

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI CALCULATOARE
DEPARTAMENTUL DE AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
INDUSTRIALĂ

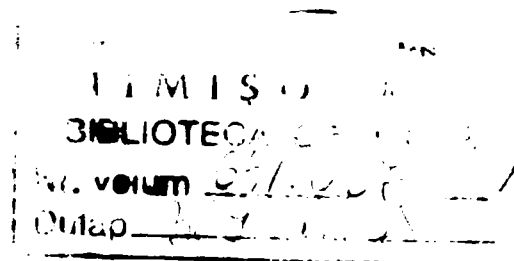
CONTRIBUȚII LA APLICAREA TEORIEI SENSIBILITĂȚII ÎN AUTOMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT

elaborată de

ing. Dorina Popescu

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA



Conducător științific

prof. dr.ing. Toma Leonida Dragomir

2003

CUPRINS

<i>Cuprins</i>	iii
<i>Index de notații</i>	vii
<i>Convenții utilizate în teză</i>	ix

Capitolul 1

INTRODUCERE	1
1.1 Motivația alegerii temei și obiectivele propuse	1
1.2 Scurtă incursiune bibliografică	2
1.3 Conținutul lucrării	4
1.4 Harta informațională	6

Capitolul 2

ASPECTE DE BAZĂ ÎN ANALIZA GENERALĂ DE SENSIBILITATE	8
2.1 Clasificări. Definiții.	8
2.1.1 Modalități de abordare a problemelor de analiză a sensibilității sistemelor	8
2.1.2 Clasificarea Miller-Murray	9
2.1.3 Matrice și funcții de sensibilitate în domeniul timp	9
2.1.4 Măsuri de sensibilitate	13
2.1.5 Sensibilitatea sistemelor cu eșantionare	14
2.1.6 Funcții de sensibilitate în domeniul operațional	15
2.1.7 Abateri de ordinul al II-lea	15
2.2 Metode de determinare a funcțiilor de sensibilitate parametrică.	16
2.2.1 Metoda de calcul direct al funcțiilor de sensibilitate absolută	17
2.2.2 Metoda de calcul indirect al funcțiilor de sensibilitate absolută	18
2.2.2.1 Modele de sensibilitate de ieșire	18
2.2.2.2 Modele de sensibilitate de stare	20
2.3 Metoda componentei incerte	25
2.3.1 Metoda componentei incerte pentru sisteme lineare	25
2.3.2 Metoda componentei incerte pentru sisteme nelineare	30
2.4 Metoda punctelor de sensibilitate	34
2.4.1 Metoda punctelor de sensibilitate. Caz general	34
2.4.2 Metoda punctelor de sensibilitate. Caz particular	37
2.5 Sensibilitatea sistemelor cu eșantionare	39

2.5.1	Modele de sensibilitate ale sistemelor cu eșantoinare	39
2.5.1.1	Modele de sensibilitate ale sistemelor cu eșantoinare în raport cu parametri $\alpha_j, j = \overline{1, q}$	40
2.5.1.2	Modele de sensibilitate ale sistemelor cu eșantoinare în raport cu parametrul h	40
2.5.2	Modele în "două puncte", (studiu de caz)	42
2.6	Calculul numeric al funcțiilor de sensibilitate parametrică	46
2.6.1	Calculul numeric al funcțiilor de sensibilitate utilizând mediul MATLAB-SIMULINK	47
2.6.2	Funcții MATLAB noi, dedicate generării funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută	47
2.6.2.1	Deducerea imaginilor operaționale ale f.d.s. pe baza MM-II	48
2.6.2.2	Implementarea calculului f.d.s. în subprograme (funcții) MATLAB	49
2.6.3	Metode aproximative de calcul al funcțiilor de sensibilitate parametrică ale sistemelor SISO descrise prin MM-II	51
2.6.3.1	Determinarea analitică a relațiilor de calcul prin metode aproximative al funcțiilor de sensibilitate parametrică absolute și relative	51
2.6.3.2	Implementarea relațiilor de calcul în limbajul de programare C	55
2.6.3.3	Concluzii și perspective	55
2.7	Concluzii	56

Capitolul 3

	STUDII ȘI CONTRIBUȚII LA UTILIZAREA ANALIZEI DE SENSIBILITATE DIRECTĂ ÎN AUTOMATICĂ	59
3.1	Analiza de sensibilitate a structurii unui SRA	60
3.1.1	Sensibilitatea de comparație (comparison sensitivity)	60
3.1.2	Analiza sensibilității Bode la SRA	63
3.1.3	Aspecte corelate	64
3.2	Studiu de caz pentru analiza de sensibilitate directă	65
3.2.1	Descrierea procesului	65
3.2.2	Prezentarea sistemelor de reglare automată	66
3.2.3	Determinarea și analiza funcțiilor de sensibilitate parametrică în domeniul timp	68
3.2.4	Determinarea și analiza sensibilității Bode și/sau a sensibilității erorii	71
3.2.5	Determinarea și analiza sensibilității parametrice a coeficientului de amortizare și a sensibilității parametrice a pulsației proprii	74
3.3	Utilizarea analizei de sensibilitate la linearizarea prin metoda tangentei a modelelor cu nelinearități neesențiale	76
3.3.1	Problema punctului de funcționare staționară.....	77
3.3.2	Stabilirea algoritmului de determinare a punctului de funcționare staționară optim (caz general).....	77
3.3.2.1	Modelul matematic al procesului nelinear	78
3.3.2.2	Modelul matematic linearizat	79

3.3.2.3 Definirea funcției obiectiv (indicatorului de calitate)	79
3.3.2.4 Minimizarea funcției obiectiv	80
3.3.2.5 Funcții și modele de sensibilitate în raport cu parametri de linearizare și cu condițiile inițiale	81
3.3.2.6 Algoritm de calcul a coordonatelor punctului staționar optimal	82
3.3.2.7 Cazul particular al sistemelor SISO	83
3.3.3 Determinarea punctului de funcționare staționară optim (studiu de caz)	86
3.3.3.1 Modelarea matematică a sistemului de amortizare cu resort elastic	86
3.3.3.2 Modelul matematic linearizat	88
3.3.3.3 Modelul de sensibilitate de linearizare și modelul de sensibilitate de tip β	89
3.3.3.4 Simulări și rezultate	89
3.4 Concluzii	91

Capitolul 4

STUDII ȘI CONTRIBUȚII LA UTILIZAREA ANALIZEI DE SENSIBILITATE INVERSĂ ÎN AUTOMATICĂ	92
4.1 Principiul și metodele ASI	92
4.1.1 Principiul ASI. Schema de identificare a parametrilor	93
4.1.2 Metoda clasică de soluționare a ASI pentru abateri parametrice	94
4.1.3 Soluționarea ASI prin metode algebrice	95
4.2 Studiu comparativ al metodelor de soluționare a ASI	100
4.2.1 Studiu comparativ între metoda clasică și metoda I de soluționare a ASI	100
4.2.2 Studiu comparativ între metoda clasică și metoda II de soluționare a ASI	105
4.3 Integrea soluției ASI în procese de sortare automată	110
4.4 Concluzii	111

Capitolul 5

CONTRIBUȚII PERSONALE ȘI DIRECȚII DE CERCETARE ULTERIOARĂ	113
5.1 Concluzii finale	113
5.2 Contribuții personale	114
5.3 Direcții de cercetare ulterioară	115

ANEXE	117
Anexa I <i>Sistem combinat asociat MM-II</i>	117
Anexa II <i>Aducerea MM-ISI la forma standard controlabilă</i>	119
Anexa III <i>Sistem combinat asociat unui MM- ISI în forma standard controlabilă ...</i>	120
Anexa IV <i>Exemplu relativ la generalizarea metodei componentei incerte</i>	121
Anexa V <i>Calculul funcțiilor de sensibilitate Bode aferente metodei punctelor de sensibilitate</i>	123
Anexa VI <i>Stabilirea modelului de sensibilitate de eșantionare</i>	126
Anexa VII <i>Funcții MATLAB destinate calculului funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută</i>	128
Anexa VIII <i>CN-FS, program C destinat Calculului Numeric al Funcțiilor de Sensibilitate</i>	133
Anexa IX <i>Calculul numeric al funcțiilor de sensibilitate parametrică - studiu comparativ -</i>	140
Anexa X <i>Determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică aferente structurilor din §3.2</i>	145
Anexa XI <i>Determinarea sensibilităților parametrice ale coeficienților de amortizare și ale pulsațiilor proprii pentru studiul de caz din §3.2</i>	159
Anexa XII <i>Programe MATLAB și schema Simulink aferentă studiului de caz din §3.3.3</i>	163
Anexa XIII <i>Determinarea punctului de funcționare staționară folosind MM-II (studiu de caz)</i>	165
Anexa XIV <i>Programe MATLAB, schema de simulare și rezultate grafice aferente studiului prezentat în §4.2.1</i>	167
Anexa XV <i>Programe MATLAB, schema de simulare și rezultate grafice aferente studiului prezentat în §4.2.2</i>	175
<i>Bibliografie</i>	187

Index de notații

- $\underline{a}=[a_1, a_2, \dots, a_\ell]^T$ – vectorul parametrilor fizici ai unui sistem; ℓ - numărul parametrilor fizici;
- \underline{a}_0 – valoarea nominală a vectorului parametrilor fizici;
- \underline{A} – matricea sistemului de dimensiune $n \times n$;
- ARN – algoritm de reglare automată numerică;
- ASD – analiza sensibilității directe;
- ASI – analiza sensibilității inverse;
- \underline{B} – matricea de intrare, $n \times r$; \underline{b} - vectorul de intrare, $n \times 1$;
- \underline{C} – matricea de ieșire, $p \times n$; \underline{c} - vectorul de ieșire, $p \times 1$;
- \mathbb{C} – mulțimea numerelor complexe;
- CAN – Convertor Analog Numeric;
- CNA – Convertor Numeric Analogic;
- \underline{D} – matricea de interconexiune, $p \times r$;
- e – eroare;
- f, g – vectori de funcții, de expresii vectoriale;
- f.d.s. – funcție de sensibilitate;
- f.d.t. – funcție de transfer;
- \mathcal{F} – de la caz la caz transformata \mathcal{L} sau transformata \mathcal{Z} ;
- h – perioada de eșantionare; pasul de discretizare;
- h_c – timpul de calcul la sistemele cu eșantionare asincrone;
- I – matricea identitate, de dimensiune compatibilă cu matricele din context;
- I_i – vector de pe coloana i din matricea identitate;
- J – indicator de calitate; $J_{\underline{a}}$ – sensibilitatea indicatorului de calitate în raport cu \underline{a} ;
- MIMO – Multi Input Multi Output – sistem multivariabil la intrare și la ieșire;
- MM-II – model matematic intrare – ieșire;
- MM-ISI – model matematic intrare – stare – ieșire;
- M^{pq} – matrice de dimensiune $p \times q$;
- \mathbb{N} – mulțimea numerelor naturale;
- PCN – proces condus, nelinear;
- \mathbb{R} – mulțimea numerelor reale;
- $\mathbb{R}_{\underline{a}}$ – subspațiul abaterilor parametrilor matematici \underline{a} în vecinătatea valorii \underline{a}_0 ; $\Delta \underline{a} \in \mathbb{R}_{\underline{a}} \subset \mathbb{R}^q$;

- \mathbb{R}_ξ – subspațiul corespunzător abaterii mărimii caracteristice ξ ce descrie sistemul,
 $\Delta\xi \in \mathbb{R}_\xi \subset \mathbb{R}^p$;
- r.i.s.t. – realizare invariantă la semnal treaptă;
- s – variabila operațională a transformatei Laplace, \mathcal{L} ;
- SISO – Single Input Single Output – sistem monovariabil la intrare și la ieșire;
- SRA – Sistem de Reglare Automată;
- SRAN – Sistem de Reglare Automată Numeric;
- STC – Sistem în Timp Continuu;
- STD – Sistem în Timp Discret;
- $S_{\underline{\alpha}}^\xi(t; \underline{\alpha}_0)$, $S_{\underline{\alpha}}^\xi$ – matricea funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută ale vectorului ξ în raport cu vectorul $\underline{\alpha}$; S_{ij} - funcții de sensibilitate absolută, componentele matricei $S_{\underline{\alpha}}^\xi$; $S_{ij} : \mathfrak{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\bar{S}_{\underline{\alpha}}^\xi(t; \underline{\alpha}_0)$, $\bar{S}_{\underline{\alpha}}^\xi$ – matricea funcțiilor de sensibilitate parametrică relativă ale vectorului ξ în raport cu vectorul $\underline{\alpha}$; \bar{S}_{ij} - funcții de sensibilitate relativă, componentele matricei $\bar{S}_{\underline{\alpha}}^\xi$; $\bar{S}_{ij} : \mathfrak{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\tilde{S}_{\underline{\alpha}}^\xi(t; \underline{\alpha}_0)$, $\tilde{S}_{\underline{\alpha}}^\xi$ – matricea funcțiilor de sensibilitate parametrică semirelativă a vectorului ξ în raport cu vectorul $\underline{\alpha}$; \tilde{S}_{ij} - funcții de sensibilitate semirelativă, componentele matricei $\tilde{S}_{\underline{\alpha}}^\xi$; $\tilde{S}_{ij} : \mathfrak{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- \mathfrak{T} – mulțimea de timp, $t \in \mathfrak{T}$; t_0 – momentul inițial ; t_f – momentul final ; $\mathfrak{T} \subset \mathbb{R}$ – mulțimea de timp continuu; $\mathfrak{T} \subset \mathbb{Z}$ – mulțimea de timp discret; $\{kh\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \{k\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \{t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – convenție de notații referitoare la momentele de timp discret;
- \underline{u} – vectorul mărimilor de intrare, $\underline{u} \in \mathbb{R}^r$; r numărul mărimilor de intrare;
- v – mărime perturbatoare;
- w – mărime de conducere;
- \underline{x} – vectorul mărimilor de stare, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$; n ordinul sistemului;
- \underline{y} – vectorul mărimilor de ieșire, $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$; p numărul mărimilor de ieșire;
- z – variabila operațională a transformatei \mathcal{Z} ;
- \mathbb{Z} – mulțimea numerelor întregi;
- $\underline{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q]^T$ – vectorul parametrilor matematici ai unui sistem, parametrul abaterilor de tip α ; q - numărul parametrilor matematici;

$\underline{\alpha}_0$ – valoarea nominală a vectorului parametrilor matematici;

\emptyset - mulțimea vidă;

Δ – abatere, diferență; $\Delta \underline{a}$ – abaterea vectorului parametrilor fizici de la valoarea sa nominală;

$\Delta \underline{\alpha}$ – vectorul abatere a parametrilor matematici de la valoarea nominală $\underline{\alpha}_0$; $\Delta \underline{\alpha} = \underline{\alpha} - \underline{\alpha}_0$;

$\Delta \xi$ – abaterea mărimii caracteristice a sistemului de la traiectoria sa nominală $\xi_0(t, \underline{\alpha}_0)$;

λ – parametrul pentru cazul abaterilor de tip λ ;

λ – variabila operațională unificată, (de la caz la caz s sau z)¹;

$\underline{\lambda}$ – vectorul de sensibilitate de eșantionare;

$\xi(t; \underline{\alpha}) = [\xi_1(t; \underline{\alpha}), \xi_2(t; \underline{\alpha}), \dots, \xi_p(t; \underline{\alpha})]^T$ – mărime vectorială de variabilă independentă timp și de parametru $\underline{\alpha}$ care descrie sistemul, numită mărime caracteristică ;

$\xi_0(t; \underline{\alpha}_0)$ sau ξ_0 – mărimea ξ la valoarea nominală a parametrilor matematici;

ξ_0^0 – condiția inițială a mărimii ξ_0 ;

ζ, ζ - matrice (funcție) de sensibilitate de tip β ;

$\underline{\sigma}$ – matricea de sensibilitate absolută a ieșirii în raport cu $\underline{\alpha}$; $\underline{\sigma} \in M^{pq}$;

σ_{ij} – funcția de sensibilitate absolută a ieșirii y_i în raport cu parametrul α_j ;

$\Sigma_{\underline{\alpha}}$ – sistem dinamic (de parametri $\underline{\alpha}$) ; $\Sigma_{\underline{\alpha}_0}$ – sistem nominal (de parametri $\underline{\alpha}_0$);

τ – timp mort;

τ_c – timp de calcul;

χ – matricea de sensibilitate absolută a stării; $\chi \in M^{nq}$;

χ_{ij} – funcția de sensibilitate absolută a stării x_i în raport cu parametrul α_j ;

Convenții utilizate în teză

➤ Derivata unei mărimi vectoriale $\xi(t; \underline{\alpha})$ în raport cu componentele vectorului $\underline{\alpha}$

$$\frac{\partial \xi(t; \underline{\alpha})}{\partial \underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1(t; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1(t; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_p(t; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial \xi_p(t; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_q} \end{bmatrix}.$$

➤ Derivata unei matrice $\underline{A}(h)$ în raport cu parametrul h

$$\frac{\partial \underline{A}(h)}{\partial h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial h} & \dots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial h} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial h} & \dots & \frac{\partial a_{nn}}{\partial h} \end{bmatrix}.$$

¹ Se cuvine să precizez că acolo unde lucrurile se desfășoară în mod similar la sistemele în timp continuu și la cele în timp discret dacă mărimile sunt exprimate în domeniul timp atunci se consideră $te\mathbb{T}$ iar dacă mărimile sunt exprimate în domeniul operațional atunci variabila operațională utilizată este $\lambda \in \mathbb{C}$.

- În schemele bloc sunt reprezentate cu chenar dublu blocurile nelineare și cu chenar simplu blocurile lineare.
- În schemele bloc vectorii coloană înmulțesc întotdeauna matricele la dreapta, iar vectorii linie la stânga. Vectorii linie apar prin indicarea operației de transpunere.
- În schemele bloc în care apar atât mărimi în timp continuu cât și mărimi în timp discret diferențierea dintre ele se face prin bararea superioară a mărimilor în timp discret.
- În text, se folosește "§x.y" pentru referirea la paragraful (subcapitolul) "y" din capitolul "x".
- Notația relațiilor este de forma:
număr capitol.număr paragraf.număr sub...paragraf.x
unde x reprezintă numărul de ordine al relației din cadrul ultimului paragraf din listă.
- Notația figurilor este de forma:
număr capitol.număr paragraf.număr sub...paragraf-x
unde x reprezintă numărul de ordine al figurii din cadrul ultimului paragraf din listă.

INTRODUCERE

Investigarea sistemelor automate prin analiza de sensibilitate a modelelor folosite constituie o modalitate elegantă de explicare științifică a neajunsurilor lor și oferă o cale eficientă de îndepărtare a acestora.

Capitolul 1, introductiv, cuprinde §1.1 în care se motivează alegerea temei tezei și se prezintă principalele obiective propuse, §1.2 în care se face o scurtă trecere în revistă a literaturii de specialitate parcursă și §1.3 în care se prezintă sintetic modul de abordare a tematicii propuse pe parcursul celorlalte capitole, incluzând referiri la relațiile dintre ele și anexe. Capitolul se încheie cu "harta informațională", §1.4, un rezumat al conexiunilor dintre capitole și subcapitole.

1.1 Motivația alegerii temei și obiectivele propuse

Proiectarea sistemelor de reglare automată se face întotdeauna plecând de la un model matematic al procesului tehnic supus automatizării. Determinarea modelelor matematice ale proceselor tehnice se realizează prin metode de identificare și estimare a parametrilor [28]. Adeseori, în situația în care identificarea se face experimental, se presupune chiar și pentru procesele complexe, o structură de model linear și prin măsurători și calcule se estimează valorile evident aproximative ale parametrilor acesteia. În situația în care modelul se obține prin identificare analitică se apelează la legile fizice care descriu fenomenele din proces. Multe dintre ele sunt descrise prin relații matematice lineare care, de fapt, aproximează legi mai complicate¹. Prin urmare, indiferent de modul în care a fost obținut și de destinația sa, un model matematic, fie el linear sau nelinear, este întotdeauna incert.

Există și alte surse de incertitudine care "planează" asupra unui sistem. Valorile parametrilor² obținute prin proiectare se transpun în practică prin componente standardizate, ceea ce înseamnă că nu vor coincide întocmai cu cele rezultate din calcule. În timpul funcționării SRA pot să apară modificări ale parametrilor datorate modificărilor de temperatură sau a altor influențe de mediu sau chiar datorate "îmbătrânirii" componentelor. Uneori, mici modificări ale parametrilor au ca efect modificări de structură ale sistemului.

Abaterile sunt o măsură a incertitudinilor parametrice [55]. Influența abaterilor mici ale parametrilor este studiată de teoria sensibilității.

Analiza de sensibilitate este instrumentul ideal pentru a putea atinge precizia în sistemele industriale, pentru a asigura robustețea unor proprietăți și pentru a estima cauzele

¹ Exemple de legi fizice approximate prin expresii linearizate:

- în termodinamică, legea dilatației $l(T) = l(T_0) + c(T - T_0)$, lungimea unui obiect l variază cu temperatura T ;
- în ingineria mecanică, legea lui Hooke $F(l) = c(l - l_0)$, forța elastică F este proporțională cu alungirea resortului l ;
- în oceanografie, densitatea apei în jurul unui punct staționar se exprimă printr-o funcție lineară de temperatură, salinitate și presiune.

² Coeficienții din modelele matematice în formele canonice sunt *parametri matematici*. În descrierea analitică a fenomenelor fizice din sisteme apar coeficienți cu anumite semnificații fizice, denumiți *parametri fizici*.

care abat funcționarea unui sistem de la traiectoria dorită.

Astfel, necesitatea unui studiu de sensibilitate parametrică sau de structură este de necontestat. Aceasta face ca teoria sensibilității, deși apărută de mai bine de o jumătate de secol, să fie de actualitate și mereu utilă specialiștilor în automatică și ca urmare să dea naștere unor noi abordări științifice.

Teza își propune să dezvolte și să analizeze legăturile care există între abaterile parametrilor proceselor incluse în sisteme automate și comportarea în ansamblu a sistemelor automate. În acest sens cercetările sunt canalizate spre îndeplinirea următoarelor obiective:

- ✓ Analiza critică a metodelor existente de calcul și evaluare a sensibilității parametrice a sistemelor complexe cu structură fixă și elaborarea și dezvoltarea unor metode noi care să completeze modul de operare al teoriei sensibilității în automatică.
- ✓ Aplicarea analizei de sensibilitate directă la studierea comportării sistemelor de reglare automată în raport cu abaterile parametrice, cercetarea legăturii dintre sensibilitatea unui sistem complex și modificarea subsistemelor sale.
- ✓ Dezvoltarea unor direcții noi de aplicabilitate a analizei de sensibilitate cu evidențierea aspectelor procedurale finalizate până la nivelul programelor de simulare și prelucrare numerică a datelor.
- ✓ Cercetarea detaliată a metodelor cunoscute de aplicare a analizei de sensibilitate inversă și elaborarea de noi metode ale sensibilității inverse, aplicative, cu scopul determinării abaterilor parametrice din cadrul sistemelor de reglare automată.

1.2 Scurtă incursiune bibliografică

În domeniul tehnic noțiunea de *sensibilitate* în sensul său clasic³ a fost introdusă în 1945 de către H.W. Bode în lucrarea "*Network Analysis and Feedback Amplifier Design*", apărută la New York, [95] și a fost apoi extinsă de către I. Horowitz și M.L. Bykhovskii în anii 1950 [76].

În sistemele de reglare automată optimale, abaterile indicatorului de calitate datorate variațiilor parametrilor au fost studiate pentru prima dată cu ajutorul sensibilității clasice de către P. Dorato, în 1963 [79]. Începând cu 1964, Jose B. Cruz Jr. și William R. Perkins, au dezvoltat o mare parte a teoriei sensibilității cunoscute astăzi. Ei au generalizat noțiunea de sensibilitate la sistemele multivariabile și la cele nelineare și au introdus noțiunea de "sensibilitate de comparație" ("comparison sensitivity") [76].

Principalele noțiuni de teoria sensibilității în domeniul automaticii, abordate în literatură în perioada anilor '60 (și chiar înainte), sunt sintetizate de către Nguyen Thuong Ngo sub supervizarea lui Y. Z. Tszpkin în [76]. O veritabilă colecție de articole cu un conținut substanțial de teoria sensibilității aplicată în automatică este celebra carte "Feedback Systems" apărută în 1972 sub îngrijirea lui Jose B. Cruz Jr. cu contribuția lui Petar V. Kokotović, a lui Eliezer Kreindler, William R. Perkins, Irwin W. Sandberg și a lui Philip E. Sarachik, [17].

³ Dacă mărimea T depinde de parametrul a atunci sensibilitatea este dată de $S_a^T = \frac{\Delta T}{\Delta a} \cdot \frac{a}{T}$, relația lui Bode.

Metodele de determinare a funcțiilor de sensibilitate surprinse de-a lungul anilor în publicații [17], [43], [54], [96], [104], au reprezentat obiectivul major al primelor studii despre sensibilitate ale lui Wilkie și Perkins [110].

O serie de cercetări cu caracter aplicativ aleg structurile de reglare în funcție de rezultatele analizei de sensibilitate directă, [80], [102], [105], în timp ce altele, utilizează astfel de analize în faza de evaluare a performanțelor obținute [25], [35], [51], [59], [73].

Din noianul de lucrări bibliografice referitoare la problemele de reglare optimală, numeroase sunt articolele în care sunt abordate probleme de analiza sensibilității în diverse forme în sistemele de reglare automată. Astfel [10] se ocupă de influența parametrilor asupra convergenței algoritmilor optimali recursivi (de ex algoritmul Gauss-Newton) iar [109] abordează probleme de reglare optimală pentru sisteme cu parametri necunoscuți. Altele abordează pur și simplu probleme de conducere optimală bazate pe minimizarea unui indicator de calitate [10], [45], [63], [77] sau probleme de reglare robustă [19], [21], [98], [106].

Problema invarianței / insensibilității parametrice a fost îndeaproape cercetată de Barnett în [7] și de P.M.Frank și colaboratorii săi în numeroase lucrări referitoare la proiectarea observatoarelor de stare sau a altor componente insensibile la variații parametrice cu rolul de a fi integrate în sisteme de diagnosticare a componentelor defecte din sistemele de reglare automată [18], [44], [49], [94], [100], [111], [112], [113].

Legătura dintre metodele de diagnoză bazate pe sensibilitate și cele care folosesc sisteme fuzzy sau rețele neuronale și redundanță software este făcută în [20], [21], [31], [33], [34], [37], [60], [38], [41], [42].

Algoritmii de reglare cu sensibilitate redusă au constituit obiectivul articolelor [29], [81].

Sensibilitatea sistemelor variabile în timp este studiată de Newcomb și Anderson în [75] prin prisma teoriei distribuțiilor.

Stabilitatea sistemelor depinde de variațiile parametrilor. Cercetările din [71] au vizat modul în care abateri mici ale parametrilor influențează domeniile de stabilitate ale sistemelor de reglare automată.

Sensibilitatea sistemelor necontrolabile este abordată în [47].

De utilizarea sensibilității în domeniul frecvențelor s-a ocupat Sobral în [101].

Numeroase sunt cercetările aplicative privind estimarea parametrilor dinamici sau statici pe baza sensibilității [40], [48], [57], [58].

Un număr de 13 lucrări științifice ale autoarei (7 dintre ele ca unic autor) se ocupă de studiul sensibilității parametrice abordând teme ca:

- metode de determinare a funcțiilor de sensibilitate [23];
- analiza sensibilității în sistemele de reglare automată [89];
- analiza metodelor de discretizare aproximative [86];
- utilizarea teoriei sensibilității în sinteza sistemelor dinamice [93] sau autoadaptive [90];
- utilizarea teoriei sensibilității în sinteza sistemelor de reglare de tip dead-beat [87] (de această problemă s-a ocupat ulterior și C.Verde în [107]);
- aplicarea teoriei sensibilității la determinarea coordonatelor punctului de funcționare staționară [85];

- utilizarea analizei de sensibilitate și a filtrelor în sistemele tolerante la defecte [91], [92], [94];
- estimarea parametrilor prin analiza sensibilității inverse [82], [83], [84], [88].

Dintre cărțile care tratează teoria sensibilității în sistemele de reglare automată, de la definiții la aplicații, trebuie amintite: Rosenwasser, E.N., Yusupov, R.M., *Sensitivity of Automatic Control Systems*, CRC Press, 2000 [96] o reeditare a ediției mai vechi; Frank.P.M., *Empfindlichkeitsanalyse dynamischer Systeme*, R. Oldenbourg Verlag, 1976 [93]; Ungureanu, St., *Sensibilitatea sistemelor dinamice*, Editura Tehnică, 1988 [104].

Alte cărți din domeniul automatizării abordează anumite probleme de sensibilitate parametrică în capitole distincte. Astfel, în [28] sunt detaliate câteva metode de identificare a sistemelor folosind funcții de sensibilitate parametrică iar în [54] se prezintă aplicații ale teoriei sensibilității în diagnoza sistemelor.

1.3 Conținutul lucrării

Lucrarea este compusă dintr-un număr de 5 capitole, precedate de "indexul de notații" și urmate de un număr de 15 anexe.

Capitolul 1, Introducere, structurat pe trei paragrafe servește la motivarea alegerii temei, la trecerea în revistă a obiectivelor bogatei literaturi de specialitate parcurse și la explicarea pe scurt a principalelor aspecte abordate în celelalte capitole și anexe.

Capitolul 2, Aspecte de bază în analiza generală de sensibilitate, având ca obiectiv prezentarea celor mai importante noțiuni cu care operează teoria sensibilității este structurat pe șapte părți.

În §2.1 sunt prezentate principalele modalități de clasificare a problemelor de teoria sensibilității: astfel, în funcție de scopul rezultatului care trebuie găsit avem de-a face cu analiza sensibilității directe sau inverse, iar în funcție de cauzele care generează abateri există clasificarea Miller-Murray. Tot aici, sunt definite funcțiile de sensibilitate parametrică (asociate mărimilor caracteristice ale sistemelor continue și ale celor cu eșantionare) și abaterile calculabile prin intermediul acestora, măsurile de sensibilitate și se introduc două noțiuni noi: *funcția de sensibilitate de linearizare și abaterea la linearizare*, noțiuni necesare studiului din §3.3. De asemenea, în §2.1, sunt amintite definițiile funcțiilor de sensibilitate în domeniul operațional și ale abaterilor de ordinul al doilea.

Paragraful §2.2 este dedicat metodelor de bază, generale, directă și indirectă, care permit determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică ale sistemelor descrise prin modele matematice în diverse forme canonice. În acest paragraf se operează cu noțiuni cum ar fi: ecuații și modele de sensibilitate de ieșire și de stare, sistem combinat etc. Anexele I-IV completează afirmațiile din §2.2.

Sistemelor cu structuri complexe le sunt dedicate două metode: "metoda componentei incerte", descrisă în §2.3 (cu variante pentru sisteme lineare și sisteme nelineare), și "metoda punctelor de sensibilitate", detaliată în §2.4. O demonstrație originală a acestei metode este prezentată în Anexa V.

În cadrul §2.5, care tratează "sensibilitatea sistemelor cu eșantionare", se fac referiri atât la parametri matematici ai SRAN cât și la pasul de discretizare h . Referitor la acest subiect, în Anexa VI se deduce modelul de sensibilitate de eșantionare. Pe baza teoriei dezvoltate în ultima parte a §2.5 poate fi studiată influența timpului de calcul în SRAN.

Paragraful §2.6 este destinat "calculului numeric al funcțiilor de sensibilitate parametrică". Pe de-o parte sunt investigate modalitățile de soluționare a problemelor de sensibilitate parametrică prin intermediul mediilor matematice existente (MATLAB-SIMULINK în §2.6.1 și §2.6.2) iar pe de altă parte se încearcă generarea unor algoritme de calcul a funcțiilor de sensibilitate implementabile în orice limbaj de programare (§2.6.3 generează relații algoritmice implementate apoi prin 4 funcții C destinate calculului funcțiilor de sensibilitate parametrică în raport cu parametri matematici în cazul particular al sistemelor SISO). De această tematică aparțin și trei anexe. Anexa VII prezintă fișierele sursă a 4 noi *funcții* MATLAB care permit calculul anumitor funcții de sensibilitate parametrică. Anexa VIII este dedicată conceperii unui nou mini-produs software și utilizării sale la validarea celor 4 funcții C destinate calculului funcțiilor de sensibilitate parametrică (și implementate pe baza algoritmilor aproximative deduse în §2.5.3.1). Un studiu comparativ al principalelor metode de abordare a calculului numeric al funcțiilor de sensibilitate parametrică prezentate în §2.6 este realizat în Anexa IX.

În §2.7 sunt sintetizate principalele concluzii referitoare la capitolul 2.

Capitolul 3, Studii privind utilizarea analizei de sensibilitate directă în automatică, prezintă importante dezvoltări aplicative cu caracter general dar și o parte dintre cercetările concrete ale autoarei în domeniul analizei sensibilității directe a SRA. Este structurat pe patru părți.

Astfel, §3.1 vizează analiza de sensibilitate a structurii unui SRA în domeniul de pulsații prin prisma a două noțiuni diferite: funcția de sensibilitate de comparație (comparison sensitivity, §3.1.1) și funcția de sensibilitate Bode aferentă SRA (§3.1.2), care deși dau interpretări diferite au expresii identice (§3.1.3).

În §3.2 se face o analiză paralelă a sensibilității a 4 structuri de reglare automată cu frecvență ridicată de apariție în sistemele tehnice. Studiul este canalizat spre analiza sensibilității mărimilor caracteristice ale SRA în domeniul timp (§3.2.3), în domeniul de pulsații (§3.2.4) precum și a sensibilităților aferente ale unor parametri importanți ai unei bucle de reglare (§3.2.5). Anexa X completează analiza în domeniul timp iar Anexa XI detaliază calculul sensibilităților din §3.2.5.

Majoritatea sistemelor dinamice reale conduc la modele matematice nelineare. Pentru a putea face interpretări și studii analitice pe baza modelelor matematice s-au dezvoltat metode de linearizare a ecuațiilor nelineare dintre care cea mai utilizată este "metoda tangentei", [114]. §3.3 propune utilizarea analizei de sensibilitate la determinarea coordonatelor punctului de funcționare staționară folosit la linearizarea prin metoda tangentei a modelelor cu nelinearități neesențiale. Utilitatea acestui punct este explicată în §3.3.1. Stabilirea unui algoritm de calcul general al coordonatelor punctului staționar folosind un criteriu de performanță integral și funcții de sensibilitate este obiectivul §3.3.2. Modul efectiv de lucru cu algoritmul stabilit în §3.3.2 este explicat pe un exemplu în §3.3.3. Anexa XII completează cu programe MATLAB și o schemă Simulink studiul exemplului iar Anexa XIII propune noi direcții de cercetare pe aceeași temă.

În §3.4 sunt sintetizate principalele concluzii referitoare la capitolul 3.

Capitolul 4, Studii privind utilizarea analizei de sensibilitate inversă în automatică, are ca obiectiv central prezentarea problemei principale a analizei de sensibilitate inversă și abordează trei metode, una clasică și două noi, de soluționare a sa. Capitolul 4 este structurat pe patru părți.

În §4.1 sunt cercetate și dezvoltate metode teoretice cu caracter general, privitoare la estimarea abaterilor parametrilor unui proces de la valoarea lor nominală utilizând funcții de sensibilitate parametrică.

Două metode numerice noi, propuse în §4.1 sunt analizate comparativ cu versiunea numerică a metodei clasice, (descrisă și ea în §4.1), pe un sistem nelinear (dar linearizabil) în §4.2. Din punctul de vedere al prelucrării datelor de-a lungul celor două studii comparative au fost utilizate schemele de simulare și programele MATLAB prezentate în Anexa XIV (la §4.2.1) și în Anexa XV (la §4.2.2).

În §4.4 sunt punctate principalele concluzii referitoare la capitolul 4.

Capitolul 5, Contribuții personale și direcții de cercetare ulterioară, are drept scop, pe de o parte, marcarea reperelor noi prezentate în această lucrare iar, pe de altă parte, enunțarea de noi teme de cercetare în domeniul sensibilității sistemelor automate.

Paragraful §5.1, de concluzii finale, prezintă în mod sintetic cele mai importante concluzii care rezultă de pe urma cercetărilor efectuate în capitolele anterioare.

În §5.2 se evidențiază principalele contribuții personale ale autoarei la această lucrare iar în §5.3 sunt prezentate câteva din temele de cercetare care așteaptă un răspuns în viitor.

La final este enumerată **bibliografia** studiată pe parcurs, care a făcut posibilă abordarea unei astfel de teme de cercetare.

1.4 Harta informațională

În fig.1.4-1 se prezintă, printr-o schemă bloc, legăturile informaționale dintre capitolele și subcapitolele tezei. Figura are rolul de a sugera o privire de ansamblu asupra problematicii tezei.

Culoarea albastră indică paragraful care descrie obiectivele lucrării. Culoarele verde și orange se referă la cele două teme esențiale ale teoriei sensibilității iar culoarea mov indică părțile în totalitate (textul) sau parțial (semnele) originale ale lucrării.

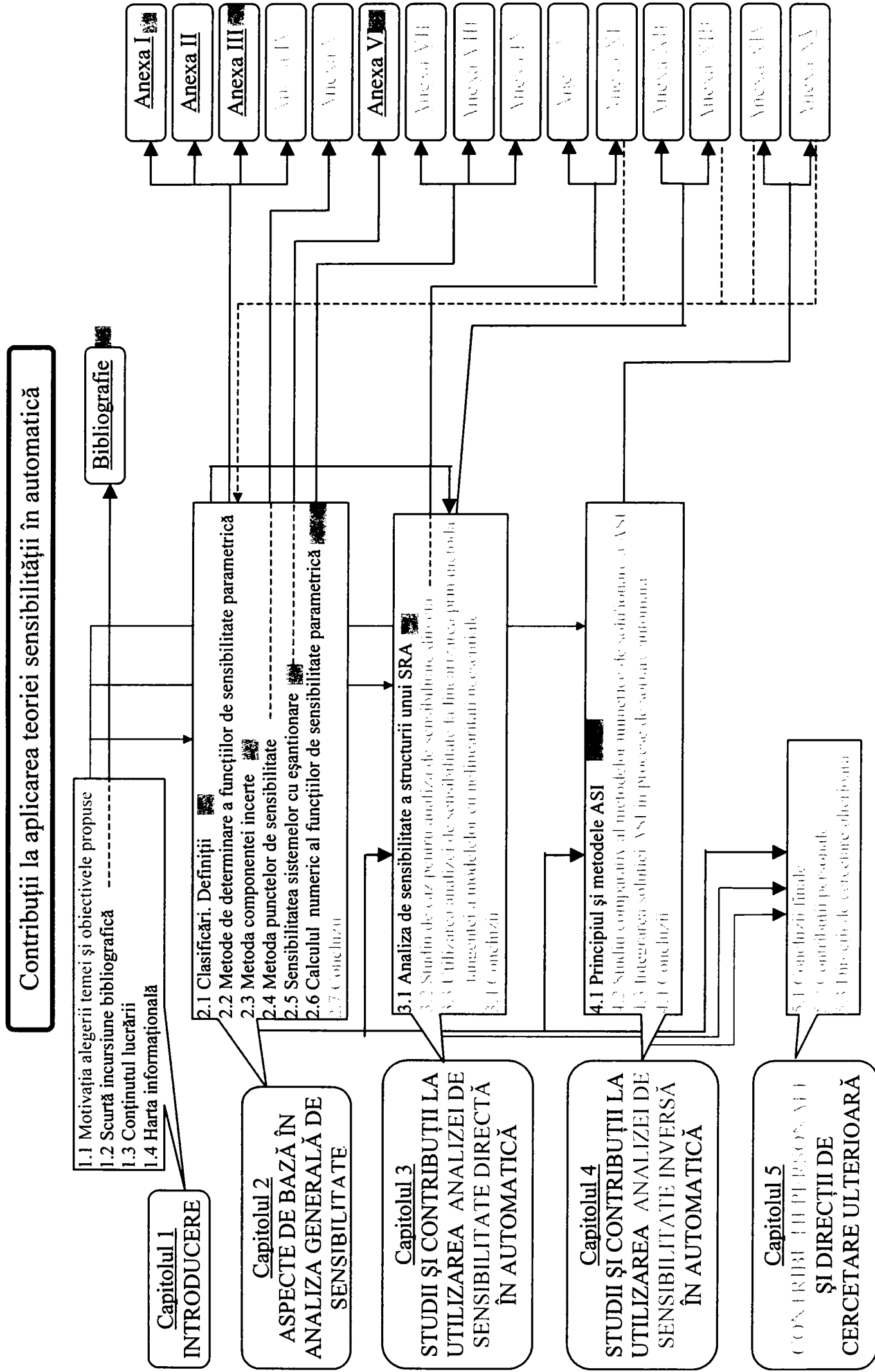


Fig.1.4-1 Harta informațională

ASPECTE DE BAZĂ ÎN ANALIZA GENERALĂ DE SENSIBILITATE

Scopul acestui capitol este de a prezenta metodele și instrumentele de lucru cu care poate opera teoria sensibilității atunci când este utilizată la aprecierea comportării unui sistem de reglare automată.

Teoria sensibilității este parte a teoriei sistemelor. Ea operează cu noțiuni și termeni specifici teoriei generale a sistemelor dar și cu o serie de noțiuni și termeni proprii. Termenii proprii teoriei sensibilității sunt trecuți în revistă în §2.1 în forma și cu notațiile specifice domeniului de automată.

Modalitățile de determinare a funcțiilor de sensibilitate parametrică diferă în funcție de forma modelului sistemului. Astfel, dacă sistemul este redat prin modele matematice în forma canonică sau care pot fi aduse în mod simplu la forma canonică, determinarea funcțiilor de sensibilitate se face cu metodele prezentate în §2.2.

Pentru sistemele lineare de ordin mare și pentru cele nelineare sau pentru sistemele la care aducerea la o anumită formă canonică este dificilă, se pot folosi metodele descrise în §2.3 și/sau în §2.4.

Un caz aparte îl reprezintă sistemele cu eșantionare, tratate în §2.5.

În §2.6 este tratată problema calculului numeric al funcțiilor de sensibilitate.

Principalele concluzii referitoare la aspectele dezvoltate sunt sintetizate în §2.7.

2.1 Clasificări. Definiții.

Obiectivul prezentului paragraf este de a explica terminologia specifică, utilizată în problematica tezei.

2.1.1 Modalități de abordare a problemelor de analiză a sensibilității sistemelor

Înainte de a utiliza un model matematic al unui sistem în diverse scopuri este necesar să se studieze dependența sa de anumite modificări care pot interveni cu privire la valorile parametrilor. În alte situații, în care apar abateri ale traiectoriilor mărimilor sistemului de la cele ideale este necesar să se determine cauzele care au determinat abaterile, [104], [54]. Un rol important în soluționarea acestor probleme revine analizei sensibilității sistemelor. *Analiza sensibilității sistemelor* este un instrument modern pentru aprofundarea cunoașterii comportării unui sistem de orice natură ar fi acesta: tehnic, economic, biologic, social ș.a. [105]. De pildă, în sensul de "sensibilitate parametrică" ea stabilește măsura în care anumite variații relativ mici ale parametrilor sau mărimilor influențează comportamentul unui sistem.

În funcție de tipul problemei pe care trebuie să o rezolve, analiza sensibilității sistemelor se poate clasifica în:

- Analiza sensibilității directe (ASD);
- Analiza sensibilității inverse (ASI).

Principial, prin ASD se determină influențele pe care le au asupra sistemului variațiile parametrilor sau variațiile stării inițiale. Prin ASI, pornind de la anumite modificări care apar în comportamentul sistemului se realizează o estimare a abaterilor parametrilor sau stărilor inițiale care au determinat aceste modificări. Așadar, prin termenul "direct" se indică sensul de la cauză la efect iar prin termenul "invers" sensul de la efect spre cauză. Este clar că dependențele nu sunt bijective și că practic injectivitatea este greu de utilizat. Se poate afirma că ASI rezolvă o problemă de identificare parametrică.

2.1.2 Clasificarea Miller-Murray

În general performanțele unui sistem dinamic pot fi modificate de diverse inexactități, variații sau abateri ce pot interveni cu privire la valorile parametrilor săi sau ale stării inițiale.

În funcție de cauzele care produc erori în sisteme, abaterile se clasifică în:

- Abateri de tip α - sunt abateri ale parametrilor de la valorile lor nominale, abateri care nu modifică ordinul sistemului;
- Abateri de tip β - sunt abateri ale condițiilor inițiale de la valorile lor nominale ;
- Abateri de tip λ (sau *structurale*) - sunt abateri ale parametrilor de la valorile lor nominale, $\lambda=0$, care modifică esențial tipul dinamicii unui sistem, structura și/sau ordinul sistemului.

Clasificarea de mai sus este cunoscută sub denumirea de *clasificarea Miller-Murray*, [43].

Lucrarea de față se referă numai la abateri de tip α cu precizarea că rezultatele se pot utiliza și la abateri de tip λ . Teza nu tratează decât în foarte mică măsură abateri de tip β .

2.1.3 Matrice și funcții de sensibilitate în domeniul timp

Fie $\underline{\alpha}=[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q]^T$ vectorul parametrilor unui sistem (Σ). Presupunem că comportarea sistemului poate fi caracterizată printr-o mărime vectorială ξ căreia în regimuri dinamice îi corespund funcțiile $\xi(t;\underline{\alpha}) = [\xi_1(t;\underline{\alpha}), \xi_2(t;\underline{\alpha}), \dots, \xi_p(t;\underline{\alpha})]^T$, $t \in \mathcal{T}$. Atunci când aceste funcții sunt răspunsuri ale sistemului (Σ) la intrări $\underline{u}(t)$ bine precizate, ele sunt numite funcții caracteristice ale sistemului (fig.2.1.3-1).

Fie Σ_0 un model al sistemului, corespunzător unei estimări $\underline{\alpha}_0$ a parametrilor. El se numește model nominal. Diferența dintre valorile parametrilor sistemului real și cele ale modelului nominal

$$\Delta \underline{\alpha} = \underline{\alpha} - \underline{\alpha}_0, \Delta \underline{\alpha} \in \mathbb{R}_\alpha \tag{2.1.3.1}$$

este denumită abatere a parametrilor de la valoarea lor nominală.

Estimarea incorectă a parametrilor face ca între

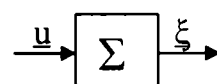


Fig.2.1.3-1 Sistem

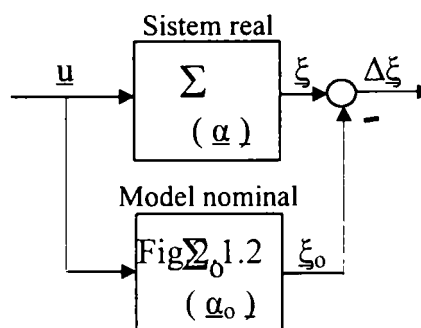


Fig.2.1.3-2 Variația parametrilor de la valorile nominale determină abaterea mărimii caracteristice de la valoarea nominală.

realitate și model să apară o diferență a vectorului real $\underline{\xi}(t; \underline{\alpha})$ de la valoarea sa nominală $\underline{\xi}_0(t; \underline{\alpha}_0)$, (fig.2.1.3-2.)

$$\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) = \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) - \underline{\xi}_0(t; \underline{\alpha}_0), \Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) \in \mathbb{R}_{\xi}^{\xi}. \quad (2.1.3.2)$$

Pentru această diferență, prin dezvoltarea în serie Taylor a expresiei mărimii vectoriale $\underline{\xi}(t; \underline{\alpha})$, (presupunând că $\underline{\xi}: \mathfrak{T} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ este continuă și derivabilă în raport cu componentele $\alpha_j, j=1, q$ ale vectorului parametrilor), în vecinătatea traiectoriei nominale $\underline{\xi}_0(t; \underline{\alpha}_0)$, se obține relația

$$\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) = S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} + R(\Delta \underline{\alpha}), \quad (2.1.3.3)$$

în care termenul $R(\Delta \underline{\alpha})$ înglobează termenii de ordin superior în raport cu $\Delta \underline{\alpha}$.

Pornind de la această relație s-au dezvoltat două teorii [76].

▪ *Teoria invarianței*¹. Dezvoltată inițial pentru abateri mari ale parametrilor de la valoarea nominală, teoria invarianței operează în principiu cu două noțiuni echivalente [7]:

$$\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) = 0, \quad \forall \Delta \underline{\alpha}, \quad \forall t \in \mathfrak{T} - \text{invarianța parametrică} \quad (2.1.3.4)$$

$$S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \equiv 0 - \text{sensibilitatea nulă.} \quad (2.1.3.4')$$

Pentru abateri mici ale parametrilor "invarianța parametrică" este denumită "insensibilitate parametrică" [7], [36], [39], [43].

▪ *Teoria sensibilității*. Pentru abateri mici ale parametrilor, într-o primă aproximație, lineară, diferenței din (2.1.3.2), i se atribuie prin teoria sensibilității sistemelor dinamice [43], [50], [54], [104], relația

$$\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) = S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha}, \quad (2.1.3.5)$$

unde $S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0)$ reprezintă *matricea funcțiilor de sensibilitate* ale cărei componente sunt *funcții de sensibilitate parametrică absolută*. Relația (2.1.3.5) s-a obținut din (2.1.3.3) prin reținerea termenilor doar până la gradul întâi, inclusiv, în raport cu $\Delta \underline{\alpha}$, [97]. Din acest motiv relația (2.1.3.5) este valabilă numai pentru abateri mici ale parametrilor.

Principial, relația (2.1.3.5) permite pe de-o parte determinarea influențelor pe care abaterile parametrilor de la valorile nominale, $\Delta \underline{\alpha}$, le au asupra evoluției în timp a abaterii $\Delta \underline{\xi}$ a mărimii caracteristice a sistemului de la traiectoria sa nominală, iar pe de altă parte permite estimarea abaterilor parametrilor care au condus la abaterea mărimii caracteristice a sistemului de la traiectoria sa nominală, (vezi §2.1.1).

Principalele funcții de sensibilitate parametrică precum și abaterile ce pot fi determinate cu ajutorul acestora, se definesc după cum urmează:

- **Definiție** - Se numește *funcție de sensibilitate absolută a mărimii caracteristice* $\xi_i(t; \underline{\alpha})$ în raport cu parametrul α_j , pentru $\underline{\alpha}$ de valoare nominală $\underline{\alpha}_0$, aplicația $S_{ij}: \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$,

¹ Teoria invarianței nu face obiectul prezentei lucrări.

$$S_{ij}(t; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial \xi_i(t; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = S_{\alpha_j}^{\xi_i}, \quad i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}. \quad (2.1.3.6)$$

S_{ij} sunt componentele matricei $S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0)$ din relația (2.1.3.5).

- **Definiție** - Se numește funcție de sensibilitate relativă a mărimii caracteristice $\xi_i(t; \underline{\alpha})$ în raport cu parametrul α_j , pentru $\underline{\alpha}$ de valoare nominală $\underline{\alpha}_0$, aplicația $\bar{S}_{ij} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{S}_{ij}(t; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial \ln \xi_i(t; \underline{\alpha})}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = \bar{S}_{\alpha_j}^{\xi_i}, \quad i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}. \quad (2.1.3.7)$$

Utilizarea funcției \ln în definiția (2.1.3.7) este formală. În realitate, între funcțiile definite prin relațiile (2.1.3.6) și (2.1.3.7) este utilizată legătura

$$\bar{S}_{ij}(t; \underline{\alpha}_0) = \frac{\alpha_{j0}}{\xi_{i0}} \cdot S_{ij}(t; \underline{\alpha}_0), \quad i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}. \quad (2.1.3.8)$$

- **Definiție** - Se numește funcție de sensibilitate semirelativă a mărimii caracteristice $\xi_i(t; \underline{\alpha})$ în raport cu parametrul α_j , pentru $\underline{\alpha}$ de valoare nominală $\underline{\alpha}_0$, aplicația $\tilde{S}_{ij} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{S}_{ij}(t; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial \ln \xi_i(t; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = \tilde{S}_{\alpha_j}^{\xi_i}(t; \underline{\alpha}_0), \quad i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}. \quad (2.1.3.9)$$

Între funcțiile definite prin relațiile (2.1.3.6) și (2.1.3.9) există legătura

$$\tilde{S}_{ij}(t; \underline{\alpha}_0) = \frac{1}{\xi_{i0}} \cdot S_{ij}(t; \underline{\alpha}_0), \quad i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}. \quad (2.1.3.10)$$

- **Definiție** - Se numește abatere absolută a traiectoriei mărimii caracteristice $\xi_i(t; \underline{\alpha})$ a sistemului de la traiectoria nominală $\xi_{i0}(t; \underline{\alpha}_0)$ datorată abaterilor $\Delta \alpha_j$ ale parametrilor $\alpha_j, j = \overline{1, q}$ de la valorile lor nominale $\alpha_{j0}, j = \overline{1, q}$ expresia

$$\Delta \xi_i(t; \underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^q S_{ij}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \alpha_j, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2.1.3.11)$$

- **Definiție** - Se numește abatere relativă a traiectoriei mărimii caracteristice $\xi_i(t; \underline{\alpha})$ a sistemului de la traiectoria nominală $\xi_{i0}(t; \underline{\alpha}_0)$ datorată abaterilor $\Delta \alpha_j$ ale parametrilor $\alpha_j, j = \overline{1, q}$ de la valorile lor nominale $\alpha_{j0}, j = \overline{1, q}$ expresia

$$\frac{\Delta \xi_i(t; \underline{\alpha})}{\xi_{i0}} = \sum_{j=1}^q \bar{S}_{ij}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \frac{\Delta \alpha_j}{\alpha_{j0}}, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2.1.3.12)$$

Datorită modului de definire a funcțiilor de sensibilitate, operarea cu aceste funcții se supune regulilor calculului diferențial.

- ♦ Este necesar să se precizeze că parametri matematici ai unui sistem (componentele vectorului $\underline{\alpha}$) sunt la rândul lor funcții de parametri fizici ai sistemului. Fie $\underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_1]^T$

vectorul parametrilor fizici ai sistemului iar \underline{a}_0 valoarea sa nominală. Dependența menționată se exprimă prin relații de forma

$$\alpha_j = \alpha_j(a_1, a_2, \dots, a_l), \quad j = \overline{1, q}. \quad (2.1.3.13)$$

Abateră $\Delta \underline{a}$ a vectorului parametrilor fizici de la valoarea sa nominală \underline{a}_0 cauzează în sistem erori $\Delta \underline{\xi}(t; \underline{a})$ ce pot fi calculate fie utilizând matricea funcțiilor de sensibilitate în raport cu parametri fizici, $S_{\underline{a}}^{\underline{\xi}}$, fie utilizând matricea funcțiilor de sensibilitate în raport cu parametri matematici și dependențele între parametri fizici și cei matematici din relația (2.1.3.13)

$$\Delta \underline{\xi}(t; \underline{a}) = S_{\underline{a}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{a}_0) \cdot \Delta \underline{a} = \sum_{j=1}^l S_{\underline{a}_j}^{\underline{\xi}}(t; \underline{a}_0) \cdot \Delta a_j = \sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=1}^q S_{\alpha_i}^{\underline{\xi}}(t; \underline{a}_0) \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial a_j} \Big|_{\underline{a}=\underline{a}_0} \right) \cdot \Delta a_j. \quad (2.1.3.14)$$

♦ Mărimea vectorială $\underline{\xi}(t; \underline{a})$ care descrie comportarea dinamică a unui sistem poate fi mărimea de la ieșirea sistemului $\underline{y}(t; \underline{a})$ sau vectorul ce descrie starea sistemului $\underline{x}(t; \underline{a})$. Diferențierea se face prin notație.

- **Definiție** - Se numește funcție de sensibilitate absolută a ieșirii y_i în raport cu parametrul a_j , pentru \underline{a} de valoare nominală \underline{a}_0 , derivata parțială

$$\sigma_{ij}(t; \underline{a}_0) = \frac{\partial y_i(t; \underline{a})}{\partial a_j} \Big|_{\underline{a}=\underline{a}_0} = S_{\alpha_j}^{y_i}(t; \underline{a}_0), \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q}. \quad (2.1.3.15)$$

$\sigma_{ij}(t; \underline{a}_0)$ sunt componentele matricei de sensibilitate absolută a ieșirii, $\underline{\sigma}(t; \underline{a}_0)$, definită de relația

$$\underline{\sigma}(t; \underline{a}_0) = S_{\underline{a}}^{\underline{y}}(t; \underline{a}_0). \quad (2.1.3.16)$$

- **Definiție** - Se numește funcție de sensibilitate absolută a stării x_i în raport cu parametrul a_j , pentru \underline{a} de valoare nominală \underline{a}_0 , derivata parțială

$$\chi_{ij}(t; \underline{a}_0) = \frac{\partial x_i(t; \underline{a})}{\partial a_j} \Big|_{\underline{a}=\underline{a}_0} = S_{\alpha_j}^{x_i}(t; \underline{a}_0), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, q}. \quad (2.1.3.17)$$

$\chi_{ij}(t; \underline{a}_0)$ sunt componentele matricei de sensibilitate absolută a stării, $\underline{\chi}(t; \underline{a}_0)$, definită de relația

$$\underline{\chi}(t; \underline{a}_0) = S_{\underline{a}}^{\underline{x}}(t; \underline{a}_0). \quad (2.1.3.18)$$

♦ La sistemele nelineare cu nelinearități neesențiale la care modelul nelinear este înlocuit cu unul linearizat în vecinătatea unui punct de funcționare staționară $\Lambda_0 = \Lambda(\underline{u}_0, \underline{\xi}_0)$, erorile care apar între comportarea modelului linear și cel nelinear datorate variației punctului de linearizare sunt surprinse prin două noțiuni noi și anume matricea (funcția) de sensibilitate de linearizare și respectiv abaterea la linearizare. Vectorul parametrilor este de această dată $\underline{\xi}_0$, adică vectorul coordonatelor punctului de linearizare în spațiul mărimii caracteristice $\underline{\xi}$.

- **Definiție** - Se numește matrice (funcție) de sensibilitate de linearizare a mărimii caracteristice ξ_L a modelului linearizat în raport cu parametrul de linearizare ξ_0 de valoare nominală ξ_{00} , aplicația $S_L: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S_L(t; \xi_0) = \left. \frac{\partial \xi_L(t; \xi_0)}{\partial \xi_0} \right|_{\xi_0 = \xi_{00}} \quad (2.1.3.19)$$

- **Definiție** - Se numește abatere la linearizare a traiectoriei mărimii caracteristice ξ_L a modelului linearizat de la traiectoria nominală ξ_N a modelului nelinear datorată abaterii parametrului de linearizare ξ_0 de la valoarea sa nominală, expresia

$$\Delta \xi_L(t; \xi_0) = \xi_L(t; \xi_0) - \xi_N(t) \quad (2.1.3.20)$$

Între definițiile date prin relațiile (2.1.3.19) și (2.1.3.20) există legătura

$$\Delta \xi_L(t; \xi_0) = S_L(t; \xi_0) \cdot \Delta \xi_0, \quad \Delta \xi_0 = \xi_0 - \xi_{00} \quad (2.1.3.21)$$

2.1.4 Măsurile de sensibilitate

Funcțiile de sensibilitate sunt utilizate pentru caracterizarea temporal-locală a sensibilității unui sistem. Trecerea de la o caracterizare temporal-locală la o caracterizare globală trebuie să se realizeze cu conservarea energiei informaționale [78]. Pentru aceasta se introduc noțiuni noi care păstrează proprietățile în ceea ce privește sensibilitatea sistemului. Ele se cunosc sub denumirea de *măsurile de sensibilitate* [43].

Două dintre cele mai cunoscute măsuri de sensibilitate se determină astfel:

- Se asociază variației vectorului de sensibilitate, al mărimii caracteristice ξ a sistemului ca măsură de sensibilitate o funcțională care elimină dependența de variabila independentă timp sau frecvență.

Un exemplu de o astfel de funcțională este cea definită de expresia integrală:

$$I_M = \int_{t_0}^{t_f} \left(S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0) \right)^T \underline{Q} S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0) dt, \quad (2.1.4.1)$$

unde $S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0)$ este vectorul de sensibilitate, \underline{Q} este o matrice de ponderare, simetrică, pozitiv definită iar $[t_0, t_f]$ este intervalul de timp în care se urmărește sensibilitatea sistemului.

- În cazul unei proiectări optimale care vizează minimizarea unui indicator de calitate pătratic, dependent de vectorul parametrilor, $J(\underline{\alpha})$, *sensibilitatea indicatorului de calitate*, $J_{\underline{\alpha}}$, se definește ca fiind derivata parțială:

$$J_{\underline{\alpha}} = \left. \frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \underline{\alpha}} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} \quad (2.1.4.2)$$

La modul general indicatorul de calitate pătratic J (în particular cel definit de (2.1.4.1)) este un criteriu integral global, [56], care ține seama de abaterea mărimii caracteristice a sistemului de la traiectorie sa nominală, prin urmare sensibilitatea indicatorului de calitate, $J_{\underline{\alpha}}$, poate fi considerată o măsură de sensibilitate.

2.1.5 Sensibilitatea sistemelor cu eșantionare

În cazul sistemelor de reglare numerică, valoarea pasului de discretizare h , ca și abaterea acestuia față de valoarea nominală h_0 (valoarea de proiectare a SRAN), influențează atât indicatorii de calitate cât și rezultatele proiectării și implementării.

Următoarele două definiții trebuie precedate de anumite precizări.

Fie STC linear

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2.1.5.1)$$

și STD obținut din (2.1.5.1) ca r.i.s.t. pentru un pas de discretizare h_0

$$\begin{cases} \bar{x}(t+1) = A_d \cdot \bar{x}(t) + B_d \cdot \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C \cdot \bar{x}(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}). \quad (2.1.5.2)$$

Comportarea sistemului în timp continuu inserat într-un sistem în timp discret poate fi descrisă la momentele de eșantionare prin modelul matematic (2.1.5.2)

$$\begin{cases} x(kh) = \bar{x}(k), \\ y(kh) = \bar{y}(k), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.1.5.3)$$

și între momentele de eșantionare prin modelul matematic (2.1.5.1).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot \bar{u}(t), & x(kh) = \bar{x}(k) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot \bar{u}(t), \end{cases} \quad t \in (kh, (k+1)h). \quad (2.1.5.3')$$

Sensibilitatea mărimii caracteristice ξ în raport cu parametrul h este caracterizată la momentele de discretizare $th_0, t \in \mathbb{Z}$, de vectorul de sensibilitate de eșantionare $\underline{\lambda}(t; h_0), t \in \mathbb{Z}$.

- **Definiție** - Se numește vector de sensibilitate de eșantionare, derivata

$$\underline{\lambda}(t; h_0) = \left. \frac{d\xi(th)}{dh} \right|_{h=h_0} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\xi[t(h_0 + \Delta h)] - \xi(th_0)}{\Delta h}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.5.4)$$

Între momentele de discretizare $\{th_0 \mid t \in \mathbb{Z}\}$, sensibilitatea mărimii caracteristice ξ în raport cu parametrul h este caracterizată de vectorul de sensibilitate de eșantionare continuu $\underline{\lambda}(t; h_0), t \in \mathbb{R} \setminus \{kh_0, k \in \mathbb{Z}\}$.

- **Definiție** - Se numește vector de sensibilitate de eșantionare continuu, derivata:

$$\underline{\lambda}(th_0 + \tau) = \left. \frac{\partial \xi(th + \tau)}{\partial h} \right|_{h=h_0}, \quad \tau \in (0, h), \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.5.5)$$

Termenul "continuu" din definiția anterioară se referă la faptul că mărimea caracteristică ξ este o mărime continuă în raport cu variațiile pasului de discretizare.

2.1.6 Funcții de sensibilitate în domeniul operațional

În cazul sistemelor lineare invariante în timp, dinamica unui sistem poate fi descrisă prin matricea de transfer, $H(s, \underline{\alpha})$. La sistemele SISO, matricea de transfer are o singură componentă denumită funcție de transfer. Pentru sistemele SISO, Bode a introdus în 1945 funcția de sensibilitate care îi poartă numele.

- **Definiție** - Se numește funcție de sensibilitate Bode expresia ¹

$$S_{\alpha_i}^H(s; \underline{\alpha}_0) = \frac{\partial H(s; \underline{\alpha})/H(s; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_i / \alpha_i} \Big|_{\underline{\alpha}_0} = \frac{\partial \ln H(s; \underline{\alpha})}{\partial \ln \alpha_i} \Big|_{\underline{\alpha}_0} \quad (2.1.6.1)$$

La sistemele complexe, la care de vectorul parametrilor nu depind toate subsistemele componente, noțiunea de sensibilitate Bode poate fi extinsă în mod formal, utilizând în locul parametrului α_i una din componentele variabile ale funcției de transfer care la rândul său depinde de vectorul parametrilor, de ex. $H_i(s; \underline{\alpha})$, [63], [66]. O tratare de acest tip este cea prezentată în §3.1.2.

Pentru compararea sistemelor, relativ la sensibilitatea parametrică în domeniul pulsațiilor, este posibil să se folosească funcția

$$S_{\alpha_i}^H(j\omega, \underline{\alpha}_0) = S_{\alpha_i}^H(s, \underline{\alpha}_0) \Big|_{s=j\omega} \quad (2.1.6.2)$$

sau componente ale sale [96].

Plecând de la funcția de sensibilitate Bode, Horowitz a redefinit-o astfel încât să se poată aplica pentru abateri cu valori arbitrare ale parametrilor:

- **Definiție** - Se numește funcție de sensibilitate Horowitz expresia

$$S_{\alpha_i}^H(s; \underline{\alpha}) = \frac{\Delta H(s; \underline{\alpha})/H(s; \underline{\alpha})}{\Delta \alpha_i / \alpha_i} = \frac{[H(s; \underline{\alpha}) - H(s; \underline{\alpha}_0)]/H(s; \underline{\alpha})}{(\alpha_i - \alpha_{i0})/\alpha_i} \quad (2.1.6.3)$$

Depinzând simultan de α_i și de α_{i0} , funcția de sensibilitate Horowitz este greu de manipulat, motiv care o face doar să fie amintită în literatura de specialitate.

Funcțiile de sensibilitate Bode și Horowitz sunt valabile numai la sistemele lineare monovariabile la intrare și ieșire, invariante în timp. Generalizând, pentru sistemele lineare multivariabile la intrare și ieșire, Perkins a introdus o matrice de sensibilitate comparativă care reflectă modul în care reacția negativă reduce efectele abaterilor parametrilor de la valorile lor nominale [43].

2.1.7 Abateri de ordinul al II-lea

În scopul ridicării preciziei analizei sistemelor cu ajutorul funcțiilor de sensibilitate se pot introduce în relația (2.1.3.5) termenii de gradul al doilea. Este evident faptul că relațiile care se obțin sunt extrem de complicate (conțin derivate ale matricei jacobiene a vectorului de funcții $\xi(t, \underline{\alpha})$ în raport cu componentele vectorului $\underline{\alpha}$, [15], [16]) și pot fi utilizate în mod concret doar în cazuri simple, de exemplu în situația în care mărimea care descrie

¹ Utilizarea funcției logaritmice asupra numerelor complexe face obiectul mai multor lucrări, de ex. [15], motiv pentru care nu există restricții asupra relației (2.1.6.1) de mai sus.

comportarea sistemului, $\xi(t, \underline{\alpha})$, este scalară. În acest caz se poate utiliza relația

$$\Delta \xi(t; \underline{\alpha}) = \sum_{i=1}^q \left. \frac{\partial \xi(t; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot \Delta \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \left. \frac{\partial^2 \xi(t; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot \Delta \alpha_i \Delta \alpha_j \quad (2.1.7.1)$$

Dacă se compară relațiile (2.1.7.1) și (2.1.3.3) se remarcă faptul că ar putea fi posibilă asimilarea termenului $R(\Delta \underline{\alpha})$ din (2.1.3.3) cu al doilea termen din membrul drept al relației (2.1.7.1). Cum însă relația (2.1.3.3) este utilizabilă pentru abateri mari iar relația (2.1.7.1) pentru abateri mici apare problema “Cât de mari sau cât de mici pot fi abaterile investigate cu relația (2.1.7.1)?”, [50].

2.2 Metode de determinare a funcțiilor de sensibilitate parametrică

Conform celor prezentate în paragraful anterior se poate afirma că expresia cantitativă a sensibilității o reprezintă funcția de sensibilitate. Acest paragraf prezintă metodele utilizate la determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică pentru sistemele cunoscute prin modele matematice în formele canonice. Pentru alte situații există alte metode, prezentate în §2.3 și §2.4.

Relația (2.1.3.3) arată că determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută este esențială în calculul abaterilor mărimilor caracteristice de la valorile lor nominale, abateri cauzate de variații ale parametrilor de la valorile lor nominale.

Metoda de determinare a funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută ale unui sistem este cea a utilizării *ecuațiilor de sensibilitate*.

Ecuațiile de sensibilitate ale unui sistem în raport cu parametrul α_i se obțin prin derivarea ecuațiilor modelului matematic al sistemului în raport cu parametrul α_i în jurul valorii nominale a vectorului parametrilor. Pentru determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută este necesară rezolvarea simultană a ecuațiilor de sensibilitate și a ecuațiilor modelului matematic al sistemului la valorile nominale ale parametrilor.

Principial, există două metode de rezolvare a acestora: o metodă bazată pe calcul analitic, prin care se obține o formulă explicită pentru imaginea operațională a funcțiilor de sensibilitate, denumită *metoda de calcul direct*, prezentată în §2.2.1, și o metodă bazată pe principii de calcul numeric, denumită *metoda de calcul indirect* sau *metoda structurală*, prezentată în §2.2.2.

➤ Metoda de calcul direct² – constă în rezolvarea pe cale *analitică* a sistemului de ecuații format din modelul matematic al sistemului la valorile nominale ale parametrilor și din ecuațiile de sensibilitate. Această variantă este dificilă și practic nu se utilizează decât în situațiile în care sistemul este simplu, descris prin modele lineare care permit calculul matricei de transfer iar funcțiile de sensibilitate care interesează sunt cele ale mărimilor de ieșire.

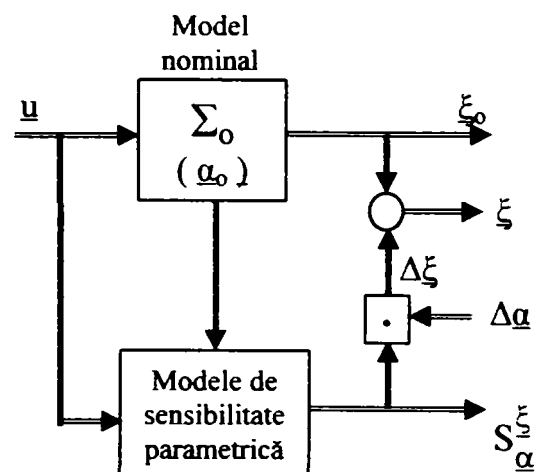


Fig.2.2-1 Sistem combinat

² Valabilă pentru sistemele lineare descrise prin f.d.t. (SISO) sau matrice de transfer (MIMO).

- **Metoda structurală** – constă în implementarea printr-o schemă de simulare¹, a unui model nominal al sistemului împreună cu modelele de sensibilitate. La ieșirile modelelor de sensibilitate se vor "măsura" funcțiile de sensibilitate parametrică absolute. Metoda este ușor de utilizat chiar și în cazul sistemelor complexe.

Prin *model de sensibilitate* în raport cu parametrul α_i , se înțelege un sistem descris matematic de ecuațiile de sensibilitate în raport cu parametrul α_i . Pentru un sistem care are q parametri vom avea q modele de sensibilitate parametrică, câte unul în raport cu fiecare parametru. Evident, ele pot fi asamblate într-un model multivariabil

Modelul nominal al sistemului și modelele de sensibilitate parametrică formează împreună *sistemul combinat*, fig.2.2-1.

2.2.1 Metoda de calcul direct al funcțiilor de sensibilitate absolută

Metoda este ușor de utilizat la determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică corespunzătoare mărimii caracteristice de la ieșirea unui sistem linear, continuu sau în timp discret, de tip SISO. Ea poate fi aplicată în mod similar și la determinarea funcțiilor de sensibilitate ale oricărei mărimi din sistem dacă se cunoaște o dependență operațională între intrarea sistemului și acea mărime. Întrucât majoritatea calculelor se fac în domeniul operațional metoda poate fi folosită și la sistemele lineare de tip MIMO.

Fie sistemul SISO având vectorul parametrilor $\underline{\alpha}$ de valoare nominală $\underline{\alpha}_0$, descris prin f.d.t. $H(\lambda; \underline{\alpha})$. La intrarea sistemului se aplică un semnal a cărui imagine operațională este $u(\lambda)$. La ieșirea sistemului, în domeniul operațional, în condiții inițiale nule există relația, [4]:

$$y(\lambda; \underline{\alpha}) = H(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot u(\lambda) \quad (2.2.1.1)$$

Pentru determinarea ecuațiilor operaționale de sensibilitate în raport cu parametri $\alpha_j, j = \overline{1, q}$ se derivează relația (2.2.1.1) în raport cu fiecare parametru $\alpha_j, j = \overline{1, q}$, în vecinătatea lui $\underline{\alpha}_0$. Imaginea operațională a funcției de sensibilitate absolută a mărimii de ieșire în raport cu parametrul $\alpha_j, j = \overline{1, q}$ este

$$\sigma_j(\lambda; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(\lambda), \quad j = \overline{1, q} \quad (2.2.1.2)$$

În (2.2.1.2) factorii $\left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0}$, $j = \overline{1, q}$ reprezintă cele q f.d.t. ale modelelor de sensibilitate parametrică a ieșirii. Relațiilor (2.2.1.2) li se aplică transformata operațională inversă obținându-se funcțiile de sensibilitate absolută ale mărimii de ieșire în domeniul timp

$$\sigma_j(t; \underline{\alpha}_0) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(\lambda) \right\}, \quad j = \overline{1, q} \quad (2.2.1.3)$$

Deși prezintă avantaje evidente (nu introduce erori, foarte rar calculul funcției inverse din (2.2.1.3) poate ridica probleme) metoda de calcul direct este puțin utilizată datorită limitării sale la sistemele lineare.

¹ Cel mai comod într-un mediu de programare și simulare numerică, de pildă MATLAB-Simulink.

2.2.2 Metoda indirectă de determinare a funcțiilor de sensibilitate

Metoda indirectă prezintă avantajul că nu necesită cunoașterea expresiilor analitice ale funcțiilor de sensibilitate. În funcție de informațiile pe care le avem despre sistem, de tipul modelului matematic disponibil, precum și de funcțiile de sensibilitate cerute, metoda poate îmbrăca diverse forme. Astfel în §2.2.2.1 se arată cum se pot obține funcțiile de sensibilitate absolută ale mărimii de la ieșirea unui sistem SISO descris prin MM-II. Dacă sistemul este de tip MIMO, aplicarea metodei din §2.2.2.1 este dificilă pe baza MM-II și de aceea se preferă folosirea MM-ISI atât pentru furnizarea funcțiilor de sensibilitate absolută de stare cât și pentru furnizarea funcțiilor de sensibilitate absolută de ieșire. Pentru cazul utilizării MM-ISI metoda este prezentată în §2.2.2.2.

2.2.2.1 Modele de sensibilitate de ieșire

Se numesc modele de sensibilitate de ieșire modelele destinate determinării funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută ale mărimilor de ieșire. La un sistem MIMO, funcțiile de sensibilitate absolută $\sigma_{ij}(t; \underline{\alpha}_0) = S_{\alpha_j}^{y_i}(t; \underline{\alpha}_0)$ ale mărimii de ieșire y_i în raport cu parametrii $\alpha_j, j = \overline{1, q}$ se utilizează în principal la calculul abaterilor $\Delta y_i(t, \underline{\alpha}_0)$ ale mărimii de ieșire y_i de la traiectoriile nominale, abateri cauzate de abaterile $\Delta \alpha_j, j = \overline{1, q}$ ale parametrilor de la valorile nominale

$$\Delta y_i(t, \underline{\alpha}_0) = \sum_{j=1}^q \sigma_{ij}(t, \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \alpha_j, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2.2.2.1.1)$$

În cazul particular al sistemelor SISO există o singură relație de tipul (2.2.2.1.1). Pentru q parametri există q funcții de sensibilitate parametrică absolută a mărimii de ieșire care se pot determina simultan. În cele ce urmează se tratează mai întâi cazul unui sistem nelinear apoi cazul unui sistem linear.

Fie sistemul dinamic, în timp continuu, de tip SISO, a cărui evoluție în timp este descrisă la modul general de ecuația diferențială

$$f(y^{(n)}(t; \underline{\alpha}), y^{(n-1)}(t; \underline{\alpha}), \dots, y(t; \underline{\alpha}), t, u(t), \underline{\alpha}) = 0, \quad y^{(i)}(t_0; \underline{\alpha}) = \beta_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (2.2.2.1.2)$$

Derivatele din expresia (2.2.2.1.2) sunt în raport cu timpul. Mărimea caracteristică a acestui sistem este, evident, mărimea de ieșire, $y(t; \underline{\alpha})$. $\underline{\alpha}$ are valoarea nominală $\underline{\alpha}_0$. Presupunem condițiile inițiale independente de vectorul parametrilor $\underline{\alpha}$. Se urmărește determinarea funcțiilor de sensibilitate absolută ale mărimii de ieșire în raport cu parametri $\alpha_j, j = \overline{1, q}$, în condițiile aplicării la intrarea sistemului a unei funcții de intrare $u(t)$, $t \in \mathfrak{T}$, fixată.

Celor q parametri scalari le asociem q ecuații de sensibilitate de ieșire, câte una pentru fiecare parametru. Ecuația de sensibilitate de ieșire în raport cu parametrul $\alpha_j, j = \overline{1, q}$ este

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}(t; \underline{\alpha})} \Big|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \sigma_j^{(n)}(t; \underline{\alpha}_0) + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}(t; \underline{\alpha})} \Big|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \sigma_j^{(n-1)}(t; \underline{\alpha}_0) + \dots \\ \dots + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}(t; \underline{\alpha})} \Big|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \dot{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0) + \frac{\partial f}{\partial y(t; \underline{\alpha})} \Big|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \sigma_j(t; \underline{\alpha}_0) = - \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \Big|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0}. \quad (2.2.2.1.3) \\ \sigma_j^{(k)}(0; \underline{\alpha}_0) = 0, \quad k = \overline{1, n-1} \quad j = \overline{1, q} \end{aligned}$$

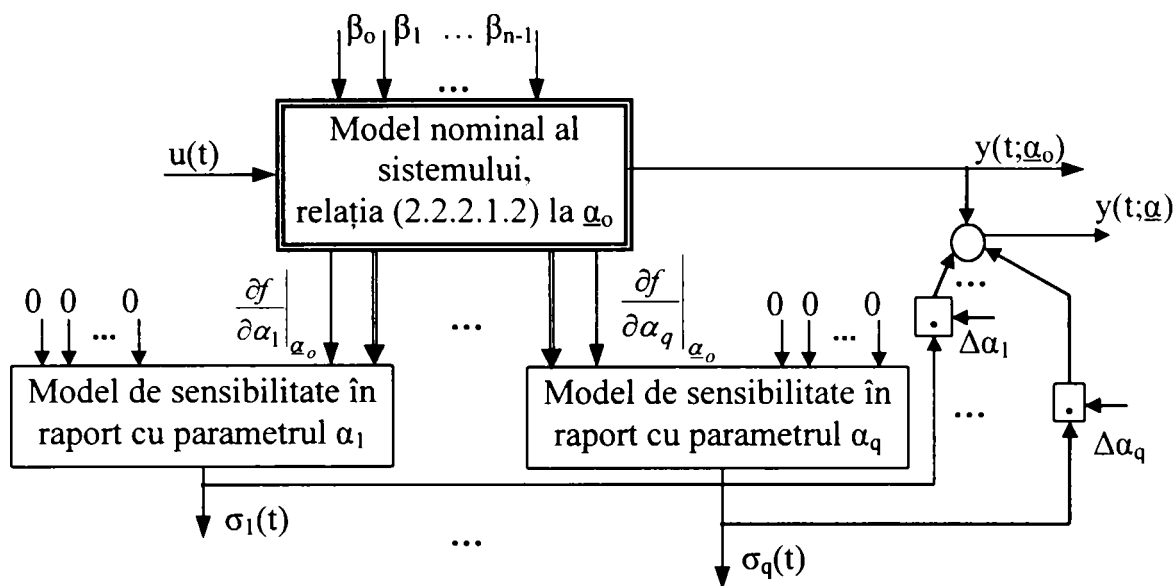


Fig.2.2.2.1-1 Sistemul combinat utilizat la determinarea simultană a funcțiilor de sensibilitate absolută

Întrucât am presupus condițiile inițiale independente de vectorul parametrilor $\underline{\alpha}$ pentru toate cele q ecuații de sensibilitate de ieșire rezultă condiții inițiale nule.

Sistemul combinat rezultat din sistemul nominal descris de relația (2.2.2.1.2) la valorile nominale ale parametrilor, din modelele de sensibilitate (2.2.2.1.3) și legăturile prin relația (2.2.2.1.1) este ilustrat în fig.2.2.2.1-1. Săgețile duble indică ansamblul mărimilor furnizate de modelul nominal pentru a putea fi calculați coeficienții

$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}(t; \underline{\alpha})} \Big|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0}$, $k = \overline{0, n}$. Sistemul combinat permite determinarea simultană a tuturor

funcțiilor de sensibilitate absolută ale ieșirii în raport cu fiecare parametru α_j . Odată cu acestea se obțin și traiectoriile reală și nominală ale ieșirii.

În cazul sistemelor lineare invariante în timp structura sistemului combinat prezentat în fig.2.2.2.1-1 se simplifică, modelul nominal al sistemului și modelele de sensibilitate având structuri lineare asemănătoare. Astfel fie sistemul linear invariant în timp, de tip SISO, descris prin modelul matematic intrare-ieșire

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (2.2.2.1.4)$$

cu condițiile inițiale:

$$\begin{aligned} y^{(i)}(t_0) &= y^{oi} = \beta_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \\ u^{(j)}(t_0) &= u^{oj} = \beta_j, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad i = n+j, \quad (i = \overline{n, n+m-1}) \end{aligned} \quad (2.2.2.1.5)$$

În ipoteza că parametri sistemului sunt tocmai coeficienții modelului (2.2.2.1.4) vectorul parametrilor este

$$\underline{\alpha} = [a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0]^T \quad (2.2.2.1.6)$$

de valoare nominală

$$\underline{\alpha}_0 = [a_{n-1,0}, a_{n-2,0}, \dots, a_{1,0}, a_{0,0}, b_{m,0}, b_{m-1,0}, \dots, b_{1,0}, b_{0,0}]^T. \quad (2.2.2.1.6')$$

Prin urmare $q = n+m+1$. Pe baza relației (2.2.2.1.4) se obțin termenii din relația (2.2.2.1.3):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}(t; \underline{\alpha})} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = 1. \quad (2.2.2.1.7)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}(t; \underline{\alpha})} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = a_{k,0}, \quad k = \overline{n-1, 0}, \quad (2.2.2.1.8)$$

$$-\left. \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = -\left. \frac{\partial f}{\partial a_{n-j}} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = -y^{(n-j)}(t; \underline{\alpha}_0), \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.2.2.1.9)$$

$$-\left. \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = -\left. \frac{\partial f}{\partial b_{n+m+1-j}} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = u^{(n+m+1-j)}(t), \quad j = \overline{n+1, n+m+1}. \quad (2.2.2.1.10)$$

Rezultă următoarele modele de sensibilitate:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_j^{(n)}(t; \underline{\alpha}_0) + a_{n-1,0} \sigma_j^{(n-1)}(t; \underline{\alpha}_0) + \dots + a_{1,0} \dot{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0) + a_{0,0} \sigma_j(t; \underline{\alpha}_0) = \\ \quad = -y^{(n-j)}(t; \underline{\alpha}_0), \quad \sigma_j(t_0; \underline{\alpha}_0) = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ \sigma_j^{(n)}(t; \underline{\alpha}_0) + a_{n-1,0} \sigma_j^{(n-1)}(t; \underline{\alpha}_0) + \dots + a_{1,0} \dot{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0) + a_{0,0} \sigma_j(t; \underline{\alpha}_0) = \\ \quad = u^{(n+m+1-j)}(t), \quad \sigma_j(t_0; \underline{\alpha}_0) = 0, \quad j = \overline{n+1, n+m+1} \end{array} \right. \quad (2.2.2.1.11)$$

Se remarcă faptul că membrul stâng al modelelor de sensibilitate este identic, pentru toate modelele de sensibilitate, cu membrul stâng al modelului la parametri nominali.

Structura modelului combinat aferentă modelului nominal (relația (2.2.2.1.4) la valorile nominale ale parametrilor) și modelelor de sensibilitate (relațiile (2.2.2.1.11)) este prezentată în Anexa I. Datorită linearității modelului sistemului combinat pentru implementarea schemei se pot utiliza, în principiu, doar elemente integratoare, de înmulțire cu constante și sumatoare. Deoarece schema astfel rezultată este complicată și deoarece programul de simulare MATLAB-SIMULINK permite și implementarea elementelor derivatoare am preferat în fig.I-1 din Anexa I utilizarea unei scheme echivalente cu elemente derivatoare, integratoare, de înmulțire cu constante și sumatoare.

Între metoda de calcul direct și metoda de calcul indirect nu există deosebiri de fond ci doar deosebiri formale. Formal ele diferă prin modul în care intră în discuție mărimea de intrare.

În §2.2.1 u intră între acoladele din relația (2.2.1.3). Orice modificare a lui înseamnă reluarea calcului de transformare inversă. În §2.2.2.1 problema este aceeași doar că se lucrează în domeniul timp. În ultimă instanță (2.2.2.1.11) și (2.2.1.3) sunt echivalente.

La fel stau lucrurile și în paragraful următor.

2.2.2.2 Modele de sensibilitate de stare

Datorită complexității modelelor rezultate, metoda sistemelor combinate bazată pe modele de sensibilitate de ieșire prezentată în §2.2.2.1 se poate utiliza numai într-un număr redus de situații pentru sistemele MIMO. La aceste sisteme se operează de regulă cu MM-ISI.

Aceasta face ca metoda sistemelor combinate aplicată pe MM-ISI, metodă care constituie obiectivul acestui paragraf, să prezinte un grad ridicat de generalitate.

Modelele de sensibilitate de stare sunt aplicabile la sisteme oricât de complicate, lineare sau nelineare, în timp continuu sau în timp discret, și pot furniza simultan pentru o anumită funcție de intrare $\underline{u}(t)$ atât funcțiile de sensibilitate parametrică absolută ale stării cât și pe cele ale ieșirilor.

Vor fi abordate următoarele cazuri de calcul pentru sisteme invariante în timp: cazul general al sistemelor nelineare apoi cazul sistemelor lineare, în forma canonică. În principiu, pentru fiecare parametru este necesar un model de sensibilitate. Există totuși posibilitatea, într-un caz particular, să se poată determina toate funcțiile de sensibilitate folosind un singur model de sensibilitate. Acesta este cazul sistemelor lineare SISO descrise prin MM-ISI în forma companion și va fi abordat în finalul paragrafului.

Cazul sistemelor nelineare

Fie sistemul dinamic a cărui evoluție în timp este dată de următorul MM-ISI:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t; \underline{\alpha}) = \underline{f}(\underline{x}(t; \underline{\alpha}), t, \underline{u}(t), \underline{\alpha}), & \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0, & \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{f} (n,1), t \in \mathfrak{T}, \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^q \\ \underline{y}(t; \underline{\alpha}) = \underline{g}(\underline{x}(t; \underline{\alpha}), t, \underline{u}(t), \underline{\alpha}), & \underline{y} \in \mathbb{R}^p, & \underline{g} (p,1). \end{cases} \quad (2.2.2.2.1)$$

Se presupune că \underline{f} și \underline{g} sunt continue și derivabile în raport cu toate argumentele.

În raport cu parametrul α_j , din ecuația de stare (2.2.2.2.1), se obține ecuația de sensibilitate de stare

$$\dot{\underline{\chi}}_j(t; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}(t; \underline{\alpha})} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \underline{\chi}_j(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0}, \quad \underline{\chi}_j^0 = \underline{0} \quad (2.2.2.2.2)$$

$\left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}(t)} \right|_{\substack{i=1,n \\ k=1,n}}$ reprezintă o matrice de tip Jacobi.

În mod asemănător, din ecuația de ieșire din (2.2.2.2.1) în raport cu parametrul α_j se obține ecuația de sensibilitate de ieșire

$$\dot{\underline{\sigma}}_j(t; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}(t; \underline{\alpha})} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \underline{\chi}_j(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \quad (2.2.2.2.3)$$

Prin utilizarea matricei de sensibilitate absolută a ieșirii, $\underline{\sigma}$, respectiv a stării, $\underline{\chi}$, definite în §2.1.3 prin relațiile (2.1.3.16), respectiv (2.1.3.18), modelul general de sensibilitate absolută a stării (care reunește toate ecuațiile de sensibilitate în raport cu toți parametri) poate fi scris simplificat

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\chi}} = \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{\alpha}_0} \underline{\chi} + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{\alpha}} \right|_{\underline{\alpha}_0}, \quad \underline{\chi}^0 = \underline{0} \end{array} \right. \quad (2.2.2.2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\sigma}} = \left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{\alpha}_0} \underline{\chi} + \left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\alpha}} \right|_{\underline{\alpha}_0} \end{array} \right. \quad (2.2.2.2.5)$$

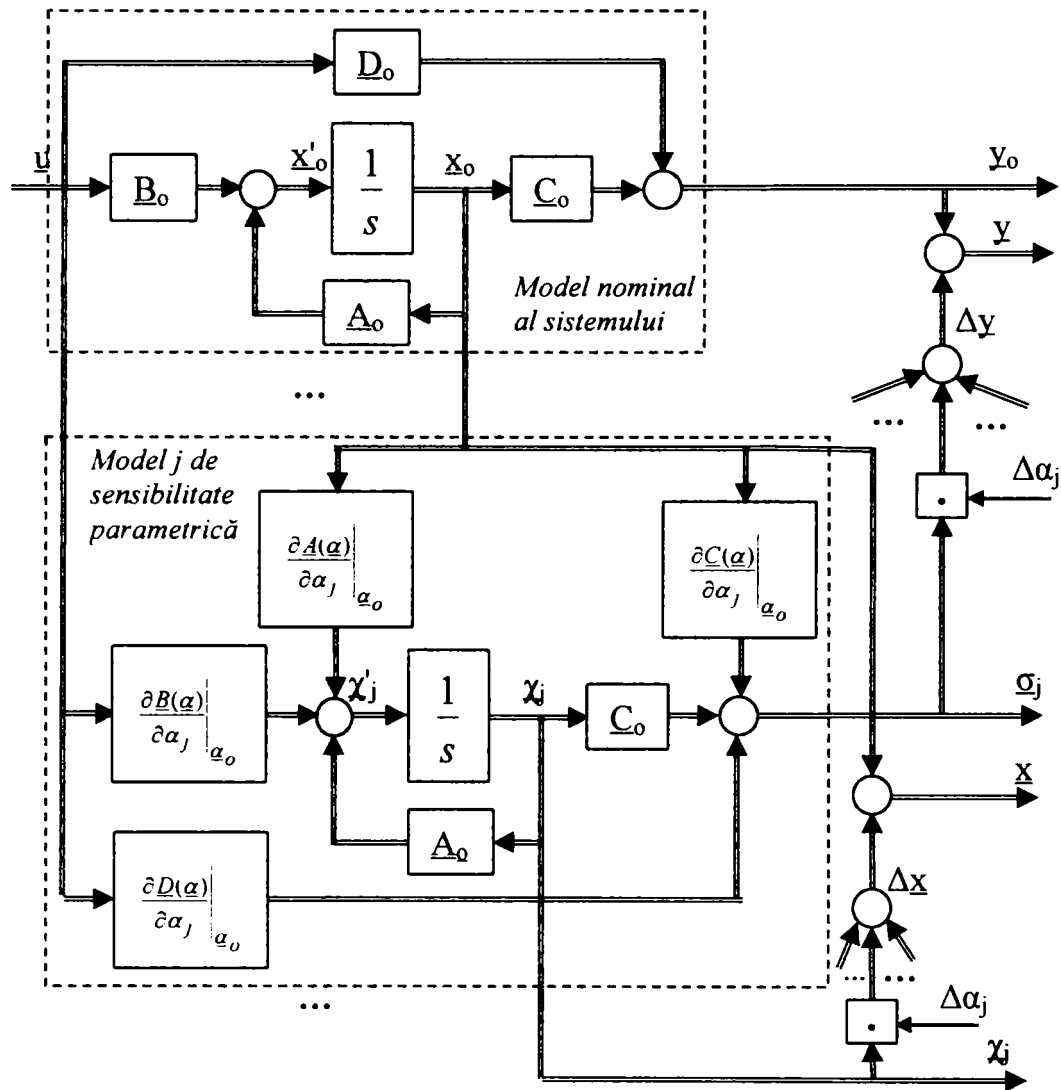


Fig.2.2.2.2.1 Sistemul combinat pentru determinarea funcțiilor de sensibilitate și abaterilor la sistemele lineare descrise prin MM-ISI

Cazul sistemelor lineare

Dacă sistemul inițial este descris de un MM-ISI linear, invariant în timp

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t; \underline{\alpha}) = \underline{A}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}) + \underline{B}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{u}(t), & \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \\ \underline{y}(t; \underline{\alpha}) = \underline{C}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}) + \underline{D}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{u}(t) \end{cases}, \quad (2.2.2.2.6)$$

atunci modelul de sensibilitate de stare în raport cu parametrul α_j este

$$\begin{cases} \dot{\underline{\chi}}_j(t; \underline{\alpha}_0) = \underline{A}(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{\chi}_j(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{A}(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{B}(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{u}(t), & \underline{\chi}_j^0 = \underline{0} \\ \underline{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0) = \underline{C}(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{\chi}_j(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{C}(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{D}(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{u}(t) \end{cases} \quad (2.2.2.2.7)$$

Se remarcă faptul că, în cazul sistemelor lineare, modelul de sensibilitate are aceeași matrice sistem ca și modelul nominal al sistemului și că mărimile de intrare ale modelului provin nu

numai din exterior ($\underline{u}(t)$) și din modelul nominal al sistemului ($\underline{x}(t, \underline{\alpha}_0$). Sistemul combinat utilizat la determinarea funcțiilor de sensibilitate absolută de stare χ_j și de ieșire σ_j în raport cu parametrul α_j , pentru o anumită funcție de intrare $\underline{u}(t)$, este prezentat în fig.2.2.2.2.1.

Pentru toți parametri relațiile (2.2.2.2.7) pot fi grupate ca și în cazul precedent într-un model general de sensibilitate.

Conform metodei prezentate aici pentru măsurarea tuturor funcțiilor de sensibilitate absolută, în raport cu toți parametri, sunt necesare q modele de sensibilitate și un model nominal al sistemului. Wilkie și Perkins au arătat că funcțiile de sensibilitate absolută de stare ale unui sistem linear, continuu, invariant în timp, de tip SISO, de ordinul n și având q parametri incerti pot fi determinate simultan, printr-un singur model de sensibilitate de ordin n care prezintă o structură corespunzătoare în sensul că se utilizează pentru determinarea modelului de sensibilitate un model al sistemului în forma companion [17], [43], [54]. Această situație este prezentată în continuare.

Cazul sistemelor lineare minimale SISO în forma companion

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u, & \underline{x}^o = \underline{0} \end{cases} \quad (2.2.2.2.8)$$

$$\begin{cases} y = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \end{cases} \quad (2.2.2.2.9)$$

Acest MM-ISI poate fi transformat printr-o transformare de stare $\underline{x} = \underline{T} \cdot \underline{x}^*$ cu o matrice nesingulară, \underline{T} , aleasă corespunzător, (vezi Anexa II), în realizarea standard controlabilă

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}^* = \underline{A}^* \cdot \underline{x}^* + \underline{b}^* \cdot u, & \underline{x}^{*o} = \underline{0} \end{cases} \quad (2.2.2.2.10)$$

$$\begin{cases} y = \underline{c}^{*T} \cdot \underline{x}^* \end{cases} \quad (2.2.2.2.11)$$

unde:

$$\underline{A}^* = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_n \end{bmatrix}, \quad (2.2.2.2.12)$$

$$\underline{b}^* = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2.2.2.13)$$

$$\underline{c}^{*T} = \underline{c}^T \cdot \underline{T} \quad (2.2.2.2.14)$$

În situația dată, noile mărimi de stare sunt \underline{x}^* iar ca parametri ai sistemului se consideră coeficienții $\alpha_j, j = \overline{1, n}$ ai polinomului caracteristic. Wilkie și Perkins, [17], [43] au arătat că matricea de sensibilitate a stării χ^* este caracterizată de o "simetrie totală" adică

$$\chi_{ij}^* = \chi_{j,i}^* \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.2.2.2.15)$$

respectiv

$$\underline{\chi}^* = \begin{bmatrix} \chi_{11}^* & \chi_{12}^* & \chi_{13}^* & \dots & \chi_{1n}^* \\ \chi_{12}^* & \chi_{13}^* & \chi_{14}^* & \dots & \chi_{2n}^* \\ \chi_{13}^* & \chi_{14}^* & \chi_{15}^* & \dots & \chi_{3n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{1n}^* & \chi_{2n}^* & \chi_{3n}^* & \dots & \chi_{nn}^* \end{bmatrix} \quad (2.2.2.2.16)$$

Ansamblul celor n modele de sensibilitate nu este minimal. Modelul general de sensibilitate are de fapt $2n-1$ variabile de stare distincte, respectiv ordinul $2n-1$. Cele n^2 funcții de sensibilitate absolută a stării sunt formate din numai $2n-1$ funcții independente care pot fi determinate simultan dintr-un model nominal al sistemului și un model de sensibilitate. Un număr de $n+1$ f.d.s. ale stării se determină direct din modelul de sensibilitate iar celelalte $n-2$ prin combinații lineare ale semnalelor determinabile direct din modelul de sensibilitate cu mărimile de stare extrase din modelul nominal al sistemului.

În Anexa III, fig.III-1 este reprezentată schema bloc utilizată la măsurarea tuturor funcțiilor de sensibilitate absolută de stare ale sistemului sub forma realizării standard controlabile.

Dacă modelul inițial (2.2.2.2.8) și (2.2.2.2.9) depinde de ℓ parametri fizici, $a_i, i = \overline{1, \ell}$ adică de vectorul $\underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_\ell]^T$ atunci și matricea de transformare \underline{T} care aduce sistemul în forma standard controlabilă și coeficienții $\alpha_j, j = \overline{1, n}$ vor depinde de \underline{a} . Vom avea $\underline{T} = \underline{T}(\underline{a})$ și $\alpha_j = \alpha_j(\underline{a}), j = \overline{1, n}$. Derivând relația $\underline{x}(\underline{a}) = \underline{T}(\underline{a}) \cdot \underline{x}^*(\underline{a})$ în raport cu parametri $a_i, i = \overline{1, \ell}$ particularizând $\underline{a} = \underline{a}_0$ și utilizând notațiile corespunzătoare, se va obține:

$$\begin{aligned} \chi_i &= \left. \frac{\partial \underline{T}(\underline{a})}{\partial a_i} \right|_{\underline{a}=\underline{a}_0} \cdot \underline{x}_0^* + \underline{T}(\underline{a}_0) \cdot \underline{\chi}^* \cdot \left. \frac{\partial \alpha(\underline{a})}{\partial a_i} \right|_{\underline{a}=\underline{a}_0} = \\ &= \left. \frac{\partial \underline{T}(\underline{a})}{\partial a_i} \right|_{\underline{a}=\underline{a}_0} \cdot \underline{T}^{-1}(\underline{a}_0) \cdot \underline{x}_0 + \underline{T}(\underline{a}_0) \cdot \underline{\chi}^* \cdot \left. \frac{\partial \alpha(\underline{a})}{\partial a_i} \right|_{\underline{a}=\underline{a}_0}, \quad i = \overline{1, \ell} \end{aligned} \quad (2.2.2.2.17)$$

Cu \underline{x}_0 , respectiv \underline{x}_0^* s-au notat mărimile nominale de stare ale sistemului inițial respectiv ale modelului în forma standard controlabilă.

Prin urmare, funcțiile de sensibilitate ale mărimilor de stare ale modelului inițial (2.2.2.2.8) și (2.2.2.2.9) în raport cu parametri $a_i, i = \overline{1, \ell}$ pot fi determinate ca și combinații lineare ale funcțiilor de sensibilitate absolută de stare ale sistemului sub forma realizării standard controlabile și ale mărimilor nominale de stare \underline{x}_0 .

În mod asemănător, prin derivarea relației (2.2.2.2.9) în raport cu parametri $a_i, i = \overline{1, \ell}$ și ținând cont de (2.2.2.2.11) și (2.2.2.2.14) se pot determina funcțiile de sensibilitate de ieșire ca și combinații lineare ale funcțiilor de sensibilitate absolută de stare ale sistemului sub forma realizării standard controlabile și ale mărimilor nominale de stare \underline{x}_0 .

$$\sigma_i = \left. \frac{\partial y}{\partial a_i} \right|_{\underline{a}=\underline{a}_0} = \underline{c}^T \cdot \left[\left. \frac{\partial \underline{T}(\underline{a})}{\partial a_i} \right|_{\underline{a}=\underline{a}_0} \cdot \underline{x}_0 + \underline{T}(\underline{a}_0) \cdot \underline{\chi}^* \cdot \left. \frac{\partial \alpha(\underline{a})}{\partial a_i} \right|_{\underline{a}=\underline{a}_0} \right], \quad i = \overline{1, \ell} \quad (2.2.2.2.18)$$

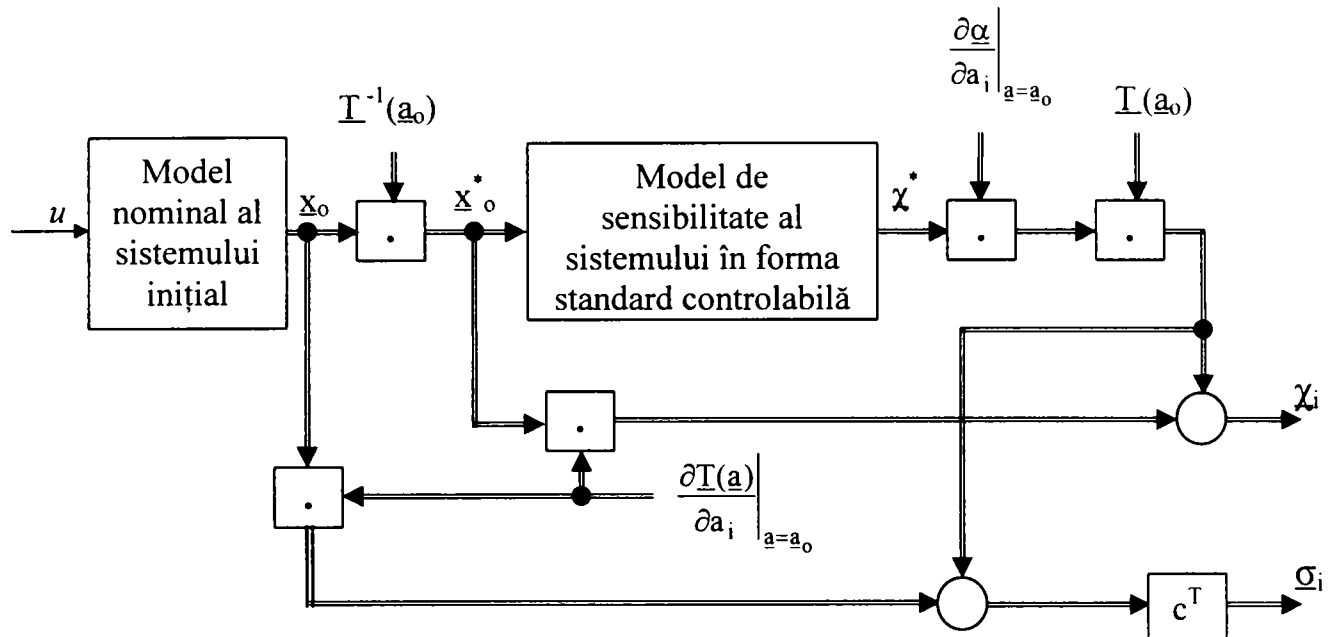


Fig. 2.2.2.2 Schema bloc de determinare a tuturor funcțiilor de sensibilitate de stare și de ieșire

Situația descrisă de relațiile (2.2.2.2.17) și (2.2.2.2.18) este prezentată prin schema bloc din fig.2.2.2.2.2.

2.3 Metoda componentei incerte

La sistemele complexe sau de ordin mare, lineare sau nelineare, la care operarea cu modele analitice necesită calcule voluminoase, pentru determinarea funcțiilor de sensibilitate absolută este posibilă utilizarea metodei componentei incerte. Aceasta permite obținerea unor modele de sensibilitate de ordin redus operând direct pe schema bloc a sistemului.

Elaborată în anii '60 pentru sistemele lineare de către Kokotović și Rutman, după o idee a lui Bikhovski, cu scopul de a determina modificarea mărimii caracteristice datorată abaterilor parametrilor de la valorile nominale, metoda componentei incerte a fost extinsă ulterior la sistemele nelineare de către Vuscović și Ćircić, [17], [43].

În §2.3.1 se tratează mai întâi cazul sistemelor lineare de tip SISO având un singur subsistem dependent de un singur parametru generalizând în final rezultatul pentru două situații: sisteme cu mai multe subsisteme toate dependente de același parametru, respectiv sisteme cu mai multe subsisteme dependente fiecare de câte un singur parametru.

Pentru sisteme complexe descrise prin scheme bloc, de tip SISO, cu un singur parametru incert, în §2.3.2 este abordat cazul sistemelor nelineare.

2.3.1 Metoda componentei incerte pentru sisteme lineare

Fie un sistem linear invariant în timp, Σ , de tip SISO, cu orientarea $u \rightarrow y$, care conține un singur subsistem, Σ_j , cu orientarea $u_j \rightarrow y_j$, dependent de parametrul scalar α_j . Subsystemul Σ_j descris prin f.d.t. $H_j(s; \alpha_j)$ este denumit *componentă incertă*. La intrarea modelului nominal Σ_0 al sistemului și în condiții inițiale independente de α_j , se aplică mărimea de intrare $u(t)$, iar la ieșire se obține mărimea de ieșire nominală $y(t; \alpha_{j_0})$, (fig.2.3.1-1). În consecință, va rezulta

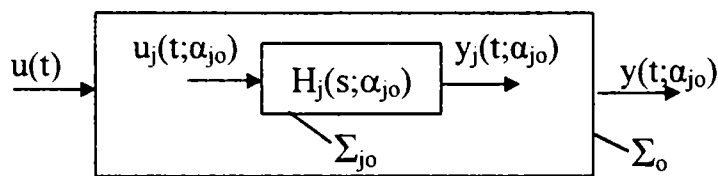


Fig.2.3.1-1 Modelul nominal al sistemului cu un singur subsistem dependent de un singur parametru

la intrarea subsistemului Σ_{j_0} mărimea de intrare $u_j(t; \alpha_{j_0})$ iar la ieșire sa se va obține mărimea de ieșire $y_j(t; \alpha_{j_0})$.

Sistemul Σ fiind linear se poate considera că abaterea $\Delta\alpha_j$, a parametrului α_j de la valoarea sa nominală α_{j_0} , determină abaterea

(incertitudinea) $\Delta H_j(s; \alpha_j)$ a f.d.t. $H_j(s; \alpha_j)$ de la valoarea sa nominală $H_j(s; \alpha_{j_0})$, având ca efect abateri ale tuturor mărimilor din sistem. Este evident că intrarea subsistemului Σ_j poate depinde de parametrul α_j prin structura sistemului. Fie $\Delta u_j(t; \alpha_j)$, $\Delta y_j(t; \alpha_j)$ și respectiv $\Delta y(t; \alpha_j)$ abaterile de la valorile nominale ale mărimilor de intrare și de ieșire ale subsistemului Σ_j și

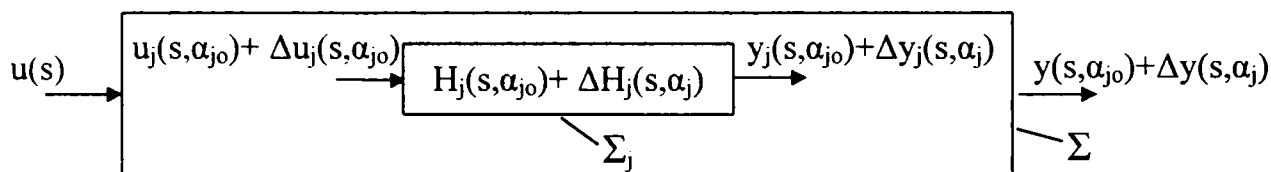


Fig.2.3.1-2 Modelul sistemului cu un singur subsistem dependent de un singur parametru

respectiv a mărimii de ieșire a sistemului Σ datorate abaterii $\Delta\alpha_j$, fig.2.3.1-2.

În condiții inițiale nule, dependența intrare-ieșire a subsistemului Σ_j , este dată de expresia

$$y_j(s; \alpha_{j_0}) + \Delta y_j(s; \alpha_j) = (H_j(s; \alpha_{j_0}) + \Delta H_j(s; \alpha_j)) \cdot (u_j(s; \alpha_{j_0}) + \Delta u_j(s; \alpha_j)) \quad (2.3.1.1)$$

Într-o primă aproximare lineară se poate neglija produsul $\Delta H_j(s; \alpha_j) \cdot \Delta u_j(s; \alpha_j)$. Având în vedere faptul că la valori nominale ale parametrului este valabilă relația

$$y_j(s; \alpha_{j_0}) = H_j(s; \alpha_{j_0}) \cdot u_j(s; \alpha_{j_0}), \quad (2.3.1.2)$$

se obține

$$\Delta y_j(s; \alpha_j) \cong \Delta H_j(s; \alpha_{j_0}) \cdot u_j(s; \alpha_{j_0}) + H_j(s; \alpha_{j_0}) \cdot \Delta u_j(s; \alpha_j) \quad (2.3.1.3)$$

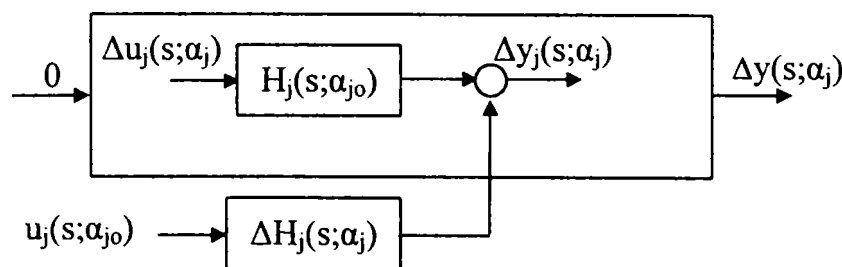


Fig.2.3.1-3 Schema abaterilor din sistem

Pe baza relației (2.3.1.3) se poate realiza un model al abaterilor din sistem, fig.2.3.1-3. Se remarcă faptul că abaterea mărimii de ieșire $\Delta y(t; \alpha_j)$ este o consecință a noii mărimi de intrare $u_j(t; \alpha_{j_0})$, mărime de intrare care provine din modelul nominal al sistemului. Se obține astfel sistemul combinat din fig.2.3.1-4, intermediar și nefolosit dar necesar pentru înțelegerea și justificarea schemei finale.

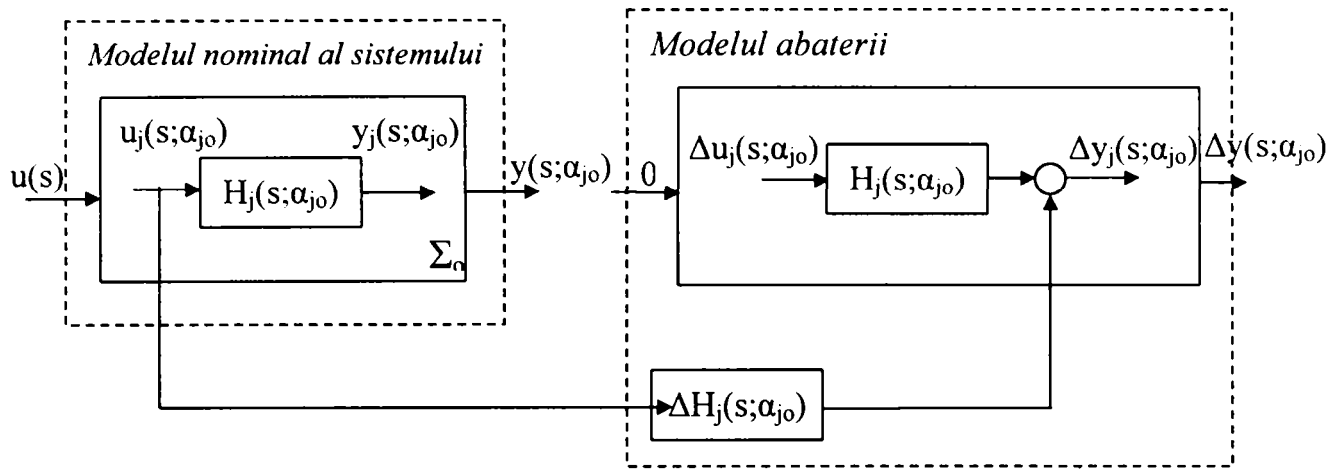


Fig.2.3.1-4 Sistem combinat pentru determinarea abaterii $\Delta y(t; \alpha_{j0})$

Prin împărțirea relației (2.3.1.3) la $\Delta \alpha_j$ și trecerea la limită pentru $\Delta \alpha_j \rightarrow 0$, se obține

$$\sigma_j(s; \alpha_{j0}) \cong \left. \frac{\partial H_j(s; \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_{j0}} \cdot u_j(s; \alpha_{j0}) + H_j(s; \alpha_{j0}) \cdot \left. \frac{\partial u_j(s; \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_{j0}} \quad (2.3.1.4)$$

În relația (2.3.1.4) factorul $\left. \frac{\partial u_j(s; \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_{j0}}$ se generează din modelul de sensibilitate.

Relația (2.3.1.4) și modelul nominal al sistemului conduc la sistemul combinat din fig.2.3.1-5 utilizat pentru determinarea funcției de sensibilitate de ieșire în raport cu parametrul α_j și a abaterii mărimii de ieșire de la traiectoria nominală.

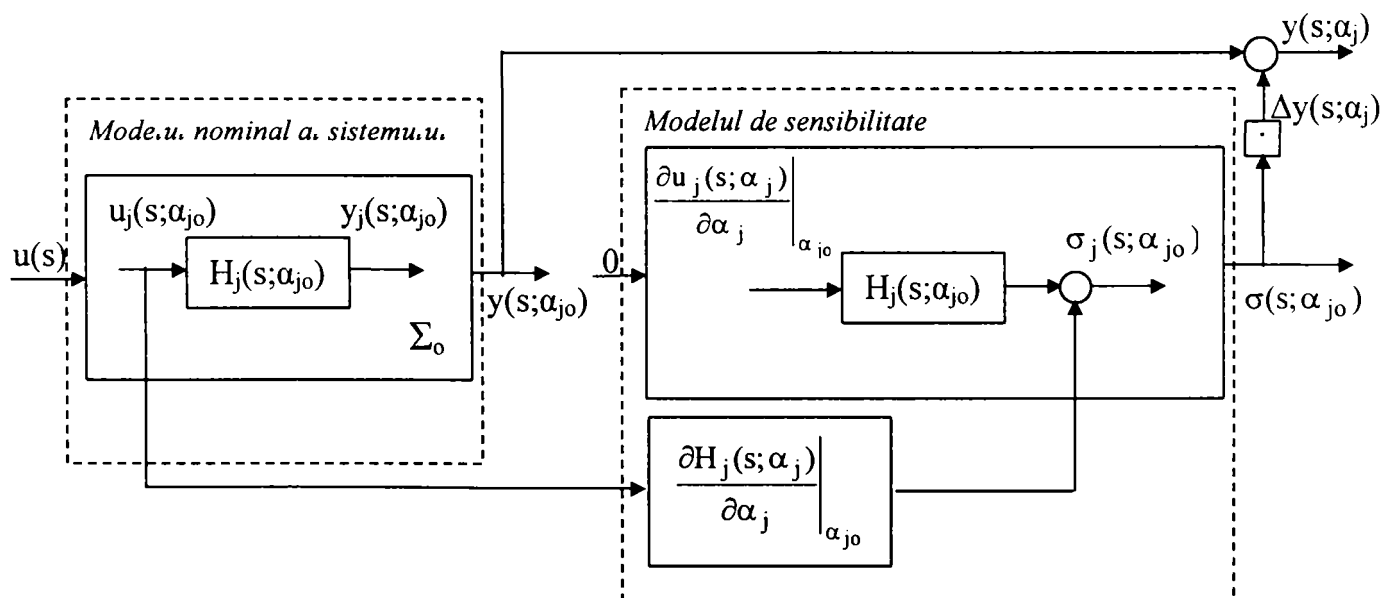


Fig.2.3.1-5 Sistem combinat pentru determinarea funcției de sensibilitate de ieșire

Deși majoritatea sistemelor din automatică sunt sisteme cu reacție, ceea ce face ca u_j să depindă de α_j , pot exista și situații pentru care această dependență să nu existe. Acestea ar putea fi instrumente de măsură care nu intervin în reacție având doar rol de supraveghere.

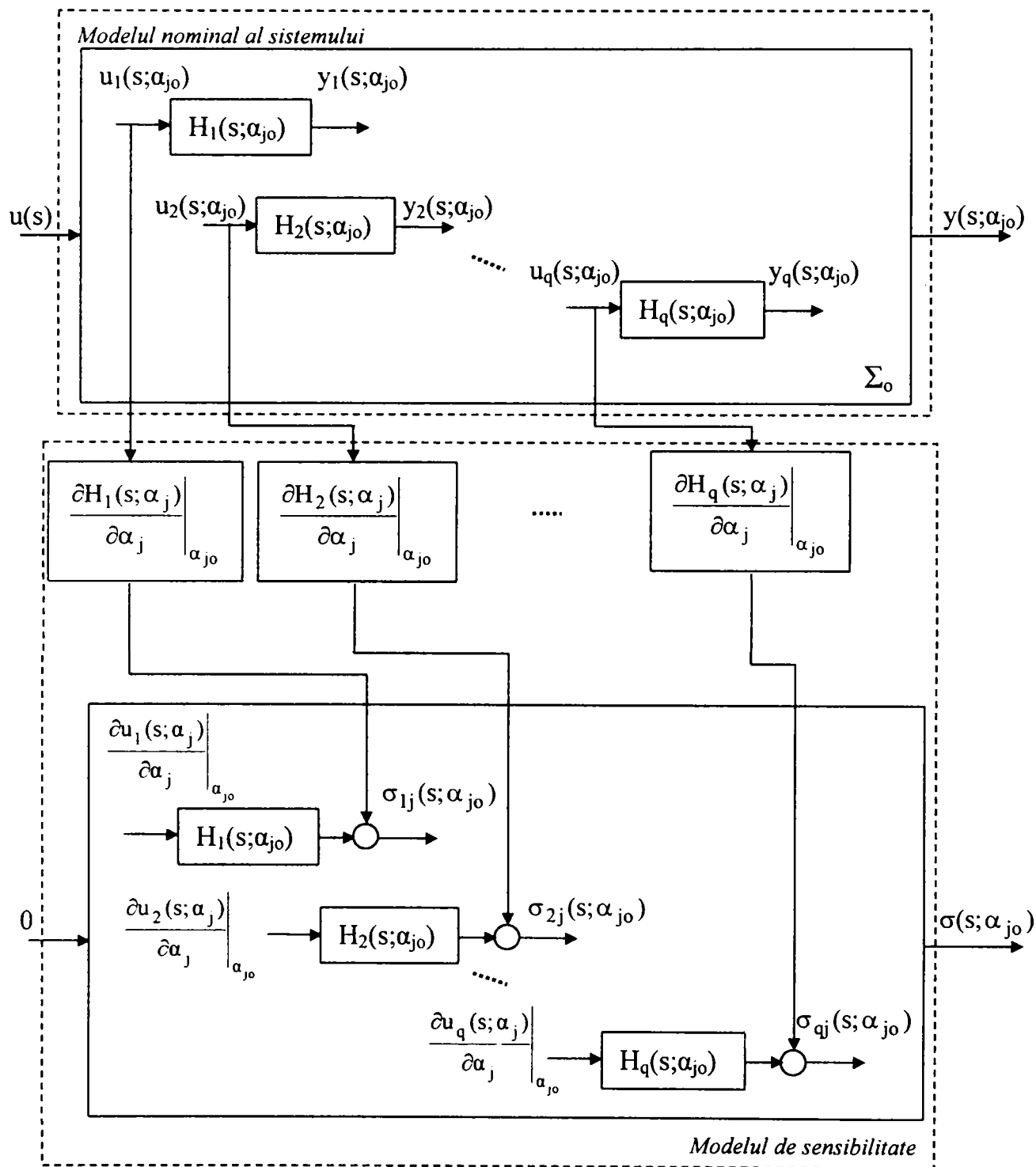


Fig.2.3.1-6 Partea de sistem combinat aferentă determinării funcției de sensibilitate de ieșire în raport cu parametrul α_j în situația în care q subsisteme depind de parametrul α_j .

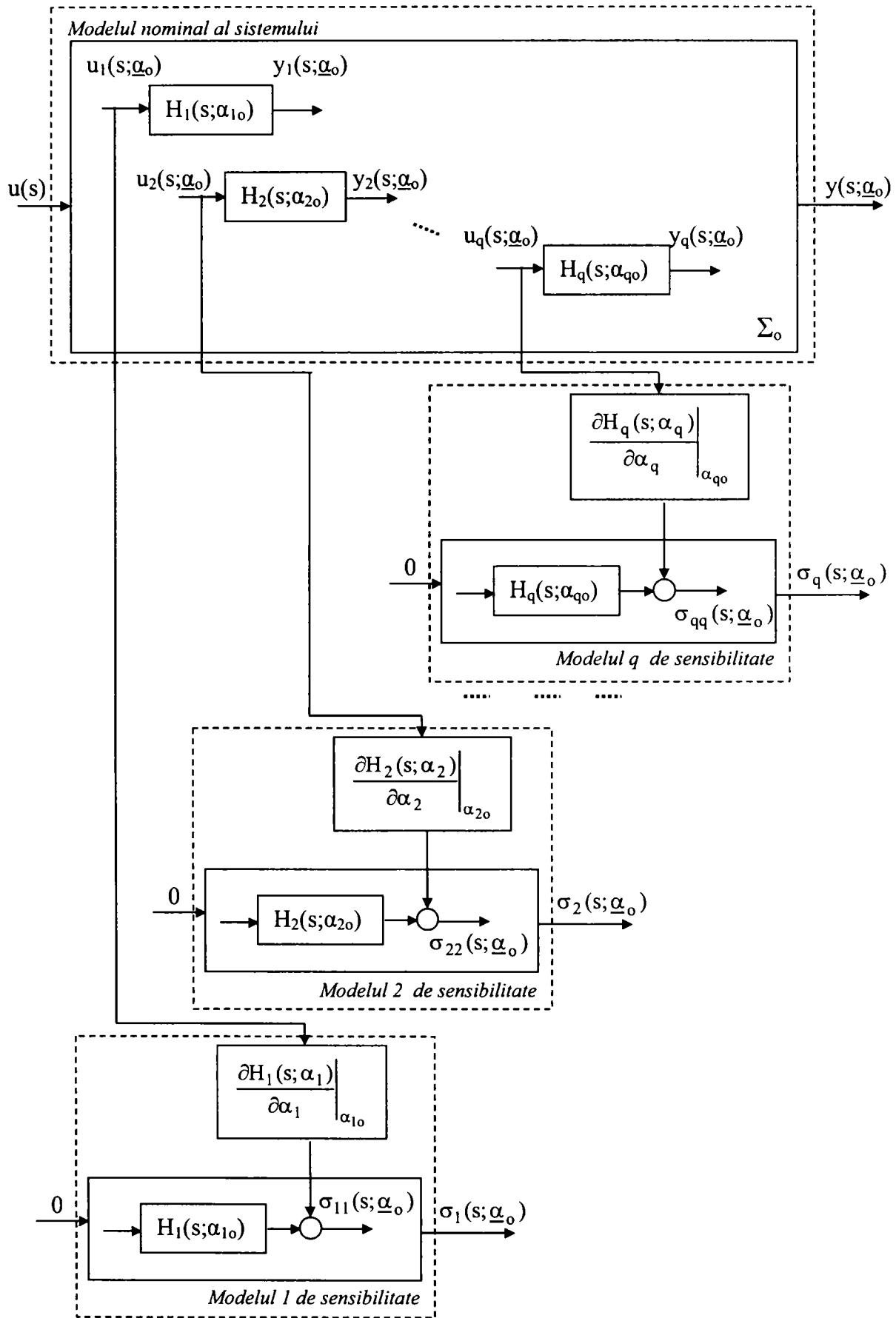


Fig.2.3.1-7 Partea de sistem combinat aferentă determinării tuturor funcțiilor de sensibilitate de ieșire în situația în care q subsisteme depind fiecare de câte un singur parametru $\alpha_j, j = \overline{1, q}$.

În aceste cazuri $\left. \frac{\partial u_j(s; \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_{j_0}} = 0$ și practic modelele de sensibilitate devin mult mai simple,

(o situație asemănătoare este prezentată în Anexa IV).

Rezultatul poate fi generalizat pentru două cazuri:

➤ *Cazul în care sistemul Σ conține q subsisteme care depind de parametrul α_j .*

În această situație, partea din sistemul combinat necesară pentru determinarea funcției de sensibilitate de ieșire în raport cu parametrul α_j , $\sigma(t; \alpha_{j_0})$, se prezintă în schema bloc din fig.2.3.1-6, în care cu $u_1(s; \alpha_{j_0}), u_2(s; \alpha_{j_0}), \dots, u_q(s; \alpha_{j_0})$ s-au notat imaginile operaționale ale mărimilor de intrare ale modelelor nominale ale subsistemelor dependente de parametrul α_j iar cu $\sigma_{1j}(s; \alpha_{j_0}), \sigma_{2j}(s; \alpha_{j_0}), \dots, \sigma_{qj}(s; \alpha_{j_0})$ s-au notat imaginile operaționale ale funcțiilor de sensibilitate de ieșire ale subsistemelor dependente de parametrul α_j în raport cu parametrul α_j .

Cazul de generalizare prezentat este sugerat în [43].

➤ *Cazul în care sistemul Σ conține q subsisteme care depind, respectiv, de q parametri distincți, (fiecare subsistem j depinde de câte un singur parametru, $\alpha_j, j = \overline{1, q}$).*

În această situație, determinarea celor q funcții de sensibilitate de ieșire $\sigma_j(s; \underline{\alpha}_0)$, în raport cu parametri $\alpha_j, j = \overline{1, q}$, se face cu un sistem combinat format dintr-un model nominal al sistemului și q modele de sensibilitate, fig.2.3.1-7.

Exemplificarea acestei noi generalizări este prezentată în Anexa IV, pe un sistem linear de ordinul 3.

Ideea generalizării în acest caz provine din faptul că sistemele lineare pot fi cu ușurință aduse la forme în care fiecare subsistem să depindă de un singur parametru matematic. În ceea ce privește problema determinării funcțiilor de sensibilitate în raport cu parametri fizici, metoda curentă poate fi continuată cu abordarea de la sfârșitul §2.2.2.2.

2.3.2 Metoda componentei incerte pentru sisteme nelineare

Metoda are avantajul unor construcții și utilizări relativ simple, sistematizate la finalul paragrafului.

Se consideră un sistem de tip SISO (reprezentat în fig.2.3.2-1) care conține q subsisteme lineare și p subsisteme nelineare. Din cele q subsisteme lineare se consideră că un număr n_q sunt dependente de singurul parametru incert, α . Subsistemele lineare dependente de parametru α sunt descrise de funcțiile de transfer $H_i(s, \alpha), i = \overline{1, n_q}$. Subsistemele lineare independente de parametru α sunt descrise de funcțiile de transfer $H_j(s), j = \overline{n_q + 1, q}$. Din cele p subsisteme nelineare se consideră că n_p sunt dependente tot de parametrul α . Subsistemele nelineare dependente de parametru α sunt descrise de funcționalele $G_k\{\tilde{u}_k; \alpha\}, k = \overline{1, n_p}$. Subsistemele nelineare independente de parametrul α sunt descrise de funcționalele $G_\ell\{\tilde{u}_\ell\}, \ell = \overline{n_p + 1, p}$. Se admite că funcționalele G_k și G_ℓ sunt diferențiabile în raport cu argumentele lor. În funcție de modul de interconectare al subsistemelor, intrările lor

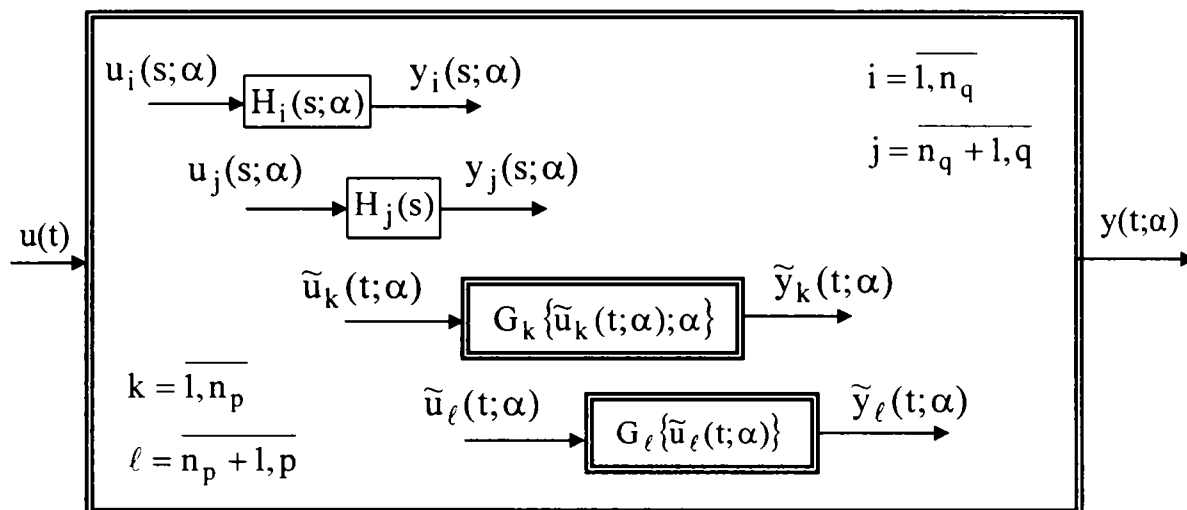


Fig.2.3.2-1 Sistem cu blocuri lineare si nelineare

pot depinde de parametrul α . Ieșirile tuturor subsistemelor, prin modul de interconectare, pot contribui la formarea ieșirii sistemului.

Între intrările și ieșirile blocurilor lineare există relațiile:

$$\begin{cases} y_i(s; \alpha) = H_i(s; \alpha) \cdot u_i(s; \alpha), & i = \overline{1, n_q} \\ y_j(s; \alpha) = H_j(s) \cdot u_j(s; \alpha), & j = \overline{n_q + 1, q} \end{cases} \quad (2.3.2.1)$$

care conduc la modelul de sensibilitate:

$$\begin{cases} \sigma_i(s; \alpha_0) = \left. \frac{\partial H_i(s; \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \cdot u_i(s; \alpha_0) + H_i(s; \alpha_0) \cdot \left. \frac{\partial u_i(s; \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}, & i = \overline{1, n_q} \\ \sigma_j(s; \alpha_0) = H_j(s) \cdot \left. \frac{\partial u_j(s; \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}, & j = \overline{n_q + 1, q} \end{cases} \quad (2.3.2.2)$$

Se remarcă faptul că modelul de sensibilitate aferent părții lineare are aceeași formă cu modelul nominal al sistemului, ceea ce diferă față de acesta din urmă fiind intrările și ieșirea.

Între intrările și ieșirile blocurilor nelineare există relațiile:

$$\begin{cases} \tilde{y}_k(t; \alpha) = G_k\{\tilde{u}_k(t; \alpha); \alpha; t\}, & k = \overline{1, n_p} \\ \tilde{y}_\ell(t; \alpha) = G_\ell\{\tilde{u}_\ell(t; \alpha); t\}, & \ell = \overline{n_p + 1, p} \end{cases} \quad (2.3.2.3)$$

care conduc în modelul de sensibilitate la:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_k(t; \alpha_0) = \left. \frac{\partial G_k\{\tilde{u}_k(t; \alpha); \alpha; t\}}{\partial \tilde{u}_k(t; \alpha)} \right|_{\alpha_0} \cdot \left. \frac{\partial \tilde{u}_k(t; \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} + \left. \frac{\partial G_k\{\tilde{u}_k(t; \alpha); \alpha; t\}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}, & k = \overline{1, n_p} \\ \tilde{\sigma}_\ell(t; \alpha_0) = \left. \frac{\partial G_\ell\{\tilde{u}_\ell(t; \alpha); t\}}{\partial \tilde{u}_\ell(t; \alpha)} \right|_{\alpha_0} \cdot \left. \frac{\partial \tilde{u}_\ell(t; \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}, & \ell = \overline{n_p + 1, p} \end{cases} \quad (2.3.2.4)$$

Pe baza relațiilor (2.3.2.4) se remarcă faptul că modelul de sensibilitate aferent părții nelineare se obține dintr-o structură de formă similară cu cea a modelului nominal al sistemului în care locul blocurilor $G_k \{ \dots \}$ este luat de elemente de înmulțire la care, evident, diferă intrările și ieșirile. Astfel, pentru determinarea funcției de sensibilitate de ieșire în raport cu parametrul α , $\sigma(t; \alpha_0)$, și a abaterii mărimii de ieșire de la traiectoria nominală, se obține sistemul combinat din fig.2.3.2-2.

Etapele metodei se pot sistematiza în vederea utilizării metodei folosind programul MATLAB-SIMULINK după cum urmează:

1. Se construiește schema bloc aferentă unui model nominal al sistemului.
2. Se copiază schema bloc obținută la punctul 1, urmând a fi transformată în schema bloc a modelului de sensibilitate următoarele transformări:
 - se înlocuiesc blocurile nelineare cu blocuri de înmulțire cu două intrări: una dintre intrări rămâne legată acolo unde era legat blocul nelinear substituit;
 - se adaugă blocuri sumatoare la ieșirile blocurilor lineare corespunzătoare celor care în sistem depind de parametrul α ;
 - se adaugă blocuri sumatoare la ieșirile blocurilor de înmulțire care înlocuiesc blocuri nelineare corespunzătoare celor care în sistem depind de parametrul α .
3. Se construiesc interfețele dintre cele două scheme calculând derivatele din relațiile (2.3.2.2) și (2.3.2.4) și se interconectează cele două scheme astfel:
 - se leagă corespunzător primei relații din (2.3.2.2), intrările blocurilor lineare din schema construită la punctul 1., (evident cele care în sistem depind de parametrul α), cu intrările sumatoarelor de la ieșirile blocurilor similare din schema de la punctul 2., prin intermediul derivatelor calculate anterior;
 - se leagă corespunzător relațiilor (2.3.2.4) intrările blocurilor nelineare din schema construită la punctul 1., (evident cele care în sistem depind de parametrul α), cu intrările rămase nelegate ale blocurilor de înmulțire și ale sumatoarelor de la ieșirile blocurilor de înmulțire din schema ce la punctul 2., prin intermediul derivatelor anterior calculate.
4. Se aplică funcția $u(t)$ la intrarea schemei care implementează modelul nominal și 0 la intrarea celei care implementează modelul de sensibilitate. La ieșirea modelului nominal se va obține traiectoria nominală a mărimii de ieșire iar la ieșirea modelului de sensibilitate se va obține funcția de sensibilitate absolută a ieșirii în raport cu parametrul α .

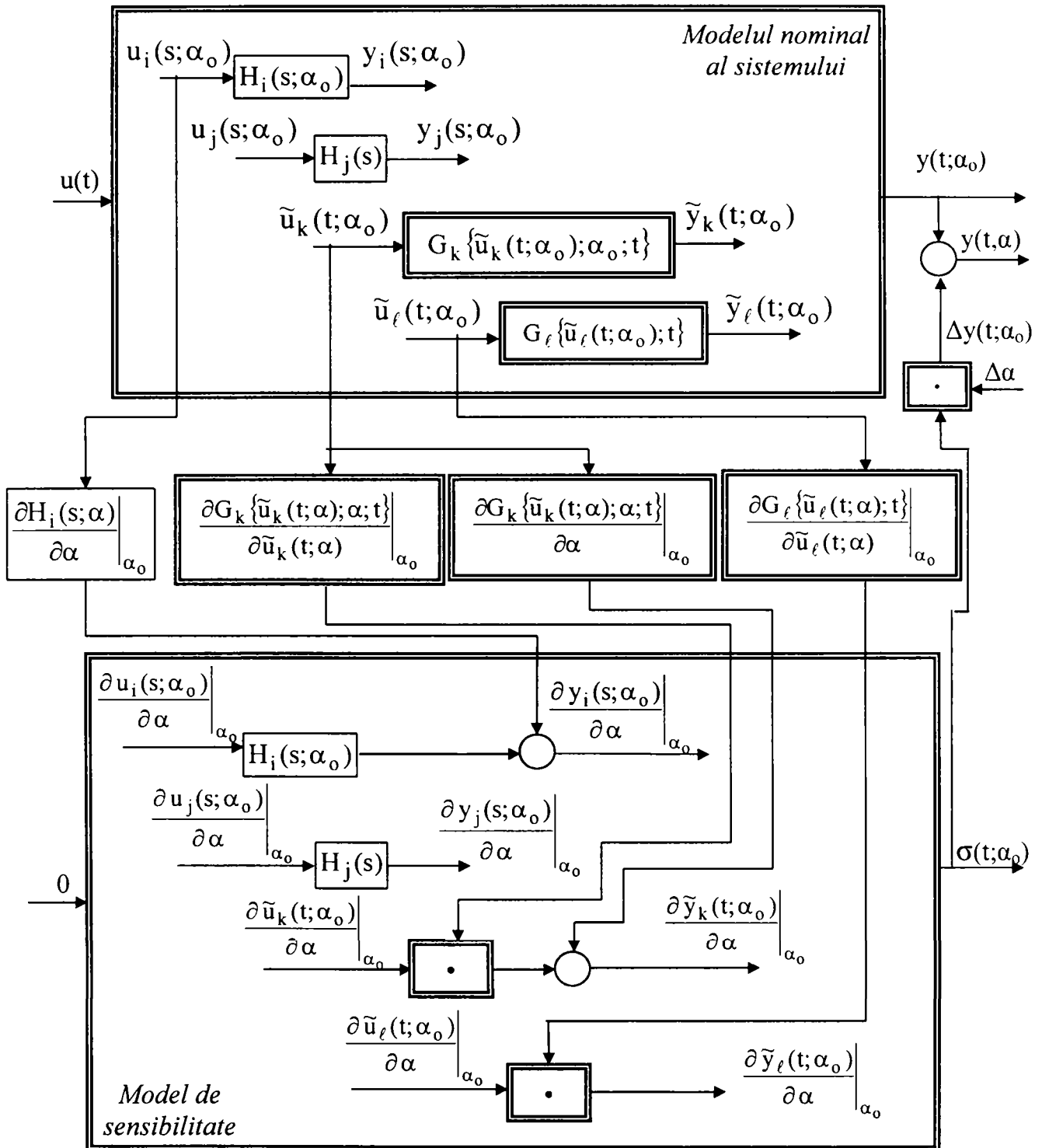


Fig.2.3.2-2 Sistem combinat pentru determinarea funcției de sensibilitate și abaterii mărimii de ieșire în raport cu parametrul scalar α aferent sistemului din fig.2.3.2-1

2.4 Metoda punctelor de sensibilitate

A fost elaborată de Kokotović în 1964 [17] și preluată de Eychoff [28], Frank [43] etc.

Metoda permite măsurarea simultană a tuturor funcțiilor de sensibilitate semirelativă de ieșire ale unui sistem linear de tip SISO, în timp continuu sau în timp discret, descris prin schemă bloc, care conține subsisteme care depind fiecare de câte un parametru. F.d.s. sunt disponibile în anumite puncte ale schemei bloc a unui singur model de sensibilitate, denumite "*puncte de sensibilitate*", prin excitarea modelului de sensibilitate cu funcția preluată de la ieșirea modelului nominal al sistemului.

Având resurse puține (un singur model pentru toate funcțiile de sensibilitate), implementarea pe cale numerică a acestei metode se poate face prin programe "rapide". Ca urmare, se consideră că metoda "punctelor de sensibilitate" este metoda ideală pentru determinarea funcțiilor de sensibilitate semirelativă la sistemele lineare automate optimale și la sistemele de reglare adaptive la care timpul de calcul este important.

În §2.4.1 se prezintă metoda și modul său de utilizare pentru cazul general al sistemelor lineare SISO cunoscute prin scheme bloc. În §2.4.2 se prezintă o particularizare a metodei pentru sistemele lineare SISO cunoscute prin f.d.t.

2.4.1 Metoda punctelor de sensibilitate. Caz general

Fie sistemul linear invariant în timp descris prin f.d.t. $H(\lambda; \underline{\alpha})$. Presupunem că sistemul conține q subsisteme dependente de un singur parametru α_j , componentă a lui $\underline{\alpha}$ având f.d.t. $H_j(\lambda; \alpha_j)$, $j = \overline{1, q}$. La intrarea sistemului se aplică mărimea de intrare $u(t)$ iar la ieșire se obține mărimea de ieșire $y(t; \underline{\alpha})$, $t \in \mathfrak{T}$. Funcția de sensibilitate semirelativă $\tilde{\sigma}_j(t; \underline{\alpha})$, $j = \overline{1, q}$, $t \in \mathfrak{T}$, a mărimii de ieșire a sistemului în raport cu parametrul α_j ,

$$\tilde{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial y(t; \underline{\alpha})}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0}, \quad j = \overline{1, q}, \quad t \in \mathfrak{T}, \quad (2.4.1.1)$$

are în domeniul operațional imaginea

$$\tilde{\sigma}_j(\lambda; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial y(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0}, \quad j = \overline{1, q} \quad (2.4.1.2)$$

Imaginea operațională a mărimii de ieșire, în condiții inițiale nule, este

$$y(\lambda; \underline{\alpha}) = H(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot u(\lambda) \quad (2.4.1.3)$$

Înlocuind (2.4.1.3) în (2.4.1.2) și utilizând regula de derivare a funcțiilor compuse se obține

$$\tilde{\sigma}_j(\lambda; \underline{\alpha}_0) = \left(\frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial H_j(\lambda; \alpha_j)} \cdot \frac{\partial H_j(\lambda; \alpha_j)}{\partial \ln \alpha_j} \right)_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} \cdot u(\lambda), \quad j = \overline{1, q}. \quad (2.4.1.4)$$

Relația (2.4.1.3) fiind scalară ne permite înlocuirea lui $u(\lambda)$ în (2.4.1.4) ceea ce conduce la următorul rezultat:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_j(\lambda; \underline{\alpha}_0) &= \left(\frac{\partial \ln H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial \ln H_j(\lambda; \alpha_j)} \cdot \frac{\partial \ln H_j(\lambda; \alpha_j)}{\partial \ln \alpha_j} \cdot y(\lambda; \underline{\alpha}) \right)_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} = \\ &= \bar{S}_{H_j}^H(\lambda) \cdot \bar{S}_{\alpha_j}^{H_j}(\lambda) \cdot y(\lambda; \underline{\alpha}_0) \quad , \quad j = \overline{1, q} \end{aligned} \quad (2.4.1.5)$$

adică funcțiile de sensibilitate semirelative $\tilde{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0)$, $j = \overline{1, q}$, $t \in \mathfrak{T}$ pot fi măsurate prin aplicarea mărimii de ieșire nominală, $y(t; \underline{\alpha}_0)$, $t \in \mathfrak{T}$, la intrarea unei conexiuni serie formată din sisteme ale căror f.d.t sunt funcțiile de sensibilitate Bode:

$$\bar{S}_{H_j}^H(\lambda) = \left. \frac{\partial \ln H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial \ln H_j(\lambda; \alpha_j)} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \quad , \quad \bar{S}_{\alpha_j}^{H_j}(\lambda) = \left. \frac{\partial \ln H_j(\lambda; \alpha_j)}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \quad , \quad j = \overline{1, q} \quad (2.4.1.6)$$

Notăm:

$$F_j(\lambda) = \bar{S}_{H_j}^H(\lambda) \quad , \quad j = \overline{1, q} \quad \text{și} \quad G_j(\lambda) = \bar{S}_{\alpha_j}^{H_j}(\lambda) \quad , \quad j = \overline{1, q} \quad (2.4.1.7)$$

$F_j(\lambda)$ se determină având în vedere structura întregului sistem pe când $G_j(\lambda)$ se determină doar din subsistemul $H_j(\lambda, \alpha_j)$. În [17], [28], [43], [54] se arată că la un sistem cu buclă de reacție generalizată, fig.2.4.1-1³, toate $F_j(\lambda)$ se determină dintr-o singură structură și anume identică cu aceea a modelului nominal. În fig.2.4.1-2 este prezentată schema modelului de sensibilitate ce permite determinarea simultană a tuturor celor q funcții de sensibilitate semirelative ale sistemului din fig.2.4.1-1. Între punctul de intrare în modelul de sensibilitate și punctul S_j din modelul de sensibilitate se obține $F_j(\lambda)$. Punctele S_j din modelul de sensibilitate se numesc "*puncte de sensibilitate*". Această afirmație este argumentată în Anexa V prin compararea expresiilor $F_{2k-1}(\lambda)$ ⁴ și $F_{2k}(\lambda)$ calculate pe baza definițiilor (2.4.1.6), (2.4.1.7) și pe baza schemei bloc.

Etapele metodei se pot sistematiza astfel:

5. Se construiește o schemă bloc a modelului nominal al sistemului, în care se numerotează blocurile ca în fig.2.4.1-1.
6. Se construiește o primă variantă a schemei bloc a modelului de sensibilitate prin copierea schemei bloc obținută la punctul 1. și marcarea punctelor S va fi completată ulterior.
7. Pentru fiecare bloc din sistem se calculează $G_j(\lambda)$ conform relației (2.4.1.7). În schema de la punctul 2. se adaugă, în punctele S_j , corespunzător fig.2.4.1-2, blocuri cu f.d.t. $G_j(\lambda)$.
8. Se interconectează cele două scheme potrivit (2.4.1.5) prin legarea ieșirii schemei construită la punctul 1. cu intrarea schemei rezultate la punctul 3.
9. Se aplică funcția $u(t)$ la intrarea schemei care implementează modelul nominal. La ieșirile blocurilor $G_j(\lambda)$ se vor obține funcțiile de sensibilitate semirelativă ale ieșirii în raport cu parametri α_j .

³ Pentru a nu îngreuna inutil figura au fost omise argumentele mărimilor și f.d.t., nefiind relevante pentru ideea de bază a metodei prezentate aici. Figura este făcută în ipoteza că q este număr par.

⁴ S-a notat $j=2k-1$ dacă j este număr impar și $j=2k$ dacă j este număr par.

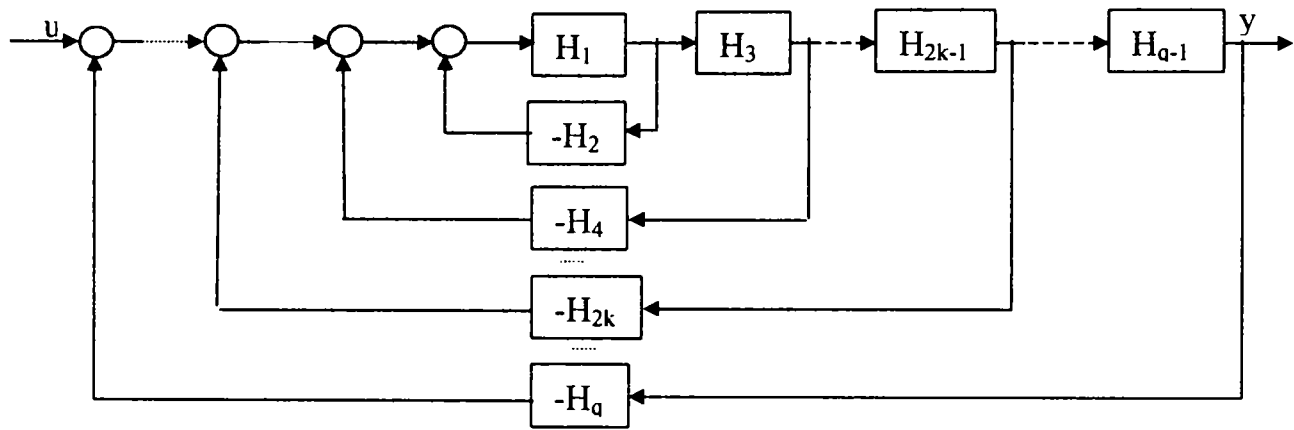


Fig.2.4.1-1 Sistem cu buclă de reacție generalizată

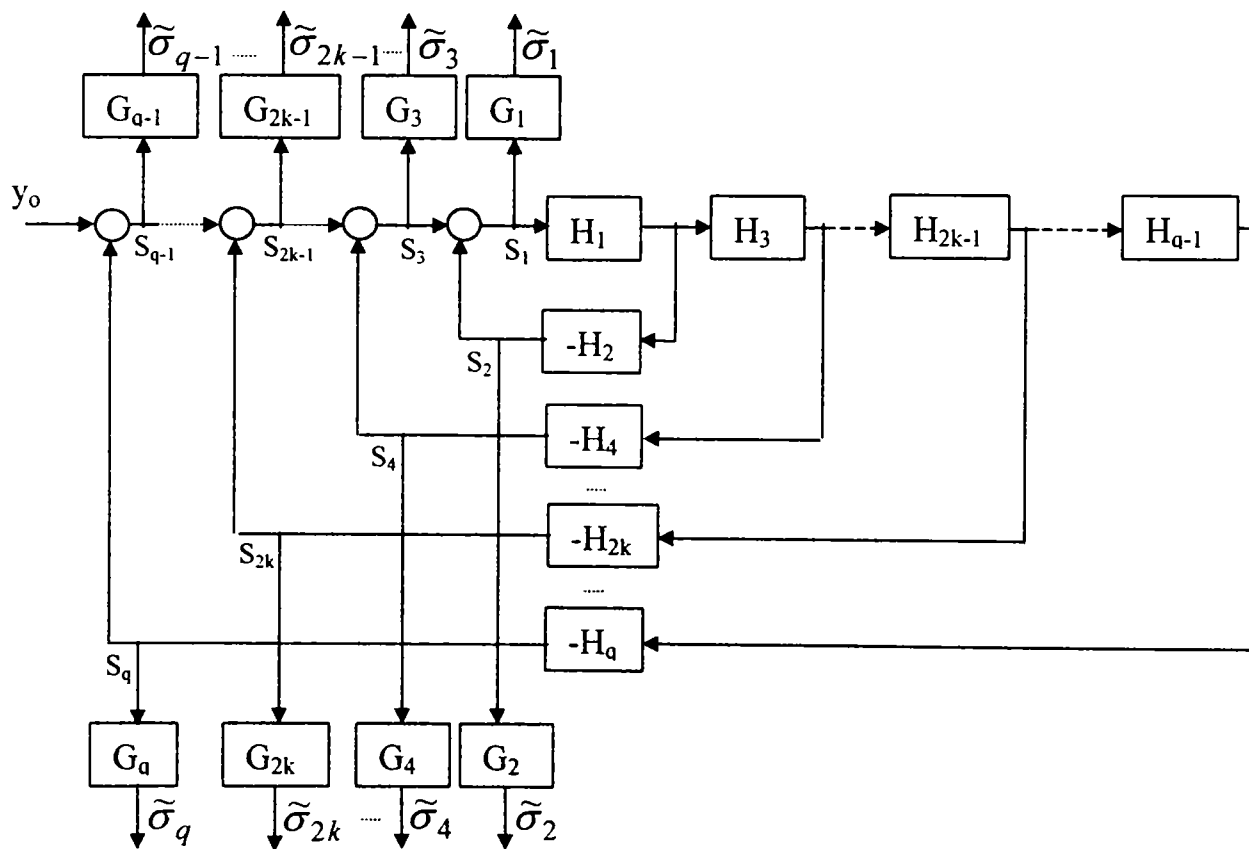


Fig.2.4.1-2 Model de sensibilitate aferent sistemului cu buclă de reacție generalizată

2.4.2 Metoda punctelor de sensibilitate. Caz particular

Un caz particular deosebit de avantajos prin simplitatea soluției pe care o oferă pentru determinarea tuturor funcțiilor semirelative de sensibilitate de ieșire este cel al sistemelor în timp continuu, de tip SISO, descrise prin funcția de transfer

$$H(s) = \frac{b_{n-1} \cdot s^{n-1} + b_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (2.4.2.1)$$

Coeficienții reali din relația (2.4.2.1) formează vectorul parametrilor $\underline{\alpha}$, adică

$$\underline{\alpha} = [a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0]^T \quad (2.4.2.2)$$

Funcția de sensibilitate semirelativă a mărimii de ieșire în raport cu parametrul α_j este

$$\tilde{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial y(t; \underline{\alpha})}{\partial \ln \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = \begin{cases} \left. \frac{\partial y(t; \underline{\alpha})}{\partial \ln a_{n-j}} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0}, & j = \overline{1, n} \\ \left. \frac{\partial y(t; \underline{\alpha})}{\partial \ln b_{2n-j}} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0}, & j = \overline{n+1, 2n} \end{cases} \quad (2.4.2.3)$$

Realizarea standard controlabilă asociată sistemului cu funcția de transfer (2.4.2.1) :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t), & \underline{x}^0 = \underline{0} \\ y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] \cdot \underline{x}(t) \end{cases} \quad (2.4.2.4)$$

îi corespunde schema bloc din fig.2.4.2-1, de tipul celei din fig.2.4.1-1.

Conform relației (2.4.1.5) funcțiile de sensibilitate semirelative $\tilde{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0)$, $j = \overline{1, n}$ pot fi măsurate prin aplicarea mărimii de ieșire $y(t; \underline{\alpha}_0)$ la intrarea unei conexiuni serie formată din sisteme ale căror f.d.t. sunt funcțiile de sensibilitate Bode, date de relația (2.4.1.6), particularizate pentru sistemul (2.4.2.1), adică:

$$F_j(s) = \overline{S}_{H_j}^H(s), \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{cu } H_j(s) = a_j \quad \text{și} \quad G_j(s) = \overline{S}_{a_j}^{H_j}(s) = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.4.2.5)$$

Transferului dintre punctul de intrare în modelul de sensibilitate și punctul de sensibilitate S_j din modelul de sensibilitate îi corespunde f.d.t. $F_j(s)$.

Din ecuația de ieșire din modelul (2.4.2.4), pe baza definiției (2.1.3.10), se deduc funcțiile de sensibilitate semirelative $\tilde{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0)$, $j = \overline{n+1, 2n}$:

$$\tilde{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial y(t; \underline{\alpha})}{\partial \ln b_{2n-j}} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = b_{2n-j,0} \cdot x_{2n-j+1}(t; \underline{\alpha}_0), \quad j = \overline{n+1, 2n} \quad (2.4.2.6)$$

Se remarcă faptul că ele pot fi măsurate direct în modelul nominal din fig.2.4.2-1 în punctele situate înaintea sumatorului de la ieșire.

În fig.2.4.2-2 este prezentată schema modelului care permite determinarea simultană a tuturor celor $2n$ funcții de sensibilitate semirelative ale ieșirii sistemului din fig.2.4.2-1.

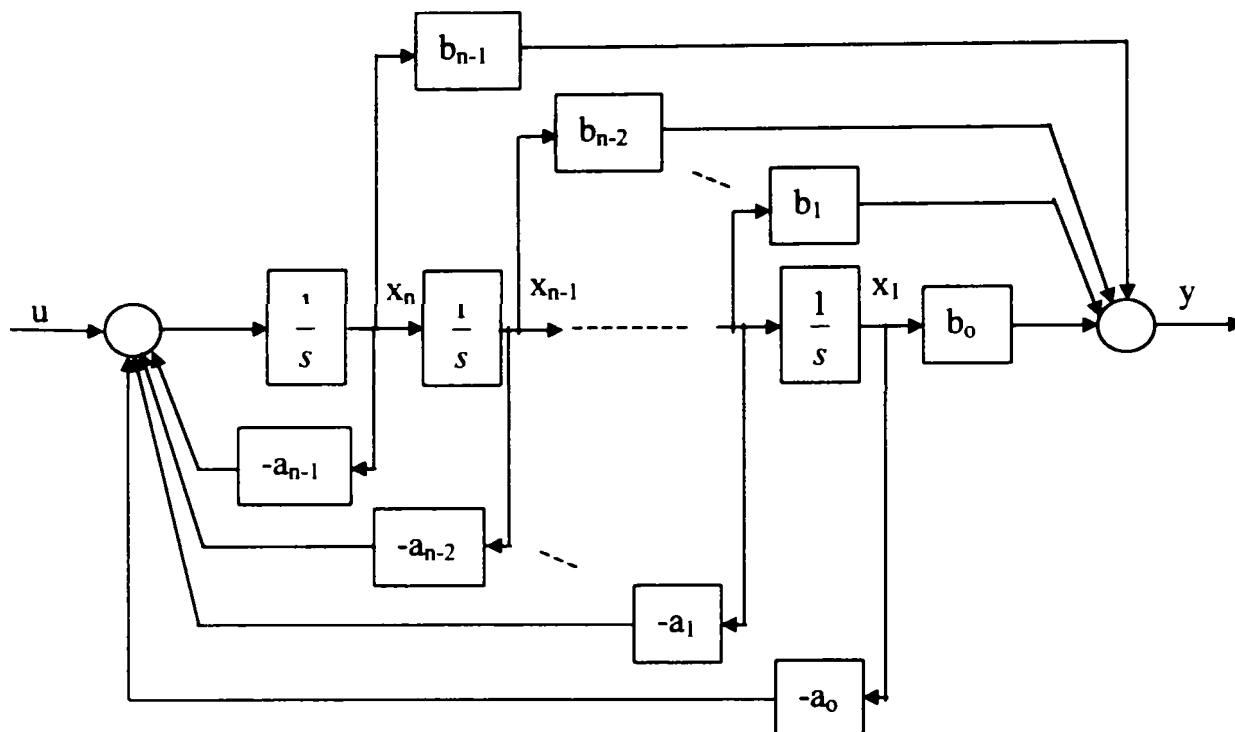


Fig.2.4.2-1 Schema bloc a sistemului monovariabil la intrare și ieșire reprezentat prin realizarea standard controlabilă

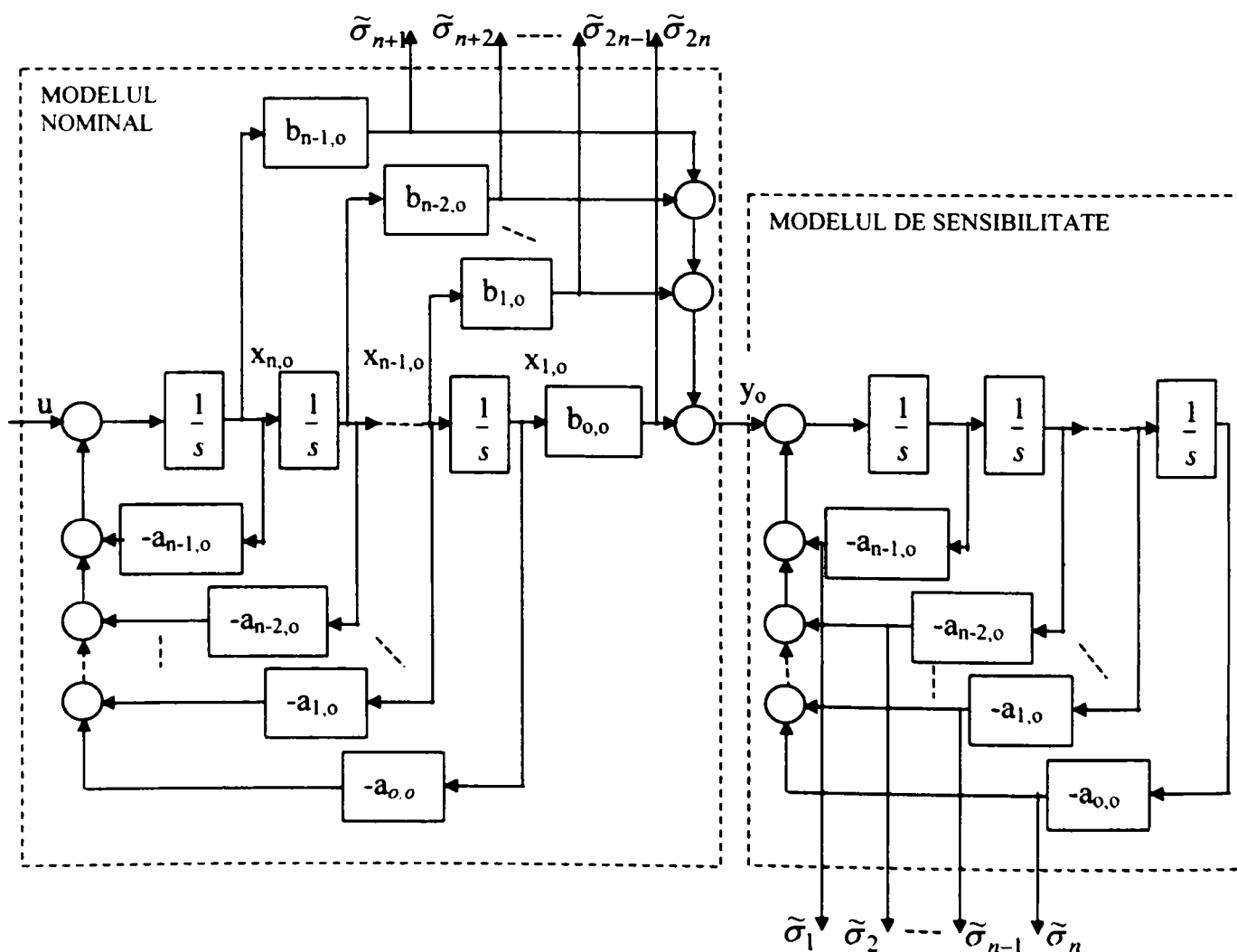


Fig.2.4.2-2 Schema bloc pentru determinarea tuturor funcțiilor de sensibilitate semirelativă ale ieșirii sistemului monovariabil la intrare și ieșire reprezentat prin realizarea standard controlabilă

2.5 Sensibilitatea sistemelor cu eșantionare

Sistemele cu eșantionare considerate în acest paragraf sunt SRA numerice în care procesul condus P este un sistem în timp continuu iar algoritmul de reglare ARN este un sistem în timp discret, fig.2.5-1. Atât pentru proiectarea ARN cât și pentru aprecierea comportării SRA este necesară găsirea unui model al întregului sistem. Aceasta se face prin discretizarea modelului matematic al procesului obținându-se un model în timp discret al ansamblului CNA-P-CAN. Pe baza acestui model, la valorile nominale ale parametrilor procesului și a pasului de discretizare, se va proiecta ARN. În acest paragraf, se prezintă câteva probleme de sensibilitate (mai există și altele).

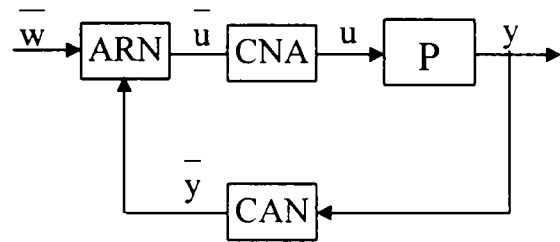


Fig.2.5-1 Sistem de reglare

- Determinarea funcțiilor de sensibilitate de stare respectiv de ieșire ale procesului în raport cu parametri procesului, $\alpha_j, j = \overline{1, q}$. Soluționarea acestei probleme este redată în §2.5.1.1.
- Determinarea funcțiilor de sensibilitate de stare respectiv de ieșire ale procesului în raport cu pasul de discretizare, h. Soluționarea acestei probleme este redată în §2.5.1.2. Fizic, situația care reclamă un astfel de studiu este cea în care pasul de discretizare h folosit de SRAN diferă de pasul h_0 pentru care s-a proiectat SRAN.
- Determinarea funcțiilor de sensibilitate de stare respectiv de ieșire ale SRA în raport cu timpul de calcul, τ_c , în situația în care achiziția de informații din proces și transmiterea comenzilor către proces nu sunt sincrone. Soluționarea acestei probleme este surprinsă în §2.5.2.

Obținerea unui model în timp discret al procesului este o problemă dificilă pentru cazul nelinear. În cazul linear, în ipoteza că CNA încorporează un eșantionator de ordin 0, discretizarea se face ca realizare invariantă la semnal treaptă [4], [24].

Abordarea problemelor de sensibilitate de eșantionare se face în mod similar la procesele lineare și nelineare. Problemele de sensibilitate tratate în §2.5.1 se referă la cazul general al unui sistem linear.

2.5.1 Modele de sensibilitate ale sistemelor cu eșantionare

Fie sistemul continuu linear descris de MM-ISI

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t; \underline{\alpha}) = \underline{A}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}) + \underline{B}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{u}(t), & \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \\ \underline{y}(t; \underline{\alpha}) = \underline{C}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}) + \underline{D}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{u}(t) \end{cases} \quad (2.5.1.1)$$

Prin discretizarea MM-ISI (2.5.1.1) ca realizare invariantă la semnal treaptă, [4], [24], cu pasul h, se obține MM-ISI discret

$$\begin{cases} \underline{x}(t+1; \underline{\alpha}; h) = \underline{A}_d(\underline{\alpha}; h) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}; h) + \underline{B}_d(\underline{\alpha}; h) \cdot \underline{u}(t; h), & \underline{x}(0) = \underline{x}^0, & t \in \mathbb{N} \\ \underline{y}(t; \underline{\alpha}; h) = \underline{C}_d(\underline{\alpha}; h) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}; h) + \underline{D}_d(\underline{\alpha}; h) \cdot \underline{u}(t; h) \end{cases} \quad (2.5.1.2)$$

unde:

$$\begin{cases} \underline{A}_d(\underline{\alpha}; h) = \Phi(\underline{\alpha}; h) = e^{\underline{A}(\underline{\alpha}) \cdot h}; \\ \underline{B}_d(\underline{\alpha}; h) = \Gamma(\underline{\alpha}; h) = \int_0^h e^{\underline{A}(\underline{\alpha}) \cdot v} \underline{B}(\underline{\alpha}) dv; \\ \underline{C}_d(\underline{\alpha}; h) = \underline{C}(\underline{\alpha}); \quad \underline{D}_d(\underline{\alpha}; h) = \underline{D}(\underline{\alpha}). \end{cases} \quad (2.5.1.3)$$

Datorită operației de discretizare, sistemul descris de (2.5.1.2), (2.5.1.3), adaugă, la lista parametrilor sistemului încă unul, pe h , pasul de discretizare (perioada de eșantionare), având valoarea nominală h_0 . Modelele de sensibilitate asociate sistemului (2.5.1.2), calculate pentru $h = h_0$, împreună cu modelul nominal al sistemului vor furniza funcțiile de sensibilitate de stare respectiv de ieșire în momentele de eșantionare. Pentru situația în care parametrul sistemului este considerat $h \neq h_0$ am abordat și problema evoluției funcțiilor de sensibilitate între momentele de eșantionare.

2.5.1.1 Modele de sensibilitate ale sistemelor cu eșantionare în raport cu parametri $\alpha_j, j = \overline{1, q}$

Prin derivarea relațiilor (2.5.1.2) în raport cu parametri $\alpha_j, j = \overline{1, q}$ se obțin modelele de sensibilitate de stare:

$$\begin{cases} \underline{\chi}_j(t+1; \underline{\alpha}_0; h_0) = \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0; h_0) \cdot \underline{\chi}_j(t; \underline{\alpha}_0; h_0) + \left. \frac{\partial \underline{A}_d(\underline{\alpha}; h_0)}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_0; h_0) + \\ \quad + \left. \frac{\partial \underline{B}_d(\underline{\alpha}; h_0)}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{\chi}_j^0 = \underline{0} \quad t \in \mathbb{N} \\ \underline{\sigma}_j(t; \underline{\alpha}_0; h_0) = \underline{C}_d(\underline{\alpha}_0; h_0) \cdot \underline{\chi}_j(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{C}_d(\underline{\alpha}; h_0)}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{D}_d(\underline{\alpha}; h_0)}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{u}(t) \end{cases} \quad (2.5.1.4)$$

Relațiilor (2.5.1.4) și modelului nominal al sistemului (2.5.1.2) le corespunde sistemul combinat prezentat în fig.2.5.1-1. Pentru simplitatea scrierii, s-a omis parametrul h_0 .

2.5.1.2 Modele de sensibilitate ale sistemelor cu eșantionare în raport cu parametrul h

Vectorul de sensibilitate de stare în raport cu parametrul h , [43], este denumit *vector de sensibilitate de eșantionare*, notat cu $\underline{\lambda}$ și este definit în §2.1.5. El caracterizează sensibilitatea vectorului de stare în raport cu h în momentele de eșantionare.

Întrucât toate mărimile care intervin în (2.5.1.2) sunt continue în raport cu h , derivarea relațiilor (2.5.1.2) în raport cu h va conduce la *modelul de sensibilitate de eșantionare* (2.5.1.5), calculat în Anexa VI:

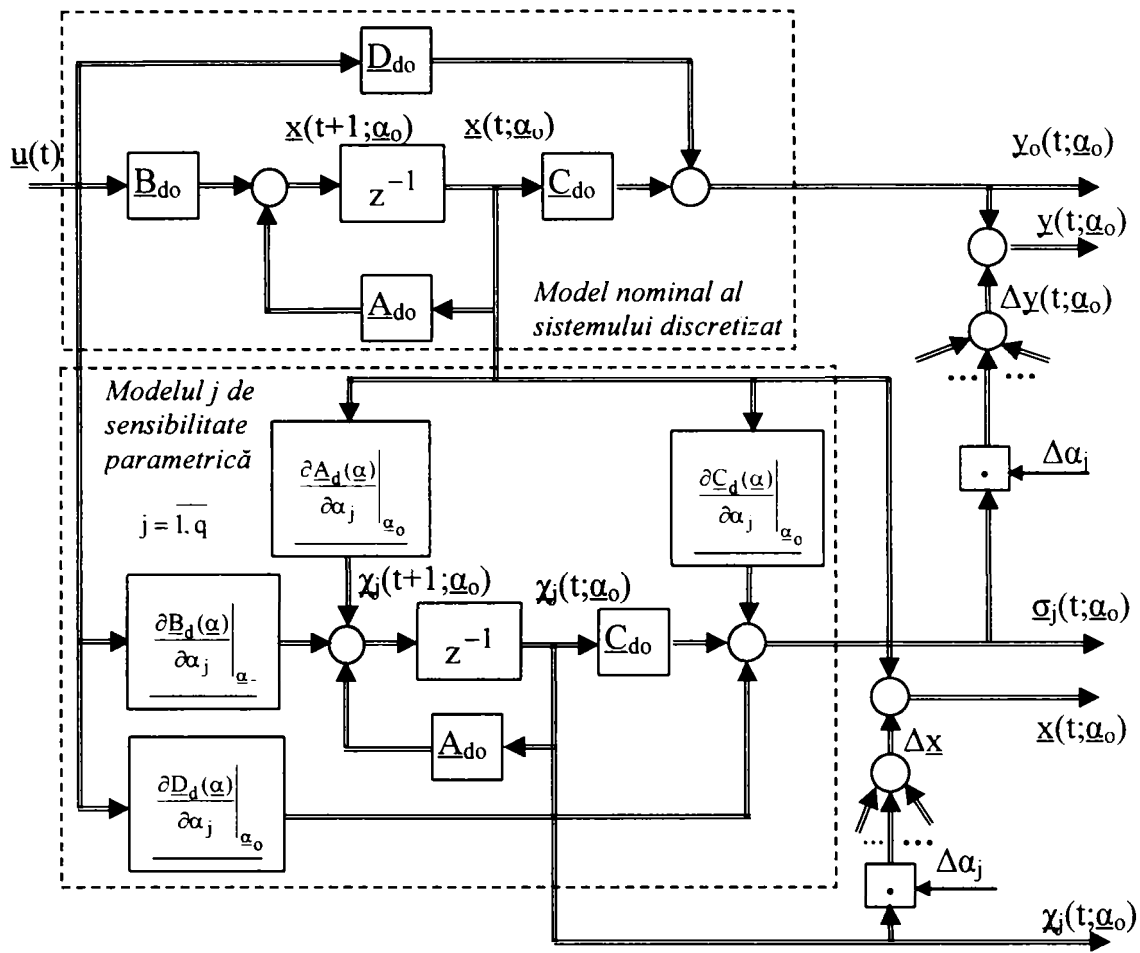


Fig.2.5.1-1 Sistemul combinat pentru măsurarea funcțiilor de sensibilitate la sistemele lineare în timp discret, descrise prin MM-ISI.

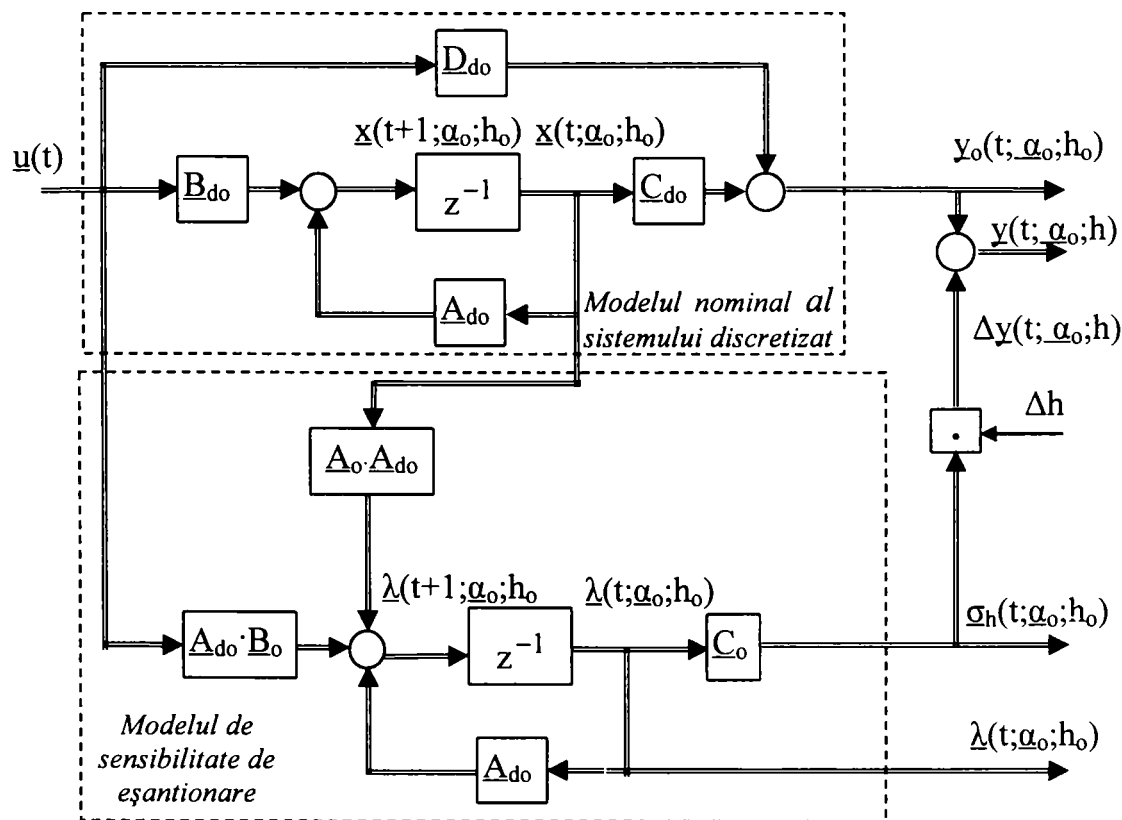


Fig.2.5.1-2 Sistemul combinat pentru măsurarea funcțiilor de sensibilitate de eșantionare ale sistemelor lineare în timp discret, descrise prin MM-ISI.

$$\begin{cases} \underline{\lambda}(t+1; \underline{\alpha}_0; h_0) = \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0; h_0) \cdot \underline{\lambda}(t; \underline{\alpha}_0; h_0) + \underline{A}(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0; h_0) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_0; h_0) + \\ \quad + \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0; h_0) \cdot \underline{B}(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{\lambda}_j^0 = \underline{0} \\ \underline{\sigma}_h(t; \underline{\alpha}_0; h_0) = \underline{C}(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{\lambda}(t; \underline{\alpha}_0), \quad t \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.5.1.5)$$

Cu $\underline{\sigma}_h$ s-a notat vectorul de sensibilitate de eşantionare al ieşirii.

Prin combinarea modelului de sensibilitate de eşantionare descris de relațiile (2.5.1.5) cu modelul nominal al sistemului descris de relațiile (2.5.1.2) la valorile nominale ale parametrilor rezultă schema din fig.2.5.1-2, pe baza căreia se pot determina atât vectorul de sensibilitate de eşantionare al stării, $\underline{\lambda}$, cât și vectorul de sensibilitate de eşantionare al ieşirii, $\underline{\sigma}_h$, în momentele de eşantionare.

Caracterizarea sensibilității vectorului de stare \underline{x} în raport cu h între momentele de eşantionare se face cu ajutorul vectorului de eşantionare continuu, definit în §2.1.5. Determinarea acestuia presupune rezolvarea unui șir de ecuații diferențiale autonome, de forma

$$\frac{d\underline{\lambda}(th_0 + \tau)}{d\tau} = \underline{A} \cdot \underline{\lambda}(th_0 + \tau), \quad \tau \in (0, h), \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.5.1.6)$$

în condiții inițiale reprezentând soluțiile lui $\underline{\lambda}$ din (2.5.1.5).

Fiecare element al șirului din (2.5.1.6) se referă la un pas de discretizare. Pentru simplitatea scrierii, s-au omis parametri din α_0 .

2.5.2 Modele “în două puncte” (studiu de caz).

Noțiunile introduse în acest paragraf se referă la sistemul de reglare automată numeric prezentat în fig. 2.5.2-1, [1], [23], în care un proces în timp continuu, P, este condus pe baza unui algoritm de reglare numerică, ARN, ce acționează la momentele de timp discrete, $t_c = th, t \in \mathbb{N}$, în timp ce informația despre proces, pe baza căreia se stabilește mărimea de comandă \bar{u} , este preluată la momentele de timp anterioare $t_a = th - \tau_c, t \in \mathbb{N}$. Parametrul $\tau_c \ll h$ reprezintă timpul de calcul (necesar pentru determinarea numerică a mărimii de comandă într-o perioadă de eşantionare). La proiectarea ARN s-a considerat $\tau_c = 0$. Cum în realitate $\tau_c \neq 0$ se pune problema influenței timpului de calcul asupra mărimilor din sistem. Soluționarea acestei probleme se face gășind un model care să țină seama de timpul de calcul τ_c .

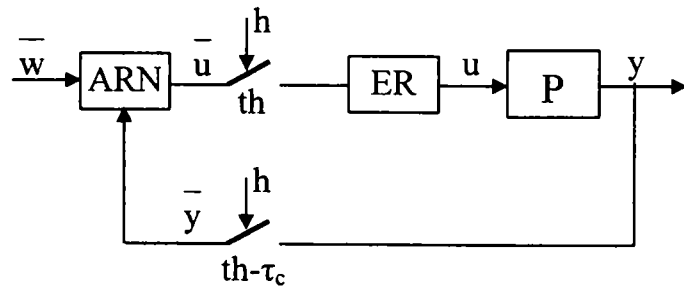


Fig.2.5.2-1 Sistem de reglare

Procesul condus, P, de ordin n, este descris de MM-ISI

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \\ \underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) \end{cases} \quad (2.5.2.1)$$

În situația în care timpul de calcul se consideră nul, $\tau_c = 0$, (ceea ce înseamnă că achiziția de informații din proces și transmiterea comenzii către proces sunt sincrone, $t_c = t_a$), din (2.5.2.1), prin discretizare ca realizare invariantă la semnal treaptă se obține MM-ISI de ordinul n în timp discret

$$\begin{cases} \underline{x}_c(t+1) = \underline{A}_{d,c} \cdot \underline{x}_c(t) + \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{u}_c(t), & \underline{x}_c(0) = \underline{x}^0, \\ \underline{y}_c(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}_c(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.5.2.2)$$

unde

$$\begin{cases} \underline{A}_{d,c} = e^{\underline{A} \cdot h}; \\ \underline{B}_{d,c} = \int_0^h e^{\underline{A} \cdot v} \underline{B} dv. \end{cases} \quad (2.5.2.3)$$

Indicele "c" sugerează faptul că momentele de timp discrete considerate sunt cele de transmitere a comenzii către proces, adică $t_c = th, t \in \mathbb{N}$.

Presupunem că regulatorul numeric implementează algoritmul de reglare linear descris prin MM-ISI de ordin n_R în timp discret

$$\begin{cases} \underline{z}(t+1) = \underline{A}_R \cdot \underline{z}(t) + \underline{B}_{Ry} \cdot \underline{y}_c(t) + \underline{B}_{Rw} \cdot \underline{w}(t), & \underline{z}(0) = \underline{z}^0, \\ \underline{u}_c(t) = \underline{C}_R \cdot \underline{z}(t) + \underline{D}_{Ry} \cdot \underline{y}_c(t) + \underline{D}_{Rw} \cdot \underline{w}(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}. \quad (2.5.2.4)$$

Relațiile (2.5.2.2) și (2.5.2.4) descriu funcționarea sistemului din fig.2.5.2-1 la momentele de discretizare $t_c = th, t \in \mathbb{N}$ în situația în care $\tau_c = 0$. În realitate, între momentul achiziției, t_a , și cel al transmiterii comenzii, t_c , există un interval de timp $\tau_c = t_c - t_a \neq 0$, fig.2.5.2-2. Întrucât în acest interval de timp se calculează comanda, convenim să denumim acest interval de timp, "timp de calcul". Considerăm $\tau_c = \text{constant}$. Comportamentul sistemului din fig.2.5.2.1 în această situație poate fi descris prin modelul de ordinul $2n+n_R$, în timp discret:

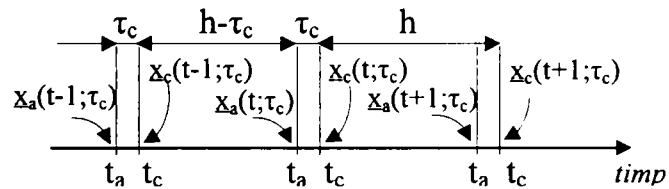


Fig.2.5.2-2 Distribuția indicilor a și c pe axa timpului

$$\begin{cases} \underline{x}_c(t+1; \tau_c) = \underline{A}_{d,c} \cdot \underline{x}_c(t; \tau_c) + \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{u}_c(t; \tau_c), & \underline{x}_c(0; \tau_c) = \underline{x}_c^0, \\ \underline{y}_c(t; \tau_c) = \underline{C} \cdot \underline{x}_c(t; \tau_c) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \underline{x}_a(t+1; \tau_c) = \underline{A}_{d,a} \cdot \underline{x}_c(t; \tau_c) + \underline{B}_{d,a} \cdot \underline{u}_c(t; \tau_c), & \underline{x}_a(0; \tau_c) = \underline{x}_a^0, \\ \underline{y}_a(t; \tau_c) = \underline{C} \cdot \underline{x}_a(t; \tau_c) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.5.2.5)$$

$$\begin{cases} \underline{z}(t+1; \tau_c) = \underline{A}_R \cdot \underline{z}(t; \tau_c) + \underline{B}_{Ry} \cdot \underline{y}_a(t; \tau_c) + \underline{B}_{Rw} \cdot \underline{w}(t), & \underline{z}(0) = \underline{z}^0, \\ \underline{u}_c(t; \tau_c) = \underline{C}_R \cdot \underline{z}(t; \tau_c) + \underline{D}_{Ry} \cdot \underline{y}_a(t; \tau_c) + \underline{D}_{Rw} \cdot \underline{w}(t) \end{cases},$$

unde:

$$\begin{cases} \underline{A}_{d,a} = e^{\underline{A} \cdot (h - \tau_c)}, \\ \underline{B}_{d,a} = \int_0^{h - \tau_c} e^{\underline{A} \cdot v} \underline{B} dv, \end{cases} \quad (2.5.2.6)$$

restul notațiilor fiind ca în (2.5.2.3) și (2.5.2.4). Indicele “a” sugerează faptul că momentele de timp discrete considerate sunt cele de achiziție a datelor din proces, adică $t_a = th - \tau_c, t \in \mathbb{N}$.

Se remarcă faptul că modelul (2.5.2.5) operează atât cu mărimi la momentul de comandă, t_c , cât și cu mărimi la momentul de achiziție, t_a , în timp ce modelul ((2.5.2.2), (2.5.2.4)) operează numai cu mărimi la momentul t_c . Această remarcă ne sugerează denumirile de “*model într-un singur punct*”, M-1P, pentru modelul ((2.5.2.2), (2.5.2.4)) respectiv de “*model în două puncte*”, M-2P, pentru modelul (2.5.2.5).

Considerând timpul de calcul, τ_c , ca unic parametru, pentru sistemul de reglare automată numeric, având valoarea nominală $\tau_{c0} = 0$, se pune problema determinării influenței lui τ_c asupra comportării dinamice a sistemului. Problema poate fi rezolvată relativ ușor dacă se asociază modelului (2.5.2.5) un model de sensibilitate în raport cu parametrul τ_c .

În situația în care toți vectorii și toate matricele din (2.5.2.5) sunt derivabile în raport cu τ_c , pe un interval specificat $[0, \tau_{cmax}]$, introducem notațiile:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_c(t;0) &= \left. \frac{d\underline{x}_c(t; \tau_c)}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0}, \quad \underline{\lambda}_a(t;0) = \left. \frac{d\underline{x}_a(t; \tau_c)}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0}, \quad \underline{\lambda}_z(t;0) = \left. \frac{d\underline{z}(t; \tau_c)}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0}, \\ \underline{\sigma}_c(t;0) &= \left. \frac{d\underline{y}_c(t; \tau_c)}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0}, \quad \underline{\sigma}_a(t;0) = \left. \frac{d\underline{y}_a(t; \tau_c)}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0}, \quad \underline{\sigma}_u(t;0) = \left. \frac{d\underline{u}_c(t; \tau_c)}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0} \end{aligned} \quad (2.5.2.7)$$

Cu aceste precizări, din (2.5.2.5) se obține modelul de sensibilitate parametrică în raport cu timpul de calcul:

$$\begin{cases} \underline{\lambda}_c(t+1;0) = \underline{A}_{d,c} \cdot \underline{\lambda}_c(t;0) + \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{\sigma}_u(t;0), \quad \underline{\lambda}_c(0;0) = 0 \\ \underline{\sigma}_c(t;0) = \underline{C} \cdot \underline{\lambda}_c(t;0) \\ \underline{\lambda}_a(t+1;0) = \left. \frac{d\underline{A}_{d,a}}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0} \cdot \underline{x}_c(t;0) + \underline{A}_{d,a} \cdot \underline{\lambda}_c(t;0) + \left. \frac{d\underline{B}_{d,a}}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0} \cdot \underline{u}_c(t;0) + \\ \quad + \underline{B}_{d,a} \cdot \underline{\sigma}_u(t;0), \quad \underline{\lambda}_a(0;0) = 0 \\ \underline{\sigma}_a(t;0) = \underline{C} \cdot \underline{\lambda}_a(t;0) \quad t \in \mathbb{Z} \\ \underline{\lambda}_z(t+1;0) = \underline{A}_R \cdot \underline{\lambda}_z(t;0) + \underline{B}_{Ry} \cdot \underline{\sigma}_a(t;0), \quad \underline{\lambda}_z(0;0) = 0 \\ \underline{\sigma}_u(t;0) = \underline{C}_R \cdot \underline{\lambda}_z(t;0) + \underline{D}_{Ry} \cdot \underline{\sigma}_a(t;0) \end{cases} \quad (2.5.2.8)$$

În (2.5.2.8) se pot înlocui

$$\left. \frac{d\underline{A}_{d,a}}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0} = -\underline{A} \cdot \underline{A}_{d,c}, \quad \left. \frac{d\underline{B}_{d,a}}{d\tau_c} \right|_{\tau_c=0} = -\underline{A} \cdot \underline{B}_{d,c} - \underline{B} \quad (2.5.2.9)$$

Întrucât (2.5.2.8) reprezintă un model de sensibilitate obținut pe baza unui M-2P, el va fi numit “*model de sensibilitate în două puncte*”, MS-2P. Intrările în MS-2P sunt $\underline{x}_c(t;0)$ și $\underline{u}_c(t;0)$, adică starea și comanda din M-1P nominal. Prin urmare utilizarea MS-2P trebuie făcută simultan cu M-1P, fapt ce conduce la “*modelul global în două puncte*”, MG-2P, a cărui mărime de intrare este mărimea de conducere $\underline{w}(t)$.

Forma matriceală a MG-2P, obținută din ((2.5.2.2), (2.5.2.4)) , (2.5.2.8), după utilizarea relației (2.5.2.9) este:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_c(t+1;0) \\ \underline{z}(t+1;0) \\ \underline{\lambda}_c(t+1;0) \\ \underline{\lambda}_a(t+1;0) \\ \underline{\lambda}_z(t+1;0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{d,c} + \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{D}_{Ry} \cdot \underline{C} & \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{C}_R & 0 & 0 & 0 \\ \underline{B}_{Ry} \cdot \underline{C} & \underline{A}_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{A}_{d,c} & \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{D}_{Ry} \cdot \underline{C} & \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{C}_R \\ -\underline{A} \cdot \underline{A}_{d,c} & -\underline{A} \cdot \underline{B}_{d,c} - \underline{B} & \underline{A}_{d,c} & \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{D}_{Ry} \cdot \underline{C} & \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{C}_R \\ 0 & 0 & 0 & \underline{B}_{Ry} & \underline{A}_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_c(t;0) \\ \underline{z}(t;0) \\ \underline{\lambda}_c(t;0) \\ \underline{\lambda}_a(t;0) \\ \underline{\lambda}_z(t;0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_{d,c} \cdot \underline{D}_{Rw} \\ \underline{B}_{Rw} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{w}(t) \quad t \in Z$$

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_c(t;0) \\ \underline{y}_c(t;0) \\ \underline{\sigma}_u(t;0) \\ \underline{\sigma}_c(t;0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D}_{Ry} \cdot \underline{C} & \underline{C}_R & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{D}_{Ry} \cdot \underline{C} & \underline{C}_R \\ 0 & 0 & \underline{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_c(t;0) \\ \underline{z}(t;0) \\ \underline{\lambda}_c(t;0) \\ \underline{\lambda}_a(t;0) \\ \underline{\lambda}_z(t;0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{D}_{Rw} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{w}(t) \quad (2.5.2.10)$$

cu condițiile inițiale

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_c(0;0) \\ \underline{z}(0;0) \\ \underline{\lambda}_c(0;0) \\ \underline{\lambda}_a(0;0) \\ \underline{\lambda}_z(0;0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_c^0 \\ \underline{z}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.2.11)$$

și intrarea $\underline{w}(t)$, $t \in Z$. Deși în aparență MG-2P pare complicat, el poate fi privit ca un MM-ISI în timp discret, oarecare.

După soluționarea MG-2P, influența timpului de calcul asupra sistemului de reglare se determină prin utilizarea unor relații de tipul (2.1.2.2) și anume:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_c(t; \tau_c) &= \underline{x}_c(t; 0) + \underline{\lambda}_c(t; 0) \cdot \tau_c \\
 \underline{z}(t; \tau_c) &= \underline{z}(t; 0) + \underline{\lambda}_z(t; 0) \cdot \tau_c \\
 \underline{u}_c(t; \tau_c) &= \underline{u}_c(t; 0) + \underline{\sigma}_u(t; 0) \cdot \tau_c \\
 \underline{y}_c(t; \tau_c) &= \underline{y}_c(t; 0) + \underline{\sigma}_c(t; 0) \cdot \tau_c
 \end{aligned}
 \tag{2.5.2.12}$$

În concluzie, se poate afirma că, un studiu privind influența timpului de calcul asupra dinamicii unui sistem de reglare automată numeric, necesar în faza de proiectare la alegerea perioadei de eșantionare, se poate realiza în mod elegant utilizând MG-2P.

Studiul de sensibilitate de eșantionare poate contribui la alegerea unei perioade de eșantionare în acord cu influența timpului de calcul.

2.6 Calculul numeric al funcțiilor de sensibilitate

În ciuda faptului că în prezent există numeroase medii de calcul, nu există în acest moment nici un produs software care să permită în mod *simplu* analiza sensibilității parametrice a sistemelor automate. Principalele specificații pe care ar trebui să le îndeplinească un astfel de produs sunt:

- Calcularea abaterilor mărimilor de stare sau de ieșire în raport cu fiecare parametru care se poate abate de la valoarea nominală. Astfel se poate corecta ieșirea nominală în funcție de posibilele abateri suferite de parametri.
- Combinarea aditivă a efectelor abaterilor în cazul mai multor abateri parametrice. În cazul în care modelul matematic al sistemului supus analizei este obținut prin identificare analitică se impune corelarea abaterilor în raport cu parametri fizici, (coeficienții matematici sunt funcții de mai mulți parametri fizici). În cazul în care modelul matematic al sistemului supus analizei este obținut pe cale experimentală nu este necesară o astfel de corelare, (coeficienții modelului matematic sunt singurii parametri ce pot fi luați în considerare).

Din punctul de vedere al investigării problemelor de sensibilitate parametrică prin intermediul mediilor matematice existente se pot distinge două modalități de abordare:

- Utilizarea mediilor matematice cu caracter general (de ex. MATCAD, MATHEMATICA), fapt ce necesită un efort de calcul mare, necesar construirii analitice a modelelor de sensibilitate sub forma acceptată de aceste medii. Mediul MATHEMATICA deși are implementată o parte dedicată sistemelor (“CONTROL SYSTEM PROFESSIONAL”) nu conține funcții specifice analizei de sensibilitate [115].
- Utilizarea facilităților referitoare la modelare și simulare oferite de singurul mediu de programare actual dedicat în mod *special* automatizării MATLAB-SIMULINK. Acesta, cu un efort de calcul nu foarte mare (descriș în §2.6.1), permite tratarea tuturor problemelor de sensibilitate. Având structură modulară, mediul MATLAB, permite scrierea de funcții noi, utile în determinarea pe cale numerică a funcțiilor de sensibilitate, §2.6.2.

Acolo unde mediul MATLAB nu poate fi folosit (de exemplu într-un echipament de conducere numerică unde se lucrează în timp real iar resursele nu permit instalarea de software voluminos și lent) și este nevoie de o apreciere calitativă a sensibilității parametrice în timp real, există posibilitatea conceperii și implementării unor produse software noi, *dedicate*, care permit calculul simplu al funcțiilor de sensibilitate parametrică, plecând direct

de la modelul experimental al sistemului. În asemenea cazuri, soluția implică generarea unor relații de calcul al funcțiilor de sensibilitate implementabile în orice limbaj de programare. Un exemplu este prezentat în §2.6.3.

În Anexa IX s-a efectuat un studiu comparativ al celor trei modalități de calcul numeric al funcțiilor de sensibilitate parametrică abordate în §2.6.1, §2.6.2, §2.6.3 pentru sistemul descris de MM-II :

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t), \quad \dot{y}(0) = y(0) = 0, \quad u(0_-) = 0 \quad (2.6.1)$$

având parametri nominali: $a_2=1$, $a_1=1$, $a_0=3$, $b_1=0.1$, $b_0=1$ și semnal treaptă unitară la intrare, pe intervalul de timp $0 \div 5$ secunde, cu un pas de calcul de 0.01 secunde.

2.6.1 Calculul numeric al funcțiilor de sensibilitate utilizând mediul MATLAB-SIMULINK

În paragrafele anterioare s-au prezentat diverse modalități de calcul care permit generarea analitică sau prin scheme bloc a modelelor de sensibilitate parametrică, pentru orice sistem linear sau nelinear. Aceste modele împreună cu modelul nominal al sistemului supus analizei se pot simula utilizând mediul MATLAB-SIMULINK, generându-se astfel funcțiile

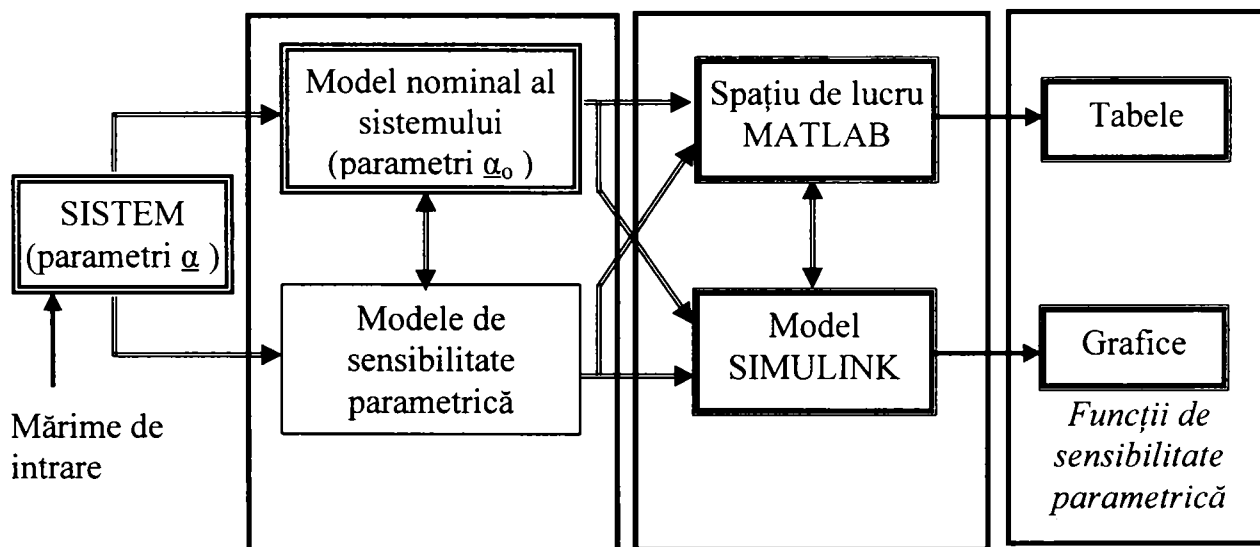


Fig.2.6.1-1 Generarea funcțiilor de sensibilitate utilizând mediul MATLAB-SIMULINK

de sensibilitate. Schematic, la modul general, fluxul informațional care duce la generarea funcțiilor de sensibilitate poate fi surprins prin schema din fig.2.6.1-1. Ea precizează "poziționarea" calculului numeric în fluxul informațional.

2.6.2 Funcții MATLAB noi, dedicate generării funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută

În acest paragraf sunt prezentate 4 funcții MATLAB concepute pentru calculul funcțiilor de sensibilitate absolută de ieșire, pentru sistemele lineare de tip SISO, descrise prin MM-II în forma canonică. Cele 4 funcții noi, menționate în continuare, au fost realizate după tipicul și forma funcțiilor MATLAB, sunt apelabile ca orice alte funcții MATLAB și ca urmare pot fi integrate în mediul MATLAB. Ele permit:

- "sigmaa" - calculul funcțiilor de sensibilitate absolută în raport cu parametri de tip "a" la sistemele continue, lineare, descrise prin MM-II în forma canonică pentru o funcție de intrare dată și parametri nominali cunoscuți;
- "sigmab" - calculul funcțiilor de sensibilitate absolută în raport cu parametri de tip "b" la sistemele continue, lineare, descrise prin MM-II în forma canonică pentru o funcție de intrare dată și parametri nominali cunoscuți;
- "dsigmaa" - calculul funcțiilor de sensibilitate absolută în raport cu parametri de tip "a" la sistemele în timp discret, lineare, descrise prin MM-II în forma canonică pentru o funcție de intrare dată și parametri nominali cunoscuți;
- "dsigmab" - calculul funcțiilor de sensibilitate parametrică în raport cu parametri de tip "b" la sistemele în timp discret, lineare, descrise prin MM-II în forma canonică pentru o funcție de intrare dată și parametri nominali cunoscuți;

unde, prin "a" parametri de tip "a", respectiv "b" parametri de tip "b", se înțeleg parametri a_i , $i = 0, n$ și, respectiv parametri b_i , $i = 0, n$, din MM-II în formele canonice (2.6.2.1.1) și (2.6.2.1.2).

Avantajul folosirii funcțiilor MATLAB propuse aici este acela că permit utilizarea ulterioară a rezultatelor pentru alte prelucrări efectuate în MATLAB-SIMULINK asupra modelelor sistemului.

Scrierea celor 4 funcții are la bază metoda directă prezentată în §2.2.1 și s-a făcut în două etape:

- în prima etapă, plecând de la MM-II, s-au obținut relațiile generale care descriu în domeniul operațional funcțiile de sensibilitate parametrică;
- în a doua etapă, plecând de la structura generală a funcțiilor MATLAB, s-au scris subprogramele care vor calcula numeric, pe baza relațiilor din prima etapă, funcțiile de sensibilitate parametrică.

2.6.2.1 Deducerea imaginilor operaționale ale f.d.s. pe baza MM-II

Prelucrarea MM-II în vederea obținerii relațiilor ce urmează a fi implementate în cele 4 funcții MATLAB de calcul a funcțiilor de sensibilitate parametrică s-a realizat pornind de la faptul că mediul MATLAB are implementată în nucleul său de bază funcția "lsim" care calculează răspunsul unui sistem descris de f.d.t. la un semnal de intrare dat, pe un interval de timp precizat și în condiții inițiale date. Am apelat funcția "lsim" în toate cele 4 funcții noi scrise. În locul f.d.t. am folosit modelele operaționale de sensibilitate obținute în cele ce urmează.

Sistemelor lineare SISO de ordinul n descrise de MM-II în formele canonice:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = \\ = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \quad t \in \mathfrak{T} \end{aligned} \quad \text{STC, (2.6.2.1.1)}$$

respectiv

$$\begin{aligned} a_n y(t) + a_{n-1} y(t-1) + \dots + a_1 y(t-n+1) + a_0 y(t-n) = \\ = b_n u(t) + b_{n-1} u(t-1) + \dots + b_1 u(t-n+1) + b_0 u(t-n), \quad t \in \mathfrak{T} \end{aligned} \quad \text{STD, (2.6.2.1.2)}$$

având vectorul parametrilor $\underline{\alpha} = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0]^T$, de valoare nominală $\underline{\alpha}_0$, le corespunde în domeniul operațional, în condiții inițiale nule, o relație de forma

$$y(\lambda, \underline{\alpha}) = H(\lambda, \underline{\alpha}) \cdot u(\lambda) \quad (2.6.2.1.3)$$

în care f.d.t. $H(\lambda, \underline{\alpha})$ are expresia

$$H(\lambda, \underline{\alpha}) = \frac{b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0}{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0} \quad (2.6.2.1.4)$$

Conform metodei descrise în §2.2.1, imaginile operaționale ale funcțiilor de sensibilitate absolută ale mărimii de ieșire în raport cu parametri $\alpha_j, j = \overline{1, q}$, $q = 2(n+1)$ se obțin cu relația (2.2.1.2). Aplicând relația (2.2.1.2) în cazul concret al f.d.t. descrisă de (2.6.2.1.4) se obține:

$$\begin{aligned} \sigma_j(\lambda; \underline{\alpha}_0) &= \left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial a_{n-j+1}} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(\lambda) = \\ &= - \left. \frac{(b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0) \cdot \lambda^{n-j+1}}{(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)^2} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(\lambda), \quad j = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (2.6.2.1.5)$$

respectiv

$$\begin{aligned} \sigma_j(\lambda; \underline{\alpha}_0) &= \left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial b_{2n-j+2}} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(\lambda) = \\ &= \left. \frac{\lambda^{2n-j+2}}{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(\lambda), \quad j = \overline{n+2, q} \end{aligned} \quad (2.6.2.1.6)$$

Funcțiile de transfer din relațiile (2.6.2.1.5) și (2.6.2.1.6) reprezintă "cheia" noilor subprograme MATLAB concepute.

2.6.2.2 Implementarea calculului f.d.s. în subprograme (funcții) MATLAB

Mediul de programare MATLAB are implementată în nucleul său de bază funcția "y=lsim(SYS,u,t,xo)" care calculează răspunsul y al sistemului descris de SYS la semnalul de intrare u pe intervalul de timp descris de t și în condițiile inițiale x_0 date. Funcția "lsim" folosește pentru implementarea operației de integrare metode numerice de tip Runge-Kutta de ordin superior ceea ce asigură o bună convergență. În utilizarea obișnuită a funcției "lsim", SYS reprezintă descrierea matematică a sistemului, de tip f.d.t. sau de tip MM-ISI.

Pentru situația în care în funcția "lsim" pentru SYS se utilizează modelele (generatoarele) de f.d.s. din (2.6.2.1.5) și (2.6.2.1.6), $\left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial a_{n-j+1}} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0}$, $j = \overline{1, n+1}$ și

$\left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial b_{2n-j+2}} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0}$, $j = \overline{1, q}$, răspunsul calculat de funcția "lsim" va fi de fapt funcția de

sensibilitate $\sigma_j(t, \underline{\alpha}_0)$, $j = \overline{1, q}$. Acest mod de calcul este folosit în toate cele 4 noi subprograme de tip "function".

Astfel, plecând de la coeficienții $a_i, i = \overline{0, n}$ și $b_i, i = \overline{0, n}$ ai MM-II scris sub forma (2.6.2.1.4), având valorile nominale cunoscute, subprogramele "sigmaa", "dsigmaa", "sigmab" și "dsigmab", (după cum sistemul este în timp continuu sau în timp discret și după cum se dorește f.d.s. în raport cu parametri $a_i, i = \overline{0, n}$ sau cu parametri $b_i, i = \overline{0, n}$), descriu MM-ISI corespunzătoare f.d.t din (2.6.2.1.5) respectiv (2.6.2.1.6) și apoi aplică asupra acestora funcția "lsim" pentru intrarea descrisă de u, pe intervalul de timp t, dat și în condiții inițiale nule. Ca parametri de ieșire ai subprogramelor, rezultă funcțiile de sensibilitate parametrică $\sigma_j(t, \underline{\alpha}_0)$, $j = \overline{1, q}$ corespunzătoare sistemului descris prin MM-II în forma canonică pentru funcție de intrare dată u(t) și parametri nominali cunoscuți.

Schematic, prelucrarea informației de către cele 4 subprograme noi poate fi redată ca în fig.2.6.2.2.1.

Modul de apelare a celor 4 subprograme se face astfel:

Sa=sigmaa(num,den,u,t)

Sa=dsigmaa(num,den,u)

Sb=sigmab(num,den,u,t)

Sb=dsigmab(num,den,u)

unde num = $[a_{n,0}, a_{n-1,0}, \dots, a_{1,0}, a_{0,0}]$, den = $[b_{n,0}, b_{n-1,0}, \dots, b_{1,0}, b_{0,0}]$, u = $[u_0, u_1, u_2, \dots]$, t = $[0, t_1, t_2, \dots]$. Aici u_0, u_1, u_2, \dots reprezintă – la sistemele în timp continuu - valorile de la intrare la momentele de calcul $0, t_1, t_2, \dots$ iar la sistemele în timp discret, valorile de la intrare la momentele de discretizare $0, 1, 2, 3, \dots$,

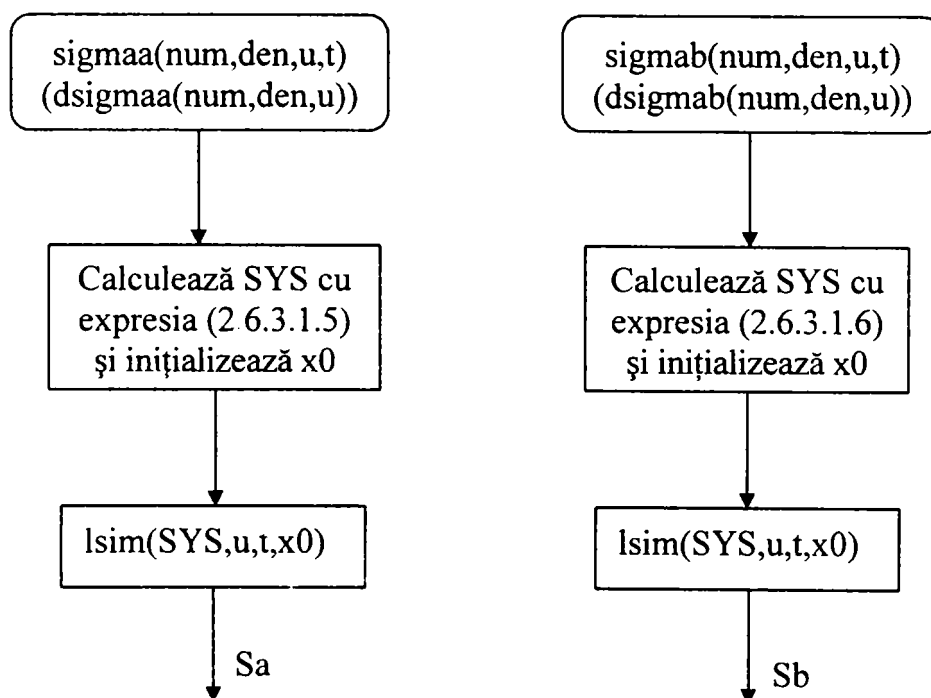


Fig.2.6.3.2.1 Fluxul de informații în subprogramele "sigmaa", "sigmab"

Cele 4 subprograme de tip “function” sunt cuprinse în fișierele:

sigmaa.m

sigmab.m

dsigmaa.m

dsigmab.m

redate în Anexa VII.

2.6.3 Metode aproximative de calcul al funcțiilor de sensibilitate parametrică ale sistemelor SISO descrise prin MM-II

Se stabilesc modele de sensibilitate pentru modele în timp discret obținute prin aplicarea metodelor de discretizare prin aproximare.

Pentru situațiile în care nu se dispune de mediul MATLAB și este necesară o analiză minimală de sensibilitate (de pildă intuirea formei funcțiilor de sensibilitate în vederea unei estimări a abaterilor parametrilor) se pot concepe produse software, dedicate unui singur sistem sau unei clase de sisteme, care să permită calculul funcțiilor de sensibilitate parametrică sau al abaterilor parametrilor. Ca exemplu, au fost concepute funcții C care implementează relațiile aproximative de calcul al funcțiilor de sensibilitate parametrică absolute și relative, (stabilite pentru modelul discretizat cu metoda dreptunghiului retardată), pentru un sistem SISO linear. Ele pot fi utilizate în aplicații software de automată unde este nevoie de analize minimale de sensibilitate parametrică. Validarea lor s-a făcut prin includerea lor într-un mini-produs software realizat în limbajul de programare C, [29], denumit “Calculul Numeric al Funcțiilor de Sensibilitate”, prescurtat CN-FS. Detalii despre structura acestui program sunt prezentate în Anexa VIII.

2.6.3.1 Determinarea analitică a relațiilor de calcul prin metode aproximative al funcțiilor de sensibilitate parametrică absolute și relative

Prelucrarea MM-II în vederea utilizării sale în program.

Fie sistemul linear SISO de ordinul n descris de MM-II în forma canonică

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_{n-1} \cdot u^{(n-1)} + \dots + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_0 \cdot u(t) \quad (2.6.3.1.1)$$

cu $u, y \in \mathbb{R}$ și condițiile inițiale:

$$y_0^{(i)} = 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad u_0^{(j)} = 0, \quad j = \overline{0, n-2} \quad (2.6.3.1.2)$$

Formei canonice (2.6.3.1.1) i se asociază MM-ISI

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t), & \underline{x}(t_0) = 0 \\ y(t) = \underline{c}^T \cdot \underline{x}(t) \end{cases} \quad (2.6.3.1.3)$$

în forma standard controlabilă, [3], adică având matricele:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6.3.1.4)$$

$$\underline{c}^T = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1}].$$

În vederea obținerii unor modele recursive simple, asupra relației (2.6.3.1.3) cu matricele (2.6.3.1.4), s-a aplicat metoda de discretizare a lui Euler (dreptunghiului retardată) [1], [19], [82], după un studiu prealabil asupra discretizării modelelor prin metode aproximative efectuat în [86]. Pentru un pas de discretizare h , se obține:

$$\begin{cases} \underline{x}(t+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(t) + \underline{b}_d \cdot u(t), & \underline{x}(0) = 0 \\ y(t) = \underline{c}_d^T \cdot \underline{x}(t) \end{cases}, \quad t \in Z \quad (2.6.3.1.5)$$

cu

$$\underline{A}_d = h \cdot \underline{A} + \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & h & & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h \\ -a_0 \cdot h & -a_1 \cdot h & -a_2 \cdot h & \dots & -a_{n-1} \cdot h + 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6.3.1.6)$$

$$\underline{b}_d = h \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ h \end{bmatrix}, \quad \underline{c}_d^T = \underline{c}^T = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1}]$$

Scrise pe componente, pentru valorile nominale ale parametrilor, ținând seama de (2.6.3.1.6), relațiile (2.6.3.1.5) devin:

$$\begin{cases} x_1(t+1; \underline{\alpha}_0) = x_1(t; \underline{\alpha}_0) + h \cdot x_2(t; \underline{\alpha}_0) \\ x_2(t+1; \underline{\alpha}_0) = x_2(t; \underline{\alpha}_0) + h \cdot x_3(t; \underline{\alpha}_0) \\ \dots \\ x_{n-1}(t+1; \underline{\alpha}_0) = x_{n-1}(t; \underline{\alpha}_0) + h \cdot x_n(t; \underline{\alpha}_0) \\ x_n(t+1; \underline{\alpha}_0) = -h \cdot \sum_{k=1}^n a_{k-1} \cdot x_k(t; \underline{\alpha}_0) + x_n(t; \underline{\alpha}_0) + h \cdot u(t) \\ y(t; \underline{\alpha}_0) = \sum_{k=1}^n b_{k-1} \cdot x_k(t; \underline{\alpha}_0) \end{cases} \quad (2.6.3.1.7)$$

cu condițiile inițiale: $x_1(0; \underline{\alpha}_0) = x_2(0; \underline{\alpha}_0) = \dots = x_n(0; \underline{\alpha}_0) = 0.$ (2.6.3.1.8)

Relațiile recurente din (2.6.3.1.7) împreună cu (2.6.3.1.8) vor fi utilizate la determinarea stării și ieșirii nominale pentru o funcție de intrare dată.

Ca și în §2.6.2, termenii de: "sensibilitate în raport cu parametri de tip "a"", respectiv "sensibilitate în raport cu parametri de tip "b"" utilizați în continuare, se referă la funcțiile de sensibilitate absolută sau relativă ale ieșirii în raport cu parametri a_i respectiv cu parametri b_j , adică: $\sigma_{a_i}, \tilde{\sigma}_{a_i}, i = 0, n-1$ respectiv $\sigma_{b_j}, \tilde{\sigma}_{b_j}, j = 0, n-1$.

Valorile nominale ale parametrilor sunt: $a_{0,0}, a_{1,0}, \dots, b_{0,0}, b_{1,0}, \dots$. Ele formează vectorul nominal al parametrilor $\underline{\alpha}_0$ și sunt cerute de program în faza de inițială, sub forma:

$$a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$$

Sensibilitate în raport cu parametri de tip "a"

Prin derivarea MM-ISI (2.6.3.1.5), în raport cu parametrul $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, \text{sau } n-1$, datorită formelor particulare ale matricelor din (2.6.3.1.6), se obține modelul de sensibilitate (vezi §2.2.2.2):

$$\begin{cases} \underline{\chi}_{a_i}(t+1; \underline{\alpha}_0) = \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{\chi}_{a_i}(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{A}_d(\underline{\alpha})}{\partial a_i} \right|_{\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_0), & \underline{\chi}_{a_i}^0 = \underline{0} \\ \underline{\sigma}_{a_i}(t; \underline{\alpha}_0) = \underline{c}_d^T(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{\chi}_{a_i}(t; \underline{\alpha}_0) \end{cases} \quad (2.6.3.1.9)$$

cu:

$$\underline{A}_d(\underline{\alpha}_0) = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & h & & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & h \\ -a_{0,0} \cdot h & -a_{1,0} \cdot h & -a_{2,0} \cdot h & \dots & -a_{n-1,0} \cdot h + 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.3.1.10)$$

$$\left. \frac{\partial \underline{A}_d(\underline{\alpha})}{\partial a_i} \right|_{\underline{\alpha}_0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -h & 0 & \end{bmatrix}, \quad \underline{c}_d^T(\underline{\alpha}_0) = \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{1,0} & & b_{n-1,0} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{2em}}_i \quad \downarrow \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{n-i-1}$

Având în vedere (2.6.3.1.10), scrisă pe componente, (2.6.3.1.9) devine:

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_{1,a_i}(t+1; \underline{\alpha}_0) &= \chi_{1,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) + h \cdot \chi_{2,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) \\ \chi_{2,a_i}(t+1; \underline{\alpha}_0) &= \chi_{2,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) + h \cdot \chi_{3,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) \\ &\dots\dots\dots \\ \chi_{n-1,a_i}(t+1; \underline{\alpha}_0) &= \chi_{n-1,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) + h \cdot \chi_{n,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) \\ \chi_{n,a_i}(t+1; \underline{\alpha}_0) &= -h \cdot \sum_{k=1}^n a_{k-1,o} \cdot \chi_{k,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) + \chi_{n,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) - h \cdot x_{i+1}(t; \underline{\alpha}_0) \\ \sigma_{a_i}(t; \underline{\alpha}_0) &= \sum_{k=1}^n b_{k-1} \cdot \chi_{k,a_i}(t; \underline{\alpha}_0) \end{aligned} \right. \quad (2.6.3.1.11)$$

cu condițiile inițiale $\chi_{1,a_i}(0; \underline{\alpha}_0) = \chi_{2,a_i}(0; \underline{\alpha}_0) = \dots = \chi_{n,a_i}(0; \underline{\alpha}_0) = 0$. (2.6.3.1.12)

Relațiile recurente (2.6.3.1.11) (împreună cu condițiile inițiale (2.6.3.1.12)) formează relațiile de calcul al funcției de sensibilitate absolută de ieșire în raport cu parametrul a_i . Implementarea acestora necesită mărimi de intrare care provin din (2.6.3.1.7) (împreună cu condițiile inițiale (2.6.3.1.8)).

Sensibilitate în raport cu parametri de tip "b"

Prin derivarea MM-ISI (2.6.3.1.5), în raport cu parametrul b_j , $j = 0, 1, 2, \dots, \text{sau } n-1$, datorită formelor particulare ale matricelor din (2.6.3.1.6), se obține modelul de sensibilitate (vezi §2.2.2.2):

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{\chi}_{b_j}(t+1; \underline{\alpha}_0) &= \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{\chi}_{b_j}(t; \underline{\alpha}_0), \quad \underline{\chi}_{b_j}^0 = \underline{0} \\ \underline{\sigma}_{b_j}(t; \underline{\alpha}_0) &= \underline{c}_d^T(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{\chi}_{b_j}(t; \underline{\alpha}_0) + \left. \frac{\partial \underline{c}_d^T(\underline{\alpha})}{\partial b_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_0) \end{aligned} \right. \quad (2.6.3.1.13)$$

cu:

$$\left. \frac{\partial \underline{c}_d^T(\underline{\alpha})}{\partial b_j} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} = [0 \quad 1 \quad \dots \quad 0] \quad (2.6.3.1.14)$$

Restul matricelor sunt cele din (2.6.3.1.10). Forma particulară autonomă a ecuației de stare din (2.6.3.1.13) arată că sensibilitatea stării în raport cu parametri de tip b este nulă. Astfel, ecuația de ieșire din (2.6.3.1.13) devine

$$\sigma_{b_j}(t; \underline{\alpha}_0) = x_{j+1}(t; \underline{\alpha}_0) . \quad (2.6.3.1.15)$$

Rezultă că funcțiile de sensibilitate de ieșire în raport cu parametri de tip b sunt identice cu stările MM-ISI nominal în forma standard controlabilă.

Relația (2.6.3.1.15) reprezintă formula de calcul al funcției de sensibilitate absolută de ieșire în raport cu parametri b_j .

În ceea ce privește funcțiile de sensibilitate semirelativă, conform relației de legătură (2.1.3.10) dintre funcția de sensibilitate absolută și cea semirelativă, pentru cazul prezentat aici se obțin relațiile:

$$\tilde{\sigma}_{a_i}(t; \underline{\alpha}_0) = \sigma_{a_i}(t; \underline{\alpha}_0) / y(t; \underline{\alpha}_0) , \quad (2.6.3.1.16)$$

$$\tilde{\sigma}_{b_j}(t; \underline{\alpha}_0) = \sigma_{b_j}(t; \underline{\alpha}_0) / y(t; \underline{\alpha}_0) . \quad (2.6.3.1.17)$$

La implementarea acestor relații, împărțirea cu 0 se poate evita în mod simplu prin completarea locului corespunzător în tabelul de valori cu un simbol specific (de ex. "??"), excluderea punctului respectiv din grafic și transmiterea unui mesaj de avertizare.

Relațiile (2.6.3.1.16) și (2.6.3.1.17) sunt formulele de calcul al funcțiilor de sensibilitate semirelativă de ieșire în raport cu parametri a_i respectiv b_j .

2.6.3.2 Implementarea relațiilor de calcul în limbajul de programare C

Pentru implementarea relațiilor recurente stabilite în §2.6.3.1 au fost create 4 funcții C:

“asens” – calculează valorile funcției de sensibilitate absolută de ieșire a sistemului în raport cu unul din parametri de tip a, specificat, precum și valorile de la ieșirea modelului nominal;

“bsens” – calculează valorile funcției de sensibilitate absolută de ieșire a sistemului în raport cu unul din parametri de tip b, specificat, precum și valorile de la ieșirea modelului nominal;

“arel” – calculează valorile funcției de sensibilitate semirelativă de ieșire a sistemului în raport cu unul din parametri de tip a, specificat, precum și valorile de la ieșirea modelului nominal;

“brel” – calculează valorile funcției de sensibilitate semirelativă de ieșire a sistemului în raport cu unul din parametri de tip b, specificat, precum și valorile de la ieșirea modelului nominal;

De menționat că “arel”, respectiv “brel” apelează și prelucrează rezultate obținute cu “asens” respectiv “bsens”. Toate cele patru funcții salvează rezultatele într-un tablou din care pot fi apoi preluate pentru a fi reprezentate grafic sau pentru a fi salvate în fișiere (de exemplu în programul CN-FS sunt salvate într-un fișier de tip *nume.mat*, fișier ce poate fi ulterior încărcat în MATLAB cu comanda *load nume*).

Funcțiile “asens” și “bsens” utilizează, la alegere, două tipuri de semnale de intrare: treaptă unitară și rampă unitară, descrise de relațiile

$$- \text{Funcția treaptă unitate: } u(t) = 1, \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.6.3.2.1)$$

$$- \text{Funcția rampă unitate: } u(t) = h \cdot t, \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.6.3.2.2)$$

Validarea funcțiilor C propuse s-a făcut prin compararea rezultatelor obținute prin calcul analitic efectuat conform relației (2.2.1.3) din §2.2.1, cu cele obținute prin rularea programului CN-FS, pentru un număr de 5 sisteme diferite. În anexa VIII sunt prezentate, pe lângă detalii despre programul CN-FS, aspecte din procesul de validare precum și sursele funcțiilor “asens” și “bsens”.

2.6.3.3 Concluzii și perspective

La studiul comparativ din Anexa IX participă și cele 4 funcții C propuse, prin intermediul programului CN-FS. Deși relațiile de calcul implementate sunt aproximative, (la stabilirea lor au fost utilizate modele în timp discret obținute prin discretizare prin aproximare și s-a folosit calcul recurent în buclă deschisă, fără corecție) totuși rezultatele obținute sunt

acceptabile pe anumite intervale de timp, ceea ce recomandă includerea lor (sau a altora obținute în mod similar dar îmbunătățite) în produse software dedicate sistemelor automate.

Pentru îmbunătățirea rezultatelor, funcțiile pot fi extinse ulterior prin adăugarea unor algoritme care să completeze noi specificații de proiectare cum ar fi:

- aplicarea la intrarea sistemului a unui semnal numeric oarecare;
- efectuarea calculelor din orice condiții inițiale;
- alegerea metodei de discretizare dintre metoda dreptunghiului, metoda trapezului, metoda lui Simpson etc, [33] sau a altor metode numerice de preferință cu convergența garantată și cu precizie mai mare;
- identificarea aproximativă a abaterilor parametrilor și utilizarea acestora pentru a controla eroarea de aproximare la fiecare pas de calcul;
- implementarea unor relații discrete care să provină din relația (2.2.2.17) din §2.2.2.2 care să permită calculul funcțiilor de sensibilitate parametrică în raport cu alți parametri decât cei în forma canonică;
- implementarea unor relații discrete care să provină din relația (2.1.6.1) din §2.1.6 care să permită calculul funcțiilor de sensibilitate parametrică de ordinul al doilea.

2.7 Concluzii

Capitolul 2 sintetizează instrumentele și metodele teoriei sensibilității sistemelor dinamice, cunoștințele fiind prezentate într-o formă utilizabilă.

Au fost prezentate și sistematizate de o manieră unitară atât instrumentele de lucru consacrate ale teoriei sensibilității:

- două moduri de clasificare a problemelor de sensibilitate parametrică (§2.1.1 și §2.1.2);
- definiții ale funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută, semirelativă și relativă și ale abaterilor calculabile prin intermediul acestora în domeniul timp (§2.1.3) sau în domeniul operațional al transformatei Laplace (§2.1.6);
- definiții ale măsurilor de sensibilitate (§2.1.4);
- definiții ale vectorilor de sensibilitate de eșantionare (§2.1.5);
- definiții ale abaterilor de ordinul al doilea (§2.1.7);

cât și instrumente noi: *funcția de sensibilitate de linearizare și abaterea la linearizare* (§2.1.3).

Alături de metode și modele cu care s-a operat până acum în teoria sensibilității, cum sunt:

- metoda rezolvării pe cale analitică a ecuațiilor de sensibilitate (§2.2.1);
- metoda utilizării modelelor de sensibilitate (§2.2.2) cu numeroasele sale variante;
- metode mai subtile pentru determinarea modelelor de sensibilitate ale sistemelor complexe: metoda componentei incerte (§2.3) sau metoda punctelor de sensibilitate (§2.4);
- două tipuri de modele de sensibilitate ale sistemelor cu eșantionare (§2.5.1);
- metode de calcul numeric al funcțiilor de sensibilitate (§2.6.1);

au fost dezvoltate noi modele și metode:

- extinderea unor metode și pentru STD (§2.2.1, §2.4.1);
- modele de sensibilitate în "două puncte" cu referire la studiul influenței timpului de calcul în SRAN (§2.5.2);
- funcții MATLAB destinate calculului numeric al funcțiilor de sensibilitate (§2.6.2);
- algoritme de calcul numeric al funcțiilor de sensibilitate implementate prin funcții C (§2.6.3);

Principalele rezultate sunt rezumate în tabelul:

Nr. crt.	Metoda	Destinația	Observații
1	Metoda de calcul direct a f.d.s. de tip α	Asociază sistemului dinamic cu f.d.t. $H(\lambda; \underline{\alpha})$ și intrării $u(\lambda)$, f.d.s. $\sigma(t; \underline{\alpha}_0)$ conform (2.2.1.3)	Utilizabilă pentru sisteme de tip SISO, lineare, în timp continuu sau în timp discret
2	Metoda de calcul indirect a f.d.s. de ieșire de tip α	Asociază sistemului dinamic (2.2.2.1.2), modelul de sensibilitate (2.2.2.1.3)	Utilizabilă pentru sisteme de tip SISO, în timp continuu sau în timp discret
		Caz particular: asociază sistemului dinamic (2.2.2.1.4), modelul de sensibilitate (2.2.2.1.11)	Sisteme lineare
3	Metoda de calcul indirect a f.d.s. de stare de tip α	Asociază sistemului dinamic (2.2.2.2.1) modelul de sensibilitate (2.2.2.2.5)	Utilizabilă pentru sisteme de tip MIMO, în timp continuu, nelineare
		Asociază sistemului dinamic (2.2.2.2.6) modelul de sensibilitate (2.2.2.2.7)	Utilizabilă pentru sisteme de tip MIMO, în timp continuu, lineare
		Asociază sistemului dinamic (2.2.2.2.8+9), modelul de sensibilitate (2.2.2.2.17)	Utilizabilă pentru sisteme de tip SISO, lineare, în timp continuu sau în timp discret
4	Metoda componentei incerte	Asociază unui sistem cu un singur subsistem dependent de un singur parametru (schema bloc din fig.2.3.1-1), modelul combinat din fig.2.3.1-5	Utilizabile pentru sisteme de tip SISO, lineare, în timp continuu sau în timp discret
		Asociază unui sistem cu q subsisteme dependente de un singur parametru, modelul combinat din fig.2.3.1-6	
		Asociază unui sistem cu q subsisteme dependente de q parametri, modelul combinat din fig.2.3.1-7	
		Asociază unui sistem cu n_q subsisteme lineare dependente de un singur parametru și n_p subsisteme lineare dependente de același parametru (schema bloc din fig.2.3.2-1), modelul combinat din fig.2.3.2-2	Utilizabilă pentru sisteme de tip SISO, nelineare, în timp continuu.

(continuare tabel)

Nr. crt.	Metoda	Destinația	Observații
5	Metoda punctelor de sensibilitate	Asociază sistemului dinamic cu buclă de reacție generalizată din fig.2.4.1-1, modelul de sensibilitate din fig.2.4.1-2	Utilizabilă pentru sisteme de tip SISO, lineare, în timp continuu sau în timp discret
		Caz particular: asociază sistemului din fig.2.4.2-1, modelul de sensibilitate din fig.2.4.2-2	Utilizabilă pentru sisteme de tip SISO, lineare, în forma standard controlabilă (2.4.2.4)
6	Metode aproximative de calcul a f.d.s. de ieșire	Asociază sistemului dinamic (2.6.3.1.1), modelele de sensibilitate (2.6.3.1.11) și (2.6.3.1.13)	Utilizabilă pentru sisteme de tip SISO, lineare, în timp continuu sau în timp discret

În completare la acest capitol, cu scopul de a evidenția unele detalii de calcul, algoritme, programe, studii comparative, scheme bloc sau scheme de simulare au fost adăugate un număr de nouă anexe.

Toate acestea arată că instrumentele și metodele de lucru sunt pregătite, deci se poate pleca "în călătoria" analizelor de sensibilitate.

STUDII ȘI CONTRIBUȚII LA UTILIZAREA ANALIZEI DE SENSIBILITATE DIRECTĂ ÎN AUTOMATICĂ

SRA, concepute în principal pentru a realiza conducerea unui proces, au în acest context și sarcina de a rezolva următoarele două mari probleme:

- diminuarea efectelor perturbațiilor externe care acționează asupra procesului;
- diminuarea efectelor perturbațiilor cauzate de modificări ale parametrilor din proces (aceasta include și/sau elemente de execuție și elemente de măsurare).

Proiectarea algoritmilor de reglare se bazează în mod nemijlocit pe cunoașterea modelului matematic procesului. Dacă există suspiciuni asupra unuia sau altuia dintre parametri modelului atunci este necesară o analiză de sensibilitate în debutul fazei de proiectare a SRA pentru a stabili în ce măsură eventualele modificări ale parametrilor influențează comportarea procesului precum și gradul în care parametri influențează abaterea maximă.

Analiza de sensibilitate a modelului unui sistem în raport cu toți parametri permite stabilirea subsistemelor cu sensibilitate mai mare față de abaterile anumitor parametri (exemplul din Anexa IX este ilustrativ). Aceste cunoștințe pot sugera alternative în faza de proiectare (de pildă, alegerea unui dispozitiv de măsurare sau a unui element de execuție de precizie mai mare/mică¹).

În §3.1 este abordată o problemă de sensibilitate parametrică a unui SRA, cu scopul stabilirii influenței abaterilor parametrilor subsistemelor componente asupra comportamentului SRA în domeniul de pulsații. Tratarea se referă la interpretarea unor funcții de sensibilitate care exprimă modul în care abaterile relative ale funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente influențează funcția de transfer a întregului SRA. Ea are un caracter general. Ca atare și rezultatele sunt valabile la modul general.

În §3.2 se studiază în paralel 4 structuri de reglare diferite ale aceluiași proces dinamic dat, din punctul de vedere al influenței abaterilor parametrilor procesului asupra mărimilor reglate. Analiza este realizată atât în domeniul timp cât și în domeniul de pulsații.

Analiza de sensibilitate directă poate contribui la determinarea parametrilor nominali de funcționare ai sistemului sau la alegerea punctului de funcționare staționară. Un astfel de caz este tratat în §3.3.

§3.2 și §3.3 se referă la sisteme concrete și ca urmare rezultatele au valoare particulară sau cu un grad restrâns de generalitate.

În §3.4 sunt sintetizate principalele concluzii referitoare la acest capitol.

¹ De regulă, complexitatea modelele matematice ale dispozitivelor de măsurare și ale elementelor de execuție crește odată cu precizia.

3.1 Analiza de sensibilitate a structurii unui SRA

Acest paragraf își propune să analizeze efectul buclei de reglare privit prin intermediul teoriei sensibilității. Se va studia comportarea SRA, modelate prin scheme bloc în domeniul operațional, în raport cu abaterile parametriche, prin două noțiuni de sensibilitate aplicabile în domeniul operațional (cu interpretare în domeniul de pulsații), și anume:

- "Sensibilitatea de comparație", tratată în §3.1.1;
- "Sensibilitatea Bode", tratată în §3.1.2.

Aspecte corelative ale celor două noțiuni sunt prezentate în §3.1.3.

3.1.1 Sensibilitatea de comparație ("comparison sensitivity")

Prin analiza sensibilității de comparație se urmărește stabilirea situațiilor în care un sistem de reglare automată (sistem în circuit închis) al unui proces este mai mult sau mai puțin sensibil decât sistemul de comandă (sistem în circuit deschis) nominal echivalent al aceluiași proces¹. Problema a fost studiată de către Bode, Horowitz, Cruz, Perkins, Kreindler, [17], [63] și reluată apoi în diverse forme de Frank în [43], de Marét în [66] și de alții sub alte denumiri [55], [105]. Denumirea de "comparison sensitivity" îi aparține lui Perkins care teoretic a extins formal problema la sistemele variabile în timp și chiar la cele neliniare, utilizând operatori în locul matricelor de transfer [17], [81], [110].

În cele ce urmează se deduce relația generală asociată acestei noțiuni, matricea de sensibilitate de comparație, întâlnită fără demonstrație în bibliografia amintită anterior.

Fie procesul linear, MIMO, descris de matricea de transfer $\underline{H}_P(\lambda, \underline{\alpha})$, cu vectorul nominal al parametrilor $\underline{\alpha}_0$. (Se admite că $\underline{H}_P(\lambda, \underline{\alpha})$ include modelul elementului de execuție.)

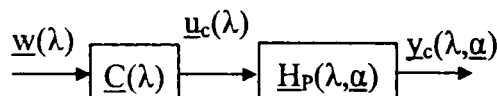


Fig.3.1.1-1 Sistem de comandă

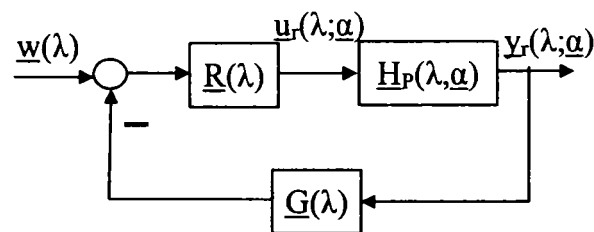


Fig.3.1.1-2 Sistem de reglare automată

Pentru acest proces se construiesc două sisteme: unul de comandă, fig.3.1.1-1, (având partea de comandă descrisă de matricea de transfer $\underline{C}(\lambda)$) și unul de reglare, fig.3.1.1-2, (având regulatorul descris de matricea de transfer $\underline{R}(\lambda)$ și elementele de măsurare descrise de matricea de transfer $\underline{G}(\lambda)$), nominal echivalente. Aceasta înseamnă:

$$\underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}_0) = \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}_0) = \underline{y}_o(\lambda), \quad (3.1.1.1)$$

respectiv (procesul condus fiind același)

$$\underline{u}_c(\lambda) = \underline{u}_r(\lambda; \underline{\alpha}_0) = \underline{u}_o(\lambda), \quad (3.1.1.2)$$

unde \underline{u}_o este notația funcției nominale de comandă și \underline{y}_o notația funcției de ieșire nominală.

¹ Termenul "nominal echivalente" aplicat asupra a două sau mai multe sisteme sugerează comportament identic al sistemelor la valori nominale ale parametrilor pentru aceeași funcție de intrare și în aceleași condiții inițiale.

Variațiile parametrilor pot fi echivalate, principial, cu mărimi perturbatoare. Bucla de reglare, atenuază, principial efectul perturbațiilor. Deci este natural ca bucla de reglare să atenueze și variațiile parametrilor. În ce măsură? Studiarea sensibilității sistemului închis nu poate răspunde la această problemă. În acest context apare conceptul de sistem nominal echivalent.

Pentru sistemul de comandă, la valorile nominale ale parametrilor, sunt valabile relațiile:

$$\underline{u}_o(\lambda) = \underline{C}(\lambda) \cdot \underline{w}(\lambda), \quad (3.1.1.3)$$

$$\underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}_o) = \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}_o) \cdot \underline{u}_o(\lambda). \quad (3.1.1.4)$$

Pentru sistemul de reglare, la valorile nominale ale parametrilor, sunt valabile relațiile:

$$\underline{u}_o(\lambda) = \underline{R}(\lambda) \cdot [\underline{w}(\lambda) - \underline{G}(\lambda) \cdot \underline{y}_o(\lambda)], \quad (3.1.1.5)$$

$$\underline{y}_o(\lambda) = \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}_o) \cdot \underline{u}_o(\lambda). \quad (3.1.1.6)$$

Dacă parametri se abat de la valorile nominale, $\underline{\alpha}_o$ devine (\rightarrow) $\underline{\alpha}$, atunci relațiile (3.1.1.4) ÷ (3.1.1.6) devin:

$$\underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}) = \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{u}_o(\lambda), \quad (3.1.1.7)$$

$$\underline{u}_r(\lambda; \underline{\alpha}) = \underline{R}(\lambda) \cdot [\underline{w}(\lambda) - \underline{G}(\lambda) \cdot \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha})], \quad (3.1.1.8)$$

$$\underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) = \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{u}_r(\lambda; \underline{\alpha}). \quad (3.1.1.9)$$

Abaterile sistemului de comandă, respectiv sistemului de reglare de la valorile nominale sunt :

$$\Delta \underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}) = \underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}) - \underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}_o) = \underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}) - \underline{y}_o(\lambda), \quad (3.1.1.10)$$

$$\Delta \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) = \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) - \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}_o) = \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) - \underline{y}_o(\lambda). \quad (3.1.1.11)$$

Din înlocuirea relației (3.1.1.8) în relația (3.1.1.9) rezultă

$$\underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) + \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{G}(\lambda) \cdot \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) = \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{w}(\lambda). \quad (3.1.1.12)$$

iar din (3.1.1.5) în relația (3.1.1.7) se obține

$$\underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}) + \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{G}(\lambda) \cdot \underline{y}_o(\lambda) = \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{w}(\lambda). \quad (3.1.1.13)$$

Relațiile (3.1.1.12) și (3.1.1.13) au același membru drept, deci părțile din stânga pot fi egale

$$\underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) + \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{G}(\lambda) \cdot \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) = \underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}) + \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{G}(\lambda) \cdot \underline{y}_o(\lambda) \quad (3.1.1.14)$$

Din această relație, scăzând din ambii membri aceeași cantitate, $\underline{y}_o(\lambda)$, și ținând seama de notațiile din (3.1.1.10) și (3.1.1.11) se obține succesiv:

$$\Delta \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) + \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{G}(\lambda) \cdot \Delta \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) = \Delta \underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}), \quad (3.1.1.15)$$

$$\Delta \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) = [\underline{I} + \underline{H}_P(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{G}(\lambda)]^{-1} \cdot \Delta \underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}), \quad (3.1.1.16)$$

$$\Delta \underline{y}_r(\lambda; \underline{\alpha}) = \underline{S} \cdot \Delta \underline{y}_c(\lambda; \underline{\alpha}), \quad (3.1.1.17)$$

unde

$$\underline{S} = [\underline{I} + \underline{H}_p(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{G}(\lambda)]^{-1} \quad (3.1.1.18)$$

\underline{S} se numește *matrice de sensibilitate de comparație* (Comparison Sensitivity Matrix). Ea arată în ce măsură bucla de reglare este capabilă să îndepărteze în comparație cu sistemul deschis nominal efectele nedorite datorate abaterilor parametrilor de la valorile nominale. Pentru abateri mici ale parametrilor de la valorile nominale ea poate fi înlocuită cu

$$\underline{S}_o = [\underline{I} + \underline{H}_p(\lambda; \underline{\alpha}_o) \cdot \underline{R}(\lambda) \cdot \underline{G}(\lambda)]^{-1} \quad (3.1.1.19)$$

La abateri semnificative, pentru determinarea matricei de sensibilitate de comparație conform relației (3.1.1.18), se poate aplica o tratare de tipul celei prezentate în §2.3 referitoare la metoda componentei variabile.

Pentru sistemele lineare de tip SISO relația (3.1.1.18) ia forma (3.1.1.20) numită *funcție de sensibilitate de comparație*, respectiv forma (3.1.1.21) pentru abateri mici:

$$S = \frac{1}{1 + H_p(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot R(\lambda) \cdot G(\lambda)} \quad (3.1.1.20)$$

$$S_o = \frac{1}{1 + H_p(\lambda; \underline{\alpha}_o) \cdot R(\lambda) \cdot G(\lambda)} \quad (3.1.1.21)$$

Relația (3.1.1.17), arată că \underline{S} reprezintă formal matricea de transfer a erorilor. Relațiile (3.1.1.18) ÷ (3.1.1.21) trebuie să ilustreze efectul atenuator amintit mai sus. Primele două dintre ele nu se pretează la un studiu ușor. Următoarele două pot să servească în mod facil unui astfel de scop. Interpretarea este similară la STC și STD.

Se poate observa că $\tilde{H}(\lambda; \underline{\alpha}) = H_p(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot R(\lambda) \cdot G(\lambda)$ este f.d.t. a sistemului deschis.

La STC, în domeniul de pulsații relația (3.1.1.21) devine

$$S_o(j\omega) = \frac{1}{1 + H_p(j\omega; \underline{\alpha}_o) \cdot R(j\omega) \cdot G(j\omega)} \quad (3.1.1.22)$$

$$S_o(j\omega) = \frac{1}{1 + \tilde{H}(j\omega; \underline{\alpha}_o)} = \frac{1}{1 + \tilde{H}_o} \quad (3.1.1.23)$$

Condiția ce trebuie îndeplinită pentru ca bucla de reglare să realizeze atenuarea tuturor erorilor datorate abaterilor parametric rezumată din (3.1.1.17) este

$$|S_o(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (3.1.1.24)$$

Având în vedere (3.1.1.23), această condiție devine

$$|1 + \tilde{H}_o| > 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (3.1.1.25)$$

În planul complex pentru $\omega \in \mathbb{R}_+$, \tilde{H}_o descrie hodograful Nyquist, fig.3.1.1-3. Geometric condiția (3.1.1.25) înseamnă

$$|PM| > 1 \quad (3.1.1.26)$$

adică hodograful Nyquist al sistemului deschis trebuie să se situeze în afara cercului unitar de centru $(-1, 0j)$. În realitate această condiție nu este îndeplinită $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$. Pentru exemplu din

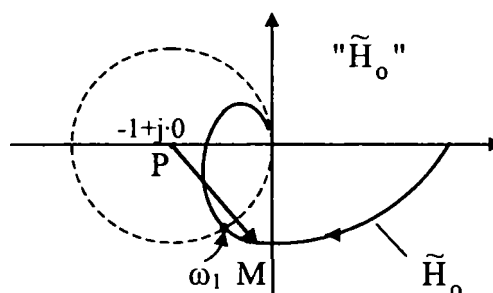


Fig.3.1.1-3 Ilustrarea relației (3.1.1.25)

fig.3.1.1-3, începând de la o anumită valoare a pulsației, $\omega=\omega_1$, condiția nu mai este îndeplinită ceea ce înseamnă că bucla de reglare nu mai este capabilă să rejecteze efectul “perturbator” al abaterilor parametrice. Valoarea ω_1 poate să devină una din condițiile de proiectare a regulatorului SRA.

Având în vedere că domeniul de pulsații $[\omega_1, \infty)$ poate fi asociat cu începuturile regimurilor tranzitorii rezultă că efectul perturbațiilor parametrice nu este diminuat de buclă decât după un anumit interval de timp. Ulterior, în regim permanent, ele sunt diminuate în mod notabil datorită închiderii circuitului de conducere. Din (3.1.1.15), pentru STC, rezultă

$$\Delta y_{r,\infty} = \frac{1}{1 + H_p(0; \underline{\alpha}_0) \cdot R(0) \cdot G(0)} \cdot \Delta y_{c,\infty} \quad (3.1.1.27)$$

Analog, pentru STD se obține

$$\Delta y_{r,\infty} = \frac{1}{1 + H_p(1; \underline{\alpha}_0) \cdot R(1) \cdot G(1)} \cdot \Delta y_{c,\infty} \quad (3.1.1.28)$$

Dacă P este instabil este posibil ca $\Delta y_{c,\infty}$ să fie ∞ .

3.1.2 Analiza sensibilității Bode la SRA

În acest paragraf se aplică noțiunea de sensibilitate Bode, (definită în §2.1.5. ca funcție de sensibilitate relativă), asupra SRA prezentat în fig.3.1.2-1, (se consideră sistemul de tip SISO), cu scopul de a vedea în ce măsură abaterile care pot interveni pe calea directă (reprezentată de H_d având expresia nominală $H_{d,o}$), respectiv pe calea de reacție (reprezentată de H_r având expresia nominală $H_{r,o}$), sunt importante pentru SRA.

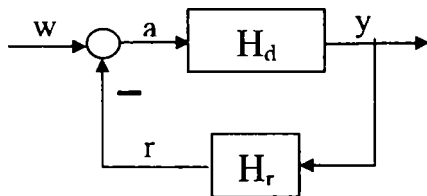


Fig.3.1.2-1 Sistem de reglare automată

SRA din fig.3.1.2-1 este descris de funcția de transfer

$$H = \frac{H_d}{1 + H_d \cdot H_r} \quad (3.1.2.1)$$

Sensibilitatea Bode aplicată asupra lui H în raport cu cele două componente H_d respectiv H_r conduce la:

$$S_{H_d}^H = \left. \frac{\partial \ln H}{\partial \ln H_d} \right|_o = \frac{H_d}{H} \cdot \left. \frac{\partial H}{\partial H_d} \right|_o = \dots = \frac{1}{1 + H_{d,o} \cdot H_{r,o}} = \frac{1}{1 + \tilde{H}_o} \quad (3.1.2.2)$$

$$S_{H_r}^H = \left. \frac{\partial \ln H}{\partial \ln H_r} \right|_o = \frac{H_r}{H} \cdot \left. \frac{\partial H}{\partial H_r} \right|_o = \dots = \frac{-H_{d,o} \cdot H_{r,o}}{1 + H_{d,o} \cdot H_{r,o}} = -\frac{\tilde{H}_o}{1 + \tilde{H}_o} \quad (3.1.2.3)$$

unde cu \tilde{H}_o s-a notat expresia nominală a funcției de transfer a sistemului deschis asociat SRA. Relațiile (3.1.2.2) și (3.1.2.3) caracterizează modul de transfer al dezechilibrelor ce pot apare în subsistemele H_d respectiv H_r , la nivelul SRA¹.

¹ Conform relației (2.2.1.3) în calculul funcției de sensibilitate intervine termenul $\frac{\partial H}{\partial \alpha}$. La modul general f.d.t H depinde de f.d.t a subsistemelor sale H^* . În această situație $\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{\partial H}{\partial H^*} \cdot \frac{\partial H^*}{\partial \alpha}$. Primul factor caracterizează partea aferentă de structură generală iar al doilea partea de structură locală.

În cazul în care $|\tilde{H}_0| \gg 1$ cele două expresii devin:

$$S_{H_d}^H = \frac{1}{\tilde{H}_0}, \quad (3.1.2.4)$$

$$S_{H_r}^H = -1. \quad (3.1.2.5)$$

Relația (3.1.2.4) arată că sensibilitatea SRA în raport cu funcția de transfer a căii directe este invers proporțională cu funcția de transfer a sistemului deschis ceea ce înseamnă că este de dorit ca funcția de transfer a sistemului deschis să aibă modulul cât mai mare, în acest fel sensibilitatea să fie cât mai mică. Pe de altă parte, o f.d.t. cu un modul mare pe calea directă înseamnă amplificare mare pe calea directă ceea ce poate determina instabilitatea buclei de reglare. Prin urmare, în domeniul de pulsații se impune un studiu mai amănunțit (vezi și §3.2.4). Este necesar ca studiu de sensibilitate să fie completat cu unul de stabilitate pentru a decide soluția de compromis "stabilitate-sensibilitate" cea mai adecvată.

Relația (3.1.2.5) arată că sensibilitatea SRA în raport cu funcția de transfer a căii de reacție este de 100%, ceea ce înseamnă că elementul de măsură (plasat de regulă pe calea de reacție) este un element critic. Astfel, orice modificare a parametrilor săi se va transmite semnificativ în întreg sistemul, influențându-l.

În concluzie, se poate aprecia că nu este absolut necesar ca elementele care constituie calea directă să fie extrem de precise. În schimb, elementul de măsură trebuie să fie un dispozitiv foarte precis, fiabil și stabil în raport cu timpul și temperatura.

3.1.3 Aspecte corelative

Comparând structurile SRA din fig.3.1.1-2 și fig.3.1.2-1 pentru cazul în care sistemul din fig.3.1.1-2 este de tip SISO se poate observa echivalarea:

$$H_d = H_p(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot R(\lambda) \quad (3.1.3.1)$$

$$H_r = G(\lambda) \quad (3.1.3.2)$$

$$\tilde{H} = H_d \cdot H_r = H_p(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot R(\lambda) \cdot G(\lambda) \quad (3.1.3.3)$$

$$H = \frac{H_d}{1 + H_d \cdot H_r} = \frac{H_p(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot R(\lambda)}{1 + H_p(\lambda; \underline{\alpha}) \cdot R(\lambda) \cdot G(\lambda)} \quad (3.1.3.4)$$

Astfel, pentru sistemul din fig.3.1.1-2, dacă am considera că toate blocurile depind de parametri $\underline{\alpha}$, (altfel relațiile (3.1.3.6) și (3.1.3.7) nu ar avea sens), funcțiile de sensibilitate Bode în raport cu elementele de pe calea directă și de pe cea de reacție sunt:

$$S_{H_d}^H = \frac{1}{1 + H_p(\lambda; \underline{\alpha}_0) \cdot R(\lambda; \underline{\alpha}_0) \cdot G(\lambda; \underline{\alpha}_0)} \quad (3.1.3.5)$$

$$S_{H_p}^H = \frac{H_p(\lambda; \underline{\alpha}_0)}{H(\lambda; \underline{\alpha}_0)} \cdot \left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial H_p(\lambda; \underline{\alpha})} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} = \dots = \frac{1}{1 + H_p(\lambda; \underline{\alpha}_0) \cdot R(\lambda; \underline{\alpha}_0) \cdot G(\lambda; \underline{\alpha}_0)} \quad (3.1.3.6)$$

$$S_R^H = \frac{R(\lambda)}{H(\lambda; \underline{\alpha}_0)} \cdot \left. \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial R(\lambda)} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} = \dots = \frac{1}{1 + H_p(\lambda; \underline{\alpha}_0) \cdot R(\lambda; \underline{\alpha}_0) \cdot G(\lambda; \underline{\alpha}_0)} \quad (3.1.3.7)$$

$$S_G^H = -1 \tag{3.1.3.8}$$

Comparând relațiile (3.1.3.5) ÷ (3.1.3.7) cu funcția de sensibilitate de comparație din relația (3.1.1.20) se constată faptul că la un sistem linear SISO, cu reacție negativă, funcțiile de sensibilitate Bode în raport cu acțiunile de pe calea directă sunt egale cu funcția de sensibilitate de comparație calculată pentru valorile nominale ale parametrilor, adică:

$$S_{H_d}^H = S_{H_p}^H = S_R^H = S_o \tag{3.1.3.9}$$

Prin urmare, pentru funcția de sensibilitate de comparație este valabilă și interpretarea dată în §3.1.2 și invers.

Pe de altă parte, pentru SRA din fig.3.1.2-1 între mărimile w și a există legătura

$$a = \frac{1}{1 + \tilde{H}_o} w, \quad \text{adică} \quad a = S_{H_d}^H w. \tag{3.1.3.10}$$

Aceasta înseamnă că (3.1.2.2.) este de fapt f.d.t. pe canalul $w \rightarrow a$ și, în literatura de specialitate, s-a încetățenit pentru ea denumirea de "funcție de sensibilitate" iar pentru

$$\frac{\tilde{H}_o}{1 + \tilde{H}_o} \tag{3.1.3.11}$$

denumirea de "funcție de sensibilitate complementară", pierzându-se originea.

3.2 Studiu de caz pentru analiza de sensibilitate directă

Analiza de față își propune să prezinte o modalitate de evaluare a unor structuri de reglare automată prin aprecierea sensibilității lor parametrice în domeniul timp, în domeniul de pulsații și a unor indicatori interni. Pentru studiu au fost considerate 4 sisteme de reglare ale aceluiași tip de proces condus: integrator cu temporizare de ordinul I, rezultatele obținute fiind apoi extrapolate potrivit lucrării [93] a autoarei. Opțiunea pentru una sau alta dintre scheme se face din considerente legate de:

- perturbațiile exogene care acționează asupra lor;
- posibilitățile de realizare a canalelor de reacție;
- regimul de funcționare impus sistemului de reglare.

Răspândirea în practică a celor 4 tipuri de scheme folosite ca structuri de reglare în schemele de poziționare, face utilă studierea sensibilității lor în raport cu parametri procesului. Pentru concentrarea prezentării cele 4 cazuri sunt urmărite în paralel.

3.2.1 Descrierea procesului

Procesul considerat, prezentat în fig.3.2.1-1, este modelul unui sistem de poziționare adesea întâlnit în sistemele de reglare automată, [12], [14], [22], având funcția de transfer

$$H_P(s; \underline{\alpha}) = \frac{K}{s \cdot (T \cdot s + 1)} \tag{3.2.1.1}$$

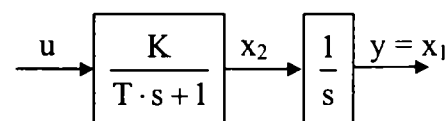


Fig.3.2.1-1 Proces integrator cu temporizare de ordinul I

și vectorul parametrilor $\underline{\alpha} = [K, T]^T$. Valorile nominale ale parametrilor sunt $K_0=28000$ și $T_0=0,15$ secunde.

Procesului îi corespunde MM-ISI

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t; \underline{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix} \cdot u(t), & \underline{x}(0; \underline{\alpha}) = \underline{x}_0 \\ y(t; \underline{\alpha}) = [1 \quad 0] \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}) \end{cases} \quad (3.2.1.2)$$

3.2.2 Prezentarea sistemelor de reglare automată

Sistemele de reglare automată considerate în acest studiu și descrise în continuare la punctele A, B, C, au la bază structura de reglare cu reacție unitară după mărimea de ieșire iar sistemul de reglare descris la punctul D se bazează pe tipul de structură de reglare cu compensator după stare.

A. SRA cu regulator proporțional (RG-P) este prezentat în schema bloc din fig.3.2.2-1

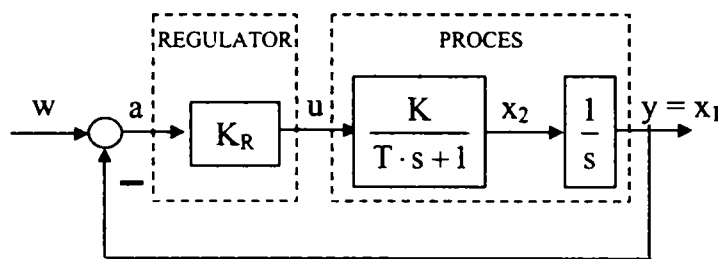


Fig.3.2.2-1 SRA cu RG-P

Regulatorul are funcția de transfer constantă

$$H_R(s) = K_R \quad (3.2.2.1)$$

SRA din fig.3.2.2-1 are f.d.t. a sistemului deschis

$$\tilde{H}(s) = \frac{K_R \cdot K}{s \cdot (T \cdot s + 1)} \quad (3.2.2.2)$$

și ca urmare este asimilabil primului caz de acordare după criteriul modulului, varianta Kessler [11], [13], [26], reflectând influența pe care poate să o aibă amplificarea sistemului deschis și suma constantelor de timp mici. Pentru proiectare s-au utilizat:

$$K_R = \frac{1}{4\zeta^2 K_0 T_0}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.2.2.3)$$

B. SRA cu regulator proporțional – integrator (RG-PI) este prezentat în schema bloc din fig.3.2.2-2.

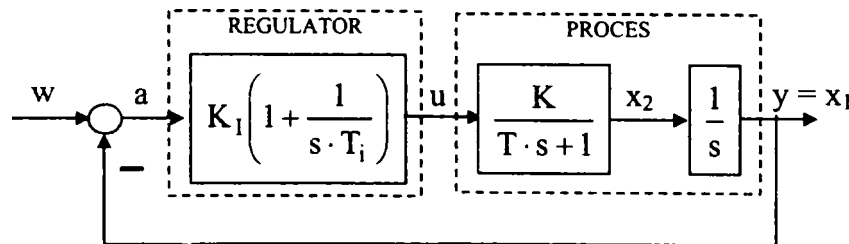


Fig.3.2.2-2 SRA cu RG-PI

Regulatorul are funcția de transfer

$$H_R(s) = K_I \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_i} \right). \tag{3.2.2.4}$$

și a fost proiectat după criteriul simetric, cazul S1, [5], adică:

$$K_I = \frac{1}{2K_o T_o}, \quad T_i = 4 \cdot T_o. \tag{3.2.2.5}$$

Și în acest caz sistemul de reglare prezentat are un caracter general.

C. SRA cu regulator proporțional – derivator cu temporizare de ordinul I (RG-PDT1) este prezentat în schema bloc din fig.3.2.2-3.

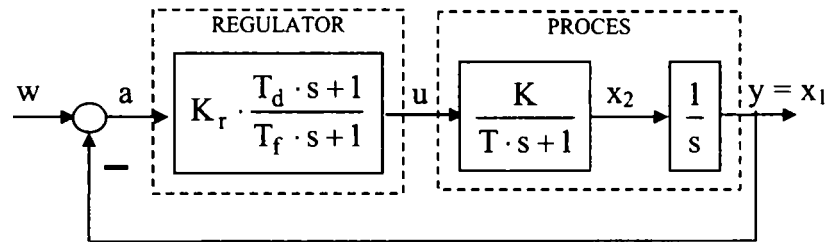


Fig.3.2.2-3 SRA cu RG-PDT1

Regulatorul, având funcția de transfer

$$H_R(s) = K_r \cdot \frac{T_d \cdot s + 1}{T_f \cdot s + 1}, \tag{3.2.2.6}$$

a fost proiectat de așa manieră încât să se apropie de un RG- PD real. Constanta de timp T_f a fost aleasă mult mai mică decât constanta derivatoare T_d iar aceasta a fost aleasă astfel încât să compenseze constanta de timp a procesului. Pentru a asigura aceeași amplificare pe calea directă, constanta K_r a fost aleasă ca și în cazurile anterioare, adică:

$$K_r = \frac{1}{2K_o T_o}, \quad T_d = T_o, \quad T_f = \frac{T_d}{20}. \tag{3.2.2.7}$$

Această variantă de SRA nu corespunde nici uneia dintre cele corespunzătoare criteriului modulului dar are calități dinamice care o fac să merite să fie luată în seamă.

D. SRA cu compensator după stare este prezentat în schema bloc din fig.3.2.2-4.

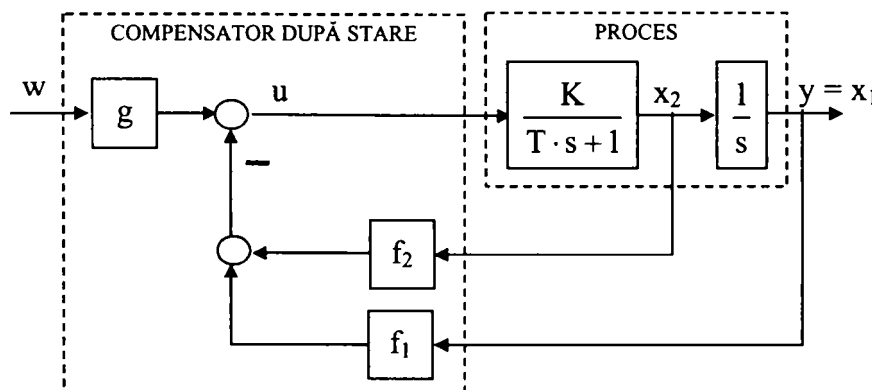


Fig.3.2.2-4 SRA cu compensator după stare

Compensatorul după stare are rolul de a implementa legea de reglare

$$u = g \cdot w - (f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2), \quad (3.2.2.8)$$

și a fost proiectat astfel încât la valorile nominale ale parametrilor, ansamblul să aibă același coeficient de transfer și același coeficient de amortizare ca și sistemele din fig.3.2.2-1 și fig.3.2.2-2, adică:

$$f_1 = \frac{T_o}{K_o} \cdot \omega_o^2, \quad f_2 = \frac{2\zeta\omega_o T_o - 1}{K_o}, \quad g = f_1, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \omega_o = \frac{1}{T_o}. \quad (3.2.2.9)$$

3.2.3 Determinarea și analiza funcțiilor de sensibilitate parametrică în domeniul timp

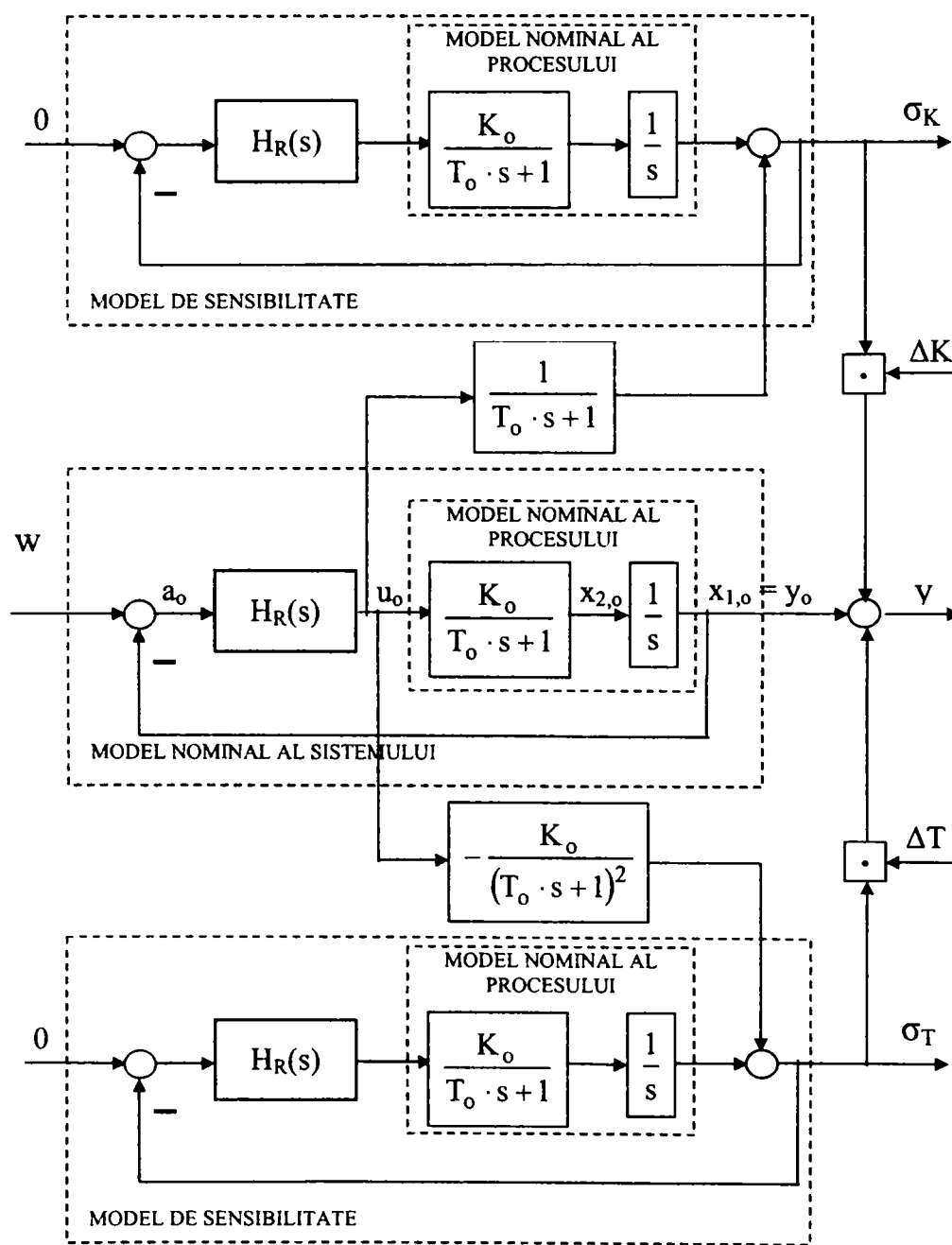


Fig.3.2.3-1 Sistem combinat pentru determinarea funcțiilor de sensibilitate în raport cu parametri procesului condus și estimarea ieșirii

Pentru sistemele A, B,C, care diferă numai prin blocul regulator, am considerat că cea mai potrivită metodă de determinare a funcțiilor de sensibilitate este cea a componentei incerte, (§2.3.1), întrucât modificările de la o structură la alta sunt minime, iar pentru structura D, fiind vorba de un MM-ISI, am ales un model de sensibilitate pe stare, de tipul celui prezentat în §2.2.2. Astfel au rezultat:

- Sistemul combinat din fig.3.2.3-1, aferent structurilor A, B, C;
- Sistemul combinat descris de MM-ISI (3.2.3.1), aferent structurii D.

Potrivit celor prezentate în §2.3.1 modelele de sensibilitate din fig.3.2.3-1:

- au aceeași schemă bloc ca și modelul nominal al sistemului;
- evoluează cu mărime de conducere nulă sub acțiunea funcției de comandă nominală $u_o(t)$;
- sunt supuse acțiunii mărimii $u_o(t)$ care, în ultimă instanță, apare ca o perturbație filtrată aplicată la ieșirea procesului și prin urmare capacitatea sistemului nominal de a rejecta perturbațiile se răsfrânge și asupra robusteții față de erori parametrice.

Sistemul combinat descris de MM-ISI este

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(t; \underline{\alpha}_o) \\ x_2(t; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{1K}(t; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{2K}(t; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{1T}(t; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{2T}(t; \underline{\alpha}_o) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_o \cdot f_1}{T_o} & -\frac{1+K_o \cdot f_2}{T_o} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{f_1}{T_o} & -\frac{f_2}{T_o} & -\frac{K_o \cdot f_1}{T_o} & -\frac{1+K_o \cdot f_2}{T_o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_o \cdot f_1}{T_o^2} & \frac{1+K_o \cdot f_2}{T_o^2} & 0 & 0 & -\frac{K_o \cdot f_1}{T_o} & -\frac{1+K_o \cdot f_2}{T_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0; \underline{\alpha}_o) \\ x_2(0; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{1K}(0; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{2K}(0; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{1T}(0; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{2T}(0; \underline{\alpha}_o) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_o}{T_o} \\ 0 \\ \frac{1}{T_o} \\ 0 \\ -\frac{K_o}{T_o^2} \end{bmatrix} \cdot g \cdot w(t), \\
 \begin{bmatrix} y(t; \underline{\alpha}_o) \\ \sigma_K(t; \underline{\alpha}_o) \\ \sigma_T(t; \underline{\alpha}_o) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t; \underline{\alpha}_o) \\ x_2(t; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{1K}(t; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{2K}(t; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{1T}(t; \underline{\alpha}_o) \\ \chi_{2T}(t; \underline{\alpha}_o) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.2.3.1}$$

La intrarea modelelor prezentate s-a aplicat semnal treaptă unitară considerând că în acest caz sistemul este cel mai solicitat.

Programele MATLAB de pregătire a datelor schemei de simulare combinate cu schema de simulare utilizată în cazurile A, B și C precum și programul MATLAB de simulare utilizat în cazul D sunt prezentate în Anexa X.

Rezultatele simulărilor sunt cuprinse în fig.X-2 ÷ X-22 din aceeași anexă.

În fig.X-2 s-au reprezentat, pe același grafic, evoluțiile mărimilor de ieșire ale celor 4 sisteme de reglare automată considerate, la valorile nominale ale parametrilor. Ele constituie caracteristicile de referință la care trebuie raportate efectele abaterilor parametrilor.

Pentru interpretarea celorlalte grafice, se vor analiza valorile maxime, numărul oscilațiilor și durata tranzițiilor.

➤ Funcțiile de sensibilitate absolută sunt prezentate în fig. X-3, X-5, X-7, X-9.

- În ceea ce privește funcțiile de sensibilitate absolută în raport cu parametrul K se remarcă faptul că toate au valori maxime apropiate, cea mai mare corespunde structurii cu RG-PI, cea mai mică corespunde structurii cu compensator după stare. Cea mai oscilantă este cea corespunzătoare structurii cu RG-PI, cea fără oscilații este cea corespunzătoare RG-PDT1. Cea mai rapidă este cea corespunzătoare structurii cu compensator, urmează apoi, în ordine, cele corespunzătoare structurilor cu RG-P, RG-PDT1, RG-PI.
- În ceea ce privește funcțiile de sensibilitate absolută în raport cu parametrul T se remarcă faptul că valorile maxime sunt extrem de variate, cea mai mare corespunde (din nou) structurii cu RG-PI, (de peste 3 ori mai mare), urmează apoi la egalitate cele corespunzătoare structurilor cu compensator după stare și cu RG-P iar cea mai mică corespunde structurii cu RG-PDT1. Cea mai oscilantă este cea corespunzătoare structurii cu RG-PI, cea mai slab oscilantă este cea corespunzătoare RG-PDT1. Cea mai rapidă este cea corespunzătoare structurii cu compensator, urmează apoi, în ordine, cele corespunzătoare structurilor cu RG-PDT1, RG-P, RG-PI.
- Cu excepția cazului corespunzător structurii cu RG-PDT1, în toate celelalte cazuri funcțiile de sensibilitate absolută trec prin 0 la momente de timp diferite. Aceasta înseamnă că la acele momente de timp în cazul în care există abateri parametrice numai unul dintre parametri va contribui la abaterea absolută a mărimii de ieșire. Prin urmare, în cazul unor abateri parametrice constante, efectuând măsurători în momentele de trecere prin 0 a funcțiilor de sensibilitate absolută se pot face estimări rapide ale abaterilor astfel:

$$\Delta K = \frac{\Delta y(t_{SzT}; \underline{\alpha})}{\sigma_K(t_{SzT}; \underline{\alpha}_0)}, \quad t_{SzT} = t \Big|_{\sigma_T(t_{SzT}; \underline{\alpha})=0}, \quad (3.2.3.2)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta y(t_{SzK}; \underline{\alpha})}{\sigma_T(t_{SzK}; \underline{\alpha}_0)}, \quad t_{SzK} = t \Big|_{\sigma_K(t_{SzK}; \underline{\alpha})=0}. \quad (3.2.3.3)$$

Aceasta este o problemă de sensibilitate inversă și va fi abordată detaliat în capitolul 4.

Studii privind determinarea momentului optim de efectuarea măsurătorilor în vederea identificării abaterilor parametrice au fost efectuate de autoare în [89].

➤ Funcțiile de sensibilitate semirelativă sunt prezentate în fig. X-4, X-6, X-8, X-10. Comparându-le, se poate remarca faptul că aprecierile făcute în ceea ce privește funcțiile de sensibilitate parametrică absolută sunt valabile și la funcțiile de sensibilitate semirelativă.

- Figurile X-11 ÷ X-18 redau abaterile absolute ale ieșirilor SRA studiate, considerate pentru abateri ale parametrilor cuprinse între -10% și +10% din valorile nominale. Abaterile mărimilor de ieșire de la valorile nominale au fost calculate în două moduri:

- Prin utilizarea relației specifice teoriei sensibilității, (de unde și indicele s)

$$\Delta y_s = \sigma_K \cdot \Delta K + \sigma_T \cdot \Delta T \tag{3.2.3.4}$$

- Prin simularea unui model al sistemului la parametri perturbați (de unde și indicele p) și a unui model al sistemului la parametri nominali și efectuând diferența

$$\Delta y_p = y_p - y_o \tag{3.2.3.5}$$

Se remarcă faptul că în toate cazurile studiate diferențele dintre cele două modalități de calcul sunt *neglijabile*, (abia dacă se observă pentru abaterile parametrilor de ±10%), ceea ce dovedește eficiența utilizării în studii și analize a relațiilor simple, de tipul (3.2.3.4) din teoria sensibilității, în locul folosirii sistemului real, evident pentru abateri ale parametrilor de până la ±10%.

Toate concluziile exprimate pentru funcțiile de sensibilitate sunt valabile și la abateri.

- Figurile X-19 ÷ X-22 redau abaterile relative ale ieșirilor SRA studiate, considerate pentru abateri ale parametrilor cuprinse între -10% și +10% din valorile nominale. Având în vedere remarca de la punctul anterior, abaterile relative ale mărimilor de ieșire au fost calculate pe baza relației din teoria sensibilității

$$\Delta y_r = \frac{\sigma_K \cdot \Delta K + \sigma_T \cdot \Delta T}{y_o} \tag{3.2.3.6}$$

Se observă că, atât în raport cu parametrul K cât și cu parametrul T, toate abaterile relative ale ieșirilor structurilor studiate au inițial aceleași valori apoi au o evoluție atenuantă variată, de la aperiodică la cazul SRA cu RG-PDT1 în raport cu parametrul K la puternic oscilantă la SRA cu RG-PI. Atenuarea cea mai rapidă se produce în cazul structurii cu compensator după stare iar cea mai lentă evident cea oscilantă, cu RG-PI.

3.2.4 Determinarea și analiza sensibilității Bode și/sau a sensibilității erorii

Vor fi analizate funcțiile de sensibilitate Bode, în domeniul de pulsații pentru a vedea în ce măsură o astfel de analiză este necesară la sinteza unui SRA. Calculul se bazează pe utilizarea relației (3.1.2.2), considerând că fiecareia dintre cele patru structuri de SRA i se poate asocia structura din fig.3.2.4-1.

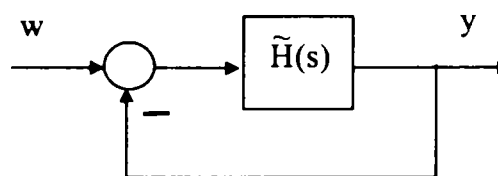


Fig.3.2.4-1 Sistem cu reacție negativă unitară

În cazul structurii de SRA cu RG-P prezentată în fig.3.2.2-1, $\tilde{H}(s)$ este dată de relația (3.2.2.2) și prin urmare sensibilitatea Bode este caracterizată în domeniul operațional de

$$S_{H_o}^H = \frac{1}{1 + \tilde{H}_o} = \frac{T_o \cdot s^2 + s}{T_o \cdot s^2 + s + K_o \cdot K_R} \tag{3.2.4.1}$$

În cazul structurii de SRA cu RG-PI prezentată în fig.3.2.2-2, calculul lui $\tilde{H}(s)$ este simplu și conduce la rezultatul

$$\tilde{H}(s) = K_I \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right) \cdot \frac{K}{s \cdot (T \cdot s + 1)} \quad (3.2.4.2)$$

și prin urmare sensibilitatea Bode este caracterizată în domeniul operațional de

$$S_{\tilde{H}_o}^H = \frac{1}{1 + \tilde{H}_o} = \frac{T_o \cdot T_i \cdot s^3 + T_i \cdot s^2}{T_o \cdot T_i \cdot s^3 + T_i \cdot s^2 + K_o \cdot K_I \cdot T_i \cdot s + K_o \cdot K_I} \quad (3.2.4.3)$$

În cazul structurii de SRA cu RG-PDT1 prezentată în fig.3.2.2-3, $\tilde{H}(s)$ este

$$\tilde{H}(s) = K_r \frac{T_d \cdot s + 1}{T_f \cdot s + 1} \cdot \frac{K}{s \cdot (T \cdot s + 1)} \quad (3.2.4.4)$$

și prin urmare sensibilitatea Bode este caracterizată în domeniul operațional de

$$S_{\tilde{H}_o}^H = \frac{1}{1 + \tilde{H}_o} = \frac{T_o \cdot T_f \cdot s^3 + (T_o + T_f) \cdot s^2 + s}{T_o \cdot T_f \cdot s^3 + (T_o + T_f) \cdot s^2 + (1 + K_o \cdot K_r \cdot T_d) \cdot s + K_o \cdot K_r} \quad (3.2.4.5)$$

În cazul structurii de SRA cu compensator după stare prezentată în fig.3.2.2-4, e mai convenabil să se calculeze $H(s)$ și apoi să se calculeze direct funcția de sensibilitate Bode ținând seama de legătura

$$H(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{1 + \tilde{H}(s)} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H}(s) = \frac{H(s)}{1 - H(s)} \quad (3.2.4.6)$$

Pentru $H(s)$ se obține

$$H(s) = \frac{\frac{K}{T} \cdot g}{s^2 + \frac{1 + K \cdot f_2}{T} \cdot s + \frac{K \cdot f_1}{T}} \quad (3.2.4.7)$$

și ca urmare pentru sensibilitatea Bode în domeniul operațional se obține succesiv:

$$S_{\tilde{H}_o}^H = \frac{1}{1 + \tilde{H}_o} = \frac{1}{1 + \frac{H_o(s)}{1 - H_o(s)}} = 1 - H_o(s) = \frac{s^2 + \frac{1 + K_o \cdot f_2}{T_o} \cdot s + \frac{K_o}{T_o} \cdot (f_1 - g)}{s^2 + \frac{1 + K_o \cdot f_2}{T_o} \cdot s + \frac{K_o}{T_o} \cdot f_1} \quad (3.2.4.8)$$

Caracteristicile logaritmice de pulsație (Bode) ale funcțiilor de sensibilitate Bode date de relațiile (3.2.4.1), (3.2.4.3), (3.2.4.5) și (3.2.4.8) sunt reprezentate în fig.3.2.4-2. Ele reflectă modul în care erorile sunt "prelucrate de bucla de reacție".

Pentru o analiză completă a rezultatelor s-a considerat necesar, pentru fiecare caz în parte, și trasarea hodografului Nyquist al sistemului deschis, fig.3.2.4-3, și analiza de stabilitate a SRA redată prin datele cuprinse în tabelul 1.

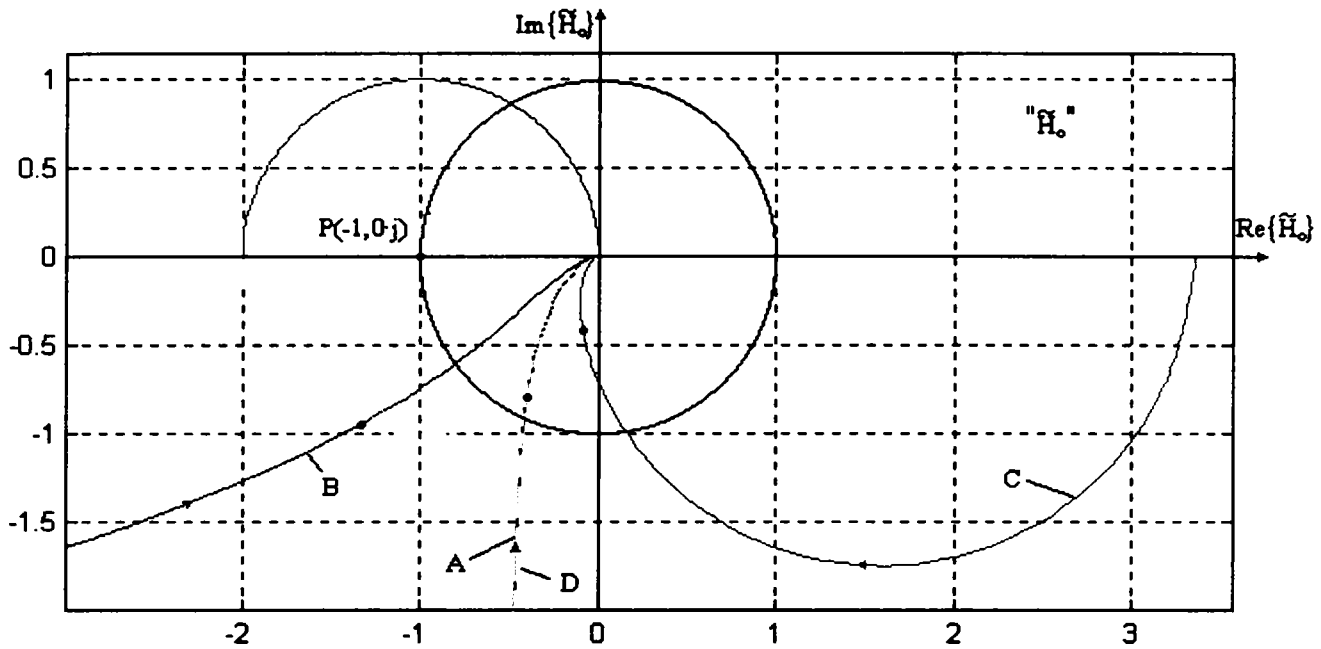


Fig.3.2.4-3 Hodograful Nyquist al sistemului deschis

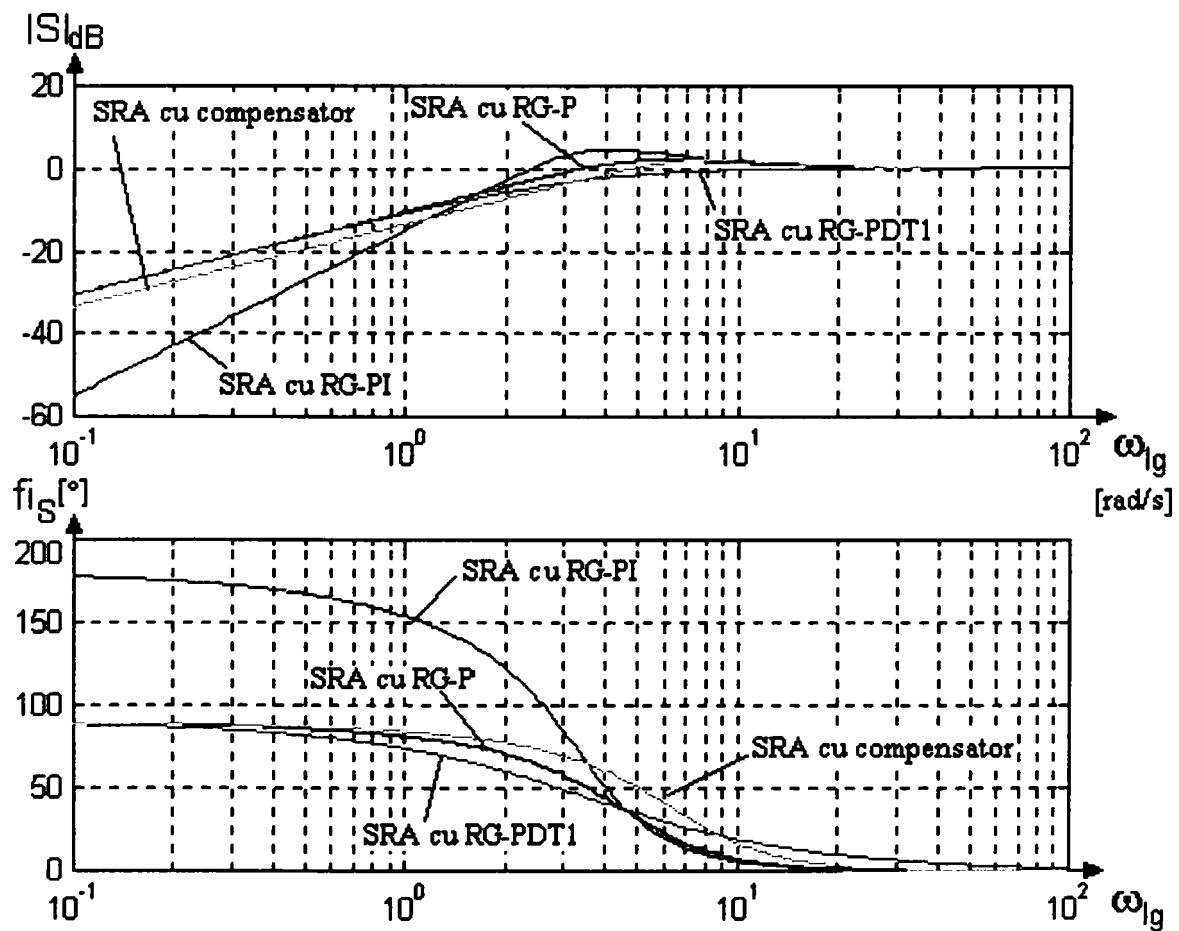


Fig.3.2.4-2 Caracteristicile Bode ale funcției de sensibilitate Bode

Tabelul 1

Cazul	Tipul regulatorului	$\Phi_r [^\circ]$ (Rezerva de fază)	$\omega_r [\text{rad/s}]$ (Pulsația rezervei de fază)
A	P	65.5299	3.03
B	PI	37	3.33
C	PDT1	98.7627	20.91
D	Compensator	65.5301	4.29

Toate cele 4 structuri sunt stabile indiferent de valorile parametrilor deci sensibilitatea poate juca un rol important în proiectarea parametrilor reguletoarelor. Pentru fiecare caz studiat, valoarea pulsației din ultima coloană a tabelului reprezintă totodată și valoarea pentru care $|S|=1$ (vezi §3.1.1) adică pentru care hodograful din fig.3.2.4-3 intersectează cercul. Având în vedere sensul pe hodograf se poate afirma că începând cu această pulsație SRA nu mai poate atenua erorile (perturbațiile) mai mult decât sistemul de comandă nominal echivalent.

Analiza în domeniul frecvențial, realizată global, se poate transpune în domeniul timp.

În ceea ce privește fig.3.2.4-2 se remarcă faptul că în regim staționar erorile sunt atenuate, în toate cele patru situații, cea mai târzie atenuare corespunde SRA cu RG-PI, cea mai mare corespunde SRA cu RG-P.

În regim dinamic, componentele de pulsații joase ($<4\text{rad./sec.}$) ale erorilor sunt diminuate. componentele de pulsații cuprinse între $(4\div 21)\text{rad./sec.}$ sunt amplificate doar de structura SRA cu RG-PI iar componentele erorii de pulsații mai mari de 21rad./sec. sunt nemodificate.

Privind fig.3.2.4-2 ca pe o reprezentare Bode a funcției de sensibilitate a erorilor de comparare (fapt posibil datorită aspectelor corelative prezentate în §3.1.3), se poate afirma că toate cele patru sisteme de reglare rejectează rapid perturbațiile de pulsații joase (frecvență de apariție rară), cel mai rapid fiind SRA cu RG-PI (până la $0,7\text{ rad./sec.}$) respectiv SRA cu compensator (între $(0,7\div 2)\text{ rad./sec.}$), apoi SRA cu RG-PDT1 (între $(3\div 4)\text{ rad./sec.}$). Structura cu RG-PI amplifică (puțin) perturbațiile cu pulsații cuprinse între $(2\div 21)\text{rad./sec.}$. La fel și SRA cu RG-P între $(4\div 21)\text{rad./sec.}$ Aceasta înseamnă că ele nu pot să rejecteze perturbații cu frecvență medie de apariție. Pentru perturbații cu pulsații mai mari de 21rad./sec. (perturbații cu frecvență de apariție mare) cu excepția structurii C care atenuază perturbații de până la 21rad./sec nici unul din SRA considerate nu mai este capabil să îndepărteze efectul acestor perturbații, efectul lor fiind comparabil cu cel al sistemului de comandă în circuit deschis.

3.2.5 Determinarea și analiza sensibilității parametrice ale coeficientului de amortizare și a sensibilității parametrice a pulsației proprii

Pentru un SRA coeficientul de amortizare și pulsația proprie sunt considerați principalii "indicatori de dinamică" întrucât ei concentrează informații despre modul de comportare a sistemului în regim dinamic. Acesta este motivul pentru care s-a considerat necesară abordarea problemei de sensibilitate a celor doi în raport cu parametri procesului.

Pentru sistemele de ordinul 2 respectiv de ordinul 3 (așa cum este și situația SRA considerate) se pot evidenția în f.d.t.

$$H(s) = \frac{K_2 \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}, \quad (3.2.5.1)$$

$$H(s) = \frac{P(s)}{(s+a) \cdot (s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2)}, \quad (3.2.5.2)$$

coeficientul de amortizare ζ respectiv pulsația proprie ω_n [8], [9].

Conceptele de funcții de sensibilitate, definite pentru sisteme dinamice inerțiale sunt valabile, în particular, și pentru sistemele neinerțiale. Din punct de vedere matematic înseamnă că formulele de calcul definite în legătură cu sistemele de ecuații diferențiale sunt valabile și pentru ecuații algebrice, formulele definite pentru ecuații recurente sunt valabile și pentru ecuații algebrice nerecurente. În acest context se pot introduce pentru un sistem dat funcții de sensibilitate ale parametrilor matematici ai sistemului în raport cu parametri fizici, respectiv funcții de sensibilitate ale unei forme canonice a sistemului în raport cu parametri altei forme canonice a aceluiași sistem.

În acest cadru se înscrie și studiul de caz care urmează, parametri ζ , ω_n și a din (3.2.5.1) și (3.2.5.2) fiind funcții de parametri K și T ai procesului condus. Astfel, sensibilitatea absolută (relativă) a coeficientului de amortizare în raport cu parametrul K , respectiv T ,

$$S_K^\zeta = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial K} \right|_{\alpha=\alpha_0} \quad (\bar{S}_K^\zeta = S_K^\zeta \cdot \frac{K_0}{\zeta_0}), \quad S_T^\zeta = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial T} \right|_{\alpha=\alpha_0} \quad (\bar{S}_T^\zeta = S_T^\zeta \cdot \frac{T_0}{\zeta_0}), \quad (3.2.5.3)$$

și sensibilitatea absolută (relativă) a pulsației proprii în raport cu parametrul K , respectiv T ,

$$S_K^{\omega_n} = \left. \frac{\partial \omega_n}{\partial K} \right|_{\alpha=\alpha_0} \quad (\bar{S}_K^{\omega_n} = S_K^{\omega_n} \cdot \frac{K_0}{\omega_{n,0}}), \quad S_T^{\omega_n} = \left. \frac{\partial \omega_n}{\partial T} \right|_{\alpha=\alpha_0} \quad (\bar{S}_T^{\omega_n} = S_T^{\omega_n} \cdot \frac{T_0}{\omega_{n,0}}), \quad (3.2.5.4)$$

ale SRA considerate se determină prin derivarea expresiilor obținute din echivalarea coeficienților numitorului f.d.t. cu cei ai numitorului expresiei (3.2.5.2) sau (3.2.5.3) în mod corespunzător. Valorile obținute sunt prezentate în tabelul 2.

Problemele de calcul aferente sunt redată în Anexa XI.

Tabelul 2

Cazul	Tipul regulatorului	$S_K^\zeta (\bar{S}_K^\zeta)$	$S_T^\zeta (\bar{S}_T^\zeta)$	$S_K^{\omega_n} (\bar{S}_K^{\omega_n})$	$S_T^{\omega_n} (\bar{S}_T^{\omega_n})$
A	P	$-1.2627 \cdot 10^{-5}$ (-0.5)	-2.3570 (-0.5)	$8.4179 \cdot 10^{-5}$ (0.5)	-15.7135 (-0.5)
B	PI	$-0.0714 \cdot 10^{-3}$ (-4)	-3.3333 (-1)	$0.1190 \cdot 10^{-3}$ (1)	0 (0)
C	PDT1	$2.7809 \cdot 10^{-4}$ (7.3727)	-56.7678 (-8.0624)	$-1.1513 \cdot 10^{-3}$ (-6.7502)	215.22 (6.7599)
D	Compensator	$-5.2302 \cdot 10^{-6}$ (-0.2071)	-2.3570 (-0.5)	$1.1905 \cdot 10^{-4}$ (0.5)	-22.2222 (-0.5)

Conform tabelului 2 se constată că:

- i) atât valorile sensibilităților absolute în raport cu parametrul K cât și cele în raport cu T sunt diferite de la un caz la altul (ca ordin de mărime și chiar ca semn) în schimb sunt comparabile cele relative.
- ii) că situația cea mai favorabilă corespunde structurii cu compensator iar cea mai defavorabilă SRA cu RG-PDT1.
- iii) în cazul B apare o situație de sensibilitate nulă, ceea ce înseamnă invarianță parametrică a pulsației proprii în raport cu abateri ale constantei de timp.

Dacă se cunosc limitele între care se pot abate parametri K și T atunci cu datele din tabelul 2 se pot determina domeniile de apartenență ale parametrilor ζ și ω_n .

În concluzie este necesar să se precizeze că în cazul utilizării unor metode de proiectare care nu iau în considerare robustețea sistemelor, se impune analiza sensibilității sistemelor proiectate atât în domeniul timp cât și în domeniul de pulsații (domenii, de altfel, aflate în strânsă legătură unul cu celălalt). Varietatea datelor din tabelul 2 arată că este necesară analiza sensibilităților unor parametri (indicatori) interni (în cazul de față ale coeficienților de amortizare și ale pulsațiilor proprii, iar în alte situații chiar a unor indicatori de calitate empirici [8], [9]) pentru a vedea în ce măsură sunt afectați de abaterile parametrice, mai ales în situațiile în care astfel de indicatori sunt utilizați la proiectarea reguletoarelor. Efectul abaterilor parametrice față de valorile nominale poate fi uneori defavorabil influențând nefavorabil dinamica. Această concluzie este de nenețlijat atunci când sistemul are un caracter oscilant amortizat deoarece pot apare creșteri nepermise ale suprareglajului.

3.3 Utilizarea analizei de sensibilitate la linearizarea prin metoda tangentei a modelelor cu nelinearități neesențiale

Modelele de aproximare lineare ale proceselor nelineare au o mulțime de aplicații, de la analiza stabilității punctului de funcționare staționară la proiectarea SRA. Analiza prezentată în acest paragraf are drept scop stabilirea unui algoritm de determinare a punctului de funcționare staționară al unui sistem nelinear, în vecinătatea căruia să poată fi dezvoltat un model de aproximare linear pe baza unui criteriu de calitate impus. Analiza propusă poate avea, de exemplu, drept destinație finală stabilirea unei modalități de compensare a erorilor rezultate ca urmare a utilizării în proiectare a parametrilor modelelor obținute prin linearizare. Cercetări pe această temă au fost publicate de autoare în [85].

Importanța alegerii punctului de funcționare staționară este motivată în §3.3.1.

Studiu general din §3.3.2 este însoțit în §3.3.3 de cazul concret reprezentat de modelul cu parametri concentrați al sistemului de translație pe orizontală fără frecare din fig.3.3.3-1, compus dintr-un corp de masa m , un resort elastic și un amortizor cu piston [67].

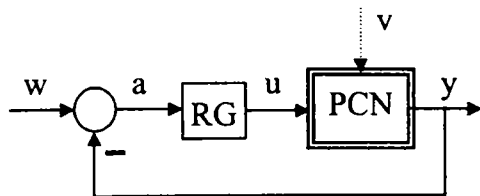


Fig.3.3.1-1 SRA cu proces condus nelinear

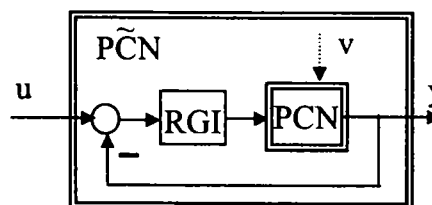


Fig.3.3.1-2 Proces condus nelinear, cu ajustarea punctului de funcționare staționară.

3.3.1 Problema punctului de funcționare staționară

Necesitatea abordării acestei probleme a rezultat din faptul că în cazul sistemelor de reglare automată convenționale cu structura din fig.3.3.1-1 proiectarea regulatorului RG se face de cele mai multe ori pe baza unui model linearizat al procesului condus, nelinear, PCN. Parametri modelului linearizat depind de coordonatele u_0 și y_0 ale punctului Λ_0 de pe caracteristica $y(u)$ a procesului nelinear în care se face linearizarea. Prin urmare și parametri regulatorului vor depinde de aceste coordonate [65]. Dacă din anumite motive (toleranțe de fabricație, perturbații externe etc.) PCN ajunge să funcționeze în alt regim staționar decât cel corespunzător punctului Λ_0 , aflat însă în vecinătatea lui Λ_0 , este evident faptul că nu mai sunt realizate performanțele SRA impuse prin proiectare. Pentru revenirea la situația proiectată este necesar să se diminueze efectele de dezechilibrare a PCN. Soluția propusă aici este, pe de-o parte, cea a alegerii din start a unui punct de funcționare staționară care să îndeplinească anumite criterii impuse și prin aceasta să se prevină de la început amploarea efectelor de dezechilibrare (adică sistemul să funcționeze cu regulatorul proiectat pe baza modelului linearizat al procesului cât mai bine), iar pe de altă parte, cea a utilizării în fig.3.3.1-1 în locul blocului PCN, a blocului P $\tilde{C}N$ cu structura din fig.3.3.1-2, adică a unei structuri în cascadă, pentru care parametri RGI se ajustează, în funcție de studiul de sensibilitate la linearizare, făcut în prealabil, de așa manieră încât P $\tilde{C}N$ să funcționeze în Λ_0 .

Studiul ce urmează dă răspuns la prima parte a soluției propuse și generează discuții asupra celei de a doua.

3.3.2 Stabilirea algoritmului de determinare a punctului de funcționare staționară optim (caz general)

În acest studiu, determinarea punctului de funcționare staționară optim se bazează pe minimizarea unei funcționale a erorii ξ dintre starea x (sau ieșirea y) a modelului matematic al PCN, model notat cu MN, și starea x_L (sau ieșirea y_L) a modelului matematic analitic obținut prin linearizare, model notat cu ML, fig.3.3.2-1. Se consideră că MN și ML au aceleași condiții inițiale. În final se propune și o altă funcțională demnă de luat în considerare în soluționarea aceleiași probleme și care se bazează de asemenea pe sensibilitatea de linearizare.

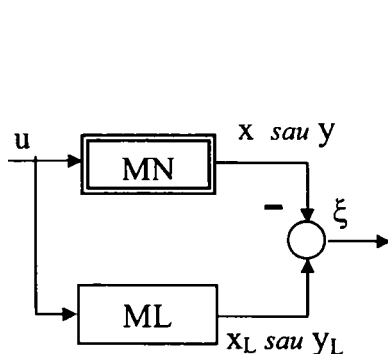


Fig.3.3.2-1 Evidențierea erorii dintre modelul linearizat și cel nelinear

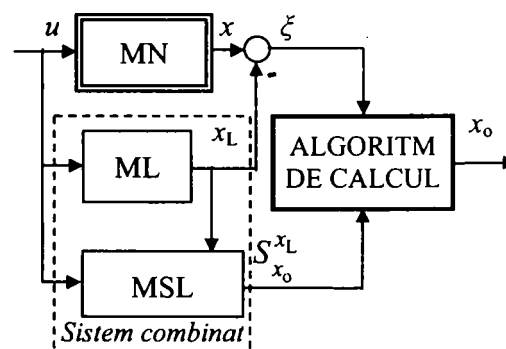


Fig.3.3.2-2. Schema bloc de determinare a parametrilor punctului de linearizare.

Calculul parametrilor unui punct de linearizare optim este deosebit de complex motiv pentru care este necesară o descriere secvențială a pașilor parcurși, descriere denumită în continuare "algoritm de calcul".

Stabilirea algoritmului de calcul necesită la rândul său parcurgerea succesivă a unor etape analitice, surprinse în schema bloc din fig.3.3.2-2.

- Se stabilesc ecuațiile de stare ale unui *model* matematic *n*linear, MN al PCN, prin metode de identificare cunoscute [103], (§3.3.2.1).
- Se determină un *model* linearizat ML al lui MN, corespunzător unui punct arbitrar Λ_o de funcționare staționară (§3.3.2.2). ML este exprimat cu variabilele în valori absolute, nu în creșteri.
- Se determină funcția obiectiv (criteriu) de minimizare a erorii de linearizare (§3.3.2.3).
- Plecând de la ansamblul ML-MN din fig.3.3.2-2 se stabilește *modelul* de sensibilitate al operației de linearizare (MSL) și sistemul combinat folosit la obținerea funcției de sensibilitate datorată operației de linearizare (§3.3.2.4).
- Se transpune studiul de sensibilitate la linearizare în calculul minimumului funcției obiectiv alese și se face o analiză a rezultatelor.
- Se descrie secvențial algoritmul de determinare a parametrilor punctului de linearizare (§3.3.2.5).

Studiul general este completat cu cazul particular al sistemelor de tip (SISO) (§3.3.2.6).

3.3.2.1 Modelul matematic al procesului nelinear

Procesul nelinear se consideră descris de ecuațiile de stare

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \quad (3.3.2.1.1)$$

unde $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $f \in \mathbb{R}^n$. Fie $\Lambda_o(\underline{u}_o, \underline{x}_o)$ punctul de funcționare staționară în vecinătatea căruia se va dezvolta MM linearizat. Coordonatele acestui punct verifică în mod evident (3.3.2.1.1) adică

$$f(\underline{x}_o, \underline{u}_o) = 0, \quad \underline{x}_o = \underline{x}(t_0), \quad \underline{u}_o = \underline{u}(t_0). \quad (3.3.2.1.2)$$

În fig. 3.3.2.1-1 sunt ilustrate caracteristicile și caracteristicile $f(x, u) = 0$, netedă și bijectivă, și punctul de funcționare staționară ale unui sistem de tip SISO de ordinul 1. Figura are caracter orientativ.

Se cuvine să se precizeze că asupra vectorului de intrare există restricții de forma

$$\underline{u}(t) \in [\underline{u}_{min}, \underline{u}_{max}], \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (3.3.2.1.3)$$

care conform modelului (3.3.2.1.1) se răsfrâng asupra vectorului de stare sub forma

$$\underline{x}(t) \in [\underline{x}_{min}, \underline{x}_{max}], \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (3.3.2.1.4)$$

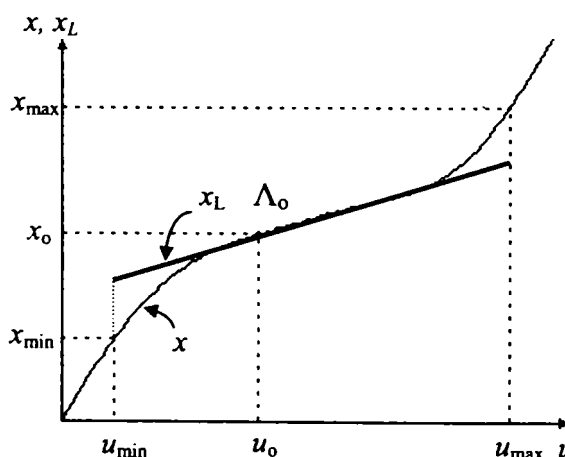


Fig.3.3.2.1-1 Ilustrarea punctului de funcționare staționară $\Lambda_o(u_o, x_o)$ la un sistem SISO de ordinul 1

În etapa următoare se urmărește aproximarea modelului nelinear în vecinătatea punctului de funcționare staționară Λ_o (arbitrar) cu un model linearizat, [101], obținut prin utilizarea metodei de linearizare după tangentă.

3.3.2.2 Modelul matematic linearizat

Linearizarea modelului nelinear (3.3.2.1.1) în vecinătatea punctului de funcționare staționară $\Lambda_0(\underline{u}_0, \underline{x}_0)$ aplicând metoda tangentei [114] conduce la modelul cvazilinear

$$\dot{\underline{x}}_L(t; \underline{x}_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right|_{\Lambda_0} (\underline{x}_L(t; \underline{x}_0) - \underline{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right|_{\Lambda_0} (\underline{u}(t) - \underline{u}_0) \quad (3.3.2.2.1)$$

$$\text{cu } \underline{x}_0 = \underline{x}_L(t_0; \underline{x}_0), \quad \underline{u}_0 = \underline{u}(t_0). \quad (3.3.2.2.2)$$

Utilizând notațiile:

$$\underline{A}(\underline{x}_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right|_{\Lambda_0}, \quad \underline{B}(\underline{x}_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right|_{\Lambda_0}, \quad (3.3.2.2.3)^1$$

modelul (3.3.2.2.1) poate fi rescris sub forma

$$\dot{\underline{x}}_L(t; \underline{x}_0) = \underline{A}(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x}_L(t; \underline{x}_0) - \underline{x}_0) + \underline{B}(\underline{x}_0) \cdot (\underline{u}(t) - \underline{u}_0). \quad (3.3.2.2.4)$$

în condițiile din (3.3.2.2.2).

În relația (3.3.2.2.4) se notează

$$\underline{\alpha} = (\underline{x}_0)^T, \quad (3.3.2.2.5)$$

considerând că "valorile" coordonatelor punctului de funcționare staționară în spațiul stărilor formează vectorul parametrilor în raport cu care se studiază sistemul. Spre deosebire de toate restricțiile anterioare valoarea nominală $\underline{\alpha}_0$ a lui $\underline{\alpha}$ este "necunoscută".

În acest context apare problema determinării valorii nominale $\underline{\alpha}_0$ astfel încât să fie satisfăcute anumite cerințe. În funcție de acestea, problema poate fi soluționată în mai multe moduri. Aici, s-a urmărit determinarea valorii nominale a vectorului parametrilor de așa manieră încât să se minimizeze indicatorul de calitate descris în §3.3.2.3.

3.3.2.3 Definirea funcției obiectiv (indicatorului de calitate)

Conform (2.1.3.20) abaterea la linearizare este diferența

$$\underline{\xi}(t; \underline{x}_0) = \underline{x}_L(t; \underline{x}_0) - \underline{x}(t; \underline{x}_0). \quad (3.3.2.3.1)$$

Ambele modele (3.3.2.1.1) și (3.3.2.2.1) se referă calitativ la aceleași variabile de stare și au aceleași condiții inițiale. Prin urmare

$$\underline{\xi}(t_0; \underline{x}_0) = \underline{x}_L(t_0; \underline{x}_0) - \underline{x}(t_0; \underline{x}_0) = 0. \quad (3.3.2.3.2)$$

Se consideră ca funcție obiectiv (indicator de calitate) a abaterii, funcționala pătratică definită pe orizontul de timp $[t_0, t_f]$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|\underline{\xi}(\tau; \underline{x}_0)\|^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_f} (\underline{\xi}(\tau; \underline{x}_0))^T \cdot \underline{\xi}(\tau; \underline{x}_0) d\tau. \quad (3.3.2.3.3)$$

Funcționala lineară din relația (3.3.2.3.3) reprezintă norma în spațiul Hilbert $L_2(t_0, t_f)$ sau produsul scalar a două funcții vectoriale identice, $\langle \underline{\xi}, \underline{\xi} \rangle$.

¹ $\underline{A}(\underline{x}_0)$ reprezintă matricea jacobian a sistemului, evaluată pentru $\underline{x} = \underline{x}_0$.

Prin înlocuirea relației (3.3.2.3.1) în relația (3.3.2.3.3) pentru funcția obiectiv se obține

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\underline{x}_L(\tau; \underline{x}_0) - \underline{x}(\tau; \underline{x}_0))^T (\underline{x}_L(\tau; \underline{x}_0) - \underline{x}(\tau; \underline{x}_0)) d\tau, \quad J(\underline{x}_0(u_0))=0. \quad (3.3.2.3.4)$$

Funcția obiectiv (3.3.2.3.3) este o măsură a distanței dintre traiectoriile celor două modele, reprezentând un indicator de calitate în privința alegerii lui \underline{x}_0 (indirect, a lui u_0) și ca urmare este de dorit ca acesta să fie cât mai mic posibil. Determinarea lui Λ_0 , în speță a lui u_0 , în acord cu acest criteriu reprezintă în esență obiectul paragrafului de față.

3.3.2.4 Minimizarea funcției obiectiv

Se urmărește determinarea valorii $\underline{\alpha}_0 = (\underline{x}_0^*)^T$ a vectorului parametrilor $\underline{\alpha} = (\underline{x}_0)^T$ pentru care indicatorul de calitate (3.3.2.3.3) ia valoarea minimă.

Condiția de extrem necesară pentru minimizarea lui J în ipoteze de netezime este

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{x}_0} = \underline{0} \quad (\text{și} \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \underline{x}_0^2} \geq \underline{0}^2). \quad (3.3.2.4.1)$$

Aplicând prima condiție asupra expresiei (3.3.2.3.4) se obține

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \underline{x}_L(\tau; \underline{x}_0)}{\partial \underline{x}_0} - \frac{\partial \underline{x}(\tau; \underline{x}_0)}{\partial \underline{x}_0} \right]^T}_{I_1(\underline{x}_0)} \underline{x}(\tau) d\tau = \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \underline{x}_L(\tau; \underline{x}_0)}{\partial \underline{x}_0} - \frac{\partial \underline{x}(\tau; \underline{x}_0)}{\partial \underline{x}_0} \right]^T}_{I_2(\underline{x}_0)} \underline{x}_L(\tau; \underline{x}_0) d\tau. \quad (3.3.2.4.2)$$

Rezolvarea ecuației (3.3.2.4.2) în raport cu \underline{x}_0 este extrem de dificilă. Scris pe componente, vectorul parametrilor are aspectul

$$\underline{\alpha} = (\underline{x}_0)^T = [x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n-1}, x_{0,n}]^T \quad (3.3.2.4.3)$$

Aceasta înseamnă că derivatele din (3.3.2.4.2) formează o matrice $n \times n$ și prin urmare

$$I_1(\underline{x}_0) = I_2(\underline{x}_0), \quad (3.3.2.4.4)$$

reprezintă un sistem de n ecuații integrale cu n necunoscute.

În cazul particular ilustrat în fig. 3.3.2.1-1 sau în cazul sistemelor SISO descrise prin MM-II unde $\underline{\alpha} = (\underline{x}_0)^T = x_0$ este scalar rezolvarea ecuației integrale devine o problemă de evaluare a expresiilor $I_1(x_0)$ și $I_2(x_0)$ pentru fiecare punct x_0 din intervalul continuu $[x_{\min}, \dots, x_{\max}]$. Pentru simplificarea calculului, evaluarea pe un domeniu de stări continuu se înlocuiește cu cea într-un număr fixat de puncte de funcționare staționară posibile, k , apropiate spațial

$$x_0 \in \{x_{\min} = x_0^1, x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^k = x_{\max}\} = X_0. \quad (3.3.2.4.5)$$

Fiecărui $x_0^j \in X_0$ îi corespunde prin relația (3.3.2.1.2) un $u_0 = u_0^j$. După ce au fost efectuate toate cele k evaluări ale celor două funcții $I_1(x_0)$, $I_2(x_0)$ se trece la stabilirea soluției x_0^* a ecuației (3.3.2.4.2). Aceasta, dacă există, verifică egalitatea

$$I_1(x_0^*) = I_2(x_0^*) \quad (3.3.2.4.6)$$

sau minimizează cantitatea $|I_1(x_0^*) - I_2(x_0^*)|$ în condițiile inegalității

² În cazul testării unei mulțimi de puncte, izolate, și comparării rezultatelor, așa cum se procedează în continuare, această condiție nu mai este necesară.

$$\left| I_1(\underline{x}_0^*) - I_2(\underline{x}_0^*) \right| < \varepsilon \quad (3.3.2.4.7)$$

Parametrul ε reprezintă toleranța admisă la calcule.

Dacă nu există soluție atunci este necesară o reevaluare a limitelor impuse asupra mărimilor u și x sau alegerea unui alt indicator de calitate.

De remarcat că în cazul general cele k puncte din relația (3.3.2.4.5) împreună cu valorile \underline{u}_0^j corespunzătoare sunt nodurile unei rețele situate pe hipersuprafața admisibilă a punctelor de funcționare staționară (din spațiul $\mathbb{R}^{n \times r}$).

3.3.2.5 Funcții și modele de sensibilitate în raport cu parametri de linearizare și cu condițiile inițiale

Pentru determinarea lui \underline{x}_0 din ecuația integrală (3.3.2.4.2) este necesar calculul derivatelor

$$\left. \frac{\partial \underline{x}_L(t; \underline{x}_0)}{\partial \underline{x}_0} \right|_{\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j} = S_{\underline{x}_0}^{\underline{x}_L}(t; \underline{x}_0^j) \quad \text{și} \quad \left. \frac{\partial \underline{x}(t; \underline{x}_0)}{\partial \underline{x}_0} \right|_{\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j} = S_{\underline{x}_0}^{\underline{x}}(t; \underline{x}_0^j), \quad j = \overline{1, k}. \quad (3.3.2.5.1)$$

Se remarcă faptul că prima derivată din (3.3.2.5.1) reprezintă matricea (de dimensiune $n \times n$) de sensibilitate a stării în raport cu parametru \underline{x}_0 , la valoarea nominală \underline{x}_0^j , denumită în §2.1.3 "matrice de sensibilitate de linearizare" iar a doua reprezintă matricea (de dimensiune $n \times n$) de sensibilitate (a stării) de tip β în raport cu condiția inițială \underline{x}_0 , la valoarea nominală \underline{x}_0^j . Coloana i , $i = \overline{1, n}$ a matricei de sensibilitate de linearizare

$$\underline{\chi}_i(t; \underline{x}_0^j) = \left[\frac{\partial \underline{x}_L(t; \underline{x}_0)}{\partial x_{0,i}} \right]_{\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j}, \quad (3.3.2.5.2)$$

reprezintă vectorul de sensibilitate al stării în raport cu componenta i a vectorului parametru \underline{x}_0 , iar coloana i , $i = \overline{1, n}$ a matricei de sensibilitate de tip β

$$\underline{\zeta}_i(t; \underline{x}_0^j) = \left[\frac{\partial \underline{x}(t; \underline{x}_0)}{\partial x_{0,i}} \right]_{\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j}. \quad (3.3.2.5.3)$$

reprezintă vectorul de sensibilitate de tip β , al stării, în raport cu componenta i a vectorului condițiilor inițiale \underline{x}_0 . Vectorul de sensibilitate de linearizare $\underline{\chi}_i(t; \underline{x}_0^j)$ se obține din modelul i de sensibilitate de linearizare al punctului nominal \underline{x}_0^j iar vectorul de sensibilitate de tip β $\underline{\zeta}_i(t; \underline{x}_0^j)$ din modelul i de sensibilitate de tip β . După cum arată relația (3.3.2.4.3) sunt necesare $2n$ modele de sensibilitate pentru a determina toate cele $2n \times n$ funcții de sensibilitate (n vectori de sensibilitate de linearizare și n vectori de sensibilitate de tip β) pentru valoarea nominală \underline{x}_0^j . Cum $j = \overline{1, k}$, rezultă că în total sunt necesare k serii a câte $2n$ modele de sensibilitate de linearizare pentru calculul tuturor celor $k \times 2n \times n$ funcții de sensibilitate ($k \times 2n$ vectori de sensibilitate). Aceasta demonstrează un efort de calcul substanțial, efort care poate fi redus la sistemele de tip SISO după cum se va arăta în §3.3.2.7.

Stabilirea modelului i de sensibilitate de linearizare aferent punctului nominal \underline{x}_0^j se face conform §2.2.2. prin derivarea modelului linearizat (3.3.2.2.4) cu (3.3.2.2.2) în raport cu parametrul $x_{0,i}$ și apoi particularizând $\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j$. Rezultatul este:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\chi}}_i(t; \underline{x}_0^j) = & \frac{\partial \underline{A}(\underline{x}_0)}{\partial x_{0,j}} \Big|_{\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j} \cdot (\underline{x}_L(t; \underline{x}_0^j) - \underline{x}_0^j) + \underline{A}(\underline{x}_0^j) \cdot (\underline{\chi}_i(t; \underline{x}_0^j) - I_i) + \frac{\partial \underline{B}(\underline{x}_0)}{\partial x_{0,j}} \Big|_{\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j} \cdot (\underline{u}(t) - \underline{u}_0) + \\ & + \underline{B}(\underline{x}_0^j) \cdot \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial x_{0,i}} \Big|_{\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j}, \quad \underline{\chi}_i(t_0; \underline{x}_0^j) = 0, \quad \underline{u}_0 = \underline{u}(t_0). \end{aligned} \quad (3.3.2.5.4)$$

Termenul $\underline{x}_L(t; \underline{x}_0^j)$ se obține din modelul nominal al modelului linearizat:

$$\dot{\underline{x}}_L(t; \underline{x}_0^j) = \underline{A}(\underline{x}_0^j) \cdot (\underline{x}_L(t; \underline{x}_0^j) - \underline{x}_0^j) + \underline{B}(\underline{x}_0^j) \cdot (\underline{u}(t) - \underline{u}_0) \quad (3.3.2.5.5)$$

$$\underline{x}_L(t_0; \underline{x}_0^j) = \underline{x}_0^j, \quad \underline{u}_0 = \underline{u}(t_0). \quad (3.3.2.5.6)$$

Modelele descrise de (3.3.2.5.4) și (3.3.2.5.5) împreună cu relațiile de legătură dintre abateri, formează modelul i de linearizare combinat. Prin simularea comportării sale se determină vectorul de sensibilitate de linearizare $\underline{\chi}_i(t; \underline{x}_0^j)$, $i = \overline{1, n}$.

Pentru a determina toate cele $k \times n \times n$ funcții de sensibilitate de linearizare este necesară simularea comportării celor $k \times n$ modele de linearizare combinate.

Stabilirea modelului i de sensibilitate de tip β , pentru vectorul condițiilor inițiale de valoare nominală \underline{x}_0^j , se face prin derivarea modelului nelinear (3.3.2.1.1) în raport cu $x_{0,i}$ (componenta i a vectorului condițiilor inițiale) și apoi particularizând $\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j$. Rezultatul este:

$$\dot{\underline{\zeta}}_i(t; \underline{x}_0^j) = \frac{\partial f(\underline{x}(t; \underline{x}_0), \underline{u}(t))}{\partial x_{0,i}} \Big|_{\underline{x}_0 = \underline{x}_0^j} \cdot \underline{\zeta}_i(t; \underline{x}_0^j), \quad \underline{\zeta}_i(t_0; \underline{x}_0^j) = I_i, \quad \underline{u}_0 = \underline{u}(t_0). \quad (3.3.2.5.7)$$

Modelul de sensibilitate de tip β (3.3.2.5.7) descrie un sistem autonom. Comportarea sa este determinată de singura condiție inițială nenulă, cea a componentei i , care este egală cu unitatea.

Pentru a determina toate cele $k \times n \times n$ funcții de sensibilitate de tip β este necesară simularea comportării celor $k \times n$ modele de sensibilitate de tip β .

Este necesar ca valoarea \underline{u}_0 să fie aleasă în mod corect adică în concordanță cu (3.3.2.1.2).

În consecință, se poate prezenta secvențial algoritmul de determinare a coordonatelor punctului de funcționare staționară optimal.

3.3.2.6 Algoritm de calcul a coordonatelor punctului staționară optimal

Secvența de calcule necesară la stabilirea coordonatelor punctului staționară optim $\Lambda_0(\underline{u}_0^*, \underline{x}_0^*)$ este rezumată în următorii pași:

1. Scrierea modelului nelinear al sistemului (3.3.2.1.2) și descrierea literală a coordonatelor punctului de funcționare staționară precum și stabilirea domeniilor permise pentru valorile acestor coordonate (3.3.2.1.3).
2. Calculează cu (3.3.2.2.3) matricele $\underline{A}(\underline{x}_0)$ și $\underline{B}(\underline{x}_0)$ ale modelului general linearizat (3.3.2.2.4).

3. Stabilește mulțimea celor k puncte de funcționare staționară candidate (3.3.2.4.5). Asociază fiecărui \underline{x}_o^j , $\underline{u}_o = \underline{u}_o^j$ în concordanță cu (3.3.2.1.2).

Atribuie $j = 1$ și fixează valoarea implicită a toleranței de calcul ε .

4. Stabilește toate modelele de sensibilitate de linearizare și de tip β necesare (vezi §3.3.2.5).
 5. Simulează comportarea modelului nelinear (3.3.2.1.2), a modelului linear nominal ((3.3.2.5.5) cu (3.3.2.5.6)) și a modelelor de sensibilitate corespunzătoare lui $\underline{x}_o = \underline{x}_o^j$ (n relații (3.3.2.5.4) și n relații (3.3.2.5.7)).
 6. Calculează $I_1(\underline{x}_o^j)$ și $I_2(\underline{x}_o^j)$, apoi atribuie $j = j + 1$.
 7. Dacă $j \leq k$, repetă 5 și apoi 6, altfel continuă cu 8.
 8. For $j = 1:k$,

$$d(j) = \| I_1(\underline{x}_o^j) - I_2(\underline{x}_o^j) \|;$$

if $d(j) \leq \varepsilon$ then "reține $d(j)$ în D și $(\underline{x}_o^j; \underline{u}_o^j)$ în Λ "

else "continuă"

end

end

9. If $D \neq \emptyset$ then $(\underline{x}_o^*; \underline{u}_o^*) = \{(\underline{x}_o^j; \underline{u}_o^j) \in \Lambda \mid d(j) = \min\{D\}\}$

else "Problema nu are soluție. Revaluează cerințele."

end

Algoritmul prezentat poate fi utilizat (doar prin modificarea punctului 6) și în situația în care alte funcționale care folosesc funcții de sensibilitate de linearizare sunt luate în considerare. O astfel de funcțională care trebuie minimizată ar putea fi

$$J = \int_{t_o}^{t_f} \left\| S_{\underline{x}_o}^{\underline{x}_L}(t; \underline{x}_o) \right\|^2 d\tau = \int_{t_o}^{t_f} \left(S_{\underline{x}_o}^{\underline{x}_L}(t; \underline{x}_o) \right)^T \cdot S_{\underline{x}_o}^{\underline{x}_L}(t; \underline{x}_o) d\tau, \quad (3.3.2.6.1)$$

$$\text{unde } S_{\underline{x}_o}^{\underline{x}_L}(t; \underline{x}_o) = \frac{\partial \underline{x}_L(t; \underline{x}_o)}{\partial \underline{x}_o}, \quad (3.3.2.6.2)$$

ceea ce înseamnă că alegerea coordonatelor punctului de funcționare staționară se va face de așa manieră încât modificarea sa accidentală să influențeze în cea mai mică măsură posibilă traiectoria modelului linearizat. Studiul ar putea continua cu stabilirea modului în care abaterile parametrilor fizici influențează coordonatele punctului de funcționare staționară (se folosesc funcțiile de sensibilitate ale lui \underline{x}_o în raport cu acești parametri), căutând în acest fel modalități de ajustare a punctului de funcționare staționară. Aceasta constituie una din direcțiile de cercetare ulterioară.

3.3.2.7 Cazul particular al sistemelor SISO

Din punct de vedere practic este de dorit ca determinarea funcțiilor de sensibilitate să se facă efectuând un număr cât mai mic de simulări. Reducerea la k a numărului modelelor de sensibilitate de linearizare și la k a numărului modelelor de sensibilitate de tip β este posibilă la sistemele nelineare de tip SISO pentru care MM-ISI (3.3.2.1.1) are forma particulară

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.3.2.7.1)$$

cu condițiile inițiale: $x_1(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = 0, \dots, x_n(t_0) = 0.$ (3.3.2.7.2)

În acest caz se remarcă cu ușurință faptul că numai prima componentă a vectorului x_0 este nenulă și ca urmare vectorul parametrilor de linearizare poate fi tratat ca un scalar iar vectorul condițiilor inițiale are o singură componentă nenulă. Așadar punctul de funcționare staționară Λ_0 are coordonatele $(u_0, x_0, 0, \dots, 0)$, unde $u_0 = u(t_0)$ verifică condiția

$$f_n(x_0, 0, \dots, 0, u_0) = 0. \quad (3.3.2.7.3)$$

Modelul cvasilinear asociat sistemului (3.3.2.7.1) în vecinătatea punctului de funcționare staționară Λ_0 are potrivit (3.3.2.2.4) și condițiilor (3.3.2.2.2), forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{L,1}(t; x_0) \\ \dot{x}_{L,2}(t; x_0) \\ \vdots \\ \dot{x}_{L,n}(t; x_0) \end{bmatrix} = \underline{A}(x_0) \cdot \begin{bmatrix} x_{L,1}(t; x_0) \\ x_{L,2}(t; x_0) \\ \vdots \\ x_{L,n}(t; x_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{B}(x_0) \cdot (u(t) - u_0) \quad (3.3.2.7.4)$$

unde:

$$\underline{A}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Bigg|_{\Lambda = \Lambda_0}, \quad \underline{B}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \Big|_{\Lambda = \Lambda_0} \end{bmatrix}. \quad (3.3.2.7.5)$$

și condițiile inițiale din (3.3.2.7.2). Se remarcă forma canonică companion a matricei $A(x_0)$ a modelului.

Pentru simplificarea scrierii se introduc următoarele notații:

$$a_{i-1}(x_0) = -\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \Big|_{\Lambda = \Lambda_0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad b(x_0) = \frac{\partial f_n}{\partial u} \Big|_{\Lambda = \Lambda_0} \quad (3.3.2.7.6)$$

Astfel (3.3.2.7.5) devine

$$\underline{A}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ -a_0(x_0) & -a_1(x_0) & \dots & -a_{n-1}(x_0) \end{bmatrix}, \quad \underline{B}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x_0) \end{bmatrix}. \quad (3.3.2.7.7)$$

Condițiile inițiale asociate modelului (3.3.2.7.4) sunt

$$\begin{bmatrix} x_{L,1}(t_0; x_0) \\ x_{L,2}(t_0; x_0) \\ \vdots \\ x_{L,n}(t_0; x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3.2.7.8)$$

Urmărind raționamentul anterior se remarcă faptul că pentru determinarea tuturor funcțiilor de sensibilitate corespunzătoare valorii nominale x_0^j este suficient un singur model de sensibilitate de linearizare:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\chi}}(t; x_0^j) &= \left. \frac{\partial \underline{A}(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^j} \cdot (\underline{x}_L(t; x_0^j) - x_0^j \cdot I_1) + \underline{A}(x_0^j) \cdot (\underline{\chi}(t; x_0^j) - I_1) + \\ &+ \left. \frac{\partial \underline{B}(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^j} \cdot (u(t) - u_0) + \underline{B}(x_0) \cdot \left. \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^j}, \quad (3.3.2.7.9) \\ \underline{\chi}(t_0; x_0^j) &= 0, \quad u_0 = u(t_0) \end{aligned}$$

unde I_1 are dimensiunea $n \times 1$ și

$$\left. \frac{\partial \underline{A}(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial a_0}{\partial x_0} & -\frac{\partial a_1}{\partial x_0} & \dots & -\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_0} \end{bmatrix}_{x_0=x_0^j} \quad (3.3.2.7.10)$$

$$\left. \frac{\partial \underline{B}(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial b(x_0)}{\partial x_0} \end{bmatrix}_{x_0=x_0^j}; \quad I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

și un singur model de sensibilitate de tip β

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1(t; x_0^j) = \zeta_2(t; x_0^j) \\ \dot{\zeta}_2(t; x_0^j) = \zeta_3(t; x_0^j) \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n-1}(t; x_0^j) = \zeta_n(t; x_0^j) \\ \dot{\zeta}_n(t; x_0^j) = \left. \frac{\partial f_n(x_1(t; x_0), x_2(t; x_0), \dots, x_n(t; x_0), u(t))}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^j} \cdot \zeta_n(t; x_0^j) \end{cases} \quad (3.3.2.7.11)$$

cu: $\zeta_1(t_0; x_0^j) = 1, \zeta_2(t_0; x_0^j) = 0, \dots, \zeta_n(t_0; x_0^j) = 0$ și $u_0 = u(t_0)$. (3.3.2.7.12)

Termenul $x_L(t; x_0^j)$, mărime de intrare pentru (3.3.2.7.9), se obține din (3.3.2.7.4) pentru $x_0 = x_0^j$.

Se remarcă faptul că având în vedere forma particulară (și totuși frecventă) a modelului nelinear sunt necesare k modele de sensibilitate de linearizare și k modele de sensibilitate de tip β pentru determinarea celor $2k \times n$ funcții de sensibilitate necesare algoritmului de soluționare a ecuației (3.3.2.4.2).

Studiul următor are scopul de a aprecia aspectul cantitativ al abordării teoretice anterioare într-un caz simplu, corespunzător unui sistem de tip SISO.

3.3.3 Determinarea punctului de funcționare staționară optim (studiu de caz)

Acest studiu urmărește determinarea punctului de funcționare staționară optim (din punctul de vedere prezentat anterior) al sistemului mecanic din fig.3.3.3-1, având ca și componentă nelineară resortul elastic al cărei caracteristică (statică și dinamică) este prezentată în fig.3.3.3-2. Studiul aplică algoritmul dezvoltat în §3.3.2.

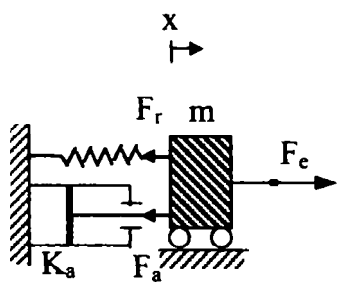


Fig.3.3.3-1 Sistem de amortizare

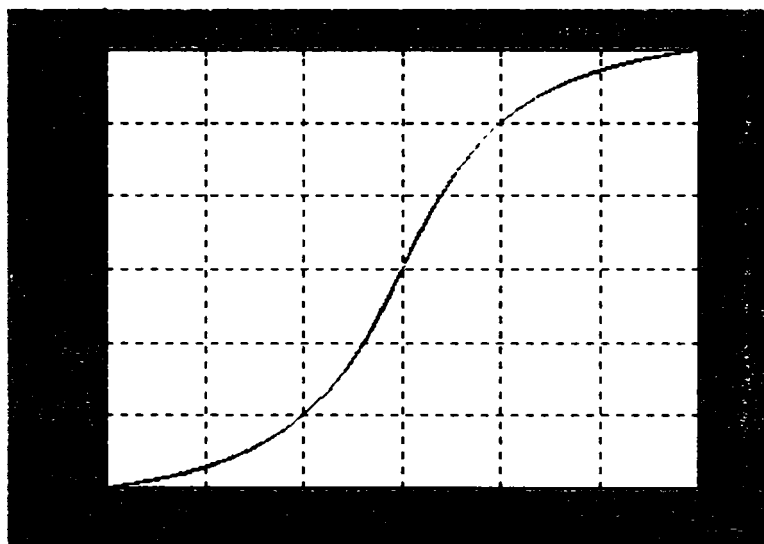


Fig.3.3.3-2 Caracteristica $F_r(x)$ a resortului elastic

3.3.3.1 Modelarea matematică a sistemului de amortizare cu resort elastic

Aplicând legea a II-a a dinamicii, pentru sistemul din fig.3.3.3-1 se obține MM-II sub forma:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F_e(t) - F_a(t) - F_r(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3.3.3.1.1)$$

Amortizorul cu piston, parte componentă a sistemului studiat, este caracterizat de relația

$$F_a(t) = K_a \cdot \dot{x}(t), \quad (3.3.3.1.2)$$

dintre forța de amortizare $F_a(t)$ și viteza de deplasare a pistonului $\dot{x}(t)$. K_a reprezintă coeficientul de amortizare considerat constant. Resortul elastic este descris în limitele de elasticitate de dependența forță-elongație, nelineară, reprezentată în fig.3.3.3-2. Analitic, această dependență se poate modela făcând uz de funcția exponențială

$$F_r(x) = a \cdot (1 - e^{-b \cdot x \cdot \text{sign}x}) \cdot \text{sign}x \quad [\text{N}] \quad (3.3.3.1.3)$$

sau de funcția arctangentă:

$$F_r(x) = c \cdot \text{arctg}(d \cdot x) \quad [\text{N}]. \quad (3.3.3.1.4)$$

S-a optat pentru varianta (3.3.3.1.3) pentru $x \geq 0$ (resortul este supus numai la întindere). Cu aceste precizări MM-II devine

$$m \cdot \ddot{x}(t) + K_a \cdot \dot{x}(t) + a \cdot (1 - e^{-b \cdot x(t)}) = F_e(t), \quad (3.3.3.1.5)$$

$$\text{cu condițiile inițiale: } x(0) = x_o, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (3.3.3.1.6)$$

S-au utilizat următoarele valori numerice:

$$m = 300\text{Kg}, K_a = 6 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{s/m}, a = 3157.2\text{N}, b = 100\text{m}^{-1},$$

$$F_e \in [300.45, 3000] \text{ N și } x \in [10^{-3}, 2.5 \cdot 10^{-2}] \text{ m}. \quad (3.3.3.1.7)$$

cu precizarea că limitele lui F_e și x sunt corelate conform (3.3.3.1.5) în regim staționar.

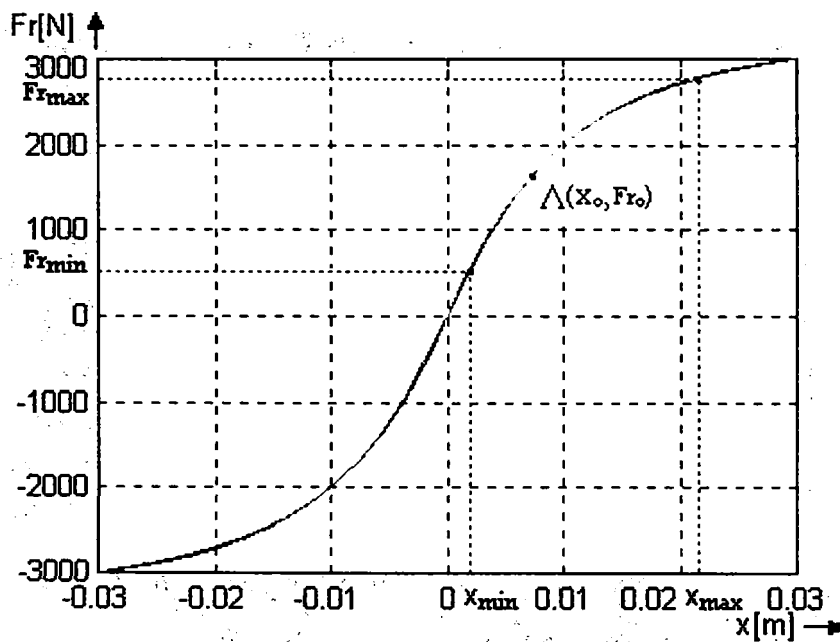


Fig.3.3.3.1-1 Domeniul de variație al punctului de linearizare pe caracteristica resortului

Pentru resortul elastic aflat în echilibru (în punctul staționar) se obține

$$F_{r,o} = F_r(x_o) = a \cdot (1 - e^{-b \cdot x_o}). \quad (3.3.3.1.8)$$

MM-II (3.3.3.1.5) i se asociază un MM-ISI de forma (3.3.2.7.1) alegând mărimile de stare

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t). \quad (3.3.3.1.9)$$

Se obține

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{K_a}{m} \cdot x_2(t) - \frac{a}{m} \cdot (1 - e^{-b \cdot x_1(t)}) + \frac{1}{m} \cdot F_e(t) \end{cases}, \quad (3.3.3.1.10)$$

$$\text{cu condițiile inițiale: } x_1(0) = x_o, \quad x_2(0) = 0. \quad (3.3.3.1.11)$$

Punctul de funcționare staționară $\Lambda_o(F_{e,o}, [x_o, 0]^T)$, îndeplinește condiția

$$-\frac{a}{m} \cdot (1 - e^{-b \cdot x_o}) + \frac{1}{m} \cdot F_{e,o} = 0, \quad F_{e,o} = F_e(t_o). \quad (3.3.3.1.12)$$

Prin urmare

$$F_{e,o} = a \cdot (1 - e^{-b \cdot x_o}). \tag{3.3.3.1.13}$$

3.3.3.2 Modelul matematic linearizat

Modelul matematic nelinear al sistemului real (3.3.3.1.10), (3.3.3.1.11) poate fi aproximat în vecinătatea punctului de funcționare staționară Λ_o cu modelul linearizat prin metoda tangentei

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,L}(t; x_o) \\ \dot{x}_{2,L}(t; x_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a \cdot b \cdot e^{-bx_o}}{m} & -\frac{1}{K_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,L}(t; x_o) - x_o \\ x_{2,L}(t; x_o) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot (F_e(t) - F_{e,o}) \tag{3.3.3.1.14}$$

$$x_{1,L}(0; x_o) = x_o, \quad x_{2,L}(0; x_o) = 0. \tag{3.3.3.1.15}$$

Pentru modelul matematic linearizat (3.3.3.1.14), (3.3.3.1.15) se consideră drept unic parametru x_o , $x_o \in X_o$,

$$X_o = \{x_o^j\}_{j=1,6} = \{0.001 \ 0.005 \ 0.01 \ 0.015 \ 0.02 \ 0.025\}. \tag{3.3.3.1.16}$$

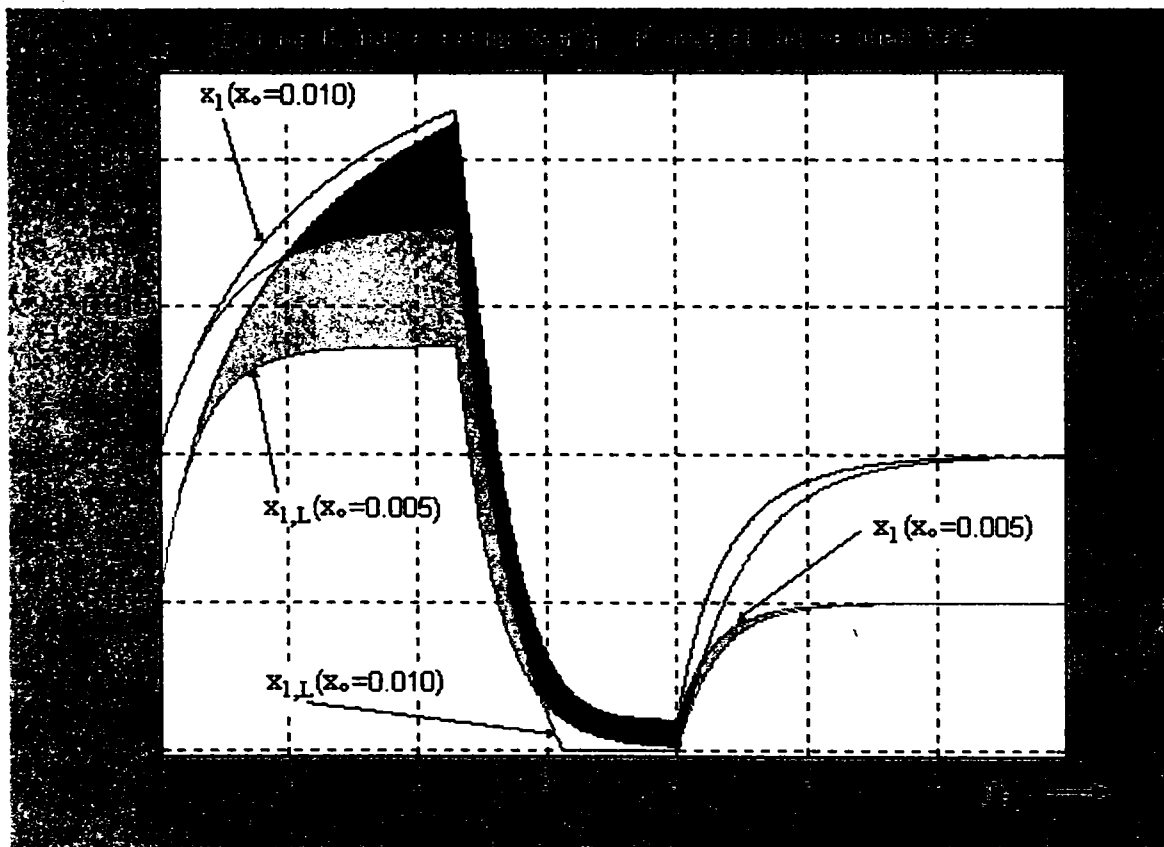


Fig.3.3.3.2-1 Traiectoriile modelului nelinear, x_1 , și ale modelului linearizat $x_{1,L}$ pentru două valori x_o .

În figura 3.3.3.2-1 sunt prezentate în același sistem de coordonate traiectoriile mărimilor de ieșire ale modelului nelinear, x_1 , și ale modelului linearizat, $x_{1,L}$, în 2 puncte de funcționare staționară posibile, obținute aplicând la intrare semnale de forma celui din fig.3.3.3.2-2. Diferențele dintre aceste traiectorii, reprezentate în culori, indică de ... p ... v ... s t te abaterilor la linearizare.

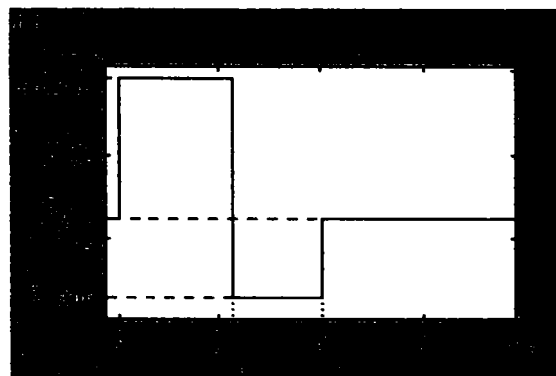


Fig.3.3.3.2-2 Funcția de intrare

3.3.3.3 Modelul de sensibilitate de linearizare și modelul de sensibilitate de tip β

Modelul de sensibilitate de linearizare aferent sistemului (3.3.3.1.14), (3.3.3.1.15), în punctul nominal $x_o^j \in X_o$

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1(t; x_o^j) \\ \dot{\chi}_2(t; x_o^j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ab^2 e^{-bx_o^j}}{m} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{L,1}(t; x_o^j) - x_o^j \\ x_{L,2}(t; x_o^j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{abe^{-bx_o^j}}{m} & -\frac{K_a}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1(t; x_o^j) \\ \chi_2(t; x_o^j) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \chi_1(0; x_o^j) \\ \chi_2(0; x_o^j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3.3.1.17)$$

formează împreună cu modelul nominal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{L,1}(t; x_o) \\ \dot{x}_{L,2}(t; x_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a \cdot b \cdot e^{-bx_o}}{m} & -\frac{K_a}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{L,1}(t; x_o) - x_o \\ x_{L,2}(t; x_o) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (F_e(t) - F_{e,o}) \quad (3.3.3.1.18)$$

$$x_{L,1}(0; x_o) = x_o, \quad x_{L,2}(0; x_o) = 0. \quad (3.3.3.1.19)$$

sistemul combinat prin intermediul căruia se obțin funcțiile de sensibilitate de linearizare în punctul nominal $x_o^j \in X_o$.

Modelul de sensibilitate de tip β se obține conform (3.3.2.5.7)

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1(t; x_o) \\ \dot{\zeta}_2(t; x_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a \cdot b \cdot e^{-bx_o}}{m} & -\frac{K_a}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_1(t; x_o) \\ \zeta_2(t; x_o) \end{bmatrix} \quad (3.3.3.1.20)$$

cu condițiile inițiale: $\zeta_1(0) = 1, \quad \zeta_2(0) = 0. \quad (3.3.3.1.21)$

Simulând simultan procese tranzitorii pentru aceleași funcții de intrare (fig.3.3.3.2-2) pe sistemul combinat, pe modelul de sensibilitate de tip β și pe modelul nelinear se obțin toate datele necesare determinării valorii optime căutate, x_o^* .

3.3.3.4 Simulări și rezultate

Simulările și prelucrarea datelor au fost efectuate cu programele MATLAB și schema Simulink din Anexa XII.

Au fost efectuate un număr de 12 simulări. Pentru fiecare element al mulțimii X_o au fost efectuate două simulări. În urma primei simulări s-au stabilit momentele de comutare ale funcției de intrare, t_1 și t_2 , (de forma prezentată în fig.3.3.3.2-2), de așa manieră încât sistemul nelinear să atingă atât limita superioară x_{max} cât și pe cea inferioară x_{min} . A doua simulare a fost cea în urma căreia s-au prelucrat datele. Valoarea inițială a mărimii de intrare, $F_{e,o}^j$, din (3.3.3.1.7), a fost corelată de fiecare dată cu valoarea x_o^j conform relației (3.3.3.1.13), tabelul 1. Durata unei simulări a fost $t_f - t_o = 6.9$ secunde.

Tabelul 1

x_o [m]	0.001	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
$F_{e,o}$ [N]	300.45	1242.3	1995.7	2452.7	2729.9	2898.0

Rezultatele numerice ale simulărilor sunt sintetizate în tabelul 2 și în graficele din figurile 3.3.3.4-1 și 3.3.3.4-2.

Tabelul 2

x_0 [m]	0.001	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
I_1 [ms]	$5.4752 \cdot 10^{-2}$	$4.6860 \cdot 10^{-2}$	$3.9651 \cdot 10^{-2}$	$3.0799 \cdot 10^{-2}$	$2.1897 \cdot 10^{-2}$	$1.5120 \cdot 10^{-2}$
I_2 [ms]	$3.0852 \cdot 10^{-2}$	$3.4403 \cdot 10^{-2}$	$4.2642 \cdot 10^{-2}$	$5.3125 \cdot 10^{-2}$	$6.0808 \cdot 10^{-2}$	$6.1546 \cdot 10^{-2}$
J [m ² s]	$2.5258 \cdot 10^{-4}$	$1.6302 \cdot 10^{-4}$	$3.9241 \cdot 10^{-4}$	$1.0218 \cdot 10^{-3}$	$1.7820 \cdot 10^{-3}$	$2.4746 \cdot 10^{-3}$

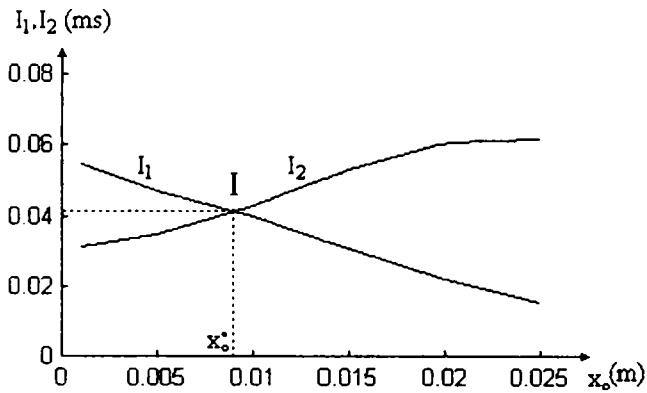


Fig.3.3.3.4-1 Dependentele $I_1(x_0)$, $I_2(x_0)$

În fig.3.3.3.4-1 se remarcă faptul că cele două funcții $I_1(x_0)$ și $I_2(x_0)$ se întâlnesc în punctul I, (de abscisă x_0^*), ceea ce înseamnă că acolo este soluția ecuației $I_1(x_0) = I_2(x_0)$. Cum $I_1(x_0)$ și $I_2(x_0)$ sunt funcții monotone se poate utiliza o interpolare rapidă pentru a găsi valoarea lui x_0^* . Prin urmare se poate afirma că funcționala $J(x_0)$ are un minim pentru

$$x_0^* \approx 9.0318 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad (3.3.3.4.1)$$

și anume

$$J(x_0^*) \approx 3.2320 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}. \quad (3.3.3.4.2)$$

Precizia de calcul este determinată de densitatea mulțimii X_0 și de toleranța de calcul impusă programului de simulare. Graficul $J(x_0)$ din figura 3.3.3.4-2 a fost construit într-o manieră elementară (cu rezultate preluate la finalul aceluiași simulări) cu scopul de a confirma valoarea lui x_0^* determinată prin algoritmul stabilit în §3.3.2. În cazul de față soluția există și e unică. Valorii x_0^* îi corespunde prin (3.3.3.1.13) $u_0^* = F_{e,0}^* = 1.8776 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

După cum se poate observa din Anexa XII toate simulările au fost efectuate cu aceeași schemă S mu. nk, modificând aproape automat (cu ajutorul unui program MATLAB) parametri schemei înaintea fiecărei simulări. În acest caz, MATLAB și S mu. nk, au reprezentat uneltele ideale de calcul.

Reducerea numărului de modele de sensibilitate se poate realiza practic la toate sistemele nelineare controlabile SISO. Aceste sisteme pot fi descrise prin MM-II cărora li se poate atașa un MM-ISI în forma canonică (3.3.2.7.1).

În Anexa XIII se prezintă modul de tratare a problemei de față utilizând MM-II, la sistemul din §3.3.3.

Alte tipuri de funcționale lineare, în calitate de indici de performanță utili din punct de vedere practic, ar putea fi luate în considerare în aceeași manieră ca cea de față. Influența abaterilor

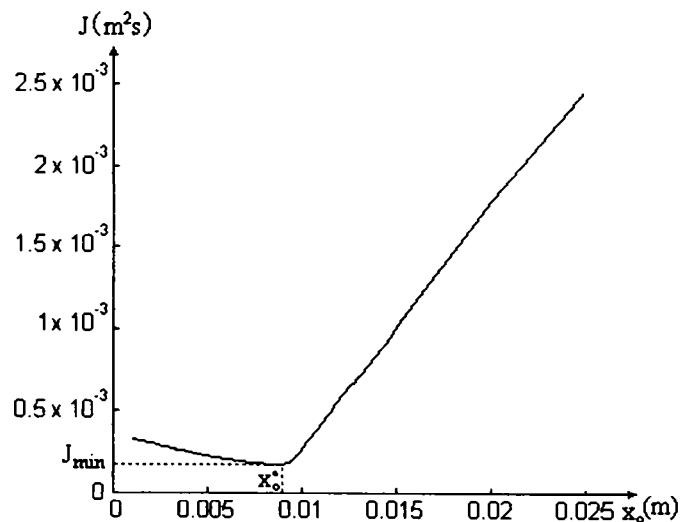


Fig.3.3.3.4-2 Dependența $J(x_0)$

parametrilor fizici m , K_a , a , b asupra coordonatelor punctului de funcționare staționară se poate studia folosind funcțiile de sensibilitate ale lui x_o în raport cu acești parametri. Aceasta ar putea contribui la ajustarea punctului de funcționare staționară. Acestea pot constitui dintre direcții de cercetare ulterioară.

3.4 Concluzii

Din §3.1 se poate aprecia că analiza sensibilității SRA este necesară în faza de proiectare pentru a putea localiza eventualele subsisteme surse de erori dar și pentru a alege structura cea mai potrivită din punctul de vedere al raportului sensibilitate-stabilitate.

În §3.1.1 se arată că prin studierea poziției în planul complex a hodografului Nyquist al sistemului deschis se pot face aprecieri cu privire la efectul de atenuare a modificărilor comportamentului sistemului închis pe întreg domeniul de pulsații.

Localizarea subsistemelor "predispuse" la determinarea dezechilibrelor din sistem este posibilă datorită legăturii matematice, dovedită în §3.1.2, care există între abaterea comportării sistemului închis și derivata formală a f.d.t. a sistemului în raport cu f.d.t. a subsistemului afectat de abaterile parametrice.

Din studiile efectuate în §3.2 pe structuri de reglare cu frecvență mare de apariție în domeniul tehnic se poate remarca faptul că pentru o analiza complexă a sensibilității SRA în raport cu parametri procesului este necesară determinarea funcțiilor de sensibilitate în domeniul timp, a sensibilității Bode (în domeniul de pulsații) și a sensibilităților unor "indicatori de dinamică", de pildă sensibilitatea coeficientului de amortizare. Rezultatele numerice ale analizei paralele efectuate, utilizabile în primă instanță la proiectarea reguletoarelor, pot fi folosite și în alte scopuri. De exemplu, în [8] se utilizează sensibilitatea coeficientului de amortizare (pe lângă alți indicatori) la determinarea domeniului de siguranță parametrică al unui sistem de ordinul 2. Datorită complexității studiului au fost necesare detalieri ale rezultatelor simulărilor în Anexa X și ale unora dintre calcule în Anexa XI.

Paragraful §3.3 utilizează funcții de sensibilitate cu destinație precisă: determinarea coordonatelor punctului de funcționare staționară respectând un criteriu de optimalitate. Studiul general, realizat pe un sistem MIMO și încheiat cu enunțarea unui algoritm de calcul este particularizat pe cazul sistemelor SISO și apoi aplicat pe un caz concret. Detaliile privind simulările și calculele aferente cazului concret sunt precizate în Anexa XII. În Anexa XIII se prezintă unghiuri de abordare diferite ale aceleiași probleme, ca posibile direcții de cercetare ulterioară. Toate dezvoltările din §3.3 sunt originale. Cercetările pot fi continuate cu considerarea altor criterii de performanță, cu calcularea unor măsuri de sensibilitate și alegerea acelor coordonate pentru care alte condiții sunt îndeplinite.

STUDII ȘI CONTRIBUȚII LA UTILIZAREA ANALIZEI DE SENSIBILITATE INVERSĂ ÎN AUTOMATICĂ

În proiectarea și implementarea sistemelor de reglare automată se ivesc numeroase tipuri de probleme pentru a căror soluționare se impune cunoașterea parametrilor procesului supus reglării precum și determinarea cantitativă a modificărilor parametrilor unui proces în timpul reglării. Aceasta din urmă este o operație dificilă și adesea imprecisă. O modalitate de determinare a abaterilor parametrilor unui proces este utilizarea *analizei de sensibilitate inversă (ASI)*.

Acest capitol își propune să prezinte ASI la SRA precum și unele modalități de integrare a soluțiilor ASI în sisteme inteligente. Capitolul este structurat pe părți astfel:

- Principiul analizei de sensibilitate inversă și modalitatea de reducere a impreciziilor de identificare a parametrilor unui sistem prin analiză de sensibilitate inversă sunt surprinse în §4.1; tot aici se propun două metode noi de determinare a soluției în cadrul ASI, o metodă simplă denumită sugestiv “metoda timpilor succesivi” și o nouă abordare a variantei numerice a metodei clasice pentru un caz particular.
- Aplicații comparative ale metodelor prezentate în §4.1 sunt detaliate în §4.2.
- Problematika integrării ASI într-un proces de sortare automată a unor dispozitive (elemente de reglare, elemente de execuție, elemente de măsurare) este prezentată în §4.3.
- Principalele concluzii sunt sintetizate în §4.4.

4.1 Principiul și metodele ASI

Identificarea abaterilor parametrilor unui proces de la valoarea lor nominală utilizând funcții de sensibilitate parametrică, prin metoda sensibilității inverse, este puțin abordată în literatura de specialitate și doar la nivel de scheme bloc [28], [43]. Schemele prezentate presupun implementarea unor algoritmi recursivi prin utilizarea unui model ajustabil al sistemului precum și găsirea unei funcționale prin a cărei minimizare să se asigure convergența metodei, [28]. Adeseori se ajunge la necesitatea utilizării on-line a unor funcții neliniare ceea ce complică mult proiectarea elementelor care să implementeze aceste funcții. Metoda simplă propusă aici se referă la determinarea *abaterilor mici* ale parametrilor unui sistem de la valorile nominale prin măsurarea erorilor mărimilor măsurabile și a funcțiilor de sensibilitate, la momente de timp succesive (pe axa timpului) și efectuarea off - line a calculelor, [83]. Studiul prezentat în acest paragraf dorește să răspundă la următoarea problemă: în cazul în care într-un sistem apar modificări mici ale parametrilor procesului în cât timp pot fi ele estimate în mod corect prin ASI, cum anume și cu ce efort de calcul se pot face aceste estimări? Studiul este structurat astfel:

- Principiul ASI și problemele sale dimensionale specifice.
- Rezolvarea problemei dimensionale a ASI prin metoda clasică.
- Metode numerice de determinare a soluției ASI. Metoda “timpilor succesivi” de soluționare a ASI. Comparație cu metoda clasică. Concluzii.

4.1.1 Principiul ASI. Schema de identificare a parametrilor

Punerea problemei: cunoscând abaterea $\Delta \xi(t; \underline{\alpha})$ a mărimii caracteristice $\xi(t; \underline{\alpha})$ a sistemului real de la traiectoria nominală $\xi_0(t; \underline{\alpha}_0)$, datorată modificărilor accidentale ale valorilor parametrilor $\underline{\alpha}$, se cere să se determine abaterile $\Delta \underline{\alpha}$ care au cauzat abaterea $\Delta \xi(t; \underline{\alpha})$, în condițiile în care se presupun cunoscute funcțiile de sensibilitate parametrică $S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0)$, fig.4.1.1-1.

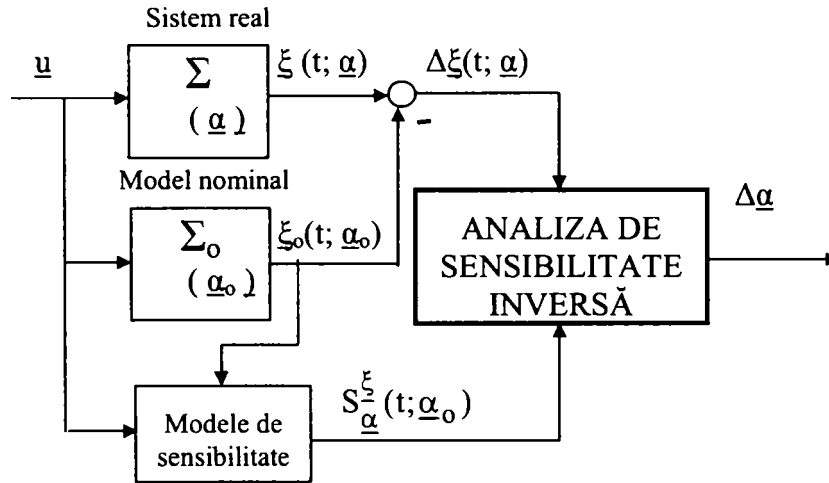


Fig.4.1.1-1 Schema de principiu pentru determinarea abaterilor parametrilor $\underline{\alpha}$ de la valorile nominale $\underline{\alpha}_0$ pe baza măsurării abaterii mărimii caracteristice ξ de la valoarea nominală.

Așa cum s-a prezentat în §2.1 pentru abateri mici ale parametrilor relația de bază în analiza de sensibilitate este relația de aproximare

$$\Delta \xi(t; \underline{\alpha}) = S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^p \quad , \quad \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^q \quad (4.1.1.1)$$

în care unde $S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0)$ reprezintă *matricea funcțiilor de sensibilitate* ale cărei componente sunt *funcții de sensibilitate parametrică absolută*.

Matematic, relația (4.1.1.1) reprezintă un sistem de p ecuații cu q necunoscute. Soluționarea lui permite estimarea abaterilor parametrilor care au condus la abaterea mărimii caracteristice a sistemului de la traiectoria sa nominală. Din punct de vedere dimensional, în relația (4.1.1.1), situația se prezintă în felul următor:

	<i>nr.linii x nr.coloane</i>
$\Delta \underline{\alpha}$	q x 1
$\Delta \xi(t; \underline{\alpha})$	p x 1
$S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0)$	q x p

Prin urmare, în cazul general, matricea $S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0)$ nu este inversabilă întrucât în realitate nu este pătratică, [54], deci sistemul nu este compatibil determinat. Excepție face cazul particular în care $p = q$, adică numărul parametrilor incerti este egal cu numărul mărimilor caracteristice. Formal, soluția ASI rezultată direct din (4.1.1.1) este

$$\Delta \underline{\alpha} = \left[S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0) \right]^{-1} \cdot \Delta \xi(t; \underline{\alpha}) \quad (4.1.1.2)$$

În concluzie, soluția ASI nu poate fi determinată cu relația (4.1.1.2) la modul general ci numai în cazurile particulare. Aceasta înseamnă că schema din fig.4.1.1-1 este neaplicabilă cu relația (4.1.1.2) în blocul ASI.

4.1.2 Metoda clasică de soluționare a ASI pentru abateri parametrice.

În literatură apar două modalități clasice de utilizare a funcțiilor de sensibilitate parametrică la determinarea parametrilor unui sistem [28], [43], [72], [96], [104], [108]:

- ◆ Metoda de *estimare a parametrilor* unui proces prin utilizarea funcțiilor de sensibilitate. Această metodă folosește criteriile de minimizare a erorii dintre mărimea caracteristică a procesului supus estimării și cea a unui model ajustabil și procedee de ajustare continuă a modelului procesului. Metoda nu face obiectul acestui studiu întrucât este o problemă de estimare a parametrilor în general și nu a abaterilor parametrilor de la anumite valori nominale.
- ◆ Metoda de *estimare a abaterilor parametrilor* unui proces de la valorile nominale prin utilizarea funcțiilor de sensibilitate și minimizarea unui indicator de calitate pătratic J descris de funcționala

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\| \Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) - \Delta \underline{\xi}^*(t; \underline{\alpha}_0) \right\|^2 dt, \quad (4.1.2.1)$$

în care

$$\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) = \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) - \underline{\xi}_0(t; \underline{\alpha}_0), \quad (4.1.2.2)$$

este diferența dintre valoarea reală a mărimii caracteristice $\underline{\xi}(t; \underline{\alpha})$ și valoarea sa nominală $\underline{\xi}_0(t; \underline{\alpha}_0)$ iar

$$\Delta \underline{\xi}^*(t; \underline{\alpha}) = S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha}, \quad (4.1.2.3)$$

aproximația lineară a abaterii definită în (2.1.3.3), aproximație care stă la baza teoriei sensibilității. Aceasta metoda este abordată în detaliu aici, ea reprezentând de fapt metoda clasică de soluționare a problemei ASI..

Astfel, înlocuind (4.1.2.2) și (4.1.2.3) în (4.1.2.1) și ținând seama de definirea normei în spațiu de funcții vectoriale [74], pe intervalul de timp $[t_0, t_f]$, se obține pentru J expresia:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\| \Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) - S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} \right\|^2 dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) - S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} \right)^T \cdot \left(\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) - S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} \right) dt \quad (4.1.2.4)$$

care după prelucrarea termenului de sub integrală devine

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) \right)^T \cdot \Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) - 2 \cdot (\Delta \underline{\alpha})^T \cdot \left(S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \right)^T \cdot \Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha}) + (\Delta \underline{\alpha})^T \cdot \left(S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \right)^T \cdot S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\xi}}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} \right] \cdot dt \cdot \quad (4.1.2.5)$$

Indicatorul J poate fi considerat ca o funcție scalară de variabilă vectorială $\Delta \underline{\alpha}$

Condiția necesară de minimizare a lui J este

$$\frac{\partial J}{\partial (\Delta \underline{\alpha})} = 0, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial (\Delta \underline{\alpha})^2} \geq 0. \quad (4.1.2.6)$$

După calcule egalitatea din (4.1.2.6) conduce la relația

$$\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\left[\left(S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0) \right)^T \cdot S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0) \cdot dt \right]}_M \cdot \Delta \underline{\alpha} = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\left[\left(S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0) \right)^T \cdot \Delta \xi(t; \underline{\alpha}) \right]}_N \cdot dt \quad (4.1.2.7)$$

Se observă faptul că această relație poate fi determinată direct din (4.1.1.1) prin înmulțirea scalară la stânga cu $\left(S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0) \right)^T$ și integrarea pe intervalul $[t_0, t_f]$, în spațiul de funcții vectoriale. Aceasta poate fi interpretată ca rezultat al impunerii valorii 0 pentru o măsură a relației de aproximare. În (4.1.2.7) matricea M este pătratică și nesingulară și în ipoteza $\Delta \underline{\alpha}$ constant, de aici se deduce expresia abaterii vectorului parametrilor:

$$\Delta \underline{\alpha} = [M]^{-1} \cdot N \quad (4.1.2.8)$$

Această expresie corespunde schemei din fig. 4.1.2-1.

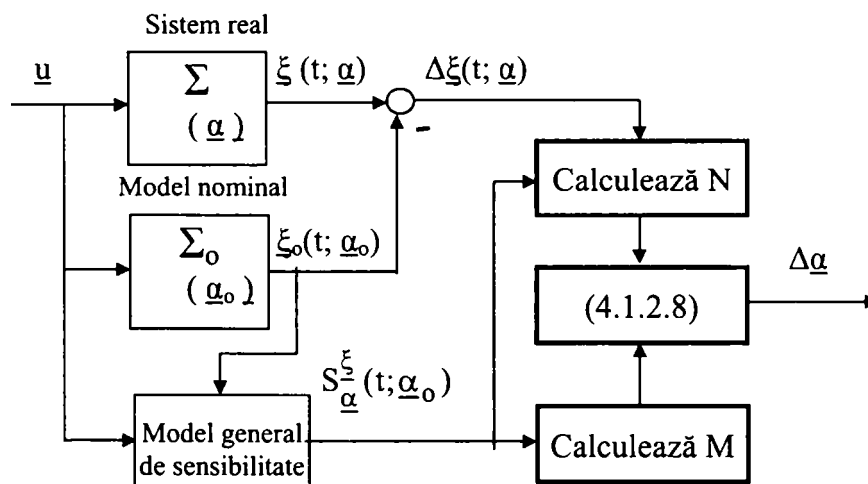


Fig.4.1.2-1 Schema de determinare prin aproximare a abaterilor parametrilor de la valorile nominale pe baza măsurării abaterii mărimii caracteristice de la valoarea nominală.

4.1.3 Soluționarea ASI prin metode algebrice

Acest paragraf abordează probleme de determinare prin metode numerice a soluției ASI. Alături de varianta discretă a metodei clasice a ASI și profitând de faptul că atât $\Delta \xi(t; \underline{\alpha})$ cât și $S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t; \underline{\alpha}_0)$ sunt funcții de timp, se propune în acest paragraf și o metodă simplă de soluționare a ASI, metodă ce poate fi inclusă în categoria metodelor de estimare printr-un număr finit de măsurători folosind implementarea relațiilor matematice explicite. Metoda a fost denumită “metoda timpilor succesivi” (metoda I) întrucât pentru măsurarea mărimilor ce intervin în calcule s-au ales momente de timp succesive și echidistante, ordonate crescător pe axa timpului. Metoda se bazează pe măsurarea abaterilor mărimilor caracteristice și a funcțiilor de sensibilitate parametrică în astfel de momente. În acest mod se poate folosi o relație asemănătoare relației (4.1.1.2) în care matricea ce trebuie inversată este pătratică și inversabilă. În acest fel se rezolvă problema dimensională care apare în (4.1.1.2). Metoda a fost prezentată într-o primă formă în [83].

În finalul paragrafului se revine asupra metodei clasice printr-o nouă abordare, (metoda II), diferită, în funcție de informația folosită pentru rezolvarea problemei. Este vorba de situația particulară a sistemelor la care vectorul mărimii caracteristice are dimensiunea mai mare decât numărul de parametri.

Fie $\mathfrak{T}=\{t_1, \dots, t_r\}$ o mulțime de timp discret având un număr r , ($r > q$) de momente, succesive și echidistante¹ (cu pasul h). Pentru fiecare $t \in \mathfrak{T}$ se măsoară abaterea $\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha})$ și se determină valorile funcțiilor de sensibilitate parametrică $S_{\underline{\alpha}}^{\xi_i}(t; \underline{\alpha}_0)$.

La momentul t_k , $k=1,2,\dots,r$, pentru componenta ξ_i , $i=1,2,\dots,p$, este valabilă relația de legătură:

$$\Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^q S_{\alpha_j}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \alpha_j \quad (4.1.3.1)$$

Pornind de la aceasta relație, soluționarea problemei ASI poate îmbrăca diverse forme.

- ◆ În metoda clasică, se consideră că abaterile din membrul stâng din (4.1.3.1) sunt valorile aproximației lineare a abaterilor mărimilor caracteristice la momentul t_k , componentele vectorului: $\Delta \underline{\xi}^*(t; \underline{\alpha})$ din (4.1.2.3).

$$\Delta \xi_i^*(t_k; \underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^q S_{\alpha_j}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \alpha_j \quad (4.1.3.2)$$

De asemenea se măsoară² la momentele $k=1,2,\dots,r$, componentele abaterii reale $\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha})$ din (4.1.2.2), $\Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha})$, $i=1,2,\dots,p$. În ipoteza că abaterile $\Delta \underline{\alpha}$ sunt necunoscute și constante, în continuare, pentru determinarea lor se procedează într-o manieră similară celei din §4.1.1, urmărindu-se minimizarea unui indicator de calitate al erorii pătratică (pătratul distanței euclidiene) dintre mărimea măsurată și aproximația sa lineară adică minimizarea expresiei

$$\bar{J}(\Delta \underline{\alpha}) = \sum_{k=1}^r \left\| \Delta \underline{\xi}(t_k; \underline{\alpha}) - S_{\underline{\alpha}}^{\xi}(t_k; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} \right\|^2 = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^p \left(\Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) - \sum_{j=1}^q S_{\alpha_j}^{\xi_i}(t_k; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \alpha_j \right)^2 \right)$$

Ea poate fi rescrisă sub forma (4.1.3.3)

$$\bar{J}(\Delta \underline{\alpha}) = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^p \left(\Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) - S_{\underline{\alpha}}^{\xi_i}(t_k; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} \right)^2 \right) \quad (4.1.3.4)$$

Pentru aflarea minimului expresiei (4.1.3.4) în raport cu $\Delta \underline{\alpha}$ se derivează expresia și se anulează derivata [54]. Succesiv se obține:

$$\frac{\partial \bar{J}(\Delta \underline{\alpha})}{\partial (\Delta \underline{\alpha})} = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^p \left(2 \cdot \left(-S_{\underline{\alpha}}^{\xi_i}(t_k; \underline{\alpha}_0) \right)^T \cdot \left(\Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) - S_{\underline{\alpha}}^{\xi_i}(t_k; \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \underline{\alpha} \right) \right) \right) = 0, \quad (4.1.3.5)$$

¹ Alegerea momentelor de timp echidistante se impune doar din rațiuni de eșantionare, cuantizare și conversie analog-numerică a semnalelor. Din punct de vedere teoretic momentele de timp discret pot fi alese la întâmplare.

² Măsurările necesare determinării valorilor celor p componente ale abaterii reale $\Delta \underline{\xi}(t; \underline{\alpha})$ trebuie efectuate simultan. Aceasta poate ridica probleme la folosirea "on-line" a metodei.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^p \left(S_{\underline{\alpha}}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \right)^T \cdot \Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) \right)}_{\tilde{N}} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^p \left(S_{\underline{\alpha}}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \right)^T \cdot S_{\underline{\alpha}}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \right) \right)}_{\tilde{M}} \cdot \Delta \underline{\alpha} . \quad (4.1.3.6)$$

În (4.1.3.6) matricea \tilde{M} este pătratică și inversabilă. Soluția ASI obținută din (4.1.3.6), în sensul clasic, al minimizării indicatorului de calitate al erorilor este:

$$\Delta \underline{\alpha} = (\tilde{M})^{-1} \cdot \tilde{N} \quad (4.1.3.7)$$

Implementarea "on - line" a relației (4.1.3.7) poate ridica probleme datorită numărului mare de calcule pe care le presupune.

- ♦ **Metoda I.** Se consideră că (4.1.3.1) reprezintă relația de aproximare din teoria sensibilității și prin urmare abaterile din membrul stâng din (4.1.3.1) sunt *valorile măsurate (reale)* ale abaterilor mărimilor caracteristice la momentul k (componentele lui $\Delta \xi_i(t; \underline{\alpha})$ la momentul k, conform (4.1.2.2)), adică :

$$\Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^q S_{\alpha_j}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \cdot \Delta \alpha_j . \quad (4.1.3.8)$$

Se însumează relațiile (4.1.3.8) după i; după inversarea indicilor de însumare în membrul drept, rezultă expresia

$$\sum_{i=1}^p \Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^q \left[\sum_{i=1}^p S_{\alpha_j}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \right] \cdot \Delta \alpha_j . \quad (4.1.3.9)$$

Pentru q momente de timp succesive¹, începând cu t_k , în ipoteza $\Delta \underline{\alpha} = \text{constant}$, din (4.1.3.9) se obține relația

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) \\ \sum_{i=1}^p \Delta \xi_i(t_{k+1}; \underline{\alpha}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \Delta \xi_i(t_{k+q-1}; \underline{\alpha}) \end{bmatrix}}_{N_{I_k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p S_{\alpha_1}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) & \sum_{i=1}^p S_{\alpha_2}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) & \cdots & \sum_{i=1}^p S_{\alpha_q}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \\ \sum_{i=1}^p S_{\alpha_1}^{\xi_i}(t_{k+1}, \underline{\alpha}_0) & \sum_{i=1}^p S_{\alpha_2}^{\xi_i}(t_{k+1}, \underline{\alpha}_0) & \cdots & \sum_{i=1}^p S_{\alpha_q}^{\xi_i}(t_{k+1}, \underline{\alpha}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p S_{\alpha_1}^{\xi_i}(t_{k+q-1}, \underline{\alpha}_0) & \sum_{i=1}^p S_{\alpha_2}^{\xi_i}(t_{k+q-1}, \underline{\alpha}_0) & \cdots & \sum_{i=1}^p S_{\alpha_q}^{\xi_i}(t_{k+q-1}, \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix}}_{M_{I_k}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \alpha_1 \\ \Delta \alpha_2 \\ \vdots \\ \Delta \alpha_q \end{bmatrix}}_{\Delta \underline{\alpha}} \quad (4.1.3.10)$$

$k=1,2,\dots,r-q$

În (4.1.3.10) matricea M_{I_k} este pătratică, de dimensiune $q \times q$, iar condiția de inversabilitate se asigură fie printr-o alegere adecvată² a momentelor de timp $t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+q-1}$ fie folosind matricea pseudoinversă. Din (4.1.3.3) se deduce pentru abaterea vectorului parametrilor expresia

¹ Dacă procesul face parte dintr-un SRAN atunci eșantionarea mărimilor se face cu $h=\text{constant}$. De aceea se preferă să se impună și pentru aceste calcule $h=\text{constant}$.

² Se exclud momentele de timp la care se obțin prin măsurări și calcule valori nule peste tot, precum și cele care duc la linii sau coloane proporționale în matricea M_{I_k} .

$$\Delta \underline{\alpha} = [M_{I_k}]^{-1} \cdot N_{I_k} \quad \text{sau} \quad \Delta \underline{\alpha} = \left[(M_{I_k})^T \cdot M_{I_k} \right]^{-1} \cdot (M_{I_k})^T \cdot N_{I_k} \quad (4.1.3.11)$$

Această expresie corespunde unei scheme similare celei din fig. 4.1.2-1.

Se remarcă faptul că dacă se efectuează r măsurători (într-un interval de timp finit $[t_0, t_f]$) atunci există $r-q$ variante ale relației (4.1.3.10). Dacă soluția $\Delta \underline{\alpha}$ există și este unică atunci, teoretic, ea poate fi determinată utilizând oricare dintre aceste variante. Pentru micșorarea incertitudinilor măsurătorilor introduse de zgomot vom utiliza o medie a măsurătorilor.

$$\Delta \underline{\alpha} = \frac{1}{r-q} \sum_{k=1}^{r-q} [M_{I_k}]^{-1} \cdot N_{I_k} \quad \text{sau} \quad \Delta \underline{\alpha} = \frac{1}{r-q} \sum_{k=1}^{r-q} \left[(M_{I_k})^T \cdot M_{I_k} \right]^{-1} \cdot (M_{I_k})^T \cdot N_{I_k} \quad (4.1.3.12)$$

Această modalitate de micșorare a incertitudinilor cauzate de măsurători este adesea întâlnită la metodele de estimare a parametrilor printr-un număr finit de măsurători, [28].

Dacă la sistemele lineare, singurele incertitudini ce pot afecta relația (4.1.3.10) sunt zgomotele cauzate de măsurări, la sistemele nelineare pot să se cumuleze cu zgomotele incertitudini datorate nelinearităților, eliminate tot prin relația de mediere (4.1.3.12). Astfel durata estimării abaterilor parametrice este mult mai mică la sistemele lineare față de cele nelineare.

În cazul în care estimarea se face numai după ce toate măsurătorile au fost efectuate și dacă nu se dorește să se țină seama de ordinea efectuării măsurătorilor atunci numărul de variante ale relației (4.1.3.10) este mult mai mare și anume C_r^q , iar relația (4.1.3.12) devine

$$\Delta \underline{\alpha} = \frac{1}{C_r^q} \sum_{k=1}^{C_r^q} [M_{I_k}]^{-1} \cdot N_{I_k} \quad \text{sau} \quad \Delta \underline{\alpha} = \frac{1}{C_r^q} \sum_{k=1}^{C_r^q} \left[(M_{I_k})^T \cdot M_{I_k} \right]^{-1} \cdot (M_{I_k})^T \cdot N_{I_k} \quad (4.1.3.13)$$

și poate fi aplicată numai "of-line", după ce toate valorile măsurate sunt disponibile. Chiar și atunci rămâne problema asigurării condiției pentru măsurări simultane.

Convenim să denumim relația (4.1.3.12), cu notațiile din (4.1.3.10), relația de *calcul a abaterilor parametrice corespunzătoare metodei timpilor succesivi*. Ea poate fi aplicată nu numai "of-line" ci și "on - line", la sistemele cu eșantionare, chiar și la cele adaptive, durata de obținere a unei estimate fiind $q \times h$ unde h reprezintă perioada de eșantionare. În ipoteza că timpul de calcul este mai mic decât h , estimatele se pot obține în mod "continuu" începând cu pasul $q+1$ de eșantionare.

- ◆ **Metoda II.** Dacă $p \geq q$ atunci se poate determina o altă expresie a soluției ASI în sensul minimizării indicatorului de calitate (4.1.3.3/4), adică o abordare matematică diferită a soluției clasice. Astfel, se însumează relațiile (4.1.3.8), după k ; după inversarea indicilor de însumare în membrul drept, rezultă expresia

$$\sum_{k=1}^r \Delta \xi_i(t_k; \underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^q \left[\sum_{k=1}^r S_{\alpha_j}^{\xi_i}(t_k, \underline{\alpha}_0) \right] \cdot \Delta \alpha_j, \quad i = \overline{1, p} \quad (4.1.3.14)$$

Matriceal relația (4.1.3.14) se poate scrie:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \Delta\xi_1(t_k; \underline{\alpha}) \\ \sum_{k=1}^r \Delta\xi_2(t_k; \underline{\alpha}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^r \Delta\xi_p(t_k; \underline{\alpha}) \end{bmatrix}}_{N_{II}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r S_{\alpha_1}^{\xi_1}(t_k, \underline{\alpha}_0) & \sum_{k=1}^r S_{\alpha_2}^{\xi_1}(t_k, \underline{\alpha}_0) & \cdots & \sum_{k=1}^r S_{\alpha_q}^{\xi_1}(t_k, \underline{\alpha}_0) \\ \sum_{k=1}^r S_{\alpha_1}^{\xi_2}(t_k, \underline{\alpha}_0) & \sum_{k=1}^r S_{\alpha_2}^{\xi_2}(t_k, \underline{\alpha}_0) & \cdots & \sum_{k=1}^r S_{\alpha_q}^{\xi_2}(t_k, \underline{\alpha}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^r S_{\alpha_1}^{\xi_p}(t_k, \underline{\alpha}_0) & \sum_{k=1}^r S_{\alpha_2}^{\xi_p}(t_k, \underline{\alpha}_0) & \cdots & \sum_{k=1}^r S_{\alpha_q}^{\xi_p}(t_k, \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix}}_{M_{II}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_2 \\ \vdots \\ \Delta\alpha_q \end{bmatrix}}_{\Delta\alpha} \quad (4.1.3.15)$$

Din punct de vedere matematic, în situația $p > q$, relația (4.1.3.15) reprezintă un sistem de ecuații lineare supradeterminat. Dacă matricea M_{II} are coloanele linear independente atunci sistemului îi corespunde o singură soluție, de aproximare [74], corespunzătoare pseudoinversării matricei M_{II} în sensul minimizării expresiei (4.1.3.3) și anume:

$$\Delta\alpha = \left[[M_{II}]^T \cdot M_{II} \right]^{-1} \cdot [M_{II}]^T \cdot N_{II} \quad (4.1.3.16)$$

unde: $N_{II} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \Delta\xi_1(t_k; \underline{\alpha}) \\ \sum_{k=1}^r \Delta\xi_2(t_k; \underline{\alpha}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^r \Delta\xi_p(t_k; \underline{\alpha}) \end{bmatrix}$, adică N_{II} conține componentele reale (măsurate) ale

abaterilor mărimii caracteristice.

În situația $p = q$, relația (4.1.3.15) reprezintă un sistem de ecuații lineare compatibil determinat, a cărei soluție este mult simplificată:

$$\Delta\alpha = [M_{II}]^{-1} \cdot N_{II} \quad (4.1.3.17)$$

Din (4.1.3.15) se remarcă faptul că atât (4.1.3.16) cât și (4.1.3.17) pot fi aplicate chiar și pentru un singur set de valori măsurate la un moment dat. Acest lucru face posibilă aplicarea "on - line" a metodei II. Sumele după indicele k din (4.1.3.15) joacă rolul medierii din relația (4.1.3.12) relativă la metoda I.

O comparație teoretică a celor trei metode prezentate, sintetizată în tabelul 1, este necesară în situația în care se pune problema implementării ASI la sistemele adaptive. Într-un sistem adaptiv parametri regulatorului se modifică în funcție de parametri procesului ceea ce înseamnă că abaterile parametrilor procesului, atunci când apar, trebuie determinate rapid.

În concluzie se poate afirma că dacă măsurătorile nu sunt afectate de zgomot atunci soluția ASI se poate obține mai rapid și cu un efort de calcul mai mic cu (4.1.3.11/12) decât în situația clasică (4.1.3.7). De asemenea, nu este de neglijat varianta (4.1.3.16), care, deși este constrânsă de condiția $p \geq q$, poate fi folosită chiar și pentru un număr redus de măsurători, rezultând o soluție rapidă mai ales la sistemele lineare.

Metodele I și II propuse în acest paragraf reprezintă noi soluții pentru ASI. Metoda I va fi comparată cu soluția clasică în §4.2.1, pe un exemplu iar Metoda II își va dovedi eficiența în §4.2.2.

Tabelul 1

		Metoda clasică	Metoda I	Metoda II
Relațiile		(4.1.3.6) (4.1.3.7)	(4.1.3.10), (4.1.3.11) (4.1.3.12)	(4.1.3.15) (4.1.3.16)
Nr. valorilor măsurate ce intervin în calcule		$p \times r$ r mare	$q \times p$ $q \times p \times (r - q)$	$p \times r$ r redus
Dimensiunea matricelor ce trebuie inversate		$q \times q$	$q \times q$	$q \times q$
Posibilitatea implementării "on - line"	la sisteme lineare	redușă	mare	mare
	la sisteme nelineare	redușă	medie	medie
Impune restricții dimensionale		Nu	Nu	Da

4.2 Studiu comparativ al metodelor de soluționare a ASI

Studiile comparative efectuate în acest paragraf folosesc sistemul nelinear descris în §3.3.3, având MM-II

$$m \cdot \ddot{x}(t) + K_a \cdot \dot{x}(t) + a \cdot (1 - e^{-b \cdot x(t)}) = F_e(t), \quad (4.2.1)$$

cu orientarea $F_e(t) \rightarrow x(t)$ și condițiile inițiale: $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0.$ (4.2.2)

S-a considerat vectorul parametrilor

$$\underline{\alpha} = [m, K_a, a, b]^T \quad (4.2.3)$$

având valoarea nominală

$$\underline{\alpha}_0 = [m_0, K_{a,0}, a_0, b_0]^T = [300\text{Kg}, 6 \cdot 10^4 \text{N} \cdot \text{s/m}, 3157.2\text{N}, 100\text{m}^{-1}]^T. \quad (4.2.4)$$

4.2.1 Studiu comparativ între metoda clasică și metoda I de soluționare a ASI

În această situație $p = 1, \xi = x$. Modelul general de sensibilitate în raport cu $\underline{\alpha}$ (stabilit ca în §2.2.2.1) este format din următoarele relații:

$$300 \cdot \ddot{\sigma}_m(t) + 6 \cdot 10^4 \cdot \dot{\sigma}_m(t) + 315720 \cdot (e^{-100 \cdot x_0(t)}) \cdot \sigma_m(t) = -\ddot{x}_0(t) \quad (4.2.1.1)$$

$$300 \cdot \ddot{\sigma}_{K_a}(t) + 6 \cdot 10^4 \cdot \dot{\sigma}_{K_a}(t) + 315720 \cdot (e^{-100 \cdot x_0(t)}) \cdot \sigma_{K_a}(t) = -\dot{x}_0(t) \quad (4.2.1.2)$$

$$300 \cdot \ddot{\sigma}_a(t) + 6 \cdot 10^4 \cdot \dot{\sigma}_a(t) + 315720 \cdot (e^{-100 \cdot x_0(t)}) \cdot \sigma_a(t) = -1 + e^{-100 \cdot x_0(t)} \quad (4.2.1.3)$$

$$300 \cdot \ddot{\sigma}_b(t) + 6 \cdot 10^4 \cdot \dot{\sigma}_b(t) + 315720 \cdot (e^{-100 \cdot x_0(t)}) \cdot \sigma_b(t) = -3157,2 \cdot x_0(t) \cdot e^{-100 \cdot x_0(t)},$$

cu condițiile inițiale nule. (4.2.1.4)

$x_o(t)$ reprezintă ieșirea modelului nominal

$$300 \cdot \ddot{x}_o(t) + 6 \cdot 10^4 \cdot \dot{x}_o(t) + 3157,2 \cdot (1 - e^{-100 \cdot x_o(t)}) = F_e(t) \quad (4.2.1.5)$$

în condițiile inițiale $\dot{x}_o(0) = 0 \text{ m/s}$, $x_o(0) = 0,005 \text{ m}$ (4.2.1.6)

Sistemul real este descris de modelul (4.2.1) în aceleași condiții inițiale ca și modelul nominal.

$$\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}, \quad x(0) = 0,005 \text{ m} \quad (4.2.1.7)$$

În situația în care, vectorul parametrilor (4.2.3) se abate de la valoarea nominală (4.2.4), între ieșirea sistemului real și cea a modelului său nominal se măsoară abaterile:

$$\Delta x(t) = x(t) - x_o(t) . \quad (4.2.1.8)$$

Parametri:

$$m = m_o + \Delta m, \quad K_a = K_{a,o} + \Delta K_a, \quad a = a_o + \Delta a, \quad b = b_o + \Delta b, \quad (4.2.1.9)$$

din (4.2.1) conțin abaterile: Δm , ΔK_a , Δa , Δb care au determinat abaterile din (4.2.1.8) și urmează a fi determinate.

Mărimea aplicată la intrare, (fig.4.2.1-1), formată dintr-un semnal treaptă și un semnal sinusoidal, este descrisă analitic de funcția

$$F_e(t) = F_{e,o} + 500 + 1200 \cdot \sin(1,5 \cdot t), \quad (4.2.1.10)$$

a fost aleasă de așa manieră încât pe toată durata considerată funcțiile de sensibilitate să varieze, fig.4.2.1-2. S-a considerat că la momentul inițial $t = 0$ sistemul era în echilibru, adică

$$F_{e,o} = 3157,2 \cdot (1 - e^{-100 \cdot x_o(0)}) = 1242,3 \text{ N}. \quad (4.2.1.11)$$

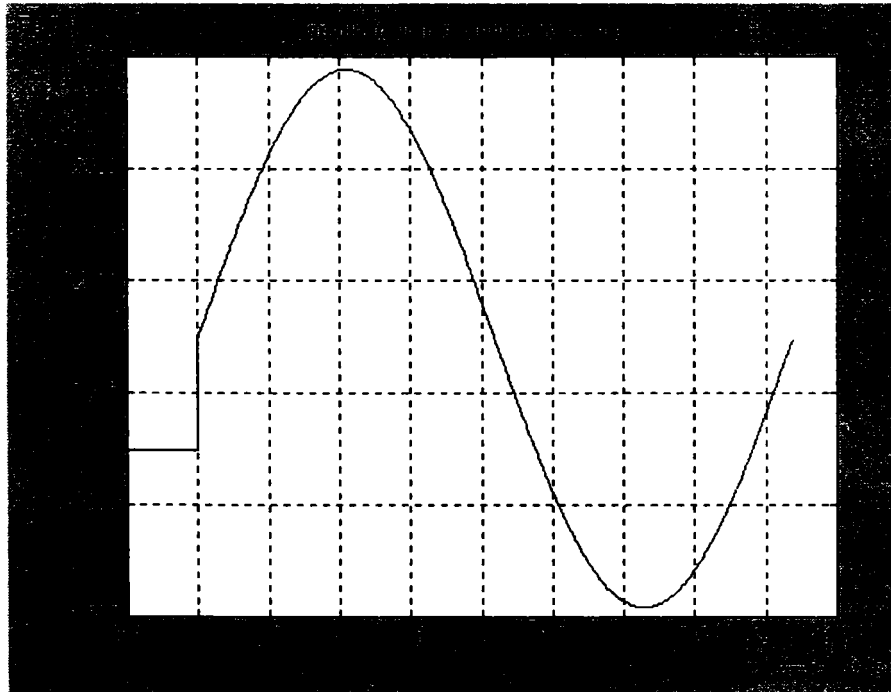


Fig.4.2.1-1 Mărimea de intrare $F_e(t)$

Relația (4.1.3.6), (utilizată în metoda clasică), particularizată pentru acest caz, devine

$$\sum_{k=1}^r \left(\begin{bmatrix} \sigma_m(t_k) \\ \sigma_{K_a}(t_k) \\ \sigma_a(t_k) \\ \sigma_b(t_k) \end{bmatrix} \cdot \Delta x(t_k) \right) = \left(\sum_{k=1}^r \left(\begin{bmatrix} \sigma_m(t_k) \\ \sigma_{K_a}(t_k) \\ \sigma_a(t_k) \\ \sigma_b(t_k) \end{bmatrix} \cdot \left[\sigma_m(t_k) \quad \sigma_{K_a}(t_k) \quad \sigma_a(t_k) \quad \sigma_b(t_k) \right] \right) \right) \cdot \begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta K_a \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} \quad (4.2.1.12)$$

Cu (4.2.1.12), relația (4.1.3.7) obține aspectul

$$\begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta K_a \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^r \left(\begin{bmatrix} \sigma_m(t_k) \\ \sigma_{K_a}(t_k) \\ \sigma_a(t_k) \\ \sigma_b(t_k) \end{bmatrix} \cdot \left[\sigma_m(t_k) \quad \sigma_{K_a}(t_k) \quad \sigma_a(t_k) \quad \sigma_b(t_k) \right] \right) \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^r \left(\begin{bmatrix} \sigma_m(t_k) \\ \sigma_{K_a}(t_k) \\ \sigma_a(t_k) \\ \sigma_b(t_k) \end{bmatrix} \cdot \Delta x(t_k) \right) \right) \quad (4.2.1.13)$$

Relația (4.1.3.10), (utilizată în metoda I) particularizată pentru acest caz devine:

$$\begin{bmatrix} \Delta x(t_k) \\ \Delta x(t_{k+1}) \\ \Delta x(t_{k+2}) \\ \Delta x(t_{k+3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m(t_k) & \sigma_{K_a}(t_k) & \sigma_a(t_k) & \sigma_b(t_k) \\ \sigma_m(t_{k+1}) & \sigma_{K_a}(t_{k+1}) & \sigma_a(t_{k+1}) & \sigma_b(t_{k+1}) \\ \sigma_m(t_{k+2}) & \sigma_{K_a}(t_{k+2}) & \sigma_a(t_{k+2}) & \sigma_b(t_{k+2}) \\ \sigma_m(t_{k+3}) & \sigma_{K_a}(t_{k+3}) & \sigma_a(t_{k+3}) & \sigma_b(t_{k+3}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta K_a \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} \quad (4.2.1.14)$$

$k=1,2,\dots,r-4.$

Din (4.2.1.14) se obține pentru (4.1.3.11) expresia:

$$\begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta K_a \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m(t_k) & \sigma_{K_a}(t_k) & \sigma_a(t_k) & \sigma_b(t_k) \\ \sigma_m(t_{k+1}) & \sigma_{K_a}(t_{k+1}) & \sigma_a(t_{k+1}) & \sigma_b(t_{k+1}) \\ \sigma_m(t_{k+2}) & \sigma_{K_a}(t_{k+2}) & \sigma_a(t_{k+2}) & \sigma_b(t_{k+2}) \\ \sigma_m(t_{k+3}) & \sigma_{K_a}(t_{k+3}) & \sigma_a(t_{k+3}) & \sigma_b(t_{k+3}) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x(t_k) \\ \Delta x(t_{k+1}) \\ \Delta x(t_{k+2}) \\ \Delta x(t_{k+3}) \end{bmatrix} \quad (4.2.1.15)$$

$k=1,2,\dots,r-4.$

iar pentru (4.1.3.12) expresia:

$$\begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta K_a \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \frac{1}{r-4} \sum_{k=1}^{r-4} \left(\begin{bmatrix} \sigma_m(t_k) & \sigma_{K_a}(t_k) & \sigma_a(t_k) & \sigma_b(t_k) \\ \sigma_m(t_{k+1}) & \sigma_{K_a}(t_{k+1}) & \sigma_a(t_{k+1}) & \sigma_b(t_{k+1}) \\ \sigma_m(t_{k+2}) & \sigma_{K_a}(t_{k+2}) & \sigma_a(t_{k+2}) & \sigma_b(t_{k+2}) \\ \sigma_m(t_{k+3}) & \sigma_{K_a}(t_{k+3}) & \sigma_a(t_{k+3}) & \sigma_b(t_{k+3}) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x(t_k) \\ \Delta x(t_{k+1}) \\ \Delta x(t_{k+2}) \\ \Delta x(t_{k+3}) \end{bmatrix} \right) \quad (4.2.1.16)$$

Relațiile (4.2.1.13), (corespunzătoare metodei clasice) și (4.2.1.16), (corespunzătoare metodei I) au fost utilizate la estimarea abaterilor parametrice ale sistemului în situațiile prezentate în tabelul 2 pe coloanele 1 ÷ 4. Rezultatele estimărilor sunt prezentate în coloanele 5 ÷ 8 în cazul metodei clasice și în coloanele 9 ÷ 12 în cazul metodei I. În coloana (0) au fost trecute numerele figurilor (din Anexa XIV) în care sunt prezentate evoluțiile în timp ale estimatelor.

Schemele de simulare și programele MATLAB cu care au fost determinate funcțiile de sensibilitate parametrică absolută din fig. 4.2.1-2, precum și estimatele abaterile parametrice

sintetizate în tabelul 2, obținute prin implementarea relațiilor (4.2.1.13) și (4.2.1.16) sunt prezentate în Anexa XIV.

Au fost considerate situații în care un singur parametru a fost modificat dar și situații cu câte două, trei modificări de parametru și chiar cu toți parametri abătuți de la valorile nominale. De asemenea au fost luate în considerare atât abateri foarte mici (0.1%) cât și abateri mari (10%), (din punctul de vedere al teoriei sensibilității).

La ambele metode, în scopul la implementării on-line, se poate reduce timpul de estimare dacă nu se stabilește de la început valoarea lui r și dacă după fiecare măsurătoare se reevaluează estimatele abaterilor parametrilor, până când între două estimări succesive diferența între valorile estimate devine mai mică decât un ϵ admis.

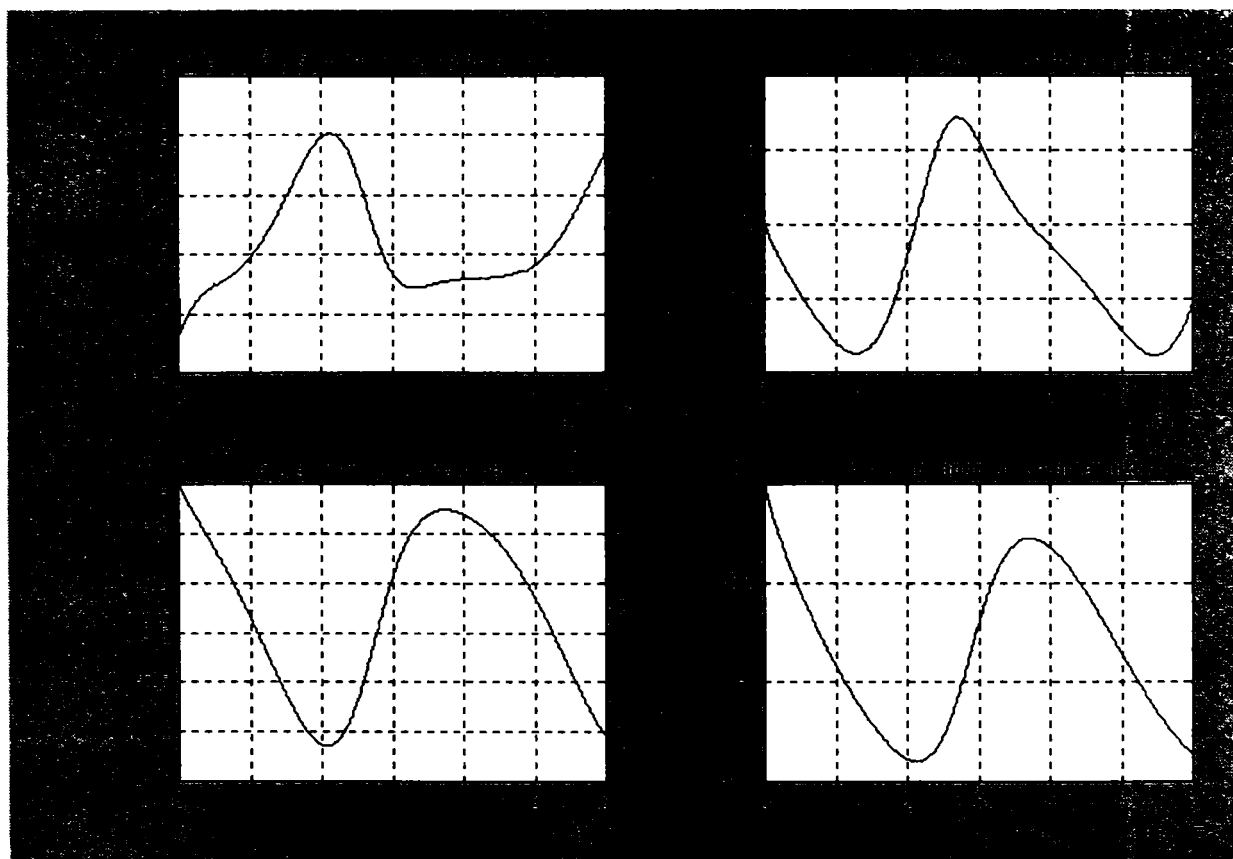


Fig.4.2.1-2 Variația în timp a funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută

Cazul de studiu abordat a relevat câteva aspecte importante din punct de vedere procedural.

Astfel, dacă mărimea de ieșire a sistemului real depășește valoarea maximă admisă x_{\max} , (datorită abaterilor prea mari ale unora dintre parametri), atunci estimarea nu mai poate fi efectuată și se impune o reconsiderare a mărimii de intrare.

Parametri (între ei) și funcțiile de sensibilitate (între ele) au ordine de mărime diferite. Acest lucru afectează calculele. Această deficiență ar putea fi îndepărtată prin ponderarea f.d.s. introducând parametri multiplicativi ficși, care au rolul de a uniformiza ordinul de mărime al parametrilor și implicit al funcțiilor de sensibilitate. Operația se numește normare și este valabilă în ipoteza că variațiile parametrilor sunt constante.

În realitate medierea din (4.2.1.16), trebuie realizată cu mare grijă, evitând eșantioanele care ar putea denatura corectitudinea rezultatelor. Pentru datele din tabelul 2 din §4.2.1 s-a aplicat un filtru care a reținut doar acele eșantioane care nu diferă cu mai mult de 10% unul față de

Tabelul 2

Fig.	Abaterile reale				Abaterile estimate cu metoda clasică, relația (4.2.1.13)						Abaterile estimate cu metoda I, relația (4.2.1.16)					
	Δm [%]	ΔK_a [%]	Δa [%]	Δb [%]	Δm [%]	ΔK_a [%]	Δa [%]	Δb [%]	Δm [%]	ΔK_a [%]	Δa [%]	Δb [%]	Δm [%]	ΔK_a [%]	Δa [%]	Δb [%]
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(9)	(10)	(11)	(12)
	2	0	0	0	2.0103 (0.3586)	0.0178	-0.0002	-0.0088	2.0058 (0.0619)	0.0024	0.0010	-0.0026				
XIV-2	5	0	0	0	5.0047 (0.3041)	0.1115	-0.0014	-0.0549	5.0377 (0.0742)	0.0171	0.0065	-0.0178				
	10	0	0	0	10.0176 (0.4405)	0.3561	-0.0100	-0.1676	10.1581 (0.0796)	0.0805	0.0280	-0.0799				
XIV-4	0	2	0	0	-0.1599	1.9406 (0.2204)	0.0237	0.0699	-0.2078	1.9501 (0.0192)	0.0225	0.0682				
XIV-5	0	5	0	0	0.0897	4.6959 (0.2246)	0.1389	-0.1421	0.0732	4.6077 (0.0494)	-0.0198	0.1050				
	0	10	0	0	0.3029	8.8092 (0.2351)	0.4025	0.3631	00.2230	8.4868 (0.0597)	0.1936	0.5624				
XIV-6	0	0	0.1	0	0.0038	0.0084	0.09939 (0.0391)	0.0385	0.0019	0.0013	0.09895 (0.1877)	0.0140				
XIV-7	0	0	0.5	0	0.0001	0.0002	0.4879 (0.0166)	0.0131	0.0025	0.0020	0.4878 (0.0035)	0.0110				
	0	0	1	0	-0.0027	-0.0030	0.9662 (0.1757)	0.1071	0.0024	0.0044	1.0195 (0.0596)	0.0799				
XIV-8	0	0	0	1	-0.0008	-0.0096	-0.0478	1.0639 (0.0175)	-0.0364	-0.0077	-0.0801	1.1939 (0.0047)				
XIV-9	0	0	0	5	-0.0095	-0.2067	-1.0951	6.4515	-0.5753	-0.3701	-1.6342	7.7549				
XIV-3	10	0.2	0	0	9.8362 (0.2757)	0.2321	0.0551	-0.0836	10.0979 (0.1511)	0.3014	0.3214	-0.4692				
XIV-10	0	0	0.5	1	-0.0222	-0.0616	0.2750	1.3234	-0.0628	-0.0257	0.2672	1.5991				
	1	0.2	0.5	2	0.9224	0.0947	0.0763	2.5932	0.9000	0.0837	0.3716	2.3602				

celălalt, consecutiv. Această filtrare este necesară întrucât metoda I nu are convergența asigurată. Ea reprezintă un neajuns al metodei, demn de luat în seamă.

Rezultatele obținute cu metoda I sunt comparabile cu cele obținute cu metoda clasică. Avantajul metodei I este că rezultatele se pot obține mai rapid decât cu metoda clasică și ca urmare se poate folosi și pentru a face corecții adaptive ale modelului nominal. Dezavantajul este că având în vedere nelinearitatea sistemului considerat, doar abateri < 10% sunt estimate corect pentru parametri aparținând termenilor lineari ai modelului și < 0.5% pentru cei ai termenilor nelineari. Prin urmare, de la caz la caz, se impune căutarea limitelor abaterilor corect estimate. În cazul în care mai mulți parametri suferă abateri estimarea se face corect doar pentru cel care abaterea este mai mare (se poate spune că precizia estimării descrește cu descreșterea abaterii!).

Metoda a fost prezentată inițial de autoare în [88], [89] la sisteme lineare și apoi reluată în [83] pentru sisteme nelineare. În [89] se arată că dacă modelul este linear metoda I poate estima corect abatateri mai mari. În concluzie, se remarcă faptul că metoda I de estimare propusă aici, tratabilă matematic, este ușor de implementat și oferă o viteză de convergență excelentă la sistemele lineare și acceptabilă la cele nelineare sau la parametri corespunzători termenilor lineari din modelele mixte (care au și termeni lineari și termeni nelineari).

În toate situațiile studiate s-a presupus că măsurătorile sunt lipsite de zgomot (sau zgomotul este de tip “aditiv alb”).

4.2.2 Studiu comparativ între metoda clasică și metoda II de soluționare a ASI¹

Întrucât metoda II de soluționare a ASI este restrictivă ($p \geq q$) pentru a fi îndeplinită această condiție se rescrie modelul sistemului (4.2.1) sub forma MM-ISI:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t; \underline{\alpha}) = x_2(t; \underline{\alpha}) \\ \dot{x}_2(t; \underline{\alpha}) = -\frac{K_a}{m} \cdot x_2(t; \underline{\alpha}) - \frac{a}{m} \cdot \left(1 - e^{-b \cdot x_1(t; \underline{\alpha})}\right) + \frac{F_e(t)}{m} \end{cases} \quad (4.2.2.1)$$

cu orientarea $F_e(t) \rightarrow [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ și cu condițiile inițiale

$$x_1(0; \underline{\alpha}) = x_{1,0}^0, \quad x_2(0; \underline{\alpha}) = 0. \quad (4.2.2.2)$$

S-a considerat că vectorul parametrilor

$$\underline{\alpha} = [a, b]^T, \quad (4.2.2.3)$$

de valoarea nominală

$$\underline{\alpha}_0 = [a_0, b_0]^T = [3157.2\text{N}, 100\text{m}^{-1}]^T, \quad (4.2.2.4)$$

poate fi sursă de abateri, în timp ce vectorul parametrilor

$$\underline{\alpha}_{\text{fix}} = [m, K_a]^T = [300\text{Kg}, 6 \cdot 10^4 \text{N} \cdot \text{s/m}]^T, \quad (4.2.2.5)$$

este nemodificabil, fix (parametri săi sunt neafecțați de abateri).

În această situație $p = q = 2$ și $\xi = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$. Modelul general de sensibilitate în raport cu $\underline{\alpha}_1$ stabilit ca în §2.2.2.2 este format din următoarele relații:

¹ O mare parte din acest studiu a fost prezentat de autoare în [101].

$$\begin{cases} \dot{S}_a^{x_1}(t; \underline{\alpha}_0) = S_a^{x_2}(t; \underline{\alpha}_0) \\ \dot{S}_a^{x_2}(t; \underline{\alpha}_0) = -\frac{K_a}{m} \cdot S_a^{x_2}(t; \underline{\alpha}_0) - \frac{1}{m} \cdot \left(1 - e^{-b_0 \cdot x_1(t; \underline{\alpha}_0)}\right) - \frac{a_0 \cdot b_0}{m} \cdot e^{-b_0 \cdot x_1(t; \underline{\alpha}_0)} \cdot S_a^{x_1}(t; \underline{\alpha}_0) \\ S_a^{x_1}(0; \underline{\alpha}_0) = 0 \quad , \quad S_a^{x_2}(0; \underline{\alpha}_0) = 0, \end{cases} \quad (4.2.2.6)$$

(modelul de sensibilitate în raport cu parametrul a)

$$\begin{cases} \dot{S}_b^{x_1}(t; \underline{\alpha}_0) = S_b^{x_2}(t; \underline{\alpha}_0) \\ \dot{S}_b^{x_2}(t; \underline{\alpha}_0) = -\frac{K_a}{m} \cdot S_b^{x_2}(t; \underline{\alpha}_0) - \frac{a_0 \cdot x_1(t; \underline{\alpha}_0)}{m} \cdot e^{-b_0 \cdot x_1(t; \underline{\alpha}_0)} - \frac{a_0 \cdot b_0}{m} \cdot e^{-b_0 \cdot x_1(t; \underline{\alpha}_0)} \cdot S_b^{x_1}(t; \underline{\alpha}_0) \\ S_b^{x_1}(0; \underline{\alpha}_0) = 0 \quad , \quad S_b^{x_2}(0; \underline{\alpha}_0) = 0, \end{cases} \quad (4.2.2.7)$$

(modelul de sensibilitate în raport cu parametrul b).

$x_1(t; \underline{\alpha}_0)$ și $x_2(t; \underline{\alpha}_0)$ sunt mărimi furnizate de modelul nominal

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t; \underline{\alpha}_0) = x_2(t; \underline{\alpha}_0) \\ \dot{x}_2(t; \underline{\alpha}_0) = -\frac{K_a}{m} \cdot x_2(t; \underline{\alpha}_0) - \frac{a_0}{m} \cdot \left(1 - e^{-b_0 \cdot x_1(t; \underline{\alpha}_0)}\right) + \frac{F_e(t)}{m} \end{cases} \quad (4.2.2.8)$$

în condițiile inițiale $x_1(0; \underline{\alpha}_0) = 0.005m$, $x_2(0; \underline{\alpha}_0) = 0m/s$. (4.2.2.9)

Sistemul real este descris de modelul (4.2.2.1) în aceleași condiții inițiale ca și modelul nominal.

$$x_1(0; \underline{\alpha}) = 0.005m, \quad x_2(0; \underline{\alpha}) = 0m/s . \quad (4.2.2.10)$$

În ceea ce privește abaterile, care, vectorul parametrilor (4.2.2.3) se abate de la valoarea nominală (4.2.2.4), în ieșirile sistemului real și cele ale modelului nominal, (fig.4.2.2-1, detaliu indică faptul că pot exista momente în care abaterile mărimilor sunt 0, momente care trebuie excluse de la măsurători), există și se pot măsura abaterile:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1(t; \underline{\alpha}) \\ \Delta x_2(t; \underline{\alpha}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t; \underline{\alpha}) \\ x_2(t; \underline{\alpha}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(t; \underline{\alpha}_0) \\ x_2(t; \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix} \quad (4.2.2.11)$$

Parametri:

$$a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad (4.2.2.12)$$

din (4.2.2.1) conțin abaterile: Δa , Δb care au provocat abaterile din (4.2.2.11) și urmează a fi determinate.

Mărimea aplicată la intrare, descrisă de relația (4.2.2.13) și fig.4.2.2-2, a fost aleasă astfel încât mărimea de la ieșirea sistemului real să nu depășească valoarea maximă admisă x_{max} , (datorită abaterilor prea mari ale unora dintre parametri) dar și să îndeplinească condițiile de persistență cerute de [103].

$$F_e(t) = F_{e,0} + 800 + 150 \cdot \sin(1,5 \cdot t) \cdot [l(t) - l(t - 0,5)] + [2141,2 - 2042,3] \cdot l(t - 0,5), \quad (4.2.2.13)$$

cu $F_{e,0}$ dat de (4.2.1.11).

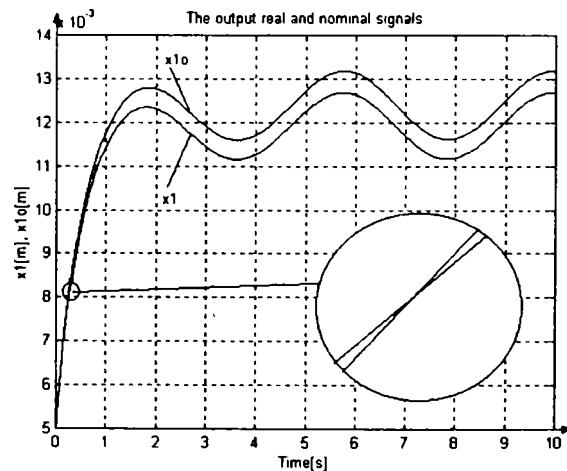


Fig.4.2.2-1 Traiectoriile reale și nominale ale mărimii x_1

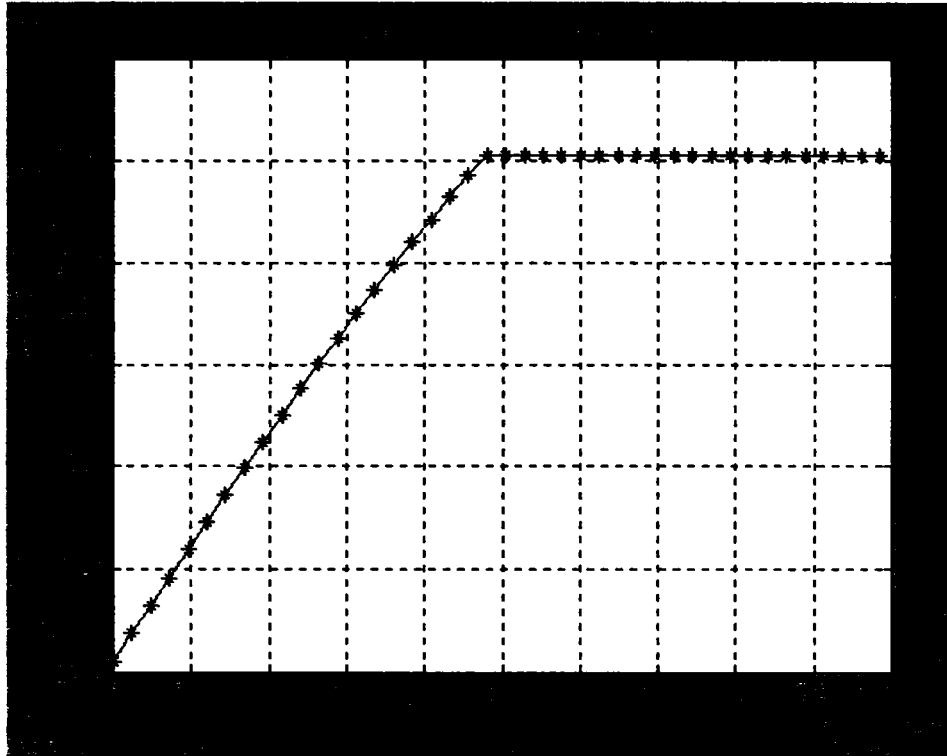


Fig.4.2.2-2 Mărimea de intrare $F_e(t)$

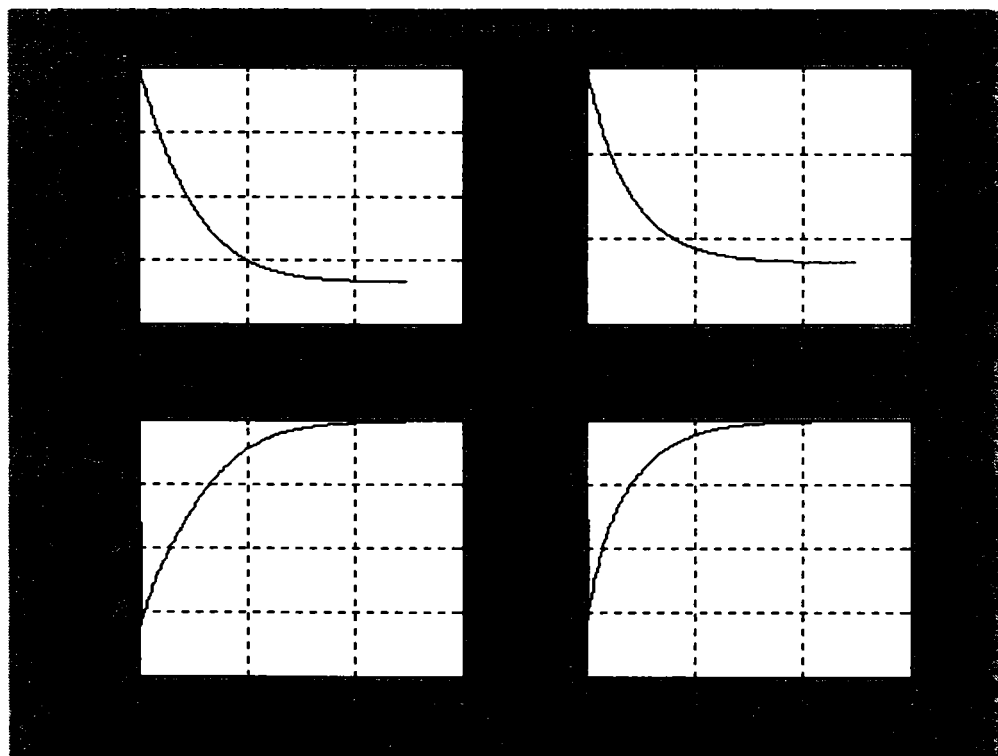


Fig.4.2.2-3 Funcții de sensibilitate

a) $S_a^{x_1}(t; \underline{\alpha}_0)$; b) $S_b^{x_1}(t; \underline{\alpha}_0)$; c) $S_a^{x_2}(t; \underline{\alpha}_0)$; d) $S_b^{x_2}(t; \underline{\alpha}_0)$

Relația (4.1.3.7) (utilizată în metoda clasică) cu (4.1.3.6) particularizată pentru acest caz, devine

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^r \left(\begin{bmatrix} S_a^{x_1}(t_k; \underline{\alpha}_0) \\ S_b^{x_1}(t_k; \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_a^{x_1}(t_k; \underline{\alpha}_0) & S_b^{x_1}(t_k; \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_a^{x_2}(t_k; \underline{\alpha}_0) \\ S_b^{x_2}(t_k; \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_a^{x_2}(t_k; \underline{\alpha}_0) & S_b^{x_2}(t_k; \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix} \right) \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^r \left(\begin{bmatrix} S_a^{x_1}(t_k; \underline{\alpha}_0) \\ S_b^{x_1}(t_k; \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix} \cdot \Delta x_1(t_k; \underline{\alpha}) + \begin{bmatrix} S_a^{x_2}(t_k; \underline{\alpha}_0) \\ S_b^{x_2}(t_k; \underline{\alpha}_0) \end{bmatrix} \cdot \Delta x_2(t_k; \underline{\alpha}) \right) \right) \quad (4.2.2.14)$$

Relația (4.1.3.17), (utilizată în metoda II pentru situația $p=q$) cu (4.1.3.15) particularizată pentru acest caz devine

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^r S_a^{x_1}(t_k; \underline{\alpha}_0) & \sum_{k=1}^r S_b^{x_1}(t_k; \underline{\alpha}_0) \\ \sum_{k=1}^r S_a^{x_2}(t_k; \underline{\alpha}_0) & \sum_{k=1}^r S_b^{x_2}(t_k; \underline{\alpha}_0) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^r \Delta x_1(t_k; \underline{\alpha}) \\ \sum_{k=1}^r \Delta x_2(t_k; \underline{\alpha}) \end{pmatrix}. \quad (4.2.2.15)$$

Relațiile (4.2.2.14), (corespunzătoare metodei clasice) și (4.2.2.15), (corespunzătoare metodei II) au fost utilizate la estimarea abaterilor parametrice ale sistemului în situațiile prezentate în tabelul 3 pe coloanele 1 și 4. Rezultatele estimărilor sunt prezentate pe coloana 2 pentru parametrul a și pe coloana 5 pentru parametrul b (pe perechi de linii: în cazul metodei clasice pe linia impară iar în cazul metodei II pe linia pară). În coloana (0) au fost trecute numerele figurilor (din Anexa XV) în care sunt prezentate evoluțiile în timp ale estimatelor.

Schemele de simulare și programele MATLAB cu care au fost determinate funcțiile de sensibilitate parametrică absolută din fig. 4.2.2-3, precum și estimatele abaterile parametrice sintetizate în tabelul 3, obținute prin implementarea relațiilor (4.2.2.14) și (4.2.2.15) sunt prezentate de asemenea în Anexa XV.

Au fost considerate situații în care un singur parametru a fost modificat și situații în care ambii parametri se abat de la valorile nominale. De asemenea au fost luate în considerare abateri cuprinse între 0.25% și 10%.

Pentru calcularea estimatelor au fost utilizate eșantioane, măsurate la momentele de timp discrete kh , $h=0.024[s]$, $ke \in \mathbb{N}$. Valoarea lui h a fost aleasă de așa manieră încât să fie excluse situațiile din detaliu fig.4.2.2-1. Nu s-au efectuat alte filtrări, ambele metode având asigurată convergența în sens mediu pătratic [103].

Pe baza rezultatelor din tabel și a figurilor din Anexa XV se poate afirma că diferențele dintre valorile estimate ale abaterilor parametrice obținute cu cele două metode sunt minore (fig.XV-4, XV-6, XV-8, XV-12, ordine de mărime $<10^{-4}$). Aceasta înseamnă că ambele metode conduc la rezultate bune pentru aceleași domenii de abateri parametrice. Pentru a putea decide cât de bine estimează aceste metode abaterile parametrice, în tabelul 3, pe coloanele (3) și (6), au fost cuprinse erorile relative de estimare ε_{ra} și ε_{rb} calculate cu relațiile:

$$\varepsilon_{ra} = \frac{\Delta a_e - \Delta a_r}{\Delta a_r}, \quad \varepsilon_{rb} = \frac{\Delta b_e - \Delta b_r}{\Delta b_r}, \quad (4.2.2.16)$$

unde $\Delta a_c = \begin{cases} \Delta a_c \\ \Delta a_{II} \end{cases}$, $\Delta b_c = \begin{cases} \Delta b_c \\ \Delta b_{II} \end{cases}$ sunt abateri estimate cu (4.2.2.14) respectiv (4.2.2.15) iar

$\Delta a_r, \Delta b_r$ sunt abaterile reale ale parametrilor.

Tabelul 3

Figura	Abateri reale Δa_r [%]	Abateri estimate Δa_c [%] cu (4.2.2.14) Δa_{II} [%] cu (4.2.2.15)	Erori relative ϵ_{ra} [%]	Abateri reale Δb_r [%]	Abateri estimate Δb_c [%] cu (4.2.2.14) Δb_{II} [%] cu (4.2.2.15)	Erori relative ϵ_{rb} [%]
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
XV-3	0	-0.00238	-	0.5	0.50231	0.4624
		-0.00237	-		0.50231	0.4623
	0	-0.009476	-	1	1.00919	0.919
		-0.009472	-		1.00918	0.918
XV-5	0	-0.0382	-	2	2.0374	1.870
		-0.0383	-		2.0375	1.875
	0	-0.2278	-	5	5.2188	4.376
		-0.2277	-		5.2187	4.375
XV-7	0	-0.8689	-	10	10.8240	8.2406
		-0.8687	-		10.8242	8.2425
	0.25	0.24265	-2.938	0.5	0.5098	1.9688
		0.24267	-2.929		0.5098	1.9618
	0.5	0.4923	-1.530	0	0.009905	-
		0.4923	-1.530		0.009911	-
XV-11	0.5	0.48825	-2.348	0.25	0.2661	6.4748
		0.48823	-2.352		0.2662	6.4872
	0.5	0.4773	-4.533	0.75	0.7810	4.1343
		0.4773	-4.529		0.7809	4.1302
XV-13	0.75	0.7200	-3.996	0.5	0.5415	8.308
		0.7199	-4.003		0.5416	8.3232
XV-9	1	0.96942	-3.057	0	0.0396	-
		0.96942	-3.058		0.0395	-
XV-14	1	0.8823	-11.76	2	2.1576	7.880
		0.8827	-11.72		2.1570	7.852
	1	0.6566	-34.33	5	5.4040	8.080
		0.6619	-33.80		5.3953	7.907
XV-10	2	1.87796	-6.101	0	0.1579	-
		1.87789	-6.105		0.1578	-
	2	1.8118	-9.408	1	1.2592	25.92
		1.8115	-9.424		1.2597	25.97
	2	1.7307	-13.46	2	2.3730	18.652
		1.7304	-13.47		2.3734	18.674
	2	1.4146	-29.26	5	5.7655	15.311
		1.4148	-29.09		5.7602	15.205
XV-15	2	0.6629	-66.85	10	11.5696	15.695
		0.6842	-65.78		11.5346	15.346
	3	2.7260	-9.133	0	0.3546	-
		2.7258	-9.139		0.3549	-
	5	4.2420	-15.15	0	0.9800	-
		4.2415	-15.16		0.9800	-
	5	4.0840	-18.31	1	2.2288	122.88
		4.0829	-18.34		2.2309	123.09
XV-16	5	3.9117	-21.75	2	3.4892	74.46
		3.9098	-21.80		3.4921	74.60
	5	2.1175	-57.64	10	13.847	38.479
		2.1290	-57.41		13.829	38.294
	10	7.002	-29.97	0	3.876	-
		6.9991	-30.00		3.881	-
	10	5.2725	-47.27	5	11.494	127.88
		5.2652	-47.34		11.405	130.11
	10	3.2819	-67.18	10	19.260	92.60
		3.2832	-67.16		19.259	92.59

Pentru a aprecia calitatea estimărilor este necesar să se definească domeniile erorilor ε_{ra} și ε_{rb} (corelat cu domeniul de valabilitate al dezvoltărilor în serie Taylor). O astfel de definiție poate fi următoarea:

- ♦ estimare excelentă dacă $\varepsilon_{ra} < 1\%$ și $\varepsilon_{rb} < 1\%$;
- ♦ estimare bună dacă $1\% < \varepsilon_{ra} < 10\%$ și $1\% < \varepsilon_{rb} < 10\%$;
- ♦ estimare medie dacă $10\% < \varepsilon_{ra} < 20\%$ și $10\% < \varepsilon_{rb} < 20\%$;
- ♦ estimare satisfăcătoare dacă $20\% < \varepsilon_{ra} < 30\%$ și $20\% < \varepsilon_{rb} < 30\%$;
- ♦ estimare nesatisfăcătoare dacă $\varepsilon_{ra} > 30\%$ și $\varepsilon_{rb} > 30\%$.

Se obține astfel tabelul 4 de apreciere a estimărilor.

Tabelul 4

Estimare	Suferă abateri numai un parametru		Suferă abateri ambii parametri	
	Δa	Δb	Δa	Δb
excelentă	<0.25%	<1%	-	-
bună	<3%	<10%	<0.75%	<5%
medie	<5%	-	<1%	<2%
satisfăcătoare	<10%	-	-	-
nesatisfăcătoare	>10%	-	>2%	>2%

Acolo unde datele din tabelul 3 au fost insuficiente pentru o apreciere corectă în tabelul 4 s-a trecut "-".

Întrucât rezultatele obținute cu metoda II sunt foarte apropiate de cele obținute cu metoda clasică se pot defini avantajele și dezavantajele metodei II raportată la metoda clasică altfel decât prin prisma valorilor obținute și anume:

Avantaje:

- ① metoda II permite obținerea rezultatelor estimărilor mai rapid decât metoda clasică;
- ② în cazul $p=q$ se poate implementa varianta (4.1.3.17) care implică un număr considerabil mai redus de calcule față de metoda clasică, la fel ca în exemplu.

Dezavantaj: ① nu poate fi utilizată decât dacă $p \geq q$.

Studiile anterioare arată că și în situația unor modele nelineare estimarea abaterilor parametrice poate fi efectuată cu succes folosind ASI, evident în anumite limite.

4.3 Integrarea soluției ASI în procese de sortare automată

Această prezentare are scopul de a lansa ideea că estimarea abaterilor parametrice utilizând ASI poate reprezenta o soluție ușor de implementat în sistemele tehnice complet automatizate, la sortarea unor dispozitive destinate tocmai industriei de automatizare.

Se cunoaște faptul că o mare parte dintre dispozitivele de măsurare, elementele de execuție și reglatoarele analogice (denumite simplu "dispozitive") au modele matematice

lineare în domeniul de lucru. De asemenea se știe că datorită dispersiei de fabricație a componentelor lor parametri acestora sunt cunoscuți în anumite limite. În situația în care, pe linia de producție a acestor dispozitive se dorește o sortare automată calitativă a lor, în funcție de preciziile domeniilor de valori ale parametrilor se poate apela la soluția algoritmică descrisă în următoarele etape:

A Stabilirea datelor de intrare și a cerințelor temei. Abordarea acestei etape presupune:

1. Stabilirea modelului matematic al dispozitivului în cauză. Această etapă presupune determinarea unui MM-ISI cu posibilitatea măsurării directe a mărimilor de stare sau în lipsa acestuia a unui MM-II.
2. Stabilirea parametrilor în funcție de care se va efectua sortarea și a valorilor lor nominale. Teoretic abaterile parametrilor de la aceste valori se datorează dispersiei de fabricație a componentelor. Sunt *abateri mici* care trebuie determinate și ca urmare se încadrează foarte bine în estimarea bazată pe *teoria sensibilității*.
3. Se definesc domeniile erorilor abaterilor parametrilor de apreciere calitativă a dispozitivelor. Vezi exemplul din §4.2.2.

B Determinarea teoretică a soluției temei. Aceasta constă în:

1. Alegerea celor mai potrivite mărimi de test conform metodei de estimare a parametrilor alese.
2. Studiu ASI conform metodelor descrise în §4.2 finalizat cu alegerea metodei și descrierea algoritmului de implementare a acesteia.
3. Proiectarea și implementarea în limbaj de programare a algoritmului de prelucrare numerică a datelor obținute pe standul de încercări.
4. Verificarea prin simulare a programului.

C Implementarea pe linia de producție a soluției alese. Aceasta presupune:

1. Realizarea standului de teste care presupune alegerea echipamentului de calcul posibilitatea transmiterii dispozitivului .
2. Alegerea (realizarea) manipulatorului de sortare și programarea acestuia.
3. Verificarea și punerea în funcțiune a ansamblului format din standul de teste și manipulator.

Este evident faptul că dacă dispozitivul are un model matematic nelinear decizia luată ca urmare a studiului de la B2 este dificilă dar, dat fiind faptul că este vorba doar de abateri mici, nu e imposibil de luat.

La sistemele descrise prin modele lineare se pot efectua studii care să stabilească momentele cele mai convenabile de măsurare a abaterilor mărimilor luate în calcule [89].

4.4 Concluzii

Problematika ASI surprinsă în §4.1.1 a fost rezolvată prin abordarea a trei metode de determinare a soluției ASI: metoda clasică cu variantele continuă și numerică și două metode numerice noi, notate "metoda I" (denumită și metoda timpilor succesivi) și "metoda II". Nu au fost abordate metode recursive și de gradient. Acestea pot constitui ulterior un domeniu de cercetare interesant.

Toate cele trei metode au fost analizate teoretic și experimental și s-au efectuat studii comparative între ele care au pus în evidență avantajele și dezavantajele lor (§4.2.1 și §4.2.2).

Rezultatele obținute cu metodele noi sunt valoric comparabile cu cele din metoda clasică. Metodele noi sunt mai rapide. Ambele sunt alternative la soluția clasică.

Există încă neajunsuri care mai pun încă semne de întrebare și nasc noi teme de cercetare. Astfel asigurarea convergenței metodei I se poate face printr-o filtrare corespunzătoare a eșantioanelor înaintea prelucrărilor. Determinarea unei metode riguroase de proiectare a filtrelor necesare reținerii eșantioanelor care trebuie mediate în vederea obținerii corecte a soluției cu metoda I reprezintă o problemă deschisă. Aici filtrarea s-a făcut empiric. Cheia reușitei acestei metode este această filtrare pentru care este necesară elaborarea unei metode științifice.

Pentru abateri multiple ale parametrilor la sistemele nelineare se impune un studiu amănunțit la fiecare sistem în parte mai ales dacă se dorește integrarea lui într-un sistem automat de tipul celui propus în §4.3.

Un alt studiu important legat de ASI este optimizarea semnalului de intrare. Și aici problema rămâne deschisă.

Datorită complexității studiilor prezentate în §4.2.1 și §4.2.2 au fost necesare detalieri grafice ale rezultatelor simulărilor în Anexa XIV (§4.2.1) respectiv în Anexa XV (§4.2.2).

5

CONTRIBUȚII PERSONALE ȘI DIRECȚII DE CERCETARE ULTERIOARĂ

Fiind deosebit de vastă, teoria sensibilității sistemelor automate a fost numai parțial abordată în această lucrare. În acest capitol, structurat pe trei părți, se prezintă, în §5.1, concluziile finale, apoi, în §5.2 sunt subliniate cele mai importante contribuții personale ale autoarei la tema studiată și în §5.3 sunt sugerate noi direcții de cercetare pe tema sensibilității sistemelor automate.

5.1 Concluzii finale

Lucrarea de față a parcurs și dezvoltat o serie de aspecte legate de problemele de sensibilitate ale sistemelor de reglare automată dar au rămas încă multe necercetate sau cercetate parțial.

Capitolul 1, de acomodare cu tematica propusă și cu bibliografia parcursă, permite o bună înțelegere a manierei de lucru din capitolele următoare.

Capitolul 2, de prezentare a noțiunilor de bază, a metodelor de lucru din teoria sensibilității introduce o serie de noțiuni noi, de la definiții noi (precizate la sfârșitul §2.1.3 cu scopul de a fi utilizate în §3.3) la modele noi de sensibilitate (§2.5.2) sau subprograme și algoritme noi destinate calculului funcțiilor de sensibilitate (§2.6.2, §2.6.3). Au fost analizate concret prin exemple atât metodele de lucru cunoscute cât și cele noi propuse.

Capitolul 3, de studii și contribuții la utilizarea analizei de sensibilitate directă în automatică surprinde aspectele importante aplicative cunoscute ale teoriei sensibilității în analiza comportării SRA în raport cu incertitudini ale subsistemelor componente cauzate de eventuale abateri parametriche și dezvoltă o nouă aplicație: aceea de a determina coordonatele punctului de funcționare staționară pe baza utilizării unui indicator de performanță.

Capitolul 4, de studii și contribuții la utilizarea analizei de sensibilitate inversă în automatică vine cu două metode noi de soluționare a problemei ASI și cu studii comparative între varianta numerică a metodei clasice și propunerile noi făcute.

Capitolul 5 este un capitol special. El are rolul de a evidenția contribuțiile personale ale autoarei la tematica studiată și cercetată (§5.1) și de a lansa cercetări noi care să răspundă la întrebările care nu și-au găsit încă un răspuns (§5.2).

Acolo unde îndoiala a luat locul certitudinii s-au făcut cercetări detaliate în cele 15 anexe grupate astfel:

- Anexele I÷IX asociate capitolului 2;
- Anexele X÷XIII asociate capitolului 3;
- Anexele XIV÷XV asociate capitolului 4.

Nu numai dezvoltările teoretice ci și cele aplicative, susținute de simulări și programe de calcul numeric, tratează atât sistemele lineare cât și pe cele nelineare, gradul de susținere al teoriilor fiind astfel ridicat.

Harta legăturilor informaționale dintre capitole și paragrafe prezentată la sfârșitul primului capitol are rolul de a dovedi unitatea și complexitatea lucrării.

Bibliografia prezentată, (din care 13 lucrări științifice au fost publicate de autoare), citată în întregime în text, indică faptul că problematica sensibilității parametrice a sistemelor de reglare automată este o temă deschisă de trecut cu numeroase "ramuri" în prezent și cu posibilități multiple spre viitor.

5.2 Contribuții personale

În §2.1 au fost definite două noțiuni noi și anume *matricea (funcția) de sensibilitate de linearizare* și respectiv *abaterea la linearizare* utilizate ulterior în §3.3.

Pomind de la ideea că sistemele lineare pot fi aduse, prin utilizarea algebrei schemelor bloc, la forme în care fiecare parametru matematic să aparțină unui singur subsistem, în §2.3 a fost generalizată "metoda componentei incerte" pentru acest caz. Verificarea generalizării efectuate a fost confirmată printr-un exemplu în Anexa IV.

Funcțiile de sensibilitate semirelativă se obțin în cazul general al "metodei punctelor de sensibilitate", prezentat în §2.4 între anumite puncte din sistemul combinat. Calculul care dovedește această afirmație a fost efectuat pe o cale nouă, originală, în Anexa V.

În paragraful §2.4.1 și mai apoi în §3.1 a fost posibilă utilizarea variabilei operaționale unificate λ , întrucât calculele se fac în mod similar la sistemele lineare în timp continuu sau în timp discret, fapt nesesizat până acum în literatură.

În cadrul §2.5.2 a fost efectuat, la modul general, un studiu prin care s-a urmărit obținerea unui model de sensibilitate care să permită determinarea influenței timpului de calcul în SRAN. În acest studiu s-au introdus noțiuni noi: *model într-un singur punct*, *model în două puncte*, *model de sensibilitate în două puncte*, *model global în două puncte*. Acesta din urmă reprezintă formula soluției problemei propuse.

În §2.6.2 au fost concepute 4 funcții MATLAB utile pentru calculul funcțiilor de sensibilitate absolută de ieșire, la sistemele lineare de tip SISO, descrise prin MM-II în forma canonică. Cele 4 funcții noi denumite: "sigmaa", "sigmab", "dsigmaa", "dsigmab" realizate după tipicul și forma funcțiilor MATLAB (fișiere de tip *function*), permit calculul funcțiilor de sensibilitate absolută în raport cu parametri matematici de tip "a", respectiv "b" la sistemele lineare continue, respectiv în timp discret, descrise prin MM-II în forma canonică pentru o funcție de intrare dată și parametri nominali cunoscuți.

În §2.6.3 s-au prezentat modul de dezvoltare și implementare în limbajul de programare C al unui număr de 4 algoritme numerice utile la calculul aproximativ al funcțiilor de sensibilitate absolută și semirelativă, precum și posibilitatea includerii acestora în produse software dedicate automaticii.

Întâlnită fără demonstrație în bibliografia accesibilă autoarei, în §3.1.1 s-a prezentat o modalitate nouă de deducere a expresiei sensibilității de comparație la sistemele MIMO. Prezentarea s-a considerat necesară mai ales că modul de abordare al determinării relației amintite este diferit față de situația sistemelor SISO pentru care există din belșug deduceri în bibliografia studiată.

În §3.2 s-au realizat analize paralele de sensibilitate parametrică pentru mai multe structuri de reglare automată ale aceluiași proces. Scopul primordial al analizelor paralele a fost acela de a arăta modul diferit în care abaterile parametrice ale aceluiași proces sunt reflectate diferit de structurile de reglare considerate în mărimile reglate.

Determinarea coordonatelor punctului de funcționare staționară al sistemelor nelineare folosind metode optimale care includ funcții de sensibilitate este o idee nouă, abordată și dezvoltată în §3.3, finalizată cu un algoritm de calcul și exemplificată pe un model concret.

Și în ceea ce privește ASI au fost aduse unele contribuții. Pornind de la metoda clasică s-a cercetat o nouă modalitate de abordare numerică a acesteia în cazul particular în care numărul mărimilor caracteristice ale sistemului este mai mare sau egal cu cel al parametrilor incerti. De asemenea s-a dezvoltat o metodă rapidă de determinare a soluției în cadrul ASI, metodă denumită sugestiv “metoda timpilor succesivi”. Ambele metode au fost cercetate comparativ cu metoda clasică.

S-a lansat problema integrării ASI într-un proces industrial de sortare automată a unor dispozitive modelabile matematic ca și sisteme (subsisteme ale SRA).

5.3 Direcții de cercetare ulterioară

Direcțiile de cercetare propuse în acest paragraf vizează, pe de-o parte, aprofundări ale unor situații tratate în această lucrare, iar pe de altă parte, o serie de probleme de sensibilitate care nu au fost abordate aici sau care au fost doar amintite.

Iată câteva dintre temele de cercetare tratate în această lucrare propuse spre a fi dezvoltate și în viitor:

- Stabilirea unui algoritm de implementare a modelului global în două puncte. Punct de plecare: §2.5.2.
- Dezvoltarea de noi funcții MATLAB care să permită calculul funcțiilor de sensibilitate ale sistemelor lineare în raport cu orice parametru și chiar calculul funcțiilor de sensibilitate ale sistemelor nelineare. Dezvoltarea de module SIMULINK în aceleași scopuri. Punct de plecare: §2.6.2.
- Dezvoltarea unei biblioteci de funcții C care să permită calculul funcțiilor de sensibilitate parametrică pentru cele mai uzuale tipuri de modele de sisteme. Punct de plecare: §2.6.3.
- Introducerea unor măsuri de sensibilitate integrale în studiul general din §3.3, după modelul din exemplu.
- Continuarea cercetărilor privind modul de interpretare și utilitatea funcțiilor de sensibilitate de linearizare și a abaterilor la linearizare.
- Linearizarea modelelor nelineare în jurul punctelor de funcționare staționară prin analiza sensibilității unor noi indicatori de calitate impuși modelelor sistemelor linearizate. Punct de plecare: §3.3.
- Studiarea legăturii dintre erorile de estimare a abaterilor parametrică, perioada de eșantionare și momentele de achiziție a abaterilor mărimilor caracteristice. Punct de plecare: §4.2
- Realizarea unei sinteze comparative a metodelor recursive de estimare a parametrilor care folosesc funcții de sensibilitate parametrică cu scopul includerii lor în cercetări privind verificarea automată a parametrilor a unor dispozitive (elemente de execuție, elemente de măsură etc) prin linii flexibile de fabricație destinate sortării automate a dispozitivelor în funcție de clasa de precizie a parametrilor. Punct de plecare: §4.3.

sau care nu au fost tratate în această lucrare dar care aparțin de teoria sensibilității sistemelor automate:

- sensibilitatea de tip β legată de problemele de reglare optimală, cu restricții asupra condițiilor de frontieră (inițiale și finale);
- sensibilitatea sistemelor de reglare automată cu comandă optimală adaptivă;
- sensibilitatea de tip λ ;
- sensibilitatea de ordinul al doilea;
- proiectarea sistemelor de reglare automată cu sensibilitate redusă;
- proiectarea observatoarelor de stare cu sensibilitate redusă și includerea lor în sisteme de diagnoză a defectelor din SRA.

Sistem combinat asociat MM-II

În fig.I-1 este prezentată schema bloc a *sistemului combinat* aferent unui sistem linear de tip SISO, de ordinul n , utilizat pentru determinarea mărimii de ieșire. Schema bloc corespunde modelului nominal al sistemului:

$$y_o^{(n)}(t) + a_{n-1,o} y_o^{(n-1)}(t) + \dots + a_{1,o} \dot{y}_o(t) + a_{0,o} y_o(t) = b_{m,o} u^{(m)}(t) + \dots + b_{1,o} \dot{u}(t) + b_{0,o} u(t) \quad (I.1)$$

modelelor de sensibilitate:

$$\begin{cases} \sigma_j^{(n)} + a_{n-1,o} \sigma_j^{(n-1)} + \dots + a_{1,o} \dot{\sigma}_j + a_{0,o} \sigma_j = -y_o^{(n-j)}, & \sigma_j(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ \sigma_j^{(n)} + a_{n-1,o} \sigma_j^{(n-1)} + \dots + a_{1,o} \dot{\sigma}_j + a_{0,o} \sigma_j = u^{(n+m+1-j)}, & \sigma_j(t_0) = 0, \quad j = \overline{n+1, n+m+1} \end{cases} \quad (I.2)$$

și următoarei relații dintre ieșirea sistemului, ieșirea modelului nominal, abateri și funcții de sensibilitate:

$$y = y_o + \sum_{j=1}^n \sigma_j \cdot \Delta a_j + \sum_{j=n+1}^{n+m+1} \sigma_j \cdot \Delta b_{n+m+1-j} \quad (I.3)$$

Relația (I.3) furnizează aproximarea ieșirii sistemului în funcție de ieșirea modelului nominal și de abaterile tuturor parametrilor sistemului de la valorile lor nominale.

O schemă SIMULINK realizată pe baza schemei bloc din fig.I-1 este prezentată în Anexa VIII.

Ca observație trebuie să precizez faptul că la simularea unei astfel de scheme cu semnal treaptă la intrare (sau orice alt semnal ce prezintă salt la momentul inițial) derivata fiind teoretic infinită în momentul inițial, programul MATLAB ne transmite o avertizare, folosind totuși în loc de infinit valoarea maximă pe care o poate furniza. Prin urmare este recomandabil să se utilizeze acest tip de schemă doar pentru semnale continue la intrare.

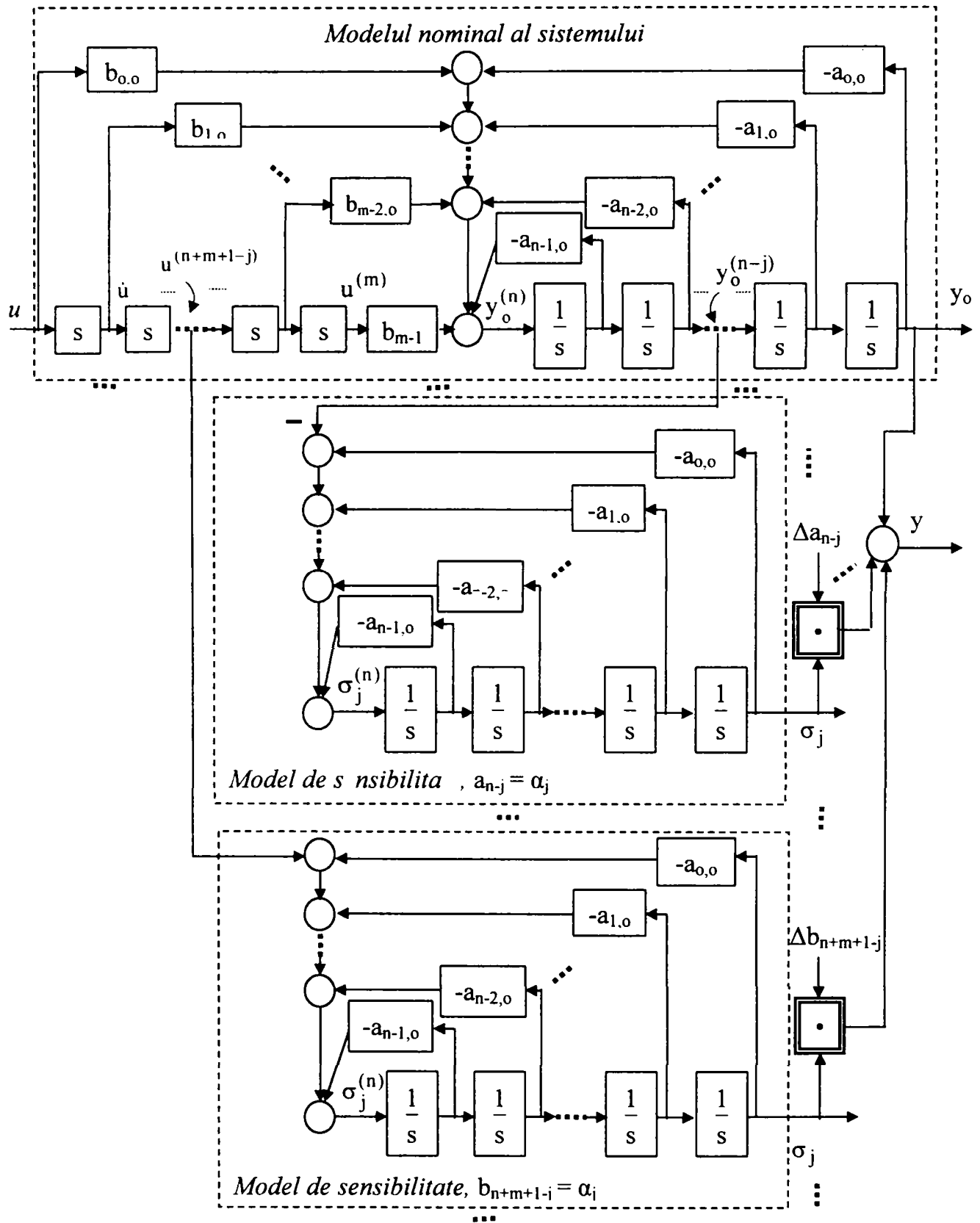


Fig.I-1 Sistem combinat

Aducerea MM-ISI la forma standard controlabilă

Matricea de transformare nesingulară, \underline{T} , care poate aduce un sistem linear monovariabil descris de relațiile

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot \underline{u}, & \underline{x}^o = \underline{0} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

în realizarea standard controlabilă

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}^* = \underline{A}^* \cdot \underline{x}^* + \underline{b}^* \cdot \underline{u}, & \underline{x}^{*o} = \underline{0} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{c}^{*T} \cdot \underline{x} \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

cu

$$\underline{A}^* = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & & -\alpha_n \end{bmatrix}, \quad (\text{II.5})$$

$$\underline{b}^* = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.6})$$

$$\underline{c}^{*T} = \underline{c}^T \cdot \underline{T}, \quad (\text{II.7})$$

se poate determina, conform surselor bibliografice [17], [43] și [110], cu relațiile:

$$\begin{aligned} \underline{t}_n &= \underline{b}, \\ \underline{t}_{n-1} &= \underline{A} \cdot \underline{t}_n + \alpha_n \cdot \underline{t}_n, \\ \underline{t}_{n-2} &= \underline{A} \cdot \underline{t}_{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot \underline{t}_n, \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\underline{t}_1 = \underline{A} \cdot \underline{t}_2 + \alpha_2 \cdot \underline{t}_n.$$

$$\underline{T} = [\underline{t}_1 \quad \underline{t}_2 \quad \dots \quad \underline{t}_n]. \quad (\text{II.9})$$

Sistem combinat asociat unui MM- ISI în forma standard controlabilă

În fig.III-1 sunt ilustrate cele $2n-1$ componente distincte ale matricei de sensibilitate absolută a stării (pentru modelul inițial sub forma realizării standard controlabile), χ^* , care pot fi determinate utilizând un sistem combinat format dintr-un singur model de sensibilitate și un model nominal al sistemului. Componentele $\chi_{11}^*, \chi_{12}^*, \chi_{13}^*, \dots, \chi_{1n}^*, \chi_{2n}^*$ se "măsoară" direct în modelul de sensibilitate iar celelalte $n-2$ componente se obțin din funcțiile de sensibilitate "măsurate" direct și din mărimile de stare nominale, conform relației:

$$\chi_{kn}^* = -x_{k-1}^* - \sum_{i=1}^{n-k+2} \alpha_{i+k-2}^* - \sum_{i=n-k+3}^n \alpha_{i+k-n-1}^* \quad (III.1)$$

Deducerea acestei relații (aparținând lui Wilkie și Perkins) este reluată în [43]. Toți parametri din fig.III-1 sunt considerați la valorile nominale, indicele "o" fiind omis din raționamentul de a nu încărca figura.

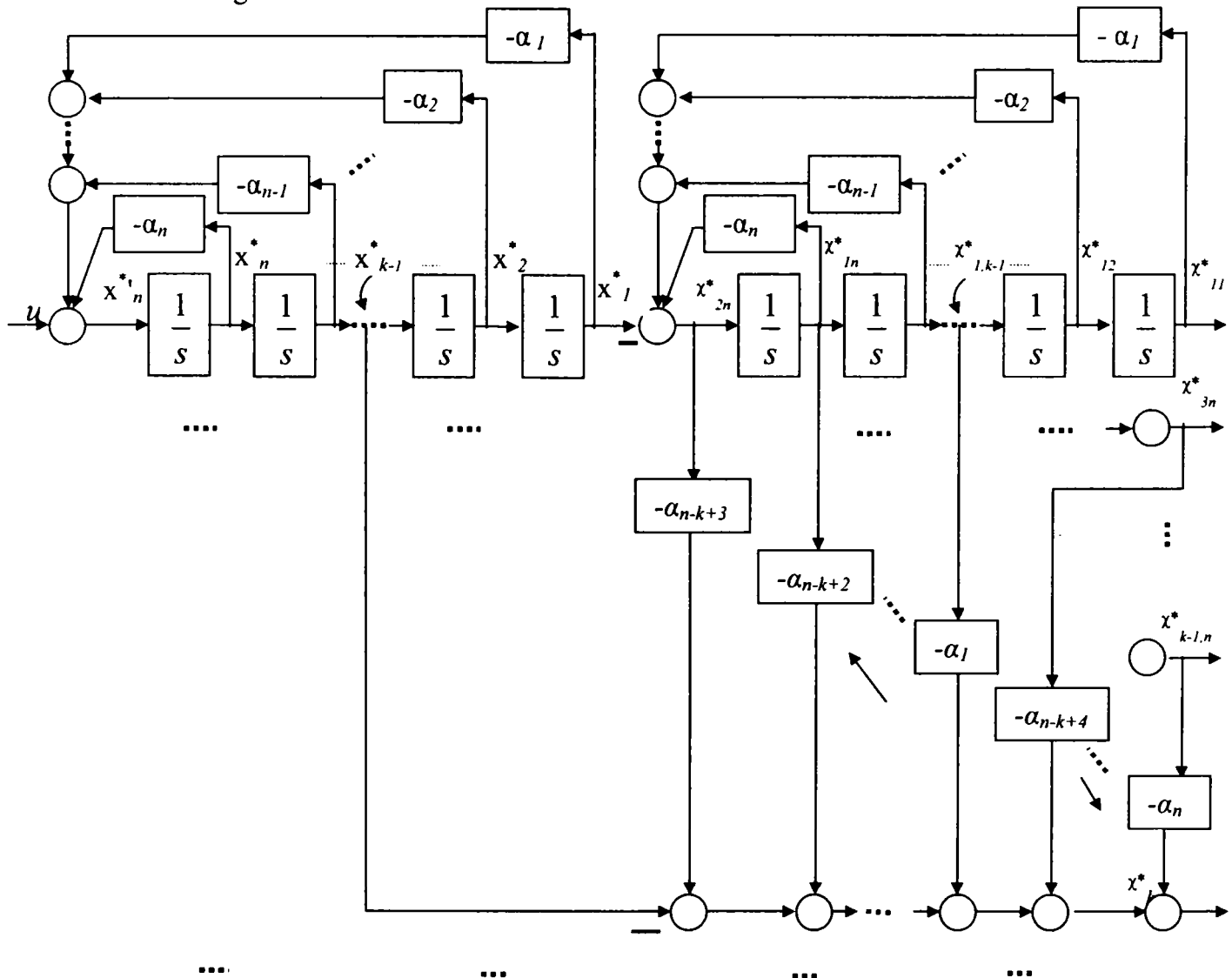


Fig.III-1 Determinarea simultană a tuturor funcțiilor de sensibilitate absolută ale mărimilor de stare

Exemplu relativ la generalizarea metodei componentei incerte

Se consideră sistemul din fig.IV-1. Se cere determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică prin metoda componentei incerte generalizată în §2.3.1 și pentru validarea generalizării compararea rezultatului cu cel obținut prin aplicarea metodei directe (descrisă în §2.2.1).

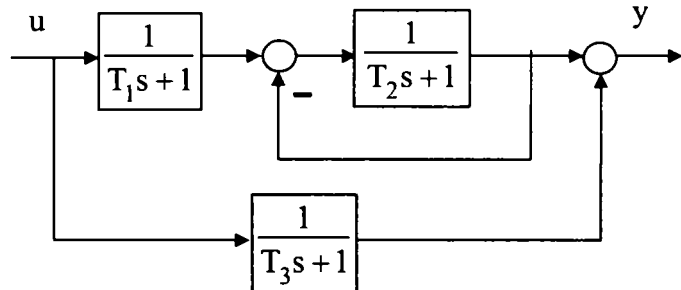


Fig.IV-1 Sistem

Vectorul parametrilor considerați este $\underline{\alpha}=[T_1, T_2, T_3]$ de valoare nominală $\underline{\alpha}_0=[T_{1,0}, T_{2,0}, T_{3,0}]$. Pentru construirea schemei sistemului combinat sunt necesare derivatele

$$\left. \frac{\partial \left\{ \frac{1}{T_i s + 1} \right\}}{\partial T_i} \right|_{T_i = T_{i,0}} = \frac{-s}{(T_{i,0} s + 1)^2} \quad (IV.1)$$

Relația (IV.1) este valabilă pentru toate cele trei subsisteme, $i = \overline{1,3}$. Este necesar să se precizeze faptul că neexistând reacție la nivelul blocurilor 1 și 3, în modelele de sensibilitate ele vor putea fi omise, având intrările tot timpul pe 0. Se obține în final schema din fig.IV-2.

În mod obișnuit, pentru determinarea funcțiilor de sensibilitate, se simulează schema din fig.IV-2. Pentru validarea corectitudinii schemei se vor determina, pe de-o parte, pe baza fig.IV-2 expresiile analitice ale celor trei funcții de sensibilitate parametrică iar pe de altă parte, plecând de la f.d.t. a schemei inițiale (din fig.IV-1) se va aplica metoda din §2.2.1.

Pe baza fig.IV-2 se obțin succesiv:

$$\sigma_{T_1}(s; \underline{\alpha}_0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{T_{2,0}s + 1}} \cdot \frac{-s}{(T_{1,0}s + 1)^2} \cdot u(s) = \frac{-s}{(T_{1,0}s + 1)^2 (T_{2,0}s + 2)} \cdot u(s), \quad (IV.2)$$

$$\sigma_{T_2}(s; \underline{\alpha}_0) = \frac{1}{T_{1,0}s + 1} \cdot \frac{1}{T_{2,0}s + 2} \cdot \left(\frac{1}{T_{2,0}s + 1} \right)^{-1} \cdot \frac{-s}{(T_{2,0}s + 1)^2} \cdot \left(\frac{1}{T_{2,0}s + 1} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{T_{2,0}s + 2} \cdot u(s),^*$$

$$\sigma_{T_2}(s; \underline{\alpha}_0) = \frac{-s}{(T_{1,0}s + 1)(T_{2,0}s + 2)^2} \cdot u(s), \quad (IV.3)$$

$$\sigma_{T_3}(s; \underline{\alpha}_0) = \frac{-s}{(T_{3,0}s + 1)^2} \cdot u(s). \quad (IV.4)$$

* Expresia se obține prin prelucrarea ansamblului Model nominal - Model 2 de sensibilitate.

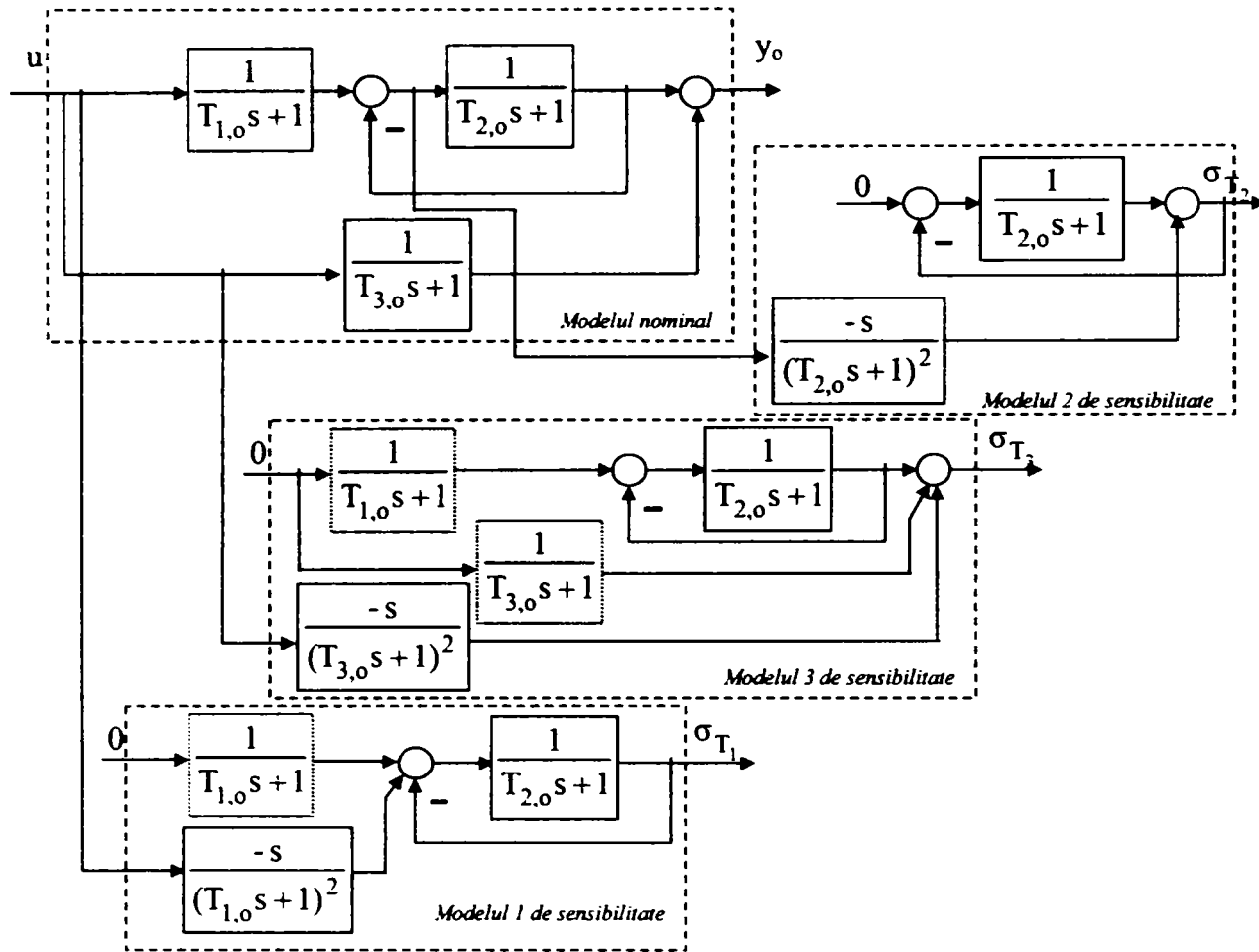


Fig.IV-2 Sistem combinat pentru determinarea tuturor funcțiilor de sensibilitate, cu metoda componentei incerte
 Pe de altă parte, f.d.t. a sistemului din fig.IV-1 este

$$H(s; \underline{\alpha}) = \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 2} + \frac{1}{T_3 s + 1} \tag{IV.5}$$

Cu metoda din §2.2.1 se obțin imediat:

$$\sigma_{T_1}(s; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(s; \underline{\alpha})}{\partial T_1} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} \cdot u(s) = \frac{-s}{(T_{1,0} s + 1)^2 (T_{2,0} s + 2)} \cdot u(s), \tag{IV.6}$$

$$\sigma_{T_2}(s; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(s; \underline{\alpha})}{\partial T_2} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} \cdot u(s) = \frac{-s}{(T_{1,0} s + 1)(T_{2,0} s + 2)^2} \cdot u(s), \tag{IV.7}$$

$$\sigma_{T_3}(s; \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(s; \underline{\alpha})}{\partial T_3} \right|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} \cdot u(s) = \frac{-s}{(T_{3,0} s + 1)^2} \cdot u(s). \tag{IV.8}$$

Comparând (IV.2), (IV.3), (IV.4) cu (IV.6), (IV.7), (IV.8) se constată expresii identice ceea ce validează generalizarea metodei componentei incerte la sistemele lineare având subsisteme depinzând fiecare de câte un singur parametru.

ANEXA V

Calculul funcțiilor de sensibilitate Bode aferente metodei punctelor de sensibilitate

Sistemului cu buclă de reacție generalizată din fig.V-1 i se asociază modelul de sensibilitate din fig.V-3. Între punctul de intrare și punctul S_j din modelul de sensibilitate se obține expresia imaginii operaționale a funcției de sensibilitate Bode:

$$F_j(\lambda) = \bar{S}_{H_j}^H(\lambda) = \frac{\partial \ln H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial \ln H_j(\lambda; \alpha_j)} \Big|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0} = \frac{H_j(\lambda; \alpha_{j0})}{H(\lambda; \underline{\alpha}_0)} \cdot \frac{\partial H(\lambda; \underline{\alpha})}{\partial H_j(\lambda; \alpha_j)} \Big|_{\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0}, \quad j = \overline{1, q}. \quad (V.1)$$

Această afirmație, utilizată în §2.4.1, este demonstrată în continuare prin calculul expresiilor funcțiilor de sensibilitate Bode, $F_{2k-1}(\lambda)$ și $F_{2k}(\lambda)$, pe baza relației (V.1), pentru cele două situații posibile: $j=2k-1$ (impar), $j=2k$ (par), și compararea rezultatelor cu expresiile operaționale calculate între punctul de intrare în modelul de sensibilitate și punctul de sensibilitate S_{2k-1} respectiv S_{2k} din modelul de sensibilitate. S-a considerat q par.

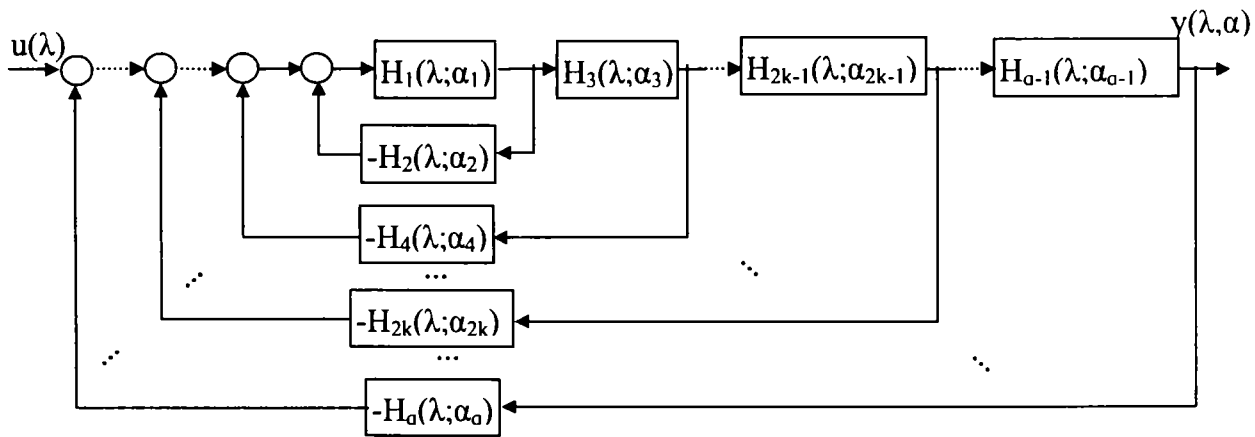


Fig.V-1 Sistem cu buclă de reacție generalizată

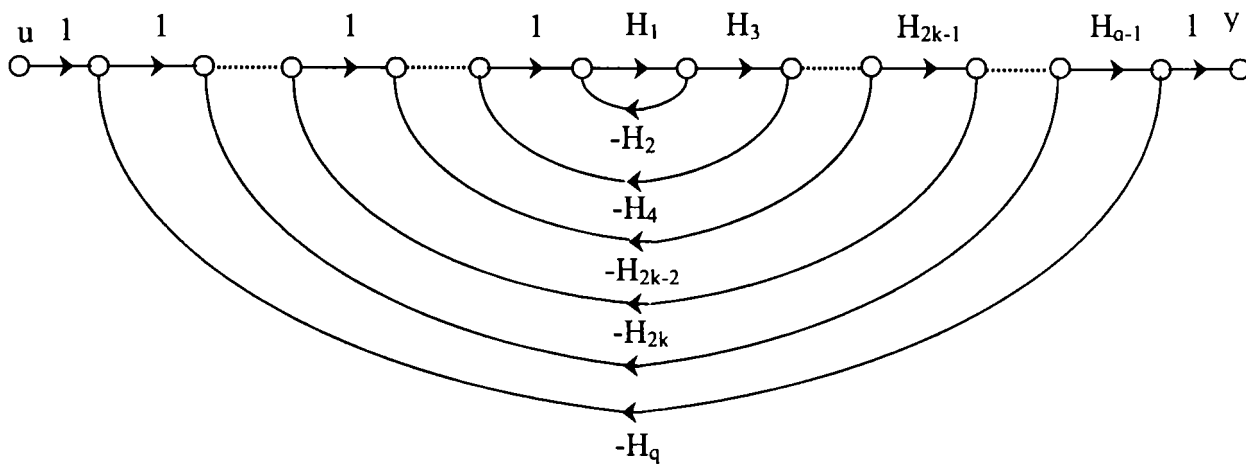


Fig.V-2 Graful de semnal asociat sistemului din fig.V-1

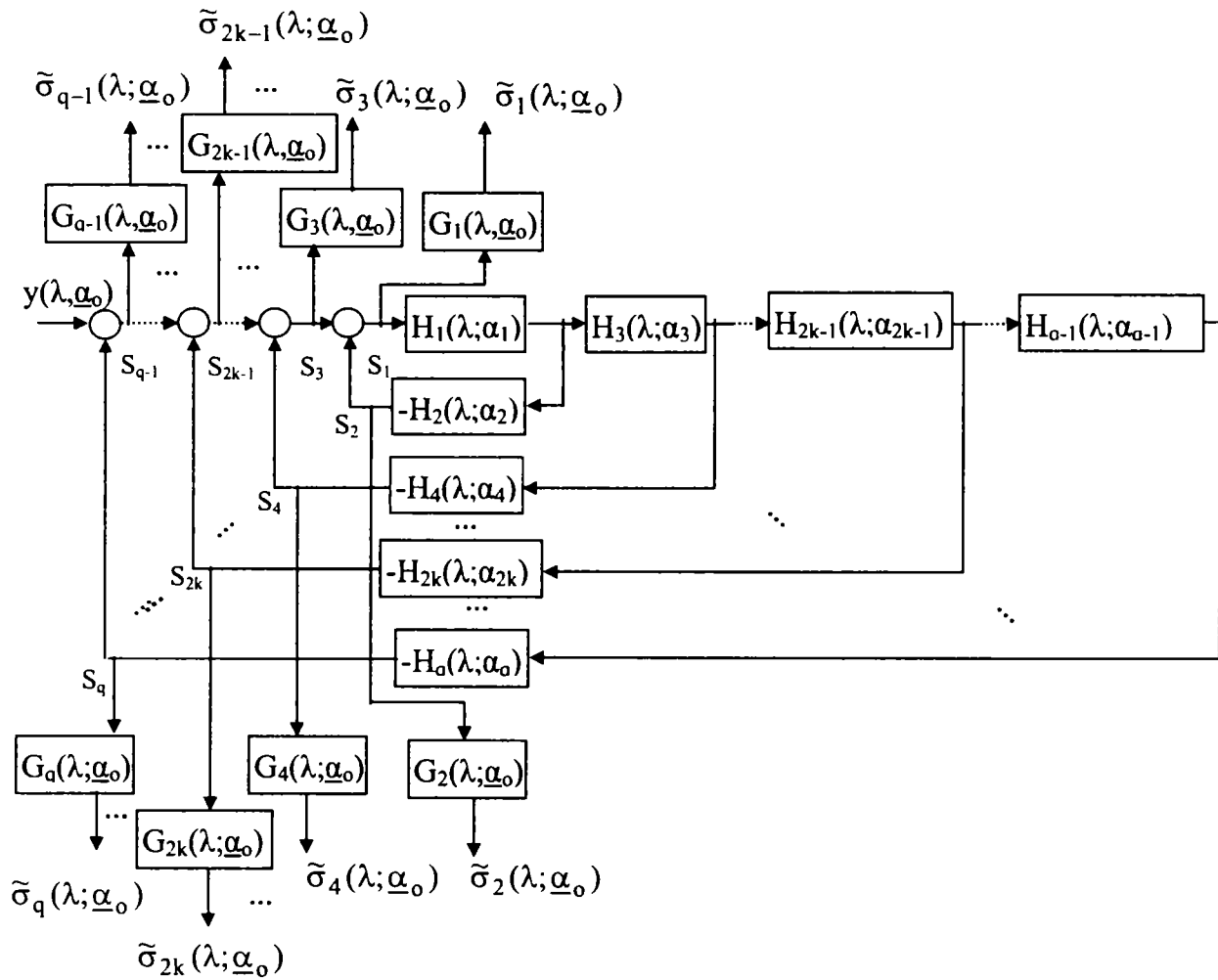


Fig.V-3 Model de sensibilitate aferent sistemului cu buclă de reacție generalizată

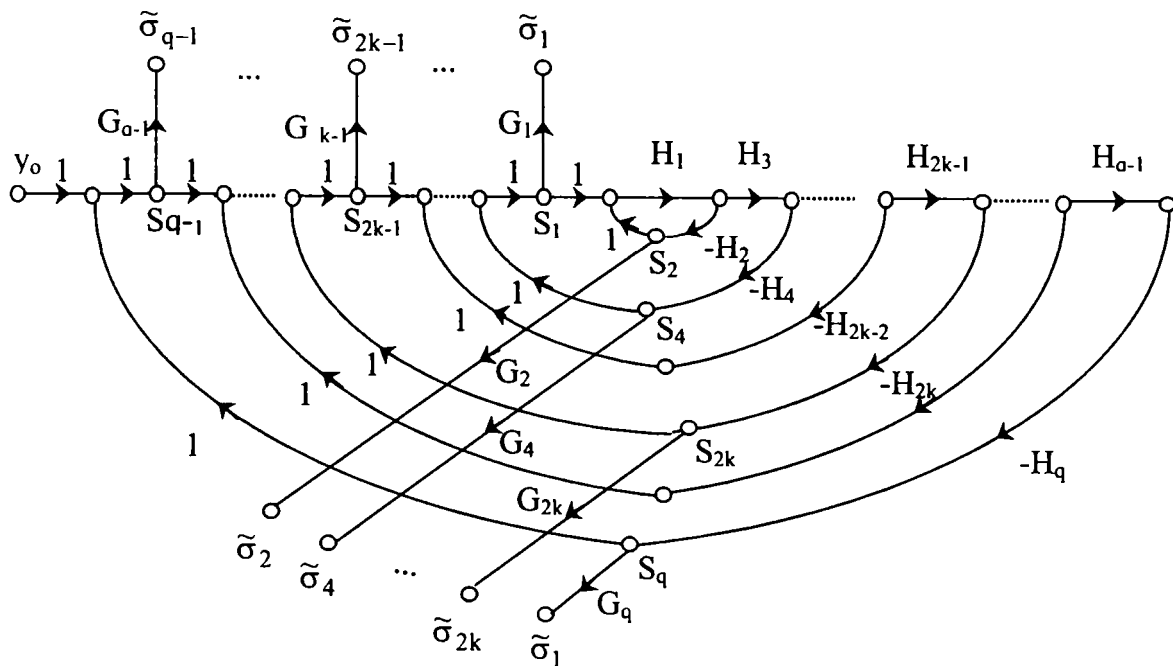


Fig.V-4 Graful de semnal asociat modelului de sensibilitate din fig.V-3

Pentru efectuarea calculelor este nevoie să asociem schemelor bloc din fig.V-1 și V-3 grafuri de semnal corespunzătoare și să facem uz de formula lui Mason, [97]. Graful de semnal asociat schemei bloc din fig.V-1 este prezentat în fig.V-2 iar cel asociat schemei bloc din fig.V-3 este prezentat în fig.V-4. Întrucât argumentele mărimilor și ale f.d.t. nu sunt relevante pentru calculele ce urmează, pentru a nu îngreuna inutil figurile, ele au fost omise de pe fig.V-2 și V-4.

Pentru aplicarea relației (V.1) este necesar să se determine f.d.t. $H(\lambda, \underline{\alpha})$. Aceasta se face folosind formula lui Mason pentru graful din fig.V-2. Se obține

$$H = \frac{H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot \dots \cdot H_{q-1}}{1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k} + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot H_q} \quad (V.2)$$

Derivând pe H în raport cu H_{2k-1} , respectiv cu H_{2k} se obține:

$$\frac{\partial H}{\partial H_{2k-1}} = \frac{H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-3} \cdot H_{2k+1} \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot (1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-3} \cdot H_{2k-2})}{(1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k} + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot H_q)^2}$$

respectiv

$$(V.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial H_{2k}} = - \frac{H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot (H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1})}{(1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k} + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot H_q)^2}$$

$$(V.4)$$

Înlocuind (IV.6), respectiv (IV.7) în (IV.1) rezultă:

$$F_{2k-1} = \frac{1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-3} \cdot H_{2k-2}}{1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k} + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot H_q} \quad (V.5)$$

respectiv

$$F_{2k} = - \frac{H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k}}{1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k} + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot H_q} \quad (V.6)$$

Aplicând formula lui Mason pentru calculul dependenței operaționale dintre nodul y_o și nodul S_{2k-1} din fig.V-4, se obține:

$$H_{S_{2k-1}} = \frac{1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-3} \cdot H_{2k-2}}{1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k} + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot H_q} \quad (V.7)$$

Aplicând formula lui Mason pentru calculul dependenței operaționale dintre nodul y_o și nodul S_{2k} din fig.V-4, se obține:

$$H_{S_{2k}} = - \frac{H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k}}{1 + H_1 \cdot H_2 + H_1 \cdot H_3 \cdot H_4 + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{2k-1} \cdot H_{2k} + \dots + H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \dots \cdot H_{q-1} \cdot H_q} \quad (V.8)$$

Comparând (V.5) cu (V.7) respectiv (V.6) cu (V.8) se dovedește a fi adevărată afirmația cum că expresia imaginii operaționale a funcției de sensibilitate Bode se obține între punctul de intrare în modelul de sensibilitate și punctul de sensibilitate corespunzător.

ANEXA VI

Stabilirea modelului de sensibilitate de eşantionare

Prin discretizarea MM-ISI

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t; \underline{\alpha}) = \underline{A}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}) + \underline{B}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{u}(t), & \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \\ \underline{y}(t; \underline{\alpha}) = \underline{C}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}) + \underline{D}(\underline{\alpha}) \cdot \underline{u}(t) \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

ca realizare invariantă la semnal treaptă cu pasul h , se obține MM-ISI discret:

$$\begin{cases} \underline{x}(t+1; \underline{\alpha}; h) = \underline{A}_d(\underline{\alpha}; h) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}; h) + \underline{B}_d(\underline{\alpha}; h) \cdot \underline{u}(t), & \underline{x}(0) = \underline{x}^0, \quad t \in \mathbb{N} \\ \underline{y}(t; \underline{\alpha}; h) = \underline{C}_d(\underline{\alpha}; h) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}; h) + \underline{D}_d(\underline{\alpha}; h) \cdot \underline{u}(t) \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

în care:

$$\begin{cases} \underline{A}_d(\underline{\alpha}; h) = \Phi(\underline{\alpha}; h) = e^{\underline{A}(\underline{\alpha}) \cdot h}; \\ \underline{B}_d(\underline{\alpha}; h) = \Gamma(\underline{\alpha}; h) = \int_0^h e^{\underline{A}(\underline{\alpha}) \cdot v} \underline{B}(\underline{\alpha}) dv; \\ \underline{C}_d(\underline{\alpha}; h) = \underline{C}(\underline{\alpha}); \quad \underline{D}_d(\underline{\alpha}; h) = \underline{D}(\underline{\alpha}). \end{cases} \quad (\text{VI.3})$$

Prin derivarea relațiilor (VI.3) în raport cu h , pentru $h=h_0$, se obține:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0; h)}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \left. \frac{\partial \Phi(\underline{\alpha}_0; h)}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \left. \frac{\partial e^{\underline{A}(\underline{\alpha}_0) \cdot h}}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \\ = \underline{A}(\underline{\alpha}_0) \cdot \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0; h_0); \\ \left. \frac{\partial \underline{B}_d(\underline{\alpha}_0; h)}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \left. \frac{\partial \Gamma(\underline{\alpha}_0; h)}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \left. \frac{\partial \int_0^h e^{\underline{A}(\underline{\alpha}_0) \cdot v} \cdot \underline{B}(\underline{\alpha}_0) dv}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \\ = \left[e^{\underline{A}(\underline{\alpha}_0) \cdot h_0} \cdot \underline{B}(\underline{\alpha}_0) \right]_{h=h_0} = \underline{A}_d(\underline{\alpha}_0; h_0) \cdot \underline{B}(\underline{\alpha}_0); \\ \left. \frac{\partial \underline{C}_d(\underline{\alpha}; h)}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \left. \frac{\partial \underline{C}(\underline{\alpha})}{\partial h} \right|_{h=h_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \underline{D}_d(\underline{\alpha}; h)}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \left. \frac{\partial \underline{D}(\underline{\alpha})}{\partial h} \right|_{h=h_0} = 0. \end{cases} \quad (\text{VI.4})$$

Pentru obținerea *modelului de sensibilitate de eşantionare* derivăm relațiile (VI.2) în raport cu h și substituim apoi $h = h_0$. Ținând seama de rezultatele din (VI.4) și de notațiile introduse în §2.1.5, se obține succesiv:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lambda}(t+1; \underline{\alpha}_o; h_o) = \underline{A}_d(\underline{\alpha}_o; h_o) \cdot \underline{\lambda}(t; \underline{\alpha}_o; h_o) + \left. \frac{\partial \underline{A}_d(\underline{\alpha}_o; h)}{\partial h} \right|_{h_o} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_o; h_o) + \\ \quad + \left. \frac{\partial \underline{B}_d(\underline{\alpha}_o; h)}{\partial h} \right|_{h_o} \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{\lambda}_j^o = \underline{0} \quad t \in \mathbf{N} \\ \underline{\sigma}_h(t; \underline{\alpha}_o; h_o) = \underline{C}_d(\underline{\alpha}_o; h_o) \cdot \underline{\lambda}(t; \underline{\alpha}_o) + \left. \frac{\partial \underline{C}_d(\underline{\alpha}; h_o)}{\partial h} \right|_{h_o} \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_o) + \\ \quad + \left. \frac{\partial \underline{D}_d(\underline{\alpha}; h_o)}{\partial h} \right|_{h_o} \cdot \underline{u}(t) \end{array} \right.$$

respectiv

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lambda}(t+1; \underline{\alpha}_o; h_o) = \underline{A}_d(\underline{\alpha}_o; h_o) \cdot \underline{\lambda}(t; \underline{\alpha}_o; h_o) + \underline{A}(\underline{\alpha}_o) \cdot \underline{A}_d(\underline{\alpha}_o; h_o) \cdot \underline{x}(t; \underline{\alpha}_o; h_o) + \\ \quad + \underline{A}_d(\underline{\alpha}_o; h_o) \cdot \underline{B}(\underline{\alpha}_o) \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{\lambda}_j^o = \underline{0} \\ \underline{\sigma}_h(t; \underline{\alpha}_o; h_o) = \underline{C}(\underline{\alpha}_o) \cdot \underline{\lambda}(t; \underline{\alpha}_o), \quad t \in \mathbf{N}. \end{array} \right. \quad (\text{VI.5})$$

(VI.5) reprezintă modelul de sensibilitate de eşantionare. Simularea comportării sale împreună cu cea a modelului discret al sistemului (VI.2), la valori nominale ale tuturor parametrilor, permite determinarea vectorului de sensibilitate de eşantionare al mărimii de ieşire $\underline{\sigma}_h$.

Acest model permite determinarea influenţei abaterilor perioadei de eşantionare asupra mărimilor de stare şi de ieşire ale procesului la momentele de eşantionare.

Pentru calculul modelelor de sensibilitate valabile între momentele de eşantionare procedura devine neliniară şi complicată. O astfel de situaţie nu este tratată în această lucrare întrucât, în general, se consideră că informaţiile din momentele de eşantionare sunt suficiente pentru aprecierea abaterilor mărimilor din sistem datorate abaterilor perioadei de eşantionare, ce pot să apară la implementarea faţă de valoarea folosită în calcule.

Funcții MATLAB pentru calculul funcțiilor de sensibilitate parametrică

- Fișierul *sigmaa.m* conține:

```
function [sout,ts] = sigmaa(num, den, u, t)
%SIGMAA Simulate time response of the sensitivity models to arbitrary inputs.
%
% SIGMAA(NUM,DEN,U,T) plots the time response of the output sensitivity model of the
% LTI system to the input signal described by U and T. The time vector T consists of
% regularly spaced time samples and U is a matrix with as many columns
% as inputs and whose i-th row specifies the input value at time T(i).
%
% When invoked with left-hand arguments,
% [SY,TS] = SIGMAA(NUM,DEN,U,T)
% returns the output sensitivity functions SY with respect to "a" parameters (an,an-1,an-2,
% ...,a0) and time vector TS used for simulation.
% No plot is drawn on the screen. The matrix SY has LENGTH(TS) rows
% and as many columns as outputs in sensitivity model.
%
% The LTI system is the polynomial transfer function  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM
% and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s.
% NUM=[bm,bm-1,bm-2,...,b0];DEN=[an,an-1,...,a0];m<=n
%
% See also: SIGMAB, DSIGMAA, DSIGMAB and LSIM.
%
% SIGMAA uses LSIM.
%
% Dorina Popescu $Date: 2001/09/05

ni = nargin;
no = nargout;
error(nargchk(4,5,ni));

switch ni
case 4
% Transfer function of the output sensitivity functions description
id = eye(length(den));
for i=1:length(den);
a(i,:)=conv(-num,id(i,:));
end
a = num2cell(a,2);
b = cell(size(a,1),1);
den=conv(den,den);
b(:) = {den};
```

```

    sys = tf(a,b);
    x0 = [];
case 5
    error('Wrong number of input arguments. ');
end

if no,
    [sout,t1] = lsim(sys,u,t,x0);
    ts=t1;
    if ~isequal(t(:),t1(:)),
        % T was resampled. Extract values at original samples
        sout = interp1(t1,sout,t);
        ts=t;
    end
else
    lsim(sys,u,t,x0)
end

% end sigmaa

```

- Fișierul *sigmab.m* conține:

```

function [sout,ts] = sigmab(num, den, u, t)
%SIGMAB Simulate time response of the sensitivity models to arbitrary inputs.
%
% SIGMAB(NUM,DEN,U,T) plots the time response of the output sensitivity model of the
% LTI system to the input signal described by U and T. The time vector T consists of
% regularly spaced time samples and U is a matrix with as many columns
% as inputs and whose i-th row specifies the input value at time T(i).
%
% When invoked with left-hand arguments,
% [SY,TS] = SIGMAB(NUM,DEN,U,T)
% returns the output sensitivity functions SY with respect to "b" parameters (bm,bm-1,bm-2,
% ...,b0) and time vector TS used for simulation.
% No plot is drawn on the screen. The matrix SY has LENGTH(TS) rows
% and as many columns as outputs in sensitivity model.
%
% The LTI system is the polynomial transfer function  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM
% DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s.
% NUM=[bm,bm-1,bm-2,...,b0];DEN=[an,an-1,...,a0];m<=n
%
% See also: SIGMAA, DSIGMAA, DSIGMAB and LSIM.

% SIGMAB uses LSIM.
%
% Dorina Popescu $Date: 2001/09/05

ni = nargin;
no = nargout;

```

```

error(nargchk(4,5,ni));

switch ni
case 4
    % Transfer function of the output sensitivity functions description
    a = eye(length(num));
    a = num2cell(a,2);
    b = cell(size(a,1),1);
    b(:) = {den};
    sys = tf(a,b);
    x0 = [];
case 5
    error('Wrong number of input arguments. ');
end

if no,
    [sout,t1] = lsim(sys,u,t,x0);
    ts=t1;
    if ~isequal(t(:),t1(:)),
        % T was resampled. Extract values at original samples
        sout = interp1(t1,sout,t);
        ts=t;
    end
else
    lsim(sys,u,t,x0)
end

% end sigmab

```

- Fișierul *dsigmaa.m* conține:

```

function [sout] = dsigmaa(num, den, u)
% DSIGMAA Simulate time response of the sensitivity models to arbitrary inputs.
%
% DSIGMAA(NUM,DEN,U) plots the discrete-time response of the output sensitivity
% model of the DLT system to the input sequence U. Matrix U must have as many
% columns as there are inputs, u. Each row of U corresponds to a new time point.
%
% When invoked with left-hand arguments,
% [SY] = DSIGMAA(NUM,DEN,U)
% returns the output sensitivity functions SY with respect to "a" parameters (an,an-1,an-2,
% ...,a0).
% No plot is drawn on the screen. The matrix SY has LENGTH(U) rows
% and as many columns as outputs in sensitivity model.
%
% The LTI system is the polynomial transfer function  $G(z) = \text{NUM}(z)/\text{DEN}(z)$  where NUM
% and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of z.
% NUM=[bm,bm-1,bm-2 ,..., b0] ; DEN=[an,an-1,...,a0]; m<=n
% See also: SIGMAA, SIGMAB, DSIGMAB and LSIM.

```

```

%
% DSIGMAA uses LSIM.
%
% Dorina Popescu $Date: 2001/09/05

ni = nargin;
no = nargout;
error(nargchk(3,4,ni));
Ts = -1;
t = [];

switch ni
case 3
    % Transfer function of the output sensitivity functions description
    id = eye(length(den));
    for i=1:length(den);
        a(i,:)=conv(-num,id(i,:));
    end
    a = num2cell(a,2);
    b = cell(size(a,1),1);
    den=conv(den,den);
    b(:) = {den};
    sys = tf(a,b,Ts);
    x0 = [];
case 4
    error('Wrong number of input arguments. ');
end

if no,
    [sout] = lsim(sys,u,[],x0);
else
    lsim(sys,u,t,x0)
end

% end dsigmaa

```

- Fișierul *dsigmab.m* conține:

```

function [sout] = dsigmab(num, den, u)
%DSIGMAB Simulation of discrete-time linear system sensitivity models to arbitrary inputs.
%
% DSIGMAB(NUM,DEN,U) plots the discrete-time response of the output sensitivity
% model of the DLT system to the input sequence U. Matrix U must have as many
% columns as there are inputs, u. Each row of U corresponds to a new time point.
%
% When invoked with left-hand arguments,
% [SY] = DSIGMAB(NUM,DEN,U)
% returns the output sensitivity functions SY with respect to "b" parameters(bm,bm-1,bm-2,
% ...,b0).

```

```

% No plot is drawn on the screen. The matrix SY has LENGTH(U) rows
% and as many columns as outputs in sensitivity model.
%
% The LTI system is the polynomial transfer function  $G(z) = \text{NUM}(z)/\text{DEN}(z)$  where NUM
and DEN contain
% the polynomial coefficients in descending powers of z.
% NUM=[bm,bm-1,bm-2,...,b0]; DEN=[an,an-1,...,a0]; m<=n

% See also: SIGMAA, DSIGMAA, SIGMAB and LSIM.
%
% DSIGMAB uses LSIM.
%
% Dorina Popescu $Date: 2001/09/05 $

ni = nargin;
no = nargout;
error(nargchk(3,4,ni));
Ts = -1;
t = [];

switch ni
case 3
    % Transfer function of the output sensitivity functions description
    a = eye(length(num));
    a = num2cell(a,2);
    b = cell(size(a,1),1);
    b(:) = {den};
    sys = tf(a,b,Ts);
    x0 = [];
case 4
    error('Wrong number of input arguments.');
```

```

end

if no,
    [sout,t1] = lsim(sys,u,[],x0);

    else
        lsim(sys,u,t,x0)
    end
end

% end dsigmab
```

ANEXA VIII

CN-FS, program C destinat Calculului Numeric al Funcțiilor de Sensibilitate

Produsul software, CN-FS, finalizat într-o primă versiune simplistă cu scopul de a valida funcțiile C care implementează calculul numeric al funcțiilor de sensibilitate prin metode aproximative, se referă la sistemele lineare strict realizabile fizic, de tip SISO, până la ordinul al 5-lea, descrise prin MM-II. Programul CN-FS a fost realizat de așa manieră încât permite salvarea rezultatelor într-un format compatibil cu fișierele de date utilizate de MATLAB. Acest avantaj permite utilizarea rezultatelor pentru prelucrări off-line efectuate ulterior în MATLAB-SIMULINK asupra sistemului.

Structura și funcțiile programului CN-FS

Programul CN-FS este scris în limbajul C deoarece, fiind conceput pe principiile programării structurate, acest limbaj oferă posibilitatea realizării de module distincte cu un rol bine definit și ca urmare nu numai reutilizabile dar și ușor de depanat. Un astfel de modul, definit de programator sau oferit de bibliotecile de funcții C este de fapt un subprogram care efectuează diferite prelucrări și pentru care se utilizează termenul de "*funcție*". Orice program C conține un program principal adică o funcție cu numele "main" și execuția programului începe cu această funcție [46].

"Cheia" acestui program o reprezintă cele 4 funcții C care implementează relațiile numerice de calcul al funcțiilor de sensibilitate prin metode aproximative: "asens", "bsens", "arel" și "brel" descrise în §2.6.3.

Pentru a-și putea atinge scopul, programul CN-FS are nevoie de o serie de date pe care utilizatorul trebuie să i le furnizeze la început, printr-un dialog simplu. Aceste date sunt:

- Ordinul sistemului;
- Valorile nominale ale parametrilor;
- Tipul funcției de sensibilitate care se dorește a fi calculată (absolută/semirelativă);
- Pasul de discretizare;
- Numărul de eșantioane (durata calculului exprimată în timp discret);
- Tipul parametrului în raport cu care se calculează funcția de sensibilitate ($a/b/t$). Aici trebuie făcută precizarea că t înseamnă toate funcțiile de sensibilitate în raport cu toți parametri. Dacă răspunsul este "a" sau "b" atunci e necesar să se specifice și numărul indicelui parametrului.

După obținerea rezultatelor a fost prevăzut de asemenea un dialog cu utilizatorul, necesar pentru a salva sau nu datele în fișier precum și pentru o eventuală reluare a calculelor în alte condiții, pentru același sistem sau pentru altul.

Dialogul cu utilizatorul este realizat direct de către programul principal. Pentru a preîntâmpina anumite neînțelegeri sau chiar erori ce ar putea să apară datorită unor tastări greșite ale utilizatorului programul principal fost completat cu elemente de robustețe.

Pentru reprezentarea grafică a rezultatelor au fost definite următoarele funcții C:

- “initializare” – inițializează modul grafic;
- “trasare_axe” – trasează axele, pune săgețile pe axe și împarte axa absciselor, (a timpului), în diviziuni în funcție de numărul de eșantioane dorit de utilizator;
- “afisare_graph” – funcția propriu-zisă de afișare grafică. Ea stabilește și scara de reprezentare pe axa ordonatelor în funcție de valorile minimă și maximă pe care le are de afișat.

Ordinea apelării funcțiilor grafice de către programul principal este cea de mai sus.

Interfațarea programului CN-FS cu mediul MATLAB se face cu ajutorul funcției

- “savemat” – funcția permite salvarea rezultatelor într-un fișier de date de tipul .mat recognoscibil de MATLAB.

Cu excepția funcției “savemat”, scrisă după calapodul funcției similare din MATLAB, tuturor funcțiilor din CN-FS li s-a furnizat un număr minim de parametri cu scopul de a li se asigura o independență cât mai mare.

În fig.VIII-1 este prezentat un exemplu de dialog cu utilizatorul de la începutul rulării programului. Prin acest dialog se cer utilizatorului date despre modelul sistemului și tipul funcției de intrare pentru care se calculează funcțiile de sensibilitate.

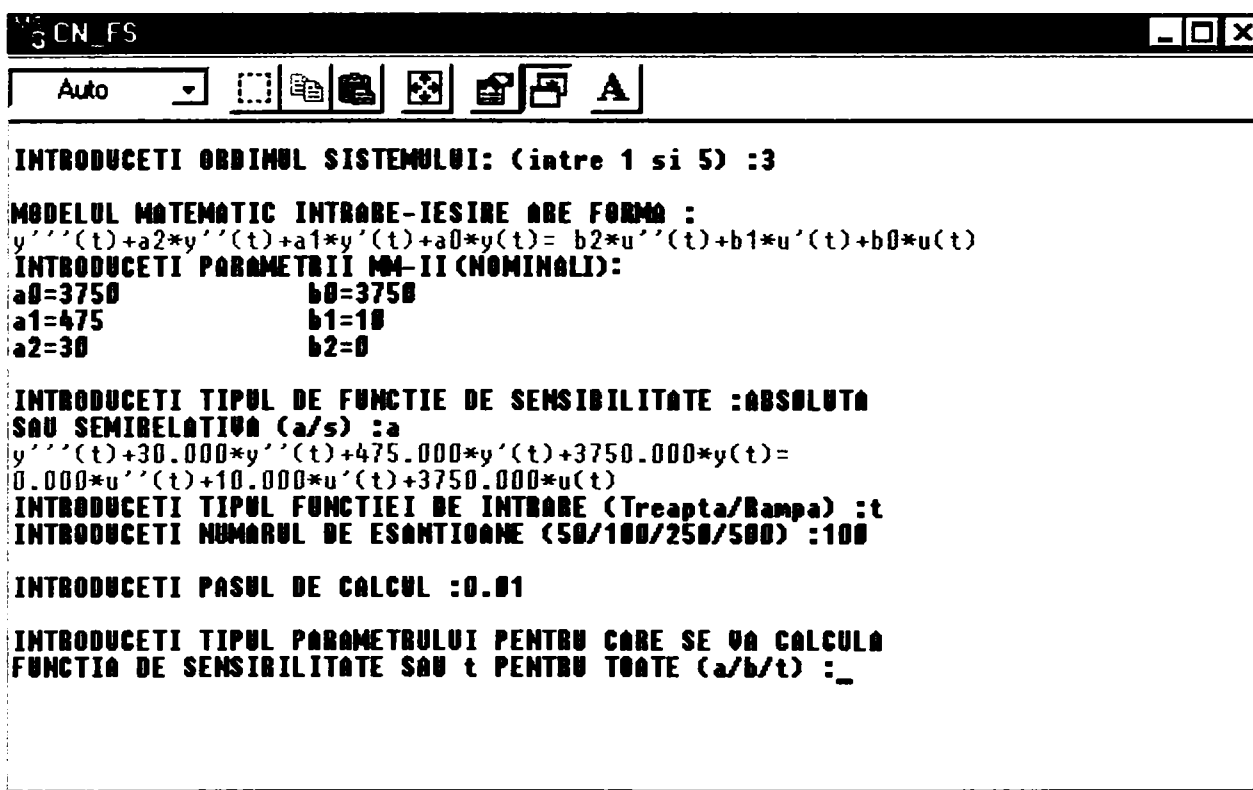


Fig.VIII-1 Caseta de dialog cu utilizatorul de la începutul programului CN-FS

Validarea programului CN-FS

Procesul de validare a programului CN-FS a constat în compararea rezultatelor obținute cu programul CN-FS cu cele obținute prin alte metode. Una dintre aceste operații de comparare este prezentată aici iar alta poate fi urmărită în studiul din Anexa IX.

Astfel pentru sistemul descris de MM-II prezentat în caseta de dialog din fig.VIII-1 la valorile nominale ale parametrilor, s-au obținut valorile funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută în raport cu toți parametri pe un interval de timp de 1 secundă, cu un pas de eșantionare de 0.01secunde, pentru semnal treaptă unitară la intrare. Aceste valori au fost salvate într-un fișier de date (*date.mat*) compatibil MATLAB, programul CN-FS având această facilitate. Fișierul *date.mat* a fost apoi încărcat în MATLAB unde s-au realizat graficele din fig.VIII-2. Pentru același sistem, s-au obținut funcțiile de sensibilitate parametrică absolută din fig.VIII-3, folosind schema SIMULINK din fig.VIII-4, obținută prin metoda sistemului combinat pentru modele de sensibilitate de stare, prezentată în §2.2.2.2 și Anexa I, (deși metoda este nerecomandată pentru semnal treaptă la intrare).

În fig.VIII-2 funcțiile de sensibilitate au fost notate cu numele "siga x" spre a se deosebi de cele din fig.VIII-3 notate cu "sigma x", x este numele parametrului în raport cu care s-a calculat f.d.s.

Comparând fig.VIII-2 cu VIII-3 se remarcă unele mici diferențe datorate în principal utilizării unor relații numerice de precizie redusă. Totuși, se poate aprecia că programul CN-FS oferă rezultate bune mai ales acolo unde se dorește o apreciere calitativă a sensibilității.

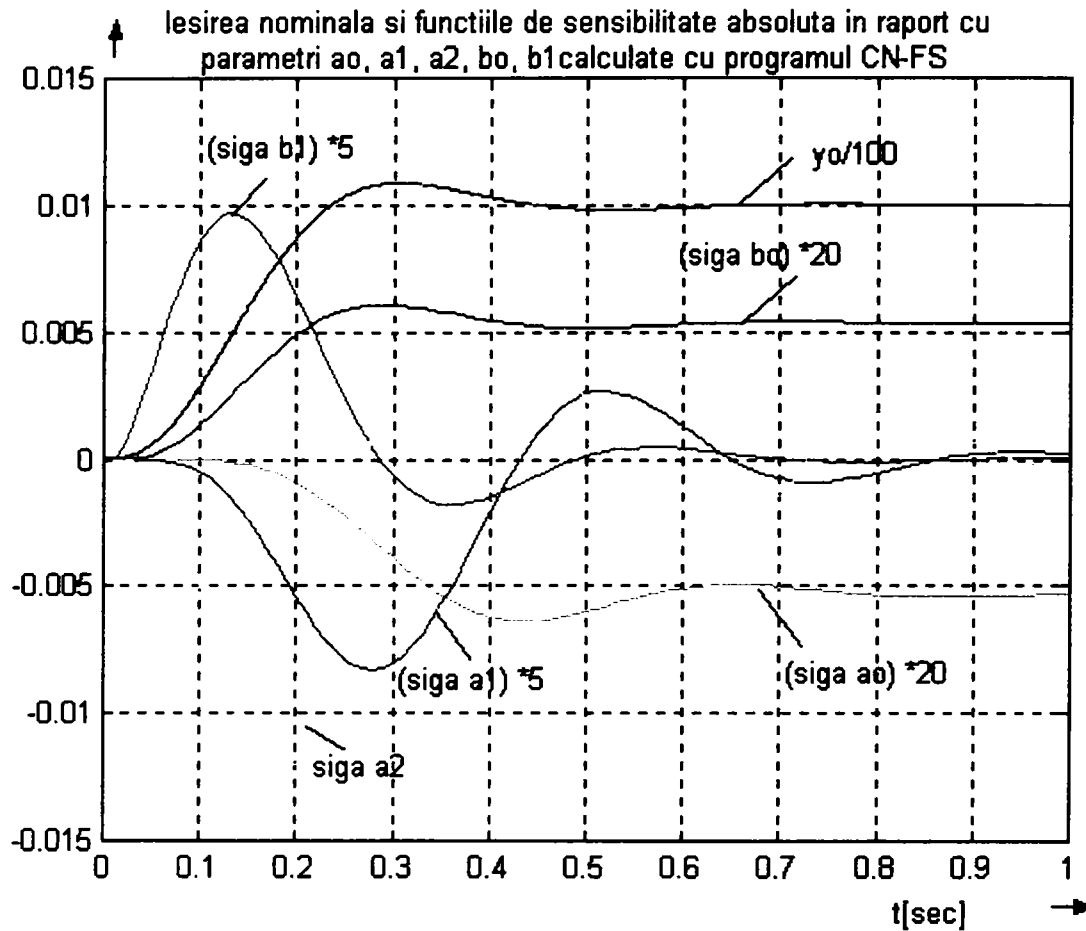


Fig.VIII-2 Funcții de sensibilitate absolută calculate cu programul CN-FS și reprezentate grafic folosind mediul MATLAB

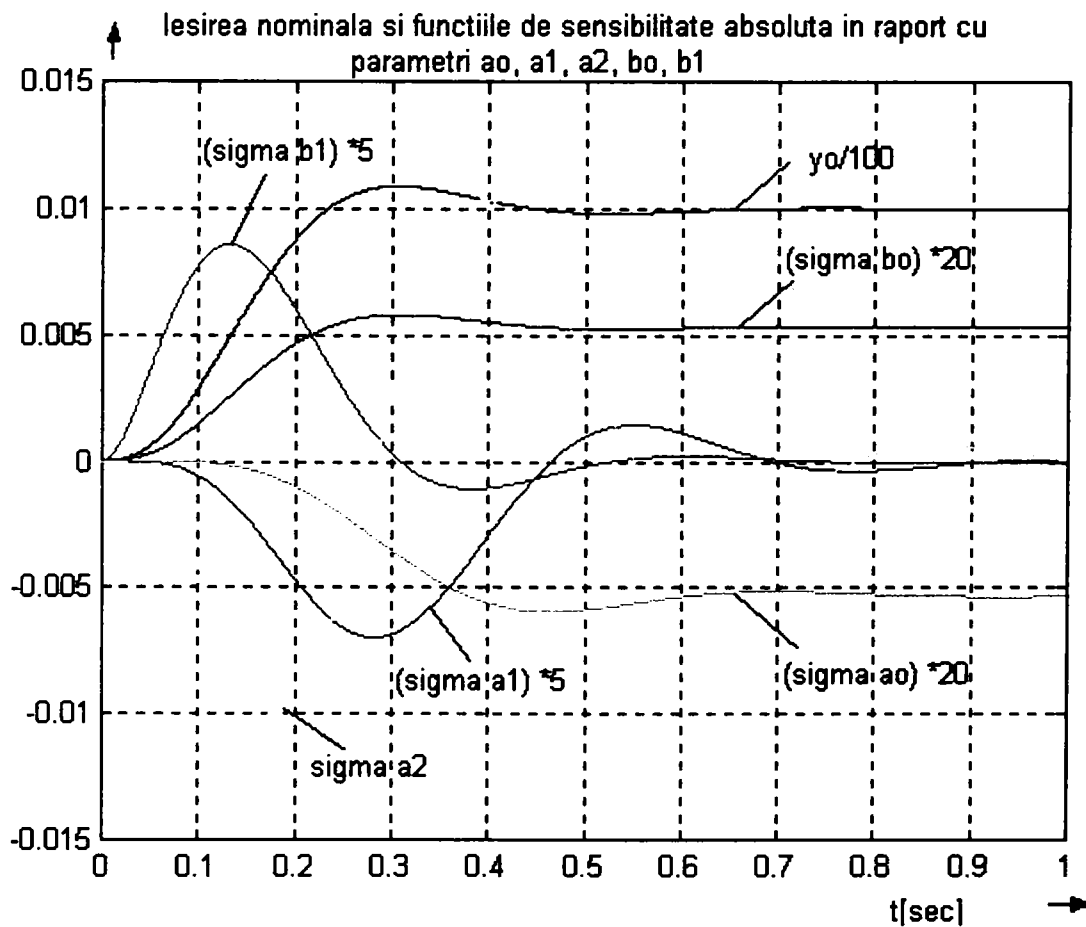


Fig.VIII-3 Funcții de sensibilitate absolută obținute în MATLAB-SIMULINK cu metoda sistemului combinat

Sursele funcțiilor "asens" și "bsens"

```

/*****
/*functie de calcul a sensibilitatii absolute in raport cu un parametru "a"*/
/*****
void asens(int ord,int pa) /*calcul de sensib. in raport cu un parametrul a*/
{
  int i,j;
  int u=1; /*marimea de intrare*/
  float xv[5]; /*vectorul de stare - vechi*/
  float lv[5]; /*vectorul de sensibilitate de stare - vechi*/
  for(i=0;i<5;i++)
  {
    x[i]=xv[i]=0; /*initializari*/
    l[i]=lv[i]=0;
  }
  for(j=0;j<nr_esant;j++)
  {
    s=0;
    y=0;
    for(i=0;i<ord;i++)
    {
      xv[i]=x[i];
      lv[i]=l[i];
      x[i]=l[i]=0;
    }
    for(i=0;i<ord-1;i++)
    {
      x[ord-1]=x[ord-1]-a[i]*xv[i]*h;
      x[i]=xv[i]+h*xv[i+1];
      l[ord-1]=l[ord-1]-a[i]*lv[i]*h;
      l[i]=lv[i]+h*lv[i+1];
    }
    x[ord-1]=x[ord-1]-h*a[ord-1]*xv[ord-1]+xv[ord-1]+u*h;
    if (rampa) u+=h;
    l[ord-1]=l[ord-1]-h*a[ord-1]*lv[ord-1]+lv[ord-1]-x[pa-1]*h;
    for(i=0;i<ord;i++)
    {
      s+=b[i]*l[i];
      y+=b[i]*x[i];
    }

    sig[j]=s;
    yt[j]=y;
  }
}

/*****

```

```

/*functie de calcul a sensibilitatii absolute in raport cu un parametru "b"*/
/*****/
void bsens(int ord,int pb)
{
    int i,j;
    int u=1;          /*marimea de intrare*/
    float xv[5];     /*vectorul de stare - vechi*/
    for(i=0;i<5;i++)
    {
        x[i]=xv[i]=0;
    }
    for(j=0;j<nr_esant;j++)
    {
        s=0;
        y=0;
        for(i=0;i<ord;i++) {
            xv[i]=x[i];
            x[i]=0;
        }
        for(i=0;i<ord-1;i++)
        {
            x[ord-1]=x[ord-1]-a[i]*xv[i]*h;
            x[i]=xv[i]+h*xv[i+1];
        }
        x[ord-1]=x[ord-1]-a[ord-1]*xv[ord-1]*h+xv[ord-1]+u*h;
        if (rampa) u+=h;
        s=x[pb-1];
        for (i=0;i<ord;i++)
        {
            y+=b[i]*x[i];
        }

        sig[j]=s;
        yt[j]=y;
    }
}

```

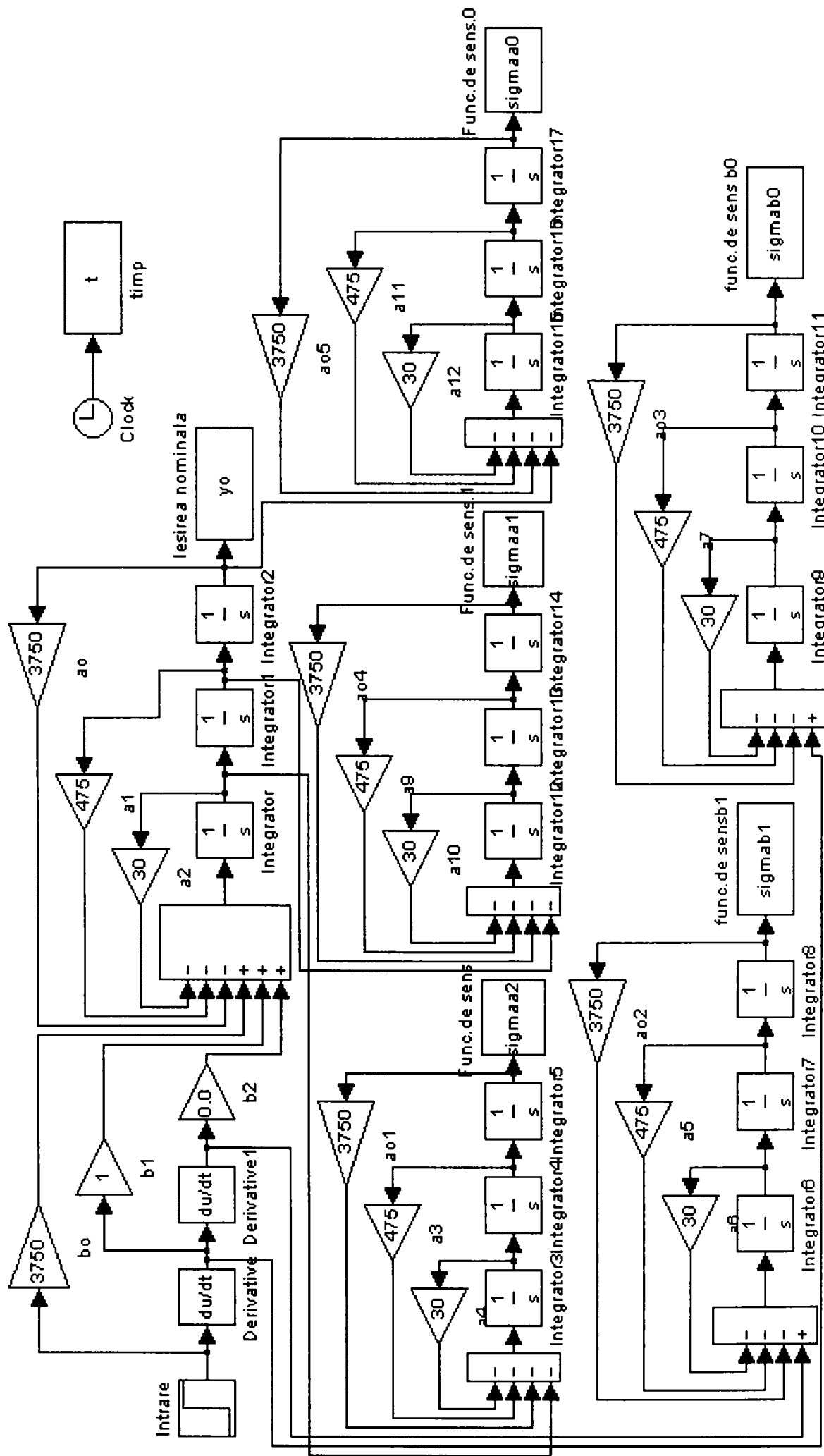


Fig. VIII.4 Schema SIMULINK pentru determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută

Dorina Popescu, Teză de doctorat

ANEXA IX

Calculul numeric al funcțiilor de sensibilitate parametrică

- Studiu comparativ -

Scopul studiului prezentat în această anexă este ilustrarea calculului funcțiilor de sensibilitate cu mijloacele expuse în §2.6 și discutarea rezultatelor obținute pentru cazul unui sistem de ordinul II. Discuția permite relevarea unor aspecte comparative.

Pentru sistemul descris de MM-II :

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \quad \dot{y}(0) = y(0) = 0, \quad u(0_-) = 0 \quad (\text{IX.1})$$

având parametri nominali: $a_{2,0}=1$, $a_{1,0}=1$, $a_{0,0}=3$, $b_{1,0}=0.1$, $b_{0,0}=1$ și semnal treaptă unitară la intrare, se determină și se compară funcțiile de sensibilitate absolută în raport cu toți parametri: a_2 , a_1 , a_0 , b_1 , b_0 , obținute:

1. Folosind mediul MATLAB conform celor descrise în §2.6.1 corelat cu metoda directă descrisă în §2.2.1.
2. Folosind funcțiile MATLAB noi, propuse în §2.6.2.
3. Folosind programul CN-FS descris în Anexa VIII.

Pentru toate cele trei situații s-a folosit un pas de calcul de 0.01 secunde. În final se face analiza rezultatelor.

1. Folosind mediul MATLAB conform celor descrise în §2.6.1.

Pe baza MM-II se determină funcția de transfer a sistemului:

$$H(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad (\text{IX.2})$$

Fie $\underline{\alpha} = [a_2, a_1, a_0, b_1, b_0]$, evident $\underline{\alpha}_0 = [1, 1, 3, 0.1, 1]$.

Determinarea imaginii operaționale a f.d.s. se face prin aplicarea relației (2.2.1.2) pentru fiecare parametru în parte. Se obține:

$$\sigma_{a_0}(s, \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(s, \underline{\alpha})}{\partial a_0} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(s) = - \frac{b_1 \cdot s + b_0}{(a_{2,0} \cdot s^2 + a_{1,0} \cdot s + a_{0,0})^2} \cdot u(s) \quad (\text{IX.3})$$

$$\sigma_{a_1}(s, \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(s, \underline{\alpha})}{\partial a_1} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(s) = - \frac{(b_1 \cdot s + b_0) \cdot s}{(a_{2,0} \cdot s^2 + a_{1,0} \cdot s + a_{0,0})^2} \cdot u(s) \quad (\text{IX.4})$$

$$\sigma_{a_2}(s, \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(s, \underline{\alpha})}{\partial a_2} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(s) = - \frac{(b_1 \cdot s + b_0) \cdot s^2}{(a_{2,0} \cdot s^2 + a_{1,0} \cdot s + a_{0,0})^2} \cdot u(s) \quad (\text{IX.5})$$

$$\sigma_{b_0}(s, \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(s, \underline{\alpha})}{\partial b_0} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(s) = \frac{1}{a_{2,0} \cdot s^2 + a_{1,0} \cdot s + a_{0,0}} \cdot u(s) \quad (\text{IX.6})$$

$$\sigma_{b_1}(s, \underline{\alpha}_0) = \left. \frac{\partial H(s, \underline{\alpha})}{\partial b_1} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} \cdot u(s) = \frac{s}{a_{2,0} \cdot s^2 + a_{1,0} \cdot s + a_{0,0}} \cdot u(s) \quad (\text{IX.7})$$

Prin simularea MATLAB a relațiilor (IX.3)÷ (IX.7), pentru semnal treaptă unitară la intrare, s-au obținut curbele din fig. IX -1.

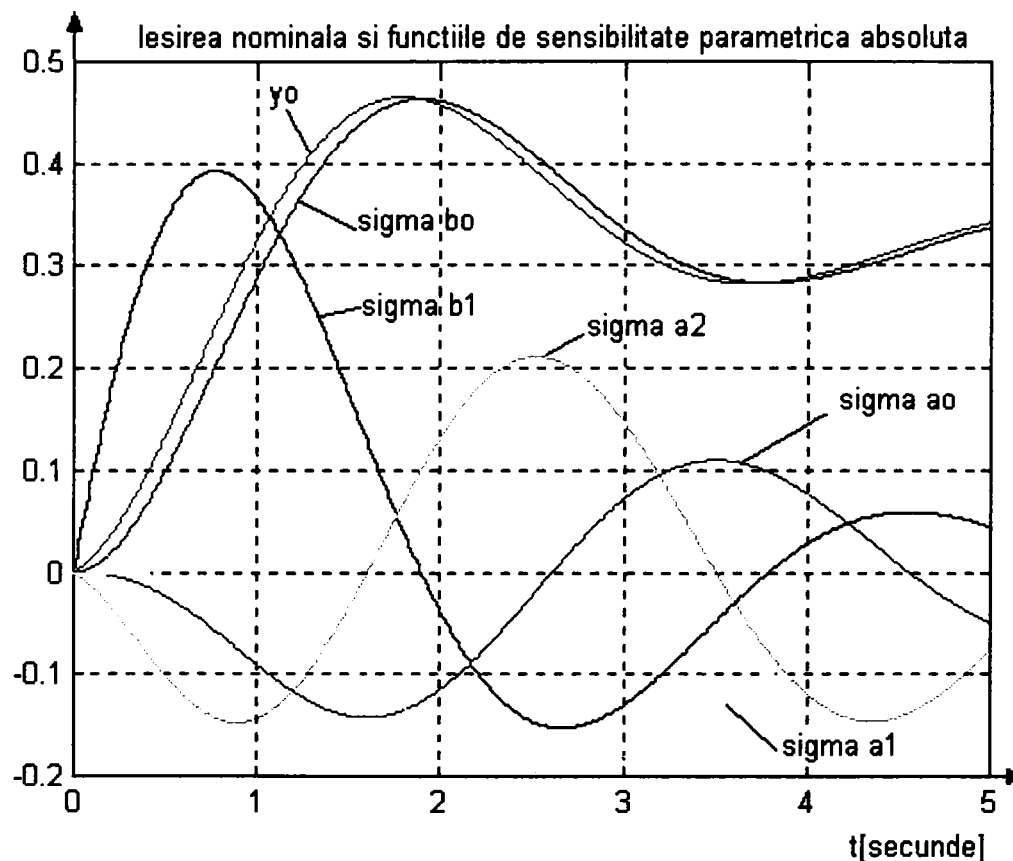


Fig.IX-1 Funcțiile de sensibilitate obținute analitic și simulate cu MATLAB

Programul MATLAB utilizat la simulare este:

```
%Calculul functiilor de sensibilitate absoluta
%in raport cu parametri a0,a1,a2,b0,b1, pentru sistemul descris
% de f.d.t. H(s)=(b1*s+b0)/(a2*s^2+a1*s+a0)
a0=3;a1=1;a2=1;b0=1;b1=0.1; % parametri nominali ai procesului
h=0.01; % pasul de calcul
t=0:h:500*h; % intervalul de timp
num=[b1,b0];den=[a2,a1,a0]; % functia de transfer
numsa0=-num;densa0=conv(den,den); % dH/da0
numsa1=conv(-num,[1,0]);densa1=conv(den,den); % dH/da1
numsa2=conv(-num,[1,0,0]);densa2=conv(den,den); % dH/da2
```

```

numsb0=1;densb0=den; % dH/db0
numsb1=[1,0];densb1=den; % dH/db1
yo=step(num,den,t); %calculul iesirii nominale
sb0=step(numsb0,densb0,t); %Calculul f.d.s abs in raport cu b0
sb1=step(numsb1,densb1,t); %Calculul f.d.s abs in raport cu b1
sa0=step(numsa0,densa0,t); %Calculul f.d.s abs in raport cu a0
sa1=step(numsa1,densa1,t); %Calculul f.d.s abs in raport cu a1
sa2=step(numsa2,densa2,t); %Calculul f.d.s abs in raport cu a2
plot(t,sb1,t,sb0,t,yo,t,sa2,t,sa1,t,sa0),grid %Reprez.grafica

```

2. Folosind funcțiile MATLAB, propuse în §2.6.2.

Programul MATLAB utilizat la calculul tuturor funcțiilor de sensibilitate parametrică precum și la calculul ieșirii nominale este:

```

% Descrierea modelului nominal al sistemului.
num=[0.1,1];
den=[1,1,3];
% Descrierea intervalului de timp si a marimii de intrare.
t=0:0.01:5; u=1-t+t;
% Calculul functiilor de sensibilitate în raport cu parametri
% "a"respectiv "b".
Sa=sigmaa(num,den,u,t); Sb=sigmab(num,den,u,t);
% Calculul iesirii nominale.
y=lsim(num,den,u,t);
% Reprezentarea grafica a iesirii nominale si a functiilor de
% sensibilitate parametrica.
plot(t,y,t,Sa,t,Sb),grid
% end

```

Ca rezultat al simulării acestui program s-au obținut curbele prezentate în fig. IX-2

3. Folosind programul CN-FS.

Prin rularea programului CN-FS s-au obținut funcțiile de sensibilitate parametrică absolută în raport cu toți parametri pe un interval de timp de 5 secunde, cu un pas de eșantionare de 0.01 secunde, pentru semnal treaptă unitate la intrare, reprezentate grafic în fig. IX-3.

4. Analiza rezultatelor.

Comparând rezultatele din fig.IX-1, fig.IX-2 și fig. IX-3, rezultă următoarele concluzii:

- După cum era de așteptat între între curbele din fig.IX-1 și fig.IX-2 nu există nici o diferență. Acest lucru se explică prin faptul că, principial, se folosesc aceleași tehnici de calcul.

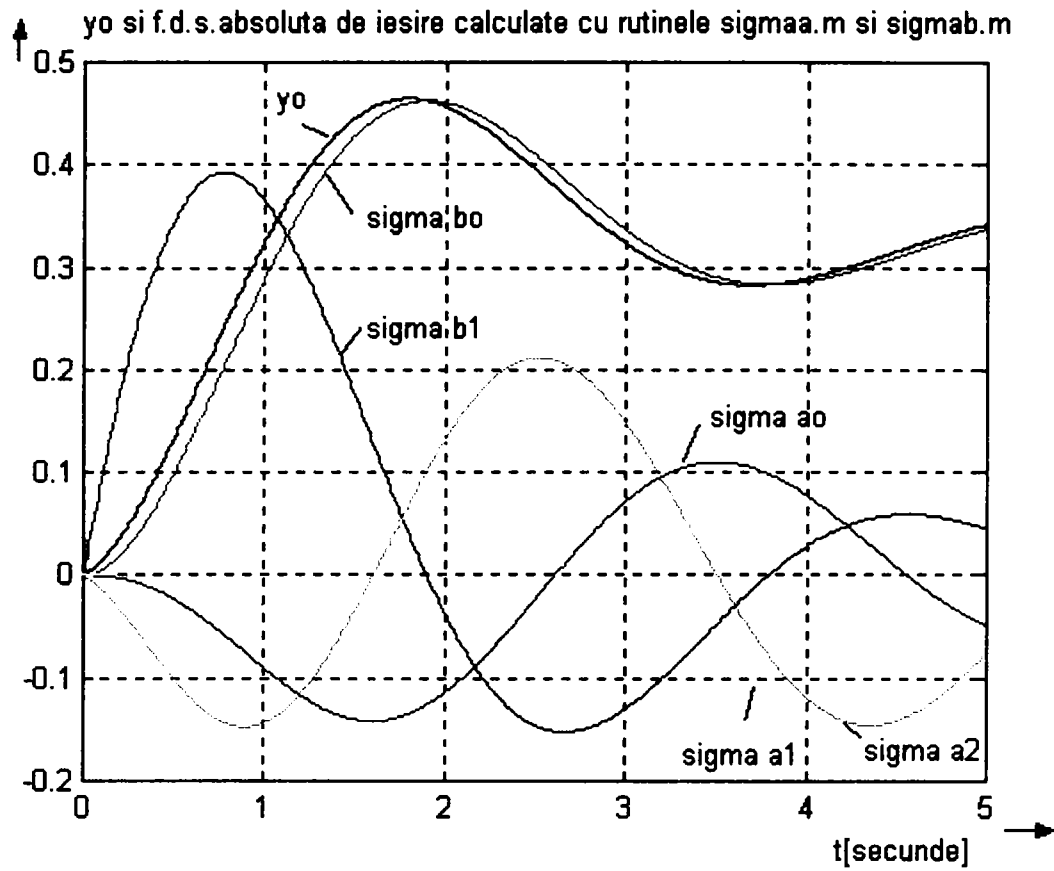


Fig.IX-2 Funcțiile de sensibilitate parametrică și ieșirea nominală calculate cu funcțiile MATLAB noi

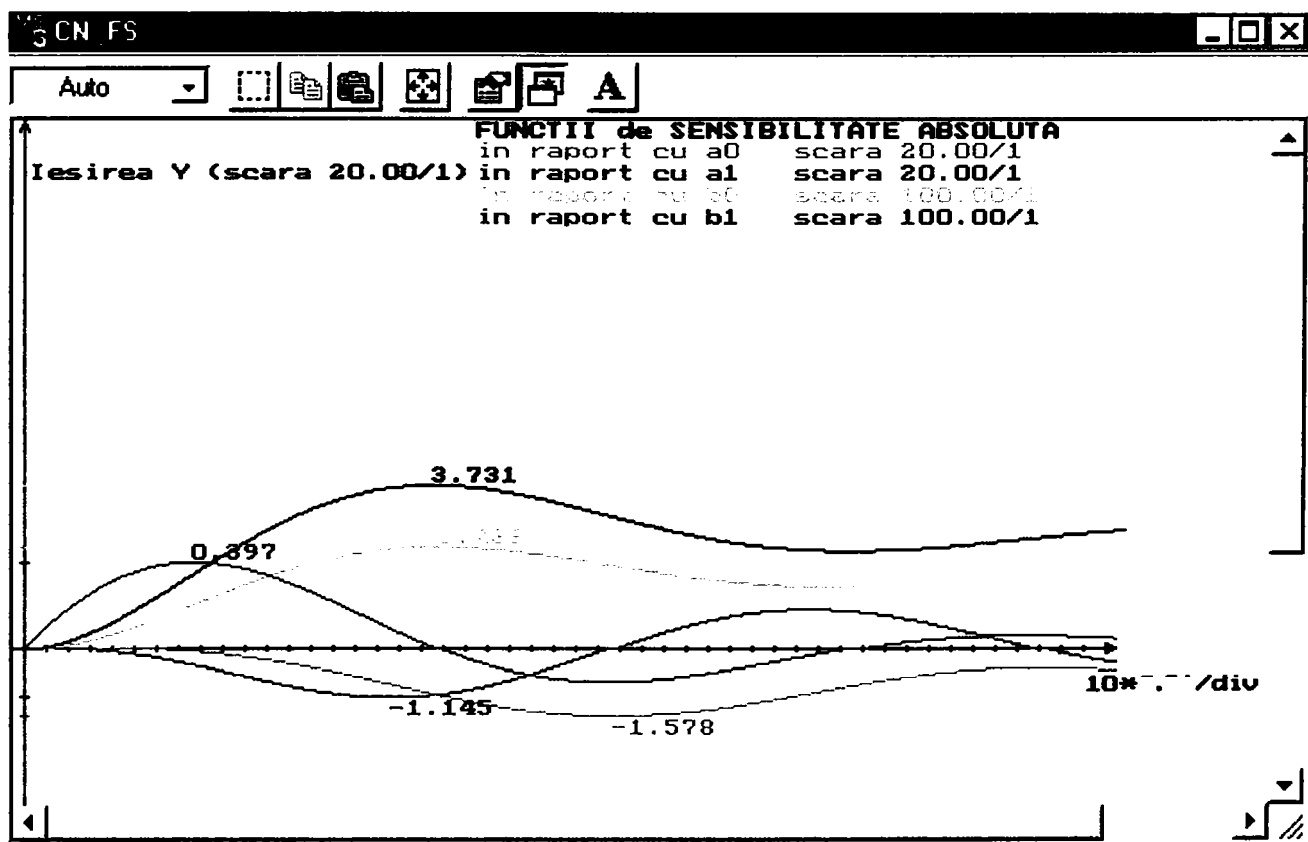


Fig.IX-3 Funcțiile de sensibilitate aferente sistemului (IX.1) obținute cu programul CN-FS

Folosirea funcțiilor care au dus la graficele din fig.IX.2 prezintă însă avantajul, notabil, al reducerii substanțiale a efortului necesar obținerii rezultatelor. Pentru situațiile în care se dorește corelarea f.d.s. în raport cu parametri fizici cu cele în raport cu parametri matematici se pot completa programele MATLAB (ambele variante) cu expresii care implementează relații de tipul (2.1.3.14).

- Între curbele din fig.IX-1 și fig.IX-2, pe de-o parte, și cele din fig.IX-3, pe de altă parte, există mici diferențe. Ele erau anticipabile și se explică prin faptul că utilizarea calculului numeric se desfășoară, în scopul reducerii volumului de calcule pentru a obține un efect de supervizare în timp real, în "bucă deschisă", adică printr-un algoritm care nu controlează eroarea de aproximare la fiecare pas de calcul.
- Funcțiile de sensibilitate calculate atrag atenția asupra unui aspect foarte important pentru aplicațiile de identificare a sistemelor: erorile de identificare sunt diferite pentru coeficienții care apar în modelele matematice. Calitativ rezultatul este "de bun simț". Tehnica folosită, bazată pe funcțiile de sensibilitate, permite o corelare cantitativă a acestor erori, respectiv a efectului lor asupra erorii de modelare globală.

Totodată, comparând cele două categorii de funcții de sensibilitate, se poate trage concluzia că operația de aproximare conduce la rezultate complet acceptabile pe intervale de timp de lungime $(1.5 \div 2)T_{\max}$ unde T_{\max} este cea mai mare constantă de timp a sistemului analizat.

ANEXA X

Determinarea funcțiilor de sensibilitate parametrică ale SRA din §3.2

În această anexă se prezintă “uneltele” (schema SIMULINK și programele MATLAB) și modul în care au fost ele utilizate la obținerea funcțiilor de sensibilitate parametrică necesare studiului din §3.2.

Astfel, pornind de la sistemul combinat reprezentat în fig.3.2.3-1, s-a construit schema SIMULINK din fig.X-1.

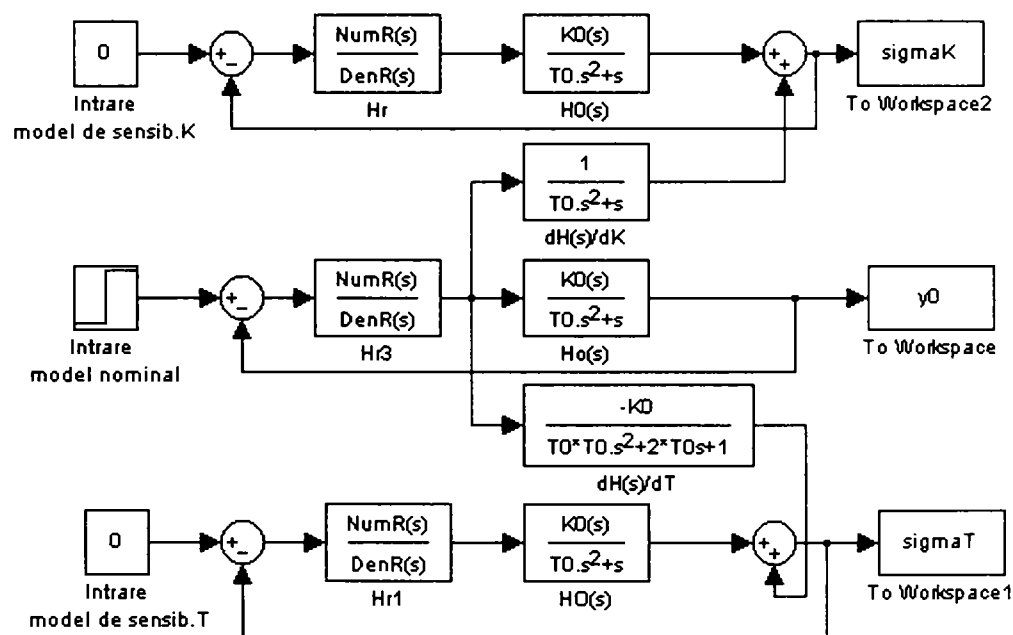


Fig.X-1 Schema simulink aferentă sistemului combinat

Schema de simulare din fig.X-1 a fost folosită pentru cazurile A, B, C. Înainte de utilizarea sa, pentru fiecare caz, este necesară descrierea parametrilor nominali și a f.d.t. aferent blocului regulator, fapt realizat prin următoarele programe MATLAB.

```
%PROGRAM de pregătire a simulării f.d.s ale SRA cu RG-P
%
%Parametri nominali ai procesului si parametri regulatorului
K0=28000;
T0=0.15;
Kr=1/(2*T0*K0);
%Descrierea f.d.t. a regulatorului
NumR=[Kr];
DenR=[1];
%end
```

```
%PROGRAM de pregătire a simulării f.d.s ale SRA cu RG-PI
%
%Parametri nominali ai procesului și parametri regulatorului
K0=28000;
T0=0.15;
Ki=1/(2*T0*K0);
Ti=4*T0;
%Descrierea f.d.t. a regulatorului
NumR=Ki*[Ti,1];
DenR=[Ti,0];
%end
```

```
%PROGRAM de pregătire a simulării f.d.s ale SRA cu RG-PDT1
%
%Parametri nominali ai procesului și parametri regulatorului
K0=28000;
T0=0.15;
Kr=1/(2*T0*K0);
Td=T0;
Tf=T0/20;
%Descrierea f.d.t. a regulatorului
NumR=Kr*[Td,1];
DenR=[Tf,1];
%end
```

În urma simulării schemei din fig.X-1, în mediul MATLAB, sunt disponibile pentru alte prelucrări (reprezentări grafice, alte calcule) valorile nominale ale ieșirii și f.d.s., sub denumirile:

y0
sigmaK
sigmaT

Pentru a nu se crea confuzii, aceste mărimi au fost redenumite după fiecare caz simulat.

Pentru cazul D simulările s-au efectuat cu programul:

```
% PROGRAM DE CALCUL A FUNCTIILOR DE SENSIBILITATE
% SI ABATERILOR SISTEMULUI DIN §3.2 CAZUL D
% pentru deltaK=1;2;5;10% și deltaT=1;2;5;10%

% Descrierea intervalului de timp pentru care se face
simularea;
t=0:0.005:2;
% Descrierea valorilor nominale ale parametrilor procesului
K0=28000;
T0=0.15;
%Descrierea valorilor parametrilor compensatorului
csi=sqrt(2)/2;
```

```

w0=sqrt(2)/T0;%S-au studiat doua
variante:w0=sqrt(1)/T0;w0=sqrt(2)/T0;
f1=T0/K0*((w0)^2);
f2=(2*csi*T0*w0-1)/K0;
g=f1;
%Descrierea MM-ISI al sistemului combinat;
A=[0,1,0,0,0,0
   -K0*f1/T0,-(1+K0*f2)/T0,0,0,0,0
   0,0,0,1,0,0
   -f1/T0,-f2/T0,-K0*f1/T0,-(1+K0*f2)/T0,0,0
   0,0,0,0,0,1
   K0*f1/T0/T0,(1+K0*f2)/T0/T0,0,0,-K0*f1/T0,-(1+K0*f2)/T0];
B=[0;K0/T0;0;1/T0;0;-K0/T0/T0]*g;
C=[1,0,0,0,0,0
   0,0,1,0,0,0
   0,0,0,0,1,0];
D=[0;0;0];
%Calculul raspunsului nominal si al functiilor de
sensibilitate la semnal treapta;
y=step(A,B,C,D,1,t);
yo=y(:,1);sigmaK=y(:,2);sigmaT=y(:,3);
%reprezentarea grafica a celor calculate;
plot(t,yo,t,sigmaK*20000,t,sigmaT),grid
pause
%Calculul functiilor de sensibilitate semirelative;
sigmaKr=y(:,2)./y(:,1);sigmaTr=y(:,3)./y(:,1);
%reprezentarea grafica a functiilor de sensibilitate
semirelative;
plot(t,yo,t,sigmaKr*20000,t,sigmaTr/5),grid
%Calculul abaterilor iesirii cu ajutorul functiilor de
sensibilitate
deltaK=K0*[-1,-2,-5,-10,1,2,5,10]/100;
deltaT=T0*[-1,-2,-5,-10,1,2,5,10]/100;
for i=1:8
    deltayK(:,i)=sigmaK*deltaK(i);
    deltayT(:,i)=sigmaT*deltaT(i);
end
%Calculul abaterilor iesirii cu ajutorul unui model al
sistemului perturbat
for i=1:8
    K=K0+deltaK(i);T=T0
    a=[0,1;-(K/T)*f1,-(1+K*f2)/T];
    b=g*[0;K/T];
    c=[1,0];d=[0];
    yrK(:,i)=step(a,b,c,d,1,t)-yo;
end
for i=1:8
    T=T0+deltaT(i);K=K0
    a=[0,1;-(K/T)*f1,-(1+K*f2)/T];
    b=g*[0;K/T];
    c=[1,0];d=[0];

```

```

yrT(:,i)=step(a,b,c,d,1,t)-yo;
end
%reprezentarea grafica a abaterilor iesirii
subplot(121),plot(t,deltayK),grid
subplot(122),plot(t,yrK),grid,pause
subplot(121),plot(t,deltayT),grid
subplot(122),plot(t,yrT),grid,pause
%reprezentarea grafica a abaterilor relative ale iesirii
subplot(121),plot(t,deltayK./yo),grid
subplot(122),plot(t,deltayT./yo),grid

```

Ultima parte din acest program a fost reluată și utilizată și pentru trasarea grafică a unora din curbele aferente celorlalte cazuri.

Datele numerice obținute în urma efectuării simulărilor au condus la graficele din fig.X-2 ÷ X-22.

În fig.X-2 s-au reprezentat, pe același grafic, evoluțiile mărimilor de ieșire ale celor 4 sisteme de reglare automată considerate, la valorile nominale ale parametrilor, pentru a fixa "referința" față de care acționează abaterile parametrilor de la valorile nominale.

Funcțiile de sensibilitate parametrică absolută sunt prezentate în fig.X-3, X-5, X-7, X-9.

Funcțiile de sensibilitate semirelativă sunt prezentate în fig.X-4, X-6, X-8, X-10. Se remarcă valori semnificative datorate lui $y_0=0$ la $t=0$.

Asemănarea dintre comportarea ieșirii SRA cu RG-P și cea a SRA cu compensator este valabilă și în ceea ce privește funcțiile de sensibilitate (fig.X-3, X-4, X-9, X-10). Diferența apare pe axa timpului.

Figurile X-11 ÷ X-18 redau abaterile absolute ale ieșirilor SRA studiate, considerate pentru abateri ale parametrilor cuprinse între -10% (-0.1) și +10% (0.1) din valorile nominale.

Figurile X-19 ÷ X-22 redau abaterile relative ale ieșirilor SRA studiate, considerate pentru abateri ale parametrilor cuprinse între -10% (-0.1) și +10% (0.1) din valorile nominale.

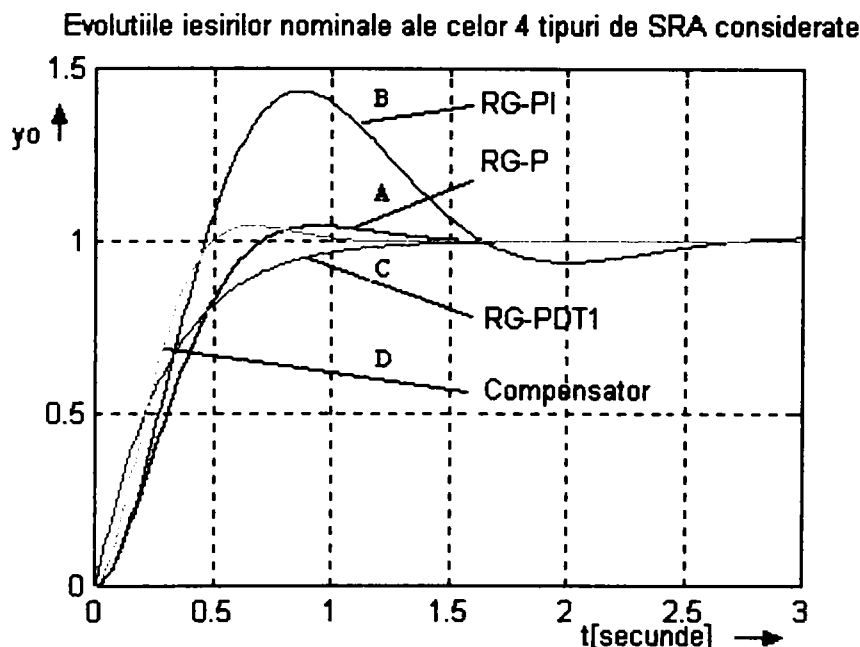


Fig.X-2 Ieșirile nominale ale SRA considerate

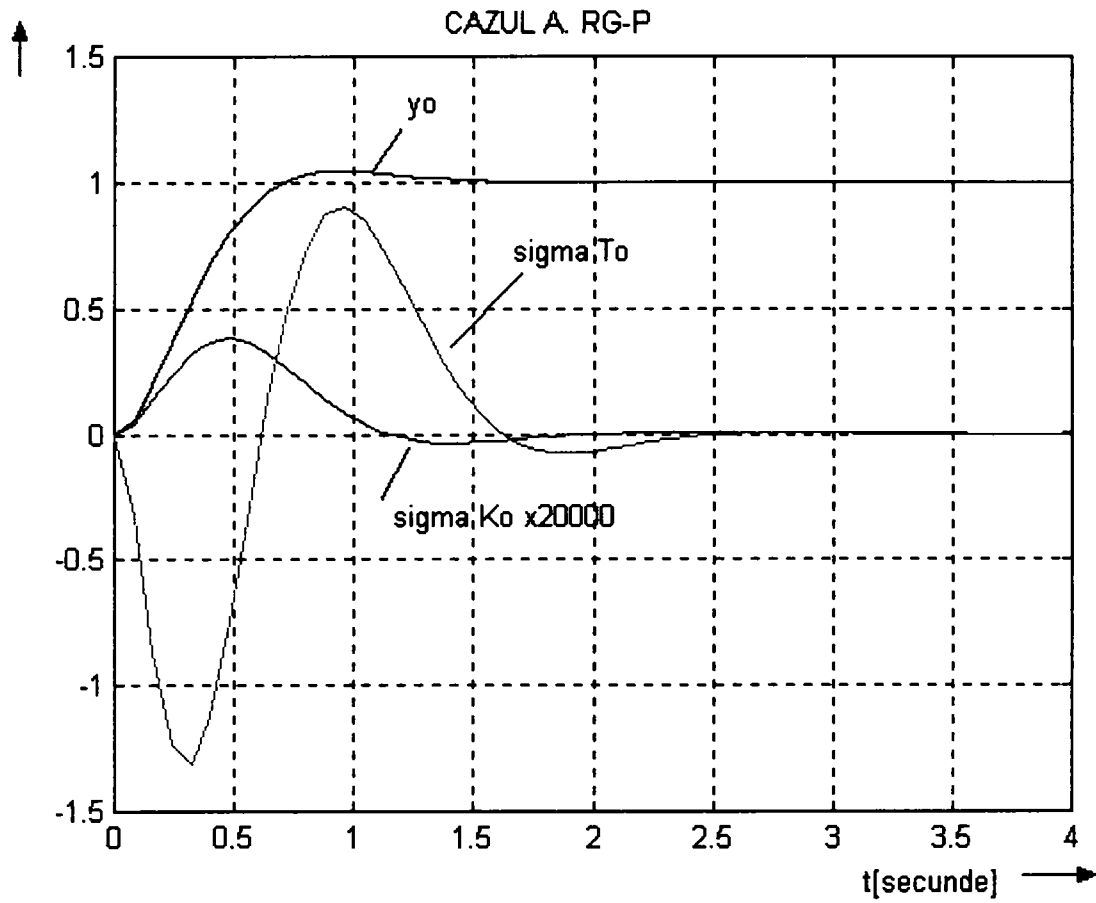


Fig.X-3 ieșirea nominală și funcțiile de sensibilitate absolută ale sistemului cu regulator P

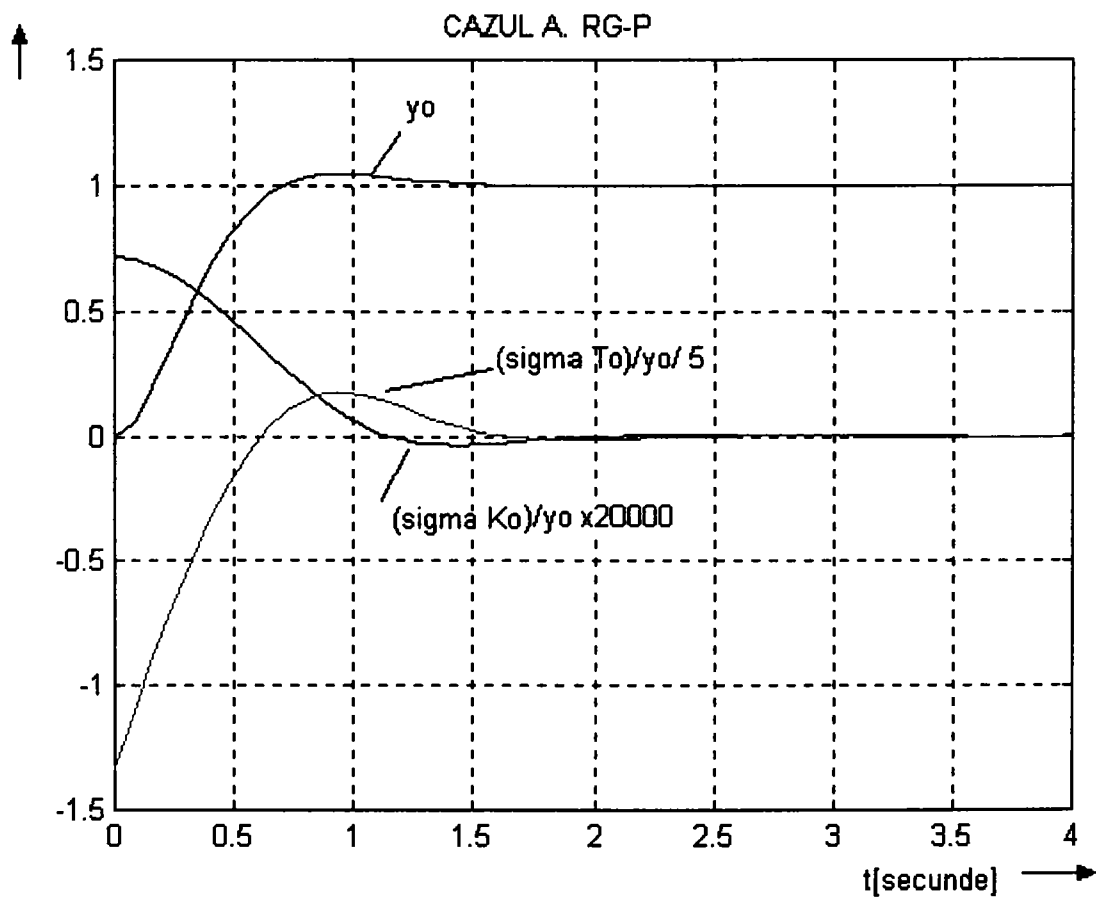


Fig.X-4 ieșirea nominală și funcțiile de sensibilitate semirelativă ale sistemului cu regulator P

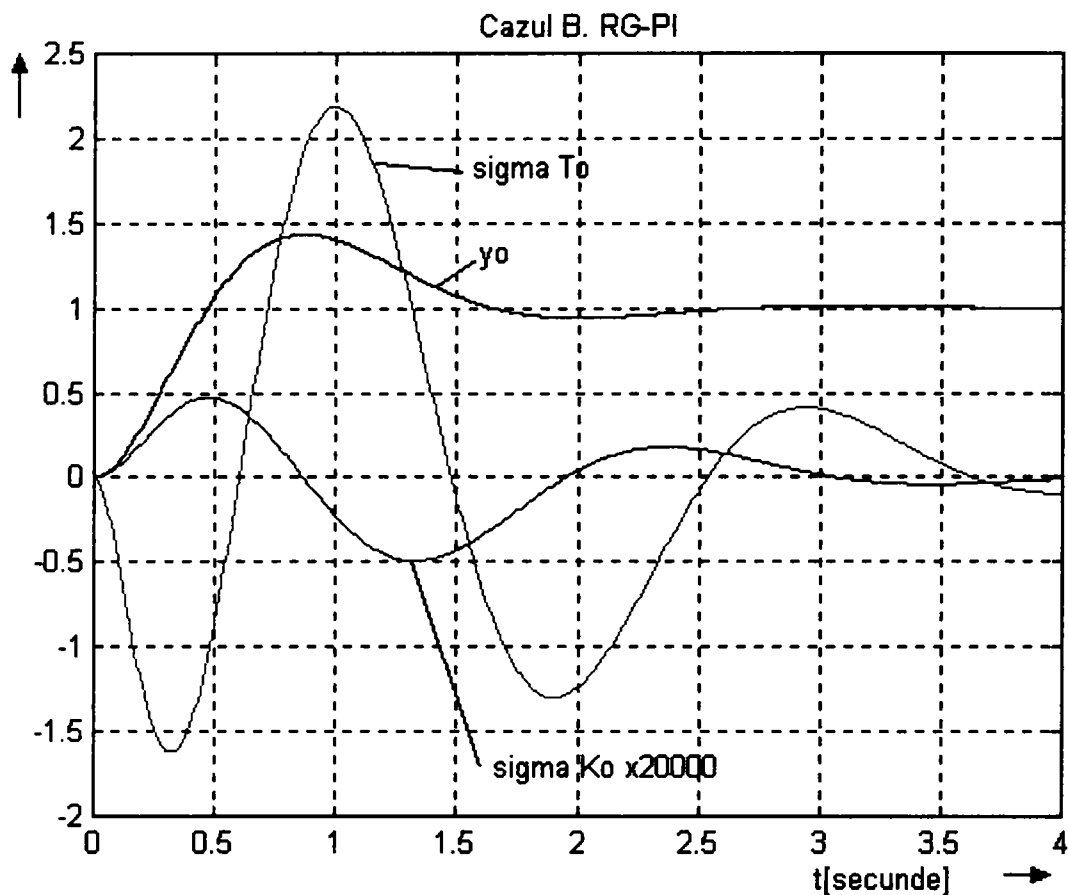


Fig.X-5 Ieșirea nominală și funcțiile de sensibilitate absolută ale sistemului cu regulator PI

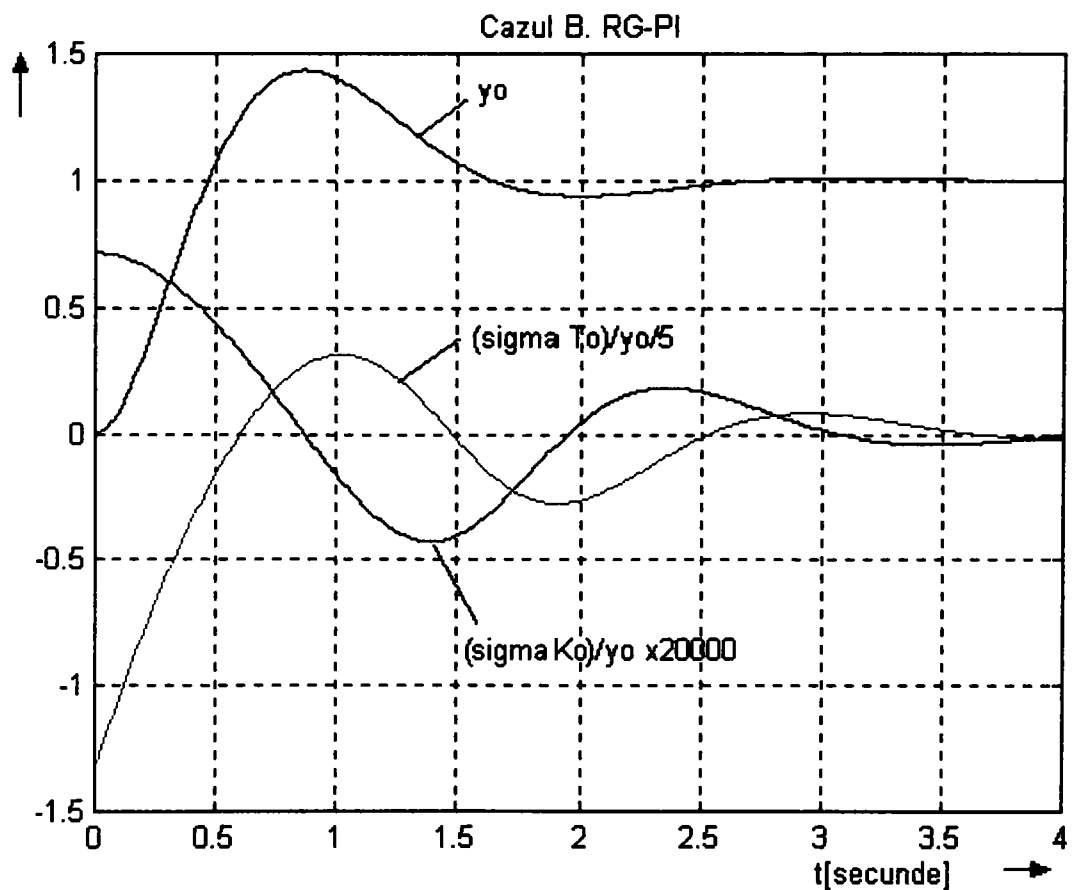


Fig.X-6 Ieșirea nominală și funcțiile de sensibilitate semirelativă ale sistemului cu regulator PI

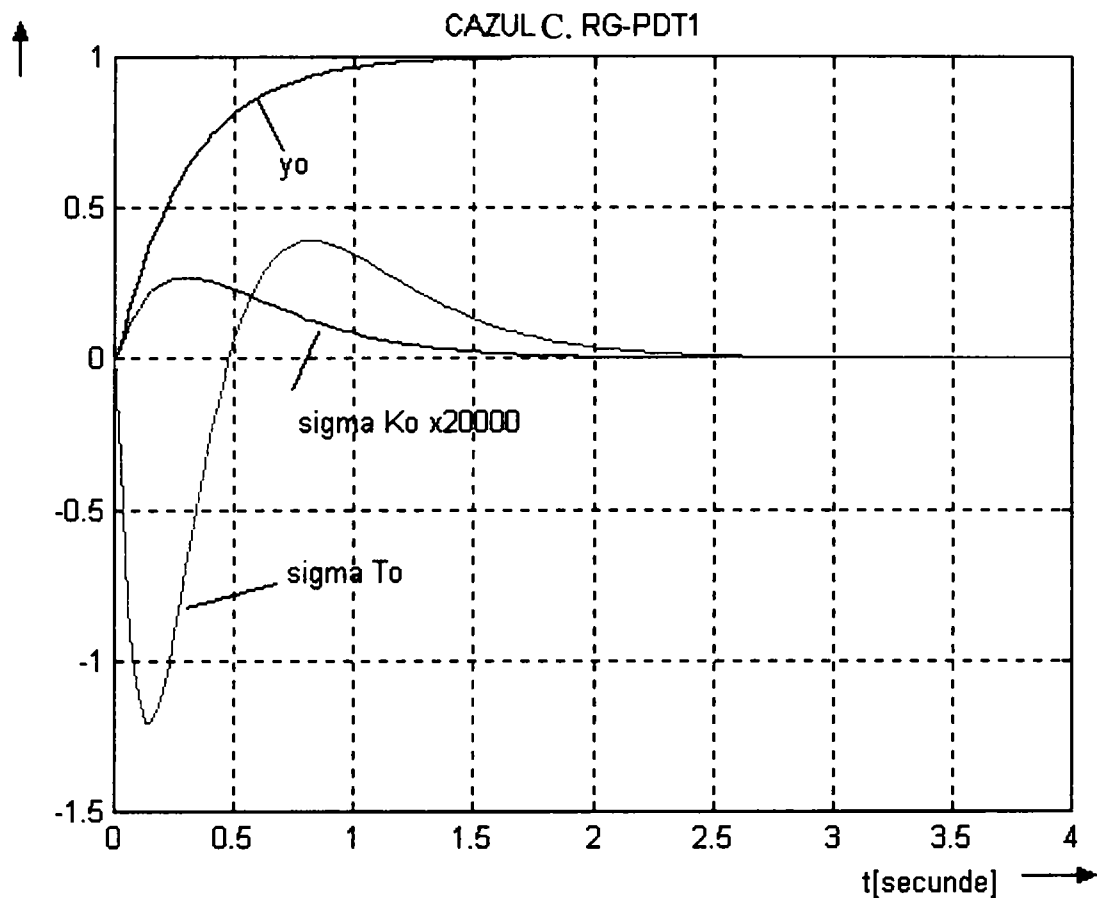


Fig.X-7 ieșirea nominală și funcțiile de sensibilitate absolută ale sistemului cu regulator PDT1

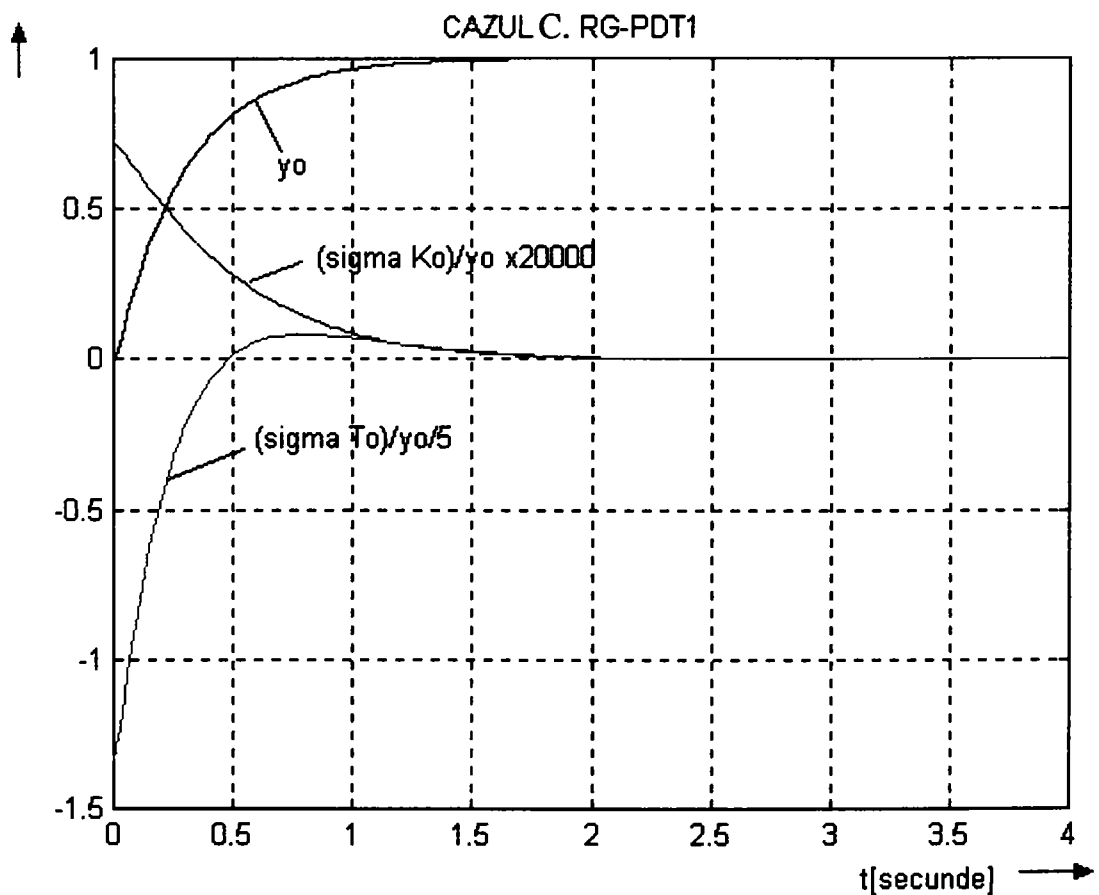


Fig.X-8 ieșirea nominală și funcțiile de sensibilitate semirelativă ale sistemului cu regulator PDT1

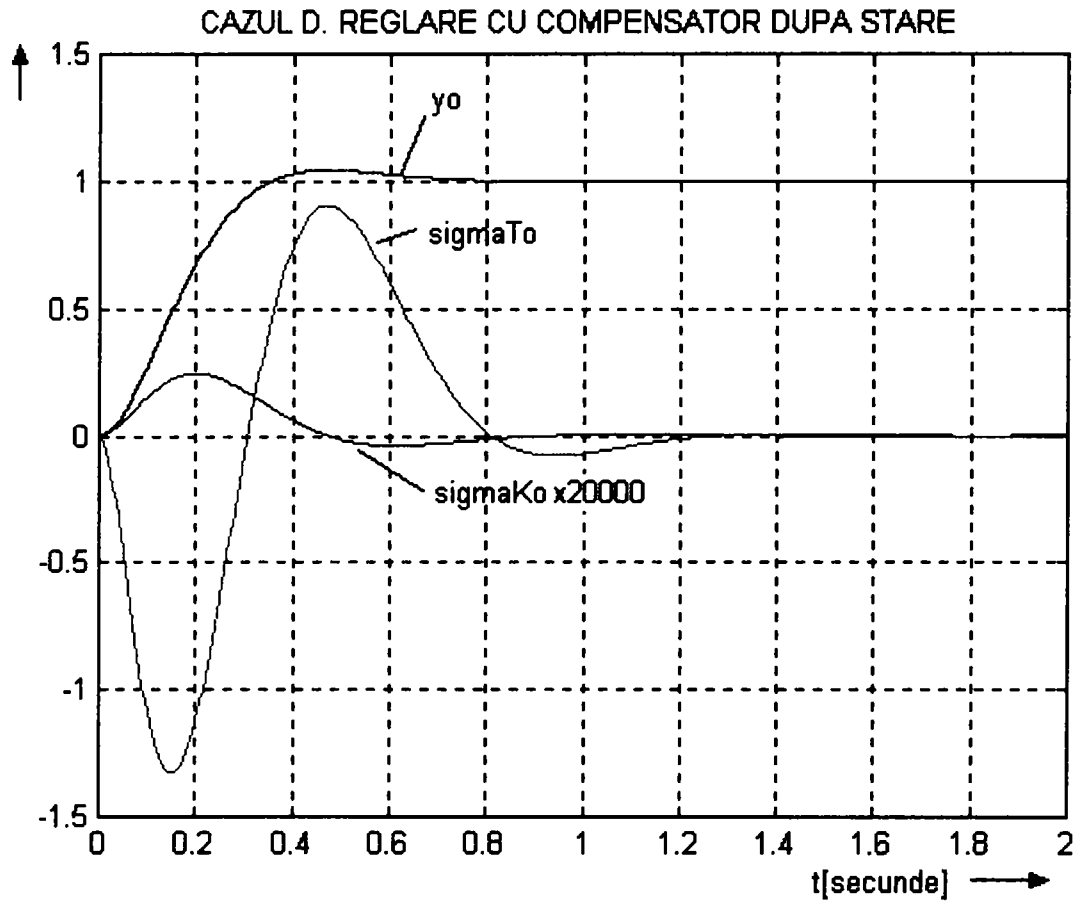


Fig.X-9 Ieșirea nominală și funcțiile de sensibilitate absolută ale sistemului cu compensator

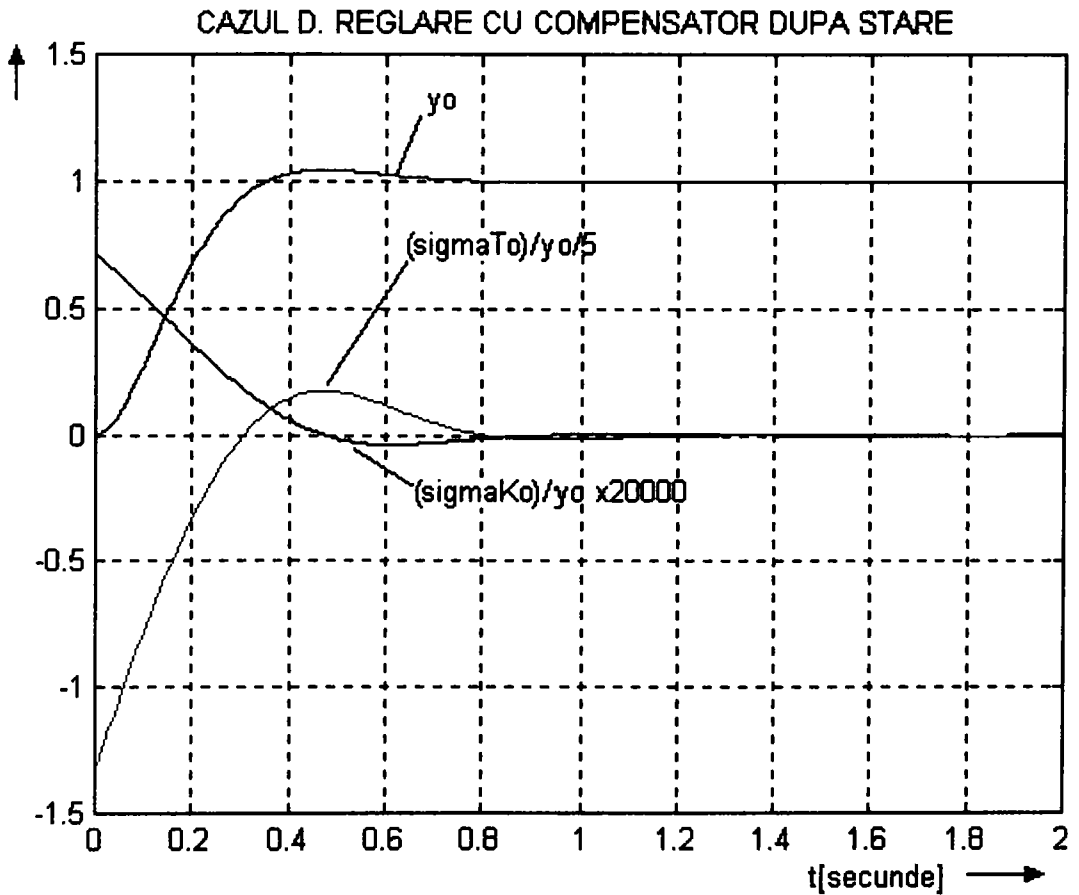


Fig.X-10 Ieșirea nominală și funcțiile de sensibilitate semirelativă ale sistemului cu compensator

A. Evoluția abaterilor absolute ale SRA cu RG-P datorate abaterilor parametrului K

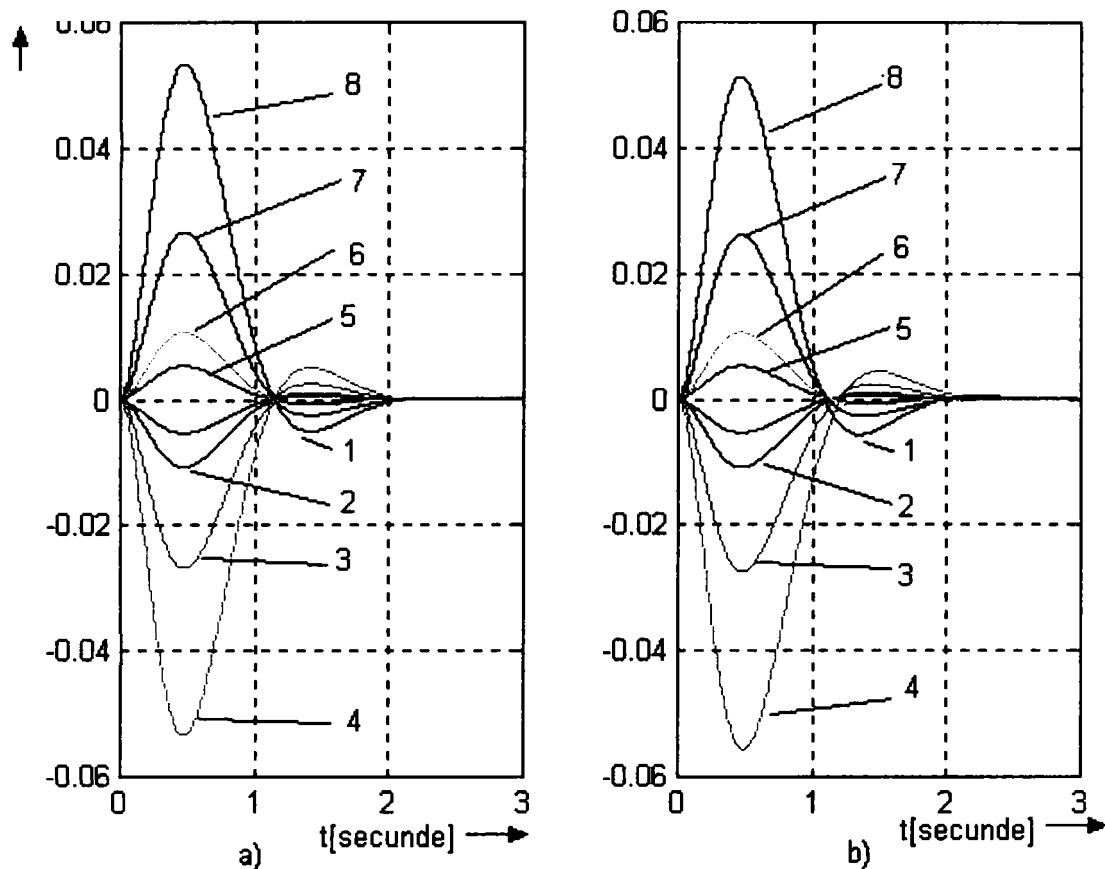


Fig.X-11 Abaterile absolute ale SRA cu RG-P datorate abaterilor parametrului K:

a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta K = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \% \text{ din } K_0$

b) calculate pe baza simulării unui model al sistemului real, pentru $\Delta K = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \% \text{ din } K_0$

A. Evoluția abaterilor absolute ale SRA cu RG-P datorate abaterilor parametrului T

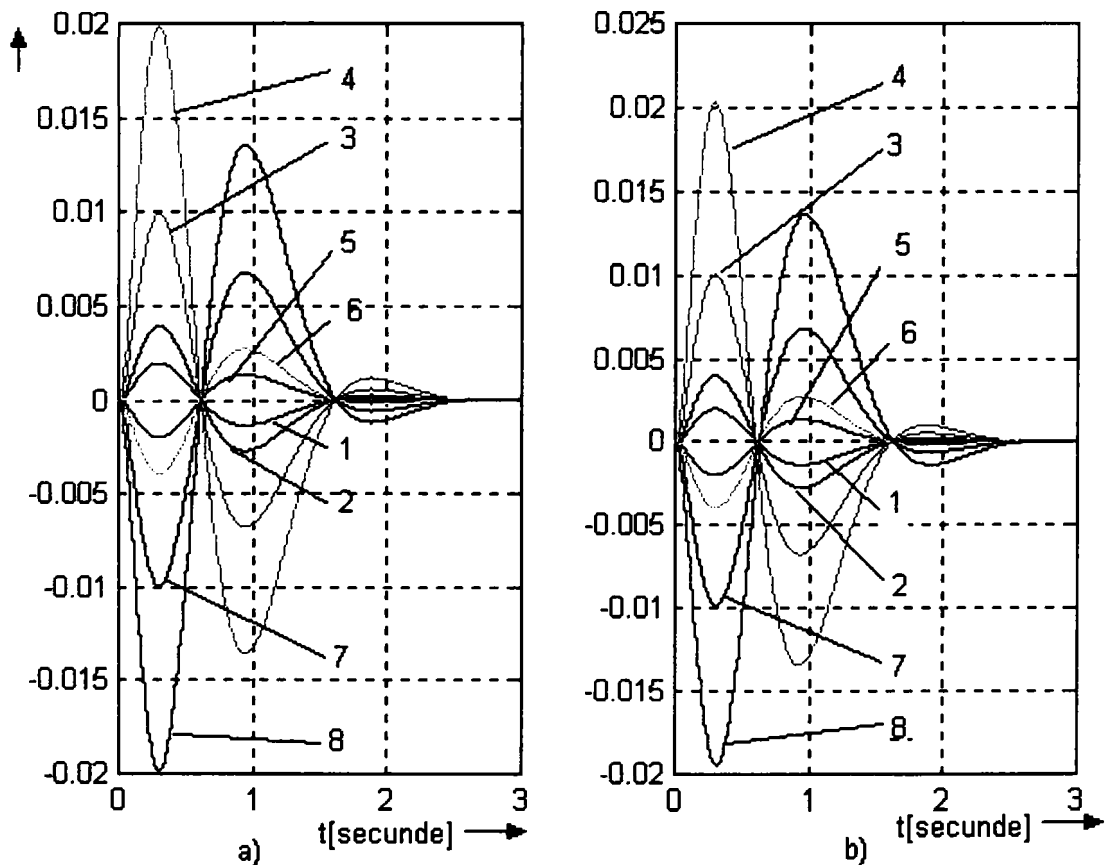


Fig.X-12 Abaterile absolute ale SRA cu RG-P datorate abaterilor parametrului T:

a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta T = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \% \text{ din } T_0$

b) calculate pe baza simulării unui model al sistemului real, pentru $\Delta T = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \% \text{ din } T_0$

B. Evoluția abaterilor absolute ale SRA cu RG-PI datorate abaterilor parametrului K

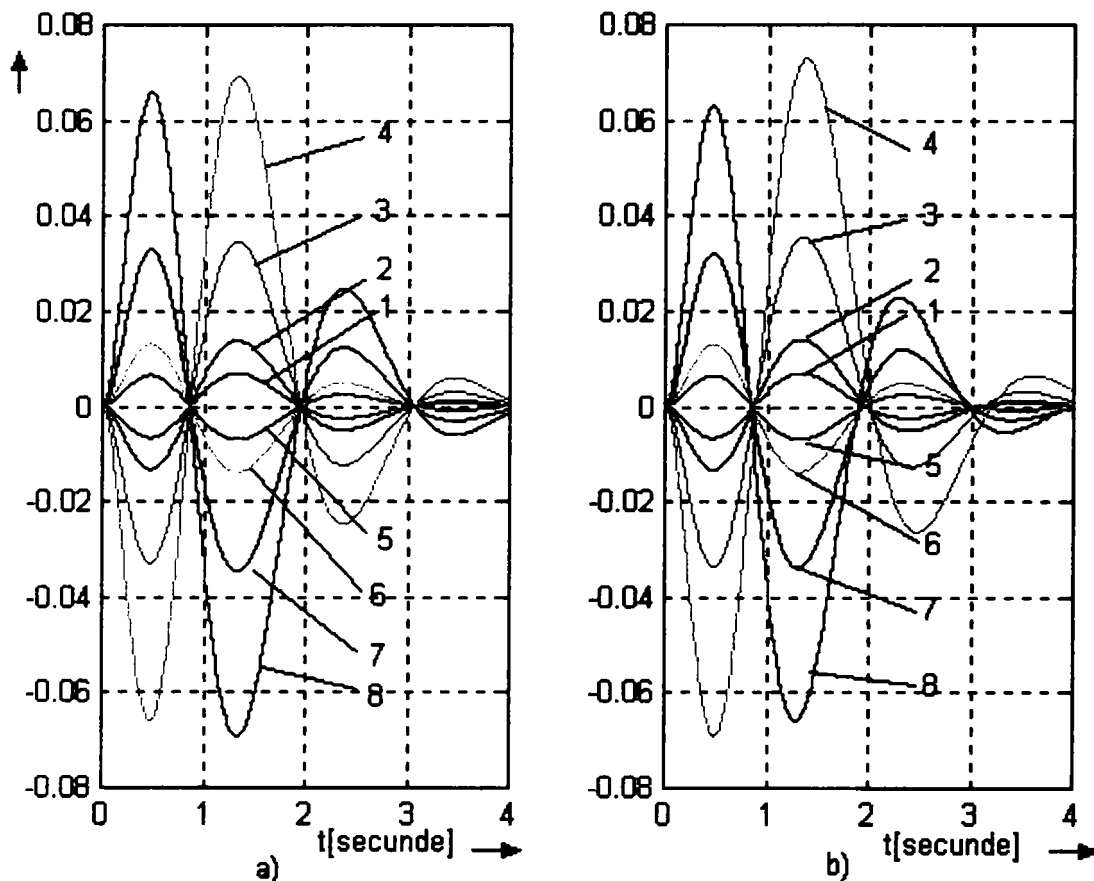


Fig.X-13 Abaterile absolute ale SRA cu RG-PI datorate abaterilor parametrului K:

- a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta K = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \% \text{ din } K_0$
- b) calculate pe baza simulării unui model al sistemului real, pentru $\Delta K = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \% \text{ din } K_0$

B. Evoluția abaterilor absolute ale SRA cu RG-PI datorate abaterilor parametrului T

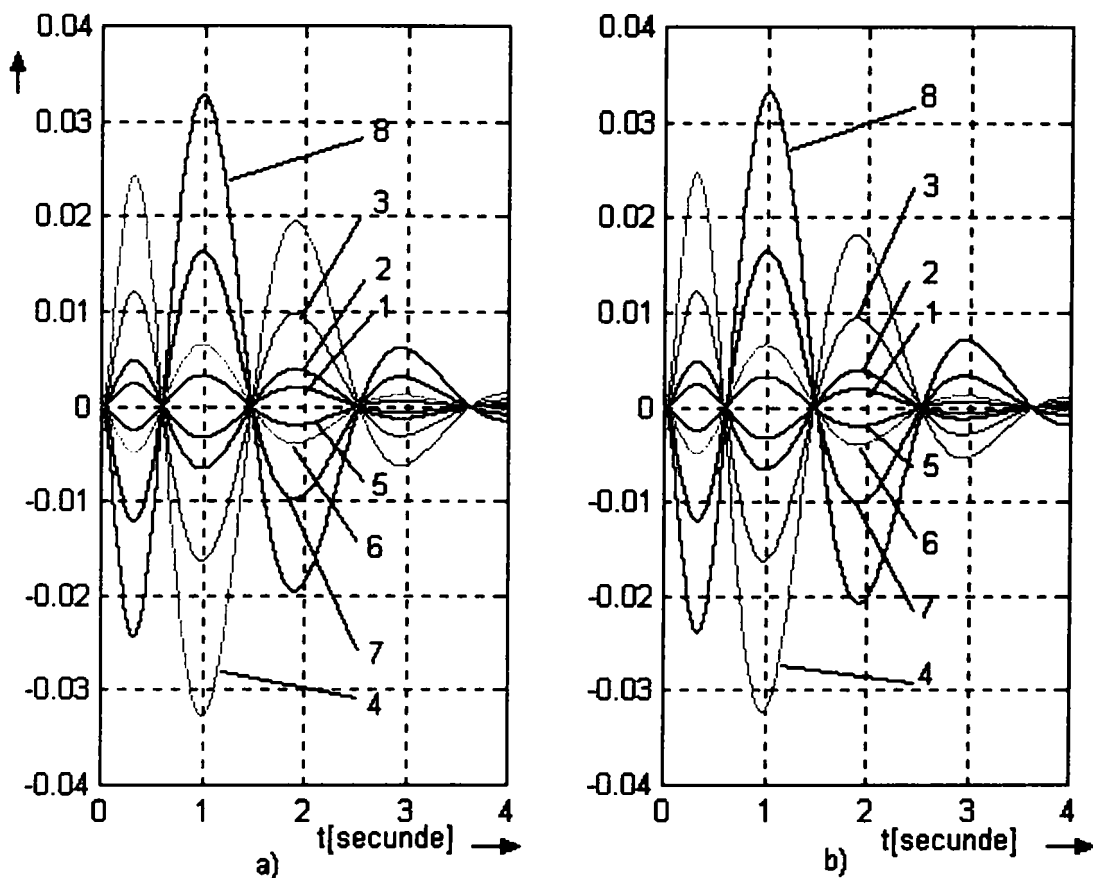


Fig.X-14 Abaterile absolute ale SRA cu RG-PI datorate abaterilor parametrului T:

- a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta T = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \% \text{ din } T_0$
- b) calculate pe baza simulării unui model al sistemului real, pentru $\Delta T = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \% \text{ din } T_0$

C. Evoluția abaterilor absolute ale SRA cu RG-PDT1 datorate abaterilor parametrului K

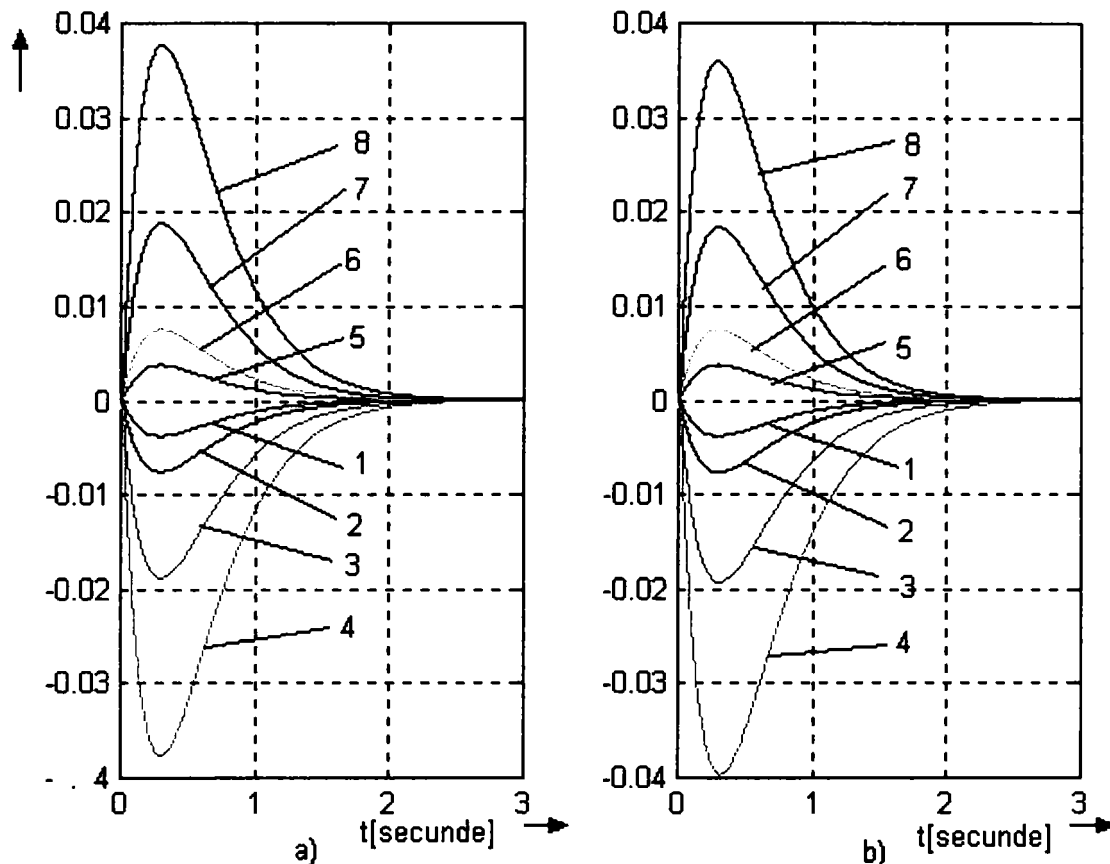


Fig.X-15 Abaterile absolute ale SRA cu RG-PDT1 datorate abaterilor parametrului K:
 a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta K=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din K_0
 b) calculate pe baza simulării unui model al sistemului real, pentru $\Delta K=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din K_0

C. Evoluția abaterilor absolute ale SRA cu RG-PDT1 datorate abaterilor parametrului T

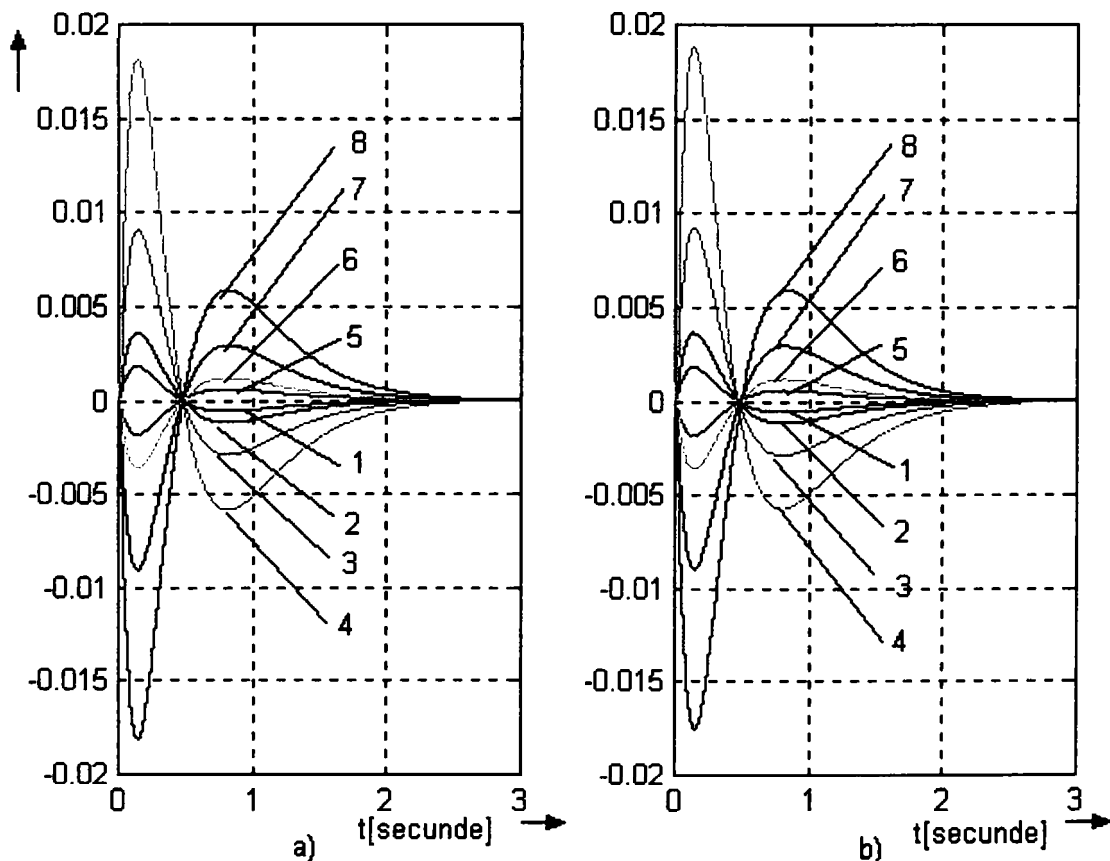


Fig.X-16 Abaterile absolute ale SRA cu RG-PDT1 datorate abaterilor parametrului T:
 a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta T=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din T_0
 b) calculate pe baza simulării unui model al sistemului real, pentru $\Delta T=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din T_0

D. Evoluția abaterilor absolute ale SRA cu compensator datorate abaterilor parametrului K

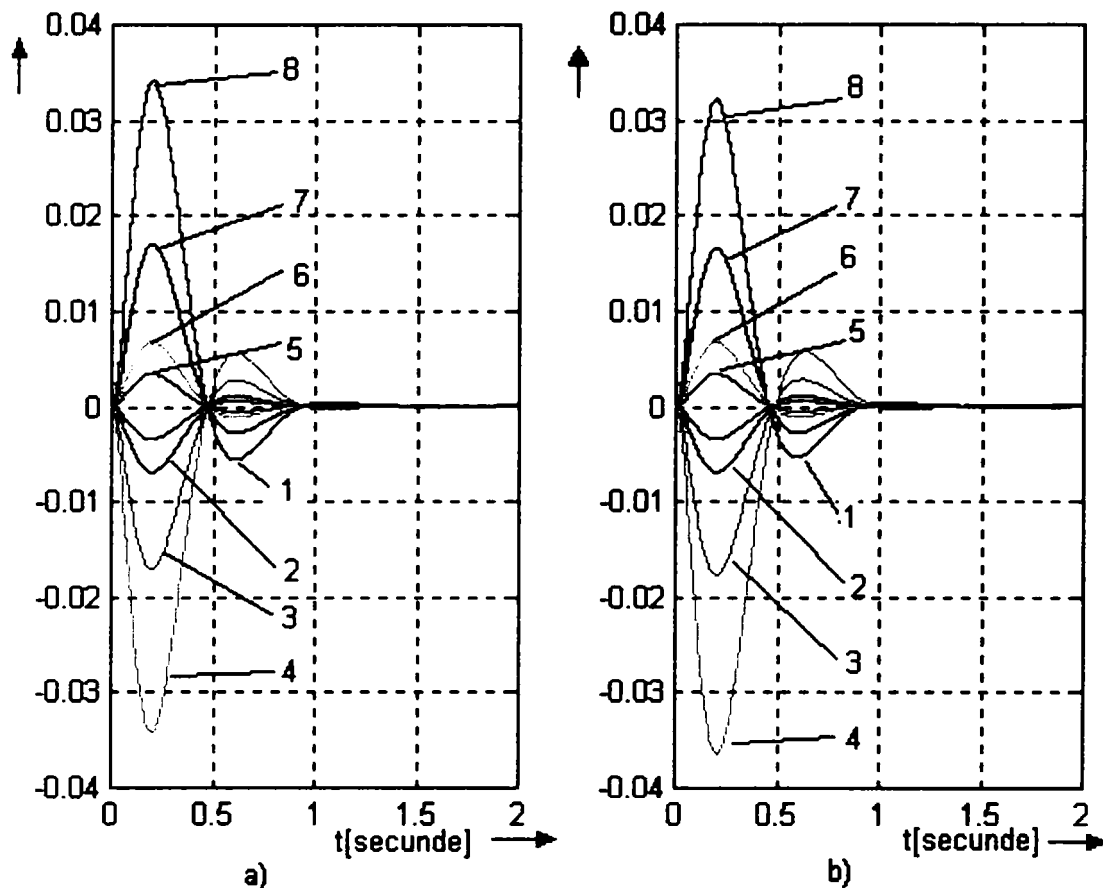


Fig.X-17 Abaterile absolute ale SRA cu compensator datorate abaterilor parametrului K:

- a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta K = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din K_0
- b) calculate pe baza simulării unui model al sistemului real, pentru $\Delta K = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din K_0

D. Evoluția abaterilor absolute ale SRA cu compensator datorate abaterilor parametrului T

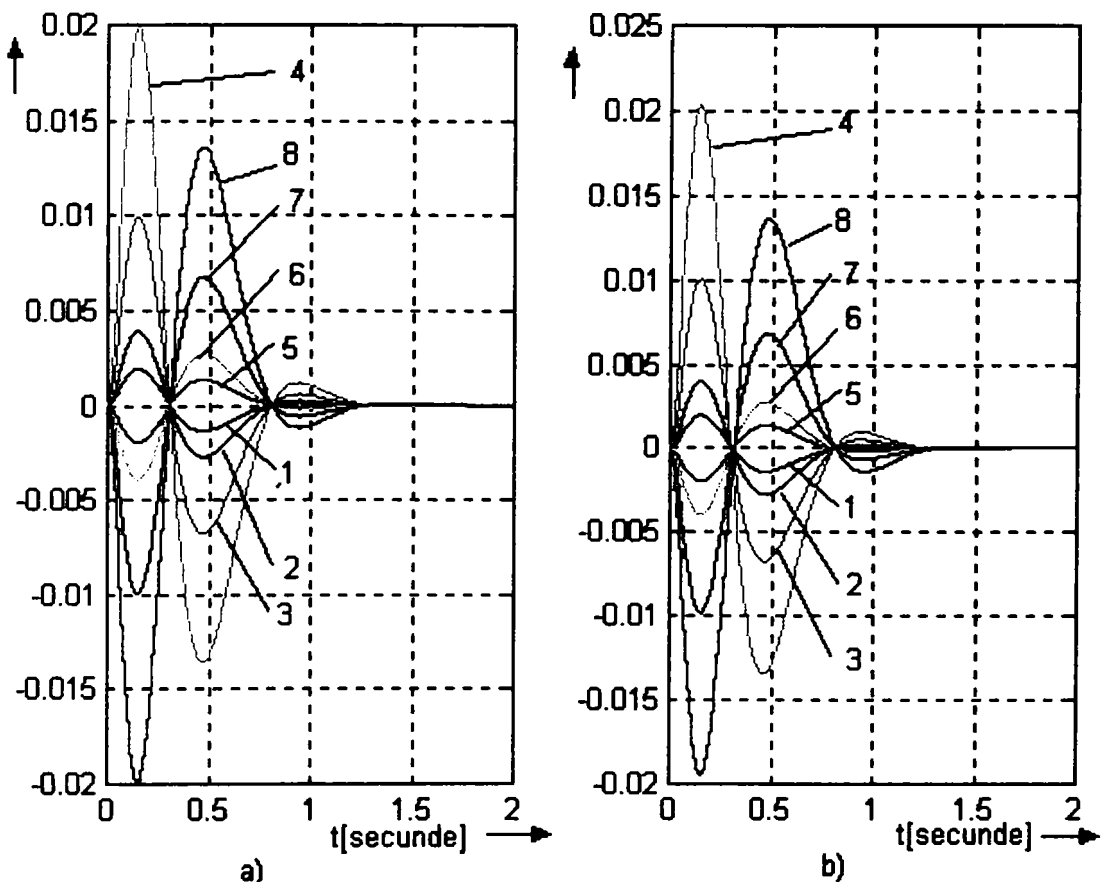


Fig.X-18 Abaterile absolute ale SRA cu compensator datorate abaterilor parametrului T:

- a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta T = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din T_0
- b) calculate pe baza simulării unui model al sistemului real, pentru $\Delta T = (\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din T_0

A. Evoluția abaterilor relative ale SRA cu RG-P datorate abaterilor parametrilor K, T

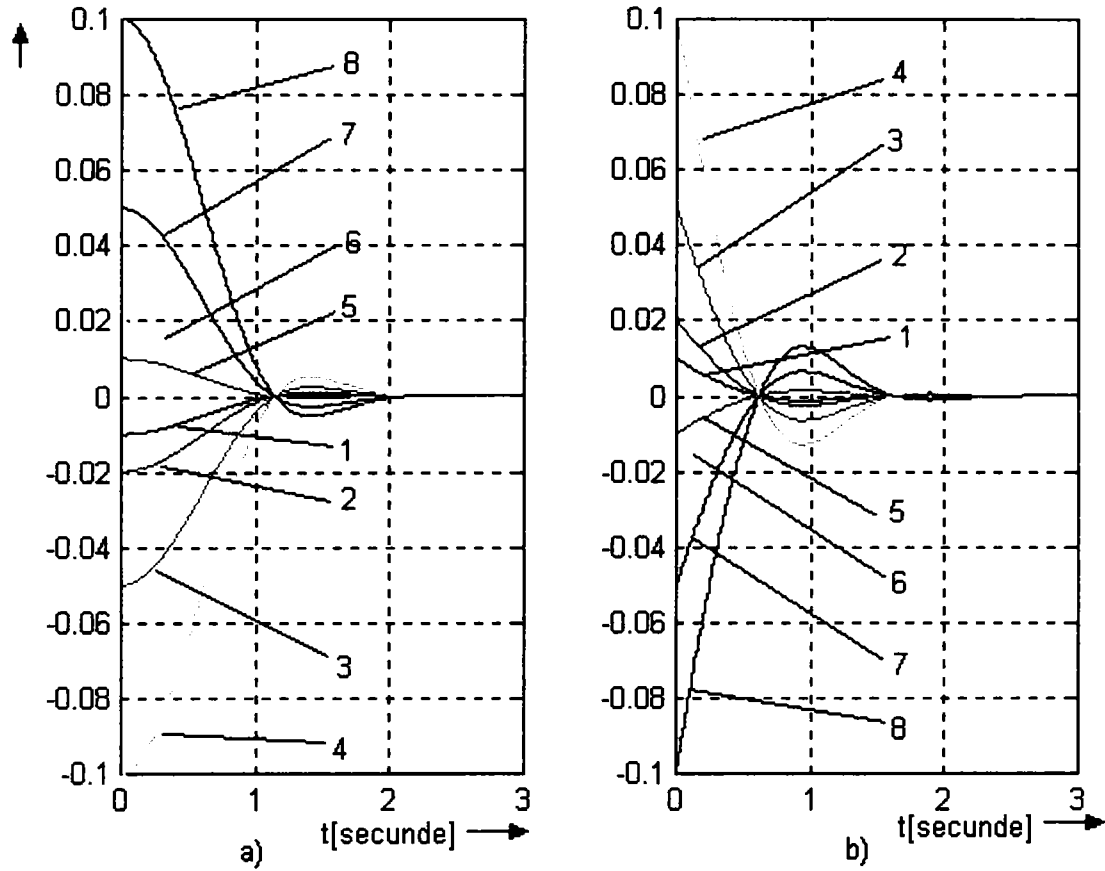


Fig.X-19 Abaterile relative ale SRA cu RG-P datorate abaterilor parametrilor K respectiv T:
 a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta K=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din K_0
 b) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta T=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din T_0

B. Evoluția abaterilor relative ale SRA cu RG-PI datorate abaterilor parametrilor K, T

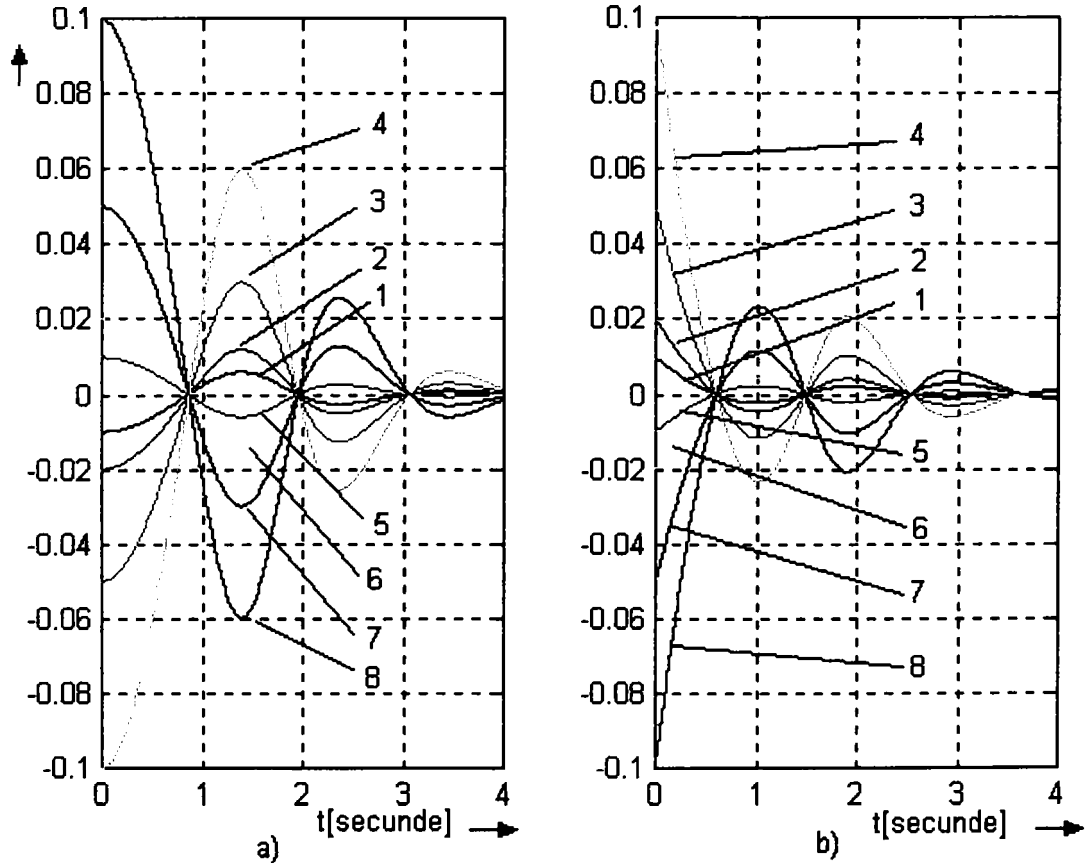


Fig.X-20 Abaterile relative ale SRA cu RG-PI datorate abaterilor parametrilor K, respectiv T:
 a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta K=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din K_0
 b) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta T=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din T_0

C. Evolutia abaterilor relative ale SRA cu RG-PDT1 datorate abaterilor parametrilor K; T

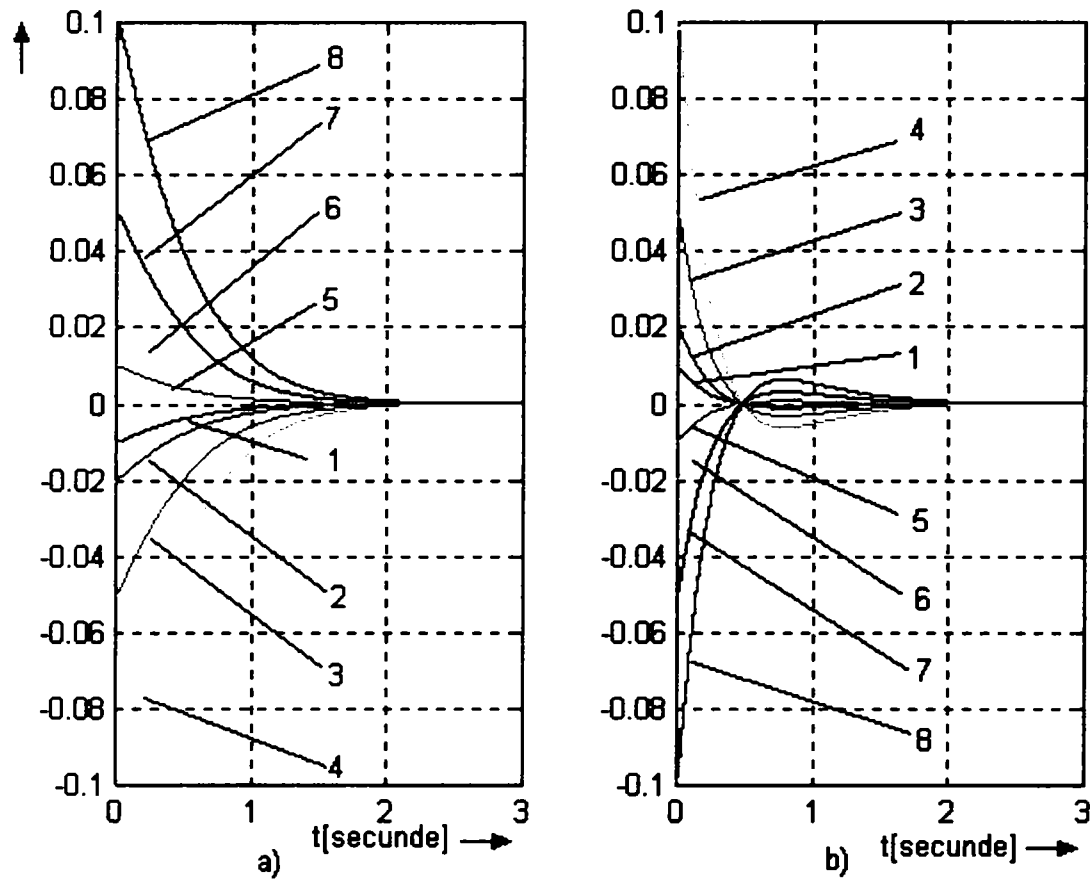


Fig.X-21 Abaterile relative ale SRA cu RG-PDT1 datorate abaterilor parametrilor K, respectiv T:
 a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta K=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din K_0
 b) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta T=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din T_0

D. Evolutia abaterilor relative ale SRA cu compensator datorate abaterilor parametrilor K ; T

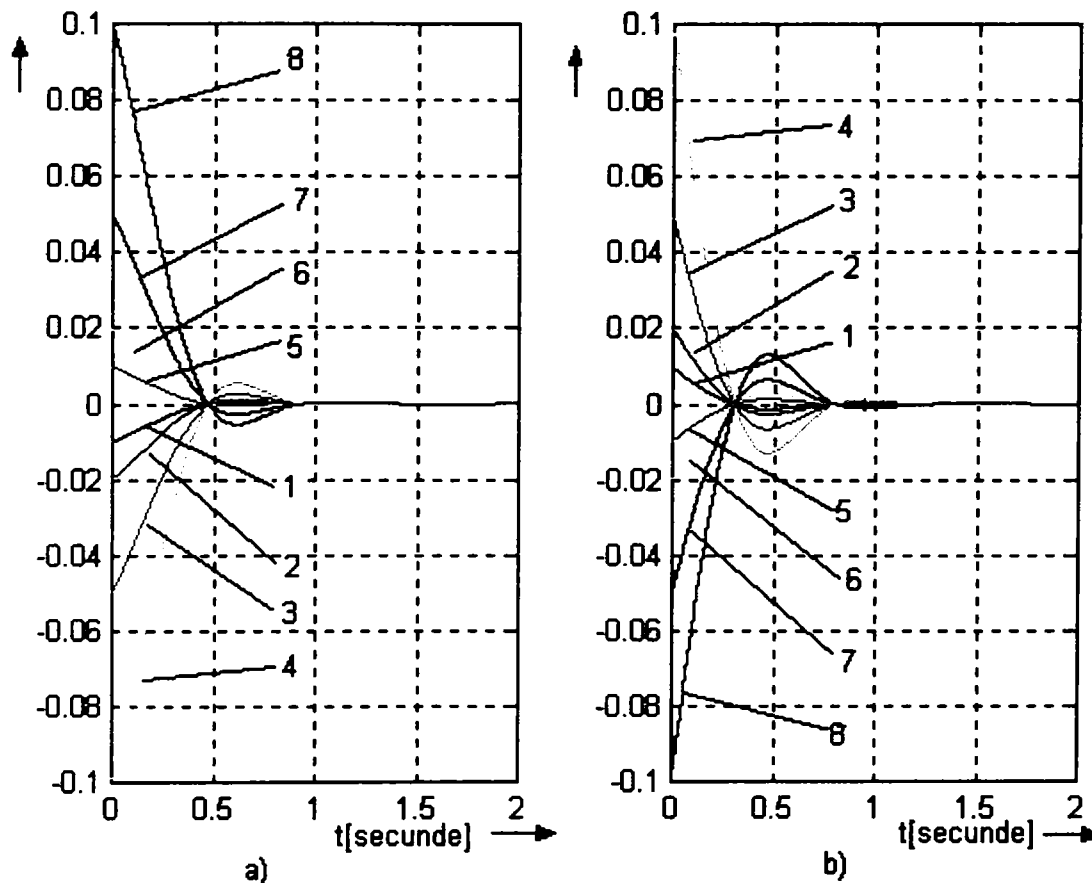


Fig.X-22 Abaterile relative ale SRA cu compensator datorate abaterilor parametrilor K, respectiv T:
 a) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta K=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din K_0
 b) calculate pe baza funcției de sensibilitate, pentru $\Delta T=(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10) \%$ din T_0

Determinarea sensibilităților parametrice ale coeficienților de amortizare și ale pulsațiilor proprii pentru studiul de caz din §3.2

Funcțiile de transfer ale SRA considerate sunt:

$$A. H(s) = \frac{K_R \cdot K}{T \cdot s^2 + s + K_R \cdot K} = \frac{\frac{K_R \cdot K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K_R \cdot K}{T}}, \quad (XI.1)$$

$$B. H(s) = \frac{K \cdot K_I \cdot (T_i \cdot s + 1)}{T \cdot T_i \cdot s^3 + T_i \cdot s^2 + K \cdot K_I \cdot T_i \cdot s + K \cdot K_I} = \frac{\frac{K \cdot K_I}{T \cdot T_i} \cdot (T_i \cdot s + 1)}{s^3 + \frac{1}{T} \cdot s^2 + \frac{K \cdot K_I}{T} \cdot s + \frac{K \cdot K_I}{T \cdot T_i}}, \quad (XI.2)$$

$$C. H(s) = \frac{K_r \cdot K \cdot (T_d \cdot s + 1)}{T_f \cdot T \cdot s^3 + (T_f + T) \cdot s^2 + (1 + K_r \cdot K \cdot T_d) \cdot s + K_r \cdot K} = \frac{\frac{K_r \cdot K \cdot (T_d \cdot s + 1)}{T_f \cdot T}}{s^3 + \frac{(T_f + T)}{T_f \cdot T} \cdot s^2 + \frac{(1 + K_r \cdot K \cdot T_d)}{T_f \cdot T} \cdot s + \frac{K_r \cdot K}{T_f \cdot T}}, \quad (XI.3)$$

$$D. H(s) = \frac{\frac{K}{T} \cdot g}{s^2 + \frac{1 + K \cdot f_2}{T} \cdot s + \frac{K \cdot f_1}{T}}. \quad (XI.4)$$

Expresiile (XI.1) și (XI.4) au forma canonică (3.2.5.1) iar (XI.2) și (XI.3) au forma (3.2.5.2). Prin echivalarea coeficienților de la numitor pentru fiecare din cele patru cazuri se obțin relațiile:

$$A. \quad \zeta = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_R \cdot K \cdot T}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_R \cdot K}{T}} \quad (XI.5)$$

$$D. \quad \zeta = \frac{1 + K \cdot f_2}{2 \cdot \sqrt{f_1 \cdot K \cdot T}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{f_1 \cdot K}{T}} \quad (XI.6)$$

$$\text{B. } \begin{cases} a + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = \frac{1}{T} \\ 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot a + \omega_n^2 = \frac{K_I \cdot K}{T} \\ a \cdot \omega_n^2 = \frac{K_I \cdot K}{T \cdot T_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{T} - 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \\ 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \left(\frac{1}{T} - 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \right) + \omega_n^2 - \frac{K_I \cdot K}{T} = 0 \\ \left(\frac{1}{T} - 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \right) \cdot \omega_n^2 - \frac{K_I \cdot K}{T \cdot T_i} = 0 \end{cases} \quad (\text{XI.7})$$

$$\text{C. } \begin{cases} a + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = \frac{T + T_f}{T \cdot T_f} \\ 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot a + \omega_n^2 = \frac{K_r \cdot K \cdot T_d + 1}{T \cdot T_f} \\ a \cdot \omega_n^2 = \frac{K_r \cdot K}{T \cdot T_f} \end{cases} \Rightarrow \quad (\text{XI.8})$$

$$\begin{cases} a = \frac{T + T_f}{T \cdot T_f} - 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \\ 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \left(\frac{T + T_f}{T \cdot T_f} - 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \right) + \omega_n^2 = \frac{K_r \cdot K \cdot T_d + 1}{T \cdot T_f} \\ \left(\frac{T + T_f}{T \cdot T_f} - 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \right) \cdot \omega_n^2 = \frac{K_r \cdot K}{T \cdot T_f} \end{cases}$$

Pentru cazurile A și D calculul sensibilităților coeficientului de amortizare și pulsației proprii se face explicit, aplicând relațiile (3.2.5.3) și (3.2.5.4) asupra (XI.5) și (XI.6). Se obțin:

$$\text{A. } S_K^\zeta = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial K} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} = -\frac{1}{4K_o \sqrt{T_o K_o K_R}} = -1.2627 \cdot 10^{-5}, \quad (\text{XI.9})$$

$$S_T^\zeta = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial T} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} = -\frac{1}{4T_o \sqrt{T_o K_o K_R}} = -2.3570, \quad (\text{XI.10})$$

$$S_K^{\omega_n} = \left. \frac{\partial \omega_n}{\partial K} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_R}{K_o T_o}} = 8.4179 \cdot 10^{-5}, \quad (\text{XI.11})$$

$$S_T^{\omega_n} = \left. \frac{\partial \omega_n}{\partial T} \right|_{\underline{\alpha}=\underline{\alpha}_0} = -\frac{1}{2T_o} \sqrt{\frac{K_R K_o}{T_o}} = -15.7135, \quad (\text{XI.12})$$

$$D. \quad S_K^\zeta = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial K} \right|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{f_2 K_0 - 1}{4K_0 \sqrt{T_0 K_0 f_1}} = -5.2302 \cdot 10^{-6} \quad (XI.13)$$

$$S_T^\zeta = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial T} \right|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{1 + K_0 f_2}{4T_0 \sqrt{f_1 \cdot K_0 \cdot T_0}} = -2.3570, \quad (XI.14)$$

$$S_K^{\omega_n} = \left. \frac{\partial \omega_n}{\partial K} \right|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f_1}{K_0 T_0}} = 1.1905 \cdot 10^{-4}, \quad (XI.15)$$

$$S_T^{\omega_n} = \left. \frac{\partial \omega_n}{\partial T} \right|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{1}{2T_0} \sqrt{\frac{f_1 K_0}{T_0}} = -22.2222. \quad (XI.16)$$

Pentru cazurile B și C calculul sensibilităților coeficientului de amortizare și pulsației proprii se face implicit, derivând relațiile (XI.7) și (XI.8) în raport cu parametri K și T și particularizând apoi valorile nominale. Se obțin, respectiv sistemul de ecuații de sensibilitate (XI.17) cu soluțiile (XI.20) și (XI.22) și sistemul de ecuații (XI.18) cu soluțiile (XI.21) și (XI.23).

$$B. \quad \begin{cases} \left(\frac{2 \cdot \omega_{n,o}}{T_0} - 8 \cdot \omega_{n,o}^2 \cdot \zeta_o \right) \cdot S_K^\zeta + \left(\frac{2 \cdot \zeta_o}{T_0} - 8 \cdot \zeta_o^2 \cdot \omega_{n,o} + 2 \cdot \omega_{n,o} \right) \cdot S_K^{\omega_n} = \frac{K_I}{T_0}, \\ \left(-2 \cdot \omega_{n,o}^3 \right) \cdot S_K^\zeta + \left(-6 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o}^2 \right) \cdot S_K^{\omega_n} = \frac{K_I}{T_0 \cdot T_i} \end{cases} \quad (XI.17)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2 \cdot \omega_{n,o}}{T_0} - 8 \cdot \omega_{n,o}^2 \cdot \zeta_o \right) \cdot S_T^\zeta + \left(\frac{2 \cdot \zeta_o}{T_0} - 8 \cdot \zeta_o^2 \cdot \omega_{n,o} + 2 \cdot \omega_{n,o} \right) \cdot S_T^{\omega_n} = \frac{2 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o} - K_I \cdot K_o}{T_0^2} \\ \left(-2 \cdot \omega_{n,o}^3 \right) \cdot S_T^\zeta + \left(-6 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o}^2 \right) \cdot S_T^{\omega_n} = \left(\omega_{n,o}^2 - \frac{K_I \cdot K_o}{T_i} \right) \cdot \frac{1}{T_0^2} \end{cases} \quad (XI.18)$$

unde ζ_o și $\omega_{n,o}$ se obțin din

$$\begin{cases} 2 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - 2 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o} \right) + \omega_{n,o}^2 - \frac{K_I \cdot K_o}{T_0} = 0 \\ \left(\frac{1}{T_0} - 2 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o} \right) \cdot \omega_{n,o}^2 - \frac{K_I \cdot K_o}{T_0 \cdot T_i} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta_o = 0.5 \\ \omega_{n,o} = 3.3333 \end{cases} \quad (XI.19)$$

După efectuarea tuturor calculelor se obțin:

$$S_K^\zeta = -0.0714 \cdot 10^{-3}, \quad (\bar{S}_K^\zeta = -4) \quad (XI.20)$$

$$S_T^\zeta = -3.3333, \quad (\bar{S}_T^\zeta = -1) \quad (XI.21)$$

$$S_K^{\omega_n} = 0.1190 \cdot 10^{-3}, \quad (\bar{S}_K^{\omega_n} = 1) \quad (XI.22)$$

$$S_T^{\omega_n} = 0, \quad (\bar{S}_T^{\omega_n} = 0) \quad (XI.23)$$

Analog, în cazul C din (XI.8) se obțin: sistemul (XI.24) cu soluțiile (XI.27) și (XI.29); respectiv sistemul (XI.25) cu soluțiile (XI.28) și (XI.30).

$$C. \begin{cases} \left(\frac{2\omega_{n,o}(T_o + T_f)}{T_o T_f} - 8\omega_{n,o}^2 \zeta_o \right) \cdot S_K^\zeta + \left(\frac{2\zeta_o(T_o + T_f)}{T_o T_f} - 8\zeta_o^2 \omega_{n,o} + 2\omega_{n,o} \right) \cdot S_K^{\omega_n} = \frac{K_r T_d}{T_o T_f} \\ (-2\omega_{n,o}^3) \cdot S_K^\zeta + (-6\zeta_o \omega_{n,o}^2) \cdot S_K^{\omega_n} = \frac{K_r}{T_o T_f} \end{cases} \quad (XI.24)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2\omega_{n,o}(T_o + T_f)}{T_o T_f} - 8\omega_{n,o}^2 \zeta_o \right) \cdot S_K^\zeta + \left(\frac{2\zeta_o(T_o + T_f)}{T_o T_f} - 8\zeta_o^2 \omega_{n,o} + 2\omega_{n,o} \right) \cdot S_K^{\omega_n} = \frac{2\zeta_o \omega_{n,o} - \frac{K_o K_r T_d + 1}{T_f}}{T_o^2} \\ (-2\omega_{n,o}^3) \cdot S_K^\zeta + (-6\zeta_o \omega_{n,o}^2) \cdot S_K^{\omega_n} = \frac{\omega_{n,o}^2 - \frac{K_o K_r}{T_f}}{T_o^2} \end{cases} \quad (XI.25)$$

unde ζ_o și $\omega_{n,o}$ se obțin din

$$\begin{cases} 2 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o} \cdot \left(\frac{T_o + T_f}{T_o \cdot T_f} - 2 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o} \right) + \omega_{n,o}^2 = \frac{K_r \cdot K_o \cdot T_d + 1}{T_o \cdot T_f} \\ \left(\frac{T_o + T_f}{T_o \cdot T_f} - 2 \cdot \zeta_o \cdot \omega_{n,o} \right) \cdot \omega_{n,o}^2 = \frac{K_r \cdot K_o}{T_o \cdot T_f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta_o = 1.0561 \\ \omega_{n,o} = 4.7757 \end{cases} \quad (XI.26)$$

După efectuarea tuturor calculelor se obțin

$$S_K^\zeta = 2.7809 \cdot 10^{-4}, \quad (\bar{S}_K^\zeta = 7.3727), \quad (XI.27)$$

$$S_T^\zeta = -56.7678, \quad (\bar{S}_T^\zeta = -8.0624), \quad (XI.28)$$

$$S_K^{\omega_n} = -1.1513 \cdot 10^{-3}, \quad (\bar{S}_K^{\omega_n} = -6.7502), \quad (XI.29)$$

$$S_T^{\omega_n} = 215.22, \quad (\bar{S}_T^{\omega_n} = 6.7599). \quad (XI.30)$$

Calculule sensibilităților relative s-au efectuat cu relația de legătură cu sensibilitatea absolută (2.1.3.8). Toate rezultatele sunt cuprinse în tabelul 2 din §3.2.5.

În cazurile B și C, pe baza relațiilor (XI.7) și (XI.8) se pot determina și sensibilitățile polului "a" în raport cu cei doi parametri K și T.

Se poate remarca faptul că deși valorile obținute sunt fixe determinarea lor, mai ales pentru sistemele de ordinul 3 se face cu un efort de calcul apreciabil (vezi sistemele de ecuații neliniare (XI.19) și (XI.26)).

Programe MATLAB și schema Simulink aferentă studiului de caz din§3.3.3

```

%Program MATLAB de pregatire a parametrilor schemei de simulare
%Domeniul de simulare pentru xo
xo=0.000:0.005:0.025;
xo(1)=0.001;
%Conditia initiala
%xoo=xo;
%Parametri sistemului
m=300; %masa
Ka=6*10^4; %Coeficientul de amortizare
%Fr(xo), forța elastica
C1=3157.2.*(1-exp(-100.*xo));
%C1=2324.6.*atan(115.8.*xo);
%Initializarea marimii de intrare
Feo=C1; %Se obtin datele din tabelul 1
% si stabilirea limitelor sale
Femin=3157.2*(1-exp(-100*xo(1)));
Femax=3157.2*(1-exp(-100*xo(length(xo))));
%Parametri modelului linearizat
%dFr(xo)/dxo
K1=3157.2*100.*exp(-100*xo);
%K1=2324.6*115.8./(1+(115.8.*xo).^2);
%-d2Fr(xo)/dxo2
K2=3157.2*100.*100*exp(-100*xo);
%K2=2324.6*(115.8)^3*2*xo./((1+(115.8.*xo).^2)).^2;
% Se initializeaza cu 0 continutul I1, I2 si J
for i=1:length(xo)
    I1xo(i)=0;
    I2xo(i)=0;
    Jxo(i)=0;
end
După pregătirea parametrilor schemei de simulare, se inițializează i=1, se procedează la simulare cu schema din fig.XII-1, apoi se preiau datele cu programul:
%Preluarea si prelucrarea datelor
I1xo(i)= I1xo(i)+I1(length(t));
I2xo(i)= I2xo(i)+I2(length(t));
Jxo(i)= Jxo(i)+J1(length(t))+ J2(length(t));
%se incrementeaza i
i=i+1;
%si se reia simularea
La final se determină graficele și se alcătuiește tabelul 2.
%se traseaza graficele
figure,plot(xo, I1xo,xo, I2xo);figure,plot(xo,Jxo)

```

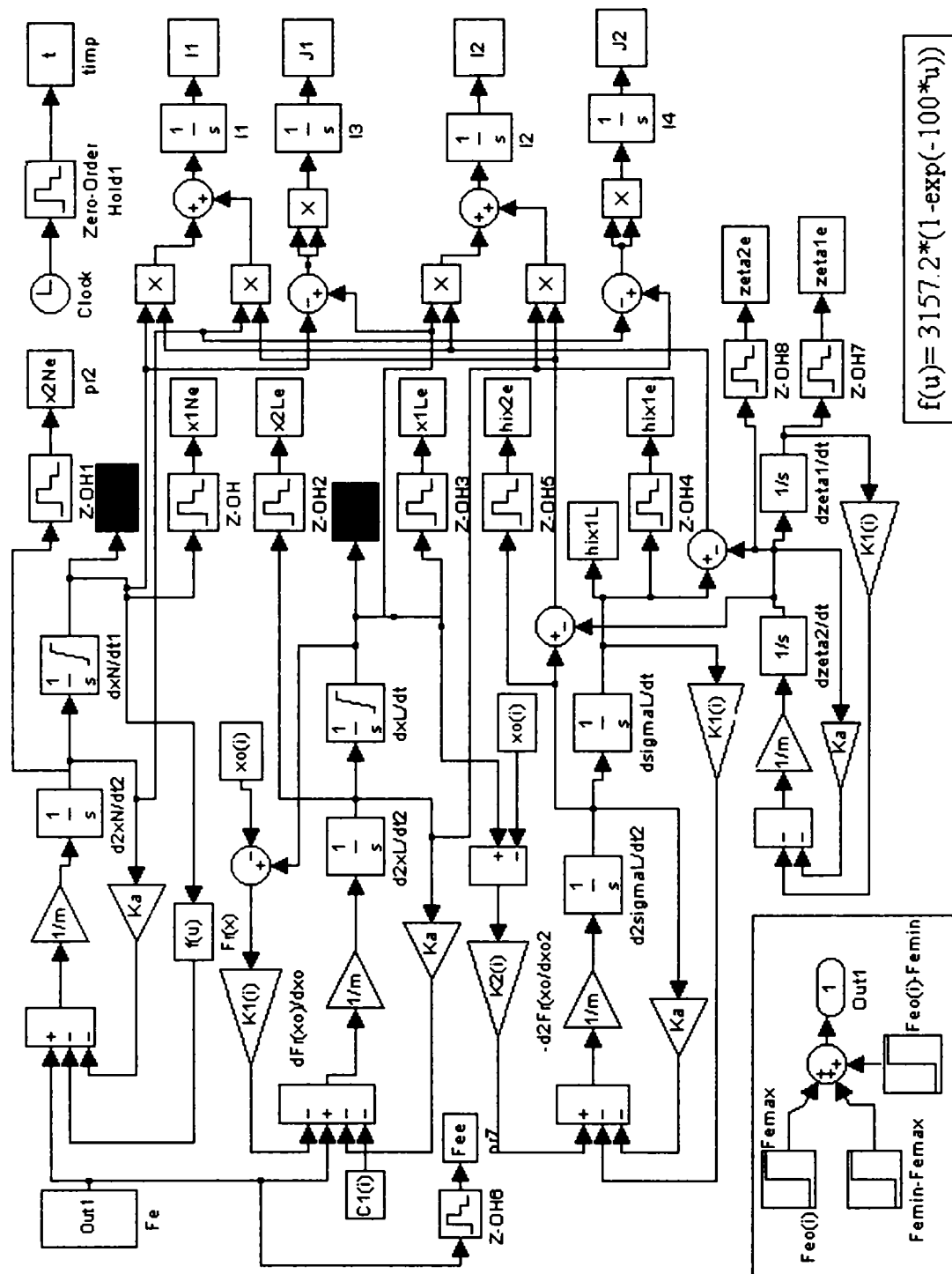


Fig.XII-1 Schema de simulare aferentă studiului de caz din §3.3.3.

Inițializările stărilor (poziții, viteze etc) s-au realizat prin setarea adecvată a blocurilor integroare. Perioada de eșantionare utilizată a fost de 0.024 secunde. Corespondența dintre notația mărimilor din §3.3.3 și cea a mărimilor din schema din fig.XII-4 este de forma:

$$\begin{array}{lll}
 x_1=x1N \text{ (} x1Ne \text{)} & x_{L,1}=x1L \text{ (} x1Le \text{)} & \chi_1 =hix1 \text{ (} hix1e \text{)} \\
 x_2=x2N \text{ (} x2Ne \text{)} & x_{L,2}=x2L \text{ (} x2Le \text{)} & \chi_2 =hix2 \text{ (} hix2e \text{)} \text{ etc}
 \end{array}$$

"e" de la sfârșitul notațiilor are semnificația de mărime eșantionată.

Determinarea punctului de funcționare staționară folosind MM-II (studiu de caz)

(completare la §3.3.3)

Propunere de studiu 1

Pentru sistemul nelinear din §3.3.3 descris de MM-II, (MN),

$$m \cdot \ddot{x}(t) + K_a \cdot \dot{x}(t) + F_r(x(t)) = F_e(t), \quad (\text{XIII.1})$$

cu condițiile inițiale: $x(0) = x_o, \quad \dot{x}(0) = 0,$ (XIII.2)

în planul caracteristicii resortului, punctul de funcționare staționară Λ_o are coordonatele (x_o, Fr_o) . Se linearizează prin metoda tangentei expresia forței elastice în vecinătatea punctului de funcționare staționară $\Lambda(x_o, Fr_o)$

$$F_r(x) = F_r(x_o) + F_r'(x_o) \cdot (x_L(t; x_o) - x_o) \quad (\text{XIII.3})$$

și se rescrie în valori absolute modelul care utilizează pentru F_r expresia linearizată, obținându-se modelul cvazilinear

$$m \cdot \ddot{x}_L(t; x_o) + K_a \cdot \dot{x}_L(t; x_o) + F_r'(x_o) \cdot x_L(t; x_o) = F_e(t) - F_r(x_o) + F_r'(x_o) \cdot x_o. \quad (\text{XIII.4})$$

Între ieșirea modelului cvazilinear $x_L(t; x_o)$ și cea a modelului nelinear $x(t)$ există o diferență, o eroare, notată $\xi(t; x_o)$, fig.XIII-1

$$x_L(t; x_o) - x(t) = \xi(t; x_o) \quad (\text{XIII.5})$$

În relația (XIII.5) x depinde de coordonata x_o a punctului de linearizare numai prin condiția inițială x_o conform relației (XIII.2).

Cele două modele: nelinear (XIII.1) și cvazilinear (XIII.4) au aceleași condiții inițiale:

$$\begin{aligned} x_L(0; x_o) &= x(0) = x_o, \\ \dot{x}_L(0; x_o) &= \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{XIII.6})$$

și prin urmare: $\xi(0; x_o) = 0, \quad \dot{\xi}(0; x_o) = 0$ (XIII.7)

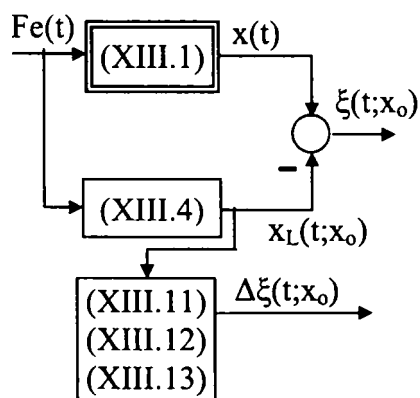


Fig.XIII-1 Sistem combinat (caz particular)

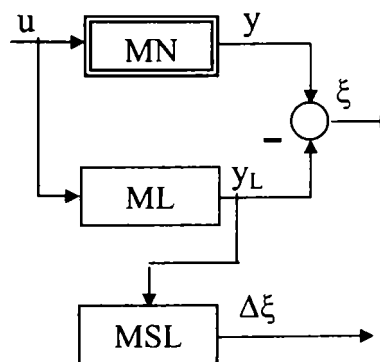


Fig.XIII-2 Sistem combinat (caz general)

În situația în care între condiția inițială x_0^o și valoarea coordonatei de linearizare x_0 apare o diferență

$$\Delta x_0 = x_0^o - x_0 \quad (\text{XIII.8})$$

va rezulta o abatere a erorii ξ în vecinătatea lui x_0

$$\Delta \xi(t; x_0) = \Delta x_L(t; x_0) - \Delta x(t; x_0). \quad (\text{XIII.9})$$

Conform celor prezentate în §2.1 rezultă că această abatere se poate determina în primă aproximație cu relația

$$\Delta \xi(t; x_0) = S_{x_0}^{\xi} \cdot \Delta x_0 = \left[\frac{\partial}{\partial x_0} (\xi(t; x_0)) \right]_{x_0} \cdot \Delta x_0. \quad (\text{XIII.10})$$

Având în vedere (XIII.5) se obține

$$\Delta \xi(t; x_0) = [\sigma_L(t; x_0) - \zeta(t; x_0)] \cdot (x_0^o - x_0), \quad (\text{XIII.11})$$

unde $\sigma_L(t; x_0) = \left. \frac{\partial x_L}{\partial x_0} \right|_{x_0}$ se determină din modelul de sensibilitate parametrică asociat ML în

raport cu parametrul x_0

$$m \cdot \ddot{\sigma}_L(t; x_0) + K_a \cdot \dot{\sigma}_L(t; x_0) + F_r'(x_0) \cdot \sigma_L(t; x_0) = -F_r''(x_0) \cdot (x_L(t; x_0) - x_0) \quad (\text{XIII.12})$$

cu condițiile inițiale: $\sigma_L(0; x_0) = 1$; $\dot{\sigma}_L(0; x_0) = 0$,

iar $\zeta(t; x_0) = \left. \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|_{x_0}$ rezultă din modelul de sensibilitate de tip β asociat MN

$$m \cdot \ddot{\zeta}(t; x_0) + K_a \cdot \dot{\zeta}(t; x_0) + F_r'(x_0) \cdot \zeta(t; x_0) = 0, \quad (\text{XIII.13})$$

cu condițiile inițiale: $\zeta(0; x_0) = 1$, $\dot{\zeta}(0; x_0) = 0$.

Convenim să denumim ansamblul de relații (XIII.11), (XIII.12), (XIII.13) cu condițiile inițiale aferente: *model de sensibilitate de linearizare* (MSL). Prin urmare *modelul de sensibilitate de linearizare* reprezintă acea relație care împreună cu ansamblul ML - MN poate conduce la determinarea abaterii erorii datorată operației de linearizare.

Studiul poate fi abordat și în altă manieră, astfel, din (XIII.1) și (XIII.4) prin scădere se obține

$$m \cdot (\ddot{x}_L(t; x_0) - \ddot{x}(t)) + K_a \cdot (\dot{x}_L(t; x_0) - \dot{x}(t)) + F_r'(x_0) \cdot x_L(t; x_0) - F_r(x(t)) = -F_r(x_0) + F_r'(x_0) \cdot x_0$$

$$m \cdot \ddot{\xi}(t; x_0) + K_a \cdot \dot{\xi}(t; x_0) + F_r'(x_0) \cdot [x_L(t; x_0) - x_0] = F_r(x_L(t; x_0 - \xi(t; x_0))) - F_r(x_0) \quad (\text{XIII.14})$$

Astfel modelul nelinear nu mai este necesar pentru studiu. Este suficient modelul linearizat (XIII.4) și cel al abaterii (XIII.14). Prin extrapolare această afirmație este valabilă și la modul general, pentru fig.XIII-2.

Propunere de studiu 2

Plecând de la modelul cvazilinear (XIII.4) se determină dependența coeficientului de amortizare și a pulsației proprii de coordonatele punctului de linearizare

$$\zeta(x_0) = \frac{K_a}{2} \cdot \sqrt{\frac{F_r'(x_0)}{m}}, \quad \omega_n(x_0) = \sqrt{\frac{m}{F_r'(x_0)}}. \quad (\text{XIII.15})$$

Se impun condiții de performanță legate de cei doi parametri și se determină x_0 de așa manieră încât să fie îndeplinite aceste condiții.

Programe MATLAB, schema de simulare și rezultate grafice aferente studiului prezentat în §4.2.1

În această anexă se prezintă schema SIMULINK, programele MATLAB, modul în care au fost ele utilizate la estimarea abaterilor parametrice sintetizate în tabelul 2 din §4.2.1 și rezultatele grafice din fig.XIV-2÷XIV-10.

Pornind de la sistemul combinat descris de relațiile (4.2.1.1)÷ (4.2.1.7), s-a construit schema SIMULINK din fig. XIV-1.

Înainte de a utiliza schema de simulare din fig. XIV-1 este necesară descrierea parametrilor nominali precum și modelarea abaterilor ce urmează a fi estimate. Acestea sunt cerințe realizate prin următorul program MATLAB.

```
% PROGRAM MATLAB pentru pregatirea parametrilor schemei de
% simulare
% Conditia initiala xomin=0.005;
xo=0.005;
% Parametri nominali ai sistemului
mo=300;
Kao=6*10^4;
ao=3157.2;bo=100;
xomax=0.03;
% Marimea de intrare Fe = Femn +500+2000*sin(1.5*t)
Femn=3157.2*(1-exp(-100*xo));
Femax=3157.2*(1-exp(-100*xomax));
% Simularea abaterilor parametrice
dm=input('abaterea parametrului m (%)=')
dKa=input('abaterea parametrului Ka (%)=')
da=input('abaterea parametrului a (%)=')
db=input('abaterea parametrului b (%)=')
% Simularea parametrilor reali
m=mo*(1+dm/100);
Ka=Kao*(1+dKa/100);
a=ao*(1+da/100);
b=bo*(1+db/100);
%Forma marimilor de iesire din schema
xN=[];% Iesirea reala
xNo=[];% Iesirea nominala
deltax=[];% Abaterea lui x
sigmam=[];% F.d.s in raport cu parametrul m
sigmaKa=[];% F.d.s in raport cu parametrul Ka
sigmaa=[];% F.d.s in raport cu parametrul a
sigmab=[];% F.d.s in raport cu parametrul b
```

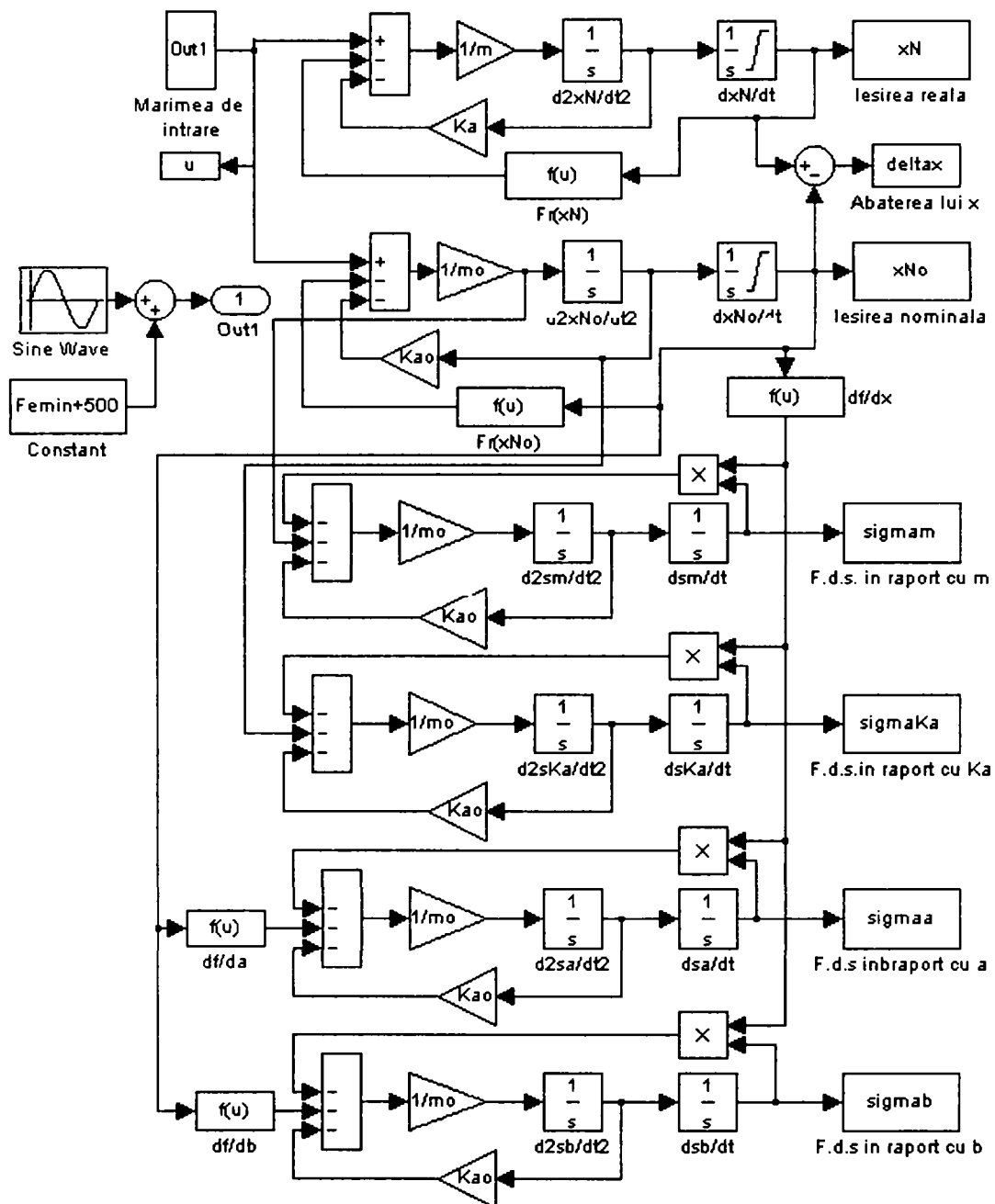


Fig. XIV-1 Schema Simulink utilizată la determinare a ieșirii nominale, a funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută ale ieșirii și a abaterii ieșirii de la traiectoria nominală

În schema de simulare din fig. XIV-1 la descrierea blocurilor neliniare $f(u)$ s-au utilizat următoarele expresii

$$f(u) = a \cdot (1 - \exp(-b \cdot u)) \text{ pentru blocul notat "Fr}(xN)\text{"};$$

$$f(u) = a_o \cdot (1 - \exp(-b_o \cdot u)) \text{ pentru blocul notat "Fr}(xNo)\text{"};$$

$$f(u) = a_o \cdot b_o \cdot (1 - \exp(-b_o \cdot u)) \text{ pentru blocul notat "df/dx"};$$

$$f(u) = 1 - \exp(-b_o \cdot u) \text{ pentru blocul notat "df/da"};$$

$$f(u) = a_o \cdot u \cdot (1 - \exp(-b_o \cdot u)) \text{ pentru blocul notat "df/db"};$$

Inițializările stărilor (poziții, viteze etc) s-au realizat prin setarea adecvată a blocurilor integroare.

În urma simulării schemei din fig. XIV-1, în mediul MATLAB, sunt disponibile pentru alte prelucrări (reprezentări grafice, alte calcule efectuate cu următorul program MATLAB) valorile nominale și reale ale ieșirii și f.d.s., sub denumirile:

xN	-ieșirea reală;	sigmaKa	-f.d.s. în raport cu parametrul Ka;
xNo	-ieșirea nominală;	sigmaa	-f.d.s. în raport cu parametrul a;
deltax	-abaterea lui x;	sigmab	-f.d.s. în raport cu parametrul b.
sigmam	-f.d.s în raport cu parametrul m;		

```
%PROGRAM MATLAB pentru prelucrarea rezultatelor simulării
%
%deseneaza marimea de intrare
%t1=-0.5:0.001:0;
%u1=t1-t1+Femin;
%u1(length(u1))=Femin+500;
%plot(t1,u1,tout,u),grid
%pause
%Calculeaza abaterile cu metoda clasica
M=zeros(4,4);N=zeros(4,1);%initializari
% Elimina primele masuratori la calculul sumelor
for i=2:(length(tout)-3)
M=M+[sigmam(i);sigmaKa(i);sigmaa(i);sigmab(i)]*[sigmam(i),sigma
Ka(i),sigmaa(i),sigmab(i)];
N=N+[sigmam(i);sigmaKa(i);sigmaa(i);sigmab(i)]*deltax(i);
P(:,i-1)=inv(M)*N./[mo;Kao;ao;bo];
%Retine evolutia in timp a estimatelor
end
deltaalfa=inv(M)*N%afiseaza rezultatul estimării
deltaalfa_100=deltaalfa./[mo;Kao;ao;bo]%in procente
for j=2:(length(tout)-3)
t1(j-1)=tout(j);
end
%
%Calculeaza abaterile cu metoda I
%
%Calculul matricelor
for k=2:(length(tout)-3) %Matricea k de sensibilitate
S=[sigmam(k) sigmaKa(k) sigmaa(k) sigmab(k)
sigmam(k+1) sigmaKa(k+1) sigmaa(k+1) sigmab(k+1)
sigmam(k+2) sigmaKa(k+2) sigmaa(k+2) sigmab(k+2)
sigmam(k+3) sigmaKa(k+3) sigmaa(k+3) sigmab(k+3)];
%Matricea abaterilor
err=[deltax(k);deltax(k+1);deltax(k+2);deltax(k+3)];
Q(:,k-1)=inv(S)*err;%Calculul abaterilor esantionului k
R(:,k-1)=Q(:,k-1)./[mo;Kao;ao;bo];%in procente
end
% Executa medierea si afiseaza rezultatul estimării
Q1=[0;0;0;0];R1=[0;0;0;0];%initializare mediere
for k=2:length(t1)
```

```

Q1=Q1+Q(:,k);
R1=R1+R(:,k);
end
deltaalfal=Q1/(length(t1)-1)
deltaalfal_100=R1/(length(t1)-1)
%Reprezintă grafic evoluția estimatelor în raport cu timpul
figure
subplot(121),plot(t1,P),grid
subplot(122),plot(t2,R),grid
%
```

Pe baza rezultatelor grafice din fig. XIV-2 ÷ XIV-10, se poate aprecia de la ce moment de timp începând estimarea se poate considera corectă. (Aceste momente de timp sunt trecute în tabelul 2, cu caractere italice, sub valorile estimatelor parametrice)

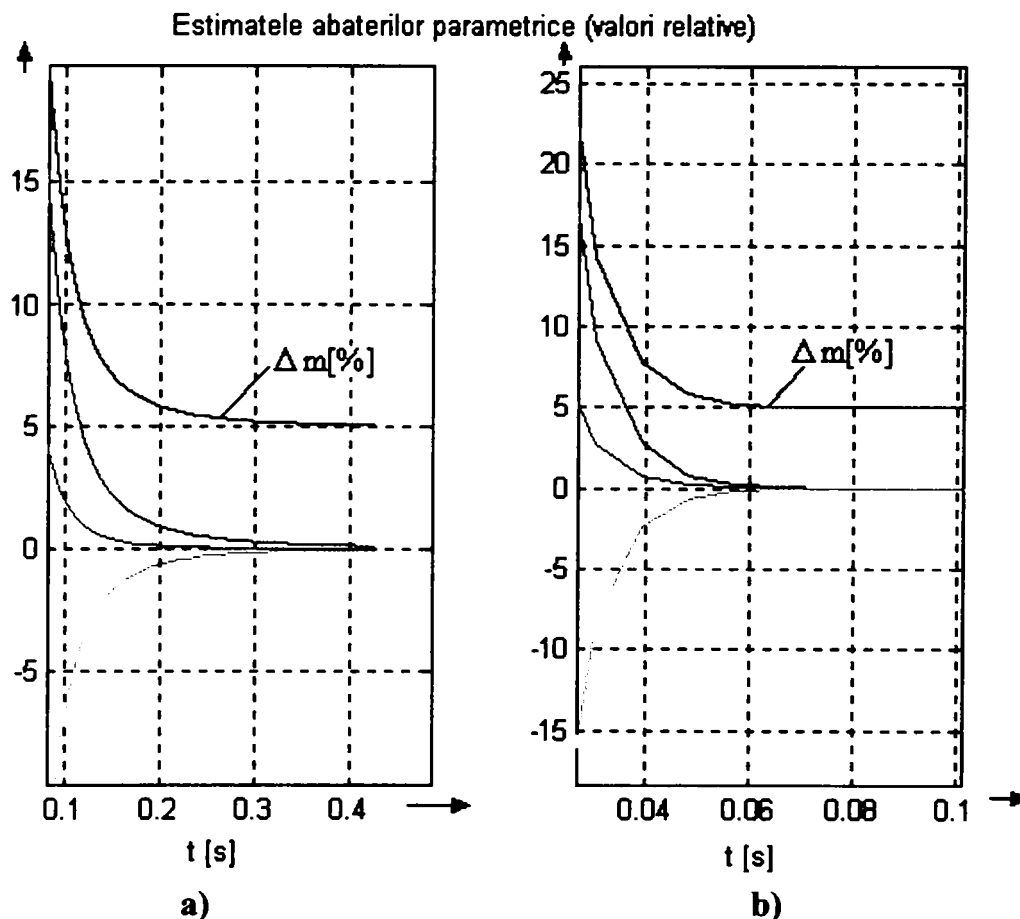


Fig.XIV-2 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterea reală a parametrului m de 5%
a) cu metoda clasică; b) cu metoda I

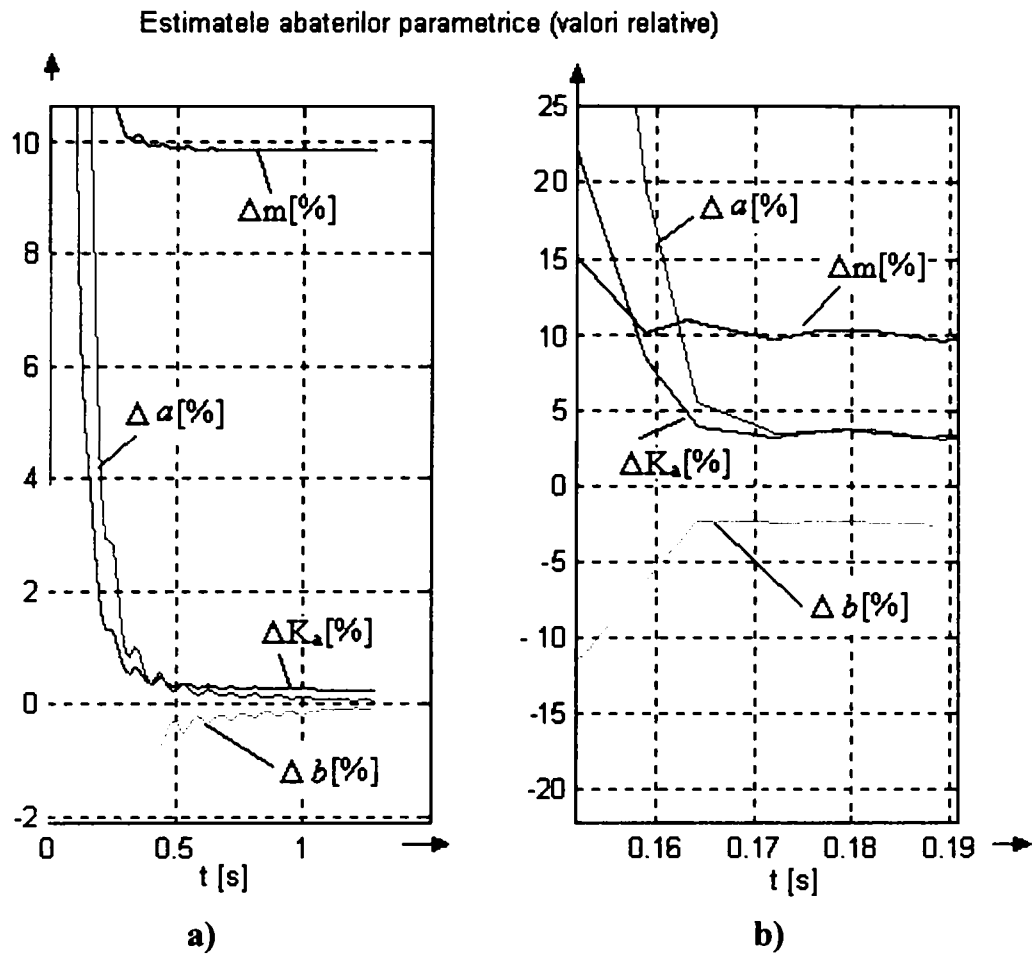


Fig.XIV-3 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterile reale ale parametrilor m de 10% și K_a de 0.2%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda I

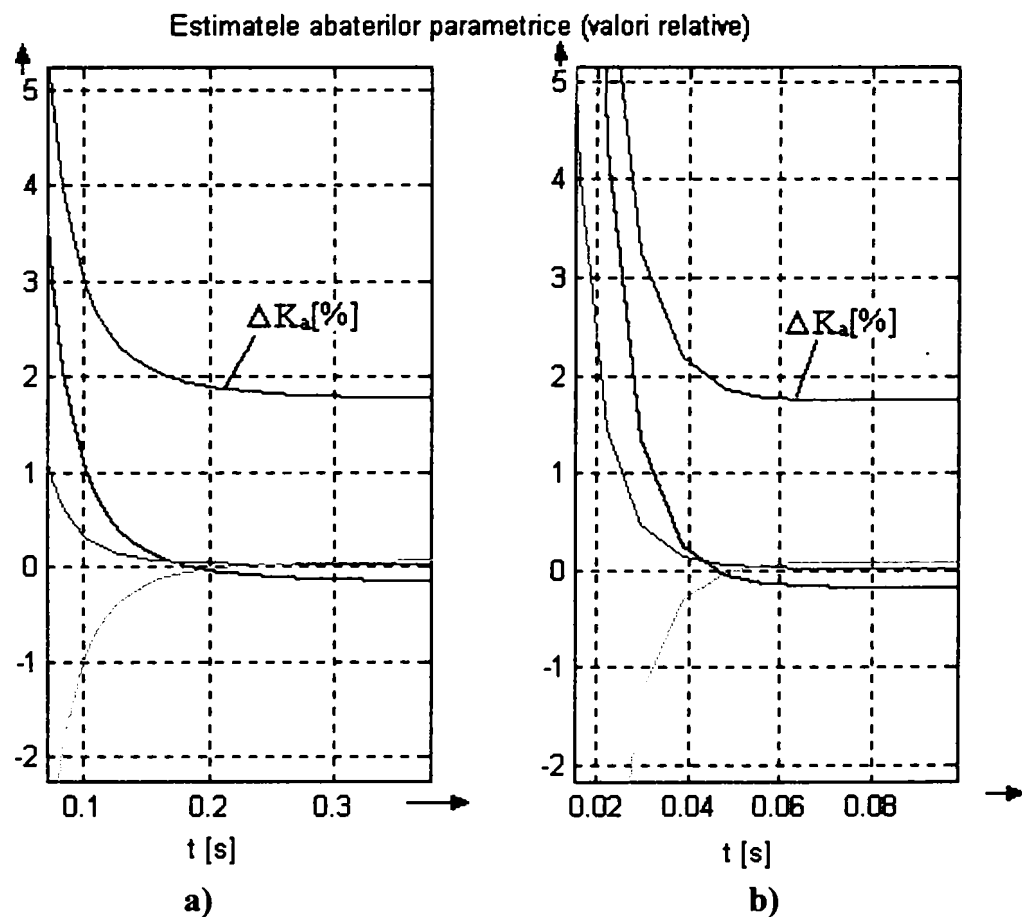


Fig.XIV-4 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterea reală a parametrului K_a de 2%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda I

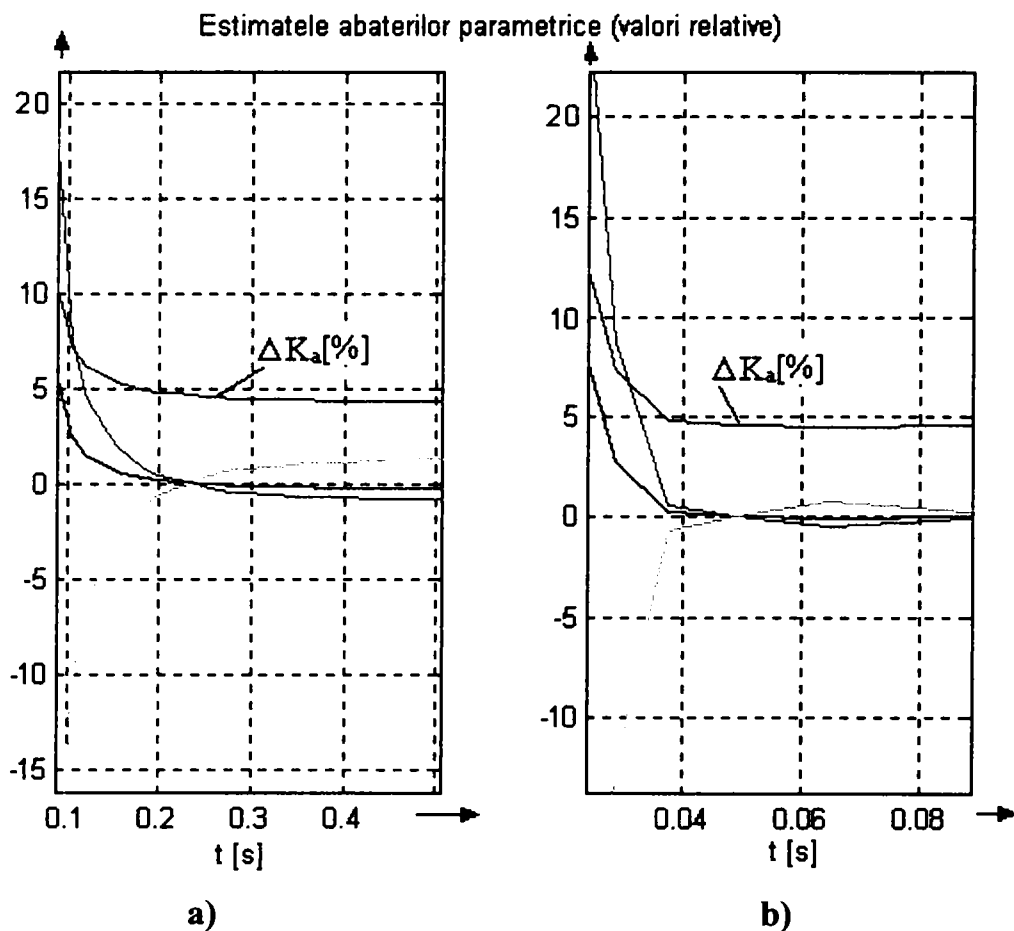


Fig.XIV-5 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterea reală a parametrului K_a de 5%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda I

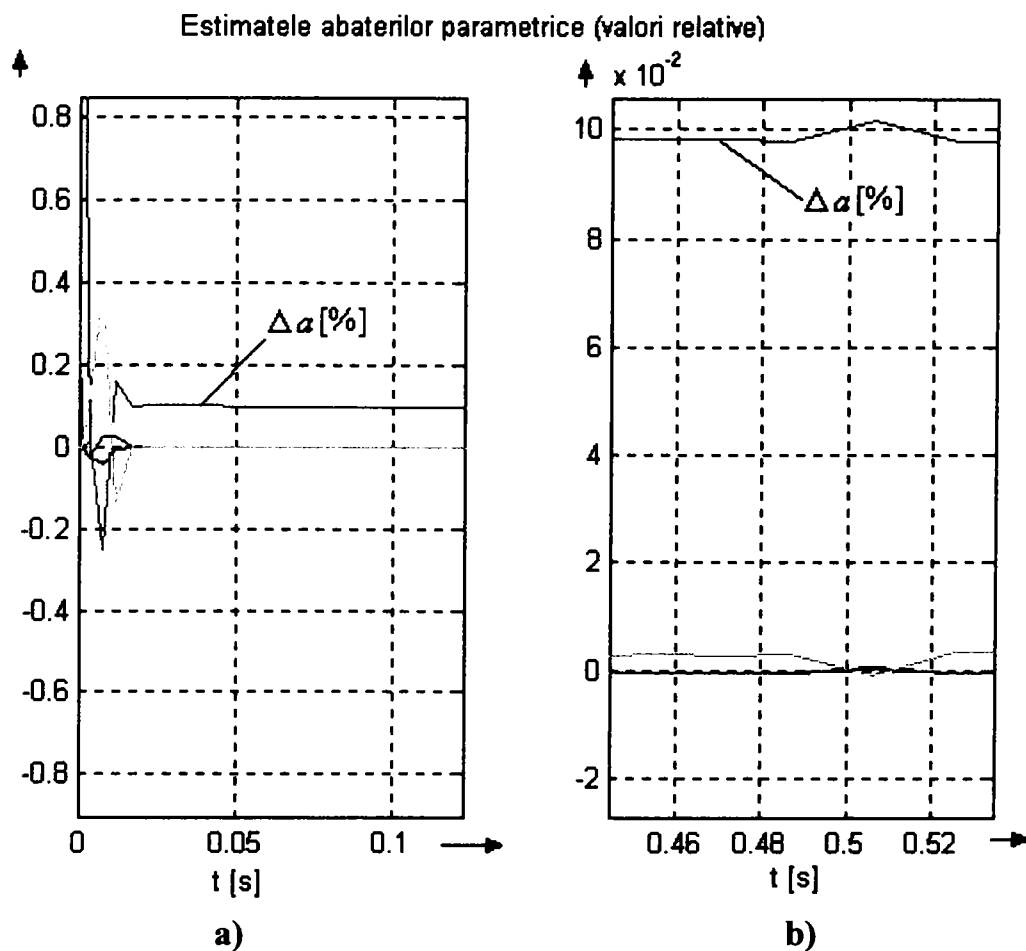


Fig.XIV-6 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterea reală a parametrului α de 0.1%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda I

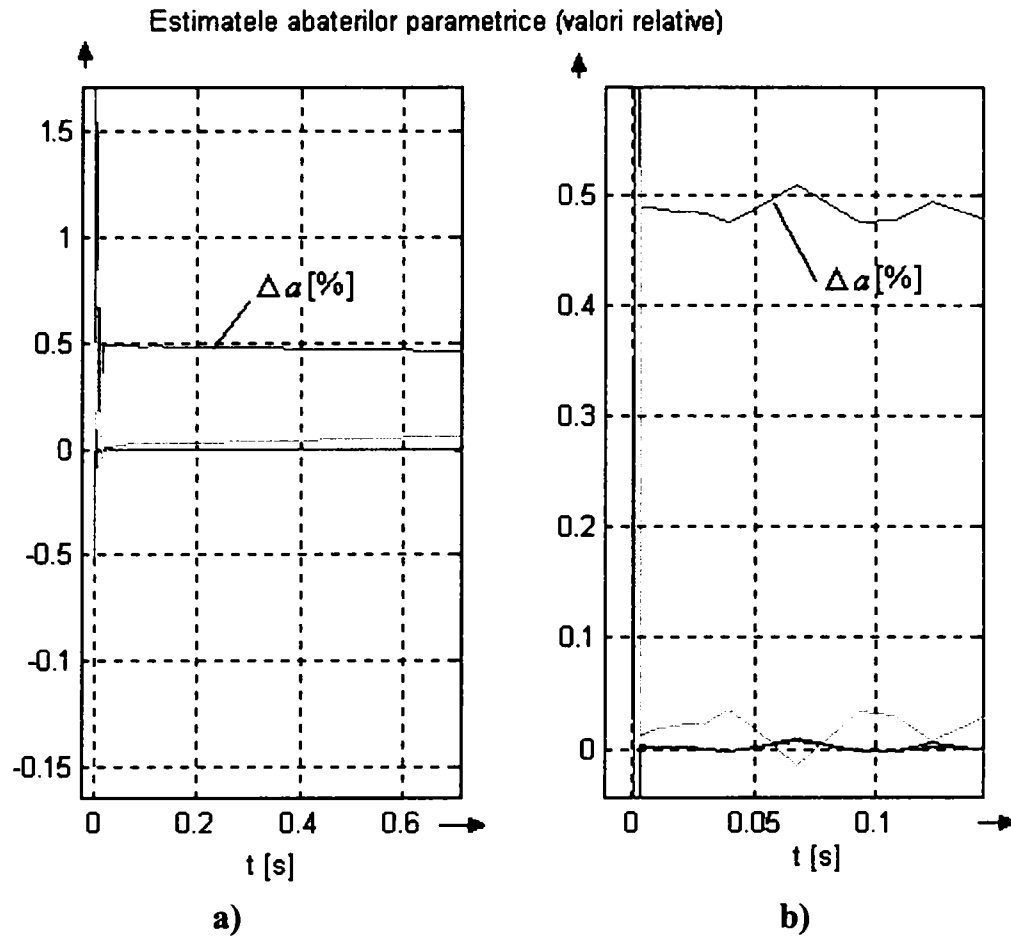


Fig.XIV-7 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterea reală a parametrului a de 0.5%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda I

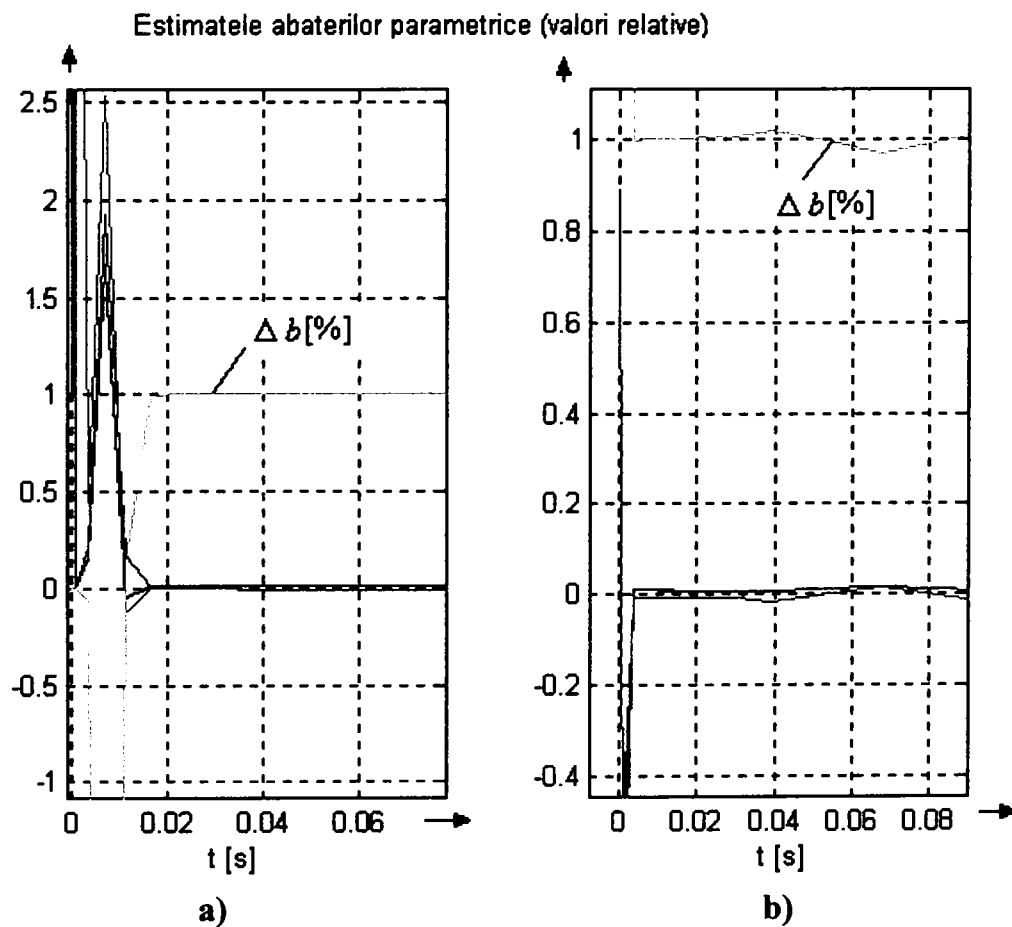


Fig.XIV-8 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterea reală a parametrului b de 1%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda I

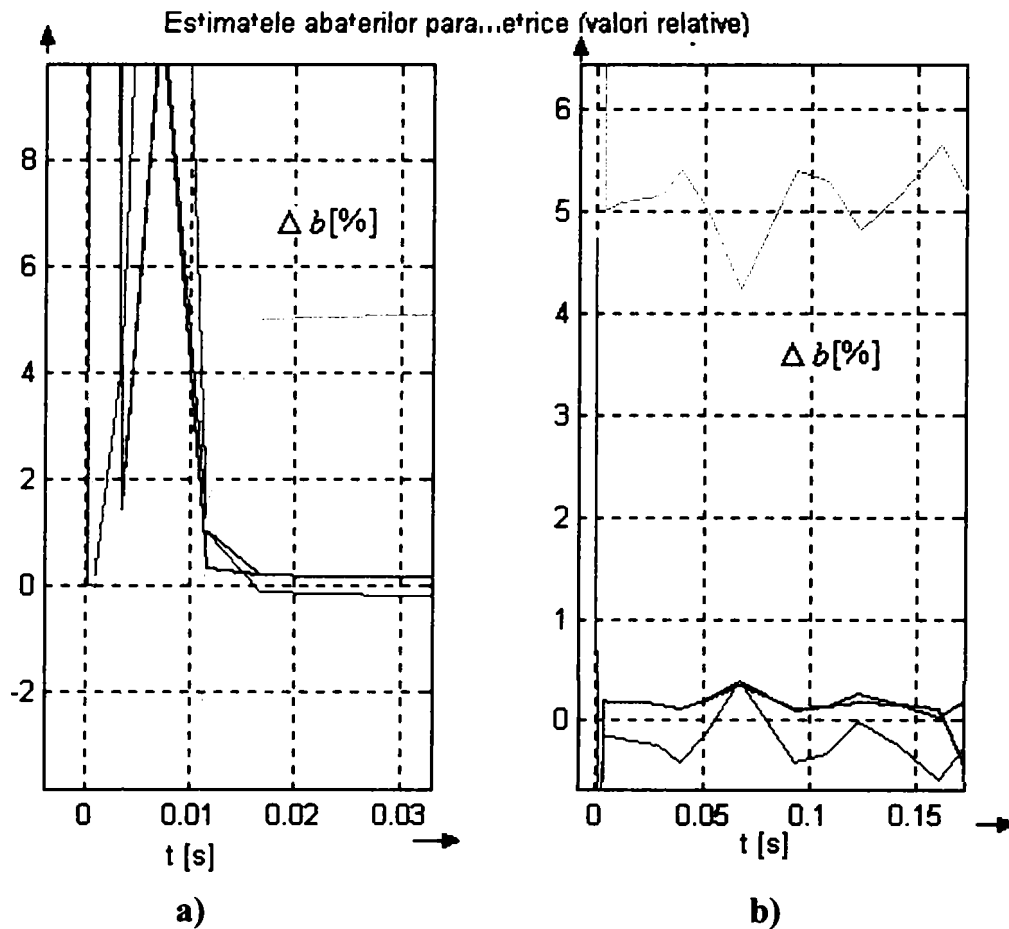


Fig.XIV-9 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterea reală a parametrului b de 5%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda I

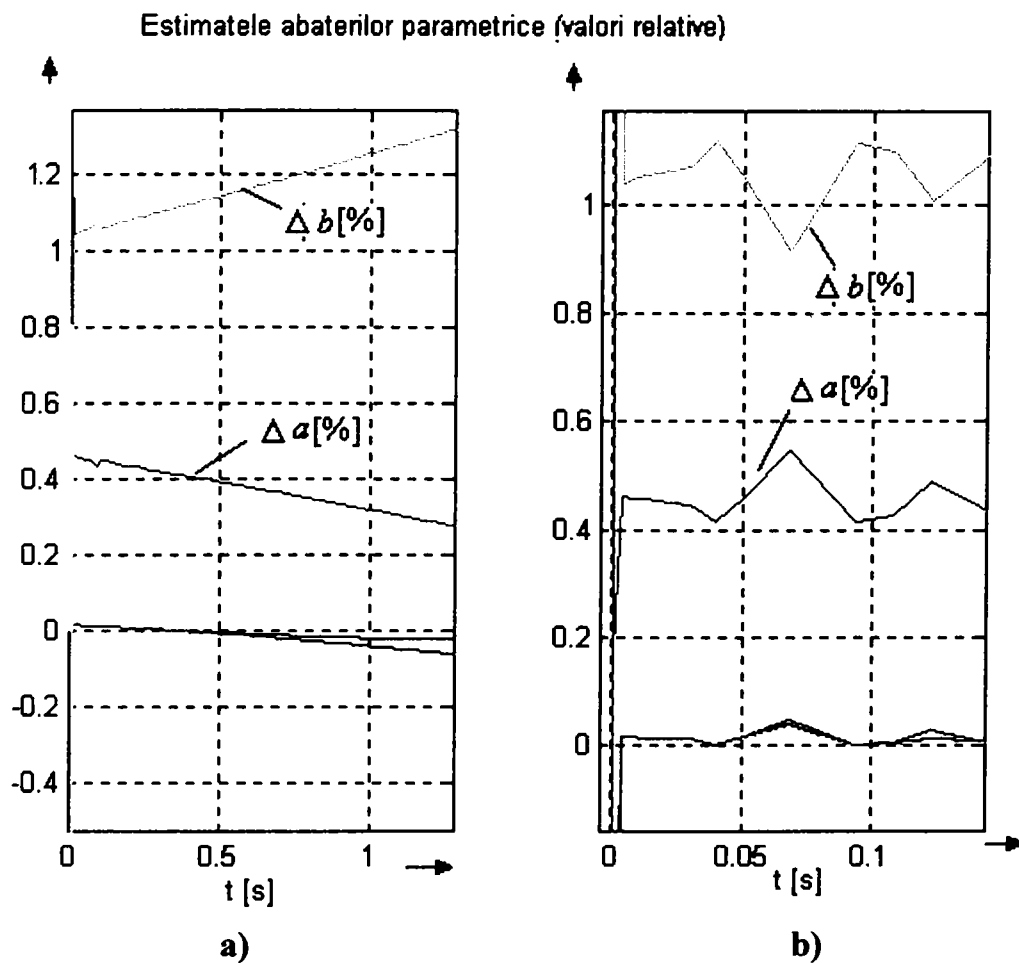


Fig.XIV-10 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterile reale ale parametrilor a de 1% și b de 1% ; a) cu metoda clasică; b) cu metoda I.

Programe MATLAB, schema de simulare și rezultate grafice aferente studiului prezentat în §4.2.2

În această anexă se prezintă schema SIMULINK, programele MATLAB, modul în care au fost ele utilizate la abaterilor parametrice sintetizate în tabelul 3 din §4.2.2 și rezultatele grafice din fig.XV-2÷XV-16.

Pornind de la sistemul combinat descris de relațiile (4.2.2.6)÷ (4.2.2.8), s-a construit schema SIMULINK din fig. XV-1 care include și relația (4.2.2.11), a abaterilor.

Înainte de a utiliza schema de simulare din fig. XV-1 este necesară descrierea parametrilor nominali precum și modelarea abaterilor ce urmează a fi estimate. Acestea sunt cerințe realizate prin următorul program MATLAB.

```
%Pregatirea parametrilor schemei de simulare
%Parametri nominali ai sistemului
m=300;Ka=6*10^4;ao=3157.2;bo=100;
%Simularea abaterilor reale si a parametrilor reali
da=input('abaterea parametrului a(%)=')
db=input('abaterea parametrului b(%)=')
a=ao*(1+da/100)
b=bo*(1+db/100)
%Conditia initiala xomin=0.005;
xo=0.005;
xomax=0.03;
%Limitele marimii de intrare
Femin=3157.2*(1-exp(-100*xo));
Femax=3157.2*(1-exp(-100*xomax));
%Tipul marimilor de iesire
x1=[];x1o=[];x1e=[];x2=[];x2o=[];x2e=[];%marimi de iesire
deltax1=[];deltax1e=[];deltax2=[];deltax2e=[];%abateri
hilb=[];hilbe=[];hi2b=[];hi2be=[];%f.d.s de stare in raport cu
b
%Timpul
t=[];tout=[]
%
```

Se cuvine precizarea conform căreia mărimea de intrare reprezintă un semnal persistent de ordinul $n=11$ cu media $\bar{u} = 2117.5$ și matricea Toeplitz R_u simetrică și pozitiv definită conform cerințelor [103]

$$R_u = \begin{bmatrix} r_u(1) & \cdots & r_u(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_u(n) & \cdots & r_u(1) \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} r_u(1) = 668.85; r_u(2) = 600.75; r_u(3) = 531.69; r_u(4) = 462.24; \\ r_u(5) = 392.94; r_u(6) = 324.35; r_u(7) = 256.99; r_u(8) = 191.40; \\ r_u(9) = 128.10; r_u(10) = 67.62; r_u(11) = 10.44 \end{array}$$

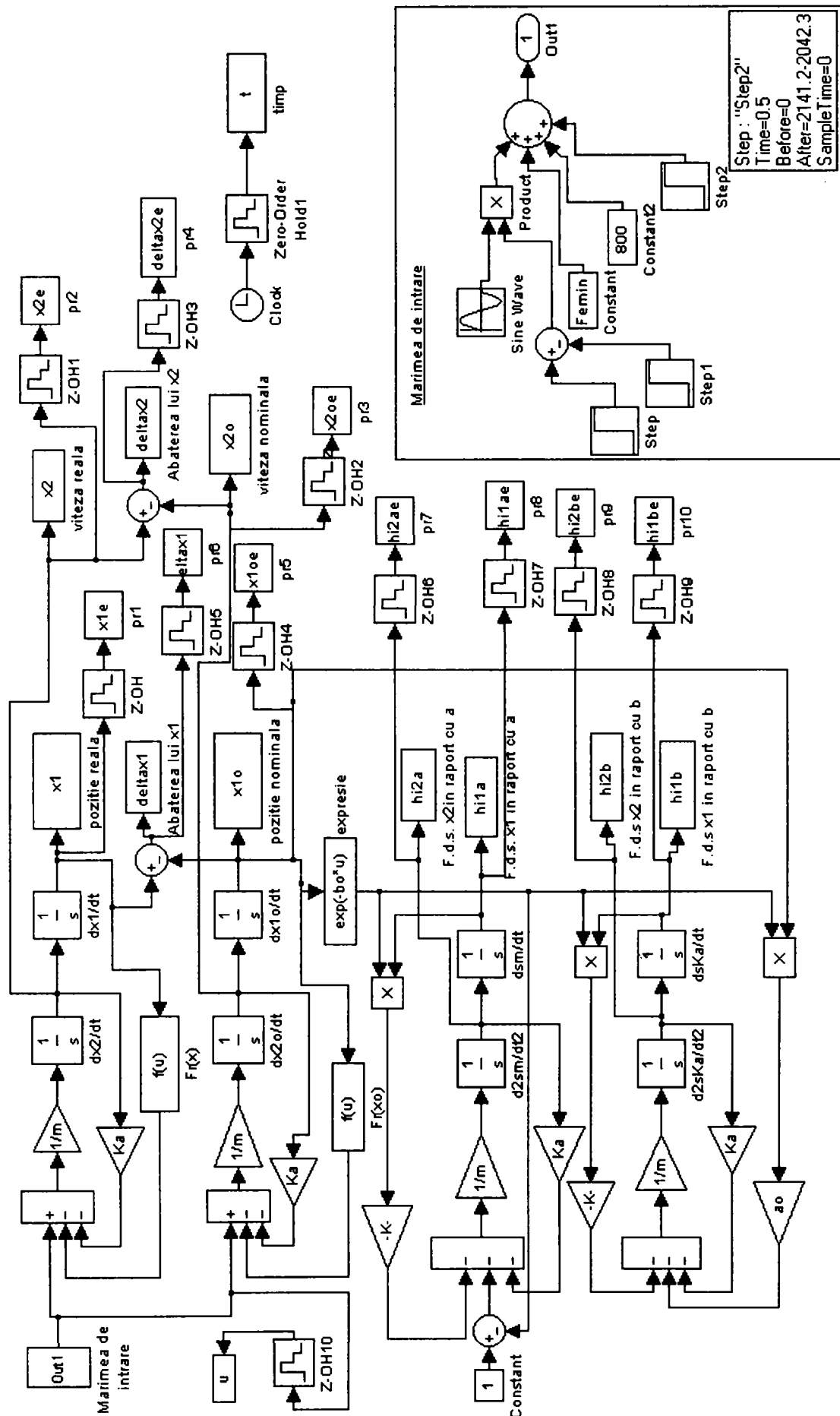


Fig. XV-1 Schema Simulink utilizată la determinarea stării nominale, a funcțiilor de sensibilitate parametrică absolută ale stării și a abaterilor stării de la traectoria nominală

În schema de simulare din fig. XV-1 la descrierea blocurilor nelineare $f(u)$ s-au utilizat următoarele expresii

$$f(u) = a \cdot (1 - \exp(-b \cdot u)) \text{ pentru blocul notat "Fr(x)";}$$

$$f(u) = a_0 \cdot (1 - \exp(-b_0 \cdot u)) \text{ pentru blocul notat "Fr(x_0)";}$$

În urma simulării schemei din fig. XV-1, în mediul MATLAB, sunt disponibile pentru alte prelucrări (reprezentări grafice, alte calcule) valorile nominale și reale, abaterile și f.d.s. ale stărilor, sub denumirile:

- x_1, x_2 - mărimile de stare x_1, x_2 (valori reale);
- x_{10}, x_{20} - mărimile de stare x_1, x_2 (valori nominale);
- $\text{deltax}_1, \text{deltax}_2$ - abaterile lui x_1, x_2 ;
- hi_1a, hi_2a - f.d.s ale stării în raport cu parametrul a ;
- hi_1b, hi_2b - f.d.s ale stării în raport cu parametrul b ;

în varianta continuă și cu aceeași denumire, completată cu e la final, în varianta eșantionată, cu perioada de eșantionare $h=0.024$ secunde;

t_{out} - timp continuu;

t - timp discret (obținut din t_{out} prin eșantionare cu h).

Ele sunt utilizate la implementarea relațiilor (4.2.2.14) și (4.2.2.15) pentru calcularea estimatelor abaterilor parametrice cu metoda clasică și metoda II.

```
%Program MATLAB de prelucrare a rezultatelor simulării
%x1;x10;x2;x20;hi1a;hi1b;hi2a;hi2b;deltax1;deltax2;
%Calculul abaterilor parametrice cu metoda clasica
deltaalfac(:,1)=[0;0];
%deltaalfac(:,2)=[0;0];
%deltaalfac(:,3)=[0;0];
Ntilda=[hi1ae(1)*deltax1e(1)+hi2ae(1)*deltax2e(1);hi1be(1)*deltax1e(1)+hi2be(1)*deltax2e(1)];
Mtilda=[hi1ae(1)^2+hi2ae(1)^2,hi1ae(1)*hi1be(1)+hi2ae(1)*hi2be(1);hi1ae(1)*hi1be(1)+hi2ae(1)*hi2be(1),hi1be(1)^2+hi2be(1)^2];
;
k=length(t);
for i=2:k,
Ntilda=Ntilda+[hi1ae(i)*deltax1e(i)+hi2ae(i)*deltax2e(i);hi1be(i)*deltax1e(i)+hi2be(i)*deltax2e(i)];
Mtilda=Mtilda+[hi1ae(i)^2+hi2ae(i)^2,hi1ae(i)*hi1be(i)+hi2ae(i)*hi2be(i);hi1ae(i)*hi1be(i)+hi2ae(i)*hi2be(i),hi1be(i)^2+hi2be(i)^2];
deltaalfac(:,i)=inv(Mtilda)*Ntilda;
end
%Calculul abaterilor parametrice cu metoda II
deltaalfa(:,1)=[0;0];%deltaalfa(:,2)=[0;0];
%deltaalfa(:,3)=[0;0];
csi=[deltax1e(1);deltax2e(1)];
S=[hi1ae(1),hi1be(1);hi2ae(1),hi2be(1)];
for i=2:k,
csi=csi+[deltax1e(i);deltax2e(i)];
S=S+[hi1ae(i),hi1be(i);hi2ae(i),hi2be(i)];
deltaalfa(:,i)=inv(S'*S)*S'*csi;
end
%calculul abaterilor parametrice relative
```

```

a1=deltaalfac(1,length(t))/ao*100%cu metoda clasica
b1=deltaalfac(2,length(t))/bo*100
a2=deltaalfa(1,length(t))/ao*100% cu metoda II
b2=deltaalfa(2,length(t))/bo*100
%calculul erorilor relative
ea1=(a1-da)/da*100,ea2=(a2-da)/da*100
%da12=(deltaalfac(1,28)-deltaalfa(1,42))/ao
%db12=(deltaalfac(2,28)-deltaalfa(2,42))/bo
eb1=(b1-db)/db*100,eb2=(b2-db)/db*100
% Rezentari grafice
% Evoluția abaterilor parametrice relative
figure,subplot(121),plot(t,deltaalfac(1,:)/ao,'*',t,deltaalfac(2,:)/bo,'*'),grid%cu metoda clasica
subplot(122),plot(t,deltaalfa(1,:)/ao,'*',t,deltaalfa(2,:)/bo,'*'),grid
% Evolutia diferentei abaterilor estimate
figure, plot(t,(deltaalfac(1,:)-deltaalfa(1,:))/ao,'*',t,(deltaalfac(2,:)-deltaalfa(2,:))/bo,'*'),grid
%
```

În fig.XV-3, XV-5, XV-7, XV-9, XV-10, XV-11, XV-13, XV-14, XV-15, XV-16 sunt prezentate evoluțiile în timp ale estimatelor abaterilor relative în diverse situații iar în fig. XV-4, XV-6, XV-8, XV-12 se arată evoluția diferențelor de estimare între cele două metode. Se poate aprecia ca moment ideal pentru estimare acela pentru care aceste diferențe sunt nule adică aproximativ 0.4 secunde..

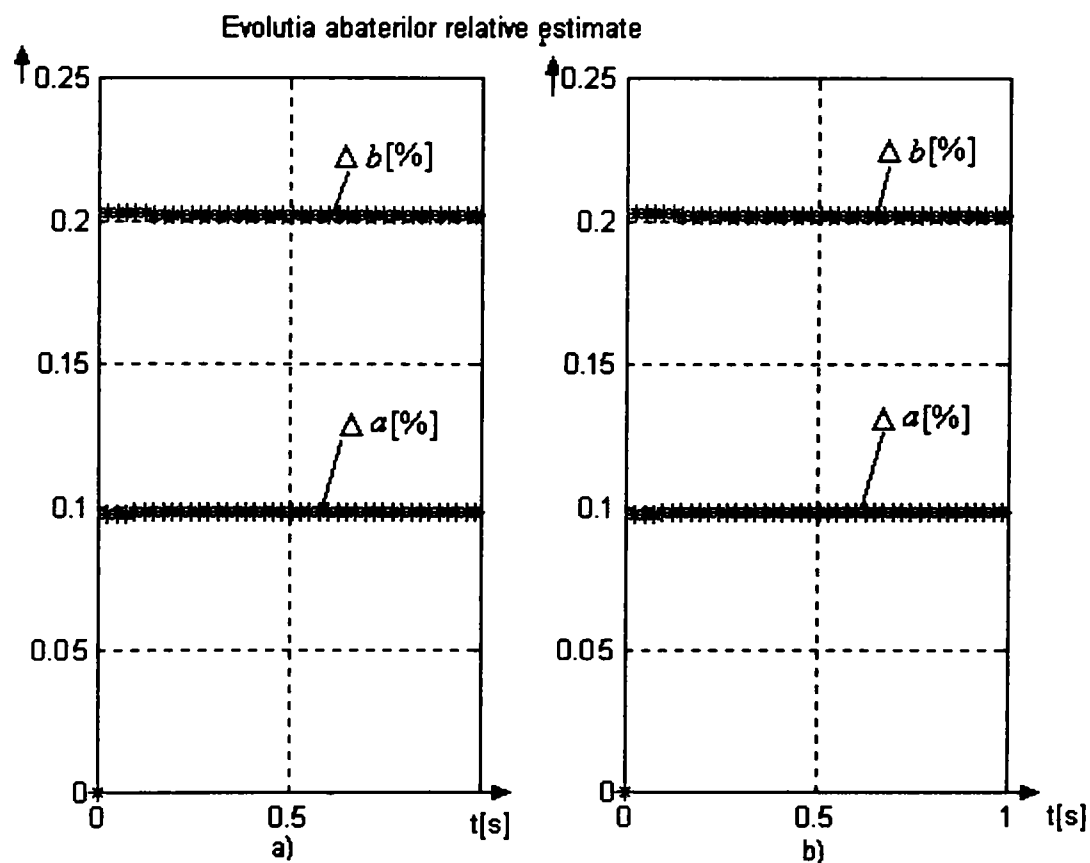


Fig.XV-2 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterile reale ale parametrilor a de 0.1% și b de 0.2% a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

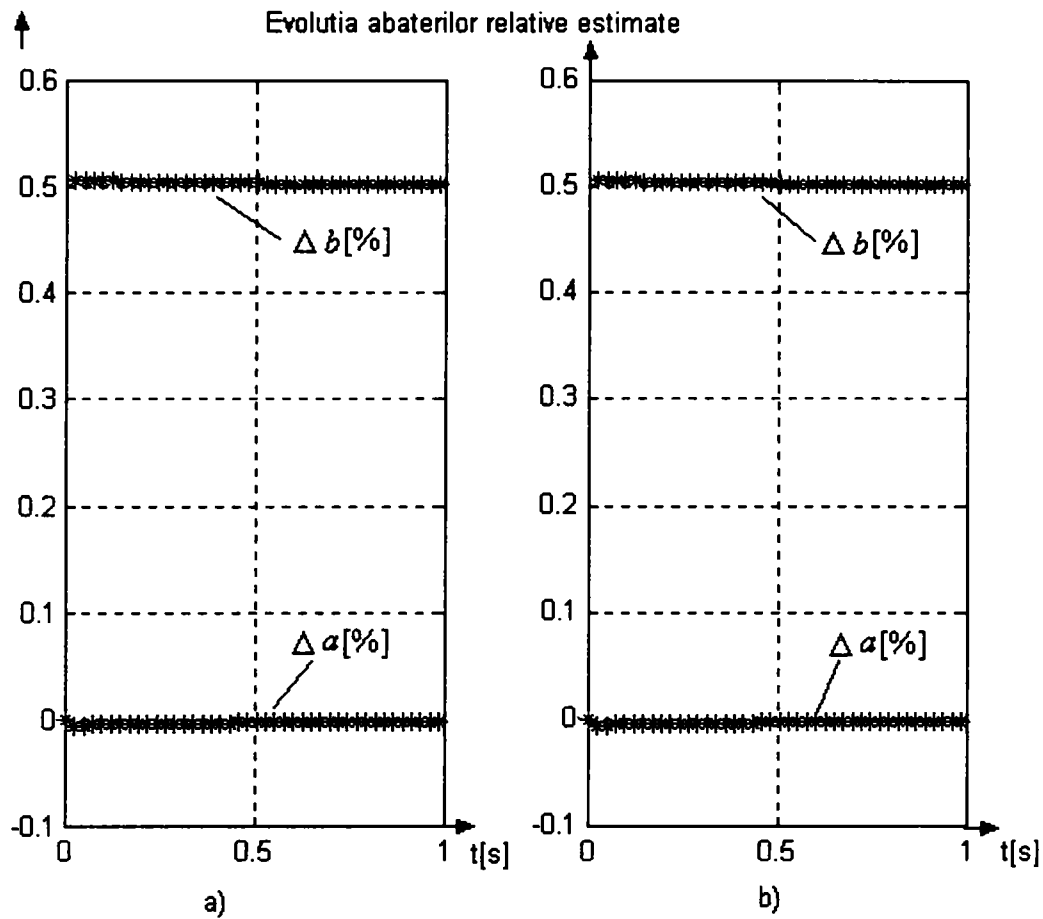


Fig.XV-3 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterea reală a parametrului b de 0.5%
a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

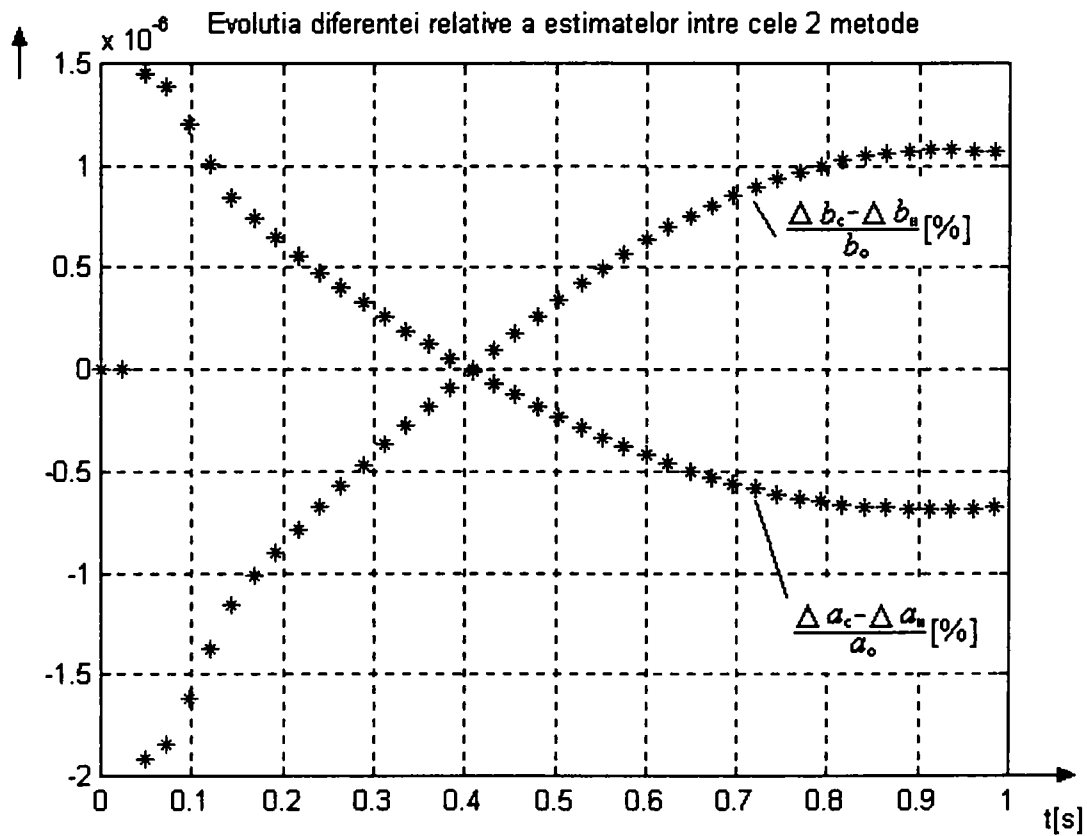


Fig.XV-4 Evoluția în timp a diferenței relative a estimării abaterilor parametrice între metoda clasică și metoda II pentru o abatere reală Δb de 0.5%

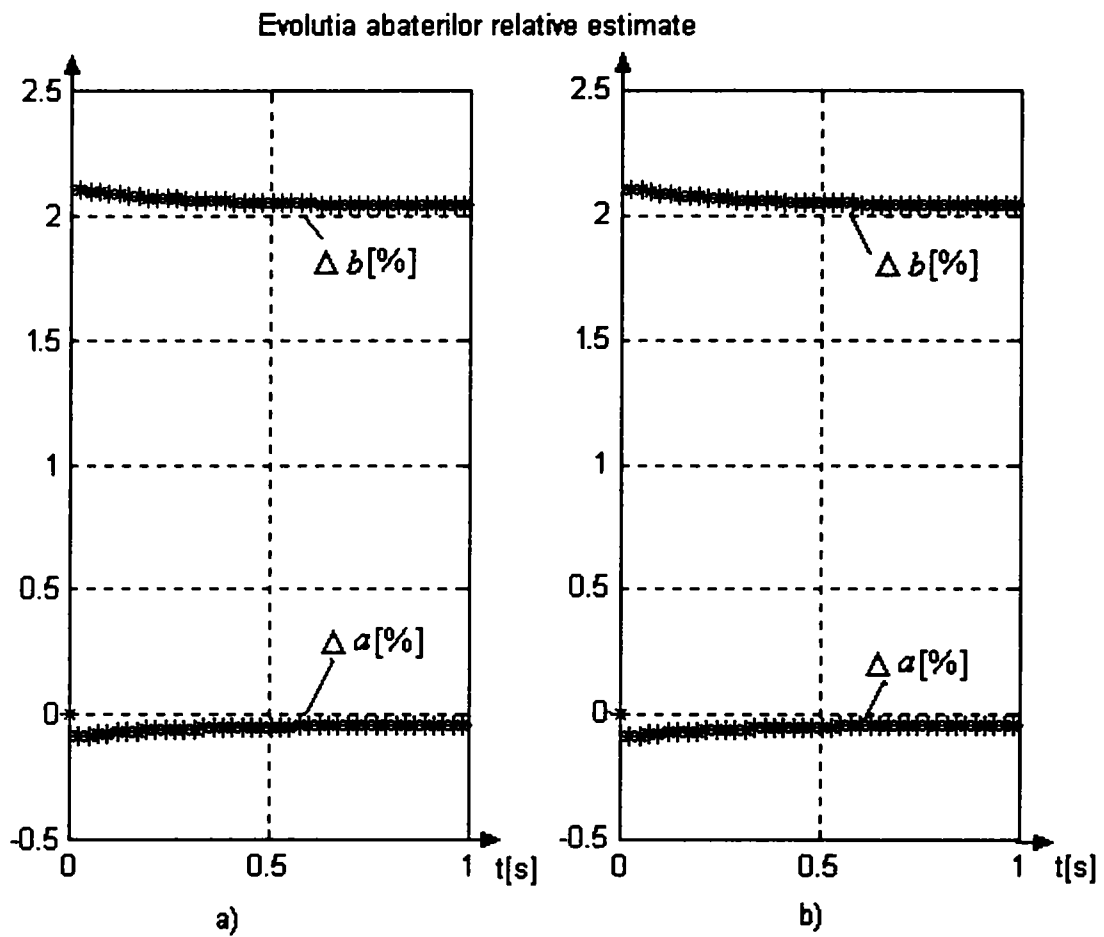


Fig.XV-5 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametric pentru abaterea reală a parametrului b de 2%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

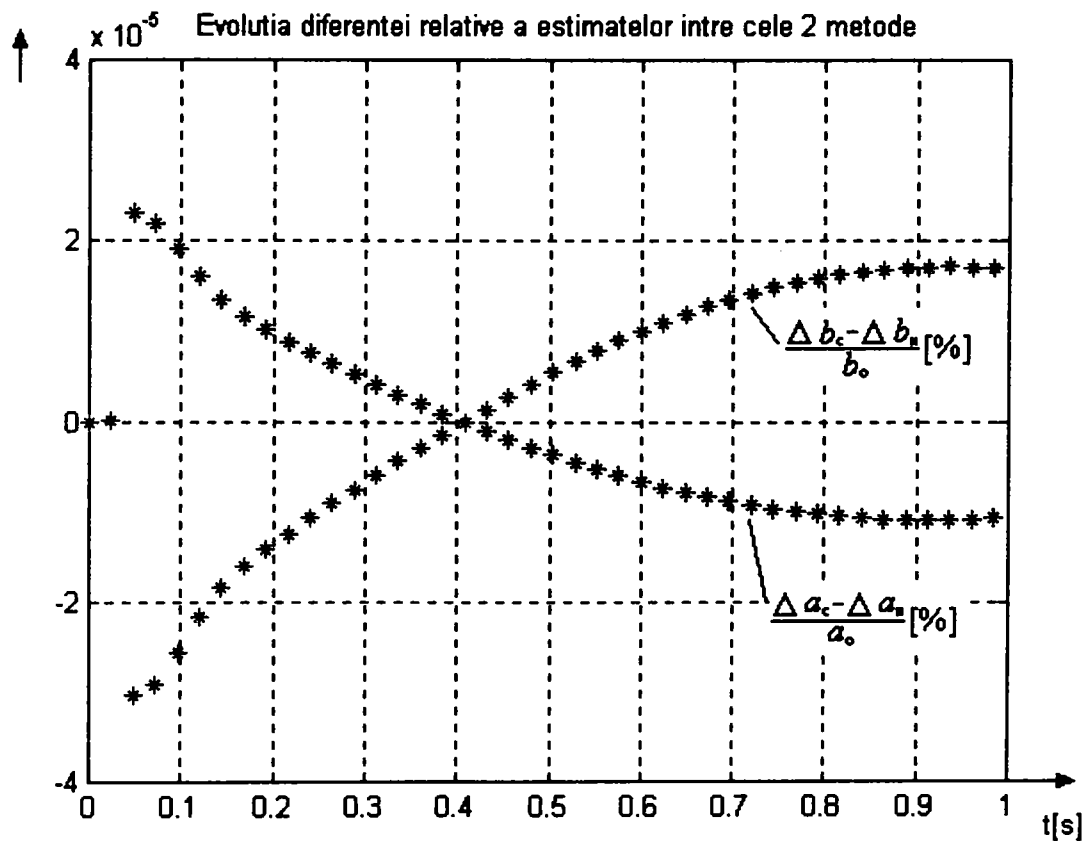


Fig.XV-6 Evoluția în timp a diferenței relative a estimării abaterilor parametric între metoda clasică și metoda II pentru o abatere reală Δb de 2%

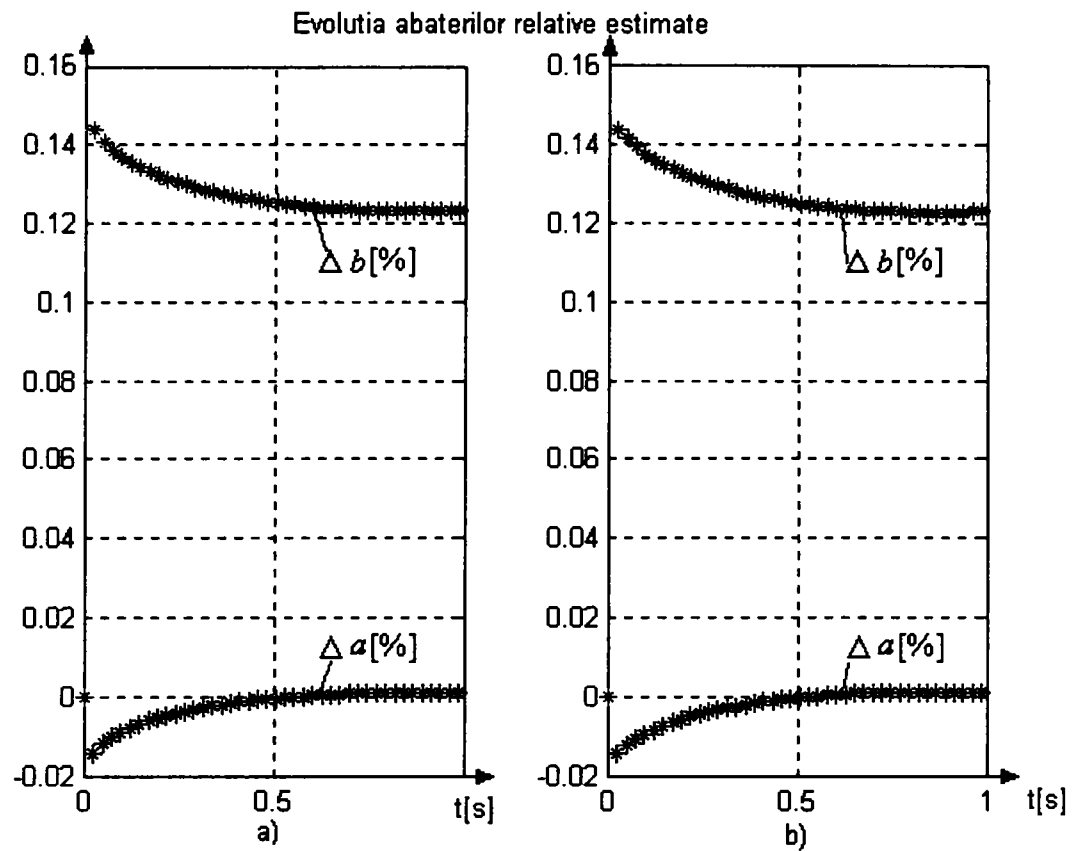


Fig.XV-7 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametric pentru abaterea reală a parametrului b de 10%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

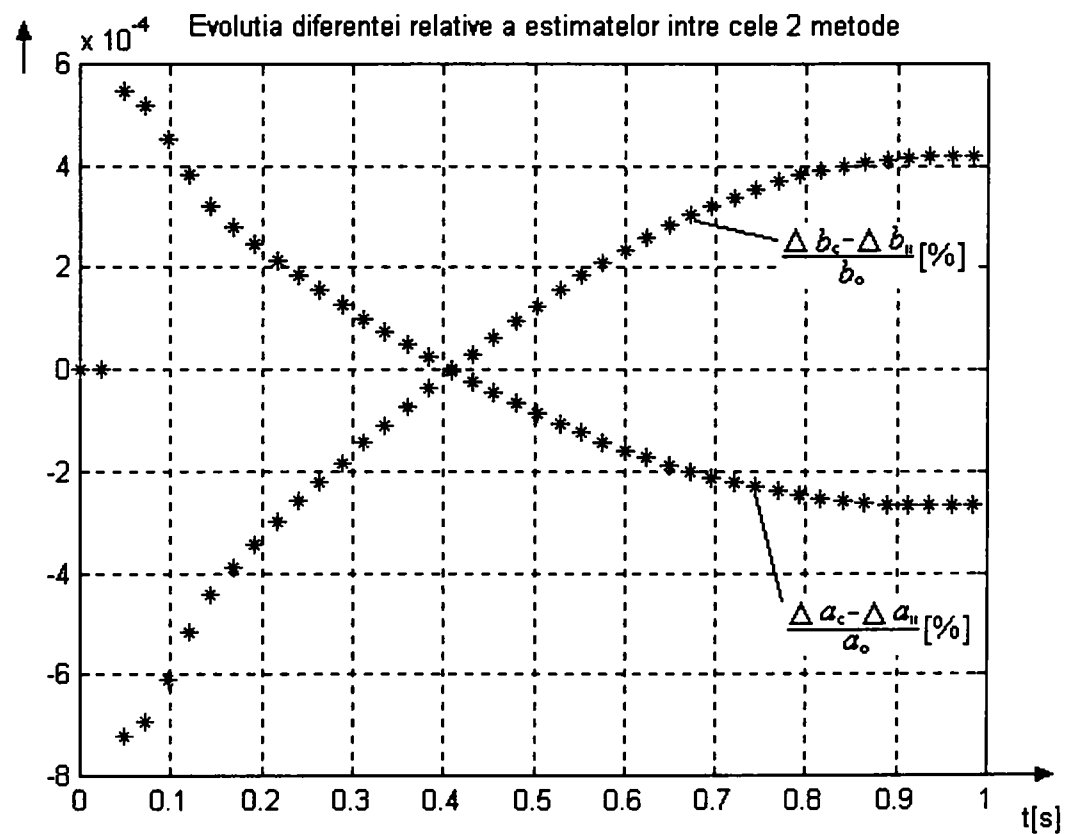


Fig.XV-8 Evoluția în timp a diferenței relative a estimării abaterilor parametric între metoda clasică și metoda II pentru o abatere reală Δb de 10%

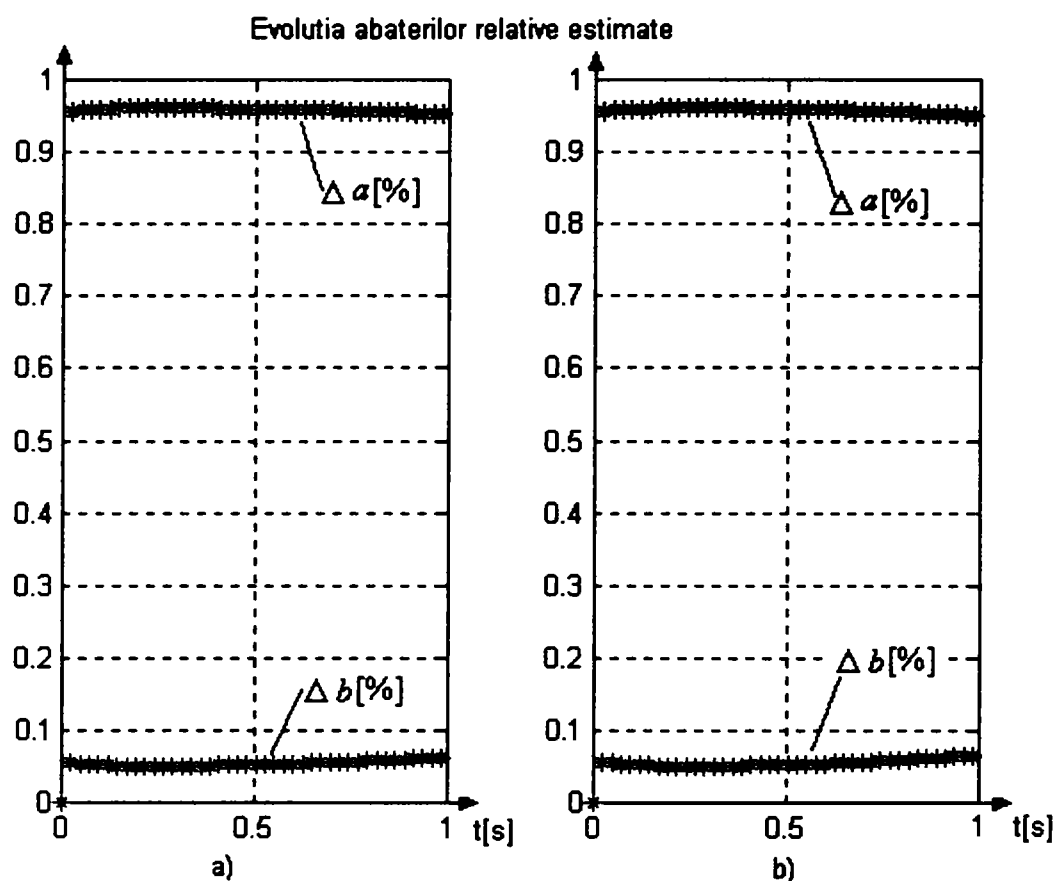


Fig.XV-9 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametric pentru abaterea reală a parametrului a de 1%
a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

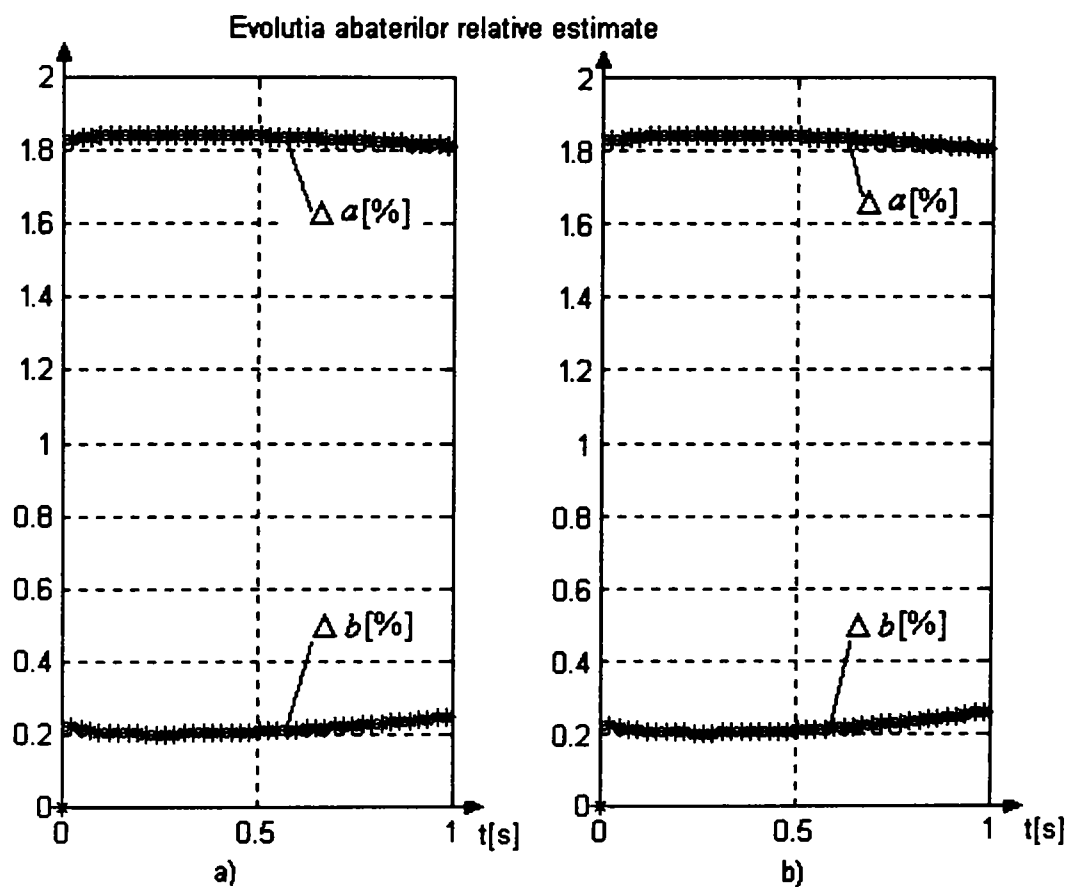


Fig.XV-10 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametric pentru abaterea reală a parametrului a de 2%
a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

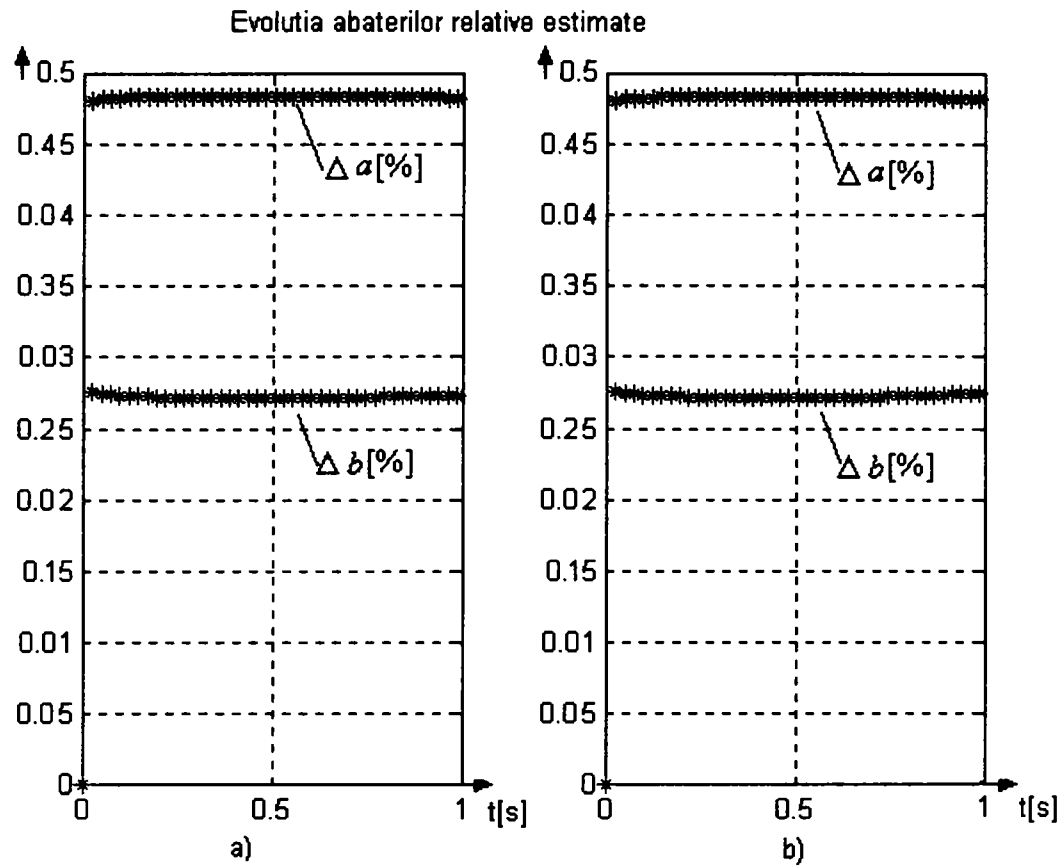


Fig.XV-11 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterile reale ale parametrilor a de 0.5% și b de 0.25%
 a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

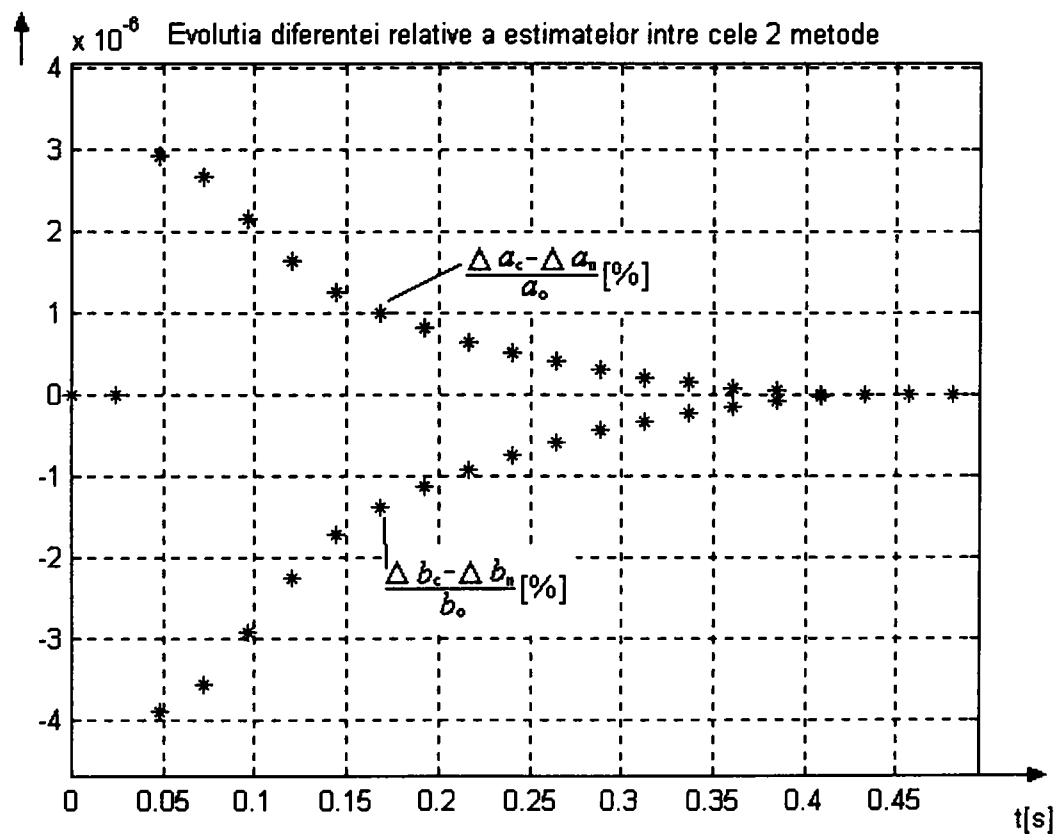


Fig.XV-12 Evoluția în timp a diferenței relative a estimării abaterilor parametrice între metoda clasică și metoda II pentru abaterile reale Δa de 0.5% și Δb de 0.25%

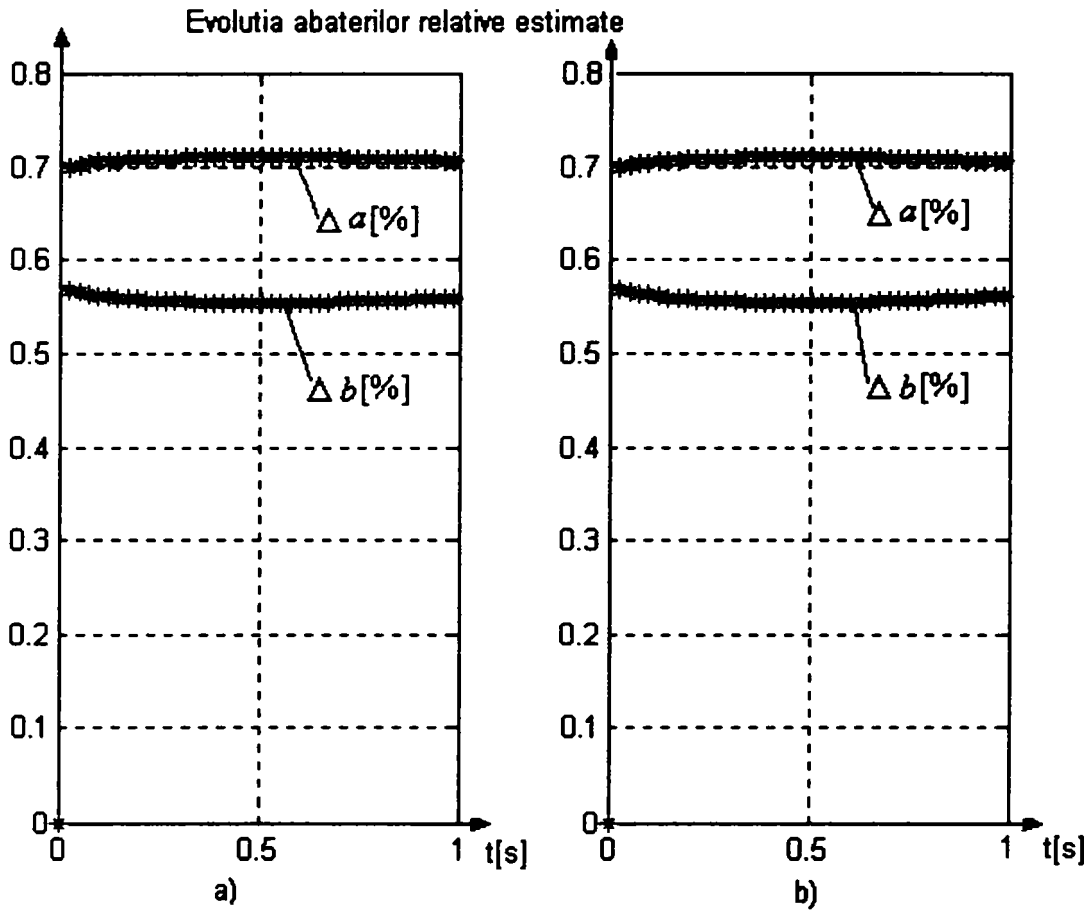


Fig.XV-13 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterile reale ale parametrilor a de 0.75% și b de 0.5% a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

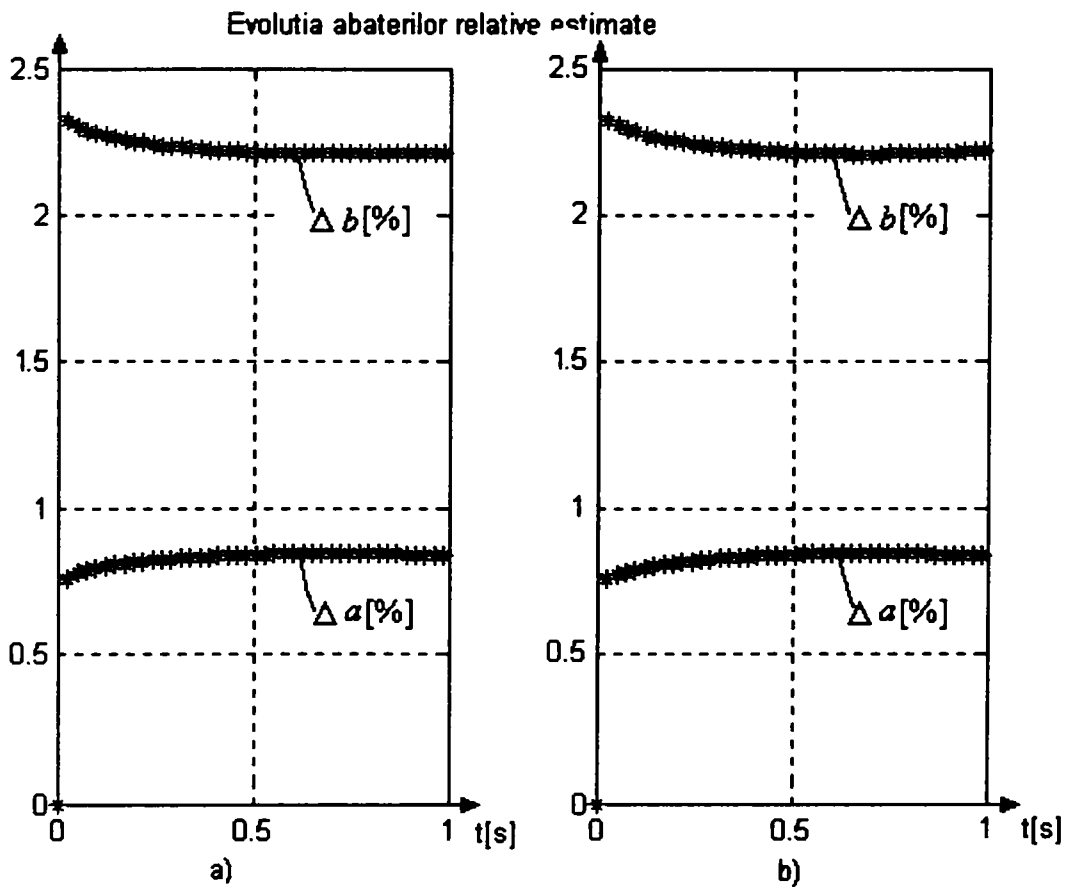


Fig.XV-14 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterile reale ale parametrilor a de 1% și b de 2% a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

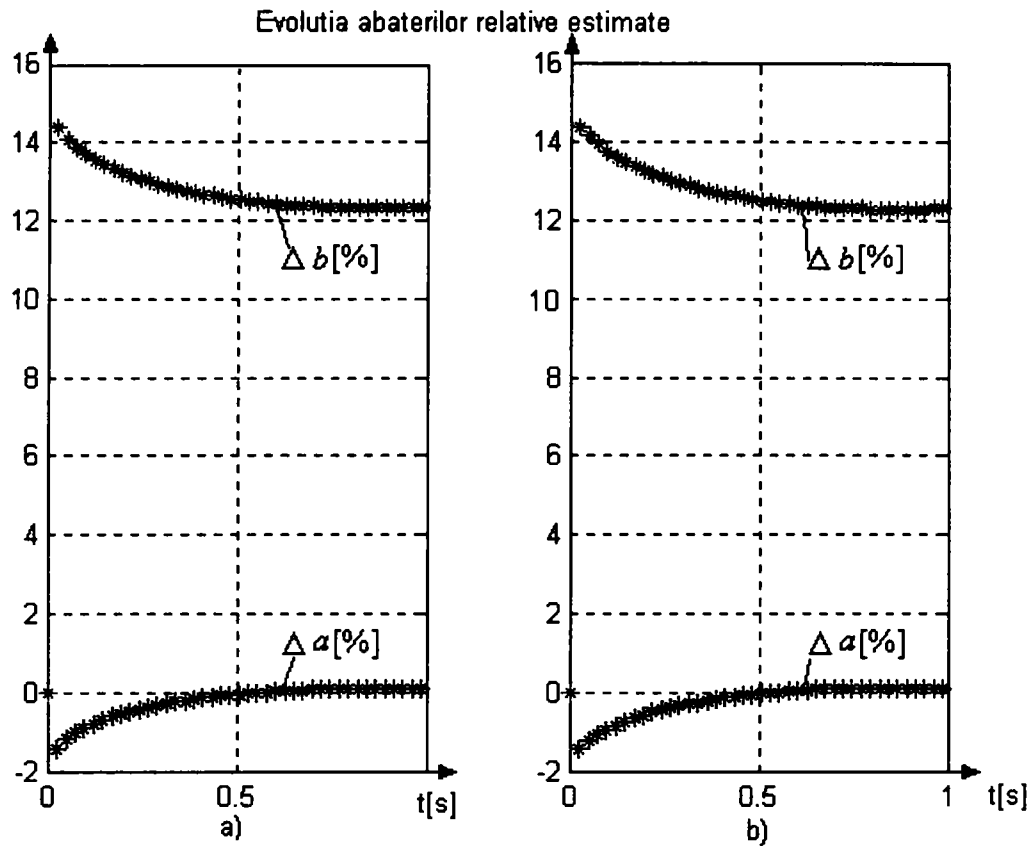


Fig.XV-15 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterile reale ale parametrilor a de 2% și b de 10% a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

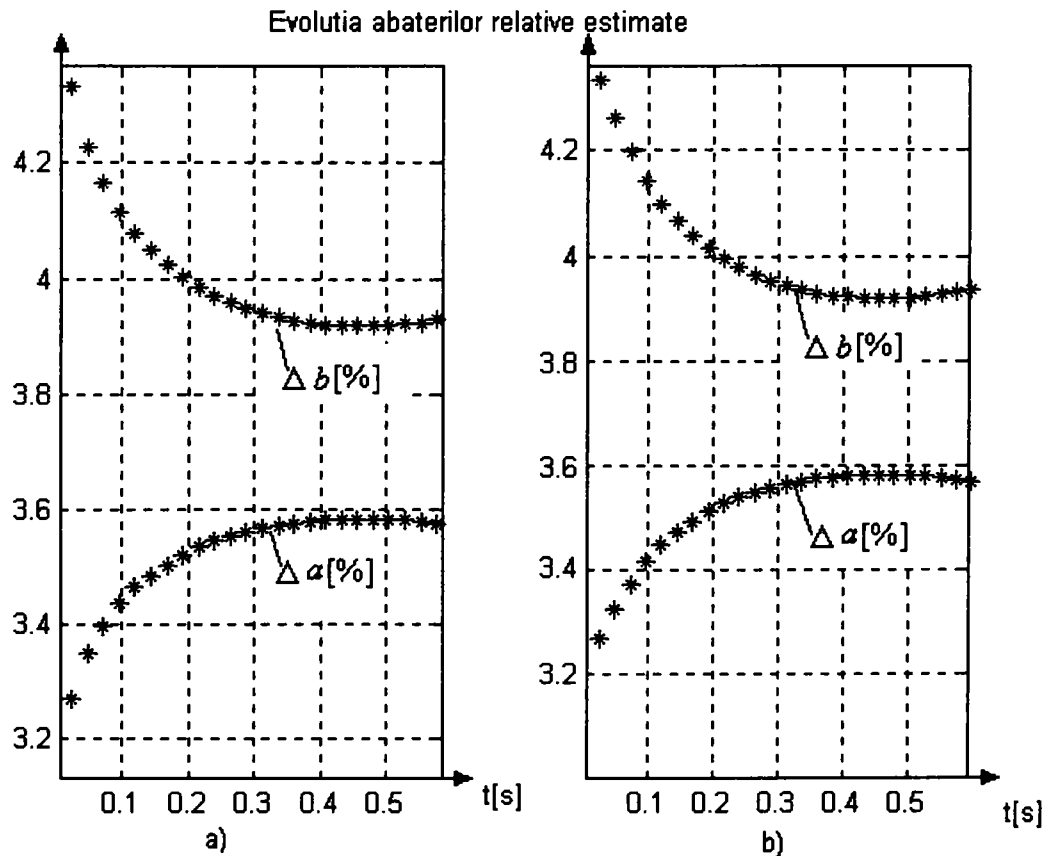


Fig.XV-16 Evoluția în timp a estimărilor abaterilor parametrice pentru abaterile reale ale parametrilor a de 5% și b de 2% a) cu metoda clasică; b) cu metoda II

BIBLIOGRAFIE

- [1] Ackermann, J., *Abtastregelung*, Springer-Verlag, 1972, pp.445-453.
- [2] Amman, P., Frank, P.M., *On Fuzzy Model-building in Observers for Fault Diagnosis*, www.cartesianinc.com
- [3] Annaswamy, A.M., El Rifai, O.M., Fleifil, M., Hathout, J.P., Ghoniem, A.F., *A Model-based Self-tuning Controller for Thermoacoustic Instability*, Combustion Science Technology, 1998.
- [4] Åström, K., Wittenmark, B., *Computer Controlled Systems*, Prentice-Hall, Inc., U.S.A., 1984, pp. 36-39, 93-117, 179, 235-237, 311.
- [5] Babuția, I., Dragomir, T.L., Mureșan, I., Proștean, O., *Conducerea automată a proceselor*, Ed. Facla, Timișoara, 1985, pp.88-97.
- [6] Back, A., Horne, B.G., Tsoi, C. Ah., Giles, C.L., *Alternative Discrete-Time Operators: An Algorithm for Optimal Selection of Parameters*, IEEE Transaction on Signal Processing, 1999.
- [7] Barnett, S., *Insensitivity of control Systems*, Int.J.Control, vol.10, No.6, 1969, pp.665-675.
- [8] Bică, M.S., Gârban, V., *Designing Automatic Control Systems with Desired Parametric Reliability*, Published for the IFAC by Pergamon Elsevier Science, Oxford, pp.57-62.
- [9] Bică, M.S., Patriciu, V., *Systems performance characteristics analysis*, Proceedings of the "International Conference Automatics and Informatics 2001", Sofia 2001, pp.A61-A64.
- [10] Bingulac, S.P., *On the Role of Orthonormality of Sensitivity Functions in parameter Optimization Problems*, Automatica, 5, pp.297-301, 1969.
- [11] Buxbaum, A., Schierau, K., *Berechnung von Regelkreisen der Antriebstechnik*, Elitera-Verlag, Berlin, 1974.
- [12] Buxbaum, A., Schierau, K., Straughen, A., *Design of Control Systems for DC Drives*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990, pp.118-121.
- [13] Călin, S., *Regulatoare Automate*, EDP, 1976, pp.17-21.
- [14] Călin, S., Popescu, Th., Jora, B., Sima, V., *Conducerea adaptivă și flexibilă a proceselor industriale*, Editura Tehnică, București, 1988, pp.43-46.
- [15] Chen, W. *Jacobian matrix: a bridge between linear and nonlinear polynomial-only problems*, Computing Research Repository: Computational Engineering, Finance and Science, 1999, www.ncstrl.org
- [16] Crstici, B., ..., *Matematici Speciale*, E.D.P., Bucuresti, 1981, pp.16.
- [17] Cruz, J.B., Kokotović, P.V., Kreindler, E., Perkins, W.R., Sandberg, I.W., Sarachik, P.E., *Feedback Systems*, Mc Graw-Hill, Inc., U.S.A., 1972.
- [18] Ding, X., Frank, P.M., *Fault Diagnosis Using Adaptive Observers*, Presented at SICICI '92 Singapore.
- [19] Ding, X., Frank, P.M., *Frequency Domain Approach and Threshold Selector for Robust Model-based Fault Detection and Isolation*, Proc.IFAC/IMACS Symp. SAFEPROCESS Baden-Baden, pp.307-312, 1991.
- [20] Ding, X., Frank, P.M., *Komponentefehlerdetektion mittels Fourier-Analyse im Zustandsraum*, Automatisierungstechnik at 38 4 R. Oldenburg Verlag, 1990.

- [21] Ding, X., Frank, P.M., *Komponentefehlerdetektion mittels auf Empfindlichkeit analyse basierender robuster Detectionsfilter*, Automatisierungstechnik at 38 8 R. Oldenburg Verlag, 1990.
- [22] Dragomir, T.L., Mureşan, A., *Bazele tehnicii reglării automate*, IPTVT, 1986, pp.130-134.
- [23] Dragomir, T.L., Neamţu (Popescu), D., *Mathematical Models for Study of the Influence of Information Processing Time upon Digital Control Systems*, Simpozionul de microprocesoare, microcalculatoare şi aplicaţii în economie, vol.Lucrările simpozionului, pp.183-186.
- [24] Dragomir, T.L., *Regulatoare automate*, vol.I, IPTV Timisoara, 1986, pp.201-202, 306-308.
- [25] Dubois, F., Petit, N., Rouchon, P., *Motion Planning and Nonlinear Simulations for a Tank Containing a Fluid*, www.cnam.fr
- [26] Dumitrache, I., Dumitriu, S.,..., *Automatizări electronice*, EDP, 1983, pp.264-274.
- [27] Elmadbouly, E., Keller, L., Frank, P.M., *Application of Observersto Instruments Failure Detection*, IFAC, Symposium of Theory and Application and Digital Control, New Delhi, India, 1982.
- [28] Eychoff, Pieter. *Identificarea sistemelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977, pp.15-40, 344-354, 372, 373.
- [29] Feştilă, C., Dobra, P., Lazea, Ghe., *Small Sensitivity Control Algorithms for simple Servomechanisms*, CONTI'94, Timişoara, 1994, pp.1-5.
- [30] Föllinger, O., *Entwurt konstanter Ausgangsrückführungen im Zustandsraum*, Automatisierungstechnik, at, 34, Heft 1/1986.
- [31] Frank, P.M. *Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Analytical and Knowledge-based Redundancy. A Survey and Some New Results*. Automatica, Vol 26, No. 3, pp456-474, Pergamon Press.
- [32] Frank, P.M., *Diagnoseverfahren in der Automatisierungstechnik*, at - Automatisierungstechnik 42, R. Oldenbourg Verlag, pp.47-64, 1994.
- [33] Frank, P.M., *Analytical and Qualitative Model-Based Fault Diagnosis - A Survey and Some New Results*, European Journal of Control (1996) pp.6-28, 1996 EUCA.
- [34] Frank, P.M., *Fault Detection in Industrial Processes*, pp.241-246, 1998.
- [35] Frank, P.M., *Analytical and Qualitative Model-based Fault Diagnosis*, Tempus Workshop Model-based Fault Diagnosis'94, Zakopane, Polen, May 26-28, 1994.
- [36] Frank, P.M., *Advances in Observer-based Fault Tolerance Diagnosis*, Conference on Fault Diagnosis. 5-7 April 1993, Toulouse.
- [37] Frank, P.M., *Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Software Redundancy*, Invited Special Lecture at the Second Makuhary Conference on High Technologi Information Science and Computer Technology, World Techno-Fair, Chiba, Japan, 31.1-3.2 .1991.
- [38] Frank, P.M., *The Application of Fuzzy Logic to Fault Diagnosis and Supervision*, Logique Floue et ses Applications, Rennes, November 1998.
- [39] Frank, P.M., *Enhancement of Robustness in Observer-based Fault Detection*, Int. J. Control, 1994, Vol. 59, No. 4, 955-981.
- [40] Frank, P.M., Ding, X., *A Frequency Domain Based Approach to Fault Identification*, Proc. IMACS/IFAC Symp. MIM- S², Bruessels, pp.570-574, 1991.

- [41] Frank, P.M., Janssen, K., *Entdeckung von Komponentenfehlern in dynamischen Systemen durch hierarchische Zustandsschätzung*, Automatisierungstechnik at 34. Jahrgang, Heft 1/1986.
- [42] Frank, P.M., Köppen-Seliger, B., *New Developments Using AI in Fault Diagnosis*, Engng. Applic. Artif. Intell. Vol. 10, No. 1, pp. 3-14, Elsevier Science Ltd, 1997.
- [43] Frank, P.M., *Empfindlichkeitsanalyse dynamischer Systeme*, R. Oldenbourg Verlag München, 1976.
- [44] Frank, P.M., Keller, L., *Sensitivity Discriminating Observer Design for Instrument Failure Detection*, IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, AES-16, pp.460-467, 1980.
- [45] Garrard, W.L., *Suboptimal Feedback Control for Nonlinear Systems*, Automatica, Vol.8, pp.219-221, 1972.
- [46] Giunale, C., Kalisz, E., *Limbajul C standard*, Editura Teora, Cluj, 1992.
- [47] Guardabassi, G., Locatelli, A., Rinaldi, A., *Structural Uncontrollability of Sensitivity Systems*, Automatica, Vol.5, pp.297-301, Pergamon Press, 1969.
- [48] Han, Z., Frank, P.M., *Fault Detection via Characteristic Parameter Estimation*, Proceedings of 3rd European Control Conference, Rome, Italy, September 1995.
- [49] Hengy, D., Frank, P.M., *Component Failure Detection via nonlinear State Observers*, IFAC-Workshop Kyoto, 1986.
- [50] Holzman, J. M., *On Using Perturbation Analysis to do Sensitivity Analysis: Derivatives Versus Differences*, IEEE Transaction on Automatic Control, vol.37, No.2, 1992, pp.243-247.
- [51] Huang, B., Shah, S.L., *Performance Assessment of Control Loops, Theory and Applications*, Advances in Industrial Control, Springer-Verlag, pp.179-213, 1999.
- [52] Huang, Su-Nan, Qian, Jixin., *Fault-tolerant Design of Feedback Control Systems*, Control and Computers, Vol. 24, No. 1, 1996.
- [53] Iancu, E., *Detection et localisation analytique des actionneurs défectueux*, SINTES8, vol.1, pp.107-113, Craiova, 1996.
- [54] Iancu, E., Vinătoru, M., *Detecția și localizarea defectelor în sistemele dinamice*, Editura SITECH, Craiova, 1999, pp.187-235.
- [55] Ionescu, V., Varga, A., *Teoria sistemelor*, Sinteză robustă, Metode numerice de calcul, Editura All, București, pp.7-18, 1994.
- [56] Ionescu, V., Popeea, C., *Optimizarea sistemelor*, E.D.P., București, 1981, pp.26-30.
- [57] Kelley, H.J., *Singular Perturbations for a Mayer Variation Problem*, AIAA Journal, Vol.8, No.6, June 1970, pp.1177-1178.
- [58] Kinkel, J., Thomas, M., *Estimation of Vehicle Dynamic and Static Parameters from Magnetometer Data*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.20, No.1, pp.111-116, 1997.
- [59] Klein, M., Nielsen, L., *Evaluating some gain scheduling strategies in diagnosis of a tank system*, IFAC, 2000.
- [60] Köppen-Seliger, B., Frank, P.M., *Fault Detection and Isolation in Technical Processes with Neural Networks*, Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, LA, December 1995.
- [61] Köppen-Seliger, B., Frank, P.M., *Fuzzy Logic and Neural Networks in Fault Detection*, Kapitel 7 in Fusion on Neural Networks, Fuzzy Sets and Genetical Algorithms, Industrial Applications, Herausgeber: Lakhmi, C. Jain, N.M., Martin, S. 171-209.

- [62] Köppen-Seliger, B., Kiupel, N., Schulte Kellinghaus, H., Frank, P.M., *A Fault Diagnosis Concept for a High Pressure Preheater*, Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, LA, December 1995.
- [63] Kreindler, E., *Closed-Loop Sensitivity Reduction of Linear Optimal Control System*, IEEE Transaction on Automatic Control Vol.AC-13, No.3, 1968, pp.254-262.
- [64] Leith, D.J., Leithead, W.E., *Counter Example to a Common LPV Gain- Scheduling Design Approach*, Industrial Control Centre, Dept.of Electronics & Electrical Engineering, University of Strathclyde, Glasgow, 1999.
- [65] Leith, D.J., Leithead, W.E., *Gain Scheduling Dynamic Linear Controllers for a Nonlinear Plant*, Industrial Control Centre, Dept.of Electronics & Electrical Engineering, University of Strathclyde, Glasgow, 1995.
- [66] Maret, L., *Régulation Automatique*, Presses Polytechniques Romandes, 1988, pp.233-240.
- [67] Marin, V., Marin, Al., *Sisteme hidraulice automate*, Editura Tehnică, București, 1987, pp.107.
- [68] Moon, B.C., Bien, Z., Kim, B.K., Hwang, D.H., Cho, Y.I., *Application of a Fault Tolerant Control System for Enhancing Reliability of Boiler Controller in Powew Plant*, SICE, Tokio, pp.681-684, 1990.
- [69] Moon, B.C., Bien, Z., *Failure Detection, Identification and Accomodation Based on a New Accomodation Filter*, note de cercetare.
- [70] Moon, B.C., Bien, Z., *Failure Detection and Identification for Sensors and Actuators in Controlled Systems*, note de cercetare.
- [71] Moreau, L., Aeyels, D., *Practical stability for systems depending on a small parameter*, www.rug.ac.be
- [72] Mitrović, N., Sojanović D., Jeftenić, B., Petronijević, M., *Induction motor parameter identification by using theory of sensitivity*, CONTI'94, Timișoara, 1994, p.6-14.
- [73] Nanu, S., *Sensitivity Analysis of a Speed Regulator of a Hydrogenerator*, CONTI'94, Timișoara, 1994, pp. 31-40.
- [74] Năslău, P., *Metode numerice*, Editura Politehnica, Timișoara, pp. 24-26, 55-56, 184-188, 1999.
- [75] Newcomb, R.W., Anderson, B.D.O., *A distributional approach to time-varying sensitivity*, SIAM J. Appl. Math., 15, pp.1001-1010, 1967.
- [76] Ngo, N.T., *Sensitivity of Automatic Control Systems (Review)*, Auto. Rem. Cont., 32, 735-762, 1971.
- [77] Nishikawa, Y., Sannomiya, N., Itakura, H., *A Method for Suboptimal Design of Nonlinear Feedback Systems*, Automatica, Vol.7, 1971 pp.703-712.
- [78] Onicescu, O., Ștefănescu, V., *Elemente de statistică informațională cu aplicații*, Editura Tehnică, București, 1979, pp.19-21.
- [79] Pagurek, B., *Sensitivity of the Performance of Optimal Control Systems to Plant Parameter Variations*, IEEE Transaction on Automatic Control Vol.AC-10, 1965, pp.178-180.
- [80] Paraschiv, N., Marinecu, C., Cangea, O., *Stabilirea structurii buclelor de reglare asociate coloanelor de fracționare prin utilizarea tehnicii amplificărilor relative*, Revista Română de Informatică și Automatică, vol. 7, nr. 1, 1997.
- [81] Perkins, W.R., Cruz, J.B. Jr., Gonzales, R.L., *Design of Minium Sensitivity Systems*, IEEE Transaction on Automatic Control Vol.AC-13, No.2, 1968, pp.159-167.

- [82] Popescu, D. Popescu, C., *System Parameters Estimation by Using First Order Sensitivity Functions*, CSCS10, București, 24-26 May 1995, pp.107-114.
- [83] Popescu, D., *An Approach to Solve an Inverse Sensitivity Problem*, Periodica Politecnica, Transactions on Automatic Control and Computer Science, 47 (61), Timișoara, 107-110, 2002.
- [84] Popescu, D., *Two discrete time approaches to solve the inverse sensitivity problem*”, Proceedings CSCS - 14, (1) Bucuresti, 191-194, 2003.
- [85] Popescu, D., *To Linearize Nonlinear System Model Using Sensitivity Functions*, CEAI, vol. 5.nr.1, în curs de publicare .
- [86] Popescu, D., *Parameter Sensitivity Comparative Analysis for Approximate Discrete Time Models*, CONTI'94, Timișoara,1994, p. 15-23.
- [87] Popescu, D., *Parameter Sensitivity Study for the Control of a Dead-Beat System*, CONTI'94, Timișoara,1994, p.24-30.
- [88] Popescu, D.,*About the Identification of the Parameters of a System Using Absolute Sensitivity Functions*, EMES99, Oradea, 1999.
- [89] Popescu, D., *The Improvement of the System Parameters Identifications Using Sensitivity Functions by the Analysis of the Deviations of the Output Magnitude*, EMES99, Oradea, 1999.
- [90] Popescu, D., Popescu, C., *Posibilități de utilizare a modelelor de sensibilitate la sistemele automate adaptive*, Sesiunea de comunicări științifice, Sibiu, 17-18 nov.1995, vol.XXII,p.43-48.
- [91] Popescu, D., Popescu, C., *A Comparative Study of Instrument Failure Detection Methods in Dynamic Systems*, EMES95, Oradea, 1995, pp.167-174.
- [92] Popescu, D., Popescu, C., *System Failure Detection Based on Sensitivity Discrimination State-Space Observers with Robust Filters*, EMES95, Oradea, 1995, pp. 161-166.
- [93] Popescu, D.,Dragomir,T.L., *Utilizări ale teoriei sensibilității în analiza sistemelor dinamice cu aplicații în sinteza sistemelor automate*, EMES94, Oradea, 1994.
- [94] Querelle, R., Noura, H., Kremer, N., Sauter, D., Frank, P.M., *Fault Diagnosis on a Winding Machine, Conference on Supervision and Safety For Technical Processes*, Safeprocess 97, 26-28.08.1997, Kingston upon Hill, United Kingdom.
- [95] Rohrer, R.A., Sobral, M. Jr., *Sensitivity Consideration in Optimal System Design*, IEEE Transaction on Automatic Control Vol.AC-10,1965, pp.43-48.
- [96] Rosenwasser, E., Yusupov, R., *Sensitivity of Automatic Control Systems*, CRC Press, USA, 2000.
- [97] Șabac, Ion, Ghe., *Matematici speciale*, Ed.Didactică și Pedagogică, București,1981, pp. 472-483.
- [98] Saif, M., *Robust Discrete Time Observer with Application to Fault Diagnosis*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 121, September 1999.
- [99] Sarachic, P.E., *Applications of Functional Analysis to Nonlinear Control Systems with Unknown Plants*, Feedback Systems, 14, McGraw-Hill,Inc., 269-318, 1972.
- [100] Schneider, H., Frank, P.M., *Observer-Based Supervision and Fault Detection in Robots Using Nonlinear and Fuzzy Logic Residual Evaluation* IEEE Transaction on Control Systems Technology, Vol.4, No.3, pp.274-282,1996.
- [101] Sobral Manoel, *Sensitivity in Optimal Control system*, Proceedings on the IEEE, Vol.56, No.10, oct.1968,pp.1644-1651.

- [102] Tam, H.K., Lam, J., *An Optimal Differential Sensitivity Approach to pole Assignment for Structurally Perturbed Systems*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME, vol.121, pp.410-417, 1999.
- [103] Tertișco, M., Stoica, P., *Identificarea și estimarea parametrilor sistemelor*, Ed.Academiei, București, pp.43-46,56-67,1980.
- [104] Ungureanu, St., *Sensibilitatea sistemelor dinamice*, Editura Tehnică, București, 1988.
- [105] Ungureanu, Șt., Petrilă, C., Ungureanu, F., *Analiza sensibilității unui sistem de reglare automată*, *Revista Română de Informatică și Automatică*, vol.7, nr.1,1997,pp.13-21.
- [106] Vega, P., Fuente, M.J., Dominguez, C.M., *Two Algorithms for Robust Fault Detection and Diagnosis of an Industrial Plant*, Control and Computers, Vol. 24, No. 3, 1996.
- [107] Verde, C., *On the Use of Sensitivity Functions to Design Dead-beat Control Algorithm*, Pergamon, Automatica 35 (1999) 945-949.
- [108] Vinătoru, M., Iancu, E., Popescu, D., *Fault Tolerant Control System for Actuator Failures*, CSCS10, vol.3, pp.244-249, București, 1995.
- [109] Werner, R.W., Cruz, J.B. Jr., *Feedback Control which Preserves Optimality for Systems with Unknown Parameters*, IEEE Transaction on Automatic Control Vol.AC-13, No.6, Dec.1968, pp.621-629.
- [110] Wilkie, D.F., Perkins, W.R., *Essential Parameters in Sensitivity Analysis*, Automatica, Vol.5,pp.191-197, Pergamon Press, 1969.
- [111] Wünnenberg, J., Frank, P.M., *Fehlerfrüherkennung für Roboter unter Verwendung dynamischer Prozessmodelle*, Automatisierungstechnik 39 1991, Oldenbourg Verlag.
- [112] Wünnenberg, J., Frank, P.M., *Sensor Fault Detection via Robust Observers. Proceedings of the First European Workshop on Fault Diagnosis, Reliability and Related Knowledge-based Approaches*. Greece, 31.8.-3.9. 1986.
- [113] Wünnenberg, J., Frank, P.M., *Dynamic Model-based Incipient Fault Detection Concept for Robots*, IFAC World Congress '90, Tallin, Estonia, USSR, 13.-17.08.90.
- [114] *** *Equilibrium Point Analysis: Linearization Technique*, www.sosmath.com
- [115] *** MATLAB, The Language of Technical Computing, The Mathworks, Inc., (www.mathworks.com), 1984-1999-2002.