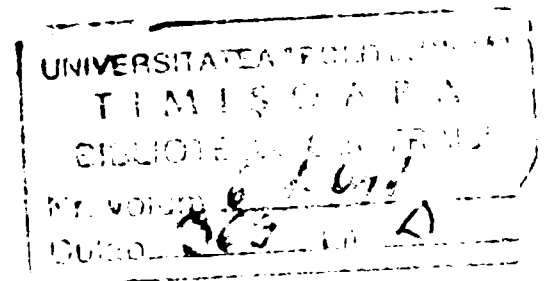


**UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MECANICĂ**

**OPTIMIZAREA CONSTRUCȚIEI ȘI
AMPLASĂRII DISPOZITIVELOR DE
COMPLIANȚĂ
DIN STRUCTURA SISTEMULUI MECANIC
AL ROBOȚILOR INDUSTRIALI**

Teza de doctorat

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA



**Conducător științific:
Prof. Dr. ing. Dr. h. c. Francisc Viliam Kovács**

**Autor:
ing. Doina Iclodean Saftencu**

Timișoara
2003

Prefață

În încercările mele de a naviga în fascinanta lume a roboticii căutând mereu răspunsuri, am beneficiat constant de ajutorul unui cărmaci inegalabil: dl. Prof. Dr. ing. Dr. h. c. Francisc Viliam Kovács. Domnia sa, cu deosebită pricepere, a știut să ghideze vâslașul lipsit de experiență pentru a ocoli capcanele văzute și nevăzute, aducându-l la țärm. Un țärm care, în fapt, semnifică un nou început de drum.

Aduc acum mulțumirile mele specialistului de marcă și cercetătorului neobosit care este dl. Prof. Dr. ing. Dr. h. c. Francisc Viliam Kovács, președinte de onoare al Societății Române de Robotică, pentru consecvența, răbdarea, și eleganța cu care m-a ajutat să ajung la țärm.

Cuvinte de recunoștință adresez conducerii Universității "POLITEHNICA" și conducerii Facultății de Mecanică din Timișoara pentru șansa oferită și condițiile de lucru necesare realizării acestei teze.

Un gând cald de mulțumire adresez colegilor din Departamentul de Mecatronică și celor din Catedra de Geometrie Descriptivă și Desen tehnic care au fost alături de mine în toți acești ani și m-au sprijinit, moral sau material, la finalizarea acestei lucrări.

La final, un gând frumos care nu poate fi cuprins în cuvinte: celor dragi care au fost, celor care sunt și celor care acum nu mai sunt lângă mine.

CUPRINS

	Pag
Prefață	
Cuprins	i
I. Introducere	1
II. Stadiul actual al cercetărilor și realizărilor privind utilizarea fenomenului de complianță în robotică	
II.1. Noțiunea de complianță	3
II.2. Dispozitivele de complianță din structura roboților industriali.	7
II.2.1. Funcțiile dispozitivelor de complianță	7
II.2.2. Structura dispozitivelor de complianță	11
II.2.3. Soluții constructive ale dispozitivelor de complianță	14
II.2.3.1. Introducere	14
II.2.3.2. Dispozitive de complianță pentru efectorul final	14
II.2.3.3. Dispozitive de complianță amplasate în alte zone ale robotului	25
II.2.3.4. Dispozitive de complianță amplasate în exteriorul robotului	27
II.2.4. Metode de analiză a dispozitivelor de complianță	27
II.2.5. Concluzii privind dispozitivele de complianță	34
II.3. Sistemul mecanic compliant al roboților industriali	39
II.3.1. Complianță robotică distribuită	39
II.3.2. Elasticitatea elementelor dispozitivului de ghidare	41
II.3.3. Elasticitatea cuplei cinematice conducătoare	46
II.3.4. Elasticitatea sistemului mecanic al roboților industriali	47
II.3.5. Concluzii privind elasticitatea sistemului mecanic al roboților și reflectarea acesteia în modelarea și comanda roboților	50
III. Obiectivele tezei	
III.1. Introducere	53
III.2. Problematika propusă spre studiu și rezolvare	53
IV. Modelarea matematică a comportamentului mecanismelor utilizând conceptul de “Perechi de Sisteme de Referință”	
IV.1. Conceptul de “Pereche de Sisteme de Referință” (PeSiR)	55
IV.2. Modelul cinetoelastostatic al cuplei cinematice generalizate utilizând conceptul PeSiR	57
IV.3. Modelul cinetoelastostatic al offset-ului generalizat utilizând conceptul PeSiR	60
IV.4. Modelarea matematică a comportamentului cinetoelastodinamic al offset-ului generalizat și al cuplei cinematice generalizate utilizând conceptul PeSiR	62
IV.4.1. Introducere	62
IV.4.2. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al sistemelor mecanice	62
IV.4.2.1. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al sistemelor mecanice cu un singur grad de libertate	62
IV.4.2.2. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al sistemelor mecanice cu două grade de libertate	64
IV.4.2.3. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic	

al sistemelor mecanice cu șase grade de libertate	65
IV.4.2.4. Calculul coeficientului de amortizare echivalent al amortizării structurale	68
IV.4.3. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al offset-ului generalizat	69
IV.4.4. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al cuplei cinematice generalizate	70
IV.4.5. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al unui mecanism	70
IV.5. Transpunerea matricilor deformațiilor elastice 6×1 în matrici de trecere 4×4	71
IV.6. Concluzii	78
V. Analiza comportamentului cinetoelastostatic al elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare ale roboților	
V.1. Introducere	79
V.2. Determinarea matricii de complianță a elementelor omogene, de secțiune constantă, ale dispozitivelor de ghidare	82
V.2.1. Matricea de rigiditate a unei bare de structură spațială	82
V.2.2. Matricea de rigiditate a unei bare simplu încastrate sollicitate la extremitatea liberă de un torsor generalizat cu 6 componente	84
V.2.3. Matricea de complianță a elementelor dispozitivelor de ghidare modelate ca bare spațiale simplu încastrate	87
V.3. Determinarea deplasărilor extremității încărcate a elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare modelate ca bare spațiale simplu încastrate	88
V.4. Analiza comportamentului cinetoelastostatic al elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare modelate ca bare spațiale simplu încastrate, de secțiune constantă	90
V.4.1. Influența proprietăților elastice ale materialului barei asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia	90
V.4.2. Influența lungimii barei asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia	90
V.4.3. Influența secțiunii transversale a barei omogene simplu încastrate asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia	93
V.4.3.1. Influența valorii dimensionale a ariei secțiunii transversale a barei asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia	93
V.4.3.2. Influența formei secțiunii transversale a barei asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia	94
V.5. Determinarea secțiunii optime a elementelor omogene ale dispozitivului de ghidare modelate ca bare spațiale simplu încastrate, de secțiune transversală constantă	110
V.5.1. Introducere	110
V.5.2. Determinarea formei optime a secțiunii transversale a elementului dispozitivului de ghidare modelat ca bară încastrată, de secțiune transversală constantă	110
V.5.3. Determinarea secțiunii transversale optime a elementului dispozitivului de ghidare modelat ca bară încastrată, de secțiune transversală constantă	123

V.6. Modelarea elementelor dispozitivelor de ghidare ca bare spațiale simplu încastrate, omogene, având secțiuni transversală variabilă	132
V.6.1. Modelarea elementelor dispozitivelor de ghidare ca bare de egală rezistență la încovoiere	132
V.6.1.1. Introducere	132
V.6.1.2. Bara plină, de egală rezistență, având secțiune transversală rectangulară	133
V.6.1.3. Bara tubulară, de egală rezistență, având secțiune transversală rectangulară	135
V.6.1.4. Bara plină, de egală rezistență, având secțiune transversală circulară	136
V.6.1.5. Bara tubulară, de egală rezistență, având secțiune transversală circulară	136
V.6.2. Alegerea formei optime a secțiunii elementelor dispozitivelor de ghidare modelate ca bare de egală rezistență la încovoiere	137
V.6.3. Influența secțiunii transversale a barei de egală rezistență la încovoiere asupra comportării la întindere/compresiune	138
V.6.4. Influența secțiunii transversale a barei de egală rezistență la încovoiere asupra comportării la torsiune	139
V.6.5. Concluzii privind modelarea elementelor dispozitivului de ghidare ca bare cu secțiune transversală variabilă	140
V.7. Aprecierea comportamentului cinetoelastostatic al elementelor omogene de secțiune constantă	141
VI. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de ghidare ale roboților industriali	
VI.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al elementelor din structura dispozitivelor de ghidare ale roboților	147
VI.1.1. Noțiunea de offset	147
VI.1.2. Modelul comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului simplu	153
VI.1.3. Modelul comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului materializat prin îmbinarea rigidă a două bare	156
VI.1.4. Modelul comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului materializat prin îmbinarea rigidă a trei bare	163
VI.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice din structura dispozitivelor de ghidare ale roboților	166
VI.2.1. Introducere	166
VI.2.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de rotație	168
VI.2.2.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de rotație, conducătoare	168
VI.2.2.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de rotație, conduse	189
VI.2.3. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de translație	190
VI.2.3.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de translație, conducătoare	190

VI.2.3.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de translație, conduse	194
VI.3. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de ghidare ale roboților	194
VI.3.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de ghidare cu topologie serială	194
VI.3.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de ghidare cu topologie paralelă	197
VI.4. Concluzii	198
VII. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță din structura efectorilor finali ai roboților industriali	
VII.1. Introducere	199
VII.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță cu un element elastic omogen	200
VII.2.1. Dispozitive de complianță cu un element elastic omogen, având secțiune constantă	200
VII.2.2. Dispozitive de complianță cu un element elastic omogen, considerat de secțiune constantă	205
VII.3. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor complianță cu două elemente elastice omogene, de secțiune constantă	207
VII.3.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor complianță cu două elemente elastice omogene, paralele, de secțiune constantă	207
VII.3.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor complianță cu două elemente elastice omogene, înclinate, de secțiune constantă	215
VII.3.3. Determinarea secțiunii optime a elementelor elastice ale dispozitivelor complianță tip <i>RCC</i> cu două elemente elastice omogene, de secțiune constantă	216
VII.4. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor complianță cu trei elemente elastice omogene, dispuse axial simetric, de secțiune constantă	220
VIII. Determinări experimentale	
VIII.1. Determinări experimentale ale comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță tip <i>RCC</i>	229
VIII.1.1. Introducere	229
VIII.1.2. Dispozitivele de complianță încercate	229
VIII.1.3. Standul experimental	231
VIII.1.3.1. Varianta I	231
VIII.1.3.2. Varianta II	233
VIII.1.4. Metodologia de lucru	233
VIII.1.5. Determinări experimentale ale comportamentului dispozitivelor de complianță	235
VIII.1.5.1. Determinări experimentale ale comportamentului dispozitivelor de complianță realizate pe standul I	235

VIII.1.5.2. Determinarea comportării mecanismului cu cuple cinematice elastice prin înregistrarea optică a mișcării	236
VIII.2. Determinări experimentale ale comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului de ghidare compliant al unui robot	241
VIII.2.1. Introducere	241
VIII.2.2. Soluții constructive pentru elementele compliante ale dispozitivelor de ghidare ale roboților	242
VIII.2.3. Încercări realizate	243
VIII.2.3.1. Etalonarea elementului elastic	244
VIII.2.3.2. Controlul în forță al robotului PUMA cu element elastic	246
VIII.2.3.3. Încercări de colaborare a doi roboți	247
VIII.2.3.4. Încercări de colaborare robot cu element flexibil-operator uman	247
VIII.3. Concluzii	248
IX. Concluzii și contribuții personale	
IX. 1. Concluzii	249
IX. 1. Contribuții personale	250
Bibliografie	253
Anexe	
Anexa V.1. Calculul simbolic al deplasărilor extremității libere a barei omogene, încastrată la o extremitate și încărcată la extremitatea liberă cu un torsor 6×1	
Anexa V.2. Analiza dependenței deplasărilor liniare și unghiulare ale extremității libere cu lungimea barei încastrate	
Anexa V.3. Deplasările barei circulare pline, încastrata și solicitată cu un torsor 6×1	
Anexa V.4. Deplasările barei circulare pline, încastrata și solicitată cu un torsor 6×1	
Anexa V.5. Analiza dependenței deplasărilor liniare și unghiulare ale extremității libere ale barei încastrate având $D=H$	
Anexa V.6. Analiza dependenței deformației liniare de-a lungul axei Ox cu dimensiunile secțiunilor rectangulare având $B/H=2/3$ și ale celor circulare, pline și respectiv tubulare	
Anexa V.7. Analiza dependenței deformației liniare de-a lungul axei Oy cu dimensiunile secțiunilor rectangulare având $B/H=10/15$ și ale celor circulare, pline și respectiv tubulare	
Anexa V.8. Analiza dependenței deformației liniare de-a lungul axei Oz cu dimensiunile secțiunilor rectangulare având $B/H=10/15$ și ale celor circulare, pline și respectiv tubulare	
Anexa V.9. Analiza dependenței deformației unghiulare în jurul axei Ox cu dimensiunile secțiunilor rectangulare având $B/H=10/15$ și ale celor circulare, pline și respectiv tubulare	
Anexa V.10. Analiza dependenței deformației unghiulare în jurul axei Oy cu	

- dimensiunile secțiunilor rectangulare având $B/H=10/15$ și ale celor circulare, pline și respectiv tubulare
- Anexa V.11. Analiza dependenței deformației unghiulare în jurul axei Oz cu dimensiunile secțiunilor rectangulare având $B/H=10/15$ și ale celor circulare, pline și respectiv tubulare
- Anexa V.12. Reprezentarea dependenței $u=u(\lambda)$
- Anexa V.13. Analiza elementelor matricii de complianță a barei încastrate având aria secțiunii transversale constantă- bara plină circulară/bara plină rectangulară; bara tubulară circulară/bara tubulară rectangulară
- Anexa V.14. Analiza elementelor matricii de complianță a barei încastrate având aria secțiunii transversale constantă
- Anexa V.15. Analiza elementelor matricii de complianță a barei încastrate având aria secțiunii transversale constantă - bara plină rectangulară/bara tubulară circulară
- Anexa V.16. Analiza comportării barelor cu secțiuni de arii egale
- Anexa V.17. Calculul simbolic al determinantului matricii de complianță a barelor simplu încastrate
- Anexa VI.1. Determinarea matricii de trecere ce modelează offsetul plan, compus din două tronsoane îmbinate rigid (figura VI.21) -deformații mari
- Anexa VI.2. Determinarea matricii de trecere ce modelează offsetul plan, compus din două tronsoane îmbinate rigid (figura VI.21) -deformații mici
- Anexa VII.1. Determinarea deplasărilor liniare și unghiulare ale punctului A al elementului inferior al dispozitivului de complianță RCC plan cu două elemente elastice paralele, încărcat cu o forță situată în același plan
- Anexa VIII.1. Date primare (tensiuni) ale încercărilor dispozitivelor de complianță tip RCC cu trei elemente elastice
- Anexa VIII.2. Deplasări înregistrate ale bielei rigide a dispozitivelor de complianță tip RCC cu trei elemente elastice

I. INTRODUCERE

Într-o lume în care prioritățile se schimbă mereu, iar realitatea virtuală tinde să se substituie lumii reale, robotica rămâne un domeniu de vârf, care reușește să-și păstreze rădăcinile și să-și dezvolte permanent ramurile.

În robotică, omul este țel: robotul ideal ar fi cel ce are implementate toate funcțiile umane. Dar, în același timp, omul este scop: omul să poată fi înlocuit în muncile cele mai istovitoare de către robot.

Încercările de a realiza un robot cât mai aproape de modelul ideal – omul, a relevat roboticienilor o multitudine de probleme. O astfel de problemă majoră: reproducerea capacității omului de a manevra, cu o remarcabilă abilitate, obiecte având masa mult mai mare decât a sa. Înzestrarea robotului cu o capacitate similară este încă incomplet realizată, întrucât implică o caracteristică contradictorie: complianța.

Complianța, în cele două ipostaze umane, cea fizică și cea psihică, s-a dovedit a fi o redutabilă provocare. Dacă complianța psihică rămâne o posibilă, dar încă iluzorie, caracteristică a roboților inteligenți ai mileniului III, complianța fizică, structurală, a robotului există, independent de opțiunile roboticienilor.

Atunci când se dorește a anume dexteritate a robotului, apropiată de cea umană, complianța este căutată, dorită. Se încadrează aici o multitudine de aplicații robotizate, dintre care se menționează doar extremele temporale: montajul industrial robotizat și microchirurgia robotizată. Adaptabilitatea dorită a robotului s-a realizat, majoritar, cu ajutorul dispozitivelor de complianță. Acestea nu constituie soluții generale, ci sunt dispozitive strict specializate, care concentrează local complianța, fiind montate între ultimul element al dispozitivului de ghidare al robotului și efectorul final al acestuia.

Dispozitivele de complianță dotează în mod suplimentar robotul în vederea îndeplinirii unei anume sarcini de lucru, care necesită o anume flexibilitate, robotul în ansamblu fiind mult prea rigid. Ca urmare, soluțiile constructive realizate și publicate, sunt de varietate și diverse ca principiu de funcționare, materiale și forme geometrice.

Complianța structurală a robotului a fost și este prezentă în structura tuturor roboților, indiferent de generație. Aceasta este consecința implicită a inexistenței fizice a corpurilor solide ideal-rigide. La proiectarea, realizarea, comanda și controlul primelor generații de roboți, complianța structurală nu a fost luată în considerare. Efectele nedorite ale acesteia au fost atenuate prin masivitatea elementelor structurii mecanice a robotului.

Când însă, se dorește precizie și simultan, viteză de lucru sporită, complianța structurală a robotului este o piedică inerentă. Vitezele și accelerațiile mari necesită structuri mecanice cât mai ușoare, care se pot obține pe două căi: utilizarea de materiale noi, revoluționare sau utilizarea de elemente cu volum cât mai redus.

O primă soluție este realizarea structurii mecanice a robotului din materiale cu greutate specifică redusă și coeficient de elasticitate ridicat, dar având caracteristici mecanice apropiate materialelor metalice “clasice” în construcția roboților. Acestea implică însă, tehnologii de fabricație pretențioase, și deci, scumpe.

Ce-a de-a doua cale de reducere a masei structurale a robotului, este utilizarea unor geometrii corespunzătoare a elementelor sistemului mecanic. În condiții de rezistență și lungimi impuse ale elementelor robotului, se poate interveni, pentru scopul propus, asupra geometriei secțiunii transversale a acestora. Sunt adecvate secțiunile tubulare, cu momente de inerție axiale cât mai ridicate. Acestea însă, generează sensibilitate mare la vibrații, afectând considerabil precizia robotului. Vibrațiile structurale, fenomen complex în sine, crează probleme de comandă și control al roboților încă incomplet rezolvate.

În consecință, roboții ușori și preciși rămân o problemă de certă actualitate pentru roboticieni.

**II. STADIUL ACTUAL AL
CERCETĂRILOR ȘI
REALIZĂRILOR PRIVIND
COMPLIANȚA ÎN ROBOTICĂ**

II.1. Noțiunea de complianță

Termenul complianță provine din substantivul englez “compliance” care înseamnă îngăduință, flexibilitate, maleabilitate, concesiune, cedare, supunere, [Sta-96], [**D-96], [**D-97], [**M-78]. Se poate diferenția în acest context:

- ◆ complianța biosistemelor:
 - ◆ pentru regnul animal și cel vegetal fiind capacitatea, gradul de adaptabilitate la modificările condițiilor de mediu în care evoluează;
 - ◆ pentru regnul animal se adaugă și semnificația de cedare, supunere, docilitate;
 - ◆ pentru om semnificația se îmbogățește și cu alte nuanțe, caracteristice comportamentului și intelectului uman: îngăduință, maleabilitate, flexibilitate;
- ◆ complianța sistemelor fizice, create de om, fiind capacitatea de arcuire, gradul de elasticitate sau flexibilitatea acestora.

În mecanică, complianța semnifică gradul de deformare elastică, sub acțiunea forței aplicate, [Cof-92], [Ena-82].

Prima mențiune a termenului “complianță” în limba română este în Lexiconul Tehnic Român, [**L-59], care stipulează:

“Complianța este mărimea care indică gradul de elasticitate corespunzător unui sistem mecanic, definită, în cazul în care sistemul are o mișcare de translație, prin raportul dintre mărimea deplasării și mărimea forței aplicate, iar în cazul în care sistemul are o mișcare de rotație, prin raportul dintre mărimea deplasării unghiulare și mărimea momentului aplicat sistemului”.

În tehnică, proprietatea sistemelor de a se deforma elastic presupune două aspecte:

- ◆ deformațiile elastice ale sistemului sunt nedorite, ele afectează negativ funcționarea acestuia;
- ◆ deformațiile elastice ale sistemului sunt dorite, necesare, uneori esențiale, în

funcționarea acestuia - este cazul nenumăratelor realizări tehnice bazate pe comportarea elastică a elementelor componente.

În studiul complianței sistemelor mecanice sunt utilizate două noțiuni de bază:

- ◆ flexibilitatea S_{ij} a unui element, definită ca fiind matricea:

$$[S_{ij}] = \frac{[\delta \Delta_j]}{[\delta F_i]} \quad [S_{ij}] = \frac{[\delta \Delta_j]}{[\delta F_i]} \quad (II.1)$$

unde: Δ_j este deplasarea (rotație sau translație după axa "j") asociată forței F_i .

F_i este forța, în sens generalizat, care determină deplasarea Δ_j .

- ◆ rigiditatea K_{ij} a unui element definită ca inversa flexibilității, deci:

$$[K_{ij}] = \frac{[\delta F_i]}{[\delta \Delta_j]} \quad (II.2)$$

Complianța sistemelor tehnice este o proprietate dobândită, ce se poate obține prin utilizarea materialelor cu proprietăți elastice (complianță naturală), prin alegerea adecvată a formei și dimensiunilor elementelor constitutive (complianță artificială) sau prin combinarea primelor două modalități enunțate.

Comportamentul elastic, la sistemele mecanice la care acesta este necesar, poate fi asigurat de manieră distribuită (când toate elementele componente sau o mare parte a acestora au comportament elastic), sau concentrată (când comportamentul elastic este concentrat zonal).

Complianța unui sistem se materializează în răspunsul acestuia la solicitările exterioare statice sau dinamice. În acest context, se poate diferenția complianța statică și complianța dinamică a sistemelor tehnice, [Pos-91].

Termenul de complianță, cu semnificația din robotică, a fost preluat din limba engleză, el definind elasticitatea structurală a robotului, proprietatea acestuia de a se deforma elastic sub acțiunea solicitărilor externe, [Cof-92]. Unii autori recomandă pentru semnificația specifică roboticii, utilizarea termenilor de compleanță și compleant, [Sta-96].

Complianța roboților industriali, ca proprietate structurală, permite clasificarea acestora de maniera:

- roboți rigizi, ale căror elemente sunt considerate ideal-rigide, deci nedeformabile și care nu au în componență dispozitive, module, sau elemente cu proprietăți elastice;

B. roboți rigizi cu complianță concentrată - roboți rigizi care au în componența lor dispozitive specializate, module, sau elemente cu proprietăți elastice;

C. roboți elastici sau complianți, la care se ia în considerare deformabilitatea elementelor lor constitutive, acestea nemaifiind considerate solide ideal rigide.

Roboții de categoria A nu au avut niciodată existență fizică reală, fiind doar modelele idealizate ale roboților reali, utilizate în proiectarea și realizarea primelor generații de roboți. Rigiditatea acestora a fost asigurată în principal prin dimensiunile elementelor componente și prin utilizarea materialelor cu rigiditate mare. În consecință, acești roboți sunt greoi, masivi, de precizie scăzută și mari consumatori de energie.

Roboții de categoria B, sunt masivi ca și cei de categoria A, dar au grad de precizie mai ridicat, obținut prin amplasarea între ultimul element al dispozitivului de ghidare și efectorul final a unui dispozitiv special conceput pentru reducerea erorilor de situare (dispozitiv de complianță). Elementele acestor roboți sunt considerate perfect rigide, exceptând dispozitivul de complianță. În cazul roboților din categoria B, complianța, concentrată în dispozitive speciale, are un rol deosebit de util, chiar necesar.

Roboții industriali din primele două categorii se caracterizează, pe lângă masivitate și imprecizie, prin funcționarea cu viteze și accelerații scăzute, prin coeficienți "masă robot/sarcină" de valori ridicate, [Saf-95].

Ultimele două decenii marchează apariția roboților de categoria C, a căror complianță structurală nu se poate neglija. Elasticitatea structurii acestora crează mari dificultăți, generează imprecizie și vibrații, deci este, în această situație un aspect nedorit.

Cerințele fundamentale pentru structura mecanică a roboților industriali moderni se pot rezuma în două cuvinte: ușoară și rigidă. O astfel de structură rezultă prin:

- ◆ utilizarea materialelor cu raportul modul de elasticitate/densitate cât mai ridicat (tabelul II.1);
- ◆ alegerea adecvată a dimensiunilor și a formei secțiunii elementelor;
- ◆ alegerea unei arhitecturi adecvate pentru sistemul mecanic al robotului.

Tabelul II.1

Material	E [daN/mm ²]	G [daN/mm ²]	ρ [kg/m ³]	E / ρ [mdaN/kg]
oțel	20.000	8.000	7.800	2,56
duraluminiu	7.300	2.800	2.700	2,70
materiale compozite	10.000	-	1.400	7,20

Pe plan mondial, se evidențiază noi direcții de cercetare în robotică: realizarea roboților “ușori”, realizarea roboților “rapizi” și “precizi”, și realizarea roboților “inteligenti”, capabili să-și îndeplinească funcțiile în medii tehnologice insuficient cunoscute sau cu evoluții imprevizibile.

Roboții ușori beneficiază de o proprietate structurală insuficient reprezentată în structura primelor generații de roboți: elasticitatea. Aceștia au marele avantaj al consumului mai redus de energie pentru atingerea acelorași viteze și accelerații, [Kru-90], dar sunt foarte sensibili la vibrații. La fel de sensibili în ceea ce privește apariția vibrațiilor sunt și roboții rapizi.

Sistemul mecanic al roboților industriali considerat ca structură nedeformabilă, este, în realitate, o structură deformabilă sub acțiunea forțelor exterioare tehnologice, a forțelor de inerție și a forțelor masice. În consecință, complianța structurii mecanice a roboților trebuie luată în considerare în modelarea, calculul, comanda și măsurarea performanțelor roboților ușori, de viteze și precizii ridicate, [Vuk-89]. Acești roboți sunt numiți în literatura de specialitate, roboți complianți.

Succesul unor operații tehnologice robotizate (montaj, șlefuire, găurire după șablon, alimentarea mașinilor unelte, etc.), este condiționat de eliminarea sau cel puțin reducerea în limitele admise a erorilor de situare. Aceasta presupune fie minimizarea erorilor pornind chiar de la sursa lor fie acceptarea erorilor și corecția lor pe parcursul operației tehnologice, [DoV-92]. Corectarea erorilor de situare se realizează printr-un control activ, pasiv sau mixt al forțelor dezvoltate la contactul cu mediul tehnologic.

Controlul pasiv sau mixt necesită utilizarea unor elemente deformabile în domeniul

elastic, care concentrează complianța robotului în dispozitive speciale. Acestea, numite și dispozitivele de complianță, sunt strict specializate, dar de o mare varietate și diversitate. Este cazul complianței robotice concentrate. Se prezintă în figura II.1, o posibilă clasificare a dispozitivelor de complianță pornind de la destinația robotului pe care îl dotează.

II.2. Dispozitivele de complianță din structura roboților

II.2.1. Funcțiile dispozitivelor de complianță

Varietatea soluțiilor constructive cât și varietatea materialelor utilizate în realizarea modulelor de complianță face dificilă sistematizarea dispozitivelor de complianță în categorii bine definite, de tip standard. Prin rolul care le este atribuit încă din faza de concepție, dispozitivele de complianță pot îndeplini una sau mai multe funcții, (figura II.2).

Precizia necesară îndeplinirii funcției obiectiv a robotului este în numeroase cazuri, superioară preciziei acestuia. Imprecizia de situare este una din caracteristicile tehnice ale robotului și poate fi influențată în sens pozitiv schimbând structura sa mecanică. Cum prețul robotului crește proporțional cu precizia acestuia, este mai economică utilizarea roboților mai puțin preciși, dar dotați cu o interfață care să absoarbă automat erorile: complianța. Se disting în acest context: complianța pasivă, complianța activă și cea mixtă. Atunci când sistemul sensibil (elastic) utilizat este în întregime mecanic și deformabil, se vorbește despre complianța pasivă și, respectiv, corecția pasivă. Corecția pasivă a erorilor de situare corespunde strategiei gradient, [Kov-92], [DoV-92].

Complianța activă nu se mai bazează pe același tip de deformații ale elementelor elastice specifice complianței pasive, unde corecția de poziție este generată de forțele decontact. În cazul complianței active, se folosesc sisteme rigide care pot executa mișcări de amplitudine mică sub impulsul unei comenzi. Aceste comenzi ale sistemului de comandă al robotului sunt condiționate de forțele de legătură ce apar ca urmare a contactului celor două elemente (obiect manipulat și obiect-destinație) și care sunt

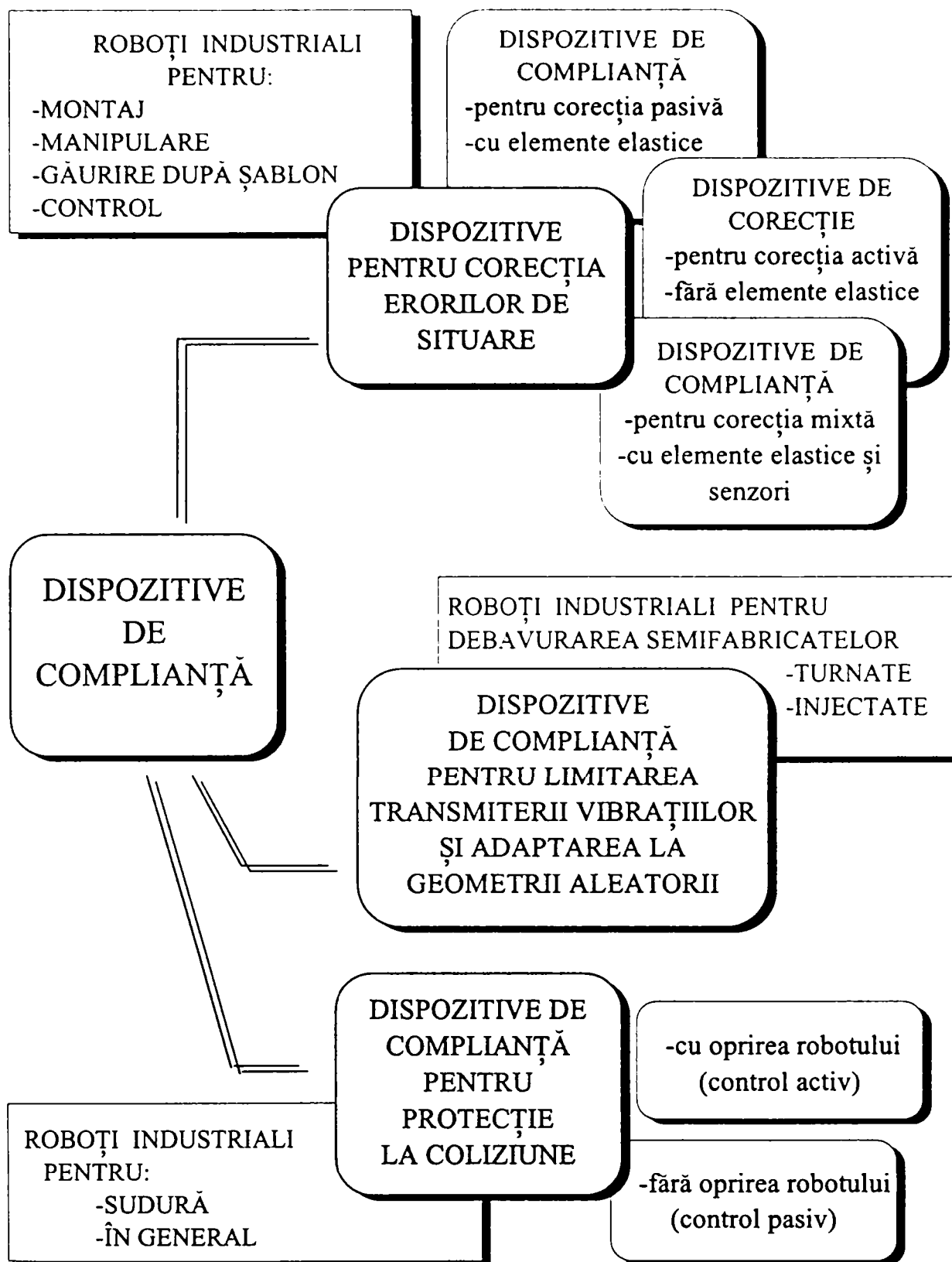


Figura II.1. Clasificarea dispozitivelor de complianță în funcție de destinația robotului în structura căruia sunt incluse

măsurate. Metoda de corecție activă corespunde strategiei Gauss-Seidel, [DoV-92].

Corecția erorilor de situare se poate realiza automat în mod activ, pasiv sau mixt, [Kov-92]. Corecția mixtă îmbină cele două metode de corecție anterior prezentate.

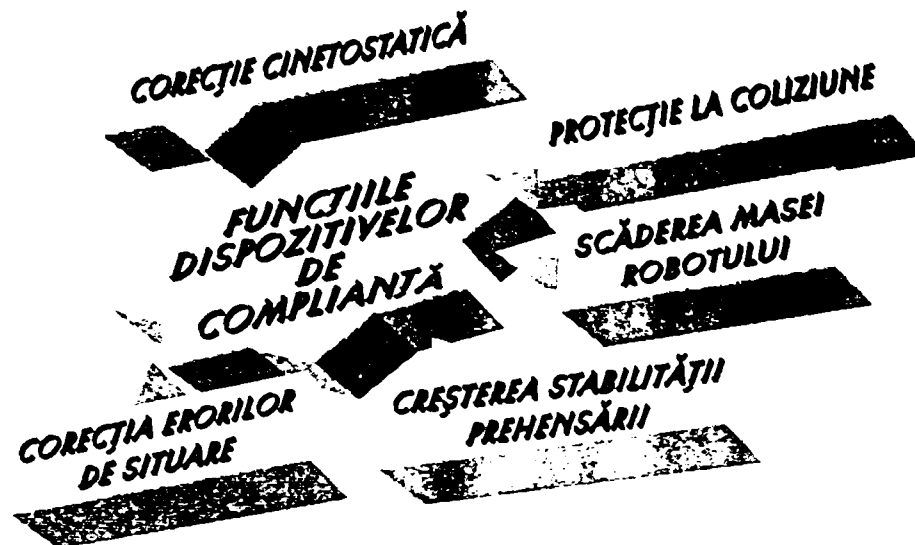


Figura II.2. Funcțiile dispozitivelor de complianță

O construcție judicioasă a roboților industriali implică și utilizarea elementelor elastice în structura mecanismelor lor componente. Sinteza cinetostatică a acestor mecanisme urmărește determinarea dimensiunilor elementelor componente în scopul realizării unei anumite distribuții de forțe. Aceasta se realizează pentru reducerea solicitării elementelor sau orientării acestor solicitări după direcții preferențiale, pentru scăderea puterii de acționare a mecanismului, pentru uniformizarea mișcării.

Una din tendințele moderne, de certă actualitate în robotică este cea de realizare a unor roboți mai rapizi, cu consum energetic mai mic, la performanțe cel puțin comparabile cu generațiile anterioare de roboți, rigizi, dar masivi și grei, [Iva-94], [Vuk-89].

Reducerea masei se obține prin utilizarea unor elemente componente mai ușoare, de secțiuni reduse. Aceste elemente sunt suple, deformabile, și, chiar dacă nu sunt introduse în scopul creșterii elasticității sistemului mecanic, generează o comportare elastică a acestuia care nu mai poate fi neglijată. Comportamentul elastic al ansamblului este nedorit, dăunător și pune mari probleme de eliminare a vibrațiilor și a erorilor pe care le generează în sistem, [Ald-91], [8], [Cha-82], [Cri-88], [Sta-96].

O notă distinctă aduc în domeniul complianței pasive dispozitivele de prehensiune cu “degete moi”, [Bor-92], [Chn-95]. Autorii, contrar uzanțelor în care suprafețele dispozitivului de prehensiune care vin în contact cu obiectul fixat sunt dure, propun folosirea materialelor moi între “scheletul” dur al dispozitivului de prehensiune și obiectul de lucru. Sistemul dispozitiv de prehensiune-obiect de lucru nu mai poate fi considerat solid rigid, întrucât, obiectul, sub acțiunea unor forțe externe, se poate mișca față de dispozitivul de prehensiune dacă acesta este fixat în spațiu, ca urmare a deformării materialelor moi ale degetelor. Adaptându-se local la forma obiectului prehsensat, “degetele moi” asigură creșterea stabilității prehensării, prin creșterea suprafeței de contact. Degetele compliante încă nu au un model teoretic în literatura de specialitate.

Dispozitive compliante sau doar elemente elastice, special incluse în structura roboților industriali, preponderent în sistemul mecanic al roboților pentru sudură, pot avea și un alt rol distinct, bine definit: de prevenire a deficiențelor care apar la coliziune. Prin aceasta dispozitivele menționate contribuie decisiv la creșterea siguranței în exploatare și la prelungirea duratei de funcționare a robotului. În funcție de modul în care au fost concepute, dispozitivele de protecție la coliziune pot funcționa de manieră pasivă (fără oprirea robotului), sau de manieră activă (cu oprirea robotului).

II.2.2. Structura dispozitivelor de complianță

Analiza constructivă a modelelor de dispozitive de complianță publicate și brevetate, evidențiază existența unor elemente componente caracteristice în structura acestora: elemente rigide (sau considerate rigide), elemente elastice și cuple cinematice elastice, de clasa a-V-a sau de clasa a-III-a, [Kov-85].

Elementele rigide din structura dispozitivelor de complianță sunt de o mare varietate ca formă constructivă, [Saf-98]. Acestea sunt derivate, în majoritate, din flanșele de fixare a efectorului final, respectiv a întregului ansamblu față de dispozitivul de ghidare al robotului. Aspectul lor geometric variază pornind de la flanșa plată cu/fără orificii pentru fixarea elementelor elastice de formă prismatică sau cilindrică, dispuse simetric, la

discurile asemănătoare roților cu spițe, și acestea fără/cu orificii de prindere a elementelor elastice, (figura II.3.a). Multiple modele utilizează ca elemente rigide piese de tipul racordurilor flanșă-ștuț (figura II.3.b).

Literatura semnalează elemente rigide a căror formă este derivată din structuri

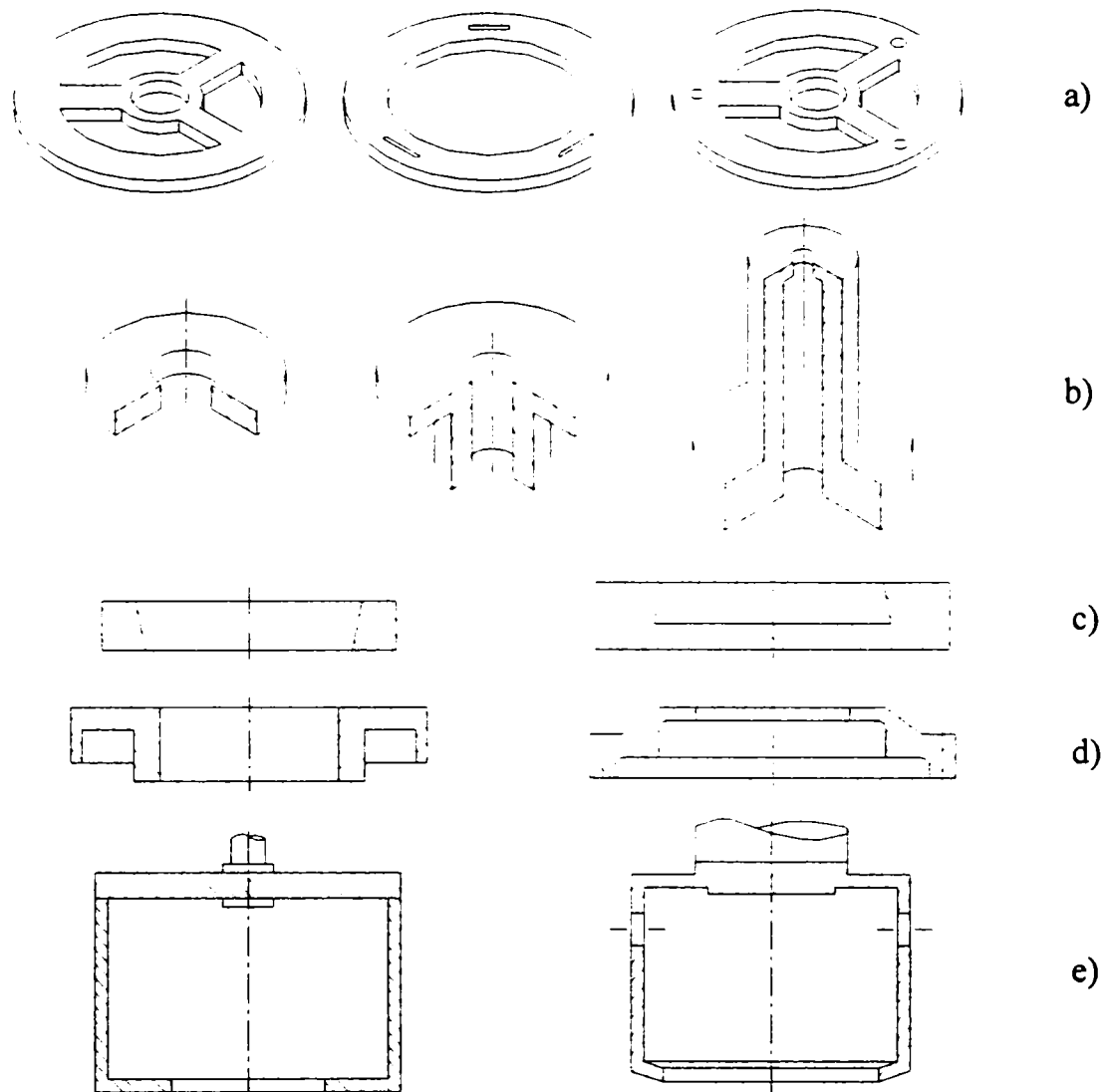


Figura II.3. Elemente rigide din structura dispozitivelor de complianță

cilindrice, având alezaje cilindrice axiale de secțiuni variate, cu teșiri sau/și rotunjiri diverse, (figura II.3.c,d,e), dar și soluții constructive mai pretentioase, elementele rigide fiind realizate din mai multe părți îmbinate solidar între ele și dispuse axial simetric față de axa dispozitivului, (figura II.4.a,b), sau având forme de furcă sau cadru (figura II.4.c).

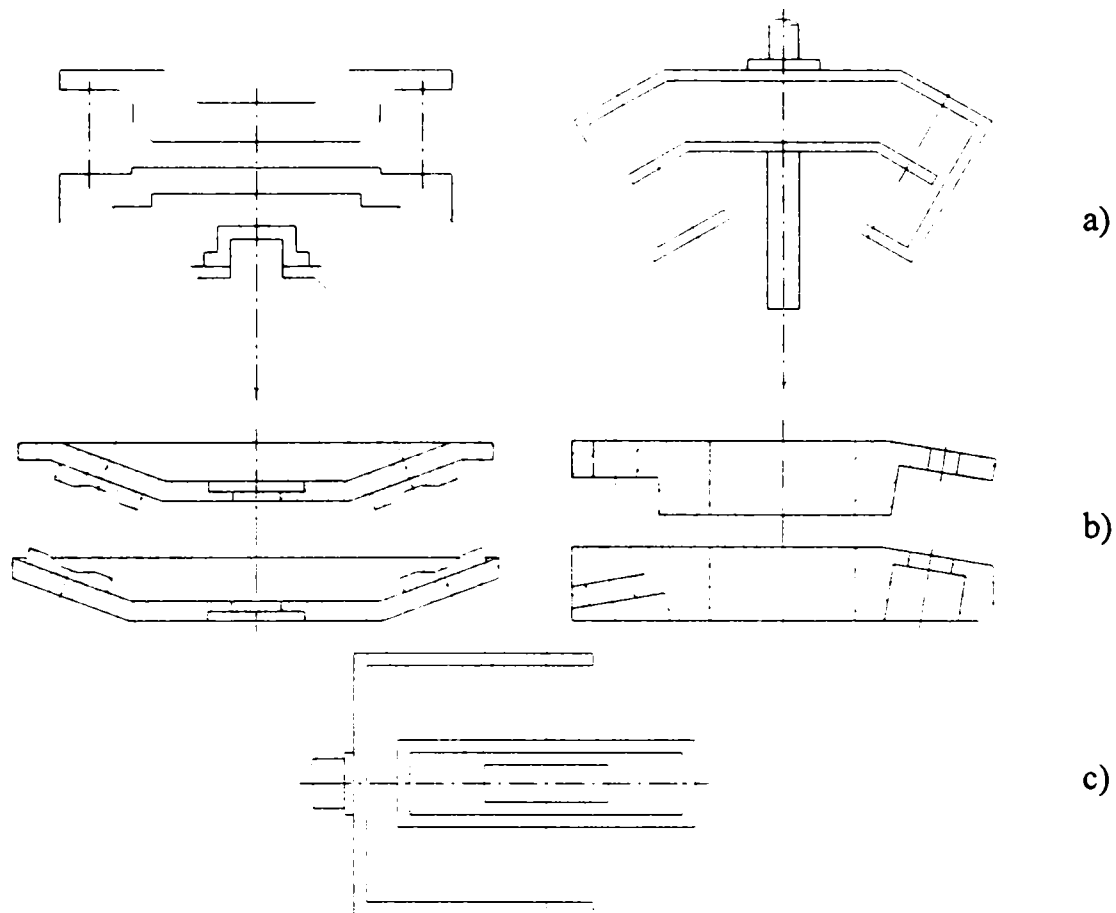


Figura II.4. Structuri de elemente rigide ale dispozitivelor de complianță

Elementele rigide existente în structura dispozitivelor de complianță sunt de o mare varietate de forme, dar unitare în ceea ce privește materialul: metal.

Elementele elastice din structura dispozitivelor de complianță sunt nu doar de forme multiple, ci și din diverse materiale. Astfel se remarcă: elemente elastice metalice (figura II.5), elemente elastice din elastomeri (figura II.6.a), elemente elastice compozite (figura II.6.b) și elementele elastice fluidice (figura II.6.c).

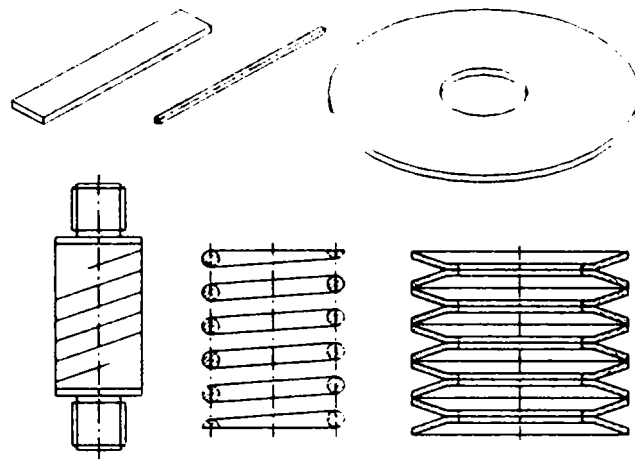


Figura II.5. Elemente elastice metalice din structura dispozitivelor de complianță

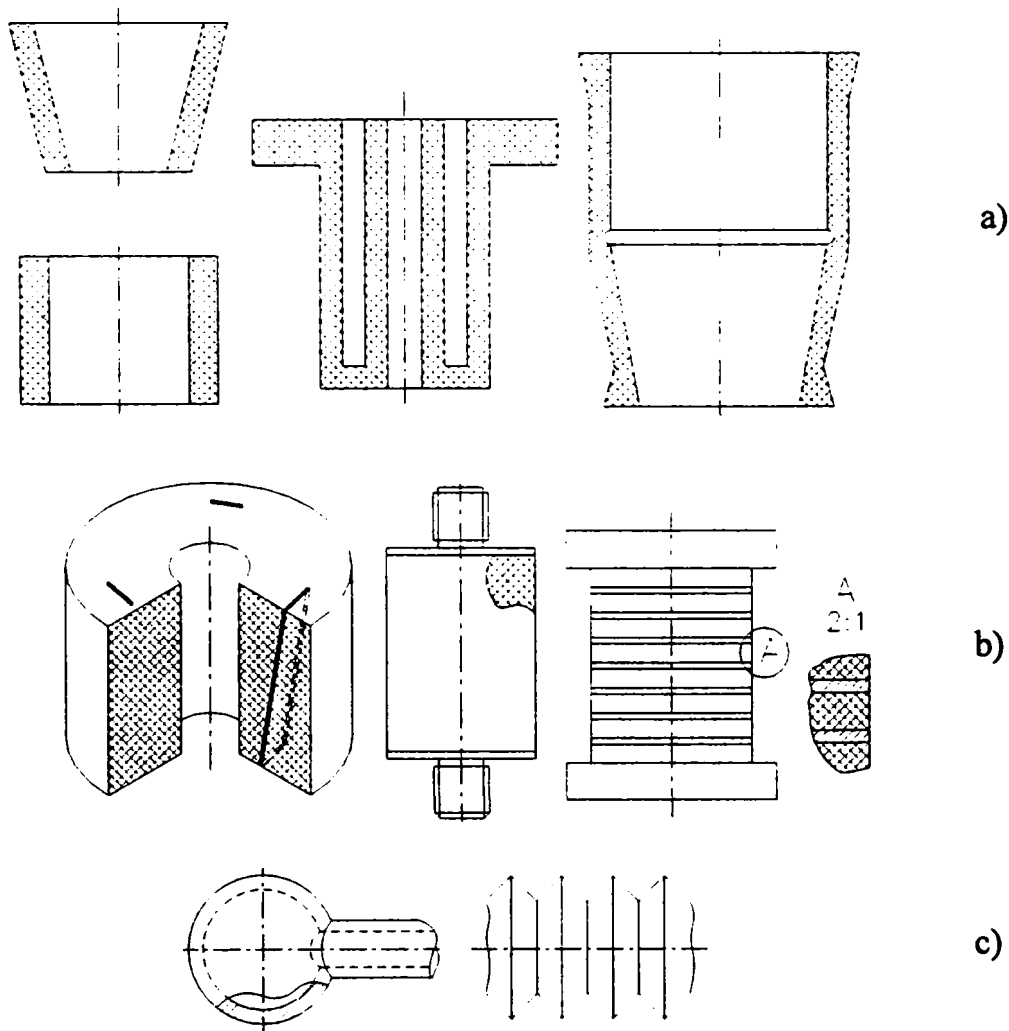


Figura II.6. Elemente elastice din structura dispozitivelor de complianță

a) din elastomeri, b) compozite, c) fluidice

II.2.3. Soluții constructive ale dispozitivelor de complianță

II.2.3.1. Introducere

Operațiile tehnologice robotizate, raportate la cerințele de rigiditate a structurii robotului, pot fi grupate în două categorii:

- ✓ aplicații care impun o adaptibilitate a structurii mecanice, care se poate traduce printr-un anumit grad de elasticitate al acesteia (montaj, șlefuire, alimentarea mașinilor unelte, etc.),
- ✓ aplicații care necesită urmarea cu precizie a unei traiectorii date, deci care impun o rigiditate ridicată a structurii mecanice, evitând în acest mod vibrațiile.

Complianța activă răspunde parțial acestor exigențe contradictorii, robotul rămâne rigid, simulând doar elasticitatea. Principalul avantaj al dispozitivelor cu complianță activă este rigiditatea. Prin introducerea unei funcții de "rigiditate controlată", complianța activă are un caracter mai general, nefiind strict condiționată de natura aplicației în sine. În consecință, aceste unități de complianță pot fi montate permanent pe roboți. Acestea însă, necesită folosirea unui sistem de traductoare/senzori, a unui sistem de analiză și comandă performant, care implică costuri net superioare celor ale unităților de complianță pasivă.

Complianța pasivă este strict condiționată de natura sarcinii vizate a fi îndeplinite. Soluțiile constructive pentru dispozitive de complianță utilizate în corecția pasivă a erorilor sunt soluții distincte, adecvate fiecărei aplicații în parte, [DoV-83], [Saf1-94], [Saf1-98].

Dispozitivele de complianță brevetate sau/și publicate în literatura de specialitate sunt dispozitive strict specializate, [Saf2-94]. Paleta amplă a soluțiilor constructive publicate ilustrează varietatea și diversitatea acestora.

II.2.3.2. Dispozitive de complianță pentru efectorul final

Primul robot industrial utilizat pentru operații de montaj, numit "Sigma" ("Sistema Integrato Generico per la Manipolazione Automatica"), [Jac-82], [Sam-80], [Vol-81], a fost realizat de firma "Olivetti" (Italia) în anul 1972. Acesta a fost prevăzut cu un dispozitiv de

compliantă bazat pe arcuri elicoidale montate pretensionat, (figura II.7). Sarcinile în planul xOy sunt preluate de arcurile orizontale 1, iar cele pe direcția Oz , de arcul vertical 2. Deformațiile sistemului elastic sunt urmărite de traductoarele de poziție 3.

În același an, în Japonia, firma "Hitachi" a realizat un dispozitiv de prehensiune prevăzut cu modul de compliantă bazat pe senzori tactili numit "Hi-T-Hand", (figura II.8), [Vol-81].

Modelul de referință al dispozitivelor de compliantă, "RCC", ("Remote Center of Compliance" - cu centru de compliantă îndepărtat), a fost brevetat la 4 iulie 1978, în

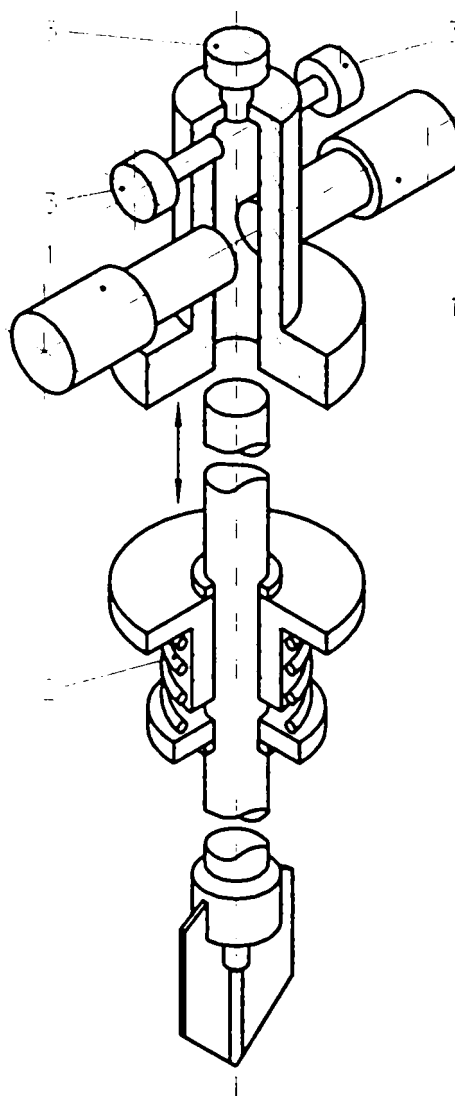


Figura II.7. Dispozitivul de compliantă al robotului "SIGMA"

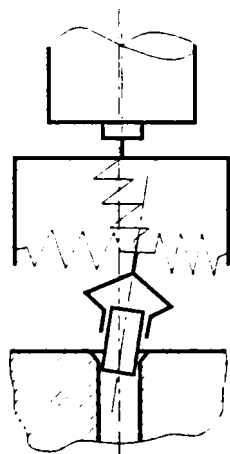


Figura II.8. Reprezentarea schematică a modului de compliantă al firmei "Hitachi"

SUA, la Charles Stark Draper Laboratory din cadrul M.I.T. Cambridge, (figura II.9.a) [Nof-92], [Kov-92]. Elementele elastice sunt trei arcuri lamelare de secțiune dreptunghiulară sau circulară, dispuse axial-simetric față de axa longitudinală a dispozitivului (Oz). Acest model a fost utilizat pentru compensarea erorilor de situare la montajul a două piese de revoluție.

În anul următor, este brevetată o altă variantă, (figura II.9.b), a acestui model, [Dra-79], [Nev-78], [Wat-78].

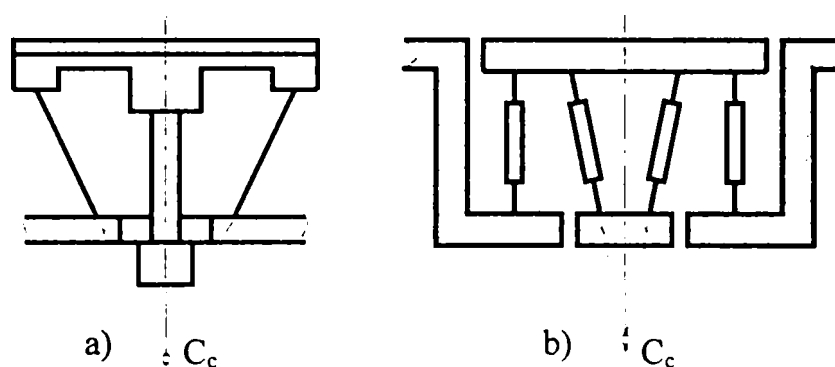


Figura II.9. Reprezentarea schematică a modelelor de referință "RCC"

La Universitatea Linköping (Suedia), în anul 1979, a fost realizat un alt model, asemănător celui anterior, numit "DCSV" ("Dispositif Compliant à Structure Variable"), [Dov-92], [Anr-83], caracterizat prin existența a doi microcilindri pneumatici CP_1 și CP_2 , (figura II.10).

Un alt model, apropiat structural de modelul "RCC", adaptat manipulării pieselor de greutate mai mare, denumit "PCD" ("Passive Compliance Device"), a fost realizat în 1979 la Universitatea Canterbury, în Noua Zeelandă, (figura II.11).

Noutatea pe care acesta o aduce constă în structura elastică alcătuită ca o combinație de șase elemente extensibile (pistoane și arcuri elicoidale pretensionate) montate între două flanșe rigide, prin intermediul unor articulații sferice, [McC-79]. O soluție asemănătoare ca dispunere spațială este prezentată în [Gai-91]. Structura deformabilă este constituită din șase microcilindri pneumatici dispuși între

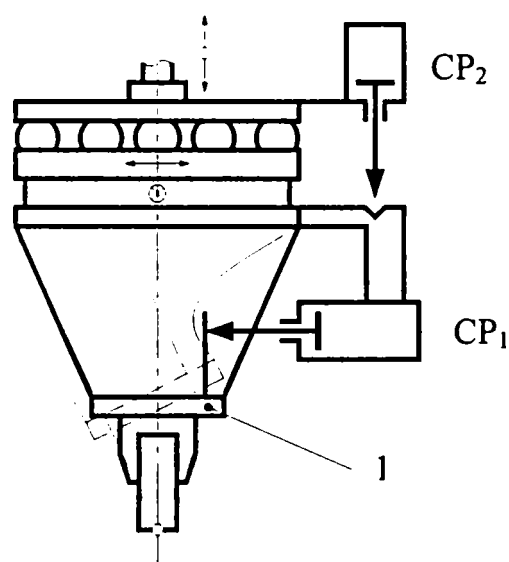


Figura II.10. Modelul dispozitivului de complianță cu structură variabilă ("DCSV")

două flanșe rigide. Fiecare dintre aceștia este prevăzut cu un traductor potențiometric liniar care furnizează informații despre deformația structurii elastice.

Un alt model, utilizat în corecția mixtă a erorilor, a fost realizat în anul 1979, (figura II.12). Numit generic "IRCC" ("Instrumented Remote Center Compliance"), acesta este constituit dintr-un model clasic "RCC" și un subsistem informațional ce sesizează deformațiile mecanismului cu cuple cinematice elastice sau forțele și momentele care-l solicită pe cale inductivă, electrooptică sau tensorezistivă. Avantajele acestui model constau în posibilitatea asamblării unor piese cu jocuri mult mai mici decât în cazul corecției pasive și a unor forțe de reacțiune mai mici în punctele de contact, [DeF-84], [Nev-78].

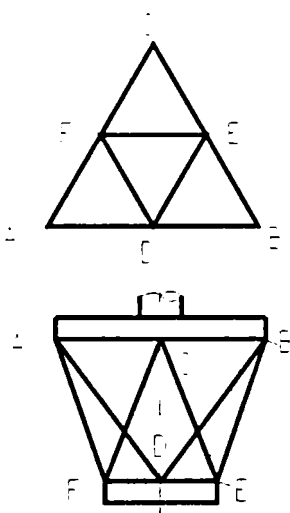


Figura II.11. Reprezentarea schematică a dispozitivului de complianță pasivă "PCD" ("Passive Compliance Device")

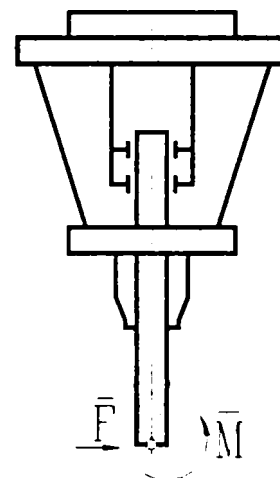
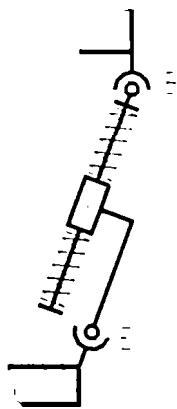


Figura II.12. Reprezentarea schematică a modelului "IRCC"

La IPA Stuttgart, în același an, s-a realizat primul dispozitiv de complianță bazat pe elemente elastice din elastomeri", [DoV-92]. Acesta este prezentat în figura II.13.

A urmat apoi, în anul 1980, modelul "MGTS" ("Modular Taktilen Greifer/Sensorsystem") ilustrat în figura II.14. Ambele modele conțin elemente elastice din elastomeri și au o elasticitate ghidată în direcția montajului realizată cu ajutorul unor arcuri elicoidale de compresiune, [DoV-92].

Începând cu anul 1980, la Technische Hochschule-Karl-Marx-Stadt, Jacobi și

6hl.041

369/A

27

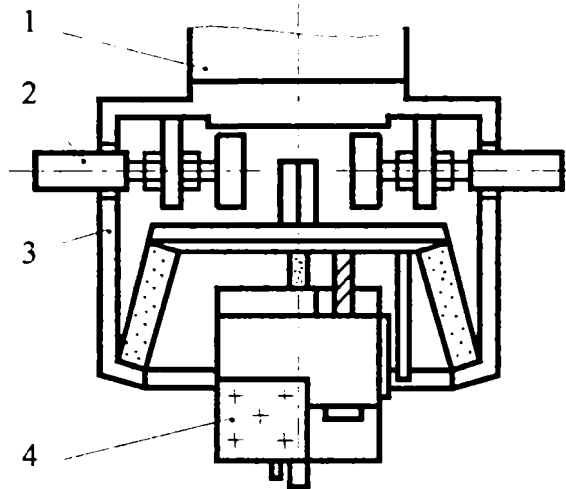


Figura II.13. Primul dispozitiv de complianță cu elemente elastice din elastomeri.

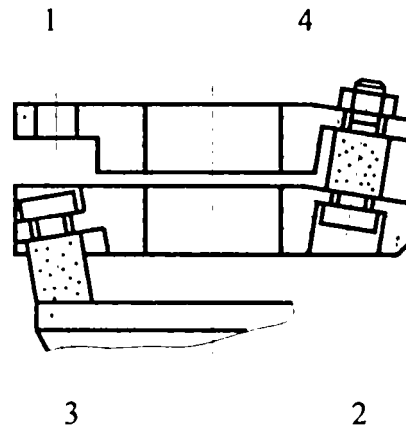


Figura II.14. Modelul dispozitivului "Modular Taktilen Greifer und Sensorsystem"

colaboratorii, [Hah-81], [Han-81], [Jac-82], Vol-83] au realizat și studiat o serie de modele asemănătoare constructiv și structural cu modelul "RCC", (figura II.15), utilizate atât în corecția pasivă, [War-83], [War-86], cât și în corecția mixtă a erorilor, [Sch-88].

Un alt model, bazat pe modelul "RCC" clasic, utilizat în corecția mixtă a erorilor,

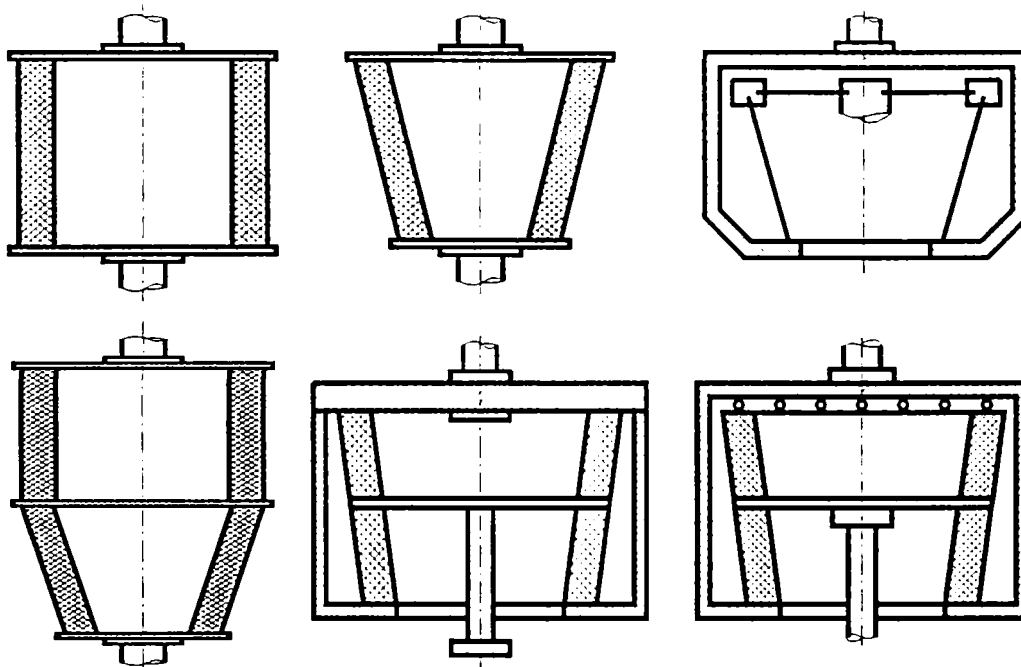


Figura II.15. Modele ale unor dispozitive de complianță derivate din modelul clasic "RCC"

fost realizat aici în anul 1980, [Scr-81], [Vol-80]. Acesta, (figura II.16), cuprinde două unități distincte: unitatea de corecție activă și unitatea de corecție pasivă. Prima, utilizează senzori pneumatici pentru identificarea poziției și unități de mișcare pneumatice (de translație și de rotație), de construcție specială. A doua unitate constitutivă a modelului este de fapt un dispozitiv “RCC” cu patru arcuri din oțel.

În anul 1981, în cadrul Universității “Politehnica” din Timișoara, s-au realizat modele experimentale ale unor dispozitive de complianță, [Kov-82]. Un astfel de dispozitiv de corecție pasivă a erorii de poziționare, dotat cu vibrator pneumatic, este ilustrat schematic în figura II.17.

Noutăți din punct de vedere structural și constructiv aduce Fakri, [DoV-92],

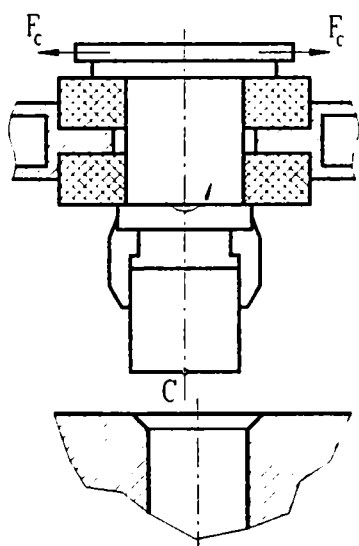


Figura II.17. Dispozitiv de corecție pasivă, dotat cu vibrator pneumatic

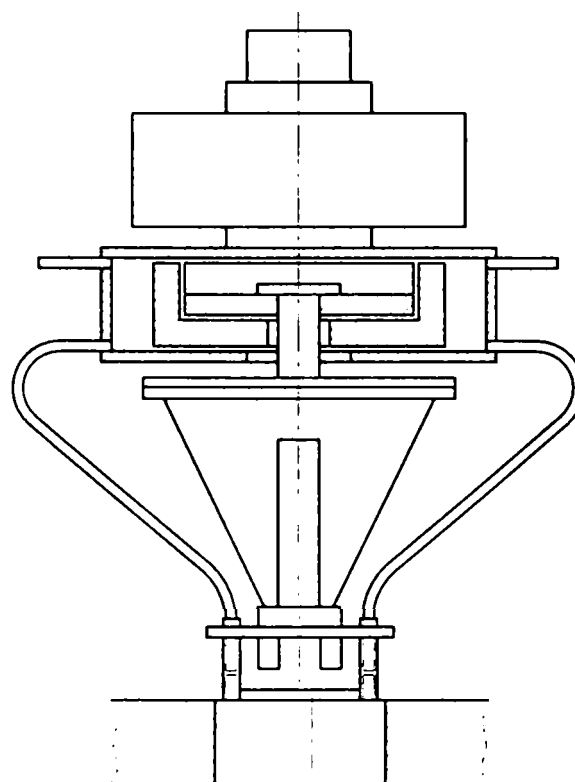


Figura II.16. Model cu elemente elastice metalice și senzori

[Jut-89], cu modelul său cu două centre de rotație, numit generic “DCR” (“Double Centre Rotation”), realizat la INSA Lyon în anul 1984. Acesta se bazează pe existența a două subansambluri, fiecare conținând câte un lagăr sferic, și fiecare rotindu-se în jurul propriului centru de rotație, (figura II.18). Primul subansamblu este solidarizat cu robotul și se rotește în jurul centrului de complianță O_2 , iar al doilea este solidarizat cu dispozitivul de prehensiune și se rotește în

jurul centrului de compliantă O_1 . Posibilitatea rotirii în jurul celor două centre în timpul montajului, permite anularea abaterilor liniare și unghiulare și asigură inserția știftului în alezaj. Elementele elastice care realizează legătura dintre cele două subansambluri sunt două membrane elastice.

La Stanford University, în același an, Cutkosky a brevetat un model cu rigiditate variabilă, (figura II.19), bazându-se pe patru incinte deformabile dispuse axial simetric față de axa longitudinală a dispozitivului, legate la o sursă de presiune. Presiunea fluidului din elementele elastice astfel realizate este controlată de un microcalculator, [Saf-98].

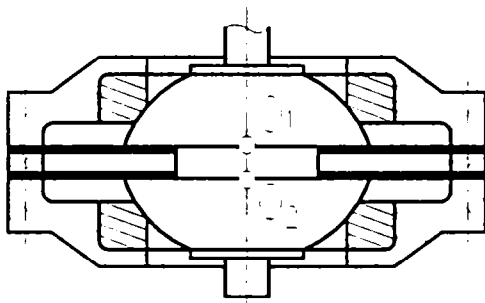


Figura II.18. Modelul "DCR"
realizat la INSA Lyon

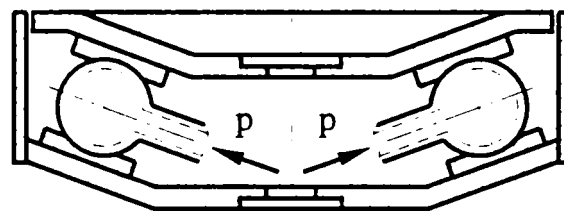


Figura II.19. Model cu rigiditate variabilă
realizat la Stanford University

O variantă asemănătoare funcțional este cea prezentată în figura II.20, [DoV-92]. Acest model conține 16 cilindri flexibili umpluți cu lichid. Opt dintre aceștia au axele paralele cu direcția de inserție (axa Oz), iar opt au axele conținute în planul xOy .

În anul 1985, a fost brevetat un model cu elemente elastice metalice, de formă cilindrică având canale elicoidale, [Pha-83]. Modelul conține șase elemente elastice, înseriate câte două, dispuse înclinat și simetric față de axa geometrică a dispozitivului.

Au fost publicate apoi, brevetele unor modele având ca elemente elastice arcuri elicoidale, [Blo-83], membrane metalice, (figura II.21), [Fri-85] și membrane sau tuburi gofrate conținute în planul mișcării, [Car-80], (figura II.22). Acestea au în componență și câte un ghidaj de translație în plan orizontal.

Au urmat noi modele pentru dispozitive de compliantă, [Rou-85], care utilizează ca elemente elastice fie elemente compozite alcătuite din elastomeri, intercalate între șaibe

metalice și tensionate prin intermediul unui cablu lucrând pe principiul “push-pull”, (figura II.23), fie tuburi elastice metalice sau din elastomeri, uneori chiar înseriate.

Soluții originale sunt și cele ale dispozitivelor de complianță realizate la Universitatea “Politehnica” din Timișoara, [Kov-86]. Acestea, (figura II.24, figura II.25), au fost dezvoltate pentru demaslotarea și debavurarea pieselor turnate, cu ajutorul polizorului pneumatic de mână PP230.

Complianța celor două capete de forță prezentate este asigurată de corpul de legătură cu ultimul element al dispozitivului de legătură, realizat astfel încât acesta să nu transmită manipulatorului vibrațiile capului de forță generate de forțele de inerție

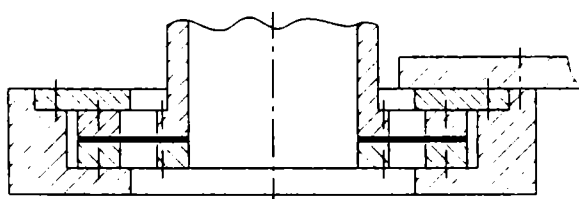


Figura II.21. Model cu membrană

poziției sculei la geometria aleatorie a bavurii.

La prima variantă constructivă, (figura II.24), corpul de legătură este o flanșă. Una din semiflanșele acesteia susține, prin intermediul a două brațe, pneumotorul 3 și scula

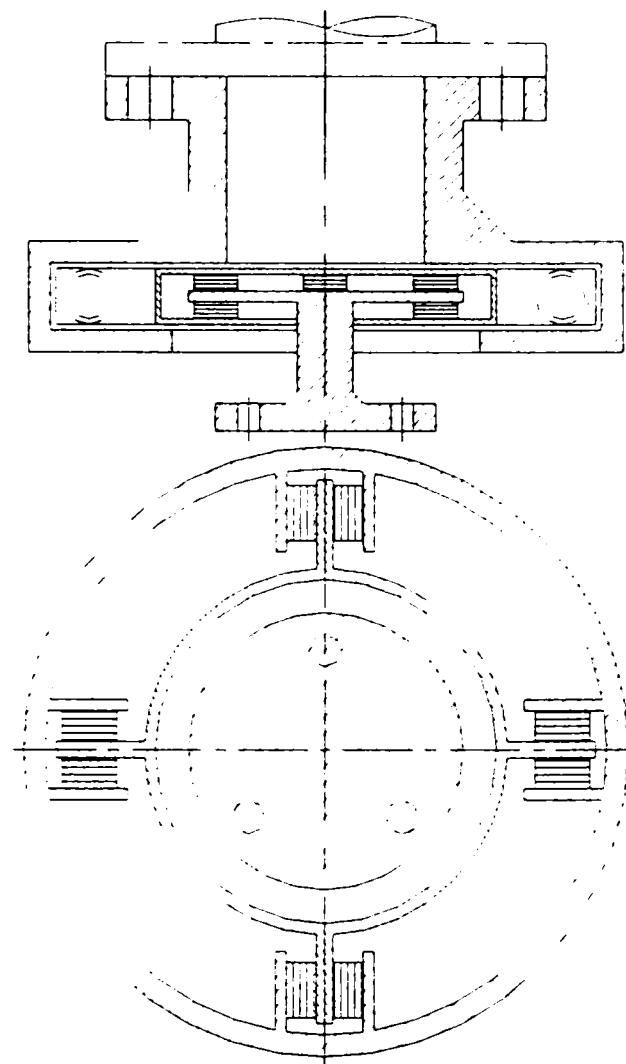


Figura II.20. Model cu rigiditate variabilă având 16 cilindri flexibili

datorate dezechilibrului rotorului pneumotorului rotativ al polizorului și de forțele tehnologice ce apar în decursul operației de debavurare, respectiv demaslotare. Construcția compliantă a corpului de legătură permite adaptarea

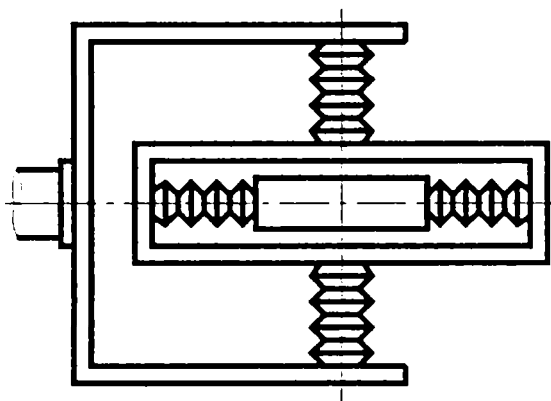


Figura II.22. Model cu tuburi
gofrate

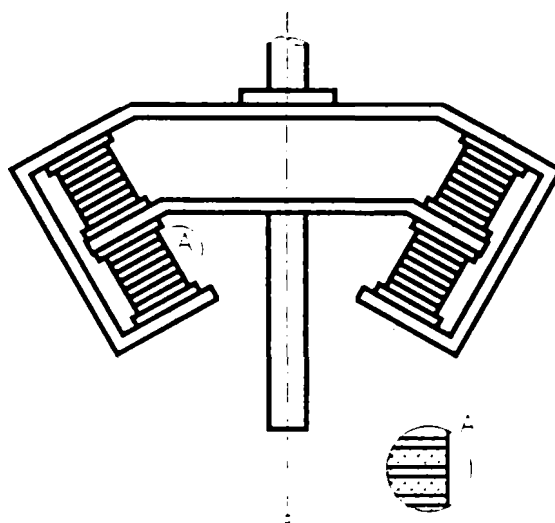


Figura II.23. Model cu elemente
compozite

abrazivă 2. Cealaltă semiflanșă este solidară cu ultimul element al dispozitivului de ghidare 1. Între cele două semiflanșe se interpune un inel tronconic din cauciuc, respectiv un număr de șase bile, apăsate de șase arcuri: trei dispuse radial și trei dispuse axial.

A doua variantă constructivă, (figura II.25), prezintă avantajul că pneumotorul poate oscila în jurul axei modulului compliant, greutatea lui apăsând discul abraziv pe piesă.

Ambele soluții satisfac cerința de a micșora amplitudinea vibrațiilor transmise brațului robotului pentru valori uzuale ale adâncimii de prelucrare și vitezei de avans. Cea de-a doua soluție constructivă este mai compactă, dar și performanțe mai mici.

Dintre soluțiile originale pentru dispozitive de prehensiune cu complianță pasivă, se remarcă și cele fără centre de complianță, cum este cel cu manșoane din cauciuc, prezentat în figura II.26, realizat la Universitatea din Brașov, [Rad-86].

Acesta este destinat manipulării pieselor cu o

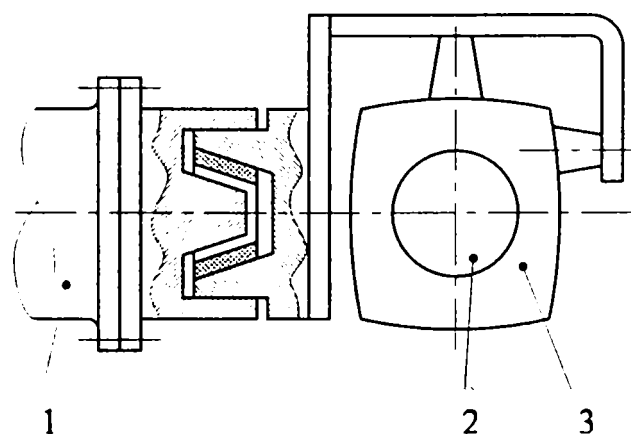


Figura II.24. Modul de complianță cu element elastic tronconic, din cauciuc și arcuri elicoidale

configurație complexă, având cel puțin o axă de simetrie. Manșoanele de cauciuc asigură prinderea și fixarea piesei prin umflare cu aer, sistemul fiind deservit pneumatic.

Începând cu anul 1987, în Cehoslovacia, au fost publicate modele, [Ies-81], [Ies-84], [Ies1-84], cu câte un singur element elastic din elastomeri sau utilizând combinații de elemente elastice metalice și acestea destinate montajului robotizat al pieselor cu simetrie de revoluție. Dintre acestea, se remarcă cel ilustrat în figura II.27.

Prin înserierea a două mecanisme cu cuple cinematice elastice prevăzute cu senzori optici, [Sch-88], în anul 1988 s-a obținut un model utilizat în corecția mixtă a erorilor, (figura II.28).

Și varianta "IRCC" (model 4), utilizată în corecție mixtă, [Dra-79], are în componență elemente elastice din elastomeri alături de elemente senzoriale optice.

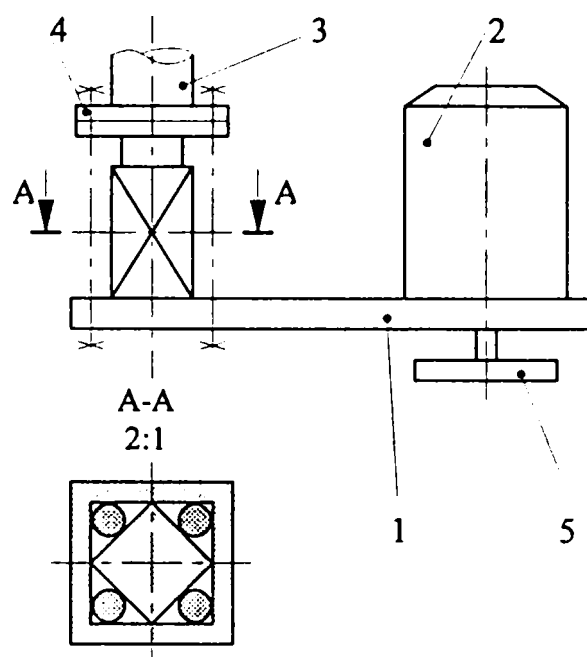


Figura II. 25. Modul de complianță cu elemente elastice cilindrice din elastomeri

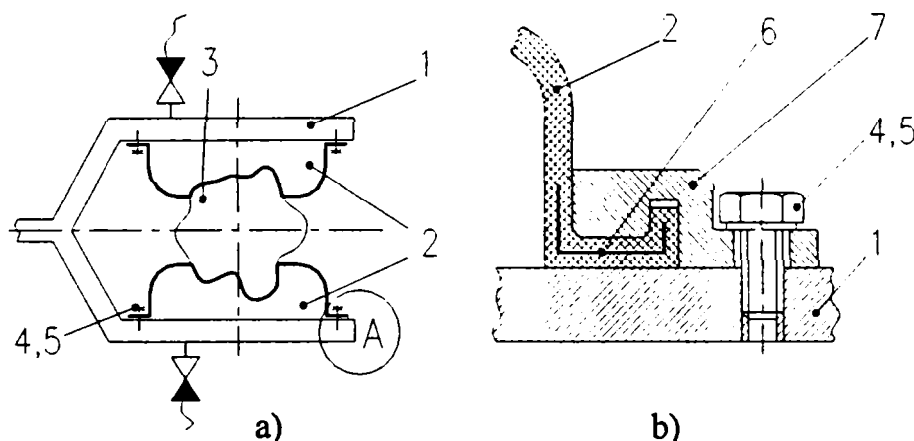


Figura II. 26. Dispozitiv de complianță cu manșoane din cauciuc

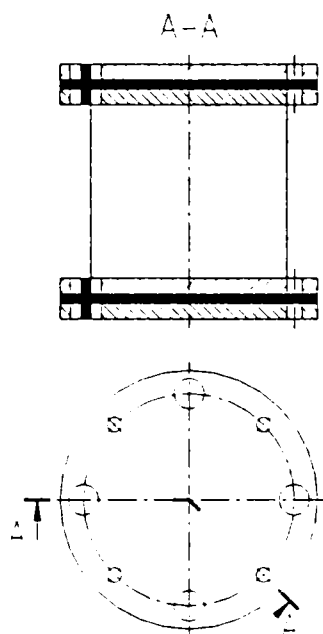


Figura II.27. Model cu membrană metalică

În [Hri-86] este publicată varianta dispozitivului de complianță reprezentat în figura II.29.

Un alt model de dispozitiv de complianță cu elemente elastice din elastomeri și vibrator pneumatic este ilustrat în figura II.30, [DoV-92].

Analiza cronologică a diverselor variante de dispozitive de complianță evidențiază în primul rând posibilitatea utilizării corecției pasive doar pentru montajul unor piese cu simetrie de revoluție.

Deși numărul de variante apărute este mare, modelul "RCC" rămâne cel mai utilizat și studiat în toată perioada analizată. Acest lucru este explicabil atât datorită calităților deosebite cât și prin încercarea găsirii

unor variante optime și a elucidării modelului de calcul.

Notabilă este existența unor soluții pentru modele de dispozitive de complianță care nu conțin cuple cinematice elastice, [DoV-92]. În figura II.31 este prezentat un astfel de model realizat cu sfere metalice. Perioada de după 1990 este caracterizată prin exploatarea

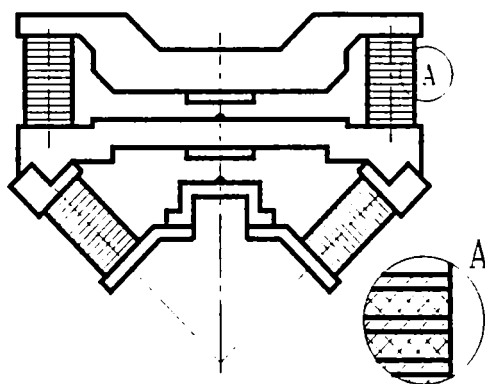


Figura II.28. Varianta "IRCC-Model 4" cu elemente elastice din elastomeri

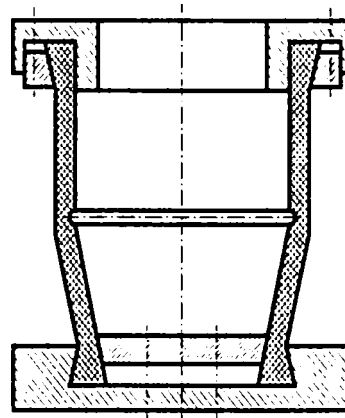


Figura II.29. Model cu elemente elastice din elastomeri

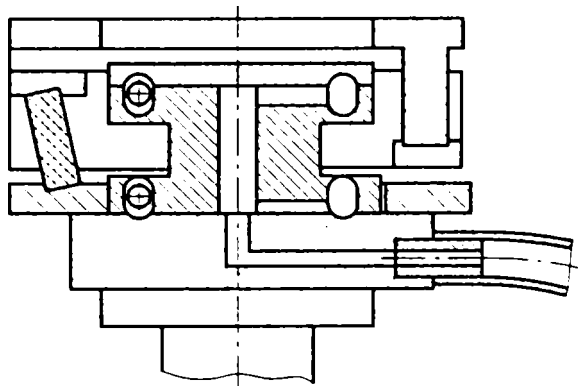


Figura II.30. Model cu elemente elastice din elastomeri și vibrator pneumatic

montaj, (figura II.32), a fost brevetat în România, în anul 1993, [DoV-9]. Reprezentarea din figura II.32 este o secțiune frântă sub unghi de 120° .

În ultimii ani au apărut noi variante de dispozitive de compliantă, [**N-01], dar preponderente sunt preocupările specialiștilor privind corecția activă, [DoV-92], [**N-02], [**N-03].

II.2.3.3. Dispozitive de compliantă amplasate în alte zone ale robotului

Literatura de specialitate prezintă un număr restrâns de astfel de exemple.

Remarcabil este modelul brevetat în anul 1990, similar unui model clasic "RCC", dar cu elemente elastice din cauciuc, (figura II.33). Acest model este inedit prin așezarea elementelor elastice 3 între "degetul" 1 și bacul 2 al dispozitivului de prehensiune, [**M-85].

În [DoV-91], este prezentată soluția constructivă a unui dispozitiv limitativ (de siguranță), cu elemente compliantă, amplasat între dispozitivul de ghidare și dispozitivul

unor dispozitive realizate anterior, concomitent cu studiul acestora și modelarea matematică a fenomenelor care apar în timpul funcționării lor.

Un alt model pentru dispozitivele de compliantă destinate roboților industriali de

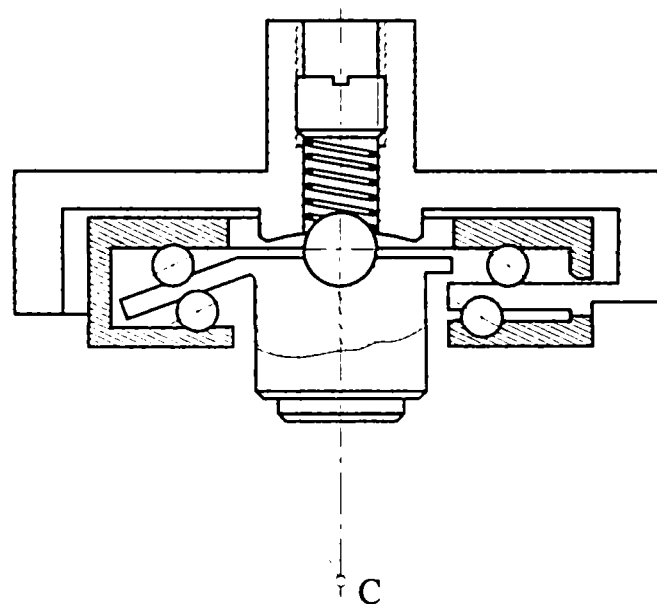


Figura II.31. Dispozitiv pentru corecția erorilor de stare, realizat cu sfere metalice

de prehensiune,(figura II.34). Acesta a fost realizat și brevetat în Cehoslovacia.

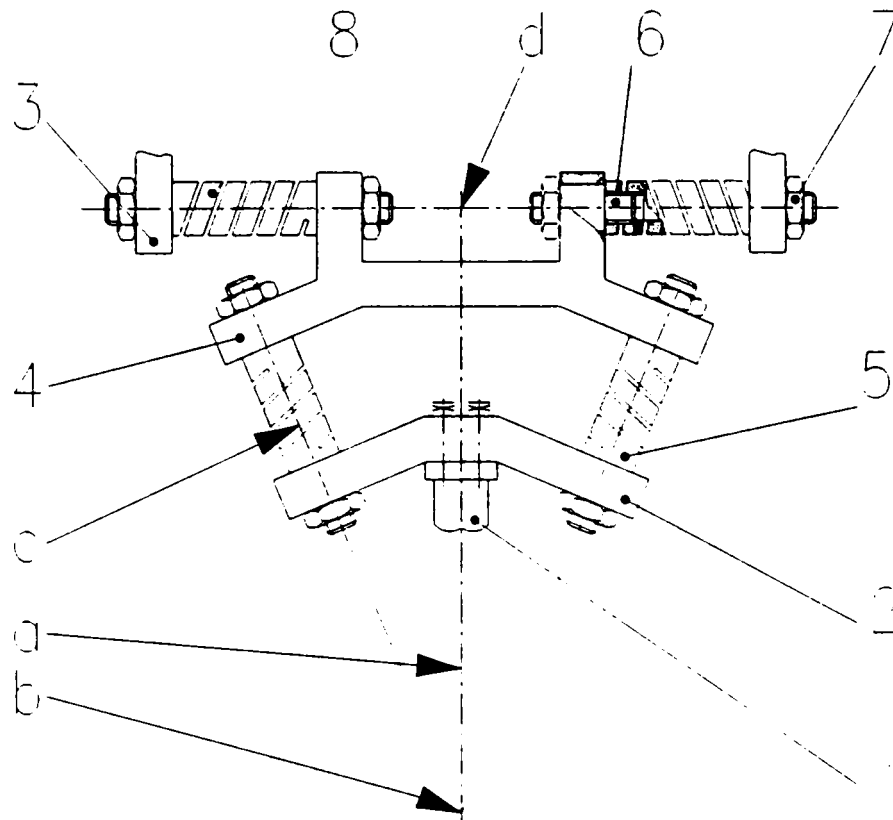


Figura II.32. Dispozitiv de complianță cu șase elemente elastice metalice

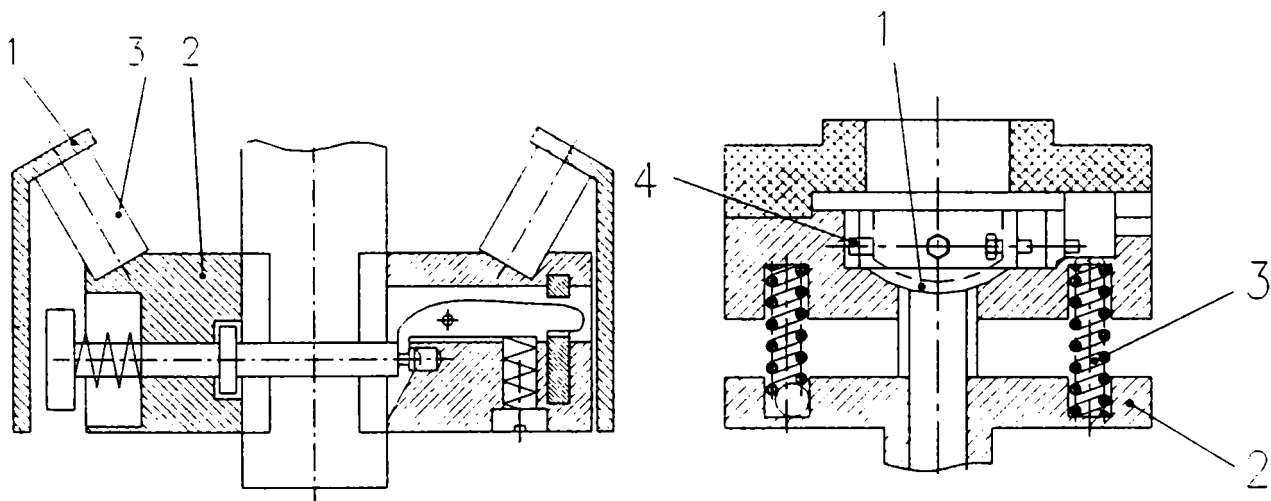


Figura II. 33. Dispozitiv de complianță cu elemente elastice amplasate între “deget” și bac

Figura II.34. Dispozitiv limitativ cu elemente compliante

II.2.3.4. Dispozitive de complianță amplasate în exteriorul robotului

Dispozitivele suplimentare purtate de robot implică dezavantaje cum sunt greutatea, interschimbabilitatea organelor de prehensiune, etc. Pentru a renunța la acestea, au fost construite mese de montaj "active", dotate cu sisteme de traductoare de efort. Există și platforme compliante pasive (mese așezate pe sisteme flexibile de arcuri sau tije telescopice) ce permit deplasarea dispozitivului în care este fixat corpul purtător al alezajului sub acțiunea forțelor de contact ce se dezvoltă în timpul operației de asamblare, [Ion-97].

II.2.4. Metode de analiză a dispozitivelor de complianță

Literatura de specialitate cuprinde două modalități distincte de abordare a analizei cinetostatice a mecanismelor cu cuple cinematice elastice, și, implicit a dispozitivelor de complianță care le includ. Astfel, unii autori abordează analiza acestora într-un mod general, nu întrutotul justificat, fără a ține seama de natura elementelor elastice, iar alții, într-un mod particular, specific unei anume categorii de elemente elastice. Comportarea diferită a fiecărei categorii de elemente elastice justifică acest lucru. Cele două modalități de abordare diferită au generat diverse metode de analiză, cu arie de aplicabilitate distinctă.

Se remarcă astfel, metoda centrului elastic, metoda elementelor finite, metoda aproximativ-funcțională a micilor deformații, metoda aproximativ-funcțională pentru dispozitive cu elemente elastice din elastomeri, ș.a, [DoV-92].

Principiul de bază al *metodei centrului elastic* constă în înlocuirea mecanismului cu cuple cinematice elastice cu un singur element elastic echivalent, (figura II.35), [Nev-80]. Metoda se bazează pe noțiunea de "*centru elastic*" și are avantajul simplificării modelului matematic față de modelul real caracterizat prin multitudinea parametrilor

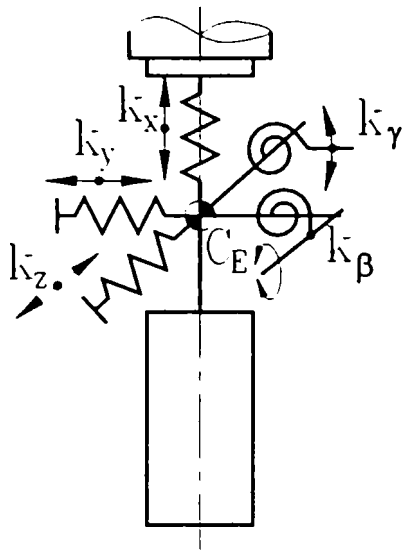


Figura II 35 Schema echivalentă a dispozitivului de complianță

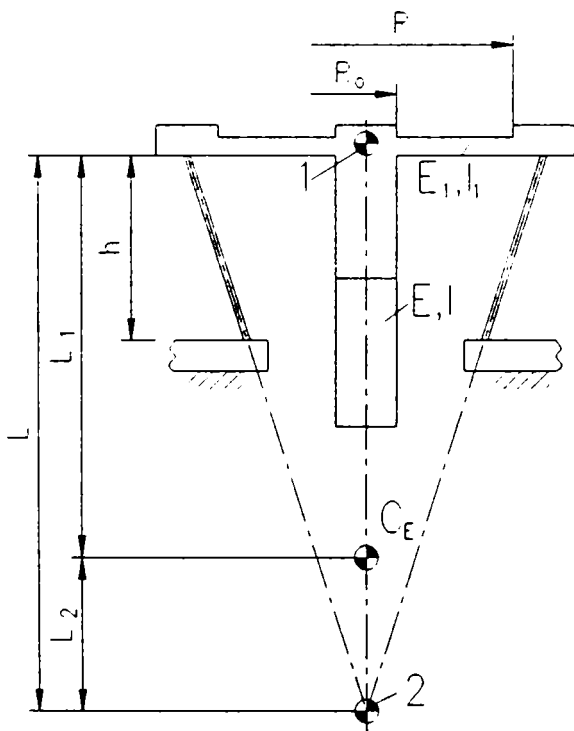


Figura II.36. Schematizarea dispozitivului "RCC"

existenți, [Lot-68]. Cu acest nume, cu numele de "centru de complianță", sau de "centru de mișcare" ("Combined Center of Motion"), [Kro-80], noțiunea apare și în domeniul dispozitivelor de complianță, preponderent la modelele "RCC", [Nev-80], [Whi-79].

Numărul impresionant de soluții constructive ale dispozitivelor de complianță pu

principiul de funcționare al acestuia, i-a adus aprecierea de model de referință, deci "clasic". Modelul RCC, deși de o vârstă apreciabilă, face obiectul studiului actual al multor cercetători.

Primul mecanism cu cuple cinematice elastice conceput pentru un dispozitiv de complianță de către Watson, [Nev-80], are centrul de complianță la intersecția axelor geometrice ale elementelor elastice așezate după generatoarele unei suprafețe conice drepte, având ca înălțime axa dispozitivului de complianță, [Kov1-92]. Pentru modelul "RCC" ilustrat în figura II.36, din considerente geometrice și de echilibru mecanic, se obțin rigiditățile, [DoV-92]:

$$K_x = \frac{1}{\frac{1}{K_{x1}} + \frac{1}{K_{x2}} + \frac{1}{K_{x3}}}$$

(II.3)

$$K_{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{K_{\theta_1}} + \frac{1}{K_{\theta_2}} + \frac{1}{K_{\theta_3}}} \quad (II.4)$$

$$K_{x_1} = \frac{K_{\theta_1}}{L_1^2} \quad (II.5)$$

$$K_{\theta_1} = 8E_1 I_1 \left[1 + 3 \frac{R}{(R - R_0)} \right] + \left[1 + \frac{R}{(R - R_0)} \right] \quad (II.6)$$

$$K_{x_2} = 12 n E_2 I_2 \frac{\left(\frac{L}{L_2} \right)^2}{h^3} \quad (II.7)$$

$$K_{\theta_2} = 12 n L^2 E_2 \frac{I_2}{h^3} \quad (II.8)$$

$$K_{x_3} = 36 E \frac{I}{L^3} \quad (II.9)$$

$$K_{\theta_3} = \frac{2}{3} K_{x_3} L_1^2 \quad (II.10)$$

$$K_{\theta} = K_x L_1 L_2 \quad (II.11)$$

În [Nev-78], poziția centrului elastic C_E , ca și rigiditățile K_x și K_{θ} sunt impuse din start.

Complexitatea soluțiilor analitice ale acestei metode justifică preocuparea specialiștilor pentru obținerea de ecuații simplificate, utilizabile în proiectarea acestor dispozitive, [Nev-80].

Literatura de specialitate evidențiază încercări de determinare analitică a poziției centrului elastic, [DoV-92].

Analiza dinamică a dispozitivelor de compliantă cu centru elastic este realizată în [Nev-80] pe baza schemei echivalente a acestora, ilustrată în figura II.35. Dacă obiectul manipulat fixat rigid în efectorul final execută o mișcare de translație după axa Oz, raportată la centrul elastic, aceasta este descrisă de ecuațiile:

$$\sum F_{ix} = m \cdot \ddot{x} \quad \sum F_{iy} = m \cdot \ddot{y} \quad \sum M_{CE} = J_{CE} \cdot \ddot{\theta} \quad (II.12)$$

în care:

F_{ix}, F_{iy} sunt componentele forțelor ce acționează asupra obiectului manipulat

M_{CE} sunt momentele (în raport cu axa $C_E z_E$) ale forțelor

m este masa obiectului manipulat și a efectorului final

J_{CE} este momentul de inerție al ansamblului obiect - efector

Acestor ecuații li se atașează relațiile geometrice de legătură, care descriu poziția ansamblului obiect manipulat-efector final, în timp.

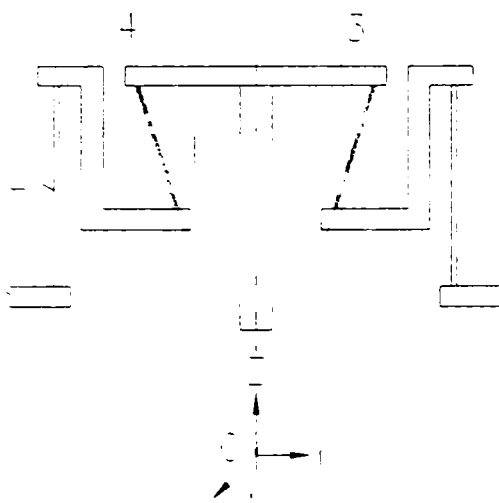


Figura II.37. Modelul dispozitivului "RCC" studiat

Alți autori, [Whi-80], abordează analiza dinamică a dispozitivelor de complianță destinate montajului unui știft cilindric într-un alezaj, considerând mișcarea ansamblului știft-efector ca o succesiune de poziții de echilibru, foarte apropiate.

Centrul de complianță al unui dispozitiv "RCC", (figura II.37), se poate determina și cu metoda *deplasărilor relative*, ilustrată în [Pan-85], [Pan-91], [Per-85]. Poziția centrului de

complianță rezultă din condiția ca matricea de flexibilitate să fie diagonală.

Autorii concluzionează că, pentru modelul alcătuit din elementele 2 centrul de complianță se află pe axa Oz, la mijlocul elementelor, iar pentru modelul alcătuit din elementele 1, centrul de complianță se află pe axa Oz, aproximativ la intersecția tijelor, (în punctul O), deși aceasta nu rezultă din calcule. Conform aceluiași autori, centrul de complianță al mecanismului reprezentat în figura II.37, se poate considera în punctul O.

În [Lem-85], se folosește aceeași metodă pentru elemente elastice de secțiune rectangulară.

Metoda deplasărilor relative este folosită și în [McC-79] pentru determinarea matricei de flexibilitate globală a dispozitivului PCD reprezentat schematic în figura II.11.

Studiul dispozitivelor de compliantă cu *metoda elementului finit* se realizează similar cu cel al structurilor, bazându-se pe aceleași ipoteze fundamentale din teoria elasticității, [Gaf-87], [Gar-80], [Sev-75], [DoV-94], [Saf-94], [Ban-75].

Metoda sistemelor static nedeterminate a fost dezvoltată în anii '80 la Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, pentru analiza dispozitivelor de compliantă cu centru elastic și elemente elastice metalice (model "RCC"), utilizate în operații de asamblare de tip știft-alezaj, [Vol-80], [Jac-80]. Metoda utilizează principiile clasice ale teoriei elasticității, fiind elaborată în ipoteza că asamblarea se realizează cu viteze mici, printr-o succesiune de poziții de echilibru. Forța de asamblare necesară este o funcție de forma:

$$F_F = f(\alpha, \mu, d_{21z}, \delta_{21z}, E_2, E_3, I_2, I_3, l_2, l_3) \quad (\text{II.13})$$

unde:

- α este unghiul de teșire al alezajului;
- μ este coeficientul de frecare;
- d_{21z}, δ_{21z} este eroarea de poziționare liniară, respectiv unghiulară;
- E_2, E_3 sunt modulele de elasticitate ale elementelor elastice;
- I_2, I_3 sunt momentele de inerție ale secțiunilor elementelor elastice;
- l_2, l_3 sunt lungimile elementelor elastice.

Autorii scriu ecuațiile de echilibru static, apoi determină gradul de nedeterminare a sistemului elastic. Necunoscutele sunt calculate prin intermediul energiei de deformare, aplicând teorema lui Castigliano, cu observația că influența forțelor transversale din elementele elastice este neglijabilă, [DoV-92].

Studiul dispozitivelor de compliantă se poate realiza și cu *metoda analizei cinematostatice*, care presupune rezolvarea printr-un proces iterativ de calcul, [Kov-89], [Kov1-89]. Se pornește de la modelul plan al unei "manivele elastice" de lungime "l", fixată la o extremitate și liberă la cealaltă, (figura II.38). Pentru capătul liber, se determină relațiile de legătură dintre forțele care acționează aici și coordonatele punctului, [DoV-92]:

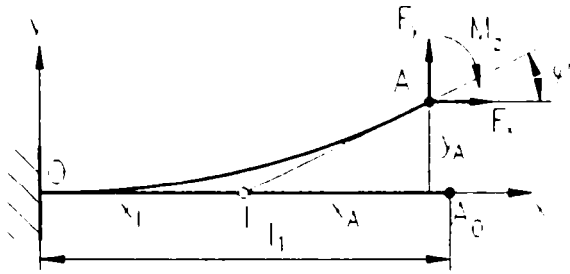


Figura II.38. Elementul elastic
modelat ca "manivelă elastică"

$$\begin{aligned} F_y &= F \\ F_x &= F \cdot n_0 = 0 \\ M_z &= F \cdot l_0 (m_0 + m_1 + \varphi_1) \\ x_A &= l_1 (1 - A_1 \cdot \varphi_1^2) \\ y_A &= l_1 (A_2 \cdot \varphi_1 + A_3 \cdot \varphi_1^2) \end{aligned} \quad (II.14)$$

Coeficienții n_0, m_0, m_1 se stabilesc pe baza

sistemului de forțe care acționează la extremitatea liberă A a manivelei, iar coeficienții A_1, A_2, A_3 sunt dependenți de coeficientul m_0 .

Procedând similar, se obțin relațiile pentru un al doilea element elastic fixat într-un punct B de biela rigidă (deci tot un model plan) și, în cazul unui model spațial, pentru încă un punct C. Cu relațiile (II.14), relațiile din modelul geometric și relațiile de legătură care se pot scrie între coordonatele celor trei puncte se poate determina torsorul forțelor care acționează în fiecare punct A, B, sau C.

Metoda aproximativă a micilor deformații asimilează elementul elastic cu o bară echivalentă, încărcată cu forțe/momente exterioare, care se deformează sub acțiunea acestora, (figura II.39). În ipoteza că deformațiile sunt suficient de mici comparativ cu dimensiunile barei și sunt situate în limitele domeniului elastic al deformațiilor, ecuația

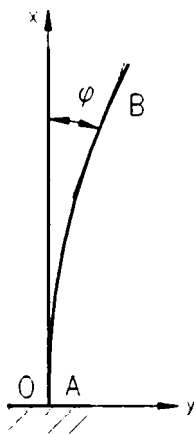


Figura II.39.
Elementul elastic, ca
bară deformabilă

diferențială fibrei medii deformate a barei este:

$$\frac{1}{\rho_1(x)} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{E \cdot I(x)} \quad (II.15)$$

unde:

ρ_1 este raza de curbură în secțiunea x ;

E este modulul de elasticitate longitudinală a barei;

$M(x)$ este momentul încovoietor în secțiunea x ;

$I(x)$ este momentul de inerție al secțiunii transversale
 x a barei;

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad y'' = \frac{d^2y}{d^2x}. \quad (\text{II.16})$$

Integrarea ecuației diferențiale (II.15) se poate realiza prin metode numerice aproximative, [Kov-85].

Literatura de specialitate cuprinde o serie de dispozitive de compliantă bazate pe modelul clasic "RCC", însă având *elemente elastice din elastomeri sau compozite* (combinații elastomeri-metal, acesta din urmă sub forma unor șaibe sau cabluri de oțel), [Her-85], [Jac-82], [Sch-89], [Vol-80], [War-83], [War-86]. Acestea, în majoritate, au fost mai întâi realizate experimental, ca răspuns pentru o anumite aplicație, cu parametri cunoscuți, apoi au fost analizate din punct de vedere teoretic. Similar studiului modelelor cu centru de compliantă clasice, s-a pornit de la modelul plan al unui dispozitiv cu două elemente elastice de structură compozită de genul celui ilustrat în figura II.40, [Whi-86], apoi s-au extrapolat rezultatele pentru modelul spațial simetric cu trei sau șase elemente elastice.

Acest tip de element elastic prezintă elasticitate în plan ortogonal la axa sa longitudinală, fiind considerat rigid pe direcție longitudinală. În condițiile neliniarității elementului elastic, se remarcă două metode de studiu a dispozitivelor de compliantă cu

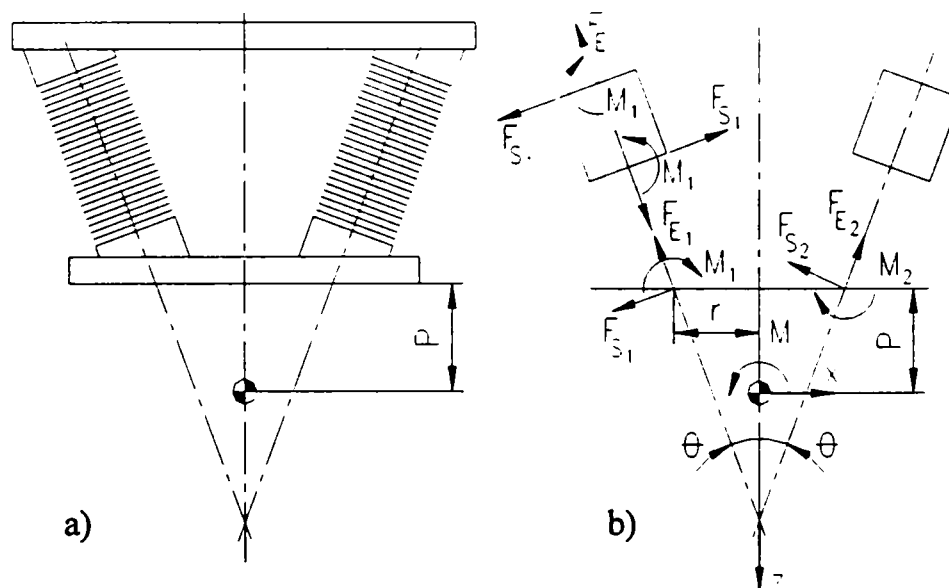


Figura II.40. Dispozitiv de compliantă cu elemente elastice din elastomeri

a) reprezentarea schematică; b) modelul de studiu

elemente elastice din elastomeri: prima, pornind de la rezultate experimentale, modelează rigiditatea axială printr-o funcție de gradul doi în raport cu deformația axială a elementului, iar cea de-a doua se bazează pe matricea generalizată în raport cu centrul de rotație, [DoV-92].

II.2.5. Concluzii privind dispozitivele de complianță

Din paleta amplă a dispozitivelor de complianță publicate în literatura de specialitate, marea majoritate sunt bazate pe modelul clasic "RCC" ("Remote Center of Compliance"), diferențieri fiind sugerate de forma secțiunii elementelor elastice, de materialul și numărul acestora. Utilizarea preponderentă a modelelor de tip "RCC" este justificată prin avantajele pe care acestea le conferă:

- permit corecția unui câmp destul de amplu al erorilor de situare;
- asigură decuplarea mișcărilor;
- construcție relativ compactă și robustă;
- preț sensibil redus comparativ cu unitățile de complianță activă;
- posibilitatea de a modifica poziția centrului de complianță prin măsuri constructive nepretențioase, cum sunt: modificarea unghiului de înclinare al elementelor elastice sau/și modificarea rigidității lamelelor și a celorlalte elemente ale dispozitivului.

Elementele elastice cele mai frecvent folosite sunt arcurile lamelare metalice, care realizează forțe elastice relativ mici, la deformații mari. Utilizări remarcabile ale acestora sunt și dispozitivele de prehensiune "autocompliante", de tip "pensetă", [Kov1-92].

Dispozitivele de complianță cu elemente elastice metalice au o pronunțată tendință la vibrație și permit manipularea unor obiecte de mase reduse. Pentru a reduce tendința de vibrație a acestora, au fost realizate o serie de dispozitive de complianță de tip "RCC" cu elemente elastice din elastomeri, sau compozite.

Elementele elastice din elastomeri sunt beneficiarele unor multiple avantaje:

elasticitate mai mare decât a elementelor similare din metal, construcție simplă și robustă la dimensiuni mici, greutate redusă, capacitate mare de amortizare a vibrațiilor, capacitate mare de disipare a energiei, reziliența mare, întreținere ușoară sau deloc, montaj ușor de realizat, proiectare cu caracteristică neliniară și posibilitatea de a le îmbina cu alte materiale.

Dispozitivele de complianță cu elemente elastice din elastomeri sunt afectate însă de o serie de particularități de comportament ale acestui material, dintre care:

- gama de corecție relativ restrânsă, se pretează la erori de situare medii;
- sensibilitate la fenomenul de pierdere a stabilității;
- prezența fenomenului de histerezis, care afectează rezistența la oboseală a cauciucului;
- caracteristică diferită în funcție de solicitare: dependența $\sigma=f(\epsilon)$ (tensiune-deformație) este liniară doar până la 10, ..., 20% ϵ , alura ei variind în special, în funcție de cantitatea materialelor de adaos.
- modulul de elasticitate longitudinal dinamic, mai mare decât cel static;
- abateri mari (până la $\pm 20\%$) de la valorile nominale ale proprietăților fizico-chimice, chiar pentru produsele din același lot, datorate procesului tehnologic de fabricație a cauciucului;
- valorile modulelor de elasticitate, longitudinal E și transversal G , dependente de calitatea cauciucului, în special de duritatea lui (experimental s-a stabilit relația $E=3G$);
- la aceeași duritate, modulul de elasticitate longitudinal E depinde de raportul dintre aria suprafeței încărcate și cea a suprafeței libere, aferente arcului de cauciuc;
- incompresibilitatea cauciucului, care impune asigurarea posibilității de deformare laterală;
- proprietățile acestuia sunt influențate considerabil de condițiile mediului ambiant: temperatură, umiditate, agenți chimici,... (fenomenul de îmbatrânire).

Experimentele realizate asupra elementelor compozite, [DoV-92], au evidențiat că pentru elemente geometric identice, caracteristicile pot diferi până la de două ori, elementele prezintă o histereză pronunțată și instabilitate, iar defectele de material ale elastomerului determină o dispersie a rigidității elementului.

Dispozitivul de complianță "*PCD*" ("Passive Compliance Device"), apropiat

structural modelului "RCC" clasic, face notă distinctă prin soluția constructivă de realizare a elementelor elastice: combinații de elemente extensibile (pistoane și arcuri elicoidale montate pretensionat). Dispozitivul, [McC-79], poate manipula obiecte de greutate mai mari, comparativ cu modelele clasice "RCC", dar are o construcție mai pretențioasă.

Conceput pentru operații de montaj robotizate de tip știft-alezaj, cu simetrie de revoluție, modelul numit "*DCR-LAI*", ("Double Centre Rotation"), [Jut-89], [Sta-96], se evidențiază prin originalitatea soluției constructive. Dispozitivul conține două cuple sferice menținute în poziție relativă de diafragme elastice, care au și rol de amortizare a vibrațiilor.

Literatura de specialitate cuprinde și dispozitive de complianță cu rigiditate variabilă (incinte spațiale deformabile, umplute cu fluide la presiuni controlabile). Acestea sunt soluții constructive mai costisitoare, care se pretează doar unor condiții anume, [Dem-80], [Car-80].

Opțiunea pentru o variantă de corecție a erorilor de situare, cea pentru un anume tip constructiv al dispozitivului de complianță, ca și cea pentru un anume material al elementelor elastice nu beneficiază, în literatura de specialitate, de reguli sau îndrumare. Această opțiune întrunește toate aspectele unui proces de decizie, care se poate soluționa prin intermediul metodelor de analiză multicriterială, [DoV-91], [Saf-96], [Bac-88].

Rezultatele experimentale obținute cu modele "RCC" au demonstrat că modelul matematic folosit (ecuațiile de proiectare originale) este corect numai pentru anumite condiții. Neglijarea elasticității unor elemente, duce la diferențe între poziția centrului elastic calculat și cel determinat experimental, [Nev-80].

Indiferent de metoda de studiu și analiză utilizată, toate modelele de calcul pentru dispozitivele de complianță acceptă ipoteza că robotul are numai complianță concentrată.

Metoda centrului elastic este cea mai frecvent utilizată pentru calculul dispozitivelor de complianță. Determinarea prin calcul a poziției centrului elastic, ca și încercările experimentale, au evidențiat faptul că unghiul de înclinare al elementelor elastice are o influență mai mare asupra poziției centrului elastic decât raportul laturilor

secțiunii transversale a acestora, [DoV-92]. Cu ajutorul conceptului de centru elastic, se pot calcula rigiditățile echivalente și cele efective ale dispozitivelor de complianță.

Considerând dispozitivele de complianță ca sisteme cu elemente elastice stabile care suportă mici deplasări față de poziția de echilibru, se poate determina matricea de complianță și cea de rigiditate a dispozitivelor, care, în ipoteza menționată, sunt simetrice și pozitiv definite, [Saf-98].

Metoda deplasărilor relative, permite determinarea poziției centrului de complianță din condiția ca matricea de flexibilitate să fie diagonală. Autorii, [Pan-85], [Pan-91], [Per-85], concluzionează că, pentru modelul tip "RCC" cu elemente elastice paralele cu axa geometrică Oz, centrul de complianță se află pe această axă, la mijlocul elementelor, iar pentru modelul cu elemente elastice înclinate, centrul de complianță se află pe axa Oz, aproximativ la intersecția axelor acestora, deși aceasta nu rezultă din calcule. Centrul de complianță al mecanismului compus prin înserierea celor două modele enumerate mai sus, se poate considera în același punct ca și pentru modelul cu elemente elastice înclinate.

Dezvoltarea explozivă a sistemelor de calcul și a pachetelor soft specializate a permis analiza dispozitivelor de complianță cu *metoda elementului finit*. Studiul dispozitivelor de complianță cu această metodă se realizează similar cu calculul structurilor, bazându-se pe aceleași ipoteze fundamentale din teoria elasticității. Singura diferență, comparativ cu considerentele clasice prezentate în literatura de specialitate, apare ca urmare a considerării elasticității elementelor. Deformațiile mari pe care acestea le suportă nu mai permit considerarea matricii de rigiditate drept constantă.

Determinarea elementelor caracteristice pentru *dispozitivele de complianță destinate roboților de montaj*, se poate face numai pe baza considerării modelului dinamic al asamblării. În [DoV-92], acesta se realizează cu următoarele ipoteze simplificatorii:

- asamblarea se realizează conform modelului geometric bazat pe centrul elastic;
- sunt verificate ipotezele clasice din rezistența materialelor;
- regimul de lucru este cvasistatic;

- nu există alunecare între știft și bacurile efectorului;
- coeficienții de frecare sunt constanți pentru un același cuplu de materiale;
- știftul și alezajul sunt perfect rigide în cazul asamblării știft rigid - alezaj rigid, iar în cazul asamblării știft rigid - alezaj elastic sau semielastic acestea se încadrează în domeniul elastic;
- contactul știft rigid - alezaj rigid este punctiform.

Soluționarea ecuațiilor modelului dinamic și geometric se realizează prin metode numerice, [Ane-97], [Cod-95], [Var-97], [DoV-92].

Analiza perturbațiilor mișcării bielei rigide a dispozitivului (salturi, blocaje) și influența vitezei de translație după axa Oz, relevă faptul că abordarea dinamicii pe principiul cvasistatic la viteze mari duce la erori. Pe considerentul că momentele de inerție și deci existența accelerației unghiulare, conduce la un comportament dinamic inferior se realizează o echivalare între proprietățile centrului elastic și cele ale centrului de masă. Se remarcă faptul că biela are numai accelerație liniară dacă și numai dacă suportul forței de contact trece prin centrul de masă. Evitarea mișcării sacadate este asigurată dacă $M_x \ll M_y$ și centrul de reducere a masei sistemului se găsește pe direcția forței de contact, [Asa-88].

Dispozitivului de complianță "PCD", i se asociază în sistemul de referință global, o matrice de complianță aproximată cu o matrice diagonală 6x6. Elementele nenule ale acesteia sunt constante ale căror valori depind de rigiditățile arcurilor și de dimensiunile geometrice ale dispozitivului, [McC-79]. Matricea de flexibilitate este determinată admitând ipotezele: frecările în cuplele sferice sunt mici, solicitările din elemente se admit a fi pur axiale, iar arcurile din structura celor șase elemente elastice au rigiditate identică.

Modelul dispozitivului "DCR-LAI", [Jut-89], se realizează în ipoteza că, robotul execută o mișcare verticală descendentă, uniformă. Evoluția modelului în timp și relațiile de legătură sunt considerate în ipotezele:

- eroarea unghiulară θ este nulă la începutul procesului de inserție;
- alezajul și știftul prezintă jocuri funcționale mici;

- la contact, erorile de aliniere " ϵ " sunt mai mici decât lățimea " a " a șanfrenului;
- mișcările utile la inserție sunt de amplitudini foarte mici (ca urmare a erorilor mici de poziție și montaj), fapt ce permite simplificarea modelării, în special la rotație.

Experimental s-a stabilit că inserția este posibilă dacă eroarea de aliniere ϵ a axelor celor două elemente, știftul și alezajul, este mai mică decât lățimea șanfrenului.

Literatura de specialitate dovedește, în pofida numărului apreciabil de modele constructive și modele de calcul pentru dispozitivele de compliantă, o preocupare constantă a roboticienilor pentru obținerea modelului constructiv optim și a modelului de calcul cât mai apropiat de realitate, [Ask-83], [Boi-88], [Cib-94], [Cib-96], [Cib1-98], [Cut-82], [Dra-77], [**F-83], [Gri-91], [Gri-93], [Hoe-85], [Lip1-92], [Lon-85], [Shi-96].

II.3. Sistemul mecanic compliant al roboților industriali

II.3.1. Complianta robotică distribuită

Termenul "compliantă" este utilizat frecvent în robotică, cu diferite semnificații.

Complianta a fost utilizată mai întâi în literatură pentru a denumi dispozitivele speciale, amplasate între ultimul element al dispozitivului de ghidare și efectorul final al roboților rigizi, pentru a le ridica gradul de precizie. Acestea, numite *dispozitive de compliantă*, concentrează local comportamentul elastic al robotului, [Saf-98].

De dată mai recentă este utilizarea termenului de "*robot compliant*" pentru a denumi generic o nouă categorie de roboți, a căror elasticitate structurală nu mai poate fi neglijată. Dezvoltarea explozivă a automatizării și informaticii din ultimele decenii a revoluționat robotica, ducând pe de o parte la apariția "roboților inteligenți", și, pe de altă parte, permițând realizarea roboților ușori, rapizi și preciși.

Roboții ușori, prin însăși construcția lor, au o elasticitate structurală ridicată.

Elasticitatea structurii acestor roboți generează imprecizie, vibrații și implicit, dificultăți de modelare, comandă și control. Roboții ușori și rapizi au un consum mai redus de energie pentru atingerea aceluiași viteze și accelerații, [Kru-90], dar sunt foarte sensibili la vibrații. Ca urmare a inerției sarcinilor manipulate, frecvențele proprii ale brațelor de roboți ușori sunt ușor de excitate, [Kru-90]. Aceste vibrații pot fi prevenite prin mișcarea cu viteze și accelerații scăzute. Roboții rapizi pot excita frecvențe de rezonanță ce pot duce la apariția vibrațiilor de frecvență relativ ridicată, care le afectează considerabil precizia.

Sistemul mecanic al roboților industriali, în general, a fost considerat ca structură nedeformabilă, realizată din elemente rigide. Această structură este, în realitate, o structură deformabilă, compliantă, sub acțiunea forțelor exterioare tehnologice, a forțelor de inerție și a forțelor masice. Elasticitatea se manifestă la nivelul oricărei componente a sistemului mecanic al robotului: batiu, elemente sau cuple cinematice. Mișcarea sistemelor elastice fiind întotdeauna însoțită de efecte cineto-elasto-dinamice perturbatoare cu caracter oscilatoriu, acestea trebuie luate în considerare în proiectarea și exploatarea roboților.

Frecvent, în robotică, se utilizează noțiunea de "*mișcare compliantă*" sau "*manipulare compliantă*" pentru a defini mișcarea constrânsă a brațului robotului ce îndeplinește operații tehnologice care îl aduc în contact direct cu mediul în care evoluează, [Bry-95]. Caracteristica manipulării compliantă este interacțiunea dinamică dintre robot și mediu, care în cele mai multe cazuri, nu poate fi prescrisă cu precizie. Manipularea compliantă se poate realiza fie cu dispozitive de compliantă, de manieră pasivă sau activă, fie utilizând strategii de control adecvate.

Soluționarea problemei elasticității implică o *triplă analiză*: din punct de vedere al construcției sistemului mecanic al roboților la nivelul elementelor și la nivelul cuplelor cinematice conducătoare, iar din punct de vedere al conducerii roboților la nivelul sistemului de comandă.

II.3.2. Elasticitatea elementelor dispozitivului de ghidare

Întrucât deformația solidului elastic real este însoțită de procese foarte complexe, extrem de dificil de descris cu exactitate din punct de vedere matematic, modelarea se realizează pornind din start cu o serie de ipoteze simplificatoare, [Vuk-89]:

- ✓ ipoteza mediului solid elastic continuu și omogen;
- ✓ ipoteza solidului elastic ideal (ipoteza lui Hooke), conform căreia procesul de deformație este reversibil, iar dependența dintre solicitări și deformații este și se păstrează liniară;
- ✓ ipoteza micilor intensități ale deformațiilor elastice, conform căreia deplasările elastice locale au un ordin de mărime foarte mic comparativ cu dimensiunile solidului, valorile acestora pot fi deci determinate cu suficientă exactitate pe baza teoriei liniare a elasticității.

În mecanica mediului continuu, condițiile echilibrului dinamic al solidului au fost stabilite pe un element volumic infinitezimal al acestuia, apoi au fost extinse la întreg domeniul considerat. Astfel, ecuațiile dinamice au fost obținute sub forma unor ecuații integro-diferențiale parțiale, care, împreună cu condițiile inițiale și cele la limită, rezolvă problema. Aceste ecuații pot fi soluționate pentru un număr limitat de sisteme tehnice, simple, elementare. Pentru sisteme complexe, acestea sunt practic imposibil de soluționate. În consecință, se utilizează metode aproximative de rezolvare, care, alături de o modelare adecvată a structurii mecanice, dau rezultate acoperitoare, [Pos-91].

Modelarea elementelor dispozitivului de ghidare al roboților, abordate ca elemente elastice, este specifică ultimelor decenii. Dintre modelele ilustrate în literatură se remarcă, [Kru-90], [Sin-94], [San-96], [Stu-83], [Tsu-96], [Vuk-89], [Yos-96], [Iba-96], [Boo-91], cele care utilizează: ecuații cu derivate parțiale, metoda elementului finit, metode “combinat” și alte metode noi, inedite, de modelare a structurii elastice.

- ✓ *Cel mai simplu model fizic echivalent al unui robot flexibil este, după*

[Lip-92], cel al unui rigid liber, așezat pe un suport elastic. Orice mișcare sau sarcină va schimba energia potențială a sistemului. În ipoteza că sistemul considerat este stabil și suportă mici deplasări față de poziția de echilibru, matricea de compliantă și cea de rigiditate sunt simetrice și pozitiv definite.

✓ *Modelele bazate pe ecuații cu derivate parțiale se utilizează la descrierea cu precizie ridicată a dinamicii unui element simplu. Este dificil a extinde acest model la structuri cu mai multe elemente din cauza modului de definire a condițiilor la limită. Un astfel de model, după [Lin-94], este redat în figura II.41 și relațiile (II.17)...(II.22).*

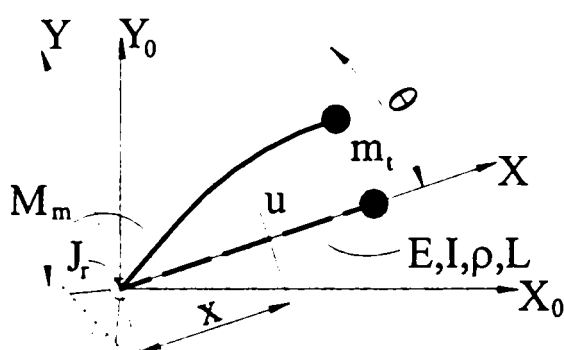


Figura II.41. Schematizarea elementului elastic

$$y(x,t) = u(x,t) + x\theta(t) \quad (\text{II.17})$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + M_m - J_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$y(0,t) = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = m_t \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \quad (\text{II.22})$$

Se remarcă, [Ber1-92], [Ber2-92], [Ber3-92], studiile comparative asupra aceluiași braț de robot modelat ca bară încastată la o extremitate într-o bucsă de cuplare și purtând o sarcină concentrată la cealaltă extremitate. Brațul robotului este modelat ca bară ce vibrează fără a lua în considerare inerția de rotație și alunecările secțiunilor datorate forțelor tăietoare (bară Euler-Bernoulli), apoi cu luarea în considerare a acestora (bară Timoshenko). Se concluzionează că deviațiile brațului de robot, datorate vibrațiilor, nu pot fi neglijate mai ales la frecvențe joase, iar pentru secțiune rectangulară a brațului, efectul forțelor tăietoare este de trei ori mai mare decât cel datorat inerției de rotație.

Se remarcă modelarea propusă în [Kru-90], care utilizează ecuații cu derivate

parțiale pentru modelarea elementelor flexibile, pe care le assemblează apoi cu ajutorul teoriei grafurilor. Brațul robotului este modelat ca o bară care vibrează, iar ecuația fibrei medii deformată se obține utilizând ecuația Euler-Bernoulli, cu neglijarea deformațiilor de forfecare și a rotațiilor.

Experimentele realizate cu un braț flexibil de robot care se poate mișca în plan orizontal, au evidențiat faptul că pentru gama de caracteristici dimensionale și de material uzuale în construcția brațelor flexibile de roboți, vibrațiile transversale au influența cea mai mare, pe când cele torsionale și cele longitudinale pot fi neglijate, [Kru-90], [Vuk-89]. Pentru excitarea frecvenței de rezonanță este necesar ca semnalul de intrare să conțină componente de frecvență apropiate celei de rezonanță. Ca urmare a limitărilor practice (gama de frecvență limitată a motoarelor și vitezele unghiulare), semnalul de intrare pentru braț nu conține nici una sau numai componente foarte mici cu frecvență apropiată celei de rezonanță a vibrațiilor longitudinale. În consecință, acestea sunt neglijate. Structura dată având mișcare plană, vibrațiile torsionale nu sunt excitate, prin urmare se pot neglija. În concluzie, pentru un braț flexibil cu mișcare plană, se impun a fi luate în considerare vibrațiile transversale, iar cele longitudinale și torsionale pot fi neglijate, [Kru-90].

✓ Modelul dinamic al unui element elastic poate fi obținut pe baza ecuațiilor lui Lagrange de ordinul 2 utilizând expresia energiei cinetice și potențiale. Cu ajutorul acestor ecuații, au fost realizate și *modele particularizate* pentru elementele flexibile, cum este cel bazat pe “*elemente surogat*”, [Smi-91]. Un “element surogat” este o reprezentare convențională, care cumulează caracteristicile dinamice ale elementului flexibil real. El constă dintr-o “particulă reprezentativă” și o reprezentare analitică a formei geometrice a elementului. “Particula reprezentativă” este o particulă internă elementară, infinitezimală, a elementului elastic real, având o masă elementară. Întrucât fiecare particulă internă a elementului este topologic identică, răspunsul acesteia la solicitări poate fi folosit pentru a reprezenta răspunsul întregului element elastic.

“Elementul surogat” poate exercita forțe/torsori la extremități, asupra elementelor

cu care este conectat. El contribuie la energia cinetică a sistemului ca urmare a mișcării masei elementare a “particulei reprezentative” și la cea potențială datorate energiei stocate ca urmare a situației ei pe elementul considerat.

Aplicarea ecuațiilor Lagrange, într-o formă extinsă, asupra modelului cu “elemente surogat”, duce la obținerea unui set de ecuații cu derivate parțiale pentru sistemul flexibil modelat, care poate fi rezolvat cu un software ce admite utilizarea elementelor simbolice.

✓ Modelele de calcul obținute cu *metoda elementului finit* comportă înlocuirea structurii reale cu schemă care reprezintă modelul de calcul. Această schemă rezultă prin discretizarea structurii reale într-o succesiune de elemente finite și noduri. Se optează pentru elemente finite de tip bară, iar nodurile se amplasează în punctele de aplicație ale sarcinilor concentrate, în punctele de început și de sfârșit ale sarcinilor distribuite, în planele de variație a secțiunii barei și în cele de modificare a materialului, [Epa-97], [Nag-86], [Poc-98], [Tot-01], .

Deformația structurii analizate este descrisă prin prisma deplasărilor nodale, care se obțin rezolvând ecuația matriceală a deplasărilor în funcție de forțele nodale generalizate pentru structura considerată:

$$\underline{F} = \underline{K} \cdot \underline{\delta} \quad (\text{II.23})$$

unde \underline{F} este matricea forțelor nodale generalizate, \underline{K} este matricea de rigiditate, iar $\underline{\delta}$ este matricea deplasărilor nodale.

Matricea de rigiditate \underline{K} pentru o structură alcătuită din “ i ” elemente se obține prin asamblarea matricilor de rigiditate ale elementelor componente, \underline{k}_i , de dimensiune 12×12 , de maniera:

$$\underline{K} = \sum_i \underline{\beta}_i^T \cdot \underline{R}_i^T \cdot \underline{k}_i \cdot \underline{R}_i \cdot \underline{\beta}_i \quad (\text{II.24})$$

unde $\underline{\beta}_i$ este matricea de expansiune, iar \underline{R}_i , de dimensiune 12×12 , este matricea de rotație.

Ca urmare a posibilității de soluționare cu software specializat, această metodă este

frecvent utilizată.

✓ Din categoria *modelelor noi, inedite*, se remarcă, [Wan-91], [Yos-96], cele care aproximează elementele flexibile reale cu elemente rigide cuplate între ele prin arcuri sau

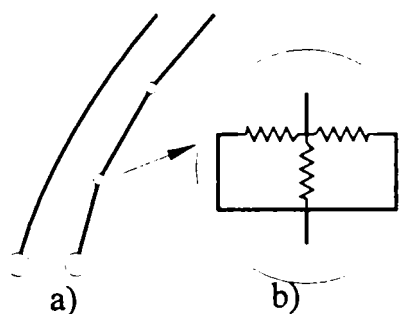


Figura II.42. Modelarea elementului flexibil real prin elemente virtuale rigide legate între ele prin cuple elastice pasive

cu elemente virtuale rigide cuplate între ele prin cuple elastice “pasive” (figura II.42).

Modelarea elementelor dispozitivului de ghidare ca elemente virtuale rigide cuplate între ele prin cuple elastice “pasive”, [Yos-96], comportă reprezentarea caracteristicilor dinamice și statice

ale sistemului real și ale modelului prin vectorii α_r și α_m :

$$\alpha_r = [\alpha_{rd}^T, \alpha_{rs}^T]^T = [\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots]^T \quad (\text{II.25})$$

$$\alpha_m = [\alpha_{md}^T, \alpha_{ms}^T]^T = [\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots]^T \quad (\text{II.26})$$

unde α_n și α_{mi} sunt parametrii dinamici și statici ai elementului real, respectiv ai modelului.

Parametrii reali sunt cunoscuți sau se pot măsura. Astfel se cunosc parametrii constructivi (lungimea, secțiunea elementelor), cei dinamici (prima și a doua frecvență naturală de vibrație) și cei statici (deformații liniare și unghiulare sub acțiunea unei forțe și a unui moment) se pot determina în urma măsurătorilor.

Lanțul cinematic analizat se modelează, [Yos-96], prin elementele virtuale “ e_{i1}, e_{i2}, \dots ” și cuplele “pasive”, “ a_{i1}, \dots ”, de maniera ilustrată în figura II.43. Fiecărui element virtual i se atașează un sistem de axe având axa Ox_i dirijată de-a lungul elementului. Variabilele acestui model sunt constituite de deformațiile liniare și unghiulare din cuplele “pasive”. Parametrii caracteristici ai elementului “ e_{ij} ” sunt: masa m_{ij} , vectorul de poziție a sistemului O_{ij} față de $O_{i,j+1}$, vectorul de poziție a centrului de masă, momentul de inerție I_{ij} ,

rigiditatea și coeficientul de amortizare pentru cele trei axe.

Parametrii modelului se obțin în urma unor calcule de identificare, pornind de la valorile cunoscute și cele măsurate. Parametrii optimali ai modelului se obțin prin minimizarea coeficientului:

$$J = \sum w_i \cdot \frac{(\alpha_{ri} - \alpha_{mi})^2}{\alpha_{ri}^2} \quad (\text{II.27})$$

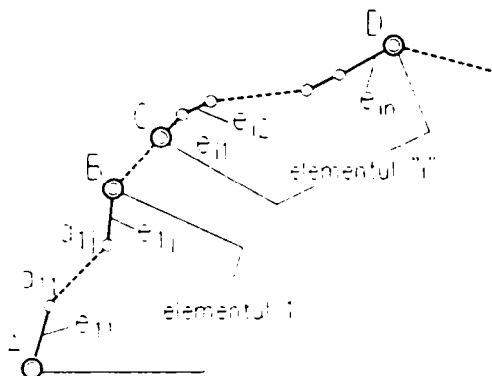


Figura II.43. Modelarea lanțului cinematic prin elemente virtuale rigide și cuple pasive

unde w_i reprezintă importanța fiecărui parametru. Această metodă este recomandată în [DoV-97] pentru determinarea modalităților de compensare a sistemului mecanic al roboților.

✓ Un model combinat, este propus în [Lin-94]. Acesta modelează elementele dispozitivului de ghidare ca și conexiuni de elemente rigide cu elemente elastice. Deformațiile elementelor sunt determinate cu ajutorul relațiilor Bernoulli-Euler pentru bare flexibile, iar ecuațiile elementelor se obțin utilizând formalismul Lagrange.

II.3.3. Elasticitatea cuplei cinematice conducătoare

În cele anterior prezentate, cupla cinematică conducătoare a fost considerată perfectă sau, mai concret, elementele componente din cadrul sistemului de acționare sunt rigide și deformațiile acestora inexistente. Pentru sistemele foarte rapide (cazul roboților industriali) această ipoteză nu corespunde realității, elementele componente fiind elastice, deformabile. Vitezele instantanee ale diverselor componente cuplate mecanic sunt diferite și chiar de semne contrare. Sistemul acumulează o cantitate importantă de energie potențială, ceea ce poate conduce la vibrații torsionale. Parametrii elementului elastic sunt în general determinabili prin încercări experimentale sau prin calcul.

Modelul folosit pentru descrierea complianței cuplei cinematice conducătoare

constă din solide rigide reprezentând motoarele, reductoarele și transmisiile, interconectate prin arcuri torsionale sau liniare. Pentru simplificare, se poate folosi un singur arc de rigiditate echivalentă, Vuk-89], [DoV-02].

În figura II.44 este reprezentată schema bloc a unui servosistem rapid cu o singură masă inerțială, [Boo-91]. Ecuațiile care descriu dinamica sistemului, fără a lua în considerare frecările, sunt:

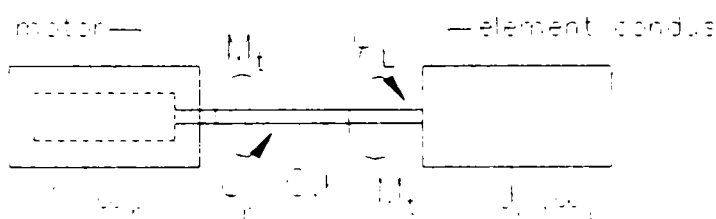


Figura II.44. Schema bloc a unui servosistem rapid

cu o singură masă inerțială

$$J_r \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = M_m - M_t \quad (\text{II.28})$$

$$J_r \cdot \frac{d\omega_L}{dt} = M_m - M_L \quad (\text{II.29})$$

$$M_t = C \cdot (\varphi_r - \kappa_L) + K \cdot (\omega_r - \omega_L) \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{d\varphi_r}{dt} = \omega_r \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{d\varphi_L}{dt} = \omega_L \quad (\text{II.32})$$

unde M_m și M_t sunt cuplul motor și respectiv momentul de torsiune transmis, C este constanta elastică a elementului de transmisie, iar K este constanta de amortizare introdusă de legătura elastică.

În relațiile anterioare nu s-a luat în considerare frecarea din sistem. De maniera prezentată se poate analiza orice sistem cu orice număr de legături elastice.

II.3.4. Elasticitatea sistemului mecanic al roboților industriali

Sistemul mecanic al roboților industriali include cel puțin un element flexibil și o cuplă cinematică conducătoare. În consecință, cele două modele privind elasticitatea elementului și a cuplei cinematice conducătoare trebuie considerate împreună, deci interconectate, așa cum sunt în realitate elementele structurale corespondente ale robotului. Există posibilitatea de a determina influențele reciproce și de a stabili măsuri care să reducă influențele nedorite. Modul de cuplare a celor două elasticități poate fi exprimat,

[Boo-91], prin rapoartele:

- ◆ “ R_a ” dintre momentul de inerție al elementului și cel al rotorului motorului electric de acționare. Un raport R_a redus indică un element ușor sensibil la modul de vibrație.
- ◆ “ R_b ” dintre rigiditatea la încovoiere EI/L a elementului și rigiditatea torsională “ K ” a cuplei. O valoare redusă a acestui raport indică o cuplă mai rigidă în raport cu elementul.

Printr-o modelare a diverselor condiții de realizare constructivă, se poate determina care model corespunde cel mai bine condițiilor date.

✓ O modalitate de calcul a matricii de flexibilitate utilizează matricea Jacobi, [Vuk-89]. În acest scop se aplică efortului final, în punctul caracteristic, forțe controlabile după cele trei axe și se înregistrează deplasările acestui punct. Pe baza valorilor obținute și a matricii Jacobi se calculează matricea de flexibilitate.

✓ O altă posibilitate de determinare a matricii de flexibilitate a sistemului mecanic al robotului nu necesită matricea Jacobi, [DoV-97],. Fiecare grad de mobilitate se încarcă cu momente concentrate cunoscute M_p , $i=1, 2, 3, \dots$ și se înregistrează deplasările rezultate. Se pot evalua influențele reciproce determinându-se astfel condițiile necesare pentru eliminarea acestora, astfel încât matricea de flexibilitate să fie diagonală.

✓ O altă metodă de modelare a sistemelor mecanice, publicată în anul 2001, [Kov-01], utilizează conceptul de “*Perechi de Sisteme de Referință*” (*PeSiR*).

Conform acestei metode, situarea relativă a două corpuri, se poate exprima cu ajutorul a două sisteme de referință carteziene 3D solidare cu acestea, care alcătuiesc o “*Pereche de Sisteme de Referință*” (*PeSiR*).

Noutatea metodei constă în faptul că atât cuplele cinematice cât și elementele binare, se pot modela cu ajutorul a câte unei *PeSiR*, din punct de vedere structural, dimensional, cinematic, cinetoelastic și dinamic, prin intermediul matricilor de trecere de la un sistem de referință la celălalt și a derivatelor acestora în raport cu timpul.

Astfel, pentru lanțul cinematic, alcătuit din elementele 1 și 2, interconectate prin intermediul unei cuple cinematice, se atașează perechile de sisteme de referință următoare:

- PeSiR $O-N$ pentru elementul 1,
- PeSiR $N-N'$ pentru cupla cinematică,
- PeSiR $N'-M$ pentru elementul 2.

Autorul metodei de modelare utilizând PeSiR, propune scrierea matricii de trecere de la un sistem la altul sub forma unui vector cu 6 componente. Pentru elementul 1 aceasta va avea forma:

$${}^0T_N^V = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (\text{II.33})$$

unde q_1, q_2, q_3 reprezintă translațiile necesare a fi realizate de-a lungul axelor x, y , respectiv z , pentru ca originea sistemului N să se suprapună peste originea sistemului O , iar q_4, q_5, q_6 sunt rotațiile necesare a se efectua în jurul aceluiași axe, până la suprapunerea axelor omoloage ale celor două sisteme de referință. Indicele superior “ V ” a fost adăugat pentru a sublinia semnificația de “vector cu 6 componente”. Elementele q_i din relația (II.33) sunt dependente de geometria elementului și de comportamentul materialului din care este confecționat.

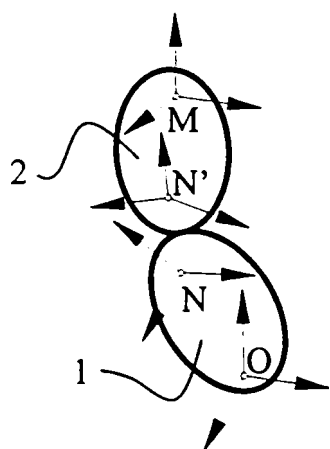


Figura II.45. Lanț cinematic alcătuit din două elemente și o cuplă cinematică

Se impune observația că, în cazul general, parametrii $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ din relațiile de tipul (II.33) sunt variabili în timp. În cazul cuplei cinemate, întrucât între cele două elemente există o legătură mobilă, situarea relativă a sistemelor N' și N este variabilă în timp, deci și elementele q_i ale matricii de trecere sunt variabile în timp. În consecință, relația (II.33), pentru cupla cinematică devine:

$${}^0T_1^V = [q_i(t)]^T \quad \text{unde } i=1, \dots, 6 \quad (\text{II.34})$$

Concret, sunt constante în timp elementele dependente de geometria cuplei și sunt variabile cu timpul cele legate de mișcarea relativă a celor două corpuri. În consecință, matricea de trecere (II.34) se poate exprima ca sumă a două matrici: o matrice $({}^0T_1^V)_c$, care cuprinde parametrii constanți și caracterizează geometria cuplei, iar cea de-a doua $({}^0T_1^V)_v$, conținând parametrii variabili:

$${}^0T_1^V = ({}^0T_1^V)_c + ({}^0T_1^V)_v = [q_i(t)]^T = [q_{i,c} + q_{i,v}]^T \quad \text{unde } i=1, \dots, 6. \quad (\text{II.35})$$

Modelul funcțional al lanțului cinematic considerat este reprezentat de matricea de trecere de la sistemul M la sistemul O , determinată ca produs al matricilor de trecere ale elementelor și a cuplei având expresia:

$${}^0\underline{T}_M^V = {}^0\underline{T}_N^V \otimes {}^N\underline{T}_{N'}^V \otimes {}^{N'}\underline{T}_M^V \quad (\text{II.36})$$

Operațiile cu matricile 6×1 se vor desfășura după un algoritm special, propus de autor în [Kov-02].

Prin derivarea în raport cu timpul a relației (II.36) se poate obține modelul cinematic și respectiv dinamic al lanțului cinematic considerat.

Metoda de modelare PeSiR permite luarea în considerare atât a deformațiilor elastice ale elementelor și cuplelor, cât și a jocurilor și frecărilor ce apar în timpul funcționării.

II.3.5. Concluzii privind elasticitatea sistemului mecanic al roboților și reflectarea acesteia în modelarea și comanda roboților

Elasticitatea structurii se manifestă la nivelul fiecărei componente a sistemului mecanic, dar efectele dinamice care influențează funcționarea robotului sunt sesizate în principal la nivelul elementelor și al cuplelor cinematice conducătoare. Deformațiile și vibrațiile generate ca urmare a complianței structurii mecanice a roboților trebuie compensate. Pentru aceasta, este necesar ca ele să fie cunoscute, determinate, și luate în considerare în modelarea, calculul, comanda și măsurarea performanțelor roboților.

Complexitatea sistemului mecanic al roboților, privit ca structură elastică, limitează posibilitatea de realizare a calculului dinamic, complex el însuși prin natura lui.

Proiectarea roboților implică adesea un compromis între două obiective de proiectare rivale. Unul este cel de creștere a vitezei robotului folosind motoare mai puternice și elemente mai ușoare. Cel de-al doilea este cel de minimizare a deviațiilor și amplitudinii vibrațiilor, care afectează acuratețea de poziționare și precizia robotului. Noii senzori și noii algoritmi de control care identifică și resping vibrațiile inerente roboților cu elemente ușoare și flexibile pot “ușura” acest conflict de proiectare, [Wha-90].

Teoretic, structurile elastice conțin un număr infinit de moduri flexibile. Practic,

doar un număr finit de moduri flexibile sunt necesare a fi considerate întrucât contribuțiile modurilor înalte sunt neglijabile ca urmare a amortizării interne. Pentru a asigura vibrații reziduale nule, fiecare din aceste moduri joase trebuie luate în considerare fie prin filtrare, fie prin sinteză, [Bha-90].

Dificultatea de bază în controlul brațului unui robot rezultă din faptul că ecuațiile dinamice care descriu mișcarea sunt inerent neliniare și înalt cuplate, deoarece fiecare element exercită torsor inerțial, centrifugal și Coriolis asupra celuilalt element. Dacă elasticitatea elementelor manipulatorului se include în modelul dinamic, ecuațiile devin mai complicate, [Tra-90].

O analiză completă a necesității compensării explicite a diferitelor efecte dinamice (dinamica robotului și dinamica mediului) nu a fost încă realizată. Modelele dinamice structurale acceptă, uzual, mici deplasări și deformații ale elementelor, [Vuk-96].

În ultimele decenii s-a remarcat o creștere majoră a interesului roboticienilor pentru dezvoltarea de scheme și concepte pentru controlul mișcării compliante. Se disting două moduri de abordare:

- *Controlul impedanței*, care reprezintă mai degrabă o strategie pentru mișcarea compliantă, decât o schemă de control concretă. Obiectivul acestui concept este de a obține o impedanță mecanică specifică a efectorului final. Acest obiectiv îmbunătățește relațiile dorite între erorile de poziționare și forța ce acționează la efectorul final. Controlul impedanței este în principal folosit la sarcinile de control unde este necesară poziționarea precisă. Acest mod de abordare are limite, generate de utilizarea unei ecuații liniare pentru modelul dinamic al mediului, fapt ce nu este întotdeauna acceptabil, [Vuk-95], [Gun-91].

- *Controlul hibrid în poziție/forță*, care are și el limite generate de ipoteza general acceptată a ortogonalității dintre forțele de contact și direcția mișcării libere ca un invariant, alături de neglijarea forțelor de frecare, [Vuk-95], [Wer-97], [Wer1-91].

Modelarea matematică a comportamentului roboților reprezintă o concepție fundamental nouă, fără care nu poate fi concepută proiectarea modernă, asistată de

calculator a acestora. În prezent coexistă mai multe variante de modele matematice, de la modele simplificate, la modele complete, dar, nu este încă rezolvată complet problema compatibilității reciproce între acestea. Tendința actuală în modelare, bazată pe experiența acumulată și pe creșterea performanțelor hard și soft, este de a realiza tipul de model matematic orientat pe produs, [Ion-94], [Luc-99], [**M-98],[**M-96], [Sav-97], [Ung-97], [Zei-91]. Adoptarea cvasigeneralizată a interfețelor grafice utilizator (GUI) a dus la dezvoltarea de medii de programare bazate pe conceptul de calcul analogic orientat pe blocuri funcțional-structurale. Foarte cunoscut în acest domeniu este pachetul soft MATLAB (marcă înregistrată a The MathWorks Inc.), cel mai cunoscut mediu de programare pentru aplicațiile ingineresti, inclusiv cele de modelare/identificare/simulare. MATLAB împreună cu extensia sa SIMULINK, specializată pentru simulare, permite simularea continuă și discretă, [Ioe-95], [Saf-97], [**N-11], [Kri-01], [Kri1-01].

Probleme deosebite sunt întâmpinate în cazul simulării sistemelor dinamice continue, pentru modelarea cărora se recurge la tehnica grafurilor de legătură. S-a dezvoltat în acest scop metoda Bondgraf, [Dil-88], [Fah-88], [Fah-91], [Fah-94], [Kru-90], [Mar-79], [Ros-87], [Saf-00], [Saf1-00], [Smi-90], [Zei-95], [Zha-88]. Această tehnică de modelare permite interconectarea între sistemele elementare sau subsistemele înglobate în sisteme complexe, chiar a celor de naturi diferite.

Pe plan mondial au fost lansate și alte metode de modelare utilizabile în robotică, precum "Screw Theory", [Bry-95], [Cib-98], [Biz-01], având o bază matematică sofisticată, fapt care le face mai puțin utilizabile în absența algoritmilor implementați pe sistemele de calcul.

Elasticitatea roboților flexibili și mișcarea compliantă, prin numeroasele dificultăți pe care le prezintă, constituie "provocări" redutabile pentru roboticieni, [Gha-91], [Jan-91], [Kra-97], [Lew-91], [Reb-85].

Problematica expusă, departe de a fi complet și exact rezolvată, face obiectul multor studii și experimente din domeniul roboticii actuale.

III. OBIECTIVELE TEZEI

III.1. Introducere

La stabilirea și enunțarea principalelor probleme pe care și le-a propus spre rezolvare, autoarea a avut în vedere stadiul actual al cercetărilor cu privire la optimizarea construcției și amplasării dispozitivelor de complianță din structura sistemului mecanic al roboților industriali. Pe baza cercetărilor bibliografice concretizate pe parcursul referatelor de pregătire, autoarea a analizat diversitatea constructivă a dispozitivelor de complianță, a poziționării acestora în construcția roboților industriali și a complianței structurii mecanice a robotului industrial. Pornind de la aspectele sesizate, autoarea își propune prin prezenta teză enunțarea extensivă, detaliată, a unor principii de optimizare constructivă a dispozitivelor de complianță din construcția roboților industriali. În același timp, autoarea își propune evidențierea experimentală a comportamentului compliant al unor componente de construcție originală din structura robotului industrial.

III.2. Problematika propusă spre studiu și rezolvare

Studiind diversitatea tipologică a complianței robotice, autoarea vizează elaborarea unei clasificări a complianței precum și clasificarea roboților după criteriul gradului de complianță. Această intenție are în vedere și analiza structurală a dispozitivelor de complianță, prezentarea sintetică a metodelor de studiu, cu evidențierea particularităților fiecăreia. Acest obiectiv urmează să se concretizeze și în realizarea unei biblioteci de modele grafice pentru dispozitivele de complianță.

Modelarea unitară a comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice conducătoare din structura roboților industriali pe baza conceptului de *Perechi de Sisteme de Referință (PeSiR)* constituie o altă problemă pe care autoarea o are în vedere în prezenta teză. Autoarea intenționează să utilizeze metoda PeSiR pentru modelarea unui dispozitiv de complianță de tip RCC, care este un model de referință în robotică.

Analiza influenței proprietăților elastice ale materialelor utilizate în construcția dispozitivului de ghidare, precum și analiza influenței parametrilor geometrici ai

elementelor acestuia asupra comportamentului cinetoelastostatic constituie un alt obiectiv al tezei prezente.

Autoarea își propune optimizarea formei geometrice a secțiunii transversale a elementelor dispozitivului de ghidare pe baza unor criterii de material și comportament elastic.

Pe plan experimental, autoarea își propune pe de o parte testarea comportamentului cinetoelastostatic al unui dispozitiv de complianță RCC cu cuple cinematice elastice, iar pe de altă parte, verificarea comportamentului elastic al unui element atașat sistemului mecanic al unui robot industrial. Experiențele preconizate intenționează să evidențieze utilitatea complianței structuri mecanice în aplicații de manipulare și de conlucrare cu un alt robot.

În concluzie, autoarea își propune, prin prezenta lucrare, să dezvolte cercetările teoretice și experimentale referitoare la modelarea și optimizarea dispozitivelor de complianță din structura sistemului mecanic al roboților industriali.

**IV. MODELAREA MATEMATICĂ A
COMPORTAMENTULUI
MECANISMELOR UTILIZÂND
CONCEPTUL DE “PERECHI DE
SISTEME DE REFERINȚĂ”**

IV.1. Conceptul de “Pereche de Sisteme de Referință” (PeSiR)

O nouă metodă de modelare a sistemelor mecanice, publicată în anul 2001, [Kov-01], utilizează conceptul de “Perechi de Sisteme de Referință” (PeSiR). Acesta permite modelarea matematică a stării de mișcare a corpurilor într-un mod unitar, cu evidențierea corelațiilor dintre ele, independent de tipul fenomenului analizat, [Kov2-01], [Kov1-02], [Kov2-02].

Conform metodei *PeSiR* $O_0 - O_1$, situarea relativă a două corpuri, (figura IV.1), se poate exprima cu ajutorul a două sisteme de referință carteziane 3D solidare cu acestea, care alcătuiesc o “*Pereche de Sisteme de Referință*” (*PeSiR*). Sistemele de referință având originea O_0 , respectiv O_1 vor fi referite ca “*PeSiR* $O_0 - O_1$ ”.

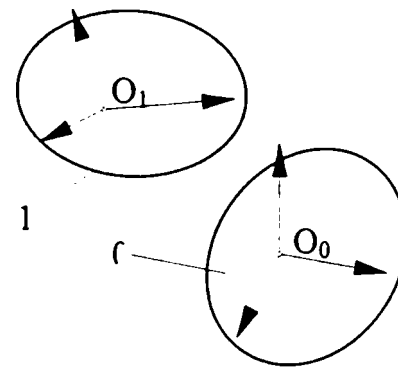


Figura IV.1. Situația relativă a două corpuri

Noutatea metodei constă în faptul că atât cuplele cinematice cât și elementele binare, se pot modela cu ajutorul a câte unei *PeSiR*, din punct de vedere structural, dimensional, cinematic, cinetoelastic și dinamic, prin intermediul matricilor de trecere de la un sistem de referință la celălalt și a derivatelor acestora în raport cu timpul.

În [Kov-01] se propune scrierea matricii de trecere de la sistemul O_1 la sistemul O_0 , care reprezintă în același timp matricea de situație a sistemului O_1 în raport cu sistemul O_0 , sub forma unui vector cu 6 componente, de maniera:

$${}^0\underline{S}_1^V = {}^0\underline{T}_1^V = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (\text{IV.1})$$

unde q_1, q_2, q_3 reprezintă translațiile necesare a fi realizate de-a lungul axelor x, y , respectiv z , pentru ca originea O_1 să se suprapună peste O_0 , iar q_4, q_5, q_6 sunt rotațiile necesare a se efectua în jurul aceluiași axe, până la suprapunerea axelor omoloage ale celor două sisteme de referință.

Indicele superior “ V ” a fost adăugat pentru a sublinia semnificația de “vector cu 6 componente”.

Operațiile cu matricile 6×1 se vor desfășura după un algoritm special, propus de

autor, [Kov-02]. Se impune observația că, în cazul general, parametrii $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ din relația (IV.1) sunt variabili în timp, deci:

$$q_i = q_i(t) \quad (IV.2)$$

Matricea de situare a sistemului O_1 în raport cu sistemul O_0 se poate scrie și ca vector cu 6 componente de forma:

$${}^0\underline{\dot{S}}_1^V = {}^0\underline{T}_1^V = [r_x \quad r_y \quad r_z \quad o_{rx} \quad o_{ry} \quad o_{rz}]^T \quad (IV.3)$$

în care r_x, r_y, r_z reprezintă proiecțiile vectorului ${}^0\underline{r}_1$ de poziție al originii O_1 în raport cu originea O_0 pe axele sistemului O_0 , iar elementele o_{rx}, o_{ry}, o_{rz} reprezintă proiecțiile vectorului de orientare al sistemului O_1 pe axele sistemului O_0 , (figura IV.2).

Starea de viteză a sistemului O_1 în raport cu sistemul O_0 se va scrie ca matrice 6x1:

$${}^0\underline{\dot{S}}_1^V = [\dot{r}_x \quad \dot{r}_y \quad \dot{r}_z \quad \dot{o}_{rx} \quad \dot{o}_{ry} \quad \dot{o}_{rz}]^T \quad (IV.4)$$

iar viteza de schimbare a matricilor de trecere de la sistemul O_1 la sistemul O_0 este:

$${}^0\underline{\dot{T}}_1^V = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (IV.5)$$

Legătura dintre matricile date de (IV.4) și (IV.5) se poate exprima sub forma:

$${}^0\underline{\dot{S}}_1^V = {}^0\underline{J}_1 \cdot {}^0\underline{\dot{T}}_1^V \quad (IV.6)$$

unde cu ${}^0\underline{J}_1$ s-a notat matricea jacobiană dată de relația:

$${}^0\underline{J}_1 = [J_{ij}] = \left[\frac{\partial \dot{S}_j}{\partial q_j} \right] \quad (IV.7)$$

Starea de accelerație a sistemului O_1 în raport cu sistemul O_0 se poate

scrie sub forma matricii 6x1:

$${}^0\underline{\ddot{S}}_1^V = [\ddot{r}_x \quad \ddot{r}_y \quad \ddot{r}_z \quad \ddot{o}_{rx} \quad \ddot{o}_{ry} \quad \ddot{o}_{rz}]^T \quad (IV.8)$$

sau, în funcție de accelerația de schimbare a matricii de trecere de la sistemul O_1 la

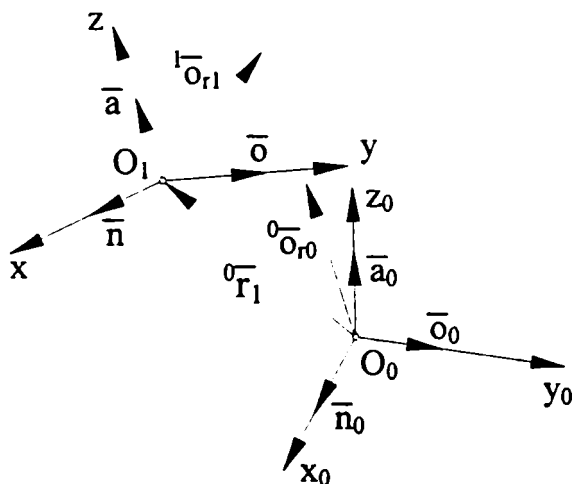


Figura IV.2. Vectorii de poziție și versorii sistemelor de referință atașate celor două corpuri

sistemul O_0 :

$${}^0\ddot{\underline{S}}_1' = {}^0\underline{J}_1 \cdot {}^0\dot{\underline{T}}_1' + {}^0\underline{J}_1 \cdot {}^0\ddot{\underline{T}}_1' \quad (\text{IV.9})$$

unde
$${}^0\ddot{\underline{T}}_1' = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_3 \quad \ddot{q}_4 \quad \ddot{q}_5 \quad \ddot{q}_6]^T \quad (\text{IV.10})$$

iar ${}^0\underline{J}_1'$ este derivata matricii jacobiene în raport cu timpul.

Conform [Kov-01], modelele funcționale vor fi referite de maniera:

- cele legate de deplasări relative ale sistemelor de referință vor fi numite “modele de ordinul 0”,
- cele cinematice (viteze și accelerații) vor fi referite ca “modele de ordinul 1” (cele exprimate în viteze – “modele de ordinul 1.1”, iar cele exprimate în accelerații – “modele de ordinul 1.2”),
- cele dinamice vor fi numite “modele de ordinul 2” (“modele de ordinul 2.1” – cele cinetostatice și “modele de ordinul 2.2” – cele dinamice propriu-zise).

Astfel, relația (IV.1) reprezintă modelul funcțional de ordinul 0 al situației relative a celor două corpuri 0 și 1 , deci al PeSiR $O_0 - O_1$. Relația (IV.5) reprezintă modelul funcțional de ordinul 1.1 iar relația (IV.10) constituie modelul funcțional de ordinul 1.2.

Capitolele următoare ale tezei vor face referire la modelul cinetoelastostatic cu semnificația definită în [Pel-75].

IV.2. Modelul cinetoelastostatic al cuplei cinematice generalizate utilizând conceptul PeSiR

Cupla cinematică este legătura mobilă dintre două elemente, [Kov2-92]. Atunci când nu se precizează care dintre cele șase mișcări relative elementare de translație sau de rotație, q_1, \dots, q_6 , ale celor două sisteme de referință ale PeSiR sunt permise, aceasta este numită “*cuplă cinematică generalizată*”.

Pentru modelarea cuplei cinematice generalizate, (figura IV.3), cu ajutorul PeSiR se atașează în zona de contact, solidar fiecărui element, un sistem de referință omonim (O_0 , respectiv O_1). Rezultă astfel o pereche de sisteme de referință: *PeSiR $O_0 - O_1$* .

Modelul funcțional de ordinul 0 al cuplei cinematice generalizate este matricea de

trecere de la sistemul O_1 la sistemul O_0 , dat de relația (IV.1).

Întrucât între cele două elemente există o legătură mobilă, situarea relativă a sistemelor O_0 și O_1 este variabilă în timp, deci și parametrii generalizați q_i sunt variabili. Scrisă concentrat, relația (IV.1) devine:

$${}^0\underline{T}_1^V = [q_i(t)]^T \quad \text{unde } i=1, \dots, 6 \quad (\text{IV.11})$$

Mai exact, sunt constante în timp elementele dependente de geometria cuplei și sunt variabile cu timpul cele legate de mișcarea relativă a celor două corpuri. În consecință, matricea de trecere se poate exprima ca sumă a două matrici: o matrice $({}^0\underline{T}_1^V)_c$ care cuprinde parametrii constanți, iar cea de-a doua $({}^0\underline{T}_1^V)_v$, conținând parametrii variabili:

$${}^0\underline{T}_1^V = ({}^0\underline{T}_1^V)_c + ({}^0\underline{T}_1^V)_v = [q_i(t)]^T = [q_{i,c} + q_{i,v}]^T \quad \text{unde } i=1, \dots, 6. \quad (\text{IV.12})$$

Relația (IV.12) constituie modelul de ordinul 0 al cuplei cinematice generalizate. Prin derivarea acesteia în raport cu timpul, se obține modelul de ordinul 1.1 al cuplei cinematice generalizate. Întrucât derivata matricei constante $({}^0\underline{T}_1^V)_c$ este nulă, modelul de ordinul 1.1 va conține doar parametrii generalizați variabili în timp:

$${}^0\dot{\underline{T}}_1^V = ({}^0\dot{\underline{T}}_1^V)_v = [\dot{q}_{i,v}]^T \quad i=1, \dots, 6 \quad (\text{IV.13})$$

Similar se obține modelul de ordinul 1.2 (în accelerații) al cuplei cinematice generalizate, sub forma:

$${}^0\ddot{\underline{T}}_1^V = ({}^0\ddot{\underline{T}}_1^V)_v = [\ddot{q}_{i,v}]^T \quad i=1, \dots, 6 \quad (\text{IV.14})$$

La scrierea modelului de ordinul 2.1 (cinetostatic) al cuplei cinematice generalizate, se consideră torsorul reacțiunilor în zona de contact (\mathfrak{R}^V) , care cuprinde reacțiuni statice (\mathfrak{R}_{st}^V) , reacțiuni dinamice (\mathfrak{R}_d^V) și reacțiuni rezultate din frecare (\mathfrak{R}_{fr}^V) :

$$\underline{\mathfrak{R}}^V = \underline{\mathfrak{R}}_{st}^V + \underline{\mathfrak{R}}_{fr}^V + \underline{\mathfrak{R}}_d^V \quad (\text{IV.15})$$

Torsorul reacțiunilor se poate scrie similar relației (IV.1), sub forma:

$$\underline{\mathfrak{R}}^V = [R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5 \ R_6]^T \quad (\text{IV.16})$$

unde componentele R_i pentru $i=1, \dots, 3$ reprezintă forțe acționând după direcțiile axelor x, y, z , iar pentru $i=4, \dots, 6$ reprezintă cupluri acționând în jurul aceluiași axe.

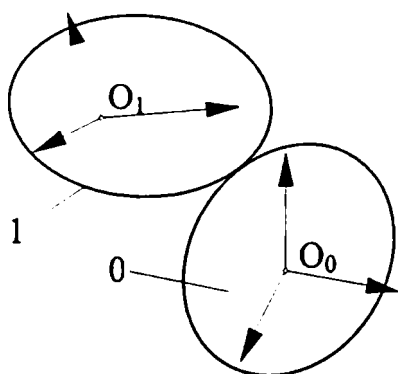


Figura IV.3. Situarea relativă a elementelor ce alcătuiesc o cuplă cinematică

Reacțiunile care apar în cuplă determină apariția deformațiilor elastice ale elementelor aflate în contact. Modelul cinetoelastostatic al cuplei cinematice generalizate, cu luarea în considerare a deformațiilor elastice se va scrie:

$${}^0\underline{T}_1^{\nu} = {}^0\underline{T}_1 + {}^0\underline{\Delta T}_1^{\nu} \quad (\text{IV.17})$$

unde: ${}^0\underline{T}_1^{\nu}$ este matricea de trecere de la sistemul O_I la sistemul O_0 , dată de (1), iar

${}^0\underline{\Delta T}_1^{\nu}$ exprimă deformațiile elastice survenite, fiind dată de relația:

$${}^0\underline{\Delta T}_1^{\nu} = [\Delta q_i]^T \quad i=1, \dots, 6. \quad (\text{IV.18})$$

Primii trei termeni ai relației (IV.18) reprezintă deformațiile elastice ale zonelor de contact ale cuplei după direcțiile axelor, iar ultimii trei reprezintă deformațiile elastice unghiulare în jurul axelor sistemului de referință. Întrucât componentele tursorului reacțiunilor sunt responsabile de apariția deformațiilor elastice, se poate scrie relația:

$${}^0\underline{\Delta T}_1^{\nu} = {}^0\underline{C}_1 \cdot \underline{\mathfrak{R}}^{\nu} \quad (\text{IV.19})$$

în care ${}^0\underline{C}_1$ este matricea de complianță a cuplei, dependentă de natura materialului de construcție a elementelor și de geometria zonelor de contact.

Expresia (IV.19), scrisă dezvoltat:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

evidențiază faptul că matricea ${}^0\underline{C}_1$ este similară unei matrici jacobiene. Ca urmare, elementele acesteia se pot determina cu relații de forma:

$$C_{11} = \frac{\partial q_1}{\partial R_1}, \quad C_{12} = \frac{\partial q_1}{\partial R_2}, \dots \quad (\text{IV.21})$$

Matricea de complianță a cuplei cinematice odată determinată, cu relația (IV.19) se pot calcula deformațiile generate în zona de contact de un anumit tursor al reacțiunilor.

Rigiditatea fiind inversa complianței, relația (IV.19) se poate scrie și sub forma:

$$\underline{\mathfrak{R}}^v = {}^0 \underline{K}_1 \cdot {}^0 \underline{\Delta T}_1^v \quad (\text{IV.22})$$

în care ${}^0 \underline{K}_1$ este matricea de rigiditate a cuplei, dată de:

$${}^0 \underline{K}_1 = {}^0 \underline{C}_1^{-1} \quad (\text{IV.23})$$

Relația (IV.22) permite determinarea torsorului care produce o anumite deformație a cuplei, atunci când se cunoaște rigiditatea acesteia.

Considerentele anterioare privind includerea deformațiilor cuplei în modelul ei funcțional, permit scrierea modelului cinetoelastostatic, (modelul de ordinul 2.1), al cuplei cinematice generalizate, sub forma:

$${}^0 \underline{T}_{1\text{el}}^v = ({}^0 \underline{T}_1^v)_c + ({}^0 \underline{T}_1^v)_v + {}^0 \underline{\Delta T}_1^v \quad (\text{IV.24})$$

Un model complet al cuplei cinematice generalizate necesită și luarea în considerare a jocurilor din zona de contact. Modelul cinetoelastostatic complet va fi:

$${}^0 \underline{T}_{1\text{el}+j}^v = ({}^0 \underline{T}_1^v)_c + ({}^0 \underline{T}_1^v)_v + {}^0 \underline{\Delta T}_1^v + {}^0 \underline{\delta T}_1^v \quad (\text{IV.25})$$

în care efectul jocurilor în zona de contact este exprimat de matricea ${}^0 \underline{\delta T}_1^v$, care se poate scrie ca matrice 6x1 cu coeficienți constanți:

$${}^0 \underline{\delta T}_1^v = [\delta q_i]^T \quad \text{cu } i=1, \dots, 6 \quad (\text{IV.26})$$

IV.3. Modelul cinetoelastostatic al offset-ului generalizat utilizând conceptul PeSiR

Noțiunea de offset este denumirea generică pentru situarea relativă invariabilă în timp a zonelor de contact a două cuple cinematice între care se interpune același element.

Atunci când nu se precizează care dintre mișcările relative de translație sau de rotație, q_1, \dots, q_6 , sunt împiedicate, se utilizează denumirea de “*offset generalizat*”.

Se consideră un offset simplu, materializat printr-un element rigid, căruia i se atașează solidar, sistemele de referință O_1 și O_2 , (figura IV.4). *PeSiR* $O_1 - O_2$ constituie offset generalizat. Modelul matematic de ordinul 0 al acestuia are expresia dată de relațiile (IV.1), (IV.2), completată cu indicii corespunzători, deci:

$${}^1\underline{T}_2^V = q_j \quad \text{cu } j=1, \dots, 6 \quad (\text{IV.27})$$

În cazul de față parametrii generalizați q_j caracterizează din punct de vedere dimensional elementul $O_1 - O_2$, deci sunt invariabili în timp. În consecință, modelele funcționale de ordinul 1 și de ordinul 2 ale elementului rigid nu au sens. Modelul cinetoelastostatic al offsetului generalizat se reduce la exprimarea echilibrului elementului în cauză. Torsorul exterior care acționează asupra acestuia produce deformații ce trebuie considerate în construcția modelului acestuia. Modelul cinetoelastostatic al offsetului

generalizat se va scrie similar celui al cuplei cinematice generalizate:

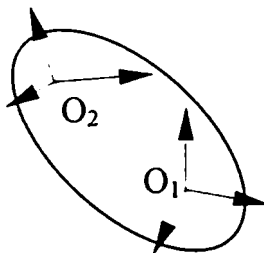


Figura IV.4. Elementul rigid și perechea de sisteme de referință

$${}^1\underline{T}_{2\,el}^V = {}^1\underline{T}_{2\,rig}^V + {}^1\underline{\Delta T}_2^V \quad (\text{IV.28})$$

unde ${}^1\underline{T}_2^V$ este matricea de trecere de la sistemul O_2 la sistemul O_1 , dată de (IV.27), iar ${}^1\underline{\Delta T}_2^V$ exprimă deformațiile elastice survenite, fiind dată de relația:

$${}^1\underline{\Delta T}_2^V = [\Delta q_i]^T \quad i=1, \dots, 6. \quad (\text{IV.29})$$

Primii trei termeni ai relațiilor (IV.29) reflectă deformațiile elastice ale elementului după direcțiile axelor, iar ultimii trei reflectă deformațiile elastice unghiulare în jurul axelor sistemului de referință.

Întrucât componentele torsorului forțelor exterioare determină apariția deformațiilor elastice, se poate scrie relația:

$${}^1\underline{\Delta T}_2^V = {}^1\underline{C}_2 \cdot {}^2\underline{\mathfrak{F}}_{rez}^V \quad (\text{IV.30})$$

în care: ${}^1\underline{C}_2$ este o matrice similară celei de complianță a elementului, dependentă de

natura materialului și de geometria acestuia, iar ${}^2\underline{\mathfrak{F}}_{rez}^V = {}^2\underline{\mathfrak{F}}_{ge}^V + {}^2\underline{R}^V$ (IV.31)

este torsorul forțelor exterioare care însumează torsorul forțelor exterioare generalizate, ${}^2\underline{\mathfrak{F}}_{ge}^V$, și torsorul reacțiunilor din cupla cinematică generalizată,

${}^2\underline{R}^V$, exprimate în sistemul de referință O_2 .

Relația (IV.30), scrisă sub formă dezvoltată, evidențiază dependența fiecărei deformații elastice a offset-ului generalizat de toate componentele torsorului reacțiunilor, nu doar de cea omonimă.

IV.4. Modelarea matematică a comportamentului cinetoelastodinamic al offset-ului generalizat și al cuplei cinematice generalizate utilizând conceptul PeSiR

IV.4.1. Introducere

În cazul offset-ului generalizat, când componentele torsorului forțelor exterioare $\underline{\mathcal{S}}_{fge}$ variază în timp, elementele matricii de deformație elastică ${}^1\Delta T_2^k$ variază la rândul lor în timp, mișcarea rezultantă fiind influențată de distribuția maselor elementului și de amortizarea interioară a materialului din care este construit acesta. Modul de vibrație este specific fiecărui “grad de libertate” corespunzător câte unei componente a torsorului forțelor generalizate exterioare. Cupla cinematică generalizată fiind legătura mobilă dintre două elemente, vibrația zonelor de contact ale cuplei se deduce din vibrația offset-urilor atașate elementelor.

IV.4.2. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al sistemelor mecanice

IV.4.2.1. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al sistemelor mecanice cu un singur grad de libertate

Se consideră sistemul mecanic cu un singur grad de libertate reprezentat în figura IV.5. Acesta este alcătuit dintr-o masă concentrată aflată în mișcare de translație,

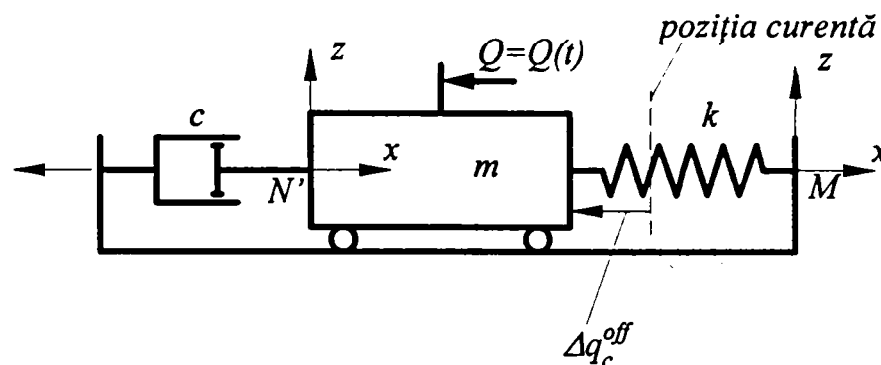


Figura IV.5. Masă concentrată în mișcare de translație

legată de un suport cu un element elastic (arc) și un amortizor.

Asupra sistemului acționează forța generalizată Q având direcția paralelă cu cea a axei Mx , variabilă în timp:

$$Q = Q(t) \quad (IV.32)$$

Masa concentrată m s-a deplasat în raport cu poziția curentă, la momentul considerat, cu deformația Δq_c^{off} .

Condiția de echilibru a masei m este, [Gli-94], [Mor-70], în acest caz:

$$m \cdot \Delta \ddot{q}_c^{off} + c \cdot \Delta \dot{q}_c^{off} + k \cdot \Delta q_c^{off} - Q(t) = 0 \quad (IV.33)$$

unde m este masa concentrată, c este coeficientul de amortizare vâscoasă al amortizorului, iar k este rigiditatea elementului elastic.

Cu notațiile:

$$\frac{c}{m} = 2\alpha \quad (IV.34)$$

$$-\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (IV.35)$$

$$-\frac{Q(t)}{m} = f(t) \quad (IV.36)$$

relația (IV.33) devine:

$$\Delta \ddot{q}_c^{off} + 2\alpha \cdot \Delta \dot{q}_c^{off} + \omega^2 \cdot \Delta q_c^{off} - f(t) = 0 \quad (IV.37)$$

Pentru cazul din figura IV.6, când masa m se rotește în jurul axei $N'z$, se înlocuiește în relația (V.) masa, cu momentul de inerție axial al obiectului Mz , deci $m = I_{zz}$.

Relația (IV.37) rămâne valabilă și în cazul mișcării de torsiune, dacă pentru frecvența circulară

$$-\frac{k}{I_z} = \omega^2 \quad (IV.38)$$

Soluția ecuației (IV.33) este

$$\Delta q_c^{off} = x_0 \cdot u(t) + v_0 \cdot r(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (IV.39)$$

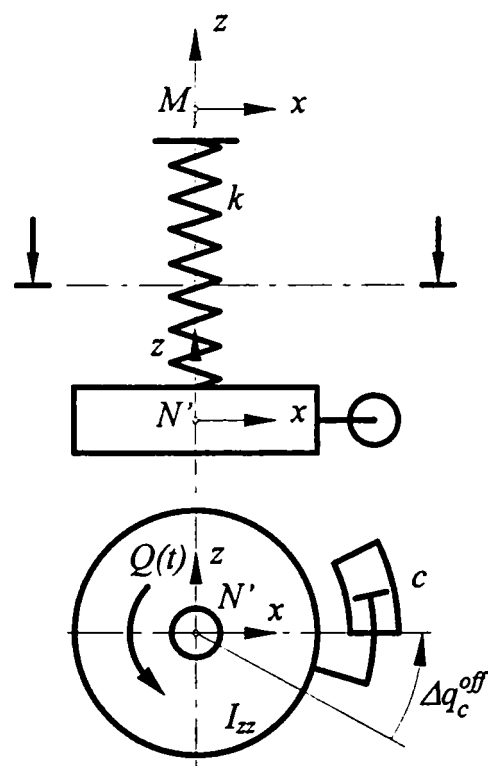


Figura IV.6. Masă concentrată în mișcare de rotație

a mișcării vibratorii se notează:

în care:

$$x_0 = C_1 + C_2 \quad (\text{IV.40})$$

$$v_0 = r_1 \cdot C_1 + r_2 \cdot C_2 \quad (\text{IV.41})$$

$$u(t) = \frac{r_2 \cdot e^{r_1 t} - r_1 \cdot e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} \quad (\text{IV.42})$$

$$v(t) = \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} \quad (\text{IV.43})$$

unde r_1, r_2 sunt rădăcinile ecuației caracteristice:

$$r^2 + 2\alpha \cdot r + \omega^2 = 0 \quad (\text{IV.44})$$

Atașând masei (obiectului) sistemul de referință N' iar suportului, sistemul de referință M , $N' - M$ constituie un PeSiR, care permite modelarea dinamicii offsetului generalizat conform paragrafului IV.4.2.1.

IV.4.2.2. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al sistemelor mecanice cu două grade de libertate

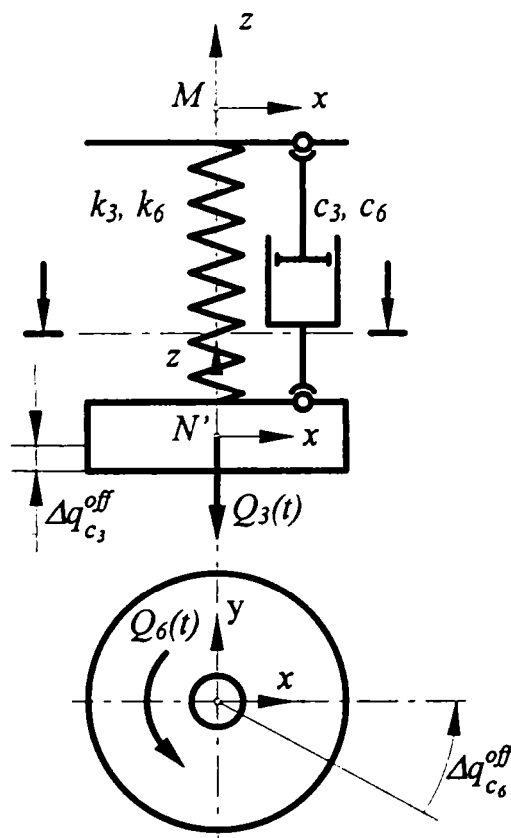


Figura IV.7. Sistem mecanic cu două grade de libertate

Se consideră sistemul alcătuit dintr-o masă concentrată m , legată de suportul fix prin intermediul unui element elastic și al unui amortizor, supusă acțiunii a două forțe perturbatoare $Q_3(t)$ și $Q_6(t)$, (figura IV.7). Sistemul considerat are două grade de libertate.

Expresiile deformațiilor liniare $\Delta q_{c_3}^{off(t)}$, respectiv unghiulare $\Delta q_{c_6}^{off(t)}$ aferente sunt:

$$\begin{cases} \Delta q_{c_3}^{off(t)} = \frac{Q_3(t)}{k_3} + \frac{Q_6(t)}{c} \\ \Delta q_{c_6}^{off(t)} = \frac{Q_6(t)}{k_6} + \frac{Q_3(t)}{c} \end{cases} \quad (\text{IV.45})$$

Sistemul (IV.45) se poate scrie

matriceal, [Sha-97], sub forma (IV.46):

$$\begin{bmatrix} \Delta q_{c_3}^{off(t)} \\ \Delta q_{c_6}^{off(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_3} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{k_6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_3(t) \\ Q_6(t) \end{bmatrix} \quad (IV.46)$$

unde $\Delta q_{c_3}^{off(t)}$ este deformația liniară după axa M_z ,

$\Delta q_{c_6}^{off(t)}$ este deformația unghiulară în jurul axei M_z ,

$Q_3(t)$ este forța ce acționează după direcția axei M_z ,

$Q_6(t)$ este cuplul acționând după axa M_z ,

k_3 este rigiditatea la întindere a elementului elastic,

k_6 este rigiditatea la torsiune a elementului elastic,

$c=c_3=c_6$ este coeficientul de amortizare vâscoasă.

IV.4.2.3. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al sistemelor mecanice cu șase grade de libertate

Sistemul mecanic reprezentat în figura IV.8 are șase grade de libertate. Torsorul rezultat al forțelor generalizate exterioare este:

$$\underline{Q} = \underline{\mathfrak{T}}_{rez}^V = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6]^T \quad (IV.47)$$

sau

$$\underline{Q} = \underline{\mathfrak{T}}_{rez}^V = [Q_i]^T \quad i=1, \dots, 6 \quad (IV.48)$$

unde componentele cu indicii $i=1, 2, 3$ din relațiile (IV.47), (IV.48) sunt forțe dirijate după axele sistemului de referință, iar cele cu $i=4, 5, 6$ sunt cupluri acționând după aceleași axe.

Extrapolând expresiile sistemului (IV.45), torsorul deformațiilor rezultante ale offseturilor va fi:

$$[\Delta q_{c_i}^{off}(t)] = \left[\frac{1}{k_{ii}} \right] [Q_i(t)] + \left[\frac{1}{c} \right] [Q_{i+3}(t)] + \left[\frac{1}{c} \right] [Q_{i-3}(t)] \quad (IV.49)$$

unde $i=1, \dots, 6$, $i+3=4, \dots, 6$, $i-3=1, \dots, 3$.

Expresia (IV.49) este funcție de timp prin intermediul componentelor torsorului forțelor generalizate exterioare (IV.47). Matricea deformațiilor elastice ale offsetului

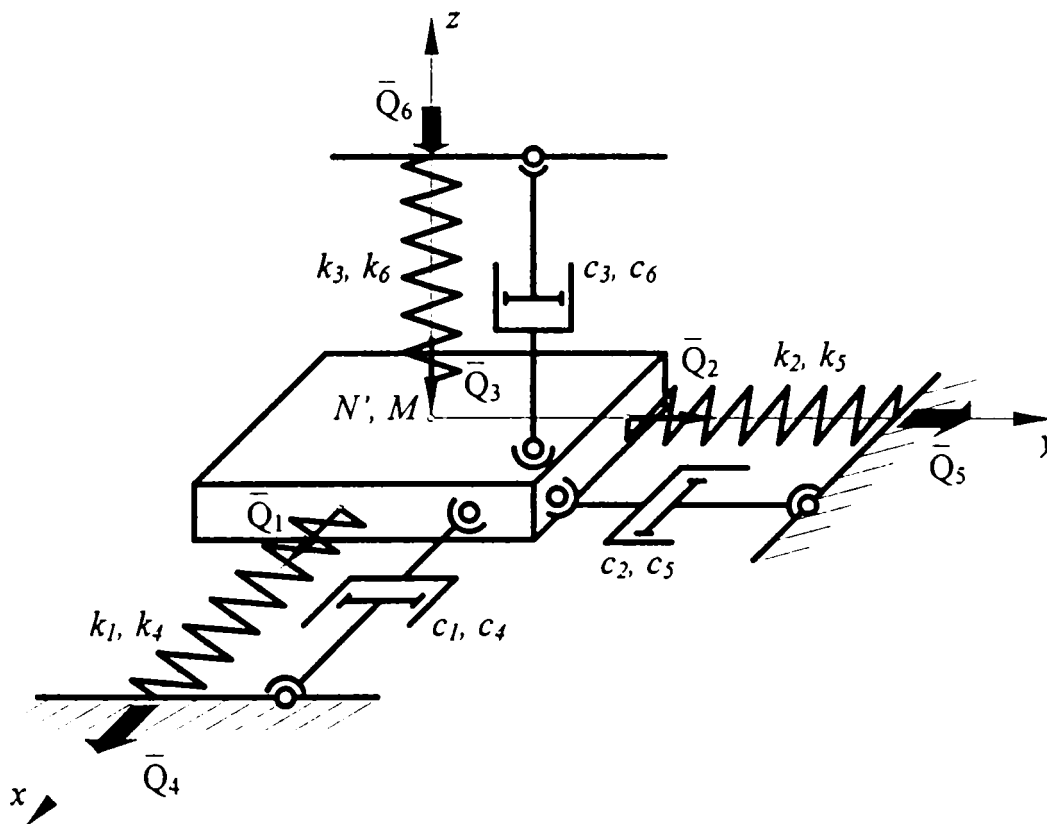


Figura IV.8. Sistem mecanic cu șase grade de libertate

generalizat, se poate scrie și sub forma:

$$\left[\Delta q_{c_i}^{off}(t) \right] = \left[q_{c_1}^{off}(t) \quad q_{c_2}^{off}(t) \quad q_{c_3}^{off}(t) \quad q_{c_4}^{off}(t) \quad q_{c_5}^{off}(t) \quad q_{c_6}^{off}(t) \right]^T \quad (IV.50)$$

iar matricea rigidităților inversate este:

$$\left[\frac{1}{k_{ii}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{1}{k_{21}} & \frac{1}{k_{31}} & \frac{1}{k_{41}} & \frac{1}{k_{51}} & \frac{1}{k_{61}} \\ \frac{1}{k_{21}} & \frac{1}{k_{22}} & \frac{1}{k_{32}} & \frac{1}{k_{42}} & \frac{1}{k_{52}} & \frac{1}{k_{62}} \\ \frac{1}{k_{31}} & \frac{1}{k_{23}} & \frac{1}{k_{33}} & \frac{1}{k_{43}} & \frac{1}{k_{53}} & \frac{1}{k_{63}} \\ \frac{1}{k_{41}} & \frac{1}{k_{24}} & \frac{1}{k_{34}} & \frac{1}{k_{44}} & \frac{1}{k_{54}} & \frac{1}{k_{64}} \\ \frac{1}{k_{51}} & \frac{1}{k_{25}} & \frac{1}{k_{35}} & \frac{1}{k_{45}} & \frac{1}{k_{55}} & \frac{1}{k_{65}} \\ \frac{1}{k_{61}} & \frac{1}{k_{26}} & \frac{1}{k_{36}} & \frac{1}{k_{46}} & \frac{1}{k_{56}} & \frac{1}{k_{66}} \end{bmatrix} \quad (IV.51)$$

Elementele matricei (IV.50) se introduc în ecuația (IV.33), obținându-se câte 6 ecuații pentru fiecare grad de libertate. Sistemul admite soluție de tipul (IV.39) pentru variația deformațiilor elastice în timp ale offsetului generalizat, câte una pentru fiecare grad de libertate.

Sistemul de ecuații de tip (IV.33) se poate scrie și sub forma:

$$\underline{M} \cdot \Delta \ddot{\underline{q}}_c^{off} + \underline{c} \cdot \Delta \dot{\underline{q}}_c^{off} + \underline{k} \cdot \Delta \underline{q}_c^{off} = \underline{Q} \quad (IV.52)$$

unde

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m & m & m & I_x & I_y & I_z \end{bmatrix}^T \quad (IV.53)$$

m este masa offsetului generalizat,

I_x , I_y și I_z sunt momentele de inerție ale acestor mase în raport cu axele sistemului de referință,

c este matricea coeficienților de amortizare vâscoasă,

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c & c & c & c & c & c \end{bmatrix}^T \quad (IV.54)$$

k este matricea rigidităților,

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix}^T \quad (IV.55)$$

\underline{Q} este torsorul rezultat al forțelor exterioare, dat de relația (IV.44).

$$\text{Cu} \quad \Delta \underline{q} = A \cdot \sin(\omega t + \Phi) \quad (IV.56)$$

$$\text{și} \quad \underline{Q} = \underline{c} = [0] \quad (IV.57)$$

ecuația (IV.52) devine

$$-\omega^2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{A} \cdot \sin(\omega t + \Phi) + \underline{K} \cdot \underline{A} \cdot \sin(\omega t + \Phi) = 0 \quad (IV.58)$$

sau

$$\underline{K} \cdot \underline{A} - \omega^2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{A} = 0 \quad (IV.59)$$

respectiv

$$[\underline{K} - \omega^2 \cdot \underline{M}] \cdot \underline{A} = 0 \quad (IV.60)$$

Ecuația are soluții nebanale numai dacă matricea coeficienților este singulară, deci

$$|\underline{K} - \omega^2 \cdot \underline{M}| = 0 \quad (IV.61)$$

ceea ce conduce la un polinomial în ω^2 , de ordin egal cu numărul gradelor de libertate. Rădăcinile polinomialului sunt $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_6^2$ sunt așa-numitele “valori caracteristice” sau “valori proprii” (“eigen values”). Acestea sunt frecvențele naturale ale sistemului cu 6 grade de libertate, neamortizat.

Asociat valorilor caracteristice ω_i^2 se poate considera un vector \underline{A}_i cu 6 dimensiuni ($i=1, \dots, 6$) obținut din relația (IV.60).

$$[\underline{K} - \omega_i^2 \cdot \underline{M}] \cdot \underline{A}_i = 0 \quad (IV.62)$$

\underline{A}_i este numit “vector propriu” (“eigen vector”) și uneori “forma modală de ordinul i ”, “modul normal”, respectiv “modul principal” de vibrație al sistemului.

4.2.4. Calculul coeficientului de amortizare echivalent al amortizării structurale

Coeficientul de amortizare vâscoasă c care apare în relațiile (IV.33), ..., (IV.49) se datorează în fapt amortizării structurale a materialului. Disiparea energiei prin frecarea între cristalele materialului generează comportamentul tip histereză a acestuia (figura IV.9). În figura IV.9 s-a notat cu Δq deformația elastică, iar cu Q forța generalizată care

o cauzează.

Experimental s-a stabilit că energia disipată prin amortizare structurală ΔE are expresia, [Sha-97]:

$$\Delta E = \pi \cdot c_s \cdot k \cdot q_{\max}^2 \quad (\text{IV.63})$$

unde

c_s este coeficientul de amortizare structurală (adimensional),

k este rigiditatea materialului,

q_{\max} este deformația elastică maximă.

Forța de amortizare vâscoasă se mai

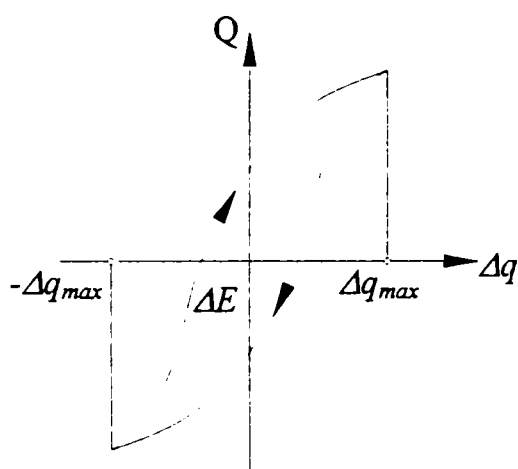


Figura IV.9. Calculul energiei disipate prin amortizare structurală

poate scrie ca

$$F_{am} = c \cdot \Delta \dot{q} = c \cdot q_{\max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \Phi) \quad (\text{IV.64})$$

unde c este coeficientul (adimensional) de amortizare vâscoasă, ω este pulsația naturală, iar Φ este unghiul de fază.

Energia disipată prin amortizare vâscoasă se va calcula de maniera:

$$\Delta E = \int_0^r F_{am} \cdot dq = \int_0^r c \cdot \Delta \dot{q} \cdot dq = \int_0^r c \cdot \Delta \dot{q}^2 \cdot dt = \int_0^r c \cdot \omega^2 \cdot \Delta q_{\max}^2 \cdot \cos^2(\omega t + \Phi) dt = \pi \cdot c \cdot \omega \cdot \Delta q_{\max}^2 \quad (\text{IV.65})$$

unde s-a notat $dq = \Delta \dot{q} \cdot dt$.

Egalând expresiile (IV.63) și (IV.65), expresia coeficientului de amortizare vâscoasă rezultă

$$c = \frac{k \cdot c_s}{\omega} \quad (\text{IV.66})$$

IV.4.3. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al offsetului generalizat

Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al offsetului generalizat se întocmește pe baza considerațiilor de la paragraful IV.4.2.3. Se consideră offsetul generalizat din figura IV.10 a, aflat sub acțiunea tursorului

$${}^M \underline{\mathfrak{S}}_{rez}^V = {}^M \underline{\mathfrak{S}}_{rez}^V(t) \quad (\text{IV.67})$$

al forțelor rezultante. Modelul fizic al offsetului, (figura IV.10 b), este alcătuit dintr-o masă concentrată legată de sistemul de referință N' printr-o bară elastică încastrată, legată de sistemul de referință M .

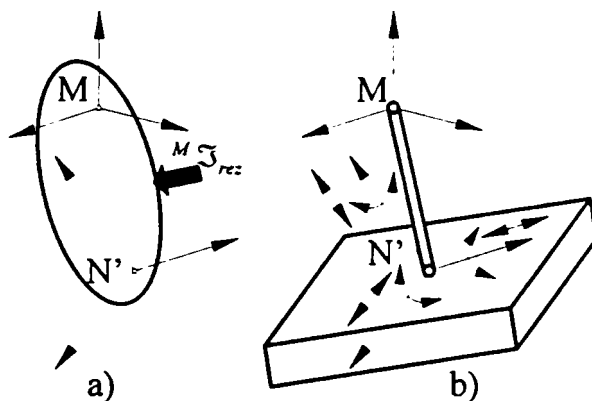


Figura IV.10. Modelul offset-ului generalizat
a) Offset generalizat, b) Modelul fizic

Masa concentrată efectuează deplasări de-a lungul și în jurul axelor sistemului N' cauzate de deformațiile variabile în timp ale barei elastice sub acțiunea tursorului ${}^M \underline{\mathfrak{S}}_{rez}^V$.

Ca urmare, modelul comportamentului dinamic al offsetului generalizat va fi descris de matricea de trecere de

la sistemul N' la sistemul M :

$${}^M \underline{T}_{N'}^V = {}^M \underline{T}_{N',rig}^V + {}^M \underline{\Delta T}_{N'}^V \quad (\text{IV.68})$$

unde

$${}^M \underline{\Delta T}_{N'}^V = {}^M \underline{\Delta T}_{N'}^V(t) = [\Delta q_i^{off}(t)]^T \quad i=1, \dots, 6. \quad (\text{IV.69})$$

este matricea deformațiilor elastice variabile în timp.

Elementele matricei deformațiilor elastice ${}^M \underline{\Delta T}_{N'}^V$ se determină ca soluții ale ecuațiilor (IV.52), câte una pentru fiecare grad de libertate efectiv.

IV.4.4. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al cuplei cinematice generalizate

Se consideră cupla cinematică generalizată $N-N'$ formată din elementele 1 și 2, (figura IV.11). Acestea li se asociază offseturile generalizate $O-N$ respectiv $N'-M$, asupra cărora acționează torsorul forțelor rezultante generalizate, variabile în timp ${}^0\underline{\mathfrak{T}}_{rez:1}^V = {}^0\underline{\mathfrak{T}}_{rez:1}^V(t)$ și ${}^M\underline{\mathfrak{T}}_{rez:2}^V = {}^M\underline{\mathfrak{T}}_{rez:2}^V(t)$.

Matricea de trecere ${}^0\underline{T}_M^V$ are expresia:

$${}^0\underline{T}_M^V = {}^0\underline{T}_N^V \otimes {}^N\underline{T}_{N'}^V \otimes {}^{N'}\underline{T}_M^V \quad (IV.70)$$

unde simbolul \otimes evidențiază faptul că produsul matricilor 6×1 se realizează după algoritmul special, propus în [Kov-02].

Ca urmare, modelul matematic al cuplei cinematice generalizate are expresia:

$${}^N\underline{T}_{N'}^V = \left({}^0\underline{T}_N^V\right)^{-1} \otimes {}^0\underline{T}_M^V \otimes \left({}^{N'}\underline{T}_M^V\right)^{-1} \quad (IV.71)$$

Considerând elementele 1 și 2 deformabile elastic, modelul lor comportamental se scrie:

$$\begin{aligned} {}^0\underline{T}_N^V &= {}^0\underline{T}_{N\text{ rig}}^V + {}^0\underline{\Delta T}_N^V \\ {}^{N'}\underline{T}_M^V &= {}^{N'}\underline{T}_{M\text{ rig}}^V + {}^{N'}\underline{\Delta T}_M^V \end{aligned} \quad (IV.72)$$

unde ${}^0\underline{\Delta T}_N^V$ și ${}^{N'}\underline{\Delta T}_M^V$ sunt variabile în timp.

Modelul matematic al comportamentului dinamic al cuplei este ca urmare:

$${}^N\underline{T}_{N'\text{ rig}}^V + {}^N\underline{\Delta T}_{N'}^V = \left({}^0\underline{T}_{N\text{ rig}}^V + {}^0\underline{\Delta T}_N^V\right)^{-1} \otimes {}^0\underline{T}_M^V \otimes \left({}^{N'}\underline{T}_{M\text{ rig}}^V + {}^{N'}\underline{\Delta T}_M^V\right)^{-1} \quad (IV.73)$$

IV.4.5. Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al unui mecanism

Modelul matematic al comportamentului cinetoelastodinamic al unui mecanism se obține ca sistemul modelelor matematice ale comportamentului dinamic ale offseturilor generalizate asociate elementelor mecanismului, [Kov-01], [Kov1-02], [Kov2-02].

IV.5. Transpunerea matricilor de trecere 6x1 în matrici de trecere 4x4

Se consideră bara încastrată cu secțiune rectangulară, constantă, reprezentată în figura IV.12. Se atașează barei două sisteme de referință având originile O și respectiv N poziționate în centrul secțiunilor transversale extreme ale acesteia.

Sistemele de referință sunt ortogonale, având axele Ox și Nx suprapuse, iar axele Oy și Ny , respectiv Oz și Nz , paralele cu laturile secțiunii transversale, deci paralele între ele. Cele două sisteme de referință constituie o Pereche de Sisteme de Referință, deci vor fi referite ca **PeSiR** $O-N$.

Bara este încărcată la extremitatea liberă cu un torsesor generalizat $\{F, M\}$. Urmare a acțiunii torsorului forțelor

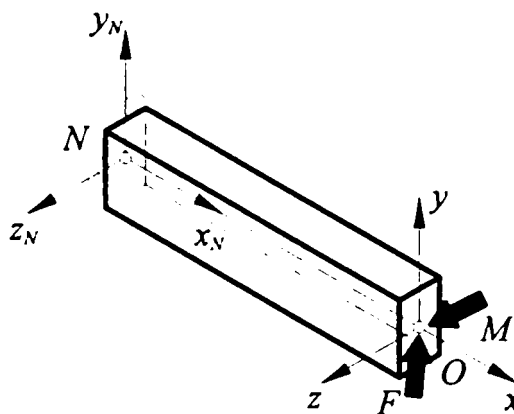


Figura IV.12. Bara simplu încastrată, ON , sollicitată cu un torsesor $\{F, M\}$

exterioare generalizate, survin deformații elastice ale barei, receptate prin prisma deplasărilor și rotirilor secțiunii libere a acesteia. Totodată, sistemul de referință atașat solidar secțiunii extreme a barei, $Oxyz$, va trece în sistemul $O_2x_2y_2z_2$.

Trecerea de la sistemul $Oxyz$ la sistemul $O_2x_2y_2z_2$, (figura IV.13), este realizată în cadrul teoriei PeSiR, prin matricea de trecere:

$$\begin{aligned} \underline{T}^V &= [\Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \Delta q_3 \quad \Delta q_4 \quad \Delta q_5 \quad \Delta q_6]^T = \\ &= [\Delta q_i(t)]^T \end{aligned} \tag{IV.74}$$

unde $i=1, \dots, 3$ corespunde translațiilor de-a lungul axelor Ox , Oy și Oz , iar unde $i=4, \dots, 6$ corespunde

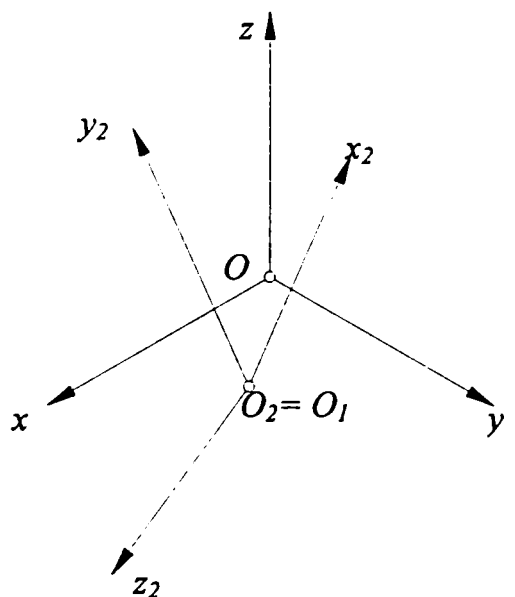


Figura IV.13. Poziția sistemului de referință atașat secțiunii libere a barei înainte, ($Oxyz$) și după deformația elastică a acesteia ($O_2x_2y_2z_2$)

rotațiilor în jurul aceluiași axe.

Se presupune cunoscută matricea de trecere (IV.74), și se dorește transpunerea acesteia într-o matrice 4x4, de forma (IV.75):

$${}^2T_1 = \begin{bmatrix} \cos(x_2x_1) & \cos(y_2x_1) & \cos(z_2x_1) & \Delta x \\ \cos(x_2y_1) & \cos(y_2y_1) & \cos(z_2y_1) & \Delta y \\ \cos(x_2z_1) & \cos(y_2z_1) & \cos(z_2z_1) & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.75})$$

unde Δx , Δy , Δz , sunt translațiile după axele sistemului de referință inițial, deci

$$\Delta x = \Delta q_1, \quad \Delta y = \Delta q_2, \quad \Delta z = \Delta q_3,$$

iar $\cos(x_2x_1)$, ..., $\cos(x_2z_1)$ sunt cosinusurile unghiurilor dintre axele sistemului $Ox_2y_2z_2$ și cele ale sistemului inițial $Oxyz$, care trebuiesc determinate în funcție de rotațiile $\Delta q_4, \Delta q_5, \Delta q_6$, în jurul axelor sistemului de referință inițial, cunoscute.

Elementele ultimei coloane a matricii de trecere 4x4 se pot scrie rapid, întrucât $\Delta x = \Delta q_1$, $\Delta y = \Delta q_2$, $\Delta z = \Delta q_3$.

Determinarea unghiurilor dintre axele celor două sisteme de referință se poate realiza secvențial, analizând distinct poziția fiecărei axe a sistemului $O_2x_2y_2z_2$ față de fiecare axă a sistemului inițial $Oxyz$.

Pentru facilitarea analizei, trecerea de la sistemul $Oxyz$ la sistemul $O_2x_2y_2z_2$, (figura IV.13.), se descompune în două treceri succesive:

1 – o translație a sistemului $Oxyz$ în O_1 , care se poate descompune la rândul ei, în trei translații distincte (după cele 3 axe), notate Δq_1 , Δq_2 și Δq_3 , (figura IV.14.a). Axele celor două sisteme rămân paralele între ele.

2 – o rotație a sistemului $O_1x_1y_1z_1$ în jurul punctului $O_1=O_2$, care se poate descompune în trei rotații distincte în jurul celor trei axe ale sistemului $O_2x_2y_2z_2$, notate Δq_4 , Δq_5 și Δq_6 , (figura IV.14.b).

În cele ce urmează, se va detalia modul de determinare a elementelor primei coloane a matricii (IV.75), care conține cosinuzii unghiurilor dintre axa Ox_2 și axele Ox , Oy și Oz ale sistemului de referință inițial, $Oxyz$, (figura IV.13).

Mișcarea axei Ox din poziția inițială în poziția finală Ox_2 va fi analizată cu ajutorul unui punct oarecare R_1 situat pe aceasta. Poziția finală a axei Ox , implicit a punctului R_2 , poate fi privită ca rezultat final a două mișcări de rotație succesive, cu centrul

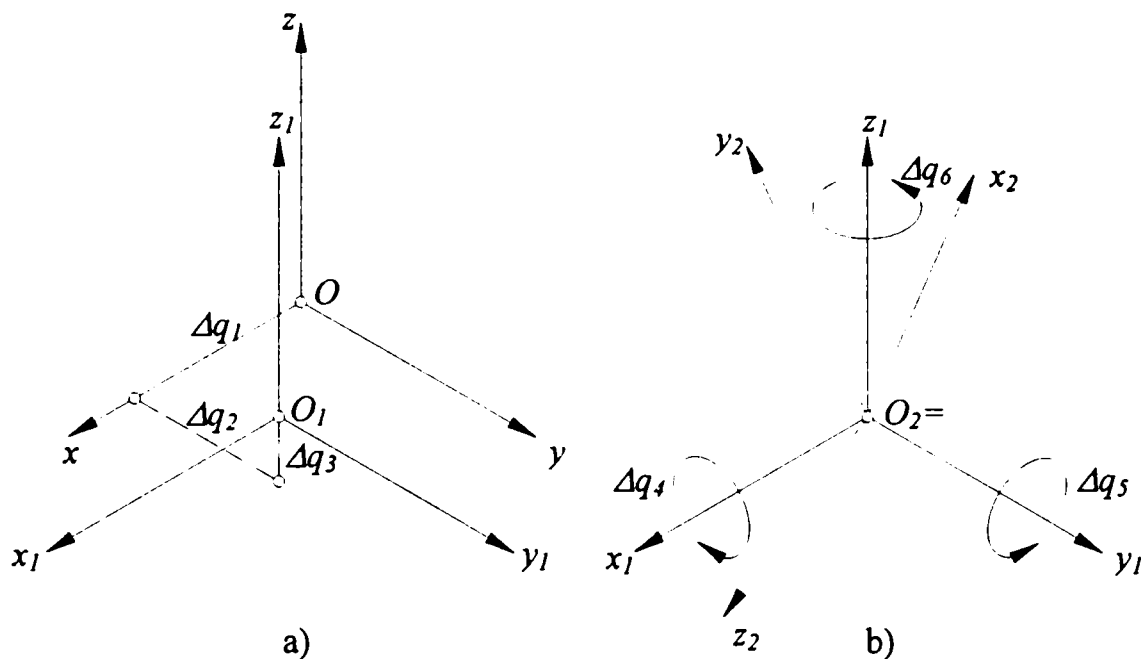


Figura IV.14. Divizarea trecerii sistemului $Oxyz$ în sistemul $O_2x_2y_2z_2$ într-o succesiune de trei translații și trei rotații distincte

în O_1 , (figura IV.15):

1 – o rotație de profil realizată cu unghiul Δq_5 (în jurul axei O_1y_1), care are ca rezultat situarea segmentului O_1R_1 , (și, implicit a axei Ox_1 care îl conține), în poziția O_1R_1' ;

2 – o rotație de nivel realizată cu unghiul Δq_6 (în jurul axei O_1z_1), care are ca rezultat situarea segmentului O_1R_1' în poziția O_1R_2 (și, implicit a axei Ox_1 care îl conține).

Ordinea de succesiune a acestor rotații nu este importantă, dar sensul celor două mișcări de rotație este important.

Unghiul căutat, dintre axele O_1x_1 și O_1x_2 , este, în consecință unghiul dintre laturile O_1R_1 și O_1R_2

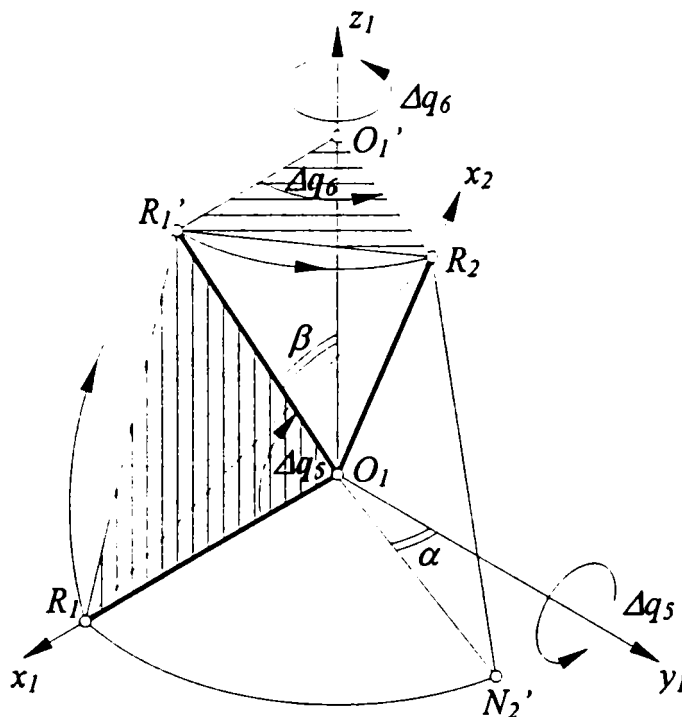


Figura IV.15. Divizarea mișcării de rotație a axei Ox_1 într-o succesiune de două rotații distincte, în plan de profil și, respectiv, în plan de nivel

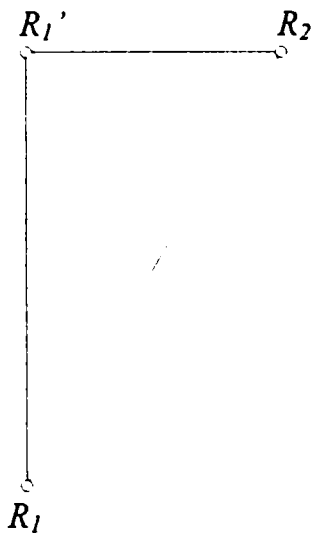


Figura IV.16. Triunghiul dreptunghic $R_1'R_1R_2$

ale triunghiului isoscel $O_1R_1R_2$, care are o poziție oarecare în spațiu, (figura V.15). Determinarea valorii acestuia necesită calculul prealabil al bazei R_1R_2 a triunghiului $O_1R_1R_2$. Baza R_1R_2 a triunghiului $O_1R_1R_2$ este determinabilă din triunghiul $R_1'R_1R_2$, în care este ipotenuză.

Triunghiul $R_1'R_1R_2$, (figura IV.16), este un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în R_1' , întrucât are cateta $R_1'R_1$ conținută în planul de profil $O_1x_1z_1$, iar cateta $R_1'R_2$ este conținută în planul de nivel $O_1'R_1'R_2$. Catetele $R_1'R_1$ și $R_1'R_2$ sunt baze în alte două triunghiuri:

- cateta $R_1'R_1$ este baza triunghiului isoscel $O_1R_1'R_1$ având unghiul la vârf $R_1'O_1R_1 = \Delta q_5$, (figura IV.17), prin urmare se poate scrie:

$$R_1R_1' = R_1P + PR_1' = 2O_1R_1 \sin \frac{\Delta q_5}{2} \quad (\text{IV.75})$$

- cateta $R_1'R_2$ este baza triunghiului isoscel $O_1'R_1'R_2$ având unghiul la vârf $R_1'O_1'R_2 = \Delta q_6$, (figura IV.18).

Din figura IV.15 se poate observa că triunghiurile $R_1'O_1R_2$ și $R_1'O_1'R_2$ sunt ambele isoscele, având baza comună și același unghi la vârf: Δq_6 .

În consecință, din triunghiul $R_1'O_1'R_2$ se poate scrie:

$$R_1'R_2 = R_1'P_1 + P_1R_2' + 2O_1R_1' \sin \frac{\Delta q_6}{2} \quad (\text{IV.77})$$

Ipotenuza R_1R_2 a triunghiului $R_1'R_1R_2$, (figura IV.16), va avea valoarea:

$$R_1R_2 = \sqrt{R_1'R_2^2 + R_1R_1'^2} \quad (\text{IV.78})$$

sau, utilizând relațiile (IV.76), (IV.77) și observația că $O_1R_1 = O_1R_1'$ relația anterioară devine:

$$R_1R_2 = 2O_1R_1 \sqrt{\sin^2 \frac{\Delta q_5}{2} + \sin^2 \frac{\Delta q_6}{2}} \quad (\text{IV.79})$$

Utilizând relația cunoscută din trigonometrie:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (\text{IV.80})$$

relația (IV.79) devine:

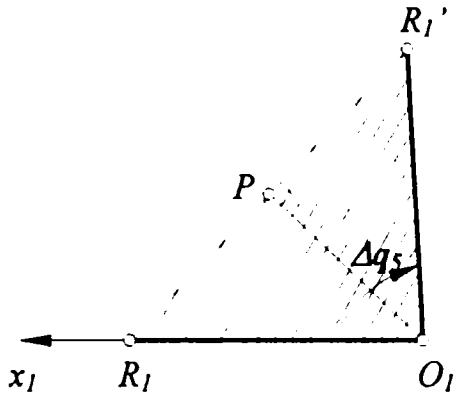


Figura IV.17. Triunghiul isoscel $O_1R_1'R_1$

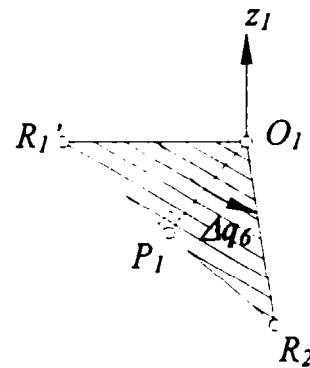


Figura IV.18. Triunghiul isoscel $O_1'R_1'R_2$

$$R_1R_2 = 2O_1R_1 \sqrt{\frac{1 - \cos \Delta q_5}{2} + \frac{1 - \cos \Delta q_6}{2}} \quad (\text{IV.81})$$

Dar, în triunghiul $O_1R_1R_2$, (figura IV.19), se poate scrie:

$$R_1R_2 = R_1P_2 + P_2R_2 = 2O_1R_1 \sin \left(\frac{\widehat{R_1O_1R_2}}{2} \right) = 2O_1R_1 \sin \frac{u}{2} \quad (\text{IV.82})$$

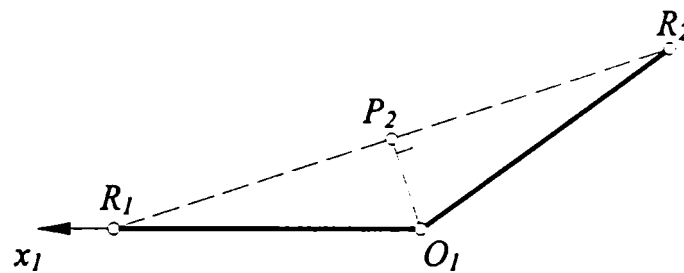


Figura IV.19. Triunghiul isoscel $O_1'R_1R_2$

Egalarea relațiilor (IV.81) și (IV.82) permite determinarea unghiului $R_1O_1R_2$ notat cu u în relația anterioară, de forma:

$$\cos \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \Delta q_5}{2} + \frac{1 - \cos \Delta q_6}{2}} \quad (\text{IV.83})$$

sau, utilizând (IV.80):

$$\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \Delta q_5}{2} + \frac{1 - \cos \Delta q_6}{2}} \quad (\text{IV.84})$$

ceea ce permite, în final, determinarea cosinusului unghiului u , dintre axele O_1x_1 și O_1x_2 :

$$\cos u = \cos(x_2x_1) = \cos \Delta q_5 + \cos \Delta q_6 - 1 \quad (\text{IV.85})$$

Figura V.15 facilitează observația că unghiului dintre axa O_1x_2 și axa O_1y_1 este, în fapt, unghiul notat cu α , având valoarea:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \Delta q_6 \quad (\text{IV.86})$$

ca urmare:

$$\cos(x_2y_1) = \sin \Delta q_6 \quad (\text{IV.87})$$

Unghiul dintre axa O_1x_2 și axa O_1z_1 este, (figura V.15), unghiul notat cu β . Cu observația că rotația efectivă în jurul axei O_1y_1 este de sens contrar celui pozitiv, unghiul β este:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - (-\Delta q_5) = \frac{\pi}{2} + \Delta q_5 \quad (\text{IV.88})$$

și:

$$\cos(x_2z_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta q_5\right) = -\sin \Delta q_5 \quad (\text{IV.89})$$

Procedând similar celor detaliate anterior, se determină unghiurile dintre axele O_1y_2 și O_1z_2 cu axele sistemului $O_1x_1y_1z_1$.

În final, matricea de trecere de la sistemul $O_2x_2y_2z_2$ la sistemul $O_1x_1y_1z_1$ va avea forma:

$${}^2T_1 = \begin{bmatrix} \cos \Delta q_5 + \cos \Delta q_6 - 1 & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta q_6\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta q_5\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta q_6\right) & \cos \Delta q_4 + \cos \Delta q_6 - 1 & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta q_4\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta q_5\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta q_4\right) & \cos \Delta q_4 + \cos \Delta q_5 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.90})$$

iar matricea de trecere de la $O_2x_2y_2z_2$ la sistemul $Oxyz$ va fi:

$${}^2\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos \Delta q_5 + \cos \Delta q_6 - 1 & \cos \left(\frac{\pi}{2} + \Delta q_6 \right) & \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Delta q_5 \right) & \Delta q_1 \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Delta q_6 \right) & \cos \Delta q_4 + \cos \Delta q_6 - 1 & \cos \left(\frac{\pi}{2} + \Delta q_4 \right) & \Delta q_2 \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} + \Delta q_5 \right) & \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Delta q_4 \right) & \cos \Delta q_4 + \cos \Delta q_5 - 1 & \Delta q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.91})$$

Cu ajutorul relațiilor trigonometrice

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha \quad (\text{IV.92})$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha \quad (\text{IV.93})$$

relația (IV.91) devine:

$${}^2\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos \Delta q_5 + \cos \Delta q_6 - 1 & -\sin \Delta q_6 & \sin \Delta q_5 & \Delta q_1 \\ \sin \Delta q_6 & \cos \Delta q_4 + \cos \Delta q_6 - 1 & -\sin \Delta q_4 & \Delta q_2 \\ -\sin \Delta q_5 & \sin \Delta q_4 & \cos \Delta q_4 + \cos \Delta q_5 - 1 & \Delta q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.94})$$

În cazul deformațiilor foarte mici, se poate accepta că:

$$\sin \alpha \cong \alpha \quad (\text{IV.95})$$

$$\cos \alpha \approx 1 \quad (\text{IV.96})$$

Utilizarea relațiilor (IV.95) și (IV.96) permite scrierea matricii de trecere (IV.91) pentru domeniul micilor deformații, sub forma:

$${}^2\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta q_6 & \Delta q_5 & \Delta q_1 \\ \Delta q_6 & 1 & -\Delta q_4 & \Delta q_2 \\ -\Delta q_5 & \Delta q_4 & 1 & \Delta q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.97})$$

IV.6. Concluzii

Cele anterior expuse evidențiază faptul că modelele funcționale de ordinul 0, de ordinul 1.1, 1.2, 2.1 și 2.2 ale cuplei cinematice generalizate și ale offsetului generalizat obținute cu ajutorul conceptului PeSiR sunt, *formal*, identice. Diferențele sunt generate de modul în care parametri generalizați q_i evoluează în timp.

Modelele funcționale ale cuplei cinematice generalizate și ale offsetului generalizat se pot cupla între ele conform schemei structurale a mecanismului, astfel obținându-se modelul funcțional al mecanismului analizat.

Metoda PeSiR nu impune maniera de poziționare sau/și orientare a sistemelor de referință alese, aceasta rămâne la latitudinea celui care realizează modelarea.

Produsele de matrici coloană notate cu simbolul \otimes , care descriu modelul funcțional, se pot realiza fie cu ajutorul algoritmului special propus în [Kov-02], fie revenind la matrici de trecere 4x4 conform celor prezentate în subcapitolul IV.5. Determinarea matricii de trecere cu dimensiunea 4x4, pe baza elementelor matricii de trecere cu dimensiunea 6x1, s-a realizat fără aproximații și fără ipoteze simplificatoare. În consecință, matricea astfel obținută, dată de relația (IV.94), poate fi utilizată atât în calculul liniar de ordinul I cât și în calculul liniar de ordinul II.

Metoda de modelare funcțională prezentată, intuitivă și deosebit de sintetică, are avantajul major de a permite modelarea unitară a oricărui sistem mecanic.

**V. ANALIZA COMPORTAMENTULUI
CINETOELASTOSTATIC AL
ELEMENTELOR OMOGENE ALE
DISPOZITIVELOR DE GHIDARE
ALE ROBOTILOR**

V.1. Introducere

Structura mecanică optimă a roboților industriali moderni trebuie să îndeplinească două cerințe principale: să fie ușoară, dar, simultan, rigidă. O astfel de structură se poate obține prin reducerea coeficientului “masă robot/sarcină”, alegerea unei arhitecturi adecvate a sistemului mecanic al robotului, sau/și prin optimizarea formei și dimensiunilor secțiunii transversale a elementelor dispozitivului de ghidare.

Reducerea coeficientului “masă robot/sarcină” se poate realiza prin utilizarea de materiale cu raportul modul de elasticitate longitudinală/densitate, (E/ρ), cât mai mare.

Materialele uzuale în construcția roboților cum sunt oțelul, aluminiul și titanul, au raportul E/ρ , aproape constant, cuprins în intervalul 2.6, ..., 2.7, [Jay-97],[Boo-91].

Proprietățile de material ale elementelor structurii mecanice a robotului, privite ca solide continue și deformabile, condiționează atât comportamentul cinetoelastostatic cât și cel cinetoelastodinamic al robotului. Viteza de propagare a undelor perturbatoare în mediul continuu deformabil este dependentă de proprietățile materialului, [Sha-97],[Mer-71].

Aceasta este:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{pentru unde longitudinale,}$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{pentru unde torsionale.}$$

Utilizarea materialelor compozite noi, cu un raport E/ρ ridicat, implică un nivel ridicat al costurilor, generat de costul tehnologiilor de obținere a acestor materiale.

Mai economică se dovedește a fi optimizarea arhitecturii structurii mecanice, a dimensiunilor elementelor sistemului mecanic al robotului sau/și a formei secțiunii transversale a acestora.

O structură mecanică ușoară are, implicit, un grad de complianță care nu poate fi neglijat. Deformațiile elastice ale unei astfel de structuri cu complianță distribuită afectează precizia robotului. Ca urmare, acestea trebuie luate în considerare începând cu

proiectarea robotului. Intervenind asupra distribuției complianței se intervine implicit asupra deformațiilor elastice ale elementelor structurii mecanice, deci asupra preciziei robotului. Rezultatele unui studiu atent al distribuției complianței pot fi utilizate în conceperea unor algoritmi de comandă care să asigure o precizie corespunzătoare a robotului. Se realizează astfel o corecție activă a erorilor de situație.

O amplă paletă a aplicațiilor robotizate, cea mai cunoscută fiind montajul industrial, reclamă o anumită rigiditate a structurii sistemului mecanic al robotului și, simultan, o complianță ridicată la nivelul efectorului final. Această problemă este soluționată utilizând dispozitive specializate, ce includ elemente constructive cu grad ridicat de elasticitate, care realizează o concentrare locală a complianței. Dispozitivele de complianță permit corecția pasivă sau mixtă a erorilor de situație.

Prezentul capitol abordează problema optimizării elementelor componente ale sistemului mecanic al robotului, în încercarea de a stabili criterii de optimizare atât pentru elemente omogene cât și neomogene, [Saf-02], [Saf1-02]. Rezultatele studiului astfel realizat sunt utilizabile atât pentru elementele structurii mecanice cât și pentru cele ale dispozitivelor de complianță.

Se admit ca valabile, ipotezele:

- elementele componente ale sistemului mecanic al robotului sunt sollicitate în principal la încovoire și torsiune;
- materialul din care sunt confecționate elementele respectă legea proporționalității dintre eforturi unitare σ și deformații specifice ε (legea lui Hooke);
- materialul este continuu, omogen și izotrop, proprietăți invariabile în timp;
- relația forță-deplasare este liniară;
- relația deformație specifică-deplasare este liniară;
- forțele se aplică static, respectiv trecerea structurii din poziția nedeformată în poziția deformată are loc lent, astfel încât energia cinetică este practic nulă;
- secțiunile plane și normale la axa barei înainte de deformare își păstrează această proprietate și după deformare (ipoteza lui Bernoulli).

Cu aceste ipoteze, forma deformată a structurii este foarte apropiată de cea inițială, deci condițiile de echilibru static se pot exprima în raport cu forma nedeformată a acesteia. Deasemenea, ca o consecință a relației liniare dintre forță și deplasare, este valabil

principiul suprapunerii efectelor.

Deformațiile elementelor dispozitivului de ghidare datorate elasticității, fiind mici comparativ cu dimensiunile acestora, se acceptă ca fiind acoperitor calculul liniar al structurilor elastice, (“calculul de ordinul I”), [Bre-00], [Ban-75], [Gaf-87], [Gar-90]. Acesta admite ipotezele mai sus menționate.

Deformațiile elementelor elastice ale dispozitivelor de complianță fiind mari comparativ cu dimensiunile acestora, setul de ipoteze menționat anterior nu mai este valabil în totalitate. Este necesar, în acest caz, calculul neliniar al structurilor elastice, (“calculul de ordinul II”), cu luarea în considerare deformațiile elastice ale elementelor, [Bre-00], [Ban-75], [Gar-90].

În cadrul acestui capitol, se admite modelarea elementelor dispozitivului de ghidare a roboților ca bare încastrate la o extremitate și încărcate cu un torses generalizat la extremitatea liberă. Acest model este acoperitor și pentru unele elemente ale dispozitivelor de complianță. Mai mult, prin îmbinarea rigidă a barelor încastrate se pot modela elemente componente ale structurilor, având diverse forme spațiale. Prin îmbinarea mobilă a acestor elemente de tip bare simplu încastrate se poate realiza modelul cuplelor cinematice.

Modelul dispozitivului de ghidare al roboților seriali rezultă prin compunerea modelelor elementelor cu cele ale cuplelor cinematice așezate alternativ. Similar se pot modela dispozitivele de complianță, compunerea elementelor realizându-se cu respectarea principiului constructiv propriu al fiecărui astfel de dispozitiv.

Bara simplu încastrată se va modela cu ajutorul conceptului de ***Perechi de Sisteme de Referință (PeSiR)***. Acest concept permite modelarea unitară atât a tuturor componentelor anterior enumerate, offset generalizat și cuple cinematice, cât și a dispozitivelor de ghidare ale roboților, [Kov-01], [Kov1-02], [Kov2-02].

Necesitatea aprecierii obiective a influențelor diferiților parametri ce intervin în modelare, a determinat utilizarea modulului de lucru simbolic al pachetului soft MATLAB. Alocarea de valori numerice s-a realizat ulterior, doar din considerente practice, pentru evidențierea ordinului de mărime al deformațiilor. Pachetul soft MATLAB (MATrix LABoratory) este include un modul pentru calcul simbolic, cu puternice funcții matematice și facilități impresionante pentru reprezentări grafice bi- și tridimensionale, oferite prin intermediul unei interfețe comode și accesibile, [**N-11].

V.2. Determinarea matricii de complianță a elementelor omogene, de secțiune constantă, ale dispozitivelor de ghidare

V.2.1. Matricea de rigiditate a unei bare de structură spațială

Fiecare extremitate a barei cu noduri rigide a unei structuri spațiale, (figura V.1), poate avea atât deplasări de-a lungul axelor sistemului de referință atașat, notate q_1, q_2, q_3 , cât și rotații în jurul acestor axe, notate q_4, q_5, q_6 . Întrucât fiecare extremitate are 6 grade de libertate, matricea de rigiditate a barei va avea dimensiunea 12×12 . Acesta este cazul general al matricii de rigiditate a unui element finit de tip bară, [Bre-00], [Ban-75], [Gaf-87], [Gar-90]. În consecință, matricea de rigiditate a barei omogene cu noduri rigide, de secțiune constantă, va avea forma (V.1), unde:

I_y, I_z reprezintă momentele de inerție axiale, în raport cu axele y , respectiv x ,

I_p reprezintă momentul de inerție polar,

l este lungimea barei, dată de relația (V.2).

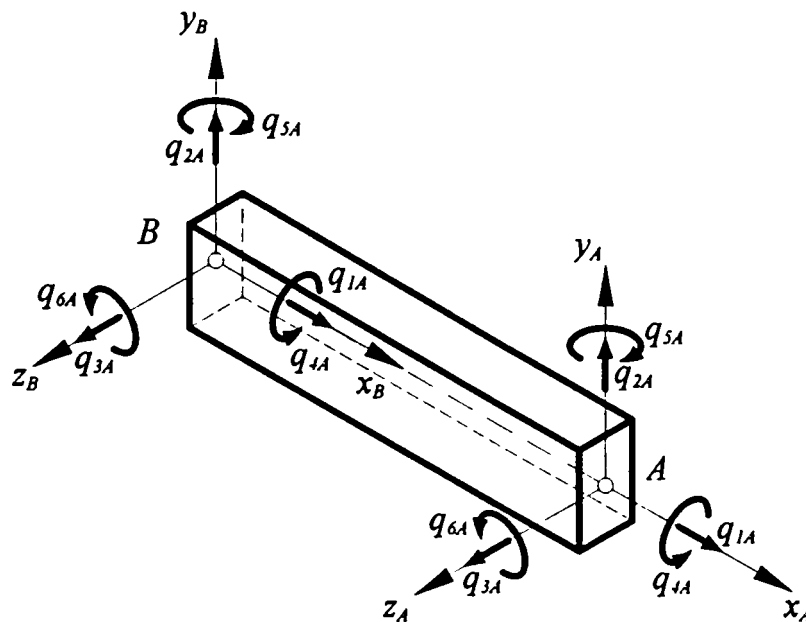


Figura V.1. Bara cu noduri rigide a unei structuri spațiale

$$l = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (\text{V.2})$$

A este aria secțiunii transversale a barei.

Elementul de bară considerat este static nedeterminat. Ca urmare, matricea de rigiditate a acestuia, dată de relația (V.1), este o matrice singulară. Determinantul ei fiind nul, nu se poate calcula matricea inversă cu metodele matematice uzuale. Aceasta însă, nu semnifică faptul că bara considerată nu are complianță. Determinarea matricii de complianță se poate realiza numai după înlăturarea nedeterminării statice. Dealtfel, practic, o astfel de bară, fără nici un fel de reazem, nu există fizic.

V.2.2. Matricea de rigiditate a unei bare simplu încastrate solicitate la extremitatea liberă de un torses generalizat cu 6 componente

Se consideră bara încastrată cu secțiune rectangulară constantă, reprezentată în figura V.2. Se atașează barei două sisteme de referință având originile A și respectiv B poziționate în centrul secțiunilor transversale extreme ale acesteia. Sistemele de referință atașate sunt ortogonale, având axele Ax și Bx suprapuse, iar axele Ay și By , respectiv Az și Bz , paralele cu laturile secțiunii transversale, deci paralele între ele.

Cele două sisteme de referință constituie o Pereche de Sisteme de Referință, deci

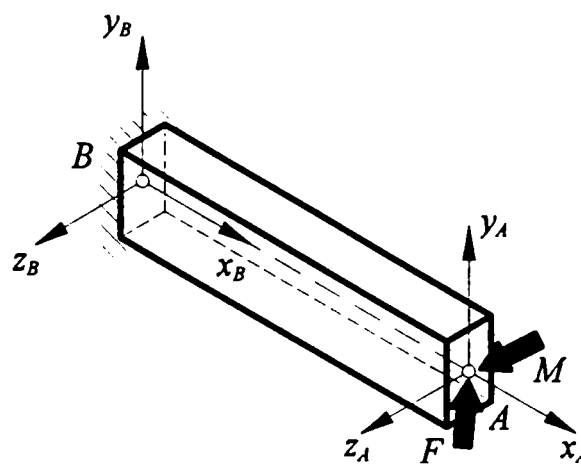


Figura V.2. Bara simplu încastrată, solicitată cu un torses $\{F, M\}$

vor fi referite ca **PeSiR A-B**.

Bara **AB** este încărcată la extremitatea liberă cu un torsor generalizat:

$$\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B = [F_x^B \quad F_y^B \quad F_z^B \quad M_x^B \quad M_y^B \quad M_z^B]^T \quad (\text{V.3})$$

unde:

F_x^B, F_y^B, F_z^B sunt proiecțiile vectorului F , pe axele x, y, z ,

M_x^B, M_y^B, M_z^B sunt componentele momentului M acționând în jurul axelor x, y, z .

Indicele superior B evidențiază faptul că torsorul $\underline{\mathfrak{F}}$ este exprimat în raport cu sistemul de referință B .

Începând cu actualul capitol, la scrierea matricilor coloană de dimensiune 6×1 , atât torsori ai forțelor exterioare generalizate, cât și matrici de trecere, se va renunța la înscrierea indicelui superior "V".

Relația precedentă se poate scrie sub forma:

$$\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B = [R_1^B \quad R_2^B \quad R_3^B \quad R_4^B \quad R_5^B \quad R_6^B]^T \quad (\text{V.4})$$

sau

$$\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B = [R_i^B]^T, \quad i=1, \dots, 6 \quad (\text{V.4}')$$

unde indicii $i=1 \dots 3$ indică o componentă de tip forță acționând de-a lungul, iar indicii $i=4 \dots 6$ indică o componentă de tip moment acționând în jurul axei x, y , respectiv z .

Întrucât extremitatea încastrată nu admite nici deplasări și nici rotații, vectorul deplasărilor extremităților se reduce la:

$$\underline{\Delta q} = [\Delta q_{1A} \quad \Delta q_{2A} \quad \Delta q_{3A} \quad \Delta q_{4A} \quad \Delta q_{5A} \quad \Delta q_{6A}]^T \quad (\text{V.5})$$

sau

$$\underline{\Delta q} = [\Delta q_{iA}]^T, \quad i=1, \dots, 6 \quad (\text{V.5}')$$

Ca urmare, în matricea generală de rigiditate a barei spațiale date de relația (V.1), liniile și coloanele aferente deplasărilor și rotirilor extremității încastrate se vor anula, [Bre-00], [Ban-75], [Gaf-87], [Gar-90]. Matricea de rigiditate a barei, omogene, de secțiune constantă, încastrate la o extremitate și sollicitată cu un torsor $\underline{\mathfrak{F}}$ la cealaltă, se obține prin eliminarea acestor linii și coloane. Forma acesteia, pentru bara **AB**, va fi:

$${}^B \underline{K}_A = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{V.6})$$

Intrucât momentul de inerție polar al secțiunii este suma momentelor de inerție axiale, polul fiind centrul secțiunii, [Buz-80], rezultă:

$$I_p = I_z + I_y \quad (\text{V.7})$$

iar modulul de elasticitate transversală al materialului barei G , se poate calcula în funcție de modulul de elasticitate longitudinală E și coeficientul de contracție transversală (Poisson) μ cu relația, [Buz-80]:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (\text{V.8})$$

matricea de rigiditate se poate scrie:

$${}^B \underline{K}_A = E \cdot \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12I_y}{l^3} & 0 & \frac{6I_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_y + I_z}{2l(1 + \mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6I_y}{l^2} & 0 & \frac{4I_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6I_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{V.6'})$$

V.2.3. Matricea de complianță a elementelor dispozitivelor de ghidare modelate ca bare spațiale simplu încastrate

Matricea de complianță a unui element al dispozitivului de ghidare se poate obține fie direct, utilizând metoda forțelor, fie indirect, ca inversă a matricii de rigiditate aferente acestuia, [Bre-00], [Ban-75], [Gaf-87], [Gar-90]. Matricea de rigiditate se poate determina utilizând metoda energetică sau metoda deplasărilor unitare, exemplificată în [Sha-97], [Ban-75], [Buz-80], [Gar-90]. Metoda deplasărilor este mai cunoscută și mai intuitivă, majoritatea cazurilor prezentate în literatură sunt soluționate cu această metodă.

Matricea de rigiditate a unui element de bară omogen, simplu încastrat, având secțiune transversală constantă, este dată de relația (V.6), respectiv (V.6'). Aceasta nu este o matrice singulară, deci inversa ei se poate determina cu metodele matematice cunoscute [Pre-02].

Softurile matematice uzuale (MATLAB, MATHCAD, MATHEMATICA) au implementați astfel de algoritmi, astfel că determinarea matricii de complianță se poate realiza rapid, chiar și sub formă simbolică, [**N-11], [**N-21], [**N-20].

Matricea de complianță a elementului AB al dispozitivului de ghidare, determinată simbolic, prin inversarea matricii (V.6'), sub pachetul soft MATLAB, (Anexa V.1), este:

$${}^B \underline{C}_A = {}^B \underline{K}_A^{-1} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \frac{l^3}{I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{l^2}{I_z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{l^3}{I_y} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{l^2}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2l(1+\mu)}{(I_y + I_z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{l^2}{I_y} & 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{l^2}{I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{bmatrix} \quad (V.9)$$

V.3. Determinarea deplasărilor extremității încărcate a elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare modelate ca bare spațiale simplu încastrate

Deplasarea extremității încărcate a unei bare omogene simplu încastrate, de secțiune transversală constantă, care modelează elementele dispozitivului de ghidare este consecința comportării elastice a acestuia sub acțiunea sollicitărilor exterioare.

Aprecierea calitativă și cantitativă a acestui comportament se realizează prin intermediul matricii de complianță a elementului considerat. Cunoașterea matricii de complianță ${}^B \underline{C}_A$ date de relația (V.9) și a tursorului generalizat $\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B$, dat de relațiile (V.3), respectiv (V.4), (V.4'), permit determinarea matricii deplasărilor extremității încărcate a elementului cu relațiile (V.5), (V.5'). Bara este cu atât mai rigidă, cu cât deplasările liniare și unghiulare ale extremității încărcate sunt mai mici.

Matricea deplasărilor este în fapt matricea deformațiilor elastice ale elementului de bară considerat. Corelația dintre tursorul forțelor generalizate și matricea deformațiilor elastice ale elementului AB , notată ${}^B \underline{\Delta T}_A$ este dată de relația:

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{K}_A^{-1} \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B \quad (\text{V.10})$$

sau

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B \quad (\text{V.10}')$$

Ecuția (V.10') scrisă sub formă dezvoltată este:

$$\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \\ \Delta q_4 \\ \Delta q_5 \\ \Delta q_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \frac{l^3}{I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{l^2}{I_z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{l^3}{I_y} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{l^2}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2l(1+\mu)}{(I_y + I_z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{l^2}{I_y} & 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{l^2}{I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad (\text{V.10''})$$

iar deformațiile elastice ale barei se obțin de forma, (Anexa V.1):

$$\begin{aligned}
 \Delta q_1 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{l}{A} \cdot F_x \\
 \Delta q_2 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{I_z} \cdot \left(\frac{l^3}{3} F_y + \frac{l^2}{2} M_z \right) \\
 \Delta q_3 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{I_y} \cdot \left(\frac{l^3}{3} F_z - \frac{l^2}{2} M_y \right) \\
 \Delta q_4 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{I_y + I_z} \cdot 2 \cdot (1 + \mu) l \cdot M_x \\
 \Delta q_5 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{I_y} \cdot \left(-\frac{l^2}{2} F_z + l \cdot M_y \right) \\
 \Delta q_6 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{I_z} \cdot \left(\frac{l^2}{2} F_y + l \cdot M_z \right)
 \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

V.4. Analiza comportamentului cinetoelastostatic al elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare modelate ca bare spațiale simplu încastrate, de secțiune constantă

V.4.1. Influența proprietăților elastice ale materialului barei asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia

Relația de calcul a matricii de complianță a elementului omogen simplu încastrat, (V.9), evidențiază dependența clară a acesteia cu proprietățile materialului din care este confecționată, prin modulul de elasticitate longitudinală, (modulul lui Young), E .

Toate cele zece elemente nenule ale matricii de complianță, scad cu creșterea modulului de elasticitate longitudinală. În consecință, este necesară utilizarea materialelor cât mai rigide.

Materialele metalice rigide au densități ridicate, fapt ce contribuie la creșterea solicitărilor aplicate barei, prin creșterea greutateii proprii a acesteia. O greutate proprie mai mare, va genera deformații mai mari.

Soluționarea acestui “conflict” se realizează prin utilizarea de materiale noi, revoluționare, care au raportul E/ρ cât mai mare. Dintre acestea, se remarcă rășinile epoxidice, fibra de carbon și noile materiale compozite care, la aceleași proprietăți structurale au greutate de 2-3 ori mai mici decât materialele metalice uzuale în construcția roboților, [Vuk-89], [Vuk-82].

V.4.2. Influența lungimii barei asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia

Expresia simbolică a matricii de complianță dată de relația (V.9) și cele ale deformațiilor elastice ale barei AB , date de relațiile (V.11), relevă dependența comportamentului cinetoelastostatic cu lungimea liberă a barei încastrate. Astfel:

- elasticitatea barei la întindere/compresiune și la torsiune (liniile 1 și 4 ale matricii ${}^B \underline{C}_A$) crește direct proporțional cu lungimea elementului;

- deformațiile liniare în planele longitudinale de simetrie ale barei, generate de componentele de tip forță ale tursorului forțelor exterioare generalizate, (liniile 2 și 3 ale matricii ${}^B \underline{C}_A$), cresc cu cubul lungimii barei;
- deformația liniară în planul longitudinal vertical de simetrie al barei, generată de componenta de tip moment a tursorului forțelor exterioare generalizate, (linia 2 a matricii ${}^B \underline{C}_A$), crește cu pătratul lungimii barei;
- deformația liniară în planul longitudinal orizontal de simetrie al barei, generată de componenta de tip moment a tursorului forțelor exterioare generalizate, (linia 3 a matricii ${}^B \underline{C}_A$), scade cu pătratul lungimii barei;
- deformațiile unghiulare în planele longitudinale de simetrie ale barei, generate de componentele de tip moment încovoiator ale tursorului forțelor exterioare generalizate, (liniile 5 și 6 ale matricii ${}^B \underline{C}_A$), cresc direct proporțional cu lungimea elementului;
- deformațiile unghiulare în planul longitudinal orizontal de simetrie al barei, generate de componenta de tip forță a tursorului forțelor exterioare generalizate, (linia 5 a matricii ${}^B \underline{C}_A$), scad cu pătratul lungimii barei;
- deformațiile unghiulare în planul longitudinal vertical de simetrie al barei, generate de componenta de tip forță a tursorului forțelor exterioare generalizate, (linia 6 a matricii ${}^B \underline{C}_A$), cresc cu pătratul lungimii barei.

Evaluarea a acestor dependențe a fost realizată cu ajutorul modului de calcul simbolic al pachetului soft MATLAB. În figura V.3 este prezentată grafic influența lungimii barei asupra deplasărilor extremității libere a acesteia. Relațiile (V.11) au fost particularizate prin alocarea valorilor:

$$E=220 \text{ GPa}, \quad \mu=0.29, \quad I_y=I_z=1 \text{ m}^4, \quad \underline{\Xi} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \text{ N, Nm.}$$

Fișierul aferent, (Anexa V.2), realizat în MATLAB pentru analiza dependenței deformațiilor elastice ale elementului cu lungimea acestuia permite particularizări diverse. Astfel, se obțin rapid reprezentări grafice de tipul celei din figura V.3, pentru cazul concret studiat. Atunci când se admite variația lungimii elementului într-un interval restrâns de valori, vizualizarea dependenței deformații/lungime se poate realiza strict pentru acest interval, la o scară convenabilă, (figura V.4).

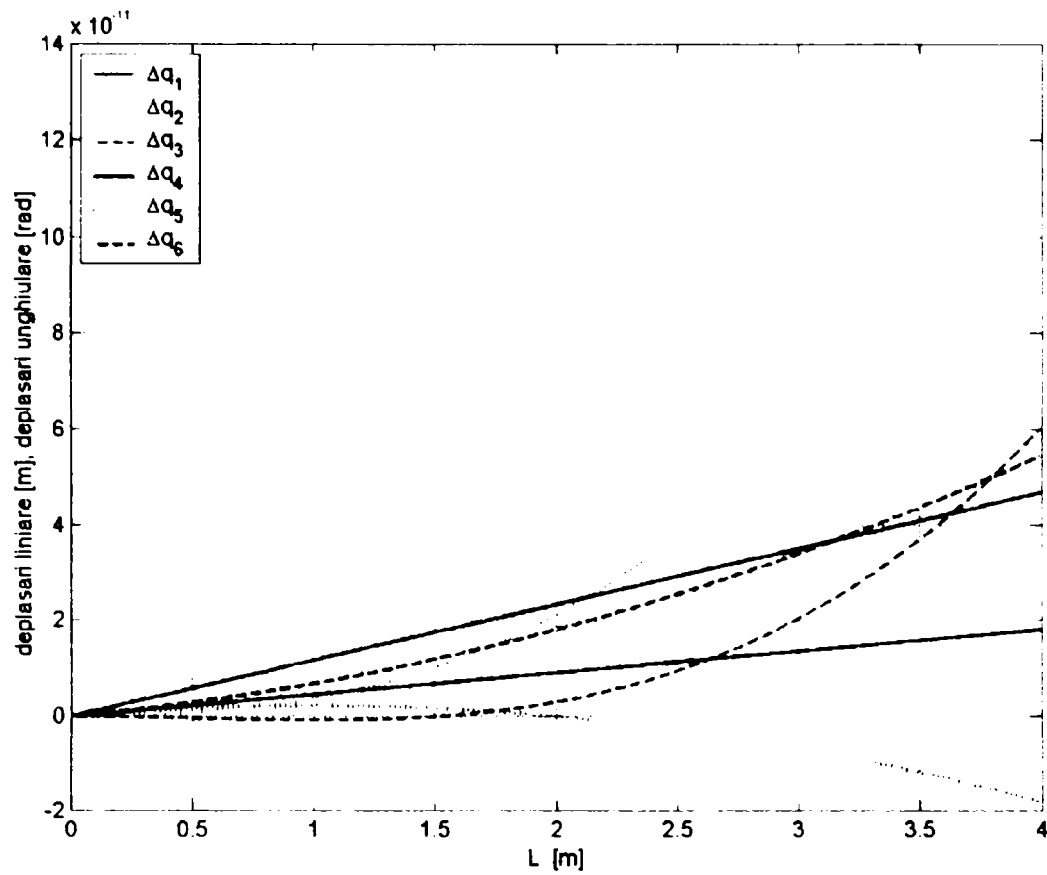


Figura V.3. Dependența deplasărilor extremității încărcate a barei de oțel, omogene, de secțiune constantă, cu lungimea acesteia

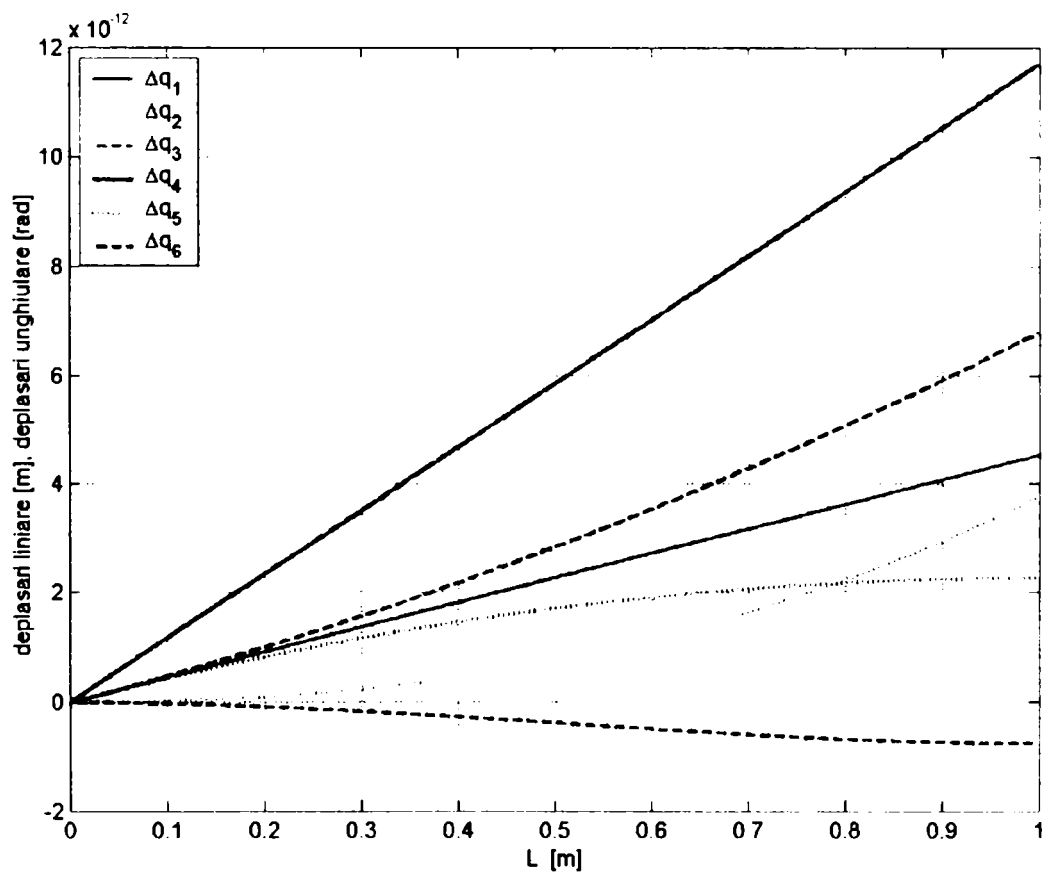


Figura V.4. Deplasările extremității încărcate a barei de oțel, omogene, de secțiune constantă, cu lungimea de 1m

V.4.3. Influența secțiunii transversale a barei omogene simplu încastrate asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia

V.4.3.1. Influența valorii dimensionale a ariei secțiunii transversale a barei asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia

Aria secțiunii transversale a barei apare explicit doar în expresia primului element, ($c_{11} = \frac{l}{A}$), al matricii de complianță date de relația (V.9), care corespunde răspunsului elastic al barei la solicitarea de întindere/compresiune. Creșterea valorii ariei secțiunii transversale a barei va determina scăderea elasticității acesteia la întindere/compresiune.

Deși nu apare explicit în expresiile celorlalte deformații, valoarea ariei secțiunii transversale a barei influențează elasticitatea acesteia prin momentele de inerție axiale și polare care o includ. Creșterea valorii dimensionale a ariei duce, implicit, la creșterea valorii momentelor de inerție axiale, deci la diminuarea elasticității elementului considerat.

Simultan însă, creșterea dimensiunii ariei secțiunii transversale are un efect nedorit, întrucât determină creșterea greutatei proprii a barei și, implicit, a solicitării generate de aceasta.

Pentru a evidenția influența valorii dimensionale a ariei secțiunii transversale asupra elasticității barei simplu încastrate, se particularizează convenabil relațiile (V.11) care exprimă deformațiile elastice ale acesteia. Se consideră, în acest scop, o bară cu lungimea $L=l$ m solicitată cu un torsor unitar al forțelor generalizate.

Aceste particularizări permit scrierea relațiilor (V.11) sub forma:

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{A} & \Delta q_4 &= \frac{1}{E} \cdot 2(1 + \mu) \frac{1}{I_y + I_z} \\ \Delta q_2 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{I_z} & \Delta q_5 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{I_y} \\ \Delta q_3 &= -\frac{1}{E} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{I_y} & \Delta q_6 &= \frac{1}{E} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{I_z} \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

Relațiile (V.11), respectiv (V.12), evidențiază faptul că momentul de inerție axial raportat la axa y influențează numai comportamentul elastic al barei la solicitarea de

încovoiere în planul orizontal, (xOz), al acesteia. Creșterea momentului de inerție axial I_y contribuie la sporirea rigidității barei în planul menționat. Ponderea acestuia în diminuarea deformației unghiulare în jurul axei y , (Δq_5), în condițiile specificate, este de 3 ori mai mare decât în cea a deformației liniare de-a lungul axei z , (Δq_3).

Similar, creșterea momentului de inerție axial raportat la axa z sporește rigiditatea barei la solicitarea de încovoiere în planul vertical, (xOy), al acesteia. Acesta are o pondere de 9/5 ori mai mare în valoarea deformației unghiulare în jurul axei z , (Δq_6), decât în valoarea celei liniare de-a lungul axei y , (Δq_2).

Ambele momente de inerție axiale intervin cu pondere egală în creșterea rigidității torsionale a barei, contribuind la scăderea deformațiilor unghiulare în jurul axei longitudinale, (Δq_4), a acesteia.

V.4.3.2. Influența formei secțiunii transversale a barei asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia

Tema acestui subcapitol o constituie determinarea formei geometrice a secțiunii transversale a barei simplu încastrate care asigură o elasticitate cât mai mică a acesteia, deci deformații liniare și unghiulare cât mai mici. Vor fi supuse analizei secțiunile transversale uzuale în construcția elementelor dispozitivelor de ghidare ale roboților: circulare și rectangulare, în varianta plină și respectiv tubulară. Secțiunile pătrate, pline și tubulare, sunt tratate ca și cazuri particulare ale celor rectangulare.

Analiza influenței formei secțiunii transversale a barei omogene încastrate ce modelează elementul dispozitivului de ghidare, asupra comportamentului cinetoelastostatic al acesteia implică explicitarea ariei și momentelor de inerție axiale ale secțiunii, conform relațiilor fundamentale din rezistența materialelor, [Buz-80]. Acestea relevă faptul că forma geometrică a secțiunilor este definită de :

- un parametru în cazul secțiunilor circulare pline (diametrul secțiunii);
- 2 parametri în cazul secțiunilor circulare tubulare (diametrul exterior și cel interior);
- 2 parametri în cazul secțiunilor rectangulare pline (laturile secțiunii);
- 4 parametri în cazul secțiunilor rectangulare tubulare (laturile exterioare și cele

- 4 parametri în cazul secțiunilor rectangulare tubulare (laturile exterioare și cele interioare ale secțiunii).

Analiza dependenței comportamentului cinetoelastostatic al barei cu elementele ce definesc geometria secțiunii se poate realiza relativ ușor în cazul secțiunilor definite de un singur parametru, (Anexa V.3), așa cum se ilustrează în figura V.5. Sunt prezentate deformațiile barei omogene de oțel, plină, de secțiune transversală circulară constantă, încărcată cu un torsor $\underline{\mathfrak{Z}} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$

Pentru a facilita comparația, dependența deplasărilor liniare de-a lungul axei z , (Δq_3), a fost reprezentată cu semn schimbat, deci $-\Delta q_3$.

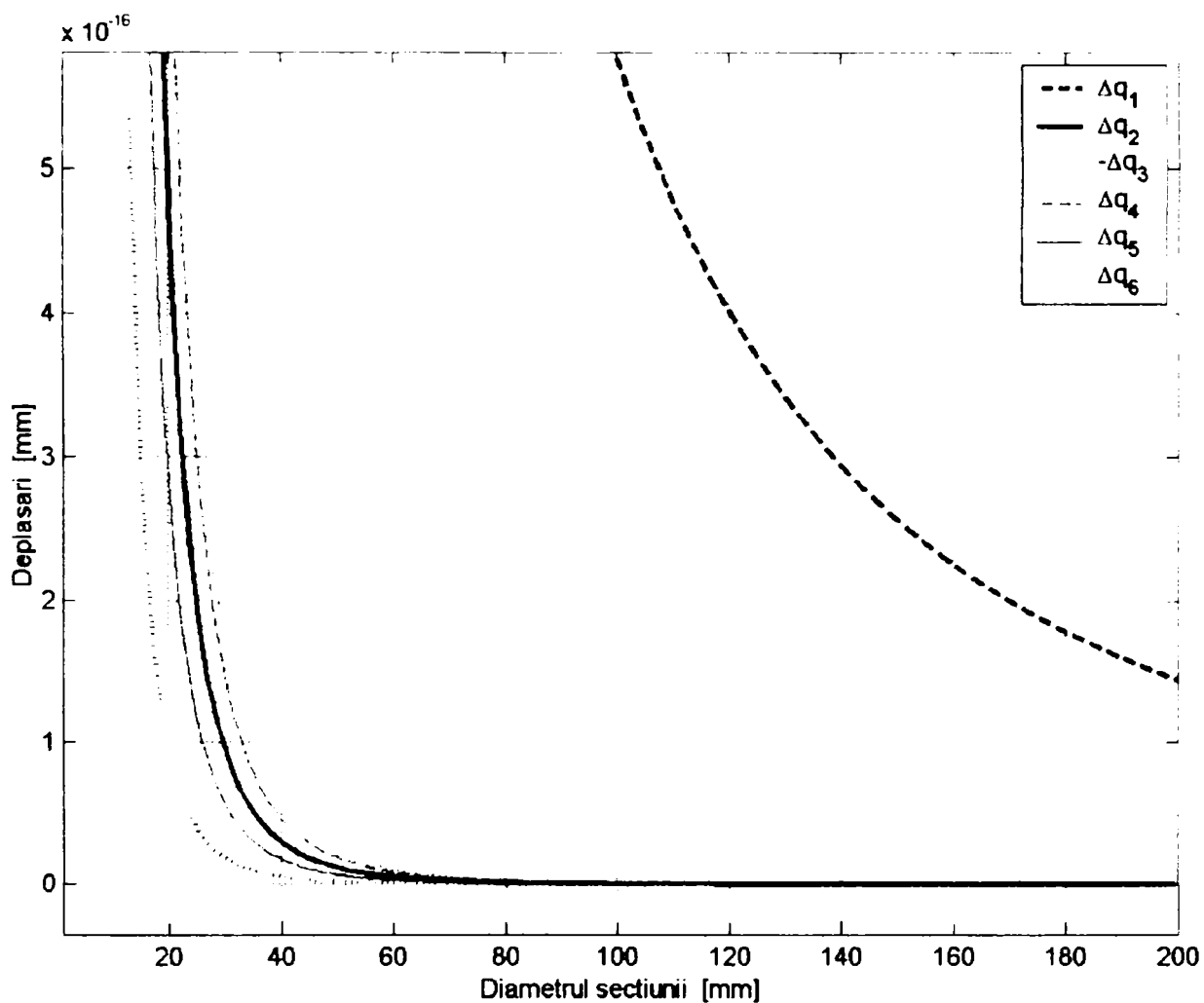


Figura V.5. Deplasările extremității încărcate a barei de oțel, pline, omogene, de secțiune transversală circulară constantă, simplu încastrată, solicitată de un torsor unitar

Similar, se poate realiza această analiză pentru secțiunile definite de 2 parametri, cum este cazul secțiunilor axial simetrice, ilustrat în figura V.6. Deplasarea extremității

încărcate a barei simplu încastrate, se determină cu relația:

$$\Delta q = \sqrt{\Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3} \quad (V.13)$$

unde Δq_1 , Δq_2 , Δq_3 reprezintă deformațiile de-a lungul axelor x , y , respectiv z , (Anexa V.4).

Evaluarea dependențelor menționate, pentru bare realizate din același material, de aceeași lungime, supuse aceluiași solicitări, dar având secțiuni transversale de tipodimensiuni diferite, s-a realizat în mediul MATLAB. Figurile V.5 și V.6 prezintă grafic rezultatele acestor evaluări, obținute pentru valori ale laturilor, respectiv diametrelor secțiunii, de până la 200mm.

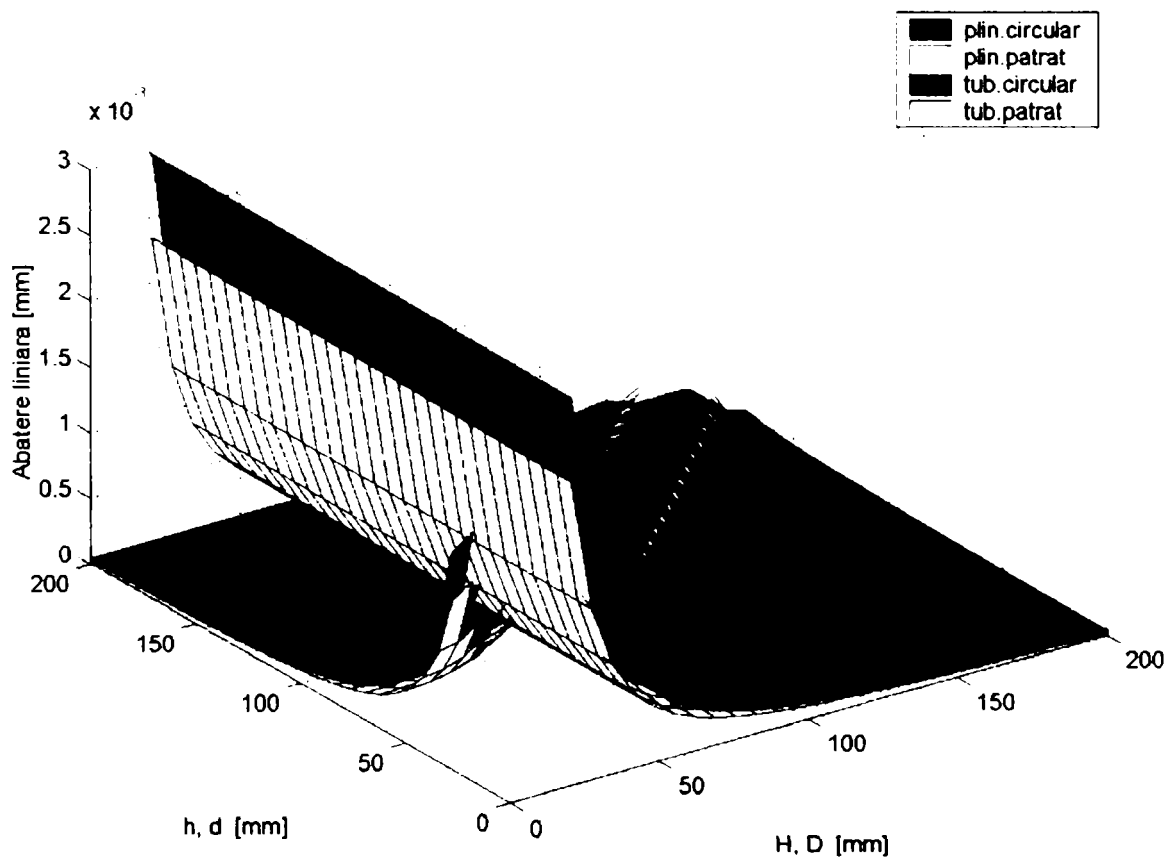


Figura V.6. Deplasarea liniară a extremității încărcate a elementului dispozitivului de ghidare modelat ca bară omogenă, simplu încastrată, solicitată de un torsor unitar, având secțiune constantă, axial simetrică

Dacă pentru optimizarea uni- și bicriterială există algoritmi de calcul în teoria optimizării, optimizarea cu patru criterii simultan îndeplinite nu beneficiază de algoritmi

algoritmi ar fi inadmisibil de lentă. Este mai avantajoasă reducerea numărului de parametri de optimizat prin stabilirea unor corelații între aceștia.

În robotică, aceste relații de legătură între parametri se stabilesc din considerente tehnico-practice, pe baza datelor similare cuprinse în literatura de specialitate, sau, preponderent, bazat pe experiența în domeniu a celui ce realizează optimizarea, sau/și pe date experimentale. Astfel, în [Vuk-85] se recomandă pentru dimensiunile secțiunilor tubulare rectangulare ale elementelor dispozitivului de ghidare, rapoarte cu valori numerice

$$\text{de tipul: } \frac{b}{B} = 0.9 \quad \frac{h}{H} = 0.85 \quad \text{sau/și} \quad \frac{H}{B} = 1.5,$$

cu specificația că acestea se aleg provizoriu în urma analizei cinematice și dinamice a robotului și sunt dependente de experiența specialistului. Practic, optimizarea comportă mai multe iterații, iar după caz, rapoartele alese se modifică corespunzător.

În cele ce urmează se dorește determinarea formei geometrice a secțiunii care asigură rigiditate maximă în aceleași condiții de încărcare și material. Sunt comparate deformațiile barelor omogene de secțiune transversală constantă, circulară și rectangulară, pline și tubulare, cele circulare având diametrul egal cu latura mare a secțiunii rectangulare.

Comparația se realizează admitând pentru laturile secțiunilor transversale rectangulare pline, respectiv tubulare, relația:

$$\varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h} \quad (\text{V.14})$$

unde H și B sunt laturile secțiunii, iar h și b sunt laturile golului acesteia. H și h sunt laturile mari ale secțiunii.

Între dimensiunile laturilor secțiunilor tubulare se admite relația:

$$\lambda = \frac{b}{B} = \frac{h}{H} = \frac{d}{D} \quad (\text{V.15})$$

unde D și d sunt diametrul secțiunii transversale circulare pline, și, respectiv, diametrul golului secțiunii transversale circulare tubulare.

Câmpurile de valori alocate raportului φ al laturilor secțiunilor rectangulare dat de relația (V.14), respectiv λ dat de relația (V.15), sunt:

$$\varphi > 0 \quad (\text{V.16})$$





$$0 \leq \lambda < 1 \quad (\text{V.17})$$

Referitor la semnificația geometrică a valorilor limită ale acestor rapoarte, se precizează:

- $\varphi = 0$ nu are corespondent fizic,
- $\varphi = 1$ corespunde secțiunii pătrate pline/tubulare,
- $\lambda = 0$ corespunde secțiunilor pline rectangulare/tubulare
- $\lambda = 1$ nu are corespondent fizic.

Relațiile de calcul ale ariei și momentelor de inerție axiale ale secțiunilor transversale circulare și rectangulare, obținute utilizând expresiile (V.14) și (V.15), sunt prezentate în tabelul V.1.

Tabelul V.1

Tipul secțiunii transversale a barei și notarea laturilor secțiunii	Aria secțiunii transversale a barei A	Momentul de inerție axial I_y	Momentul de inerție axial I_z
 D	$A = \frac{\pi D^2}{4}$	$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$	
 D, d $0 \leq \lambda = \frac{d}{D} < 1$	$A = \frac{\pi D^2 (1 - \lambda^2)}{4}$	$I_y = I_z = \frac{\pi D^4 (1 - \lambda^4)}{64}$	
 $B \times H$ $\varphi = \frac{B}{H}$	$A = \varphi \cdot H^2$	$I_y = \frac{\varphi^3 \cdot H^4}{12}$	$I_z = \frac{\varphi \cdot H^4}{12}$
 $B, b \times H, h$ $\varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h}$	$A = \varphi H^2 (1 - \lambda^2)$	$I_y = \frac{\varphi^3 H^4 (1 - \lambda^4)}{12}$	$I_z = \frac{\varphi H^4 (1 - \lambda^4)}{12}$

Expresiile deplasărilor extremității libere a barei încastate având secțiunile

transversale supuse analizei, obținute prin utilizarea relațiilor (V.14), (V.15), (V.16), (V.17), sunt redate în tabelele V.2 și V.3.

Termenii acestor relații au fost grupați astfel încât să fie evidențiate elementele ce diferă de la o secțiune la alta. Secțiunile pline nu sunt redate explicit în tabelul V.2 și tabelul V.3, întrucât deformațiile acestora corespund particularizării $\lambda=0$ a relațiilor aferente secțiunilor tubulare omoloage. Similar, pentru secțiunile pătrate pline și tubulare, particularizările necesare relațiilor din tabelele V.2 și V.3 sunt $\varphi=1$ și $\lambda=0$.

Valorile rapoartelor φ care delimitează zonele de optim, rezultă din egalarea termenilor din expresiile deformațiilor care diferă în funcție de forma secțiunii.

Rezultatele comparațiilor astfel realizate, pentru secțiuni circulare și rectangulare, sunt prezentate sugestiv în tabelul V.4. Analiza comparativă s-a realizat pentru cazul egalității diametrului exterior al secțiunilor circulare cu latura mare a secțiunilor rectangulare. Linia inferioară a tabelului V.4 prezintă grafic forma geometrică a secțiunii care asigură cea mai mare rigiditate, dintre formele comparate, (redate grafic în capul de tabel).

Figura V.7 ilustrează grafic rezultatele analizei prezentate sintetic în coloana 2 a tabelul V.4 pentru comparația realizată între *secțiunile tubulare circulare și rectangulare, respectiv pline circulare și rectangulare*. Diametrele cercurilor corespund valorilor parametrului φ care delimitează zonele de optim.

Dependent de valoarea raportului φ , analiza comparativă realizată permite câteva concluzii:



- pentru $\varphi < 0.4791$, (soluția ecuației $\varphi^3 + \varphi = \frac{3\pi}{16}$), secțiunea care asigură rigiditate

maximă este cea circulară, întrucât toate deformațiile barei de secțiune circulară plină/tubulară sunt mai mici decât cele ale barei de secțiune rectangulară plină/tubulară;



- pentru $0.4791 < \varphi < \frac{3\pi}{16}$ secțiunile circulare au numai rigiditate la solicitări de

încovoiere în planul vertical al barei, (xOy), mai mare decât cea a secțiunilor rectangulară omoloage;

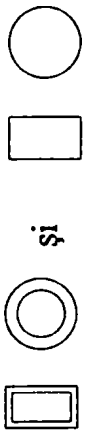







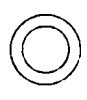

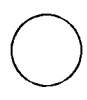

Tabelul V.2 .

Secțiunea	Δq	$\Delta q_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{A}$	$\Delta q_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{I_z}$	$\Delta q_3 = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{I_y}$
	D, d $0 \leq \lambda = \frac{d}{D} < 1$	$\Delta q_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{D^2(1-\lambda^2)} \cdot \pi$	$\Delta q_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{160}{D^4(1-\lambda^4)} \cdot \frac{3\pi}{32}$	$\Delta q_3 = \frac{1}{E} \cdot \frac{32}{D^4(1-\lambda^4)} \cdot \frac{3\pi}{32}$
	B, b, H, h $0 < \varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h}$; $0 \leq \lambda = \frac{b}{B} = \frac{h}{H} < 1$	$\Delta q_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{H^2(1-\lambda^2)} \cdot \varphi$	$\Delta q_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{10}{H^4(1-\lambda^4)} \cdot \varphi$	$\Delta q_3 = \frac{1}{E} \cdot \frac{2}{H^4(1-\lambda^4)} \cdot \varphi^3$

Tabelul V.3

Secțiunea	Δq	$\Delta q_4 = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{2(1+\mu)} \cdot \frac{1}{I_y + I_z}$	$\Delta q_5 = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{I_y}$	$\Delta q_6 = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{I_z}$
	D, d $0 \leq \lambda = \frac{d}{D} < 1$	$\Delta q_4 = \frac{1}{E} \cdot \frac{32}{D^4(1-\lambda^4)} \cdot \pi$	$\Delta q_5 = \frac{1}{E} \cdot \frac{32}{D^4(1-\lambda^4)} \cdot \pi$	$\Delta q_6 = \frac{1}{E} \cdot \frac{96}{D^4(1-\lambda^4)} \cdot \pi$
	B, b, H, h $0 < \varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h}$; $0 \leq \lambda = \frac{b}{B} = \frac{h}{H} < 1$	$\Delta q_4 = \frac{1}{E} \cdot \frac{6}{H^4(1-\lambda^4)} \cdot \varphi(1+\varphi^2)$	$\Delta q_5 = \frac{1}{E} \cdot \frac{6}{H^4(1-\lambda^4)} \cdot \varphi$	$\Delta q_6 = \frac{1}{E} \cdot \frac{18}{H^4(1-\lambda^4)} \cdot \varphi$

Tabelul V.4.

Deformațiile Minime	 și  $(0 < \lambda < 1)$ $(\lambda = 0)$					
Δq_1	$\varphi < \frac{\pi}{4}$	$\varphi > \frac{\pi}{4}$	$\varphi < \frac{\pi(1-\lambda^2)}{4}$	$\varphi > \frac{\pi(1-\lambda^2)}{4}$	$\varphi < \frac{\pi}{4(1-\lambda^2)}$	$\varphi > \frac{\pi}{4(1-\lambda^2)}$
$\Delta q_2, \Delta q_6$	$\varphi < \frac{3\pi}{16}$	$\varphi > \frac{3\pi}{16}$	$\varphi < \frac{3\pi(1-\lambda^4)}{16}$	$\varphi > \frac{3\pi(1-\lambda^4)}{16}$	$\varphi < \frac{3\pi}{16(1-\lambda^4)}$	$\varphi > \frac{3\pi}{16(1-\lambda^4)}$
$\Delta q_3, \Delta q_5$	$\varphi < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{16}}$	$\varphi > \sqrt[3]{\frac{3\pi}{16}}$	$\varphi < \sqrt[3]{\frac{3\pi(1-\lambda^4)}{16}}$	$\varphi > \sqrt[3]{\frac{3\pi(1-\lambda^4)}{16}}$	$\varphi < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{16(1-\lambda^4)}}$	$\varphi > \sqrt[3]{\frac{3\pi}{16(1-\lambda^4)}}$
Δq_4	$\varphi^3 + \varphi < \frac{3\pi}{16}$	$\varphi^3 + \varphi > \frac{3\pi}{16}$	$\varphi^3 + \varphi < \frac{3\pi(1-\lambda^4)}{16}$	$\varphi^3 + \varphi > \frac{3\pi(1-\lambda^4)}{16}$	$\varphi^3 + \varphi < \frac{3\pi}{16(1-\lambda^4)}$	$\varphi^3 + \varphi > \frac{3\pi}{16(1-\lambda^4)}$
Secțiunea optimă	 , 	 , 				

- pentru $\frac{3\pi}{16} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ numai rigiditatea la întindere/compresiune a barei, (de-a lungul axei x), este mai mare pentru secțiunile circulare, decât pentru cele rectangulare omoloage;
- pentru $\frac{\pi}{4} < \varphi < \left(\frac{3\pi}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$ secțiunile circulare au numai rigiditate la solicitări de încovoiere în planul orizontal al barei, (xOz), mai mare decât cea a secțiunilor rectangulare omoloage;
- pentru $\varphi > \left(\frac{3\pi}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$ rigiditatea barelor de secțiune circulară după cele trei direcții considerate, este mai mică decât cea ale barelor rectangulare omoloage.

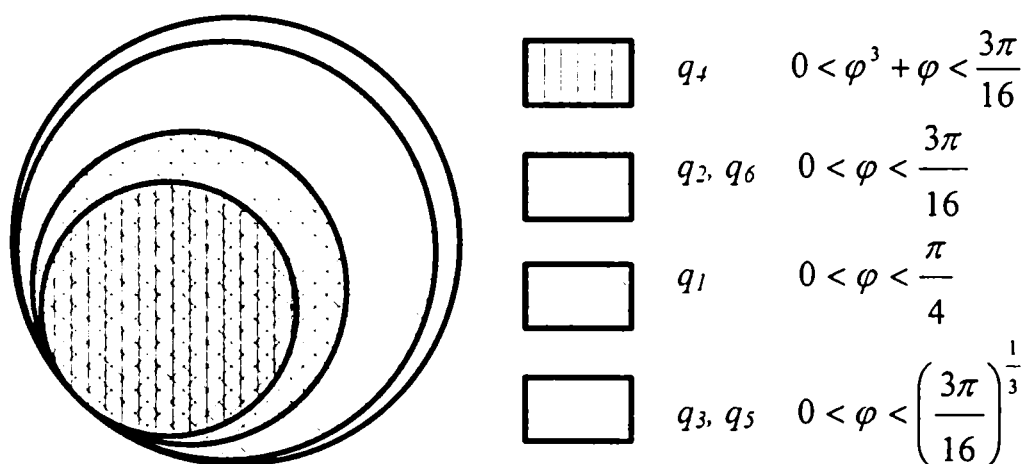


Figura V.7. Valorile raportului $\varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h}$ pentru care deformațiile extremității

libere ale barei încastrate tubulare/pline de secțiune circulară sunt mai mici decât cele ale barelor de secțiune rectangulată tubulare/pline, având aceeași lungime

Comparația deformațiilor barelor tubulare cu cele pline, implică luarea în considerare a rapoartelor φ și λ . Rezultatele obținute prin comparația deformațiilor barelor tubulare de secțiune circulară cu cele pline de secțiune rectangulată și cele ale barelor pline de secțiune circulară cu cele tubulare de secțiune rectangulată, (având diametrul exterior al secțiunii circulare egal cu latura mare a secțiunii rectangulare), sunt cuprinse în coloanele 3 și 4 ale tabelului V.4.

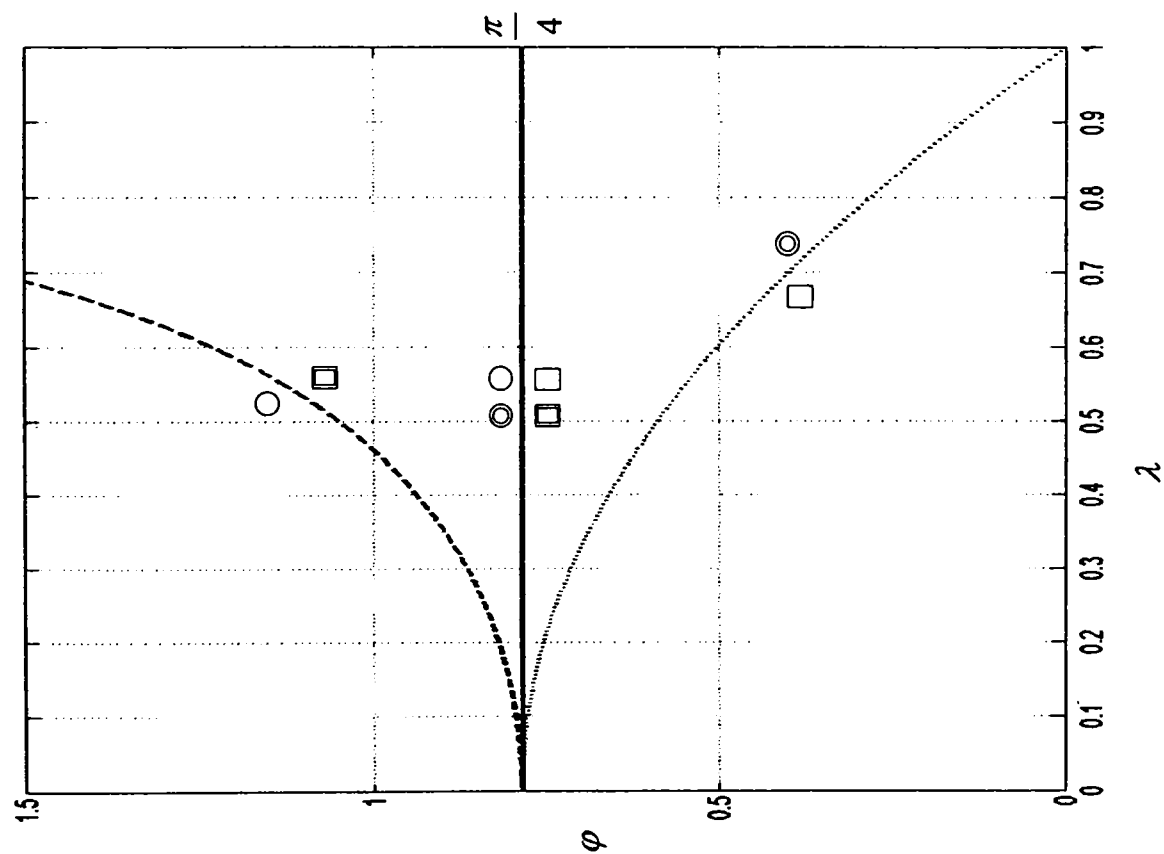


Figura V.8. Secțiuni care asigură rigiditate maximă la întindere/compresiune

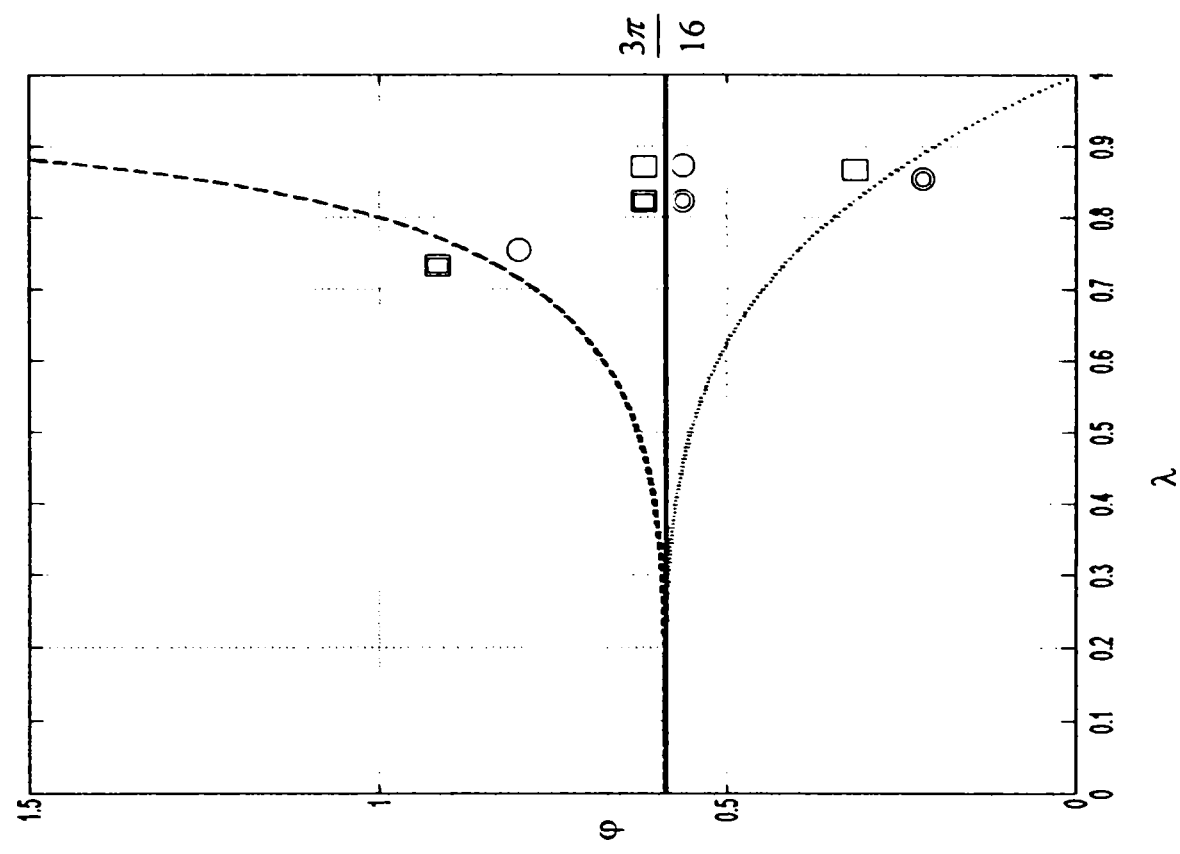


Figura V.9. Secțiuni care asigură rigiditate maximă la încovoiere în planul vertical al barei (xOy)

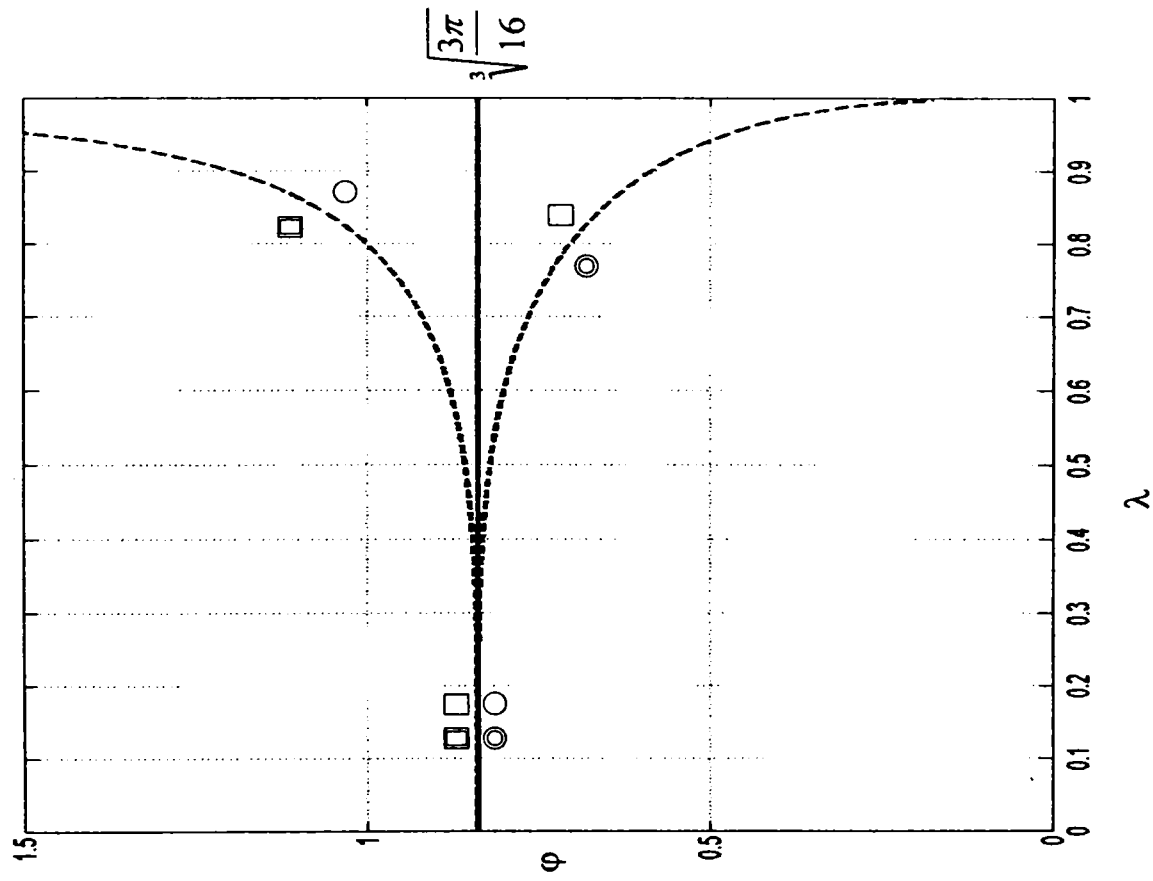


Figura V.10. Secțiuni care asigură rigiditate maximă la încovoiere în planul orizontal al barei (xOz)

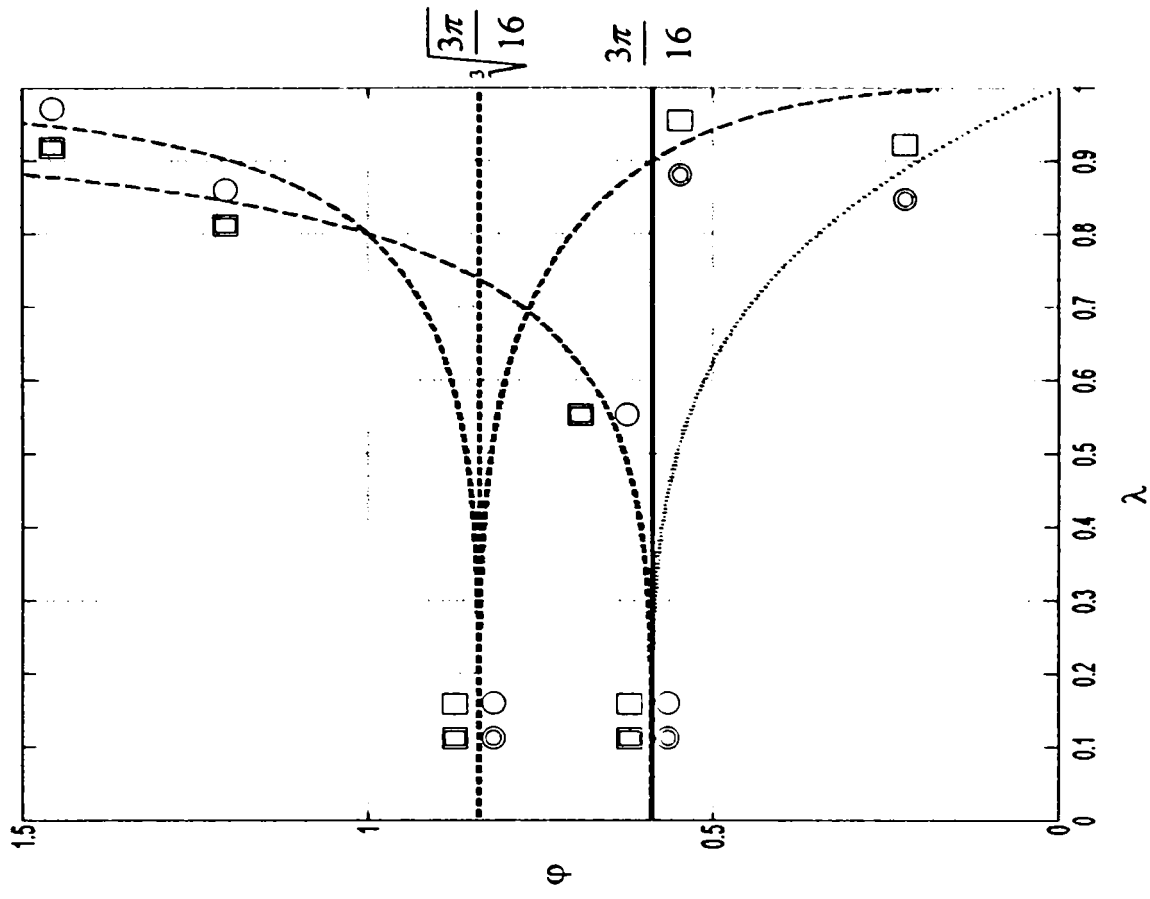


Figura V.11. Secțiuni care asigură rigiditatea maximă la încovoiere a barei

Determinarea domeniilor de optim, corespunzătoare secțiunii care asigură rigiditatea cea mai mare, a fost realizată prin evaluarea expresiilor tabelului IV.4 în mediul MATLAB, (Anexa V.5). Câteva exemplificări sub formă grafică a rezultatelor astfel obținute, sunt ilustrate de figurile V.8, ..., V.11.

În figurile menționate, secțiunea transversală care asigură rigiditate maximă este prezentată prin simboluri grafice sugestive, poziționate pe domeniul în cauză.

Evaluarea expresiilor menționate în mediul MATLAB prezintă, pe lângă avantajul preciziei de calcul și avantajul posibilității de utilizare practică imediată a rezultatelor. Astfel, reprezentările grafice obținute permit roboticianului să aleagă diverse combinații pentru valorile rapoartelor φ și λ , dependent de intențiile de a spori rigiditatea după o anumite direcție.

Mai mult, reprezentări grafice de tipul celor ilustrate de figurile IV.8, ..., IV.10 pot fi suprapuse rezultând reprezentări de tipul celei din figura IV.11, care ilustrează grafic domeniile de optim aferente secțiunilor care asigură rigiditatea cea mai mare la solicitarea de încovoiere în ambele plane longitudinale ale barei.

Alegerea secțiunii optime ca tipodimensiune se poate realiza, în funcție de restricțiile impuse în tema de lucru, doar pe cazul concret supus optimizării.

Cele anterior prezentate conțin doar referiri calitative la influența formei secțiunii barei asupra rigidității/elasticității acesteia. O apreciere corectă impune și analiza cantitativă a acestor influențe. O astfel de analiză, realizată pentru o bară de oțel simplu încastrată, având lungimea de 1m, solicitată cu un torsor generalizat cu 6 componente unitare, se exemplifică în figurile V.12, ..., V.18.

Dependența deformațiilor barei considerate cu tipodimensiunea secțiunii transversale a fost obținută prin evaluarea relațiilor (V.11), cu ajutorul modulului de calcul simbolic al pachetului soft MATLAB, (Anexa V.6, ..., Anexa V.11).

În figurile V.12, ..., V.18 se prezintă rezultatele obținute pentru cazul $\varphi=B/H=b/h=2/3$ și dimensiuni ale diametrului, respectiv laturii mari a secțiunilor rectangulare, cuprinse în intervalul 0...200 mm.

Un avantaj major al evaluării expresiilor în MATLAB îl constituie puternicele facilități grafice. Programul permite inversarea orientării axelor reprezentării, pentru a

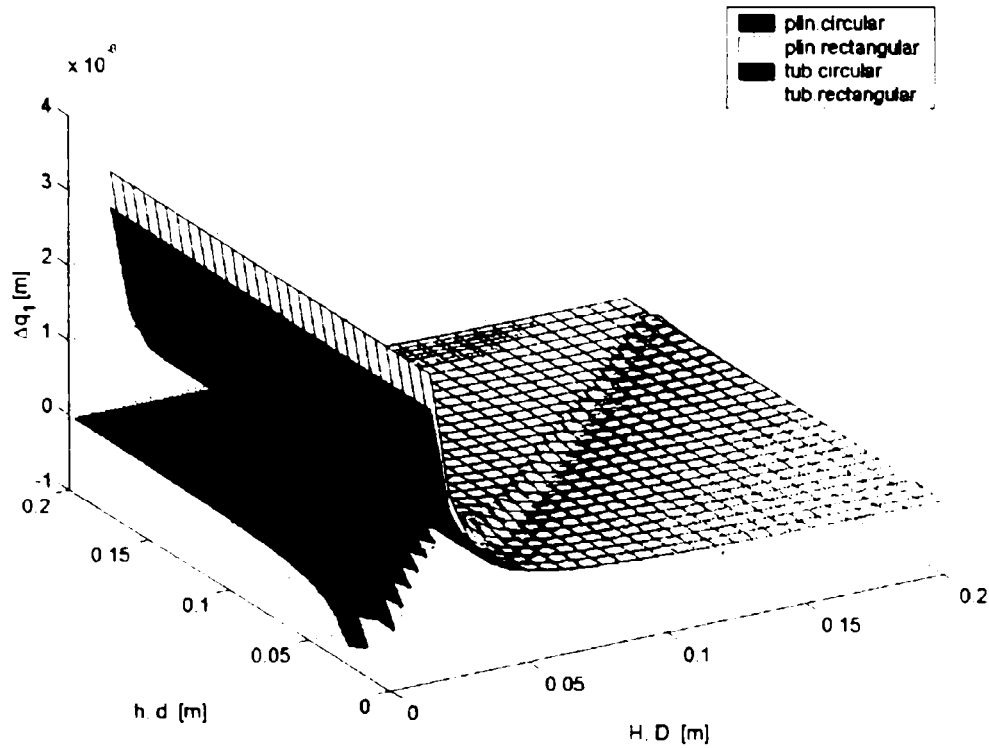


Figura V.12. Dependența deformației liniare de-a lungul axei x , cu tipodimensiunea secțiunii transversale a barei încastrate

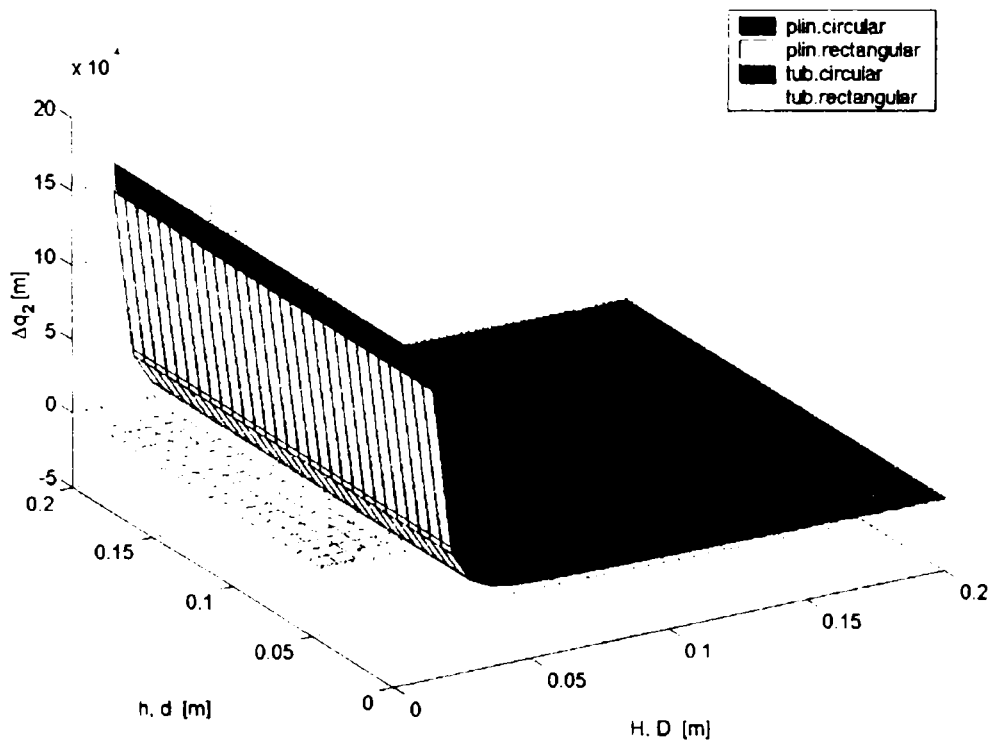


Figura V.13. Dependența deformației liniare de-a lungul axei y , cu tipodimensiunea secțiunii transversale a barei încastrate

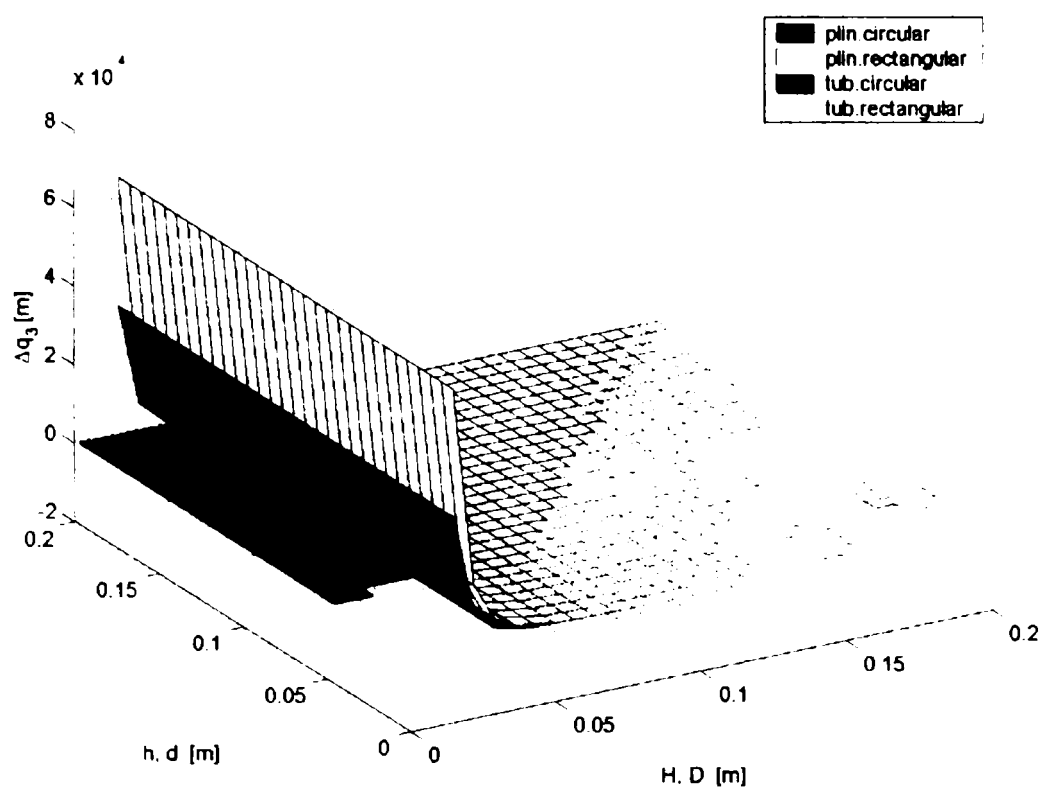


Figura V.14. Dependența deformației liniare de-a lungul axei z, cu tipodimensiunea secțiunii transversale a barei încastrate

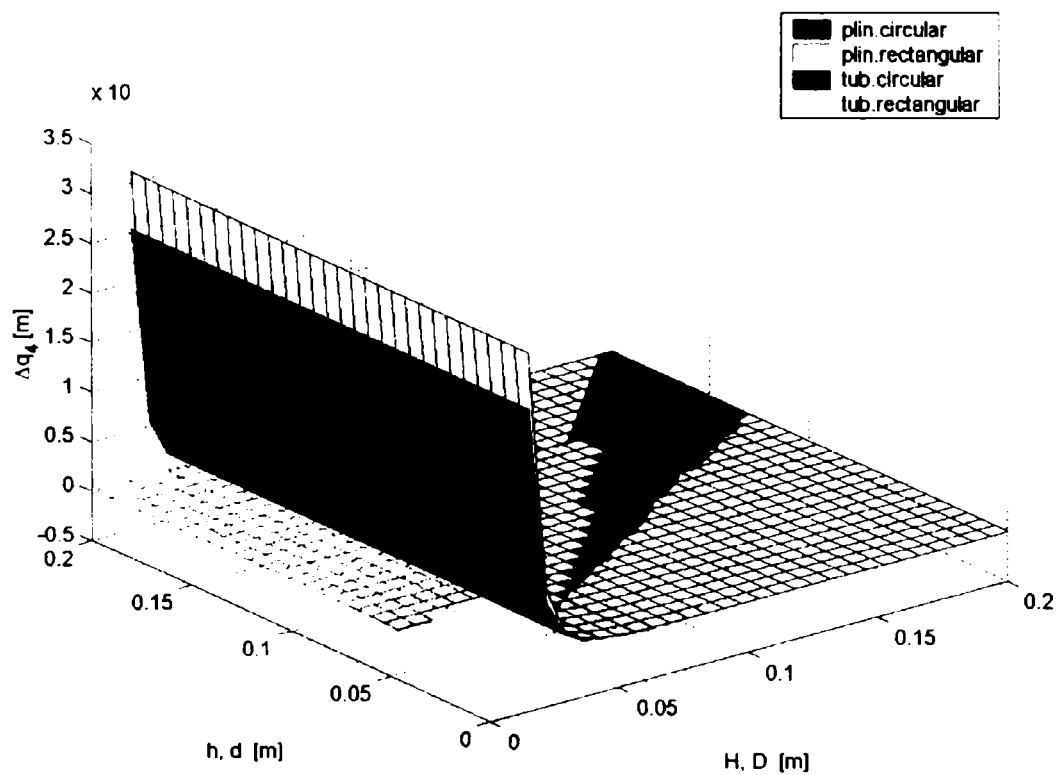


Figura V.15. Dependența deformației unghiulare în jurul axei x, cu tipodimensiunea secțiunii transversale a barei încastrate

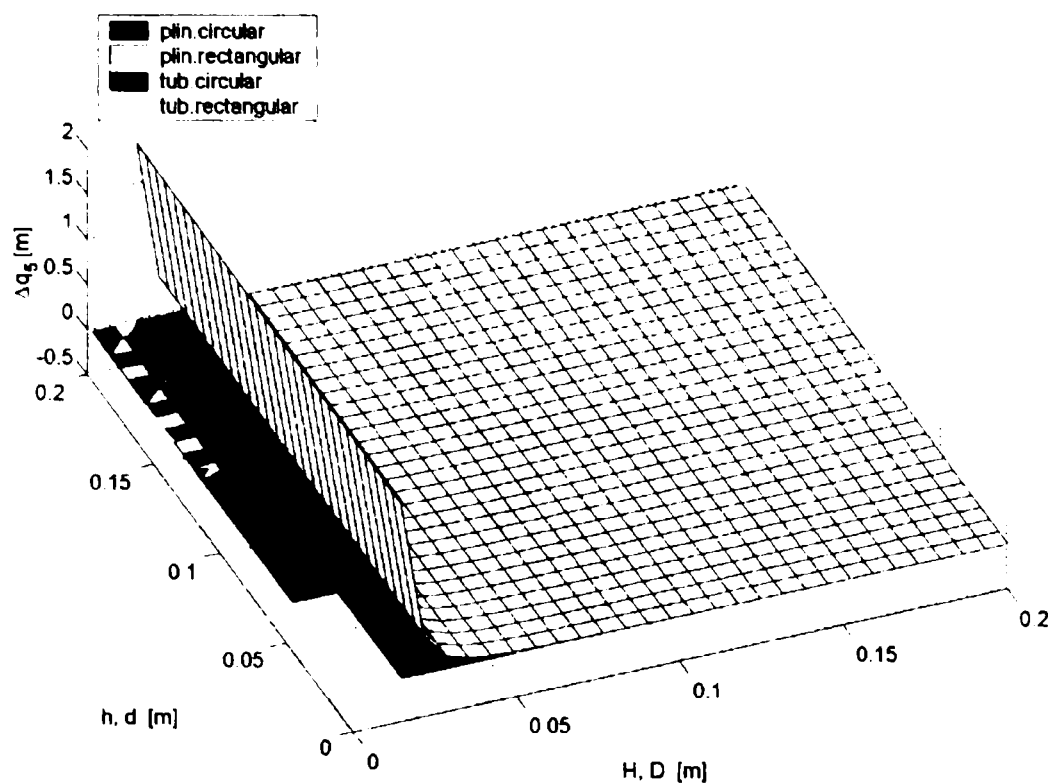


Figura V.16. Dependența deformației unghiulare în jurul axei y , cu tipodimensiunea secțiunii transversale a barei încastrate

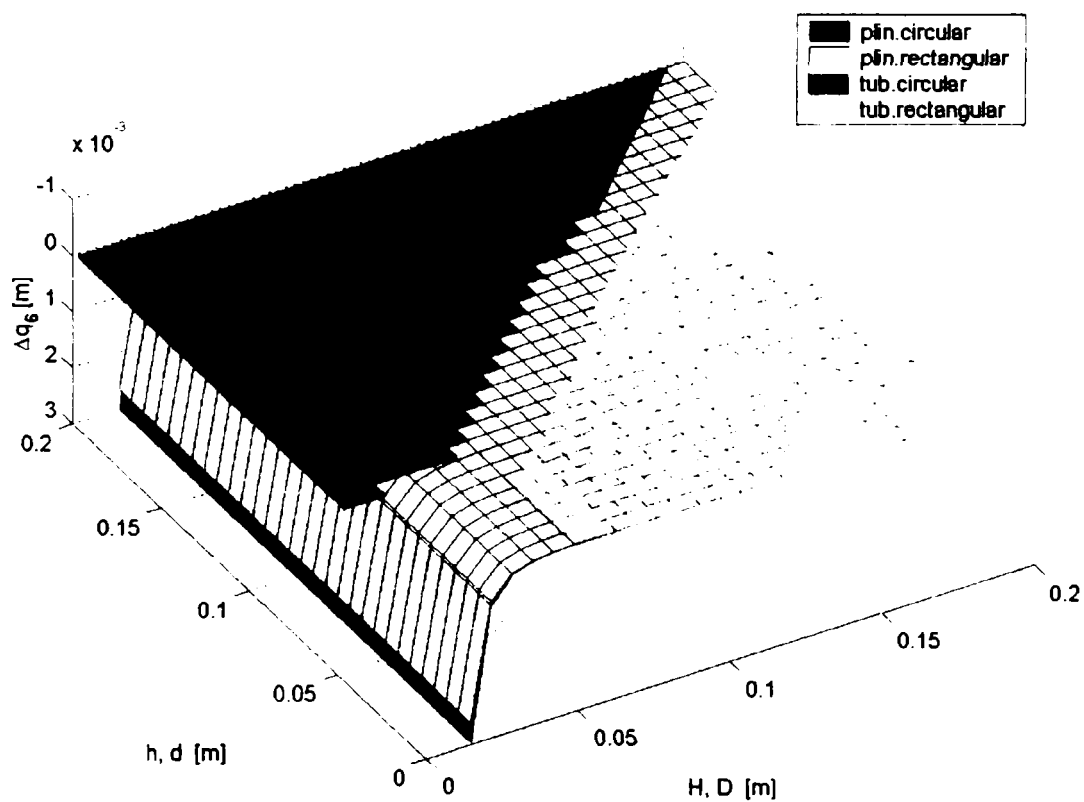


Figura V.17. Dependența deformației unghiulare în jurul axei z , cu tipodimensiunea secțiunii transversale a barei încastrate

vizualiza valoarea minimă, așa cum se poate observa în figura V.17. Se pot obține și reprezentări ortogonale de tipul celei din figura V.18, care vizualizează clar tipul de secțiune care asigură răsuciri minime în jurul axei z , (Anexa V.11). Astfel de reprezentări, permit selecția rapidă a variantei de secțiune cu rigiditate la torsiune maximă (deci cu deformații de răsucire minime) și a combinației optime de valori dimensionale, sau verificarea încadrării tipodimensiunii alese anterior, în cerințele stabilite prin tema de lucru.

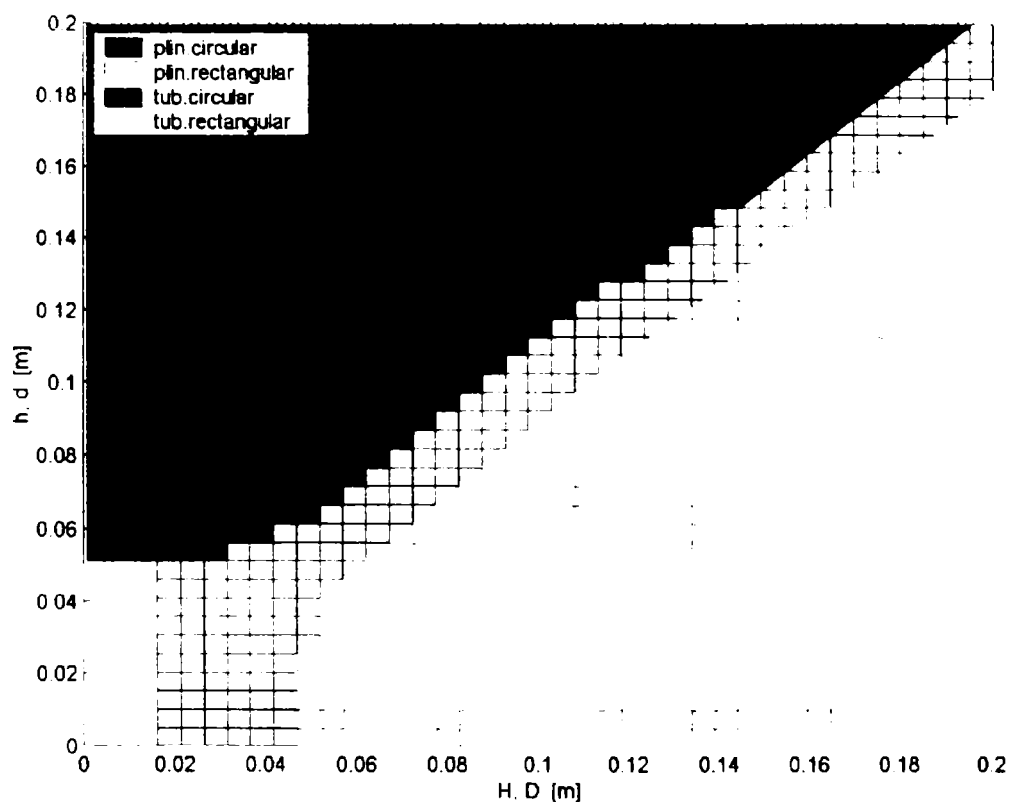


Figura V.18. Deformații unghiulare minime în jurul axei z , cu tipodimensiunea secțiunii transversale a barei încastrate

V.5. Determinarea secțiunii optime a elementelor omogene ale dispozitivului de ghidare, modelate ca bare simplu încastrate, de secțiune transversală constantă

V.5.1. Introducere

Dimensionarea elementului dispozitivului de ghidare se realizează în secțiunea cea mai solicitată. În cazul modelului adoptat, de bară încastrată, solicitările maxime apar în încastrare. În consecință, toate celelalte secțiuni ale barei sunt supradimensionate, ceea ce implică, totodată, consum nejustificat de material și deci, o greutate suplimentară a barei.

Realizarea elementului ca bară de egală rezistență are efect benefic asupra utilizării eficiente ale materialului și a reducerii greutății acesteia, dar comportă costuri tehnologice considerabile, nu întrutotul justificate.

Este mai economică determinarea formei geometrice a secțiunii transversale care să asigure rigiditatea/complianța impusă prin tema de proiectare în condițiile unei greutăți cât mai reduse a elementului.

V.5.2. Determinarea formei optime a secțiunii transversale a elementului dispozitivului de ghidare modelat ca bară încastrată, de secțiune constantă

Se consideră elementul omogen al dispozitivului de ghidare al robotului modelat ca bară spațială simplu încastrată, (figura V.2). Torsorul forțelor exterioare generalizate, aplicat la extremitatea liberă a barei, $\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B$, este dat de relația (V.3). Aria minimă a secțiunii transversale a barei, se determină din condiția de rezistență, în secțiunea B . Acestei valori numerice a ariei îi va corespunde un anumit volum de material și, implicit, o anumită greutate a barei.

În cele ce urmează se dorește determinarea formei geometrice optime a secțiunii transversale a barei, care să îndeplinească simultan două condiții:

- să asigure rezistența impusă, deci să aibe valoarea numerică a ariei rezultată la

dimensionarea în încastrare;

- să asigure rigiditatea/complianța necesară.

Se vor compara între ele bare având secțiuni transversale pline și tubulare, de formă circulară și rectangulară, în condițiile greutății proprii egale, deci a *egalității valorii ariei*.

Compararea diverselor secțiuni devine posibilă numai în condițiile reducerii numărului de parametri ce definesc forma secțiunii pentru cele rectangulare și cele circulare tubulare. Se acceptă în acest scop relațiile (V.14), (V.15), (V.16) și (V.17).

În consecință, se va reduce și numărul de comparații distincte necesare, secțiunile pline fiind un caz particular al celor tubulare, ($\lambda = 0$), iar cele pătrate fiind un caz particular al celor rectangulare, ($\varphi = 1$).

Întrucât secțiunile analizate au aceeași valoare numerică a ariei, analiza comparativă a acestora necesită apariția explicită a ariei în expresia matricilor de complianță ale elementelor în cauză.

Expresiile ariei secțiunii transversale și cele ale momentelor de inerție axiale, obținute din relațiile fundamentale ale rezistenței materialelor, prin utilizarea relațiilor (V.14) și (V.15), cu explicitarea ariei în conținutul lor, sunt redate în tabelul V.5.

Întrucât aria secțiunii transversale este constantă și egală ca valoare, caracteristicile dimensionale ale acesteia - diametrele secțiunilor circulare și respectiv laturile celor rectangulare - vor fi exprimate în funcție de arie:

$$D^2 = \frac{4A}{\pi(1-\lambda^2)} \quad (\text{V.18})$$



$$H^2 = \frac{A}{\varphi(1-\lambda^2)} \quad (\text{V.19})$$

Relațiile (V.14), (V.15), (V.18) și (V.19), permit scrierea expresiilor momentelor de inerție axiale și ale celor polare ale secțiunilor transversale circulare și rectangulare în funcție de arie și de rapoartele φ și λ . Acestea sunt prezentate în tabelul V.6.



Pentru simplificarea scrierii, expresia $\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$, care apare în toate relațiile de calcul ale momentelor de inerție axiale și polare, se notează:

$$u = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \quad (\text{V.20})$$

Tabelul V.5

Tipul secțiunii transversale a barei și notarea laturilor secțiunii	Aria secțiunii transversale a barei A	Momentul de inerție axial I_y	Momentul de inerție axial I_z
 D, d $0 \leq \lambda = \frac{d}{D} < 1$	$A = \frac{\pi D^2 (1 - \lambda^2)}{4}$	$I_y = I_z = A \frac{D^2 (1 + \lambda^2)}{16}$	
 $B, b \times H, h$ $0 < \varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h}$ $0 \leq \lambda = \frac{b}{B} = \frac{h}{H} < 1$	$A = \varphi \cdot H^2 (1 - \lambda^2)$	$I_y = A \frac{\varphi^2 \cdot H^2 (1 + \lambda^2)}{12}$	$I_z = A \frac{H^2 (1 + \lambda^2)}{12}$

Tabelul V.6

Tipul secțiunii transversale a barei și notarea laturilor secțiunii	Momentul de inerție axial I_y	Momentul de inerție axial I_z	Momentul de inerție polar I_p
 D, d $0 \leq \lambda = \frac{d}{D} < 1$	$I_y = I_z = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot u$		$I_p = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot u$
 $B, b \times H, h$ $0 < \varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h}$ $0 \leq \lambda = \frac{b}{B} = \frac{h}{H} < 1$	$I_y = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{\varphi}{3} \cdot u$	$I_z = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{3\varphi} \cdot u$	$I_p = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + \varphi^2}{\varphi} \cdot u$

Evaluarea relației (V.20) în mediul MATLAB, (Anexa V.12), cu restricția dată de relația (V.17), are ca rezultat reprezentarea grafică din figura V.19. Se observă că valoarea maximă a raportului u este 1 și corespunde valorii minime pentru λ , mai concret $\lambda=0$, ceea ce corespunde secțiunilor pline.

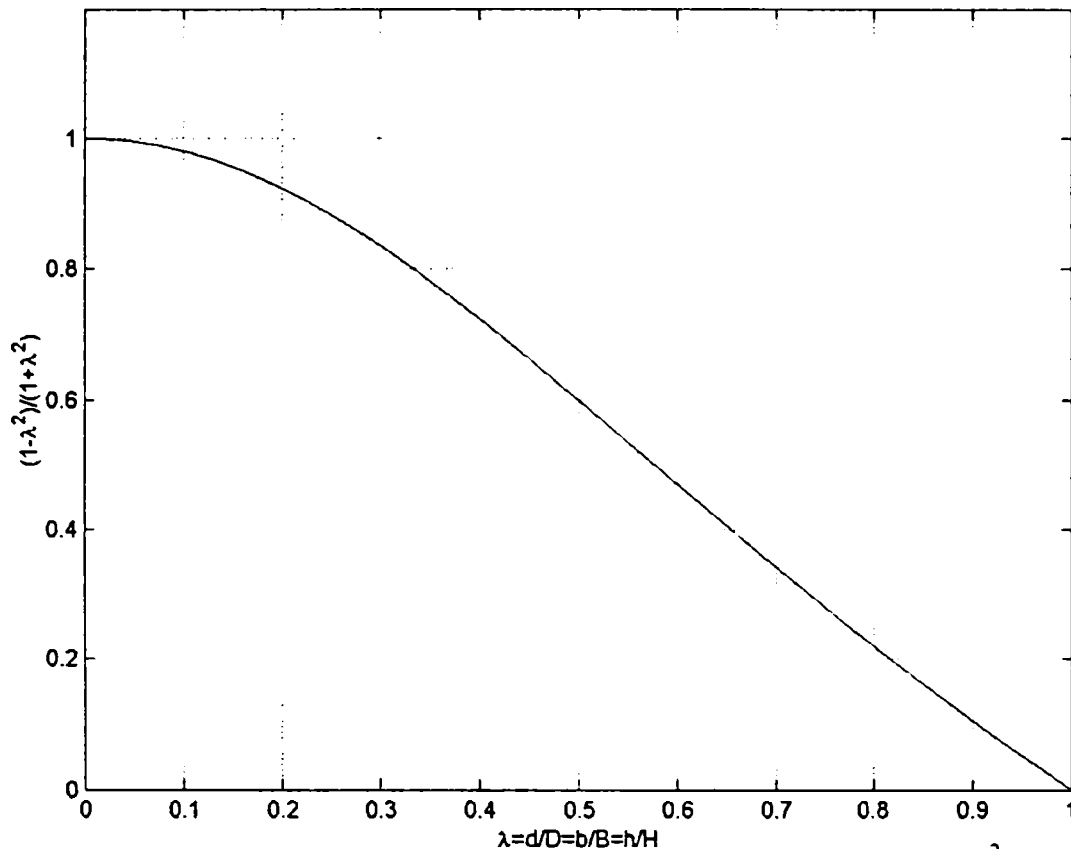


Figura V.19. Reprezentarea grafică a relației expresiei $u = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$

Pentru a facilita comparațiile între comportamentul barelor de diferite secțiuni, sunt prezentate, în figura V.20, pe aceeași reprezentare, legea de variație pentru expresia (V.20), și cea pentru numărătorul, numitorul și inversa relației (V.20).

Expresiile momentelor de inerție axiale și polare prezentate în tabelul V.6, permit scrierea matricii de complianță date de relația (V.9) sub forma (V.21) pentru elemente tubulare de secțiune transversală circulară și sub forma (V.22) pentru elemente tubulare de secțiune transversală rectangulară.

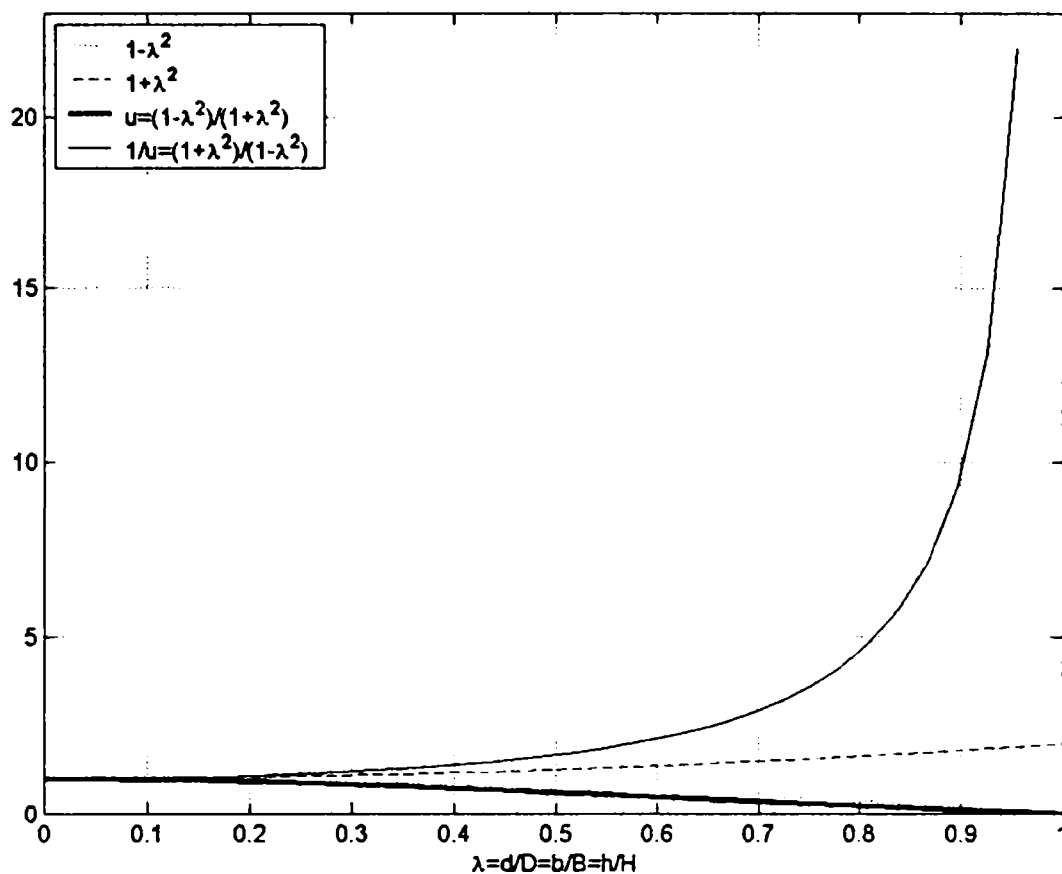


Figura V.20. Variația rapoartelor u și $1/u$ cu valoarea raportului λ

$${}^B \underline{C}_{A \text{ circ}} = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} l \cdot A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{l^3}{3} u \cdot \pi & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2} u \cdot \pi \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3} u \cdot \pi & 0 & -\frac{l^2}{2} u \cdot \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l(1+\mu) \cdot u \cdot \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} u \cdot \pi & 0 & l \cdot u \cdot \pi & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} u \cdot \pi & 0 & 0 & 0 & l \cdot u \cdot \pi \end{bmatrix} \quad (\text{V.21})$$

$${}^B \underline{C}_A \text{ rig} = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l \cdot A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3} u \cdot 3\varphi & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2} u \cdot 3\varphi \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3} u \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 & -\frac{l^2}{2} u \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l(1+\mu) \cdot u \cdot \frac{3\varphi}{1+\varphi^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} u \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 & l \cdot u \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} u \cdot 3\varphi & 0 & 0 & 0 & l \cdot u \cdot 3\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{V.22})$$

Liniile matricii de complianță a barei simplu încastrate reflectă răspunsul elastic al acesteia la solicitările exterioare, [Dum-92], [Cat-91], [Cut-80].

Forma geometrică a secțiunii transversale a barei, care asigură rigiditate maximă și, simultan, deformații minime, se determină prin comparația matricilor de complianță ale barelor având:

- aceeași lungime l ,
- același material – deci același modul de elasticitate longitudinală E și același coeficient de contracție transversală μ ,
- încărcare cu același torsor al forțelor exterioare generalizate, având șase componente nenule, dat de relația (V.3),
- secțiune transversală constantă pe toată lungimea barei,
- valoare numerică identică a ariei secțiunii transversale A , deci aceeași greutate.

Sunt supuse analizei secțiunile pline și tubulare, de formă circulară, rectangulară și pătrată. În vederea analizei comparative matricile de complianță (V.21) și (V.22), aferente secțiunilor tubulare circulare, respectiv rectangulare, vor fi particularizate corespunzător prin modificarea raportului u sau/și a raportului φ . Astfel, pentru:

- elemente tubulare de secțiune transversală pătrată, în matricea (V.22), raportului laturilor secțiunii i se va alocă valoarea $\varphi=1$;
- elemente pline de secțiune transversală circulară, în matricea (V.21) raportul u va avea valoarea maximă ($u=1$), corespunzătoare situației $\lambda=1$;

- elemente pline de secțiune transversală rectangulară, în matricea (V.22) raportul u va avea valoarea maximă ($u=1$), corespunzătoare situației $\lambda=1$;
- elemente pline de secțiune transversală pătrată, în matricea (V.22), raportului laturilor secțiunii i se va aloca valoarea $\varphi=1$, și corespunzător situației $\lambda=1$, raportul $u=1$.

Elementele relațiilor (V.21) și (V.22) au fost scrise sub o formă care facilitează analiza comparativă.








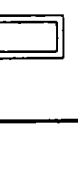

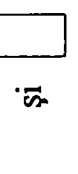

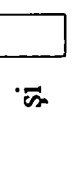


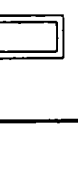

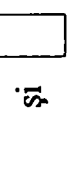

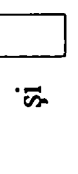

Structura simetrică a matricilor de complianță permite compararea a 8 elemente ale acestora din totalul de 10 elemente nenule. Mai mult, termenii care diferă între elementele omoloage ale celor două matrici comparate, aparținând aceleiași linii sunt identici, deci este suficientă compararea a câte unui element al fiecărei linii a matricilor de complianță. De asemenea, se observă că termenii diferiți ai elementelor liniilor aferente încovoierii într-un plan, (liniile 2 și 6, respectiv 3 și 5), sunt identici între ei. Ca o consecință a egalității valorii numerice a ariei secțiunii transversale, linia 1 a tuturor matricilor de complianță este identică.

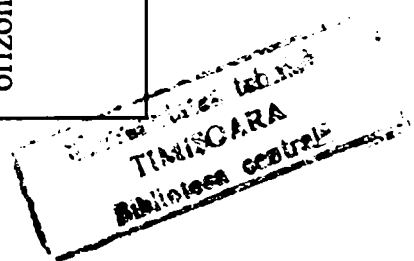
În consecință, compararea a două câte două matrici de complianță necesită în total numai compararea a trei elemente omoloage ale matricilor, câte unul de pe fiecare linie 2,3 și 4 sau 4, 5 și 6.

Egalând elementele matricilor de complianță aferente barelor ce se analizează, se obțin ecuațiile funcțiilor de granită $\varphi=\varphi(\lambda)$ care corespund comportamentului elastic identic al acestora. Acestea separă domeniile de optim căutate.

Evaluarea expresiilor matematice obținute procedând de maniera specificată s-a realizat cu ajutorul modulului simbolic de lucru al MATLAB. Rezultatele obținute în urma analizei comportării barelor la încovoiere, sunt prezentate sub formă simbolică în tabelul V.7. Secțiunea transversală care asigură rigiditatea cea mai mare, dintre cele două supuse analizei, este prezentată pentru fiecare comparație și fiecare linie a matricilor de complianță, sub forma simbolurilor grafice sugestive. Reprezentarea grafică a rezultatelor comparațiilor realizate, prezentate concentrat în tabelul V.7., obținută sub același soft, este ilustrată în figurile V.21, ..., V.24. Secțiunile care asigură rigiditatea cea mai mare dintre cele două comparate sunt figurate sub forma simbolurilor grafice poziționate pe domeniul grafic aferent.

Tabelul V.7

Solicitarea și secțiunea cea mai rigidă			 și  ($0 < \lambda < 1$) și  ($\lambda = 0$)	
Încovoiere în planul vertical de simetrie, xOy	 , 	 , 	 și 	
Încovoiere în planul orizontal de simetrie, xOz	 , 	 , 	 și 	



 TUMCARA

 Biblioteca centrală

În figura V.21 sunt prezentate grafic rezultatele comparației între elemente pline având secțiune transversală circulară și elemente pline având secțiune transversală rectangulară, respectiv între elemente tubulare având secțiune transversală circulară și elemente tubulare având secțiune transversală rectangulară, (Anexa V.13). Se observă că pentru valori ale raportului φ situate în intervalul $\pi/3 > \varphi > 3/\pi$ cea mai ridicată rigiditate la încovoiere în ambele plane de simetrie longitudinală ale barei o asigură secțiunile rectangulare. Pentru $\varphi < 3/\pi = 0.9549$ comportarea optimă la încovoiere în planul orizontal, xOz , o asigură secțiunile circulare, iar la încovoiere în planul vertical, xOy , o asigură secțiunile rectangulare. Pentru $\varphi < \pi/3 = 1.0472$ comportarea optimă la încovoiere în planul orizontal, xOz , o asigură secțiunile rectangulare, iar la încovoiere în planul vertical, xOy este asigurată de secțiunile circulare.

În cazul comparației referitoare la rigiditatea la încovoiere, realizate între secțiuni pline și tubulare, funcțiile $\varphi = \varphi(\lambda)$ care corespund comportamentului elastic identic al

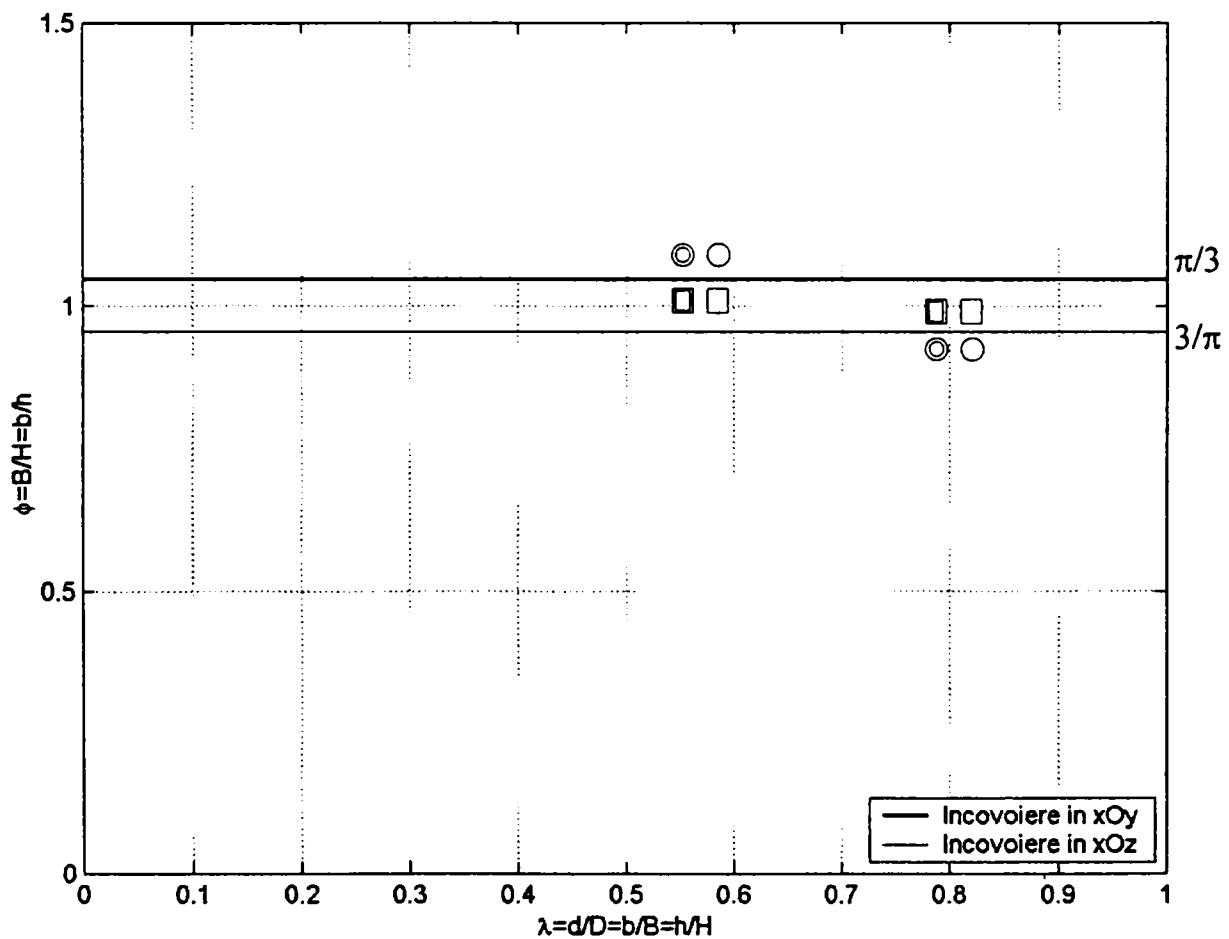


Figura IV.21. Secțiuni omoloage, de arie egală, care asigură rigiditate maximă la încovoiere

acestora, sunt de gradul doi. Reprezentarea grafică a acestor zone pentru comparația bară tubulară având secțiune circulară/bară plină având secțiune rectangulară este prezentată în figura IV.22, (Anexa V.14), iar pentru comparația bară plină având secțiune circulară/bară tubulară având secțiune rectangulară este prezentată în figura V.23, (Anexa V.15).

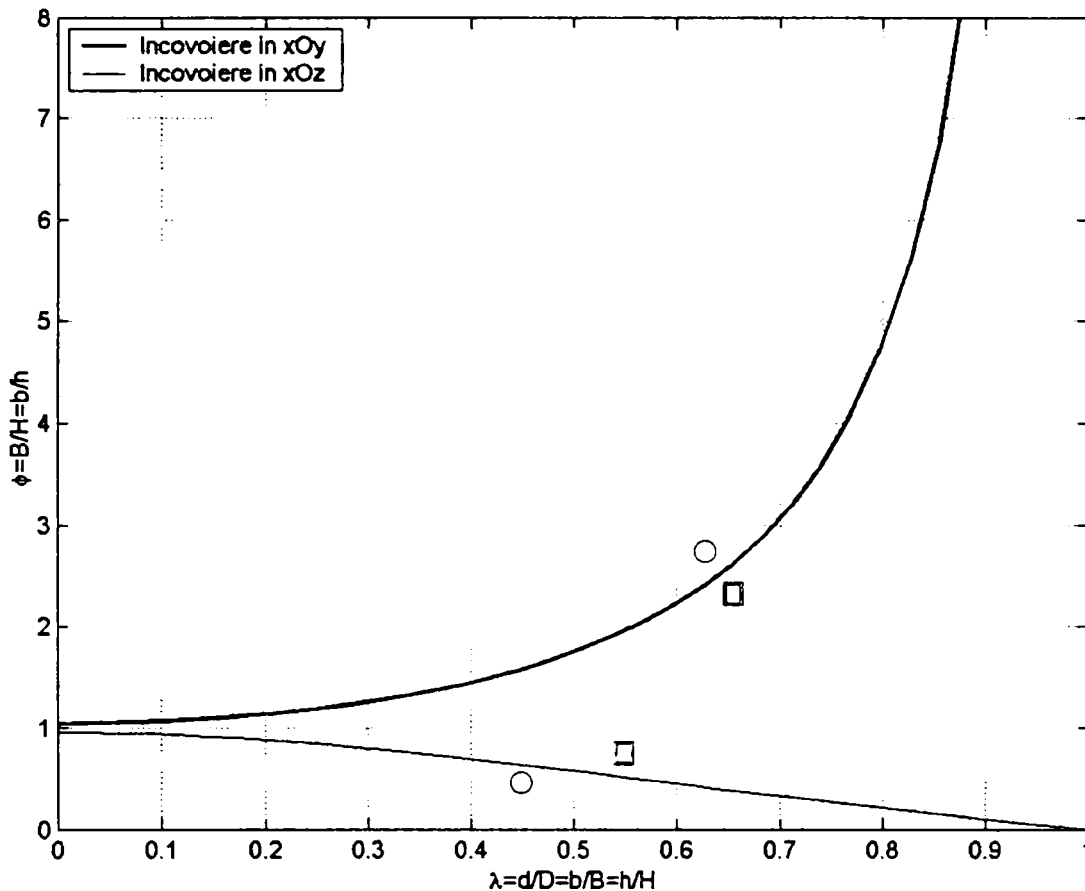


Figura V.22. Secțiuni tubulare rectangulare și pline circulare, de arie egală, care asigură rigiditate maximă la încovoiere

O mențiune aparte necesită secțiunile pătrate. În condițiile date, prin compararea element cu element a matricilor de complianță corespunzătoare, se observă că barele de secțiune circulare pline/tubulare asigură o elasticitate mai mare decât cele omoloage, dar de secțiune pătrată.

Comparațiile între barele de secțiune tubulară circulară/ secțiune plină pătrată, respectiv secțiune plină circulară/ secțiune tubulară pătrată, (afărate coloanelor 2 și 3 ale tabelului V.7), se realizează particularizând $\varphi=1$. Egalarea termenilor diferiți ai elementelor omoloage ale matricilor de complianță permite obținerea imediată a raportului dimensional λ .

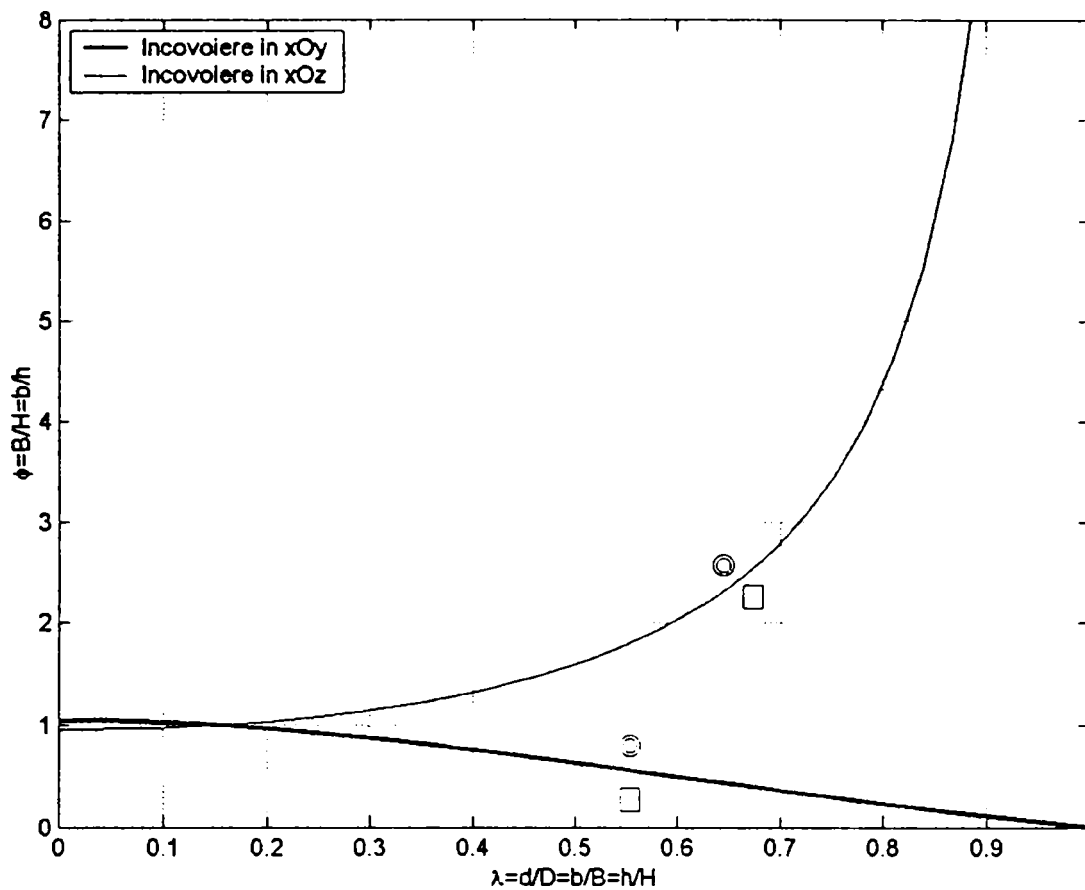


Figura V.23. Secțiuni pline rectangulare și tubulare circulare, de arie egală, care asigură rigiditate maximă la încovoiere

Astfel, pentru primul caz, (secțiune tubulară circulară/ secțiune plină pătrată), se obține:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi - 3}{\pi + 3}} \cong 0.1518 \quad (\text{V.23})$$

Aceasta permite formularea concluziei că, pentru valori ale raportului λ dintre dimensiunea interioară și cea exterioară inferioare celei date de relația (V.23), barele pline de secțiune pătrată sunt mai rigide decât cele tubulare de secțiune circulară, la arii egale ca valoare. Valoarea $\lambda \cong 0.1518$ corespunde punctului de intersecție al celor două curbe din figura V.22 cu orizontala $\varphi=1$. Fizic, aceasta înseamnă că secțiunea tubulară circulară având $\lambda \cong 0.1518$ asigură aceeași rigiditate în ambele plane ca și secțiunea plină pătrată.

Relația de calcul pentru determinarea valorii numerice a laturii secțiunii pătrate pline corespunzătoare, se obține egalând expresiile de calcul ale ariilor, date în tabelul V.5:

$$H = \sqrt{\pi(1 - \lambda^2)} D^2 \quad (\text{V.24})$$

Particularizând pentru $\lambda \cong 0.1518$, latura secțiunii pătrate pline care asigură aceeași

rigiditate ca și cea circulară tubulară, la aceeași arie, rezultă ca fiind:

$$H = 1.7519D \quad (\text{V.25})$$

Pentru cazul al doilea al comparației, (secțiune plină circulară/ secțiune tubulară pătrată), se obține ecuația:

$$\lambda = \sqrt{\frac{3 - \pi}{3 + \pi}} \quad (\text{V.26})$$

care are nu are rădăcini reale. Aceasta semnifică faptul că, la arii egale ca valoare, nu există secțiune circulară plină care să asigure aceeași rigiditate ca și secțiunile tubulare pătrate. Figura V.22 confirmă afirmația precedentă: se observă că secțiunile tubulare pătrate ($\varphi=1$) au rigiditate mai mare decât cele circulare pline, indiferent de valoarea raportului λ .

MATLAB permite vizualizarea prin suprapunere a funcțiilor $\varphi=\varphi(\lambda)$ care reprezintă granițele domeniilor de optim analizate distinct anterior. Acest tip de reprezentare, (figura V.24), (Anexa V.16), facilitează selecția tipului de secțiune transversală optim al barei care asigură rigiditatea maximă într-unul din planele longitudinale de simetrie al barei, sau în ambele plane. Utilizarea acestui mod de reprezentare vizuală a rezultatelor comparației permite alegerea formei geometrice a secțiunii transversale care asigură o rigiditate mai mare după o anumită direcție, într-un plan longitudinal de simetrie a barei, sau verificarea corectitudinii unor opțiuni preliminare asupra formei și dimensiunilor secțiunii transversale a barei, urmată de modificările conforme rigidității/complianței dorite a barei. O altă posibilitate oferită de acest tip de reprezentare este cea de determinare a unei tipodimensiuni a secțiunii transversale care să asigura rigiditatea cea mai ridicată, în condițiile unui raport φ sau λ impus.

Este necesar a se sublinia că, după alegerea tipodimensiunii secțiunii transversale a barei, deci implicit a rapoartelor φ și λ , valoarea diametrului exterior al secțiunii tubulare sau, respectiv, cea a laturii mari a secțiunilor rectangulare se determină în funcție de valoarea numerică a ariei obținute prin calculul de rezistență, cu relația corespunzătoare, (V.18) sau (V.19).

În cele anterior prezentate, s-au comparat bare de secțiuni diferite, prin prisma comportamentului la încovoire.

Comportamentul acestora la torsiune necesită o abordare distinctă, fapt pentru care,

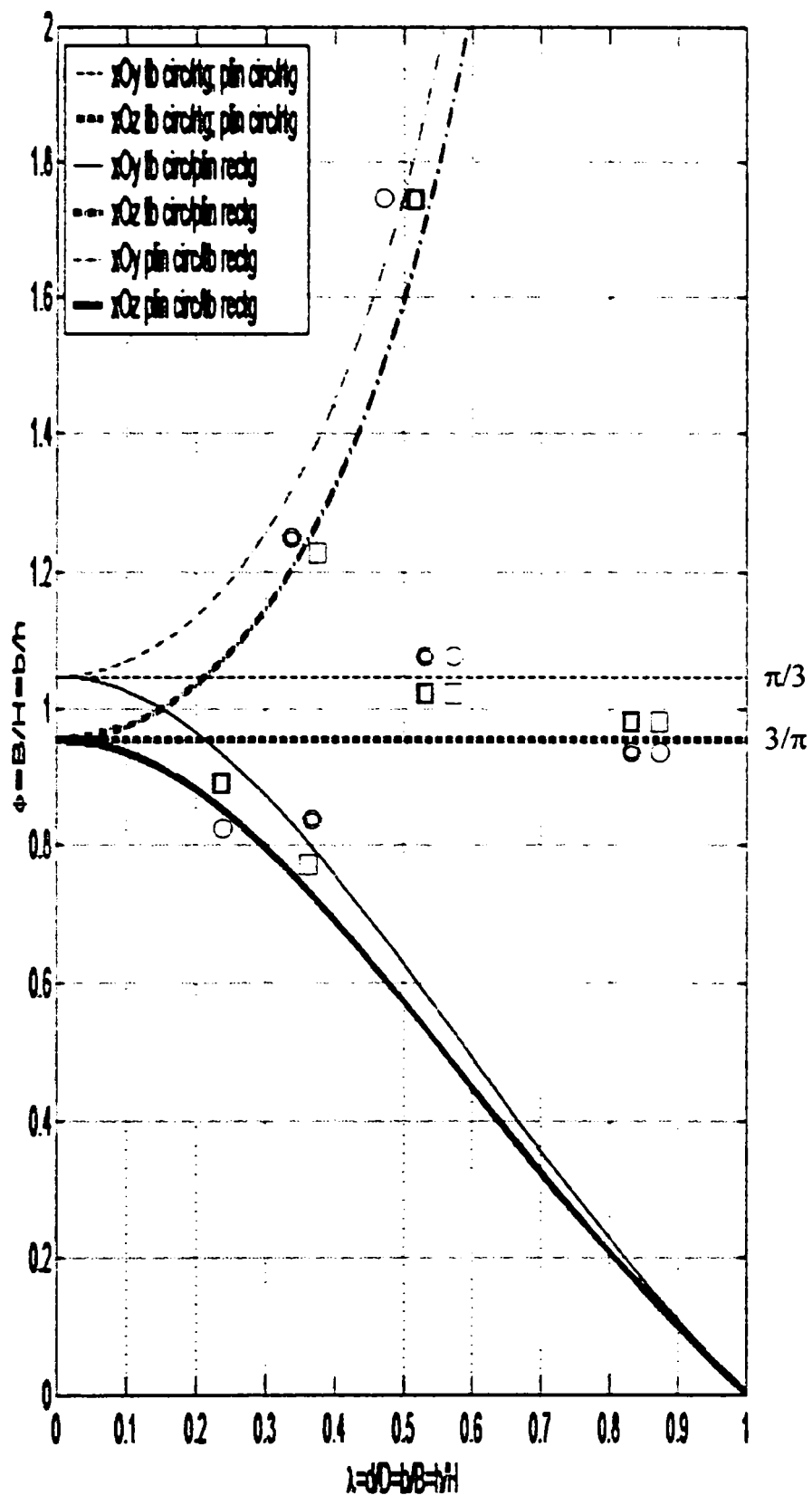


Figura V.24. Secțiuni de arie egală, care asigură rigiditate maximă la încovoiere

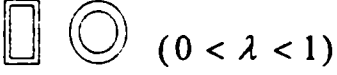
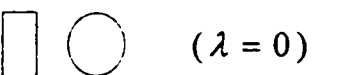


nu a fost cuprins în tabelul V.7. Relațiile obținute prin egalarea termenilor corespunzători

ai matricilor de complianță aferente fiecărui tip de secțiune analizat și soluțiile acestora sunt redată în tabelul V.8. Întrucât valoarea maximă a raportului u este:

$$u = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} = 1,$$

ecuațiile din tabelul V.8 nu au soluții reale. Ca urmare, nu se pot realiza comparații privind comportamentul la torsiune, de maniera utilizată în cazul comportamentului la încovoiere.

Tabelul V.8

Secțiunile comparate	 $(0 < \lambda < 1)$  $(\lambda = 0)$		
Condiția de comportare identică la torsiune și soluțiile acestora	$\frac{3\varphi}{1 + \varphi^2} = \frac{\pi}{2}$ $\varphi_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - \pi^2}}{\pi}$	$\frac{3\varphi}{1 + \varphi^2} = \frac{\pi \cdot u}{2}$ $\varphi_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - \pi^2 u^2}}{\pi \cdot u}$	$\frac{3\varphi}{1 + \varphi^2} \cdot u = \frac{\pi}{2}$ $\varphi_{1,2} = \frac{3u \pm \sqrt{9u^2 - \pi^2}}{\pi}$

Se propune pentru selecția secțiunii optime, în acest caz, o metodă adaptată din teoria cercetării operaționale, [And-86],[Bac-88].

V.5.3. Determinarea secțiunii transversale optime a elementului dispozitivului de ghidare modelat ca bară încastrată, de secțiune constantă

Selecția optimală a formei și dimensiunii secțiunii transversale a barei încastrate (figura V.1) care modelează elementul dispozitivului de ghidare al robotului, dintre cele șase secțiuni propuse, constituie o problemă de decizie multiatribut, [And-86],[Bac-88].

Metoda de decizie multiatribut utilizată în soluționarea unei probleme trebuie să fie adecvată tipului de problemă, tipului și gradului de complexitate al informației de care se dispune.

În spațiul deciziilor multiatribut, atunci când acesta este considerat bidimensional, se

operează cu, [And-86]:

$$\text{-mulțimea variantelor} \quad V = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}; \quad (\text{V.27})$$

$$\text{-mulțimea criteriilor} \quad C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}; \quad (\text{V.28})$$

$$\text{-matricea consecințelor} \quad A_{k \times n} = \{a_{ij}\}, \quad (\text{V.29})$$

unde $i=1, 2, \dots, k$, $j=1, 2, \dots, n$, vectorul a_{ij} reprezentând rezultatul evaluării variantei V prin criteriul C_j .

Matricea consecințelor conține, în general, date neomogene, numerice sau nenumerice, fiind necesară omogenizarea prealabilă a acestora. Frecvent, omogenizarea datelor se realizează prin procedeul de normalizare, care transformă matricea consecințelor $A_{k \times n}$ într-o matrice $R_{k \times n} = \{r_{ij}\}$, unde $i=1, 2, \dots, k$, $j=1, 2, \dots, n$, cu r_{ij} cuprins în intervalul $[0,1]$. Modul în care se realizează normalizarea trebuie să fie adecvat aplicației în sine.

Determinarea soluției unei probleme de decizie multiatribut constă fie în ordonarea variantelor, fie în găsirea variantei optime direct. Decidentul este cel care optează pentru o anumită metodă sau pentru mai multe, urmând a compara rezultatele. Experiența decidentului, cantitatea și calitatea datelor disponibile sunt factori care afectează semnificativ calitatea procesului de decizie.

În cele ce urmează, se va determina secțiunea transversală optimă a barei simplu încastrate care modelează elementul dispozitivului de ghidare al robotului. Aceasta se va realiza pentru bare de aceeași greutate, deci având aceeași valoare a ariei secțiunii transversale.

Mulțimea variantelor disponibile (V.27) este, pentru cazul considerat,

$$V = \{V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \quad V_6\} \quad (\text{V.30})$$

fiind alcătuită din cele șase bare identice ca lungime, material și valoare dimensională a ariei secțiunii transversale, dar având forme diferite ale acestora, după cum urmează:

- V_1 corespunde barei pline de secțiune transversală circulară;
- V_2 corespunde barei pline de secțiune transversală rectangulară;
- V_3 corespunde barei pline de secțiune transversală pătrată;
- V_4 corespunde barei tubulare de secțiune transversală circulară;
- V_5 corespunde barei tubulare de secțiune transversală rectangulară;

- V_6 corespunde barei tubulare de secțiune transversală pătrată.

Criteriile (V.28) pe baza cărora urmează a se realiza selecția variantei optime constituie mulțimea criteriilor

$$C = \{C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6\} \quad (V.31)$$

ale cărei elemente sunt deplasările secțiunii încărcate a barei de-a lungul și în jurul celor trei axe. Așadar:

- $C_1 = \Delta q_1$ deplasarea secțiunii extreme a barei de-a lungul axei Ox ;
- $C_2 = \Delta q_2$ deplasarea secțiunii extreme a barei de-a lungul axei Oy ;
- $C_3 = \Delta q_3$ deplasarea secțiunii extreme a barei de-a lungul axei Oz ;
- $C_4 = \Delta q_4$ deplasarea secțiunii extreme a barei în jurul axei Ox ;
- $C_5 = \Delta q_5$ deplasarea secțiunii extreme a barei în jurul axei Oy ;
- $C_6 = \Delta q_6$ deplasarea secțiunii extreme a barei în jurul axei Oz .

Mulțimea criteriilor este deci, în cazul de față, matricea deformațiilor elastice ale barei dată de relația (V.5), sau (V.5'). Aceasta se poate scrie în același timp ca produsul dintre matricea de complianță a barei, de dimensiune 6×6 , cu torsorul forțelor exterioare generalizate, de dimensiune 6×1 :

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{T}}_{f_g}^B \quad (V.10')$$

În condițiile de identitate de material, greutate și lungime a barei, la care se adaugă și cea de solicitări externe identice, elementul care generează diferențierea de comportament al barei este matricea de complianță a acesteia, dată de relația (V.9). Ca urmare, matricii de complianță a fiecărei bare i se poate acorda calitatea de criteriu.

Relațiile (V.10') și (V.10'') sugerează posibilitatea alocării calității de criteriu fiecărui element al matricii de complianță, ceea ce permite compararea tuturor celor șase variante de secțiuni, cu luarea în considerare inclusiv a comportamentului la torsiune.

În teoria cercetării operaționale, importanța criteriilor este evaluată prin intermediul coeficienților de importanță, [And-86]. Dacă nu sunt impuse preferințe asupra criteriilor, acești coeficienți de importanță se consideră egali cu unitatea.

În cazul de față se caută secțiunea transversală care asigură deplasări totale minime ale extremității încărcate ale barei considerate, fără a specifica preferințe pentru o anumite

direcție, plan sau solicitare.

Sunt utilizabile, pentru acest tip de probleme, metodele de decizie multiatribut care utilizează o anumă "distanță" în construirea ierarhiilor. Dintre acestea, metoda TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) se bazează pe ideea că varianta optimă trebuie să aibe distanța minimă față de soluția ideală.

Soluția ideală a problemei considerate este cea a barei perfect rigide, deci având deformații și, implicit, deplasări nule. Ca urmare se propune o procedură derivată din metoda TOPSIS, adaptată cazului concret considerat.

Singura condiționare impusă din start fiind cea a egalității valorii numerice a ariei secțiunii transversale, matricea de complianță (V.9) a elementului de tip bară încastrată se poate scrie sub forma:

$${}^B \underline{C}_A = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot [c_{ij}] \quad \text{unde } i=1, \dots, 6 \quad j=1, \dots, 6 \quad (\text{V.32})$$

sau, sub formă dezvoltată:

$${}^B \underline{C}_A = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 & c_{26} \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{53} & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & c_{62} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{V.32}')$$

unde, matricea de complianță fiind simetrică: $c_{26}=c_{62}$ și $c_{35}=c_{53}$.

Particularizând pentru cele șase variante considerate, se obține:

$$\underline{C}_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l \cdot A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3} \pi & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2} \pi \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3} \pi & 0 & -\frac{l^2}{2} \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l(1+\mu) \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} \pi & 0 & l \cdot \pi & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} \pi & 0 & 0 & 0 & l \cdot \pi \end{bmatrix} \quad (\text{V.32}^1)$$

$$\underline{C}_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l \cdot A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3} \cdot 3\varphi & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2} \cdot 3\varphi \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3} \cdot 3 & 0 & -\frac{l^2}{2} \cdot 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l(1+\mu) \cdot \frac{3\varphi}{1+\varphi^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} \cdot 3 & 0 & l \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} \cdot 3\varphi & 0 & 0 & 0 & l \cdot 3\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{V.32}^{\text{II}})$$

$$\underline{C}_3 = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l \cdot A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3} \cdot 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2} \cdot 3 \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3} \cdot 3 & 0 & -\frac{l^2}{2} \cdot 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l(1+\mu) \cdot \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} \cdot 3 & 0 & l \cdot 3 & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} \cdot 3 & 0 & 0 & 0 & l \cdot 3 \end{bmatrix} \quad (\text{V.32}^{\text{III}})$$

$$\underline{C}_4 = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l \cdot A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3} \cdot u \cdot \pi & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2} \cdot u \cdot \pi \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3} \cdot u \cdot \pi & 0 & -\frac{l^2}{2} \cdot u \cdot \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l(1+\mu) \cdot u \cdot \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} \cdot u \cdot \pi & 0 & l \cdot u \cdot \pi & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} \cdot u \cdot \pi & 0 & 0 & 0 & l \cdot u \cdot \pi \end{bmatrix} \quad (\text{V.32}^{\text{IV}})$$

$$\underline{C}_5 = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l \cdot A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3} u \cdot 3\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2} u \cdot 3\varphi \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3} u \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} u \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l(1+\mu) \cdot u \cdot \frac{3\varphi}{1+\varphi^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} u \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 & 0 & l \cdot u \cdot \frac{3}{\varphi} & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} u \cdot 3\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & l \cdot u \cdot 3\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{V.32}^V)$$

$$\underline{C}_6 = \frac{1}{E} \cdot \frac{4}{A^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l \cdot A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3} u \cdot 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2} u \cdot 3 \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{3} u \cdot 3 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} u \cdot 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l(1+\mu) \cdot u \cdot \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2} u \cdot 3 & 0 & 0 & l \cdot u \cdot 3 & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} u \cdot 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & l \cdot u \cdot 3 \end{bmatrix} \quad (\text{V.32}^{VI})$$

unde φ și u sunt date de relațiile (V.14), (V.20) și respectiv (V.15).

Normalizarea matricilor (V.32) cu metodele propuse în teoria operațională, atât prin normalizări liniare cât și prin transformări vectoriale implică împărțirea fiecărui element al matricii de complianță cu suma elementelor fiecărei linii, cu suma inverselor elementelor fiecărei linii, sau cu combinații ale acestora. În cazul de față, acest procedeu reduce gradul de generalitate al comparațiilor, întrucât la normalizare se reduc, prin simplificare, termenii φ și u . Ca urmare, comparația comportamentului barelor tubulare cu cel al barelor pline se elimină, devenind posibilă doar compararea barelor omoloage.

Se acceptă, pentru scopul propus, o simplificare a matricilor de complianță care nu

reduce gradul de generalitate al problemei, prin împărțirea acestora cu produsul ce apare ca factor comun în expresiile (V.32), (V.32'), (V.32^I), ..., (V.32^{VI}).

Secțiunea optimă, dintre cele comparate, este cea care asigură minimul expresiei:

$$S = \sqrt{\sum (c_{y_{ix}} - c_{y_{i,ix}})^2} \quad (\text{V.33})$$

unde termenul $c_{y_{ix}}$ aparține matricii de complianță corespunzătoare variantei V_k , $k=1, \dots, 6$, iar termenul $c_{y_{i,ix}}$ aparține matricii de complianță a barei perfect rigide, deci $c_{y_{i,ix}} = 0$.

În consecință, secțiunea optimă este cea pentru care reprezentarea grafică a expresiei (V.33) este cea mai apropiată de abscisa reprezentării.

În condițiile egalității valorii numerice a ariei, elementele c_{II} ale matricilor tuturor barelor analizate sunt identice, deci nu contribuie la departajarea comportamentului acestora. Fiind irelevante pentru analiza comparativă elementele c_{II} pot fi excluse din relația (V.33).

Compararea comportamentului celor șase bare având toate cele șase forma ale secțiunii transversale, se va analiza cu ajutorul modulului de calcul simbolic al pachetului soft MATLAB.

Pentru simplificarea scrierii, comparația se va realiza pentru bare având lungimea egală cu unitatea. Fiecare tip de secțiune implică particularizarea relației (V.33) prin alocarea valorilor corespunzătoare ale rapoartelor u și φ . Se obțin astfel relațiile:

- pentru bara plină de secțiune transversală circulară

$$S = \pi \sqrt{(1 + \mu)^2 + \frac{29}{9}} \quad (\text{V.33}^I)$$

- pentru bara tubulară de secțiune transversală circulară

$$S = u \cdot \pi \sqrt{(1 + \mu)^2 + \frac{29}{9}} \quad (\text{V.33}^{II})$$

- pentru bara plină de secțiune transversală rectangulară

$$S = \sqrt{\frac{29}{2} \left(\varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2} \right) + 4(1 + \mu)^2 + \frac{9\varphi^2}{(1 + \varphi^2)^2}} \quad (\text{V.33}^{III})$$

- pentru bara tubulară de secțiune transversală rectangulară

$$S = u \sqrt{\frac{29}{2} \left(\varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2} \right) + 4(1 + \mu)^2 + \frac{9\varphi^2}{(1 + \varphi^2)^2}} \quad (\text{V.33}^{\text{IV}})$$

- pentru bara plină de secțiune transversală pătrată

$$S = \sqrt{29 + 9(1 + \mu)^2} \quad (\text{V.33}^{\text{V}})$$

- pentru bara tubulară de secțiune transversală pătrată

$$S = u \sqrt{29 + 9(1 + \mu)^2} \quad (\text{V.33}^{\text{VI}})$$

Reprezentarea grafică a relațiilor (V.33^I), ..., (V.33^{VI}) realizată cu ajutorul modulului de calcul simbolic MATLAB, (Anexa V.17), redată în figura V.25, permite alegerea secțiunii transversale optime.

Zona notată cu \mathcal{A} , reprezentată la scară mărită în figura V.26, relevă faptul că, pentru condițiile impuse de *arii egale* și existența a relațiilor (V.14), ..., (V.17):

$$\varphi > 1 \quad (\text{V.16})$$

$$0 \leq \lambda < 1 \quad (\text{V.17})$$

secțiunea transversală care asigură cele mai mici deformații este:

- secțiunea tubulară rectangulară pentru $0 < \varphi < 0.984$,
- secțiunea tubulară circulară pentru $0.984 \leq \varphi < 1$,
- secțiunea tubulară circulară și cea tubulară rectangulară pentru $\varphi = 1$,
- secțiunea tubulară rectangulară pentru $\varphi \geq 1$.

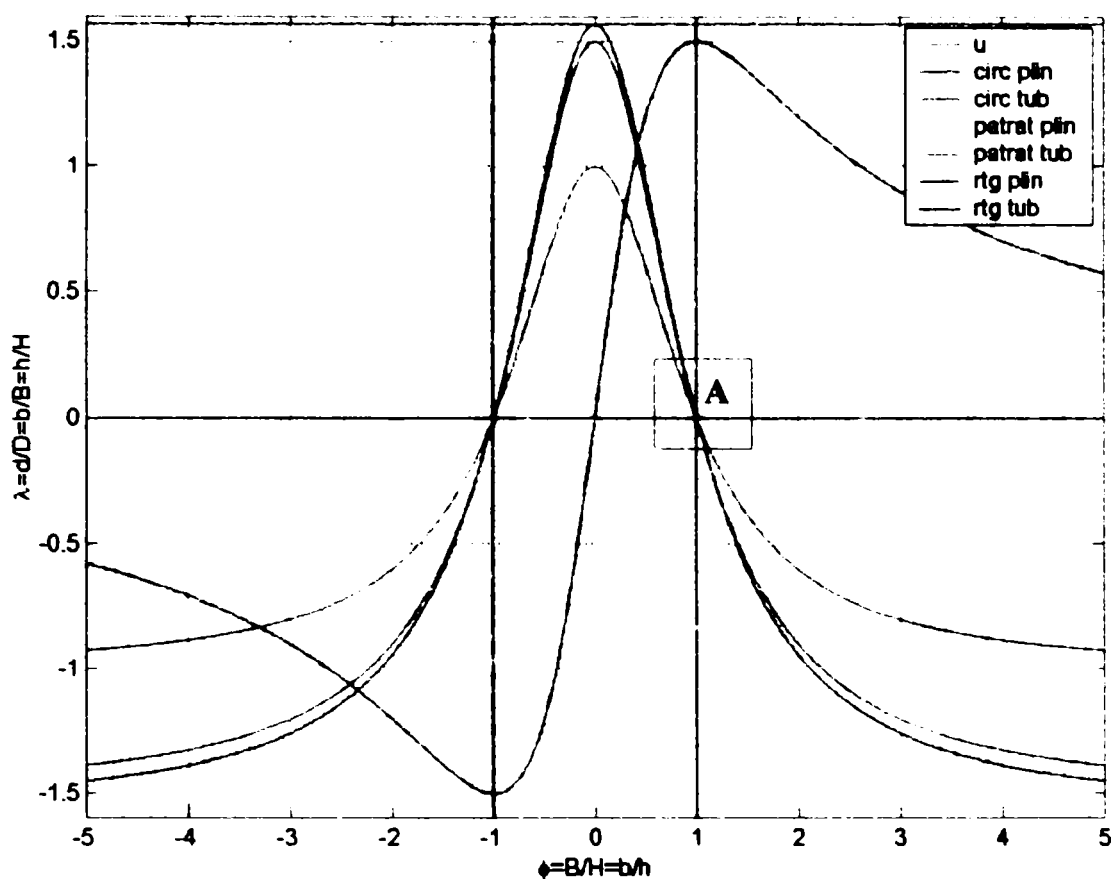


Figura V.25. Reprezentarea grafică a funcției S pentru secțiunile considerate

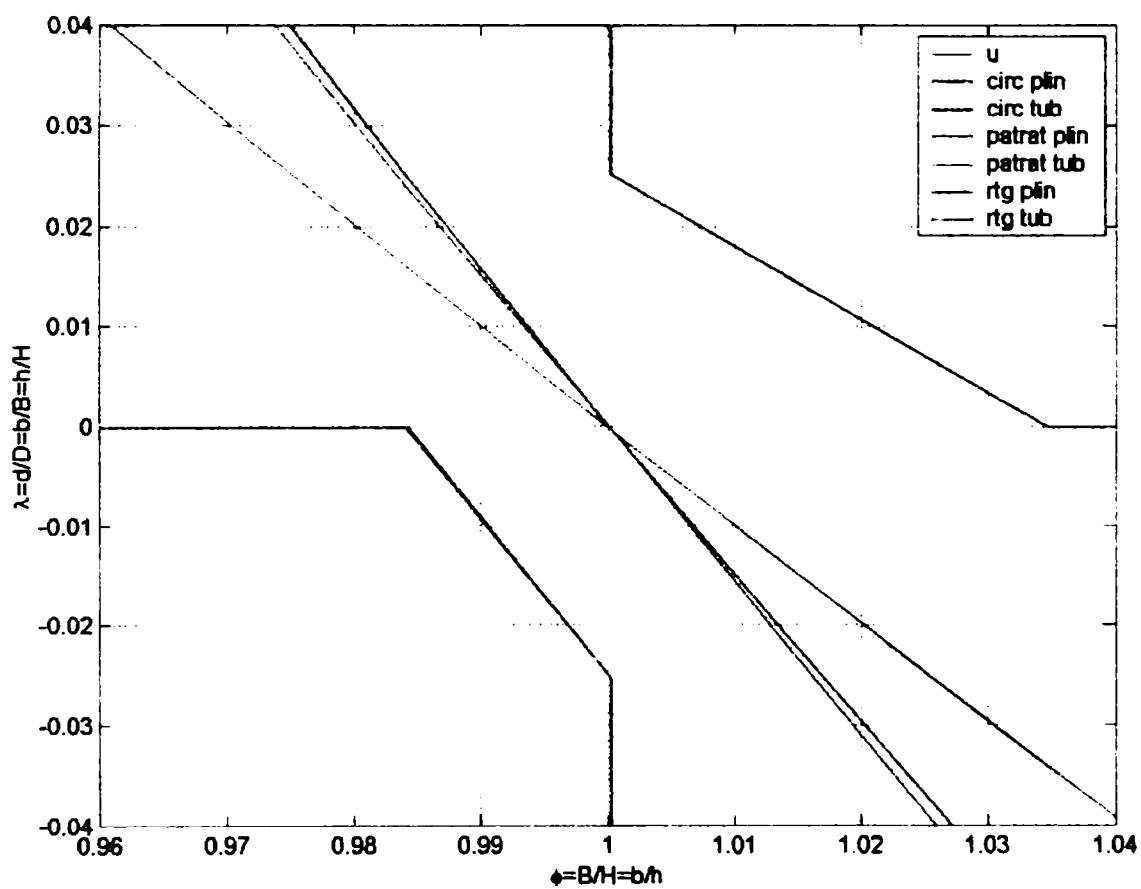


Figura V.26. Reprezentarea grafică a funcției S pe domeniul marcat A în figura V.25

V.6. Modelarea elementelor dispozitivului de ghidare ca bare spațiale simplu încastrate, omogene, având secțiune transversală variabilă

V.6.1. Modelarea elementelor dispozitivului de ghidare ca bare de egală rezistență la încovoiere

V.6.1.1. Introducere

Se consideră o bară omogenă, (figura V.27), încastrată la extremitatea A și încărcată la extremitatea liberă, B , cu un torsor dat de relația (V.3):

$$\underline{\mathfrak{T}}_{\mathcal{A}B}^B = \left[F_x^B \quad F_y^B \quad F_z^B \quad M_x^B \quad M_y^B \quad M_z^B \right] \quad (V.3)$$

Componentele acesteia produc asupra barei solicitările:

- întindere/compresiune – generată de componenta axială F_x ;
- torsiune în jurul axei A_x – generată de componenta M_x ;
- încovoiere în planul xAy – generată de componentele F_y și M_z ;
- încovoiere în planul xAz – generată de componentele F_z și M_y .

Întrucât forța F_x și momentul M_x au valori constante în lungul barei, eforturile generate de acestea vor fi constante și egale în fiecare secțiune a barei. Spre deosebire de acestea, componentele F_y și F_z ale forței F , generează momente încovoietoare care variază liniar de-a lungul barei, [B].

Uzual, barele astfel încărcate se dimensionează la valoarea maximă a solicitărilor. În consecință, materialul este utilizat neeconomic. Pentru cazul considerat, dimensionarea secțiunii barei se realizează pentru momentele de încovoiere din încastrare. Soluția dimensionării corecte și fără risipă de material constă în utilizarea barelor de egală rezistență. Acestea au secțiunea variabilă dimensional de-a lungul axei longitudinale, după o anume lege, astfel încât în fibrele extreme ale oricărei secțiuni efortul unitar σ_0 să fie

aceiași. Aceasta se realizează prin variația modului de rezistență al secțiunii după aceeași lege ca și cea a momentului încovoietor.

V.6.1.2. Bara plină, de egală rezistență, având de secțiune transversală rectangulară

Se acceptă pentru bara din figura V.27 o secțiune rectangulară plină, ale cărei laturi sunt în raportul (V.14). Modulul de rezistență al secțiunii, definit ca raportul dintre momentul de inerție axial al acesteia și distanța maximă de la axa considerată la fibra cea mai îndepărtată, [Buz-80], este:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (\text{V.34})$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \quad (\text{V.35})$$

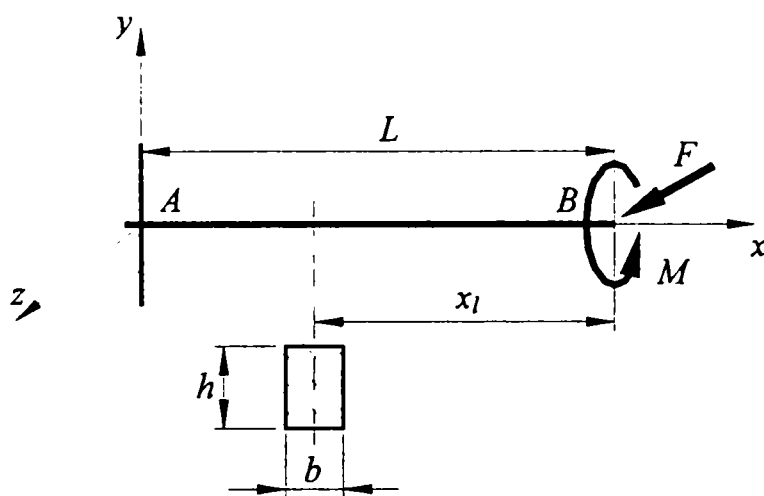


Figura V.27. Bară omogenă încastrată, sollicitată cu torsor $\{F, M\}$

cea ce pentru secțiunea rectangulară plină se poate explicita de maniera:

$$W_z = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \quad (\text{V.36})$$

$$W_y = \frac{b^3 h}{12 \frac{b}{2}} = \frac{b^2 h}{6} \quad (\text{V.37})$$

sau luând în considerare raportul laturilor secțiunii:

$$W_z = \frac{\varphi h^3}{6} \quad (\text{V.38})$$

$$W_y = \frac{\varphi^3 h^3}{6} \quad (\text{V.39})$$

Modulul de rezistență al secțiunii aflate la distanța " x_l " de extremitatea liberă a barei se poate scrie ca:

$$W(x) = \frac{M(x)}{\sigma_0} \quad (\text{V.40})$$

unde: - $M(x)$ este momentul încovoietor în secțiunea " x_l ",

- σ_0 este efortul unitar maxim,

Solicitarea de încovoiere a barei în planul xAy este generată de momentul:

$$M(x) = M_z + F_y \cdot x \quad (\text{V.41})$$

Înlocuind relația (V.41) în relația (V.40) și egalând cu relația (V.36) se obține:

$$\frac{\varphi h^3}{6} = \frac{M_z + F_y \cdot x}{\sigma_0} \quad (\text{V.42})$$

de unde rezultă legea de variație a laturii " h " a secțiunii în funcție de distanța la care se află față de extremitatea liberă a barei:

$$h = \left[\frac{6M_z}{\varphi\sigma_0} + \frac{6F_y}{\varphi\sigma_0} x \right]^{1/3} \quad (\text{V.43})$$

Pentru extremitățile barei se obține:

$$h_{\max} = h_{AxAy} = \left[\frac{6M_z}{\varphi\sigma_0} + \frac{6F_y l}{\varphi\sigma_0} \right]^{1/3} \quad (\text{V.44})$$

$$h_{\min} = h_{BxAy} = \frac{6M_z}{\varphi\sigma_0} \quad (\text{V.45})$$

Procedând similar pentru încovoierea în planul xAz , generată de momentul

$$M_x = M_y + F_z \cdot x \quad (\text{V.476})$$

se obține legea de variație a laturii " h " a secțiunii sub forma:

$$h = \left[\frac{6M_y}{\varphi^2\sigma_0} + \frac{6F_z}{\varphi^2\sigma_0} x \right]^{1/3} \quad (\text{V.47})$$

La extremitățile barei, latura secțiunii va avea valorile:

$$h_{\max} = h_{AxAz} = \left[\frac{6M_y}{\varphi^2\sigma_0} + \frac{6F_z l}{\varphi^2\sigma_0} \right]^{1/3} \quad (\text{V.48})$$

$$h_{\min} = h_{BxAz} = \frac{6M_y}{\varphi^2\sigma_0} \quad (\text{V.49})$$

Cele anterior prezentate permit observația că, pentru valori ale momentelor $M_y = M_z$

rezultă:

$$h^3_{BxAy} = h^3_{BxAz} \cdot \varphi \quad (\text{V.50})$$

ceea ce semnifică faptul că:

- pentru $\varphi > 1$ dimensionarea se va realiza din solicitarea de încovoiere în planul xAy ;
- pentru $\varphi = 1$ solicitările de încovoiere sunt egale în cele două plane;
- pentru $\varphi < 1$ dimensionarea se va realiza la încovoiere în planul xAz .

Dacă și componentele $Fy = Fz$ se obține:

$$h^3_{AxAy} = h^3_{AxAz} \cdot \varphi \quad (\text{V.51})$$

Dimensionarea se va realiza, funcție de valoarea raportului φ , similar cu cele precizate pentru latura „ h ” a secțiunii minime.

V.6.1.3. Bara tubulară, de egală rezistență, având secțiune transversală rectangulară

Considerând, în cazul secțiunii tubulare rectangulare, relațiile:

$$\varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h} \quad (\text{V.14})$$

unde cu B și H s-au notat latura mică și cea mare a secțiunii iar cu b și h s-au notat latura mică și cea mare a golului secțiunii se pot scrie modulele de rezistență sub forma:

$$W_z = \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \quad (\text{V.52})$$

$$W_z = \frac{\varphi}{6} \cdot \frac{H^4 - h^4}{H} \quad (\text{V.53})$$

și

$$W_y = \frac{B^3H - b^3h}{6B} \quad (\text{V.54})$$

$$W_y = \frac{\varphi^2}{6} \cdot \frac{H^4 - h^4}{H} \quad (\text{V.55})$$

V.6.1.4. Bara plină, de egală rezistență, având secțiune transversală circulară

Consecință a dublei simetrii a secțiunii transversale a barei, modulul de rezistență va avea forma:

$$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \quad (\text{V.56})$$

Procedând similar cazurilor secțiunilor tubulare, se obține pentru solicitările de încovoiere, legea de variație a diametrului secțiunii cu lungimea barei, sub forma:

$$\text{- încovoiere în planul } xAy: \quad D = \left[\frac{32}{\pi \sigma_0} (M_z + F_y \cdot x) \right]^{1/3} \quad (\text{V.57})$$

$$D_{\max} = D_A = \left[\frac{32}{\pi \sigma_0} (M_z + F_y \cdot l) \right]^{1/3} \quad (\text{V.58})$$

$$D_{\min} = D_B = \left[\frac{32}{\pi \sigma_0} M_z \right]^{1/3} \quad (\text{V.59})$$

$$\text{- încovoiere în planul } xAz: \quad D = \left[\frac{32}{\pi \sigma_0} (M_y + F_z \cdot x) \right]^{1/3} \quad (\text{V.60})$$

$$D_{\max} = D_A = \left[\frac{32}{\pi \sigma_0} (M_y + F_z \cdot l) \right]^{1/3} \quad (\text{V.61})$$

$$D_{\min} = D_B = \left[\frac{32}{\pi \sigma_0} M_y \right]^{1/3} \quad (\text{V.62})$$

V.6.1.5. Bara tubulară de egală rezistență, având secțiune transversală circulară







Utilizând relațiile cunoscute din rezistența materialelor, se obține pentru modulul de rezistență al secțiunii transversale tubulare circulare:

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \quad (\text{V.63})$$

V.6.2. Alegerea formei optime a secțiunii elementelor dispozitivului de ghidare modelate ca bare de egală rezistență la încovoiere

Considerentele anterioare pot fi sistematizate, în ceea ce privește forma modulului de rezistență, în tabelul V.9:

Tabelul V.9




















Secțiunea						
Modulul de rezistență (W)	$\frac{\varphi}{6} H^3$	$\frac{\varphi^2}{6} H^3$	$\frac{\varphi}{6} \cdot \frac{H^4 - h^4}{H}$	$\frac{\varphi^2}{6} \cdot \frac{H^4 - h^4}{H}$	$\frac{\pi}{32} D^3$	$\frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$

Se observă din tabelul anterior că, pentru secțiuni având aceeași formă și aceleași dimensiuni, modulul de rezistență este mai mare în cazul secțiunilor transversale pline.




















Tabelul V.9 permite compararea modelului de rezistență al diferitelor secțiuni, în funcție de valoarea raportului φ .

Tabelele V.10 și respectiv V.11 prezintă într-o formă sintetică rezultatele acestor comparații, pentru barele pline solicitate la încovoiere în planul xAy și respectiv xAz .

Tabelul V.10

φ	$0 < \varphi < \frac{3\pi}{16}$	$\varphi = \frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16} < \varphi < 1$	$\varphi = 1$	$\varphi > 1$
Secțiune					
W	 > 	 = 	 < 	 < 	 < 
Secțiune optimă		 sau 			

Tabelul V.11

φ	$0 < \varphi < \sqrt{\frac{3\pi}{16}}$	$\varphi = \sqrt{\frac{3\pi}{16}}$	$\sqrt{\frac{3\pi}{16}} < \varphi < 1$	$\varphi = 1$	$\varphi > 1$
Secțiune					
W	 > 	 = 	 < 	 < 	 < 
Secțiune optimă		 sau 			

Sistematizarea analizei modului de rezistență al barelor cu secțiuni transversale tubulare duce la alte două tabele sintetice, identice tabelelor 4 și 5, în care se înlocuiesc simbolurile grafice ale formei secțiunii pline cu cele corespunzătoare secțiunii tubulare.

V.6.3. Influența secțiunii transversale a barei de egală rezistență la încovoiere asupra, comportamentului acesteia la întindere/compresiune

Efortul unitar efectiv de întindere/compresiune produs într-o bară simplu încastrată solicitată de o forță axială F_x este dat de relația, [Buz-80]:

$$\sigma_{ef} = \frac{F_x}{A_{ef}} \leq \sigma_{adm} \quad (V.64)$$

Pentru o bară de secțiune constantă, efortul unitar efectiv este același în orice secțiune a barei. În cazul barei de egală rezistență la încovoiere, axa secțiunii transversale variază de la valoarea maximă în încastrare (secțiunea A), la cea minimă în extremitatea liberă, (secțiunea B).

În consecință se impune verificarea la întindere/compresiune în secțiunea B:

$$\sigma_{ef_{max}} = \frac{F_x}{A_{ef_{min}}} \leq \sigma_{adm} \quad (V.65)$$

Pentru o secțiune rectangulară plină, admițând raportul (V.14) se poate scrie:

$$A = \varphi h^2(x) \quad (\text{V.66})$$

relație cu care raportul eforturilor unitare efective devine:

$$\frac{\sigma_{efB}}{\sigma_{efA}} = \frac{h_A}{h_B} \quad (\text{V.67})$$

V.6.4. Influența secțiunii transversale a barei de egală rezistență la încovoiere asupra comportării la torsiune

Efortul unitar maxim produs în bara de secțiune constantă ca urmare a acțiunii unui moment de torsiune este:

$$\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_{pef}} \leq \tau_{ef} \quad (\text{V.68})$$

unde $W_{pef} = \frac{I_p}{\text{dist. max}}$ (V.69)

dist. max. -D/2 secțiune circulară (V.70)

-h/2 secțiune rectangulară cu $\varphi < 1$ (V.71)

-b/2 secțiune rectangulară cu $\varphi > 1$ (V.72)

iar $I_p = I_y + I_z$ care se poate scrie:

$$I_p = \frac{bh^3 + b^3h}{12} = \frac{\varphi(1 + \varphi^2)h^4}{12} \quad (\text{V.73})$$

În cazul barei de egală rezistență, momentul de torsiune M_x este constant de-a lungul barei, dar, ca urmare a variației dimensiunii transversale a acesteia, eforturile unitare variază de la o secțiune la alta invers proporțional cu dimensiunile acesteia.

Pentru secțiunea rectangulară, modulul polar de rezistență al secțiunii este:

$$\left. \begin{array}{l} \text{-pentru } \varphi < 1 \quad W_p = \frac{I_p}{\frac{h}{2}} = \frac{\varphi(1 + \varphi^2)h^3}{6} \\ \text{-pentru } \varphi > 1 \quad W_p = \frac{I_p}{\frac{b}{2}} = \frac{\varphi(1 + \varphi^2)h^3}{6} \end{array} \right\} \quad (\text{V.74})$$

unde $h = h(x)$.

Verificarea la torsiune este necesară în secțiunea minimă, deci:

$$\tau_{efB} = \frac{M_x}{W_{Pef}} \leq \tau_{adm} \quad (V.75)$$

După înlocuirea relațiilor (V.67) în (V.68) se poate concluziona că:

$$\tau_{efB, \varphi > 1} = \tau_{efB, \varphi < 1} \cdot \varphi \quad (V.76)$$

V.6.5. Concluzii privind modelarea elementelor dispozitivului de ghidare ca bare cu secțiune transversală variabilă

Cele anterior prezentate evidențiază observațiile:

- ✓ dimensionarea secțiunii transversale a barei se va realiza în secțiunea încastrată, pentru solicitarea la încovoiere;
- ✓ secțiunea minimă este în extremitatea liberă (încărcată) a barei încastrate;
- ✓ este necesară verificarea condiției de rezistență, pentru secțiunea minimă, atât la compresiune / întindere cât și la torsiune;
- ✓ alegerea formei optime a secțiunii transversale a elementului dispozitivului de ghidare modelat ca bară de egală rezistență la încovoiere se poate realiza numai după analiza variației modului de rezistență al secțiunii cu parametrii dimensionali ai acesteia, (tabelul V.9, tabelul V.10);
- ✓ conform rezistenței materialelor, [Buz-80], prin calcul rezultă pentru aria secțiunii transversale libere a barei încastrate o valoare nulă, deci neutilizabilă. În majoritatea cazurilor aria secțiunii libere a barei se alege ca având cca.50% din valoarea celei din încastrare.

Realizarea elementelor dispozitivului de ghidare ca bare de egală rezistență implică dificultăți tehnologice apreciabile, care duc implicit, la creșterea costurilor. Aceleași motivații de natură tehnologică duc la legi de variație a secțiunii transversale diferite de cele rezultate prin calcul. Uzual, aceste legi sunt approximate ca drepte.

Avantajul principal al utilizării unor astfel de elemente este însă, cel al realizării unei structuri mai ușoare a sistemului mecanic al robotului.

V.7. Aprecierea comportamentului cinetoelastostatic al elementelor omogene de secțiune constantă

Comportamentul cinetoelastostatic al unui solid omogen având 6 grade de libertate, cu comportare elastică, aflat sub acțiunea solicitărilor exterioare, se poate aprecia prin prisma deformațiilor acestuia. Matricea deformațiilor de natură elastică care apar sub acțiunea forțelor exterioare este dată de relația:

$$\underline{\Delta T} = \underline{C} \cdot \underline{\mathfrak{J}}_{fg} \quad (\text{V.77})$$

unde \underline{C} este matricea de complianță a solidului, iar $\underline{\mathfrak{J}}_{fg}$ este torsorul forțelor exterioare generalizate aplicate acestuia. Relația (V.77) se poate scrie sub forma generală dezvoltată:

$$\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \\ \Delta q_4 \\ \Delta q_5 \\ \Delta q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (\text{V.78})$$

Expresia (V.78) relevă faptul că fiecare element al matricii de complianță quantifică contribuția fiecărei componente a torsorului forțelor exterioare generalizate la deplasarea liniară sau unghiulară de-a lungul sau/și în jurul axelor sistemului de referință atașat solidului. Relația anterioară permite scrierea fiecărei deformații în parte, de maniera:

$$\begin{cases} \Delta q_1 = c_{11} \cdot F_x + c_{12} \cdot F_y + c_{13} \cdot F_z + c_{14} \cdot M_x + c_{15} \cdot M_y + c_{16} \cdot M_z \\ \dots \\ \Delta q_6 = c_{61} \cdot F_x + c_{62} \cdot F_y + c_{63} \cdot F_z + c_{64} \cdot M_x + c_{65} \cdot M_y + c_{66} \cdot M_z \end{cases} \quad (\text{V.79})$$

Din relația (V.78) se observă că matricea de complianță este similară unei matrici Jacobi. Elementele acesteia se pot determina ca fiind:

$$c_{11} = \frac{\partial \Delta q_1}{\partial F_x}, \quad c_{12} = \frac{\partial \Delta q_1}{\partial F_y}, \quad \dots, \quad c_{16} = \frac{\partial \Delta q_1}{\partial M_z}, \quad \dots, \quad c_{66} = \frac{\partial \Delta q_6}{\partial M_z} \quad (\text{V.80})$$

Considerentele anterioare sugerează aprecierea globală a comportamentului elastic

al solidului prin prisma elementelor matricii de complianță aferente acestuia. Literatura de specialitate relevă astfel de tentative în cazul structurilor mecanice ale roboților paraleli și ale dispozitivelor de tip platformă Stewart, [**N-05],[**N-06],[**N-07].

Întrucât aprecierea globală a comportamentului elastic este dificil de realizat luând în considerare fiecare element al matricii de complianță, se propune în cele ce urmează utilizarea determinantului matricii de complianță ca măsură a comportamentului elastic al solidului considerat.

Matricea de complianță a barei omogene simplu încastrate AB , (figura V.1), care modelează elementele dispozitivului de ghidare al robotului are forma (V.9).

$${}^B \underline{C}_A = {}^B \underline{K}_A^{-1} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \frac{l^3}{I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{l^2}{I_z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{l^3}{I_y} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{l^2}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2l(1+\mu)}{(I_y + I_z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{l^2}{I_y} & 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{l^2}{I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{bmatrix} \quad (V.9)$$

Determinantul matricii de complianță al barei AB , determinat sub formă simbolică sub pachetul soft MATLAB, (Anexa V.18), are forma generală:

$$\det {}^B \underline{C}_A = \frac{1}{72} \cdot \frac{l^{19}(1+\mu)}{A \cdot E^6 \cdot I_z^2 \cdot I_y^2 (I_z + I_y)} \quad (V.81)$$

Utilizarea expresiilor corespunzătoare ale ariei secțiunilor transversale, ale momentelor de inerție axiale ale acestora și a relațiilor (V.14), ..., (V.17) de definire a tipodimensiunilor secțiunilor transversale, permite scrierea determinantului matricii de complianță pentru fiecare tip de secțiune analizat. Acesta este:

- pentru bare tubulare având secțiunea transversală circulară

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{circ\ tub}} = \frac{2^{28}}{3^2 \cdot \pi^6} \cdot \frac{1}{D^{22}} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6} \cdot \frac{1}{(\lambda^2-1)(\lambda^4-1)^5} \quad (V.82)$$

- pentru bare tubulare având secțiunea transversală rectangulară

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{reg\ tub}} = 2^7 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{H^{22}} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6} \cdot \frac{1}{(\lambda^2-1)(\lambda^4-1)^5} \cdot \frac{1}{\varphi^{10} \cdot (1+\varphi^2)} \quad (V.83)$$

- pentru bare pline având secțiunea transversală circulară

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{circ\ plin}} = \frac{2^{28}}{3^2 \cdot \pi^6} \cdot \frac{1}{D^{22}} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6} \quad (V.84)$$

- pentru bare pline având secțiunea transversală rectangulară

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{reg\ plin}} = 2^7 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{H^{22}} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6} \cdot \frac{1}{\varphi^{10} \cdot (1+\varphi^2)} \quad (V.85)$$

- pentru bare tubulare având secțiunea transversală pătrată

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{patrat\ tub}} = 2^7 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{H^{22}} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6} \cdot \frac{1}{(\lambda^2-1)(\lambda^4-1)^5} \cdot \frac{1}{2} \quad (V.86)$$

- pentru pline având secțiunea transversală pătrată

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{patrat\ plin}} = 2^7 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{H^{22}} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6} \cdot \frac{1}{2} \quad (V.87)$$

Compararea relațiilor (V.82), ..., (V.87), permite găsirea tipului de secțiune transversală care determină valoarea maximă a determinantului matricii de complianță.

Realizarea practică a comparației implică și utilizarea relațiilor (V.14), ..., (V.17), ceea ce îngreunează sensibil efortul de calcul simbolic. Mai mult, comparația în cauză nu este posibilă fără specificarea unei relații de dependență între diametrul D al secțiunilor circulare și latura H a celor rectangulare. Dacă acestea se consideră în relație de egalitate, greutatea barelor comparate este diferită, deci torsorul forțelor exterioare generalizate nu mai este același, în consecință relațiile (V.82), ..., (V.87) își pierd valabilitatea.

Ca urmare, pentru a compara determinanții matricilor de complianță ai barelor în cauză se impune din start condiția de egalitate a ariilor secțiunilor transversale. Elementele matricilor de complianță se vor modifica în mod corespunzător. Se va apela pentru aceasta la relațiile (V.18), (V.19), (V.20) și cel cuprise în tabelele V.5 și V.6, care permit scrierea matricilor de complianță ale barelor tubulare având secțiune transversală circulară de

forma (V.21), și respectiv rectangulară, de forma (V.22).

Particularizările formei generale a determinantului matricii de complianță a barei încastate (V.82) vor fi în consecință:

- pentru bare tubulare având secțiunea transversală circulară

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{circ\ tub}} = \frac{64}{9} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6 \cdot A^{11}} \cdot \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^5 \cdot \pi^5 \quad (V.88)$$

- pentru bare tubulare având secțiunea transversală rectangulară

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{reg\ tub}} = \frac{64}{9} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6 \cdot A^{11}} \cdot \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^5 \cdot 6 \cdot \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \quad (V.89)$$

- pentru bare pline având secțiunea transversală circulară

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{circ\ plin}} = \frac{64}{9} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6 \cdot A^{11}} \cdot \pi^5 \quad (V.90)$$

- pentru bare pline având secțiunea transversală rectangulară

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{reg\ plin}} = \frac{64}{9} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6 \cdot A^{11}} \cdot 6 \cdot \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \quad (V.91)$$

- pentru bare tubulare având secțiunea transversală pătrată

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{patrat\ tub}} = \frac{64}{9} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6 \cdot A^{11}} \cdot \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^5 \cdot 3 \quad (V.92)$$

- pentru pline având secțiunea transversală pătrată

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{patrat\ plin}} = \frac{64}{9} \cdot \frac{l^{10}(1+\mu)}{E^6 \cdot A^{11}} \cdot 3 \quad (V.93)$$

Elementele componente ale relațiilor (V.88), ..., (V.93) au fost grupați corespunzător pentru a evidenția elementele identice ale celor șase determinanți. Dacă se exprimă toate cele șase relații în funcție de determinantul aferent matricii de complianță al barei pline cu secțiune tubulară, acestea devin:

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{circ\ tub}} = N \cdot \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^5 \quad (V.88')$$

$$\det {}^B \underline{C}_{A_{reg\ tub}} = N \cdot \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^5 \cdot \frac{6}{\pi^5} \cdot \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \quad (V.89')$$

$$\det {}^B \underline{C}_{A \text{ circ plin}} = N \quad (\text{V.90}^1)$$

$$\det {}^B \underline{C}_{A \text{ rez plin}} = N \cdot \frac{6}{\pi^5} \cdot \frac{\varphi}{1 + \varphi^2} \quad (\text{V.91}^1)$$

$$\det {}^B \underline{C}_{A \text{ patrat tub}} = N \cdot \left(\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^5 \cdot \frac{3}{\pi^5} \quad (\text{V.92}^1)$$

$$\det {}^B \underline{C}_{A \text{ patrat plin}} = N \cdot \frac{3}{\pi^5} \quad (\text{V.93}^1)$$

Valorile alocate raportului φ al laturilor secțiunilor rectangulare dat de relația (V.14), respectiv λ , dat de relația (V.15), sunt:

$$\varphi > 0 \quad (\text{V.16})$$

$$0 \leq \lambda < 1 \quad (\text{V.17})$$

Reprezentarea grafică a variației rapoartelor $\frac{\varphi}{1 + \varphi^2}$ și $\left(\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^5$ pentru intervalele de valori considerate, (Anexa 19), prezentată în figura V.26, permite determinarea valorilor maxime ale acestora:

$$\left(\frac{\varphi}{1 + \varphi^2} \right)_{\max} = 0.5 \quad \text{și} \quad \left[\left(\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^5 \right]_{\max} = 1.$$

Ca urmare, dintre determinanții barelor de arii transversale egale considerate, date de relațiile (V.88¹), ..., (V.93¹), determinantul de valoare maximă este cel al matricii de complianță a barei de secțiune circulară plină.

Utilizând concluzia precedentă, se propune definirea unui indice calitativ pentru aprecierea complianței barelor, numit *indice de complianță (elasticitate)*, I_C , de forma:

$$I_C = \frac{\det {}^B \underline{C}_A}{\det {}^B \underline{C}_{A \text{ circ plin}}} \quad (\text{V.94})$$

Domeniul de valori al indicelui de complianță va fi:

$$0 \leq I_C \leq 1 \quad (\text{V.95})$$

unde valoarea minimă corespunde barei ideal rigide.

Valoarea maximă a indicelui de complianță corespunde barei elastice care, în condițiile egalității dimensionale a ariilor, are aceeași complianță cu cea a barei elastice

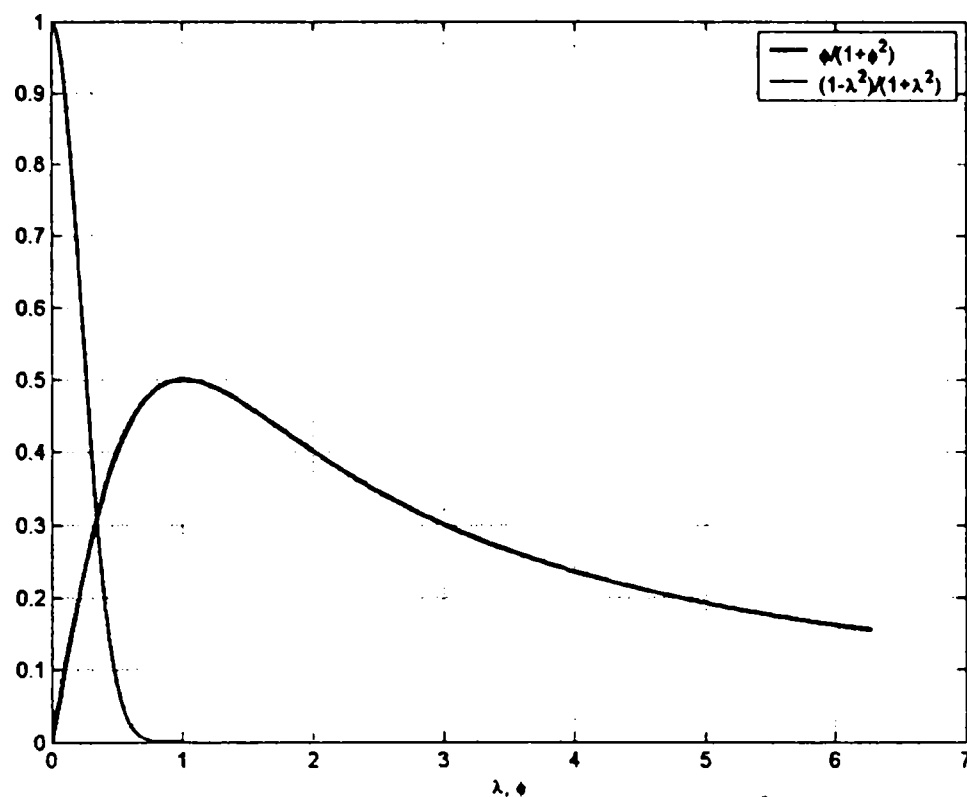


Figura V.28. Variația expresiilor $\frac{\varphi}{1+\varphi^2}$ și $\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^5$ cu parametrii λ și φ ai secțiunii transversale

pline, de secțiune circulară.

Valorile limită superioare ale indicilor de complianță ai barelor analizate în prezentul capitol sunt:

$$I_{c \text{ circ tub}} = \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^5 < 1 \quad (\text{V.96})$$

$$I_{c \text{ ng tub}} = \frac{6}{\pi^5} \cdot \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \cdot \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^5 < 0.01 \quad (\text{V.97})$$

$$I_{C \text{ circ plin}} = 1 \quad (\text{V.98})$$

$$I_{C \text{ ng plin}} = \frac{6}{\pi^5} \cdot \frac{\varphi}{1+\varphi^2} < 0.1 \quad (\text{V.99})$$

$$I_{C \text{ patrat tub}} = \frac{3}{\pi^5} \cdot \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^5 < 0.005 \quad (\text{V.100})$$

$$I_{C \text{ patrat tub}} = \frac{3}{\pi^5} < 0.005 \quad (\text{V.101})$$

**VI. MODELAREA
COMPORTAMENTULUI
CINETOELASTOSTATIC AL
DISPOZITIVELOR DE GHIDARE ALE
ROBOȚILOR INDUSTRIALI**

VI.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al elementelor din structura dispozitivelor de ghidare ale roboților

VI.1.1. Noțiunea de offset

Dispozitivul de ghidare al roboților seriali este constituit din elemente și cuple cinematice conducătoare, dispuse alternativ, sau, într-o formulare cu grad mai mare de generalitate: dispozitivul de ghidare al roboților seriali este constituit din offset-uri și cuple cinematice generalizate, dispuse alternativ.

În teoria mecanismelor, denumirea generică de element semnifică o piesă sau un grup de piese legate rigid între ele, care au o mișcare bine determinată în raport cu alte piese cu care vine în contact. Cupla cinematică este legătura mobilă dintre două elemente, iar cupla cinematică generalizată este o idealizare, care modelează cupla cinematică de orice clasă, [Kov2-92].

În robotică, noțiunea de offset este frecvent utilizată, de către vorbitorii de limba engleză, pentru a denumi poziția invariabilă în timp a axelor cuplelor cinematice conducătoare învecinate ale dispozitivelor de ghidare ale roboților. Axele cuplelor cinematice pot fi paralele (fig.VI.1), [**N-13], sau ortogonale (fig.VI.2., fig.VI.3.,

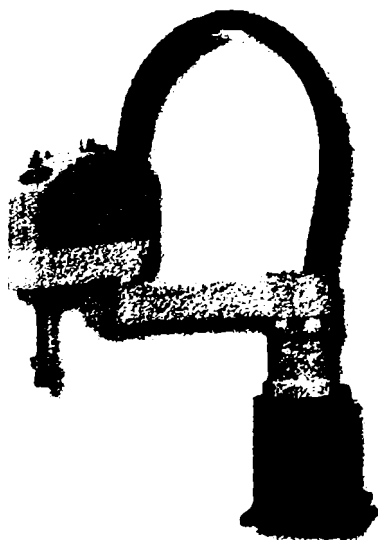


Figura VI.1. Robot Epson



Figura VI.2. Robot IRB 1400

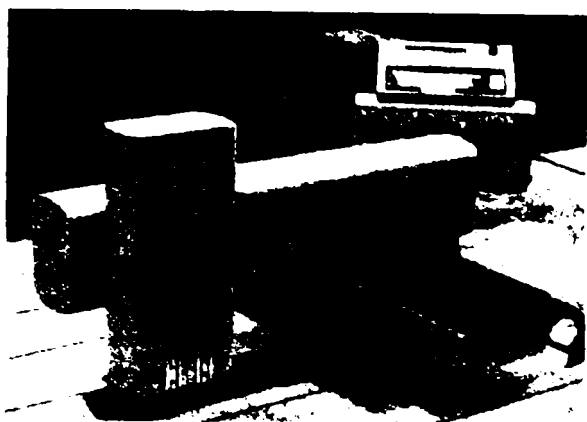


Figura VI.3. Robot SEIKO



Figura VI.4. Robot Stanford cu vizualizarea axelor 1,2 și 3 ale dispozitivului de ghidare

fig.VI.4.), [**N-12], [**N-14], [**N-15], caz în care offset-urile sunt evidente, sau pot avea orientări diferite în spațiu, (roboți cu dispozitiv de ghidare tip “trompă de elefant”), caz în care offset-urile componente sunt mai complexe și mai greu de identificat.

În literatura de limbă română, termenul de offset, apare pentru prima oară în [Kov-99] sub forma: “distanța dintre axele a două cuple (cinematice conducătoare) vecine este numită *offset*”. La prima vedere, aceasta sugerează transpunerea noțiunii de offset în cea de element constructiv simplu care materializează perpendiculara comună pe cele două axe, fapt de altfel valabil pentru majoritatea roboților industriali. Un astfel de exemplu este ilustrat în figura VI.5., unde s-au reprezentat cele cinci offset-uri simple a_1, \dots, a_5 , ale robotului PUMA 560, [**N-16].

Construcția modulară a roboților uzitează majoritar de componente de tip “offset simplu”. Astfel de elemente, extrase din catalogul electronic al firmei “RK ROSE+KRIEGER”, sunt prezentate în figurile VI.6., ..., VI.8, [**N-17].

Offset-ul este în fapt o componentă a schemei cinematice a robotului, care poate fi materializată printr-o piesă sau grupuri de

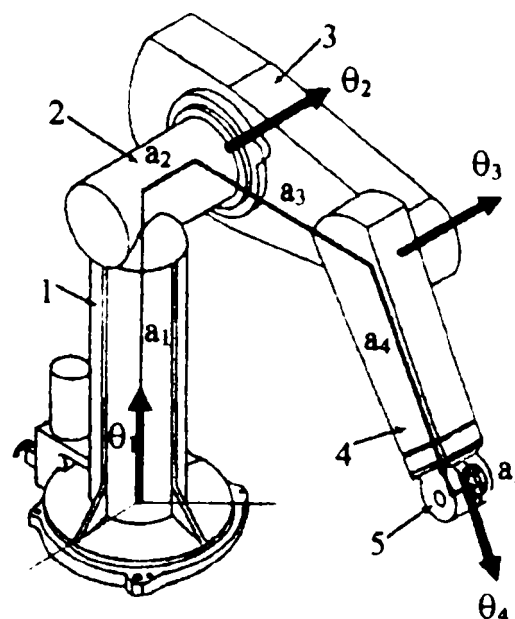


Figura VI.5. Robot PUMA 560 cu evidențierea offset-urilor

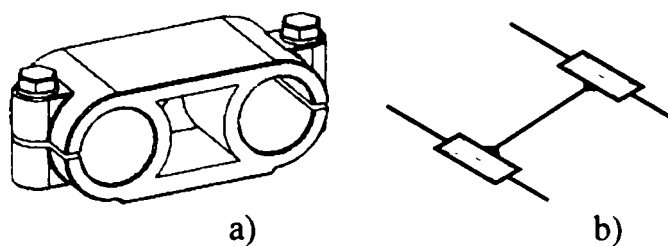


Figura VI.6. Offset simplu, cu axe paralele
a) soluția constructivă, b) schema cinematică

piese ce conțin zonele de contact ale cuplelor cinematice conducătoare învecinate. Poziția invariabilă în timp a axelor cuplelor cinematice conducătoare învecinate ale dispozitivelor de ghidare ale roboților poate fi materializată

și prin îmbinări rigide de piese care impun siturea relativă a zonelor de contact a două cuple cinematice din care face parte același element. Axele longitudinale ale componentelor pot avea orientări diferite în spațiu, rezultând astfel offset-ul compus, care poate avea diverse forme spațiale.

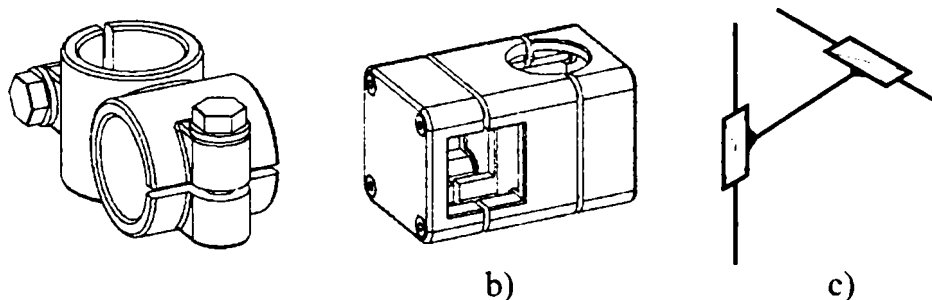


Figura VI.7. Offset simplu, cu axe ortogonale
a) modul pentru elemente de secțiune circulară, b) modul pentru un element de secțiune rectangulară și un element de secțiune circulară, c) schema cinematică

Un offset compus poate fi materializat prin mai multe piese, acestea având materiale diferite și secțiuni diferite, variabile sau constante pe lungimea fiecărei componente.

Figurile VI.9., ..., VI.17. exemplifică câteva astfel de tipuri de

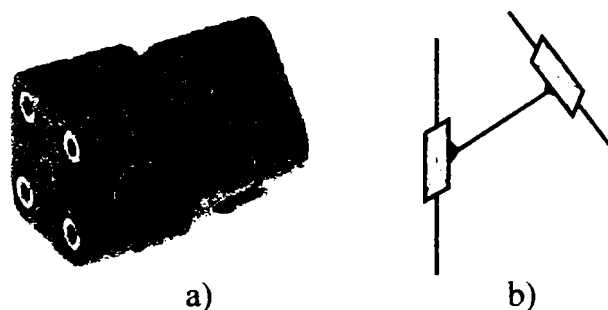


Figura VI.8. Offset simplu, cu axe disjuncte
a) soluția constructivă, b) schema cinematică

offset aflate în structura roboților industriali existenți, [**N-18], [**N-19], [**N-20],[**N-12]. Astfel, în figurile VI.9., VI.10 și VI.12 este evidentă forma în “L” a elementului superior al dispozitivului de ghidare al robotului. Figura VI.11 prezintă o soluție constructivă cu dublă “frângere”, [**N-20].

Există și soluții constructive mai complexe ale offset-ului. Un astfel de exemplu este robotul pentru sudură prezentat în figura VI.13, [**N-19], al cărui element superior



Figura VI.9. Robot DENSO



Figura VI.10. Robot
MOTOMAN

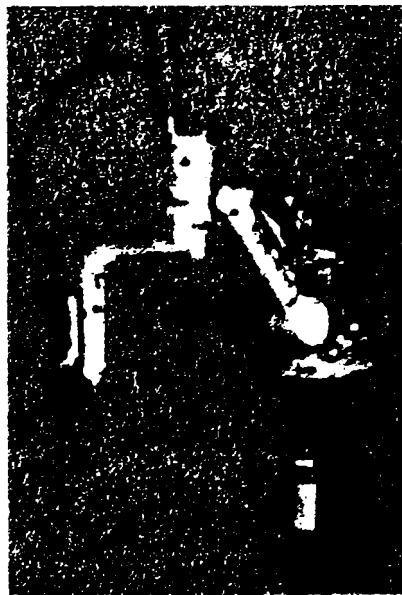


Figura VI.11. Robot NACHI

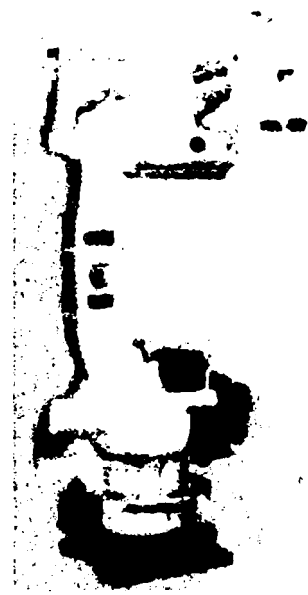


Figura VI.12. Robot
MOTOMAN SP 80 X



Figura VI.13. Robot pentru sudare

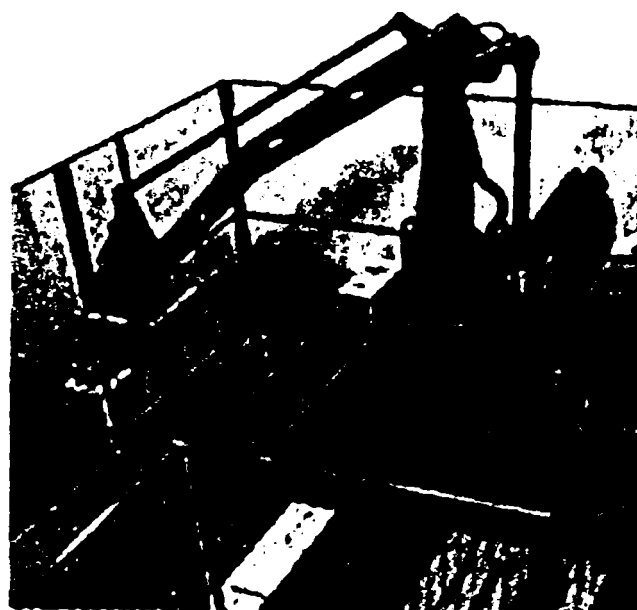


Figura VI.14. Robot pentru paletizare
IRB 1400 al firmei *ABB*

este "o bară cotită" de secțiune variabilă, reprezentată simplificat, separat, în figura VI.15.

Robotul pentru paletizare *IRB 1400* al firmei *ABB*, (figura VI.14), [**N-12] are brațul superior al dispozitivului de ghidare de forma unei "bare dublu cotite", cu două tronsoane ortogonale și două sub unghi obtuz, (fig.VI.16).

Soluțiile constructive care materializează offset-urilor anterior prezentate, au axa

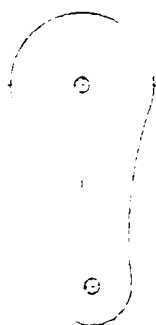


Figura VI.15. Elementul superior al dispozitivului de ghidare al robotului prezentat în figura VI.13

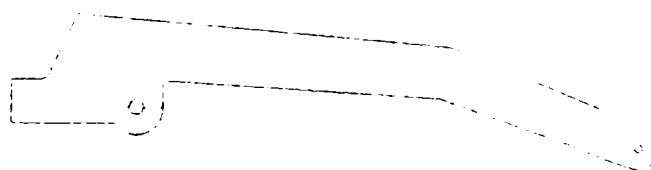


Figura VI.16. Elementul superior al dispozitivului de ghidare al robotului prezentat în figura VI.14



Figura VI.17. Robotul
IRB 6600 al firmei *ABB*

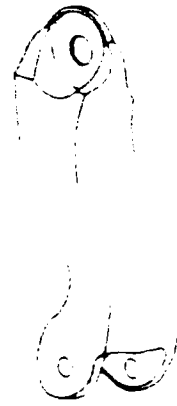


Figura VI.18. Elementul central
dispozitivului de ghidare al
robotului *IRB 6600* al firmei

geometrică dreaptă sau frântă, dar situată într-un singur plan. Din paleta amplă a tipurilor de roboți existenți se desprind și soluții constructive de materializare a offset-ului mult mai complexe. Figura VI.17 prezintă robotul *IRB 6600* al firmei *ABB*, [**N-12], destinat manipulării obiectelor masive. Elementul central al dispozitivului de ghidare al acestuia, (fig.VI.18), are axa geometrică de tip curbă spațială și secțiune variabilă de-a lungul axei.

Extensie logică a offset-ului definit în [Kov-99], noțiunea de *offset generalizat* este un model idealizat care va exprima situarea relativă, constantă în timp, a zonelor de contact ale cuplelor cinematice conducătoare vecine, deci implicit a axelor corespunzătoare ale robotului. Noțiunea de offset-ul generalizat se alătură ca și grad de generalitate celei a cuplei cinematice generalizate.

Un offset simplu, de genul celor exemplificate în figurile VI.1., ..., VI.8, uzual în construcția dispozitivelor de ghidare, poate fi modelat ca bară spațială simplu încastrată.

Un offset compus, materializat prin mai multe bare, de tipul exemplurilor prezentate în figurile VI.9, ..., VI.17, având chiar secțiuni și materiale diferite, se poate modela ca îmbinare rigidă două câte două, a două sau mai multe bare.

Atât offset-ul simplu, offset-ul compus, cât și offset-ul generalizat se pretează la modelare cu ajutorul conceptului PeSiR, [Kov-01],[Kov2-02].

Offset-ul generalizat va exprima situarea relativă, constantă în timp, a perechilor de

sisteme de referință atașate fiecărui element component și, implicit, situarea relativă a axelor celor două cuple cinematice conducătoare vecine. În acest scop, este necesar calculul torsorului forțelor exterioare generalizate și al matricii de complianță pentru fiecare bară în parte.

Similar, modelul cuplei cinematice generalizate obținut utilizând PeSiR va exprima situarea relativă variabilă în timp a elementelor componente ale acesteia, [Kov2-02].

VI.1.2. Modelul comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului simplu

Cel mai simplu model al offset-ului este cel al barei AB simplu încastrate, solicitate de un torsor al forțelor exterioare generalizate acționând în centrul secțiunii extremității libere a barei, (fig.V.2). Modelarea acestuia cu ajutorul conceptului PeSiR a fost prezentată în subcapitolele V.2.2, și V.2.3. Modelul cinetoelastostatic al barei astfel obținut, este matricea de trecere:

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{Arig} + {}^B \underline{\Delta T}_A \quad (VI.1)$$

care însumează:

- matricea de trecere de la sistemul A la sistemul B , ${}^B \underline{T}_{Arig}$, dependentă de caracteristicile geometrice de corp rigid ale barei,
- matricea deformațiilor elastice ale barei, ${}^B \underline{\Delta T}_A$, survenite ca urmare a acțiunii torsorului $\underline{\mathfrak{T}}_{fg}^B$ al forțelor exterioare generalizate, redus la originea B a sistemului omonim.

Forma matricii de trecere ${}^B \underline{T}_{Arig}$ este:

$${}^B \underline{T}_{Arig} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (VI.2)$$

sau scris sub formă concentrată:

$${}^B \underline{T}_{Arig} = [q_i]^T, \quad i=1, \dots, 6 \quad (VI.2')$$

Indicii $i=1, \dots, 3$ corespund deplasărilor liniare în lungul axelor x, y și z ale sistemului A , astfel încât originea acestuia, A , să se suprapună cu originea B a sistemului de referință B . Indicii $i=4, \dots, 6$ corespund rotirilor în jurul axelor sistemului x, y, z ale sistemului A , astfel încât axele acestuia să se suprapună peste cele omoloage ale sistemului de referință B .

Este semnificativă observația că elementele matricilor (VI.2), (VI.2') sunt invariabile în timp, ele reflectă caracteristicile geometrice de corp rigid ale barei.

Pentru bara simplu încastrată reprezentată în figura V.2, această matrice are forma:

$${}^B \underline{T}_{Ang} = [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (VI.3)$$

Matricea deformațiilor elastice ale elementului AB , (fig.V.2), conform [Kov-01], se scrie:

$${}^B \underline{\Delta T}_A = [\Delta q_1 \ \Delta q_2 \ \Delta q_3 \ \Delta q_4 \ \Delta q_5 \ \Delta q_6]^T \quad (VI.4)$$

sau

$${}^B \underline{\Delta T}_A = [\Delta q_i]^T, \quad \text{cu } i=1, \dots, 6 \quad (VI.4')$$

unde indicii $i=1, \dots, 3$ sunt aferenți deformațiilor elastice ale barei de-a lungul celor trei axe x, y și z , iar indicii $i=4, \dots, 6$ sunt aferenți rotirilor barei în jurul aceluiași axe.

Matricea deformațiilor elastice ale elementului considerat este dată de relațiile (V.10), (V.10'):

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{K}_A^{-1} \cdot \underline{\mathfrak{S}}_{fg}^B \quad (V.10)$$

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{S}}_{fg}^B \quad (V.10')$$

sau, în formă dezvoltată, de relația (V.10'').

Matricea de rigiditate ${}^B \underline{K}_A^{-1}$ și cea de complianță ${}^B \underline{C}_A$, ale barei încastrate au forma (V.6), (V.6') și respectiv (V.9). Torsorul forțelor exterioare generalizate, redus în raport cu sistemul de referință B , este dat de relațiile (V.3), (V.4), sau/și (V.4').

Un caz aparte al barei simplu încastrate este cazul acțiunii forțelor exterioare în alt punct al secțiunii extreme a barei, decât centrul acesteia A , (figura VI.19). În figura VI.20 este prezentată la scară mărită, doar extremitatea încărcată a barei; vectorul forțelor exterioare F , acționând în punctul A' .

Componentele torsorului forțelor exterioare generalizate

$$\underline{\mathfrak{S}}_{fg}^{A'} = [F_x \ F_y \ F_z \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (VI.5)$$

ce acționează în punctul A' vor genera solicitările:

- forța F_x produce

$$\text{- o forță axială în lungul axei } x \quad N_{Ax} = F_x \quad (VI.6)$$

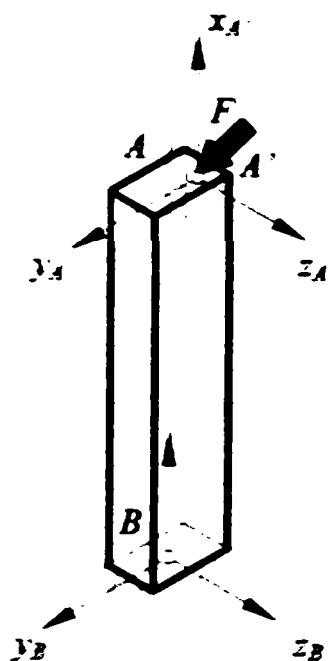


Figura VI.19. Bara incastreată solicitată de un torsor în punctul A'

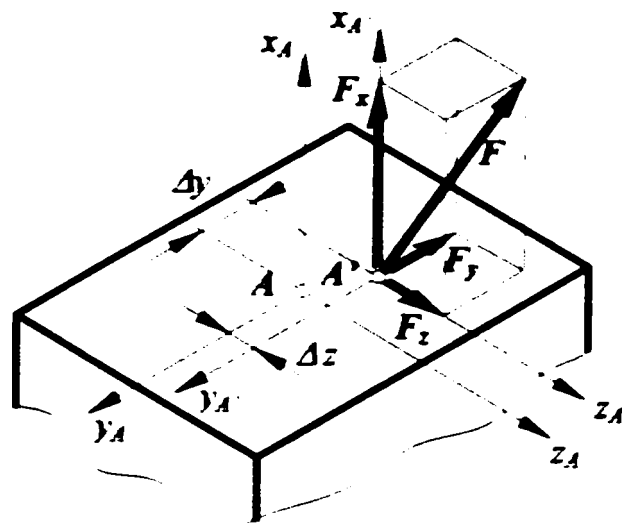


Figura VI.20. Forța F acționând în punctul A' al secțiunii extreme superioare a barei AB

- un moment încovoietor în jurul axei Az $M_z = -F_x \cdot \Delta y$ (VI.7)

- un moment încovoietor în jurul axei Ay $M_y = -F_x \cdot \Delta z$ (VI.8)

- forța F_y produce

- o forță tăietoare în planul x_A-z_A $T_y = -F_y$ (VI.9)

- un moment de torsiune în jurul axei Ax $M_{t_x} = F_y \cdot \Delta z$ (VI.10)

-forța F_z produce

- o forță tăietoare în planul x_A-z_A $T_z = F_z$ (VI.11)

- un moment de torsiune în jurul axei Ax $M_{t_x} = -F_z \cdot \Delta y$ (VI.12)

În consecință, torsorul forțelor exterioare generalizate raportat la centrul A al secțiunii, va avea forma:

$$\underline{\mathfrak{F}}_A^A = \left[F_x \quad -F_y \quad F_z \quad F_y \cdot \Delta z - F_z \cdot \Delta y \quad -F_x \cdot \Delta z \quad -F_x \cdot \Delta y \right]^T \quad (\text{VI.13})$$

Utilizarea relațiilor (V.10), (V.10') sau (V.10'') pentru determinarea matricii

deformațiilor elastice ${}^B \underline{\Delta T}_A$ în cazul considerat, necesită reducerea torsorului $\underline{\mathfrak{F}}_A$ la originea B a sistemului de referință omonim, (figura VI.5). Acesta va fi:

$$\underline{\mathfrak{F}}_B = \left[F_x \quad -F_y \quad F_z \quad F_y \cdot \Delta z - F_z \cdot \Delta y \quad -F_x \cdot \Delta z + F_z \cdot l \quad -F_x \cdot \Delta y + F_y \cdot l \right]^T \quad (\text{VI.14})$$

unde l reprezintă lungimea liberă a barei AB .

VI.1.3. Modelul comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului materializat prin îmbinarea rigidă a două bare

Îmbinarea rigidă, prin încastrare, a două bare permite obținerea de diverse structuri spațiale. În figura VI.21 este ilustrat un astfel de caz, simplu, când axele celor două bare, 1 și 2, sunt coplanare, așezate sub un unghi oarecare α .

Se consideră că asupra acestei “bare cotite” încastrate la extremitatea inferioară, acționează la extremitatea superioară, într-un punct oarecare A' al secțiunii, un torsor

al forțelor generalizate exterioare $\underline{\mathfrak{F}}_A$ dat de relația (VI.5).

Pentru scrierea modelului comportamentului cinetoelastostatic al acestei structuri se atașează fiecărei bare câte o pereche de sisteme de referință: PeSir $A-B$ pentru bara 1 și PeSir $C-D$ pentru bara 2, (fig.VI.21). Sistemul de referință sunt dir pte, având axa x orientată în lungul axei longitudinale a barelor și originile poziționate pe această axă, care reprezintă în același timp fibra medie a structurii. Axele z ale celor patru sisteme de referință sunt ortogonale la planul reprezentării, având același

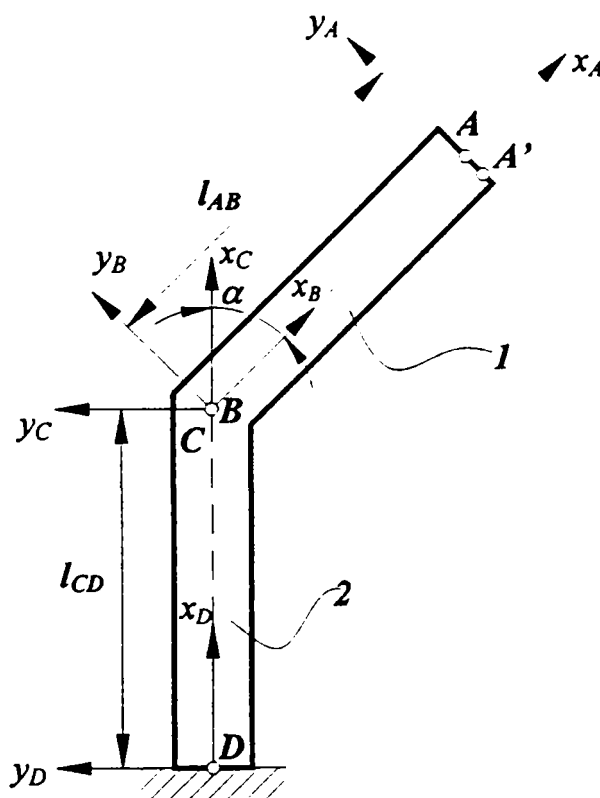


Figura VI.21. Offset materializat prin îmbinarea rigidă a două bare

sens pozitiv, ales astfel încât să respecte regula mâinii drepte (a burghiului drept).

Modelul de ordinul 0 al corpului AD astfel alcătuit se scrie:

$${}^D \underline{T}_A = {}^D \underline{T}_C \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes {}^B \underline{T}_A \quad (\text{VI.15})$$

unde matricea ${}^C \underline{T}_B$ reprezintă modelul îmbinării rigide a celor două bare. Acesta, pentru cazul considerat, este:

$${}^C \underline{T}_B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \alpha]^T \quad (\text{VI.16})$$

Matricile de trecere ${}^D \underline{T}_C$, ${}^B \underline{T}_A$, aferente celor două elemente 1 și 2, se pot scrie similar relației (VI.2).

Admițând ca valabile legea lui Hooke și ipoteza lui Bernoulli, modelul comportamentului cinetoelastostatic al corpului AD , asupra căruia acționează un torsor $\underline{\mathfrak{S}}_{fg}^A$ are forma:

$${}^D \underline{T}_A = {}^D \underline{T}_{A \text{ rig}} + {}^D \underline{\Delta T}_A \quad (\text{VI.17})$$

în care:

${}^D \underline{T}_{A \text{ rig}}$ este matricea de trecere de la sistemul A , la sistemul D , dependentă strict de caracteristicile geometrice ale structurii,

${}^D \underline{\Delta T}_A$ este matricea deformațiilor elastice ale structurii, ce apar ca urmare a acțiunii torsorului forțelor exterioare generalizate.

Similar celor expuse în subcapitolul anterior, matricile de trecere aferente elementelor AB și CD din relația (VI.15) se pot scrie, la rândul lor:

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{A \text{ rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_A \quad (\text{VI.18})$$

$${}^D \underline{T}_C = {}^D \underline{T}_{C \text{ rig}} + {}^D \underline{\Delta T}_C \quad (\text{VI.19})$$

unde

$${}^B \underline{T}_{A \text{ rig}} = [-l_{AB} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{VI.20})$$

$${}^D \underline{T}_{C \text{ rig}} = [-l_{CD} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{VI.21})$$

iar matricile deformațiilor elastice ale celor două elemente au forma (V.10), (V.10') sau (V.10''). Acestea se scriu:

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{S}}_{fg}^B \quad (\text{V.10'})$$

$${}^D \underline{\Delta T}_C = {}^D \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{J}}_B^D \quad (\text{VI.22})$$

unde:

- ${}^B \underline{C}_A$ și ${}^D \underline{C}_C$ sunt matricile de complianță ale celor două bare, având forma (V.9),
- $\underline{\mathfrak{J}}_B^B$ este torsorul forțelor exterioare generalizate exprimat față de originea sistemului B , având forma (VI.14),
- $\underline{\mathfrak{J}}_B^D$ este torsorul forțelor exterioare generalizate redus la originea D a sistemului omonim. Acest torsor poate fi obținut ca produsul:

$$\underline{\mathfrak{J}}_B^D = {}^D \underline{T}_B \otimes \underline{\mathfrak{J}}_B^B \quad (\text{VI.23})$$

unde

$${}^D \underline{T}_B = {}^D \underline{T}_C \otimes {}^C \underline{T}_B \quad (\text{VI.24})$$

Utilizând relațiile (VI.16) și (VI.19), relația (VI.23) devine:

$$\underline{\mathfrak{J}}_B^D = \left({}^D \underline{T}_{C \text{ reg}} + {}^D \underline{\Delta T}_C \right) \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes \underline{\mathfrak{J}}_B^B \quad (\text{VI.25})$$

Referitor la relația (VI.25) se impun observațiile:

1. Matricea deformațiilor elastice ale barei CD , ${}^D \underline{\Delta T}_C$, poate fi omisă în cazul deformațiilor suficient de mici;

2. Produsele notate cu simbolul \otimes se pot calcula conform algoritmului prezentat în [Kov-02].

3. O altă rezolvare posibilă, constă în transpunerea matricilor de trecere \underline{T} 6×1 , în matrici de trecere 4×4 de forma (IV.90), conform celor prezentate în subcapitolul IV.5.

În acest caz, pentru a calcula produsul ${}^C \underline{T}_B \otimes \underline{\mathfrak{J}}_B^B$ unde matricea ${}^C \underline{T}_B$ transpusă va avea dimensiunea 4×4 , iar matricea $\underline{\mathfrak{J}}_B^B$ are dimensiunea 6×1 , este necesară scrierea torsorului forțelor exterioare generalizate

$$\underline{\mathfrak{J}}_B^B = \left[F_x \quad F_y \quad F_z \mid M_x \quad M_y \quad M_z \right]^T \quad (\text{VI.26})$$

sub o formă convenabilă. Acesta conține trei componente de tip forță, care sunt proiecțiile pe axele sistemului de coordonate ale vectorului ce însumează toate forțele exterioare, și trei componente de tip moment, care sunt proiecțiile pe axele sistemului de coordonate ale vectorului ce însumează toate momentele exterioare. Atât vectorul forță cât și vectorul

moment, pot fi scriși sub forma cvadrivectorilor:

$$\underline{F}_{f_g}^B = [F_{x_i} \quad F_{y_i} \quad F_{z_i} \quad 1]^T \quad (VI.27)$$

$$\underline{M}_{f_g}^B = [M_{x_i} \quad M_{y_i} \quad M_{z_i} \quad 1]^T \quad (VI.28)$$

ale căror elemente pot fi determinate cu relațiile:

$$[F_{x_i} \quad F_{y_i} \quad F_{z_i} \quad 1] = {}^C \underline{T}_B^{-1} \cdot [F_x \quad F_y \quad F_z \quad 1] \quad (VI.29)$$

$$[M_{x_i} \quad M_{y_i} \quad M_{z_i} \quad 1] = {}^C \underline{T}_B^{-1} \cdot [M_x \quad M_y \quad M_z \quad 1] \quad (VI.30)$$

Ca urmare, rezultatul produsului ${}^C \underline{T}_B \otimes \underline{\mathfrak{J}}_{f_g}^B$, este vectorul:

$$\underline{\mathfrak{J}}_{f_g4}^B = [F_{x_i} \quad F_{y_i} \quad F_{z_i} \quad M_{x_i} \quad M_{y_i} \quad M_{z_i}]^T \quad (VI.31)$$

Cu acestea relația (VI.25) devine:

$$\underline{\mathfrak{J}}_{f_g}^D = ({}^D \underline{T}_{C \text{ rig}} + {}^D \underline{\Delta T}_C) \otimes \underline{\mathfrak{J}}_{f_g4}^B \quad (VI.32)$$

care se poate soluționa similar celor expuse anterior pentru primul produs special, $({}^C \underline{T}_B \otimes \underline{\mathfrak{J}}_{f_g}^B)$, notat \otimes .

Îmbinarea celor două bare fiind considerată perfect rigidă, (încastrare), numai cele două matrici de trecere ale acestora au componentă elastică. În consecință, relația (V.15), care exprimă modelul cinetoelastostatic al structurii considerate, devine:

$${}^D \underline{T}_A = ({}^D \underline{T}_{C \text{ rig}} + {}^D \underline{\Delta T}_C) \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes ({}^B \underline{T}_{A \text{ rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_A) \quad (VI.33)$$

unde toate matricile componente sunt determinate.

Utilizând relațiile (V.10') și (VI.22) pentru determinarea matricilor deformațiilor elastice, relația (VI.33) devine:

$${}^D \underline{T}_A = ({}^D \underline{T}_{C \text{ rig}} + {}^D \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{J}}_{f_g}^D) \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes ({}^B \underline{T}_{A \text{ rig}} + {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{J}}_{f_g}^B) \quad (VI.34)$$

Expresiile torsorilor $\underline{\mathfrak{J}}_{f_g}^B$ și $\underline{\mathfrak{J}}_{f_g}^D$ din relația precedentă sunt matrici coloană 6x1, iar matricile de complianță ${}^B \underline{C}_A$ și ${}^D \underline{C}_C$ sunt matrici pătrate de dimensiune 6x6. Ca urmare, acestea sunt conforme pentru înmulțire după regulile cunoscute din teoria matricilor, rezultatul obținut fiind o matrice coloană 6x1. Matricile de trecere, \underline{T} , din relația (VI.34) sunt matrici coloană de dimensiune 6x1.

Relația (VI.35) se poate detalia, utilizând expresiile (VI.20) și (VI.21):

$${}^D \underline{T}_A = \left(\begin{bmatrix} -l_{CD} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + {}^D \underline{C}_C \cdot \underline{\Xi}_{fg}^D \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^T \otimes \left(\begin{bmatrix} -l_{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\Xi}_{fg}^B \right) \quad (\text{VI.35})$$

Admițând, pentru concizia scrierii, grafia expresiilor matricilor deformațiilor elastice ale celor două bare de forma:

$${}^B \underline{\Delta T}_A = \left[\Delta q_{1AB} \quad \Delta q_{2AB} \quad \Delta q_{3AB} \quad \Delta q_{4AB} \quad \Delta q_{5AB} \quad \Delta q_{6AB} \right]^T \quad (\text{VI.36})$$

$${}^D \underline{\Delta T}_C = \left[\Delta q_{1CD} \quad \Delta q_{2CD} \quad \Delta q_{3CD} \quad \Delta q_{4CD} \quad \Delta q_{5CD} \quad \Delta q_{6CD} \right]^T \quad (\text{VI.37})$$

relația (VI.35) devine un dublu produs de matrici 6x1:

$${}^D \underline{T}_A = \left[\Delta q_{1CD} - l_{CD} \quad \Delta q_{2CD} \quad \Delta q_{3CD} \quad \Delta q_{4CD} \quad \Delta q_{5CD} \quad \Delta q_{6CD} \right]^T \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^T \otimes \left[\Delta q_{1AB} - l_{AB} \quad \Delta q_{2AB} \quad \Delta q_{3AB} \quad \Delta q_{4AB} \quad \Delta q_{5AB} \quad \Delta q_{6AB} \right]^T \quad (\text{VI.38})$$

Produsele notate cu simbolul \otimes se pot calcula cu algoritmul special prezentat în [Kov-02]. Pentru soluționarea expresiei (VI.38) se poate recurge la algoritmul clasic de înmulțire al matricilor, după ce, în prealabil, matricile $\underline{T}_{6 \times 1}$ au fost transpuse în matrici 4x4, conform metodei prezentate subcapitolului IV.5.

După transpunerea celor trei matrici de trecere având dimensiunea 6x1 din relația precedentă, în matrici de dimensiune 4x4, cu ajutorul relației (IV.94), rezultă:

$${}^B \underline{T}_A = \begin{bmatrix} c \Delta q_{5AB} + c \Delta q_{6AB} - 1 & -s \Delta q_{6AB} & s \Delta q_{5AB} & \Delta q_{1AB} - l_{AB} \\ s \Delta q_{6AB} & c \Delta q_{4AB} + c \Delta q_{6AB} - 1 & -s \Delta q_{4AB} & \Delta q_{2AB} \\ -s \Delta q_{5AB} & s \Delta q_{4AB} & c \Delta q_{4AB} + c \Delta q_{5AB} - 1 & \Delta q_{3AB} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.39})$$

$${}^C \underline{T}_B = \begin{bmatrix} c \alpha & -s \alpha & 0 & 0 \\ s \alpha & c \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.40})$$

$${}^D \underline{T}_C = \begin{bmatrix} c \Delta q_{5CD} + c \Delta q_{6CD} - 1 & -s \Delta q_{6CD} & s \Delta q_{5CD} & \Delta q_{1CDB} - l_{CD} \\ s \Delta q_{6CD} & c \Delta q_{4CD} + c \Delta q_{6CD} - 1 & -s \Delta q_{4CD} & \Delta q_{2CD} \\ -s \Delta q_{5CD} & s \Delta q_{4CD} & c \Delta q_{4CD} + c \Delta q_{5CD} - 1 & \Delta q_{3CD} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.41})$$

În relațiile (VI.39), (VI.40) și (VI.41) s-a notat: $\sin u = s u$ și $\cos u = c u$.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului reprezentat în figura VI.21, obținut cu ajutorul modulului de calcul simbolic al pachetului soft MATLAB, este matricea de trecere 4x4, (Anexa VI.1):

$${}^D \underline{T}_A = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.42})$$

unde:

$$t_{11} = ((\cos(\Delta q_{5CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \cos(\alpha) - \sin(\Delta q_{6CD}) * \sin(\alpha)) * (\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) + (-\cos(\Delta q_{5CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \sin(\alpha) - \sin(\Delta q_{6CD}) * \cos(\alpha)) * \sin(\Delta q_{6AB}) - \sin(\Delta q_{5CD}) * \sin(\Delta q_{5AB}),$$

$$t_{12} = -((\cos(\Delta q_{5CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \cos(\alpha) - \sin(\Delta q_{6CD}) * \sin(\alpha)) * \sin(\Delta q_{6AB}) + (-\cos(\Delta q_{5CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \sin(\alpha) - \sin(\Delta q_{6CD}) * \cos(\alpha)) * (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) + \sin(\Delta q_{5CD}) * \sin(\Delta q_{4AB}),$$

$$t_{13} = ((\cos(\Delta q_{5CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \cos(\alpha) - \sin(\Delta q_{6CD}) * \sin(\alpha)) * \sin(\Delta q_{5AB}) - (-\cos(\Delta q_{5CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \sin(\alpha) - \sin(\Delta q_{6CD}) * \cos(\alpha)) * \sin(\Delta q_{4AB}) + \sin(\Delta q_{5CD}) * (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{5AB}) - 1),$$

$$t_{14} = ((\cos(\Delta q_{5CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \cos(\alpha) - \sin(\Delta q_{6CD}) * \sin(\alpha)) * (\Delta q_{1AB} - l_{AB}) + (-\cos(\Delta q_{5CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \sin(\alpha) - \sin(\Delta q_{6CD}) * \cos(\alpha)) * \Delta q_{2AB} + \sin(\Delta q_{5CD}) * \Delta q_{3AB} + \Delta q_{1CD} - l_{CD},$$

$$t_{21} = (\sin(\Delta q_{6CD}) * \cos(\alpha) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \sin(\alpha)) * (\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) + (-\sin(\Delta q_{6CD}) * \sin(\alpha) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \cos(\alpha)) * \sin(\Delta q_{6AB}) + \sin(\Delta q_{4CD}) * \sin(\Delta q_{5AB}),$$

$$t_{22} = -(\sin(\Delta q_{6CD}) * \cos(\alpha) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \sin(\alpha)) * \sin(\Delta q_{6AB}) + (-\sin(\Delta q_{6CD}) * \sin(\alpha) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \cos(\alpha)) * (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) - \sin(\Delta q_{4CD}) * \sin(\Delta q_{4AB}),$$

$$t_{23} = (\sin(\Delta q_{6CD}) * \cos(\alpha) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \sin(\alpha)) * \sin(\Delta q_{5AB}) - (-\sin(\Delta q_{6CD}) * \sin(\alpha) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \cos(\alpha)) * \sin(\Delta q_{4AB}) - \sin(\Delta q_{4CD}) * (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{5AB}) - 1),$$

$$\begin{aligned}
tf_{24} &= (\sin(\Delta q_{6CD}) * \cos(\alpha) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \sin(\alpha)) * (\Delta q_{1AB} - l_{AB}) + \\
&+ (-\sin(\Delta q_{6CD}) * \sin(\alpha) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{6CD}) - 1) * \cos(\alpha)) * \Delta q_{2AB} - \sin(\Delta q_{4CD}) * \Delta q_{3AB} + \\
&+ \Delta q_{2CD}, \\
tf_{31} &= (-\sin(\Delta q_{5CD}) * \cos(\alpha) + \sin(\Delta q_{4CD}) * \sin(\alpha)) * (\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) + \\
&+ (\sin(\Delta q_{5CD}) * \sin(\alpha) + \sin(\Delta q_{4CD}) * \cos(\alpha)) * \sin(\Delta q_{6AB}) - (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{5CD}) - 1) * \\
&* \sin(\Delta q_{5AB}), \\
tf_{32} &= (-\sin(\Delta q_{5CD}) * \cos(\alpha) + \sin(\Delta q_{4CD}) * \sin(\alpha)) * \sin(\Delta q_{6AB}) + (\sin(\Delta q_{5CD}) * \sin(\alpha) + \\
&+ \sin(\Delta q_{4CD}) * \cos(\alpha)) * (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{5CD}) - 1) * \sin(\Delta q_{4AB}), \\
tf_{33} &= (-\sin(\Delta q_{5CD}) * \cos(\alpha) + \sin(\Delta q_{4CD}) * \sin(\alpha)) * \sin(\Delta q_{5AB}) - (\sin(\Delta q_{5CD}) * \sin(\alpha) + \\
&+ \sin(\Delta q_{4CD}) * \cos(\alpha)) * \sin(\Delta q_{4AB}) + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{5CD}) - 1) * (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{5AB}) - 1), \\
tf_{34} &= (-\sin(\Delta q_{5CD}) * \cos(\alpha) + \sin(\Delta q_{4CD}) * \sin(\alpha)) * (\Delta q_{1AB} - l_{AB}) + (\sin(\Delta q_{5CD}) * \sin(\alpha) + \\
&+ \sin(\Delta q_{4CD}) * \cos(\alpha)) * \Delta q_{2AB} + (\cos(\Delta q_{4CD}) + \cos(\Delta q_{5CD}) - 1) * \Delta q_{3AB} + \Delta q_{3CD}, \\
tf_{41} &= 0, \\
tf_{42} &= 0, \\
tf_{43} &= 0, \\
tf_{44} &= 1.
\end{aligned} \tag{VI.43}$$

Dacă deformațiile celor două elemente sunt suficient de mici, se poate accepta că: $\sin u = u$ și $\cos u = 1$. Cu aceste considerații, cele două matrici de trecere aferente celor două tronsoane ale offset-ului considerat vor avea forma simplificată:

$${}^B \underline{T}_A = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta q_{6AB} & \Delta q_{5AB} & \Delta q_{1AB} - l_{AB} \\ \Delta q_{6AB} & 1 & -\Delta q_{4AB} & \Delta q_{2AB} \\ -\Delta q_{5AB} & \Delta q_{4AB} & 1 & \Delta q_{3AB} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{VI.44}$$

$${}^D \underline{T}_C = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta q_{6CD} & \Delta q_{5CD} & \Delta q_{1CDB} - l_{CD} \\ \Delta q_{6CD} & 1 & -\Delta q_{4CD} & \Delta q_{2CD} \\ -\Delta q_{5CD} & \Delta q_{4CD} & 1 & \Delta q_{3CD} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{VI.45}$$

iar modelul comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului reprezentat în figura VI.21, obținut sub același pachet soft forma matricii de trecere 4x4, este (VI.42) dar elementele acesteia au expresii mai simple, (Anexa VI.2):

$$\begin{aligned}
tf_{11} &= \cos(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \sin(\alpha) + (-\sin(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \cos(\alpha)) * \Delta q_{6AB} - \Delta q_{5CD} * \Delta q_{5AB}, \\
tf_{12} &= -(\cos(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \sin(\alpha)) * \Delta q_{6AB} - \sin(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \cos(\alpha) + \Delta q_{5CD} * \Delta q_{4AB}, \\
tf_{13} &= (\cos(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \sin(\alpha)) * \Delta q_{5AB} - (-\sin(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \cos(\alpha)) * \Delta q_{4AB} + \Delta q_{5CD}, \\
tf_{14} &= (\cos(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \sin(\alpha)) * (\Delta q_{1AB} - l_{AB}) + (-\sin(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \cos(\alpha)) * \Delta q_{2AB} + \\
&\quad + \Delta q_{5CD} * \Delta q_{3AB} + \Delta q_{1CD} - l_{CD}, \\
tf_{21} &= \Delta q_{6CD} * \cos(\alpha) + \sin(\alpha) + (\cos(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \sin(\alpha)) * \Delta q_{6AB} + \Delta q_{4CD} * \Delta q_{5AB}, \\
tf_{22} &= -(\Delta q_{6CD} * \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) * \Delta q_{6AB} + \cos(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \sin(\alpha) - \Delta q_{4CD} * \Delta q_{4AB}, \\
tf_{23} &= (\Delta q_{6CD} * \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) * \Delta q_{5AB} - (\cos(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \sin(\alpha)) * \Delta q_{4AB} - \Delta q_{4CD}, \\
tf_{24} &= (\Delta q_{6CD} * \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) * (\Delta q_{1AB} - l_{AB}) + (\cos(\alpha) - \Delta q_{6CD} * \sin(\alpha)) * \Delta q_{2AB} - \\
&\quad - \Delta q_{4CD} * \Delta q_{3AB} + \Delta q_{2CD}, \\
tf_{31} &= -\Delta q_{5CD} * \cos(\alpha) + \Delta q_{4CD} * \sin(\alpha) + (\Delta q_{5CD} * \sin(\alpha) + \Delta q_{4CD} * \cos(\alpha)) * \Delta q_{6AB} - \Delta q_{5AB}, \\
tf_{32} &= -(-\Delta q_{5CD} * \cos(\alpha) + \Delta q_{4CD} * \sin(\alpha)) * \Delta q_{6AB} + \Delta q_{5CD} * \sin(\alpha) + \Delta q_{4CD} * \cos(\alpha) + \Delta q_{4AB}, \\
tf_{33} &= (-\Delta q_{5CD} * \cos(\alpha) + \Delta q_{4CD} * \sin(\alpha)) * \Delta q_{5AB} - (\Delta q_{5CD} * \sin(\alpha) + \Delta q_{4CD} * \cos(\alpha)) * \\
&\quad * \Delta q_{4AB} + l, \\
tf_{34} &= (-\Delta q_{5CD} * \cos(\alpha) + \Delta q_{4CD} * \sin(\alpha)) * (\Delta q_{1AB} - l_{AB}) + (\Delta q_{5CD} * \sin(\alpha) + \Delta q_{4CD} * \cos(\alpha)) * \\
&\quad * \Delta q_{2AB} + \Delta q_{3AB} + \Delta q_{3CD} \\
tf_{41} &= 0, \\
tf_{42} &= 0, \\
tf_{43} &= 0, \\
tf_{44} &= 1.
\end{aligned}$$

(VI.46)

VI.1.4. Modelul comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului materializat prin îmbinarea rigidă a trei bare

Se consideră un offset complex, materializat printr-o structură spațială alcătuită din trei bare îmbinate rigid, ortogonale între ele, reprezentat schematic în figura VI.22, prin axele geometrice ale barelor.

Structura este încastrată la extremitatea notată F și liberă la extremitatea A . La extremitatea liberă a structurii, în centrul A al acesteia, acționează un torsesor al forțelor

exterioare generalizate $\underline{\mathfrak{F}}_g^A$, alcătuit din componente de tip forță, care determină deformarea structurii, și, implicit, deplasări liniare și unghiulare ale punctelor caracteristice ale acesteia.

Admițând ipoteza lui Bernoulli, studiul se poate realiza pe fibra medie a structurii.

În aceste condiții, scrierea modelului comportamentului cinetoelastostatic al structurii considerate implică parcurgerea acelorași pași ca și în cazul anterior analizat. Astfel, (figura VI.22), se atașează fiecărei bare câte o pereche de sisteme de referință:

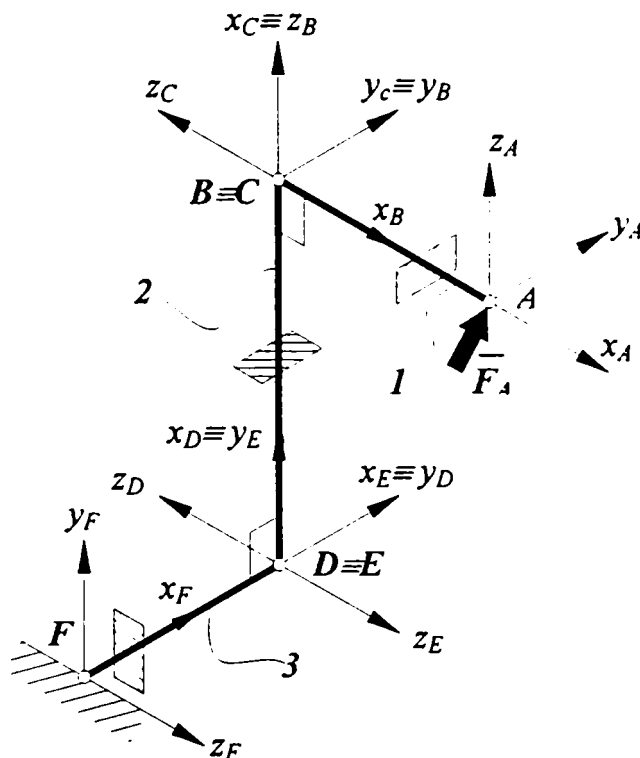


Fig VI.22. Offset compus, materializat prin
îmbinarea rigidă a trei bare

- ✓ PeSiR $A-B$ pentru bara 1,
- ✓ PeSiR $C-D$ pentru bara 2,
- ✓ PeSiR $E-F$ pentru bara 3

și câte o pereche de sisteme de referință fiecărei îmbinări rigide:

- ✓ PeSiR $B-C$ pentru
îmbinarea barelor 1 și 2,
- ✓ PeSiR $D-E$ pentru
îmbinarea barelor 2 și 3.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al structurii AF , astfel alcătuite, sub acțiunea torsorului $\underline{\mathfrak{F}}_g^A$, dat de relația:

$$\underline{\mathfrak{F}}_g^A = \begin{bmatrix} F_{x_A} & F_{y_A} & F_{z_A} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{VI.47})$$

se scrie:

$${}^F \underline{T}_A = {}^F \underline{T}_{A \text{ rig}} + {}^F \underline{\Delta T}_A \quad (\text{VI.48})$$

unde:

${}^F \underline{T}_{A \text{ rig}}$ este matricea de trecere de la sistemul A , la sistemul F , dependentă strict de caracteristicile geometrice ale structurii,

${}^F \underline{\Delta T}_A$ este matricea deformațiilor elastice ale structurii, ce apar ca urmare a acțiunii torsorului forțelor exterioare generalizate.

În același timp, matricea de trecere de la sistemul A la sistemul F se poate scrie:

$${}^F \underline{T}_A = {}^F \underline{T}_E \otimes {}^E \underline{T}_D \otimes {}^D \underline{T}_C \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes {}^B \underline{T}_A \quad (\text{VI.49})$$

unde:

- matricile ${}^C \underline{T}_B$ și ${}^E \underline{T}_D$ din relația precedentă reprezintă modelele îmbinărilor rigide. Acestea, pentru cazul cu bare ortogonale considerat, sunt:

$${}^C \underline{T}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{VI.50})$$

$${}^E \underline{T}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{VI.51})$$

- matricile de trecere ${}^F \underline{T}_E$, ${}^D \underline{T}_C$, ${}^B \underline{T}_A$, se pot scrie similar relației (VI.17), de forma:

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{A \text{ rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_A \quad (\text{VI.52})$$

$${}^D \underline{T}_C = {}^D \underline{T}_{C \text{ rig}} + {}^D \underline{\Delta T}_C \quad (\text{VI.53})$$

$${}^F \underline{T}_E = {}^F \underline{T}_{E \text{ rig}} + {}^F \underline{\Delta T}_E \quad (\text{VI.54})$$

Matricile aferente barelor rigide au, pentru cazul de față, forma:

$${}^B \underline{T}_{A \text{ rig}} = [-l_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.55})$$

$${}^D \underline{T}_{C \text{ rig}} = [-l_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.56})$$

$${}^F \underline{T}_{E \text{ rig}} = [-l_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.57})$$

iar matricile deformațiilor elastice ale celor trei bare au forma (V.10) pentru bara 1, (VI.22) pentru bara 2, iar pentru bara 3:

$${}^F \underline{\Delta T}_E = {}^F \underline{C}_E \cdot \underline{\mathfrak{S}}_{fE}^F \quad (\text{VI.58})$$

Matricile de complianță ale celor trei bare, care intervin în relațiile de calcul ale matricilor deformațiilor elastice, sunt date de relația (V.9), cu particularizările aferente caracteristicilor de material și celor de geometrie a barelor (secțiune și lungime).

Utilizarea relațiilor (VI.50), ..., (VI.58) permite scrierea detaliată a relației (VI.49):

$$\begin{aligned}
{}^F T_{-A} = & \left\{ \left[-l_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T + {}^F C_{-E} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^F \right\} \otimes \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \pi \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \right]^T \otimes \\
& \otimes \left\{ \left[-l_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T + {}^D C_{-C} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^D \right\} \otimes \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad 0 \right]^T \otimes \quad (VI.59) \\
& \otimes \left\{ \left[-l_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T + {}^B C_{-A} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^B \right\}
\end{aligned}$$

Explicitarea integrală a modelului comportamentului cinetoelastostatic al structurii necesită exprimarea torsorului forțelor exterioare generalizate ce acționează în secțiunea A raportat la originile B , C și respectiv F ale sistemelor de referință omonime. O posibilă astfel de procedură de rezolvare a fost prezentată în subcapitolul VI.1.3.

VI.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice din structura dispozitivelor de ghidare ale roboților

VI.2.1. Introducere

Așa cum s-a precizat anterior, dispozitivul de ghidare al roboților seriali este constituit din elemente și cuple cinematice conducătoare, dispuse alternativ, [Vac-89].

Capitolul anterior a încercat să definească și să modeleze noțiunile de *element* și *offset* aflate în structura dispozitivelor de ghidare ale roboților. Capitolul de față abordează modelarea *cuplelor cinematice* din structura roboților industriali. Cupla cinematică este legătura mobilă a două elemente. Aceasta conectează cele două elemente, impunând/facilitând mișcarea relativă a acestora.

În contextul teoriei PeSiR, cupla cinematică ce conectează elementele 1 și 2 determină trecerea de la sistemul de referință al elementului 1 , la sistemul de referință al elementului 2 .

Softurile profesionale specializate, modelează cupla cinematică prin restricțiile de mișcare pe care le introduce, fără a impune specificații de formă și dimensiuni ale elementelor interconținute. Un astfel de exemplu este modulul specializat pentru

modelare-simulare a sistemelor mecanice numit *SimMechanics* al pachetului soft *MATLAB R13*, lansat în vara anului 2002, [**N-11]. Acesta modelează cuplele cinematice prin intermediul sistemului de referință atașat implicit fiecărui model de cuplă existent în biblioteca proprie. Modelul unui lanț cinematic realizat prin asamblarea alternantă de cuple cinematice și offset-uri rezultă, similar celui obținut prin modelare cu ajutorul conceptului PeSiR, ca înlănțuire a matricilor de trecere asociate componentelor lanțului cinematic.

În figura VI.23 sunt prezentate simplificat câteva cuple cinematice conform [Kov2-92], cu precizarea gradelor de libertate aferente fiecăreia și a simbolului grafic aferent, după [**N-04].

Se vor aborda în continuare cuplele cinematice inferioare, de clasa a-V-a, aflate în

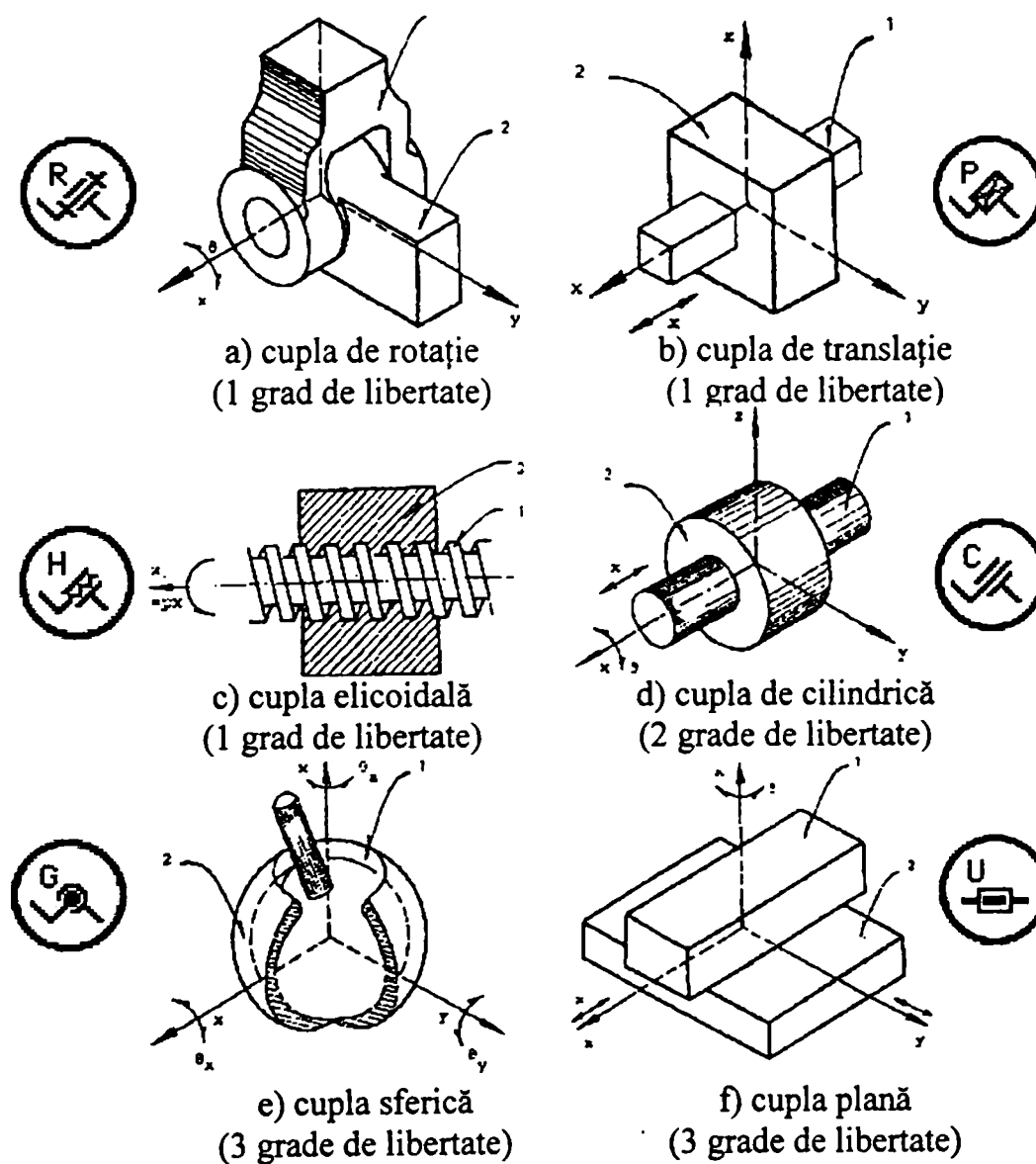


Figura VI.23. Cuple cinematice

componenta lanțurilor cinematice deschise care constituie dispozitivul de ghidare al roboților seriali. Acestea sunt cupla cinematică de rotație, (figura VI.23.a) și cupla cinematică de translație, (figura VI.23.b). Modelarea cuplelor cinematice din structura dispozitivelor de ghidare se va realiza utilizând conceptul PeSiR, prezentat în capitolul IV.

VI.2.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic cuplelor cinematice de rotație

VI.2.2.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic cuplelor cinematice de rotație, conducătoare

Figura VI.24 și figura VI.27 prezintă simplificat două soluții constructive pentru cuplele cinematice de rotație, întâlnite frecvent în robotică.

Sunt evidențiate sistemele de referință asociate elementelor interconectate de cuplă.

Astfel, cuplei asimetrice de rotație

perechi de Sisteme de Referință (PeSiR), așezate pe axe geometrice ale componentelor și notate:

- ✓ *PeSiR A-B* pentru elementul 1,
- ✓ *PeSiR B-C* pentru cupla cinematică de rotație,
- ✓ *PeSiR C-D* pentru elementul 2.

În consecință, modelul comportamentului cinetoelastostatic al cuplei cinematice considerate se poate scrie:

$${}^D \underline{T}_A = {}^D \underline{T}_C \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes {}^B \underline{T}_A \quad (\text{VI.60})$$

Modelul cuplei cinematice prezentate în figura VI.24 se obține rapid, dacă se analizează separat fiecare

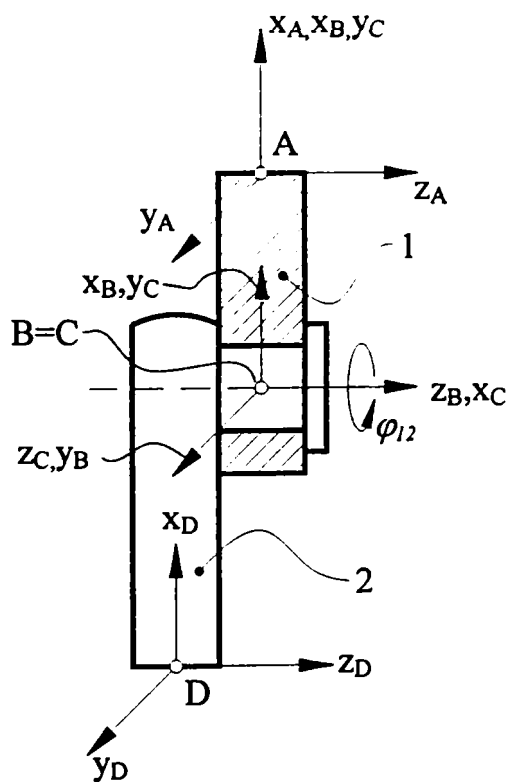


Figura VI.24. Cuplă cinematică de rotație

componentă.

Astfel, *elementului notat cu I* în figura VI.24 și reprezentat separat în figura VI.25, i se atașează sistemele de referință *A* și *B*, care alcătuiesc *PeSiR A-B*.

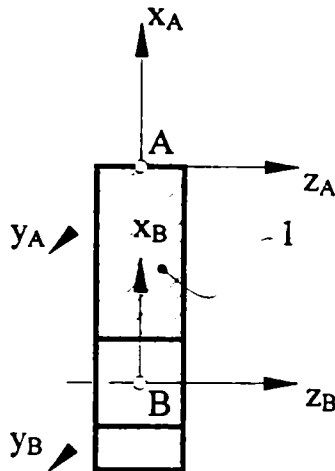


Figura VI.25. Elementul *I* al cuplei cinematice prezentate în figura VI.24

Elementul *I* corespunde celui mai simplu offset, modelat ca bară simplu încastrată în secțiunea *B*, sollicitată cu un torsesor al forțelor exterioare generalizate $\underline{\mathfrak{F}}_B^B$ în secțiunea *A*. Ca urmare, modelarea comportamentului cinetoelastostatic al elementului *I* se reduce în fapt la cele prezentate în capitolul VI.1.2.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului *I*, este matricea:

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{Arig} + {}^B \underline{\Delta T}_A \quad (VI.1)$$

care însumează matricea de trecere de la sistemul *A* la sistemul *B*, ${}^B \underline{T}_{Arig}$, dependentă de

caracteristicile geometrice de corp rigid ale barei și matricea deformațiilor elastice ale barei, ${}^B \underline{\Delta T}_A$, survenite ca urmare a acțiunii forțelor exterioare generalizate.

Trecerea de la sistemul *A* la sistemul *B*, se realizează printr-o translație cu dimensiunea l_{AB} de-a lungul axei *x*. În consecință, matricea de trecere ${}^B \underline{T}_{Arig}$, pentru elementul în cauză este:

$${}^B \underline{T}_{Arig} = [-l_{AB} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (VI.61)$$

Elementele matricii (VI.61) sunt invariabile în timp, ele reflectă caracteristicile geometrice de corp rigid ale elementului *I*.

Matricea deformațiilor elastice ale elementului *AB*, se scrie:

$${}^B \underline{\Delta T}_A = [\Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \Delta q_3 \quad \Delta q_4 \quad \Delta q_5 \quad \Delta q_6]^T \quad (VI.4)$$

unde indicii $i=1, \dots, 3$ sunt aferenți deformațiilor elastice ale barei de-a lungul celor trei axe *x*, *y* și *z*, iar indicii $i=4, \dots, 6$ sunt aferenți rotirilor barei în jurul aceluiași axe.

Matricea deformațiilor elastice ale elementului considerat se poate determina cu relațiile (V.10), (V.10'), sau scris sub formă dezvoltată, cu relația (V.10'').

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{K}_A^{-1} \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B \quad (V.10)$$

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B \quad (V.10')$$

Matricea de rigiditate ${}^B \underline{K}_A^{-1}$ și cea de complianță ${}^B \underline{C}_A$, ale elementului încastrat au forma (V.6), (V.6') și respectiv (V.9). Torsorul forțelor exterioare generalizate, $\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^B$, redus în raport cu sistemul de referință B , este dat de relațiile (V.3) și (V.4), (V.4').

Elementul notat cu 2 în figura VI.24 poate fi considerat ca fiind realizat prin îmbinarea rigidă a două bare ortogonale. Ca urmare, modelul comportamentului cinetoelastostatic al acestuia se obține similar celui al offset-ului obținut prin încastrarea a două bare, prezentat în capitolul VI.1.3.

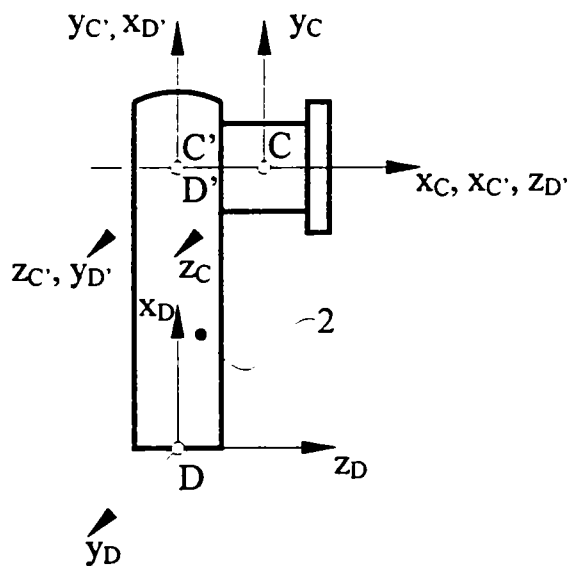


Figura VI.26. Elementul 2 al cuplei cinematice reprezentate în figura VI.24

În acest scop, elementului 2 reprezentat detașat din ansamblul cuplei cinematice în figura VI.26, i s-au asociat sistemele de referință C , C' , D' și D , câte o pereche de sisteme de referință pentru fiecare bară componentă:

- ✓ *PeSir* $C-C'$ pentru bara orizontală (fus),
 - ✓ *PeSir* $D'-D$ pentru bara verticală,
- și *PeSiR* $C'-D'$ pentru îmbinarea rigidă.

Sistemele de referință atașate barelor sunt drepte, având axa x orientată în lungul axei longitudinale a acestora și originile poziționate pe această axă, conform figurii VI.26.

Originea sistemului C , se poziționează la jumătatea lungimii fusului, unde se consideră ca acționează torsorul forțelor generalizate exterioare.

Se acceptă că "bara cotită" ce modelează elementul 2 este încastrată la extremitatea inferioară, iar asupra ei acționează la extremitatea superioară, în punctul C ,

torsorul forțelor generalizate exterioare, notat $\underline{\mathfrak{F}}_f^C$. În acest context, modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului 2 se scrie:

$${}^D \underline{T}_C = {}^D \underline{T}_{D'} \otimes {}^{D'} \underline{T}_{C'} \otimes {}^C \underline{T}_C \quad (\text{VI.62})$$

unde matricea ${}^{D'} \underline{T}_{C'}$ reprezintă modelul îmbinării rigide a celor două bare. Acesta, pentru cazul considerat, este:

$${}^{D'} \underline{T}_{C'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{VI.63})$$

Matricile de trecere ${}^C \underline{T}_C$, ${}^D \underline{T}_{D'}$, aferente celor două tronsoane ale elementului 2, se pot scrie similar relației (VI.1):

$${}^C \underline{T}_C = {}^C \underline{T}_{C'rig} + {}^C \underline{\Delta T}_C \quad (\text{VI.64})$$

$${}^D \underline{T}_{D'} = {}^D \underline{T}_{D'rig} + {}^D \underline{\Delta T}_{D'} \quad (\text{VI.65})$$

Trecerea de la sistemul C la sistemul C' , se realizează printr-o translație cu dimensiunea $l_{C'C}$ de-a lungul axei x_C . În consecință, matricea de trecere ${}^C \underline{T}_{C'rig}$, pentru bara CC' este:

$${}^C \underline{T}_{C'rig} = [-l_{C'C} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.66})$$

Trecerea de la sistemul D' la sistemul D , se realizează printr-o translație cu dimensiunea $l_{D'D}$ de-a lungul axei $x_{D'}$. Matricea de trecere aferentă barei $D'D$ va fi:

$${}^D \underline{T}_{D'rig} = [-l_{D'D} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.67})$$

Matricile deformațiilor elastice ale celor două elemente sunt:

$${}^C \underline{\Delta T}_C = {}^C \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{F}}_f^C \quad (\text{VI.68})$$

$${}^D \underline{\Delta T}_{D'} = {}^D \underline{C}_{D'} \cdot \underline{\mathfrak{F}}_f^D \quad (\text{VI.69})$$

unde:

- ${}^C \underline{C}_C$ și ${}^D \underline{C}_{D'}$ sunt matricile de complianță ale celor două bare, având forma (IV.9),

- $\underline{\mathfrak{F}}_f^C$ este torsorul forțelor exterioare generalizate exprimat față de originea sistemului C' , având forma (V.14),

- $\underline{\mathfrak{F}}_f^D$ este torsorul forțelor exterioare generalizate redus la originea D a sistemului omonim.

În consecință, relația (VI.62), care exprimă modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului 2, devine:

$${}^D \underline{T}_C = \left({}^D \underline{T}_{D'rig} + {}^D \underline{\Delta T}_{D'} \right) \otimes {}^{D'} \underline{T}_C \otimes \left({}^C \underline{T}_{Crig} + {}^C \underline{\Delta T}_C \right) \quad (VI.70)$$

sau:

$${}^D \underline{T}_C = \left({}^D \underline{T}_{D'rig} + {}^D \underline{C}_{D'} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{fg}^D \right) \otimes {}^{D'} \underline{T}_C \otimes \left({}^C \underline{T}_{Crig} + {}^C \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{fg}^C \right) \quad (VI.71)$$

unde, după efectuarea produselor dintre matricile de complianță având dimensiunea 6x6 și torsorii având dimensiunea 6x1, toate matricile componente au dimensiunea 6x1 și sunt determinate.

Produsele notate cu simbolul \otimes se pot calcula conform [Kov-02]. O altă rezolvare posibilă constă în transpunerea matricilor coloană 6x1 în matrici de trecere 4x4, conform celor prezentate în capitolele IV.5 și VI.1.3.

Sistemele de referință B și C , care modelează *cupla cinematică* în sine, au fost poziționate cu originile suprapuse. Axele sistemelor de referință, cu excepția axei z însă, nu se suprapun, ci respectă poziția și orientarea corespunzătoare modelelor elementelor 1 și 2, așa cum relevă figura VI.24.

În poziția de referință, fixă (când nu există încă mișcare relativă), matricea de trecere de la sistemul B la sistemul C va reflecta doar poziția relativă a axelor celor două sisteme. Așa cum se poate observa din figura VI.24, trecerea de la sistemul B la sistemul C implică o rotație cu $-\pi/2$ în jurul axei y_B și o rotație cu $-\pi/2$ în jurul axei z_B .

Este evident că poziția relativă a celor două sisteme se va modifica temporal, ca urmare a rotirii relative a celor două elemente, 1 și 2. Unghiul de rotație în jurul axei z_B , variabil în timp, este unghiul notat φ_{12} în figura VI.24. Acesta va fi deci:

$$\varphi_{12} = \varphi_{12}(t) \quad (VI.72)$$

În consecință, la momentul t , modelul cuplei cinematice, neglijând jocurile, deformațiile zonelor de contact și frecările, se va scrie:

$${}^C \underline{T}_B = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -\frac{\pi}{2} \end{array} \left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_{12} \right) \right]^T \quad (VI.73)$$

Întrucât cele trei matrici de trecere, componente ale relației (VI.60), ce modelează

comportamentul cinetoelastostatic al cuplei cinematice prezentate în figura VI.24 sunt determinate, se poate scrie:

$${}^D \underline{T}_A = \left({}^D \underline{T}_{D'} \otimes {}^{D'} \underline{T}_C \otimes {}^C \underline{T}_C \right) \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes {}^B \underline{T}_A \quad (\text{VI.74})$$

sau, evidențiind comportamentul elastic al ansamblului:

$${}^D \underline{T}_A = \left[\left({}^D \underline{T}_{D'rig} + {}^D \underline{\Delta T}_{D'} \right) \otimes {}^{D'} \underline{T}_C \otimes \left({}^C \underline{T}_{Crig} + {}^C \underline{\Delta T}_C \right) \right] \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes \left({}^B \underline{T}_{Arig} + {}^B \underline{\Delta T}_A \right) \quad (\text{VI.75})$$

Explicitarea tuturor componentelor relației (VI.75), prin utilizarea relațiilor (VI.61), (VI.63), ..., (VI.70), (VI.63), permite scrierea modelului ansamblului cuplei reprezentate în figura VI.23 de forma:

$$\begin{aligned} {}^D \underline{T}_A = & \left\{ \left([-l_{D'D} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^D \underline{C}_{D'} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^D \right) \otimes [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \pi/2]^T \otimes \right. \\ & \left. \otimes \left([-l_{C'C} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^C \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^C \right) \right\} \otimes \\ & \otimes [0 \ 0 \ 0 \ -\pi/2 \ 0 \ (-\pi/2 + \varphi_{12})]^T \otimes \left([-l_{AB} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^B \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.76})$$

Întrucât matricile deformațiilor elastice ale tronsoanelor constitutive ale elementelor notate 1 și 2, date de relațiile (V.10'), (VI.57) și (VI.58) au dimensiunea 6x1, rezultă că toate matricile din relația precedentă sunt matrici coloană de dimensiune 6x1.

În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii, expresiile torsorilor forțelor exterioare generalizate se vor nota sub formă redusă. Fiecărui element component al acestora i se va asocia un indice superior care indică sistemul de referință la care este raportat torsorul. Astfel, torsorul raportat la originea sistemului de referință B va fi scris:

$$\underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^B = [F_x^B \ F_y^B \ F_z^B \ M_x^B \ M_y^B \ M_z^B]^T \quad (\text{VI.77})$$

unde fiecare componentă de tip forță sau moment va avea forma corespunzătoare, rezultată în urma reducerii torsorului aplicat în originea sistemului de referință A , $\underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^A$, la originea sistemului de referință B . Similar se va nota cu $\underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^{C'}$ torsorul $\underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^A$ raportat la originea sistemului C' și cu $\underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^D$ torsorul $\underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^A$ raportat la originea sistemului D .

Cu aceste convenții de notație, matricea deformațiilor elastice ale elementului 1,

(bara AB), se va scrie:

$${}^B \underline{\Delta T}_A = \frac{1}{E_{AB}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l_{AB}}{A_{AB}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \frac{l_{AB}^3}{I_{zAB}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{l_{AB}^2}{I_{zAB}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{l_{AB}^3}{I_{yAB}} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{l_{AB}^2}{I_{yAB}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2l_{AB}(1+\mu_{AB})}{(I_{yAB}+I_{zAB})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{l_{AB}^2}{I_{yAB}} & 0 & \frac{l_{AB}}{I_{yAB}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{l_{AB}^2}{I_{zAB}} & 0 & 0 & 0 & \frac{l_{AB}}{I_{zAB}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x^B \\ F_y^B \\ F_z^B \\ M_x^B \\ M_y^B \\ M_z^B \end{bmatrix} \quad (VI.78)$$

unde

A_{AB} – este aria secțiunii transversale a tronsonului AB ,

E_{AB} – este modulul de elasticitate longitudinală al materialului tronsonului AB ,

μ_{AB} – este coeficientul de contracție transversală al materialului tronsonului AB ,

I_{zAB} , I_{yAB} – sunt momentele de inerție axială ale secțiunii transversale a tronsonului AB , raportate la axa z , respectiv y ale acesteia.

După efectuarea produsului din relația precedentă, matricea deformațiilor elastice scrisă sub forma (VI.4) devine:

$${}^B \underline{\Delta T}_A = \begin{bmatrix} \frac{l_{AB}}{E_{AB}} \cdot \frac{F_x^B}{A_{AB}} & \frac{l_{AB}^2}{E_{AB} \cdot I_{zAB}} \left(\frac{l_{AB}}{3} F_y^B + \frac{1}{2} M_z^B \right) & \frac{l_{AB}^2}{E_{AB} \cdot I_{yAB}} \left(\frac{l_{AB}}{3} F_z^B - \frac{1}{2} M_y^B \right) \\ \frac{l_{AB}}{E_{AB}} \frac{2l_{AB}(1+\mu_{AB})}{(I_{yAB}+I_{zAB})} & \frac{l_{AB}}{E_{AB} \cdot I_{yAB}} \left(-\frac{l_{AB}}{2} F_z^B + M_y^B \right) & \frac{l_{AB}}{E_{AB} \cdot I_{zAB}} \left(\frac{l_{AB}}{2} F_y^B + M_z^B \right) \end{bmatrix}^T \quad (VI.79)$$

Matricile deformațiilor elastice ale tronsoanelor CC' și $D'D$ sunt *formal* identice cu expresia (VI.79), unde indicii superiori aferenți torsorilor forțelor exterioare generalizate și cei inferiori aferenți tronsonului, (CC' și respectiv $D'D$), vor fi modificați corespunzător.

Întrucât matricea deformațiilor elastice a unei bare se poate scrie sub forma:

$$\underline{\Delta T} = [\Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \Delta q_3 \quad \Delta q_4 \quad \Delta q_5 \quad \Delta q_6]^T \quad (\text{VI.80})$$

se va utiliza în continuare această formă, cu adăugarea indicilor inferiori aferenți barei în cauză.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului I al cuplei cinematice se va scrie conform (VI.1):

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{A \text{rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_A \quad (\text{VI.1})$$

în care:

$${}^B \underline{T}_{A \text{rig}} = [-l_{AB} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.81})$$

$${}^B \underline{\Delta T}_A = [\Delta q_{1AB} \quad \Delta q_{2AB} \quad \Delta q_{3AB} \quad \Delta q_{4AB} \quad \Delta q_{5AB} \quad \Delta q_{6AB}]^T \quad (\text{VI.82})$$

Ca urmare, modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului I al cuplei cinematice considerate este:

$${}^B \underline{T}_A = [\Delta q_{1AB} - l_{AB} \quad \Delta q_{2AB} \quad \Delta q_{3AB} \quad \Delta q_{4AB} \quad \Delta q_{5AB} \quad \Delta q_{6AB}]^T \quad (\text{VI.83})$$

care, transpusă în matrice de trecere de dimensiune 4×4 , conform relației (IV.93) va fi:

$${}^B \underline{T}_A = \begin{bmatrix} \cos \Delta q_{5AB} + \cos \Delta q_{6AB} - 1 & -\sin \Delta q_{6AB} & \sin \Delta q_{5AB} & \Delta q_{1AB} - l_{AB} \\ \sin \Delta q_{6AB} & \cos \Delta q_{4AB} + \cos \Delta q_{6AB} - 1 & -\sin \Delta q_{4AB} & \Delta q_{2AB} \\ -\sin \Delta q_{5AB} & \sin \Delta q_{4AB} & \cos \Delta q_{4AB} + \cos \Delta q_{5AB} - 1 & \Delta q_{3AB} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.84})$$

Matricile de trecere aferente tronsoanelor CC' și $D'D$ ale elementului 2 al cuplei cinematice vor avea forma (VI.84), având însă indicii corespunzători.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului 2 va fi:

$${}^D \underline{T}_C = \left\{ \left([-l_{D'D} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + {}^D \underline{\Delta T}_{D'} \right) \otimes {}^{D'} \underline{T}_C \otimes \left([-l_{C'C} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + {}^{C'} \underline{\Delta T}_C \right) \right\}^T \quad (\text{VI.85})$$

Cele două produse notate cu simbolul \otimes ale matricilor de dimensiune 6×1 se pot înlocui cu produse de matrici 4×4 , după transpunerea prelabilă a celor trei matrici 6×1 în matrici 4×4 , conform relației (IV.94).

După transpunerea matricilor 6×1 în matrici 4×4 și efectuarea calculelor necesare,

matricea de trecere ce modelează comportamentul cinetoelastostatic al elementului 2 va avea forma, (Anexa VI.3):

$${}^D \underline{T}_C = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.85})$$

unde elementele matricii sunt date de relațiile:

$$t_{11} = (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1 - \sin(\Delta q_{6D'D}) - \sin(\Delta q_{5D'D})) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + (-\cos(\Delta q_{5C'C}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - (\cos(\Delta q_{5D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C})$$

$$t_{12} = -(-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1 - \sin(\Delta q_{6D'D}) - \sin(\Delta q_{5D'D})) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C})$$

$$t_{13} = -\sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C}) - (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)$$

$$t_{14} = -\sin(\Delta q_{6D'D}) * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \Delta q_{2C'C} + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{1D'D} - l_{D'D}$$

$$t_{21} = -(\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C})$$

$$t_{22} = -(\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) - \sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C})$$

$$t_{23} = (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C}) + \sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C}) - \sin(\Delta q_{4D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)$$

$$t_{24} = (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * \Delta q_{2C'C} - \sin(\Delta q_{4D'D}) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{2D'D}$$

$$t_{31} = \sin(\Delta q_{4D'D}) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C})$$

$$t_{32} = -\sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{4C'C})$$

$$t_{33} = \sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C}) - \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)$$

$$t_{34} = \sin(\Delta q_{4D'D}) * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \Delta q_{2C'C} + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{3D'D}$$

$$t_{41} = 0$$

$$t_{42} = 0$$

$$t_{43} = 0$$

$$t_{44} = 1$$

(VI.86)

Dacă deplasările unghiulare Δq_4 , Δq_5 și Δq_6 sunt suficient de mici se pot accepta relațiile (IV.97). Ca urmare, elementele (VI.86) ale matricii (VI.85) vor avea o formă redusă, simplificată, (Anexa VI.4):

$$\begin{aligned} t_{11} &= \Delta q_{6D'D} + \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{5C'C} \\ t_{12} &= -\Delta q_{6D'D} * \Delta q_{6C'C} + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{4C'C} + 1 \\ t_{13} &= \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{5C'C} - \Delta q_{4C'C} + \Delta q_{5D'D} \\ t_{14} &= \Delta q_{6D'D} * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \Delta q_{2C'C} + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{1D'D} - l_{D'D} \\ t_{21} &= \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{6C'C} + \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{5C'C} - 1 \\ t_{22} &= \Delta q_{6C'C} + \Delta q_{6D'D} - \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{4C'C} \\ t_{23} &= -\Delta q_{5C'C} - \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{4C'C} - \Delta q_{4D'D} \\ t_{24} &= -\Delta q_{1C'C} + l_{C'C} + \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{2C'C} - \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{2D'D} \\ t_{31} &= -\Delta q_{4D'D} - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5D'D} \\ t_{32} &= \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5D'D} + \Delta q_{4C'C} \\ t_{33} &= -\Delta q_{4D'D} * \Delta q_{5C'C} + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{4C'C} + 1 \\ t_{34} &= -\Delta q_{4D'D} * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{2C'C} + \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{3D'D} \\ t_{41} &= 0 \\ t_{42} &= 0 \\ t_{43} &= 0 \\ t_{44} &= 1 \end{aligned}$$

(VI.87)

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al cuplei cinematice reprezentate în figura VI.24:

$${}^D \underline{T}_A = {}^D \underline{T}_C \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes {}^B \underline{T}_A \quad (VI.88)$$

poate fi calculat ca dublu produs de matrici 4x4, dacă și matricea de trecere ${}^c T_B$ de dimensiune 6x1, care modelează cupla cinematică propriu-zisă, se transpune în matrice 4x4. Forma acesteia va fi:

$${}^c T_B = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_{12}\right) - 1 & -\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_{12}\right) & -1 & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_{12}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_{12}\right) - 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.89})$$

sau, mai simplu:

$${}^c T_B = \begin{bmatrix} \sin \varphi_{12} - 1 & \cos \varphi_{12} & -1 & 0 \\ -\cos \varphi_{12} & \sin \varphi_{12} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.89}')$$

Modelul complet al comportamentului cinetoelastostatic al cuplei cinematice considerate, (neglijând frecările și jocurile), obținut după calcularea ambelor produse de matrici având dimensiunea 4x4, va avea forma, (Anexa VI.3):

$${}^D T_A = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.90})$$

unde:

$$\begin{aligned} t_{11} = & -(\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \sin(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{6AB}) * \cos(\varphi_{12}) * (-\sin(\Delta q_{6D'D}) * \\ & * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - \sin(\Delta q_{5D'D}) * \\ & * \sin(\Delta q_{5C'C})) + (-(\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \cos(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{6AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{5AB})) * \\ & * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \\ & + \sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C})) + \sin(\Delta q_{6AB}) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C}), \\
& \quad \mathbf{tf}_{12} = (-\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \sin(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{6AB}) * \cos(\varphi_{12}) * (\sin(\Delta q_{6D'D}) * \\
& * \sin(\Delta q_{6C'C}) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \\
& * \sin(\Delta q_{4C'C})) + (-\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \cos(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{6AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{5AB}) * \\
& * (-\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) - \\
& - \sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + \sin(\Delta q_{6AB}) * (-\sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \\
& * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{4C'C})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \quad \mathbf{tf}_{13} = (-\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \sin(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{6AB}) * \cos(\varphi_{12}) * \\
& * (-\sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C}) - (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \\
& * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)) + (-\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \cos(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{6AB}) * \\
& * \sin(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{5AB}) * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C}) + \sin(\Delta q_{6D'D}) * \\
& * \sin(\Delta q_{4C'C}) - \sin(\Delta q_{4D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)) + \sin(\Delta q_{6AB}) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * \\
& * \sin(\Delta q_{5C'C}) - \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \\
& + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \quad \mathbf{tf}_{14} = (-\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \sin(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{6AB}) * \cos(\varphi_{12}) * (-\sin(\Delta q_{6D'D}) * \\
& * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \Delta q_{2C'C} + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{1D'D} - l_{D'D}) + \\
& * (-\cos(\Delta q_{5AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \cos(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{6AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{5AB}) * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \\
& + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * \Delta q_{2C'C} - \sin(\Delta q_{4D'D}) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{2D'D}) + \\
& + \sin(\Delta q_{6AB}) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \Delta q_{2C'C} + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - \\
& - 1) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{3D'D}) + \Delta q_{1AB} - l_{AB},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \quad \mathbf{tf}_{21} = (-\sin(\Delta q_{6AB}) * \sin(\varphi_{12}) + (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \cos(\varphi_{12})) * (-\sin(\Delta q_{6D'D}) * \\
& * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - \sin(\Delta q_{5D'D}) * \\
& * \sin(\Delta q_{5C'C})) + (-\sin(\Delta q_{6AB}) * \cos(\varphi_{12}) - (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \sin(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{4AB})) * \\
& * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \\
& + \sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C})) + (-\cos(\Delta q_{4AB}) - \cos(\Delta q_{6AB}) + 1) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \\
& + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \quad \mathbf{tf}_{22} = (-\sin(\Delta q_{6AB}) * \sin(\varphi_{12}) + (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \cos(\varphi_{12})) * (\sin(\Delta q_{6D'D}) * \\
& * \sin(\Delta q_{6C'C}) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \\
& * \sin(\Delta q_{4C'C})) + (-\sin(\Delta q_{6AB}) * \cos(\varphi_{12}) - (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \sin(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{4AB})) *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & *(-(\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) - \\ & - \sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C})) + (-\cos(\Delta q_{4AB}) - \cos(\Delta q_{6AB}) + 1) * (-\sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \\ & + \sin(\Delta q_{5D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{4C'C})), \end{aligned}$$

$$f_{23} = (-\sin(\Delta q_{6AB}) * \sin(\varphi_{12}) + (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \cos(\varphi_{12})) *$$

$$\begin{aligned} & *(-\sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C}) - (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \\ & * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)) + (-\sin(\Delta q_{6AB}) * \cos(\varphi_{12}) - (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \sin(\varphi_{12}) - \\ & - \sin(\Delta q_{4AB})) * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C}) + \sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C}) - \\ & - \sin(\Delta q_{4D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)) + (-\cos(\Delta q_{4AB}) - \cos(\Delta q_{6AB}) + 1) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * \\ & * \sin(\Delta q_{5C'C}) - \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \\ & + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{24} = & (-\sin(\Delta q_{6AB}) * \sin(\varphi_{12}) + (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \cos(\varphi_{12})) * (-\sin(\Delta q_{6D'D}) * \\ & * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \Delta q_{2C'C} + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{1D'D} - l_{D'D}) + \\ & + (-\sin(\Delta q_{6AB}) * \cos(\varphi_{12}) - (\cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{6AB}) - 1) * \sin(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{4AB})) * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \\ & + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * \Delta q_{2C'C} - \sin(\Delta q_{4D'D}) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{2D'D}) + \\ & + (-\cos(\Delta q_{4AB}) - \cos(\Delta q_{6AB}) + 1) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \Delta q_{2C'C} + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \\ & + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{3D'D}) + \Delta q_{2AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{31} = & (\sin(\Delta q_{5AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{4AB}) * \cos(\varphi_{12})) * (-\sin(\Delta q_{6D'D}) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \\ & + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C})) + \\ & + (\sin(\Delta q_{5AB}) * \cos(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{4AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{5AB}) - 1) * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \\ & + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \sin(\Delta q_{4D'D}) * \\ & * \sin(\Delta q_{5C'C})) - \sin(\Delta q_{4AB}) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * (\cos(\Delta q_{5C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \\ & * \sin(\Delta q_{6C'C}) - (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{32} = & (\sin(\Delta q_{5AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{4AB}) * \cos(\varphi_{12})) * (\sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \\ & + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C})) + \\ & + (\sin(\Delta q_{5AB}) * \cos(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{4AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{5AB}) - 1) * (-\cos(\Delta q_{4D'D}) + \\ & + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{6C'C}) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - 1) - \sin(\Delta q_{4D'D}) * \\ & * \sin(\Delta q_{4C'C})) - \sin(\Delta q_{4AB}) * (-\sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{6C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{6C'C}) - \\ & - 1) + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{4C'C})), \end{aligned}$$

$$f_{33} = (\sin(\Delta q_{5AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{4AB}) * \cos(\varphi_{12})) * (-\sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C}) -$$

$$\begin{aligned}
& -(-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)) + \\
& + (\sin(\Delta q_{5AB}) * \cos(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{4AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{5AB}) - 1) * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \\
& + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \sin(\Delta q_{5C'C}) + \sin(\Delta q_{6D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C}) - \sin(\Delta q_{4D'D}) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \\
& + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)) - \sin(\Delta q_{4AB}) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * \sin(\Delta q_{5C'C}) - \sin(\Delta q_{5D'D}) * \sin(\Delta q_{4C'C}) + \\
& + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * (\cos(\Delta q_{4C'C}) + \cos(\Delta q_{5C'C}) - 1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& tf_{34} = (\sin(\Delta q_{5AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \sin(\Delta q_{4AB}) * \cos(\varphi_{12})) * (-\sin(\Delta q_{6D'D}) * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \\
& + (-\cos(\Delta q_{5D'D}) - \cos(\Delta q_{6D'D}) + 1) * \Delta q_{2C'C} + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{1D'D} - l_{D'D}) + (\sin(\Delta q_{5AB}) * \\
& * \cos(\varphi_{12}) - \sin(\Delta q_{4AB}) * \sin(\varphi_{12}) + \cos(\Delta q_{4AB}) + \cos(\Delta q_{5AB}) - 1) * ((\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{6D'D}) - 1) * \\
& * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) - \sin(\Delta q_{6D'D}) * \Delta q_{2C'C} - \sin(\Delta q_{4D'D}) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{2D'D}) - \sin(\Delta q_{4AB}) * (\sin(\Delta q_{4D'D}) * \\
& * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \sin(\Delta q_{5D'D}) * \Delta q_{2C'C} + (\cos(\Delta q_{4D'D}) + \cos(\Delta q_{5D'D}) - 1) * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{3D'D}) + \Delta q_{3AB} \\
& tf_{41} = 0 \qquad \qquad \qquad tf_{42} = 0 \qquad \qquad \qquad tf_{43} = 0 \qquad \qquad \qquad tf_{44} = 1
\end{aligned}$$

(VI.91)

În domeniul deformațiilor mici, relațiile (VI.91) care definesc elementele matricii (VI.90) vor avea o formă redusă, mult mai simplă, (Anexa VI.4):

$$\begin{aligned}
& tf_{11} = (-\sin(\varphi_{12}) - \Delta q_{6AB} * \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} + \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{5C'C}) + (-\cos(\varphi_{12}) + \\
& + \Delta q_{6AB} * \sin(\varphi_{12}) + \Delta q_{5AB}) * (-1 + \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{6C'C} + \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{5C'C}) + \Delta q_{6AB} * (-\Delta q_{4D'D} - \Delta q_{5D'D} * \\
& * \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5C'C}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& tf_{12} = (-\sin(\varphi_{12}) - \Delta q_{6AB} * \cos(\varphi_{12})) * (-\Delta q_{6D'D} * \Delta q_{6C'C} + 1 + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{4C'C}) + (-\cos(\varphi_{12}) + \\
& + \Delta q_{6AB} * \sin(\varphi_{12}) + \Delta q_{5AB}) * (\Delta q_{6C'C} + \Delta q_{6D'D} - \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{4C'C}) + \Delta q_{6AB} * (\Delta q_{4D'D} * \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5D'D} * \\
& + \Delta q_{4C'C}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& tf_{13} = (-\sin(\varphi_{12}) - \Delta q_{6AB} * \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} * \Delta q_{5C'C} - \Delta q_{4C'C} + \Delta q_{5D'D}) + (-\cos(\varphi_{12}) + \Delta q_{6AB} * \\
& * \sin(\varphi_{12}) + \Delta q_{5AB}) * (-\Delta q_{5C'C} - \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{4C'C} - \Delta q_{4D'D}) + \Delta q_{6AB} * (-\Delta q_{4D'D} * \Delta q_{5C'C} + \Delta q_{5D'D} * \\
& * \Delta q_{4C'C} + 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& tf_{14} = (-\sin(\varphi_{12}) - \Delta q_{6AB} * \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \Delta q_{2C'C} + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{3C'C} + \\
& + \Delta q_{1D'D} - l_{D'D}) + (-\cos(\varphi_{12}) + \Delta q_{6AB} * \sin(\varphi_{12}) + \Delta q_{5AB}) * (-\Delta q_{1C'C} + l_{C'C} + \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{2C'C} - \Delta q_{4D'D} * \\
& * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{2D'D}) + \Delta q_{6AB} * (-\Delta q_{4D'D} * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{2C'C} + \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{3D'D}) + \Delta q_{1AB} - l_{AB}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& tf_{21} = (-\Delta q_{6AB} * \sin(\varphi_{12}) + \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} + \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{5C'C}) + (-\Delta q_{6AB} * \cos(\varphi_{12}) - \\
& \sin(\varphi_{12}) - \Delta q_{4AB}) * (-1 + \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{6C'C} + \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{5C'C}) + \Delta q_{4D'D} + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{6C'C} + \Delta q_{5C'C},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& tf_{22} = (-\Delta q_{6AB} * \sin(\varphi_{12}) + \cos(\varphi_{12})) * (-\Delta q_{6D'D} * \Delta q_{6C'C} + 1 + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{4C'C}) + (-\Delta q_{6AB} * \\
& * \cos(\varphi_{12}) - \sin(\varphi_{12}) - \Delta q_{4AB}) * (\Delta q_{6C'C} + \Delta q_{6D'D} - \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{4C'C}) - \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{6C'C} + \Delta q_{5D'D} - \Delta q_{4C'C},
\end{aligned}$$

181

$$\begin{aligned}
tf_{23} &= (-\Delta q_{6AB} \sin(\varphi_{12}) + \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} * \Delta q_{5C'C} - \Delta q_{4C'C} + \Delta q_{5D'D}) + (-\Delta q_{6AB} \cos(\varphi_{12}) - \\
&\sin(\varphi_{12}) - \Delta q_{4AB}) * (-\Delta q_{5C'C} - \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{4C'C} - \Delta q_{4D'D}) + \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{5C'C} - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{4C'C} - 1, \\
tf_{24} &= (-\Delta q_{6AB} \sin(\varphi_{12}) + \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \Delta q_{2C'C} + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{3C'C} + \\
&+ \Delta q_{1D'D} - l_{D'D}) + (-\Delta q_{6AB} \cos(\varphi_{12}) - \sin(\varphi_{12}) - \Delta q_{4AB}) * (-\Delta q_{1C'C} + l_{C'C} + \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{2C'C} - \Delta q_{4D'D} * \\
&\Delta q_{3C'C} + \Delta q_{2D'D}) + \Delta q_{4D'D} * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{2C'C} - \Delta q_{3C'C} - \Delta q_{3D'D} + \Delta q_{2AB} \\
tf_{31} &= (\Delta q_{5AB} \sin(\varphi_{12}) + \Delta q_{4AB} \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} + \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{5C'C}) + (\Delta q_{5AB} * \\
&\cos(\varphi_{12}) - \Delta q_{4AB} \sin(\varphi_{12}) + 1) * (-1 + \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{6C'C} + \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{5C'C}) - \Delta q_{4AB} * (-\Delta q_{4D'D} - \\
&\Delta q_{5D'D} * \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5C'C}), \\
tf_{32} &= (\Delta q_{5AB} \sin(\varphi_{12}) + \Delta q_{4AB} \cos(\varphi_{12})) * (-\Delta q_{6D'D} * \Delta q_{6C'C} + 1 + \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{4C'C}) + \\
&+ (\Delta q_{5AB} \cos(\varphi_{12}) - \Delta q_{4AB} \sin(\varphi_{12}) + 1) * (\Delta q_{6C'C} + \Delta q_{6D'D} - \Delta q_{4D'D} * \Delta q_{4C'C}) - \Delta q_{4AB} * (\Delta q_{4D'D} * \\
&* \Delta q_{6C'C} - \Delta q_{5D'D} + \Delta q_{4C'C}), \\
tf_{33} &= (\Delta q_{5AB} \sin(\varphi_{12}) + \Delta q_{4AB} \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} * \Delta q_{5C'C} - \Delta q_{4C'C} + \Delta q_{5D'D}) + (\Delta q_{5AB} * \\
&* \cos(\varphi_{12}) - \Delta q_{4AB} \sin(\varphi_{12}) + 1) * (-\Delta q_{5C'C} - \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{4C'C} - \Delta q_{4D'D}) - \Delta q_{4AB} * (-\Delta q_{4D'D} * \Delta q_{5C'C} + \\
&+ \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{4C'C} + 1), \\
tf_{34} &= (\Delta q_{5AB} \sin(\varphi_{12}) + \Delta q_{4AB} \cos(\varphi_{12})) * (\Delta q_{6D'D} * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) + \Delta q_{2C'C} + \Delta q_{5D'D} * \\
&* \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{1D'D} - l_{D'D}) + (\Delta q_{5AB} \cos(\varphi_{12}) - \Delta q_{4AB} \sin(\varphi_{12}) + 1) * (-\Delta q_{1C'C} + l_{C'C} + \Delta q_{6D'D} * \Delta q_{2C'C} - \\
&\Delta q_{4D'D} * \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{2D'D}) - \Delta q_{4AB} * (-\Delta q_{4D'D} * (\Delta q_{1C'C} - l_{C'C}) - \Delta q_{5D'D} * \Delta q_{2C'C} + \Delta q_{3C'C} + \Delta q_{3D'D}) + \\
&+ \Delta q_{3AB}, \\
tf_{41} &= 0, \quad tf_{42} = 0, \quad tf_{43} = 0, \quad tf_{44} = 1
\end{aligned}
\tag{VI.92}$$

Matricea (VI.88) poate fi transpusă fără dificultăți în matrice 6x1 de forma (VI.4) ale cărei termeni reprezintă deplasările liniare și unghiulare ale punctului A asociat elementului I al cuplei din figura VI.23. Conform relației (IV.94), translațiile punctului A după direcțiile axelor sistemului de referință sunt:

$$\Delta q_1 = tf_{14} \tag{VI.93}$$

$$\Delta q_2 = tf_{24} \tag{VI.94}$$

$$\Delta q_3 = tf_{34} \tag{VI.95}$$

iar deplasările unghiulare ale acestuia în jurul axelor sistemului de referință se pot determina cu:

$$\Delta q_4 = \arcsin(tf_{32}) \quad (\text{VI.96})$$

$$\Delta q_5 = \arcsin(tf_{13}) \quad (\text{VI.97})$$

$$\Delta q_6 = \arcsin(tf_{21}) \quad (\text{VI.98})$$

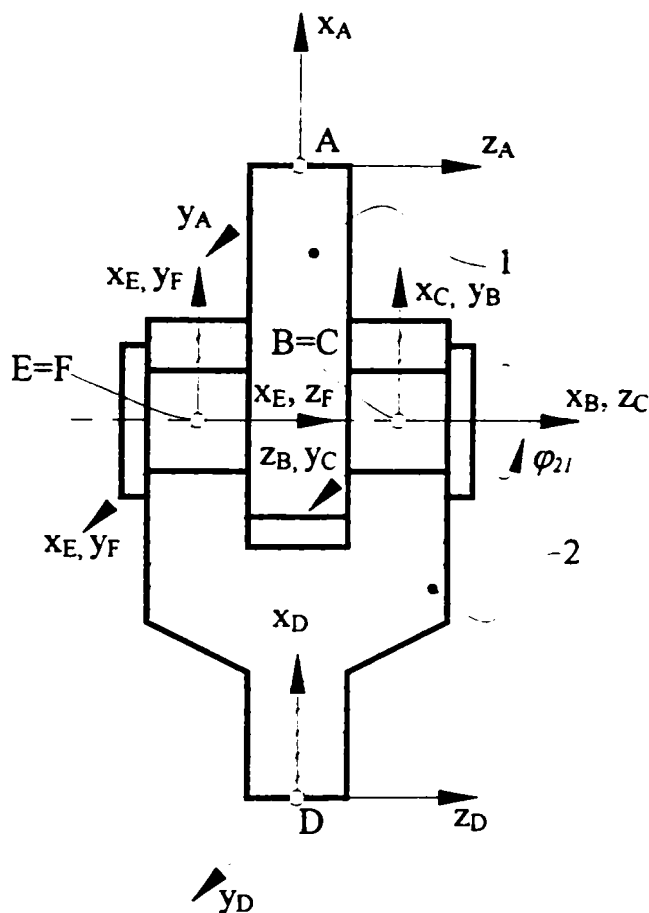


Figura VI.27. Cuplă cinematică de rotație, simetrică

Figura VI.27 prezintă o altă soluție constructivă pentru cuplele cinematice de rotație frecvent utilizată în construcția roboților, cu evidențierea sistemelor de referință asociate elementelor interconectate de cuplă. Caracteristica principală a soluției constă în utilizarea simetriei elementelor componente. În cazul acțiunii unui torsor în punctul notat A , care se distribuie egal pe cele două ramuri ale cuplei, scrierea modelului comportamentului cinetoelastostatic al acesteia se poate realiza pentru o singură parte. Acțiunea unui torsor oarecare însă, necesită scrierea distinctă a modelului comportamental pentru fiecare jumătate a cuplei.

Pentru scrierea modelului comportamentului cinetoelastostatic al cuplei, se atașează acesteia, trei Perechi de Sisteme de Referință (PeSiR), poziționate pe axele geometrice ale componentelor și notate, (figura V.27):

- ✓ *PeSiR A-B* pentru elementul 1,
- ✓ *PeSiR B-C* pentru cupla cinematică de rotație,
- ✓ *PeSiR C-D* pentru elementul 2.

Modelul cuplei cinematice din figura VI.27 se poate obține procedând similar cazului precedent considerat, cu luarea în considerare a simetriei celor două elemente.

Simetria construcției permite analiza doar a unei jumătăți a cuplei, considerând că torsorul forțelor exterioare generalizate ce acționează asupra acesteia în punctul A se distribuie egal pe cele două părți ale cuplei. Se acceptă, deasemenea, că cele două componente egale ale torsorului forțelor exterioare generalizate acționează la jumătatea lungimii celor două tronsoane orizontale ale elementului I , (punctul $B=C$ pentru jumătatea dreaptă a cuplei și simetricul acestuia față de axa de simetrie verticală a reprezentării, pentru jumătatea stângă a acesteia).

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al cuplei cinematice considerate se poate scrie:

$${}^D \underline{T}_A = {}^D \underline{T}_C \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes {}^B \underline{T}_A \quad (\text{VI.60})$$

Astfel, jumătății din dreapta a *elementului notat cu 1* în figura VI.27 și reprezentat detașat din ansamblul cuplei cinematice în figura VI.28, i se atașează perechile de sisteme de referință:

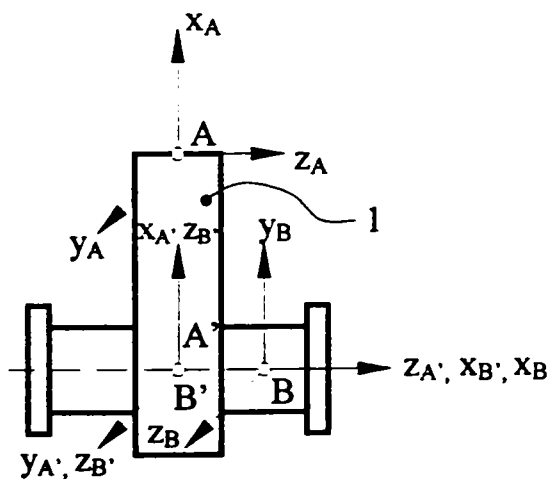


Figura VI.28. Elementul compus I al cuplei cinematice reprezentat în figura VI.26

- ✓ *PeSiR* $A-A'$ pentru tronsonul vertical al elementului I ,
- ✓ *PeSiR* $A'-B'$ pentru îmbinarea rigidă a tronsonului vertical cu cel orizontal dreapta,
- ✓ *PeSiR* $B'-B$ pentru tronsonul orizontal dreapta al elementului I .

Jumătatea considerată a elementului I poate fi considerată ca fiind realizată prin îmbinarea rigidă a două bare ortogonale. Aceasta se regăsește ca formă în elementul notat 2 , (figura VI.26), al cuplei cinematice

reprezentate în figura VI.24 și în offset-ul compus analizat în capitolul V.1.3, având unghi drept între axele celor două bare. Modelul comportamentului cinetoelastostatic al acestuia se obține similar celor prezentate în detaliu pentru cupla cinematică de rotație asimetrică analizată anterior. Cu notațiile din figura VI. 28, relația corespunzătoare se scrie:

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{B'} \otimes {}^{B'} \underline{T}_{A'} \otimes {}^{A'} \underline{T}_A \quad (\text{VI.99})$$

unde matricea ${}^B \underline{T}_A$ reprezintă modelul îmbinării rigide a celor două bare. Acesta, pentru cazul considerat, este:

$${}^B \underline{T}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{VI.100})$$

Matricile de trecere ${}^A \underline{T}_A$, ${}^B \underline{T}_B$, aferente celor două tronsoane AA' și BB' , sunt:

$${}^A \underline{T}_A = {}^A \underline{T}_{A \text{ rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_B \quad (\text{VI.101})$$

$${}^B \underline{T}_B = {}^B \underline{T}_{B \text{ rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_{B'} \quad (\text{VI.102})$$

iar

$${}^A \underline{T}_{A \text{ rig}} = [-l_{AA'} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.103})$$

$${}^B \underline{T}_{B \text{ rig}} = [-l_{BB'} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.104})$$

$${}^A \underline{\Delta T}_A = {}^A \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{S}}_{f_g}^A \quad (\text{VI.105})$$

$${}^B \underline{\Delta T}_{B'} = {}^B \underline{C}_{B'} \cdot \underline{\mathfrak{S}}_{f_g}^B \quad (\text{VI.106})$$

unde ${}^A \underline{C}_A$ și ${}^B \underline{C}_B$ sunt matricile de complianță ale celor două bare, având forma (IV.9),

$\underline{\mathfrak{S}}_{f_g}^A$ este torsorul forțelor exterioare generalizate exprimat față de originea sistemului A' , iar

$\underline{\mathfrak{S}}_{f_g}^B$ este torsorul forțelor exterioare generalizate redus la originea B a sistemului omonim.

Utilizând relațiile (VI.100), ..., (VI.106), modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului I devine:

$$\begin{aligned} {}^B \underline{T}_A = & \left([-l_{BB'} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + {}^B \underline{C}_{B'} \cdot \underline{\mathfrak{S}}_{f_g}^B \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T \otimes \\ & \otimes \left([-l_{AA'} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + {}^A \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{S}}_{f_g}^A \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.107})$$

Relația (VI.107) poate fi soluționată utilizând algoritmul propus în [Kov-02], sau cu metoda propusă pentru cupla cinematică anterior analizată. În cazul secund, sunt valabile relațiile (VI.85), ..., (VI.87), utilizând indicii corespunzători. În primul caz, matricea de trecere se va obține ca matrice 6×1 , iar în cazul secund aceasta va avea dimensiunea 4×4 .

Scrierea modelului comportamentului cinetoelastostatic al *elementului 2* al cuplei

având semiaxele pozitive orientate conform figurii.

Cu aceste considerente, modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului 2 al cuplei considerate, se scrie:

$${}^D \underline{T}_C = {}^D \underline{T}_{D'} \otimes {}^{D'} \underline{T}_{D''} \otimes {}^{D''} \underline{T}_{C'} \otimes {}^{C'} \underline{T}_C \otimes {}^C \underline{T}_C \quad (\text{VI.108})$$

sau, evidențiind comportamentul elastic al ansamblului:

$${}^D \underline{T}_C = \left(({}^D \underline{T}_{D'rig} + {}^D \underline{\Delta T}_{D'}) \otimes {}^{D'} \underline{T}_{D''} \otimes ({}^{D''} \underline{T}_{C'rig} + {}^{D''} \underline{\Delta T}_{C'}) \right) \otimes {}^{C'} \underline{T}_C \otimes ({}^C \underline{T}_{Crig} + {}^C \underline{\Delta T}_C) \quad (\text{VI.109})$$

Matricile componente ale relației precedente, aferente celor trei tronsoane, sunt:

$${}^D \underline{T}_{D'rig} = [-l_{D'D} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.110})$$

$${}^{D'} \underline{T}_{C'rig} = [-l_{C'D'} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.111})$$

$${}^C \underline{T}_{Crig} = [-l_{CC} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{VI.112})$$

$${}^D \underline{\Delta T}_{D'} = {}^D \underline{C}_{D'} \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^D \quad (\text{VI.113})$$

$${}^{D'} \underline{\Delta T}_{C'} = {}^{D'} \underline{C}_{C'} \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^{D'} \quad (\text{VI.114})$$

$${}^C \underline{\Delta T}_C = {}^C \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^C \quad (\text{VI.115})$$

unde ${}^D \underline{C}_{D'}$, ${}^{D'} \underline{C}_{C'}$ și ${}^C \underline{C}_C$ sunt matricile de complianță ale celor trei bare, având forma (IV.9), iar $\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^D$, $\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^{D'}$ și $\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^C$ reprezintă torsorul forțelor exterioare generalizate raportat la originea sistemului D , la originea sistemului D'' , respectiv la originea sistemului C' .

Matricile de trecere aferente celor două îmbinări rigide sunt:

$${}^{D'} \underline{T}_{D''} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha \quad 0]^T \quad (\text{VI.116})$$

$${}^{C'} \underline{T}_C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\alpha \quad 0]^T \quad (\text{VI.117})$$

Cu relațiile (VI.110), ..., (VI.117), modelul comportamentului cinetoelastostatic al jumătății din dreapta a elementului 2 al cuplei devine:

$$\begin{aligned} {}^D \underline{T}_C = & \left(([-l_{D'D} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + {}^D \underline{C}_{D'} \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^D) \otimes [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha \quad 0]^T \otimes \right. \\ & \left. \otimes ([-l_{C'D'} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + {}^{D'} \underline{C}_{C'} \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^{D'}) \otimes [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\alpha \quad 0]^T \otimes \right. \\ & \left. \otimes ([-l_{CC} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + {}^C \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{fg}^C) \right)^T \quad (\text{VI.118}) \end{aligned}$$

Soluționarea relației precedente se poate realiza cu oricare dintre cele două metode specificate anterior în acest capitol: fie cu algoritmul special, propus în [Kov-02], fie prin transpunerea matricilor 6x1 în matrici 4x4, utilizând relația (IV.94).

Explicitarea modelului complet al comportamentului cinetoelstostatic al cuplei cinematice reprezentate în figura VI.27, conform relației (VI.60) necesită scrierea modelului cuplei cinematice în sine. Acesta este în fapt matricea de trecere de la sistemul B la sistemul C . Sistemele de referință B și C , sunt poziționate cu originile suprapuse, dar axele acestora nu se suprapun, ci respectă poziția și orientarea corespunzătoare modelelor elementelor 1 și 2, așa cum relevă figura VI.27. În poziția de referință matricea de trecere de la sistemul B la sistemul C va reflecta doar poziția relativă a axelor celor două sisteme. Așa cum se poate observa din figură, trecerea de la sistemul B la sistemul C implică o rotație cu $\pi/2$ în jurul axei x_B și o rotație cu $\pi/2$ în jurul axei z_B .

Poziția relativă a celor două sisteme se va modifica temporal, ca urmare a rotirii relative a celor două elemente, 1 și 2. Unghiul de rotație în jurul axei x_B , variabil în timp, este unghiul φ_{12} , dat de relația (VI.72).

La momentul t , modelul cuplei cinematice, neglijând deformațiile zonelor de contact, jocurile și frecările, se va scrie:

$${}^C \underline{T}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} + \varphi_{12} & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{VI.119})$$

Cele trei matrici de trecere, componente ale relației (VI.60), care modelează comportamentul cinetoelstostatic al elementelor cuplei cinematice prezentate în figura VI.27 sunt acum determinate. Ca urmare, aceasta se poate scrie:

$${}^D \underline{T}_A = \left({}^D \underline{T}_{D'} \otimes {}^{D'} \underline{T}_{D''} \otimes {}^{D''} \underline{T}_{C'} \otimes {}^{C'} \underline{T}_{C''} \otimes {}^{C''} \underline{T}_C \right) \otimes {}^C \underline{T}_B \otimes \left({}^B \underline{T}_{B'} \otimes {}^{B'} \underline{T}_{A'} \otimes {}^{A'} \underline{T}_A \right) \quad (\text{VI.120})$$

Explicitarea tuturor componentelor relației (VI.120), prin utilizarea relațiilor anterior determinate ale tuturor matricilor de trecere, permite scrierea modelului detaliat al comportamentului cinetoelstostatic al cuplei cinematice reprezentate în figura VI.27, de forma:

$$\begin{aligned} {}^D \underline{T}_C = & \left([-l_{D'D} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^D \underline{C}_{D'} \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{f_g}^D \right) \otimes [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \alpha \ 0]^T \otimes \\ & \otimes \left([-l_{C'D'} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^{D'} \underline{C}_{C'} \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{f_g}^{D'} \right) \otimes [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\alpha \ 0]^T \otimes \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \otimes \left([-l_{CC} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^C \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{f_k}^C \right) \otimes \left[0 \ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{2} + \varphi_{12} \ 0 \ \frac{\pi}{2} \right] \otimes \\
& \otimes \left([-l_{BB} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^B \underline{C}_B \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{f_k}^B \right) \otimes \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{2} \right]^T \otimes \\
& \otimes \left([-l_{AA} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^A \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{f_k}^A \right)
\end{aligned}
\tag{VI.121}$$

La scrierea modelului cinetoelastostatic al cuplei cinematice analizate, nu au fost luate în considerare deformațiile zonelor de contact, jocurile și frecările, dar s-a evidențiat comportamentul elastic al elementelor componente.

Rezolvarea în detaliu a relației precedente se poate realiza similar rezolvării modelului cuplei cinematice de rotație asimetrică, prezentate anterior, sau utilizând algoritmul special pentru înmulțirea matricilor coloană 6x1, prezentat în [Kov-02].

VI.2.2.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de rotație, conduse

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de rotație conduse nu diferă semnificativ de cel al cuplelor cinematice de rotație conducătoare.

Deosebirea rezidă în faptul că, în ipoteza frecării neglijabile dintre zonele de contact, nu există moment reactiv care să se opună mișcării de rotație în jurul axei cuplei cinematice. Ca urmare, nu apare deformație unghiulară în jurul acestei axe. Deci, elementul aferent al matricii de trecere care modelează elementul 2 al cuplelor cinematice de rotație studiate va fi:

$$\Delta q_6 = 0 \tag{VI.122}$$

Cu excepția observației precedente, la modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de rotație conduse, sunt valabile toate relațiile scrise în subcapitolul VI.2.2.1 pentru modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de rotație conducătoare.

VI.2.3. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de translație

VI.2.3.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de translație, conducătoare

Se consideră cupla cinematică conducătoare de translație reprezentată simplificat în figura VI.31. Pentru scrierea modelului comportamentului cinetoelastostatic al acesteia se procedează similar cazului cuplelor cinematice de rotație. Astfel, cuplei cinematice considerate, i se atașează trei perechi de sisteme de referință, poziționate pe axele geometrice ale componentelor:

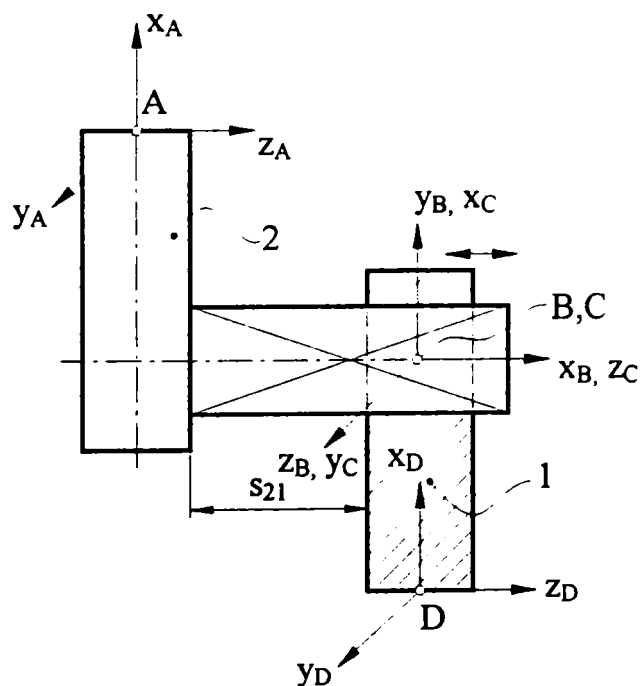


Figura VI.31. Cuplă cinematică de translație

- ✓ *PeSiR A-B* pentru elementul 2,
- ✓ *PeSiR B-C* pentru cupla cinematică de translație,
- ✓ *PeSiR C-D* pentru elementul 1.

În aceste condiții, modelul comportamentului cinetoelastostatic al ansamblului cuplei cinematice considerate este descris de relația:

$${}^D T_A = {}^D T_C \otimes {}^C T_B \otimes {}^B T_A \quad (\text{VI.60})$$

Modelul detaliat al ansamblului cuplei cinematice prezentate în figura VI.31 se obține analizând separat fiecare componentă.

Elementul notat cu 2 în figura VI.31 poate fi considerat ca fiind realizat prin îmbinarea rigidă a două bare ortogonale. Ca urmare, modelul comportamentului cinetoelastostatic al acestuia se obține similar celui al offset-ului obținut prin încastrarea a două bare, prezentat în capitolul VI.1.3 și detaliat în subcapitolul VI.2.1 pentru elementul

similar al cuplelor de rotație.

În acest scop, elementului 2 reprezentat detașat din ansamblul cuplei cinematice în figura VI.32, i se asociază sistemele A , B , B' și C , câte o pereche de sisteme de referință

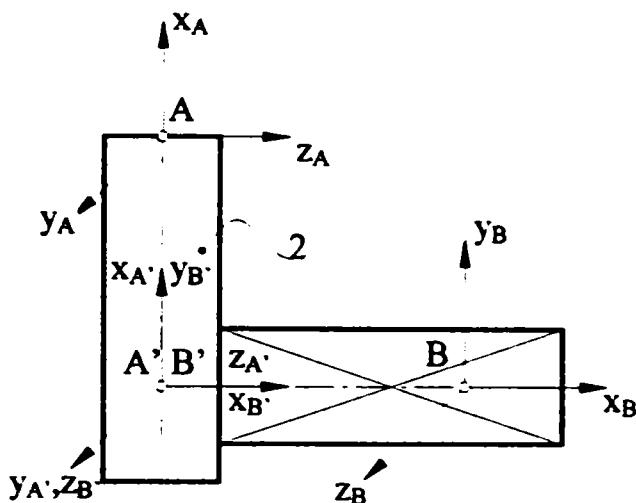


Figura VI.32. Elementul 2 al cuplei de translație reprezentate în figura VI.30

pentru fiecare bară componentă:

✓ *PeSiR* $A-A'$ pentru bara verticală,

✓ *PeSiR* $B'-B$ pentru bara orizontală,

și *PeSiR* $A'-B'$ pentru îmbinarea rigidă.

Sistemele de referință atașate barelor sunt drepte, având axa x orientată în lungul axei longitudinale a acestora și originile poziționate pe această axă, conform figurii VI.32.

Considerând ca "bara cotită" ce modelează elemntul 2 este încastrată în secțiunea B , iar asupra ei acționează la extremitatea superioară, în punctul A , torsorul forțelor generalizate exterioare, $\underline{\mathfrak{T}}_A^A$, modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului 2 se scrie:

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_B \otimes {}^B \underline{T}_{A'} \otimes {}^A \underline{T}_A \quad (\text{VI.123})$$

unde matricea ${}^B \underline{T}_{A'}$ reprezintă modelul îmbinării rigide a celor două bare, având forma:

$${}^B \underline{T}_{A'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{VI.124})$$

iar matricile de trecere ${}^A \underline{T}_A$, ${}^B \underline{T}_B$, aferente celor două tronsoane, vertical și orizontal, se pot scrie similar relației (VI.1):

$${}^A \underline{T}_A = {}^A \underline{T}_{A \text{ rig}} + {}^A \underline{\Delta T}_A \quad (\text{VI.125})$$

$${}^B \underline{T}_B = {}^B \underline{T}_{B \text{ rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_B \quad (\text{VI.126})$$

Matricile care reflectă caracteristicile geometrice de corp rigid ale celor două tronsoane sunt:

$${}^A \underline{T}_{A'rig} = [-l_{AA'}, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (VI.127)$$

$${}^B \underline{T}_{B'rig} = [-l_{B'B}, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (VI.128)$$

iar matricile deformațiilor elastice ale celor două tronsoane sunt:

$${}^A \underline{T}_{A'rig} = {}^A \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{fg}^A \quad (VI.129)$$

$${}^B \underline{T}_{B'rig} = {}^B \underline{C}_B \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{fg}^B \quad (VI.130)$$

unde ${}^A \underline{C}_A$ și ${}^B \underline{C}_B$ sunt matricile de complianță ale celor două bare, având forma (IV.9), iar $\underline{\mathfrak{I}}_{fg}^A$ și $\underline{\mathfrak{I}}_{fg}^B$ sunt tursorii forțelor exterioare generalizate, raportați la originea sistemului A' , respectiv B .

Utilizând relațiile anterioare, modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului 2, devine:

$${}^B \underline{T}_A = \left([-l_{B'B}, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^B \underline{C}_B \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{fg}^B \right) \otimes {}^B \underline{T}_{A'} \otimes \left([-l_{AA'}, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^A \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{I}}_{fg}^A \right) \quad (VI.131)$$

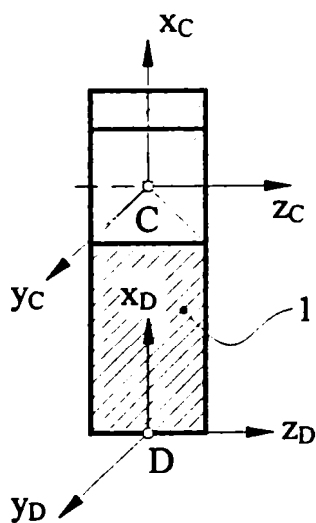


Figura VI.33. Elementul 1 al cuplei cinematice de translație reprezentate în figura VI.31

Elementului notat cu 1 în figura VI.31 și reprezentat separat în figura VI.33, i se atașează sistemele de referință C și D , care alcătuiesc *PeSiR C-D*.

Elementul 1 corespunde celui mai simplu offset, modelat ca bară simplu încastrată în secțiunea D , sollicitată cu un tursor al forțelor exterioare generalizate în secțiunea C . Ca urmare, modelarea comportamentului cinetoelastostatic al elementului 1 se reduce de fapt la cele prezentate în capitolul VI.1.2 și VI.2.2.1.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al elementului 1 este deci:

$${}^D \underline{T}_C = {}^D \underline{T}_{Crig} + {}^D \underline{\Delta T}_C \quad (VI.132)$$

sau, explicit:

$${}^D \underline{T}_C = [-l_{CD} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^D \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_B}^D \quad (\text{VI.133})$$

Explicitarea modelului complet al comportamentului cinetoelastostatic al cuplei cinematice reprezentate în figura VI.31, conform relației (VI.60) necesită scrierea modelului cuplei cinematice în sine. Acesta este în fapt matricea de trecere de la sistemul B la sistemul C . Sistemele de referință B și C , evidențiate în figura VI.31, sunt poziționate cu originile suprapuse, dar axele acestora nu se suprapun. În poziția de referință, fixă, matricea de trecere de la sistemul B la sistemul C va reflecta doar poziția relativă a axelor celor două sisteme. Suprapunerea axelor celor două sisteme, implică două mișcări de rotație: o rotație cu $\frac{\pi}{2}$ în jurul axei y_B și o rotație cu $\frac{\pi}{2}$ în jurul axei z_B .

Poziția relativă a celor două sisteme se va modifica temporal, ca urmare a mișcării de translație de-a lungul axei x_B . În consecință, distanța notată s_{21} în figura VI.31, este variabilă în timp:

$$s_{21} = s_{21}(t) \quad (\text{VI.134})$$

La momentul t , modelul comportamentului cinetoelastostatic al cuplei cinematice, neglijând deformațiile zonelor de contact, jocurile și frecările, se va scrie:

$${}^C \underline{T}_B = \left[s_{21} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{2} \right]^T \quad (\text{VI.135})$$

Întrucât cele trei matrici de trecere, componente ale relației (VI.60), care modelează comportamentul cinetoelastostatic al elementelor componente ale cuplei cinematice prezentate în figura VI.31 sunt determinate, se poate scrie modelul detaliat al ansamblului cuplei. Aceasta, în absența jocurilor, frecărilor și deformațiilor elastice din cuplă, este:

$${}^D \underline{T}_A = \left(\left[[-l_{CD} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^D \underline{C}_C \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_B}^D \right] \otimes \left[s_{21} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{2} \right]^T \otimes \left(\left[[-l_{B'B} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^B \underline{C}_{B'} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_B}^B \right] \otimes {}^B \underline{T}_{A'} \otimes \left[[-l_{A'A} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T + {}^A \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_B}^A \right] \right) \quad (\text{VI.136})$$

unde, după efectuarea produselor dintre matricile de complianță având dimensiunea 6×6 și torsorii având dimensiunea 6×1 , toate matricile componente au dimensiunea 6×1 și sunt determinate.

Produsele notate cu simbolul \otimes se pot calcula conform [Kov-02], sau se poate

utiliza metodologia detaliată anterior pentru cuplele cinematice de rotație.

VI.2.3.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic cuplelor cinematice de translație, conduse

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice de translație conduse se poate scrie similar cu cel al cuplelor cinematice de translație conducătoare.

Singura deosebire constă în faptul că, în ipoteza frecării neglijabile dintre zonele de contact ale cuplei, nu există forță reactivă după direcția mișcării. În consecință nu apar deformații de natură elastică după direcția acestei axe.

Ca urmare, elementul aferent al matricii de trecere care modelează elementul 2 al cuplelor cinematice de rotație studiate va fi:

$$\Delta q_3 = 0 \quad (\text{VI.137})$$

VI.3. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de ghidare ale roboților

VI.3.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de ghidare cu topologie serială

Dispozitivul de ghidare cu topologie serială este constituit din offset-uri generalizate și cuple cinematice conducătoare înseriate, dispuse alternativ, cum sugerează reprezentarea simplificată a unui astfel de dispozitiv de ghidare, din figura VI.34.

Așa cum s-a văzut în capitolele anterioare, (IV.3, VI.2 și VI.2) cu ajutorul teoriei PeSiR se pot modela atât offset-ul simplu și compus, cât și cuplele cinematice, indiferent de tipul acestora.

Mai mult, teoria PeSiR permite interconectarea modelelor astfel obținute.

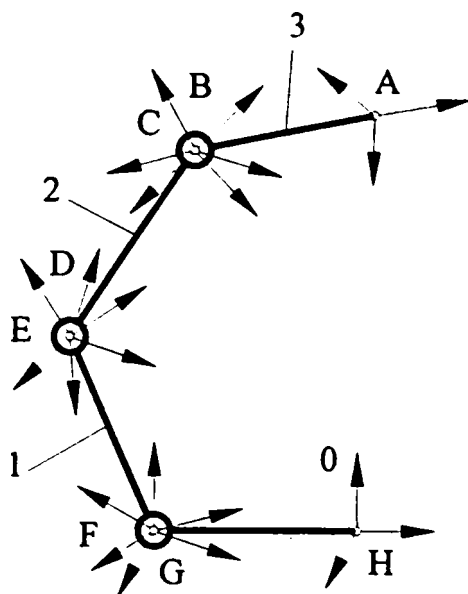


Figura VI.34. Reprezentarea schematică a unui dispozitiv de ghidare cu topologie serială

Comportamentul oricărei structuri, indiferen de complexitatea ei, conform [Kov-01] poate fi modelat sub forma unei matrici de trecere 6×1 .

Asfel pentru a analiza comportamentul cinetoelastostatic al dispozitivului de ghidare din figura VI.34, se atașează sistemele de referință A și H celor două extreme ale lanțului cinematic aferent. În aceste condiții, comportamentul cinetoelastostatic al dispozitivului este descris de matricea de trecere de la sistemul A la sistemul H :

$${}^H \underline{T}_A = {}^H \underline{T}_{A_{rig}} + {}^H \underline{\Delta T}_A \quad (VI.138)$$

care însumează:

- matricea de trecere de la sistemul A la sistemul H , ${}^H \underline{T}_{A_{rig}}$, dependentă de

caracteristicile geometrice de corp rigid ale componentelor structurii, având forma:

$${}^H \underline{T}_{A_{rig}} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (VI.139)$$

sau

$${}^H \underline{T}_{A_{rig}} = [q_i]^T, \text{ cu } i = 1, \dots, 6 \quad (VI.140)$$

- matricea deformațiilor elastice ale structurii, ${}^H \underline{\Delta T}_A$ survenite ca urmare a acțiunii torsorului $\underline{\mathcal{S}}_{fg}^H$ al forțelor exterioare generalizate, raportat la punctul H , de forma:

$${}^H \underline{\Delta T}_A = [\Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \Delta q_3 \quad \Delta q_4 \quad \Delta q_5 \quad \Delta q_6]^T \quad (VI.141)$$

sau

$${}^H \underline{\Delta T}_{A_{rig}} = [\Delta q_i]^T, \text{ cu } i = 1, \dots, 6 \quad (VI.142)$$

Indicii i din relațiile anterioare, $i = 1, \dots, 3$ sunt aferenți deplasărilor/deformațiilor structurii după direcțiile celor trei axe x , y și z , iar indicii $i = 4, \dots, 6$ sunt aferenți rotirilor structurii în jurul aceluiași axe ale sistemului A , astfel încât axele acestuia să se suprapună peste cele omoloage ale sistemului de referință H .

Aceeași matrice de trecere ${}^H \underline{T}_A$ conform [Kov-01], se poate obține ca produs al

matricilor de trecere 6x1, aferent componentelor structurii. Scrierea matricilor de trecere ale componentelor structurii necesită, în prealabil, atașarea la fiecare componentă, element sau cuplă cinematică, a unei perechi de sisteme de referință. Pentru cazul considerat, acestea sunt notate, (figura VI.34):

- ✓ **PeSiR A-B** pentru elementul 3
- ✓ **PeSiR B-C** pentru cupla cinematică interpusă între elementele 3 și 2
- ✓ **PeSiR C-D** pentru elementul 2
- ✓ **PeSiR D-E** pentru cupla cinematică interpusă între elementele 2 și 1
- ✓ **PeSiR E-F** pentru elementul 1
- ✓ **PeSiR F-G** pentru cupla cinematică interpusă între elementele 1 și 0
- ✓ **PeSiR G-H** pentru elementul 0

Cu acestea, comportamentul cinetoelastostatic al dispozitivului de ghidare din figura VI.34 va fi descris de matricea:

$$\begin{aligned} {}^H \underline{T}_A = & \left({}^H \underline{T}_{G\text{rig}} + {}^H \underline{\Delta T}_G \right) \otimes \left({}^G \underline{T}_{F\text{rig}} + {}^G \underline{\Delta T}_F \right) \otimes \left({}^F \underline{T}_{E\text{rig}} + {}^F \underline{\Delta T}_E \right) \otimes \left({}^E \underline{T}_{D\text{rig}} + {}^E \underline{\Delta T}_D \right) \otimes \\ & \otimes \left({}^D \underline{T}_{C\text{rig}} + {}^D \underline{\Delta T}_C \right) \otimes \left({}^C \underline{T}_{B\text{rig}} + {}^C \underline{\Delta T}_B \right) \otimes \left({}^B \underline{T}_{A\text{rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_A \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.143})$$

unde:

- matricile \underline{T}_{rig} sunt dependente de geometria elementului/cuplei în cauză,
- matricile deformațiilor elastice, $\underline{\Delta T}$, se determină conform celor prezentate în subcapitolele IV.3, VI.1.2., VI.1.3 și VI.1.4, în ipoteza frecărilor și a jocurilor neglijabile în cuplele cinematice,
- tursorii forțelor exterioare generalizate, care apar în expresia de calcul a matricilor $\underline{\Delta T}$ se calculează conform celor prezentate în subcapitolului VI.1.2

Dependent de soluția constructivă a cuplelor cinematice, matricile deformațiilor elastice ale acestora pot fi considerate neglijabile. Un astfel de exemplu este cupla cinematică de rotație cu corpuri de rostogolire. În acest caz, relația (VI.143) devine:

$$\begin{aligned} {}^H \underline{T}_A = & \left({}^H \underline{T}_{G\text{rig}} + {}^H \underline{\Delta T}_G \right) \otimes {}^G \underline{T}_{F\text{rig}} \otimes \left({}^F \underline{T}_{E\text{rig}} + {}^F \underline{\Delta T}_E \right) \otimes {}^E \underline{T}_{D\text{rig}} \otimes \\ & \otimes \left({}^D \underline{T}_{C\text{rig}} + {}^D \underline{\Delta T}_C \right) \otimes {}^C \underline{T}_{B\text{rig}} \otimes \left({}^B \underline{T}_{A\text{rig}} + {}^B \underline{\Delta T}_A \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.144})$$

Toate matricile din relațiile (VI.143) și (VI.144) au dimensiunea 6x1. Ca urmare, acestea nu sunt conforme pentru înmulțire cu algoritmul cunoscut din algebra matriceală.

Produsele matricilor 6x1, notate cu simbolul \otimes , se pot realiza conform algoritmului special propus în [Kov-02].

O altă posibilitate de efectuare a produselor matricilor de trecere 6x1 constă în transpunerea acestora în matrici 4x4, conform celor prezentate în subcapitolul IV.5. Matricile astfel obținute sunt conforme pentru înmulțire, [Dud-86], [Pre-02], [Bre-00].

VI.3.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de ghidare cu topologie paralelă

Dispozitivului de ghidare cu topologie serială schematizat în figura VI.34 constituie o conexiune interpusă între elementele 3 și 0. Un dispozitiv de ghidare cu topologie paralelă este constituit din două elemente, similare elementelor 3 și 0 din figura VI.34,

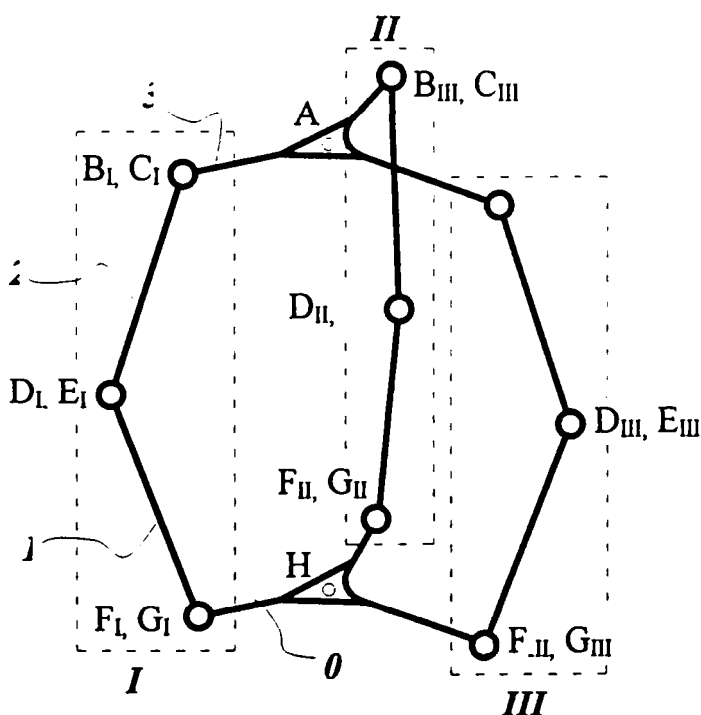


Figura VI.35. Reprezentarea schematică a unui dispozitiv de ghidare cu topologie

legate între ele prin mai multe conexiuni, fiecare similară celei exemplificate în figura menționată. Un dispozitiv de ghidare cu topologie paralelă, care conține trei astfel de conexiuni, notate I, II și III, este reprezentat simplificat în figura VI.35. Se observă că în punctele A și H, cele trei bare, aparținând fiecare unei alte ramuri, sunt rigidizate între ele.

În cazul considerat, între matricile de trecere care modelează comportamentul cinetoelastostatic al dispozitivului de ghidare, există

egalitatea:

$$\left({}^H \underline{T}_A \right)_I = \left({}^H \underline{T}_A \right)_{II} = \left({}^H \underline{T}_A \right)_{III} \quad (VI.145)$$

sau:

$$\left({}^H \underline{T}_{A_{rig}} + {}^H \underline{\Delta T}_A \right)_I = \left({}^H \underline{T}_{A_{rig}} + {}^H \underline{\Delta T}_A \right)_{II} = \left({}^H \underline{T}_{A_{rig}} + {}^H \underline{\Delta T}_A \right)_{III} \quad (VI.146)$$

unde matricile $\left({}^H \underline{T}_{A_{rig}} + {}^H \underline{\Delta T}_A \right)_i$ cu $i = I, \dots, III$, se calculează conform celor anterior expuse pentru dispozitivul deghidare cu topologie serială.

Se impune observația că torsorul forțelor exterioare generalizate $\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^3$ care acționează asupra dispozitivului de ghidare în punctual A se distribuie pe fiecare conexiune, deci:

$$\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^3 = \left(\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^3 \right)_I + \left(\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^3 \right)_{II} + \left(\underline{\mathfrak{F}}_{fg}^3 \right)_{III} \quad (VI.147)$$

Spre deosebire de distribuția solicitărilor exterioare, în mod egal pe fiecare conexiune, deformațiile elastice ale fiecărei conexiuni sunt egale între ele și egale cu cele ale întregii structuri. Așadar, matricile deformațiilor elastice aferente sunt în relație de egalitate:

$$\left({}^H \underline{\Delta T}_A \right)_I = \left({}^H \underline{\Delta T}_A \right)_{II} = \left({}^H \underline{\Delta T}_A \right)_{III} = {}^H \underline{\Delta T}_A \quad (VI.148)$$

VI.4. Concluzii

Modelarea celor trei tipuri constructive de cuple cinematice reprezentate în figura VI.24, figura VI.27 și figura VI.32 evidențiază următoarele:

- parametrii constructivi ai tronsoanelor elementelor constitutive ale cuplei, (lungimi și unghiuri dintre tronsoane) apar numai în matricile de trecere ce modelează elementele,
- lungimile tronsoanelor elementelor se regăsesc numai în elementele Δq_1 , Δq_2 și Δq_3 ale matricii de trecere ce modelează cupla cinematică,
- unghiul de rotație $\varphi_{12}(t)$ al cuplei de rotație, și cursa $s(t)$ a cuplei de translație, apar doar în matricea de trecere care modelează comportamentul cuplei; nu influențează comportamentul elementelor,
- pentru deformații foarte mici în jurul axelor sistemelor de referință se pot accepta relațiile IV.95 și IV.96, dar nu și în cazul unghiului φ_{12} al cuplei de rotație.

**VII. MODELAREA
COMPORTAMENTULUI
CINETOELASTOSTATIC AL
DISPOZITIVELOR DE COMPLIANTĂ
DIN STRUCTURA EFECTORILOR
FINALI AI ROBOȚILOR
INDUSTRIALI**

VII.1. Introducere

Succesul unui mare număr de operații robotizate implică, alături de o precizie corespunzătoare a robotului și o anume adaptabilitate a structurii acestuia.

Concepute și realizate mai întâi pentru roboți industriali de montaj, ca “interfață” de absorbție automată a erorilor, dispozitivele de complianță sunt o materializare a complianței concentrate a robotului. În acest caz, complianța este o proprietate dorită, esențială pentru realizarea unei anumite funcții a robotului.

Indiferent de tipul de corecție a erorilor căruia îi corespund, pasivă sau mixtă, dispozitivele de complianță au o elasticitate mult mai mare comparativ cu sistemul mecanic al robotului. Elasticitatea de ansamblu a dispozitivelor de complianță este asigurată prin includerea elementelor elastice în structura lor. Comportamentul elastic al acestora este asigurat pe două căi:

- ✓ utilizarea de materiale cu elasticitate ridicată pentru confecționarea elementelor elastice,
- ✓ forma geometrică adecvată a elementelor elastice.

Așa cum s-a precizat în capitolul II, dispozitivele de complianță sunt dispozitive special concepute pentru tipul de aplicație căruia îi sunt destinate. Fiind soluții particulare, acestea sunt, în consecință, de o mare varietate și diversitate atât ca soluții constructive, cât și ca materiale utilizate pentru confecționarea elementelor elastice. Soluțiile constructive acoperă un registru amplu, pornind de la o simplă lamelă sau o membrană de oțel arc până la ansambluri sofisticate de tipul celor ilustrate în figurile II.20, II.22, II.31, II.32.

Paleta soluțiilor constructive ale dispozitivelor de complianță publicate conține un mare număr de soluții constructive bazate pe principiul de funcționare al dispozitivului numit *RCC* (“*Remote Center of Compliance*”- *dispozitiv cu centru de complianță îndepărtat*), devenit un model de referință în domeniu.

Obiectul actualului capitol îl constituie modelarea comportamentului cintoelastostatic al dispozitivelor de complianță utilizând conceptul perechilor de sisteme de referință, *PeSiR*.

VII.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță cu un element elastic omogen

VII.2.1. Dispozitive de complianță cu un element elastic omogen, având secțiune constantă

Cel mai simplu model utilizabil pentru dispozitivele de complianță este cel al unei bare simplu încastrate, de secțiune constantă, sollicitată la extremitatea liberă cu un torsesor al forțelor exterioare generalizate, (figura V.2). Corespondentul practic al acestui model se regăsește în câteva dintre soluțiile constructive prezentate în capitolul II.

Se consideră, pentru început, că dispozitivul modelat este sollicitat numai cu forțe axiale de întindere/compresiune, a căror rezultantă notată F_x , acționează în centrul A al secțiunii libere a barei. Se atașează elementului considerat un sistem de referință cu originea poziționată în centrul secțiunii încastrate notat B și un alt sistem de referință având originea poziționată în centrul secțiunii libere a barei, notat A , (figura VII.1). Acest tip de sollicitare este relativ rar întâlnit în practică. Uzual, torsesorul forțelor exterioare generalizate conține șase componente nenule. Cazul considerat, este o idealizare care poate fi acceptată pentru cazuri simple, cum sunt dispozitivele de prevenire a coliziunii, unde forțele axiale predomină.

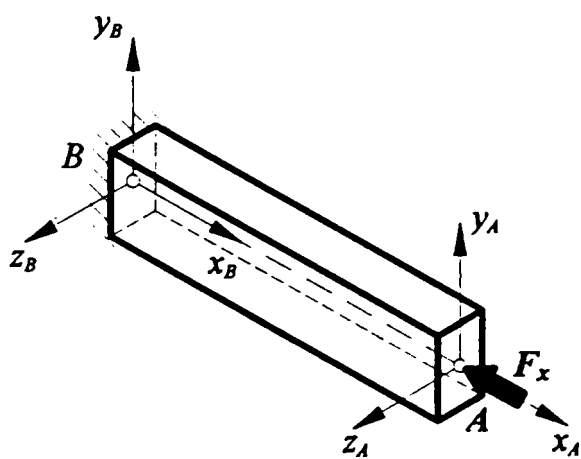


Figura VII.1. Bara simplu încastrată, sollicitată cu o forță axială

Comportamentul cinetoelastostatic al dispozitivului astfel modelat este descris de matricea (VI.1):

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{Arig} + {}^B \underline{\Delta T}_A \quad (VI.1)$$

care însumează:

- matricea de trecere de la sistemul A la sistemul B , ${}^B \underline{T}_{Arig}$, dependentă de masa totală și de geometria corpului rigid al barei,
- matricea deformațiilor elastice ale

barei, ${}^B \underline{\Delta T}_A$, survenite ca urmare a acțiunii tursorului forțelor exterioare generalizate, redus la originea B a sistemului omonim.

Termenii relației (VI.1) sunt:

$${}^B \underline{T}_{A \text{rig}} = [-l_{AB} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{VII.1})$$

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{K}_A^{-1} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^B \quad (\text{V.10})$$

$${}^B \underline{\Delta T}_A = {}^B \underline{C}_A \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{f_g}^B \quad (\text{V.10}')$$

Matricea de rigiditate ${}^B \underline{K}_A^{-1}$ și cea de complianță ${}^B \underline{C}_A$, ale barei încastrate au forma (V.6), (V.6') și respectiv (V.9). Pentru cazul simplu considerat, acestea vor avea doar un singur termen, aferent solicitării axiale de compresiune. Ca urmare, relația (VI.1) devine:

$${}^B \underline{T}_A = \left[-\frac{l_{AB}}{E \cdot A} F_x \ -l_{AB} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad (\text{VII.2})$$

Majoritatea elementelor elastice componente ale dispozitivelor de complianță, solificate la compresiune, sunt realizate din cauciuc. Acesta, sintetic sau natural, este beneficiarul unor proprietăți contradictorii:

⇒ elasticitate și capacitate de amortizare a vibrațiilor net superioare materialelor metalice,

⇒ la aceeași calitate, proprietăți diferite, dependente de particularitățile procedurii tehnologice de obținere,

⇒ caracteristică diferită în funcție de solicitare și liniară doar pentru deformații relativ mici,

⇒ modulele de elasticitate longitudinală E și transversală G dependente de calitatea cauciucului, în special de duritatea lui,

⇒ între modulele de elasticitate longitudinală E și transversală G există relația $E=3G$ (determinată experimental) $E=3G$,

⇒ la aceeași duritate, modulul de elasticitate longitudinală E dependent de coeficientul de formă (raportul dintre aria suprafeței încărcate și cea a suprafeței libere).

Pentru elemente elastice pline, (bloc), confecționate din cauciuc, cilindrice sau prismatice, (figura VII.2), solificate la compresiune, relațiile de calcul aferente sunt:

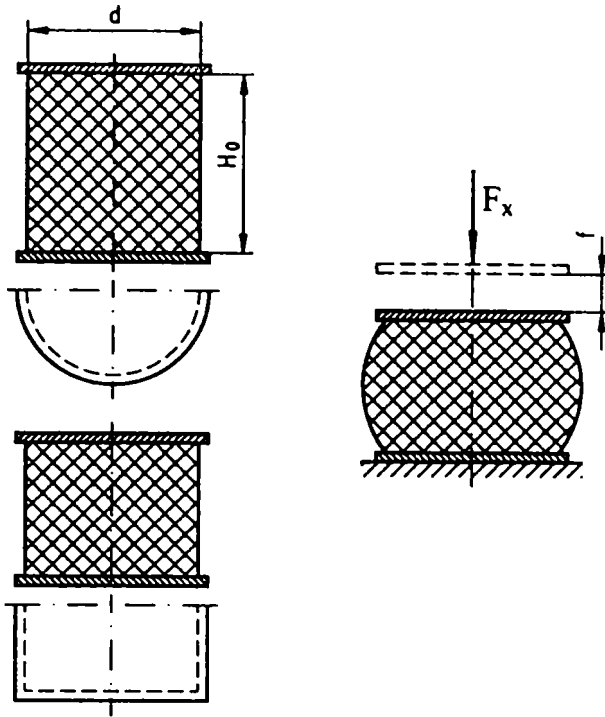


Figura VII.2. Arc bloc sollicitat la compresiune

-modulul de elasticitate longitudinală, calculat, al cauciucului:

$$E_c = \psi \cdot G \quad (\text{VII.3})$$

-deformația axială (săgeata) a elementului elastic:

$$f = \frac{P H_0}{A E_c} \quad (\text{VII.4})$$

-rigiditatea la întindere/compresiune a elementului elastic:

$$k = \frac{A E_c}{H_0} \quad (\text{VII.5})$$

unde A este aria cîmpului transversal a arcului, iar Ψ este factorul de formă care se alege funcție de coeficientul de formă, Ψ_f , [Dem-84]. Pentru elemente

cilindrice, coeficientul de formă este, [Dem-84]:

$$\psi_f = \frac{d}{4} H_0 \quad (\text{VII.6})$$

Relațiile (VII.3), ..., (VII.5) sunt valabile pentru deformații axiale statice f_{st} sub 20% din lungimea în stare neîncărcată H_0 a arcului.

Ca urmare, matricea de trecere (VII.2), pentru un dispozitiv de complianță concretizat printr-un element plin, realizat din cauciuc, de tipul celor reprezentate în figura VII.2, este:

$${}^B \underline{T}_A = \begin{bmatrix} -\frac{H_0}{\psi \cdot G \cdot A} F_x - H_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{VII.2}')$$

Pentru alte tipuri de solicitare, componentele matricii de complianță ${}^B \underline{C}_A$ se vor determina ca inversă a rigidității elementului la solicitarea respectivă, sau direct, ca raport dintre deformația și solicitarea în cauză.

Relațiile de calcul ale acestora sunt:

- pentru solicitarea la forfecare în planele longitudinale de simetrie ale elementului plin,

(figura VII.3):

$$k = \frac{F_z}{H_0 \cdot \text{tg}\left(\frac{\tau_f}{G}\right)} \approx \frac{A \cdot G}{H_0} \quad (\text{VII.7})$$

unde A este aria de forfecare, iar τ_f este efortul unitar admisibil la forfecare, al materialului. Domeniul de valabilitate al relației precedente este limitat la săgeți statice de maxim 35% din lungimea în stare neîncărcată a elementului.

- pentru solicitarea la torsiune a elementului plin cilindric:

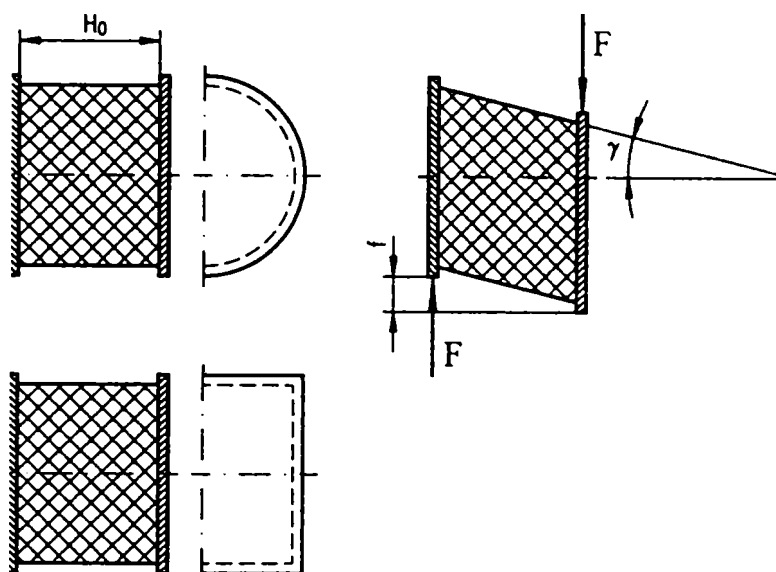


Figura VII.3. Arc bloc solicitat la forfecare

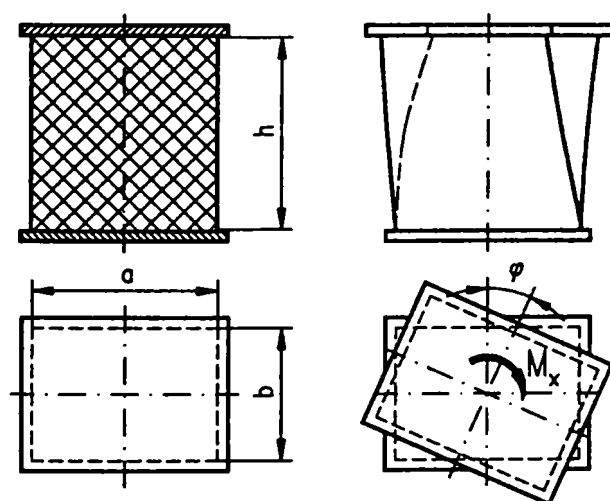


Figura VII.4. Arc bloc prismatic solicitat la torsiune

$$\varphi = \frac{32M_x \cdot H_0}{\pi d^4 \cdot G} \quad (\text{VII.8})$$

- pentru solicitarea la torsiune a elementului plin prismatic, (figura VII.4):

$$\varphi = \frac{6M_x \cdot H_0}{ab(a^2 + b^2) \cdot G} \quad (\text{VII.9})$$

cu valabilitate pentru unghiuri de torsiune $\varphi \leq 20^\circ$.

Pentru elemente elastice tubulare, de secțiune constantă, confecționate din cauciuc, se va modifica în mod corespunzător expresia ariei secțiunii transversale și se vor stabili domeniile de valabilitate ale relațiilor de calcul conform datelor din literatura de specialitate, celor furnizate de firma producătoare sau/și conform valorilor determinate experimental.

Elementele elastice cele mai frecvent folosite în construcția dispozitivelor de complianță sunt arcurile lamelare metalice. Acestea sunt constituite dintr-o singură lamelă, care, în stare neîncărcată, are fibra medie dreaptă. Uzual aceste arcuri au secțiunea transversală dreptunghiulară cu grosimea mult mai mică decât lățimea (figura VII.5). În construcția dispozitivelor de complianță, arcurile lamelare sunt frecvent utilizate în număr de 2, 3 sau șase.

Solicitarea principală a acestor arcuri este încovoierea. La determinarea elementelor matricii de complianță se acceptă, în general, unele ipoteze simplificatoare, arcul schematizându-se la o formă care permite o abordare cât mai facilă. Astfel, arcul lamelar drept, de formă și secțiune dreptunghiulară, cu dimensiuni constante ale secțiunii, încastrat la o extremitate și încărcat cu forța concentrată P la extremitatea liberă, (figura VII.5), este

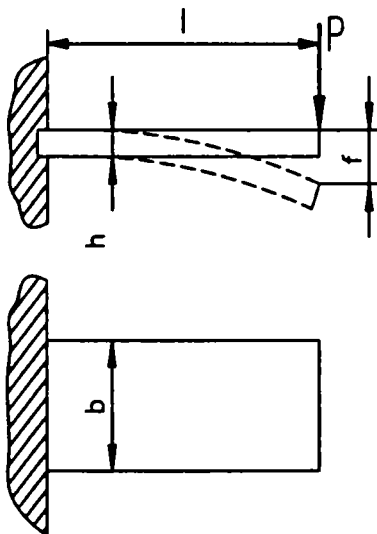


Figura VII.5. Arc lamelar simplu de forma dreptunghiulară

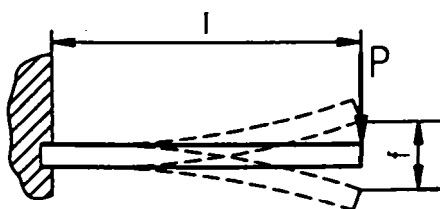


Figura VII.6. Arc lamelar pretensionat

asimilat unei grinzi identice ca formă și dimensiuni, identic fixată și încărcată. Acceptând aceste ipoteze, se pot utiliza relațiile de calcul aferente barelor simplu încastrate. Astfel, sagueata maximă a arcului reprezentat în figura VII.5, este:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} = 4 \frac{Pl^3}{Ebh^3} \quad (\text{VII.10})$$

Utilizări remarcabile ale arcurilor lamelare metalice de secțiune constantă sunt dispozitivele de prehensiune "articomplianțe", de tip "reductoare", [Kov1-92]. În acest caz, arcurile lamelare se montează pretensionat, fapt care trebuie luat în considerare la determinarea săgeții în scopul scrierii elementelor matricii de complianță.

Unui asemenea arc, (figura VII.6), i se dă o săgeată inițială f_0 de contracție în direcția inițială, astfel încât este necesară acțiunea unei forțe P_0 ca arcul să revină în poziția inițială. Între săgeata arcului sub sarcină f_p și săgeata inițială f_0 există relația:

$$\frac{f_0}{f_p} = \frac{P_0}{P_0 - P} \quad (\text{VII.11})$$

Prin urmare, săgeata totală va fi:

$$f = f_0 + f_p = f_p \left(\frac{P_0}{P_0 - P} + 1 \right) = \frac{2l^2 \sigma_{ai}}{3Eh} \quad (\text{VII.12})$$

Arcurile lamelare metalice de secțiune constantă sunt utilizate în structura dispozitivelor de complianță și încastrate la ambele extremități. Este cazul dispozitivelor de complianță *RCC*. Acestea însă se bazează pe utilizarea sistemelor cu cel puțin două astfel de arcuri lamelare montate în paralel sau/și în serie. Modelarea acestor dispozitive este abordată în subcapitolul următor.

VII.2.2. Dispozitive de complianță cu un element elastic omogen, considerat de secțiune constantă

Un număr apreciabil de dispozitive de complianță conțin în structura lor unul sau mai multe arcuri elicoidale cilindrice de întindere/compresiune. Dependent de montajul acestora și de solicitările la care sunt supuse, arcurile elicoidale cilindrice de întindere/compresiune sau sistemele de astfel de arcuri, pot fi considerate similare unor elemente elastice de secțiune constantă, cu determinarea corespunzătoare a caracteristicilor de rigiditate/elasticitate.

În cazul unui singur astfel de arc supus unei solicitări axiale, comportamentul elementului elastic se poate considera identic cu al unui element elastic de secțiune transversală constantă. Elementul corespunzător al matricii de complianță se va determina ca inversă a rigidității arcului. Calculul rigidității arcului implică determinarea săgeții maxime a acestuia, care se determină din considerentul că sarcina axială F_x produce răsucirea întregii lungimi active a sârmei din care este confecționat arcul. Pentru un arc cu n spire de secțiune circulară având diametrul secțiunii sârmei d și diametrul de înfășurare al spirelor D_m , săgeata arcului este:

$$f = \frac{8D_m^3 \cdot n}{G \cdot d^4} F_x \quad (\text{VII.13})$$

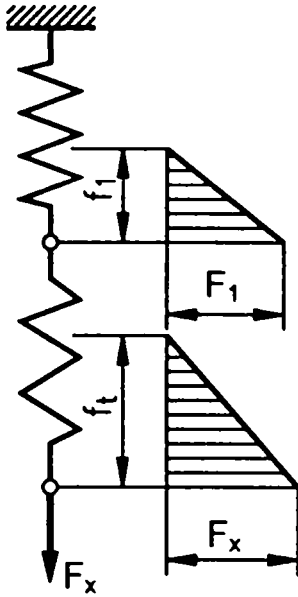


Figura VII.7. Sistem de arcuri elicoidale de compresiune, înseriate

iar elementul corespunzător al matricii de complianță este:

$$c_{11} = \frac{8D_m^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \quad (\text{VII.14})$$

Atunci când, din considerente de gabarit/caracteristici arcurile elicoidale cilindrice de compresiune sunt înlocuite cu sisteme de astfel de arcuri, săgeata sistemului în cauză se determină adecvat montajului acestora.

În cazul sistemelor de arcuri înseriate, (figura VII.7), săgeata totală se determină ca sumă a celor individuale:

$$f_t = \sum_{i=1}^n f_i \quad (\text{VII.15})$$

fiecare arc fiind solicitat de forța axială totală:

$$F_1 = F_i = F_x \quad (\text{VII.16})$$

În cazul sistemelor de arcuri montate în paralel care intră în acțiune simultan, (figura VII.8), arcurile au săgețile identice, iar solicitarea axială se împarte egal pe fiecare arc:

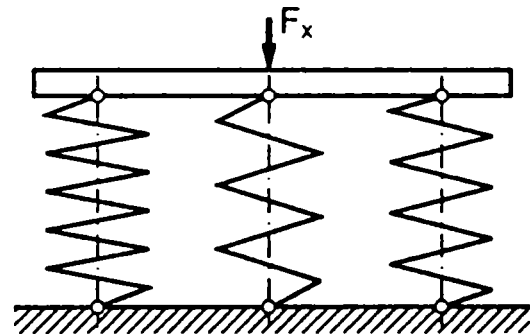


Figura VII.8 Sistem de arcuri montate în paralel

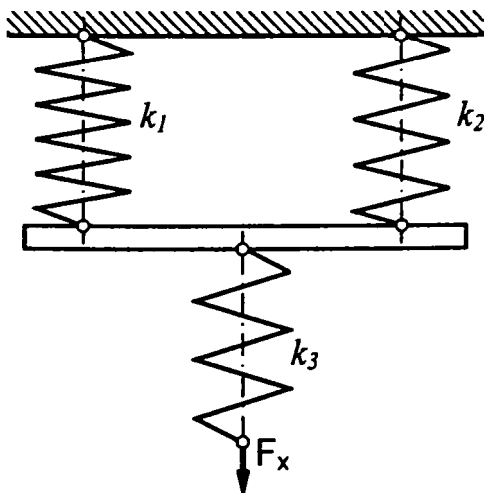


Figura VII.9. Sistem de arcuri elicoidale de compresiune dispuse combinat

$$f_1 = f_i = f_n \quad (\text{VII.17})$$

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_i \quad (\text{VII.18})$$

Există soluții constructive ale dispozitivelor de complianță bazate pe utilizarea sistemelor de arcuri elicoidale de compresiune montate combinat. Un astfel de exemplu este schematizat în figura VII.9.

Pentru acest montaj, rigiditatea întregului sistem pe direcție verticală se determină ca fiind:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_1 + k_2} \quad (\text{VII.19})$$

iar complianța sistemului după aceeași direcție se calculează ca inversa rigidității acestuia.

VII.3. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor complianță cu două elemente elastice omogene, de secțiune constantă

VII.3.1. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor complianță cu două elemente elastice omogene, paralele, de secțiune constantă

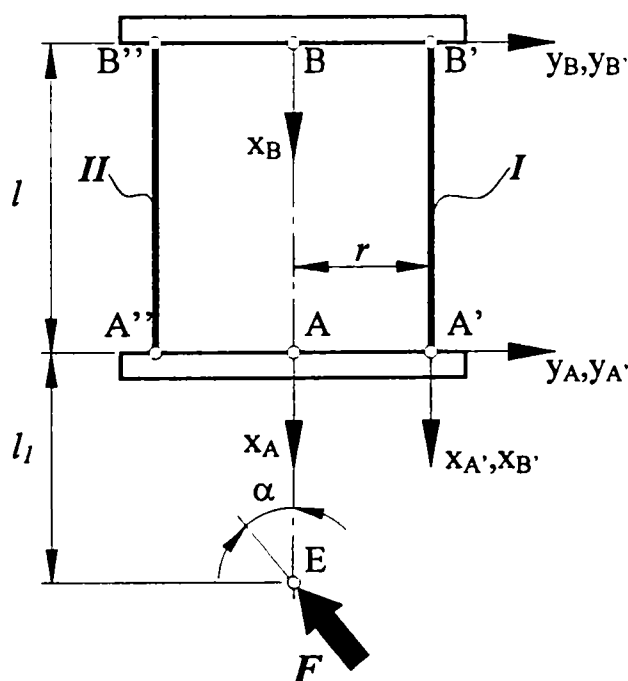


Figura VII.10. Schematizarea unui dispozitiv de complianță plan, cu două elemente elastice paralele

Se consideră modelul simplificat al unui dispozitiv de complianță *RCC*, (figura VII.10). Acesta este un dispozitiv plan, care conține două elemente elastice identice, dublu încastrate în cele două elemente rigide notate *I* și respectiv *2*. Elementele rigide și cele elastice sunt paralele între ele.

Se consideră că în punctul *E*, situat pe axa de simetrie a dispozitivului, acționează un torsiou al forțelor exterioare generalizate care conține numai componente de tip forță. Rezultanta acestora

este notată cu F . Întrucât elementul rigid superior este fix, torsorul forțelor exterioare generalizate va genera deformații ale celor două elemente elastice și, implicit, deplasarea elementului rigid inferior. Scrierea modelului comportamental al dispozitivului de complianță considerat cu ajutorul conceptului perechilor sistemelor de referință implică atașarea corespunzătoare a acestora. Poziționarea sistemelor de referință necesare modelării este ilustrată în figura VII.10. Axa x a sistemelor de referință A și B este axa de simetrie longitudinală a modelului, iar axa z este ortogonală la planul reprezentării, astfel încât triedrul xyz să respecte regula mâinii drepte. Axele celorlalte sisteme de referință atașate sunt paralele cu cele omoloage, atașate sistemelor A și B .

Structura considerată fiind simetrică, este similară unui dispozitiv de ghidare cu topologie paralelă având două conexiuni, care nu are în componență cuple cinematice. Fiecare conexiune conține trei offset-uri simple. În consecință, modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului de complianță se poate realiza conform celor prezentate în subcapitolul VI.3.2.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului considerat constă în matricea de trecere de la sistemul de referință A la sistemul de referință B , care se poate scrie pentru fiecare dintre cele două conexiuni I sau II . Între matricile de trecere care modelează comportamentul cinetoelastostatic al dispozitivului există egalitatea:

$$\left({}^B \underline{T}_A \right)_I = \left({}^B \underline{T}_A \right)_{II} \quad (\text{VII.20})$$

sau, scris dezvoltat:

$${}^B \underline{T}_{B'} \otimes {}^{B'} \underline{T}_{A'} \otimes {}^{A'} \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{B''} \otimes {}^{B''} \underline{T}_{A''} \otimes {}^{A''} \underline{T}_A \quad (\text{VII.21})$$

unde toate matricile componente sunt matrici coloană 6×1 , iar simbolul \otimes are semnificația produsului realizat conform algoritmului special propus în [Kov-02].

Întrucât cele două elemente rigide ale dispozitivului au rigiditatea mult mai mare decât elementele elastice, deformațiile acestora pot fi considerate neglijabile, comparativ cu cele ale lamelelor. Ca urmare, matricile de trecere aferente elementelor rigide vor reflecta numai caracteristicile dimensionale de corp rigid ale acestora.

Cu aceste considerații, modelul comportamentului cinetoelastostatic al conexiunii I se poate scrie:

$$\left({}^B \underline{T}_A \right)_I = {}^B \underline{T}_{B'rig} \otimes \left({}^{B'} \underline{T}_{A'rig} + {}^{B'} \underline{\Delta T}_{A'} \right) \otimes {}^{A'} \underline{T}_{A'rig} \quad (\text{VII.22})$$

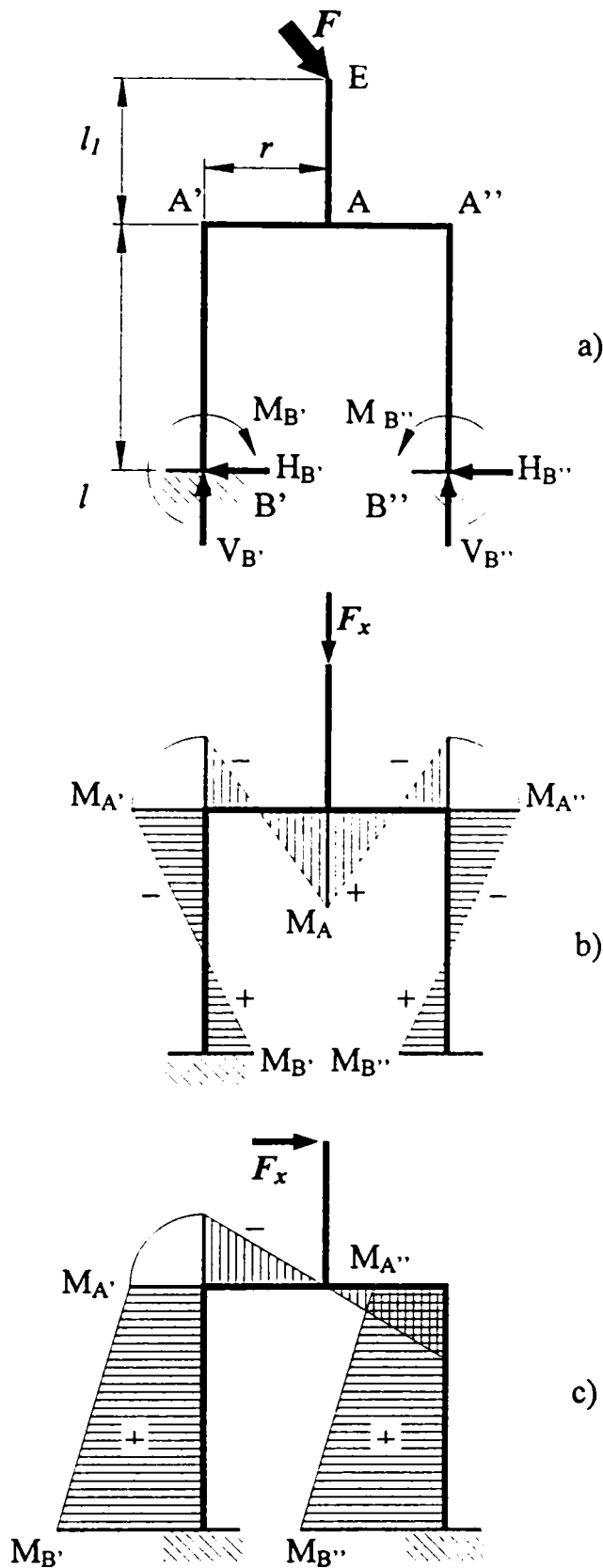


Figura VII.11. Determinarea momentelor din încastrările cadrului plan pe baza principiului suprapunerii efectelor

Matricile componente ale membrului drept al relației precedente, aferente conexiunii I , cu notațiile din figura VII.10, sunt:

$${}^A \underline{T}_{A'rg} = [0 \ r \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{VII.23})$$

$$\begin{aligned} {}^B \underline{T}_{A'} &= {}^B \underline{T}_{A'rg} + {}^B \underline{\Delta T}_{A'} = \\ &= \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^B \underline{C}_{A'} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{fg}^{B'} \end{aligned} \quad (\text{VII.24})$$

$${}^B \underline{T}_{B'rg} = [0 \ -r \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{VII.25})$$

unde ${}^B \underline{C}_{A'}$ este matricea de complianță a elementului elastic $A'B'$ dată de relația (IV.9), iar $\underline{\mathfrak{Z}}_{fg}^{B'}$ reprezintă torsorul forțelor exterioare generalizate raportat la originea sistemului de referință B' .

Dispozitivul de complianță plan considerat poate fi asimilat unui cadru plan, încastrat în punctele B și B' , sollicitat de o forță conținută în planul său, (Figura VII.11.a). Acesta este, conform [Buz-80], un sistem static nedeterminat. Torsorul $\underline{\mathfrak{Z}}_{fg}^{B'}$ al forțelor exterioare generalizate raportat la

originea sistemului B' conține, în fapt, reacțiunile din încastrarea B' , iar $\underline{\mathfrak{J}}_{fg}^{B''}$ reprezintă torsorul forțelor exterioare generalizate raportat la originea sistemului B'' . Pentru cazul de încărcare considerat în figura VII.10, reacțiunile din cele două încastrări nu sunt identice. Acestea se determină conform metodologiei de ridicare a nedeterminării cunoscute din rezistența materialelor, [Buz-80].

Aplicarea principiului suprapunerii efectelor permite determinarea reacțiunilor din cele două încastrări ale cadrului ca sumă a efectelor acțiunii celor două componente ale forței exterioare F : F_x și F_y . Cadrul plan încărcat cu forța verticală F_x este un cadru simetric, a cărui diagramă de momente este reprezentată în figura VII.11.b. Cadrul plan încărcat cu forța orizontală F_y este un cadru antisimetric, având diagrama de momente ilustrată în figura VII.11.c. Momentele reale din încastrările B și B' se obțin ca sumă algebrică a momentelor din aceleași puncte, generate de cele două solicitări parțiale.

Expresiile torsorilor forțelor exterioare generalizate raportate la cele două încastrări, astfel obținute sunt:

$$\underline{\mathfrak{J}}_{fg}^{B'} = \left[\frac{F \cos \alpha}{2} \quad \frac{F \sin \alpha}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{r^2 \cdot F \cos \alpha}{2l+8r} - \frac{F \sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right]^T \quad (\text{VII.26})$$

$$\underline{\mathfrak{J}}_{fg}^{B''} = \left[\frac{F \cos \alpha}{2} \quad \frac{F \sin \alpha}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{r^2 \cdot F \cos \alpha}{2l+8r} + \frac{F \sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right]^T \quad (\text{VII.27})$$

Expresia ${}^{B'}\underline{C}_{A'} \cdot \underline{\mathfrak{J}}_{fg}^{B'}$ din relația (VII.24) reprezintă matricea coloană 6x1 a deformațiilor elastice ale lamelei $A'B'$, care are forma generală:

$${}^{B'}\underline{\Delta T}_{A'} = [\Delta q_{1A'} \quad \Delta q_{2A'} \quad \Delta q_{3A'} \quad \Delta q_{4A'} \quad \Delta q_{5A'} \quad \Delta q_{6A'}] \quad (\text{VII.28})$$

Elementele $\Delta q_{1A'}$, $\Delta q_{2A'}$ și $\Delta q_{3A'}$ ale matricii (VII.28) reprezintă deplasările punctului A' al lamelei după direcțiile axelor $x_{B'}$, $y_{B'}$, respectiv $z_{B'}$ ale sistemului de referință B' , iar $\Delta q_{4A'}$, $\Delta q_{5A'}$ și $\Delta q_{6A'}$ reprezintă rotirile punctului A' în jurul acestor axe.

Pentru cazul concret analizat matricea deformațiilor elastice ale lamelei este:

$${}^B \underline{\Delta T}_{A'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EA} F \cdot \cos \alpha \\ \frac{F \cdot l^3 \cdot \sin \alpha}{6EI_z} + \frac{l^2}{2EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l+8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l+8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{VII.29})$$

iar matricea de trecere de la sistemul de referință A' la sistemul de referință B' va fi:

$${}^B \underline{T}_{A'} = \begin{bmatrix} l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EA} F \cdot \cos \alpha - 1 \right) \\ \frac{F \cdot l^3 \cdot \sin \alpha}{6EI_z} + \frac{l^2}{2EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l+8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l+8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{VII.30})$$

Modelul comportamentului cintoelastostatic al conexiunii I este, finalmente:

$$\left({}^B \underline{T}_{A'} \right)_I = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EA} F \cdot \cos \alpha - 1 \right) \\ \frac{F \cdot l^3 \cdot \sin \alpha}{6EI_z} + \frac{l^2}{2EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l+8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l+8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right] \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.31})$$

Rezolvarea relației (VII.31) necesită utilizarea algoritmului special propus în [Kov-02], sau transpunerea celor trei matricilor de trecere 6×1 în matrici de trecere 4×4 ,

utilizând relația (IV.94). Matricile de dimensiune 4x4 sunt conforme pentru înmulțire cu algoritmul clasic, deci pot fi soluționate simbolic cu un soft matematic adecvat.

Se impune sublinierea că deformațiile lamelelor elastice sunt mari, deci relațiile (IV.95), (IV.96), și (IV.97) nu sunt utilizabile în acest caz.

Matricile 6x1 date de relațiile (VII.23), (VII.24) și (VII.25), după transpunere în forma 4x4 sunt:

$${}^A \underline{T}_{Ang} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (VII.32)$$

$${}^B \underline{T}_{A'} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta q_{6A'}) & -\sin(\Delta q_{6A'}) & 0 & \Delta q_{1A'} - l \\ \sin(\Delta q_{6A'}) & \cos(\Delta q_{6A'}) & 0 & \Delta q_{2A'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (VII.33)$$

unde s-a notat:

$$\Delta q_{6A'} = \frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1)(2l + 1)}{l + 1} \right] \quad (VII.34)$$

$$\Delta q_{1A'} = \frac{F \cdot l \cdot \cos \alpha}{2EA} \quad (VII.35)$$

$$\Delta q_{2A'} = \frac{F \cdot l^3 \cdot \sin \alpha}{6EI_z} + \frac{l^2}{2EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1)(2l + 1)}{l + 1} \right] \quad (VII.36)$$

$${}^b \underline{T}_{B'rig} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (VII.37)$$

iar matricea de trecere 4x4 care modelează comportamentul cinetoelastostatic al conexiunii notate I , obținută cu ajutorul modului de calcul simbolic al pachetului soft MATLAB, (Anexa VII.1) scrisă sub formă concentrată, este:

$$\left({}^B \underline{T}_A \right)_l = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.38})$$

cu elementele:

$$t_{11} = \cos \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1) \cdot (2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \quad (\text{VII.39})$$

$$t_{12} = -\sin \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1) \cdot (2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \quad (\text{VII.40})$$

$$t_{13} = 0 \quad (\text{VII.41})$$

$$t_{14} = -\sin \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1) \cdot (2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \cdot r + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot l \cdot \cos \alpha}{EA} - l \quad (\text{VII.42})$$

$$t_{21} = \sin \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1) \cdot (2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \quad (\text{VII.43})$$

$$t_{22} = \cos \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1) \cdot (2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \quad (\text{VII.44})$$

$$t_{23} = 0 \quad (\text{VII.45})$$

$$t_{24} = \cos \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1) \cdot (2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \cdot r + \\ + \frac{F \cdot l^3 \cdot \sin \alpha}{6EI_z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1) \cdot (2l + 1)}{l + 1} \right] - r \quad (\text{VII.46})$$

$$t_{31} = 0 \quad (\text{VII.47})$$

$$t_{32} = 0 \quad (\text{VII.48})$$

$$t_{33} = 1 \quad (\text{VII.49})$$

$$t_{34} = 0 \quad (\text{VII.50})$$

$$t_{41} = 0 \quad (\text{VII.51})$$

$$t_{42} = 0 \quad (\text{VII.52})$$

$$t_{43} = 0 \quad (\text{VII.53})$$

$$t_{44} = 1 \quad (\text{VII.54})$$

Deplasările liniare și unghiulare ale punctului A , atașat elementului rigid inferior al dispozitivului, raportat la sistemul de referință atașat elementului rigid superior al acestuia în punctul B , se obțin după transpunerea matricii de trecere 4×4 dată de relația (VII.38) în matrice coloană 6×1 de forma:

$$\left({}^B \underline{T}_A \right)_I = [q_{1A} \quad q_{2A} \quad q_{3A} \quad q_{4A} \quad q_{5A} \quad q_{6A}]^T \quad (\text{VII.55})$$

utilizând relațiile:

$$q_{1A} = t_{14} \quad (\text{VII.56})$$

$$q_{2A} = t_{24} \quad (\text{VII.57})$$

$$q_{3A} = t_{34} \quad (\text{VII.58})$$

$$q_{4A} = \arcsin(t_{32}) \quad (\text{VII.59})$$

$$q_{5A} = \arcsin(t_{13}) \quad (\text{VII.60})$$

$$q_{6A} = \arcsin(t_{21}) \quad (\text{VII.61})$$

Aplicarea relațiilor anterioare permite scrierea explicită a elementelor matricii de trecere, (VII.55), care modelează comportamentul cinetoelastostatic al conexiunii I a dispozitivului reprezentat în figura VII.10, sub forma:

$$q_{1A} = -\sin \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1)(2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot l \cdot \cos \alpha}{EA} - l \quad (\text{VII.62})$$

$$q_{2A} = \cos \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1)(2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \cdot r + \frac{F \cdot l^3 \cdot \sin \alpha}{6EI_z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1)(2l + 1)}{l + 1} \right] - r \quad (\text{VII.63})$$

$$q_{3A} = 0 \quad (\text{VII.64})$$

$$q_{4A} = 0 \quad (\text{VII.65})$$

$$q_{5A} = 0 \quad (\text{VII.66})$$

$$q_{6A} = \arcsin \left\{ \sin \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha}{4EI_z} + \frac{l}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l + l_1)(2l + 1)}{l + 1} \right] \right) \right\} \quad (\text{VII.67})$$

Se observă că elementele (VII.62), ..., (VII.67) ale matricii de trecere (VII.55) corespund modelului unui dispozitiv plan: acesta nu are deplasări liniare după axa z_B , nici deplasări unghiulare în jurul axelor x_B și z_B .

VII.3.2. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor complianță cu două elemente elastice omogene, înclinate, de secțiune constantă

Modelul simplificat al unui dispozitiv de complianță *RCC* plan cu elemente elastice înclinate, reprezentat în figura VII.12, se abordează similar celui cu elemente paralele, anterior analizat. Expresiile torsorilor forțelor exterioare generalizate raportate la cele două încastrări B și B' , astfel obținute sunt:

$$\underline{\mathfrak{T}}_{f_B}^{B'} = \left[\frac{F \cos \alpha}{2} \quad \frac{F \sin \alpha}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{r^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot F \cos \alpha}{2l \cos \beta + 8r} - \frac{F \sin \alpha (2l \cos \beta + 1)(l \cos \beta + l_1)}{l \cos \beta + 1} \right]^T \quad (\text{VII.68})$$

$$\underline{\mathfrak{T}}_{f_B}^{B''} = \left[\frac{F \cos \alpha}{2} \quad \frac{F \sin \alpha}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{r^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot F \cos \alpha}{2l \cos \beta + 8r} + \frac{F \sin \alpha (2l \cos \beta + 1)(l \cos \beta + l_1)}{l \cos \beta + 1} \right]^T \quad (\text{VII.69})$$

iar deplasările nenule ale punctului A , în acest caz sunt:

$$q_{1A} = -\sin \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \beta}{4EI_z} + \frac{l \cdot \cos \beta}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l \cdot \cos \beta + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l \cdot \cos \beta + l_1)(2l \cdot \cos \beta + 1)}{l \cdot \cos \beta + 1} \right] \right) \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot l \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha}{EA} - l \cdot \cos \beta \quad (\text{VII.70})$$

$$q_{2,A} = \cos \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \beta}{4EI_z} + \frac{l \cdot \cos \beta}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l \cdot \cos \beta + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l \cdot \cos \beta + l_1)(2l \cdot \cos \beta + 1)}{l \cdot \cos \beta + 1} \right] \right) \cdot r + \frac{1}{6} \cdot \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot l^3 \cdot \cos^3 \beta}{EI_z} + \quad (VII.71)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2 \cdot \cos^2 \varphi}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l \cdot \cos \varphi + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l \cdot \cos \varphi + l_1)(2l \cdot \cos \varphi + 1)}{l \cdot \cos \varphi + 1} \right] - r$$

$$q_{6,A} = \arcsin \left\{ \sin \left(\frac{F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \beta}{4EI_z} + \frac{l \cdot \cos \beta}{EI_z} \cdot \left[\frac{F \cdot r^2 \cdot \cos \alpha}{2l \cdot \cos \beta + 8r} - \frac{F \cdot \sin \alpha (l \cdot \cos \beta + l_1)(2l \cdot \cos \beta + 1)}{l \cdot \cos \beta + 1} \right] \right) \right\} \quad (VII.72)$$

VII.3.3. Determinarea secțiunii optime a elementelor elastice ale dispozitivelor complianță tip RCC cu două elemente elastice omogene, de secțiune constantă

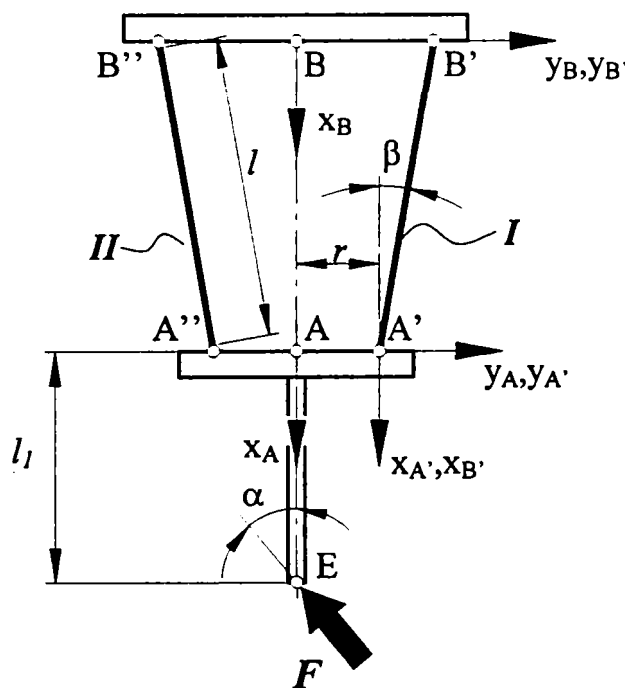


Figura VII.12. Schematizarea unui dispozitiv de complianță plan, cu două elemente elastice înclinate

Un dispozitiv de complianță este cu atât mai performant, cu cât în aceleași condiții de încărcare, având aceeași configurație și aceleași dimensiuni, are o complianță cât mai mare. Pentru o structură dată, complianța dispozitivului este asigurată de tipodimensiunea elementelor elastice.

Conform celor prezentate în capitolul II, dispozitivele de complianță sunt realizări strict specializate, adresate unei anume aplicații. Pentru aplicația considerată, valoarea ariei secțiunii transversale a

elementelor elastice se determină din condiții de rezistență. Aceasta presupune cunoașterea solicitărilor exterioare și, implicit raportarea torsorilor forțelor exterioare generalizate la punctele de încastrare ale elementelor elastice.

Matricea deplasărilor/deformațiilor ale punctului caracteristic asociat efectorului final al robotului, (VII.55), este o măsură a complianței dispozitivului. Pentru cazurile considerate în figura VII.10 și figura VII.11, elementele nenule ale acesteia sunt date de relațiile (VII.62), (VII.63), (VII.67) pentru dispozitivele de complianță cu elemente elastice paralele și respectiv de relațiile (VII.70), ..., (VII.72) pentru cele cu elemente elastice înclinate.

Analizând expresiile elementelor componente ale matricii de trecere (VII.38) date de relațiile (VI.39), ..., (VI.54), se constată că aceasta poate fi scrisă sub o altă formă concentrată și ușor citibilă, care facilitează analiza comportamentului dispozitivului cu elemente elastice paralele. Aceasta este:

$$\left({}^B \underline{T}_A\right)_I = \begin{bmatrix} \cos(\Delta q_{6A'}) & -\sin(\Delta q_{6A'}) & 0 & -r \sin(\Delta q_{6A'}) + \Delta q_{1A'} - l \\ \sin(\Delta q_{6A'}) & \cos(\Delta q_{6A'}) & 0 & r \cos(\Delta q_{6A'}) + \Delta q_{2A'} - r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.73})$$

Comparația expresiilor (VII.62), ..., (VII.67) ale elementelor matricii de trecere (VII.55) cu expresiile (VII.34), (VII.35) și (VII.36) permite scrierea acesteia în funcție de deplasările liniare și unghiulare ale extremității inferioare A' a lamelei $A'B'$, sub forma:

$$\left({}^B \underline{T}_A\right)_I = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\Delta q_{6A'}) - \Delta q_{1A'} - l - r \\ r \cdot \sin(\Delta q_{6A'}) + \Delta q_{2A'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \arcsin[\sin(\Delta q_{6A'})] \end{bmatrix} \quad (\text{VII.74})$$

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului plan de complianță, (VII.47), este valabil pentru orice tip de secțiune transversală a elementelor elastice paralele, urmând a particulariza relațiile (VII.34), ..., (VII.37) prin detalierea expresiei momentului de inerție axial aferent secțiunii elementelor elastice utilizate.

În condițiile specificate, de identitate a solicitărilor, valorii ariei și structurii,

singurele elemente ale matricii deplasărilor (VII.47) care diferă cu forma geometrică a secțiunii transversale a elementelor elastice sunt momentele de inerție axiale ale acestora.

Relațiile (VII.34), ..., (VII.37) pot fi scrise sub forma:

$$\Delta q_{1A'} = \frac{F \cdot l \cdot \cos \alpha}{2EA} = a \quad (\text{VII.35'})$$

$$\Delta q_{2A'} = \frac{1}{I} \cdot \frac{l(b+3c)}{6E} \quad (\text{VII.36'})$$

$$\Delta q_{6A'} = \frac{1}{I} \cdot \frac{b+4c}{4E} \quad (\text{VII.34'})$$

unde a , b , c , în condițiile date sunt constante, având expresiile:

$$a = \frac{F \cdot l \cdot \cos \alpha}{2EA} \quad (\text{VII.75})$$

$$b = F \cdot l^2 \cdot \sin \alpha \quad (\text{VII.76})$$

$$c = F \cdot l \cdot \left[\frac{r^2 \cdot \cos \alpha}{2l+8r} - \frac{\sin \alpha (l+l_1)(2l+1)}{l+1} \right] \quad (\text{VII.77})$$

Întrucât aria secțiunii transversale are aceeași valoare, indiferent de forma geometrică a secțiunii, deformațiile pe direcția axei longitudinale a dispozitivului nu depind de forma geometrică a secțiunii.

Momentele de inerție axiale, pentru valoare identică a ariei secțiunii transversale au expresiile date în tabelul V.5. Înlocuind în expresiile acestora relațiile (V.18) și (V.19) de calcul ale diametrului și respectiv laturii mari a secțiunii rectangulare în funcție de arie:

$$D^2 = \frac{4A}{\pi(1-\lambda^2)} \quad (\text{V.18})$$

$$H^2 = \frac{A}{\varphi(1-\lambda^2)} \quad (\text{V.19})$$

se obțin relațiile momentelor de inerție axiale de forma:

$$\text{-pentru secțiuni circulare} \quad I_y = I_z = \frac{A^2}{4\pi} \cdot \frac{(1+\lambda^2)}{(1-\lambda^2)} \quad (\text{V.78})$$

$$\text{-pentru secțiuni rectangulare} \quad I_y = \frac{A^2}{12\varphi} \cdot \frac{(1+\lambda^2)}{(1-\lambda^2)} \quad (\text{V.79})$$

$$I_z = \frac{A^2 \cdot \varphi}{12} \cdot \frac{(1 + \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)} \quad (\text{V.80})$$

cu

$$\varphi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h} \quad (\text{V.14})$$

$$\lambda = \frac{b}{B} = \frac{h}{H} = \frac{d}{D} \quad (\text{V.15})$$

unde H și B sunt laturile secțiunii rectangulare, iar h și b sunt laturile golului acesteia. H și h sunt laturile mari ale secțiunii. D și d sunt diametrul exterior și respectiv interior al secțiunii circulare.

Elementele elastice metalice ale dispozitivelor de complianță tip **RCC** au secțiuni de valori mici, pentru a avea elasticitate sporită. La aceste valori ale ariilor, secțiunile transversale sunt pline, în consecință $\lambda = 0$.

Comparând expresiile momentelor de inerție axiale, se obțin secțiunile transversale care, prin forma lor geometrică, asigură complianța cea mai mare a dispozitivului de complianță. Acestea, sistematizate în funcție de raportul dintre laturile secțiunii rectangulare, sunt redată în tabelul VII.1.

Tabelul VII.1.

Valoarea raportului φ	Secțiunea optimă (care asigură complianța cea mai mare - $\Delta q_2, \Delta q_6$ maxime)
$0 < \varphi < \frac{3}{\pi}$	Secțiunea rectangulară având latura mare a secțiunii ortogonală la planul reprezentării
$\varphi = \frac{3}{\pi}$	Oricare dintre secțiunea rectangulară având latura mare a secțiunii ortogonală la planul reprezentării, și secțiunea circulară
$\varphi > \frac{3}{\pi}$	Secțiunea circulară

VII.4. Modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor complianță cu trei elemente elastice omogene, dispuse axial simetric, de secțiune constantă

Figura VII.13 prezintă modelul unui dispozitiv de complianță realizat fizic pentru a verifica validitatea modelului teoretic al comportamentului cinetoelastostatic al unui astfel de dispozitiv de complianță obținut cu ajutorul teoriei PeSiR. Acesta se bazează pe principiul de funcționare al unui dispozitiv *RCC* spațial.

Constructiv, dispozitivul de complianță realizat conține două flanșe rigide, cea superioară se fixează la ultimul element al dispozitivului de ghidare al robotului, iar cea inferioară este solidară cu efectorul final al acestuia, (figura VII.14).

Între cele două flanșe sunt montate trei

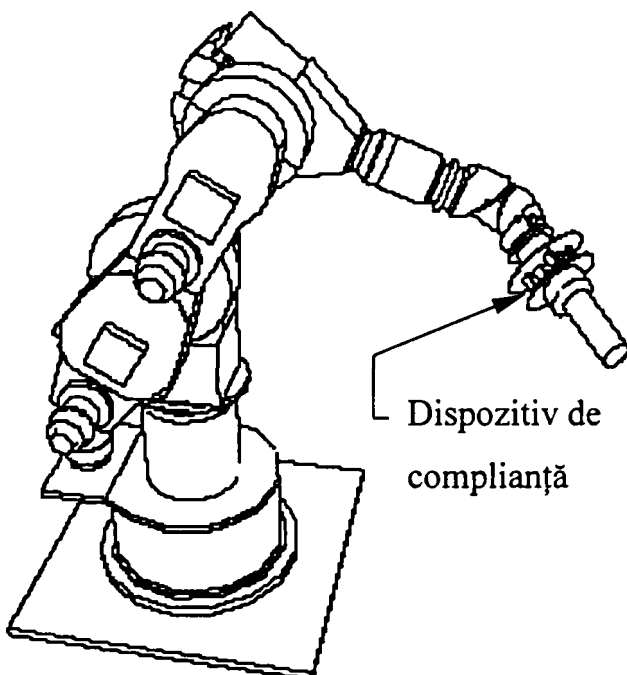


Figura VII.14. Amplasarea dispozitivului de complianță în structura sistemului mecanic al robotului

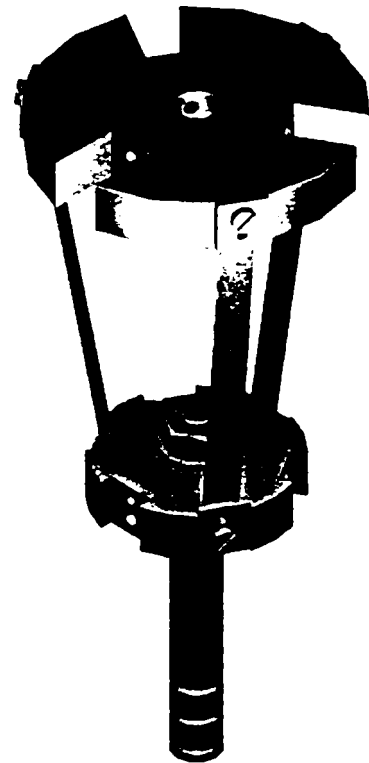


Figura VII.13. Dispozitiv de complianță tip *RCC* spațial, realizat fizic

elemente elastice lamelare, identice, dispuse spațial axial simetric sub un unghi ascuțit β , raportat la axa longitudinală a dispozitivului. Cele trei elemente elastice sunt fixate prin încastrare în cele două flanșe și au o elasticitate net superioară atât celor două flanșe cât și celorlalte elemente din lanțul

cinematic în care sunt incluse. Ca urmare, toate aceste elemente, cu excepția lamelelor, vor fi considerate rigide.

Soluția constructivă analizată este similară celei a unui dispozitiv de ghidare cu topologie paralelă cu trei conexiuni, având în componență numai elemente de tip offset simplu și fiind lipsit de cuple cinematice.

Figura VII.15 prezintă simplificat soluția constructivă a dispozitivului de complianță considerat. Efectorul final al robotului este schematizat sub forma unei bare cilindrice AB . Se consideră că în punctul A , poziționat în centrul bazei inferioare a acestui cilindru, deci implicit pe axa de simetrie a dispozitivului, acționează un torsesor al forțelor exterioare generalizate care conține numai componente de tip forță. Rezultanta acestora este notată cu F . Consecința a elasticității lamelelor, acțiunea torsesorului forțelor exterioare generalizate va determina deformații relativ mari ale acestora și implicit, deplasarea flanșei

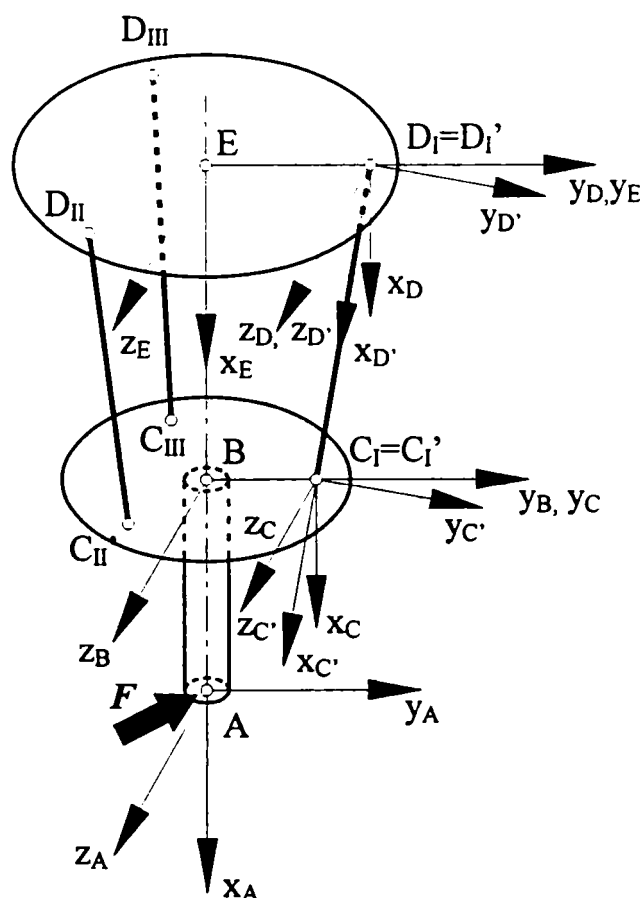


Figura VII.15. Dispozitiv RCC cu trei elemente elastice înclinate, dispuse spațial simetric

inferioare, solidare cu efectorul final (schematizat ca bara AB), față de flanșă superioară, solidară cu ultimul element al dispozitivului de ghidare al robotului.

Structura dispozitivului de complianță schematizat permite modelarea comportamentului cinetoelastostatic al acestuia cu ajutorul t.o...i p...chilo. sist.m.lo. d. referință de manieră similară celor prezentate în capitolele VI.3.2 și VII.2.3.

Prima etapă în modelare presupune atașarea sistemelor de referință, (SiR), necesare. Pentru cazul considerat, acestea sunt:

- ✓ $SiR A$ pentru centrul secțiunii inferioare a barei cilindrice care schematizează efectorul final,
- ✓ $SiR B$ pentru centrul secțiunii

superioare a barei cilindrice care schematizează efortul final și, totodată centrul feței superioare a flanșei inferioare a dispozitivului,

✓ $SiR C_I$, $SiR C_{II}$ și $SiR C_{III}$ pentru punctele de încastrare ale lamelelor elastice în flanșa inferioară, situate echidistant, pe un cerc cu raza r ,

✓ $SiR C_I'$, $SiR C_{II}'$ și $SiR C_{III}'$ pentru extremitățile inferioare (încastate) ale celor trei elemente elastice,

✓ $SiR D_I'$, $SiR D_{II}'$ și $SiR D_{III}'$ pentru extremitățile superioare (încastate) ale celor trei elemente elastice,

✓ $SiR D_I$, $SiR D_{II}$ și $SiR D_{III}$ pentru punctele de încastrare ale lamelelor elastice în flanșa superioară, situate echidistant, pe un cerc de rază R ,

✓ $SiR E$ pentru centrul feței inferioare a flanșei superioare a dispozitivului.

În figura VII.15 sunt vizualizate, pentru facilitarea citirii, doar sistemele de referință aferente conexiunii I a dispozitivului, care conține lamela elastică notată $C_I - D_I$. Indicele “ I ” aferent axelor sistemelor de coordonate atașate elementelor conexiunii I a fost omis, considerând că aceasta nu afectează claritatea reprezentării.

Cu notațiile specificate anterior, comportamentul efortului final va fi descris cu ajutorul $PeSiR A-B$, iar cel al elementelor elastice cu ajutorul $PeSiR C_I-D_I$, respectiv $PeSiR C_{II}-D_{II}$ și $PeSiR C_{III}-D_{III}$. Cele trei încastrări inferioare ale lamelelor sunt modelate cu ajutorul $PeSiR C_I - C_I'$, $PeSiR C_{II} - C_{II}'$, și respectiv $PeSiR C_{III} - C_{III}'$, iar încastrările superioare cu ajutorul $PeSiR D_I - D_I'$, $PeSiR D_{II} - D_{II}'$, și respectiv $PeSiR D_{III} - D_{III}'$.

Modelarea flanșei inferioare se va realiza cu ajutorul a trei $PeSiR C_I - C_{II}$, $PeSiR C_{II} - C_{III}$, și respectiv $PeSiR C_{III} - C_I$. Modelarea flanșei superioare se va realiza cu ajutorul $PeSiR D_I - D_{II}$, $PeSiR D_{II} - D_{III}$, și respectiv $PeSiR D_{III} - D_I$.

Flanșele dispozitivului sunt considerate rigide, comparativ cu lamelele elastice ale acestuia. Exprimarea acestui comportament implică scrierea relațiilor aferente pentru flanșa inferioară:

$$\begin{aligned} {}^{C_I} \underline{T}_{C_{II}} &= {}^{C_I} \underline{T}_{C_{III}} \otimes {}^{C_{III}} \underline{T}_{C_{II}} \\ {}^{C_I} \underline{T}_{C_{III}} &= {}^{C_I} \underline{T}_{C_{II}} \otimes {}^{C_{II}} \underline{T}_{C_{III}} \\ {}^{C_{II}} \underline{T}_{C_{III}} &= {}^{C_{II}} \underline{T}_{C_I} \otimes {}^{C_I} \underline{T}_{C_{III}} \end{aligned} \quad (VII.81)$$

și pentru cea superioară:

$$\begin{aligned}
{}^{D_I} \underline{T}_{D_{II}} &= {}^{D_I} \underline{T}_{D_{III}} \otimes {}^{D_{III}} \underline{T}_{D_{II}} \\
{}^{D_I} \underline{T}_{D_{III}} &= {}^{D_I} \underline{T}_{D_{II}} \otimes {}^{D_{II}} \underline{T}_{D_{III}} \\
{}^{D_{II}} \underline{T}_{D_{III}} &= {}^{D_{II}} \underline{T}_{D_I} \otimes {}^{D_I} \underline{T}_{D_{III}}
\end{aligned} \tag{VII.82}$$

unde toate matricile componente sunt matrici coloană 6x1, iar simbolul \otimes are semnificația produsului special propus în [Kov-02].

Se face sublinierea că, toate matricile de trecere din relațiile (VII.81) și (VII.82) întrucât reflectă caracteristicile de corp rigid ale flanșelor, conțin doar elemente invariabile cu timpul și solicitările exterioare.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului considerat constă în matricea de trecere de la sistemul de referință A la sistemul de referință E , care se poate scrie pentru fiecare dintre cele trei conexiuni I , II sau III . Între matricile de trecere care modelează comportamentul cinetoelastostatic al dispozitivului există egalitatea:

$$\left({}^E \underline{T}_A \right)_I = \left({}^E \underline{T}_A \right)_{II} = \left({}^E \underline{T}_A \right)_{III} \tag{VII.83}$$

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului reprezentat în figura VII.13 se poate scrie pentru conexiunea I de maniera:

$$\left({}^E \underline{T}_A \right)_I = {}^E \underline{T}_{D_I} \otimes {}^{D_I} \underline{T}_{D_I} \otimes {}^{D_I} \underline{T}_{C_I} \otimes {}^{C_I} \underline{T}_{C_I} \otimes {}^{C_I} \underline{T}_B \otimes {}^B \underline{T}_A \tag{VII.84}$$

Matricile de trecere din membrul drept al egalității (VII.84), cu excepția celei ce modelează comportamentul lamelei elastice, ${}^{D_I} \underline{T}_{C_I}$, caracterizează elemente rigide. Ca urmare, vor conține numai elemente invariabile cu timpul și solicitările exterioare, ce caracterizează dimensional fiecare componentă a lanțului cinematic analizat. Forma acestora este:

- pentru evectorul final

$${}^B \underline{T}_A = {}^B \underline{T}_{A \text{ rig}} = \begin{bmatrix} -l_{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{VII.85}$$

- pentru cele două flanșe

$${}^{C_I} \underline{T}_B = {}^{C_I} \underline{T}_{B \text{ rig}} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{VII.86}$$

$${}^E \underline{T}_{D_I} = {}^E \underline{T}_{D_I \text{ rig}} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{VII.87}$$

- pentru cele două încastrări

$${}^{C_i} \underline{T}_{C_i} = {}^{C_i} \underline{T}_{C_i, rig} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\beta]^T \quad (\text{VII.88})$$

$${}^{D_i} \underline{T}_{D_i} = {}^{D_i} \underline{T}_{D_i, rig} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \beta]^T \quad (\text{VII.89})$$

unde cu β s-a notat unghiul de înclinare al lamelelor raportat la axa de simetrie a dispozitivului, $x_E = x_A$. Ca urmare, relația (VII.76) se poate scrie în funcție de lungimea activă (liberă), $l_{C_i D_i}$ a lamelei elastice:

$${}^E \underline{T}_{D_i} = {}^E \underline{T}_{D_i, rig} = [0 \ -l_{C_i D_i} \cdot \sin \beta - r \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{VII.87'})$$

Luarea în considerare a grosimii flanșei inferioare a dispozitivului modelat presupune atașarea a încă unui *SiR* având originea poziționată în centrul feței inferioare a flanșei inferioare a dispozitivului și orientarea axelor identică cu cea a axelor *SiR B*. Ca urmare, grosimea flanșei va fi modelată prin intermediul matricii de trecere de la centrul feței inferioare la centrul feței superioare a flanșei. Acesta va avea doar o singură componentă nenulă, cea care corespunde unei translații de-a lungul axei longitudinale a dispozitivului egală cu valoarea grosimii flanșei. Fără a afecta fidelitatea modelării, grosimea flanșei inferioare se va include valoric în lungimea barei *AB* care schematizează efectul final. Se reduce astfel numărul matricilor de trecere aferente modelului.

De manieră similară, se poate proceda și pentru flanșa superioară a dispozitivului de complianță, incluzând grosimea acesteia în dimensiunea omoloagă a elementului pe care se montează dispozitivul.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al lamelei elastice C_i' - D_i' include și componenta elastică ${}^{D_i} \underline{\Delta T}_{C_i}$, deci va avea forma

$${}^{D_i} \underline{T}_{C_i} = {}^{D_i} \underline{T}_{C_i, rig} + {}^{D_i} \underline{\Delta T}_{C_i} \quad (\text{VII.90})$$

sau, mai detaliat:

$${}^{D_i} \underline{T}_{C_i} = \left[-l_{C_i D_i} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T + {}^{D_i} \underline{C}_{C_i} \cdot \underline{\mathfrak{Z}}_{fg}^{D_i} \quad (\text{VII.91})$$

unde matricea deformațiilor elastice ale lamelei este dată de produsul dintre matricea de complianță 6x6 a lamelei, ${}^{D_i} \underline{C}_{C_i}$, având forma (IV.9) și torsorul forțelor exterioare generalizate 6x1, raportat la sistemul de referință D_i' , $\underline{\mathfrak{Z}}_{fg}^{D_i}$.

Se impune observația că cele șase componente ale torsorului $\underline{\mathfrak{F}}_{f\bar{g}}^{D_i}$ se pot determina ca reacțiuni în punctul D_I' , considerând dispozitivul de complianță modelat ca sistem nedeterminat de bare încastrate în punctele D_I' , D_{II}' , D_{III}' . Ridicarea nedeterminării se realizează cu metodologia propusă în [Buz-80], pentru fiecare caz concret de încărcare.

Utilizarea relațiilor (VII.85), ..., (VII.91) permite scrierea detaliată a relației (VII.84) de forma:

$$\begin{aligned} \left(\begin{matrix} E \\ T \\ -A \end{matrix} \right)_I &= \begin{bmatrix} 0 & -l_{C_i D_i} \cdot \sin \alpha - r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^T \otimes \\ &\otimes \left\{ \begin{bmatrix} -l_{C_i D_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + {}^{D_i} \underline{C}_{C_i} \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{f\bar{g}}^{D_i} \right\} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}^T \otimes \\ &\otimes \begin{bmatrix} 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \otimes \begin{bmatrix} -l_{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{VII.92})$$

În cele ce urmează, pentru concizia scrierii, torsorul $\underline{\mathfrak{F}}_{f\bar{g}}^{D_i}$ va fi scris sub forma:

$$\underline{\mathfrak{F}}_{f\bar{g}}^{D_i} = \begin{bmatrix} F_{x D_i} & F_{y D_i} & F_{z D_i} & M_{x D_i} & M_{y D_i} & M_{z D_i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{VII.93})$$

iar matricea deformațiilor elastice ale elementului elastic $C_I' D_I'$, ${}^{D_i} \underline{C}_{C_i}$, sub forma concentrată:

$${}^{D_i} \underline{\Delta T}_{C_i} = \begin{bmatrix} \Delta q_{1C_i} & \Delta q_{2C_i} & \Delta q_{3C_i} & \Delta q_{4C_i} & \Delta q_{5C_i} & \Delta q_{6C_i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{VII.94})$$

Întrucât toate matricile care apar în expresia (VII.92) sunt matrici coloană de dimensiunea 6x1, modelul comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului de complianță redat de matricea de trecere de la punctul A la punctul E , $\left(\begin{matrix} E \\ T \\ -A \end{matrix} \right)_{I A}$, poate fi complet soluționat prin realizarea produselor notate cu simbolul \otimes , conform algoritmului propus în [Kov-02]. Rezultatul acestui multiplu produs special este matricea coloană 6x1 a deplasărilor punctului A față de punctul E , considerat fix.

Același rezultat se obține prin transformarea matricilor coloană 6x1 ale expresiei (VII.92) în matrici de trecere 4x4, cu ajutorul relației (IV.94), urmată de efectuarea produselor matricilor 4x4 cu algoritmul clasic al înmulțirii matricilor. Matricile (VII.85), (VII.86), (VII.87'), (VII.88) și (VII.89) conținute în relația (VII.92), transpuse în matrici

4x4 vor avea expresiile:

$${}^B \underline{T}_{-A} = {}^B \underline{T}_{-A rig} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_{AB} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.85}')$$

$${}^{C_i} \underline{T}_{-B} = {}^{C_i} \underline{T}_{-B rig} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.86}')$$

$${}^E \underline{T}_{D_i} = {}^E \underline{T}_{D_i rig} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_{C_i D_i} \sin \beta - r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.87}')$$

$${}^{C_i'} \underline{T}_{C_i} = {}^{C_i'} \underline{T}_{C_i rig} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.88}')$$

$${}^{D_i'} \underline{T}_{D_i} = {}^{D_i'} \underline{T}_{D_i rig} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.89}')$$

Modelul comportamentului cintoelastostatic al lamelei elastice C_i' - D_i' , dat de relația (VII.92), transpus ca matrice 4x4 va fi:

$${}^{D_i'} \underline{T}_{C_i'} = \begin{bmatrix} \cos \Delta q_{5C_i'} + \cos \Delta q_{6C_i'} - 1 & -\sin \Delta q_{6C_i'} & \sin \Delta q_{5C_i'} & \Delta q_{1C_i'} - l_{C_i' D_i'} \\ \sin \Delta q_{6C_i'} & \cos \Delta q_{4C_i'} + \cos \Delta q_{6C_i'} - 1 & -\sin \Delta q_{4C_i'} & \Delta q_{2C_i'} \\ -\sin \Delta q_{5C_i'} & \sin \Delta q_{4C_i'} & \cos \Delta q_{4C_i'} + \cos \Delta q_{5C_i'} - 1 & \Delta q_{3C_i'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.90}')$$

unde $\Delta q_{iC_i'}$, $i = 1, \dots, 6$ sunt elementele matricii deplasărilor punctului C_i' , corespunzătoare scrierii acesteia sub forma concentrată (VII.94).

Efectuarea produselor aferente relației (VII.92), cu matricile 4x4 date de relațiile

(VII.85'), ..., (VII.90'), sub modulul de calcul simbolic al mediului MATLAB, furnizează, pentru matricea de trecere 4x4 care reflectă comportamentul cinetoelastostatic al conexiunii I , o expresie de forma:

$$\left(\begin{array}{c} E \\ T \\ -A \end{array} \right)_I = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.95})$$

ale cărei elemente sunt:

$$t_{11} = \cos^2 \beta [\cos(-\Delta q_5) - \cos(\Delta q_4)] + \cos(\Delta q_4) + \cos(\Delta q_6) - 1$$

$$t_{12} = \sin \beta \cos \beta [\cos(-\Delta q_5) - \cos(\Delta q_4)] - \sin(\Delta q_6)$$

$$t_{13} = \sin \beta \sin(\Delta q_4) - \cos \beta \sin(-\Delta q_5)$$

$$t_{14} = l(\cos \beta - 1) + r \sin \beta - \Delta q_1 \cos \beta + \Delta q_2 \sin \beta + r[\cos(\Delta q_4) - \cos(-\Delta q_5)] \sin \beta \cos \beta + \\ + l[\cos(\Delta q_4) + \cos(\Delta q_6)] + l[\cos(-\Delta q_5) - \cos(\Delta q_4)] \cos^2 \beta$$

$$t_{21} = \sin \beta \cos \beta [\cos(-\Delta q_5) - \cos(\Delta q_4)] + \sin(\Delta q_6)$$

$$t_{22} = \cos^2 \beta [-\cos(-\Delta q_5) + \cos(\Delta q_4)] + \cos(-\Delta q_5) + \cos(\Delta q_6) - 1$$

$$t_{23} = -\sin \beta \sin(\Delta q_4) - \cos \beta \sin(\Delta q_4)$$

$$t_{24} = -l(2 \sin \beta + \sin(\Delta q_6)) + \Delta q_1 \sin \beta + \Delta q_2 \cos \beta - l \sin \beta \cos \beta [\cos(-\Delta q_5) + \cos(\Delta q_4)] + \\ + r \cos(-\Delta q_5) [1 - \cos^2 \beta] + r[\cos(\Delta q_6) - \cos^2 \beta \cos(\Delta q_4)]$$

$$t_{31} = -\sin \beta \sin(\Delta q_4) + \cos \beta \sin(-\Delta q_5)$$

$$t_{32} = \sin \beta \sin(-\Delta q_5) + \cos \beta \sin(\Delta q_4)$$

$$t_{33} = \cos(\Delta q_4) + \cos(-\Delta q_5) - 1$$

$$t_{34} = \sin(\Delta q_4) [r \cos \beta + l \sin \beta] + \sin(-\Delta q_5) [r \sin \beta + l \cos \beta] + \Delta q_3$$

$$t_{41} = 0$$

$$t_{42} = 0$$

$$t_{43} = 0$$

$$t_{44} = 1$$

(VII.96)

iar matricea $\left(\begin{array}{c} E \\ T \\ -A \end{array} \right)_I$ transpusă în matrice coloană 6x1 conform relației (IV.94) va avea

forma:

$$\left({}^E \underline{T}_A \right)_I = [q_{1A} \quad q_{2A} \quad q_{3A} \quad q_{4A} \quad q_{5A} \quad q_{6A}]^T \quad (\text{VII.97})$$

unde elementele matricii sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} q_{1A} &= l(\cos \beta - 1) + r \sin \beta - \Delta q_1 \cos \beta + \Delta q_2 \sin \beta + r[\cos(\Delta q_4) - \cos(-\Delta q_5)] \sin \beta \cos \beta + \\ &\quad + l[\cos(\Delta q_4) + \cos(\Delta q_6)] + l[\cos(-\Delta q_5) - \cos(\Delta q_4)] \cos^2 \beta \\ q_{2A} &= -l(2 \sin \beta + \sin(\Delta q_6)) + \Delta q_1 \sin \beta + \Delta q_2 \cos \beta - l \sin \beta \cos \beta [\cos(-\Delta q_5) + \cos(\Delta q_4)] + \\ &\quad + r \cos(-\Delta q_5) [1 - \cos^2 \beta] + r[\cos(\Delta q_6) - \cos^2 \beta \cos(\Delta q_4)] \\ q_{3A} &= \sin(\Delta q_4) [r \cos \beta + l \sin \beta] + \sin(-\Delta q_5) [r \sin \beta + l \cos \beta] + \Delta q_3 \\ q_{4A} &= \arcsin[\sin \beta \sin(-\Delta q_5) + \cos \beta \sin(\Delta q_4)] \\ q_{5A} &= \sin \beta \sin(\Delta q_4) - \cos \beta \sin(-\Delta q_5) \\ q_{6A} &= \sin \beta \cos \beta [\cos(-\Delta q_5) - \cos(\Delta q_4)] + \sin(\Delta q_6) \end{aligned} \quad (\text{VII.98})$$

În relațiile (VII.96) și (VII.98) toate elementele Δq_i , $i = 1, \dots, 6$ sunt elementele matricii deplasărilor punctului C_I' , corespunzătoare scrierii acesteia sub forma concentrată (VII.94), dar pentru concizia scrierii indicele corespunzător nu a mai fost înscris. Așadar: $\Delta q_i = \Delta q_{iC_i}$, $i = 1, \dots, 6$.

Modelul comportamentului cinetoelastostatic al conexiunii I a dispozitivului de complianță obținut este valabil pentru orice tip de secțiune transversală a elementelor elastice, urmând a particulariza relațiile (VII.98) prin detalierea expresiei momentului de inerție axial aferent secțiunii elementelor elastice utilizate.

Relațiile (VII.98) reprezintă de fapt deplasările liniare și respectiv unghiulare ale punctului A al efectorului final, raportat la centrul flanșei superioare E . Se observă că toate elementele matricii 6×1 care modelează comportamentul cinetoelastostatic al conexiunii sunt nenule.

VIII. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

VIII.1. Determinări experimentale ale comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță tip RCC

VIII.1.1. Introducere

Determinările experimentale au vizat studiul practic al comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță tip *RCC* spațial sub acțiunea unei forțe sau/și a unui moment și compararea rezultatelor cu cele obținute pe cale teoretică.

VIII.1.2. Dispozitivele de complianță încercate

Dispozitivele de complianță construite pentru încercările experimentale se bazează pe structura dispozitivelor de tip *RCC*.

Documentația grafică de execuție a fost realizată astfel încât prin asamblarea elementelor constitutive în diverse combinații să se poată construi un număr cât mai mare de variante utilizând aceleași flanșe de legătură. Concret, utilizând două combinații de câte două flanșe rigide, (câte una superioară și una inferioară), trei lamele elastice și trei bare elastice se pot asambla opt variante de dispozitive de complianță: patru dintre acestea cu lamele elastice și patru cu bare elastice. Unghiul de montaj al acestora, raportat la axa longitudinală a dispozitivului, este de 0° , 5° , 10° și 15° .

Figura VIII.1 exemplifică varianta dispozitivului de complianță RCC având lamelele elastice dispuse spațial axial simetric, sub un unghi de 10° raportat la axa longitudinală a dispozitivului. Reprezentarea tridimensională a acestuia a fost realizată în mediul soft AutoCAD, cu valorile

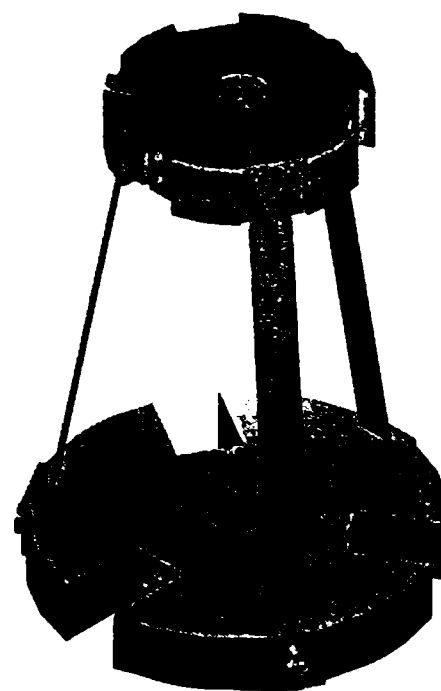


Figura VIII.1. Dispozitiv RCC cu lamele dispuse sub unghi de 10°

dimensionale preluate din desenele de execuție ale reperelor reale.

Lamelele elastice și barele elastice au fost realizate din oțel arc, având lungimea activă, (liberă), de 100 mm. Secțiunea transversală a lamelelor este rectangulară, de dimensiune 0.2x10 mm. Barele sunt cilindrice având diametrul secțiunii transversale 2 mm. Elementele elastice sunt fixate prin strângere pe cele două flanșe din aluminiu, cu ajutorul unor plăcuțe de fixare distincte pentru fiecare unghi de montaj în parte. Acestea asigură continuitatea fibrei medii a elementelor elastice prin așezarea pe fețele laterale prelucrate sub același unghi, ale flanșelor. Efectorul final al robotului a fost înlocuit cu o bară cilindrică de oțel având prelucrate 15 canele inelare pe suprafața laterală, care servesc la încercări.

Aspecte privind construcția dispozitivelor de complianță încercate și elementele elastice utilizate sunt prezentate sugestiv în figura VIII.2 și figura VIII.3.



Figura VIII.2. Două variante constructive ale dispozitivelor de complianță încercate

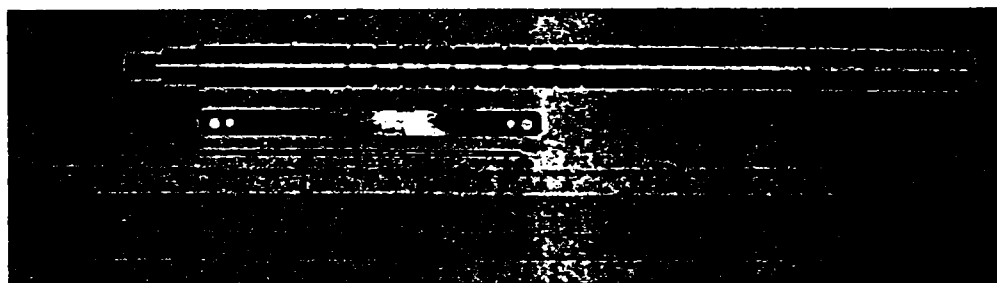


Figura VIII.3. Biela rigidă și elementele elastice utilizate

VIII.1.3. Standul experimental

VIII.1.3.1. Varianta I

În vederea măsurătorilor s-a proiectat și realizat standul experimental a cărui configurație este prezentată în figura VIII.4. Acesta include o placă suport orizontală prevăzută cu șuruburile pentru reglarea orizontalității, 10. La extremele laterale sunt prevăzute două tije suport identice fixe, 7 și 7', având două brațe mobile pe direcție verticală, 1 și 1'. Peste rolele 2 și 2' montate pe brațele 1 și 1', sunt trecute firele 8 și 8'. Acestea sunt fixate la o extremitate de tija 5 care se substituie efectorului final, iar la cealaltă extremitate sunt fixate pe câte o contragreutate 3, respectiv 3'. Tija 5 este montată pe flanșa mică a dispozitivului de complianță, care este fixat prin intermediul flanșei mari 4 pe placa suport a standului.

Dispozitivele de complianță sunt fixate astfel încât planul longitudinal de simetrie al unui element elastic să fie conținut în planul vertical de simetrie al standului. Astfel,

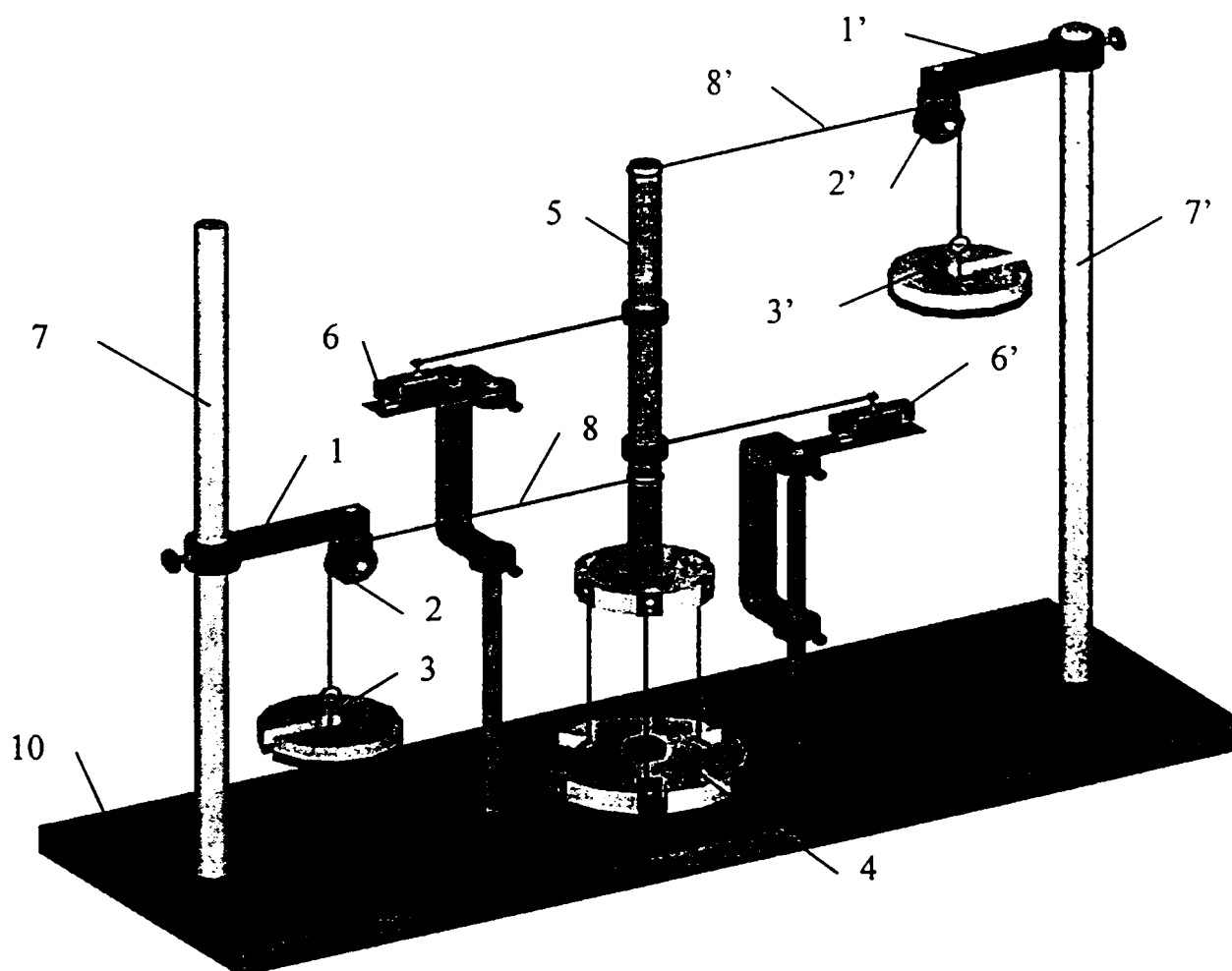


Figura VIII.4. Standul experimental în varianta I

solicitările exterioare vor fi aplicate în planul longitudinal de simetrie al barelor elastice și perpendicular pe latura mare a secțiunii transversale a unei lamele elastice, deci în planul de încovoiere maximă al acesteia.

Cele două contragreutăți asigură forța exterioară de solicitare necesară încercărilor. Prin utilizarea unei singure contragreutăți, (figura VIII.5), dispozitivul va fi solicitat de o forță F , iar prin utilizarea ambelor contragreutăți, (figura VIII.6), solicitarea aplicată va fi un cuplu M .

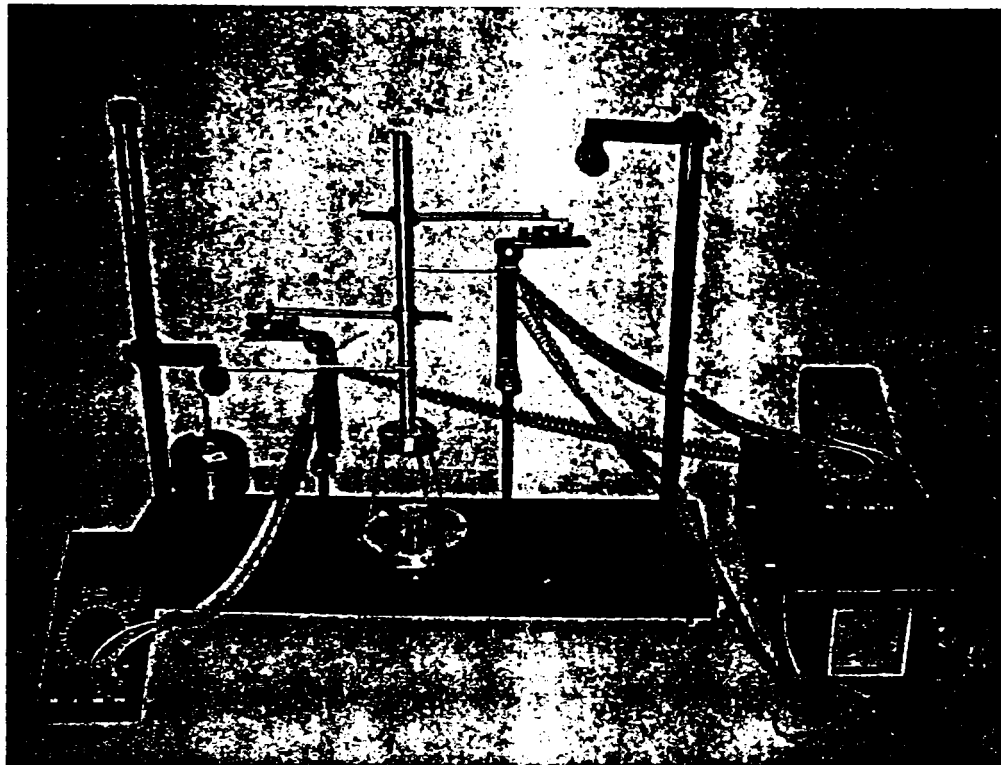


Figura VIII.5 Solicitarea dispozitivului RCC cu o forță F

Măsurarea deplasărilor barei 5 se realizează cu ajutorul unor traductoare rezistive de deplasare, 6 și 6', având cursa de 15...20mm.

Aparatura utilizată include o sursă de tensiune de curent continuu stabilizată și aparate de măsură digitale.

Pentru reducerea unor posibile solicitări perturbatoare în sistem:

- ⇒ toate elementele constructive ale standului s-au realizat supradimensionat, astfel încât rigiditatea acestora să fie mult mai mare decât cea a dispozitivului de complianță,
- ⇒ rolele 2,2' s-au montat pe rulmenți pentru a reduce frecările,
- ⇒ dispozitivele de complianță sunt montate cu flanșa mare pe suprafața suport a standului,

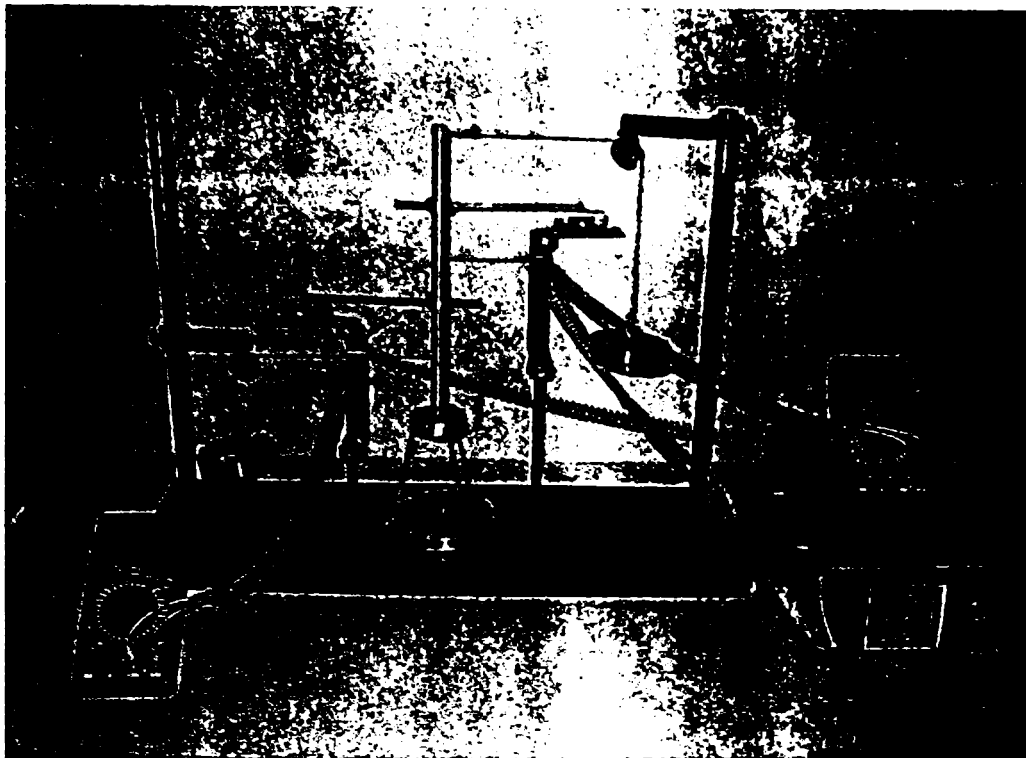


Figura VIII.6. Solicitarea dispozitivului *RCC* cu o un moment M

astfel încât greutatea dispozitivului în sine să nu inducă solicitări suplimentare.

VIII.1.3.2. Varianta II

A doua variantă a standului se bazează pe înregistrarea imaginii dispozitivului de complianță solicitat și determinarea deplasărilor pe baza înregistrărilor grafice realizate, cu ajutorul unui soft specializat. Structura standului în această variantă este prezentată în figura VIII.7.

În această variantă, standul se compune din:

- dispozitivul de complianță și structura mecanică de aplicare a forțelor și momentelor aferente variantei I a standului,
- senzor vizual CCD cuplat prin placa de achiziție la un sistem de calcul și softul *IMAQ Vision Builder* al firmei *National Instruments* pentru achiziția și prelucrarea imaginii.

VIII.1.4. Metodologia de lucru

Etapele încercărilor experimentale s-au realizat în următoarea succesiune:

1. etalonarea traductoarelor de deplasare rezistive;
2. încercarea dispozitivului de complianță la solicitarea cu o forță;
 - 1.1. fixarea dispozitivului pe standul experimental astfel încât forța aplicată să se găsească în planul de încovoiere al unui element elastic;

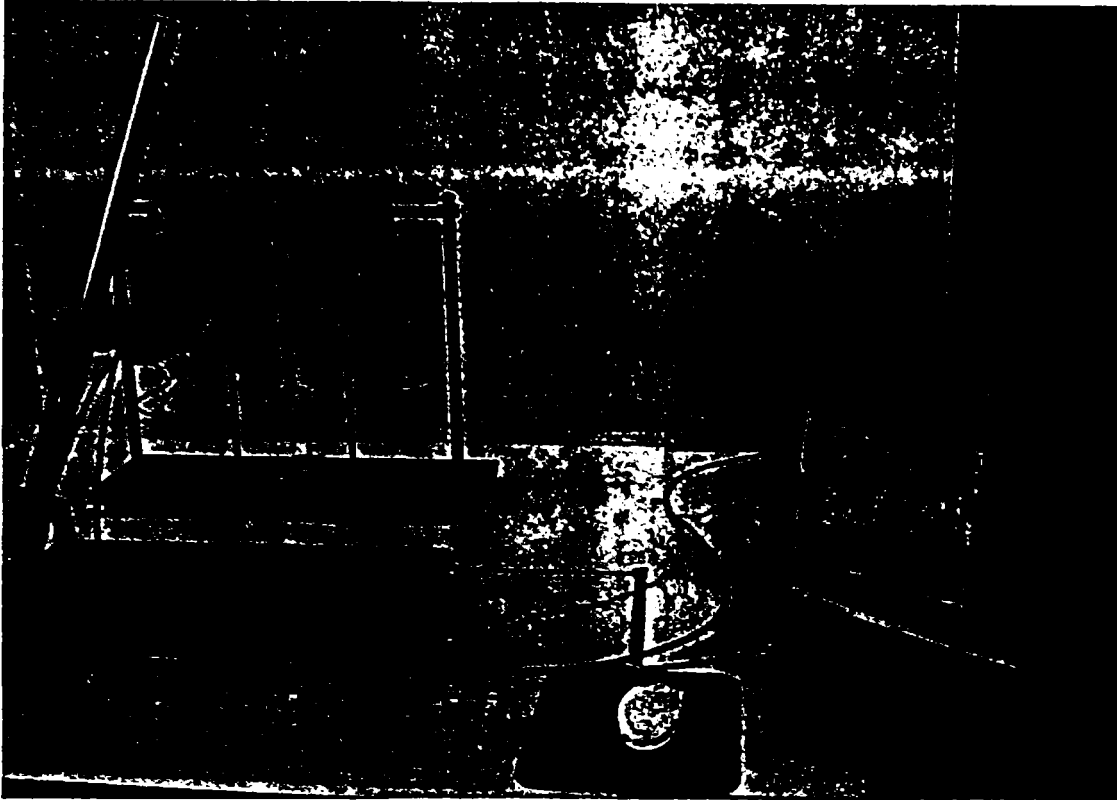


Figura VIII.7 Structura standului pentru determinarea pe cale grafică a deplasărilor bielei rigide a dispozitivului de complianță

- 1.2. fixarea traductoarelor la o distanță relativă $l = 100 \text{ mm}$;
- 1.3. fixarea scripeților 2 și 2' la înălțimea L de aplicare a sarcinii asupra bilei rigide.
Prin modificarea acestui parametru s-a urmărit comportarea mecanismului la forțe aplicate în diverse puncte ale bielei rigide.
- 1.4. încărcarea dispozitivului în trepte, cu ajutorul contra greutăților 3 și înregistrarea indicațiilor la aparatele de măsură.
Încărcarea se aplică lent, pentru a se evita erorile de măsurare datorate șocurilor.
- 1.5. repetarea măsurătorilor pentru același punct de aplicație a forței conform punctului anterior, de un anumit număr de ori în scopul prelucrării statistice a informațiilor obținute;
- 1.6. reluarea măsurătorilor pentru alt punct de aplicație a forței F cu respectarea metodologiei anterioare.
3. încercarea dispozitivului de complianță la solicitarea cu moment;
 - 1.1. fixarea dispozitivului pe standul experimental astfel încât torsorul $\{F, M\}$ să se găsească în planul de încovoiere al unui element elastic;
 - 1.2. fixarea traductoarelor la o distanță relativă $l = 100 \text{ mm}$;
 - 1.3. fixarea scripeților 2 și 2' la distanța relativă L de aplicare a sarcinii asupra bilei

rigide. Momentul aplicat fiind egal cu produsul dintre valoarea forței aplicate și brațul acesteia, modificarea distanței L va genera modificarea valorică a momentului aplicat, creând posibilitatea de a urmări comportamentul dispozitivului încercat la diverse încărcări de tip moment, cu un minim de modificări. Modificarea parametrului L s-a realizat prin schimbarea punctului inferior de aplicație al forței. Punctul superior de aplicație al forței s-a păstrat;

- 1.4. încărcarea dispozitivului în trepte, cu contragreutățile 3 și 3' și înregistrarea indicațiilor aparatelor de măsură. Încărcarea s-a realizat lent, pentru a evita erorile de măsurare datorate șocurilor.
- 1.5. repetarea măsurărilor pentru aceleași puncte de aplicație ale forțelor conform punctului anterior de un anumit număr de ori în scopul prelucrării statistice a rezultatelor obținute;
- 1.6. reluarea măsurărilor pentru alte puncte de aplicație a forței inferioare F , cu respectarea metodologiei anterioare;
4. prelucrarea statistică a datelor înregistrate și reprezentarea grafică a dependențelor obținute;
5. determinarea deplasărilor realizate de biela rigidă, (translație și rotație), interpretarea valorilor și determinarea rigidității mecanismului încercat.

VIII.1.5. Determinări experimentale ale comportamentului dispozitivelor de complianță

VIII.1.5.1. Determinări experimentale ale comportamentului dispozitivelor de complianță realizate pe standul I

Determinările experimentale s-au realizat distinct pentru:

1. încărcare cu o forță, utilizând standul I,
2. încărcare cu un cuplu de forțe, utilizând standul I.

Încercările s-au efectuat conform metodologiei prezentate anterior. Materializarea forțelor de solicitare a dispozitivului s-a realizat cu ajutorul greutăților tarate. Aplicarea momentului s-a realizat cu o pereche de greutăți tarate.

Pentru fiecare variantă constructivă de dispozitiv de complianță *funcțional* și pentru fiecare caz de încărcare, s-au realizat minim câte trei citiri pentru fiecare traductor,

(Anexa VIII.1). S-au reprezentat apoi legile de variație ale deplasărilor în funcție de media citirilor efectuate și pe aceeași reprezentare, s-a trasat caracteristica teoretică. În figura VIII.8 sunt prezentate rezultatele obținute la solicitarea cu o forță, pentru trei distanțe diferite ale punctului de aplicație a forței pe bielă. Anexa VIII.2 conține rezultatele tuturor încercărilor realizate.

VIII.1.5.2. Determinarea comportării dispozitivelor de compliantă prin înregistrarea optică a mișcării

Studiul experimental al comportamentului dispozitivelor de compliantă s-a realizat pentru dispozitivul cu elemente elastice materializate prin tije paralele solicitat cu o forță exterioară $F=5$ N aplicată la poziția 2.

Softului specializat pentru achiziție și prelucrare de imagini, *IMAQ Vision Builder* al firmei National Instruments, permite determinarea deplasărilor bieiei rigide a dispozitivului prin preluarea secvențială de imagini urmată de prelucrarea adecvată a acestora. Evidențierea translațiilor și rotațiilor bieiei necesită, în prealabil, calibrarea senzorului vizual, (figura VIII.9). Rezultatul acesteia, în cazul considerat a fost corespondența: 1 pixel=0.32 mm.

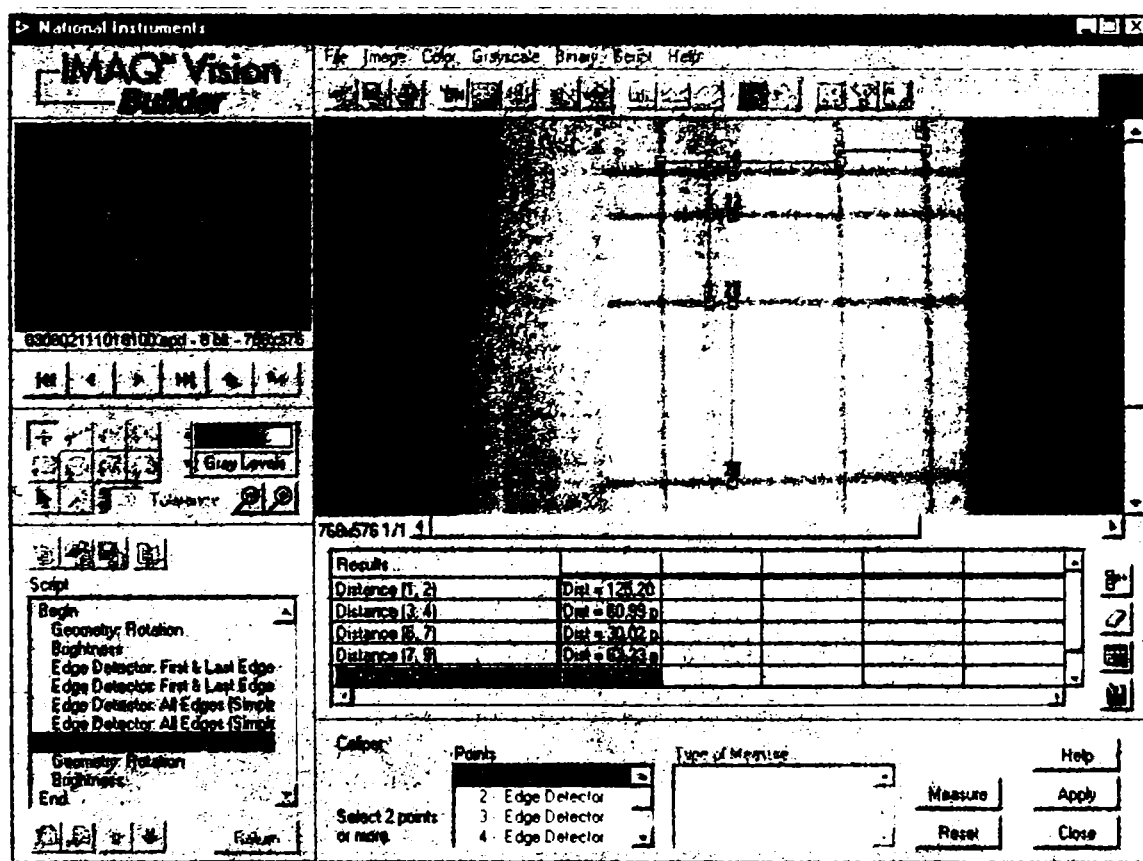
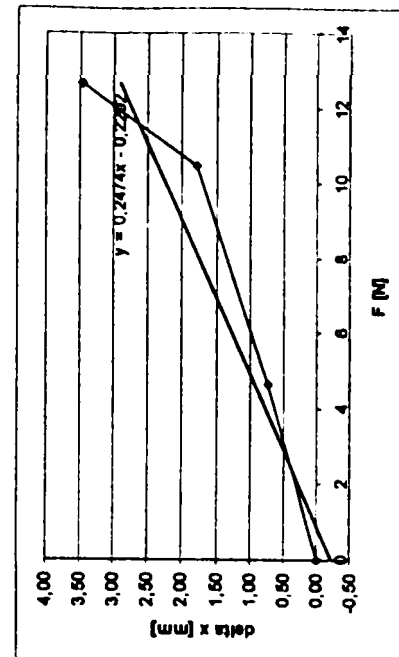
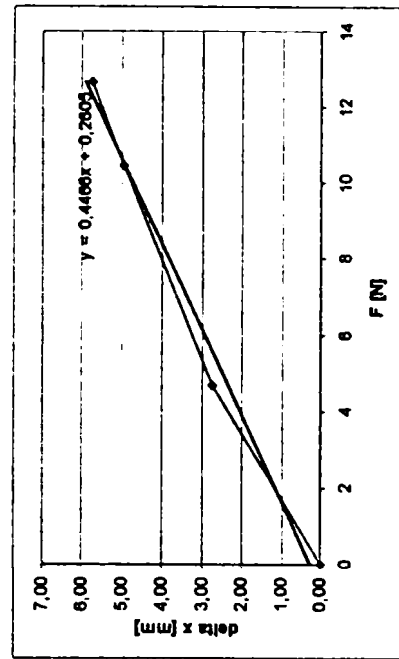
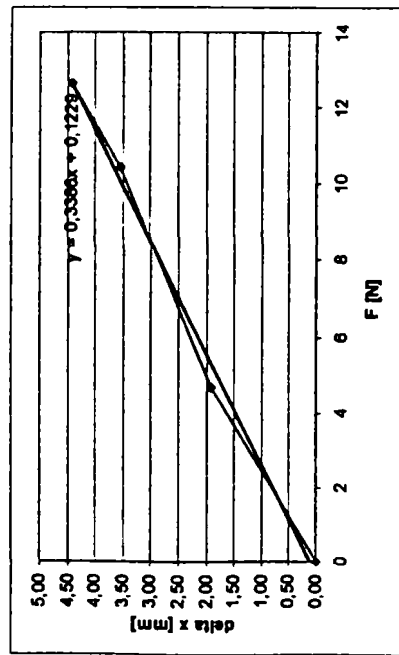
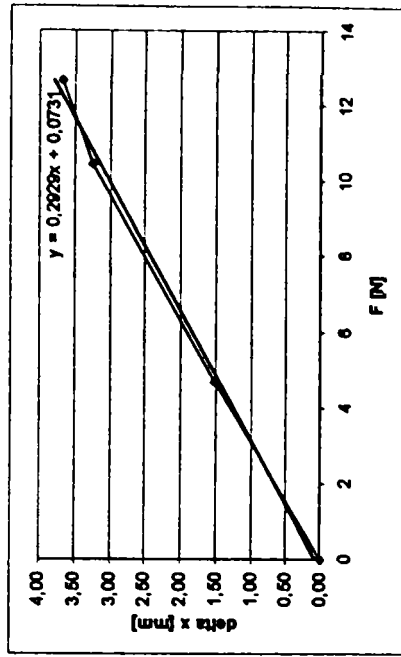
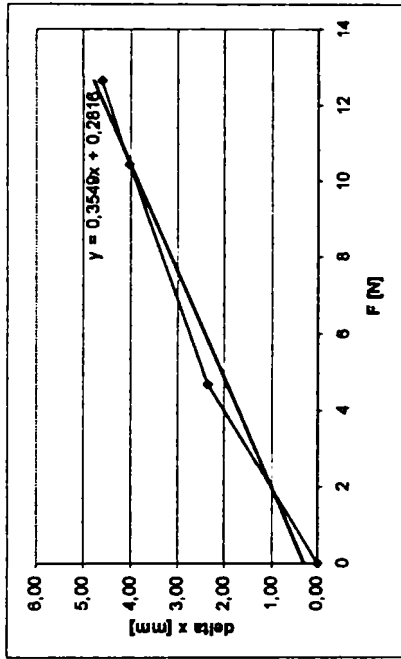
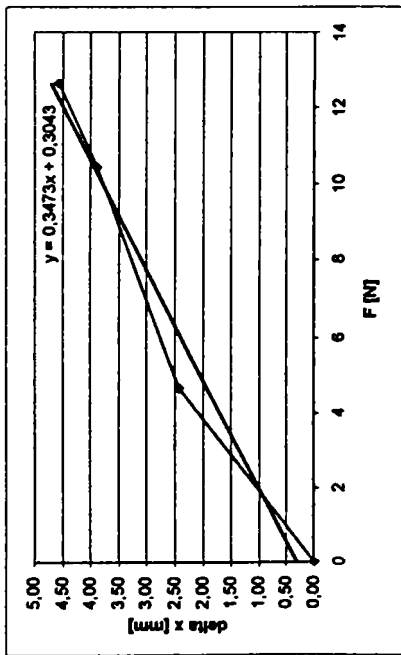


Figura VIII.9. Calibrarea senzorului vizual



a) b) c)

Figura VIII.8. Deplasările dispozitivului tip RCC cu tije cilindrice paralele înregistrate pentru încărcarea cu forță

aplicată la distanța L măsurată de la flanșa superioară

a) $L=409,11$ mm; b) $L=369,31$ mm; c) $L=263,6$ mm.

Practic, s-au determinat pe cale optică pozițiile a două puncte diametral opuse ale secțiunii transversale a bielei (marcajele de culoare roșie), urmate de determinarea automată a poziției centrului secțiunii respective. Această procedură a fost repetată, pentru câte un punct superior al bielei și unul inferior, atât pentru starea neîncărcată a dispozitivului, (figura VIII.10 și figura VIII.11), cât și pentru încărcarea cu forța anterior specificată, (figura VIII.12 și figura VIII.13).

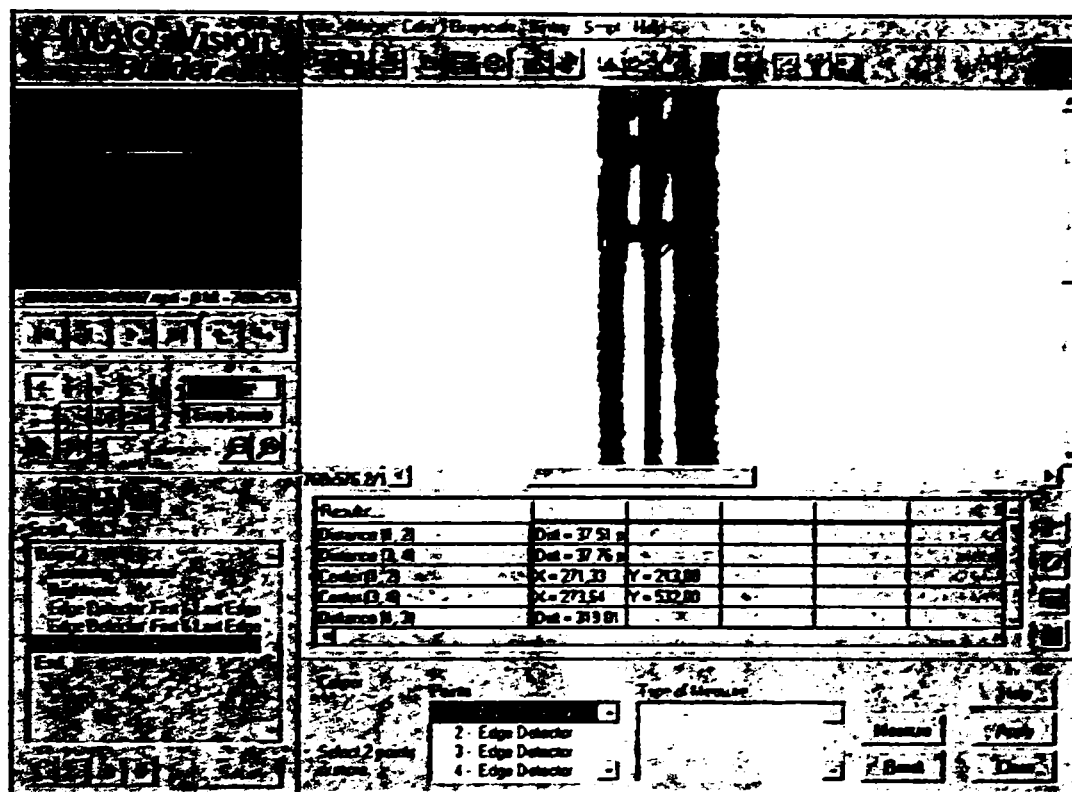


Figura VIII. 10. Poziția unui punct superior al bielei rigide în stare neîncărcată

Determinările experimentale realizate prin încercarea aceluiași dispozitiv de complianță, în aceleași condiții, pe standul I, au furnizat dependența deplasărilor la cele 2 traductoare având valorile:

- Traductorul 1

$$\Delta x_1 = 0,3407 \cdot 5 + 0,2681 = 1,97 \text{ mm}$$

- Traductorul 2

$$\Delta x_2 = 0,3419 \cdot 5 + 0,083 = 1,79 \text{ mmm}$$

Aceste valori corespund unei translații a bielei rigide $\Delta x = 1,79 \text{ mm}$ și unei rotații

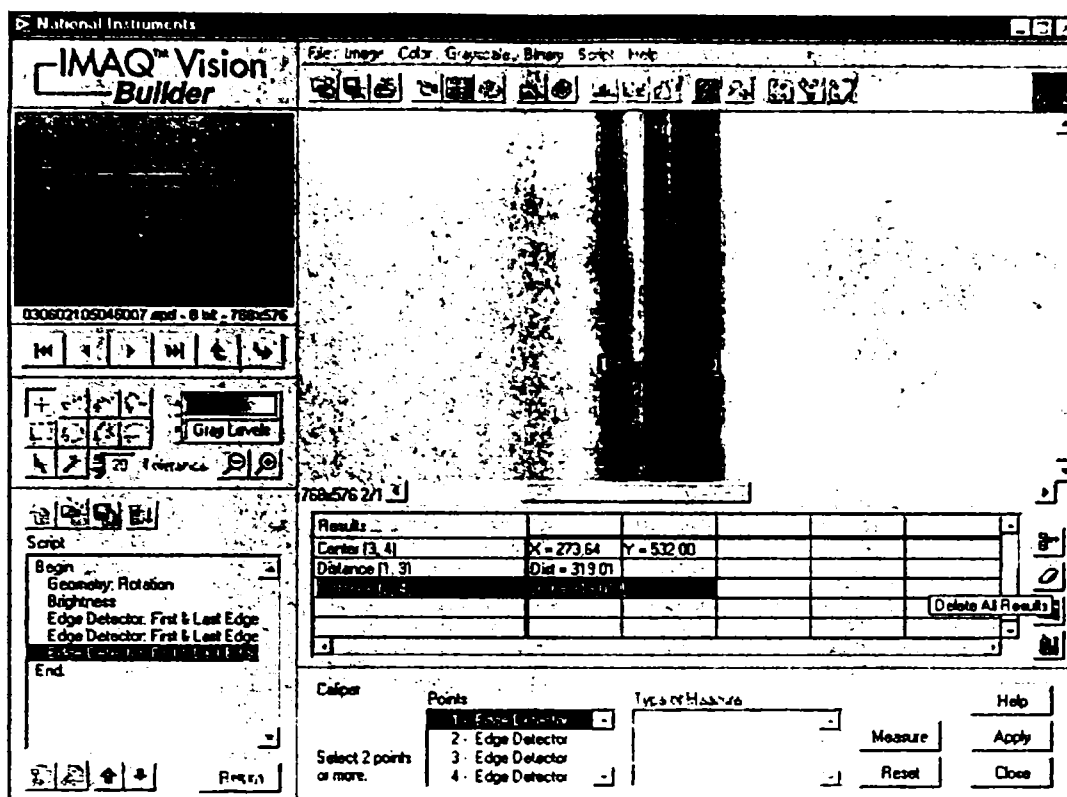


Figura VIII. 11. Poziția unui punct inferior al bielei rigide în stare neîncărcată

$$\Delta\varphi = \frac{1,97 - 1,79}{100} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Parametrii geometrice pentru aceleași puncte superior și inferior ale bielei rigide, după prelucrarea imaginii sunt sesizabili în figura VIII.12 și figura VIII.13. Cu parametrii astfel înregistrați s-a obținut corespondența forță-deplasare prezentată în tabelul VIII.1.

Tabelul VIII.1.

Forța [N]	Stare neîncărcată a bielei		Stare încărcată a bielei		Deplasarea realizată	
	X [pixel]	Y [pixel]	X [pixel]	Y [pixel]	Translație [mm]	rotație [rad]
5	271,33	213	281,43	212	2,83	$3,88 \cdot 10^{-3}$
	273,64	532	282,5	532		

Rezultatele obținute cu cele două variante de măsurare, cea mecano-electrică și cea optică, sunt comparabile ca ordin de mărime. Translația de 1,79 mm obținută în prima variantă de măsurare, comparativ cu cea de 2,83 mm obținută pe cale optică, este

explicabilă prin prisma neliniarităților introduse de traductoarele rezistive.

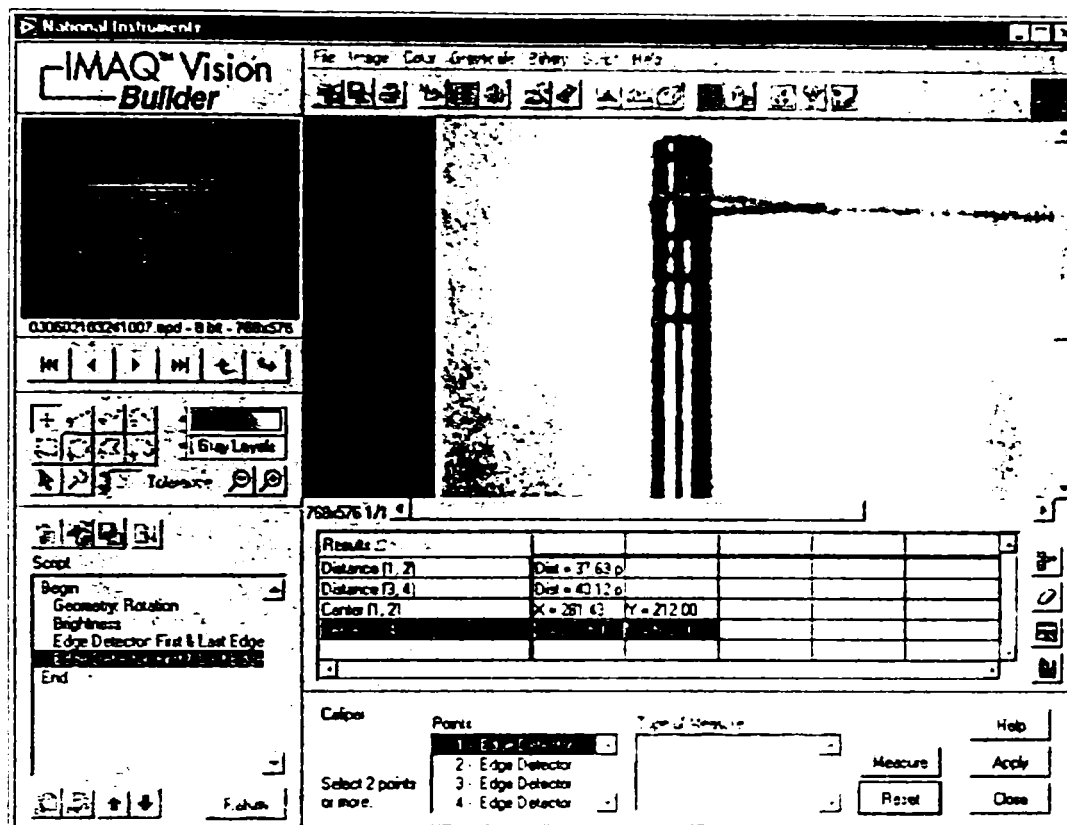


Figura VIII.12. Poziția unui punct superior al bieiei rigide în stare încărcată

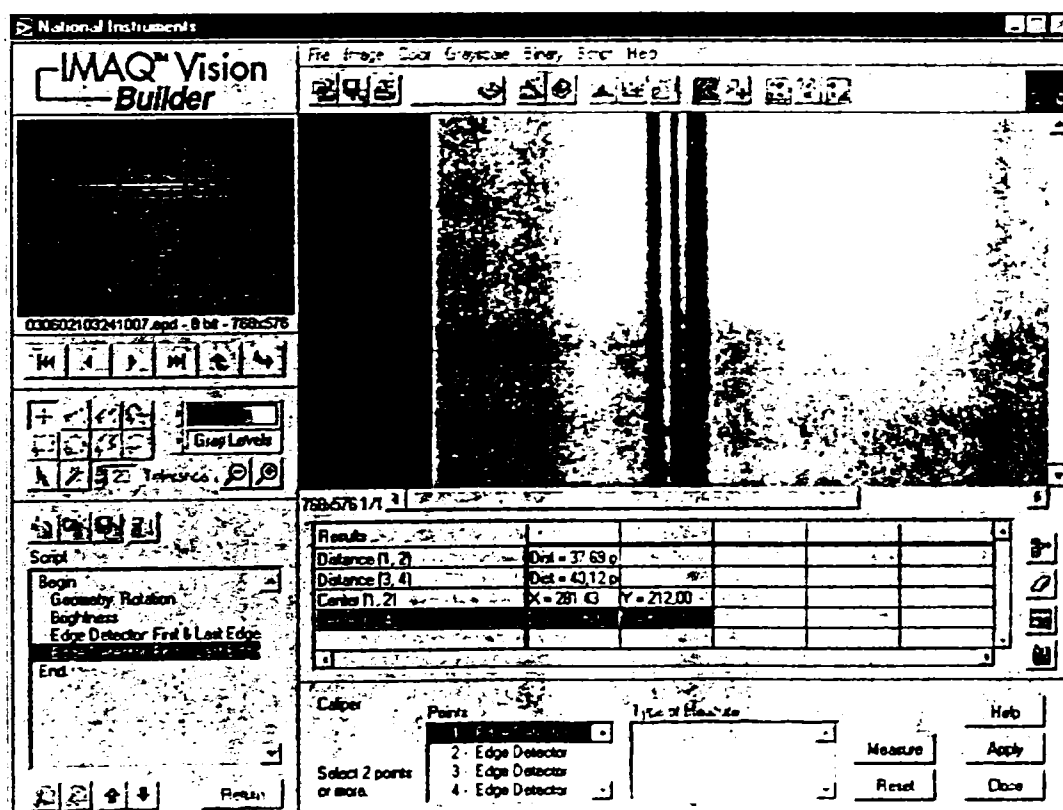


Figura VIII.13. Poziția unui punct inferior al bieiei rigide în stare încărcată

VIII.2 Determinări experimentale ale comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului de ghidare compliant al unui robot

VIII.2.1. Introducere

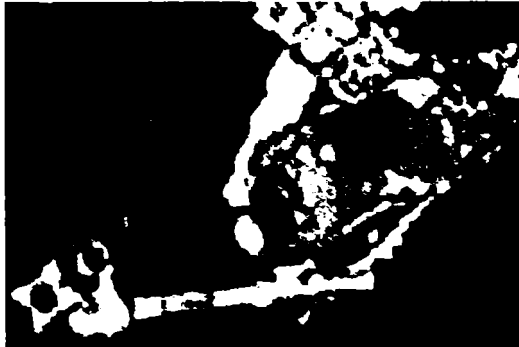


Figura VIII.14. Robotul cu elemente compliantă *Canadian2* destinat operațiilor de asamblare în spațiul cosmic

Un domeniu relativ nou de cercetare în cadrul roboticii îl constituie roboții cu unul sau mai multe elemente compliantă dispuse în structura dispozitivului lor de ghidare.

Domeniul de aplicație al acestor roboți se diversifică continuu. Câteva astfel de exemple sunt ilustrate în figurile VIII.14, ..., VIII.16.

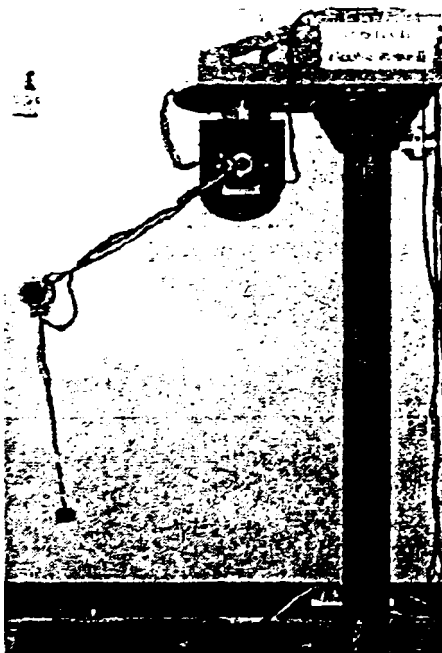


Figura VIII.16. Robotul cu două elemente elastice, Naviotk, al firmei Hitachi, folosit în chirurgia laparoscopică

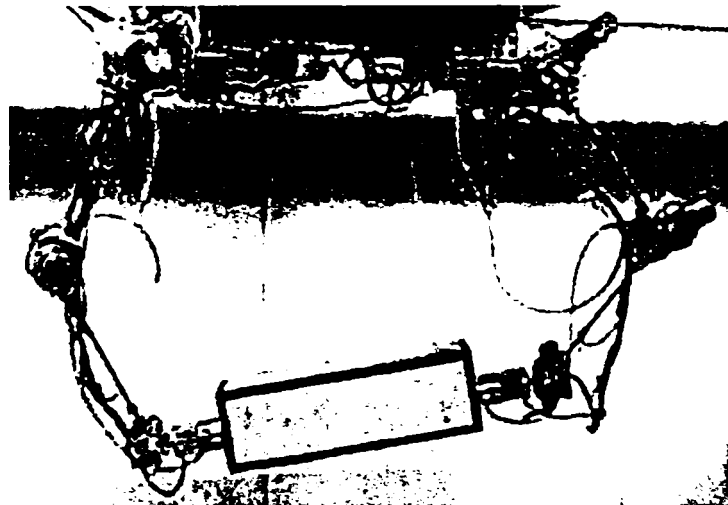


Figura VIII.15. Roboți cu elemente elastice care colaborează la manipularea unui obiect în condiții de microgravitație

VIII.2.2. Soluții constructive pentru elementele compliante ale dispozitivelor de ghidare

Soluțiile constructive ale elementelor compliante pot fi grupate în patru categorii:

- element realizat cu un singur arc lamelar, metalic,
- element cu două arcuri lamelare metalice, paralele, solidarizate prin distanțiere, (figura VIII.17.a.), (figura VIII.17.c.),
- elemente realizate din materiale compozite, (figura VIII.17.b),
- element realizat din tronsoane articulate și arcuri elicoidale (stil trompă de elefant), (figura VIII.17.d).

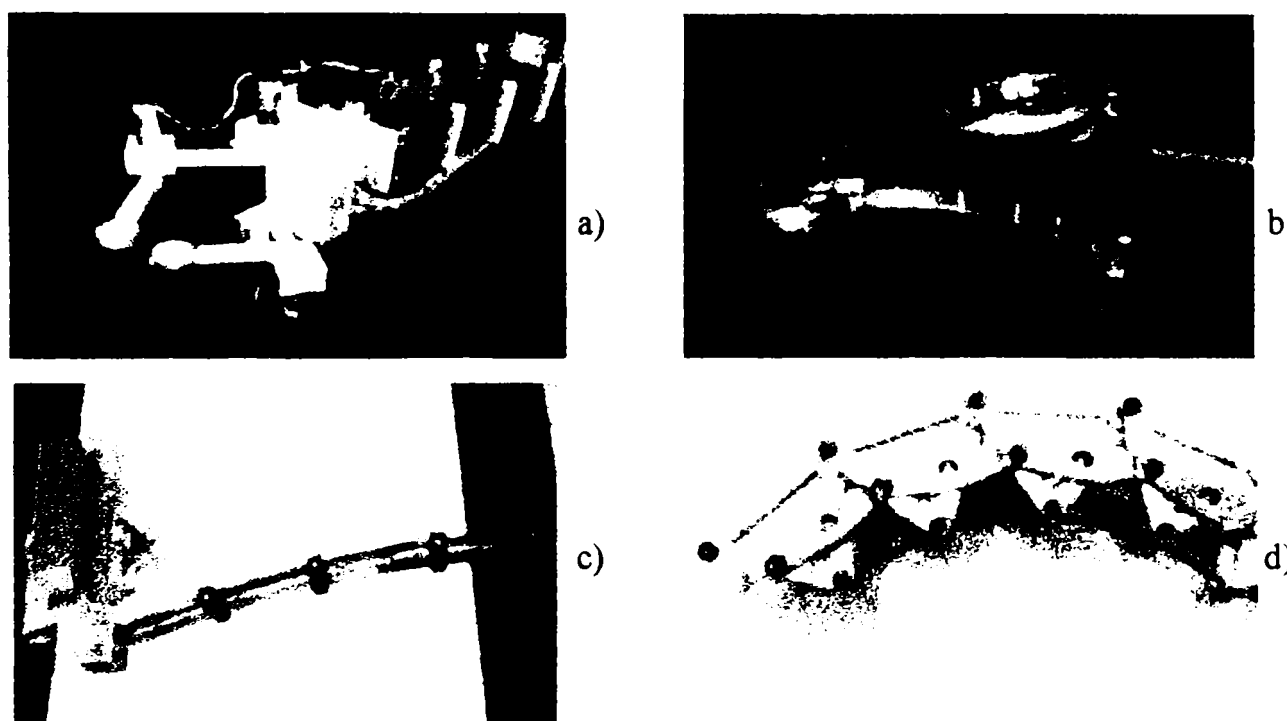


Figura VII.17. Soluții constructive pentru elemente compliante

Soluția constructivă adoptată în vederea determinărilor experimentale este cea a elementului elastic constituit din două lamele identice paralele, din oțel arc, a căror distanță este păstrată constantă cu ajutorul a patru distanțiere culisante, (figura VIII.18).

Deformarea brațului se realizează numai pe o direcție. S-a ales varianta în care brațul lucrează numai în plan orizontal. În plan vertical intervine deformația datorată

greutății proprii și a efectorului final. Dacă se ia în calcul această deformație, brațul poate lucra și în plan vertical.

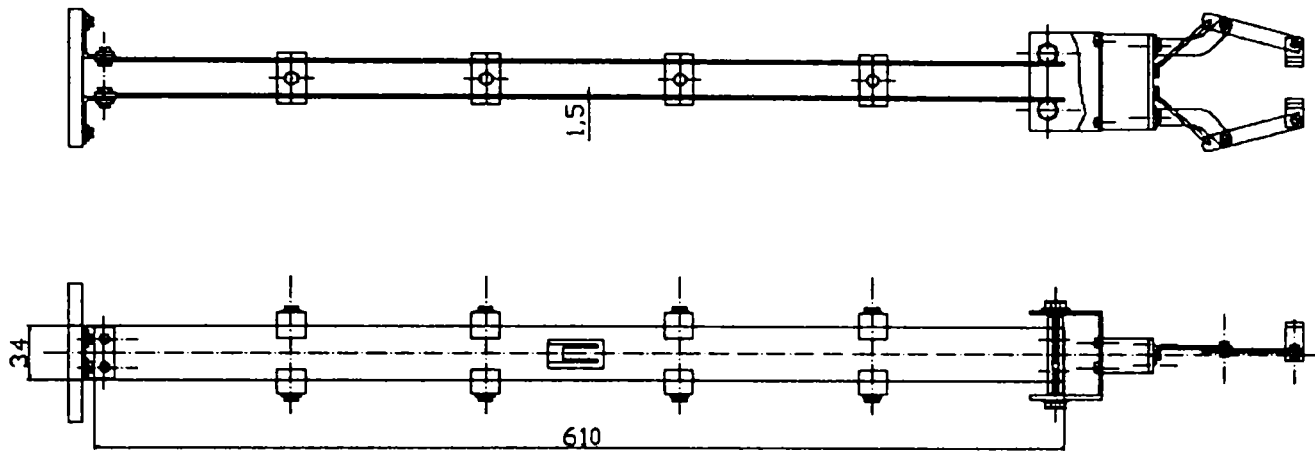


Figura VIII.18. Reprezentarea schematică a elementului compliant pentru dispozitivul de ghidare realizat

VIII.2.3. Încercări realizate

Roboții cu elemente flexibile se adaptează mai ușor controlului în forță sau în poziție și forță. Comanda unui astfel de robot necesită cunoașterea deformațiilor elastice ale elementului/elementelor compliante. O soluție prezentă în literatură este cea de măsurare a deviației unui fascicol de lumină care străbate longitudinal elementul elastic. Acest fascicol este emis de la o extremitate a elementului, iar la cealaltă extremitate este montat un senzor optic. Altă soluție pentru măsurarea deformației implică determinarea poziției relative a capetelor elementului elastic folosind un detector optic montat la extremitatea elementului.

Soluția utilizată pentru măsurarea deformațiilor în cadrul încercărilor aferente acestei teze este cea a timbrelor tensometrice. Acestea au fost amplasate câte unul pe fiecare față laterală a celor două lamele, în zona centrală, (figura VIII.19). Dispunerea timbrelor tensometrice (TER) pe fețele laterale este prezentată în figura VIII.20.a. Modul de conectare a timbrelor TER1,... TER4 s-a realizat în punte completă, (figura VIII.20.b).

Experimentele propuse au fost realizate cu robotul PUMA 600. Elementul elastic a fost atașat ca ultim element în dispozitivul de ghidare al robotului, (figura VIII.21).

VIII.2.3.1. Etalonarea elementului elastic

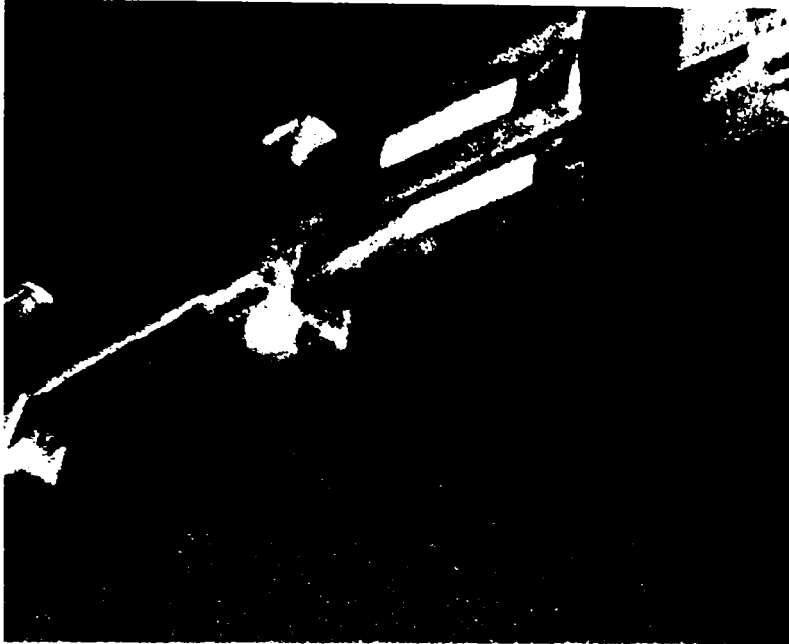


Figura VIII.19. Dispunerea timbrelor tensometrice pe elementul compliant

În cadrul acestei etape s-a urmărit determinarea caracteristicii elementului elastic ca element sensorial $U_e = U_e(F)$. În acest scop, efectorul final montat la extremitatea elementului elastic a fost încărcat în mod crescător și descrescător cu forțe F de diferite valori, înregistrându-se semnalul U_e la timbrele tensometrice TER. Configurația standului este prezentată în figura VIII.22.

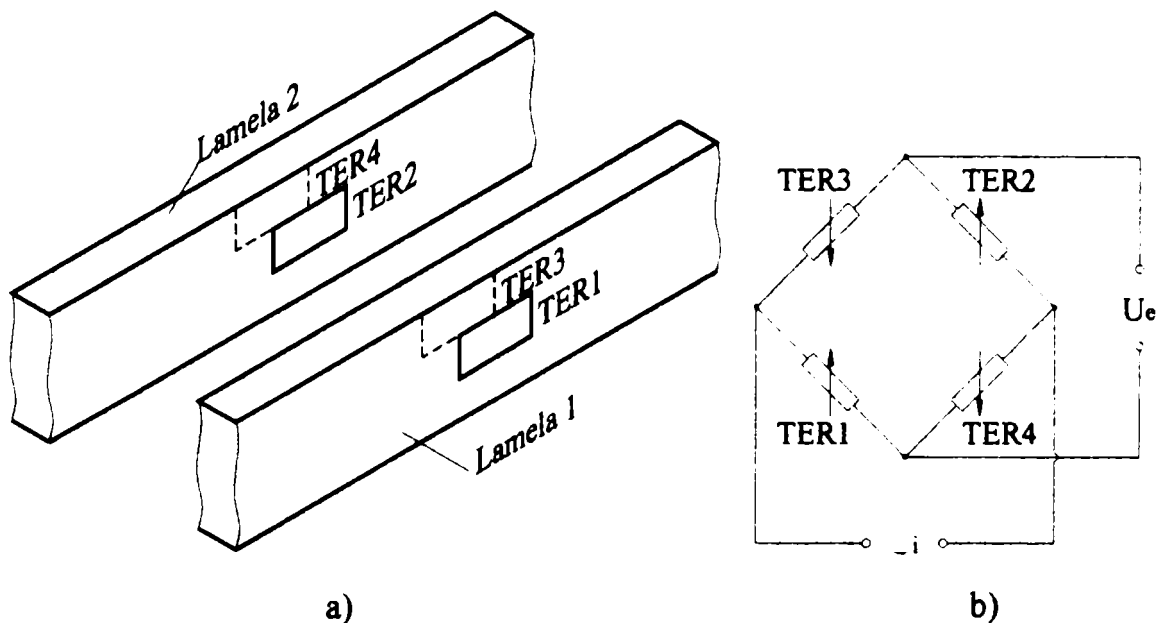


Figura VIII.20. Dispunerea timbrelor tensometrice pe elementul elastic și modul de conectare al acestora

Încercările au fost efectuate într-un număr de cicluri pentru a se asigura prelucrarea statistică corespunzătoare a datelor. Valorile obținute după prelucrarea datelor sunt

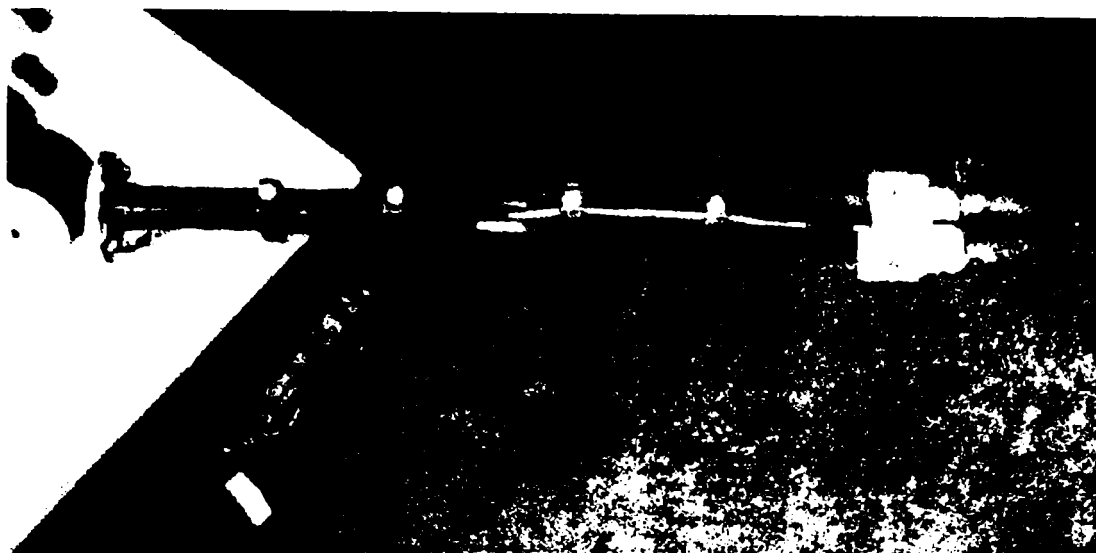


Figura VIII.21. Imaginea elementului compliant montat pe robot

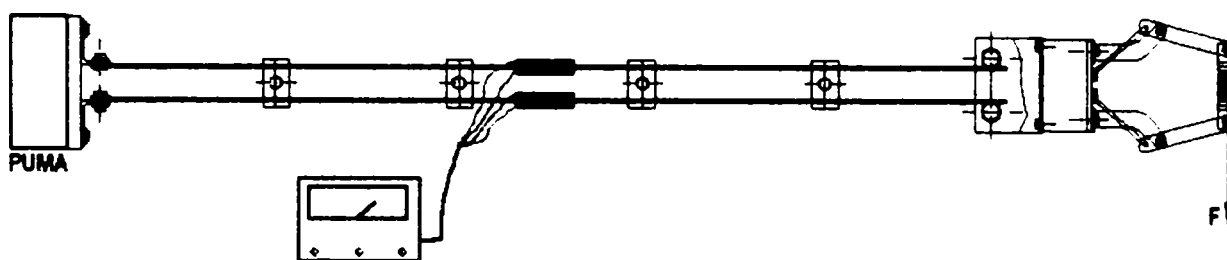


Figura VIII.22. Configurația standului

prezentate în tabelul VIII.1. Pe baza acestor date, se prezintă în figura VIII.23 caracteristica statică a elementului elastic lucrând ca element senzorial.

Tabelul VIII.1

U[mV]	20	25	40	60	80	120
F[N]	0.5	1	1.5	2	2.5	3

Concomitent cu măsurătorile specificate, s-au înregistrat și săgețile punctului caracteristic corespunzător deplasării rezultate. Deplasare maximă a punctului de aplicație al forței a fost de 160 mm la forța de $F=3\text{N}$. S-a constatat o caracteristică statică liniară a elementului elastic. Acest fapt confirmă corectitudinea opțiunii de utilizare a timbrelor tensometrice pentru realizarea elementului senzorial. Soluția prezentată este în același timp și economică, datorită prețului mai scăzut în comparație cu celelalte variante.

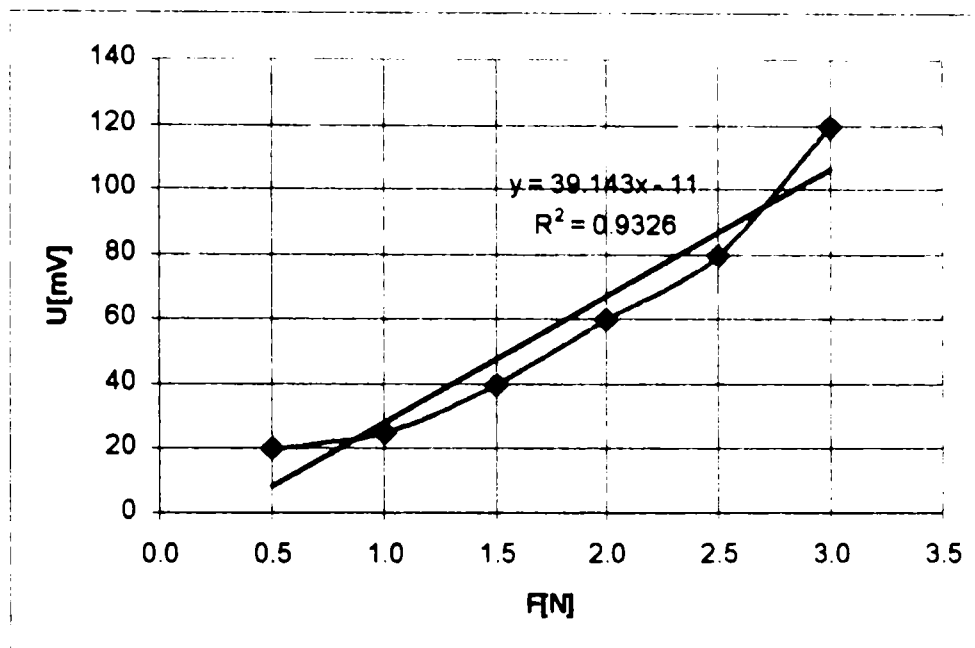


Figura VIII.23. Caracteristica experimentală a elementului compliant

VIII.2.3.2. Controlul în forță al robotului PUMA cu element elastic

Pentru a valida rezultatele din paragraful anterior, s-a comandat în forță axa a 5-a a robotului, (axa cu elementul compliant), folosind ca traductor de reacție puntea tensometrică. Efectorul final a fost dotat cu o pensulă și, pe un tablou rigid, s-au trasat prin program mai multe traiectorii în plan, (figura VIII.24). S-a urmărit grosimea petei de vopsea și forța de apăsare prescrisă prin comandă.

Prelucrarea rezultatelor astfel obținute permite stabilirea unei corelații între grosimea petei de vopsea și forța de apăsare comandată pentru axa a 5-a robotului.



Figura VIII.24. Robotul Puma 600 cu element flexibil -“pictor”

Același experiment a fost realizat cu robotul *PUMA 600* fără element flexibil, comandat în poziție. S-a constatat că controlul grosimii petei de vopsea a fost mult mai bun în cazul robotului cu element flexibil.

VIII.2.3.3. Încercări de colaborare a doi roboți

În acest experiment s-a folosit robotul *PUMA 600* cu element compliant și efector final comandat în poziție și robotul *SCORBOT ER III* (figura VIII.25). S-a constatat că pentru obiecte cu rigiditate mare se poate realiza o sincronizare. Robotul rigid a fost comandat în poziție, iar robotul cu element elastic în poziție și forță, axa a 5-a fiind comandată în forță.

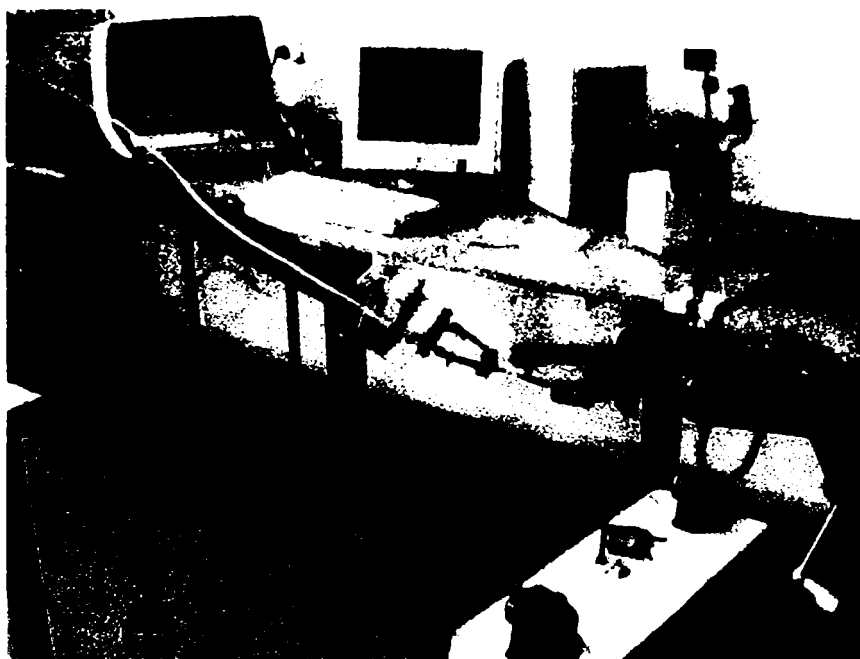


Figura VIII. 25. Colaborarea dintre robotul PUMA 600 cu element compliant și robotul SCORBOT

Pentru obiecte cu rigiditate redusă sincronizarea a fost greu de realizat. În majoritatea încercărilor obiectele manipulate au fost deformate sau deteriorate.

VIII.2.3.4. Încercări de colaborare robot cu element flexibil-operator uman

Încercările de colaborare realizate s-au desfășurat în două variante:

Varianta 1. Robotul a fost comandat în poziție, iar brațul operatorului a urmărit mișcarea efectorului final, astfel încât obiectul fixat de către efectorul final și mâna operatorului să se deformeze cât mai puțin.

Varianta 2. Operatorul uman a controlat deplasarea, iar robotul cu element elastic a

urmărit deplasarea obiectului solidarizat, controlând forța preluată de la traductorul menționat.

Rezultatele experimentelor aferente variantei 1 au fost mai bune decât cele ale variantei 2, ceea ce demonstrează că brațul uman are o complianță mult mai mare decât brațul robotului care include unul sau mai multe elemente compliante.

VIII.3 Concluzii

Determinările experimentale realizate asupra dispozitivelor de complianță tip RCC relevă o comportare mai bună a celor cu tije cilindrice. Acest fapt confirmă ipoteza teoretică de comportare identică indiferent de axa secțiunii la care se raportează momentele de inerție axiale și ipoteza de indice de complianță (I_c) maxim al acestei secțiuni.

Dispozitivele de complianță cu elemente lamelare au un comportament neliniar, justificabil prin direcția forțelor aplicate, comparativ cu poziția secțiunii transversale a celor două lamele care nu se află în același plan cu forța exterioară.

Rigiditatea dispozitivelor de complianță cu elemente elastice înclinate încercate crește cu creșterea valorii unghiului acestora raportat la axa dispozitivului, ceea ce confirmă rezultatele teoretice ale modelării.

Încercările realizate cu robotul PUMA 600 dotat cu un element compliant suplimentar permit observația că un robot având în structura dispozitivului de ghidare și elemente cu grad mare de elasticitate poate colabora cu un operator uman mult mai bine, cu un alt robot cu element elastic bine, iar cu unul cu elemente rigide mai puțin bine.

Se confirmă că, pentru anumite aplicații, cum este cea prezentată în paragraful VIII.3.2, elasticitatea structurală are rol benefic, dacă este cunoscută.

IX. CONCLUZII ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE

IX.1. Concluzii

Lucrarea ca un tot unitar este rezultatul unei activități mai îndelungate a autoarei și aduce o serie de contribuții teoretice și practice în domeniul dispozitivelor de complianță. Se pot enumera concluziile reclamate în acest sens.

Complianța roboților industriali ca proprietate dobândită, presupune o dublă situație: aceea de complianță concentrată, când comportamentul elastic este concentrat zonal în elemente sau dispozitive specializate și complianța distribuită (structurală), când toate elementele componente sau o mare parte a acestora, au comportament elastic.

Utilitatea complianței robotice îmbracă, similar, o dublă ipostază: este căutată, esențială pentru reușita unor aplicații robotizate și este dăunătoare, nedorită, în alte aplicații întrucât afectează negativ precizia robotului.

Complianța concentrată este indusă voit în structura robotului, fiind necesară în anumite aplicații. Aceasta este materializată în dispozitivele de complianță.

Complianța structurală este un domeniu relativ nou de cercetare în robotică. Dacă în majoritatea aplicațiilor robotice “clasice” complianța structurală este un impediment, generând imprecizie și vibrații, recent au apărut în aria roboticii aplicații pentru care complianța structurală este esențială. Manipularea obiectelor fragile, asamblarea robotizată în spațiul cosmic și microchirurgia sunt exemple relevante pentru aceste noi domenii.

Complianța robotică implică o dublă analiză: din punct de vedere al construcției sistemului mecanic al robotului la nivelul elementelor și cuplelor cinematice conducătoare, iar din punct de vedere al conducerii roboților la nivelul sistemului de comandă.

Complianța structurală este o proprietate dobândită, consecință a proprietăților materialelor utilizate, a geometriei structurii sau a combinării acestora.

Lucrarea de față, prin contribuțiile aduse, se înscrie în aria amplă a studiului complianței robotice în cele două ipostaze, concentrată sau/și structurală, generată atât de proprietățile materialelor, cât și de geometrie. Nota de originalitate a acesteia constă în utilizarea metodei Perechilor Sistemelor de Referință, care permite modelarea complianței concentrate și a celei structurale.

Problema complianței, încă incomplet soluționată, oferă câmp deschis de studiu și analiză. Complianța robotică rămâne o provocare redutabilă atât pentru proiectanții de sisteme robotice cât și pentru utilizatorii acestora.

Soluționarea problemelor din teză a fost pregătită de autoare printr-o cercetare minuțioasă concretizată în publicații interne, [Saf-94], [Saf1-94], [Saf2-94], [Saf-95], [Saf1-95], [Saf-00], [Saf1-00], [Saf-02], [DoV-94], [DoV-02] și activitatea la granturi de cercetare, [**G-01].

IX.2. Contribuții personale

Contribuțiile personale aduse de această teză se pot sistematiza în două categorii distincte, după cum urmează:

Contribuții teoretice în domeniul studiului complianței concentrate și al celei distribuite în robotică

- explicitarea semnificației actuale a termenului de complianță a biosistemelor și a sistemelor artificiale,
- clasificarea complianței robotice, în funcție de tipul, poziția în structura robotului și utilitatea acesteia,
- clasificarea roboților având drept criteriu gradul de complianță,
- clasificarea dispozitivelor de complianță în funcție de destinația robotului în structura căruia sunt incluse,
- sistematizarea funcțiilor dispozitivelor de complianță,
- analiza structurală a dispozitivelor de complianță,
- însumarea, sistematizarea și analiza soluțiilor constructive ale dispozitivelor de complianță realizate pe plan mondial,
- prezentarea concentrată a metodelor de studiu și analiză a dispozitivelor de complianță cunoscute, cu evidențierea particularităților fiecăreia,
- realizarea unei biblioteci de modele grafice pentru dispozitivele de complianță utilizate la roboții industriali de montaj,
- realizarea unei biblioteci de modele grafice destinate modelării roboților cu metoda

“bond-graf”,

- analiza sistematică a metodelor de modelare a dispozitivelor de ghidare compliantă ale roboților,
- prezentarea conceptului de Perechi de Sisteme de Referință (PeSiR), și a metodei de modelare aferente, care permit modelarea unitară a oricărui tip de sistem, indiferent de complexitate și tip,
- elaborarea unei metodologii de transpunere a matricilor de trecere de dimensiune 6×1 obținute cu metoda PeSiR în matrici de trecere de dimensiune 4×4 , cu valabilitate atât în domeniul micilor deformații, cât și a celor mari, aferente elementelor elastice,
- analiza comportamentului cinetoelastostatic al elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare ale roboților industriali modelate ca bare spațiale simplu încastrate, utilizând metoda PeSiR,
- analiza influenței proprietăților elastice ale materialului elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare asupra comportamentului lor cinetoelastostatic,
- analiza influenței a lungimii active a elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare asupra comportamentului lor cinetoelastostatic,
- analiza influenței secțiunii transversale, atât ca formă cât și ca tipodimensiune asupra comportamentului cinetoelastostatic al elementelor modelate ca bare încastrate,
- analiza comportamentului elementelor omogene de tip bară încastrată, având secțiunea transversală variabilă,
- determinarea secțiunii optime a elementelor omogene ale dispozitivelor de ghidare, modelate ca bare cu secțiune transversală constantă,
- alegerea formei geometrice optime a secțiunii transversale a elementelor omogene de secțiune constantă a dispozitivelor de ghidare, în condiții de greutate identică a acestora,
- definirea unui indice calitativ de apreciere a gradului de complianță al unui element omogen, de secțiune constantă,
- explicitarea noțiunii de offset în robotică,
- detalierea tipurilor de offset cu exemple sugestive,
- modelarea comportamentului cinetoelastostatic al offset-ului simplu și al celui compus, cu ajutorul metodei PeSiR,
- modelarea comportamentului cinetoelastostatic al cuplelor cinematice conducătoare

și conduse, de translație și respectiv de rotație din structura roboților, utilizând metoda PeSiR,

- modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de ghidare cu topologie serială și a celor cu topologie paralelă ale roboților, cu ajutorul metodei PeSiR,
- modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță cu un element elastic omogen, de secțiune constantă, utilizând metoda PeSiR,
- modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță de tip RCC plan cu două elemente elastice omogene paralele și respectiv înclinate,
- determinarea secțiunii transversale optime a elementelor elastice ale dispozitivului RCC plan, în condiții de identitate a celorlalte caracteristici geometrice ale acestuia,
- modelarea comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță de tip RCC cu trei elemente elastice omogene, dispuse axial simetric în raport cu axa geometrică a dispozitivului.

Contribuții practice în domeniul studiului complianței concentrate și al celei distribuite în robotică

- conceperea și realizarea unor dispozitive de complianță tip RCC cu trei elemente elastice metalice, omogene de secțiune constantă, în variantele constructive cu elemente elastice paralele și respectiv înclinate, având secțiuni transversale circulare și respectiv rectangulare,
- determinări experimentale asupra comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivelor de complianță de tip RCC spațial realizate utilizând două metode de măsurare: metoda clasică tenso-rezistivă și metoda de înregistrare optică a mișcării,
- conceperea și realizarea unui element compliant alcătuit din două lamele de secțiune rectangulară paralele, care a fost inclus în structura dispozitivului de ghidare al robotului *PUMA 600*,
- determinări experimentale ale comportamentului cinetoelastostatic al dispozitivului de ghidare al robotului *PUMA 600* cu element compliant.

Se consideră că obiectivul propus al prezentei lucrări a fost îndeplinit.

În același timp, complexitatea temei lasă câmp deschis pentru abordări ulterioare atât sub aspect teoretic, cât și practic.

BIBLIOGRAFIE

- [Ald-91] Alder, L.J., ș.a. - "Control of a flexible robotic manipulator with unknown payload dynamics: initial experiments", Modelling and Control of Compliant and Rigid Motion Systems, DSC-vol. 31, ASME, New York, 1991, pag. 61
- [And-86] Andrașiu, M., ș.a. - Metode de decizii multicriteriale, Editura Tehnică, București, 1986
- [Anr-83] Andre, P. - Les robots (tome 4) - Constituants technologiques, Editions Hermès, Paris, 1983
- [Asa-88] Asada, H. - "The dynamic RCC hand for high-speed assembly", Proc. IEEE Int. Conf. Rob and Autom.", vol.1, pag. 120, Philadelphia, 1988
- [Ask-83] Asakawa, K., ș.a. - "A variable compliance device and its application for automatic assembly", AUTOFACT 5, Detroit, U.S.A., 14-17 Nov. 1983, pag. 10-1, 10-17.
- [Ave-81] Avetikov, B.G., ș.a. - "Automatic assembly of transformers", "Assembly Automation", febr. 1981, p 94
- [Bac-88] Baciuc, A., ș.a. - Aplicații ale cercetării operaționale, Editura Militară, București, 1988
- [Ban-75] Bănuț, V., ș.a. - Stabilitatea structurilor elastice, Editura Academiei, București, 1975
- [Ber1-92] Bereteu, L., Cioară, T. - "Vibrațiile libere ale brațului unui robot, I. Considerarea brațului o bară Euler-Bernoulli", Al XI-lea Simpozion Național de Roboți Industriali, Timișoara, 1992, vol.1
- [Ber2-92] Bereteu, L. - "Vibrațiile libere ale brațului unui robot, II. Considerarea brațului o bară Timoshenko", Al XI-lea Simpozion Național de
- [Ber3-92] Bereteu, L., Pinte, D. - "Studiul vibrațiilor unui braț robot", Al XI-lea Simpozion Național de Roboți Industriali, Timișoara, 1992, vol.1
- [Bha-90] Bhat, T., ș.a. - "Experiments on point to point position control of a flexible beam using Laplace transform technique", DSC-Vol.26,
- [Bîz-01] Bîzdoacă, N.G. - Arhitecturi de conducere neconvențională a roboților industriali, Teză de doctorat, Craiova 2001
- [Blo-83] Bloch, J. - "Compliant robot and adapter assembly", Brevet inv.SUA, nr.4518307
- [Boi-88] Boissonnant, J.D., ș.a. - Technique de la robotique. Tome 2. Perception et planification, Editions Hermès, Paris, 1988
- [Boo-91] Book, W.J., ș.a. - "Modelling and Control of Compliant and Rigid Motion Systems", DSC-vol. 31, ASME, New York, 1991
- [Bor-92] Borovac, B., ș.a. - "A new way of solving contact tasks", Al XI-lea Simpozion Național de Roboți Industriali, Timișoara, 1992

- [Bre-00] Brezeanu, L.C. Bazele calculului cu elemente finite, Universitatea "Petru Maior" Târgu Mureș, 2000
- [Bry-95] Bruyninckx, H. -Kinematic Models for Robot Compliant Motion with Identification of Uncertainties, Ph.D. Dissertation, Leuven, 17
- [Buz-80] Buzdugan G. Rezistența materialelor, Ediția XI revizuită, Editura Tehnică, București, 1980
- [Car-80] Cartwright, A.G. - "Alignement devices", Brevet inv. Anglia, nr. 2168029
- [Căt-91] Cătărig, A.,
[Cha-82] Chaoui, G. - Statica construcțiilor. Metode de calcul și aplicații, Editura Robotique d'assemblage, conception d'un capteur d'effort, et son utilisation dans des procédures générales d'insertion, Thèse Docteur Ingenieur, Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1982
- [Chn-95] Chang, D.C.,
[Cib1-98] Ciblak, N.,
Lipkin, H. - "Rolling with Deformable Fingertips", The 1995 IEEE/RSJ
- "Application of Stiffness Decompositions to Synthesis by springs", 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences, Sept. 13-16, Atlanta, Georgia, DETC98/MECH-5880
- [Cib-94] Ciblak, N.,
Lipkin, H. - "Asymetric Cartesian Stiffness", 1994 ASME Design Technical Conferences, Sept.11-14, Minneapolis, MN, USA
- [Cib-96] Ciblak, N.,
Lipkin, H. - "Remote Center of Compliance Reconsidered", 1996 ASME Design Technical Conferences, Aug. 19-22, Irvine, CA, USA.
- [Cib-98] Ciblak, N. -Analysis of Cartesian Siffness and compliance with applications, Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, may 1998
- [Cib-98] Ciblak, N.,
Lipkin, H. - "Synthesis of Stiffness by Spring", 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences, Sept. 13-16, Atlanta, Georgia, DETC98/MECH-5879
- [Cod-95] Codreanu, S., ș.a. - Numerical Modeling and Simulation of Dynamical Systems, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 1995
- [Cof-92] Coiffet, Ph. -La robotique, principes et applications, Editura Hermès, Paris, 1992
- [Cri-88] Crișan, I. - Sisteme flexibile de montaj cu roboți și manipolatoare, Editura Tehnică, București, 1988
- [Cut-80] Cuteanu E.,
Marinov R. -Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor, Editura FACLA, Timișoara, 1980
- [Cut-82] Cutkoski, M.R. - "Position sensing wrists for industrial manipulators", "12th ISIR", Paris, 1982, pag.427
- [DeF-84] De Fazio, T.L., ș.a. - "The instrumented remote center compliance", în "Industrial Robot" 1984, nr.4, pag. 238
- [Dem-80] Demian, T., ș.a. - Lagăre și ghidaje pentru aparate, București, Editura Academiei, 1980

- [Dem-84] Demian, T.,ș.a. - Bazele proiectării aparatelor de mecanică fină, Editura Tehnică, București, 1984
- [Dil-88] Diller, K.R., ș.a. - "Network Thermodynamic Modeling with Bond Graphs for Membrane Transport During Cell Freezing Procedures", Trans. ASME, J. Heat Transfer, Vol. 110, Nov.1988, pp.938-945
- [DoV-02] Dolga, V.,
Saftencu, D. - "Simularea funcțională a transmisiilor mecanice utilizate în construcția roboților industriali", Al VII-lea Simpozion Național PROIECTARE ASISTATĂ DE CALCULATOR "Prasic-02", Brașov 7-8 Nov. 2002, Vol.III, ISBN 973-635-076-2, pag.321-326
- [DoV-91] Dolga, V. - Stadiul actual al cercetărilor privind construcția și funcționarea mecanismelor cu cuple cinematice elastice utilizate la dispozitivele de compliantă, Referat doctorat nr.3, Timișoara, 1991
- [DoV-92] Dolga, V. - Sinteza dimensională a mecanismelor cu cuple cinematice elastice cu aplicații în construcția dispozitivelor de compliantă, Teza de doctorat, Timișoara, 1992
- [DoV-93] Dolga, V.,
Dolga, L. - "Mecanism compliant pentru roboți industriali de montaj", Brevet inv. România nr. 106360 B1, 1993
- [DoV-94] Dolga, V.,
Saftencu, D. - "Considerații privind mecanismele cu cuple cinematice elastice", Al V-lea Simpozion de Proiectare ASistată de Calculator "PRASIC'94", Vol. Robotică, pag.157, Brașov, 1994
- [DoV-97] Dolga, V. - "Mathematical Models for Flexible Robots' Studies", Seventh IFToMM International Symposium on Linkages and Computed Aided Design Methods, Syrom'97, v.2, p.93, 1997
- [Dra-77] Drake, S.H. - Using Compliance in Lieu of Sensory Feedback for Automatic Assemblz, Ph.D. Dissertation, MIT, USA 1977
- [Dra-79] Drake, S.H., ș.a. - "Compliant Assembly System Device", Brevet inv. SUA, nr. 4155169, may 22, 1979
- [Dud-86] Dudiță, F., ș.a. - "Mecanisme articulate spațiale închise hexamobile utilizabile ca modul în roboții industriali", în "Robot '86", vol. I, pag. 39
- [Dum-92] Dumitraș, Al. ș.a. - Statica, dinamica și stabilitatea construcțiilor, Institutul Politehnic "Gh. Asachi" Iași, 1992
- [Ena-82] Enache, Ș., ș.a. - Dicționar de construcții de mașini francez-român, Ed. Th., București, 1982
- [Epa-97] Eparu, I., C59
Bădoiu, D. - Elemente de mecanică teoretică și de modelare a structurilor roboților industriali, Editura Tehnică, București, 1997

- [Fah-88] Fahrenthold,E.P
Wu, A - "Bond-Graph Modeling of Continuous Solids in Finite Strain Elastic-Plastic Deformation", Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Measure. Control, Vol. 110, 1988, pp.284-287
- [Fah-91] Fahrenthold,E.P
Wargo, J. D. - "Vector Bond-Graph Analysis of Mechanical Systems", Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Measure. Control, Vol. 113, 1991, pp.344-353
- [Fah-94] Fahrenthold,E.P
Wargo, J. D. - "Lagrangian Bond-Graphs for Solid Continuum Dynamics Modeling", Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Measure. Control, Vol. 116, 1994, pp.178-192
- [Fri-85] Fricke, A., ș.a.
[Gaf-87] Gafițanu, M., ș.a. - "Ungesteuerter Fugemechanismus mit Internem Antrieb fur Elemente finite și de frontieră cu aplicații la calculul organelor de mașini, Editura Tehnică, București, 1987
- [Gai-91] Gaillet, A., ș.a - "Dispositif d'articulation actif á compliance", Brevet inv. Franța, nr. 2549916
- [Gar-90] Gârbea, D. - Analiza cu elemente finite, Editura Tehnică, București, 1990
- [Gha-91] Ghazavi, A.
Gordaninejad, F. - "Nonlinear rigid-and-flexible motion control of a high sped flexible robot arm constructed from advanced coposite materials", în D.S.C.-vol.26, Robotics Research-1990, ASME 1991, pag. 93-99
- [Gli-94] Gligor, T., ș.a. - Dinamica și vibrații, Curs și culegere de probleme, UPT, 1994
- [Gri-91] Griffis, M.,
Duffy, J. - "Kintestatic Control. A Novel Theory for Simultaneously Regulating Force and Displacement", Journal of Mechanical
- [Gri-93] Griffis, M.,
Duffy, J. - "Global stiffness modeling of a class of simple compliant couplings", Mechanism and Machine Theory, vol.28, No.2, pag.207-224
- [Gun-91] Gun-Wong, B., ș.a - "Robust Impedance Control of Robot Manipulators", DSC-Vol.26, Robotics Research-1990, ASME 1991
- [Hah-81] Hahnel, K. - Raumkinematic von ungesteuerten Fugemechanis-men, "fachtung Getriebetechnik Karl-Marx-Stadt",1981, pag.74
- [Han-81] Haneș, G. - Dicționar francez-român, român-francez, Editura științifică și Enciclopedică, București, 1981
- [Her-85] Herfter, D. - "Zur Auslegung ungesteuerten Fugemechanismen mit elastomeren Federelementen", Wiss. Z. Tech. Hochschule Karl-
- [Hoe-85] Hoessler, B., ș.a. - "Opérations de parachèvement a l'aide de robots industriels", Rapport d'étude nr.13 R 020, Centre Technique des Industries Mécaniques, Saint-Étienne, 1985
- [Hri-86] Hricisak, L., ș.a. - "Kompenzator polohy a orientacie z pruzne materialu pre poddajne ulozenie uchopovacey hlavipram", Brevet inv. RSC, nr. 250025/1986

- [Iba-96] Ibănescu Radu - Contribuții privind modelarea comportamentului dinamic al unor sisteme de corpuri rigide cu aplicații la dispozitive mecanice - Teza de doctorat, Iași, 1996
- [Ies1-84] Illes, G. - "Pruzne poddajno navadzaci clen", Brevet de inv. RSC, nr. 234869/1984
- [Ies-81] Illes, G. - "Pruzne poddajno navadzaci clen", Brevet de inv. RSC, nr. 23483
- [Ies-84] Illes, G. - "Pruzne poddajno navadzaci clen", Brevet de inv. RSC, nr. 234872/1984
- [Ioe-95] Ionete, C., ș.a. - Proiectarea sistemică asistată de calculator în MATLAB, Reprografia Universității Craiova, 1995
- [Ion-94] Ionescu, V., Varga, A. - Teoria sistemelor. Sinteza robustă. Metode numerice de calcul, Editura ALL, București, 1994
- [Ion-97] Ionescu, R., Semenciuc, D. - Roboți industriali: Cinematică, elemente construc-tive, aplicații. Editura Universității din Suceava, 1997
- [Iva-94] Ivănescu, M. - Roboți industriali, Algoritmi și sisteme de conducere, Editura Universitaria, Craiova, 1994
- [Jac-82] Jacobi, P. - "Fugemechanismen fur die automatisierte Montage mit Industrierobotern", Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt,
- [Jan-91] Jansen, J.F, ș.a. - "Long-reach Manipulator for Waste Storage Tank Remediation" în Modelling and Control of Compliant and Rigid Motion Systems, DSC- Vol. 31, ASME, 1991, pag. 67-73
- [Jay-97] Jaydeep, R., Whitcomb, L.L. - "Structural Design Optimization and Comparative Analysis of a New High-Performance Robot Arm via Finite Element
- [Jut-89] Jutard, A., ș.a. - "Geometric model of the DCR-LAI compliant device", "Robotica", may 1989, pag.151
- [Kim-97] Kim, W., Lee, J., Yi, L. - "Analysis for a Planar 3 degree of Freedom Parallel Mechanism With Actively Adjustable Stiffness Characteristics", Proc. 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, USA, April, pag.2663-2670
- [Kov-01] Kovács, Fr.V. - Noțiunea "Perechi de Sisteme de Referință" (PeSiR) și unele utilizări în domeniul de științe tehnice, în "Robotica & Management" 1/2001, pag.22-29
- [Kov-02] Kovács, Fr.V. - "New Method for the Computing of Relative Position-Orientation of Frames", Conferința Națională de Robotică CNR 2002, 17-19 Octombrie, 2002, Craiova
- [Kov1-01] Kovács, Fr.V. - "Structural and kinematic modelling of mechanical systems of mobile robots using the concept "Pairs of Reference Systems" (PRS), The 2nd National Workshop on Mobile Robots, October

- [Kov1-02] Kovács, Fr. V., Nueleanu, A. - "Kinetoelastic Model of Robotic Joints using the Concept "Pair of Frames" ", Conferința Națională de Robotică CNR 2002, 17-19 Octombrie, 2002, Craiova
- [Kov1-89] Kovács, Fr. - "Analiza cinematico-cinetostatică a mecanismelor patrulater articulată cu cuple elastice, având biela rigidă", "SYROM'89", vol.I-2, pag.451, București, 1989
- [Kov1-92] Kovács, Fr., Florea, M. - "Mecanisme cu cuple cinematice elastice folosite în operații de prehensiune", AL VI-lea Simpozion Național de Mecanisme și Transmisii mecanice, Timișoara, 1992
- [Kov2-01] Kovács, Fr. V. - "General Mathematical Model of Technological Processes Based on Relative Motions, Proceedings of LSS 2001 9th IFAC/FORS/IMACS/IFIP/Symposium International Federation of Automatic Control pp170-177, Bucharest, July 2001, Information and Control Publication Bucharest
- [Kov2-02] Kovács, Fr. V., Ghasan, A. - "Kinetoelastical Model of Robotic Guiding Devices with Serial Topology, Conferința Națională de Robotică CNR 2002, 17-19 Octombrie, 2002, Craiova
- [Kov2-92] Kovács, Fr. V., ș.a. - Mecanisme. Curs. Universitatea Tehnică, Timișoara, 1992
- [Kov2-99] Kovács, Fr. V., ș.a. - Fabrica viitorului. Introducere în producție: integrarea prin calculator a concepției, fabricației și managementului, Editura Multimedia International, Arad, 1999
- [Kov-82] Kovács, F., Cojocaru, G. - Manipulatoare, roboți și aplicațiile lor industriale, Editura Facla, Timișoara, 1982
- [Kov-85] Kovács, F. - "Mecanisme cu cuple cinematice elastice" (partea I), Comunicările celui de-al IV-lea Simpozion Internațional "SYROM'85", vol.II-1, pag.195, București, 1985
- [Kov-86] Kovács, Fr., ș.a. - "Încercarea unor capete de forță pneumatice pentru demaslotarea și debavurarea pieselor turnate", Al VI-lea Simpozion Național de Roboți Industriali, Brașov, 1986, vol. II, pag.75
- [Kov-89] Kovács, Fr. - "Mecanisme patrulater articulată plane cu cuple cinematice elastice și elemente specifice acestora", "SYROM'89", vol.I-2, pag.439, București, 1989
- [Kov-92] Kovács, Fr., Rădulescu, C. - Roboți industriali, vol. I, II, Litografie, Universitatea Tehnică din Timișoara, 1992
- [Kra-97] Kraus, W.jr., McCarrager, B.J. - "Case Studies in the Manipulation of Flexible Parts Using a Hibrid Position/Force Approach", The Proceedings of the'97 IEEE Conference on Robotics and Automation, (werner@faceng.anu.edu.au)
- [Kri-01] Krishna, S., Gayatri, A. - System Design through MATLAB Control Toolbox Simulink, vol.I, Springer Verlag, London, 2001

- [Kri1-01] Krishna, S.,
Gayatri, A. - System Design through MATLAB Control Toolbox Simulink, vol.II, Springer Verlag, London, 2001
- [Kro-80] Krouse, J.K. - "Compliant mechanisms - a new class of mechanical devices", în "Machine design", january, 1980, pag.86
- [Kru-90] Kruise, L. - Modelling and control of a flexible beam and robot arm, Ph.D. Dissertation, Enschede, Olanda, 1990
- [Lem-85] Lemarchand, L. - "Organes Compliantes Passif", SYROM '85, vol.II, pag.231, București, 1985
- [Lew-91] Lewis, F.L. - "Tank Gun-Pointing Control with Barrel Flexibility Effects", Modelling and Control of Compliant and Rigid Motion Systems, DSC-vol. 31, ASME, 1991, pag. 47-54
- [Lin-94] Lîn, J., Lewis,F.L. - "A symbolic formulation of dynamic equations for a manipulator with rigide and flexible links", The Int. Journal of Robotics Research, v.13, 1994, n.5, p.454-466
- [Lip1-92] Lipkin, H.,
Patterson, T. - "Geometrical properties of modelled robot elasticity: Part II- Center-of-Elasticity", DE-vol.45, Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical System, ASME 1992, pag 187-193.
- [Lip-92] Lipkin, H.,
Patterson, T. - "Geometrical properties of modelled robot elasticity: Part I - Decomposition", DE-Vol. 45, Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems, ASME 1992, pag. 179-185
- [Lon-85] Loncaric,J. - Geometrical Analysis of Compliant Mechanisms in Robotics, Ph.D. Dissertation, Harvard University 1985
- [Lot-68] Lotze, W. - "Berechnung von Biegefeder-System mit Hilfe konzentrierter Ersatzelemente", Feingeratetechnick, nr. 40, pag. 440, 1968
- [Luc-99] Luchin, M. - Modelarea și simularea sistemelor mecanice, Referat doctorat nr.3, Timișoara, 1999
- [Man-80] Mangeron D., ș.a. -Teoria optimizării structurilor cu aplicații, Editura Junimea, Iași, 1980
- [Mar-79] Margolis, D.L.,
Karnopp, D.C. - "Bond-Graphs for Flexible Multibody Systems", Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Measure. Control, Vol. 101, No.1, 1979, pp.50-57
- [McC-79] Mc.Callion, H., ș.a. - "A compliant device for inserting a peg in a hole", în "The Industrial Robot", June 1979, Kempston, Bedford, England
- [Mer-71] Meriam - "DYNAMICS", 2nd EDITION, John Wiley Sons Inc., New York, 1971
- [Mor-70] Morrison, J.L.M.,
Crossland, B. - An Introduction to the Mechanics of Machines (S.I. Units), Longman Group Limited, London, 1970

- [Nag-86] Naganathan, G.,ș.a -"Non-linear flexibility studies for spatial manipulators", in Proc. IEEE Int. Conf. Rob. and Autonom. Syst., 1986, v.I, Washington, p.373
- [Nev-78] Nevins, J.L.,ș.a -"Exploratory Research in Industrial modular Assembly", R
- [Nev-80] Nevins, J.L.,ș.a -"Exploratory Research in Industrial Assembly Part-mating", R 1276, CSDL Massachusetts, USA, 1980
- [Pan-85] Pandrea, N., ș.a -"Metoda deplasărilor relative în calculul elastic al mecanismului de complianță RCC", Al V-lea Simpozion Național de Roboți Industriali, București, 1985
- [Pan-91] Pandrea, N., ș.a - "Calculus of the compliance devices of the programable assembly systems", The 8-th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, vol.4, pag. 1221, Praga, 1991
- [Pel-75] Pelecudi, C. - Precizia mecanismelor, Editura Academiei, București, 1975
- [Per-85] Perianu, E - "Aspecte privind calculul elastic al mecanismelor de orientare la montaj pentru RI", Al V-lea Simpozion Național de Roboți Industriali, București, 1985
- [Pha-83] Pham, D.T. - "Improvements in compliant devices", Brevet inv. Anglia (B.N.F.L.), nr. 2152473
- [Poc-98] Pocinog, G. - Modele și metode de simulare, Editura Eurobit, Timișoara, 1998
- [Pos-91] Posea, N. - Calculul dinamic al structurilor, Editura Tehnică, București,1991
- [Pre-02] Precup, R.E., ș.a - Matematici asistate de calculator, Editura Politehnica, Timișoara, 2002
- [Rad-86] Rădulescu, C.D., ș.a. - "Sistem de prehensiune pentru piese cu configurație complexă, acționat pneumatic", Al VI-lea Simpozion Național de Roboți Industriali, Brașov, 1986, vol. I, pag.141
- [Reb-85] Reboulet, C. - "A hibrid control of a manipulator with active compliant wrist", The 3th International Symposium on Robotics Research, Grouvieux, France, 7-11 Oct.1985, pag.76-80
- [Ros-87] Rosenberg, R.C. - "Exploiting Bond-Graph Causality in Physical Systems Models", Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Measure. Control, Vol. 109, No.4, 1987, pp.378-383
- [Rou-85] Rourke, J., ș.a. - "Remote center compliance device", Brevet inv.SUA, nr. 4556203, 1985
- [Saf-00] Saftencu, D. - "Elemente grafice specifice modelării sistemelor cu metoda Bond-Graf", A VII-a Ediție a Conferinței Naționale cu Participare Internațională "GRAFICA-2000", Craiova 2000

- [Saf-02] Saftencu, D. - "Abstractizări ale mecanismelor compliante", Analele UNIVERSITĂȚII DIN ORADEA, Fascicula Inginerie Managerială și Tehnologică, Secțiunea MECATRONICĂ, ORADEA 2002, Vol.I, Anul I, ISSN 1583-0705, Pag.159-164
- [Saf1-00] Saftencu, D. - "Biblioteca de modele grafice destinată modelării roboților cu metoda Bond-Graf", A VII-a Ediție a Conferinței Naționale cu Participare Internațională "GRAFICA-2000", Craiova 2000
- [Saf1-02] Saftencu, D. - "Elemente componente ale dispozitivelor de complianță din structura roboților industriali", Analele UNIVERSITĂȚII DIN ORADEA, Fascicula Inginerie Managerială și Tehnologică, Secțiunea MECATRONICĂ, ORADEA 2002, Vol.I, Anul I, ISSN 1583-0705, Pag. 165-170
- [Saf1-94] Saftencu, D. - "Biblioteca de modele grafice pentru dispozitivele de complianță utilizate la roboții industriali de montaj", Analele Universității din Oradea, Fascicola 1, Mecanică, Oradea 1994
- [Saf1-95] Saftencu, D., Dolga L. - "Graphical modelling of compliant devices", Conferința Internațională "Grafică inginerescă și metodică de predare", Chișinău 1995, vol.II, pag.161
- [Saf1-98] Saftencu, D. - Studiul critic al soluțiilor constructive ale dispozitivelor de complianță din structura roboților industriali, Referat nr.2, Timișoara
- [Saf2-94] Saftencu, D. - "Considerații privind posibilitatea realizării unui sistem expert pentru proiectarea dispozitivelor de complianță", Al XII-lea Simpozion Național de Roboți, Timișoara 1994, vol.IV, pag.133
- [Saf-94] Saftencu, D. -"Modelarea grafică a dispozitivelor de complianță din componența roboților industriali", Al IV-lea Seminar Național de geometrie descriptivă și desen, IAȘI, 1994, pag. 365
- [Saf-95] Saftencu, D. - "Considerații privind realizarea modelului mediului la roboții industriali inteligenți", Sesiunea Aniversară de Comunicări Științifice, Hunedoara, 1995
- [Saf-97] Saftencu, D. - Modelarea dispozitivelor de complianță. Simularea funcționării acestora în vederea optimizării construcției lor, Referat nr.3, Timișoara
- [Saf-98] Saftencu, D. - "Stadiul actual al cercetărilor privind construcția, funcționarea și utilizarea dispozitivelor de complianță din structura roboților industriali", Referat de doctorat nr.1, Timișoara, 1998
- [Sah-97] Shabana, A.A. -Vibration of Discrete and Continuous Systems, Second Edition, Springer-Verlag New York, Inc., 1997

- [Sam-80] Salmon, M. - "Consideration of the design of the OLIVETTI SIGMA an industrial robot for the manufacturing industries", Simpozion Intern. Robot, Warsaw, 1980
- [Sav-97] Savii, G. - Bazele proiectării asistate de calculator, Ed. MIRTON, Timișoara, 1997
- [Sch-88] Schöninger, J. - "Vorrichtung zum Fügen von Bauelementen", Brevet inv. RFG, nr. 3628750, B 25 J 13/08, 1988
- [Scr-81] Schwartz, A., ș.a. - "Fugeeinrichtung mit pneumatischen servosystem", în "Fachtagung Getriebetechnik Karl-Marx-Stadt 1981", pag. 82
- [Sev-75] Sevak, M.N., ș.a. - "Optimal synthesis of Flexible Link Mechanisms with Large Static Deflections, Trans. ASME, J.E. for industry, May 1975, pag. 520
- [Shi-96] Shimoga, K.B. - "Robot Grasp Synthesis Algorithms: A Survey", în "The International Journal of Robotics Research", vol.15, No. 3, June 1996, pag.230-266
- [Sin-94] Singer, N.C., Seering, W.P. - "A Simplified Method for Deriving Equations of Motion For Continuous Systems with Flexible Members", A. I. Memo No. 1423, Massachusetts Institute of Technology, May, 1994
- [Smi-91] Smith, C.C., ș.a. - "Design and control of electromechanical actuation systems", Modelling and Control of Compliant and Rigid Motion Systems, DSC-vol. 31, ASME, 1991, pag.137
- [Smt-90] Samanta, B., Mucherjee, A. - "Analysis of Acoustoclastic Systems using Modal Bond-Graphs", Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Measure. Control, Vol. 112, No.1, 1990, pp.108-115
- [Sta-96] Starețu, I. - Sisteme de prehensiune, Editura LUX-LIBRIS, Brașov, 1996
- [Stu-83] Stauffer, R.N. - "Robots speed assembly of floppy-disk drives" în "Robotics Today", nr. 6, 1983, pag.2 5
- [Tot-01] Toth-Tașcău, M. - Cinematica și dinamica roboților inteligenți, Editura POLITEHNICA, Timișoara, 2001
- [Tra-90] Trabia, M., Yim, W. - "Optimal Joint Trajectory Planning of a Single Link Elastic Robot", DSC-Vol.26, Robotics Research, 1990
- [Tsu-96] Tsuchiaya, K., Shima, T. - "Recursive Formulations of a Flexible Multibody System by the Method of Wheithed Residual", în JSME International Journal, Series C, Vol. 39, No.2, 1996 pag. 257-264
- [Ung-97] Ungureanu, G., Zetu, C. - Proiectare asistată de calculator, Litografie Univ.Tehnică "GH.ASACHI" Iași, 1997
- [Vac-89] Vacarescu, I.N. - Sinteza dimensională și dimensională optimală a mecanismelor generatoare de traiectorie din componența structurală a roboților industriali, Teza de doctorat, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara, 1989

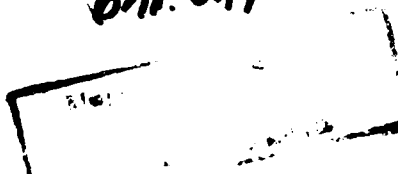
- [Var-97] Varga, A., Sima, V. - Ingineria asistată de calculator a sistemelor automate. Algoritmi și programe de proiectare, Editura Tehnică, București, 1997
- [Vol-80] Volmer, J. - "Fugemechanismen mit nachgiebigen Gliedern für Montage-Industrierobotern", în *Maschinenbautechnik*, 1980, nr. 3, pag. 115
- [Vol-81] Volmer, J. - *Industrieroboter*, VEB Verlagtechnik, Berlin, 1981
- [Vol-83] Volmer, J. - "Flexible automatische Montagesysteme Maschinenbau Technische Aspekte", în *Wiss. Z. Tech. Hochschule Karl-Marx-Stadt*, 1983, nr. 5, pag. 626
- [Vuk-82] Vukobratović, M., Stokic, D. - *Control of Manipulation Robots*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982
- [Vuk-85] Vukobratović, M., Potkoniak, V. - *Scientific Fundamentals of Robotics 6. Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots*, Springer Verlag, Berlin, 1985
- [Vuk-89] Vukobratović, M. - *Applied Dynamics of Manipulation Robots-Modelling, Analysis and Examples*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989
- [Vuk-95] Vukobratović, M. - "How to Control Robots Interacting with Dynamic Environment", *The First ECPD International Conference on Advanced Robotics and Intelligent Automation*, September, 6-8, 1995, Athens, Greece, pag.2
- [Vuk-96] Vukobratović, M., ș.a. - "Control of Robot with Elastic Joints Interacting with Dynamic Environment", *The Second ECPD International Conference on Advanced Robotics, Intelligent Automation and Active Systems*, September, 26-28, 1996, Vienna, Austria, pag.422
- [Wan-91] Wang, D., Vidyasagar, M. - "Transfer Functions for a Single Flexible Link", în *The International Journal of Robotics Research*, vol.10, No. 5, October 1991
- [War-83] Warnecke, H.J. - "Flexible assembly system for unamed factory", *The 4th international Conference on Assembly Automation*, Tokyo, 1983
- [War-86] Warnecke, H.J. - "Entwicklung und Einsatz flexibler Montagesysteme" în *Maschinenbautechnik*, 1986, nr.3, pag.115
- [Wat-78] Watson, P.C. - "Remote Center Compliance", *Brevet de invenție S.U.A.* nr. 4098001, 4 iulie 1978

- [Wer1-97] Werner, K.Jr., ș.a. - "Modelling and Control of Interaction Forces in Non-linear-Stiffness Types of Contact", Submitted to the 1997 Symposium Robot Control (Syroco) as a Contributed Paper, (werner@faceng.anu.edu.au)
- [Wer-97] Werner, K.Jr., ș.a. - "Case Studies in the Manipulation of Flexible Parts Using a Hibrid Position/Force Approach", Proceedings of the '97 IEEE Conference on Robotics and Automation, (werner@faceng.anu.edu.au)
- [Wha-90] Whalen M.,
Sommer H.J. - "Modal analysis and mode shape selection for modeling an experimental two-link flexible manipulator", DSC-Vol.26, Robotics Research,1990 pag.47
- [Whi-79] Whitney, D.E.,
Nevins, J.L. - "What is the remote center of compliance (RCC) and what can it do?", 9th International Symposium on Industrial Robot, Washington, 1979, pag.135
- [Whi-80] Whitney, D.E., ș.a. - "Part mating theory for compliant parts", R 1407, CSDL (SUA), 1980
- [Whi-86] Whitney, D.E., ș.a. - "Mechanical behavior and Design Equations for Elastomer Shear Pad Remote Center Compliance", în *Konstr. I tehn. masinostroenia*, nr.3,1986,pag.240
- [Yos-96] Yoshikawa, T.,
Hosoda, K. - "Modeling of Flexible Manipulators Using Virtual Links and Passive Joints", "The International Journal of Robotics Research", vol. 15, No. 3, Jun. 1996, p 290
- [Zei-91] Zeid, I. - CAD/CAM Theory and Practice, Mc Graw Hill, 1991
- [Zei-95] Zeid, A.A.,
Overhold, J.L. - "Singularly Perturbed Bond Graph Model for Simulation of Multibody Systems", *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Measure. Control*, Vol. 117, sept. 1995, pp.401-410
- [Zha-88] Zhang, S.C.,
Zhang, J.C. - "Dynamic Simulation of A Hidraulic Reversing System Using Bond-Graph Techniques", Proceedings of the 12 IMACS World Congres on Scientific Computation, Vol. 1, Paris, 1988 pp.78-80
- **G-01 * * * "Analiza teoretică și experimentală a proceselor de montaj robotizate arbore-alezaj", Grant CNCSIS cod 822 nr.34977/tema 13/2001, tema 15/2002
- **D-96] * * * - Dicționar explicativ al limbii române, Editura Univers Enciclopedic, București, 1996
- **D-97] * * * - Dicționar Tehnic Englez-Român, Editura Tehnică, București, 1997
- **F-83] * * * - "Flexibility can be achieved trough robot assembly", în "Assembly Automation", nr.4, 1983, pag. 218

- [**L-59] * * * - Lexiconul Tehnic Român, Editura Tehnică, București, 1959
- [**M-78] * * * - Mic Dicționar Enciclopedic, Editura Științifică, București, 1978
- [**M-85] * * * - Montagegreifer für Handhabungsgeräte, Brevet de invenție nr. 276257, Germania, (VEB Wema)
- [**M-96] * * * - MicroStation 95, User guide, Bentley Systems Inc., 1996
- [**M-98] * * * - MicroStation SE, Mechanical Academic Program, Bentley Systems Inc., 1998
- [**N-01] * * * - <http://www.iau.dtu.dk/research/autonom/Copernicus/ProgressReport3-1.html>
- [**N-02] * * * - <http://www.ai.mit.edu/people/chewcm/research.html>
- [**N-03] * * * - <http://www.guppy.mpe.nus.edu.sg/~mpeang/research.html>
- [**N-04] * * * - <http://www.mech.tugraz.at/mech/Software/Joint/>
- [**N-05] * * * - <http://cimar.mae.ufl.edu/URPR/publications/pubs/>
- [**N-06] * * * - <http://cimar.mae.ufl.edu/FLA99/session1/>
- [**N-07] * * * - <http://www.me.ufl.edu/CIMAR/pubs/>
- [**N-08] * * * - <http://www.fanurobotics.com/Products/ProductLine.asp>
- [**N-09] * * * - http://www.ee.nmt.edu/~jackiel/sect3_1.html
- [**N-10] * * * - http://www.space.gc.ca/asc/eng/youth_educators/kidspace/
- [**N-11] * * * - <http://www.mathworks.com>
- [**N-12] * * * - <http://www.abb.com/robots/>
- [**N-13] * * * - <http://www.robots.epson.com/>
- [**N-14] * * * - <http://www.servosystem.com/>
- [**N-15] * * * - <http://www.stanford.edu/>
- [**N-16] * * * - <http://www.rpautomation.com/>
- [**N-17] * * * - <http://www.rk-online.de/>
- [**N-18] * * * - <http://www.densorobotics.com/>
- [**N-19] * * * - <http://www.motoman.com/>
- [**N-20] * * * - <http://www.nachirobotics>
- [**N-21] * * * - <http://www.mathsoft.com/>
- [**N-22] * * * - <http://www.wolfram.com/>
- [**R-88] * * * - "Reports and surveys" în "ROBOTICA", vol. 6, 1988, pag. 180
- [**S-90] * * * - SIROBOT 1, Industrie-Roboter für die Beschickung von Werkzeugmaschinen, Beschreibung, Ausgabe 9.79, E 321, SIEMENS AKTIEN-GESELLSCHAFT. Geschäftsbereich Verarbeitende Industrie
- [**W-97] * * * - World Industrial Robots 1997

ANEXE

6hl. 0h1



Anexa V.1.

```

%          Calculul simbolic al deplasarii extremitatii libere a barei omogene,
%          incastrata la o extremitate si incarcata la extremitatea libera cu un torsor 6x1
%-----
% -cazul general: - torsor cu 6 componente aplicat la extremitatea libera
%                  - sectiunea transversala - rectangulara, avand latura mare a sectiunii paralela cu
%                  axa Oy
%                  - constanta
%-----
syms E A Iy Iz L m Fx Fy Fz Mx My Mz I;
% particularizari posibile:
% L=1;
% Fx=1;
% Fy=1;
% Fz=1;
% Mx=1;
% My=1;
% Mz=1;
% % Iy=l;
% % Iz=l;
K=[E*A/L 0 0 0 0 0; 0 12*E*Iz/L^3 0 0 0 -6*E*Iz/L^2;...
  0 0 12*E*Iy/L^3 0 6*E*Iy/L^2 0; 0 0 0 E*(Iz+Iy)/2/(1+m)/L 0 0;...
  0 0 6*E*Iy/L^2 0 4*E*Iy/L 0; 0 -6*E*Iz/L^2 0 0 0 4*E*Iz/L]
%K matricea de rigiditate a barei incastrate
pretty(K); %scrierea matricii K sub forma usor citibila
P=[Fx;Fy;Fz;Mx;My;Mz];
C=inv(K) %matricea de complianta
pretty(C);
q=C*P %matricea coloana a deplasarilor
% % H=q*E; %factor comun !!!
% % pretty(H) ;
pretty(q) ;
%-----
% deplasările extremitatii libere (nodul 2):
u2=q(1,1) % deplasarea pe directia axei Ox
pretty(u2);
v2=q(2,1) % deplasarea pe directia axei Oy
pretty(v2);
w2=q(3,1) % deplasarea pe directia axei Oz
pretty(w2);
uu2=q(4,1) % deplasarea in jurul axei Ox
pretty(uu2);
vv2=q(5,1) % deplasarea in jurul axei Oy
pretty(vv2);
ww2=q(6,1) % deplasarea in jurul axei Oz
pretty(ww2);
%-----
%Determinarea erorii de pozitie S
a=(q(1,1))^2;
b=(q(2,1))^2;
c=(q(3,1))^2;
D=sqrt(a+b+c);
S=simple(D);
pretty (S);

```

Anexa V.2.

```
% Analiza dependentei deplasariilor liniare si unghiulare ale extremitatii libere
% cu lungimea barei incastrate
%-----
% T=[1 1 1 1 1 1]^T   N, Nm
% L=1m
% Iy=Iz= 1 m^4
% E= 220e9 N/m^2
syms L m;
E= 220e9;
m=0.29;
dx=L/E;
dy=(2*L^3+3*L^2)/6/E;      %
dz=(2*L^3-3*L^2)/6/E;      %
tx=2*(1+0.29)*L/E          %
ty=(-L^2+2*L)/2/E;         %
tz=(L^2+2*L)/2/E;         %
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,"LineStyleOrder",":|-")');
ezplot(dx, [0,4]);
hold on;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,"LineStyleOrder","-|-")');
ezplot(dy, [0,4]);
hold on;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,"LineStyleOrder","-")');
ezplot(dz, [0,4]);
set(findobj('Type', 'Line'), 'Color', 'r');
hold on;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,"LineStyleOrder",":|-")');
ezplot(tx, [0,4]);
hold on;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,"LineStyleOrder","-|-")');
ezplot(ty, [0,4]);
hold on;
ezplot(tz, [0,4]);
hold on;
set(findobj('Type', 'Line'), 'LineWidth', 1.5);
title(' ');
xlabel('L [m]');
ylabel('deplasari liniare [m], deplasari unghiulare [rad]');
legend('\Deltaq_1', '\Deltaq_2', '\Deltaq_3', '\Deltaq_4', '\Deltaq_5', '\Deltaq_6', 2);
grid on;
set(gca, 'Color','none');
xlim('auto');
ylim('auto');
```

Anexa V.3.

```
% Deplasările barei circulare pline, incastrata si solicitata cu un torsor 6x1
% -----
syms E A L Iy Iz m Fx Fy Fz Mx My Mz H h;
E=220e9;
m=0.29;
L=1;
Fx=1;
Fy=1;
Fz=1;
Mx=1;
My=1;
Mz=1;
P=[Fx;Fy;Fz;Mx;My;Mz];
% colormap(cool);
grid on;
Iy=pi*H^4/64;
Iz=pi*H^4/64;;
A=pi*H^2/4;
K=[E*A/L 0 0 0 0; 0 12*E*Iz/L^3 0 0 0 -6*E*Iz/L^2;...
    0 0 12*E*Iy/L^3 0 6*E*Iy/L^2 0; 0 0 0 E*(Iz+Iy)/2/(1+m)/L 0 0;...
    0 0 6*E*Iy/L^2 0 4*E*Iy/L 0; 0 -6*E*Iz/L^2 0 0 0 4*E*Iz/L];
% K matricea de rigiditate a barei incastrate solicitata de [P]
C=inv(K);%matricea de complianta
q=(inv(K))*P; %matricea coloana a deplasarilor
pretty(q);
ezplot(q(1,1), [1,200]);%x
hold on;
ezplot(q(2,1), [1,200]);%y
set(findobj('Type','Line'),'LineStyle','--')
hold on;
ezplot((-q(3,1)), [1,200]);%z
set(findobj('Type','Line'),'LineStyle','--','Color','k')
hold on;
ezplot(q(4,1), [1,200]);% theta x
hold on;
ezplot(q(5,1), [1,200]);% theta y
hold on;
ezplot(q(6,1), [1,200]);% theta z
% set(findobj('Type','Line'),'LineWidth',1.5, 'Color','k')
hold on;
grid on;
title(' ');
xlabel('Diametrul sectiunii [mm]');
ylabel('Deplasari [mm]');
% zlabel('Abatere liniara [mm]');
legend('\Deltaq_1', '\Deltaq_2', '-\Deltaq_3', '\Deltaq_4', '\Deltaq_5', '\Deltaq_6',1);
set(gca, 'Color','none');
```

Anexa V.4.

```

% Determinarea deplasariilor liniare ale barelor simplu incastrate,
% pline, omogene, de sectiune constanta, solocitata cu un torsor unitar
%-----
syms E L m Fx Fy Fz Mx My Mz H h;
m=0.29;
E=220e9;
L=1;
Fx=1;
Fy=1;
Fz=1;
Mx=1;
My=1;
Mz=1;
P=[Fx;Fy;Fz;Mx;My;Mz];
colormap(cool);
grid on;
for ly=pi*H^4/64;
    lz=pi*H^4/64;;
    A=pi*H^2/4;
    K=[E*A/L 0 0 0 0 0; 0 12*E*lz/L^3 0 0 0 -6*E*lz/L^2;...
        0 0 12*E*ly/L^3 0 6*E*ly/L^2 0; 0 0 0 E*(lz+ly)/2/(1+m)/L 0 0;...
        0 0 6*E*ly/L^2 0 4*E*ly/L 0; 0 -6*E*lz/L^2 0 0 0 4*E*lz/L];
    %K matricea de rigiditate a barei incastrate de sectiune plina circulara D=H
    C=inv(K);%matricea de complianta
    q=(inv(K))*P;%matricea coloana a deplasariilor
    a=(q(1,1))^2;
    b=(q(2,1))^2;
    c=(q(3,1))^2;
    D=sqrt(a+b+c) % eroarea de pozitie (deplasarea liniara)
    ezsurf(D, [0,200,0,200],30);%sectiune plina circulara D=H
    hold on;
    set(findobj('Type','surface'),'FaceColor','red','EdgeColor','white')
for ly=H^4/12;
    lz=H^4/12;
    A=H^2;
    K=[E*A/L 0 0 0 0 0; 0 12*E*lz/L^3 0 0 0 -6*E*lz/L^2;...
        0 0 12*E*ly/L^3 0 6*E*ly/L^2 0; 0 0 0 E*(lz+ly)/2/(1+m)/L 0 0;...
        0 0 6*E*ly/L^2 0 4*E*ly/L 0; 0 -6*E*lz/L^2 0 0 0 4*E*lz/L];
    %K matricea de rigiditate a barei incastrate de sectiune plina patrata D=H
    C=inv(K);
    q=(inv(K))*P;
    a=(q(1,1))^2;
    b=(q(2,1))^2;
    c=(q(3,1))^2;
    D=sqrt(a+b+c);
    ezmesh(D, [0,200,0,200],30);%sectiune plina patrata D=H
    hold on;
end
for ly=pi*(H^4-h^4)/64;
    lz=pi*(H^4-h^4)/64;
    A=pi*(H^2-h^2)/4;
    K=[E*A/L 0 0 0 0 0; 0 12*E*lz/L^3 0 0 0 -6*E*lz/L^2;...
        0 0 12*E*ly/L^3 0 6*E*ly/L^2 0; 0 0 0 E*(lz+ly)/2/(1+m)/L 0 0;...
        0 0 6*E*ly/L^2 0 4*E*ly/L 0; 0 -6*E*lz/L^2 0 0 0 4*E*lz/L];
    %K matricea de rigiditate a barei incastrate de sectiune tubulara circulara D=H

```

Anexa V.4.

```
C=inv(K);
q=(inv(K))*P;
a=(q(1,1))^2;
b=(q(2,1))^2;
c=(q(3,1))^2;
D=sqrt(a+b+c);
ezmesh(D, [0,200,0,200],30);%sectiune tubulara circulara D=H
hold on;
end
for ly=(H^4-h^4)/12;
lz=(H^4-h^4)/12;
A=(H^2-h^2);
K=[E*A/L 0 0 0 0; 0 12*E*lz/L^3 0 0 0 -6*E*lz/L^2;...
  0 0 12*E*ly/L^3 0 6*E*ly/L^2 0; 0 0 0 E*(lz+ly)/2/(1+m)/L 0 0;...
  0 0 6*E*ly/L^2 0 4*E*ly/L 0; 0 -6*E*lz/L^2 0 0 0 4*E*lz/L];
%K matricea de rigiditate a barei incastrate de sectiune tubulara patrata D=H
C=inv(K);
q=(inv(K))*P;
a=(q(1,1))^2;
b=(q(2,1))^2;
c=(q(3,1))^2;
D=sqrt(a+b+c);
ezsurf(D, [0,200,0,200],30);%sectiune tubulara patrata D=H
set(findobj('Type','surface'),'EdgeColor','k')
hold on;
end
end
view([-35,37]);
title(' ');
xlabel('H, D [mm]');
ylabel('h, d [mm]');
zlabel('Abatere liniara [mm]');
legend('plin.circular','plin.patrat','tub.circular','tub.patrat',1);
% set(gca,'XLim',[0 200], 'YLim',[0 200], 'ZLim',[0 1000]);
% set(gca, 'Color','none');
```

Anexa V.5.

```

% Analiza dependentei deplasariilor liniare si unghiulare ale extremitatii libere
% ale barei incastrate avand D=H
%-----
syms u t;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder',':|-')');
ezplot(pi/4, [0,1]); % q1 tub circular/tub rectangular si
% plin circular/plin rectangular

hold on;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder','--|-')');
ezplot(pi/4*(1-u^2), [0,1]); % q1 tub circular/plin rectangular
hold on;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder','-|-')');
ezplot(pi/4/(1-u^2), [0,1]); % q1 plin circular/tub rectangular
set(findobj('Type','Line'),'Color','r');
hold on;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder',':|-')');
ezplot(3*pi/16, [0,1]); % q2,q6 tub circular/tub rectangular si
% plin circular/plin rectangular

hold on;
set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder','--|-')');
ezplot(3*pi/16*(1-u^4), [0,1]); % q2,q6 tub circular/plin rectangular
hold on;
ezplot(3*pi/16/(1-u^4), [0,1]); % q2,q6 plin circular/tub rectangular
hold on;
ezplot((3*pi/16)^(1/3), [0,1]); % q3,q5 tub circular/tub rectangular si
% plin circular/plin rectangular

hold on;
ezplot(((3*pi/16)^(1/3))*((1-u^4)^(1/3)), [0,1]); % q3,q5 tub circular/plin rectangular
hold on;
ezplot(((3*pi/16)^(1/3))/((1-u^4)^(1/3)), [0,1]); % q3,q5 plin circular/tub rectangular
hold on;

% ezplot (t^3+t-3*pi/16, [0,1]); % q4 tub circular/tub rectangular
% % plin circular/plin rectangular
% hold on;
% % ezplot(0.4791, [0 1]);
% % hold on;
% ezplot (t^3+t-3*pi/16*(1-u^4), [0,1]); % q4 tub circular/plin rectangular
% hold on;
% ezplot (t^3+t-3*pi/16/(1-u^4), [0,1]); % q4 plin circular/tub rectangular
% hold on;

set(findobj('Type','Line'),'LineWidth',1.5);
title(' ');
xlabel('\lambda=d/D=b/B=h/H');
ylabel('\phi=B/H=b/h ');
% legend('\Deltaq1 tub circular/tub rectangular si plin circular/plin rectangular', ...
% '\Deltaq1 tub circular/plin rectangular', ...
% '\Deltaq1 plin circular/tub rectangular', ...
% '\Deltaq2 tub circular/tub rectangular si plin circular/plin rectangular', ...
% '\Deltaq2 tub circular/plin rectangular', ...
% '\Deltaq2 plin circular/tub rectangular', ...
% '\Deltaq3 tub circular/tub rectangular si plin circular/plin rectangular', ...
% '\Deltaq3 tub circular/plin rectangular', ...
% '\Deltaq3 plin circular/tub rectangular', ...
% '\Deltaq4 tub circular/tub rectangular si plin circular/plin rectangular', ...
% '\Deltaq4 tub circular/plin rectangular', ...
% '\Deltaq4 plin circular/tub rectangular', 4);
grid on;
set(gca,'Color','none');
axis([0 1 0 1.5]);

```

Anexa V.6.

```
% Analiza dependentei deformatiei liniare de-a lungul axei Ox cu dimensiunile
%      sectiunilor rectangulare avand B/H=2/3 si ale celor circulare,
%      pline si respectiv tubulare
%-----
%              delta x
%-----
% T=[1 1 1 1 1 1]^T
% L=1m
% E= 220e9 N/m^2
syms H h;
s=2/3;
B=s*H;
b=s*h;

a=4/pi/H^2/220e9;           %sectiune plina circulara D=H
% c=1/H^2;                 %sectiune plina patrata
d=4/pi/(H^2-h^2)/220e9;    %sectiune tubulara circulara D=H, d=b
% e=1/(H^2-h^2);          %sectiune tubulara patrata H=B, h=b
f=1/H^2/s/220e9;          %sectiune plina rectangulara
g=1/(H^2-h^2)/s/220e9;    %sectiune tubulara rectangulara
colormap(cool);

ezsurf(a, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'FaceColor','red','EdgeColor','white')
hold on;
ezmesh(f, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'EdgeColor','k');
hold on;
ezsurf(d, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;
ezmesh(g, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;

view([-30,32]);
title(' ');
xlabel('H, D [m]');
ylabel('h, d [m]');
zlabel('\Deltaq_1 [m]');
legend('plin.circular','plin.rectangular','tub.circular','tub.rectangular',1);
xlim('auto');
ylim('auto');
zlim('auto');
set(gca, 'Color','none');
```

Anexa V.7.

```
% Analiza dependentei deformatiei liniare de-a lungul axei Oy cu dimensiunile
%      sectiunilor rectangulare avand B/H=10/15 si ale celor circulare,
%      pline si respectiv tubulare
%-----
%      delta y
%-----
% T=[1 1 1 1 1 1]^T
% L=1m
% E= 220e9 N/m^2
syms H h;
s=2/3;
B=s*H;
b=s*h;

a=160/3/pi/H^4/220e9;      %sectiune plina circulara D=H
% c=1/H^2;                %sectiune plina patrata, H
d=160/3/pi/(H^4-h^4)/220e9; %sectiune tubulara circulara D=H, d=b
% e=1/(H^2-h^2);         %sectiune tubulara patrata H=B, h=b
f=10/H^4/s/220e9;        %sectiune plina rectangulara, H, B
g=10/(H^4-h^4)/s/220e9;  %sectiune tubulara rectangulara, H, B, h, b
colormap(cool);

ezsurf(a, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'FaceColor','red','EdgeColor','white')
hold on;
ezmesh(f, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'EdgeColor','k');
hold on;
ezsurf(d, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;
ezmesh(g, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;

view([-30,32]);
title(' ');
xlabel('H, D [m]');
ylabel('h, d [m]');
zlabel('\Deltaq_2 [m]');
legend('plin.circular','plin.rectangular','tub.circular','tub.rectangular',1);
xlim('auto');
ylim('auto');
zlim('auto');
set(gca, 'Color','none');
% view([-22,60]);
% set(gca,'ZDir','reverse');
% view([0,90]);
```


Anexa V.8.

```

% Analiza dependentei deformatiei liniare de-a lungul axei Oz cu dimensiunile
%      sectiunilor rectangulare avand B/H=10/15 si ale celor circulare,
%      pline si respectiv tubulare
%-----
%      delta z
%-----
% T=[1 1 1 1 1 1]^T
% L=1m
%% E= 220e9 N/m^2
syms H h;
s=2/3;
B=s*H;
b=s*h;

a=32/3/pi/H^4/220e9;      %sectiune plina circulara D=H
% c=1/H^2;                %sectiune plina patrata, H
d=32/3/pi/(H^4-h^4)/220e9; %sectiune tubulara circulara D=H, d=b
% e=1/(H^2-h^2);          %sectiune tubulara patrata H=B, h=b
f=2/H^4/s^3/220e9;       %sectiune plina rectangulara, H, B
g=2/(H^4-h^4)/s^3/220e9; %sectiune tubulara rectangulara, H, B, h, b
colormap(cool);

ezsurf(a, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'FaceColor','red','EdgeColor','white')
hold on;
ezmesh(f, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'EdgeColor','k');
hold on;
ezsurf(d, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;
ezmesh(g, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;

view([-30,32]);
title(' ');
xlabel('H, D [m]');
ylabel('h, d [m]');
zlabel('\Deltaq_3 [m]');
legend('plin.circular','plin.rectangular','tub.circular','tub.rectangular',1);
xlim('auto');
ylim('auto');
zlim('auto');
set(gca, 'Color','none');
% % view([-22,60]);
% set(gca,'ZDir','reverse');
% view([0,90]);

```

Anexa V.9.

```
% Analiza dependentei deformatiei unghiulare in jurul axei Ox cu dimensiunile
%      sectiunilor rectangulare avand B/H=10/15 si ale celor circulare,
%      pline si respectiv tubulare
%-----
%      theta x
%-----
% T=[1 1 1 1 1 1]^T
% L=1m
% E= 220e9 N/m^2
syms H h m;
s=2/3;
B=s*H;
b=s*h;
m=0.29;
a=64*(1+m)/pi/H^4/220e9;      %sectiune plina circulara D=H
% c=1/H^2;                    %sectiune plina patrata, H
d=64*(1+m)/pi/(H^4-h^4)/220e9; %sectiune tubulara circulara D=H, d=b
% e=1/(H^2-h^2);              %sectiune tubulara patrata H=B, h=b
f=24*(1+m)/H^4/s/(1+s^2)/220e9; %sectiune plina rectangulara, H, B
g=12*(1+m)/(H^4-h^4)/s/(1+s^2)/220e9; %sectiune tubulara rectangulara, H, B, h, b
colormap(cool);

ezsurf(a, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'FaceColor','red','EdgeColor','white')
hold on;
ezmesh(f, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'EdgeColor','k');
hold on;
ezsurf(d, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;
ezmesh(g, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;

% view([-30,32]);
title(' ');
xlabel('H, D [m]');
ylabel('h, d [m]');
zlabel('\Delta_4 [m]');
legend('plin.circular','plin.rectangular','tub.circular','tub.rectangular',1);
xlim('auto');
ylim('auto');
zlim('auto');
set(gca, 'Color','none');
% % pentru vizualizarea intersectiei dintre plin rectangular si tub circular:
% % se seteaza pasul de retea pe 40, se sterge tub patrat si se seteaza view([0,90]);
% view([-22,60]);
% set(gca,'ZDir','reverse');
% view([0,90]);
```

Anexa V.10.

```
% Analiza dependentei deformatiei unghiulare in jurul axei Oy cu dimensiunile
%      sectiunilor rectangulare avand B/H=10/15 si ale celor circulare,
%      pline si respectiv tubulare
%-----
%      theta y
%-----
% T=[1 1 1 1 1 1]^T
% L=1m
% E= 220e9 N/m^2
syms H h;
s=2/3;
B=s*H;
b=s*h;

a=32/pi/H^4/220e9;      %sectiune plina circulara D=H
% c=1/H^2;             %sectiune plina patrata, H
d=32/pi/(H^4-h^4)/220e9; %sectiune tubulara circulara D=H, d=b
% e=1/(H^2-h^2);      %sectiune tubulara patrata H=B, h=b
f=6/H^4/s^3/220e6;     %sectiune plina rectangulara, H, B
g=6/(H^4-h^4)/s^3/220e9; %sectiune tubulara rectangulara, H, B, h, b
colormap(cool);

ezsurf(a, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'FaceColor','red','EdgeColor','white')
hold on;
ezmesh(f, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'EdgeColor','k');
hold on;
ezsurf(d, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;
ezmesh(g, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;

%view([-30,32]);
title(' ');
xlabel('H, D [m]');
ylabel('h, d [m]');
zlabel('\Deltaq_5 [m]');
legend('plin.circular','plin.rectangular','tub.circular','tub.rectangular',2);
xlim('auto');
ylim('auto');
zlim('auto');
set(gca, 'Color','none');

view([-22,60]);
% set(gca,'ZDir','reverse');
% view([0,90]);
```

Anexa V.11.

```
% Analiza dependentei deformatiei unghiulare in jurul axei Oz cu dimensiunile
%      sectiunilor rectangulare avand B/H=10/15 si ale celor circulare,
%      pline si respectiv tubulare
%-----
%      theta z
%-----
% T=[1 1 1 1 1]^T
% L=1m
% E= 220e9 N/m^2
syms H h;
s=2/3;
B=s*H;
b=s*h;

a=96/pi/H^4/220e9;      %sectiune plina circulara D=H
% c=1/H^2;             %sectiune plina patrata, H
d=96/pi/(H^4-h^4)/220e9; %sectiune tubulara circulara D=H, d=b
% e=1/(H^2-h^2);      %sectiune tubulara patrata H=B, h=b
f=18/H^4/s/220e9;      %sectiune plina rectangulara, H, B
g=6/(H^4-h^4)/s/220e9; %sectiune tubulara rectangulara, H, B, h, b
colormap(cool);

ezsurf(a, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'FaceColor','red','EdgeColor','white')
hold on;
ezmesh(f, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
set(findobj('Type','surface'),'EdgeColor','k');
hold on;
ezsurf(d, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;
ezmesh(g, [0.001,0.2, 0,0.199], 30);
hold on;

view([-30,60]);
title(' ');
xlabel('H, D [m]');
ylabel('h, d [m]');
zlabel('\Deltaq_6 [m]');
legend('plin.circular','plin.rectangular','tub.circular','tub.rectangular',1);
xlim('auto');
ylim('auto');
zlim('auto');
set(gca, 'Color','none');
% view([0,90]);
set(gca,'ZDir','reverse');
```

Anexa V.12.

```
% Reprezentarea dependentei  $u=u(\lambda)$ 
%-----
syms la;
u=(1-la^2)/(1+la^2);
a=1-la^2;
b=1+la^2;
ezplot(a/b);
hold on;
ezplot(b/a);
hold on;
% ezplot (a);
% hold on;
% ezplot (b);
% hold on;
% ezplot (u);
% hold on;
% ezplot (1/u);
% hold on;
% title(' ');
% xlabel('\lambda=d/D=b/B=h/H');
% ylabel(' ');
% legend('1-\lambda^2', '1+\lambda^2', 'u=(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)',
'1/u=(1+\lambda^2)/(1-\lambda^2)', 2);
grid on;
set(gca, 'Color','none');
axis([0 1, 0 23]);
```

Anexa V.13.

```
% Analiza elementelor matricii de complianta a barei incastrate avand aria sectiunii  
% transversale constanta bara plina circulara/bara plina rectangulara;  
% bara tub circulara/bara tub rectangulara  
% -----
```

```
ezplot (pi/3);                % = 1.0472 q2,q6  
set(findobj('Type', 'Line'), 'LineWidth', 1.5);  
hold on;  
ezplot (3/pi);                % = 0.9549 q3,q5  
hold on;  
% ezplot ((3+(9-16*pi^2)^(1/2))/4/pi);    % q4 nu are radacini reale  
hold on;  
% ezplot ((3-(9-16*pi^2)^(1/2))/4/pi);    % q4 nu are radacini reale  
hold on;  
title(' ');  
xlabel('\lambda=d/D=b/B=h/H');  
ylabel('\phi=B/H=b/h ');  
legend('Incovoiere in xOy', 'Incovoiere in xOz', 4);  
grid on;  
set(gca, 'Color', 'none');  
axis([0 1, 0 1.5]);
```

Anexa V.14.

```
% Analiza elementelor matricii de complianta a barei incastrate avand aria sectiunii
% transversale constanta
% bara plina rectangulara/bara tubulara circulara
% -----
syms la;
u=(1-la^2)/(1+la^2);
c=u*pi/3;
d=3/u/pi;
e=(3+(9-16*pi^2*u^2)^(1/2))/4/pi/u;
f=(3-(9-16*pi^2*u^2)^(1/2))/4/pi/u;

ezplot (c);                % q2,q6 tub circular/plin rectangular
hold on;
set(findobj('Type', 'Line'), 'LineWidth', 1.5);
ezplot (d);                % q3,q5 tub circular/plin rectangular
hold on;
% ezplot (e);              % q4 tub circular/plin rectangular
% hold on;
% ezplot (f);              % q4 tub circular/plin rectangular
% hold on;
title(' ');
xlabel('\lambda=d/D=b/B=h/H');
ylabel('\phi=B/H=b/h');
legend('Incovoiere in xOy', 'Incovoiere in xOz', 2);
grid on;
set(gca, 'Color','none');
axis([0 1, 0 8]);
```

Anexa V.15.

```
% Analiza elementelor matricii de complianta a barei incastrate avand aria sectiunii
% transversale constanta
% bara plina circulara/bara tubulara rectangulara
% -----
syms phi la;
u=(1-la^2)/(1+la^2);
g=(3*u+(9*u^2-16*pi^2)^(1/2))/4/pi;          % nu are radacini reale
h=(3*u-(9*u^2-16*pi^2)^(1/2))/4/pi;        % nu are radacini reale

ezplot (pi/3/u);          % q2,q6 plin circular/tub rectangular
hold on;
set(findobj('Type', 'Line'), 'LineWidth', 1.5);
ezplot (3*u/pi);         % q3,q5 plin circular/tub rectangular
hold on;
ezplot (g);              % q4 plin circular/tub rectangular
hold on;
ezplot (h);              % q4 plin circular/tub rectangular
hold on;
title(' ');
xlabel('\lambda=d/D=b/B=h/H');
ylabel('\phi=B/H=b/h ');
legend('Incovoiere in xOy', 'Incovoiere in xOz', 2);
grid on;
set(gca, 'Color', 'none');
axis([0 1, 0 8]);
```


Anexa V.16.

```

% Analiza elementelor matricii de complianta ale barelor
% incastrate avand aria sectiunii transversale constanta
% -----
syms la;
u=(1-la^2)/(1+la^2);
a=(3+(9-16*pi^2)^(1/2))/4/pi;           % nu are radacini reale
b=(3-(9-16*pi^2)^(1/2))/4/pi;         % nu are radacini reale
c=u*pi/3;
d=3/u/pi;
e=(3+(9-16*pi^2*u^2)^(1/2))/4/pi/u;
f=(3-(9-16*pi^2*u^2)^(1/2))/4/pi/u;
g=(3*u+(9*u^2-16*pi^2)^(1/2))/4/pi;    % nu are radacini reale
h=(3*u-(9*u^2-16*pi^2)^(1/2))/4/pi;    % nu are radacini reale
% % set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder',':|-')');
ezplot (pi/3);                          % = 1.0472 q2,q6 tub circular/tub rectangular si plin circular/plin
rectangular
hold on;
% % set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder','--|-')');
ezplot (3/pi);                          % = 0.9549 q3,q5 tub circular/tub rectangular si plin circular/plin
rectangular
hold on;
% % set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder','-|-')');
% ezplot (a);                          % q4 tub circular/tub rectangular si plin circular/plin rectangular
% % set(findobj('Type', 'Line'), 'Color', 'r');
% hold on;
% % set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder',':|-')');
% ezplot (b);                          % q4 tub circular/tub rectangular si plin circular/plin rectangular
% hold on;
% % set(0,'DefaultLineCreateFcn','set(gca,'LineStyleOrder','--|-')');
ezplot (c);                          % q2,q6 plin circular/tub rectangular
hold on;
ezplot (d);                          % q3,q5 tub circular/plin rectangular
hold on;
% ezplot (e);                          % q4 tub circular/plin rectangular
% hold on;
% ezplot (f);                          % q4 tub circular/plin rectangular
% hold on;
ezplot (pi/3/u);                      % q2,q6 plin circular/tub rectangular
hold on;
ezplot (3*u/pi);                      % q3,q5 plin circular/tub rectangular
hold on;
% ezplot (g);                          % q4 plin circular/tub rectangular
% hold on;
% ezplot (h);                          % q4 plin circular/tub rectangular
% hold on;
% set(findobj('Type', 'Line'), 'LineWidth', 1.5);
title(' ');
xlabel('\lambda=d/D=b/B=h/H');
ylabel('\phi=B/H=b/h ');
legend('xOy tub circ/rtg; plin circ/rtg', ...
      'xOz tub circ/rtg; plin circ/rtg', ...
      'xOy tub circ/plin rtg', ...
      'xOz tub circ/plin rtg', ...
      'xOy plin circ/tub rtg', ...
      'xOz plin circ/tub rtg', 2);
grid on;
set(gca, 'Color','none');
axis([0 1, 0 25]);

```

Anexa V.17.

% Calculul simbolic al determinantului matricii de complianta a barelor simplu încastrate

%-----

```
syms la phi E A L ly lz m u la D H phi;
K=[E*A/L 0 0 0 0 0; 0 12*E*lz/L^3 0 0 0 -6*E*lz/L^2;...
  0 0 12*E*ly/L^3 0 6*E*ly/L^2 0; 0 0 0 E*(lz+ly)/2/(1+m)/L 0 0;...
  0 0 6*E*ly/L^2 0 4*E*ly/L 0; 0 -6*E*lz/L^2 0 0 0 4*E*lz/L];
C=inv(K); %matricea de complianta
b=det(C)
pretty(b);

u=(1-la^2)/(1+la^2);
A1=pi*D^2*(1-la^2)/4;
lz1=pi*D^4*(1-la^4)/64;
ly1=pi*D^4*(1-la^4)/64;
K1=[E*A1/L 0 0 0 0 0; 0 12*E*lz1/L^3 0 0 0 -6*E*lz1/L^2;...
  0 0 12*E*ly1/L^3 0 6*E*ly1/L^2 0; 0 0 0 E*(lz1+ly1)/2/(1+m)/L 0 0;...
  0 0 6*E*ly1/L^2 0 4*E*ly1/L 0; 0 -6*E*lz1/L^2 0 0 0 4*E*lz1/L];
C1=inv(K1); %matricea de complianta sect circ tub
b1=det(C1)
pretty(b1);

A2=phi*H^2*(1-la^2);
ly2=phi^3*H^4*(1-la^4)/12;
lz2=phi*H^4*(1-la^4)/12;
K2=[E*A2/L 0 0 0 0 0; 0 12*E*lz2/L^3 0 0 0 -6*E*lz2/L^2;...
  0 0 12*E*ly2/L^3 0 6*E*ly2/L^2 0; 0 0 0 E*(lz2+ly2)/2/(1+m)/L 0 0;...
  0 0 6*E*ly2/L^2 0 4*E*ly2/L 0; 0 -6*E*lz2/L^2 0 0 0 4*E*lz2/L];
C2=inv(K2); %matricea de complianta sct rtg tub
b2=det(C2)
pretty(b2);
```

Anexa VI.1.

```
% Calculul simbolic al modelului comportarii cinetoelastostatice a structurii 2D (fig.VI.21)
%-----
% - torsor cu 3 componente (forte) aplicat la extremitatea libera
%-----
syms Fx Fy Fz l1 l2 E1 E2 A ly lz m a;
T4ab=[1 0 0 -l1; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1] %matricea de trecere de corp rigid a barei AB,
4x4
F=[Fx; Fy; Fz; 1]
T=inv(T4ab)
FB=T*F
MB=T*[0; 0; 0; 1]
t1=FB(1,1);
t2=FB(2,1);
t3=FB(3,1);
t4=MB(1,1);
t5=MB(2,1);
t6=MB(3,1);
TS=[t1; t2; t3; t4; t5; t6] %torsorul raportat la B

K1=[E1*A/l1 0 0 0 0 0; 0 12*E1*lz/l1^3 0 0 0 -6*E1*lz/l1^2;...
    0 0 12*E1*ly/l1^3 0 6*E1*ly/l1^2 0; 0 0 0 E1*(lz+ly)/2/(1+m)/l1 0 0;...
    0 0 6*E1*ly/l1^2 0 4*E1*ly/l1 0; 0 -6*E1*lz/l1^2 0 0 0 4*E1*lz/l1]
    %K1 matricea de rigiditate a barei incastrate AB
C1=inv(K1) %matricea de complianta a barei AB
D1=C1*TS %matricea deformatiilor elastice ale barei AB, 6x6

Tbc4=[cos(a) sin(a) 0 0; -sin(a) cos(a) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
%Tbc4=matricea de trecere a imbinarii BC, 4x4
Tbc=inv(Tbc4)
Fbc=Tbc*FB
Mbc=Tbc*MB
tb1=Fbc(1,1);
tb2=Fbc(2,1);
tb3=Fbc(3,1);
tb4=Mbc(1,1);
tb5=Mbc(2,1);
tb6=Mbc(3,1);
TSbc=[tb1; tb2; tb3; tb4; tb5; tb6]%torsorul raportat la D

Td4=[1 0 0 -l2; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]%matricea de trecere de corp rigid a barei CD, 4x4
Td=inv(Td4)
Fd=Td*Fbc
Md=Td*Mbc
td1=Fd(1,1);
td2=Fd(2,1);
td3=Fd(3,1);
td4=Md(1,1);
td5=Md(2,1);
td6=Md(3,1);
TSd=[td1; td2; td3; td4; td5; td6]%torsorul raportat la D

K2=[E2*A/l2 0 0 0 0 0; 0 12*E2*lz/l2^3 0 0 0 -6*E2*lz/l2^2;...
    0 0 12*E2*ly/l2^3 0 6*E2*ly/l2^2 0; 0 0 0 E2*(lz+ly)/2/(1+m)/l2 0 0;...
    0 0 6*E2*ly/l2^2 0 4*E2*ly/l2 0; 0 -6*E2*lz/l2^2 0 0 0 4*E2*lz/l2]
    %K2 matricea de rigiditate a barei incastrate CD
```

Anexa VI.1.

```
C2=inv(K2) %matricea de complianta a barei CD
D2=C2*TSd %matricea deformatiilor elastice ale barei CD,6x6

q11=D1(1,1);
q12=D1(2,1);
q13=D1(3,1);
q14=D1(4,1);
q15=D1(5,1);
q16=D1(6,1);
Tab=[cos(q15)+cos(q16)-1 -sin(q16) sin(q15) q11;...
      sin(q16) cos(q14)+cos(q16)-1 -sin(q14) q12;...
      -sin(q15) sin(q14) cos(q14)+cos(q15)-1 q13;...
      0 0 0 1] % matricea de trecere a barei AB (rigid +elastic) transpus in 4x4

Tbc4=[cos(a) sin(a) 0 0; -sin(a) cos(a) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];

q21=D2(1,1);
q22=D2(2,1);
q23=D2(3,1);
q24=D2(4,1);
q25=D2(5,1);
q26=D2(6,1);
Tcd=[cos(q25)+cos(q26)-1 -sin(q26) sin(q25) q21;...
      sin(q26) cos(q24)+cos(q26)-1 -sin(q24) q22;...
      -sin(q25) sin(q24) cos(q24)+cos(q25)-1 q23;...
      0 0 0 1] % matricea de trecere a barei AB (rigid +elastic) transpus in 4x4
Tad=Tab*Tbc4*Tcd; % matricea de trecere a structurii AD, in 4x4
H=simple(Tad)
r=H(1,4);
s11=simple(r)% delta q1
pretty (s11);
s=H(2,4);
s12=simple(s)% delta q2
pretty (s12);
t=H(3,4);
s13=simple(t)% delta q3
pretty (s13);
u1=H(3,2);%
u=asin (u1);%
s14=simple(u) % delta q4
pretty (s14);
v1=H(1,3);%
v=asin (v1);%
s15=simple(v)% delta q5
pretty (s15);
w1=H(2,1);
w=asin (w1);%
s16=simple(w)% delta q6
pretty (s16);
S=[s11; s12; s13; s14; s15; s16] % matricea de trecere a structurii AD, in 6x1
pretty(S);
```

Anexa VI.2.

```
% Determinarea matricii de trecere ce modeleaza offsetul plan, compus din doua
%          tronsoane imbinate rigid (figura VI.21)
%          (deformatii mici)
%-----
syms alpha q1AB q2AB q3AB q4AB q5AB q6AB q1CD q2CD q3CD q4CD q5CD q6CD
ICD IAB;
Tab=[1 -(q6AB) (q5AB) q1AB-IAB;...
      (q6AB) 1 -(q4AB) q2AB;...
      -(q5AB) (q4AB) 1 q3AB;...
      0 0 0 1]
% Tab=matricea de trecere a tronsonului inclinat
Tbc=[cos(alpha) -sin(alpha) 0 0; sin(alpha) cos(alpha) 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]
% Tbc=matricea de trecere a imbinarii rigide
Tcd=[1 -(q6CD) (q5CD) q1CD-ICD;...
      (q6CD) 1 -(q4CD) q2CD;...
      -(q5CD) (q4CD) 1 q3CD;...
      0 0 0 1]
% Tcd=matricea de trecere a tronsonului vertical
Tad=Tcd* Tbc* Tab
%Tad= matricea de trecere a offsetului
pretty(Tad) % matricea de trecere a offsetului, sub forma citibila
```

Anexa VI.3.

```
% Determinarea matricii de trecere ce modeleaza cupla cinematică de rotație
%                               din figura VI.26
%                               (deformatii mari)
%-----
syms phi12 q1AB q2AB q3AB q4AB q5AB q6AB q1DD q2DD q3DD q4DD q5DD q6DD...
q1CC q2CC q3CC q4CC q5CC q6CC ICC IDD IAB;
Tdd=[cos(q5DD)+cos(q6DD)-1 -sin(q6DD) sin(q5DD) q1DD-IDD;...
     sin(q6DD) cos(q4DD)+cos(q6DD)-1 -sin(q4DD) q2DD;...
     -sin(q5DD) sin(q4DD) cos(q4DD)+cos(q5DD)-1 q3DD;...
     0 0 0 1];
Tcd=[-1 -1 1 0; 1 0 0 0;-1 0 0 0;0 0 0 1];
Tcc=[cos(q5CC)+cos(q6CC)-1 -sin(q6CC) sin(q5CC) q1CC-ICC;...
     sin(q6CC) cos(q4CC)+cos(q6CC)-1 -sin(q4CC) q2CC;...
     -sin(q5CC) sin(q4CC) cos(q4CC)+cos(q5CC)-1 q3CC;...
     0 0 0 1];
Tcd=Tdd* Tcd* Tcc
pretty(Tcd);
Tab=[cos(q5AB)+cos(q6AB)-1 -sin(q6AB) sin(q5AB) q1AB-IAB;...
     sin(q6AB) cos(q4AB)+cos(q6AB)-1 -sin(q4AB) q2AB;...
     -sin(q5AB) sin(q4AB) cos(q4AB)+cos(q5AB)-1 q3AB;...
     0 0 0 1];
Tbc=[-sin(phi12)-1 cos(phi12) -1 0;-cos(phi12) sin(phi12) 0 0;1 0 0 0;0 0 0 1];
Tad=Tab*Tbc* Tcd
pretty(Tad);
```

Anexa VI.4.

```
% Determinarea matricii de trecere ce modeleaza cupla cinematică de rotație  
% din figura VI.26  
% (deformatii mici)  
%-----
```

```
syms phi12 q1AB q2AB q3AB q4AB q5AB q6AB q1DD q2DD q3DD q4DD q5DD q6DD ...  
q1CC q2CC q3CC q4CC q5CC q6CC ICC IDD IAB;  
Tdd=[1 -q6DD q5DD q1DD-IDD;...  
      q6DD 1 -q4DD q2DD;...  
      -q5DD q4DD 1 q3DD;...  
      0 0 0 1];  
%pretty(Tdd);  
Tcd=[-1 -1 1 0; 1 0 0 0;-1 0 0 0;0 0 0 1];  
Tcc=[1 -q6CC q5CC q1CC-ICC;...  
      q6CC 1 -q4CC q2CC;...  
      -q5CC q4CC 1 q3CC;...  
      0 0 0 1];  
%pretty(Tcc);  
Tcd=Tdd* Tcd* Tcc  
%pretty(Tcd);  
Tab=[1 -q6AB q5AB q1AB-IAB;...  
      q6AB 1 -q4AB q2AB;...  
      -q5AB q4AB 1 q3AB;...  
      0 0 0 1];  
Tbc=[-sin(phi12)-1 cos(phi12) -1 0;-cos(phi12) sin(phi12) 0 0;1 0 0 0;0 0 0 1];  
%pretty(Tbc);  
Tad=Tab*Tbc* Tcd  
%pretty(Tad);
```

Anexa VII.1.

```

% Determinarea deplasarilor liniare si unghiulare ale punctului A al elementului inferior al
dispozitivului
% de complianta RCC plan cu doua elemente elastice paralele, incarcat cu o forta situata
in acelasi plan
%-----
% E - modulul de elasticitate longitudinala al materialului elementelor elastice
% A - aria sectiunii transversale a elementelor elastice
% L - lungimea libera a elementelor elastice
% Iy, Iz - momentele de inertie axiale ale elementelor elastice
% m - coeficientul de contractie transversala, (Poisson), al materialului elementelor
elastice
% F - rezultanta fortelor exterioare care sollicita dispozitivul, situata in planul dispozitivului
% L1- distanta de la punctul A la punctul de aplicatie al fortei, situat pe axa geometrica a
RCC
% r - raza cercului de dispunere a incastrarilor
% a - unghiul sub care actioneaza forta, masurat fata de axa geometrica a RCC
%-----
syms E A L Iy Iz m F L1 r a;
K=[E*A/L 0 0 0 0 0; 0 12*E*Iz/L^3 0 0 0 -6*E*Iz/L^2;...
    0 0 12*E*Iy/L^3 0 6*E*Iy/L^2 0; 0 0 0 E*(Iz+Iy)/2/(1+m)/L 0 0;...
    0 0 6*E*Iy/L^2 0 4*E*Iy/L 0; 0 -6*E*Iz/L^2 0 0 0 4*E*Iz/L];
    % K = matricea de rigiditate a elementului elastic
C=inv(K); % matricea de complianta a elementului elastic
pretty(C); % matricea de complianta a elementului elastic scrisa sub forma usor citibila
Fx=F*cos(a);
Fy=F*sin(a);
R=[Fx/2;Fy/2;0;0;0;Fx*r^2/(2*L+8*r)-Fy*(L+L1)*(2*L+1)/(L+1)]; % torsorul fortelor
exterioare
    %generalizate raportat la extremitatea superioara a elementului elastic, B'
D=C*R % matricea 6x1 a deplasarilor extremitatii inferioare a elementului elastic, A'
pretty(D); % matricea deplasarilor elementului elastic scrisa sub forma usor citibila
Taa=[1 0 0 0; 0 1 0 r; 0 0 1 0; 0 0 0 1]; %matricea de trecere 4x4 de la punctul A la
punctul A'
Tbb=[1 0 0 0; 0 1 0 -r; 0 0 1 0; 0 0 0 1]; %matricea de trecere 4x4 de la punctul B'la
punctul B
Tab=[cos(D(6,1)) -sin(D(6,1)) 0 D(1,1)-L; sin(D(6,1)) cos(D(6,1)) 0 D(2,1); 0 0 1 0; 0 0 0 1]
    % Tab=matricea de trecere 4x4 de la punctul A' la punctul B'
pretty(Tab);
Tc1=Tbb*Tab*Taa % matricea de trecere 4x4 de la punctul A la punctul B, pentru
conexiunea I
pretty(Tc1);
IC=det(Tc1)% determinantul matricii de trecere de la punctul A la punctul B
pretty(IC);
q1A=Tc1(1,4); %deplasarea punctului A de-a lungul axei x
q2A=Tc1(2,4); %deplasarea punctului A de-a lungul axei y
q3A=Tc1(3,4); %deplasarea punctului A de-a lungul axei z
q4A=asin(Tc1(3,2)); %rotatia punctului A in jurul axei x
q5A=asin(Tc1(1,3)); %rotatia punctului A in jurul axei y
q6A=asin(Tc1(2,1)); %rotatia punctului A in jurul axei z
Q=[q1A;q2A;q3A;q4A;q5A;q6A]; % matricea de trecere 6x1 de la punctul A la punctul B,
pentru conexiunea I
pretty(Q); %matricea de trecere 6x1 de la punctul A la punctul B, sub forma citibila

```


Anexa VIII.1.
Date primare (tensiuni) ale încercărilor dispozitivelor de complianță tip RCC
cu trei elemente elastice

RCC cu tije paralele

Pozitia 1 (L=409,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.02	5.01	5.01	5.01	5.15	5.18	5.22	5.18
4.65	3.69	3.74	3.77	3.73	4.08	4.20	4.34	4.21
10.45	2.98	2.93	2.96	2.96	3.34	3.32	3.48	3.38
12.65	2.57	2.58	2.64	2.60	2.86	2.92	3.04	2.94

Pozitia 2 (L=399,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.01	4.98	4.99	4.99	4.45	5.91	5.99	5.45
4.65	3.77	3.75	3.86	3.79	4.43	4.50	4.69	4.54
10.45	2.94	2.84	3.04	2.94	3.48	3.47	3.75	3.57
12.65	2.64	2.68	2.68	2.67	3.15	3.27	3.34	3.25

Pozitia 3 (L=389,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.02	5.05	5.00	5.02	5.81	6.04	5.86	5.90
4.65	3.84	3.73	3.81	3.79	4.86	4.78	4.94	4.86
10.45	2.95	2.90	2.94	2.93	3.82	3.79	3.87	3.83
12.65	2.60	2.53	2.61	2.58	3.31	3.32	3.47	3.37

Pozitia 4 (L=379,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.09	5.05	4.99	5.04	6.17	6.08	6.02	6.09
4.65	3.84	3.82	3.72	3.79	5.03	5.07	4.99	5.03
10.45	2.91	2.95	2.90	2.92	3.89	3.99	3.93	3.94
12.65	2.54	2.64	2.57	2.58	3.40	3.58	3.51	3.50

Pozitia 5 (L=369,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.04	5.01	5.06	5.04	6.73	6.55	6.44	6.57
4.65	3.82	3.73	3.79	3.78	5.18	5.13	5.23	5.18
10.45	2.83	2.96	2.94	2.91	3.95	4.12	4.10	4.06
12.65	2.61	2.61	2.59	2.60	3.64	3.67	3.66	3.66

Pozitia 6 (L=263,6mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.02	4.98	4.99	5.00	6.15	6.35	6.54	6.35
4.65	4.15	4.24	4.18	4.19	5.80	6.06	6.05	5.97
10.45	3.20	3.34	3.30	3.28	6.46	4.94	4.92	5.44
12.65	3.02	3.08	3.07	3.06	4.48	4.63	4.66	4.59

Pozitia 7 (L=253,6mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.03	5.02	5.05	5.03	6.46	6.72	6.74	6.64
4.65	4.25	4.24	4.33	4.27	6.20	6.29	6.34	6.28
10.45	3.31	3.39	3.39	3.36	4.99	5.07	5.11	5.06
12.65	3.07	3.07	3.07	3.07	4.74	4.74	4.76	4.75

Pozitia 8 (L=243,6mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.05	5.04	5.07	5.05	6.72	6.60	6.81	6.71
4.65	4.21	4.29	4.30	4.27	6.25	6.42	6.41	6.36
10.45	3.34	3.42	3.40	3.39	5.09	5.27	5.23	5.20
12.65	3.09	3.12	3.10	3.10	4.79	4.90	4.86	4.85

Pozitia 13 (L=194,5mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.01	5.03	5.04	5.03	6.45	7.02	6.79	6.75
4.65	4.10	4.36	4.37	4.28	6.20	6.78	6.79	6.59
10.45	3.56	3.60	3.60	3.59	5.58	5.78	5.80	5.72
12.65	3.21	3.25	3.33	3.26	5.15	5.30	5.40	5.28

Pozitia 14 (L=184,5mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.05	5.03	5.04	5.04	6.78	6.82	6.82	6.81
4.65	4.44	4.44	4.44	4.44	6.80	6.83	6.84	6.82
10.45	3.73	3.70	3.69	3.71	5.88	5.85	5.87	5.87
12.65	3.44	3.40	3.38	3.41	5.51	5.48	5.45	5.48

Pozitia 15 (L=174,5mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.00	5.04	5.03	5.02	6.75	6.85	6.89	6.83
4.65	4.41	4.46	4.35	4.41	6.76	6.85	6.87	6.83
10.45	3.69	3.74	3.64	3.69	5.89	5.97	5.90	5.92
12.65	3.47	3.44	3.52	3.48	5.64	5.57	5.71	5.64

RCC cu tije inclinate cu 5 grade

Pozitia 1 (L=409,03mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.96	7.05	6.99	7.00	7.97	6.05	7.88	7.30
4.65	6.37	6.41	6.38	6.39	7.21	7.22	7.21	7.21
10.45	5.68	5.86	5.80	5.78	6.10	6.39	6.27	6.25
12.65	5.60	5.58	5.55	5.58	5.99	5.95	5.87	5.94

Pozitia 2 (L=399,03mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.95	6.97	7.06	6.99	7.79	7.83	7.94	7.85
4.65	6.35	6.52	6.46	6.44	7.16	7.35	7.29	7.27
10.45	5.90	5.89	5.79	5.86	6.53	6.50	6.36	6.46
12.65	5.56	5.63	5.57	5.59	5.94	6.04	6.01	6.00

Pozitia 3 (L=389,03mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	7.01	7.05	7.07	7.04	7.89	7.84	6.01	7.25
4.65	6.28	6.33	6.21	6.27	7.09	7.12	6.92	7.04
10.45	5.70	5.69	5.66	5.68	6.20	6.16	6.10	6.15
12.65	5.50	5.49	5.44	5.48	5.84	5.84	5.76	5.81

Pozitia 4 (L=979,03mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	7.04	7.02	7.09	7.05	7.81	7.85	7.83	7.83
4.65	6.35	6.31	6.36	6.34	7.10	7.04	7.11	7.08
10.45	5.75	5.67	5.70	5.71	6.26	6.14	6.17	6.19
12.65	5.42	5.42	5.40	5.41	5.73	5.76	5.72	5.74

Pozitia 5 (L=369,03mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	7.10	7.06	6.96	7.04	6.04	7.70	7.56	7.10
4.65	6.34	6.32	6.32	6.33	7.10	7.07	7.06	7.08
10.45	5.69	5.57	5.56	5.61	6.19	5.95	6.02	6.05
12.65	5.44	5.48	5.43	5.45	5.82	5.82	5.78	5.81

Pozitia 6 (L=263,22mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.13	6.00	6.01	6.05	3.64	3.13	5.00	3.92
4.65	6.25	6.08	5.95	6.09	3.64	3.13	5.05	3.94
10.45	6.02	5.80	5.31	5.71	3.65	3.14	4.47	3.75
12.65	5.89	5.84	5.15	5.63	3.65	3.14	4.30	3.70

Pozitia 7 (L=253,22mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.00	6.00	6.06	6.02	5.17	4.80	5.40	5.12
4.65	5.95	5.76	5.96	5.89	5.19	4.84	4.42	4.82
10.45	5.38	4.78	5.37	5.18	4.74	4.10	5.89	4.91
12.65	5.33	4.78	5.34	5.15	4.76	4.11	5.90	4.92

Pozitia 8 (L=243,22mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.04	6.00	6.07	6.04	5.51	5.13	5.07	5.24
4.65	5.95	5.70	5.81	5.82	5.53	5.15	5.12	5.27
10.45	5.43	5.39	5.37	5.40	5.09	5.10	5.12	5.10
12.65	5.37	5.32	5.31	5.33	5.11	5.10	5.12	5.11

Pozitia 13 (L=194,12mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.00	5.99	6.03	6.01	4.96	5.26	5.19	5.14
4.65	5.84	5.79	5.82	5.82	5.01	5.29	5.20	5.17
10.45	5.31	5.27	5.48	5.35	5.05	5.20	5.22	5.16
12.65	5.31	5.27	5.36	5.31	5.09	5.21	5.24	5.18

Pozitia 14 (L=184,12mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.10	6.01	6.03	6.05	5.41	5.85	5.39	5.55
4.65	5.91	5.94	5.76	5.87	5.45	5.87	5.42	5.58
10.45	5.56	5.58	5.39	5.51	5.46	5.87	5.42	5.58
12.65	5.41	5.42	5.33	5.39	4.48	5.72	5.44	5.21

Pozitia 15 (L=174,12mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.04	6.04	6.02	6.03	5.24	5.78	6.03	5.68
4.65	5.87	5.89	6.01	5.92	5.29	5.80	6.06	5.72
10.45	5.49	5.53	5.65	5.56	5.34	5.80	6.07	5.74
12.65	5.36	5.43	5.50	5.43	5.35	5.81	6.07	5.74

RCC cu tije inclinate cu 15 grade

Pozitia 1 (L=406mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.06	5.00	4.99	5.02	6.10	6.11	6.09	6.10
4.65	4.97	4.93	4.94	4.95	7.08	7.15	7.02	7.08
10.45	4.82	4.80	4.80	4.81	7.76	7.77	7.75	7.76
15.65	4.66	4.68	4.67	4.67	8.50	8.30	8.27	8.36

Pozitia 2 (L=396mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.05	5.03	4.99	5.02	5.96	5.91	6.00	5.96
4.65	4.94	4.93	4.92	4.93	6.94	6.93	6.96	6.94
10.45	4.80	4.80	4.79	4.80	7.61	7.58	7.61	7.60
15.65	4.67	4.69	4.65	4.67	8.18	8.12	8.24	8.18

Pozitia 3 (L=386mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	4.99	5.03	5.02	5.01	6.01	5.90	6.06	5.99
4.65	4.94	4.93	4.94	4.94	6.88	6.92	6.89	6.90
10.45	4.81	4.80	4.80	4.80	7.49	7.49	7.47	7.48
15.65	4.71	4.70	4.70	4.70	7.98	8.00	7.98	7.99

Pozitia 4 (L=376mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	4.99	4.98	5.02	5.00	6.06	6.03	5.90	6.00
4.65	4.94	4.92	4.93	4.93	6.84	6.87	6.81	6.84
10.45	4.80	4.81	4.78	4.80	7.46	6.39	7.49	7.11
15.65	4.72	4.73	4.73	4.73	7.86	7.81	7.82	7.83

Pozitia 5 (L=366mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	4.99	5.02	5.02	5.01	6.01	5.90	6.07	5.99
4.65	4.96	4.93	4.94	4.94	6.70	6.78	6.72	6.73
10.45	4.81	4.82	4.80	4.81	7.36	7.32	6.34	7.01
15.65	4.73	4.73	4.73	4.73	7.77	7.76	7.75	7.76

Pozitia 6 (L=260,19mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.03	4.99	5.05	5.02	5.90	6.00	6.36	6.09
4.65	5.03	4.99	5.05	5.02	6.22	6.23	6.35	6.27
10.45	5.00	4.99	5.00	5.00	6.36	6.36	6.36	6.36
15.65	4.94	4.90	4.95	4.93	6.53	6.67	6.51	6.57

Pozitia 7 (L=250,19mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.01	5.02	5.06	5.03	5.95	6.39	6.27	6.20
4.65	5.00	5.02	5.06	5.03	6.16	6.39	6.27	6.27
10.45	5.00	4.99	4.99	4.99	6.28	6.39	6.36	6.34
15.65	4.94	4.95	4.96	4.95	6.45	6.39	6.44	6.43

Pozitia 11 (L=211,09mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.09	5.01	5.10	5.07	5.84	6.00	5.83	5.89
4.65	5.09	5.01	5.10	5.07	5.97	6.04	6.03	6.01
14.65	5.09	5.01	5.10	5.07	6.06	6.07	6.05	6.06
19.85	5.09	5.01	5.08	5.06	6.13	6.13	6.13	6.13

Pozitia 12 (L=201,09mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.05	4.94	4.98	4.99	6.12	6.76	6.05	6.31
4.65	5.05	4.94	4.98	4.99	6.13	6.75	6.07	6.32
14.65	5.05	4.94	4.98	4.99	6.13	6.75	6.07	6.32
19.85	5.05	4.94	4.98	4.99	6.13	6.75	6.07	6.32

RCC cu lamele paralele

Pozitia 1 (L=409,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.41	5.89	6.00	6.10	4.36	4.96	4.83	4.72
2.2	6.35	5.86	5.95	6.05	4.37	4.96	4.83	4.72
4.4	6.35	5.40	5.30	5.68	5.31	5.44	5.64	5.46
9.6	4.54	4.44	3.87	4.28	6.93	7.15	8.19	7.42

Pozitia 2 (L=399,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.69	5.92	5.72	5.78	5.18	4.88	4.97	5.01
2.2	5.69	5.88	5.72	5.76	5.20	4.88	4.97	5.02
4.4	5.28	5.12	5.21	5.20	5.60	5.66	5.72	5.66
9.6	4.52	3.96	4.45	4.31	6.91	7.91	7.02	7.28

Pozitia 3 (L=389,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.54	5.79	5.68	5.67	4.98	4.46	4.71	4.72
2.2	5.15	5.29	5.68	5.37	5.44	5.30	4.71	5.15
4.4	4.58	4.64	5.68	4.97	6.35	6.26	4.80	5.80
9.6	0.95	1.00	0.65	0.87	12.00	12.00	12.00	12.00

Pozitia 4 (L=379,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	6.17	5.76	5.57	5.83	4.23	4.60	4.84	4.56
2.2	5.51	5.20	5.20	5.30	5.08	5.37	5.36	5.27
4.4	5.03	4.57	4.58	4.73	5.72	6.34	6.33	6.13
9.6	1.41	1.64	1.00	1.35	11.87	11.40	12.00	11.76

Pozitia 5 (L=369,41mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.59	5.60	5.58	5.59	4.81	4.80	4.82	4.81
2.2	5.11	5.31	5.22	5.21	5.49	5.26	5.36	5.37
4.4	4.75	4.58	4.67	4.67	6.05	6.32	6.13	6.17
9.6	1.71	2.00	2.15	1.95	11.37	10.83	10.52	10.91

Pozitia 6 (L=263,6mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.58	5.65	5.57	5.60	4.78	4.73	4.91	4.81
2.2	5.58	5.38	5.57	5.51	4.87	5.08	4.91	4.95
4.4	4.83	4.87	5.20	4.97	5.90	5.84	5.43	5.72
9.6	3.58	3.84	3.53	3.65	7.75	7.37	7.88	7.67

Pozitia 7 (L=253,6mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.58	5.55	5.52	5.55	4.86	4.80	4.84	4.83
2.2	5.58	5.55	5.52	5.55	4.87	4.90	4.93	4.90
4.4	4.98	4.98	4.94	4.97	5.68	5.72	5.76	5.72
9.6	3.66	3.89	3.95	3.83	7.61	7.30	7.18	7.36

Pozitia 11 (L=214,5mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.62	5.63	5.76	5.67	4.60	4.68	4.45	4.58
2.2	5.62	5.63	5.76	5.67	4.71	4.76	4.16	4.54
4.4	5.23	5.19	5.22	5.21	5.32	5.36	5.34	5.34
9.6	4.54	4.42	4.58	4.51	6.23	6.43	6.20	6.29

Pozitia 12 (L=204,5mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.93	5.87	5.87	5.89	4.31	4.48	4.44	4.41
2.2	5.93	5.87	5.87	5.89	4.38	4.51	4.44	4.44
4.4	5.45	5.65	5.34	5.48	5.04	4.84	5.16	5.01
9.6	4.73	4.74	4.59	4.69	6.07	6.07	6.22	6.12

Pozitia 13 (L=194,5mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.86	5.60	5.58	5.68	4.61	4.72	4.96	4.76
2.2	5.86	5.60	5.58	5.68	4.62	4.72	4.96	4.77
4.4	5.68	5.44	5.58	5.57	4.82	5.00	4.96	4.93
9.6	4.74	4.74	4.75	4.74	5.97	5.99	5.99	5.98

Pozitia 14 (L=148,5mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.46	5.60	5.55	5.54	5.07	4.94	5.00	5.00
2.2	5.46	5.60	5.55	5.54	5.07	4.94	5.00	5.00
4.4	5.46	5.53	5.54	5.51	5.07	4.94	5.00	5.00
9.6	4.72	4.70	5.72	5.05	6.01	6.05	6.04	6.03

RCC cu lamele inclinate cu 10 grade

Pozitia 1 (L=407,89mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.74	5.65	5.68	5.69	4.89	5.08	4.96	4.98
2.2	5.74	5.65	5.68	5.69	4.97	5.08	5.02	5.02
4.4	5.50	5.64	5.66	5.60	5.40	5.23	5.20	5.28
9.6	1.95	2.11	2.33	2.13	11.58	11.33	10.87	11.26

Pozitia 2 (L=397,89mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.72	5.66	5.69	5.69	4.95	4.96	4.96	4.96
2.2	5.72	5.65	5.68	5.68	4.96	5.05	4.96	4.99
4.4	5.72	5.64	5.66	5.67	5.15	5.20	5.14	5.16
9.6	2.59	2.57	2.47	2.54	10.27	10.29	10.52	10.36

Pozitia 3 (L=387,89mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.71	5.74	5.88	5.78	4.93	4.88	4.76	4.86
2.2	5.71	5.74	5.88	5.78	4.96	4.98	4.92	4.95
4.4	5.60	5.54	5.56	5.57	5.31	5.37	5.32	5.33
9.6	2.56	2.56	2.59	2.57	10.35	10.37	10.26	10.33

Pozitia 4 (L=377,89mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.76	5.68	5.60	5.68	4.82	4.90	5.02	4.91
2.2	5.76	5.68	5.60	5.68	4.96	4.97	5.05	4.99
4.4	5.54	5.64	5.58	5.59	5.34	5.23	5.29	5.29
9.6	3.07	2.73	2.84	2.88	9.28	9.95	9.71	9.65

Pozitia 5 (L=367,89mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.48	5.55	5.70	5.58	5.18	5.06	4.89	5.04
2.2	5.48	5.55	5.70	5.58	5.18	5.09	5.02	5.10
4.4	5.48	5.54	5.52	5.51	5.38	5.30	5.34	5.34
9.6	3.03	3.08	3.10	3.07	9.30	9.21	9.15	9.22

Pozitia 6 (L=262,08mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.67	5.71	5.81	5.73	5.13	4.82	4.85	4.93
2.2	5.67	5.71	5.81	5.73	5.13	4.93	4.85	4.97
4.4	5.67	5.71	5.81	5.73	5.13	5.00	4.93	5.02
9.6	4.70	4.39	4.80	4.63	6.57	6.53	6.36	6.49

Pozitia 7 (L=252,08mm)								
Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.66	5.86	5.76	5.76	5.00	4.75	4.82	4.86
2.2	5.66	5.86	5.76	5.76	5.00	4.78	4.84	4.87
4.4	5.66	5.86	5.76	5.76	5.01	4.90	4.93	4.95
9.6	4.80	5.05	4.98	4.94	6.36	6.00	6.12	6.16

Pozitia 8 (L=242,08mm)

Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.73	6.01	6.08	5.94	4.91	4.73	4.71	4.78
2.2	5.73	6.00	6.08	5.94	4.92	4.73	4.72	4.79
4.4	5.73	6.00	6.08	5.94	4.96	4.74	4.73	4.81
9.6	5.32	5.12	5.21	5.22	5.63	5.94	5.78	5.78

Pozitia 9 (L=232,08mm)

Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.98	5.87	5.97	5.94	4.81	4.70	4.62	4.71
2.2	5.98	5.86	5.96	5.93	4.81	4.70	4.62	4.71
4.4	5.98	5.86	5.96	5.93	4.81	4.74	4.67	4.74
9.6	5.40	5.35	5.35	5.37	5.43	5.50	5.51	5.48

Pozitia 10 (L=222,08mm)

Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.80	5.81	5.65	5.75	4.84	4.81	4.94	4.86
2.2	5.80	5.81	5.65	5.75	4.84	4.81	4.94	4.86
4.4	5.80	5.81	5.65	5.75	4.84	4.81	4.94	4.86
9.6	5.53	5.54	5.50	5.52	5.29	5.29	5.12	5.23

Pozitia 11 (L=212,98mm)

Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.33	5.23	5.54	5.37	5.12	5.23	4.82	5.06
10	5.33	5.23	5.52	5.36	5.66	5.78	5.60	5.68
12.2	4.48	4.61	4.61	4.57	7.14	6.82	6.92	6.96
14.4	3.10	3.62	3.90	3.54	9.17	8.25	7.80	8.41

Pozitia 12 (L=202,98mm)

Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.14	5.33	5.40	5.29	5.39	5.04	4.95	5.13
10	5.14	5.33	5.40	5.29	5.50	5.50	5.27	5.42
12.2	5.14	4.56	4.63	4.78	6.09	6.80	6.70	6.53
14.4	3.90	3.56	3.70	3.72	8.02	8.40	8.14	8.19

Pozitia 13 (L=192,98mm)

Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.32	5.46	5.35	5.38	5.18	5.10	5.90	5.39
10	5.32	5.46	5.35	5.38	5.20	5.10	5.90	5.40
12.2	5.18	5.12	4.94	5.08	5.98	6.04	6.50	6.17
14.4	4.42	4.47	4.33	4.41	7.16	7.04	7.31	7.17

Pozitia 14 (L=182,98mm)

Forta[N]	Tr. 1				Tr. 2			
	1	2	3	Media	1	2	3	Media
0	5.30	5.40	5.40	5.37	5.10	5.02	4.96	5.03
10	5.30	5.40	5.40	5.37	5.24	5.22	5.12	5.19
12.2	5.14	5.38	5.21	5.24	6.05	5.78	5.93	5.92
14.4	4.66	4.89	4.82	4.79	6.77	6.52	6.54	6.61

RCC cu tije Inclinate cu 15 grade (Momente)

		poz 14				poz 1			
F1[N]	F2[N]	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	5.01	4.99	4.96	4.99	6.46	6.69	6.88	6.68
11.00	10.95	5.01	4.99	4.96	4.99	5.89	5.92	5.95	5.92
16.70	16.75	5.09	5.09	5.11	5.10	5.39	5.39	5.36	5.38
18.90	18.95	5.20	5.19	5.16	5.18	5.06	5.08	5.09	5.08

		poz 6				poz 1			
F1[N]	F2[N]	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	5.01	4.89	5.01	4.97	6.45	6.95	6.71	6.70
11.00	10.95	5.01	4.89	5.00	4.97	6.02	6.32	6.28	6.21
16.70	16.75	5.01	4.96	5.00	4.99	5.83	5.95	5.94	5.91
18.90	18.95	5.03	5.01	5.00	5.01	5.64	5.71	5.84	5.73

RCC cu tije paralele (Momente)

		poz 14				poz 1			
F1[N]	F2[N]	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	5.05	5.03	5.09	5.06	5.94	5.28	5.37	5.53
11.00	11.00	4.84	5.02	5.11	4.99	4.95	5.25	5.35	5.18
16.80	16.80	5.95	5.56	5.24	5.58	6.07	6.13	5.36	5.85
17.75	17.75	5.95	5.62	5.40	5.66	6.07	6.06	5.57	5.90

		poz 6				poz 1			
F1[N]	F2[N]	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	5.09	5.07	5.06	5.07	4.94	4.83	5.35	5.04
11.00	11.00	5.95	4.55	4.61	5.04	5.89	4.59	4.73	5.07
16.80	16.80	5.63	4.71	4.79	5.04	5.89	4.60	4.73	5.07
17.75	17.75	6.07	4.78	4.80	5.22	6.25	4.60	4.73	5.19

RCC cu tije inclinate cu 5 grade (Momente)

		poz 14				poz 1			
F1[N]	F2[N]	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	8.08	8.02	8.00	8.03	3.83	5.96	3.74	4.51
11.00	11.00	9.89	8.21	8.02	8.71	5.27	3.95	3.73	4.32
16.80	16.80	9.95	8.25	8.09	8.76	5.27	4.11	3.96	4.45
19.00	19.00	9.99	8.25	8.57	8.94	5.51	4.11	4.40	4.67

		poz 6				poz 1			
F1[N]	F2[N]	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	8.04	8.09	8.05	8.06	3.69	3.61	3.56	3.62
11.00	11.00	8.18	8.13	8.56	8.29	3.70	3.61	3.76	3.69
16.80	16.80	8.39	8.18	8.88	8.48	3.99	3.68	4.12	3.93
19.00	19.00	8.45	8.80	8.92	8.72	3.99	4.22	4.13	4.11

RCC cu lamele inclinate cu 10 grade (Momente)

		poz 14				poz 1			
F1	F2	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	5.67	6.05	5.86	5.86	5.43	5.31	5.19	5.31
2.20	2.20	5.67	6.05	5.86	5.86	5.43	5.31	5.19	5.31
7.90	8.00	5.82	6.05	5.86	5.91	5.20	4.93	5.17	5.10
8.85	8.95	5.82	6.22	6.00	6.01	5.11	4.60	4.89	4.87

		poz 6				poz 1			
F1	F2	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	6.19	5.60	6.28	6.02	5.07	5.76	4.98	5.27
1.10	1.10	6.18	5.78	6.27	6.08	5.05	5.30	4.93	5.09
13.20	13.20	6.18	5.78	6.27	6.08	4.95	5.21	4.79	4.98
18.70	18.80	8.00	7.22	7.23	7.48	1.59	3.09	3.21	2.63

RCC cu lamele paralele (Momente)

		poz 14				poz 1			
F1	F2	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	5.75	5.86	5.86	5.82	4.61	4.62	4.49	4.57
2.20	2.20	5.75	5.86	5.86	5.82	4.61	4.62	4.49	4.57
7.90	8.00	5.62	5.64	5.83	5.70	4.54	4.56	5.24	4.78
8.85	8.95	6.33	6.00	5.81	6.05	3.61	4.06	4.26	3.98

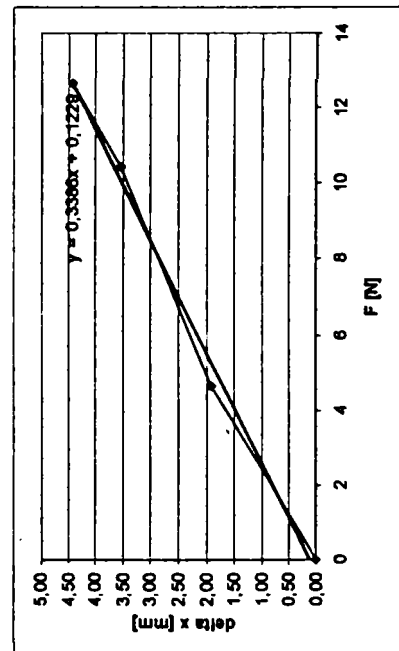
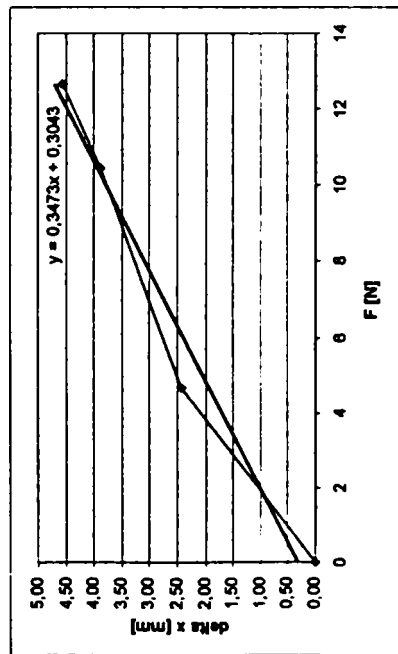
		poz 6				poz 1			
F1	F2	TR1			Media	TR2			Media
0.00	0.00	5.40	5.70	5.72	5.61	5.18	4.62	4.70	4.83
1.10	1.10	5.90	4.67	4.72	5.10	4.37	5.96	5.96	5.43
13.20	13.20	5.91	5.03	4.91	5.28	4.29	5.35	5.54	5.06
18.70	18.80	7.11	7.22	6.67	7.00	2.65	2.50	3.12	2.76

Anexa VIII.2. Deplasări înregistrate

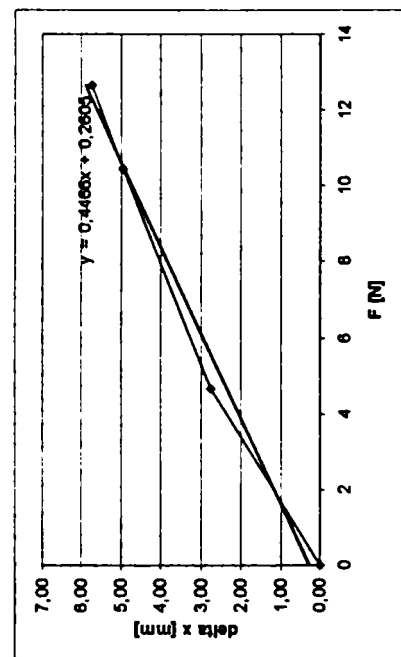
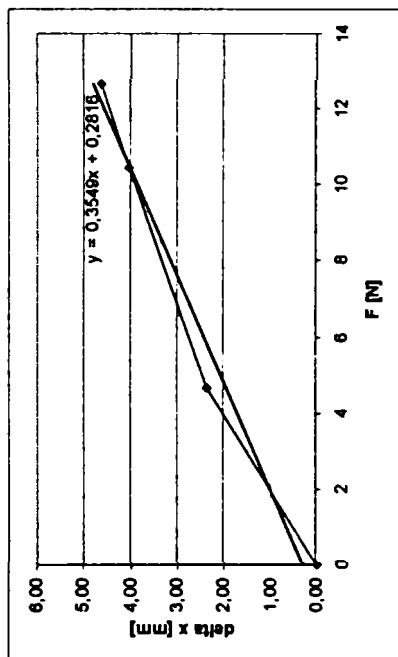
A. Dispozitive cu tije cilindrice

a) Cazul tijelor cilindrice paralele, solicitate cu o forță

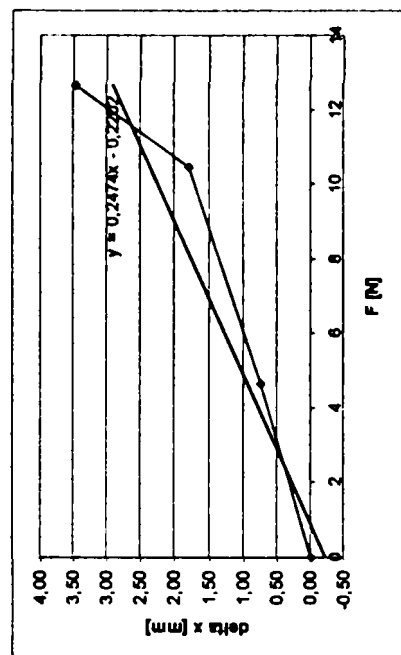
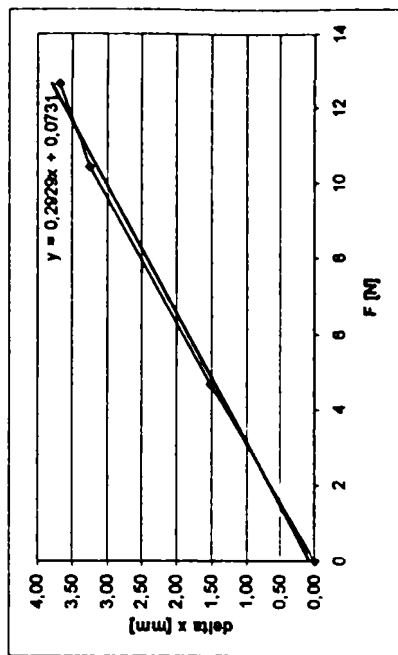
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	2,42	1,92
10,45	3,88	3,55
12,65	4,56	4,42



Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	2,37	2,74
10,45	4,01	4,95
12,65	4,59	5,74

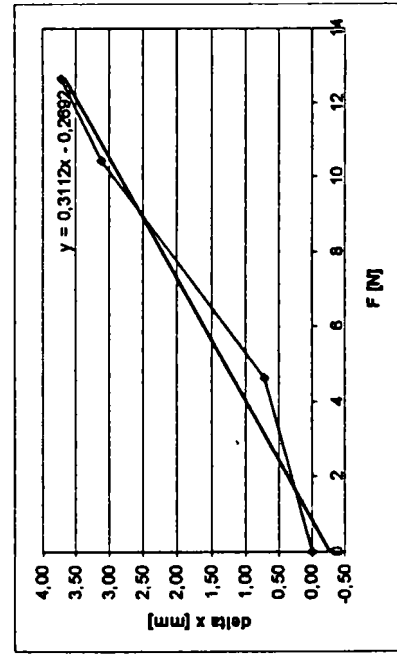
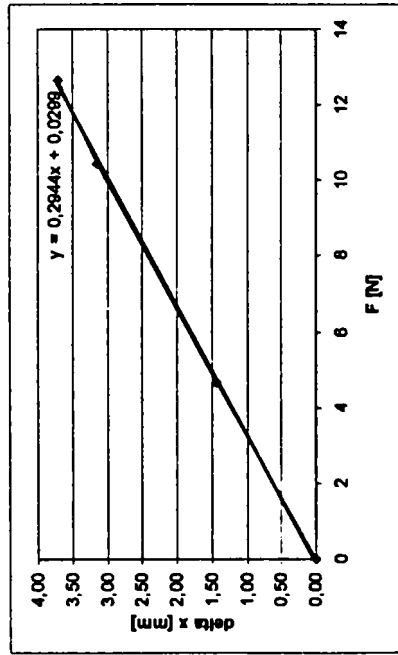


Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	1,52	0,74
10,45	3,24	1,78
12,65	3,66	3,46



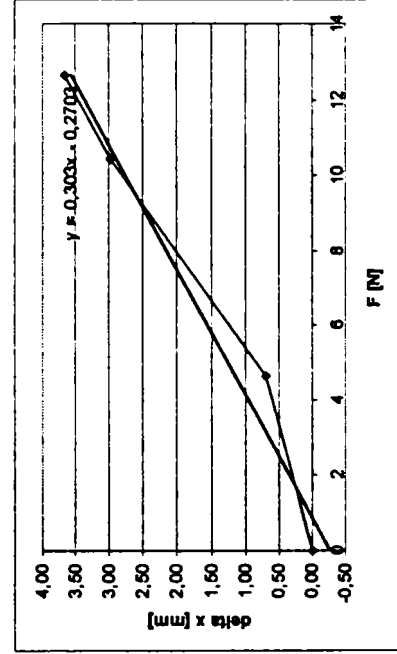
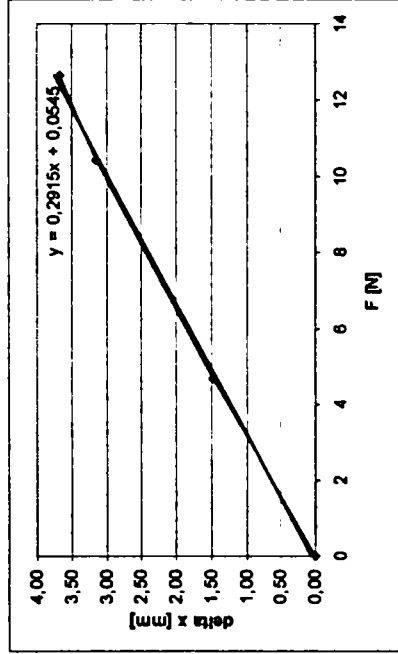
Pozitia 7

Forța [N]	Tr. 1		Tr. 2	
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00	0,00	0,00
4,65	1,43	0,72	0,72	0,72
10,45	3,15	3,12	3,12	3,12
12,65	3,70	3,73	3,73	3,73



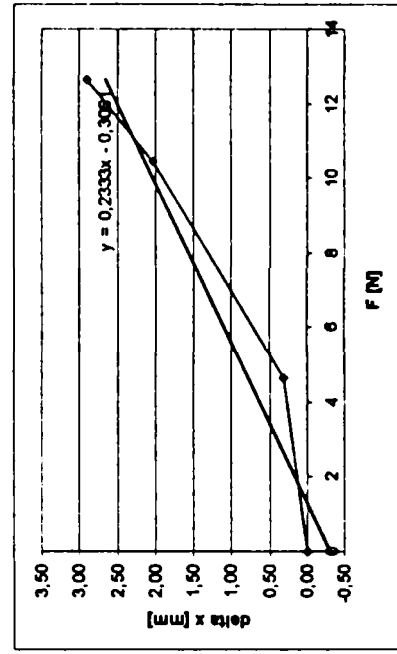
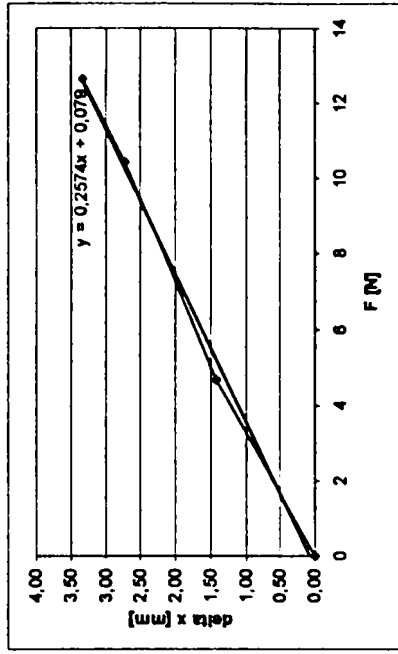
Pozitia 8

Forța [N]	Tr. 1		Tr. 2	
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00	0,00	0,00
4,65	1,48	0,69	0,69	0,69
10,45	3,14	2,98	2,98	2,98
12,65	3,68	3,66	3,66	3,66



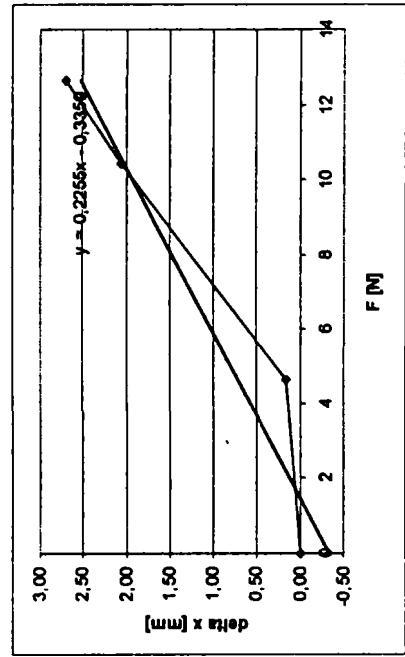
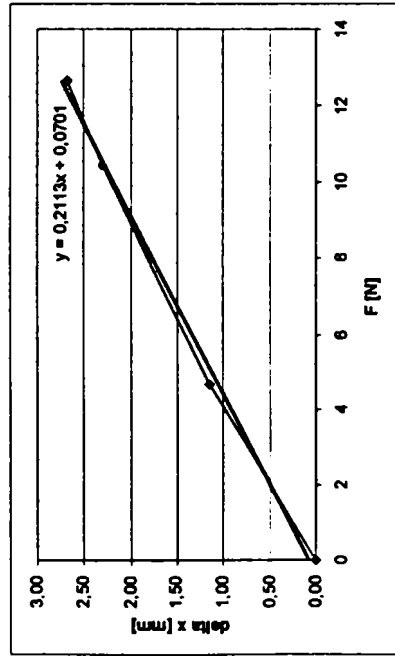
Pozitia 13

Forța [N]	Tr. 1		Tr. 2	
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00	0,00	0,00
4,65	1,4	0,32	0,32	0,32
10,45	2,7	2,03	2,03	2,03
12,65	3,33	2,89	2,89	2,89

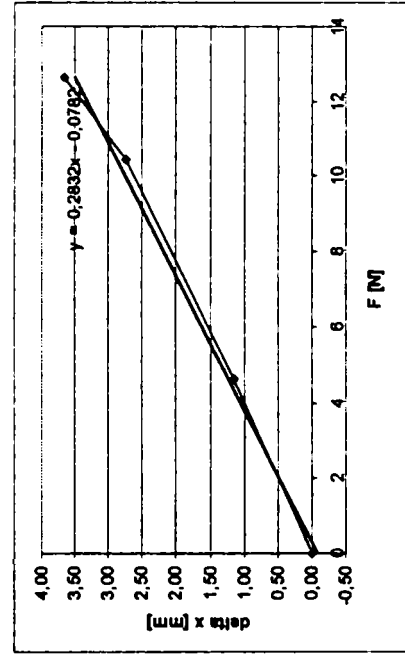
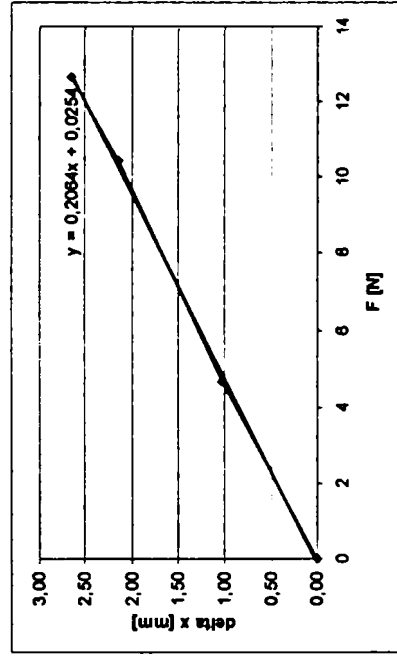


b) Cazul tijelor cilindrice înclinate cu 5°, sollicitate cu o forță

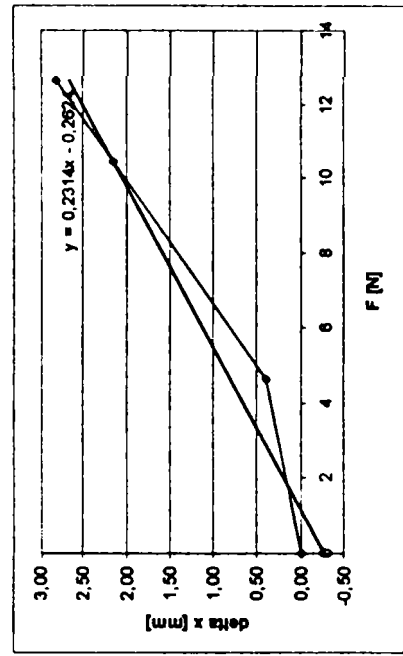
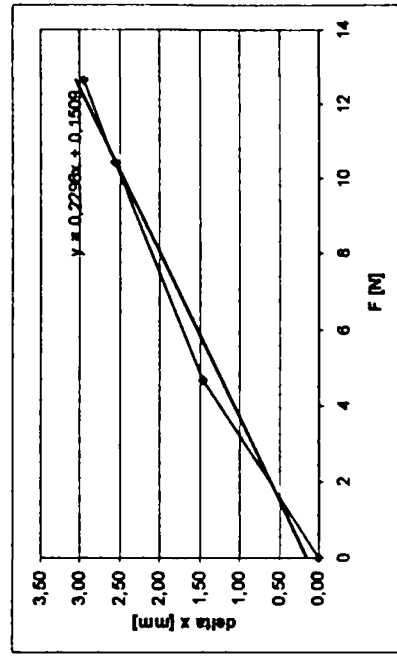
Pozitia 1		
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	1,16	0,17
10,45	2,30	2,06
12,6	2,69	2,68



Pozitia 2		
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	1,04	1,15
10,45	2,14	2,74
12,65	2,65	3,65

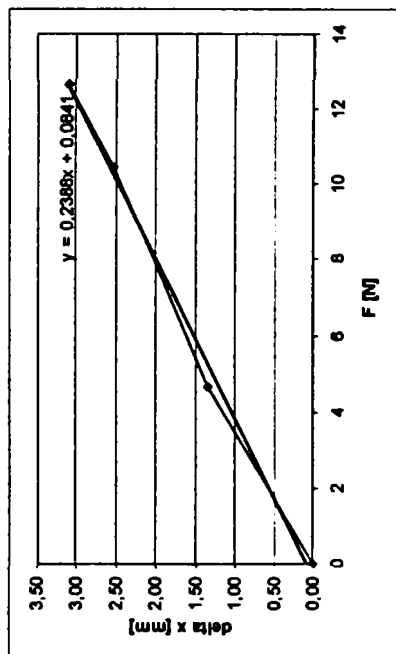


Pozitia 3		
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	1,45	0,40
10,45	2,57	2,15
12,65	2,96	2,82

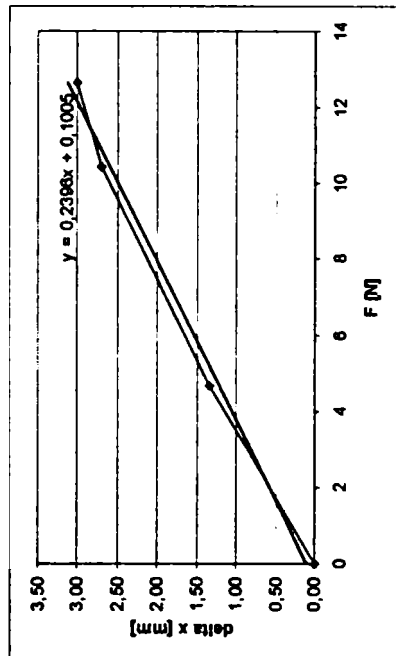


c) Cazul tijelor cilindrice înclinate cu 15°,
solicitare cu o forță

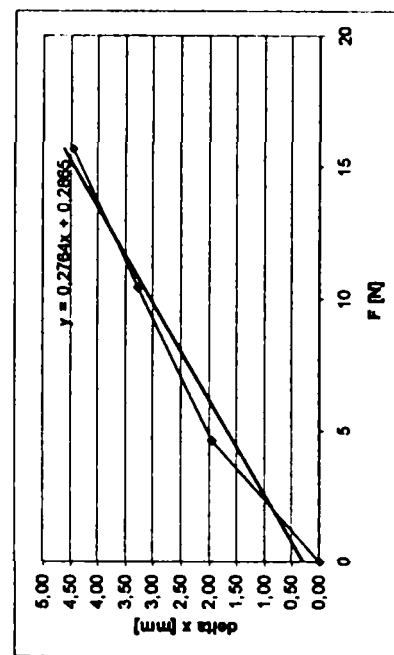
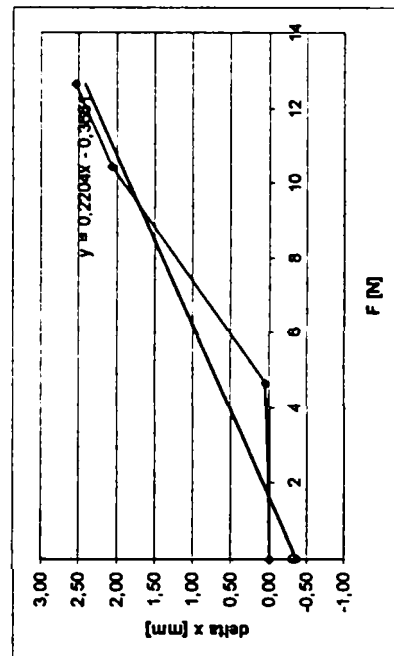
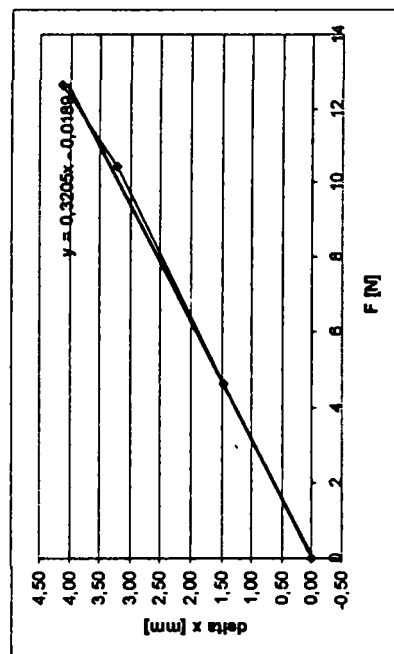
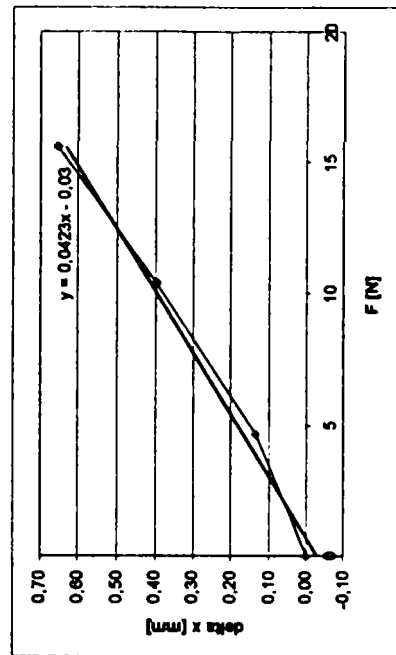
Pozitia 4		
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	1,34	1,47
10,45	2,53	3,23
12,65	3,09	4,12



Pozitia 5		
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	1,35	0,05
10,45	2,70	2,06
12,65	3,00	2,55

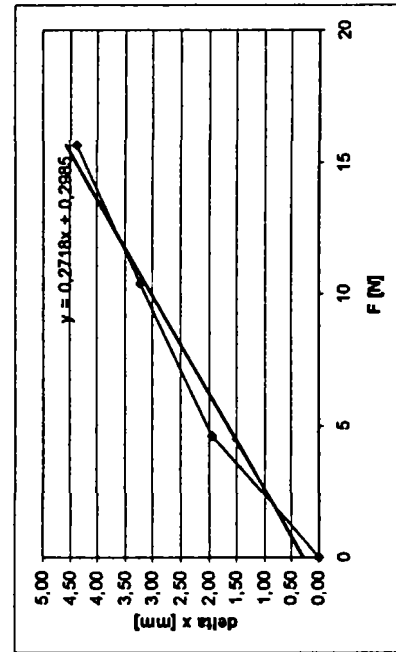
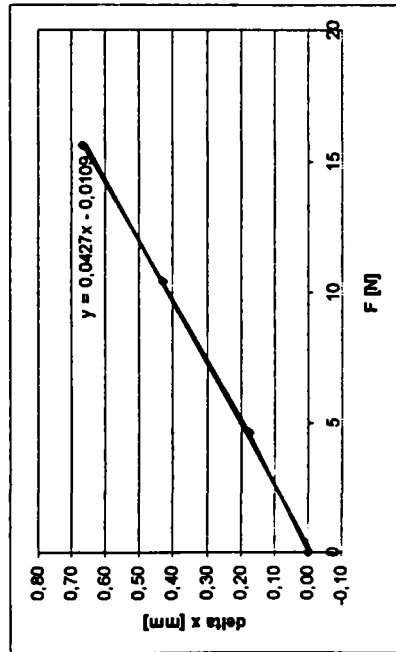


Pozitia 1		
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	0,13	1,94
10,45	0,40	3,27
15,65	0,65	4,44



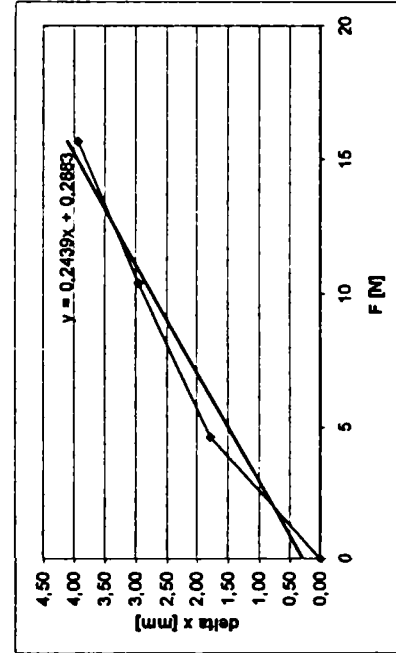
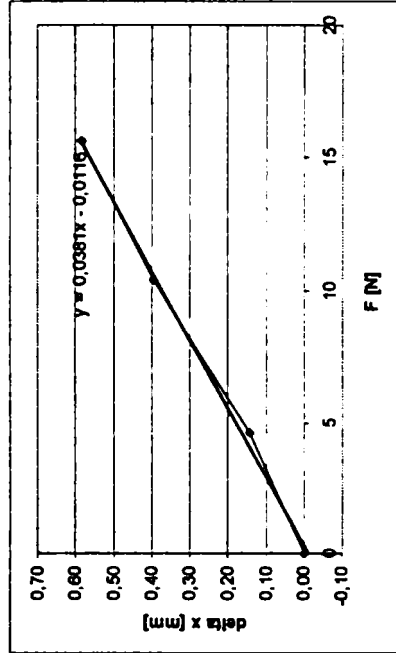
Pozitia 2

Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	0,18	1,94
10,45	0,43	3,23
15,65	0,67	4,38



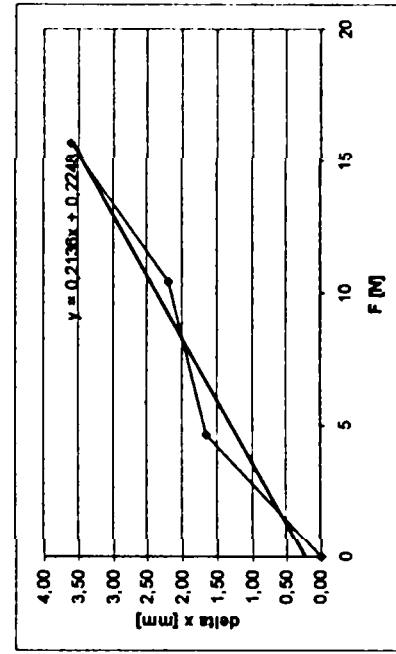
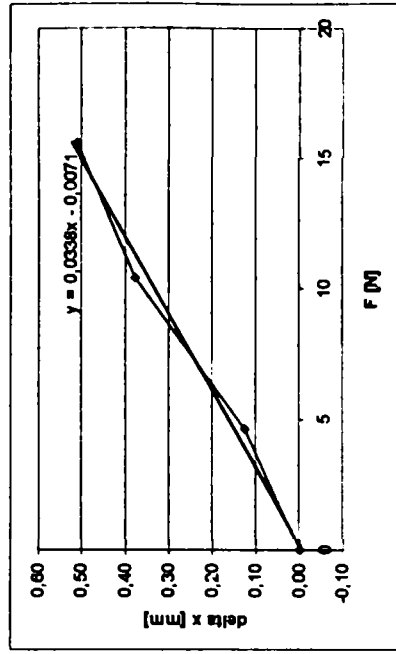
Pozitia 3

Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	0,14	1,78
10,45	0,40	2,94
15,65	0,58	3,93



Pozitia 4

Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	0,13	1,66
10,45	0,38	2,20
15,65	0,51	3,61

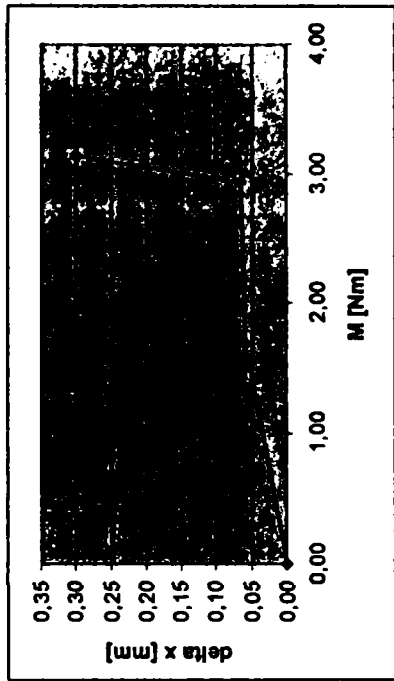
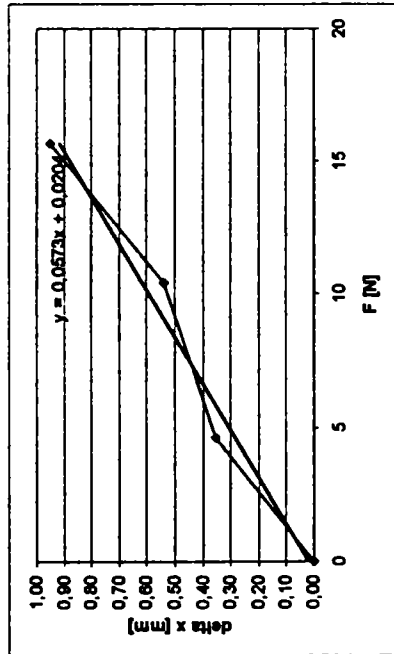
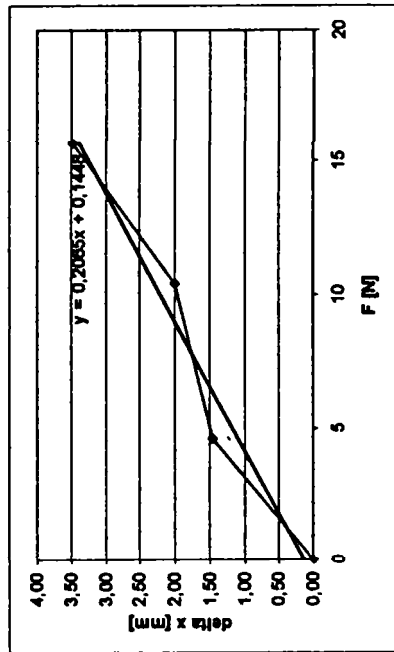
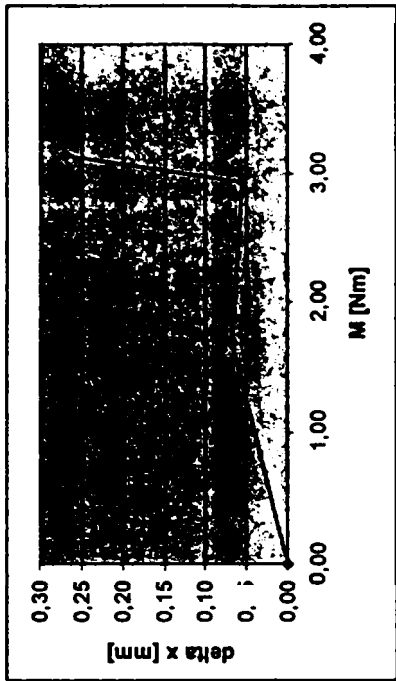
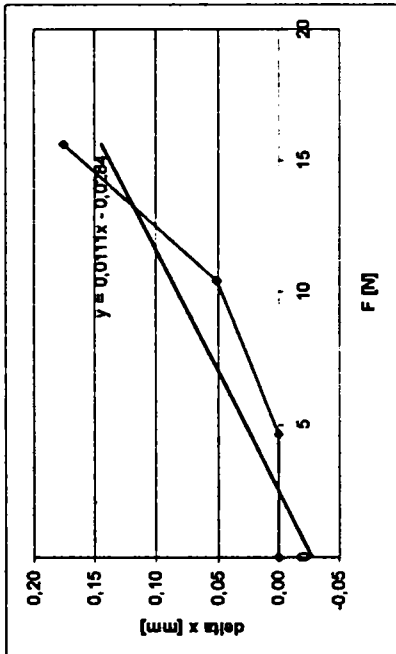
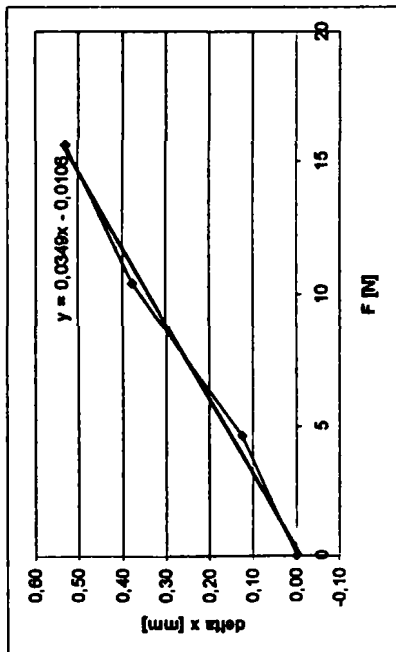


d) Cazul tijelor paralele, solicitate cu un cuplu
Pozitia 1 – 6 de acțiune a forțelor

Pozitia 5		
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	0,13	1,46
10,45	0,38	1,99
15,65	0,53	3,48

Pozitia 6		
Forța [N]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0	0,00	0,00
4,65	0,00	0,35
10,45	0,05	0,54
15,65	0,18	0,95

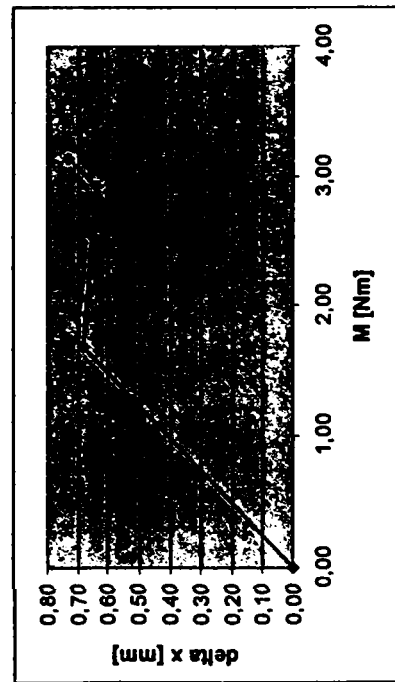
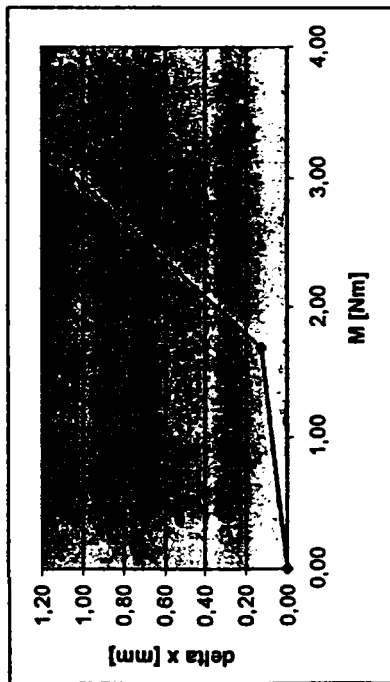
M [Nm]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0,00	0,00	0,00
1,69	0,07	0,06
2,93	0,06	0,07
3,14	0,27	0,30



**e) Cazul tijelor cilindrice înclinate cu 5°,
solicitare cu un cuplu**

Pozitia 1 – 14 de acțiune a forțelor

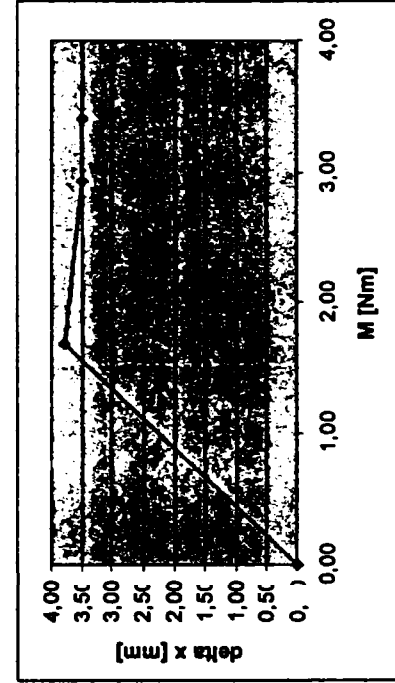
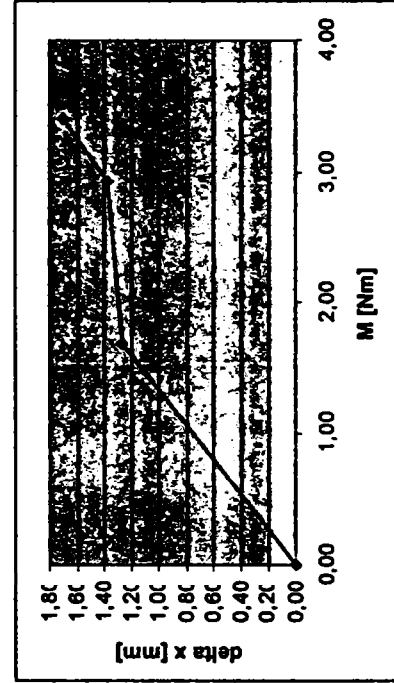
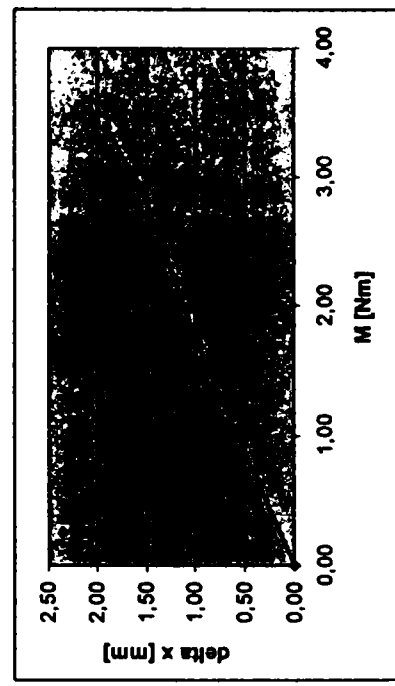
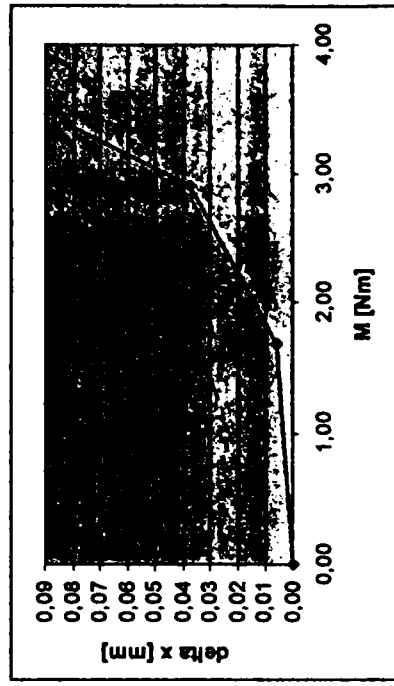
M [Nm]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0,00	0,00	0,00
1,69	0,13	0,68
2,93	0,99	0,64
3,14	1,13	0,73



**f) Cazul tijelor cilindrice înclinate cu 15°,
solicitare cu un cuplu**

Pozitia 1 – 6 de acțiune a forțelor

M [Nm]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0,00	0,00	0,00
1,69	0,01	0,98
2,91	0,04	1,57
3,38	0,08	1,92

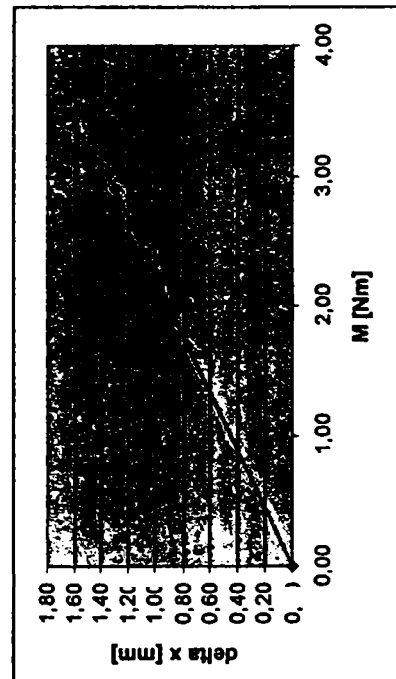
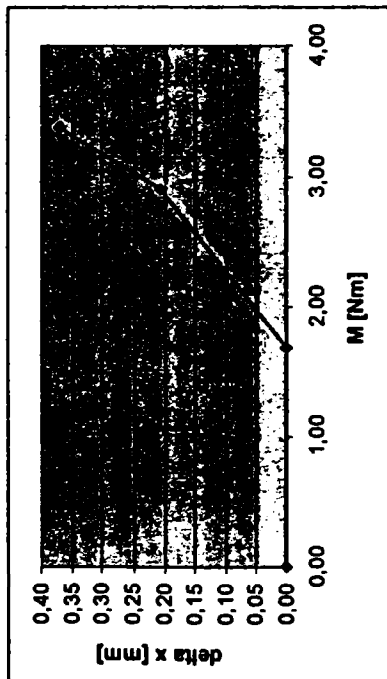


B. Dispozitive cu lamele de secțiune rectangulară

a) Cazul lamelor paralele, sollicitate cu o forta

Pozitia 1 – 14 de acțiune a forțelor

M [Nm]	Tr. 1 [mm]	Tr. 2 [mm]
0,00	0,00	0,00
1,69	0,00	0,76
2,91	0,21	1,30
3,38	0,37	1,60

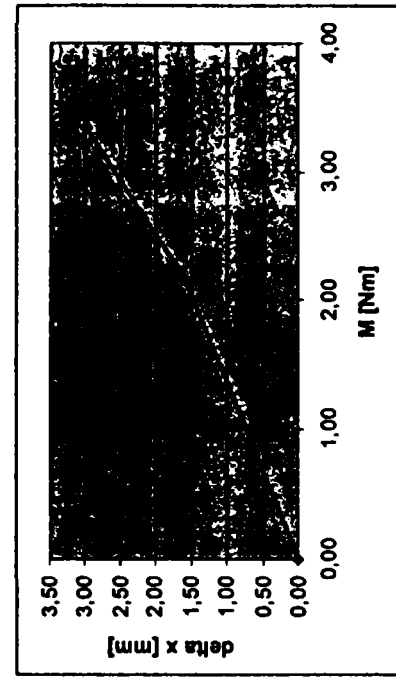
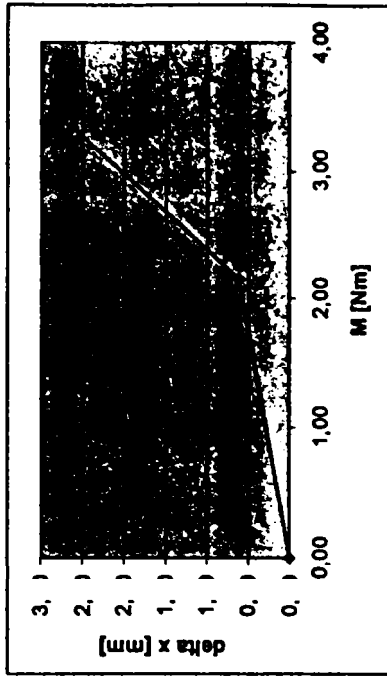
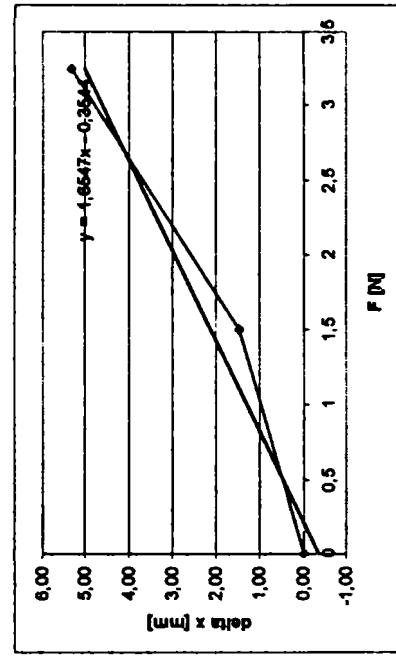
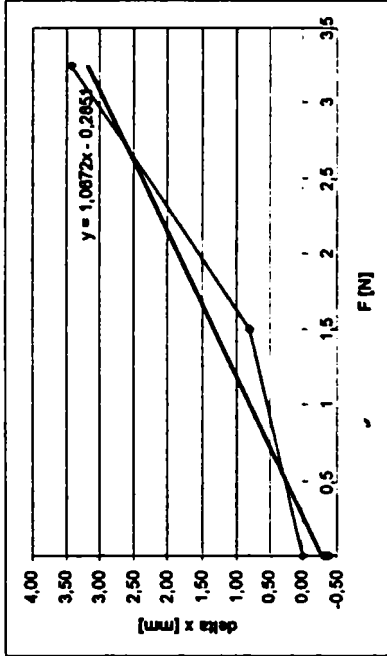


b) Cazul lamelor paralele, sollicitate cu un cuplu

Pozitia 1 – 6 de acțiune a forțelor

Pozitia 1	
Forța [N]	Tr. 2 [mm]
0	0,00
1,5	0,79
3,25	3,43

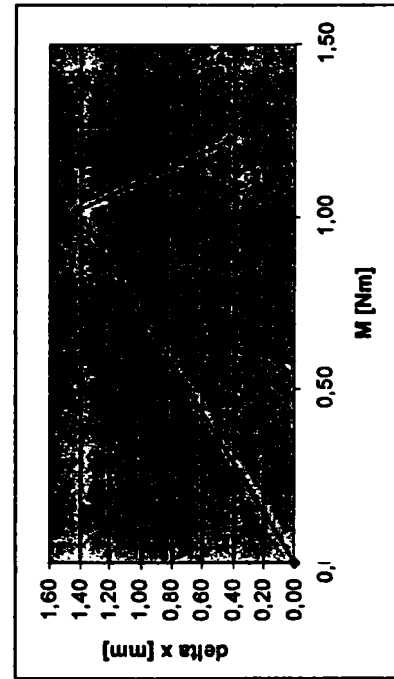
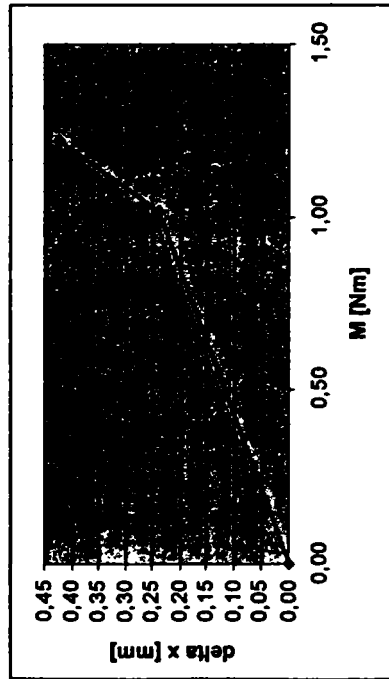
Pozitia 1	
M [Nm]	Tr. 1 [mm]
0,00	0,00
2,16	0,61
3,34	2,63



**c) Cazul lamelor înclinate cu 10° ,
solicitate cu un cuplu**

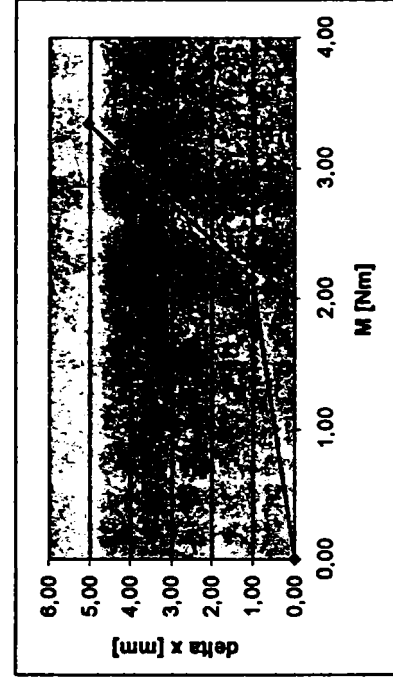
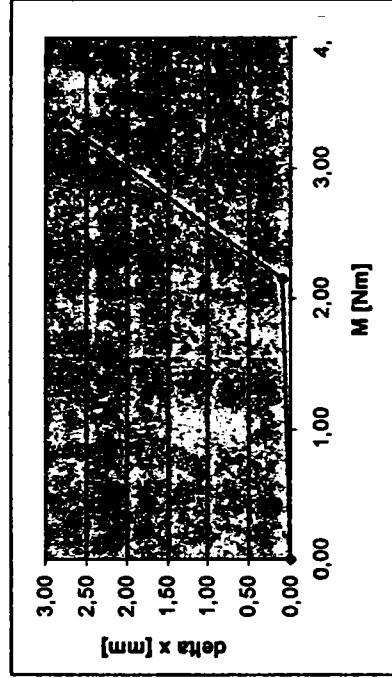
Pozitia 1 – 14 de acțiune a forțelor

M [Nm]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0,00	0,00	0,00
1,02	0,24	1,42
1,22	0,42	0,43



Pozitia 1 – 6 de acțiune a forțelor

M [Nm]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0,00	0,00	0,00
2,16	0,10	1,04
3,34	2,75	5,04



Pozitia 1 – 14 de acțiune a forțelor

M [Nm]	Tr. 1	Tr. 2
	[mm]	[mm]
0,00	0,00	0,00
1,02	0,09	0,72
1,22	0,29	1,34

