele de preparare elaborate până în prezent utilizează fie stabilizarea

electrostatică, utilizată de Massart, [Ma1], fie stabilizarea sterică dublă, considerată pentru prima dată la acest tip de lichid magnetic de către Shimoizaka, [Sh1].

Unul din procedeele elaborate în cadrul Laboratorului de lichide magnetice din Timișoara, [Be2], este redat schematic în fig.1.1.5.

Principalele faze sunt următoarele: sinteza nanoparticulelor de Fe_3O_4 prin coprecipitarea ionilor de Fe^{3+} și Fe^{2+} cu hidroxid de amoniu la $pH=8.5-9.5$ și temperatura $t=70-80^\circ C$; spălarea repetată a precipitatului cu apă distilată până la $pH=8.0-8.5$; chemisorbția anionului acidului dodecilbensensulfonic (DBS) în stratul Helmholtz interior, urmată de adsorbția fizică a stratului secundar de DBS. Procedeele conduc la un lichid magnetic stabil pe bază de apă, magnetizația lichidului rezultat ajungând la cca. $15-25\text{ KA/m}$.

Stabilizarea, respectiv dispersarea particulelor magnetice are loc, de obicei, prin agitare mecanică la $t=75-80^\circ C$.

De-a lungul timpului, o contribuție însemnată în producerea și stabilizarea lichidelor magnetice a avut-o colectivul condus de dr. ing. chim. D. Bica din cadrul Laboratorului de lichide magnetice din Timișoara. Cercetările acestui colectiv, preponderent experimentale, au condus la realizarea unor game largi de lichide magnetice pentru o mare varietate de scopuri științifice și aplicații tehnice și biomedicale. Procedeele chimice elaborate pentru sinteza și dispersarea nanoparticulelor magnetice în diferite lichide de bază, nepolare și polare, aplicând metode de stabilizare sterică mono- și dublu strat, respectiv mixtă (sterică-electrostatică), se bazează pe numeroase rezultate originale descrise în 12 brevete de invenție. O sinteză a acestora este prezentată în [Bi1]. Prin diferite metode de caracterizare complexă, magnetică (VSM), reologică, magnetoreologică, microscopic electronică, difuzie de neutroni (SANS) și altele, [Vk2], [Bi4], [Ra2], s-au determinat proprietățile microstructurale, magnetice, de curgere, precum și gradul de stabilitate în diferite condiții specifice aplicațiilor, [Vk1]. Au fost stabilite procedee de obținere pentru peste 50 de tipuri de lichide magnetice bazate pe hidrocarburi ușoare, uleiuri minerale de diferite categorii (pentru echipamente electrice, motoare, lagăre, agregate de vid, etc.), uleiuri sintetice, alcooli, cetone, apă, uleiuri de parafină, vazelină, uleiuri vegetale, etc. Alături de procedeele chimice bazate pe coprecipitarea feritelor magnetice din săruri, au fost abordate și metode fizice de obținere a nanoparticulelor feromagnetice (Fe , Co) prin tehnologii cu plasmă termică, [Bi2]. Metoda cu plasmă vizează obținerea de lichide magnetice cu magnetizații foarte ridicate și de suspensii magnetoreologice.

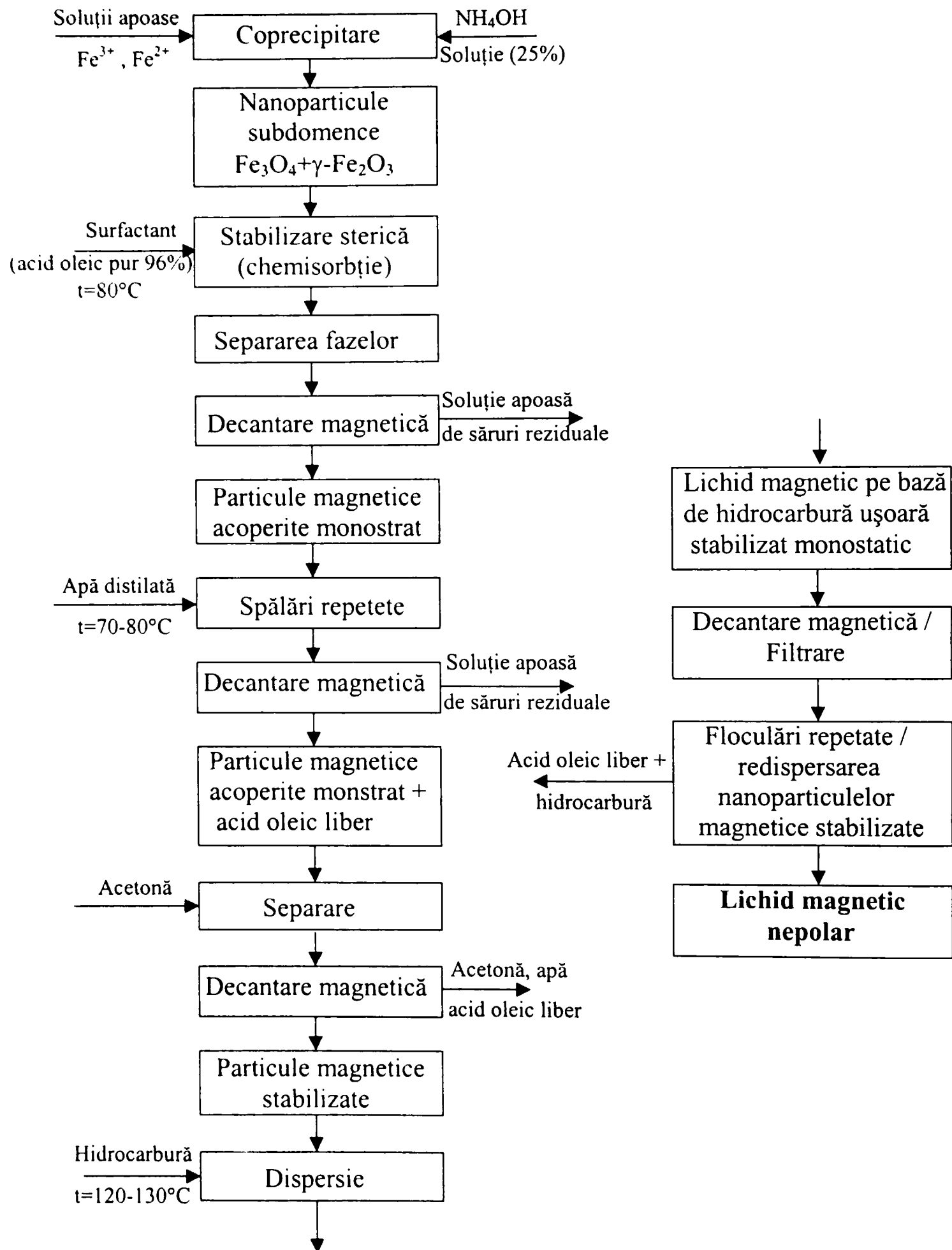


Fig. 1.1.3

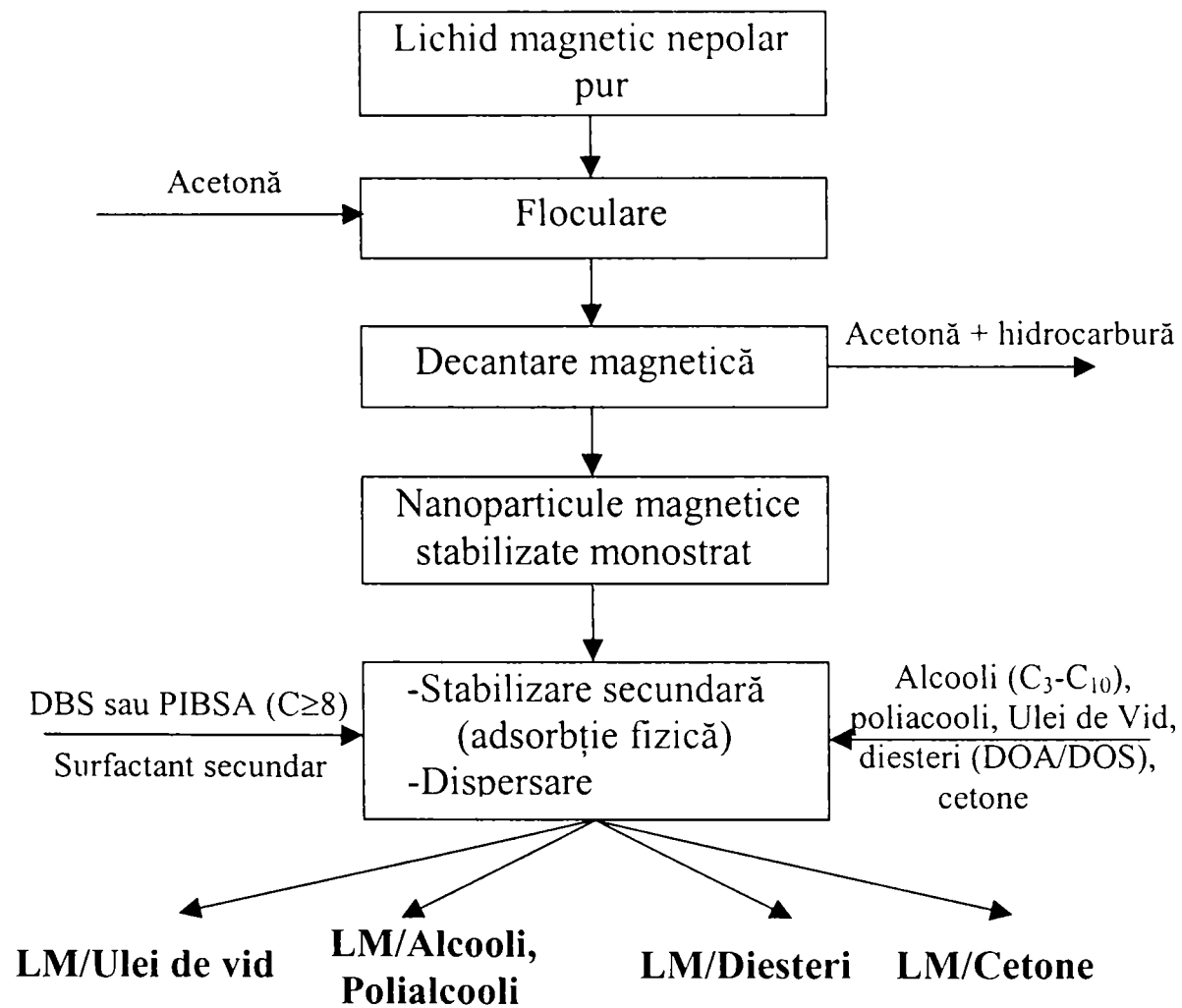


Fig. 1.1.4

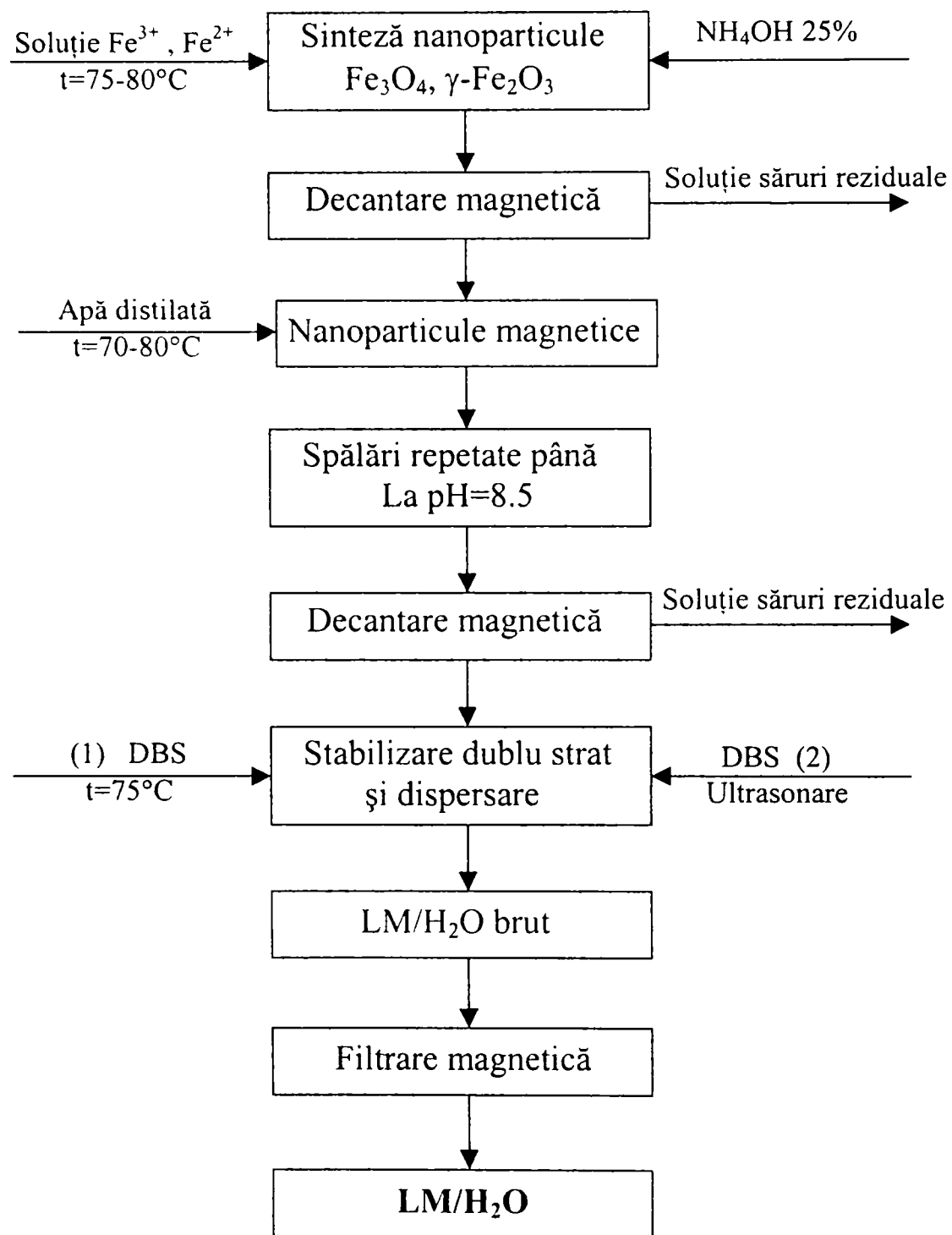


Fig. 1.1.5

1.2 Proprietățile lichidelor magnetice [Rs1], [Vk1]

1.2.1 Proprietățile magnetice

Proprietățile magnetice ale lichidelor magnetice și limitele fizice posibile ale acestora funcție de compoziție și concentrație se pot evalua pe mai multe căi:

- din măsurători reologice, acestea furnizând valoarea fracției volumice hidrodinamice φ_h (ce ia în considerare particula împreună cu stratul de surfactant ce o acoperă), respectiv a diametrului hidrodinamic d_h al particulelor;
- din măsurători de microscopie electronică, din care se determină fracția volumică φ_p a materialului solid dispersat (fără stratul de surfactant), respectiv diametrul fizic d al particulelor;
- din măsurători magnetice, care permit determinarea fracției volumice magnetice φ_m , respectiv a diametrului miezului magnetic d_m (acesta este mai mic decât diametrul fizic, din cauza formării la suprafața particulelor a unui strat fără proprietăți magnetice, având grosimea de aproximativ 0.86 nm în cazul particulelor de magnetită).

Întrebarea *cât de magnetic poate fi un fluid magnetic?* a fost formulată de Scholten, [So1], care a estimat magnetizația de saturație și permeabilitatea inițială în același timp cu menținerea unei vâscozități sensibile. Factorii care limitează magnetizația de saturație sunt legați de:

- necesitatea fluidității, care limitează fracția volumică hidrodinamică a materialului solid (acoperit cu surfactant);
- cerințele pentru asigurarea stabilității față de aglomerare;
- magnetizația (volumică) a materialului particulelor;
- lungimea lanțului de surfactant;
- sedimentarea gravitațională și magnetică, ș.a.m.d.

Granița spre fluide magnetice într-adevăr “fluide” nefiind foarte precisă, Scholten consideră următorul criteriu: absența unei valori de prag și o vâscozitate η a ferrofluidului mai mare cu cel mult două ordine de mărime decât vâscozitatea η_0 a lichidului de bază. Pe scară microscopică, aceasta implică următoarele aspecte:

- nici chiar în câmp magnetic puternic nu trebuie să se formeze aglomerări extinse;
- o fracție volumică limitată a materialului solid.

Pentru a face acest lucru, Scholten folosește modelul particulelor sferice monodisperse, [So1].

Limita superioară a fracției volumice

Vâscozitatea η a unei suspensii de particule neaglomerate crește cu fracția volumică hidrodinamică φ_h a solidului dispersat, [Qu1]. La concentrații mici,

relația este liniară. Spre $\varphi_h=0.1$ apar termenii pătratici, iar la valori mai ridicate ale concentrației, vâscozitatea crește foarte puternic cu concentrația; în plus, curgerea devine nenewtoniană. Valoarea lui φ_h de la care comportarea la curgere devine inacceptabilă depinde în primul rând de ipotezele considerate. Considerând ca limita superioară $\eta=100\eta_0$, Scholten arată că valoarea lui φ_h la care se obține această vâscozitate este mai mică pentru particule nesferice decât pentru cele sferice, pentru particule mici decât pentru cele mai mari, pentru suspensii monodisperse decât pentru cele polidisperse (în care particulele mici folosesc spațiile dintre cele mari). Bazat pe câteva seturi de date din literatură, Scholten găsește valoarea limitei superioare a fracției volumice hidrodinamice ca fiind $\varphi_h=0.5$, [So1].

Practic s-a demonstrat însă că, pentru lichidele magnetice cu particule de magnetită, limita superioară pentru fracția volumică solidă este $\varphi_p=0.25$, iar pentru magnetizația de saturație a ferrofluidelor este $M_s=120 \text{ KA/m}$, indiferent de natura particulelor magnetice.

Influența aglomerării particulelor magnetice

Cea mai comună cauză a instabilității fluidelor magnetice, în special în condițiile existenței câmpurilor magnetice intense și a gradientilor mari de câmp magnetic, rezultă din aglomerarea particulelor datorită unei repulsii sterice ineficiente.

Formarea de aglomerări prin atracția magnetică a particulelor a fost tratată de către de Gennes și Pincus, [Ge1], folosind mecanica statistică analitică. Chantrell și alții, [Ch1], au studiat aglomerarea magnetică într-un sistem bidimensional prin tehnica Monte-Carlo. Aglomerarea reversibilă indusă de câmpul magnetic a fost tratată de Sano și Doi, [Sa1], ca o tranziție de fază de ordinul I gaz-lichid, iar Berkovski și alții, [Be3], și Cebers, [Ce2], folosesc modelul celular, în care fiecare celulă conține o particulă magnetică.

Bacri și Salin, [Ba1], au observat o separare de fază reversibilă în fluide magnetice stabilizate ionic, ea putând fi indusă nu numai prin aplicarea unui câmp magnetic, ci și prin reducerea temperaturii sau creșterea tăriei ionice a soluției. Rosensweig și alții, [Ro3], au observat separarea de fază indusă prin aplicarea unui câmp în fluide magnetice neapoase conținând particule magnetice cu diametrul de 10 nm stabilizate prin surfactare.

În studiul proceselor de aglomerare este adesea folosit raportul dintre energia maximă dipol-dipol și energia termică, numit parametru de cuplaj:

$$\lambda = \frac{M_m^2 V_m^2 \mu_0}{2\pi d_h^3 k_B T} \quad (1.2.1)$$

Dacă $\lambda < 1$, probabilitatea de formare a aglomeratelor este mică; dacă $\lambda \geq 1$, în funcție de natura lichidului, se pot forma trei tipuri de aglomerări, [Iv1]:

- Aglomerate de tip lanț – care apar la aplicarea unui câmp magnetic, sau chiar în absența câmpului magnetic în cazul concentrațiilor mari.
- Aglomerate de tip picătură -- apar la valori relativ mici ale parametrului λ supraunitar. Un factor deosebit de important în asigurarea stabilității coloidale îl

constituie caracterul polidispers al distribuției dimensionale a particulelor. Particulele mari din ferrofluide vor constitui centre de nucleație pentru “picături” (fază concentrată de lichid magnetic), prin care se induce separarea fazelor într-una de concentrație ridicată și alta diluată. Aceste picături sunt sferice dacă sistemul este izotrop, adică dacă separarea fazelor are loc datorită reducerii temperaturii sau creșterii tăriei ionice (condensare izotropă), și alungite în cazul inducerii de fază ca urmare a aplicării unui câmp magnetic exterior.

- Agregate de tip fractal, evidențiate recent prin simulare numerică – acestea apar în cazul ferrofluidelor stabilizate steric dacă surfactantul utilizat nu este compatibil cu lichidul de bază, și în cazul ferrofluidelor stabilizate electrostatic dacă bariera de repulsie electrostatică este prea joasă.

Trebuie subliniat că și calitatea surfactantului utilizat în procesul de stabilizare (de ex. acid oleic tehnic sau chimic pur) și concentrația stabilizantului în exces (neadsorbit chimic) pot influența hotărâtor formarea agregatelor de particule. Astfel, acidul oleic tehnic conține și molecule ale unor acizi saturați, fără dublă legătură, care nu asigură acoperirea corespunzătoare a particulelor, și în plus favorizează asocierea lor prin interacțiuni atractive dintre moleculele acestor acizi. Stabilizantul în exces poate conduce la formarea de micle și deci la structurare în timp a lichidului magnetic, prin care se modifică radical comportarea reologică și alte proprietăți ale acestuia.

La suspensiile ultrastabile de particule foarte fine (5 nm) indiferent de câmpul magnetic aplicat, nu s-a observat fenomenul separării de fază.

Scholten, [Sol], consideră cazul concentrațiilor mari și a energiilor de atracție moderate. El consideră starea dinamică, în care continuu se formează și se redispersează aglomeratele, ca pe un echilibru chimic, și calculează variația entropiei și a energiei interne la trecerea unei particule dintr-un aglomerat în fază dispersă. Cu aceste valori determină momentele dipolare maxime permise (peste care se produce aglomerarea magnetică) și grosimea minimă a stratului de surfactant (sub care apare aglomerarea cauzată de atracția Van der Waals).

Influența grosimii stratului de surfactant

Uzual, grosimea stratului de surfactant $\delta_s = (2 \div 3) \text{ nm}$, în mod excepțional însă se întâlnește și $\delta_s = 1 \text{ nm}$. Stratul de surfactant poate fi îngroșat, atât cât e necesar, pentru ca repulsia sterică să depășească forțele Van der Waals. Trebuie subliniat că o descreștere “nenecesară” a fracției volumice a materialului magnetic (care poate fi efectul îngroșării acestui strat de surfactant) limitează magnetizația de saturație, așa cum rezultă din relația (1.2.2) dedusă de Scholten:

$$M_s < \varphi_m \left(\frac{d_m}{d_h} \right)^3 M_m \quad (1.2.2)$$

unde M_s , reprezintă magnetizația de saturație a lichidului magnetic, M_m – magnetizația de saturație a solidului dispersat, φ_m – fracția volumică a materialului magnetic.

Înlocuind $d_m = d_h - 2\delta_s$ în această relație, rezultă:

$$M_S \leq \delta_m \left(1 - \frac{2\delta_s}{d_h} \right) M_m \quad (1.2.3)$$

Limita superioară a permeabilității magnetice

La aplicarea unui câmp magnetic H , magnetizația unui fluid magnetic diluat este descrisă de funcția lui Langevin:

$$M = M_S L(\xi), \text{ cu } L(\xi) = \coth \xi - \frac{1}{\xi}, \quad \xi = \frac{\mu_0 m H}{k_B T}, \quad (1.2.4)$$

unde ξ reprezintă parametrul lui Langevin, μ_0 - permeabilitatea magnetică a vidului, m - momentul magnetic al unei particule, H - intensitatea câmpului magnetic aplicat.

După cum a observat pentru prima oară Shliomis [Sh1], ecuația (1.2.4) nu este valabilă la concentrații mari ale particulelor magnetice, din cauza interacției mutuale.

Pentru câmpuri slabe ($\mu_0 m H < k_B T$), o soluție aproximativă poate fi obținută înlocuind H cu câmpul dintr-o cavitate sferică plasată într-un mediu continuu de permeabilitate magnetică μ . Se obține astfel:

$$\frac{(\mu - \mu_0)(2\mu + \mu_0)}{\mu} = M_S \frac{m}{k_B T} \quad (1.2.5)$$

Cu $\varphi=0.5$, permeabilitatea inițială ce rezultă din (1.2.5) este $\mu < 29\mu_0$. Limitele parametrilor amintiți calculați de Scholten [So1] sunt prezentate în tabelul 1.2.1.

Tabelul 1.2.1

Materialul miezului	Fe ₃ O ₄	Co	Fe
Diametrul fizic d [nm]	18.9	10.7	9.8
Diametrul magnetic d_m [nm]	16.0	8.7	7.8
Grosimea stratului de surfactant δ_s [nm]	1.0	1.0	1.0
Momentul Dipolar m [Wb·m]	$13.5 \cdot 10^{-25}$	$6.2 \cdot 10^{-25}$	$5.4 \cdot 10^{-25}$
Magnetizația de saturație M_S [kA/m]	170	380	440
Permeabilitatea inițială μ	$29\mu_0$	$29\mu_0$	$29\mu_0$

Curba de magnetizare și determinarea parametrilor distribuției dimensionale a particulelor

În lichidele magnetice, particulele magnetice nu au aceeași dimensiune. Determinarea parametrilor distribuției dimensionale a particulelor – diametrul mediu și abaterea standard – se pot face analizând curba de magnetizare.

Pentru un ferrofluid real, curba de magnetizare diferă de cea a lui Langevin, iar această diferență este atribuită faptului că particulele se află și sub influența câmpurilor locale ale particulelor din fluidele concentrate. În câmpuri slabe, contribuția importantă la magnetizație o au particulele mari, care sunt orientate mai ușor de către câmpul magnetic, în timp ce saturația este determinată de particulele mici, a căror orientare necesită câmpuri intense.

Una dintre metodele propuse pentru determinarea parametrilor distribuției dimensionale este cea a lui Chantrell, [Ch2], [Gd1], care presupune o distribuție lognormală a diametrelor magnetice:

$$f(x) = \frac{1}{xS\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2 \frac{x}{d_0}}{2S^2}\right), \quad (1.2.6)$$

în care x reprezintă diametrul magnetic al unei particule, S – abaterea lui $\ln x$ de la $\ln d_0$, d_0 – diametrul magnetic mediu al particulelor, definit prin relația: $\ln d_0 = \langle \ln x \rangle$, și o magnetizație a ferofluidului descrisă de relația:

$$M = M_S \int_0^\infty L(\xi) f(x) dx, \quad (1.2.7)$$

unde $L(\xi) = \coth \xi - \frac{1}{\xi}$ reprezintă funcția lui Langevin, iar $f(x)dx$ – probabilitatea ca o particulă să aibă diametrul cuprins în intervalul $(x, x+dx)$.

Cu acest model se obțin următoarele relații pentru parametrii distribuției:

$$d_0 = \left[\frac{18k_B T}{\mu_0 \pi M_m} \sqrt{\frac{\chi_{iL}}{3H_0 M_S}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (1.2.8)$$

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{\ln \frac{3\chi_{iL} H_0}{M_S}}, \quad (1.2.9)$$

unde H_0 – valoarea intensității câmpului magnetic la care $M \rightarrow 0$, χ_{iL} – susceptivitatea inițială prezisă de modelul lui Langevin (care neglijează interacțiunile dipolare). Luând în considerare aceste interacțiuni, se ajunge la următoarea relație pentru susceptivitatea magnetică inițială în cazul ferofluidelor diluate sau de concentrații moderate:

$$\chi_i = \frac{\chi_{iL}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)\chi_{iL}}, \quad (1.2.10)$$

cu condiția $\chi_{iL} < 3$.

În prezența unui câmp magnetic slab, susceptivitatea inițială devine:

$$\chi_i = \chi_{iL} \left(1 + \frac{1}{3}\chi_{iL}\right). \quad (1.2.11)$$

Din porțiunea liniară a curbei inițiale de magnetizare $M=M(H)$ se determină susceptivitatea inițială χ_i , iar din porțiunea de saturație a curbei $M=M(1/H)$ rezultă M_S și H_0 .

Pshenichnikov [Ps1], Ivanov, [Iv2], și al. consideră o distribuție lognormală, dar țin seama și de dependența momentelor magnetice ale particulelor de diametrul lor, utilizând pentru magnetizația ferofluidelor următoarea relație:

$$M = n \int_0^{\infty} m(x) L(\xi) f(x) dx, \quad (1.2.12)$$

cu $n f(x) dx$ - densitatea de particule cu diametrul magnetic în intervalul $(x, x+dx)$.

Un neajuns al funcției lognormale de distribuție îl constituie descreșterea mai lentă în regiunea diametrelor mari, unde pot apare erori semnificative.

Ivanov, [Iv2], propune un model care ia în considerare, la calculul magnetizației, pe lângă energia de interacțiune cu câmpul aplicat, și energia de interacțiune dipol-dipol, energia de interacțiune Van der Waals și energia de repulsie sterică, și propune o distribuție "gamma" a diametrelor:

$$f(x) = \frac{x^S \exp\left(-\frac{x}{d_0}\right)}{d_0^{S+1} \Gamma(S+1)}, \quad (1.2.13)$$

unde Γ reprezintă funcția Γ -Euler.

Rașa, [Ra1], propune de asemenea o metodă de analiză magneto-granulometrică pentru lichide magnetice ideale luând în considerare această dependență a momentelor magnetice de diametru. Obține următoarele relații pentru calculul parametrilor distribuției:

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{\ln \frac{3 \chi_{iL} H_0}{M_S}} \quad (1.2.14)$$

$$d_0 = \left[\frac{6 k_B T}{\mu_0 \pi H_0 M_m} \sqrt{\frac{M_S}{3 \chi_{iL} H_0}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (1.2.15)$$

El prelucrează curbele de magnetizare statică pentru mai multe seturi de probe, măsurate cu un magnetometru cu probă vibrată, folosind 12 metode de analiză magneto-granulometrică. Rașa concluzionează că funcția de distribuție adecvată este cea lognormală, iar modelul lui Ivanov cu distribuția lognormală dă cele mai bune rezultate. În condițiile în care interacțiunile dintre particule sunt neglijabile, acest model conduce la aceleași rezultate ca și modelul ideal ce ia în considerare dependența momentelor magnetice de diametru.

Cu aceste metode, pentru lichide magnetice stabile, Rașa determină pe lângă parametrii distribuției dimensionale, și fracția volumică magnetică, grosimea stratului nemagnetic al particulelor, susceptivitatea inițială, magnetizația de saturație și densitatea de particule dispersate.

În evoluția proprietăților magnetice și reologice ale coloizilor concentrați, polidispersivitatea particulelor joacă un rol important, [Ps2]. O distribuție dimensională largă permite prepararea unui coloid cu magnetizație puternică și vâscozitate scăzută.

Susceptivitatea magnetică este și ea afectată de lărgimea distribuției. Susceptivitatea inițială a coloizilor polidispersi o poate depăși cu trei ordine de mărime pe cea a coloizilor monodispersi având același diametru magnetic.

Susceptivitatea magnetică inițială și descreșterea remanenței

Pentru un sistem de particule identice dispersate într-un solid, de exemplu un fluid magnetic „înghețat” cu axele sale de anizotropie ușoară orientate întâmplător, există o anumită temperatură T_B deasupra căreia particulele sunt superparamagnetice, iar susceptivitatea inițială în aproximația lui Langevin este dată de:

$$(\chi_{iL})_{T>T_B} = \frac{n m^2}{3 k_B T \mu_0}, \quad (1.2.16)$$

unde n reprezintă densitatea de particule, m - momentul magnetic al unei particule. Formula este valabilă pentru coloidul monodispers, în aproximația Langevin (deci cu neglijarea interacțiunilor dipolare dintre particule).

Pentru $T < T_B$, momentele magnetice ale particulelor sunt “blocate”, iar susceptivitatea inițială Langevin este dată de:

$$(\chi_{iL})_{T<T_B} = \frac{n^2 m^2}{3 K_u \mu_0}, \quad (1.2.17)$$

în care K_u reprezintă constanta de anizotropie, uniaxială în acest caz. Prin urmare, în dependența susceptibilității de temperatură, se va observa la temperatura de blocare T_B un vârf (pic) ascuțit.

În lichidele magnetice reale, particulele au o anumită distribuție dimensională, deci o distribuție a temperaturilor de blocare. Ca rezultat, picul este observat la aceeași temperatură T_g a cărei mărime este determinată de lărgimea distribuției temperaturilor de blocare $f(T_B)$. Un asemenea pic a fost observat pentru un ferrofluid solidificat de către Tari și al., [Ta1], O’Grady și al., [Gd2]. El Hilo și al., [EH1], au dedus o expresie pentru χ_{iL} luând în considerare efectele interacțiunilor dipolare.

O măsură a distribuției temperaturilor de blocare $f(T_B)$ poate fi obținută măsurând variația remanenței cu creșterea temperaturii după saturarea prealabilă a sistemului într-un câmp magnetic puternic. Când temperatura crește de la $T \sim 0K$, remanența descrește datorită scăderii fracțiunii de particule blocate, căci ele se relaxează progresiv peste bariera energiei de anizotropie.

El Hilo și al., [EH1], au fitat distribuția temperaturilor de blocare cu o funcție lognormală; astfel ei au putut calcula variația lui χ_{iL} cu temperatura în cazul absenței interacțiunilor prin măsurarea descreșterii remanenței și cunoscând mărimea medie a particulelor din măsurători magnetice. S-a obținut o bună concordanță între variația calculată a lui χ_{iL} cu temperatura și cea determinată experimental pentru lichide magnetice diluate conținând particule foarte mici ($< 5 nm$), la care interacțiunile sunt neglijabile.

Intensificarea interacțiunii dintre particule (fie prin mărirea concentrației, fie prin creșterea mărimii momentelor magnetice ale particulelor) determină o creștere a temperaturii T_g . Totuși, la unele ferrofluide variația lui χ_{iL} cu temperatura este aproximativ aceeași la toate concentrațiile analizate. Acest fapt a fost atribuit prezenței aglomeratelor, care nu se schimbă cu diluarea, explicație ce a fost

confirmată de studiile asupra stabilității ferrofluidelor în prezența unui gradient de câmp magnetic. Prin urmare, măsurarea lui χ_{il} ca funcție de temperatură și concentrație poate fi un test sensibil la prezența clusterelor în lichidele magnetice.

1.2.2 Proprietățile reologice

Reologia este definită ca fiind știința deformării și a curgerii materiei. Cunoașterea comportării reologice a suspensiilor implică următoarele aspecte:

- evidențierea factorilor legați de structura sistemului (compoziție, vâscozitatea celor două faze, distribuția dimensională a particulelor, natura stabilizantului, etc.);
- dependența vâscozității de viteza de forfecare;
- dependența vâscozității de istoria probei, sau mai concret de efectul timpului asupra acesteia ca urmare a proceselor de structurare și destructurare, cunoscute sub denumirea de reopexie și tixotropie.

Conceptul fundamental al reologiei este cel de *vâscozitate*, introdus prin postulatul lui Newton pentru curgerea Couette plan-paralelă:

$$\tau = \eta \dot{\gamma}, \quad (1.2.18)$$

în care $\tau = dF/dA$ reprezintă forța pe unitatea de arie necesară pentru a produce deplasarea fluidului și se numește tensiune de forfecare locală; $\dot{\gamma} = du/dy$ reprezintă viteza de forfecare sau gradientul de viteză; η este o măsură a rezistenței la curgere și se numește vâscozitate dinamică.

Dacă $\eta = \text{constant}$, fluidul se numește newtonian, iar dacă $\eta = f(\dot{\gamma})$, fluidul se numește nnewtonian (o asemenea comportare o au suspensiile concentrate, emulsiile și fluidele polimerice).

Deoarece tensiunea depinde de orientarea suprafeței, este convenabil să se definească o mărime care să descrie complet starea de tensiune într-un punct spațial. Această mărime este un tensor de ordinul doi, numit *tensorul tensiunilor*, care poate fi reprezentat prin matricea:

$$\mathbf{T} = T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.2.19)$$

Un element T_{ij} al matricii reprezintă componenta după axa cu indicele j a tensiunii pe o față elementară normală la axa cu indicele i . Tensorul tensiunilor este simetric, adică $T_{ij} = T_{ji}$. Tensiunea pe o suprafață elementară de normală \mathbf{n} , va putea fi exprimată simplu ca $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ sau $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$. Simetria tensorului tensiunilor implică faptul că numai șase dintre cele nouă componente sunt distincte.

În cazul particular al unui fluid în repaus, tensiunea are numai componente normale de compresiune, adică:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.20)$$

unde p este presiunea hidrostatică. Matricial relația se scrie $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, \mathbf{I} fiind tensorul unitate.

Pentru un fluid în curgere, pe lângă tensiunile normale apar și tensiuni tangențiale de frecare vâscoasă. Este convenabil să păstrăm termenul corespunzător presiunii hidrostatice și să scriem tensorul tensiunilor sub forma:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.2.21)$$

unde $\boldsymbol{\tau}$ este tensorul tensiunilor vâscoase.

Deși, în general tensorul tensiunilor are șase componente distincte, este posibil să se determine în fiecare punct spațial o orientare locală particulară a sistemului de coordonate astfel încât tensorul tensiunilor să aibă numai componente diagonale. Acesta poartă numele de tensiuni principale, și fiind tensiuni normale (de întindere sau compresiune), sunt notate de obicei cu σ , adică:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.2.22)$$

sau $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, cu $\boldsymbol{\sigma}$ modulul tensiunilor principale.

Variația vitezei fluidului în vecinătatea unui punct spațial x se poate scrie sub forma $\mathbf{v}(x + dx) = \mathbf{v}(x) + dx \nabla \mathbf{v}$, unde tensorul gradient de viteză este:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (1.2.23)$$

Acest tensor poate fi întotdeauna descompus într-o componentă simetrică \mathbf{S} și una antisimetrică \mathbf{A} , $[\text{Rs}2]$, $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{S} + \mathbf{A}$.

Tensorul simetric \mathbf{S} corespunde vitezelor de deformare, cu următoarea semnificație fizică a componentelor: componentele diagonale reprezintă viteza de alungire relativă a unor segmente infinitezimale paralele cu axele ce coordonate; componentele nediagonale reprezintă jumătate din viteza de modificare a unghiului drept dintre două segmente infinitezimale paralele cu axele de coordonate, luată cu semn schimbat.

Trebuie remarcat că în cazul fluidului incompresibil, ecuația de continuitate este $\nabla \mathbf{v} = 0$.

Ecuția constitutivă a fluidului reprezintă legea fizică ce corelează tensorul tensiunilor \mathbf{T} cu tensorul vitezelor de deformare \mathbf{S} . În cazul cel mai simplu al fluidului newtonian incompresibil, avem:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{S} \quad (1.2.24)$$

unde η reprezintă vâscozitatea dinamică.

Caracteristicile reologice ale suspensiilor

Suspensiile reprezintă sisteme bifazice în care faza continuă este un lichid, iar faza dispersată este alcătuită din particule solide. Proprietățile reologice ale suspensiilor depind de natura și proprietățile celor două faze, de mărimea și forma particulelor dispersate, prezența unor aditivi și de condițiile hidrodinamice.

La concentrații mici, comportarea reologică a unei suspensii este newtoniană dacă mediul de dispersie este newtonian. Comportarea newtoniană implică următoarele caracteristici:

- singura tensiune generată în curgerea de forfecare simplă este tensiunea de forfecare τ , diferențele dintre două tensiuni normale fiind nule;
- vâscozitatea de forfecare este independentă de viteza de forfecare;
- vâscozitatea este constantă în raport cu timpul forfecării, iar tensiunea tinde la zero imediat ce forfecarea încetează;
- vâscozitățile măsurate în diferite tipuri de deformare sunt într-o relație de proporționalitate simplă unele cu altele, de exemplu vâscozitatea măsurată într-o curgere extensională uniaxială este întotdeauna mai mare de trei ori decât cea măsurată în curgerea de forfecare simplă.

Când concentrația crește, interacțiunile care apar între particule conduc la deviații de la comportarea newtoniană. Pe lângă forțele hidrodinamice (de origine vâscoasă) se manifestă și interacțiuni de natură coloidală (atracții Van der Waals, interacțiuni electrostatice a particulelor, interacțiuni dipolare în cazul lichidelor magnetice), precum și interacțiuni termodinamice (acestea devenind semnificative în cazul lichidelor magnetice, unde dimensiunea particulelor este sub $1 \mu\text{m}$ și deci mișcarea browniană devine importantă).

Prin agregarea particulelor într-o suspensie, se obțin particule de altă formă, ceea ce conduce la modificarea vâscozității. De asemenea, și mono- sau poli-dispersitatea particulelor afectează vâscozitatea suspensiei.

În cazul suspensiilor de particule coagulate, vâscozitatea dinamică depinde puternic de viteza de forfecare. Aceste suspensii devin nenevtoniene atunci când concentrația depășește o anumită limită.

Suspensiile conținând particule cu densitate mare sunt instabile, sedimentând în timp. Ca urmare, particulele cu tendință de coagulare aderă unele la altele imediat ce ajung în contact, înglobând în interstițiile lor o mare cantitate din faza dispersă. La aplicarea tensiunii, particulele se separă sau își schimbă starea de coagulare, ceea ce conduce la o comportare plastică, tixotropă și elastică. Pe de altă parte, particulele fără tendință de coagulare sunt separate unele de altele și la sedimentare dau o împachetare foarte strânsă; pentru deformare în acest caz este necesară o energie considerabilă. Pentru ca un astfel de sistem să curgă este

necesară desfacerea împachetării și creerea de interstiții. Ca urmare, crește volumul aparent al sistemului, fenomen numit dilatanță.

Vâscozitatea suspensiilor de particule solide în medii newtoniene

Influența concentrației de particule

În general, suspensiile diluate de particule sferice în medii newtoniene se comportă newtonian. Valoarea concentrației critice, peste care comportarea reologică a suspensiilor se modifică, depinde de natura, forma și dimensiunile particulelor solide.

În descrierea vâscozității suspensiilor diluate ($\varphi \leq 10\%$) s-au înregistrat progrese remarcabile. Studiile esențiale pornesc de la lucrarea lui Einstein (1906) referitoare la suspensii de particule sferice monodispersate, luând în considerare însă forme diferite, sarcina electrică, interacțiunile hidrodinamice ce se manifestă când o particulă ajunge în vecinătatea alteia. Pentru calculul vâscozității unei suspensii foarte diluate, Einstein, [Ei1], deduce relația:

$$\eta = \eta_0 (1 + 2.5\varphi) \quad (1.2.25)$$

cu η_0 reprezintă vâscozitatea mediului de dispersie, φ raportul dintre volumul particulelor și volumul total al suspensiei, numit fracție volumică, iar coeficientul 2.5 reprezintă factorul de formă pentru particule sferice (pentru particule nesferice are valori mai mari).

În aplicarea formulei lui Einstein, φ nu depășește în mod obișnuit 2÷3%. În cazul lichidelor magnetice, concentrațiile particulelor sunt de obicei de ordinul a câteva zeci de procente, prin urmare folosirea acestei formule nu este adecvată.

Când se include în calcul interacțiunile dintre particule, situația devine mai complicată, ea conducând în general la apariția unor termeni de ordin superior în φ

$$\eta = \eta_0 (1 + 2.5\varphi + k\varphi^2 + \dots), \quad (1.2.26)$$

Formula lui Batchelor, [Bt1], este una dintre cele mai substanțiale teoretic. Astfel, pentru suspensii de sfere rigide, cu o precizie până la termenii pătratici, vâscozitatea este descrisă de:

$$\eta = \eta_0 [1 + 2.5\varphi + (5.2 + 0.97 + 0)\varphi^2], \quad (1.2.27)$$

pentru forfecare simplă, respectiv:

$$\eta = \eta_0 [1 + 2.5\varphi + (5.2 + 0 + 2.4)\varphi^2], \quad (1.2.28)$$

pentru curgerea extensională.

Coeficientul lui φ^2 cuprinde trei contribuții:

- prima (=5.2) provine din interacțiunile hidrodinamice pure;
- a doua este generată de mișcarea browniană;
- a treia este datorită tensiunilor hidrodinamice suplimentare ca rezultat al (ne)deformării microstructurii.

Domeniul de aplicabilitate al formulei lui Batchelor, deși mai larg decât cel al formulei lui Einstein, este totuși foarte limitat.

Teoria suspensiilor diluate acoperă domeniul $\varphi \leq 10\%$, în care vâscozitatea suspensiei nu o va depăși cu mai mult de 40% pe cea a fazei continue.

Pentru concentrații mai ridicate, problema vâscozității a fost abordată de Guth și Simha, [Gu1], Eirich și Simha, [Er1]. Ei au extins ecuația lui Einstein folosind o metodă a “reflexiilor succesive”, presupunând că o perturbare a curgerii în jurul unei prime sfere este compensată de o curgere suplimentară în jurul celei de a doua sferă, pentru a satisface condiția de continuitate a vitezei la suprafața acestora. Utilizând o singură reflexie, ei au obținut:

$$\eta = \eta_0 \frac{1 + 0.5\varphi - 0.5\varphi^2}{1 - 2\varphi - 9.6\varphi^2} \quad (1.2.29)$$

Influența mărimii particulelor și a distribuției dimensionale a acestora

Mărimea particulelor influențează sensibil vâscozitatea suspensiilor monodisperse, aceasta crescând cu micșorarea dimensiunii particulelor. Dependența vâscozității de mărimea medie a particulelor poate fi descrisă de relația lui Mooney, [Mo1]:

$$\eta = \eta_0 \exp \frac{2.5\varphi}{1 - k\varphi} \quad (1.2.30)$$

unde k este un coeficient de interacțiune hidrodinamică ce crește cu micșorarea diametrului d al particulelor conform relației empirice:

$$k = 1.079 + \exp\left(\frac{0.010}{d}\right) + \exp\left(\frac{0.0029}{d^2}\right) \quad (1.2.31)$$

Referitor la influența distribuției dimensionale a particulelor, ea nu este semnificativă în regiunea concentrațiilor mici, însă devine importantă la concentrații mari.

Influența temperaturii

Dependența vâscozității suspensiilor de temperatură este similară cu cea a fazei continue, fiind descrisă de o relație de tip Arrhenius (1889), [Ne1]:

$$\eta = A \exp\left(\frac{B}{T}\right), \quad (1.2.32)$$

unde A reprezintă o constantă fără o semnificație fizică, $B = E_a / k_B$, E_a energia de activare vâscoasă, k_B constanta lui Boltzmann iar T temperatura absolută. Așadar, relația (1.2.32) poate fi scrisă sub forma:

$$\eta = A \exp\left(\frac{E_a}{k_B T}\right) \quad (1.2.33)$$

În cazul fluidelor, temperatura le influențează vâscozitatea prin intensificarea mișcării browniene a particulelor și în continuare desfacerea unor eventuale agregate. Variația temperaturii poate duce de asemenea la modificări fizico-chimice în interiorul lichidelor magnetice, cum ar fi: desorbția lanțurilor de surfactant, micelizarea surfactantului liber, schimbarea calității solventului, fiecare dintre acestea putând fi rezultatul destabilizării fluidului.

Influența presiunii și a mediului de dispersie

Vâscozitatea crește exponențial cu presiunea izotropă, însă schimbările sunt foarte mici pentru presiuni ce diferă de presiunea atmosferică cu până la un barr. Așadar, pentru scopuri practice, efectul presiunii se ignoră, cu excepția situației când domeniul de utilizare implică presiuni înalte (de ex. la lubrefianți).

Vâscozitatea suspensiilor este proporțională cu cea a fazei continue. Termenul η_0 ce apare în toate ecuațiile reologice este considerat a fi vâscozitatea fazei continue care include agentul de stabilizare, și nu cea a fluidului de imersie pur.

Atunci când faza continuă prezintă caracteristici nenewtoniene, acestea se reflectă marcant în proprietățile suspensiilor.

Suspensii de particule nesferice

Vâscozitatea suspensiilor de particule nesferice depinde în mare măsură de modul de orientare a acestora față de direcția de curgere. Orientarea particulelor este rezultatul competiției între mișcarea de rotație browniană, care tinde să orienteze haotic particulele, și forțele hidrodinamice, care tind să orienteze particulele în direcția de curgere a fluidului. Expresia acestei competiții între mișcarea browniană și forțele hidrodinamice este dată de numărul lui Peclet, care pentru curgerea de forfecare simplă (laminară) este descris de relația:

$$P_e = \frac{\dot{\gamma}}{D_r} \quad (1.2.34)$$

unde $D_r = k_B T / \zeta_r$ reprezintă coeficientul difuziei de rotație browniană, iar ζ_r este coeficientul de frecare la rotație.

Pentru particule mici, viteze de forfecare și vâscozități ale lichidului de bază reduse, predomină mișcarea browniană. La viteze de forfecare și vâscozități ridicate, respectiv particule mari predomină interacțiunile hidrodinamice.

Vâscozitatea lichidelor magnetice în câmp magnetic uniform

În câmp magnetic uniform, proprietățile reologice ale lichidelor magnetice se modifică. Rotația particulelor este împiedicată de către câmpul magnetic aplicat, ceea ce se reflectă într-o creștere a vâscozității.

Shliomis a dezvoltat o teorie magnetoreologică self-consistentă, [Sh2], în modelul de dipol rigid, luând în considerare mișcarea browniană și rotația particulelor indusă de curgere. Conform acestui model, vâscozitatea efectivă a lichidelor magnetice în prezența unui câmp magnetic exterior este descrisă de:

$$\eta(H) = \eta(0) + \frac{3}{2} \eta(0) \varphi_h \frac{\xi - \tanh \xi}{\xi + \tanh \xi} \sin^2 \beta \quad (1.2.35)$$

unde $\eta(0)$ reprezintă vâscozitatea lichidului magnetic în absența câmpului magnetic, φ_h est fracția volumică hidrodinamică a particulelor, β este unghiul

dintre direcția câmpului magnetic aplicat și vorticitatea locală a fluidului ($\Omega = (1/2)\nabla \times \mathbf{v}$), \mathbf{v} viteza fluidului, $\xi = \frac{\mu_0 m H}{k_B T}$ parametrul lui Langevin.

Pentru câmpuri slabe ($\xi \ll 1$), creșterea efectivă a vâscozității va fi proporțională cu ξ^2 :

$$\Delta\eta = \eta(H) - \eta(0) \approx \xi^2 \quad (1.2.36)$$

În câmpuri magnetice intense ($\xi \gg 1$) apare saturația:

$$\Delta\eta_\infty = \frac{3}{2}\eta(0)\varphi_h \sin^2 \beta \quad (1.2.37)$$

Această valoare a fost obținută folosind teoria momentelor magnetice “blocate”, deci corespunde cazului $\sigma \gg 1$, unde $\sigma = \frac{K_u V_m}{k_B T}$ este un parametru ce

determină legătura dintre gradele de libertate mecanică și magnetică ale particulelor. Pentru valori finite ale lui σ se presupune că momentele magnetice sunt numai parțial blocate, deci pentru lichide magnetice reale $\Delta\eta_\infty$ va avea valori în intervalul $\left(0 \div \frac{3}{2}\eta(0)\varphi_h \sin^2 \beta\right)$. Funcția $\Delta\eta_\infty(\sigma)$ a fost calculată în [Ce3].

Având aceste informații, se poate determina constanta efectivă de anizotropie a particulelor pe baza datelor vâscozimetrice.

1.3 Acțiuni ponderomotoare în lichide magnetice

Câmpul magnetic exercită forțe de volum și de suprafață asupra lichidelor magnetice ceea ce are drept efect stabilirea unei presiuni suplimentare în raport cu cea determinată de câmpul gravitațional, numită presiunea magnetică. Existența acestor forțe și a presiunii a condus la o mare diversitate de aplicații în tehnică.

1.3.1 Forțe de volum exercitate asupra lichidelor magnetice

Pentru densitatea de volum a forței se pot obține mai multe expresii, [Ro1], [Lu1], [DS11], [DS2], între care:

$$\mathbf{f}_v = \rho_v \mathbf{E} + (\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{H} - \text{grad} \left[\int_0^E \mathbf{D} \cdot d_s E + \int_0^H \mathbf{B} \cdot d_s H - \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E d_s E - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H d_s H \right] \quad (1.3.1)$$

în care, în afara vectorilor de câmp care au simbolurile consacrate, s-au făcut notațiile:

ρ - densitatea de masă a lichidului magnetic;

ρ_v - densitatea sarcinii libere cu distribuție volumică în lichid;

ε - permitivitatea electrică lichidului;

μ - permeabilitatea magnetică a lichidului;

τ - temperatura;

d_s - simbolizează o diferențială substanțială,

sau:

$$\mathbf{f}_v = \rho_v \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + (\mathbf{D} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \text{grad} \left[\int_0^E \mathbf{D} \cdot d_s E + \int_0^H \mathbf{B} \cdot d_s H - \right. \\ \left. - \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E d_s E - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H d_s H \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_r \mu_r \mathbf{S}) \quad (1.3.2)$$

în care $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ reprezintă pătratul vitezei de propagare a luminii în vid.

Pentru cazul câmpurilor electrostatice, respectiv magnetostatice sau în regim cvazistaționar, din medii izotrope, fără polarizări permanente, dar neliniare, densitățile de volum ale forțelor rezultă în formele:

$$\mathbf{f}_{v_e} = \rho_v \mathbf{E} + \rho \text{grad} \int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE \quad (1.3.3)$$

$$\mathbf{f}_{v_e} = \rho_v \mathbf{E} - \frac{E^2}{2} \text{grad} \varepsilon + \text{grad} \left[\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} - \int_0^E D dE + \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E dE \right] \quad (1.3.4)$$

$$\mathbf{f}_{v_m} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \text{grad} \left[\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \quad (1.3.5)$$

De asemenea expresiile mai pot fi puse în formele:

$$\mathbf{f}_{v_e} = \rho_v \mathbf{E} - (\mathbf{D} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \text{grad} \left[\int_0^E D dE + \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E dE \right] \quad (1.3.6)$$

$$\mathbf{f}_{v_m} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{H^2}{2} \text{grad} \mu + \text{grad} \left[\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} - \int_0^H B dH + \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H dH \right] \quad (1.3.7)$$

$$\mathbf{f}_{v_m} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \text{grad} \left[\int_0^H B dH - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H dH \right] \quad (1.3.8)$$

Pentru lichidele magnetice $J=0$, $\mu=\mu(H,\rho,\tau)$ iar relația (1.3.8) devine:

$$\mathbf{f}_{v_m} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \text{grad} \int_0^H B dH + \text{grad} \int_0^H \rho H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \quad (1.3.9)$$

Observând că $I = \int_0^H B dH$ este o funcție de H , ρ și τ , pentru lichide

magnetice omogene pe porțiuni și la temperatură constantă se poate scrie, [DS12]:

$$\text{grad} I = \frac{\partial I}{\partial H} \text{grad} H = B \text{grad} H, \text{ și deci (1.3.9) devine:}$$

$$\mathbf{f}_{v_m} = \text{grad} \int_0^H \rho H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \quad (1.3.10)$$

Dacă se ține seama de legea legăturii dintre vectorii \mathbf{B} , \mathbf{H} și \mathbf{M} și de faptul că aceștia sunt coliniari, expresia (1.3.10) devine:

$$\mathbf{f}_{v_m} = \text{grad} \int_0^H \rho H \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\mu_0 \frac{M+H}{H} \right)_{H,\tau} dH = \text{grad} \mu_0 \int_0^H \rho \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \quad (1.3.11)$$

1.3.2 Presiunea de natură electromagnetă exercitată în lichid

Considerând un lichid fără sarcină liberă distribuită și fără densități de curent de conducție, expresia densității volumice a forței ce se exercită într-un punct din lichid, ținând seama de (1.3.3) și (1.3.5), este:

$$\mathbf{f}_v = \mathbf{f}_{v_e} + \mathbf{f}_{v_m} = \rho \text{grad} \left[\int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \quad (1.3.12)$$

Admițând că densitatea de masă nu depinde de presiune, ipoteză satisfăcută cu o precizie suficientă de către lichide, se poate calcula componenta suplimentară a presiunii datorită câmpului electromagnetic pornind de la condiția de echilibru:

$$\mathbf{f}_{em} = \text{grad} p_{em} \quad (1.3.13)$$

Cu aceasta se obține:

$$\text{grad} p_{em} = \rho \text{grad} \left[\int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \quad (1.3.14)$$

Pentru mediile care au densitatea de masă constantă, soluția ecuației (1.3.14) este:

$$p_{em} = \rho \left[\int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] + C \quad (1.3.15)$$

în care C reprezintă o constantă de integrare.

Fie un lichid magnetic având o suprafață de separație cu aerul, S_0 , numită suprafață liberă. Notând cu H_0 și E_0 valorile intensității câmpului magnetic și, respectiv, ale intensității câmpului electric la suprafața liberă a lichidului magnetic nelinier (lichid paramagnetic), dar lipsit de histereză și aflat în stare statică, constanta de integrare poate fi determinată, [DS11], și prin aceasta se poate ajunge la expresia presiunii suplimentare, de natură electromagnetă ce se manifestă în lichidul magnetic sub forma:

$$p_{cm} = \rho \left[\int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2}{2\varepsilon_1^2 \varepsilon_0} D_{10n_{12}}^2 - \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{2\mu_1^2 \mu_0} B_{10n_{12}}^2 - \int_0^{E_{10}} P dE - \mu_0 \int_0^{H_{10}} M dH \quad (1.3.16)$$

1.3.3 Forțe de suprafață

Tensorul tensiunilor fictive este, tensorul de ordinul doi a cărui divergență este egală în fiecare punct de continuitate, cu densitatea locală a forței volumice exercitată de câmpul electromagnetic asupra mediilor corporale, [Ro1]. Notând cu $\tilde{\mathbf{T}}_f$ acest tensor și prin \mathbf{f}_v densitatea de volum a forței, se poate scrie:

$$\mathbf{f}_v = \text{div} \tilde{\mathbf{T}}_f \quad (1.3.17)$$

sau în formă integrală:

$$\mathbf{F}_v = \int_{v_\Sigma} \mathbf{f}_v dv = \int_{v_\Sigma} \text{div} \tilde{\mathbf{T}}_f dv = \oint_\Sigma \mathbf{t}_f(\mathbf{n}) dS \quad (1.3.18)$$

unde Σ reprezintă suprafața ce delimitează volumul v_Σ de lichid, iar $\mathbf{t}_f(\mathbf{n})$ este valoarea vectorială a tensorului $\tilde{\mathbf{T}}_f$, asociată normalei exterioare \mathbf{n} la suprafața Σ .

Componentele tensorului $\tilde{\mathbf{T}}_f$ sunt calculate în [Pe1], [Co1], și au formele:

$$T_{f_{ii}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \int_0^E \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E dE - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \int_0^H \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} H dH + w_{elm} + E_i D_i + H_i B_i$$

$$T_{f_{ij}} = E_i D_j + H_i B_j \quad (1.3.19)$$

în care w_{elm} reprezintă densitatea de energie electromagnetică, iar valoarea vectorială a tensorului este:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \left[-\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \int_0^E \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E dE - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \int_0^H \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} H dH + w_{elm} \right] \mathbf{n} + \mathbf{E}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.3.20)$$

În [DS13] se demonstrează că densitatea de volum a forțelor este egală și de semn contrar cu divergența tensorului câmpului electromagnetic $\tilde{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{f}_v = -\text{div} \tilde{\mathbf{T}} \quad (1.3.21)$$

Rezultă că suma tensorilor $\tilde{\mathbf{T}}$ și $\tilde{\mathbf{T}}_f$ poate fi reprezentată în mod unic de un tensor a cărui divergență este nulă. Mai mult, pentru că \mathbf{f}_v este funcție numai de mărimile de stare ale câmpului electromagnetic, și tensorii $\tilde{\mathbf{T}}$ și $\tilde{\mathbf{T}}_f$ trebuie să

depindă în mod exclusiv numai de aceste mărimi. Impunând această condiție va rezulta un tensor solenoidal nul și, în consecință, așa cum se arată în [DS11]:

$$\tilde{\mathbf{T}} = -\tilde{\mathbf{T}}_f \quad (1.3.22)$$

adică tensorul tensiunilor fictive introdus în teoria Maxwell-Hertz, pentru a calcula rezultanta forțelor de volum exercitate asupra mediilor, este egal și de semn contrar cu tensorul câmpului electromagnetic introdus în [DS13].

Formulele obținute anterior sunt dezvoltate în [DS11] pentru a stabili expresia forței superficiale ce se exercită la suprafața de separație între două medii având proprietăți de material, electrice și magnetice diferite, cele două medii fiind separate prin suprafața S_{12} , fig.1.3.1. Cu indicele 1 sunt notate mărimile corespunzătoare mediului 1 și cu 2 cele corespunzătoare mediului 2 , în același punct al suprafeței S_{12} , dar pe fețele corespunzătoare. Cu \mathbf{n}_{12} este notată normala la suprafața S_{12} , în același punct și orientată de la mediul 1 la mediul 2 . Cu aceste notații și în condițiile în care suprafața de separație este lipsită de sarcini electrice libere, precum și densitatea unor eventual curenți superficiali pe suprafața S_{12} este nulă, prin raționamente de trecere la limită aplicate volumului cilindric infinitesimal reprezentat hașurat în fig.1.3.1, se obține pentru densitatea de suprafață a forței expresia, [DS11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s = & - \left[\rho_1 \int_0^{E_1} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E dE - \int_0^{E_1} D dE + \rho_1 \int_0^{H_1} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H dH - \int_0^{H_1} B dH \right] \mathbf{n}_{12} - \\ & - \left[-\rho_2 \int_0^{E_2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E dE + \int_0^{E_2} D dE - \rho_2 \int_0^{H_2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H dH + \int_0^{H_2} B dH \right] \mathbf{n}_{12} + \\ & + \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) D_{2n_{12}}^2 + \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) B_{2n_{12}}^2 \right] \mathbf{n}_{12} \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

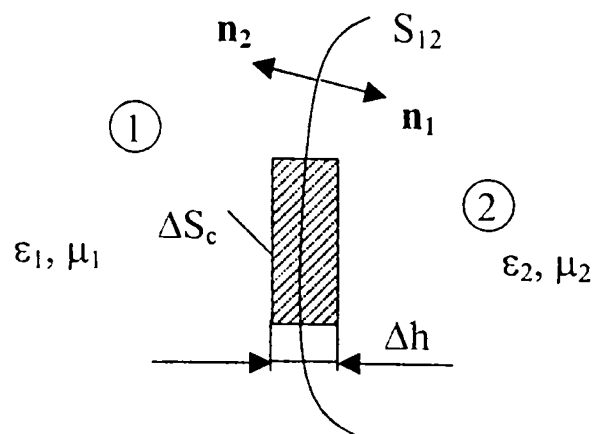


Fig. 1.3.1

1.3.4 Forța exercitată de câmpul magnetic asupra unui corp magnetic imersat într-un lichid magnetic

Forța rezultantă exercitată asupra unui corp nemagnetic imersat într-un lichid magnetic, în prezența unui câmp magnetic, are expresia:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] d\mathbf{S} \quad (1.3.24)$$

expresie care sub diferite forme echivalente, poate fi găsită în literatură, [Ro1], [Co1], [Bz1], [Be3], [Fe1], [DS2], [DS5], [DS11].

În relația (1.3.24) mărimile ce intervin au următoarea semnificație:

H – intensitatea câmpului magnetic;

μ_0 – permeabilitatea magnetică a vidului;

Σ - suprafața ce delimitează corpul imersat;

M_n – componenta normală a magnetizației \mathbf{M} la suprafața corpului.

Deoarece această forță poate compensa greutatea aparentă a corpului fără magnetizație permanentă, fenomenul este cunoscut în literatură sub denumirea de levitație magnetică de ordinul I.

Pentru cazul în care corpul imersat are magnetizație permanentă, în literatură este recomandată metoda de calcul a forței de levitație pe calea integrării valorii vectoriale a tensorului fictiv al tensiunilor maxwelliene.

În continuare se determină mai multe expresii echivalente ale forței exercitate, în cazul cel mai general, de către un câmp magnetic asupra unui corp cu magnetizație permanentă \mathbf{M}_p și permeabilitate μ_1 imersat într-un lichid magnetic de permeabilitate μ_2 , aflat într-un câmp magnetic exterior \mathbf{H}_e , fig.1.3.3. În fig.1.3.3 s-a notat cu Σ_1 suprafața atașată ce aparține corpului, cu Σ_2 cea a lichidului magnetic și cu Σ suprafața de separație între cele două medii.

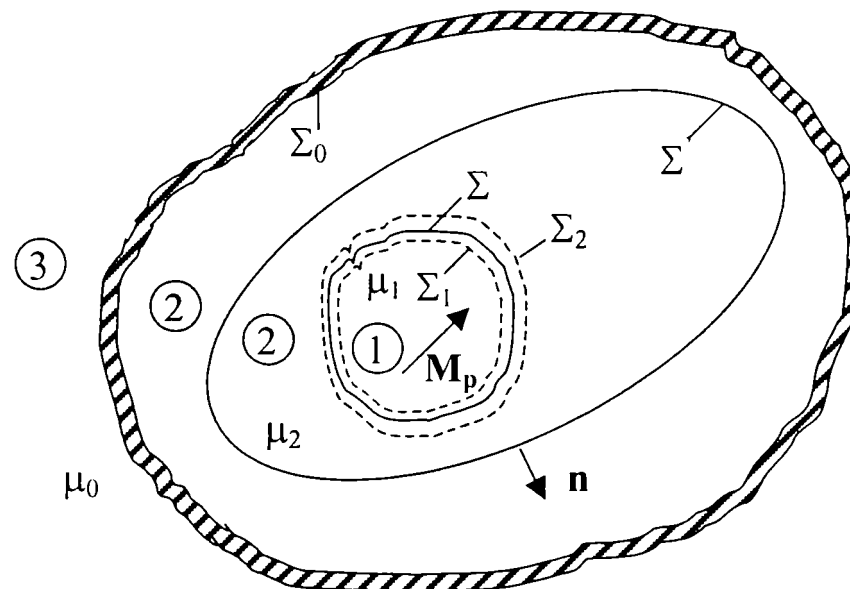


Fig. 1.3.2

Cu ajutorul unui raționament de limită în [DS5] se demonstrează că densitatea de suprafață a forței rezultante \mathbf{f}_{s12} ce se exercită asupra suprafețelor Σ_1 și Σ_2 poate fi scrisă în forma:

$$\mathbf{f}_{s_{12}} = \mathbf{f}_{s_1} + \mathbf{f}_{s_2} = \mathbf{t}_{f_1}(\mathbf{n}'_1) + \mathbf{t}_{f_2}(\mathbf{n}'_2) \quad (1.3.26)$$

în care $\mathbf{t}_{f_1}(\mathbf{n}'_1)$, respectiv $\mathbf{t}_{f_2}(\mathbf{n}'_2)$ reprezintă valorile vectoriale ale tensorului fictiv al câmpului magnetic, în punctele situate pe Σ_1 , respectiv Σ_2 , corespunzătoare normalelor interioare \mathbf{n}_1 respectiv \mathbf{n}_2 .

Forța rezultantă \mathbf{F}_m pe care o exercită câmpul magnetic asupra corpului imersat, are următoarele componente:

- $\int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{f}_{v_1} dv$ rezultanta forțelor volumice repartizate cu densitatea \mathbf{f}_{v_1} ;
- $\oint_{\Sigma} \mathbf{f}_{s_{12}} dS = \oint_{\Sigma_1} \mathbf{f}_{s_1} dS + \oint_{\Sigma_2} \mathbf{f}_{s_2} dS$ rezultanta forțelor de suprafață;
- $-\int_{\Sigma_1} p_m dS$ forța exercitată de presiunea magnetică p_m generată în lichid de câmpul magnetic.

Ca urmare forța ce se exercită asupra corpului va fi:

$$\mathbf{F} = \int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{f}_{v_1} dv + \oint_{\Sigma_1} \mathbf{f}_{s_1} dS + \oint_{\Sigma_2} \mathbf{f}_{s_2} dS - \int_{\Sigma_1} p_m dS \quad (1.3.27)$$

Ținând seama de (1.3.26) și de definiția tensorului fictiv:

$$\int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{f}_{v_1} dv = \oint_{\Sigma_1} \mathbf{t}_{f_1}(\mathbf{n}_1) dS,$$

egalitatea (1.3.27) se poate scrie în forma:

$$\mathbf{F} = \oint_{\Sigma_1} \mathbf{t}_{f_1}(\mathbf{n}_1) dS - \oint_{\Sigma_1} \mathbf{t}_{f_1}(\mathbf{n}_1) dS + \oint_{\Sigma_2} \mathbf{t}_{f_2}(\mathbf{n}_1) dS - \int_{\Sigma_1} p_m dS$$

și prin urmare:

$$\mathbf{F} = \oint_{\Sigma_2} \mathbf{t}_{f_2}(\mathbf{n}_1) dS - \int_{\Sigma_1} p_m dS \quad (1.3.28)$$

unde s-a avut în vedere proprietatea $\mathbf{t}_f(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}_f(-\mathbf{n})$ și s-a notat cu $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}'_1 = \mathbf{n}_2$ versorul normalei spre exteriorul corpului.

Densitatea de volum a forței pe care câmpul magnetic o exercită asupra lichidului magnetic are expresia, [Ro1], [DS2]:

$$\mathbf{f}_v = \rho_2 \nabla \left[\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \quad (1.3.29)$$

unde indicii de la baza parantezei indică faptul că la efectuarea derivatei variabilele H și temperatura τ sunt considerate constante.

În starea de echilibru a lichidului magnetic și la densitatea de masă ρ constantă a lichidului, presiunea magnetică generată în acesta are expresia:

$$p_m = \rho_2 \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH + p_c \quad (1.3.30)$$

în care p_c este o constantă de integrare, [Co1], [DS5].

Dacă se consideră puncte dintr-un mediu lipsit de histerezis în care vectorii câmpului sunt continui, valoarea vectorială a tensorului fictiv corespunzător normalei \mathbf{n} este dată de:

$$\mathbf{t}_f(\mathbf{n}) = - \left[\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \rho_2 \int_0^H \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH - \int_0^B H dB \right] \mathbf{n} + \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.3.31)$$

Cum lichidele magnetice sunt medii paramagnetice, pentru acestea este valabilă relația: $\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{M}{H} \right)$ și deci $\left(\frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} \frac{1}{H}$. Ca

urmare relația (1.3.31) se mai poate scrie:

$$\mathbf{t}_f(\mathbf{n}) = - \left[\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \rho_2 \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH - \int_0^B H dB \right] \mathbf{n} + \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.3.32)$$

Cu (1.3.30) și (1.3.32), expresia (1.3.28) a forței rezultante devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \oint_{\Sigma_2} \left[\rho_2 \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH + \int_0^B H dB - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right] \mathbf{dS} + \oint_{\Sigma_2} \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS - \\ - \oint_{\Sigma_1} \left[\rho \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH \right] \mathbf{dS} - \oint_{\Sigma_1} p_c \mathbf{dS} \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

și cum $\oint_{\Sigma_2} p_c \mathbf{dS} = 0$, iar $\int_0^B H dB - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \int_0^H B dH$, rezultă:

$$\boxed{\mathbf{F} = - \oint_{\Sigma_2} \left(\int_0^H B dH \right) \mathbf{dS} + \oint_{\Sigma_2} \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS} \quad (1.3.34)$$

în care $\mathbf{dS} = \mathbf{n}_1 dS$ și $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$.

Egalitatea (1.3.34) este stabilită și în [Ro1] utilizând o altă expresie a valorii vectoriale a tensorului fictiv în care intervine presiunea totală a cărei expresie este dedusă cu teorema lui Bernoulli presupunând existența în interiorul vasului a unui punct în care $\mathbf{H}=0$. În demonstrația mai sus prezentată, o astfel de ipoteză nerealizabilă nu este necesară.

În legătură cu suprafața de integrare din expresia (1.3.34) se poate menționa, că pentru lichide omogene și aflate în echilibru, această suprafață poate fi trasată arbitrar prin lichid. Această observație este utilă întrucât ea permite să se aleagă cele mai potrivite forme pentru Σ_2 astfel încât volumul de calcule să fie minim, [DS13].

Expresia (1.3.34) poate fi adusă și la o altă formă, [DS14], punându-se în evidență un termen care se referă la o tensiune normală la suprafața magnetului și doi termeni care reprezintă forțele exercitate de câmpul magnetic asupra sarcinilor magnetice.

Cum $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 + \mu_0 \mathbf{M}_p$, iar componentele tangente ale lui \mathbf{H} și cele normale ale lui \mathbf{B} sunt continue la suprafața de trecere magnet-lichid, avem succesiv:

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma_2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{H} dS &= \oint_{\Sigma_2} B_{2n} \mathbf{H}_{2n} dS + \oint_{\Sigma_2} B_{2t} \mathbf{H}_{2t} dS = \oint_{\Sigma_2} B_{2n} H_{2n} dS + \oint_{\Sigma_2} B_{2t} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{1n}) dS = \\ &= \oint_{\Sigma_2} B_{2n} H_{2n} dS - \oint_{\Sigma_2} B_{2t} \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1n} - \frac{\mu_0}{\mu_1} \mathbf{M}_{p_n} \right) dS + \oint_{\Sigma_1} B_{1n} \mathbf{H}_1 dS \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

Ținând seama de transformarea:

$$\oint_{\Sigma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \mathbf{G} dS = \int_{v_{\Sigma}} [\mathbf{G} (\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}] dv \quad (1.3.36)$$

în care se face $\mathbf{F}=\mathbf{B}$ și $\mathbf{G}=\mathbf{H}$, și considerând $\text{div} \mathbf{B} = 0$, egalitatea (1.3.36) devine:

$$\oint_{\Sigma_1} B_{1n} \mathbf{H}_1 dS = \int_{v_{\Sigma}} (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{H}_1 dv \quad (1.3.37)$$

Dat fiind că:

$$(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{H}_1 = [(\mu_1 \mathbf{H}_1 + \mu_0 \mathbf{M}_p) \cdot \nabla] \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_1}{2} \nabla H_1^2 + \mu_0 (\mathbf{M}_p \cdot \nabla) \mathbf{H}_1 \quad (1.3.38)$$

și utilizând din nou transformarea (1.3.37) se obține:

$$\begin{aligned} \int_{v_{\Sigma_1}} (\mathbf{M}_p \cdot \nabla) \mathbf{H}_1 dv &= \oint_{\Sigma_1} (\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 dS - \int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \text{div} \mathbf{M}_{p_1} dv = \\ &= \oint_{\Sigma_1} \mathbf{H}_1 \text{div}_S \mathbf{M}_p dS - \oint_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \text{div} \mathbf{M}_p dv \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

În deducerea relației (1.3.39) s-a ținut seama și de faptul că $-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_p) = \text{div}_S \mathbf{M}_p$.

Folosind transformata Gauss-Ostrogradski, referitoare la gradient, și presupunând permeabilitatea magnetică μ_l a magnetului permanent ca fiind constantă se poate obține acum:

$$\begin{aligned} \int_{v_{\Sigma_1}} (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{H}_1 dv &= \int_{v_{\Sigma_1}} \frac{\mu_1}{2} \nabla H_1^2 dv - \mu_0 \oint_{\Sigma_1} \mathbf{H}_1 \text{div}_S \mathbf{M}_p dS - \mu_0 \oint_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \text{div} \mathbf{M}_p dv = \\ &= \oint_{\Sigma_1} \left(\frac{\mu_1}{2} H_1^2 \mathbf{n} - \mu_0 \mathbf{H}_1 \text{div}_S \mathbf{M}_p \right) dS - \mu_0 \oint_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \text{div} \mathbf{M}_p dv \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

Rezultă în continuare:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Sigma_2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{H} dS &= \oint_{\Sigma_2} \left[B_{2n} H_{2n} - \frac{B_{2n}^2}{\mu_1} + \frac{\mu_0}{\mu_1} B_{2n} M_{pn} + \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{B_{2n}}{\mu_1} - \frac{\mu_0}{\mu_1} M_{pn} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \mu_1 H_{1t}^2 \right] dS - \mu_0 \int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \operatorname{div} \mathbf{M}_p dv = \\
&= \oint_{\Sigma_2} \left[B_{2n} H_{2n} - \frac{B_{2n}^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_0^2}{2\mu_1} M_{pn}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_{1t}^2 \right] dS - \mu_0 \oint_{\Sigma_1} \mathbf{H}_1 \operatorname{div}_S \mathbf{M}_p dS - \\
&\quad - \mu_0 \int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \operatorname{div} \mathbf{M}_p dv
\end{aligned} \tag{1.3.41}$$

Utilizând $\int_0^H B dH = \int_0^H (\mu_0 H + \mu_0 M) dH = \mu_0 \frac{H^2}{2} + \mu_0 \int_0^H M dH$ și

$H^2 = H_n^2 + H_t^2$, se obține:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= - \oint_{\Sigma_2} \left(\int_0^H B dH \right) dS + \oint_{\Sigma_2} \mathbf{H} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS = \\
&= \oint_{\Sigma_2} \left(-\mu_0 \frac{H_{2n}^2 + H_{2t}^2}{2} - \mu_0 \int_0^{H_2} M_2 dH + B_{2n} H_{2n} - \frac{B_{1n}^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_0^2}{2\mu_1} M_{pn}^2 + \frac{1}{2} \mu_1 H_{1t}^2 \right) dS - \\
&\quad - \mu_0 \oint_{\Sigma_1} \mathbf{H}_1 \cdot \operatorname{div}_S \mathbf{M}_p dS - \mu_0 \int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \cdot \operatorname{div} \mathbf{M}_p dv
\end{aligned} \tag{1.3.42}$$

Deoarece $B_{1n} = B_{2n} = \mu_0 H_{2n} + \mu_0 M_{2n}$ și $H_{1t} = H_{2t}$, egalitatea anterioară mai poate fi pusă sub forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[\frac{1 - \mu_{r1}}{2} \left(\frac{H_{2n}^2}{\mu_{r1}} + H_{2t}^2 + 2 \frac{M_{2n} H_{2n}}{\mu_{r1}} \right) + \frac{1}{2\mu_{r1}} (M_{2n}^2 - M_{pn}^2) + \int_0^{H_2} M_2 dH \right] dS - \\
&\quad - \mu_0 \oint_{\Sigma_1} \mathbf{H}_1 \cdot \operatorname{div}_S \mathbf{M}_p dS - \mu_0 \int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \cdot \operatorname{div} \mathbf{M}_p dv
\end{aligned} \tag{1.3.43}$$

Relația (1.3.43) reprezintă cea mai generală formă a forței exercitate de câmpul magnetic asupra unui corp, cu sau fără magnetizație permanentă, imersat într-un lichid magnetic. Suma ultimilor doi termeni poate fi restrânsă în forma:

$$\mu_0 \oint_{\Sigma_1} \mathbf{H}_1 \cdot \operatorname{div}_S \mathbf{M}_p dS + \mu_0 \int_{v_{\Sigma_1}} \mathbf{H}_1 \cdot \operatorname{div} \mathbf{M}_p dv = \mu_0 \int_{v_{\Sigma_1}} (\mathbf{M}_p \cdot \nabla) \mathbf{H} dv \tag{1.3.44}$$

Din relația (1.3.43) rezultă câteva cazuri particulare:

- magnetizația temporară a magnetului este neglijabilă, $\mu_{r1}=1$:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[\frac{1}{2} (M_{2n}^2 - M_{pn}^2) + \int_0^{H_2} M_2 dH \right] d\mathbf{S} - \mu_0 \int_{V_{\Sigma_1}} (\mathbf{M}_p \cdot \nabla) \mathbf{H} dv \quad (1.3.45)$$

- corpul imersat nu are magnetizație permanentă, $\mathbf{M}_p=0$, dar este magnetizat temporar, $\mu_{r1} \neq 1$:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[\frac{1-\mu_{r1}}{2} \left(\frac{H_{2n}^2}{\mu_{r1}} + H_{2t}^2 + 2 \frac{M_{2n} H_{2n}}{\mu_{r1}} \right) + \frac{1}{2\mu_{r1}} M_{2n}^2 + \int_0^{H_2} M_2 dH \right] d\mathbf{S} \quad (1.3.46)$$

Expresia (1.3.46) este diferită de forța corespunzătoare levitației de primul ordin, (1.3.24), conducând la o valoare mai mică.

- Corpul imersat este nemagnetizat, $\mu_{r1}=1$, $\mathbf{M}_p=0$, caz în care se obține expresia (1.3.24) a levitației de primul ordin.

Forța exercitată asupra unui magnet permanent imersat într-un lichid magnetic se poate determina și prin calculul forței rezultante ce se exercită pe suprafața exterioară a lichidului. Fie Σ_0 suprafața de separație dintre lichidul magnetic de permeabilitate μ_2 și exteriorul lichidului (mărginirea parțială cu vasul și cu aerul) de permeabilitate μ_0 , fig.1.3.2. Cum Σ_0 separă medii cu permeabilități diferite, asupra ei se exercită forța rezultantă:

$$\mathbf{F}' = \oint_{\Sigma_0} \mathbf{f}_{s_{23}} dS + \oint_{\Sigma_0} p_m d\mathbf{S} \quad (1.3.47)$$

unde $\mathbf{f}_{s_{12}}$ reprezintă densitatea de suprafață a forței exercitate de câmpul magnetic, iar p_m este presiunea magnetică din lichid.

Densitatea de suprafață a forțelor magnetice exprimată funcție de tensorul fictiv al tensiunilor maxwelliene este, [DS11]:

$$\mathbf{f}_{s_{23}} = \mathbf{t}_{f_2}(\mathbf{n}_{23}) + \mathbf{t}_{f_1}(\mathbf{n}_{32}) = \mathbf{t}_{f_2}(\mathbf{n}_{23}) - \mathbf{t}_{f_1}(\mathbf{n}_{23}) \quad (1.3.48)$$

în care:

$$\mathbf{t}_f(\mathbf{n}) = - \left[\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} H dH - \int_0^B H dB \right] \mathbf{n} + \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.3.49)$$

Cum $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, iar vectorii \mathbf{B} , \mathbf{H} și \mathbf{M} la substanțele paramagnetice au aceeași orientare, avem $\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} \frac{1}{H}$, iar relația

(1.3.49) se poate scrie în forma:

$$\mathbf{t}_f(\mathbf{n}) = - \left[\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \rho \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dH - \int_0^B H dB \right] \mathbf{n} + \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.3.50)$$

Densitatea de volum a forțelor exercitate de câmpul magnetic generat de magnetul permanent asupra lichidului, are forma:

$$\mathbf{f}_v = \rho_2 \nabla \left[\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \quad (1.3.51)$$

La echilibru, $\mathbf{f}_v = \text{grad } p$ și presupunând ρ constant, din (1.3.51) rezultă:

$$p_m = \rho \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH + p_c \quad (1.3.52)$$

unde p_c este o constantă de integrare.

Din (1.3.48) și (1.3.49) rezultă:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{f_2} - \mathbf{t}_{f_1} = & - \left[\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0}{2} \right] \mathbf{n}_{23} + \mathbf{H}_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}_{23}) + \\ & + \left[\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mu_0 \rho \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dH - \int_0^B H dB \right] \mathbf{n}_{23} - \mathbf{H} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{23}) \end{aligned} \quad (1.3.53)$$

iar cu:

$$\begin{aligned} \int_0^H H dB = BH - \int_0^H B dH = BH - \mu_0 \frac{H^2}{2} - \mu_0 \int_0^H M dH = \\ = \mu_0 \frac{H^2}{2} + \mu_0 H M - \mu_0 \int_0^H M dH \end{aligned} \quad (1.3.54)$$

și cu egalitatea componentelor tangente ale intensității câmpului magnetic și ale componentelor normale ale inducției la suprafața Σ_0 , relația (1.3.53) devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{s_{23}} = \mathbf{t}_{f_2} - \mathbf{t}_{f_1} = & \left[-\mu_0 \frac{H_0^2}{2} + \mu_0 H^2 + \mu_0 H M - \mu_0 \rho \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH - \right. \\ & \left. - \mu_0 \frac{H^2}{2} + \mu_0 H M + \mu_0 \int_0^H M dH \right] \mathbf{n}_{23} + B_n (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}) = \\ = & \left[-\mu_0 \frac{H_0^2}{2} + \mu_0 \frac{H^2}{2} + B_n (H_{0n} - H_n) + \mu_0 \int_0^H M dH - \mu_0 \rho \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \mathbf{n}_{23} = \\ = & \mu_0 \left[\frac{1}{2} (H^2 - H_0^2) + H_{0n}^2 + H_{0n} H_n + \int_0^H M dH - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \mathbf{n}_{23} = \\ = & \mu_0 \left[\frac{1}{2} (H_n^2 - H_{0n}^2) + H_{0n}^2 + H_{0n} H_n + \int_0^H M dH - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \mathbf{n}_{23} \end{aligned} \quad (1.3.55)$$

Folosind:

$$\frac{1}{2} H_{0n}^2 = \frac{1}{2 \mu_0^2} B_{0n}^2 = \frac{1}{2 \mu_0^2} B_n^2 = \frac{1}{2} (H_n + M_n)^2 \text{ și}$$

$$H_{0n} H_n = \frac{B_{0n}}{\mu_0} H_n = \frac{B_n}{\mu_0} H_n = (H_n + M_n) H_n,$$

relația (1.3.55) devine:

$$\mathbf{f}_{s_{23}} = \mu_0 \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \mathbf{n}_{23} \quad (1.3.56)$$

Cu (1.3.47), (1.3.52) și (1.3.56), se obține:

$$\mathbf{F}' = \mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH + p_c \right] \mathbf{dS} \quad (1.3.57)$$

și deoarece $\oint_{\Sigma_0} p_c \mathbf{dS} = 0$, urmează că forța rezultantă exercitată asupra vasului este:

$$\mathbf{F}' = \mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] \mathbf{dS} \quad (1.3.58)$$

Pentru a calcula forța care se exercită asupra magnetului, \mathbf{F} , se observă că forța rezultantă exercitată asupra sistemului este nulă întrucât acesta este în echilibru. Ca urmare:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F} + \mathbf{F}_v + \mathbf{F}' = 0 \quad (1.3.59)$$

în care \mathbf{F}_v este rezultanta forțelor de volum exercitată asupra lichidului. Ea se compune din forța determinată de câmpul magnetic $\int_{v_l} \mathbf{f}_v dv$ și de forța determinată

de presiunea magnetică din lichid, $-\int_{v_l} \text{grad } p_m dv$, v_l fiind domeniul ocupat de

lichid. Cum $\int_{v_l} \mathbf{f}_v dv - \int_{v_l} \text{grad } p_m dv = 0$ deoarece $\mathbf{f}_v = \text{grad } p_m$, rezultă din (1.3.59) și (1.3.58):

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] \mathbf{dS} \quad (1.3.60)$$

relație identică cu (1.3.24).

Relația (1.3.60) reprezintă expresia matematică a teoremei conform căreia, la echilibru hidrostatic al lichidului magnetic, forța ce acționează asupra magnetului este egală și de semn contrar cu forța ce acționează asupra vasului, \mathbf{dS} fiind orientat spre exteriorul lichidului.

2 LAGĂRE CILINDRICE CU MAGNET PERMANENT ȘI LICHID MAGNETIC

2.1 Calculul analitic al unui lagăr cilindric cu lichid magnetic

2.1.1 Lagăre cu lichid magnetic. Levitația magnetică.

Una dintre aplicațiile cu lichide magnetice o reprezintă lagărele cu lichide magnetice, [Lu1], [Ro1], a căror principal avantaj față de lagărele obișnuite, îl constituie eliminarea frecării de contact dintre piesele lagărului. Funcționarea unui lagăr cu lichid magnetic are la bază principiul levitației magnetice. Levitația magnetică poate fi de două feluri: de ordinul 1 și respectiv de ordinul 2.

Levitația magnetică de ordinul 1 se produce în cazul imersării unui corp alcătuit din material de natură magnetică într-un lichid magnetic în care este stabilit (din exterior) un câmp magnetic. Deși densitatea corpului este mai mare decât cea a lichidului magnetic, efectul ce se manifestă asupra acestuia este deplasarea sa până la atingerea unei stări de echilibru, echilibru ce se realizează de către un câmp tridimensional de forțe. Greutatea (aparentă) a corpului este echilibrată de rezultanta unor forțe de tip magnetic.

O justificare intuitivă, privind existența și modul de acționare a forțelor de natură magnetică, poate fi sugerat prin următorul experiment: [Lu1] considerăm o incintă complet umplută cu lichid magnetic, plasată într-un domeniu imponderabil (fără gravitație). Acceptăm că, inițial, câmpul magnetic este absent, astfel că presiunea este uniformă, având o valoare constantă în întreaga incintă complet ocupată cu lichid magnetic. Două surse de egală „putere” crează un câmp magnetic în sensuri opuse și sunt plasate simetric în proximitatea incintei, așa cum arată fig.2.1.1. Aceste două surse crează o distribuție de câmp ce are valoare nulă în centrul dispozitivului, câmp ce crește în orice direcție ne-am îndepărta față de acest punct.

Pentru că lichidul magnetic este atras spre regiunile cu câmp magnetic mai intens, el va fi supus unei tendințe de a fi îndepărtat din centrul dispozitivului. Deoarece lichidul magnetic este practic incompresibil și pentru că ocupă complet incinta, efectul pe care îl crează este creșterea presiunii pe măsură ce ne îndepărtăm de centrul dispozitivului.

Să presupunem acum un corp sferic, nemagnetic imersat în această incintă. Dacă este plasat în centrul dispozitivului, în absența unor alte forțe, corpul va rămâne acolo pentru că rezultanta forțelor ce acționează la suprafața sa (datorate presiunii și forțelor superficiale) va fi nulă ca urmare a distribuției lor simetrice.

Altfel spus, distribuția presiunii și a forțelor superficiale integrate pe suprafața corpului nu poate conduce la apariția vreunei forțe, deoarece sistemul este simetric.

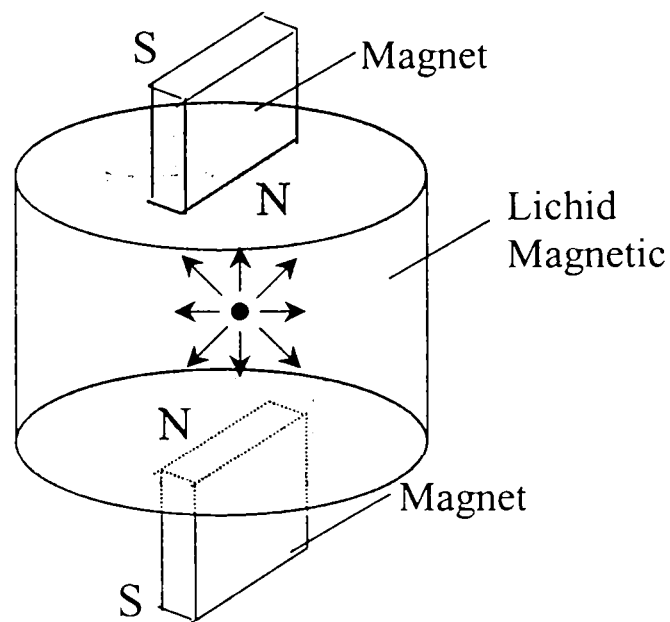


Fig. 2.1.1

Dacă acest obiect este mutat din punctul de echilibru, asupra sa va acționa o forță de readucere în poziția centrală, datorită distribuției nesimetrice (cel puțin pe direcția deplasării) a presiunii și a forțelor superficiale. Acesta este un fenomen de levitație pasivă a unui corp nemagnetic.

Dacă experimentul are loc în prezența unui câmp gravitațional vertical, corpul se va fixa într-un punct pe axa verticală de simetrie, pentru care se realizează echilibrul tuturor forțelor. Rezultanta forțelor de natură magnetică va fi orientată vertical și împreună cu forța arhimedică vor echilibra greutatea corpului.

Levitația magnetică de ordinul 2 se referă la „autolevitația” unui magnet permanent imersat (în anumite condiții) în lichide magnetice. Denumirea de autolevitație este sugestivă și potrivită, căci sursa de câmp este în același timp și elementul asupra căruia se manifestă și fenomenul de levitație magnetică.

În situația în care magnetul (în formă cilindrică, spre exemplu) este imersat într-un lichid magnetic ce ocupă o incintă cilindrică de extensie foarte mare, câmpul magnetic pe care-l creează este dispus simetric față de el și magnetul se află în echilibru, din punct de vedere al forțelor magnetice. Dacă însă magnetul este deplasat din punctul ce asigură simetria câmpului și spectrul câmpului devine nesimetric, intensitatea câmpului magnetic devine mai mare în zonele mai îndepărtate de fostul centru de simetrie. În baza aceleiași concluzii, menționată la levitația de ordinul 1 (conform căreia presiunea de natură magnetică pe care lichidul o exercită este cu atât mai mare cu cât câmpul este mai intens), vom constata existența unor forțe ce tind să readucă magnetul în punctul inițial.

Problema se poate extinde și la cazul prezentat în fig. 2.1.2., al interacțiunii unui magnet cu un corp nemagnetic, ambele imersate în lichid magnetic și îndepărtate de frontiera lichidului magnetic.

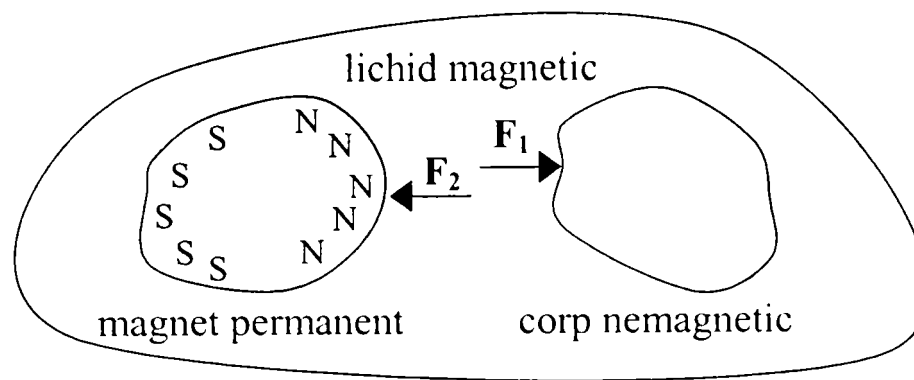


Fig. 2.1.2

Trebuie remarcat această interacțiune este fără echivalent în magnetostatică uzuală, unde pentru a exista interacțiune, ambele corpuri trebuie să posede momente magnetice. Desigur interacțiunea prezentată în fig.2.1.2. nu este datorată direct acțiunii reciproce a corpurilor, ci este determinată de comportarea lichidului magnetic ce se găsește între corpuri și în jurul lor.

2.1.2 Lagărul cilindric cu lichid magnetic

Una din aplicațiile levitației magnetice de ordinul doi, [Lu1], [Ro1], o constituie lagărul cilindric cu lichid magnetic al cărui arbore este realizat dintr-un magnet permanent.

Lagărul cilindric cu lichid magnetic este schițat în fig.2.1.3.

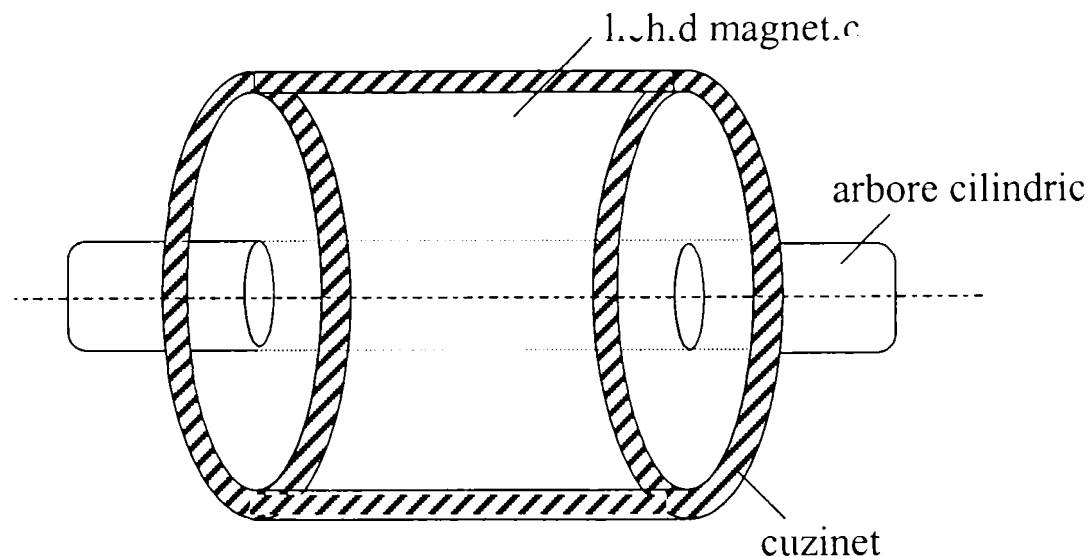


Fig. 2.1.3

Arborele cilindric al lagărului este magnetizat permanent cu magnetizație uniformă având o direcție ortogonală pe un plan ce conține axa arborelui. Spațiul dintre cuzinet, considerat magnetic, și arbore este umplut cu lichid magnetic.

Având în vedere levitația de ordinul 2 și neluând în considerare greutatea arborelui, poziția de echilibru a arborelui este când axa arborelui coincide cu axa cuzinetului. Pentru orice altă poziție a arborelui diferită de poziția de echilibru, asupra lui se va exercita o forță magnetică ce tinde să readucă arborele în echilibru.

În continuare se urmărește determinarea forței magnetice de readucere pe unitatea de lungime în funcție de dimensiunile lagărului, de proprietăților magnetice ale arborelui și a lichidului magnetic și de dezaxarea arborelui.

În literatura de specialitate există articole legate de calculul analitic sau aproximativ al forței de levitație în cazul lagărului cilindric cu lichid magnetic, articole la care se vor face referiri pe parcursul capitolului. Un calcul analitic al forței de levitație este prezentat într-un rezumat sumar în [Ce1]. Expresia forței de levitație este dată sub forma unei serii, folosind expresia forței ce acționează asupra arborelui magnetic.

În acest subcapitol am elaborat un calcul analitic detaliat al câmpului din lichidul magnetic și prezint o nouă expresie a forței de levitație ce se exercită asupra arborelui utilizând expresia forței ce se exercită asupra statorului, [DS9], [Gr4]. Rezultatele obținute sub forma grafică se vor compara cu cele din [Ce1].

2.1.3 Calculul analitic al câmpului magnetic într-un lagăr cilindric cu lichid magnetic

În [Ce1] sunt date expresiile câmpului magnetic dintr-un lagăr cilindric cu lichid magnetic, folosind coordonatele bipolare. În acest paragraf se determina expresiile câmpului folosind coordonatele bipolare.

În coordonate bipolare, prezentate în [St1], un punct curent este determinat de intersecția între familia de cercuri:

$$x^2 + y^2 - 2ax \coth \xi + a^2 = 0 \quad (2.1.1)$$

cu ξ drept parametru și centrele pe axa Ox , și familia de cercuri:

$$x^2 + y^2 - 2ay \cot \eta - a^2 = 0 \quad (2.1.2)$$

cu η parametru, care trec prin punctele a și $-a$ de pe axa Ox , fig.2.1.4, și cu centrele pe axa Oy .

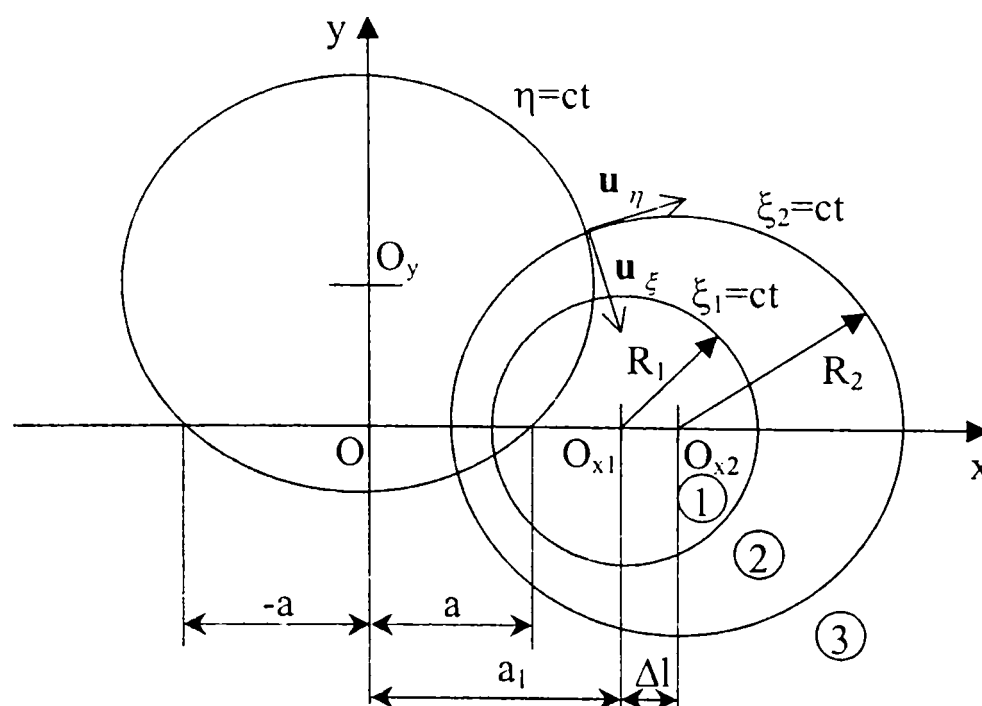


Fig. 2.1.4

Din (2.1.1) și (2.1.2) rezultă pentru coordonatele carteziene expresiile, [St1]:

$$x = \frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \sin \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad z = z \quad (2.1.3)$$

iar pentru coeficienții lui Lamé, egalitățile:

$$h_\xi = \frac{a}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad h_\eta = \frac{a}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad h_z = 1. \quad (2.1.4)$$

Fie ξ_1 cercul cu centrul în O_{x1} de abscisă a_1 , de rază R_1 , și ξ_2 cel de rază R_2 cu centrul în O_{x2} , de abscisă $a_1 + \Delta l$, fig.2.1.4.

Primul cerc are ecuația $(x - a_1)^2 + y^2 = R_1^2$, care comparată cu (2.1.1) în care $\xi = \xi_1$, conduce la:

$$a \coth \xi_1 = a_1 \quad \text{și} \quad R_1 = a \sqrt{\coth^2 \xi_1 - 1} = \frac{a}{\sinh \xi_1} \quad (2.1.5)$$

Analog pentru al doilea cerc, de ecuație $[x - (a_1 + \Delta l)]^2 + y^2 = R_2^2$ se obține:

$$a \coth \xi_2 = a_2 = a_1 + \Delta l \quad \text{și} \quad R_2 = a \sqrt{\coth^2 \xi_2 - 1} = \frac{a}{\sinh \xi_2} \quad (2.1.6)$$

$$\text{și deci} \quad \cosh \xi_1 = \frac{a_1}{R_1}, \quad \cosh \xi_2 = \frac{a_1 + \Delta l}{R_2} \quad (2.1.7)$$

Parametrul a_1 poate fi eliminat observând că

$$a = R_1 \sinh \xi_1 = R_2 \sinh \xi_2 \quad (2.1.8)$$

de unde rezultă $R_1 \sqrt{\cosh^2 \xi_1 - 1} = R_2 \sqrt{\cosh^2 \xi_2 - 1}$, și cu (2.1.7) avem

$\sqrt{a_1^2 - R_1^2} = \sqrt{(a_1 + \Delta l)^2 - R_2^2}$ care determină parametrul a_1 :

$$a_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2 - \Delta l^2}{2 \Delta l} \quad \text{și} \quad a_1 + \Delta l = \frac{R_2^2 - R_1^2 + \Delta l^2}{2 \Delta l} \quad (2.1.9)$$

Cu aceasta (2.1.7) se scrie în forma finală:

$$\cosh \xi_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2 - \Delta l^2}{2 \Delta l R_1}, \quad \cosh \xi_2 = \frac{R_2^2 - R_1^2 + \Delta l^2}{2 \Delta l R_2} \quad (2.1.10)$$

Dacă R_1 , R_2 și Δl sunt dați, cu (2.1.10) se calculează ξ_1 și ξ_2 , parametrul a cu (2.1.8), iar a_1 cu (2.1.9). Pentru un punct de coordonate (x_1, y_1) de pe cercul ξ_1 (sau ξ_2) cu una din formulele de transformare (2.1.3) se determină cercul $\eta = ct.$ ce trece prin acest punct.

Considerăm, în continuare, că fig.2.1.4 reprezintă o secțiune transversală într-un lagăr cilindric, considerat foarte lung, la care arborele de rază R_1 este magnetizat permanent cu magnetizația $\mathbf{M}_p = M_p \mathbf{u}_x$ uniformă, și deplasat cu Δl față de statorul (cuzinetul) de rază R_2 . Spațiul dintre rotor și stator este umplut cu lichid magnetic, considerat liniar, de permeabilitate $\mu = \mu_0 \mu_r$.

Câmpul magnetic din lichid este plan paralel având în vedere lungimea mare a lagărului în raport cu raza R_2 . Întrucât magnetizația permanentă a cilindrului interior este uniformă, din $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ rezultă $\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M}_p = 0$ și din $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ avem $\mathbf{H} = -\nabla V_H$, V_H fiind potențialul magnetic scalar. Ca urmare funcția V_H satisface ecuația de tip Laplace care scrisă în coordonate bipolare:

$$\nabla^2 V_H = \frac{1}{a^2} (\cosh \xi - \cos \eta) \left(\frac{\partial^2 V_H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_H}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 V_H}{\partial z^2} = 0,$$

devine:

$$\frac{\partial^2 V_H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_H}{\partial \eta^2} = 0, \quad (2.1.11)$$

întrucât funcția V_H nu depinde de z câmpul fiind plan paralel.

Ecuația (2.1.11) este valabilă în toate cele trei domenii ale câmpului:

- 1 - domeniul cilindrului de rază R_1 de permeabilitate μ_0 ;
- 2 - domeniul cu lichid magnetic;
- 3 - domeniul exterior cilindrului R_2 de permeabilitate μ_0 .

Ecuația (2.1.11) se va rezolva prin metode separării variabilelor scriind potențialul, în orice domeniu, în forma $V_{H_n} = X_n(\xi)Y_n(\eta)$, care introdusă în (2.1.11) conduce la ecuațiile:

$$\frac{1}{X_n(\xi)} \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} = n^2, \quad \frac{1}{Y_n(\eta)} \frac{d^2 Y(\eta)}{d\eta^2} = -n^2.$$

Prima ecuație are soluția $X_n(\xi) = A_{1n} e^{n\xi} + A_{2n} e^{-n\xi}$, iar a doua este de forma $Y_n(\eta) = B_{1n} \cos n\eta + B_{2n} \sin n\eta$, adică

$$V_{H_n} = (A_{1n} e^{n\xi} + A_{2n} e^{-n\xi})(B_{1n} \cos n\eta + B_{2n} \sin n\eta) \quad (2.1.12)$$

Punctul $(a, 0)$ corespunde lui $\xi = \infty$ și el se găsește în primul domeniu. Rezultă pentru potențialul V_{H1} expresia

$$V_{H_1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} (A_n \cos n\eta + E_n \sin n\eta), \quad (2.1.13)$$

deoarece V_H este o funcție finită și s-au folosit notațiile $A_n = A_{2n} B_{1n}$ și $E_n = A_{2n} B_{2n}$.

Pentru al doilea domeniu termenii potențialului se vor grupa cum urmează:

$$V_{H_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n e^{-n\xi} + C_n e^{n\xi}) \cos n\eta + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{-n\xi} + G_n e^{n\xi}) \sin n\eta \quad (2.1.14)$$

În al treilea domeniu punctul $(-a, 0)$ corespunde lui $\xi = -\infty$ și deci $A_{2n} = 0$, potențialul obținând forma

$$V_{H_3} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{n\xi} \cos n\eta + \sum_{n=1}^{\infty} H_n e^{n\xi} \sin n\eta \quad (2.1.15)$$

Constantele de integrare din ecuațiile anterioare se obțin din următoarele condiții la limită, referitoare la continuitatea potențialului magnetic scalar și a componentelor normale ale inducției magnetice:

$$V_{H_1} = V_{H_2}, \quad (\mathbf{u}_\xi \cdot \mathbf{B}_1)_1 = (\mathbf{u}_\xi \cdot \mathbf{B}_2)_2 \quad \text{pentru } \xi = \xi_1 \quad (2.1.16)$$

$$\text{și } V_{H_2} = V_{H_3}, \quad (\mathbf{u}_\xi \cdot \mathbf{B}_2)_2 = (\mathbf{u}_\xi \cdot \mathbf{B}_3)_3 \quad \text{pentru } \xi = \xi_2. \quad (2.1.17)$$

Din motive de simetrie, în orice domeniu, $V_{H_i}(x, y) = V_{H_i}(x, -y)$ cu $i=1,2,3$.

În coordonatele (ξ, η) condiția se scrie:

$$V_{H_i}(\xi, \eta) = V_{H_i}(\xi, 2\pi - \eta) \quad (2.1.18)$$

cum rezultă direct din (2.1.3).

Din (2.1.18) urmează imediat $E_n = F_n = G_n = H_n = 0$, iar din primele egalități din (2.1.16) și (2.1.17) avem

$$A_n e^{-n\xi_1} = B_n e^{-n\xi_1} + C_n e^{n\xi_1} \quad \text{și} \quad B_n e^{-n\xi_2} + C_n e^{n\xi_2} = D_n e^{n\xi_2}$$

care se scriu în formele

$$A_n = B_n + C_n e^{2n\xi_1} \quad (2.1.19)$$

$$D_n = B_n e^{-2n\xi_2} + C_n$$

Gradientul unei funcții scalare φ în coordonate bipolare are forma, [St1]:

$$\nabla \varphi = \frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \left(\mathbf{u}_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \mathbf{u}_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \quad (2.1.20)$$

Dacă în (2.1.20) se face $\varphi = x$ și rezultatul se înmulțește cu \mathbf{u}_x , se obține

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_\xi = \frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \frac{\partial x}{\partial \xi}. \quad (2.1.21)$$

Dezvoltarea în serie a funcțiilor periodice $x(\eta)$ și $y(\eta)$ sunt date în [Rj1]:

$$x = a \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} \cos n\eta \right], \quad y = a \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} \sin n\eta \right] \quad (2.1.22)$$

Ținând seama că $\mathbf{B}_1 = -\mu_0 \nabla V_{H_1} + \mu_0 M_p \mathbf{u}_x$, $\mathbf{B}_2 = -\mu \nabla V_{H_2}$, $\mathbf{B}_3 = -\mu_0 \nabla V_{H_3}$ și de (2.1.21), a doua egalitate din (2.1.16) și respectiv (2.1.17) devine:

$$\left(\frac{\partial V_{H_1}}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1} - \mu_r \left(\frac{\partial V_{H_2}}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1} = M_p \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1},$$

$$\mu_r \left(\frac{\partial V_{H_2}}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_2} = \left(\frac{\partial V_{H_3}}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_2},$$

din care rezultă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n A_n e^{-n\xi_1} \cos n\eta - \mu_r \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n B_n e^{-n\xi_1} + n C_n e^{n\xi_1} \right) \cos n\eta =$$

$$= 2M_p a \sum_{n=1}^{\infty} -n e^{-n\xi_1} \cos n\eta, \quad (2.1.23)$$

$$\mu_r \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n B_n e^{-n\xi_2} + n C_n e^{n\xi_2} \right) \cos n\eta = \sum_{n=1}^{\infty} n D_n e^{-n\xi_2} \cos n\eta$$

din care se obține:

$$\begin{aligned} -A_n e^{-n\xi_1} - \mu_r \left(-B_n e^{-n\xi_1} + C_n e^{n\xi_1} \right) &= -2aM_p e^{-n\xi_1}, \\ \mu_r \left(-B_n e^{-n\xi_2} + C_n e^{n\xi_2} \right) &= D_n e^{-n\xi_2}, \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

care mai pot fi scrise în formele:

$$\begin{aligned} A_n + \mu_r \left(C_n e^{2n\xi_1} - B_n \right) &= 2aM_p \\ D_n = \mu_r C_n - \mu_r B_n e^{-2n\xi_2} \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Egalitățile (2.1.19) și (2.1.25) permit determinarea constantelor de integrare. Se poate scrie: $B_n e^{-2n\xi_2} + C_n = \mu_r C_n - \mu_r B_n e^{-2n\xi_2}$, de unde

$$B_n = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} e^{2n\xi_2} C_n. \quad (2.1.26)$$

Din $A_n + \mu_r \left(e^{2n\xi_1} - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} e^{2n\xi_2} \right) C_n = 2aM_p$ și din (2.1.19) se obține:

$$A_n = \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} e^{2n\xi_2} + e^{2n\xi_1} \right) C_n \quad (2.1.27)$$

Se pot scrie succesiv:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} e^{2n\xi_2} + e^{2n\xi_1} + \mu_r e^{2n\xi_1} - \mu_r \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} e^{2n\xi_2} \right) C_n &= 2aM_p, \\ \left(-\frac{(\mu_r - 1)^2}{\mu_r + 1} e^{2n\xi_2} + (\mu_r + 1) e^{2n\xi_1} \right) C_n &= 2aM_p, \end{aligned}$$

iar constantele de integrare rezultă în formele:

$$C_n = \frac{2aM_p (\mu_r + 1)}{(\mu_r + 1)^2 e^{2n\xi_1} - (\mu_r - 1)^2 e^{2n\xi_2}} \quad (2.1.28)$$

$$B_n = \frac{2aM_p (\mu_r - 1) e^{2n\xi_2}}{(\mu_r + 1)^2 e^{2n\xi_1} - (\mu_r - 1)^2 e^{2n\xi_2}} \quad (2.1.29)$$

$$A_n = \frac{2aM_p \left[(\mu_r - 1)e^{2n\xi_2} + (\mu_r + 1)e^{2n\xi_1} \right]}{(\mu_r + 1)^2 e^{2n\xi_1} - (\mu_r - 1)^2 e^{2n\xi_2}} \quad (2.1.30)$$

$$D_n = \frac{2aM_p \left[(\mu_r - 1)e^{n\xi_2} + (\mu_r + 1) \right]}{(\mu_r + 1)^2 e^{2n\xi_1} - (\mu_r - 1)^2 e^{2n\xi_2}} \quad (2.1.31)$$

Versorii axelor Ox și Oy se calculează din (2.1.20) cu $\varphi=x$ respectiv $\varphi=y$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x = \nabla x &= \frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \left(\mathbf{u}_\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} + \mathbf{u}_\eta \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \\ \mathbf{u}_y = \nabla y &= \frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \left(\mathbf{u}_\xi \frac{\partial y}{\partial \xi} + \mathbf{u}_\eta \frac{\partial y}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

din care cu (2.1.22) se obțin

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= -2a \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\xi} \cos n\eta, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -2a \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\xi} \sin n\eta, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -2a \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\xi} \sin n\eta, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= 2a \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\xi} \cos n\eta. \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Intensitatea câmpului magnetic în cel de-al doilea mediu are expresia

$$\mathbf{H}_2 = -\nabla V_{H_2} = H_{2\xi} \mathbf{u}_\xi + H_{2\eta} \mathbf{u}_\eta, \quad (2.1.34)$$

$$H_{2\xi} = -\frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \frac{\partial V_{H_2}}{\partial \xi},$$

cu componentele

$$H_{2\eta} = -\frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \frac{\partial V_{H_2}}{\partial \eta},$$

$$\text{în care} \quad V_{H_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n e^{-n\xi} + C_n e^{n\xi}) \cos n\eta. \quad (2.1.36)$$

2.1.4 Calculul forței de levitație pentru lagărul cilindric cu lichid magnetic

Calculul forței ce se exercită asupra arborelui lagărului cilindric cu lichid magnetic se va efectua aplicându-se teorema din [Ro1], [DS1], [DS2], în acord cu care, la echilibru hidrostatic al lichidului magnetic, forța ce se exercită asupra arborelui este egală și de semn contrar cu forța exercitată asupra vasului (statorului) și are expresia:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{2} \int_{\Sigma_2} \left[M_n^2 + 2 \int_0^H M dH \right] d\mathbf{S}, \quad (2.1.37)$$

unde Σ_2 reprezintă suprafața ce limitează lichidul dinspre stator, dusă prin lichid (cercul de rază R_2), $d\mathbf{S}$ este versorul element de suprafață orientat spre exteriorul lichidului iar M_n și H reprezintă componenta normală a magnetizației și respectiv intensitatea câmpului magnetic la Σ_2 .

Dacă lichidul magnetic se consideră liniar, $\int_0^H M dH = \frac{\mu_r - 1}{2} H^2$ și având în

vedere că direcția componentei normale a câmpului pe Σ_2 coincide cu direcția versorului \mathbf{u}_ξ , iar direcția componentei tangente coincide cu direcția versorului \mathbf{u}_η , (2.1.37) se scrie în forma:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \frac{\mu_r - 1}{2} \int_{\Sigma_2} (\mu_r H_\xi^2 + H_\eta^2) d\mathbf{S}. \quad (2.1.38)$$

Cu coeficienții lui Lamé din (2.1.4) pentru coordonate bipolare, elementele de linie corespunzătoare celor trei direcții ortogonale se scriu în forma:

$$dl_\xi = h_\xi d\xi \quad dl_\eta = h_\eta d\eta \quad dl_z = h_z dz \quad (2.1.39)$$

iar elementul de suprafață pe Σ_2 unde $\xi = \xi_2$, devine, (fig.2.1.5):

$$d\mathbf{S} = -dS \mathbf{u}_\xi = -dl_\eta dl_z \mathbf{u}_\xi = -h_\eta d\eta \mathbf{u}_\xi = -\frac{a}{\cosh \xi - \cos \eta} d\eta \mathbf{u}_\xi \quad (2.1.40)$$

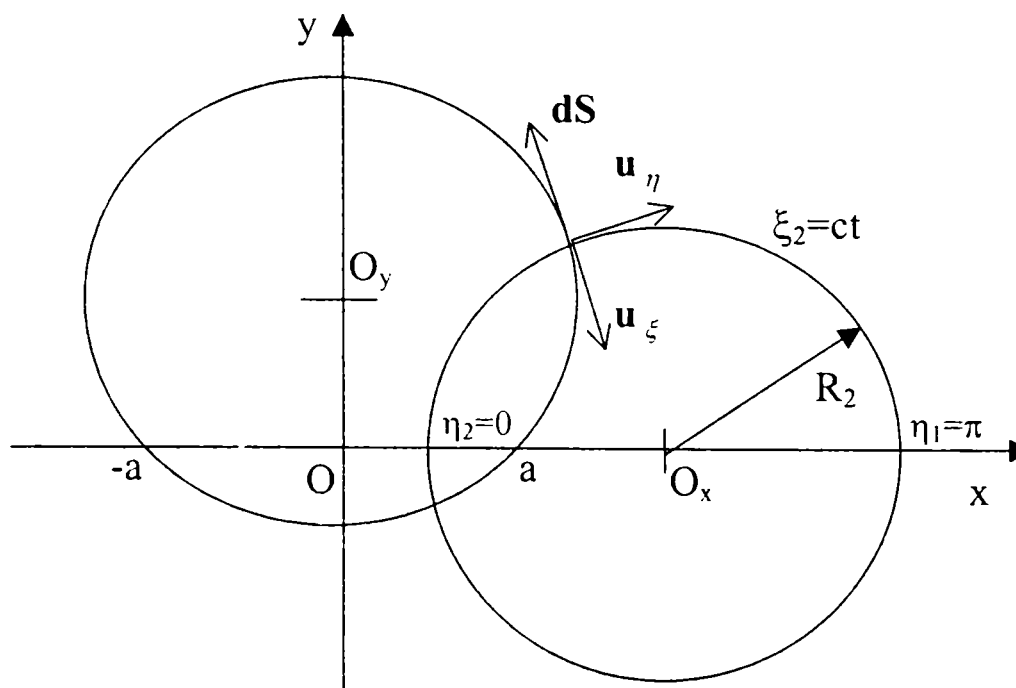


Fig. 2.1.5

În (2.1.40) s-a avut în vedere că forța de readucere se va calcula pe unitatea de lungime (după direcția Oz). Datorită simetriei câmpului după axa Ox și urmărind determinarea forței, pe unitatea de lungime, în direcția deplasării $d\mathbf{l} = d\mathbf{l} \mathbf{u}_x$, singura diferită de zero, (2.1.38) devine:

$$F_x^* = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_x = \mu_0 \frac{\mu_r - 1}{2} 2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\mu_r H_{2\xi}^2 + H_{2\eta}^2) \frac{a}{\cosh \xi - \cos \eta} d\eta \Big|_{\xi=\xi_2} (\mathbf{u}_\xi \cdot \mathbf{u}_x) \Big|_{\xi=\xi_2} \quad (2.1.41)$$

Cum $\mathbf{u}_\xi \cdot \mathbf{u}_x = \frac{1}{a}(\cosh \xi - \cos \eta) \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1 - \cosh \xi \cos \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}$, și având în vedere

(2.1.35), relația (2.1.41) se scrie în forma:

$$F_x^* = \mu_0 \frac{\mu_r - 1}{a} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\mu_r \left(\frac{\partial V_{H_2}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{H_2}}{\partial \eta} \right)^2 \right] (1 - \cosh \xi \cos \eta) d\eta \Bigg|_{\xi=\xi_2} \quad (2.1.42)$$

Limitele de integrare se deduc din (2.1.3) și ecuația (2.1.2) și sunt $\eta_1=0$ și $\eta_2=\pi$, fig.2.1.5.

Din (2.1.36) se calculează derivatele parțiale ale lui V_{H_2} :

$$\left(\frac{\partial V_{H_2}}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-B_n e^{-n\xi_2} + C_n e^{n\xi_2} \right) \cos n\eta \quad (2.1.43)$$

$$\left(\frac{\partial V_{H_2}}{\partial \eta} \right)_{\xi=\xi_2} = - \sum_{n=1}^{\infty} n \left(B_n e^{-n\xi_2} + C_n e^{n\xi_2} \right) \sin n\eta$$

Cu aceasta (2.1.42) obține forma:

$$F_x^* = \mu_0 \frac{\mu_r - 1}{a} \left\{ \mu_r \int_0^\pi (1 - \cosh \xi_2 \cos \eta) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \left(-B_n e^{-n\xi_2} + C_n e^{n\xi_2} \right) \cos n\eta \right]^2 d\eta + \int_0^\pi (1 - \cosh \xi_2 \cos \eta) \left[\sum_{n=1}^{\infty} -n \left(B_n e^{-n\xi_2} + C_n e^{n\xi_2} \right) \sin n\eta \right]^2 d\eta \right\} \quad (2.1.44)$$

Expresia (2.1.44) am evaluat-o numeric în [Gr4], folosind programele specialitate *MathCad* și *MathLab*. Pentru rezolvarea analitică a integralelor se folosesc identitățile trigonometrice:

$$\sin n\eta \sin p\eta = \frac{1}{2} [\cos(n-p)\eta - \cos(n+p)\eta]$$

$$\cos n\eta \cos p\eta = \frac{1}{2} [\cos(n+p)\eta + \cos(n-p)\eta]$$

Integralele corespunzătoare primei sume au una din formele:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 n\eta d\eta &= \frac{\pi}{2} & \int_0^\pi \cos^3 n\eta d\eta &= 0 \\ \int_0^\pi \cos p\eta \cos n\eta d\eta &= 0 & \int_0^\pi \cos \eta \cos^2 n\eta d\eta &= 0, \\ \int_0^\pi \cos p\eta \cos n\eta \cos \eta d\eta &= \begin{cases} 0, & \text{daca } n \neq p \pm 1 \\ \frac{\pi}{4}, & \text{daca } n = p \pm 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.45)$$

iar cele corespunzătoare celei de a doua sume sunt de una din formele:

$$\int_0^\pi \sin^2 n\eta d\eta = \frac{\pi}{2} \quad \int_0^\pi \cos \eta \cos^2 n\eta d\eta = 0$$

$$\int_0^\pi \cos p\eta \cos n\eta d\eta = 0 \quad \int_0^\pi \cos p\eta \cos n\eta \cos \eta d\eta = \begin{cases} 0, & \text{daca } n \neq p \pm 1 \\ \frac{\pi}{4}, & \text{daca } n = p \pm 1 \end{cases} \quad (2.1.46)$$

Introducând notațiile:

$$K_n = n(-B_n e^{-n\xi_2} + C_n e^{n\xi_2})$$

$$Q_n = -n(B_n e^{-n\xi_2} + C_n e^{n\xi_2}), \quad (2.1.47)$$

și ținând seama de (2.1.45) și (2.1.46), se obțin:

$$\int_0^\pi (1 - \cosh \xi_2 \cos \eta) \left(\sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos n\eta \right)^2 d\eta = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^2 - K_n K_{n+1} \cosh \xi_2),$$

$$\int_0^\pi (1 - \cosh \xi_2 \cos \eta) \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\eta \right)^2 d\eta = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n^2 - Q_n Q_{n+1} \cosh \xi_2),$$

iar expresia forței din (2.1.44) devine:

$$F_x^* = \mu_0 \frac{\mu_r - 1}{a} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\mu_r (K_n^2 - K_n K_{n+1} \cosh \xi_2) + (Q_n^2 - Q_n Q_{n+1} \cosh \xi_2)] \quad (2.1.48)$$

Cum din (2.1.28) și (2.1.29) avem $\frac{B_n}{C_n} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} e^{2n\xi_2}$, rezultă pentru K_n și

Q_n expresiile:

$$K_n = \frac{4aM_p n e^{n\xi_2}}{(\mu_r + 1)^2 e^{2n\xi_1} - (\mu_r - 1)^2 e^{2n\xi_2}} \quad \text{și} \quad Q_n = -\mu_r K_n \quad (2.1.49)$$

Ca urmare (2.1.48) se poate scrie în forma finală, [DS9]:

$$F_x^* = \mu_0 \mu_r \frac{\mu_r^2 - 1}{a} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [K_n (K_n - K_{n+1} \cosh \xi_2)] \quad (2.1.50)$$

în care K_n și K_{n+1} rezultă din (2.1.49).

Pentru a calcula forța din (2.1.50) am stabilit în prealabil, numărul termenilor n din serie astfel încât diferența raportată între două valori consecutive ale forței din (2.1.50) să fie sub 0.01, adică:

$$\frac{F_x^*(\Delta l, n+1) - F_x^*(\Delta l, n)}{F_x^*(\Delta l, n+1)} 100 \leq 1\% \quad (2.1.51)$$

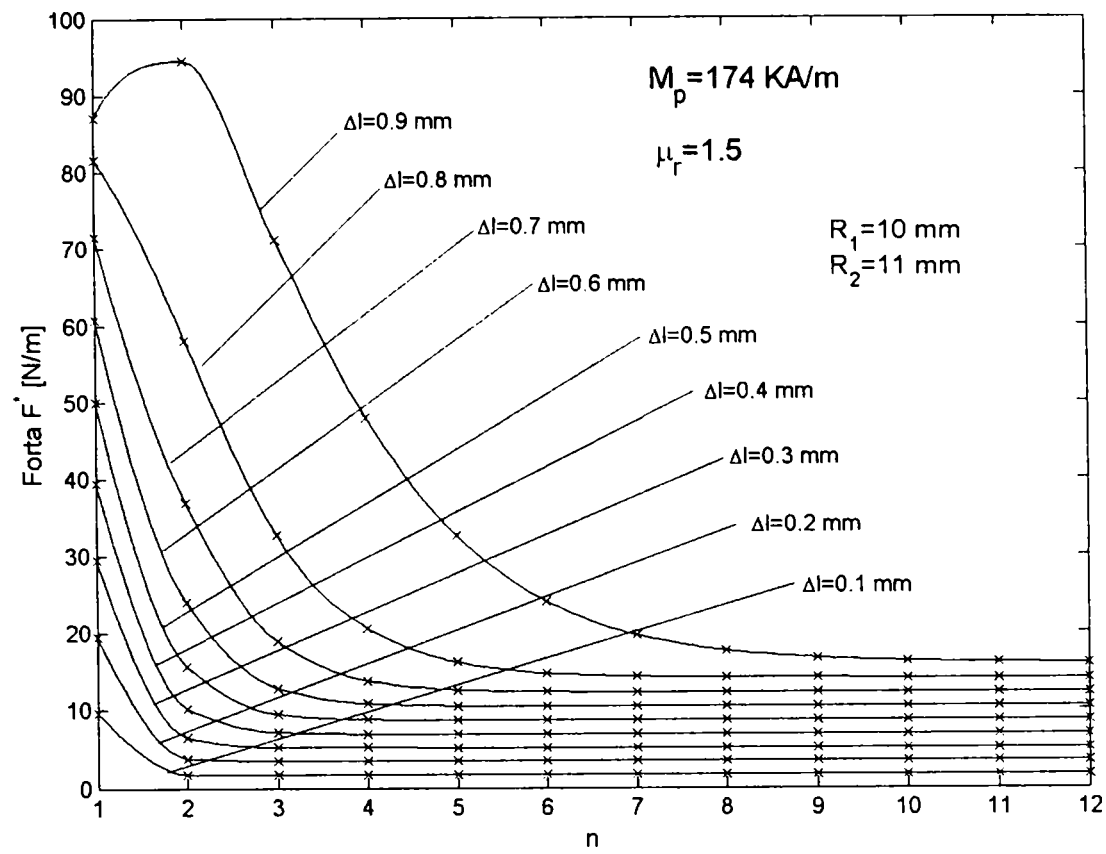


Fig. 2.1.6

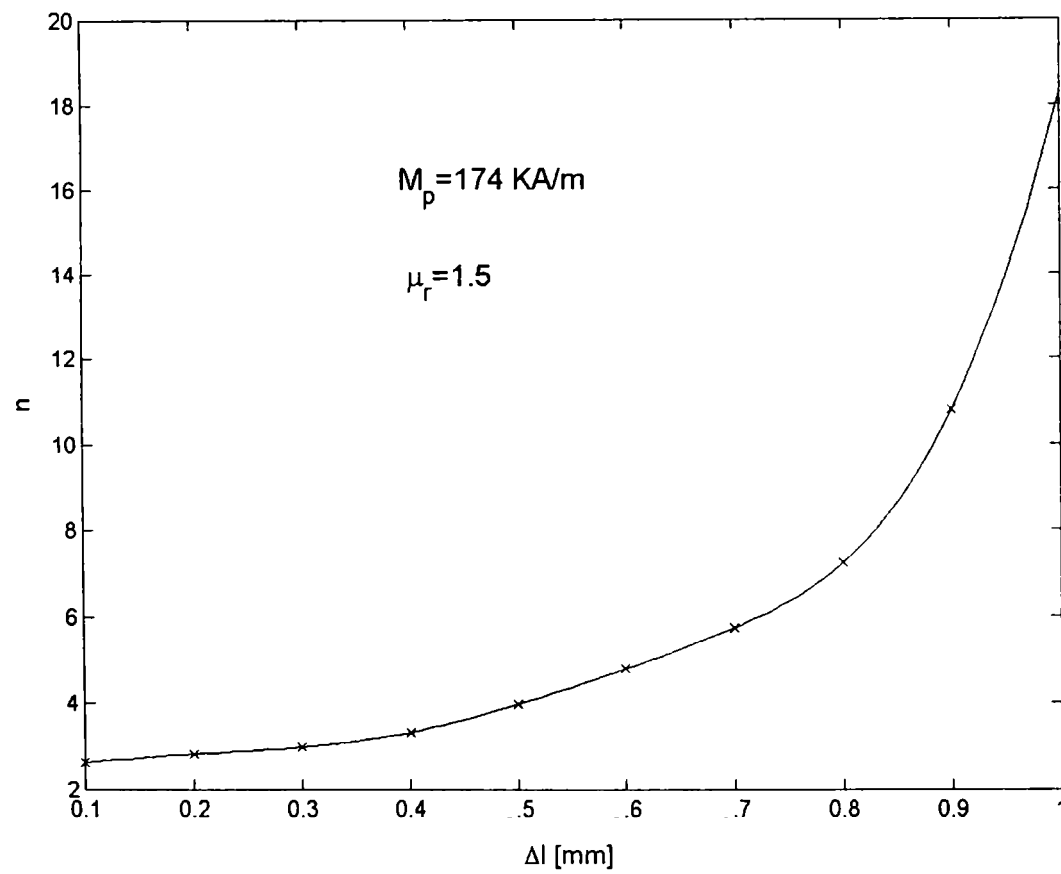


Fig. 2.1.7

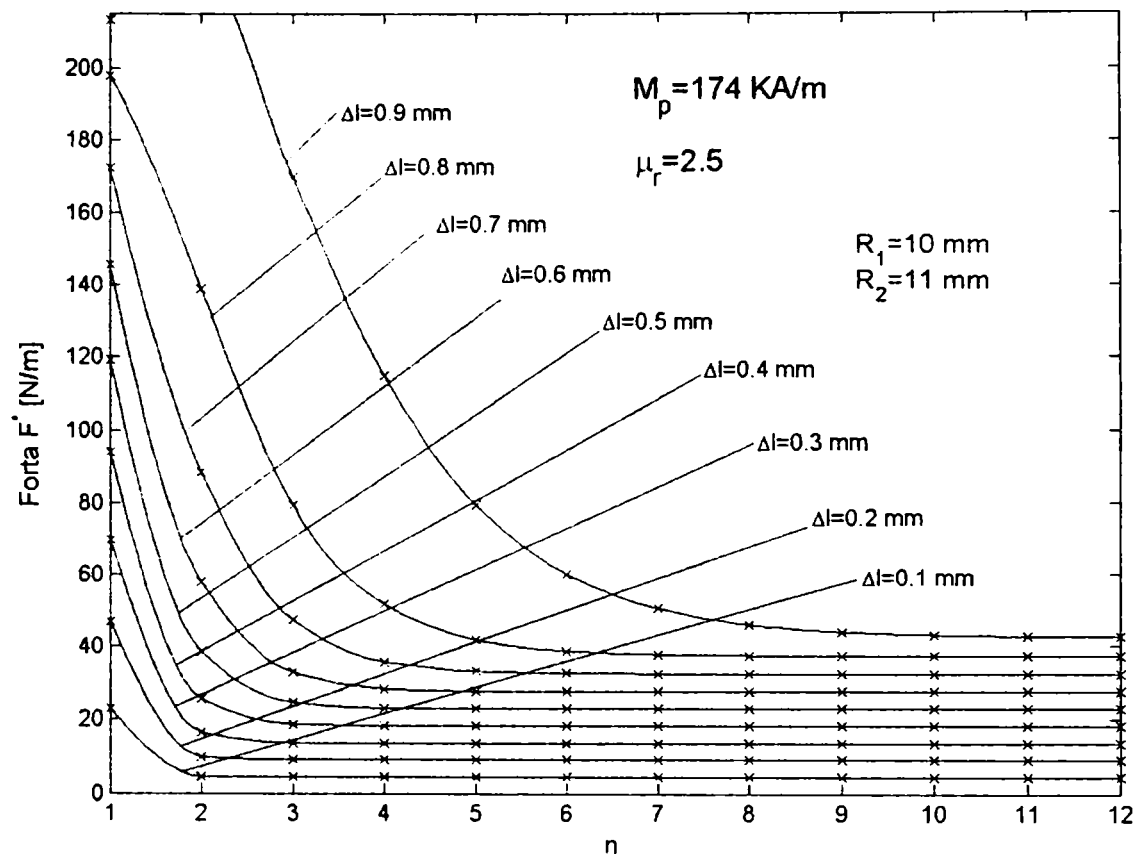


Fig. 2.1.8

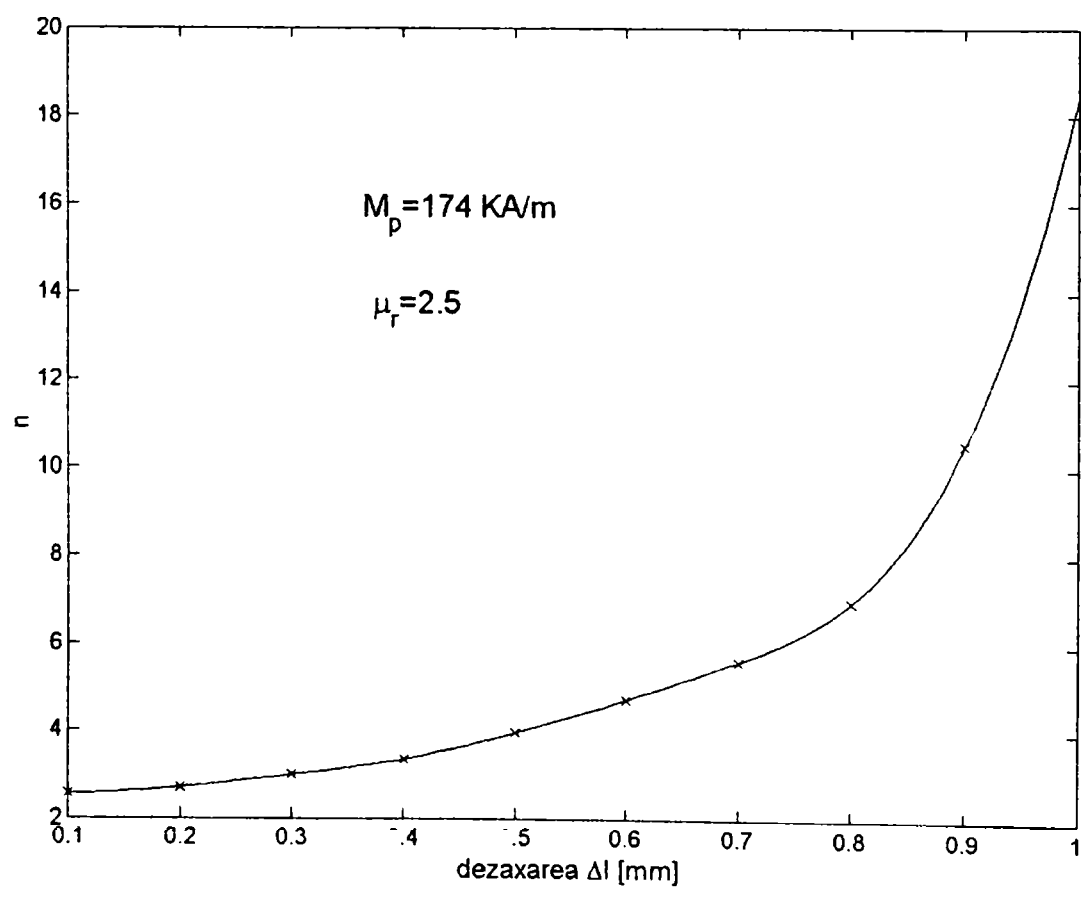


Fig. 2.1.9

În acest scop am trasat $F_x^*(\Delta l, n)$ în funcție de n cu Δl ca parametru, fig.2.1.6, pentru $\mu_r=1.5$ și fig.2.1.8 pentru $\mu_r=2.5$, [DS9]. Din condiția (2.1.51) va rezulta numărul minim n al termenilor seriilor ca funcție de Δl , pentru care este îndeplinită relația (2.1.51), fig2.1.7 pentru $\mu_r=1.5$ și fig.2.1.9 pentru $\mu_r=2.5$. Se constată că dependențele din fig.2.1.7 și fig.2.1.9 sunt aproximativ identice, ceea ce arată că această dependență nu depinde de permeabilitatea relativă a lichidului magnetic.

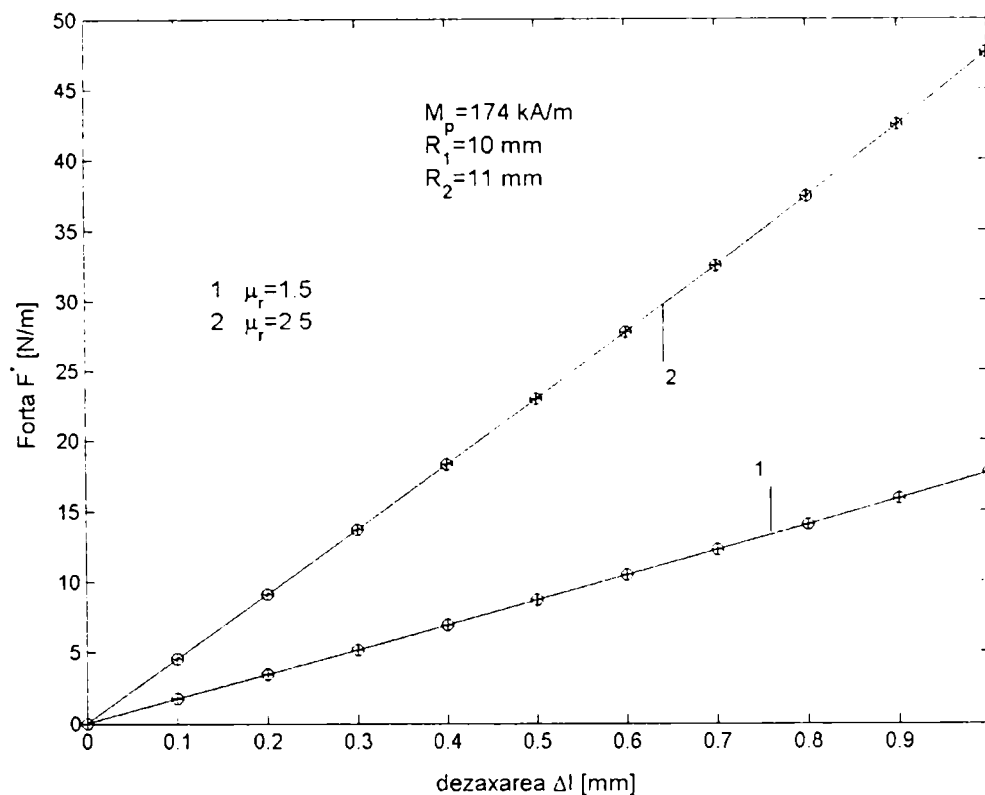


Fig.2.1.10

În [Ce1], într-un rezumat sumar, este dată expresia forței de readucere sub forma unei serii, pornindu-se de la expresia forței ce acționează asupra arborelui magnetic [Ro1], [DS1]. Pe unitatea de lungime, s-a obținut expresia:

$$F_{x_{ce}}^* = \frac{\mu_l k a}{(\mu_l + 1)} (4\pi M_p^2) \sum_{n=0}^{\infty} [2n^2 b_n c_n - n(n+1)(b_n c_{n+1} + b_{n+1} c_n)] \quad (2.1.52)$$

în care $b_n = \frac{e^{-2n(\xi_1 - \xi_2)}}{1 - k^2 e^{-2n(\xi_1 - \xi_2)}}$, $c_n = e^{-2n\xi_2} b_n$, iar $k = \frac{\mu_l - 1}{\mu_l + 1}$. Expresia forței a fost

determinată în sistemul CGS electromagnetic, ca urmare forța pe unitatea de lungime a fost exprimată în *dynes/cm*, magnetizația permanentă M_p dată în gauss iar permeabilitatea relativă a vidului $\mu_0=1$. Folosind relațiile de trecere a mărimilor din sistemul CGS electromagnetic în S.I.:

$$F^{(N)} = 10^{-5} F^{(Dyne)}, \quad H^{(A/m)} = \frac{10^3}{4\pi} H^{(Oer)}, \quad B^{(T)} = 10^{-4} B^{(Gauss)},$$

$$M^{(A/m)} = 10^3 M^{(Gauss)} \text{ sau } M^{(kA/m)} = M^{(Gauss)}, \quad \mu_0^{(H/m)} = \mu_{0_{clm}} 4\pi 10^{-7}$$

am comparat expresia forței obținute, dată de (2.1.50) cu (2.1.52). Comparația s-a făcut grafic pentru un lagăr magnetic cu $R_1=10 \text{ mm}$, $R_2=11 \text{ mm}$, $M_p=174 \text{ kA/m}$ (valori folosite în [Ce1]), reprezentându-se în fig.2.1.10 dependența forței F_x^* , în N/m , funcție de Δl , în mm , cu μ_r parametru. Curbele notate cu "x" au fost obținute în [Ce1] folosind relația (2.1.52). Se constată o foarte bună concordanță cu cele calculate cu (2.1.50), notate cu "o".

Din expresia obținută pentru forță, (2.1.50) și din (2.1.49) se observă că forța de readucere pe unitatea de lungime este proporțională cu pătratul magnetizației permanente M_p , este determinată de permeabilitatea relativă μ_r a lichidului magnetic și de dimensiunile lagărului R_1 și R_2 și deaxarea Δl , prin intermediul constantei a și a coordonatelor ξ_1 și ξ_2 . Am analizat modul în care raportul R_1/R_2 , notat cu k , influențează valoarea forței de readucere pentru o deaxare dată și R_1 fixat. În fig.2.1.11 s-a reprezentat dependența forței cu k , pentru $R_1=10 \text{ mm}$, $M_p=174 \text{ kA/m}$ și $\mu_r=1.5$, pentru deaxare $\Delta l=0.2 \text{ mm}$ și respectiv $\Delta l=0.4 \text{ mm}$. În fig.2.1.12 s-a folosit un lichid cu $\mu_r=1.5$. Din ambele figuri se constată o creștere a forței când k tinde către unu.

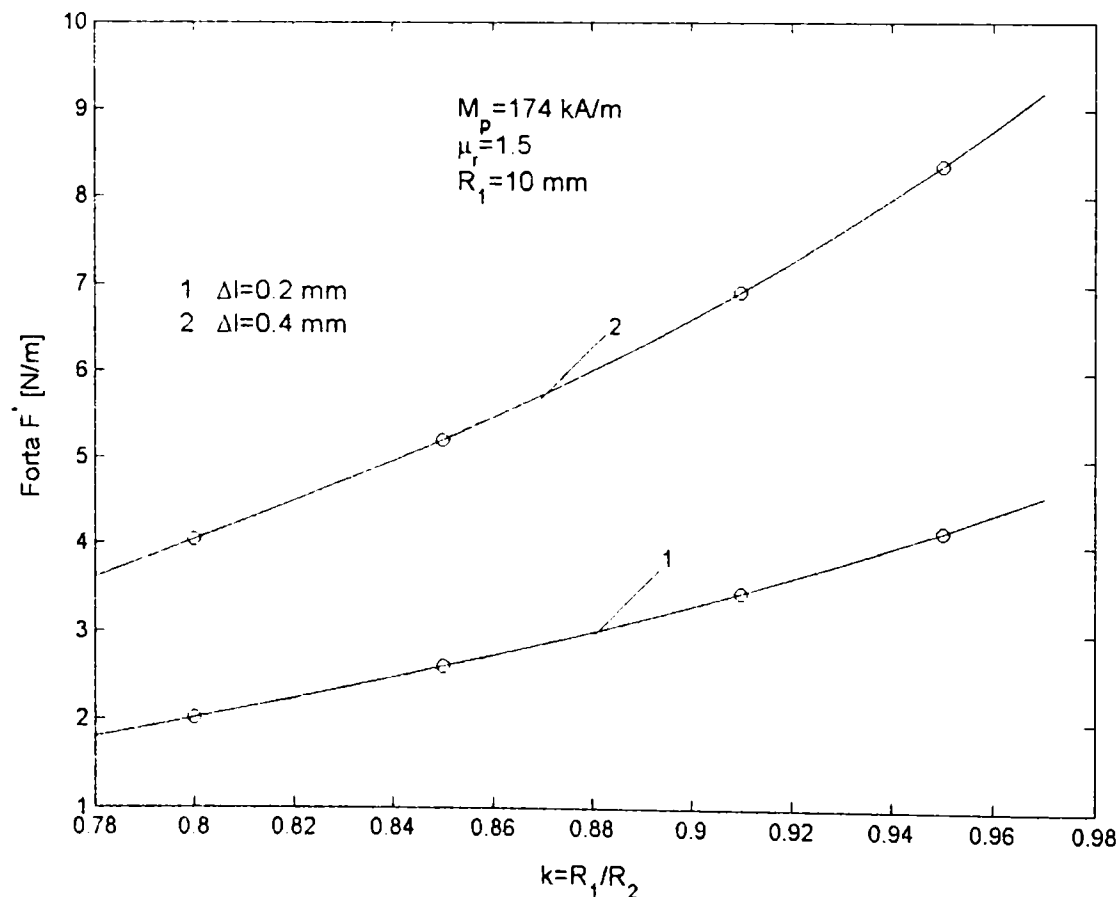


Fig. 2.1.11

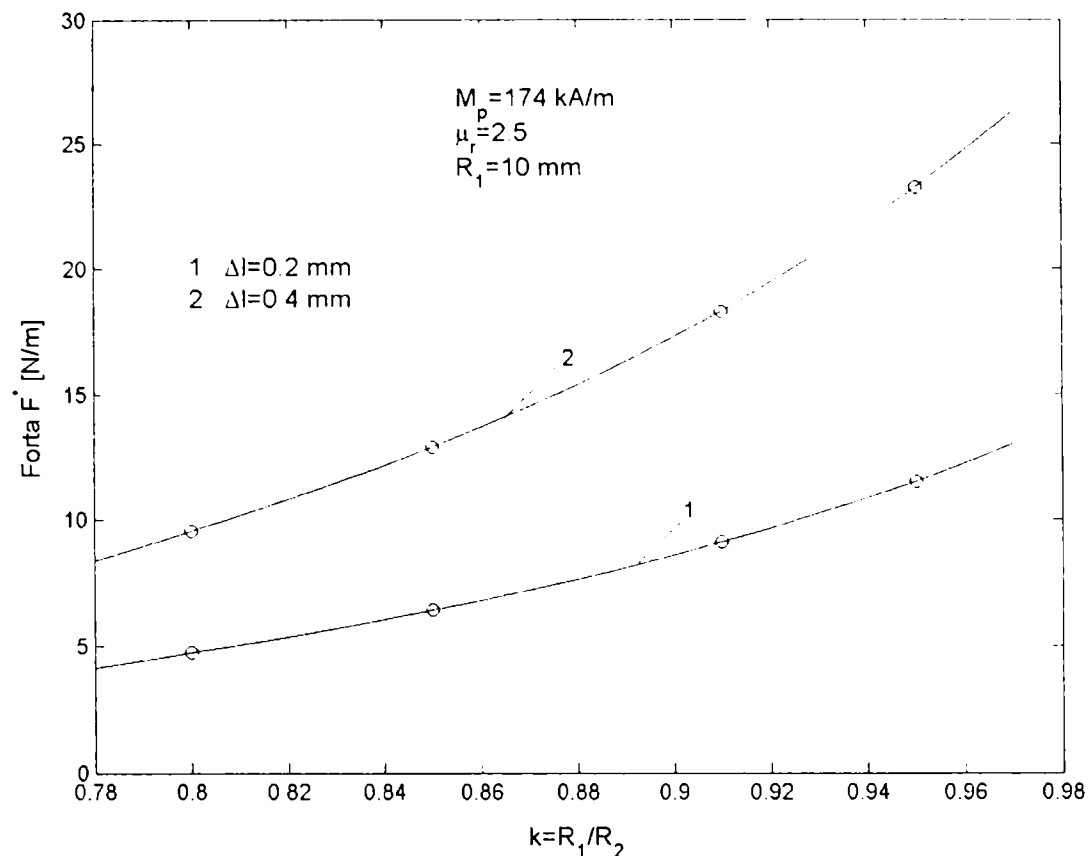


Fig. 2.1.12

2.2 Calculul aproximativ al unui lagăr cilindric cu lichid magnetic

În [Vs1] se prezintă o expresie analitică aproximativă a forței de natură magnetică exercitată pe unitatea de lungime, asupra arborelui cilindric magnetizat permanent al unui lagăr hidrostatic cu lichid magnetic. Pentru medii liniare, în [B11], expresia analitică aproximativă este adusă la forma :

$$F_{BI}^* = \mu_0 \frac{(\mu_r - 1) M_p^2 2\pi \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Delta l}{4 \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{\Delta l}{r_1}\right)^2 \right]^3} \quad (2.2.1)$$

în care :

M_p este magnetizația permanentă a arborelui de rază r_1 , exprimată în A/m ;

Δl reprezintă vectorul dezașării (fig. 2.2.1) exprimat în m ;

r_2 raza lagărului;

μ_r permeabilitatea magnetică relativă a lichidului.

Valoarea forței din (2.2.1) rezultă în newton pe metru $[N/m]$.

În continuare am calculat o nouă expresie a forței magnetice de readucere pe unitatea de lungime, funcție de dimensiunile lagărului, de proprietățile magnetice

ale arborelui și a lichidului magnetic și de dezaxarea arborelui, [DS3]. Relația se compară cu (2.2.1) și cu (2.1.50).

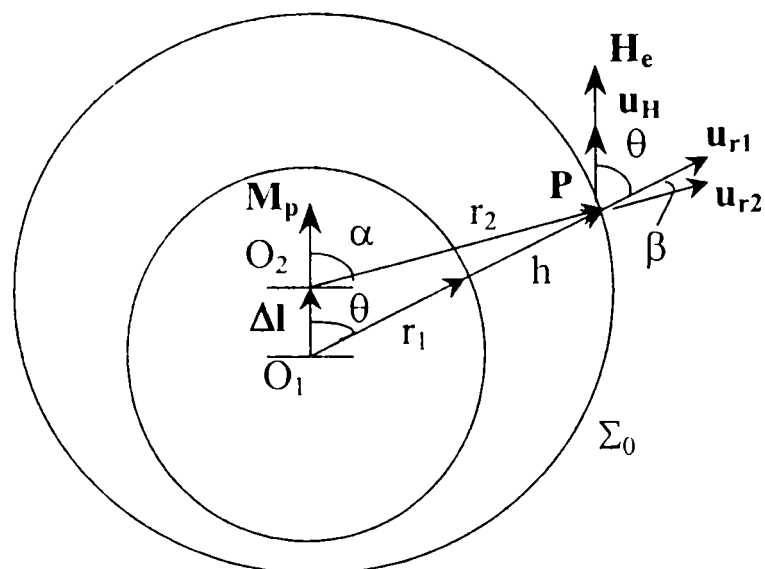


Fig. 2.2.1

2.2.1. Calculul analitic al câmpului magnetic generat de un cilindru uniform magnetizat înconjurat de lichid magnetic

Se consideră un cilindru de rază a , cu permeabilitate magnetică constantă $\mu_m = \mu_0 \mu_{rm}$, uniform magnetizat perpendicular pe axa sa, și imersat într-un lichid magnetic presupus liniar, de permeabilitate magnetică constantă $\mu_l = \mu_0 \mu_{rl}$, (fig.2.2.2), [DS2].

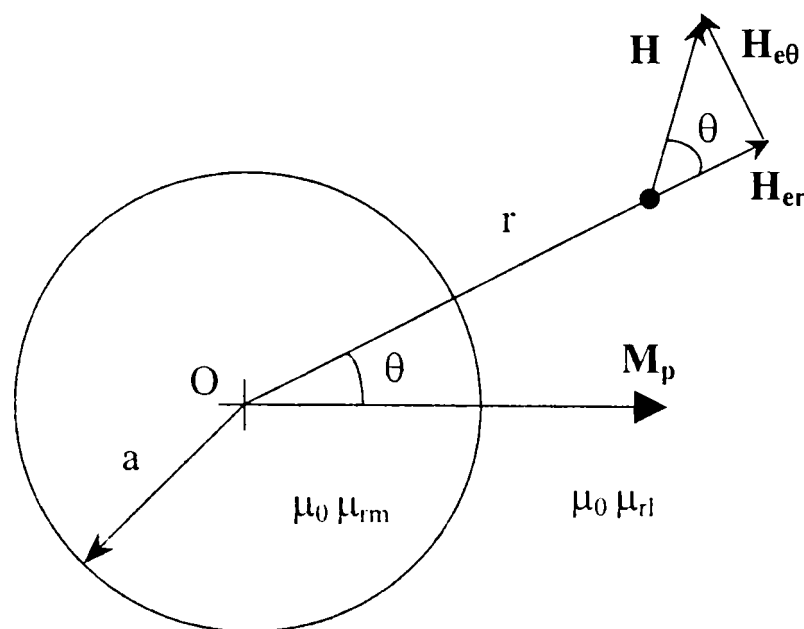


Fig.2.2.2

Intensitățile câmpului magnetic, din interiorul cilindrului notată cu \mathbf{H}_i și din exteriorul său notată cu \mathbf{H}_e , sunt potențiale, deoarece nu există curenți de conducție

$$\mathbf{H}_i = -\nabla V_{H_i}, \quad \mathbf{H}_e = -\nabla V_{H_e}, \quad (2.2.2)$$

V_H fiind potențialul scalar al câmpului magnetic .

Cum $\mathbf{B}_i = \mu_m \mathbf{H}_i + \mu_0 \mathbf{M}_p$ și $\mathbf{B}_e = \mu_l \mathbf{H}_e$, în care M_p , μ_m și μ_l sunt mărimi constante, rezultă din legea fluxului magnetic, $\text{div} \mathbf{B} = 0$, egalitățile :

$$\text{div} \mathbf{H}_i = -\text{div} \mathbf{M}_p = 0, \quad \text{div} \mathbf{H}_e = 0 \quad (2.2.3)$$

adică ecuații de tip laplace pentru potențialul magnetic scalar:

$$\nabla^2 V_{H_i} = 0, \quad \nabla^2 V_{H_e} = 0 \quad (2.2.4)$$

Alegându-se coordonate cilindrice, (fig.2.2.2), și considerând câmpul plan paralel $\left(\frac{\partial^2 V_H}{\partial z^2} = 0 \right)$, laplacianul are forma:

$$\nabla^2 V_H = \frac{\partial^2 V_H}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_H}{\partial \theta^2} \quad (2.2.5)$$

Ecuația (2.2.4) se poate rezolva analitic folosind metoda separării variabilelor. Cum $V_H(r, \theta) = V_H(r, \theta + 2\pi)$, rezultă că potențialul magnetic scalar V_H este o funcție periodică în raport cu θ , iar $V_H(r, \theta) = V_H(r, -\theta)$, urmează că funcția în θ conține numai armonici în cosinus.

Se va încerca deci separarea variabilelor în forma $V_n = R_n(r) \cos n\theta$, care introdusă în (2.2.5) conduce la ecuația de tip Euler:

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} R_n = 0 \quad (2.2.6)$$

Încercând o soluție de forma $R_n = C r^k$, rezultă:

$$C [k(k-1) + k - n^2] r^{k-2} = 0,$$

de unde $k = \pm n$ și $R_n = \frac{A_n}{r^n} + E_n r^n$.

Ca urmare soluțiile ecuației (2.2.5) vor avea formele:

$$V_{H_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A_n}{r^n} + E_n r^n \right] \cos n\theta \quad (2.2.7)$$

$$V_{H_e} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{C_n}{r^n} + D_n r^n \right] \cos n\theta$$

Cum potențialul magnetic scalar este o funcție finită pretutindeni, deci și la $r=0$, rezultă $A_n=0$. Având în vedere că la distanțe mari de cilindru, sarcinile magnetice de la suprafața sa se comportă ca un dipol liniar al cărui potențial are forma $V_H = \frac{k}{r} \cos \theta$, se deduce că $n=1$ și $D_n=0$. Cu acestea expresiile (2.2.7) iau forme mai simple:

$$V_{H_i} = E_1 r \cos\theta \quad \text{și} \quad V_{H_e} = \frac{C_1}{r} \cos\theta \quad (2.2.8)$$

Constantele C_1 și E_1 se determină din condițiile de limită de la suprafața cilindrului referitoare la continuitatea potențialului magnetic scalar și ale componentelor normale ale vectorului inducție magnetică:

$$(V_{H_i})_{r=a} = (V_{H_e})_{r=a} \quad \text{și} \quad (\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{u}_r)_{r=a} = (\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{u}_r)_{r=a} \quad \text{sau}$$

$$(V_{H_i})_{r=a} = (V_{H_e})_{r=a} \quad \text{și} \quad -\mu_m \left(\frac{\partial V_{H_i}}{\partial r} \right)_{r=a} + \mu_0 (\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{u}_r)_{r=a} = -\mu_l \left(\frac{\partial V_{H_e}}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

Din cele două condiții rezultă ecuațiile $E_1 a = \frac{C_1}{a}$ și $-\mu_{r_m} E_1 + M_p = \mu_{r_l} \frac{C_1}{a^2}$

(unde $\mu_l = \mu_0 \mu_{r_l}$ și $\mu_m = \mu_0 \mu_{r_m}$) care dau valorile celor două constante:

$$E_1 = \frac{M_p}{\mu_{r_l} + \mu_{r_m}} \quad \text{și} \quad C_1 = \frac{a^2 M_p}{\mu_{r_l} + \mu_{r_m}}.$$

Ca urmare, intensitatea câmpului în interiorul cilindrului rezultă uniformă și opusă vectorului de magnetizație:

$$\mathbf{H}_i = -\nabla V_{H_i} = -\frac{\mathbf{M}_p}{\mu_{r_l} + \mu_{r_m}} \quad (2.2.9)$$

iar componentele radiale, respectiv meridionale ale lui H_e devin:

$$H_{e_r} = -\frac{\partial V_{H_e}}{\partial r} = \frac{a^2 M_p}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m}) r^2} \cos\theta \quad (2.2.10)$$

$$H_{e_\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_{H_e}}{\partial \theta} = \frac{a^2 M_p}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m}) r^2} \sin\theta$$

Din (2.1.10) se poate determina modulul vectorului \mathbf{H}_e :

$$H_e = \sqrt{H_{e_r}^2 + H_{e_\theta}^2} = \frac{a^2 M_p}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m}) r^2}, \quad (2.2.11)$$

care în punctele de pe exteriorul suprafeței cilindrice ($r=a$) devine:

$$H_{e_a} = \frac{M_p}{\mu_{r_l} + \mu_{r_m}} \quad (2.2.12)$$

Cu acestea, se poate scrie: $H_e = H_{e_a} \frac{a^2}{r^2}$, (2.2.13)

ceea ce arată că valoarea maximă a modulului câmpului magnetic este pe suprafața cilindrului magnetic și scade în exteriorul acestuia cu $\frac{1}{r^2}$.

Ținând seama de expresiile componentelor radiale și meridionale ale lui H_e , se poate arăta ușor că unghiul format de vectorii \mathbf{H}_e și \mathbf{H}_{er} este egal cu unghiul θ care există între vectorii \mathbf{M}_p și \mathbf{H}_{er} .

2.2.2 Calculul aproximativ al lagărului cilindric cu lichid magnetic

În secțiunea transversală printr-un lagăr cilindric cu lichid magnetic prezentată în fig.2.2.1, arborele de rază r_1 este magnetizat permanent cu magnetizația permanentă uniformă \mathbf{M}_p orientată coliniar cu dezaxarea $\Delta\mathbf{l}=\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$. Cuzinetul este presupus nemagnetic și de rază r_2 . Între arbore și cuzinet se află lichidul magnetic de permeabilitate μ_l . Arborele limitat de suprafața Σ_1 are permeabilitatea μ_m , iar cuzinetul limitat de suprafața Σ_2 are permeabilitatea μ_0 .

În [Vs1] și [DS1] se enunță o teoremă a forței ce se exercită asupra unui magnet permanent imersat într-un lichid magnetic în acord cu care, la echilibru, aceasta este egală și de semn opus cu forța exercitată asupra vasului ce conține lichidul.

În [DS1] se demonstrează următoarea expresie a forței:

$$\mathbf{F}_m = -\frac{\mu_0}{2} \int_{\Sigma_0} \left[M_n^2 + 2 \int_0^H M dH \right] d\mathbf{S} \quad (2.2.14)$$

unde :

Σ_0 reprezintă suprafața lichidului magnetic limitat de vas;

M_n componenta normală a magnetizației la Σ_0 ;

H intensitatea câmpului magnetic la Σ_0 .

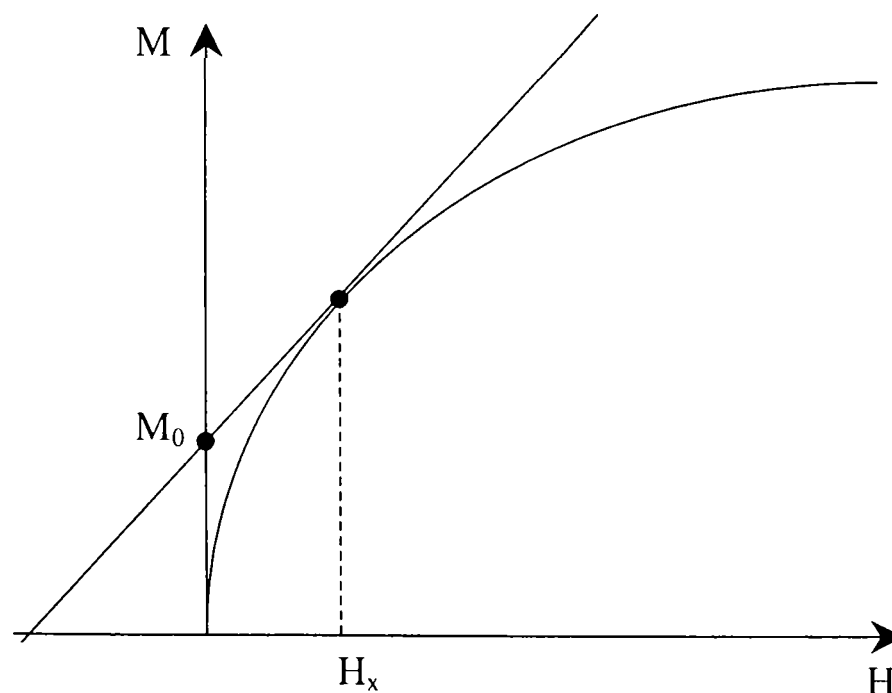


Fig.2.2.3

Se va admite în continuare, că intensitatea câmpului magnetic nu variază mult în diferite puncte ale lui Σ_2 (fig. 2.2.1, $\Sigma_2 = \Sigma_0$) și fie H_x valoarea în jurul căruia are loc această variație. Dezvoltând în serie funcția $M = M(H)$ (curba de magnetizare a lichidului – fig. 2.2.3) în jurul lui H_x și limitând dezvoltarea la primii doi termeni avem:

$$M = M(H_x) + (H - H_x) \left(\frac{dM}{dH} \right)_{H=H_x} = M(H_x) + \chi_{m_d} (H - H_x) = M_0 + \chi_{m_d} H \quad (2.2.15)$$

unde χ_{m_d} este susceptivitatea magnetică dinamică în punctul $H = H_x$, (fig. 2.2.3), iar M_0 este intersecția tangentei în punctul H_x la curba de magnetizare cu axa ordonatelor.

Admițând dependența (2.2.15), se poate scrie:

$$\int_0^H M dH = \int_0^H [M_0 + \chi_{m_d} H] dH = M_0 H + \frac{\chi_{m_d}}{2} H^2 \quad (2.2.16)$$

și deci (2.2.14) devine:

$$\mathbf{F}_m = -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \frac{1}{2} \left[(M_0 + \chi_{m_d} H)^2 (\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{n})^2 + 2M_0 H + \chi_{m_d} H^2 \right] d\mathbf{S} \quad (2.2.17)$$

în care \mathbf{u}_H este versorul intensității câmpului magnetic, iar \mathbf{n} versorul normalei exterioare la Σ_2 .

La calculul intensității câmpului magnetic pe suprafața Σ_2 se va presupune că vasul (cuzinetul) de permeabilitate magnetică μ_0 , nu modifică sensibil spectrul câmpului și că, deci, lichidul magnetic poate fi considerat de extensie foarte mare. În aceste condiții în paragraful 2.2.1 s-a determinat analitic expresia intensității câmpului magnetic produsă de cilindrul magnetizat, într-un punct din exteriorul acestuia, (2.2.11).

În (2.2.17) produsul versorilor poate fi scris în forma:

$\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_H \cdot \mathbf{u}_{r_2} = \cos(\theta + \beta)$, (fig. 2.2.1). Din triunghiul $O_1 O_2 P$, (fig. 2.2.1), sunt valabile aproximațiile de ordinul 1:

$$r_1 + h = \Delta l \cos \theta + r_2 \cos(\alpha - \theta)$$

Deoarece Δl este mic, se poate face aproximarea $\alpha \cong \theta$ și cu notația $r_2 - r_1 = \delta$, rezultă:

$$h = \delta + \Delta l \cos \theta \quad (2.2.18)$$

iar produsul versorilor devine: $\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$.

Pentru componenta forței după direcția deplasării, din motive de simetrie singura diferită de zero, cu $\Delta \mathbf{l} = \Delta l \mathbf{u}_y$, din (2.2.17) se obține:

$$F_y = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u}_y = -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[\frac{1}{2} (M_0 + \chi_{m_d} H)^2 \cos^2 \theta \cos \theta \right] dS - \mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[M_0 H + \frac{\chi_{m_d}}{2} H^2 \right] \cos \theta dS \quad (2.2.19)$$

Cum interesează forța pe unitatea de lungime a cilindrului, $dS = r_2 d\theta$, egalitatea (2.2.19) devine:

$$F_y^* = -\mu_0 M_0^2 r_2 \int_0^\pi \cos^3 \theta d\theta - 2 \mu_0 M_0 \chi_{md} r_2 \int_0^\pi H \cos^3 \theta d\theta - \mu_0 \chi_{md}^2 r_2 \int_0^\pi H^2 \cos^3 \theta d\theta - 2 \mu_0 M_0 r_2 \int_0^\pi H \cos \theta d\theta - \chi_{md} \mu_0 r_2 \int_0^\pi H^2 \cos \theta d\theta \quad (2.2.20)$$

În expresia forței, intensitatea câmpului magnetic este dată de (2.2.11) în care $a=r_1$ și $r=r_1+h=r_2+\Delta l \cos \theta$ (cum rezultă din 2.2.18).

Prima integrală din (2.2.20) este nulă, iar a doua obține forma:

$$I_2 = -2 \mu_0 M_0 \chi_{md} \frac{r_1^2 M_p}{r_2 (\mu_{r_l} + \mu_{r_m})} \int_0^\pi \frac{\cos^3 \theta}{\left(1 + \frac{\Delta l}{r_2} \cos \theta\right)^2} d\theta \quad (2.2.21)$$

Cu dezvoltarea în serie: $\left(1 + \frac{\Delta l}{r_2} \cos \theta\right)^{-2} = 1 - 2 \frac{\Delta l}{r_2} \cos \theta + \dots$ limitată la primii doi termeni, conduce la [Rj1]:

$$I_2 = 4 \mu_0 \chi_{md} M_0 M_p \frac{r_1^2 \Delta l}{r_2^2 (\mu_{r_l} + \mu_{r_m})} \cdot \frac{3\pi}{8} \quad (2.2.22)$$

Pentru exprimarea celui de-al treilea termen

$$I_3 = -\mu_0 \chi_{md}^2 r_2 \frac{r_1^4 M_p^2}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m})^2 r_2^4} \int_0^\pi \frac{\cos^3 \theta}{\left(1 + \frac{\Delta l}{r_2} \cos \theta\right)^4} d\theta \quad (2.2.23)$$

se folosește dezvoltarea în serie [Rj1]: $\left(1 + \frac{\Delta l}{r_2} \cos \theta\right)^{-4} = 1 - 4 \frac{\Delta l}{r_2} \cos \theta + \dots$ care limitată la primii doi termeni conduce la:

$$I_3 = \mu_0 \chi_{md}^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \frac{M_p^2}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m})^2} \cdot \frac{3\pi}{2} \Delta l \quad (2.2.24)$$

Cu procedeul aplicat anterior, al patrulea termen

$$I_4 = -2 \mu_0 M_0 r_2 \frac{r_1^2 M_p}{\mu_{r_l} + \mu_{r_m}} \cdot \frac{1}{r_2^2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\left(1 + \frac{\Delta l}{r_2} \cos \theta\right)^2} d\theta \quad (2.2.25)$$

$$\text{devine: } I_4 = 2\pi\mu_0 M_0 \frac{M_p}{\mu_{r_l} + \mu_{r_m}} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Delta l \quad (2.2.26)$$

iar pentru ultimul termen din (2.2.20) se obține expresia:

$$\begin{aligned} I_5 &= -\chi_{md} \mu_0 r_2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \frac{M_p^2}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m})^2} \int_0^\pi \frac{\cos\theta d\theta}{\left(1 + \frac{\Delta l}{r_2} \cos\theta\right)^4} = \\ &= 2\pi \chi_{md} \mu_0 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \frac{M_p^2}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m})^2} \Delta l \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Înlocuind integralele în (2.2.20) se obține expresia forței de levitație pe unitatea de lungime ce acționează asupra arborelui cilindric magnetizat permanent al unui lagăr cu lichid magnetic:

$$F_y^* = \frac{\mu_0 \pi M_p \Delta l}{\mu_{r_l} + \mu_{r_m}} \left(\frac{3}{2} \chi_{md} + 2\right) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \left[M_0 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{M_p}{\mu_{r_l} + \mu_{r_m}} \chi_{md} \right] \quad (2.2.28)$$

Expresia (2.2.28) este utilă în calculul de proiectare al lagărului, considerând arborele cu magnetizație temporară ($\mu_{r_m} \neq 1$), iar lichidul magnetic are caracteristică neliniară. Relația diferă de cea menționată în [Vs1] dedusă, probabil, prin alte procedee de calcul.

Dacă se lucrează pe porțiunea liniară a curbei de magnetizare a lichidului magnetic atunci $M_0=0$, $\chi_{md} = \chi_m$ și $1 + \chi_m = \mu_{r_l}$, iar (2.2.28) devine, [DS3]:

$$F_x^* = \mu_0 \pi M_p^2 \Delta l \frac{(3\mu_{r_l} + 1)(\mu_{r_l} - 1)}{2(\mu_{r_l} + \mu_{r_m})^2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \quad (2.2.29)$$

diferită de (2.2.1).

Se evidențiază o dependență pătratică a forței de M_p și o creștere asimptotică a factorilor ce conțin pe μ_{r_l} spre valoarea $\frac{3}{2}$ odată cu mărirea lui μ_{r_l} .

Ambele relații, (2.2.28) și (2.2.29) arată că forța este o funcție liniară de dezaxarea Δl .

Pentru a compara expresia forței obținută în (2.2.29) cu expresia forței (2.2.1) obținută în [Bl1], notată cu F_{Bl} , s-a făcut raportul lor:

$$\frac{F_y^*}{F_{Bl}^*} = \frac{(3\mu_{r_l} + 1)}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m})^2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^6 \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{\Delta l}{r_1}\right)^2 \right]^3 = \frac{(3\mu_{r_l} + 1)}{(\mu_{r_l} + \mu_{r_m})^2} \left[1 - \left(\frac{\Delta l}{r_2}\right)^2 \right]^3 \quad (2.2.30)$$

Se constată că forțele sunt aproximativ egale dacă $\left(\frac{\Delta l}{r_2}\right)^2$ este neglijabil în raport cu unitatea și dacă $\mu_{r_l} \cong \mu_{r_m} \cong 1$.

În concluzie, formulele aproximative (2.2.28) și (2.2.29) stabilite în acest paragraf dau indicații cu privire la dependența forței funcție de dimensiunile geometrice ale lagărului, de magnetizația permanentă, de dezaxare și de proprietățile fizice ale lichidului magnetic. Acestea sunt utile la stabilirea, în primă aproximație, a dimensiunilor lagărului și a lichidului utilizat pentru obținerea forței de levitație dorite.

Veridicitatea expresiei obținute se va face prin compararea forței date de (2.2.29) cu expresia forței (2.1.50) determinată în paragraful 2.1.4.

În fig.2.2.4 și fig.2.2.5 sunt reprezentate curbele de variație ale forței de readucere pe unitatea de lungime funcție de dezaxarea Δl . În ambele cazuri s-a considerat un lagăr cilindric cu $r_1=10 \text{ mm}$, $r_2=11 \text{ mm}$ și magnetizație permanentă $M_p=136.4 \text{ kA/m}$. Cu “o” s-a reprezentat forța folosind relația analitică aproximativă dedusă, (2.2.29), în care s-a considerat că cilindrul magnetic nu se polarizează temporal ($\mu_{r_m}=1$), cu “+” s-a reprezentat forța folosind expresia analitică aproximativă (2.2.1) obținută în [B11], iar cu “*” s-a reprezentat forța folosind relația (2.1.50) obținută în paragraful 2.1.4, considerată expresia exactă de calcul a forței.

Pentru un lichid presupus liniar, relația (2.1.50) determină valoarea forței cu precizia cea mai mare (valoarea “exactă”), cu toate că și în acest caz, calculul câmpului s-a făcut considerând modelul plan-paralel (diferit de cazul real), iar valoarea forței se obține limitând numărul de termeni ai sumei din (2.1.50).

Expresiile forței (2.2.1) și (2.2.29) sunt aproximative, aproximațiile fiind făcute în ceea ce privește calculul câmpului și al integralelor ce intervin în expresia forței. La stabilirea relației (2.2.29), câmpul magnetic produs de cilindrul magnetizat permanent a fost calculat în condițiile în care lichidul magnetic ce înconjoară cilindrul magnetizat a fost presupus de extensiune infinită.

Curbele din fig.2.2.4, obținute pentru un lichid magnetic cu $\mu_{r_l}=1.15$ și cele din fig.2.2.5 corespunzătoare unui lichid cu $\mu_{r_l}=2.5$, arată, cum era de așteptat, că relației (2.2.29) este cu atât mai exactă cu cât se folosesc lichide magnetice cu permeabilitate relativă mai mică ($\mu_{r_l} \rightarrow 1$). Se observă o corespondență foarte bună între curbele notate cu “o” și “*” din fig.2.2.4 față de o corespondență relativ bună pentru cele din fig.2.2.5. Atât din fig.2.2.4 cât și din fig.2.2.5, se observă că precizia de calcul a forței de readucere folosind (2.2.29) este mai bună decât cea calculată cu (2.2.1), obținută în [B11], curbele notate cu “o” fiind mai apropiate de cele notate cu “*” decât curbele notate cu “+”.

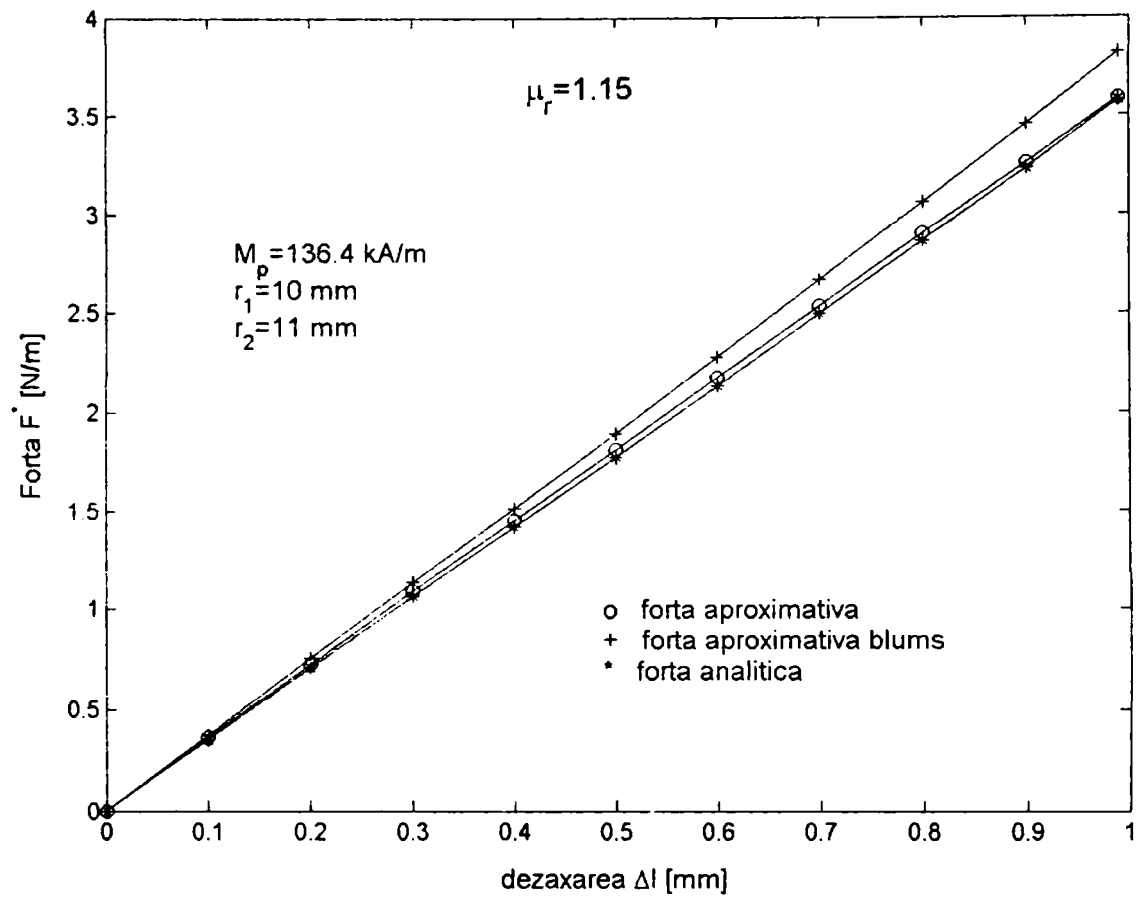


Fig. 2.2.4

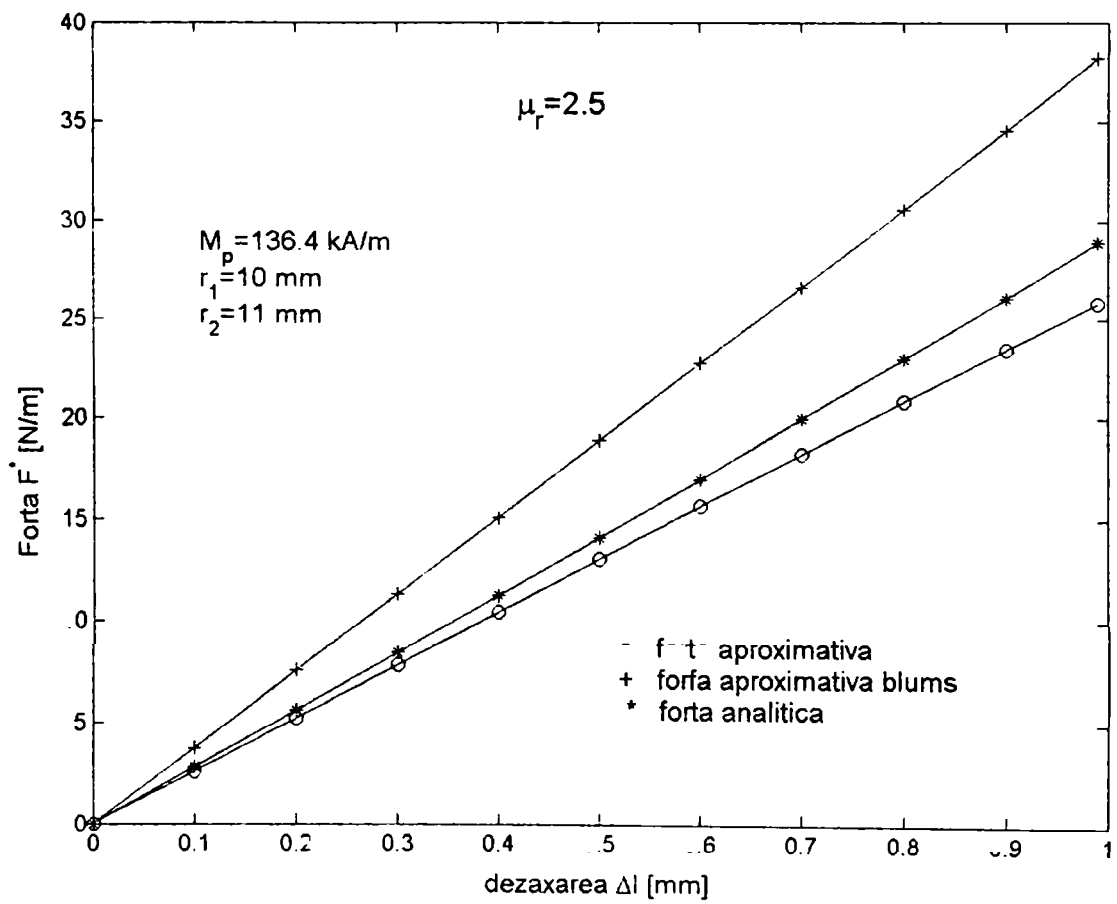


Fig. 2.2.5

2.3 Calculul numeric al lagărului cilindric cu lichid magnetic

În acest paragraf am urmărit determinarea câmpului magnetic din lagărul cilindric pe baza integrării numerice a ecuațiilor câmpului, și determinarea numerică a forței portante a lagărului magnetic, [Gr3]. Câmpul magnetic a fost determinat numeric, cu precizie ridicată, atât pentru lichide magnetice ideale cu caracteristica magnetică presupusă liniară, cât și pentru lichide magnetice reale cu caracteristica magnetică neliniară ridicată experimental. La calculul câmpului am folosit programul specializat Maxwell, bazat pe metoda elementelor finite. Pe baza câmpului magnetic determinat numeric, am calculat forța portantă pentru diferite tipuri de lichide magnetice și magneți permanenți la diferite dezaxări ale arborelui. Rezultatele numerice obținute pentru forța portantă au fost comparate cu cele obținute folosind relațiile (2.1.50) și (2.2.29) deduse în paragrafele 2.1.4 și respectiv 2.2.2.

2.3.1 Stabilirea ecuațiilor câmpului electromagnetic în lagăr

Se consideră lagărul cilindric din fig.2.3.1 în care arborele are raza r_1 și este magnetizat permanent cu magnetizația \mathbf{M}_p uniformă, ortogonală pe un plan ce conține axa arborelui, iar cuzinetul este amagnetic și are raza r_2 . Arborele este presupus dezaxat cu dezaxarea $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2=\Delta l$ orientată în sensul magnetizației permanente \mathbf{M}_p . Între arbore și cuzinet se află lichid magnetic de permeabilitate μ_1 . Arborele limitat de suprafața Σ_1 și cuzinetul limitat de suprafața Σ_2 au permeabilitatea μ_0 .

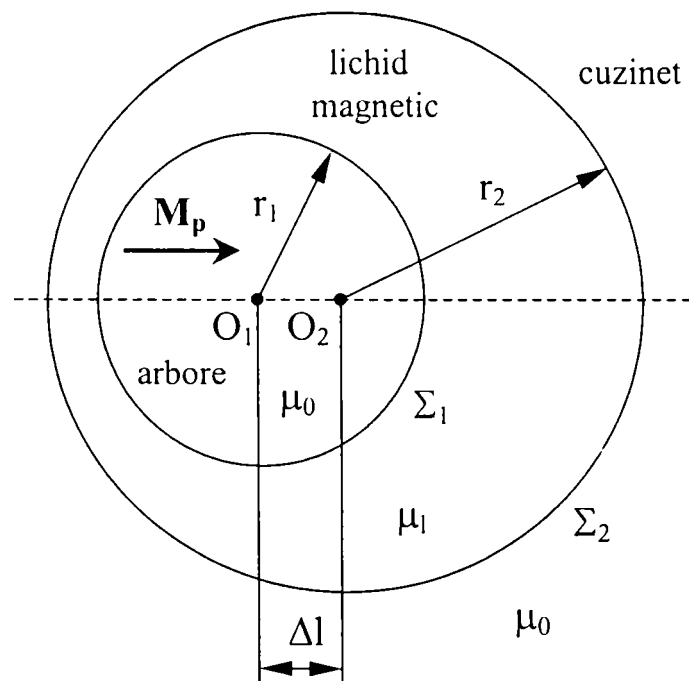


Fig.2.3.1

Domeniul câmpului magnetic este considerat din trei subdomenii: primul reprezintă cilindrul limitat de Σ_1 , al doilea este subdomeniul cuprins între

suprafețele cilindrice Σ_1 și Σ_2 umplut cu lichid magnetic, iar al treilea este subdomeniul din exteriorul lui Σ_2 .

Câmpul magnetic generat de magnetizația permanentă se va considera plan paralel, întrucât lungimea lagărului este mult mai mare decât r_2 .

Ecuatiile pe care le satisface câmpul magnetic în cele trei subdomenii se obțin din:

$$\text{- forma locală a teoremei lui Ampere: } \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \operatorname{rot}_s \mathbf{H} = 0; \quad (2.3.1)$$

$$\text{- legea lagărului dintre vectorii } \mathbf{B}, \mathbf{H} \text{ și } \mathbf{M} \text{ care împreună cu legea magnetizației temporare conduce la: } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p; \quad (2.3.2)$$

$$\text{- forma locală a legii fluxului magnetic: } \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.3.3)$$

Potențialul magnetic vector \mathbf{A} satisface ecuațiile $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ și $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, (condiția de etalonare a lui Coulomb adoptată în general pentru regiuni magnetice staționare). Luând rotorul egalității (2.3.2) și cum, în cazul studiat, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, rezultă:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}_p \quad (2.3.4)$$

Cum în arborele lagărului (domeniul I), \mathbf{M}_p este un câmp uniform, iar în celelalte domenii $\mathbf{M}_p=0$, iar permeabilitățile μ_l și respectiv μ_0 sunt constante, rezultă că în toate cele trei domenii potențialul magnetic vector satisface o ecuație de tip Laplace:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (2.3.5)$$

În câmpuri plan-paralele, $\mathbf{A} = A(x, y) \mathbf{u}_z$ și deci:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{u}_z \times \nabla A \quad (2.3.6)$$

iar ecuația vectorială (2.3.5) se transformă în ecuația scalară:

$$\nabla^2 A = 0 \quad (2.3.7)$$

Condițiile de interfață pe Σ_1 se obțin calculând rotorul superficial al egalității (2.3.2) în care $\operatorname{rot}_s \mathbf{H} = 0$ și $\operatorname{rot}_s (\mu_0 \mathbf{M}_p) = -\mu_0 \mathbf{u}_r \times \mathbf{M}_p$ și continuitatea potențialului magnetic vector. Se obțin, pe Σ_1 , condițiile:

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial r} \right)_{r=r_1} - \left(\frac{\partial A_2}{\partial r} \right)_{r=r_1} = -\mu_0 (\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{u}_\theta) \quad (2.3.8)$$

$$(A_1)_{r=r_1} = (A_2)_{r=r_1}$$

Pe suprafața Σ_2 , din egalitatea $\operatorname{rot}_s \mathbf{H} = 0$, $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$ și ținând seama de (2.3.6) și de continuitatea potențialului magnetic vector, avem:

$$\left(\frac{\partial A_2}{\partial r} \right)_{r=r_2} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial r} \right)_{r=r_2} \quad (2.3.9)$$

$$(A_2)_{r=r_2} = (A_3)_{r=r_2}$$

2.3.2 Calculul numeric al forței de levitație

Forța ce se exercită asupra arborelui pe unitatea de lungime, se calculează efectuând integrala, [DS2]:

$$\mathbf{F}_m^* = -\oint_{\Sigma_1^*} \left(\int_0^H \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right) d\mathbf{S} + \oint_{\Sigma_1^*} \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.3.10)$$

unde Σ_1^* reprezintă suprafața cilindrului de rază r_1 și înălțime unitară, trasată prin lichidul magnetic, iar componentele câmpului au fost determinate numeric folosind programul Maxwell bazat pe elemente finite.

Dacă se lucrează pe porțiunea liniară a curbei de magnetizare a lichidului magnetic, $\int_0^H \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} = \mu_l \int_0^H \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu_l H^2$, egalitatea (2.3.10) devine:

$$\mathbf{F}_m^* = -\frac{1}{2} \mu_l \oint_{\Sigma_1^*} H^2 d\mathbf{S} + \mu_l \oint_{\Sigma_1^*} \mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.3.11)$$

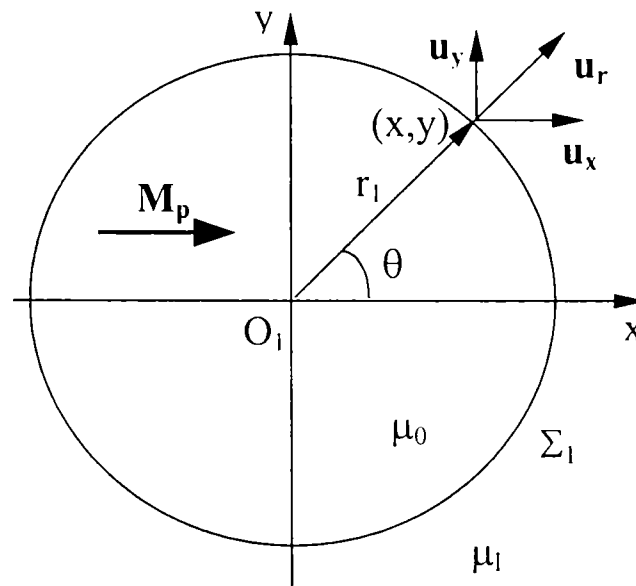


Fig. 2.3.2

Utilizând coordonatele carteziene din fig.2.3.2, pentru care $\mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y$, $\mathbf{H} = H_x \mathbf{u}_x + H_y \mathbf{u}_y$ și ținând seama că $d\mathbf{S} = r_1 d\theta \mathbf{u}_r$, $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r = \cos\theta \mathbf{u}_x + \sin\theta \mathbf{u}_y = \frac{x}{r_1} \mathbf{u}_x + \frac{y}{r_1} \mathbf{u}_y$, componentele F_x^* și F_y^* rezultă din

(2.3.11) în formele:

$$F_x^* = \mu_l r_1 \int_0^{2\pi} \left(H_x^2 \cos\theta + H_x H_y \sin\theta - \frac{1}{2} H^2 \cos\theta \right) d\theta \quad (2.3.12)$$

$$F_y^* = \mu_l r_1 \int_0^{2\pi} \left(H_y^2 \sin\theta + H_x H_y \cos\theta - \frac{1}{2} H^2 \sin\theta \right) d\theta \quad (2.3.13)$$

Cum $d\theta = \frac{dl}{r_1}$, integralele F_x^* respectiv F_y^* se execută pe întregul cerc de

rază r_1 , respectiv pe curba Γ_1 :

$$F_x^* = \frac{\mu_1}{r_1} \int_0^{2\pi r_1} \left(H_x^2 x + H_x H_y y - \frac{1}{2} H^2 x \right) dl \quad (2.3.14)$$

$$F_y^* = \frac{\mu_1}{r_1} \int_0^{2\pi r_1} \left(H_y^2 y + H_x H_y x - \frac{1}{2} H^2 y \right) dl \quad (2.3.15)$$

Determinarea forțelor din (2.3.14) și (2.3.15) s-a făcut utilizându-se metoda Simpson de rezolvare a integralelor. Conturul de integrat, dat de lungimea cercului de rază r_1 a fost împărțit în $n=100$ segmente egale. Am utilizat programul MathCad, schema bloc fiind prezentată în fig.2.3.3.

2.3.3 Modelarea numerică și rezultatele obținute

A fost modelat lagărul cilindric cu lichid magnetic din fig.2.3.1, cu $r_1=10$ mm, $r_2=11$ mm, și a fost determinată forța portantă pentru diferite lichide magnetice și magnetizații permanente ale arborelui, la diferite dezaxări. Modelarea și calculul forței s-au făcut folosind programul Maxwell al firmei ANSOFT bazat pe metoda elementelor finite. La calculul numeric al câmpului s-a avut în vedere ecuația (2.3.5) pe care o satisface potențialul magnetic vector \mathbf{A} în cele 3 subdomenii, (fig.2.3.1), și condițiile de interfață date de (2.3.8) și (2.3.9). Ca elemente finite au fost folosite triunghiuri de ordinul 1. S-a folosit o discretizare mai fină în zona lichidului magnetic și imediata vecinătate a acestuia (zona de interes pentru calculul forței). Domeniul a fost discretizat în 7000 de moduri dintre care 2500 în lichidul magnetic, (fig.2.3.4).

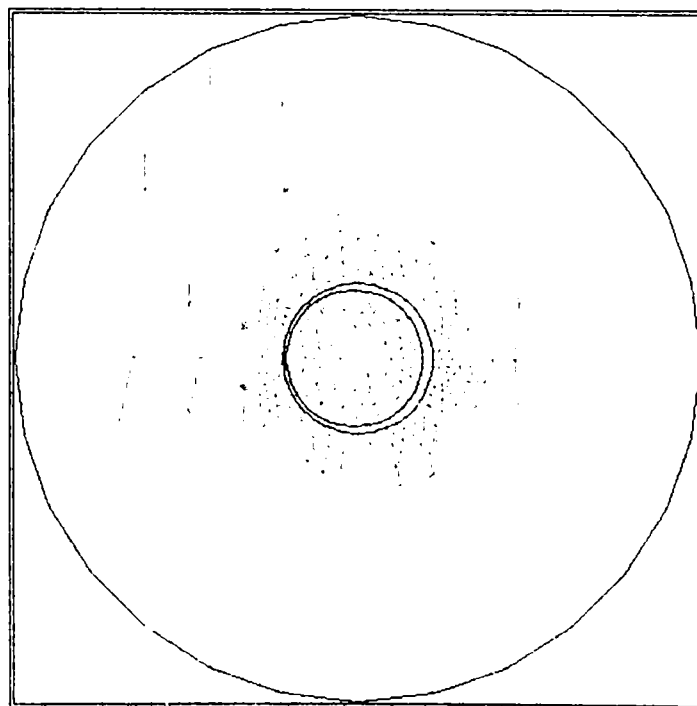


Fig. 2.3.4

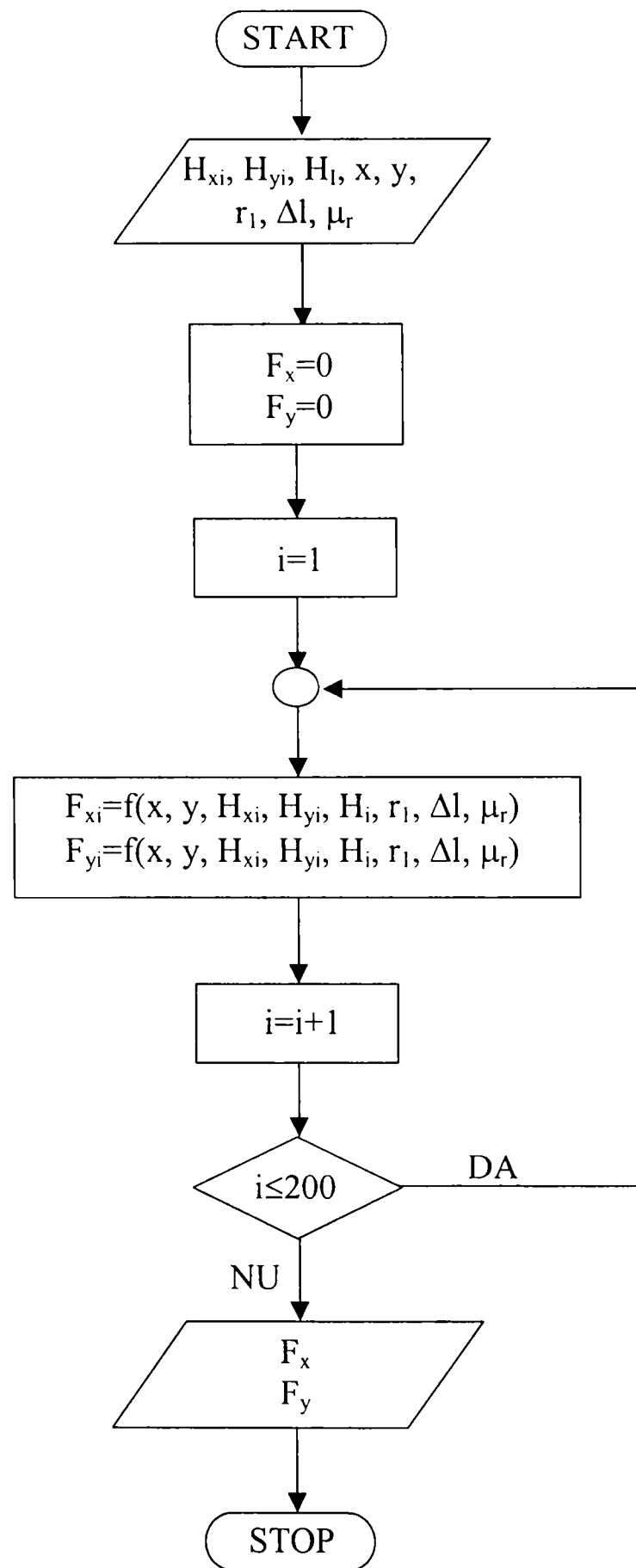


Fig. 2.3.3

Pentru limitarea domeniului modelat s-a avut în vedere relația (2.2.13) care în cazul nostru se scrie în forma:

$$\frac{H_2(r)}{H_{2\max}} = \frac{r_1^2}{r^2}$$

unde $H_{2\max}$ reprezintă intensitatea de câmp maximă la $r=r_1$, iar $H_2(r)$ intensitatea de câmp într-un punct de rază r exterior cilindrului.

Dacă se limitează câmpul la domeniul în care $H_2(r^*)$ este fracțiunea α din $H_{2\max}$, se admite cilindrul de rază:

$$r^* = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} r_1 \quad (2.3.16)$$

în exteriorul căruia câmpul poate fi considerat nul, (fig.2.3.5). Modelarea s-a făcut admitând $\alpha=0.04$, ceea ce a dus la $r^*=5r_1=50 \text{ mm}$.

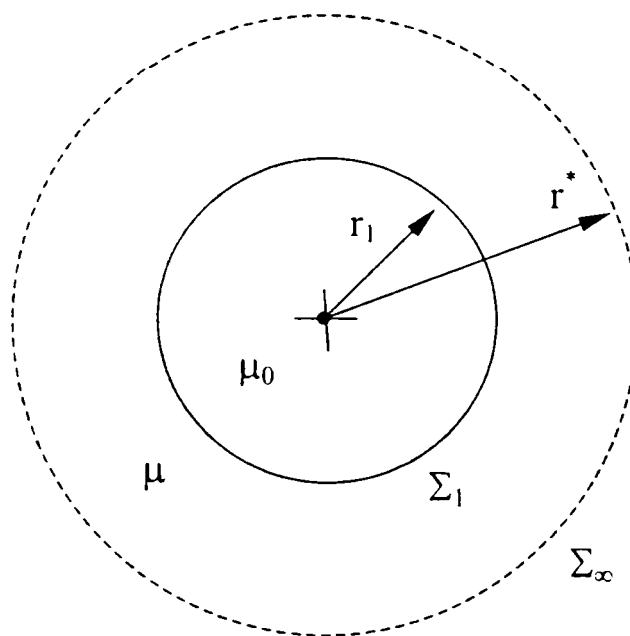


Fig. 2.3.5

Cu valorile potențialului magnetic vector \mathbf{A} calculate, se determină inducția câmpului magnetic \mathbf{B} cu componentele sale B_x și B_y :

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{u}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{u}_y \quad (2.3.17)$$

În fig.2.3.6 și fig.2.3.7 sunt reprezentate variațiile inducției magnetice B și a componentelor acesteia după cele 2 direcții B_x și B_y , pe circumferința cilindrului de rază r_1 , prin lichidul magnetic, la dezaxare $\Delta l=0 \text{ mm}$ și respectiv $\Delta l=0.8 \text{ mm}$. A fost modelat un lagăr cilindric cu $r_1=10 \text{ mm}$, $r_2=11 \text{ mm}$ folosind un lichid magnetic cu $\mu_{rl}=1.5$ și magnetizația permanentă a arborelui $M_p=174 \text{ KA/m}$.

Am modelat lagărul cilindric cu lichid magnetic și am calculat numeric forța de readucere pentru diferite tipuri de lichide magnetice, liniare și neliniare (reale), cu diferiți magneți permanenți pentru diferite dezaxări. În toate cazurile analizate

dimensiunile lagărului au fost $r_1=10\text{ mm}$ și $r_2=11\text{ mm}$ iar magnetul permanent s-a considerat că nu se polarizează temporar ($\mu_{rm}=1$).

Cum era de așteptat, în toate cazurile analizate, datorită simetriei după axa O_x , componenta forței după direcția O_y a rezultat nulă, ($F_y^*=0$), indiferent de μ_l considerat, sau dezaxarea Δl .

În fig.2.3.8 s-a reprezentat dependența forței de readucere pe unitatea de lungime funcție de dezaxare pentru diferite lichide magnetice considerate liniare, [Gr2]. S-a folosit un magnet cu $M_p=174\text{ kA/m}$. Se observă dependența liniară a forței funcție de dezaxare și modul în care permeabilitatea lichidului magnetic influențează valoarea forței.

Dependența forței funcție de dezaxare este dată în fig.2.3.9 pentru un magnet mai puternic, $M_p=820\text{ kA/m}$.

În fig.2.3.10 și fig.2.3.11 au fost comparate valorile forței calculate analitic cu (2.1.50) cu cele determinate numeric [DS3]. S-au folosit lichide magnetice cu $\mu_{rl}=1.15$ și respectiv $\mu_{rl}=2$ și magneți permanenți cu $M_p=174\text{ kA/m}$ și $M_p=590\text{ kA/m}$. Cu “o” s-au trasat curbele determinate analitic folosind (2.1.50), iar cu “x” s-au trasat curbele determinate numeric. Se constată o foarte bună corespondență între cele două valori ceea ce confirmă încă o dată, valabilitatea relației (2.1.50).

În fig.2.3.12, [Gr3], și fig.2.3.13 s-a prezentat dependența forței funcție de susceptivitatea magnetică a lichidului pentru magneți cu $M_p=174\text{ kA/m}$ și respectiv $M_p=820\text{ kA/m}$ la dezaxări $\Delta l=0.2\text{ mm}$ și $\Delta l=0.6\text{ mm}$. Cu “o” au fost trasate valorile forței pe unitatea de lungime obținute prin calcul analitic folosind (2.1.50), cu “*” cele obținute cu expresia aproximativă (2.2.29), iar cele cu “x” au fost obținute pe cale numerică. Se observă o corespondență foarte bună între valorile forței obținute folosind (2.1.50) cu cele obținute numeric. De asemenea se constată o corespondență foarte bună și pentru valorile obținute cu (2.2.29) doar pentru valori ale susceptibilității magnetice a lichidului până în jurul valorii unu, ($\mu_{rl}=2$). Aceasta se explică prin aceea că la determinarea expresiei analitice aproximative (2.2.29), calculul câmpului magnetic s-a făcut în ipoteza că lichidul ce înconjoară magnetul permanent este de extensie infinită; aproximare cu atât mai bună cu cât susceptivitatea magnetică a lichidului este mai mica, $\mu_{rl}\rightarrow 1$.

În fig.2.3.14 s-a trasat dependența forței pe unitatea de lungime funcție de magnetizația permanentă a magnetului (M_p) pentru diferite dezaxări, [Gr2], [DS3]. S-a folosit un lichid cu $\mu_{rl}=1,5$. Se constată o dependență pătratică a forței de readucere cu magnetizația permanentă, cum rezultă și din expresiile (2.1.50) și (2.2.29). În (2.1.50), dependența pătratică a forței cu M_p este dată prin constanta K_n , definită de relația (2.1.49).

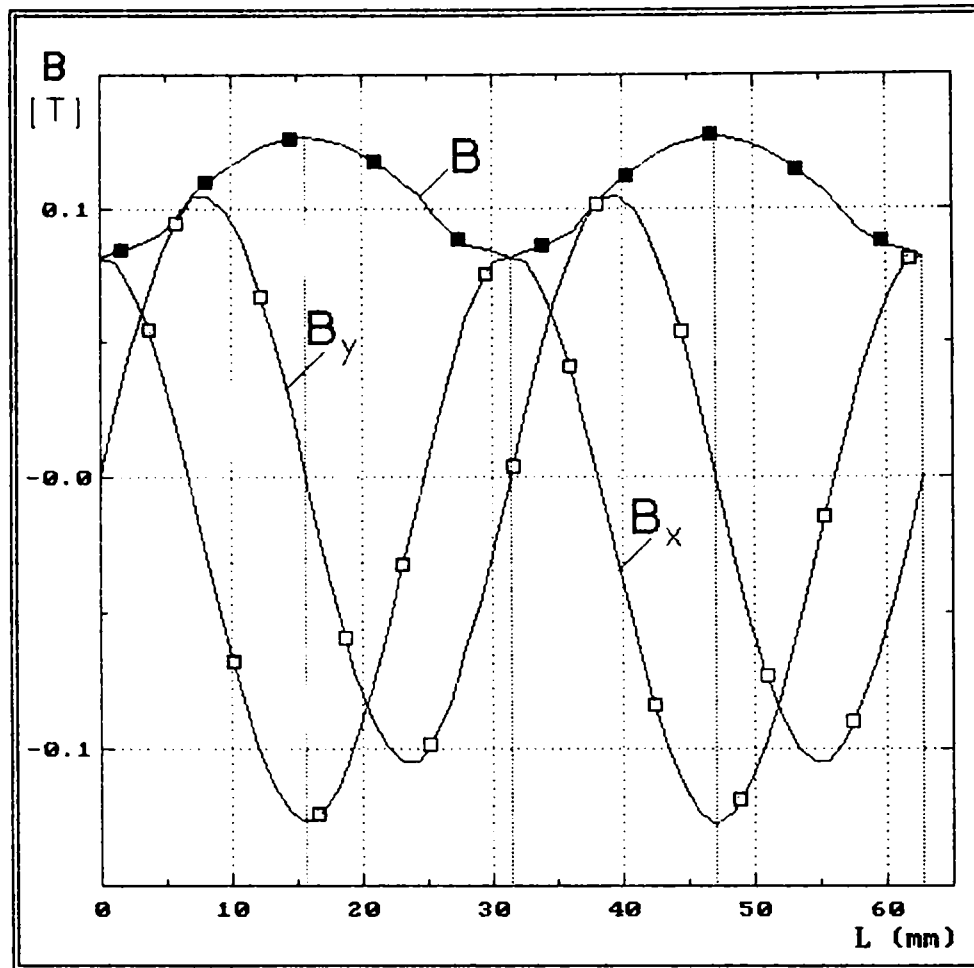


Fig. 2.3.6

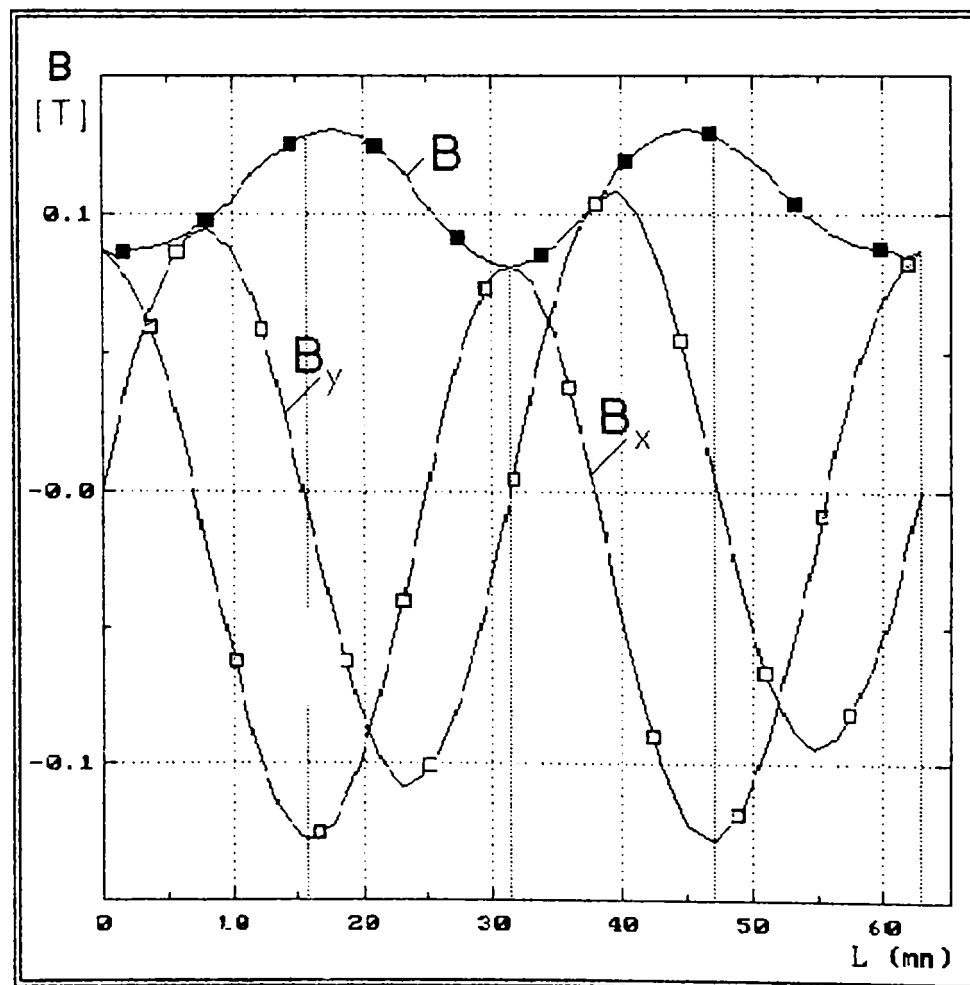


Fig. 2.3.7

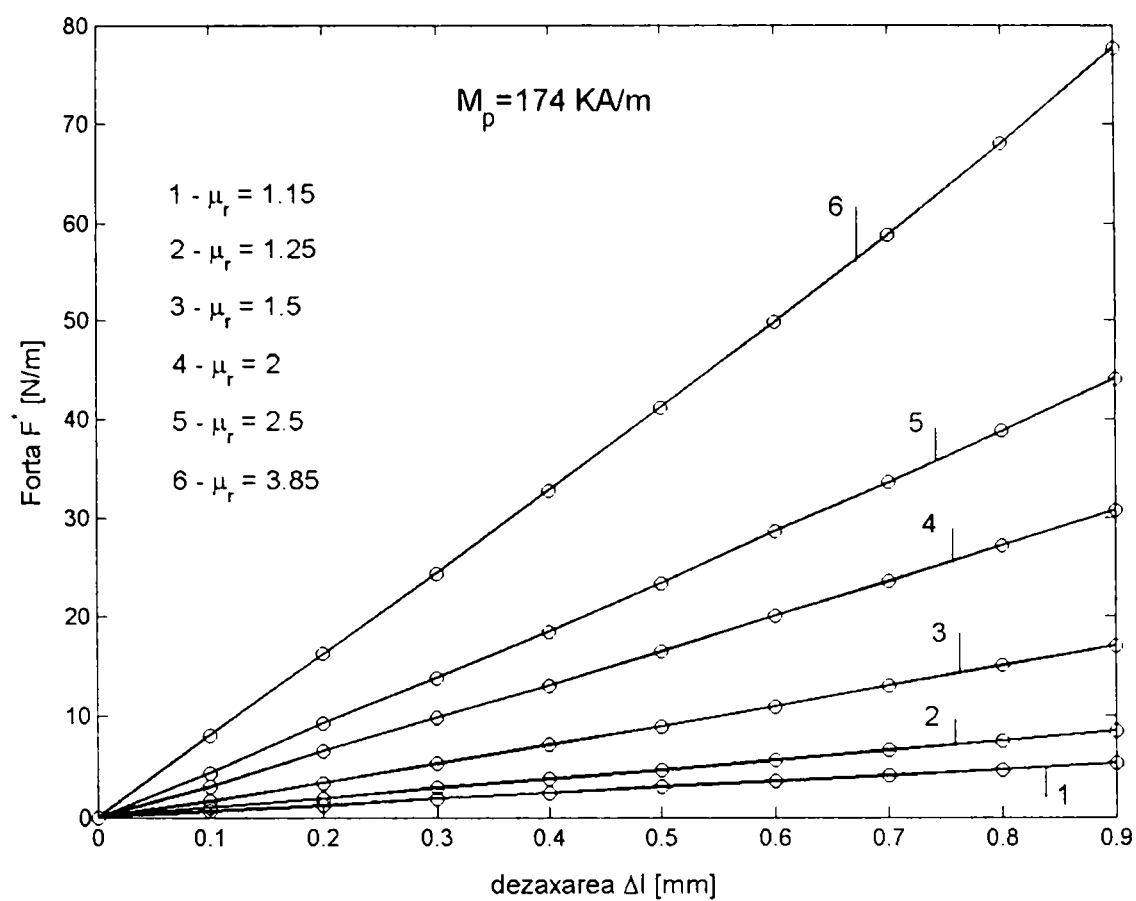


Fig. 2.3.8

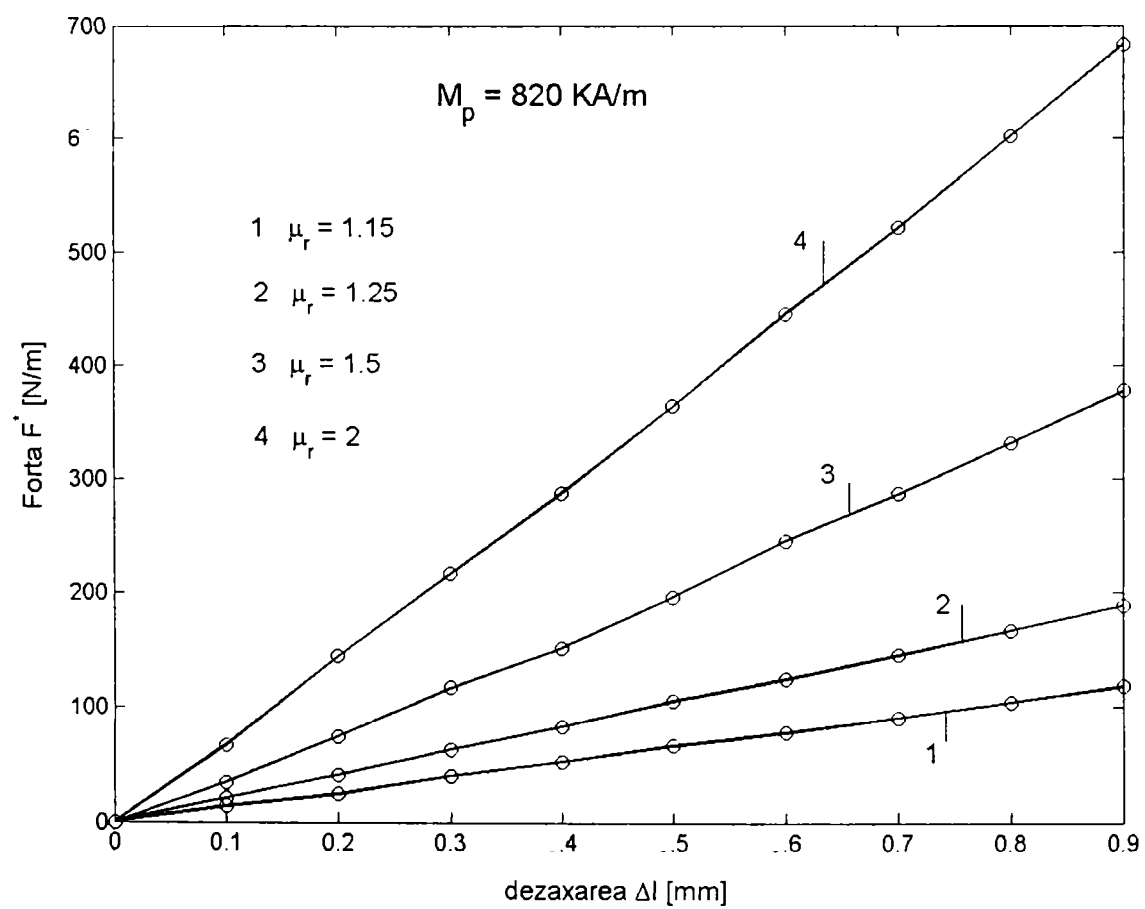


Fig. 2.3.9

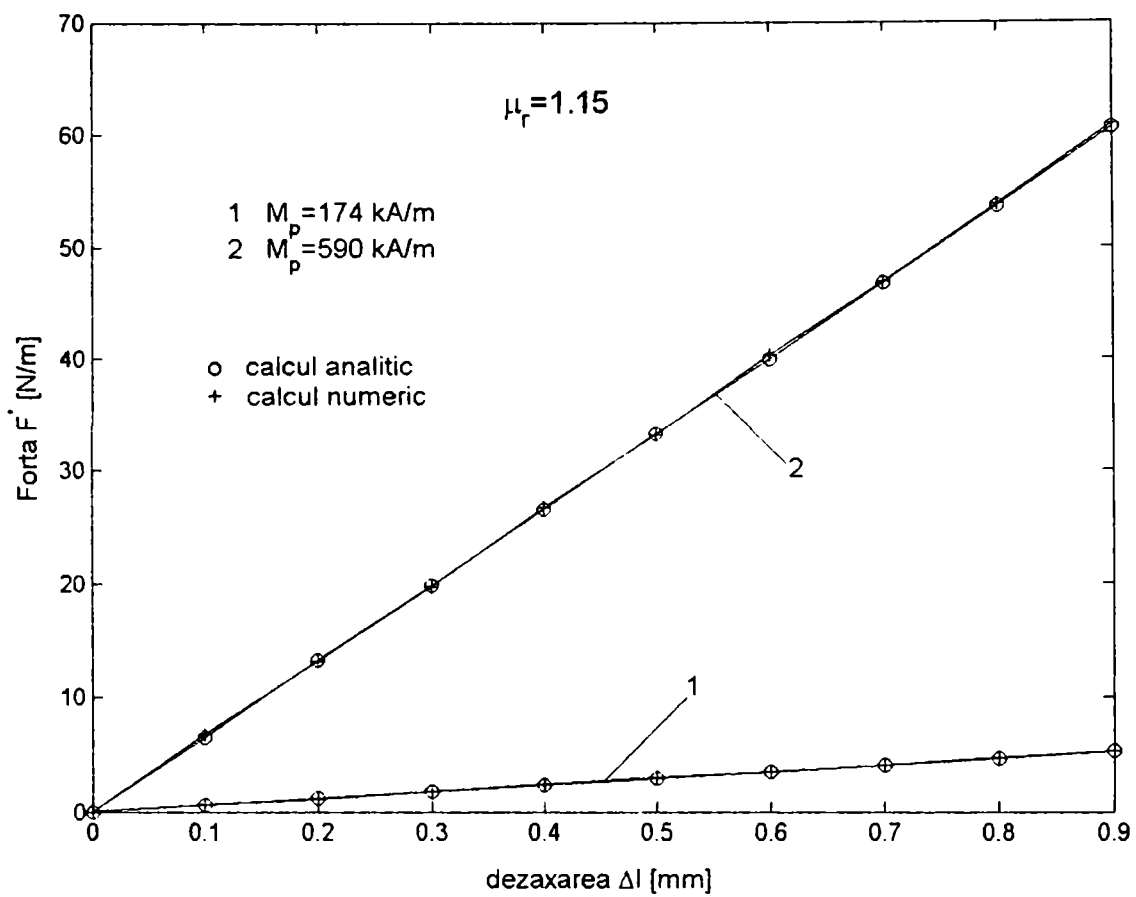


Fig. 2.3.10

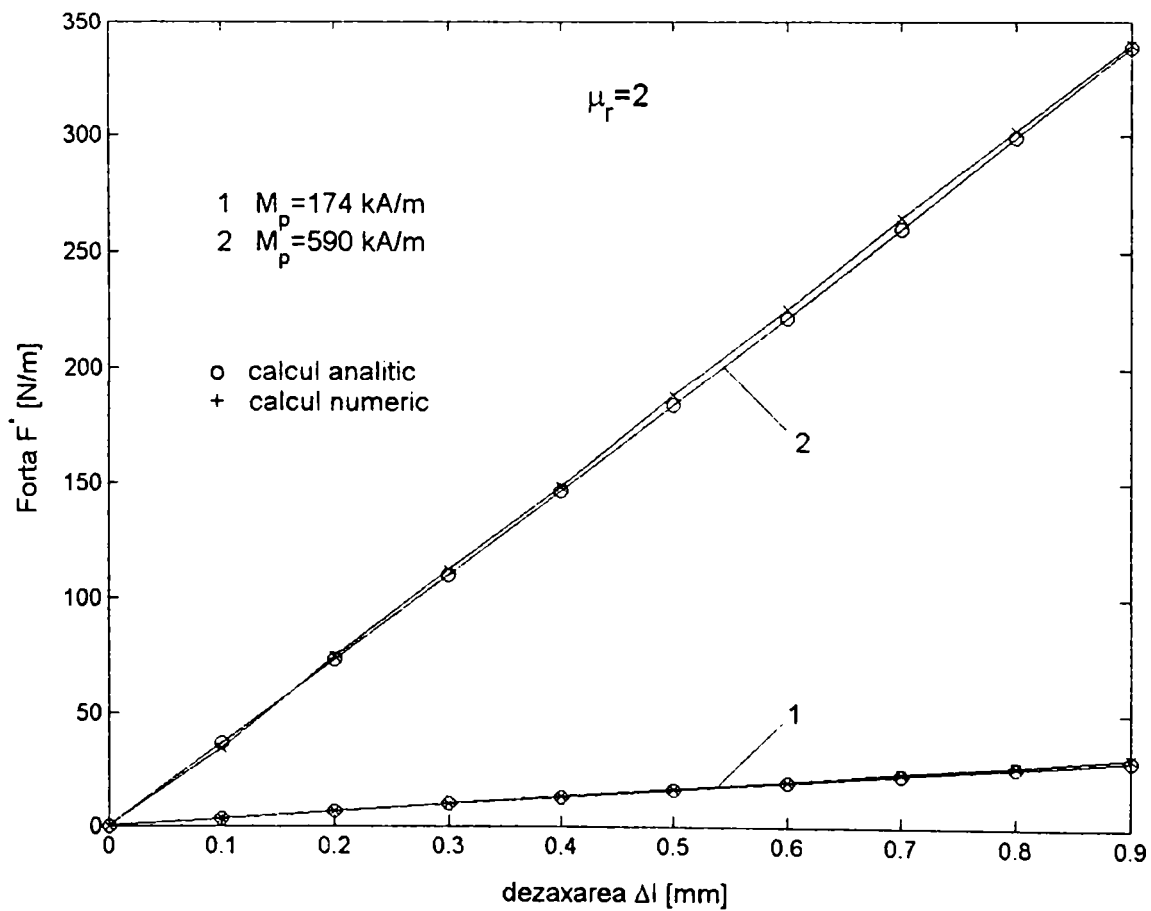


Fig. 2.3.11

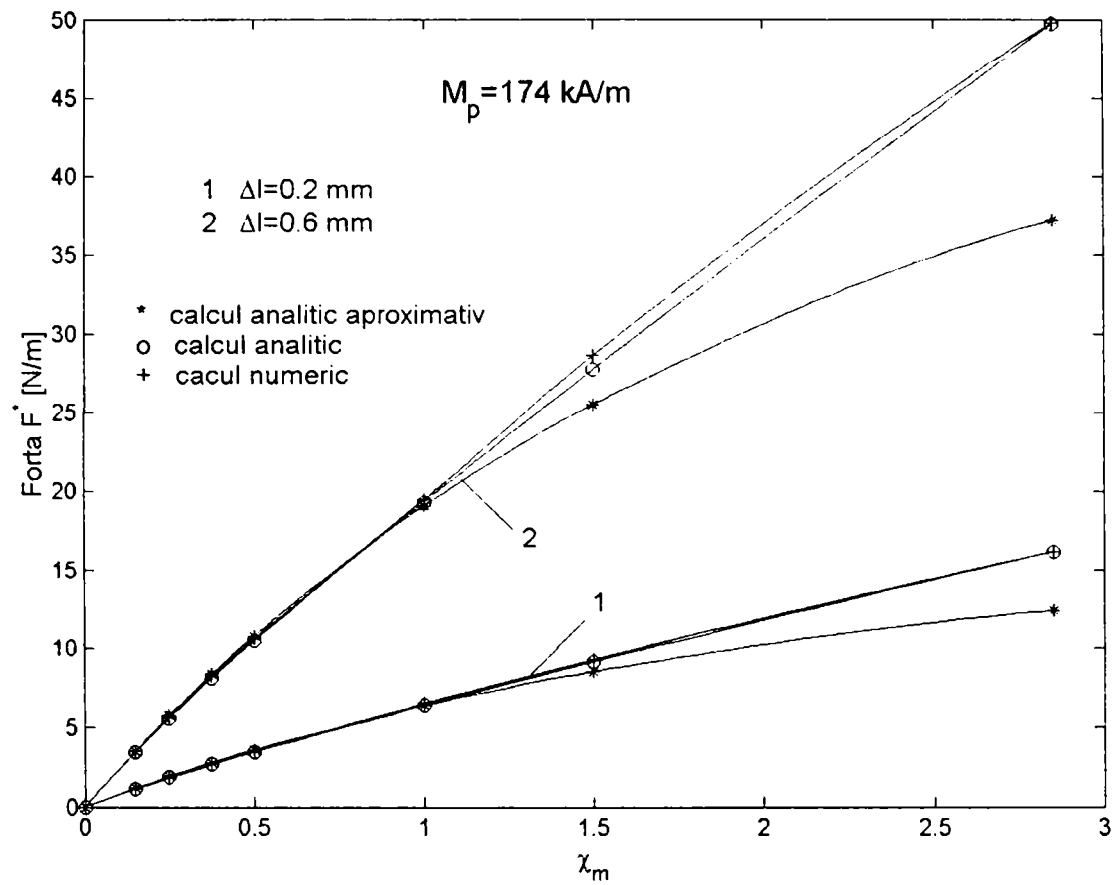


Fig. 2.3.12

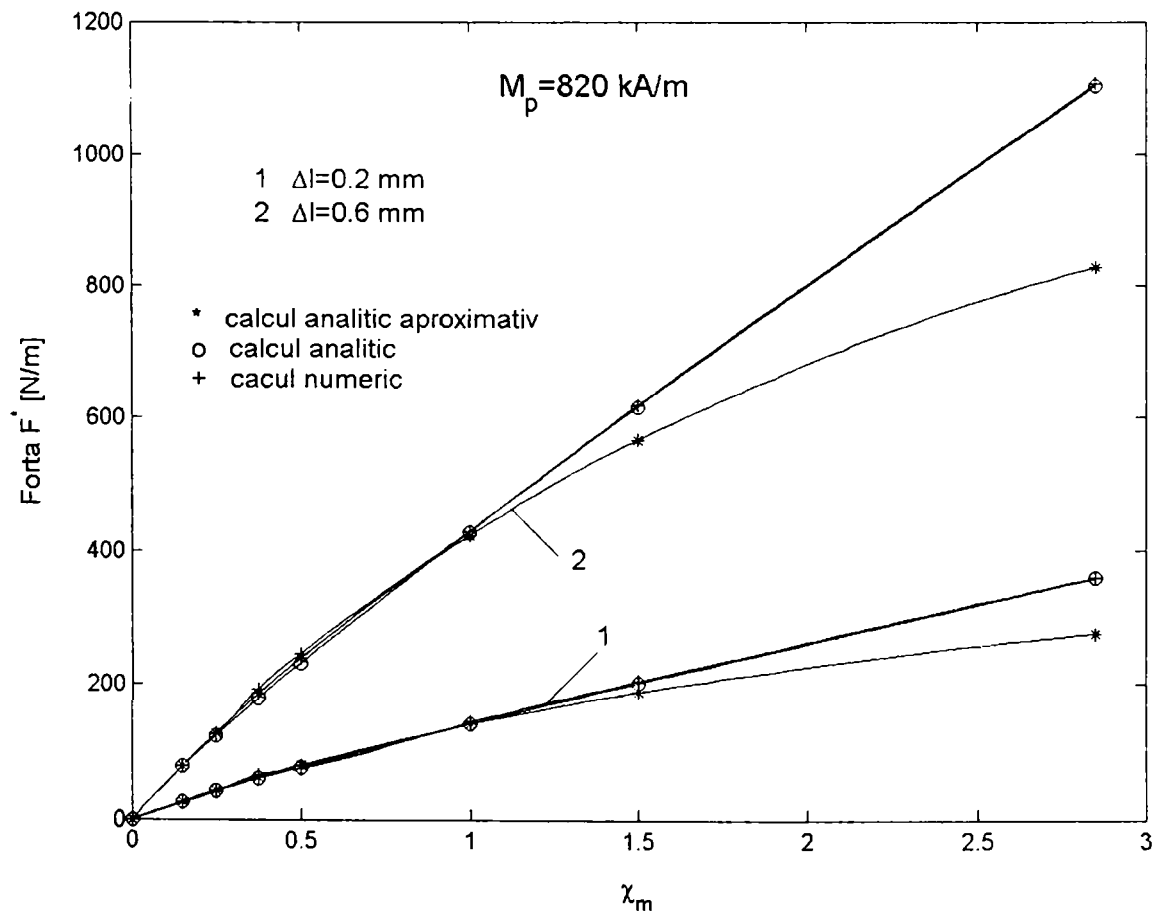


Fig. 2.3.13

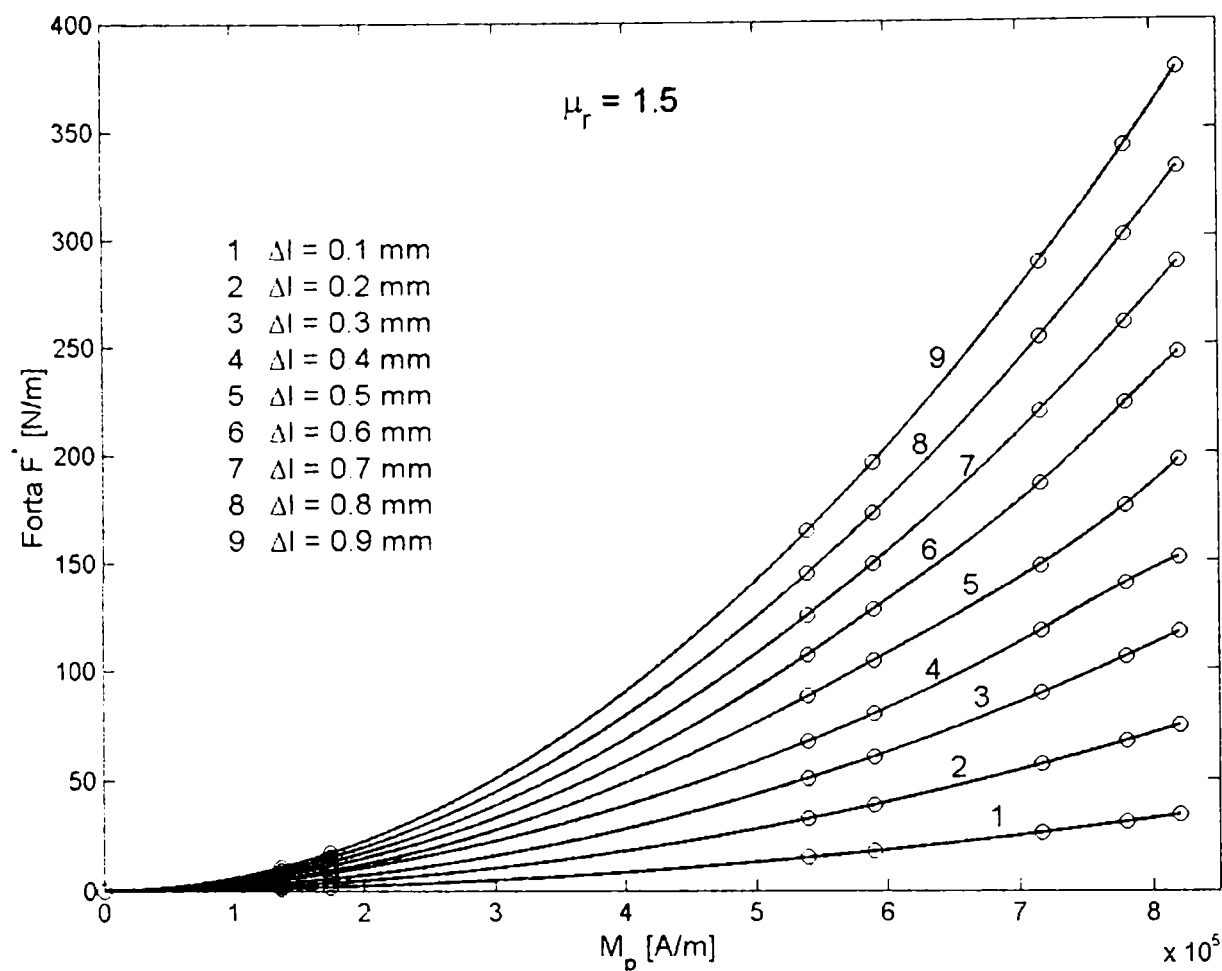


Fig. 2.3.14

Modelarea numerică a lagărului a permis calculul numeric al forței de readucere și în cazul lichide reale, când caracteristica de magnetizare este neliniară.

În fig.2.3.15, fig.2.3.17, fig.2.3.19 și fig.2.3.21 sunt prezentate dependențele $M=f(H)$ ridicate experimental în laboratorul de lichide magnetice și curbele de magnetizare corespunzătoare, $B=f(H)$, pentru diferite lichide magnetice bazate pe petrol sau ulei de transformator.

În fig.2.3.16, fig.2.3.18, fig.2.3.20 și fig.2.3.22 a fost calculată numeric forța de readucere funcție de deaxare folosind aceste lichide reale, fiind trasate curbele cu "o". Cu "x" au fost trasate curbele corespunzătoare lichidului aproximat liniar. Se constată o bună corespondență între aceste perechi de curbe.

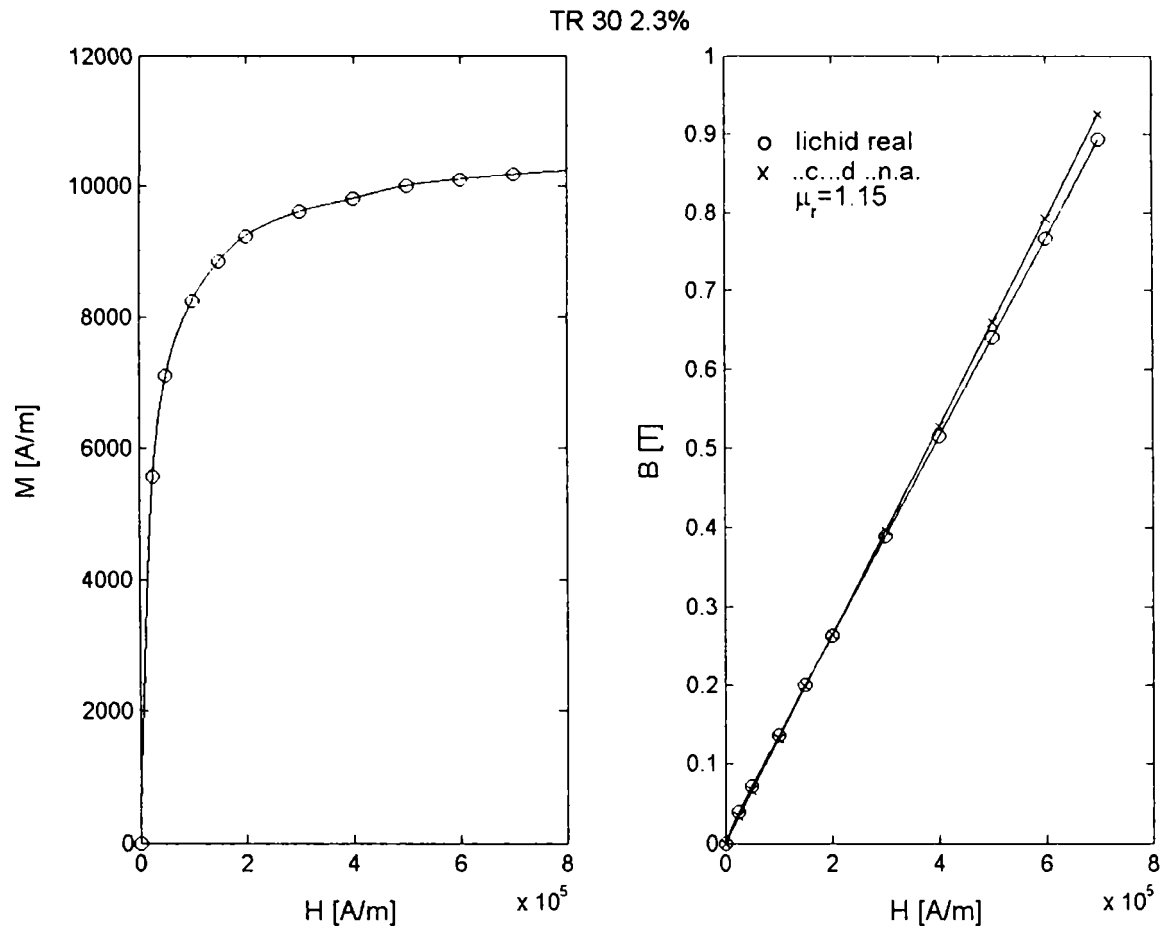


Fig. 2.3.15

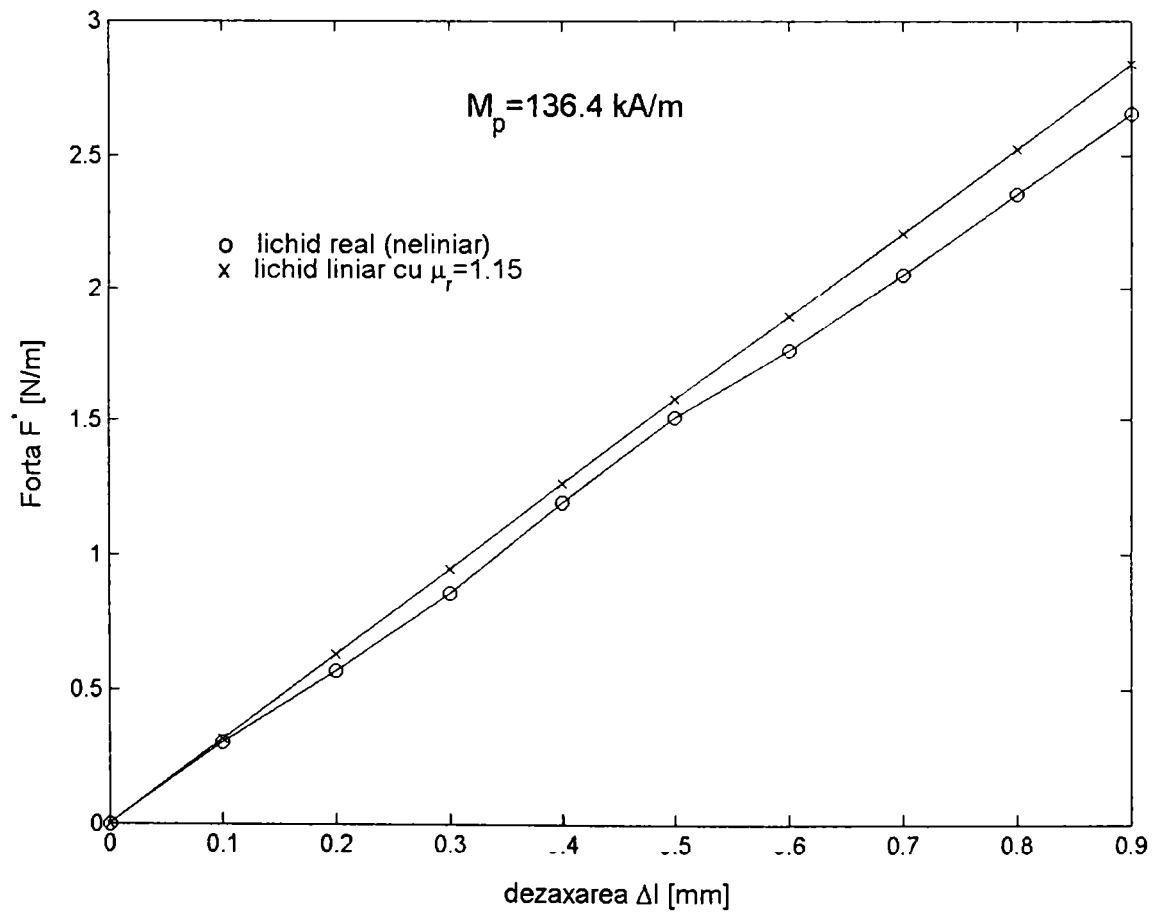


Fig. 2.3.16

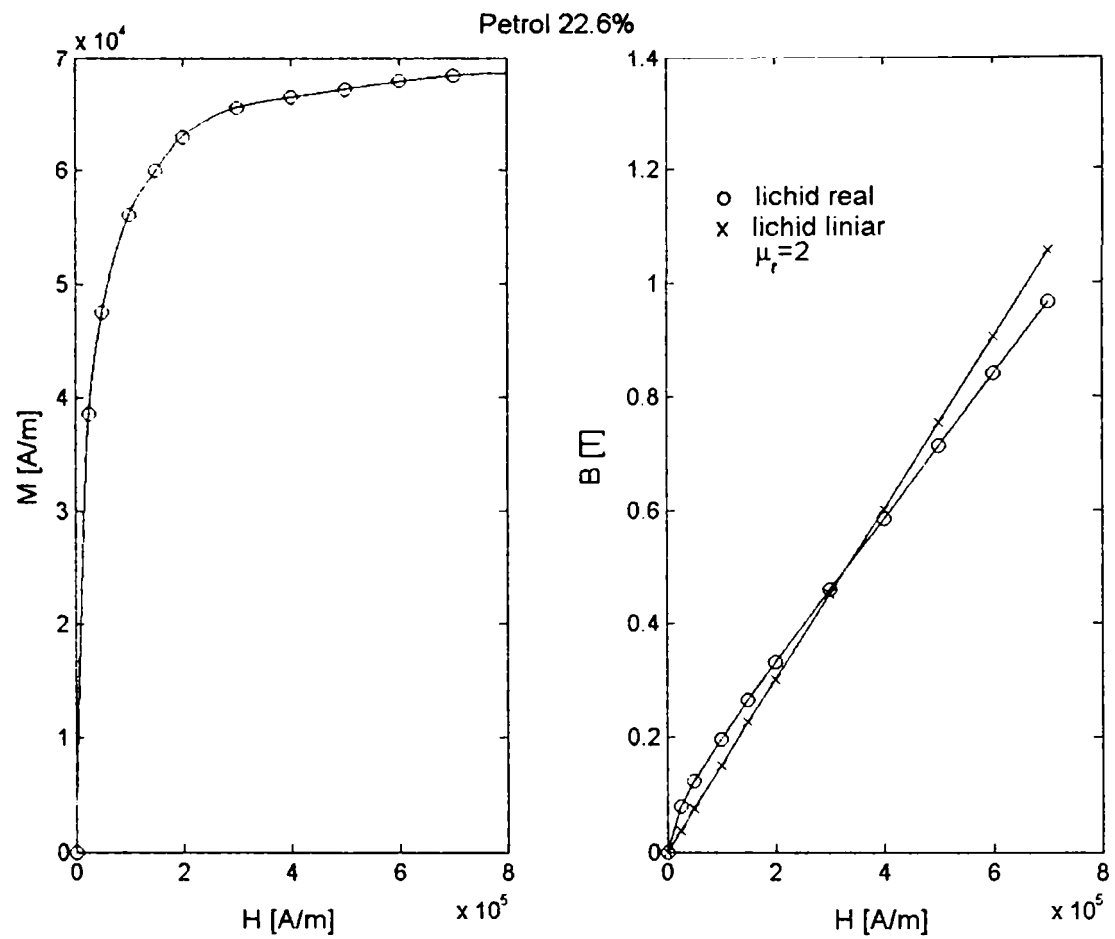


Fig. 2.3.17

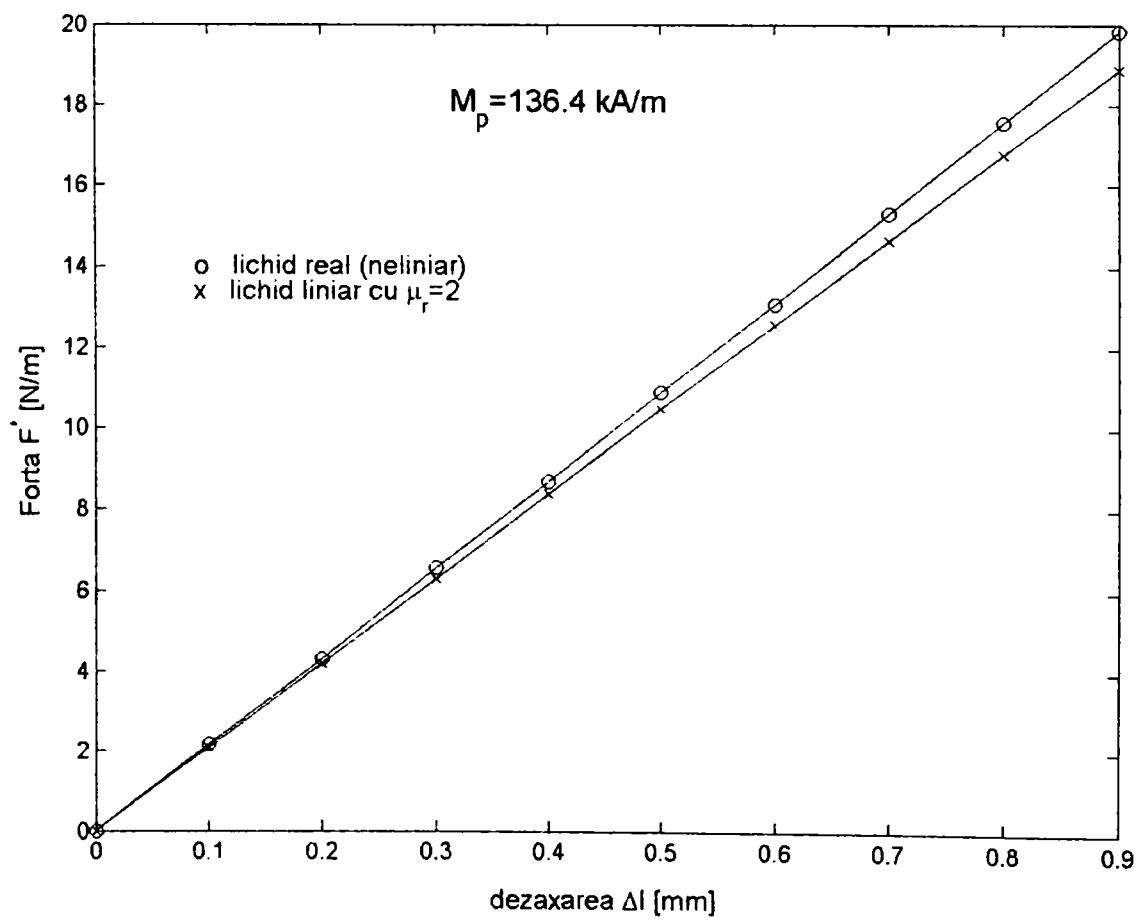


Fig. 2.3.18

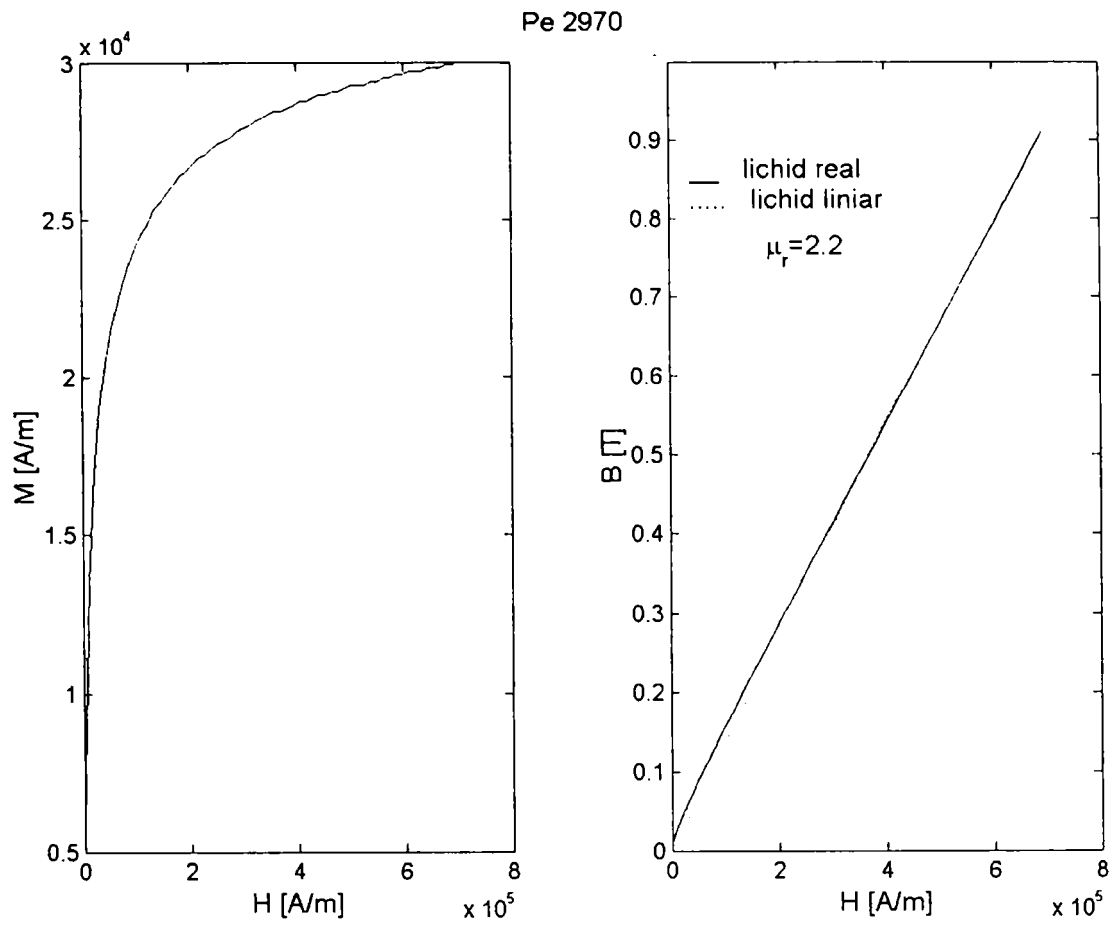


Fig. 2.3.19

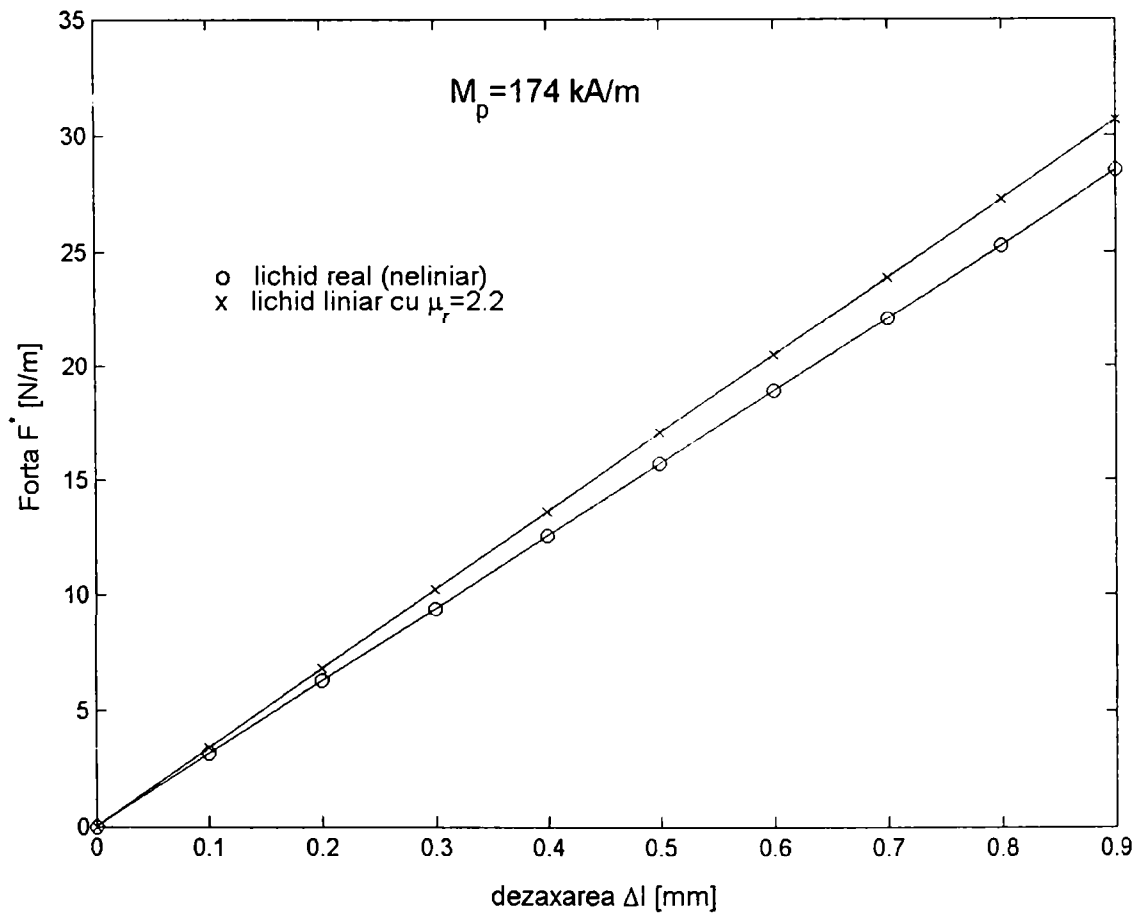


Fig. 2.3.20

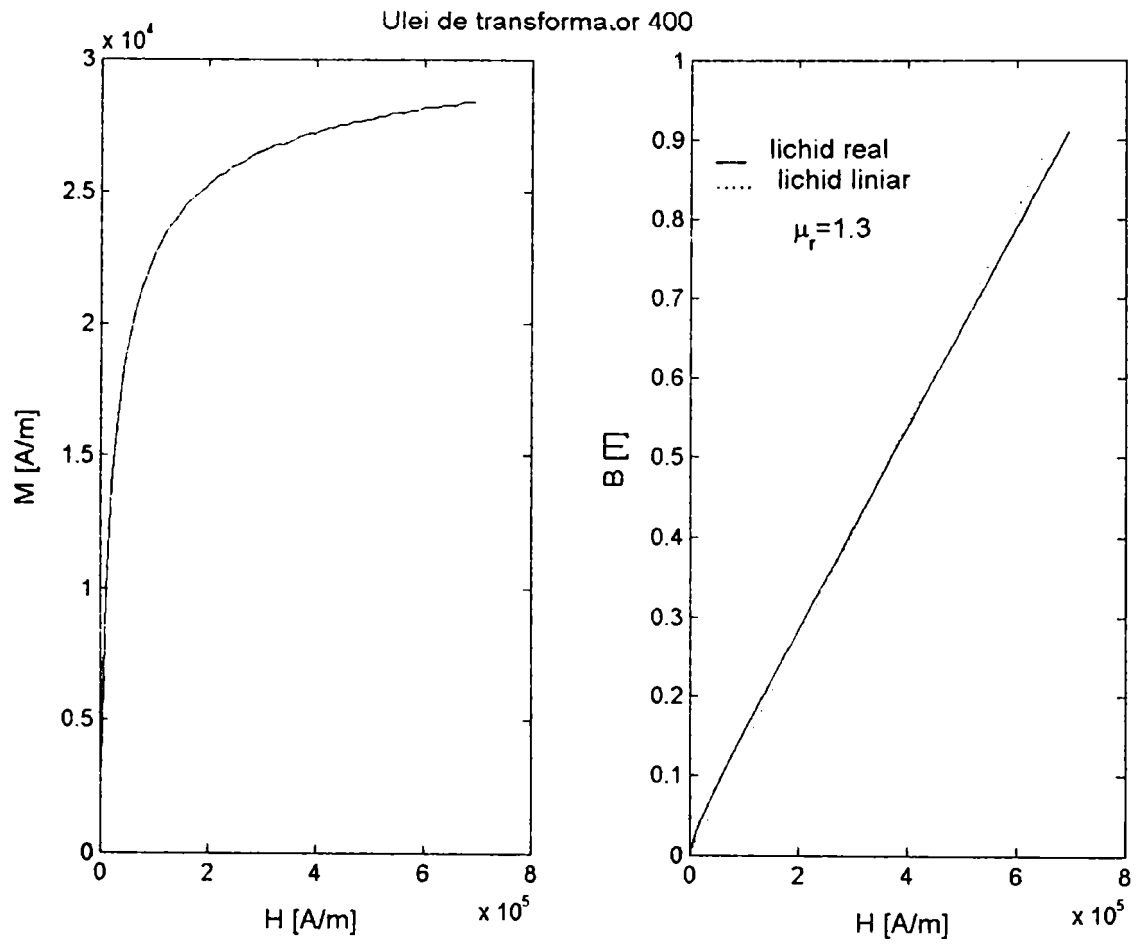


Fig. 2.3.21

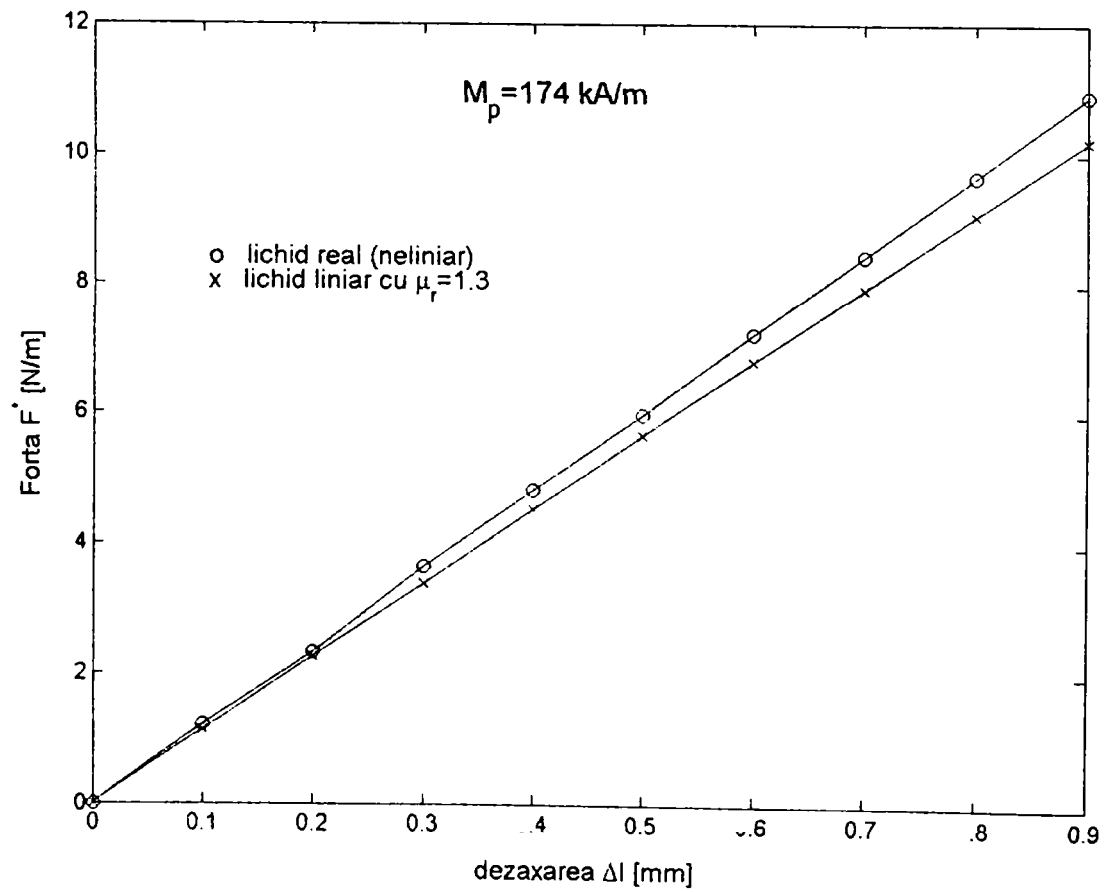


Fig. 2.3.22

3 LAGĂR CU POLI ALTERNANȚI ȘI LICHID MAGNETIC

Una dintre aplicațiile interesante cu lichide magnetice o reprezintă lagărele magnetice. De la producerea primelor lichide magnetice au fost propuse numeroase tipuri constructive de lagăre magnetice cu lichide magnetice, [Lu1]. Lagărul magnetic cu poli alternanți plasați în stator și lichid magnetic în interstițiul dintre stator și rotor amagnetic a fost propus pentru prima dată de Rosensweig, [Ro2]. Expresia forței de readucere pentru această structură de tip „sandwich” a polilor, alcătuiți din magneți permanenți cu magnetizații permanente radiale, a fost determinată funcție de dimensiunile geometrice ale lagărului și a proprietăților magnetice ale acestuia.

Un calcul analitic al acestui tip de lagăr magnetic în regim staționar, a fost dezvoltat în [Be1] și [DS4]. În [Bj1] este tratat calculul numeric al acestui tip de lagăr, considerând câmpul magnetic plan paralel.

În acest capitol propun lagărul hidrostatic cu poli alternanți plasați în rotor, pentru care dezvolt un calcul analitic aproximativ de determinare a forței de readucere și o analiză numerică a acestui tip de lagăr.

3.1 Calculul analitic al lagărului cu poli alternanți plasați în stator

Lagărul magnetic cu poli alternanți plasați în stator este prezentat schematic în fig.3.1.1.

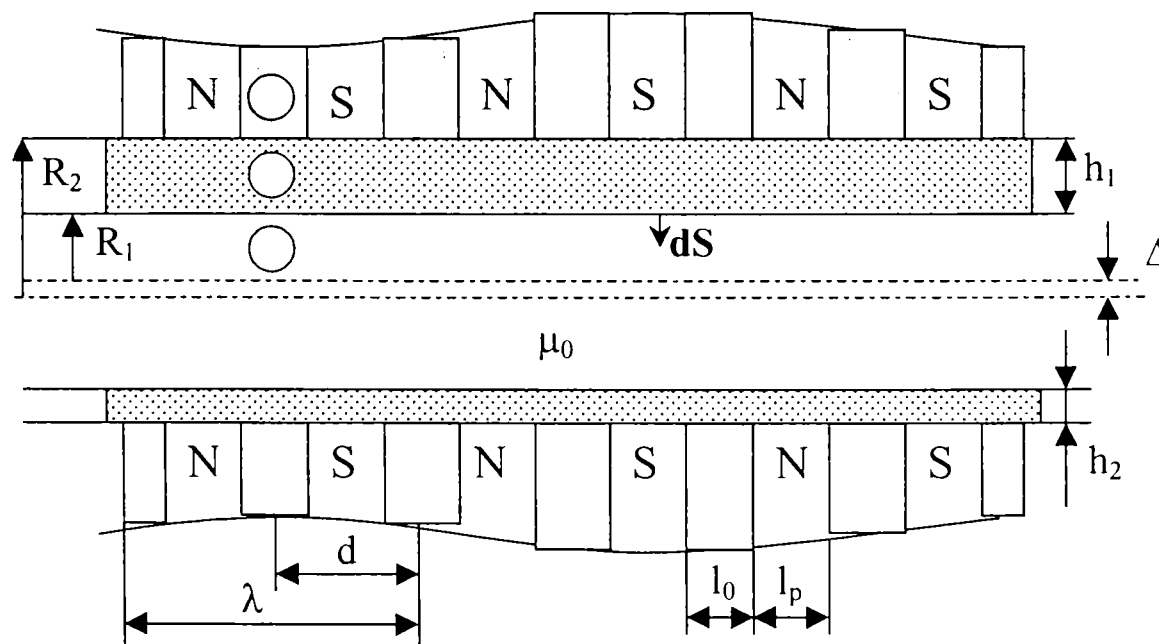


Fig. 3.1.1

Sunt puse în evidență trei regiuni distincte:

- statorul 1 de rază R_2 în care sunt plasați polii cu succesiune alternantă N-S-N-S...; polii reprezintă magneți permanenți, de formă toroidală, cu magnetizație radială constantă \mathbf{M}_p și de permeabilitate magnetică constantă μ ;
- lichidul magnetic 2 considerat liniar și de permeabilitate $\mu_l = \mu_0 \mu_{rl}$ constantă;
- rotorul 3 (arborele lagărului) de rază R_l considerat amagnetic și de permeabilitate μ_0 .

Deplasarea dintre axa rotorului și a statorului s-a notat cu Δ . Datorită excentricității Δ , asupra arborelui se exercită o forță de readucere care tinde să aducă rotorul în poziția de echilibru (când axa rotorului coincide cu axa statorului).

În [Be1] pentru calculul forței de readucere se folosește expresia [DS5], [Ro2]:

$$\mathbf{F} = \mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[\int_0^{H'} M dH + \frac{1}{2} M_n^2 \right] d\mathbf{S} \quad (3.1.1)$$

care reprezintă forța rezultantă ce se exercită asupra unui corp amagnetic, imersat într-un lichid magnetic, supus unui câmp magnetic (efectul levitației de ordinul 1).

În relația (3.1.1), Σ_0 reprezintă suprafața de separație între lichidul magnetic și arbore iar $d\mathbf{S}$ este vectorul element de suprafață orientat spre exteriorul lichidului, fig.3.1.1.

Pentru calculul câmpului se consideră polii de extensie radială infinită și extensie infinită după axa lagărului. În aceste condiții repartiția dreptunghiulară a magnetizației permanente generată de succesiunea de poli, se descompune în serie Fourier în forma:

$$\mathbf{M}_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_{p\nu} \sin(\nu k z) \mathbf{u}_r \quad (3.1.2)$$

În (3.1.2), k reprezintă numărul de undă, $k=2\pi/\lambda$, cu $\lambda=2(l_o+l_p)$ lungimea de undă iar $M_{p\nu}$ reprezintă amplitudinea armonicii de ordinul ν corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente.

Câmpul magnetic poate fi determinat analitic în două moduri. Fie considerând arborele concentric cu axul lagărului astfel încât să rezulte un câmp plan-meridian, fie calculând câmpul în absența lichidului magnetic (când întreg spațiul din jurul polilor are permeabilitatea μ_0).

La calculul câmpului se pleacă de la ecuațiile câmpului $div \mathbf{B}=0$ și $rot \mathbf{H}=0$ satisfăcute în punctele lagărului, $\mathbf{M}=(\mu_{rl}-1)\mathbf{H}$ în lichidul magnetic și $rot_s \mathbf{H}=0$, $div_s \mathbf{B}=0$ la suprafețele de separație dintre mediile lagărului.

Cu valorile câmpului magnetic determinate analitic, în [Be1] se calculează presiunea magnetică medie (normală) la suprafața de separație dintre lichid și arbore în forma:

$$\langle p \rangle = \frac{\mu_{r_l} (\mu_{r_l} - 1)}{(\mu_{r_l} + 1)^3} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu_0 M_{p_v} e^{-2vk(\delta - \Delta \cos \theta)}}{1 - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^2 \cdot e^{-2vk(\delta - \Delta \cos \theta)}} \quad (3.1.3)$$

în care:

μ_{r_l} reprezintă permeabilitatea relativă a lichidului magnetic;

Δ - deplasarea rotorului față de axa lagărului;

$\delta = R_2 - R_1$ - deplasarea maximă.

Se calculează forța exercitată pe jumătate din lungimea de undă, $\lambda/2$, integrându-se presiunea magnetică (3.1.3) pe periferia rotorului corespunzător unui pol.

Pentru calculul forței de readucere, se va face integrala pe cercul corespunzător suprafeței de separație dintre arbore și lichid, prezentând interes doar componenta forței în direcția deplasării maxime.

În [Be1], pentru forța de readucere pe unitatea de lungime la deplasarea Δ , s-a obținut expresia:

$$F^* = \frac{\pi R_1 \mu_l (\mu_{r_l} - 1)}{(\mu_{r_l} + 1)^3} \sum_{v=1}^{\infty} M_{p_v}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (1+n) \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^{2n} I_1 [2(1+n)vk\Delta] e^{-2(n+1)vk\delta} \quad (3.1.4)$$

unde I_l reprezintă funcția Bessel modificată de speța l și ordinul l .

Pentru deplasarea maximă $\Delta = \delta$, luându-se în considerare doar armonica fundamentală, expresia forței de readucere pe unitatea de lungime devine:

$$F^* = \frac{\pi R_1 \mu_0 (\mu_{r_l} - 1) M_p^2}{16} I_1 (2k\delta) e^{-2k\delta} \quad (3.1.5)$$

3.2 Calculul analitic aproximativ al lagărului cu poli alternanți plasați în stator

3.2.1 Calculul analitic aproximativ al câmpului magnetic într-un lagăr cu lichid magnetic și poli alternanți plasați în stator

Pentru lagărul magnetic cu poli alternanți plasați în stator, cu dimensiunile geometrice date în fig.3.1.1, se consideră că polii alternanți sunt de extensiune radială infinită.

Calculul analitic aproximativ al câmpului magnetic în lagăr se face adoptând modelul plan paralel din fig.3.2.1 asociat lagărului, [DS4], [B11].

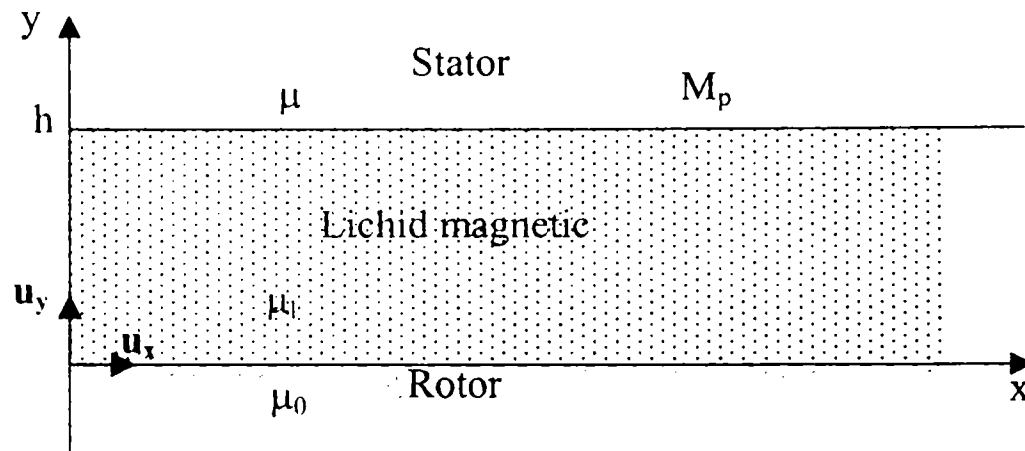


Fig. 3.2.1

Sunt puse în evidență cele trei regiuni distincte:

- statorul cu magnetii permanenți având permeabilitatea magnetică $\mu = \mu_0 \mu_r$ constantă și magnetizația permanentă radială \mathbf{M}_p constantă;
- lichidul magnetic considerat liniar de permeabilitate magnetică $\mu_l = \mu_0 \mu_{rl}$ constantă;
- arborele magnetic de permeabilitate μ_0 .

Așa cum se precizează în [DS4], pentru lagărul cu poli alternanți plasați în stator se poate aproxima magnetizația permanentă printr-o funcție de forma:

$$\mathbf{M}_p = M_0 \cdot e^{-k(y-h)} [\cos kx \mathbf{u}_x - \sin kx \mathbf{u}_y] \quad (3.2.1)$$

cu $y > h$, în care $M_0 = \text{constant}$, $k = \pi/d$ și $d = l_p + l_0$.

În fiecare din cele trei regiuni, intensitatea câmpului magnetic este un vector irotational, $\text{rot} \mathbf{H}_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ și ca urmare derivă dintr-un potențial magnetic scalar V_{Hi} , $\mathbf{H}_i = -\nabla V_{Hi}$.

Având în vedere ecuațiile pe care le satisface câmpul în cele trei domenii: $\text{div} \mathbf{B}_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1 + \mu_0 \mathbf{M}_p$ în mediul 1, $\mathbf{B}_2 = \mu_l \mathbf{H}_2$ în lichidul magnetic 2, $\mathbf{B}_3 = \mu_0 \mathbf{H}_3$ în mediul 3, rezultă că

$$\text{div} \mathbf{H}_i = 0, \quad i = \overline{1, 3} \quad (3.2.2)$$

iar potențialul magnetic scalar satisface o ecuație de tip Laplace în fiecare din cele trei regiuni:

$$\frac{\partial^2 V_{Hi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{Hi}}{\partial y^2} = 0, \quad i = \overline{1, 3} \quad (3.2.3)$$

Utilizând metoda separării variabilelor, soluția generală a ecuației de tip Laplace scrisă în forma:

$$V_H = (A_1 \cdot e^{ky} + A_2 \cdot e^{-ky}) (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \quad (3.2.4)$$

conduce la soluțiile particulare corespunzătoare fiecărei regiuni, în forma:

$$\begin{cases} V_{H_1} = A_1 e^{k(h-y)} \sin kx \\ V_{H_2} = A_2 e^{ky} \sin kx \\ V_{H_3} = (C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}) \sin kx \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Cele patru constante de integrare din (3.2.5) se determină din condițiile de interfață scrise pe suprafețele S_{12} și S_{23} referitoare la continuitatea potențialului magnetic scalar și egalitatea componentelor normale ale inducției magnetice. Acestea se scriu cum urmează:

$$\bullet \text{ pe } S_{12}: \begin{cases} (V_{H_1})_{y=h} = (V_{H_2})_{y=h} \\ \mu \left(\frac{\partial V_{H_1}}{\partial y} \right)_{y=h} = \mu_l \left(\frac{\partial V_{H_2}}{\partial y} \right)_{y=h} = -\mu_0 M_0 \sin kx \end{cases} \quad (3.2.6)$$

$$\bullet \text{ pe } S_{23}: \begin{cases} (V_{H_2})_{y=0} = (V_{H_3})_{y=0} \\ \mu_l \left(\frac{\partial V_{H_2}}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu_0 \left(\frac{\partial V_{H_3}}{\partial y} \right)_{y=0} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Rezolvând sistemul (3.2.6) și (3.2.7), expresiile constantelor de integrare rezultă în forma:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{M_0}{k(\mu_r + \mu_{r_l})}, & A_2 &= \frac{M_0 e^{-kh}}{k(\mu_r + \mu_{r_l})}, \\ C_1 &= \frac{(\mu_{r_l} + 1)M_0 e^{-kh}}{2k(\mu_r + \mu_{r_l})}, & C_2 &= \frac{(1 - \mu_{r_l})M_0 e^{-kh}}{2k(\mu_r + \mu_{r_l})}, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

unde μ_r și μ_{r_l} reprezintă permeabilitatea relativă ale statorului și respectiv lichidului magnetic.

Având în vedere (3.2.5) și (3.2.8), intensitățile câmpului magnetic în cele trei domenii devin:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= -\nabla V_{H_1} = \frac{M_0 e^{k(h-y)}}{\mu_r + \mu_{r_l}} (-\cos kx \mathbf{u}_x + \sin kx \mathbf{u}_y) \\ \mathbf{H}_2 &= -\nabla V_{H_2} = \frac{M_0 e^{-k(h-y)}}{\mu_r + \mu_{r_l}} (-\cos kx \mathbf{u}_x - \sin kx \mathbf{u}_y) \\ \mathbf{H}_3 &= -\nabla V_{H_3} = -\frac{M_0 e^{-kh}}{\mu_r + \mu_{r_l}} \left[(\mu_{r_l} sh ky + ch ky) \cos kx \mathbf{u}_x + (\mu_{r_l} ch ky + sh ky) \sin kx \mathbf{u}_y \right] \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

De remarcat că pentru $y=h$ atât inducția magnetică cât și intensitatea câmpului magnetic din mediul 1 și 2 sunt egale.

Într-adevăr, din (3.2.9):

$$H_1 = \sqrt{H_{1x}^2 + H_{2x}^2} = \frac{M_0}{\mu_r + \mu_{r1}} = H_2.$$

Din $\mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1 + \mu_0 \mathbf{M}_p = \frac{\mu_r M_0}{\mu_0 + \mu_{r1}} (\cos kx \mathbf{u}_x - \sin kx \mathbf{u}_y)$, rezultă:

$$B_1 = \sqrt{B_{1x}^2 + B_{1y}^2} = \frac{\mu_l M_0}{\mu_r + \mu_{r1}},$$

iar din $\mathbf{B}_2 = \mu_l \mathbf{H}_2$ rezultă $B_2 = \frac{\mu_l M_0}{\mu_r + \mu_{r1}}$, deci $B_1 = B_2$.

3.2.2 Calculul forței de levitație

Forța netă exercitată asupra unui corp amagnetic, inversat într-un lichid magnetic, supus unui câmp magnetic exterior (efectul levitației de ordinul 1) se poate exprima în forma: [DS5], [Ro2]:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] \mathbf{dS} \quad (3.2.10)$$

în care Σ reprezintă suprafața ce limitează corpul amagnetic trasată prin lichidul magnetic iar \mathbf{dS} reprezintă vectorul unitate de suprafață orientat spre exteriorul corpului amagnetic.

În cazul lagărului cu poli alternanți plasați în stator, corpul amagnetic este considera arborele care levitează în lichidul magnetic, suprafața Σ fiind suprafața de separație dintre arbore și lichid trasată prin lichidul magnetic (fig. 3.2.2).

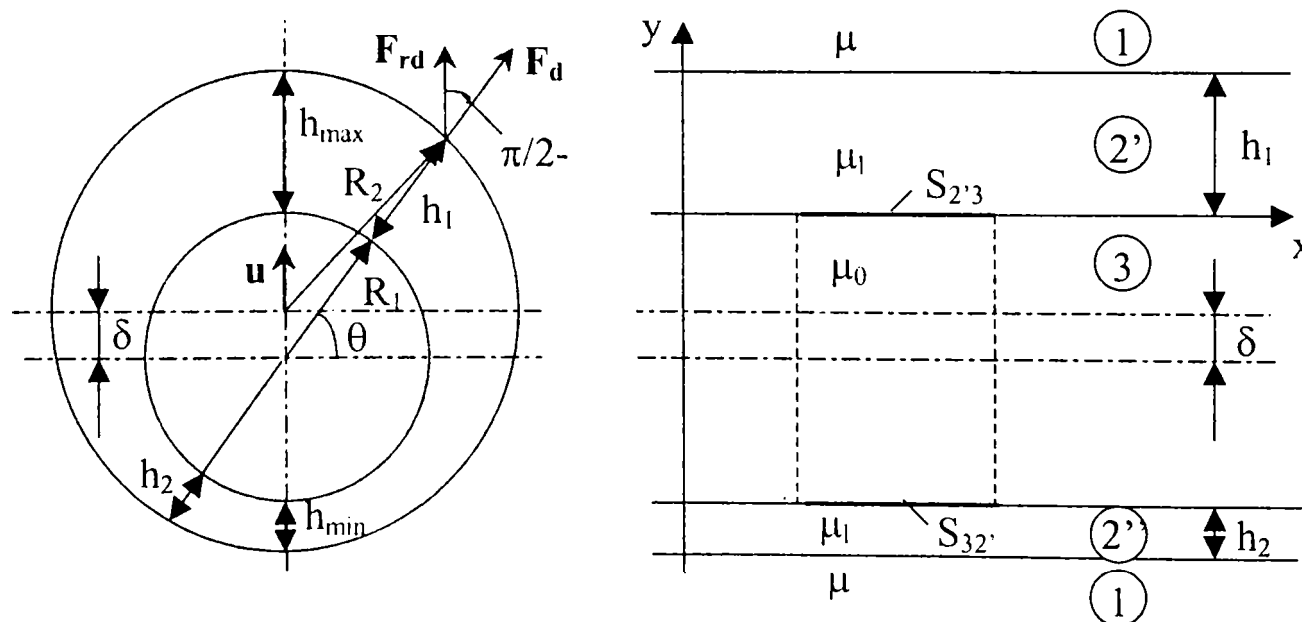


Fig. 3.2.2

Considerând lichidul magnetic liniar, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu_{r_l} - 1)\mathbf{H}$, relația (3.2.10) devine:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_l - \mu_0}{2} \oint_{\Sigma} (\mu_{r_l} H_n^2 + H_t^2) d\mathbf{S} \quad (3.2.11)$$

Rezultă că pe suprafața de separație dintre arbore și lichid, tensiunea normală este:

$$\mathbf{t}_n = -\frac{\mu_l - \mu_0}{2} (\mu_{r_l} H_n^2 + H_t^2) \mathbf{n} \quad (3.2.12)$$

În particular, pe suprafața $S_{2,3}$, (fig.3.2.2), tensiunea este:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{n_1} = \mathbf{t}_1(\mathbf{u}_y) &= -\frac{\mu_l - \mu_0}{2} (\mu_{r_l} H_{2y}^2 + H_{2x}^2) \mathbf{u}_y = \\ &= -\frac{\mu_l - \mu_0}{2} \frac{M_0^2 e^{-2kh_1}}{(\mu_r + \mu_{r_l})^2} (\mu_{r_l} \sin^2 kx + \cos^2 kx) \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Tensiunea pe suprafața $S_{2,3}$, (fig.3.2.2), este:

$$\mathbf{t}_{n_2} = \mathbf{t}_2(\mathbf{u}_y) = \frac{\mu_l - \mu_0}{2} \frac{M_0^2 e^{-2kh_2}}{(\mu_r + \mu_{r_l})^2} (\mu_{r_l} \sin^2 kx + \cos^2 kx) \mathbf{u}_y \quad (3.2.14)$$

Tensiunea rezultantă pe cele două fețe ale suprafeței de separație dintre arbore și lichidul magnetic va fi:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{u}_y) = \mathbf{t}_{n_1} + \mathbf{t}_{n_2} = \frac{\mu_l - \mu_0}{2} \frac{M_0^2 (e^{-2kh_2} - e^{-2kh_1})}{(\mu_r + \mu_{r_l})^2} (\mu_{r_l} \sin^2 kx + \cos^2 kx) \mathbf{u}_y \quad (3.2.15)$$

Forța exercitată pe lungimea d a arborelui (jumătate din lungimea de undă, $d = \lambda/2$), este dată de:

$$\mathbf{F}_d = \int_0^d \mathbf{t}_n dx = \frac{\mu_0 (\mu_{r_l}^2 - 1)}{4(\mu_r + \mu_{r_l})^2} M_0^2 d (e^{-2kh_2} - e^{-2kh_1}) \mathbf{u}_y \quad (3.2.16)$$

Pentru fig. 3.2.2 se poate scrie relația:

$$R_2^2 = (R_1 + h_1)^2 + \delta^2 - 2\delta(h_1 + R_1)\sin\theta \quad (3.2.17)$$

și considerând aproximația de ordinul 1 (se neglijează termenii de ordinul 2, δ^2 , δh_1 , h_1^2), se obține:

$$h_1 = \delta + \Delta \sin\theta, \quad h_2 = \delta - \Delta \sin\theta \quad (3.2.18)$$

unde cu Δ s-a notat dezaxarea curentă iar cu δ dezaxarea maximă, $\delta = R_2 - R_1$.

Cu (3.2.18), relația (3.2.16) devine:

$$\mathbf{F}_d = \frac{\mu_0 (\mu_{r_l}^2 - 1)}{2(\mu_r + \mu_{r_l})^2} M_0^2 d e^{-2k\delta} sh(2k\Delta \sin\theta) \mathbf{u}_y \quad (3.2.19)$$

Forța pe unitatea de lungime rezultă în forma:

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mathbf{F}_d}{d} = \frac{\mu_0 (\mu_{r_i}^2 - 1)}{2(\mu_r + \mu_{r_i})^2} M_0 e^{-2k\delta} sh(2k\Delta \sin\theta) \mathbf{u}_y \quad (3.2.20)$$

Pentru a calcula forța de readucere, \mathbf{F}_R^* , se va integra componenta forței \mathbf{F}^* în direcția lui h_{max} de orientare \mathbf{u} , fig.3.2.2, adică componenta $\mathbf{F}^* \sin\theta$:

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{u} \int_0^\pi F^* \sin\theta R_1 d\theta = \mathbf{u} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} F^* \sin\theta R_1 d\theta \quad (3.2.21)$$

Se obține :

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{u} \frac{\mu_0 (\mu_{r_i}^2 - 1) M_0^2 R_1}{(\mu_r + \mu_{r_i})^2} e^{-2k\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta sh(2k\Delta \sin\theta) d\theta \quad (3.2.22)$$

Efectuând dezvoltarea în serie a funcției $sh(2k\Delta \sin\theta)$, rezultă :

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{u} \frac{\mu_0 (\mu_{r_i}^2 - 1) M_0^2 R_1}{(\mu_r + \mu_{r_i})^2} e^{-2k\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k\Delta)^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta \quad (3.2.23)$$

Din :

$$\int \sin^{2n}\theta d\theta = -\frac{\cos\theta}{2n} \left[\sin^{2n-1}\theta + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)}{2^k (n-1)(n-2)\dots(n-k)} \sin^{2n-2k+1}\theta \right] + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \quad (3.2.24)$$

se obține :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{\pi}{2} \quad (3.2.25)$$

iar (3.2.23) devine:

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{u} \frac{\mu_0 (\mu_{r_i}^2 - 1) M_0^2 R_1 \pi e^{-2k\delta} k\Delta}{2(\mu_r + \mu_{r_i})^2} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} (k\Delta)^{2(n-1)}}{(n-1)! n!} \right] \quad (3.2.26)$$

Pentru dezaxarea maximă, $\Delta = \delta$, limitându-ne la primii doi termeni ai dezvoltării, ($k\Delta \ll 1$), forța de readucere pe unitatea de lungime a arborelui devine:

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{u} \frac{\mu_0 (\mu_{r_i}^2 - 1) M_0^2 R_1 \pi}{2(\mu_r + \mu_{r_i})^2} f(x) \quad (3.2.27)$$

unde s-a făcut notația $x = k\delta$ și $f(x) = e^{-2x} \left(x + \frac{x^3}{2} \right)$. (3.2.28)

Maximul pentru $f(x)$ rezultă din condiția $f'(x) = 0$ și se obține ecuația:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (3.2.29)$$

care, cu substituția $z = x - \frac{1}{2}$ devine: $z^3 + \frac{5}{4}z - \frac{1}{4} = 0$. (3.2.30)

Așa cum s-a arătat în [DS4], ecuația (3.2.30) în z are o soluție reală pentru $z_1 = 0.194$, ceea ce corespunde pentru $x_1 = 0.694$ și atunci $f(x_1) = 0.215$, valoare ce corespunde forței de readucere maximă. Funcția $f(x)$ este reprezentată în fig.3.2.3. Se poate observa că aceasta variază lent în jurul valorii maxime. Astfel, pe un interval de variație a lui x cuprins între $0.55 - 0.80$, $f(x)$ variază doar de la 0.211 la 0.213 , cu maximul amintit de 0.215 .

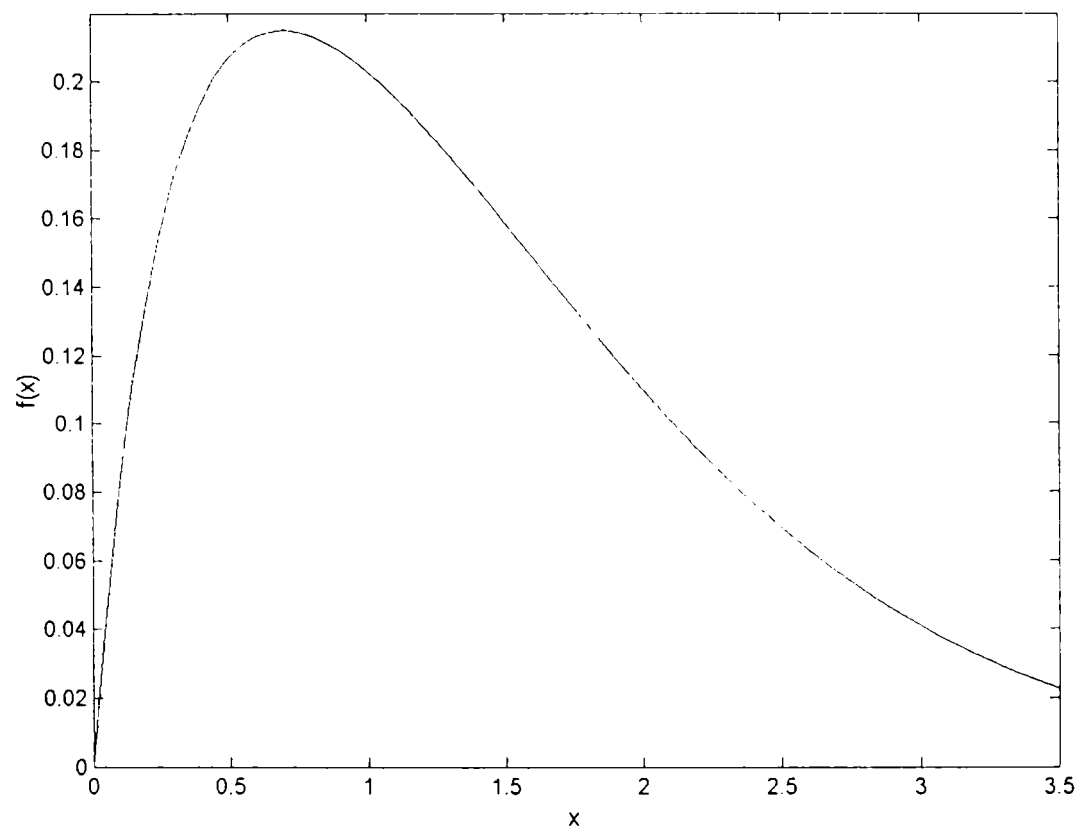


Fig. 3.2.3

Relația analitică aproximativă (3.2.27) este utilă pentru o analiză preliminară a lagărului. Se pot trage concluzii asupra modului în care dimensiunile geometrice ale lagărului și proprietățile magnetice ale materialelor influențează forța de readucere a arborelui. Expresia obținută permite optimizarea unor dimensiuni geometrice astfel încât forța de readucere să fie maximă.

3.3 Calculul numeric al lagărului cu poli alternanți plasați în stator

3.3.1 Calculul numeric aproximativ al câmpului magnetic folosind MEF-2D

În fig.3.3.1 este prezentată schița unui lagăr real cu lichid magnetic, având poli alternanți plasați în stator. Față de calculul analitic al lagărului făcut în paragrafele 3.1 și 3.2, polii alternanți au extensie radială finită, h_p . Ei sunt de formă

toroidală magnetizată cu magnetizație permanentă constantă de orientare radială, $\mathbf{M}_p = M_p \mathbf{u}_r$ sau $\mathbf{M}_p = -M_p \mathbf{u}_r$ după cum magnetul permanent are polul N spre exteriorul sau spre interiorul său.

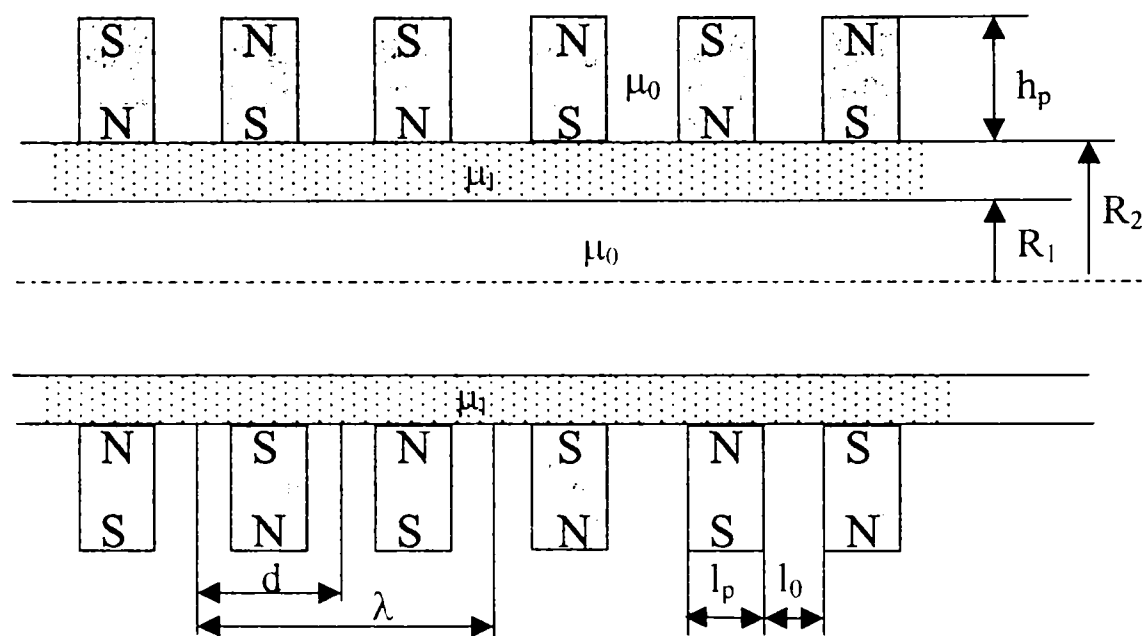


Fig. 3.3.1

Modelarea lagărului din fig.3.3.1 a fost făcută numeric în [Bj1], folosindu-se un program bidimensional bazat pe metoda elementelor finite (MEF-2D). În 2D nu se pot determina valorile câmpului pe suprafața laterală a arborelui atunci când acesta este plasat excentric față de axa statorului, deoarece câmpul nu prezintă simetrie plan meridiană. Metoda de aproximare pentru calculul câmpului magnetic cu un model 2D, folosită în [Bj1], se bazează pe faptul că permeabilitatea magnetică a lichidului magnetic este apropiată de 1, (1.1–1.2), ceea ce face ca spectrul câmpului să nu se modifice substanțial datorită prezenței lichidului magnetic.

Acceptând că prin rezolvarea în 2D, în absența lichidului magnetic, se obține o distribuție a câmpului magnetic puțin modificată față de situația în care acesta este prezent, se pot obține valorile câmpului în toate punctele din interiorul lagărului magnetic. De prezența lichidului magnetic se va ține seama în expresia forței ce va fi calculată prin integrare numerică.

Cu aproximarea menționată, câmpul devine plan-meridian. Ținând seama de planul de simetrie al lagărului, se poate modela un sfert dintr-o secțiune în lungul axei lagărului, fig.3.3.2.

Condițiile de frontieră ale modelului plan-parallel analizat sunt prezentate în fig.3.3.2.

În urma soluționării problemei distribuției câmpului magnetic, se obțin valorile componentelor inducției magnetice B_r și B_z după direcția radială și respectiv axa z.

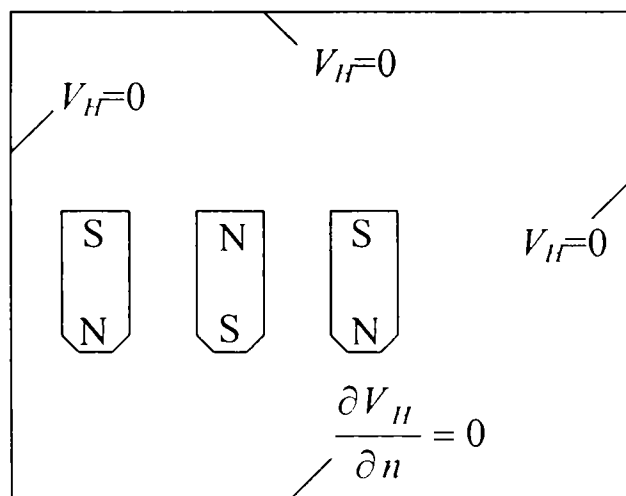


Fig. 3.3.2

3.3.2 Calculul numeric al forței de readucere

În [Bj1] se acceptă că rotorul ocupă o poziție excentrică față de axa lagărului, în distribuția de câmp magnetic (considerat plan-meridian) obținută prin MEF-2D. În acest fel, punctele de pe periferia rotorului, în orice secțiune perpendiculară pe axa lagărului, se vor găsi la diferite distanțe față de axa statorului. Aceste distanțe sunt cuprinse între o valoare minimă, $r_{min}=R_l-e$ și o valoare maximă, $r_{max}=R_l+e$, fig.3.3.3.

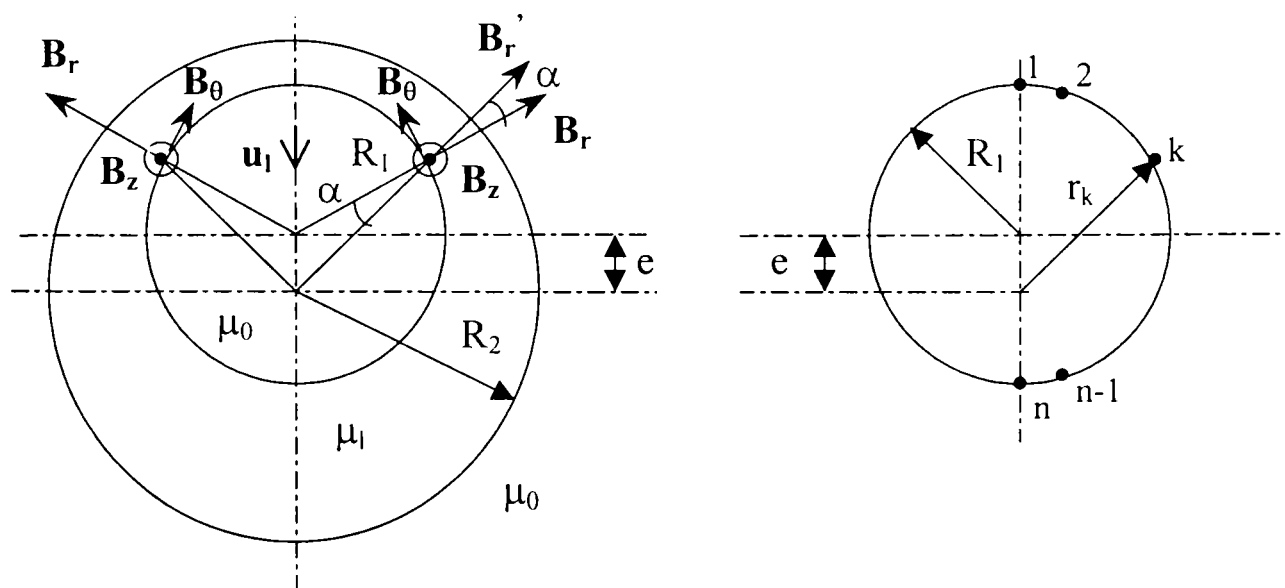


Fig. 3.3.3

O valoare curentă a acestei distanțe, corespunzătoare punctului „k” de pe rotor, a fost notată cu r_k , fig.3.3.3.

Pentru calculul forței de readucere se aplică, [DS5], [Ro2]:

$$\mathbf{F}_m = -\mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] d\mathbf{S} \quad (3.3.1)$$

unde Σ_0 reprezintă suprafața de separație dintre arbore și lichid trasată prin lichidul magnetic iar $d\mathbf{S}$ reprezintă vectorul unitate de suprafață orientat spre exteriorul arborelui. Din motive de simetrie, calculul integralei din (3.3.1) se reduce la calculul integralei pe suprafața laterală a rotorului.

Într-un punct de pe periferia rotorului există trei componente ale câmpului față de referențialul legat de axa rotorului, așa cum se vede în fig.3.3.3. Față de suprafața laterală a rotorului, câmpul este tridimensional:

- componenta \mathbf{B}_z este aceeași cu componenta \mathbf{B}_z' corespunzătoare referențialului legat de lagăr (de stator); determinată tabelar în urma modelării numerice;
- componenta \mathbf{B}_θ care din condiții de simetrie, nu va produce nici un efect în forța de readucere;
- componenta radială, care în referențialul legat de arbore, este:

$$\mathbf{B}_r = B_r' \cos \alpha \cdot \mathbf{u}_r = B_r' \cos(\theta - \theta') \mathbf{u}_r \quad (3.3.2)$$

unde s-a ținut seama că $\theta = \alpha + \theta'$, fig.3.3.3, iar B_r' reprezintă componenta radială corespunzătoare referențialului legat de lagăr (de stator), determinată tabelar în urma modelării numerice.

Ținând seama de faptul că lichidul este considerat mediu liniar:

$$\int_0^H M dH = \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} H^2 = \frac{\mu_{r_l} - 1}{2\mu_l^2} (B_r^2 + B_z^2 + B_\theta^2) \quad (3.3.3)$$

iar $M_n = \frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_l} B_n$, relația (3.3.1) devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m &= -\frac{\mu_0}{2} \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{(\mu_{r_l} - 1)^2}{\mu_l^2} B_r^2 + \frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_l^2} (B_r^2 + B_z^2 + B_\theta^2) \right] d\mathbf{S} = \\ &= -\frac{\mu_0}{2} \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{(\mu_{r_l} - 1)^2}{\mu_l^2} \mu_{r_l} B_r^2 + \frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_l^2} B_z^2 \right] d\mathbf{S} = -\frac{\mu_{r_l} - 1}{2\mu_0 \mu_{r_l}^2} \oint_{\Sigma_0} [\mu_{r_l} B_r^2 + B_z^2] d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

În relația (3.3.3) s-a ținut seama de faptul că în forța de readucere ce acționează asupra arborelui, contribuția componentei B_θ , din condiții de simetrie, este nulă.

Pentru a calcula forța de readucere, prezintă interes doar componenta forței după direcția excentricității e , singura diferită de zero:

$$F_r = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u}_e = F_m \cos \theta = -\frac{\mu_{r_l} - 1}{2\mu_0 \mu_{r_l}^2} \oint_{\Sigma_0} [\mu_{r_l} B_r^2 + B_z^2] dS \cos \theta \quad (3.3.5)$$

Pe suprafața laterală a rotorului cilindric elementul de suprafață se scrie:

$$dS = R_1 d\theta dz \quad (3.3.6)$$

și având în vedere că $B_r = B_r' \cos(\theta - \theta')$ și $B_z = B_z'$, cu B_r' și B_z' determinate tabelar în urma modelării numerice a modelului aproximativ din fig.3.3.2, expresia forței de readucere corespunzătoare unui pol de extensie axială d va fi:

$$F_r = \frac{\mu_{r1} - 1}{\mu_0 \mu_{r1}^2} R_1 \int_0^d dz \int_0^\pi \left[\mu_{r1} B_r'^2(\theta, z) \cos^2(\theta - \theta') + B_z'^2(\theta, z) \right] \cos \theta d\theta \quad (3.3.7)$$

Integrala dublă din (3.3.7) se poate efectua fie după θ și apoi după z , fie invers. Ca modalitate de integrare numerică, în [Bj1] a fost aleasă integrala întâi după θ și apoi după z . Pentru un z dat, cu valorile câmpului obținute din modelarea numerică, s-a calculat numeric integrala:

$$I_\theta(z) = \int_0^\pi \left[\mu_{r1} B_r'^2(\theta, z) \cos^2(\theta - \theta') + B_z'^2(\theta, z) \right] \cos \theta d\theta \quad (3.3.8)$$

Integrala numerică se poate face folosind metoda Simphson, metoda trapezelor sau metoda dreptunghiurilor de integrare. Pe semicercul arborelui de rază R_1 pe care se face integrarea se vor considera n puncte în care se cunosc componentele câmpului.

Lungimea axială corespunzătoare unui pol, d , este divizată prin „ n ” puncte în „ $n - 1$ ” intervale (egale între ele sau inegale). Cu (3.3.8) se calculează integrala corespunzătoare unui interval (pentru un z), rezultând apoi din (3.3.7) prin însumare, forța de readucere corespunzătoare unui pol.

Pentru a obține forța pe unitatea de lungime a axului lagărului cu lichid magnetic, forța calculată numeric cu expresia (3.3.7) se raportează la lungimea polului:

$$F_r^* = \frac{F_r}{d} \quad (3.3.9)$$

Calculul numeric al forței de readucere folosind MEF-2D este un calcul aproximativ. Calculul câmpului, pentru a admite un model plan-paralel, s-a făcut în absența lichidului magnetic, situație cu atât mai reală cu cât lichidul magnetic are permeabilitatea relativă mai apropiată de 1, ($\mu_{r1} \approx 1$). Integrala din (3.3.7) a fost calculată numeric, precizia ei fiind cu atât mai mare cu cât se consideră mai multe plane perpendiculare pe axa z în care se calculează o integrală de tipul celui din (3.3.8), iar semicercul corespunzător arborelui este împărțit într-un număr cât mai mare de puncte în care se cunosc componentele câmpului.

Un calcul numeric mai exact al câmpului ar necesita un program folosind MEF-3D, care ar modela mai exact lagărul magnetic. În cazul 3D este posibilă și analiza lagărului cu lichid real (cu caracteristică neliniară).

Rezultatele numerice ale forței de readucere pentru diferite cazuri analizate în [Bj1], folosind MEF-2D sunt comparabile cu cele obținute prin alte procedee (analitice), ceea ce arată că, cu toate aproximările făcute, precizia de calcul a forței de readucere este relativ bună.

3.4 Calculul analitic al lagărului cu poli alternanți cu $\mu_r=1$, plasați în rotor

Calculul analitic și numeric al lagărului cu lichid magnetic și poli alternanți plasați în stator este cunoscut în literatura de specialitate și a fost prezentat succint în paragrafele 3.1, 3.2 și 3.3. În unele aplicații care folosesc lagăre cu poli alternanți ar putea fi impusă condiția ca polii alternanți să fie plasați în rotor. În acest paragraf propun un nou tip de lagăr cu poli alternanți plasați în rotor pentru care voi realiza un calcul analitic aproximativ. Se consideră cazul lagărului cu poli alternanți plasați în rotor și lichid magnetic când polii alternanți nu se magnetizează temporar, [DS6], [DS7]. Voi stabili o expresie analitică a forței de readucere ce se exercită asupra rotorului, presupus realizat cu magneți permanenți alternanți, al unui lagăr hidrostatic având în spațiul dintre stator și rotor, lichid magnetic. Expresia obținută permite optimizarea unor dimensiuni geometrice ale lagărului și oferă indicații privind influența unor mărimi magnetice asupra forței magnetice de sustentație, [DS6], [DS7].

3.4.1 Calculul analitic aproximativ al câmpului magnetic

Schița unui lagăr cu poli alternanți plasați în rotor și lichid magnetic este prezentată în fig.3.4.1.

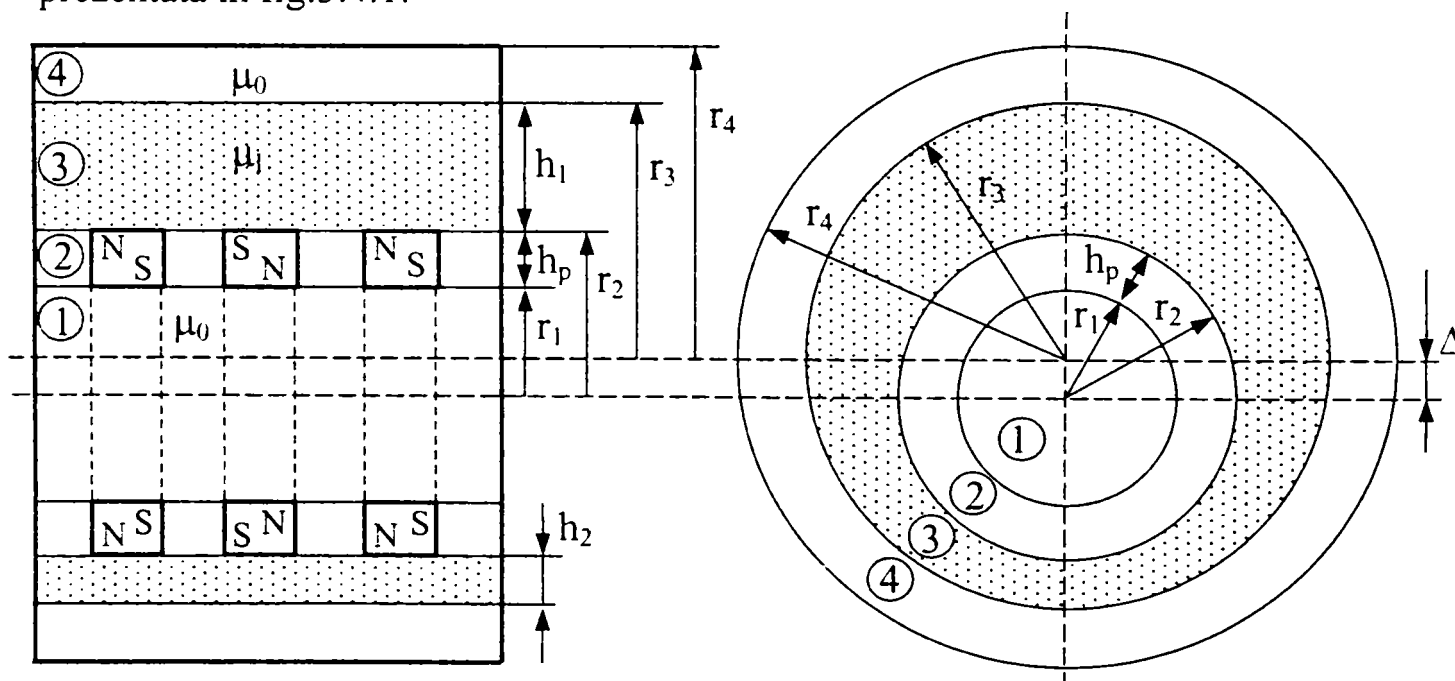


Fig. 3.4.1

Deplasarea între axele rotorului și statorului s-a notat cu Δ . Lichidul magnetic, considerat în continuare mediu liniar de permeabilitate μ_l , ocupă spațiul dintre rotor și stator.

Pentru a obține informații cu privire la dependența dintre forța de readucere exercitată asupra rotorului și dimensiunile lagărului am adoptat modelul din fig.3.4.2, în care câmpul magnetic este considerat plan-paralel.

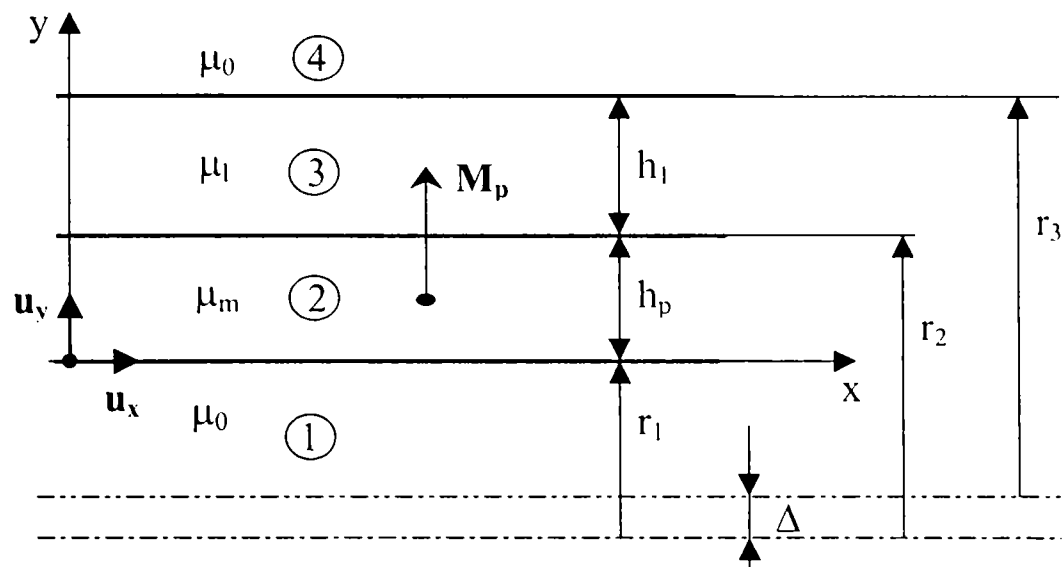


Fig. 3.4.2

Magnetul permanent este presupus astfel magnetizat încât magnetizația permanentă \mathbf{M}_p este radială, de divergență nulă și având o repartiție dreptunghiulară pe suprafețele $r = r_1$ și $r = r_2$, fig.3.4.3b).

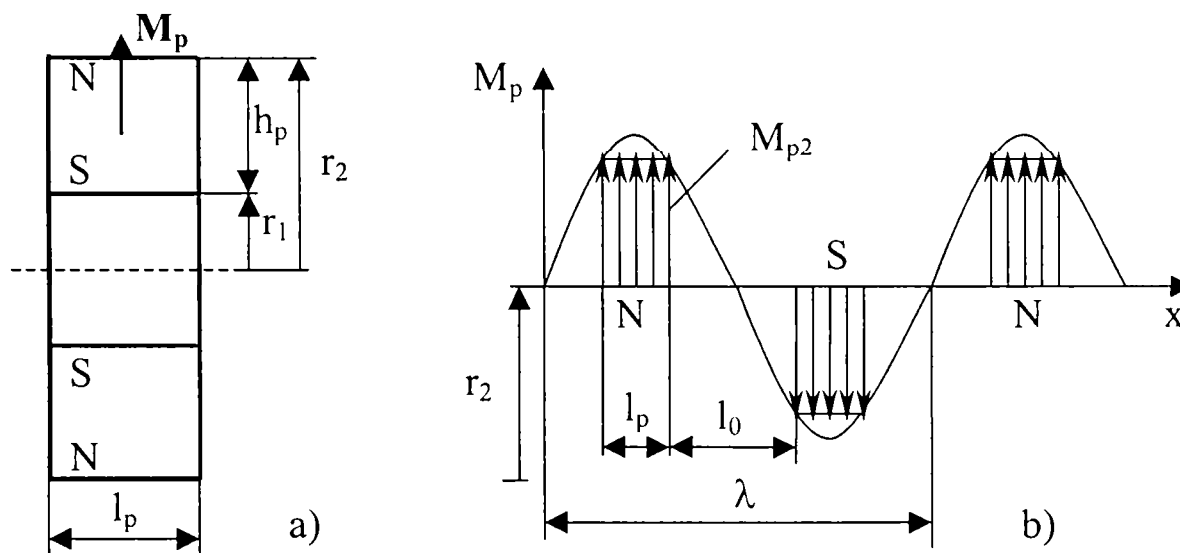


Fig. 3.4.3

Cu notațiile din fig.3.4.3 a), având în vedere simetria cilindrică a câmpului \mathbf{M}_p și faptul că $\text{div} \mathbf{M}_p = 0$, se poate scrie $M_{p2} 2\pi r_2 l_p = M_{p1} 2\pi r_1 l_p$, adică:

$$M_{p2} = M_{p1} \frac{r_1}{r_2} = M_{p1} \frac{r_1}{r_1 + h_p} \quad (3.4.1.)$$

Magnetizațiile M_{p2} și M_{p1} reprezintă magnetizațiile permanente la $r = r_2$ și $r = r_1$.

Repartiția dreptunghiulară periodică M_p din fig.3.4.3b) se poate descompune în armonici folosind seriile Fourier. Deoarece repartiția dreptunghiulară reprezintă o funcție pară și antisimetrică, descompunerea în serii va conține numai armonici în sinus de ordin impar.

În continuare voi considera doar armonica fundamentală a repartiției dreptunghiulare, care pe suprafața $r = r_2$ are valoarea:

$$M_{02} = \frac{4}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} M_{p_2} \sin kx dx \quad (3.4.2)$$

unde $\lambda = 2l_p + 2l_0$ reprezintă lungimea de undă, iar $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ este numărul de undă.

$$\text{Rezultă } M_{02} = \frac{2}{\pi} M_{p_2} \left[\cos k \frac{l_0}{2} - \cos k \left(\frac{l_0}{2} + l_p \right) \right] \text{ și cum } k \frac{l_0}{2} = \frac{\pi}{2} - k \frac{l_p}{2},$$

$$\text{avem: } M_{02} = \frac{4}{\pi} M_{p_2} \sin k \frac{l_p}{2} \quad (3.4.3)$$

iar armonica fundamentală se scrie în forma:

$$M_2(x) = M_{02} \sin kx = \frac{4}{\pi} M_{p_2} \sin k \frac{l_p}{2} \sin kx \quad (3.4.4)$$

Analog pe suprafața $r = r_1$, amplitudinea fundamentalei este:

$$M_{01} = \frac{4}{\pi} M_{p_1} \sin k \frac{l_p}{2} = \frac{4}{\pi} \frac{r_1 + h_p}{r_1} M_{p_2} \sin k \frac{l_p}{2} \quad (3.4.5)$$

iar armonica fundamentală se scrie în forma:

$$M_1(x) = M_{01} \sin kx = \frac{4}{\pi} \frac{r_1 + h_p}{r_1} M_{p_2} \sin k \frac{l_p}{2} \quad (3.4.6)$$

În toate cele patru domenii ale lagărului puse în evidență de modelul matematic din fig.3.4.2, potențialul magnetic scalar V_H satisface o ecuație de tip Laplace: $\nabla^2 V_{H_i} = 0$, $i = \overline{1,4}$ deoarece $\text{div} \mathbf{B} = 0$, $\text{rot} \mathbf{H} = 0$, $\text{div} \mathbf{M}_p = 0$ și $\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$ în mediul 2, $\mathbf{B} = \mu_l \mathbf{H}$ în lichidul magnetic 3 și $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ în mediile 1 și 4.

Utilizând metoda separării variabilelor soluția ecuației lui Laplace rezultă în forma:

$$V_{H_i} = (A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky}) (C_1' \sin kx + C_2' \cos kx) \quad (3.4.7)$$

Cum în mediile 1 și 4 câmpul scade când y crește și având în vedere repartițiile (3.4.4) și (3.4.6) ale lui M_p , se vor folosi soluții de forma:

$$\begin{aligned} V_{H1} &= C_1 e^{ky} \sin kx \\ V_{H2} &= (C_2 e^{ky} + C_3 e^{-ky}) \sin kx \\ V_{H3} &= (C_4 e^{ky} + C_5 e^{-ky}) \sin kx \\ V_{H4} &= C_6 e^{-ky} \sin kx \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Cele șase constante de integrare din egalitățile (3.4.8) se vor determina din condițiile de interfață scrise pe suprafețele $S_{12} (y=0)$, $S_{23} (y_1 = h_p)$,

S_{34} ($y_2 = h_p + h_1$), ce constau în continuitatea potențialelor și egalitatea componentelor normale ale inducției magnetice. Acestea se scriu cum urmează:

- pe S_{12} :

$$\begin{aligned} (V_{H1})_{y=0} &= (V_{H2})_{y=0} , \\ \mu_0 (\nabla V_{H1})_{y=0} \mathbf{u}_y &= (\mu_m \nabla V_{H2} - \mu_0 \mathbf{M}_1)_{y=0} \mathbf{u}_y , \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} (V_{H1})_{y=0} &= (V_{H2})_{y=0} , \\ \left(\frac{\partial V_{H1}}{\partial y} \right)_{y=0} - \mu_{r_m} \left(\frac{\partial V_{H2}}{\partial y} \right)_{y=0} &= -M_{01} ; \end{aligned}$$

- pe S_{23} :

$$\begin{aligned} (V_{H2})_{y=y_1} &= (V_{H3})_{y=y_1} , \\ (\mu_m \nabla V_{H2} - \mu_0 \mathbf{M}_p)_{y=y_1} \mathbf{u}_y &= \mu_l (\nabla V_{H3})_{y=y_1} \mathbf{u}_y , \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} (V_{H2})_{y=y_1} &= (V_{H3})_{y=y_1} , \\ \mu_{r_m} \left(\frac{\partial V_{H2}}{\partial y} \right)_{y=y_1} - \mu_{r_l} \left(\frac{\partial V_{H3}}{\partial y} \right)_{y=y_1} &= M_{02} ; \end{aligned}$$

- pe S_{3l} :

$$\begin{aligned} (V_{H3})_{y=y_2} &= (V_{H4})_{y=y_2} , \\ \mu_l (\nabla V_{H3})_{y=y_2} \mathbf{u}_y &= \mu_0 (\nabla V_{H4})_{y=y_2} \mathbf{u}_y , \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} (V_{H3})_{y=y_2} &= (V_{H4})_{y=y_2} , \\ \mu_{r_l} \left(\frac{\partial V_{H3}}{\partial y} \right)_{y=y_2} &= \left(\frac{\partial V_{H4}}{\partial y} \right)_{y=y_2} . \end{aligned}$$

Cu (3.4.8) relațiile anterioare devin:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 + C_3 , \\ C_1 - \mu_{r_m} (C_2 - C_3) &= -m_1 , \\ C_2 \varepsilon_1^2 + C_3 &= C_4 \varepsilon_1^2 + C_5 , \\ \mu_{r_m} (C_2 \varepsilon_1^2 - C_3) - \mu_{r_l} (C_4 \varepsilon_1^2 - C_5) &= m_2 \varepsilon_1 , \\ C_4 \varepsilon_2^2 + C_5 &= C_6 , \\ \mu_{r_l} (C_4 \varepsilon_2^2 - C_5) &= -C_6 , \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

în care s-au folosit notațiile : $\varepsilon_1 = e^{kh_p}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 e^{kh_1}$, $m_1 = \frac{M_{01}}{k}$ și $m_2 = \frac{M_{02}}{k}$.

Sistemul algebric linear (3.4.9) determină univoc cele șase constante de integrare. Pentru rezolvarea analitică a sistemului s-a considerat că magnetii permanenți nu se magnetizează temporar, $\mu_{rm}=1$. În aceste condiții sistemul (3.4.9) devine:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 + C_3 \quad , \\ C_1 - C_2 + C_3 &= -m_1 \quad , \\ C_2 \varepsilon_1^2 + C_3 &= C_4 \varepsilon_1^2 + C_5 \quad , \\ C_2 \varepsilon_1^2 - C_3 - \mu_{r_l} (C_4 \varepsilon_1^2 - C_5) &= m_2 \varepsilon_1^2 \quad , \\ C_4 \varepsilon_2^2 + C_5 &= C_6 \quad , \\ \mu_{r_l} (C_4 \varepsilon_2^2 + C_5) &= -C_6 \quad , \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

iar expresiile constantelor de integrare rezultă în forma:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) [m_1 (1 - \mu_{r_l}^2) - 2m_2 \varepsilon_1] - 2m_2 \varepsilon_1 \mu_{r_l} (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2)}{2\varepsilon_1^4 (\mu_{r_l} - 1)^2 - 2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 (\mu_{r_l} + 1)^2} \quad , \\ C_3 &= -\frac{m_1}{2} \quad , \\ C_1 &= C_2 + C_3 \quad , \\ C_4 &= \frac{(\mu_{r_l} - 1)(m_1 - m_2 \varepsilon_1)}{\varepsilon_1^2 (\mu_{r_l} - 1)^2 - \varepsilon_2^2 (\mu_{r_l} + 1)^2} \quad , \\ C_5 &= \frac{\varepsilon_2^2 (\mu_{r_l} + 1)}{\mu_{r_l} - 1} C_4 \quad . \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Intensitățile de câmp în cele patru domenii sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= -\nabla V_{H1} = -k C_1 e^{ky} (\cos kx \mathbf{u}_x + \sin kx \mathbf{u}_y) \quad , \\ \mathbf{H}_2 &= -\nabla V_{H2} = -k (C_2 e^{ky} + C_3 e^{-ky}) \cos kx \mathbf{u}_x - k (C_2 e^{ky} - C_3 e^{-ky}) \sin kx \mathbf{u}_y \quad , \\ \mathbf{H}_3 &= -\nabla V_{H3} = -k (C_4 e^{ky} + C_5 e^{-ky}) \cos kx \mathbf{u}_x - k (C_4 e^{ky} - C_5 e^{-ky}) \sin kx \mathbf{u}_y \quad , \\ \mathbf{H}_4 &= -\nabla V_{H4} = -k C_6 e^{-ky} (\cos kx \mathbf{u}_x - \sin kx \mathbf{u}_y) \quad . \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

3.4.2 Calculul forței de levitație

La echilibru forța ce se exercită asupra arborelui este egală și de semn opus cu forța ce acționează asupra statorului și are expresia, [Ro1], [DS2]:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] d\mathbf{S} \quad (3.4.13)$$

în care Σ_0 reprezintă suprafața de separație între lichidul magnetic și stator iar $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}_{34}$ reprezintă vectorul element de suprafață orientat spre exteriorul lichidului magnetic, fig.3.4.4.

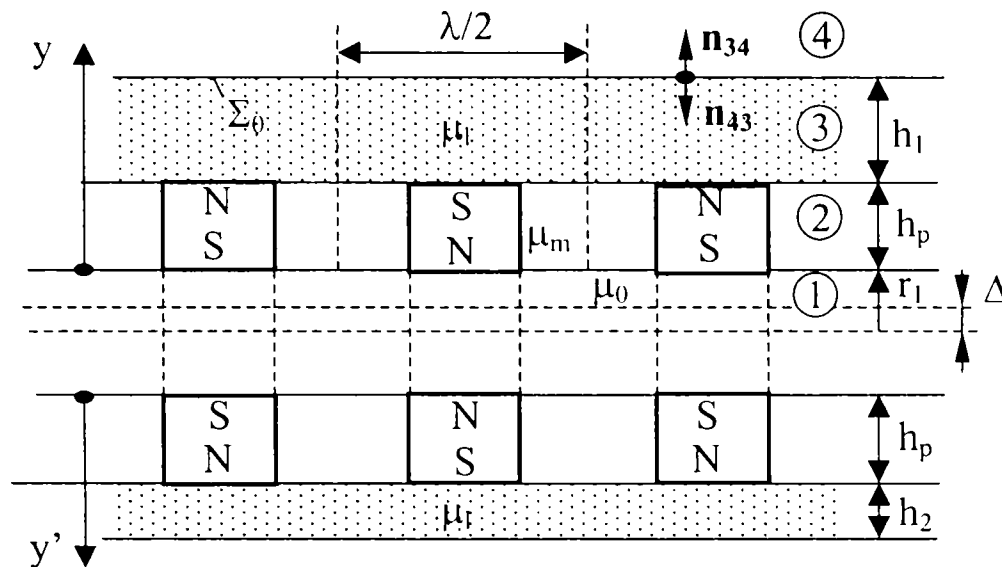


Fig. 3.4.4

Considerând lichidul magnetic linear de susceptivitate χ_{ml} , magnetizația fiind proporțională cu intensitatea câmpului, rezultă:

$$\int_0^H M dH = \chi_{m_l} \frac{H^2}{2}, \quad M_n^2 = (\mu_{r_l} - 1)^2 H_n^2 \quad \text{și integrantul din (3.4.13) obține}$$

forma:

$$\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH = \frac{(\mu_{r_l} - 1)^2}{2} H_n^2 + \frac{(\mu_{r_l} - 1)}{2} (H_n^2 + H_t^2) = \frac{(\mu_{r_l} - 1)}{2} (\mu_{r_l} H_n^2 + H_t^2).$$

Ca urmare expresia (3.4.13) a forței exercitate asupra arborelui devine:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \frac{(\mu_{r_l} - 1)}{2} \oint_{\Sigma_0} (\mu_{r_l} H_n^2 + H_t^2) d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma_0} t_{n_{34}} d\mathbf{S},$$

ceea ce pune în evidență tensiunea normală:

$$\mathbf{t}_{n_{34}} = -\mu_0 \frac{(\mu_{r_l} - 1)}{2} (\mu_{r_l} H_n^2 + H_t^2) \mathbf{u}_y \quad (3.4.14)$$

Se calculează, în continuare, forța ce se exercită pe lungimea $\lambda/2$, fig.3.4.4. Observând că $\mathbf{t}_{n_{34}}(y_2) = t_n(y_2) \mathbf{u}_y$ iar pe fața simetrică $\mathbf{t}_{n_{34}}(y_2') = t_n(y_2')(-\mathbf{u}_y)$, se obține o tensiune rezultantă sub forma:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_{n_{34}}(y_2) + \mathbf{t}_{n_{34}}(y_2') = [t_n(y_2) - t_n(y_2')] \mathbf{u}_y, \quad (3.4.15)$$

în care $y_2 = h_p + h_1$ și $y_2' = h_p + h_2$, fig.3.4.4.

Ca urmare, utilizând expresia (3.4.14), rezultă:

$$\mathbf{t}_n = -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} \left[\mu_{r_l} \left(H_{3y}^2 - H_{3y'}^2 \right) + \left(H_{3x}^2 - H_{3x'}^2 \right) \right] \mathbf{u}_y, \quad (3.4.16)$$

unde prin indicii notați cu prim s-au notat componentele normală și tangență ale intensității câmpului magnetic la suprafața y_2' respectiv fără prim la suprafața y_2 , toate componentele fiind calculate în puncte din lichid (mediul 3).

Cu (3.4.12) avem:

$$\begin{aligned} H_{3y} &= -k \left(C_4 e^{ky_2} - C_5 e^{-ky_2} \right) \sin kx, \\ H_{3y'} &= -k \left(C_4' e^{ky_2'} - C_5' e^{-ky_2'} \right) \sin kx, \\ H_{3x} &= -k \left(C_4 e^{ky_2} + C_5 e^{-ky_2} \right) \cos kx, \\ H_{3x'} &= -k \left(C_4' e^{ky_2'} + C_5' e^{-ky_2'} \right) \cos kx, \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

în care C_4' și C_5' au valorile din (3.4.11) în care s-au înlocuit ε_1 și ε_2 cu noile valori $\varepsilon_1' = \varepsilon_1$ și $\varepsilon_2' = e^{k(h_p+h_2)} = \varepsilon_1 e^{kh_2}$.

Rezultă :

$$\begin{aligned} H_{3y}^2 - H_{3y'}^2 &= k^2 \left[C_4^2 e^{2ky_2} - C_4'^2 e^{2ky_2'} + C_5^2 e^{-2ky_2} - C_5'^2 e^{-2ky_2'} - \right. \\ &\quad \left. - 2(C_4 C_5 - C_4' C_5') \right] \sin^2 kx, \\ H_{3x}^2 - H_{3x'}^2 &= k^2 \left[C_4^2 e^{2ky_2} - C_4'^2 e^{2ky_2'} + C_5^2 e^{-2ky_2} - C_5'^2 e^{-2ky_2'} + \right. \\ &\quad \left. + 2(C_4 C_5 - C_4' C_5') \right] \cos^2 kx. \end{aligned}$$

Forța pe lungimea $\frac{\lambda}{2}$ va fi :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\lambda/2} &= -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} k^2 \frac{\lambda}{4} \left\{ (\mu_{r_l} + 1) \left(C_4^2 e^{2ky_2} - C_4'^2 e^{2ky_2'} + C_5^2 e^{-2ky_2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - C_5'^2 e^{-2ky_2'} \right) - 2(\mu_{r_l} - 1)(C_4 C_5 - C_4' C_5') \right\} \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

în care s-a folosit :

$$\int_0^{\lambda/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\lambda/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\lambda}{4}.$$

Utilizând relațiile dintre h_1 și h_2 , fig.3.4.5, [DS4], avem: $h_1 = \delta + \Delta \sin \theta$, $h_2 = \delta - \Delta \sin \theta$, unde cum indică fig.3.4.5, Δ este dezaxarea iar $\delta = r_3 - r_2$.

Rezultă: $h_1 - h_2 = 2 \Delta \sin \theta = 2 \Delta'$, cu $\Delta' = \Delta \sin \theta$ și cum $h_1 = h_2 + 2 \Delta'$ se obține: $y_2' = h_p + h_2 = h_p + h_1 - 2 \Delta' = y_2 - 2 \Delta'$.

Înlocuind pe y_2' în (3.4.18) se obține:

$$\mathbf{F}_{\lambda/2} = -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} k^2 \frac{\lambda}{4} \left\{ (\mu_{r_l} + 1) \left[e^{2ky_2} \left(C_4^2 - C_4'^2 e^{-4k\Delta'} \right) + e^{-2ky_2} \left(C_5^2 - C_5'^2 e^{4k\Delta'} \right) \right] - 2(\mu_{r_l} - 1)(C_4 C_5 - C_4' C_5') \right\} \mathbf{u}_y \quad (3.4.19)$$

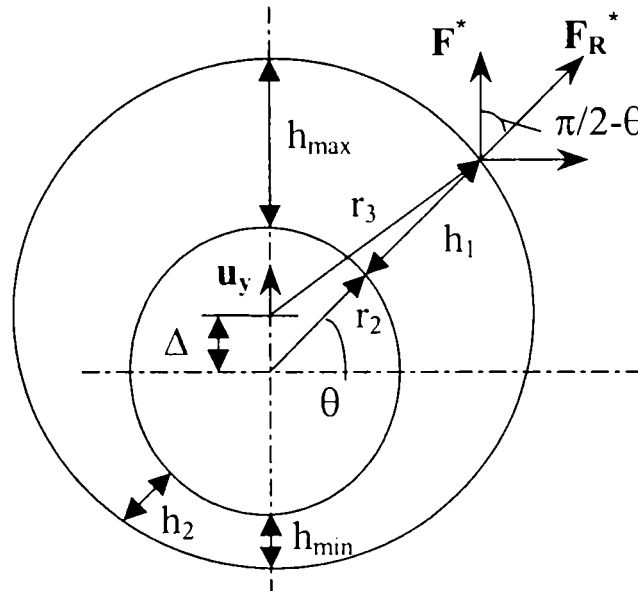


Fig. 3.4.5

Utilizând expresiile constantelor din (3.4.11) se poate scrie:

$$C_4' C_5' - C_4 C_5 = \frac{\mu_{r_l} + 1}{\mu_{r_l} - 1} \varepsilon_1^2 \left(C_4'^2 e^{2kh_2} - C_4^2 e^{2kh_1} \right) \quad (3.4.20)$$

și

$$\frac{C_4'}{C_4} = \frac{\varepsilon_1^2 (\mu_{r_l} - 1)^2 - \varepsilon_2^2 (\mu_{r_l} + 1)^2}{\varepsilon_1^2 (\mu_{r_l} - 1)^2 - \varepsilon_2'^2 (\mu_{r_l} + 1)^2} = \frac{\left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^2 - e^{2kh_1}}{\left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^2 - e^{2kh_2}} \cong e^{2k(h_1 - h_2)} = e^{4k\Delta'} \quad (3.4.21)$$

în care s-au neglijat termenii ce conțin permeabilitatea relativă în raport cu exponențialele.

Pentru constanta C_4 din (3.4.11) se poate folosi aproximarea:

$$C_4^2 = \frac{(\mu_{r_l} - 1)^2 (m_1 - m_2 \varepsilon_1)^2}{\left[\varepsilon_1^2 (\mu_{r_l} - 1)^2 - \varepsilon_1^2 e^{2kh_1} (\mu_{r_l} + 1)^2 \right]^2} \cong \frac{(\mu_{r_l} - 1)^2 (m_1 - m_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1^4 e^{4kh_1} (\mu_{r_l} + 1)^4} \quad (3.4.22)$$

și cu aceasta (3.4.20) obține forma:

$$C_4' C_5' - C_4 C_5 = \frac{(\mu_{r_l} - 1)(m_1 - m_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1^2 (\mu_{r_l} + 1)^3} (e^{-2kh_2} - e^{-2kh_1}) \quad (3.4.23)$$

Primul termen din (3.4.19) notat în continuare cu $\mathbf{F}_{1\lambda/2}$, devine:

$$\mathbf{F}_{1\lambda/2} = -\mu_0 \frac{\mu_{r_l}^2 - 1}{8} k^2 \lambda C_4^2 \left\{ e^{2ky_2} \left(1 - e^{4k(h_1-h_2)} e^{4k\Delta'} \right) + e^{-2ky_2} \left[\frac{\varepsilon_1^4 e^{4kh_1} (\mu_{r_l} + 1)^2}{(\mu_{r_l} - 1)^2} - \frac{\varepsilon_1^4 e^{4kh_2} (\mu_{r_l} + 1)^2}{(\mu_{r_l} - 1)^2} e^{4k(h_1-h_2)} e^{4k\Delta'} \right] \right\} \mathbf{u}_y \quad (3.4.24)$$

deoarece:

$$C_5 = \frac{\varepsilon_1^2 e^{2kh_1} (\mu_{r_l} + 1)}{\mu_{r_l} - 1} C_4 \quad \text{și} \quad C_5' = \frac{\varepsilon_1^2 e^{2kh_2} (\mu_{r_l} + 1)}{\mu_{r_l} - 1} e^{2k(h_1-h_2)} C_4.$$

Cum $e^{2ky_2} = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1^2 e^{2kh_1}$ iar $h_1 - h_2 = 2\Delta'$, relația (3.4.24) se pune în forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1\lambda/2} &= -\mu_0 \frac{\mu_{r_l}^2 - 1}{8} k^2 \lambda C_4^2 \varepsilon_1^2 \left[\left(e^{2kh_1} - e^{2kh_1} e^{4k\Delta'} \right) + \left(\frac{\mu_{r_l} + 1}{\mu_{r_l} - 1} \right)^2 e^{2kh_1} \left(1 - e^{4k\Delta'} \right) \right] \mathbf{u}_y = \\ &= -\mu_0 \frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{4(\mu_{r_l} - 1)^2} k^2 \lambda C_4^2 \varepsilon_1^2 e^{2kh_1} \left(1 - e^{4k\Delta'} \right) \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

Cu (3.4.22) expresia anterioară se scrie:

$$\mathbf{F}_{1\lambda/2} = -\mu_0 \frac{(\mu_{r_l}^4 - 1) k^2 \lambda (m_1 - m_2 \varepsilon_1)^2}{4 \varepsilon_1^2 (\mu_{r_l} + 1)^4} e^{-2kh_1} \left(1 - e^{4k\Delta \sin \theta} \right) \mathbf{u}_y \quad (3.4.26)$$

Deoarece $h_1 = \delta + \Delta \sin \theta$, forța pe unitatea de lungime corespunzătoare primului termen din (3.4.18) rezultă în forma:

$$\mathbf{F}_1^* = \frac{\mathbf{F}_{1\lambda/2}}{\lambda/2} = \mu_0 \frac{(\mu_{r_l}^4 - 1) k^2 (m_1 - m_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1^2 (\mu_{r_l} - 1)^4} e^{-2k\delta} \operatorname{sh}(2k\Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.4.27)$$

Al doilea termen din (3.4.19) notat în continuare cu $\mathbf{F}_{2\lambda/2}$ va avea expresia:

$$\mathbf{F}_{2\lambda/2} = -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} k^2 \frac{\lambda}{4} 2(\mu_{r_l} - 1) (C_4 C_5 - C_4' C_5') \mathbf{u}_y, \quad (3.4.28)$$

și având în vedere (3.4.23), se scrie în forma:

$$\mathbf{F}_{2\lambda/2} = -\frac{\mu_0 k \lambda (m_1 - m_2 \varepsilon_1)^2}{4 \varepsilon_1^2} \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \left(e^{-2kh_2} - e^{-2kh_1} \right) \mathbf{u}_y \quad (3.4.29)$$

Cum $h_1 = \delta + \Delta \sin \theta$ și $h_2 = \delta - \Delta \sin \theta$, forța pe unitatea de lungime corespunzătoare celui de-al doilea termen din (3.4.19) rezultă în forma:

$$\mathbf{F}_2^* = \frac{\mathbf{F}_{2\lambda/2}}{\lambda/2} = -\frac{\mu_0 k^2 (m_1 + m_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1^2} \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 e^{-2k\delta} \operatorname{sh}(2k \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.4.30)$$

Forța rezultantă pe unitatea de lungime va fi:

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{F}_1^* + \mathbf{F}_2^* = \frac{\mu_0 k^2 (m_1 + m_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1^2} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{\mu_{r_l} + 1} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right] e^{-2k\delta} \operatorname{sh}(2k \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.4.31)$$

Pentru a calcula forța de readucere, \mathbf{F}^* , se va integra componenta forței \mathbf{F}_R^* în direcția lui h_{max} de orientare \mathbf{u} , fig.3.4.5, adică componenta $\mathbf{F}_R^* \sin \theta$:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{u} \int_0^\pi F_R^* \sin \theta r_3 d\theta = \frac{\mu_0 k^2 r_3 (m_1 + m_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1^2} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{\mu_{r_l} + 1} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right] e^{-2k\delta} \cdot \int_0^\pi \operatorname{sh}(2k \Delta \sin \theta) \sin \theta d\theta \cdot \mathbf{u} \quad (3.4.32)$$

Pentru rezolvarea integralei din (3.4.32), integrantul se descompune în serii de puteri:

$$\operatorname{sh}(2k \Delta \sin \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2k \Delta)^{2i-1} \cdot \sin^{2i-1} \theta}{(2i-1)!} \quad (3.4.33)$$

iar integrala devine:

$$\int_0^\pi \operatorname{sh}(2k \Delta \sin \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2k \Delta)^{2i-1} \sin^{2i-1} \theta}{(2i-1)!} d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2k \Delta)^{2i-1}}{(2i-1)!} \int_0^\pi \sin^{2i} \theta d\theta \quad (3.4.34)$$

Notând cu I_{2i} integrala de sub semnul sumă și integrând prin părți, rezultă următoarea relație de recurență:

$$I_{2i} = \frac{2i-1}{2i} I_{2i-1}$$

și cum $I_2 = \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$, se obține integrala I_{2i} în forma:

$$I_{2i} = \frac{2i-1}{2i} \cdot \frac{2i-3}{2i-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \frac{(2i-1)!!}{2^i \cdot i!}$$

Astfel:

$$\int_0^\pi sh(2k\Delta \sin\theta) \sin\theta d\theta = \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2k\Delta)^{2i-1} (2i-1)!!}{(2i-1)! \cdot 2^i \cdot i!} = \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k\Delta)^{2i-1}}{i!(i-1)!} \quad (3.4.34)$$

iar expresia forței de readucere (3.4.32) devine:

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mu_0 \pi r_3 k^2 (m_1 + m_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1^2} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{\mu_{r_l} + 1} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right] e^{-2k\delta} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k\Delta)^{2i-1}}{i!(i-1)!} \mathbf{u} \quad (3.4.35)$$

Limitându-ne la primii doi termenii ai seriei, considerând dezaxare maximă $\Delta = \delta$, și înlocuind pe m_1 , m_2 și ε_1 , avem:

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mu_0 \pi r_3 M_{0l}^2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2} e^{kh_p} \right)^2}{e^{2kh_p}} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{(\mu_{r_l} + 1)^4} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right] e^{-2k\delta} \left[k\delta + \frac{(k\delta)^3}{2} \right] \mathbf{u} \quad (3.4.36)$$

Cu notația $h_p = \alpha\delta$, avem $r_2 = r_1 + \alpha\delta$ iar din (3.4.5) rezultă M_{0l} care înlocuit în (3.4.36) conduce la forța de readucere în forma, [DS7]:

$$\mathbf{F}^* = \frac{16\mu_0 M_{p1}^2}{\pi} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{(\mu_{r_l} + 1)^4} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right] U(k\delta) \mathbf{u} \quad (3.4.37)$$

unde:

$$U(k\alpha) = \left(e^{-k\alpha\delta} - \frac{r_1}{r_1 + \alpha\delta} \right)^2 [r_1 + (\alpha+1)\delta] \left[k\delta + \frac{(k\delta)^3}{2} \right] e^{-2k\delta} \sin^2 \frac{kl_p}{2} \quad (3.4.38)$$

Din relațiile (3.4.37) și (3.4.38) rezultă că forța de readucere, exercitată pe unitatea de lungime a arborelui, la dezaxarea sa maximă, este funcție de dimensiunile geometrice ale sistemului, de pătratul magnetizației permanente și de permeabilitatea magnetică a lichidului.

În [DS6], folosind alte aproximații pentru constantele C_4 și C_5 , s-a obținut o relație asemănătoare cu (3.4.38) pentru expresia forței de readucere, fiind pusă în evidență aceeași funcție $U(k\alpha)$ dată de (3.4.38).

Dependența forței de readucere funcție de permeabilitatea magnetică a lichidului se face prin expresia: $\left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{(\mu_{r_l} + 1)^4} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right]$. Al doilea termen al

expresiei este mult mai mic decât primul termen. Astfel pentru un lichid cu $\mu_r=1.3$, al doilea termen reprezintă aproximativ 3% din primul, fapt pentru care el poate fi neglijat. Aceasta înseamnă că la evaluarea expresiei (3.4.19) se poate lua în considerare doar primul termen, $F_{1\lambda/2}$.

3.4.3 Influența dimensiunilor geometrice ale lagărului asupra forței de readucere

Dacă se alege lungimea dintre poli egală cu jumătate din lungimea polului, $l_0 = \frac{l_p}{2}$, atunci $l_p = \frac{\lambda}{3}$ și $\frac{K l_p}{2} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar funcția din (3.4.38) ia forma:

$$U(k\alpha) = \frac{3}{4} \left(e^{-k\alpha\delta} - \frac{r_1}{r_1 + \alpha\delta} \right)^2 [r_1 + (\alpha + 1)\delta] \left[k\delta + \frac{(k\delta)^3}{2} \right] e^{-2k\delta} \quad (3.4.39)$$

Funcția $U(k, \lambda)$ este determinată doar de dimensiunile geometrice ale lagărului prin intermediul celor patru variabile: r_1 - raza arborelui, δ - dezaxarea maximă, α - care determină înălțimea polilor h_p , și k care determină lungimea polilor și a distanței dintre poli.

Am încercat determinarea unui extrem al funcției U în raport cu cele patru variabile. Folosind programele numerice avute la dispoziție, nu am reușit determinarea unui extrem al funcției.

Am considerat cunoscute două din cele patru variabile. Ținând seama că la proiectarea unui astfel de lagăr este indicat să se cunoască raza arborelui și dezaxarea maximă, am considerat $r_1=1 \text{ cm}$ și $\delta=0.1 \text{ cm}$.

În fig.3.4.6 s-a reprezentat dependența funcției U în raport cu k pentru diferite valori ale parametrului α . Se observă că valoarea maximă a funcției U se obține pentru curba $\alpha=4$ și are loc pentru $k \approx 9 \text{ rad/cm}$.

În fig.3.4.7 s-a reprezentat dependența funcției U în raport cu α pentru diferite valori ale lui k . Și în acest caz se observă că există o curbă ce obține o valoare maximă pentru funcția U . Maximul este în jurul valorii 0.11 cm pentru $\alpha \approx 3.5$ și corespunde curbei $k=10 \text{ rad/cm}$.

Am reprezentat în fig.4.3.8, [DS6], [DS7], funcția U având ca variabile pe k și α pentru $r_1=1 \text{ cm}$, $\delta=0.1 \text{ cm}$. Cum se observă, suprafața obținută U prezintă un maxim $U=0.1115 \text{ cm}$ care are loc pentru $k=9.74 \text{ rad/cm}$ și $\alpha=3.57$. Pentru a obține o forță maximă, dimensiunile polilor se vor alege în jurul valorilor pentru care funcția U este maximă. Aceasta înseamnă că înălțimea optimă a polului va fi $h_p = \alpha\delta = 0.357 \text{ cm}$ iar lungimea optimă a polului va fi, $l_p = \frac{2\pi}{3k} \cong 0.22 \text{ cm}$.

În fig.3.4.9 s-a reprezentat funcția U având variabilele k și α pentru $r_1=5 \text{ cm}$ și $\delta=0.1 \text{ cm}$. Suprafața prezintă un maxim $U=0.7137 \text{ cm}$ obținut pentru $k=7.93 \text{ rad/cm}$ și $\alpha=5.75$ ceea ce înseamnă că înălțimea optimă a polului este $h_p=0.575 \text{ cm}$ iar lungimea optimă $l_p=0.26 \text{ cm}$.

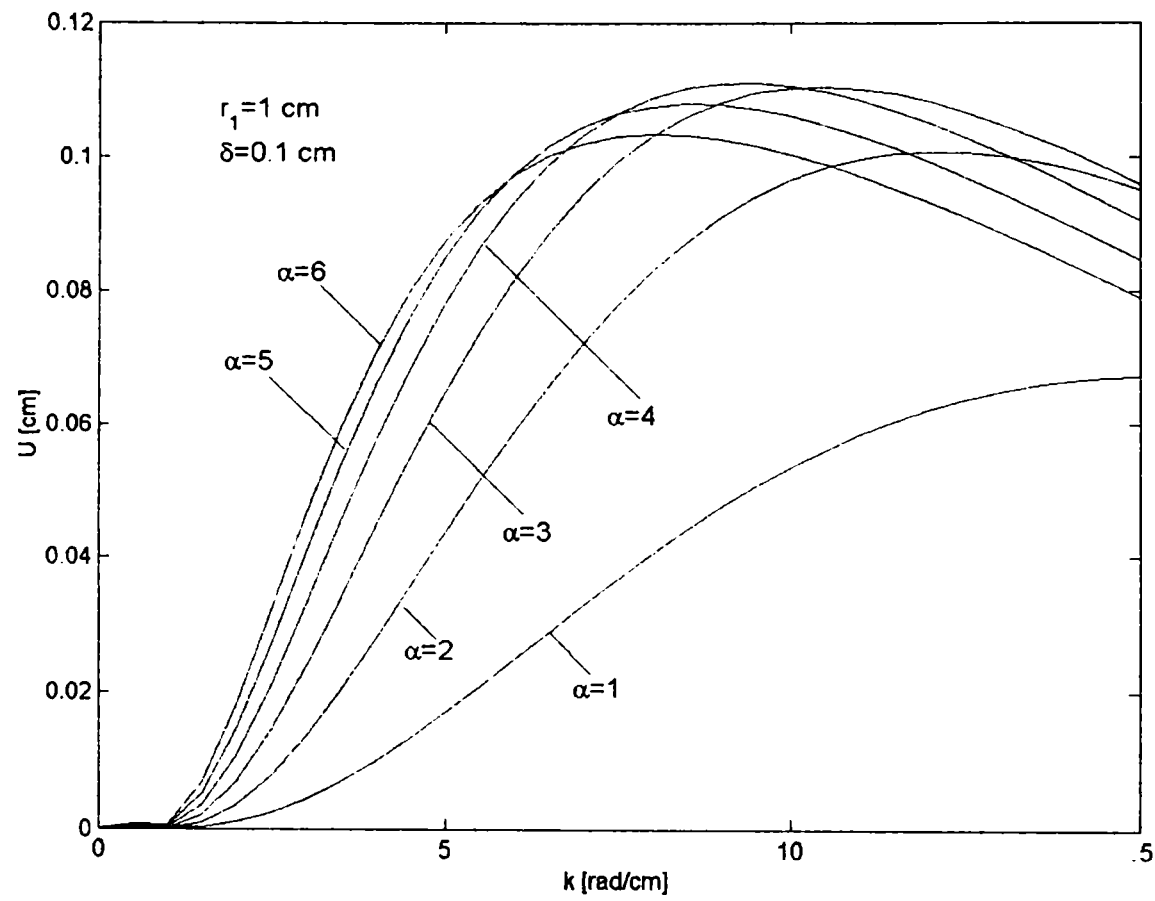


Fig. 3.4.6

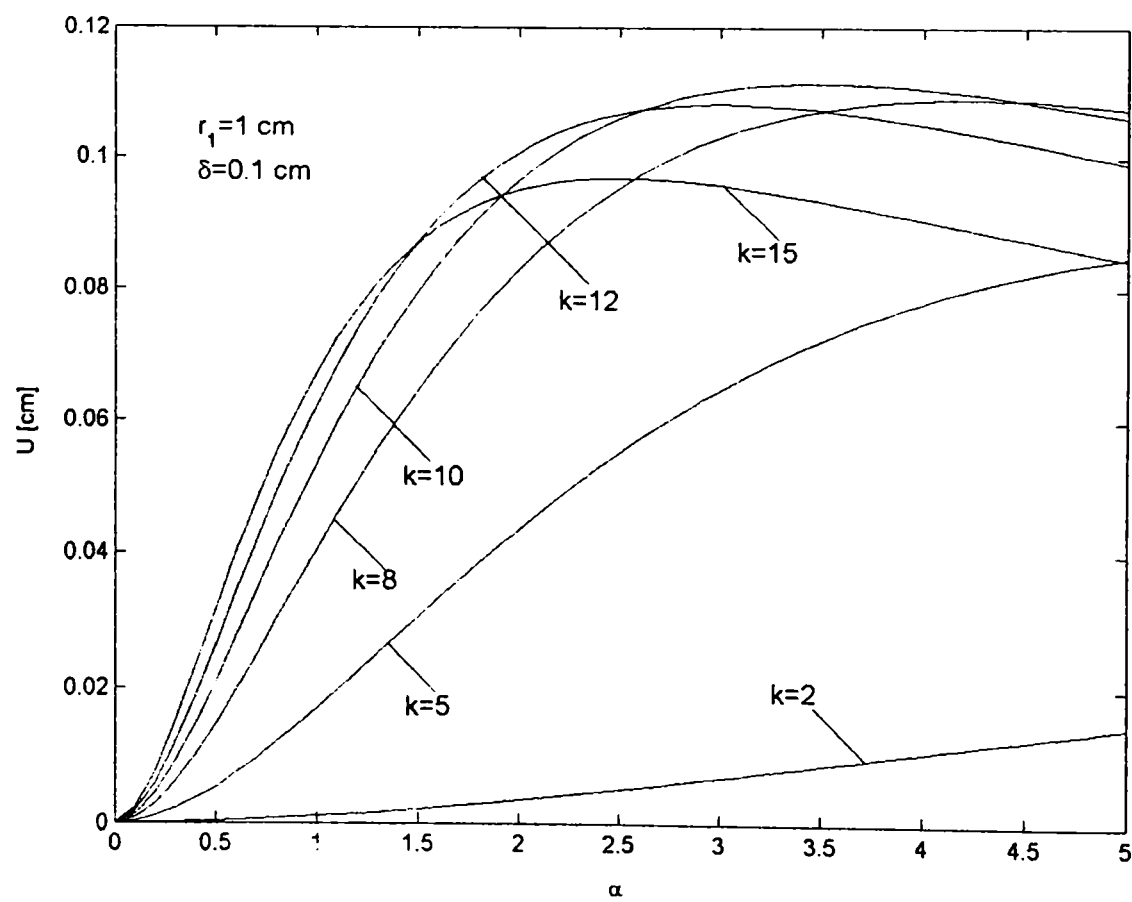


Fig. 3.4.7

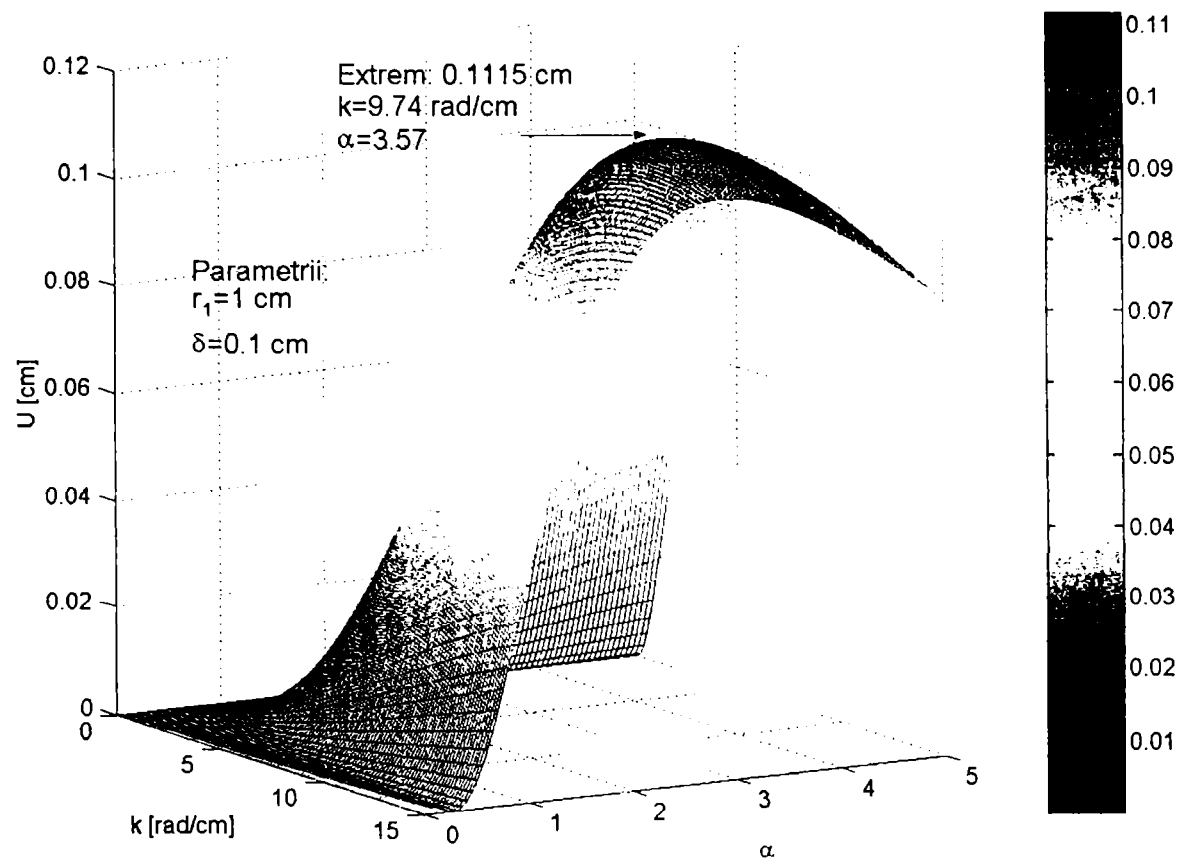


Fig. 3.4.8

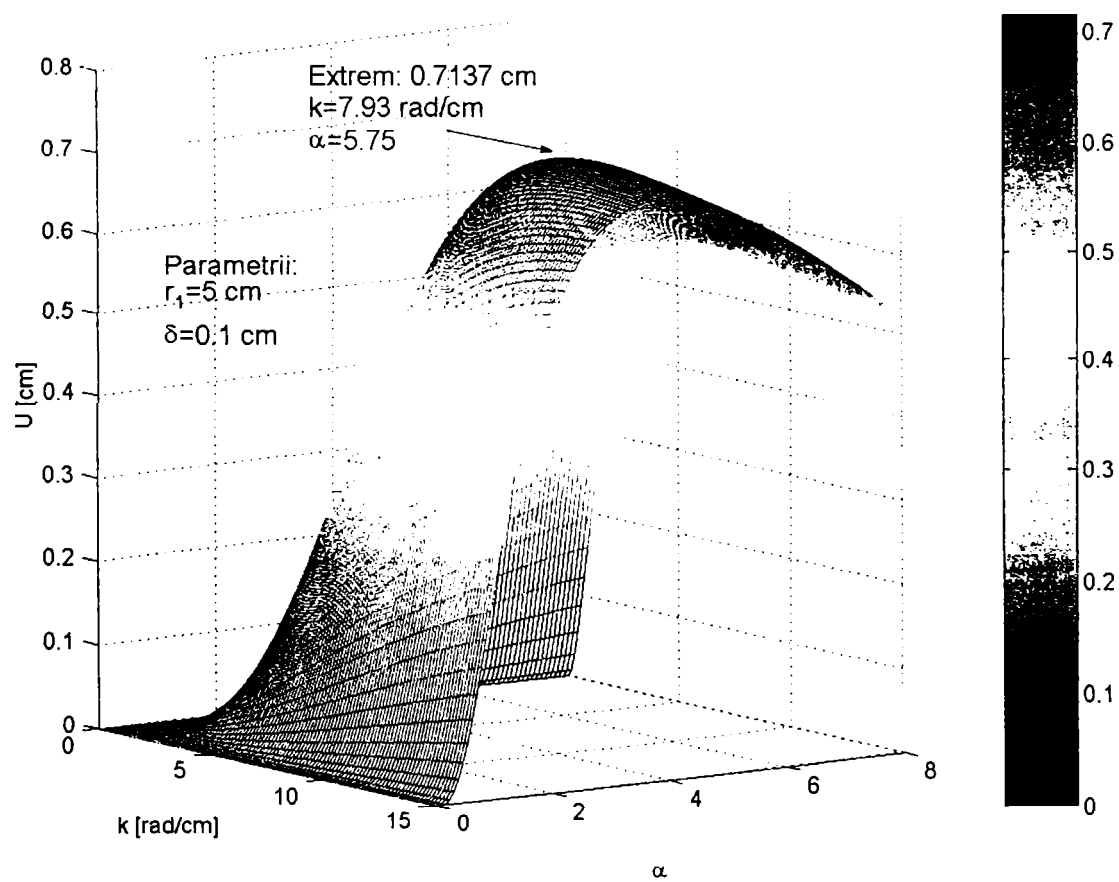


Fig. 3.4.9

Dacă se consideră cunoscute $r_1=1\text{ cm}$ și parametrul $\alpha=10$, atunci funcția U este determinată de dezaxarea maximă δ și de numărul de undă k . În fig.3.4.10 am reprezentat dependența funcției U în raport cu δ pentru diferite valori ale lui k . Se observă că maximum curbelor crește pentru valori crescătoare ale lui k și se obține la valori tot mai mici ale lui δ . Valoarea lui k este limitată însă din punct de vedere constructiv (tehnologic), deoarece creșterea lui k determină scăderea lungimii polului $l_p = \frac{2}{3} \frac{\pi}{k}$ devenind la un moment dat imposibil de realizat practic. Trebuie avute în vedere și valorile lui δ , care de asemenea sunt limitate la o valoare minimă impusă tot din considerente tehnologice.

În fig.3.4.11 s-a reprezentat dependența funcției U în raport cu k pentru diferite valori ale lui δ . Maximum curbelor crește cu scăderea lui δ și se obține pentru valori tot mai mari ale lui k . La fel ca și în cazul precedent, din motive tehnologice de realizare a lagărului, valorile lui δ sunt limitate inferior iar valorile lui k sunt limitate superior.

Dacă se consideră cunoscute $r_1=1\text{ cm}$ și $k=10\text{ rad/cm}$, adică lungimea polului $l_p = 0.21\text{ cm}$, funcția U este determinată de parametrul α și dezaxarea maximă δ . În fig.3.4.12 s-a reprezentat funcția U în raport cu α și δ . Se observă că suprafața obținută prezintă un maxim $U_{max}=0.116\text{ cm}$ obținut pentru $\alpha=4.733$ și $\delta=0.074\text{ cm}$ de unde rezultă înălțimea optimă a polului $h_p=\alpha\delta=0.35\text{ cm}$.

În concluzie, la proiectarea unui astfel de lagăr, pentru a obține valoarea optimă pentru forță, dimensiunile lagărului se vor alege în jurul valorii pentru care funcția U este maximă.

La calculul integralei (3.4.34) am folosit dezvoltarea în serie de puteri a integrantului (3.4.33). În calculul forței s-au considerat primii doi termeni ai seriei, a căror influență este dată în funcție U prin expresia $k\delta + \frac{(k\delta)^2}{2}$.

În tabelul 3.4.1, pentru diferite valori impuse pentru r_1 și k , s-a determinat valoarea maximă a funcției U și valorile lui α și δ pentru care se obține acest maxim.

În tabelul 3.4.2 s-au considerat cunoscute r_1 și δ și s-a determinat maximum lui U și valorile lui k și α pentru care se obține maximum.

Tab.3.4.1

r_1 [cm]	k [rad / cm]	α_{optim}	δ_{optim} [cm]	U_{max} [cm]
1	1	4,0572	0,8416	0,0313
1	2	3,6313	0,4123	0,0569
1	5	4,0511	0,1548	0,0932
1	10	4,7334	0,0742	0,1157
1	20	5,5562	0,0360	0,1323
0,5	5	3,6540	0,1626	0,0330
1,5	5	4,4275	0,1057	0,1606
2	5	4,7334	0,1484	0,2314

Tab.3.4.2

r_1 [cm]	δ [cm]	k_{optim} [rad / cm]	α_{optim}	U_{max} [cm]
1	0,1	9,7373	3,5714	0,1115
5	0,1	7,9289	5,7541	0,7137
10	0,1	7,5384	6,8079	1,5001
10	1	0,9737	3,5715	1,1151
20	1	0,8768	4,4454	2,5533
10	0,5	1,7535	4,4454	1,2767

Am analizat modul în care se modifică funcția U și respectiv forța de readucere când se consideră primii trei termeni ai sumei rezultată din dezvoltarea în serii de puteri a integrantului (3.4.33), respectiv în funcția U intervine expresia:

$$k\delta + \frac{(k\delta)^2}{2} + \frac{(k\delta)^5}{12}.$$

Cu această expresie au fost recalulate valorile din tabelele 3.4.1 și 3.4.2 obținându-se noile valori în tabelele 3.4.3 și respectiv 3.4.4.

Tab.3.4.3

r_1 [cm]	k [rad / cm]	α_{optim}	δ_{optim} [cm]	U_{max} [cm]
1	1	3,1613	1,0643	0,0327
1	2	2,8933	0,5109	0,0591
1	5	3,4345	0,1816	0,0960
1	10	4,1423	0,0846	0,1185
1	20	4,9498	0,0404	0,1351
0,5	5	2,9559	0,1989	0,0342
1,5	5	3,8317	0,1737	0,1648
2	5	4,1424	0,1692	0,2371

Tab.3.4.4

r_1 [cm]	δ [cm]	k_{optim} [rad / cm]	α_{optim}	U_{max} [cm]
1	0,1	11,8664	3,0313	0,1191
5	0,1	9,0327	5,1732	0,7357
10	0,1	8,4659	6,1860	1,5381
10	1	1,1867	3,0312	1,1909
20	1	1,0314	3,8943	2,6698
10	0,5	2,0628	3,8943	1,3349

Se observă că rezultatele din tabelele 3.4.3 și 3.4.4 sunt foarte apropiate de cele din tabelele 3.4.1 și respectiv 3.4.2, în special valoarea maximă a funcției U . Deci limitarea la primii doi termeni ai seriei reprezintă o aproximare bună.

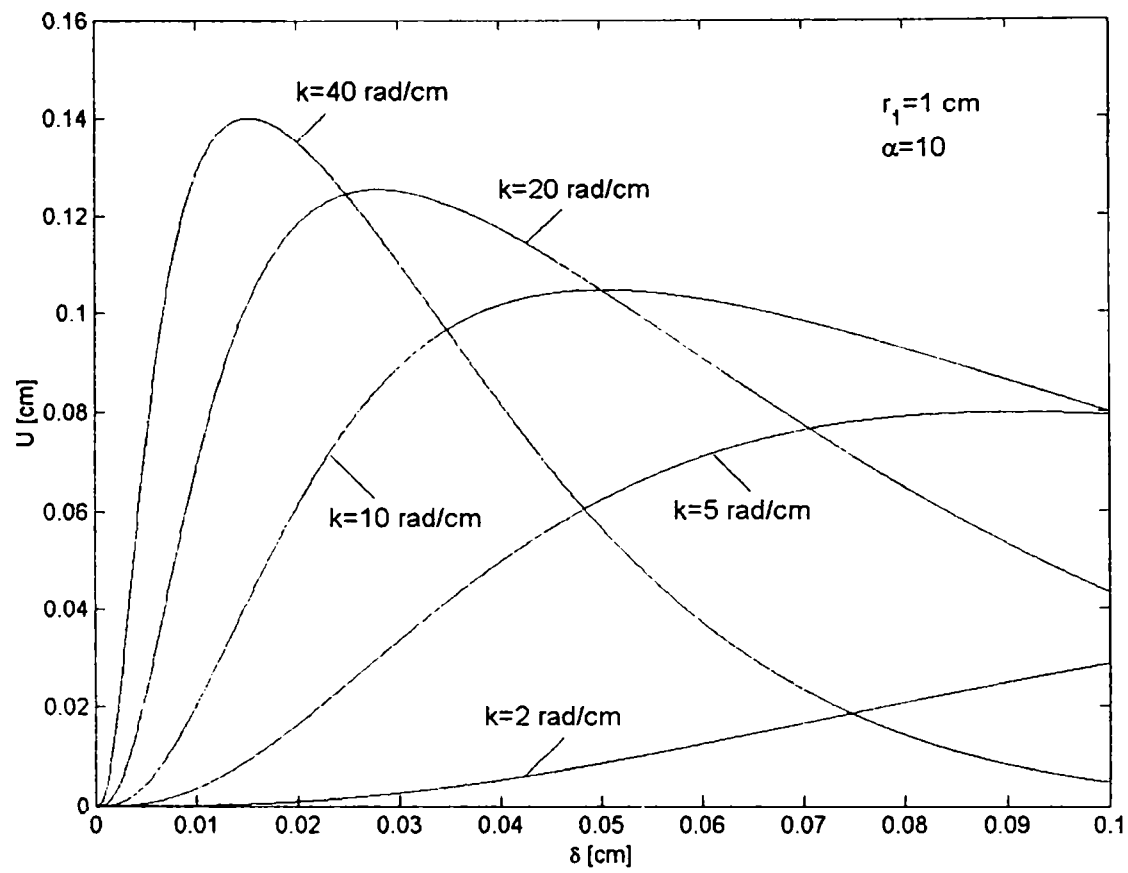


Fig. 3.4.10

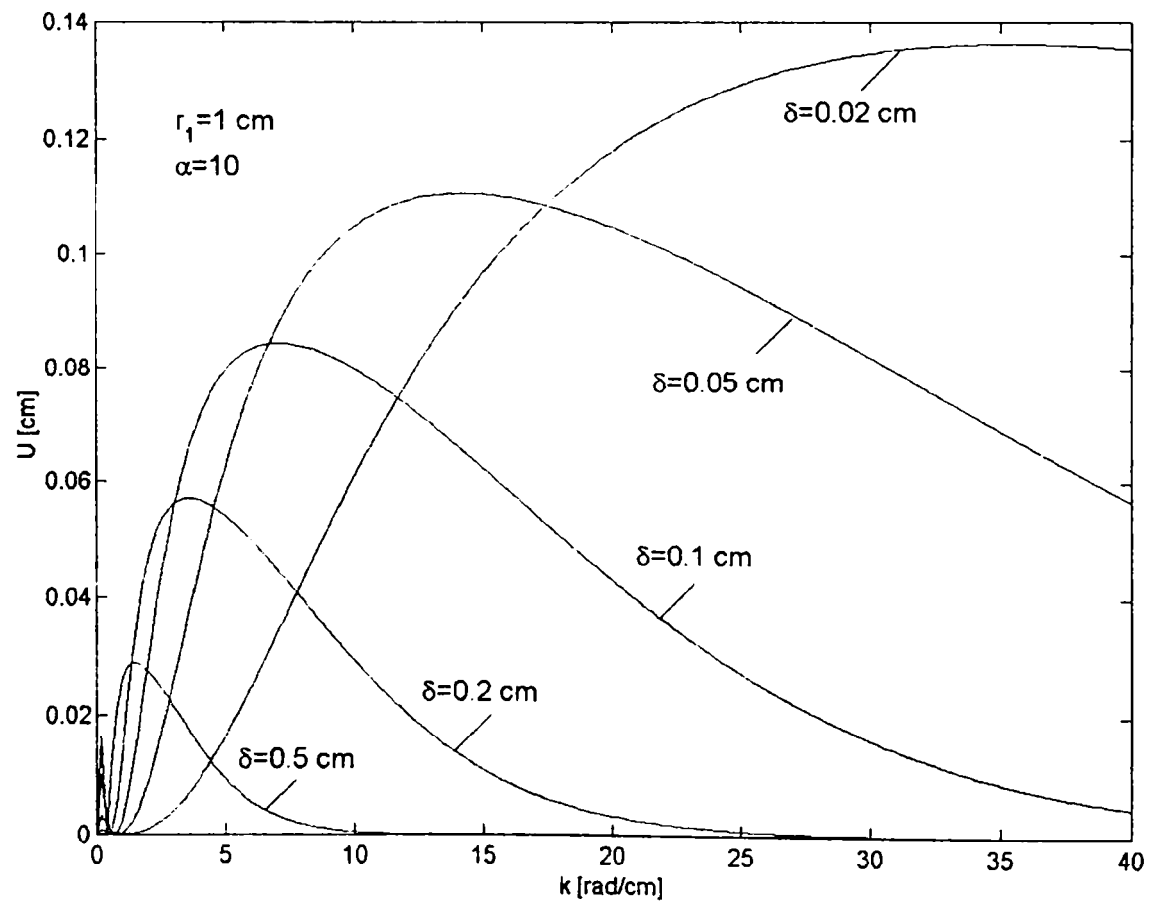


Fig. 3.4.11

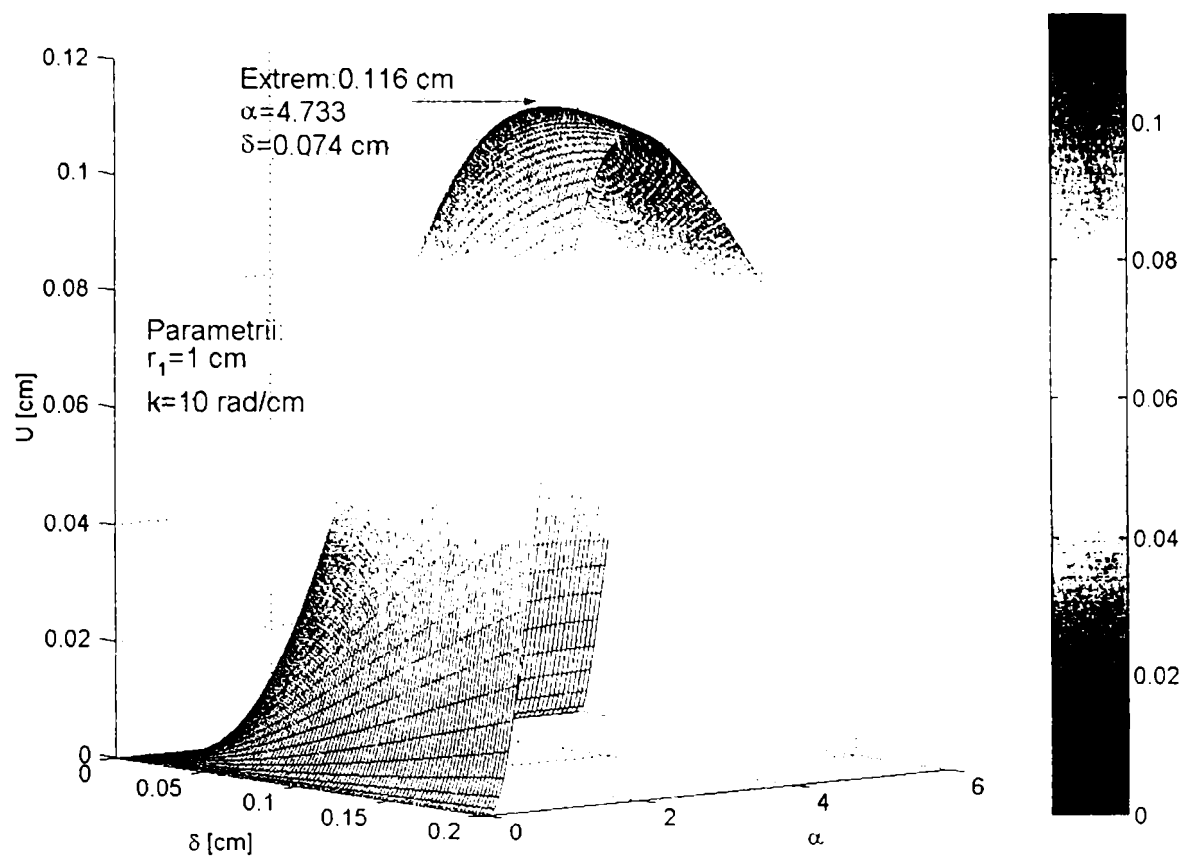


Fig. 3.4.12

3.5 Influența magnetizației temporare a polilor asupra forței de readucere la lagărul cu poli alternanți plasați în rotor

În paragraful anterior am realizat un calcul analitic aproximativ al lagărului cu poli alternanți plasați în rotor și lichid magnetic în cazul când polii alternanți nu se magnetizează temporar, $\mu_{rm} = 1$. În acest paragraf voi analiza numeric influența magnetizației temporale a polilor asupra câmpului din lichidul magnetic și a forței de readucere, [DS8].

Schița lagărului cu poli alternanți plasați în rotor și lichid magnetic este dată în fig.3.4.1. Lichidul magnetic, considerat în continuare mediu liniar de permeabilitate $\mu_l = \mu_0 \mu_{rl}$, ocupă spațiul dintre rotor și stator. Polii alternanți se consideră că se polarizează temporar, având permeabilitatea $\mu_m = \mu_0 \mu_{rm}$.

Pentru calculul câmpului se adoptă modelul plan paralel din fig.3.4.2.

Magnetul permanent este presupus astfel magnetizat încât magnetizația permanentă \mathbf{M}_p este radială, de divergență nulă, având o repartiție dreptunghiulară pe suprafețele $r=r_1$ și $r=r_2$, fig.3.4.3.b).

Amplitudinea armonicii fundamentale a repartiției dreptunghiulare pe suprafața $r=r_1$, unde $M_p = M_{p1}$, are expresia:

$$M_{01} = \frac{2}{\pi} M_{p1} \left[\cos k \frac{l_0}{2} - \cos k \left(\frac{l_0}{2} + l_p \right) \right] = \frac{4}{\pi} M_{p1} \sin \frac{kl_p}{2} \quad (3.5.1)$$

iar armonica fundamentală se scrie în forma:

$$M_1(x) = M_{01} \sin kx = \frac{4}{\pi} M_{p1} \sin k \frac{l_p}{2} \sin kx \quad (3.5.2)$$

unde k este numărul de undă.

Analog pe suprafața $r=r_2$, amplitudinea fundamentală este:

$$M_{02} = \frac{2}{\pi} M_{p2} \left[\cos k \frac{l_0}{2} - \cos k \left(\frac{l_0}{2} + l_p \right) \right] = \frac{4}{\pi} M_{p2} \sin \frac{kl_p}{2} \quad (3.5.3)$$

iar armonica fundamentală se scrie în forma:

$$M_2(x) = M_{02} \sin kx = \frac{4}{\pi} M_{p2} \sin k \frac{l_p}{2} \sin kx \quad (3.5.4)$$

În toate cele patru domenii ale lagărului reprezentate în fig.3.4.2, potențialul magnetic scalar V_H satisface o ecuație de tip Laplace: $\nabla^2 V_H = 0$.

Folosind metoda separării variabilelor, soluția ecuației lui Laplace pentru cele patru domenii, rezultă în forma:

$$\begin{aligned} V_{H1} &= C_1 e^{ky} \sin kx \\ V_{H2} &= (C_2 e^{ky} + C_3 e^{-ky}) \sin kx \\ V_{H3} &= (C_4 e^{ky} + C_5 e^{-ky}) \sin kx \\ V_{H4} &= C_6 e^{-ky} \sin kx \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Cele șase constante de integrare din (3.5.5) se vor determina din condițiile de interfață scrise pe suprafețele de discontinuitate dintre cele patru medii, ce constau în continuitatea potențialelor și egalitatea componentelor normale ale inducției magnetice.

Ținând seama de condițiile de interfață, cu (3.5.5) se obține sistemul:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 + C_3, \\ C_1 - \mu_{r_m} (C_2 - C_3) &= -m_1, \\ C_2 \varepsilon_1^2 + C_3 &= C_4 \varepsilon_1^2 + C_5, \\ \mu_{r_m} (C_2 \varepsilon_1^2 - C_3) - \mu_{r_l} (C_4 \varepsilon_1^2 - C_5) &= m_2 \varepsilon_1, \\ C_4 \varepsilon_2^2 + C_5 &= C_6, \\ \mu_{r_l} (C_4 \varepsilon_2^2 - C_5) &= -C_6, \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

în care s-au folosit notațiile: $\varepsilon_1 = e^{kh_p}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 e^{kh_l}$, $m_1 = \frac{M_{01}}{k}$ și $m_2 = \frac{M_{02}}{k}$.

Sistemul algebric liniar (3.5.6) determină cele șase constante de integrare. În paragraful anterior, pentru cele șase constante s-au obținut soluțiile analitice date

de (3.4.11), în ipoteza că magneții permanenți nu se magnetizează temporal, ($\mu_{rm}=1$).

Pentru cazul în care $\mu_{rm} \neq 1$, rezolvarea analitică este dificilă și, în continuare, voi recurge la o rezolvare numerică a sistemului (3.5.6).

În paragraful 3.4, pentru $\mu_{rm}=1$, considerând $r_1=1 \text{ cm}$ și $\delta=0.1 \text{ cm}$, s-a obținut o valoare maximă a forței de readucere pentru $k=974 \text{ rad/m}$ și $\alpha = \frac{h_p}{\delta} = 3.57$, $\delta=r_3-r_2$. Rezolvarea numerică a sistemului (3.5.6) se va face folosind valorile de mai sus. Se vor considera:

- $r_1 = 10^{-2} \text{ m}$ - raza arborelui; $\delta = 10^{-3} \text{ m}$ - dezaxarea maximă;
- $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 6.45 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ - lungimea de undă;
- $h_p = \alpha \delta = 3.57 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ - înălțimea polului;
- $r_2 = r_1 + h_p = 13.57 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ - raza exterioară a magnetului permanent (raza rotorului);
- $r_3 = r_2 + \delta = 14.57 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ - raza statorului;
- $l_0 = \frac{l_p}{2} = 1.075 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ - distanța dintre poli, (din $\lambda = 2(l_0 + l_p)$);
- $l_p = 2l_0 = 2.15 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ - lungimea polului.

Magnetul permanent folosit este Niridium–Fier (*NdFe*) cu $M_p=9.1036 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ și $\mu_{rm}=1.1$ iar lichidul magnetic este considerat liniar cu $\mu_{rl}=1.2$.

$$\text{Rezultă: } M_{p_2} = \frac{r_1}{r_1 + h_p} M_{p_1} = 6.7086 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}, \quad M_{0_1} = 10.03815 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$M_{0_2} = \frac{r_1}{r_1 + h} M_{0_1} = 7.3973 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}, \quad m_1 = \frac{M_{0_1}}{k} = 1030.6114 \text{ A},$$

$$\varepsilon_1 = 32.368, \quad m_2 = \frac{M_{0_2}}{k} = 759.4778 \text{ A}, \quad \varepsilon_2 = 32.368 e^{kh_1}.$$

Cu aceste valori, din (3.5.6) rezultă constantele de integrare în forma:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1.664 \cdot 10^3 - 2.796 \cdot 10^5 e^{2kh_1}}{-2.289 + 5.824 \cdot 10^2 e^{2kh_1}}, & C_4 &= \frac{5.167 \cdot 10^2}{-2.289 + 5.824 \cdot 10^2 e^{2kh_1}} \approx 0.887 e^{-2kh_1}, \\ C_2 &= \frac{5.156 \cdot 10^2 - 5.956 \cdot 10^3 e^{2kh_1}}{-2.289 + 5.824 \cdot 10^2 e^{2kh_1}}, & C_5 &= \frac{5.95 \cdot 10^6 e^{2kh_1}}{-2.289 + 5.824 \cdot 10^2 e^{2kh_1}} \approx 1.0216 \cdot 10^4, \\ C_3 &= \frac{1.184 \cdot 10^3 - 2.855 \cdot 10^5 e^{2kh_1}}{-2.289 + 5.824 \cdot 10^2 e^{2kh_1}}, & C_6 &= \frac{6.491 \cdot 10^6 e^{2kh_1}}{-2.289 + 5.824 \cdot 10^2 e^{2kh_1}}, \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

unde au fost păstrate aproximările constantelor C_4 și C_5 făcute în paragraful 3.4.

Calculul forței de readucere se va face folosindu-se relația din 3.4:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] \mathbf{dS} \quad (3.5.8)$$

în care Σ_0 reprezintă suprafața de separație între lichidul magnetic și stator iar \mathbf{dS} reprezintă vectorul element de suprafață orientat spre exteriorul lichidului magnetic, fig.3.4.4.

Considerând lichidul magnetic liniar, magnetizația fiind proporțională cu intensitatea câmpului, expresia (3.5.8) a forței exercitate asupra arborelui devine:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \frac{(\mu_{r_l} - 1)}{2} \oint_{\Sigma_0} (\mu_{r_l} H_n^2 + H_t^2) \mathbf{dS} = \oint_{\Sigma_0} t_{n_{34}} \mathbf{dS} \quad (3.5.9)$$

fiind pusă în evidență tensiunea normală:

$$\mathbf{t}_{n_{34}} = -\mu_0 \frac{(\mu_{r_l} - 1)}{2} (\mu_{r_l} H_n^2 + H_t^2) \mathbf{u}_y \quad (3.5.10)$$

Tensiunea rezultantă dintre cea de pe fața $y_2 = h_p + h_2$, $\mathbf{t}_{n_{34}}(y_2) = t_n(y_2) \mathbf{u}_y$, și cea de pe fața simetrică $y_2' = h_p + h_2$, $\mathbf{t}_{n_{34}}(y_2') = t_n(y_2')(-\mathbf{u}_y)$, se obține în forma:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_{n_{34}}(y_2) + \mathbf{t}_{n_{34}}(y_2') = [t_n(y_2) - t_n(y_2')] \mathbf{u}_y \quad (3.5.11)$$

unde:

$$\begin{aligned} H_{3_x} &= -3.354 \cdot 10^5 e^{-kh_1} \cos kx & H_{3_y} &= 2.794 \cdot 10^5 e^{-kh_1} \sin kx \\ H_{3'_x} &= -3.354 \cdot 10^5 e^{-kh_2} \cos kx & H_{3'_y} &= 2.794 \cdot 10^5 e^{-kh_2} \sin kx \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

La calculul componentelor câmpului pe fața y_2' , $(H_{3'_x}, H_{3'_y})$, au fost folosite constantele C_4' și C_5' . Ele au fost obținute din sistemul (3.5.6) înlocuind ε_2 cu $\varepsilon_2' = \varepsilon_1 e^{kh_2}$ și $y_2 = h_p + h_1$ cu $y_2' = h_p + h_2$, (fig.3.5.1).

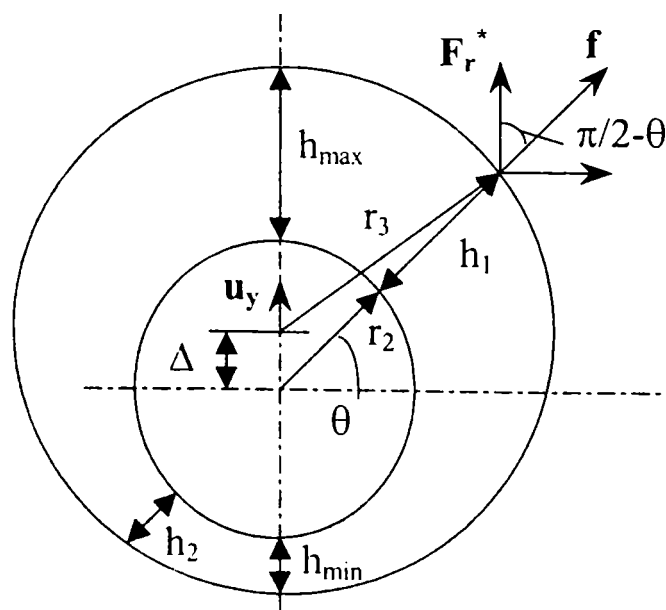


Fig. 3.5.1

Forța ce se exercită pe lungimea $\lambda/2$ a rotorului se determină în forma:

$$\mathbf{F}_{\lambda/2} = \int_0^{\lambda/2} \mathbf{t}_n dx = -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} k^2 \frac{\lambda}{4} \left\{ (\mu_{r_l} + 1) \left(C_4^2 e^{2k y_2} - C_4'^2 e^{2k y_2'} + C_5^2 e^{-2k y_2} - C_5'^2 e^{-2k y_2'} \right) - 2(\mu_{r_l} - 1) (C_4 C_5 - C_4' C_5') \right\} \mathbf{u}_y \quad (3.5.13)$$

Având în vedere aproximările geometrice de ordinul doi, (fig. 3.5.1):

$h_1 = \delta + \Delta \sin \theta$, $h_2 = \delta - \Delta \sin \theta$, unde Δ este dezaxarea iar $\delta = r_3 - r_2$ este dezaxarea maximă, rezultă $h_1 - h_2 = 2\Delta \sin \theta = 2\Delta'$, cu $\Delta' = \Delta \sin \theta$ și cum $h_1 = h_2 - 2\Delta'$ se obține: $y_2' = h_p + h_2 = h_p + h_1 - 2\Delta' = y_2 - 2\Delta'$.

Expresia (3.5.13) a forței pune în evidență două componente:

$$\mathbf{F}_{1\lambda/2} = -\mu_0 \frac{(\mu_{r_l}^2 - 1) k^2 \lambda}{8} \left[e^{2k y_2} (C_4^2 - C_4'^2 e^{-4k \Delta'}) + e^{-2k y_2} (C_5^2 - C_5'^2 e^{4k \Delta'}) \right] \mathbf{u}_y \quad (3.5.14)$$

și respectiv:

$$\mathbf{F}_{2\lambda/2} = \mu_0 \frac{(\mu_{r_l} - 1)^2 k^2 \lambda}{4} (C_4 C_5 - C_4' C_5') \mathbf{u}_y, \quad (3.5.15)$$

care prin înlocuirea constantelor din (3.5.7), devin:

$$\mathbf{F}_{1\lambda/2} = -42.48 e^{-2k h_1} (1 - e^{4k \Delta \sin \theta}) \mathbf{u}_y \quad (3.5.16)$$

$$\mathbf{F}_{2\lambda/2} = 0.6968 (e^{-2k h_1} - e^{2k h_2}) \mathbf{u}_y = 0.693 e^{-2k \delta} (e^{-2k \Delta \sin \theta} - e^{2k \Delta \sin \theta}) \mathbf{u}_y \quad (3.5.17)$$

Ca urmare, cele două componente ale forței pe unitatea de lungime, obțin formele:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{F}_{1\lambda/2}}{\lambda/2} = 3755 sh(2k \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.5.18)$$

și

$$\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{F}_{2\lambda/2}}{\lambda/2} = -61.6 sh(2k \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.5.19)$$

iar forța pe unitatea de lungime devine:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = 3.693 \cdot 10^3 sh(2k \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.5.20)$$

Forța de readucere rezultantă ce acționată asupra unității de lungime a rotorului, va avea direcția dezaxării maxime, h_{max} , de orientare \mathbf{u} , fig.3.5.1:

$$\mathbf{F}_r^* = \mathbf{u} \int_0^\pi f \sin \theta r_3 d\theta = 53.807 \mathbf{u} \int_0^\pi sh(2k \Delta \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.5.21)$$

Folosind dezvoltarea în serii de puteri a funcției $sh(2k \Delta \sin \theta)$ și integrând termenii seriei, se obține:

$$\mathbf{F}_r^* = 53.807 \pi \mathbf{u} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k \Delta)^{2i-1}}{i! (i-1)!} \quad (3.5.22)$$

Limitându-ne la primii doi termeni ai seriei și considerând dezaxarea maximă $\Delta = \delta$, forța de readucere pe unitatea de lungime a rotorului devine, [DS8]:

$$\mathbf{F}_r^* = 169.04 \left[k \delta + \frac{1}{2} (k \delta)^3 \right] \mathbf{u} = 242.788 \mathbf{u} \text{ [N/m]} \quad (3.5.23)$$

comparativ cu $\mathbf{F}_r^* = 266.619 \mathbf{u} \text{ N/m}$ calculată cu (3.4.37) pentru $\mu_{rm} = 1$.

Câmpul magnetic din interiorul lichidului magnetic, pentru $y = h_1$, și forța de readucere ce acționează asupra unității de lungime a rotorului, le-am calculat pentru diferite valori ale permeabilității magnetice relative a magnetului, μ_{rm} , ceilalți parametri menținându-se neschimbați.

Valorile sunt prezentate în tabelul 3.5.1, [DS8].

Tab. 3.5.1

μ_{rm}	$\mathbf{H}_3 \text{ [A/m]}$	$\mathbf{F}_r^* \text{ [N/m]}$
1.0	$e^{-kh_1} (-3.513 \cos kx \mathbf{u}_x + 2.927 \sin kx \mathbf{u}_y) \cdot 10^5$	266.619
1.1	$e^{-kh_1} (-3.354 \cos kx \mathbf{u}_x + 2.794 \sin kx \mathbf{u}_y) \cdot 10^5$	242.788
1.5	$e^{-kh_1} (-2.839 \cos kx \mathbf{u}_x + 2.366 \sin kx \mathbf{u}_y) \cdot 10^5$	173.979
2.0	$e^{-kh_1} (-2.382 \cos kx \mathbf{u}_x + 1.984 \sin kx \mathbf{u}_y) \cdot 10^5$	122.455

Se observă că forța de readucere ce acționează asupra unității de lungime a rotorului scade când μ_{rm} crește. Aceasta se datorează faptului că magnetizația din polii magnetici scade când μ_{rm} crește.

Într-adevăr, creșterea magnetizației temporare \mathbf{M}_t (datorită creșterii lui μ_{rm}), care are aceeași direcție cu câmpul magnetic demagnetizant \mathbf{H}_2 din polii magnetici, duce la scăderea magnetizației $\mathbf{M} = \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_p$. Câmpul magnetic generat de magnetii permanenți este determinat de sarcinile magnetice (cu o repartiție volumică și superficială) date de $\text{div} \mathbf{M}$ și $\text{div}_s \mathbf{M}$. Când vectorul magnetizație scade, sarcinile magnetice scad și ele.

Cum forța de readucere este determinată de câmpul magnetic din lichid, \mathbf{H}_3 , ea descrește când magnetizația temporară crește.

Deci, în realizarea unui astfel de lagăr, pentru a obține o forță de readucere de valoare cât mai mare, este indicat să folosim magneți permanenți cu magnetizații permanente mari și permeabilități magnetice relative mici (apropiate de 1), iar lichidul magnetic să aibă μ_{rm} cât mai mare.

Din tab.3.5.1 se observă că intensitatea câmpului magnetic în lichidul magnetic, H_3 , este determinată de parametrul h_1 care da poziția punctului pe cercul de rază R_3 și coordonata x în direcția axei lagărului. În continuare voi reprezenta grafic variația câmpului H_3 și a componentelor sale H_{3x} și H_{3y} pe suprafața de separație dintre lichid și stator. Datorită simetriei câmpului, voi considera doar o jumătate din cercul de rază R_3 . Pentru o dezaxare dată $\Delta \in (0, \delta)$, h_1 variază între o valoare minimă $h_{1min} = \delta - \Delta$ corespunzătoare punctului cel mai de jos de pe cercul de rază R_3 și o valoare maximă $h_{1max} = \delta + \Delta$ corespunzătoare punctului cel mai de sus

de pe cercul de rază R_3 , fig.3.5.2. Cazul extrem se atinge când $\Delta=\delta$, când rotorul devine tangent cu statorul iar $h_{lmin}=0$ și $h_{lmax}=2\delta$. Când rotorul este centrat cu axa lagărului, $\Delta=0$ iar $h_{lmin}=h_{lmax}=\delta$.

După coordonata x , câmpul are o variație periodică, ca urmare în reprezentările grafice voi considera o lungime de undă, $x \in [0, \lambda]$.

În fig.3.5.2 și fig.3.5.3 am reprezentat grafic componentele H_{3x} și H_{3y} ale câmpului magnetic și respectiv modulul intensității câmpului magnetic, H_3 , pentru cazul extrem, $\Delta=\delta$. Valorile mărimilor le-am considerat identice cu cele folosite la calculul forței în acest paragraf. Se observă valori absolute mai mari ale câmpului în puncte cu h_l mic față de punctele ce h_l mare. Practic câmpul este cel mai intens în punctele de tangență dintre rotor și stator. Această repartiție neuniformă a câmpului conduce la apariția forței de levitație, maximă pentru acest caz extrem când dezaxarea rotorului este maximă. În direcția axei lagărului se observă o repartiție sinusoidală a câmpului, periodică pe o lungime de undă.

În fig.3.5.4 și fig.3.5.5 am reprezentat grafic componentele H_{3x} și H_{3y} ale câmpului magnetic și respectiv modulul intensității câmpului magnetic, H_3 , pentru cazul când rotorul este în echilibru, $\Delta=0$, (axa arborelui coincide cu axa lagărului). Deoarece $h_{lmin}=h_{lmax}=\delta$, pentru un x dat, câmpul pe suprafața de separație lichid-stator este constant indiferent de poziția de pe semicerc. Ca urmare, cum era de așteptat, forța rezultantă asupra rotorului este nulă, rotorul rămânând în poziția de echilibru.

Pentru fig. 3.5.6. și 3.5.7. s-a considerat că magnetul permanent are $\mu_{rm}=2$, restul mărimilor rămânând neschimbate. Am reprezentat componentele H_{3x} și H_{3y} ale câmpului și respectiv modulul intensității câmpului magnetic, H_3 , pentru cazul extrem, $\Delta=\delta$. Se observă o variație a câmpului asemănătoare cu cea din fig.3.5.2 și fig.3.5.3 însă valorile câmpului sunt mai mici. Ca urmare, și forța de readucere are valoare mai mică, fapt ce a fost confirmat din calculul forței.

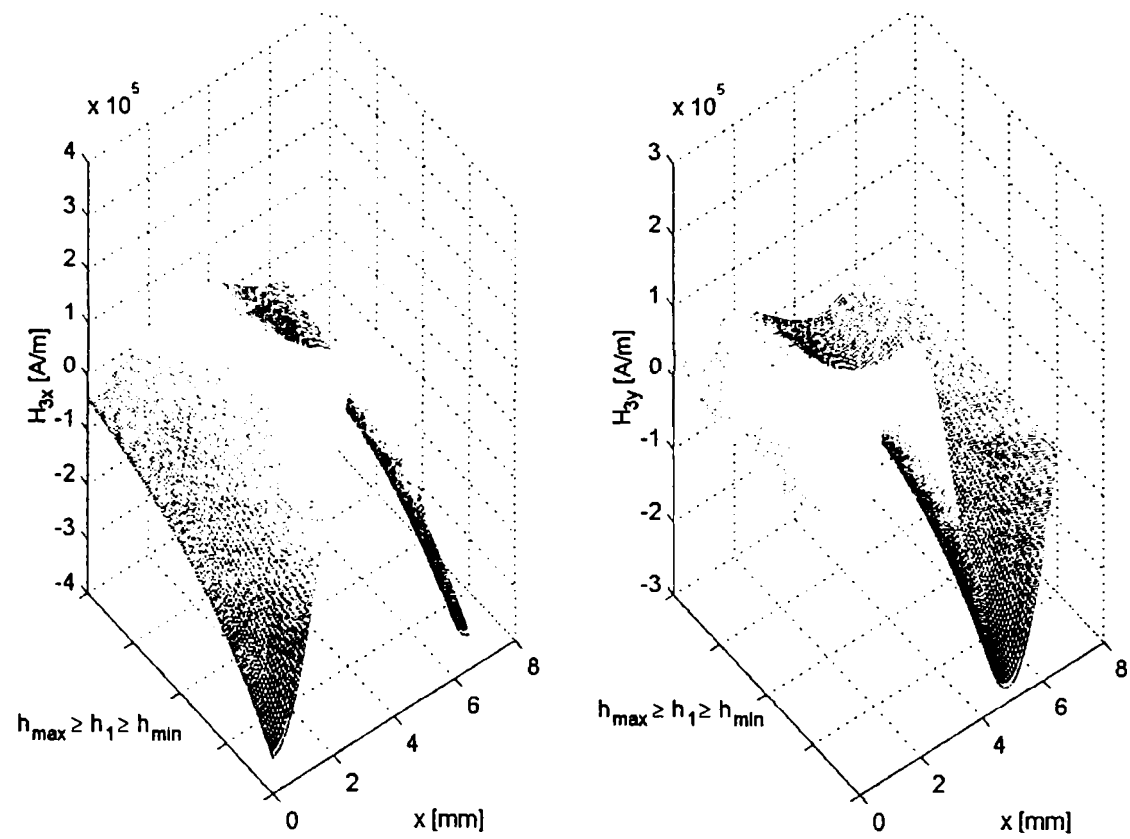


Fig. 3.5.2

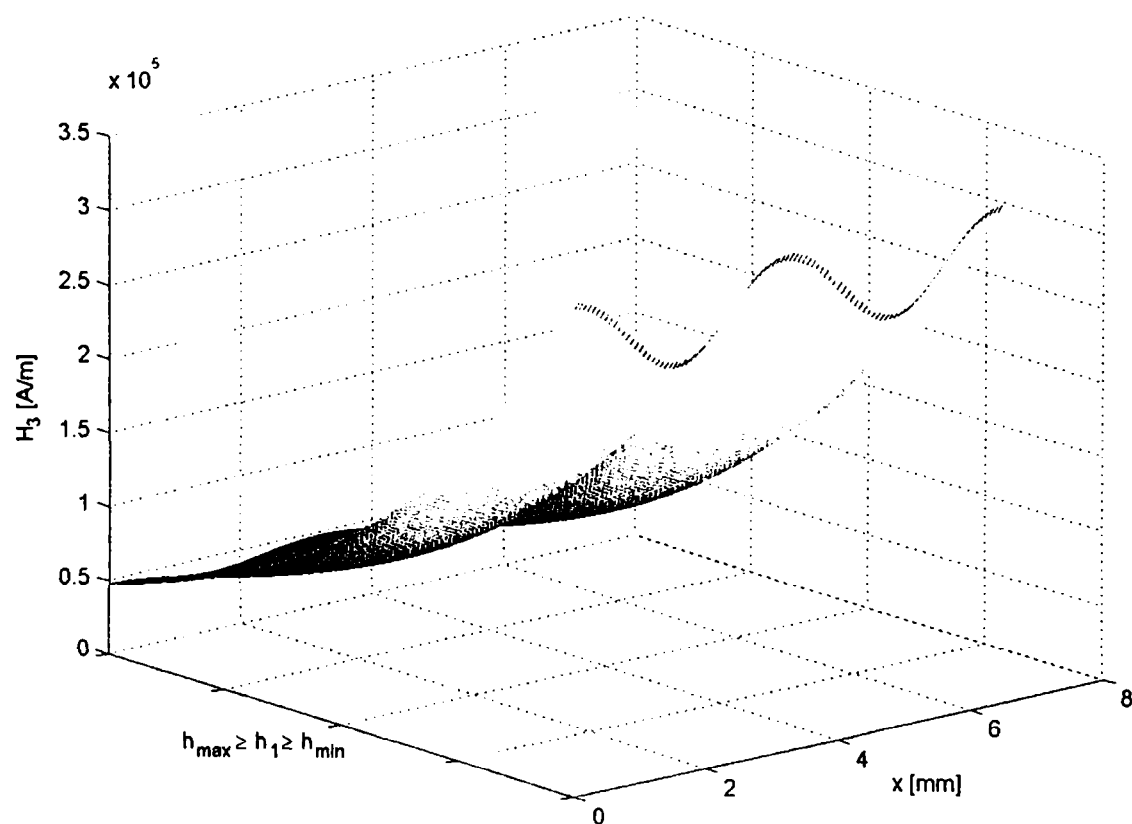


Fig. 3.5.3

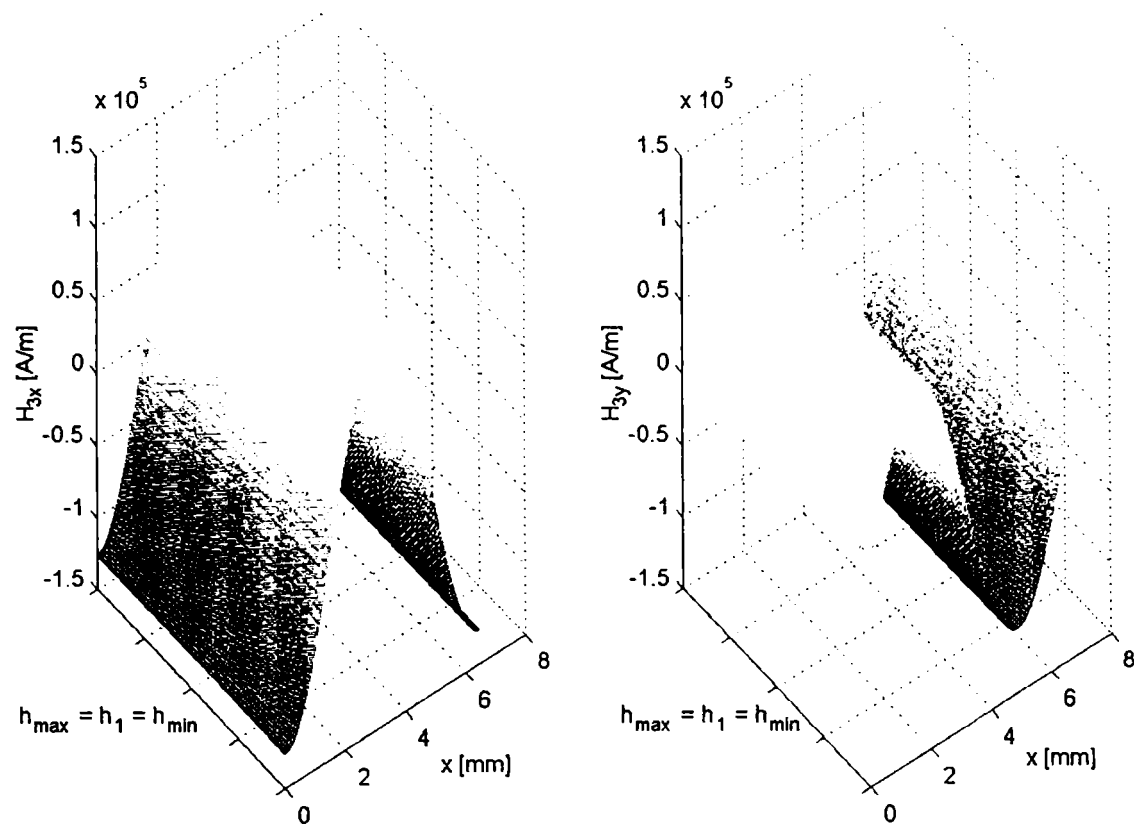


Fig. 3.5.4

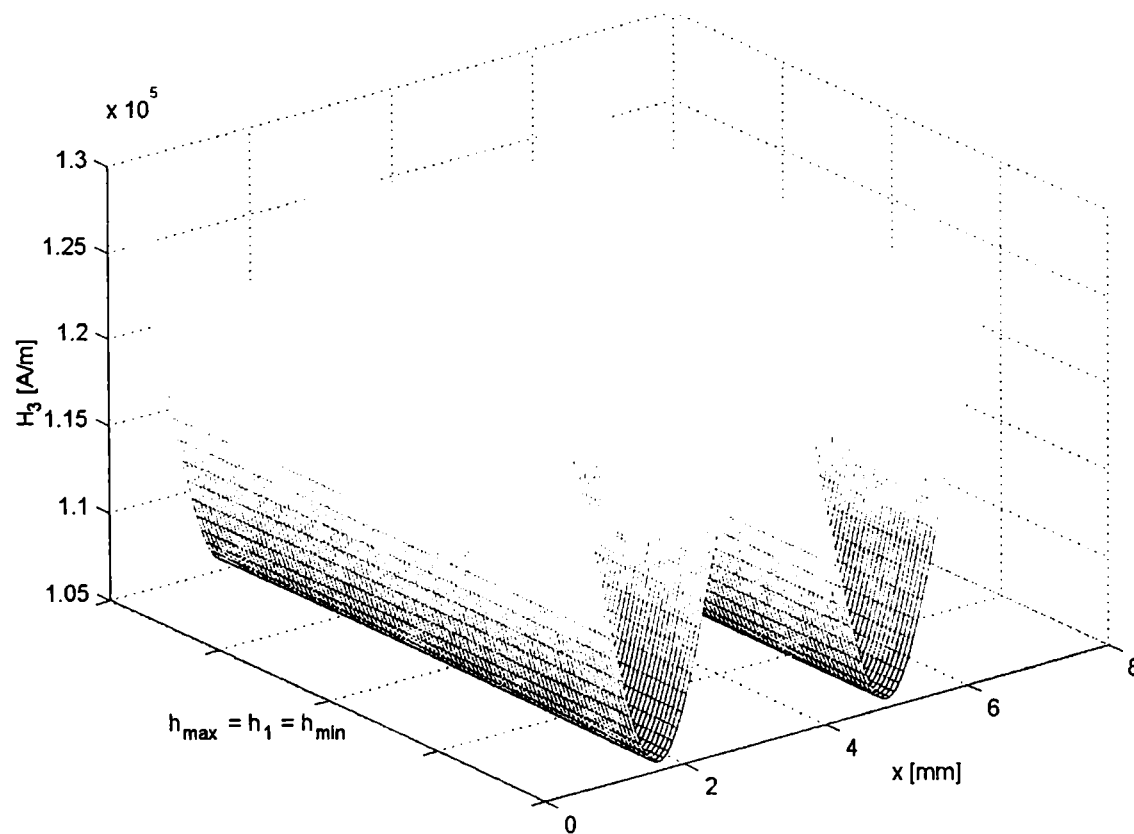


Fig. 3.5.5

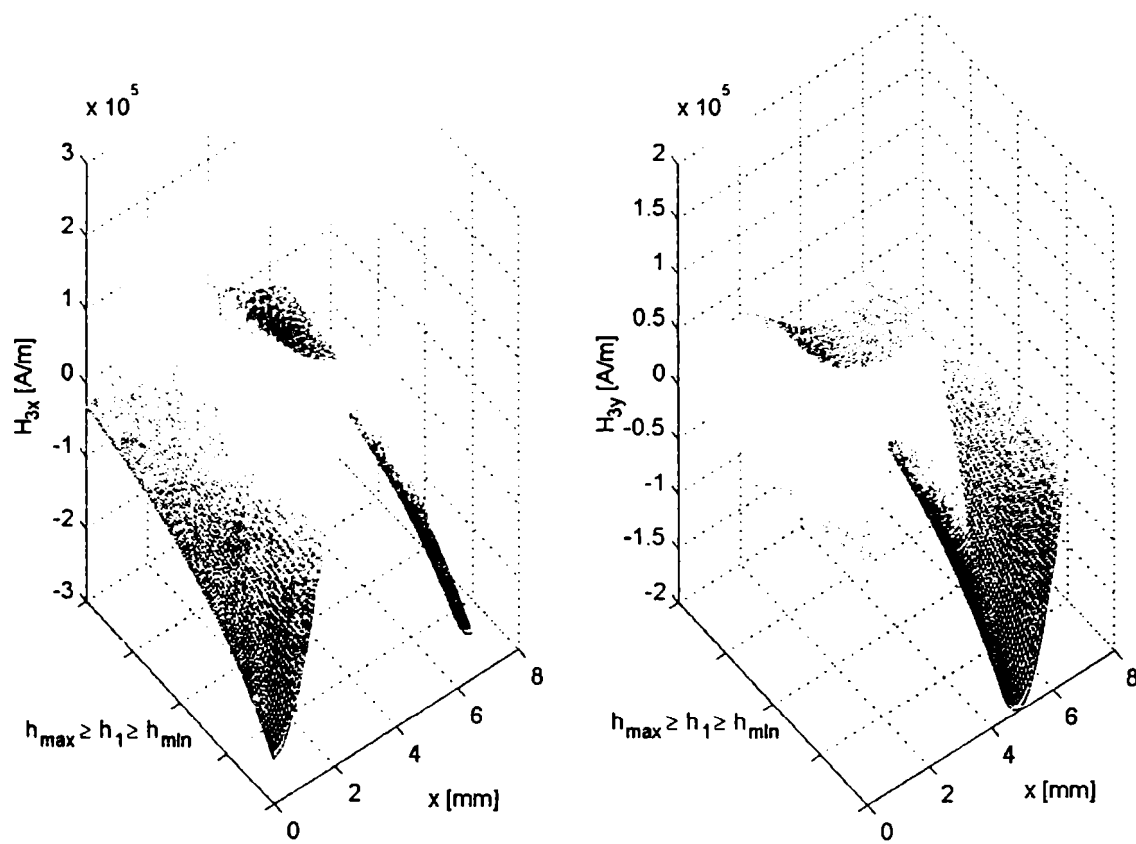


Fig. 3.5.6

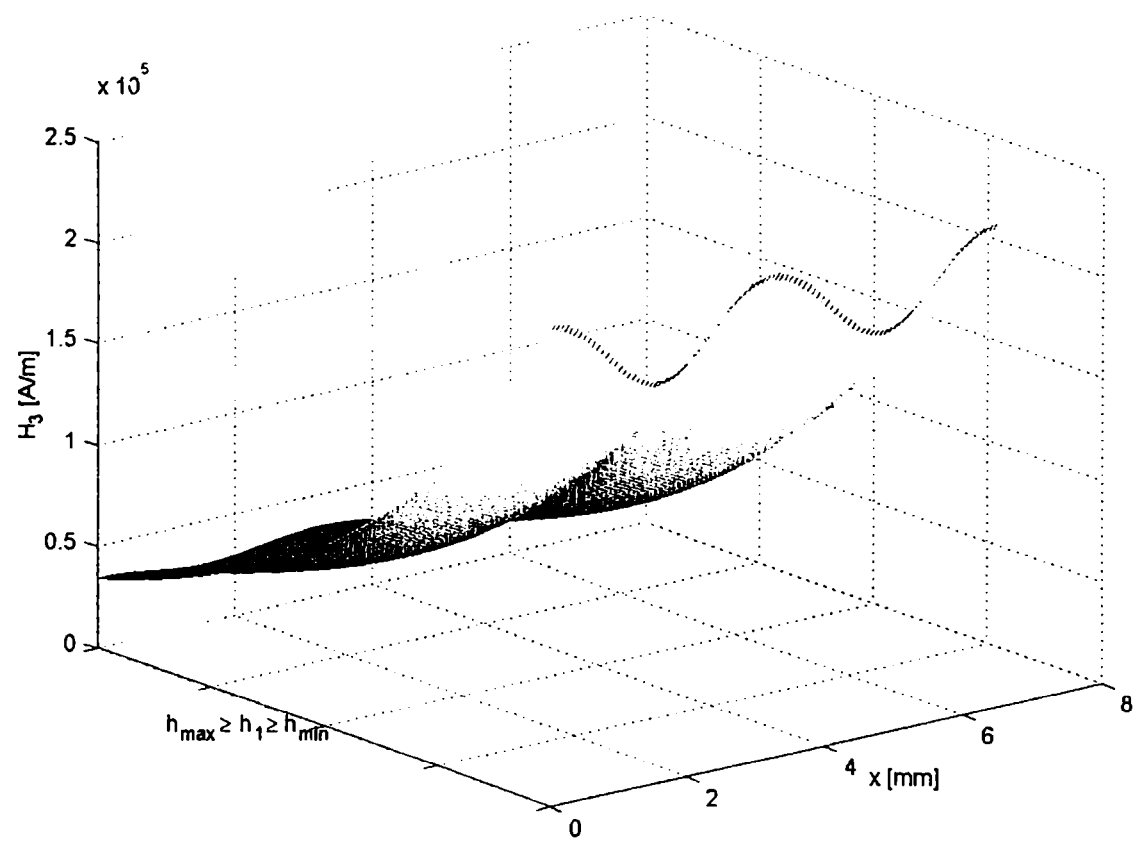


Fig. 3.5.7

3.6 Luarea în considerare a armonicilor superioare ale câmpului magnetic la lagărul cu poli alternanți plasați în rotor

În paragraful 3.4, la calculul câmpului magnetic produs de polii alternanți plasați în rotor, s-a considerat doar armonica fundamentală a repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente, fig.3.4.3.

În acest paragraf am determinat câmpul magnetic produs de armonicile superioare corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente și am analizat influența acestora în expresia forței de readucere, [Gr5].

3.6.1 Calculul analitic aproximativ al câmpului magnetic

Pentru calculul câmpului magnetic se consideră modelul matematic din fig.3.4.2 în care câmpul magnetic este considerat plan-parallel. Magnetizația permanentă a polilor este radială, de divergență nulă, având o repartiție dreptunghiulară pe suprafețele $r=r_1$ și $r=r_2$, fig.3.4.3. Deoarece această repartiție periodică este antisimetrică, dezvoltarea în serii fourier va conține numai armonici impare în sinus.

Dacă M_{p2} reprezintă magnetizația permanentă la $r=r_2$, amplitudinea armonicilor de ordinul ν corespunzătoare acestei repartiții dreptunghiulare se scrie în forma:

$$M_{2\nu} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} M_{p2} \sin k_\nu x dx = \frac{2}{\nu\pi} M_{p2} \left[\cos k_\nu \frac{l_0}{2} - \cos k_\nu \left(\frac{l_0}{2} + l_p \right) \right] \quad (3.6.1)$$

unde $\lambda=2l_p+2l_0$ reprezintă lungimea de undă, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ este numărul de undă, iar

$k_\nu=k\nu$.

$$\text{Cum } k_\nu \frac{l_0}{2} = \frac{k_\nu}{2} \left(\frac{\pi}{k} - l_p \right) = \nu \frac{\pi}{2} - k_\nu \frac{l_p}{2}, \text{ iar}$$

$$k_\nu \left(\frac{l_0}{2} + l_p \right) = k_\nu \left(\frac{\pi}{2k} - \frac{l_p}{2} + l_p \right) = \nu \frac{\pi}{2} - + k_\nu \frac{l_p}{2}, \text{ avem}$$

$$\begin{aligned} \cos k_\nu \frac{l_0}{2} - \cos k_\nu \left(\frac{l_0}{2} + l_p \right) &= \cos \left(\nu \frac{\pi}{2} - k_\nu \frac{l_p}{2} \right) - \cos \left(\nu \frac{\pi}{2} - + k_\nu \frac{l_p}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \nu \frac{\pi}{2} \sin \left(-k_\nu \frac{l_p}{2} \right) = 2 \sin \nu \frac{\pi}{2} \sin k_\nu \frac{l_p}{2}, \end{aligned}$$

relația (3.6.1) devine:

$$M_{2\nu} = \frac{4}{\nu\pi} M_{p2} \sin \nu \frac{\pi}{2} \sin k_\nu \frac{l_p}{2} \quad (3.6.2)$$

iar armonica de ordinul ν este:

$$M_{p_{2\nu}}(x) = M_{2\nu} \sin k_\nu x = \frac{4}{\nu \pi} M_{p_2} \sin \nu \frac{\pi}{2} \sin k_\nu \frac{l_p}{2} \sin k_\nu x \quad (3.6.3)$$

Analog pentru suprafața $r=r_1$ cu magnetizația permanentă M_{p1} , amplitudinea armonicii de ordinul ν este:

$$M_{1\nu} = \frac{4}{\nu \pi} M_{p_1} \sin \nu \frac{\pi}{2} \sin k_\nu \frac{l_p}{2} \quad (3.6.4)$$

iar armonica de ordinul ν este:

$$M_{p_{1\nu}}(x) = M_{1\nu} \sin k_\nu x = \frac{4}{\nu \pi} M_{p_1} \sin \nu \frac{\pi}{2} \sin k_\nu \frac{l_p}{2} \sin k_\nu x \quad (3.6.5)$$

Potențialul magnetic scalar corespunzător armonicii de ordinul ν satisface o ecuație de tip Laplace în fiecare din cele patru domenii: $\nabla^2 V_{vH_i} = 0$, $i = \overline{1,4}$. Folosind metoda separării variabilelor, soluția generală a ecuației de tip Laplace se caută în forma:

$$V_{H_i\nu} = (A_{1\nu} e^{k_\nu y} + A_{2\nu} e^{-k_\nu y}) (C_{1\nu} \sin k_\nu x + C_{2\nu} \cos k_\nu x) \quad (3.6.6)$$

care în particular pentru cele patru domenii devine:

$$\begin{aligned} V_{H_{1\nu}} &= C_{1\nu} e^{k_\nu y} \sin k_\nu x \\ V_{H_{2\nu}} &= (C_{2\nu} e^{k_\nu y} + C_{3\nu} e^{-k_\nu y}) \sin k_\nu x \\ V_{H_{3\nu}} &= (C_{4\nu} e^{k_\nu y} + C_{5\nu} e^{-k_\nu y}) \sin k_\nu x \\ V_{H_{4\nu}} &= C_{6\nu} e^{-k_\nu y} \sin k_\nu x \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Din continuitatea potențialelor și a componentelor normale ale vectorului inducție magnetică la suprafața de separație dintre cele patru medii, rezultă sistemul de determinare a constantelor de integrare:

$$\begin{aligned} C_{1\nu} &= C_{2\nu} + C_{3\nu} \quad , \\ C_{1\nu} - \mu_{r_m} (C_{2\nu} - C_{3\nu}) &= -m_{1\nu} \quad , \\ C_{2\nu} \varepsilon_{1\nu}^2 + C_{3\nu} &= C_{4\nu} \varepsilon_{1\nu}^2 + C_{5\nu} \quad , \\ \mu_{r_m} (C_{2\nu} \varepsilon_{1\nu}^2 - C_{3\nu}) - \mu_{r_l} (C_{4\nu} \varepsilon_{1\nu}^2 - C_{5\nu}) &= m_{2\nu} \varepsilon_{1\nu} \quad , \\ C_{4\nu} \varepsilon_{2\nu}^2 + C_{5\nu} &= C_{6\nu} \quad , \\ \mu_{r_l} (C_{4\nu} \varepsilon_{2\nu}^2 - C_{5\nu}) &= -C_{6\nu} \quad , \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

în care s-au folosit notațiile : $\varepsilon_{1\nu} = e^{k_\nu h_p}$, $\varepsilon_{2\nu} = \varepsilon_{1\nu} e^{k_\nu h_1}$, $m_{1\nu} = \frac{M_{1\nu}}{\nu k}$ și

$$m_{2\nu} = \frac{M_{2\nu}}{\nu k}.$$

Pentru cazul când magnetii permanenți nu se magnetizează temporar, $\mu_{rm}=0$, sistemul (3.6.8) devine:

$$\begin{aligned}
 C_{1v} &= C_{2v} + C_{3v} \quad , \\
 C_{1v} - C_{2v} - C_{3v} &= -m_{1v} \quad , \\
 C_{2v} \varepsilon_{1v}^2 + C_{3v} &= C_{4v} \varepsilon_{1v}^2 + C_{5v} \quad , \\
 C_{2v} \varepsilon_{1v}^2 - C_{3v} - \mu_{r_l} (C_{4v} \varepsilon_{1v}^2 - C_{5v}) &= m_{2v} \varepsilon_{1v} \quad , \\
 C_{4v} \varepsilon_{2v}^2 + C_{5v} &= C_{6v} \quad , \\
 \mu_{r_l} (C_{4v} \varepsilon_{2v}^2 - C_{5v}) &= -C_{6v} \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.6.9}$$

iar expresiile constantelor de integrare rezultă în forma:

$$\begin{aligned}
 C_{2v} &= \frac{(\varepsilon_{2v}^2 - \varepsilon_{1v}^2) [m_{1v} (1 - \mu_{r_l}^2) - 2m_{2v} \varepsilon_{1v}] - 2m_{2v} \varepsilon_{1v} \mu_{r_l} (\varepsilon_{2v}^2 + \varepsilon_{1v}^2)}{2\varepsilon_{1v}^4 (\mu_{r_l} - 1)^2 - 2\varepsilon_{1v}^2 \varepsilon_{2v}^2 (\mu_{r_l} + 1)^2} \quad , \\
 C_{3v} &= -\frac{m_{1v}}{2} \quad , \\
 C_{1v} &= C_{2v} + C_{3v} \quad , \\
 C_{4v} &= \frac{(\mu_{r_l} - 1)(m_{1v} - m_{2v} \varepsilon_{1v})}{\varepsilon_{1v}^2 (\mu_{r_l} - 1)^2 - \varepsilon_{2v}^2 (\mu_{r_l} + 1)^2} \quad , \\
 C_{5v} &= \frac{\varepsilon_{2v}^2 (\mu_{r_l} + 1)}{\mu_{r_l} - 1} C_{4v} \quad .
 \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

Având în vedere că $\mathbf{H}_{iv} = -\nabla V_{H_{iv}}$, $i = \overline{1,4}$, intensitățile de câmp în cele patru domenii, corespunzătoare armonicii v , sunt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{1v} &= -k_v C_{1v} e^{k_v y} (\cos k_v x \mathbf{u}_x + \sin k_v x \mathbf{u}_y) \quad , \\
 \mathbf{H}_{2v} &= -k_v (C_{2v} e^{k_v y} + C_{3v} e^{-k_v y}) \cos k_v x \mathbf{u}_x - k_v (C_{2v} e^{k_v y} - C_{3v} e^{-k_v y}) \sin k_v x \mathbf{u}_y \quad , \\
 \mathbf{H}_{3v} &= -k_v (C_{4v} e^{k_v y} + C_{5v} e^{-k_v y}) \cos k_v x \mathbf{u}_x - k_v (C_{4v} e^{k_v y} - C_{5v} e^{-k_v y}) \sin k_v x \mathbf{u}_y \quad , \\
 \mathbf{H}_{4v} &= -k_v C_{6v} e^{-k_v y} (\cos k_v x \mathbf{u}_x - \sin k_v x \mathbf{u}_y) \quad .
 \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

Intensitatea de câmp rezultantă într-un punct va fi superpoziția intensităților de câmp produse în acel punct de toate armonicile corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente. Astfel, într-un punct din lichidul magnetic, intensitatea de câmp va fi:

$$\mathbf{H}_3 = H_{3x} \mathbf{u}_x + H_{3y} \mathbf{u}_y \tag{3.6.12}$$

unde:

$$\begin{aligned}
 H_{3x} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{3x\nu} = - \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} \left(C_{4\nu} e^{k_{\nu}y} + C_{5\nu} e^{-k_{\nu}y} \right) \cos k_{\nu}x \\
 H_{3y} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{3y\nu} = - \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} \left(C_{4\nu} e^{k_{\nu}y} - C_{5\nu} e^{-k_{\nu}y} \right) \sin k_{\nu}x
 \end{aligned}
 \tag{3.6.13}$$

3.6.2 Calculul forței de levitație

La calculul forței de levitație voi folosi aceeași teoremă folosită în paragraful 3.4 conform căreia la echilibru hidrostatic forța ce se exercită asupra rotorului este egală și de semn contrar cu forța ce acționează asupra statorului. Expresia forței este dată de:

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] \mathbf{dS}
 \tag{3.6.14}$$

în care Σ_0 reprezintă suprafața de separație dintre lichidul magnetic și stator iar $\mathbf{dS} = dS \mathbf{n}_{34}$ reprezintă vectorul element de suprafață orientat spre exteriorul lichidului magnetic, fig.3.4.4. Considerând lichidul magnetic liniar de permeabilitate $\mu_l = \mu_0 \mu_{rl}$, expresia forței devine:

$$\mathbf{F} = \oint_{\Sigma_0} t_{n_{34}} \mathbf{dS}
 \tag{3.6.15}$$

unde este pusă în evidență tensiunea normală:

$$\mathbf{t}_{n_{34}} = -\mu_0 \frac{(\mu_{rl} - 1)}{2} \left(\mu_{rl} H_n^2 + H_t^2 \right) \mathbf{u}_y
 \tag{3.4.16}$$

Observând că $\mathbf{t}_{n_{34}}(y_2) = t_n(y_2) \mathbf{u}_y$ iar pe fața simetrică $\mathbf{t}_{n_{34}}(y_2') = t_n(y_2')(-\mathbf{u}_y)$, se obține o tensiune rezultantă sub forma:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_{n_{34}}(y_2) + \mathbf{t}_{n_{34}}(y_2') = \left[t_n(y_2) - t_n(y_2') \right] \mathbf{u}_y,
 \tag{3.4.17}$$

în care $y_2 = h_p + h_1$ și $y_2' = h_p + h_2$, fig.3.4.4.

Ca urmare, utilizând expresia (3.4.16), rezultă:

$$\mathbf{t}_n = -\mu_0 \frac{\mu_{rl} - 1}{2} \left[\mu_{rl} \left(H_{3y}^2 - H_{3y'}^2 \right) + \left(H_{3x}^2 - H_{3x'}^2 \right) \right] \mathbf{u}_y,
 \tag{3.4.18}$$

unde prin indicii notați cu prim s-au notat componentele normală și tangentă ale intensității câmpului magnetic la suprafața y_2' respectiv fără prim la suprafața y_2 , toate componentele fiind calculate în puncte din lichid (mediul 3).

Pe suprafața y_2 componentele câmpului sunt date de (3.6.13) pentru $y=y_2$ iar pe suprafața y_2' componentele au expresiile:

$$H_{3x'} = \sum_{v=1}^{\infty} H_{3x'v} = - \sum_{v=1}^{\infty} k_v \left(C_{4v}' e^{k_v y_2'} + C_{5v}' e^{-k_v y_2'} \right) \cos k_v x$$

$$H_{3y'} = \sum_{v=1}^{\infty} H_{3y'v} = - \sum_{v=1}^{\infty} k_v \left(C_{4v}' e^{k_v y_2'} - C_{5v}' e^{-k_v y_2'} \right) \sin k_v x$$
(3.6.19)

în care C_{4v}' și C_{5v}' au valorile din (3.4.11) în care s-au înlocuit ε_{1v} și ε_{2v} cu noile valori $\varepsilon_{1v}' = \varepsilon_{1v}$ și $\varepsilon_{2v}' = e^{k_v(h_p+h_2)} = \varepsilon_{1v} e^{k_v h_2}$.

În continuare voi calcula forța ce se exercită pe lungimea $\lambda/2$ a arborelui, fig.3.4.4:

$$\mathbf{F}_{\lambda/2} = \int_0^{\lambda/2} \mathbf{t}_n dx$$
(3.6.20)

Pentru simplificarea calculului am introdus notațiile:

$$K_v = -k_v \left(C_{4v} e^{k_v y_2} + C_{5v} e^{-k_v y_2} \right), \quad K_v' = -k_v \left(C_{4v}' e^{k_v y_2'} + C_{5v}' e^{-k_v y_2'} \right),$$

$$Q_v = -k_v \left(C_{4v} e^{k_v y_2} - C_{5v} e^{-k_v y_2} \right), \quad Q_v' = -k_v \left(C_{4v}' e^{k_v y_2'} - C_{5v}' e^{-k_v y_2'} \right),$$
(3.6.21)

cu care (3.6.20) devine:

$$\mathbf{F}_{\lambda/2} = -\mu_0 \frac{\mu_{r1} - 1}{2} \left\{ \mu_{r1} \int_0^{\lambda/2} \left[\left(\sum_{v=1}^{\infty} Q_v \sin k_v x \right)^2 - \left(\sum_{v=1}^{\infty} Q_v' \sin k_v x \right)^2 \right] dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\lambda/2} \left[\left(\sum_{v=1}^{\infty} K_v \cos k_v x \right)^2 - \left(\sum_{v=1}^{\infty} K_v' \cos k_v x \right)^2 \right] dx \right\} \mathbf{u}_y$$
(3.6.22)

Se observă că integralele din (3.6.22) au una din formele:

$$\int_0^{\lambda/2} \sin^2 k_v x dx = \int_0^{\lambda/2} \cos^2 k_v x dx = \frac{\lambda}{4},$$

$$\int_0^{\lambda/2} \sin k_v x \sin k_\xi x dx = 0,$$

$$\int_0^{\lambda/2} \cos k_v x \cos k_\xi x dx = 0,$$
(3.6.23)

unde am ținut seama că $\lambda k = 2\pi$. Forța ce se exercită pe lungimea $\lambda/2$ va fi:

$$\mathbf{F}_{\lambda/2} = -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} \frac{\lambda}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\mu_{r_l} (Q_{\nu}^2 - Q_{\nu}^{\prime 2}) + (K_{\nu}^2 - K_{\nu}^{\prime 2}) \right] \mathbf{u}_y \quad (3.6.24)$$

Relația (3.6.24) arată că forța ce se exercită pe lungimea $\lambda/2$ reprezintă superpoziția forțelor ce se exercită pe lungimea $\lambda/2$ produse de armonicile corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente.

În continuare voi calcula forța de readucere corespunzătoare armonicii de ordinul ν urmând ca forța rezultantă să fie superpoziția tuturor forțelor produse de armonicile corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente.

Pentru armonica ν , forța pe lungimea $\lambda/2$ va fi:

$$\mathbf{F}_{\lambda/2\nu} = -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} \frac{\lambda}{4} \mu_{r_l} (Q_{\nu}^2 - Q_{\nu}^{\prime 2}) + (K_{\nu}^2 - K_{\nu}^{\prime 2}) \mathbf{u}_y \quad (3.6.25)$$

Înlocuind constantele cu (3.6.21) și cum $y_2 = h_p + h_1 = h_p + \delta + \Delta \sin \theta$, $y_2' = h_p + h_2 = h_p + \delta - \Delta \sin \theta$, $y_2 - y_2' = 2\Delta \sin \theta = 2\Delta'$, relația (3.6.25) se aduce în forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\lambda/2\nu} = & -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} k_{\nu}^2 \frac{\lambda}{4} \left\{ (\mu_{r_l} + 1) \left[e^{2k_{\nu} y_2} (C_{4\nu}^2 - C_{4\nu}^{\prime 2} e^{-4k_{\nu} \Delta'}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-2k_{\nu} y_2} (C_{5\nu}^2 - C_{5\nu}^{\prime 2} e^{4k_{\nu} \Delta'}) \right] - 2(\mu_{r_l} - 1) (C_{4\nu} C_{5\nu} - C_{4\nu}^{\prime} C_{5\nu}^{\prime}) \right\} \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

Pentru constantele de integrare se voi folosi aproximarea asemănătoare cu cea din paragraful 3.4:

$$\frac{C_{4\nu}^{\prime}}{C_{4\nu}} = \frac{\varepsilon_{1\nu}^2 (\mu_{r_l} - 1)^2 - \varepsilon_{2\nu}^2 (\mu_{r_l} + 1)^2}{\varepsilon_{1\nu}^2 (\mu_{r_l} - 1)^2 - \varepsilon_{2\nu}^{\prime 2} (\mu_{r_l} + 1)^2} = \frac{\left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^2 - e^{2k_{\nu} h_1}}{\left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^2 - e^{2k_{\nu} h_2}} \cong e^{2k_{\nu} (h_1 - h_2)} = e^{4k_{\nu} \Delta'} \quad (3.6.27)$$

Având în vedere (3.6.27), primul termen din (3.6.26), notat în continuare cu $F_{\frac{\lambda}{2}\nu}$, devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\frac{\lambda}{2}\nu} = & -\mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} k_{\nu}^2 \frac{\lambda}{4} (\mu_{r_l} + 1) C_{4\nu}^2 \left[e^{2k_{\nu} y_2} (1 - e^{8k_{\nu} \Delta'} e^{-4k_{\nu} \Delta'}) + \right. \\ & \left. + e^{-2k_{\nu} y_2} \left(\frac{\varepsilon_{2\nu}^4 (\mu_{r_l} + 1)^2}{(\mu_{r_l} - 1)^2} - \frac{\varepsilon_{2\nu}^{\prime 4} (\mu_{r_l} + 1)^2}{(\mu_{r_l} - 1)^2} e^{8k_{\nu} \Delta'} e^{-4k_{\nu} \Delta'} \right) \right] \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

iar după simple operații matematice se aduce în forma:

$$\mathbf{F}_{1\frac{\lambda}{2}v} = -\mu_0 \frac{(\mu_{r_l}^4 - 1)k_v^2 \lambda}{4(\mu_{r_l} - 1)^2} C_{4v}^2 \varepsilon_{1v}^2 e^{2k_v h_1} \left(1 - e^{4k_v \Delta'}\right) \mathbf{u}_y \quad (3.6.29)$$

Cum $h_1 = \delta + \Delta' = \delta + \Delta \sin \theta$, și înlocuind constanta C_{4v} cu (3.6.10), (3.6.29) devine:

$$\mathbf{F}_{1\frac{\lambda}{2}v} = -\mu_0 \frac{(\mu_{r_l}^4 - 1)k_v^2 \lambda}{4(\mu_{r_l} - 1)^2} \cdot \frac{(\mu_{r_l} - 1)^2 (m_{1v} - m_{2v} \varepsilon_{1v})^2}{\varepsilon_{1v}^4 e^{4k_v h_1} (\mu_{r_l} + 1)^4} \varepsilon_{1v}^2 e^{2k_v h_1} \left(1 - e^{4k_v \Delta'}\right) \mathbf{u}_y \quad (3.6.30)$$

care se scrie în forma finală:

$$\mathbf{F}_{1\frac{\lambda}{2}v} = \mu_0 \frac{(\mu_{r_l}^4 - 1)k_v^2 \lambda (m_{1v} - m_{2v} \varepsilon_{1v})^2}{2\varepsilon_{1v}^2 (\mu_{r_l} + 1)^4} e^{-2k_v \delta} \operatorname{sh}(2k_v \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.6.31)$$

$$\text{Din (3.6.10), } C_{5v} = \frac{\varepsilon_{2v}^2 (\mu_{r_l} + 1)}{\mu_{r_l} - 1} C_{4v} \text{ și } C'_{5v} = \frac{\varepsilon_{2v}'^2 (\mu_{r_l} + 1)}{\mu_{r_l} - 1} C'_{4v}, \text{ și cu}$$

aproximarea (3.6.27), se poate scrie:

$$\begin{aligned} C_{4v} C_{5v} - C'_{4v} C'_{5v} &= \frac{\varepsilon_{2v}^2 (\mu_{r_l} + 1)}{\mu_{r_l} - 1} C_{4v}^2 - \frac{\varepsilon_{2v}'^2 (\mu_{r_l} + 1)}{\mu_{r_l} - 1} C_{4v}'^2 = \\ &= \frac{\mu_{r_l} + 1}{\mu_{r_l} - 1} C_{4v}^2 \left(\varepsilon_{2v}^2 - \varepsilon_{2v}'^2 e^{8k_v \Delta'} \right) \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

Cu aceasta al doilea termen din (3.6.26), notat cu $F_{2\frac{\lambda}{2}v}$,

$$\mathbf{F}_{2\frac{\lambda}{2}v} = \mu_0 \frac{\mu_{r_l} - 1}{2} k_v^2 \frac{\lambda}{4} 2(\mu_{r_l} - 1) (C_{4v} C_{5v} - C'_{4v} C'_{5v}) \mathbf{u}_y \quad (3.6.33)$$

devine:

$$\mathbf{F}_{2\frac{\lambda}{2}v} = \mu_0 \frac{(\mu_{r_l} - 1)^2 k_v^2 \lambda}{4} \cdot \frac{\mu_{r_l} + 1}{\mu_{r_l} - 1} C_{4v}^2 \left(\varepsilon_{1v}^2 e^{2k_v h_1} - \varepsilon_{1v}'^2 e^{2k_v h_2} e^{8k_v \Delta'} \right) \mathbf{u}_y \quad (3.6.34)$$

Având în vedere că $h_1 = \delta + \Delta \sin \theta = \delta + \Delta'$, $h_1 - h_2 = 2\Delta'$ și înlocuind constanta C_{4v} cu (3.6.10), (3.6.34) devine:

$$\mathbf{F}_{2\frac{\lambda}{2}v} = \mu_0 \frac{(\mu_{r_l} - 1)^2 k_v^2 \lambda}{4} \cdot \frac{(\mu_{r_l} - 1)^2 (m_{1v} - m_{2v} \varepsilon_{1v})^2}{\varepsilon_{1v}^4 e^{4k_v h_1} (\mu_{r_l} + 1)^4} \varepsilon_{1v}^2 e^{2k_v h_1} \left(1 - e^{4k_v \Delta'}\right) \mathbf{u}_y \quad (3.6.35)$$

care se scrie în forma finală:

$$\mathbf{F}_{\frac{\lambda}{2}\nu} = -\mu_0 \frac{k_\nu^2 \lambda (m_{1\nu} - m_{2\nu} \varepsilon_{1\nu})^2}{2 \varepsilon_{1\nu}^2} \cdot e^{-2k_\nu \delta} \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \operatorname{sh}(2k_\nu \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.6.36)$$

Ca urmare, forța rezultantă pe lungimea $\lambda/2$, corespunzătoare armonicii ν , va fi:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\frac{\lambda}{2}\nu} &= \mathbf{F}_{1\frac{\lambda}{2}\nu} + \mathbf{F}_{2\frac{\lambda}{2}\nu} = \\ &= -\mu_0 \frac{k_\nu^2 \lambda (m_{1\nu} - m_{2\nu} \varepsilon_{1\nu})^2}{2 \varepsilon_{1\nu}^2} \cdot e^{-2k_\nu \delta} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{(\mu_{r_l} + 1)^4} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right] \operatorname{sh}(2k_\nu \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (3.6.37)$$

Forța pe unitatea de lungime corespunzătoare armonicii ν va fi:

$$\mathbf{F}_{R\nu}^* = \frac{\mathbf{F}_{\frac{\lambda}{2}\nu}}{\frac{\lambda}{2}} = -\mu_0 \frac{k_\nu^2 (m_{1\nu} - m_{2\nu} \varepsilon_{1\nu})^2}{\varepsilon_{1\nu}^2} e^{-2k_\nu \delta} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{(\mu_{r_l} + 1)^4} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right] \cdot \operatorname{sh}(2k_\nu \Delta \sin \theta) \mathbf{u}_y \quad (3.6.38)$$

Forța de readucere corespunzătoare armonicii de ordinul ν , \mathbf{F}_ν^* , se obține integrând componenta forței $\mathbf{F}_{R\nu}$ în direcția lui h_{max} de orientare \mathbf{u} , fig.3.4.5, adică componenta $F_{R\nu}^* \sin \theta$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\nu^* &= \mathbf{u} \int_0^\pi F_{R\nu}^* \sin \theta r_3 d\theta = \frac{\mu_0 k_\nu^2 r_3 (m_{1\nu} + m_{2\nu} \varepsilon_{1\nu})^2}{\varepsilon_{1\nu}^2} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{\mu_{r_l} + 1} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1} \right)^3 \right] e^{-2k_\nu \delta} \\ &\quad \cdot \int_0^\pi \operatorname{sh}(2k_\nu \Delta \sin \theta) \sin \theta d\theta \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.6.39)$$

Voi nota în continuare:

$$I_\nu(\Delta) = \int_0^\pi \operatorname{sh}(2k_\nu \Delta \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.6.40)$$

Integrala din (3.6.40) nu se poate descompune în serii de puteri pentru armonicile superioare așa cum am procedat în paragraful 3.4 pentru armonica fundamentală, (relația 3.4.33). În calculul forței, integrala va fi rezolvată numeric.

Pentru dezaxarea maximă, $\Delta = \delta$, înlocuind $\varepsilon_{1\nu} = e^{k_\nu h_p}$, $m_{1\nu} = \frac{M_{1\nu}}{\nu k}$,

$m_{2\nu} = \frac{M_{2\nu}}{\nu k}$ și ținând seama de că $M_{p_2} = M_{p_1} \frac{r_1}{r_2} = M_{p_1} \frac{r_1}{r_1 + h_p}$ (deoarece $\operatorname{div} \mathbf{M}_p = 0$), (3.6.39) devine:

$$\mathbf{F}_v^* = \frac{\mu_0 r_3 M_{lv}^2 \left(1 - \frac{r_1}{r_1 + h_p} e^{k_v h_p}\right)^2}{e^{2k_v h_p}} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{(\mu_{r_l} + 1)^4} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1}\right)^3 \right] I_v(\delta) e^{-2k_v \delta} \mathbf{u} \quad (3.6.41)$$

Cu notația $h_p = \alpha \delta$, avem $r_2 = r_1 + \alpha \delta$ iar din (3.6.4) rezultă M_{lv} care înlocuit în (3.6.41) conduce la forța de readucere corespunzătoare armonicii v , pe unitatea de lungime, în forma:

$$\mathbf{F}_v^* = \frac{16 \mu_0 M_{p1}^2}{\pi} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{(\mu_{r_l} + 1)^4} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1}\right)^3 \right] U_v(k_v \delta) \mathbf{u} \quad (3.6.42)$$

unde:

$$U_v(k_v \alpha) = \frac{I_v(\delta)}{\pi v^2} \left(e^{-k_v \alpha \delta} - \frac{r_1}{r_1 + \alpha \delta} \right)^2 [r_1 + (\alpha + 1)\delta] e^{-2k_v \delta} \sin^2 \frac{k_v l_p}{2} \quad (3.6.43)$$

Forța de levitație rezultantă ce se exercită asupra arborelui pe unitatea de lungime va fi superpoziția forțelor de levitație produse de armonicile corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente (armonici de ordin impar), [Gr5]:

$$\mathbf{F}^* = \sum_{v=1}^{\infty} \mathbf{F}_v^* = \frac{16 \mu_0 M_{p1}^2}{\pi} \left[\frac{\mu_{r_l}^4 - 1}{(\mu_{r_l} + 1)^4} - \left(\frac{\mu_{r_l} - 1}{\mu_{r_l} + 1}\right)^3 \right] U \mathbf{u} \quad (3.6.44)$$

unde:

$$U = \sum_{v=1}^{\infty} U_v(k_v \alpha) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{I_v(\delta)}{\pi v^2} \left(e^{-k_v \alpha \delta} - \frac{r_1}{r_1 + \alpha \delta} \right)^2 [r_1 + (\alpha + 1)\delta] e^{-2k_v \delta} \sin^2 \frac{k_v l_p}{2} \quad (3.6.45)$$

Relația (3.6.44) este asemănătoare cu relația (3.4.37) care exprimă forța de levitație corespunzătoare doar armonicii fundamentale. Ea diferă doar prin funcția U , care în (3.6.44) este determinată de toate armonicile corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente.

Dacă se alege lungimea dintre poli egală cu jumătate din lungimea polului, $l_0 = \frac{l_p}{2}$, atunci $l_p = \frac{\lambda}{3} = \frac{2\pi}{3k}$ iar

$$\sin \frac{k_v l_p}{2} = \sin v \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{dacă } v = 3p + 1, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{dacă } v = 3p + 2, \\ 0, & \text{dacă } v = 3p \end{cases}$$

Funcția din (3.6.45) ia forma :

$$U = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3I_{\nu}(\delta)}{4\pi\nu^2} \left(e^{-k_{\nu}\alpha\delta} - \frac{r_1}{r_1 + \alpha\delta} \right)^2 [r_1 + (\alpha + 1)\delta] e^{-2k_{\nu}\delta} \quad (3.6.46)$$

în care ν este impar de forma $3p+1$ sau $3p+2$, (nu intervin armonici impare de forma $3p$; 3, 9, 15, ...).

3.6.3 Interpretarea rezultatelor

Folosind expresiile (3.6.44) și (3.6.46) am calculat forța de readucere ce acționează pe unitatea de lungime a arborelui pentru dezaxarea maximă, pentru un lagăr cu $r_1=1$ cm, $\delta=0.1$ cm, $M_{pl}=174$ kA/m și $\mu_{rl}=1.5$. Am considerat $\alpha=3.57$ și $k=974$ rad/cm, valori care au fost obținute în paragraful 3.4 astfel încât funcția U_l dată de (3.4.39) să obțină un maxim, $U_{lmax}=0.1115$ cm. Rezultatele, mergând până la armonica de ordinul 23, sunt prezentate în tabelul 3.6.1, [Gr5]. Am calculat numeric integrala $I_{\nu}(\delta)$, rezultând apoi valorile funcției U_{ν} și a forței pe unitate de lungime a arborelui, F_{ν}^* . Cu ε_{ν} am notat ponderea fiecărei armonici în funcția U respectiv în forța rezultantă F^* :

$$\varepsilon_{\nu} = \frac{U_{\nu}(k_{\nu}\delta)}{U} \cdot 100[\%] = \frac{F_{\nu}^*(k_{\nu}\delta)}{F^*} \cdot 100[\%] \quad (3.6.47)$$

unde $U = \sum_{\nu=1}^{23} U_{\nu}(k_{\nu}\delta) = 1.11668785$ mm, $F^* = \sum_{\nu=1}^{23} F_{\nu}^*(k_{\nu}\delta) = 22.850197$ N/m.

Tab.3.6.1

ν	$I_{\nu}(\delta)$	$U_{\nu}(k_{\nu}\delta)$ [m]	$F_{\nu}^*(k_{\nu}\delta)$ [N/m]	ε_{ν} [%]
1	4.76	$1.115 \cdot 10^{-3}$	21.885	95.554
3	166.7	0	0	0
5	$6.548 \cdot 10^3$	$2.913 \cdot 10^{-5}$	0.542	2.497
7	$2.756 \cdot 10^5$	$1.272 \cdot 10^{-5}$	0.237	1.089
9	$1.204 \cdot 10^7$	0	0	0
11	$5.381 \cdot 10^8$	$4.152 \cdot 10^{-6}$	0.077	0.356
13	$2.442 \cdot 10^{10}$	$2.742 \cdot 10^{-6}$	0.051	0.235
15	$1.121 \cdot 10^{12}$	0	0	0
17	$5.191 \cdot 10^{13}$	$1.407 \cdot 10^{-6}$	0.026	0.121
19	$2.418 \cdot 10^{15}$	$1.067 \cdot 10^{-6}$	0.021	0.091
21	$1.133 \cdot 10^{17}$	0	0	0
23	$5.332 \cdot 10^{18}$	$6.631 \cdot 10^{-7}$	0.012	0.057

Se observă că deși $I_{\nu}(\delta)$ crește cu ν , funcția $U_{\nu}(k_{\nu}\delta)$ scade iar ponderea componentei ν în expresia forței scade pronunțat. Armonica fundamentală este hotărâtoare în expresia forței de levitație.

De remarcat că pentru armonica fundamentală, calculul integralei $I_1(\delta)$ făcut în paragraful 3.4 prin dezvoltarea în serii de puteri a integrantului, conduce la aceeași valoare, $I_1=4.76$, obținută numeric în tab.3.6.1.

În fig.3.6.1 am reprezentat funcția $U = \sum_{v=1}^{23} U_v(k_v \delta)$ și funcția $U_1(k \delta)$ în raport cu parametrul α , pentru $r_1=1 \text{ cm}$, $\delta=0.1 \text{ cm}$ și $k=9.74 \text{ rad/cm}$. Cu 1 am reprezentat funcția $U_1(k \delta)$, care atinge un maxim, $U_{1max}=0.1115 \text{ cm}$, pentru $\alpha_{10}=3.5706$, iar cu 2 am reprezentat funcția U , care are maximum $U_{max}=0.1167 \text{ cm}$, pentru $\alpha_0=3.5173$.

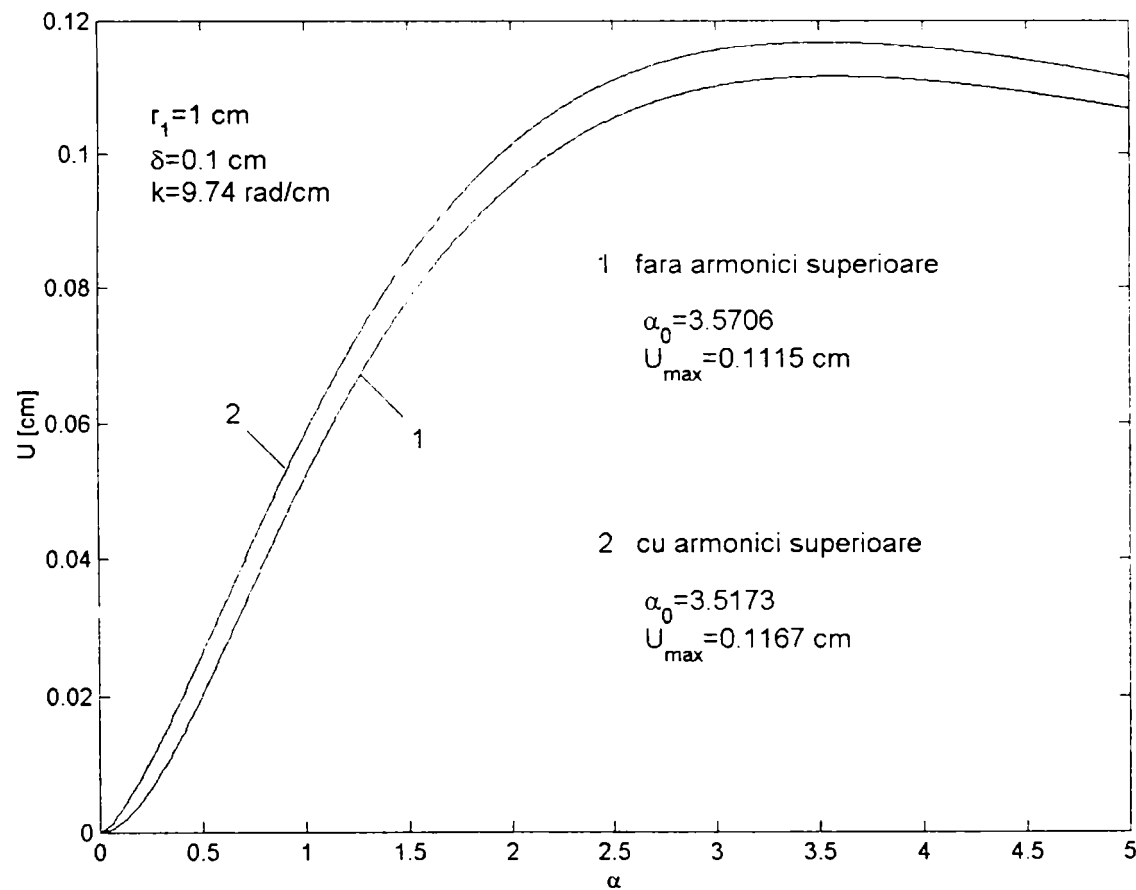


Fig. 3.6.1

Se observă că valorile maxime ale celor două funcții sunt apropiate și au loc pentru valori ale lui k foarte apropiate. Putem spune că extremul funcției U poate fi aproximat cu extremul funcției U_1 obținut în paragraful 3.4 pentru $k=9.74 \text{ rad/cm}$ și $\alpha=3.5706$.

În concluzie, armonicile superioare au o influență redusă, sub 5%, în calculul forței de levitație.

3.7 Calculul numeric al lagărului cu poli alternanți plasați în rotor

În acest paragraf am urmărit determinarea câmpului magnetic din lagărul cu poli alternanți plasați în rotor pe baza integrării numerice a ecuațiilor câmpului, și determinarea numerică a forței de levitație.

Modelarea numerică a lagărului se poate realiza cu ajutorul programelor specializate bazate pe metode elementelor finite (MEF). Programele bidimensionale (MEF-2D), nu pot determina câmpul în lagăr atunci când arborele este plasat excentric față de stator, deoarece câmpul nu prezintă simetrie plan-meridiană. Totuși, se poate admite o metodă de aproximare a câmpului cu un program 2D, folosită cu precizie bună în [Bj1] pentru lagărul magnetic cu poli plasați în stator. Metoda constă în modelarea câmpului în lipsa lichidului magnetic. Distribuția câmpului în acest caz este puțin modificată față de cazul real ce ia în considerare lichidul magnetic, având în vedere că permeabilitatea magnetică relativă a lichidului este apropiată de 1, (1.1-1.2). De prezența lichidului se va ține seama în expresia forței ce va fi calculată prin integrare numerică, (paragraful 3.3).

Un calcul numeric mai exact al câmpului necesită un program MEF-3D, care modelează cu precizie mai bună lagărul. În acest paragraf modelarea numerică am făcut-o cu programul *MagNet 5.0* al firmei britanice *INFOLYTICA*, versiunea 3D, sub sistemul de operare *UNIX*.

3.7.1 Stabilirea ecuațiilor câmpului electromagnetic în lagăr

Se consideră lagărul cu lichid magnetic și poli alternanți plasați în rotor prezentat schematic în fig.3.7.1.

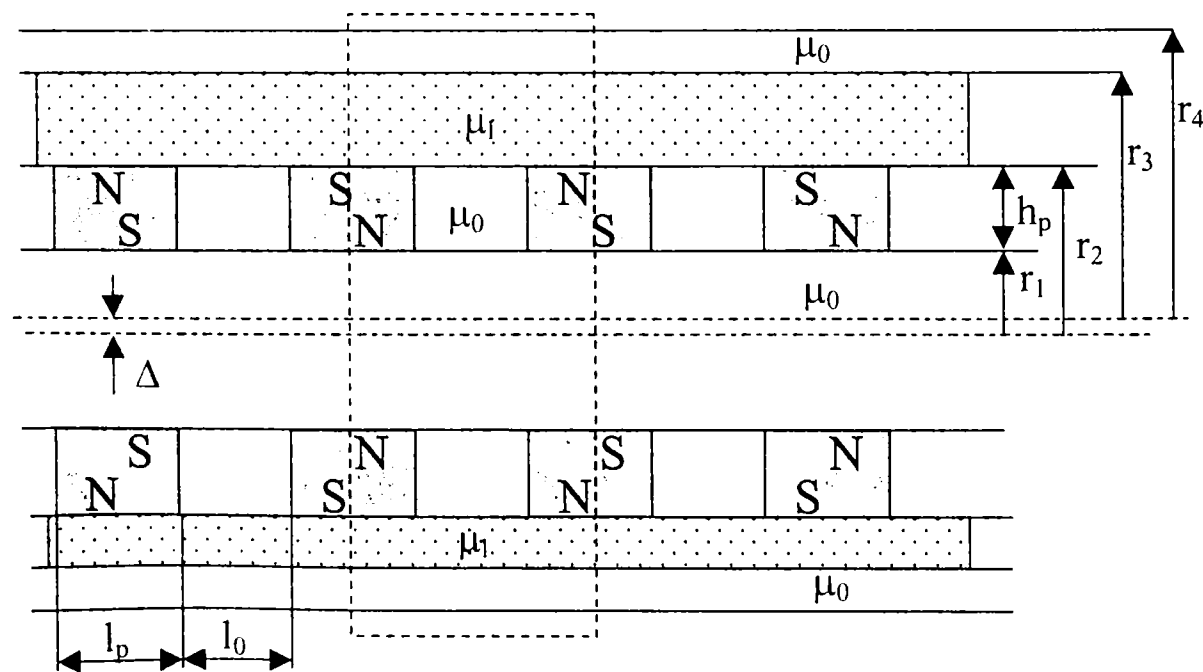


Fig. 3.7.1

Pe arborele cilindric amagnetic de rază r_1 sunt plasați polii alternanți de înălțime h_p , $r_2 = r_1 + h_p$. Lățimea polilor este l_p iar distanța dintr-ei l_0 . Polii sunt

Din punct de vedere al câmpului magnetic, modelul analizat este alcătuit din patru subdomenii:

- 1 - arborele de rază r_l amagnetic pe care sunt plasați polii alternanți;
- 2 - polii alternanți cu magnetizație permanentă M_p constantă și permeabilitate magnetică $\mu_l = \mu_0 \mu_{rm}$;
- 3 - lichidul magnetic considerat mediu liniar de permeabilitate $\mu_l = \mu_0 \mu_{rl}$;
- 4 - cuzinetul și exteriorul acestuia până la limita domeniului modelat considerate amagnetice de permeabilitate μ_0 .

Câmpul magnetic generat de polii alternanți satisface următoarele ecuații:

- forma locală a teoremei lui Ampere: $rot \mathbf{H} = 0$, $rot_s \mathbf{H} = 0$ în cele patru subdomenii;
- legea legăturii dintre vectorii \mathbf{B} , \mathbf{H} și \mathbf{M} , care împreună cu legea magnetizației temporale conduce la $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ în mediul 1 și 4, $\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$ în mediul 2 și $\mathbf{B} = \mu_l \mathbf{H}$ în mediul 3;
- forma locală a legii fluxului magnetic: $div \mathbf{B} = 0$ în cele patru subdomenii.

Cum \mathbf{M}_p este un câmp uniform iar permeabilitățile din cele patru medii sunt constante, din ecuațiile câmpului rezultă că potențialul magnetic vector satisface o ecuație de tip Laplace:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3.7.1)$$

pretutindeni în domeniul considerat.

Condițiile de interfață la suprafața de separație dintre cele patru subdomenii se obțin din continuitatea potențialului magnetic vector și a componentelor normale ale vectorului inducție magnetică:

- pe S_{12} : $(\mathbf{A})_1 = (\mathbf{A})_2$ și $\mathbf{n} \cdot (rot \mathbf{A})_1 = \mathbf{n} \cdot (rot \mathbf{A})_2$;
- pe S_{23} : $(\mathbf{A})_2 = (\mathbf{A})_3$ și $\mathbf{n} \cdot (rot \mathbf{A})_2 = \mathbf{n} \cdot (rot \mathbf{A})_3$;
- pe S_{34} : $(\mathbf{A})_3 = (\mathbf{A})_4$ și $\mathbf{n} \cdot (rot \mathbf{A})_3 = \mathbf{n} \cdot (rot \mathbf{A})_4$.

Nu se iau în considerare condițiile de interfață între micile subdomenii în care au fost divizați magnetii permanenți.

Condițiile de frontieră sunt de tip Dirichlet, $\mathbf{A}=0$, atât pe suprafața laterală a domeniului (pe cilindrul de rază r_{ext}) cât și pe cele două plane ce limitează domeniul după axa z , fig.3.7.2.

3.7.2 Descrierea programului MagNet 5.0 – 3D. Modelarea numerică a lagărului

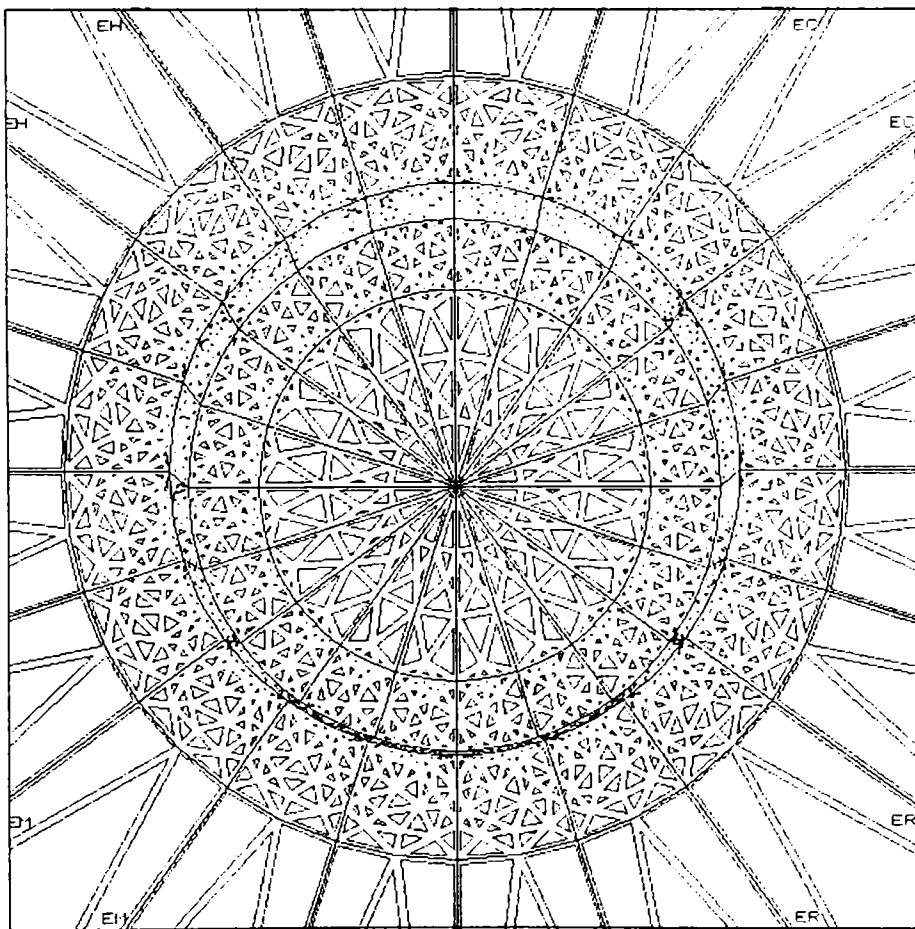
În general programele specializate bazate pe MEF se compun din trei părți distincte:

- *preprocesorul* – este partea în care se definesc: tipul problemei de analizat; geometria problemei cu rețeaua de discretizare convenabilă; condițiile de

- frontieră; se asociază materialele cu proprietățile lor diferitelor regiuni din domeniu;
- *solverul* – este practic partea din program care determină matematic soluția sistemului rezultat în urma discretizării; mărimile primare calculate sunt: potențialul magnetic scalar V pentru probleme de câmp electric și potențialul magnetic vector \mathbf{A} sau potențialul magnetic scalar V_H pentru probleme de câmp magnetic;
 - *postprocesorul* – este partea de program care interpretează grafic sau sub alte forme rezultatele obținute de *solver*; pe baza mărimilor primare calculate se obțin mărimi derivate locale sau globale din domeniul analizat.

Definirea geometriei 3D în cazul programului *MagNet* se face folosind principiul extrudării. Se definesc geometriile în plane perpendiculare pe axa z . Modul de variație a proprietăților de material se reflectă în aceste plane.

Modelul de analizat este cel din fig.3.7.2. În *MatLab* am realizat fișierul *aprox.m* (anexa 1) care generează fișierele *CERB.automesh.in* și *CERE.automesh.in* care definesc geometria modelului. Fișierul *CERB.automesh.in* definește geometria într-un plan perpendicular pe axa z , fig.3.7.4. Cu ajutorul segmentelor și arcelor am definit regiunile a – rotorul, b – polii, c – lichidul, d – statorul, e – aerul, fiecare împărțite în 20 de subregiuni denumite fiecare de la a la t . Am parametrizat dezaxarea Δ dintre axa rotorului cu poli alternanți și axa statorului. Pentru fiecare segment am definit un număr de noduri folosite pentru discretizarea rețelei.



Mesh 5.2.0.3

Fig.3.7.4

Fișierul *CERE.automesh.in* construiește geometria după axa z , în care se disting trei regiuni, fig.3.7.2.a:

- regiunea *I* – de la 0 la 1.466 mm corespunzătoare la jumătate de lungime de pol N ; am definit șapte diviziuni pe această lungime, folosite pentru construcția tetraedrelor la discretizarea domeniului;
- regiunea *II* – de la 1.466 mm la 2.932 mm corespunzătoare distanței dintre poli, cu șapte diviziuni pentru discretizare;
- regiunea *III* – de la 2.932 mm la 4.4 mm corespunzătoare la jumătate de lungime de pol S , tot cu șapte diviziuni de discretizare.

Tot în fișierul *CERE.automesh.in* se denumesc regiunile construite în geometrie. Pentru regiunea *I*: $a \rightarrow al$ (aluminu), $b_i \rightarrow x_i$, $i=a,b,\dots,t$ pentru polul N , $c \rightarrow li$ (lichid), $d \rightarrow a$ (aer), $e \rightarrow a$; pentru regiunea *II*: $a \rightarrow al$ (aluminu), $b_i \rightarrow al$, $c \rightarrow li$ (lichid), $d \rightarrow a$ (aer), $e \rightarrow a$; pentru regiunea *III*: $a \rightarrow al$ (aluminu), $b_i \rightarrow y_i$, $i=a,b,\dots,t$ pentru polul S , $c \rightarrow li$ (lichid), $d \rightarrow a$ (aer), $e \rightarrow a$. În cazul polilor N și S domeniul b are denumiri distincte pe fiecare subdomeniu, pentru că, deși avem același material, diferă orientarea vectorului magnetizație permanentă.

Comenzile: **automesh** *CERB.automesh.in* *CERB.mesh.in* și **automesh** *CERE.automesh.in* *CERE.mesh.in* generează fișierele *CERB.mesh.in* și *CERE.mesh.in* în formatul în care sunt recunoscute de comanda **mesh** din MagNet.

Comanda **mesh** < *CERB.automesh.in* și comanda **mesh** < *CERE.automesh.in* generează geometria atât în plan perpendicular pe axa z cât și după axa z . Într-un plan perpendicular pe axa z rețeaua de discretizare este prezentată în fig.3.7.5 pentru $\Delta=0\text{ mm}$ și în fig.3.7.6 pentru $\Delta=0.8\text{ mm}$.

Programul *MagNet* conține fișierul *MACLIB.DAT* în care sunt definite implicit o serie de materiale cu proprietățile lor folosite în analiza câmpului electromagnetic. Fișierul poate fi completat cu noi materiale liniare sau neliniare, izotrope sau anizotrope cu ajutorul comenzii **curv2d**, [MN1]. Am definit diferite tipuri de lichide magnetice și magneți permanenți folosiți în analiza numerică a câmpului magnetic; de exemplu NdFe pentru magnet permanent, LI2N pentru lichidul magnetic și alum pentru aluminu.

Comanda **m3dmfm** (*The MagNet 3Dx Mesh File Manager*), [MN1], formează rețeaua tridimensională de tetraedre. Se da comanda *impu cere mode plan*, care pe baza modelului *CERE* generează fișierul *MODEL3.DAT* cu datele finale despre geometrie și rețeaua de discretizare.

Comanda **prob3d** (*The MagNet 3D Problem Editor*), [MN1], asociază regiunilor din domeniul modelat diferite materiale existente în fișierul *MACLIB.DAT*. Sunt specificate eventualele constrângeri legate de condițiile de frontieră și ordinul elementelor finite tridimensionale (între 1 și 3). În lichid am folosit elemente de ordinul doi, fiind domeniul ce prezintă interes în calculul forței de levitație, iar în rest am folosit elemente de ordinul unu.

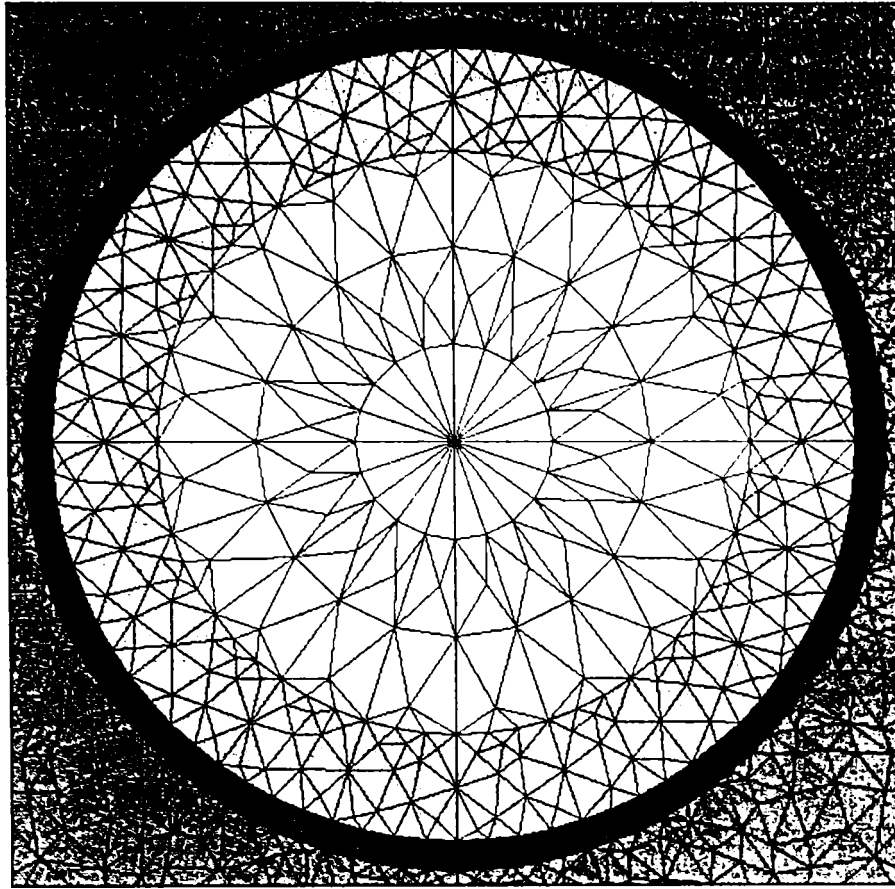


Fig. 3.7.5

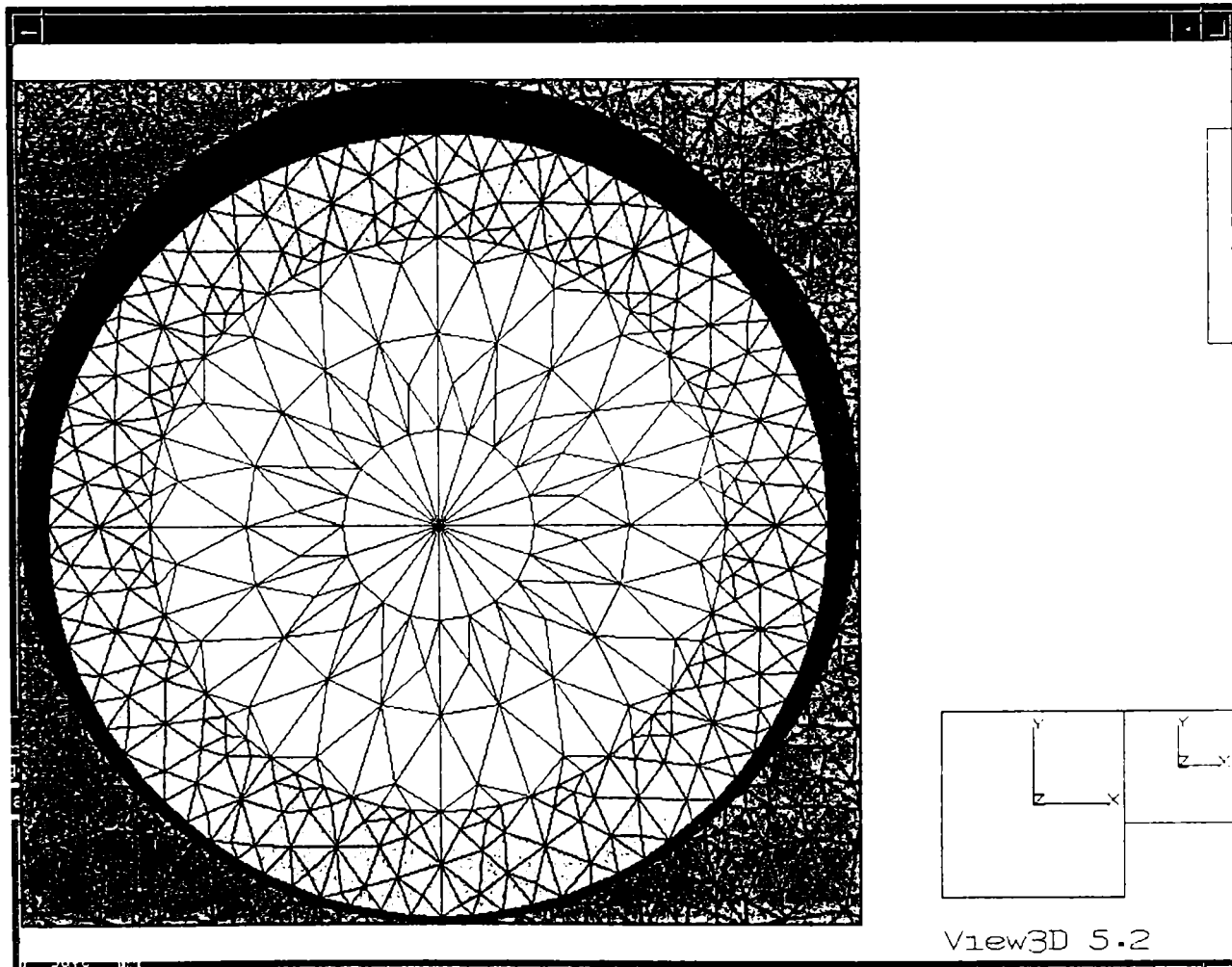


Fig. 3.7.6

Cu fișierul MatLab *prob3d3.m*, (anexa 2), am generat fișierul *prob3d.in* în forma în care este recunoscut de comanda **prob3d**. Am asociat pentru subdomeniul *al* materialul *alum*, pentru *li* materialul (lichidul) *LI2N* și pentru subregiunile din poli x_i și y_i , $i=a,b,c,\dots,t$ am asociat magnetul *NdFe* (pe fiecare subregiune magnetizația permanentă având altă orientare).

Am rulat comanda **prob3d** < *prob3d.in*, care pe baza fișierului MODEL3.DAT definește în formă finală o problemă 3D, generând fișierul PROBL3.DAT.

Comanda **Solv3D** este *solverul* programului *MagNet* și reprezintă denumirea generală a unui set de programe ce calculează câmpul electromagnetic în geometrii tridimensionale, [MN1].

Problema analizată este o problemă de *magnetostatică*. Comanda **Pm3d_h** (*The MagNet 3Dx Statics Solver*), [MN1], pe baza fișierelor anterior formate, MODEL3.DAT și PROBL3.DAT, generează fișierul SOLUT3.DAT cu rezultatele problemei.

Dacă toate materialele folosite sunt medii liniare, atunci rezultă un sistem liniar de ecuații. În acest caz, *solverul* rezolvă sistemul folosind metoda *gradientului conjugat*, [Ki1], prin care soluția sistemului este corectată iterativ până la atingerea unei toleranțe specificate.

Dacă există și materiale neliniare în definirea problemei, atunci sistemul de ecuații devine neliniar. Metoda folosită de **Solv3D** pentru rezolvarea sistemului neliniar este bazată pe algoritmul *Newton-Raphson*, [Ki1]. Fiecare pas al algoritmului obține soluția unui set de ecuații liniare folosind metoda gradientului conjugat. Când modificarea soluțiilor pentru doi pași consecutivi este mai mică decât toleranța impusă (toleranța Newton), procesul iterativ se oprește.

În diferitele cazuri analizate rețeaua de discretizare era formată din aproximativ 25000-30000 de noduri și 130000-150000 de tetraedre.

Comanda **View3D** reprezintă *postprocesorul* ce permite vizualizarea sub formă grafică a mărimilor primare calculate de *solver* sau a diferitelor mărimi ce derivă din cele primare, [MN1].

În figurile următoare am reprezentat grafic distribuția inducției magnetice în domeniul analizat pentru un lichid cu $\mu_r=1.2$ și polii având $M_p=910.36$ kA/m și $\mu_m=1$, (magnet *NdFe*).

Fig.3.7.7 prezintă grafic inducția magnetică în întreg lagărul (domeniul analizat), pentru $\Delta=0$ mm și respectiv $\Delta=0.8$ mm.

Modul de variație a inducției magnetice în arbore este prezentat în fig.3.7.8 iar în lichidul magnetic în fig.3.7.9. Se observă o repartiție simetrică a inducției pentru cazul când $\Delta=0$ mm (arborele este centrat în lagăr) și o repartiție nesimetrică pentru $\Delta=0.8$ mm. Inducția are valori mai ridicate în porțiunea unde stratul de lichid este mai mic.

Fig.3.7.10 prezintă distribuția inducției magnetice în polii magnetici. Se observă un câmp mai intens la extremitatea polului (după axa *z*) decât la mijlocul său.

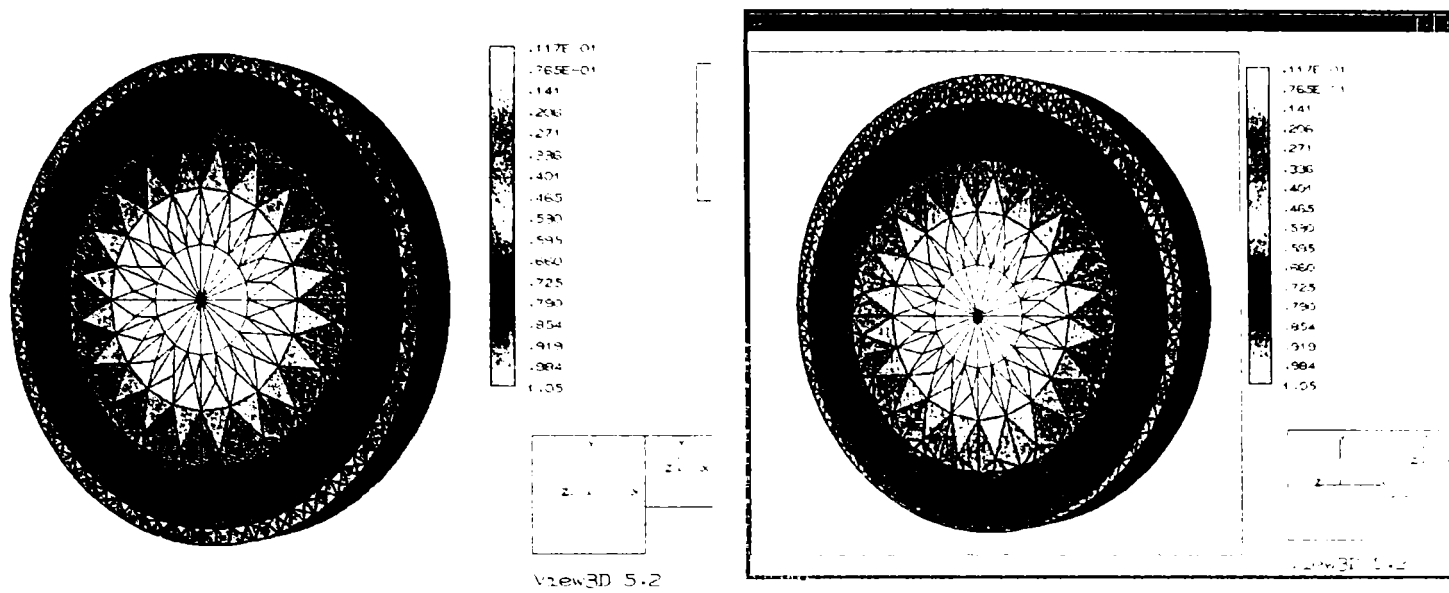


Fig.3.7.7 a) $\Delta=0$ mm b) $\Delta=0.8$ mm

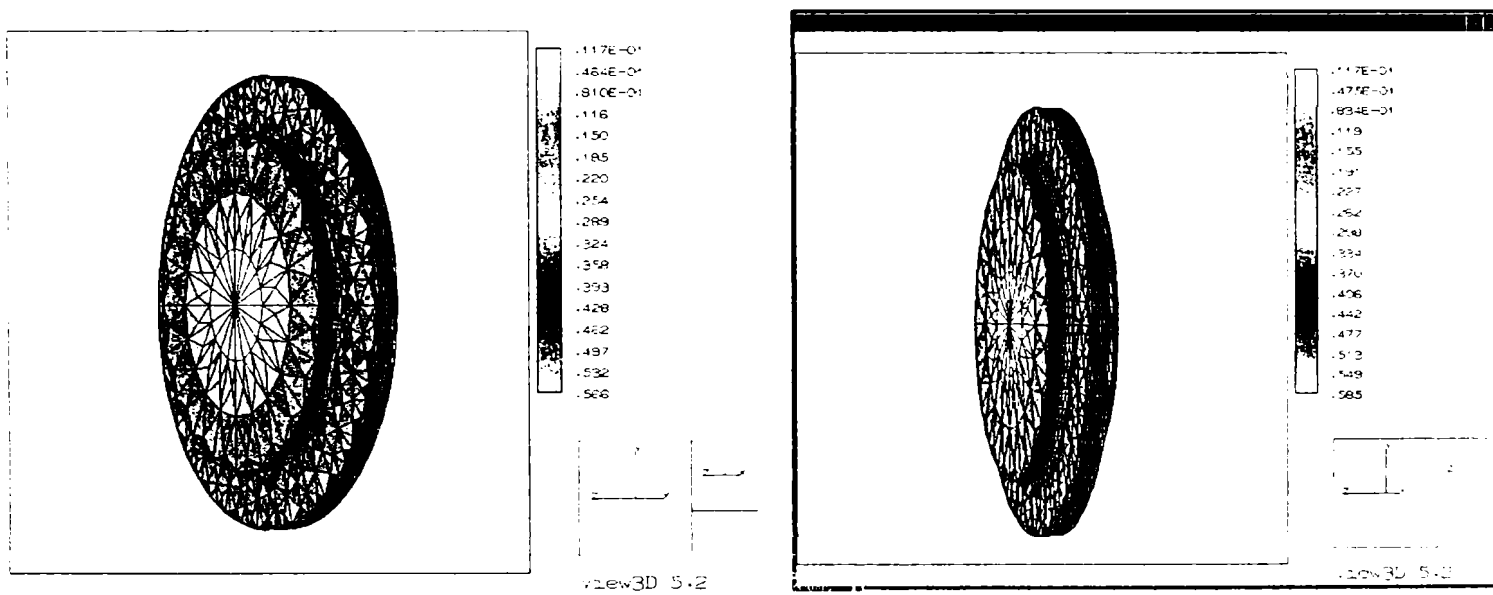


Fig.3.7.8 a) $\Delta=0$ mm b) $\Delta=0.8$ mm

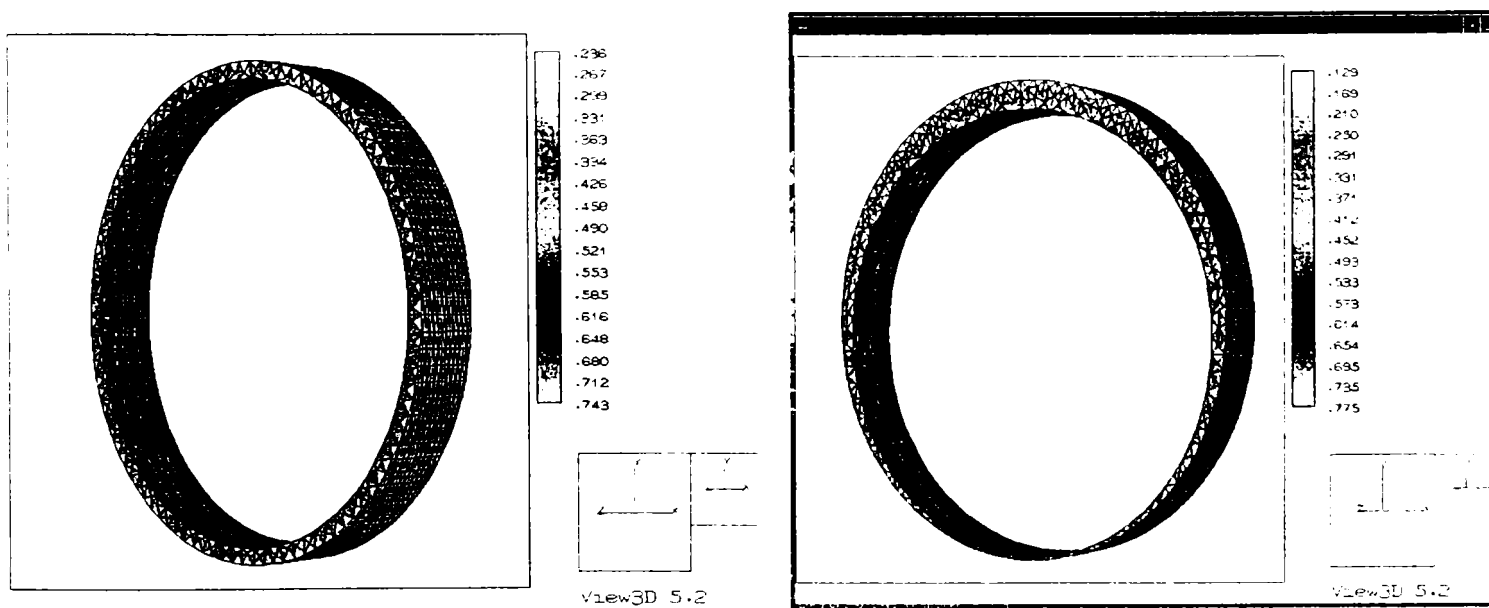


Fig.3.7.9 a) $\Delta=0$ mm b) $\Delta=0.8$ mm

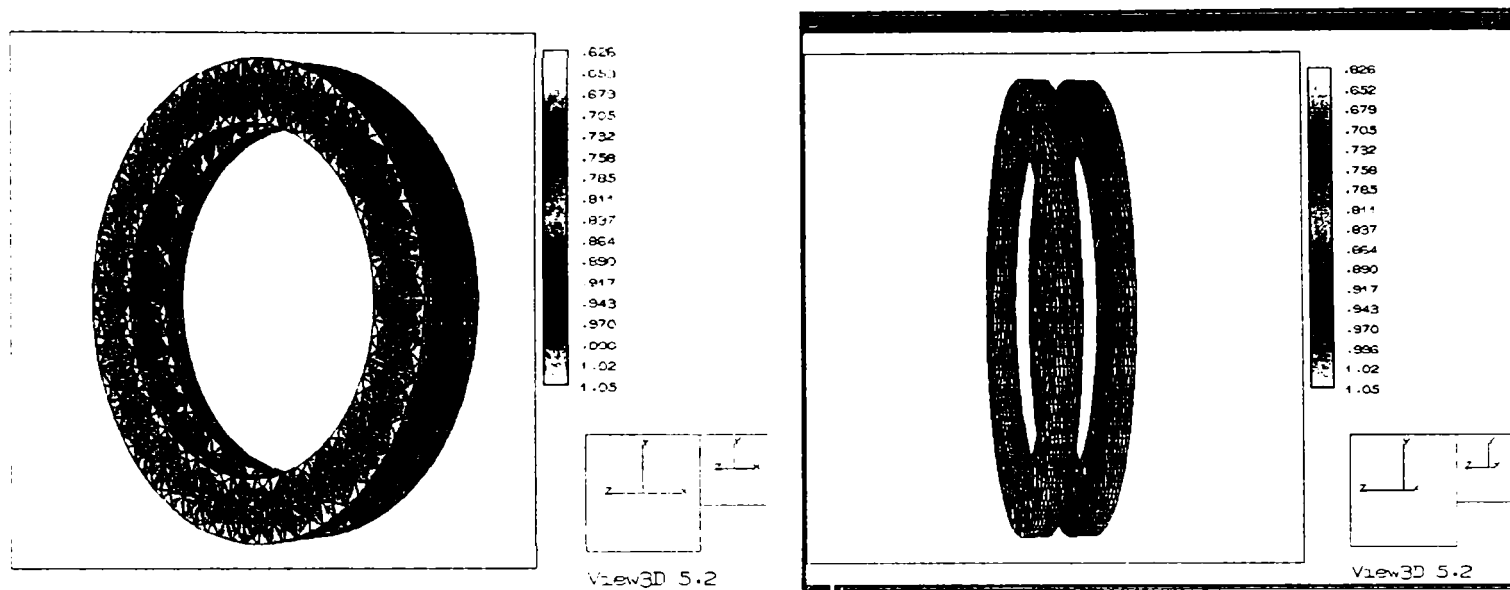


Fig.3.7.10 a) $\Delta=0$ mm b) $\Delta=0.8$ mm

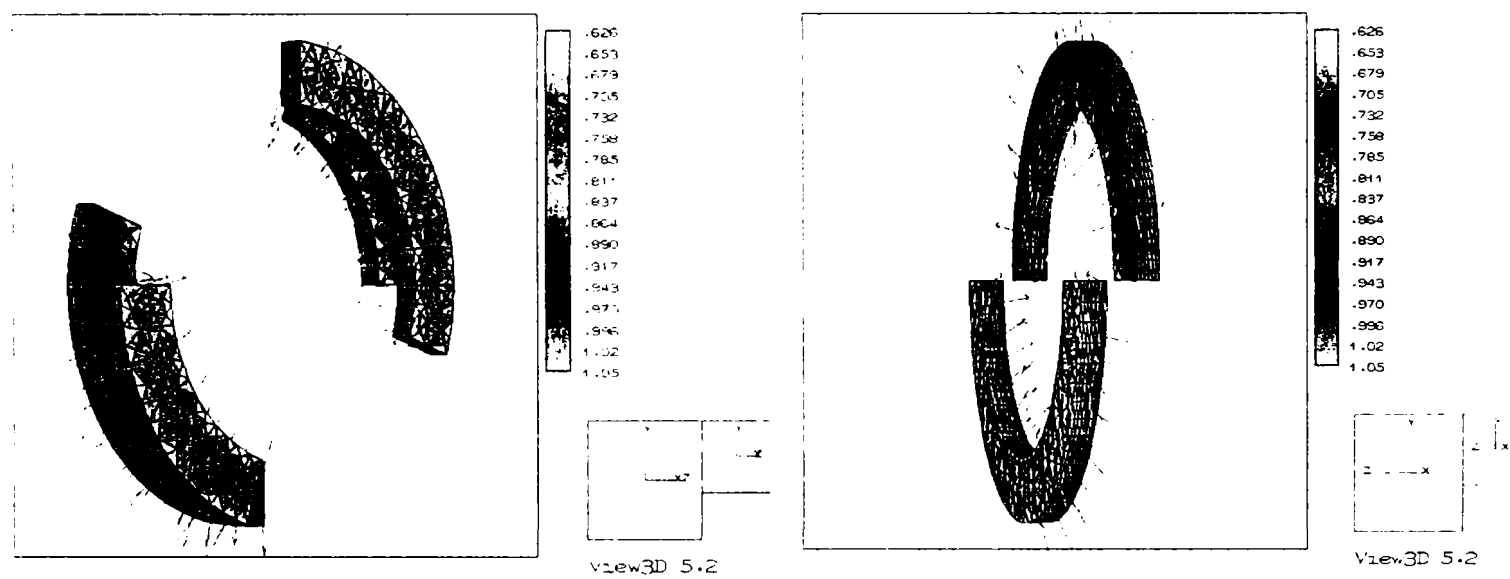


Fig.3.7.11 a) $\Delta=0$ mm b) $\Delta=0.8$ mm

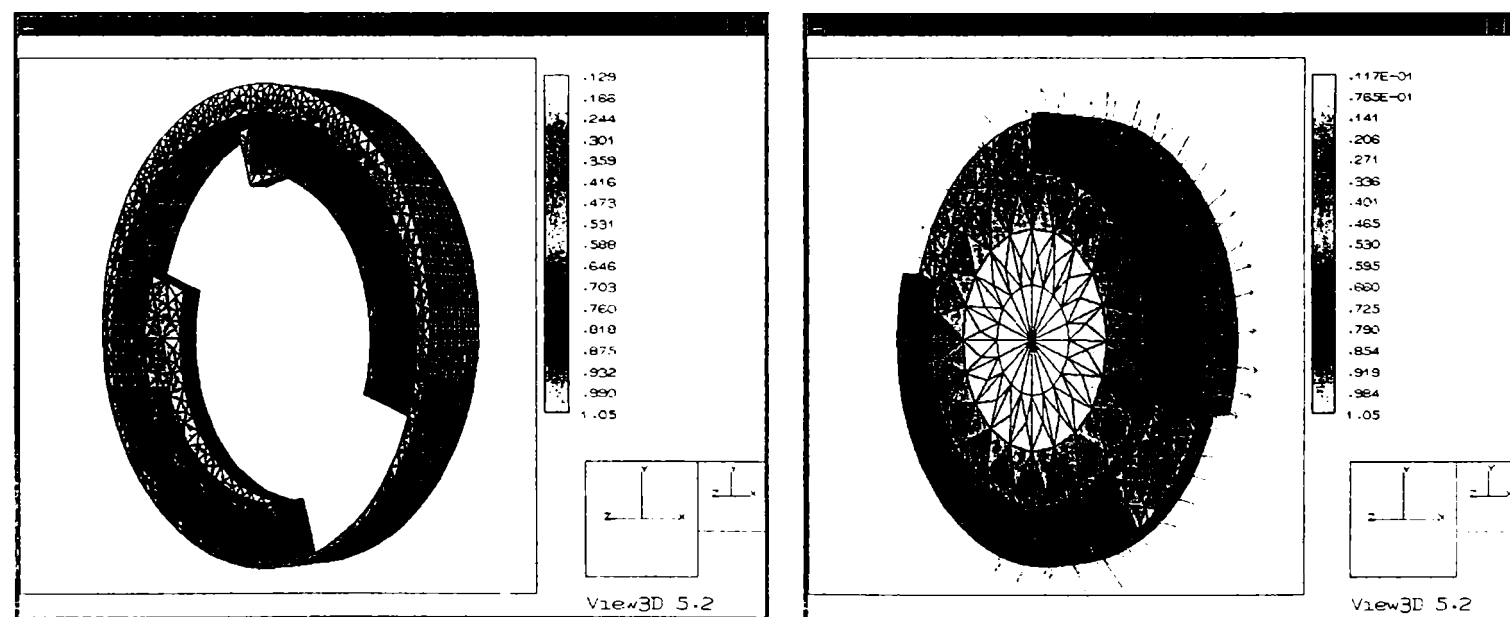


Fig.3.7.12 a) $\Delta=0$ mm b) $\Delta=0.8$ mm

În fig.3.7.11 și fig.3.7.12 am reprezentat inducția în diferite subdomenii din modelul analizat pentru $\Delta=0 \text{ mm}$ în fig.3.7.11 și respectiv $\Delta=0.8 \text{ mm}$ în fig.3.7.12.

Cum se poate observa din toate aceste reprezentări, câmpul magnetic este puternic în polii magnetici și scade pronunțat în afara lor.

În continuare voi analiza variația câmpului magnetic de-a lungul axei z în punctele de pe rotor cu dezaxare maximă (partea de sus a rotorului). Voi compara modul de variație a câmpului magnetic rezultat din calculul analitic aproximativ, făcut în paragraful 3.5, cu cel obținut din modelarea numerică.

Pentru magnet cu $M_p=910.36 \text{ kA/m}$ și $\mu_{rm}=1$, și lichid cu $\mu_{rl}=1.2$, cu (3.4.11) rezultă constantele:

$$C_4 = 3.525 e^{-2kh_1} \text{ și } C_5 = 6.347 \cdot 10^3 \quad (3.7.2)$$

unde $k=714 \text{ rad/m}$. Componentele câmpului în mediul 3 (în lichid), obținute cu (3.4.17) în forma:

$$H_{3x} = -k(C_4 e^{ky} + C_5 e^{-ky}) \cos kx, \quad H_{3y} = -k(C_4 e^{ky} - C_5 e^{-ky}) \sin kx$$

devin:

$$\begin{aligned} H_{3x} &= -714(3.525 e^{-2kh_1} e^{ky} + 6.347 \cdot 10^3 e^{-ky}) \cos kx \\ H_{3y} &= -714(3.525 e^{-2kh_1} e^{ky} - 6.347 \cdot 10^3 e^{-ky}) \sin kx \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Analiza câmpului se face pentru $\Delta=0.8 \text{ mm}$. Pe rotor, $y=h_p=3.57 \text{ mm}$, iar în punctele de sus ale rotorului, unde dezaxarea este maximă, avem $h_l=h_{max}=\delta+\Delta=1.8 \text{ mm}$. Dacă ținem seama că în coordonate cilindrice componenta după x a câmpului reprezintă practic componenta după axa z , H_z , iar componenta după y reprezintă componenta radială, H_r , relația (3.7.3) devine:

$$\begin{aligned} H_{3z} &= -3.567 \cdot 10^5 \cos kz \\ H_{3r} &= 3.517 \cdot 10^5 \sin kz \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Relațiile (3.7.4) reprezintă modul de variație a componentei după axa z și a celei radiale obținute analitic pe modelul plan-paralel adoptat în paragraful 3.4.

În fig.3.7.13 și fig.3.7.14, curbele notate cu 1 reprezintă modul de variație a componentei după axa z și respectiv componentei radiale, date de relația (3.7.4), funcție de coordonata z (pentru o jumătate de lungime de undă corespunzătoare domeniului modelat numeric). Curbele notate cu 2 reprezintă variația celor două componente ale câmpului pe suprafața rotorului, de-a lungul axei z , pentru dezaxarea maximă, obținute prin modelarea numerică. Se observă o variație a lor diferită de cea cosinusoidală (sinusoidală) obținute în calculul analitic.

De remarcat că pentru modelarea numerică, valorile componentei tangente a câmpului sunt mult mai mici decât cele ale componentei după axa z sau a celei radiale.

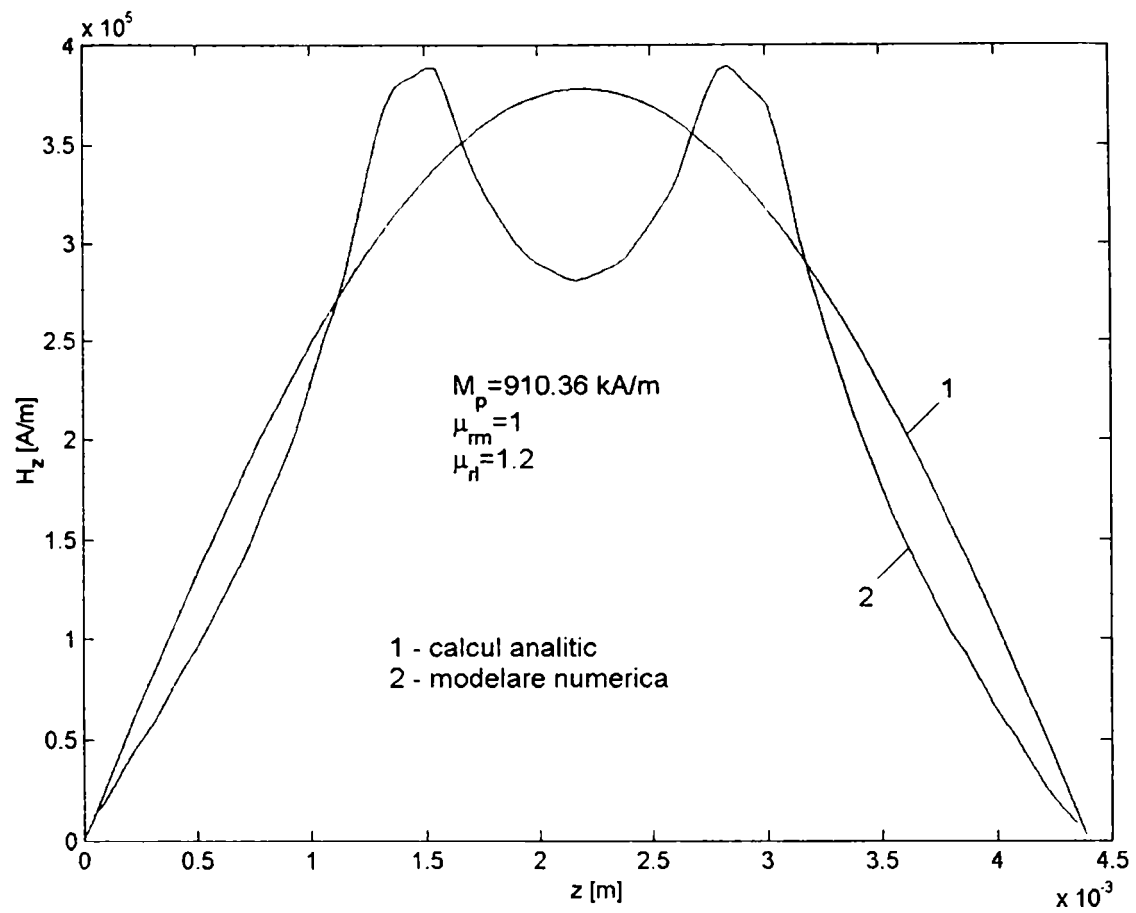


Fig. 3.7.13

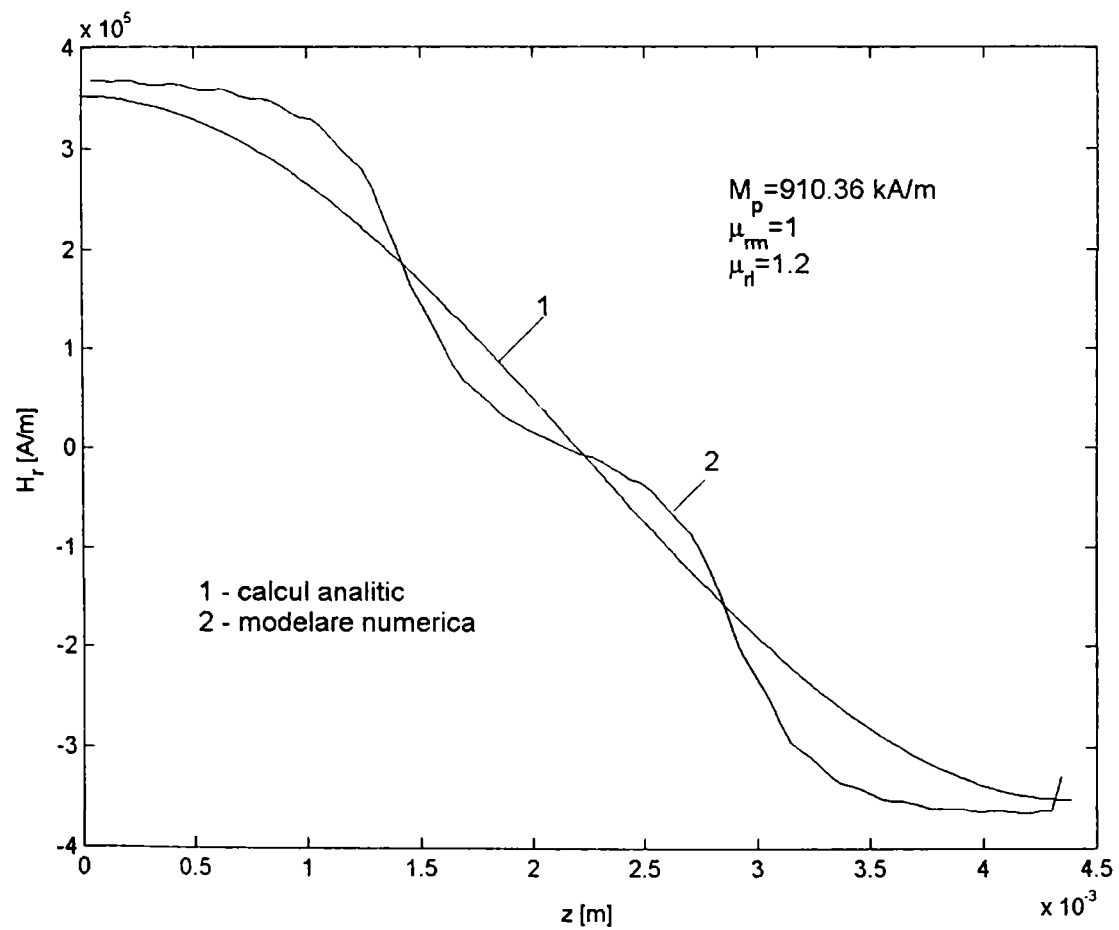


Fig. 3.7.14

3.7.3 Calculul numeric al forței de levitație

Pentru calculul forței de levitație am folosit teorema conform căreia forța are expresia, [DS2]:

$$\mathbf{F} = -\oint_{\Sigma} \left(\int_0^H \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right) d\mathbf{S} + \oint_{\Sigma} \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.7.5)$$

unde Σ reprezintă suprafața arborelui cu poli magnetici iar $d\mathbf{S}$ și \mathbf{n} sunt vectorii element de suprafață și respectiv normala, orientați spre exteriorul arborelui. Suprafața Σ reprezintă cilindrul de rază r_2 și înălțime egală cu jumătate din lungimea de undă, $(\lambda/2)$. Datorită simetriei câmpului am neglijat integrala pe cele două baze ale cilindrului, astfel încât:

$$\mathbf{F} = - \int_{S_l} \left(\int_0^H \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right) d\mathbf{S} + \int_{S_l} \mathbf{H}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.7.6)$$

unde S_l reprezintă suprafața laterală a cilindrului de rază r_2 (a arborelui) trasată prin lichidul magnetic iar componentele câmpului au fost determinate numeric.

Dacă se lucrează pe porțiunea liniară a curbei de magnetizare a lichidului magnetic, $\int_0^H \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} = \mu_l \int_0^H \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu_l H^2$, egalitatea (3.7.6) devine:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \mu_l \int_{S_l} H^2 d\mathbf{S} + \mu_l \int_{S_l} \mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.7.7)$$

Utilizând coordonatele cilindrice în care $\mathbf{H} = H_r \mathbf{u}_r + H_\theta \mathbf{u}_\theta + H_z \mathbf{u}_z$, fig.3.7.15, și cum $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n} = dS \mathbf{u}_r$, avem $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = H_r$, $H = \sqrt{H_r^2 + H_\theta^2 + H_z^2}$ și $\mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) = (H_r \mathbf{u}_r + H_\theta \mathbf{u}_\theta + H_z \mathbf{u}_z) H_r = H_r^2 \mathbf{u}_r + H_\theta H_r \mathbf{u}_\theta + H_z H_r \mathbf{u}_z$.

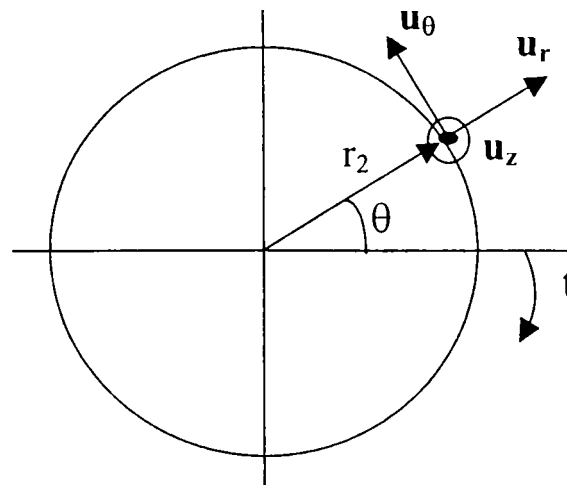


Fig. 3.7.15

Cu aceasta, (3.7.7) se scrie în forma:

$$\mathbf{F} = \mu_l \int_{S_l} \left(H_r^2 - \frac{H^2}{2} \right) dS \mathbf{u}_r + \mu_l \int_{S_l} H_r H_\theta dS \mathbf{u}_\theta + \mu_l \int_{S_l} H_r H_z dS \mathbf{u}_z \quad (3.7.8)$$

Cum forța de levitație are componentă diferită de zero doar după direcția dezaxării maxime, aceasta va fi, (fig.3.7.15):

$$F_m = F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta = \mu_l \int_{S_l} \left(H_r^2 - \frac{H^2}{2} \right) \sin \theta dS + \mu_l \int_{S_l} H_r H_\theta \cos \theta dS \quad (3.7.9)$$

sau

$$F_m = \mu_l \int_{S_l} \left[\left(H_r^2 - \frac{H^2}{2} \right) \sin \theta + H_r H_\theta \cos \theta \right] dS \quad (3.7.10)$$

În calculul forței intervin componentele câmpului de pe suprafața laterală a arborelui.

Comanda **slic3d** a programului MagNet permite definirea unor suprafețe plane sau cilindrice din domeniul 3D analizat în care sunt date valorile câmpului magnetic, [MN1]. Informațiile referitoare la aceste suprafețe, salvate în fișiere text, se referă la rețeaua de discretizare corespunzătoare suprafeței definite, formată din triunghiuri obținute din intersecția rețelei tridimensionale de tetraedre cu suprafața definită, și valorile câmpului magnetic în nodurile rețelei plane. Aceste informații sunt păstrate în fișierul PROBL.DAT.

În cazul analizat, suprafața cilindrică a arborelui de rază $r_2=13.57 \text{ mm}$, este secționată după o direcție corespunzătoare lui $\theta=0$, cum indică fig.3.7.16.

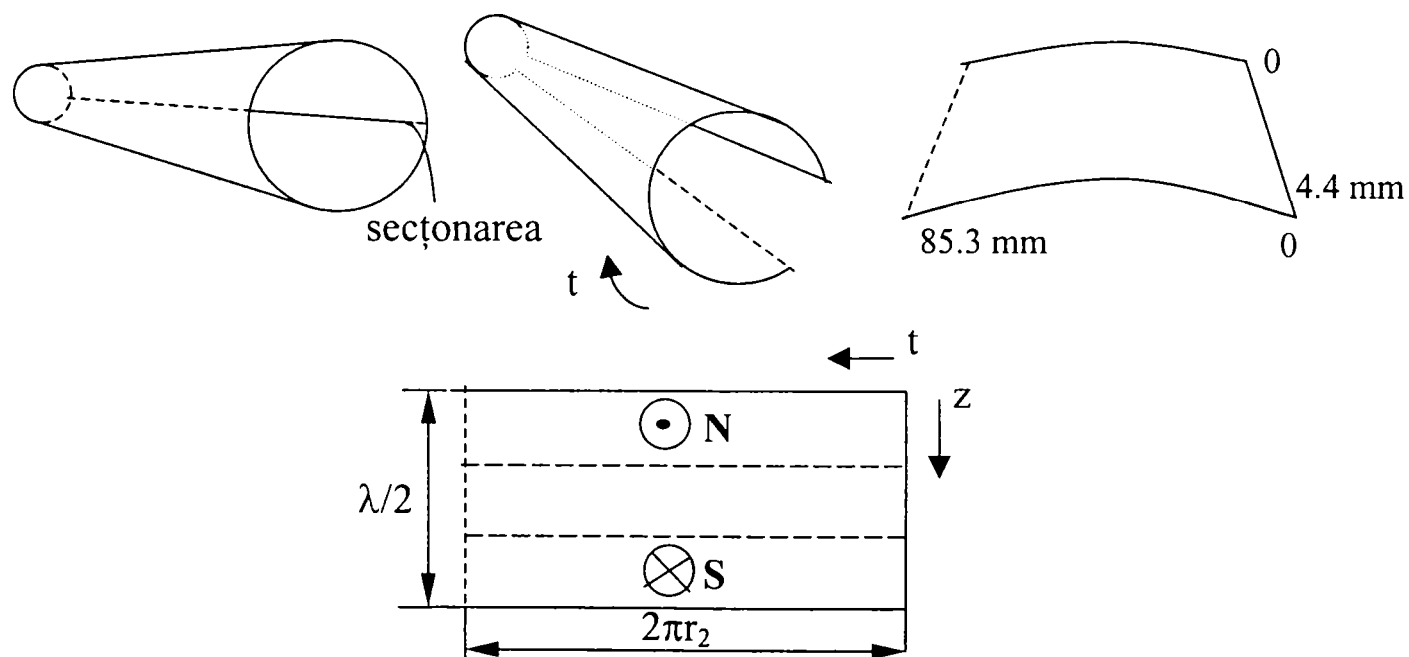


Fig. 3.7.16

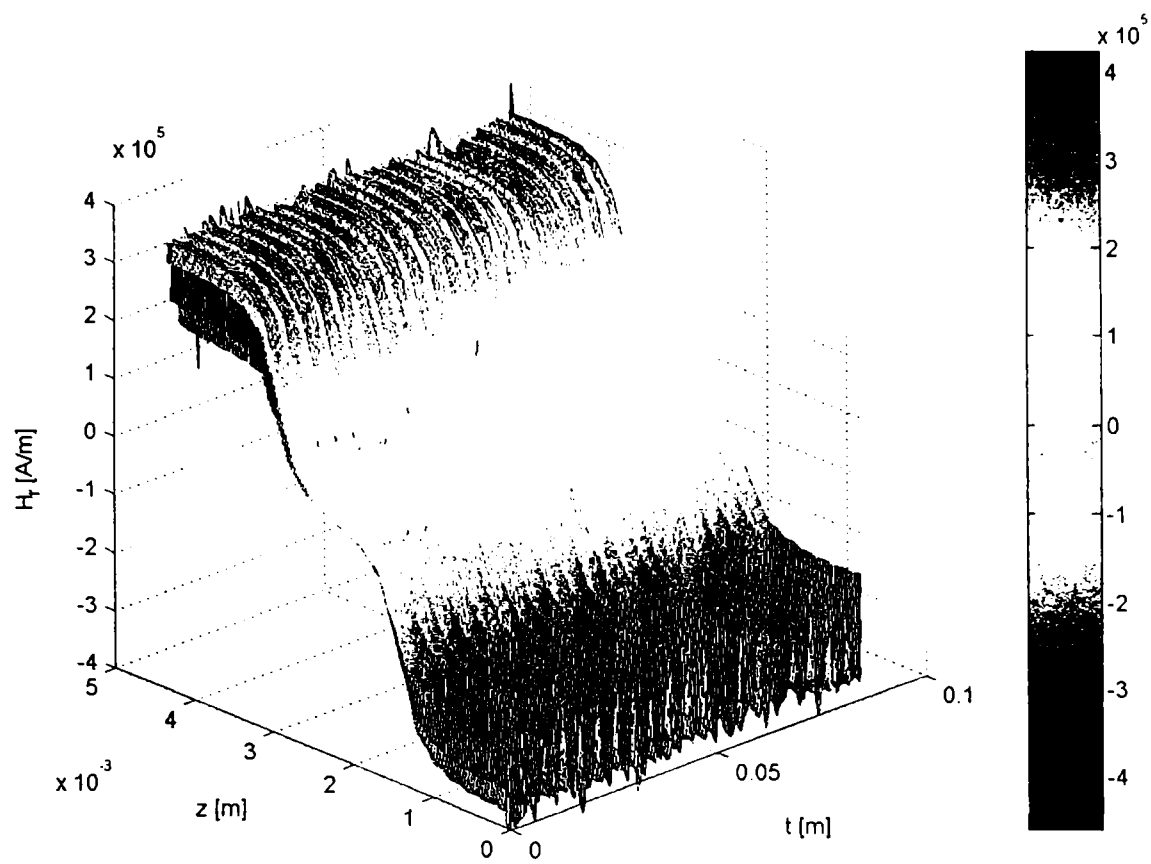


Fig. 3.7.17

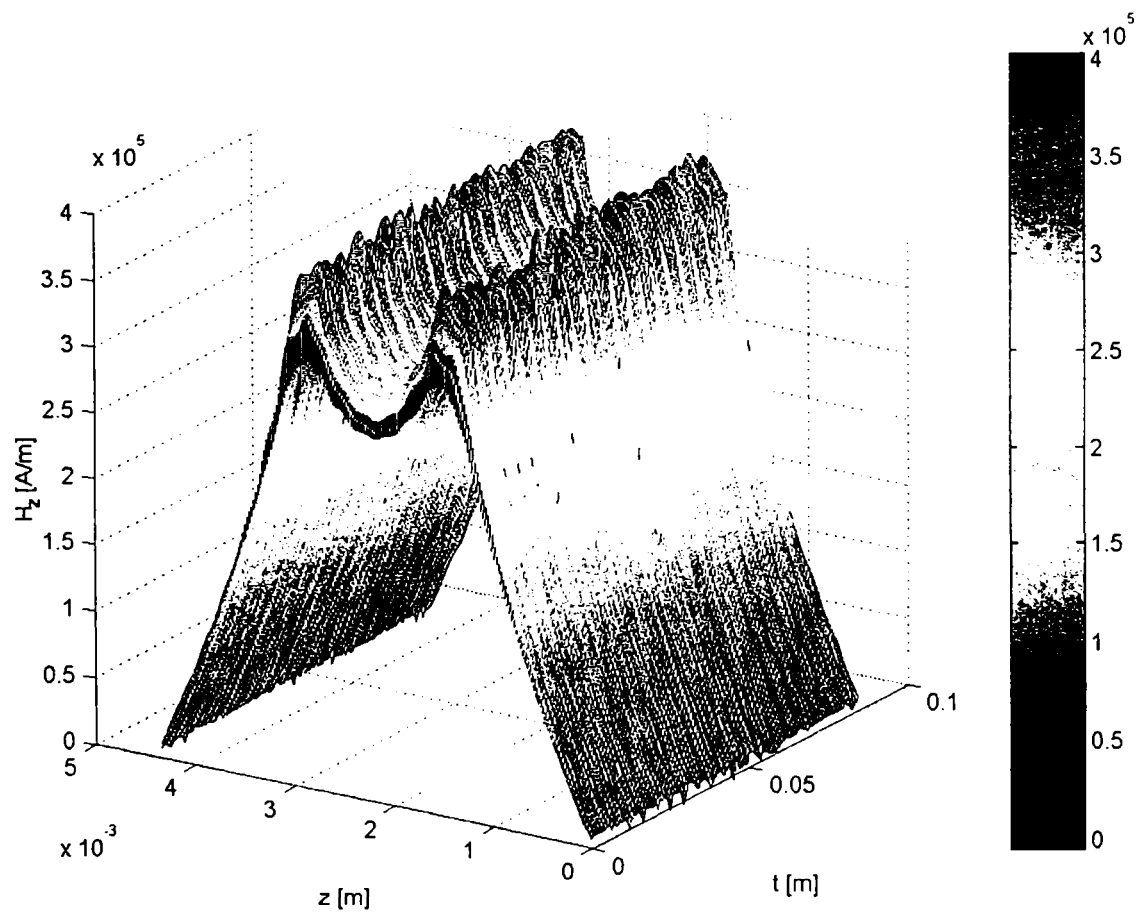


Fig. 3.7.18

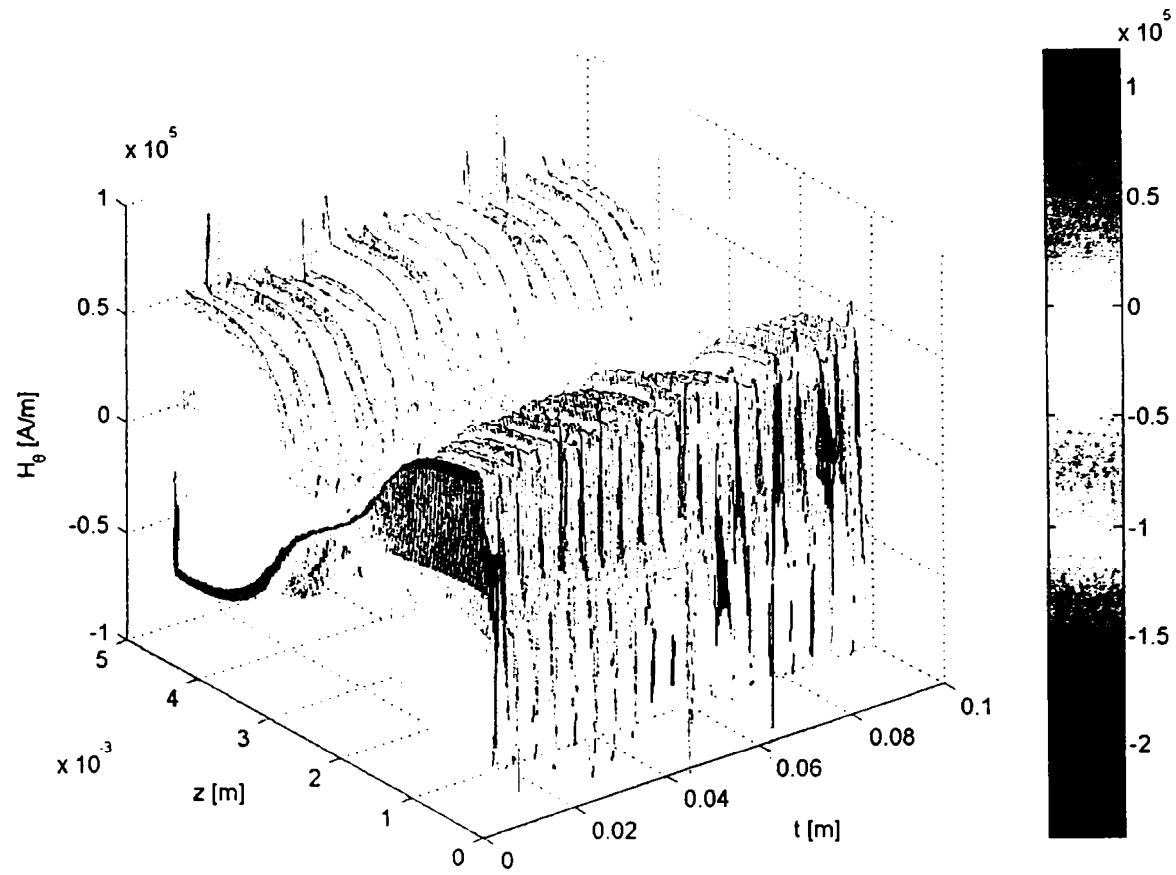


Fig. 3.7.19

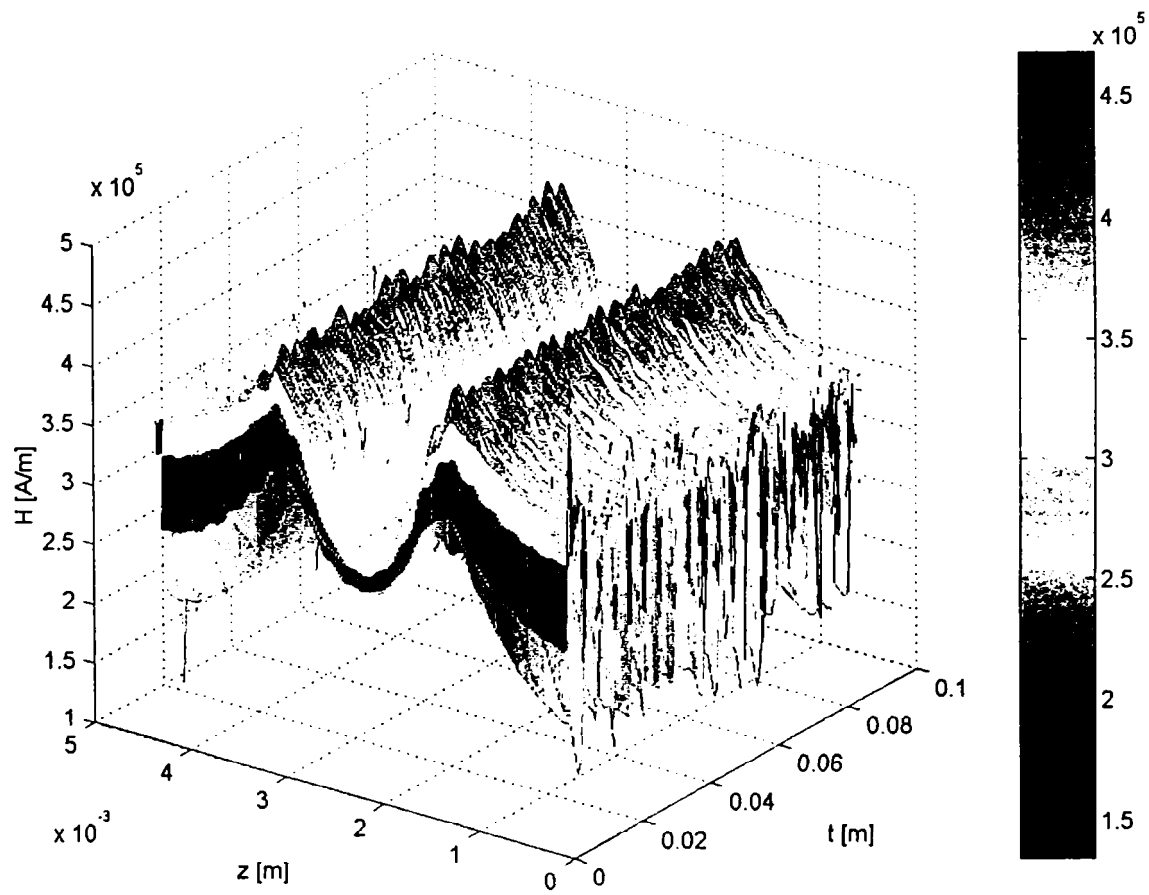


Fig. 3.7.20

Suprafața dreptunghiulară rezultată este formată din aproximativ 20000 de triunghiuri (elemente finite). Cu informațiile despre rețeaua de discretizare și componentele câmpului în coordonatele cilindrice, au fost create următoarele fișiere text:

- *nodes.txt* – cu numerotarea triunghiurilor și a nodurilor ce alcătuiesc fiecare triunghi;
- *xz.txt* – cu coordonatele nodurilor de pe suprafața plană rezultată;
- *h6.txt* – componentele cilindrice ale intensității câmpului magnetic; deoarece am lucrat cu elemente de ordinul doi în lichidul magnetic, valorile câmpului în fiecare element finit au fost date în șase puncte (cele trei noduri și mijloacele laturilor ce alcătuiesc triunghiul).

Deoarece elementele finite sunt foarte mici, am considerat valoarea câmpului constantă pe un element, egală cu media aritmetică a valorilor din cele șase puncte ale fiecărui triunghi. Pentru aceasta am realizat programe proprii în *MatLab*, prezentate în anexa 4 și anexa 5.

Cele trei componente ale intensității câmpului magnetic, H_r , H_z , H_θ , precum și modulul câmpului magnetic, H , pe suprafața dreptunghiulară obținută prin desfacerea suprafeței laterale a cilindrului, sunt prezentate în fig.3.7.17, fig.3.7.18, fig.3.7.19 și fig.3.7.20. Câmpurile corespund la dezaxare $\Delta=0.8\text{ mm}$ pentru magnet niridiu-fier cu $M_p=910.36\text{ kA/m}$, $\mu_{rm}=1$ și lichid cu $\mu_{rl}=1.2$.

Cu valorile câmpului din fiecare element finit, expresia (3.7.10) a forței de levitație ce acționează asupra arborelui pe o lungime egală cu jumătate din lungimea de undă, devine:

$$F_m = \mu_l \sum_i \left[\left(H_{r_i}^2 - \frac{H_i^2}{2} \right) \sin \theta_i + H_{r_i} H_{\theta_i} \cos \theta_i \right] \Delta S_i \quad (3.7.11)$$

Forța de levitație ce acționează pe unitatea de lungime a arborelui va fi:

$$F_m^* = \frac{F_m}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{2 F_m}{\lambda} \quad (3.7.12)$$

Programul de calcul al forței l-am scris în *MatLab* și este prezentat în anexa 3. Pe baza acestui program am reprezentat în fig.3.7.21 și fig.3.7.22 dependența forței de levitație funcție de dezaxarea Δ pentru lichid magnetic presupus liniar cu $\mu_{rl}=1.2$ și, magnet niridiu-fier cu $M_p=910.36\text{ kA/m}$, $\mu_{rm}=1$ și respectiv samariu-cobalt cu $M_p=754.063\text{ kA/m}$, $\mu_{rm}=1$. Cu 1 au fost notate curbele obținute pe baza calculului analitic iar cu 2 cele obținute pe baza calculului numeric. Se observă o corespondență relativ bună între cele două curbe.

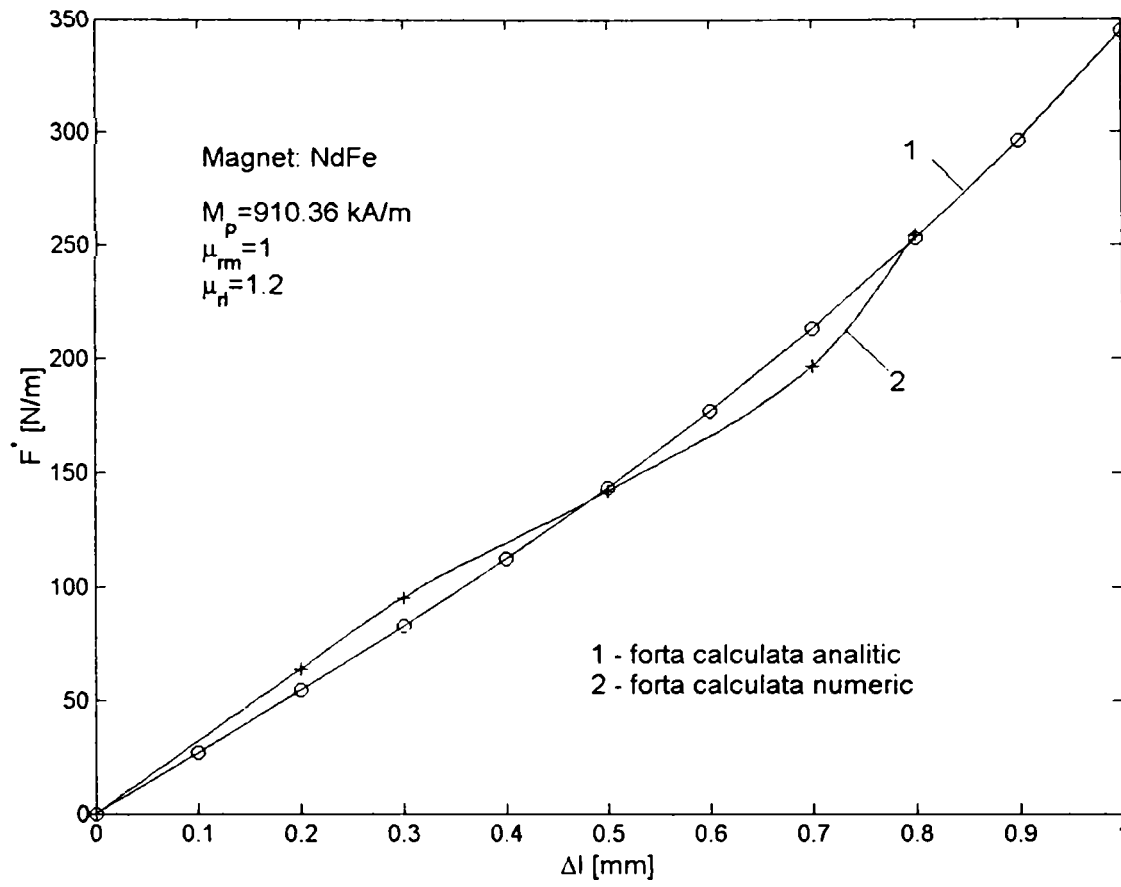


Fig. 3.7.21

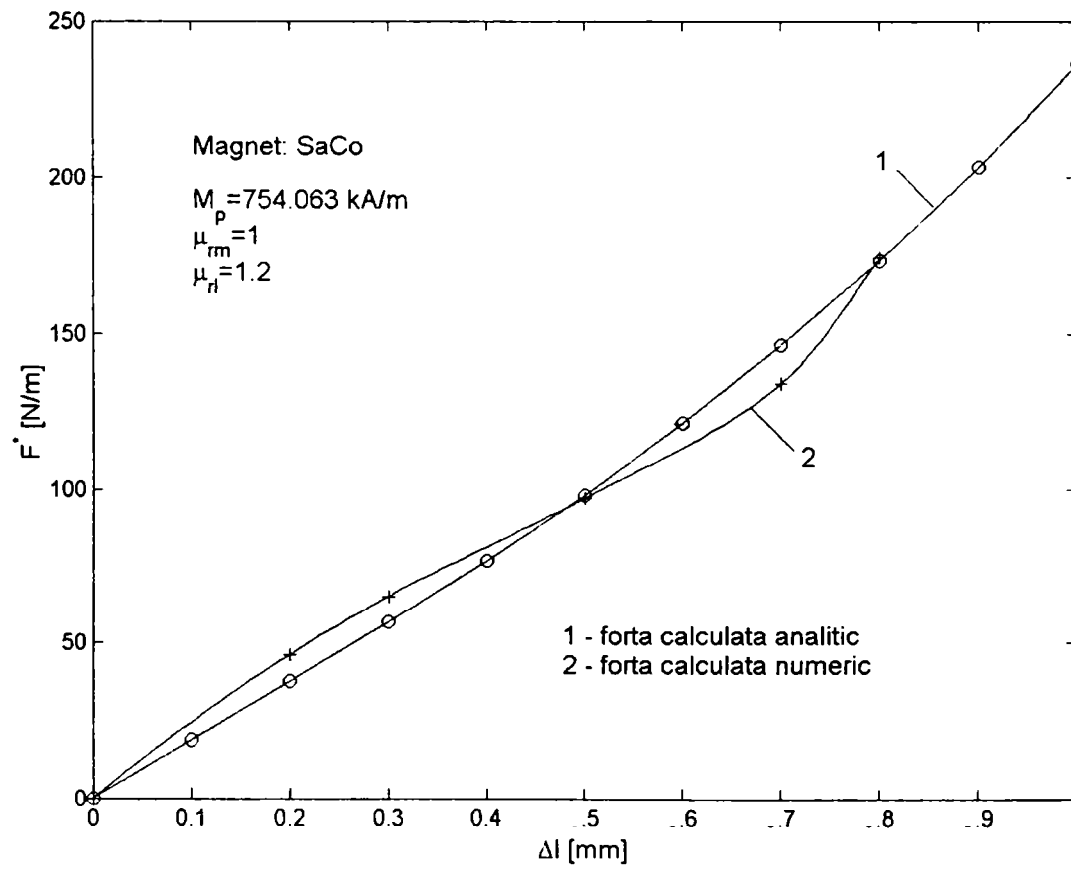


Fig. 3.7.22

4 CONCLUZII ȘI SUBLINIAREA PRINCIPALELOR CONTRIBUȚII

În acest ultim capitol se prezintă concluziile privind obiectivele atinse prin prezenta lucrare, cu sublinierea contribuțiilor autorului. Prezentarea urmărește structura lucrării referindu-se sintetic la conținutul capitolelor anterioare.

Capitolul 1, cuprinde o informare bibliografică asupra lichidelor magnetice. Pe baza bibliografiei vaste de care am beneficiat în cadrul Colectivului de lichide magnetice din Timișoara, titluri menționate la referințele bibliografice ale tezei, am abordat sumar probleme legate de structura lichidelor magnetice și de modul de producere al lor. Paragraful 1.2 se referă la principalele proprietăți magnetice și reologice ale lichidelor magnetice care ar putea influența comportarea lagărelor cilindrice cu lichid magnetic.

Paragraful 1.3 tratează acțiuni ponderomotoare în lichide magnetice. În redactarea acestui paragraf am folosit, în special, lucrări publicate de conducătorul lucrării de doctorat, lucrări menționate la referințele bibliografice. Am prezentat o tratare teoretică a problemei forțelor de natură magnetică ce se exercită asupra corpurilor imersate în lichid magnetic și care se găsesc în prezența unor câmpuri magnetice. De remarcat că în lichide magnetice, datorită presiunii magnetice din ele, se operează cu tensorul tensiunilor fictive, diferit de tensorul tensiunilor maxwelliene. Dintre expresiile forțelor rezultante de natură magnetică, ce se exercită asupra corpurilor (magnetice sau nemagnetice) imersate în lichid magnetic, am remarcat expresiile (1.3.34) și (1.3.60). Acestea le voi folosi în calculul forței de readucere pentru lagărele magnetice tratate în capitolele doi și trei.

Capitolul al doilea tratează lagărele cilindrice cu magnet permanent și lichid magnetic. Arborele cilindric al lagărului este magnetizat permanent cu magnetizația uniformă având o direcție ortogonală pe un plan ce conține axa arborelui și levitează în lichidul magnetic (levitație de ordinul 2). Datorită dezaxării dintre axa arborelui și cea a statorului, dezaxare în direcția magnetizației permanente a arborelui, asupra arborelui se manifestă o forță magnetică de readucere care tinde să-l axeze cu statorul. Am urmărit determinarea unei expresii a forței magnetice de readucere pe unitatea de lungime în funcție de dimensiunile lagărului, de proprietățile magnetice ale arborelui și ale lichidului magnetic și de dezaxarea arborelui.

În paragraful 2.1 am elaborat un calcul analitic detaliat al câmpului magnetic dintr-un lagăr cilindric cu magnet permanent și lichid magnetic, folosind coordonatele bipolare. Am considerat că magnetul permanent nu se magnetizează temporar ($\mu_{rm}=1$). Din ecuațiile câmpului a rezultat că potențialul magnetic scalar, V_H , satisface o ecuație de tip Laplace în toate cele trei domenii ale lagărului. Folosind metoda separării variabilelor, potențialul magnetic scalar și ca urmare

câmpul magnetic în lagăr a rezultat sub forma unei sume infinite de termeni. Pe baza componentelor câmpului din lichidul magnetic, am determinat o expresie originală a forței de levitație ce se exercită asupra arborelui pe unitatea de lungime, utilizând expresia forței ce se exercită asupra statorului, (1.3.60). Expresia obținută pentru forța pe unitatea de lungime a arborelui este dată de relația (2.1.50), în forma unei serii infinite de termeni. Ea arată că forța de readucere pe unitatea de lungime este proporțională cu pătratul magnetizației permanente M_p , este determinată de permeabilitatea relativă a lichidului magnetic, μ_r , de dimensiunile lagărului și dezaxarea Δl prin intermediul lui K_n , dat de (2.1.49).

Pentru calculul forței cu (2.1.50) am stabilit în prealabil, pentru o dezaxare dată, numărul termenilor din serie astfel încât diferența raportată dintre două valori consecutive ale forței din (2.1.50), să fie sub 0.01 (1%). A rezultat, sub formă grafică, numărul minim de termeni ai seriei funcție de dezaxare pentru care diferența raportată este sub 0.01 , fig.2.17, fig.2.1.9. Am determinat această dependență pentru o gamă largă de lichide magnetice cu μ_r diferit și am constatat că dependența $n=f(\Delta l)$ nu depinde de permeabilitatea relativă a lichidului magnetic.

Noua expresie obținută pentru forța de levitație ce se exercită asupra unității de lungime a arborelui am comparat-o cu cea dată în [Cel], tot sub forma unei serii, relație care a fost determinată pornindu-se de la expresia forței ce acționează asupra arborelui magnetic, (1.3.34). Comparația am făcut-o sub formă grafică, fig.2.1.10, rezultând o foarte bună corespondență.

Am analizat modul în care raportul dintre raza arborelui, R_1 , și raza statorului, R_2 , notat cu k , influențează valoarea forței de readucere pentru o dezaxare dată și R_1 fixat. Rezultatele, prezentate sub formă grafică în fig.2.1.11 și fig.2.1.12 arată o creștere a forței când k tinde către unu.

Contribuțiile personale din acest paragraf, au fost publicate în lucrări la care sunt autor sau coautor, [Gr4], [DS9].

În paragraful 2.2 am elaborat un calcul aproximativ al lagărului cilindric cu lichid magnetic. Am determinat analitic câmpul magnetic produs de arborele magnetizat cu magnetizație permanentă M_p și permeabilitate relativă μ_{rm} în ipoteza în care lichidul magnetic de permeabilitate relativă μ_{rl} este de extensie infinită.

În calculul forței pe unitatea de lungime a arborelui am folosit expresia forței ce se exercită asupra statorului (vasului), (1.3.60), valabilă când lichidul se află în echilibru hidrostatic. Lichidul l-am considerat neliniar, admițând că intensitatea câmpului magnetic nu variază mult în punctele de pe suprafața lichidului magnetic limitat de vas. Am admis că vasul de permeabilitate magnetică μ_0 , nu modifică sensibil spectrul câmpului și că, deci, lichidul magnetic poate fi considerat de extensie foarte mare. Ca urmare, în expresia forței am folosit componentele câmpului determinate în condițiile în care lichidul are extensie infinită.

În evaluarea integralelor ce au rezultat în calculul forței de readucere pe unitatea de lungime, am folosit dezvoltarea în serii de puteri a integrantului, limitându-mă la primii doi termeni.

Am obținut relația (2.2.28), care determină cu aproximările menționate, forța de levitație ce se exercită asupra unității de lungime a arborelui cu magnetizație

temporară ($\mu_{rm} \neq 1$) și lichidul magnetic cu caracteristică neliniară. Relația poate fi utilă în calculul de proiectare al lagărului, fiind diferită de cea menționată în literatură, [Vs1], dedusă, probabil, prin alte procedee de calcul.

Dacă caracteristica lichidului se consideră liniară de permeabilitate magnetică relativă μ_{rl} , atunci din (2.2.28) am obținut relația (2.2.29), care evidențiază o dependență pătratică a forței de M_p și o creștere asimptotică a factorilor ce conțin pe μ_{rl} spre valoarea $3/2$ odată cu mărirea lui μ_{rl} . Atât (2.2.28) cât și (2.2.29) arată că forța este o funcție liniară de dezaxarea Δl .

Relația (2.2.29) diferă de cea dată în [B11], în care $\mu_{rm} = 1$. Verificarea expresiei (2.2.29) am făcut-o grafic prin compararea cu relația (2.1.50) (considerată expresia exactă a forței, cu toate că și în acest caz calculul câmpului s-a făcut în ipoteza modelului plan-paralel iar valoarea forței se obține limitând numărul de termeni ai sumei). Graficele din fig.2.2.4 și fig.2.2.5 ce exprimă dependența forței funcție de dezaxare, arată, cum era de așteptat, că relația (2.2.29) este cu atât mai exactă cu cât se folosesc lichide magnetice cu permeabilități relative mai mici, ($\mu_{rl} \rightarrow 1$). În cele două grafice am reprezentat și forța folosind expresia din [B11]. Se constată că precizia de calcul a forței folosind (2.2.29) este mai bună decât cea calculată cu relația din [B11], curbele corespunzătoare relației (2.2.29) fiind mai apropiate de cele date de (2.1.50) față de cele calculate cu [B11].

În concluzie, formulele aproximative (2.2.28) și (2.2.29) stabilite, dau indicații cu privire la dependența forței funcție de dimensiunile geometrice ale lagărului, de magnetizația permanentă, de dezaxare și de proprietățile fizice ale lichidului magnetic. Contribuțiile personale din acest paragraf sunt cuprinse în lucrarea [DS3], la care sunt coautor.

Paragraful 2.3 cuprinde un calcul numeric al lagărului cilindric cu lichid magnetic. Câmpul magnetic l-am determinat numeric, cu precizie ridicată, atât pentru lichide magnetice ideale cu caracteristica magnetică presupusă liniară cât și pentru lichide magnetice reale cu caracteristica magnetică neliniară ridicată experimental. Am folosit programul *Maxwell-2D* al firmei *ANSOFT*, bazat pe metoda elementelor finite. Am determinat câmpul magnetic pentru diferite tipuri de lichide magnetice și magneți permanenți la diferite dezaxări ale arborelui. Și în acest caz modelul matematic l-am considerat plan-paralel. Limita domeniului de modelat am considerat-o un cilindru de rază r^* aleasă astfel încât în punctele cilindrului valoarea câmpului să fie 0.04 din valoarea maximă a câmpului (atinsă în punctele de pe suprafața arborelui magnetizat permanent). În afara acestui domeniu, câmpul magnetic a fost considerat nul.

Pentru calculul forței de levitație am folosit expresia forței ce se exercită asupra rotorului, (1.3.34). Am elaborat un program propriu de calcul al forței funcție de componentele câmpului păstrate în fișiere text. Rezultatele obținute le-am prezentat în formă grafică. Am reprezentat dependența forței de readucere pe unitatea de lungime funcție de dezaxare pentru diferite lichide magnetice liniare și magneți permanenți cu $\mu_{rm} = 1$, rezultând graficele din fig.2.3.8÷fig.2.3.10. Rezultatele obținute pe cale numerică le-am comparat cu cele obținute pe cale analitică, cu (2.1.50). Pe baza reprezentărilor grafice făcute, se constată o foarte bună corespondență între graficele corespunzătoare calculului numeric cu cele

corespunzătoare relației (2.1.50), ceea ce confirmă încă o dată, valabilitatea relației (2.1.50).

Cu ajutorul modelării numerice am determinat câmpul magnetic pentru lichide magnetice reale, când caracteristica de magnetizare este neliniară. Cu aceste valori ale câmpului am calculat numeric forța de readucere. În fig.2.3.16, fig.2.3.18, fig.2.3.20 și fig.2.3.22 am reprezentat forța de readucere pe unitatea de lungime a rotorului funcție de dezaxare pentru diferite lichide magnetice cu caracteristicile neliniare cunoscute. Curbele au fost comparate cu cele corespuzătoare aproximării liniare a caracteristicii lichidului magnetic. Se constată o bună corespondență între aceste perechi de curbe.

Pe baza contribuțiilor personale din acest paragraf, a fost publicată lucrarea [Gr3] la care sunt coautor.

Capitolul trei se referă la calculul lagărelor cu poli alternanți. Lagărul magnetic cu poli alternanți plasați în stator și lichid magnetic în interstițiul dintre stator și rotorul amagnetic a fost propus pentru prima dată de Rosensweig, [Ro2]. Un calcul analitic sumar al acestui tip de lagăr este descris în paragraful 3.1, având la bază lucrarea [Be1]. Calculul câmpului magnetic și a forței de natură magnetică ce se exercită asupra arborelui nemagnetic (datorită excentricității sale față de axa statorului), au fost făcute în ipoteza că polii magnetici plasați în stator sunt de extensie radială infinită și extensie infinită după axa z .

Paragraful 3.2 prezintă un calcul analitic aproximativ al lagărului cu poli alternanți plasați în stator, având la bază lucrarea [DS4]. Și în acest caz, pentru calculul analitic al câmpului magnetic, se consideră extensia radială infinită a polilor alternanți, fiind adoptat un model plan-paralel corespuzător căruia magnetizația permanentă a polilor este descrisă de o funcție analitică aproximativă. Lichidul magnetic este considerat liniar, iar pentru calculul forței de natură magnetică ce acționează asupra arborelui nemagnetic se folosește expresia levitației de ordinul 1.

Un calcul numeric al lagărului cu poli alternanți plasați în stator este prezentat în paragraful 3.3, pe baza lucrării [Bj1]. În modelarea numerică, polii sunt considerați de extensie radială finită. Având la dispoziție un program bazat pe elemente finite, bidimensional, MDF-2D, cu care nu se poate determina câmpul magnetic în lagăr când arborele este excentric față de stator, determinarea numerică a câmpului s-a făcut în absența lichidului magnetic. În acest caz, modelul numeric devine plan-meridian. Aproximarea față de cazul real este cu atât mai bună cu cât lichidul magnetic are permeabilitatea magnetică relativă mai apropiată de unu. De prezența lichidului magnetic se va ține seama în expresia forței, care a fost determinată prin integrare numerică. Deși rezultatele obținute în [Bj1] sunt satisfăcătoare (având în vedere aproximările făcute), un calcul numeric mai exact al câmpului necesită un program tridimensional, MDF-3D, care ar modela mult mai exact lagărul magnetic.

În unele aplicații tehnice care folosesc lagăre cu poli alternanți ar putea fi impusă condiția ca polii alternanți să fie plasați în rotor. Am propus lagărul cu poli alternanți plasați în rotor și lichid magnetic pentru care am dezvoltat un calcul analitic aproximativ și un calcul numeric în următoarele paragrafe ale capitolului 3.

În paragraful 3.4 am dezvoltat un calcul analitic aproximativ pentru lagărul cu poli alternanți plasați în rotor și lichid magnetic, în ipoteza că polii alternanți nu se magnetizează temporar, ($\mu_{rm}=1$). Datorită excentricității arborelui pe care sunt plasați polii alternanți față de axa statorului, asupra sa acționează o forță de natură magnetică (levitația de ordinul 2), care tinde să-l aducă în poziția de echilibru, când axa rotorului coincide cu axa statorului. Am urmărit determinarea unei expresii analitice aproximative a forței de readucere ce se exercită pe unitatea de lungime a arborelui, funcție de dimensiunile geometrice ale lagărului și de proprietățile magnetice ale polilor și ale lichidului magnetic presupus liniar. Pentru calculul câmpului magnetic am adoptat un model în care câmpul este considerat plan paralel, fig.3.4.2. Magnetul permanent este presupus astfel magnetizat încât magnetizația permanentă este radială, de divergență nulă, având o repartiție dreptunghiulară pe suprafețele $r=r_1$ și $r=r_2$, fig.3.4.3. Calculul câmpului magnetic l-am făcut luând în considerare doar armonica fundamentală corespunzătoare dezvoltării în serii Fourier a repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente. Am lucrat cu potențialul magnetic scalar, V_H , pentru care, pe baza ecuațiilor câmpului magnetic, a rezultat o ecuație de tip Laplace pretutindeni în modelul considerat. La rezolvarea ecuației de tip Laplace am folosit metoda separării variabilelor, constantele de integrare rezultând din condițiile de limită și condițiile de interfață la suprafața de separație dintre subdomeniile modelului adoptat.

Pentru calculul forței de levitație am folosit expresia forței ce se exercită asupra statorului, (1.3.60). Pentru a putea dezvolta calculul analitic al forței de readucere, am făcut aproximări acceptate ale constantelor de integrare, ce intervin în expresiile câmpului magnetic din lichidul magnetic, iar integrala ce a rezultat apoi din expresia forței, am efectuat-o dezvoltând integrantul în serii de puteri (limitându-mă la primii doi termeni ai seriei). Am obținut relația (3.4.37) în care funcția U este dată de (3.4.38), care reprezintă expresia forței de readucere, exercitată pe unitatea de lungime a arborelui, la dezaxarea sa maximă. Relația (3.4.37) arată că forța este funcție de dimensiunile geometrice ale lagărului prin intermediul funcției U , de pătratul magnetizației permanente și de permeabilitatea magnetică a lichidului magnetic.

Am analizat sub formă grafică și tabelară influența dimensiunilor geometrice ale lagărului asupra funcției U și implicit asupra forței de readucere. Pentru o rază a arborelui, R_1 , și o dezaxare maximă, δ , impuse, am determinat dimensiunile optime ale polilor (înălțimea și lățimea polului și distanța dintre poli), astfel încât funcția U să obțină valoare maximă, și valoarea acestui maxim, fig.3.4.8, fig.3.4.9.

Am analizat cazul când se dau raza arborelui, R_1 , și lățimea polului și distanța dintre poli (prin numărul de undă k). A rezultat o înălțime optimă a polului și o dezaxare maximă optimă pentru care funcția U obține valoare maximă, și valoarea acestui maxim, fig.3.4.12.

Aceste considerații sunt utile la proiectarea lagărului cu poli alternanți plasați în rotor și lichid magnetic, când pentru a obține o valoare optimă pentru forța de readucere, dimensiunile lagărului se vor alege în jurul valorii pentru care funcția U are valoare extremă (maximă).

O parte din contribuțiile personale ale acestui paragraf se regăsesc în lucrările publicate, [DS6], [DS7], la care sunt coautor.

În paragraful 3.5 am urmărit influența magnetizației temporare a polilor asupra forței de readucere ce se exercită asupra arborelui cu poli alternanți. Deoarece determinarea analitică a câmpului magnetic în acest caz este dificilă (sistemul algebric liniar de determinare a constantelor de integrare în cazul $\mu_{rm} \neq 1$ este dificil de rezolvat), am recurs la o rezolvare numerică. Calculul forței s-a făcut numeric, admitând aproximările constantelor de integrare făcute în paragraful anterior. Rezultatele numerice referitoare la câmpul magnetic în lichidul magnetic și ale forței de readucere ce se exercită pe unitatea de lungime a arborelui, au fost prezentate sub formă tabelară, tab.3.5.1, și sub formă grafică, fig.3.5.2÷fig.3.5.7. Se observă că forța de readucere ce acționează asupra arborelui scade când permeabilitatea magnetică relativă a polilor, μ_{rm} , crește. Într-adevăr, creșterea magnetizației temporare a polilor, \mathbf{M}_t , (datorită creșterii lui μ_{rm}), care are aceeași direcție cu câmpul magnetic demagnetizant din polii magnetici, duce la scăderea magnetizației $\mathbf{M}=\mathbf{M}_p+\mathbf{M}_t$. Câmpul magnetic generat de magnetii permanenți este determinat de sarcinile magnetice (cu o repartiție volumică și superficială) date de $div\mathbf{M}$ și $div_s\mathbf{M}$. Când vectorul magnetizație scade, sarcinile magnetice scad și ele. Cum forța de readucere este determinată de câmpul magnetic din lichidul magnetic, ea descrește când magnetizația temporară a polilor crește. Deci, la proiectarea unui astfel de lagăr, pentru a obține o forță de readucere cât mai mare, este indicat să folosim magnetii permanenți cu magnetizații permanente mari și permeabilități magnetice relative mici, (apropiate de 1), iar lichidul magnetic să aibă μ_r cât mai mare. Aceste concluzii obținute în acest paragraf se regăsesc publicate în lucrarea [DS8], la care sunt coautor.

Relația (3.4.37) pe care am stabilit-o în paragraful 1.4 cu privire la forța de natură magnetică ce se exercită asupra unității de lungime a arborelui cu poli alternanți, am dedus-o luând în considerare doar armonica fundamentală corespunzătoare dezvoltării în serii Fourier a repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente. În paragraful 3.6 am determinat câmpul magnetic produs de armonicile superioare corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente și am analizat influența acestora în expresia forței de readucere. Am considerat cazul când polii magnetici nu se magnetizează temporar. Deoarece în modelul considerat, repartiția periodică dreptunghiulară este antisimetrică, dezvoltarea în serii Fourier va conține numai armonici impare în sinus. Am dedus câmpul magnetic produs de armonica ν , câmpul rezultat într-un punct, conform teoremei superpoziției, fiind superpoziția câmpurilor produse de toate armonicile corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente.

La calculul forței am folosit expresia forței ce se exercită asupra statorului, (1.3.60), folosită și în paragrafele 3.4 și 3.5. Deși în expresia forței intervin pătratele componentelor câmpului magnetic, am arătat că, pentru armonicile superioare, componentele forțelor corespunzătoare acestora nu se influențează reciproc. Ca urmare, am stabilit relația (3.6.44) în care funcția U este dată de (3.6.45). Ea arată că forța de levitație rezultantă ce se exercită pe unitatea de

lungime a arborelui reprezintă superpoziția forțelor de levitație produse de armonicile corespunzătoare repartiției dreptunghiulare a magnetizației permanente (armonici de ordin impar).

Am analizat numeric ponderea armonicilor superioare în funcția U și deci în expresia forței pe unitatea de lungime, oprindu-mă la armonica de ordinul 23. Rezultatele le-am prezentat sub formă de tabel, tab.3.6.1, și grafic, fig.3.6.1. Concluzia care se desprinde, este că armonica fundamentală este hotărâtoare în expresia (3.6.44) a forței de levitație pe unitatea de lungime a arborelui, armonicile superioare având o pondere de sub 5%.

Contribuțiile personale din acest paragraf au fost publicate în lucrarea [Gr5], a cărui autor sunt.

Pentru a verifica veridicitatea relației analitice aproximative, (3.4.37), stabilită în paragraful 3.4, pentru forța de readucere ce se exercită pe unitatea de lungime a arborelui cu poli alternanți, în paragraful 3.7 am făcut o analiză numerică a lagărului. Pentru aceasta am folosit programul MagNet 5.0 al firmei INFOLYTICA, bazat pe MEF-3D. Porțiunea de lagăr modelată are o extensie axială corespunzătoare la jumătate de lungime de undă, $\lambda/2$, cuprinsă între două plane perpendiculare pe axa z ce trec prin mijloacele a doi poli consecutivi. Această modelare numerică corespunde unui lagăr cu extensie infinită a polilor, ipoteză care a fost acceptată și în cazul calculului analitic al lagărului cu poli alternanți plasați în rotor.

În modelarea numerică, pentru diferitele cazuri analizate, am folosit o rețea de discretizare foarte fină formată din aproximativ 25000-30000 de noduri și 130000-150000 de elemente finite (tetraedre). În lichidul magnetic am folosit elemente finite de ordinul doi, deoarece câmpul din lichid intervine în calculul forței de levitație. În aceste condiții câmpul magnetic a fost determinat cu precizie ridicată.

Pentru un caz particular am reprezentat modul de variație al inducției magnetice în diferite subdomenii ale modelului numeric analizat, fig.3.7.7 ÷ fig.3.7.12.

Forța magnetică ce se exercită asupra arborelui cu poli alternanți am calculat-o numeric folosind expresia forței ce se exercită asupra rotorului, (1.3.34). Valorile componentelor câmpului din lichidul magnetic, la suprafața de separație dintre arborele cu poli alternanți și lichidul magnetic, au fost determinate numeric și păstrate în fișiere text. Pentru un caz particular, am reprezentat modul de variație al componentelor câmpului magnetic și a modulului acestuia pe suprafața cilindrică corespunzătoare arborelui cu poli alternanți, fig.3.7.17 ÷ fig.3.7.20.

Am făcut o comparație între componentele câmpului determinate analitic în paragraful 3.4 pentru modelul bidimensional adoptat, și componentele corespunzătoare ale câmpului obținute din modelarea numerică. Comparația am făcut-o sub formă grafică, fig.3.7.13, fig.3.7.14, reprezentând variația componentelor câmpului după axa z în punctele de pe rotor corespunzătoare dezaxării maxime.

Am realizat un program propriu de calcul al forței de readucere în funcție de componentele câmpului de pe suprafața cilindrică a rotorului cu poli alternanți. Am

calculat numeric forța de readucere pe unitate de lungime a arborelui pentru diferiți magneți permanenți și lichide magnetice, la diferite dezaxări. Valorile obținute au fost reprezentate grafic în funcție de dezaxare și comparate cu valorile corespunzătoare obținute pe cale analitică cu (3.4.37), fig.3.7.13, fig.3.7.14. Rezultatele arată o bună corespondență între perechile corespunzătoare de curbe, ceea ce permite să afirmăm că relația analitică aproximativă (3.4.37), determinată în paragraful 3.4, determină forța cu o precizie ridicată.

Colectivul de lichide magnetice din Timișoara, coordonat în cele peste două decenii de existență de Dl. Acad. Ioan Anton, a reușit fundamentarea, dezvoltarea și consolidarea unui domeniu interdisciplinar complet nou atât în Timișoara cât și în România.

Rezultatele activității colectivelor ce se ocupă cu studiul lichidelor magnetice din cadrul Institutului pentru Fluide Complexe, Universitatea Politehnica Timișoara și Centrul pentru Cercetări Tehnice Fundamentale, Filiala Timișoara a Academiei Române, au fost materializate prin numeroase brevete de invenție, teze de doctorat și lucrări științifice publicate în reviste de prestigiu din țară și străinătate și în volumele unor conferințe, simpozioane și seminarii științifice naționale și internaționale.

Tematica ce implică lichidele magnetice este covârșitoare. Articolele ce abordează domeniul lichidelor magnetice se referă fie la lichide magnetice în sine (proprietăți, preparare), fie la aplicații tehnice, eventual experimentale.

Prezenta lucrare aduce contribuții la modelarea fenomenului de levitație magnetică, una dintre aplicațiile interesante ale lichidelor magnetice, urmărind într-o tratare teoretică, determinarea și îmbunătățirea performanțelor lagărelor cilindrice cu lichid magnetic.

Tema abordată nu este epuizată prin cele prezentate și, pe viitor, este posibil să se considere și alte aspecte. Unele dintre acestea ar putea fi:

- Pentru lagărul cilindric cu magnet permanent și lichid magnetic:
 - Determinarea unei expresii analitice aproximative a forței ce se exercită pe unitatea de lungime a arborelui și determinarea unui eventual cuplu mecanic exercitat asupra arborelui, când dezaxarea arborelui se face după o direcție diferită de direcția vectorului magnetizație permanentă a arborelui.
 - Calculul numeric al forței de levitație pe baza unei modelări numerice a lagărului folosind un program MEF-3D care ar simula mai exact lagărul real.
- Pentru lagărul cu lichid magnetic și poli alternanți plasați în rotor:
 - Calculul analitic al lagărului pe baza unui model bidimensional plan-meridian care ar aproxima cu precizie mai bună lagărul real față de modelul plan-paralel adoptat în teză.
 - Luarea în considerare a unui lichid real cu caracteristica neliniară cunoscută.
 - Modelarea numerică a lagărului și calculul numeric al forței de levitație în ipoteza că numărul perechilor de poli din rotor este finit.
 - Determinarea influenței numărului perechilor de poli asupra forței de levitație.

Acestea sunt doar câteva din problemele teoretice care ar putea fi dezvoltate în viitor, având la bază această teză.

În realizarea temei s-au folosit mijloace tehnice la care autorul a avut acces. Modelarea numerică, MEF-3D, cu programul MagNet am făcut-o în timpul stagiului de două luni efectuat la Universitatea Catolică din Leuven, Belgia, în urma unei burse de studii.

Analiza teoretică a lagărelor cilindrice cu lichide magnetice ar trebui continuată prin realizarea experimentală, practică, a unor astfel de lagăre care să permită măsurarea experimentală a forței de readucere. Aceasta presupune obținerea unor contracte de cercetare științifică care să aducă fondurile necesare dezvoltării unor astfel de proiecte. În prezent, singura modalitate de a susține și eventual de a dezvolta prezenta temă, o reprezintă colaborarea cu specialiștii din cadrul colectivelor ce se ocupă cu studiul lichidelor magnetice din cadrul Institutului pentru Fluide Complexe, Universitatea Politehnica Timișoara și Centrul pentru Cercetări Tehnice Fundamentale, Filiala Timișoara a Academiei Române.

5 BIBLIOGRAFIE

- [An1] Anton I., De Sabata I., Vékás L., “Application orientated researches on magnetic fluids” (invited paper), *J. Magn. Magn. Mater.*, vol.85, 219-226, 2002;
- [Ba1] Bacri J. C., Salin D., *J. Phys. Lett.*, 43:L771, 1982;
- [Be1] Berkovski B. M., Vislovich A. N., “*Desiatoe Rijskoe Sovesc. po Magn. Gidrodin.*”, vol.III, Riga, 1981, pp 97-98;
- [Be2] Berkovski B. M., Bashtovoi V. (Editors), “Magnetic fluids and applications. Handbook”, Begell House, 1996, 831 pag.;
- [Be3] Berkovski B. M., Bashtovoi V., Vislovich A. N., (Editors), “V vedenie termomehanica magnitnih jidkosti”, Moscova, 1985;
- [Be4] Berkovski B. M., Kalikmanov V. I., Filimor V. S., *J. Magn. Magn. Mater.*, 65:1910, 1987;
- [BH1] Belmans R., Hameyer K., Pahner V., “Computer-Aided Design in Magnetism”, Tutorial, K.U.Leuven, 1996;
- [BH2] Hameyer K., Belmans R., “Numerical Modelling and Design of Electrical Machines and Devices”, WIT Press, Southampton, Boston, 1999;
- [Bi1] Bica D., “Preparation of magnetic fluids for various applications”, *Rom. Repts. Physics*, vol.47, Nr.3-5, 265 (1995);
- [Bi2] Bica I., “Preparation of colloidal magnetic particles in thermal plasma”, *Magnitnaia Gidrodinamika*, Nr.1, (1994), 121-122;
- [Bi3] Bica D., Vékás L., “Nano și micro sisteme disperse magnetizabile în medii lichide”, cap.6 în Șora I., et al., “Echipamente electroultraacustice pentru procesarea performantă în medii lichide”, Ed. Orizonturi Universitare, Timișoara, 2002, pp.173-196;
- [Bi4] Bica D., Vékás L., Rașa M., “Preparation and properties of concentrated magnetic fluids on alcohol and water carrier liquids”, *J. Magn. Magn. Mater.*, vol.252, pp.10-12, 2002;
- [Bj1] Blaj C., “Studiul și modelarea levitației magnetice cu aplicații la optimizarea lagărelor magnetice cu poli alternanți”, Teza de doctorat, Univ. “Politehnica”, Timișoara, 1999;
- [Bl1] Blums E., ș.a., “Magnetic fluids”, Wahter de Gruyter, Berlin, New York, 1997;
- [Bn1] Binns K.J., Lawrenson P.J., Trowbridge C.W., “The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields”, BPCC Weatson Ltd, Exeter, Great Britain, 1992;
- [Bt4] Batchelor G. K., *J. Fluid Mech.*, 83-97, 1977;

- [By1] Byrne J. V., "Force on a magnet immersed in a ferrofluid", IEEE, vol. Mag 14, Nr.5, September 1978;
- [Co1] Cowley, Rosensweig R. E., "The interfacial stability of a ferromagnetic fluid", J. Fluid Mech., vol.30, part 4, pp.671-688, 1967;
- [Ce1] Cebers A. O., "Levitația magnetului permanent cilindric în lichid magnetic", Al IX-lea simpozin MHD, Riga, vol.3, pp.187, 1984;
- [Ce2] Cebers A. O., "Magnetohydrodynamics", 19:231, 1983;
- [Ce3] Cebers A. O., "Magn. Hydrodyn", USSR, 4:37, 1975;
- [Ch1] Chantrell R. W., Bradbury A., Popplewell J., Charles S. W., J. Appl. Phys., 53:2742, 1982;
- [Ch2] Chantrell R. W., Popplewell J., Charles S. W., IEEE-Trans. Magn., 14, 5:975, 1978;
- [DS1] De Sabata I., Blaj C., **Greconici M.**, "The numeric calculation of the restoring force exerted on a diysc type permanent magnet", E.M.E.S. '99, Analele Univ. Oradea, Fasc. Electrot., sect.A, 27-29 Mai 1999, pp.91;
- [DS2] De Sabata I., "Forța exercitată de câmpul magnetic asupra unui corp având magnetizație permanentă și temporară, imersat în lichid magnetic și câmp magnetic", Analele Univ. Oradea, 1991;
- [DS3] De Sabata I., **Greconici M.**, Blaj C., "About the magnetic restoring force exerted on the permanent magnet bearing journal", Rev. Roum. Scien. Tech, Serie Electrotehn. et Energ., Tome 45, 2, 2000, București, pp.291-293;
- [DS4] De Sabata I., Vekas L., "On the restoring force of magnetic fluid bearings", Rev. Roum. Scien. Tech., Serie Electrotehn. et Energ., Tome 34, 1, 1989, București, pp.13-20;
- [DS5] De Sabata I., Colțeu A., "Acțiuni ponderomotoare ale câmpului magnetic asupra lichidelor magnetice și unele consecințe ale acestora", Aplicațiile ferrofluidelor. Seminar tehnico-științific, I.P. Timișoara, 1980, pp.31-35;
- [DS6] De Sabata I., **Greconici M.**, De Sabata A., "Restoring force acting on a rotor with alternating poles in a magnetic fluid", Rev. Roum. Scien. Tech, Serie Electrotehn. et Energ., Tome 46, 1, 2001, București, pp.79-88;
- [DS7] De Sabata I., **Greconici M.**, De Sabata A., "Force that acts on a rotor with alternating poles", 11-th International Symposium on Power Electronics, Novi Sad, Yugoslavia, 2001, pp.337-340;
- [DS8] De Sabata I., **Greconici M.**, "The numerical calculation of the force that acts on the rotor with alternating magnetic poles and temporary magnetization in a hydrostatic bearing with magnetic fluid", The VII-th edition of Timișoara's Academic Days, Ed. Orizonturi Universitare, Timișoara, 2002, pp.25-32;
- [DS9] De Sabata I., **Greconici M.**, "Levitation force that acts on the magnetized shaft of a cylindrical bearing with magnetic liquid", I.C.A.T.E. Craiova, 2002, pp.9-14;
- [DS10] De Sabata I., "Bazele electrotehnicii", vol. I, II, III, I.P.T.V., Timișoara, 1980, 1974, 1977;

- [DS11] De Sabata I., "Les forces de surface et la pression, exercees par le champ electromagnetique dans les liquides nonlineaires, izotropes et sans hysteresis", Bul. I.P.T.V., Timișora, Tom 29(43), 1984;
- [DS12] De Sabata I., "Lucrări Științifice și Tehnice", seria A, Oradea, 1975, pp.5-11;
- [DS13] De Sabata I., "Asupra forțelor de volum în teoria Maxwell-Hertz", Bul. Șt. Și Tehn., I.P.T.V.T., seria Electrot., Fasc.2, Tom 24(60), Timișora, 1981;
- [DS14] De Sabata I., "On the restoring force of magnetic fluid bearing", Acad. R.S.R., Rev. Roum. Scien. Tech., Serie de Mecanique Appliquee, Tom.34, 1, București, 1989;
- [DS15] De Sabata I., Blaj C., **Greconici M.**, "The numeric calculation of the force exerted on a magnetized disc immersed in a magnetic liquid", Bul. U.P.T., Seria Electrotehnică, Tom44(58), Fasc.1, Timișoara, pp.45-50;
- [DS16] De Sabata I., Blaj C., **Greconici M.**, "Computer modelization for the calculation of the second order levitation force", I.C.M.F.8, Timișoara, 1998, pp.;
- [EH1] El-Hilo M., O'Grady K., Chantrell R. W., J. Magn. Magn. Mater., 114:245, 1992;
- [Ei1] Einstein A., Ann. Physik, 19:289, 1906;
- [Er1] Eirich R., Simha F., Sitzunzsb. D. Mathem. Naturew., Kl.(11b), 146-513, 1937;
- [Ew1] Van Ewijk G., "Phase behavior of mixtures of magnetic colloids and non-adsorbing polymer" Ph. D. thesis, University of Utrecht, 2001;
- [Fe1] Fertman V. E., "Magnitnîe jidkosti estestvennaia konvekția i teplvobimen", Nauka i tehnika, Minsk, 1978;
- [Gd1] O'Grady K., Chantrell R. W., Bradbury A., Popplewell J., Charles S. W., I.E.E.E. Trans. Magn., MAG-17:2943, 1981;
- [Gd2] O'Grady K., El-Hilo M., Chantrell R. W., I.E.E.E.-Trans. Magn., MAG, 29, 6:2608, 1993;
- [Ge1] De Gennes P. G., Pincus P. A., Phys. Kondens. Mat., 11:189, 1970;
- [Gr1] **Greconici M.**, "Sinteză bibliografică asupra calculului sistemelor electromagnetice cu reluctanță variabilă", Referat doctorat, Timișoara, 1998;
- [Gr2] **Greconici M.**, "Ecuatiile potențialelor electromagnetice pentru medii în mișcare și rezolvarea lor numerică", Referat doctorat, Timișoara, 1999;
- [Gr3] **Greconici M.**, Blaj C., "The numeric calculation of the force exerted on the shaft of a cylindrical bearing with magnetic liquid", Bul. U.P.T., Seria Electr. Electr. și Telec., Tom 44(58), Fascicula 2, Timișoara, 1999;
- [Gr4] **Greconici M.**, "The numerical evaluation of the levitation force that acts on the magnetized shaft of a cylindrical bearing with magnetic liquid", Simp. Internaț. de Electron. și Telecom., vol.2, Timișoara, 2002, pp.222-226;
- [Gr5] **Greconici M.**, "Taking into account the high order harmonics of the magnetic field inside a hydrostatic bearing with alternating poles and magnetic liquid", 6th International Conference on Applied Electromagnetics, Nis, Yugoslavia, 22-24 March 2003, pp.;

- [Gr6] **Greconici M.**, Blaj C., “Calculation of the restoring force exerted on a permanent magnet immersed in magnetic liquid”, Acta Universitatis CIBINIENSIS-Sibiu, 1999, pp.47-50;
- [Gr7] **Greconici M.**, Blaj C., “Asupra stabilirii geometriei domeniului la probleme cu magneți permanenți, soluționate numeric”, Simpozionul Științific Jubiliar, Petroșani, 1998;
- [Gr8] **Greconici M.**, Blaj C., “Analiza formei bobinelor de excitație la un generator unipolar supraconductor”, Acta Universitatis CIBINIENSIS-Sibiu, vol.XX, 1995, pp.31-36;
- [Gu1] Guth E., Simha R., Kolloid-Z, 74:266, 1936;
- [Iv1] Ivanov A. O., In volumul de rezumate, I.C.M.F.8, Timișoara, 1998, pp.262;
- [Iv2] Ivanov A. O., “Magnitnaya Hidrodinamica”, 4:39, 1992;
- [Ki1] Kilyeni Ș., “Calcul numeric în energetică”, Ed. Mirton, Timișoara, 1996;
- [Lu1] Luca E., ș.a., “Ferofluidele și aplicațiile lor industriale”, Ed. Tehnică, București, 1978;
- [Ma1] Massart R., “Preparation of aqueous magnetic liquids in alkaline and acidic media”, I.E.E.E.-Trans. Magn., 17, 1247, 1981;
- [Mi1] Mîndru Gh., Rădulescu M. M., “Analiza numerică a câmpului electromagnetic”, Ed. Dacia, 1986;
- [Mc1] Mocanu C. I., “Teoria câmpului electromagnetice”, E.D.P. București, 1982;
- [Mo1] Mooney M., J. Colloid Sci., 6:162, 1951;
- [MN1] MagNet 5.0 3D, Tool-Box, Reference Manual, Infolytica Corporation, 1998;
- [MS1] Moon P., Spencer D. E., “Field Theory Handbook”, Springer-Verlag Berlin New York, 1971;
- [Ne1] Nenișescu C. D., “Chimie generală”, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1972;
- [Pe1] Perry M. P., Jones T. B., “Hydrostatic loading of magnetic liquid seals”, I.E.E.E.-Trans. Magn., vol.MAG-12, Nr.6, November 1976;
- [Ph1] Pshenichnikov A. F., Mekhonosin W. V., Lebedev A. V., “Magneto-granulometric analysis of concentrated ferrocolloids”, J. Magn. Magn. Mater., 161, 94, 1996;
- [Ps1] Pshenichnikov A. F., Mekhonoshin W. V., Lebedev A. V., J. Magn. Magn. Mater., 161:94, 1996;
- [Ps2] Pshenichnikov A. F., Gilev V. G., Colloid Journal, 59, 3:346;
- [Ra1] Rașa M., “Proprietăți magnetice, magneto-optice și magneto-reologice ale lichidelor magnetice”, Ph. D. thesis, Univ. de Vest, Timișoara, 1999;
- [Ra2] Rașa M., et al., “Dilution series approach for investigation of microstructural properties and particle interactions in high-quality magnetic fluids”, Eur. Phys. J. E., 7, 209-220, 2002;
- [Rj1] Rijici I. M., Gradsteins I. S., “Tabele de integrale, sume, serii și produse”, Ed. Tehnică, București, 1955;
- [Ro1] Rosensweig R. E., “Ferrohidrodinamics”, Cambridge Univ. Press, 1985;
- [Ro2] Rosensweig R. E., “Thermomechanics of magnetic fluids”, Ed. B. Berkovskii, Hemisphere, Washington, 1978, pp.231-254;

- [Ro3] Rosensweig R. E., Popplewell J., In Proc. Int. Szmp. On Electromag. Forces, Sendai, Japan, 1991;
- [Rs1] Resiga D., ș.a., “Comportarea reologică a fluidelor magnetice”, Ed. Orizonturi Universitare, Timișoara, 2002;
- [Rs2] Resiga R., “Complemente de mecanica fluidelor și tehnici de soluționare numerică”, Ed. Orizonturi Universitare, Timișoara, 1999;
- [Sa1] Sano K., Doi N., J. Phys. Soc. Jap., 52:2810, 1983;
- [SF1] Silvester P. P., Ferrari R. L., “Finite elements for electrical engineers” Cambridge University Press, 1983, Cambridge;
- [Sh1] Shliomis M. I., In volumul de rezumate, I.C.M.F.8, Timișoara, 1998, pp.10;
- [Sh2] Shliomis M. I., J.E.T.P., 61:2411, 1971;
- [Sm1] Shimoizaka J., U.S. Patent No. 4094804, 1978;
- [So1] Scholten P. C., J. Magn. Mater., 39:99, 1983;
- [
- [Sr1] Șora C., “Bazele electrotehnicii”, E.D.P. București, 1982;
- [St1] Stratton J.A., “Théorie de l'Électromagnétisme”, Dunod, Paris, 1961;
- [Ta1] Tari A., Chantrell R. W., Charles S. W., Popplewell J., 7, b. page 57, 1979;
- [Vk1] Vékás L., et al., “Magnetic fluids – a special category of nanomaterials. Preparation and complex characterization methods” in Micro and nanostructures, (Editors: Dascălu D., et al.), Ed. Academiei Române, pp.127-157, 2001;
- [Vk2] Vékás L., Rașa M., Bica D., “Physical properties of magnetic fluids and nanoparticles from magnetic and magneto-rheological properties”, Journal of Colloids and Interface Science Academic Press, USA, vol.231, 247-254, 2000;
- [Vs1] Vislovich A. N., Krakov M. S., “Asupra calculului forței ce acționează asupra magnetului imersat în lichid magnetic”, Al IX-lea Simpozion M.H.D., Riga, vol.3, 1984, pp.187;

6 ANEXE

Anexa 1

Fișierul *aprox.m* care generează geometria modelului analizat în 3.7

```
% Parameter definitions for the model between 2 axes with A=0

delta=0.2;
extbound=100;
zbound=40;

% Generating file CERB.automesh.in

fid=fopen('CERB.automesh.in','wt');
p=20;
angle=360/p;

% building the shaft a

fprintf(fid,'dele CERB\n');
fprintf(fid,'make CERB aa\n');
fprintf(fid,'unit mm\n');
fprintf(fid,'part aa of a screw compressor\n');
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%d\n',0.0,0.0,10.0,0.0,3);
fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%d pos\n',0.0,0.0,10.0,0.0,angle,3);
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%d\n',10.0*cos(pi/180*angle),10.0*sin(pi/180*angle),0.0,0.0,3);
fprintf(fid,'make prt2 ab\n');
fprintf(fid,'unit mm\n');
fprintf(fid,'part ab of a screw compressor\n');
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%d\n',0.0,0.0,10.0*cos(pi/180*angle),10.0*sin(pi/180*angle),3);
fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%d pos\n',0.0,0.0,10.0,angle,2*angle,3);
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f
      %d\n',10.0*cos(2*angle*pi/180),10.0*sin(2*angle*pi/180),0.0,0.0,3);
fprintf(fid,'mode CERB\n');
fprintf(fid,'join prt2\n');
fprintf(fid,'dele prt2\n');

for i=3:p
    fprintf(fid,'make prt2 a%c\n',char(96+i));
    fprintf(fid,'unit mm\n');
```

```

fprintf(fid,'part a%c of a screw compressor\n',char(96+i));
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%d\n',0.0,0.0,10.0*cos((i-1)*angle*pi/180),10.0*
sin((i-1)*angle*pi/180),3);
fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%f%d pos\n',0.0,0.0,10.0,(i-1)*angle,i*angle,3);
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%f%d\n',10.0*cos(i*angle*pi/180),
10.0*sin(i*angle*pi/180),0.0,0.0,3);
fprintf(fid,'mode CERB\n');
fprintf(fid,'join prt2\n');
fprintf(fid,'dele prt2\n');
end

```

% building the magnet b

```

for i=1:p
fprintf(fid,'make prt2 b%c\n',char(96+i));
fprintf(fid,'unit mm\n');
fprintf(fid,'part b%c of a screw compressor\n',char(96+i));
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%f%d\n',10.0*cos((i-1)*angle*pi/180),10.0*sin((i-1)
*angle*pi/180),13.57*cos((i-1)*angle*pi/180),13.57*sin((i-1)*angle*pi/180),2);
fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%f%f%d pos\n',0.0,0.0,13.57,(i-1)*angle,i*angle,4);
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%f%f%d\n',13.57*cos(i*angle*pi/180),13.57*
sin(i*angle*pi/180),10.0*cos(i*angle*pi/180),10.0*sin(i*angle*pi/180),2);
fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%f%f%f%d neg\n',0.0,0.0,10.0,i*angle,(i-1)*angle,3);
fprintf(fid,'mode CERB\n');
fprintf(fid,'join prt2\n');
fprintf(fid,'dele prt2\n');
end

```

% building the liquid c

```

for i=1:p
fprintf(fid,'make prt2 c%c\n',char(96+i));
fprintf(fid,'unit mm\n');
fprintf(fid,'part c%c of a screw compressor\n',char(96+i));
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%f%f%d\n',13.57*cos((i-1)*angle*pi/180),13.57*sin((i-1)*angle
*pi/180),14.57*cos((i-1)*angle*pi/180),delta+14.57*sin((i-1)*angle*pi/180),2);
fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%f%f%f%d pos\n',0.0,delta,14.57,(i-1)*angle,i*angle,5);
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%f%f%f%d\n',14.57*cos(i*angle*pi/180),delta+14.57
*sin(i*angle*pi/180),13.57*cos(i*angle*pi/180),13.57*sin(i*angle*pi/180),2);
fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%f%f%f%f%d neg\n',0.0,0.0,13.57,i*angle,(i-1)*angle,4);
fprintf(fid,'mode CERB\n');
fprintf(fid,'join prt2\n');
fprintf(fid,'dele prt2\n');
end

```

% building the air d

```

for i=1:p
fprintf(fid,'make prt2 d%c\n',char(96+i));
fprintf(fid,'unit mm\n');
fprintf(fid,'part d%c of a screw compressor\n',char(96+i));
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%f%f%f%d\n',14.57*cos((i-1)*angle*pi/180),delta+14.57*sin((i-1)
*angle*pi/180),20.0*cos((i-1)*angle*pi/180),delta+20.0*sin((i-1)*angle*pi/180),3);

```

```

fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%d pos\n',0.0,delta,20.0,(i-1)*angle,i*angle,2);
fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%d\n',20.0*cos(i*angle*pi/180),delta+20.0
    *sin(i*angle*pi/180),14.57*cos(i*angle*pi/180),delta+14.57*sin(i*angle*pi/180),3);
fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%d neg\n',0.0,delta,14.57,i*angle,(i-1)*angle,5);
fprintf(fid,'mode CERB\n');
fprintf(fid,'join prt2\n');
fprintf(fid,'dele prt2\n');
end

% building the air e

for i=1:p
    fprintf(fid,'make prt2 e%c\n',char(96+i));
    fprintf(fid,'unit mm\n');
    fprintf(fid,'part e%c of a screw compressor\n',char(96+i));
    fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%d\n',20.0*cos((i-1)*angle*pi/180),delta+20.0*sin((i-1)*angle
        *pi/180),extbound*cos((i-1)*angle*pi/180),delta+extbound*sin((i-1)*angle*pi/180),3);
    fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%f%d pos\n',0.0,delta,extbound,(i-1)*angle,i*angle,1);
    fprintf(fid,'line\n%f%f%f%f%f%f%d\n',extbound*cos(i*angle*pi/180),delta+extbound
        *sin(i*angle*pi/180),20.0*cos(i*angle*pi/180),delta+20.0*sin(i*angle*pi/180),3);
    fprintf(fid,'arc\n%f%f%f%f%f%f%d neg\n',0.0,delta,20.0,i*angle,(i-1)*angle,2);
    fprintf(fid,'mode CERB\n');
    fprintf(fid,'join prt2\n');
    fprintf(fid,'dele prt2\n');
end

fclose(fid);

% Generating file CERE.automesh.in

fid=fopen('CERE.automesh.in','wt');

% Defiding plan 1
fprintf(fid,'mode CERB\n');
fprintf(fid,'dele CERE\n');
fprintf(fid,'copy CERE\n');
fprintf(fid,'tabl plan\n');
fprintf(fid,'zorg %f\n',0.0);
fprintf(fid,'subd 7\n');
fprintf(fid,'none\n');
fprintf(fid,'copy plan\n');

% Defiding plan 2
fprintf(fid,'zorg 1.466\n');
fprintf(fid,'subd 7\n');
fprintf(fid,'none\n');
fprintf(fid,'copy plan\n');

% Defiding plan 3
fprintf(fid,'zorg 2.932\n');
fprintf(fid,'subd 7\n');
fprintf(fid,'none\n');
fprintf(fid,'copy plan\n');

```

```
% Defining plan 4
fprintf(fid,'zorg 4.4\n');
fprintf(fid,'subd 7\n');
fprintf(fid,'none\n');
```

```
fprintf(fid,'plan 1\n');
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela a%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:(p/2)
    fprintf(fid,'rela b%c x%c\n',char(96+i),char(96+i));
end
for i=11:20
    fprintf(fid,'rela b%c y%c\n',char(96+i),char(86+i));
end
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela c%c li\n',char(96+i));
end
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela d%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela e%c a\n',char(96+i));
end
```

```
fprintf(fid,'plan 2\n');
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela a%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela b%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela c%c li\n',char(96+i));
end
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela d%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela e%c a\n',char(96+i));
end
```

```
fprintf(fid,'plan 3\n');
for i=1:p
    fprintf(fid,'rela a%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:10
    fprintf(fid,'rela b%c y%c\n',char(96+i),char(96+i));
end
```

```
for i=11:20
fprintf(fid,'rela b%c x%c\n',char(96+i),char(86+i));
end
for i=1:p
fprintf(fid,'rela c%c li\n',char(96+i));
end
for i=1:p
fprintf(fid,'rela d%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
fprintf(fid,'rela e%c a\n',char(96+i));
end

fprintf(fid,'plan 4\n');
for i=1:p
fprintf(fid,'rela a%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
fprintf(fid,'rela b%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
fprintf(fid,'rela c%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
fprintf(fid,'rela d%c a\n',char(96+i));
end
for i=1:p
fprintf(fid,'rela e%c a\n',char(96+i));
end

fclose(fid)
```

Anexa 2

Fișierul *prob3d3.m* care asociază diferitelor regiuni din domeniul modelat în 3.7, materialele corespunzătoare cu proprietățile lor magnetice.

```
% Generating file prob3d.in
%(for the command: prob3d < prob3d.in)

fid=fopen('prob3d.in','wt');

% Number of the magnetic pieces
p=20;
angle=360/p;

fprintf(fid,'prob cerm\n');
fprintf(fid,'y\n');
fprintf(fid,'cere\n');
fprintf(fid,'Magnetic Bearing\n\n\n');

fprintf(fid,'mate\n');
fprintf(fid,'AL\n');
fprintf(fid,'name alum\n');
fprintf(fid,'none\n');
fprintf(fid,'LI\n');
fprintf(fid,'name LI2N\n');
fprintf(fid,'ORDE 3\n');
fprintf(fid,'none\n');

% Generating the pole N (S)
for i=1:10
    fprintf(fid,'x%c\n',char(96+i));
    fprintf(fid,'name NDFE\n');

    fprintf(fid,'1 90\n');
    fprintf(fid,'2 %d\n',(i-1)*angle+(angle/2));
    fprintf(fid,'3 -90\n');
    fprintf(fid,'none\n');
end

for i=11:p
    fprintf(fid,'y%c\n',char(86+i));
    fprintf(fid,'name NDFE\n');
    fprintf(fid,'1 90\n');
    fprintf(fid,'2 %d\n',(i-1)*angle+(angle/2));
    fprintf(fid,'3 -90\n');
    fprintf(fid,'none\n');
end

fprintf(fid,'\njobs\n');
fprintf(fid,'n\n');
fprintf(fid,'n\n');
fprintf(fid,'y\n');
fprintf(fid,'l\n');
fprintf(fid,'prob cerm\n');
fprintf(fid,'star cerm\n\n');
fprintf(fid,'none\n');
fprintf(fid,'quit\n');
fprintf(fid,'fini\n');

fclose(fid);
```

Anexa 3

%CALCULUL NUMERIC AL FORTEI FOLOSIND ELEMENTELE FINITE DE PE SUPRAFATA MAGNETULUI

%Se citesc fisierele xycomed_... cu coordonatele elementelor si ariile acestora

%Se citesc fisierele hfield_... cu componentele campului din elemente

%Se calculeaza forta pe jumatare de lungime de unda f_jum si pe unitatea de lungime f_lungime

clc

clear

r2=.0136;

miurl=1.2;

miu0=4.*pi.*10.^-7;

miul=miu0.*miurl; %permeabilitatea magnetica relativa a lichidului

landa=.0088; %lungimea de unda

load xycomed_0.txt; %se citesc coordonatele elementelor

t1(:,1)=xycomed_0(:,2); %lungimea cilindrului sectionat

t=t1+min(t1);

z(:,1)=-xycomed_0(:,3); %inaltimea cilindrului (landa/2)

aria_element=xycomed_0(:,4); %aria elementelor

teta=t./r2;

load hfield_0.txt;

ht(:,1)=hfield_0(:,2); %componenta tangenta

hz(:,1)=-hfield_0(:,3); %componenta dupa axa z

hn(:,1)=hfield_0(:,4); %componenta normala

h=sqrt((ht).^2+(hz).^2+(hn).^2); %modulul campului

%Calculul fortei pe fiecare element

f1=((hn.^2-(h.^2)/2).*sin(teta)+hn.*ht.*cos(teta)).*2.*miul.*aria_element;

%Calculul fortei pe jumatare din lungimea de unda

f_jum_landa=sum(f1)

%Calculul fortei pe unitatea de lungime

f_lungime=2.*f_jum_landa./landa

%Nr. de elemente finite.

length(z)

Anexa 4

```
%CALCULUL COORDONATELOR X SI Y MEDII ALE FIECARUI ELEMENT FINIT SI
ARIA ACESTUIA
%Se citesc fisierele nodes_.. cu nodurile ce alcatuiesc ficare triunghi;
%Se citesc fisierele xy_.. cu coordonatele fiecarui nod;
%Se calculeaza coordonata medie xmed si ymed a fiecarui triunghi ca media aritmetica a
%coordonatelor x si y ale fiecarui nod al triunghiului;
%Se calculeaza aria fiecarui element, aria_element;
%Coordonatele medii xmed si ymed si aria aria_element se salveaza in fisierul xyved_..
clear;
load nodes_0.txt;
elem(:,1)=nodes_0(:,2);
elem(:,2)=nodes_0(:,3);
elem(:,3)=nodes_0(:,4);
load xy_0.txt;
coord(:,1)=xy_0(:,2);
coord(:,2)=xy_0(:,3);
nrelem=length(elem(:,1));
xmed=zeros(nrelem,1);
ymed=zeros(nrelem,1);
aria_element=zeros(nrelem,1);
contor=zeros(nrelem,1);
for i=1:nrelem
    contor(i)=i;
    xmed(i,1)=(1./3).*(coord(elem(i,1),1)+coord(elem(i,2),1)+coord(elem(i,3),1));
    ymed(i,1)=(1./3).*(coord(elem(i,1),2)+coord(elem(i,2),2)+coord(elem(i,3),2));
    aria_element(i,1)=.5.*(det([1 1 1; coord(elem(i,1),1) coord(elem(i,2),1) coord(elem(i,3),1);...
        coord(elem(i,1),2) coord(elem(i,2),2) coord(elem(i,3),2)])));
end
xyved=zeros(nrelem,4);
xyved(:,1)=contor(:);
xyved(:,2)=xmed(:);
xyved(:,3)=ymed(:);
xyved(:,4)=aria_element(:);
save xyved_0.txt xyved -ascii -tabs;
```

Anexa 5

```
%PROGRAM DE CALCUL A CAMPULUI H MEDIU PE UN ELEMENT FINIT
%Se citesc componentele campului H (6 pt fiecare element) din fisierele h6_...
%Se calculeaza media celor 6 valori pentru fiecare componenta
%Se salveaza rezultatele in fisierele de tipul hfield_...
clear;
load h6_0.txt;
hx=h6_0(:,3);
hy=h6_0(:,4);
hz=h6_0(:,5);
nrelem=(length(hx))/6;
element=zeros(nrelem,1);
hxmed=zeros(nrelem,1);
hymed=zeros(nrelem,1);
hzmed=zeros(nrelem,1);
for i=0:(nrelem-1)
    element(i+1)=i+1;
    hxmed(i+1)=(hx(6*i+1)+hx(6*i+2)+hx(6*i+3)+hx(6*i+4)+hx(6*i+5)+hx(6*i+6))/6;
    hymed(i+1)=(hy(6*i+1)+hy(6*i+2)+hy(6*i+3)+hy(6*i+4)+hy(6*i+5)+hy(6*i+6))/6;
    hzmed(i+1)=(hz(6*i+1)+hz(6*i+2)+hz(6*i+3)+hz(6*i+4)+hz(6*i+5)+hz(6*i+6))/6;
end
hfield(:,1)=element(:);
hfield(:,2)=hxmed(:);
hfield(:,3)=hymed(:);
hfield(:,4)=hzmed(:);
save hfield_0.txt hfield -ascii -tabs;
```

