

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE MECANICĂ  
CATEDRA DE MECANICĂ

TEZA DE DOCTORAT

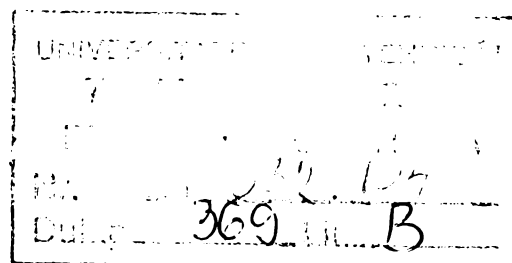
**UTILIZAREA METODELOR  
APROXIMATIVE ÎN STUDIUL SISTEMELOR  
VIBROPERCUTANTE**  
Metode și programe de calcul

*Dipl.univ. Valeriu ANGHELESCU*

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

**CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC,**  
*Prof.dr.ing. Liviu BRÎNDEU*  
*Membriu corespondent al Academiei de Științe Tehnice*

2001





## P R E F A Ț Ă

În actualul proces de dezvoltare a economiei, modernizarea producției presupune pe lângă implementarea unor tehnologii moderne, considerarea unor modele și metode matematice care să permită fundăntarea calculelor de proiectare a mașinilor și utilajelor. Pe această linie autorul a luat în considerare domeniul vibrațiilor și în mod deosebit cazul special al vibropercuțiilor în vederea introducerii și extinderii de noi tehnologii avansate, a perfecționării tehnologiilor existente, bazate pe vibropercuții, care să permită valorificarea lor superioară în condiții de eficiență economică ridicată, în vederea proiectării mai economice a mașinilor folosite în producție.

Dezvoltările relevate în cadrul lucrării de doctorat pun la dispoziția cercetătorilor și a tuturor celor interesați de studiul sistemelor vibropercutante, metode și programe de studiu, conducându-i în însușirea tehnicilor moderne de calcul a acestor sisteme.

Tematica lucrării este de actualitate atât științifică, prin fundăntarea studiului vibropercuțiilor, cât și tehnică prin aplicațiile pe care le are în industrie, rezultatele fiind cuprinse în lucrări publicate atât în țară, cât și în străinătate. De altfel, cercetările în acest domeniu inițiate de aproape trei decenii la Catedra de Mecanică a Universității "Politehnica" din Timișoara, din care face parte și autorul tezei, unde există și o puternică bază materială pentru experimentări, se bucură de atenție și apreciere deosebită în cercurile științifice de specialitate.

În esență tema cercetată în cadrul tezei de doctorat își propune, ca pe baza studiilor teoretice și aplicative elaborate, să stabilească regimul optim de funcționare al sistemelor vibropercutante utilizate în construcția mașinilor și utilajelor.

Pentru pregătirea, întocmirea și finalizarea tezei de doctorat m-am bucurat de sprijinul și îndrumarea domnului prof.dr.ing.Liviu Brîndeu, membru corespondent al Academiei de Științe Tehnice din România, față de care îmi exprim cele mai sincere mulțumiri, stima și recunoștința mea.

Mulțumesc de asemenea colectivului de cadre didactice de la Catedra de Mecanică a Universității "Politehnica" din Timișoara de la care am primit în permanență sprijinul și ajutorul ce mi-au dat sentimentul de încredere pentru elaborarea prezentei teze de doctorat.

*Autorul,*

## Capitolul 1

# SISTEME VIBROPERCUTANTE

### 1.1. Considerații generale

Cercetările cuprinse în teză se axează pe preocupările științifice de tradiție dezvoltate în cadrul Universității "Politehnica" din Timișoara în domeniul ciocnirilor, vibrațiilor și vibropercuțiilor. Este un studiu ce are ca obiectiv determinarea prin calcul a mărimilor caracteristice ciocnirii în diferite organe de mașini.

Necesitatea lucrărilor de cercetare are la bază cerințele industriei privind construcția sau încercarea unor utilaje percutante pentru exploatarea miniere și șantiere de construcții, pentru formarea și dezbaterea formelor de turnare, pentru înfigerea piloților și palplanșelor, etc. Proiectarea acestora, ca și exploatarea lor după ce au fost construite, pun multe probleme de dinamică și rezistența structurilor ce constituie punctul de pornire pentru fundamentarea unor noi studii privind fenomenele vibropercutante.

Dacă pentru determinarea mișcării există simplificări ce duc la rezultate acceptabile, nu se poate afirma același lucru în legătură cu ceilalți parametri ai ciocnirii. Aceștia pot fi stabiliți numai prin adoptarea unor modele simplificate ce țin seama în mai mare măsură de proprietățile materialelor.

Spre deosebire de rezultatele cunoscute și aplicabile numai structurilor elementare cercetarea preconizată are la bază legi, posibilități de calcul cu valabilitate generală, fiind abordarea ce se aplică și pentru orice model mecanic. Marele avantaj al acestei abordări este că legile ciocnirii pot fi scrise concomitent cu determinarea comportării sistemului. Din acest motiv dezvoltarea și generalizarea concluziilor pentru cazuri mai complexe poate fi considerată extrem de utilă încât să necesite dezvoltarea cercetărilor.

În mod special, se prevede sintetizarea rezultatelor obținute pe parcurs și elaborarea unor principii de calcul corespunzătoare rezultatelor anterioare în vederea stabilirii schemei de tratare și fixarea



algoritmilor de calcul. Pe baza programelor întocmite se realizează optimizarea funcționării structurilor mecanice supuse la ciocniri.

Esențiale în fundamentarea cercetărilor sunt verificările experimentale și simulările pe calculator ale principalelor caracteristici ale ciocnirilor.

Verificările experimentale ce s-au efectuat în Laboratorul de Vibrații și vibropercuții al Catedrei de Mecanică de la Universitatea "Politehnica" din Timișoara confirmă valabilitatea rezultatelor teoretice. Aceste verificări sunt făcute astfel încât să se poată preciza riguros parametrii sistemului. Mai mult identificarea din condiții dinamice a caracteristicilor sistemului în laboratorul de acustică și vibrații permite să se elimine toate erorile ce ar putea interveni la determinarea lor pe alte căi.

Laboratorul de vibrații și vibropercuții dispune de întreg lanțul de măsură pentru mărimi mecanice (forțe, cupluri, deplasări, accelerații și viteze etc.), ca de exemplu traductoare de diferite tipuri, amplificatoare de sarcină, analizoare de semnal, osciloscoape, generatoare de semnal, amplificatoare de putere, numărătoare electronice etc. În plus există posibilități de prelucrare numerică a semnalelor înregistrate pe o rețea formată din calculatoare de mare performanță.

Realizarea cercetărilor fundamentale și aplicative a fost asigurată de dotarea cu aparatură de înaltă performanță din laboratoarele existente. Această bază materială ce cuprinde toate posibilitățile de efectuare a măsurătorilor de vibrații, multe cu aparatură digitală, a fost în mod esențial dezvoltată și prin dotările obținute din proiecte de cercetare deja rezolvate.

În general cercetările experimentale au necesitat o puternică bază experimentală, care a permis și investigarea oricăror probleme solicitate din partea industriei, motiv pentru care se impune completarea dotării cu echipamente de măsură de mare precizie.

## **1.2. Proprietăți de neliniaritate**

În general, sistemele vibropercutante, datorită complexității componentelor și ale legăturilor, trebuie considerate sisteme neliniare. Evident sistemele vibropercutante au caracteristica neliniară, însăși prin existența cuplelor percutante prin care sunt generate ciocnirile. Astfel se poate trage concluzia că metodele teoriei vibrațiilor neliniare trebuie adaptate încât să fie aplicabile acestor sisteme. Deoarece sistemele

vibropercutante au un specific aparte, dezvoltările din teză se referă cu precădere la asemenea probleme.

În această direcție există deja importante rezultate obținute pentru sistemele vibropercutante cu caracteristica neliniară între ciocniri prin folosirea ecuațiilor cu diferențe finite sau a teoriei transformărilor punctuale, precum și a celor liniare între ciocniri prin extinderea ecuațiilor în variații ale stabilității, introdusă pentru prima dată la Timișoara de către L.Brîndeu [B.55], sau prin aplicarea metodei asimptotice [S.1], Vandepool [B.77], Galerkin [S.5] etc.

Regimurile periodice de mișcare au fost determinate pentru prima dată în anul 1942 pentru cazul sistemului vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă. Pe de altă parte condițiile de stabilitate ale mișcărilor periodice la modelul cu un grad de libertate și o cuplă percutantă, în ipoteza unui coeficient unitar de restituire la ciocnire, au fost deduse prima dată abia în anul 1956.

Începând de atunci, literatura de specialitate privitor la sistemele vibropercutante s-a dezvoltat foarte mult. Există unele metode dinamice care au fost studiate, dintre care unele prin diferite metode. Prin folosirea anumitor metode, reprezentări sau diagrame, însă, unele proprietăți se pot mai ușor evidenția, motiv pentru care rezolvarea unui anumit model printr-o singură metodă nu epuizează în general problema.

Problemele trebuie deci analizate sub toate aspectele, atât analitic, cât și experimental, pentru a se putea trage concluzii definitive privind comportarea unui sistem vibropercutant. Evident elaborarea unor metode de calcul întemeiate pe baza unor aproximări, așa cum se face în teză, sunt de extremă importanță în studiul vibropercuțiilor.

### **1.3. Stadiul actual al cercetărilor**

Dinamica sistemelor vibropercutante formează un capitol nou și actual al teoriei vibrațiilor. Spre deosebire de problemele devenite clasice ale teoriei vibrațiilor, aici apar discontinuități ale vitezelor datorită ciocnirilor ceea ce face ca metodele obișnuite de studiu să nu fie aplicabile. Prin abordarea unor astfel de probleme se deschid posibilități de dezvoltare și generalizare ale metodologiilor cunoscute în teoria vibrațiilor.

Au fost elaborate studii teoretice și experimentale pentru determinarea mișcărilor periodice stabile ale sistemelor vibropercutante,

pentru sisteme liniare între ciocniri, cu unul sau mai multe grade de libertate [B.9], [K.10], [K.14], [O.1], [P.9], [S.5].

Cercetările privind vibropercuțiile au fost inițiate în țară de către un colectiv de la Catedra de Mecanică a Universității "Politehnica" din Timișoara, cercetări dezvoltate într-o serie de lucrări având ca punct de pornire: Gheorghe Silaș, Liviu Brîndeu: *Sisteme vibropercutante*, Editura Tehnică, București, 1986, pentru care autorii au obținut premiul "Traian Vuia" al Academiei Române [S.5].

Datorită numeroaselor aplicații tehnice ale sistemelor vibropercutante s-a impus efectuarea în cadrul tezei a unui studiu mai aprofundat al mișcărilor periodice stabile ale sistemelor vibropercutante, ținând seama de caracterul profund neliniar și discontinuu al ciocnirilor, precum și de influența numeroșilor parametri dinamici asupra acestor mișcări.

#### **1.4. Obiectivul cercetărilor**

Existența regimurilor periodice de mișcare ale sistemelor cu un singur grad de libertate a fost studiată într-o serie de lucrări care au la bază soluția clasică cunoscută. De asemenea, aceste regimuri periodice au fost și realizate în anumite condiții experimentale.

Spre deosebire de alte lucrări din literatura de specialitate în care se studiază sau sisteme particulare sau aspecte parțiale ale problemei ca de exemplu mișcări periodice fără condiții de stabilitate, s-a cercetat complet cazul întâlnit în aplicații industriale. În baza relațiilor și formulelor obținute pentru sistemul considerat s-au tratat amănunțit în mărimi adimensionale domeniile de existență și de stabilitate ale mișcărilor periodice.

În mod deosebit trebuie arătat că pentru sistemele vibropercutante au fost stabilite proprietăți geometrice speciale și sugestive privind curbele separatoare ale domeniilor. Astfel s-a arătat că una din curbele separatoare ale domeniilor de existență este chiar curba de rezonanță ale vibrațiilor forțate amortizate.

În baza limitelor stabilite și a proprietăților geometrice relative între curbele separatoare ale domeniilor de existență și stabilitate au fost deduse concluzii importante, s-au construit diagramele acestor domenii considerând o gamă largă de valori ale amortizării, coeficientului de restituire și ordinului de multiplicare a perioadei mișcării față de

perioada excitației. Aceste reprezentări grafice sunt extrem de utile în proiectarea și construcția sistemelor vibropercutante uzuale.

Pentru cele mai generale sisteme vibropercutante cu un grad de libertate și o cuplă percutantă acționate de o forță armonică în colectivul de cercetare de la Universitatea "Politehnica" din Timișoara s-au efectuat studii complete ale mișcărilor periodice, obținând ecuațiile din care se calculează parametrii ce le determină, precum și condițiile de existență și stabilitate ale acestor mișcări. Toate aceste rezultate importante sunt în teză utilizate în vederea stabilirii unor scheme și algoritmi de calcul aproximativ ce pot să constituie fundamentul calculului riguros al dinamicii sistemelor vibropercutante.

Multe cunoștințe existente în literatura de specialitate din domeniul abordat sunt particularizări ale unor rezultate generale stabilite, ceea ce confirmă generalitatea și valabilitatea acestora. De fapt toate dezvoltările și completările ce sunt realizate în teză formează un cadru foarte general necesar rezolvării problemelor de vibropercuții.

Ținând seama de cunoștințele actuale din domeniu a fost necesar ca și în concret să poată fi utilizate rezultate obținute astfel încât studiul sistemelor vibropercutante să fie adus la un nivel de aplicabilitate mai general și mai performant pentru problemele existente în practica inginerescă. Drept urmare este important ca rezultatele deosebite deja obținute să poată fi valorificate, ceea ce a constituit un scop al tezei.

În mod special trebuie evidențiat că elaborarea în cadrul tezei a unei sinteze și a unor precizări cuprinzând pe lângă aspecte cunoscute, completări și generalizări legate de metoda operațională, reflectă un mod cu totul deosebit de rezolvare a problematicii sistemelor vibropercutante.

Aspecte privind calcule numerice realizate pentru aplicațiile concrete au fost dezvoltate în teză prin utilizarea aproximării poligonale. În esență caracteristicile neliniare se aproximează prin linii poligonale obținute prin impunerea condițiilor de minim a abaterii medii pătratice. Metoda a fost utilizată în cazul unor situații particulare de caracteristici neliniare.

Pe baza metodei poligonale s-au conceput și realizat programe de calcul pentru studiul ciocnirilor în ipoteza deformațiilor locale de contact, care practic intervin în studiul fenomenelor vibropercutante.

Rezultate importante dezvoltate în teză se referă la influența accelerațiilor de ordin superior ce pot să intervină în studiul sistemelor mecanice. De remarcat că în aceste cazuri s-a aplicat cu succes metoda aproximativă.

*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

*Capitolul 2*

**METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA  
MIȘCĂRILOR PERIODICE STABILE ALE  
SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN  
GRAD DE LIBERTATE ȘI O CUPLĂ  
PERCUTANTĂ**

**2.1. Introducere**

Sistemele vibropercutante cele mai simple, cu cele mai multe aplicații practice și mai ușor de studiat sunt cele cu un singur grad de libertate și o cuplă percutantă. De altfel, și din această cauză, majoritatea lucrărilor care apar în literatura de specialitate studiază astfel de cazuri. Sistemul vibropercutant se consideră neliniar din cauza apariției ciocnirilor fiindcă se modifică brusc panta caracteristicii liniare în momentul ciocnirii. În lucrările existente se studiază mișcările periodice ale sistemelor vibropercutante și stabilitatea lor prin metoda ajustării. Astfel, ecuația diferențială a mișcării se integrează pe fiecare interval, cuprins între două ciocniri succesive, trecerea la intervalul următor făcându-se cu ajutorul condițiilor stabilite pentru ciocniri [S.43].

Un alt studiu al regimurilor de mișcări vibropercutante periodice se bazează pe teoria transformărilor punctuale, respectiv integrând ecuațiile diferențiale ale mișcării pe fiecare interval între două ciocniri succesive se obține transformarea punctuală. În acest caz punctul fix al transformării corespunde mișcării periodice. Studiind stabilitatea punctului fix al transformării punctuale se deduc condițiile de stabilitate ale mișcării respective. Dar stabilitatea mișcărilor periodice se determină și din comportarea sistemului studiat în vecinătatea punctului fix al transformării, ceea ce înseamnă studiul pentru variații mici ale parametrilor mișcării [B.23].

Până în prezent studiile existente despre sistemele vibropercutante cu un singur grad de libertate și o cuplă percutantă se referă numai la



cazul excitațiilor armonice. Trebuie precizat că nici până în prezent pentru astfel de sisteme nu există studii complete, rezultatele fiind uneori eronate.

De asemenea, trebuie ținut seamă de faptul că excitația este în general periodică nearmonică, numai prin simplificări aceasta putând fi considerată armonică.

Au fost efectuate și studii ale unor sisteme automate ciclice, folosindu-se un model de sistem vibropercutant cu un grad de libertate cu excitație periodică, dezvoltată în serie Fourier, dar apar soluții complicate, în calcule reținându-se numai puține armonice.

Pentru un studiu complet și general al mișcărilor sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate, se va prezenta metoda ce conduce la scrierea directă a soluției ecuației diferențiale a mișcării, iar apoi se vor folosi proprietățile de periodicitate ale forței de excitație care se va exprima printr-o funcție presupusă cunoscută. Folosind metodologia consacrată [S.5] se studiază regimurile de mișcare ale sistemului vibropercutant cu un grad de libertate ce este supus unei excitații periodice nearmonice. Se dau ecuațiile din care se pot calcula parametri ce determină regiunile periodice de mișcare și apoi se analizează stabilitatea lor. În final rezultatele sunt aplicate unui sistem amortizat cu excitație armonică precizând condițiile de existență și stabilitate a regimurilor periodice stabile de mișcare ale sistemului vibropercutant. Pe această bază sunt date dezvoltări ale cercetărilor existente legate în mod special adaptării lor la posibilitatea executării de calcule concrete. Sunt date transpunerile necesare realizării unor programe de calcul și apoi se obțin diagrame de existență și stabilitate.

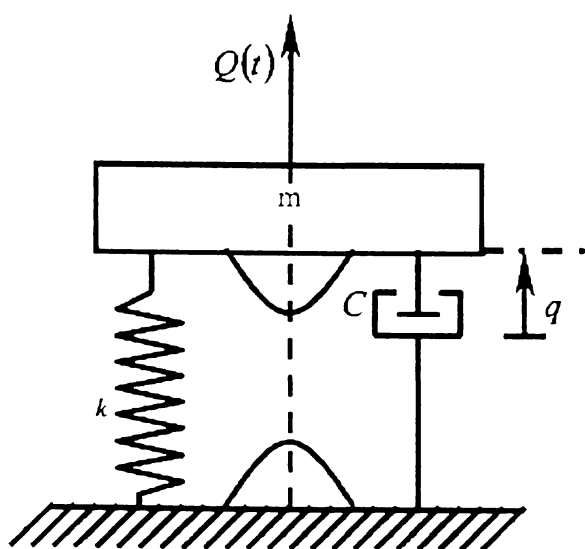


Fig. 2.1

## 2.2. Studiul mișcării sistemului

Modelul care se studiază este format din masa  $m$ , fixată pe arcurile elastice de constanta  $k$ , existând amortizare vâscoasă, cu coeficientul  $c$ . Presupunem că asupra mesei acționează forța  $Q(t)$ , analitic fiind o funcție periodică de timp cu pulsația

*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

armonicii fundamentale  $\omega$ , cu perioada  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , deci  $Q(t)$  satisface condiția de periodicitate

$$Q(t + T) = Q(t). \quad (1)$$

Masa  $m$  în decursul mișcării se ciocnește de un reper fix.

Presupunând că poziția masei se determină prin coordonata  $q$ , sistemul este supus la legătura unilaterală

$$f(q) = q + q_0, \geq 0 \quad (2)$$

unde  $q_0$  reprezintă distanța de la reperul fix la originea coordonatei  $q$ .

Între două ciocniri, considerând că coordonata  $q$  se măsoară din poziția de echilibru static, atunci ecuația diferențială a mișcării va fi

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = Q(t). \quad (3)$$

Considerând ciocnirile de ordinul  $k$  și  $k-1$ , în intervalul  $(t_k, t_{k+1})$ , soluția generală a acestei ecuații diferențiale are formă:

$$q = e^{-\frac{c}{2m}(t-t_k)} \left[ C_1 \cos p(t-t_k) + C_2 \sin p(t-t_k) \right] + \frac{1}{mp} \int_{t_k}^t Q(\tau) e^{-\frac{c}{2m}(t-\tau)} \sin p(t-\tau) d\tau \quad (4)$$

constantele  $C_1$  și  $C_2$  fiind constante de integrare, unde

$$p = \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} : \left( \omega_n^2 = \frac{k}{m} \right); \quad (c < c_{cr}).$$

Derivând relația soluției de mai sus se obține

$$\dot{q} + \frac{c}{2m}q = pe^{-\frac{c}{2m}(t-t_k)} \left[ -C_1 \sin p(t-t_k) + C_2 \cos p(t-t_k) \right] + \frac{1}{m} \int_{t_k}^t Q(\tau) e^{-\frac{c}{2m}(t-\tau)} \cos p(t-\tau) d\tau. \quad (5)$$

Pentru a afla constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$ , se pun condițiile inițiale ale mișcării, în intervalul dat mai sus, care sunt:

$$q(t_k + 0) = -q_0; \quad \dot{q}(t_k + 0) = \dot{q}'_c = -R\dot{q}_k. \quad (6)$$

$\dot{q}_k$  fiind viteza la începutul ciocnirii de ordinul  $k$ , iar  $\dot{q}'_c$  viteza la sfârșitul aceleiași ciocniri, și rezultă:

$$C_1 = -q_0; \quad C_2 = -\frac{1}{p} \left( \frac{c}{2m} \dot{q}_0 + R\dot{q}_k \right). \quad (7)$$

Începutul ciocnirii de ordinul  $k-1$  coincide cu sfârșitul intervalului și atunci condițiile de final vor fi

$$q(t_{k-1} - 0) = -q_0; \quad \dot{q}(t_{k-1} - 0) = \dot{q}_{k-1} \quad (8)$$

După ce s-au determinat constantele de integrare și introducându-le împreună cu condițiile inițiale în relațiile (4) și (5) se obține

$$q_0 = e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-t_k)} \left[ q_0 \cos p(t_{k+1}-t_k) + \frac{1}{p} \left( \frac{c}{2m} q_0 + R\dot{q}_k \right) \sin p(t_{k+1}-t_k) \right] - \frac{1}{mp} \int_{t_k}^{t_{k+1}} Q(\tau) e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-\tau)} \sin p(t_{k+1}-\tau) d\tau. \quad (9)$$

și



$$\dot{q}_{k+1} - \frac{c}{2m} q_0 = e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-t_k)}.$$

$$\left[ p q_0 \sin p(t_{k+1} - t_k) - \left( \frac{c}{2m} q_0 + R \dot{q}_k \right) \cos p(t_{k+1} - t_k) \right] +$$

$$+ \frac{1}{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} Q(\tau) e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-\tau)} \sin p(t_{k+1} - \tau) d\tau.$$

Considerând numărul complex  $w = \frac{c}{2m} + ip$  unde ( $i^2 = -1$ ) și conjugatul său  $\bar{w}$  relațiile (9) se pot scrie concentrat

$$\Phi(\dot{q}_{k+1}, \dot{q}_k, t_{k+1}, t_k) = \dot{q}_{k+1} - w q_0 + (R \dot{q}_k + w q_0) e^{-\bar{w}(t_{k+1}-t_k)} -$$

$$- \frac{1}{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} Q(\tau) e^{-\bar{w}(t_{k+1}-\tau)} d\tau = 0 \quad (10)$$

Trebuie precizat că această ultimă relație complexă determină parametri ciocnirilor succesive, fiind echivalentă în același timp cu două ecuații scalare. De asemenea poate fi considerată ca fundamentală pentru studiul mișcărilor periodice și al stabilității lor, încât rezolvă complet problema mișcării sistemelor vibropercutante.

### 2.3. Determinarea mișcărilor periodice

Folosind ecuații (10) se pot determina ușor mișcările periodice staționare ale sistemului.

De fapt ca să existe mișcări periodice trebuie îndeplinite anumite condiții.

1) Intervalul între două ciocniri succesive trebuie să fie un multiplu al perioadei  $T$  a forței de excitație, adică

$$t_{k+1} - t_k = rT \quad \text{unde} \quad r = 1, 2, \dots \quad (11)$$

2) Viteza la începutul fiecărei ciocniri este aceeași, deci

$$\dot{q}_k = \dot{q}_{k+1} = \dot{q}_c. \quad (12)$$

Ținând seama de ultimele două relații ecuația (10) cu care se determină mișcările periodice devine:

$$\Psi^* = \Psi(\dot{q}_c, \dot{q}_c, t_k + rT, t_k) = 0 \quad (13)$$

Așa cum s-a precizat mai sus această ecuație este complexă, fiind echivalentă cu două ecuații reale și din ea se determină parametrii mișcării periodice care sunt  $\dot{q}_c$  și  $t_k$ . Evident că, pentru a avea mișcări periodice, cele două ecuații concentrate (13) trebuie să aibe soluții reale și mai trebuie să fie verificată legătura unilaterală (2) în tot intervalul, de legea mișcării.

#### **2.4. Stabilitatea mișcărilor periodice**

Pentru ca să se realizeze în mod efectiv mișcări periodice trebuie îndeplinite și condițiile de stabilitate. Pentru a determina aceste condiții se iau în studiu mișcările perturbate. Aceasta presupune că datorită perturbațiilor inițiale viteza de la începutul ciocnirii  $\dot{q}_k$  și momentul  $t_k$  diferă de valorile calculate pentru regimul periodic în mișcare [S.23].

Dacă înlocuim în ecuația complexă (10) pe  $\dot{q}_k$  și  $t_k$  prin  $\dot{q}_k + \Delta\dot{q}_k$  și  $t_k - \Delta t_k$ , unde  $k = 1, 2, \dots$ , se obțin condițiile de stabilitate mult mai ușor.

Liniazând perturbațiile în relația complexă de recurență, rezultă

$$\Delta_k \Psi^* = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_{k+1}} \right)_c \Delta \dot{q}_{k+1} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_k} \right)_c \Delta \dot{q}_k + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t_{k+1}} \right)_c \Delta t_{k+1} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t_k} \right)_c \Delta t_k = 0 \quad (14)$$

Folosind ecuațiile (10) și (13) ecuația (14) se scrie în felul următor

*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

$$\Delta_k \Psi^* = \Delta \dot{q}_{k+1} + R e^{-\bar{w}rT} \Delta \dot{q}_k - \left[ \frac{Q(t_k) + kq_0}{m} - w\dot{q}_c \right] \Delta t_{k+1} +$$

$$+ \left[ \frac{Q(t_k) + kq_0}{m} - R w\dot{q}_c \right] e^{-\bar{w}rT} \Delta t_k = 0. \quad (15)$$

Ecuția fiind complexă, egalând partea imaginară și partea reală cu zero, va rezulta un sistem linear de ecuații și omogen, având necunoscute perturbațiile, cu soluții care au forma următoare:

$$\Delta \dot{q}_k = v\beta^k; \quad \Delta t_k = \theta\beta^k; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

În acest mod se obține un sistem algebric linear și omogen având necunoscutele  $v$  și  $\theta$ , evident având două ecuații. Deoarece sistemul are soluția banală (zero), pentru ca să admită și soluții diferite de cea banală, se pune condiția ca determinantul sistemului să fie zero. Din această condiție rezultă ecuația caracteristică de gradul doi în  $\beta$ , a sistemului vibropercutant, care este următoarea:

$$\beta^2 + \left\{ 2R \cos(prT) - \frac{(1+R)[Q(t_k) + kq_0]}{mp\dot{q}_c} \sin(prT) \right\} e^{-\frac{c}{2m}rT} \beta + R^2 e^{-\frac{c}{2m}rT} = 0 \quad (17)$$

Pentru ca o mișcare periodică să fie și stabilă este obligatoriu ca rădăcinile ecuației în  $\beta$  să fie cu modulul subunitar. Aceste condiții sunt date de criteriul lui Schur și una din condiții este

$$R < e^{\frac{c}{2m}rT} \quad (18)$$

Pentru ciocnirile care sunt reale rezultă că  $R < 1$ , condiția este verificată deoarece  $e^{\frac{c}{2m}rT} \geq 1$ . În cazul în care ciocnirea este perfect elastică, adică  $R = 1$ , condiția este îndeplinită pentru sistemele care sunt cu amortizare, adică  $c \neq 0$ .

Odată îndeplinită condiția (18) pentru ca rădăcinile  $\beta$  să fie în modul subunitare, mai trebuie să fie verificate inegalitățile:

$$\begin{aligned}
 -\left(1 + R^2 e^{-\frac{c}{2m}rT}\right) < \left\{2R \cos(prT) - \frac{(1+R)[Q(t_k) + kq_0]}{mp\dot{q}_c} \sin(prT)\right\} e^{-\frac{c}{2m}rT} < \\
 < R^2 e^{-\frac{c}{m}rT}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

În concluzie, în cazul ciocnirilor reale, adică  $R < 1$ , inegalitățile de mai sus sunt chiar condițiile de stabilitate pentru mișcările periodice cu ciocniri.

### 2.5. Mișcările periodice ale sistemului vibropercutant pentru $R=0$ (coeficient de restituire nul)

În cazurile în care un sistem vibropercutant este cu ciocniri plastice ( $R = 0$ ), atunci există egalitatea

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = 0$$

sau

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) \dot{q}'_{i_c} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = 0$$

În acest caz sistemul va părăsi instanrtaneu sau va continua să rămână pe legătură. După cum valoarea  $\lambda$  calculată cu elementele de la sfârșitul ciocnirii, este negativă sau nu. Dacă sistemul continuă să rămână pe legătură studiul mișcării se va efectua cu ajutorul multiplicatorului  $\lambda$ .

Momentul  $t = \bar{t}_k$  al desprinderii sistemului de legătură se determină cu ecuația

$$\lambda(\bar{t}_k) = 0 \quad (t_k < \bar{t}_k < t_{k+1})$$

*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

Mișcările periodice pot fi fără opriri sau cu opriri de durată limită pe limitator. Ca să vedem cazurile posibile, trebuie să considerăm legătură unilaterală  $f(q) = q + q_0 \geq 0$ .

Deci în cazul  $R = 0$ , se obține în toate cazurile posibile

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = (\dot{q})_1 = \dot{q}'_c = -R\dot{q}_c = 0.$$

Se precizează că indicele 1 arată că este vorba despre valori din momentul final al ciocnirii. Trebuie de asemenea aflat semnul derivatelor de ordinul doi (trei).

Avem deci

$$\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_1 = (\ddot{q})_1 = \ddot{q}'_c = \frac{Q(t_k) + kq_0}{m}, \quad (20)$$

ceea ce înseamnă că semnele valorii lui  $Q(t_k) + kq_0$  ne vor da cazurile posibile.

a) Dacă avem

$$Q(t_k) > -kq_0$$

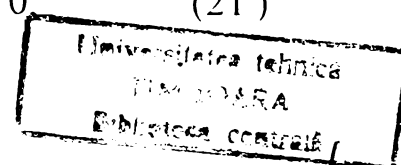
atunci rezultă

$$\ddot{q}'_c = \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_1 = \frac{Q(t_k) + kq_0}{m} > 0, \quad (21)$$

adică între masă și limitator există contact instantaneu și deci studiul mișcărilor periodice și a stabilității acestor mișcări se face ca și când  $R \neq 0$ , deci cu relațiile (13) și (15) unde luăm  $R = 0$ .

b) Dacă  $Q(t_k) = -kq_0$  și de asemenea  $\dot{Q}(t_k) > 0$ , obținem

$$\ddot{q}'_c = \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_1 = 0; \quad \ddot{q}'_c = \left(\frac{d^2f}{dt^3}\right)_1 = \frac{1}{m}\dot{Q}(t_k) > 0 \quad (21')$$



632-104/369B

contactul fiind și aici instantaneu. Același lucru se întâmplă și când  $\dot{Q}(t_k) = 0$ , adică contactul este instantaneu, cu precizarea că în șirul derivatelor de ordin superior al lui  $Q(t)$  pentru  $t = t_k$  prima derivată care este diferită de zero este și pozitivă.

c) Dacă  $Q(t_k) < -kq_0$  rezultă că masa rămâne un timp finit pe limitator și pe durata contactului avem ecuația

$$-kq_0 = Q(t) + \lambda \quad (22)$$

unde  $\lambda$  este multiplicatorul legăturii (amintit mai sus) și este pozitiv. Deci pe timpul contactului dintre limitator și masă obținem

$$\lambda = -[Q(t) + kq_0] \geq 0 \quad (23)$$

La momentul  $t = t_k$ , când  $\lambda$  devine nul, are loc desprinderea masei  $m$  de limitator, rezultând

$$Q(t_k) = -kq_0 \quad (t_k < \tau_k \leq t_{k+1}), \quad (24)$$

valorile algebrice  $\tau_k$  din ecuația de mai sus ne precizează momentele ciocnirii cuprinse între aceste valori  $\tau_k$ .

## **2.6. Mișcări periodice cu excitație armonică**

Mișcările periodice ale sistemului vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă, acționat de o forță perturbatoare armonică, s-au determinat pentru prima dată de Rusakov U.G. și Harkevici A.A. [S.5], iar apoi de către Barkan D.D [B.14]. Concluziile aflate în aceste lucrări au fost extinse și mai mult, considerând că în sistem există și amortizare de natură vâscoasă.

Un studiu complet și general al mișcărilor periodice în cazul unei excitații periodice arbitrare s-a făcut folosind numerele complexe. Rezultatele obținute se aplică în studiul sistematic al cazului când excitația este armonică. Astfel se obțin condițiile de existență ale mișcărilor periodice și se reprezintă grafic domeniile corespunzătoare.

*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

### **2.6.1. Determinarea parametrilor mișcărilor periodice**

Analiza regimurilor periodice de mișcare se va face pentru cazul excitației armonice considerând  $c < c_{cr}$ . Astfel se va presupune că asupra masei acționează forța perturbatoare

$$Q(t) = mA\omega^2 \cos \omega t - mg \quad (25)$$

produsă de un generator de vibrații cu două excentrice ce se rotesc în sensuri opuse având aceeași viteză unghiulară de rotație  $\omega$ . Dacă se notează cu  $m_0$  masa excentricilor și cu  $e$  excentricitatea, atunci rezultă

$$A = \frac{m_0 e}{m}$$

În continuare se vor studia mișcările periodice ale sistemului în cazul excitației armonice (25) folosind metoda generală expusă anterior.

Parametri mișcărilor periodice, viteza de ciocnire  $\dot{q}_c$  și momentele ciocnirilor  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) pentru cazul acționării cu forța perturbatoare armonică (25) se determină din ecuația complexă stabilită. Pentru a se putea urmări mai ușor variația acestor parametri se vor introduce câteva mărimi adimensionale. Astfel se vor folosi notațiile

$$\xi_n = \frac{\omega_n}{\omega}, \xi = \frac{p}{\omega}, \zeta = \frac{c}{2m\omega}, d^2 = (1 - \xi_n^2)^2 + 4\zeta^2 \quad (26)$$

$$(\xi_n^2 = \xi^2 + \zeta^2)$$

și

$$s = \frac{q_0}{A} - \frac{q}{A\omega_n^2} \quad (27)$$

De asemenea se mai introduce un unghi auxiliar  $\alpha$  ce se determină din relațiile

$$\cos \alpha = \frac{1 - \xi_n^2}{d}, \quad \sin \alpha = \frac{2\zeta}{d} \quad (28)$$

Ținând seama de expresia (25) a forței perturbatoare ecuația complexă pentru determinarea mișcărilor periodice devine

$$\bar{\Psi} = \dot{q}_c \left( 1 - R e^{-\bar{w}rT} \right) - \left( 1 - e^{-\bar{w}rT} \right) \cdot \left[ q_0 - \frac{q}{\omega^2 \xi^2} + \frac{A\omega^2}{\bar{w}^2 + \omega^2} (\bar{w} \cos \omega t_k + \omega \sin \omega t_k) \right] = 0 \quad (29)$$

Dacă în această ecuație se folosesc notațiile (26), (27) și (28) prin transformări algebrice se ajunge la următoarele ecuații

$$\sin(\alpha + \omega t_k) = \frac{(1-R)\rho \dot{q}_c d}{2A\omega} \quad (30)$$

$$\cos(\alpha + \omega t_k) = d \left[ s - \frac{(1-R)\delta \dot{q}_c}{2A\omega} \right]$$

unde

$$\rho = 1 + \frac{1+R}{1-R} \cdot \frac{\xi \operatorname{sh} 2\pi r \zeta + \zeta \sin 2\pi r \xi}{\xi (\operatorname{ch} 2\pi r \zeta + \cos 2\pi r \xi)} \quad (30')$$

$$\delta = \frac{1+R}{1-R} \cdot \frac{\sin 2\pi r \xi}{\xi (\operatorname{ch} 2\pi r \zeta + \cos 2\pi r \xi)}$$

Se poate ușor verifica că în expresia lui  $\delta$  termenul fracționar este întotdeauna pozitiv. Într-adevăr din inegalitățile evidente  $x \leq \operatorname{sh} x \leq \operatorname{ch} x$  pentru  $x \geq 0$ , se poate deduce

$$\xi \operatorname{sh} 2\pi r \zeta - \zeta \sin 2\pi r \xi = \xi (\operatorname{sh} 2\pi r \zeta - 2\pi r \zeta) + \zeta (2\pi r \xi - \sin 2\pi r \xi) \geq 0$$

Deci, în general rezultă  $\rho \geq 1$ , valoarea minimă egală cu unitatea corespunde cazului fără amortizare.

Prin eliminarea lui  $t_k$  din ecuațiile (30) rezultă pentru viteza  $\dot{q}_c$  expresia

$$\left[ \frac{1-R}{2A\omega} \dot{q}_c \right]^2 = \left[ \frac{(1-R)\rho \dot{q}_c d}{2A\omega} \right]^2 - \left[ d \left( s - \frac{(1-R)\delta \dot{q}_c}{2A\omega} \right) \right]^2$$



*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

$$\dot{q}_c = \frac{2A\omega}{1-R} \frac{\delta s \pm \sqrt{\frac{\rho^2 + \delta^2}{d^2} - \rho^2 s^2}}{\rho^2 + \delta^2} \quad (31)$$

Din această formulă se vede că este posibil să se realizeze două regimuri periodice de mișcare corespunzătoare celor două semne din fața radicalului.

În relațiile de mai sus s-a folosit notația  $d^2 = (1 - \xi_n^2)^2 + 4\zeta^2$ . Se poate însă arăta că oricare ar fi semnul lui  $d$  parametri  $\dot{q}_c$  și  $t_k$  ai ciocnirii rezultă aceiași. Într-adevăr în formula (31) pentru calculul lui  $\dot{q}_c$  intervine numai pătratul lui  $d$ . Mai rămâne de arătat că și din relațiile (30) valorile ce se obțin pentru  $t_k$  sunt aceleași, indiferent de semnul lui  $d$ . Dacă  $d > 0$ , din relațiile (30) și (28) se determină anumite valori pentru unghiurile  $\alpha + \omega t_k$  și  $\alpha$ . Considerând acum valoarea negativă  $d < 0$ , toate funcțiile trigonometrice din relațiile (31) și (28) vor avea semn schimbat.

Deci se vor obține pentru  $\alpha + \omega t_k$  și  $\alpha$  unghiuri care diferă cu  $\pi$  fața de cele determinate pentru  $d > 0$ . În ambele cazuri însă diferența acestor două unghiuri, egală cu  $\omega t_k$ , va fi aceeași, deci și valoarea  $t_k$  va fi aceeași. Deci, fără a restrânge generalitatea problemei se va putea considera numai valoarea pozitivă a mărimii  $d$ .

### **2.6.2. Condițiile de existență ale mișcărilor periodice**

Pentru a exista mișcarea periodică, este necesar ca viteza  $\dot{q}_c$  să fie reală, deci cantitatea de sub radical din formula (31) trebuie să fie pozitivă. Astfel rezultă condiția de existență a mișcării periodice

$$|s| \leq \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2} \quad (32)$$

De asemenea la începutul fiecărei ciocniri viteza trebuie să fie negativă ( $\dot{q}_c < 0$ ).

Presupunând îndeplinită condiția (32) există mai multe situații în care viteza reală  $\dot{q}_c$  este negativă.

În primul rând se va studia regimul ce corespunde semnului minus în fața radicalului din formula (31). Presupunând  $\delta s < 0$ , regimul de mișcare este posibil deoarece  $\dot{q}_c < 0$ . În situația  $\delta s > 0$ , regimul de mișcare este posibil dacă  $\delta^2 s^2 \leq \frac{\rho^2 + \delta^2}{d^2} - \rho^2 s^2$  sau

$$|s| \leq \frac{1}{d} \quad (33)$$

Comparând inegalitățile (32) și (33) se constată că (32) este mai restrictivă și deci delimitează regimurile periodice posibile de mișcare în această situație cu  $\delta s > 0$ .

Mai sunt de analizat regimurile pentru care în formula (31) corespunde semnul plus în fața radicalului.

Când  $\delta s < 0$ , regimul de mișcare este posibil dacă

$$\delta^2 s^2 \geq \frac{\rho^2 + \delta^2}{d^2} - \rho^2 s^2$$

sau

$$|s| \geq \frac{1}{d} \quad (34)$$

Ținând seama de condiția (32) rezultă

$$\frac{1}{d} \leq |s| \leq \frac{1}{d} \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2} \quad (35)$$

Dacă  $\delta s > 0$ , nu există mișcare periodică deoarece  $\dot{q}_c > 0$ . În felul acesta s-au stabilit, din punct de vedere al vitezei condițiile de existență ale mișcărilor periodice. Aceste condiții sunt prezentate în Tabelul 1.

*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

Tabelul 1

$\dot{q}_c$	$\delta s$	Condițiile de existență ale mișcărilor periodice
$\dot{q}_c = \frac{2A\omega}{1-R} \frac{\delta s - \sqrt{\frac{\rho^2 + \delta^2}{d^2} - \rho^2 s^2}}{\rho^2 + \delta^2}$	-	$ s  \leq \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2}$
	+	$ s  \leq \frac{1}{d}$
$\dot{q}_c = \frac{2A\omega}{1-R} \frac{\delta s + \sqrt{\frac{\rho^2 + \delta^2}{d^2} - \rho^2 s^2}}{\rho^2 + \delta^2}$	-	$\frac{1}{d} \leq  s  \leq \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2}$
	+	Nu există mișcări periodice

Pentru existența mișcărilor periodice, mai este necesar ca valorile funcțiilor trigonometrice din relațiile (30) să fie în modul subunitare.

Cu ajutorul valorii (31) a vitezei  $\dot{q}_c$  prima relație (30) devine

$$\sin(\alpha + \omega t_k) = \frac{\rho \left( d\delta s \pm \sqrt{\rho^2 + \delta^2 - d^2 \rho^2 s^2} \right)}{\rho^2 + \delta^2} \quad (36)$$

Deoarece în condițiile stabilite mai înainte expresia din paranteză este negativă, membrul drept al relației (36) trebuie să satisfacă inegalitatea

$$\frac{\rho \left( d\delta s \pm \sqrt{\rho^2 + \delta^2 - d^2 \rho^2 s^2} \right)}{\rho^2 + \delta^2} \geq -1 \quad (37)$$

sau

$$\pm \rho \sqrt{\rho^2 + \delta^2 - d^2 \rho^2 s^2} \leq \rho^2 + \delta^2 + \rho d \delta s \quad (37')$$

Se poate arăta că membrul drept al acestei inegalități este pozitiv. Pentru  $\delta s > 0$ , acest lucru este evident. Dacă  $\delta s < 0$ , deoarece  $|s|$  are

$$\text{maximul } \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2}, \text{ se poate scrie } \delta s = -|\delta| \cdot |s| > -\frac{|\delta|}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2},$$

astfel că se obține

$$\rho^2 + \delta^2 + \rho d \delta s \geq \rho^2 + \delta^2 - |\delta| \cdot \sqrt{\rho^2 + \delta^2} = \sqrt{\rho^2 + \delta^2} \left( \sqrt{\rho^2 + \delta^2} - |\delta| \right) > 0 \quad (37'')$$

Ținând seama de acesta, inegalitatea (37') este evidentă pentru semnul minus în fața radicalului. Pentru a o demonstra și în cazul semnelui plus, acum poate fi ridicată la pătrat. Această inegalitate devine

$$(\rho^2 + \delta^2)(\rho + \delta s)^2 > 0$$

cea ce arată că în toate cazurile modulul membrului drept al primei relații (30) este subunitar.

Folosind valoarea (31) a vitezei  $\dot{q}_c$ , a doua relație (30) se mai poate scrie

$$\cos(\alpha + \omega t_k) = \frac{d\rho^2 s \pm \sqrt{\rho^2 + \delta^2 - d^2 \rho^2 s^2}}{\rho^2 + \delta^2} \quad (38)$$

Pentru ca membrul drept al acestei relații să fie în modul subunitar trebuie să fie satisfăcute inegalitățile

$$-\rho^2 - \delta^2 - d\rho^2 s \leq \pm \delta \sqrt{\rho^2 + \delta^2 - d^2 \rho^2 s^2} \leq \rho^2 + \delta^2 - d\rho^2 s \quad (38')$$

În continuare se va ține seama că datorită condiției (32) ce trebuie să fie verificată în toate cazurile se obține

*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRIILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

$$-\rho^2 - \delta^2 - d\rho^2 s \leq -\rho^2 - \delta^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + \delta^2} (\rho - \sqrt{\rho^2 + \delta^2}) < 0$$

precum și

$$\rho^2 - \delta^2 - d\rho^2 s \geq \rho^2 + \delta^2 - \rho^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + \delta^2} (\sqrt{\rho^2 + \delta^2} - \rho) > 0$$

Rezultă că pentru a fi verificate inegalitățile (38') este suficient să fie verificate următoarele două inegalități

$$\delta \cdot \sqrt{\delta^2 + \rho^2 - d^2 \rho^2 s^2} \leq \rho^2 + \delta^2 \pm d\rho^2 s$$

Cum fiecare membru al acestor inegalități este pozitiv, se pot ridica la pătrat și rezultă inegalitățile evidente

$$\rho^2 (\rho^2 + \delta^2) (1 \pm ds)^2 > 0$$

ceea ce arată că și pentru a doua relație (30) modulul membrului drept este subunitar în toate cazurile.

Prin urmare, dacă sunt satisfăcute condițiile ca viteza  $\dot{q}_c$  să fie reală și negativă, valorile funcțiilor trigonometrice din relațiile (30) sunt în modul sub unitare. Condițiile de existență ale mișcărilor periodice rămân cele obținute din analiza formulei (31) a vitezei  $\dot{q}_c$ .

### ***2.6.3. Domenii de existență și stabilitate***

Regimurile periodice de mișcare se pot realiza numai dacă sunt satisfăcute condițiile de existență, stabilite anterior. Discuția cazurilor posibile se va face prin reprezentarea grafică a diferitelor domenii obținute în funcție de parametri sistemului. În reprezentările grafice pe abscisă s-a luat  $\xi$ , iar pe ordonată  $s$ . Toate aceste reprezentări s-au

construit pentru diferite valori ale raportului de amortizare  $\gamma = \frac{c}{c_{cr}}$  ale coeficientului de restituire  $R$  și ale ordinului de multiplicitate  $r$  a perioadei mișcării.

Pe baza condițiilor de existență stabilite s-au găsit domeniile de existență ale mișcărilor periodice. Aceste domenii sunt delimitate de următoarele curbe:

$$s = \pm \frac{1}{d} \quad (39)$$

și

$$s = \pm \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2} \quad (40)$$

Deoarece  $\zeta = \gamma \xi_n$ , se poate ușor observă reprezentarea grafică a ecuației (39) este chiar curba de rezonanță cunoscută pentru vibrațiile forțate amortizate. Valorile necesare pentru trasarea curbelor având ecuația (40) s-a calculat printr-un program amplu.

Este ușor de constatat că pentru valorile lui  $\xi_n$  care anulează pe  $\delta$ , valorile lui  $s$  sunt obținute cu ecuațiile (39) și (40), sunt identice, curbele au puncte comune și că pentru aceleași valori și derivatele  $\frac{ds}{d\xi_n}$  sunt identice. Deci în aceste puncte curbele reprezentative sunt tangente.

Dacă există amortizare ( $\gamma \neq 0$ ) valorile lui  $\xi$  și  $\xi_n$  pentru care  $\delta = 0$ , se obțin din ecuația  $\sin 2\pi r \xi = 0$ . Aceste valori sunt

$$\xi = \frac{m}{2r}, \quad \xi_n = \frac{m}{2r\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (41)$$

Pentru aceste valori, din cele două ecuații (39), (40), rezultă

$$s = \pm \frac{1}{d}, \quad \frac{ds}{d\xi_n} = \pm \frac{m \left[ 4r^2(1-\gamma^2)(1-2\gamma^2) - m^2 \right]}{4r^2(1-\gamma^2)^{3/2} d^3}$$

*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

În lipsa amortizării ( $\gamma = 0$ ), proprietatea rămâne valabilă numai pentru valorile impare ale lui  $m$ . Pentru valorile pare ale lui  $m$ , curbele (40) au asimptote verticale. Curbele reprezentative au fost trasate pentru raportul de amortizare  $\gamma = 0,1; 0,2; 0,3$ ; coeficientul de restituire  $R = 0,2; 0,4; 0,6$  și ordinul de multiplicitate al perioadei mișcării  $r = 1; 2; 3$ . Dintre reprezentările grafice obținute se prezintă mai multe zeci de grafice. Pe fiecare figură sunt indicate valorile corespunzătoare ale parametrilor. Curbele (39) sunt trasate cu linie plină, iar curbele (40) sunt trasate cu linie punctată. Domeniile de existență ale mișcărilor periodice determinate cu ajutorul condițiilor (32) și (35) s-au hașurat simplu. În toate domeniile hașurate sunt posibile regimuri ce corespund semnelui minus în fața radicalului din formula (31). Acolo unde s-a hașurat dublu mai sunt posibile și regimurile ce corespund semnelui plus în fața radicalului din formula (31).

Existența regimurilor periodice de mișcare a fost studiată teoretic, în special pentru sistemul vibropercutant ideal, deci fără amortizare. Rezultatele obținute aici completează pe cele cunoscute și concluziile obținute sunt mai ușor de aplicat [S.5].

Pentru a discuta condițiile de stabilitate a mișcărilor periodice se va folosi relația

$$-\left(1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT}\right) < N e^{\frac{c}{m}rT} < 1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT}$$

unde:

$$N = 2R \cos(prT) - \frac{(1 + R)[Q(t_k) + kq_0]}{mp\dot{q}_c} \sin(prT)$$

iar expresia forței de excitație este dată de relația (25).

Discuția condițiilor de stabilitate se va face cu ajutorul următoarelor mărimi:

$$\frac{1}{v_{\pm}} = \frac{1 - R}{2} \left[ 2\zeta\rho - (1 - \zeta_n^2)\delta \right] - \frac{2R}{1 + R} \zeta \operatorname{ctg} 2\pi r \zeta \pm \frac{\zeta (e^{2\pi r \zeta} + R^2 e^{-2\pi r \zeta})}{(1 + R) \sin 2\pi r \zeta}$$

și

$$s = \pm \frac{1}{d}, \quad \frac{ds}{d\xi_n} = \pm \frac{m[4r^2(1-\tau^2)(1-2\tau^2) - m^2]}{4r^2(1-\tau^2)^{\frac{3}{2}} \cdot d^3}$$

2. Condițiile de stabilitate, în forma sintetică sunt cuprinse în tabelul

Tabelul 2

$v_*$	$v_-$	$s$	Condițiile de stabilitate
+	-	+	$0 < s < s_-$
+	-	+	$-s_- < s < 0$
-	-	+	$0 < s < s_+$
-	-	-	$-s_- < s < 0$
+	-	+	$s_- < s < s_+$
-	-	-	$-s_+ < s < -s_-$

Discuția cazurilor posibile de mișcare se face prin reprezentările grafice precizate. Evident, se obțin domeniile de stabilitate trasând curbele  $s = \pm s_+$  și  $s = \pm s_-$ .

Așa cum am precizat deja, curbele trasate delimitează domeniile de existență și de stabilitate a mișcărilor periodice.

## 2.7. Descrierea programului

Unitul Math este folosit pentru calcularea funcțiilor necesare trasării graficelor.

Acest Unit transmite Programului Principal toate datele utile calculului ecuațiilor și funcțiilor.



*METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE  
STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE  
LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ*

---

Unitul Drawings este folosit pentru definirea și inițializarea modului grafic și suplimentar, fiind conceput pentru modificarea rezoluției cu care se vor trasa graficele.

Programul Principal este setat inițial pe rezoluția maximă 800\*600.

De asemenea acest unit este folosit pentru a transmite Programului Principal informațiile despre modul de trasare a liniilor pe ecran (ex.: punctată, continuă, etc.).

Tot în acest Unit sunt introduse mai multe proceduri pentru utilizarea mouse-ului în program.

Se poate spune că toate procedurile în ansamblu care sunt proiectate pentru lucrul în program cu mouse-ul constituie un DRIVER de mouse. Aceste proceduri pentru mouse sunt organizate în Proceduri separate pe axe. Tot astfel în acest Unit sunt stabilite limitele spațiului vizibil pe ecran, accesibile utilizatorului.

Tot aici sunt definite combinațiile de taste pentru mărirea și micșorarea graficelor curent trasate. Ex.: tasta "+" este folosită pentru mărirea graficului pe ecran și tasta "-" este utilizată pentru reducerea scării de afișare.

De asemenea în program sunt active și tastele direcționale (ex.:<-, ->) pentru deplasarea graficului în susul și în josul ecranului.

În comparație cu programele concepute cu afișare statică, programul de față este proiectat în mod dinamic (utilizându-se liste dublu înlănțuite) și credem că este de un folos mult mai larg deoarece cu ajutorul tastelor direcționale utilizatorul se poate deplasa unde dorește

## Capitolul 2

---

de-a lungul graficelor pentru observarea unor fenomene inaccesibile programelor cu afișare statică.

Tot în acest Unit sunt proiectate și procedurile care se ocupă cu definirea și afișarea meniurilor și în general a interfeței cu utilizatorul.

În conținutul acestui Unit se mai află și procedurile specializate în definirea și folosirea paletei de culori optime pentru tipul de grafic utilizat.

Unitul Types este special conceput pentru definirea combinațiilor de taste cu care se lucrează programul pentru schimbul între ferestre (meniuri).

Acest Unit Types se bazează pe conceptul de bază al sistemului de operare WINDOWS (lucru cu ferestre). El mai are de asemenea și proceduri pentru utilizarea mouse-ului în program.

Programul Principal lucrează cu toate Uniturile definite mai sus apelând de asemenea și proceduri și funcții interne necesare executării subprogramelor și al Programului Principal însuși cu un minim necesar de memorie. Tot aici sunt predefinite valorile inițiale pentru care combinația de taste "SHIFT" + "TAB" va avea ca efect afișarea graficului corespunzător valorilor predefinite. În conținutul Programului Principal se inițializează modul grafic, inițializare care este prevăzută cu detectarea DRIVER-ului necesar utilizării modului grafic.

---

### Capitolul 3

## METODA OPERAȚIONALĂ

### 3.1. Considerații generale

Mișcările periodice ale diferitelor sisteme vibropercutante se determină prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării între două ciocniri succesive și aplicarea condițiilor de periodicitate. Astfel, pe un interval egal cu perioada, se obțin legile mișcării care apoi se repetă și în celelalte intervale. Pe această linie, tematica în acest capitol are ca obiectiv valorificarea și completarea rezultatelor deja obținute cu altele esențiale pentru fundamentarea aplicării calculului operațional în teoria sistemelor vibropercutante [S.5].

Dintre metodele utilizate în studiul regimurilor periodice de mișcare dezvoltări importante pot fi fundamentate pe baza calculului operațional. Utilizarea calculului operațional în modelarea sistemelor vibropercutante este extinsă în teză și pentru situații mai deosebite chiar și față de modelele numai cu o singură masă și o cuplă percutantă.

Pentru diferite alte modele este adaptată metodologia de calcul bazată pe utilizarea transformărilor operaționale.

Pornind de la considerațiile anterioare trebuie subliniat că dezvoltările următoare sunt menite să definitiveze studiile existente privind modelarea sistemelor vibropercutante utilizând în mod special calculul operațional.

### 3.2. Sisteme vibropercutante

Multe sisteme mecanice execută mișcări însoțite de ciocniri repetate. Astfel de sisteme mecanice, în care influența ciocnirilor este esențială și nu poate fi neglijată, sunt denumite sisteme vibropercutante [S.5] și pot fi studiate prin metodele cunoscute din teoria sistemelor dinamice.

Trebuie remarcat că pentru generarea mișcărilor vibropercutante nu este necesar ca mișcarea sistemului să fie vibratorie. Prin urmare, mișcările vibropercutante se realizează în esență datorită ciocnirilor.

Pentru ca mișcările vibropercutante să fie staționare este necesar ca sistemul să fie supus unor excitații perturbatoare. Natura excitațiilor exterioare poate fi foarte complexă, cel mai des însă se întâlnesc excitații periodice sau chiar armonice.

Sub acțiunea unei excitații periodice se poate ușor observa că există regimuri de mișcare periodice, având perioada multiplă celei cunoscute prin excitație. Aceste regimuri periodice de mișcare au o importanță deosebită în aplicații și, prin urmare, necesită un studiu mai amănunțit.

Existența regimurilor periodice de mișcare a sistemului vibropercutant nu presupune că acestea se și realizează întotdeauna. Este necesar să se mai verifice stabilitatea regimurilor considerate. Condițiile de stabilitate împreună cu cele de existență delimitează mișcările periodice care se realizează efectiv.

### 3.3. Cuple percutante

În studiul sistemelor vibropercutante un rol deosebit revine maselor care se ciocnesc în timpul mișcării. Deoarece ciocnirea are loc între două mase, acestea reprezintă o componentă de bază a sistemului vibropercutant. Prin cuplă percutantă se definește ansamblul format din două elemente ale unui sistem vibropercutant care se ciocnesc între ele în timpul mișcării [B.42].

Fiecărei cuple percutante  $i$  se poate asocia o legătură unilaterală de forma:

$$f(\mathbf{q}, t) \geq 0 \quad (1)$$

unde  $\mathbf{q}$  reprezintă vectorul coordonatelor generalizate ale sistemului vibropercutant considerat. Această legătură unilaterală introdusă pentru prima dată de Silaș Gh. și Brîndeu L. [S.22] caracterizează complet legătura din punct de vedere dinamic efectul datorat cuplei percutante.

Precizarea legăturii unilaterale are la bază cupla percutantă și în mod obișnuit se obține simplu din condiții geometrice.

Introducerea legăturii unilaterale în studiul sistemelor vibropercutante a permis fundamentarea unei metode unitare de studiu aplicabilă oricărui sistem vibropercutant.

Cu ajutorul legăturii unilaterale în studiul mișcărilor periodice se poate face printr-o metodă unitară pentru orice sistem vibropercutant și în același timp, se poate preciza gradul de complexitate al problemei. De

exemplu, se poate preciza de la început gradul ecuației caracteristice folosite în studiul stabilității mișcărilor periodice.

### 3.4. Bazele metodei operaționale

Existența mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante poate fi stabilită nu numai așa cum se procedează obișnuit prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării și impunerea condițiilor de periodicitate [S.5]. Există fundamentată și o metodă operațională [B.49] care pot fi ușor aplicată sistemelor vibropercutante simple însă este posibil să fie extinsă și la alte situații mai complexe [B.70].

Datorită acțiunii forței perturbatoare armonice de pulsație  $\omega$ , sistemul execută mișcări însoțite de ciocniri instantanee caracterizate prin coeficientul de restituire  $R$ .

Dintre mișcările posibile ale sistemului se vor determina numai cele periodice pentru care perioada trebuie să fie un multiplu al perioadei forței perturbatoare adică:

$$t_1 - t_0 = rT = r \frac{2\pi}{\omega}, \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

În plus, parametrii cinematici caracteristici ciocnirii trebuie să se repete identice.

Mișcările trebuie să fie periodice, ceea ce înseamnă că pentru legea de mișcare  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$  se impune să fie satisfăcute condițiile de periodicitate:

$$\mathbf{q}(t + rT) = \mathbf{q}(t) \quad (3)$$

unde  $\mathbf{q}$  este o coordonată a sistemului.

Ținând seama de periodicitatea mișcării, transformata Laplace a legii mișcării se poate exprima cu ajutorul transformatei corespunzătoare luate pe o singură perioadă [ ]. Astfel, transformata  $X(s)$  a legii mișcării se scrie:

$$X(s) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} \mathbf{q}(t) dt = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-st} \mathbf{q}(t) dt$$

iar dacă în fiecare termen se face substituția  $t = jrT + \tau$ ,  $j = (1, 2, \dots)$  se obține:

$$X(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t_1} e^{-s(jrT+\tau)} \mathbf{q}(jrT + \tau) dt = \left( \sum_{j=0}^{\infty} e^{-jsrT} \right) X_0(s)$$

Drept urmare, relația dintre cele două transformate este:

$$X(s) = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-srT}} \quad (4)$$

Deoarece în calculele prezentate apar și derivate de diferite ordine ale legilor mișcării sunt importante următoarele dezvoltări:

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{q}}(t) e^{-st} dt = \left[ \mathbf{q}(t_1) e^{-srT} - \mathbf{q}(t_0) \right] e^{-st_0} + s \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{q}(t) e^{-st} dt \quad (5)$$

și

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{\mathbf{q}}(t) e^{-st} dt = \left[ \dot{\mathbf{q}}(t_1) e^{-srT} - \dot{\mathbf{q}}(t_0) \right] + s \left[ \mathbf{q}(t_1) e^{-srT} - \mathbf{q}(t_0) \right] e^{-st_0} + s^2 \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{q}(t) e^{-st} dt \quad (6)$$

Datorită periodicității mișcării însă aceste egalități se mai pot scrie:

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{q}}(t) e^{-st} dt = -\mathbf{q}(t_0) \left( 1 - e^{-srT} \right) e^{-st_0} + s X_0(s) \quad (7)$$

și

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{\mathbf{q}}(t) e^{-st} dt = \left[ \dot{\mathbf{q}}(t_1) e^{-srT} - \dot{\mathbf{q}}(t_0) \right] e^{st} - s \mathbf{q}(t_0) \left( 1 - e^{-srT} \right) e^{-st_0} + s^2 X_0(s) \quad (8)$$

Analog pentru funcția periodică  $\xi = \xi(t)$  cu perioada  $T$  se deduce:

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi(t) e^{-st} dt = \left( \sum_{j=0}^{r-1} e^{-jsT} \right) \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-srT}}{1 - e^{-sT}} Y_0(s) \quad (9)$$

unde:

$$Y_0(s) = \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) e^{-st} dt \quad (10)$$

În general, metoda constă în aplicarea transformatei Laplace ecuațiilor diferențiale ale mișcării după care prin inversiune rezultă legile mișcării.

### 3.5. Masă liberă pe suport mobil

Se consideră sistemul vibropercutant format dintr-o masă  $m$  așezată liber pe o platformă vibrantă [B.4], [B.54] care are pe verticală o mișcare periodică impusă:  $\xi = \xi(t)$ .

Notând cu  $T$  perioada, funcția  $\xi(t)$  va satisface condiția de periodicitate:

$$\xi(r + T) = \xi(t) \quad (11)$$

Dintre mișcările posibile ale sistemului, se vor analiza numai acelea care se fac cu desprinderea masei  $m$ , de platformă. Ecuația diferențială a mișcării relative între două ciocniri succesive este:

$$\ddot{q} = -g - \ddot{\xi} \quad (12)$$

Dacă se notează prin  $t = t(k)$  momentul ciocnirii de ordin  $k$ , atunci în intervalul dintre ciocnirile de ordin  $k$  și  $k+1$  condițiile vor fi:

$$q(t_k + 0) = 0; \quad \dot{q}(t_k + 0) = -R\dot{q}_k, \quad (13)$$

iar cele finale

$$q(t_{k+1} - 0) = 0; \quad \dot{q}(t_{k+1} - 0) = \dot{q}_{k+1}, \quad (14)$$

Mișcările periodice a căror perioadă trebuie să fie  $t_{k+1} - t_k = rT$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) se realizează dacă vitezele de la începutul fiecărei ciocniri sunt aceleași  $\dot{q}_k = \dot{q}_c$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Pentru calculul lui  $X_0(s)$ , se înmulțesc ambii membri ai ecuației diferențiale (12) a mișcării prin factorul  $e^{-st}$  și apoi se integrează între limitele  $t_0$  și  $t_0 - rT$ . Ținând seama de relațiile (8), (9) și (10) după integrare rezultă:

$$X_0(s) = (1 - e^{-srT}) \left\{ \left[ \frac{\dot{q}_c + \dot{\xi}(t_0)}{s^2} + \frac{\xi(t_0)}{s} - \frac{g}{s^3} \right] e^{-st_0} - \frac{Y_0(s)}{1 - e^{-sT}} \right\} - \frac{(1+R)e^{-st_0}}{s^2} \dot{q}_c \quad (15)$$

Apoi din relația (4), folosind și relația (5), se deduce transformata funcției necunoscute  $q(t)$  care va fi dată de ecuația:

$$X(s) + Y(s) = \left[ \frac{(\dot{q}_c) + \dot{\xi}(t_0)}{s^2} + \frac{\xi(t_0)}{s} - \frac{g}{s^3} \frac{1+R}{s^2(1 - e^{-srT})} \dot{q}_c \right] e^{-st_0} \quad (16)$$

Pentru a găsi funcțiile inițiale se va aplica formula de inversiune Mellin - Fourier. Astfel se obține:

$$q(t) + \xi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} [X(s) + Y(s)] e^{st} ds \quad (17)$$

în care integrarea se face de-a lungul conturului Bromwich, adică pe dreapta  $s = \sigma_0$  care lasă la stânga sa toate punctele singulare ale funcției considerate (16).

Calculul integralei (17) se face prin mai multe metode care conduc la expresii analitice diferite însă echivalente. Ținând seama că dezvoltarea legii mișcării în serie Fourier, se va folosi pentru rezolvarea problemei teorema reziduurilor.

Pentru funcția (16) este satisfăcută lema Jordan încât integrala (17) luată de-a lungul semicercului de la infinit, situat la stânga conturului, este nulă.

Se va considera domeniul închis delimitat de dreapta  $s = \sigma_0$  și semicercul situat la stânga acestei drepte a cărei rază tinde la infinit. Punctele singulare din acest domeniu sunt polii

$$s_j = \frac{2\pi j}{rT} i \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (18)$$



situați pe axa imaginară.

Lăsând de o parte  $s = 0$ , se vede că toți ceilalți sunt poli simpli. În ceea ce privește  $s = 0$ , dacă acesta este un pol multiplu, mișcarea nu poate fi periodică.

Ținând seama că se determină mișcările periodice, este necesar să se pună condiția ca și  $s = 0$  să fie un pol simplu pentru expresia (16). Din aceste condiții de existență a mișcării se vor determina parametrii mișcărilor periodice.

În primul rând, pentru ca  $s = 0$  să nu fie pol de ordin trei, este necesar să fie verificată condiția:

$$\lim_{p=0} p^3 [X(s) + Y(s)] = 0 \quad (19)$$

Folosind relația (16), din calculul limitei (19) rezultă:

$$-g - (1 + R)\dot{q}_c \lim_{p=0} \frac{s}{1 - e^{-srT}} = 0$$

și apoi

$$\dot{q}_c = -\frac{rTg}{1 + R} \quad (20)$$

Mai trebuie pusă condiția ca  $s = 0$  să nu fie pol de ordin doi, adică:

$$\lim_{s=0} s^2 [X(s) + Y(s)] = 0 \quad (21)$$

Dacă se înlocuiește aici expresia (16) și se calculează limita, se obține:

$$\dot{q}_c + \dot{\xi}_0(t_0) - \lim_{s=0} \left[ \frac{g}{s} - \frac{(1 + R)\dot{q}_c}{1 - e^{-srT}} \right] = 0$$

sau

$$\dot{\xi}(t_0) = \frac{rTg}{1 + R} + g \lim_{s=0} \left( \frac{1}{s} - \frac{rT}{1 - e^{-srT}} \right)$$

Se calculează apoi limita și se ajunge la ecuația:

$$\dot{\xi}(t_0) = \frac{rTg}{2} \frac{1-R}{1+R} \quad (22)$$

din care se determină momentul ciocnirii inițiale  $s$ .

După cum se constată, condițiile pentru ca  $s = 0$  să fie un pol simplu coincid chiar cu condițiile de existență ale mișcărilor periodice deduse și pe altă cale.

Calculul integralei din legea mișcării (17) se face cu ajutorul teoremei reziduurilor. În primul rând se vor înlocui condițiile de existență (20) și (22) în relația (16). Apoi se calculează reziduurile relative la toți polii (18).

Reziduul relativ la polul  $s = 0$  va fi:

$$\lim_{s=0} s[X(s) + Y(s)]e^{st} = \xi(t_0) + g \lim_{s=0} \left[ \frac{rT}{2s} \frac{1 + e^{-srT}}{1 - e^{-srT}} - \frac{1}{s^2} \right] = \xi(t_0) + \frac{r^2 T^2 g}{12} \quad (23)$$

Pentru ceilalți poli (18), corespunzători valorilor întregi pozitive și negative ale lui  $j$ , în afară de zero, reziduurile vor fi:

$$\lim_{s=s_j} (s - s_j)[X(s) + Y(s)]e^{st} = \frac{rTg}{s_j^2} e^{s_j(t-t_0)} \lim_{s=s_j} \frac{s - s_j}{1 - e^{-srT}} = \frac{r^2 T^2 g}{4\pi^2 j^2} e^{i \left( \frac{2\pi j}{rT} \right) (t-t_0)} \quad (24)$$

Aplicând teorema reziduurilor pentru calculul integralei (17) se găsește legea mișcării

$$q(t) = \xi(t_0) - \xi(t) + \frac{r^2 T^2 g}{12} - \frac{r^2 T^2 g}{2\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos \left[ \frac{2\pi j}{rT} (t - t_0) \right] \quad (25)$$

valabilă pe întreaga durată a mișcării ( $t \geq t_0$ ).

Legea mișcării se obține astfel direct din ecuația diferențială a mișcării (12) și rezultă identică cu aceea care s-ar obține din studiul făcut separat pe fiecare interval.

Pentru analiza mișcării este comod să se folosească dezvoltarea în serie Fourier a funcției  $q(t)$  definită pe intervalul  $(t_0, t_0+rT)$ , având forma:

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ a_j \cos \frac{2\pi j}{rT} (t - t_0) + b_j \sin \frac{2\pi j}{rT} (t - t_0) \right] \quad (26)$$

Notând cu:  $a_0^*$ ,  $a_j^*$  și  $b_j^*$  coeficienții corespunzători dezvoltării funcției  $\xi(t)$ , din ecuația (25) se obține:

$$a_0 = -a_0^* + 2\xi(t_0) + \frac{r^2 T^2 g}{6}, \quad a_j = -a_j^* - \frac{r^2 T^2 g}{2\pi^2 j^2}, \quad b_j = -b_j^* \quad (27)$$

Se observă imediat că în relațiile (27) numai coeficienții  $a_j^*$  și  $b_j^*$  pentru care  $j$  este multiplu de  $r$  ( $j = lr$ ) sunt diferiți de zero. Acești coeficienți se calculează cu formulele:

$$a_i^* = \frac{2}{T} \int_0^T \xi(t) \cos \frac{2\pi jt}{rT} dt \quad (j = r, 2r, \dots) \quad (28)$$

$$b_i^* = \frac{2}{T} \int_0^T \xi(t) \sin \frac{2\pi jt}{rT} dt \quad (j = r, 2r, \dots) \quad (28')$$

Cu ajutorul relațiilor (27) se determină componentele armonice ale legii mișcării. Astfel se poate aprecia importanța pe care o au diferitele componente armonice și posibilitatea de a aproxima legea mișcării prin câteva dintre ele.

Expresia legii mișcării poate fi pusă și sub altă formă, valabilă numai în intervalul de definiție ( $t_0, t_1$ ).

Cu ajutorul condițiilor de existență (20) și (22), relația (16) se mai poate scrie:

$$X(s) + Y(s) = \left[ -\frac{g}{s^2} + \frac{rTg}{2s^2} + \frac{\xi(t_0)}{s} \right] e^{-st_0} - \frac{rTg}{s^2} \frac{e^{-s(t_0+rT)}}{1 - e^{-prt}} \quad (29)$$

Funcțiile originale ale termenilor din membrul drept ale ecuației (29) se pot calcula fie folosind teorema întârzierii, fie formula de inversiune. Astfel, pentru  $t > t_0$  se va obține

$$q(t) + \xi(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \frac{rTg}{2}(t - t_0) + \xi(t_0) - P \quad (30)$$

unde

$$P = \frac{rTg}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{e^{s(t-t_1)}}{s(1 - e^{-srT})} ds \quad (31)$$

Pentru calculul integralei (31) se consideră conturul format din dreapta  $s = \sigma_0$  și semicercul situat în semiplanul drept al cărui rază tinde la infinit. Ținând seama că sunt îndeplinite condițiile lemei lui Jordan pentru  $t < t_1$ , integrala (31) poate fi calculată de-a lungul întregului contur considerat și deoarece în interior nu există puncte singulare, rezultă  $P = 0$ . În felul acesta se ajunge la legea mișcării.

$$q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \frac{rTg}{2}(t - t_0) - [\xi(t) - \xi(t_0)], \quad (32)$$

valabilă pentru  $t_0 < t < t_1$ . Această formă a legii mișcării a mai fost găsită și pe altă cale.

### 3.6. Sistemul liniar elastic

În continuare se va considera sistemul vibropercutant general cu un grad de libertate și o cuplă percutantă. Folosind calculul operațional se determină ușor condițiile de existență ale mișcărilor periodice.

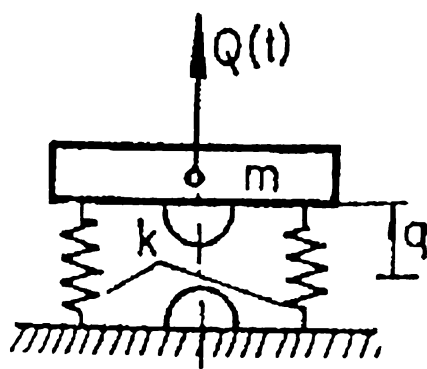


Fig.3.1

Se consideră sistemul arătat în fig.3.1 însă fără amortizare ( $c = 0$ ), având ecuația diferențială a mișcării de forma:

$$m\ddot{q} + kq = mA\omega^2 \cos(\omega t) - mg \quad (33)$$

Condițiile inițiale ale mișcării sunt:

$$q(t_k + 0) = -q_c, \quad \dot{q}_c(t_k + 0) = -R\dot{q}_c \quad (33')$$

iar cele finale:

$$q(t_{k+1} - 0) = -q_c, \quad \dot{q}_c(t_{k+1} - 0) = \dot{q}_c \quad (34)$$

Ținând seama de egalitatea:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-st} \cos \omega t dt = \frac{(s \cos \omega t_0 - \omega \sin \omega t_0)(1 - e^{-srT}) e^{-st_0}}{\omega^2 + s^2}$$

dacă se integrează ecuația diferențială a mișcării pe durata unei perioade, înmulțită în prealabil cu  $e^{-st}$  rezultă

$$\begin{aligned} (ms^2 + k)X_0(s) + mq_c(R + e^{-srT})e^{-st_0} + mpq_0(1 - e^{-srT}) = \\ = m(1 - e^{-srT})e^{-st_0} \left( \omega^2 A \frac{s \cos \omega t_0 - \omega \sin \omega t_0}{\omega^2 + s^2} - \frac{g}{s} \right) \end{aligned}$$

Se calculează  $X_0(s)$  din această ecuație, se introduce în relația (4) și se va obține:

$$X(s) = \frac{e^{-st_0}}{s^2 + \omega_n^2} \left[ \dot{q}_c - sq_0 + \omega^2 A \frac{s \cos \omega t_0 - \omega \sin \omega t_0}{\omega^2 + s^2} - \frac{g}{s} - \frac{(1 + R)\dot{q}_c}{1 - e^{-srT}} \right] \quad (35)$$

unde  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Astfel transformata Laplace a legii mișcării periodice  $q(t)$  cu perioada  $rT$  este dată de expresia (35).

Pentru găsirea funcției originale se va folosi de asemenea formula de inversiune Mellin-Fourier. Pe această cale integrala (27) se calculează cu ajutorul teoremei reziduurilor.

Existența mișcărilor periodice ale sistemului, care se presupune că nu este la rezonanță, rezultă din condițiile ca  $s = \pm i\omega_n$  să nu fie poli pentru expresia (35) a lui  $X(s)$ . Aceasta are loc dacă sunt îndeplinite condițiile

$$\lim_{s=\pm i\omega_n} (s^2 + \omega_n^2)X(s) = 0 \quad (36)$$

Pentru  $s = i\omega_n$ , condiția (36), ținând seama de expresia (36), devine:

$$\dot{q}_c - i\omega_n A \left[ s - \frac{\xi_n \cos \omega t_0 - \sin \omega t_0}{\xi(1 - \xi_n^2)} \right] - \frac{(1 + R)\dot{q}_c}{1 - e^{-i2\pi r \xi_n}} = 0 \quad (37)$$

unde

$$s = \frac{q_0}{A} - \frac{g}{A\omega_n^2}, \quad \xi_n = \frac{\omega_n}{\omega} \quad (37')$$

În loc de a mai scrie condiția (36) și pentru  $s=i\omega_n$ , se vor anula separat părțile reală și imaginară din ecuația (37). Cele două ecuații, prin transformări algebrice simple se pot pune sub forma:

$$\sin \omega t_0 = \frac{(1-R)(1-\xi_n^2)\dot{q}_c}{2A\omega}, \quad \cos \omega t_0 = (1-\xi_n^2) \left[ s - \frac{(1-R)\delta\dot{q}_c}{2A\omega} \right] \quad (38)$$

unde

$$\delta = \frac{1+R}{1-R} \frac{\text{ctg}\pi\xi_n}{\xi_n} \quad (38')$$

Este evident că ecuațiile (38), cu notațiile (37') și (38') sunt identice cu cele stabilite în calculul direct. Apoi, prin eliminarea lui  $t_0$  din ecuațiile (38), rezultă  $\dot{q}_c$  și apoi condițiile de existență cunoscute.

### 3.7. Sistem liniar elastic la rezonanță

Aplicarea metodei operaționale la sisteme în situații de rezonanță prezintă particularități speciale față de cazurile obișnuite [S.5]. Sunt necesare precizări suplimentare privind transformatele calculate și polii corespunzători situațiilor de rezonanță. Pentru exemplificare se consideră cazul simplu al sistemului vibropercutant cu un grad de libertate în situații de rezonanță și se determină condițiile de existență a mișcărilor periodice prin metoda operațională.

Sistemul vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă este format din masa  $m$  fixată prin arcurile de constantă  $k$ . Asupra masei acționează forța perturbatoare armonică  $Q(t) = Q_0(t) = Q_0\omega(t)$ , având amplitudinea  $Q_0$  și pulsația  $\omega$ .

Poziția masei  $m$  se apreciază prin coordonata  $q$  măsurată din poziția de echilibru static.

Ecuția diferențială a mișcării masei va fi:

$$m\ddot{q} + kq = Q_0 \sin \omega t$$

care fiind în situația de rezonanță se poate pune sub forma:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \omega^2 \mathbf{q} = \frac{Q_0}{m} \sin \omega t \quad (39)$$

Ciocnirea are loc în poziția dată de coordonata  $q = -q_0$  încât cuplei percutante i se poate atașa legătura unilaterală

$$f(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + \mathbf{q}_0 \geq 0 \quad (40)$$

Evident mișcările periodice ale sistemului vibropercutant trebuie să aibă perioada multiplă celei a forței perturbatoare  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , adică

$$rT = r \left( \frac{2\pi}{\omega} \right), \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Presupunând momentul primei ciocniri  $t = t_0$  și a celei următoare  $t = t_1$ , etapa mișcării dintre aceste ciocniri  $t \in (t_0, t_1)$  va avea drept condiții inițiale

$$q(t_0 + 0) = -q_0, \quad \dot{q}(t_0 + 0) = -Rv \quad (41)$$

și finale

$$q(t_1 - 0) = -q_0, \quad \dot{q}(t_1 - 0) = v \quad (42)$$

Mișcările periodice au fost obținute deja prin integrarea ecuației diferențiale (39) și impunerea condițiilor limită (41) și (42). Aceste rezultate pot fi însă regăsite ușor prin metoda operațională.

Prin integrarea ecuației diferențiale (39) pe durata etapei dintre ciocniri, după ce în prealabil a fost multiplicată cu factorul  $e^{-st}$ , se găsește:

$$\begin{aligned} ve^{-st_1} + Rve^{-st_0} - sq_0(e^{-st_1} - e^{-st_0}) + (s^2 + \omega^2)X_0(s) &= \\ &= \frac{Q_0}{m} \frac{e^{-st_1}e^{-st_0}}{s^2 + \omega^2} (s \sin \omega t_0 + \omega \cos \omega t_0) \end{aligned} \quad (43)$$

Ținând seama de expresia transformatei  $X(s)$  se deduce:

$$X(s) = \frac{e^{st_0}}{s^2 + \omega^2} \left[ \frac{Q_0(s \sin \omega t_0 + \omega \cos \omega t_0)}{m(s^2 + \omega^2)} - sq_0 + v - \frac{(1+R)v}{1 - e^{-srT}} \right] \quad (44)$$

Legea mișcării se va determina cu ajutorul formulei de conversie Mellin - Fourier.

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{st} X(s) ds \quad (45)$$

Calculul integralei (45) se face în planul variabilei complexe  $s$  de-a lungul unei axe paralele cu axa imaginară la distanța  $\sigma_0 > 0$  încât toți polii funcției (44) să fie în stânga ei. Astfel se ajunge la calculul integralei (45) pe baza teoremei reziduurilor, ceea ce revine ca funcția (44) să nu aibă poli simpli [ R.15].

Deoarece transformata (44) are polii  $s = \pm i\omega$ , condiția de a nu fi dubli este:

$$\lim_{s=\pm i\omega} (s^2 + \omega^2)^2 X(s) = 0 \quad (46)$$

Această condiția, după introducerea expresiei (44), se poate deduce la forma:

$$\frac{Q_0 (i\omega \sin \omega t_0 + \omega \cos \omega t_0)}{m} - (1-R)v \lim_{s=i\omega} \frac{s^2 + \omega^2}{1 - e^{-srT}} = 0$$

sau

$$\frac{Q_0}{m} (\cos \omega t_0 + i \sin \omega t_0) - i \frac{(1+R)\omega v}{\pi r} = 0 \quad (47)$$

Din ecuația complexă (47) se deduce:

$$\cos \omega t_0 = 0 \quad (48)$$

și

$$v = \frac{\pi r Q_0}{m\omega(1+R)} \sin \omega t_0 \quad (49)$$

Deoarece viteza inițială de ciocnire trebuie să fie negativă  $v < 0$ , din ecuația (49) rezultă condiția:  $\sin \omega t_0 < 0$ , iar din (48) se deduce:

$$t_0 = \frac{3\pi}{2\omega} \quad (50)$$



și deci

$$v = -\frac{\pi r Q_0}{m\omega(1+R)} \quad (51)$$

Evident mărimile (49) și (50) ce caracterizează mișcarea reprezintă condiții de existență și asigură realizarea regimului periodic.

Mai trebuie arătat că ele coincid cu rezultatele cunoscute, considerații de altă natură au permis să se tragă concluzia că numai  $r = 1$  este posibil pentru regimul periodic de mișcare.

### 3.8. Sistem cu limitatori rigizi

În continuare se arată posibilitatea extinderii metodei operaționale la sisteme formate dintr-o masă ce se deplasează cu ciocniri între doi limitatori [S.5]. Este un caz mai deosebit, deoarece apar două cuple percutante, iar metoda pentru a fi aplicată necesită unele modificări identice cu cele obținute și pe cale directă [B.70].

Sistemul este format din masa  $m$  ce se poate deplasa fără frecare pe orizontală între doi limitatori, unul fix și altul mobil. Astfel, masa se mișcă uniform și se ciocnește de cei doi limitatori.

Poziția masei și a limitatorului mobil se precizează cu ajutorul coordonatelor  $q$  și  $\xi$ .

Mișcarea limitatorului mobil este impusă și are caracter periodic, fiind dată de legea  $\xi = \xi(t)$ . Dacă se notează prin  $T$  perioada, atunci trebuie să fie satisfăcută condiția:  $\xi(t + T) = \xi(t)$ , oricare ar fi momentul  $t$  considerat.

După cum se constată, mișcarea masei este întreținută de mișcarea periodică a limitatorului mobil ce acționează prin ciocniri asupra masei.

De fapt, apar ciocniri ale masei, atât cu limitatorul fix, cât și cu cel mobil.

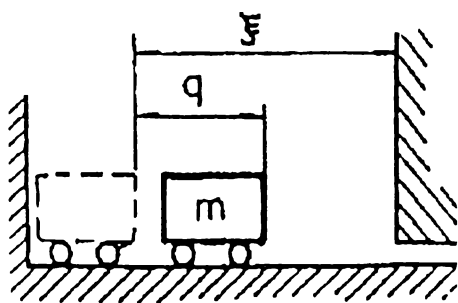


Fig.3.2

Coeficienții de restituire la ciocnirile din cele două cuple percutante, presupuse instantanee, sunt  $R_1$  și  $R_2$ .

Legea mișcării trebuie să fie continuă, iar derivata cu discontinuități în momentele ciocnirilor datorită modificărilor vitezei.

Deoarece asupra masei  $m$  nu

acționează forțe orizontale, ecuația diferențială a mișcării între ciocniri este:

$$\ddot{q} = 0 \quad (52)$$

încât în fiecare interval mișcarea rezultă uniformă.

Mișcările vibropercutante periodice vor avea perioada multiplă celei corespunzătoare mișcării limitatorului mobil, adică  $rT$  ( $r = 1, 2, \dots$ ).

Dacă se consideră  $t = t_0$ , momentul ciocnirii masei cu limitatorul mobil, atunci următoarea ciocnire va avea loc la momentul  $t_1 = t_0 + rT$ .

Se va considera mișcarea numai de pe intervalul  $(t_0, t_1)$  dintre ciocnirile succesive cu limitatorul mobil. Astfel condițiile inițiale ale mișcării pe intervalul considerat vor fi:

$$q(t_0) = \xi(t_0), \quad \dot{q}(t_0 + 0) = \dot{q}' \quad (53)$$

iar cele finale

$$q(t_1) = \xi(t_1), \quad \dot{q}(t_1 - 0) = \dot{q}_c \quad (54)$$

unde  $\dot{q}'$  și  $\dot{q}_c$  sunt vitezele de la începutul și sfârșitul unei ciocniri.

În acest interval mai apare o ciocnire cu limitatorul fix ce are loc la momentul  $t = \tau_0$  ( $t_0 < \tau_0 < t_1$ ) ce satisface condiția:

$$q(\tau_0) = 0 \quad (55)$$

Vitezele de la sfârșitul și începutul ciocnirii vor fi legate prin relația:

$$\dot{q}(\tau_0 + 0) = -R_1 \dot{q}(\tau_0 - 0) \quad (56)$$

În ceea ce privește vitezele corespunzătoare ciocnirilor cu reperul mobil, conform definiției coeficientului de restituire, se poate scrie:

$$R_2 = \frac{\dot{\xi}(t_0) - \dot{q}_c'}{\dot{q}_c - \dot{\xi}(t_0)}$$

și deci

$$\dot{q}_c' = -R_2 \dot{q}_c + (1 + R_2) \dot{\xi}(t_0) \quad (57)$$

Ținând seama că într-o perioadă legea mișcării se modifică datorită ciocnirii intermediare cu reperul fix, se vor considera separat cele două intervale în care se împarte perioada.

Transformatele parțiale luate pe o perioadă corespunzătoare intervalelor dintr-o perioadă a mișcării, vor fi:

$$X_0'(s) = \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-st} q(t) dt; \quad X_0''(s) = \int_{\tau_0}^{t_0} e^{-st} q(t) dt \quad (58)$$

Datorită periodicității legile mișcării din cele două intervale separate trebuie să se repete tot periodic. Drept urmare condițiile de periodicitate pot fi puse separat pe cele două intervale și astfel conform proprietății transformatelor pentru funcții periodice, se deduce:

$$X'(s) = \frac{X_0'(s)}{1 - e^{-srT}}, \quad X''(s) = \frac{X_0''(s)}{1 - e^{-srT}} \quad (59)$$

Calculul integralelor (58) pe baza ecuației diferențiale (52) și a condițiilor limită (53), (54) și (55) conduce la expresiile transformatelor parțiale:

$$X_0''(s) = \frac{e^{-st}}{s^2} [s\xi(t_0) - \dot{q}(\tau_0)e^{-s(\tau_0-t_0)} + q_c'] \quad (60)$$

și

$$X_0''(s) = \frac{e^{-s\tau_0}}{s^2} [\dot{q}_c e^{-s(\tau_1-\tau_0)} - \dot{q}'(\tau_0) + s\xi(t_0)e^{-s(\tau_1-\tau_0)}] \quad (61)$$

Apoi transformatele pentru legea de mișcare periodică se obțin din formulele (59).

Determinarea legii mișcării periodice necesită găsirea funcțiilor originale din expresiile găsite pentru transformată. Aceasta se poate face utilizând formula de inversiune Mellin-Fourier [K.15].

Existența regimurilor periodice de mișcare se obține ușor cu ajutorul teoremei reziduurilor.

După cum se constată funcțiile transformate au ca pol originea  $s=0$ . Existența mișcărilor periodice rezultă din condiția ca polul  $s=0$  să nu fie multiplu. Spre deosebire de cazurile tratate anterior aici trebuie ca pentru ambele transformate să fie satisfăcută această condiție.

În calculele ce urmează se va folosi egalitatea evidentă

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 - e^{-srT}} = \frac{1}{rT}$$

Mai întâi se va considera prima transformată (59) pentru care condiția de a nu avea pol triplu este dată de ecuația:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^3 X'(s) = 0 \quad (62)$$

Dar se poate scrie:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^3 X'(s) = \frac{1}{rT} [-\dot{q}(\tau_0) + \dot{q}'_c] \quad (63)$$

ceea ce conform relației (43) va da:

$$\dot{q}(\tau_0) = \dot{q}'_c \quad (64)$$

De asemenea, condiția de a nu fi  $s = 0$  pol dublu

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 X'(s) = 0, \quad (65)$$

ținând seama că

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 X'(s) = \frac{1}{rT} [\xi(t_0) + (\tau_0 - t_0) + \dot{q}'_c]$$

devine

$$\tau_0 = t_0 - \frac{\xi(t_0)}{\dot{q}'_c} \quad (66)$$

Analog se procedează cu cealaltă transformată. Punând condiția de a nu avea  $s = 0$  pol triplu,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^3 X''(s) = 0, \quad (67)$$

rezultă

$$\dot{q}_c = \dot{q}'_c(\tau_0) \quad (68)$$

Deoarece se deduce ușor egalitatea

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 X''(s) = \frac{1}{rT} [-(t_1 - \tau_0) \dot{q}_c + \xi(t_0)]$$

din condiția de a nu fi  $s = 0$  pol dublu se deduce

$$\xi(t_0) = (t_1 - \tau_0) \dot{q}_c \quad (69)$$

După cum se poate ușor arăta, din relațiile stabilite rezultă condițiile de existență ale mișcărilor periodice

$$\dot{q}_c = \frac{(1 + R_1) \xi(t_0)}{rT} = - \frac{R_1(1 + R_2) \dot{\xi}(t_0)}{1 - R_1 R_2} \quad (70)$$

aceleași cu cele obținute prin calcul direct.

Dezvoltările efectuate arată că metoda operațională are aplicabilitate generală și este extrem de utilă în aplicații.

### 3.9. Sistem vibropercutant având două grade de libertate

Metoda operațională a fost extinsă și la alte situații mai complexe, dar toate cu o singură masă.

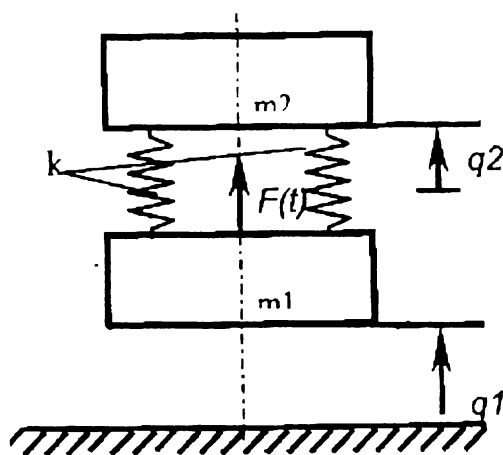


Fig.3.3

Principial nu există impedimente pentru a putea să fie folosită și pentru sisteme cu mai multe mase. Modul de aplicare și completările necesare vor fi exemplificate considerând sistemul format din două mase în cădere pe un plan rigid. Pentru acest sistem s-au determinat anterior pe calea obișnuită mișcările periodice cu desprinderi în cazul forței perturbatoare armonice aplicate masei percutante [ B.71].

În continuare se tratează același sistem cu două mase prin metoda operațională. Se determină mișcările vibropercutante periodice în aceleași condiții caracterizate prin discontinuități ale vitezei masei percutante, dar datorită legăturii elastice fără discontinuitățile vitezei absolute ale celeilalte mase.

Pe un plan rigid fix se află așezat pe verticală sistemul format din masele  $m_1$  și  $m_2$  legate între ele prin arcul de constantă elastică  $k$  (fig.3.3).

Datorită forței perturbatoare armonice  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  de amplitudine  $F_0$  și pulsație  $\omega$ , masa  $m_1$  execută mișcarea cu desprindere de plan însoțită de ciocniri instantanee caracterizate prin coeficientul de restituire  $R$ .

Poziția masei  $m_1$  desprinsă de planul fix este dată de coordonata  $q_1$ . Pentru masa  $m_2$  se consideră coordonata absolută  $q_2$  a cărei origine este extremitatea arcului nedeformat în lipsa deplasării primei mase.

Ecuțiile diferențiale ale mișcării celor două mase sunt:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k(q_1 - q_2) &= F_0 \cos \omega t - m_1 g \\ m_2 \ddot{q}_2 + k(q_2 - q_1) &= -m_2 g \end{aligned} \quad (71)$$

Mișcarea se va studia între două ciocniri succesive ce au loc la momentele  $t = t_0$  și  $t = t_1$ . Astfel etapa mișcării libere începe la sfârșitul primei ciocniri  $t = t_0 + 0$  și se termină la începutul următoarei ciocniri  $t = t_1 - 0$ .

Dintre mișcările posibile ale sistemului se vor determina numai cele periodice pentru care perioada trebuie să fie un multiplu al perioadei forței perturbatoare, adică:

$$t_1 - t_0 = rT = r \frac{2\pi}{\omega}, \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (72)$$

în plus, parametrii cinematici caracteristici ciocnirii trebuie să se repete identic. Aceasta înseamnă că la începutul oricărei ciocniri va trebui să fie aceeași viteză  $v$  a masei  $m_1$  și deci la sfârșit  $-Rv$ .

Trebuie precizat că datorită arcului se presupune că nu apar discontinuități ale vitezei absolute a masei  $m_2$ . Astfel, în momentele ciocnirilor coordonata absolută  $q_{20}$  și viteza  $\dot{q}_{20}$  a masei  $m_2$  rămân aceleași la oricare din ciocnirile următoare [S.5].

Ținând seama de precizările anterioare, condițiile inițiale ale etapei mișcării dintre ciocniri vor fi

$$\begin{aligned} q_1(t_0 + 0) &= 0, & \dot{q}_1(t_0 + 0) &= -Rv \\ q_2(t_0 - 0) &= q_{20}, & \dot{q}_2(t_0 + 0) &= \dot{q}_{20} \end{aligned} \quad (73)$$

Analog, la sfârșitul intervalului trebuie să fie îndeplinite condițiile finale

$$\begin{aligned} q_1(t_1 - 0) &= 0, & \dot{q}_1(t_1 - 0) &= v, \\ q_2(t_1 - 0) &= q_{20}, & \dot{q}_2(t_1 - 0) &= \dot{q}_{20} \end{aligned} \quad (74)$$

Pentru simplificare se va introduce coordonata relativă  $q = q_1 - q_2$ . Sistemul de ecuații diferențiale (71) duce la forma

$$\ddot{q} + \omega_n^2 q = \frac{F_0}{m_1} \cos \omega t, \quad \ddot{q}_2 = \frac{k}{m_2} q - g \quad (75)$$

unde

$$\omega_n^2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \quad (75')$$

Drept urmare, pentru sistemul de ecuații (75), condițiile inițiale ale mișcării între ciocniri vor fi

$$\begin{aligned} q(t_0 + 0) &= -q_{20}, & \dot{q}(t_0 + 0) &= -(Rv + \dot{q}_{20}), \\ q_2(t_0 + 0) &= q_{20}, & \dot{q}_2(t_0 + 0) &= \dot{q}_{20}. \end{aligned} \quad (76)$$

iar cele finale

$$\begin{aligned} q(t_1 - 0) &= -q_{20}, & \dot{q}(t_1 - 0) &= v - \dot{q}_{20}, \\ q_2(t_1 - 0) &= q_{20}, & \dot{q}_2(t_1 - 0) &= \dot{q}_{20}. \end{aligned} \quad (77)$$

Sistemul de ecuații (75), împreună cu condițiile limită (76) și (77) permit determinarea tuturor parametrilor cinematici ai mișcării periodice

$t_0$ ,  $q_{20}$ ,  $v$  și  $\dot{q}_{20}$ . Spre deosebire însă de calea cunoscută, este ușor de observat că introducerea coordonatei relative poate fi mai eficientă.

Bazele aplicării metodei operaționale au fost expuse anterior pentru căderea liberă a unei singure mase supuse unei acționări cinematice sau inerțiale [B.45].

Prin definiție, transformatele Laplace pe durata unei perioade ale legilor mișcării sunt

$$X_{10}(s) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-st} q_1(T) dt; \quad X_{20}(s) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-st} q_2(T) dt, \quad (78)$$

$$Y_0(s) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-st} q(t) dt \quad (79)$$

$s$  fiind un număr complex.

Ținând seama de condițiile inițiale (76) și finale (77), se poate scrie

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{q}(t) e^{-st} dt = (v - \dot{q}_{20}) e^{-st_1} + (Rv + \dot{q}_{20}) e^{-st_0} - sq_{20} (e^{-st_1} - e^{-st_0}) + s^2 Y_0(s)$$

și

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{q}(t) e^{-st} dt = \dot{q}_{20} (e^{-st_1} - e^{-st_0}) + sq_{20} (e^{-st_1} - e^{-st_0}) + s^2 X_{20}(s).$$

Esențial în aplicarea metodei operaționale este stabilirea transformatelor (78) și (79) pe baza ecuațiilor diferențiale ale mișcării (75). În acest scop fiecare dintre ecuații se înmulțește cu  $e^{-st}$  și apoi se integrează pe durata mișcării dintre ciocniri.

Pe această cale, din prima ecuație (75), rezultă

$$Y_0(s) = \frac{e^{st_0} - e^{-st_1}}{s^2 + \omega_n^2} \left[ \frac{F_0}{m_1} \frac{s \cos \omega t_0 - \omega \sin \omega t_0}{s^2 + \omega^2} - \dot{q}_{20} - sq_0 + v - \frac{(1+R)v}{1 - e^{-srT}} \right] \quad (80)$$



Procedând analog cu cealaltă ecuație (75), se deduce

$$X_{20}(s) = \frac{1}{s^2} \left[ \frac{k}{m_2} Y_0(s) + \left( e^{-st_0} - e^{-st_1} \right) \left( \dot{q}_{20} + sq_0 - \frac{g}{s} \right) \right] \quad (81)$$

Dar mișcările trebuie să fie periodice, cea ce înseamnă că se impune să fie satisfăcute condițiile de periodicitate.

$$q_1(t + rT) = q_1(t), \quad q_2(t + rT) = q_2(t) \quad (82)$$

și deci

$$q(t + rT) = q(t) \quad (82')$$

Ținând seama de periodicitatea mișcării, transformările Laplace  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$  și  $Y(s)$  ale legilor mișcării se pot exprima cu ajutorul transformatelor corespunzătoare  $X_{10}(s)$ ,  $X_{20}(s)$  și  $Y_0(s)$  luate pe o singură perioadă. De exemplu, pentru transformata  $Y(s)$  a legii mișcării relative, relația dintre cele două transformate va rezulta :

$$Y(s) = \frac{Y_0(s)}{1 - e^{-srT}} \quad (83)$$

Referitor la celelalte legi de mișcare în mod analog se poate scrie :

$$X_1(s) = \frac{X_{10}(s)}{1 - e^{-srT}}, \quad X_2(s) = \frac{X_{20}(s)}{1 - e^{-srT}} \quad (84)$$

Conform relațiilor (80) și (83) expresia transformatei legii mișcării relative  $q(t)$  va fi

$$Y(s) = \frac{e^{-st_0}}{s^2 + \omega_n^2} \left[ \frac{F_0}{m_1} \frac{s \cos \omega t_0 - \omega \sin \omega t_0}{s^2 + \omega^2} - \dot{q}_{20} - sq_0 + v - \frac{(1+R)v}{1 - e^{-srT}} \right] \quad (85)$$

De asemenea, pe baza relațiilor (81) și (84) se deduce :

$$X_2(s) = \frac{1}{s^2} \left[ \frac{k}{m_2} Y(s) + e^{-st_0} \left( \dot{q}_{20} + sq_0 - \frac{g}{s} \right) \right] \quad (86)$$

Împreună cele două relații (85) și (86) definesc transformatele Laplace a căror originale trebuie determinate.

Mai întâi trebuie stabilite condițiile necesare pentru ca mișcarea periodică să existe. Aceste condiții de existență se pot obține simplu și pe cale operațională folosind formula de conversiune Mellin-Fourier [K.15].

Inițial se va considera numai transformata (81), pentru care se poate scrie :

$$q_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} X_2(s) ds \quad (87)$$

În planul variabilei complexe  $s$ , integrala (87) este luată de-a lungul dreptei  $s = \sigma_0 > 0$  paralelă cu axa imaginară care lasă la stânga sa toate punctele singulare ale funcției de sub integrala (87).

Pentru rezolvarea integralei (87) se va utiliza teorema rezidurilor. Toate punctele singulare trebuie să fie poli simpli.

Evident pentru a exista mișcare periodică, nu este posibil ca  $s = 0$  să fie pol multiplu. Din condiția de a nu fi pol de ordin trei

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^3 X_2(s) = 0 \quad (88)$$

se deduce

$$\frac{k}{m_2} \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = g \quad (88')$$

Pe de altă parte conform relației (85) rezultă

$$\lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = -\frac{(1+R)v}{rT\omega_n^2} \quad (89)$$

iar după introducerea expresiei (89) în relația (88') se obține

$$v = -\frac{grT}{1+R} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \quad (90)$$

Însă  $s = 0$  nu poate fi nici pol dublu, ceea ce revine la condiția

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 X_2(s) = 0 \quad (91)$$

care în conformitate cu expresia (86) devine

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{k}{m_2} Y(s) + \frac{g e^{-st_0}}{s} \right] + \dot{q}_{20} = 0 \quad (91)$$

Din această relație, după efectuarea calculelor, rezultă

$$\sin \omega t_0 = \frac{m_2 \omega}{F_0} \left[ \dot{q}_{20} - \frac{grT(1-R)}{2(1+R)} \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right] \quad (92)$$

Evident, mai trebuie analizată și cealaltă transformată (82) pentru a stabili condițiile de realizare a mișcărilor periodice.

Transformata  $Y_0(s)$  este definită printr-o integrală (79) a funcției reprezentată de legea mișcării relative, încât va rezulta o funcție continuă în raport cu  $s$ . Aceasta înseamnă că  $Y_0$  în toate punctele planului complex al variabilei  $s$  trebuie să fie funcție analitică de  $s$ .

În consecință, rădăcinile numitorului expresiei (80) nu pot să fie puncte singulare pentru funcția  $Y_0(s)$ . Este cazul rădăcinilor  $s = \pm i\omega_n$  care pentru a nu fi puncte singulare trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$\lim_{s \rightarrow \pm i\omega_n} (s^2 + \omega_n^2) Y_0(s) = 0 \quad (93)$$

Dacă se introduce expresia (80) în relațiile (83), se găsește

$$\frac{F_0 \omega}{\omega^2 - \omega_n^2} \sin \omega t_0 + \dot{q}_{20} - \frac{(1-R)v}{2} = 0 \quad (94)$$

și

$$\frac{F_0}{m_1(\omega^2 - \omega_n^2)} \cos \omega t_0 - \dot{q}_{20} + \frac{(1+R)v}{2\omega_n} \operatorname{ctg} \frac{\omega_n r T}{2} = 0 \quad (95)$$

Caracterizarea regimurilor vibropercutante periodice de mișcare ale sistemului se face cu ajutorul ecuațiilor (90), (92), (94) și (95). Astfel se determină acele valori ale parametrilor mișcării care sunt obligatorii pentru ca efectiv să se realizeze regimuri periodice.

Introducând expresia (92) găsită pentru  $\sin \omega t_0$  și a vitezei  $v$  dată de formula (90) în ecuația (94), se obține

$$\dot{q}_{20} = \frac{grT(1-R)}{2(1+R)} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{k}{m_2 \omega^2 - k} \quad (96)$$

De asemenea, tot din ecuația (94) se mai deduce

$$\sin \omega t_0 = \frac{g\pi r(1-R)(m_1 + m_2)(\omega^2 - \omega_n^2)}{1+R} \frac{1}{F_0 \left( \frac{k}{m_2} - \omega^2 \right)} \quad (97)$$

ce precizează momentul ciocnirii inițiale.

De asemenea ecuația (95) după transformări simple se poate aduce la forma

$$q_{20} = -\frac{grT}{2\omega_n} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \operatorname{ctg} \frac{\omega_n rT}{2} + \frac{F_0}{m_1(\omega^2 - \omega_n^2)} \cos \omega t_0 \quad (98)$$

unde momentul  $t_0$  este dat de formula (97) și deci rezultă imediat  $q_{20}$ .

Trebuie subliniat că parametrii mișcărilor periodice pot fi ușor calculați din formulele (90), (96), (97) și (98) care reprezintă chiar condițiile de existență.

### 3.10. Determinarea componentelor armonice ale mișcării

Metoda operațională are la bază determinarea transformatei Laplace ale legilor mișcării periodice după ce în prealabil s-au calculat pe o singură perioadă. Apoi conform formulei de conversiune și a teoremei reziduurilor se deduc condițiile de existență și legile mișcării periodice dezvoltate în serie de componente armonice.[S.5]

Expresiile analitice ale legilor mișcării periodice, valabile în tot timpul mișcării, se obțin însă numai prin dezvoltarea soluțiilor obținute în serie Fourier. Un astfel de studiu există pentru vibratorul simplu rezemat pe un limitator elastic a cărui mișcare este cunoscută [S.5].

Determinarea legii mișcării sub forma unei serii Fourier mai are avantajul de a permite efectuarea analizei armonice a mișcării. Trebuie

subliniat însă că, în majoritatea cazurilor, numai primele armonici au importanță, celelalte putând fi neglijate. De altfel, experimental, s-a arătat pentru sistemul vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă, că este suficient să se țină seama numai de primele două armonici [B.59].

Legea mișcării periodice, dezvoltată în serie Fourier, se poate obține și direct din ecuația diferențială, printr-o altă metodă dezvoltată de L. Brîndeu [B.45], folosind calculul operațional. Spre deosebire însă de metoda operațională a lui A. Taplin [H.4], soluțiile rezultă identice cu cele găsite direct prin integrare.

Metoda operațională fundamentată pentru determinarea existenței mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante poate fi aplicată și în cazul rezonanței.

Deoarece transformata legii mișcării în cazul rezonanței are și poli dubli, conform teoremei reziduurilor condițiile de existență rezultă impunând ca efectiv să fie numai poli simpli. Astfel se obțin aceleași condiții ca cele obținute pe cale obișnuită [S.5].

## *Capitolul 4*

# **METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE**

### **4.1. Introducere**

Adâncirea studiului vibropercuțiilor în toate domeniile, impusă de necesitățile practice, conduce la o formulare matematică a problemelor în care ecuațiile diferențiale care descriu mai real și mai complet fenomenul sunt neliniare. Astfel în problemele unde interesează durata ciocnirii, forța de ciocnire etc., ecuația diferențială ce descrie mișcarea în intervalul ciocnirii este neliniară.

În studiul vibropercuțiilor se folosesc o serie de metode aproximative dintre care aproximarea poligonală se pretează foarte bine la calcule numerice. Această metodă constă în liniarizarea pe porțiuni a caracteristicii neliniare considerate. Metoda are un grad ridicat de convergență și de precizie ce se realizează prin considerarea mai multor laturi ale poligonului de aproximare. Această metodă a fost aplicată la studiul mișcării sistemelor vibro-percutante pentru a se putea evalua caracteristica neliniară a sistemului datorită ciocnirii.

Există metode care determină caracteristica liniară pe porțiuni prin condiția ca aceasta să aproximeze cât mai bine caracteristica neliniară. Unele metode de liniarizare folosesc o singură linie care se determină cu ajutorul erorii pătratice ponderate. Sunt cunoscute: metoda liniarizării echivalente, metoda liniarizării directe, metoda liniarizării după funcția de distribuție, etc. Altă metodă de aproximare biliniară rezultă din condiția ca eroarea patrată să fie minimă [S.19].

O aproximare mai bună se obține folosind metoda aproximării poligonale. Această metodă constă în înlocuirea caracteristicii neliniare date pe un anumit interval, printr-o funcție poligonală care se alege în mod convenabil [M.5].

Metoda generală prezentată în continuare care cuprinde drept cazuri particulare metoda Panovko, și metoda liniarizării echivalente, determină parametrii necunoscuți ai caracteristicii neliniare din condiția de minim a erorii patratice ponderate dintre funcția neliniară și cea liniarizată. Ea se aplică nu numai la aproximarea caracteristicii unui sistem neliniar, ci și la aproximarea forței de excitație.

#### 4.2. Metode de aproximare poligonală

Se consideră funcția  $F(x)$ , care în intervalul  $(0, x_m)$  poate fi reprezentată printr-un arc de curbă AB.

Fie mulțimea de linii poligonale  $P_n$  cu  $n$  laturi pe intervalul  $(0, x_m)$  ce depind de parametrii  $\alpha_l$  ( $l = 1, 2, \dots, s$ ). Acești parametrii arbitrari al mulțimii  $P_n$  se determină astfel încât linia poligonală de aproximație să fie optimă.

Fie latura de rang  $i$  din mulțimea  $P_n$  de forma

$$g_i(x) = m_i x + n_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

în care  $m_i$  și  $n_i$  sunt funcții de parametrii  $\alpha_i$ .

Pentru determinarea liniei poligonale de cea mai bună aproximație a funcției  $F(x)$  pe intervalul  $[0, x_m]$  se impune condiția ca expresia

$$E = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g_i(x) - F(x)]^2 p(x) dx \quad (x_0 = x_n) \quad (2)$$

să aibă valoarea minimă.

Ponderea erorii patratice într-un punct este dată de funcția de distribuție pozitivă  $p(x)$ . Introducerea unei astfel de funcții de distribuție în studiul vibropercuțiilor neliniare este avantajoasă deoarece permite considerarea liniilor poligonale cu un număr mai mic de laturi pentru a obține o aproximație bună. La același număr de laturi aproximația este cu atât mai bună cu cât funcția de distribuție se alege mai potrivit. De exemplu metoda Panavko cu  $p(x) = x^2$ , metoda liniarizării armonice,  $p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$ , dar aproximații mai bune decât pentru  $p(x)$  cu alte valori.

Condiția de minim a erorii pătratice (2) este

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

---

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_\ell} = 0, \quad (\ell = 1, 2, \dots, s) \quad (3)$$

Se obține astfel un sistem de  $s$  ecuații în parametrii  $\alpha_\ell$  care rezolvat determină valorile parametrilor ce caracterizează linia poligonală de cea mai bună aproximație.

În continuare se notează prin

$$A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g_i(x) - F(x)] p(x) dx \quad (4)$$

$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g_i(x) - F(x)] x p(x) dx \quad (5)$$

Relația (4) exprimă diferența dintre suprafețele ponderate delimitate de latura de rang  $i$  a liniei poligonale și funcția dată pe intervalul  $(x_i, x_{i+1})$ , iar relația (5) momentul static ponderat al aceleiași suprafețe. Pentru  $p(x) = 1$ , (4) este chiar diferența dintre variațiile energiilor potențiale din punctele  $x_i$  și  $x_{i+1}$  pentru latura poligonului de rang  $i$  și funcția dată, iar (5) momentul static  $S_i$  dintre aria  $A_i$  și abscisa centrului de greutate a lui  $A_i$  ( $A_i \neq 0$ ).

În studiul aproximării unei funcții date printr-un poligon continuu, se pornește de la condiția de continuitate a liniei poligonale.

$$g_{i-1}(x_i) = g_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, s) \quad (6)$$

Din condițiile (3) pentru parametrii  $x_i$  și  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), precum și  $n_i$ , în număr de  $s = 2n$  rezultă că suprafețele ponderate determinate de curbă și latură pe fiecare interval trebuie să fie egale, deci

$$A_i = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (7)$$

$$S_i = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (8)$$

Ecuațiile (7) și (8) constituie sistemul din care se determină valorile parametrilor  $\alpha_\ell$  pentru linia poligonală de aproximare. Din ecuațiile (1) și sistemul (7) - (8) rezultă că necunoscutele  $n_0$  și  $m_i$  ( $i = 0,$



1, ..., n-1) apar liniar și prin eliminare se poate scrie sistemul de ecuații ce determină abscisele sale  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) ale vârfurilor poligonului.

Sunt situații când pentru rezolvarea unei probleme, aproximarea funcției date se face prin poligoane cu discontinuități. În acest caz nu mai este îndeplinită condiția (6), iar din condițiile (3) pentru parametrii  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), precum și  $x_i$  și  $n_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) în număr de  $s = 3n-1$ , rezultă:

$$F(x) = \frac{g_{i-1}(x_i) + g_i(x_i)}{2} \quad (9)$$

la care se adaugă sistemul (7) - (8).

Parametrii ce determină linia poligonală cu discontinuități se obțin din sistemul (7) - (9).

Unul din cazurile mai des întâlnite de poligoane discontinue sunt funcțiile scară. Poligoanele de aproximare depind în acest caz de  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Acești parametri rezultă din ecuația (9) și (7), iar  $m_i = m$  poate fi ales arbitrar (în particular  $m_i = 0$ ).

### 4.3. Aproximarea bi și triliniară

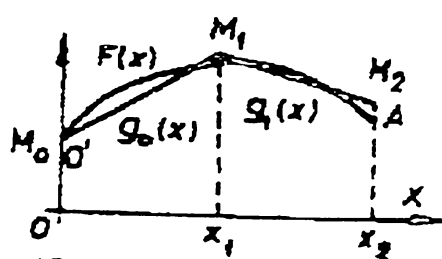


Fig.4.1

Fiind dată funcția continuă  $F: \mathfrak{R} \rightarrow [0, x_m] \subseteq \mathfrak{R}$ , linia poligonală continuă cu două laturi care dă cea mai bună aproximație pentru  $F(x)$  se determină din condiția ca eroarea medie pătratică să fie minimă.

Expresia (2) a erorii medii pătratice devine

$$E = \int_0^{x_1} [g_0(x) - F(x)]^2 p(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} [g_1(x) - F(x)]^2 p(x) dx \quad (10)$$

și ecuațiile (1) ale laturilor poligonului vor fi

$$g_i(x) = m_i x + n_i, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad x_0 = 0 \quad (11)$$

unde  $x_i$  reprezintă abscisele vârfurilor poligonului.

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRIILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

Familia de poligoane definite, conform relațiilor (11) conțin ca mărimi arbitrare pe  $x_1$ ,  $m_0$ ,  $n_0$  și  $m_1$ . Cu notațiile (4) și (5) se obțin condițiile necesare determinării parametrilor poligonului

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0 \quad (12)$$

și

$$S_0 = 0, \quad S_1 = 0 \quad (13)$$

În particular, dacă  $F(0)$  și  $F'(0) = k$ , se consideră  $F(x) = kx + f(x)$ . Atunci este posibil a se considera  $n_0 = 0$  și  $m_0 = k$ , rezultă

$$A_1 = 0, \quad S_1 = 0 \quad (14)$$

Condițiile (14) se vor folosi la determinarea poligonului de aproximare pentru cazul  $f(x) = \varepsilon x^p$ . Ecuațiile (14) pentru această funcție devin

$$m_1 - k = \frac{2\varepsilon x_2^{p-1}}{p+1} \frac{1-\eta^{p+1}}{(1-\eta)^2} = \frac{6\varepsilon x_2^{p-1}}{p+2} \frac{1-\eta^{p+2}}{(1-\eta)^2(1+\eta)}$$

și deci pentru determinarea abscisei  $x_1$ , adică a lui  $\eta$ , rezultă ecuația algenrică

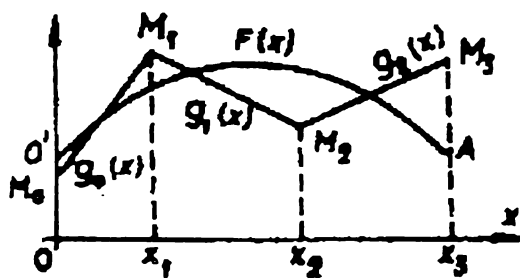


Fig. 4.2

$$\frac{1-\eta^{p+2}}{1-\eta^{p+1}} = \frac{p+2}{3(p+1)}(2+\eta)$$

Se constată că pentru determinarea lui  $x_1$  se ajunge la o ecuație algebrică care nu se poate rezolva totdeauna simplu. Uneori însă din considerații geometrice se poate alege și abscisa  $x_1$  astfel încât

$$S_1 = x_1 A_1$$

care determină singura necunoscută  $m_1$ .

Considerând  $p(x) = 1$ , se obține:

$$m_1 = k + \frac{3}{(x_2 - x_1)^3} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) f(x) dx \quad (15)$$

Pentru mărirea preciziei de aproximare se poate folosi un poligon cu trei sau mai multe laturi. În majoritatea situațiilor este însă suficient să se considere numai poligoane cu trei laturi.

Eroarea medie pătratică va fi:

$$E = \sum_{i=0}^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g_i(x) - F(x)]^2 p(x) dx \quad (16)$$

unde expresiile liniare  $g_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sunt de forma (1).

Poligonul de cea mai bună aproximare se obține din condiția:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0 \quad (17)$$

$$S_0 = 0, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0 \quad (18)$$

La fel ca și în cazul aproximării biliniare, pentru  $F(x) = kx + f(x)$  se poate lua  $n_0 = 0$  și  $m_0 = k$ . Pentru determinarea poligonului de aproximare se obțin ecuațiile:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0 \quad (19)$$

și

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0 \quad (20)$$

În sfârșit presupunând și abscisele  $x_1$  și  $x_2$  fixate, se obțin condițiile:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1(A_1 + A_2) - x_2 A_2 \\ S_2 &= x_2 A_2 \end{aligned} \quad (21)$$

din care se pot determina  $m_1$  și  $m_2$ .

#### 4.4. Folosirea aproximării poligonale în studiul mișcărilor

### tranzitorii

Metoda poligonală se poate aplica nu numai la aproximarea caracteristicii unui sistem neliniar, ci și la aproximarea forței perturbatoare.

Se consideră forța perturbatoare  $F(t)$  definită pe intervalul  $(0, T)$ . Se înlocuiește această funcție printr-o funcție poligonală astfel că eroarea patrică să fie minimă.

Din condițiile (1) și notațiile (4), (5) se obține pentru determinarea parametrilor liniei poligonale continue cu care se aproximează funcția  $F(t)$  sistemul (7) - (8).

Dacă vârfurile poligonului se aleg în mod convenabil, poligonul va avea ca necunoscute numai pe  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) ce se pot determina din relațiile

$$S_i - x_i A_i - (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=i+1}^{n-1} A_j = 0 \quad (22)$$

Pentru cazul când funcția nu este dată analitic, poligonul de aproximare se poate obține folosind relația (22), alegând momentele ce determină vârfurile poligonului.

Considerând sistemul vibrator liniar cu un grad de libertate se poate determina ușor răspunsul sistemului pentru o forță perturbatoare arbitrară aproximată printr-o funcție poligonală conform celor arătate anterior. Astfel sunt posibile unele simplificări care permit calculul imediat al sistemului.

#### **4.5. Metoda de aproximare pentru studiul vibrațiilor tranzitorii în sisteme liniare**

Studiul vibropercuțiilor în sisteme liniare se poate face folosind soluția generală în care forța perturbatoare este arbitrară. De obicei aceste soluții se scriu simplu în regimurile staționare de mișcare caracterizate prin forțe periodice de formă trigonometrică.

În regimurile tranzitorii forța perturbatoare se exprimă prin funcții complexe de timp care fac ca soluția sistemului să nu poată fi determinată efectiv sau conduc la formule complicate greu de aplicat în

probleme numerice. De asemenea scrierea analitică a forței perturbatoare determinată experimental în regimurile tranzitorii nu este simplă.

În continuare se va studia un sistem liniar asupra căruia acționează o forță perturbatoare ce poate fi cunoscută analitic sau chiar numai prin valori determinate experimental. Pentru aceasta se vor folosi rezultatele obținute anterior, în legătură cu aproximarea poligonală a unei funcții pe un interval dat. Aici însă metoda poligonală nu se aplică la aproximarea caracteristicii unui sistem neliniar, ci la aproximarea forței perturbatoare.

1. Se consideră forța perturbatoare  $F(t)$  dată pe un anumit interval  $(0, T)$ . Se va înlocui această funcție prin una poligonală cu condiția ca eroarea pătratică să fie minimă. Dintre rezultatele obținute în aproximarea poligonală a unei funcții se vor prezenta cele care se referă la poligoane continui și pot fi folosite în studiul regimurilor tranzitorii.

Dacă se notează cu  $g_i(t) = m_i t + n_i$ , ( $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) latura  $i$  din poligonul de aproximare, condiția de continuitate se mai scrie

$$g_{i-1}(t_i) = g_i(t_i) \quad (23)$$

unde  $t_i$  determină vârfurile poligonului.

În continuare se vor face următoarele notații:

$$A_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g_i(t) - F(t)] dt, \quad S_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g_i(t) - F(t)] t dt,$$

unde  $A_i$  reprezintă diferența dintre suprafețele delimitate de latura de ordinul  $i$  al liniei poligonale și funcția dată pe intervalul  $(t_i, t_{i+1})$ , iar  $S_i$  momentul static al aceleiași suprafețe.

Considerând ca necunoscute pe  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), și  $n_0$ , se obțin pentru determinarea acestora următoarele ecuații

$$A_i = 0, \quad S_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (24)$$

Dacă vârfurile poligonului se aleg în mod convenabil, poligonul va avea ca necunoscute numai pe  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), ce se pot determina prin relațiile:

$$S_i - x_i A_i - (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=i+1}^{n-1} A_j = 0 \quad (25)$$

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

---

În general nu este necesar să se calculeze poligonul de aproximare cu mare exactitate și este suficient să se obțină valori ale necunoscutelor care să verifice în mod aproximativ relațiile (24), respectiv (25). Aceasta mai ales că soluțiile ce se obțin sunt apropiate de cele exacte chiar și pentru poligoane de aproximare construite geometric respectând numai într-o anumită măsură concluziile amintite anterior.

Pentru cazul când funcția nu este dată analitic, poligonul de aproximare se poate obține folosind formulele (25) și alegând momentele ce determină vârfurile poligonului.

2. Fie un sistem vibrator liniar cu un grad de libertate a cărui mișcare este dată de ecuația diferențială

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = F(t)$$

unde  $F(t)$  este o funcție ce se aproximează printr-o funcție poligonală continuă.

Pentru simplificare se vor considera condiții inițiale nule și se va scrie soluția ecuației sub forma cunoscută

$$x = \frac{1}{p_1} \int_0^t F(\tau) e^{-n(t-\tau)} \cos p_1(t-\tau) d\tau, \quad (p_1^2 = p^2 - n^2) \quad (26)$$

Prin derivare se obține:

$$\dot{x} = -nx + \int_0^t F(\tau) e^{-n(t-\tau)} \cos p_1(t-\tau) d\tau \quad (26')$$

Folosind exprimarea complexă se obține sub forma condensată, atât coordonata  $x$ , cât și derivata sa  $\dot{x}$ , astfel

$$\dot{x} + nx + ip_1x = \int_0^t F(\tau) e^{-n(t-\tau)} d\tau, \quad \gamma = -n + ip_1 \quad (27)$$

Pentru aceasta se introduce funcția poligonală în integrală, după care această devine

$$I = \int_0^t F(\tau) e^{\gamma(t-\tau)} d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g_i(\tau) e^{\gamma(t-\tau)} d\tau + \int_{t_n}^t g_n(\tau) e^{\gamma(t-\tau)} d\tau$$

Efectuând fiecare din integralele din această expresie și ținând seama de continuitate (23) valoarea integralei este

$$\gamma^2 I = \sum_{i=0}^n e^{\gamma(t-t_i)} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \gamma g_n(t) - \alpha_n$$

Deoarece  $\alpha_n = g'_n(t)$  relația (27) se poate scrie sub forma

$$\dot{x} + nx + ip_1 x = \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) e^{\gamma(t-t_i)} - \frac{1}{\gamma} F(t) - \frac{1}{\gamma^2} \dot{F}(t)$$

Dacă se notează

$$S_1 = \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) e^{-n(t-t_i)} \cos p_1(t-t_i)$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) e^{-n(t-t_i)} \sin p_1(t-t_i)$$

atunci se obține

$$\dot{x} + nx = \frac{(n^2 - p_1^2) S_1 - 2np_1 S_2}{(n^2 + p_1^2)^2} + \frac{n}{n^2 + p_1^2} F(t) - \frac{n^2 - p_1^2}{(n^2 + p_1^2)^2} \dot{F}(t)$$

$$p_1 x = \frac{2np_1 S_1 + (n^2 - p_1^2) S_2}{(n^2 + p_1^2)^2} + \frac{p_1}{n^2 + p_1^2} F(t) - \frac{2np_1}{(n^2 + p_1^2)^2} \dot{F}(t)$$

Aceste expresii se simplifică dacă se introduc mărimile:

$$S' = S_1 \cos \beta + S_2 \sin \beta, \quad S'' = -S_1 \sin \beta + S_2 \cos \beta$$

unde

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRIILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

---

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2np_1}{p_1^2 - n^2}$$

Se obțin astfel, pentru calculul coordonatei  $x$  și a vitezei  $\dot{x}$  formulele:

$$\dot{x} + nx = -\frac{1}{p^2}S' + \frac{n}{p^2}F(t) + \frac{1}{p^2}F(t)\cos\beta$$

$$p_1x = -\frac{1}{p^2}S'' + \frac{n}{p^2}F(t) - \frac{1}{p^2}F(t)\sin\beta$$

Formulele stabilite pentru calculul elementelor mișcării unui sistem neamortizat se obțin făcând  $n = 0$ . În acest caz se obțin formulele date pentru un sistem neamortizat folosind însă un poligon de aproximare arbitrar.

#### 4.6. Deformații locale de contact la ciocnire

##### 4.6.1. Sistemul vibropercutant

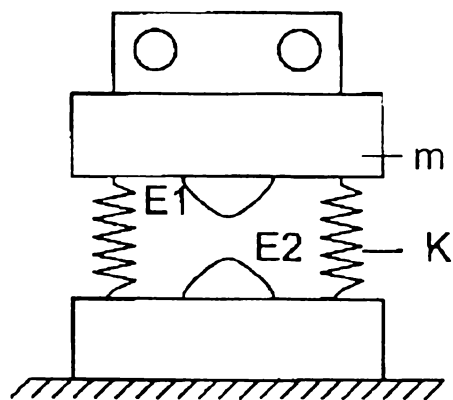


Fig. 4.3

În studiul vibropercuțiilor, aproximarea poligonală este utilă pentru că dă posibilitatea integrării ecuațiilor diferențiale și calculele pot fi făcute prin programe de calcul [S.19].

Chiar dacă determinarea poligonului de cea mai bună aproximare necesită unele calcule suplimentare, acestea sunt compensate de simplificările și precizia obținută în studiul mișcării.

În continuare se va



considera un sistem vibropercutant (fig.4.1) care este format dintr-o masă percutantă  $m$  suspendată pe un arc cu constanta  $k$  și un element fix.

Generatorul de vibrații este legat solidar cu masa percutantă.

Vibrațiile se obțin prin două excentrice care se rotesc în sens invers cu viteza unghiulară  $\omega$ . Rezultă că în acest fel, asupra masei percutante va acționa pe verticală forța perturbatoare

$$F = F_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Considerând că cele două excentrice au fiecare masa  $m_0/2$  și excentricitatea  $e$ , rezultă că amplitudinea forței perturbatoare va fi:

$$F_0 = m_0 e \omega^2$$

Cele două elemente - elementul fix și masa percutantă - se ciocnesc oprin intermediul a două emisfere ca două ciocane. În cazul echilibrului static, distanța dintre ciocane va fi  $\delta$ . În studiu vom considera că vitezele de ciocnire sunt destul de mici și tensiunile care apar la ciocnire sunt în limita de elasticitate.

În cazul considerat, teoria ciocnirii e valabilă dacă vitezele de ciocnire sunt la limita a câteva sute de cm/s.

Datorită ciocnirii, în timpul contactului cele două ciocane se vor deforma. Se va nota cu  $\xi$  ( $\xi > 0$ ) apropierea celor două ciocane, iar forța de contact  $P$ , dată de relația lui Hertz, o luăm de forma

$$P = k_1 \xi^{\frac{3}{2}} \quad (28)$$

unde pentru cazul ciocanelor de forme sferice, cum considerăm aici, avem după Ponomarev S.D.:

$$K_1 = \frac{2}{3(1-\mu^2)} E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

Dacă se consideră ca origine poziția de echilibru static a masei  $m$  și sensul pozitiv în sus, ecuația diferențială a mișcării masei va fi:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t + \varphi) + P \quad (29)$$

În perioada dintre ciocniri, evident că ecuația (29) conține forța  $P$ .

*METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE*

---

În timpul ciocnirii există următoarea relație între  $x$  și  $\xi$ :

$$x = -\delta - \zeta \quad (30)$$

Dacă în relația (30) vom considera pentru  $\xi$  și valori negative, atunci ecuația diferențială (29) devine de forma:

$$m\ddot{\zeta} + k\zeta + P(\zeta) = -k\delta - F_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (31)$$

unde  $P$  poate fi:

$$P(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \zeta \leq 0 \\ K_1 \zeta^{\frac{3}{2}} & \text{pentru } \zeta > 0 \end{cases}$$

Făcând schimbările de variabilă:

$$\tau = t \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\varphi}{p}, \quad \eta = \zeta \left( \frac{K_1}{K} \right)^2 \quad (32)$$

și folosind notațiile

$$a = \left( \frac{K_1}{K} \right)^2 \delta, \quad b = \frac{F_0 K_1^2}{K^3}, \quad p = \omega \sqrt{\frac{m}{K}},$$

ecuația diferențială a mișcării (31) va avea forma mai simplă

$$\ddot{\eta} + \eta + f(\eta) = a - b \sin p\tau \quad (33)$$

unde  $f$  este

$$f(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \eta \leq 0 \\ n^{\frac{3}{2}} & \text{pentru } \eta > 0 \end{cases}$$

După cum se observă ecuația (33) descrie întregul fenomen al ciocnirii, în care  $\eta \leq 0$  pentru care avem etape între două ciocniri succesive, iar pentru  $\eta > 0$  este ciocnirea propriu zisă.

#### 4.6.2. Integrarea ecuațiilor ciocnirilor prin metoda poligonală

În primul rând se va studia cazul  $\eta \leq 0$ , adică mișcarea sistematică între două ciocniri succesive. Pentru aceasta se va integra ecuația (33). Ca origine a timpului  $t = 0$  se va lua sfârșitul ciocnirii.

Avem deci  $\eta = 0$  pentru  $\tau = \frac{\varphi}{p}$ . Se va nota cu  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) valoarea derivatei  $\eta'$  în acest moment și obținem:

$$\eta = A \sin\left(\delta - \frac{\varphi}{p}\right) + B \cos\left(\delta - \frac{\varphi}{p}\right) - a - \theta \sin p\delta \quad (34)$$

unde

$$A = a + p\theta \cos \varphi, \quad B = a + \theta \sin \varphi, \quad \theta = \frac{b}{1 - p^2}.$$

Relația (34) descrie mișcarea masei  $m$  până în momentul în care  $\eta$  devine din nou zero. Atunci la sfârșitul acestui interval definit prin  $\tau_0$  se găsește rezolvând ecuația

$$A \sin\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) + B \cos\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) - a - \theta \sin p\tau_0 = 0$$

Pentru studiul etapei următoare se poate determina și mărimea  $\beta = (\eta')_{\tau=\tau_0}$

$$\beta = A \cos(\tau_0) \frac{\varphi}{p} + B \cos\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) - \theta \cos p\tau_0$$

Elementele mișcării determinate la sfârșitul etapei anterioare reprezintă condiții inițiale pentru mișcarea ce are loc în timp ce ciocanele se află în contact. În perioada aceasta e valabilă ecuația diferențială a mișcării (33) pentru  $\eta = 0$ , cu condițiile inițiale  $\eta = 0$  și  $\eta' = \beta(\tau=\tau_0)$ .

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

---

Deoarece ecuația este neliniară pentru integrarea ei se folosește o metodă de aproximare poligonală. Pentru aplicarea ei este necesar de a afla valoarea maximă a lui  $\eta$ ,  $\eta_{\max}$ .

Deoarece timpul de ciocnire e foarte scurt, putem scrie în orice moment  $\tau$  al ciocnirii că  $\sin p\tau \cong \sin p\tau_0$ .

Din integrala primă a ecuației și anume:

$$5\eta'^2 + 4\eta^{\frac{5}{2}} + 5\eta^2 + 10\eta\lambda - 5\beta^2 = 0,$$

cu

$$\lambda = a + b \sin p\tau_0,$$

se poate determina  $\eta_{\max}$ , punând condiția  $\eta' = 0$ .

Rezultă deci că  $\eta_{\max}$  va fi rădăcina ecuației

$$4\eta^{\frac{5}{2}} + 5\eta^2 + 10\eta\lambda - 5\beta^2 = 0 \quad (37)$$

Ecuația (37) are o singură rădăcină reală.

Metoda aproximării poligonale constă în înlocuirea caracteristicii neliniare

$$F(\eta) = \eta + f(\eta)$$

printr-o linie poligonală în așa fel încât eroarea medie pătratică să fie minimă.

Prima latură a poligonului se va alege în așa fel ca să reprezinte chiar partea liniară a caracteristicii.

Laturile poligonului se exprimă prin relații de forma:

$$g_i(\eta) = m_i\eta + n_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

unde  $m_i$  și  $n_i$  sunt constante ce se determină din condițiile de continuitate,

$$g_{i-1}(\eta_i) = g_i(\eta_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

și din ecuațiile:

## Capitolul 4

$$\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} [g_i(\eta) - F(\eta)] d\eta = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} [g_i(\eta) - F(\eta)] \eta d\eta = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

Aici, unde  $F(\eta) = \eta + \eta^{3/2}$ , se va face aproximare poligonală pentru  $n = 2$ , respectiv  $n = 3$ .

Pentru aproximarea  $n = 2$ , se obțin următoarele rezultate:

$$\begin{cases} i = 0, & m_i = 1, & n_i = 0 \Rightarrow 0 \leq \eta \leq 0,162\eta_{\max} \\ i = 1, & m_i = 1 + 1,127\eta_{\max}^{\frac{1}{2}}, & n_i = -0,1826\eta_{\max}^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad (T_1)$$

rezultă  $0,162 \eta_{\max} \leq \eta \leq \eta_{\max}$ .

Pentru cazul  $n = 3$ , rezultă:

$$\begin{cases} i = 0, & m_i = 1, & n_i = 0 & 0 \leq \eta \leq 0,08\eta_{\max} \\ i = 1, & m_i = 1 + 0,792\eta_{\max}^{\frac{1}{2}}, & n_i = -0,06336\eta_{\max}^{\frac{3}{2}} \\ 0,08\eta_{\max} \leq 0,494\eta_{\max} & \text{si} & \\ i = 2, & m_i = 1 + 1,292\eta_{\max}^{\frac{1}{2}}, & n_i = -0,310\eta_{\max}^{\frac{3}{2}} \\ 0,494\eta_{\max} \leq \eta \leq \eta_{\max} \end{cases} \quad (T_2)$$

Caracteristica neliniară aproximându-se cu un poligon, pe fiecare interval corespunzător unei laturi, ecuația diferențială a mișcării (33) devine liniară.

Soluția ecuației diferențiale pe un interval  $i$ ,  $\eta_i \leq \eta \leq \eta_{i+1}$ , se scrie în felul următor:

$$\eta = A_i \sin \sqrt{m_i}(\tau - \tau_i) + B_i \cos \sqrt{m_i}(\tau - \tau_i) + \frac{a + m_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2} \sin p\tau_i, \quad (38)$$

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRIILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

---

$A_i$  și  $B_i$  fiind evident constante de integrare care se determină din condițiile inițiale care sunt condițiile de la începutul intervalului, ce coincid cu cele de la sfârșitul intervalului precedent. Dacă presupunem că la începutul intervalului  $\tau = \tau_i$ , avem  $\eta = \eta_i$  și  $\eta' = \eta'_i$ , obținem:

$$\begin{cases} A_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \left( \eta'_i + \frac{b}{m_i - p^2} \cos p\tau_i \right) \\ B_i = \eta_i + \frac{a + n_i}{m_i} + \frac{b}{m_i - p^2} \sin p\tau_i \end{cases} \quad (39)$$

Pentru că  $\eta_{i+1}$  este o valoare cunoscută din  $(T_1)$  sau  $(T_2)$  prin înlocuirea ei în ecuația (38) se obține ecuația:

$$\begin{aligned} \eta_{i+1} = A_i \sin \sqrt{m_i} (\tau_{i+1} - \tau_i) + B_i \cos \sqrt{m_i} (\tau_{i+1} - \tau_i) - \\ - \frac{a + n_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2} \sin p\tau_{i+1}, \end{aligned} \quad (40)$$

din care se determină  $\tau_{i+1}$  ce este sfârșitul intervalului  $i$ .

După înlocuirea lui  $\tau_{i+1}$  în derivata expresiei (38) se obține  $(\eta')_{\tau=\tau_{i+1}} = \eta'_{i+1}$ , adică

$$\begin{aligned} \eta'_{i+1} = A_i \sqrt{m_i} \cos \sqrt{m_i} (\tau_{i+1} - \tau_i) - \\ - B_i \sin \sqrt{m_i} (\tau_{i+1} - \tau_i) - \frac{bp}{m_i - p^2} \cos p\tau_{i+1}, \end{aligned} \quad (41)$$

Elementele obținute prin relațiile (40) și (41) sunt condiții inițiale  $-\tau = \tau_{i+1}$  - pentru intervalul următor calculele făcându-se în mod asemănător.

În ultimul timp al ciocnirii, procedând în mod asemănător ca mai sus,  $\eta = \eta_n$  trebuie să aibă valoarea maximă  $\eta_{\max}$ . Din această cauză, la sfârșitul acestui ultim interval, derivata  $\eta'_n$  determinată va trebui să rezulte 0.

Folosind metoda de mai sus se studiază ciocnirea din momentul când  $\eta$  are valoarea 0 până la valoarea  $\eta_{\max}$ .

### Capitolul 4

Evident că se procedează asemănător, în studiul ciocnirii de la  $\eta_{\max}$  la  $\eta = 0$ . În acest moment se obține pentru  $\tau \rightarrow \tau_s$  și pentru  $\eta' \rightarrow -\gamma$ .

În acest mod se permite determinarea tuturor parametrilor care caracterizează fenomenul de ciocnire în sistemele vibropercutante. Se obține deci timpul total de ciocnire

$$\Delta_{t_0} = (\tau_i - \tau_0) \sqrt{\frac{m}{k}},$$

durata fiecărei faze a ciocnirii și anume:

$$\text{comprimarea: } \Delta'_{t_0} = (\tau_i - \tau_0) \sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ și destinderea: } \Delta''_{t_0} = (\tau_s - \tau_0) \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Se obține de asemenea deformația maximă:

$$\zeta_{\max} = \left( \frac{k}{k_1} \right)^2 \eta_{\max}$$

și forța maximă de contact:

$$P_{\max} = k_1 \zeta_{\max}^{\frac{3}{2}}.$$

Metoda prezentată se referă la un ciclu al mișcării compus din mișcarea dintre două ciocniri succesive și ciocnirea propriu-zisă.

Mișcarea sistemului fiind o succesiune de astfel de ciocniri, studiul complet se va face trecând de la un ciclu la următorul. Condițiile inițiale pentru un ciclu sunt cele finale ale ciclului precedent. Astfel pentru ciclul următor celui expus mai sus vom avea ca moment inițial  $\tau = \tau_s$  și condițiile inițiale  $\eta = 0$ ,  $\eta' = -\gamma$ .

În regim tranzitoriu ciclurile nu se repetă identic. Studiul acestui regim necesită după cum se observă multe calcule.

Ne vom ocupa în continuare de mișcarea staționară a sistemului vibropercutant, adică de cazul când mișcarea se repetă identic în fiecare ciclu. Este necesar pentru aceasta ca vitezele la începutul și sfârșitul unui ciclu să fie egale, iar forța perturbatoare să se repete identic.

Prima condiție este îndeplinită când avem:

$$\alpha = \gamma \quad (42)$$

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRIILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

---

A doua condiție este îndeplinită în cazul când perioada

$$T = \left( \tau_s - \frac{\varphi}{p} \right) \sqrt{\frac{m}{k}}$$

a mișcării staționare este un multiplu al perioadei forței perturbatoare

$$T = \left( \tau_s - \frac{\varphi}{p} \right) \sqrt{\frac{m}{k}} = r \frac{2\pi}{\omega}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (43)$$

În ecuațiile (42) și (43) am exprimat valorile intermediare ale lui  $\tau$  și  $\eta'$  din ecuațiile (35), (36), (40) și (41) cu ajutorul valorilor  $\alpha$  și  $\varphi$ , atunci aceste ecuații ar constitui un sistem de două ecuații cu două necunoscute.

Rezultă că mișcarea staționară se realizează numai când aceste condiții sunt verificate, deci numai pentru anumite valori ale lui  $\alpha$  și  $\varphi$ .

Deoarece exprimările lui  $\tau$  și  $\eta'$  sunt foarte greu de efectuat, trebuie să determinăm două valori aproximative ale lui  $\alpha$  și  $\varphi$ , cu care se încep calculele. Dacă  $\alpha$  și  $\varphi$ , calculați cu relațiile (42) și (43) nu sunt egali cu valorile de la început, vom relua calculele cu noile valori.

Procedând astfel ajungem la rezultate suficient de exacte, care necesită calcule multe pentru că se folosește iterația. Rezolvarea s-a făcut prin programul prezentat mai jos.

În ce privește valorile aproximative de început ale lui  $\alpha$  și  $\varphi$ , ținem seama că pentru majoritatea sistemelor vibropercutante durata ciocnirii nu influențează în mod esențial elementele mișcării.

Aceasta duce la concluzia că se pot obține rezultate privind mișcarea sistemului vibropercutant folosind ipoteza ciocnirii instantanee. Calculele se pot efectua în primă aproximație pornind de la valorile obținute pentru necunoscute în studiul ciocnirii instantanee. Folosind teoria ciocnirii elastice instantanee rezultă  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  și  $\alpha = (\theta - a) \operatorname{tg} \frac{\pi r}{p}$

pe care le vom folosi ca valori inițiale de calcul.

Deoarece la sistemele vibropercutante timpul de ciocnire este scurt în raport cu perioada forței perturbatoare, în limita a sub câteva sutimi din perioada forței perturbatoare se pot face unele aproximări care ne duc la un calcul exact (de suficient).



În condițiile precizate, după aproximările respective, din relațiile (40) și (41) se obține

$$\eta'_{i+1}{}^2 = \eta'_i{}^2 - 2m_i(\eta_{i+1} - \eta_i) \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} + \frac{a + n_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2} \right) \quad (44)$$

În această ultimă relație, pentru fiecare etapă necunoscută este mărimea  $\eta'_{i+1}$ , celelalte fiind determinate fie din relațiile (T<sub>1</sub>) și (T<sub>2</sub>), fie din etapa anterioară.

Pentru a determina  $\tau_{i+1}$ , din relațiile (40) și (41) după simplificare rezultă

$$\cos[\sqrt{m_i}(\tau_{i+1} - \tau_i) - \varphi_i] = \frac{\eta_{i+1}}{\eta_i} \cos \varphi_i \quad (45)$$

unde  $\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{B_i}{A_i}$ .

Cu ajutorul formulelor (44) și (45) se pot calcula toate mărimile necunoscute care apar la ciocnire. Dacă o anumită condiție nu este îndeplinită, atunci formulele (44) și (45) pot fi folosite pentru a obține valori aproximative care urmează să fie îmbunătățite pe baza ecuațiilor (40) și (41).

#### **4.7. Descrierea programului**

Programul Diferent.pas este astfel conceput încât să răspundă tuturor situațiilor care apar în paragraful precedent. Programul conține numai o procedură pentru calcularea lui  $\eta_{\max}$  și o funcție Arccos pentru definirea diferitelor variante ce pot apare în calculul lui  $\eta_{\max}$ . În liniile programului sunt prevăzute instrucțiuni pentru introducerea mărimilor care apar în cazul sistemului studiat, respectiv  $m, k, R, \omega, A, F_0, \varphi$ , și pe baza formulelor stabilite în text se calculează  $\eta'_0, \eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \eta'_4, \eta'_5, \eta'_6$ , respectiv deformația maximă și forța maximă  $P_{\max}$ . Conținutul programului în integritatea sa este arătat în Anexă 2 din teză. De asemenea sunt precizate sub formă tabelară, datele ce s-au introdus pentru efectuarea calculelor, cât și rezultatele la care am făcut referire.

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRIILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

<i>Mărime</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	1.5
k	kN / m	5
R	cm	1.5
$\omega$	rad / s	90
$\Delta_{tc}$	$\mu s$	0.003
$F_0$	N	31.8
$\varphi$	rad	$\pi/6$
$\eta'_0$		138600000000,00000
$\eta'_1$		138599904604,15028
$\eta'_2$		138719894180,75391
$\eta'_3$		0
$\eta'_4$		-138600000000,00000
$\eta'_5$		-138599904604,15028
$\eta'_6$		-138719894180,75391
$\tau_0$		3,37280
$\tau_1$		3,37376
$\tau_2$		3,37414
$\tau_3$		3,38163
$\tau_4$		3,39620
$\tau_5$		3,39116
$\tau_5 = \tau_6$		3,38654
Deformația maximă	m	0,00174
Forța maximă $P_{max}$	N	85,57664

## Capitolul 4

<i>Mărime</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	2
k	kN / m	5
R	cm	1.5
$\omega$	rad / s	91
$\Delta_{tc}$	$\mu s$	0.2
$F_0$	N	31.8
$\varphi$	rad	$\pi / 6$
$\eta'_0$		138600000000,00000
$\eta'_1$		1385032499185,31470
$\eta'_2$		11476921279,96148
$\eta'_3$		0
$\eta'_4$		-138600000000,00000
$\eta'_5$		-138503249185,31470
$\eta'_6$		-11476921279,96148
$\tau_0$		3,37280
$\tau_1$		3,45741
$\tau_2$		3,46257
$\tau_3$		3,47071
$\tau_4$		3,46815
$\tau_5$		3,47494
$\tau_5 = \tau_6$		3,48110
Deformația maximă	m	0,04977
Forța maximă $P_{max}$	N	13063,96467

*METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRIILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE*

---

<i>Mărimă</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	2.5
k	kN / m	5
R	cm	1.5
$\omega$	rad / s	92
$\Delta_{tc}$	$\mu s$	0.3
$F_0$	N	31.8
$\varphi$	rad	$\pi / 6$
$\eta'_0$		138600000000,00000
$\eta'_1$		138379974514,75760
$\eta'_2$		272579212912,221171
$\eta'_3$		0
$\eta'_4$		-138600000000,00000
$\eta'_5$		-138379974514,75760
$\eta'_6$		-272579212912,221171
$\tau_0$		3,37280
$\tau_1$		3,49902
$\tau_2$		3,50447
$\tau_3$		3,51150
$\tau_4$		3,51841
$\tau_5$		3,51637
$\tau_s = \tau_6$		3,51453
Deformația maximă	m	0,07570
Forța maximă $P_{max}$	N	24505,15107

## Capitolul 4

<i>Mărime</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	3
k	kN m	5
R	cm	1.5
$\omega$	rad s	93
$\Delta_{z1}$	$\mu\text{s}$	0.4
F	N	31.8
$\phi$	rad	$\pi/6$
$\eta_1$		138600000000.00000
$\eta_2$		138200105068.32517
$\eta_3$		429782492169.99606
$\eta_4$		0
$\eta_5$		-138600000000.00000
$\eta_6$		-138200105068.32517
$\eta_7$		-429782492169.99606
$\tau_1$		3,37280
$\tau_2$		3,53220
$\tau_3$		3,53766
$\tau_4$		3,54410
$\tau_5$		3,55050
$\tau_6$		3,54861
$\tau_7 = \tau_8$		3,54690
Deformația maximă	m	0,10320
Forța maximă $P_{max}$	N	39004,34575

METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRIILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

<i>Mărime</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	4
k	kN / m	5
R	cm	1.5
$\omega$	rad / s	94
$\Delta_{tc}$	$\mu s$	0.5
$F_0$	N	31.8
$\varphi$	rad	$\pi / 6$
$\eta'_0$		138600000000,00000
$\eta'_1$		137922653380,12495
$\eta'_2$		646339605752,25930
$\eta'_3$		0
$\eta'_4$		-138600000000,00000
$\eta'_5$		-137922653380,12495
$\eta'_6$		-646339605752,25930
$\tau_0$		3,37280
$\tau_1$		3,57803
$\tau_2$		3,58337
$\tau_3$		3,58931
$\tau_4$		3,58733
$\tau_5$		3,59259
$\tau_s = \tau_6$		3,59734
Deformația maximă	m	0,13931
Forța maximă $P_{max}$	N	61170,79156

## Capitolul 4

<i>Mărime</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	3.5
k	kN / m	5
R	cm	1.5
$\omega$	rad / s	95
$\Delta_{tc}$	$\mu s$	0.6
$F_0$	N	31.8
$\varphi$	rad	$\pi / 6$
$\eta'_0$		138600000000,00000
$\eta'_1$		137703523752,89629
$\eta'_2$		734416395641,89629
$\eta'_3$		0
$\eta'_4$		-138600000000,00000
$\eta'_5$		-137703523752,89629
$\eta'_6$		-734416395641,89629
$\tau_0$		3,37280
$\tau_1$		3,09362
$\tau_2$		3,61463
$\tau_3$		3,62042
$\tau_4$		3,61849
$\tau_5$		3,62361
$\tau_s = \tau_6$		3,62825
Deformația maximă	m	0,15419
Forța maximă $P_{max}$	N	71232,94940

*METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE*

---

<i>Mărime</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	1
k	kN / m	5
R	cm	1.5
$\omega$	rad / s	96
$\Delta_{tc}$	$\mu s$	0.7
$F_0$	N	31.8
$\varphi$	rad	$\pi / 6$
$\eta'_0$		138600000000,00000
$\eta'_1$		137882321541,98247
$\eta'_2$		456252180193,56266
$\eta'_3$		0
$\eta'_4$		-138600000000,00000
$\eta'_5$		-137882321541,98247
$\eta'_6$		-456252180193,56266
$\tau_0$		3,37280
$\tau_1$		3,66396
$\tau_2$		3,66941
$\tau_3$		3,67577
$\tau_4$		3,67366
$\tau_5$		3,67926
$\tau_s = \tau_6$		3,68433
Deformația maximă	m	0,10772
Forța maximă $P_{max}$	N	41594,50083



## Capitolul 4

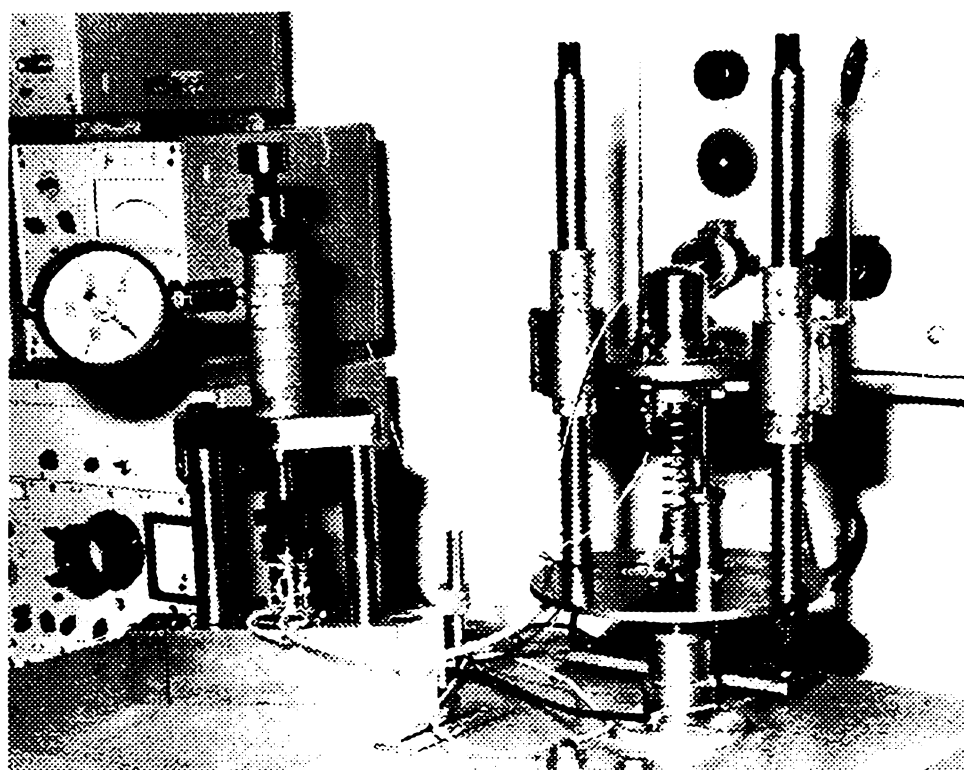
<i>Mărime</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	4.5
k	kN / m	5
R	cm	1.5
$\omega$	rad / s	97
$\Delta_{tc}$	$\mu s$	0.8
$F_0$	N	31.8
$\varphi$	rad	$\pi$ 6
$\eta'_0$		138600000000,00000
$\eta'_1$		136902442890.63981
$\eta'_2$		1143839304580,83705
$\eta'_3$		0
$\eta'_4$		-138600000000,00000
$\eta'_5$		-136902442890.63981
$\eta'_6$		-1143839304580,83705
$\tau_0$		3,37280
$\tau_1$		3,68186
$\tau_2$		3,68687
$\tau_3$		3,69217
$\tau_4$		3,69040
$\tau_5$		3,69509
$\tau_s = \tau_6$		3,69935
Deformația maximă	m	0,21784
Forța maximă $P_{max}$	N	119621,61332

*METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRIILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE*

---

<i>Mărime</i>	<i>Unitatea de măsură</i>	<i>Valoare</i>
m	kg	1,5
k	kN / m	5
R	cm	1,5
$\omega$	rad / s	90
$\Delta_{tc}$	$\mu s$	0,003
$F_0$	N	31,8
$\varphi$	rad	$\pi/6$
$\eta'_0$		13860000000,00000
$\eta'_1$		138599904604,15028
$\eta'_2$		138719894180,75391
$\eta'_3$		0
$\eta'_4$		-13860000000,00000
$\eta'_5$		-138599904604,15028
$H'_6$		-138719894180,75391
$\tau_0$		3,37280
$\tau_1$		3,72376
$\tau_2$		3,37414
$\tau_3$		3,38163
$\tau_4$		3,39620
$\tau_5$		3,39116
$\tau_5 = \tau_6$		3,38654
Deformația maximă	m	0,00174
Forța maximă $P_{max}$	N	85,57664

*METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR  
CARACTERISTICI SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE*



*Fig.4.4.*

Verificările experimentale ale fenomenului de ciocnire s-au realizat pe un sistem vibropercutant format din masa percutantă suspendată elastic prin arcuri, de un suport așezat pe o masă vibrantă ce efectuează vibrații armonice. Vibrațiile rectilinii relative ale masei față de suport se execută de-a lungul ghidajului fixat de suport (fig.4.4).

Forța perturbatoare în această mișcare relativă este determinată de vibrația armonică a suportului identic cu o masă vibrantă. Pentru ca frecarea să nu influențeze mișcarea sistemului, ghidajul barei de care este legată masa percutantă se sprijină pe rulmenți cu bile. Între masa percutantă și baza suportului au loc ciocniri prin intermediul ciocanelor de formă semisferică fixate de aceste elemente.

Sistemul a fost realizat cu următorii parametri:  $m = 2\text{N}$ ;  $k = 2,45\text{ N/m}$ ;  $R = 1,5\text{ cm}$ . Modificând parametrii dispozitivului s-au putut realiza diferite cazuri de mișcare. Prin varierea amplitudinii și pulsației masei vibrante, se schimbă forța perturbatoare. Cu ajutorul unor piulițe de strângere, se modifică distanța dintre ciocane.

Mai există posibilitatea de a schimba arcurile sau masa percutantă. Pentru mai multe situații ale dispozitivului s-au făcut determinări ale duratei ciocnirilor care au condus la valori între 1 și 2,5 microsecunde, în general mai mari decât cele rezultate din calcul.

## Capitolul 5

# EFECTUL ACCELERATIILOR DE ORDIN SUPERIOR

### 5.1. Influenta variatiilor acceleratiilor

În funcționarea multor sisteme mecanice apar variații bruște ale accelerațiilor sistemului care au o influență hotărâtoare asupra mișcării. Aceste variații de accelerație acționând asupra elementelor elastice din sistem pot să provoace oscilații, modificând regimul normal de mișcare. Pentru a elimina efectele produse în programul normal de mișcare al sistemului este necesar să se cunoască influența variațiilor bruște ale accelerațiilor de diferite ordine asupra sistemelor elastice.

Influența variațiilor bruște ale accelerației de ordinul doi asupra unui sistem elastic având un grad de libertate a fost studiată în mai multe lucrări.

În această parte se determină influența variațiilor bruște ale accelerațiilor de diferite ordine asupra sistemelor elastice în general.

Pentru aceasta se propun două metode de abordare a problemei, metode care sunt aplicabile diferitelor sisteme liniare ce suportă variații de accelerații.

### 5.2. Efectul variațiilor de accelerații

#### 5.2.1. *Salturile de accelerații*

Într-un interval scurt de timp  $(0, T)$  accelerațiile de ordinul  $i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) variază brusc de la un anumit nivel dat la altul superior de asemenea cunoscut. Aceste variații ale accelerațiilor de diferite ordine între două nivele se presupun cunoscute și se pot exprima prin relații de forma:

$$\int_0^T a^{(i-1)}(t) dt = a^{(i)}(T) - a^{(i)}(0) \quad (1)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

În general există o mulțime de posibilități de trecere definite de forma funcțiilor de trecere. Se va considera cazul când accelerația de ordinul  $n$  este funcție de timp definită în intervalul  $(0, T)$  prin relația mai generală

$$a^{(n)}(t) = f_n(t)t^m(T-t)^p$$

care se anulează la extremitățile intervalului considerat a fi o ciocnire pentru accelerații [S.55].

Trebuie observat că funcția se anulează la extremitățile intervalului având la începutul intervalului un zero de ordinul  $m$  și la sfârșit de ordinul  $p$ , iar în afara se presupune identic nulă.

În cazul sistemelor neamortizate funcția  $f_n(t)$  se presupune de forma

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j t^j \quad (3)$$

iar în cazul sistemelor cu amortizare

$$f_n(t) = e^{-\beta t} \sum_{j=0}^{n-1} C_j t^j \quad (4)$$

Constantele  $C_j$  se determină din condițiile (1) și odată determinate definesc complet pe  $a^{(n)}(t)$ . Valoarea  $\beta$  care intervine când există amortizare este cunoscută pentru un sistem dat și în general aceeași ca și în cazul vibrațiilor sistemului datorită forței de amortizare vâscoasă. În general se poate obține expresia accelerației de ordinul  $i$  sub forma

$$a^{(i)}(t) = \frac{1}{(n-i-1)!} \int_0^T a^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-i-1} d\tau + \sum_{r=1}^{n-i} \frac{a^{(n-r)}(0)}{n-i-r} t^{n-i-r}. \quad (5)$$

Pentru cazul sistemelor neamortizate, ținând seama de relațiile (2) și (3), valoarea accelerației de ordinul  $i$  la extremitatea intervalului ( $t=T$ ) devine

$$a^{(i)}(T) = \frac{1}{(n-i-1)} \sum_{j=0}^{n-1} C_j \int_0^T \tau^{m+j} (T-\tau)^{p+n-i-1} d\tau + \sum_{r=1}^{n-i} \frac{a^{(n-r)}(0)}{(n-i-r)} T^{n-i-r}. \quad (6)$$

Dacă se efectuează integralele prin substituția  $\tau = zT$  se obține variația accelerațiilor de ordinul  $i$  sub forma

$$a^{(i)}(T) - a^{(i)}(0) = \frac{(p+n+1)T^{m+p+n-i}}{(n-i-1)} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(m+j)! C_j T^j}{(p+n-i+m+j)!} + \sum_{r=1}^{n-i-1} \frac{a^{(n-r)}(0)}{(n-i-r)} T^{n-i-r}. \quad (7)$$

Relațiile (7) formează un sistem linear de  $n$  ecuații având ca necunoscute constantele  $C_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ).

În mod analog se procedează în cazul sistemelor amortizate. Pentru aceasta în relația (5) se introduce expresia (4), astfel că se va obține pentru determinarea constantelor  $C_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) sistemul de ecuații

$$a^{(i)}(T) - a^{(i)}(0) = \frac{T^{p+n+m-i}}{(n-i-1)} \sum_{j=1}^{n-1} C_j B(p+n-i, m+j+1) T^j \Phi(m+j+1, p+n+m+j-i+1, -\beta T) + \sum_{r=1}^{n-i-1} \frac{a^{(n-r)}}{(n-i-r)} T^{n-i-r} \quad (8)$$

unde:

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = F_1(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)z^2}{\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \dots \quad (8')$$

este funcția hipergeometrică degenerată, iar  $B(\alpha, \beta)$  funcția lui Euler de speța întâia.

### 5.2.2. *Vibrații neamortizate sub acțiunea variației accelerației*

Fie sistemul elastic cu un grad de libertate pentru care în intervalul de timp  $(0, T)$  ecuația diferențială a mișcării este de forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a(t) \quad (9)$$

unde  $a(t)$  este accelerația. În momentul  $t = 0$  se va constata că  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ . Se observă că în absența accelerației  $a(t)$  sistemul elastic nu oscilează.

Se consideră că în intervalul  $(0, T)$  apare o accelerație ce acționează asupra sistemului numai în acest interval. De asemenea se vor presupune salturile accelerațiilor de diferite ordine date de relațiile (1).

În acest fel trecerea între nivele diferite se poate introduce alegând funcția de trecere de forma (2).

Datorită acestei stări de accelerare, sistemul începe să oscileze. Este necesar să se determine starea de mișcare a sistemului după ce regimul de accelerare a luat sfârșit, adică pentru  $t > T$ .

Soluția ecuației (9) în intervalul  $(0, T)$  se poate scrie

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t a(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (10)$$

Dacă se notează

$$u^{(n)}(\tau) = \sin \omega(t - \tau)$$

atunci prin integrare rezultă:

$$u^{(i)}(\tau) = \frac{1}{\omega^{n-1}} \sin \left[ \omega(t - \tau) + \frac{\pi}{2}(n - i) \right],$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Integrala din expresiile (10) se calculează cu formula de integrare prin părți generalizată. Pentru  $t = T$  se obține

$$x(T) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^{k+1}} \left[ a^{(k-1)}(T) \sin \frac{\pi}{2} k - a^{(k-1)}(0) \sin \left( \omega T + \frac{\pi}{2} k \right) \right] + \quad (11)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} C_j \left[ I_j \sin \left( \omega T + n \frac{\pi}{2} \right) - J_j \cos \left( \omega T + n \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

unde s-au făcut următoarele notații:

$$I_j = \int_0^T \tau^{m+j} (T - \tau)^p \cos \omega \tau d\tau; \quad J_j = \int_0^T \tau^{m+j} (T - \tau)^p \sin \omega \tau d\tau; \quad (12)$$

Se poate arăta că integralele (12) se pot exprima cu ajutorul funcțiilor hipergeometrice degenerate, prin relațiile:

$$I_j = \frac{1}{2} B(p+1, m+j+1) T^{m+j+p+1} \left[ \Phi(m+j+1, m+j+p+2, i\omega T) + \right. \\ \left. + \Phi(m+j+1, m+j+p+2, -i\omega T) \right]$$

$$J_j = \frac{1}{2i} B(p+1, m+j+1) T^{m+j+p+1} \left[ \Phi(m+j+1, m+j+p+2, i\omega T) - \right. \\ \left. - \Phi(m+j+1, m+j+p+2, -i\omega T) \right] \quad (12')$$

$$(i = \sqrt{-1})$$



Procedând în același fel se poate scrie  $\dot{x}(T)$  și anume:

$$\begin{aligned} \dot{x}(T) = & \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^k} \left[ a^{(k-1)}(T) \cos \frac{\pi}{2} k - a^{(k-1)}(0) \cos \left( \omega T + \frac{\pi}{2} k \right) \right] + \\ & + \frac{(-1)^n}{\omega^n} \sum_{j=0}^{n-1} C_j \left[ I_j \cos \left( \omega T + \frac{\pi}{2} n \right) + J_j \sin \left( \omega T + \frac{\pi}{2} n \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Din relațiile (11) și (13) se pot determina valorile  $x(T)$  și  $\dot{x}(T)$  cu care legea mișcării pentru  $t > T$  este

$$x(t) = x(T) \cos \omega(t - T) + \frac{\dot{x}(T)}{\omega} \sin \omega(t - T) \quad (14)$$

Folosind expresiile (11) și (13) relația (14) devine

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\omega^{n+1}} \left\{ a^{(k-1)}(T) \sin \left[ \omega(t - T) + \frac{\pi}{2} k \right] + a^{(k-1)}(0) \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} k \right) \right\} + \\ & + \frac{(-1)^k}{\omega^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} C_j \left\{ I_j \sin \left( \omega t + n \frac{\pi}{2} \right) + J_j \sin \left[ \omega(t - T) + n \frac{\pi}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

astfel că legea mișcării sistemului este complet determinată prin relația (15).

### 5.2.3. *Vibrații amortizate sub acțiunea variației accelerației*

Asupra sistemului se presupune că acționează și forțe de frecare care fac ca mișcarea să fie amortizată. Este deci necesar să se studieze mișcarea ținând seama de frecare, presupusă de natură vâscoasă.

Ecuatia diferențială a mișcării în acest caz este

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = a(t) \quad (16)$$

iar soluția, cu condițiile inițiale  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , pentru  $t = 0$ , se scrie

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t a(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega_1(-\tau) d\tau; \quad (\omega^2 = \omega_1^2 - \alpha^2) \quad (17)$$

La fel ca și în cazul anterior integrala din expresiile (17) se calculează prin părți notând

$$u^{(n)}(\tau) = e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega_1(t - \tau)$$

și deci

$$u^{(i)}(\tau) = \frac{1}{\omega^{n-1}} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin[\omega_1(t - \tau) + (n - i)\varphi]$$

unde

$$\sin \varphi = \frac{\omega_1}{\omega}, \quad \cos \varphi = \frac{\alpha}{\omega}$$

Se obține astfel pentru  $t = T$ :

$$\begin{aligned} x(T) = & \frac{1}{\omega_1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^k} \left[ a^{(k-1)}(T) \sin k\varphi - a^{(k-1)}(0) e^{-\alpha T} \sin(\omega_1 T + k\varphi) \right] + \\ & + \frac{(-1)^n e^{-\alpha T}}{\omega_1 \omega^n} \sum_{j=0}^{n-1} C_j \left[ E_j \sin(\omega_1 T + n\varphi) - F_j \cos(\omega_1 T + n\varphi) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

unde:

$$E_j = \int_0^T e^{(\alpha-\beta)\tau} \tau^{m+j} (T - \tau)^p \cos \omega_1 \tau d\tau; \quad (19)$$

$$F_j = \int_0^T e^{(\alpha-\beta)\tau} \tau^{m+j} (T - \tau)^p \cos \omega_1 \tau d\tau;$$

Aceste integrale se vor exprima cu ajutorul funcțiilor hipergeometrice, prin relațiile:

$$E_j = \frac{1}{2} B(p+1, m+j+1) T^{n+j+p+1} \left\{ \Phi[m+j+1, m+j+p+2, (\alpha-\beta+i\omega_1)T] + \Phi[m+j+1, m+j+p+2, (\alpha-\beta-i\omega_1)T] \right\} \quad (19')$$

$$F_j = \frac{1}{2i} B(p+1, m+j+1) T^{n+j+p+1} \left\{ \Phi[m+j+1, m+j+p+2, (\alpha-\beta+i\omega_1)T] - \Phi[m+j+1, m+j+p+2, (\alpha-\beta-i\omega_1)T] \right\}$$

Deoarece în general se poate considera  $\alpha = \beta$  rezultă  $E_j = I_j$  și  $F_j = J_j$ .

Prin calcule asemănătoare se obține și în acest caz pentru  $t = T$ .

$$\begin{aligned} x(T) = & \frac{1}{\omega_1} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^k} \left\{ a^{(k-1)}(T) (\omega_1 \cos k\varphi - \alpha \sin k\varphi) - \right. \\ & \left. - a^{(k-1)}(0) e^{-\alpha T} [\omega_1 \cos(\omega_1 T + k\varphi) - \alpha \sin(\omega_1 T + k\varphi)] \right\} + \\ & + \frac{(-1)^n e^{-\alpha T}}{\omega_1 \omega^k} \sum_{j=0}^{n-1} C_j \left\{ E_j [\omega_1 \cos(\omega_1 T + n\varphi) + \alpha \sin(\omega_1 T + n\varphi)] + \right. \\ & \left. + F_j [\omega_1 \cos(\omega_1 T + n\varphi) - \alpha \sin(\omega_1 T + n\varphi)] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Având determinate valorile  $x(T)$  și  $\dot{x}(T)$  se poate scrie legea mișcării pentru  $t > T$  care cu valorile calculate anterior definește complet mișcarea sistemului elastic datorită accelerației.

#### 5.2.4. Calculul unui salt de accelerație

Pentru a se realiza variații ale accelerațiilor este necesar ca elementului aflat în mișcare să i se imprime o anumită mișcare. Dacă se consideră elementul aflat în mișcare rectilinie și uniformă, atunci datorită variației accelerației deplasarea  $s$  și viteza  $v$  în timpul regimului de accelerare vor suferi un salt care se poate determina.

Prin calcule asemănătoare cu cele date anterior se ajunge la următoarele expresii:

$$s_1 = s(0) + v(0)T + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a^{(j)}(0)T^{j+2}}{(j+2)!} + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n-1} C_j B_{p+n+2, j+m+1} \Phi(j+m+1, p+n+j+m+3, -\beta T), \quad (21)$$

$$j+m+1)^{m+j+p+n+2} \Phi(j+m+1, p+n+j+m+3, -\beta T)$$

și

$$v_1 = v(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a^{(j)}(0)T^{j+1}}{(j+1)!} + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} C_j B_{p+n+1, j+m+1} T^{m+j-p-i-1} \Phi(j+m+1, p+n+j+m+2, -\beta T), \quad (22)$$

$$\Phi(j+m+1, p+n+j+m+2, -\beta T),$$

care determină saltul corespunzător pentru deplasări și viteze.

Odată stabilit regimul de mișcare, este necesară verificarea mișcării sistemelor elastice din ansamblu. Pentru ușurința calculului se dau expresiile lui  $I_j$  și  $J_j$  pentru unele valori ale lui  $m$  și  $p$ . Astfel, notând  $m+j-p+2=\gamma$ , se obține pentru  $p=0$ :

$$I_j = \frac{1}{\gamma-1} \left( \cos z - \frac{z}{\gamma} \sin z \right)$$

$$J_j = \frac{1}{\gamma-1} \left( \sin z + \frac{z}{\gamma} \cos z \right)$$

## Capitolul 5

pentru  $p = 1$

$$I_j = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \left[ \left( 1 - \frac{z^2}{\gamma} \right) \cos z - 2 \frac{\gamma-1}{\gamma} z \sin z \right]$$

$$J_j = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \left[ \left( 1 + \frac{z^2}{\gamma} \right) \sin z - 2 \frac{\gamma-1}{\gamma} z \cos z \right]$$

pentru  $p = 2$

$$I_j = \frac{1}{\gamma(\gamma^2-1)} \left\{ \left[ 1 - \frac{3(\gamma-2)}{2\gamma} z^2 \right] \cos z - \frac{1}{2\gamma} \left[ 2(\gamma-2)(\gamma-3) - z^2 \right] z \sin z \right\}$$

$$J_j = \frac{1}{\gamma(\gamma^2-1)} \left\{ \left[ 1 - \frac{3(\gamma-2)}{2\gamma} z^2 \right] \sin z + \frac{1}{2\gamma} \left[ 2(\gamma-2)(\gamma-3) - z^2 \right] z \cos z \right\}$$

unele dintre acestea fiind reprezentate în fig.5.1, 5.2, 5.3.

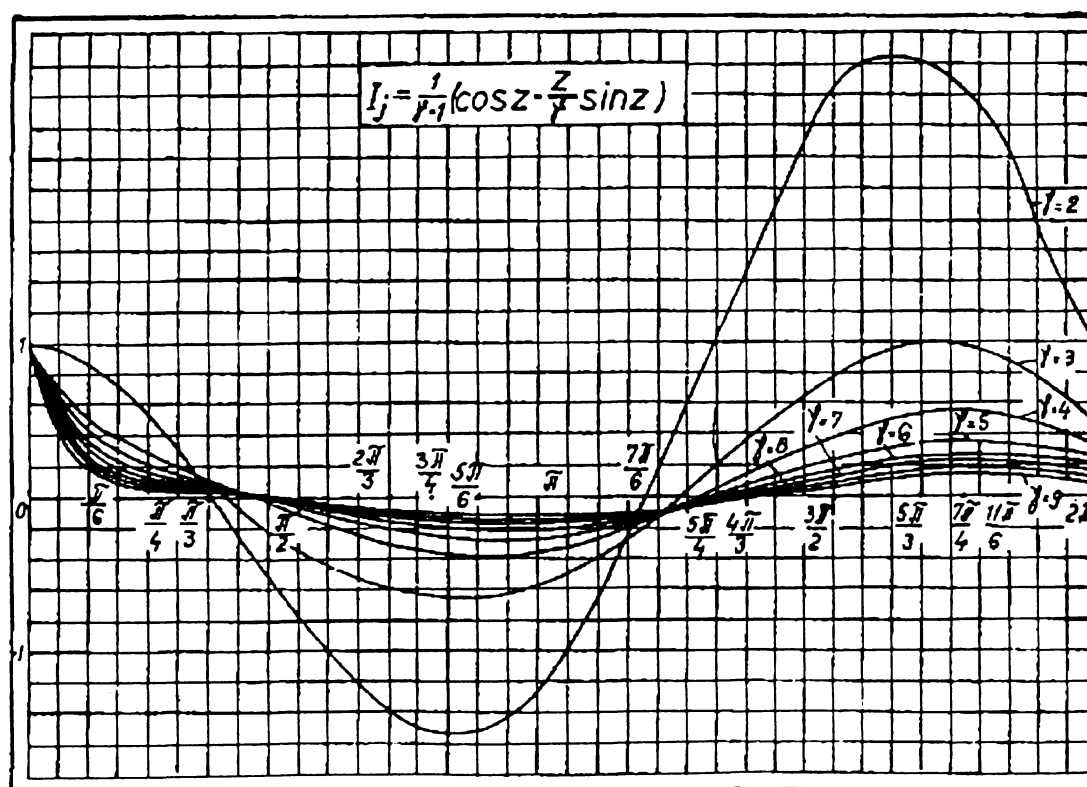


Fig.5.1

## EFECTUL ACCELERATIILOR DE ORDIN SUPERIOR

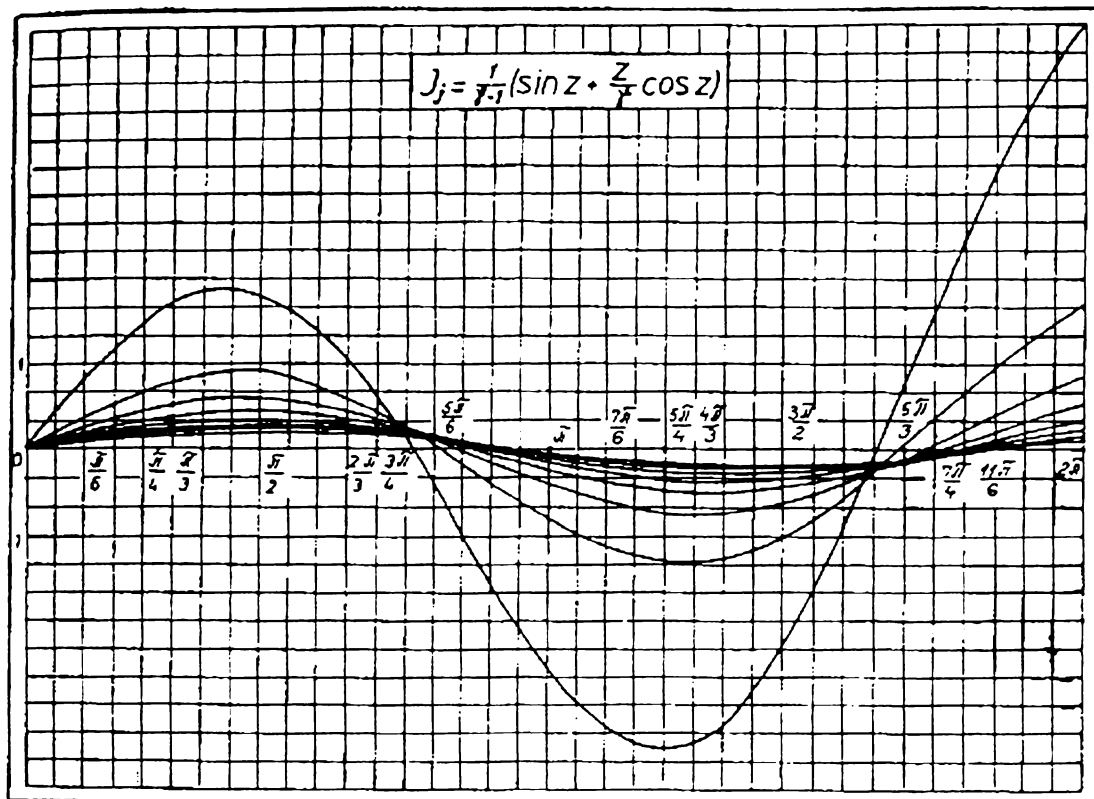


Fig. 5.2

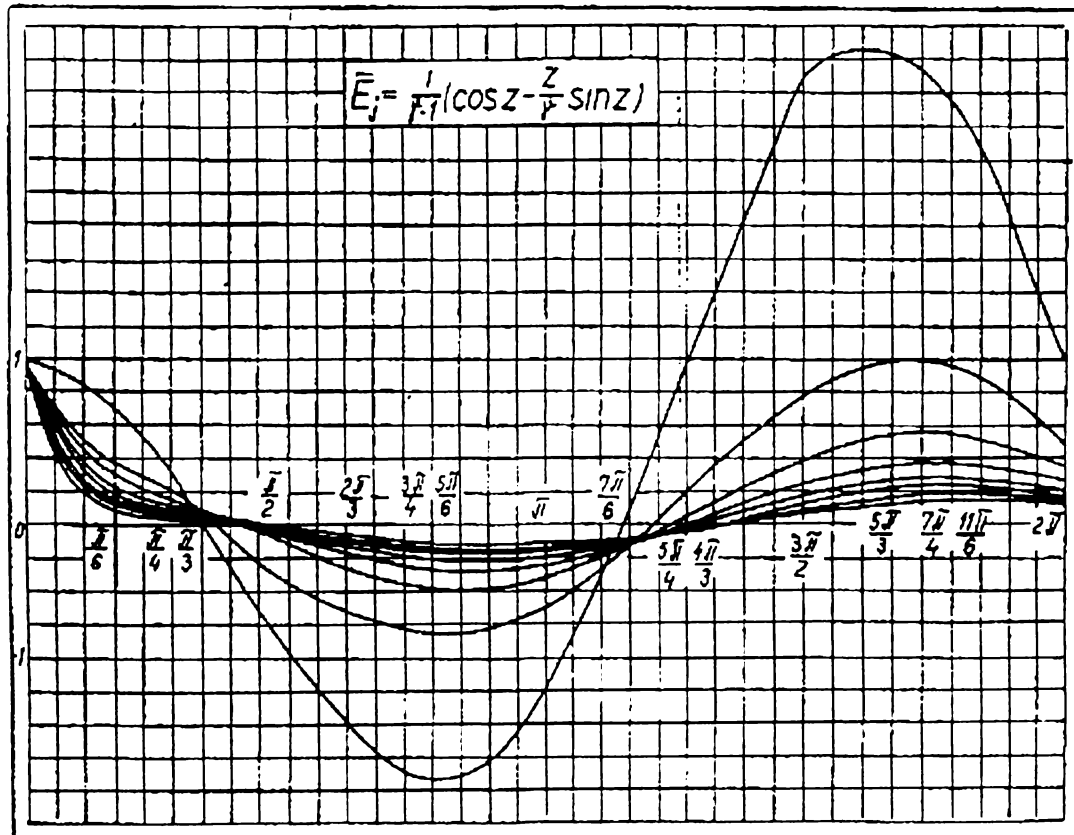


Fig. 5.3

Există cazuri în care mișcările provocate în sistemele elastice acționează și asupra omului. Astfel se întâmplă la vagoanele de tren unde construcția sistemelor elastice trebuie astfel făcută încât să nu provoace accelerații mari. Se recomandă anumite valori ale accelerațiilor de ordinul doi pe care organismul le suportă ușor. În funcție de aceste elemente se pot verifica sistemele elastice și determina poziția optimă pentru ca să nu treacă peste aceste limite.

Pentru a ilustra metoda de calcul se consideră ca exemplu pornirea unui sistem din repaus, astfel că salturile necesare pentru a ajunge la mișcarea de regim rectilinie și uniformă, sunt  $s_1 = 0,4$  m,  $v_1 = 1$  m/sec,  $a = 4,9$  m/sec<sup>2</sup>. Se va alege  $n = 2$ ,  $m = 2$ ,  $p = 1$ , adică funcția de trecere  $a''(t) = t^2(T-t)(C_0 + C_1t)$ .

Din relația (7), (9) și (22) se obține  $T = 2,1$  sec.,  $a'(T) = -0,06$  m/sec<sup>2</sup>, iar  $C_0 = -3,62$   $C_1 = 3,71$ .

Presupunând că această schimbare acționează asupra unui sistem elastic cu  $\omega = 28,5$  rad/sec. din relațiile (11), (13) se obține  $x(2,1) = 0,00625$  m și  $\dot{x}(2,1) = 0,0173$  m/sec. Deci mișcarea în continuare va fi o vibrație armonică de forma  $x = 6,3 \cos(28,5 t + 0,096)$  mm.

### **5.3. Metoda parametrilor inițiali**

#### ***5.3.1. Impuls de ciocnire***

Calculul dinamic al structurilor este foarte important în multe situații ce se referă la macarale de mare capacitate, motoare de putere mare sau mașini vibrante și vibropercutante [P.15].

Printre cauzele care conduc la apariția unor efecte ce periclitează siguranța mașinilor și construcțiilor trebuie considerate în primul rând efectele ciocnirilor. Acestea se caracterizează prin variații bruște ale vitezelor și accelerațiilor într-un interval scurt de timp [M.9].

Neglijarea duratei ciocnirii permite precizarea mișcărilor rezultate în urma ciocnirilor, dar nu poate evidenția unele caracteristici importante ale fenomenului de ciocnire. Este cazul influenței parametrilor cinematici cum sunt vitezele și accelerațiile de diferite ordine.

În vederea tratării mai complete a fenomenului, ciocnirile se idealizează prin impulsuri de diferite forme și durată finită, dar scurtă. Se prezintă o nouă metodă de studiu a efectelor produse de acționările cinematice caracterizate prin variații evidente ale parametrilor cinematici.

### 5.3.2. Acțiuni impulsive asupra sistemului elastic neamortizat

Se consideră sistemul elastic cu un grad de libertate format din masa  $m$  și arcul de constantă elastică  $k$  (fig.5.4). Arcul se fixează de un element ce execută o mișcare a cărei accelerație  $a(t)$  are caracter impulsiv.

Acesta acționează pe intervalul scurt de timp  $t \in [0, 2\varepsilon]$ , în rest fiind nulă.

Notând prin  $x$  coordonata masei  $m$  măsurate din poziția de echilibru, ecuația diferențială a mișcării va fi de forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = a(t) \quad (24)$$

unde:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

După cum se cunoaște, vibrația forțată dată de această ecuație în cazul acționării impulsive este

$$x(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t a(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\varepsilon] \quad (25)$$

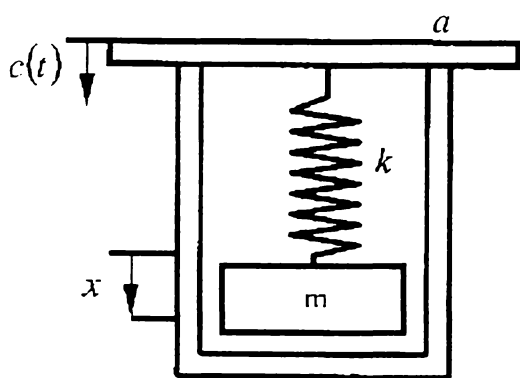


Fig.5.1

În general calculul integralei (25) necesită cunoașterea formei impulsului  $a(t)$ , ceea ce necesită evaluări bazate pe experiențe.

Deoarece alegerea formei impulsului nu este întotdeauna unic definită, pentru tratarea problemei se va prezenta o altă cale de rezolvare.

### 5.3.3. Principiul metodei parametrilor inițiali

Influența formei impulsului de accelerație poate fi ușor evidențiată prin precizarea valorilor inițiale [B.68].

În acest scop se folosește dezvoltarea în serie de puteri a accelerației



$$a(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} a_0^{(i)} t^i \quad (26)$$

unde s-a introdus notația:  $a_0^{(i)} = \left( \frac{d^i a(t)}{dt^i} \right)_{t=0}$ . Astfel soluția (25) se poate pune sub forma

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_0^{(i)}}{i!} \int_0^t \tau^i \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (27)$$

Dacă se introduc funcțiile de pondere ale accelerației

$$\alpha_i = \frac{1}{i!} \int_0^t \tau^i \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (28)$$

soluția (4) devine:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_0^{(i)} \quad (29)$$

După cum se constată vibrația forțată  $x(t)$  este determinată de valorile inițiale ale accelerației și ale derivatelor ei. Astfel efectul accelerațiilor inițiale de diferite ordine în vibrația forțată este ușor de stabilit cu ajutorul funcțiilor de pondere  $\alpha_i$ .

#### 5.3.4. Funcțiile de pondere ale accelerațiilor

În legătură cu funcțiile de pondere  $\alpha_i$  definite prin expresiile (28) sunt ușor de pus în evidență unele proprietăți care simplifică calculul. Astfel prin derivarea relației (28) se deduce

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \int_0^t \frac{1}{i!} \frac{d}{dt} [\sin \omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (30)$$

Este evident că relația (30) se mai poate scrie

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{1}{i!} \int_0^t \tau^i \frac{d}{dt} [\sin \omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (31)$$

încât aplicând integrarea prin părți rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= -\frac{1}{i!} \left[ \sin \omega_n(t - \tau) \Big|_0^t - i \int_0^t \tau^{i-1} \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{(i-1)!} \int_0^t \tau^{i-1} \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (32)$$

Dar conform definiției se deduce

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \alpha_{i-1}$$

Relația (32) pentru  $i = 1$  devine:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_0$$

iar pentru  $i = 2$ :

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1,$$

și ca urmare prin derivarea ultimei relații rezultă

$$\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} = \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_0.$$

Analog se deduce

$$\frac{d^3\alpha_3}{dt^3} = \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} = \alpha_0.$$

și în general

$$\frac{d^i \alpha_i}{dt^i} = \alpha_0 \quad (33)$$

Formula (33) este esențială în metoda parametrilor inițiali preconizată anterior pentru studiul vibrației forțate.

Într-adevăr este suficient să se cunoască prima dintre funcțiile de pondere

$$\alpha_0(t) = \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) d\tau = \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n},$$

din care prin integrări succesive se obțin celelalte funcții  $\alpha_i(t)$ .

Astfel:

$$\alpha_0(t) = \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n},$$

$$\alpha_1(t) = \frac{\omega_n t - \sin \omega_n t}{\omega_n^2},$$

$$\alpha_2(t) = \frac{0,5\omega_n^2 t^2 + \cos \omega_n t - 1}{\omega_n^3},$$

$$\alpha_3(t) = \frac{t^3 \omega_n^3 + 6 \sin \omega_n t - 6t\omega_n}{6\omega_n^4},$$

$$\alpha_4(t) = \frac{t^4 \omega_n^4 - 24 \cos \omega_n t - 12\omega_n^2 t^2 - 24}{24\omega_n^5},$$

$$\alpha_5(t) = \frac{t^5 \omega_n^5 - 120 \sin \omega_n t - 20\omega_n^3 t^3 - 120t\omega_n}{120\omega_n^6},$$

$$\alpha_6(t) = \frac{t^7 \omega_n^7 + 5040 \sin \omega_n t - 42 \omega_n^5 t^5 - 840 t^3 \omega_n^3 - 5040 t \omega_n}{5040 \omega_n^8},$$

Deoarece formula (33) poate fi considerată ca o ecuație diferențială în raport cu funcția necunoscută  $\alpha_i$ , soluția va fi de forma:

$$\alpha_i(t) = \int_0^t (t - \tau)^{i-1} \alpha_0(\tau) d\tau \quad (34)$$

Pe de altă parte în urma introducerii funcției  $\alpha_0(t)$  în relația (34),  $\alpha_i(t)$  va fi:

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t (t - \tau)^{i-1} (1 - \cos \omega_n \tau) d\tau \quad (35)$$

Atât expresia (34), cât și (35) sunt ușor utilizabile în condițiile concrete pentru determinarea vibrației forțate cu ajutorul tehnicii moderne de calcul.

### 5.3.5. Forme particulare de impulsuri

#### 5.3.5.1. Impuls parabolic

Metoda preconizată se aplică cazului simplu al unui impuls de formă parabolică de durată  $2\varepsilon$  și valoare maximă  $A$ . Expresia analitică a impulsului de accelerație este

$$a(t) = \begin{cases} \frac{A}{\varepsilon^2} t(2\varepsilon - t) & \text{pentru } 0 \leq t \leq 2\varepsilon \\ 0 & \text{pentru } t \geq 2\varepsilon \end{cases} \quad (36)$$

Deoarece derivatele expresiei (36) în intervalul  $[0, 2\varepsilon]$  sunt

## Capitolul 5

$$a'(t) = \frac{2A}{\varepsilon^2}(\varepsilon - t)$$

$$a''(t) = \frac{2A}{\varepsilon^2}$$

$$a'''(t) = 0,$$

parametrii inițiali vor fi:

$$a_0 = 0$$

$$a'_0 = \frac{2A}{\varepsilon^2}$$

$$a''_0 = \frac{2A}{\varepsilon^2}$$

$$a'''_0 = 0.$$

Prin urmare pe durata acțiunii impulsului, legea de mișcare (29) va fi

$$x(t) = \frac{2A}{\varepsilon^2}(\alpha_1\varepsilon - \alpha_2) \quad (37)$$

sau

$$x(t) = \frac{2A}{\varepsilon^2} \left[ \frac{\varepsilon}{\omega_n^2} (\omega_n t - \sin \omega_n t) - \frac{0,5\omega_n^2 t^2 + \cos \omega_n t - 1}{\omega_n^3} \right] \quad (38)$$

În acest caz s-a obținut soluția exactă a problemei, derivatele de ordin superior ale accelerațiilor fiind nule.

Pentru alte forme de impulsuri cu derivate nenule în momentul inițial, soluția are o infinitate de termeni și astfel primii termeni vor da o evaluare aproximativă care pe măsură ce numărul termenilor considerați este mai mare, aproximează mai exact vibrația forțată.

### 5.3.5.2. Impuls dreptunghiular

În cazul impulsului dreptunghiular de durată  $2\varepsilon$  și valoare maximă  $A_1$  expresia analitică a impulsului de accelerație este

$$a(t) = \begin{cases} A & \text{pentru } 0 \leq t \leq 2\varepsilon \\ 0 & \text{pentru } t > 2\varepsilon \end{cases} \quad (39)$$

având reprezentarea grafică din fig.5.5, deoarece derivatele expresiei (39) în intervalul  $[0, 2\varepsilon]$  sunt:

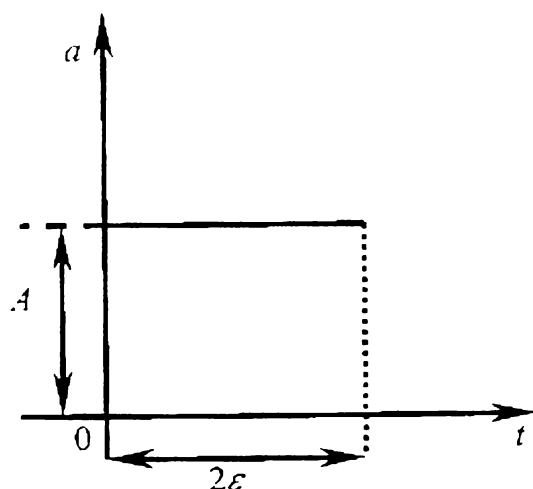


Fig.5.5

$$a'(t) = 0$$

$$a''(t) = 0$$

$$a'''(t) = 0,$$

parametrii inițiali vor fi:

$$a_0 = A$$

$$a'_0 = 0$$

$$a''_0 = 0$$

$$a'''_0 = 0$$

⋮

Deci pe durata acționării impulsului legea de mișcare (29) va fi

$$x(t) = A \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n}.$$

### 5.3.5.3. Impuls triunghiular

În cazul acestui impuls, expresia analitică a impulsului de accelerație este:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{A}{\varepsilon} t & \text{pentru } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ \frac{A}{\varepsilon} (2\varepsilon - t) & \text{pentru } \varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon \\ 0 & \text{pentru } t > 2\varepsilon \end{cases} \quad (40)$$

reprezentarea grafică fiind redată în fig.5.6.

Derivatele expresiei (40) sunt:

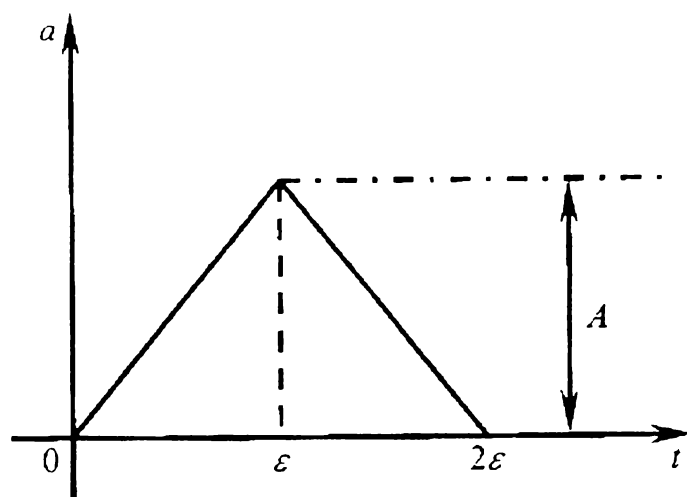


Fig.5.6

$$a'(t) = \frac{A}{\varepsilon} \quad a'_1(t) = \frac{A}{\varepsilon}$$

$$a''(t) = 0 \quad a''_1(t) = 0$$

$$a'''(t) = 0 \quad a'''_1(t) = 0$$

iar parametrii inițiali devin:

$$a_0 = 0 \quad a'_{11} = 2A$$

$$a'_0 = \frac{A}{\varepsilon} \quad a''_{01} = -\frac{A}{\varepsilon}$$

$$a'''_0 = 0 \quad a'''_{01} = 0$$

Deci pe durata acțiunii impulsului triunghiular legea de mișcare (29) va fi:

$$x(t) = \frac{A}{\varepsilon} \frac{\omega_n t - \sin \omega_n t}{\omega_n^2}$$

$$x(t) = 2A \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n} = \frac{A}{\varepsilon} \frac{\omega_n t - \sin \omega_n t}{\omega_n^2}$$

#### 5.3.5.4. Impuls sinusoidal

Dacă este vorba de impuls sinusoidal, expresia analitică a impulsului de accelerație este

$$a(t) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi t}{2\varepsilon} & \text{pentru } 0 \leq t \leq 2\varepsilon \\ 0 & \text{pentru } t > 2\varepsilon \end{cases} \quad (41)$$

graficul fiind cel din fig.5.7.

Derivatele expresiei (41) în intervalul  $[0, 2\varepsilon]$  sunt:

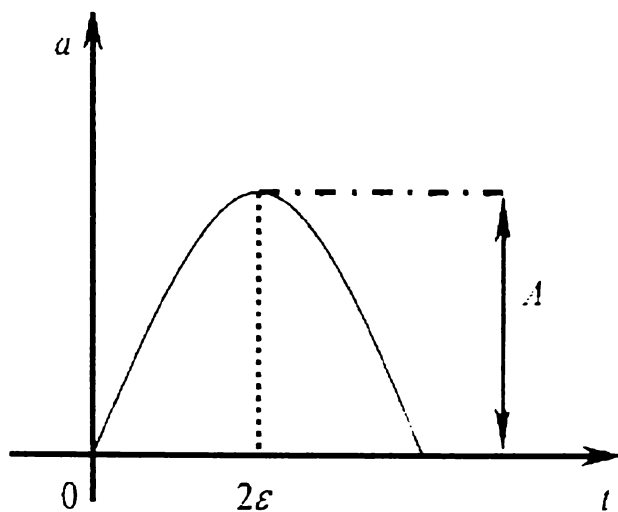


Fig.5.7

$$a'(t) = A \frac{\pi}{2\varepsilon} \cos \frac{\pi t}{2\varepsilon}$$

$$a''(t) = -A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \sin \frac{\pi t}{2\varepsilon}$$

$$a'''(t) = -A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^3 \cos \frac{\pi t}{2\varepsilon}$$

$$a^{iv}(t) = A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^4 \sin \frac{\pi t}{2\varepsilon}$$

$$a^v(t) = A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^5 \cos \frac{\pi t}{2\varepsilon}$$

$$a^{vi}(t) = -A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^6 \sin \frac{\pi t}{2\varepsilon}$$



$$a^{\text{vii}}(t) = -A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^7 \cos \frac{\pi t}{2\varepsilon}$$

$$a^{\text{viii}}(t) = A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^8 \sin \frac{2\pi}{2\varepsilon}$$

parametrii inițiali fiind

$$a_0 = 0$$

$$a'_0 = A \frac{\pi}{2\varepsilon}$$

$$a''_0 = 0$$

$$a'''_0 = A \frac{\pi}{2\varepsilon}$$

$$a^{\text{iv}}_0 = 0$$

$$a^{\text{v}}_0 = -A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^5$$

$$a^{\text{vi}}_0 = 0$$

$$a^{\text{vii}}_0 = -A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^7$$

$$a^{\text{viii}}_0 = 0$$

În consecință, legea de mișcare (29) va fi:

$$\begin{aligned}
x(t) = & A \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{\omega_n t - \sin \omega_n t}{\omega_n} - A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^3 \frac{t^3 \omega_n^3 + 6 \sin \omega_n t - 6t \omega_n}{6\omega_n^4} + \\
& + A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^5 \frac{t^5 \omega_n^5 - 120 \sin \omega_n t - 20t^3 \omega_n^3 - 120t \omega_n}{120\omega_n^6} - \\
& - A \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^7 \frac{t^7 \omega_n^7 + 504 \sin \omega_n t - 42t^5 \omega_n^5 - 840t^3 \omega_n^3 - 5040t \omega_n}{5040\omega_n^8}
\end{aligned}$$

Notăm cu  $\omega_n t = \xi$ , dar în reprezentarea grafică în loc de  $\xi$ , pe abscisă vom nota cu  $x$ . Evident  $t = \frac{\xi}{\omega_n}$ .

De asemenea notăm:

$$y_1 = \omega_n \alpha_0(t)$$

$$y_2 = \omega_n^2 \alpha_1(t)$$

$$y_3 = \omega_n^3 \alpha_2(t)$$

$$y_4 = \omega_n^4 \alpha_3(t)$$

$$y_5 = \omega_n^5 \alpha_4(t)$$

$$y_5 = \omega_n^5 \alpha_4(t)$$

$$y_6 = \omega_n^6 \alpha_5(t)$$

$$y_7 = \omega_n^7 \alpha_6(t)$$

$$y_8 = \omega_n^8 \alpha_7(t)$$

unde

## Capitolul 5

$$y_1 = 1 - \cos(x)$$

$$y_2 = x - \sin(x)$$

$$y_3 = 0,5x^2 + \cos(x) - 1$$

$$y_4 = \frac{1}{6}(x^3 + 6\sin(x) - 6x)$$

$$y_5 = \frac{1}{24}(x^4 - 24\cos(x) - 12x^2 - 24)$$

$$y_6 = \frac{1}{120}(x^5 - 120\sin(x) - 20x^3 - 120x)$$

$$y_7 = \frac{1}{720}(x^6 - 720\cos(x) - 30x^4 - 360x^2 - 720)$$

$$y_8 = \frac{1}{5040}(x^7 - 5040\sin(x) - 42x^5 - 840x^3 - 5040x)$$

Reprezentări grafice pentru cele opt funcții sunt prezentate în Anexa 4.

## CONCLUZII

Dinamica sistemelor vibropercutante reprezintă o parte însemnată și complet nouă a teoriei vibrațiilor. Spre deosebire însă de problemele cunoscute ale vibrațiilor în cazul sistemelor vibropercutante apar discontinuități ale vitezelor datorită ciocnirilor, ceea ce înseamnă că metodele obișnuite de studiu nu mai sunt aplicabile. Prin abordarea unor astfel de probleme se deschid posibilități de dezvoltare și generalizare ale metodelor cunoscute în studiul vibrațiilor.

Cercetările privind vibropercuțiile inițiate de către un colectiv de la Catedra de Mecanică a Universității "Politehnica" din Timișoara stau și la baza dezvoltărilor din cadrul acestei teze. Au fost formulate principiile unor metode speciale de determinare aproximativă a regimurilor de mișcare, pentru sisteme liniare între ciocniri cu unul sau mai multe grade de libertate.

Fiind cunoscute numeroasele aplicații tehnice ale sistemelor vibropercutante, în prezenta lucrare, s-a impus efectuarea unor studii mai aprofundate ale mișcărilor periodice stabile ținând seama de caracterul neliniar și discontinuu al ciocnirilor și nu în ultimul rând de influența numeroșilor parametri specifici ciocnirii.

În teză s-au abordat mișcările periodice și condițiile de stabilitate, pentru cazul obișnuit întâlnit în aplicații industriale al sistemului cu un grad de libertate și o cuplă percutantă. Mișcările periodice ale sistemului vibropercutant s-au determinat prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării între două ciocniri succesive și aplicarea condițiilor de periodicitate, încât pe un interval egal cu perioada, legile mișcării trebuie să se repete și în celelalte intervale. Pentru aceste sisteme vibropercutante s-au stabilit proprietăți speciale, privind curbele separatoare ale domeniilor de existență și stabilitate pe baza unor programe de calcul fundamentate în teză și întocmite prin metode aproximative.

Metoda operațională dezvoltată în teză valorifică și completează rezultatele deja cunoscute cu altele esențiale pentru fundamentarea aplicării calculului operațional în studiul mișcării sistemelor vibropercutante. Deoarece mișcarea sistemului vibropercutant este periodică, metoda prezentată folosește transformata Laplace a legii

*Capitolul VI*

mișcării exprimată cu ajutorul transformatei corespunzătoare luate pentru o singură perioadă.

Inițial se precizează într-o formulare generală proprietăți generale ale transformatelor Laplace pe o perioadă și pe toată durata. Din ecuația diferențială a mișcării se deduc prin integrare transformatele pe o perioadă, iar apoi transformarea completă.

În principiu metoda operațională are la bază determinarea transformatelor Laplace ale legilor mișcării periodice după ce în prealabil s-au calculat pe o singură perioadă. Conform formulei de conversiune și a teoremei reziduurilor se deduc condițiile de existență și legile mișcării periodice dezvoltate în serie de componente armonice. Altfel expresiile analitice ale legilor mișcării periodice, valabile în tot timpul mișcării, care să permită efectuarea analizei armonice a mișcării, se obțin numai prin dezvoltarea soluțiilor obținute în serie Fourier.

Metoda este prezentată sub forma unor exemple care fiecare se referă la situații deosebite din punct de vedere al calculului.

În afară de cazul deja devenit clasic al mișcării cu desprindere a unei mase de pe suport mobil, sunt tratate și alte cazuri ce necesită o serie de completări fundamentate în teză. Astfel, metodologia a fost extinsă la cazul rezonanței și la sisteme cu două cuple percutante.

Deși transformata este specifică sistemelor cu un singur grad de libertate în cadrul tezei s-a dat o extindere și pentru sistemul cu două grade de libertate indicându-se toate etapele necesare studiului. Astfel, urmând aceiași cale, se deschid posibilități de tratare a oricărui sistem prin metoda operațională.

În studiul vibropercuțiilor au fost folosite metode aproximative dintre care aproximarea poligonală se pretează foarte bine la calcule numerice. Trebuie precizat că această metodă constă în liniarizarea pe porțiuni a caracteristicii neliniare considerate. Pornind de la ipoteza admisă ce presupune minimalizarea erorii medii pătratice, în dezvoltările din teză s-au dat nu numai principiile, dar și exemplificări pentru diferite cazuri de caracteristici neliniare.

În cadrul metodei se înlocuiește caracteristica neliniară pe un anumit interval, printr-o linie poligonală care se alege în mod convenabil. Metoda poligonală se aplică nu numai la aproximarea caracteristicii unui sistem neliniar, ci și la aproximarea forței perturbatoare presupusă de formă arbitrară.

Deoarece metoda are un grad ridicat de convergență și precizie, s-a aplicat în studiul mișcării sistemelor vibropercutante pentru a evalua caracteristica neliniară a sistemului datorită ciocnirii.

## CONCLUZII

Principalele rezultate obținute se referă la aproximarea caracteristicii ciocnirii care pe lângă componenta elastică cuprinde și o parte dată de legea deformațiilor locale de contact (Hertz). Se folosește aproximarea biliniară și triliniară pentru care se determină prin metode aproximative parametrii aproximării. În urma integrării ecuațiilor diferențiale ale mișcării pe durata ciocnirii se obțin elemente ce pot fi luate în calculele referitoare la determinarea regimurilor de mișcare vibropercutante.

Toate aspectele abordate referitor la efectele considerării ciocnirii neinstantanee au permis stabilirea pe lângă parametrii mișcării și a altor mărimi ca forța percutantă ce altfel nu s-ar putea obține.

În sfârșit, trebuie subliniat că s-a apelat și la unele experimentări care din punct de vedere calitativ sunt în concordanță cu teoria.

La multe sisteme mecanice apar variații bruște de viteze, dar și de accelerații, care au influență hotărâtoare asupra mișcării. Aceste variații de viteză sau accelerații acționând asupra elementelor elastice din sistem pot să provoace șocuri, modificând regimul normal de mișcare. Eliminarea efectelor produse în regimul normal de mișcare necesită să se cunoască influența variațiilor bruște ale accelerațiilor de diferite ordine asupra sistemelor presupuse elastice.

În teză se determină influența variațiilor bruște ale accelerațiilor de diferite ordine asupra sistemelor elastice în general, considerând salturile de accelerație de formă cunoscută.

Variațiile de accelerații se produc dacă elementului mobil  $i$  se imprimă o anumită mișcare. Dacă acest element este în mișcare rectilinie uniformă, atunci datorită variației accelerației deplasarea și viteza în timpul regimului de accelerare vor suferi salturi ce se pot determina. Deși parametri cinematici se exprimă mai complicat prin funcții speciale, prin aproximarea preconizată se ajunge la determinarea cantitativă a unora dintre ele, încât aplicațiile să se poată finaliza.

Un alt caz apare atunci când acționează inițial brusc viteze și accelerații asupra sistemelor și trebuie stabilite efectele.

Pentru tratarea mai completă a fenomenului de ciocnire atunci când apar variații bruște ale vitezelor și accelerațiilor de diferite ordine într-un interval scurt de timp, în teză se prezintă o nouă metodă de studiu a efectelor produse de acționările cinematice caracterizate prin variații evidente ale parametrilor cinematici. Aceasta a fost denumită metoda parametrilor inițiali, care cu ajutorul funcțiilor de pondere ale accelerațiilor conduce la legile de mișcare.

Pentru diferite forme particulare de impulsuri se determină funcțiile de ponderare care apar și sunt aplicabile în calcule concrete.

*Capitolul VI*

---

În final, trebuie subliniat că întreaga cercetare efectuată a avut ca scop completarea și generalizarea unor rezultate dezvoltate anterior în colectivul din care fac parte, prin fundamentarea unor noi concluzii și în mod special prin adaptarea teoriilor existente la posibilitatea transpunerii lor în programe de calcul necesare aplicațiilor. Metodele aproximative elaborate se referă la determinarea regimurilor vibropercutante periodice ale sistemului cu un grad de libertate și o cuplă percutantă, la realizarea și aplicarea metodei de aproximare poligonală în studiul ciocnirii, precum și la studiul efectelor produse de accelerațiile de ordin superior asupra unor sisteme elastice.

Metoda operațională care a fost pe larg dezvoltată în teză are formulări analitice ce pot fi în continuare generalizate. Mai mult, metodologia precizată va putea fi și ea transpusă în programe de calculator care să permită realizarea directă a analizei spectrale.

## CONTRIBUȚII ORIGINALE

În cadrul lucrării elaborate au fost prezentate preocupările și aspectele esențiale urmărite în direcția cercetărilor legate de studiul sistemelor vibropercutante.

În mod special se vor preciza în continuare principalele contribuții originale:

- Referitor la studiul mișcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă au fost reformulate o serie de rezultate, încât să poată fi transpuse în programe de calculator.
- Condițiile de existență și stabilitate au fost reformulate și completate încât să se obțină direct domeniile de existență și stabilitate ale mișcărilor periodice. Astfel în plus, a fost considerată și condiția ca în tot timpul mișcării să existe verificată legătura unilaterală care ar putea în anumite condiții să conducă la anularea mișcărilor prestabilite.
- Pe baza rezultatelor teoretice obținute s-a realizat un program de calcul care permite determinarea domeniilor de existență și stabilitate ale mișcărilor periodice, precum și întocmirea graficelor corespunzătoare cu evidențierea tuturor parametrilor caracteristici.



*Capitolul VII*

---

- Pe baza programului întocmit au fost obținute și interpretate geometric un mare număr de diagrame, din care s-au putut trage o serie de concluzii privind geometria curbelor ce delimitează domeniile de existență și stabilitate, precum și limitele corespunzătoare legăturii unilaterale.
- Programul denumit UNIT, pentru precizarea domeniilor, conținând circa 500 de instrucțiuni, a fost în mod special formulat și realizat, pentru regimurile vibropercutante, fiind în întregime prezentat în anexă.
- Tinând seama că metoda operațională este pretabilă unor calcule numerice care să conducă la analiza spectrală a mișcărilor vibropercutante, pe lângă completările privind metodologia generală au fost formulate dezvoltări importante privind extinderea ei la un sistem cu două grade de libertate, dar și cu posibilitatea de a fi aplicată la sisteme mai complicate.
- Un aspect aparte puțin abordat în literatura de specialitate se referă la considerarea ciocnirilor ca fiind neinstantanee, motiv pentru care s-a realizat un studiu complet al ciocnirilor ce apar la sistemele vibropercutante.
- Pentru soluționarea problemei de ciocnire s-a apelat la metoda de aproximare poligonală fundamentată anterior, care a fost completată și adaptată încât să poată fi rezolvată problema

mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu o cuplă percutantă.

- Metoda poligonală bazată pe minimalizarea erorii medii pătratice a fost utilizată în cazul unor caracteristici neliniare stabilindu-se toți parametri necesari precizării poligonului de aproximare.
- Presupunând forțe perturbatoare de formă arbitrară s-a fundamentat o metodă aproximativă pentru studiul mișcării sistemului supus unei astfel de forțe.
- În scopul determinării parametrilor ciocnirii s-a întocmit un program bazat pe metoda aproximativă poligonală care a permis determinarea în plus și a variației forței percutante în timpul ciocnirii, precum și a deformației.
- Rezultatele obținute concordă cu cele stabilite experimental pe un model construit și realizat în catedră.
- Într-un capitol special a fost tratată o problemă semănătoare care se referă la efectele accelerațiilor de ordin superior. După cum se știe acestea constituie cauza disconfortului pasagerilor din diferite vehicule ce se deplasează cu accelerații mari.
- Considerând variații ale accelerațiilor de formă dată, analog variației vitezei de ciocnire, se determină la diferite sisteme

*Capitolul VII*

---

mecanice, salturile de viteze și accelerații pentru care se dau o serie de diagrame calculate prin metode de aproximare.

- Deoarece în multe situații inițial acționează variații de viteze și accelerații cunoscute, efectul lor a fost studiat prin elaborarea unei noi metode a parametrilor inițiali aplicabilă oricărui sistem mecanic.
- Pentru cazuri concrete s-a elaborat metodologia bazată pe considerarea parametrilor inițiali și a dezvoltării în serii de funcții speciale
- Exemplificările s-au axat în special pe cazurile de șocuri descrise prin impulsuri de diferite forme, dar cu durata scurtă de acțiune.
- În general contribuțiile originale se referă la completarea și perfecționarea unor rezultate cunoscute în sensul adaptării lor la posibilitățile de implementare pe calculator.
- Fiecare din aspectele tratate, pe lângă dezvoltări teoretice s-au concretizat prin importante contribuții legate de concepția și utilizarea programării pe calculator.

---

**BIBLIOGRAFIE****[A]**

1. ABRAMOV B.M., Kolebania zubciatîh koles, vîzîmaevîe peremennoi jestokostiu zateplenia. Trudî Instituta maşinovedenia, Seminar po teorii maşin i mehanizmov, Tom.XXI, vîp.81-82,p.86-92.
2. ABRAMOV B.M., Issledovanie kolebanii zubciatîh koles, vîzîmaevîh soudarnîh subiev. Izv.AN SSSR, OTN, Mehanika i maşinostroenie, No.2, 1960, p.102-109.
3. ABRAMOV B.M., Kolebania priamozubîh zbciatîh koles, Izd.Harkovskogo Universiteta, Harkov, 1968, p.176.
4. ABRAMOV B.M.,Ob odnom metode otîskania ustoicivogo periodiceskogo dvijenja vibroudarnîh sistem. Trudî mehanizmov i maşin. Harkov, Vîp.13, 1972, p.95-100.
5. AKSENOV P.N., Nekotorîe voprosî teorii maşin liteinogo proizvodstva, Maşghiz, Moskva, 1962, p.232.
6. ALTGAUZEN E.V., GODES I.I., Elektronnaia model udara. Maşinovedenie, No.3, 1966, p.58-61.
7. ANDRONOV A.A., VITT A.A., HAIKIN S.E., Teoria kolebanii, Fizmatghiz, Moskva, 1958, p.915.
8. APPELL P., Traite de Mecanique rationelle, tome I, II, III, Gauthier Villars, Paris, 1919-1923, p.620, 576, 674.
9. ARJANIH I.S., O novîh neravenstvah ustoicivosti. Avtomatika i telemehanika. Tom.XXII, No.4, 1961, p.436-442.
10. ASTASEV V.K., KOBRINSKI A.E., KORENDIASEV A.I., TIVES L.I., Avtokolebania v mehaniceskom usilitele moscinosti. Maşinovedenie, No.5, 1969, p.16-22.
11. ATANASIU M., Mecanica, Edit.Didact.şi Pedag., Bucureşti, 1973, p.536.
- 12.ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Matrici în probleme de repartiţie, Bul.IPTVT, Nr.1,1978.
- 13.ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Quelques caracterisations de la repartition exponentielle (I). Bul.IPTVT, nr.1, 1984, Zbl.Math 626-62017.
- 14.ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., Proprietăţi ale matricilor în probleme de repartiţie (II). Al IV-lea Simp.de cond.şi inform., Cluj. 1977.

15. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Drum minim în medii continue. Lucr.celei de-a IV-a Conf.dr vibrații, Timișoara, 1982.
16. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Fluxuri medii continue. Lucr.celei de a IV-a Conf.de vibrații, Timișoara, 1982.
17. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Legătura dintre momentul unei forțe și croșet. Caietul Lucr.Simpoz.Deva.
18. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Sur l'application du flux optimal dans un system dynamique. Lucrările celei de a V-a conf.vibr.,Timișoara, 1985.
19. ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., Caracterisation de la repartitions exponentielle (II). Simpoz.de Matemat. Și Aplicații, Timișoara, nov.1985.
20. ANGHELESCU V., CHELU P., MARINCA V., The Study of the Rigid Body Motion with Viscoelastic Damping. Lucr.celei de a V-a Conf.de vibrații, Timișoara, 1985.
21. ANGHELESCU V., BLAJ L., CRISTUINEA C., Methodes pour determiner la dependance de la courbe caracteristique du facteur temperature. Bul.Șt.și Tehnic al IPTVT, Tom 34(48), Timișoara, 1981.
22. ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., Techerches sur la programation lineaire stochastic a recours. Simpoz.de Matmat.și Aplic., Timișoara, nov.1985.
23. ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., Etude sur la programation lineaire stochastic. Simpoz.de Matmat.și Aplic., Timișoara, nov.1987.
24. ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., BERETEU L., Application de theorie des graphes aux proces stochastique du type Markov. Univ.tehnic și viitorul în constr.de mașini, Timișoara, 1986.
25. ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., Caracterizări ale programării stochastice cu recurs. Univ.tehnic și viitorul în constr.de mașini, vol.I, Timișoara, 1986.
26. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R.,Problema de atribuire rezolvată matriceal pentru cazul  $(n \times n)$ . Univ.tehnic și viitorul în constr.de mașini, vol.I, Timișoara, 1986.
27. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., O probelmă de minim într-o rețea bipartită. Univ.tehnic și viitorul în constr.de mașini, vol.I, Timișoara, 1986.
28. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Asupra vibrațiilor longitudinale ale unei bare de secțiune variabilă. Circuite mecanizate echivalente. Univ.tehnic și viitorul în constr.de mașini, vol.I, Timișoara, 1986.

- 
29. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Modalites d'approche des problemmes stochastiques d'optimum vectorial (I). Proceedings of the III Sympos.of math.and appl., Timișoara, nov., 1989.
  30. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Modalites d'approche des problemmes stochastiques d'optimum vectorial (II). Proceedings of the III Sympos.of math.and appl., Timișoara, nov., 1989.
  31. ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., Solution optimale dans la programmation stochastique vectorielle. Simpoz.Mat.și aplic., 1991.
  32. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., La determination du coefficient de transmissibilite pour un modele dynamique lineaire. Simpoz.Mat.și aplic., 1993.
  33. ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., Metode de determinare a soluției optime în probleme de programare liniară stochastică. Lucr.sem.mat-fiz., 1993.
  34. ANGHELESCU V., BRÎNDEU L., ROȘCA G., Studiul sistemelor vibropercutante în ipoteza deformațiilor locale de contact. A VII-a Conf.de vibrații. Timișoara.
  35. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., About some methods of the determination solution in stochastic programming. Al VII-lea Simpoz.de mat.și aplic. Timișoara, 1997.
  36. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Efectul accelerațiilor de ordin superior în ciocniri. Al V-lea Simp.Șt.Univ.de manag.turistic și comercial "Dimitrie Cantemir", Timișoara, 2001.
  37. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Criterii de deservire optimală. Ses.șt.a Centr.de Matemat., Timișoara, 1981.
  38. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Asupra proprietăților de grup pe sub formă de arbore. Ses.Univ., Craiova, 1983.
  39. ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., Asupra proceselor Markov și varietăți Riemanniene. Ses.Univ. Craiova, 1983.
  40. ANGHELESCU V., Loturi optimale tehnologice la Intreprinderea "6 Martie" din Timișoara. Simpoz.de Inform.și Conduc., Cluj, 1975.
  41. ANGHELESCU R., ANGHELESCU V., Unele caracterizări ale repartiției exponențiale. Ses.șt.dedic.centenar.V.Alaci, 1984.

**[B]**

1. BABAKOV I.M Teoria kolebanii, GITTL, 1958, p.628.
2. BABIȚKI V.I., KOBRINSKI A.E., Periodiceskie dvijenia dvuhmassovoi kolebatelinoi sistemî s polosti. Teoria mașin i mehanizmov, Vîp.103-104, 1964, p.56-70.
3. BABIȚKI V.I., Rascet vibroudarnîh rejimov maiatnika s inertionnîm podvesom, nahodiașcinsia v Vibriruiușeci polosti. Analiz i sintez mașinoavtomatov. Izd. Nauka, Moskva, 1965, p.20-30

4. BABIȚKI V.I., KOBRINSKI A.E., ROMANOV V.D., Oblasti suscestvovania I ustoicivosti vibroudarnîh rejimov dvuh massovoi kolebatelinoi sistemî v polosti. Teoria mașin i mehanizmov, 105-106, 1965, p.103-111.
5. BABIȚKI V.I., K voprosu o suscestvovanii vîscociastotnîh kolebanii bolșoi amplitdî v lineinîh sistemah s ograniciteliami. Mașinovedenie, No.1, 1966, p.22-26.
6. BABIȚKI V.I., IZRAILOVICI M.I., Ob optimalnîh dvijeniah vibroudarnîh sistem. Mașinovedenie, No.3, 1968, p.43-50.
7. BABIȚKI V.I., DJOHANDZE S.R., KOBRINSKI A.E., KORNDORF S.F., POLUNOV I.L., "Zatiaghivanie" kolebanii v vibroudarnoi sistem. Mașinovedenie, No.6, 1968, p.47-49.
8. BABIȚKI V.I., IZRAILOVICI M.I., Optimalnie kratnie rejimî vibroudarnîh sistem. Mașinovedenie, No.3, 1969, p.3-11.
9. BABIȚKI V.I., Teoria vibroudarnîh sistem, Priblijennîe metodî. Nauka, Moskva, 1978, p.252.
10. BĂLAN B.I., Contribuții la studiul, proiectarea și optimizarea regimurilor de funcționare a sitelor și planelor oscilante de sortare și transport. Teză de doctorat, Inst.Polit.Iași, 1981, p.193.
11. BĂLAN Șt., Elemente de mecanică teoretică, Edit.Didact.și Pedag., București, 1975, p.336.
12. BANAH L.Ia., Nekotorîe iavlenia, vznikaiușcie pri dvijenii vala v podșipnike s zazorom. Mașinovedenie, No.1, 1965, p.70-77.
13. BARKAN D.D., Dinamika osnovanii i fundamentov, Stroivoemmorizdat, Moskva, 1948.
14. BARKAN D.D., Vibrometod v stroitelstve, Gosstroisdat, Moskva, 1959, p.315.
15. BATUEV G.S., GOLUBKOV Iu., EFREMOV A.K., FEDOSOV A.A., Injinernîe metodî issledovania udarnîh protessov, Izd.vtoroe, Mașinostroenie, Moskva, 1977, p.248.
16. BAUTIN N.N., Teoria tocecînîh preobrazovanii i dinamiceskaia teoria ciasov, Trudî mejdunarodnogo simpoziuma kolebaniam, Izd. AN SSSR, Kiev, II, 1963, p.29-54.
17. BECHERESCU Doina, HEGEDUS A., Studiul mișcărilor vibropercutante ale unei particule sub excitație periodică. Studii și Cercetări Matematice, Tom 22, Nr.3, 1970, p.391-402.
18. BECHERESCU Doina, Asupra mișcării cu salturi a unei particule pe o platformă vibrantă acționată de un generator de vibrații. Mișcarea longitudinală. Bul. Șt. și Tehn., al Inst.Polit.Timișoara, Seria Mat.Fiz., Mec., Tom 16(30). fasc.1, 1971, p.95-104.



19. BECHERESCU Doina, Studiul mișcării cu salturi într-un mediu cu frecare vâscoasă a unei particule pe o platformă vibrantă acționată de un generator de vibrații. Studii și Cercetări Matematice, Tom 26, No.10, 1973, p.1461-1471.
20. BECHERESCU Doina, Contribuții privind studiul mișcărilor periodice cu ciocniri la vibrotransport, Teză de doctorat, Universit. București, 1974, p.156.
21. BECHERESCU Doina, Determinarea mișcărilor periodice cu ciocniri plastice ( $R = 0$ ) și contact neinstantaneu ale unei particule pe o platformă vibratoare. Bul. Șt. și Tehn., al Inst. Polit. Timișoara, Seria Mat. Fiz., Mec., Tom 19(33), fasc.1, 1974, p.87-93.
22. BECHERTESCU Doina, Die Untersuchung der periodischen Bewegungen mit plastischel Aufprall eines Platform hervorgerufen werden, wobei die Berührung plotzlich ist. Bul. Șt. și Tehn., al Inst. Polit. Timișoara, Seria Mat. Fiz., Mec., Tom 19(33), fasc.2, 1974, p.187-192.
23. BESPALOVA L.V., NEIMARK Iu.I., FEIGHIN M.I., Dinamiceskie sistemî s udarnîh vzaimodeistviam i teoria nelineinîh kolebanii. Injinerîi jurnal. Mehanika tverdogo tela, No.1, 1966, p.151-159.
24. BESPALOVA L.V., KOZINOVA V.I., METRIKIN V.S., Issledovanie vliania massî I dissipativnîh svoistv grunta na protes vibroprogrujenia. Izv. AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, No.3, 1974, p.70-75.
25. BIHOVSKII I.I., Osnovî teorii vibrationnoi tehniki, Mașinostroenie, Moskva, 1969, p.364.
26. BLEHMAN I.I., DJANELIDZE G.Iu., Vibrationnoe peremeșcenie, Nauka, Moskva, 1964, p.410.
27. BLEHMAN I.I., Sinhronizațiia dinamiceskikh sistem, Nauka, Moskva, 1971, p.804.
28. BLEHMAN I.I., Vibrații v tehnike, Tom II, Kolebania nelineinîh mehaniceskikh sistem. Mașinostroenie, Moskva, 1979, p.352.
29. BOGOLIUBOV N.N., MITROPOLSKI Iu.A., Asimptoticeskie metodî v teorii nelineinîh kolebanii, Nauka, Moskva, 1974, p.504.
30. BOIARINOV V.S., NEIMARK Iu.I., O Kolebanii vala v șarikopodșipnike, Dinamika mașin, Sb.statei, Mașinostroenie, Moskva, 1966, p.343-352.
31. BOLOTIN V.V., Vibrații v tehnike, Tom 1, Kolebania lineinîh sistem, Mașinostroenie, Moskva, 1978, p.352.
32. BRÎNDEU L., Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante, Teză de doctorat, Inst. Polit. "Traian Vuia" Timișoara, 1970, p.204.



- 
33. BRÎNDEU L., Über die Bestimmung des Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen eines Stoschwingers mit einem Freiheitsgrad. Bul. Inst. Polit. Iași, Secția IV, Mecanică tehnică, Tom XVII (XXI), fasc.3-4, 1971, p.43-45.
  34. BRÎNDEU L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale unui sistem cu caracteristica biliniară. Bul.Șt.și Tehnic al Inst.Polit.Timișoara, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 16(30), fasc.1, 1971, p.105-113.
  35. BRÎNDEU L., Metodă directă folosită pentru determinarea condițiilor de stabilitate ale mișcărilor periodice în cazul sistemelor vibropercutante. Bul.Șt.și Tehnic al Inst.Polit.Timișoara, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 17(31), fasc.1, 1972, p.69-74.
  36. BRÎNDEU L., Deplasări dinamice datorită aplicării periodice a unor impulsuri de durată finită, Simpoz.de Mecanisme și Trans.mecan., I, Reșița, 1972, p.237-241.
  37. BRÎNDEU L., Asupra coeficientului dinamic la șoc în sisteme cu frecare. Simpoz.de Mecanisme și Trans.mecan., I, Reșița, 1972, p.232-236.
  38. BRÎNDEU L., Die Stabilität der periodischen Bewegungen allgemeiner Stoschwinger mit einem Freiheitsgrad. Bul. Șt. și Tehn al Inst. Polit. Iași, Secția IV, Mecanică tehnică, Tom XIX(XXIII), fasc.1-2, 1973, p.19-23.
  39. BRÎNDEU L., Mișcarea particulei pe o sită plană acționată cinematic. Studii și Cercetări de Mecanică Agricolă, Vol.VII, No.3, 1973, p.261-271.
  40. BRÎNDEU L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante generale cu un grad de libertate. Bul.Șt.și Tehnic al Inst.Polit.Timișoara, Seria Mat-Fiz-Mec, Tom 18(32), fasc.1, 1973, p.69-74.
  41. BRÎNDEU L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu limitator elastic, având un grad de libertate. Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, Tom 33, Nr.2, 1974, p.257-266.
  42. BRÎNDEU L., Generalizarea noțiunii de legătură unilaterală în studiul sistemelor vibropercutante. Studii și Cercetări Matematice, Tom 26, Nr.4, 1974, p.495-504.
  43. BRÎNDEU L., The Direct Method used for the determination of stability condition of periodical movements in the case of shock vibration systems. Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliques, Tom XIX, Nr.6, 1974, p.725-730.
  44. BRÎNDEU L., Methode directe employée pour déterminer les conditions du système vibropercutant. Bul. Șt.și Tehnic al Inst. Polit. Timișoara, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 19(33), fasc.1, 1974, p.73-80.

- 
45. BRÎNDEU L., Die Verwendung der Operatorenrechnung beim Studium der periodischen Bewegungen der Stossschwinger mit einem Freiheitsgrad und einem Stosspaar. *Bul. Șt. și Tehnic al Inst. Polit. Timișoara, Seria Mat-Fiz-Mec.*, Tom 19(33), fasc.2, 1974, p.177-181.
  46. BRÎNDEU L., Metodă directă folosită pentru determinarea condițiilor de stabilitate vibropercutante. *Bul.Univ. Brașov, Seria A/1, Mec.Apl., Constr.de Mașini*, Vol XVI, 1974, p.105-113.
  47. BRÎNDEU L., Determinarea mișcărilor periodice vibropercutante ale unei mase libere pe o platformă vibrantă, *Sesiunea de com.științif.*, 1971, *Instit.de Petrol și Gaze, Ploiești*, 1974, p.137-151.
  48. BRÎNDEU L., *Mecanică-Dinamică*, *Inst.Polit."Traian Vuia"* Timișoara, 1975, p.223.
  49. BRÎNDEU L., Die Anwendung der Laplacetransformation beim Studium der periodischen Bewegungen von Stossschwingern. *Strojnický Casopis*, 27, 3, 1976, p.306-311.
  50. BRÎNDEU L., Studiul vibrațiilor unui sistem cu excitație discontinuă, *Noutăți în mecanica aplicată și în Construcția de mașini*, Univ.Brașov, XVIII A, 1976, p.17-22.
  51. BRÎNDEU L., Mișcări periodice ale unui sistem liniar. *Simpoz.de Mecanisme și Transm.Mec.*, 2, Reșița, 1976, p.448-453.
  52. BRÎNDEU L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două cuple percutante, *Simpoz.de Mecanisme și Transm., Mec.*, 2, Reșița, 1976, p.454-459.
  53. BRÎNDEU L., Considerații privind studiul mișcării mecanismelor vibropercutante. *Lucrări științifice, Seria A, Inst. de Învățăm. Superior, Oradea*, 1976-1977, p.29-32.
  54. BRÎNDEU L., Determinarea pe cale operațională a mișcărilor vibropercutante periodice. *Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată*, Tom 35, Nr.4, 1976, p.539-545.
  55. BRÎNDEU L., Stability of the periodic motions of the vibro-impact systems, *Chaos Solitons and Fractals* 11 (200), pg.2493-2503.
  56. BRÎNDEU L., BECHERESCU Doina, *Issledovanie periodiceskih dvijenii vibroudanih sistem*, *Proc.of the XI<sup>th</sup> Conference Dynamics of Machines*, Prague-Libice, Czechoslovakia, Sept., 1977, p.55-60.
  57. BRÎNDEU L., Studiul stabilității mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate. *Second IFTOMM Internat.Sympos.on Linkages and Computer Aided Design Methods - SYROM'77, II I*, Bucharest, România, June, 16-21, 1977, p.103-111.
  58. BRÎNDEU L., *Mecanica-Cinematică*, *Inst.Politehnic "Traian Vuia"* Timișoara, 1977, p.166.

- 
59. BRÎNDEU L., Studiu experimental al mișcării sistemului vibropercutant cu un grad de libertate. Lucr.cele de a II-a conf.de vibr.în constr.de mașini, Timișoara, 24-25 nov.1978, p.377-385.
  60. BRÎNDEU L., Vibrații - Mecanica analitică, Vibrații mecanice. Litogr..Inst.Polit."Traian Vuia" Timișoara, 1979, p.237.
  61. BRÎNDEU L., Considerații privind regimurile de funcționare a mașinilor vibropercutante. Bul.Tehn - Științ., Comisia Inginerilor și Tehnic.Brașov, III-1, Mecanica Aplicată, 1979, p.58-62.
  62. BRÎNDEU L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale sistemelor cu caracteristica definită pe porțiuni. A IV-a Conf.de Vibr.în Constr.de Mașini, II, Timișoara, 26-27 nov.1982, p.35-40; 4<sup>th</sup> Conf.on Vibrat.in Mechan.Eng., Timișoara, Nov.1982, p.1-6.
  63. BRÎNDEU L., Über die Bestimmung der Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen eines Stoschwingers mit einem Freiheitsgrad. Bul.Inst.Polit.Iași, Sect.IV, Mecanică tehnică XVII 1971, 3-4; 43-5.
  64. BRÎNDEU L., The direct method used for the determination of stability condition of periodic motions in the case of shock vibration systems. Rev.Roum.Math.Pure et.Appl.XIX Bucharest 1974,6:725-9.
  65. BRÎNDEU L., Methode Directe employée pour Determiner les Conditions de Stabilité des Mouvements Periodiques du Systeme Vibropercutant. BulȘt.și Tehn.al Inst.Polit.Timișoara, seria Mat-Fiz-mec, 1/1974;19 (33); 73-80.
  66. BRÎNDEU L., Studiul stabilității mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate. Study of the Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods-SYROM 77, Bucharest, 1977, p.103-12.
  67. BRÎNDEU L., The stability of the periodic motions of the shock-vibration systems, Rev.Roum.Sci.Techn-Mec.Appl.Bucharest, 1985: 5; 497-501.
  68. BRÎNDEU L., ANGHELESCU V., Vibrații produse de acționarea cinematică impulsivă, Oradea, 1994.
  69. BRÎNDEU L., ANGHELESCU V., ROȘCA G., Studiul sistemelor vibropercutante în ipoteza deformațiilor locale de contact. A VII-a Conf.de vibrații, Timișoara.
  70. BRÎNDEU L., ANGHELESCU V., Operational method in the study of vibroshock systems. SISOM'95, Nov.22-23, 1995, București.
  71. BRÎNDEU L., ANGHELESCU V., Utilizarea metodei operaționale în studiul mișcărilor vibropercutante periodice ale unui sistem având două grade de libertate. A VIII-a Conf.de vibr.mecanice, Timișoara, 1996.

72. BRÎNDEU L., ANGHELESCU V., Study of the Periodic Vibroimpact Motions of a System with Two Degree of Freedom, using the operational method. *Bul.Șt. al Polit.*, Tom 41(55) 1996, pg.1-8.
73. BRUNȘTEIN R.E., KOBRINSKI A.E., K issledovanie dinamiki I ustoicivosti vibroudarnîh sistem. *Trudî Instituta Mașinovedenia, Seminar po Teorii mașin i mehanizmov*, Tom XXI, 83-84, p.46-54.
74. BRUNȘTEIN R.E., Perehodnie i ustanovivșicisia dvijenia dvuhmassovîh vibroudarnîh sistem. *Analiz i sintez mașin avtomatov*. Nauka, Moskva, 1965, p.38-48.
75. BRUNȘTEIN R.E., KOBRINSKI A.E., TIVES I.I., Stabilizatia dvijeni ciasțiți vnutri vibroruinscei polosti. *Izv.AN SSSR, Mehanika tverdogo tela*, No.5, 1971, p.57-60.
76. BRUSIN V.A., Die Anwendung der Laplacetransformation beim Studium der periodischen Bewegungen von Stossschwingern *Avtomatika și telemehanika*, No.2, 1967, p.25-34.
77. BUTENIN H.V., Elementî teorii nelineinîh kolebanii, *Sudpromghiz*, Leningrad, 1962, p.196.
78. BUZDUGAN Gh., FETCU Lucia, RADEȘ M., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Edit.Acad.RSR, București, 1975, p.372.
79. BUZDUGAN Gh., FETCU Lucia, RADEȘ M., *Vibrații mecanice*, Edit.Didact.și Pedag., București, 1979, p.340.
80. BUZDUGAN Gh., MIHĂILESCU E., RADEȘ M., *Măsurarea vibrațiilor*, Edit.Acad.RSR, București, 1979, p.275.
81. BRÎNDEU L., DRĂGULESCU D., ANGHELESCU V., ANGHELESCU R., *Determinarea deformației elasto-plastice maxime sub acțiunea vibrațiilor*. A VI-a Conf.Vibr.mec., Timișoara, 1988.

### [C]

1. CĂLUGĂREANU Gh., *Elemente de teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, Edit.Didact.și Pedag., București, 1963, p.215.
2. CONSTANTINESCU I., BOLOG C., *Mecanica*. Edit.Didact., și Pedag., București, 1978, p.376.
3. CRISTESCU R., *Elemente de analiză funcțională și introducere în teoria distribuțiilor*, Edit.Tehnică, București, 1966, p.223.
4. CRISTESCU R., MARINESCU Gh., *Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor*, Edit.Acad.RSR, București, 1966, p.198.
5. CRISTICI B., (coord), *Matematici speciale*, Edit.Didact.și Pedag., București, 1981, p.520.

### [D]

1. DARABONT Al., VĂITEANU D., *Combaterea poluării sonore și a vibrațiilor*, Edit.Tehnică, București, 1975, p.464.

2. DENISOV G.G., NEIMARK I.I., SANDALOV V.M., TVETKOV I.V., Ob obkate rotora po jestokomu podşipniku. *Mehanika tverdogo tela*, No.6, 1973, p.4-13.
3. DIETRICH H., Untersuchungen über einem unzeitig arbeitenden Stoss-Schwingungsdampfer. *Ingenieur Archiv*, Bd.XXXV, Heft 3, 1966, p.150-171.
4. DIMENTBERG F.M., KOLESNIKOV K.S., *Vibrații v tehnikе, vol.3, Kolebania maşin, konstrukții i ih elementov*, Maşinostroenie, Moskva, 1980, p.544.
5. DIMENTBERG M.F., *Nelineinîe stohasticeskie zadaci mehaniceskih kolebanii*, Nauka, Moskva, 1980, p.368.
6. DUNAEV P.A., *Pnevmaticeskie molotî*, Maşghiz, Moskva, 1959, p.192.

**[E]**

1. EGGLE D.M., An Investigation of an Impact Vibration Absorber. *Trans.of the ASME. Journal of Engineering for Industry, Special Vibration Issue, Series B, Vol.89, No.4, 1967, p.653-661.*
2. ERSOVA V.V., *Impulsnîe funkții, Funkții kompleksnoi peremennoi, Operationnoe usciaslenie*, Vişşiaia şkola, Minsk, 1976, p.255.

**[F]**

1. FEIGHIN M.I., *O vnujdenîh kolebaniah dvuh mass, socilennîh s zazorom*. *Izv. AN SSSR, OTN, Mehanika i maşinostroenie*, No.5, 1960. P.122-130.
2. FEIGHIN M.I., *Nekotorîe voprosî teorii nelineinîh dempferov*, Maşghiz, Moskva, 1963, p.235-247.
3. FEIGHIN M.I., *O nekotorîh zakonomernostiah povedenia dinamiceskih sistem s udarnîmi vzalmodeisviami*. *Mehanika maşin*, Moskva, Vîp 17-18, 1969, p.153-159.
4. FU C.C., *Dynamic Stability of an Impact System Connected with Rock Drilling*. *Trans.of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E, Vol.36, No.4, 1969. p.743-749.*

**[G]**

1. GABOŞ Z., MANGERON D., STAN I., *Fundamentele mecanicii*. Edit.Acad.RSR, Bucureşti, 1962, p.388.
2. GAILIŞ G.E., *Issledovanie ustoicivosti dvijenja odnomassovoi vibroudarnoi sistemî s pulsiruiuşcei vozmuşciaiuşcei siloi*. *Voprosî dinamiki i procinosti, Sb.statei, Vîp.XII, Riga, 1966, p.110-121.*
3. GANTMAHER F.R., *Teoria matritî*. Nauka, Moskva, 1967, p.492.
4. GHELFAND I.M., SILOV G.E., *Obobşcenie funkții, I-IV*, Fizmatghiz, Moskva, 1958-1961.



5. GHELFAND A.O., Calculul cu diferențe finite (trad.din lb.rusă), Edit.Tehnică, București, 1956, p.470.
6. GOLDENBLAT I.I., NIKOLAENKO N.A., Rascet construcției na deistvie seismiceskih I impulsivnih sil, Gosstroizdat, Moskva, 1961, p.320.
7. GOLDFARD L.S., O nekotarih nelineinostiah v sistemah regulirovania. Avtomatika i telemekhanika , Tom VII, No.5, 1947, p.349-383.
8. GOLDSMITH W., Impact, The theory an physical behaviour of colliding solids, Edward Arnold, London, 1960, p.379.
9. GOLOVACEV A.S., PCELIN I.K., CERNEAEV V.I., Issledovania vibroudarnogo pogrujenia konstrukții v grunt, Transjelorizdat, Moskva, 1960, p.133.
10. GONCEAREVICI I.F., SERGEEV P.A., Vibrationnoe mașinî v stroitelstve, Gosstroizdat, Moskva, 1963, p.312.
11. GROȘANU I., Contribuții privind studiul mișcărilor staționare ale sistemelor mecanice, excitate inerțial, acționate cu motoare electrice. Teză de doctorat. Inst.Polit."Traian Vuia" Timișoara, 1970, p.242.

## [H]

1. HALANAY A., Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, Edit.Tehnică, București, 1956, p.284.
2. HALANAY A., Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. Edit.Acad.RSR, București, 1963, p.483.
3. HALANAY A., WEXLER D., Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri. Edit.Acad.RSR, București, 1968, p.313.
4. HAMBURGER L., BUZDUGAN Gh., Teoria vibrațiilor și aplicațiile ei în construcția mașinilor. Edit.Tehnică, București, 1958, p.507.
5. HARRIS C.M., CREDE Gh.E., Shock and Vibration Handbook, vol.I, II, III, McGraw-Hill, New York, London, 1961.
6. HARTOG DEN J.P., Mechanical Vibrations. Fourts Edition, McGraw-Hill, New York, London, 1956, p.436.
7. HAYASHI C., UEDA V., KAWAKANI H., Solution of Duffing's equation using mapping concepts. Fourth Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, sept.,1959.
8. HEGEDUS A., Contribuții privind studiul mișcărilor vibropercutante optime în sisteme mecanice și electromecanice. Teză de doctorat, Inst.Polit., "Traian Vuia" Timișoara, 1971, p.144.
9. HEGEDUS A., PETERKA F., Motion of elastically mounted mass impacting on a fixed stop under rectangular excitation. Acta Technica CSAV, No.6, Prague. Academia, 1973, pp.650-672.

**[I]**

1. IAMSCIKOVA M.N., Periodiceskie dvijenia vibroudarnoi sistemî pri razlicinih koefiintentah vosstanovlenia. Teoria mašin i mehanizmov, Vîp.105-106, 1965, p.50-61.
2. ILINSKII V.S., Voprosî izolații vibrații i udarov. Sovietscoe Radio, Moskva, 1960, p.160.
3. IORIS Iu.I., Vibrometria. Izometrie vibrații i udarov. Obșciaia teoria, metodî i proborî, Mașghiz, Moskva, 1963, p.772.

**[J]**

1. JAEGER J.C., NEWSTEAD G.H., Introducere în teoria transformării Laplace cu aplicații în tehnica (trad.din lb.engleză), Edit.Tehnică, București, 1971, p.204.

**[K]**

1. KAUDERER H., Nichtlineare Mechanik, Springer, Berlin-Gottingen - Heidelberg, 1958, p.684.
2. KECS W., TEODORESCU P.P., Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică, Edit.Acad.RSR, București, 1970, p.438.
3. KLIMOVICI V.U., O vosstanovlenii kasatelnogo impulsiia prin udare bez skolijenia. Izv.AN SSSR, OTN, Mehanika i mașinostroenie, No.2, 1962, p.125-127.
4. KOBRINSKI A.A., Dinamika odnomernih sistem șarikov, dvijuscihsia s periodicesimi soudareniami. Izv.AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, No.5, 1968, p.36-43.
5. KOBRINSKI A.E., Dinamiceskie nagruzki v kulacikovih mehanizmah s uprugimi tokatelem. Trudî Seminara po teorii mašin i mehanizmov, VI, Vîp.24, 1949, p.27-46.
6. KOBRINSKI A.E., nekotore voprosî dinamiki mehanizmov s uprugimi sviazimi, I - III. Trudî Seminara po teorii mašin i mehanizmov, Tom I, Vîp 48, 1952, p.23-85; Tom II, Vîp 52, 1953, p.49-89; Tom III, Vîp61, 1956, p.23-51.
7. KOBRINSKI A.E., Vestnik mașinostroenia, XXXIV, 9, 1954, p.41-44.
8. KOBRINSKI A.E., Kolebania dvuhmassovoi sistemî, dvijuiuscisia s periodiceskimi soudarneniami. Izv.AN SSSR, OTN, No 5, 1956, p.113-121.
9. KOBRINSKI A.E., SLIAHTIN A.M., IAMȘCIKOVA M.N., Kolebania nelineinoi sistemî pod deistviem periodiceskih impulsov. Trudî Instituta Mașinovedenia, Seminar po teorii mašin i mehanizmov, Tom XX, Vîp 79, 1960, p.27-43.
10. KOBRINSKI A.E., Mehanizmî s uprugimi sviaziami, Nauka, Moskva, 1964, p.390.

11. KOBINSKI A.E., Nekotorie zadaci teorii vibroudarnih sistem, Sovrem.probl.teorii mašin i mehanizmov, Nauka, Moskva, 1965, p.223-233.
12. KOBINSKI A.E., STEPANENKO Iu.A., Periodiceskie dvijenie v slediașcem ghidroprivode s zazoro v obratnoi sviazi, Ghidroavtomatika, Nauka, Moskva, 1965. P.64-68.
13. KOBINSKI A.E., STEPANENKO Iu.A., K dinamike nelineinogo elementa tipa "Vilka", Dinamika mašin, Sb.statei, Mașinostroenie, Moskva, 1966, p.167-174.
14. KOBINSKI A.E., KOBINSKI A.A., Vibroudarnie sistemî, Nauka, Moskva, 1973, p.592.
15. KONTOROVICI M.I., Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice (trad.din lb.rusă), Edit.Energetică de Stat, București, 1955, p.216.
16. KOWALCZYK B., Zeszyty naukowe Politechniki Gdanskiei, Mehanika, IX, 112, 1967, p.1-27.
17. KULIMAN E.G., SLIAHTIN A.V., Periodiceskie dvijenja vibroudarnoi sistemî s dvouhtaktnim dvigatelem vnutrennogo sgorania. Trudî Instituta Mașinovedenia, Seminar po teorii mašin i mehanizmov, Tom XXII, Vîp 867, 1961, p.62-68.

**[L]**

1. LAVENDEL E.E., Sintez optimalnih vibromašin, Izd.Zinatne, Riga, 1970, p.252.
2. LAVENDEL E.E., Vibrații v tehnike, Tom 4 Vibraționnîe proțesî i mašin, Mașinostroenie, Moskva, 1981, p.510.
3. LETOSNEV M.N., Mășini agricole, Teorie, calcul, proiectare, încercare, Edit.a III-a (trad.din lb.rusă). Ed.Agro-Silvică de Stat, București, 1959, p.884.
4. LOIȚIANSKI L.G., LURIE A.I., Kurs teoreticeskoi mehanike, T.1, 2, Nauka, Moskva, 1983, p.352, 840.
5. LUKOMSKI S.I., K rascetu simetricinîh sistem s udarnim vziamodeistviem. Izv.AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, No.3, 1972, p.21-23.
6. LURIE A.I., Operationnoe iscislennie i ego prilojenia k zadaciem mehaniki, Gostehizdat, Moskva-Leningrad, 1950, p.431.

**[M]**

1. MAEZAWA S., ISHIHARA H., TAKAGI Y., Nonlinear Vibrations Problems-Zagagnienia Drgan Nieliniowych, 13, 1972, p.21-34.
2. MAEZAWA S., WATANBE T., Steady Impact Vibrations in mechanical systems with broken-line collision characteristics. Nonlinear Vibr.Prob. 1973; 14; 473-500.



3. MANGERON D., Metod integralniñh uravnenii v nelineinoi mehanike. Trudî mejdunarodnogo simpoziuma po nelineinîm kolebaniam, T, 1, Izd.AN SSSR, Kiev, 1963, p.347-350.
4. MANGERON D., IRIMICIUC N., Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie, Vol.III, Edit.Tehnică, București, 1981, p.550.
5. MANGERON D., SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Metod mnogougolinogo priblijenia v issledovanii sistem s nelineinîmi harakteristikami. Bul.Inst.Politehn.Iași (serie nouă), Tom XII(XVI), fasc.1-2, 1966, p.89-95.
6. MANGERON D., SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., HEGEDUS A., ENĂCHESCU C., Dinamica sistemelor vibropercutante. I. Problema în care ciocnirea nu se consideră instantanee. Bul.Inst.Politehn.Iași (serie nouă), Tom XII(XV), fasc.3-4, 1966, p.297-305.
7. MASRI S., CAUGHEY S.L., On the stability of the impact damper. Trans ASME J Appl.Mech.Series E 3/1966; 33; 586-92.
8. MINORSKI N., Nonlinear Oscillations, Van Nostrand, New York, London, 1962, p.714.
9. MOSKVITIN A.I., Elektriceskie mașinî vozvratno-postupateli dvijenia (Elektriceskie molotki, vibratorî, bîstrohodnîi elektromagnetnîi privod). Izd.Akad.Nauk SSSR, Moskva-Leningrad, 1950, p.1490.

## [N]

1. NAGAEV R.F., NAHAMKIN L.A., O kvaziplasticeskom udare. Izv.AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, No.1, 1969, p.91-98.
2. NAGAEV R.F., Obșciaia zadacia o kvaziplasticeskom udare. Izv.AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, No.3, 1971, p.94-103.
3. NAGAEV R.F., IAKIMOVA K.S., Ob udarnom vzaimodeistvii dvuhmassovoi uprugoi sistemî s nepodvijnoi ploskostiu. Izv.AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, No.6, 1971, p.14-24.
4. NAGAEV R.F., IAKIMOVA K.S., Ob udarnom vzaimodeistvii absolutno tverdogo tela s dvuhmassovoi uprugoi sistemoi. Izv.AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, No.1, 1973, p.38-40.
5. NAGAEV R.F., Periodiceskie rejimî vibraționnogo peremeșcenia, Nauka, Moskva, 1978, p.160.
6. NEIMARK Iu.I., Teoria vibrationnogo pogrujenia i vibrovîderghivania. Injinerñi sbornik, Tom XVI, 1953, p.13-48.
7. NEIMARK Iu.I., Metod toceciniñh otobrajenii v teorii nelineinîm kolebanii, Trudî mejdunarodnogo simpoziuma po nelineinîm kolebaniam, II, Izv. AN SSSR, Kiev, 1963, p.268-307.
8. NEIMARK Iu.I., Metod toceciniñh otobrajenii v teorii nelineinîm kolebanii, Nauka, Moskva, 1972, p.472.

9. NICOLAU, Ed.ș.a., Introducere în cibernetică sistemelor continue, Edit.Tehnică, București, 1972, p.328.

**[O]**

1. OSTAPENKO V.A., Mehaniceskie vibroudarnîe sistemî, Naukova Dumka, Kiev, 1966, p.244.

**[P]**

1. PAGET A.Z., Vibration of System Turbine Bukels and Damping by Impact, Engineering, 3714, 19.III.1937, p.30-37.
2. PANOVKO Ia.G., GUBANOVA I.L., Ustoicivosti i kolebania uprugih sistem, Nauka, Moskva, 1967, p.420.
3. PANOVKO Ia.G., Vedenie v teorii mehaniceskogo udara, Nauka, Moskva, 1977, p.232.
4. PARK W.H., Mass-Spring-Damper Response to Repetitive Impact. Trans.of the ASME, Journal of Engineering for Industry. Special Vibration Issue, Series B, Tom 89, No.4, 1967, p.587-596.
5. PĂUNESCU M., Folosirea vibrațiilor la executarea unor lucrări de fundații. Edit.Tehnică, București, 1966, p.303.
6. PATER A.D.De., The Vibrations of Nonlinear Mechanical Systems with Rigid Stops, Trudî Mejdunarodnogo Simpoziuma po Nelineinîm Kolebaniam, II, Izd.AN SSSR, Kiev, 1963, p.325-346.
7. PETERKA F., Bifurcation and transition phenomena in an impact oscillator. Chaos, Solitons&Fractals 1996,(10), 1635-47.
8. PETERKA F., Analysis of the periodic motion of impact dampers. Rev. Roum. Sci.Tech.Mec.Appl. Tom 16, No.4, 1971, p.875-886.
9. PETERKA F., Uvod do kmitani mechanických soustav v unitrnnimi razy. Acad.Opraha, 1981, p.272.
- 10.PETERKA F., Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften, der DDR, Abteilung Mathematik-Naturwissenschaften-Technik, 6, 1977, p.233-144.
- 11.PETERKA F., HEGEDUS A., Sravnenie svoistv dvijenja vibroudarnika pri priamougolnom i garmoniceskom vozbuđeniah. Proc. of the VIII<sup>th</sup> Conference Dynamics of Machines, Praha, Liblice, Sept.1973, p.353-362.
- 12.PODCIUFAROV B.M., Dinamika ťikliceskoi avtomatiki s malîm vremenom ťikla. Izv.Vișș.ucebn.zavedenii, Mașinostroenie, No.12, 1961, p.151-161.
- 13.PODLOZNII E.D., O vibroudarnom rejime vznikaiușcem v svaiahobocikah pri pogruženii v slkalinie i poluskalinîe gruntî odnociastotnîm vibratorom. Dinamika i procinosti mașin. Izd. Hark.Univ., Harkov, No.3, 1965, p.130-134.

14. PLOTNIKOV A.M., K voprosî dinamiceskogo issledovania mehaniceskih sistem şatikovîmi predohranitel'nîm muftami. Dinamika maşin, Sb.statei, Maşinostroenie, Moskva, 1969, p.277-285.
15. PONOMAREV N.W., FEODOSIEV V.E., Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini, Vol.III, Edit.Tehnică, Bucureşti, 1964, p.1220.

**[R]**

1. RĂDOI M., DECIU E., VOICULESCU D., Elemente de vibraţii mecanice, Edit.Tehnică, Bucureşti, 1973, p.428.
2. RĂDOI M., DECIU E., Mecanica, Ed.II-a, Edit.Didact.şi Pedag., Bucureşti, 1981, p.679.
3. RANISZEWSKI J., Model tests of vibration-impact system. Proceedings of Vibration Problems, Warsaw, Vîp.3, (13), 1962, p.273-284.
4. RIPIANU A., Mişcările vibratorii ale arborilor dreپti şi cotiți, Edit.Acad.RSR, Bucureşti, 1969, p.484.
5. RIPIANU A., Mecanica solidului rigid. Edit.Tehnică, Bucureşti, 1973, p.432.
6. ROCARD Y., Dynamique generale des vibrations, Paris, 1949, p.281.
7. ROZENVASSER V.N., Kolebania nelineinîh sistem, Metod integralnîh utavnenii, Nauka, Moskva, 1969, p.576.
8. ROUTH E.J., Die Dynamik der Systeme starrer Korper, Band I, II, Teubner, Verlag, Leipzig, 1898, p.472, 544.

**[S]**

1. SAMOILENKO A.M., PERESTIUK N.A., Nelineinîe kolebania i ustoicivosti dvijenia, Izd.Inst.mat. AN SSSR, Kiev, 1973, p.273-282.
2. SAVINOV O.A., LUSKIN I.A., Vibraşinîi metod pogrujenia svai i ego primenenia v stroitelstve, Gosstroizdat, Leningrad, 1960, p.249.
3. SCHWARTZ L., Theorie des distributions, I-II, Herman, Paris, 1950-1951.
4. SENATOR M., Vibratory Penetration of solids. Trans.of the ASME, Journal of Engineering for Industry, Special Vibration, Issue, Series B, Vol.89, No 4, 1967, p.759-765.
5. SILAŞ Gh., BRÎNDEU L., Sisteme vibropercutante, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.
6. SILAŞ Gh., RĂDOI M., GROŞANU I., BRÎNDEU L., Pozişiiile centrului de percuşie a unei plăci plane. Bul.Şt.şi Tehnic, Inst.Polit.Timişoara (serie nouă), Tom 4(18), 1959, p.197-201.
7. SILAŞ Gh., RĂDOI M., GROŞANU I., BRÎNDEU L., Asupra integrării ecuaşiiilor mişcării punctului material. Bul.Şt.şi Tehn. (serie nouă), Tom 5(19). fasc.1-2, 1960, p.293-297.

8. SILAȘ Gh., RĂDOI M., GROȘANU I., BRÎNDEU L., Axa percuției aplicată unui corp cu punct fix. *Bul.Șt.și Tehn. (serie nouă)*, Tom 6(20), fasc.1, 1961, p.27-31.
9. SILAȘ Gh., RĂDOI M., GROȘANU I., BRÎNDEU L., Pozițiile centrului de percuție a unui corp în mișcare de rotație. *Bul.Șt.și Tehn. (serie nouă)*, Tom 6(20), fasc.1, 1961, p.19-25.
10. SILAȘ Gh., PĂUNESCU M., GROȘANU I., BRÎNDEU L., Contribuții la studiul și proiectarea mașinilor vibropercutante folosite la înfigerea poloților. *Bul.Șt.și Tehnic (serie nouă)*, Tom 7(21), fasc.2, 1962, p.413-429.
11. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., GROȘANU I., Sisteme de percuții aplicate corpurilor rigide în rotație. *Bul. Șt.și Tehnic (serie nouă)*, Tom 9(23), fasc.1, 1964, p.9-16.
12. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., KLEPP H., Percuții aplicate corpului rigid liber. *Bul. Șt.și Tehnic (serie nouă)*, Tom 9(23), fasc.2, 1964, p.331-340.
13. SILAȘ Gh., PĂUNESCU M., GROȘANU I., BRÎNDEU L., GLIGOR Tr., Vibropercutor pentru înfigerea elementelor în pământ. *Bul. Șt.și Tehnic (serie nouă)*, Tom 9(23), fasc.2, 1964, p.321-329.
14. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., KLEPP H., Percuții aplicate unui lanț. *Bul. Șt.și Tehnic (serie nouă)*, Tom 10(24), fasc.1, 1965, p.363-372.
15. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Regimurile periodice staționare ale mecanismelor vibropercutante cu amortizare vâscoasă având un grad de libertate. *Bul. Șt.și Tehnic (serie nouă)*, Tom 11(25), fasc.1, 1966, p.53-58.
16. SILAȘ Gh., HEGEDUS A., Studiul mișcărilor periodice ale unui mecanism vibropercutant cu un grad de libertate. *Bul. Șt. Și Tehnic (serie nouă)*, Tom 11(25), fasc.2, 1966, p.403-411.
17. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., HEGEDUS A., Mișcări periodice cu ciocniri ale vibratorului liber. *Bul. Șt. Și Tehnic (serie nouă)*, Tom 12(26), fasc.1, 1967, p.27-35.
18. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., HEGEDUS A., Determinarea coeficientului de restituire la ciocnire pe bază deformațiilor locale. *Bul. Șt. Și Tehnic (serie nouă)*, Tom 12(26), fasc.2, 1967, p.369-377.
19. SILAȘ Gh., MANGERON D., BRÎNDEU L., HEGEDUS A., Über die stationäre Bewegung eines Schlagschwingsystems, vonn der Zusammenstoss nicht als momentan betrachtet wird. *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec.Apl.*, Tom 12, No.2, 1967, p.417-429; *St.Cerc.Mec.Apl.*, Tom 24, No.2, 1967, p.335-346.
20. SILAȘ Gh., RĂDOI M., BRÎNDEU L., KLEPP H., HEGEDUS A., Culegere de probleme de vibrații mecanice. Vol.I, Sisteme liniare cu

- un număr finit de grade de libertate, Edit.Tehnică, București, 1967, p.382.
- 21.SILAȘ Gh., Mecanică. Vibrații mecanice. Edit.Didact.și Pedag., București, 1968, p.268.
  - 22.SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen. VDI Berichte, No.135, Frühjahr, 1969, p.27-35.
  - 23.SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate, în cazul ciocnirilor elastice instantanee. Bul. Șt.și Tehnic Inst.Polit. Timișoara (serie nouă), Tom 14(28), fasc.1, 1969, p.59-66.
  - 24.SILAȘ Gh., HEGEDUS A., BECHERESCU Doina, Mișcările vibropercutante ale particulei materiale excitate de o platformă mobilă. Bul.Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 15(29), fasc.1, 1970, p.77-87.
  - 25.SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., HEGEDUS A., Studiul mișcărilor vibropercutante ale unei mase libere cu excitație periodică. St.și Cerc.de Mec.Apl., Tom 29, Nr.5, 1970, p.1027-1035.
  - 26.SILAȘ Gh., HEGEDUS A., Beitrag zum Studium der periodischen Bewegungen eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad und zwei Stosspaare, Dynamika Strojov, Zbornik referatov VI konferencie o dynamike strojov, Bratislava-Smolenice, 1970, p.164-177.
  - 27.SILAȘ Gh., HEGEDUS A., Contribuții la studiul mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate. St.și Cercet.de Mec.Apl., Tom 29, Nr.6, 1970, p.1433-1449.
  - 28.SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate. Bul. Șt.și Tehnic Inst.Polit.Timișoara, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 15(29), fasc.2, 1970, p.167-172.
  - 29.SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Das Studium der Stossschwingungen einem freien Masse zwischen zwei Limitatoren mit kinematischer Erregung, VII Konferencii Dynamiki Maszyn, Slaska, Gliwice, 1971, p.371-381.
  - 30.SILAȘ Gh., HEGEDUS A., Contribuții privind studiul mișcărilor periodice optime ale sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate. Bul. Șt. Și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 16(30), fasc.1, 1971, p.79-93.
  - 31.SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Studiul mișcărilor vibropercutante ale unei mase libere între doi limitatori cu excitație cinematică. Bul. Șt. Și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 18(30), fasc.2, 1971, p.225-231.



32. SILAȘ Gh., Metode și rezultate noi în studiul sistemelor vibropercutante generale cu un grad de libertate și a vibrațiilor cu caracteristici neliniare. Teză de doctorat. Inst.Polit.Iași, 1971, p.241.
33. SILAȘ Gh., O nouă metodă de studiu a sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate și o cuplă percutantă. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 16(30), fasc.1, 1971, p.55-64.
34. SILAȘ Gh., RĂDOI M., BRÎNDEU L., KLEPP H., HEGEDUS A., Culegere de probleme de vibrații mecanice. Vol.2. Sisteme neliniare și parametrice. Sisteme vibropercutante. Aplicații, Edit.Tehnică, București, 1972, p.348.
35. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Studiul mișcării sistemelor vibropercutante cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 17(31), fasc.2, 1972, p.141-150.
36. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Mișcări periodice ale sistemului vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă în cazul rezonanței. Simpoz.de Mecanisme și Transm.Mecanice, I, Reșița, 1972, p.226-231.
37. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., GROȘANU I., CIOARĂ T., The Experimental Determinations of the Quantities Occuring in the Operation of Some Shock-Vibration Mecanisms. Sympos.on Exp.Techn.in Appl.Mech., Polytechn.Inst.Bucharest, 1972, p.59-66.
38. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Folosirea ecuațiilor lui Lagrange la studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 18(32), fasc.1, 1973, p.45-52.
39. SILAȘ Gh., HEGEDUS A., TOADER M., Asupra unei mișcări vibropercutante optime. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 18(32), fasc.1, 1973, p.57-67.
40. SILAȘ Gh., Sisteme dinamice cu interacțiuni percutante. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 18(32), fasc.2, 1973, p.155-159.
41. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Mișcări periodice ale unui vibrator rezemat pe un limitator rigid. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 18(32), fasc.2, 1973, p.167-174.
42. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., BACRIA V., Studiul mișcărilor periodice amortizate ale unui vibrator limitat elastic. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 18(32), fasc.2, 1973, p.175-181.
43. SILAȘ Gh., Systems dymaniques a interactions percutantes. Sctes du Colloque EQUA-DIFF'73, Bruxelles - Louvian, 3-8 sept.1973, p.65-74.
44. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., TOADER M., Studiul mișcărilor periodice cu ciocniri ale unui sistem cu două mase legate elastic. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 9(33), fasc.1, 1974, p.67-71.

45. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Efecte dinamice datorită elementelor de pe cablurile de funicular. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 19(33), fasc.1, 1974, p.7-16.
46. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., BACRIA V., Periodische Bewegungenregimes eines Stossschwingers in der Voraussetzung dass innereibung voranden ist. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mat-Fiz-Mec., Tom 19(33), fasc.2, 1974, p.173-176.
47. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Die periodischen Bewegungen eines Stossschwingers im Falle plastischer Stosse. Bul. Șt.și Tehnic, Tom 20(34), fasc.1, 1975, p.19-23.
48. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Asupra folosirii variabilei complexe în studiul mișcării sistemelor vibropercutante. Bul. Șt.și Tehnic, Tom 20(34), fasc.2, 1975, p.141-142.
49. SILAȘ Gh., Determinarea mișcărilor periodice ale unui sistem cu un grad de libertate și o cuplă percutantă. Comunic.Conf.vibr.în constr.de mașini, Timișoara, 1975, p.423-432.
50. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Mișcări periodice ale unui sistem vibropercutant în cazul ciocnirilor plastice. Comunic.Conf.vibr.în constr.de mașini, Timișoara, 1975, p.443-448.
51. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Die Lagen der Perkussions-Achse bei einem Korper mit einem festen Punkt. Bul. Șt.și Tehnic, Tom 21(35), fasc.1, 1976, p.23-24.
52. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Folosirea legăturii unilaterale pentru studiul ciocnirii. Simpoz.de Mecanisme și Transm.Mec., 3, Reșița, 1976, p.749-756; Bul.Șt.și Tehnic 23(37), 2, 1978, p.173-177.
53. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Metode poligonale pentru aproximarea caracteristicilor neliniare. Simpoz.de Mecanisme și Transm.Mec., 3, Reșița, 1976, p.743-748; Bul.Șt.și Tehnic 23(37), Nr.2, 1978, p.169-172.
54. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Die periodischen Bewegungen eines Stossschwingungssystem mit überkritischer Dämpfung. Second IFTOM Internat.Sympos.on Linkages and Computer Aided Design Methods-SYROM'77, Bucharest, Romania, 13 June, 16-21, 1977, p.629-637.
55. SILAȘ Gh., GROȘANU I., BRÎNDEU L., Influența variațiilor accelerațiilor asupra mișcării sistemelor elastice. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mecanică, Tom 24(38), fasc.1, 1979, p.11-20.
56. SILAȘ Gh., RĂDOI M., BRÎNDEU L., SMICALĂ I., Folosirea modelării analogice în studiul unui izolator neliniar. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mecanică, Tom 25(39), fasc.1 1980, p.15-21.

57. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Studiul efectului ciocnirii asupra generatorului de vibrații la un sistem vibropercutant. Lucr.celei de a III-a Conf.dr vibr.în constr.de mașini, III, Timișoara, 28-29 nov.1980, p.281-286.
58. SILAȘ Gh., HEGEDUS A., Optimum Periodic Motions of Shock-Vibrating Systems with One Degree of Freedom. Bul. Șt.și Tehnic, Seria Mecanică, Tom 26(40), fasc.1, 1981, p.17-21.
59. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Considerații privind folosirea funcției legăturii unilaterale în studiul ciocnirii. A IV-a Conf.de vibr.în constr.de mașini, Timișoara, 26-27 nov.1982, p.299-305, 4<sup>th</sup> Conf.on Vibr.in Mechan.Engineering, Timișoara, Nov., 1982, p.67-72.
60. SILAȘ Gh., GROȘANU I., Mecanică, Edit. Didact. și Pedag. București, 1982, p.608.
61. SILAȘ Gh., BRÎNDEU L., Sisteme vibropercutante. Ed.Tehnică, București, 1986.
62. SILVESTROV E.E., Periodiceskie dvijenia pod deistviem impulsov v kolebatelinoi sisteme a periodiceski meniaiușcisia. Teoria mașin i mehanizmov. Vîp.103-104, 1964, p.43-55.
63. SISOEV V.L., Svobodnîe kolebania sistem s odnoi stepeniu svobodî, imaiușcih ograniciteli. Issledovanie po dinamike soorujenii, TNISK, Gosstroizdat, Moskva, 1961, p.39-72.
64. SUSLOV K.G., Mecanica rațională, vol.I-II (trad. din lb. rusă), Edit. Tehnică, București, 1951, p.428, 318.

## [T]

1. TIMOSHENKO S., YOUNG D.H., Dynamique superieure. Libr.Polyt.Ch. Beranger, Paris-Liege, 1950, p.459.
2. TIPKIN Ia.Z., Teoria releinîh sistem avtomaticeskogo regulirovania. Gostehizdat, Moskva, 1955, p.456.
3. TIVES L.I., Dinamica i ustoicivosti simmetricinoi, vibroudarnoi, soderjașcei dva zazora. Obșcie problemî mașinostroenia, Nauka, Moskva, 1967, p.7-18.
4. TOCACI E., Fenomene discontinue în mecanică și rezistența materialelor. Edit.Acad.RSR, București, 1974, p.144.

## [V]

1. VAINKOF Ia.F., Ob ustoicivosti dvijenia tela na vibriruiușcei platforme. Injinernîi jurnal. Mehanika tverdogo tela, No.6, 1966, p.27-33.
2. VÂLCOVICI V., BĂLAN Șt., VOINEA R., Mecanica teoretică, Edit.Tehnică, București, 1968, p.1088.



3. VILAINÉ J., Etude des vibrations forces d'un systeme a un degre de liberie avec deplacement limite d'un seul cote. These. Universite de Nantes, 1967, p.112.
4. VILAINÉ J., Etude des vibrations forces de systemes constitues de masses et ressorts en serie, sans amortissement, don't deux masses entrent en collision lors du mouvement, These, Universite de Nantes, 1969, p.170.
5. VOINEA R., VOICULESCU D., CEAUȘU V., Mecanică. Edit. Didact. și Pedag. București, 1975, p.704.

**[W]**

1. WALLIN A., On Vibrating Hammers, Trans of Machine Elements Division, Lund Tehnical University, Lund, Sweden, 1978, p.132.

Continutul programului

```

{$A+,B-, +,E+,F-,G+,I+,L+,O-,P-,Q-,R-,S+,T-,V-,X+,Y+}
Uses Crt, Drawings, Graph, Math, Types ;
Const
  NoPal: Byte= 2 ;
  NoFunc: Byte= 1 ;
FirstHelp: Phelp= Nil ;
  Palette: Array[1..4] of String[12]=
    (#12#35#37#107#59#36#5#42#36#38#255#37 ,
    #15#0#98#102#31#37#21#65#36#130#255#36 ,
    #30#65#98#102#31#37#21#65#36#130#255#36 ,
    #54#72#37#61#58#37#84#72#36#76#255#36) ;

Procedure initialize ;
Begin
  Add:= 10 ;
  Zoom:= 73 ;
  SetFillStyle(1, 15) ;
  Bar (10, 9, 591, 14) ;
  Bar (586, 15, 591, 460) ;
  SetColor (36) ;
  Rectangle (4, 14, 586, 466) ;
End ;

{$F+}
Procedure InputValues ;
Var S: String ;
    Code: Integer ;
Begin
  SetFillStyle (1, Byte (CurPal [1] ) ) ;

  Bar (0, 0, 353, 12) ;
  SetColor (Byte (CurPal [2] ) ) ;
  OutTextXY (15, 2, 'Introduceti valorile pentru r, R
si gama') ;
  SetColor (Byte (CurPal [2] ) ) ;
  S:= Inputstr= ', No2Str (Gamma, 10, 5), 10, 20, 10
) ;
  Val (S, Gamma, Code ) ;
  S: Inputstr (' Gama =', No2Str (Gama,10,5), 10, 20,
10);
  Val (S, r_mic, Code ) ;

```

## ANEXA 1

---

```

      S: Inputstr ('R= ', No2Str (R_mare, 10, 5 ), 10,
20, 20 ) ;
      Val (S, R_mare, Code ) ;

```

```
End ;
```

```

Procedure GraficFunc (Delta: TPoint) ;
Var Startx ,
    Starty: Integer ;

```

```

Procedure DesenValori ;
Var S: String [7] ;
Where , _05: Integer ;
    Len: Byte ;
    lin: boolean ;

```

```

Procedure DisplayY (X: Integer ; S: String ) ;
Begin
    If lin and (Where > 15) And (Where- len < 435) Then
Begin
    len:= textheight (s);
    OuttextXY (X, Where- len+ 2, S ) ;
    Line (51, Where, 53, Where ) ;
    setcolor (4) ;
    Line (55, Where, 600, Where ) ;
    setcolor (0) ;
    End ;
End;

```

```

Procedure WriteYValue ;
Begin
    S:= No2Str (Y, 10, 2 ) ;
    If (S= '0') Or (S= '- 0') Then S:= ' ' ;
    If S < > ' ' Then
Begin
    Len:= TextWidth (S) ;
    If 50- Len < 0 Then
    Begin
    Dec (S [0] ) ;
    If S [Byte (S [0] ) ]= ' . ' Then Dec (S [0] ) ;
    Len:= TextWidth (S) ;
    End ;
    DisplayY (50- Len, S) ;
    End ;
    lin:= not lin ;
End ;

```

## ANEXA I

```

Procedure DisplayX (Lim: Integer : S: String ) ;
var len: integer ;
Begin
  If (Where> 56) And (Where< Lim) Then
  Begin
    len:= textwidth (s) ;
    OuttextXY (Where- len div 2+ 1, 1, S ) ;
    Line (Where, 10, Where, 13 ) ;
    If lin then
  begin
    setcolor (4) ;
    Line (Where, 15, Where, 500 ) ;
    setcolor (0) ;
  end ;
  End;
End ;

Procedure WriteXValue (ToLeft: Boolean ) ;
Begin
  S:= No2Str (X, 10, 2) ;
  If (S= ' 0 ' ) Or (S= ' -0 ' ) Then S:= ' ' ;
  Len:= TextWidth (S) ;
  If Not ToLeft And (Where+ Len> 580 ) Then S:= ' ' ;
;
  If S < > ' ' Then DisplayX (580- Len, S ) ;
  lin:= not lin ;
End ;

Begin
  SetColor (Byte CurPal [2] ) ) ;
  Where:= Startx+ 55 ;
  lin:= true ;
  DisplayX (440, ' 0 ' ) ;
  Where:= Starty+ 16 ;
  DisplayY (42, ' 0 ' ) ;
  (* Valorile Axei Y *)
  _05:= Round (0.5* Zoom ) ;
  X:= 0 ;
  Where:= Startx+ 55 ;
  While Where > 100 Do
Begin
  WriteXValue (True) ;
  X:= X- 0.5 ;
  Dec (Where, _05 ) ;
End ;

```

## ANEXA 1

```
lin:= true ;
X:= 0 ;
Where:= Startx+ 55 ;
While Where < 580 Do
Begin
    WriteXValue (False) ;
    X:= X+ 0.5 ;
    Inc (Where, _05 ) ;
End ;
(* Valorile Axe X *)
lin:= true ;
Y:= 0 ;
Where:= Starty+ 16 ;
While Where > 13 Do
Begin
    WriteYValue ;
    Y:= Y+ 0.5 ;
    Dec (Where, _05 ) ;
End ;
lin:= true ;
Y:= 0 ;
Where:= Starty+ 16 ;
While Where < 450 Do
Begin
    WriteYValue ;
    Y:= Y- 0.5 ;
    Inc (Where, _05 ) ;
End ;
End ;

Procedure DesenDate ;
begin
    SetFillStyle (1, Byte (CurPal [1] ) ) ;
    Bar (340, 0, 434, 50 ) ;
    Rectangle (340, 0, 434, 50 ) ;
    OutTextXY (345, 5, 'Gama= '+ No2Str (Gamma, 3, 1 ) )
) ;
    OutTextXY (345, 20, 'r= '+ No2Str (r_mic, 3, 1 ) )
;
    OutTextXY (345, 35, 'R= '+ No2Str (R_mare, 3, 1 ) )
;
end ;

Label Exit ;
Var Willbe,
Firstpoint: Boolean ;
```

```

Val, CurVal ,
    Increase:  Extended ;
    Found:  Boolean ;
    N:  Longint ;
AuxX, AuxY ,
    Stop, old,
    Cont, Aux: Word ;
Begin
    SetFillStyle (1, Byte (CurPal [1] ) ) ;
    Bar (0, 0, 580, 450 ) ;
    Startx:= 2703- Delta.X ;
    Starty:= 2717- Delta.Y ;
SetColor (36) ;
Rectangle (55, 15, 582, 452 ) ;
(* Axele carteziene *)
SetViewPort (61, 31, 585, 465, ClipOn ) ;
SetColor (Byte (CurPal [2] ) ) ;
{ Line (Startx, 0, Startx, 450 ) ; }
{ Line (0, Starty, 580, Starty ) ; }
increase:= 0.001 ;
stop:= 4 ;
if gamma= 0 then stop:= 6 ;
For cont:= Stop downto 1 Do
Begin
{ case cont of
    1, 2: setcolor (36) ;
    3, 4: setcolor (40) ;
    5, 6: setcolor (196) ;
end ;
N:= 0 ;
X:= -Startx/ Zoom ;
If X< 0 Then X:= 0 ;
Firstpoint:= True ;
Willbe:= True ;
Repeat
    If Keypressed Then Goto Exit ;
    CurVal:= Calculate (Cont, FirstPoint ) ;
    Y:= Starty- CurVal* Zoom ;
    If (Y> 0) And (Y< 435 ) Then
    Begin
        If Firstpoint Then
        Begin
            X:= X- Increase ;
            If X< 0 Then X:= 0 ;
            Firstpoint:= False ;
            Willbe: True ;

```

## ANEXA 1

```

End
Else
Begin
    AuxX:= Round (X* Zoom)+ Startx ;
    AuxY:= Round (Y) ;
    If Willbe Then Moveto (AuxX, AuxY)
        Else Lineto (AuxX, AuxY ) ;
    Willbe:= False ;
End ;
End
Else
Begin
    If Not Willbe And Not Firstpoint Then
    Begin
        Firstpoint:= True ;
    End ;
End ;
X:= X+ Increase ;
Until X* Zoom+ Startx>= 524 ;

End ;
Exit :
desendate ;
SetViewport (5, 15, 585, 465, ClipOn ) ;
End ;
{$F-}

Procedure Setvideo (Mode: Byte ) ;
Var AutoDetect: Pointer ;
    GrMd, GrDr: Integer ;

{$F+}
Function Detect640x480: Integer ;
Begin Detect640x480:= _640x480 ; End ;

Function Detect800x600: Integer ;
Begin Detect800x600:= _800x600 ; End ;
{$F_}

Begin
{   If Mode= _800x600 Then AutoDetect:= @Detect800x600
        Else AutoDetect:= @Detect640x480 ;
    GrDr:= InstallUserDriver ('BGI256', AutoDetect ) ;
}

GrDr:= Detect ;
InitGraph (GrDr, GrMd, 'C:\TURBO\BGI ' ) ;

```

---

```
End ;

Var P: Pointer ;
Sz, N: Word ;
Begin
    R_mic:= 1 ;
    R_mare:= 0.2 ;
    Gamma:= 0 ;
    SetVideo ( _640x480 ) ;
    CurPal:= Palette [NoPal] ;
    GetMem (ScrolBuff, $FFF0 ) ;
    GetImage (0, 0, 15, 20, SaveImage^ ) ;
    Setcolor (Byte (CurPal [1] ) ) ;
    SetFillStyle (1, Byte (CurPal [1] ) ) ;
    Bar (5, 15, 585, 465 ) ;
    Initialize ;
    InitEvents ;
    SetMouseArea (7, 7, 624, 464 ) ;
    Repeat
        Case CurWind Of
1: Begin
        Main ;
        If CurWind= 1 Then
        Case Option Of
1: Begin
            @R: @InputValues ;
            Window (140, 50, 500, 95, R )
```



## ANEXA I

---

```

Var  Inf, X, Y: Extended ;
Var  r_mic, R_mare, gamma: Extended ;
Const sign: boolean=false ;

Function Calculate (n: byte; var fp: boolean): Extended
;

Implementation

function calculate ;
label exit ;
var tau, delta, ro, d, var1, var2, csi, var4, var5,
var6, var7, var8, arg1, res: extended ;
begin
arg1:=2*pi*r_mic ;
tau:=x*gamma ;
var1:= tau*tau ;
var2:= (1 -x*x )*(1-x*x ) ;
d:= sqrt (var2+4*var1) ;
res:= 1/d ;
if n=1 then goto exist ;
if n=2 then begin res:= -res ; goto exit ; end ;
csi:= sqrt (x*x-var1 ) ;
var4:=(exp(arg1*tau)+1/exp(arg1*tau ) )/2 ; {var4= ch }
var5:=(exp(arg1*tau)-1/exp(arg1*tau ) )/2 ; {var5= sh }
var6:= sin(arg1*tau ) ; {sin tau }
var7:= cos(arg1*csi ) ; {cos}
var8:= sin(arg1*csi ) ; {sin csi }
delta:= ( (1+r_mare)*var8)/( (1-r_mare)*csi*(var4-var7 )
) ;
if (n=3) or (n=4) then
begin
ro:=1+ ( (1+r_mare)*(csi*var5-tau*var8 ) ) / ( (1-
r_mare) * csi* (var4-var7 ) ) ;
res:=res*sqrt (1+(delta*delta) / (ro*ro) ) ;
if n=3 then goto exit ;
if n=4 then begin res:=-res ; goto exit; end ;
end
else
begin
if n=5 then
begin
res:=res*sqrt (1+delta*delta ) ;
var1:=-2*delta/ (1-r_mare) / (1+delta*delta )
;
if res*var1<0 then res:=-res ;

```

## ANEXA I

```

end
else
begin
    ro:= sqr ( (1+r_mare)/(1-r_mare ) + 2* (1+r_mare
* r_mare) * sqr (x*delta / (1+r_mare) ) ;
                                res:=res*abs(ro-
delta*delta)/sqrt(delta*delta+ro*ro);
    var1:=2*delta/(1-r_mare)/(ro-delta*delta ) ;
    if res*var1<0 then res:=-res ;
end ;
if sign < > (res< 0) then
begin
    sign:= res< 0 ;
    fp:=true ;
end ;
exit:
calculate:=res ;
end ;

```

```

Procedure ExceptionsOff ; Assembler ;
Var CtrlWord: Word ;
Asm
    FSTCW      CtrlWord      { Get current control Word
}
    OR         CtrlWord,ooFFh{ Mask all exceptions }
    FLDCW     CtrlWord      { Change 8087 control
Word}
End ;
Begin
    ExceptionsOff ;
    Inf:= 0 ;
    Inf:= 1/ Inf ;
End.

```

```

-----
{ $A+, B-, D+, E+, F-, G+, I+, L+, N+, O-, P-, Q-, R-,
S+, T-, V-, X+, Y+ }
Unit Types ;
Interface
Uses Graph ;
Type
    Tpoint=   Record X, Y: Integer; End ;
    Pfunc=   ^Func ;
    Func=    Record
                Next:          Pfunc ;
                Inf, Sup: Extended ;

```

## ANEXA 1

```

Express: String ;
End ;
PHelp= ^Help ;
Help= Record
Next: Phelp ;
Text: String ;
End ;

Const
ShowMs: Boolean= False ;
EvMouseDown = $0001 ;
evMouseUp = $0002 ;
evMouseMove = $0004 ;
evMouseAuto = $0008 ;
evNothing = $0000 ;
evMouse = $000F ;
evKeyboard = $0010 ;
evCommand = $FF00 ;

kbEsc=$011B; kbAltSpace=$0200; kbCtrlIns=$0400;
kbShiftIns=$0500; kbCtrlDel=$0600; kbShiftDel=$0700
kbBack=$0E08; kbCtrlBack=$0E7F; kbShiftTab=$0F00
kbTab=$0F09; kbAltQ=$1000; kbAltW=$1100;
kbAltE=$1200; kbAltR=$1300; kbAltT=$1400;
kbAltY=$1500; kbAltU=$1600; kbAltI=$1700;
kbAltO=$1800; kbAltP=$1900; kbCtrlEnter=$1C0A
kbEnter=$1C0D; kbAltA=$1E00; kbAltS=$1F00;
kbAltD=$2000; kbAltF=$2100; kbAltG=$2200;
kbAltM=$2300; kbAltT=$2400; kbAltK=$2500;
kbAltL=$2600; kbAltZ=$2C00; kbAltX=$2D00;
kbAltC=$2E00; kbAltV=$2F00; kbAltB=$3000;
kbAltN=$3100; kbAltM=$3200; kbF1=$3B00;
kbF2=$3C00; kbF3=$3D00; kbF4=$3E00;
kbF5=$3F00; kbF6=$4000; kbF7=$4100;
kbF8=$4200; kbF9=$4300; kbF10=$4400;
kbHome=$4700; kbUp=$4800; kbPgUp=$4900;
kbGrayMinus=$4A2D; kbLeft=$4B00; kbRight=$4D00;
kbGrayPlus=$4E2B; kbEnd=$4F00; kbDown=$5000;
kbPgDn=$5100; kbIns=$5200; kbDel=$5300;
kbShiftF1=$5400; kbShiftF2=$5500; kbShiftF3=$5600;
kbShiftF4=$5700; kbShiftF5=$5800; kbShiftF6=$5900;
kbShiftF7=$5A00; kbShiftF8=$5B00; kbShiftF9=$5C00;
kbShiftF10=$5D00; kbCtrlF1=$5E00; kbCtrlF2=$5F00;
kbCtrlF3=$6000; kbCtrlF4=$6100; kbCtrlF5=$6200;
kbCtrlF6=$6300; kbCtrlF7=$6400; kbCtrlF8=$6500;
kbCtrlF9=$6600; kbCtrlF10=$6700; kbAltF1=$6800;
kbAltF2=$6900; kbAltF3=$6A00; kbAltF4=$6B00;
kbAltF5=$6C00; kbAltF6=$6D00; kbAltF7=$6E00;

```

## ANEXA I

---

```

kbAltF8=$6F00;      kbAltF9=$7000;      kbAltF10=$7100;
kbCtrlPrtSc=$7200; kbCtrlLeft=$7300;
    kbCtrlRight=$7400;
kbCtrlEnd=$7500;   kbCtrlPgDn=$7600;
kbCtrlHome=$7700;
kbAlt1=$7800;      kbAlt2=$7900;      kbAlt3=$7A00;
kbAlt4=$7B00;      kbAlt5=$7C00;      kbAlt6=$7D00;
kbAlt7=$7E00;      kbAlt8=$7F00;      kbAlt9=$8000;
kbAlt0=$8100;      kbAltMinus=$8200;   kbAltEqual=$8300;
kbCtrlPgUp=$8400; kbAltBack=$0800;   kbNoKey=$0000;

kbRightShift  = $0001;
kbLeftShift   = $0002;
kbShifts      = $0003;
kbCtrlShift   = $0004;
kbAltShift    = $0008;

mbLeftButton  = $01;
mbRightButton = $02;

ButtonCount: Byte= 0 ;
MouseEvent: Boolean= False ;
Mouse Reverse: Boolean= False ;
DoubleDelay: Word= 8 ;
RepeatDelay: Word= 8 ;

Var MouseWhere: TPoint ;
    MouseIntFlag: Byte ;
    MouseButtons: Byte ;
    Limits: TPoint ;
    CurPal: String [12] ;
Type
    TEvent= Record
        Case What: Word of
            evNothing: ( ) ;
            evMouse: (Buttons: Byte ;
                Double: Boolean ;
                Where: TPoint ) ;
            evKeyboard: (Case Integer of
                0: (KeyCode: Word ) ;
                1: (CharCode: Char ; ScanCode:
Byte) ;
        End ;

Procedure Init Events ;
Procedure DisplayCursor ;

```

## ANEXA 1

---

```

Procedure DoneEvents ;
Procedure SetMouseArea (X1, Y1, X2, Y2: Word ) ;
Procedure GoMouseXY (X, Y: Word ) ;
Procedure GetMouseXY ;
Procedure ShowMouse ;
Procedure HideMouse ;
Procedure GetMouseEvent (var Event: TEvent ) ;
Procedure GetKeyEvent (var Event: TEvent ) ;
Procedure GetEvent ;
Procedure WaitEvent (Mask: Word ) ;
Function GetShiftState: Byte ;
Function Upper (Const S: String ) : String ;
Function LeftTrim (Const S: String ) : String ;
Function No2Str (Val: Extended ; W, D: Byte ): String ;

```

```

Var Event: TEvent ;
    SaveImage: Pointer ;

```

## Implementation

## Const

```

Copyright: String= ' ECLESE REHUI NAVALE' ;
EventQSize = 16 ;

```

## Var

```

LastButtons: Byte ;
DownButtons: Byte ;
    LastDouble: Boolean ;
    LastWhere: TPoint
    SaveWhere: TPoint ;
    DownWhere: TPoint ;
    DownTicks: Word ;
    AutoTicks: Word ;
    AutoDelay: Word ;
    EventCount: Word ;
    EventQHead: Word ;
    EventQTail: Word ;
    EventQueue: Array [0..EventQSize- 1] Of TEvent
;
    EventQLast: Record End ;

```

## Var

```

ShiftState: Byte Absolute $40 : $17 ;
Ticks: Word Absolute $40 : $6C ;

```

## ANEXA 1

---

```

Procedure SetMouseArea (X1, Y1, X2, Y2: Word );
Assembler;

```

```

Asm

```

```

    CMP ButtonCount, 0
    JE  @@1
    MOV AX, 07H
    MOV CX, X1
    MOV DX, X2
    INT 33H
    MOV AX, 08H
    MOV CX, Y1
    MOV DX, Y2
    INT 33H

```

```

@@1:

```

```

End ;

```

```

Procedure GoMouseXY ( X, Y: Word ) ; Assembler ;

```

```

Asm

```

```

    MOV AX, 4
    MOV CX, X
    MOV DX, Y
    INT 33H

```

```

End ;

```

```

Procedure GetMouseXY ; Assembler ;

```

```

Asm

```

```

    CMP ButtonCount, 0
    JE  @@1
    MOV AX, 3
    INT 33H
    SUB CX, Limits.X
    SUB DX, Limits.Y
    MOV MouseWhere.X, CX
    MOV MouseWhere.Y, DX

```

```

@@1:

```

```

End ;

```

```

Procedure ShowMouse ;

```

```

Begin

```

```

If ButtonCount= 0 Then Exit ;

```

```

GetMouseXY;

```

```

With MouseWhere Do

```

```

Begin

```

```

    GetImage (X, Y, X+ 15, Y+ 20, Save Image^) ;

```

```

    SaveWhere:= MouseWhere ;

```

```

End ;

```

## ANEXA 1

```

    ShowMs:= True ;
    DisplayCursor ;
End ;

```

```

Procedure HideMouse ;
Begin
    If (ButtonCount= 0 ) Or Not ShowMs Then Exit ;
    ShowMs:= False ;
    With SaveWhere Do PutImage (X, Y, SaveImage^,
NormalPut ) ;
End ;

```

```

Procedure DetectMouse ; Near ; Assembler ;
Asm

```

```

    MOV     AX, 3533H
    INT     21H
    MOV     AX, ES
    OR      AX, BX
    JE      @@1
    XOR     AX, AX
    INT     33H
    OR      AX, AX
    JE      @@1
    PUSH    BX
    MOV     AX, 4
    XOR     CX, CX
    XOR     DX, DX
    INT     33H
    POP     AX

```

```

@@1: MOV   ButtonCount, AL
MOV   ButtonCount, 0
End ;

```

```

Procedure StoreEvent ; Near ; Assembler ;
Asm

```

```

    MOV  DI, SP
    LES  DI, SS: [DI+8]
    CLD
    STOSW
    XCHG AX, BX
    STOSW
    XCHG AX, DX
    STOSW

```

```

End ;

```

```

Procedure GetMouseState ; Near ; Assembler ;

```

## ANEXA 1

Asm

```

        CLI
        CMP  EventCount, 0
        JNE  @@1
        MOV  BL, MouseButton
        MOV  CX, MouseWhere.Word [0]
        MOV  DX, MouseWhere, Wors [2]
        MOV  ES, Seg0040
        MOV  DI, ES: Ticks
        JMP  @@3
@@1: MOV  SI, EventQHead
        CLD
        LODSW
        XCHG AX, DI
        LODSW
        XCHG AX, BX
        LODSW
        XCHG AX, CX
        LODSW
        XCHG AX, DX
        CMP  SI, OFFSET EventQLast
        JNE  @@2
        MOV  SI, OFFSET EventQueue
@@2: MOV  EventQHead, SI
        DEC  EventCount
@@3: STI
        CMP  MouseReverse, 0
        JE   @@4
        MOV  BH, BL
        AND  BH, 3
        JE   @@4
        CMP  BH, 3
        JE   @@4
        XOR  BL, 3
@@4:
End ;

{$F+}
Procedure DisplayCursor ;
Var SaveCol: Byte ;
    SaveFill: FillSettingsType ;
    Mouse: Array [1..4] Of TPoint ;
Begin
    If (ButtonCount= 0) Or Not ShowMs Then Exit ;
    With SaveWhere Do PutImage (X, Y, SaveImage^,
NormalPut) ;

```



---

```

With MouseWhere Do
Begin
  GetImage (X, Y, X+ 15, Y+ 20, SaveImage^) ;
  SaveWhere:= MouseWhere ;
  SaveCol:= GetColor ;
  GetFillSettings (SaveFill) ;
  Mouse [1].X:= X ;
  Mouse [1].Y:= Y ;
  Mouse [2].X:= X+ 5 ;
  Mouse [2].Y:= Y+ 20 ;
  Mouse [3].X:= X+ 15 ;
  Mouse [3].Y:= Y+ 14 ;
  Mouse [4].X:= X ;
  Mouse [4].Y:= Y ;
  SetColor (Byte (CurPal [10] ) ) ;
  SetFillStyle (7, Byte (CurPal [10] ) ) ;
  FillPoly (4, Mouse) ;
  SetFillStyle (SaveFill.Pattern, SaveFill.Color) ;
  SetColor (SaveCol) ;
End ;
End ;
{$F-}

```

```

Procedure MouseInt ; Far ; Assembler ;
Asm

```

```

MOV SI, SEG @DATA
MOV DS, SI
MOV MouseButtons, BL
SUB CX, Limits.X
SUB DX, Limits.Y
MOV MouseWhere.X, CX
MOV MouseWhere.Y, DX
TEST AX, 11110B
JE @@2
CMP EventCout, EventQSize
JE @@2
MOV ES, Seg0040
MOV AX, ES: Ticks
MOV DI, EventQTail
PUSH DS
POP ES
CLD
STOSW
XCHG AX, BX
STOSW
XCHG AX, CX

```

## ANEXA I

```

        STOSW
        XCHG AX, DX
        STOSW
        CMP  DI, OFFSET EventQLast
        JNE  @@1
        MOV  DI, OFFSET EventQueue
@@1: MOV  EventQTail,  DI
        INC  EventCount
@@2: MOV  MouseIntFlag, 1
        CALL DisplayCursor
End ;

Procedure InitEvents ; Assembler ;
Asm
        XOR  AX, AX
        CMP  AL, ButtonCount
        JE   @@1
        MOV  DownButtons, AL
        MOV  LastDouble, AL
        MOV  EventCount, AX
        MOV  AX, OFFSET DS: EventQueue
        MOV  EventQHead, AX
        MOV  EventQTail, AX
        MOV  AX, 3
        INT  33H
        MOV  MouseButton, BL
        MOV  MouseWhere.X, CX
        MOV  MouseWhere.Y, DX
        MOV  LastButtons, BL
        MOV  LastWhere.X, CX
        MOV  LastWhere.Y, DX
        MOV  AX, 12
        MOV  CX, OFFFFH
        MOV  DX, OFFSET CS: MouseInt
        PUSH CS
        POP  ES
        INT  33H
        MOV  AX, 1
        INT  33H
        MOV  MouseEvents, 1
@@1:
End ;

Procedure DoneEvents ; Assembler ;
Asm
        CMP  ButtonCount, 0

```

## ANEXA 1

```

        JE          @@1
        CMP         MouseEvents, 0
        JE          @@1
        MOV         MouseEvents, 0
        MOV         AX, 2
        INT        33H
        MOV         AX, 12
        XOR         CX, CX
        MOV         DX, CX
        MOV         ES, CX
        INT        33H

@@1:
End ;

Procedure GetMouseEvent ; Assembler ;
Asm
        CMP         MouseEvents, 0
        JE          @@2
        CALL GetMouseState
        MOV         BH, LastDouble
        MOV         AL, LastButtons
        CMP         AL, BL
        JE          @@1
        OR          AL, AL
        JE          @@3
        OR         BL, BL
        JE          @@5
        MOV         BL, AL
@@1:
        CMP         CX, LastWhere.X
        JNE         @@6
        CMP         DX, LastWhere.Y
        JNE         @@6
        OR         BL, BL
        JE          @@2
        MOV         AX, DI
        SUB         AX, AutoTricks
        CMP         AX, AutoDelay
        JAE         @@7
@@2: XOR          AX, AX
        MOV         BX, AX
        MOV         CX, AX
        MOV         DX, AX
        JMP         @@9
@@3: MOV         BH, 0
        CMP         BL, DownButtons
        JNE         @@4

```

## ANEXA I

---

```

        CMP     CX, DownWhere.X
        JNE     @@4
        CMP     DX, DownWhere.Y
        JNE     @@4
        MOV     AX, DI
        SUB     AX, DownTicks
        CMP     AX, DoubleDelay
        JAE     @@4
        MOV     BH, 1
@@4:   MOV     DownButtons, BL
        MOV     DownWhere.X, CX
        MOV     DownWhere.Y, DX
        MOV     DownTicks, DI
        MOV     AutoTicks, DI
        MOV     AX, RepeatDelay
        MOV     AutoDelay, AX
        MOV     AX, evMouseDown
        JMP     @@8
@@5:   MOV     AX, evMouseUp
        JMP     @@8
@@6:   MOV     AX, evMouseMove
        JMP     @@8
@@7:   MOV     AutoTicks, DI
        MOV     AutoDelay, 1
        MOV     AX, evMouseAuto
@@8:   MOV     LastButtons, BL
        MOV     LastDouble, BH
        MOV     LastWhere.X, CX
        MOV     LastWhere.Y, DX
@@9:   CALL    StoreEvent
End ;

```

```

Procedure GetKeyEvent ; Assembler ;
Asm

```

```

        MOV     AH, 1H
        INT     16H
        MOV     AX, 0
        MOV     BX, AX
        JE      @1
        MOV     AH, 0H
        INT     16H
        XCHG   AX, BX
        MOV     AX, evKeyboard
@@1:   XOR      CX, CX
        MOV     DX, CX
        CALL    StoreEvent

```

## ANEXA I

```

End ;

Procedure GetEvent ;
Begin
  GetMouseEvent (Event) ;
  If Event.What= evNothing Then GetKeyEventt (Event)
;
End ;

Procedure WaitEvent (Mask: Word) ;
Begin
  Repeat GetEvent ; Until Event.What And Mask < > 0 ;
End ;

Function GetShiftState: Byte ; Assembler ;
Asm
      MOV  ES, Seg0040
      MOV  AL, ES: ShiftState
End ;

Function Upper (Const S: String): String ; Assembler ;
Asm
      CLD
      MOV  DX, DS
      LDS  SI, S
      LES  DI, @Result
      LODSB
      XOR  CH, CH
      MOV  CL, AL
      STOSB
      JCXZ @@3
      @@1:
      LODSB
      CMP  AL, ' a '
      JB  @@2
      CMP  AL, ' z '
      JA  @@2
      SUB  AL, 20H
      @@2:
      LOOP @@1
      @@3:
      MOV  DS, DX
End ;

Function LeftTrim (Const S: String): String ; Assembler
;
Asm

```

## ANNEX 1

---

```

    CLD
    MOV  DX, DS
    LES  DI, S
    XOR  CH, CH
    MOV  CL, ES: [DI]
    INC  DI
    JCXZ @@1
    MOV  AX, 20H
    REPE SCASB
    DEC  DI
    INC  CX
    @@1:
    LDS  SI, S
    MOV  SI, DI
    LES  DI, @Result
    MOV  ES: [DI], CL
    INC  DI
    REP  MOVSB
    MOV  DS, DX
End ;

Function No2Str (val: Extended ; W, D: Byte): String ;
Var S: String ;
Begin
    Str (Val: W: D, S) ;
    S:= LeftTrim (S) ;
    If Pos (' . ', S) < > 0 Then
    Begin
        While S [Byte (S [0] ) ]=' 0 ' Do Dec (S [0] )
;
            If S [Byte (S [0] ) ]=' . ' Then Dec (S [0] )
;
        End ;
        No2Str:= S ;
End ;

Var SaveExit: Pointer ;

Procedure Shutdown ; Far ;
Begin
    DoneEvents ;
    FreeMem (SaveImage, 1024 ) ;
    ExitProc:= SaveExit ;
End ;

Begin

```

## ANEXA 1

```

DetectMouse ;
GetMem (SaveImage, 1024) ;
SaveWhere.X:= 0 ;
SaveExit:= ExitProc ;
ExitProc:= @Shutdown ;
End.
-----

{$A+, B-, D+, E+, F-, G+, I+, L+, N+, O-, P-, Q-, R-,
S+, T-, V-, X+, Y+ }
UnitDrawings ;
Interface
Uses Graph, Types, crt ;
Const
    _640x480= 2 ;
    _800x600= 3 ;

Type
    RunProc= Procedure ;
    DrawProc= Procedure (Delta: TPoint) ;
    RGBColor= Record R, G, B: Byte ; End ;

Procedure SetLimits (X1, Y1, X2, Y2: Word) ;
Procedure Window (X1, Y1, X2, Y2: Word ; Run: RunProc) ;
Procedure ScrollX_Y (Start, Stop, Lim: TPoint) ;
Procedure ScollUp (Start, Stop: TPoint ; Height:
Integer) ;
Procedure
ScrollW (No: Byte; X1, Y1, X2, Y2: Word; Draw: DrawProc; R: Boolean
)
Function InputStr (Txt, Start: String ; X, Y , Stop:
Word): String ;
Procedure LoadPalette ;
Procedure Main ;

Const
    Option: Byte= 1 ;
    CurWind: Byte= 1 ;
    Windows: Array [1..2] Of Record
                                Delta, SD, Limit, Grow:
Tpoint;
End ;
=( (Delta: (X: 1; Y: 1) ; SD: (X:1 ; Y: 1) ; Limit:
(X:255 ; Y:500) ; Grow: (X: 1; Y: 1) ),
Delta: (X: 2700; Y:2500) ; SD: (X:2500 ; Y: 2500) ;
Limit: (X:5000 ; Y:5000) ; Grow: (: 10; Y: 100)),

```

```

Var R: RunProc ;
    D: DrawProc ;
Add, Zoom: Word ;
ScrollBuff: Pointer ;

```

### Implementation

```

Procedure SetLimits (X1, Y1, X2: Word) ;
Begin
    Limits.X:= X1 ;
    Limits.Y:= Y1 ;
    SetMouseArea (X1+ 5, Y1+ 5, X2- 5, Y2- 5) ;
    GoMouseXY (X1+ 5, Y1+ 5) ;
    SetViewPort (X1, Y1, X2, Y2, ClipOn) ;
End ;

Procedure Window (X1, Y1, X2, Y2: Word ; Run: RunProc) ;
Var P: Pointer ;
    Size: Word ;
Begin
    HideMouse ;
    Size:= ImageSize (X1, Y1, X2, Y2) ;
    If Size= 0 Then Exit ;
    GetMem (P, Size) ;
    GetImage (X1, Y1, X2, Y2, P^) ;
    SetFillStyle (1, 36) ;
    Bar (X1+ 5, Y1, X2, Y1+ 5) ;
    Bar (X2- 5, Y1+ 5, X2, Y2- 5) ;
    SetColor (Byte (CurPal [9] ) ) ;
    SetFillStyle (1, Byte (CurPal [7] ) ) ;
    Bar (X1, Y1+ 5, X2- 5, Y2) ;
    Rectangle (X1, Y1+ 5, X2- 5, Y2) ;
    SetLimits (X1+ 1, Y1+ 6, X2- 6, Y2- 1) ;
    Run ;
    HideMouse ;
    SetLimits (0, 0, 639, 479 ) ;
    PutImage (X1, Y1, P^, NormalPut) ;
    FreeMem (P, Size) ;
End ;

Procedure ScrollX_Y (Start, Stop, Lim: TPoint) ;
Var Cols: Word ;
Begin
    Repeat
        Cols:= Stop.Y- Star.Y ;
        If Cols > 160 Then Cols:= 160 ;

```



## ANEXA I

---

```

        GetImage (Start.X, Stop.Y- Cols, Stop.X,
Stop.Y, ScrollBuff^) ;
        PutImage (Start.X-, Lim.X, Stop.Y- Cols+
Lim.Y, ScrollBuff^, 0) ;
        Dec (Stop.Y, Cols+1 ) ;
        Until Stop.Y <= Start.Y ;
End ;

Procedure ScrollYUp (Start, Stop: TPoint ; Height ;
Integer ) ;
Var Cols: Word ;
Begin
    If Stop.Y- Start.Y > 160 Then Cols:= (Stop.Y-
Start.Y) Mod 160
                                Else Cols:= Stop.Y- Start.Y ;
Repeat
    GetImage (Start.X, Start.Y, Stop.X, Start.Y+ Cols,
ScrollBuf^);
    PutImage (Start.X, Start.Y- Height, ScrollBuff^, 0)
;
    Inc (Start.Y, Cols) ;
    Cols:= 160 ;
    Until Start.Y >= Stop.Y ;
End ;
Var ShowVal: String ;
{$F+}
Procedure Draw ;
Begin
    SetColor (Byte (CurPal [8] ) ) ;
    OutTextXY (10, 10, ShowVal) ;
    ShowMouse ;
    WaitEvent (evKeyboard+ evMouseDown) ;
End ;
{$F-}

Procedure ShowValue (Val: Extended) ;
Begin
    ShowVal:= ' Value: '+ No2Str (Val, 50, 10);
    @R:= @Draw ;
    With MouseWhere Do Window (X, Y, X+ Textwidth
(ShowVal)+ 26, Y+ 30, R) ;
End;
Procedure ScrollW (No: Byte ; X1, Y1, X2, Y2: Word ;
Draw: DrawProc ; R: Boolean) ;
Var Aux: Byte ;
    Redraw: Boolean ;

```

## ANEXA I

---

```

SaveWhere: TPoint ;
Begin
    SetLimits (X1, Y1, X2, Y2) ;
Redraw:= R ;
With Windows [No] Do
Repeat
    If Redraw Then
    Begin
        HideMouse ;
        SD.X:= Delta X-SD.X ;
        SD.Y:= Delta.Y- SD.Y ;
        Draw (Delta) ;
        SD:= Delta ;
        ShowMouse ;
    End ;
    Redraw:= False ;
    WaitEvent (evKeyboard+ evMouse) ;
    With Event Do
    Begin
    If What= evKeyboard Then
    Case Keycode Of
    kbEsc      : Begin CurWind:= 1 ; Break ; End ;
    kbShiftTab : Begin Dec (CurWind) ; Break ; End
;
    kbTab      : Begin
        Inc (CurWind) ;
        If CurWind > 2 Then CurWind:= 1 ;
        Break ;
    End ;
    kbDown     : If Delta.Y < Limit.Y- Grow.X Then
        Begin      Inc(Delta.Y,      Grow      X) ;
Redraw:=True;End;
    kbUp       : If Delta.Y > Grow.X Then
        Begin      Dec(Delta.Y,Grow  X);Redraw:=True;
End;
    kbRight    : If Delta.X< Limit.X- Grow.X Then
        Begin      Inc(Delta.X,Grow X); Redraw:=True;
End;
    kbLeft     : If Delta.X> Grow.X Then
        Begin      Dec(Delta.X,Grow  X);Redraw:=True;
End;
    End ;
    If (No= 2) And Not Redraw Then
    If What= evKeyboard Then
    Case Keycode Of
    kbCtrlRight: If Delta.X< Limit.X- Grow.Y Then

```

## ANEXA 1

```

        Begin Inc (Delta.X, Grow Y) ; Redraw:= True;
End;
kbCtrlLeft      : If Delta.X> Grow.Y Then
        Begin Dec(Delta.X, Grow Y) ; Redraw:= True;
End;
kbPgUp          : If Delta.Y> Grow.Y Then
        Begin Dec(Delta.Y, Grow Y) ; Redraw:= True;
End;
kbPgOn          : If Delta.Y< Limit.Y- Grow.Y Then
        Begin Inc (Delta.Y, Grow Y) ; Redraw:= True;
End;
kbGrayPlus:      Begin
        If Zoom< 1E4 Then
        Begin
                Zoom:= Zoom+ Add ;
                If Zoom Div Add= 10 Then Add:= Add* 10 ;
                Redraw:= True ;
        End ;
        End ;
kbGrayMinus      : Begin
        If Zoom > 1 Then
        Begin
                If Zoom- Add= 0 Then Add:= Add Div
10 ;
                Zoom:= Zoom- Add ;
                Redraw:= True ;
        End ;
        End ;
End

Else If What= evMouseDown Then
With MouseWhere Do
Begin
        HideMouse ;
        Aux:= GetPixe (X, Y) ;
        If Aux= Byte (CurPal [4] ) Then
        Begin
                SaveWhere:= MouseWhere ;
                SetLimits (0, 0, 639, 479 ) ;
                ShowValue (Delta.X+ X- 2759) / Zoom ;
                Set Limits (X1, Y1, X2, Y2) ;
                GoMouseXY (SaveWhere.X+ 5, SaveWhere.Y+ 15);
        End ;
        ShowMouse ;
        End ;
        End ;

```

## ANEXA I

---

```

    Until False ;
    HideMouse ;
    SetLimits (0, 0, 639, 479) ;
End ;

Function InputStr (Txt, Star: String.X; X, Y, Stop:
Word): String ;
Var S: String ;
    Len: Char ;
    Aux: Word ;
Begin
    S:= Start ;
    SetFillStyle (1, Byte (CurPal [7] ) ) ;
    OutTextXY (x, Y, Txt) ;
    Aux:= X ;
    Inc (X, TextWidth (Txt) ) ;
    OutTextXY (X, Y, S) ;
    Repeat
        WaitEvent (evKeyboard) ;
        Len:= S [0] ;
        CaseEvent.Keycode Of
    kbBack:   If S [0] < > #0 Then Dec (S [0] ) ;
    kbEsc:    Begin
                Bar (X, Y, X+ Byte (S [0] * 10, Y+ 15) ;
                S [0]:= #0 ; Breack ;
            End ;
    kbEnter: Breack ;
Else If (Event.Charcode < > #0) And (Byte (S [0] < Stop)
Then
        S: S+ Event.Charcode ;
    End ;
    If S [0] < > Len Ten
    Begin
        Bar (X, Y, X+ Byte (Len) * 10, Y+ 15) ;
        OutTextXY (X, Y, S) ;
    End ;
    Until False ;
    Bar (Aux, Y, X+ Byte (S [0] ) * 10, Y+ 15) ;
    InputStr:= S ;
End;

Procedure ScreenOn ; Assembler ;
Asm
    MOV  AH, 12H          { 12 = vgahi 640 x 480 }
    MOV  AL, 0           { 0 = on, 1 = off }
    MOV  BL, 36H

```

```

        INT 10H
End ;

Procedure ScreenOff ; Assembler ;
Asm
    MOV AH, 12h          { 12 = vgahi 640 x 480 }
    MOV AL, 1           { 0 = on, 1 = off }
    MOV BL, 36H
    INT 10H
End ;

Procedure LoadPalette ;
Var F: File ;
    No: Byte ;
Pal256: Array [0..255] Of RGBColor ;
Begin
    Assign (F, ' fg.pal ' {paramstr (0) } ) ;
    Reset (F, 1) ;
    Seek (F, FileSize (F) - 768) ;
    BlockRead (F, Pal256, 768) ;
    For No:= 0 To 255 Do
        With Pal256 [No] Do
            Begin
                R:= R Shr 2 ;
                G:= G Shr 2 ;
                B:= B Shr 2 ;
            End ;
        End ;
    End ;

Asm
    LEA DX, Pal256
    MOV SI, SS
    MOV ES, SI
    MOV AX, 1012H
    XOR BX, BX
    MOV CX, 100H
    INT 10H
    End ;
    Close (F) ;
End ;

Procedure Main ;
Const
    X1= 470 ;
    Y1= 10 ;
    X2= 630 ;
    Y2= 135 ;

```

## ANEXA I

---

```

{$F}
Procedure Menu ;
Const      NoL= 2 ;
           Lines: Array [1..NoL] Of String [30]=
           ( ' Introducere date ', ' Iesire program ' ) ;
Var SavePos: Byte ;

Procedure DesenLinie (Vizibil: Boolean ; P: Byte ) ;
Begin
  HideMouse ;
  If Vizibil Then
    Begin  SetFillStyle (1,Byte(CurPal [10]) ) ;
  SetColor (Byte (CurPal [11] ) ) ; End
Else
  Begin  SetFillStyle (1, Byte (CurPal [1] ) ) ;
  SetColor (Byte (CurPal [12] ) ) ; End ;
Bar (5, (P- 1) * 15+ 10, Lines [P] ) ;
  ShowMouse ;
End ;

Begin
  With Windows [1] Do
  Begin
    For SavePos:= 1 To NoL Do
      If SavePos= Option Then DesenLinie (True,
SavePos)
      Else      DesenLinie      (False,
SavePos) ;
    SavePos:= Option ;
    Repeat
      WaitEvent (evKeyboard+ evMouseDown) ;
      If Event.What= evMouseDown Then
      Begin
        Repeat
          With MouseWhere Do
          Begin
            Option:= (Integer (Y)- 4) Div 15+ 1 ;
            If Option= 0 Then Option:= 1
              Else If Option > NoL Then Option:= NoL
;

            If SavePos < > Option Then
            Begin
              DesenLinie (False, SavePos) ;
              DesenLinie (True, Option) ;
              SavePos:= Option ;
            End ;

```

## ANNEX 1

---

```

        End ;
        WaitEvent (evMouse) ;
        Until Event.What= evMouseUp ;
        Event.Keycode:= kbEnter ;
    End ;
    If Event.What= evKeyboard Then
    Begin
        SavePos:= Option ;
        Case Event.Keyboard Of
        kbEsc    : Begin Option:= NoL ; Exit ; End ;
        kbShiftTab ,
        kbTab    : Begin CurWind:= 2 ; Exit ; End ;
        kbUp    : If Option > 1 Then Dec (Option)
                    Else Option:= NoL ;
        kbDown  : If Option < NoL Then Inc (Option)
                    Else Option:= 1 ;
        kbEnd   : Option:= NoL ;
        kbHome  : Option:= 1 ;
        End ;
        If SavePos < > Option Then
        Begin
            DesenLinie (False, SavePos) ;
            DesenLinie (True, Option) ;
        End ;
    End ;
    Until Event.Keycode= kbEnter ;
End ;
{$F-}

Var SaveBG: Char ;
Begin
    SaveBG:= CurPal [7] ;
    CurPal [7]:= CurPal [1] ;
    @R:= @Menu ;
    Window (X1, Y1, X2, Y2, R) ;
    CurPal [7]:= SaveBG ;
End ;
End.

```

Continutul programului

```

uses crt;
var m, k, R, w, fi, delta, FO,
    a, b, p, kl, lambda, beta, tau, itam, csi, def:
extended;
    m_, n_, ita_, itaprim_, tau_: array [0..6] of
extended;
    i: byte;

procedure calc_itam;
var inf, sup, val: extended;

function value (x: extended): extended;
begin
    value:=4* x* x* sqrt(x)+ 5* x* 10* lambda* x- 5*
beta* beta;
end;

begin
    inf:= 0;
    sup:= 1;
    repeat
        val:= value (sup);
        if val < 0 then
            begin
                inf:= sup;
                sup:= sup* 10;
            end;
    until val >= 0;
    repeat
        val:= value (inf+sup) / 2);
        if val < 0 then inf:= (inf+sup) / 2
            else sup:= (inf+sup) / 2;
    until (val= 0) or (sup-inf<=1E-5);
    itam:= (inf+sup) / 2;
end;

Function Arccos (X: Extended): Extended;
Begin
    If X= 1 Then Arccos:= 0
    Else If X= -1 The Arccos:= 3.141592654
    Else Arccos:= 0.785398164- Arctan (X/ Sqrt (Abs (
(1- X*X)))));

```



```

End;

begin
  repeat
    clrscr;
    writeln ( ' Respectati unitatile de masura
indicate in paranteza! ')
  {
    m:= 0.53;
    k:= 5;
    R:= 1.5;
    w:= 100;
    delta:= 0.3;
    FO:= 31.8;
    fi:= pi / 6;
    itaprim_[0]:= 13.86*1E10;
    tau_[0]:= 3.3728;
    write ( ' m (kg fs^2 / m) = ' ); readln (m);
    write ( ' k (kgf/cm) = ' ); readln (k);
    write ( ' R (cm = ' ); readln (R);
    write ( ' omega (rad/s) = ' ); readln (w);
    write ( ' delta (cm) = ' ); readln (delta);
    write ( ' FO (kgf) = ' ); readln (FO);
    write ( ' fi (pi/?) = ' ) readln (i);
    fi:= pi / i;
  {
    write ( ' ita prim 0 = ' ); readln (itaprim_ [0]);
    write ( ' tau 0 = ' ); readln (tau_[0]);
    kl:= 2/ (3* 0.9324)* 1.9* 1E6* sqrt (R/ 2);
    a:= sqrt (kl/ k)* delta;
    b:= FO* sqrt (kl) / (k* k* k);
    p:= w* sqrt (m/ k);
  {
    a:=1.611E10;
    b:=34.2E10;
    p:= 3.26;}
    lambda:= a+ b* sin(fi);
    tau:= b/ (1- p* p);
    beta:= -a+ p* cos(fi)* (tau- a) - tau* p* sin(2*
fi) / 2;
    calc_itam;
  {
    itam:= 9.074* 1E8;}
    m_[0]:= 1;
    ita_[0]:= 0.08* itam;
    n_[0]:= 0;

    m_[1]:= 1+ 0.792* sqrt (itam);
    ita_[1]:= 0.494* itam;
    n_[1]:= -0.06336* itam* sqrt (itam);
  }
  }
  }

```

## ANEXA 2

```

m_[2]:= 1+ 1.292* sqrt (itam);
ita_[2]:= 0.908* itam;
n_[2]:= -0.31* itam* sqrt (itam);

m_[3]:= 1+ 1.792* sqrt (itam);
ita_[3]:= 1.322* itam;
n_[3]:= -0.55664* itam* sqrt (itam);
m_[4]:= 1+ 2.292* sqrt (itam);
ita_[4]:= 1.736* itam;
n_[4]:= -0.80328* itam* sqrt (itam);

m_[5]:= 1+ 2.292* sqrt (itam);
ita_[5]:= 2.15* itam;
n_[5]:= -1.04992* itam* sqrt (itam);
ita_[3]:= 0.162* itam;
for i:= 0 to 1 do
begin
    itaprim_[i+ 1]:= sqrt (abs (sqr (itaprim_[i] )
-
    2* m_[i]* (ita_[i+1]- ita_[i] ) *
    ( (ita_[i+1]- ita_[i]) / 2+
      (a+ n_[i] / m_[i] -
        b/ (m_[i] - p*p) ) ) ) );
end;
itaprim_[3]:= 0;
for i:= 0 to 3 do
    writeln ( ' ita prim ' , i, ' : ' , itaprim_[i]:
20: 5);
for i:= 0 to 2 do
    writeln ( ' ita prim ' , i+ 4, ' : ' , -
itaprim_[i]: 20: 5);
for i:= 0 to 5 do
begin
    csi:= arctan (sqrt (m_[i] ) * (ita_[i]+ (a+ n_[i] /
m_[i]+ b / (m_[i] - p*p) * sin (p* tau_[i] ) ) ) /
    (itaprim_[i] + b*p*cos (p*tau_[i] / (m_[i] -
p*p) ) ) );
    tau_[i+ 1]:= (arccos (itaprim_[i+ 1] / ita_[i]*
cos(csi) ) + csi) / sqrt (m_[i] ) + tau_[i] ;
    end;
    for i:= 0 to 6 do
        writeln ( ' tau ' ; i, ' : ' , tau_[i]: 20:
5);
def:= itam* sqr(k / k1);
writeln ( ' Deformatia maxima: ' , def: 20: 5, ' cm. ');
writeln ( ' Forta maxima Pmax: ' , k1* def* sqrt(def): 20:
5, ' kgf. ');

```

## ANEXA 2

---

```
writeln ( ' Terminare program ? D / N' );  
    until upcase (readkey)= ' D ' ;  
end.
```

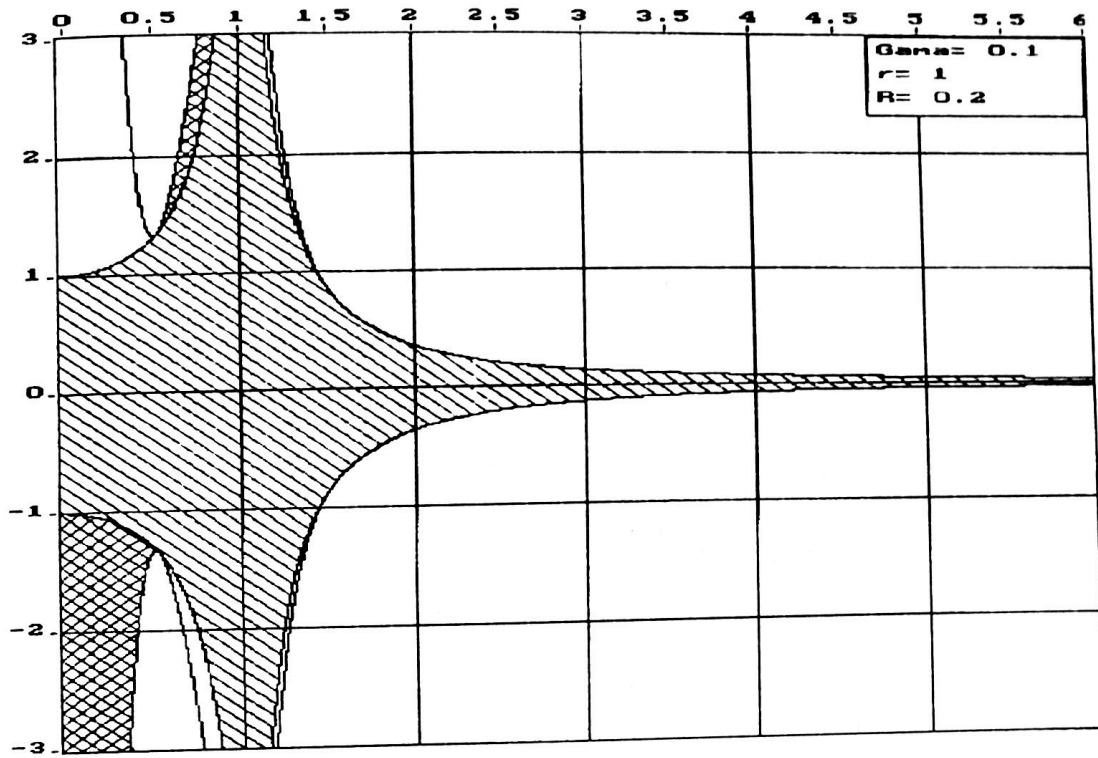


Fig.1

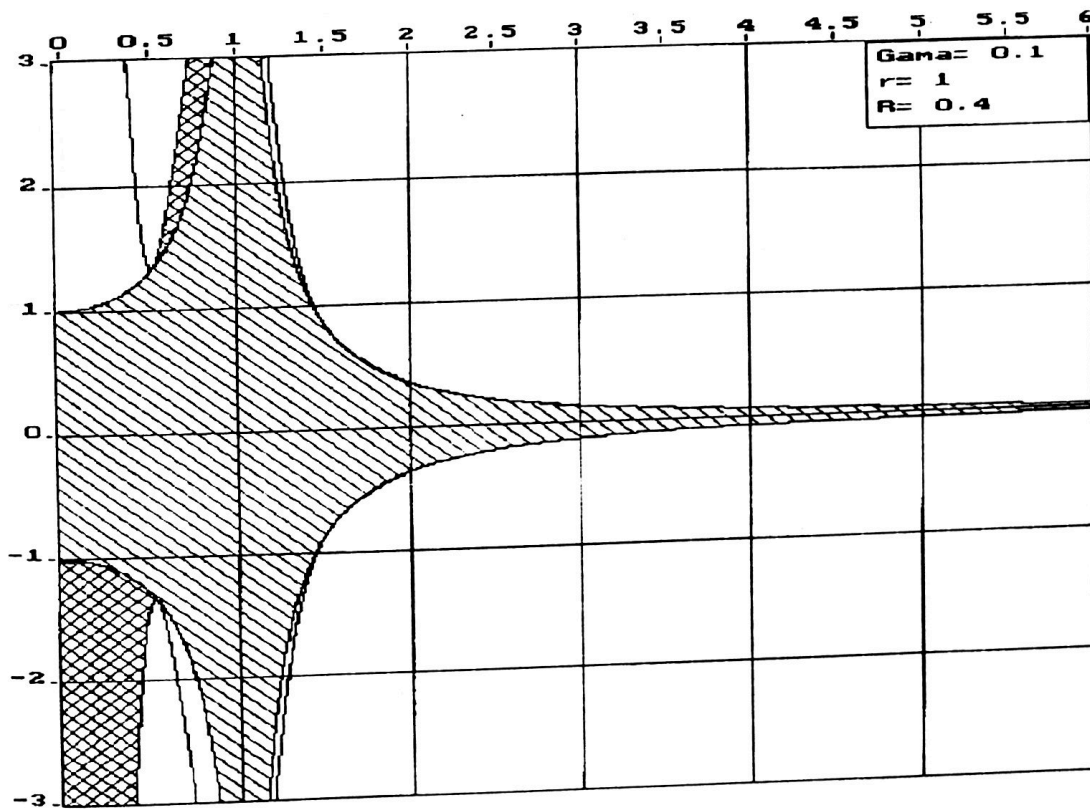


Fig.2

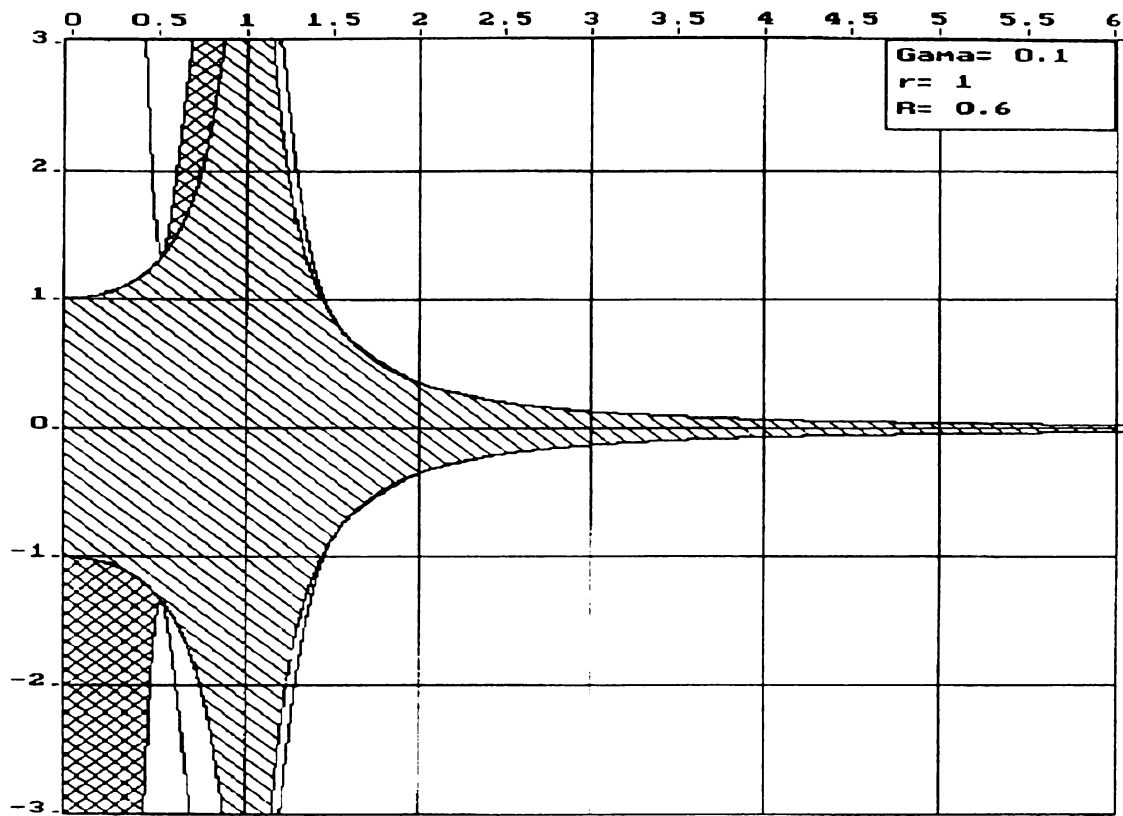


Fig.3

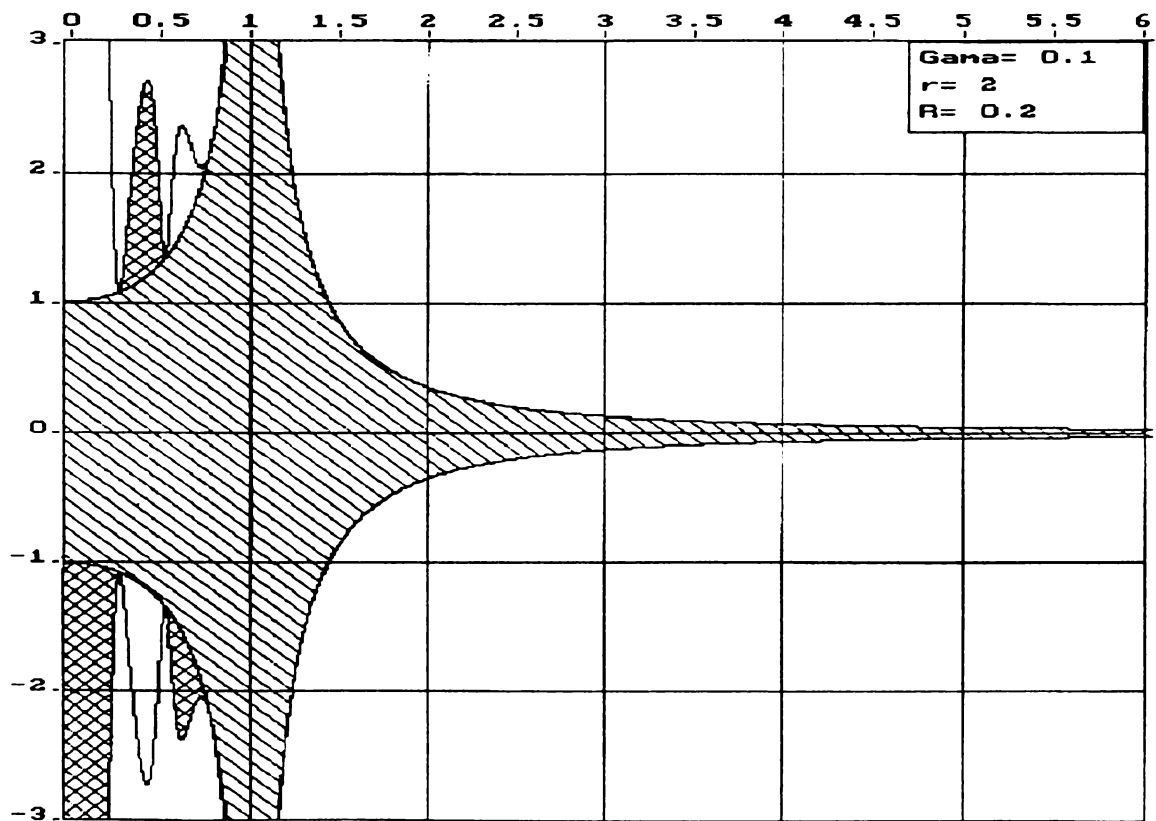


Fig.4

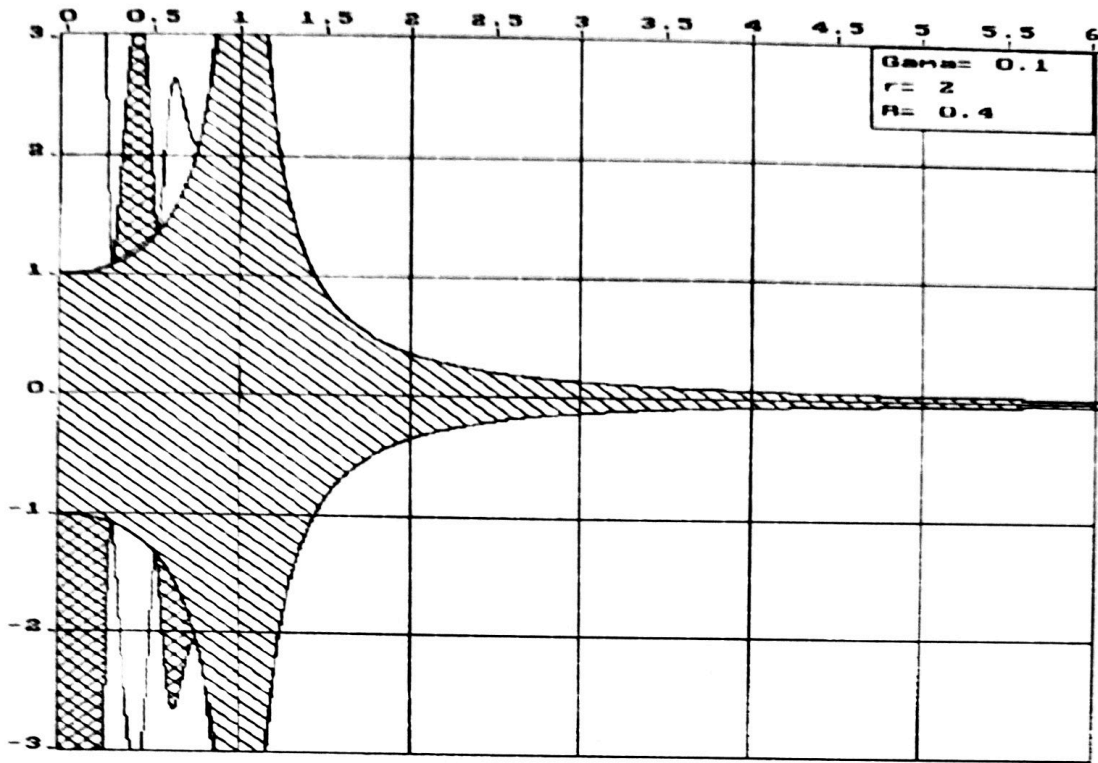


Fig.5

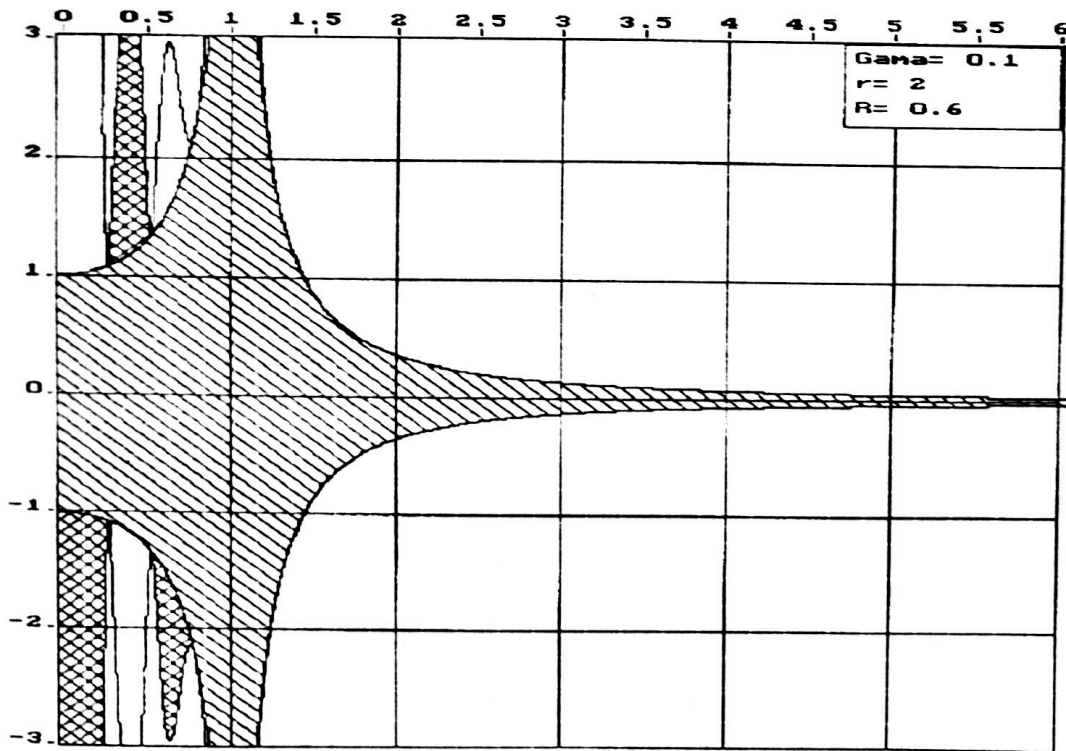


Fig.6

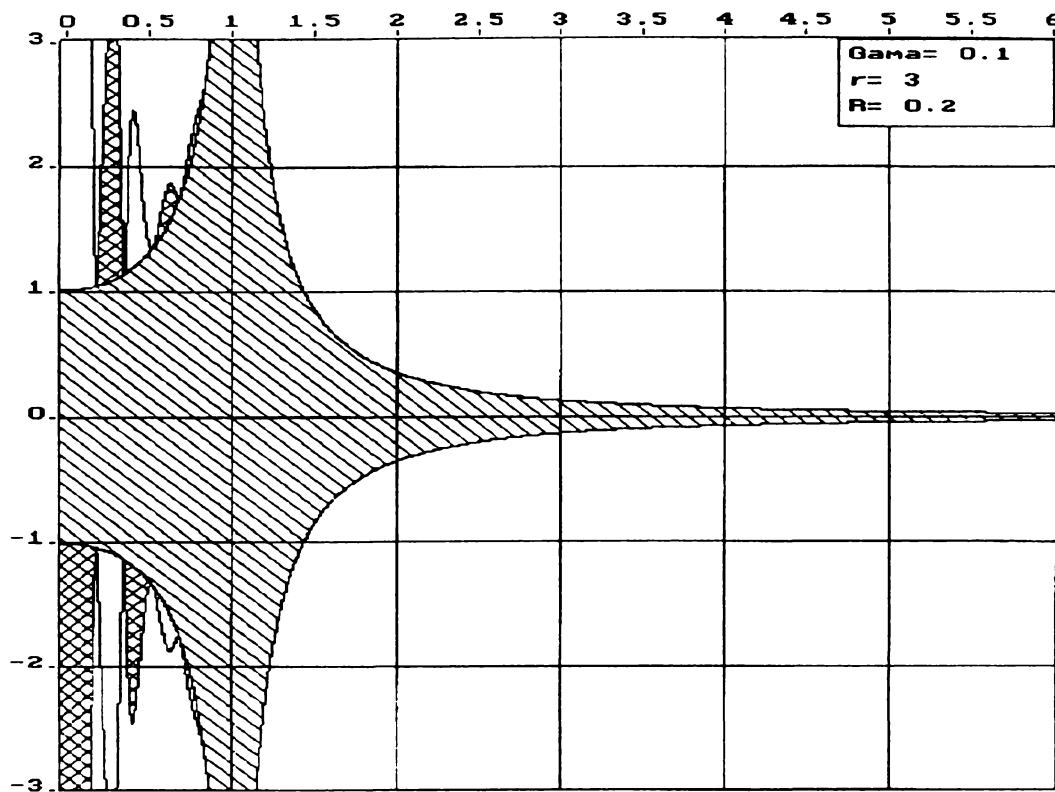


Fig.7

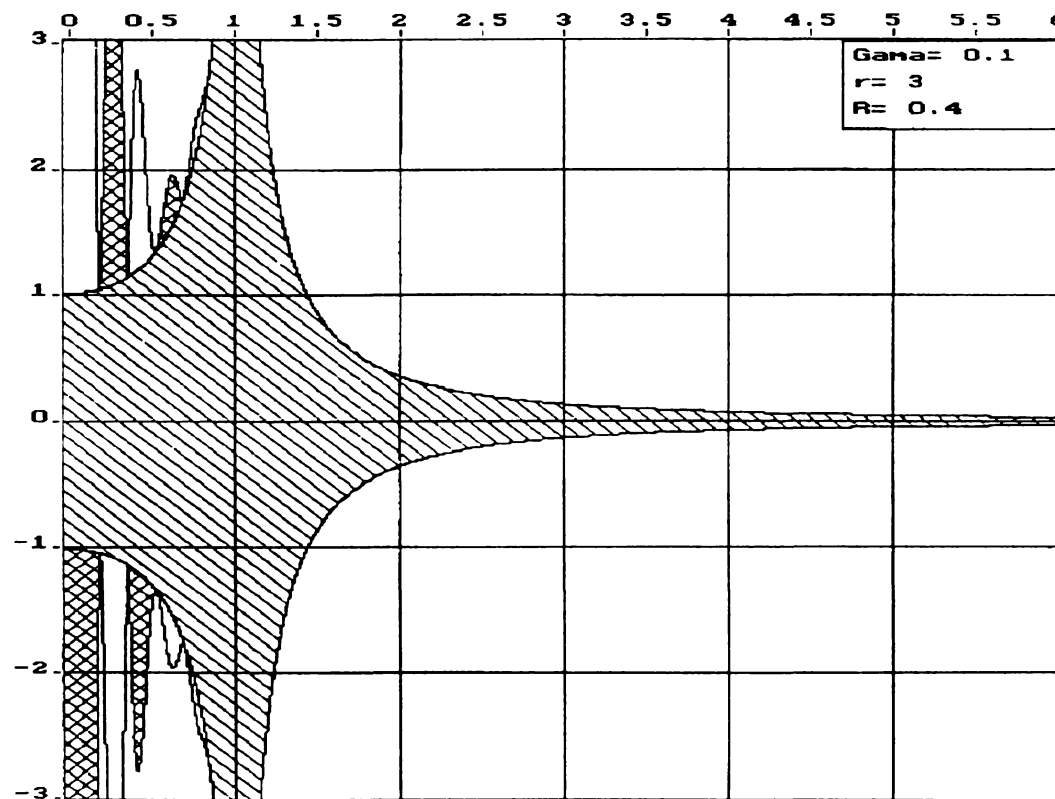


Fig.8



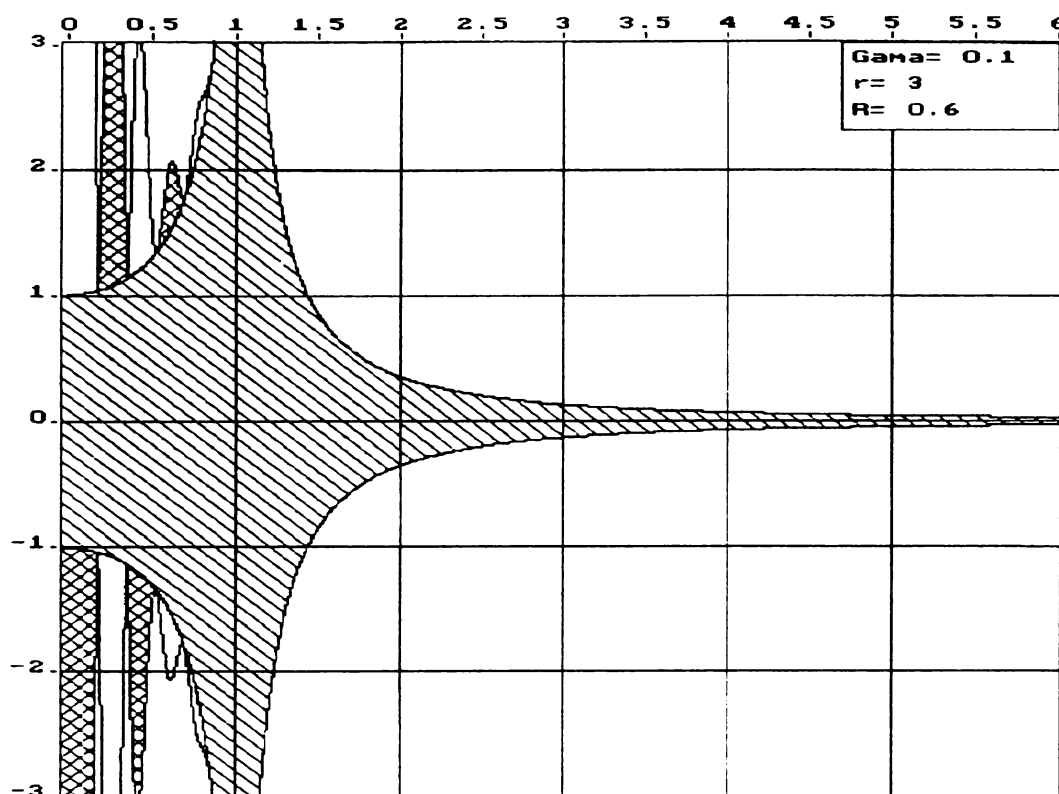


Fig.9

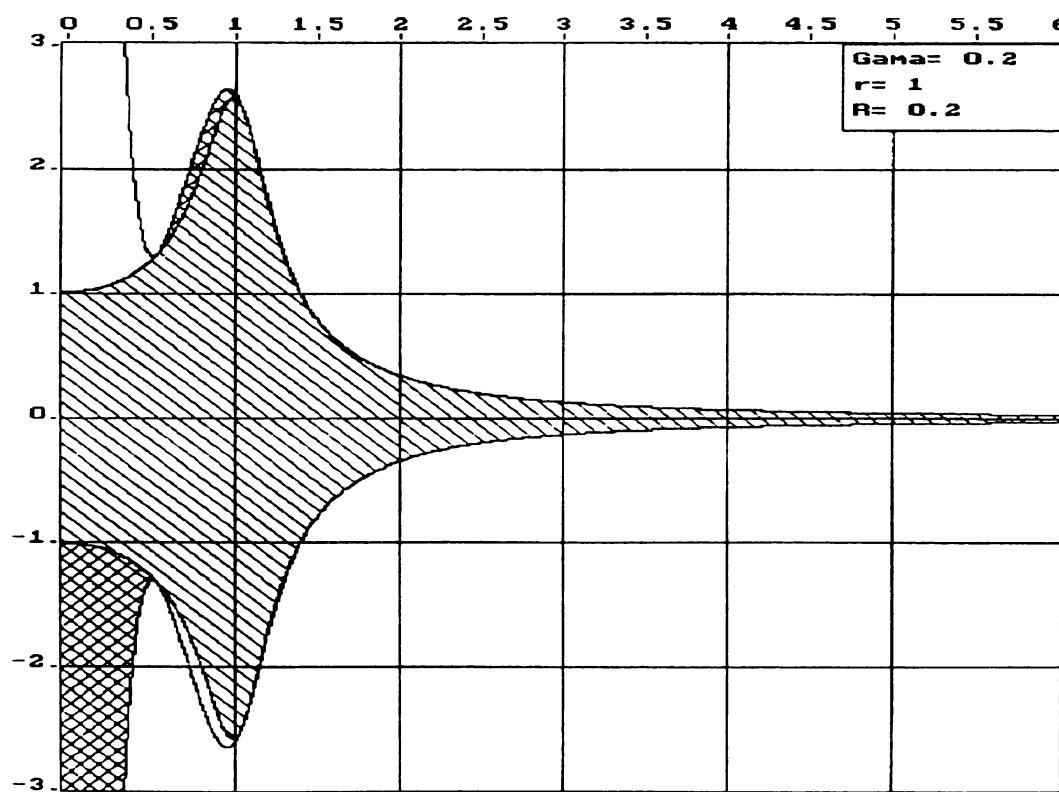


Fig.10



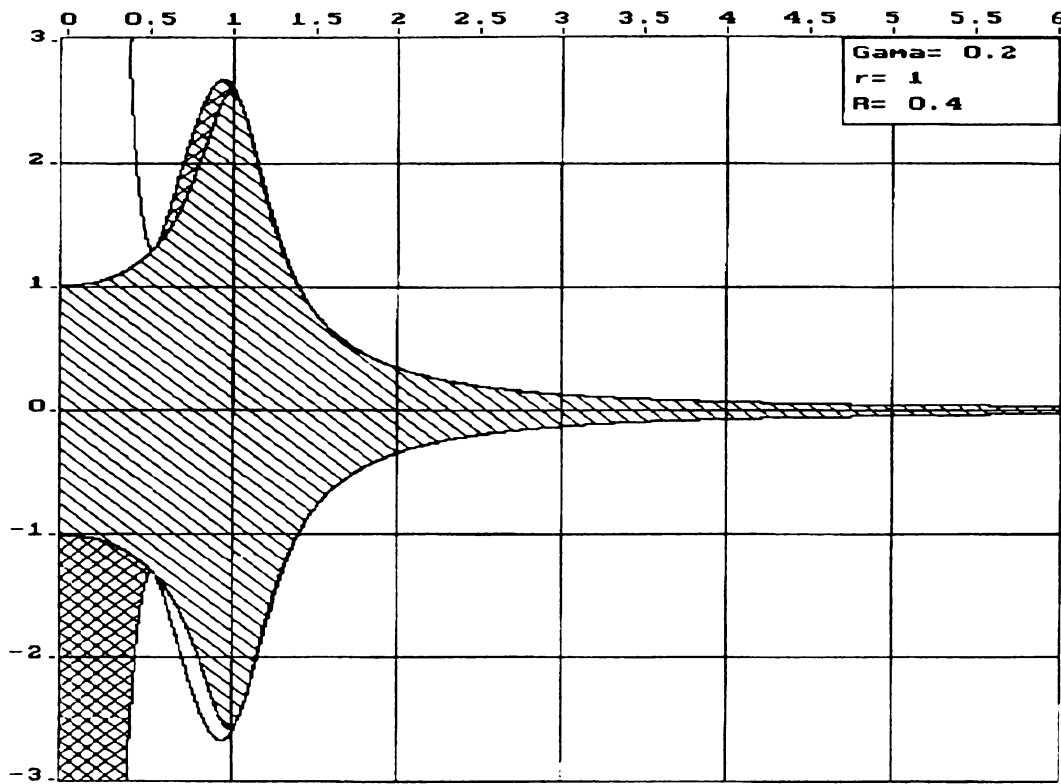


Fig.11

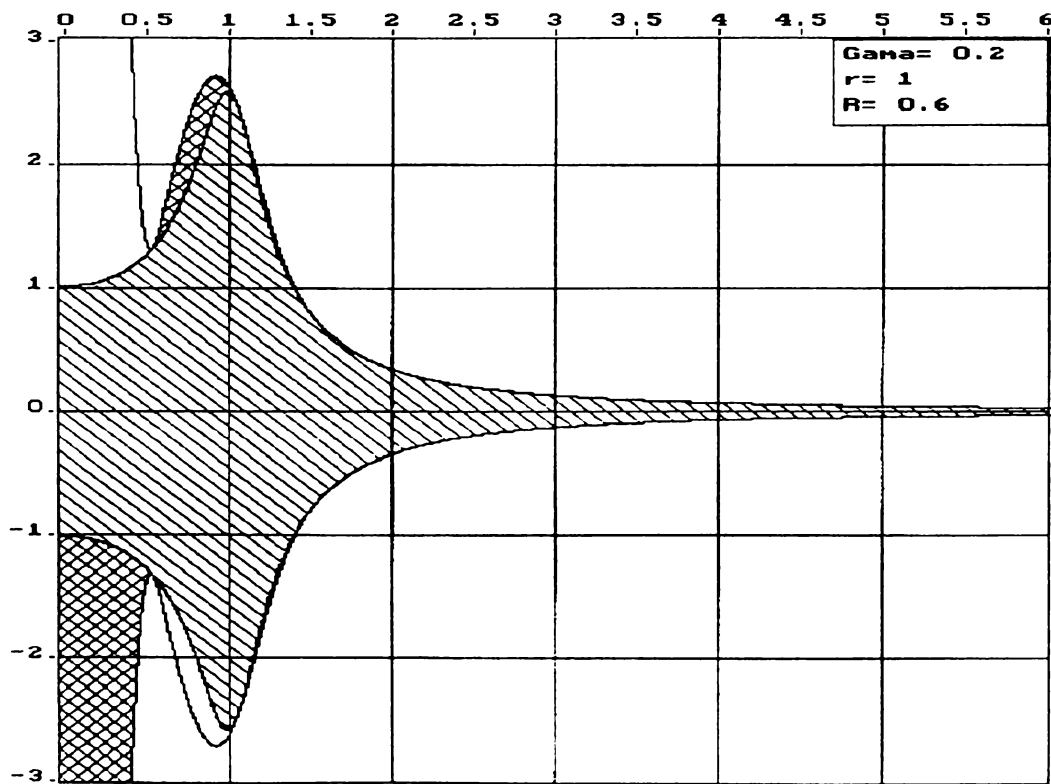


Fig.12

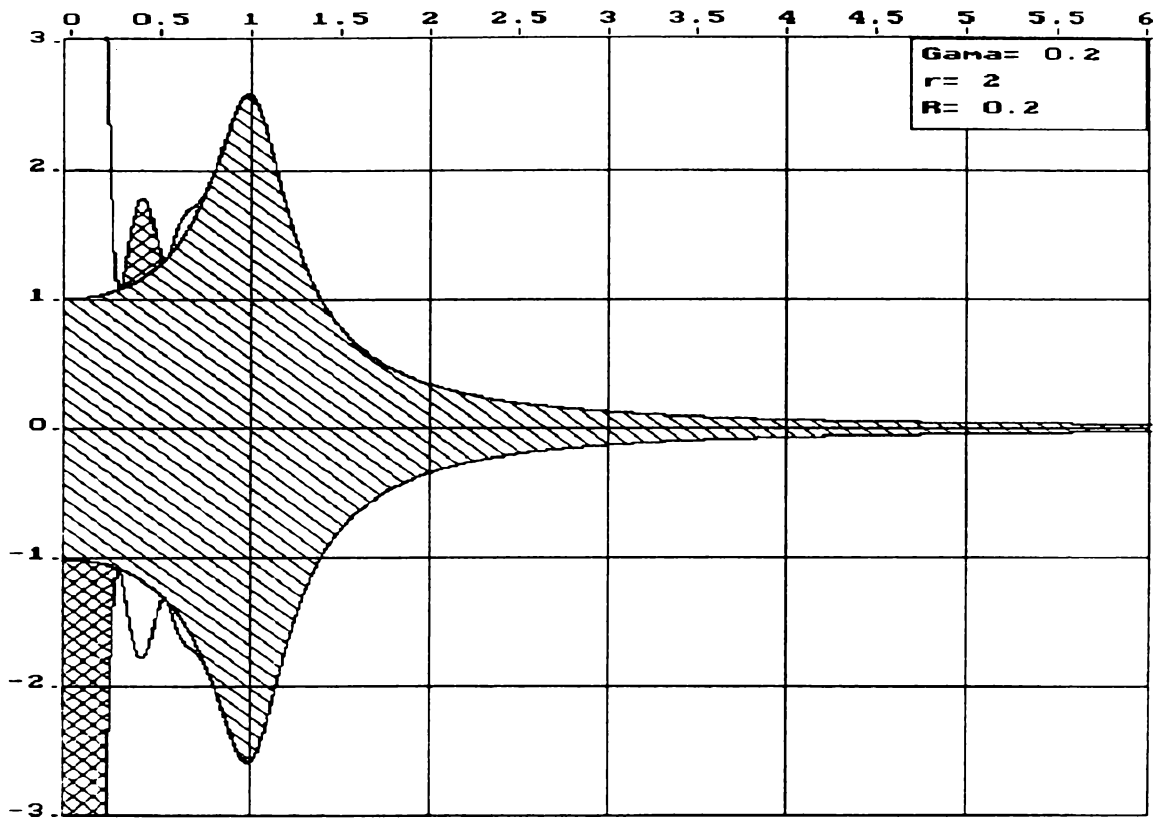


Fig.13

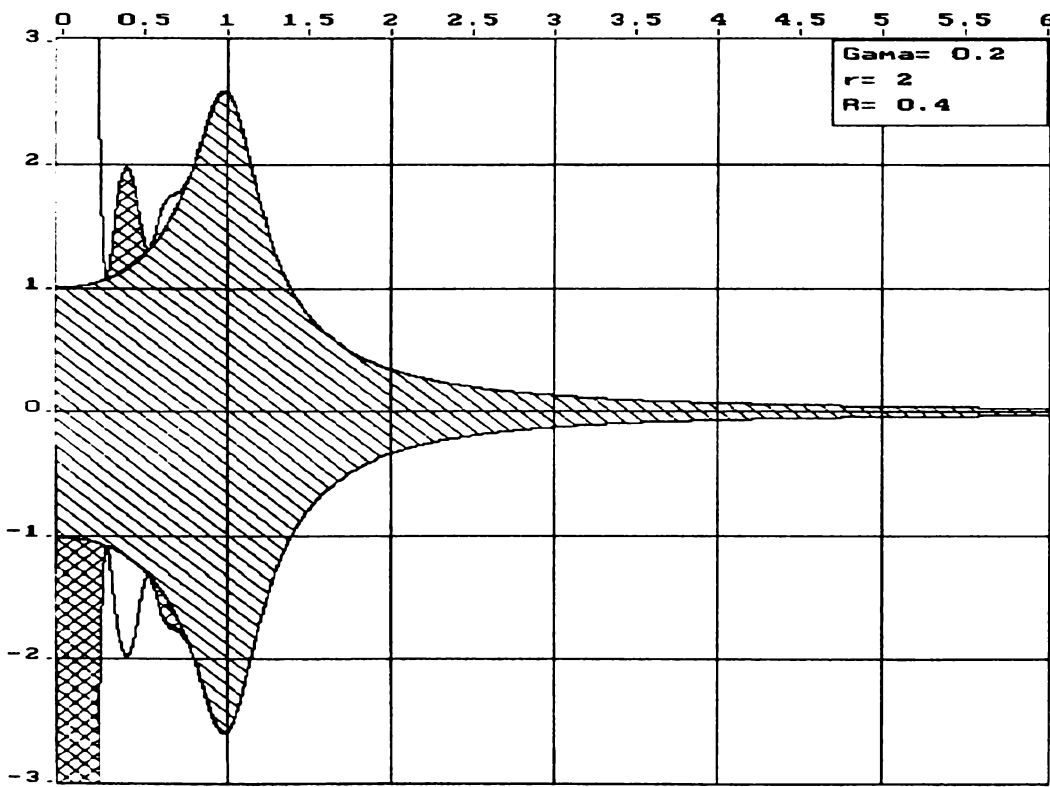


Fig.14

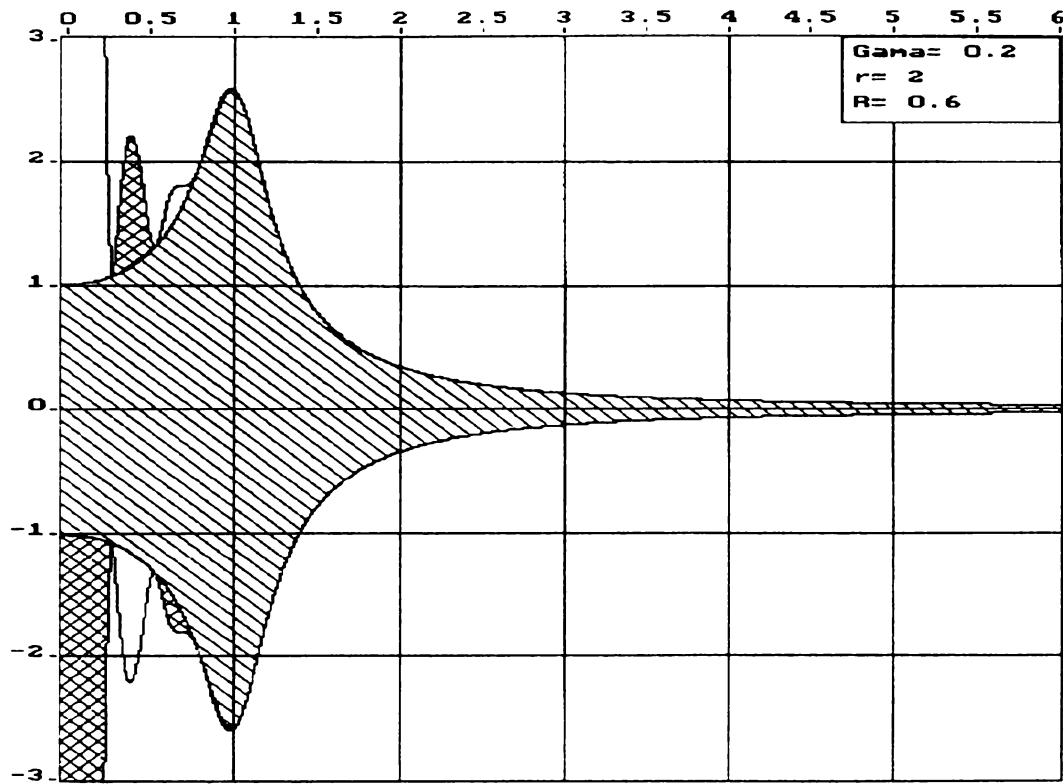


Fig.15

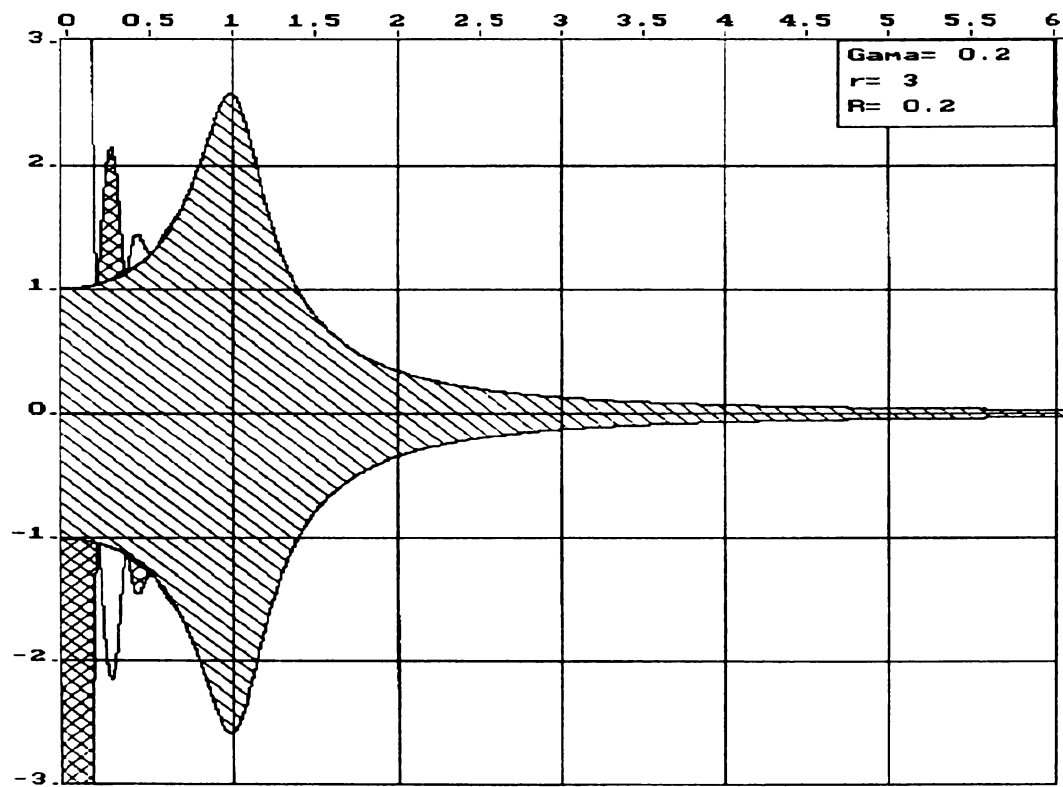


Fig.16

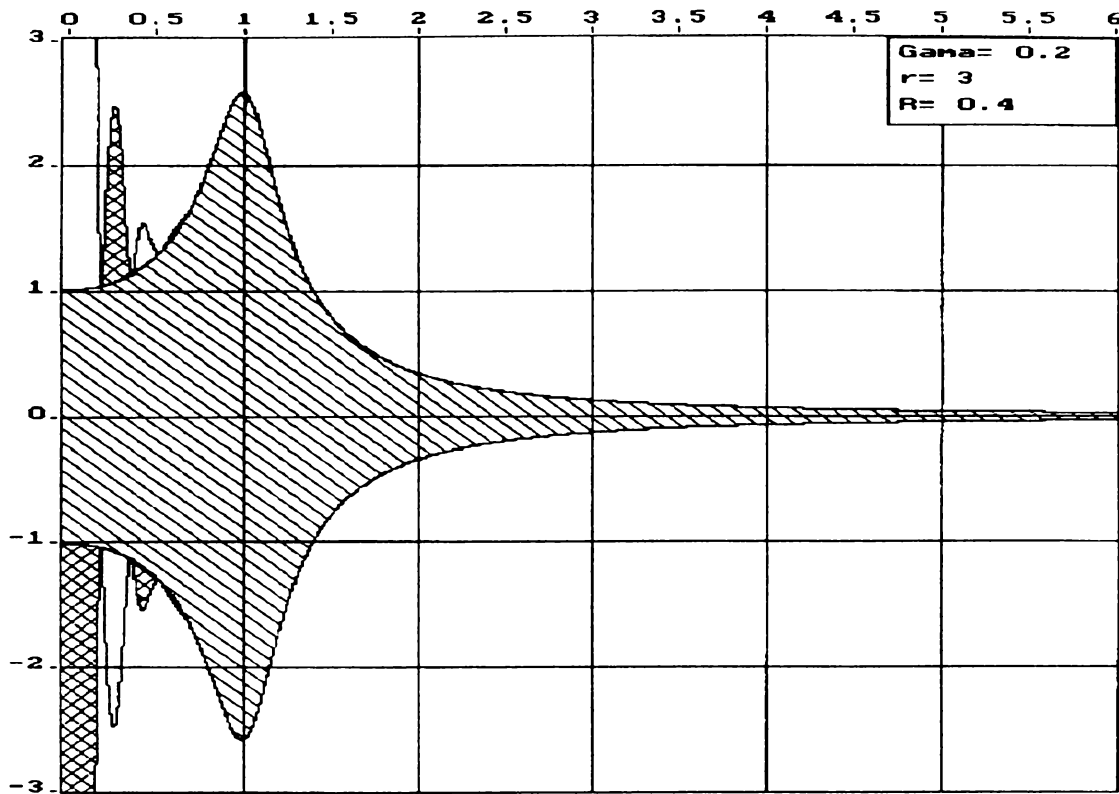


Fig.17

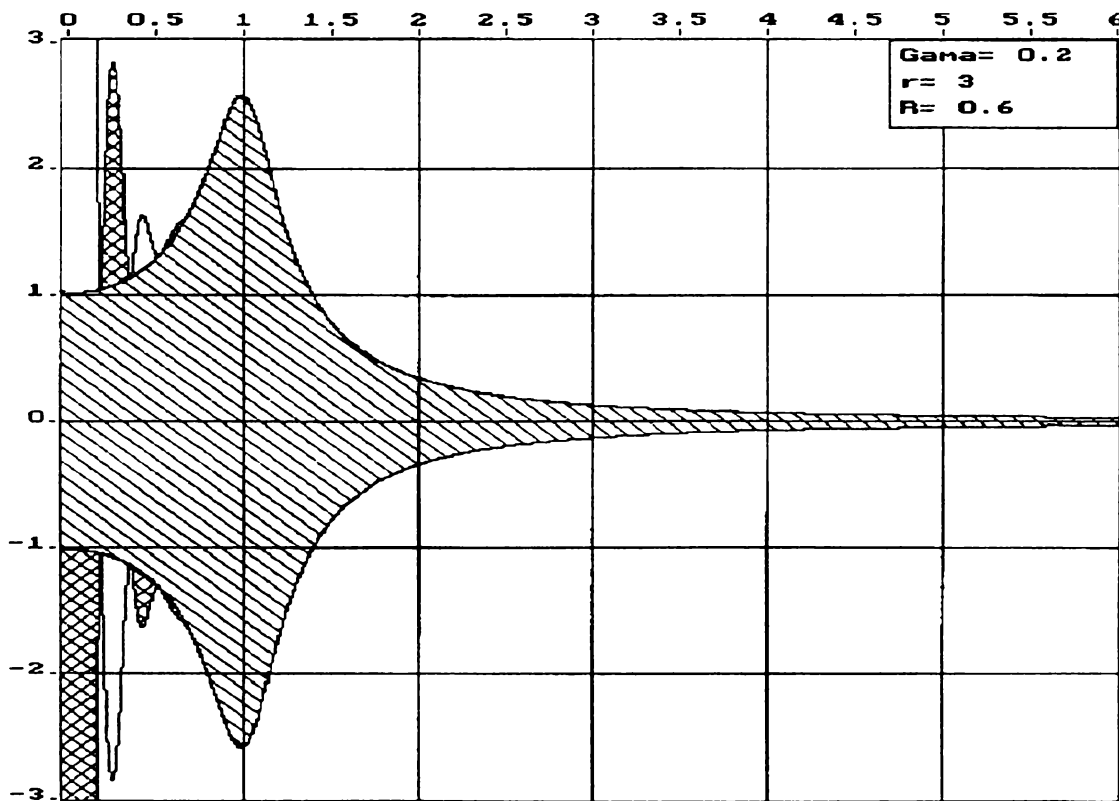


Fig.18

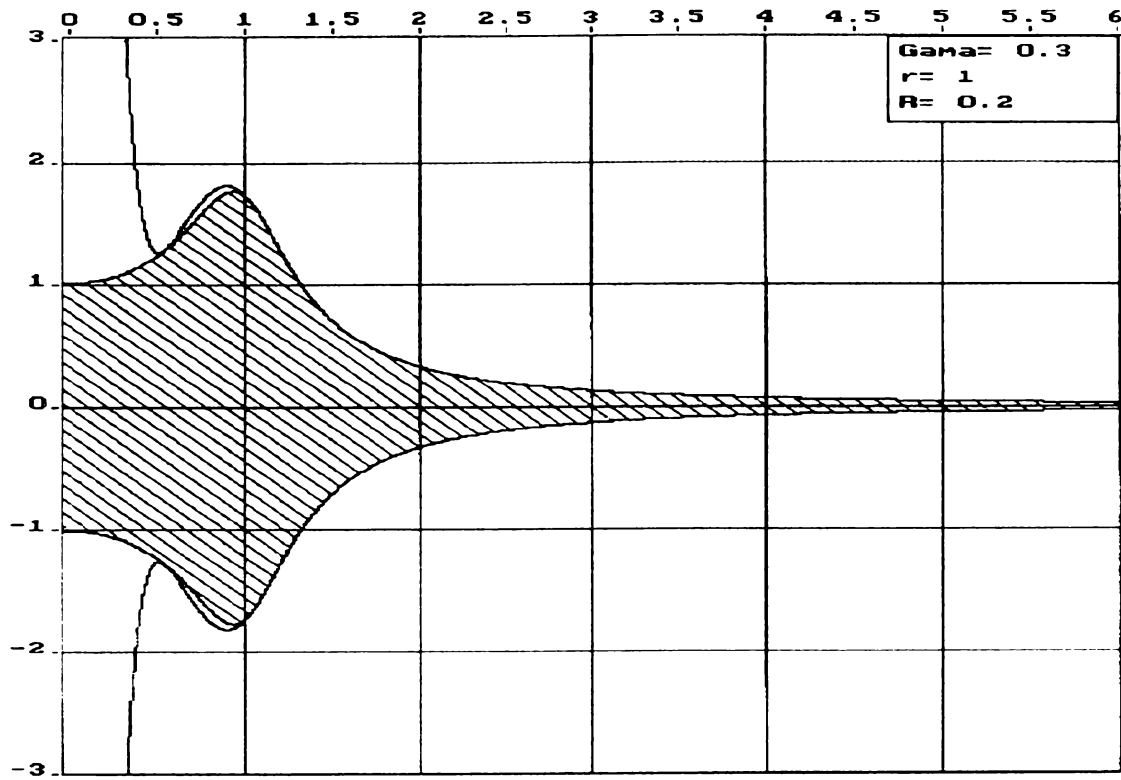


Fig.19

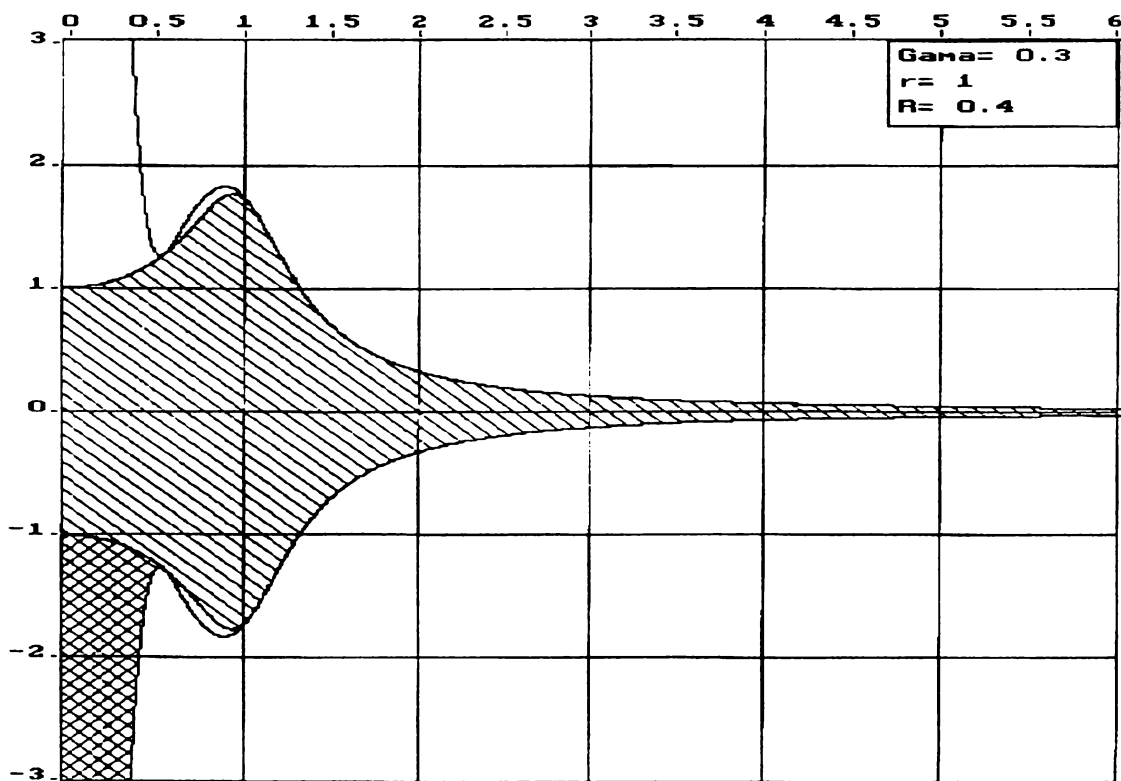


Fig.20

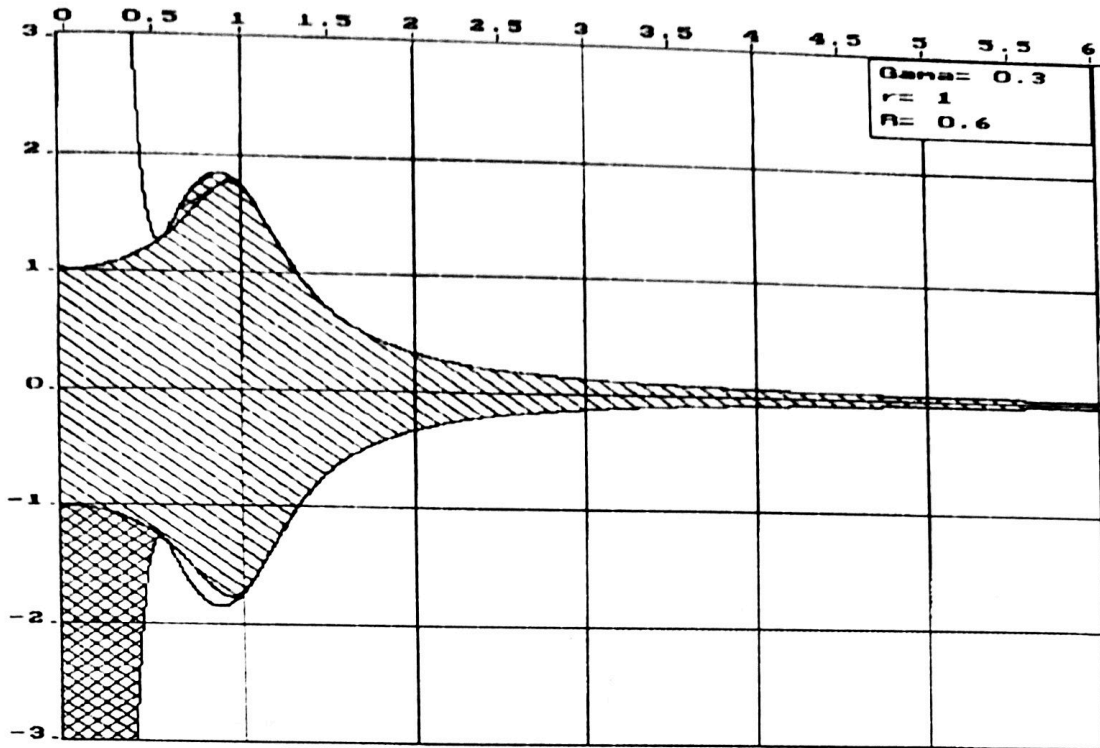


Fig. 21

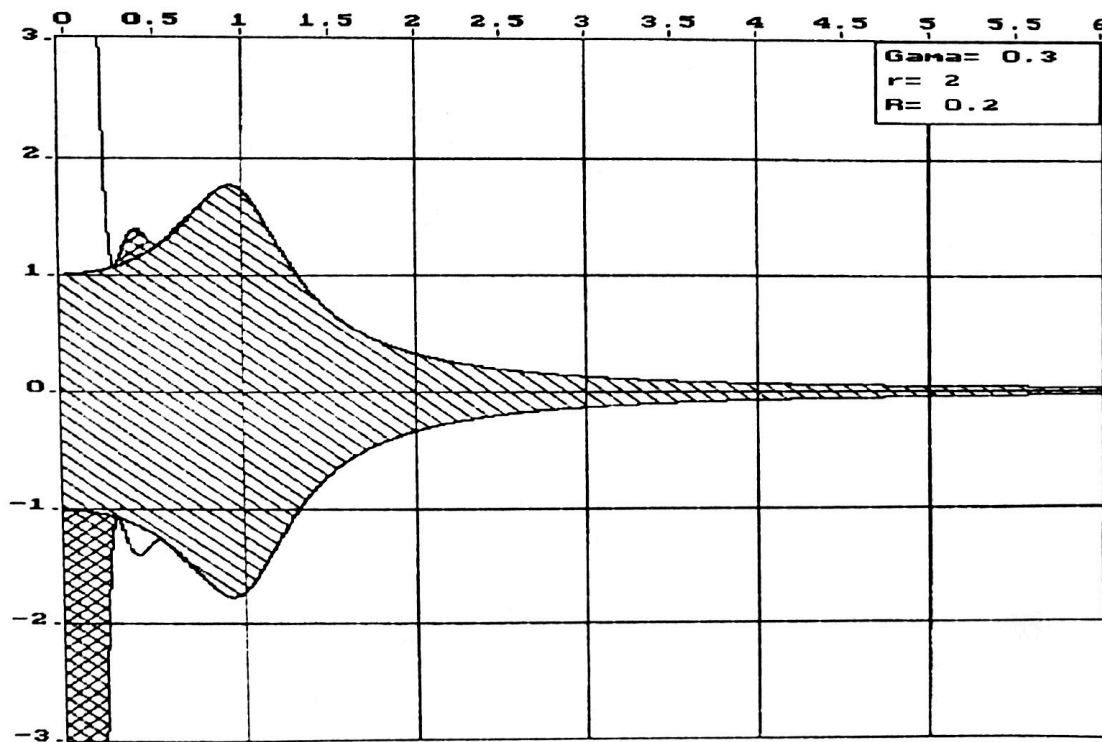


Fig. 22

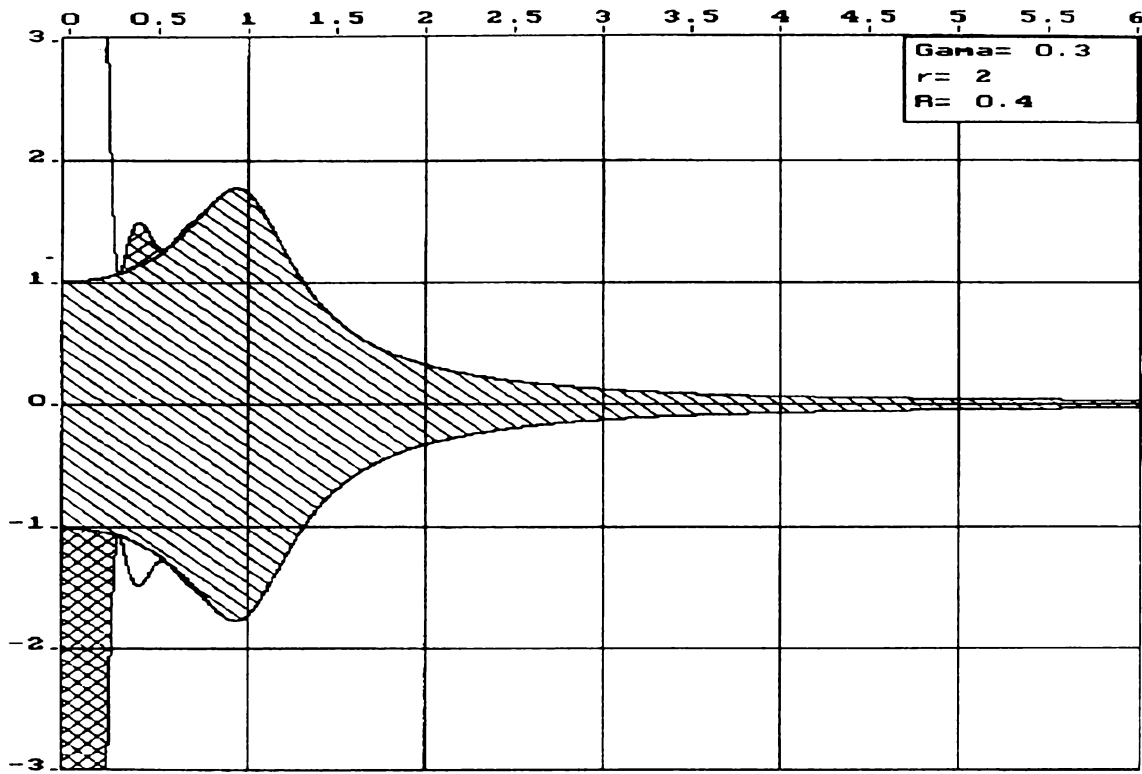


Fig.23

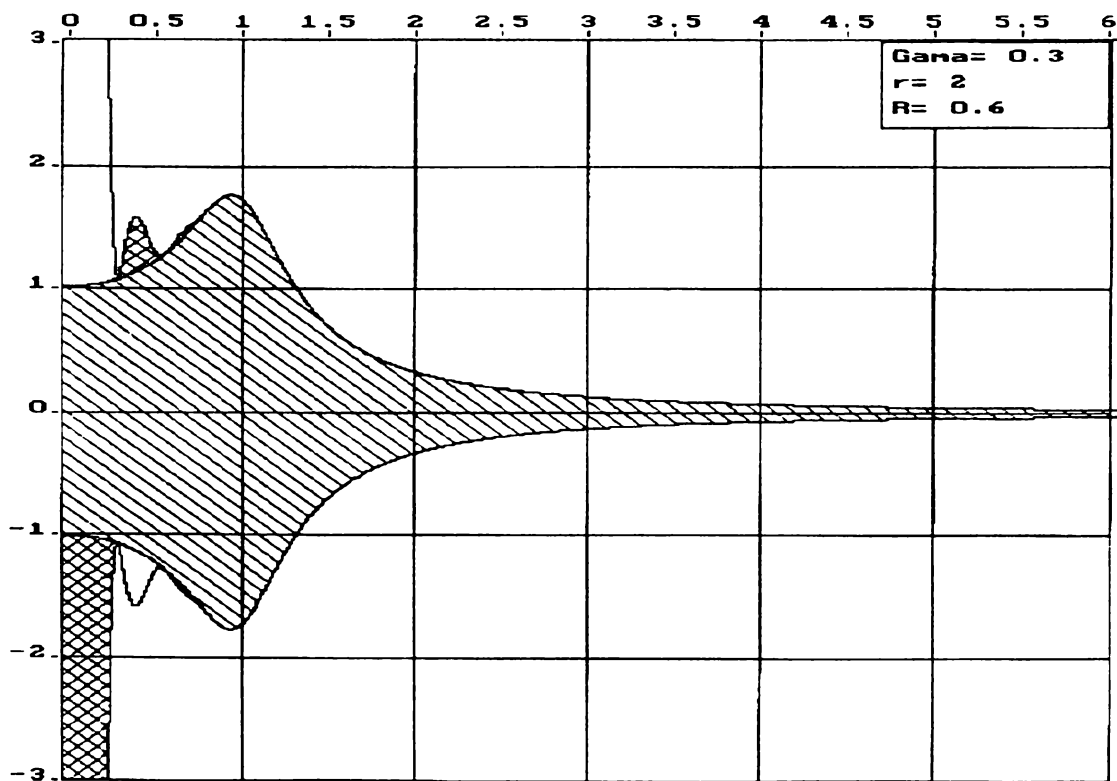


Fig.24

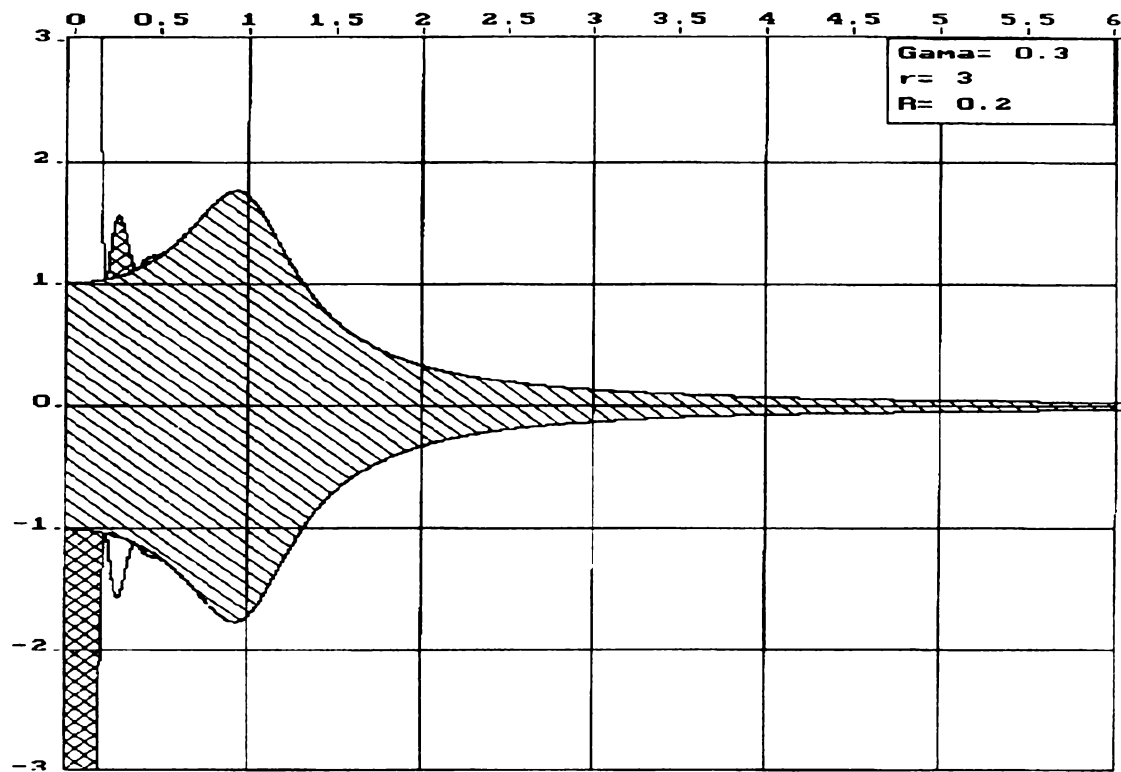


Fig.25

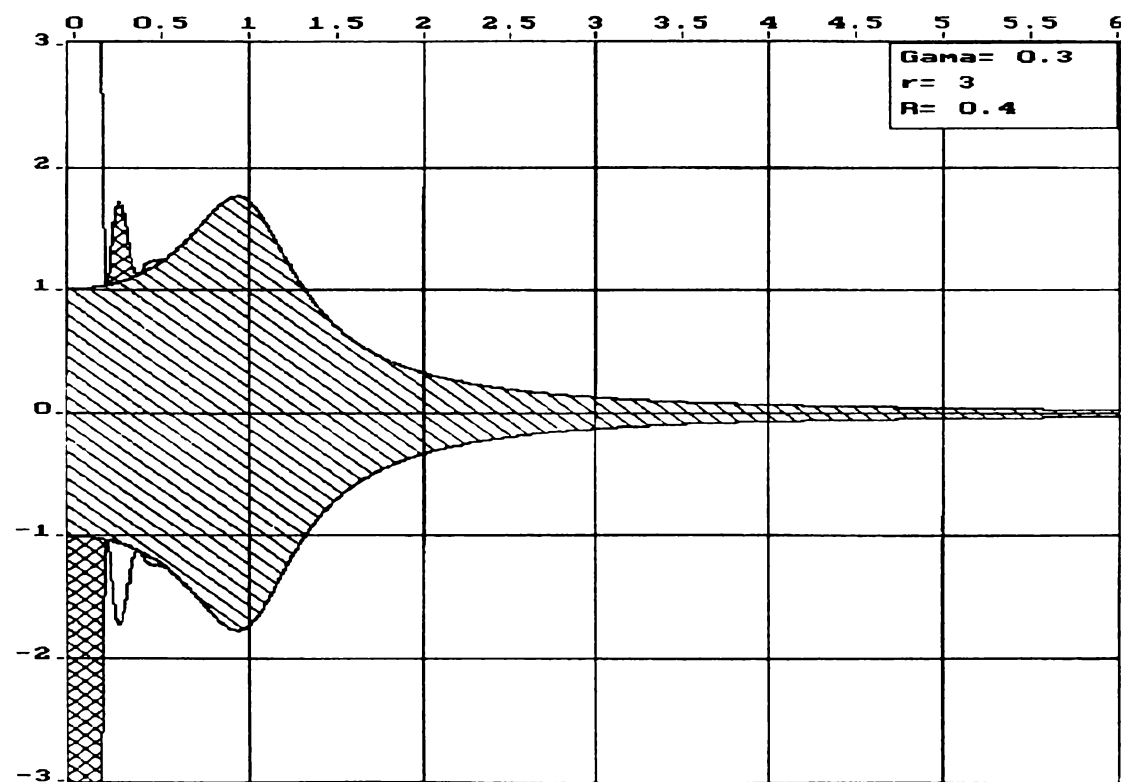


Fig.26



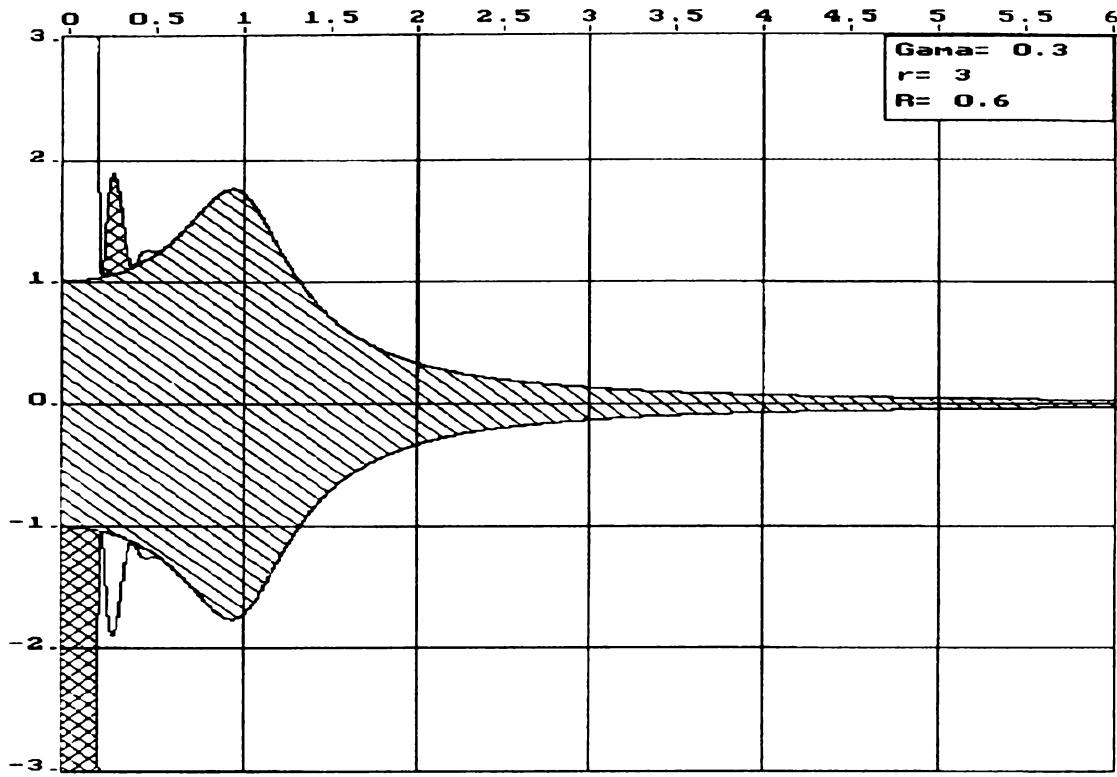


Fig.27

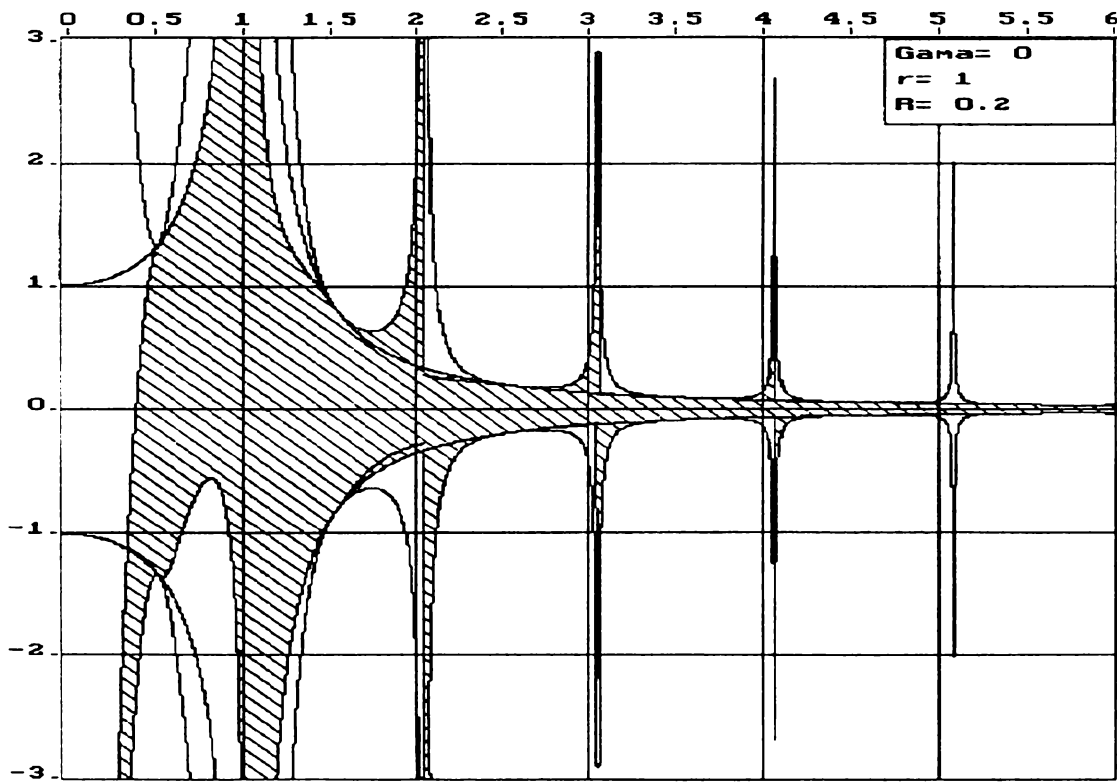


Fig.28

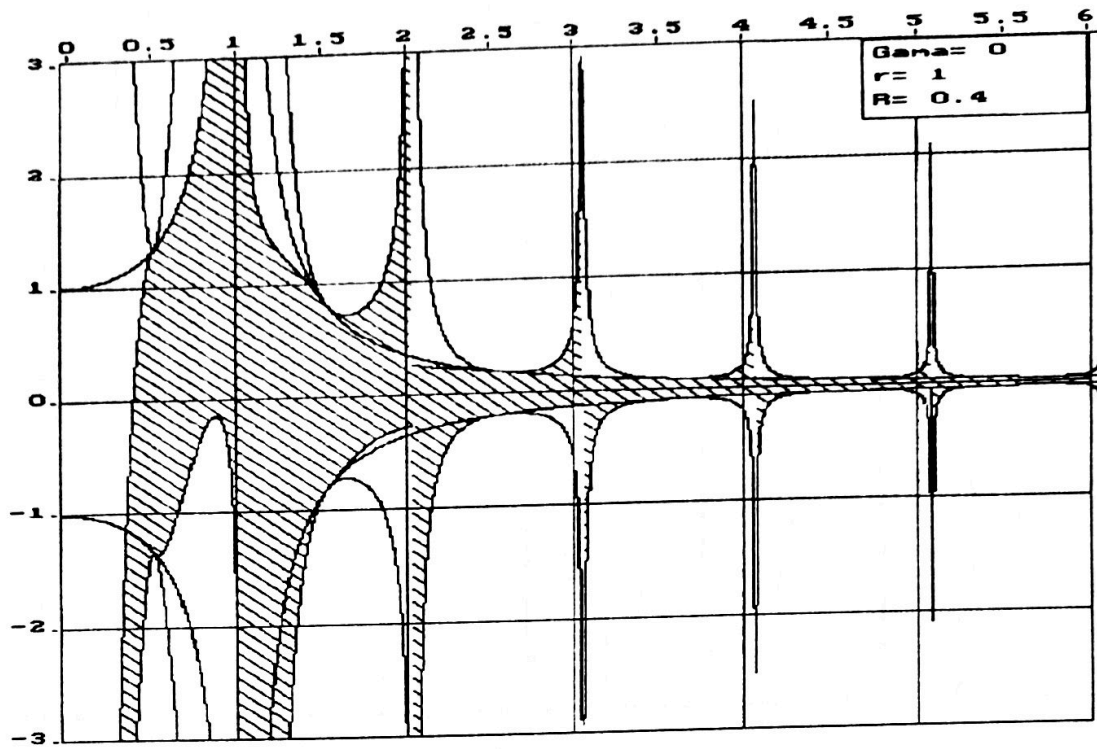


Fig.29

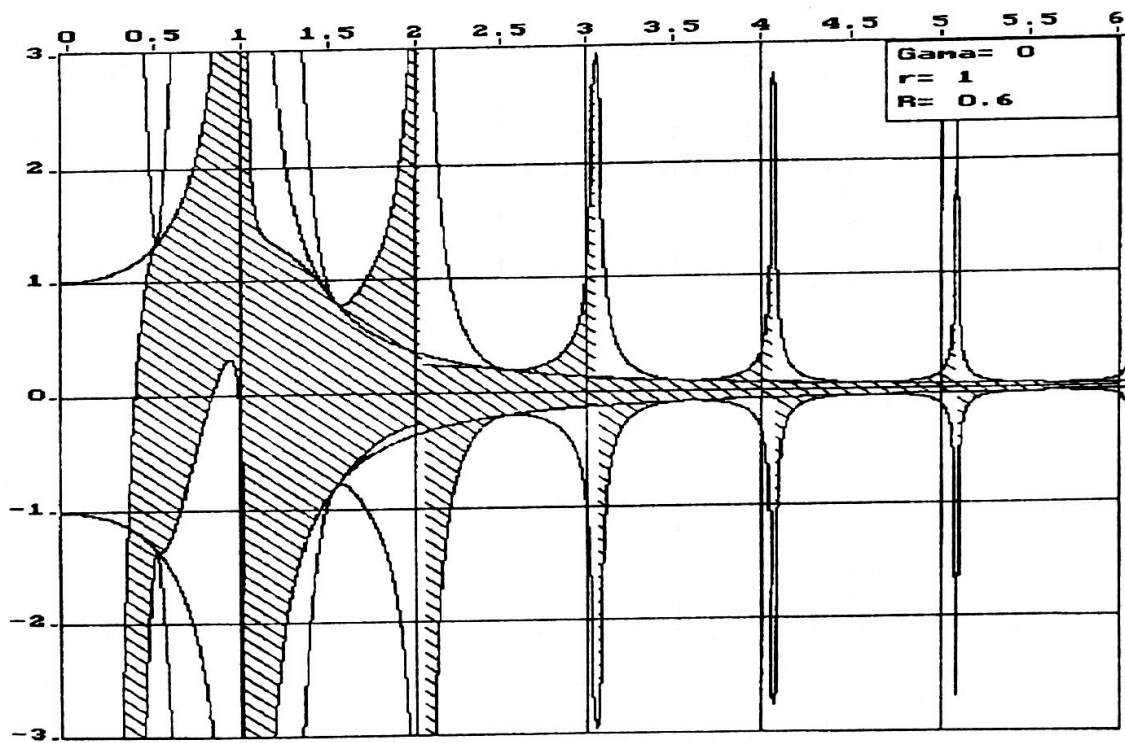


Fig.30

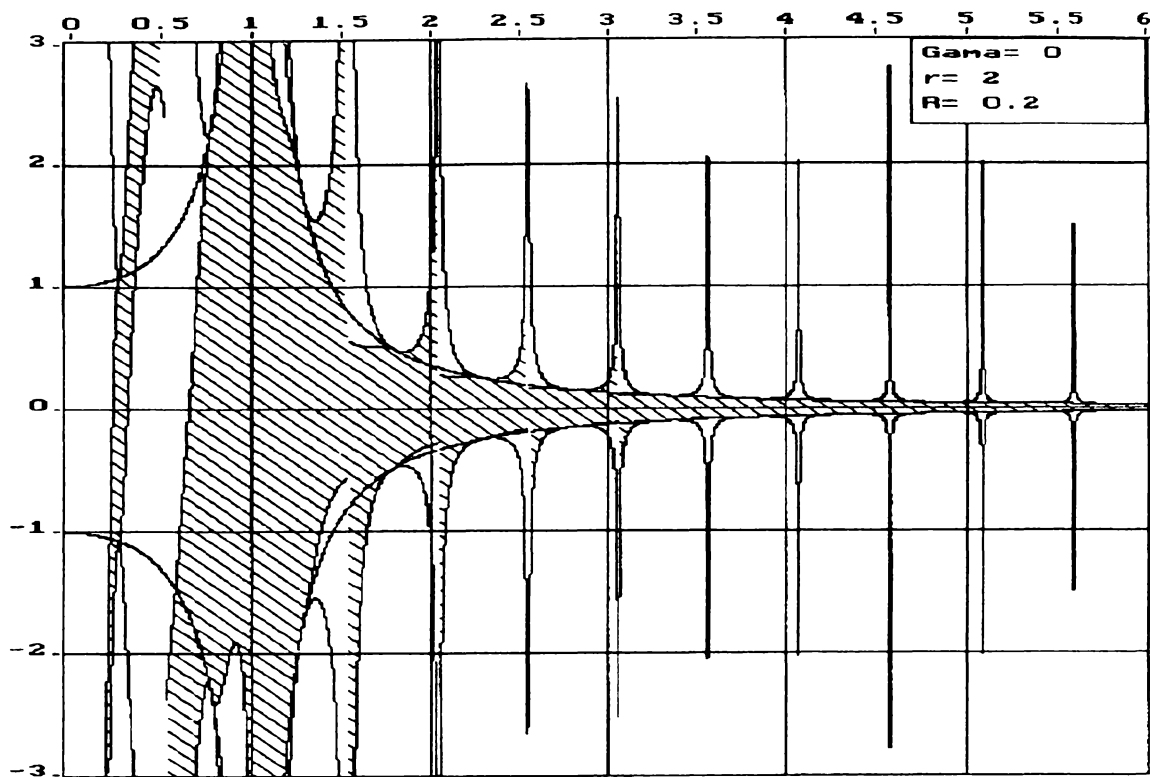


Fig.31

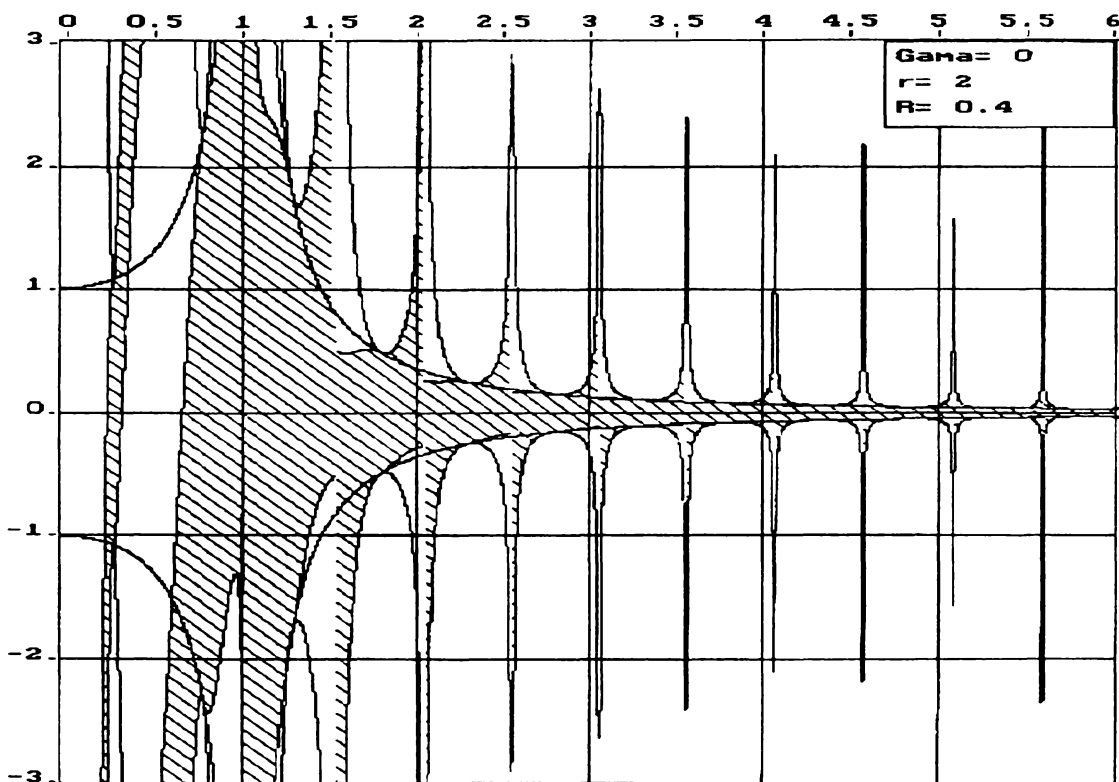


Fig.32

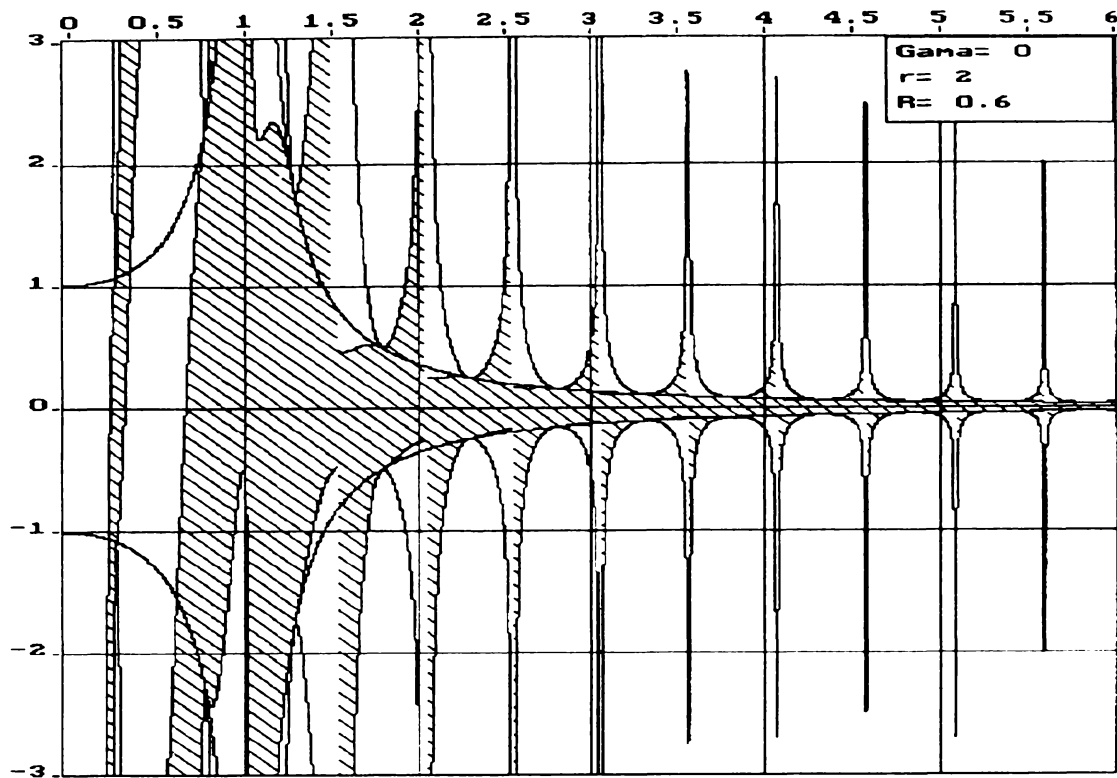


Fig.33

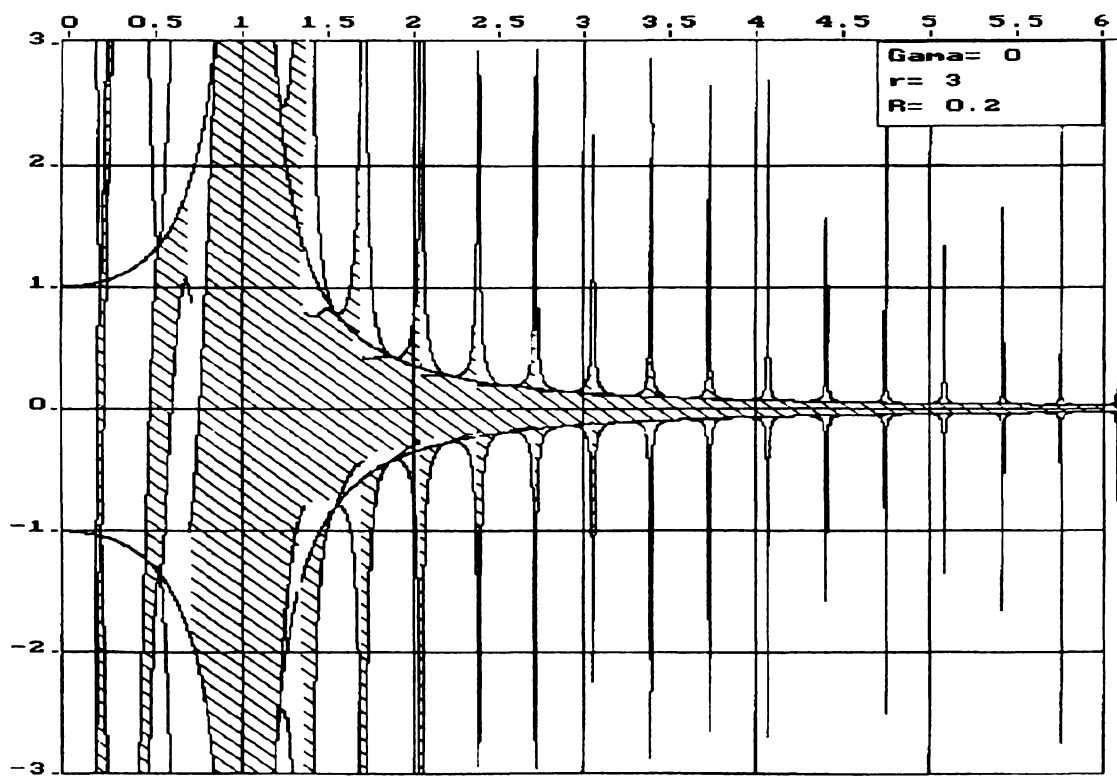


Fig.34

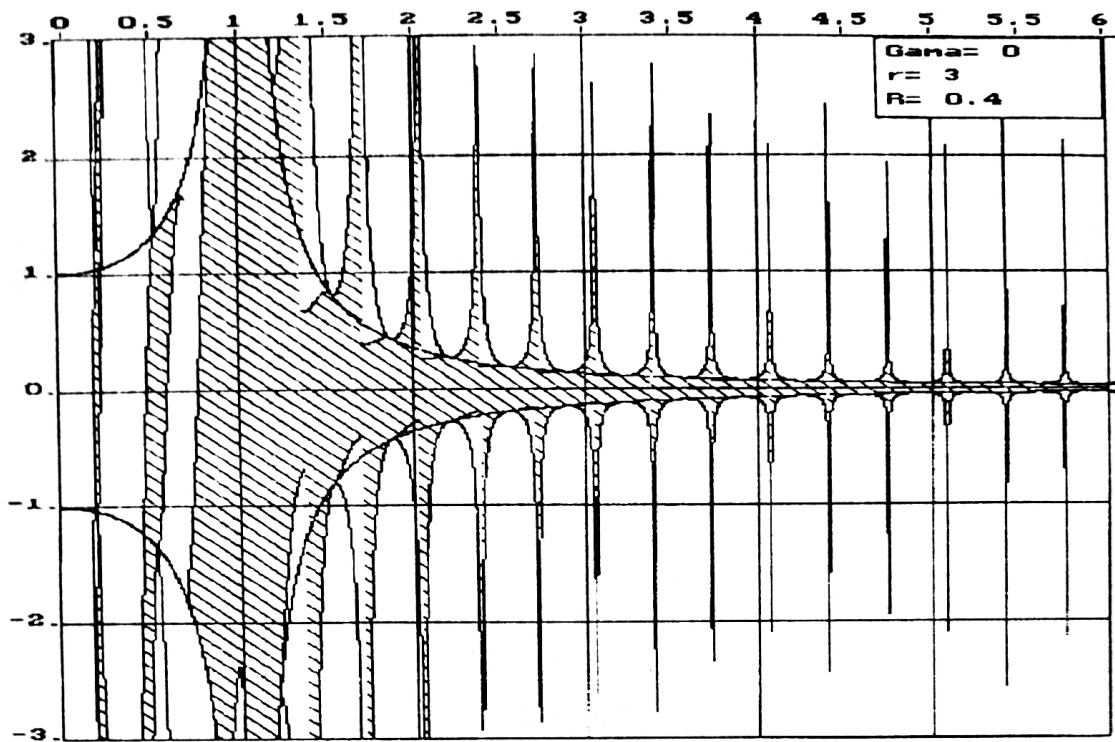


Fig.35

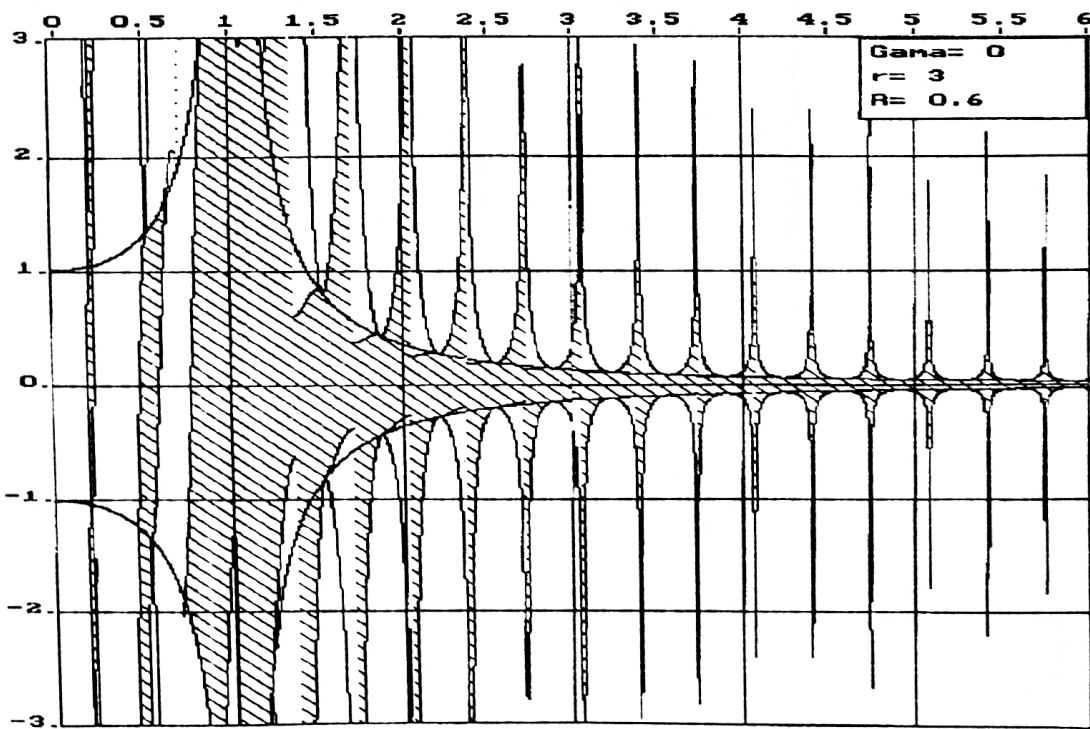


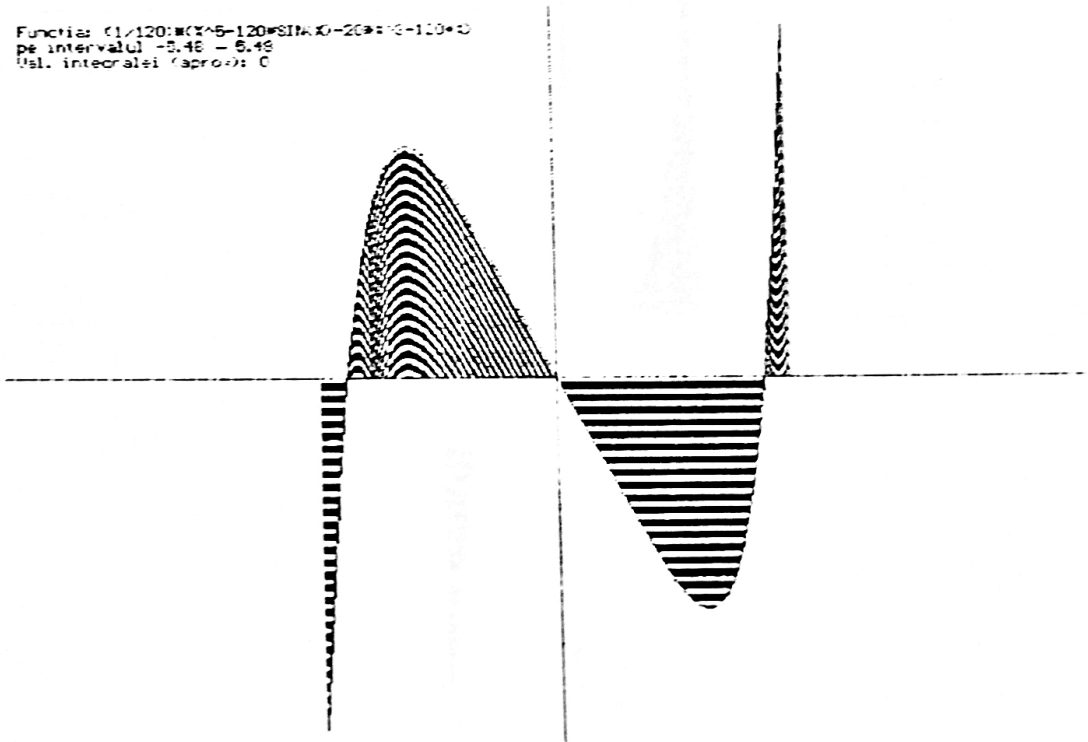
Fig.36

Funcția:  $1 - \cos(x)$   
 pe intervalul  $[-\pi; \pi]$   
 Val. integralei (aprox): 21.999999



*Integr.1*

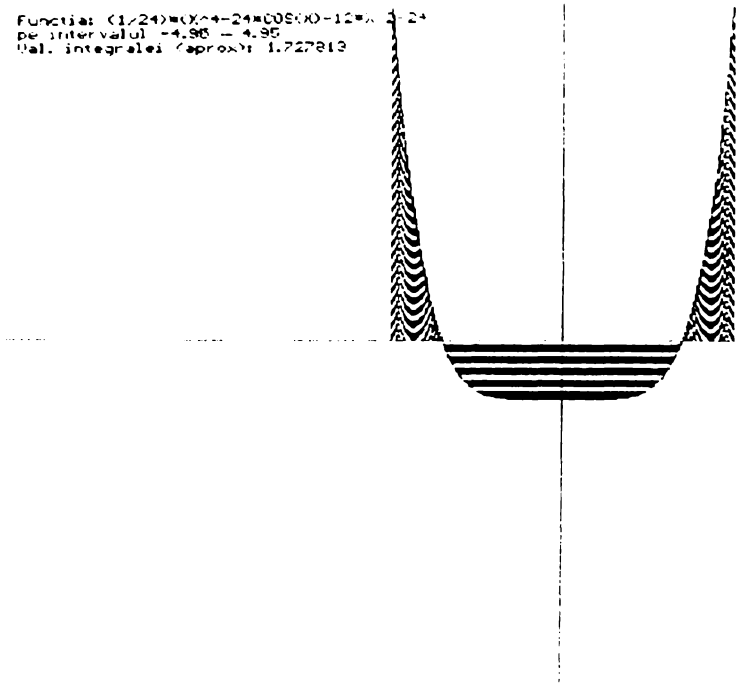
Funcția:  $(1/120) * (x^5 - 120 * \sin(x) - 20 * x^3 - 120 * x)$   
 pe intervalul  $[-\pi; \pi]$   
 Val. integralei (aprox): 0



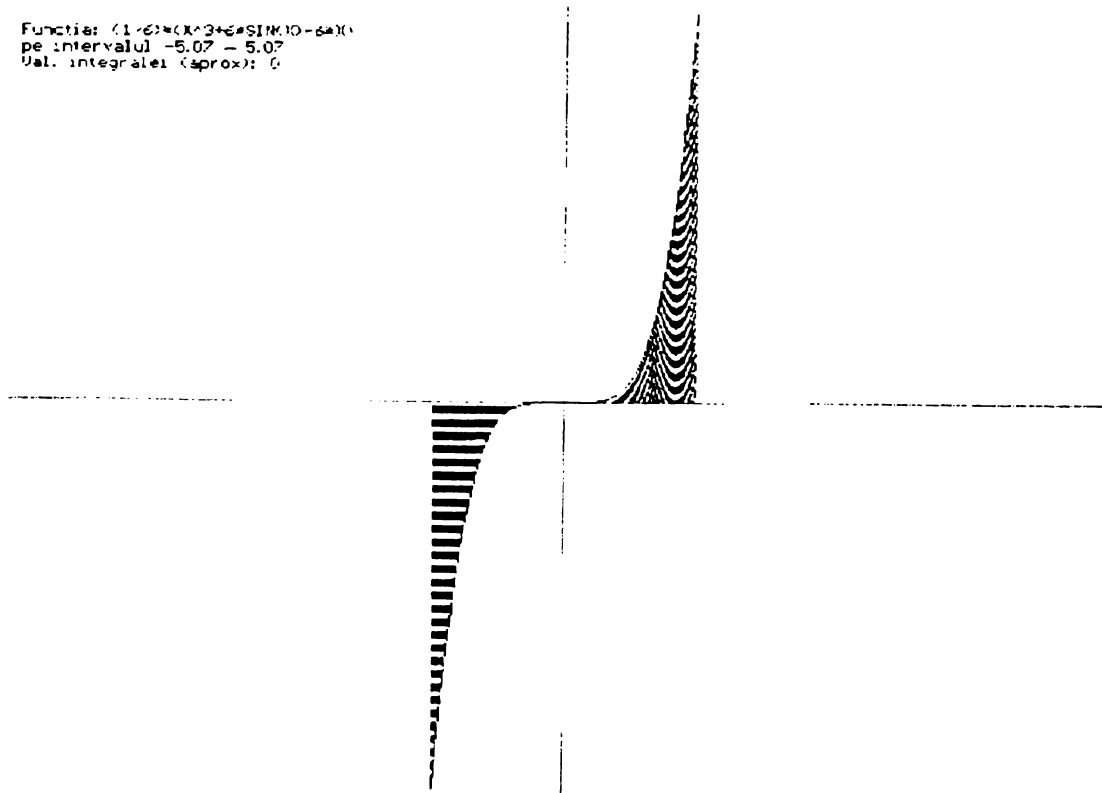
*Integr.2*



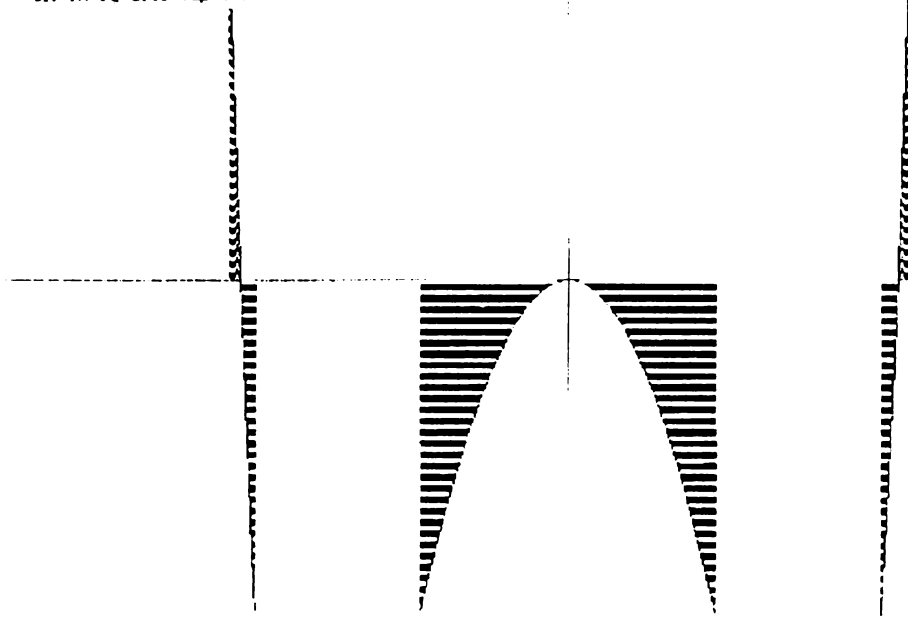
Funcția:  $(1/24) * (x^4 - 24 * \cos(x) - 12 * x^2)$   
pe intervalul  $-4.95 - 4.95$   
Val. integralei (aprox): 1.227813

*Integr.3*

Funcția:  $(1/6) * (x^3 + \sin(x) - 6x)$   
pe intervalul  $-5.07 - 5.07$   
Val. integralei (aprox): 0

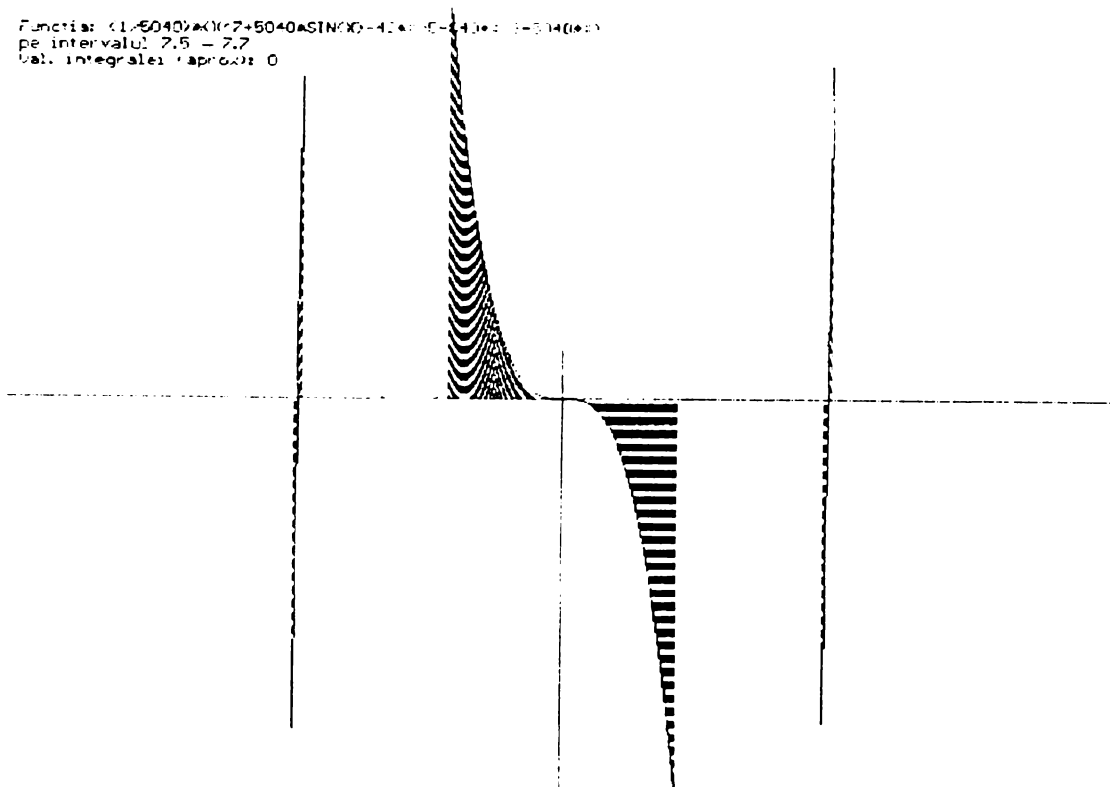
*Integr.4*

Functia:  $(1+220^{\sin(x)}+220^{\cos(x)}-20^{\sin(x)+\cos(x)}-20^{\sin(x)})$   
 pe intervalul  $5.97 - 6.47$   
 Val. integralei (aprox):  $-16.333426$



*Integr.5*

Functia:  $(1+5040/x)(7+5040\sin(x)-4100e^{-4x})-514(x^2)$   
 pe intervalul  $7.5 - 7.7$   
 Val. integralei (aprox):  $0$

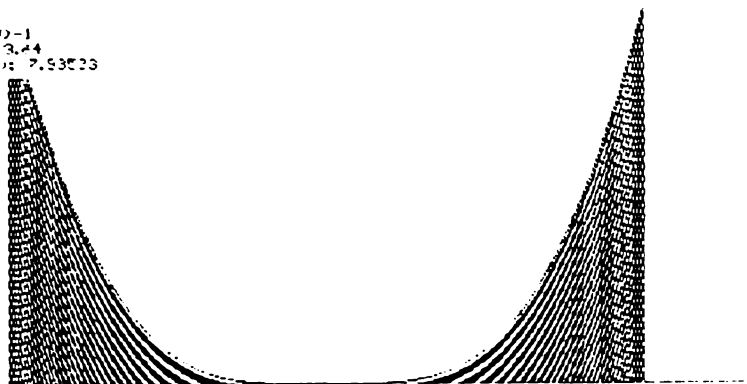
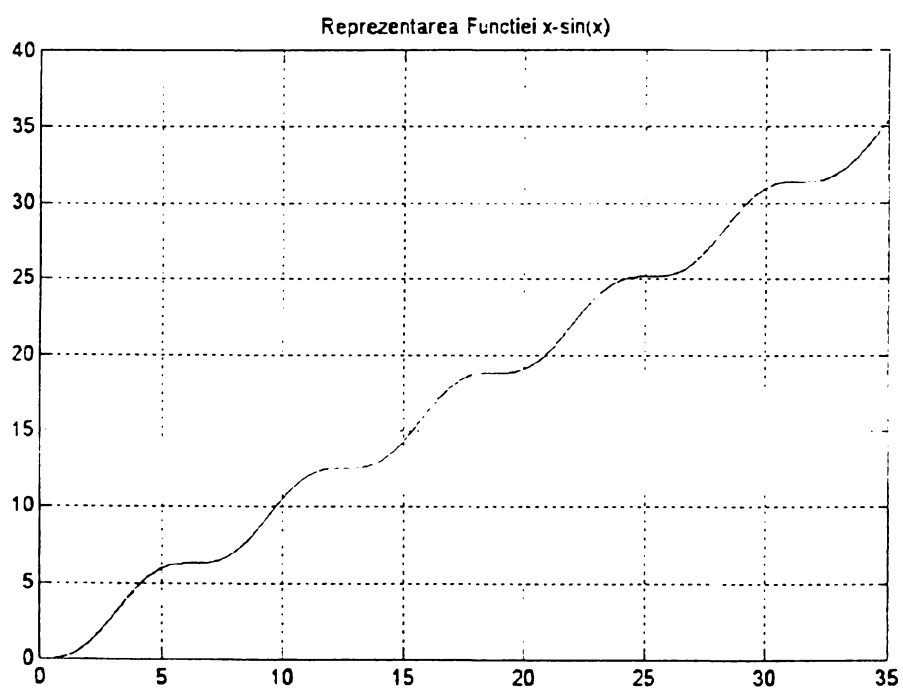


*Integr.6*



## ANEXA 4

Funcția:  $0.5 \sin^2 + \cos^2 - 1$   
 pe intervalul  $[-3.64, 3.64]$   
 Val. integralei: aprox:  $7.93023$

*Integr. 7**Integr. 8*

## C U P R I N S

	<i>Pag.</i>
Cap.1. <b>SISTEME VIBROPERCUTANTE</b>	3
1.1. Considerații generale	3
1.2. Proprietăți de neliniaritate	4
1.3. Stadiul actual al cercetărilor	5
1.4. Obiectivul cercetărilor	6
Cap.2. <b>METODĂ ȘI PROGRAM DE DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE STABILE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ</b>	9
2.1. Introducere	9
2.2. Studiul mișcării sistemului	9
2.3. Determinarea mișcărilor periodice	13
2.4. Stabilitatea mișcărilor periodice	14
2.5. Mișcările periodice ale sistemului vibropercutant pentru $R=0$ (coeficient de restituire nul)	16
2.6. Mișcări periodice cu excitație armonică	18
2.6.1. Determinarea parametrilor mișcărilor periodice	19
2.6.2. Condițiile de existență a mișcărilor periodice	21
2.6.3. Domenii de existență și stabilitate	25
2.7. Descrierea programului	28
Cap.3. <b>METODA OPERAȚIONALĂ</b>	31
3.1. Considerații generale	31
3.2. Sisteme vibropercutante	31
3.3. Cuple percutante	32
3.4. Bazele metodei operaționale	33
3.5. Masă liberă pe suport mobil	35
3.6. Sistemul liniar elastic	40
3.7. Sistem liniar elastic la rezonanță	42
3.8. Sistem cu limitatori rigizi	45
3.9. Sistem vibropercutant având două grade de libertate	49
3.10. Determinarea componentelor armonice ale mișcării	56
Cap.4. <b>METODE APROXIMATIVE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR CARACTERISTICI SISTEMULOR VIBROPERCUTANTE</b>	59

4.1.	Introducere	59
4.2.	Metode de aproximare poligonală	60
4.3.	Aproximarea bi și trilineară	60
4.4.	Folosirea aproximării poligonale în studiul mișcărilor tranzitorii	65
4.5.	Metoda de aproximare pentru studiul vibrațiilor tranzitorii în sisteme liniare	65
4.6.	Deformații locale de contact la ciocnire	69
	4.6.1. Sistemul vibropercutant	69
	4.6.2. Integrarea ecuațiilor ciocnirilor prin metoda poligonală	72
4.7.	Descrierea programului	78
Cap.5.	<b>EFACTUL ACCELERAȚIILOR DE ORDIN SUPERIOR</b>	89
5.1.	Influența variațiilor accelerațiilor	89
5.2.	Efectul variațiilor de accelerații	89
	5.2.1. Salturile de accelerații	89
	5.2.2. Vibrații neamortizate sub acțiunea variației accelerației	92
	5.2.3. Vibrații amortizate sub acțiunea variației accelerației	94
	5.2.4. Calculul unui salt de accelerație	97
5.3.	Metoda parametrilor inițiali	100
	5.3.1. Impuls de ciocnire	100
	5.3.2. Acțiuni impulsive asupra sistemului elastic neamortizat	101
	5.3.3. Principiul metodei parametrilor inițiali	101
	5.3.4. Funcțiile de pondere ale accelerațiilor	102
	5.3.5. Forme particulare de impulsuri	105
	5.3.5.1. Impuls parabolic	105
	5.3.5.2. Impuls dreptunghiular	107
	5.3.5.3. Impuls triunghiular	108
	5.3.5.4. Impuls sinusoidal	109
Cap.VI.	<b>CONCLUZII</b>	113
Cap.VII	<b>CONTRIBUȚII ORIGINALE</b>	117
	<b>BIBLIOGRAFIE</b>	121
	<b>CUPRINS</b>	143
	<b>ANEXE (1,2,3,4)</b>	