

TEZĂ DE DOCTORAT

**CONTRIBUȚII LA STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU DIN
CIRCUITUL ELECTRIC AL CUPTORULUI DE INDUCȚIE**

**Conducător științific
Prof.dr.doc.d.hc.ing. AUREL NANU**

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

**Candidat
ing. GRUESCU LUCIAN**

UNIVERSITATEA "POLITEHNICĂ"	
TIMIȘOARA	
BIBLIOTECA CENTRALĂ	
Nr. volum	631.899
Dupa	36511 B

CUVÂNT ÎNAINTE

Tehnologiile moderne având la bază procedeul încălzirii prin inducție și echipamentele specifice, s-au dezvoltat rapid în ultima perioadă, datorită avantajului pe care acestea le oferă față de alte tehnologii. În contextul actual al dezvoltării tehnologice, caracterizat de explozia informaticii, a microelectronicii și a electronicii de putere, instalațiile de încălzire prin inducție devin instalații moderne. În cadrul acestora, o mare răspândire o are cuptorul electric de inducție cu creuzet.

Funcționarea cuptorului electric de inducție cu creuzet se bazează pe fenomenul de inducție electromagnetică, inductorul reprezentându-l bobina cuptorului, iar indusul șarja.

Curenții turbionari induși în șarjă o încălzesc prin efect electrocaloric, și din acest motiv, șarja își schimbă parametrii electrici și magnetici.

Datorită faptului că pe tot parcursul procesului de încălzire se modifică parametrii electrici ai cuptorului de inducție, se poate afirma că pe tot acest parcurs, în circuitul electric al acestuia avem de a face cu un regim tranzitoriu. Studiul acestui regim tranzitoriu se face în strânsă legătură cu studiul câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic ce apare în cuptor în cadrul procesului de difuzie.

În literatura de specialitate din țară și din străinătate, la care autorul a avut acces, fenomenul de difuzie a câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic, este studiat la modul general. În cazul cuptorului de inducție, în literatura de specialitate este tratat strict fenomenul de pătrundere a câmpului electromagnetic în șarjă.

Prezenta lucrare își propune să fie o contribuție la modelarea proceselor electromagnetice și termice, cuplate, ce au loc în cuptorul electric de inducție cu creuzet.

Un prim obiectiv al lucrării îl reprezintă stabilirea unui model matematic complet, corespunzător fenomenelor ce au loc în cuptorul de inducție.

Pentru rezolvarea modelelor matematice stabilite s-a avut în vedere utilizarea metodei elementelor finite. În acest scop, în prealabil, se prezintă fundamentarea matematică a metodei. În continuare, pentru fiecare model matematic, s-a dedus modelul numeric elemental corespunzător.

S-a urmărit ca relațiile respective să fie cât mai simple și să poată fi implementate

pe calculator, cu orice limbaj de programare.

Aplicarea metodei elementelor finite s-a făcut pentru un cuptor de inducție existent, fapt ce a permis verificarea experimentală a unora dintre rezultatele obținute.

Utilizarea metodei elementelor finite presupune cunoașterea în prealabil a mai multor constante de material. Unele dintre acestea au fost obținute din literatura de specialitate, iar altele s-au determinat experimental. Având în vedere că proprietățile de material, necesare pentru a studia un proces sunt influențate de altul, se impune simularea simultană a tuturor proceselor, ce se realizează cu ajutorul unei analize cuplate. Implementarea pe un calculator electronic a unei astfel de analize este de asemenea o problemă rezolvată în lucrare.

În esență, lucrarea își propune să prezinte cum, în urma unor analize electromagnetice și termice, se pot obține o serie de rezultate de maximă importanță în activitatea de cercetare și proiectare a cuptoarelor de inducție, cum ar fi: spectrul liniilor de câmp magnetic din șarjă, distribuția densității de curent în șarjă la orice moment, variația în timp a puterii calorice specifice, dezvoltată în diferite puncte din interiorul șarjei, distribuția și valorile forțelor de natură electromagnetică ce acționează în cuptor, câmpul de temperaturi din șarjă și gradientul acestuia.

Trebuie amintit că în lucrare cuptorul electric de inducție a fost analizat și din punct de vedere al unui circuit electric cuplat la rețea. În acest sens, în prima parte a lucrării s-a studiat regimul tranzitoriu ce are loc la conectarea acestuia la o sursă de tensiune.

În încheiere, doresc să aduc mulțumiri, și să-mi exprim profunza recunoștință pentru sprijinul deosebit pe care l-am avut din partea conducătorului științific, domnul prof.doc.d.hc.ing. Aurel Nanu, la toate activitățile ce le-am desfășurat în vederea obținerii titlului științific de doctor.

Mulțumesc colectivului catedrei de Tehnologia materialelor a Facultății de mecanică din Timișoara, pentru sugestiile oferite în vederea elaborării referatelor, și pentru răbdarea de a-mi asculta expunerile.

Aduc mulțumiri conducerii Universității "Eftimie Murgu" din Reșița, domnului rector, prof.dr.ing. I. Vela, și domnului decan, prof.dr.ing. O. Crivacucea pentru sprijinul acordat în redactarea lucrării.

AUTORUL

CUPRINS

Cap.1.Regimul tranzitoriu în circuitul electric al cuptorului de inducție	1
1.1.Definiții fundamentale și observații referitoare la studiul regimurilor electrice tranzitorii	1
1.2.Regimul tranzitoriu la conectarea cuptorului de inducție cu creuzet la o sursă de tensiune	3
Cap.2.Pătrunderea câmpului electromagnetic în corpuri metalice masive	13
2.1.Considerații generale	13
2.1.1.Pătrunderea câmpului electromagnetic în corpuri plane.....	15
2.1.2.Pătrunderea câmpului electromagnetic în corpuri cilindrice	21
2.1.3.Calculul simplificat al puterii transmise într-o piesă cilindrică	26
2.2.Ecuțiile câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic	28
2.2.1.Formele locale ale legilor transmisiei căldurii	28
2.2.2.Ecuțiile cuplate ale câmpurilor electromagnetic cvasistaționare și termice.....	30
2.2.3.Puterea medie dezvoltată în unitatea de volum	31
2.2.4.Cazul câmpurilor plan-paralele.....	32
2.2.4.1.Placă feromagnetică	34
2.2.4.2.Cilindru feromagnetic de secțiune circulară.....	37
2.2.4.3.Cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară	38
2.3.Analiza numerică a câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic	40
2.3.1.Rezolvarea numerică a modelelor de câmp.....	40
2.3.2.Metoda elementelor finite pentru calculul câmpurilor	41
2.3.3.Cazul câmpurilor plan-paralele.....	44

2.3.3.1.Placă feromagnetică	45
2.3.3.2.Cilindru feromagnetic de secțiune circulară	48
Cap.3.Parametrii caracteristici ai mediilor feromagnetice aflate într-un câmp magnetic cuplat cu unul termic; Determinări experimentale	50
3.1.Permeabilitatea magnetică ca funcție de H și ϑ	50
3.2.Rezistivitatea mediilor feromagnetice ca funcție de ϑ_s	53
Cap.4.Modelarea câmpului electromagnetic și a câmpului termic cu metoda elementelor finite, asistată de calculatorul electronic.....	58
4.1.Considerații generale asupra metodelor numerice de rezolvare a modelelor matematice	58
4.2.Metoda elementelor finite	66
4.3.Implementarea condițiilor de frontieră	84
4.4.Alegerea funcțiilor de formă. Utilizarea elementelor finite	
4.5.Stabilirea modelelor numerice elementale pentru câmpul electromagnetic și câmpul termic din cuptor	105
Cap.5.Modelarea câmpului electromagnetic și a câmpului termic la un cuptor de inducție cu creuzet de 3,5 tone	123
5.1.Etapele de aplicare a metodei elementelor finite.....	123
5.2.Modelul geometric.....	126
5.3.Stabilirea proprietăților de material pentru elementele componente ale modelului	130
5.3.1.Characteristicile de material pentru șarjă.....	130
5.3.2.Characteristicile de material pentru bobina inductoare	131
5.3.3.Characteristicile de material pentru materialele termoizolante	132
5.4.Modelul cu elemente finite.....	132
5.5.Analize cuplate	134
5.6.Analize electromagnetice	136
5.7.Analize termice.....	148
5.8.Verificări experimentale	163

Cap.6.Concluzii. Contribuții personale	167
6.1.Concluzii	167
6.2.Contribuții personale.....	168
6.2.1.Contribuții teoretice.....	168
6.2.2.Contribuții experimentale și practice	169
Bibliografie	171

CAPITOLUL I

REGIMUL TRANZITORIU ÎN CIRCUITUL ELECTRIC AL CUPTORULUI DE INDUCȚIE

1.1. Definiții fundamentale și observații referitoare la studiul regimurilor electrice tranzitorii

Regimul permanent al unui circuit electric corespunde stării în care se stabilesc mărimile din circuit (curenți, tensiuni), după un timp lung, teoretic infinit, scurs de la producerea unei modificări în circuit, (conectarea sau deconectarea unei surse, introducerea sau scoaterea unui element din circuit, etc.).

Regimul permanent al circuitelor de curent continuu se caracterizează prin valori constante ale curenților și tensiunilor. Pentru circuitele de curent alternativ, regimul permanent se caracterizează prin valori constante ale amplitudinilor tensiunilor și curenților, respectiv a defazajelor.

Schimbarea situației elementelor constitutive ale circuitului (impedanța, tensiunile aplicate, etc.) provoacă o perturbație în funcționarea circuitului, care constă în adaptarea acestuia la noua situație. Această adaptare nu se poate face brusc și circuitul va oscila în jurul noii situații, până la stabilirea definitivă a noului regim permanent de funcționare.

Regimul care apare în circuitul electric la trecerea de la o stare permanentă la alta, ca urmare a variației parametrilor circuitului, sau a mărimii tensiunii aplicate poartă numele de regim tranzitoriu.

Există două metode principale de rezolvare a problemelor referitoare la regimurile tranzitorii din rețelele electrice liniare:

- 1) Metoda analizei spectrale a proceselor electrice (metoda integralei Fourier)
- 2) Metoda rezolvării ecuațiilor diferențiale, care redau fenomenele electrice din rețeaua respectivă

Prima metodă este principial mai simplă și destul de practică, dacă sunt cunoscute caracteristicile frecvență – fază ale rețelei studiate, de care trebuie legat rezultatul obținut.

Deficiența principală a acestei metode constă în faptul că, deși metoda de determinare a soluției principale a problemei este relativ simplă, forma soluției obținute într-

o serie de cazuri este puțin practică, întrucât se prezintă sub forma unei sume infinite de componente spectrale.

Integrarea pe cale analitică în acest caz este foarte greoaie sau, în general, nu duce la funcții cunoscute.

De aceea, această metodă este practică în cazurile în care dificultățile menționate sunt înlăturate, sau atunci când o soluție sub formă infinită poate prezenta interes.

Metoda analizei spectrale poate fi utilă pentru a se rezolva problema parțială de determinare a funcției tranzitorii.

Trebuie menționată posibilitatea integrării grafo – analitice și posibilitatea aproximării caracteristicilor fază-frecvență, într-o formă care ușurează posibilitatea de integrare, ceea ce, evident, duce fie la rezultate aproximative, fie la un caz idealizat, sau se deosebește mai mult sau mai puțin de proprietățile reale ale circuitului studiat.

Greutățile de rezolvare a problemei sub formă explicită, pe care le putem întâlni la utilizarea celei de-a doua metode, mai ales când se obțin ecuații diferențiale de ordin superior, sunt aceleași ca și greutatețile care apar la rezolvarea aceluiași probleme prin metoda spectrală. Acest fapt rezultă din legăturile matematice strânse care există între aceste două metode.

Avantajul specific metodei integralei Fourier, față de metoda ecuațiilor diferențiale, constă în faptul că la utilizarea integralei Fourier, funcțiile tranzitorii se determină prin parametrii secundari ai rețelelor electrice (caracteristica frecvență-fază) a circuitului considerat cvadripol.

Când nu dispunem de expresia analitică a caracteristicii frecvență-fază a circuitului concret considerat, necesitatea de a găsi o astfel de expresie duce la aceleași dificultăți ca și cele din cazul stabilirii imaginii funcției tranzitorii, sau în cazul rezolvării ecuațiilor diferențiale. Orice simplificare sau aproximație poate da față de aceeași abatere față de soluția reală ca și aproximațiile admise la rezolvarea problemei prin oricare dintre celelalte metode.

Metoda rezolvării ecuațiilor diferențiale în forma ei rațională, adaptată la analiza fenomenelor tranzitorii, adică sub formă de metodă operațională, prezintă o serie de particularități și avantaje importante. În primul rând, calitatea ei principală constă în faptul

că pleacă de la parametrii primari ai circuitului, adică de la structura lui reală, ceea ce, în special, dă posibilitatea de a evalua direct influența unui element oarecare asupra regimului tranzitoriu.

Având elementele unui circuit concret, se poate obține cu ușurință expresia caracteristicii sale frecvență-fază și se poate face legătura cu expresiile care redau tensiunile sau curenții tranzitorii, în timp ce prin utilizarea integralei Fourier, problema inversă de a găsi structura circuitului și elementele lui, este departe de a fi rezolvată totdeauna simplu și univoc.

Partea practică a metodei operaționale constă în posibilitatea evaluării, de cele mai multe ori, a dificultăților de integrare, frecvente la utilizarea metodei spectrale, pentru că metoda operațională furnizează mai multe căi de rezolvare și, afară de aceasta, un mare număr de soluții gata efectuate, care pot fi utilizate cu succes. Pe această bază au apărut programe generale de calcul a mărimilor tranzitorii la circuitele electrice, calculatorul permițând studiul prin simulare a regimului tranzitoriu la cele mai complicate circuite electrice.

1.2. Regimul tranzitoriu la conectarea cuptorului de inducție cu creuzet la o sursă de tensiune

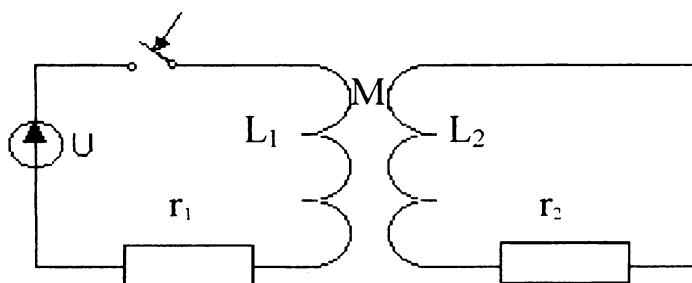


Fig.1.1

Schema electrică echivalentă a cuptorului de inducție cu creuzet este prezentată în fig.1.1.

În această schemă cu indicele 1 s-au indicat parametrii inductorului, iar cu indicele 2 cei ai indusului. Cu M a fost notată inductivitatea mutuală dintre inductor și indus.

Convenim că toți parametrii și mărimile circuitului al doilea sunt raportate la primul circuit. Circuitele au constantele de timp:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{L_1}{r_1} \\ T_2 &= \frac{L_2}{r_2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Coeficienții de dispersie sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{L_1 - M}{L_1} \\ \sigma_2 &= \frac{L_2 - M}{L_2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Coeficientul de cuplaj magnetic între inductor și indus este:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \quad (1.3)$$

Coeficientul de dispersie al celor două circuite (inductor și indus) va fi dat de relația:

$$\sigma = 1 - K^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad (1.4)$$

Pentru σ_1 și σ_2 mici se poate considera:

$$\sigma \cong \sigma_1 + \sigma_2 \quad (1.5)$$

Ecuțiile diferențiale ale celor două circuite sunt:

$$u(t) = i_1 \cdot r_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (1.6)$$

$$0 = i_2 \cdot r_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Considerând condițiile inițiale nule, sub formă operațională ecuațiile (1.6) devin:

$$u(p) = r_1 \cdot I_1(p) + p \cdot L_1 \cdot I_1(p) + p \cdot M \cdot I_2(p) \quad (1.7)$$

$$0 = r_2 \cdot I_2(p) + p \cdot L_2 \cdot I_2(p) + p \cdot M \cdot I_1(p)$$

Rezolvarea sistemului (1.7) se obține ușor prin substituție, rezultând:

$$I_2(p) = -\frac{p \cdot M}{r_2 + p \cdot L_2} \cdot I_1(p)$$

$$I_1(p) = \frac{u(p)}{Z_1(p)}$$

unde:

$$Z_1(p) = r_1 + p \cdot \left(L_1 - \frac{p \cdot M^2}{r_2 + p \cdot L_2} \right)$$

$$Z_1(p) = r_1 + p \cdot \frac{1 + p \cdot \sigma \cdot T_2}{1 + p \cdot T_2} \cdot L_1 \quad (1.8)$$

$$Z_1(p) = \frac{\sigma \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot p^2 + (T_1 + T_2) \cdot p + 1}{1 + p \cdot T_2}$$

$Z_1(p)$ este impedanța operațională a primului circuit cu considerarea celui de al doilea circuit scurtcircuitat cuplat cu primul.

Din relația (1.8) rezultă că influența celui de al doilea circuit se manifestă prin scăderea valorii L_1 , fiind cu atât mai puternică cu cât dispersia este mai mică și constanta de timp T_2 mai mare.

Din ecuația caracteristică $Z_1(p)$ găsim rădăcinile:

$$p_{1,2} = \frac{-(T_1 + T_2) \pm \sqrt{(T_1 + T_2)^2 - 4 \cdot \sigma \cdot T_1 \cdot T_2}}{2 \cdot \sigma \cdot T_1 \cdot T_2} \quad (1.9)$$

$$p_{1,2} = -\frac{T_1 + T_2}{2 \cdot \sigma \cdot T_1 \cdot T_2} \cdot (1 \pm q)$$

unde s-a notat:

$$q = \sqrt{1 - \frac{4 \cdot \sigma \cdot T_1 \cdot T_2}{(T_1 + T_2)^2}} \quad (1.10)$$

Deoarece totdeauna $(T_1 + T_2)^2 > 4 \cdot \sigma \cdot T_1 \cdot T_2$, rezultă că ambele rădăcini sunt reale. Prin urmare, curentul liber în fiecare circuit are două componente, din care una se amortizează după o curbă exponențială cu constanta de timp:

$$T' = -\frac{1}{p_1} = \frac{2}{1-q} \cdot \frac{\sigma \cdot T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} = \frac{1+q}{2} \cdot (T_1 + T_2) \quad (1.11)$$

și cea de-a doua exponențială cu constanta de timp:

$$T'' = -\frac{1}{p_{21}} = \frac{2}{1+q} \cdot \frac{\sigma \cdot T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} = \frac{1-q}{2} \cdot (T_1 + T_2) \quad (1.12)$$

între aceste constante existând raportul:

$$\frac{T'}{T''} = \frac{1+q}{1-q} \quad (1.13)$$

La conectarea circuitului la o tensiune continuă $U = U(p) = \frac{U}{p}$, imaginea curentului primului circuit este:

$$I_1(p) = \frac{U}{p \cdot Z_1(p)}$$

Pentru a trece la funcția original $i_1(t)$ folosim cea de-a doua formulă a dezvoltării lui Heaviside și rezultă:

$$i_1(t) = \frac{U}{Z_1(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{U \cdot e^{p_k \cdot t}}{p_k \left[\frac{dZ_1(p)}{dp} \right]_{p=p_k}}$$

unde primul termen reprezintă curentul permanent i_1 din primul circuit.

După înlocuiri rezultă:

$$i_1(t) = I_1 + i_1' + i_1'' = \frac{U}{\eta_1} - \frac{U \cdot (T_1 - T'')}{\eta_1 \cdot (T' - T'')} \cdot e^{-\frac{t}{T'}} - \frac{U \cdot (T_2 - T'')}{\eta_1 \cdot (T' - T'')} \cdot e^{-\frac{t}{T''}} \quad (1.14)$$

unde:

i_1' este curentul liber care se amortizează încet

i_1'' este curentul liber care se amortizează rapid.

Raportul dintre valorile inițiale ale curenților liberi $i_1'(0)$ și $i_1''(0)$ este determinat de constantele de timp:

$$\frac{i_1''(0)}{i_1'(0)} = \frac{T_2 - T''}{T_1 - T''} \quad (1.15)$$

În mod analog rezultă expresia curentului în cel de-al doilea circuit:

$$i_2(t) = i_2' + i_2'' = -\frac{M \cdot U}{L_1 \cdot L_2} \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T' - T''} \cdot \left(e^{-\frac{t}{T'}} - e^{-\frac{t}{T''}} \right) \quad (1.16)$$

În fig.1.2 sunt date curbele de variație a curenților și a diferitelor lor componente în timpul procesului tranzitoriu examinat. La aceste curbe timpul de pe axa absciselor este exprimat în fracțiuni din T_1 .

Curentul $i_1(t)$ tinde spre valoarea sa permanentă, iar curentul $i_2(t)$ crește mai întâi până la valoarea sa maximă, iar apoi se amortizează tinzând spre zero.

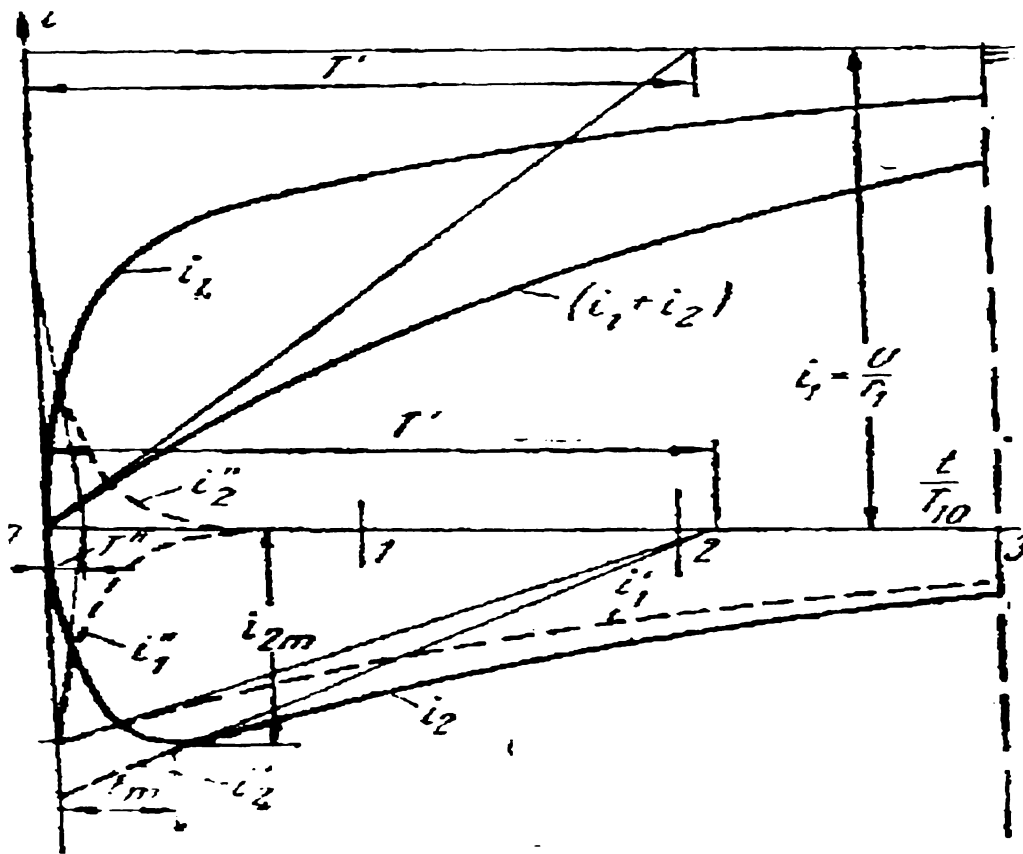


Fig. 1.2

Momentul apariției maximului se găsește din ecuația:

$$\frac{di_2}{dt} = 0$$

Rezultă:

$$t_m = \frac{T' \cdot T''}{T' - T''} \cdot \ln \frac{T'}{T''} \quad (1.17)$$

Corespunzător:

$$i_{2m} = -\frac{M \cdot U}{L_1 \cdot L_2} \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T' - T''} \cdot \left(e^{-\frac{tm}{T'}} - e^{-\frac{tm}{T''}} \right) \quad (1.18)$$

Se pot face o serie de observații pe baza relațiilor obținute:

a) în stadiul inițial al procesului tranzitoriu variația curenților în circuite este condiționată în principal de curenții liberi, care se amortizează rapid, iar în stadiul următor practic numai de curenții liberi care se amortizează încet;

b) curenții liberi care se amortizează încet sunt determinați practic numai de variația fluxului magnetic total sau a fluxului de inducție mutuală între circuite, iar curenții care se amortizează rapid numai de variația fluxului de dispersie a circuitelor;

c) cuplajul magnetic al primului circuit cu circuitul al doilea accelerează la început procesul tranzitoriu, iar apoi dimpotrivă îl încetinește.

Pentru un coeficient de dispersie constant σ , această influență se manifestă cu atât mai intens cu cât este mai mare constanta de timp a circuitului al doilea T_2 . Acest aspect este redat în fig.3 în care sunt redată curbele de variație $i_1(t)$ și $i_2(t)$ pentru mai multe valori ale lui T_2 . Situația limită $T_2=0$ corespunde cazului când circuitul al doilea este deschis, iar $T_2=\infty$ corespunde situației când acesta este supraconductor.

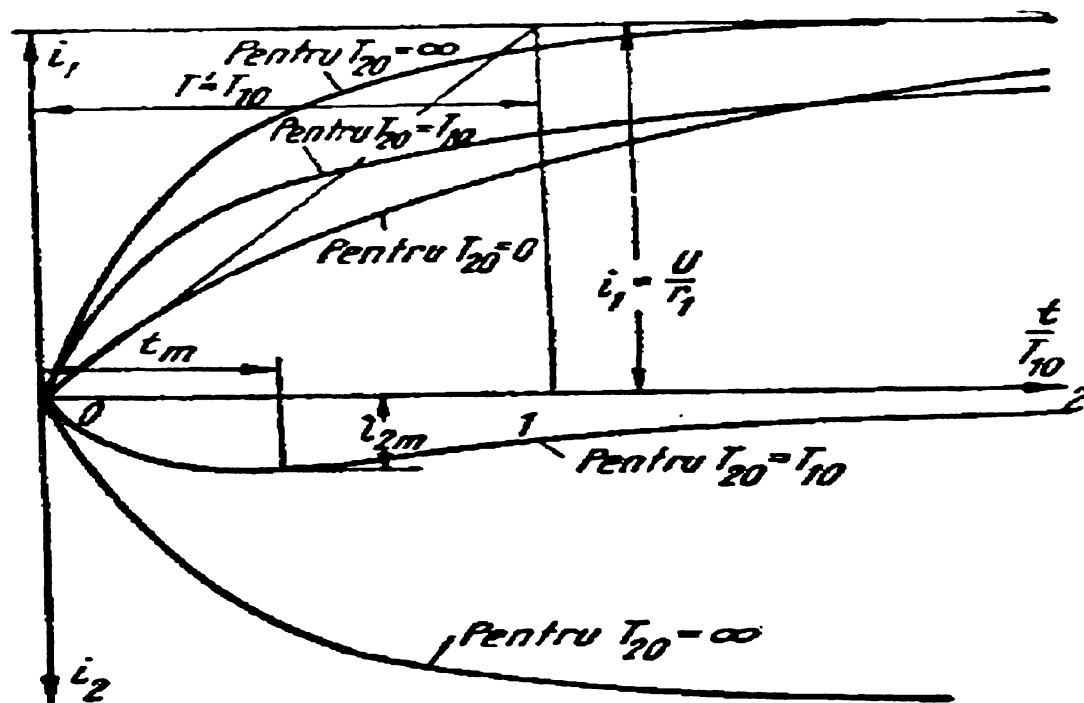


Fig.1.3

Pentru un cuplaj magnetic puternic între circuite, corespunzător unei dispersii reduse a fluxurilor magnetice relațiile matematice ale procesului tranzitoriu examinat pot fi mult simplificate dacă se introduc unele ipoteze suplimentare.

Dacă σ are o valoare mică, $q \cong 1$ și

$$\begin{aligned} T'' &\cong \frac{\sigma \cdot T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} \\ T' &= T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

În acest caz expresiile celor doi curenți devin:

$$i_1 = \frac{U_1}{\eta} \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 + T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T'}} - \frac{T_2}{T_1 + T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T''}} \right) \quad (1.20)$$

$$i_2 = -\frac{U}{\eta} \cdot \frac{M}{L_2} \cdot \frac{T_2}{T_1 + T_2} \cdot \left(e^{-\frac{t}{T'}} - e^{-\frac{t}{T''}} \right) \quad (1.21)$$

Studiul procesului tranzitoriu în cazul conectării la o tensiune sinusoidală, cazul real întâlnit în practică, se face similar cu cel prezentat. Expresiile constantelor de timp ale curenților liberi sunt valabile și în acest caz deoarece dispersia este mică în comparație cu fluxul de inducție mutuală și folosirea expresiilor (18) pentru evaluarea mărimilor T' și T'' nu introduc practic nici un fel de erori.

La conectarea cuptorului la o tensiune sinusoidală $u = U_m \sin(\omega t + \alpha) = I_m [U_m e^{\alpha(\omega t - \alpha)}]$, rezultă :

$$i(t) = I_m \left[\frac{U_m \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}}{Z(j\omega)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_m e^{j\omega}}{(p_k - j\omega) \left[\frac{dZ(p)}{dp} \right]_{p=p_k}} e^{P_{12}t} \right]$$

Obținem după unele transformări expresia curențului :

$$i_1(t) = i_1 + i_1' + i_1''$$

$$i_1(t) = I_m \left[\frac{U_m \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} (1 + j\omega T_2)}{r_1 (1 + j\omega T') (1 + j\omega T'')} - \frac{U_m e^{j\alpha} (T_1 - T'')}{r_1 (1 + j\omega T') (T' - T'')} e^{-\frac{t}{T'}} - \frac{U_m e^{j\alpha} (T_2 - T'')}{r_1 (1 + j\omega T'') (T' - T'')} e^{-\frac{t}{T''}} \right]$$

(1.22)

Raportul dintre valorile inițiale ale curenților liberi va fi :

$$\frac{i''(0)}{i'(0)} = \frac{(T_2 - T'') (1 + j\omega T')}{(T_1 - T'') (1 + j\omega T'')} \quad (1.23)$$

Primul termen din relația (1.22) reprezintă curentul sinusoidal permanent al cărui fazor poate fi scris :

$$\underline{I}_1 = \frac{U_m (1 + j\omega T')}{r_1 (1 + j\omega T') (1 + j\omega T'')} = \frac{U_m}{Z}$$

unde : $\underline{Z} = r_1 + jX_{\sigma 1} + \left[\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ r_2 + jX_{\sigma 2} & \end{matrix} \right] (jX_m)$ este impedanța complexă corespunzătoare

schemei echivalente a cuptorului de inducție.

Folosind relația dedusă :

$$I_2(\sigma) = -\frac{M_p}{r_2 + \rho L_2} I_1(\sigma)$$

se poate obține expresia operațională pentru curentul $I_2(\sigma)$; după trecerea la funcția original și unele transformări suplimentare se obține :

$$i_2(t) = I_m \left[-\frac{U_m e^{j(\omega t + \alpha)} \cdot j\omega M}{r_1 r_2 (1 + j\omega T') (1 + j\omega T'')} - \frac{U_m e^{j\alpha} \cdot M \cdot e^{-\frac{t}{T'}}}{r_1 r_2 (1 + j\omega T') (T' - T'')} + \frac{U_m e^{j\alpha} \cdot M \cdot e^{-\frac{t}{T''}}}{r_1 r_2 (1 + j\omega T'') (T' - T'')} \right]$$

(1.24)

În relația (1.24) primul termen reprezintă curentul permanent din circuitul indus.

Observații :

1) Studiul regimului tranzitoriu la conectarea cuptorului de inducție cu creuzet la diferite surse de alimentare se face similar celui al conectării unui transformator în aer cu secundarul în scurtcircuit.

2) Parametrii electrici ai inductorului și indusului; adică rezistența echivalentă și inductivitatea acestora se determină cu relațiile cunoscute :

$$R = -\frac{1}{I^2} R_e \int \overline{S} ds$$

$$L_i = -\frac{1}{\omega I^2} J_m \int_{\Sigma} \overline{S} dv$$

în care \overline{S} este vectorul lui Poynting. Aceasta datorită faptului că avem de-a face cu conductoare masive la care se manifestă efectul pelicular.

Acest aspect este dezvoltat pe larg în lucrarea [105], și constituie principalul subiect al acesteia.

3) Există aspecte specifice ce însoțesc regimul tranzitoriu la alimentarea cuptorului de inducție de la surse bazate pe elemente electronice (tiristoare), situații în care tensiunea de alimentare nu mai este sinusoidală.

4) Pentru îmbunătățirea factorului de putere, în circuitul de alimentare al cuptorului de inducție se introduc condensatoare. Inductorul împreună cu aceste condensatoare se comportă ca un circuit oscilant. Acest aspect trebuie de asemenea luat în considerare la studiul regimului tranzitoriu.

5) La atingerea punctului Curie, se schimbă brusc permeabilitatea μ_r a materialului din circuitul indus și deci și parametrii electrici ai acestuia. Pentru a menține curentul i_2 constant în această situație obișnuit se modifică tensiunea de alimentare, rezultând un regim tranzitoriu.

6) În timpul elaborării unei șarje în cuptorul de inducție, odată cu modificarea temperaturii șarjei se modifică și constantele de material ale metalului din șarjă și deci și parametrii electrici și magnetici ai acesteia. Din acest motiv putem afirma că pe tot parcursul procesului termic din cuptor, curentul electric al acestuia se găsește într-un regim tranzitoriu.

CAPITOLUL II

PĂTRUNDEREA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN CORPURI METALICE MASIVE

2.1.Considerații generale

Încălzirea în cuptoarele și instalațiile cu inducție electromagnetică se bazează pe pătrunderea câmpului electromagnetic în materialele conductoare aflate într-un câmp magnetic variabil în timp. Curenții turbionari determinați de tensiunile electromotoare induse conduc la încălzirea materialului conductor prin efect Joule.

Tensiunea electromotoare indusă are expresia:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.1)$$

unde $d\Phi$ este variația fluxului magnetic care traversează corpul de încălzit în intervalul de timp dt .

Dacă se notează cu U_e valoarea efectivă a tensiunii electromotoare induse, puterea transformată în căldură în materialul de încălzit va fi:

$$P = RI^2 = \frac{U_e^2}{R} \quad (2.2)$$

Rezistența electrică din relația (2) nu este aceeași cu cea pe care o prezintă materialul conductor atunci când este parcurs de curent continuu. În curent alternativ, rezistența electrică R are o valoare superioară rezistenței electrice în curent continuu. Creșterea rezistenței electrice este determinată de repartiția neuniformă a densității curentului electric în secțiunea conductorului. Coeficientul de creștere depinde de permeabilitatea magnetică, de rezistivitatea materialului, ca și de frecvența curentului electric din inductor.

Dacă obiectul de încălzit este un material cu proprietăți feromagnetice, la puterea disipată în material prin inducție electromagnetică se adaugă și efectul termic determinat de fenomenul de histerez magnetic. Aportul încălzirii prin histerezis este cu atât mai pronunțat cu cât aria ciclului de histerezis este mai mare. Raportul dintre puterea P_t dezvoltată prin curenți turbionari și P_h dezvoltată prin histerezis magnetic este:

$$\frac{P_t}{P_h} = a \cdot f \cdot H \quad (2.3)$$

unde a este o constantă, f este frecvența, iar H este valoarea efectivă a câmpului magnetic în care se află materialul magnetic.

Puterea disipată prin histerezis este în general mult mai mică decât cea prin curenți turbionari induși (< 10% în majoritatea cazurilor). Numai în cazul particular al materialelor magnetice dure, P_h poate ajunge la $\frac{1}{4}$ din puterea totală disipată în material.

Se poate afirma deci că principalele probleme de câmp electromagnetici în medii conductoare masive se referă la curenți turbionari și la efect pelicular.

Determinarea densității curentului electric turbionar indus în conductoare masive și a puterilor dezvoltate de aceștia se face pe baza ecuațiilor lui Maxwell pentru regim cvasistaționar în corpuri imobile:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{J} - \text{legea circuitului magnetic}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \text{legea inducției electromagnetice}; \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0 - \text{legea fluxului magnetic}; \\ \bar{B} &= \mu \cdot \bar{H} - \text{legea legăturii dintre inducție și intensitatea câmpului magnetic}; \\ \bar{J} &= \sigma \cdot \bar{E} = \frac{1}{\rho} \bar{E} - \text{legea conducției electrice}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

În relația (4), \bar{E} este vectorul câmp electric, \bar{H} - vectorul câmp magnetic, \bar{B} - vectorul inducție magnetică, \bar{J} - vectorul densitate de curent, σ - conductivitatea electrică a materialului, ρ - rezistivitatea acestuia, μ - permeabilitatea.

Determinând expresiile câmpurilor \bar{E} și \bar{H} , din relațiile (4) se poate deduce expresia energiei electromagnetice absorbite de unitatea de arie a conductorului, în unitatea de timp (puterea specifică) \bar{S} - vectorul fluxului de energie (vectorul Poynting):

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \quad (2.5)$$

Din prima dintre ecuațiile lui Maxwell, având în vedere legea conducției electrice rezultă:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \sigma \cdot \bar{E} \quad (2.6)$$

Dacă se aplică relației (6) operatorul rotor, se obține:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H} = \sigma \cdot \operatorname{rot} \bar{E}, \quad (2.7)$$

sau:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{H} - \Delta \bar{H} = \sigma \cdot \operatorname{rot} \bar{E} \quad (2.8)$$

În relația (8), primul termen este nul având în vedere legea fluxului magnetic. Dacă se are în vedere și legea inducției electromagnetice, relația (8) poate fi scrisă sub forma:

$$\Delta \bar{H} = \sigma \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (2.9)$$

Soluția ecuației diferențiale (9) poate fi determinată pentru fiecare configurație geometrică în parte, având în vedere condițiile la limită.

2.1.1. Pătrunderea câmpului electromagnetic în corpuri plane

Cazul semispațiului infinit conductor (fig.2.1) este analizat pentru a pune în evidență principalele aspecte legate de pătrunderea câmpului electromagnetic într-un corp conductor, aflat într-un câmp magnetic variabil în timp. Se consideră cazul simplificat al câmpului magnetic variabil în timp. Se consideră cazul simplificat al câmpului magnetic \bar{H}_0 la suprafața de separație, orientat după axa Oz și având o variație sinusoidală în timp.

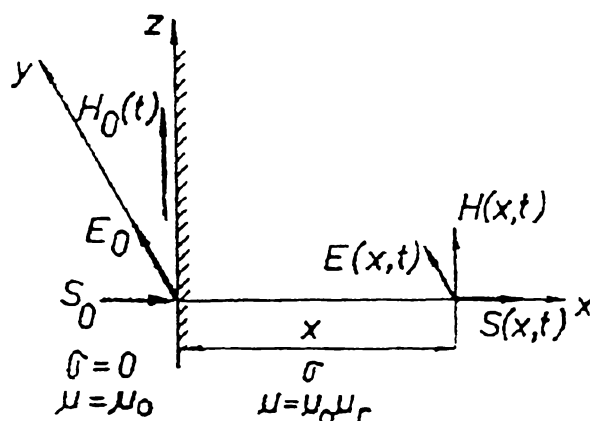


Fig.2.1

Datorită extinderii infinite a semispațiului conductor și a caracterului omogen și izotrop al materialului conductor, toate mărimile locale de stare au aceeași valoare în toate punctele oricărui plan $x=\text{const.}$ (paralel cu suprafața de separație a semispațiului conductor). În acest fel, rezultă că toate mărimile electrice din interiorul semispațiului conductor sunt funcții numai de distanța x și de timpul t : $\bar{H} = \bar{H}(x,t)$; $\bar{E} = \bar{E}(x,t)$; $\bar{J} = \bar{J}(x,t)$.

Pentru configurația din figura 1, relația (9), în coordonate carteziene, se scrie sub forma:

$$\frac{\partial^2 \bar{H}(x,t)}{\partial x^2} = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial^2 \bar{H}(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Ecuția (10), în regim sinusoidal și în complex simplificat, se scrie sub forma:

$$\frac{d^2 \bar{H}(x)}{dx^2} = j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \bar{H}(x) \quad (2.11)$$

iar:

$$H(x,t) = \text{Im} \left\{ \sqrt{2} \cdot H \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad (2.12)$$

Soluția generală a ecuației (11) este:

$$\underline{H} = \underline{A}_1 \cdot e^{\alpha x} + \underline{A}_2 \cdot e^{-\alpha x} \quad (2.13)$$

În relația (13) s-a utilizat notația:

$$\underline{\alpha} = \sqrt{j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \sigma} = \sqrt{j} \cdot \sqrt{\omega \cdot \mu \cdot \sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\omega \cdot \mu \cdot \sigma} \quad (2.14)$$

Se pune astfel în evidența adâncimea de pătrundere δ , definită prin relația:

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu \cdot \sigma}} \quad (2.15)$$

Având în vedere expresia (15) a adâncimii de pătrundere δ , relația (14) devine:

$$\underline{\alpha} = \frac{1+j}{\delta} \quad (2.16)$$

Cu expresia (16), soluția (13) rezultă sub forma:

$$\underline{H} = \underline{A}_1 \cdot e^{(1+j)x/\delta} + \underline{A}_2 \cdot e^{-(1+j)x/\delta} \quad (2.17)$$

Pentru configurația analizată, condițiile la limită sunt:

- Pentru $x \rightarrow \infty$ câmpul magnetic are o valoare finită ceea ce impune $A_1=0$;
- Pentru $x=0$ $\underline{H} = \underline{H}_0$; rezultă $\underline{A}_2 = \underline{H}_0$

Având în vedere valorile constantelor de integrare \underline{A}_1 și \underline{A}_2 , soluția (2.17) devine:

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \cdot e^{-(1+j)x/\delta} + \underline{H}_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{j\varphi} \quad (2.18)$$

unde $\varphi = -x/\delta$ este defazajul variabil al fazorului \underline{H} .

Valoarea instantanee a câmpului magnetic este:

$$H(x,t) = H_0 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-x/\delta} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.19)$$

Densitatea de curent \bar{J} și intensitatea câmpului electric \bar{E} se deduc din prima și respectiv a doua dintre ecuațiile lui Maxwell. Dacă se observă faptul că singurele componente nenule ale funcției rot \bar{H} și deci și ale mărimilor \bar{J} și \bar{E} sunt dirijate după axa Oy iar mărimea \bar{H} este orientată după Oz rezultă:

$$\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E} = -\frac{dH}{dx} \quad (2.20)$$

sau:

$$\underline{J} = H_0 \cdot (1+j) \cdot \frac{1}{\delta} e^{-(1-j)x/\delta}$$

$$\underline{E} = H_0 \cdot (1 + j) \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \delta} e^{-(1-j)x/\delta} \quad (2.21)$$

Pentru determinarea puterii active disipată în material se determină expresia vectorului Poynting \underline{S} (orientat în sensul pozitiv al axei Ox):

$$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{H}^* = H_0^2 \cdot \frac{\rho}{\delta} (1 + j) \cdot e^{-2x/\delta} = P + jQ \quad (2.22)$$

În relația (22), P este puterea activă disipată din efect Joule raportată la unitatea de suprafață a corpului conductor, iar Q este puterea reactivă corespunzătoare.

Pentru $x=0$ rezultă:

$$\underline{S}_0 = H_0^2 \cdot \frac{\rho}{\delta} (1 + j) = P_0 + jQ_0$$

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P_0}{\sqrt{P_0^2 + Q_0^2}} \quad (2.23)$$

Pentru un conductor plan de grosime finită, excitat pe una dintre fețe cu \underline{H}_0 (fig.2), condițiile la limite sunt:

- pentru $x=0$, $\underline{H} = \underline{H}_0$
- pentru $x=a$, $\underline{H} = 0$ (rezultă dacă se aplică legea circuitului magnetic conturului Γ din fig.2.2).

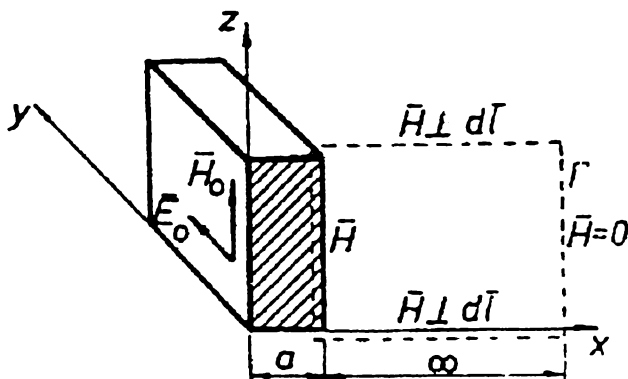
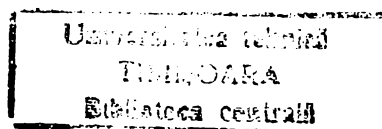


Fig.2.2

Având în vedere condițiile la limite rezultă :

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \cdot \frac{\sinh \left[(1 + j) \cdot \frac{a - x}{\delta} \right]}{\sinh \left[(1 + j) \cdot \frac{a}{\delta} \right]} \quad (2.24)$$

De asemenea, se obține:



$$\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E} = \underline{H}_0 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot (1+j) \cdot \frac{\cosh\left[(1+j) \cdot \frac{a-x}{\delta}\right]}{\sinh\left[(1+j) \cdot \frac{a}{\delta}\right]} \quad (2.25)$$

Puterea S are expresia:

$$\underline{S} = H_0^2 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \left[\frac{\sinh 2 \frac{a-x}{\delta} + \sin 2 \frac{a-x}{\delta}}{\cosh 2 \frac{a}{\delta} - \cos 2 \frac{a}{\delta}} + j \frac{\sinh 2 \frac{a-x}{\delta} - \sin 2 \frac{a-x}{\delta}}{\cosh 2 \frac{a}{\delta} - \cos 2 \frac{a}{\delta}} \right] \quad (2.26)$$

Puterea absorbită la suprafața corpului conductor ($x=0$) rezultă:

$$\underline{S}_0 = H_0^2 \cdot \frac{P}{\delta} \cdot (F + jG), \quad (2.27)$$

unde expresiile funcțiilor F (corespunzătoare puterii active) și G (corespunzătoare puterii reactive) sunt:

$$F = \frac{\sinh 2\varepsilon + \sin 2\varepsilon}{\cosh 2\varepsilon - \cos 2\varepsilon}; \quad G = \frac{\sinh 2\varepsilon - \sin 2\varepsilon}{\cosh 2\varepsilon - \cos 2\varepsilon} \quad (2.28)$$

În relațiile (2.28) s-a utilizat notația:

$$\varepsilon = a/\delta$$

Funcțiile F și G sunt reprezentate în fig.2.3

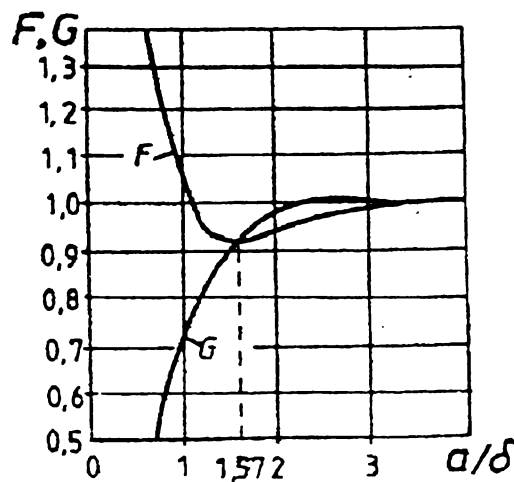


Fig.2.3

Pentru $\varepsilon \geq 3$, $F \cong G \cong 1$ și deci vectorul Poynting are aceeași valoare ca și în cazul semispațiului conductor. Pentru ca încălzirea plăcii să se facă cu o eficiență ridicată este necesar ca placa să aibă $\varepsilon < 1,75$. Cu cât ε este mai mic, cu atât transferul de putere va fi mai eficient. Puterea este minimă pentru $\varepsilon=1,75$.

În cazul unui conductor plan de grosime finită, excitat pe ambele fețe de câmpul \underline{H}_0 pot apărea două situații: excitația are loc în același sens pe ambele fețe sau în sens contrar.

a) dacă excitația are loc în același sens pe ambele fețe (fig.2.4) condițiile la limite sunt: la $x = \pm a/2$, $\underline{H} = \underline{H}_0$.

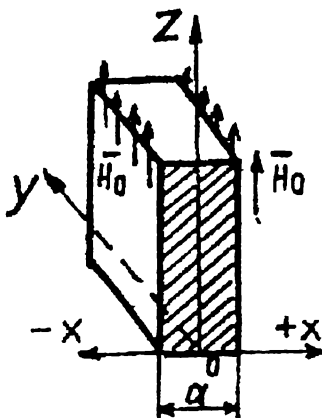


Fig. 2.4

Rezultă expresia câmpului magnetic \underline{H} sub forma:

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \frac{\cosh[(1+j) \cdot x/\delta]}{\cosh[(1+j) \cdot a/2\delta]} \quad (2.29)$$

Puterea absorbită pe unitatea de arie:

$$\underline{S}_0 = \underline{E}_0 \cdot \underline{H}_0^* = H_0^2 \cdot \frac{P}{\delta} \cdot (F + jG) \quad (2.30)$$

în care:

$$F = \frac{\sinh \varepsilon - \sin \varepsilon}{\cosh \varepsilon + \cos \varepsilon}; \quad G = \frac{\sinh \varepsilon + \sin \varepsilon}{\cosh \varepsilon + \cos \varepsilon} \quad (2.31)$$

cu $\varepsilon = a/\delta$

Funcțiile F și G sunt reprezentate în fig.2.5, [91].

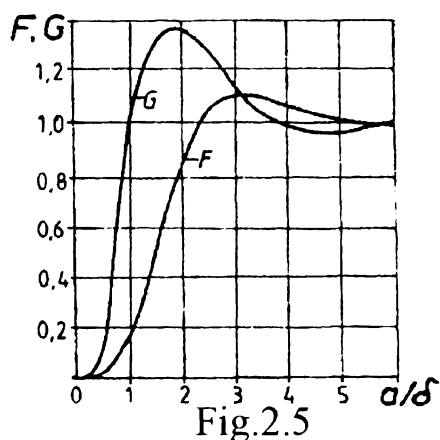


Fig.2.5

b) Dacă excitația are loc pe cele două fețe în sensuri contrare (fig.2.6), funcțiile F și G vor avea expresiile:

$$F = \frac{\sinh \varepsilon + \sin \varepsilon}{\cosh \varepsilon - \cos \varepsilon}; \quad G = \frac{\sinh \varepsilon - \sin \varepsilon}{\cosh \varepsilon - \cos \varepsilon} \quad (2.32)$$

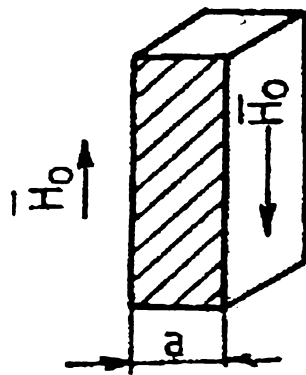


Fig.2.6

Comparația relațiilor(2.32) cu relațiile(2.28) arată că pentru determinarea funcțiilor F și G din relațiile (3.33) pot fi utilizate curbele din fig.2.3 raportate la o placă de grosime $a/2$.

La încălzirea unei bare de secțiune dreptunghiulară cu laturile a și l , aflată în câmp magnetic uniform, orientat tangent suprafeței, mărimile F și G care definesc puterile activă și reactivă, prezintă variația indicată în fig.2.7

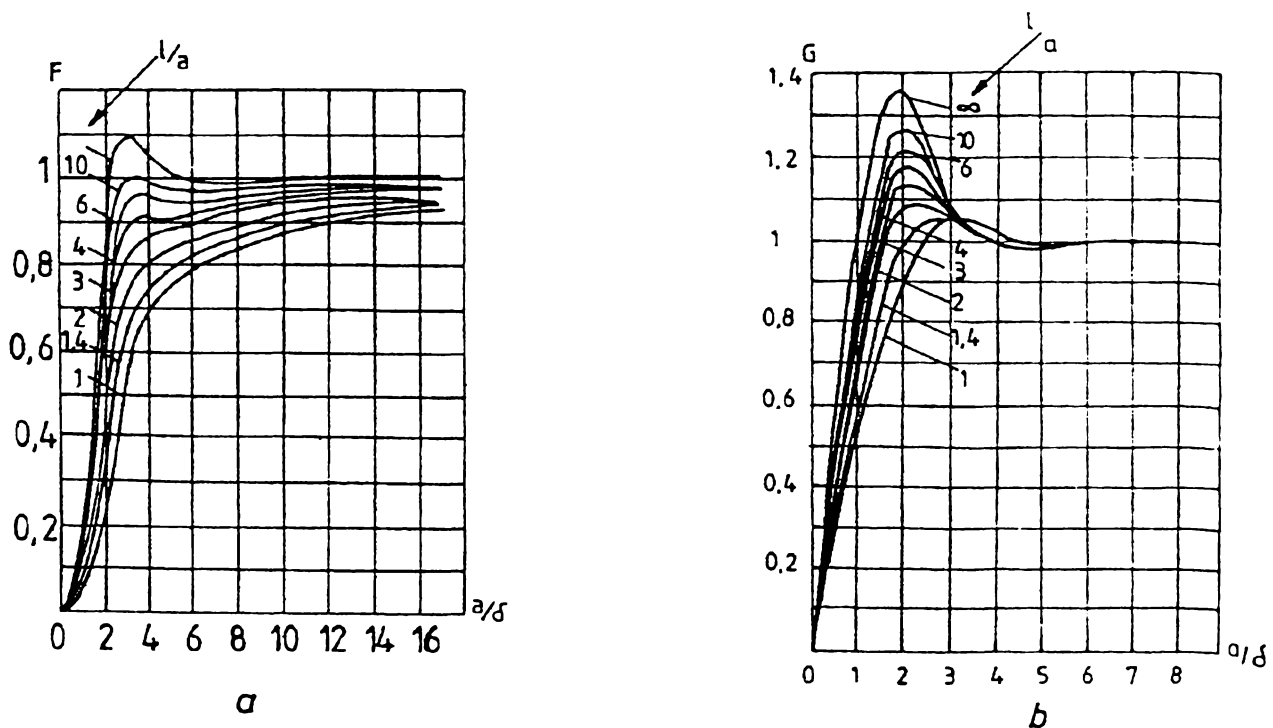


Fig.2.7

2.1.2. Pătrunderea câmpului electromagnetic în corpuri cilindrice

Pentru cazul unui conductor cilindric de raza r_0 (fig.2.8) și lungime finită, la suprafața căruia este un câmp magnetic \vec{H}_0 orientat după axa Oz, cu variație sinusoidală în timp, datorită mediului izotrop și omogen al materialului cilindrului și a uniformității câmpului magnetic la suprafață, toate mărimile de stare locală ale câmpului electromagnetic sunt funcții numai de coordonata r și timpul t :

$$\vec{H} = \vec{H}(r, t); \quad \vec{E} = \vec{E}(r, t); \quad \vec{J} = \vec{J}(r, t).$$

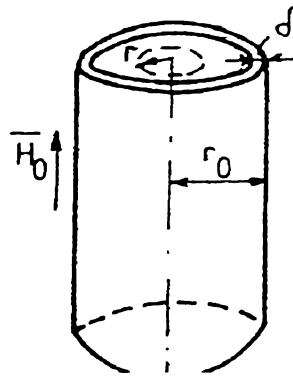


Fig.2.8

Relația (2.9) scrisă pentru cazul particular analizat, în coordonatele cilindrice, conduce la expresia:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial r} = \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.33)$$

În regim armonic, în complex simplificat, relația (2.33) devine:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d\vec{H}}{dr} \right) = j\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \vec{H} \quad (2.34)$$

iar:

$$\vec{H}(r, t) = \text{Im} \left\{ \sqrt{2} \cdot \vec{H} e^{j\omega t} \right\} \quad (2.35)$$

Soluția ecuației (34) este o formă specială a funcțiilor tip Bessel în care variabila este mărime complexă:

$$\vec{H}(r) = \underline{A}_1 \cdot J_0 \left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j} \right) + \underline{A}_2 \cdot K_0 \left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j} \right) \quad (2.36)$$

În relația 2.36 δ -este adâncimea de pătrundere având forma indicată în 2.15, J_0 -este funcția Bessel de speța întâi și ordin zero iar K_0 -funcția Bessel de speța a doua și de ordin zero:

$$J_0(\sqrt{-jx}) = \text{ber}x + \text{jbe}ix \quad (2.37)$$

în care:

$$\begin{aligned} berx &= 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \\ beix &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \end{aligned} \quad (2.38)$$

Intensitatea câmpului electric \bar{E} rezultă din prima dintre ecuațiile lui Maxwell; deoarece \bar{H} este orientat după axa Oz, singurele componente nenule ale $\text{rot}\bar{H}$ sunt cele tangențiale:

$$\bar{E}(r,t) = \bar{E} = -\frac{\partial \bar{H}(r,t)}{\partial r} \quad (2.39)$$

sau, în mărimi complexe:

$$\bar{E} = -\frac{dH}{dr} \quad (2.40)$$

Conductorul cilindric plin prezintă următoarele condiții la limită pentru intensitatea câmpului magnetic:

- pentru $r=0$, intensitatea câmpului magnetic are o valoare finită și deoarece

$$J_0(0) = 1 \text{ și } K_0(0) \rightarrow \infty \text{ rezultă } A_2 = 0$$

- pentru $r_0 = r$, $\underline{H} = \underline{H}_0$ și rezultă $\underline{A}_1 = \underline{H}_0 / J_0\left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)$

Având în vedere expresiile constantelor de integrare \underline{A}_1 și \underline{A}_2 , din relația 2.36 rezultă expresia de calcul a câmpului magnetic într-un punct de rază curentă r:

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)}{J_0\left(\frac{r_0}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)} \quad (2.41)$$

Dacă se au în vedere expresiile funcțiilor Bessel, relația 2.41 devine:

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \cdot \frac{berx + jbeix}{berx_0 + jbeix_0} \quad (2.42)$$

unde:

$$x = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{\delta} \text{ și } x_0 = \frac{r_0 \cdot \sqrt{2}}{\delta} \quad (2.43)$$

Intensitatea câmpului electric poate fi determinată pe baza relației 2.40 având în vedere expresia 2.42 a intensității câmpului magnetic:

$$\underline{E} = -\frac{dH}{dr} = -H_0 \cdot \frac{p}{\delta} \cdot \frac{J_0\left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)}{J_0\left(\frac{r_0}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)} \quad (2.44)$$

Deoarece:

$$J_0\left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right) = J_1\left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right) \quad (2.45)$$

Unde J_1 este funcția Bessel de ordinul unu și speța întâi, rezultă:

$$\underline{E} = -H_0 \cdot \frac{p}{\delta} \cdot \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)}{J_0\left(\frac{r_0}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)} \quad (2.46)$$

Înlocuind relațiile 2.41 și 2.46 ale intensității câmpului magnetic \bar{H} și respectiv intensității câmpului electric \bar{E} în expresia vectorului Poynting, scrisă în complex, se obține:

$$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{H}^* = -H_0^2 \cdot \frac{p}{\delta} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{J_0^*\left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)}{J_0^*\left(\frac{r_0}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)} \cdot \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)}{J_0\left(\frac{r_0}{\delta} \cdot \sqrt{-2j}\right)} \quad (2.47)$$

sau:

$$\underline{S} = -H_0^2 \cdot \frac{p}{\delta} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\text{ber}'x + j\text{bei}'x}{\text{ber}x_0 + \text{beix}_0} \cdot \frac{\text{ber}x - j\text{beix}}{\text{ber}x_0 - j\text{beix}_0} \quad (2.48)$$

Semnul (-) din fața relației 2.48 indică faptul că S este orientat spre interiorul cilindrului (în sens contrar variabilei r).

Puterea S_0 absorbită pe unitatea de arie a suprafeței cilindrului rezultă:

$$\underline{S}_0 = H_0^2 \cdot \frac{p}{\delta} \cdot (F + jG) = P_0 + jQ_0 \quad (2.49)$$

sau:

$$\underline{S}_0 = H_0^2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f \cdot p \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} \cdot (F + jG) \quad (2.50)$$

În relațiile 2.49 și 2.50 au fost folosite notațiile:

$$F = \sqrt{2} \cdot \frac{\text{ber}x_0 \cdot \text{ber}'x_0 + \text{beix}_0 \cdot \text{bei}'x_0}{(\text{ber}x_0)^2 + (\text{beix}_0)^2}$$

$$G = \sqrt{2} \cdot \frac{\text{ber}x_0 \cdot \text{ber}'x_0 - \text{beix}_0 \cdot \text{ber}'x_0}{(\text{ber}x_0)^2 + (\text{beix}_0)^2} \quad (2.51)$$

Variația mărimilor F și G în funcție de raportul dintre diametrul $d=2r_0$ și adâncimea de pătrundere δ este indicată în fig.2.9.

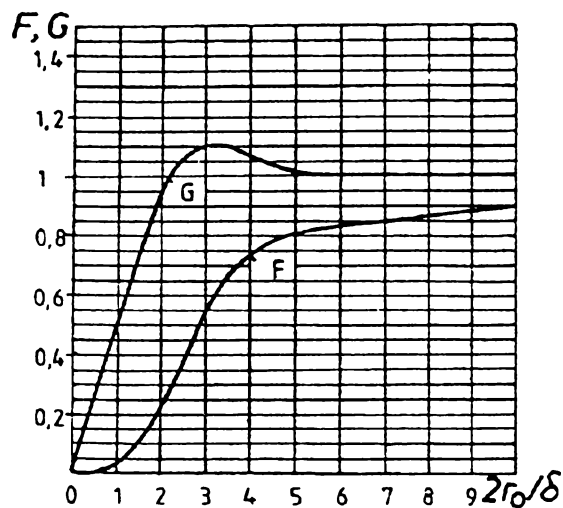


Fig.2.9

La suprafața cilindrului, câmpul electric \underline{E}_0 are expresia:

$$\underline{E}_0 = -\underline{H}_0 \cdot \frac{P}{\delta} \cdot (F + jG) \quad (2.52)$$

Conductorul cilindric gol, excitat la interior (fig.2.10) poate fi caracterizat prin următoarele condiții la limită pentru câmpul magnetic:

- pentru $r=r_i$, $\underline{H} = \underline{H}_0$
- pentru $r=r_e$, $\underline{H} = 0$

(din legea circuitului magnetic scrisă pe conturul Γ , deoarece $\underline{H} = \underline{H}_e = N \cdot I = 0$)

Rezultă:

$$\underline{S}_0 = -H_0^2 \cdot \frac{P}{\delta} \cdot (F + jG) \quad (2.53)$$

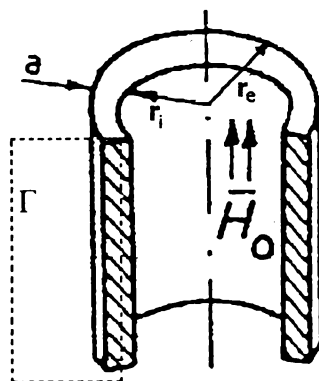


Fig.2.10

Funcțiile F și G depind de r_e și r_i și sunt indicate în fig.2.11 și în funcție de raportul dintre grosimea țevii și adâncimea de pătrundere.

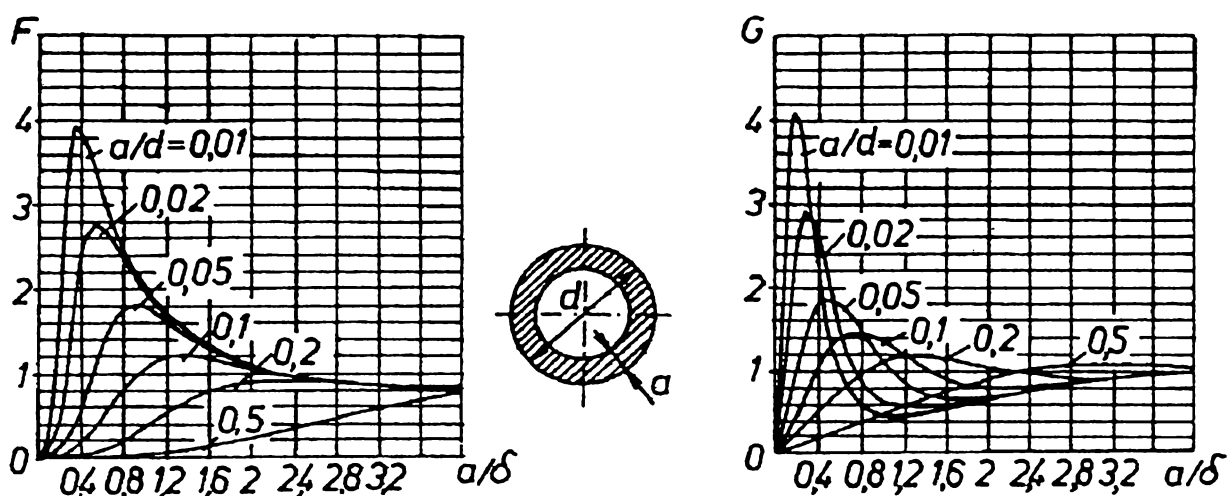


Fig.2.11

Conductorul cilindric gol, excitat la exterior (fig.2.12) poate fi caracterizat prin următoarele condiții la limite pentru câmpul magnetic:

- pentru $r = r_e$, $\underline{H} = \underline{H}_0$
- pentru $r = r_i$, $\underline{H} = \underline{H}_i$

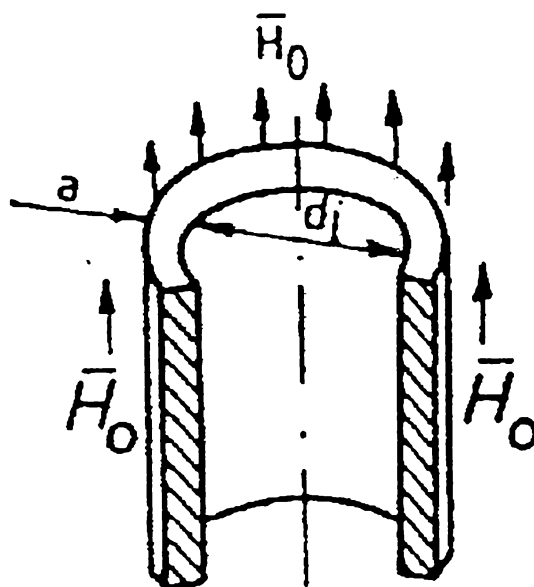


Fig.2.12

Expresia vectorului Poynting are aceeași formă (2.53) iar funcțiile F și G corespund celor din fig.2.11 dacă a/δ are valori mari.

Cazul pieselor cilindrice la care golul din interior este mic ($\delta < a$) (fig.2.13,a) poate fi asimilat pieselor cilindrice pline, expresia puterii transmise fiind dată de relația(2.50).

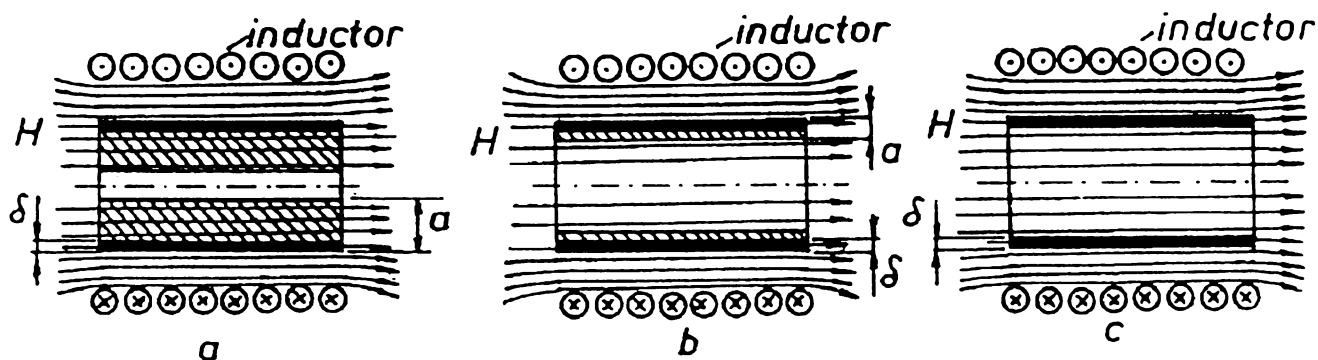


Fig.2.13

Pentru piesele la care adâncimea de pătrundere devine comparabilă cu grosimea peretelui (fig.2.13,b) sau este superioară acesteia (fig.2.13,c), în expresia puterii dedusă anterior, funcțiile F și G corespund pătrunderii câmpului electromagnetic în aceste condiții și prezintă valorile indicate în fig.2.11. Pentru astfel de piese, factorul de transmisie F , depinde de două rapoarte: grosimea cilindrului/adâncimea de pătrundere (a/δ) și grosimea piesei/diametrul piesei (a/d) (fig.2.11).

Se observă faptul că, dacă $a/d = 0,5$ tubul este de fapt un cilindru plin și F va avea aceeași valoare ca la corpurile pline. Mărimea F , pentru $a/\delta \leq 1$ și $a/d \leq 1$ se poate calcula prin relația (2.5):

$$F = \frac{(a/\delta)^3}{(a/\delta)^4 + \mu_r (a/\delta)^2} \quad (2.54)$$

Analiza curbelor din figura 2.11 arată că pentru valori convenabile ale rapoartelor a/d și a/δ puterea transmisă unei piese goală la interior este mai mare decât cea transmisă piesei pline de același diametru.

2.1.3. Calculul simplificat al puterii transmise într-o piesă cilindrică

Calculul exact al puterii disipate în materialul supus încălzirii, impune utilizarea ecuațiilor lui Maxwell. Utilizând adâncimea de pătrundere δ este posibilă, atunci când raportul dintre diametrul piesei și adâncime de pătrundere este mai mare ca 10, efectuarea un calcul simplificat al puterii cu o eroare mai mică de 10% față de calculul exact. În această ipoteză, se consideră că curentul electric din material este concentrat în zona de grosime δ .

Curenții induși parcurg deci un conductor asimilabil cu o coajă cilindrică (în ipoteza unui corp de formă cilindrică, de înălțime h , supus încălzirii prin inducție). Lungimea

conductorului este egală cu circumferința secțiunii circulare a acestui cilindru (πd unde d este diametrul exterior al piesei, $d=2r$, ca fig.2.14).

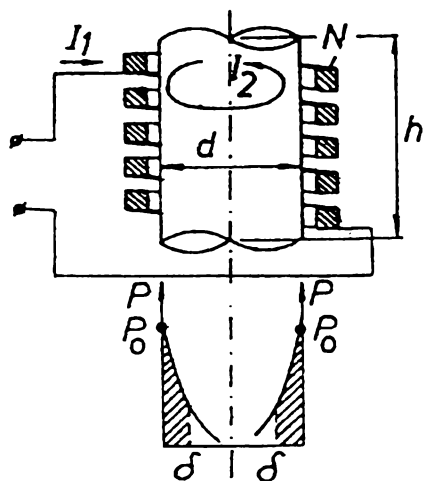


Fig.2.14

Aria secțiunii transversale a conductorului considerat este egală cu $h\delta$. Rezistența electrică a acestui conductor rezultă:

$$R = \rho \cdot \frac{\pi d}{h\delta} \quad (2.55)$$

Puterea P disipată în corpul de încălzit este:

$$P = R \cdot I_2^2 \quad (2.56)$$

Dacă se are în vedere faptul că curentul I_2 indus în material se poate scrie sub forma :

$$I_2 \cong N \cdot I_1 \quad (2.57)$$

unde I_1 este curentul din inductor, iar N -numărul de spire ale inductorului, expresia (2.56) a puterii P devine:

$$P = \rho \cdot \frac{\pi d}{h\delta} \cdot (N \cdot I_1)^2 \quad (2.58)$$

Intensitatea câmpului magnetic creat de bobină, în interiorul acesteia este:

$$H_0 = N I_1 / h \quad (2.59)$$

Având în vedere expresia (2.59) a câmpului magnetic H_0 , puterea P dezvoltată în material devine:

$$P = \rho \cdot \frac{\pi d}{h\delta} H_0^2 h^2 = \frac{\rho}{\delta} \pi d h H_0^2 \quad (2.60)$$

Puterea P_1 disipată pe unitatea de lungime a piesei va fi:

$$P_1 = \frac{\rho}{\delta} \pi d H_0^2 \quad (2.61)$$

Puterea P_s indusă pe unitatea de arie rezultă:

$$P_s = \frac{\rho}{\delta} H_0^2 \quad (2.62)$$

Din relația (2.62) se observă faptul că puterea dezvoltată în corp coincide cu cea dedusă prin calcul exact din ecuațiile Maxwell, dacă se utilizează un factor de corecție k ce depinde de raportul d/δ și de geometria piesei. În cazul pieselor de lungime infinită, factorul de corecție k coincide cu factorul de transmisie a puterii F

În calculele practice, expresia (2.62) a puterii disipată în material va fi utilizată și sub forma:

$$P_s = \frac{\rho}{\delta} \cdot H_0^2 \cdot k \quad (2.63)$$

2.2.Ecuatiile câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic

Abordarea problemei cuplate de câmp electromagnetic și termic în cazul general, adică cu luarea în considerare a câmpului magnetic de reacție, este destul de dificilă. Ea este specifică problemelor de curenți turbionari și are o mare implicație în multe tehnologii electrice. Astfel, în cazul încălzirii prin inducție, curenții turbionari creați în piesa de lucru de tensiunile electromotoare induse o încălzesc prin efect electrocaloric și aceasta încălzită își schimbă parametrii magnetici și electrici ceea ce duce la modificarea distribuției curenților turbionari.

Având în vedere importanța deosebită pe care o are această problemă, legată de interesul major al aplicațiilor în ingineria electrică, în prezentul capitol, pe baza formelor locale ale legilor câmpului electromagnetic și ale transmisiei căldurii, s-au scris ecuațiile cuplate ale câmpurilor electromagnetic cvasistaționar și termic cu precizarea condițiilor de frontieră, acestea s-au particularizat pentru cazul câmpurilor plan-paralele la diverse geometrii ale mediilor feromagnetice și s-au scris expresiile puterilor disipate în vederea evaluării efectului electrocaloric al curenților turbionari.

2.2.1. Formele locale ale legilor transmisiei căldurii

Transferul de căldură în problemele de curenți turbionari pe care le urmărim se face prin conducție interioară și prin conducție exterioară. Transferul prin conducție interioară este dat de legea lui Fourier care ne arată că vectorul densitate al fluxului termic este direct proporțional cu gradientul câmpului termic (al temperaturii), constanta de proporționalitate fiind conductivitatea termică interioară și cu semn schimbat, adică ;

$$\vec{q} = -\lambda grad \vartheta \quad (2.64)$$

Se menționează că, în general, conductivitatea λ poate fi funcție de temperatură.

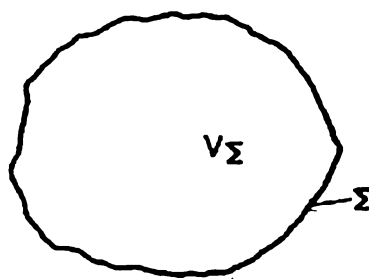


Fig.2.15

Fie, p , căldura dezvoltată în unitatea de volum și în unitatea de timp într-un mediu conductor oarecare. În acest caz, dacă ne referim la suprafața Σ , ce mărginește un domeniu având volumul V_Σ , fig. 2.15, se poate scrie următoarea ecuație de bilanț:

$$\int_{V_\Sigma} p dv = \oint_{\Sigma} \bar{q} \cdot \bar{ds} + \int_{V_\Sigma} \rho' c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dv \quad (2.65)$$

În ipoteza că, în V_Σ transferul de căldură se face exclusiv prin conducție interioară, se poate scrie:

$$\int_{V_\Sigma} p dv = \int_{V_\Sigma} \left(\text{div} \bar{q} + \rho' c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) dv$$

și cum V_Σ este arbitrar, rezultă:

$$p = \text{div} \bar{q} + \rho' c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

sau:

$$-\nabla \lambda \nabla \vartheta - \lambda \nabla^2 \vartheta + \rho' c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = p \quad (2.66)$$

Transferul prin conducție exterioară este dat de legea lui Newton care ne arată că vectorul densitate al fluxului termic prin conducție exterioară este direct proporțional cu diferența de temperatură de la suprafața mediului și a punctelor din vecinătatea acesteia, constanta de proporționalitate fiind conductivitatea termică exterioară, adică:

$$\bar{q}_0 \cdot \bar{n} = q_0 = \alpha(\vartheta - \vartheta_0) \quad (2.67)$$

Egalitatea (2.67) mai arată că densitatea fluxului de căldură, \bar{q}_0 este ortogonală la suprafața mediului.

Pentru a obține forma bilanțului termic la suprafața de separație între mediul considerat 1 și un alt mediu 2 în care nu se dezvoltă căldură, iar temperatura este constantă în timp în mediul 2, se consideră cilindrul elementar din fig.2.16 ce are înălțimea

$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2$ mult mai mică ca raza bazei.

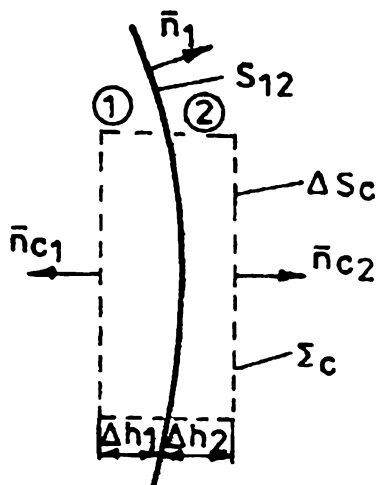


Fig.2.16

Aplicând forma integrală a bilanțului termic (2.64) volumului cilindric ΔV_{Σ_c} și neglijând fluxul termic prin suprafața sa laterală, se obține:

$$p\Delta S_c\Delta h_1 = \bar{n}_{c1}\Delta S_c\bar{q}_1 + \bar{n}_{c2}\Delta S_c\bar{q}_2 + \rho'c\Delta S_c\Delta h_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

care prin împărțirea cu ΔS_c și luând limita când $\Delta h_1 \rightarrow 0$, $\Delta h_2 \rightarrow 0$, conduce la:

$$-\bar{n}_1\bar{q}_1 + \bar{n}_1\bar{q}_2 = 0$$

deoarece $\lim_{\Delta h_1 \rightarrow 0} \bar{n}_{c1} = -\bar{n}_1$ și $\lim_{\Delta h_2 \rightarrow 0} \bar{n}_{c2} = \bar{n}_1$,

și folosind expresia (2.64), pentru q_1 , avem: $\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n_1} + q_0 = 0$ (2.68)

2.2.2. Ecuațiile cuplate ale câmpurilor electromagnetic quasistationar și termic

Fie un domeniu dintr-un mediu feromagnetic oarecare având volumul V_{Σ} și limitat de suprafața închisă Σ , ca în fig.2.17, caracterizat prin aceea că permeabilitatea magnetică este funcție de intensitatea câmpului magnetic și de temperatură, iar conductivitatea numai de temperatură.

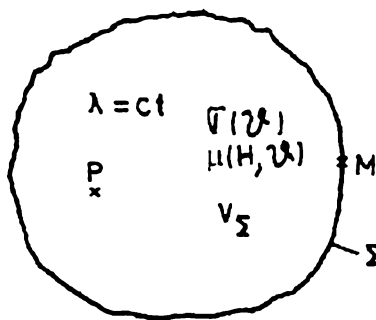


Fig.2.17

Câmpurile electromagnetice quasistacionare și termice satisfac sistemul de ecuații: $\text{rot}\bar{H} = \bar{J}$

$$\begin{aligned} \text{rot}\frac{\bar{J}}{\sigma(\vartheta)} &= -\frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta)\bar{H}] = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ -\nabla\lambda\nabla\vartheta - \lambda\nabla^2\vartheta + \rho \cdot c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{J^2}{\sigma(\vartheta)} \end{aligned} \quad (2.69)$$

și condiția de frontieră: $\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} + q_0 = 0$ pe Σ

S-a presupus regimul quasistacionar, mediul izotrop, fără câmpuri imprimate, lipsit de magnetizare permanentă și că sunt cunoscute caracteristicile $\sigma(\vartheta)$ și $\mu = \mu(H, \vartheta)$ ca funcții univoce. Dacă în punctele de pe fața interioară a lui Σ , temperatura este constantă (Σ fiind deci o suprafață izotermă), ultima ecuație din sistemul (2.69) reprezintă o condiție de tip mixt (Cauchy) deoarece λ este o constantă, iar q_0 este o funcție liniară de temperatură.

În cele ce urmează se va presupune că sistemul (2.69) admite o soluție unică în condițiile precizate de teorema unicității pentru medii liniare, adică în domeniul V_Σ se cunosc la $t=0$: temperatura $\vartheta = \vartheta(0, P)$, densitatea de curent $J=J(0, P)$, intensitatea câmpului magnetic $H=H(0, P)$ și pe suprafața Σ se dă în fiecare moment temperatura ϑ_0 și componenta tangentă a intensității câmpului magnetic. De asemenea se presupun date curbele $\sigma(\vartheta)$ și $\mu(H, \vartheta)$.

2.2.3 Puterea medie dezvoltată în unitatea de volum

După ce s-au determinat soluțiile pentru intensitatea câmpului magnetic $\bar{H} = \bar{H}(x, y, z, t)$ și temperatura $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$, la fiecare interval de timp, se poate calcula puterea medie în unitatea de volum, prin efect electrocaloric, cu relația:

$$p = \int_{V_\Sigma} \frac{J^2}{\sigma(\vartheta)} dv = \int_{V_\Sigma} \frac{|\text{rot}\bar{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} dv \quad (2.70)$$

Dacă fenomenele sunt periodice, puterea activă, adică puterea medie pe un interval de o perioadă, se calculează cu relația:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \quad (2.71)$$

2.2.4. Cazul câmpurilor plan paralele

Se consideră un cilindru feromagnetic de lungime infinită și secțiune arbitrară plasat în interiorul unei bobine care este excitată în curent alternativ, ca în fig.2.18.

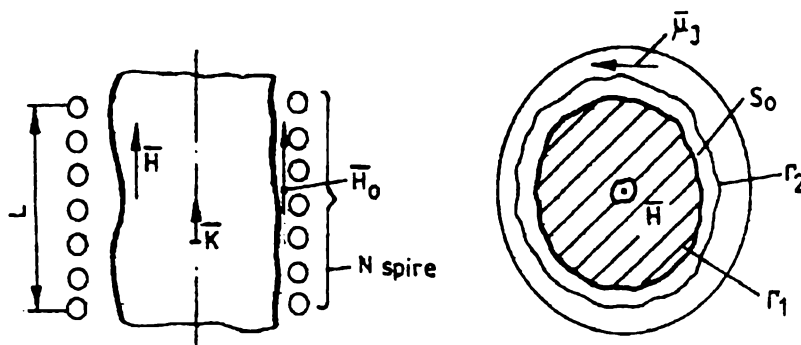


Fig.2.18

În legătură cu condițiile de frontieră în practică interesează următoarele cazuri:

a) Intensitatea curentului ce alimentează bobina este cunoscută, fiind o funcție sinusoidală dată. Se cunoaște deci densitatea pânzei de curent cu care a fost echivalentă bobina:

$$\bar{J}_s = i_m N_1 \sin \omega t \cdot \bar{u}_J; \quad N_1 = \frac{N}{L} \quad (2.72)$$

Intensitatea câmpului magnetic pe frontiera Γ_2 devine cunoscută:

$$\bar{H}_0 = J_s \bar{k} \quad (2.73)$$

deoarece în exteriorul bobinei $H_0=0$.

Dacă distanțele între curbele Γ_1 și Γ_2 sunt mici, \bar{H}_0 poate fi constant pe suprafața S_0 mărginită de curbele Γ_1 și Γ_2 .

$$\text{Cum } \bar{H} = \bar{H}(x, y, \vartheta) = H(x, y, \vartheta) \bar{k} \quad (2.74)$$

la un moment dat, este avantajos ca sistemul de ecuații (2.69) să fie scris numai în funcție de H :

$$\text{rot} \left[\frac{1}{\sigma(\vartheta)} \text{rot} \bar{H} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{B}$$

care cu relația (2.74), devine:

$$\nabla \times \left[-\bar{k} \times \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \nabla H \right] = -\bar{k} \left[\nabla \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \nabla H + \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \nabla^2 H \right] = -\frac{\partial}{\partial t} B \bar{k}$$

$$\text{sau} \quad \nabla \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \cdot \nabla H \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \cdot \nabla^2 H = \frac{\partial}{\partial t} B \quad (2.75)$$

unde s-a ținut seama că σ și H nu depind de Z .

A treia ecuație din sistemul (2.69) devine:

$$-\nabla\lambda \cdot \nabla\vartheta - \lambda\nabla^2 \cdot \vartheta + \rho \cdot c \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{(\bar{k} \times \nabla H)^2}{\sigma(\vartheta)} \quad (2.76)$$

iar condițiile de frontieră se scriu:

$$H=H_0; \lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + q_0 = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \quad (2.77)$$

b) Se cunoaște tensiunea de alimentare a bobinei ce exercită câmpul exterior. Dacă se poate neglija rezistența spirelor bobinei, atunci tensiunea într-o spiră se poate scrie în forma:

$$u_{es} = -\frac{u_b}{N} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{S_{\Gamma_1}} \frac{\partial B}{\partial t} ds - \mu_0 \int_{S_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} ds$$

adică:

$$\int_{S_{\Gamma_1}} \frac{\partial B}{\partial t} ds = \frac{u_b}{N} - \int_{S_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} ds \quad (2.78)$$

H_0 este intensitatea câmpului magnetic pe suprafața S_0 .

Ca urmare condițiile de frontieră vor fi:

$$\int_{S_{\Gamma_1}} \frac{\partial B}{\partial t} ds + \mu_0 \int_{S_0} \left(\frac{\partial H_0}{\partial t} \right)_{\Gamma_1} ds = \frac{u_b}{N}$$

$$\lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + q_0 = 0 \quad (2.79)$$

Astfel, pentru acest caz sistemul care trebuie integrat este:

$$\nabla \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \cdot \nabla H + \nabla \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \cdot \nabla^2 H = \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta)H]$$

$$-\nabla\lambda \cdot \nabla\vartheta - \lambda\nabla^2 \vartheta + \rho c \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{(\bar{k} \times \nabla H)^2}{\sigma(\vartheta)} \quad (2.80)$$

în condițiile de frontieră

$$H=H_0$$

$$\lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \quad (2.81)$$

sau:

$$\int_{S_{\Gamma_1}} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta)H] ds + \mu_0 \int_{S_0} \left(\frac{\partial H_0}{\partial t} \right)_{\Gamma_1} ds = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{N} \quad (2.82)$$

$$\lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1$$

În urma determinării soluțiilor $\overline{H} = \overline{H}(x, y, t)$ și $\vartheta = \vartheta(x, y, t)$ la fiecare interval de timp, se poate calcula puterea medie în unitatea de volum, prin efect electrocaloric, cu relația:

$$p = \frac{1}{S_{r_1}} \int_{S_{r_1}} \frac{|\text{rot} \overline{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} ds \quad (2.83)$$

și puterea medie pe un interval de o perioadă cu formula (2.71)

2.2.4.1. Placă feromagnetică

Se consideră o placă feromagnetică de lățime mare în raport cu grosimea sa Δ și lungime infinită, ca în fig.2.19.

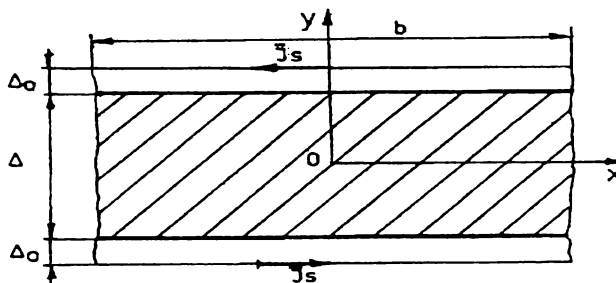


Fig.2.19

În ipoteza a), ecuațiile (2.80) și condițiile de frontieră (2.81) obțin formele particulare:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sigma(\vartheta)} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta) H] \quad (2.84)$$

$$H\left(\pm \frac{\Delta}{2}, t\right) = J_s = J_{sm} \sin \omega t; \quad J_{sm} = i_m N_1$$

sau:

$$H\left(\pm \frac{\Delta}{2}, t\right) = H_0 \sin \omega t$$

și

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 - \lambda \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \rho' c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \quad (2.85)$$

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) = 0 \quad \text{pentru } y = \pm \frac{\Delta}{2}$$

În ipoteza b) se modifică față de a) numai cea de-a doua ecuație din (2.84).

Astfel, dându-se tensiunea de alimentare a bobinei ce exercită câmpul magnetic exterior, ca fiind:

$$u_b = U_{bm} \sin \omega t \quad (2.86)$$

tensiunea care revine unei spire va fi:

$$u_{bs} = \frac{u_b}{N} = \frac{U_b \sin \omega t}{N} \quad (2.87)$$

iar cea corespunzătoare unității de lungime:

$$u_b^* = \frac{u_{bs}}{b} = U \sin \omega t \quad \text{cu: } U = \frac{U_{bm}}{bN} \quad (2.88)$$

Cu acestea, prima ecuație din (2.16) devine:

$$2\Delta_0 \mu_0 \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{y=\frac{\Delta}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta) H] dy = u_{bs}^* \quad (2.89)$$

cu
$$\left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Rezolvarea acestor ecuații este dificilă și posibilă doar prin metode aproximative. Într-un caz particular ar avea permeabilitatea magnetică constantă, de exemplu egală cu cea a vidului, iar din punct de vedere al câmpului termic ϑ , procesele s-ar putea considera o succesiune de stări staționare (termenul $\rho' c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$), pornind de la $\vartheta = \vartheta_0$, prima ecuație a sistemului (2.84) devine:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \sigma(\vartheta_0) \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.90)$$

pentru care se încearcă o soluție de forma:

$$H_1 = H_{1m} \cdot e^{\beta y} \sin \omega t \quad \text{cu } \beta = \pm \sqrt{\sigma(\vartheta_0) \mu_0}$$

deci:

$$H_1 = (C_1 e^{\beta y} + C_2 e^{-\beta y}) \sin \omega t \quad (2.91)$$

unde constantele C_1 și C_2 se calculează din condițiile de frontieră. Astfel, conform ecuației a doua din (2.84) se obțin:

$$C_1 e^{\beta \frac{\Delta}{2}} + C_2 e^{-\beta \frac{\Delta}{2}} = J_{sm} \quad \text{și} \quad C_1 e^{-\beta \frac{\Delta}{2}} + C_2 e^{\beta \frac{\Delta}{2}} = J_{sm}$$

de unde, avem:

$$C_1 = C_2 = J_{sm} \frac{e^{\beta \frac{\Delta}{2}} - e^{-\beta \frac{\Delta}{2}}}{e^{\beta \Delta} - e^{-\beta \Delta}}$$

și

$$H_1 = J_{sm} \frac{\text{sh}\beta \left(\frac{\Delta}{2} + y \right) + \text{sh}\beta \left(\frac{\Delta}{2} - y \right)}{\text{sh}\beta \Delta} \sin \omega t$$

cu

$$H_{1ef} = \frac{J_{sm}}{\sqrt{2}} \frac{sh\beta(\frac{\Delta}{2} + y) + sh\beta(\frac{\Delta}{2} - y)}{sh\beta\Delta} \quad (2.92)$$

iar conform ecuațiilor (2.89), dar cu : $u_b = U_{bm}$, obținem:

$$u_{bs}^* = 2\Delta_0 \mu_0 \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{y=\frac{\Delta}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} dy =$$

$$\left\{ 2\Delta_0 \mu_0 \omega C_1 ch\beta \frac{\Delta}{2} + 2\mu_0 \omega \frac{C_1}{\beta} \left[e^{\beta \frac{\Delta}{2}} - 1 + 1 - e^{-\beta \frac{\Delta}{2}} \right] \right\} \cos \omega t, C_1 = C_2$$

de unde rezultă:

$$C_1 = \frac{U_{bm}}{4N\mu_0\omega \left[\Delta_0 ch\beta \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{\beta} sh\beta \frac{\Delta}{2} \right]}$$

și

$$H_1 = 2C_1 ch\beta y \sin \omega t$$

cu

$$H_{1ef} = \frac{2C_1}{\sqrt{2}} ch \beta y \quad (2.93)$$

Considerând λ constant, câmpul temperaturii ϑ_1 rezultă prin integrarea ecuației:

$$-\lambda \frac{\hat{c}^2 \vartheta_1}{\hat{c}y^2} = \frac{1}{\sigma(\vartheta_0)} \left(\frac{\partial H_{1ef}}{\partial y} \right)^2 \quad (2.94)$$

Prin mijloace numerice, în condiția de frontieră dată de a doua relație din (2.85), iar valoarea lui H_{1ef} dată de una din relațiile (2.92) sau (2.93). Valorile obținute pentru câmpul termic, $\vartheta_1 = \vartheta_1(y)$ se introduc în prima ecuație din (2.84) care apoi se integrează numeric, procedeul continuând până când se obține o precizie impusă pentru câmpul magnetic și pentru cel termic.

În concluzie, se poate spune ca rezolvarea ecuațiilor de câmp magnetic și termic cuplate, în condițiile de frontieră precizate, este posibilă doar prin mijloace numerice. Astfel, pentru , $\vartheta = \vartheta_0$, avem $\sigma(\vartheta_0)$ și $\mu(H, \vartheta_0) = f_0(H)$, deci prima ecuație din (2.84) se poate integra numeric în una din cele două condiții de frontieră aferente ipotezelor a) sau b). Soluția obținută pentru H se introduce în prima ecuație din (2.85) care integrată numeric va da ca soluție câmpul termic ϑ , iar în continuare procesul iterativ ar trebui condus prin

mijloace numerice adecvate, la fiecare interval de timp se determină puterea medie dezvoltată în unitatea de volum, cu relația:

$$p = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{|\text{rot} \overline{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} dy \quad (2.95)$$

iar puterea activă medie din unitatea de volum se calculează astfel:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} dy \int_0^T \frac{|\text{rot} \overline{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} dt \quad (2.96)$$

2.2.4.2. Cilindru feromagnetic de secțiune circulară

Se consideră un cilindru feromagnetic de secțiune circulară și lungime infinită plasat în interiorul unei bobine care este excitată în curent alternativ, prezentat în secțiune în figura 2.20.

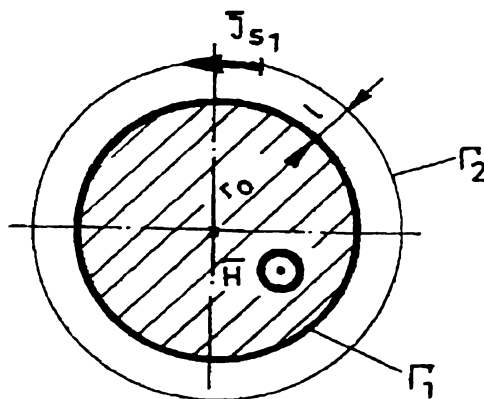


Fig.2.20

În coordonate cilindrice ecuațiile (2.75) și (2.76) obțin formele particulare :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sigma(\vartheta)} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta) H] \\ -\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)^2 - \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \rho' c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.97)$$

care trebuiesc integrate în condițiile de frontieră specifice celor două ipoteze și în condiția $\lambda = \text{ct}$.

În ipoteza a), condițiile de frontieră devin:

$$\begin{aligned} H &= H_0 = J_s \\ \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) &= 0 \quad \text{pentru } r = r_0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

iar în ipoteza b), avem:

$$\int_{s_r} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta)H] ds + \mu_0 S_0 \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{N} \quad (2.99)$$

care se asociază cu ecuația a doua din (2.98).

Aplicând legea inducției electromagnetice pe conturul Γ , se obține:

$$\oint_{\Gamma_1} \overline{E} dl = \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \overline{J} dl = \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \text{rot} \overline{H} dl = - \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \frac{\partial H}{\partial r} dl = - \int_{s_{r_1}} \frac{\partial B}{\partial t} ds \quad (2.100)$$

adică:

$$\frac{1}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_{r=r_0} 2\pi r_0 = \int_{s_{r_1}} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta)H] ds$$

Relația (2.99) obține forma:

$$\frac{1}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_{r=r_0} 2\pi r_0 + \mu_0 (2\pi r_0 l + \pi l^2) \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{N}$$

deoarece $S_0 = \pi(r_0 + l)^2 - \pi r_0^2 = \pi l^2 + 2\pi r_0 l$, l fiind distanța între cercurile Γ_2 și Γ_1

Prin împărțirea cu $2\pi r_0$, se obține:

$$\frac{1}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_{r=r_0} + \mu_0 \left(\frac{l}{r_0} + \frac{\pi l^2}{2\pi r_0 l} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{N} \quad (2.101)$$

Integrarea ecuațiilor (2.97) în condițiile de frontieră precizate se face prin mijloace numerice, așa cum s-a prezentat în cazul plăcii feromagnetice.

Expresiile pentru calculul puterilor medii în unitatea de volum, respectiv active medii din unitatea de volum sunt:

$$p = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{|\text{rot} \overline{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} r dr \quad (2.102)$$

respectiv:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{2f}{r_0^2} \int_0^{r_0} r dr \int_0^T \frac{|\text{rot} \overline{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} dt \quad (2.103)$$

2.2.4.3. Cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară

Se consideră un cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară și lungime infinită plasat într-un câmp magnetic variabil în timp, prezentat în secțiune în figura 2.21.

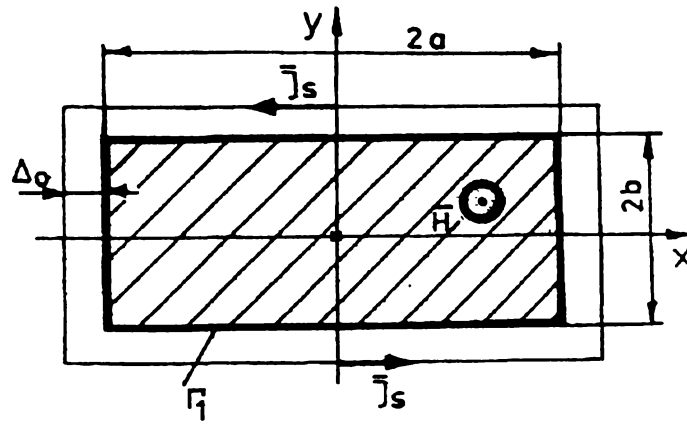


Fig.2.21

Ecuatiile (2.75) și (2.76) obțin formele particulare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sigma(\vartheta)} \right) \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta) H] \\ -\lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) + \rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.104)$$

care trebuie să fie integrate în condițiile de frontieră după cum urmează:

- în ipoteza a):

$$H(\pm a, y, t) = J_s, \quad H(x, \pm b, t) = J_s \quad (2.105)$$

$$\pm \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) = 0 \quad \text{pentru } x = \pm a \quad (2.106)$$

$$\pm \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) = 0 \quad \text{pentru } x = \pm b$$

- în ipoteza b):

$$4[\mu_0 \Delta_0 (a + \Delta_0) + \mu_0 \Delta_0 b] \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r_1} + \int_D \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta) H] dx dy = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{N} \quad (2.107)$$

cu D : $x = \pm a$

$y = \pm b$

și relațiile (2.106) care rămân aceleași.

Integrarea ecuațiilor (2.104), în condițiile de frontieră precizate, este posibilă numai prin mijloace numerice așa cum s-a precizat anterior.

Expresiile puterilor medii în unitatea de volum respectiv active medii din unitatea de volum sunt:

$$P = \frac{1}{4ab} \iint_D \frac{|\text{rot } \bar{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} dx dy \quad (2.108)$$

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{f}{4ab} \iint_D dx dy \int_0^T \frac{|\operatorname{rot} \bar{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} dt \quad (2.109)$$

cu D : $x = \pm a$

$y = \pm b$

2.3. Analiza numerică a câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic

2.3.1. Rezolvarea numerică a modelelor de câmp

Ecuatiile câmpurilor electromagnetice și termice cuplate, care descriu procesul de încălzire prin inducție a mediilor considerate, sunt ecuații diferențiale neliniare, cu derivatele parțiale care nu pot fi integrate pe cale analitică și de aceea pentru a obține soluțiile lor, în condițiile inițiale de frontieră precizate, este necesar să se apeleze la metodele numerice. Aceste metode devin eficiente dacă:

- rețeaua de discretizare are un număr suficient de mare de noduri corespunzător distribuite.

- se asigură convergența numerică a soluției.

Atunci când se pune problema determinării unui câmp într-un domeniu, care este soluția unei ecuații diferențiale cu derivate parțiale, în condiții inițiale și de frontieră bine precizate, două modalități sunt posibile:

- a) să se aproximeze operatorii diferențiali ai ecuației cu derivate parțiale și ai celor care precizează condițiile inițiale și de frontieră prin operatori simplificați, iar apoi să se rezolve sistemul algebric rezultat, ceea ce conduce la metoda diferențelor finite;

- b) păstrând operatorii diferențiali amintiți neschimbați, să se aproximeze câmpul și să se caute un algoritm care să ofere cea mai bună aproximare posibilă, ceea ce conduce la tehnicile variaționale ale lui Rayleigh-Ritz-Galerkin, cărora li se adaptează frecvent metoda elementului finit.

Un studiu complet, în cazul general al unor medii neomogene și nesimetrice, ar putea conduce la rezultate bune și prin combinarea celor două metode, astfel: determinarea variației în timp a mărimilor de câmp prin metoda diferențelor finite, iar la anumite momente de timp determinarea variației spațiale a acestora prin metoda elementului finit.

2.3.2. Metoda diferențelor finite pentru calculul câmpurilor

Această metodă se bazează pe aproximarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale prin ecuații cu diferențe finite care sunt de fapt ecuații algebrice. Comparativ cu metodele analitice care permit determinarea soluției de câmp în fiecare punct, metoda diferențelor finite dă valorile câmpului într-un număr finit de puncte-noduri, situate la intersecția curbelor unei rețele de discretizare a domeniului de câmp.

Fie o funcție $f(x)$ (care poate fi o funcție de câmp), definită pe intervalul $[a,b]$ care se consideră discretizat cu pas constant $h=(b-a)/n$ în " $n+1$ " noduri și fie $f_0, f_1, \dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_n$ valorile funcției în aceste noduri, fig.2.22.

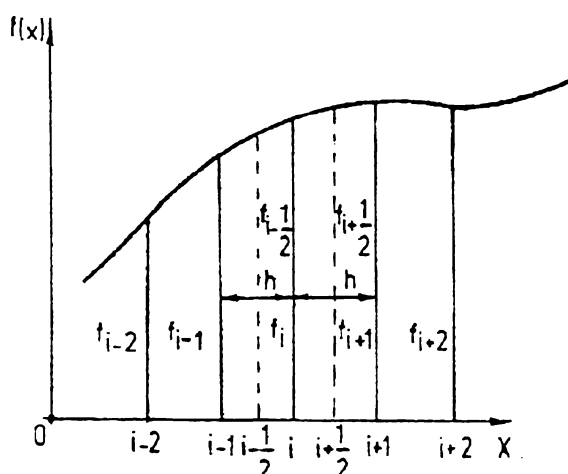


Fig.2.22

În acest mod, soluția unei ecuații diferențiale, în care funcția necunoscută este $f(x)$, va fi înlocuită prin tabloul de valori $[f_i]$, ale acesteia în nodurile rețelei de discretizare.

Expresiile derivatelor de ordinul unu, doi și trei ale funcției $f(x)$, în nodul " i ", utilizând diferențele finite regresive respectiv progresive sunt:

$$Df_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O_1(h)$$

$$D^2f_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + O_2(h) \quad (2.110)$$

$$D^3f_i = \frac{f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}}{h^3} + O_3(h)$$

respectiv:

$$Df_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O_1(h)$$

$$D^2f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O_2(h) \quad (2.111)$$

$$D^3 f_i = \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{h^3} + O_3(h)$$

unde $O_1(h)$, $O_2(h)$ și $O_3(h)$ sunt erorile de ordinul h . Pentru a obține formule cu erori de ordinul lui h^2 , trebuie să luăm în considerare primii doi termeni din dezvoltările derivatelor în diferențe.

Atunci când se folosesc în locul diferențelor centrale impare mediile aritmetice ale acestora în nodurile " $i+1/2$ " și " $i-1/2$ ", expresiile derivatelor de ordinul unu, doi și trei ale funcției $f(x)$ în nodul " i ", în funcție de diferențele sale, sunt:

$$\begin{aligned} Df_i &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O_1(h^2) \\ D^2 f_i &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O_2(h^2) \\ D^3 f_i &= \frac{f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_{i-1} - f_{i-2}}{h^3} + O_3(h^2) \end{aligned} \quad (2.112)$$

unde $O_1(h^2)$, $O_2(h^2)$, $O_3(h^2)$ sunt erorile respective de ordinul h^2 .

Fie o funcție $f(x,y)$ (care poate fi de asemenea o funcție de câmp) definită într-un anumit domeniu al planului xOy .

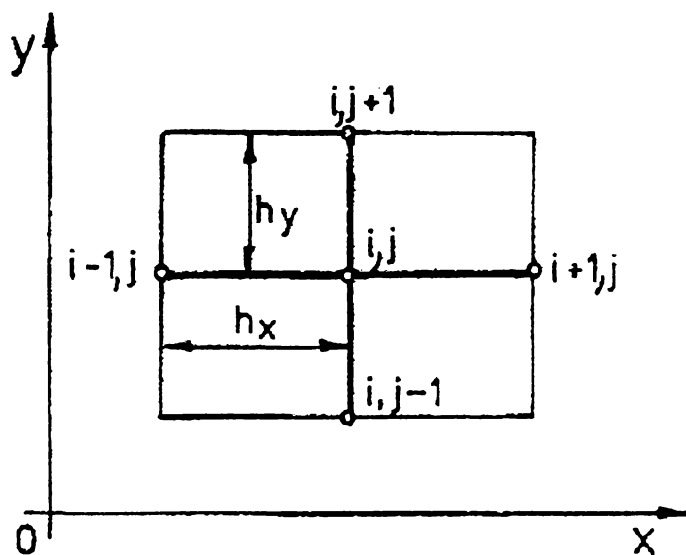


Fig.2.23

Pentru a determina expresiile derivatelor parțiale ale funcției $f(x,y)$, în nodul " i,j ", vom discretiza domeniul printr-o rețea rectangulară, fig.23, având pașii h_x în direcția x și h_y în direcția y invariabili, rețea numită dreptunghiulară, și pe urmă, aplicând formulele de la discretizarea pe o axă pentru cele două axe ale rețelei vom obține:

$$D_x f_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h_x}, \quad D_y f_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{h_y} \quad (2.113)$$

$$D_x^2 f_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h_x^2}, \quad D_y^2 f_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h_y^2}$$

unde s-au utilizat diferențele regresive pentru derivatele parțiale de ordinul întâi, cele centrale pentru diferențele parțiale de ordinul doi și s-au mai trecut erorile. Dacă $h_x = h_y = h$, rețeaua se numește pătratică.

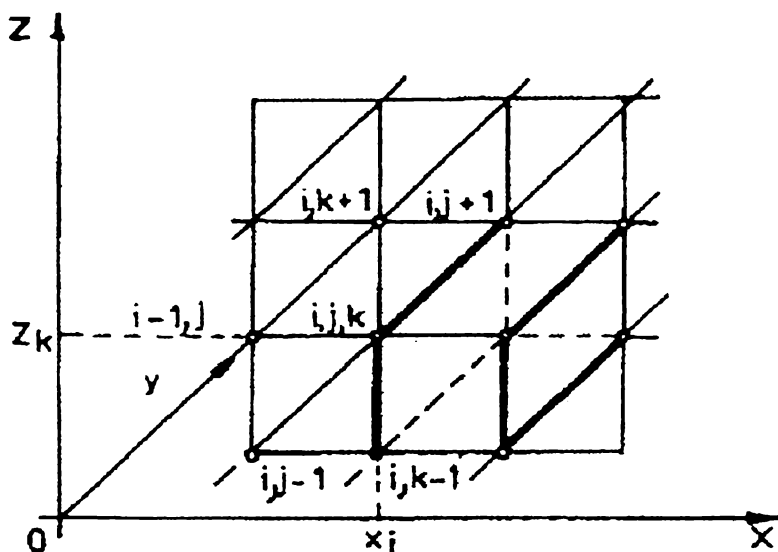


Fig.2.24

Pentru funcții de câmp de forma $f(x,y,z)$ definite într-un domeniu al spațiului cu trei dimensiuni, expresiile derivatelor parțiale ale acestora, în nodul "i,j,k", ale rețelei cubice de discretizare având pașii h_x , h_y , figura 2.24, se obțin aplicând formulele de discretizare pe o axă la cele trei axe. Spre exemplu, dacă se utilizează diferențele regresive pentru derivatele parțiale de ordinul întâi și cele centrale pentru cele de ordinul doi, vom obține:

$$D_x f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k} - f_{i-1,j,k}}{h_x}, \quad D_y f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j-1,k}}{h_y}, \quad D_z f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j,k-1}}{h_z}$$

$$D_x^2 f_{i,j,k} = \frac{f_{i-1,j,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i+1,j,k}}{h_x^2}, \quad D_y^2 f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j+1,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j-1,k}}{h_y^2} \quad (2.114)$$

$$D_z^2 f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k-1} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j,k+1}}{h_z^2}$$

unde, pentru simplitatea scrierii nu s-au mai trecut erorile.

În ecuațiile cu derivate parțiale de tip parabolic, de regulă, necunoscuta este o funcție de câteva variabile independente în raport cu spațiul și de o variabilă independentă în raport cu timpul. Sunt necesare deci discretizări spațiu-timp.

Expresiile obținute pentru derivatele de ordinul întâi și doi ale diverselor funcții, precizate anterior, conțin valorile funcției în nodurile rețelei de discretizare definite prin

indicii inferiori, la momentul de timp definit prin indicele superior. Derivata de ordinul întâi a funcțiilor se aproximează prin diferențe regresive, astfel:

$$\frac{df}{dt} = \frac{f^q - f^{q-1}}{\Delta t} \quad (2.115)$$

relație în care s-au precizat indicii inferiori aferenți nodurilor respective și în care Δt reprezintă pasul de discretizare temporar.

Ecuatiile algebrice obținute prin aplicarea metodei diferențelor finite se pot rezolva prin diverși algoritmi. În cazul unui număr mic de ecuații se utilizează metoda eliminării directe. Dacă numărul de ecuații este mare, se folosesc metode cum ar fi: metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel, metoda suprarelaxării succesive, metoda direcțiilor alternante, etc. Metodele iterative de rezolvare a ecuațiilor cu diferențe finite determină soluția prin aproximații succesive pornind de la valori arbitrare în nodurile rețelei de discretizare.

Metoda diferențelor finite se aplică pe scară largă la determinarea câmpurilor electric, magnetic, termic, fiind caracterizată printr-o precizie corespunzătoare în aplicațiile tehnice.

2.3.3. Cazul câmpurilor plan-paralele

Analiza numerică a câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic, a câmpurilor plan-paralele presupune determinarea soluției câmpurilor magnetic și termic, precum și determinarea puterii specifice dezvoltate de curenții turbionari și de evoluția lor în timp, într-un domeniu feromagnetic introdus într-un câmp magnetic variabil, ce are doar o componentă perpendiculară pe acesta, în condiții inițiale și de frontieră precizate. Pentru rezolvarea problemei s-au considerat următoarele ipoteze simplificatoare.

a) Mediul feromagnetic este izotrop din punct de vedere al proprietăților magnetice și termice.

b) Mediul feromagnetic are rezistivitatea electrică ρ funcție de temperatură, permeabilitatea magnetică μ este funcție de intensitatea câmpului magnetic și de temperatură, iar conductivitatea termică exterioară este funcție de temperatură.

c) Mediile feromagnetice au geometriile precizate anterior.

d) Modele de câmp elaborate ale problemei cuplate, luate în discuție, sunt specifice regimului cvasistaționar.

Pentru a obține rezultatele dorite și pentru a le utiliza în scopurile propuse s-au elaborat modele numerice în detaliu, având la bază metoda diferențelor finite.

2.3.3.1. Placă feromagnetică

a) Fără neglijarea câmpului magnetic de reacție creat de curenții din placă

Discretizând domeniul plăcii feromagnetice s-a realizat prin suprafețele plane numerotate de la 1 la NR, fig.2.25, straturile dintre suprafețe având numărul același ca și suprafața plană exterioară. Neglijând efectul de capăt, determinarea valorilor intensității câmpului magnetic H și a celui termic ϑ se face pe o singură direcție y .

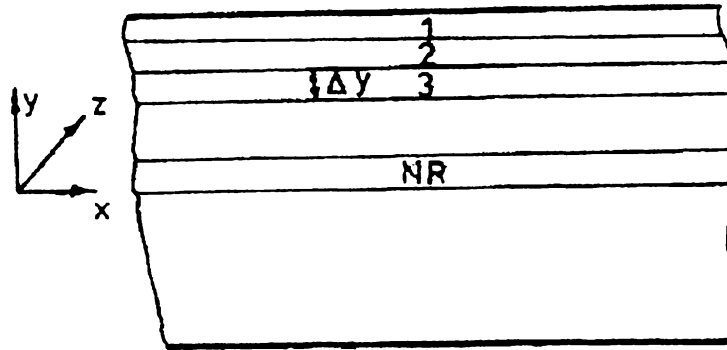


Fig.2.25

Pe fiecare strat parametrii de material se consideră constanți la fiecare moment de timp în procesul de calcul iterativ, iar pentru asigurarea convergenței rapide a soluției numerice la o iterație de timp se efectuează mai multe iterații în spațiu.

Expresiile derivatelor din ecuația câmpului magnetic, scrise în modul "n" cu ajutorul diferențelor finite sunt:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_n = \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{\Delta y}; \quad \left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_n = \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right|_n = \frac{H_{n-1}^{q,k-1} - 2H_n^{q,k} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = [\mu(H, \vartheta)H]_n = \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1}}{\Delta t} H_n^{q,k} + \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q,k} - H_n^{q-1}}{\Delta t}$$

Înlocuind relațiile (2.116) în ecuația câmpului magnetic se obține:

$$f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{\Delta y} \cdot \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} + \rho_n^{q-1} \frac{H_{n+1}^{q,k-1} - 2H_n^{q,k} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} = \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1}}{\Delta t} H_n^{q,k} + \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q,k} - H_n^{q-1}}{\Delta t} \quad (2.117)$$

unde $f(\vartheta) = \frac{\partial \rho(\vartheta)}{\partial \vartheta}$ depinde de gradul ecuației cu care se aproximează variația lui ρ cu temperatura ϑ .

Explicitând din relația (2.117) valoarea intensității câmpului magnetic în nodul "n" al rețelei, la iterația "q" de timp și "k" de spațiu se obține:

$$H_n^{q,k} = \frac{f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{(\Delta y)^2} H_{n-1}^{q,k} - \rho_n^{q-1} \frac{H_{n+1}^{q,k-1} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} - \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q-1}}{\Delta t}}{f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{(\Delta y)^2} - 2 \frac{\rho_n^{q-1}}{(\Delta y)^2} - \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1}}{\Delta t} - \frac{\mu_n^{q,k-1}}{\Delta t}} \quad (2.118)$$

În ecuația câmpului termic (2.23) mai intervin derivatele câmpului termic, pe care le scriem cu ajutorul diferențelor finite și obținem:

$$\left. \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right|_n = \frac{\vartheta_{n+1}^{q,k-1} - 2\vartheta_n^{q,k} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2}, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right|_n = \frac{\vartheta_n^{q,k} - \vartheta_n^{q-1}}{\Delta t} \quad (2.119)$$

Ecuația câmpului termic (2.23), cu diferențe finite, devine:

$$-\lambda \frac{\vartheta_{n+1}^{q,k-1} - 2\vartheta_n^{q,k} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} + \rho c \frac{\vartheta_n^{q,k} - \vartheta_n^{q-1}}{\Delta t} = \rho_n^{q-1} \left(\frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,q}}{\Delta y} \right)^2 \quad (2.120)$$

unde s-a considerat $\lambda = ct$, adică $\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} = 0$, condiție acceptată în toate cazurile tratate.

Din ecuația (2.120), valoarea câmpului termic în nodul "n" al rețelei, la iterația "q" de timp și "k" de spațiu devine:

$$\vartheta_n^{q,k} = \frac{\frac{\vartheta_{n+1}^{q,k-1} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} + \rho c \frac{\vartheta_n^{q,k-1}}{\Delta t} + \rho_n^{q-1} \left(\frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,q}}{\Delta y} \right)^2}{\frac{2\lambda}{(\Delta y)^2} + \frac{\rho c}{\Delta t}} \quad (2.121)$$

Condițiile la limită pentru cele două câmpuri, date de a doua ecuație din (2.21) și (2.22), devin:

$$H_1^q = H_0 \sin \omega t \quad (2.122)$$

unde H_1^q este intensitatea câmpului magnetic pe frontieră, adică în nodul 1 al rețelei, la iterația "q" de timp, și:

$$\lambda \frac{\vartheta_1^{q,k} - \vartheta_2^{q,k}}{\Delta y} + \alpha_1^{q-1} (\vartheta_1^{q,k} - \vartheta_0) = 0$$

de unde temperatura pe frontieră, adică în nodul 1 al rețelei, la iterația "q" de timp și "k" de spațiu, se calculează cu relația:

$$\vartheta_1^{q,k} = \frac{\alpha_1^{q-1} \vartheta_0 + \lambda \frac{\vartheta_2^{q-1}}{\Delta y}}{\alpha_1^{q-1} + \frac{\lambda}{\Delta y}} \quad (2.123)$$

Expresia pentru calculul puterii specifice de volum dezvoltată în placă (2.43) se transformă utilizând formula trapezelor de aproximare a integralei, obținându-se la iterația "q" de timp:

$$p^q = \frac{2}{\Delta y} \left[\frac{1}{2} \rho_1^q \left(\frac{H_2^q - H_1^q}{\Delta y} \right)^2 + \frac{\rho_{NR-1}^q}{2} \left(\frac{H_{NR}^q - H_{NR-1}^q}{\Delta y} \right)^2 + \sum_{n=0}^{NR-2} \rho_n^q \left(\frac{H_n^q - H_{n-1}^q}{\Delta y} \right)^2 \right] \quad (2.124)$$

Expresia densității de curent în nodul "n" la iterația de timp "q" se calculează din:

$$J = \frac{\partial H}{\partial y},$$

adică:

$$J_n^q = \frac{H_n^q - H_{n+1}^q}{\Delta y} \quad (2.125)$$

b) Neglijând câmpul magnetic de reacție creat de curenții din placă

Considerându-se aproximările cu diferențe:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 A_J}{\partial y^2} \right|_n &= \frac{A_{n-1}^{q,k-1} - 2A_n^{q,k} + A_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \\ \left. \frac{\partial B_e}{\partial t} \right|_n &= \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_n = \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{\Delta y} \\ \left. \frac{\partial A_J}{\partial y} \right|_n &= \frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} = 0 \quad (\lambda = ct.) \end{aligned} \quad (2.126)$$

aferente domeniului de discretizare de la cazul a), putem scrie:

$$\begin{aligned} \frac{f(\vartheta) (\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}) (A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k})}{\rho_n^{q-1} (\Delta y)^2} + \frac{A_{n-1}^{q,k-1} - 2A_n^{q,k} + A_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} &= \frac{1}{\rho_n^{q-1}} \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} - \\ - \lambda \frac{\vartheta_{n-1}^{q,k-1} - 2\vartheta_n^{q,k} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} + \rho c \frac{\vartheta_n^{q,k} - \vartheta_n^{q-1}}{\Delta t} &= \vartheta_n^{q-1} \left(\frac{B_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.127)$$

de unde se obține:

$$A_n^{q,k} = \frac{A_{n+1}^{q,k-1} + A_{n-1}^{q,k} - \frac{(\Delta y)^2}{\rho_n^{q-1}} \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} - \frac{f(\vartheta)}{\rho_n^{q-1}} (\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}) A_{n-1}^{q,k}}{2 - \frac{f(\vartheta)}{\rho_n^{q-1}} (\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1})}$$

$$\vartheta_n^{q,k} = \frac{\vartheta_n^{q-1} \left(\frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} \right) + \lambda \frac{\vartheta_{n+1}^{q,k-1} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} + \rho c \frac{\vartheta_n^{q-1}}{\Delta t}}{\frac{2}{(\Delta y)^2} + \frac{\rho c}{\Delta t}} \quad (2.128)$$

unde indicii "n", "q" și "k" au aceeași semnificație ca și în cazul a).

Condiția la limită pentru potențialul electric vector este:

$$A_1^q = 0 \quad (2.129)$$

unde A_1^q este potențialul electric vector pe frontieră, adică în nodul 1 al rețelei, la iterația "q" de timp, iar pentru câmpul termic rămâne cea anterioară, deci relația (2.123).

Expresia puterii dezvoltate în unitatea de volum în placă se transformă utilizând tot formula trapezelor, obținându-se la iterația "q" de timp:

$$p^q = -\frac{2}{\Delta} \Delta y \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} \left(\frac{A_1^q}{2} + \sum_{n=2}^{NR-2} A_n^q + \frac{A_{NR}^q}{2} \right) \quad (2.130)$$

Iar densitatea de curent, în nodul "n" la iterația de timp "q" este:

$$J_n^q = \frac{A_n^q - A_{n+1}^q}{\Delta y} \quad (2.131)$$

2.3.3.2. Cilindru feromagnetic de secțiune circulară

Discretizarea domeniului cilindrului feromagnetic s-a realizat prin suprafețe cilindrice numerotate de la 1 la NR, fig.2.26, straturile dintre suprafețe având numărul același ca și suprafața cilindrică exterioară.

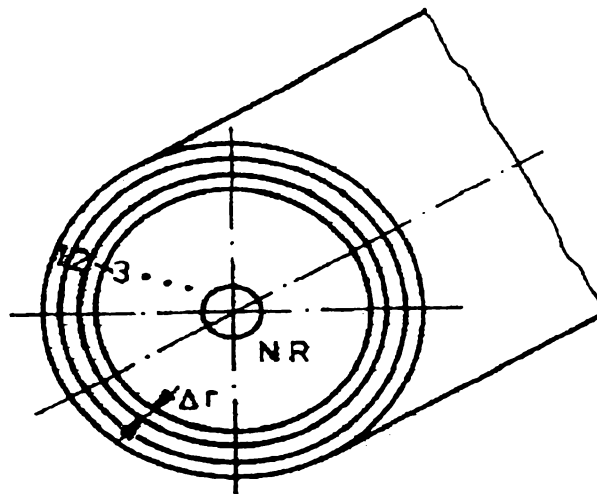


Fig.2.26

Analogia cu placa feromagnetică este evidentă, variabila y devine r și considerând aceleași ipoteze, ecuațiile de câmp, relațiile (2.45), cu diferențele finite, sunt:

$$\begin{aligned}
f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{\Delta r} \cdot \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} + \rho_n^{q-1} \frac{H_{n+1}^{q,k-1} - 2H_n^{q,k} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} + \frac{\rho_n^{q-1}}{r_n} \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} = \\
= \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1}}{\Delta t} H_n^{q,k} + \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q,k} - H_n^{q-1}}{\Delta t} \\
- \lambda \frac{\vartheta_{n-1}^{q,k-1} - 2\vartheta_n^{q,k} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_n} \frac{\vartheta_n^{q,k} - \vartheta_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} + \rho_n^{q-1} \frac{\vartheta_n^{q,k} - \vartheta_n^{q-1}}{\Delta t} = \rho_n^{q-1} \left(\frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q-1}}{\Delta r} \right)^2
\end{aligned} \quad (2.132)$$

Exprimând din relațiile (2.132) valorile de câmp se obține:

$$H_n^q = \frac{f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{(\Delta r)^2} H_{n-1}^{q,k} - \rho_n^{q-1} \frac{H_{n+1}^{q,k-1} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} + \frac{\rho_n^{q-1}}{r_n} \frac{H_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} - \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q-1}}{\Delta t}}{f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{(\Delta r)^2} - 2 \frac{\rho_n^{q-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{\rho_n^{q-1}}{r_n \Delta r} - \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1}}{\Delta t} - \frac{\mu_n^{q,k-1}}{\Delta t}} \quad (2.133)$$

și:

$$\vartheta_n^{q,k} = \frac{\frac{\vartheta_{n+1}^{q,k-1} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} - \frac{\lambda}{r_n} \frac{\vartheta_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} + \rho_n^{q-1} \frac{\vartheta_n^{q,k-1}}{\Delta t} + \rho_n^{q-1} \left(\frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q-1}}{\Delta r} \right)^2}{\frac{2\lambda}{(\Delta r)^2} + \frac{\rho_n^{q-1}}{\Delta t} - \frac{\lambda}{r_n} \frac{1}{\Delta r}}$$

Condiția la limită pentru intensitatea câmpului magnetic este identică cu cea de pe placă, prima relație din (2.120), iar pentru câmpul termic se obține forma din relația (2.123), înlocuind Δy cu Δr , adică:

$$\vartheta_1^{q,k} = \frac{\alpha_1^{q-1} \vartheta_0 + \lambda \frac{\vartheta_2^{q-1}}{\Delta r}}{\alpha_1^{q-1} + \frac{\lambda}{\Delta r}} \quad (2.134)$$

Expresia puterii dezvoltate în unitatea de volum în cilindru, relația (2.50), se transformă cu formula trapezelor, obținându-se la iterația "q" de timp:

$$p^q = \frac{2}{r_0^2} \Delta r \left[\frac{1}{2} r_1 \cdot \rho_1^q \left(\frac{H_2^q - H_1^q}{\Delta r} \right)^2 + \frac{1}{2} r_{NR-1} \cdot \rho_{NR-1}^q \left(\frac{H_{NR}^q - H_{NR-1}^q}{\Delta r} \right)^2 + \sum_{n=0}^{NR-2} r_n \cdot \rho_n^q \left(\frac{H_n^q - H_{n-1}^q}{\Delta r} \right)^2 \right] \quad (2.135)$$

iar intensitatea de curent în nodul "n" la iterația "q" de timp este:

$$J_n^q = \frac{H_n - H_{n+1}}{\Delta r} \quad (2.136)$$

CAPITOLUL III

PARAMETRII CARACTERISTICI AI MEDIILOR FEROMAGNETICE AFLATE ÎNTR-UN CÂMP MAGNETIC CUPLAT CU UNUL TERMIC; DETERMINĂRI EXPERIMENTALE.

În literatura de specialitate se prezintă proprietățile magnetice și electrice ale mediilor conductoare în general și ale celor feromagnetice în particular, precum și parametrii caracteristici ai acestora. Aceste precizări se fac prin prisma ultimelor descoperiri din domeniul feromagnetismului, ele fiind posibile datorită dezvoltării accentuate a mecanicii cuantice, cu ajutorul căreia s-au încercat și se mai încearcă multe tentative de elaborare a unei teorii a feromagnetismului.

Pentru ca determinările cantitative, specifice procesului de încălzire inductivă, să fie evaluate cu o precizie îmbunătățită este necesar să se cunoască dependența, în principal, a următorilor parametrii de material: permeabilitatea magnetică (sau susceptivitatea magnetică) în funcție de intensitatea câmpului magnetic H , și de temperatura ϑ .

Deci este necesar cunoașterea funcțiilor $\chi_m=f(H, \vartheta)$ și $\rho=f(\vartheta)$ care sunt funcții matematice, în general necunoscute, pentru mediile feromagnetice.

3.1. Permeabilitatea magnetică ca funcție de H și ϑ

Mediile feromagnetice prezintă valori foarte mari ale susceptivității magnetice, respectiv permeabilități relative (10^2 - 10^5) și dependente puternic de intensitatea câmpului magnetic în care acestea sunt introduse, precum și de temperatura lor. Astfel, pentru un mediu feromagnetic susceptivitatea respectiv permeabilitatea magnetică prezintă un maxim pronunțat și o valoare de saturație diferită de zero, oricât am crește intensitatea câmpului magnetic exterior, iar peste o temperatură bine determinată ca valoare pentru fiecare mediu feromagnetic, numită și punct Curie feromagnetic (ϑ_c), susceptivitatea magnetică devine zero, respectiv permeabilitatea magnetică relativă unu, indiferent de valoarea lui H .

Așa cum este cunoscut, creșterea temperaturii intensifică mișcarea se agitație

termică a particulelor și îngreunează orientarea momentelor magnetice rezultante ale domeniilor Weiss, având drept consecință o micșorare a vectorului magnetizație, și totodată a permeabilității magnetice cu temperatura, pe măsură ce intensitatea câmpului magnetic crește. Astfel, în literatura de specialitate se prezintă variația permeabilității magnetice relative μ_r a fierului cu temperatura la câmpuri joase, respectiv a fierului tehnic și a unor oțeluri cu temperatura, fără precizarea valorilor de câmp, precum și variația aceluiași parametru în funcție de intensitatea câmpului magnetic, fără precizarea temperaturii mediului feromagnetic respectiv. O remarcă importantă privind dependența cu temperatura a permeabilității magnetice relative a oțelurilor cu $0,4-0,5\%^\circ\text{C}$, la câmpuri intense neprecizate ca valoare este că aceasta are micșorare liniară până la temperatura de circa $650-700^\circ\text{C}$, după care scade brusc, atingând valoarea permeabilității vidului la trecerea peste temperatura Curie.

În literatura de specialitate se arată că teoria câmpului molecular, teoriile statistice aproximative ale ordinii magnetice locale și teoria termodinamică a transformărilor magnetice nu pot descrie cantitativ proprietățile mediilor cu ordonare magnetică în apropierea punctului Curie. Există câteva studii experimentale în care s-a măsurat dependența de temperatură a magnetizării spontane $M_s(\vartheta)$ și a inversei susceptivității paramagnetice $\chi_m^{-1}(\vartheta)$, la o serie de medii feromagnetice (metale și aliaje) în vecinătatea imediată a punctelor critice (sub temperaturile Curie sau Neel, precum și deasupra acestora). În toate cazurile, curbele experimentale sunt descrise destul de bine de formule simple, de tipul:

$$M_s = K_1(\vartheta_c - \vartheta)^m, \quad \chi_m^{-1} = K_2(\vartheta - \vartheta_c)^n \quad (3.1)$$

unde K_1 , K_2 , m și n sunt constante ale mediilor considerate și ele se determină experimental.

Utilizând o balanță de susceptivități cu compensare electromagnetică de tipul Weiss-Forrer, având sensibilitatea de 10^{-8} u.e.m/g se determină susceptivitatea masică χ , în funcție de temperatură (de la temperatura mediului ambiant și până peste temperatura Curie) și la diverse valori ale intensității câmpului magnetic, iar susceptivitatea magnetică χ_m s-a determinat cu relația:

$$\chi_m = 4\pi \cdot \rho \cdot \chi, \quad (3.2)$$

unde ρ este densitatea mediului feromagnetic în g/cm^3 .

În figura 3.1 se prezintă instalația pentru măsurarea susceptivității magnetice masice. Balanța este formată dintr-o tijă de cuarț (1), terminată la unul din capete cu o ceșcuță (2) în care se introduce proba de studiat. Un electromagnet de tip Weiss cu polii teșți (3) produce un câmp magnetic neomogen. Tija de cuarț cu ceșcuța este susținută de două fire de mătase (4), având lungime reglabilă cu ajutorul a două șuruburi. Manevrarea acestor șuruburi în mod convenabil permite centrarea tijei. Capătul tijei opus ceșcuței este legat la oglinda (5) ce reflectă fascicolul luminos incident pe o scală gradată (6).

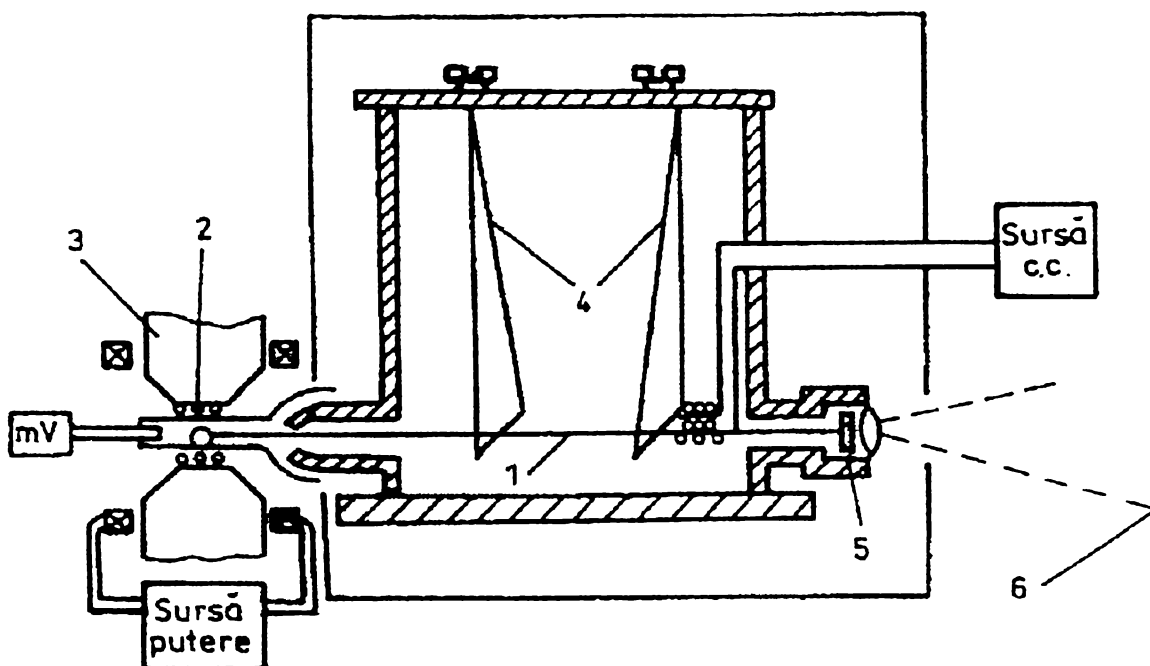


Fig.3.1

Metoda de măsurare utilizată este o metodă relativă de zero. Astfel, la aplicarea câmpului neomogen, proba feromagnetică de masă m și susceptivitatea masică χ este atrasă cu o forță:

$$f = m \cdot \chi \cdot H \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.3)$$

care determină mișcarea ceșcuței. Modificarea poziției ceșcuței duce la schimbarea poziției oglinzii și la deviația spotului luminos de la poziția de echilibru. Aducerea spotului luminos la poziția inițială de echilibru se realizează cu un sistem de compensare format dintr-o bobină parcursă de un curent de intensitate I , plasată coaxial cu tija pe care este fixat un mic magnet. La echilibru, forța care determină modificarea poziției ceșcuței este compensată de sistemul electromagnetic, deci:

$$\chi \cdot m \cdot H \frac{\partial H}{\partial x} = KI \quad (3.4)$$

Măsurările de susceptivitate sunt relative și ca reper s-a luat susceptivitatea χ_0 la

temperatura camerei, a unei probe etalon de masă m_0 , pentru care s-a obținut un curent de compensare având intensitatea I_0 . Avem:

$$m_0 \cdot \chi_0 \cdot H \frac{\partial H}{\partial x} = KI_0 \quad (3.5)$$

Cunoscând curentul de compensare I , necesar la un anumit câmp magnetic de intensitate H , în cazul unei probe de masă m , susceptivitatea masică se calculează cu ajutorul relației :

$$\chi = K \frac{I_c}{m} \quad \text{cu} \quad I_c = I + I_{\text{dia}} \quad (3.6)$$

unde I_{dia} este un curent de corecție ce ține seama de faptul că ceșcuța de cuarț ce conține proba este diamagnetică.

În relația (3.6) mărimile χ , K și I_c sunt funcție de intensitatea câmpului magnetic stabilit în probă, deoarece acestea s-au realizat de dimensiuni foarte mici având forma unor discuri, iar plasarea lor în câmp s-a realizat astfel încât liniile de câmp ale câmpului magnetic exterior să fie tangente la disc, condiție în care factorul de demagnetizare poate fi considerat nul. Etalonarea balanței, modul efectiv de măsurare, prelucrarea datelor, trasarea caracteristicilor neliniare $\chi_m=f(\vartheta)$ la $H=ct.$ și obținerea caracteristicilor $\chi_m=f(H)$ la $\vartheta=ct.$ sunt prezentate detaliat în unele lucrări de specialitate.

3.2. Rezistivitatea mediilor feromagnetice ca funcție de ϑ

Rezistivitatea este un parametru fizic important al mediilor feromagnetice ce depinde de perfecțiunea rețelei cristaline, de natura impurităților din mediul considerat, având însă o dependență de temperatură importantă.

În condițiile câmpului magnetic caracterizat prin valori uzuale ale intensității specifice proceselor de încălzire inductivă, efectul magnetorezistiv, la majoritatea metalelor și a aliajelor lor este foarte slab, deci nu se ia în considerare dependența $\rho(H)$.

În literatura de specialitate se prezintă tabelar, respectiv grafic valorile rezistivității la temperatura de 20°C respectiv dependența cu temperatura pentru diverse metale și oțeluri. Se constată o creștere liniară a rezistivității cu temperatura până la punctul Curie (ϑ_c), după care creșterea ei se diminuează. Spre exemplu, pentru oțeluri și alte aliaje feromagnetice, în intervalul de temperatură $20-800^{\circ}\text{C}$ valoarea rezistivității crește de 5 ori.

Dependența de temperatură a acestui parametru important, rezistivitatea sau conductivitatea, pentru mediile feromagnetice prezintă o serie de particularități specifice. Se constată în primul rând valorile mari ale acesteia, iar apoi salturile la temperatura corespunzătoare punctului Curie (ϑ_c). În mod aproximativ, rezistivitatea totală a unui mediu feromagnetic poate fi exprimată sub forma unei sume dintr-o parte magnetică ρ_{magn} și o parte fonionică ρ_{fon} :

$$\rho(\vartheta) = \rho_{\text{magn}}(\vartheta) + \rho_{\text{fon}}(\vartheta), \quad (3.7)$$

contribuția principală la dependența de temperatură fiind dată de componenta $\rho_{\text{magn}}(\vartheta)$. La unele metale feromagnetice, relația (3.7) mai conține un termen notat cu ρ_0 care este rezistivitatea remanentă determinată de împrăștiere pe impurități și care este independentă de temperatură.

Pentru a obține dependențele cantitative $\rho(\vartheta)$, util în abordarea unor probleme de analiză a câmpului electromagnetic în medii feromagnetice s-a procedat la determinarea pe cale experimentală a valorii rezistivității la diverse temperaturi, pe cale indirectă, prin măsurarea unor parametri globali pentru o probă paralelipipedică din mediul feromagnetic considerat. S-a utilizat metoda celor 4 contacte aliniat dispuse pe suprafața probei, realizându-se în acest sens un dispozitiv prezentat în secțiune în figura 3.2.

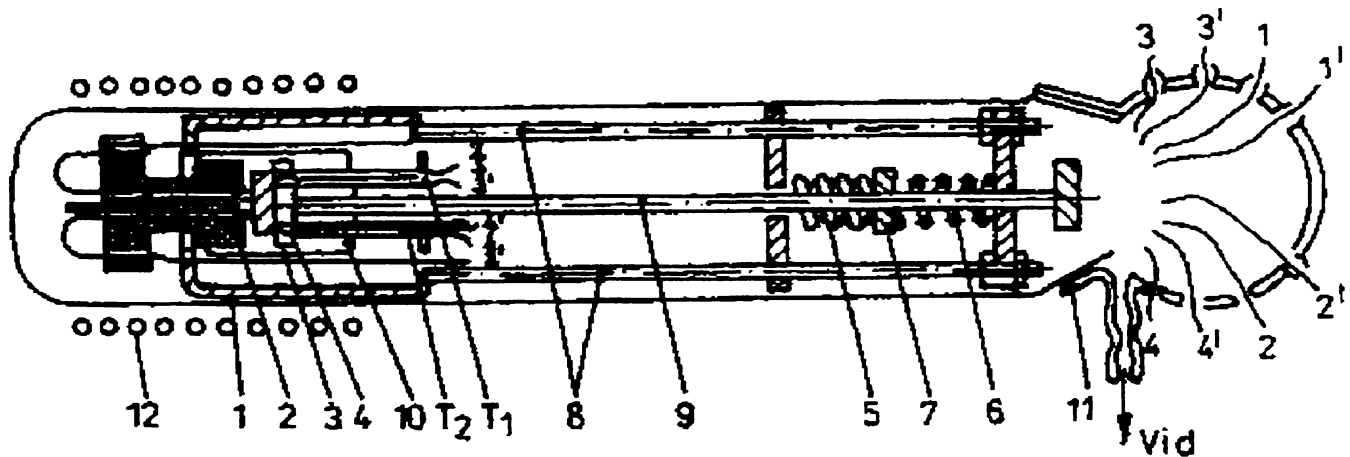


Fig.3.2

Portproba 1 este realizată din oțel inoxidabil și susține în partea superioară suportul de ceramică 2, cu 4 electrozi de wolfram coliniari și echidistanți cu $S=1,3$ mm. Aceasta asigură o presiune de contact uniformă în timpul încălzirii probei. Proba 3, având forma și dimensiunile din figura 1.3, se sprijină pe un suport de ceramică fixat pe cilindrul 4, din oțel inoxidabil. Contactele mecanice între probă și electrozi se realizează prin presare cu ajutorul unui sistem de două arcuri 5 și 6 care prin intermediul piuliței 7,

asigură o forță de apăsare mare ce rămâne constantă ca valoare în timpul încălzirii probei.

Sistemul astfel realizat se introduce într-un tub de cuarț 9, cu șlif pe care se montează capul de distribuție 11 din sticlă. Aceasta permite scoaterea spre exterior a conductoarelor de la electrozi și termocuple, iar lateral are un tub de racord la instalația de vid. Suportii cilindrici 8, din oțel inoxidabil, asigură împreună cu portproba 1 de legătura conductoarelor cu electrozii. Cu ajutorul cuptorului 12, se poate modifica temperatura, iar în cazul efectuării măsurărilor de la temperatura azotului lichid, această parte a dispozitivului se introduce într-un vas Dewar cu azot lichid.

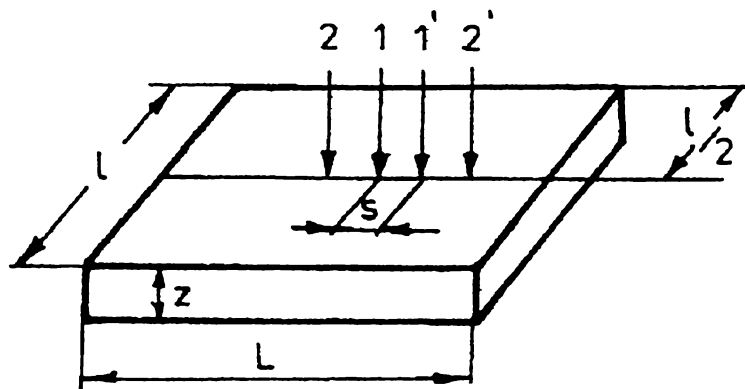


Fig.3.3.

Pentru măsurarea temperaturii se folosesc două termocuple T_1 și T_2 fixate în dispozitiv prin intermediul cilindrului 10. Termocuplul T_1 este din cupru-constantan, iar termocuplul T_2 este din platină-platină+rhodiu asigurându-se astfel un domeniu de măsurare al temperaturii conform cerințelor impuse dispozitivului.

Dispozitivul prezentat mai sus are performanțe superioare prin calitatea materialelor folosite, realizarea suportului 2 astfel încât să asigure o presiune de contact uniformă în timpul încălzirii probei și posibilitatea măsurării temperaturii peste 1000°C .

Determinarea rezistivității s-a făcut cu relația:

$$\rho = \frac{U}{I} 2 \cdot \pi \cdot S, \text{ deoarece } Z \geq 2S \text{ și } l \geq S \quad (3.8)$$

unde U este tensiunea între 1-1', I este intensitatea curentului injectat în probă între 2-2', iar Z , S și l sunt dimensiunile geometrice prezentate în figura 3.3. Măsurarea tensiunii U respectiv a intensității curentului electric I s-au efectuat utilizând un montaj de compensare clasic respectiv, cu ajutorul unui ampermetru de clasă de precizie ridicată.

Modul efectiv de măsurare, calculele efectuate și celelalte particularități legate de dispozitiv și de experimente sunt precizate în literatura de specialitate.

În figurile următoare s-a prezentat dependența de temperatură a susceptivității magnetice χ_m la două oțeluri indigene OLC45 și 18MOCM10.

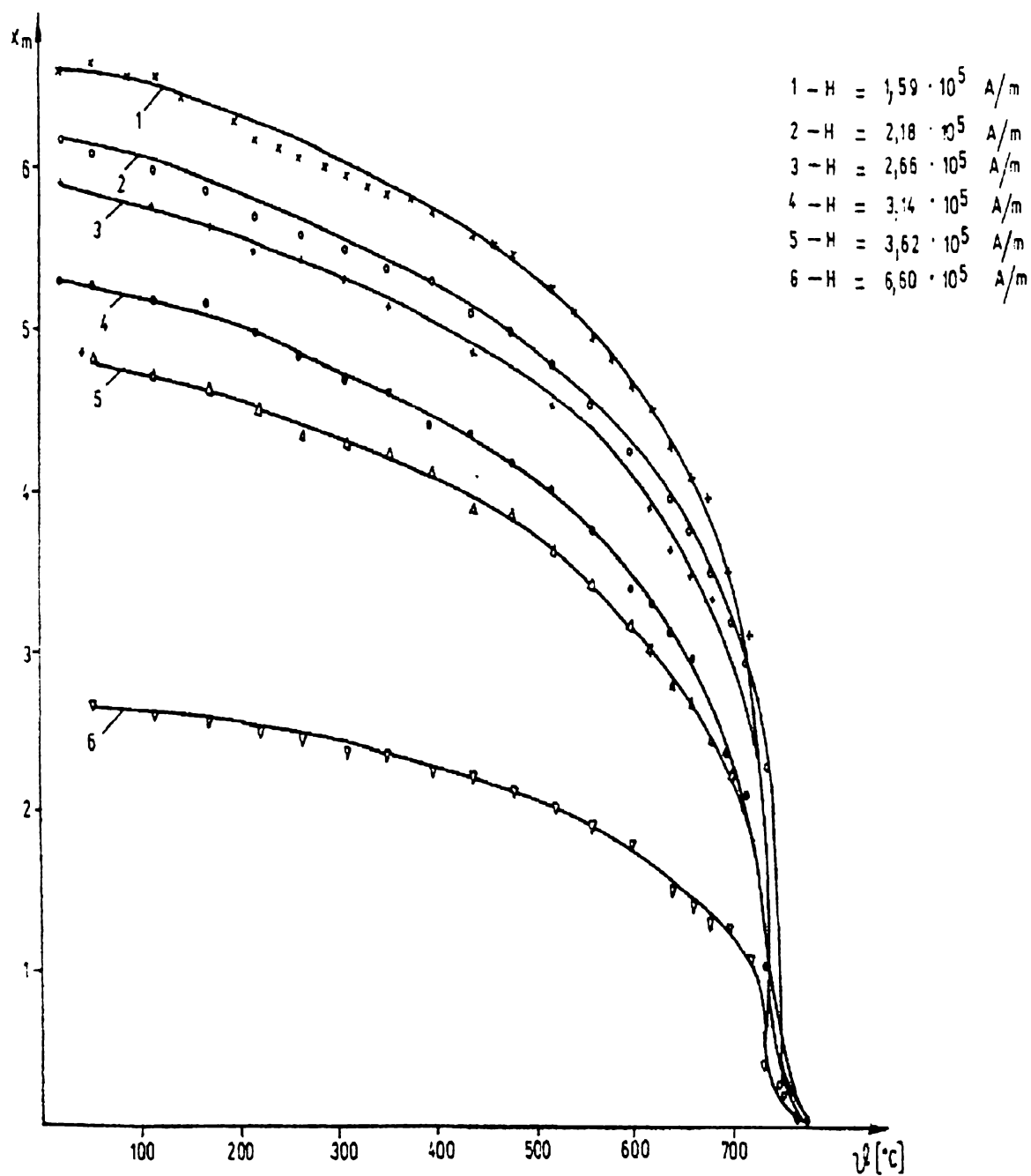


Fig.3.4

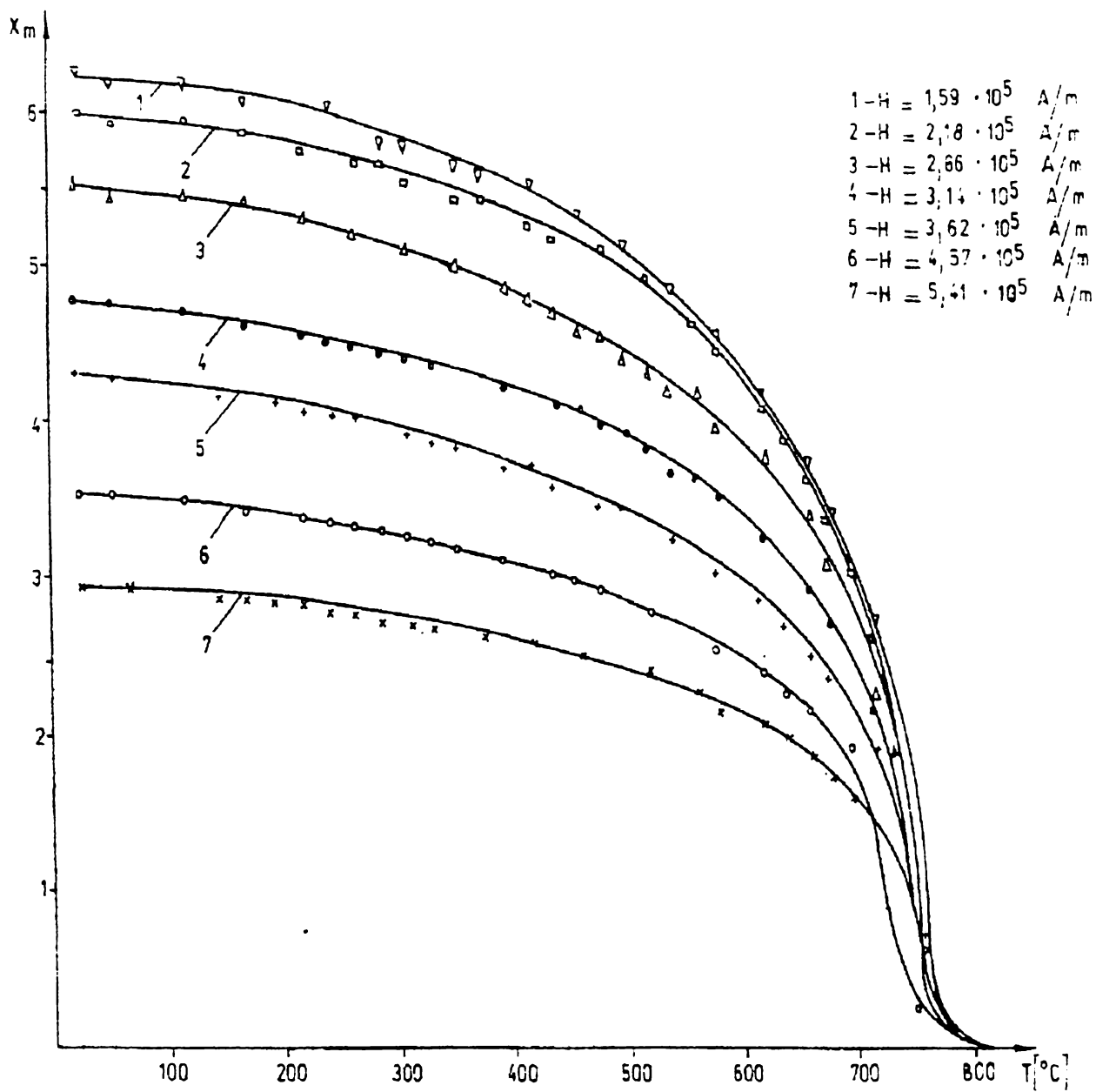


Fig.3.5

CAPITOLUL IV.

MODELAREA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ȘI A CÂMPULUI TERMIC CU METODA ELEMENTELOR FINITE, ASISTATĂ DE CALCULATORUL ELECTRONIC

4.1. Considerații generale asupra metodelor numerice de rezolvare a modelelor matematice

Metoda elementelor finite face parte din categoria metodelor numerice, care se bazează pe procedeul aproximării prin discretizare. În principiu, acest procedeu constă în a înlocui variațiile în timp și în spațiu, în general, continue, ale fiecărei mărimi, ce intervine în modelul matematic al procesului studiat, cu variații discrete, formate din mulțimea valorilor mărimii respective, la anumite intervale de timp, respectiv în anumite entități geometrice ale domeniului considerat.

Având în vedere această discretizare, în continuare se urmărește transformarea modelului matematic într-un model numeric, astfel încât acesta să conducă la obținerea unui sistem de ecuații, în care necunoscute sunt tocmai valorile discrete, menționate mai sus, ale fiecărei mărimi ce intervine în modelul matematic. În acest scop, s-au dezvoltat independent, dar nu exclusiv, două direcții de abordare: metoda diferențelor finite și metoda elementelor finite. Cele două metode se deosebesc una de alta atât din punct de vedere al entităților geometrice, folosite pentru discretizare, cât și din punct de vedere al modului în care se obține modelul matematic al procesului studiat.

În cazul metodei diferențelor finite, discretizarea în timp a fiecărei mărimi se realizează prin valorile acesteia în anumite momente din cursul duratei, în care se analizează evoluția temporală a procesului studiat, diferența dintre două momente consecutive numindu-se pas de timp. Discretizarea în spațiu se realizează prin valorile mărimii respective, în anumite puncte ce sunt dispuse în vârfurile unei rețele de discretizare, definite în domeniul considerat.

Diferența dintre coordonatele punctelor vecine, de-a lungul fiecărei axe a sistemului de coordonate folosit, se numește pas al rețelei în lungul acelei axe.

Pentru a putea folosi metoda diferențelor finite trebuie să se dispună de un model matematic diferențial al procesului studiat, care, în general conține una sau mai multe

mărimi de stare, ce sunt necunoscutele problemei, precum și derivate parțiale, în timp și în spațiu, până la un anumit ordin al mărimilor respective. Pentru obținerea modelului numeric, mai întâi se aplică modelul diferențial pentru fiecare nod al rețelei de discretizare, considerând, deocamdată, pentru derivatele parțiale în raport cu timpul, valorile dintr-un moment oarecare.

Fiecare mărime se înlocuiește cu valoarea sa din punctul considerat, iar valoarea în acest punct a fiecărei derivate parțiale a oricărei mărimi, în raport cu fiecare coordonată spațială, se înlocuiește cu o diferență finită. Cea mai simplă diferență finită se exprimă prin raportul dintre diferența valorilor mărimii din punctul considerat, și dintr-un punct vecin și pasul rețelei în lungul axei respective.

Pentru a crește precizia metodei, se folosesc diferențe finite mai complicate, în care intervin valorile mărimii respective, din mai multe puncte vecine punctului considerat, iar pasul rețelei, în lungul rețelei este variabil de la un punct la altul. În final, fiecare derivată temporară se înlocuiește tot cu o diferență finită, care, pentru fiecare moment de divizare se exprimă ca diferența dintre valoarea mărimii din momentul considerat și valorile acesteia, în unul sau mai multe momente anterioare sau posterioare momentului respectiv, raportate la pasul de timp.

În cazul metodei elementelor finite, mai întâi domeniul considerat se divide în mai multe porțiuni, numite elemente finite, fiecare element finit având aceleași dimensiuni ca și domeniul respectiv. Discretizarea în spațiu se face pentru fiecare element finit și constă în a înlocui valoarea fiecărei mărimi, dintr-un punct oarecare al elementului finit considerat, cu suma produselor dintre valoarea mărimii în câte un punct al elementului, numit nod, și o funcție de interpolare, definită în jurul nodului respectiv. De obicei, nodurile oricărui element finit sunt vârfurile formei geometrice a acestuia, însă, pentru creșterea preciziei metodei se definesc ca noduri și puncte dispuse pe laturile sau muchiile formei geometrice respective. Folosirea metodei elementelor finite implică existența unui model matematic integral al procesului studiat, care, în general, conține integrale, pe domeniul considerat și pe frontiera acestuia, a unor expresii ce au forma menționată mai sus, pentru modelul diferențial. În continuare, folosind proprietățile integralelor se obțin ecuațiile modelului pentru fiecare element finit, de aceeași formă cu cea a modelului matematic integral, valabilă pentru întreg domeniul considerat. În final, în modelul fiecărui element finit, valoarea oricărei mărimi, definită într-un punct oarecare al elementului, se înlocuiește cu expresia menționată. Oricare mărime de stare are o singură

valoare spațială în fiecare nod al elementului, ceea ce înseamnă că este o constantă, pentru operațiile de derivare în spațiu, și deci în aceste operații vor interveni numai funcțiile de interpolare. Aceasta permite ca valorile mărimilor din nodurile elementului să poată fi scrise în fața integralelor, iar integralele fiind definite vor conduce la câte o valoare numerică, obținându-se modelul numeric pentru elementul finit respectiv.

Din cele prezentate până acum rezultă că, în cazul metodei diferențelor finite discretizarea în spațiu a fiecărei mărimi se realizează prin valorile acesteia în punctele rețelei de discretizare, definită pentru întregul domeniu considerat, iar în cazul metodei elementelor finite această discretizare se face pentru fiecare element finit, ce este doar o porțiune a domeniului considerat. Rezultă că, pentru o aceeași densitate a rețelei de divizare, discretizarea în spațiu se face cu o eroare mai mică, în cazul folosirii metodei elementelor finite, față de cazul că s-ar folosi metoda diferențelor finite.

De asemenea, la metoda diferențelor finite, regiunile din care este formată rețeaua de divizare nu pot avea decât laturi sau muchii rectilinii. Ca urmare, apar dificultăți de realizare a rețelei de divizare dacă frontiera domeniului considerat are forme curbe, ce pot fi înlăturate cu ajutorul unor artificii de calcul, care însă sunt valabile numai pentru o anumită formă a frontierei.

Astfel de artificii nu mai sunt necesare dacă se folosește metoda elementelor finite, deoarece se pot defini elemente finite cu laturi sau muchii curbe.

Totodată, dacă se folosește metoda diferențelor finite, pot apărea numeroase probleme de convergență și de stabilitate a soluțiilor modelului numeric, ceea ce impune determinarea condițiilor în care intervin astfel de probleme și a posibilităților de a le evita, care însă sunt valabile numai pentru o anumită problemă concretă.

Din aceste motive, în această lucrare se va folosi metoda elementelor finite. Însă, așa cum rezultă din cele de mai sus, această metodă se folosește doar pentru discretizare în spațiu. Ca urmare, atunci când procesul studiat este nestaționar, pentru derivata în raport cu timpul a fiecărei mărimi, ce intervine în modelul matematic, definită pentru un moment oarecare t , într-un punct oarecare al fiecărui element finit, se folosește o discretizare cu diferențe finite.

Fie T o mărime scalară, sau valoarea unei componente a unei mărimi vectoriale, folosită pentru a descrie procesul studiat. În general, determinarea unei mărimi revine la aflarea câmpului scalar nestaționar $T=T(t, x, y, z)$, definit în domeniul în care se desfășoară procesul respectiv. Acest domeniu se notează cu D , și poate fi tridimensional, bi-

dimensional sau unidimensional, în funcție de modul de desfășurare în spațiu a procesului studiat.

Se presupune că s-au scris ecuațiile modelului matematic al procesului studiat, iar pentru ușurința exprimării și simplificarea expresiilor se admite că există o ecuație în care singura necunoscută este mărimea T . Concentrat, ecuația se poate scrie sub forma operatorie:

$$LT=f \quad (4.1)$$

În relația (4.1), cu L s-a notat un operator ce se aplică mărimii T , iar f este o funcție cunoscută, ce se obține pe baza încărcărilor (sarcinilor), la care este supus sistemul fizic respectiv, și care se impun prin enunțul problemei; în general $f=f(t, x, y, z)$.

După cum rezultă din capitolele precedente, L este un operator diferențial care, în general, constă dintr-o combinație a operatorilor: gradient, divergență și rotor, aplicate mărimii T , multiplicată cu mărimi ce exprimă proprietățile fizice ale mediului din D .

Ca urmare:

$$LT = F\left(c, T, \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial y_j}\right), \quad (4.2)$$

unde cu $\frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial y_j}$ s-au notat derivatele parțiale de ordinul întâi, respectiv de ordinul doi ale lui T în raport cu coordonatele x, y, z , iar c reprezintă proprietățile de material, și în general $c=c(x, y, z)$.

La ecuația (4.2) se adaugă condițiile inițiale și cele de frontieră, ce pot fi:

- de tip Dirichlet, de forma:

$$T|_{S_D} = g(t, x, y, z) \quad (4.3)$$

- de tip Neumann, de forma:

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{S_N} = h(t, x, y, z), \quad (4.4)$$

unde S_D, S_N sunt porțiuni ale frontierei S a lui D , iar g, h sunt funcții cunoscute.

Ideea aproximării mărimii T pornește de la descompunerea unui vector după anumite direcții, folosită în calculul vectorial.

Se face ipoteza că toate funcțiile, ce intervin în modelul matematic sunt funcții continue în D , și au derivatele parțiale până la cel puțin ordinul doi, de asemenea continuu în D . Această ipoteză permite ca domeniul D să se considere ca fiind un subspațiu al

spațiului vectorial real al funcțiilor continue de clasă 2, notat cu $C^2(D)$. Ca urmare, considerând că spațiul vectorial are dimensiunea n , se poate găsi un șir de n funcții continue, liniar independente, ce formează o bază a spațiului respectiv, și care se notează cu N_1, N_2, \dots, N_n , unde $N_i = N_i(t, x, y, z)$, $i = \overline{1, n}$.

În raport cu această bază, mărimea T se aproximează printr-o combinație a celor n funcții care se notează cu \hat{T} , adică în locul lui T se consideră mărimea \hat{T} , exprimată prin relația:

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i, \quad (4.5)$$

unde α_i ($i = \overline{1, n}$) se numesc coordonatele mărimi T în raport cu baza aleasă.

Ca bază se pot alege orice funcții, care să fie liniar independente, și care să îndeplinească condițiile de frontieră menționate.

Mărimea \hat{T} se numește aproximare a mărimii reale T . Pentru a nu complica scrierea, în cele ce urmează, când se va face referire la o mărime se subînțelege că este vorba de aproximarea acesteia, ce se notează așa cum este notată mărimea respectivă în modelul matematic.

Deci, mărimea considerată se va căuta de forma:

$$T = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i, \quad (4.6)$$

Presupunând că s-au ales funcțiile N_i , $i = \overline{1, n}$, determinarea mărimii T revine la calculul coordonatelor α_i , $i = \overline{1, n}$, în raport cu baza aleasă.

Pentru realizarea acestui calcul, este necesar ca mai întâi să se construiască un model integral, exprimat, în general, printr-o integrală pe domeniul D și o integrală pe frontiera S a acestuia.

În principiu, modelul integral se poate obține și direct, pornind de la modelul diferențial, exprimat prin ecuația (4.1) și utilizând anumite funcții speciale, cum ar fi funcțiile Green. Însă, pe lângă complicațiile matematice, obținerea modelului integral prin acest procedeu se face pentru fiecare problemă în parte, și deci nu este posibilă o generalizare a procedurii.

Din aceste motive, de obicei modelul integral se obține printr-o metodă variațională, sau prin metoda rezidului ponderat, în varianta Galerkin.

În cazul metodelor variaționale se urmărește obținerea unei funcționale $J(T)$, în

general de forma:

$$J(T) = \int_D G dD, \quad (4.7)$$

unde G este o funcție de mărimea T și de derivatele sale parțiale.

Funcția G trebuie astfel determinată încât prin anularea primei variații a funcționalei $J(T)$, deci prin impunerea condiției

$$\delta J(T) = 0 \quad (4.8)$$

să se obțină ecuația diferențială dată și să fie îndeplinite condițiile de frontieră de tip Neumann.

Relația (4.8) se numește condiția de staționaritate a funcționalei $J(T)$ și despre o funcție T care o îndeplinește se spune că realizează staționarizarea funcționalei.

Rezultă că o soluție T , ce staționarizează funcționala $J(T)$ este și o soluție a ecuației diferențiale (4.1). Această soluție satisface în mod automat condițiile de frontieră de tip Neumann și se numește soluție slabă a ecuației diferențiale, iar o soluție obținută prin rezolvarea directă a ecuației diferențiale (4.1) se numește soluție tare, sau în sens clasic a acesteia.

Se poate arăta că aproximarea de forma (4.6) este soluția slabă ecuației diferențiale, ceea ce înseamnă că funcțiile N_i , $i = \overline{1, n}$ îndeplinesc condiția de frontieră de tip Neumann, și se numesc funcții trial, sau funcții test. Trebuie să se impună ca aceste funcții să îndeplinească condiția de frontieră de tip Dirichlet. Din acest motiv, condițiile de frontieră de tip Neumann se numesc condiții naturale, iar condițiile de frontieră de tip Dirichlet se numesc condiții impuse.

După ce s-a stabilit funcționala $J(T)$, așa cum s-a precizat, și s-au ales funcțiile trial (test) în funcțională, se întocmește T cu aproximarea (4.6). Se ajunge la o integrală de volum definită în spațiul real, în care coordonatele α_i , $i = \overline{1, n}$ sunt considerate ca și constante. După efectuarea calculelor, funcționala devine o funcție de aceste coordonate $J = J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, care se vor numi parametri variaționali. Condiția de staționaritate (4.8) se transformă în condiția de minim a funcției J , de variabilele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, care este satisfăcută atunci când:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.9)$$

După calculul derivatelor parțiale se obține un sistem liniar de n ecuații în n necunoscute, care, matricial se scrie sub forma:

$$[K][\alpha]=[F], \quad (4.10)$$

unde $[K]$ este matricea coeficienților necunoscutelor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ și se numește matricea de rigiditate a problemei.

Dacă $[K]$ este o matrice nesingulară, din rezolvarea sistemului se află $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, care înlocuite în (4.6) conduc la aproximația T a soluției ecuației diferențiale date.

Pentru determinarea funcționalei $J(T)$ se folosesc metode variaționale cum ar fi metoda Ritz, sau metoda Rayleigh-Ritz, ori metode energetice.

De exemplu, în [4] se arată că pentru modelul potențialelor electromagnetice al câmpului electromagnetic, prezentat în capitolul 3 al lucrării, funcționala energetică este de forma:

$$J(\bar{A}, \bar{V}) = \int_D \left[\left(\int_0^{\bar{E}} \bar{D} d\bar{E} - \int_0^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} \right) + (\bar{J} \cdot \bar{A} - \rho \bar{V}) \right] dD, \quad (4.11)$$

unde notațiile au semnificațiile precizate în capitolul 3.

Metoda reziduurilor ponderate pornește de la ideea că aproximarea (4.6) nu satisface ecuația dată (4.1) și deci va apărea o eroare $E=LT-f$, care se numește reziduu. Evident că reziduu E este o funcție definită în același subspațiu vectorial și trebuie stabilite condițiile ca reziduu să fie minim.

Stabilirea acestor condiții se bazează tot pe "Calculul vectorial", conform căruia un vector este nul atunci când proiecțiile sale pe trei direcții necoplanare sunt nule, adică când vectorul este ortogonal pe fiecare din aceste trei direcții.

În subspațiul vectorial menționat, produsul scalar dintre două funcții f, g , notat cu (f, g) , se definește prin relația:

$$(f, g) = \int_D fg \, dD \quad (4.12)$$

Funcția f este ortogonală pe funcția g atunci când $(f, g)=0$, adică:

$$\int_D f \cdot g \, dD = 0 \quad (4.13)$$

Spațiul vectorial considerat având dimensiunea n , se poate găsi o bază formată cu funcțiile liniar independente e_1, e_2, \dots, e_n .

Reziduu E va fi minim atunci când este ortogonal pe fiecare dintre aceste funcții, deci când sunt îndeplinite condițiile:

$$\int_D e_j \cdot E \, dD = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.14)$$

În varianta Galerkin a metodei reziduurilor ponderat, baza, pe care se proiectează

reziduul, se alege aceeași cu cea folosită pentru exprimarea aproximării, adică $e_i = N_i$, $i = \overline{1, n}$ și relația (4.14) devine:

$$\int_D N_j (LT) dD = \int_D N_j f dD, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.15)$$

unde reziduul E s-a înlocuit cu expresia sa și s-a folosit o proprietate a integralelor de volum.

În relația (4.15) se înlocuiește T cu aproximarea (4.6) și se obține:

$$\int_D N_j \cdot L \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i N_i \right) dD = \int_D N_j f dD, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.16)$$

Admițând că operatorul L este liniar, relația (4.16) devine:

$$\int_D N_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot L \cdot N_i \right) dD = \int_D N_j f dD, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.17)$$

unde s-a avut în vedere că pentru operatorul L coordonatele α_i sunt considerate ca și constante.

Pentru fiecare valoare a lui i , indicele j este același pentru suma din relația (4.17) și deci se obține:

$$\int_D \sum_{i=1}^n \alpha_i N_j g_i dD = \int_D N_j f dD, \quad (4.18)$$

unde s-au notat $g_i = LN_i$, $i = \overline{1, n}$.

Folosind proprietatea unei integrale de volum, referitoare la integrarea unei sume și având în vedere că α_i sunt constante, se obține:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_D N_j g_i dD = \int_D N_j f dD \quad (4.19)$$

După calculul integralelor de volum, pentru o valoare arbitrară a lui j se obțin numerele reale:

$$K_{ji} = \int_D N_j g_i dD, \quad i = \overline{1, n}; \quad F_j = \int_D N_j f dD, \quad j = \overline{1, n}$$

Cu aceasta, relația (4.19) devine:

$$K_{j1}\alpha_1 + K_{j2}\alpha_2 + \dots + K_{jn}\alpha_n = F_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.20)$$

Se obține un sistem de tip Cramer, care se exprimă matricial:

$$[K][\alpha] = [F], \quad (4.21)$$

unde $[K]$ este matricea de rigiditate a problemei.

Până acum nu s-a făcut nici o mențiune referitoare la existența și unicitatea apro-

ximării (4.6)

Se arată că, în cazul metodei Galerkin, există o singură soluție aproximativă, dacă matricea de rigiditate este nesingulară, iar în cazul metodei Rayleigh-Ritz, dacă operatorul L este simetric și pozitiv definit, atunci matricea de rigiditate este nesingulară, simetrică și pozitiv definită, iar aproximarea (4.6) există și este unic determinată. Totodată, în aceste condiții, dacă se aleg aceleași funcții N_i , cele două metode conduc la aceleași valori pentru coordonatele α_i , $i = \overline{1, n}$.

Evident că, oricare ar fi metoda folosită, soluția aproximativă diferă de cea reală și deci se pune problema convergenței soluției aproximative determinată către soluția reală. Această convergență depinde atât de numărul funcțiilor alese, cât și de forma acestora.

Se poate arăta că, folosind o aceeași bază, metodele variaționale au o convergență mai bună decât cea a metodei reziduurilor ponderale. Însă, principalul dezavantaj al metodelor variaționale constă în faptul că funcționala trebuie definită pentru fiecare model matematic în parte, pe când, așa cum rezultă din cele arătate mai sus, metoda reziduurilor ponderate este valabilă oricare ar fi modelul matematic considerat. De asemenea, se poate arăta că metoda reziduurilor ponderate se poate utiliza și atunci când L este un operator neliniar. Totodată, în cazul unui regim nestaționar, funcționala rezultă de o formă foarte complicată, încât se ajunge la calcule matematice extrem de laborioase.

Din aceste motive, în prezenta lucrare se va folosi metoda reziduurilor ponderate în varianta Galerkin.

Indiferent care ar fi metoda utilizată, convergența este cu atât mai bună cu cât se alege un număr n de funcții de aproximare mai mare. Pe de altă parte, pentru a îndeplini condiția ca funcțiile alese să fie liniar independente, cu cât numărul lor este mai mare ele devin tot mai complicate, ceea ce duce la calcule matematice tot mai dificile, și deci la o creștere a necesarului de memorie și de timp pentru calculatorul electronic, cu ajutorul căruia se efectuează aceste calcule.

Totodată, funcțiile de aproximare sunt definite pe tot domeniul D , și trebuie să fie continue pe D , ceea ce impune anumite restricții în alegerea acestor funcții.

4.2. Metoda elementelor finite

Dezavantajele menționate în paragraful precedent sunt eliminate prin folosirea metodei elementelor finite, așa cum se va arăta în cele ce urmează.

În primul rând, dacă domeniul D se divizează într-un număr N de elemente finite,

ce ocupă domeniile D_1, D_2, \dots, D_n și dacă elementele finite se aleg astfel încât să fie disjuncte, atunci:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N \quad (4.22)$$

Considerând că, indiferent de metoda utilizată, s-a obținut modelul integral, având în vedere relația (4.23) și proprietatea integralei de volum, se va obține câte un model integral pentru fiecare element finit în parte. Ca urmare, aproximarea (4.6) se face pe domeniul fiecărui element finit și nu pentru întreg domeniul. De asemenea, funcțiile de aproximare se definesc pe fiecare din domeniile $D_k, k=\overline{1, N}$ și trebuie să fie continue și să aibă derivatele parțiale continue pe fiecare dintre aceste domenii, fiind necesar ca ele să fie definite, continue, și să aibă derivatele parțiale continue pe întreg domeniul D .

În domeniul fiecărui element finit se aleg anumite puncte, numite puncte nodale sau noduri, și apoi se definește câte o funcție de aproximare pentru fiecare nod. Deoarece expresiile acestor funcții de aproximare depind de forma elementului finit, ele se vor numi funcții de formă. Înseamnă că domeniul oricărui element finit se consideră ca un subspațiu vectorial cu dimensiunea egală cu numărul de noduri ale elementului finit respectiv.

Pentru a da o semnificație fizică parametrilor variaționali, aceștia se definesc ca fiind tocmai valorile mărimii respective în nodurile elementului.

Într-o anumită ordine, elementele finite se notează cu $1, 2, 3, \dots, N$. Dintre acestea, se alege un element finit arbitrar, notat cu e , a cărui domeniu se notează cu $D_e, e=\overline{1, N}$. De asemenea, dacă p este numărul de noduri ale elementului finit, într-o anumită ordine, acestea se notează cu $1, 2, 3, \dots, p$.

Notației fiecărei entități, definită pentru elementul finit e , i se adaugă e ca indice superior.

Deci, considerând că $P(x, y, z)$ este un punct oarecare al domeniului D_e , iar j este un nod arbitrar, din D_e se notează cu T^e aproximarea mărimii T pentru elementul finit considerat, care se exprimă prin relația:

$$T^e = \sum_{j=1}^p N_j^e T_j^e, \quad (4.23)$$

unde $N_j^e = N_j^e(x, y, z)$ este funcția de formă atașată nodului j al elementului finit e , iar T_j^e este valoarea mărimii T în acest nod.

Se notează cu $[N^e], [T^e]$ vectorii coloană ai funcțiilor de formă, respectiv al valo-

rilor mărimilor pentru cele p noduri ale elementului finit e , care vor avea dimensiunea $p \times 1$. Cu aceasta, aproximarea (4.23) se scrie matriceal sub forma:

$$T^e = [N^e]^T [T^e], \quad (4.24)$$

unde $[N^e]^T$ este transpusul vectorului $[N^e]$, ce va fi un vector linie cu dimensiunea $1 \times p$.

Pentru un punct arbitrar, $P_i(x_i, y_i, z_i)$ din D_e , relația (4.23) devine:

$$T^e(x_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^p N_j^e(x_i, y_i, z_i) T_j^e \quad (4.25)$$

Se presupune că P_i coincide, pe rând, cu câte unul dintre nodurile elementului finit. Deoarece, evident că $T^e(x_i, y_i, z_i) = T_i^e$, adică valoarea aproximării în fiecare nod este egală cu valoarea mărimii în acel nod, rezultă că, funcțiile de formă trebuie astfel definite încât să îndeplinească condiția:

$$N_j^e(x_i, y_i, z_i) = \delta_{ij}, \quad (4.26)$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kroneker.

Ca urmare, funcția de formă, atașată fiecărui nod, se definește astfel încât să aibă valoarea unu în nodul respectiv și valoarea zero în celelalte noduri ale elementului, considerat precum și în orice punct din exteriorul acestuia. Se spune că astfel de funcții de formă constituie o bază Lagrange în domeniul D .

Prin aceasta se asigură că, atunci când nodurile se află pe frontiera S a lui D , sunt îndeplinite condițiile de frontieră de tip Dirichlet. Totodată, apare posibilitatea ca funcțiile de formă să se aleagă ca polinoame de interpolare, definite pe porțiuni, constituite din domeniile elementelor finite, de exemplu polinoame Lagrange sau polinoame Hermite, de grad relativ mic (cel mult cinci).

În ipoteza că se folosește metoda reziduurilor ponderate a lui Galerkin, pentru elementul finit e considerat se scrie ecuația:

$$\int_{D_e} N_i^e L T^e dD = \int_{D_e} N_i^e f dD, \quad i = \overline{1, p} \quad (4.27)$$

Se înlocuiește T^e cu aproximarea (4.23), rezultând:

$$\int_{D_e} N_i^e L \left(\sum_{j=1}^p N_j^e T_j^e \right) dD = \int_{D_e} N_i^e f dD, \quad i = \overline{1, p} \quad (4.28)$$

Având în vedere cele menționate mai înainte, pentru nodul i al elementului finit e se obține ecuația:

$$K_{i1}^e T_1^e + K_{i2}^e T_2^e + \dots + K_{ip}^e T_p^e = F_i^e, \quad (4.29)$$

unde:

$$K_{ij}^e = \int_{D_e} N_i^e L N_j^e dD, \quad j = \overline{1, p} \quad (4.30)$$

$$F_i^e = \int_{D_e} N_i^e f dD \quad (4.31)$$

Pe rând, pentru fiecare nod al elementului finit se atribuie lui i o valoare egală cu numărul nodului respectiv, și cu relațiile (3.30), (3.31) se calculează coeficienții K_{ij}^e , $j = \overline{1, p}$, respectiv termenii liberi F_i^e . Va rezulta un sistem de p ecuații, cu p necunoscute $T_1^e, T_2^e, \dots, T_p^e$, care matricial se scrie sub forma:

$$[K^e] \cdot [T^e] = [F^e], \quad (4.32)$$

unde:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{1p}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{2p}^e \\ \dots & & \\ k_{p1}^e & k_{p2}^e & k_{pp}^e \end{bmatrix}; \quad [T^e] = \begin{bmatrix} T_1^e \\ k_2^e \\ \vdots \\ T_p^e \end{bmatrix}; \quad [F^e] = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ \vdots \\ F_p^e \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Sistemul de ecuații (4.32) se numește modelul numeric elemental, iar $[K^e]$, $[T^e]$, $[F^e]$ se numesc, respectiv, matricea de rigiditate, vectorul valorilor mărimii din noduri, vectorul termenilor liberi pentru elementul finit e .

Este important să se rețină că fiecare linie a matricei de rigiditate, respectiv a vectorului termenilor liberi, se obține pentru câte un nod al elementului finit considerat, și se va numi contribuția aceluși nod la modelul numeric elemental.

Deci, K_{ii}^e reprezintă contribuția proprie a nodului considerat, la matricea de rigiditate elementară, și se înscrie în linia i și coloana i , iar K_{ij}^e , $j \neq i, j = \overline{1, p}$ reprezintă contribuțiile nodului considerat, i , la celelalte noduri ale elementului e , și se înscrie în linia i și coloanele j ale matricei de rigiditate.

Se procedează ca mai sus pentru fiecare element finit, în care s-a divizat domeniul D , și se obține un număr de modele numerice elementale egal cu numărul N de elemente finite. Fiecare model numeric elemental este definit printr-o matrice de rigiditate elementală și un vector al termenilor liberi elementali.

În final se urmărește ca, prin îmbinarea modelelor numerice elementale, să se obțină un singur model numeric, valabil pentru întregul domeniu D , care se va numi model numeric global. Acest proces de îmbinare se numește asamblare a modelelor numerice

elementale, sau, simplu, asamblare și pentru realizarea sa se au în vedere cele ce se prezintă mai jos.

În primul rând, deoarece se presupune că elementele finite sunt conectate între ele doar prin intermediul nodurilor, rețeaua de discretizare este privită ca fiind o rețea de puncte numite noduri globale, ce sunt conectate între ele prin intermediul unor linii, drepte sau curbe.

În general, într-un nod global se pot găsi noduri ce aparțin la mai multe elemente finite și pentru a le deosebi între ele, nodurile ce aparțin fiecărui element finit se numesc noduri locale ale acestuia.

Localizarea în spațiu și numerotarea nodurilor globale, numită numerotare (indexare) globală, se face în raport cu sistemul de coordonate folosit pentru studiul proceselor respective. Este foarte important ca indexarea globală a nodurilor să se facă într-o anumită ordine, de exemplu după direcțiile axelor sistemului de coordonate și în sensul acestora.

Localizarea și numerotarea nodurilor fiecărui element finit, numită numerotare (indexare) locală a acestuia, se face în raport cu însuși elementul finit respectiv. În unele lucrări de specialitate, pentru indexarea locală a fiecărui element finit se folosesc literele I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, ..., însă, în această lucrare se păstrează convenția folosită până în acest moment. Deci indexarea locală a unui nod arbitrar, a oricărui element finit se face cu i , $i = \overline{1, p}$ și se vorbește despre nodul local i al elementului finit respectiv. Pentru a face o legătură cu indexarea locală menționată, nodului local i al oricărui element finit se înlocuiește cu cifra care ocupă poziția i în șirul de litere precizat. De exemplu, nodul local 3 al oricărui element finit se înlocuiește cu litera K.

Pentru indexarea globală a unui nod arbitrar al rețelei de discretizare se va folosi notația \bar{i} $i = \overline{1, n}$, și se vorbește despre nodul global \bar{i} .

Este foarte important să se stabilească o ordine de indexare locală, adică o ordine în care se numerează nodurile elementelor finite și această ordine trebuie să fie respectată, oricare ar fi elementul finit considerat. Pentru aceasta, se alege un element finit de referință, de exemplu acela care este situat cel mai aproape de originea sistemului de coordonate, sau nodul situat în partea stângă jos. Unul dintre nodurile acestuia se alege ca nod de referință, de exemplu acela care situat în partea stângă jos, sau nodul care este situat cel mai aproape de origine. Nodul de referință se notează cu 1, și, într-un anumit

sens, de exemplu cel antiorar, restul nodurilor se notează cu 2, 3, 4, ..., p. În continuare, pentru fiecare element finit, alegerea nodului de referință și ordinea numerotării nodurilor se face la fel ca pentru elementul de referință.

De asemenea, dacă intervin elemente finite, ce au diferite forme geometrice, pentru fiecare formă geometrică se procedează așa cum s-a arătat mai sus.

Numerotarea unui element finit arbitrar se face cu (i), $i = \overline{1, n}$, iar ordinea numerotării poate fi aleasă arbitrar.

Pentru exemplificare, în figura 4.1 s-a considerat cazul unui domeniu plan, divizat așa cum se observă în cele două figuri.

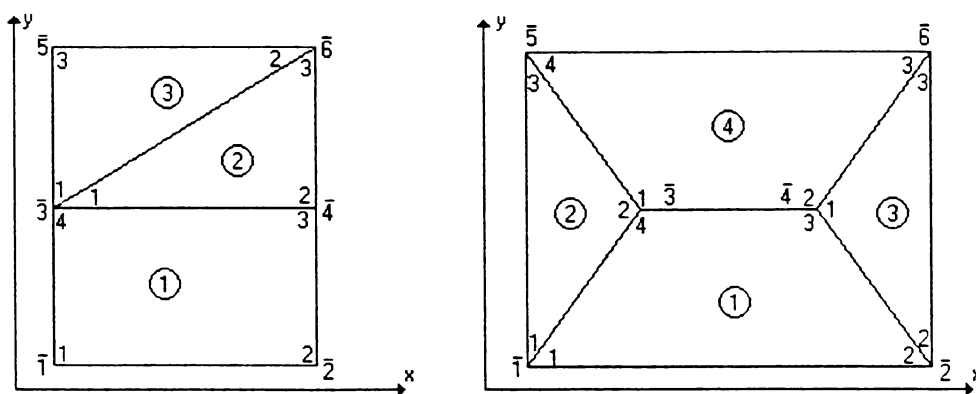


Fig.4.1

Se observă că, atât pentru numerotarea elementelor, cât și pentru numerotarea globală, s-au ales direcțiile și sensurile axelor de coordonate.

Numerotarea locală a nodurilor fiecărui element finit s-a făcut așa cum s-a menționat, iar cifrele respective sunt înscrise în domeniul elementului finit respectiv.

În al doilea rând, într-un punct dat al domeniului D, orice mărime de stare are o singură valoare concretă, și numai una. Ca urmare, în fiecare nod global mărimea considerată are o singură valoare, ce se numește valoarea globală. În continuare, valoarea globală a mărimii din nodul global \bar{i} se notează cu T_i , $i = \overline{1, n}$. Valoarea mărimii într-un nod local i al unui element finit e se va nota conform convenției folosită până în acest moment, adică cu T_i^e , și se va numi valoarea locală a mărimii, din nodul i al elementului e.

Rezultă că, valoarea locală a mărimii din nodul fiecărui element finit, ce se află într-un nod global, este egală cu valoarea globală respectivă.

De exemplu, pentru elementul finit (3) din fig.4.1.a, se obțin $T_1^3 = T_3$; $T_2^3 = T_3$; $T_3^3 = T_5$. În general, $T_j^e = T_i$, dacă j se află în nodul global (i).

În matricea de rigiditate a unui element finit e, pentru fiecare coloană j, elemen-

tele K_{ij} , $j = \overline{1, n}$ multiplică valoarea locală T_j^e , în modelul numeric elemental și se vor numi contribuțiile celorlalte noduri la nodul local j al elementului finit respectiv.

Deci, pentru toate elementele finite, ce au un nod local situat într-un nod global (i), contribuțiile celorlalte noduri la nodul local respectiv multiplică aceeași valoare T_i în modele numerice elementale ale acestor elemente finite.

Pe aceeași bază, se rescriu modelele numerice elementale, așa cum se arată mai jos, pentru elementele finite (2) și (3) din fig.4.1.a.

$$\begin{array}{ll} K_{11}^2 T_3 + K_{12}^2 T_4 + K_{13}^2 T_6 = F_1^2 & K_{11}^3 T_3 + K_{12}^3 T_6 + K_{13}^3 T_5 = F_1^3 \\ K_{21}^2 T_3 + K_{22}^2 T_4 + K_{23}^2 T_6 = F_2^2 & K_{21}^3 T_3 + K_{22}^3 T_6 + K_{23}^3 T_5 = F_2^3 \\ K_{31}^2 T_3 + K_{32}^2 T_4 + K_{33}^2 T_6 = F_3^2 & K_{31}^3 T_3 + K_{32}^3 T_6 + K_{33}^3 T_5 = F_3^3 \end{array}$$

În concluzie, modelul numeric global trebuie astfel dedus astfel încât să conțină ca necunoscute cele n valori globale ale mărimii T , care, matricial, se scriu sub forma unui vector coloană, notat cu $[T]$, ce se va numi vectorul coloană al necunoscutelor problemei. Ca urmare, modelul numeric global se va exprima printr-un sistem de tip Cramer, de n ecuații cu n necunoscute, și matricial se scrie sub forma:

$$[K][T]=[F], \quad (4.34)$$

unde:

$[K]$ este matricea coeficienților și se va numi matricea de rigiditate globală;

$[F]$ este vectorul coloană al termenilor liberi și se va numi vectorul termenilor liberi global.

Procesul de asamblare urmărește tocmai determinarea matricei $[K]$ și a vectorului coloană $[F]$.

În acest scop se imaginează că nu ar exista elementele finite, și că în domeniul D s-a ales un număr de n puncte, ce sunt chiar nodurile globale.

În continuare se procedează așa cum s-a arătat în paginile anterioare, înainte de a trece la expunerea metodei elementelor finite, adică se are în vedere relația (4.15), care se scrie sub forma:

$$\int_D N_i(LT) dD = \int_D N_i f dD, \quad i = \overline{1, 2, \dots, n}, \quad (4.35)$$

unde cu N_i , $i = \overline{1, 2, \dots, n}$ s-a notat o bază de funcții definite în D , iar T este o aproximare arbitrară a mărimii considerate.

Având în vedere relația (4.22), relația (4.35) devine:

$$\sum_{l=1}^N \int_{D_e} N_i(LT) dD = \sum_{l=1}^N N_i f dD, \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.36)$$

Evident că pentru fiecare element finit, N_i este funcția de formă atașată nodului acestuia care se află în nodul global \bar{i} , iar T este aproximarea mărimii T pentru elementul finit respectiv.

Deci, dacă se notează cu λ nodul local al unui element finit arbitrar e , care se află în nodul global considerat \bar{i} , atunci relația (4.36) se scrie sub forma:

$$\sum_{e=1}^N \int_{D_e} N_{\lambda}^e(LT^e) dD = \sum_{l=1}^N N_{\lambda}^e f dD, \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.37)$$

unde T^e este dată de relația (4.23).

Însă, funcția de formă, atașată fiecărui nod local al fiecărui element finit, este nulă în orice punct din exteriorul domeniului acesteia.

Ca urmare, în ambele sume din relația (4.37) intervin numai elementele finite ce au un nod local situat în nodul global considerat \bar{i} , adică acelea ce sunt amplasate de jur împrejurul aceluia nod global.

Pentru fiecare nod global \bar{i} , se notează cu M_i șirul format cu notațiile elementelor finite ce au un nod local situat în nodul global \bar{i} (ce înconjoară nodul global \bar{i}). În continuare notația unui element finit se va numi indexul acestuia, și deci M_i este șirul indexurilor elementelor finite ce înconjoară nodul global \bar{i} .

Cu această convenție, simbolic, relația (4.37) se scrie sub forma:

$$\sum_{e \in M_i} \int_{D_e} N_{\lambda}^e(LT^e) dD = \sum_{e \in M_i} N_{\lambda}^e f dD, \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.38)$$

unde prin $e \in M_i$ trebuie înțeles faptul că, pe rând, lui e și i se atribuie o valoare egală cu indexul unui element finit, ce înconjoară nodul global \bar{i} , iar λ este nodul local al elementului finit respectiv, ce este situat în nodul global \bar{i} .

Însă, având în vedere relațiile (4.30) și (4.31) se obțin:

$$\int_{D_i} N_{\lambda}^e(LT^e) dD = K_{\lambda 1}^e T_1^e + K_{\lambda 2}^e T_2^e + \dots + K_{\lambda p}^e T_p^e \quad (4.39)$$

$$\int_{D_i} N_{\lambda}^e f dD = F_{\lambda}^e \quad (4.40)$$

unde s-a notat cu p numărul de noduri al unui element finit arbitrar din șirul menționat.

Folosind relațiile (4.39) și (4.40) relația (4.38) devine:

$$\sum_{e \in M_i} (K_{\lambda 1}^e T_1^e + K_{\lambda 2}^e T_2^e + \dots + K_{\lambda p}^e T_p^e) = \sum_{e \in M_i} F_{\lambda}^e; \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.41)$$

sau concentrat:

$$\sum_{e \in M_i} \left(\sum_{j=1}^p K_{\lambda j}^e T_j^e \right) = \sum_{e \in M_i} F_{\lambda}^e \quad (4.42)$$

Se observă că $\sum_{j=1}^p K_{\lambda j}^e T_j^e$ este linia λ a modelului numeric elemental al elementului finit e , iar F_{λ}^e este linia λ a vectorului termenilor liberi ai aceluiași model numeric elemental. De asemenea $\sum_{j=1}^p K_{\lambda j}$ este linia λ a matricei de rigiditate elementară a elementului finit respectiv.

Deci, pentru fiecare element finit, ce înconjoară nodul global considerat \bar{i} , în suma din membrul stâng al relației (4.42) se scrie linia modelului elemental corespunzătoare nodului local ce este situat în nodul global considerat, iar în suma din membrul drept se scrie aceeași linie a vectorului termenilor liberi din modelul elemental al acelui element finit. Cu alte cuvinte, în membrul stâng se înscrie contribuția nodului local respectiv, la modelul elemental, iar în membrul drept se scrie contribuția aceluiași nod la vectorul termenilor liberi.

De asemenea, pentru fiecare nod local al oricărui element finit, T_j^e se înlocuiește cu valoarea globală din nodul global cu care coincide nodul local respectiv.

Pentru a nu scrie un număr prea mare de ecuații, ca exemplu, în figura 4.2 s-a presupus că domeniul D are forma unui triunghi, care s-a divizat în trei elemente finite triunghiulare, notate cu 1, 2, 3.

Numerotarea elementelor, nodurilor globale și a nodurilor locale ale fiecărui element finit s-a făcut așa cum s-a precizat.

Pentru $\bar{1}$ șirul este format din elementele finite 1 și 3, fiecare având în $\bar{1}$ nodul local 1. Se obține:

$$K_{11}^1 T_1^1 + K_{12}^1 T_2^1 + K_{13}^1 T_3^1 + K_{11}^3 T_1^3 + K_{12}^3 T_2^3 + K_{13}^3 T_3^3 = F_1^1 + F_1^3 \quad (4.43)$$

Pentru $\bar{2}$ șirul este format din elementele finite 1 și 2, fiecare având în $\bar{2}$ nodul local 2. Se obține

$$K_{21}^1 T_1^1 + K_{22}^1 T_2^1 + K_{23}^1 T_3^1 + K_{21}^2 T_1^2 + K_{22}^2 T_2^2 + K_{23}^2 T_3^2 = F_2^1 + F_2^2 \quad (4.44)$$

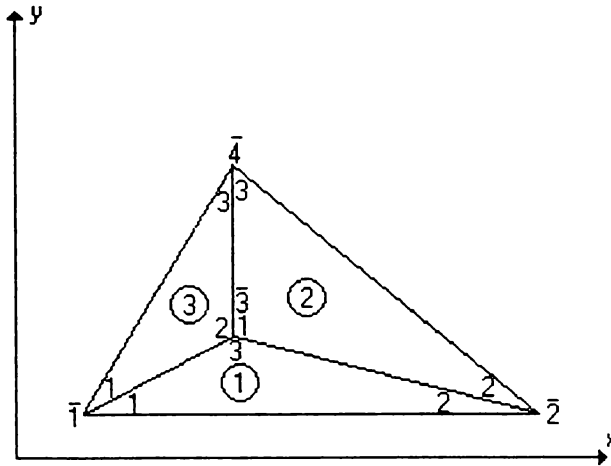


Fig.4.2

Pentru $\bar{3}$ șirul este format din elementele finite 1, 2 și 3, ce au în $\bar{3}$ nodurile locale 3, respectiv 1, respectiv 2. Se obține:

$$\begin{aligned} K_{31}^1 T_1^1 + K_{32}^1 T_2^1 + K_{33}^1 T_3^1 + K_{11}^2 T_1^2 + K_{12}^2 T_2^2 + K_{13}^2 T_3^2 + K_{21}^3 T_1^3 + K_{22}^3 T_2^3 + K_{23}^3 T_3^3 = \\ = F_3^1 + F_1^2 + F_2^3 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Pentru $\bar{4}$ șirul este format din elementele 2 și 3, ce au în $\bar{4}$ nodurile locale 3. Se obține:

$$K_{31}^2 T_1^2 + K_{32}^2 T_2^2 + K_{33}^2 T_3^2 + K_{31}^3 T_1^3 + K_{32}^3 T_2^3 + K_{33}^3 T_3^3 = F_3^2 + F_3^3 \quad (4.46)$$

Se au în vedere relațiile:

$$T_1^1 = T_1^3 = T_1; \quad T_2^1 = T_2^2 = T_2; \quad T_3^1 = T_1^2 = T_2^3 = T_3; \quad T_3^2 = T_3^3 = T_4 \quad (4.47)$$

Cu acestea, relațiile precedente devin:

$$\begin{aligned} K_{11}^1 T_1 + K_{12}^1 T_2 + K_{13}^1 T_3 + K_{11}^3 T_1 + K_{12}^3 T_2 + K_{13}^3 T_4 = F_1^1 + F_1^3 \\ K_{21}^1 T_1 + K_{22}^1 T_2 + K_{23}^1 T_3 + K_{21}^2 T_3 + K_{22}^2 T_2 + K_{23}^2 T_4 = F_2^1 + F_2^2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$K_{31}^1 T_1 + K_{32}^1 T_2 + K_{33}^1 T_3 + K_{11}^2 T_3 + K_{12}^2 T_2 + K_{13}^2 T_4 + K_{21}^3 T_1 + K_{22}^3 T_3 + K_{23}^3 T_4 = F_3^1 + F_1^2 + F_2^3$$

$$K_{31}^2 T_3 + K_{32}^2 T_2 + K_{33}^2 T_4 + K_{31}^3 T_1 + K_{32}^3 T_3 + K_{33}^3 T_4 = F_3^2 + F_3^3$$

Ecuatiile sistemului (4.48) se ordonează după valorile globale ale lui T și se obțin:

$$\begin{aligned} (K_{11}^1 + K_{11}^3) T_1 + K_{12}^1 T_2 + (K_{13}^1 + K_{12}^3) T_3 + K_{13}^3 T_4 = F_1^1 + F_1^3 \\ K_{21}^1 T_1 + (K_{22}^1 + K_{22}^2) T_2 + (K_{23}^1 + K_{21}^2) T_3 + K_{23}^2 T_4 = F_2^1 + F_2^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$(K_{31}^1 + K_{21}^3) T_1 + (K_{32}^1 + K_{12}^2) T_2 + (K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{22}^3) T_3 + (K_{13}^2 + K_{23}^3) T_4 = F_3^1 + F_1^2 + F_2^3$$

$$K_{31}^2 T_1 + K_{32}^2 T_2 + (K_{31}^3 + K_{32}^3) T_3 + (K_{33}^2 + K_{33}^3) T_4 = F_3^2 + F_3^3$$

Relațiile (4.49) reprezintă un sistem de patru ecuații ce are ca necunoscute chiar

valorile mărimii T în cele patru noduri globale ale domeniului considerat. Înseamnă că (4.49) este chiar modelul numeric global ce s-a urmărit să se obțină.

Matricea globală, și vectorul termenilor liberi global vor fi:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^3 & K_{12}^1 & K_{13}^1 + K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^1 + K_{21}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^1 + K_{31}^3 & K_{32}^1 + K_{32}^2 & K_{33}^1 + K_{31}^2 + K_{32}^3 & K_{33}^2 + K_{33}^3 \\ K_{31}^3 & K_{32}^2 & K_{31}^2 + K_{32}^3 & K_{33}^2 + K_{33}^3 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1^1 + F_1^3 \\ F_2^1 + F_2^2 \\ F_3^1 + F_1^2 + F_2^3 \\ F_3^2 + F_3^3 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Obținerea practică, cu ajutorul calculatorului electronic, a matricei $[K]$ și a vectorului coloană $[F]$ se poate face prin două metode, denumite asamblare după noduri, respectiv asamblare după elemente.

Asamblarea după noduri se bazează pe observația că, așa cum rezultă din sistemul (4.49), fiecare linie a modelului numeric global s-a obținut pentru câte un nod global. Ca urmare, fiecare linie a matricei de rigiditate globală și a vectorului termenilor liberi global, se obține pentru câte un nod global, și din acest motiv asamblarea după noduri se mai numește metoda generării linie după linie (linie de linie) a matricei $[K]$ și a vectorului $[F]$. Nu se mai calculează separat matricile de rigiditate elementale și vectorii termenilor liberi elementali, ci se pornește de la nodul global indexat 1, și se baleiază rețeaua de discretizare, în ordinea crescătoare a indexării nodurilor globale. Pentru fiecare nod global \bar{i} , se aplică relațiile (4.39) și (4.40) și se obține linia i a lui $[K]$ și a lui $[F]$, având în vedere cele menționate până acum.

Mai întâi se definește un tabel de conexiuni după noduri, care, în prima coloană, conține nodurile globale în ordinea crescătoare a indexurilor.

Pentru a înțelege ce trebuie să conțină celelalte coloane ale tabelului se face convenția ca liniile și coloanele matricei $[K]$ să se noteze cu $1, 2, \dots, n$, unde i corespunde nodului global cu indexul \bar{i} , iar coloanele lui $[F]$ se vor afla la fel. Deci, un element arbitrar al matricei $[K]$ și al vectorului $[F]$ se vor nota cu K_{ij} , respectiv cu F_i , unde i, j corespund nodurilor globale cu indexările i , respectiv j .

Se reamintește că, în cazul matricei de rigiditate elementele $K_{i1}^e, K_{i2}^e, \dots, K_{ip}^e$ reprezintă contribuțiile la nodul local i al elementului finit e , ale tuturor celorlalte noduri ale

acestui, iar K_{ii}^e se numește contribuție proprie nodului local i . Deci, K_{ij}^e este contribuția la nodul local i a nodului local j .

După cum se observă din matricea din relația (4.50), linia i este constituită din contribuțiile la nodul local al fiecărui element finit, ce este situat în nodul global i , ale tuturor celorlalte noduri ale elementului finit respectiv.

Înseamnă că, următoarea coloană a tabelului este constituită din mai multe subcoloane, în care se înscriu, în ordine, elementele finite ce înconjoară nodul global corespunzător din prima coloană. Urmează a treia coloană a tabelului, cu mai multe subcoloane, în care, pentru fiecare element finit din coloana precedentă, se înscrie indexul nodului local ce se află în nodul global din prima coloană. Este foarte important de reținut că, în fiecare linie i , pentru fiecare element finit înscris în a doua coloană, intervin contribuțiile la nodul local înscris în a treia coloană, ale tuturor celorlalte noduri locale ale acelu element finit. Din acest motiv, nodul local înscris în a treia coloană se va numi nod local principal al elementului finit respectiv, pentru linia i .

Tot din relația 50 se observă că fiecare coloană j a liniei i se obține, în general, însumând contribuțiile la nodul principal din linia i , al fiecărui element a nodului local ce se află în nodul global cu indexul j .

Din acest motiv, în a patra coloană se înscriu celelalte noduri locale ale fiecărui element finit din a doua coloană, și după ce s-au scris nodurile locale ale unui element finit se inserează un separator, de exemplu, punct și virgulă. Ultima coloană a tabelului are mai multe subcoloane, în care, pentru fiecare nod local din coloana precedentă, se înscrie indexul nodului global în care este situat acel nod local, și acest mod global desemnează coloana j în care se înscrie contribuția nodului local respectiv.

Pe baza celor de mai sus s-a obținut tabelul 4.1.

Tabelul 4.1. Conexiuni după noduri

Nod global	Elemente finite			Noduri locale principale			Celelalte noduri locale						Noduri locale corespunzătoare									
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
1	1	3		1	1		2	3	;	2	3	;			2	3	;	3	4	;		
2	1	2		2	2		1	3	;	1	3	;			1	3	;	3	4	;		
3	1	2	3	3	1	2	1	2	;	2	3	;	1	3	1	2	;	2	4	;	1	4
4	2	3		3	3		1	2	;	1	2	;			3	2	;	1	3	;		

După ce s-a întocmit tabelul de conexiuni după noduri, pentru calculul elementelor matricei de rigiditate se folosește relația:

$$K_{ij} = \sum_e \left(\int_{D_e} N_{\lambda}^e L N_{\alpha} dD \right), \quad (4.52)$$

unde e este, pe rând, câte unul din elementele finite din a doua coloană, λ este nodul local principal al acestuia, iar α este acel nod local, inclusiv nodul local principal al elementului finit respectiv, ce se află în nodul global indexat cu j .

În scopul de a implementa relația (4.52) pe un calculator electronic, se introduce operatorul $D_{\beta j}^e$, definit prin relația:

$$D_{\beta j}^e = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \beta = j \\ 0 & \text{dacă } \beta \neq j \end{cases} \quad (4.53)$$

unde, pentru fiecare element finit e , β este pe rând, câte unul dintre nodurile globale, în care sunt situate nodurile locale ale elementului finit respectiv.

Folosind acest operator, relația (4.52) devine:

$$K_{ij} = \sum_e \left(D_{\beta j}^e \int_{D_e} N_{\lambda}^e L N_{\alpha}^e dD \right) \quad (4.54)$$

Implementarea operatorului $D_{\beta j}^e$, definit mai sus, se face folosind instrucțiunea IF, ce este definită pentru orice limbaj de programare.

Se atrage atenția că, în relația (4.54), pentru fiecare element finit e , prin α trebuie înțeles nodul local ce se află în nodul global β pentru cazul că $\beta=j$.

Elementul din linia i al vectorului termenilor liberi se calculează cu relația:

$$F_i = \sum_e \left(\int_{D_e} N_{\lambda}^e f dD \right), \quad (4.55)$$

unde e și λ se aleg așa cum s-a precizat mai înainte.

Pentru a verifica dacă relațiile precedente sunt corecte, adică dacă pe baza lor se obțin relațiile (4.50), respectiv (4.51), se are în vedere că, în matricea de rigiditate elementală și în vectorul termenilor liberi elemental, elementele sunt date de relațiile:

$$K_{\lambda\alpha}^e = \int_{D_e} N_{\lambda}^e L N_{\alpha}^e dD; \quad F_{\lambda}^e = \int_{D_e} N_{\lambda}^e f dD \quad (4.56)$$

Ca urmare, în funcție de elementele matricei elementale, și ale vectorului coloană, pentru un element finit arbitrar notat cu e , se obțin relațiile:

$$K_{ij} = \sum_e \left(D_{\beta j}^e K_{\lambda\alpha}^e \right), \quad F_i = \sum_l F_{\lambda}^e, \quad (4.57)$$

în care se subliniază din nou că prin α trebuie înțeles nodul local al fiecărui element finit e , ce se află în nodul global β , pentru care $\beta=j$.

Pentru aplicarea relației, pe rând, se face i egal cu câte un nod global din prima coloană și se obține linia lui $[K]$, respectiv a lui $[F]$.

Pentru fiecare linie i , din a doua coloană a tabelului se stabilesc valorile lui e , și pentru fiecare, din a treia coloană se află valoarea lui λ . Se calculează imediat T_i , cu a doua relație din (4.51).

Spre exemplificare, se consideră doar linia 3, deci $i=3$. Din tabel se obțin perechile de valori: $e=1, \lambda=3$; $e=2, \lambda=1$; $e=3, \lambda=1$ și deci:

$$F_3 = F_3^1 + F_1^2 + F_2^3,$$

adică linia 3 din (4.52).

Pentru determinarea elementelor matricei de rigiditate din linia i , pe lângă cele menționate mai sus, trebuie ca, pentru fiecare element finit stabilit, să se determine nodul global ce corespunde fiecărui nod local, inclusiv nodului principal al elementului finit respectiv.

Conform tabelului se obțin următoarele corespondențe:

$$e=1, \lambda=3; 3 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 2;$$

$$e=2, \lambda=1; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 4;$$

$$e=3, \lambda=2; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 4,$$

unde, pentru fiecare relație de corespondență, prima cifră reprezintă nodul local al elementului respectiv, iar a doua este nodul global în care acesta este situat.

Pe baza acestor corespondențe, pentru fiecare valoare a lui j se aplică operatorul $D_{\beta j}$, adică în coloana j intervine contribuția la nodul λ al fiecărui element finit, numai dacă acesta are un nod local, inclusiv nodul local principal, care corespunde la un nod global, indexat cu j . În prima relație din (4.57), pentru valoarea considerată a lui j , se va înlocui α cu nodul local astfel stabilit, pentru elementul e respectiv.

Astfel, pentru $j=1$, intervine nodul global 1, pentru elementele $e=1, e=3$, care corespunde la nodurile locale 1, respectiv 3, elementul $e=1$ având $\lambda=3$, iar $e=3$, având $\lambda=2$.

$$K_{31} = K_{31}^1 + K_{21}^3$$

Pentru $j=2$, intervine nodul global 3, pentru $e=1, 2 \rightarrow 2$ și $e=2, 2 \rightarrow 2$ și deci:

$$K_{32} = K_{32}^1 + K_{12}^2$$

Pentru $j=3$, se obțin:

$$e=1, \lambda=3; 3 \rightarrow 3;$$

$$e=2, \lambda=1; 1 \rightarrow 3;$$

$$e=3, \lambda=2; 2 \rightarrow 3.$$

Deci:

$$K_{33} = K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{22}^3$$

Pentru $j=4$:

$$e=2, \lambda=1; 3 \rightarrow 4;$$

$$e=3, \lambda=2; 3 \rightarrow 4;$$

Deci:

$$K_{34} = K_{13}^2 + K_{23}^3$$

Se observă că expresiile de mai sus, pentru K_{31} , K_{32} , K_{33} , K_{34} , sunt cele care intervin în linia 3 a matricei $[K]$ din relația (4.50).

Pentru a stabili metodologia asamblării după elemente finite, din sistemul (4.49) se extrag numai ecuațiile care se referă la câte un element finit, ce se identifică după indicele superior al coeficienților și al termenilor liberi.

Se obțin:

pentru $e=1$

$$K_{11}^1 T_1 + K_{12}^1 T_2 + K_{13}^1 T_3 = F_1^1$$

$$K_{21}^1 T_1 + K_{22}^1 T_2 + K_{23}^1 T_3 = F_2^1$$

$$K_{31}^1 T_1 + K_{32}^1 T_2 + K_{33}^1 T_3 = F_3^1$$

pentru $e=2$

$$K_{22}^2 T_2 + K_{21}^2 T_3 + K_{23}^2 T_4 = F_2^2$$

$$K_{12}^2 T_2 + K_{11}^2 T_3 + K_{13}^2 T_4 = F_1^2$$

$$K_{32}^2 T_2 + K_{31}^2 T_3 + K_{33}^2 T_4 = F_3^2$$

pentru $e=3$

$$K_{11}^3 T_1 + K_{12}^3 T_3 + K_{13}^3 T_4 = F_1^3$$

$$K_{21}^3 T_1 + K_{22}^3 T_3 + K_{23}^3 T_4 = F_2^3$$

$$K_{31}^3 T_1 + K_{32}^3 T_3 + K_{33}^3 T_4 = F_3^3$$

Fiecare dintre sistemele de ecuații de mai sus se expandează la dimensiunile modelului numeric global, adică, în general, la un sistem de n ecuații, cu n necunoscute T_1, T_2, \dots, T_n , iar în cazul considerat, la un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute T_1, T_2, T_3, T_4 , prin completarea termenilor ce lipsesc cu necunoscutele respectiv înmulțite cu zero.

În felul acesta, matricea de rigiditate elementală a fiecărui element finit va avea dimensiunile matricei de rigiditate globale $[K]$, și se va numi matricea de rigiditate expandată a acestui element finit. De asemenea, vectorul termenilor liberi elemental va

avea dimensiunea vectorului termenilor liberi global $[F]$ și se va numi vectorul termenilor liberi expandat, pentru acel element finit.

Se reamintește că, în matricea de rigiditate elementele $K_{\alpha\beta}^e$ se referă la nodul local α , iar β este câte unul dintre celelalte noduri. În vectorul termenilor elemental, elementul F_{α}^e se referă la nodul local α .

De asemenea, în matricea $[K]$, numerotarea liniilor și coloanelor se face în ordinea crescătoare a indexurilor nodurilor globale și elementul K_{ij} se află în linia corespunzătoare nodului global cu indexul i și în coloana corespunzătoare nodului global j . În vectorul $[F]$ numerotarea liniilor se face în ordinea crescătoare a indexurilor nodurilor globale, iar elementul F_i se află în linia corespunzătoare nodului global cu indexul i .

Având în vedere acestea, este ușor de observat că, în matricea de rigiditate expandată a fiecărui element finit, elementul $K_{\alpha\beta}^e$ se află în linia corespunzătoare nodului global în care se află nodul local α , și în coloana corespunzătoare nodului global în care se află nodul local β .

Rezultă că, pentru a putea obține matricile de rigiditate expandate și vectorul termenilor liberi expandat ale elementelor finite trebuie să se întocmească un tabel de corespondență dintre nodurile locale ale fiecărui element și nodurile globale în care acestea sunt situate, ce se numește tabel de conexiuni după elemente.

În prima coloană a tabelului se înscriu, în ordine crescătoare, indexurile elementelor finite.

A doua coloană va avea mai multe subcoloane, în care, pentru fiecare element finit din prima coloană, se înscriu indexurile nodurilor locale ale acestuia, în general într-o ordine arbitrară, însă este bine ca înscrierea nodurilor locale să se facă în ordinea crescătoare a indexurilor lor.

Ultima coloană a tabelului are același număr de subcoloane în care, pentru fiecare nod local dintr-o subcoloană a coloanei precedente, se înscrie nodul global în care nodul respectiv este situat.

Ca urmare, tabelul de conexiuni după elemente finite pentru exemplul din fig.4.2. are forma de mai jos.

Tabel 5.2. Conexiuni după elemente finite

Elemente finite	Noduri locale			Noduri globale		
	1	2	3	1	2	3
1	1	2	3	1	2	3
2	1	2	3	3	2	4
3	1	2	3	1	3	4

Matricile de rigiditate expandată se notează cu $[K^{(1)}]$, $[K^{(2)}]$, $[K^{(3)}]$, iar vectorii coloană expandați se notează cu $[F^{(1)}]$, $[F^{(2)}]$, $[F^{(3)}]$.

Conform celor precizate anterior, amplasarea elementelor matricei de rigiditate elementale în matricea de rigiditate expandată și amplasarea elementelor vectorului termenilor liberi elemental în vectorul termenilor liberi expandat, pentru fiecare element finit, se face pe baza următoarelor corespondente:

$$K_{\alpha\beta}^e = K_{ij}^{(e)}; \quad F_{\alpha}^e = F_i^{(e)}, \quad (4.58)$$

unde i este nodul global care corespunde la nodul local α , iar j este nodul global ce corespunde la nodul global β .

Fiecare matrice de rigiditate expandată are dimensiunile 4x4, și elementele matricei de rigiditate elementală vor ocupa, în matricea de rigiditate expandată, liniile și coloanele ce corespund nodurilor globale, în care sunt situate nodurile locale ale elementului finit respectiv.

De exemplu, pentru $e=2$, K_{11}^2 se plasează ca element $K_{33}^{(2)}$, deci în linia 3, coloana 3, iar K_{32}^2 se plasează ca element $K_{42}^{(2)}$ deci în linia 4, coloana 2 ale matricei de rigiditate expandate. De asemenea, F_1^2 se plasează ca element $F_3^{(2)}$, deci în linia 3, iar F_3^2 se plasează ca element $F_4^{(2)}$, deci în linia 4 a vectorului coloană expandat.

Pe această bază se obțin:

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [K^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^2 & K_{21}^2 & K_{33}^2 \\ 0 & K_{12}^2 & K_{11}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{31}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^{(3)}] = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & 0 & K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^3 & 0 & K_{22}^3 & K_{23}^3 \\ K_{31}^3 & 0 & K_{32}^3 & K_{33}^3 \end{bmatrix}$$

$$[F^{(1)}] = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [F^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2^2 \\ F_1^2 \\ F_2^3 \end{bmatrix}; \quad [F^{(3)}] = \begin{bmatrix} F_1^3 \\ 0 \\ F_2^3 \\ F_3^3 \end{bmatrix}$$

Se verifică că, prin însumarea matricilor de rigiditate expandate, se obține chiar matricea de rigiditate globală, iar prin însumarea vectorilor termenilor liberi expandați se obține vectorul termenilor liberi global, adică:

$$[K] = [K^{(1)}] + [K^{(2)}] + [K^{(3)}] \quad (4.59)$$

$$[F] = [F^{(1)}] + [F^{(2)}] + [F^{(3)}] \quad (4.60)$$

Pentru determinarea matricei de rigiditate globale și a vectorului termenilor liberi cu ajutorul calculatorului electronic se parcurg mai multe faze (secvențe), de unde și denumirea de asamblare secvențială a metodei.

Mai întâi se definesc: o matrice $[K]$ de dimensiuni $n \times n$ și un vector coloană $[F]$ cu dimensiunile $1 \times n$, unde n este numărul total de noduri al rețelei de discretizare.

Se baleiază elementele finite în ordinea indexării lor și pentru fiecare se aplică următorul algoritm:

1. Se calculează elementele matricei de rigiditate elementale și ale vectorilor termenilor liberi elementali folosind indexarea locală a nodurilor elementului finit respectiv. Adoptând convenția de notații anterioară înseamnă că se calculează elementele $K_{\alpha\beta}^e$, respectiv F_{α}^e cu relațiile (4.30), (4.31), care primesc forma:

$$K_{\alpha\beta}^e = \int_{D_e} N_{\alpha}^e L N_{\beta}^e dD; \quad F_{\alpha}^e = \int_{D_e} N_{\alpha}^e f dD,$$

unde α se înlocuiește pe rând cu indexul local al fiecărui nod și pentru fiecare valoare a lui α , β parcurge toate nodurile locale ale elementului finit respectiv.

2. Pentru fiecare nod local α se identifică nodul global i în care acesta este situat, adică se stabilește corespondența $\alpha \rightarrow i$, ceea ce înseamnă că se definește tabelul de conexiuni după elemente finite, pentru elementul finit respectiv.

3. Pe baza acestor corespondențe, indicii elementelor folosiți în indexarea locală se înlocuiesc cu indexurile nodurilor globale stabiliți prin corespondența respectivă. În felul acesta, fiecare element $K_{\alpha\beta}^e$ al matricei elementale $[K^e]$ devine un element K_{ij} al matricei globale $[K]$, și se înscrie în locația (i, j) a matricei $[K]$. De asemenea, fiecare element F_{α}^e , al vectorului $[F^e]$ devine un element F_i al vectorului $[F]$ și se înscrie în loca-

ția i a acestuia.

În ambele cazuri, dacă într-o locație există deja elemente, obținute pentru un element finit anterior, noul element se adună cu conținutul locației respective.

Se observă că, în acest caz se construiește matricea de rigiditate expandată și vectorul termenilor liberi expandat, pentru elementul finit respectiv. Totodată se realizează însumarea acestora cu cele ale elementelor finite precedente.

Pașii de mai sus se parcurg până când s-au baleiat toate elementele finite.

Când s-a ajuns la ultimul element finit s-a obținut chiar matricea de rigiditate [K] și vectorul [F].

În finalul acestui paragraf se face observația că, ambele metode de asamblare au o aceeași bază matematică, constituită din relațiile (4.42). Ceea ce le deosebește este modul în care se aplică aceste relații pentru a obține matricea [K] și vectorul [F].

Astfel, în cazul asamblării după noduri, calculele nu se mai fac la nivelul fiecărui element, ci la nivelul nodurilor globale, pentru fiecare obținându-se direct câte o linie a matricei [K], respectiv a vectorului [F], pe baza relațiilor (4.54) respectiv (4.55).

În cazul asamblării după elemente finite, calculele se fac la nivelul fiecărui element finit și asamblarea constă în rearanjarea elementelor în matricea [K], respectiv în vectorul [F], urmată de o însumare a elementelor ce se află într-o aceeași locație.

Se poate arăta că, printr-o indexare globală a nodurilor, făcută într-un mod judicios, se poate obține o matrice [K] de tip bandă, ceea ce duce la reducerea volumului de calcul necesar pentru rezolvarea modelului numeric global (al sistemului de n ecuații cu n necunoscute) față de cazul că [K] ar fi o matrice obișnuită.

4.3. Implementarea condițiilor de frontieră

Se consideră cazul mai general, când pe o porțiune S_D a frontierei S a domeniului considerat D , se impun condiții de frontieră de tip Dirichlet, iar pe o altă porțiune S_N se impun condiții de frontieră de tip Neumann.

Se consideră mai întâi condițiile de frontieră de tip Neumann, care, în general, se exprimă sub forma:

$$L_1 T|_{S_N} = f_N, \quad (4.61)$$

unde $f_N = f_N(x, y, z)$ este o funcție cunoscută, impusă prin enunțul problemei, iar L_1 este un operator aplicat mărimii T . De obicei, L_1 este derivata după normala dintr-un punct

oarecare a lui S_N , adică (4.61) are forma:

$$a \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_N} = f_N \quad (4.62)$$

sau:

$$a \operatorname{grad} T \cdot \bar{n} \Big|_{S_N} = f_N, \quad (4.63)$$

unde a este mărime de material, iar cu \bar{n} s-a notat versorul normalei exterioare la S_N .

Condițiile de frontieră de tip Neumann nu se pot impune după ce s-a obținut modelul numeric global, ci ele trebuie să fie incluse în acesta.

Ca urmare, modelul matematic integral trebuie astfel derivat încât în el să fie înglobate și condițiile de frontieră de tip Neumann, ceea ce, în concret, înseamnă că modelul integral trebuie să conțină și integrala pe porțiunea S_N a funcției f_N .

Pentru a arăta cum se îndeplinește această cerință, se presupune că modelul matematic inițial este de tip diferențial, exprimat sub forma (4.1). De asemenea, admitând că se folosește metoda reziduurilor ponderate în varianta Galerkin, mai întâi se scrie modelul integral pentru întreg domeniul D sub forma:

$$\int_D N_i L T \, dD = \int_D N_i f \, dD, \quad (4.64)$$

unde N_i , T sunt funcțiile de formă dintr-un nod arbitrar al oricărui element finit, iar T este aproximarea mărimii considerate pentru acesta, însă, pentru a ușura scrierea nu s-a mai prevăzut indicele superior e .

Se caută un alt operator diferențial, astfel încât:

$$L_2(N_i L T) = N_i L T + L T L_3 N_i, \quad (4.65)$$

unde L_3 este tot un operator diferențial.

Înlocuind, se obține:

$$\int_D N_i L T \, dD = \int_D L_2(N_i L T) \, dD - \int_D L T L_3 N_i \, dD$$

Operatorul L_2 trebuie astfel ales încât:

$$\int_D L_2(N_i L T) \, dD = \int_S N_i L_1 T \, dS, \quad (4.66)$$

adică integrala pe D a operatorului L_2 trebuie să fie egală cu integrala pe S a operatorului ce intervine în condiția de frontieră de tip Neumann, înmulțit cu funcția de formă N_i .

Însă, condiția (4.61) fiind impusă doar pe porțiunea S_N , înseamnă că pe restul din S funcția $f_N=0$ și deci relația (4.65) devine:

$$\int_D L_2(N_i LT) dD = \int_{S_N} N_i f_N dS, \quad (4.67)$$

unde s-a ținut cont de condiția (4.61).

Relațiile precedente conduc la modelul integral:

$$\int_D LTL_3 N_i dD = \int_{S_N} N_i f_N dS - \int_D N_i f dD, \quad (4.68)$$

Deoarece f_N este dată, la fel ca și f , integrala pe S_N a fost trecută în membrul drept al modelului integral și împreună cu cealaltă integrală conduce la obținerea vectorului coloană al termenilor liberi în modelul numeric elemental, deci și în modelul numeric global.

Întrucât f_N este dată numai pe frontiera S_N , modelul integral (4.68) se aplică numai pentru elementele finite ce au cel puțin un nod pe S_N , iar pentru restul elementelor finite se utilizează forma obișnuită (4.64).

Ca exemplu, se consideră ecuația transmisiei căldurii prin convecție termică, pentru care, relația (4.61) este de forma:

$$\lambda \text{grad} T \cdot \bar{n} \Big|_{S_N} = q, \quad (4.69)$$

unde q este densitatea de suprafață a fluxului termic schimbat de domeniul D cu exteriorul, sau, conform legii lui Newton $q = \alpha(T_p - T_f)$, unde notațiile au semnificațiile precizate în capitolul 4.

Modelul integral (4.64) conține termenul:

$$A = \int_D N_i \text{div}(\lambda \text{grad} T) dD \quad (4.70)$$

Având în vedere formulele lui Gauss-Ostrogradski, operatorul L_2 se alege ca fiind tot operatorul div și se obține:

$$\text{div}[N_i(\lambda \text{grad} T)] = N_i \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \lambda \text{grad} T \cdot \text{grad} N_i,$$

deci L_3 este operatorul grad .

Înlocuind (4.70) se obține:

$$A = - \int_D \lambda \text{grad} T \cdot \text{grad} N_i dD + \int_{S_N} N_i \cdot \lambda \text{grad} T \bar{n} dS,$$

unde s-a utilizat formula de transformare menționată.

Ținând cont de condiția de frontieră (4.69) rezultă:

$$A = - \int_D \lambda \text{grad} T \cdot \text{grad} N_i dD + \int_{S_N} N_i \cdot q dS$$

După cum se observă, s-a reușit includerea condiției de frontieră de tip Neumann

în modelul integral.

În general, condiția de frontieră de tip Dirichlet se exprimă sub forma:

$$T|_{S_D} = f_D, \quad (4.71)$$

unde $f_D = f_D(x, y, z)$ este impusă prin enunțul problemei.

Astfel de condiții de frontieră se implementează după ce s-a obținut modelul numeric global, și de obicei constau în a impune valorile mărimii T în nodurile de pe porțiunea S_D . Dacă se impune distribuția lui T pe S_D , de exemplu, dându-se funcția $f_D(x, y, z)$ atunci, se calculează valorile acestuia în nodurile de pe S_D .

Deci, dacă se notează cu n_D numărul de noduri globale de pe S_D din cele n necunoscute, un număr n_D sunt cunoscute, și deci numărul total de necunoscute devine $n - n_D$.

În principiu, este posibilă implementarea condițiilor de frontieră de acest tip prin înlocuirea în modelul numeric global, a valorilor lui T din nodurile n_D cu valorile impuse, și apoi rescrierea modelului numeric prin trecerea în membrul drept a termenilor ce conțin valorile respective. Însă, aceasta ar însemna modificarea completă atât a matricei de rigiditate cât și a vectorului termenilor, ceea ce ar conduce practic la reluarea operației de asamblare.

Din acest motiv, s-au căutat metode care să necesite un număr cât mai mic de modificări, care să poată fi implementate pe un calculator electronic.

În acest scop se utilizează două metode ce sunt prezentate în literatura de specialitate și nu prezintă dificultăți în ceea ce privește înțelegerea și implementarea lor, nu se mai prezintă în această lucrare.

4.4. Alegerea funcțiilor de formă. Utilizarea elementelor finite parametrice.

Pentru a înțelege cele ce urmează, se subliniază faptul că, orice element finit trebuie privit ca fiind o mulțime de puncte, ce constituie nodurile acestuia, iar forma geometrică a elementului finit, deci a domeniului acestuia, este descrisă cu ajutorul unor funcții matematice, ce sunt atașate elementului finit respectiv.

Deci, ceea ce are o existență fizică reală, sunt nodurile oricărui element finit, iar forma geometrică a domeniului acestuia trebuie privită ca o chestiune abstractă, deși, cu ajutorul unui soft de reprezentare grafică, se poate vizualiza forma geometrică respectivă.

Descrierea formei geometrice se face analitic, cu ajutorul unor funcții, ce trebuie alese încât, dacă s-ar face o reprezentare grafică a acestor funcții, să se obțină forma geometrică dorită, ce trebuie neapărat să treacă prin punctele alese ca noduri, iar domeniilor elementelor finite disjuncte să fie disjuncte.

Ca urmare, pentru a putea stabili funcțiile de formă, mai întâi trebuie realizată rețeaua de puncte de discretizare și cunoscute coordonatele acestora. De fapt, prin expresia "existență fizică" a nodurilor trebuie înțeleasă existența coordonatelor acestora, adică localizarea lor în spațiu, față de un sistem de coordonate, ales pentru a studia procesele respective, ce va fi numit sistem de coordonate global.

În continuare, se realizează grupuri de puncte, fiecare grup fiind considerate noduri ale unui element finit, precum și a tuturor celorlalte elemente finite din jurul său.

Se vor considera ca având aceeași formă geometrică toate elementele finite ce au același număr de noduri, și cărora le sunt atașate aceleași funcții de formă, indiferent care ar fi poziția în spațiu a punctelor respective. Se observă că expresia "aceeași formă geometrică", nu trebuie înțeleasă în mod riguros geometric. De exemplu, toate grupurile constituite din trei puncte, cărora le sunt atașate aceleași funcții de formă, vor fi considerate ca fiind elemente finite triunghiulare, deși, fizic, triunghiurile respective au laturi și orientări diferite.

Din aceste motive, în cele ce urmează, prin element finit arbitrar se va înțelege un grup de p puncte, ce se vor nota cu $1, 2, \dots, p$, cărora li se cunosc coordonatele, de exemplu, față de un sistem de referință global cartezian, și un punct arbitrar j , $j = \overline{1, p}$ se va numi nod j , iar coordonatele sale se notează cu (x_j, y_j, z_j) .

Funcțiile analitice, cu ajutorul cărora se descrie forma geometrică a domeniului elementar finit considerat, se vor prezenta spre finele acestui paragraf. Este de reținut că, pentru un același număr p de puncte, se pot obține forme geometrice diferite.

Pentru simplificarea desenelor, se va considera forma geometrică obținută prin unirea punctelor, două câte două, printr-un segment de linie dreaptă.

Pasul următor constă în a alege o funcție, cu ajutorul căreia să se aproximeze mărimea considerată T , dintr-un punct oarecare $P(x, y, z)$ al domeniului format de grupul de puncte obținut așa cum s-a precizat mai sus. Deci, se scrie:

$$T=g(x, y, z), \quad (4.77)$$

unde $g(x, y, z)$ este o funcție ce trebuie precizată.

Prin valoare a mărimii T într-un nod j , notată cu T_j , trebuie înțeleasă valoarea fun-

ției g în punctul (x_j, y_j, z_j) , adică:

$$T_j = g(x_j, y_j, z_j), \quad j = \overline{1, p} \quad (4.73)$$

Presupunând că s-a ales expresia analitică a funcției g , aceasta va conține constante, sub forma unor coeficienți, exponenți, etc., care se determină impunând condițiile (4.73). Constantele astfel determinate se înlocuiesc în expresia funcției, care se ordonează după valorile T_1, T_2, \dots, T_p . Expresia ce multiplică o valoare T_j va fi funcția de formă N_j , atașată nodului j .

De obicei g se alege ca o combinație liniară de funcții liniar independente, de o clasă h , adică:

$$g = \sum_{i=1}^n c_i h_i, \quad (4.74)$$

unde $h_i = h_i(x, y, z)$ este o funcție arbitrară din clasa respectivă, iar c_i sunt coeficienți, ce se determină așa cum s-a precizat.

Având în vedere că, în modelul matematic intervin o serie de operații, ce se efectuează asupra funcției g , și cum acestea se fac cu un volum de calcul mai redus în cazul polinoamelor, în cele mai multe softuri specializate, funcțiile h_i se aleg ca monoame, și deci g va avea forma unui polinom.

Se observă că lucrurile se prezintă la fel ca în cazul interpolării matematice, când se cunosc valorile T_j și trebuie aflată funcția g , care, în fiecare punct dat (x_j, y_j, z_j) să aibă valoarea dată de T_j . Din acest motiv, g se mai numește polinom de interpolare. Deosebirea este că acum, nu se cunosc valorile T_j , ci doar punctele respective. Acestea se determină punând condiția ca funcția aleasă g să satisfacă modelul matematic al procesului studiat, obținând în final un sistem de ecuații în necunoscutele T_j , care formează modelul numeric global, prezentat în capitolul precedent.

Rezultă că precizia metodei elementelor finite depinde fundamental de polinomul de integrare ales.

Deși valorile T_j sunt necunoscute, pentru alegerea polinomului de interpolare, acestea se presupun impuse.

Baza teoretică a interpolării o constituie teorema de aproximare a lui Weierstrass, conform căreia orice funcție continuă poate fi aproximată, pe un interval închis, cu o precizie oricât de bună, printr-un polinom de interpolare, însă teorema nu precizează criteriul practic de alegere a acestuia.

Cu alte cuvinte, impunând ca o funcție $f(x)$ să aibă anumite valori într-un anumit

număr de puncte, ce formează baza de puncte, există un singur polinom de interpolare, care să reproducă valorile funcției în baza de puncte. Se subliniază aceasta deoarece sunt posibile diverse formulări ale polinomului de interpolare, însă se poate arăta că, prin transformări corespunzătoare ele pot fi aduse la o aceeași formă.

În această lucrare se folosesc două forme de prezentare, denumite polinoame de interpolare Pascal, respectiv polinoame de interpolare Lagrange.

Polinoamele de interpolare Pascal au forma algebrică obișnuită a unui polinom, în general de trei variabile, de un anumit grad n . Denumirea provine din faptul că, pentru $n=2$, termenii pot fi dispuși sub forma triunghiului Pascal. În acest caz, pentru determinarea funcțiilor de formă atașate nodurilor se procedează așa cum s-a arătat mai sus.

În cazul folosirii polinoamelor de interpolare Lagrange, pentru o funcție de o singură variabilă $T(x)$, dacă se impune ca aceasta să aibă valorile T_j , $j = \overline{1, p}$, într-un număr de p puncte, de coordonate x_j , $j = \overline{1, p}$, adică $T(x_j) = T_j$, $j = \overline{1, p}$, atunci aproximarea funcției se face prin relația:

$$T = \sum_{j=1}^p L_j(x) T_j, \quad (4.75)$$

unde $L_j(x)$ este polinomul Lagrange atașat punctului j , dat de relația:

$$L_j(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}, \quad j = \overline{1, p} \quad (4.76)$$

Se observă că funcția de interpolare a nodului j , notată cu N_j , este chiar polinomul Lagrange din punctul j , adică se determină direct:

$$N_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \frac{(x - x_j)}{(x_j - x_k)}, \quad j = \overline{1, p} \quad (4.77)$$

Se verifică că $N_j(x_i) = \delta_{ji}$, adică funcția de formă îndeplinește condiția menționată.

Însă, fiecare funcție de formă $N_j(x)$ este un polinom de gradul $(p-1)$ și deci, dacă se impune ca funcțiile de formă să fie de un grad n , atunci $p=n+1$.

Evident că, pentru a obține o aproximare cât mai bună pentru funcția T , trebuie să se folosească un polinom de un grad n cât mai mare. În cazul că $p=n+1$ depășește numărul de puncte ale grupului respectiv de puncte alese ca noduri, trebuie să se aleagă puncte din interiorul domeniului elementului finit, care, nefiind conectate cu nodurile elementelor vecine, trebuie suprimate, atunci când se assemblează modelele numerice elementale, pentru a obține modelul numeric global.

În cazul folosirii polinoamelor de integrare Pascal, procedând așa cum s-a arătat, se poate obține ca toate punctele să fie, în extremitățile, respectiv vârfurile forme geometrice precum și în lungul elementului finit ori pe laturile, respectiv muchiile acestuia, și deci toate nodurile vor fi conectate cu cele ale elementelor finite vecine.

Acesta este argumentul pe baza căruia în această lucrare se consideră doar forme de interpolare Pascal.

Se consideră cazul cel mai simplu a unui grup de două noduri, 1, 2, unite printr-un segment de dreaptă, obținând un element finit unidimensional. De obicei, acest tip de elemente finite se folosesc atunci când domeniul considerat D este unidimensional, deci are forma unei linii drepte, ce se alege ca axă, ca în fig. 4.3.

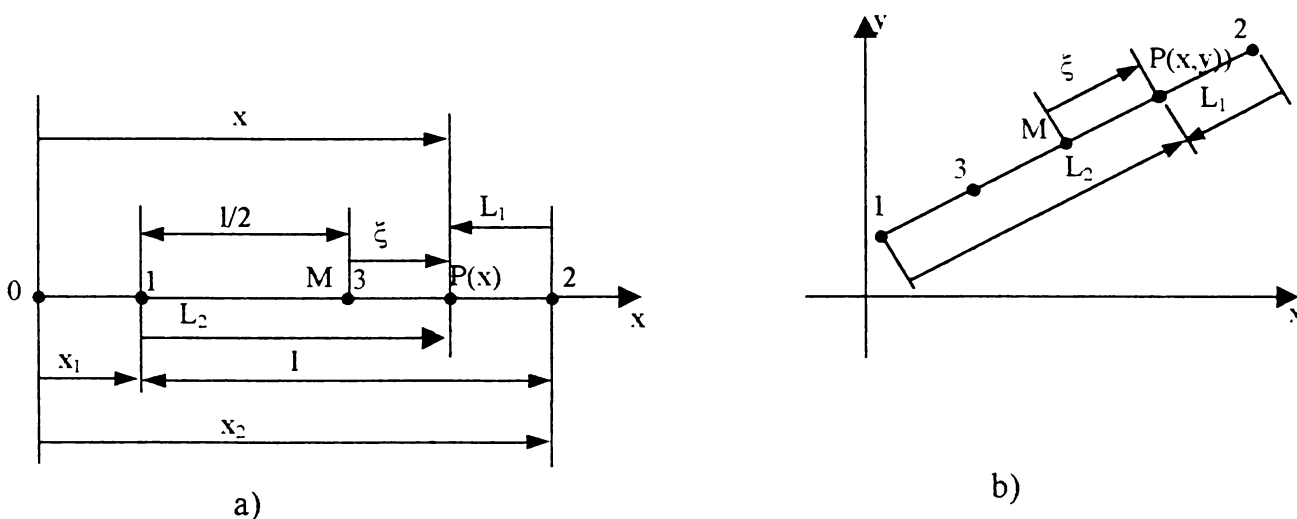


Fig.4.3

Pentru cazul din fig.4.3.a, intervine un polinom de interpolare într-o singură variabilă x . În general, dacă se alege un polinom Pascal de gradul n , acesta se caută de forma:

$$T = \sum_{i=p}^n a_i x_i, \quad (4.78)$$

unde $T_j = T(x_j)$.

Evident că (4.78) trebuie să conducă la un sistem de ecuații egal cu numărul de coeficienți a_i , care este egal cu $n+1$.

Deci, dacă se impune gradul n al polinomului, atunci grupul trebuie să aibă un număr $p=n+1$ de puncte (noduri). Invers, dacă s-a ales un număr un număr p de puncte, ce reprezintă nodurile, atunci polinomul trebuie să fie de grad $n=p-1$.

În cazul considerat, elementul finit are două noduri, deci $p=2$, și $n=1$, adică mărirea T se aproximează prin polinomul:

$$T=ax+b \quad (4.79)$$

Impunând condițiile (4.76) se obține:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} x + \frac{T_1 x_2 - T_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad (4.80)$$

Ordonând după T_1 și T_2 se obține:

$$T = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T_2 \quad (4.81)$$

Dacă se notează cu l lungimea elementului finit, atunci:

$$T = \frac{x_2 - x}{l} T_1 + \frac{x - x_1}{l} T_2 \quad (4.82)$$

Deci:

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{l}; \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{l}; \quad T = N_1 T_1 + N_2 T_2$$

Fie M punctul situat în mijlocul elementului finit, și se notează cu ξ distanța orientată de la M la un punct curent $P(x)$, raportată la jumătate din lungimea l a acestuia. Se obțin:

$$\xi = \frac{2x - (x_1 + x_2)}{2(x_2 - x_1)} \quad (4.84)$$

Explicitând pe x se obține:

$$x = \frac{(x_2 - x_1)\xi + x_1 + x_2}{2} \quad (4.85)$$

Înlocuind în (4.78), rezultă:

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (4.86)$$

Deci, mărimea T , exprimată în ξ va fi:

$$T(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} T_1 + \frac{1 + \xi}{2} T_2 \quad (4.87)$$

Din relația (4.84) se observă că, pentru $x=x_1$ se obține $\xi = -1$, iar pentru $x=x_2$, rezultă $\xi=1$, ceea ce înseamnă că ξ variază de la valoarea $\xi = -1$, ce o are într-o extremitate, la valoarea $\xi=1$, în cealaltă extremitate, adică ξ are valori normate.

Se mai menționează că, funcțiile de formă (4.86) se pot obține direct, dacă funcția de aproximare a mărimii T se alege de la început ca un polinom de gradul întâi, în variabila ξ , deci de forma:

$$T=a\xi+b \quad (4.88)$$

Având în vedere valorile lui ξ în nodurile elementului, relațiile 5.78 devin:

$$T(-1)=T_1; \quad T(1)=T_2$$

Procedând ca mai înainte, rezultă N_1, N_2 de forma (4.86).

Pentru a obține alte expresii ale funcțiilor de formă, localizarea punctului curent P se face prin două variabile, definite în raport cu fiecare dintre cele două noduri, ca fiind egale cu distanța de la celălalt nod la punctul P . Acestea se numesc variabile L și dacă se notează cu L_1 pentru nodul 1, respectiv cu L_2 pentru nodul 2, conform definiției de mai înainte se obține:

$$L_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}; \quad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4.89)$$

Relațiile (4.83) devin:

$$N_1=L_1, \quad N_2=L_2, \quad (4.90)$$

și T exprimată în variabilele L_1, L_2 va fi:

$$T=L_1T_1+L_2T_2 \quad (4.91)$$

Din relațiile (4.89) rezultă că, pentru $x=x_1$ se obțin $L_1=1, L_2=0$, iar pentru $x=x_2$ se obțin $L_1=0, L_2=1$, adică variabila L atașată fiecărui nod are valoarea egală cu 1 în nodul respectiv și valoarea egală cu zero în nodul opus. Din acest motiv, L_1, L_2 se reprezintă orientate de la nodul opus spre nodul căruia îi este asociată variabila L respectivă. De asemenea, cu relațiile (4.89) se specifică că:

$$L_1+L_2=1, \quad (4.92)$$

lucru ce era de așteptat, având în vedere definiția dată acestor variabile.

La fel ca în cazul precedent, dacă T se consideră ca o funcție de două variabile L_1, L_2 , atunci ea se va aproxima ca un polinom de gradul întâi, omogen, în aceste variabile, deci de forma:

$$T=aL_1+bL_2 \quad (4.93)$$

Având în vedere valorile variabilelor L_1, L_2 în nodurile elementului și notând $T=T(L_1, L_2)$ se obțin:

$$T(1, 0)=T_1; \quad T(0, 1)=T_2$$

Aceasta conduce la $a=L_1, b=L_2$ și înlocuind în (4.93) se obține chiar relația (4.91).

Dacă se compară relațiile (4.87), (4.93) cu relația (4.82) respectiv relațiile (4.86), (4.90) cu relația (4.83) se observă că, dacă se folosește coordonata ξ sau coordonatele L_1, L_2 , atât polinomul de aproximare cât și funcțiile de formă au expresii mult mai simple în ultimele două cazuri, ceea ce conduce la o scădere considerabilă a volumului de calcule,

atunci când se determină modelul numeric elemental.

De asemenea, sunt posibile situațiile în care intervin elemente finite unidimensionale, chiar dacă domeniul D este o suprafață plană, sau este tridimensional. De exemplu, dacă domeniul D este o suprafață de revoluție, de pildă, tronconică, din motive de simetrie, studiul se poate face într-un plan ce trece prin axa de revoluție, rezultând astfel un element unidimensional dirijat după direcția generatoarei din planul considerat, adică un element finit unidimensional, ce nu mai este paralel cu nici una dintre axele sistemului de coordonate utilizat, așa cum se vede în fig.4.3,b.

Evident că aproximarea mărimii T trebuie făcută printr-un polinom de două variabile, x, y care în forma Pascal este dat de relația:

$$T(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} x^{i-j} y^j, \quad (4.94)$$

care va fi un polinom de gradul n .

Dacă polinomul de interpolare se alege astfel încât toți coeficienții să fie nenuli, când se spune că se folosește o formă completă a polinomului de interpolare, atunci numărul total de coeficienți este egal cu $(n+1)(n+2)/2$.

Pentru a determina acești coeficienți cu relațiile (4.78), numărul de noduri ale elementului finit, deci numărul de puncte p al grupului respectiv se alege pe baza relației:

$$p = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (4.95)$$

Invers, impunând numărul p de noduri, gradul maxim al polinomului de interpolare se află din relația:

$$n = \frac{-3 + \sqrt{9 + 8(p-1)}}{2} \quad (4.96)$$

Se observă că întotdeauna $n > 0$, și dacă pentru n se obține un număr natural, atunci se alege un polinom de interpolare în formă completă. Dacă pentru n nu se obține un număr natural, atunci n se alege ca fiind numărul natural imediat superior și se folosește o formă incompletă astfel încât numărul termenilor liberi să fie egal cu p . Forma incompletă se alege astfel încât să se asigure simetria polinomului de interpolare, de exemplu să fie de gradul n în una dintre variabile.

În cazul considerat $p=1$, se obține $n=1$, însă fiind vorba numai de două puncte se alege forma incompletă:

$$T(x,y)=ax+by$$

Se pun condițiile $T(x_1,y_1)=T_1$; $T(x_2,y_2)=T_2$, și procedând cum s-a arătat se obține:

$$T(x,y) = \frac{x_2y - y_2x}{x_2y_1 - x_1y_2} T_1 + \frac{y_1x - x_1y}{x_2y_1 - x_1y_2} T_2 \quad (4.97)$$

și:

$$N_1(x,y) = \frac{x_2y - y_2x}{x_2y_1 - x_1y_2}; \quad N_2(x,y) = \frac{y_1x - x_1y}{x_2y_1 - x_1y_2} \quad (4.98)$$

Este de observat că, dacă elementul finit este paralel cu axa x , aflându-se la o distanță d de această axă, atunci $y_1=y_2=y=d$, și din (4.97), (4.98) se obțin tocmai relațiile (4.21), (4.83). De asemenea, dacă elementul finit este paralel cu axa y și se află la o distanță d de aceasta, atunci $x_2=x_1=x=d$, și se obțin aceleași relații, doar că variabila x se înlocuiește cu variabila y .

În concluzie, funcțiile de formă (4.83) sunt valabile pentru orice element finit ce are direcția uneia dintre axele de coordonate.

Însă, cele două puncte fiind pe aceeași linie dreaptă, se arată ușor că relațiile (4.98) se reduc la relațiile (4.83), adică funcțiile de formă se exprimă cu o singură variabilă, x . Aceasta era de așteptat, deoarece y este dependent de x prin ecuația dreptei respective, ceea ce face ca polinomul $T(x,y)$ să fie de fapt un polinom doar în variabila x .

În concluzie, oricare ar fi poziția unui element finit unidimensional, el nu poate fi aproximat decât printr-un polinom de o singură variabilă.

Se are în vedere că atât coordonata ξ , cât și coordonatele L_1, L_2 s-au definit în raport cu însuși elementul finit respectiv, motiv ce face ca să se numească coordonate locale naturale.

Ca urmare, dacă pentru elementul finit unidimensional se folosesc coordonatele locale naturale, funcțiile de formă se exprimă prin relațiile (4.87), respectiv (4.90), indiferent de poziția spațială a elementului finit. Trecerea de la sistemul de coordonate local la cel global se face printr-o transformare de coordonate, ce se va prezenta ulterior.

Fie acum un grup de trei puncte, notate cu 1, 2, 3, de coordonate cunoscute. Folosind un sistem de referință global, definit în planul determinat de cele trei puncte, aproximarea se face printr-un polinom de două variabile, x, y . Deoarece $p=3$, din (4.96) se obține $n=1$, și deci:

$$T=ax+by+c \quad (4.99)$$

Aplicând metodologia utilizată până în prezent, se obține:

$$T=N_1T_1+N_2T_2+N_3T_3 \quad (4.100)$$

unde:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2y_3 - x_3y_2}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \\ N_2 &= \frac{(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + x_3y_1 - x_1y_3}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \\ N_3 &= \frac{(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Aceste relații se pot scrie sub forma:

$$N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad N_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (4.102)$$

unde:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Dacă cele trei puncte sunt colineare, atunci ele definesc un element finit unidimensional cu trei noduri, de exemplu punctele 1, 2 sunt nodurile din extremități, iar 3 este un nod intermediar (fig.4.3.b).

Coordonatele celor trei puncte sunt legate între ele prin ecuația dreptei pe care se află și se obțin $\Delta=0$; $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$, adică funcțiile de formă sunt nedeterminate.

Prin alegerea corespunzătoare a unor mixuri de ordinul doi, se obțin funcțiile de formă similare celor date de relația (4.83), pentru două elemente finite, cu câte două noduri, constituite din câte un punct extern, și un punct intermediar, iar funcția de formă a acestuia este identică pentru ambele elemente finite. De asemenea, prin îmbinarea acestora se obțin funcții de formă doar pentru punctele extreme, iar punctul intermediar nu are nici o influență.

Deci, cu trei puncte colineare se poate forma un singur element finit unidimensional, având ca noduri cele două puncte extreme, indiferent care ar fi punctul intermediar. Aceasta decurge și din faptul că o linie dreaptă este perfect determinată prin două puncte, și nu depinde de alte puncte alese pe ea. S-a făcut această precizare, deoarece în unele lucrări se vorbește de elemente finite unidimensionale cu trei noduri. De fapt, un astfel de element finit se definește față de un sistem de referință local, caracterizat prin axa ξ , menționată mai înainte, iar funcția de aproximare se alege ca un polinom de gradul doi în variabila ξ , și apoi printr-o transformare de coordonate se revine la sistemul de referință

global. Dacă cele trei puncte nu sunt colineare, se obține un element finit curb, de forma unei parabole ce trece prin acele puncte.

Dacă cele trei puncte nu sunt colineare, se definește un element finit bidimensional triunghiular (fig.4.4).

Prin analogie cu cazul unui element finit unidimensional, fiecărui nod i se atașează o coordonată L_i , definită ca raportul dintre aria triunghiului format de un punct curent $P(x,y)$ și celelalte două noduri și aria întregului triunghi.

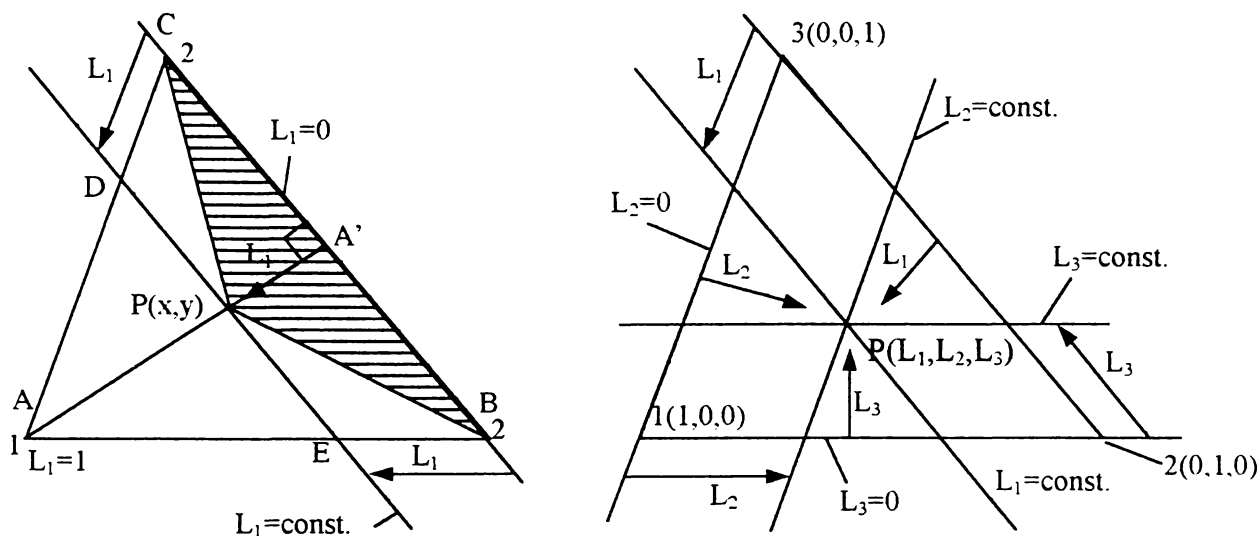


Fig.4.4

Deci, dacă se notează cu L_1 coordonata L asociată nodului 1, atunci conform definiției de mai sus se obține:

$$L_1 = \frac{\text{aria}(PBC)}{\text{aria}(ABC)} \quad (4.104)$$

Exprimând ariile celor două triunghiuri în funcție de coordonatele vârfurilor și având în vedere relațiile (4.102), (4.103) se obține că $L_1=N_1$. Notând cu L_2, L_3 coordonatele L ale celorlalte noduri, în mod similar se obține $L_2=N_2, L_3=N_3$, adică:

$$L_1=N_1; \quad L_2=N_2; \quad L_3=N_3 \quad (4.105)$$

De asemenea, rezultă că:

$$L_1+L_2+L_3=1 \quad (4.106)$$

În continuare se prezintă câteva proprietăți ale coordonatelor L , mai puțin evidențiate în lucrările de specialitate, însă foarte utile:

Aceste proprietăți se stabilesc pentru coordonata L_1 , și apoi se extind la celelalte două.

Dacă prin P se duce o paralelă la latura opusă nodului 1 (fig.4.4,a), atunci, oricare

ar fi poziția lui P pe aceasta, triunghiul PBC va avea aceeași bază BC, și aceeași înălțime, și deci va avea aceeași arie, iar din relația (4.104) se obține $L_1 = \text{const}$.

Deci, coordonata L, atașată fiecărui nod, are valoarea constantă pe orice dreaptă paralelă cu latura opusă nodului respectiv.

Ca urmare, punctul P poate fi ales chiar pe înălțimea AA' din A. Din acest motiv, se obișnuiește ca pentru L_1, L_2, L_3 să se aleagă ca direcție perpendiculara dusă pe latura opusă.

În acest caz, din relația (4.104) se obține:

$$L_1 = \frac{AP}{AA'} \quad (4.107)$$

Folosind asemănarea triunghiului ADE, ABC relația (4.107) devine:

$$L_1 = \frac{CD}{AB}; \quad L_1 = \frac{BE}{AB} \quad (4.108)$$

Deci valorile coordonatelor L ale unui punct sunt egale cu raportul dintre lungimea segmentului, pe care o paralelă cu latura opusă nodului căruia i se atașează acea coordonată, îl taie pe câte una dintre laturile ce se întâlnesc în acel nod și lungimea laturii respective.

Pe această bază, în fig.4.4,a s-a reprezentat coordonata L_1 a lui P, orientată din nodurile laturii opusă vârfului 1, de-a lungul laturilor ce se întâlnesc în 1, și trebuie subînțeles că este vorba despre raportul dintre lungimea segmentului respectiv și lungimea laturii după care este definit.

Folosind coordonatele L pentru localizarea punctului P, acesta devine $P(L_1, L_2, L_3)$ și pentru determinarea valorilor ce le are L_1, L_2, L_3 se procedează așa cum se arată în fig.4.4,b.

Prin P se duce câte o paralelă la fiecare latură a triunghiului ce reprezintă direcții după care coordonata asociată vârfului opus are valoare constantă. Fiecare coordonată s-a reprezentat prin câte un segment orientat de la unul dintre nodurile laturii opuse vârfului căruia îi este atașată acea coordonată, după latura ce unește acel nod cu vârful respectiv.

Pe această bază se verifică ușor că oricare dintre coordonatele L va avea valoarea zero în orice punct de pe latura opusă nodului căruia i se asociază și valoarea unu în nodul respectiv. Deci, coordonatele L ale nodurilor vor fi $1(1, 0, 0); 2(0, 1, 0); 3(0, 0, 1)$.

Folosind coordonatele L, funcția de aproximare (4.100) devine:

$$T=L_1T_1+L_2T_2+L_3T_3 \quad (4.109)$$

Este de reținut că, dacă se folosesc coordonatele L , funcția de aproximare pentru un element finit triunghiular este un polinom de gradul întâi în variabilele (L_1, L_2, L_3) ceea ce conduce la o simplificare remarcabilă a calculelor.

Cu un grup de patru puncte necoliniare se definește un element finit bidimensional de tip patrulater, în general, de o formă oarecare, având cele patru puncte ca noduri dispuse în vârfurile patrulaterului.

În acest caz, relația (4.96) conduce la $n=2$, iar din (4.95) se obține $p=6$. Deoarece $p=4$ se va folosi un polinom de interpolare în variabilele x, y de gradul 2, însă de o formă incompletă. Cea mai obișnuită formă este cea a unui polinom de gradul întâi în raport cu fiecare variabilă, motiv pentru care se vorbește despre un element finit patrulater liniar. Deci funcția de aproximare se alege de forma:

$$T=axy+bx+cy+d \quad (4.110)$$

Procedând ca în cazurile precedente se obține un sistem de patru ecuații în necunoscutele a, b, c, d . Însă, deoarece se obțin expresii complicate, se preferă folosirea unui element finit parametric, ce se va prezenta în cele ce urmează.

Utilizarea elementelor finite parametrice s-a impus din mai multe motive.

După cum s-a subliniat la începutul acestui paragraf, pentru fiecare element finit, trebuie stabilite funcțiile analitice cu ajutorul cărora să se descrie domeniul elementului finit, care vor interveni în calculul integralei pe acest domeniu.

Chiar și în cazul unui element finit unidimensional, care nu este paralel cu axele sistemului de coordonate, aceste funcții sunt relativ complicate și ele devin și mai complicate, de exemplu, în cazul unui element finit patrulater, de o formă arbitrară. Cu atât mai mult se complică lucrurile în cazul elementelor finite tridimensionale.

De asemenea, dacă frontiera domeniului este curbă, pentru a obține erori cât mai mici, trebuie să se folosească elemente finite curbe, respectiv cu laturile curbe, respectiv cu muchiile și fețele curbe, iar descrierea unor astfel de domenii este practic imposibilă.

Lucrurile devin foarte simple dacă s-ar folosi elemente unidimensionale, ce are direcția unei axe, respectiv elemente finite bidimensionale cu laturile paralele cu axele, respectiv elemente finite tridimensionale ce au muchiile și fețele paralele cu axele. Deoarece astfel de elemente finite se descriu în general prin funcții de transformare $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, $z \in [e, f]$ ele se vor numi elemente finite de tip interval. Evident că acestea ar implica rețele de discretizare rectangulare, ceea ce ar reduce considerabil cazurile în care

se poate aplica metoda elementelor finite, cu precizii satisfăcătoare.

Ideea este că, pentru fiecare grup de noduri ce este dat, trebuie să se definească un sistem de coordonate local, cu axele notate, în general, cu x_1, x_2, x_3 .

Mai întâi, în raport cu sistemul de referință local, se definește un element finit, ce se va numi element finit părinte, care să aibă un număr de noduri egal cu numărul de puncte din grupul considerat, însă să fie cu element finit de tip interval.

Elementul finit ce urmează a se defini, cu acel grup de puncte, se va numi element finit real, iar punctele vor fi nodurile acestuia.

Fiecare nod al elementului finit părinte se pune în corespondență cu un nod al elementului finit real și este foarte important ca aceste corespondențe să se stabilească corect. În acest scop se imaginează, cel puțin aproximativ, forma ce se dorește să o aibă elementul finit real. Elementul finit părinte va avea aceeași configurație geometrică, doar că laturile, respectiv muchiile sunt după axele sistemului de coordonate local ori paralele cu acestea. Cu alte cuvinte, elementul finit părinte va fi elementul finit real imaginat că ar avea nodurile astfel dispuse încât laturile sale să aibă direcțiile axelor sistemului de coordonate global. Pe această bază corespondența nodurilor se stabilește relativ ușor.

După ce s-a reprezentat elementul finit părinte, fiecare nod al său se notează la fel cu nodul elementului finit real pus în corespondență cu nodul respectiv. Se stabilesc coordonatele nodurilor elementului finit părinte față de sistemul de coordonate local.

Se procedează la fel ca în cazurile prezentate până acum, doar că mărimea T se aproximează printr-un polinom în variabile locale, adică T se caută de forma:

$$T = T(x_1, x_2, x_3) \quad (4.111)$$

Notând cu (x_1^i, x_2^i, x_3^i) coordonatele unui nod arbitrar al elementului părinte, coeficienții polinomului de interpolare se află impunând condițiile:

$$T(x_1^i, x_2^i, x_3^i) = T_i, \quad i = \overline{1, p} \quad (4.112)$$

Coeficienții astfel determinați se înlocuiesc în (4.111,) care se grupează după valorile T_1, T_2, \dots, T_p , obținând:

$$T = \sum_{i=1}^p N_i T_i, \quad (4.113)$$

unde $N_i = N_i(x_1, x_2, x_3)$ sunt funcțiile de formă ale elementului finit părinte, exprimate în coordonate locale.

Trecerea de la elementul finit părinte la cel real se realizează printr-o transformare

de coordonate, ce se obține exprimând fiecare coordonată globală ca o funcție de coordonate locale, deci de forma:

$$\begin{cases} x = x(x_1, x_2, x_3) \\ y = y(x_1, x_2, x_3) \\ z = z(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (4.114)$$

Se observă că transformarea (4.114) descrie domeniul elementului finit real sub formă parametrică, parametrii fiind coordonatele locale, de unde provine și denumirea de elemente finite parametrice.

Transformarea (4.114) se obține exprimând fiecare coordonată globală printr-o relație similară celei stabilite pentru exprimarea mărimii T , deci de forma (4.113), doar că în locul valorilor mărimii intervin valorile acelei coordonate, pentru nodurile (punctele) respective ale elementului finit real, adică:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^p N_i x_1^i \\ y = \sum_{i=1}^p N_i x_2^i \\ z = \sum_{i=1}^p N_i x_3^i \end{cases} \quad (4.115)$$

unde $N_i = N_i(x_1, x_2, x_3)$ sunt chiar funcțiile de formă stabilite anterior. Deci, valoarea coordonatei respective a fiecărui nod, față de sistemul de referință global, se multiplică cu funcția de formă atașată nodului respectiv, exprimată în coordonate locale.

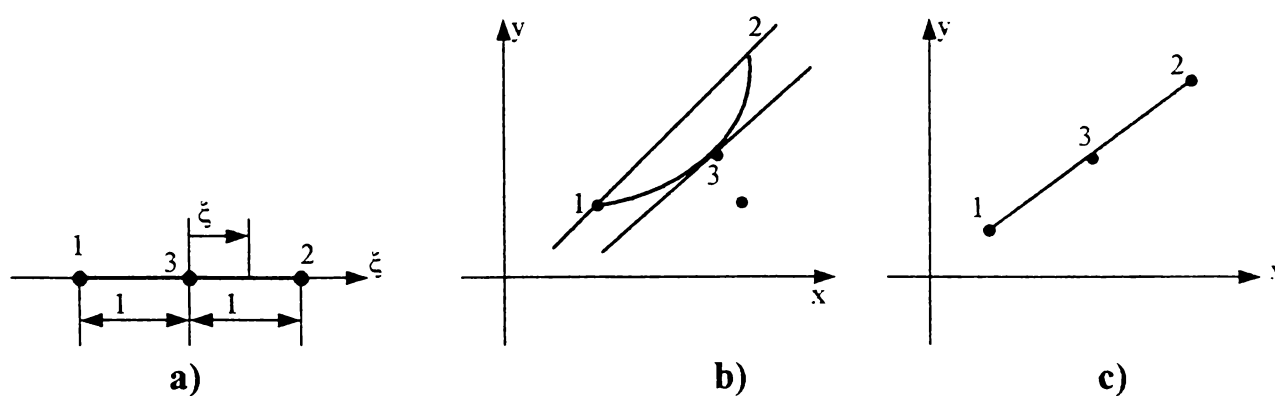


Fig.4.5

Ca prim exemplu, se va defini un element finit unidimensional curb. Pentru aceasta trebuie ales un grup de trei puncte necolineare, așa cum se arată în fig.4.5.b.

Se presupun cunoscute coordonatele globale a celor trei puncte, adică se cunosc (x_i, y_i) , $i=1, 2, 3$.

Coordonata locală este coordonata ξ , prezentată în paginile precedente și deci sis-

temul de coordonate local are o singură axă, axa ξ . Elementul finit părinte este tot unidimensional, cu lungimea egală cu două unități și dispus simetric față de originea axei ξ , așa cum se arată în fig.4.5.a. Deci elementul finit părinte este descris de funcția $-1 \leq \xi \leq 1$.

Corespondența nodurilor se stabilește așa cum se arată în fig.4.5.

În unele lucrări se spune că se utilizează un element finit unidimensional rectiliniu cu trei noduri, două fiind plasate în extremități, iar al treilea în centrul de greutate și se numește nod median. Însă, așa cum se observă din figură, elementul finit real nu este nici măcar rectiliniu, iar nodul 3 poate fi orice nod necolinar cu celelalte două, și amplasat între acestea. De fapt, afirmațiile respective se referă la elementul finit părinte, care, într-adevăr, este rectiliniu, și are nodul trei ca nod median.

Aproximarea mărimii T , față de sistemul referința local, deci în raport cu axa ξ se face printr-un polinom în variabila ξ , care trebuie să fie de gradul doi, deoarece $p=3$, și $n=p-1=2$. Deci:

$$T = a\xi^2 + b\xi + c \quad (4.116)$$

Coordonatele nodurilor elementului finit părinte sunt $1(-1)$; $3(0)$; $2(1)$.

Condițiile (4.112) devin $T(-1)=T_1$, $T(1)=T_2$, $T(0)=T_3$. Impunând ca $T(\xi)$, dată de (4.116), să satisfacă aceste condiții, și după ce se grupează în raport cu T_1 , T_2 , T_3 , se obține:

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3, \quad (4.117)$$

unde:

$$N_1 = N_1(\xi) = \frac{\xi^2 - \xi}{2}; \quad N_2 = N_2(\xi) = \frac{\xi^2 + \xi}{2}; \quad N_3 = N_3(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (4.118)$$

Se verifică că:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

Transformarea (trecerea) de la sistemul de referința local la cel global este dată de:

$$\begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{cases} \quad (4.119)$$

sau, dezvoltat:

$$\begin{cases} x = \frac{\xi^2 - \xi}{2} x_1 + \frac{\xi^2 + \xi}{2} x_2 + (1 - \xi^2) x_3 \\ y = \frac{\xi^2 - \xi}{2} y_1 + \frac{\xi^2 + \xi}{2} y_2 + (1 - \xi^2) y_3 \end{cases} \quad (4.120)$$

Se poate verifica că, dacă ξ variază între -1 și 1 , atunci un punct curent $P(x,y)$, ale cărui coordonate sunt date de relațiile (4.120), descrie o parabolă ce trece prin cele trei puncte (fig.4.5.b). De asemenea, panta acesteia în punctul trei are direcția segmentului ce unește punctele 1 și 2, adică tangenta dusă la parabolă în punctul 3 are direcția acestui segment. Ca urmare, dacă punctul 3 se alege pe mediatoarea segmentului format din punctele 1 și 2, atunci parabola va avea vârful în punctul 3.

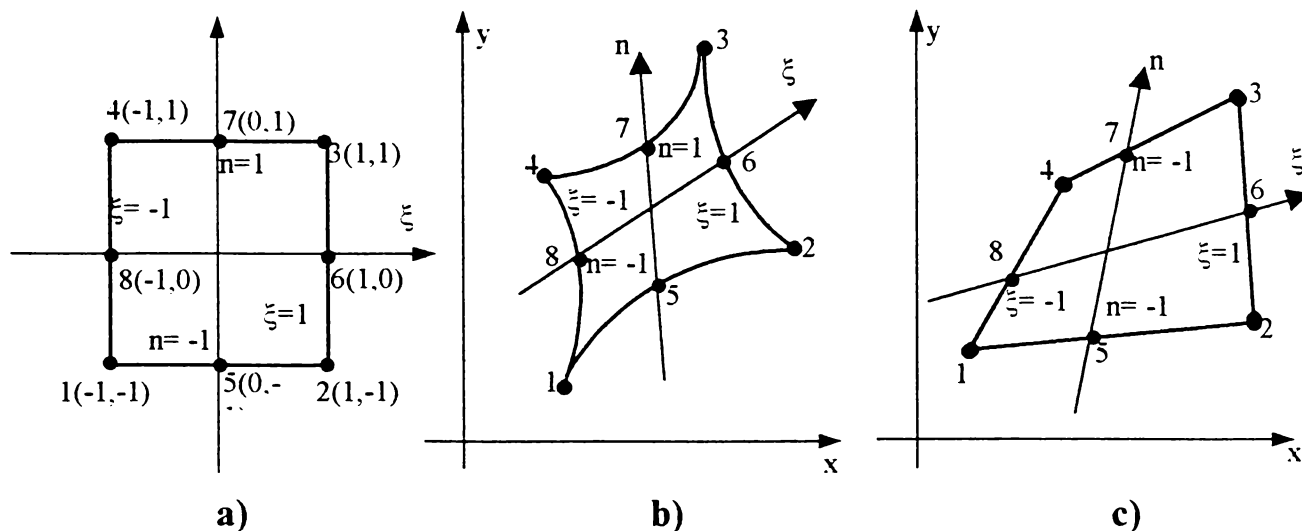


Fig.4.6

De asemenea, dacă punctele sunt alese colineare, atunci $P(x,y)$ va descrie chiar segmentul ce le unește și se obține un element finit unidimensional rectiliniu, prezentat în fig.4.5.c.

Următorul exemplu va ilustra modul în care se definește un element finit bidimensional patrulater cu laturi curbe. În acest scop se alege un grup de 8 puncte, ce trebuiesc amplasate ca în fig.4.6.b.

Sistemul de referință local este definit ca un sistem de coordonate cartezian, cu axele ξ , η , iar elementul finit părinte este un pătrat cu latura egală cu două unități, dispus cu laturile paralele cu axele, și cu centrul de simetrie în originea sistemului de coordonate, așa cum se arată în fig.4.6.a. Presupunând că cele 8 puncte s-au notat ca în fig.4.6.b, judecând așa cum s-a arătat, s-a obținut amplasarea nodurilor elementului finit părinte ca în fig.4.6.a, în care s-au precizat și coordonatele nodurilor, față de sistemul de referință local.

Elementul finit părinte va fi descris de funcțiile $-1 \leq \xi \leq 1$; $-1 \leq \eta \leq 1$.

Se definește mărimea T ca o funcție de coordonatele locale, adică $T=T(\xi,\eta)$.

Făcând $p=8$, din relația (4.96) se află $n=3$, însă având numai 8 puncte, se va folosi

un polinom de interpolare sub formă incompletă, astfel încât să fie de gradul doi în raport cu fiecare variabilă, de unde provine și denumirea de element finit patrulater, pătratic, sau de ordinul doi.

Deci, exprimarea mărimii se face prin funcția:

$$T = a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \xi^2 \eta + a_4 \xi \eta^2 + a_5 \xi \eta + a_6 \xi + a_7 \eta + a_8 \quad (4.121)$$

Prin același procedeu se obține:

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4 + N_5 T_5 + N_6 T_6 + N_7 T_7 + N_8 T_8 \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{-(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1)}{4} & N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(\xi+\eta-1)}{4} & N_4 &= \frac{-(1-\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)}{4} \\ N_5 &= \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2} & N_6 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2} \\ N_7 &= \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2} & N_8 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2} \end{aligned} \quad (4.123)$$

Transformarea de coordonate este definită de relațiile:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \end{cases}$$

unde N_i , $i = \overline{1,8}$ sunt funcțiile de formă date de relațiile (4.123)

Se poate verifica că, pentru fiecare trei puncte de pe o aceeași latură a elementului finit părinte, se obțin relații de transformare similare cu relațiile (4.120). Laturile trebuie parcurse în sensul axelor de coordonate, iar pentru fiecare latură se impune condiția ca una dintre coordonatele locale să aibă valoarea constantă 1 sau -1 .

Ca exemplu, să considerăm latura superioară, ale cărei nouri se parcurg în sensul $4 \rightarrow 7 \rightarrow 3$. Deoarece în lungul acestei laturi $\eta=1$, relațiile (4.123) devin:

$$N_1=0; \quad N_2=0; \quad N_3 = \frac{\xi^2 + \xi}{2}; \quad N_4 = \frac{\xi^2 - \xi}{2}; \quad N_5=0; \quad N_6=0 \quad N_7=1-\xi^2; \quad N_8=0.$$

Relațiile de transformare se reduc la:

$$\begin{cases} x = \frac{\xi^2 - \xi}{2} x_4 + \frac{\xi^2 + \xi}{2} x_3 + (1 - \xi^2) x_7 \\ y = \frac{\xi^2 - \xi}{2} y_4 + \frac{\xi^2 + \xi}{2} y_3 + (1 - \xi^2) y_7 \end{cases} \quad (4.124)$$

Se observă că se obțin tocmai relațiile (4.120) doar că punctele 1, 2, 3 se înlocu-

iesc cu punctele, respectiv, 4, 3, 7 ale laturii considerate, parcursă în sensul menționat.

Deci, când ξ variază între -1 și 1 , față de sistemul de referință global, punctul curent $P(x,y)$ va descrie o parabolă, ce trece prin nodurile 4, 7, 3 ale elementului finit real, așa cum se observă din fig.4.6.b.

La fel și pentru celelalte laturi ale elementului finit părinte, impunând condiția ca una dintre cele două coordonate locale să aibă valoarea constantă respectivă (-1 sau 1), pentru valori ale celeilalte coordonate locale, din intervalul $[-1,1]$, față de sistemul de referință global, punctul curent descrie o parabolă ce trece prin nodurile corespunzătoare ale elementului finit real. Se obține în final un element finit patrulater cu laturi curbe.

De obicei, nu se mai reprezintă elementul finit părinte, ci se scrie direct transformarea de coordonate (4.123). Pentru fiecare grup de trei puncte consecutive, alese ca să formeze nodurile elementului finit real, se înscrie valoarea constantă -1 sau 1 a coordonatei locale respective, așa cum se arată în fig.4.6. În acest scop, peste elementul finit real se suprapune sistemul de referință local cu originea în centrul de simetrie al acestuia, iar direcțiile axelor pot fi alese arbitrar, însă axa ξ orientată în sensul axei x , iar axa η orientată în sensul axei y . De obicei, direcția axelor se alege astfel încât să treacă prin unul din punctele intermediare ale laturii pe care o intersectează. Se imaginează că elementul finit ar avea forma unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele astfel desenate, cu latura egală cu două unități, și că fiecare axă trece prin mijlocul laturii pe care le intersectează, unde s-ar afla punctul intermediar de pe acea latură. Procedând astfel, se stabilește cu ușurință care coordonată locală rămâne constantă și valoarea acesteia.

Dacă, cele trei puncte ale fiecărui grup sunt colineare, se poate arăta că elementul finit patrulater are laturile rectilinii, însă de o formă arbitrară (fig.4.6.c).

4.5.Stabilirea modelelor numerice elementale pentru câmpul electromagnetic și câmpul termic din cuptor

În acest paragraf se urmărește determinarea expresiilor elementelor matricei de rigiditate elementale, și ale componentelor vectorului termenilor liberi elementali, pentru un element finit arbitrar, însă pentru ușurința notațiilor nu s-a mai prevăzut indicele superior, e . De asemenea, nu se mai precizează expresiile funcțiilor de formă și numărul lor, și acestea se vor alege, în funcție de tipul de element finit utilizat, așa cum s-a arătat în paragraful anterior.

Pentru determinarea pe cale numerică a câmpului electromagnetic, de obicei, se folosește potențialul magnetic vector, deoarece ecuațiile scrise cu acesta se rezolvă mai ușor cu metoda elementelor finite.

Pentru un regim quasistaționar, într-un caz general, ecuația modelului se exprimă sub forma [89]:

$$\mu\sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \text{rot}(\text{rot}\bar{A}) = \mu \bar{J}_s \quad (4.125)$$

unde \bar{A} , este potențialul magnetic vector, iar \bar{J}_s este densitatea curentului de aducție (de excitație), a cărei expresie este:

$$\bar{J}_s = -\sigma \text{grad}V'$$

Pentru șarjă, deoarece există numai curent electric indus, se consideră $\bar{J}_s = 0$.

Mai întâi, se face o discretizare în spațiu, considerând că, fiecare notație din relația (4.125), reprezintă valoarea mărimii respective la un moment arbitrar t . De asemenea, pentru simplificarea scrierii, la început, se face abstracție de primul termen din membrul drept al relației (4.125), obținând ecuația:

$$\text{rot}(\text{rot}\bar{A}) = \mu \bar{J}_s \quad (4.126)$$

Pentru rezolvarea unei ecuații vectoriale, în care intervine ca necunoscută o mărime vectorială, se folosește metoda descompunerii pe componente. Se obțin trei ecuații scalare, în care necunoscute sunt valorile componentelor mărimii vectoriale respective după axele sistemului de coordonate folosit. Fiecare componentă se aproximează printr-o relație prezentată în paragrafele precedente pentru mărimea scalară T .

Admițând că se folosește un sistem de coordonate carteziene, se notează cu A_x , A_y , A_z , J_{sx} , J_{sy} , J_{sz} valorile componentelor după axe ale mărimii \bar{A} , respectiv ale mărimii \bar{J}_s . Evident că:

$$\bar{A} = A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k}, \quad (4.127)$$

unde $A_x \bar{i}$, $A_y \bar{j}$, $A_z \bar{k}$ sunt componentele mărimii vectoriale \bar{A} după axe, iar A_x , A_y , A_z reprezintă valorile acestor componente.

Se notează cu \bar{A}_λ valoarea vectorială a mărimii \bar{A} într-un nod arbitrar λ , iar $\bar{A}_{\lambda x}$, $\bar{A}_{\lambda y}$, $\bar{A}_{\lambda z}$ reprezintă valorile componentelor acesteia după axele respective. Evident că:

$$\bar{A}_\lambda = A_{\lambda x} \bar{i} + A_{\lambda y} \bar{j} + A_{\lambda z} \bar{k} \quad (4.128)$$

Conform celor precizate anterior, se definesc aproximările:

$$A_x = \sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda x}; \quad A_y = \sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda y}; \quad A_z = \sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda z} \quad (4.129)$$

Se exprimă, în coordonate carteziene, operatorii ce intervin în relația (4.126) și apoi se grupează termenii ce multiplică câte unul dintre vectorii \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , care se egalează cu valoarea corespunzătoare a componentei lui \bar{J}_s . Se obțin astfel cele trei ecuații scalare menționate, în care A_x , A_y , A_z se înlocuiesc cu aproximările (4.129).

Admițând că se folosește metoda reziduurilor ponderate a lui Galerkin, se procedează ca în capitolul precedent și se obțin trei modele numerice elementale, în care necunoscutele sunt $A_{\lambda x}$, $A_{\lambda y}$, $A_{\lambda z}$, $\lambda = \bar{1}, \bar{p}$, care se obțin prin rezolvarea modelelor numerice elementale. În final, se determină valoarea vectorială \bar{A}_λ , $\lambda = \bar{1}, \bar{p}$, pe baza relației (4.128).

În relația (4.127), se înlocuiesc relațiile (4.129) și se obține:

$$\bar{A} = \left(\sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda x} \right) \bar{i} + \left(\sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda y} \right) \bar{j} + \left(\sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda z} \right) \bar{k} \quad (4.130)$$

Versorii \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , fiind constanți se pot introduce în sumă, și având în vedere relațiile (4.128) rezultă:

$$\bar{A} = \sum_{\lambda=1}^p N_\lambda \bar{A}_\lambda; \quad (4.131)$$

În ecuația vectorială (4.126), mărimea \bar{A} se înlocuiește cu expresia (4.131) și se are în vedere că, întrucât \bar{A}_λ este un vector constant, orice operator diferențial, aplicat lui \bar{A}_λ va da un rezultat nul.

Se consideră ecuația (4.126) și se obține:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{A} &= \text{rot} \left(\sum_{\lambda=1}^p N_\lambda \bar{A}_\lambda \right) = \sum_{\lambda=1}^p \text{rot} (N_\lambda \bar{A}_\lambda) = \sum_{\lambda=1}^p (\text{grad} N_\lambda \times \bar{A}_\lambda + N_\lambda \text{rot} \bar{A}_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda=1}^p \text{grad} N_\lambda \times \bar{A}_\lambda, \end{aligned} \quad (4.132)$$

unde s-a ținut cont de cele menționate mai sus și, deci $\text{rot} \bar{A}_\lambda = 0$.

Deci:

$$\text{rot}(\text{rot} \bar{A}) = \text{rot} \left(\sum_{\lambda=1}^p \text{grad} N_\lambda \times \bar{A}_\lambda \right) = \sum_{\lambda=1}^p \text{rot}(\text{grad} N_\lambda \times \bar{A}_\lambda)$$

Se folosește relația:

$$\text{rot}(\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}}) = -\bar{\mathbf{v}} \text{div} \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{v}} \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \text{div} \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{u}} \nabla) \bar{\mathbf{v}}$$

Alegând $\bar{\mathbf{u}} = \text{grad} N_\lambda$, $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{A}}_\lambda$, se obține:

$$\text{rot}(\text{grad} N_\lambda \times \bar{\mathbf{A}}_\lambda) = -\bar{\mathbf{A}}_\lambda \text{div}(\text{grad} N_\lambda) + (\bar{\mathbf{A}}_\lambda \nabla) \text{grad} N_\lambda + \text{grad} N_\lambda \text{div} \bar{\mathbf{A}}_\lambda + (\text{grad} N_\lambda \nabla) \bar{\mathbf{A}}_\lambda$$

Pe baza celor precizate mai sus, și deoarece $\text{div}(\text{grad} N_\lambda) = \Delta N_\lambda$ se obține:

$$\text{rot}(\text{rot} \bar{\mathbf{A}}) = \sum_{\lambda=1}^p \left[(\bar{\mathbf{A}}_\lambda \nabla) \text{grad} N_\lambda - \bar{\mathbf{A}}_\lambda \Delta N_\lambda \right] \quad (4.133)$$

Se notează $\bar{\mathbf{v}} = \text{rot}(\text{rot} \bar{\mathbf{A}})$ și se obține:

$$\bar{\mathbf{v}} = \sum_{\lambda=1}^p \left[(\bar{\mathbf{A}}_\lambda \cdot \nabla) \text{grad} N_\lambda - \bar{\mathbf{A}}_\lambda \Delta N_\lambda \right], \quad (4.134)$$

iar ecuația (4.126) devine:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mu \bar{\mathbf{J}}_s \quad (4.135)$$

Cele trei ecuații scalare vor fi:

$$v_x = \mu J_{sx}; \quad v_y = \mu J_{sy}; \quad v_z = \mu J_{sz} \quad (4.136)$$

Pentru aflarea expresiilor lui v_x , v_y , v_z , se exprimă $\text{grad} N_\lambda$ în coordonate carteziene, iar vectorului astfel obținut i se aplică operatorul $\bar{\mathbf{A}}_\lambda \nabla$ exprimat tot în coordonate carteziene. Grupând termenii, așa cum s-a menționat, și schimbând ordinea de derivare în anumiți termeni se obține:

$$\begin{aligned} v_x &= \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial y} \right) A_{\lambda y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial z} \right) A_{\lambda z} \right\} \\ v_y &= \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x} \right) A_{\lambda x} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial y} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial z} \right) A_{\lambda z} \right\} \\ v_z &= \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x} \right) A_{\lambda x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial y} \right) A_{\lambda y} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial z} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda z} \right\} \end{aligned} \quad (4.137)$$

Implementarea pe calculatorul electronic implică, ca ecuațiile respective să fie scrise sub formă condensată și în acest scop se fac schimbări de notații. Astfel axele se notează cu x_1 , x_2 , x_3 și deci se fac următoarele înlocuiri: $x \rightarrow x_1$, $y \rightarrow x_2$, $z \rightarrow x_3$. Valoarea oricărei componente se notează cu un același indice ca și axa respectivă, adică se fac schimbările de notație: $A_{\lambda x} \rightarrow A_{\lambda 1}$, $A_{\lambda y} \rightarrow A_{\lambda 2}$, $A_{\lambda z} \rightarrow A_{\lambda 3}$; $J_{sx} \rightarrow J_{s1}$, $J_{sy} \rightarrow J_{s2}$, $J_{sz} \rightarrow J_{s3}$.

Ecuațiile (4.136) devin:

$$v_1 = \mu J_{s1}; \quad v_2 = \mu J_{s2}; \quad v_3 = \mu J_{s3} \quad (4.138)$$

Relațiile (4.138) se transformă în:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_1} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda 1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_2} \right) A_{\lambda 2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_3} \right) A_{\lambda 3} \right\} \\
v_2 &= \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_1} \right) A_{\lambda 1} + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_2} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda 2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_3} \right) A_{\lambda 3} \right\} \\
v_3 &= \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_1} \right) A_{\lambda 1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_2} \right) A_{\lambda 2} + \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_3} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda 3} \right\}
\end{aligned} \quad (4.139)$$

Pentru fiecare valoare a lui λ , necunoscute sunt $A_{\lambda 1}$, $A_{\lambda 2}$, $A_{\lambda 3}$, iar coeficienții lor, din cele trei relații (4.139), se notează cu C_{ij}^λ și se obțin cu relațiile:

$$C_{ij}^\lambda = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_j} \right) - \delta_{ij} \Delta N_\lambda, \quad i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}, \quad (4.140)$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kroneker.

Cu ajutorul acestor coeficienți relațiile (4.139) devin:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \sum_{\lambda=1}^p (C_{11}^\lambda A_{\lambda 1} + C_{12}^\lambda A_{\lambda 2} + C_{13}^\lambda A_{\lambda 3}) \\
v_2 &= \sum_{\lambda=1}^p (C_{21}^\lambda A_{\lambda 1} + C_{22}^\lambda A_{\lambda 2} + C_{23}^\lambda A_{\lambda 3}) \\
v_3 &= \sum_{\lambda=1}^p (C_{31}^\lambda A_{\lambda 1} + C_{32}^\lambda A_{\lambda 2} + C_{33}^\lambda A_{\lambda 3})
\end{aligned} \quad (4.141)$$

sau condensat:

$$v_i = \sum_{\lambda=1}^p \left(\sum_{j=1}^3 C_{ij}^\lambda A_{\lambda j} \right), \quad i = \overline{1,3} \quad (4.142)$$

În această relație, pe rând λ ia valorile $1, 2, \dots, p$ și pentru fiecare dintre aceste valori, mai întâi indicele i obține câte una dintre valorile $1, 2, 3$ și pentru fiecare dintre ele se face succesiv $j=1, 2, 3$.

De exemplu, pentru elementul finit cel mai simplu, cu două noduri se obține:

$$v_i = C_{i1}^1 A_{11} + C_{i2}^1 A_{12} + C_{i3}^1 A_{13} + C_{i1}^2 A_{21} + C_{i2}^2 A_{22} + C_{i3}^2 A_{23}, \quad i = \overline{1,3}$$

În calculul matricial fiecărui vector i se asociază un vector coloană, ale cărui componente sunt valorile componentelor vectorului respectiv.

Deci, dacă pentru vectorii $\bar{v}, \bar{A}_\lambda, \bar{J}_s$, vectorii coloană asociați se notează cu $[v]$, $[A_\lambda]$, $[J_s]$, fiecare are dimensiunea 3×1 și expresiile:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad [A_\lambda] = \begin{bmatrix} A_{\lambda 1} \\ A_{\lambda 2} \\ A_{\lambda 3} \end{bmatrix}, \quad [J_s] = \begin{bmatrix} J_{s1} \\ J_{s2} \\ J_{s3} \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

Aceasta permite ca ecuațiile (4.138) să se scrie condensat sub forma matricială:

$$[v] = \mu [J_s] \quad (4.144)$$

Vectorul $[A_\lambda]$ se definește cu cele trei necunoscute din nodul λ și pentru toate cele p noduri va rezulta un număr de $3p$ necunoscute. Pentru ca modelul numeric elementul să aibă forma unui sistem de tip Cramer, cele $3p$ necunoscute trebuie să fie componentele unui vector coloană cu dimensiunile $3p \times 1$. Acesta se numește vectorul coloană al necunoscutelor problemei, ce se notează cu $[A]$ și se obține prin concatenarea după coloane a vectorilor coloană $[A_\lambda]$, $\lambda = \overline{1, p}$, adică:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] \\ [A_2] \\ \vdots \\ [A_p] \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] \\ [A_{12}] \\ [A_{13}] \\ [A_{21}] \\ [A_{22}] \\ [A_{23}] \\ \vdots \\ [A_{p1}] \\ [A_{p2}] \\ [A_{p3}] \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

Pentru fiecare dintre relațiile (4.141) și pentru fiecare vector $[A_\lambda]$, $\lambda = \overline{1, p}$, se definește câte un vector linie, ce are ca și componente coeficienții necunoscutelor care intervin în vectorul $[A_\lambda]$. Acești vectori vor avea dimensiunile 1×3 , se notează cu $[C_i^\lambda]$ și au expresiile:

$$[C_i^\lambda] = [C_{i1}^\lambda C_{i2}^\lambda C_{i3}^\lambda], \quad i = \overline{1, 3}, \quad \lambda = \overline{1, p} \quad (4.146)$$

Se observă că elementele vectorilor $[C_i^\lambda]$ sunt tocmai coeficienții $[C_{ij}^\lambda]$, dați de relațiile (4.146)

Se notează cu $[C_i]$, $i = \overline{1, 3}$, vectorul linie obținut prin concatenare după linii a vectorilor $[C_{ij}^\lambda]$, $\lambda = \overline{1, p}$, adică:

$$[C_i] = [C_i^1 + C_i^2 + \dots + C_i^p], \quad i = \overline{1, 3} \quad (4.147)$$

Având în vedere relațiile (4.146), dezvoltat se obține:

$$[C_i] = [C_{i1}^1 C_{i2}^1 C_{i3}^1 C_{i1}^2 C_{i2}^2 C_{i3}^2 \dots C_{i1}^p C_{i2}^p C_{i3}^p], \quad i = \overline{1,3}$$

Fiecare dintre vectorii $[C_i]$ are dimensiunea $1 \times 3p$ și conține toți coeficienții ce intervin în expresia lui v_i din relațiile (4.141).

Cu ajutorul vectorului coloană $[A]$, definit prin relația (4.145) și al vectorilor $[C_i]$, definiți prin relațiile (4.147), matricial, relațiile (4.141) se scriu sub forma:

$$v_1 = [C_1][A]; \quad v_2 = [C_2][A]; \quad v_3 = [C_3][A] \quad (4.148)$$

Pentru obținerea matricei $[v]$, se notează cu $[C]$ matricea obținută prin concatenarea după coloane a vectorilor $[C_i]$, $i = \overline{1,3}$, adică:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

Având în vedere relațiile (4.147), matricea $[C]$ este:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^1 C_{12}^1 C_{13}^1 C_{11}^2 C_{12}^2 C_{13}^2 \dots C_{11}^p C_{12}^p C_{13}^p \\ C_{21}^1 C_{22}^1 C_{23}^1 C_{21}^2 C_{22}^2 C_{23}^2 \dots C_{21}^p C_{22}^p C_{23}^p \\ C_{31}^1 C_{32}^1 C_{33}^1 C_{31}^2 C_{32}^2 C_{33}^2 \dots C_{31}^p C_{32}^p C_{33}^p \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

Matricea $[C]$ are dimensiunile $3 \times 3p$ și conține toți coeficienții din relațiile (4.141).

Ținând cont de relațiile (4.148), (4.149) se observă, că matricial, relațiile (4.141) se scriu sub forma:

$$[v] = [C][A] \quad (4.151)$$

Conform procedurii menționate pentru metoda elementelor finite a lui Galerkin, pe rând, pentru fiecare nod, în ordinea crescătoare a indicelui, ecuația (4.144) se înmulțește cu funcția de formă a nodului respectiv și se integrează pe domeniul D al elementului finit.

Pentru un nod arbitrar α se obține:

$$\int_D N_\alpha [v] dD = \int_D \mu N_\alpha [J_s] dD \quad \alpha = \overline{1,p} \quad (4.152)$$

Se înlocuiește $[v]$ cu expresia dată de (4.151) și ținând cont că elementele matricei $[A]$ sunt constante, se obține:

$$\left(\int_D N_\alpha [C] dD \right) [A] = \int_D \mu N_\alpha [J_s] dD \quad \alpha = \overline{1,p} \quad (4.153)$$

Se introduc notațiile:

$$[K_\alpha] = \int_D N_\alpha [C] dD; \quad [F_\alpha] = \int_D \mu N_\alpha [J_s] dD \quad \alpha = \overline{1, p} \quad (4.154)$$

Ecuțiile (4.153) se scriu sub forma:

$$[K_\alpha] \cdot [A] = [F_\alpha] \quad \alpha = \overline{1, p} \quad (4.155)$$

Elementele matricei $[K_\alpha]$ se obțin înmulțind fiecare element al matricei $[C]$ cu N_α și apoi fiecare element astfel stabilit, se integrează pe domeniul D . Evident că $[K_\alpha]$ are aceleași dimensiuni ca și $[C]$, adică $3 \times 3p$.

Pentru deducerea vectorului coloană $[F_\alpha]$, fiecare element al vectorului coloană $[J_s]$ se înmulțește cu $\mu_0 N_\alpha$ și apoi, fiecare element astfel obținut, se integrează pe domeniul D . Vectorul $[F_\alpha]$ va avea aceleași dimensiuni ca și $[J_s]$, adică 3×1 .

Se notează cu $[K]$ matricea obținută prin concatenarea după coloane a matricelor $[K_\alpha]$, $\alpha = \overline{1, p}$ și cu $[F]$ vectorul coloană obținut prin concatenarea după coloane a vectorilor $[F_\alpha]$, $\alpha = \overline{1, p}$, adică:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_1] \\ [K_2] \\ \vdots \\ [K_p] \end{bmatrix}; \quad [F] = \begin{bmatrix} [F_1] \\ [F_2] \\ \vdots \\ [F_p] \end{bmatrix} \quad (4.156)$$

Ecuțiile (4.155) obțin forma matricială:

$$[K][A] = [F] \quad (4.157)$$

Matricea $[K]$ are dimensiunile $3p \times 3p$ și va fi tocmai matricea de rigiditate elementală, iar $[F]$ are dimensiunile $3p \times 1$ și va fi vectorul termenilor liberi elementali.

Pentru implementarea pe un calculator electronic elementele matricei $[C]$ trebuie notate în mod obișnuit, adică:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{2p} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{3p} \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

Notând cu $C_{\alpha\beta}$ un element arbitrar al matricei $[C]$ în relația (4.158) se pune problema de a stabili valorile lui i, j, λ pentru ca elementul $C_{\alpha\beta}$ să poată fi calculat cu relația (4.140).

Se notează cu $\beta \bmod 3$ (β modulo 3) restul împărțirii lui β la 3.

Comparând expresia (4.158) cu expresia (4.150) se obțin:

$$i = \alpha$$

$$j = \begin{cases} \beta & \text{dacă } \beta \leq 3 \\ 3 & \text{dacă } \beta \bmod 3 = 0 \\ \beta \bmod 3 & \end{cases} \quad (4.159)$$

$$\lambda = \text{ceilling}\left(\frac{\beta}{3}\right),$$

unde $\text{ceilling}\left(\frac{\beta}{3}\right)$ este o funcție de rotunjire superioară și dacă, $\frac{\beta}{3}$ este un întreg, are valoarea egală cu acel întreg, iar în caz contrar valoarea este egală cu a întregului imediat superior.

Pentru a stabili o relație, cu ajutorul căreia să se poată calcula direct elementele matricei [K], mai întâi, se definește o matrice [B] cu dimensiunile $3p \times 3p$, la care, fiecare grup de câte trei linii consecutive se obțin înmulțind elementele matricei [C] cu N_1 , respectiv cu N_2 , respectiv cu N_3 , ..., respectiv cu N_p , adică:

$$[B] = \begin{bmatrix} N_1 C_{11} & N_1 C_{12} & N_1 C_{13} & N_1 C_{14} & N_1 C_{15} & N_1 C_{16} & N_1 C_{1p} \\ N_1 C_{21} & N_1 C_{22} & N_1 C_{23} & N_1 C_{24} & N_1 C_{25} & N_1 C_{26} & N_1 C_{2p} \\ N_1 C_{31} & N_1 C_{32} & N_1 C_{33} & N_1 C_{34} & N_1 C_{35} & N_1 C_{36} & N_1 C_{3p} \\ N_2 C_{11} & N_2 C_{12} & N_2 C_{13} & N_2 C_{14} & N_2 C_{15} & N_2 C_{16} & N_2 C_{1p} \\ N_2 C_{21} & N_2 C_{22} & N_2 C_{23} & N_2 C_{24} & N_2 C_{25} & N_2 C_{26} & N_2 C_{2p} \\ N_2 C_{31} & N_2 C_{32} & N_2 C_{33} & N_2 C_{34} & N_2 C_{35} & N_2 C_{36} & N_2 C_{3p} \\ N_3 C_{11} & N_3 C_{12} & N_3 C_{13} & N_3 C_{14} & N_3 C_{15} & N_3 C_{16} & N_3 C_{1p} \\ N_3 C_{21} & N_3 C_{22} & N_3 C_{23} & N_3 C_{24} & N_3 C_{25} & N_3 C_{26} & N_3 C_{2p} \\ N_3 C_{31} & N_3 C_{32} & N_3 C_{33} & N_3 C_{34} & N_3 C_{35} & N_3 C_{36} & N_3 C_{3p} \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

Folosind notația obișnuită, se obține:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} & B_{2p} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{3p} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} & B_{4p} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} & B_{5p} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} & B_{6p} \\ B_{71} & B_{72} & B_{73} & B_{74} & B_{75} & B_{76} & B_{7p} \\ B_{81} & B_{82} & B_{83} & B_{84} & B_{85} & B_{86} & B_{8p} \\ B_{91} & B_{92} & B_{93} & B_{94} & B_{95} & B_{96} & B_{9p} \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

Comparând relațiile de mai sus, rezultă că un element arbitrar al matricei [B], notat cu $B_{\gamma\delta}$, se obține dintr-un element arbitrar $C_{\alpha\beta}$ al matricei [C], cu rela-

ția: $B_{\gamma\delta} = N_k C_{\alpha\beta}$, în care:

$$\beta = \delta$$

$$\alpha = \begin{cases} \gamma & \text{dacă } \gamma \leq 3 \\ 3 & \text{dacă } \gamma \bmod 3 = 0 \\ \gamma \bmod 3 & \end{cases} \quad (4.162)$$

$$k = \text{round}\left(\frac{\gamma}{3}\right)$$

Pe baza celor precizate, rezultă că un element arbitrar al matricei de rigiditate elementală, notat cu $K_{\gamma\delta}$, se calculează cu relația:

$$K_{\gamma\delta} = \int_{\gamma} N_k C_{\alpha\beta} dD, \quad (4.163)$$

unde valorile lui α , β se stabilesc conform relațiilor (4.162). Pentru calculul valorilor lui $C_{\alpha\beta}$, se determină mai întâi i , j , λ cu relațiile (4.159), și apoi:

$$C_{\alpha\phi} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} N_\lambda \quad (4.164)$$

Notând cu F_α , $\alpha = \overline{1,p}$ un element al vectorului $[F]$ acesta se calculează cu relația:

$$F_\alpha = N_\lambda F_i, \quad (4.165)$$

unde:

$$i = \begin{cases} \alpha & \text{dacă } \alpha \leq 3 \\ 3 & \text{dacă } \alpha \bmod 3 = 0 \\ \alpha \bmod 3 & \end{cases} \quad (4.166)$$

$$\lambda = \text{ceilling}\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

În felul acesta se calculează direct toate elementele matricei de rigiditate elementale și ale vectorului coloană elemental.

În general, modelul matematic, folosit pentru studiul câmpului termic, este alcătuit din ecuația scalară a conservării energiei, ecuația vectorială a mișcării și ecuația scalară a conservării masei.

Primele două ecuații se pot scrie sub forma generală:

$$\frac{\partial(c\Phi)}{\partial t} + \text{div}(c\bar{v}\Phi) = \text{div}(k\text{grad}\Phi) + S, \quad (4.167)$$

unde:

Φ este mărimea necunoscută principală și anume temperatura pentru ecuația energiei, respectiv valoarea unei componente a vitezei \bar{v} ;

S reprezintă densitatea de volum a surselor, ce este cunoscută pentru fiecare ecuație;

c, k sunt mărimi de material și anume: pentru ecuația energiei, c este produsul dintre densitate și căldura specifică, iar k este conductivitatea termică, respectiv densitatea și coeficientul de viscozitate dinamică echivalent, pentru ecuația mișcării.

Se consideră cazul mai general când toate mărimile sunt variabile atât în spațiu cât și în timp, adică:

$$c=c(t,x,y,z); \quad \Phi=\Phi(t,x,y,z); \quad \bar{v}=\bar{v}(t,x,y,z); \quad k=k(t,x,y,z); \quad S=S(t,x,y,z);$$

Funcția S este dată prin enunțul problemei.

Aceasta impune ca fiecare mărime să fie discretizată, atât în timp cât și în spațiu.

Mai întâi se face o discretizare în spațiu, presupunând că mărimea respectivă rămâne constantă în timp, egală cu valoarea sa dintr-un moment oarecare t.

Discretizarea în spațiu înseamnă definirea aproximărilor:

$$c = \sum_{j=1}^p N_j c_j; \quad \Phi = \sum_{j=1}^p N_j \Phi_j; \quad \bar{v} = \sum_{j=1}^p N_j \bar{v}_j; \quad k = \sum_{j=1}^p N_j k_j, \quad (4.168)$$

unde:

$N_j=N_j(x,y,z)$ este funcția de formă atașată nodului j

$c_j = c_j(t); \quad \Phi_j = \Phi_j(t); \quad \bar{v}_j = \bar{v}_j(t); \quad k_j = k_j(t);$ sunt valorile mărimilor respective dintr-un moment oarecare t.

Pentru un produs, cum este cazul lui ρc , acesta se definește ca reprezentând o singură funcție $\Psi=c\Phi$, care se aproximează la fel ca orice funcție, adică:

$$\Psi = \sum_{j=1}^p N_j \Psi_j$$

Evident că:

$$\Psi_j=\Psi(t,x_j,y_j,z_j)=c(t,x_j,y_j,z_j)\cdot\Phi(t,x_j,y_j,z_j)=c_j\Phi_j$$

și deci:

$$c\Phi = \sum_{j=1}^p N_j c_j \Phi_j \quad (4.169)$$

Se presupune că, în ecuația (4.107), fiecare mărime este înlocuită cu aproximarea respectivă și aplicând metoda reziduurilor ponderate se obține:

$$\int_D N_i \frac{\partial(c\Phi)}{\partial t} dD + \int_D N_i \operatorname{div}(c\Phi\bar{v}) dD - \int_D N_i \operatorname{div}(k \operatorname{grad}\Phi) dD = \int_D N_i S dD \quad i = \overline{1,p} \quad (4.170)$$

În continuare se consideră separat fiecare termen, ce se notează cu B_1, B_2, B_3, B_4

și mărimile respective se înlocuiesc cu aproximările, date de relațiile (4.168).

Se obține:

$$B_1 = \int_D N_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^p N_j c_j \Phi_j \right) = \sum_{j=1}^p \left(\int_D N_i N_j \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} (c_j \Phi_j) \right] \quad j = \overline{1, p}, \quad (4.171)$$

unde s-a avut în vedere faptul că N_j nu sunt funcții de timp și că, pentru un nod dat, j , $c_j \Phi_j$ sunt constante în raport cu integrala pe domeniul D .

Matricial, se obține:

$$B_1 = [K^1] \frac{\partial}{\partial t} ([c\Phi]), \quad (4.172)$$

unde $[K^1]$ este matricea de rigiditate corespunzătoare primului termen, iar

$$\frac{\partial}{\partial t} ([c\Phi]) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} (c_1 \Phi_1) \\ \frac{\partial}{\partial t} (c_2 \Phi_2) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} (c_p \Phi_p) \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

Al treilea termen, notat cu B_3 , are o formă ce este dificil de exprimat matricial.

Din acest motiv se aduce la o formă mai simplă, folosind relația:

$$\operatorname{div}(N_i k \operatorname{grad} \Phi) = N_i \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \Phi) + k \operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} N_i,$$

din care se obține:

$$N_i \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{div}(N_i k \operatorname{grad} \Phi) - k \operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} N_i$$

Înlocuind și folosind formula lui Gauss – Ostrogradski

$$B_3 = \oint_S N_i k \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds - \int_D (\operatorname{grad} N_i) k \operatorname{grad} \Phi dD, \quad (4.174)$$

unde S este frontiera lui D , iar $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ este derivata după direcția normalei într-un punct oarecare a lui S .

Primul termen din membrul drept intervine numai pentru elementele finite de pe frontiera S , unde, prin condiții de frontieră de tip Neumann, se cunoaște $k \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ și deci acest termen reprezintă o cunoscută a problemei și se trece în membrul drept al ecuației (4.176).

Rezultă că în membrul stâng rămâne doar termenul:

$$-B_3 = \int_D (\text{grad} N_i) k \text{grad} \Phi dD \quad i = \overline{1, p}$$

Se înlocuiesc k și Φ cu aproximările lor și se obține:

$$-B_3 = \int_D (\text{grad} N_i) \left(\sum_{j=1}^p N_j k_j \right) \text{grad} \left(\sum_{j=1}^p N_j \Phi_j \right) dD$$

Se notează cu $[N]$, $[k]$ vectorii coloană formați cu funcțiile de formă, respectiv cu valorile mărimii k , adică:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{bmatrix} \quad (4.175)$$

Cu aceasta:

$$\sum_{j=1}^p N_j k_j = [N]^T [k] \quad (4.176)$$

Folosind proprietățile operatorului gradient și ținând cont că Φ_j , $j = \overline{1, p}$ sunt constante, se obține:

$$\text{grad} \left(\sum_{j=1}^p N_j k_j \right) = \sum_{j=1}^p (\text{grad} N_j) \Phi_j \quad (4.177)$$

Se înlocuiesc relațiile (4.176) și (4.177) cu relația (4.175) rezultând:

$$-B_3 = \int_D \left[(\text{grad} N_i) [N]^T [k] \sum_{j=1}^p (\text{grad} N_j) \Phi_j \right] dD$$

Factorul $(\text{grad} N_i) [N]^T [k]$ este o constantă față de însumarea în raport cu indicele j și deci pot fi introduși sub sumă. De asemenea, având în proprietățile unei integrale referitoare la o sumă și deoarece în fiecare integrală Φ_j este o constantă se obține:

$$-B_3 = \sum_{j=1}^p \left\{ \int_D (\text{grad} N_i) [N]^T [k] \text{grad} N_j \right\} \Phi_j \quad i = \overline{1, p}$$

Se notează:

$$K_{ij}^3 = \int_D (\text{grad} N_i) [N]^T [k] \text{grad} N_j \quad (4.178)$$

și se obține:

$$-B_3 = \sum_{j=1}^p K_{ij}^3 \Phi_j \quad i = \overline{1, p} \quad (4.179)$$

Se dau indicelui i toate valorile de la 1 la p și matricial, se obține:

$$-B_3 = [K^3] \cdot [\Phi], \quad (4.180)$$

unde $[K^3]$ este matricea de rigiditate corespunzătoare celui de-al treilea termen, având elementele date de relația (4.178), iar $[\Phi]$ este vectorul coloană al valorilor mărimii Φ .

Membrul drept al ecuației (4.170) se scrie matricial sub forma:

$$\int_D N_i S dD = [F] \quad (4.181)$$

unde $[F]$ este un vector coloană cu dimensiunile $p \times 1$, ale cărui elemente sunt date de relațiile:

$$F_i = \int_D N_i S dD \quad i = \overline{1, p} \quad (4.182)$$

Al doilea termen se descompune într-o serie de trei termeni:

$$B_2 = \int_D N_i \frac{\partial}{\partial x} (c\Phi v_x) dD + \int_D N_i \frac{\partial}{\partial y} (c\Phi v_y) dD + \int_D N_i \frac{\partial}{\partial z} (c\Phi v_z) dD \quad i = \overline{1, p} \quad (4.183)$$

Pentru primul termen, având în vedere cele precizate cu privire la discretizarea unui produs, se obține:

$$B_{2x} = \int_D N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^p N_j c_j \Phi_j v_{xj} \right) dD$$

$$B_{2x} = \sum_{j=1}^p \left[\int_D \left(N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dD c_j \Phi_j v_{xj} \right] \quad i = \overline{1, p}$$

Se introduc notațiile:

$$K_{ij}^{2x} = \int_D N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dD \quad (4.184)$$

Matricial se obține:

$$B_{2x} = [K^{2x}] \cdot [c v_x \Phi], \quad (4.185)$$

unde $[K^{2x}]$ este o matrice cu dimensiunile $p \times p$ ce are elementele date de relațiile (4.184), iar:

$$[c v_x \Phi] = \begin{bmatrix} c_1 v_{x1} \Phi_1 \\ c_2 v_{x2} \Phi_2 \\ \vdots \\ c_p v_{xp} \Phi_p \end{bmatrix} \quad (4.186)$$

În mod similar se obțin:

$$B_{2y} = [K^{2y}] \cdot [c v_y \Phi] \quad (4.187)$$

$$B_{2z} = [K^{2z}] \cdot [c v_z \Phi],$$

unde matricele $[K^{2y}]$, $[K^{2z}]$ au elementele date de relațiile:

$$K_{ij}^{2y} = \int_D N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dD; \quad K_{ij}^{2z} = \int_D N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} dD, \quad (4.188)$$

iar:

$$[c v_y \Phi] = \begin{bmatrix} c_1 v_{y1} \Phi_1 \\ c_2 v_{y2} \Phi_2 \\ \vdots \\ c_p v_{yp} \Phi_p \end{bmatrix}; \quad [c v_z \Phi] = \begin{bmatrix} c_1 v_{z1} \Phi_1 \\ c_2 v_{z2} \Phi_2 \\ \vdots \\ c_p v_{zp} \Phi_p \end{bmatrix} \quad (4.189)$$

Deci:

$$B_2 = [K^{2x}] \cdot [c v_x \Phi] + [K^{2y}] \cdot [c v_y \Phi] + [K^{2z}] \cdot [c v_z \Phi] \quad (4.190)$$

Însă, după cum se observă din relațiile (4.173), (4.186), (4.189), în expresiile lui B_1 , respectiv B_3 , nu intervine doar vectorul coloană al valorilor mărimii Φ ci și valorile unor mărimi ce se consideră cunoscute, pentru fiecare dintre ecuațiile menționate.

Pentru a separa vectorul coloană al valorilor mărimii Φ , cu ajutorul valorilor mărimilor c , v_x , v_y , v_z se definește câte o matrice diagonală cu dimensiunile $p \times p$, ce au pe diagonala principală ca elemente chiar valorile mărimii respective. Notând aceste matrice cu $[c]$, $[v_x]$, $[v_y]$, $[v_z]$, ele vor fi:

$$[c] = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_p \end{bmatrix} \quad [v_x] = \begin{bmatrix} v_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{x3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{xp} \end{bmatrix}$$

$$[v_y] = \begin{bmatrix} v_{y1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{y3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{yp} \end{bmatrix} \quad [v_z] = \begin{bmatrix} v_{z1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{z2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{z3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{zp} \end{bmatrix}$$

Se verifică ușor că:

$$[c\Phi] = [c][\Phi]; \quad [cv_x\Phi] = [c][v_x][\Phi]; \quad [cv_y\Phi] = [c][v_y][\Phi]; \quad [cv_z\Phi] = [c][v_z][\Phi]$$

Cu acestea se obține:

$$B_1 = [K^1] \frac{\partial}{\partial t} ([c] \cdot [\Phi]) \quad (4.191)$$

$$B_2 = [c]([K^{2x}] \cdot [v_x] + [K^{2y}] \cdot [v_y] + [K^{2z}] \cdot [v_z])[\Phi] \quad (4.192)$$

Înlocuind relațiile (4.191), (4.192), (4.170), (4.171) în ecuația (4.190) se obține modelul număr elemental:

$$[K^1] \frac{\partial}{\partial t} ([c] \cdot [\Phi]) + [c]([K^{2x}] \cdot [v_x] + [K^{2y}] \cdot [v_y] + [K^{2z}] \cdot [v_z])[\Phi] + [K^3] \cdot [\Phi] = [F] \quad (4.193)$$

Pentru discretizarea în timp, durata în care se analizează procesul respectiv, se divide într-un anumit număr N de intervale cu o durată Δt , numită pas de timp. Momentele divizării se notează cu t_0, t_1, \dots, t_N , iar pentru un moment arbitrar se folosește notația t_n , $n = \overline{0, N}$.

Valoarea oricărei mărimi X într-un nod arbitrar j , în momentul arbitrar t_n , se notează cu X_{jn} , iar matricea $[X]$ formată cu valorile mărimii din momentul t_n se va nota cu $[X]_n$. Deoarece toate matricele de rigiditate din (4.193) conțin numai mărimi spațiale, discretizarea se referă, în general, la celelalte matrice.

Discretizarea în timp se poate realiza cu metoda diferențelor finite sau tot cu metoda elementelor finite.

În cazul folosirii metodei elementelor finite, se consideră t ca a patra variabilă și se procedează ca în cazul unei mărimi de o singură variabilă.

Un element finit temporal cu două "noduri" este câte un interval $[t_{n-1}, t_n]$, $n = \overline{1, N}$, iar extremitățile sale t_{n-1}, t_n sunt chiar nodurile sale. În acest caz, orice valoare $X_j(t)$ se asimilează printr-o funcție de gradul întâi și punând condiția $X_j(t_{n-1}) = X_{jn}$, $X_j(t_n) = X_{jn}$, după aranjarea termenilor se obține:

$$X_j = \frac{t_n - t}{\Delta t} X_{jn-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} X_{jn}, \quad (4.194)$$

unde s-a avut în vedere că $t_n - t_{n-1} = \Delta t$.

Notând cu τ_{n-1} , τ_n "funcțiile de formă" temporale, se obține:

$$X_j = \tau_{n-1} X_{n-1} + \tau_n X_n, \quad (4.195)$$

unde:

$$\tau_{n-1} = \frac{t_n - t}{\Delta t}; \quad \tau_n = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} X_n$$

Un element finit cu mai multe noduri se obține grupând mai multe momente succesive, astfel încât fiecare grup să conțină același număr de momente. Momentele extreme formează nodurile extreme, iar momentele intermediare sunt nodurile intermediare. De exemplu, un element cu trei noduri se obține formând grupuri t_{n-2} , t_{n-1} , t_n , $n = \overline{1, N}$. Aproximarea se va face printr-o funcție de gradul doi în variabila t .

Deoarece prin această metodă intervin dificultăți în realizarea convergenței, de obicei, discretizarea în spațiu se realizează cu metoda diferențelor finite.

Ecuția (4.193) se scrie printr-un moment arbitrar t_n , matricele respective primind indicele n , iar pentru evaluarea derivatei în momentul t_n , se folosește o schemă cu derivate finite, dintre care, cea mai simplă, constă în:

$$\frac{\partial}{\partial t} [c] \cdot [\Phi] = \frac{[c]_n [\Phi]_n - [c]_{n-1} [\Phi]_{n-1}}{\Delta t} \quad (4.196)$$

Relația (4.196) se înlocuiește în relația (4.193) și întrucât matricele $[c]_{(n-1)}$, $[\Phi]_{(n-1)}$ sunt cunoscute de la un pas anterior, ele devin cunoscute și trec în membrul drept.

Se obține:

$$\begin{aligned} & [K][c]_n [\Phi]_n + [c]_n ([K^{2x}][v_x]_n + [K^{2y}][v_y]_n + [K^{2z}][v_z]_n) [\Phi]_n + [K^3][\Phi]_n = \\ & = [F]_n + \frac{1}{\Delta t} [c]_{(n-1)} [\Phi]_{(n-1)} \end{aligned} \quad (4.197)$$

$$\begin{aligned} & [[K^1][c]_n + [c]_n ([K^{2x}][v_x]_n + [K^{2y}][v_y]_n + [K^{2z}][v_z]_n) + [K^3]] [\Phi]_n = \\ & = [F]_n + \frac{1}{\Delta t} [c]_{(n-1)} [\Phi]_{(n-1)} \end{aligned} \quad (4.198)$$

Se începe cu primul moment t_1 . Din datele inițiale se cunosc matricele $[c]_0$, $[\Phi]_0$ și se obține un sistem în care necunoscute sunt valorile mărimii Φ din toate nodurile, în momentul t_1 . Se continuă la fel și pentru celelalte momente.

Pentru creșterea preciziei, se folosesc scheme cu diferențe finite mai complicate, însă, principial nu apar lucrări noi și nu se mai prezintă.

Luând în considerație și primul termen din relațiile (4.125), relațiile (4.152) devin:

$$\mu\sigma \sum_{\lambda=1}^p \left(\int_D N_\alpha N_\lambda dD \right) \frac{\partial}{\partial t} [A_\lambda] + \int_D N_\alpha [v] dD = \int_D \mu N_\alpha [J_s] dD,$$

unde s-a avut în vedere că funcțiile de formă nu depind de timp și că $A_{\lambda i}$ sunt constante în raport cu integrarea, însă sunt variabile în timp, iar $[A_\lambda]$ este vectorul coloană ce are ca elemente valorile componentelor după cele trei axe ale vectorului \overline{A}_λ .

Cu aceasta, ecuația matricială (4.157) devine

$$\mu\sigma [K'] \frac{\partial}{\partial t} [A] + [K][A] = [F],$$

unde $[K']$ este o matrice pătrată, cu dimensiunile $3p \times 3p$. Notând cu $K'_{\gamma\delta}$ un element arbitrar al acesteia, pentru calculul său, mai întâi se definește o matrice pătrată, $[M]$, cu dimensiunile $p \times p$, ale cărei elemente se află cu relațiile:

$$M_{ij} = \int_D N_i N_j dD, \quad i, j = \overline{1, p}$$

Pentru i, j se folosește a doua relație de atribuire din (4.162), doar că pentru j se va considera δ . Cu aceasta se obține:

$$K'_{\gamma\delta} = M_{ij}$$

Urmând același raționament ca în cazul precedent, pentru un moment arbitrar t_n se obține:

$$\left(\frac{\mu\sigma}{\Delta t} [K'] + [K] \right) [A]_n = \frac{\mu\sigma}{\Delta t} [K'] [A]_{n-1} + [F]_n$$

Din această relație rezultă $[A]_n$, deoarece $[A]_{n-1}$ este cunoscută din iterația anterioară. Cunoscând potențialul magnetic, vectorul \overline{A} în orice punct se poate determina cu relații cunoscute o serie de mărimi ce intervin în funcționarea cuptorului de inducție.

CAPITOLUL V

MODELAREA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ȘI A CÂMPULUI TERMIC LA UN CUPTOR DE INDUCȚIE CU CREUZET DE 3,5 TONE

5.1. Etapele de aplicare a metodei elementelor finite

Orice program de proiectare asistată de calculator implică parcurgerea a trei etape numite: preprocesare, procesare (soluționare) și postprocesare.

Cu mici diferențe de la un program la altul, în fiecare dintre cele trei etape trebuie parcurși pașii ce se prezintă în cele ce urmează.

Etapa de preprocesare

1. Se alege tipul de analiză, care poate fi: structurală, termică, de câmp electromagnetic sau cuplată.

Unele programe permit ca pentru fiecare tip de analiză sau numai pentru cea electromagnetică, să se aleagă metoda utilizată care poate fi a elementelor nodale sau a elementelor de frontieră (de muchie).

2. Se aleg tipurile de elemente, care vor fi utilizate și pentru fiecare se definesc opțiunile precum și valorile constantelor reale.

3. Se definesc proprietățile materialelor ce se vor utiliza. Dacă acestea se consideră izotrope, liniare, atunci pentru fiecare material se introduc valorile constantelor de material specifice tipului de analiză ales.

Pentru o proprietate a unui material neliniar, se stabilesc două mărimi, cu ajutorul cărora se pot determina valorile acelei proprietăți și se introduc perechi de valori pentru cele două mărimi.

Unele programe permit alegerea unui anumit material dintr-o bibliotecă de materiale.

4. Se construiește modelul geometric al domeniului problemei, fie cu ajutorul programului respectiv fie cu un alt program specializat în modelare geometrică și apoi modelul se importă în programul utilizat.

5. Atribuirea tipului de element și a materialului, pentru fiecare regiune a domeniului problemei.

Acest pas intervine atunci când domeniul problemei s-a divizat în mai multe zone, din materiale diferite sau în care se folosesc tipuri de elemente diferite .

În general în cazul unei analize electromagnetice acestea sunt:

- regiunile de aer;
- bobinele de excitație filiforme, ce pot fi alimentate cu curent sau în tensiune;
- miezurile din material feromagnetic;
- regiunile conductoare electric;
- magneții permanenți.

Fiecărui material și tip de element ales i se atribuie un indicator (pointers), care la unele programe este un număr natural.

Se selectează, pe rând, fiecare regiune și se atribuie indicatorul corespunzător materialului și al tipului de element stabilit pentru regiunea respectivă.

6. Se stabilesc parametrii rețelei de discretizare și tipul de rețea ce se va utiliza.

7. Se realizează discretizarea domeniului problemei, operația numită meshing.

Etapa de procesare

1. Se alege regimul analizei care poate fi staționar (static), sinusoidal (armonic), nestaționar (tranzitoriu).

2. Se stabilesc anumite controale, care depind de programul folosit. De obicei acestea vizează:

- alegerea unei metode numerice pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare și a celei pentru rezolvarea sistemului de ecuații neliniare, care formează modelul matematic al problemei.
- alegerea unui anumit număr de iterații (pentru problemele neliniare) și a criteriului de convergență.
- Selectarea mărimilor pentru care se stochează valorile, în vederea postprocesării, precum și a numărului de valori ce se stochează.

3. Se impun condițiile de frontieră și sarcinile aplicate.

La unele programe această operație se poate face pentru elemente ale modelului geometric (linii, suprafețe, volume, puncte) sau pentru elemente ale modelului discretizat (noduri, elemente).

Deoarece înainte de a începe procesarea programul transferă condițiile de frontieră și sarcinile, aplicate pe elementele geometrice, în nodurile modelului

discretizat, operații ce pot introduce erori, se recomandă ca aplicarea să se facă direct pe noduri sau pe elementele finite din regiunea respectivă, care în prealabil se selectează.

O chestiune deosebită este reprezentată de folosirea marcatorelor (flags) pentru calculul forțelor electromagnetice folosind metoda tensiunilor maxwelliene sau metoda forțelor generalizate (Jacobi)

Ambele tipuri de forțe se determină pentru o componentă a modelului, de obicei din material feromagnetic, care trebuie să fie înconjurată complet de porțiuni de aer.

Pentru determinarea tensiunilor maxwelliene, se selectează suprafața, în punctele căreia se dorește calculul acestei tensiuni, căreia i se aplică ca sarcină de suprafață, un marcator ce are diverse denumiri, de exemplu Maxwell Surface (MXVF). Programul stochează valorile tensiunilor în elementele finite din zona de aer adiacentă suprafeței respective, iar în etape de postprocesare se poate calcula rezultanta acestora, ce poate fi utilizată într-o analiză mecanică, pentru a determina deplasarea acelei componente.

Metoda forțelor generalizate este o alternativă la metoda Maxwell și se aplică tot pentru o componentă, care trebuie să îndeplinească condițiile menționate mai sus.

Mai întâi, se selectează o bandă de elemente de aer, ce înconjoară componenta respectivă, pentru care se stabilește o anumită valoare a deplasării virtuale (MVDI), așa cum se arată în figura 5.1

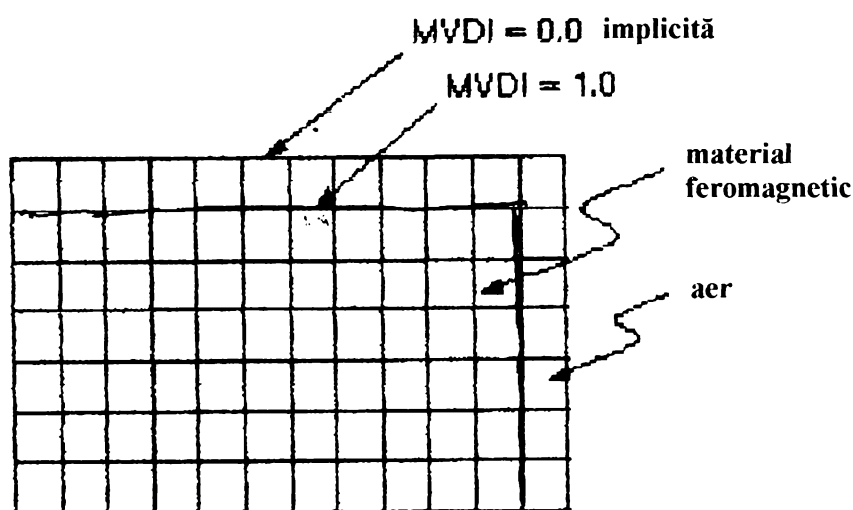


Fig.5.1

Banda de elemente trebuie să fie de grosime uniformă, iar deplasarea virtuală MVDI se referă la nodurile din această bandă și are direcția manuală pe suprafața componenteii, în vecinătatea căreia se află nodurile respective. Pentru MVDI se poate stabili orice valoare, însă se recomandă ca să nu fie mai mare ca 1.

Se declanșează procesarea și se urmărește mesajele afișate de program.

Etapa de postprocesare.

În principiu, în această etapă se realizează reprezentări grafice ale mărimilor și listarea valorilor acestora, care au fost selectate pentru stocare în etapa precedentă.

Pentru unele mărimi rezultatele sunt raportate atât la noduri și se numesc soluții nodale cât și la elementele finite și se numesc soluții elementale.

Prezentarea grafică se face sub formă de contururi, fiecare contur având o anumită culoare și cuprinde regiunea modelului geometric, în care mărimea respectivă are o anumită valoare, precizată într-o legendă pentru culoarea respectivă.

Programul permite ca utilizatorul să aleagă numărul de contururi. Precizia de reprezentare este cu atât mai bună cu cât se alege un număr mai mare de contururi, însă scade claritatea figurii. Din acest motiv se recomandă folosirea unui monitor cu diagonala cât mai mare, de exemplu de 17".

De asemenea, pentru claritatea imaginii, se pot suprima culorile și rămân doar liniile ce delimitează regiunile respective, câte o linie pentru fiecare valoare a mărimii adică fiecare linie nu este o linie de nivel a mărimii respective.

Totodată se pot obține variații ale valorilor unei mărimi de-a lungul unei linii (căi), pe care o definește utilizatorul.

Listarea se face sub forma unui tabel, ce are ca prima coloană numerele atribuite nodurilor sau elementelor din zona selectată, iar următoarea valoarea, corespunzătoare a mărimi respective sau ale componentelor acesteia.

Valorile fiecărei mărimi pot fi utilizate într-o altă analiză.

Este important de reținut că unele programe permit și optimizarea structurii analizate, prin definirea unei mărimi ca funcții obiectiv, iar a altor ca variabile independente.

5.2. Modelul geometric.

Principalele părți componente ale modelului geometric sunt prezentate în fig. 5.2. În această figură este reprezentată în spațiu doar o jumătate din modelul de formă cilindrică pentru o mai bună vizualizare a părților componente

Notățiile au următoarele semnificații:

- 1- șarjă
- 2- bobină
- 3- strat termoizolant din azbest

4,5- căptușală din nisip cuarțos

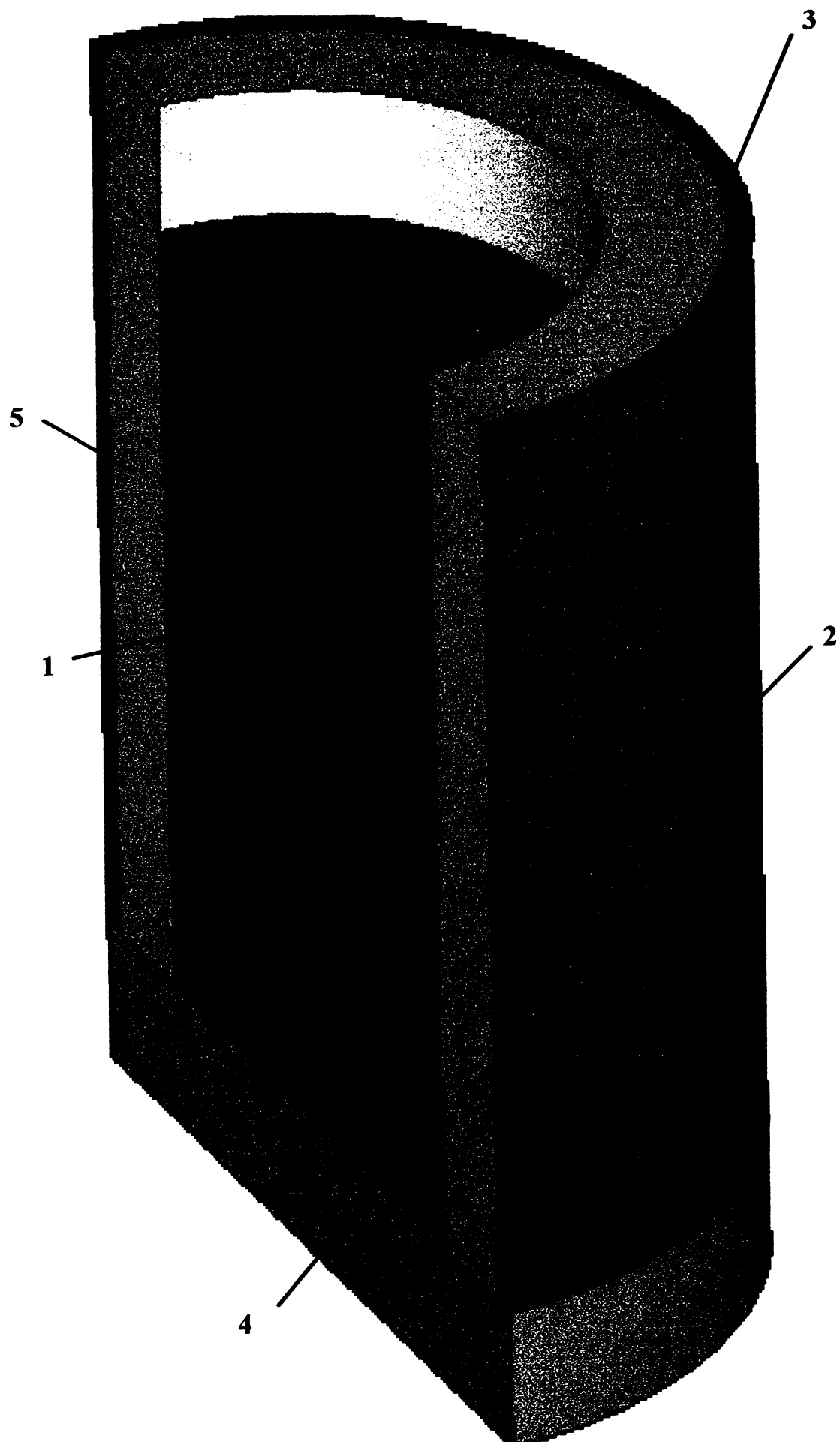


Fig.5.2

Pentru a analiza acest model, cu metoda elementelor finite, ar trebui introduse drept condiții de frontieră următoarele mărimi:

- valorile componentelor A_x , A_y , A_z ale potențialului magnetic vector în punctele de frontieră ale domeniului;
- valorile temperaturii în punctele de frontieră

În general aceste condiții de frontieră nu se cunosc sau se cunosc cu precizie redusă.

Pentru a elimina acest inconvenient se definesc încă două regiuni 6 și 7, ca în figura 5.3.

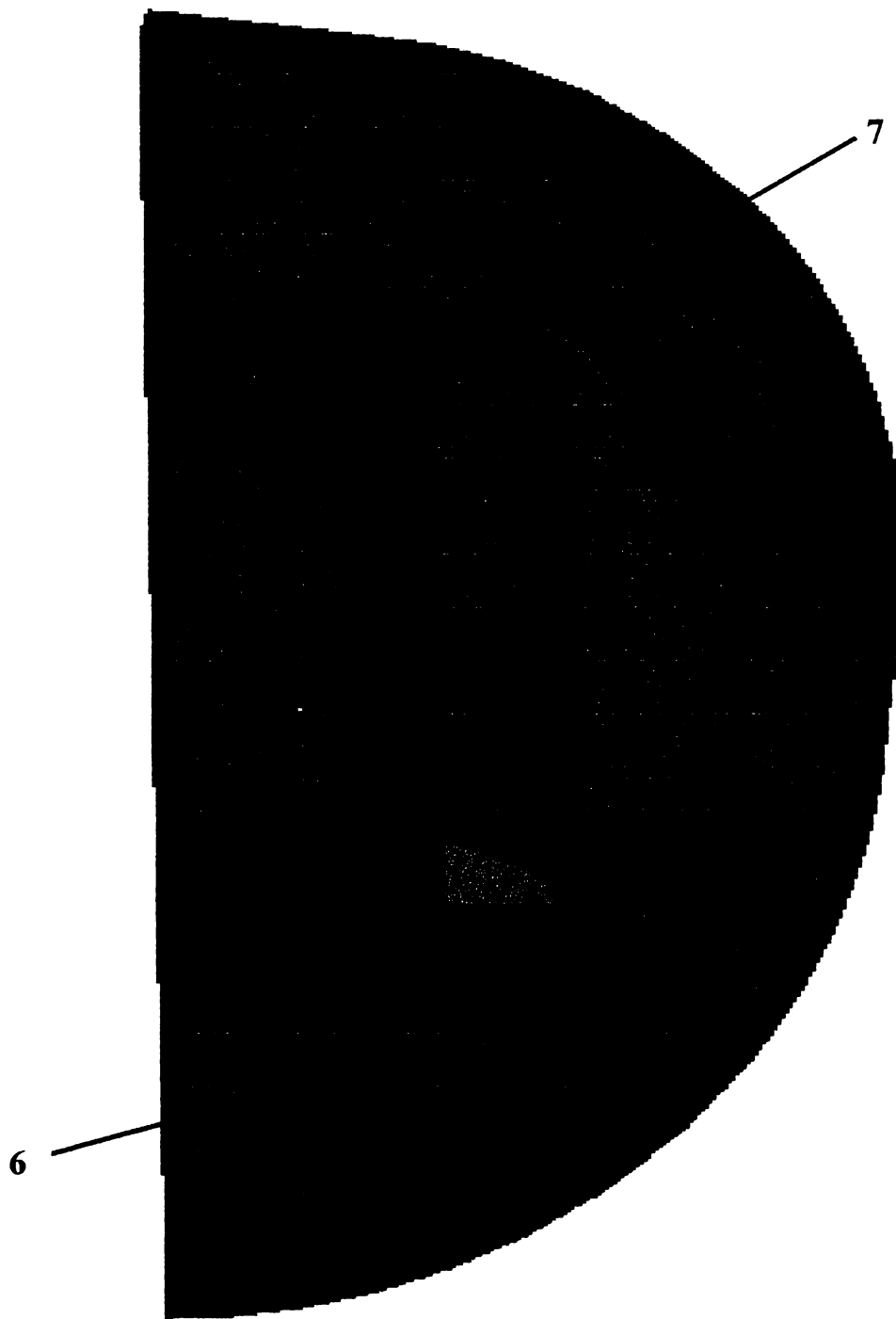


Fig.5.3.

Se observă că pe lângă modelul geometric propriu zis intervin următoarele zone:

6- prin care se modelează o porțiune de aer din jurul modelului propriu zis;

7- prin care se modelează întreg spațiul până la infinit.

Prin folosirea acestor regiuni, în mod automat, condițiile de frontieră care trebuiesc impuse sunt cele de la infinit. În acest sens programul stabilește valoarea zero a inducției magnetice pe suprafața exterioară a zonei 7. De asemenea, în toate punctele acestei suprafețe, programul impune ca temperatura să aibă o valoare egală cu valoarea aleasă pentru temperatura mediului ambient, de exemplu 20°C.

Precizia cea mai mare s-ar obține dacă s-ar folosi modelul tridimensional din fig. 5.3.

Însă, având în vedere posibilitățile limitate ale autorului în privința utilizării unui calculator de mare performanță, și ținând cont de faptul evident că se poate admite o simetrie axială atât pentru câmpul electromagnetic, cât și pentru câmpul termic. Din aceste motive s-a folosit modelul bidimensional prezentat în fig.5.4.

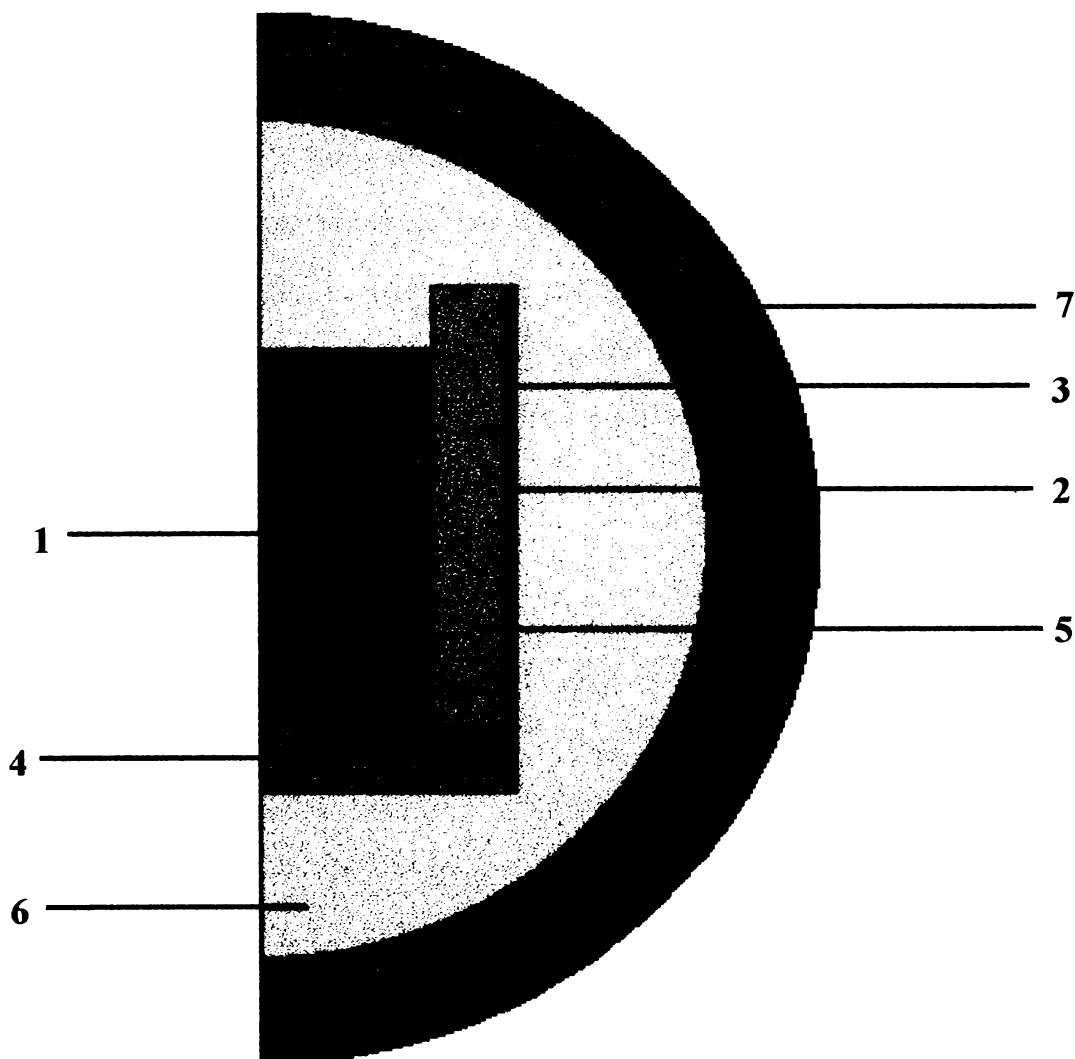


Fig.5.4.

Se constată că modelul utilizat se obține prin intersecția modelului spațial cu un semiplan care trece prin axa de simetrie a acestuia. Notățiile din figură au semnificațiile anterioare

5.3. Stabilirea proprietăților de material pentru elementele componente ale modelului.

Analiza electromagnetică necesită ca pentru fiecare mediu care intervine să se cunoască permeabilitatea magnetică μ_r și rezistivitatea electrică ρ .

Analiza termică presupune cunoașterea mărimilor de material, conductivitatea termică K , densitatea (dens) și căldura specifică c .

În cazul unora din materialele componente aceste mărimi depind de temperatură, dependențe care trebuie cunoscute.

5.3.1. Caracteristicile de material pentru șarjă

Drept material pentru șarjă s-a ales OLC45.

Dependența cu temperatura a permeabilității magnetice μ_r (respectiv a susceptivității magnetice) pentru acest material s-a făcut experimental, cu metodele prezentate, pe larg, în capitolul 3 al lucrării. Tot în acest capitol a fost prezentat modul de determinare, pe cale experimentală a dependenței cu temperatura a susceptivității magnetice la diferite valori ale intensității câmpului magnetic H . Acestea au rezultat în concordanță cu cele oferite de literatura de specialitate.

În tabelul 5.1 și 5.2 se prezintă variația cu temperatura a permeabilității magnetice relative μ_r și a rezistivității ρ pentru OLC45

Tabelul 5.1.

T	25,5	160	291,5	477,6	635	698	709	720,3	742	761	1000
μ_r	200	190	182	161	135	104	84	35	17	1	1

Tabelul 5.2.

T										
[°C]	0	125	250	375	500	625	750	875	1000	
$\rho \cdot 10^{-7}$										
[Ωm]	1,84	2,72	3,84	5,12	6,56	8,24	10,32	11,52	12	

Tabelele 5.3. și 5.4. prezintă dependența cu temperatura a conductivității termice K și a căldurii specifice c pentru OLC 45

Tabelul 5.3.

T	0	100	200	300	400	600	800	1000
K	50,5	47,5	44,8	42	39,4	31	29	28

Tabelul 5.4.

T	20	100	200	400	600
C	465	469	477,32	515	569,43

5.3.2. Caracteristicile de material pentru bobina inductoare.

Bobina inductoare este confecționată din Cu. Acesta nefiind un material feromagnetic are permeabilitatea magnetică relativă $\mu_r = 1$ și nu depinde de temperatură. Dependența cu temperatura a rezistivității cuprului este prezentată în tabelul 5.5, iar a conductivității termice K în tabelul 5.6.

Tabelul 5.5.

T [°C]	0	20	50	75	150	200	300
$\rho 10^{-7}$ [Ωm]	1,58	1,73	1,93	2,1	2,6	2,8	3,5

Tabelul 5.6.

T	0	100	200	300	400	600	800
K	401	393	384	384	379	366	352

Densitatea cuprului este dens = 8930 kg / m³

Căldura specifică a cuprului c= 386 J/kg

5.3.3. Caracteristicile de material pentru materialele termoizolante.

În cazul azbestului s-au considerat următoarele constante de material:

- densitatea $\text{dens}=1900 \text{ kg/m}^3$;
- căldura specifică $c=836,3 \text{ J/kg}$.

În cazul materialelor izolante din nisip cuarțos:

- densitatea $\text{dens}=1520 \text{ kg/m}^3$;
- căldura specifică $c= 800 \text{ J/kg}$.

Pentru straturile de aer s-a ales $\mu_r=1$; $\sigma=0$.

5.4. Modelul cu elemente finite.

Se folosesc elemente finite bidimensionale, izoparametrice de forma unor patrulatere cu laturi curbe, prezentate în figura 5.5.

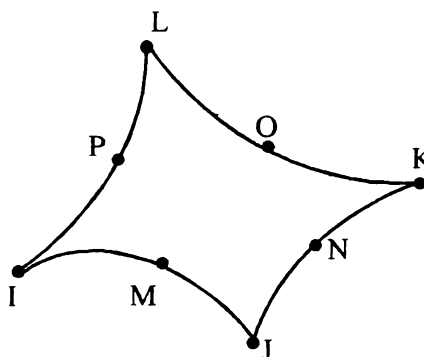


Fig.5.5.

Se observă că elementul are 8 noduri dintre care 4 sunt dispuse în vârfuri, iar celelalte 4 pe laturi.

Față de elementele finite patrulatere cu 4 noduri, care au laturile rectilinii, elementele utilizate au avantajul că permit discretizarea porțiunilor curbe ale modelului cu precizie mai mare și deoarece folosesc funcții de formă polinomială de gradul doi, acuratețea rezultatelor este superioară față de cea obținută în cazul că s-ar fi folosit elemente finite cu 4 noduri.

O dificultate în realizarea rețelei de discretizare a constituit-o valoarea foarte mare a raportului dintre grosimea bobinei și grosimea șarjei; iar pentru stratul termoizolant din azbest, acest raport depășește 10^8 . Însă pentru nu a obține elemente finite cu unghiuri

foarte mici sau cu o formă geometrică degenerată într-o linie curbă, se impune ca acest raport să nu depășească valoarea de 10^5

Soluția a constat în realizarea rețelei de discretizare separat pentru fiecare zonă a modelului geometric și apoi îmbinarea acestora într-o singură rețea de discretizare, prezentă în fig. 5.6.a.

În figura 5.6.b se prezintă modelul cu elemente finite făcând abstracție de stratul de aer și de cel infinit.

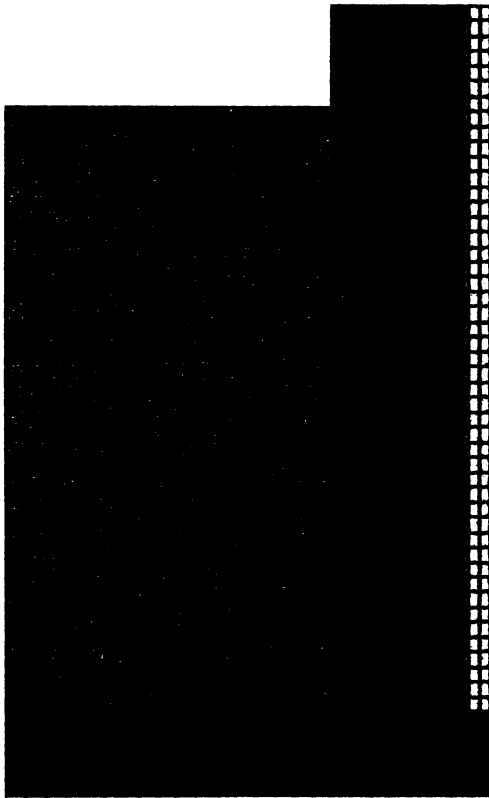


Fig.5.6.b

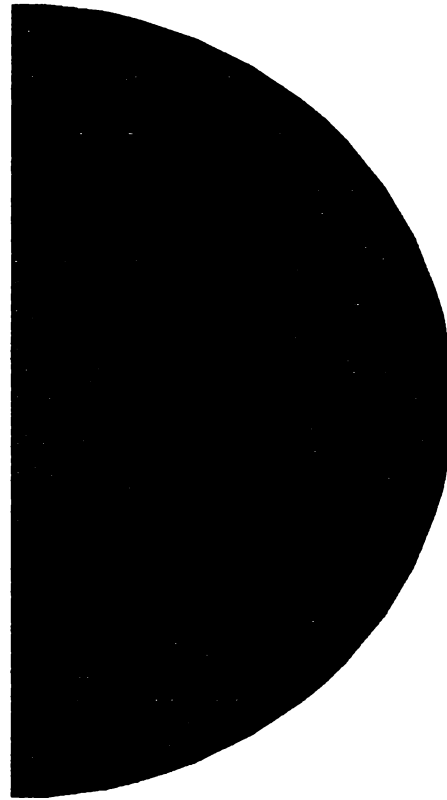


Fig.5.6.a

Numărul de elemente finite pentru fiecare zonă este prezentat în tabelul 5.7.

Tabel 5.7.

Zona	Bobină	Strat azbest	Strat aer	Spațiu infini	Strat termoizolant lateral	Strat termoizolant inferior
Nr. elemente	94	47	687	47	286	171

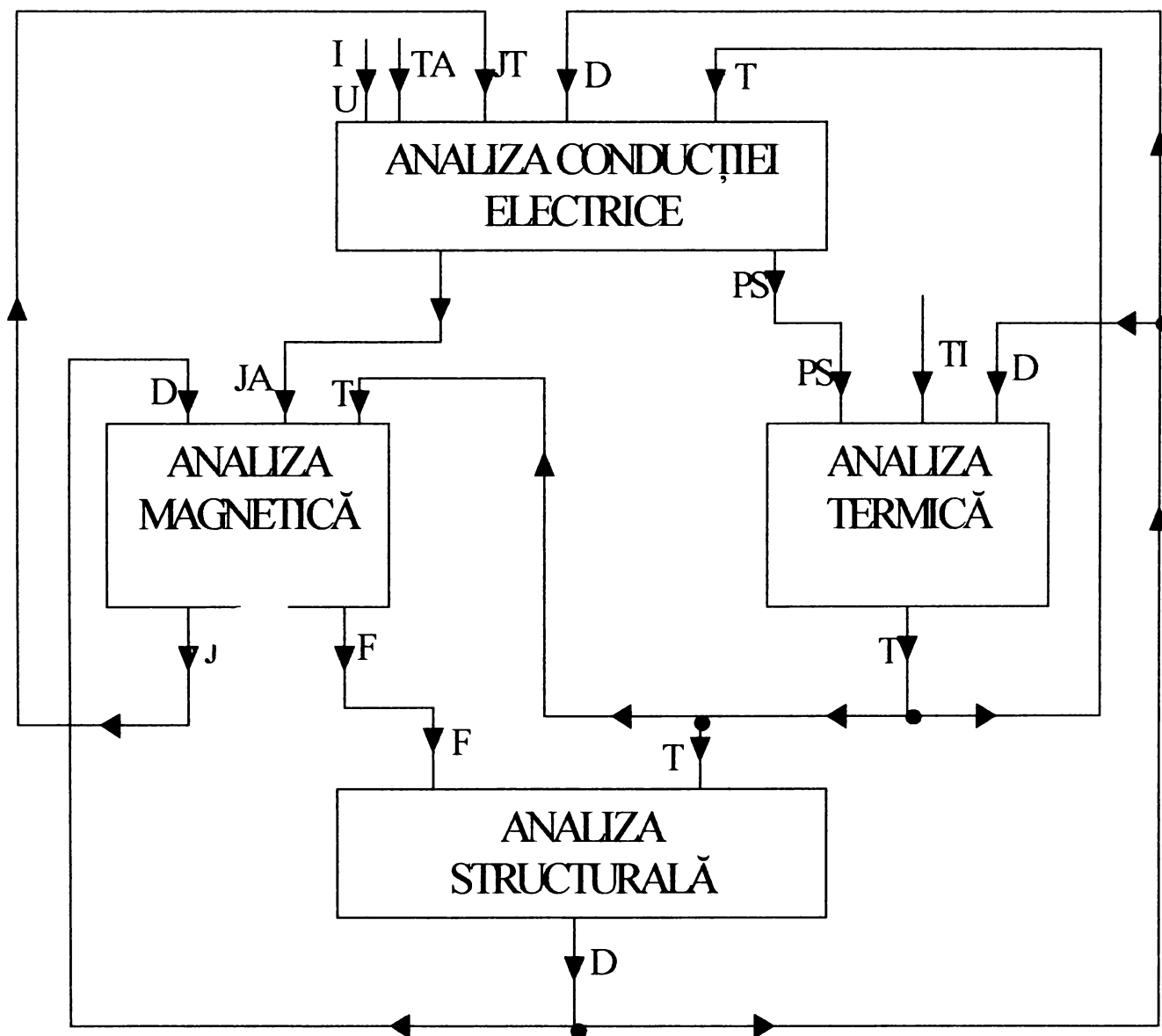
De asemenea pentru a îndeplini condiția impusă de utilizare a spațiului infini, acesta conține un singur rând de elemente finite

5.5. Analize cuplate

Studiul fenomenelor electromagnetice și termice din interiorul cuptorului de inducție este o problemă tipică de câmp electromagnetic cuplat cu un câmp termic.

În cadrul unei analize cuplate se studiază mai multe procese, care în principiu, pot fi din orice domeniul al fizicii. Pentru aplicațiile frecvent utilizate în practica industrială, intervin procese de natură: electrică, magnetică, termică, mecanică (structurală). Pentru fiecare proces, se definește câte o analiză, iar anumite mărimi de ieșire (rezultate) ale unei analize sunt transferate ca mărimi de intrare (sarcini) pentru o altă analiză.

În cazul proceselor menționate, succesiunea analizelor și mărimilor ce se transferă sunt prezentate în schema de mai jos.



Se începe cu analiza conducției electrice, care se realizează pentru o temperatură egală cu temperatura mediului ambiant, iar ca sarcină se poate folosi fie intensitatea I a curentului electric printr-o secțiune a unei regiuni conductoare a domeniului, fie căderea de tensiune electrică U , pe una sau mai multe regiuni conductoare. Valorile obținute

pentru densitatea JA a curentului de aducție (de excitație) sunt transferate ca sarcină pentru analiza magnetică.

În general, în cazul unui regim nestaționar, prin această analiză se determină densitatea curenților electrici induși, care se cumulează cu JA obținând densitatea totală JT, care este transferată ca mărime de intrare pentru analiza conducției electrice. Cu această densitate, prin analiza conducției electrice, se determină puterea calorică specifică PS, care este transferată ca sarcină pentru analiza termică, ce începe cu o temperatură inițială TI. Temperatura T în punctele domeniului, obținută în urma analizei termice, este transferată ca mărime de intrare pentru analiza conducției electrice și pentru analiza magnetică. Proprietățile de material sunt reactualizate pentru noua valoare a temperaturii, și în continuare lucrurile se repetă.

Dacă se realizează și o analiză structurală, atunci ca mărime de intrare sunt transferate: temperatura T, obținută din analiza termică și forțele magnetice F, obținute din analiza magnetică. Prin analiza structurală, se determină deformațiile D ale domeniului, care sunt transferate pentru celelalte analize.

Din punct de vedere al modelului în care se realizează transferul rezultatelor între analize, se deosebesc: analize cuplate secvențial și analize cuplate directe (simultane).

În prima variantă se execută separat fiecare analiză, în ordinea menționată. Pentru fiecare analiză se folosesc elemente finite ce au ca și necunoscute principale (grade de libertate) mărimile corespunzătoare modelului matematic, ce descrie procesul respectiv, iar matricea de rigiditate și vectorul termenilor liberi trebuie să aibă forma menționată în capitolele precedente, pentru modelul matematic considerat.

Este foarte important ca să se folosească elemente finite compatibile, adică cu aceeași geometrie de bază.

Separat, pentru fiecare analiză se definește câte un mediu fizic, constituit din: domeniul geometric, rețea de discretizare, sarcini specifice (sarcini nominale), lăsând la o parte sarcinile ce urmează a fi transferate de la o altă analiză. De asemenea, se stabilește regimul procesului ce se analizează.

O secvență constă din executarea succesivă a analizelor în ordinea: analiza conducției electrice, analiza magnetică, analiza termică, analiza structurală, precum și transferarea rezultatelor unei analize ca sarcini pentru analiza următoare, așa cum s-a precizat mai sus.

De obicei se parcurg mai multe secvențe până când o anumită mărime, de

exemplu, temperatura, atinge o anumită valoare impusă, care poate fi valoarea maximă a temperaturii pentru care se cunosc proprietățile de material.

Parcurgerea secvențelor se poate face manual de către utilizator, sau automat, folosind o instrucțiune de ciclare, de exemplu FOR, sau DO, la care variabilei de control i se atribuie un număr de valori egal cu numărul de secvențe ce se dorește a se obține.

În cazul unei analize cuplate directe (simultane) parcurgerea secvențelor se face automat de către însăși programul respectiv. Evident că se vor utiliza elemente finite ce au ca și necunoscute principale (grade de libertate) mărimile de stare ce intervin ca necunoscute în modelele matematice ale tuturor proceselor ce intervin. De asemenea, matricea de rigiditate elementară și vectorul termenilor liberi elemental trebuie să fie constituite din elemente calculate cu relațiile precizate în capitolele anterioare, pentru fiecare dintre modelele matematice utilizate.

5.6. Analize electromagnetice.

S-au realizat două analize magnetice. În prima dintre ele, în principal, s-a urmărit determinarea densității de volum a puterii calorice dezvoltată prin efectul termic al curenților electrici induși în șarjă, ce a fost apoi folosită ca sarcină (mărime de intrare), pentru analiza termică.

S-a ales un regim permanent și sinusoidal la care ca mărime de intrare s-a introdus căderea de tensiune pe bobina inductoare a cuptorului. Aceasta este de amplitudine $380\sqrt{2}$ V, fază inițială zero și frecvență 50Hz. Bobina cuptorului are următoarele caracteristici, care au fost introduse ca date inițiale în program:

- aria secțiunii axiale a bobinei $ABOB=2,224 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$;
- numărul de spire $N=44$;
- sensul curentului ca fiind astfel încât intră în planul de reprezentare;
- coeficientul de umplere 0,96.

Programul utilizat permite aplicarea sarcinii fie brusc, fie în trepte (gradat).

Deoarece analiza termică care s-a executat este tranzitorie s-a ales varianta aplicării bruște a mărimii de intrare.

Ținând cont de faptul că proprietățile de material depind de temperatură ar trebui făcute o analiză cuplată electromagnetic-termic.

Într-o primă etapă s-a executat o analiză electromagnetică simplă, la care proprietățile de material s-au introdus corespunzător valorii celei mai mari a temperaturii la care se dispune de date pentru proprietățile de material. Aceasta este 1000°C.

Pentru verificare s-a realizat și o analiză cuplată secvențială menționată anterior. Întrucât interesează rezultatele corespunzătoare ultimei secvențe se constată că nu apar diferențe prea mari între rezultate. Din acest motiv, în continuare, se prezintă rezultatele obținute de la analiza electromagnetică simplă.

În fig.5.7. este redată forma liniilor de câmp obținută pentru întreg domeniul. Se observă că așa cum era de așteptat cea mai mare densitate a liniilor de câmp magnetic se obține în șarjă. Pentru claritatea imaginii în fig.5.8 s-au reprezentat un număr mai mic de linii de câmp magnetic. Se remarcă că datorită efectului de proximitate densitatea liniilor de câmp magnetic este mai mare în porțiunea șarjei aflată în spre bobină.

În fig.5.9. prin contururi colorate s-a obținut distribuția inducției magnetice \bar{B} în șarjă. Se constată că valoarea maximă a inducției magnetice este în jur de 0,5 T și se obține în porțiunea mediană a șarjă dinspre bobină și descrește spre interiorul șarjei până la valoarea $4 \cdot 10^{-5}$ T.

În fig 5.10. s-a reprezentat grafic dependența inducției magnetice \bar{B} de la distanța măsurată după o direcție radială de la mijlocul șarjei. Se remarcă faptul că valoarea cea mai mare se obține nu chiar în punctele din șarjă cele mai apropiate de bobină, ci ceva mai interior. Acest rezultat pune în evidență fenomenul de refulare.

În figurile 5.11. și 5.12. este reprezentată intensitatea câmpului magnetic \bar{H} în șarjă, atât cu contururi colorate, cât și într-o diagramă rentangulară funcție de distanța de la centrul șarjei după o direcție radială.

În figurile 5.13. și 5.14. este prezentată repartiția densității de curent din șarjă. Apare clar fenomenul de refulare.

În fig.5.15 și 5.16. este prezentată repartiția puterii dezvoltate prin efect electrocaloric de curenții induși în șarjă. Se constată că acesta este în concordanță cu repartiția densității de curent.

În fig.5.17. este reprezentată repartiția forțelor electromagnetice în încărcătura metalică după o direcție axială.

Se constată că valoarea acestora crește dinspre extremități spre mijlocul înălțimii șarjei. Ele sunt orientate înspre interiorul șarjei. Datorită acestei distribuții a forțelor de natură electromagnetică apare fenomenul de brasaj

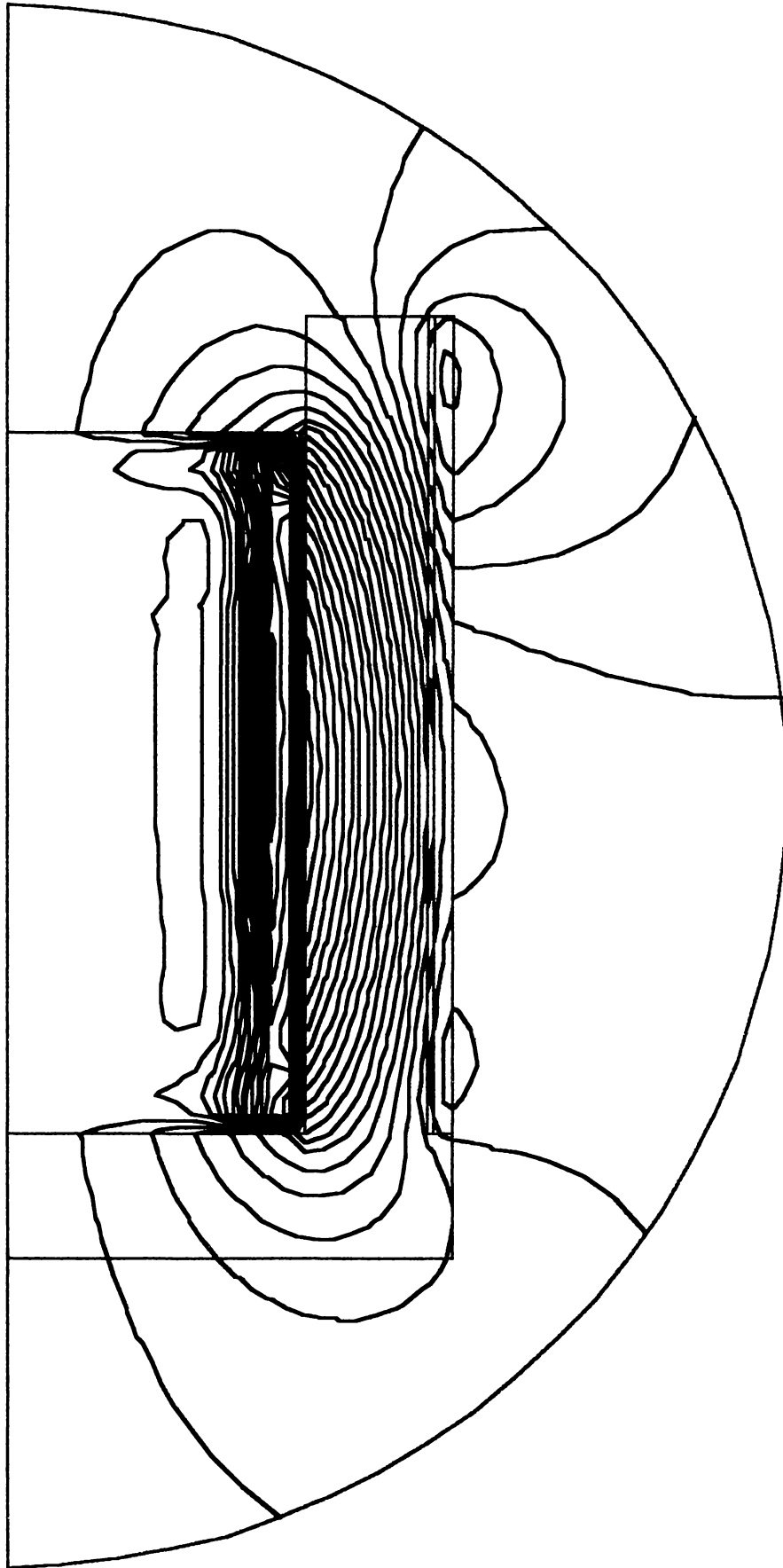


Fig.5.7.

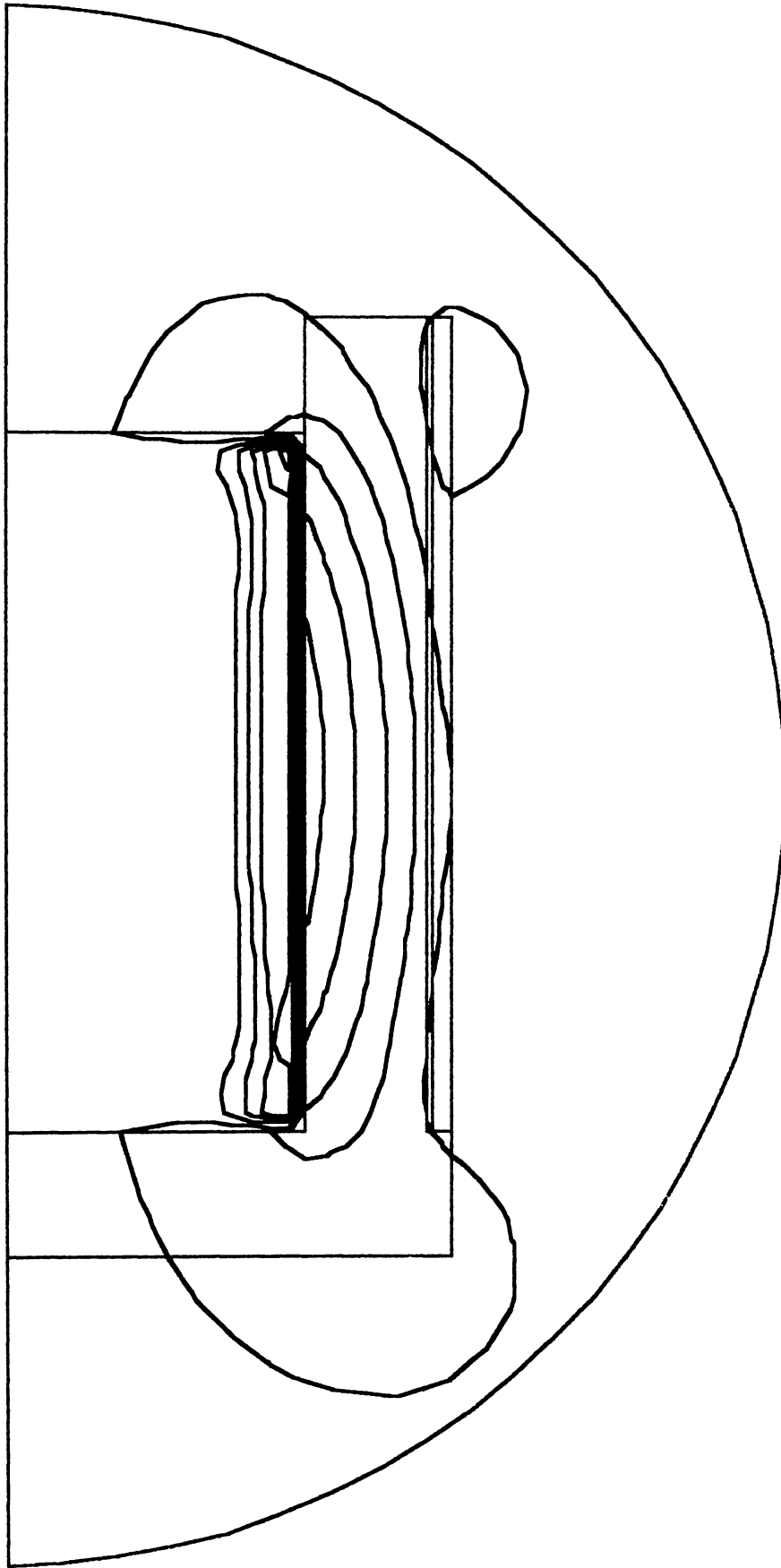


Fig. 5.8

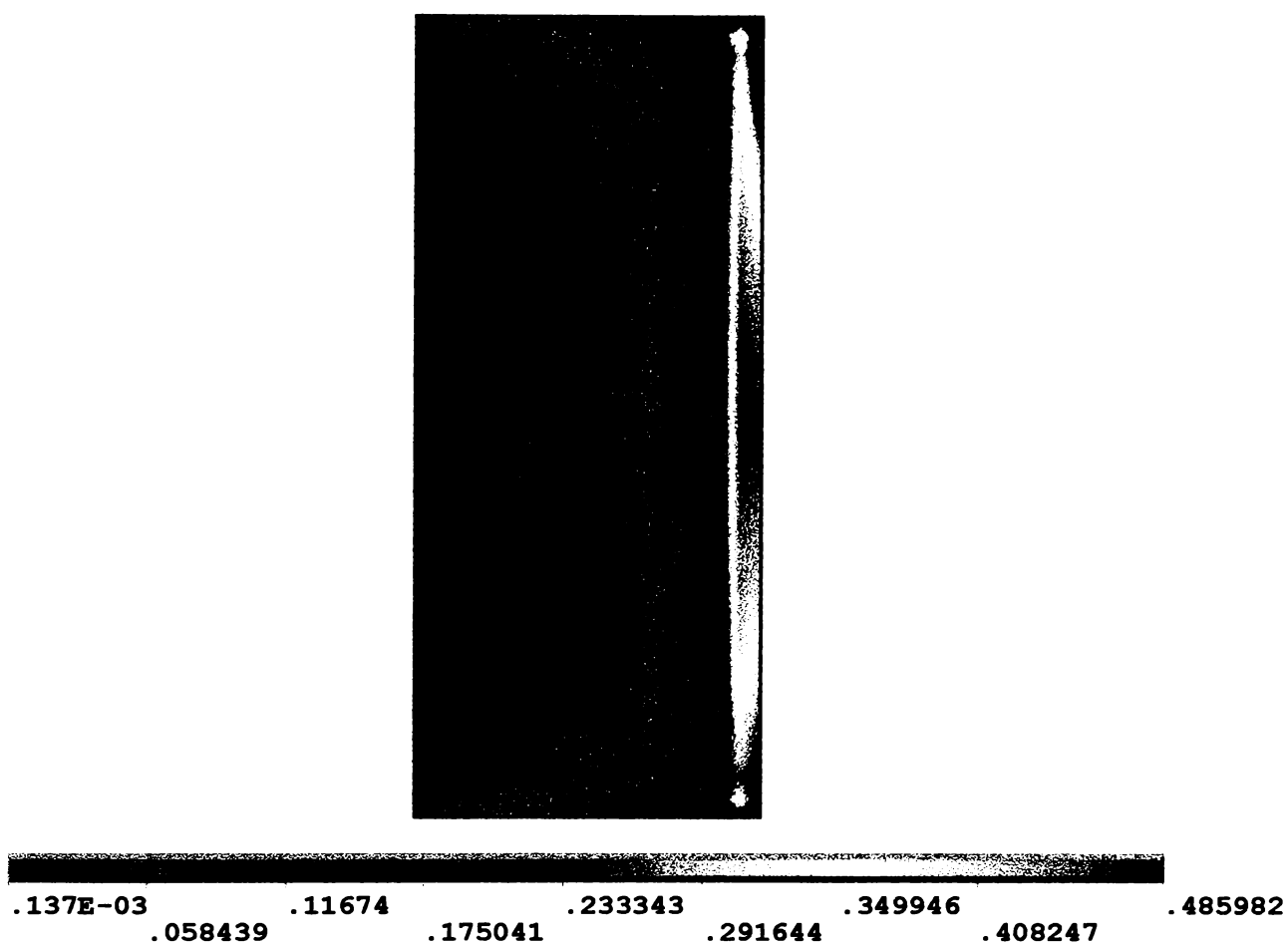


Fig.5.9. Inducția magnetică \bar{B} în șarjă

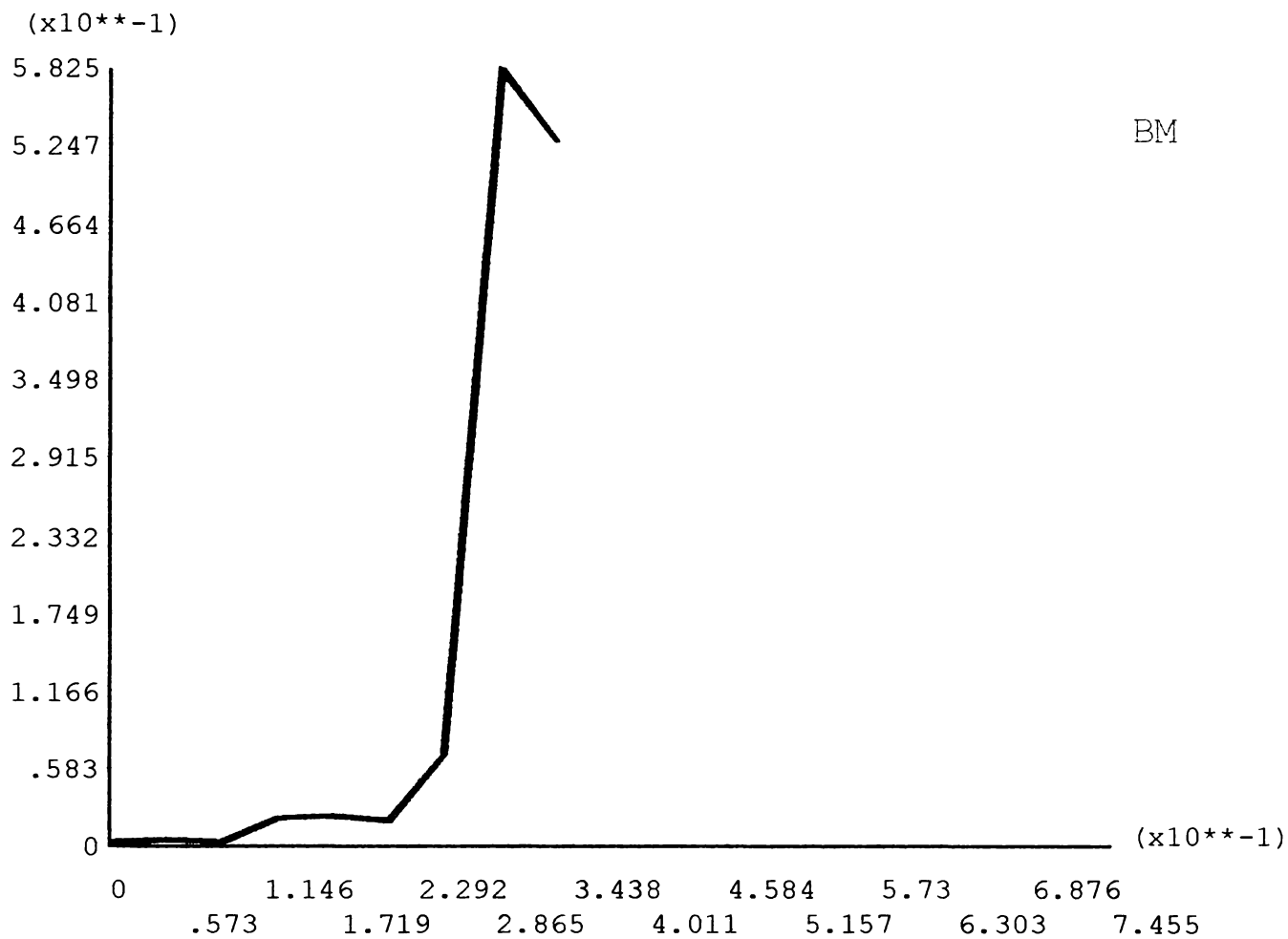


Fig. 5.10. Inducția magnetică \bar{B} , după o direcție radială

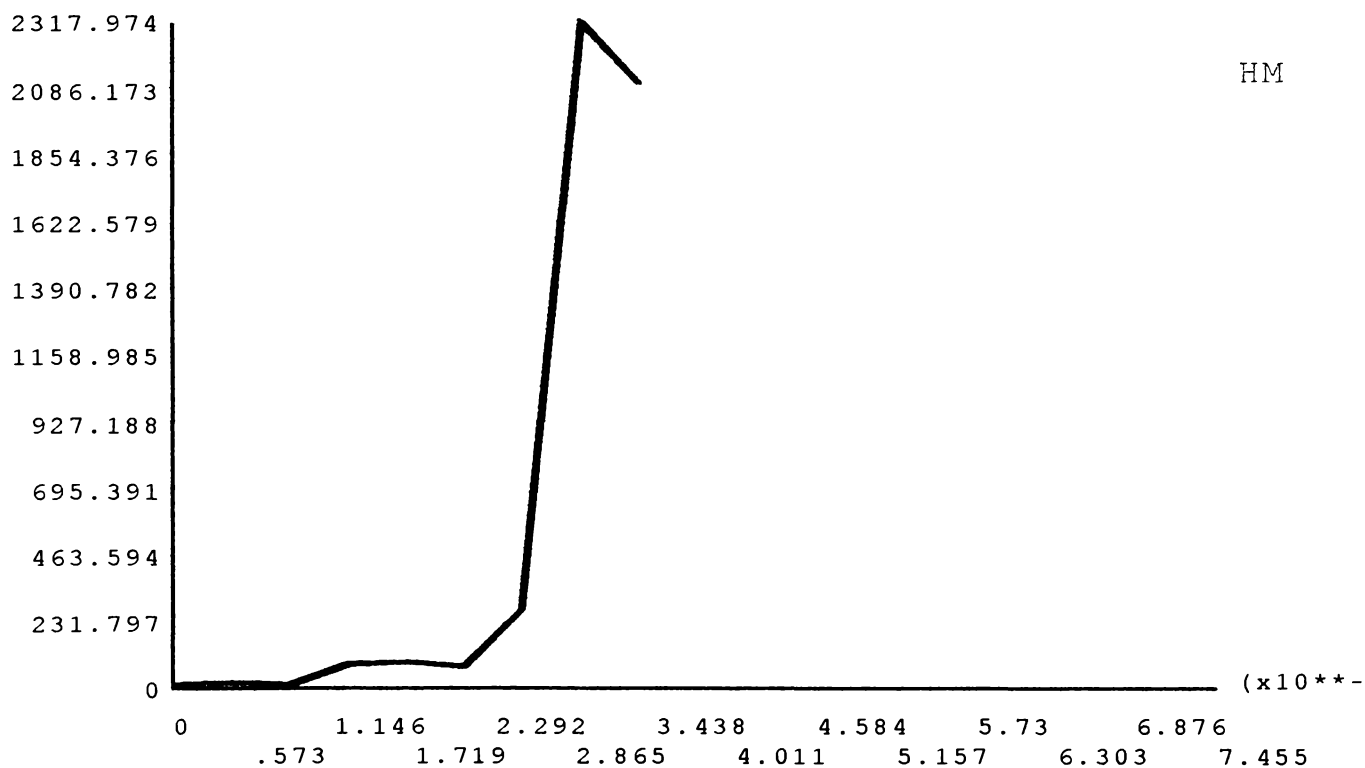


Fig. 5.11. Intensitatea câmpului magnetic \bar{H} , după o direcție radială

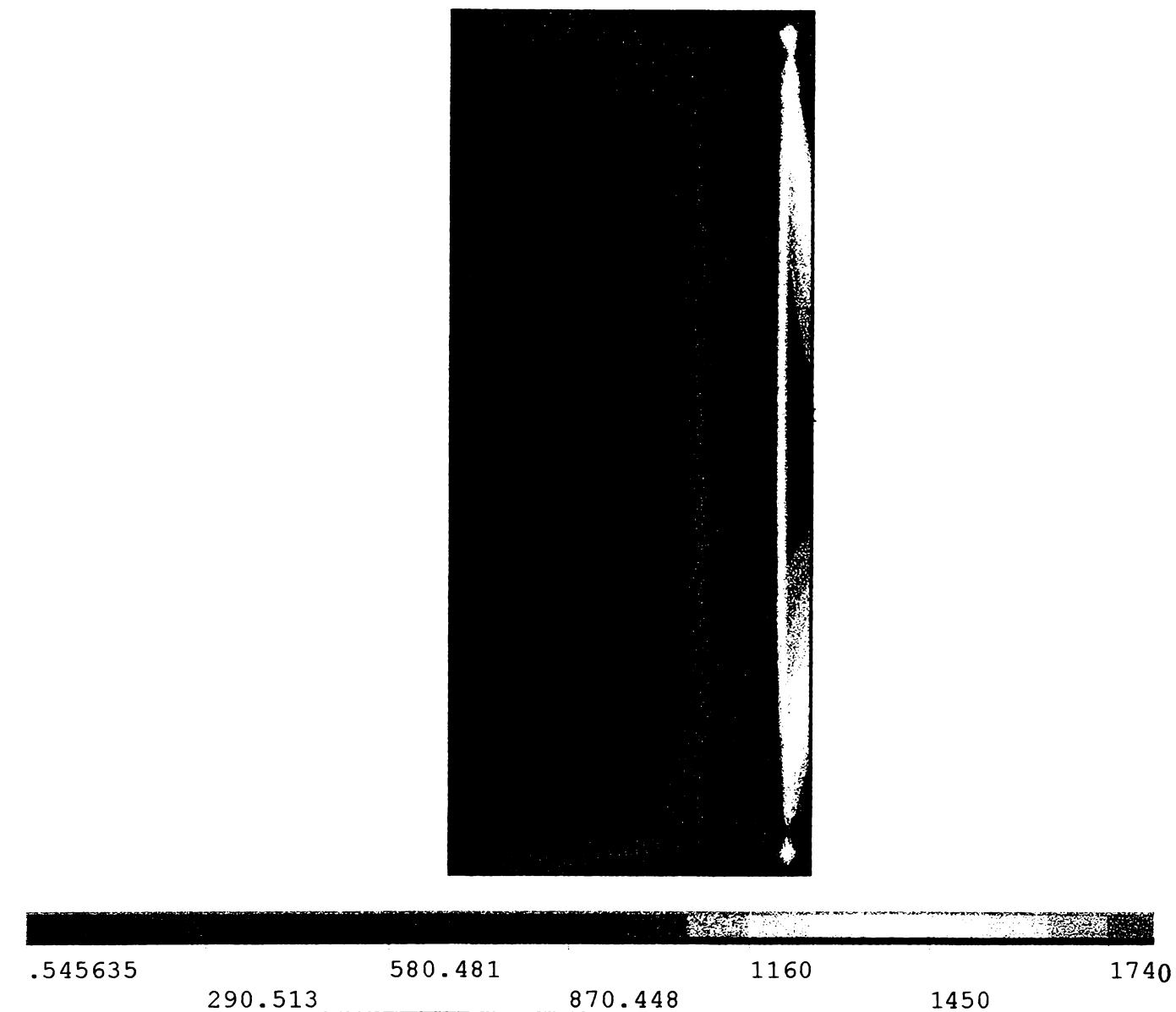


Fig. 5.12. Intensitatea câmpului magnetic \bar{H} în încărcătura metalică

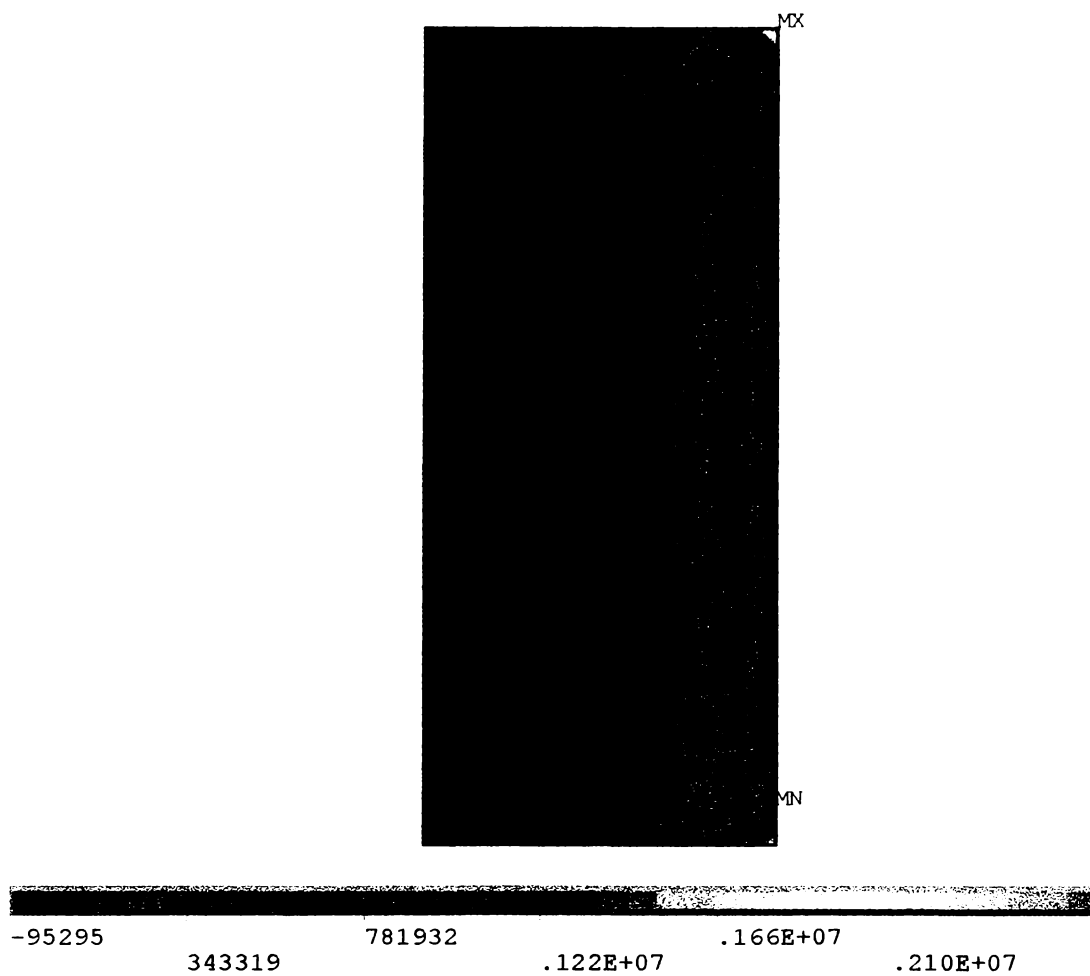


Fig. 5.13. Densitatea de curent \bar{J} în încărcătura metalică

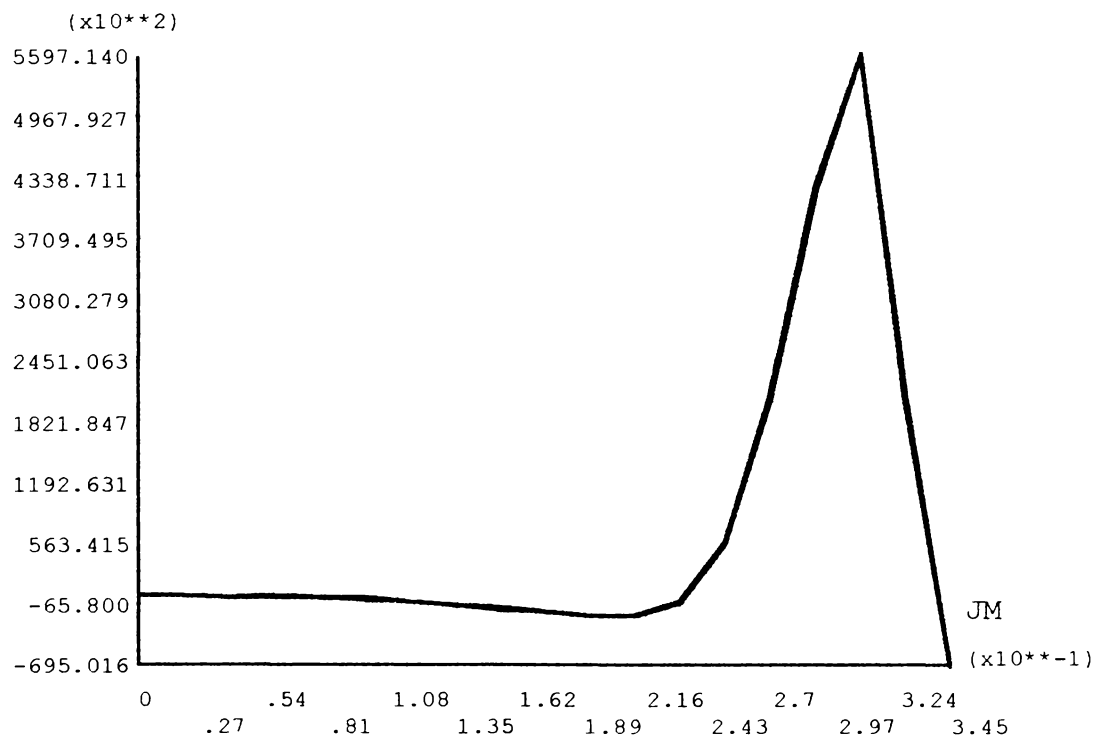


Fig. 5.14. Densitatea de curent \bar{J} după o direcție radială

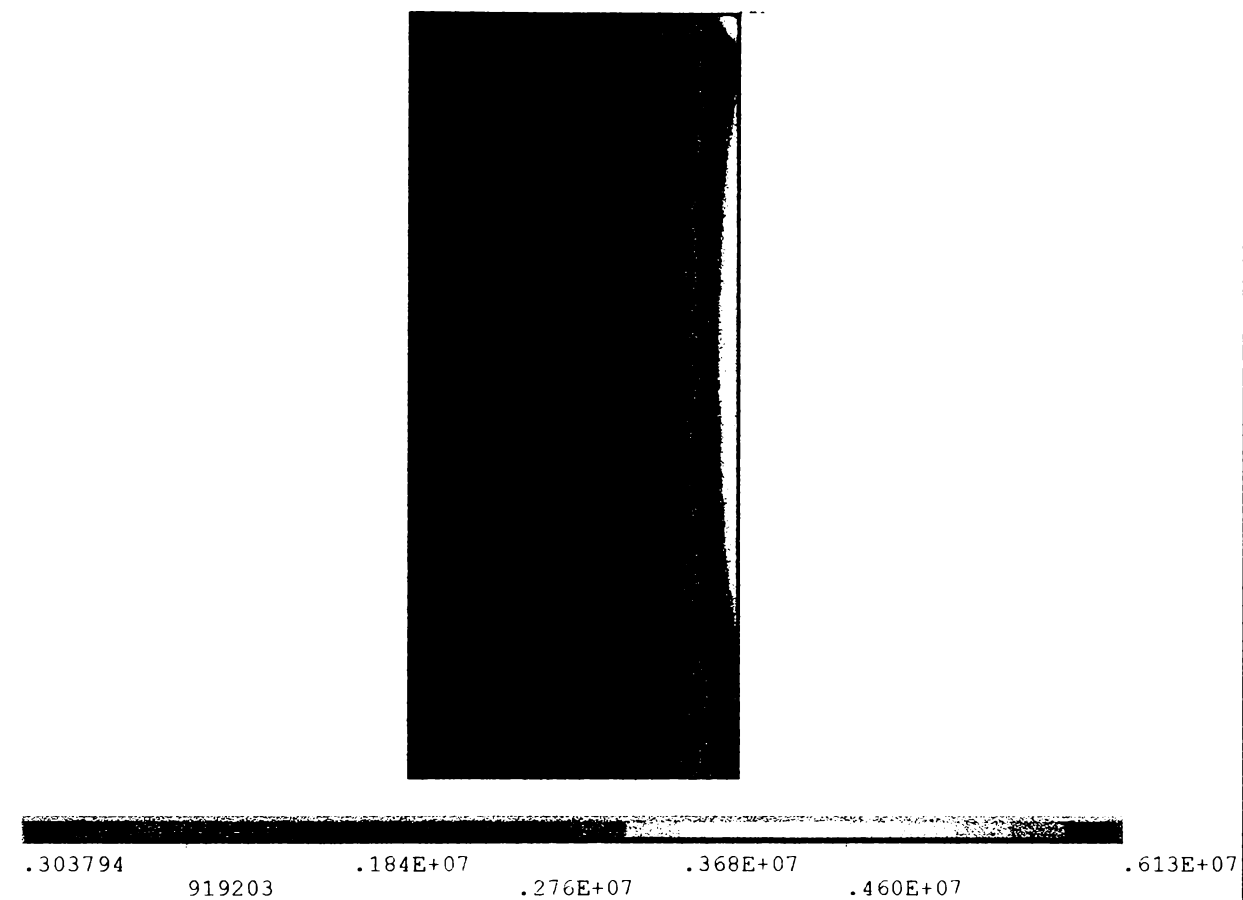


Fig. 5.15. Repartiția puterii dezvoltată în încărcătura metalică

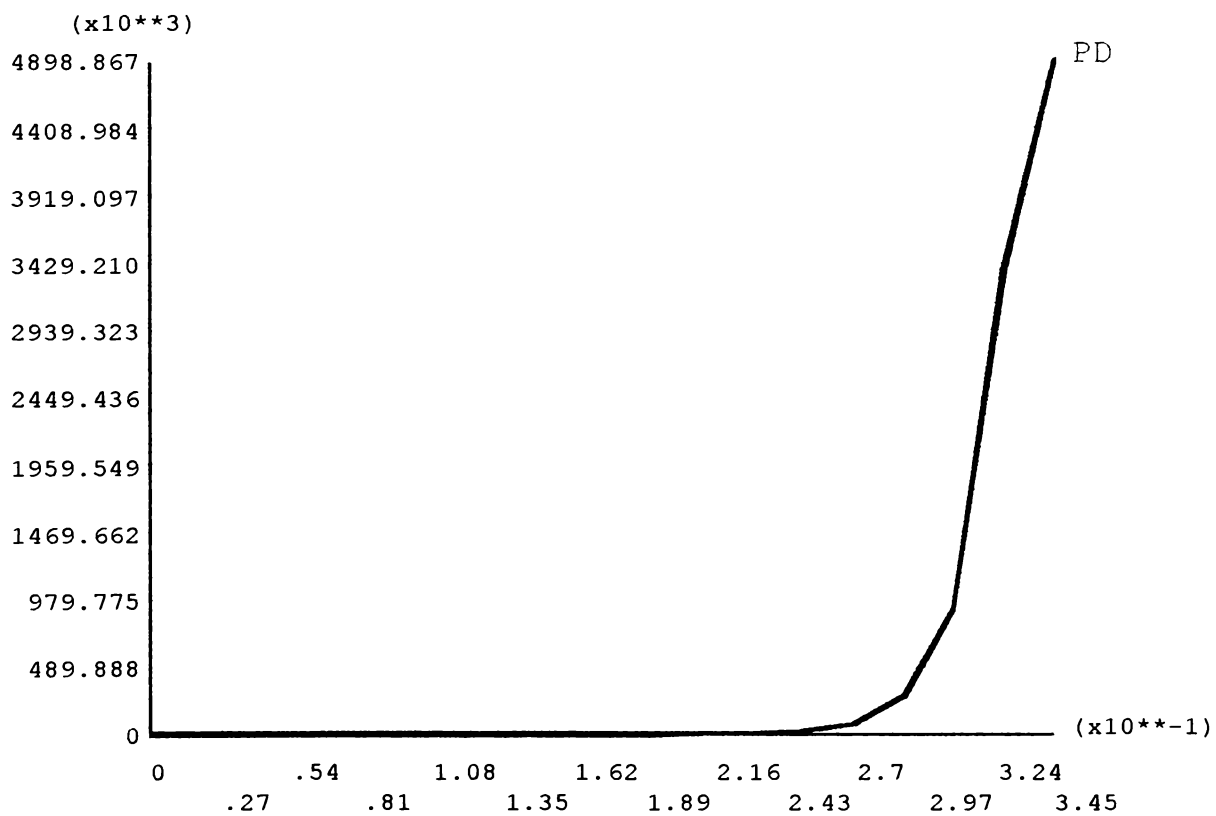


Fig. 5.16. Variația puterii dezvoltată după o direcție radială

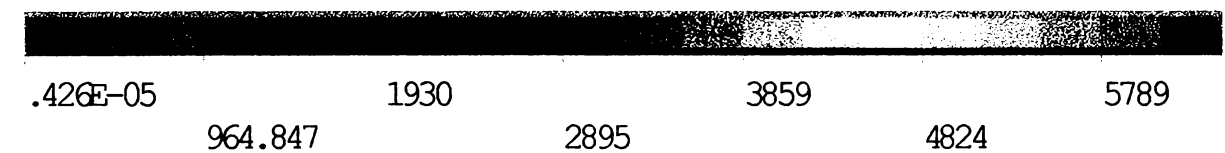
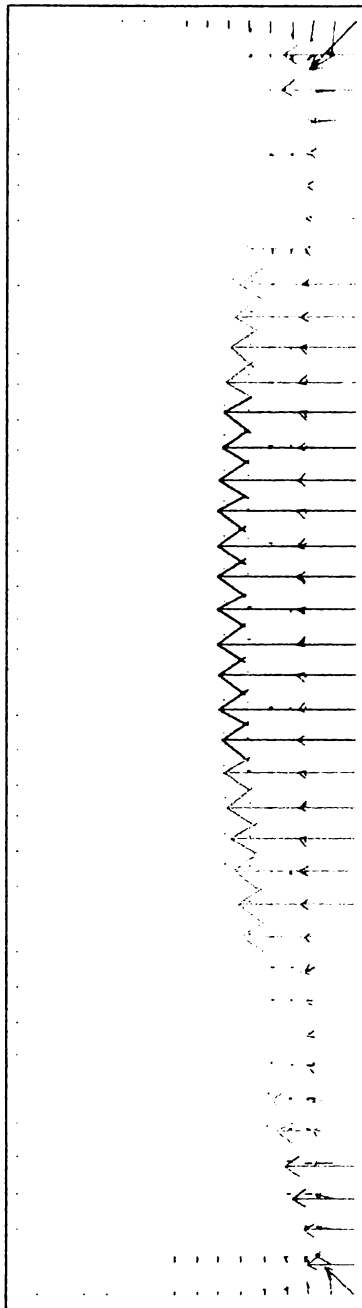


Fig. 5.17. Forțele electromagnetice în încărcătura metalică a cuptorului

În cadrul celei de-a doua analize electromagnetice se urmărește determinarea dependenței în timp a forțelor ce acționează asupra șarjei, precum și a inductivității electrice a bobinei cuptorului. Ca urmare această analiză trebuie să fie tranzitorie.

Se utilizează o analiză cuplată de circuit electric cu parametri concentrați și câmp electromagnetic. Modelul cu elemente finite conține încă două componente prezentate în fig. 5.18

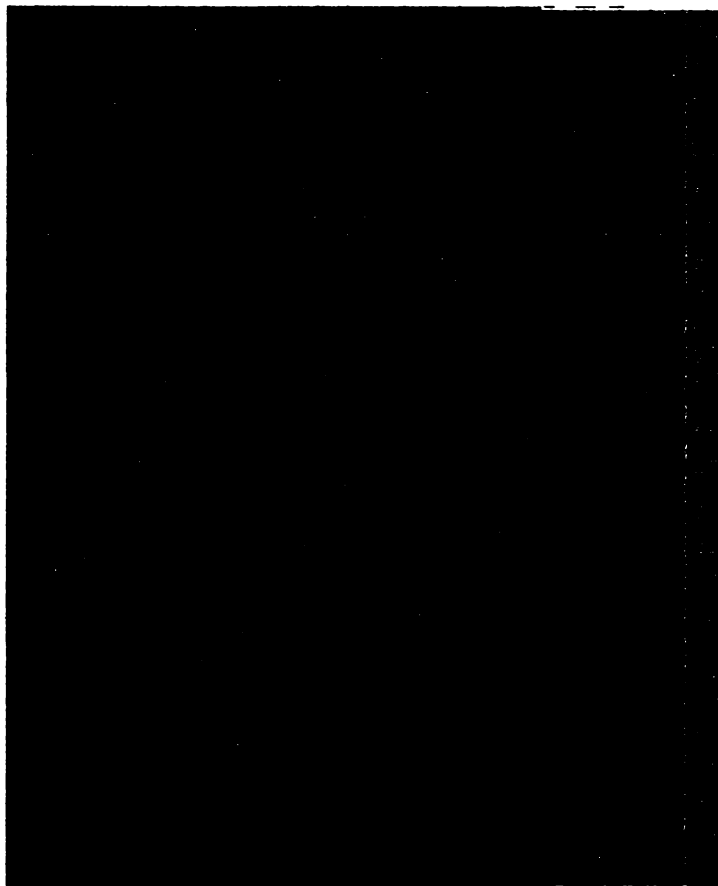
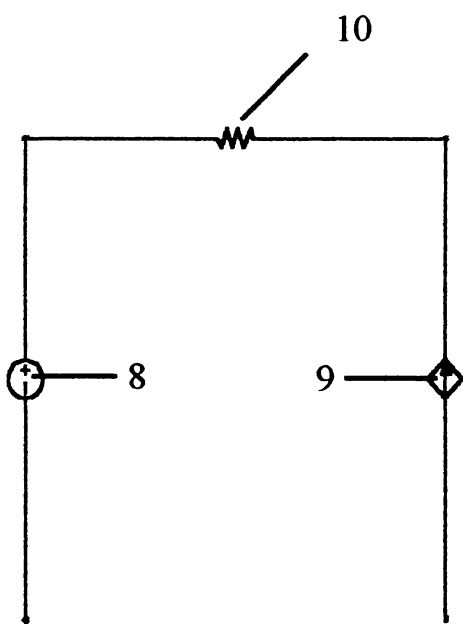


Fig.5.18

Elementele finite suplimentare sunt notate și au următoarele semnificații:

8 – reprezintă tensiunea electromotoare a sursei

9 – reprezintă de fapt bobina cuptorului și este reprezentată ca o sursă de tensiune comandată; acest element trebuie imaginat că se găsește în spațiul ocupat de bobină.

10 – rezistența electrică interioară a sursei, care s-a ales de $0,1\Omega$.

Pentru a se obține rezultate cât mai apropiate de cele reale ar fi trebuit modelate și celelalte elemente de circuit a bobinei. Având în vedere că din punct de vedere electric cuptorul de inducție este un transformator în aer, la care secundarul, reprezentat de șarjă este în secundar ar fi trebuit luată în considerare și inductivitatea de dispersie a

înfășurării primare, deci a bobinei cuptorului. Aceasta ar fi dus la un volum foarte mare de operații, fapt ce nu a putut fi realizat cu tehnica de calcul de care dispune autorul.

Din rezultatele acestei analize în fig.5.19 este redată variația în timp a curentului din bobina cuptorului, la conectarea acestuia la sursa de alimentare.

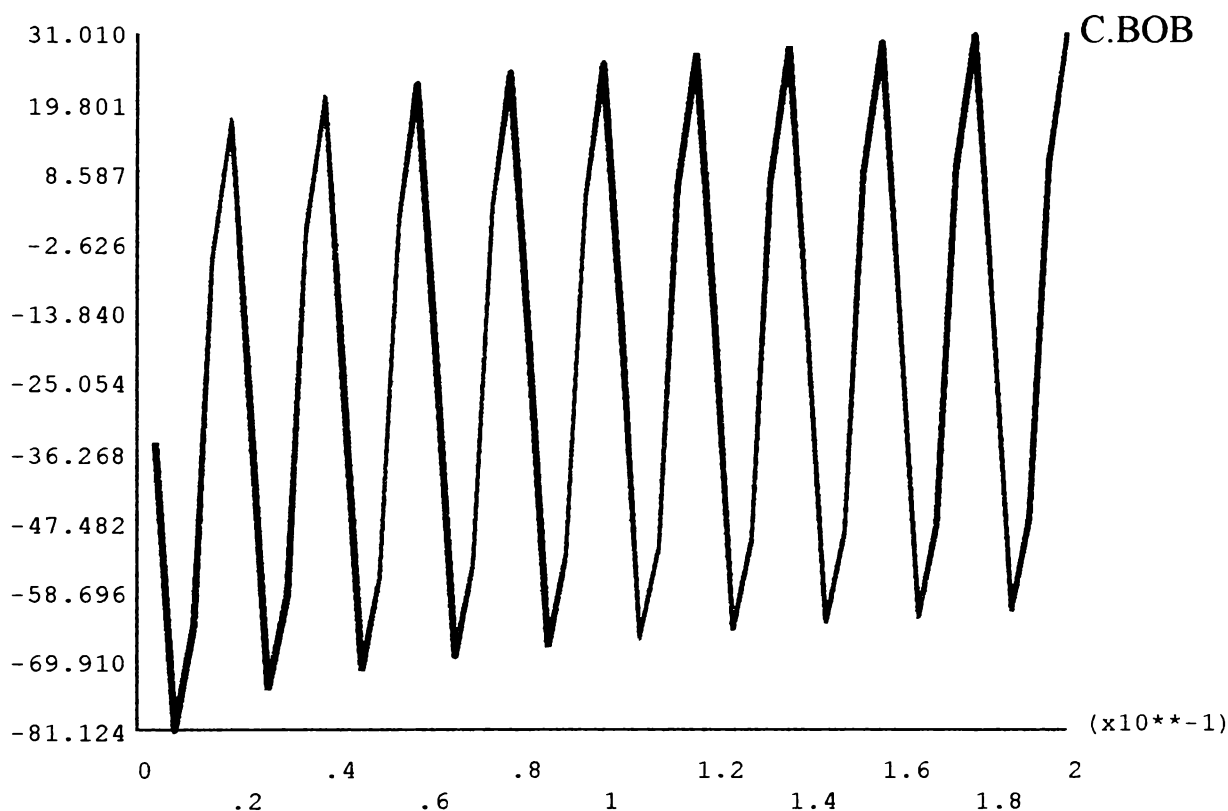


Fig.5.19 Variația în timp a curentului prin bobina cuptorului de inducție la conectare

Pentru claritatea figurii și mai ales că interesează doar regimul tranzitoriu la conectare s-a ales doar un interval de timp de 0,2 s.

Se constată din figură că variația în timp a curentului redată în figura 5.19. este ca formă în coconcordanță cu expresia obținută pentru aceasta pe cale analitică în capitolul 1 al lucrării.

În fig. 5.20 este reprezentată variația în timp a curentului din șarjă pentru același interval de timp.

Se observă că în bobina cuptorului în regimul tranzitoriu de la conectare, circuitul oscilează în jurul unei sinusoide. În șarjă însă curentul este mult deformat.

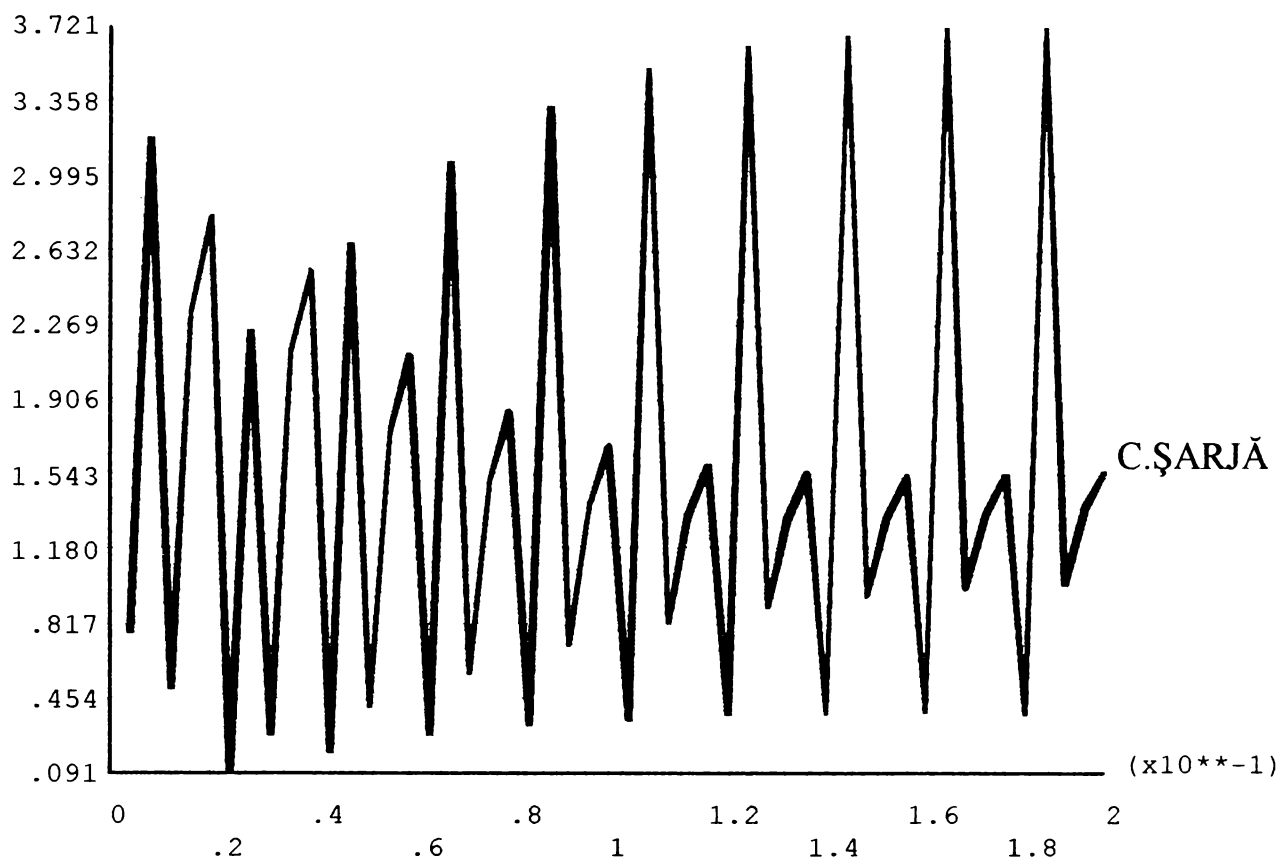


Fig.5.20 Variația în timp a curentului prin șarjă la conectarea cuptorului

5.7. Analize termice

Prin esență analizele termice trebuie făcute cuplate, deoarece mărimea de intrare este transferată de la analiza electromagnetică. S-a realizat această analiză atât secvențial cât și direct.

În cazul analizei secvențiale drept mărime de intrare s-au luat căderea de tensiune pe bobină și temperatura inițială. Căderea de tensiune pe bobină s-a ales cu aceleași caracteristici ca și la analiza electromagnetică, adică, amplitudinea $380\sqrt{2}V$, faza inițială zero și frecvența 50Hz.

Drept temperatură inițială a fost aleasă cea a mediului ambiant, adică $20^{\circ}C$.

Datorită simulării stratului infinit nu mai trebuiesc cunoscute condițiile de frontieră, programul introducând automat condițiile de la infinit, adică inducția magnetică $\bar{B} = 0$ și temperatura egală cu cea a mediului ambiant.

În figurile 5.21 și 5.22 sunt redate ca rezultat al analizei termice puterea calorică specifică, atât sub formă de contururi colorate, cât și sub formă grafică. Se constată o bună concordanță între acestea și cele obținute la analiza electromagnetică, constituind și o verificare a corectitudinii celor două analize.

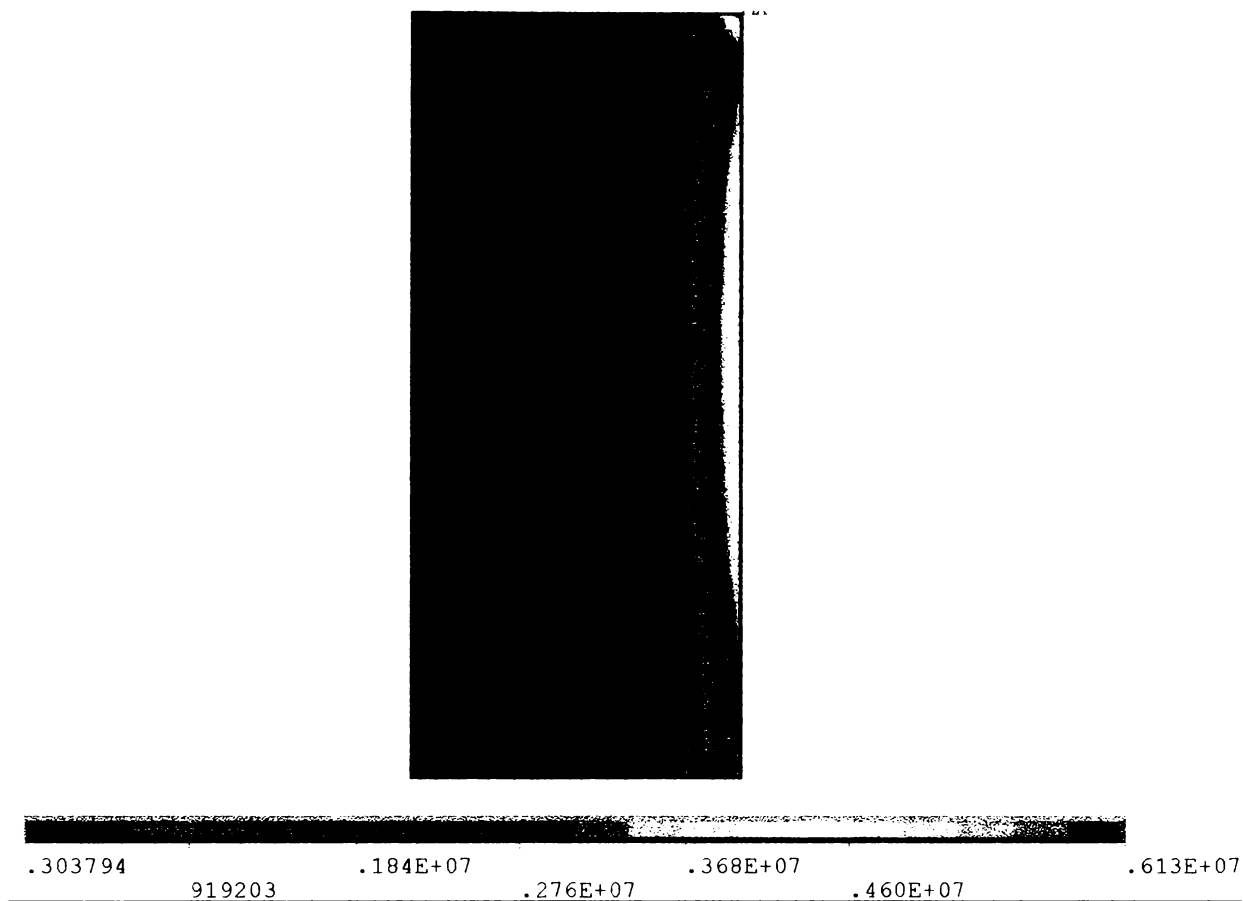


Fig. 5.21. Puterea

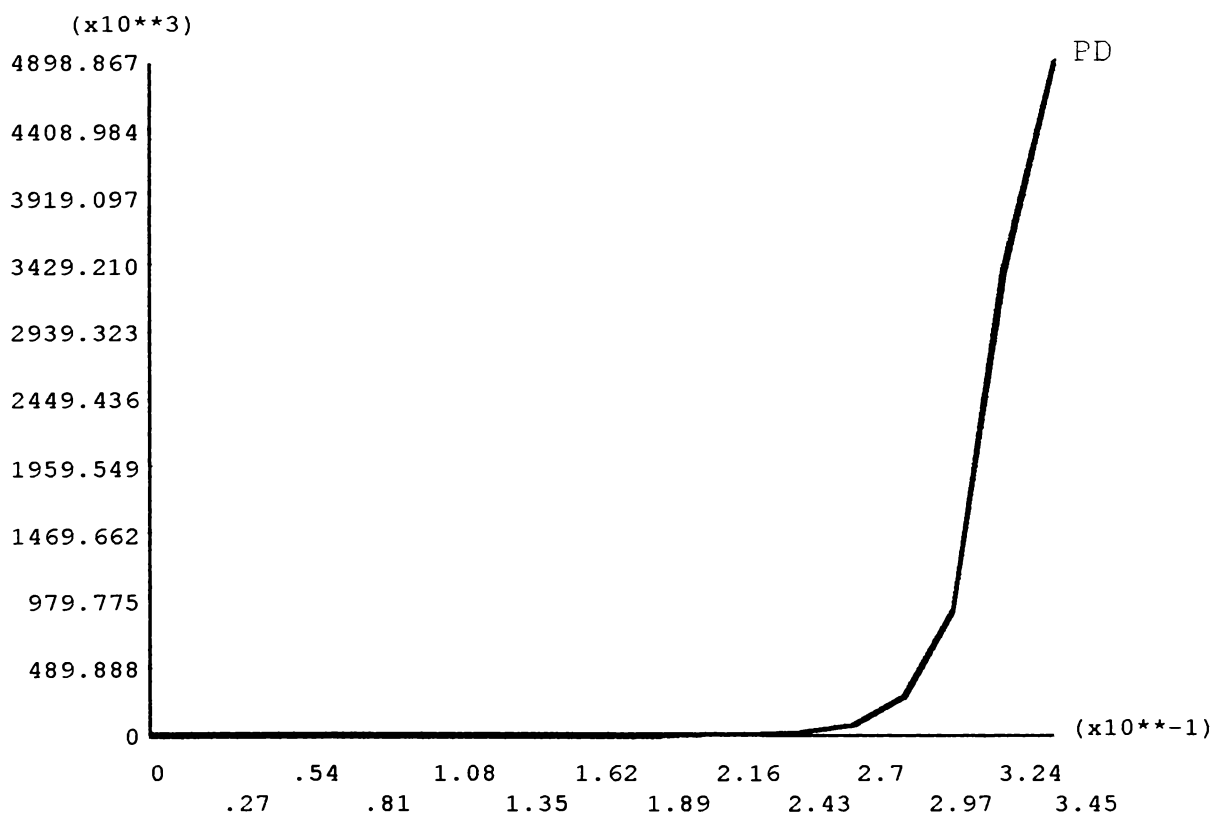


Fig. 5.24. Puterea după o direcție radială

Un rezultat important al analizei termice este reprezentat de câmpul temperaturii din șarjă, după diferite intervale de timp de la conectare. În figurile 23 – 27 este reprezentat, prin contururi colorate, câmpul de temperaturi din jumătate în jumătate de oră. Se constată că temperaturile cele mai mari se ating în zona mediană periferică a șarjei, iar cele mai mici la baza șarjei în zona centrală. Trebuie menționat faptul că aceste rezultate nu au ținut cont de faptul că în stare lichidă, datorită fenomenului de brasaj există o tendință de uniformizare, de apropiere între ele a valorilor acestor temperaturi.

Influența mișcărilor ce au loc în interiorul șarjei asupra câmpului de temperaturi se poate obține făcând cu ajutorul programului o analiză structurală. Aceasta presupune că pe baza forțelor determinate la analiza electromagnetică și cunoscând caracteristicile mecanice ale oțelului topit (cum ar fi modulul lui Young sau constanta lui Poisson) să se determine deformațiile (mișcările) ce au loc în interiorul șarjei. O astfel de analiză structurală presupune extinderea foarte mult a lucrării și presupune o tehnică de calcul de care nu dispune autorul. Problema aceasta va constitui una din preocupările viitoare.

În fig. 5.28 se prezintă centralizat într-o diagramă variația temperaturii după o direcție radială de la centru spre exterior la diferite intervale de timp.

În fig. 5.29 este redată variația gradientului de temperatură după o direcție radială. Se constată că valoarea maximă a acestuia, pe măsură ce temperatura crește se deplasează înspre centrul cuptorului după o parabolă.

În fig. 5.30 și 5.31 este redat este redat fluxul termic și gradientul acestuia obținut în urma analizei termice făcute.

În cazul proiectării cuptoarelor de inducție, prezintă interes cunoașterea valorilor forțelor ce apar în cuptor. În acest sens în tabelul 5.8., ca rezultat al analizei termice cuplate, este redată variația în timp a forței maxime. Se constată din cele prezentate anterior că aceasta apare la jumătatea înălțimii șarjei. Programul permite calculul acestei forțe fie cu metoda lucrului mecanic virtual, fie pe baza tensiunilor maxwelliene, corespunzător rezultând coloanele 2 și 3 din tabel. Tot în acest tabel este redată variația în timp a inductivității bobinei cuptorului.

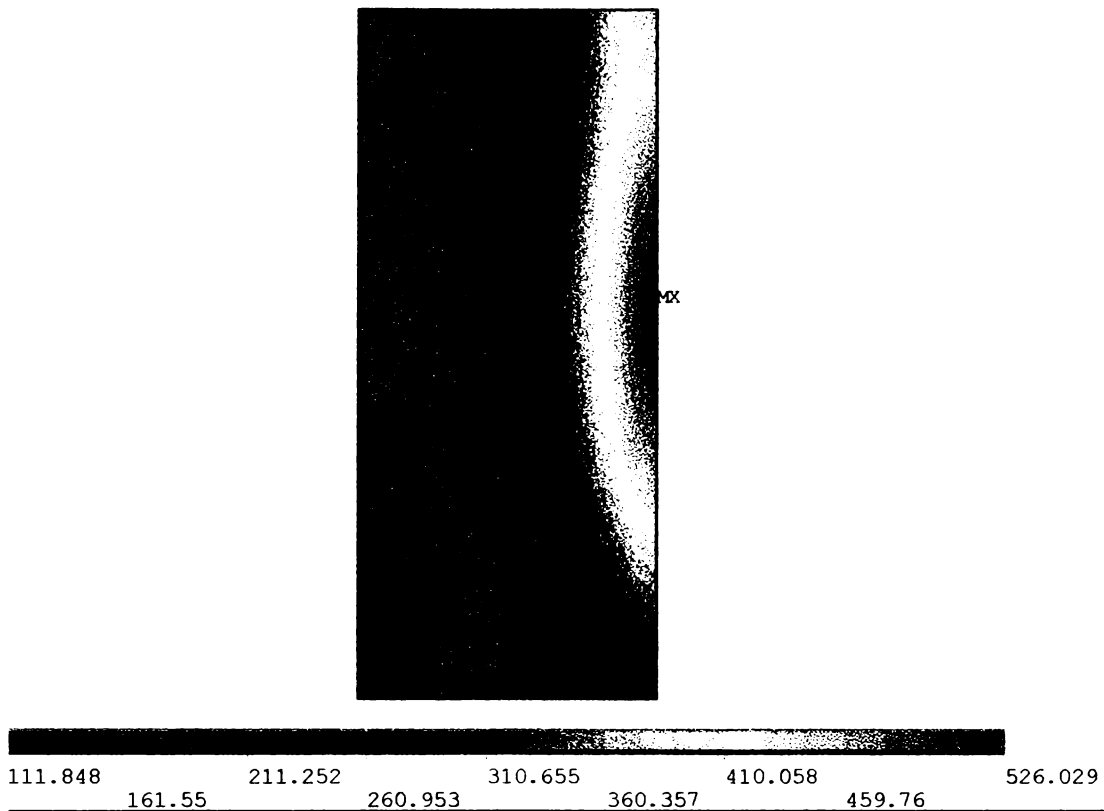


Fig. 5.22. Temperatura în cuptor după $\frac{1}{2}$ h

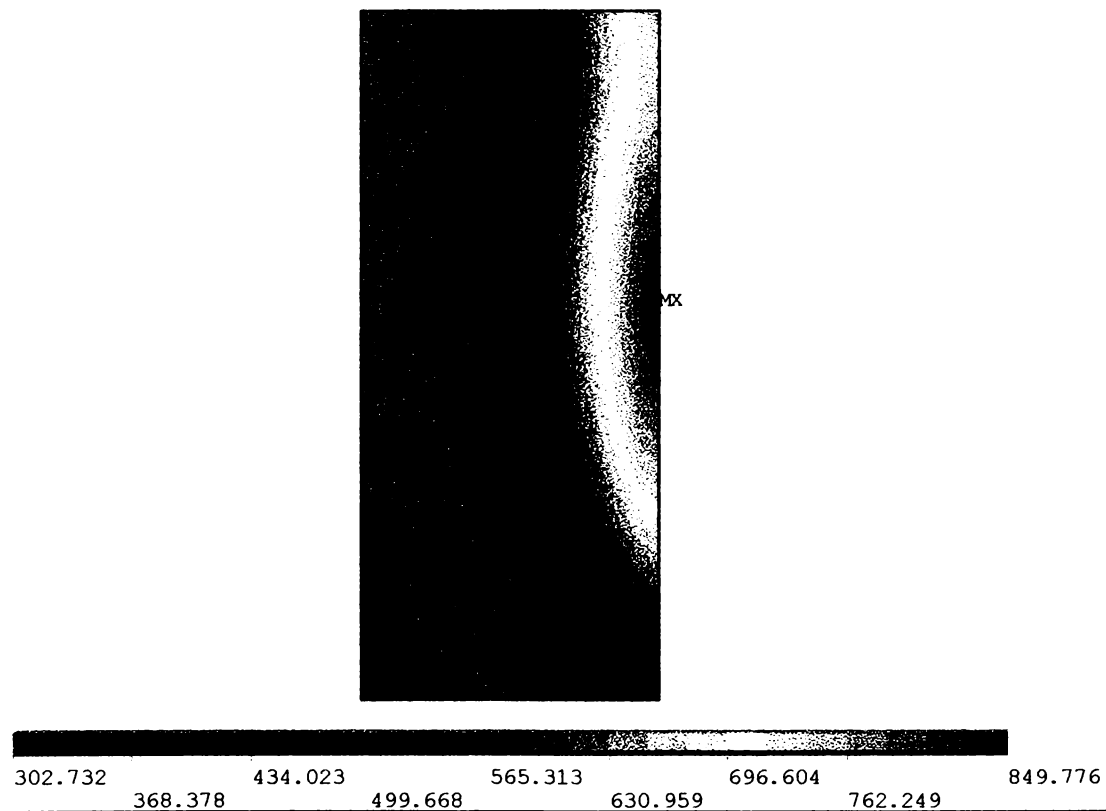


Fig. 5.24. Temperatura în cuptor după 1 h

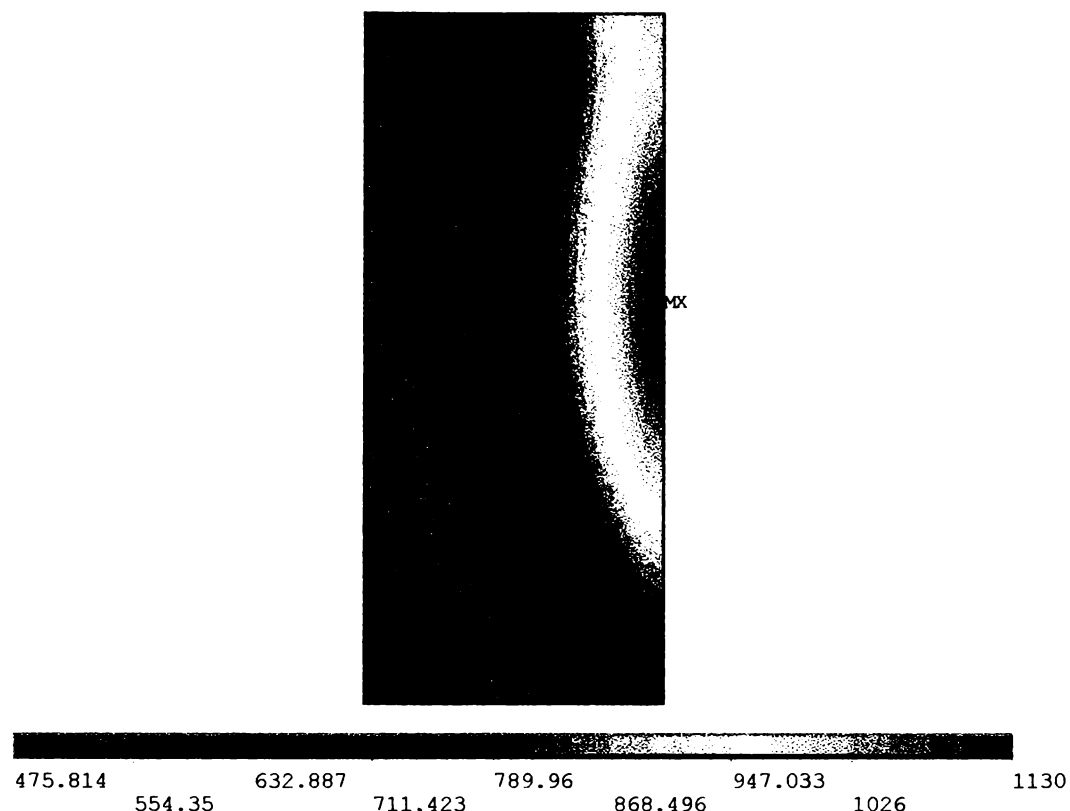


Fig. 5.25. Temperatura în cuptor după 1,5 h

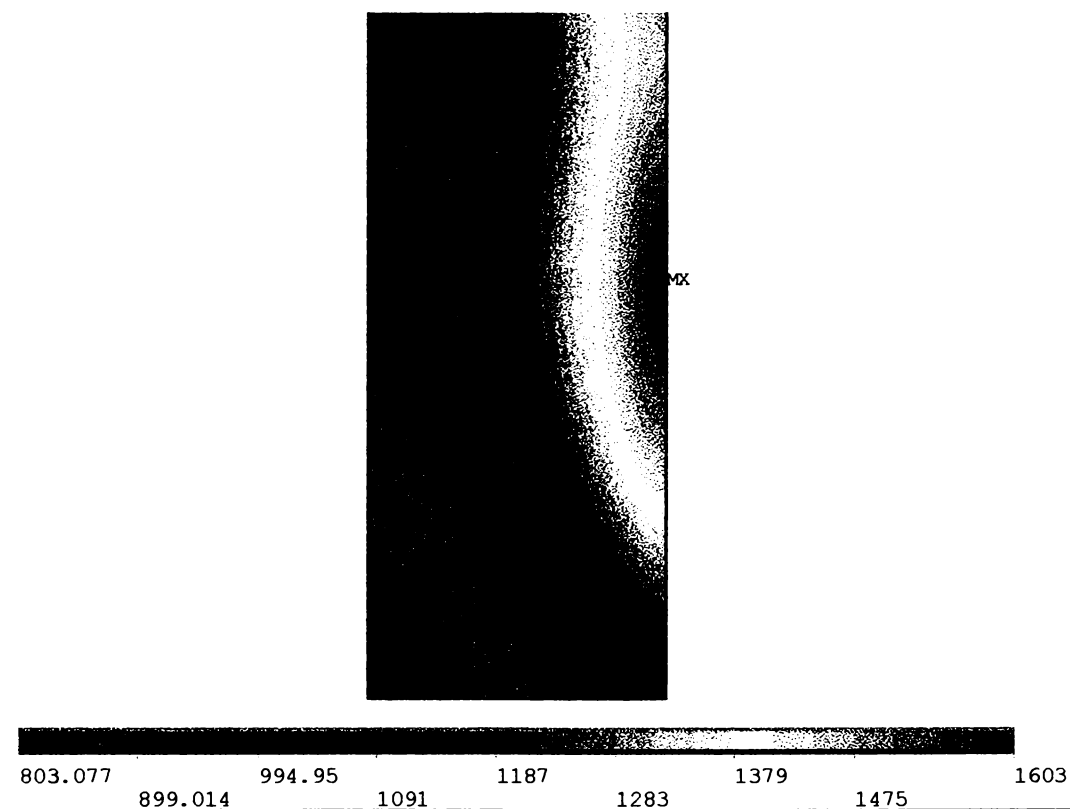


Fig. 5.26. Temperatura în cuptor după 2 h

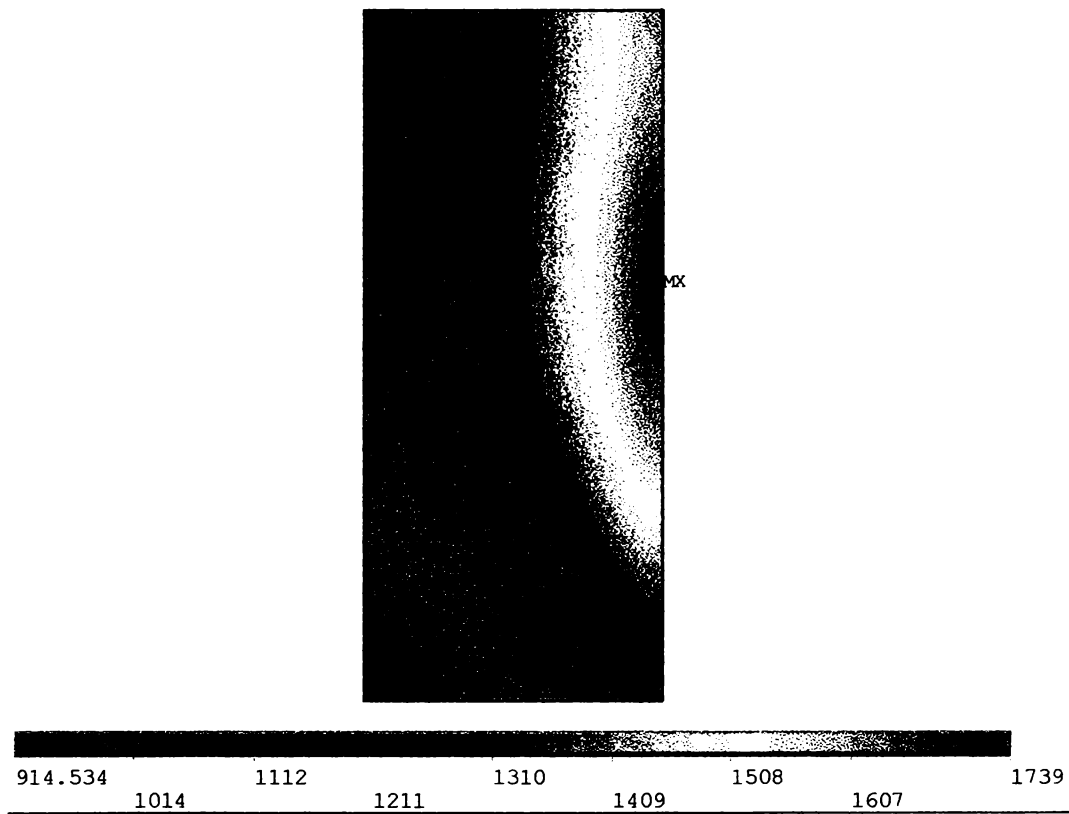


Fig. 5.27. Temperatura în cuptor după 2,5 h

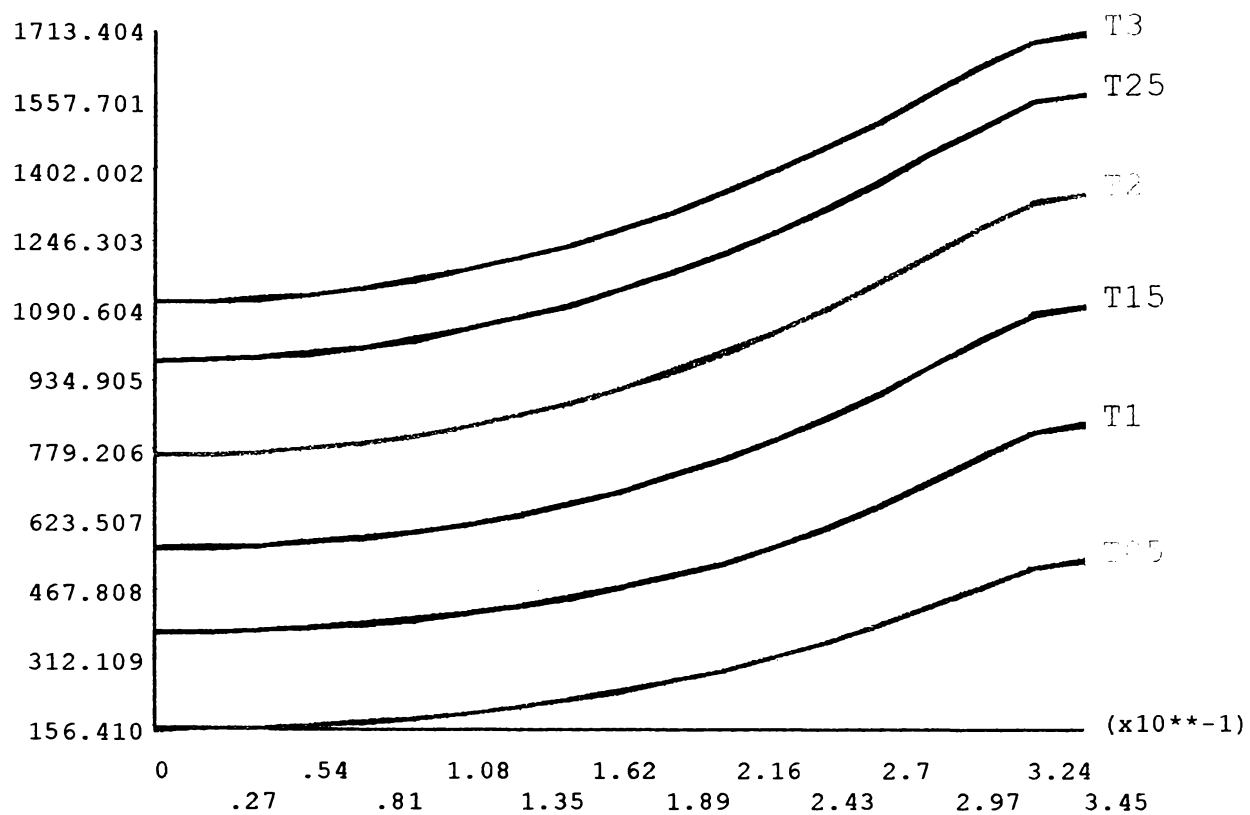


Fig. 5.28. Temperatura după o direcție radială la diferite intervale de timp de la conectarea cuptorului

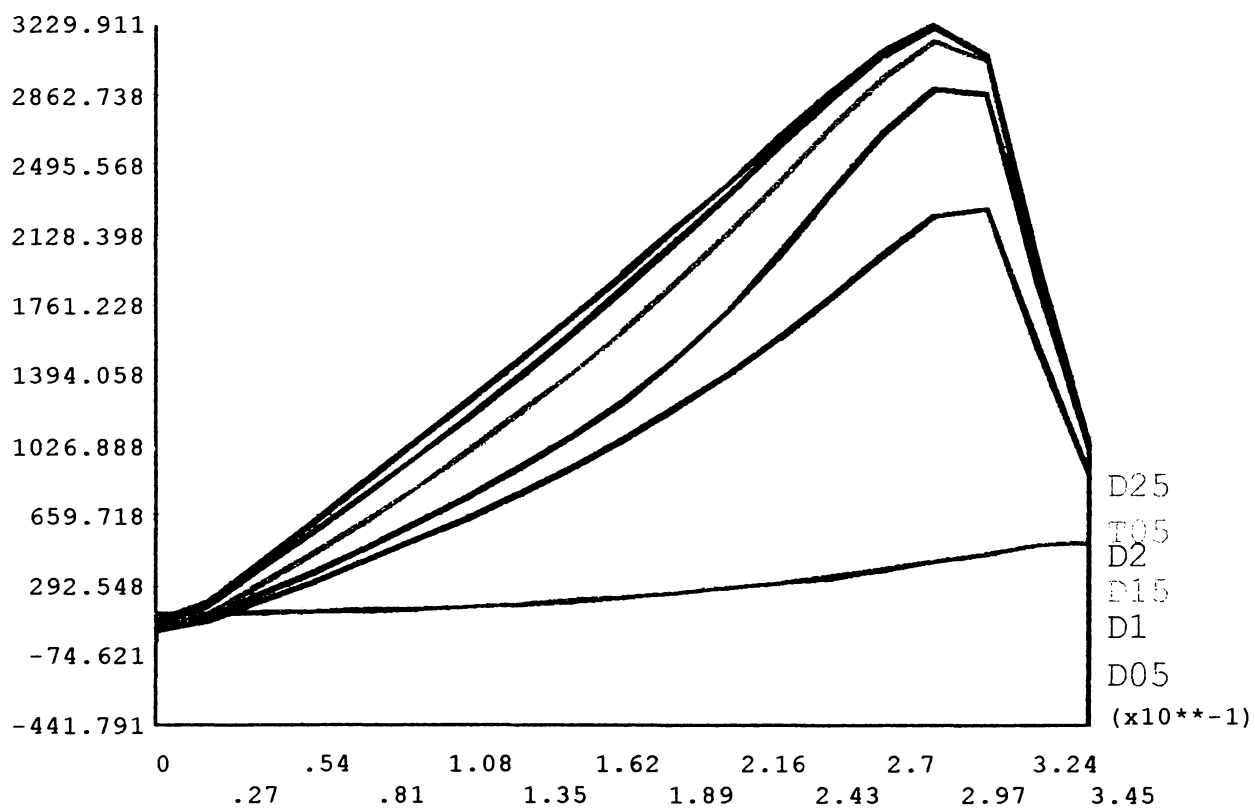


Fig. 5.29. Gradientul de temperatură la diferite intervale de timp

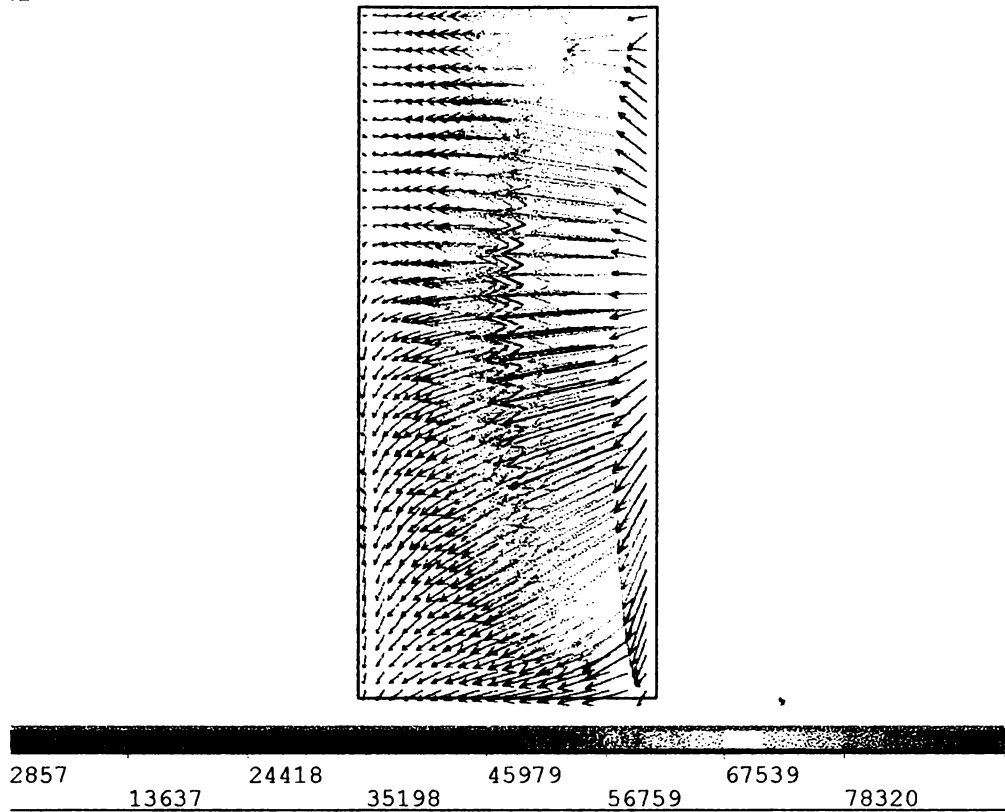


Fig. 5.30. Fluxul termic

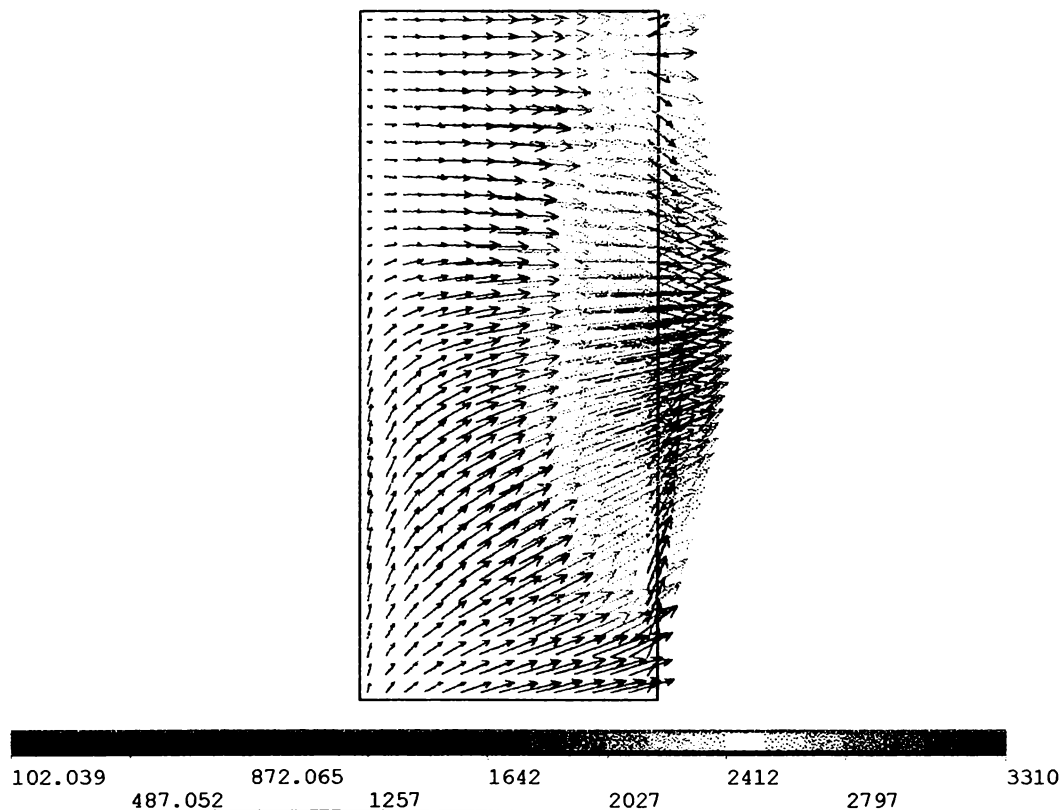


Fig. 5.31. Gradientul fluxului termic

Tabelul 5.8

TIME (sec)	BOB2 F_{\max} (L.M.V) (N)	BOB2 F_{\max} (MXW) (N)	BOB1 Induct.L (H)
0.4000E-02	0.5171E-01	0.5851E-01	0.1478E-02
0.8000E-02	0.5266E+00	0.5594E+00	0.1662E-02
0.1200E-01	0.6955E+00	0.7392E+00	0.2065E-02
0.1600E-01	0.4949E-01	0.6782E-01	0.8660E-02
0.2000E-01	-0.7148E-01	-0.7127E-01	0.2929E-03
0.2400E-01	0.8665E-01	0.9418E-01	0.1769E-02
0.2800E-01	0.5698E+00	0.6017E+00	0.1753E-02
0.3200E-01	0.6821E+00	0.7240E+00	0.2169E-02
0.3600E-01	0.1021E-01	0.2841E-01	0.4030E-01
0.4000E-01	-0.9301E-01	-0.9299E-01	0.4337E-03
0.4400E-01	0.8024E-01	0.8722E-01	0.1857E-02
0.4800E-01	0.5534E+00	0.5837E+00	0.1772E-02
0.5200E-01	0.6518E+00	0.6921E+00	0.2209E-02
0.5600E-01	-0.1396E-01	0.3277E-02	0.2695E-01
0.6000E-01	-0.1023E+00	-0.1023E+00	0.5441E-03
0.6400E-01	0.7055E-01	0.7712E-01	0.1887E-02
0.6800E-01	0.5282E+00	0.5571E+00	0.1777E-02
0.7200E-01	0.6205E+00	0.6590E+00	0.2228E-02
0.7600E-01	-0.3174E-01	-0.1538E-01	0.1065E-01
0.8000E-01	-0.1060E+00	-0.1060E+00	0.6360E-03
0.8400E-01	0.6098E-01	0.6723E-01	0.1892E-02
0.8800E-01	0.5015E+00	0.5289E+00	0.1775E-02
0.9200E-01	0.5905E+00	0.6273E+00	0.2239E-02
0.9600E-01	-0.4552E-01	-0.2997E-01	0.6629E-02
0.1000E+00	-0.1066E+00	-0.1065E+00	0.7144E-03
0.1040E+00	0.5219E-01	0.5816E-01	0.1883E-02
0.1080E+00	0.4750E+00	0.5012E+00	0.1769E-02
0.1120E+00	0.5624E+00	0.5975E+00	0.2243E-02
0.1160E+00	-0.5658E-01	-0.4179E-01	0.4737E-02
0.1200E+00	-0.1052E+00	-0.1051E+00	0.7824E-03
0.1240E+00	0.4432E-01	0.5009E-01	0.1862E-02
0.1280E+00	0.4497E+00	0.4746E+00	0.1761E-02
0.1320E+00	0.5361E+00	0.5697E+00	0.2245E-02
0.1360E+00	-0.6557E-01	-0.5146E-01	0.3615E-02
0.1400E+00	-0.1025E+00	-0.1022E+00	0.8423E-03
0.1440E+00	0.3736E-01	0.4295E-01	0.1833E-02
0.1480E+00	0.4256E+00	0.4495E+00	0.1752E-02
0.1520E+00	0.5117E+00	0.5439E+00	0.2244E-02
0.1560E+00	-0.7295E-01	-0.5947E-01	0.2862E-02
0.1600E+00	-0.9883E-01	-0.9842E-01	0.8954E-03
0.1640E+00	0.3124E-01	0.3670E-01	0.1797E-02
0.1680E+00	0.4030E+00	0.4258E+00	0.1742E-02
0.1720E+00	0.4890E+00	0.5199E+00	0.2242E-02
0.1760E+00	-0.7903E-01	-0.6611E-01	0.2317E-02
0.1800E+00	-0.9446E-01	-0.9388E-01	0.9430E-03
0.1840E+00	0.2587E-01	0.3124E-01	0.1753E-02
0.1880E+00	0.3817E+00	0.4035E+00	0.1732E-02
0.1920E+00	0.4679E+00	0.4976E+00	0.2238E-02
0.1960E+00	-0.8403E-01	-0.7162E-01	0.1901E-02
0.2000E+00	-0.8957E-01	-0.8881E-01	0.9858E-03
0.2040E+00	0.2120E-01	0.2650E-01	0.1703E-02
0.2080E+00	0.3617E+00	0.3827E+00	0.1721E-02
0.2120E+00	0.4483E+00	0.4769E+00	0.2234E-02
0.2160E+00	-0.8813E-01	-0.7618E-01	0.1573E-02
0.2200E+00	-0.8430E-01	-0.8335E-01	0.1025E-02
0.2240E+00	0.1713E-01	0.2240E-01	0.1646E-02
0.2280E+00	0.3430E+00	0.3631E+00	0.1711E-02
0.2320E+00	0.4300E+00	0.4575E+00	0.2229E-02

0.2360E+00	-0.9147E-01	-0.7993E-01	0.1307E-02
0.2400E+00	-0.7877E-01	-0.7761E-01	0.1060E-02
0.2440E+00	0.1360E-01	0.1886E-01	0.1582E-02
0.2480E+00	0.3254E+00	0.3448E+00	0.1700E-02
0.2520E+00	0.4130E+00	0.4395E+00	0.2224E-02
0.2560E+00	-0.9416E-01	-0.8300E-01	0.1086E-02
0.2600E+00	-0.7306E-01	-0.7168E-01	0.1092E-02
0.2640E+00	0.1056E-01	0.1582E-01	0.1510E-02
0.2680E+00	0.3090E+00	0.3276E+00	0.1689E-02
0.2720E+00	0.3971E+00	0.4228E+00	0.2218E-02
0.2760E+00	-0.9630E-01	-0.8549E-01	0.8993E-03
0.2800E+00	-0.6722E-01	-0.6562E-01	0.1122E-02
0.2840E+00	0.7950E-02	0.1322E-01	0.1431E-02
0.2880E+00	0.2935E+00	0.3115E+00	0.1679E-02
0.2920E+00	0.3823E+00	0.4071E+00	0.2212E-02
0.2960E+00	-0.9797E-01	-0.8747E-01	0.7394E-03
0.3000E+00	-0.6133E-01	-0.5950E-01	0.1149E-02
0.3040E+00	0.5715E-02	0.1102E-01	0.1344E-02
0.3080E+00	0.2790E+00	0.2965E+00	0.1668E-02
0.3120E+00	0.3685E+00	0.3925E+00	0.2206E-02
0.3160E+00	-0.9924E-01	-0.8901E-01	0.6010E-03
0.3200E+00	-0.5541E-01	-0.5335E-01	0.1174E-02
0.3240E+00	0.3816E-02	0.9160E-02	0.1247E-02
0.3280E+00	0.2654E+00	0.2823E+00	0.1658E-02
0.3320E+00	0.3555E+00	0.3788E+00	0.2200E-02
0.3360E+00	-0.1002E+00	-0.9018E-01	0.4849E-03
0.3400E+00	-0.4950E-01	-0.4722E-01	0.1197E-02
0.3440E+00	0.2212E-02	0.7608E-02	0.1141E-02
0.3480E+00	0.2527E+00	0.2690E+00	0.1648E-02
0.3520E+00	0.3434E+00	0.3660E+00	0.2193E-02
0.3560E+00	-0.1008E+00	-0.9103E-01	0.3922E-03
0.3600E+00	-0.4364E-01	-0.4113E-01	0.1219E-02
0.3640E+00	0.8700E-03	0.6326E-02	0.1024E-02
0.3680E+00	0.2407E+00	0.2565E+00	0.1638E-02
0.3720E+00	0.3321E+00	0.3540E+00	0.2187E-02
0.3760E+00	-0.1011E+00	-0.9160E-01	0.3153E-03
0.3800E+00	-0.3784E-01	-0.3511E-01	0.1239E-02
0.3840E+00	-0.2421E-03	0.5279E-02	0.8937E-03
0.3880E+00	0.2294E+00	0.2448E+00	0.1628E-02
0.3920E+00	0.3215E+00	0.3428E+00	0.2180E-02
0.3960E+00	-0.1013E+00	-0.9193E-01	0.2515E-03
0.4000E+00	-0.3213E-01	-0.2917E-01	0.1257E-02
0.4040E+00	-0.1151E-02	0.4442E-02	0.7500E-03
0.4080E+00	0.2188E+00	0.2337E+00	0.1619E-02
0.4120E+00	0.3115E+00	0.3322E+00	0.2174E-02
0.4160E+00	-0.1012E+00	-0.9205E-01	0.1995E-03
0.4200E+00	-0.2651E-01	-0.2333E-01	0.1275E-02
0.4240E+00	-0.1881E-02	0.3787E-02	0.5907E-03
0.4280E+00	0.2088E+00	0.2233E+00	0.1609E-02
0.4320E+00	0.3022E+00	0.3224E+00	0.2167E-02
0.4360E+00	-0.1010E+00	-0.9200E-01	0.1576E-03
0.4400E+00	-0.2101E-01	-0.1761E-01	0.1291E-02
0.4440E+00	-0.2454E-02	0.3293E-02	0.4136E-03
0.4480E+00	0.1994E+00	0.2136E+00	0.1600E-02
0.4520E+00	0.2934E+00	0.3131E+00	0.2161E-02
0.4560E+00	-0.1007E+00	-0.9179E-01	0.1277E-03
0.4600E+00	-0.1563E-01	-0.1201E-01	0.1306E-02
0.4640E+00	-0.2891E-02	0.2938E-02	0.2161E-03
0.4680E+00	0.1905E+00	0.2043E+00	0.1592E-02
0.4720E+00	0.2851E+00	0.3043E+00	0.2155E-02
0.4760E+00	-0.1002E+00	-0.9146E-01	0.1182E-03
0.4800E+00	-0.1037E-01	-0.6549E-02	0.1320E-02
0.4840E+00	-0.3206E-02	0.2706E-02	0.7844E-04
0.4880E+00	0.1821E+00	0.1957E+00	0.1583E-02
0.4920E+00	0.2774E+00	0.2961E+00	0.2149E-02

0.4960E+00	-0.9963E-01	-0.9101E-01	0.1330E-03
0.5000E+00	-0.5251E-02	-0.1224E-02	0.1334E-02
0.5040E+00	-0.3417E-02	0.2579E-02	0.2615E-03
0.5080E+00	0.1742E+00	0.1875E+00	0.1575E-02
0.5120E+00	0.2701E+00	0.2884E+00	0.2142E-02
0.5160E+00	-0.9899E-01	-0.9048E-01	0.1710E-03
0.5200E+00	-0.2668E-03	0.3960E-02	0.1346E-02
0.5240E+00	-0.3537E-02	0.2545E-02	0.5345E-03
0.5280E+00	0.1668E+00	0.1797E+00	0.1567E-02
0.5320E+00	0.2632E+00	0.2811E+00	0.2136E-02
0.5360E+00	-0.9828E-01	-0.8987E-01	0.2149E-03
0.5400E+00	0.4576E-02	0.8998E-02	0.1358E-02
0.5440E+00	-0.3577E-02	0.2589E-02	0.8536E-03
0.5480E+00	0.1597E+00	0.1724E+00	0.1559E-02
0.5520E+00	0.2567E+00	0.2743E+00	0.2130E-02
0.5560E+00	-0.9751E-01	-0.8919E-01	0.2554E-03
0.5600E+00	0.9278E-02	0.1389E-01	0.1369E-02
0.5640E+00	-0.3549E-02	0.2703E-02	0.1219E-02
0.5680E+00	0.1531E+00	0.1655E+00	0.1551E-02
0.5720E+00	0.2506E+00	0.2678E+00	0.2125E-02
0.5760E+00	-0.9670E-01	-0.8846E-01	0.2928E-03
0.5800E+00	0.1384E-01	0.1863E-01	0.1379E-02
0.5840E+00	-0.3462E-02	0.2874E-02	0.1639E-02
0.5880E+00	0.1468E+00	0.1590E+00	0.1544E-02
0.5920E+00	0.2448E+00	0.2617E+00	0.2119E-02
0.5960E+00	-0.9586E-01	-0.8769E-01	0.3275E-03
0.6000E+00	0.1825E-01	0.2323E-01	0.1389E-02
0.6040E+00	-0.3324E-02	0.3096E-02	0.2129E-02
0.6080E+00	0.1408E+00	0.1528E+00	0.1537E-02
0.6120E+00	0.2393E+00	0.2559E+00	0.2114E-02
0.6160E+00	-0.9499E-01	-0.8689E-01	0.3597E-03
0.6200E+00	0.2253E-01	0.2768E-01	0.1398E-02
0.6240E+00	-0.3143E-02	0.3360E-02	0.2704E-02
0.6280E+00	0.1352E+00	0.1470E+00	0.1530E-02
0.6320E+00	0.2342E+00	0.2505E+00	0.2108E-02
0.6360E+00	-0.9410E-01	-0.8606E-01	0.3896E-03
0.6400E+00	0.2666E-01	0.3198E-01	0.1407E-02
0.6440E+00	-0.2926E-02	0.3659E-02	0.3389E-02
0.6480E+00	0.1299E+00	0.1414E+00	0.1524E-02
0.6520E+00	0.2293E+00	0.2453E+00	0.2103E-02
0.6560E+00	-0.9319E-01	-0.8521E-01	0.4175E-03
0.6600E+00	0.3066E-01	0.3614E-01	0.1415E-02
0.6640E+00	-0.2678E-02	0.3987E-02	0.4216E-02
0.6680E+00	0.1248E+00	0.1362E+00	0.1517E-02
0.6720E+00	0.2247E+00	0.2405E+00	0.2098E-02
0.6760E+00	-0.9228E-01	-0.8435E-01	0.4435E-03
0.6800E+00	0.3452E-01	0.4016E-01	0.1423E-02
0.6840E+00	-0.2405E-02	0.4339E-02	0.5233E-02
0.6880E+00	0.1200E+00	0.1312E+00	0.1511E-02
0.6920E+00	0.2204E+00	0.2359E+00	0.2093E-02
0.6960E+00	-0.9137E-01	-0.8348E-01	0.4679E-03
0.7000E+00	0.3824E-01	0.4403E-01	0.1431E-02
0.7040E+00	-0.2111E-02	0.4710E-02	0.6512E-02
0.7080E+00	0.1155E+00	0.1265E+00	0.1505E-02
0.7120E+00	0.2162E+00	0.2315E+00	0.2088E-02
0.7160E+00	-0.9046E-01	-0.8261E-01	0.4906E-03
0.7200E+00	0.4184E-01	0.4778E-01	0.1438E-02
0.7240E+00	-0.1800E-02	0.5096E-02	0.8166E-02
0.7280E+00	0.1111E+00	0.1220E+00	0.1500E-02
0.7320E+00	0.2123E+00	0.2274E+00	0.2083E-02
0.7360E+00	-0.8955E-01	-0.8174E-01	0.5120E-03
0.7400E+00	0.4530E-01	0.5139E-01	0.1444E-02
0.7440E+00	-0.1476E-02	0.5493E-02	0.1038E-01
0.7480E+00	0.1070E+00	0.1178E+00	0.1494E-02
0.7520E+00	0.2086E+00	0.2235E+00	0.2078E-02

0.7560E+00	-0.8865E-01	-0.8088E-01	0.5320E-03
0.7600E+00	0.4864E-01	0.5487E-01	0.1451E-02
0.7640E+00	-0.1141E-02	0.5899E-02	0.1351E-01
0.7680E+00	0.1032E+00	0.1138E+00	0.1489E-02
0.7720E+00	0.2051E+00	0.2198E+00	0.2074E-02
0.7760E+00	-0.8775E-01	-0.8002E-01	0.5508E-03
0.7800E+00	0.5186E-01	0.5822E-01	0.1457E-02
0.7840E+00	-0.7999E-03	0.6310E-02	0.1823E-01
0.7880E+00	0.9946E-01	0.1099E+00	0.1484E-02
0.7920E+00	0.2018E+00	0.2163E+00	0.2070E-02
0.7960E+00	-0.8687E-01	-0.7917E-01	0.5684E-03
0.8000E+00	0.5497E-01	0.6145E-01	0.1462E-02
0.8040E+00	-0.4532E-03	0.6724E-02	0.2618E-01
0.8080E+00	0.9595E-01	0.1063E+00	0.1479E-02
0.8120E+00	0.1987E+00	0.2129E+00	0.2065E-02
0.8160E+00	-0.8601E-01	-0.7833E-01	0.5851E-03
0.8200E+00	0.5795E-01	0.6456E-01	0.1468E-02
0.8240E+00	-0.1038E-03	0.7139E-02	0.4233E-01
0.8280E+00	0.9262E-01	0.1029E+00	0.1474E-02
0.8320E+00	0.1957E+00	0.2098E+00	0.2061E-02
0.8360E+00	-0.8516E-01	-0.7750E-01	0.6007E-03
0.8400E+00	0.6083E-01	0.6755E-01	0.1473E-02
0.8440E+00	0.2469E-03	0.7554E-02	0.9293E-01
0.8480E+00	0.8945E-01	0.9957E-01	0.1469E-02
0.8520E+00	0.1928E+00	0.2068E+00	0.2057E-02
0.8560E+00	-0.8432E-01	-0.7669E-01	0.6155E-03
0.8600E+00	0.6359E-01	0.7043E-01	0.1478E-02
0.8640E+00	0.5970E-03	0.7966E-02	0.1552E+01
0.8680E+00	0.8643E-01	0.9645E-01	0.1465E-02
0.8720E+00	0.1901E+00	0.2039E+00	0.2054E-02
0.8760E+00	-0.8351E-01	-0.7589E-01	0.6295E-03
0.8800E+00	0.6626E-01	0.7320E-01	0.1482E-02
0.8840E+00	0.9454E-03	0.8374E-02	0.9240E-01
0.8880E+00	0.8356E-01	0.9348E-01	0.1461E-02
0.8920E+00	0.1876E+00	0.2012E+00	0.2050E-02
0.8960E+00	-0.8271E-01	-0.7511E-01	0.6426E-03
0.9000E+00	0.6882E-01	0.7587E-01	0.1487E-02
0.9040E+00	0.1291E-02	0.8777E-02	0.5014E-01
0.9080E+00	0.8082E-01	0.9065E-01	0.1457E-02
0.9120E+00	0.1851E+00	0.1986E+00	0.2046E-02
0.9160E+00	-0.8193E-01	-0.7435E-01	0.6551E-03
0.9200E+00	0.7128E-01	0.7844E-01	0.1491E-02
0.9240E+00	0.1632E-02	0.9175E-02	0.3551E-01
0.9280E+00	0.7822E-01	0.8796E-01	0.1453E-02
0.9320E+00	0.1828E+00	0.1962E+00	0.2043E-02
0.9360E+00	-0.8117E-01	-0.7361E-01	0.6669E-03
0.9400E+00	0.7365E-01	0.8090E-01	0.1495E-02
0.9440E+00	0.1969E-02	0.9565E-02	0.2810E-01
0.9480E+00	0.7574E-01	0.8539E-01	0.1449E-02
0.9520E+00	0.1806E+00	0.1938E+00	0.2039E-02
0.9560E+00	-0.8043E-01	-0.7288E-01	0.6780E-03
0.9600E+00	0.7592E-01	0.8327E-01	0.1499E-02
0.9640E+00	0.2300E-02	0.9949E-02	0.2363E-01
0.9680E+00	0.7338E-01	0.8295E-01	0.1445E-02
0.9720E+00	0.1785E+00	0.1916E+00	0.2036E-02
0.9760E+00	-0.7971E-01	-0.7217E-01	0.6886E-03
0.9800E+00	0.7811E-01	0.8555E-01	0.1503E-02
0.9840E+00	0.2625E-02	0.1032E-01	0.2064E-01
0.9880E+00	0.7112E-01	0.8062E-01	0.1442E-02
0.9920E+00	0.1765E+00	0.1895E+00	0.2033E-02
0.9960E+00	-0.7901E-01	-0.7148E-01	0.6986E-03
0.1000E+01	0.8021E-01	0.8774E-01	0.1506E-02
0.1004E+01	0.2943E-02	0.1069E-01	0.1850E-01
0.1008E+01	0.6898E-01	0.7840E-01	0.1438E-02
0.1012E+01	0.1746E+00	0.1875E+00	0.2030E-02

0.1016E+01	-0.7832E-01	-0.7081E-01	0.7081E-03
0.1020E+01	0.8223E-01	0.8984E-01	0.1509E-02
0.1024E+01	0.3254E-02	0.1105E-01	0.1690E-01
0.1028E+01	0.6693E-01	0.7629E-01	0.1435E-02
0.1032E+01	0.1728E+00	0.1856E+00	0.2027E-02
0.1036E+01	-0.7766E-01	-0.7016E-01	0.7171E-03
0.1040E+01	0.8418E-01	0.9187E-01	0.1512E-02
0.1044E+01	0.3558E-02	0.1140E-01	0.1565E-01
0.1048E+01	0.6498E-01	0.7427E-01	0.1432E-02
0.1052E+01	0.1711E+00	0.1838E+00	0.2024E-02
0.1056E+01	-0.7702E-01	-0.6953E-01	0.7256E-03
0.1060E+01	0.8604E-01	0.9381E-01	0.1515E-02
0.1064E+01	0.3855E-02	0.1174E-01	0.1466E-01
0.1068E+01	0.6311E-01	0.7234E-01	0.1429E-02
0.1072E+01	0.1695E+00	0.1821E+00	0.2022E-02
0.1076E+01	-0.7640E-01	-0.6892E-01	0.7337E-03
0.1080E+01	0.8783E-01	0.9568E-01	0.1518E-02
0.1084E+01	0.4144E-02	0.1207E-01	0.1385E-01
0.1088E+01	0.6133E-01	0.7051E-01	0.1426E-02
0.1092E+01	0.1679E+00	0.1804E+00	0.2019E-02
0.1096E+01	-0.7580E-01	-0.6832E-01	0.7414E-03
0.1100E+01	0.8956E-01	0.9747E-01	0.1521E-02
0.1104E+01	0.4425E-02	0.1239E-01	0.1317E-01
0.1108E+01	0.5964E-01	0.6875E-01	0.1423E-02
0.1112E+01	0.1664E+00	0.1788E+00	0.2016E-02
0.1116E+01	-0.7521E-01	-0.6774E-01	0.7488E-03
0.1120E+01	0.9121E-01	0.9919E-01	0.1524E-02
0.1124E+01	0.4698E-02	0.1270E-01	0.1261E-01
0.1128E+01	0.5801E-01	0.6708E-01	0.1421E-02
0.1132E+01	0.1650E+00	0.1773E+00	0.2014E-02
0.1136E+01	-0.7465E-01	-0.6719E-01	0.7557E-03
0.1140E+01	0.9280E-01	0.1008E+00	0.1526E-02
0.1144E+01	0.4963E-02	0.1301E-01	0.1212E-01
0.1148E+01	0.5646E-01	0.6548E-01	0.1418E-02
0.1152E+01	0.1636E+00	0.1759E+00	0.2012E-02
0.1156E+01	-0.7410E-01	-0.6664E-01	0.7624E-03
0.1160E+01	0.9433E-01	0.1024E+00	0.1529E-02
0.1164E+01	0.5220E-02	0.1330E-01	0.1171E-01
0.1168E+01	0.5498E-01	0.6395E-01	0.1416E-02
0.1172E+01	0.1623E+00	0.1745E+00	0.2009E-02
0.1176E+01	-0.7357E-01	-0.6612E-01	0.7687E-03
0.1180E+01	0.9579E-01	0.1040E+00	0.1531E-02
0.1184E+01	0.5470E-02	0.1358E-01	0.1134E-01
0.1188E+01	0.5357E-01	0.6249E-01	0.1413E-02
0.1192E+01	0.1611E+00	0.1732E+00	0.2007E-02
0.1196E+01	-0.7306E-01	-0.6561E-01	0.7747E-03
0.1200E+01	0.9720E-01	0.1054E+00	0.1533E-02
0.1204E+01	0.5711E-02	0.1386E-01	0.1102E-01
0.1208E+01	0.5222E-01	0.6109E-01	0.1411E-02
0.1212E+01	0.1599E+00	0.1720E+00	0.2005E-02
0.1216E+01	-0.7256E-01	-0.6512E-01	0.7804E-03
0.1220E+01	0.9855E-01	0.1068E+00	0.1535E-02
0.1224E+01	0.5945E-02	0.1413E-01	0.1074E-01
0.1228E+01	0.5093E-01	0.5976E-01	0.1409E-02
0.1232E+01	0.1588E+00	0.1708E+00	0.2003E-02
0.1236E+01	-0.7209E-01	-0.6465E-01	0.7859E-03
0.1240E+01	0.9985E-01	0.1082E+00	0.1537E-02
0.1244E+01	0.6171E-02	0.1438E-01	0.1049E-01
0.1248E+01	0.4969E-01	0.5848E-01	0.1407E-02
0.1252E+01	0.1577E+00	0.1696E+00	0.2001E-02
0.1256E+01	-0.7162E-01	-0.6419E-01	0.7911E-03
0.1260E+01	0.1011E+00	0.1095E+00	0.1539E-02
0.1264E+01	0.6390E-02	0.1463E-01	0.1027E-01
0.1268E+01	0.4851E-01	0.5726E-01	0.1405E-02
0.1272E+01	0.1567E+00	0.1686E+00	0.1999E-02

0.1276E+01	-0.7118E-01	-0.6375E-01	0.7961E-03
0.1280E+01	0.1023E+00	0.1107E+00	0.1541E-02
0.1284E+01	0.6601E-02	0.1487E-01	0.1007E-01
0.1288E+01	0.4738E-01	0.5610E-01	0.1403E-02
0.1292E+01	0.1557E+00	0.1675E+00	0.1997E-02
0.1296E+01	-0.7075E-01	-0.6332E-01	0.8008E-03
0.1300E+01	0.1034E+00	0.1119E+00	0.1543E-02
0.1304E+01	0.6805E-02	0.1510E-01	0.9888E-02
0.1308E+01	0.4629E-01	0.5498E-01	0.1401E-02
0.1312E+01	0.1548E+00	0.1665E+00	0.1995E-02
0.1316E+01	-0.7033E-01	-0.6291E-01	0.8053E-03
0.1320E+01	0.1046E+00	0.1131E+00	0.1544E-02
0.1324E+01	0.7003E-02	0.1533E-01	0.9724E-02
0.1328E+01	0.4526E-01	0.5391E-01	0.1399E-02
0.1332E+01	0.1539E+00	0.1656E+00	0.1994E-02
0.1336E+01	-0.6993E-01	-0.6251E-01	0.8096E-03
0.1340E+01	0.1056E+00	0.1142E+00	0.1546E-02
0.1344E+01	0.7193E-02	0.1554E-01	0.9575E-02
0.1348E+01	0.4427E-01	0.5289E-01	0.1398E-02
0.1352E+01	0.1530E+00	0.1647E+00	0.1992E-02
0.1356E+01	-0.6954E-01	-0.6212E-01	0.8137E-03
0.1360E+01	0.1066E+00	0.1153E+00	0.1548E-02
0.1364E+01	0.7376E-02	0.1575E-01	0.9439E-02
0.1368E+01	0.4332E-01	0.5191E-01	0.1396E-02
0.1372E+01	0.1522E+00	0.1638E+00	0.1990E-02
0.1376E+01	-0.6917E-01	-0.6175E-01	0.8177E-03
0.1380E+01	0.1076E+00	0.1163E+00	0.1549E-02
0.1384E+01	0.7553E-02	0.1595E-01	0.9315E-02
0.1388E+01	0.4241E-01	0.5097E-01	0.1394E-02
0.1392E+01	0.1514E+00	0.1630E+00	0.1989E-02
0.1396E+01	-0.6880E-01	-0.6139E-01	0.8214E-03
0.1400E+01	0.1086E+00	0.1173E+00	0.1550E-02
0.1404E+01	0.7724E-02	0.1615E-01	0.9201E-02
0.1408E+01	0.4154E-01	0.5007E-01	0.1393E-02
0.1412E+01	0.1507E+00	0.1622E+00	0.1987E-02
0.1416E+01	-0.6846E-01	-0.6104E-01	0.8250E-03
0.1420E+01	0.1095E+00	0.1182E+00	0.1552E-02
0.1424E+01	0.7888E-02	0.1633E-01	0.9096E-02
0.1428E+01	0.4070E-01	0.4921E-01	0.1391E-02
0.1432E+01	0.1499E+00	0.1614E+00	0.1986E-02
0.1436E+01	-0.6812E-01	-0.6071E-01	0.8284E-03
0.1440E+01	0.1103E+00	0.1191E+00	0.1553E-02
0.1444E+01	0.8047E-02	0.1651E-01	0.9000E-02
0.1448E+01	0.3990E-01	0.4839E-01	0.1390E-02
0.1452E+01	0.1493E+00	0.1607E+00	0.1985E-02
0.1456E+01	-0.6779E-01	-0.6038E-01	0.8317E-03
0.1460E+01	0.1112E+00	0.1200E+00	0.1554E-02
0.1464E+01	0.8199E-02	0.1668E-01	0.8911E-02
0.1468E+01	0.3914E-01	0.4760E-01	0.1389E-02
0.1472E+01	0.1486E+00	0.1600E+00	0.1983E-02
0.1476E+01	-0.6748E-01	-0.6007E-01	0.8349E-03
0.1480E+01	0.1120E+00	0.1208E+00	0.1556E-02
0.1484E+01	0.8346E-02	0.1685E-01	0.8828E-02
0.1488E+01	0.3840E-01	0.4684E-01	0.1387E-02
0.1492E+01	0.1480E+00	0.1594E+00	0.1982E-02
0.1496E+01	-0.6718E-01	-0.5977E-01	0.8379E-03
0.1500E+01	0.1127E+00	0.1216E+00	0.1557E-02
0.1504E+01	0.8488E-02	0.1701E-01	0.8752E-02
0.1508E+01	0.3770E-01	0.4611E-01	0.1386E-02
0.1512E+01	0.1474E+00	0.1587E+00	0.1981E-02
0.1516E+01	-0.6689E-01	-0.5948E-01	0.8407E-03
0.1520E+01	0.1135E+00	0.1224E+00	0.1558E-02
0.1524E+01	0.8624E-02	0.1716E-01	0.8681E-02
0.1528E+01	0.3702E-01	0.4541E-01	0.1385E-02
0.1532E+01	0.1468E+00	0.1581E+00	0.1979E-02

0.1536E+01	-0.6661E-01	-0.5920E-01	0.8435E-03
0.1540E+01	0.1142E+00	0.1231E+00	0.1559E-02
0.1544E+01	0.8755E-02	0.1731E-01	0.8615E-02
0.1548E+01	0.3637E-01	0.4475E-01	0.1384E-02
0.1552E+01	0.1462E+00	0.1575E+00	0.1978E-02
0.1556E+01	-0.6634E-01	-0.5893E-01	0.8461E-03
0.1560E+01	0.1149E+00	0.1238E+00	0.1560E-02
0.1564E+01	0.8881E-02	0.1746E-01	0.8554E-02
0.1568E+01	0.3575E-01	0.4411E-01	0.1383E-02
0.1572E+01	0.1457E+00	0.1570E+00	0.1977E-02
0.1576E+01	-0.6607E-01	-0.5867E-01	0.8486E-03
0.1580E+01	0.1155E+00	0.1245E+00	0.1561E-02
0.1584E+01	0.9002E-02	0.1759E-01	0.8496E-02
0.1588E+01	0.3515E-01	0.4349E-01	0.1382E-02
0.1592E+01	0.1452E+00	0.1564E+00	0.1976E-02
0.1596E+01	-0.6582E-01	-0.5842E-01	0.8510E-03
0.1600E+01	0.1162E+00	0.1252E+00	0.1562E-02
0.1604E+01	0.9119E-02	0.1772E-01	0.8443E-02
0.1608E+01	0.3458E-01	0.4290E-01	0.1380E-02
0.1612E+01	0.1447E+00	0.1559E+00	0.1975E-02
0.1616E+01	-0.6558E-01	-0.5818E-01	0.8534E-03
0.1620E+01	0.1168E+00	0.1258E+00	0.1563E-02
0.1624E+01	0.9232E-02	0.1785E-01	0.8393E-02
0.1628E+01	0.3403E-01	0.4233E-01	0.1379E-02
0.1632E+01	0.1442E+00	0.1554E+00	0.1974E-02
0.1636E+01	-0.6534E-01	-0.5794E-01	0.8556E-03
0.1640E+01	0.1174E+00	0.1264E+00	0.1564E-02
0.1644E+01	0.9340E-02	0.1797E-01	0.8346E-02
0.1648E+01	0.3350E-01	0.4179E-01	0.1379E-02
0.1652E+01	0.1438E+00	0.1549E+00	0.1973E-02
0.1656E+01	-0.6512E-01	-0.5772E-01	0.8577E-03
0.1660E+01	0.1179E+00	0.1270E+00	0.1564E-02
0.1664E+01	0.9444E-02	0.1809E-01	0.8302E-02
0.1668E+01	0.3300E-01	0.4127E-01	0.1378E-02
0.1672E+01	0.1434E+00	0.1545E+00	0.1972E-02
0.1676E+01	-0.6490E-01	-0.5750E-01	0.8597E-03
0.1680E+01	0.1185E+00	0.1276E+00	0.1565E-02
0.1684E+01	0.9543E-02	0.1820E-01	0.8261E-02
0.1688E+01	0.3251E-01	0.4077E-01	0.1377E-02
0.1692E+01	0.1429E+00	0.1541E+00	0.1971E-02
0.1696E+01	-0.6469E-01	-0.5729E-01	0.8617E-03
0.1700E+01	0.1190E+00	0.1281E+00	0.1566E-02
0.1704E+01	0.9640E-02	0.1831E-01	0.8222E-02
0.1708E+01	0.3204E-01	0.4029E-01	0.1376E-02
0.1712E+01	0.1425E+00	0.1536E+00	0.1970E-02
0.1716E+01	-0.6449E-01	-0.5709E-01	0.8635E-03
0.1720E+01	0.1195E+00	0.1286E+00	0.1567E-02
0.1724E+01	0.9732E-02	0.1842E-01	0.8186E-02
0.1728E+01	0.3159E-01	0.3982E-01	0.1375E-02
0.1732E+01	0.1422E+00	0.1532E+00	0.1970E-02
0.1736E+01	-0.6429E-01	-0.5689E-01	0.8653E-03
0.1740E+01	0.1200E+00	0.1291E+00	0.1567E-02
0.1744E+01	0.9821E-02	0.1852E-01	0.8152E-02
0.1748E+01	0.3116E-01	0.3938E-01	0.1374E-02
0.1752E+01	0.1418E+00	0.1528E+00	0.1969E-02
0.1756E+01	-0.6410E-01	-0.5670E-01	0.8671E-03
0.1760E+01	0.1204E+00	0.1296E+00	0.1568E-02
0.1764E+01	0.9906E-02	0.1861E-01	0.8119E-02
0.1768E+01	0.3075E-01	0.3895E-01	0.1374E-02
0.1772E+01	0.1415E+00	0.1525E+00	0.1968E-02
0.1776E+01	-0.6392E-01	-0.5652E-01	0.8687E-03
0.1780E+01	0.1209E+00	0.1301E+00	0.1569E-02
0.1784E+01	0.9988E-02	0.1871E-01	0.8089E-02
0.1788E+01	0.3035E-01	0.3854E-01	0.1373E-02
0.1792E+01	0.1411E+00	0.1521E+00	0.1967E-02

0.1796E+01	-0.6374E-01	-0.5635E-01	0.8703E-03
0.1800E+01	0.1213E+00	0.1305E+00	0.1569E-02
0.1804E+01	0.1007E-01	0.1880E-01	0.8061E-02
0.1808E+01	0.2997E-01	0.3815E-01	0.1372E-02
0.1812E+01	0.1408E+00	0.1518E+00	0.1967E-02
0.1816E+01	-0.6357E-01	-0.5618E-01	0.8718E-03
0.1820E+01	0.1217E+00	0.1309E+00	0.1570E-02
0.1824E+01	0.1014E-01	0.1888E-01	0.8034E-02
0.1828E+01	0.2960E-01	0.3777E-01	0.1371E-02
0.1832E+01	0.1405E+00	0.1515E+00	0.1966E-02
0.1836E+01	-0.6341E-01	-0.5601E-01	0.8733E-03
0.1840E+01	0.1221E+00	0.1314E+00	0.1571E-02
0.1844E+01	0.1022E-01	0.1897E-01	0.8008E-02
0.1848E+01	0.2924E-01	0.3740E-01	0.1371E-02
0.1852E+01	0.1402E+00	0.1511E+00	0.1965E-02
0.1856E+01	-0.6325E-01	-0.5585E-01	0.8747E-03
0.1860E+01	0.1225E+00	0.1318E+00	0.1571E-02
0.1864E+01	0.1029E-01	0.1904E-01	0.7984E-02
0.1868E+01	0.2890E-01	0.3705E-01	0.1370E-02
0.1872E+01	0.1399E+00	0.1508E+00	0.1965E-02
0.1876E+01	-0.6310E-01	-0.5570E-01	0.8760E-03
0.1880E+01	0.1229E+00	0.1321E+00	0.1572E-02
0.1884E+01	0.1035E-01	0.1912E-01	0.7961E-02
0.1888E+01	0.2858E-01	0.3671E-01	0.1370E-02
0.1892E+01	0.1396E+00	0.1506E+00	0.1964E-02
0.1896E+01	-0.6295E-01	-0.5555E-01	0.8773E-03
0.1900E+01	0.1232E+00	0.1325E+00	0.1572E-02
0.1904E+01	0.1042E-01	0.1919E-01	0.7940E-02
0.1908E+01	0.2826E-01	0.3639E-01	0.1369E-02
0.1912E+01	0.1394E+00	0.1503E+00	0.1963E-02
0.1916E+01	-0.6281E-01	-0.5541E-01	0.8786E-03
0.1920E+01	0.1235E+00	0.1329E+00	0.1573E-02
0.1924E+01	0.1048E-01	0.1926E-01	0.7920E-02
0.1928E+01	0.2796E-01	0.3608E-01	0.1368E-02
0.1932E+01	0.1391E+00	0.1500E+00	0.1963E-02
0.1936E+01	-0.6267E-01	-0.5528E-01	0.8798E-03
0.1940E+01	0.1239E+00	0.1332E+00	0.1573E-02
0.1944E+01	0.1054E-01	0.1933E-01	0.7901E-02
0.1948E+01	0.2766E-01	0.3577E-01	0.1368E-02
0.1952E+01	0.1389E+00	0.1497E+00	0.1962E-02
0.1956E+01	-0.6254E-01	-0.5514E-01	0.8809E-03
0.1960E+01	0.1242E+00	0.1335E+00	0.1574E-02
0.1964E+01	0.1060E-01	0.1940E-01	0.7882E-02
0.1968E+01	0.2738E-01	0.3548E-01	0.1367E-02
0.1972E+01	0.1386E+00	0.1495E+00	0.1962E-02
0.1976E+01	-0.6241E-01	-0.5501E-01	0.8820E-03
0.1980E+01	0.1245E+00	0.1338E+00	0.1574E-02
0.1984E+01	0.1065E-01	0.1946E-01	0.7865E-02
0.1988E+01	0.2711E-01	0.3521E-01	0.1367E-02
0.1992E+01	0.1384E+00	0.1493E+00	0.1961E-02
0.1996E+01	-0.6229E-01	-0.5489E-01	0.8831E-03
0.2000E+01	0.1248E+00	0.1342E+00	0.1574E-02

5.8. Verificări experimentale

Rezultatele obținute în urma analizelor electromagnetice și termice cuplate făcute pe model sunt, calitative, în concordanță cu cele oferite de literatura de specialitate. Verificarea cantitativă a acestora, adică verificarea lor valorică, este o problemă dificilă în cazul concret al cuptorului de inducție luat în considerare. (Acesta

este un cuptor de 3,5 t din dotarea sectorului cald al Uzinei Constructoare de Mașini Reșița).

S-a făcut totuși o verificare a variației în timp a temperaturii în trei puncte de la suprafața superioară a șarjei. Cele trei puncte au fost alese ca în figura 5.32.

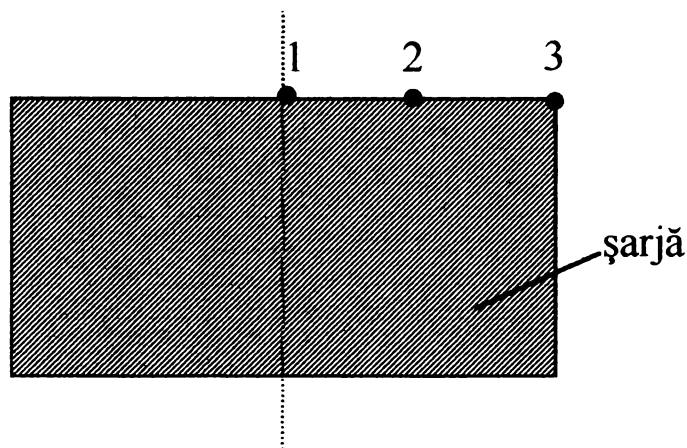


Fig.5.32.

În aceste trei puncte s-a determinat cu ajutorul programului variația în timp a temperaturii, rezultând diagramele prezentate în figurile 5.33; 5.34; 5.35.

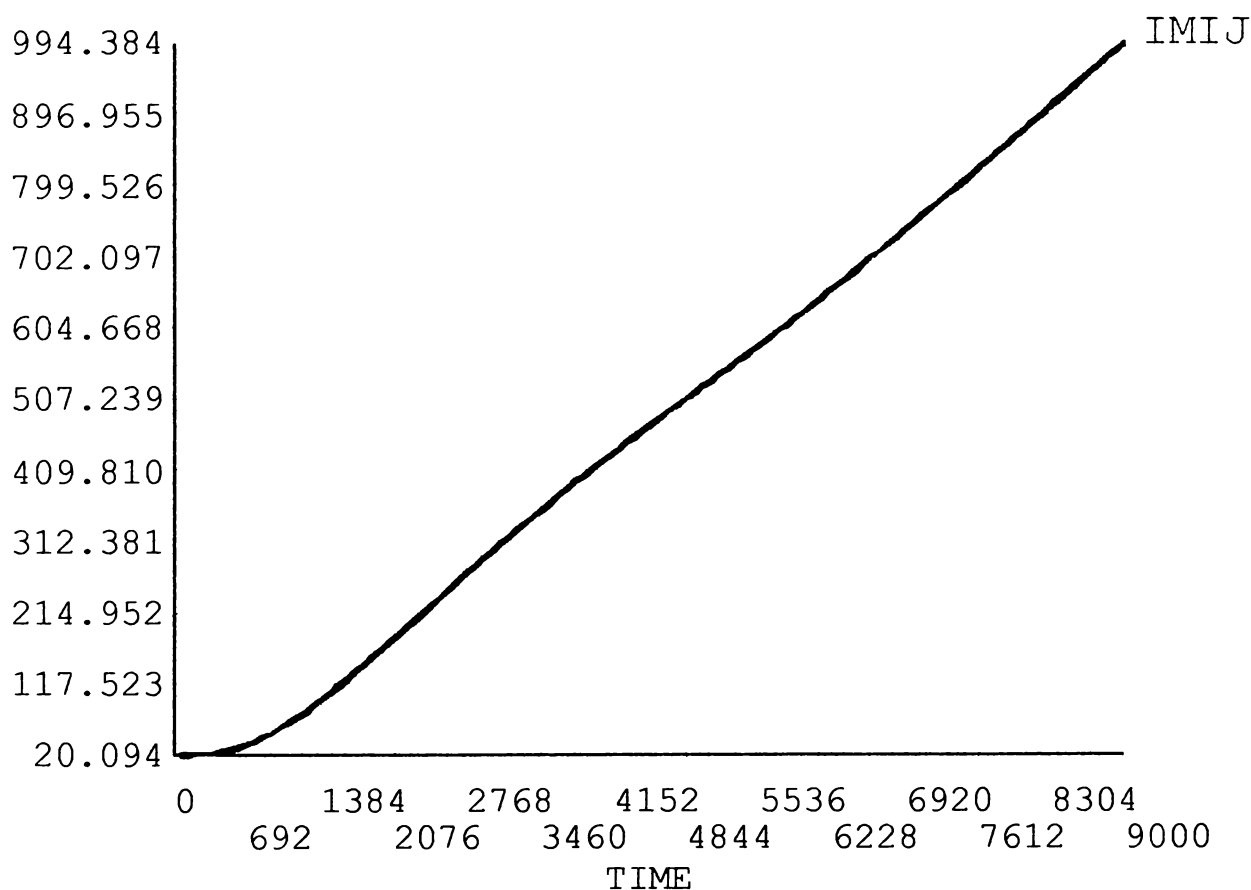


Fig.5.33. Variația în timp a temperaturii în punctul 1

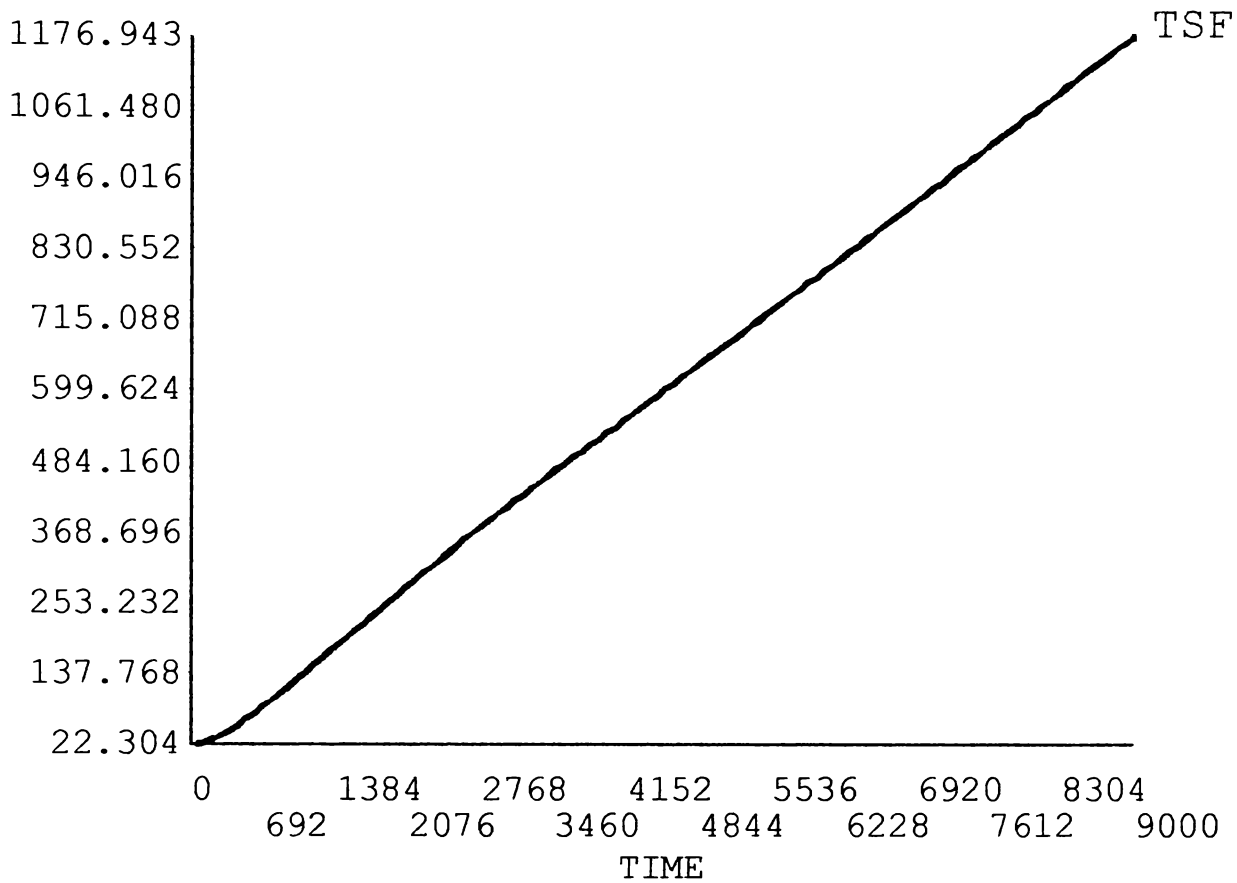


Fig.3.34. Variația în timp a temperaturii în punctul 2

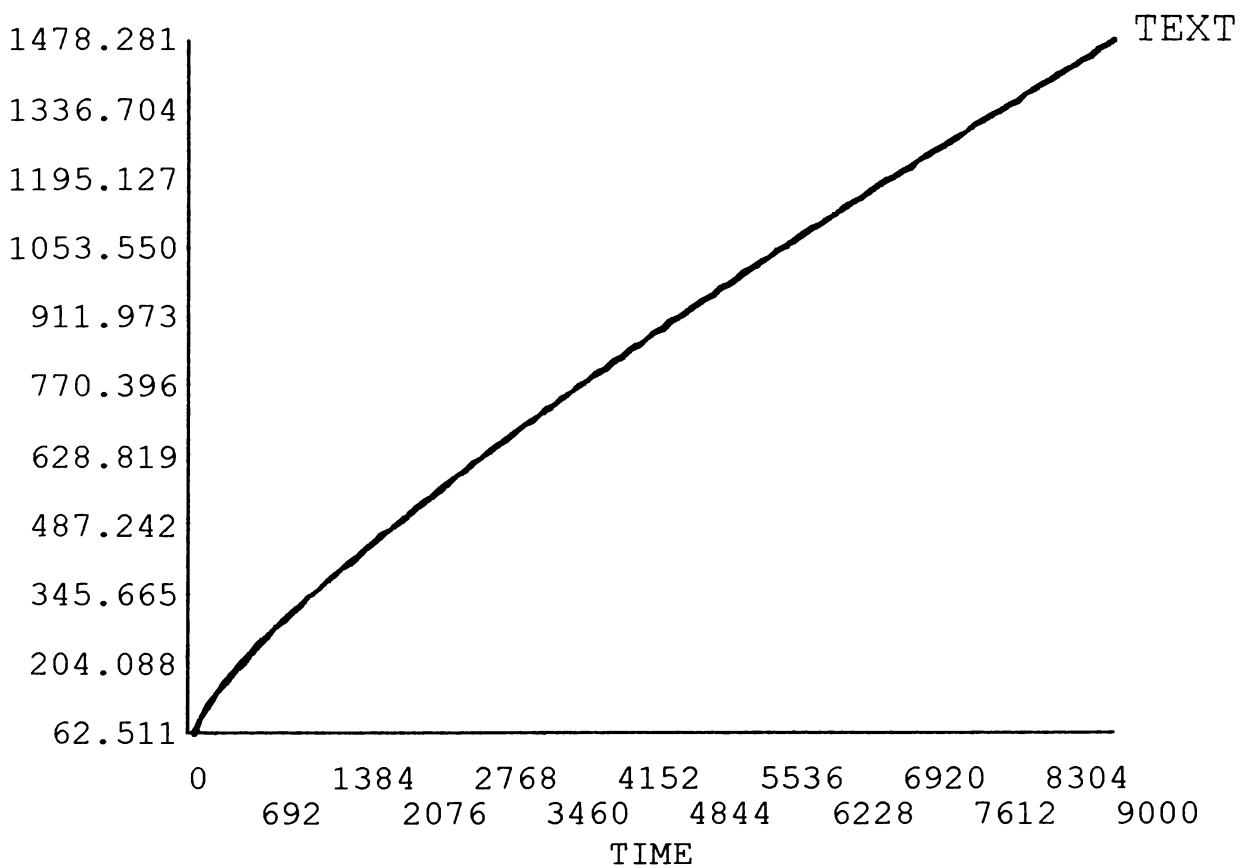


Fig.3.35. Variația în timp a temperaturii în punctul 3

În aceleași puncte s-au măsurat cu ajutorul unor termocuple temperaturile la diferite intervale de timp . În tabelul 5.9 sunt prezentate pentru comparare valorile temperaturilor obținute pe cele două căi.

Tabelul 5.9.

Timpul de la conectare	Temperatura determinată pe model			Temperatura măsurată		
	Pct.1	Pct.2	Pct.3	Pct.1	Pct.2	Pct.3
½ h	214	240	487	209,5	238	486
1 h	340	486	770	331	481	764
1,5 h	592	720	982	584	709	971
2 h	801	946	1195	792	931	1142

Se constată din tabel, că temperaturile măsurate sunt în general ceva mai mici decât cele determinate pe model. Acest fapt se datorează necunoașterii cu suficientă precizie a coeficientului de emisie a radiației pentru oțelul considerat. Valoarea maximă relativă a diferenței de temperatură între determinarea pe model și cea măsurată experimental este sub 6%.

CAPITOLUL VI

CONCLUZII. CONTRIBUȚII PERSONALE

6.1. Concluzii

1. Cuptorul electric de inducție cu creuzet, din punct de vedere electric, poate fi asimilat cu un transformator, în aer, la care primarul îl constituie bobina cuptorului, iar secundarul șarja.

2. Curenții turbionari induși în șarjă, o încălzesc prin efect electrocaloric și din acest motiv șarja își schimbă parametrii electrici și magnetici, respectiv rezistivitatea ρ și permeabilitatea magnetică relativă μ_v , fapt ce duce la modificarea distribuției curenților turbionari.

3. Datorită faptului că pe tot parcursul procesului de încălzire, parametrii electrici ai cuptorului se modifică, se poate afirma, că pe tot acest parcurs, în circuitul electric al cuptorului avem de-a face cu un regim tranzitoriu.

4. Principial în cazul cuptorului electric de inducție avem de-a face cu un proces de difuzie. Acest proces este determinat de existența unui câmp electromagnetic cuplat cu unul termic.

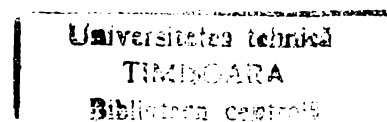
5. În lucrare, pe baza formelor locale ale legilor câmpului electromagnetic și ale transmisiei căldurii, s-au scris ecuațiile cuplate ale câmpului electromagnetic și termic, cu precizarea condițiilor de frontieră. Aceste ecuații sunt ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic, a căror rezolvare este dificilă și în general este făcută în anumite cazuri particulare, ce permit ipoteze simplificatoare.

6. În lucrare se prezintă modele matematice complete pentru procesele ce au loc în cuptorul de inducție.

7. Metoda prezentată în lucrare, permite simularea, analiza și optimizarea oricăror dispozitive și instalații de natură electromagnetică, mecanică, termică etc. deci și a cuptorului de inducție.

8. În urma analizelor, electromagnetice și termice cuplate, s-au obținut o serie de rezultate importante în activitatea de cercetare și proiectare a cuptoarelor de inducție cum ar fi:

- spectrul liniilor de câmp magnetic în șarjă;



- distribuția densității de curent în șarjă la diferite intervale de timp de la conectare;
- variația în timp a puterii calorice specifice, dezvoltată în diferite puncte din interiorul șarjei;
- distribuția forțelor de natură electromagnetică ce acționează în cuptor și variația în timp a valorii acestora;
- câmpul de temperaturi în șarjă la diferite intervale de timp;
- gradientul câmpului de temperaturi;
- variația în timp a inductivității bobinei cuptorului;

9. Prin utilizarea analizelor cuplate se reduc datele de intrare, doar la cele care se cunosc cu precizie, cum ar fi căderea de tensiune pe bobina cuptorului, sau tensiunea electromotoare a sursei de alimentare a cuptorului. Totodată, se ia în considerare și dependența de temperatură a proprietăților de material și prin introducerea curbei de magnetizare și faptul că materialele feromagnetice sunt neliniare.

10. Prin luarea în considerare în cazul realizării modelului geometric prezentat în lucrare și a spațiului ce înconjoară cuptorul până la infinit se elimină neajunsul că în general, condițiile de frontieră în cazul cuptorului de inducție nu se cunosc cu precizie suficientă.

La modelul considerat condițiile de frontieră sunt cele de la infinit. Acest aspect poate fi luat în considerare în cazul studierii oricăror sisteme la care condițiile de frontieră termice sau electromagnetice nu se cunosc cu precizie suficient de bună.

11. În viitor în atenția autorului stă și realizarea unei analize structurale, care să permită și determinarea diferitelor mișcări de material ce apar în șarja topită. De asemenea se vor avea în vedere și unele studii de optimizare în domeniul de proiectare al cuptoarelor de inducție, precum și al proceselor tehnologice.

6.2. Contribuții personale

6.2.1. Contribuții teoretice

1. Definierea regimului tranzitoriu în circuitul electric al cuptorului de inducție.
2. Scrierea ecuațiilor ce descriu regimul tranzitoriu din circuitul electric al cuptorului de inducție la semnal treaptă.
3. Determinarea cu ajutorul calculului operațional a expresiei curentului din bobina cuptorului de inducție, la conectarea la un semnal treaptă.

4. Determinarea expresiei constantelor de timp, corespunzătoare circuitului electric al cuptorului de inducție și a mărimilor de care depind acestea.

5. Determinarea expresiei analitice a variației în timp a curentului din bobina cuptorului, în regimul tranzitoriu, corespunzător conectării acestuia la o sursă de tensiune sinusoidală.

6. Stabilirea pe baza unui însemnat studiu bibliografic a modelului matematic ce descrie câmpul electromagnetic cuplat cu cel termic, în cuptorul de inducție.

7. Stabilirea condițiilor complete ce trebuie impuse, pentru a asigura convergența soluției modelului potențialului magnetic vector.

8. Deducerea condițiilor de frontieră, ce trebuie impuse, pentru rezolvarea modelului potențialelor electromagnetice cu metoda elementelor finite.

9. Stabilirea caracteristicilor ce trebuie să le aibă elementele finite.

10. Justificarea metodelor de asamblare, a modelelor numerice elementale în modelul numeric global.

11. Stabilirea relațiilor pentru calculul elementelor matricei de rigiditate și a vectorului termenilor liberi ce intervin în modelul numeric elemental.

12. Deducerea modelului numeric necesar pentru realizarea unei analize cuplate.

6.2.2. Contribuții experimentale și practice

1. Determinarea pe cale experimentală a dependenței cu temperatura a rezistivității electrice la OLC 45.

2. Determinarea pe cale experimentală a dependenței susceptivității magnetice, intensitatea câmpului magnetic la diferite temperaturi pentru obținerea OLC45 și 18M₀MC10.

3. Determinarea pe cale experimentală a curbei fundamentale de magnetizare la OLC 45 cu ajutorul permeametrului Ilovici

4. Determinarea pe cale experimentală a ciclului de histerezis dinamic pentru OLC45, cu ajutorul calculatorului electronic.

5. Realizarea pe baza metodei elementelor finite a unui model corespunzător unui cuptor de inducție cu creuzet de 3,5t, aflat în dotarea U.C.M.Reșița.

6. Determinarea cu ajutorul unui program de calcul, bazat pe metoda elementelor finite, a spectrului liniilor de câmp magnetic din șarjă.

7. Determinarea distribuției densității de curent din șarjă la diferite intervale de timp de la conectarea cuptorului.

8. Determinarea puterii calorice specifice în punctele din interiorul șarjei la diferite intervale de timp.

9. Determinarea forțelor electromagnetice ce acționează în șarjă la diferite intervale de timp de la conectare.

10. Determinarea câmpului de temperaturi din șarjă, la diferite intervale de timp de la conectare.

11. Măsurarea cu ajutorul termocuplelor, în vederea unor verificări, a valorilor temperaturii în unele puncte de la suprafața șarjei, la diferite intervale de timp.

12. Determinarea pe model a curbei de variație în timp a curentului, la conectarea la o sursă de tensiune sinusoidală, pentru a se constata că este în coconcordanță cu expresia analitică dedusă teoretic.

Bibliografie

1. Akin, J. E. – Finite Elements for Analysis and Design, Harcourt Brace&Company, 1995
2. Altgauzen A. P., ș.a. – Instalații electrotehnice industriale, Ed. Tehnică, București, 1976
3. Andreescu N. – Electrotehnică, 15, 1967, p. 397
4. Andronescu Pl. – Bazele electrotehnicii, vol. I și II, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1972
5. Ardelean I. – Dispozitiv pentru determinarea rezistivității electrice la metale în intervalul de temperatură 80 – 700 K, Studia Univ. Babeș – Bolyai, Phisica, 1976, p. 78 – 80
6. Avramescu A. – Caracterizarea fenomenelor de difuzie în sistemele închise, cu ajutorul constantei de timp, Comunicările Acad. R.P.R., IX, 5, 433 – 443, 1959
7. Beckert U. und Reick H. – Numerische Berechnung der eindimensionaleu
8. Beckert U. und Reick H. – Numerische Berechnung der Wirbelstromerscheinungen in ferromagnetischen Zylinder bei sinusförmiger Randfeldstärke, I.E.T. 3/1979
9. Beckert U. – Numerische Berechnung der Wirbelstromerscheinungen in ferromagnetischen Zylinder bei feldstärkeabhängiger Permeabilität, I.E.T. 1/1977
10. Beckert U. – Ein numerisches Verfahren zur Berechnung Zwidimensionaler Wirbekstromprobleme, I.E.T. 1/1980
11. Beckert U. - Numerische Berechnung der Wirbelstromerscheinungen in ferromagnetischen Proben mit quadratischem Querschwitt. I.E.T. 3/1978.
12. Bossavit A. – stefan models for eddy – currents in steel, Etudes et Recherches 92141 Clamart, 1981
13. Burzo E. – Fizica fenomenelor magnetice, vol. I, Ed. Academiei R.S.R., 1979
14. Crepaz, G., Lupi, S. Maghini, M., Ramos, E. – High – Frequency surface Hardening with introduction heating pulse – operation Processes. Industrial Heating – October. 1983. p . 24-26.
15. De Mey G. – A method for calculating eddy curents in plates of arbitrary, Archiv für Elecktrotechnik 56, 1974
16. De Sabata, I., - Bazele electrotehnicii, vol I și II, Litografia I.P. ”Traian Vuia” – Timișoara, 1980 și 1974

17. Dogaru, D., - Elemente de grafică 3D, Ed. Științifică și enciclopedică, București, 1988
18. Dordea, T. – Mașini electrice, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1977
19. El-Markaby M. D., Fawyi, T.H., Ahmed M.T. – Approximate treatment of nonlinear eddy current problems, I.E.E.E. Trans. of Magnetics, vol. MAG-18, No. 6, 1982
20. Fawzi T.H., Ali K., Buike P.E. – Eddy current losses in finite length conducting cylinders, I.E.E.E. Trans. of Magnetics, vol. MAG-19, No. 1, 1983
21. Fluerașu, C. – Contribuții la problema încălzirii inductive la refulare netă a curenților turbionari, Teză de doctorat, I.P. București, 1983.
22. Geisel, H. – Konduktives oder inductives Erwärmen von Werkstücken Abmessungen mit Frequenzen f 50 Hz. Elektrowärme international 44 (1986), 33 Juni, p. 107 – 115
23. Kamar, A.M. – Solution of nonlinear eddy current problems using residual finite element method for space and time discretization, I.E.E.E. Trans. On Magnetics, vol. MAG – 19, No.5 1983
24. Gong, L., Hagel, R., Unbehauen R., - On the Nonlinear Eddy Current Field Coupled to the nonlinear Heat Transfer, I.E.E.E. Trans. On Magnetics, vol.29, No.2, p. 1546-1549, March 1993
25. Hammond P. and Sykulski J.K. – Engineering Electromagnetism, Physical Processes and Computation, 1994
26. Ifrim, A., Notinger, P. – Materiale electrotehnice, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1979
27. Ilonca, Gh. – Măsurarea rezistivității electrice la plăcuțe subțiri de material prin metoda sondelor, Studia, Univ. "Babeș - Bolyai", Mathematica-physica, 1967, p. 127-132
28. Janssen, H.H.J.M. – Simulation coupled electromagnetic and heat dissipation problems. I.E.E.E. Trans. Magn., vol. 30, No.5, p. 3331 – 3334, sept. 1994
29. Juszczak, E.N. – The chosen problem of modelling of the electromagnetic and thermal fields. ISEF 1985, Warsa W, sept. 26-28, p. 303-306
30. Kamar, A.M. – Solution of nonlinear eddy current problems using residual finite element method for space and time discretization, I.E.E.E. Trans. On Magnetics, vol. MAG – 19, No.5 1983

31. Kittel, C. – Introducere în fizica corpului solid, Ed. Tehnică, București, 1972
32. Kohlgrüber, K. – Differenzverfahren hoher Genauigkeit für symmetrische Wärmeleitprobleme in Platten, Electrowärme 1/1985
33. Kolbe, E., Schulze, D. – Möglichkeiten zur Modellierung der inductiven Erwärmung mit Vorschub, Electrowärme 6/1981
34. Konkov, V.L., Rubțova, R.S. – Izvestia Vis Uceb zav, Fizica 1, 1965, p. 135
36. Lavers, I.D. – Finite element solution of nonlinear two dimensional temode eddy current problems, I.E.E.E. Trans. On Magnetics, vol. MAG – 19, No.5 1983
37. Leuca, T. – Determinarea experimentală a variației rezistivității oțelurilor cu temperatura, Lucr. științifice, ser.A, 1983/1984, I.I.S. Oradea, pag. 29-32
38. Leuca, T., Zalany, Z. – Aproximarea analitică a caracteristicilor neliniare de material ale oțelurilor, Lucr. științifice, ser.A, 1983/1984, I.I.S., pag. 53-58
39. Leuca, T. – Metode de calcul ale câmpului electromagnetic în medii neliniare fără histerezis. Aplicații la încălzirea inductivă, Teză de doctorat, I.P. "Traian Vuia" Timișoara, 1987
40. Leuca, T. – Determinarea experimentală a variației permeabilității magnetice a oțelurilor cu temperatura și cu intensitatea câmpului magnetic, Lucr. științifice, ser.A, 1983/1984, I.I.S. Oradea, pag. 59-60
41. Leuca, T., Zalany, Z. – Aproximare spline ale unor caracteristici neliniare folosind un calcul numeric universal, Lucr. științifice, ser.A, 1983/1984, I.I.S. Oradea, pag. 73-78
42. Leuca, T. – Studiul pe calculator numeric al procesului de încălzire prin inducție la corpuri cilindrice, Bul. științ. al Ins. Pol. Cluj, 29 (1986), ser. Electrotehnica – Energetica – Informatica
43. Leuca, T. – Simularea numerică a procesului de încălzire prin inducție a semifabricatelor cilindrice, Bul. științ. al Ins. Pol. Cluj, 30 (1989), ser. Electrotehnica – Energetica – Informatica
44. Leuca, T., Maghiar, T. – Curenți turbionari în plăci, Lucr. științifice, ser.A, Științe tehnice, matem, fizică, chimie 1987/1988, pag. 141-144
45. Leuca, T. – Contribuții privind rezolvarea problemei cuplate de câmp electromagnetic și termic. Aplicații la încălzirea inductivă. Lucr. științifice, ser.A, Științe tehnice, matem, fizică, chimie 1987/1988, pag. 115-128

46. Leuca, T. – Some contribution to solving the coupled electromagnetic and thermal field problem. Some applications with the inductive heating, Rev. Roum. Sci. Tech. Electrotech. et. Energ. 1990, 2., pag. 233-251
47. Leuca, T. – Some contribution to the design and exploitation of the induction heating equipment by using numerical means, Rev. Roum. Sci. Tech. Electrotech. et. Energ. 1990, 4., pag. 471-482
48. Leuca, T. – Calculul câmpurilor electromagnetice și termice în medii conductoare neferomagnetice, Progrese în fizică, Oradea 1989, pag. 216
49. Leuca, T. – Numerical analysis of the electromagnetic field coupled with thermal one in conducting cylindrical units, Proceedings ICEH 1991 Sibiu.
50. Leuca, T., Silaghi, M. – Contributions regarding the mathematical simulation coupled physic phenomena, 113th Pannonian applied mathematical meeting, Oct. 1995, Bardejovske Kupele, Slovak Republic, PREPRINTS p.107-110
51. Maghiar, T., Gavriș, M., Leuca, T., ș.a. – Cercetări pentru realizarea unei instalații de încălzit prin inducție de medie frecvență cu inverter static. Protocol la contractul nr. 1671/1980 între I.I.S. Oradea și Întreprinderea "Înfrățirea" din Oradea.
52. Maghiar, T., Leuca, T., ș.a. – Instalații de încălzit semifabricate pentru forjare, prin inducție, Protocol la contractul nr. 4100/1981 între I.I.S. Oradea și I.A.M.T. Oradea
53. Maghiar, T., Leuca, T., ș.a. – Sursă de încălzit semifabricate de medie frecvență în vederea forjării. Protocol la contractul nr. 4636/1981 între I.I.S. Oradea și I.M. Oradea
54. Maghiar, T., Leuca, T., ș.a. – Sursă de medie frecvență pentru încălzirea prin inducție a semifabricatelor din Cu. Protocol la contractul nr. 125/1985 între I.I.S. Oradea și Electroaparataj București
55. Maghiar, T., Leuca, T. – Some implication of the numerical analysis of the electromagnetic field coupled with the thermal one in the design and exploitation of the induction heating equipment, Proceedings ICEH 1991 Sibiu
56. Maghiar, T., Leuca, T. – The spatial and temporal of the coupled electromagnetic and thermal fields in a ferromagnetic cylinder, Proceedings ICATE 1991 Craiova Session B21
57. Maghiar, T. Leuca, T. – Digital modelation of certain coupled physical phenomena. Results and applications, Proceeding, First Conference on Applied and Industrial Mathematics 1993

58. Maghiar, T., Leuca, T. – Model de calcul pe IBM-PC utilizând un model digital Crank-Nicolson în problema cuplată de câmp electromagnetic și termic, *Analele Universității din Oradea*, mai 1994, Fascicola Electrotehnică vol. I, pag. 105
59. Maghiar, T., Leuca, T., Vancea, Fl., Vancea, C. – Distribuția spațio-temporală a câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic într-o bară cilindrică de oțel utilizând un model digital Crank-Nicolson, *Analele Universității din Oradea*, Fascicola Electrotehnică, Secțiunea A, Iunie 1995
60. Maten, E.J.W., Melissen, J.B.M. – Simulation of inductiv heating. *I.E.E.E. Transaction of Magnetics*, vol. 28, No. 2, March 1992
61. Marinescu, I.N., Nanu, D., Oprean, C. – Tehnologii neconvenționale. Dicționar de cuvinte – E. I.N.I.D., București, 2001
62. Meloab, D., Longeot, O., Krähenbühl, L., Nicolas, L., - Control of one induction heat treatment by the measure of power. *I.E.E.E. Transaction of Magnetics*, vol. 29, No. 2, p. 1558-1561, March 1993
63. Mitchell, A.R. – Computational methods in partial differential equations New – York. Wiley, 1971
64. Mîndru, Gh., Rădulescu, M.M. – Analiza numerică a câmpului electromagnetic, Ed. Dacia, Cluj Napoca, 1986
65. Mocanu, C.I. – Teoria câmpului electromagnetic, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1981
66. Morisue, T. – Magnetic vector potential and electric scalar potential in three dimensional addy current problems, *I.E.E.E. Transaction of Magnetics*, vol. MAG-18, No. 2, 1982
67. Mühlbauer, A., Muižnieks, A., Lebmann, H.J. – The calculation of 3D high-frecvency electromagnetic fields during induction heating using the BEM. *I.E.E.E. Trans. on Magnetics*, vol. MAG-18, No. 2, 1982
68. Müller, W. – A new iteration technique for solving stationary eddy current problems using the method of finite differences, *I.E.E.E. Trans. on Magnetics*, vol. MAG-18, No. 2, 1982
69. Nanu, A. – Prelucrarea dimensională prin eroziune electrică în câmp magnetic – E.Facla, Timișoara, 1977

70. Nanu, A. – Tehnologia materialelor – E.D.P., București, 1983
71. Nanu, Dan - Prelucrarea dimensională prin eroziune electrică în câmp magnetic – Teză de doctorat – Cluj Napoca 1979
72. Nemcov, V.S., Polevodov, B.S. – Modelarea matematică pentru calculator a instalațiilor de încălzire de înaltă frecvență (l. rusă). Maisnostroenie. Leningrad, 1980
73. Pennman, I., Kamar, A.M. – Linearization of saturable magnetic field problems, including eddy currents, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol. MAG-18, No. 2, 1982
74. Poltzs, J., Kuffel, E., Sikora, R. – A new iterative method for eddy current problems, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol. MAG-18, No. 2, 1982
75. Pop, I., Tehetchernicov, V.I. – Prib. i. Tekh. Exper. 5, 1964, p. 180.
76. Procopiu, S. – Opere alese, Ed. Academiei R.S.R., 1970
77. Purcell, E. – Electricitate și magnetism, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1982
78. Racoveanu, N., ș.a. – Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic, Ed. Tehnică, București 1977
79. Răduleț, R. – Bazele teoretice ale electrotehnicii, vol. I, II, III, IV, Ed. Energetică de stat, 1954-1956
80. Salvadori, M.G., Baron, M.L. – Metode numerice în tehnică, Ed. Tehnică București, 1972
81. Savin, Gh., Rosman, H. – Circuite electrice neliniare și parametrice, Ed. Tehnică, București, 1973
82. Schlett Zeno – Forțe de gradient și aplicații, Ed. Univ. Timișoara, 1995
83. Schlett Zeno – Experimente de fizică și aplicații val I, Ed. Univ. Timișoara, 1998
84. Silvester P.P. and Ferrari, R.L. – Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University Press, 1994
85. Sluhoțkii, A.E. – Inductoare pentru încălzirea electrică, Ed. Tehnică, București, 1982
86. Stănciulescu, F. – Analiza și simularea sistemelor neliniare, Ed. Academiei R.S.R., București, 1974
87. Șchiop, A.I. – Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale, Ed. Academiei R.S.R., București, 1975

88. Şchiop, A.I. – Analiza unor metode de discretizare, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1978
89. Şora, C. – Bazele electrotehnicii, Ed. Didactică şi pedagogică., Bucureşti, 1982
90. Şora, C., ş.a. – Bazele electrotehnicii, probleme, Ed. I.P. Timișoara, 1973
- 91.Şora, I., Gologanov, N. – *Electrotermie și electrotehnologii-Vol.I* – E.T., Bucureşti, 1990
92. Timotim, A., ş.a. – Lecții de bazele electrotehnicii, Ed. Didactică și pedagogică., Bucureşti, 1970
93. Urbanek, P., Skorek, A., Zaremba, M.B. – Magnetic flux and temperature analysis in induction heated steel cylinder. I.E.E.E. Trans. on Magn, vol. 30, No. 5, p. 3328-3330, sept. 1994
94. Vetreş, I. – Teză de doctorat, I.P. "Traian Vuia" Timișoara, 1975
95. Vonsovski, S.V. – Magnetismul, Ed. Științifică și enciclopedică, Bucureşti, 1981
96. Gruescu, L – Unele considerații privind supratensiunile de comutație la liniile electrice lungi – Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an V, nr.2, 1998, ISSN 1453-7394
- 97.Tătucu, I., Gruescu, L – *Electrotehnică și mașini electrice* – E.U.E.M., Reșița, 1988
- 98.Tătucu, I. – *Modelarea arcului electric și a câmpului electromagnetic la sudarea cu arcul electric* - Referat nr.1 – U.P.T., Facultatea de Mecanică, Timișoara 1999
- 99.Tătucu, I. – *Măsurarea caracteristicilor dinamice ale surselor de sudare*. Referat nr.2 – U.P.T., Timișoara, 2000
- 100.Tătucu, I. – *Factori de influență a calității îmbinărilor sudate cu arcul electric*.- Referat nr.3 – U.P.T., Timișoara, 2000
- 101.Tătucu, I., Gruescu, L. – *Contribution to the designing of a multiwired shunt of the basis of the response time* – Analele Facultății de Inginerie Hunedoara, Tom II, an I, fascicol 2, ISSN 1454-6531, 2000
- 102.Tătucu, I., Gruescu, L. – *On the response time of the measuring circuit with a shunt* – Analele Facultății de Inginerie Hunedoara, Tom II, an I, fascicol 2, ISSN 1454-6531, 2000
- 103.Tătucu, I., Gruescu, L. – *Contribution to the designing of a co-axial shunt on the basis of a response time* – Analele Facultății de Inginerie Hunedoara, Tom II, an I, fascicol 2, ISSN 1454-6531, 2000

104. Tătucu, I., Gruescu, L. – *Method and apparatus for measuring the difference of a slopes of the welding current* – Analele Facultății de Inginerie Hunedoara, Tom II, an I, fascicol 2, ISSN 1454-6531, 2000
105. Tătucu, I., Gruescu, L. – *The computer aided analysis of the electromagnetic field* – Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an VII, nr.2, Tom I, 2000, ISSN 1453-7396
106. Tătucu, I., Gruescu, L. – *On modeling of the electrical arc for electric welding* - Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an VII, nr.2, Tom I, 2000, ISSN 1453-7396
107. Tătucu, I., Gruescu, L. – *Designing and testing a numerical phasemeter*, Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an VII, nr.2, Tom I, 2000, ISSN 1453-7396
108. Tătucu, I., Gruescu, L. – *Contribuții la sistematizarea modelelor matematice ale câmpului electromagnetic folosite în metoda elementelor finite* – Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an V, nr.2, 1998, ISSN 1453-7394