

**UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MECANICĂ
CATEDRA DE MECANICĂ**

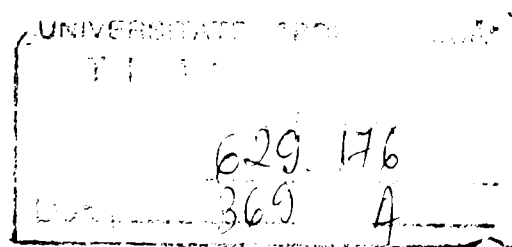
Ing. POPA RADOVAN SMARANDA

**CERCETARI PRIVIND VIBRATIILE SOLIDULUI DEFORMABIL SUPUS
ACTIUNILOR DINAMICE PERCUTANTE**

TEZA DE DOCTORAT

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

**Conducător științific
Prof.dr.ing. LIVIU BRÎNDEU
Membru corespondent al
Academiei de Științe Tehnice**



TIMIȘOARA, 2001

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

Ciocnirile corpurilor solide reprezintă un fenomen complex, studiat începând cu Galileo Galilei. La dezvoltarea teoriei ciocnirii corpurilor, contribuții importante sunt datorate lui H.Hertz, care a studiat deformațiile de contact ale corpurilor elastice. Apoi, I.I.Staerman rezolvă problema statică generalizată a contactului strâns dintre corpuri.

Pe de altă parte Saint-Venant și Boussinescq au soluționat problema ciocnirii longitudinale a grinzii, ceea ce a permis examinarea propagării undelor de deformație de-a lungul ei.

Teoria ciocnirii longitudinale se poate aplica pentru calculul arcului supus la ciocnire prin înlocuirea acestuia cu o grindă echivalentă. Cu toată înlocuirea aproximativă, concidența rezultatelor obținute pe cale experimentală cu cele obținute prin calcul este mai bună decât în cazul barelor. Aceasta se explică prin aceea că deformațiile locale joacă un rol mai mic.

În plus, Saint-Venant a dezvoltat și teoria ciocnirii la încovoiere, ținând seama numai de deformațiile generale ale grinzii. Această teorie nu a dat rezultate satisfăcătoare datorită faptului că se pleacă de la ipoteza că masa care lovește grinda nu se desprinde.

Ciocnirile trebuie considerate elastice numai în cazurile în care tensiunile din timpul ciocnirii nu depășesc limita de proporționalitate. Evident pentru situațiile mai speciale de ciocnire apar inevitabil deformații plastice care modifică caracterul fenomenului. Dacă deformațiile plastice apar numai în apropierea zonei de contact, atunci ele pot fi luate în considerare fără dificultăți.

Studiul legilor de propagare a deformațiilor elasto-plastice prezintă dificultăți mai mari, dar totuși problema este rezolvată pentru o serie de cazuri practice importante.

Verificările experimentale executate de alți cercetători cu privire la teoria undelor de șoc nu au dat rezultatele așteptate, ceea ce a condus la critica ipotezelor ce au stat la baza stabilirii lor.

Neajunsurile teoriilor care țin seama numai de deformațiile locale, dar neglijează pe cele de ansamblu, sau invers, au condus la crearea unei teorii mixte care ține seama atât de deformațiile locale, cât și de cele de ansamblu. Astfel se obțin rezultate importante pentru descrierea fenomenului de ciocnire și a efectelor lor asupra structurilor mecanice.

În general, studiul ciocnirii s-a dezvoltat prin mai multe metode ce au la bază ipoteze considerate cu valabilitate generală. Aceste metode se sprijină pe

- teoria clasică a ciocnirilor instantanee;
- teoria deformațiilor locale de contact a lui Hertz ce presupune corpul rigid iar domeniul de contact elastic;
- teoria ce presupune corpul perfect elastic, dar propagarea tensiunilor în corp instantanee;
- teoria undelor plane a lui Saint-Venant;
- teoria combinată a deformațiilor locale elastice și a undelor plane în corp.

Rezultatele obținute prin aceste metode sunt apropiate de realitate și acceptate funcție de gradul de simplitate și precizie.

Studiul ciocnirii corpurilor rigide se bazează pe ipotezele simplificatoare privind existența forțelor percutante de intensitate foarte mare însă numai pe durată scurtă a ciocnirii. Astfel se pot calcula salturile de viteză necesare determinării mișcării ulterioare, poziția corpului fiind considerată nemodificată pe durată ciocnirii.

Extinderea acestor ipoteze și la corpuri deformabile nu este posibilă fără alte simplificări referitoare la comportarea corpului supus ciocnirii. Se admite uneori că aplicarea ciocnirii, presupusă instantanee, generează brusc în corpul elastic izotrop variația tuturor vitezelor. Aceasta înseamnă că discontinuitatea generată de ciocnire se propagă instantaneu în tot corpul, adică cu viteză infinită. Evident este o simplificare față de alte dezvoltări cunoscute din teoria caracteristicilor care conduc la concluzia că propagarea se face cu viteză finită.

Posibilitatea variației instantanee sau foarte rapide a vitezelor în întreg volumul corpului a fost pentru prima dată luată în considerare de F.Conforto [C1].

În prezenta lucrare, pornind de la aceste ipoteze simplificatoare, s-au fundamentat ecuațiile de bază necesare determinării legii de distribuție a salturilor de viteză din momentul ciocnirii care apoi au fost aplicate la cazuri simple ce se rezolvă imediat. Toate rezultatele astfel obținute reprezintă condițiile inițiale pentru studiul evoluției stării corpului elastic în timp.

În mod deosebit trebuie evidențiate contribuțiile originale referitoare la studiul sistemelor vibropercutante dezvoltate în cadrul Catedrei de Mecanică din Universitatea "Politehnica" din Timișoara. Folosind modele simplificatoare pentru studiul ciocnirii s-au obținut o serie de rezultate esențiale pentru precizarea fenomenelor vibropercutate. Multe din aceste rezultate sunt prezentate în monografia "Sisteme vibropercutante" elaborată de Gh.Silaș și L.Brîndeu, publicată în anul 1986 la Editura Tehnică [S1].

Este cvasirecunoscut că ciocnirile însoțesc inevitabil funcționarea mașinilor sau chiar sunt prevăzute în procesul de lucru. Trebuie evidențiat că datorită situațiilor specifice, caracteristicile fenomenului de ciocnire variază mult și necesită o abordare sistematică și amănunțită. De fapt ciocnirile sunt fenomene complexe care nu sunt complet stăpânite încât necesită elaborarea unor metodologii care să țină seama de toate aspectele caracteristice.

În primul rând trebuie determinate mișcările ce apar datorită ciocnirii. Mai este necesar însă să se poată stabili principalele mărimi caracteristice ciocnirii ca forța percutantă, durata, deformațiile locale etc.

Dacă pentru detrmnarea mișcării există simplificări ce pot duce la rezultate acceptabile, nu se poate afirma același lucru în legătură cu ceilalți parametri ai ciocnirii. Aceștia pot fi stabiliți numai prin adoptarea unor modele proprii ce țin seama de proprietățile materialelor. Se urmărește formularea unor modele care să corespundă în mare măsură comportării structurilor mecanice supuse ciocnirii. Acestea se referă la stările produse de lovirea structurilor de alte mase în mișcare sau de aplicare bruscă a unor legături sau sarcini.

Preocupările existente privind studiul vibrațiilor și vibropercuțiilor au evidențiat necesitatea elucidării fenomenului de ciocnire ce prezintă totuși unele particularități specifice. Astfel se consideră necesară extinderea studiilor și la situații ce au ca principală caracteristică durata scurtă a fenomenului.

Experimentele arată că majoritatea caracteristicilor elastice ale materialului

(modulul de elasticitate, coeficientul lui Poisson) nu depind de viteza de încărcare, în timp ce limita de curgere a materialului depinde. Se constată că limita de curgere în cazul sarcinii dinamice este mai ridicată decât în cazul celei statice. Toate acestea prezintă importanță deosebită în evidențierea trăsăturilor principale ale corpurilor supuse ciocnirii și formularea modelului matematic.

În general metodele de calcul la ciocniri sunt aproximative, ceea ce implică executarea unor importante verificări experimentale. Acestea însă prezintă mari dificultăți datorită duratei scurte a ciocnirii, ceea ce presupune existența unei puternice dotări cu aparatură de înaltă precizie și fidelitate, care să surprindă exact fenomene desfășurate în fracțiuni de secundă.

Calculul sistemelor elastice solificate prin ciocniri permite să se determine cu aproximație ordinul de mărime a deplasărilor și a tensiunilor, precum și a deformațiilor în timpul ciocnirii. Rezultatele însă sunt apropiate de realitate numai pentru deplasări.

Cu toate că experimental se obțin rezultate importante, permițând înregistrarea deplasărilor corpurilor care se ciocnesc, metodele experimentale nu sunt suficiente pentru stabilirea parametrilor principali. Aceste rezultate sunt utile la calculul deplasărilor dinamice dar mai puțin stăisfăcătoare la calculul deformațiilor și tensiunilor dinamice.

Pentru determinarea deformațiilor și tensiunilor în cazul ciocnirii se poate apela la metoda fotoelastică cu care se poate examina variația tensiunilor în grindă și pe secțiune.

Există și metode electrice de măsurare a deformațiilor cu ajutorul diferitelor tipuri de transductoare, în special rezistive. Acestea necesită aparatură de măsură și tehnică de calcul ultramodernă.

Tinând seama de rezultatele ce pot fi obținute în diferite situații întâlnite, se urmărește identificarea parametrilor principali care să stea la baza construirii modelului funcțional. Acesta trebuie să reflecte toate aspectele principale necesare elaborării algoritmilor de calcul pentru descrierea ciocnirii în sistemele deformabile.

Fenomenul ciocnirii se află printre preocupările de primă importanță ale cercetătorilor din domeniul dinamicii structurilor mecanice. Există numeroase cercetări teoretice și experimentale întreprinse pentru identificarea trăsăturilor caracteristice ciocnirii, fără însă a putea să se elucideze complet fenomenul.

Drept urmare, prezintă deosebită importanță documentația privind descrierea ciocnirilor din care să se desprindă posibilități de dezvoltare a cercetărilor și precizarea aspectelor ce nu sunt în măsură satisfăcătoare abordate.

Dintre lucrările de extremă actualitate trebuie în primul rând amintit tratatul "Socuri și vibrații" coordonat de C.M.Harris și CH Crede, în trei volume, tradus în limba română și publicat la Editura Tehnică în anul 1968.

Importanța și actualitatea cercetărilor în domeniu este dovedită și de apariția tratatului ultramodern "Impact", având ca autor pe W.Goldsmith, ce conține toate dezvoltările actuale în domeniu. Este lucrarea fundamentală necesară abordării tuturor aspectelor solicitate în probleme concrete întâlnite în construcția de mașini.

Cercetări privind fenomene de ciocniri au fost inițiate mai ales pentru mecanismele vibropercutante de către un colectiv de la Catedra de Mecanică a Universității "Politehnica" din Timișoara. Aceste cercetări sunt dezvoltate într-o serie de lucrări având ca punct de pornire [M1], [S1], [S2]. Trebuie subliniat că problematica legată de studiul ciocnirii este cuprinsă în mare măsură și în tratatul "Sisteme vibropercutante" al autorilor Gh.Silaș și L.Brîndeu, publicat în anul 1986 de Editura Tehnică, pentru care autorii au obținut premiul "Traian Vuia" al Academiei Române. Tratatul reprezintă o prioritate națională în domeniu și se constituie ca un aport esențial la dezvoltarea domeniului ciocnirilor și a aplicațiilor lor, rezultatele cuprinse fiind bine cunoscute în literatura de specialitate și citate într-o serie de lucrări și monografii străine.

Studiul aprofundat al ciocnirii aplicate structurilor mecanice este de dată mai recentă și din cauza multiplelor aplicații în toate domeniile ingineresti este de mare actualitate atât științifică cât și tehnică.

CAPITOLUL 2

ECUAȚIILE GENERALE ALE DINAMICII CORPURILOR ELASTICE

2.1. Introducere. Ipoteze

În mecanica solidelor deformabile, aspectul geometric și mecanic al problemelor tratate trebuie completat cu aspectul de natură fizică, experimentală, care precizează natura corpului solid considerat. Se introduce o anumită lege constitutivă a corpului solid deformabil care ia în considerare relațiile între tensiuni și deformații specifice. Între tensiuni și deformații specifice trebuie să existe o legătură biunivocă, iar starea de tensiune într-un punct al corpului depinde numai de starea de deformație din vecinătatea aceluși punct.

Ipotezele fundamentale de calcul care se pot face sunt următoarele:

- corpul solid este supus acțiunii unor sarcini exterioare în echilibru. Fiecare parte a corpului și fiecare element infinitesimal detașat din corp vor fi supuse unor sarcini în echilibru dinamic. Această ipoteză servește pentru scrierea ecuațiilor cu derivate parțiale pe care le verifică tensiunile și pentru a exprima condițiile la limită.

- corpul solid este izotrop, deci are aceleași proprietăți mecanice pe orice direcție în vecinătatea oricărui punct al său.

- corpul solid este omogen, adică are aceleași proprietăți mecanice în fiecare punct al său. În baza acestei proprietăți coeficienții mecanici ai materialului, care intervin în legea constitutivă sunt constanți.

- corpul studiat este perfect elastic. Sub acțiunea sarcinilor exterioare corpul se deformează iar fenomenul de deformare este reversibil. Dacă la încetarea solicitărilor exterioare rămân deformații remanente corpul are proprietăți elasto-plastice. În acest caz studiul se face în cadrul teoriei plasticității.

În general legătura biunivocă între tensiuni și deformații specifice se exprimă matematic prin relația liniară numită legea lui Hooke.

Dacă pe lângă tensiuni se iau în considerare și micromomentele se ajunge la o teorie a elasticității asimetrice pentru corpuri de tip Cosserat. Într-un asemenea caz pot acționa și momente volumice, ca sarcini exterioare, legea constitutivă - chiar în caz liniar - făcând necesară introducerea mai multor constante mecanice ale materialului.

- Deformațiile și deplasările corpurilor solide supuse acțiunii sarcinilor exterioare, sunt foarte mici în raport cu dimensiunile generale ale corpului, deci deformațiile specifice sunt neglijabile în raport cu unitatea. Dacă și rotațiile sunt neglijabile în raport cu unitatea, teoria se consideră liniară din punct de vedere geometric și mecanic, deci se pot scrie ecuațiile de echilibru static sau dinamic pe forma nedeformată a corpului. Tot datorită acestor considerente se poate aplica principiul suprapunerii efectelor în ceea ce privește deformațiile specifice.

2.2. Geometria deformației

2.2.1. Deformații și deformații specifice

Se admite că sarcinile exterioare care acționează asupra solidului sunt în echilibru dinamic la un moment dat t .

Se consideră un punct al corpului care coincide cu punctul geometric A înainte de deformație, și care se găsește în poziția A_1 după deformație. Deplasarea

$\overline{AA_1} = \{\bar{U}\}$, mărime vectorială, se exprimă prin componentele u , v , w care, fenomenul având caracter dinamic, sunt și funcții de timp (fig.2.1)

$$u = u(x, y, z, t) ; \quad v = v(x, y, z, t) ; \quad w = w(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

Considerând două puncte imediat vecine $A(x, y, z)$ și $B(x+dx, y+dy, z+dz)$, în urma deformării acestea vor ocupa pozițiile A_1 , respectiv B_1 .

Se observă că

$$\overline{BB_1} - \overline{AA_1} = \overline{du} \quad (2.2)$$

unde \overline{du} este variația vectorului deplasării, cu du , dv și dw componentele lui, date de relațiile:

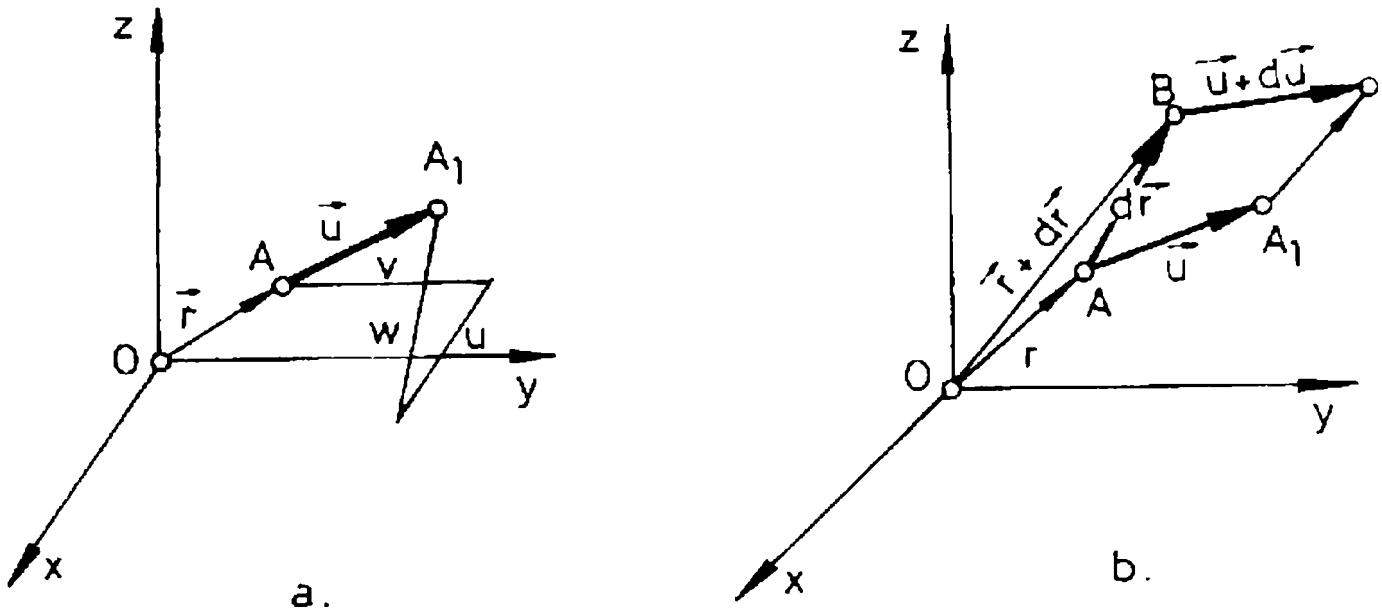


Fig.2.1

$$\begin{aligned}
 du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\
 dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\
 dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

relațiile fiind valabile la un moment dat t .

Se poate scrie relația

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.4}$$

care dezvoltată duce la posibilitatea calculului variației distanței dintre punctele A și B . În contextul calculelor s-a notat cu

$$\begin{aligned}
 n_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 n_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 n_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 n_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\
 n_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\
 n_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

mărimile respective, funcții de x , y , z și t , formează tensorul simetric de ordinul al doilea, numit tensorul deformație al lui Green.

$$T_L = \begin{pmatrix} n_{xx} & \frac{1}{2}n_{xy} & \frac{1}{2}n_{zx} \\ \frac{1}{2}n_{xy} & n_{yy} & \frac{1}{2}n_{yz} \\ \frac{1}{2}n_{zx} & \frac{1}{2}n_{yz} & n_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

În cazul teoriei liniare, deformațiile specifice sunt [I1]

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} ; \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

rezultând astfel tensorul deformației specifice, tensor simetric de ordinul al doilea

$$T_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

In cazul deformațiilor infinitesimale, deformația specifică volumică este un invariant notat ϵ_v

$$\epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (2.10)$$

Se introduce următoarea notație, prin care deformația specifică volumică va rezulta:

$$\epsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \bar{U} \quad (2.11)$$

2.2.2. Relații între deplasări și deformații specifice

Considerând teoria liniară se notează cu $\bar{\omega}$ și se numește vectorul rotație locală de corp rigid, mărimea

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{U}, \quad (2.12)$$

cu componentele

$$\begin{aligned} \omega_x = \omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \omega_y = \omega_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \omega_z = \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Acestei noțiuni i se alătură tensorul T_ω , antisimetric de ordinul doi

$$T_\omega = \begin{Bmatrix} 0 & \omega_{xy} & -\omega_{zx} \\ \omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & -\omega_{yz} & 0 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Relațiile (2.3) se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} du &= \alpha_{xx} dx + \alpha_{yx} dy + \alpha_{zx} dz \\ dv &= \alpha_{xy} dx + \alpha_{yy} dy + \alpha_{zy} dz \\ dw &= \alpha_{xz} dx + \alpha_{yz} dy + \alpha_{zz} dz \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se definește astfel un tensor asimetric de ordinul al doilea

$$T_{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

corespunzător gradientului deplasării \bar{U} . Relațiile dintre gradientul deplasării, deformațiile specifice și rotația locală de corp rigid sunt de forma

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= \epsilon_x & \alpha_{yy} &= \epsilon_y & \alpha_{zz} &= \epsilon_z \\ \alpha_{yz} &= \frac{1}{2} \gamma_{yz} + \omega_x & \alpha_{zy} &= \frac{1}{2} \gamma_{yz} - \omega_x \\ \alpha_{zx} &= \frac{1}{2} \gamma_{zx} + \omega_y & \alpha_{xz} &= \frac{1}{2} \gamma_{zx} - \omega_y \\ \alpha_{xy} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} + \omega_z & \alpha_{yx} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_z \end{aligned} \quad (2.17)$$

și în continuare se poate scrie relația între tensorul simetric deformație specifică T_{ϵ} și tensorul antisimetric rotație locală de corp rigid T_{ω}

$$T_{\alpha} = T_{\epsilon} + T_{\omega} \quad (2.18)$$

Se poate demonstra că dacă $d\bar{r}=d\bar{r}_1$, tensorii T_{11} și T_{12} sunt nuli. Anularea tensorului T_{12} este condiția necesară și suficientă pentru ca solidul să sufere o mișcare de corp rigid în vecinătatea punctului în care se anulează acest tensor. Gradientul deplasării rămâne numai cu partea antisimetrică T_{12} , adică

$$\begin{aligned} du &= -\omega_z dy + \omega_y dz \\ dv &= -\omega_x dz + \omega_x dx \\ dw &= -\omega_y dx + \omega_x dy \end{aligned} \quad (2.19)$$

sau

$$d\bar{U} = \bar{\omega} \times d\bar{r} \quad (2.20)$$

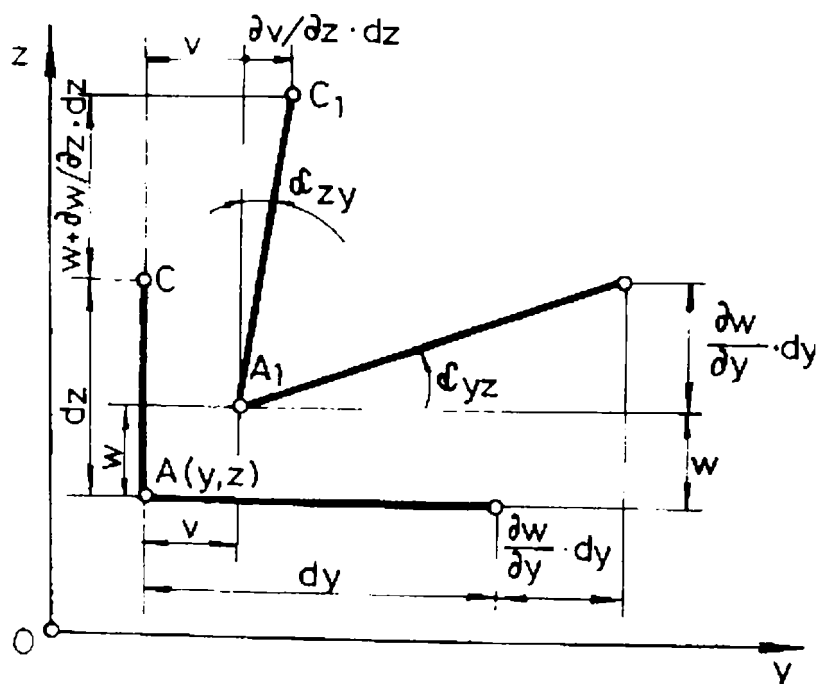


Fig.2.2

Mișcarea unei vecinătăți a punctului A, mișcare produsă de o rotație infinit mică $\bar{\omega}$ în jurul unei axe ce trece prin punctul A, se numește mișcare locală de corp rigid. Grafic, se studiază deformația unui unghi drept BAC situat într-un plan $x=\text{const.}$, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Se admite că deformația nu depinde de x și se pe rece doar în acest plan. rezultă astfel un caz liniar și se

obțin componentele tensorilor T_{11} , T_{12} și T_{13} .

Admitem și o rotație numită liberă, reprezentată de vectorul $\bar{\Phi}$ de componente

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_x &= \bar{\Phi}_{yz} = \bar{\Phi}_x(x, y, z, t), \\
 \bar{\Phi}_y &= \bar{\Phi}_{zx} = \bar{\Phi}_y(x, y, z, t), \\
 \bar{\Phi}_z &= \bar{\Phi}_{xy} = \bar{\Phi}_z(x, y, z, t),
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

căruia îi atașăm un tensor rotație liberă antisimetric, de ordinul al doilea

$$T_{\bar{\Phi}} = \begin{Bmatrix} 0 & \bar{\Phi}_{xy} & -\bar{\Phi}_{zx} \\ -\bar{\Phi}_{zy} & 0 & \bar{\Phi}_{yz} \\ \bar{\Phi}_{zx} & -\bar{\Phi}_{yz} & 0 \end{Bmatrix}.
 \tag{2.22}$$

Această rotație va contribui la starea de solicitare a corpului, starea de deformație fiind astfel caracterizată, în general, de vectorii \bar{u} și $\bar{\Phi}$.

În continuare se introduce mărimea vectorială $\bar{\Omega}$, numită vector de rotație locală

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega} - \bar{\Phi},
 \tag{2.23}$$

care reprezintă rotația locală fără contribuția rotației libere $\bar{\Phi}$, și ale cărei componente sunt:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \bar{\Phi}_x \\
 \Omega_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \bar{\Phi}_y \\
 \Omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \bar{\Phi}_z
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Vectorului rotație locală $\bar{\Omega}$ i se atașază tensorul rotației locale $T_{\bar{\Omega}}$, tensor antisimetric de ordinul al doilea

$$T_{\bar{\Omega}} = \begin{Bmatrix} 0 & \Omega_{xy} & -\Omega_{zx} \\ -\Omega_{xy} & 0 & \Omega_{yz} \\ \Omega_{zx} & -\Omega_{yz} & 0 \end{Bmatrix}.
 \tag{2.25}$$

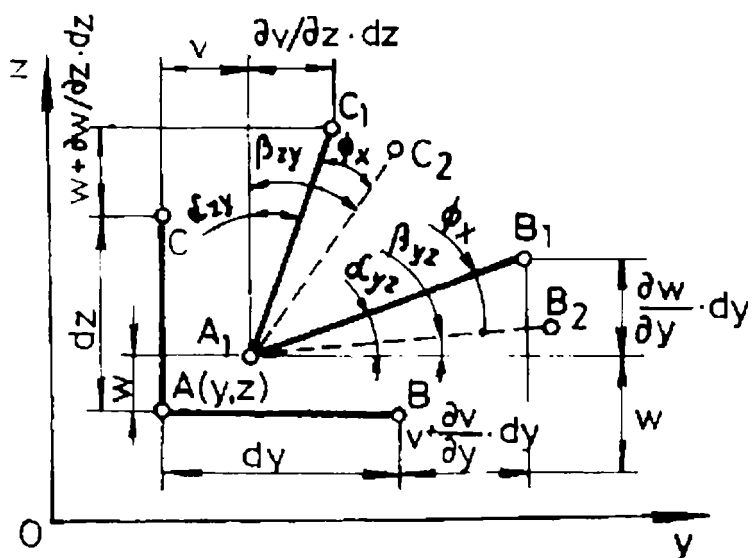


Fig. 2.3

Privind deformația elementului unghiular BAC, cu laturile paralele cu axele de coordonate, situat într-un plan, pentru o anumită valoare a coordonatei x , se considera unghiurile β_{yz} și β_{xy} , respectiv unghiurile α_{yz} și α_{xy} . De exemplu, unghiul α_{yz} reprezintă alunecarea specifică a două segmente paralele cu axa Oz unul față de celălalt.

Astfel, se pot scrie relațiile

$$\begin{aligned} \beta_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \Phi_x & ; & & \beta_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \Phi_x \\ \beta_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \Phi_y & ; & & \beta_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \Phi_y \\ \beta_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \Phi_z & ; & & \beta_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \Phi_z \end{aligned} \quad (2.26)$$

la care adăugându-se relațiile

$$\beta_{xx} = \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \beta_{yy} = \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \beta_{zz} = \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.27)$$

se poate introduce următorul tensor asimetric de ordinul al doilea.

$$T_\beta = \begin{Bmatrix} \beta_{xx} & \beta_{xy} & \beta_{xz} \\ \beta_{yx} & \beta_{yy} & \beta_{yz} \\ \beta_{zx} & \beta_{zy} & \beta_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Se poate scrie

$$\gamma_{yz} = \beta_{yz} + \beta_{zy}$$

$$\gamma_{zx} = \beta_{zx} + \beta_{xz} \quad (2.29)$$

$$\gamma_{xy} = \beta_{xy} + \beta_{yx}$$

$$\Omega_{yz} = \frac{1}{2}(\beta_{yz} - \beta_{zy}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \Phi_x$$

$$\Omega_{zx} = \frac{1}{2}(\beta_{zx} - \beta_{xz}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \Phi_y \quad (2.30)$$

$$\Omega_{xy} = \frac{1}{2}(\beta_{xy} - \beta_{yx}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \Phi_z$$

$$T_\beta = T_\epsilon + T_\Omega, \quad (2.31)$$

unde T_ϵ este partea simetrică a tensorului T_β , iar partea antisimetrică este T_Ω .

În cazul că $\Omega_{yz} = \Omega_{zx} = \Omega_{xy} = 0$, adică $T_\Omega = 0$, rotațiile nu mai sunt numite libere ci constrânse și vectorul $\bar{\Phi}$ reprezintă în aceste condiții vectorul numit rotație constrânsă iar componentele Φ_x, Φ_y, Φ_z vor fi

$$\Phi_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) ; \quad \Phi_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) ; \quad \Phi_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.32)$$

care se pot scrie și sub forma

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{U} \quad (2.33)$$

Se observă că rotația locală de corp rigid $\bar{\omega}$ este dată de rotația locală Ω la care se adaugă rotația liberă Φ . În cazul precedent rotația locală de corp rigid ω este dată doar de rotația constrânsă Φ .

În cazul clasic poziția unei particule din corp după deformație este caracterizată numai de vectorul deplasare $\bar{U}(u,v,w)$ deci trei parametri. În cazul

629176
369A

general însă, pot apare direcții privilegiate, poziția unei particule fiind caracterizată pe lângă deplasarea \bar{u} , de rotația $\bar{\Phi}(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$ deci în total șase parametri.

Se poate introduce gradientul vectorului de rotație Φ sub forma tensorului asimetric de ordinul doi, ale cărui componente sunt funcții de x, y, z și t .

$$T_\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & \varphi_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_y}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Tensorii T_β și T_σ vor caracteriza deformația corpului. Componentele lor se vor numi caracteristicile deformației.

Se definește invariantul

$$\Psi = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = \text{div } \bar{\Phi}. \quad (2.35)$$

Fiecărei particule i se poate atașa un sistem rigid de axe de referință care pot suferi rotații în timpul deformației, rotații care pot fi libere sau constrânse.

Prin stare de deformație se înțelege totalitatea deplasărilor și rotațiilor în vecinătatea unui punct sau în tot domeniul ocupat de corpul solid deformabil. Corpurile respective poartă numele de corpuri de tip Cosserat. În cazul acestor corpuri fiecare punct este un rigid infinitezimal.

2.2.3 Ecuatii de continuitate pentru corpi de tip Cosserat cu rotații libere

În cazul general al rotațiilor libere, relațiile dintre caracteristicile deformației, deplasări și rotații formează un sistem de 18 ecuații cu șase funcții necunoscute $u, v, w, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$. Pentru ca acest sistem să fie compatibil, trebuie ca cele 18 caracteristici ale deformației să verifice 18 condiții de compatibilitate obținute egalând derivatele mixte de ordinul doi ale funcțiilor $u, v, w, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_{xy}}{\partial x} + \varphi_{xz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \Omega_{yz}}{\partial y} + \varphi_{yx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_{zx}}{\partial z} + \varphi_{zx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \Omega_{zx}}{\partial x} - \varphi_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_{xy}}{\partial y} - \varphi_{yz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_{yz}}{\partial z} - \varphi_{zx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{yz}}{\partial x} + \varphi_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \Omega_{zx}}{\partial y} + \varphi_{yy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \Omega_{xy}}{\partial z} + \varphi_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_{yx}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{zx}}{\partial y} & ; & \frac{\partial \varphi_{zx}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{xx}}{\partial z} & ; & \frac{\partial \varphi_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_{yx}}{\partial x} \\
 \frac{\partial \varphi_{yy}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{zy}}{\partial y} & ; & \frac{\partial \varphi_{zy}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{xy}}{\partial z} & ; & \frac{\partial \varphi_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_{yy}}{\partial x} \\
 \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{zz}}{\partial y} & ; & \frac{\partial \varphi_{zz}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial z} & ; & \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

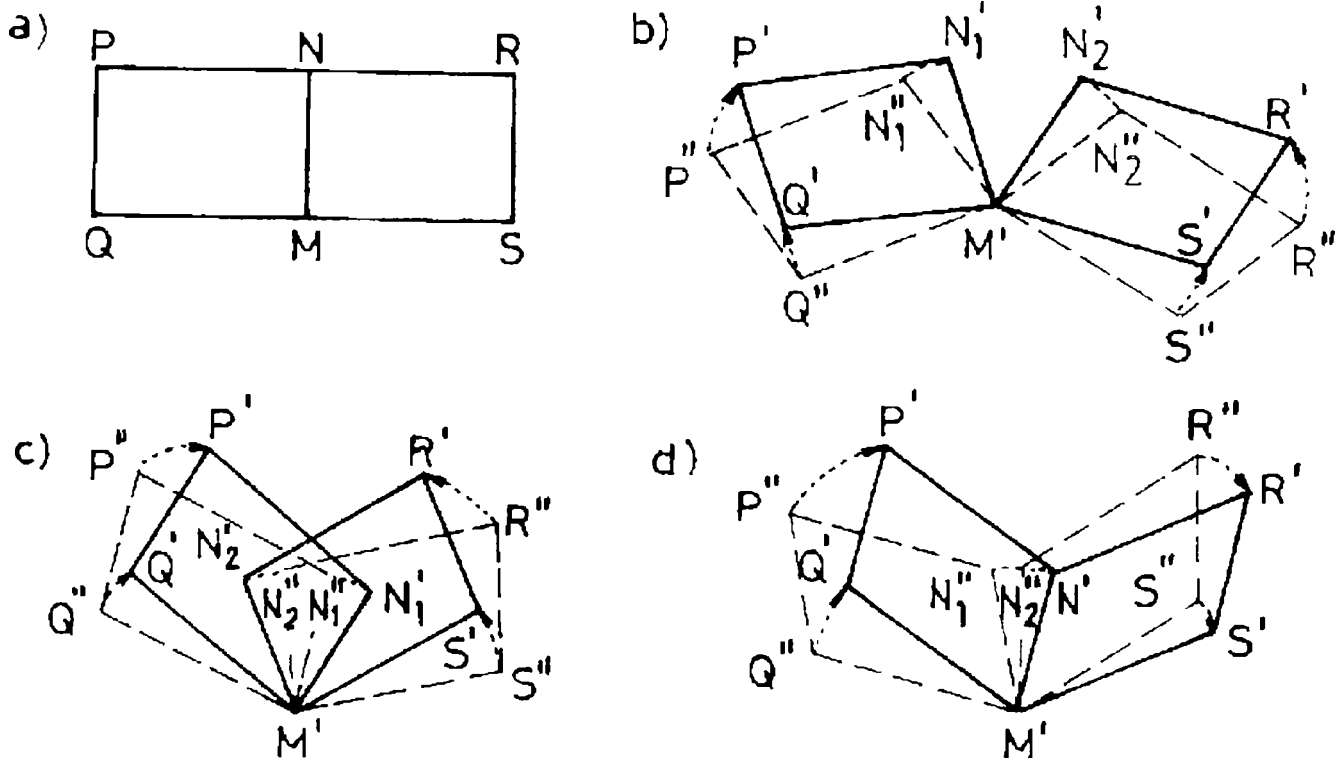


Fig.2.4

Interpretarea fizică a acestor condiții de compatibilitate este deosebit de importantă. Fie două elemente învecinate din corp, inițial în stare nedeformată. Dacă condițiile de compatibilitate nu ar fi îndeplinite, după deformație, cele două elemente s-ar separa sau s-ar întrepătrunde. Prin urmare condițiile precizate sunt, din punct de vedere fizic, condiții necesare și suficiente de continuitate a deformației (în care se include și rotația) pentru un domeniu simplu conex.

Dacă se elimină gradientul rotației între ecuațiile (2.36), (2.37) și (2.38) și se ține cont de ecuația de continuitate (2.39) se observă că dispar și derivatele vectorului $\bar{\Omega}$, rotație locală; se obține astfel

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.41}$$

Aceste condiții necesare de continuitate trebuie îndeplinite de componentele tensorului T_{ij} .

Calculul deplasărilor și rotațiilor

Dacă se cunoaște deplasarea $\bar{u}_0(u_0, v_0, w_0)$ și rotația $\bar{\Phi}_0(\Phi_{0x}, \Phi_{0y}, \Phi_{0z})$ într-un punct M_0 , aplicând condițiile precedente, se pot calcula deplasarea $\bar{u}_1(u_1, v_1, w_1)$ și rotația $\bar{\Phi}_1(\Phi_{1x}, \Phi_{1y}, \Phi_{1z})$ într-un punct oarecare M_1 . Astfel în cazul rotațiilor constrânse, componentele deplasării sunt

$$\begin{aligned}u_1 = & u_0 - (y_1 - y_0) \Phi_{0z} + (z_1 - z_0) \Phi_{0y} + \int_{M_0}^M \left\{ \left[\epsilon_x + (y_1 - y) \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ & + (z_1 - z) \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} \right) \Big] dx + \left[\frac{1}{2} \gamma_{xy} - (y_1 - y) \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (z_1 - z) \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \Big] dy + \left[\frac{1}{2} \gamma_{zx} + \frac{1}{2} (y_1 - y) \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) - \right. \\ & \left. \left. - (z_1 - z) \left(\frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} \right) \right] dz \right\}\end{aligned}\tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
 v_1 = v_0 - (z_1 - z_0) \Phi_{0x} + (x_1 - x_0) \Phi_{0z} + \\
 + \int_{M_0}^M \left\{ \left[\frac{1}{2} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} (z_1 - z) \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) - (x_1 - x) \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \right) \right] dx + \right. \\
 \left. + \left[\epsilon_y + (z_1 - z) \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \right) + (x_1 - x) \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) \right] dy + \right. \\
 \left. + \left[\frac{1}{2} \gamma_{yz} - (z_1 - z) \left(\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (x_1 - x) \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \right] dz \right\}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
 w_1 = W_0 - (x_1 - x_0) \Phi_{0y} + (y_1 - y_0) \Phi_{0x} + \\
 + \int_{M_0}^M \left\{ \left[\frac{1}{2} \gamma_{zx} - (x_1 - x) \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (y_1 - y) \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \right] dx + \right. \\
 \left. + \left[\frac{1}{2} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} (x_1 - x) \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - (y_1 - y) \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \right) \right] dy + \right. \\
 \left. + \left[\epsilon_z + (x_1 - x) \left(\frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} \right) + (y_1 - y) \left(\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz \right\}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

iar componentele rotației se vor scrie sub forma

$$\begin{aligned}
 \Phi_{1x} = \Phi_{0x} + \int_{M_0}^M \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) dx - \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) dz \right] \\
 \Phi_{1y} = \Phi_{0y} + \int_{M_0}^M \left[\left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) dy - \left(\frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} \right) dz \right] \\
 \Phi_{1z} = \Phi_{0z} + \int_{M_0}^M \left[\left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \right) dx - \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) dy - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) dz \right]
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Punând condiția ca integralele (2.42) (2.43), (2.44) și (2.45) să nu depindă de drum, rezultă că în cazul rotațiilor constrânse - condițiile necesare și suficiente de continuitate a deplasărilor și rotațiilor sunt tocmai relațiile (2.40) și (2.41).

Aceste condiții necesare și suficiente pentru continuitatea rotațiilor și numai necesare pentru continuitatea deplasărilor, în cazul corpurilor de tip Cosserat cu rotații libere, devin și suficiente pentru continuitatea deplasărilor în cazul rotațiilor constrânse.

Mișcarea de corp rigid

Dacă componentele tensorului T_{ε} sunt nule, relațiile (2.42) (2.43), (2.44) și (2.45) devin

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - (y_1 - y_0)\Phi_{0z} + (z_1 - z_0)\Phi_{0y} \\ v_1 &= v_0 - (z_1 - z_0)\Phi_{0x} + (x_1 - x_0)\Phi_{0z} \\ w_1 &= w_0 - (x_1 - x_0)\Phi_{0y} + (y_1 - y_0)\Phi_{0x} \end{aligned} \quad (2.46)$$

și

$$\Phi_{1x} = \Phi_{0x} \quad \Phi_{1y} = \Phi_{0y} \quad \Phi_{1z} = \Phi_{0z} \quad (2.47)$$

Dacă originea axelor se ia în punctul M_0 iar punctul $M(x,y,z)$ este un punct curent, ecuațiile precedente vor deveni

$$\begin{aligned} u &= u_0 - y\omega_{0z} + z\omega_{0y} \\ v &= v_0 - z\omega_{0x} + x\omega_{0z} \\ w &= w_0 - x\omega_{0y} + y\omega_{0x} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\Phi_x = \omega_{0x} \quad \Phi_y = \omega_{0y} \quad \Phi_z = \omega_{0z}$$

$u_0, v_0, w_0, \omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z}$ sunt deplasările și rotațiile corpului considerat rigid, corespunzând unui tensor T_{ε} nul.

2.2.4. Starea de deformare în coordonate cilindrice și sferice

Relațiile de corespondență între coordonatele carteziene și coordonatele cilindrice sunt

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta & z &= z \\
 u_r &= u \cos \theta + v \sin \theta \\
 u_\theta &= -u \sin \theta + v \cos \theta \\
 u_z &= w
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

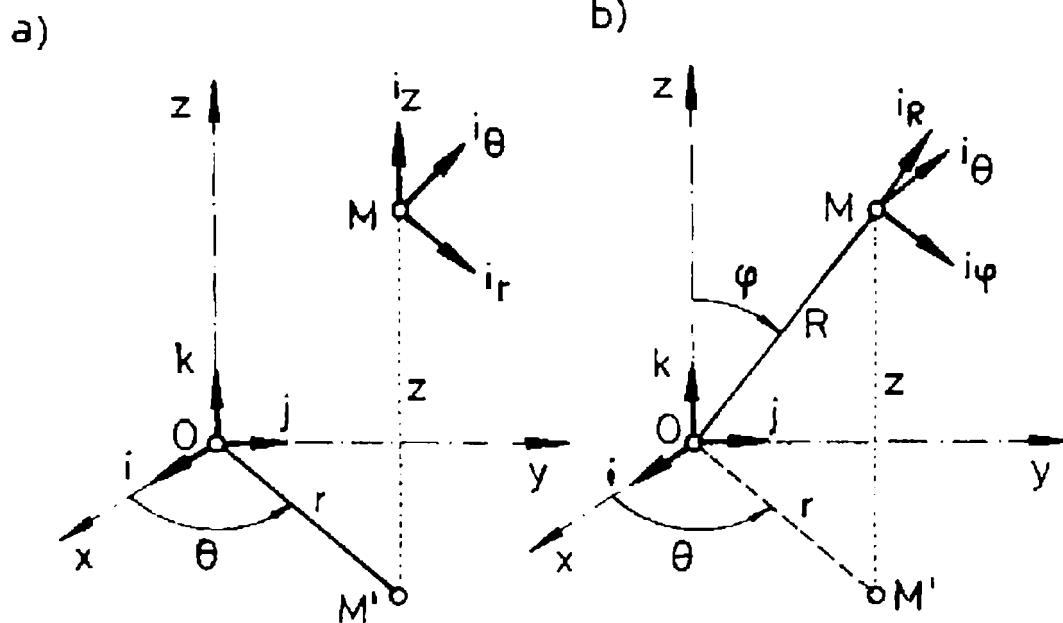


Fig.2.5

sau invers

$$\begin{aligned}
 u &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \\
 v &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \\
 w &= u_z
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

Relațiile între deformațiile specifice și deplasări sunt

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \quad (2.51)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (2.52)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta$$

Dacă problema este în plan ne rezumăm la coordonatele polare în legătură cu care se scriu relațiile

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad ; \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \quad ; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta \quad (2.53)$$

Relațiile de trecere de la deplasările în coordonate carteziene la cele în coordonate sferice sunt:

$$\begin{aligned} u_R &= u \sin \varphi \cos \theta + v \sin \varphi \sin \theta + w \cos \varphi = u_r \sin \varphi + u_z \cos \varphi \\ u_\varphi &= u \cos \varphi \cos \theta + v \cos \varphi \sin \theta - w \sin \varphi = u_r \cos \varphi - u_z \sin \varphi \\ u_\theta &= -u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \quad (2.54)$$

iar cele care fac trecerea de la coordonate sferice la coordonate carteziene sunt:

$$\begin{aligned} u &= u_R \sin \varphi \cos \theta + u_\varphi \cos \varphi \cos \theta - u_\theta \sin \theta \\ v &= u_R \sin \varphi \sin \theta + u_\varphi \cos \varphi \sin \theta + u_\theta \cos \theta \\ w &= u_R \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.55)$$

relații în care s-a pus în evidență și legătura cu coordonatele cilindrice.

Relațiile dintre deformații specifice și deplasări vor fi de forma:

$$\begin{aligned}\epsilon_R &= \frac{\partial u_R}{\partial R} \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} u_R \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} u_R + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R} u_\varphi\end{aligned}\quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\varphi\theta} &= \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R} u_\theta \\ \gamma_{\theta R} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{1}{R} u_\theta \\ \gamma_{R\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{R} u_\varphi\end{aligned}\quad (2.57)$$

2.3. Cinematica deformației

2.3.1. Cazul clasic

În cazul micilor deformații și rotații neglijându-se termenii neliniari, viteza de deplasare este

$$\bar{v} = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{U} \quad (2.58)$$

cu componentele

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{u}(x, y, z, t), \\ v_y &= \dot{v}(x, y, z, t), \\ v_z &= \dot{w}(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Similar se introduce și accelerația

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \ddot{U} \quad (2.60)$$

ale cărei componente sunt:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{u}(x, y, z, t) \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{v}(x, y, z, t) \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{w}(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Se pot introduce și vitezele de deformație specifică (tensorul lui Euler)

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{xx} &= \dot{\epsilon}_x(x, y, z, t) \\
 \dot{\epsilon}_{yy} &= \dot{\epsilon}_y(x, y, z, t) \\
 \dot{\epsilon}_{zz} &= \dot{\epsilon}_z(x, y, z, t) \\
 \dot{\gamma}_{yz} &= \dot{\gamma}_{yz}(x, y, z, t) \\
 \dot{\gamma}_{zx} &= \dot{\gamma}_{zx}(x, y, z, t) \\
 \dot{\gamma}_{xy} &= \dot{\gamma}_{xy}(x, y, z, t)
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

precum și vitezele unghiulare de rotație locală de corp rigid (tensorul spin al lui Cauchy)

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{yz} &= \dot{\omega}_{yz}(x, y, z, t) \\
 \dot{\omega}_{zx} &= \dot{\omega}_{zx}(x, y, z, t) \\
 \dot{\omega}_{xy} &= \dot{\omega}_{xy}(x, y, z, t).
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

În continuare ținând cont de relațiile între deplasări și deformații specifice și ținând cont de faptul că deformațiile sunt infinitesimale, se poate scrie

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad ; \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \quad ; \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \\
 \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \\
 \dot{\omega}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right) \\
 \dot{\omega}_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \\
 \dot{\omega}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

2.3.2. Cazul corpurilor de tip Cosserat

Se poate introduce viteza unghiulară de rotație liberă corespunzătoare rotației libere $\bar{\Phi}$ (în cazul deformațiilor infinitesimale)

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dt} = \dot{\bar{\Phi}} \quad (2.67)$$

cu componentele

$$\dot{\bar{\Phi}}_x = \dot{\bar{\Phi}}_x(x,y,z,t) \quad ; \quad \dot{\bar{\Phi}}_y = \dot{\bar{\Phi}}_y(x,y,z,t) \quad ; \quad \dot{\bar{\Phi}}_z = \dot{\bar{\Phi}}_z(x,y,z,t) \quad (2.68)$$

În continuare se introduce viteza unghiulară de rotație locală $\dot{\bar{\Omega}}$ cu componentele

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}}_{yz} &= \dot{\bar{\Omega}}_x = \dot{\bar{\Omega}}_x(x,y,z,t) \\ \dot{\bar{\Omega}}_{zx} &= \dot{\bar{\Omega}}_y = \dot{\bar{\Omega}}_y(x,y,z,t) \\ \dot{\bar{\Omega}}_{xy} &= \dot{\bar{\Omega}}_z = \dot{\bar{\Omega}}_z(x,y,z,t) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Se poate scrie

$$\dot{\bar{\Omega}} = \dot{\bar{\omega}} - \dot{\bar{\Phi}} \quad (2.70)$$

și între tensorii corespunzători

$$T_{\dot{\bar{\Omega}}} = T_{\dot{\bar{\omega}}} - T_{\dot{\bar{\Phi}}} \quad (2.71)$$

Prin introducerea tensorului $T_{\dot{\bar{\beta}}} = T_{\dot{\bar{\epsilon}}} + T_{\dot{\bar{\Omega}}}$ se pot adăuga la relațiile (2.64), (2.65) și relațiile corespunzătoare părții sale asimetrice

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right) - \dot{\bar{\Phi}}_x \\ \dot{\bar{\Omega}}_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) - \dot{\bar{\Phi}}_y \\ \dot{\bar{\Omega}}_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right) - \dot{\bar{\Phi}}_z \end{aligned} \quad (2.72)$$

În cazul rotațiilor constrânse, pentru care

$$\Omega_{yz} = \Omega_{zx} = \Omega_{xy} = 0 \quad (2.73)$$

rezultă

$$\dot{\Omega}_{yz} = \dot{\Omega}_{zx} = \dot{\Omega}_{xy} = 0 \quad (2.74)$$

deci

$$T_{\dot{\Omega}} = 0 \quad (2.75)$$

Rezultă deci, pentru vitezele unghiulare de rotații constrânse, relațiile

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right) \\ \dot{\Omega}_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \\ \dot{\Omega}_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

sau

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{u} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} \quad (2.77)$$

Sub forma tensorului $T_{\dot{\Phi}}$ se notează gradientul vectorului viteza unghiulară de rotație $\dot{\Phi}$,

$$T_{\dot{\Phi}} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi}_{xx} & \dot{\Phi}_{xy} & \dot{\Phi}_{xz} \\ \dot{\Phi}_{yx} & \dot{\Phi}_{yy} & \dot{\Phi}_{yz} \\ \dot{\Phi}_{zx} & \dot{\Phi}_{zy} & \dot{\Phi}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\Phi}_x}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\Phi}_y}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\Phi}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{\Phi}_x}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\Phi}_y}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\Phi}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{\Phi}_x}{\partial z} & \frac{\partial \dot{\Phi}_y}{\partial z} & \frac{\partial \dot{\Phi}_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Componentele acestui tensor sunt funcții de x , y , z și t . Tensorii T_{β} și T_{ϕ} conțin mărimile caracteristice vitezei de deformație.

Spre deosebire de cazul clasic, în cazul corpurilor de tip Cosserat se atașază fiecărei particule a corpului un sistem rigid de axe de coordonate, în raport cu care se evidențiază vitezele unghiulare; aceste viteze unghiulare pot fi de rotație liberă sau de rotație constrânsă. Mișcarea unei particule va fi caracterizată de șase parametri, viteze liniare și unghiulare. Vitezele unghiulare pot fi viteze unghiulare de rotație liberă sau viteze unghiulare de rotație constrânsă. Si în cazul corpurilor de tip Cosserat sunt valabile considerațiile făcute cu privire la continuitatea deformației și rotațiilor.

2.4. Tensiuni și micromomente

2.4.1. Tensorul tensiune

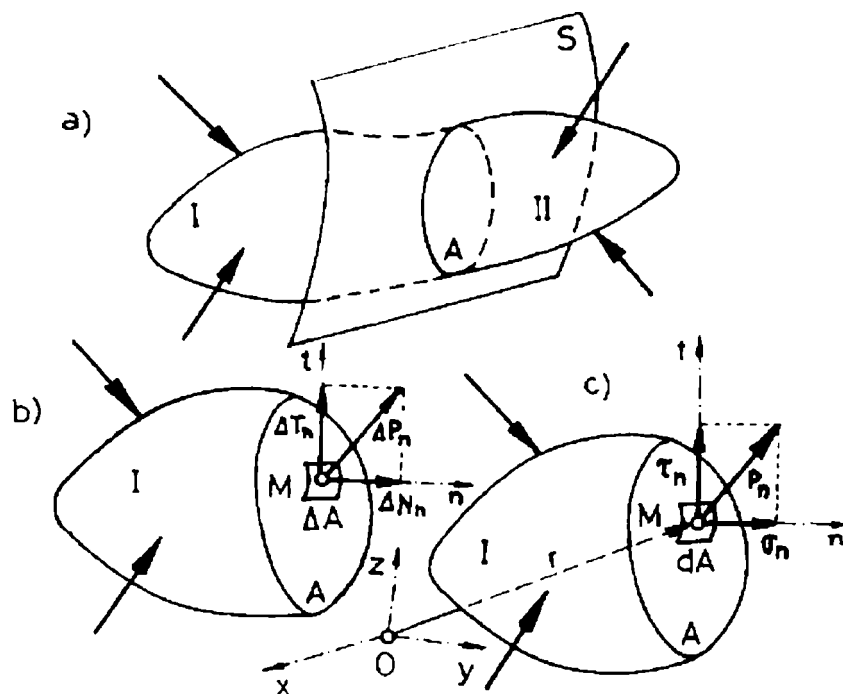


Fig.2.6

Tensiunea totală \bar{p}_n este un vector și depinde de poziția și orientarea elementului de suprafață pe care acționează. Vectorul \bar{p}_n poate fi descompus în două componente: una după normala n la suprafața dA - notată cu $\bar{\sigma}_n$, iar a doua componentă acționează în planul tangent la suprafața dA - notată cu $\bar{\tau}_n$. Prima componentă se numește tensiune normală, iar a doua tensiune tangențială

$$\begin{aligned}\bar{p}_n &= \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n \\ p_n^2 &= \sigma_n^2 + \tau_n^2\end{aligned}\quad (2.79)$$

Prin starea de tensiune într-un punct al elementului structural se înțelege mulțimea tensiunilor corespunzătoare tuturor pozițiilor suprafeței dA , care trec prin acel punct. Starea de tensiune din elementul structural este definită dacă se cunosc stările de tensiune pentru toate punctele care alcătuiesc elementul structural. Starea de tensiune într-un punct oarecare al elementului structural este definită dacă se cunosc tensiunile totale sau componentele acestora pe trei plane perpendiculare între ele, care trec prin punctul respectiv (fig.2.7)

Starea de tensiune spațială este definită de nouă componente ale vectorului tensiune din care trei sunt tensiuni normale σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} și șase sunt tensiuni tangențiale $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, $\tau_{xz}=\tau_{zx}$. Pe baza legii dualității tensiunilor tangențiale, din cele șase tensiuni tangențiale numai trei sunt independente. În final, starea de tensiune spațială într-un punct depinde de șase componente ale vectorului tensiune. Tensorul tensiunilor are componentele

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.80)$$

și este un tensor de ordinul doi simetric. Fiecare coloană a tensorului T_{σ} conține componentele tensiunii pe una din fațetele ce trec prin punctul respectiv.

În formulare matricială starea de tensiune spațială se reprezintă prin matricea coloană $\{\sigma\}$ care are ca elemente componentele tensiunii

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{zy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\} \quad (2.81)$$

Tensiunea rezultantă pe o suprafață dA de normală n se determină dacă se cunosc tensiunile pe cele trei plane perpendiculare între ele și normale pe axele de coordonate.

Proiecțiile acestor suprafețe vor fi

$$\begin{aligned} dA_x &= dA \cos(n, x) \\ dA_y &= dA \cos(n, y) \\ dA_z &= dA \cos(n, z) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Tensiunea rezultantă \bar{p}_n de pe suprafața dA_n se descompune în componentele \bar{p}_{nx} , \bar{p}_{ny} și \bar{p}_{nz} după axele de coordonate. Condiția de echivalență statică sub formă vectorială are forma

$$\bar{p}_n dA = \bar{p}_{nx} dA_x + \bar{p}_{ny} dA_y + \bar{p}_{nz} dA_z \quad (2.83)$$

respectiv prin ecuații de proiecții după axele de coordonate

$$\begin{aligned}
 p_{nx}dA &= \sigma_{xx}dA_x + \tau_{yx}dA_y + \tau_{zx}dA_z \\
 p_{ny}dA &= \tau_{xy}dA_x + \sigma_{yy}dA_y + \tau_{zy}dA_z \\
 p_{nz}dA &= \tau_{xz}dA_x + \tau_{yz}dA_y + \sigma_{zz}dA_z
 \end{aligned}
 \tag{2.84}$$

care ținând seama de (2.83) devin

$$\begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{zy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n,x) \\ \cos(n,y) \\ \cos(n,z) \end{Bmatrix}
 \tag{2.85}$$

Cu elementele tensorului T_σ într-un punct dat se calculează din relațiile (2.84) componentele vectorului \bar{p}_n . Dacă suprafața dA se află pe conturul elementului structural, atunci relațiile (2.84) dau componentele acțiunii exterioare și constituie condițiile de contur.

Tensiunea rezultantă \bar{p}_n are mărimea

$$p_n^2 = p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2
 \tag{2.86}$$

Tensiunea normală $\bar{\sigma}_n$ în funcție de componentele tensorului tensiune are mărimea

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \sigma_{xx}\cos^2(n,x) + \sigma_{yy}\cos^2(n,y) + \sigma_{zz}\cos^2(n,z) + \\
 &+ 2\tau_{xy}\cos(n,x)\cos(n,y) + 2\tau_{yz}\cos(n,y)\cos(n,z) + 2\tau_{zx}\cos(m,z)\cos(n,x)
 \end{aligned}
 \tag{2.87}$$

iar mărimea tensiunii tangențiale $\bar{\tau}_n$ rezultă din relația

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}
 \tag{2.88}$$

Deci starea de tensiune din jurul unui punct M considerat este caracterizată

de cele șase funcții cuprinse în tensorul tensiune T_{σ} ,

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{xx}(x, y, z, t) & \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y, z, t) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}(x, y, z, t) & \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z, t) \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{zz}(x, y, z, t) & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z, t)\end{aligned}\quad (2.89)$$

Se poate demonstra că există trei direcții principale pe care se dezvoltă tensiuni normale extreme $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ și pentru care tensiunile tangențiale sunt nule. În general aceste direcții principale nu coincid cu direcțiile principale ale tensorului T_{σ} . Mărimile tensiunilor principale sunt date de ecuația de gradul trei

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad (2.90)$$

ai căror coeficienți sunt invarianții tensorului tensiune

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ J_2 &= \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{yx}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 \\ J_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}\end{aligned}\quad (2.91)$$

Primul invariant J_1 este important, el putând fi pus în legătură cu invariantul Θ al tensorului T_{ϵ} al deformației specifice; se notează cu

$$\Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2.92)$$

2.4.2. Tensorul micromoment

Se poate admite că, făcând o secțiune printr-un corp, pe un element de arie ΔA pe lângă tensiunea \bar{p}_n apare și un efort $\Delta \bar{M}_n$ admis a fi de natura unui moment.

Fie

$$\bar{m}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{M}}{\Delta A} = \frac{d\bar{M}_n}{dA} \quad (2.93)$$

unde \bar{m}_n este vectorul micromoment într-un punct pentru un element de arie ΔA de normală n .

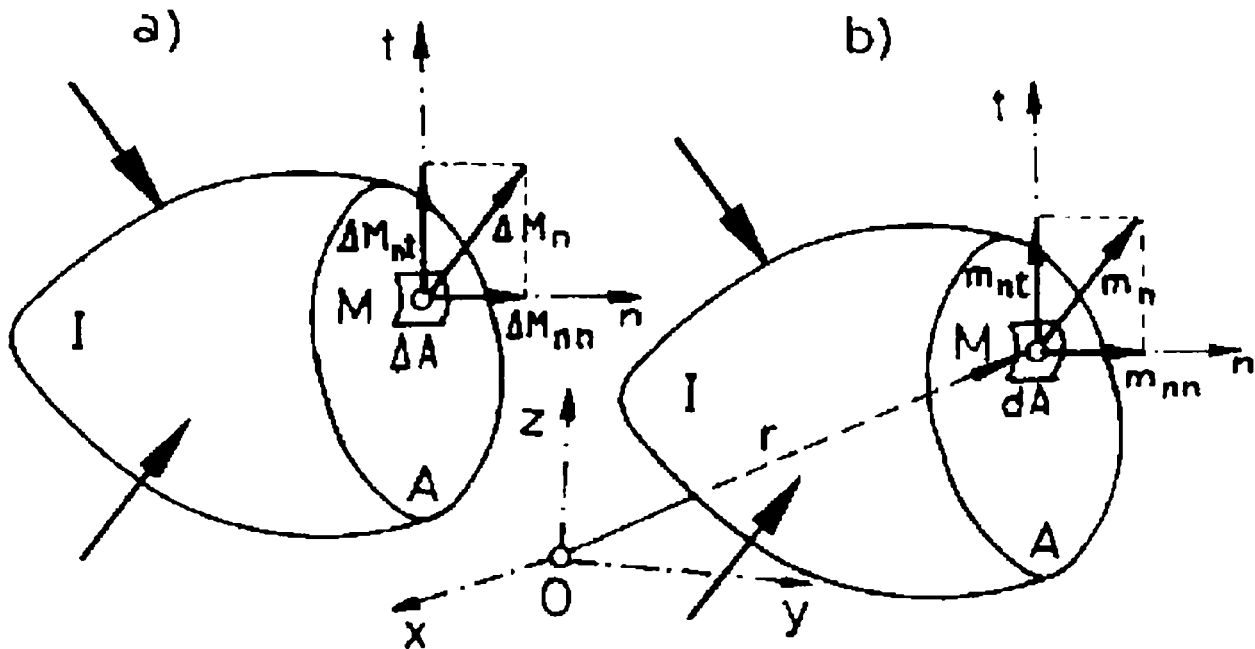


Fig.2.7

Se notează cu \bar{m}_{nn} componenta vectorului \bar{m}_n după normala n a secțiunii respective și cu \bar{m}_{nt} componenta cuprinsă în planul secțiunii. Introducem astfel vectorul micromoment normal (micromoment de răsucire și vectorul micromoment tangențial (micromoment de încovoiere)

$$\begin{aligned}\bar{m}_n &= \bar{m}_{nn} + \bar{m}_{nt} \\ m_n^2 &= m_{nn}^2 + m_{nt}^2\end{aligned}\quad (2.94)$$

După cum tensiunile normale și tangențiale conduc la întinderea (sau compresiunea), respectiv la forfecarea unei particule din corp, micromomentele normale și tangențiale conduc la răsucirea, respectiv la încovoierea aceleiași particule.

Micromomentul normal \bar{m}_{nn} este pozitiv dacă este de același sens cu normala n ; în cazul micromomentului tangențial, semnul său va fi funcție de poziția față de un sistem de axe de coordonate.

2.4.3. Forțe și momente volumice

Fie o secțiune de suprafață curbă închisă oarecare, care desprinde un element de volum, de formă arbitrară, de restul corpului. Este posibilă apariția unor forțe $\Delta \bar{\mathcal{F}}$, a căror mărime este proporțională cu elementul de volum ΔV , numite forțe volumice medii, precum și momente $\Delta \bar{M}$, a căror mărime este proporțională cu același element de volum, numite momente volumice medii [T1]

$$\begin{aligned}\bar{F}_{med} &= \frac{\Delta \bar{\mathcal{F}}}{\Delta V} \\ \bar{M}_{med} &= \frac{\Delta \bar{M}}{\Delta V}\end{aligned}\tag{2.95}$$

Printr-un proces de trecere la limită, rezultă

$$\bar{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \bar{F}_{med} = \frac{d\bar{\mathcal{F}}}{dV}\tag{2.96}$$

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \bar{M}_{med} = \frac{d\bar{M}}{dV}\tag{2.97}$$

unde \bar{F} și \bar{M} reprezintă vectorul forță volumică, respectiv vectorul moment volumic din punctul respectiv al corpului.

Se notează cu \bar{F}_n și \bar{M}_n componentele acestor vectori după direcția normalei n . Introducând componentele după direcțiile axelor de coordonate se calculează mărimile

$$\begin{aligned}F^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2 \\ M^2 &= M_x^2 + M_y^2 + M_z^2\end{aligned}\tag{2.98}$$

unde

$$\begin{aligned}
 X &= X(x, y, z, t) & M_x &= M_x(x, y, z, t) \\
 Y &= Y(x, y, z, t) & M_y &= M_y(x, y, z, t) \\
 Z &= Z(x, y, z, t) & M_z &= M_z(x, y, z, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.99}$$

2.4.4. Cazul corpurilor de tip Cosserat

Pentru studiul acestor corpuri trebuie introdusă influența momentelor volumice și să se țină seama de apariția micromomentelor.

Tensorul tensiune este:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}
 \tag{2.100}$$

ale cărui componente sunt funcție de x, y, z și t .

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}(x, y, z, t) \quad , \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y, z, t) \quad , \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, y, z, t) \\
 \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y, z, t) \quad , \quad \tau_{zy} = \tau_{zy}(x, y, z, t) \\
 \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z, t) \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y, z, t) \\
 \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z, t) \quad , \quad \tau_{yx} = \tau_{yx}(x, y, z, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.101}$$

Componenta normală a vectorului tensiune \bar{p}_n va fi dată de

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \sigma_{xx} \cos^2(n,x) + \sigma_{yy} \cos^2(n,y) + \sigma_{zz} \cos^2(n,z) + (\tau_{yz} + \tau_{zy}) \cos(n,y) \cos(n,z) + \\ & + (\tau_{zx} + \tau_{xz}) \cos(n,z) \cos(n,x) + (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \cos(n,x) \cos(n,y) \end{aligned} \quad (2.102)$$

În acest caz precedentele relații de simetrie între tensiunile tangențiale nu mai sunt valabile, deci

$$\tau_{xy} \neq \tau_{yx} \quad ; \quad \tau_{yz} \neq \tau_{zy} \quad ; \quad \tau_{zx} \neq \tau_{xz} \quad (2.103)$$

Ca și în cazul tensiunilor, admitem că micromomentele sunt pozitive când acționează pe o față normală exterioară de același sens cu axa de coordonate corespunzătoare (sau invers) și sunt îndreptate în sensul pozitiv (sau negativ) al axei de coordonate cu care sunt paralele. Astfel micromomentele normale μ_{xx} , μ_{yy} , μ_{zz} vor fi întotdeauna pozitive când corespund la o rotație pozitivă și negative în caz contrar. Semnul micromomentelor tangențiale μ_{yz} , μ_{zy} , μ_{zx} , μ_{xz} , μ_{yx} , μ_{xy} depinde de sistemul de axe de coordonate ales.

Considerând acțiunea micromomentului \bar{m}_n pe fațeta de normală n și admitând ipoteza continuității micromomentelor, rezultă relațiile

$$\begin{aligned} m_{nx} &= \mu_{xx} \cos(n,x) + \mu_{yx} \cos(n,y) + \mu_{zx} \cos(n,z) \\ m_{ny} &= \mu_{xy} \cos(n,x) + \mu_{yy} \cos(n,y) + \mu_{zy} \cos(n,z) \\ m_{nz} &= \mu_{xz} \cos(n,x) + \mu_{yz} \cos(n,y) + \mu_{zz} \cos(n,z) \end{aligned} \quad (2.104)$$

care indică modul de variație al micromomentelor în jurul unui punct. Se mai poate scrie

$$\bar{m}_n = \bar{m}_x \cos(n,x) + \bar{m}_y \cos(n,y) + \bar{m}_z \cos(n,z) \quad (2.105)$$

unde \bar{m}_x , \bar{m}_y , \bar{m}_z sunt vectorii micromoment corespunzători elementelor de arie de normală x respectiv y și z .

Se introduce tensorul micromoment

$$T_\mu = \begin{Bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

ale cărui componente sunt funcții de x , y , z și t .

Componenta normală a micromomentului este

$$\begin{aligned} \mu_n = & \mu_{xx} \cos^2(n,x) + \mu_{yy} \cos^2(n,y) + \mu_{zz} \cos^2(n,z) + \\ & + (\mu_{yz} + \mu_{zy}) \cos(n,y) \cos(n,z) + (\mu_{zx} + \mu_{xz}) \cos(n,z) \cos(n,x) + \\ & + (\mu_{xy} + \mu_{yx}) \cos(n,x) \cos(n,y) \end{aligned} \quad (2.107)$$

Tensorul micromoment T_μ este, în general, asimetric. Si în cazul micromomentelor există trei direcții principale triortogonale pe care sunt micromomente principale $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$. In ceea ce privește invarianții ce apar, cel mai important este

$$\Psi = \mu_{xx} + \mu_{yy} + \mu_{zz} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \quad (2.108)$$

2.5. Ecuții de mișcare

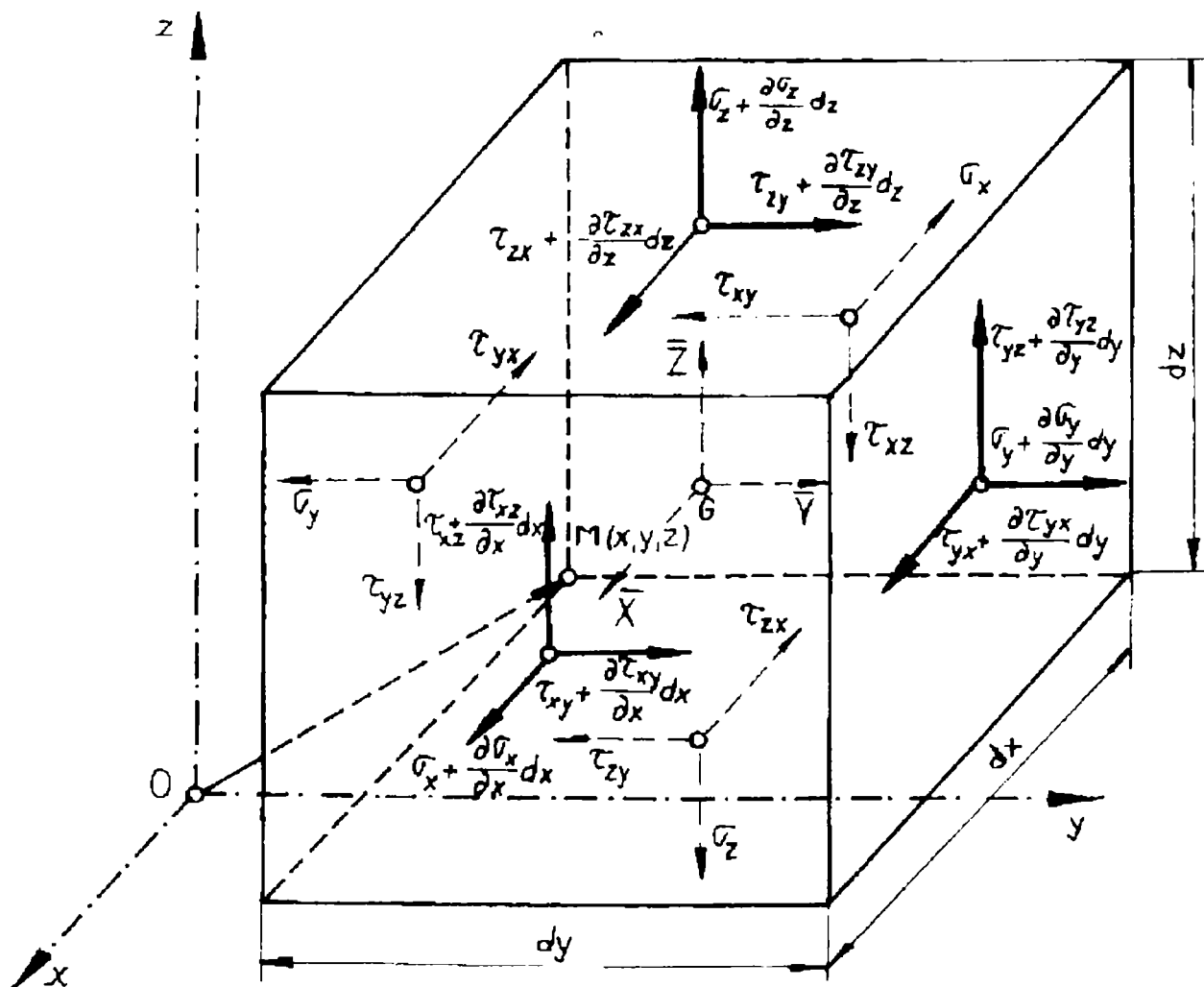
 2.5.1. Cazul clasic


Fig. 2.8

Scriind ecuațiile de echilibru dinamic ale unui element infinitesimal de formă paralelipedică și dimensiuni dx , dy , dz , decupat dintr-un corp, rezultă relațiile

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= \rho \ddot{u} \\
 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \ddot{v} \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= \rho \ddot{w}
 \end{aligned}
 \tag{2.109}$$

în care intrevin tensiunile, componentele forței masice X, Y, Z, densitatea materialului ρ și componentele accelerației ü, v̄, w̄.

Se poate ajunge la aceste ecuații și pornind de la situația unui solid considerat care ocupă un domeniu de volum V, mărginit de o suprafață S în care evidențiem un subdomeniu V' mărginit de suprafața S'.

Folosind principiul echilibrului părților pentru acest subdomeniu se pot scrie ecuațiile de proiecții pe axele ox, oy și oz.

$$\begin{aligned} \int_{S'} p_{nx} dS' + \int_{V'} \bar{X} dV' &= 0 \\ \int_{S'} p_{ny} dS' + \int_{V'} \bar{Y} dV' &= 0 \\ \int_{S'} p_{nz} dS' + \int_{V'} \bar{Z} dV' &= 0 \end{aligned} \tag{2.110}$$

unde

$$\bar{X} = X - \rho \ddot{u} \quad ; \quad \bar{Y} = Y - \rho \ddot{v} \quad ; \quad \bar{Z} = Z - \rho \ddot{w} \tag{2.111}$$

numite forțele pierdute ale lui D'Alembert.

Folosind relația (2.85) și o formulă de tip flux-divergență, care transformă o integrală de suprafață într-o integrală de volum, se obține

$$\int_{V'} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} \right) dV' = 0 \tag{2.112}$$

.....

Tinând cont de clasa căreia îi aparțin funcțiile de sub semnul integrală și ținând seama de faptul că subdomeniul V' este arbitrar, rezultă ecuațiile (2.109).

In cazul micilor mișcări amortizate, rezultă ecuațiile de mișcare

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= \rho \ddot{u} + v \dot{u} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \ddot{v} + v \dot{v} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= \rho \ddot{w} + v \dot{w} \end{aligned} \quad (2.113)$$

în care v este un coeficient specific de amortizare raportat la unitatea de volum.

În cazul micilor mișcări neamortizate aceste ecuații devin

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \ddot{u} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \ddot{v} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \ddot{w} \end{aligned} \quad (2.114)$$

2.5.2. Cazul corpurilor de tip Cosserat

Pentru scrierea ecuațiilor de mișcare se consideră echilibrul dinamic al elementului infinitesimal de formă paralelipipedică. Rezultă, ținând cont de variația micromomentelor prin trecere de la o față a paraleipipedului la alta, prin formulele de tip Taylor, luând în considerare tensiunile, forțele volumice, momentele volumice, împreună cu cuplurile de inerție volumice [T1],

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= \rho \ddot{u} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \ddot{v} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= \rho \ddot{w} \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zx}}{\partial z} + \tau_{yz} - \tau_{zy} + M_x &= J \ddot{\Phi}_x \\
 \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial z} + \tau_{zx} - \tau_{xz} + M_y &= J \ddot{\Phi}_y \\
 \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zz}}{\partial z} + \tau_{xy} - \tau_{yx} + M_z &= J \ddot{\Phi}_z
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

Dacă dispar micromomentele și momentele volumice, tensorul tensiune devine simetric; acest tensor T_σ poate fi simetric și dacă sunt îndeplinite simultan condițiile suplimentare

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zx}}{\partial z} + M_x &= J \ddot{\Phi}_x \\
 \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial z} + M_y &= J \ddot{\Phi}_y \\
 \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zz}}{\partial z} + M_z &= J \ddot{\Phi}_z
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

care sunt de aceeași formă cu ecuațiile (2.115).

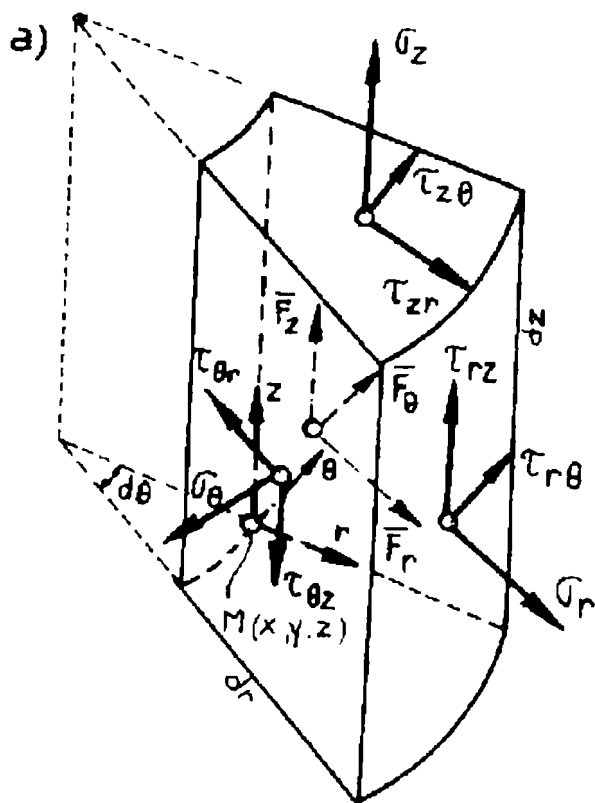
Dacă micromomentele și momentele volumice nu verifică ecuațiile (2.117), rezultă că tensorul tensiune este asimetric.

În lipsa forțelor și momentelor volumice, ecuațiile (2.115) și (2.116) ale micilor mișcări neamortizate devin

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u} \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \ddot{v} \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zx}}{\partial z} + \tau_{yz} - \tau_{zy} &= J\ddot{\Phi}_x \\
 \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial z} + \tau_{zx} - \tau_{xz} &= J\ddot{\Phi}_y \\
 \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zz}}{\partial z} + \tau_{xy} - \tau_{yx} &= J\ddot{\Phi}_z
 \end{aligned}
 \tag{2.119}$$

2.5.3. Ecuațiile de mișcare în coordonate cilindrice



Pentru tensiuni, relațiile de trecere de la coordonate carteziane ortogonale la coordonate curbilini ortogonale vor fi de forma

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_z = \sigma_z$$

(2.120)

Fig. 2.9

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta z} &= \tau_{yz} \cos\theta - \tau_{zx} \sin\theta \\
\tau_{zr} &= \tau_{yz} \sin\theta + \tau_{zx} \cos\theta \\
\tau_{r\theta} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta
\end{aligned}
\tag{2.121}$$

Ecuațiile de mișcare, corespunzătoare unui element infinitesimal, sunt de forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r &= \rho \ddot{u}_r, \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + F_\theta &= \rho \ddot{u}_\theta, \\
\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} + F_z &= \rho \ddot{u}_z.
\end{aligned}
\tag{2.122}$$

2.6. Legi constitutive

Legea constitutivă, relație între tensiuni și deformații specifice, trebuie să fie simplă, rămânând în limita ipotezelor admise pentru corpul considerat.

Se admite ca lege constitutivă legea lui Hooke, corespunzătoare cazului unidimensional. În general, o tensiune pe o direcție duce la deformații pe toate direcțiile; acestea se obțin prin suprapunerea efectelor, folosind legea lui Hooke generalizată, care va fi de formă liniară.

2.6.1. Cazul clasic

Se admite că între tensorul tensiune și tensorul deformație specifică există o relație liniară de forma

$$\mathbf{T}_\epsilon = \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{T}_\sigma \quad (2.123)$$

unde cu \mathbf{T}_H se notează tensorul lui Hooke, al coeficienților elastici.

În cazul corpurilor liniar elastice izotrope, legea lui Hooke este de forma

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.125)$$

unde apar constantele elastice de material:

E - modulul de elasticitate longitudinală,

G - modulul de elasticitate transversală,

μ - coeficientul de contracție transversală al lui Poisson.

Între aceste constante de material există relația

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (2.126)$$

Se observă că axele principale ale tensorului T_σ corespund cu axele principale ale tensorului T_ϵ .

Din relațiile (2.124) însumând membru cu membru și ținând cont de (2.10) și (2.92), rezultă

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \Theta. \quad (2.127)$$

Rezolvând sistemul (2.124) în raport cu tensiunile rezultă

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2G\epsilon_{xx}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda\theta + 2G\epsilon_{yy}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2G\epsilon_{zz}, \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.129)$$

în care apar constantele lui Lamé

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2.130)$$

Invers, E și μ se pot exprima:

$$E = \frac{(3\lambda + 2G)G}{\lambda + G}, \quad \mu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad (2.131)$$

Se notează cu m , constanta elastică numită numărul lui Poisson

$$m = \frac{1}{\mu} \quad (2.132)$$

În cazul coordonatelor curbilinii ortogonale legile constitutive se particularizează pentru:

- coordonate cilindrice

$$\begin{aligned}\epsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \mu(\sigma_{\theta} + \sigma_{zz})], \\ \epsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_r)],\end{aligned}\tag{2.133}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta})],$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{G} \tau_{\theta z} \quad , \quad \gamma_{zr} = \frac{1}{G} \tau_{zr} \quad , \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta};\tag{2.134}$$

- coordonate sferice

$$\begin{aligned}\epsilon_R &= \frac{1}{E} [\sigma_R - \mu(\sigma_{\varphi} + \sigma_{\theta})], \\ \epsilon_{\varphi} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi} - \mu(\sigma_{\theta} + \sigma_R)],\end{aligned}\tag{2.135}$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta} - \mu(\sigma_R + \sigma_{\varphi})],$$

$$\gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{G} \tau_{\varphi\theta} \quad , \quad \gamma_{\theta R} = \frac{1}{G} \tau_{\theta R} \quad , \quad \gamma_{R\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{R\varphi}\tag{2.136}$$

2.6.2. Cazul corpurilor de tip Cosserat

Se admit corpurile ca fiind omogene, centrosimetrice - fiecare punct este un centru de simetrie elastică, cu proprietăți de elasticitate liniară. Se introduce legea constitutivă corespunzătoare cazului general al rotațiilor libere, la care se adaugă

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} + 2\alpha\Omega_{yz}, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} + 2\alpha\Omega_{zx}, \\ \tau_{zy} &= G\gamma_{yz} - 2\alpha\Omega_{yz}, & \tau_{xz} &= G\gamma_{zx} - 2\alpha\Omega_{zx},\end{aligned}\quad (2.137)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} + 2\alpha\Omega_{xy},$$

$$\tau_{yx} = G\gamma_{xy} - 2\alpha\Omega_{xy},$$

$$\mu_{xx} = \lambda'\Psi + 2G'\varphi_{xx},$$

$$\mu_{yy} = \lambda'\Psi + 2G'\varphi_{yy},\quad (2.138)$$

$$\mu_{zz} = \lambda'\Psi + 2G'\varphi_{zz},$$

$$\mu_{yz} = 2G'\varphi_{yz}^s + 2\alpha'\varphi_{yz}^a, \quad \mu_{zx} = 2G'\varphi_{zx}^s + 2\alpha'\varphi_{zx}^a,$$

$$\mu_{zy} = 2G'\varphi_{yz}^s - 2\alpha'\varphi_{yz}^a, \quad \mu_{xz} = 2G'\varphi_{zx}^s + 2\alpha'\varphi_{zx}^a,\quad (2.139)$$

$$\mu_{xy} = 2G'\varphi_{xy}^s + 2\alpha'\varphi_{xy}^a,$$

$$\mu_{yx} = 2G'\varphi_{xy}^s - 2\alpha'\varphi_{xy}^a,$$

unde componentele tensorului T_σ sunt legate numai de componentele tensorului T_ϵ , iar componentele tensorului T_μ depind numai de componentele tensorului T_φ .

S-a introdus partea simetrică și partea antisimetrică a tensorului T_φ sub forma

$$\begin{aligned}\varphi_{yz}^s &= \frac{1}{2}(\varphi_{yz} + \varphi_{zy}), & \varphi_{yz}^a &= \frac{1}{2}(\varphi_{yz} - \varphi_{zy}), \\ \varphi_{zx}^s &= \frac{1}{2}(\varphi_{zx} + \varphi_{xz}), & \varphi_{zx}^a &= \frac{1}{2}(\varphi_{zx} - \varphi_{xz}), \\ \varphi_{xy}^s &= \frac{1}{2}(\varphi_{xy} + \varphi_{yx}), & \varphi_{xy}^a &= \frac{1}{2}(\varphi_{xy} - \varphi_{yx}).\end{aligned}\quad (2.140)$$

În relațiile precedente Ω și Ψ sunt date de relațiile (2.10) și (2.35); λ și G sunt constantele elastice ale lui Lamé, iar α este o constantă având aceleași dimensiuni. Constantele elastice λ' , G' și α' , joacă un rol analog lui λ , G și α . În

general, un corp de tip Cosserat linear elastic, cu rotații libere, depinde de șase constante elastice independente.

În cazul rotațiilor constrânse, pentru care $T_{\Omega}=0$, rezultă

$$\Psi = \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{u} = 0 \quad (2.141)$$

Însumând relațiile (2.128) și (2.138) membru cu membru, rezultă

$$\begin{aligned} \Theta &= (3\lambda + 2G)\theta \\ \Psi &= (3\lambda' + 2G')\Psi \end{aligned} \quad (2.142)$$

unde s-au folosit notațiile

$$\begin{aligned} \Psi &= \mu_{xx} + \mu_{yy} + \mu_{zz} \\ \Theta &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \end{aligned} \quad (2.143)$$

Legea constitutivă se admite de forma (2.124), la care se adaugă relațiile

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}^s, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}^s, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}^s \\ \Omega_{yz} &= \frac{1}{2\alpha} \tau_{yz}^a, \quad \Omega_{zx} = \frac{1}{2\alpha} \tau_{zx}^a, \quad \Omega_{xy} = \frac{1}{2\alpha} \tau_{xy}^a \end{aligned} \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= \frac{1}{E} [\mu_{xx} - \mu'(\mu_{yy} + \mu_{zz})], \\ \varphi_{yy} &= \frac{1}{E} [\mu_{yy} - \mu'(\mu_{zz} + \mu_{xx})], \\ \varphi_{zz} &= \frac{1}{E} [\mu_{zz} - \mu'(\mu_{xx} + \mu_{yy})], \end{aligned} \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{yz} &= \frac{1}{2G'} \mu_{yz}^s + \frac{1}{2\alpha'} \mu_{yz}^a, \\ \varphi_{zx} &= \frac{1}{2G'} \mu_{zx}^s + \frac{1}{2\alpha'} \mu_{zx}^a,\end{aligned}\quad (2.146)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{xy} &= \frac{1}{2G'} \mu_{xy}^s + \frac{1}{2\alpha'} \mu_{xy}^a, \\ \varphi_{zx} &= \frac{1}{2G'} \mu_{yz}^s - \frac{1}{2\alpha'} \mu_{yz}^a, \\ \varphi_{xz} &= \frac{1}{2G'} \mu_{zx}^s - \frac{1}{2\alpha'} \mu_{zx}^a, \\ \varphi_{yz} &= \frac{1}{2G'} \mu_{xy}^s - \frac{1}{2\alpha'} \mu_{xy}^a,\end{aligned}\quad (2.147)$$

obținute prin inversarea relațiilor (2.137), (2.138), la care s-a introdus partea simetrică și cea antisimetrică pentru tensiuni și micromomente tangențiale de forma

$$\begin{aligned}\tau_{yz}^s &= \frac{1}{2}(\tau_{yz} + \tau_{zy}), & \tau_{zx}^s &= \frac{1}{2}(\tau_{zx} + \tau_{xz}), & \tau_{zy}^s &= \frac{1}{2}(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \\ \tau_{yz}^a &= \frac{1}{2}(\tau_{yz} - \tau_{zy}), & \tau_{zx}^a &= \frac{1}{2}(\tau_{zx} - \tau_{xz}), & \tau_{zy}^a &= \frac{1}{2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}) \\ \mu_{yz}^s &= \frac{1}{2}(\mu_{yz} + \mu_{zy}), & \mu_{zx}^s &= \frac{1}{2}(\mu_{zx} + \mu_{xz}), & \mu_{zy}^s &= \frac{1}{2}(\mu_{zy} + \mu_{yx}) \\ \mu_{yz}^a &= \frac{1}{2}(\mu_{yz} - \mu_{zy}), & \mu_{zx}^a &= \frac{1}{2}(\mu_{zx} - \mu_{xz}), & \mu_{zy}^a &= \frac{1}{2}(\mu_{xy} - \mu_{yx})\end{aligned}\quad (2.148)$$

Modulul de elasticitate E și coeficientul contracției transversale μ sunt cele definite anterior și s-au mai introdus, în mod analog, constantele elastice

$$E' = \frac{(3\lambda' + 2G')G'}{\lambda' + G'} \quad ; \quad \mu' = \frac{\lambda'}{2(\lambda' + G')}, \quad (2.149)$$

relații care se pot scrie și invers, în forma

$$\lambda' = \frac{\mu' E'}{(1 + \mu')(1 - 2\mu')} \quad , \quad G' = \frac{E'}{2(1 + \mu')} \quad (2.150)$$

CAPITOLUL 3

ECUAȚIILE FUNDAMENTALE ALE CIOCNIRII CORPULUI ELASTIC

3.1. Considerații generale

Studiul ciocniri corpurilor rigide se bazează pe ipotezele simplificatoare privind existența forțelor percutante de intensitate foarte mare însă numai pe durata scurtă a ciocnirii. Astfel se pot calcula salturile de viteză necesare determinării mișcării ulterioare, poziția corpului fiind considerată nemodificată pe durata ciocnirii [S1].

Extinderea acestor ipoteze și la corpuri deformabile nu este posibilă fără alte simplificări referitoare la comportarea corpului supus ciocnirii.

În studiul ciocnirii corpurilor deformabile s-a introdus un model specific materialelor componente care are la bază ipoteza propagării instantanee a impulsurilor de ciocnire. Acest model stă la baza precizării condițiilor impuse corpului deformabil de către ciocnire [B7].

Pornind de la ecuațiile fundamentale ale teoriei elasticității, studiul ciocnirii se reduce la determinarea câmpului de viteze indus. Se înlocuiesc accelerațiile prin variații de viteze, iar tensiunile prin impulsurile lor legate prin legi de material corespunzătoare cazului elastic dar cu alte constante specifice materialelor componente.

Se admite că aplicarea ciocnirii, presupusă instantanee, generează brusc în corpul elastic izotrop variația tuturor vitezelor. Aceasta înseamnă că discontinuitatea generată de ciocnire se propagă instantaneu în tot corpul, adică cu viteză infinită. Evident este o simplificare față de alte dezvoltări cunoscute din teoria caracteristicilor care conduc la concluzia că propagarea se face cu viteză finită.

Odată metodologia stabilită, pot fi tratate separat cazurile simple de solicitări, dar în prezența ciocnirii. Pentru exemplificare se vor considera

solicitările simple ale barei drepte ce conduc la vibrații longitudinale ale barei supuse la ciocniri.

Posibilitatea variației instantanee sau foarte rapide a vitezelor în întreg volumul corpului a fost pentru prima dată luată în considerare de F.Conforto [C2].

3.2. Ecuțiile fundamentale ale ciocnirii corpului deformabil

Pomind de la ipotezele simplificatoare precizate pentru modelul corpului supus ciocnirii, în continuare se prezintă ecuațiile fundamentale necesare determinării legii de distribuție a salturilor de viteză din momentul ciocnirii și se aplică la cazuri simple ce pot fi imediat rezolvate. Toate rezultatele astfel obținute reprezintă condițiile inițiale pentru studiul evoluției stării corpului elastic în timp.

Studiul ciocnirii revine la determinarea variațiilor de viteze în diferite puncte ale corpului sub acțiunea câmpului de impulsuri rezultat.

Evident, ecuațiile de echilibru dinamic ale corpului elastic se presupun valabile și în intervalul scurt al ciocnirii.

Se consideră sistemul de axe Oxyz și se notează vectorul viteză $v(v_x, v_y, v_z)$, precum și tensorul simetric al tensiunilor

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

ecuațiile de echilibru dinamic vor fi

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u} &= X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \ddot{v} &= Y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \ddot{w} &= Z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

în care intervin tensiunile, componentele forței masice $\bar{F}(X,Y,Z)$, densitatea de masă ρ a materialului și componentele vectorului accelerație $\bar{a}(\ddot{u},\ddot{v},\ddot{w})$.

Dacă se notează cu $\bar{v}(v_x,v_y,v_z)$ vectorul viteză, componentele vectorului accelerație vor fi

$$\ddot{u}=\frac{dv_x}{dt}, \quad \ddot{v}=\frac{dv_y}{dt}, \quad \ddot{w}=\frac{dv_z}{dt} \quad (3.3)$$

iar ecuațiile echilibrului dinamic devin

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= Y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= Z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

În intervalul foarte scurt al ciocnirii $[t_0,t_1]$, apare variația bruscă a vitezei, notată cu $\bar{V}(V_x,V_y,V_z)$,

$$\bar{V}=\bar{v}_1-\bar{v}_0 \quad (3.5)$$

în care \bar{v}_0 și \bar{v}_1 sunt vitezele punctului considerat la începutul, respectiv sfârșitul fenomenului de ciocnire.

Se notează cu

$$\begin{aligned} p_{xx} &= \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{xx}(t) dt, & p_{yy} &= \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{yy}(t) dt, \dots\dots\dots \\ p_{xy} &= \int_{t_0}^{t_1} \tau_{xy}(t) dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

.....

impulsurile tensiunilor și cu T_p tensorul corespunzător

$$T_p = \begin{Bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Bmatrix}. \quad (3.7)$$

Deoarece modificarea poziției fiecărui punct în timpul ciocnirii se presupune neglijabilă, impulsurile tensiunilor satisfac egalitățile

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{xx} dt = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x},$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dt = \frac{\partial}{\partial y} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{yy} dt = \frac{\partial p_{yy}}{\partial y},$$

..... (3.8)

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dt = \frac{\partial}{\partial y} \int_{t_0}^{t_1} \tau_{xy} dt = \frac{\partial p_{xy}}{\partial y},$$

.....

$$\int_{t_0}^{t_1} X(t) dt = P_x \quad ; \quad \int_{t_0}^{t_1} Y(t) dt = P_y \quad ; \quad \int_{t_0}^{t_1} Z(t) dt = P_z$$

în care $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$ este o percuție.

Prin integrarea ecuațiilor diferențiale (3.8) pe durata $[t_0, t_1]$, a fenomenului de ciocnire, se deduce

$$\begin{aligned} \rho V_x &= P_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}, \\ \rho V_y &= P_y + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}, \\ \rho V_z &= P_z + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Trebuie subliniat că pentru forțele masice obișnuite, neavând caracter de forțe percutante, percuția corespunzătoare $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$ este neglijabilă.

Ecuțiile (3.9) sunt fundamentale pentru studiul ciocnirii corpului deformabil, ce poate fi considerat sub acțiunea unui câmp de impulsuri presupuse transmise instantaneu în întregul corp [B7]. În continuare, este necesar a se deduce repartiția acestor impulsuri în corpul elastic [B6].

3.3 Viteza specifică de deformație. Variația vitezei specifice de deformație

Se definește viteza specifică de deformație prin expresiile

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad ; \quad e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad ; \quad e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 e_{xy} = e_{yx} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad ; \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\
 e_{zx} = e_{xz} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

și tensorul viteză specifică de deformație, tensor simetric de ordinul al doilea

$$T_v = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

În plus, se mai consideră și variația vitezei specifice de deformație definindu-se mărimile

$$\begin{aligned}
 e'_{xx} &= e_{xx}^1 - e_{xx}^0 = \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} = \frac{\partial(v_{1x} - v_{0x})}{\partial x}, \\
 e'_{yy} &= e_{yy}^1 - e_{yy}^0 = \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} = \frac{\partial(v_{1y} - v_{0y})}{\partial y}, \\
 e'_{zz} &= e_{zz}^1 - e_{zz}^0 = \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} = \frac{\partial(v_{1z} - v_{0z})}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 e'_{xy} &= e_{xy}^1 - e_{xy}^0 = \left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right) = \\
 &= \frac{\partial(v_{1x} - v_{0x})}{\partial y} + \frac{\partial(v_{1y} - v_{0y})}{\partial x} = e'_{yx};
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 e'_{yz} &= e_{yz}^1 - e_{yz}^0 = \left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial z} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial v_{0y}}{\partial z} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial y} \right) = \\
 &= \frac{\partial(v_{1y} - v_{0y})}{\partial z} + \frac{\partial(v_{1z} - v_{0z})}{\partial y} = e'_{zy};
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 e'_{zx} &= e_{zx}^1 - e_{zx}^0 = \left(\frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial v_{0z}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \right) = \\
 &= \frac{\partial(v_{1z} - v_{0z})}{\partial x} - \frac{\partial(v_{1x} - v_{0x})}{\partial z} = e'_{xz}.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Tinând cont de relația (3.10), relațiile (3.13) devin

$$e'_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad ; \quad e'_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad ; \quad e'_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

$$e'_{xy} = e'_{yx} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x};
 \tag{3.16}$$

$$e'_{yz} = e'_{zy} = \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y};$$

$$e'_{zx} = e'_{xz} = \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}.$$

In plus se mai consideră și viteza de deformare volumică

$$e'_v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},
 \tag{3.17}$$

a cărei variație va fi

$$e'_v = e_v^1 - e_v^0 = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (3.18)$$

sau altfel scris:

$$e'_v = e'_{xx} + e'_{yy} + e'_{zz}. \quad (3.19)$$

Se notează cu T'_e , tensorul viteză relativă de deformație, tensor simetric de ordinul al doilea

$$T'_e = \begin{pmatrix} e'_{xx} & e'_{xy} & e'_{xz} \\ e'_{yx} & e'_{yy} & e'_{yz} \\ e'_{zx} & e'_{zy} & e'_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Componentele torsorului T'_e trebuie să îndeplinească următoarele condiții de continuitate

$$\frac{\partial^2 e'_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e'_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e'_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 e'_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e'_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e'_{zx}}{\partial z \partial x}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 e'_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e'_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e'_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e'_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e'_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e'_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e'_{xx}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e'_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e'_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e'_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 e'_{yy}}{\partial z \partial x}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial e'_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e'_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e'_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 e'_{zz}}{\partial x \partial y}.$$

3.4 Legi constitutive în cazul ciocnirii

Odată precizate principalele considerații privind echilibrul dinamic al corpului rămâne să fie analizate proprietățile fizice specifice fenomenului de ciocnire [B9], [M3].

Pe lângă aspectele geometrice și mecanice în formularea modelului, pentru corpul deformabil supus ciocnirii, mai trebuie adăugate considerațiile de natură fizică. Se impune introducerea caracteristicilor fizice prin legi constitutive simple dar în concordanță cu proprietățile fizice și în limitele ipotezelor admise asupra corpului deformabil.

Obișnuit în teoria elasticității se admit ca valabile legile lui Hooke exprimate prin relații liniare între tensiuni și deformații, este însă evident că există deosebiri fundamentale privind comportarea materialului în cazul ciocnirii [M3].

Drept urmare, la ciocniri trebuie considerate alte legi constitutive care se vor adopta în continuare tot liniare, dar între impulsurile tensiunilor și vitezele de deformație [C1], [C2].

Pentru corpurile izotrope se va admite că direcțiile principale ale tensorului impulsurilor T_p , și direcțiile principale ale tensorului vitezelor relative de deformații T_v , coincid, iar între mărimile corespunzătoare sunt valabile relațiile

$$e'_{xx} = \frac{1}{E_0} [p_{xx} - \mu_0(p_{yy} + p_{zz})],$$

$$e'_{yy} = \frac{1}{E_0} [p_{yy} - \mu_0(p_{zz} + p_{xx})],$$

$$e'_{zz} = \frac{1}{E_0} [p_{zz} - \mu_0(p_{xx} + p_{yy})],$$
(3.23)

$$e'_{xy} = \frac{1}{G_0} p_{xy},$$

$$e'_{yz} = \frac{1}{G_0} p_{yz},$$

$$e'_{zx} = \frac{1}{G_0} p_{zx},$$
(3.24)

unde E_0 și μ_0 sunt constantele din legea generalizată a lui Hooke pentru ciocniri, iar

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\mu_0)}, \quad (3.25)$$

Dacă se introduce constanta lui Lamé

$$\lambda_0 = \frac{E_0\mu_0}{(1+\mu_0)(1-2\mu_0)} \quad (3.26)$$

și se rezolvă sistemul de ecuații (3.23) în raport cu impulsurile tensiunilor, rezultă

$$\begin{aligned} p_{xx} &= \lambda_0 e'_v + 2G_0 e'_{xx}, \\ p_{yy} &= \lambda_0 e'_v + 2G_0 e'_{yy}, \\ p_{zz} &= \lambda_0 e'_v + 2G_0 e'_{zz}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$p_{xy} = p_{yx} = G_0 e'_{xy},$$

$$p_{yz} = p_{zy} = G_0 e'_{yz},$$

$$p_{zx} = p_{xz} = G_0 e'_{zx},$$

unde e'_{xx} sunt variațiile vitezelor specifice de deformații prin relațiile (3.16).

Trebuie subliniat că în sistemul de ecuații (3.27) apar numai componentele vectorului \bar{V} , ce reprezintă variația vitezei punctului din corp în timpul ciocnirii.

3.5. Ecuațiile lui Lamé în cazul ciocnirilor

Studiul ciocnirilor se face pe baza ecuațiilor (3.9) și (3.27), precum și a condițiilor la limită pe suprafață.

Tinând seama că în primul rând trebuie să se stabilească ecuațiile diferențiale pentru determinarea repartiției variațiilor de viteze, se vor elimina impulsurile tensiunilor din sistemul format de ecuațiile (3.9) ținând cont de relațiile (3.27). Astfel se obține sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} \rho V_x &= P_x + \lambda_0 \frac{\partial e'_v}{\partial x} + 2G_0 \frac{\partial e'_{xx}}{\partial x} + G_0 \frac{\partial e'_{xy}}{\partial y} + G_0 \frac{\partial e'_{xz}}{\partial z}, \\ \rho V_y &= P_y + \lambda_0 \frac{\partial e'_v}{\partial y} + 2G_0 \frac{\partial e'_{yy}}{\partial y} + G_0 \frac{\partial e'_{yx}}{\partial z} + G_0 \frac{\partial e'_{yx}}{\partial x}, \\ \rho V_z &= P_z + \lambda_0 \frac{\partial e'_v}{\partial z} + 2G_0 \frac{\partial e'_{zz}}{\partial z} + G_0 \frac{\partial e'_{zy}}{\partial x} + G_0 \frac{\partial e'_{zy}}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dar pe baza notațiilor (3.16) se poate scrie

$$\begin{aligned} &2G_0 \frac{\partial e'_v}{\partial x} + G_0 \frac{\partial e'_{xy}}{\partial y} + G_0 \frac{\partial e'_{xz}}{\partial z} = \\ &= G_0 \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + G_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \\ &= G_0 \nabla^2 V_x + G_0 \frac{\partial e'_v}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.29}$$

.....

unde s-a folosit operatorul Laplace

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3.30}$$

Conform celor precizate anterior au fost neglijate impulsurile forțelor masice

ce nu au caracter percutant. Astfel, în final, sistemul de ecuații (3.28) devine

$$\begin{aligned} \rho V_x &= G_0 \nabla^2 V_x + (\lambda_0 + G_0) \frac{\partial e'_v}{\partial x}, \\ \rho V_y &= G_0 \nabla^2 V_y + (\lambda_0 + G_0) \frac{\partial e'_v}{\partial y}, \\ \rho V_z &= G_0 \nabla^2 V_z + (\lambda_0 + G_0) \frac{\partial e'_v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

În concluzie sistemul (3.31) poate fi utilizat pentru calculul variației de viteză a punctelor din corp $\bar{V}(V_x, V_y, V_z)$, datorată fenomenului de ciocnire. După cum se observă, aceste ecuații sunt analoge ecuațiilor lui Lamé din teoria elasticității [F1].

Practic, repartiția variației vitezelor din întregul corp se determină prin integrarea sistemului (3.31) cu condițiile de limită date.

3.6. Ecuțiile Beltrani-Michell în cazul ciocnirilor

Plecînd de la ecuațiile de mișcare (3.2), derivându-le în raport cu x , y și z , [T1] și luând în considerare relațiile (3.16) și relațiile (3.23), rezultă

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_{xx} + \mu_0 \frac{\rho}{E_0} (p_{yy} + p_{zz}) + \frac{\partial^2 p_{zx}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial P_x}{\partial x} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_{yy} + \mu_0 \frac{\rho}{E_0} (p_{zz} + p_{xx}) + \frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 p_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial P_y}{\partial y} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_{zz} + \mu_0 \frac{\rho}{E_0} (p_{xx} + p_{yy}) + \frac{\partial^2 p_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 p_{zx}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial P_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Tinându-se seama de continuitatea exprimată de relațiile (3.22) și de relațiile

(3.23), rezultă

$$\frac{\partial^2 p_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p_{zz}}{\partial y} - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 p_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial z^2} \right) = 2(1 + \mu_0) \frac{\partial^2 p_{yx}}{\partial y \partial z} \quad (3.33)$$

.....
.....

Adunând cele șase ecuații de mai sus membru cu membru, primele trei fiind multiplicare cu $(1 + \mu_0)$, rezultă că suma impulsurilor tensiunilor normale verifică o ecuație de forma

$$\square_1(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) = -\frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0} \operatorname{div} \bar{P} \quad (3.34)$$

În ecuația de mai sus s-a introdus operatorul lui D'Alembert

$$\square_i = \nabla^2 - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (i=1,2), \quad (3.35)$$

unde ∇^2 este operatorul Laplace (3.30) iar c_1 și c_2 sunt date de

$$c_1^2 = \frac{2(1 - \mu_0)}{1 - 2\mu_0} \frac{G_0}{\rho} = \frac{1 - \mu_0}{(1 + \mu_0)(1 - 2\mu_0)} \frac{E_0}{\rho}, \quad (3.36)$$

$$c_2^2 = \frac{G_0}{\rho} = \frac{1}{2(1 + \mu_0)} \frac{E_0}{\rho}.$$

Se observă că între c_1 și c_2 este o relație de forma

$$c_1^2 = \frac{2(1 - \mu_0)}{1 - 2\mu_0} c_2^2 = \left(1 + \frac{1}{1 - 2\mu_0} \right) c_2^2 \quad (3.37)$$

De asemenea, rezultă că între operatorii (7.4), introduși mai sus există o relație de forma

$$(1-2\mu_0)\square_2 + \nabla^2 = 2(1-\mu_0)\square_1. \quad (3.38)$$

În ecuația (3.34) mai apare notația $\text{div } \bar{P}$ care semnifică

$$\text{div } \bar{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}. \quad (3.39)$$

În continuare, dacă se elimină cele trei impulsuri ale tensiunilor tangențiale între ecuațiile (3.32) și (3.33), rezultă ecuațiile pe care trebuie să le verifice impulsurile tensiunilor normale

$$\begin{aligned} \square_2 p_{xx} + \frac{1}{1+\mu_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{1-\mu_0} \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = \\ = -\frac{\mu_0}{1-\mu_0} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial P_x}{\partial x}, \\ \square_2 p_{yy} + \frac{1}{1+\mu_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{1-\mu_0} \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = \\ = -\frac{\mu_0}{1+\mu_0} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial P_y}{\partial y}, \\ \square_2 p_{zz} + \frac{1}{1+\mu_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{1-\mu_0} \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = \\ = -\frac{\mu_0}{1-\mu_0} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial P_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dacă se derivă a doua ecuație de mișcare (3.28) în raport cu z și pe a treia în raport cu y și le însumăm putem scrie ecuația

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2(1+\mu_0) \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (p_{yy} + p_{zz}) + \frac{\partial^2 p_{zx}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial y} = 0, \quad (3.41)$$

Celelalte două se obțin prin permutări circulare

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2(1+\mu_0) \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p_{zx} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (p_{zz} + p_{xx}) + \frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 p_{yz}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial P_z}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial z} = 0 \quad (3.42)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2(1+\mu_0) \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p_{zy} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (p_{xx} + p_{yy}) + \frac{\partial^2 p_{yz}}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 p_{zx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial P_x}{\partial y} + \frac{\partial P_y}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

Ecuțiile de continuitate, scrise în tensiuni, cu ajutorul legii lui Hooke pentru ciocniri, vor fi de următoarea formă

$$\begin{aligned} (1+\mu_0) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial p_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial y \partial z} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (p_{yy} + p_{zz}), \\ (1+\mu_0) \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial p_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 p_{yy}}{\partial z \partial x} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (p_{zz} + p_{xx}), \\ (1+\mu_0) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial p_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 p_{zz}}{\partial x \partial y} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (p_{xx} + p_{yy}), \end{aligned} \quad (3.44)$$

Eliminând câte două tensiuni tangențiale între aceste ecuații, rezultă

$$\begin{aligned} \square_2 p_{yz} + \frac{1}{1+\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= - \left(\frac{\partial P_y}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial y} \right), \\ \square_2 p_{zx} + \frac{1}{1+\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= - \left(\frac{\partial P_z}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial z} \right), \\ \square_2 p_{xy} + \frac{1}{1+\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= - \left(\frac{\partial P_x}{\partial y} + \frac{\partial P_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ecuțiile (3.40) și (3.45) reprezintă ecuațiile de tip Beltrani-Michael pentru problema percuției corpului elastic, în cazul unor forțe masice de clasa C^1 .

În lipsa forțelor masice, ecuațiile de tip Beltrami corespunzătoare vor fi

$$\begin{aligned}
 \square_2 p_{yz} + \frac{1}{1+\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= 0 \\
 \square_2 p_{zx} + \frac{1}{1+\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= 0 \\
 \square_2 p_{xy} + \frac{1}{1+\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= 0 \\
 \square_2 p_{yy} + \frac{1}{1+\mu_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{1-\mu_0} \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= 0 \\
 \square_2 p_{zz} + \frac{1}{1+\mu_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{1-\mu_0} \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Aplicând operatorul \square_1 ecuațiilor (3.46), ținând seama de (3.34), rezultă că în absența forțelor masice, componentele tensorului impulsurilor tensiunilor T_p (3.7, verifică dubla ecuație

$$\begin{aligned}
 \square_1 \square_2 p_{xx} = \square_1 \square_2 p_{yy} = \square_1 \square_2 p_{zz} &= 0 \\
 \square_1 \square_2 p_{yz} = \square_1 \square_2 p_{zx} = \square_1 \square_2 p_{xy} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Se remarcă faptul că impulsurile tensiunilor trebuie să fie funcții de clasa C^2 , pentru a putea verifica ecuațiile de tip Beltrami, iar dacă dorim să fie verificate și ecuațiile (3.47) trebuie să fie funcții de clasa C^4 .

Se mai observă că mulțimea integralelor ecuațiilor (3.47) cuprinde mulțimea integralelor ecuațiilor (3.46), primele ecuații nefiind suficiente pentru rezolvarea problemei.

Pentru rezolvarea problemei trebuie integrat sistemul format de ecuațiile de tip Beltrami (3.46) și ecuațiile (3.9); trebuie ținut cont de aceste ecuații deoarece ele reprezintă condiții mai restrictive decât cele impuse de ecuațiile de tip Beltrami. La toate acestea trebuie adăugată și legea generalizată a lui Hooke corespunzătoare ciocnirii (3.23) unde se ține seama de relațiile (3.16).

3.7. Ecuațiile fundamentale ale ciocnirii în cazul corpurilor de tip Cosserat

În studiul ciocnirii corpurilor de tip Cosserat trebuie introdusă și influența momentelor volumice $\bar{M}(M_x, M_y, M_z)$ și trebuie considerată apariția micromomentelor. Si în acest caz se presupun valabile ecuațiile de echilibru dinamic ale acestor corpuri; în plus se consideră valabile toate ipotezele ce au stat la baza deducerii acestor ecuații. Astfel, se consideră tensorul T_σ al tensiunilor

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

și tensorul micromoment T_μ

$$T_\mu = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{zy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Ecuațiile de mișcare vor fi

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u} &= X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \ddot{v} &= Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \ddot{w} &= Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\Phi}_x &= M_x + \tau_{yz} - \tau_{zy} + \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zx}}{\partial z} \\
 J\ddot{\Phi}_y &= M_y + \tau_{zx} - \tau_{xz} + \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial z} \\
 J\ddot{\Phi}_z &= M_z + \tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zz}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

în care intervin tensiunile, componentele forței masice $\bar{F}(X,Y,Z)$, densitatea materialului și componentele accelerației $\bar{a}(\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w})$, și J - moment de inerție de rotație specific; $\bar{\Phi}(\ddot{\Phi}_x, \ddot{\Phi}_y, \ddot{\Phi}_z)$ - accelerația unghiulară de rotație constrânsă; $\bar{M}(M_x, M_y, M_z)$ - moment volumic total în punctul respectiv.

Dacă se notează cu $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$ vectorul viteză și cu $\bar{\Phi}(\ddot{\Phi}_x, \ddot{\Phi}_y, \ddot{\Phi}_z)$ vectorul accelerație unghiulară de rotație constrânsă, componentele accelerațiilor vor fi

$$\begin{aligned}
 \ddot{u} &= \frac{dv_x}{dt} & \ddot{v} &= \frac{dv_y}{dt} & \ddot{w} &= \frac{dv_z}{dt} \\
 \ddot{\Phi}_x &= \frac{d\dot{\Phi}_x}{dt} & \ddot{\Phi}_y &= \frac{d\dot{\Phi}_y}{dt} & \ddot{\Phi}_z &= \frac{d\dot{\Phi}_z}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

iar ecuațiile de echilibru dinamic vor fi

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{dV_x}{dt} &= X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\
 \rho \frac{dV_y}{dt} &= Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\
 \rho \frac{dV_z}{dt} &= Z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J \frac{d\dot{\Phi}_x}{dt} &= M_x + \tau_{yz} - \tau_{zy} + \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zx}}{\partial z} \\
 J \frac{d\dot{\Phi}_y}{dt} &= M_y + \tau_{zx} - \tau_{xz} + \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial z} \\
 J \frac{d\dot{\Phi}_z}{dt} &= M_z + \tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zz}}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Dacă se consideră intervalul, foarte scurt, al ciocnirii, $\tau=t_1-t_0$, în această perioadă apare variația bruscă de viteză $\bar{V}(V_x, V_y, V_z)$,

$$\bar{V} = \bar{v}_1 - \bar{v}_0
 \tag{3.54}$$

și variația bruscă a vitezei unghiulare de rotație constrânsă $\bar{\Phi}(\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y, \bar{\Phi}_z)$

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_0
 \tag{3.55}$$

în care \bar{v}_0 și $\bar{\Phi}_0$ sunt viteza și viteza unghiulară de rotație constrânsă la începutul intervalului iar \bar{v}_1 și $\bar{\Phi}_1$ sunt vitezele la sfârșitul intervalului de ciocnire.

Se notează cu

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{xx}(t) dt \quad ; \quad p_{yy} = \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{yy}(t) dt \quad \dots\dots\dots \\
 p_{xy} &= \int_{t_0}^{t_1} \tau_{xy}(t) dt \quad ; \quad \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$

impulsurile tensiunilor și cu T_p tensorul corespunzător

$$T_p = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}
 \tag{3.57}$$

Similar se notează cu

$$\begin{aligned}
 k_{xx} &= \int_{t_0}^{t_1} \mu_{xx}(t) dt \quad ; \quad k_{yy} = \int_{t_1}^{t_2} \mu_{yy}(t) dt \quad ; \quad \dots\dots\dots \\
 & \\
 k_{xy} &= \int_{t_0}^{t_1} \mu_{xy}(t) dt \quad ; \quad \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.58}$$

impulsurile micromomentelor și cu T_k tensorul respectiv

$$T_k = \begin{Bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{Bmatrix}
 \tag{3.59}$$

Deoarece modificarea poziției fiecărui punct în timpul ciocnirii se presupune neglijabilă, impulsurile tensiunilor și impulsurile micromomentelor satisfac egalitățile

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{xx} dt = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \\
 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{yy} dt = \frac{\partial p_{yy}}{\partial x} \\
 \dots\dots\dots \\
 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_1} \tau_{xy} dt = \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \\
 \dots\dots\dots \\
 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_1} \mu_{xx} dt = \frac{\partial k_{xx}}{\partial x} \\
 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial x} dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_1} \mu_{yy} dt = \frac{\partial k_{yy}}{\partial x} \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.60}$$

Tinând cont de relațiile (3.60) prin integrarea ecuațiilor (3.53) în raport cu timpul pe durata $[t_0, t_1]$ a fenomenului de ciocnire, se deduce

$$\begin{aligned} \rho V_x &= P_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \\ \rho V_y &= P_y + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \\ \rho V_z &= P_z + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \\ \\ J\tilde{\Phi}_x &= K_x + p_{yz} - p_{zy} + \frac{\partial k_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial k_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial k_{zx}}{\partial z} \\ J\tilde{\Phi}_y &= K_y + p_{zx} - p_{xz} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial k_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial k_{zy}}{\partial z} \\ J\tilde{\Phi}_z &= K_z + p_{xy} - p_{yx} + \frac{\partial k_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial k_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial k_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dacă forțele și momentele masice sunt obișnuite, deci nu au caracter percutant, percuțiile corespunzătoare $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$ și $\bar{K}(K_x, K_y, K_z)$ pot fi neglijate.

Ecuatiile (3.61) sunt fundamentale pentru studiul ciocnirii corpurilor de tip Cosserat, ce pot fi considerate sub acțiunea unui câmp de impulsuri transmise instantaneu în întregul corp.

CAPITOLUL 4

CAZURI PARTICULARE ALE CIOCNIRII CORPURILOR ELASTICE

4.1. Ciocnirea longitudinală a barei drepte

Studiul ciocnirii poate fi ușor elaborat în cazul barei drepte supusă unei ciocniri longitudinale [B5].

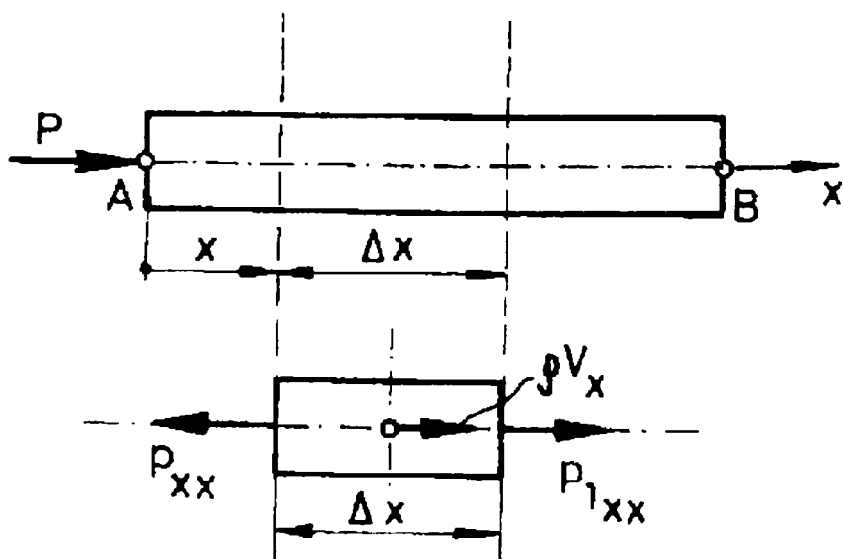


Fig.4.1

Bara dreaptă cu axa x , se presupune supusă în A la percuția P (fig.4.1). Secțiunea transversală a barei este S iar densitatea ρ , constantă de-a lungul barei.

Presupunând elementul de bară din fig.4.1, ecuația de echilibru a acestuia în cazul ciocnirii este

$$\rho V_x = \frac{dp_{xx}}{dx} \quad (4.1)$$

Legea de tip Hooke ce exprimă comportarea materialului la ciocnire, se consideră de forma

$$p_{xx} = E_0 e'_{xx} \quad (4.2)$$

unde E_0 este modulul de elasticitate longitudinal la ciocnire, iar e'_{xx} variația vitezei

de deformație

$$e'_{xx} = \frac{dV_x}{dx} \quad (4.3)$$

Dacă se introduce legea (4.2) și expresia (4.3) în ecuația de echilibru (4.1), rezultă pentru ciocnire ecuația

$$V_x'' - \frac{1}{b^2} V_x = 0 \quad , \quad b = \sqrt{\frac{E_o}{\rho}} \quad (4.4)$$

Soluția generală a ecuației (4.4) este de forma

$$V_x = C_1 ch \frac{x}{b} + C_2 sh \frac{x}{b} \quad (4.5)$$

C_1, C_2 fiind constante de integrare ce depind de condițiile concrete de realizare a ciocnirii.

Considerând bara de lungime l , condițiile la limită vor fi date de percuția care se presupune aplicată în extremitatea A ($x=0$).

În această situație pentru extremitatea A se poate scrie condiția

$$P + Sp_{xx}|_{x=0} = 0 \quad (4.6)$$

Tinând seama de legea (4.2) și expresia (4.3), din condiția (4.6) se deduce

$$V_x'|_{x=0} = -\frac{P}{E_o S} \quad (4.7)$$

Analog pentru extremitatea fixă B unde nu acționează percuția, rezultă

$$V_x'|_{x=l} = 0 \quad (4.8)$$

În consecință, dacă percuția se aplică unei bare în repaus (fig.4.2), soluția (4.5) pentru condițiile (4.7) și (4.8), devine

$$V_x = \frac{bP}{E_o S} \frac{ch \frac{l-x}{b}}{sh \frac{l}{b}} \quad (4.9)$$

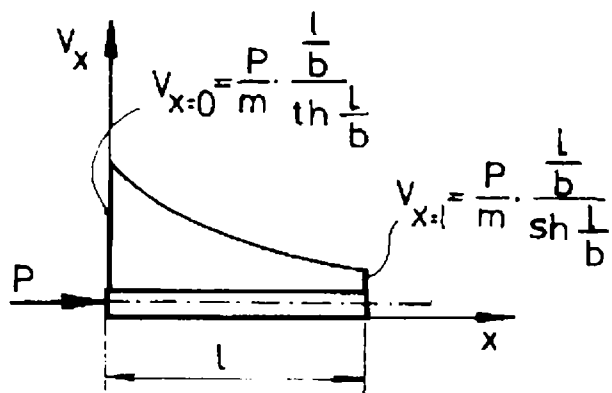


Fig.4.2

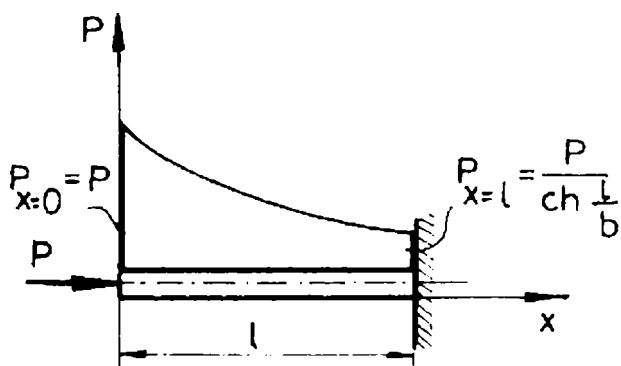


Fig.4.3

Soluția (4.9) exprimă distribuția de-a lungul barei a salturilor de viteză datorită ciocnirii. Acestea reprezintă condiții inițiale pentru vibrațiile longitudinale ale barei ce urmează ciocnirii.

Raportul vitezelor secțiunilor limită

$$\frac{v_{x=0}}{v_{x=l}} = \text{ch} \frac{l}{b} \quad (4.10)$$

este cu atât mai mare cu cât bara este mai lungă și cu cât E_0 va fi mai mic.

Dacă $l/b \ll 1$, bară rigidă și scurtă, atunci vitezele tuturor elementelor barei vor fi aproape egale.

Dacă percuția P se aplică unei bare cu un capăt încastrat (fig.4.3) atunci

$$V_x = \frac{Pb}{E_0 S \text{ch} \frac{l}{b}} \text{sh} \frac{l-x}{b} \quad (4.11)$$

Impulsul transmis de bară obstacolului (încastrării) este

$$\frac{P}{\text{ch} \frac{l}{b}} \quad (4.12)$$

Dacă $l/b \gg 1$ acest impuls va fi diminuat. Dacă însă $l/b \ll 1$, bara scurtă și rigidă, atunci impulsul se transmite aproape fără modificări.

În continuare se aplică considerațiile precedente la câteva cazuri concrete.

Pentru o bară din oțel, de lungime l și secțiune S , supusă șocului tensiunea corespunzătoare limitei de elasticitate este $\sigma_e = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, iar forța percutantă corespunzătoare $F_e = S\sigma_e$. Considerând durata șocului $t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, rezultă percuția

$$P = \int_0^t F dt = Ft = S\sigma_e t \quad (4.13)$$

Viteza capătului barei de masă m , densitate ρ și lungime l va fi prin aplicarea percuției P

$$v_{x=0} = \frac{P}{m} = \frac{S\sigma_e t}{Sl\rho} = \frac{\sigma_e t}{l\rho} \quad (4.14)$$

Pentru

a) $l=1 \text{ m}$; $S=10^{-2} \text{ m}^2$; $\rho=78 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$ rezultă

$$v_{x=0} = \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 78 \cdot 10^2} = 5,12 \text{ m/s} \quad (4.15)$$

b) $l=3 \text{ m}$; $S=10^{-2} \text{ m}^2$; $\rho=78 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$ rezultă

$$v_{x=0} = \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 78 \cdot 10^2} = 1,7 \text{ m/s} \quad (4.16)$$

c) $l=10 \text{ m}$; $S=10^{-2} \text{ m}^2$; $\rho=78 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$ rezultă

$$v_{x=0} = \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 78 \cdot 10^2} = 0,512 \text{ m/s} \quad (4.17)$$

P=400 Ns l=1 m ρ=7800 kg/m ³ S=10 ⁻² m ²							
E ₀ [N/m ²]	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷	10 ⁸
$b=\sqrt{E_0 \rho}$	0,113	0,358	1,132	3,58	11,32	35,8	113,22
l/b	8,85	2,816	0,883	0,279	0,0883	0,0279	0,0088
sh l/b	3487	8,325	1,0028	0,283	0,0884	0,0279	0,0088
V _x x	$V_x = \frac{Pbch \frac{l-x}{b}}{E_0 S sh \frac{l}{b}}$						
x=0	45,20	14,42	6,38	5,25	5,138	5,134	5,14
x=0,3l	3,18	6,19	5,40	5,15	5,129	5,133	5,14
x=0,6l	0,22	2,91	4,80	5,09	5,123	5,132	5,14
x=l	0,013	1,72	4,51	5,06	5,120	5,132	5,14

$E_0=10^9$

$b=358$

$l/b=0,00279; \quad sh=0,00279; \quad ch=1$

$V_{x=0}=5,11$

P=400 Ns l=3 m ρ=7800 kg/m ³ S=10 ⁻² m ²							
E ₀ [N/m ²]	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷	10 ⁸
$b=\sqrt{E_0 J \rho}$			1,132	3,58	11,32	35,8	113,22
l/b			2,65	0,838	0,265	0,084	0,0265
sh l/b			7	0,943	0,268	0,084	0,0265
V_x x	$V_x = \frac{P b c h \frac{l-x}{b}}{E_0 S s h \frac{l}{b}}$						
x=0			4,6	2,08	1,750	1,71	1,70
x=0,3l			2,118	1,789	1,72	1,70	1,70
x=0,6l			1,046	1,606	1,70	1,70	1,70
x=l			0,647	1,52	1,69	1,70	1,70

- material: aluminiu
- modulul lui Young $E=7 \cdot 10^{10}$ N/m²
- densitate $\rho=28 \cdot 10^2$ kg/m³
- dimensiuni $l=1$ m; $S=10^{-2}$ m²
- forța percutantă $F=10^6$ N; $t_c=10^{-4}$; percuția $P=10^2$ Ns

α	$\alpha_1=0,8$			$\alpha_2=0,4$		
$E_d=\alpha E$ modulul dinamic	5,6·10 ¹⁰			2,8·10 ¹⁰		
$b=\sqrt{E_d t}$	4,47·10 ³			3,16·10 ³		
l/b	0,22·10 ⁻³			0,27·10 ⁻³		
sh l/b	0,22·10 ⁻³			0,27·10 ⁻³		
x [m]	$\frac{l-x}{b}$	$ch \frac{l-x}{b}$	$V_x = \frac{Pb}{E_0 S} \frac{ch^l}{sh}$	$\frac{l-x}{b}$	$ch \frac{l-x}{b}$	$V_x = \frac{Pb}{E_0 S} \frac{ch}{sl}$
0	0,22 10 ⁻³	1,000000024	3,6 m/s	0,27 10 ⁻³	1,000000036	4,18 m/s
0.2	0,17 10 ⁻³	1,000000014		0,25 10 ⁻³	1,000000031	
0.4	0,13 10 ⁻³	1,000000008		0,19 10 ⁻³	1,000000018	
0.6	0,08 10 ⁻³	1,000000003		0,13 10 ⁻³	1,000000008	
0.8	0,04 10 ⁻³	1,000000001		0,06 10 ⁻³	1,000000002	
1	0	1		0	1	
Variații	$\Delta E_0 = 50\%$					
	$\Delta V_x = 16\%$					

- material: aluminiu
- modulul lui Young $E=7 \cdot 10^{10}$ N/m²
- densitate $\rho=28 \cdot 10^2$ kg/m³
- dimensiuni $l=10$ m; $S=10^{-2}$ m²
- forța percutantă $F=10^6$ N; $t_c=10^{-4}$; percuția $P=10^2$ Ns

α	$\alpha_1=0.8$			$\alpha_2=0.4$		
$E_0=\alpha E$ modulul dinamic	$5.6 \cdot 10^{10}$			$2.8 \cdot 10^{10}$		
$b=\sqrt{E_0 l t}$	$4.47 \cdot 10^3$			$3.16 \cdot 10^3$		
l/b	$0.22 \cdot 10^{-2}$			$0.27 \cdot 10^{-2}$		
$sh\ l/b$	$0.22 \cdot 10^{-2}$			$0.27 \cdot 10^{-2}$		
x [m]	$\frac{l-x}{b}$	$ch \frac{l-x}{b}$	$V_x = \frac{Pb}{E_0 S} \frac{ch^l}{sh}$	$\frac{l-x}{b}$	$ch \frac{l-x}{b}$	$V_x = \frac{Pb}{E_0 S} \frac{ch}{sh}$
0	$0.22 \cdot 10^{-2}$	1,0000024	0,3628 m/s	$0.27 \cdot 10^{-2}$	1,0000036	0,4179 m/s
2	$0.17 \cdot 10^{-2}$	1,0000016		$0.25 \cdot 10^{-2}$	1,0000032	
4	$0.13 \cdot 10^{-2}$	1,0000009		$0.18 \cdot 10^{-2}$	1,0000018	
6	$0.09 \cdot 10^{-2}$	1,0000004		$0.12 \cdot 10^{-2}$	1,0000008	
8	$0.04 \cdot 10^{-2}$	1,0000001		$0.06 \cdot 10^{-2}$	1,0000002	
l	0	1		0	1	
Variații	$\Delta E_0 = 50\%$					
	$\Delta V_x = 16\%$					

- material: oțel carbon
- modul de elasticitate $E=21 \cdot 10^{10}$ N/m²
- densitate $\rho=7800$ kg/m³
- dimensiuni $l=1$ m; $S=10^{-2}$ m²
- forța percutantă $F=10^6$ N; $t_c=10^{-4}$; percuția $P=10^2$ Ns

α	$\alpha_1=0,8$			$\alpha_2=0,4$		
$E_0=\alpha E$ modulul dinamic	16.8·10 ¹⁰			8.4·10 ¹⁰		
$b=\sqrt{E_0 l t}$	4.641·10 ³			3.280·10 ³		
l/b	0.21·10 ⁻³			0.27·10 ⁻³		
sh l/b	0.21·10 ⁻³			0.27·10 ⁻³		
x [m]	$\frac{l-x}{b}$	$ch \frac{l-x}{b}$	$V_x = \frac{Pb}{E_0 S} \frac{ch \frac{l-x}{b}}{sh}$	$\frac{l-x}{b}$	$ch \frac{l-x}{b}$	$V_x = \frac{Pb}{E_0 S} \frac{ch \frac{l-x}{b}}{sh}$
0	0,21 10 ⁻³	1,000000022	1.3812 m/s	0,27 10 ⁻³	1,000000036	1,4462 m/s
0.2	0,17 10 ⁻³	1,000000015		0,24 10 ⁻³	1,000000030	
0.4	0,12 10 ⁻³	1,000000008		0,18 10 ⁻³	1,000000017	
0.6	0,08 10 ⁻³	1,000000004		0,12 10 ⁻³	1,000000007	
0.8	0,04 10 ⁻³	1,000000001		0,06 10 ⁻³	1,000000002	
1	0	1		0	1	
Variații	$\Delta E_0 = 50\%$					
	$\Delta V_x = 4,7\%$					

- material: oțel carbon
- modul de elasticitate $E=21 \cdot 10^{10}$ N/m²
- densitate $\rho=7800$ kg/m³
- dimensiuni $l=10$ m; $S=10^{-2}$ m²
- forța percutantă $F=10^6$ N; $t_c=10^{-4}$; percuția $P=10^2$ Ns

α	$\alpha_1=0.8$			$\alpha_2=0.4$		
$E_d=\alpha E$ modulul dinamic	16.8·10 ¹⁰			8.4·10 ¹⁰		
$b=\sqrt{E_d t}$	4.641·10 ³			3.280·10 ³		
l/b	0.21·10 ⁻²			0.27·10 ⁻²		
sh l/b	0.21·10 ⁻²			0.27·10 ⁻²		
x [m]	$\frac{l-x}{b}$	$ch \frac{l-x}{b}$	$V_x = \frac{Pb}{E_0 S} \frac{ch^l}{sh}$	$\frac{l-x}{b}$	$ch \frac{l-x}{b}$	$V_x = \frac{Pb}{E_0 S} \frac{ch}{sh}$
0	0.22 10 ⁻²	1.0000023	0.13812 m/s	0.27 10 ⁻²	1.0000046	0.1446 m/s
2	0.17 10 ⁻²	1.0000015		0.24 10 ⁻²	1.0000029	
4	0.13 10 ⁻²	1.0000008		0.18 10 ⁻²	1.0000016	
6	0.08 10 ⁻²	1.0000003		0.12 10 ⁻²	1.0000007	
8	0.04 10 ⁻²	1.00000009		0.06 10 ⁻²	1.0000002	
l	0	1		0	1	
Variații	$\Delta E_0 = 50\%$					
	$\Delta V_x = 4.7\%$					

Se constată că prin aplicarea unei solicitări axiale impulsive asupra capătului unei bare elastice drepte, indiferent de materialul barei și de valoarea constantei E_0 , salturile de viteză în diferitele secțiuni ale barei sunt aproximativ egale.

De altfel, se constată că în expresia salturilor de viteză

$$V_x = \frac{P}{E_0 S} \cdot b \cdot \frac{ch \frac{l-x}{b}}{sh \frac{l}{b}} \quad (4.18)$$

dacă

$$\frac{l}{b} \ll 1 \quad (4.19)$$

rezultă

$$sh \frac{l}{b} \approx \frac{l}{b} \quad \text{și} \quad ch \frac{l-x}{b} \approx 1 \quad (4.20)$$

și ținând cont că $b = \sqrt{E_0 / \rho}$ rezultă

$$V_x = \frac{P}{E_0 S} \cdot b \cdot \frac{1}{\frac{l}{b}} = \frac{P}{E_0 S} \frac{b^2}{l} = \frac{P}{E_0 S} \frac{E_0}{\rho l} = \frac{P}{S \rho l} \quad (4.21)$$

Se constată în relația precedentă lipsa coordonatei x care particularizează secțiunea în care se calculează saltul de viteză.

Verificarea valabilității consecințelor stabilite

Studiul ciocnirii corpurilor deformabile elastice se poate realiza, presupunând ciocnirea instantanee, pe baza ecuațiilor teoriei elasticității.

Spre deosebire de cazul ciocnirii corpurilor rigide, impactul provoacă o repartiție continuă a salturilor de viteză ce necesită precizări suplimentare. Acestea sunt posibile numai pe baza unor ipoteze speciale caracteristice fenomenului de

ciocnire. Este esențială luarea în considerare a comportării corpurilor prin legi constitutive de material valabile numai la ciocnire determinate atât de material, cât și de natura ciocnirii [M3].

Pe această linie s-au adoptat relații liniare între componentele tensorilor impulsului tensiunilor și al vitezei de deformare drept legi constitutive la ciocnire care se pot verifica prin particularizare. Toate constantele ce intervin în aceste legi pot fi doar aproximativ apreciate prin analiza dimensională ținând seama de durata ciocnirii.

Verificări ale valabilității ipotezelor admise rezultă și din considerarea cazurilor limită.

Prin aplicarea unei acționări axiale impulsive, se constată că asupra extremității barei elastice drepte, indiferent de materialul barei și de valoarea constantei E_0 , salturile de viteză în diferite secțiuni ale barei nu variază semnificativ.

De altfel, se constată că în expresia salturilor de viteză (4.9) dacă $l/d \ll 1$ și deci $\text{sh}(l/b) \approx l/b$, $\text{ch}[(l-x)/b] \approx 1$ și ținând seama că $b = (E_0/\rho)^{1/2}$, rezultă

$$V_x = \frac{P}{S\rho l} \quad (4.22)$$

După cum se constată, în expresia (4.22) lipsește coordonata x care precizează secțiunea în care se calculează saltul de viteză. Mai mult, saltul de viteză obținut este analog rezultatelor cunoscute pentru ipoteza ciocnirii corpurilor rigide.

Evident constantele de material E_0 , G_0 și μ_0 sunt deosebite de cele statice având valori esențial diferite. Aceasta însă permite precizarea distribuției salturilor de viteze, mai puțin semnificativă însă la ciocnirea longitudinală a barei.

4.2. Ciocnirea longitudinală a barelor

S-au studiat trei cazuri de ciocnire longitudinală. Fiecare soluție s-a obținut astfel: mai întâi s-a determinat distribuția vitezelor pentru fiecare bară în momentul ciocnirii pe baza ipotezelor menționate și a concluziilor obținute, apoi mișcarea barelor a avut loc în condițiile vitezelor inițiale care sunt determinate și care se supun ecuației ondulatorii

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.23)$$

Soluția acestei ecuații s-a luat sub forma lui D'Alembert

$$u = f_1(x+ct) + f_2(x-ct) \quad (4.24)$$

în care u este deplasarea axială a secțiunii transversale a grinzii, x este coordonata ce caracterizează poziția inițială a secțiunii, $c^2 = E/\rho$, E este modulul de elasticitate, ρ densitatea materialului, f_1 unda de deformație care se deplasează de-a lungul barei cu viteza c și f_2 unda de deformație care se deplasează cu aceeași viteză în sens opus.

Funcțiile f_1 și f_2 se aleg pentru fiecare caz în parte astfel încât să fie respectate condițiile inițiale și la limită. Similar din condițiile inițiale și la limită se determină și derivatele acestor funcții în raport cu timpul în intervalul $(0, l)$ unde l este lungimea totală a barelor. Din condițiile inițiale se determină forma funcțiilor f_1' și f_2' în intervalul $(0, l)$ unde l este lungimea totală a barelor. Din condițiile limită s-au determinat prelungirile acestor funcții dincolo de limitele intervalului $(0, l)$. S-au dat de fiecare dată graficele acestor funcții, pentru ca să fie mai comodă observarea variației în fiecare interval [M3].

Paralel sunt prezentate graficele aceleiași funcții trasate în ipoteza că viteza barelor nu suferă modificări înaintea apariției deformațiilor (Saint-Venant). S-a definit durata ciocnirii ca fiind intervalul de timp din momentul apariției deformațiilor până în momentul când încetează interacțiunea barelor.

1. Ciocnirea longitudinală dintre o bară și un reper fix

Notății utilizate:

- l - lungimea barei
- ρ - densitatea
- S - suprafața secțiunii transversale
- E - modulul de elasticitate
- E_0 - constantă
- $c^2 = E/\rho$; $b^2 = E_0/\rho$
- v_0 - viteza înaintea ciocnirii

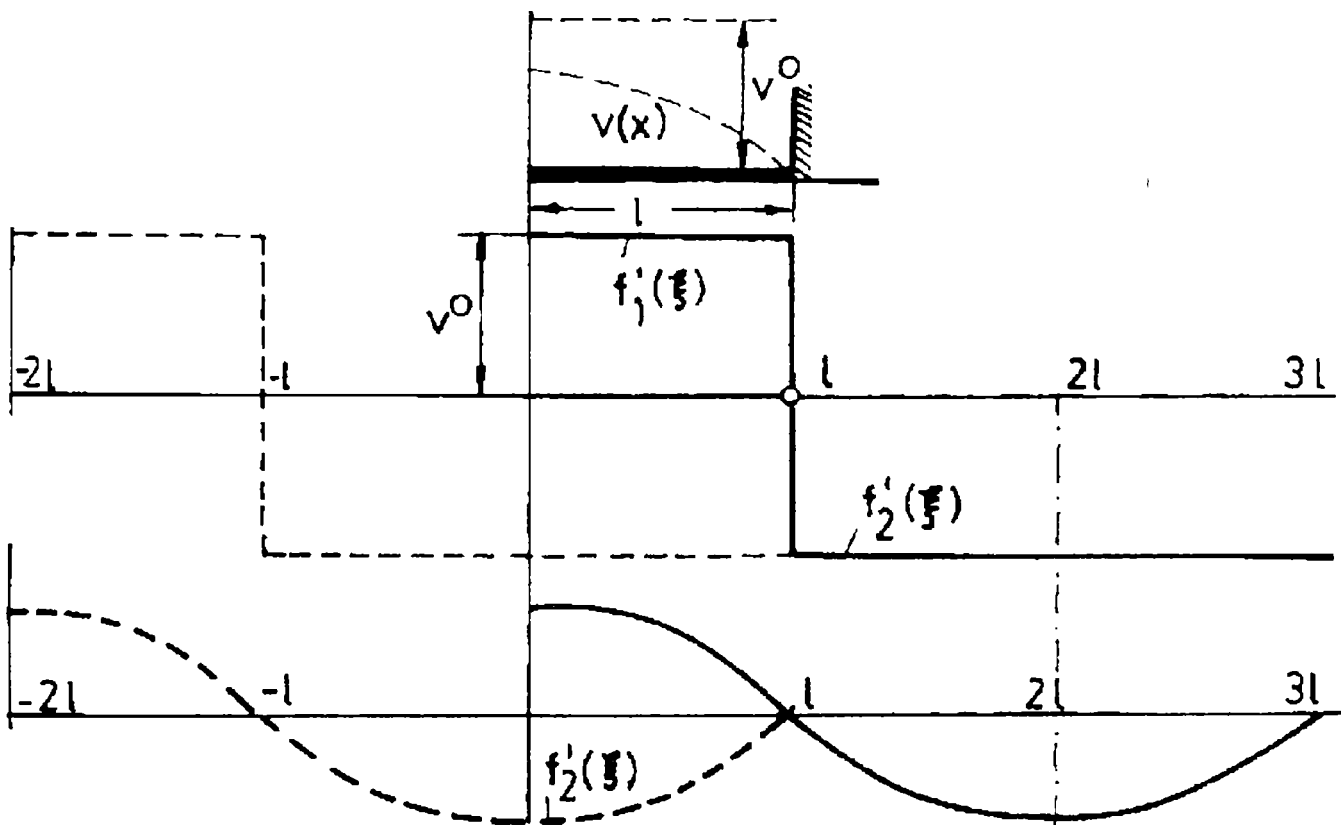


Fig.4.4

$$v(x) = v_0 \begin{pmatrix} ch \frac{x}{b} \\ 1 - \frac{ch \frac{l}{b}}{ch \frac{x}{b}} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Soluția Saint-Venant	Soluția nouă
Durata ciocnirii	
$\tau = \frac{2l}{c}$	$\tau = \frac{2l}{c}$
Variația energiei cinetice	
$E_{co} - E_c = 0$	$E_c - E_{co} = E_{co} \frac{\frac{3}{2} \frac{b}{l} sh \frac{2l}{b} - 1}{2ch \frac{2l}{b}}$
Presiunea max. a barei asupra reperului fix	
$ES \frac{v_0}{c}$	$ES \frac{v_0}{c} \left(1 - \frac{1}{ch \frac{l}{b}} \right)$
Tensiunile maxime	
în toate secțiunile barei sunt aceleași, exclusiv secțiunea la capătul liber unde tensiunea este nulă	în secțiunile barei scad pe măsura îndepărtării de locul de contact cu reperul, iar la capătul liber tensiunea este nulă
După ciocnire	
bara rămâne nedeformată, vitezele tuturor secțiunilor sunt egale cu valorile inițiale cu semn contrar	bara rămâne nedeformată dar distribuția vitezelor este de așa natură încât apar oscilații în mișcarea ulterioară

Ciocnirea longitudinală între o bară liberă și una cu un capăt fix

Notății folosite:

l_1 - lungimea barei percutante

l_2 - lungimea barei în repaus

ρ - densitatea

E - modul de elasticitate

E_0 - constantă

v_{01} - viteza primei bare înainte de ciocnirea

$$l = l_1 + l_2$$

$$c^2 = E/\rho \quad ; \quad b^2 = E_0/\rho$$

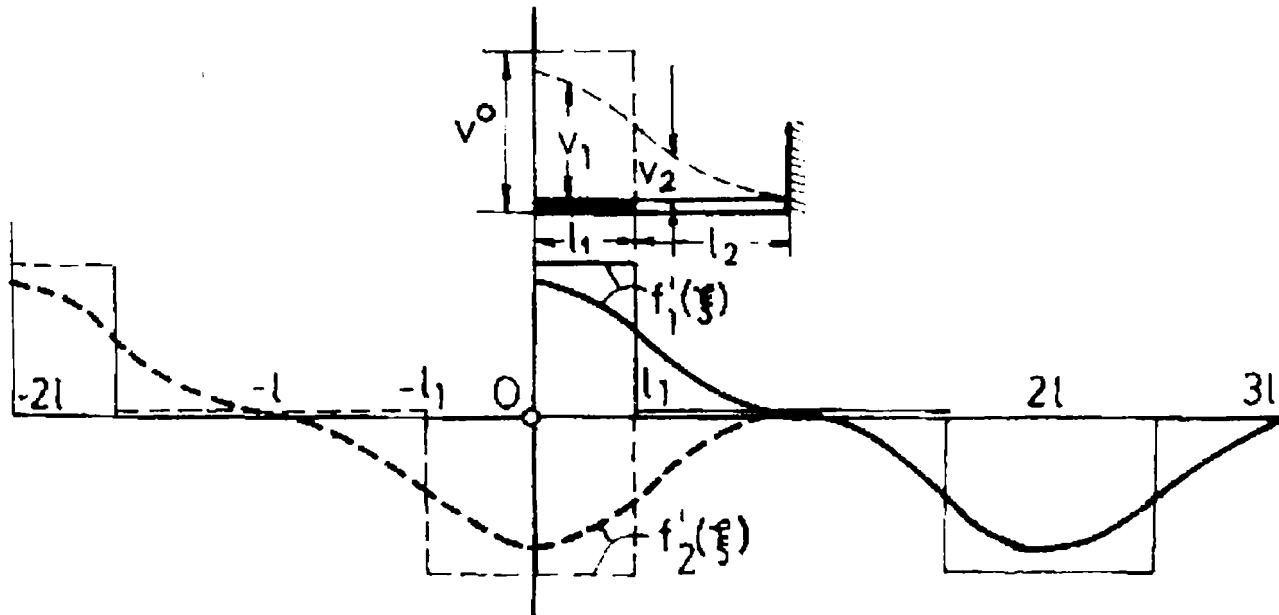


Fig.4.5

$$v_1(x) = v_{01} \left(\frac{ch \frac{l_2}{b}}{1 - \frac{ch \frac{l}{b}}{ch \frac{l}{b}}} \right) ch \frac{x}{b} \quad (4.26)$$

$$v_2(x) = v_{01} \frac{sh \frac{l_1}{b}}{sh \frac{l}{b}} sh \frac{l-x}{b} \quad (4.27)$$

Soluția Saint-Venant	Soluția nouă
Durata ciocnirii	
$\tau = \frac{2(l_1 + l_2)}{c}$	$\tau = \frac{2(l_1 + l_2)}{c}$
Viteza mișcării de translație	
pentru bara percutantă își păstrează semnul. Bara ciocnită rămâne fixă în urma ciocnirii. Nu apar oscilații	pentru bara percutantă este mai mică decât viteza înaintea ciocnirii și egală cu $-v_{01} \left(1 - \frac{b}{l_1} \frac{sh \frac{l_1}{b} ch \frac{l_2}{b}}{ch \frac{l}{b}} \right)$ În ambele bare apar oscilații
Energia cinetică a mișcării de translație după ciocnire	
$E_c = E_{co}$	$E_c = E_{co} \left(1 - \frac{b}{l_1} \frac{sh \frac{l_1}{b} ch \frac{l_2}{b}}{ch \frac{l}{b}} \right)^2$
Tensiunile	
Tensiunea max. apare în secțiunea încastrată și este $\sigma_{\max} = -E \frac{v_0}{c}$ fiind independentă de lungimea barei. Tensiunea în celelalte secțiuni variază în salturi, valoarea maximă fiind aceeași	Tensiunea max. apare în secțiunea încastrată și este $\sigma_{\max} = -E \frac{v_0}{c} \left(1 - \frac{ch \frac{l_2}{b}}{ch \frac{l}{a}} \right)$ depinzând de lungimea barei. Tensiunile în celelalte secțiuni variază continuu, maximele fiind diferite în fiecare secțiune

Tensiunea în secțiunea de contact	
$l_1 > l_2$	
$\sigma = -E \frac{v_{01}}{2c}$	$\sigma = -E \frac{v_{01}}{2c} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \left(\frac{sh \frac{l_1}{b} ch \frac{l_2}{b} \right)^2}{ch \frac{l}{b}}} \right]$
$l_1 = l_2$ tensiunea maximă este pentru $t=l/c$	
$\sigma = -E \frac{v_{01}}{2c}$	$\sigma = -E \frac{v_{01}}{2c} \left(1 - \frac{1}{ch \frac{l}{b}} \right)$
$l_1 > l_2$ tensiunea maximă este pentru $t=l/c$	
$\sigma = -E \frac{v_{01}}{c}$	$\sigma = -E \frac{v_{01}}{c} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\left(ch \frac{l_1}{b} ch \frac{l_2}{b} \right)^2}{ch \frac{l}{b}}} \right]$

Ciocnirea longitudinală a barelor libere

Notății folosite:

l_1 - lungimea barei percutante

l_2 - lungimea barei ciocnite ($l_1 < l_2$)

ρ - densitatea

S - suprafața secțiunii transversale

E - modul de elasticitate

E_0 - constantă

$c^2 = E/\rho$ $b^2 = E_0/\rho$ $m_1 = \rho S l_1$ $m_2 = \rho S l_2$ $l = l_1 + l_2$

v_{01} - viteza barei percutante

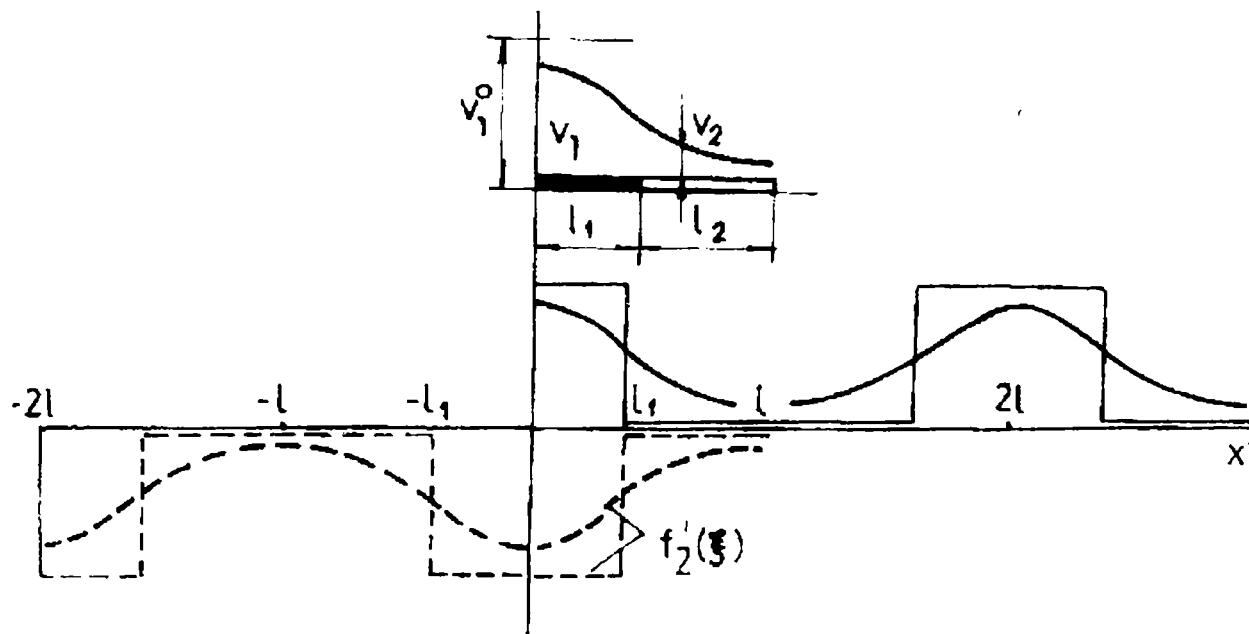


Fig.4.6

$$v_1(x) = v_{01} \left(1 - \frac{sh \frac{l_2}{b} ch \frac{x}{b}}{sh \frac{l}{b}} \right) \quad (4.28)$$

$$v_2(x) = v_{01} \frac{sh \frac{l_1}{b} ch \frac{l-x}{b}}{sh \frac{l}{b}} \quad (4.29)$$

Soluția Saint-Venant	Soluția nouă
Durata ciocnirii	
$\tau = \frac{2l}{c}$	$\tau = \frac{l_1 + l_2}{c}$
Vitezele centrelor de greutate după ciocnire	
$v_{1c} = 0 ; v_{2c} = v_{01} \frac{l_1}{l_2}$ $v_{2c} = v_{01} \frac{l_1}{l_2}$	$v_{1c} = v_{01} \frac{b}{l_1} \frac{sh \frac{2l_1}{b}}{sh \frac{l}{b}}$ $v_{2c} = v_{01} \frac{l_1}{l_2} \left(1 - \frac{v_{1c}}{v_{01}} \right)$
Energia cinetică a mișcării de translație după ciocnire	
$E_{c1} = 0$ $E_{c2} = \frac{m_1 v_{01}^2}{2} \frac{l_1}{l_2}$	$E_{c1} = \frac{m_1 v_{01}^2}{2} \left(\frac{b}{l_1} \frac{sh^2 \frac{l_1}{b}}{sh \frac{l}{b}} \right)^2$ $E_{c2} = \frac{m_1 v_{01}^2}{2} \frac{l_1}{l_2} \left(1 - v_1 \frac{c}{v_{01}} \right)^2$
Constatări	
Bara percutantă rămâne fixă și nedeformată. A doua bară va avea o viteză, se va deforma și va executa oscilații suprapuse peste mișcarea de translație	Ambele bare continuă mișcarea, dar viteza primei bare este mai mică decât a celei de a doua. Deformațiile în ambele bare sunt nule, dar viteza se distribuie în așa fel încât amândouă execută oscilații

Tensiunile	
<p>Tensiunile în toate secțiunile barelor variază brusc de la zero la valoarea maximă</p> $T_{\max} = E \frac{v_{01}^2}{2c}$ <p>dar ating această valoare în diferite momente</p>	<p>Tensiunile variază continuu luând valori maxime în diferite momente pentru diferite secțiuni. Tensiunea are o valoare maximă în secțiunea mijlocie a barei "pline" ($l=l_1+l_2$)</p>
Tensiunea în secțiunea de contact	
<p>Presiunea între bare nu depinde de lungimea lor și își păstrează valoarea constantă</p> $E \frac{v_{01}}{2c}$	<p>Presiunea maximă între bare este</p> $E \frac{v_{01}}{2c} S \left[\sqrt{1 - 2 \frac{\left(sh \frac{l_1}{b} sh \frac{l_2}{b} \right)^2}{sh \frac{l}{b}}} \right]$ <p>Presiunea crește odată cu lungimea barelor</p>

Ciocnirea longitudinală a barelor libere a fost analizată de mulți cercetători și apoi experimentată. În urma acestor studii s-a ajuns la afirmația că în teoria lui Saint-Venant există unele nepotriviri. Se observă că în cazul barelor lungi cu modul mic de elasticitate, divergențele între teorie și practică sunt mici iar în cazul barelor scurte și rigide, concluziile teoretice nu sunt verificate experimental. Probabil că la variații bruște ale vitezei ecuațiile oscilațiilor elastice nu mai rămân valabile. Deoarece în cazul barelor scurte și rigide cele mai bune rezultate se obțin cu teoria elementară a ciocnirii, este evident că principiile de mai sus se pot aplica și celei de a doua fază a ciocnirii. Ținând seama de aceasta se va găsi distribuția vitezelor după ciocnire precum și impulsurile tensiunilor în toate secțiunile. Dacă bara de lungime l_1 se mișcă cu viteza v_{01} și percută bara liberă de lungimea l_2 , atunci pentru viteza centrului de masă a primei bare, după ciocnire rezultă

$$v_{1c} = v_{01} \left(\frac{l_1 - l_2}{2l} + \frac{1}{3} \frac{l_2}{l} \frac{l_1 \cdot l_2}{b^2} \right) \quad (4.30)$$

Se presupune că l_1/b și l_2/b sunt mici. Pentru corpurile absolut rigide $b^2 = \infty$ și se obține formula din teoria elementară a ciocnirii. Deoarece pentru corpurile reale $b^2 \neq \infty$, bara scurtă va suferi un recul, dar cu viteză ceva mai mică decât arată teoria elementară a ciocnirii absolut elastice. Pentru explicarea acestui fapt se introduce coeficientul de restituire k . Din formula precedentă rezultă această explicație a fenomenului.

Concluzii

Deosebirea esențială a soluțiilor găsite mai sus față de cele ale lui Saint-Venant constă în faptul că vitezele elementelor barelor ciocnite și tensiunile în diferite secțiuni variază continuu cu timpul. De asemenea variază continuu și distribuția de-a lungul barelor. Aceasta se referă la întregul interval de timp atât cât barele sunt în interacțiune cu excepția intervalului de la începutul ciocnirii când viteza își schimbă brusc valoarea.

Tensiunile în bare vor fi întotdeauna mai mici decât valorile date de Saint-Venant iar energia cinetică se pierde chiar în primul moment al ciocnirii. Din soluție nu se vede forma energiei cinetice dar dacă ținem seama că la ciocnire temperatura crește, atunci pierderea de energie devine explicabilă.

Durata ciocnirii în toate cazurile este egală cu semiperioada oscilației principale a sistemului de bare. Principiile expuse nu pot avea pretenția de a fi cu totul juste. ele nu arată mecanismul fenomenului și îl descriu, dar concluziile acestor principii nu contrazic noțiunile cunoscute precum și experimentările.

În baza principiilor expuse ne putem da seama de ce teoriile lui Saint-Venant și Hertz, bazate pe aceleași principii duc la rezultate diferite. Ne putem da seama de asemenea de ce verificarea experimentală a concluziilor lui Saint-Venant conduce în unele cazuri la contradicții mari, iar în alte cazuri la contradicții mai neînsemnate.

De asemenea, rezultă faptul că tensiunile reale apărute la ciocnire sunt mai mici decât cele teoretice.

Cum se constată din cele expuse, teoria propusă ocupă o poziție intermediară între teoria elementară și cea clasică a ciocnirii corpurilor elastice. Pentru unele valori ale constantelor λ_0 și μ_0 concluziile ei se apropie de cele ale teoriei elementare însă pentru alte valori concluziile se apropie de teoria clasică.

În general pentru corpurile rigide de dimensiuni mici rezultă soluții apropiate de cele determinate în teoria elementară cu corecțiile introduse experimental. În acest caz, ciocnirea se produce și vitezele își schimbă brusc valorile în timpul ciocnirii. Dimpotrivă, dacă durata percuției nu este mică obținem soluții apropiate de teoria clasică.

Este evident că trebuie pusă întrebarea cum va apare fenomenul ciocnirii dincolo de limita elasticității. Ne putem aștepta ca cea de a doua fază a ciocnirii nu va fi dată de ecuațiile teoriei elasticității ci de alte ecuații a căror formă nu este obiectul acestui studiu.

În sfârșit, impulsurile la ciocnire pot fi atât de mari încât ciocnirea se termină cu prima fază, deoarece se poate produce ruperea corpurilor fără o deformație vizibilă. Dacă este așa atunci se obține un aparat destul de simplu pentru calculul construcțiilor la rupere cu ajutorul unei sarcini percutante.

Ar fi de dorit pentru verificarea experimentală să se întreprindă o serie de experiențe la ciocnirea longitudinală, de torsiune și transversală a barelor din același material. Din aceste experiențe s-ar determina λ_0 și μ_0 . Dacă s-ar constata că pentru același material ele își păstrează aceeași valoare indiferent de caracterul sarcinii percutante, atunci s-ar putea efectua calculul tensiunilor la ciocnire cu aceeași siguranță cu care se efectuează calculele statice.

4.3. Impulsul transversal aplicat barei drepte

Studiul ciocnirii poate fi realizat în cazul barei drepte căreia i se aplică impulsuri transversale. Bara cu axa ox are secțiunea S și densitatea ρ , constante de-a lungul barei [P10].

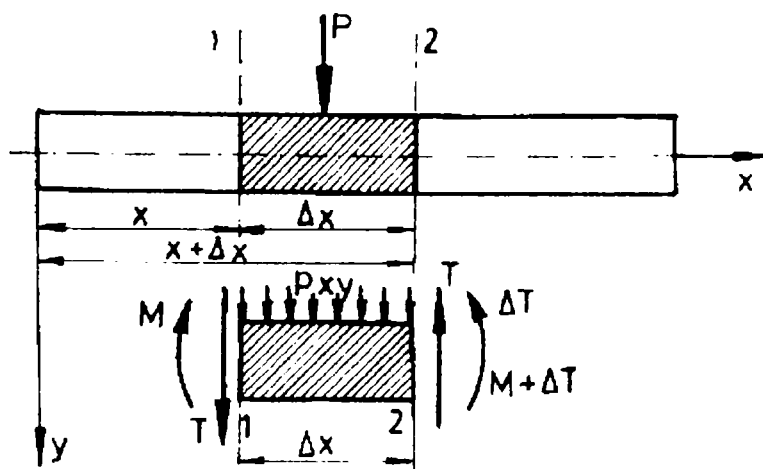


Fig.4.7

Se consideră un element de bară delimitat de secțiunile 1-1 și 2-2 aflat la distanța x de extremitatea o și având lungimea Δx . Se presupune că impulsurile interioare pentru aceste secțiuni se reduc la un impuls de forfecare și la un cuplu. Drept urmare în secțiunea 1-1 apare impulsul tensiunii $p_{xy}(x,t)$ ce depinde de poziția secțiunii și momentul considerat. Dacă se consideră elementul de bază de lungime Δx , mai apare la cealaltă extremitate a elementului de coordonată $x + \Delta x$, impulsul tensiunii $p_{xy}(x + \Delta x, t)$.

Se pot scrie ecuațiile de echilibru

$$p_{xy}\Delta x + T - (T + \Delta T) = 0 \quad (4.31)$$

$$-M + M + \Delta M + T\Delta x = 0$$

Presupunând elementul de bară la limită $\Delta x \rightarrow 0$, ecuația de echilibru la ciocnire va fi

$$\rho S V_{xy} = S \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p_{xy}(x + \Delta x, t) - p_{xy}(x, t)}{\Delta x} \quad (4.32)$$

unde s-a notat cu V_{xy} variația vitezei transversale în timpul ciocnirii și deci

$$\rho V_{xy} = \frac{dp_{xy}}{dx} \quad (4.33)$$

Tinând cont de (4.31) rezultă că

$$\frac{dT}{dx} = p_{xy} \quad ; \quad \frac{dM}{dx} = -T \quad ; \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -p_{xy} \quad (4.34)$$

Dacă impulsurile distribuite p_{xy} apar numai din cauza cantității de mișcare pierdute a elementului, atunci

$$p_{xy} dx = -\rho dx V_{xy} \quad (4.35)$$

și deci

$$\rho V_{xy} = \frac{d^2M}{dx^2} \quad (4.36)$$

Legea lui Hooke ce exprimă comportarea materialului la ciocnire este considerată de forma

$$\begin{aligned} p_{xx} &= E_0 e'_{xx} \\ p_{xy} &= E_0 e'_{xy} \end{aligned} \quad (4.37)$$

unde E_0 este modulul de elasticitate longitudinal la ciocnire și e'_{xx} viteza de deformație a barei pe direcția x

$$e'_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad ; \quad e'_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad (4.38)$$

relație în care s-a notat cu V variația vitezei în timpul ciocnirii. Impulsul de întindere pentru suprafața dS va fi

$$E_0 \frac{dV_x}{dx} dS = -E_0 y \frac{d^2 V_y}{dx^2} \quad (4.39)$$

de unde rezultă

$$M = -E_0 I \frac{d^2 V_y}{dx^2} \quad (4.40)$$

unde I este momentul de inerție al secțiunii transversale în raport cu normala la planul xy ce trece prin centrul de greutate al secțiunii.

Cunoscând expresia momentului M rezultă impulsul de forfecare T și ecuația mișcării

$$T = E_0 I \frac{d^3 V_y}{dx^3} \quad (4.41)$$

$$\rho S V_y = - \frac{d^2}{dx^2} \left[E_0 I \frac{d^2 V_y}{dx^2} \right] \quad (4.42)$$

Considerând EI constant, rezultă

$$\frac{d^4 V_y}{dx^4} + 4\gamma^4 V_y = 0 \quad (4.43)$$

unde

$$4\gamma^4 = \frac{\rho S}{E_0 I} \quad (4.44)$$

Soluția generală a ecuației (4.43) are forma

$$V_y = AY_1 + BY_2 + CY_3 + DY_4 \quad (4.45)$$

unde Y_i sunt funcții cu matrice unitară, iar A, B, C, D - constante de integrare ce depind de condițiile concrete de realizare a ciocnirii.

4.4. Impulsul aplicat într-un punct oarecare al mediului nelimitat

Se consideră un volum oarecare V' în punctele căruia se aplică impulsurile $\rho \bar{P}_0 dV'$. Vitezele punctelor mediului datorită câmpului de impulsuri aplicat se determină din ecuația

$$\rho \bar{V} = G_0 \nabla^2 \bar{V} + (\lambda_0 + G_0) \bar{\nabla} e'_v + \rho \bar{P}_0 \quad (4.46)$$

în care $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\bar{V} = \bar{v} - \bar{v}_0$, variația vitezei, $e'_v = e'_{xx} + e'_{yy} + e'_{zz}$ variația vitezei

specifice de deformație volumică [M3]

Se exprimă $\rho \bar{P}_0$ și \bar{v} sub forma următoarelor sume

$$\rho \bar{P}' = \bar{\nabla} \Phi + \bar{\nabla} \times \bar{L} \quad (4.47)$$

$$\bar{v} = \bar{\nabla} \varphi + \bar{\nabla} \times \bar{l}$$

unde

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \quad (4.48)$$

Deoarece câmpul de impulsuri $\rho \bar{P}_0 dV'$ este precizat, atunci

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{4\pi} \int_{V'} (\rho \bar{P}_0 \cdot \bar{\nabla} r^{-1}) dV' \\ \bar{L} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{V'} (\rho \bar{P}_0 \times \bar{\nabla} r^{-1}) dV' \end{aligned} \quad (4.49)$$

Pentru φ și \bar{l} se obțin următoarele ecuații

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{a^2} \varphi - \frac{1}{\rho a^2} \Phi \\ \nabla^2 \bar{l} &= \frac{1}{b^2} \bar{l} - \frac{1}{\rho b^2} \bar{L} \end{aligned} \quad (4.50)$$

în care

$$a^2 = \frac{\lambda_0 + 2G_0}{\rho} \quad ; \quad b^2 = \frac{G_0}{\rho} \quad (4.51)$$

Pentru rezolvarea acestor ecuații se folosește formula Hadamard-Green, care pentru cazul respectiv este

$$\int_V [Y \cdot M(U) - U \cdot M(Y)] dV = \int_S \left[Y \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial Y}{\partial n} \right] dS \quad (4.52)$$

în care $U=U(x,y,z)$ și $Y=Y(x,y,z)$ sunt funcții finite și continue în interiorul unui domeniu limitat de suprafața S și

$$M(Y) = \nabla^2 Y - \frac{1}{a^2} Y \quad (4.53)$$

iar (n) este normala la suprafața S în punctul considerat

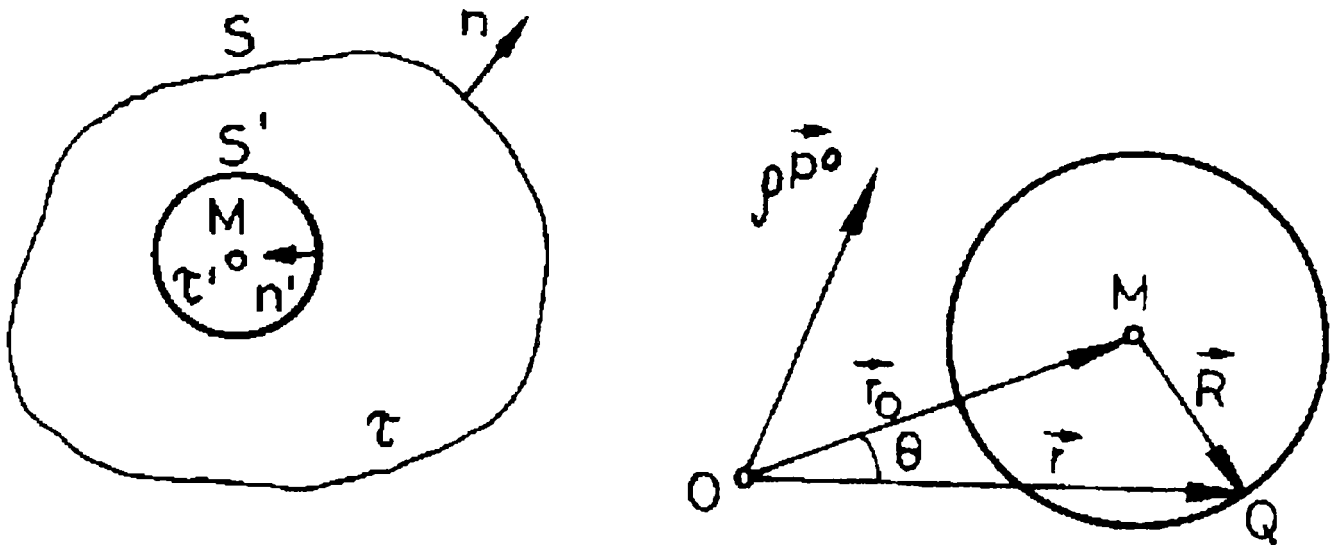


Fig.4.8

Formula lui Hadmard-Green se scrie sub forma

$$\int_V \left\{ Y \left[M(U) + \frac{1}{\rho a^2} \Phi \right] - \frac{1}{\rho a^2} \Phi Y - M(Y) \right\} dV = \int_S \left\{ Y \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial Y}{\partial n} \right\} dS \quad (4.54)$$

Notând

$$Y = \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \quad ; \quad U = \varphi \quad (4.55)$$

deoarece

$$M(Y) = 0 \quad , \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{a^2} \varphi = -\frac{1}{\rho a^2} \Phi \quad (4.56)$$

rezultă

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho a^2} \int_{V-V'} \Phi \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} dV = \int_S \left[\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \right) \right] dS + \\ + \int_{S'} \left[\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \right) \right] dS' \end{aligned} \quad (4.57)$$

integrala de volum fiind extinsă pe întregul domeniu V cu excepția domeniului V' limitat de sfera S' .

Dacă $R' \rightarrow 0$, rezultă

$$4\pi \varphi M = \frac{1}{\rho a^2} \int_V \Phi \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} dV + \int_S \left[\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \right) \right] dS \quad (4.58)$$

Dacă frontierele domeniului V tind la infinit și integrala de suprafață tinde spre zero, rezultă

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi \rho a^2} \int_V \Phi \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} dV \quad (4.59)$$

Dacă impulsul concentrat se aplică punctului O , atunci

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_V (\rho \bar{P}_0 \cdot \bar{\nabla} r^{-1}) dV = -\frac{\rho}{4\pi} \bar{P}_0 (\bar{\nabla} r^{-1}) \quad (4.60)$$

unde \bar{r} este raza vectorie a punctului Q pentru care se calculează funcția Φ , ($OQ=\bar{r}$).

Se notează cu \bar{r}_0 , raza vectorie a punctului pentru care se calculează funcția φ și $\overline{MQ}=\bar{R}$, rezultă

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{1}{16\pi^2 a^2} \int_0^\infty (\bar{P}_0 \bar{\nabla} r^{-1}) \frac{e^{-\frac{R}{a}}}{R} dV \quad (4.61)$$

Se împarte spațiul prin sfere concentrice cu centrul în punctul M, integrala devenind

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{16\pi^2 a^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{R}{a}}}{R} \int_s \frac{\bar{P}_0 \bar{r}}{r^3} dS dR \quad (4.62)$$

Se observă că

$$\int_s \frac{\bar{P}_0 \bar{r}}{r^3} dS = \begin{cases} \frac{4\pi}{r_0^3} R^2 \bar{P}_0 \bar{r}_0, & \text{pentru } R \leq r \\ 0, & \text{pentru } R > r \end{cases} \quad (4.63)$$

rezultă

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\bar{P}_0 \bar{r}_0}{4\pi} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{r_0}{a}\right) e^{-\frac{r_0}{a}}}{r_0^3} \quad (4.64)$$

iar pentru punctul Q

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\bar{P}_0 \bar{r}}{4\pi} \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}}}{r^3} \quad (4.65)$$

Analog se găsește

$$\bar{l} = \frac{\bar{P}_0 \times \bar{r}}{4\pi} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{b}\right)}{r^3} \quad (4.66)$$

iar pentru viteza \bar{v} rezultă

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \left\{ \frac{\bar{P}_0 \bar{r}_0}{4\pi} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}}}{r^3} \right\} + \vec{\nabla} \left\{ \frac{\bar{P}_0 \bar{r}_0}{4\pi} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{b}\right) e^{-\frac{r}{b}}}{r^3} \right\} \quad (4.67)$$

Problema poate fi tratată și în coordonate sferice

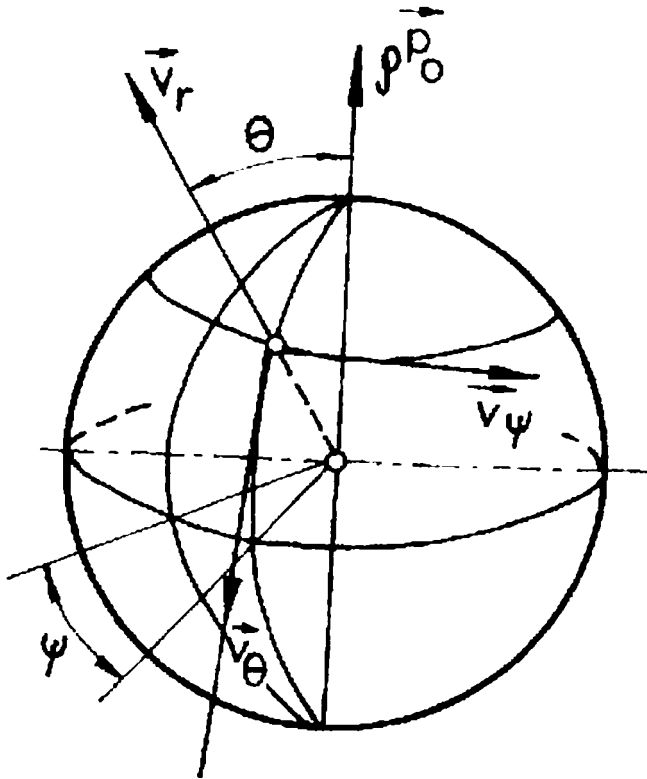


Fig.4.9

Astfel pentru v_r și v_θ pot fi scrise formulele

$$v_r = \frac{P_0 \cos \theta}{4\pi} \frac{2 \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} - 2 \left(1 + \frac{r}{b}\right) e^{-\frac{r}{b}} + \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{a}}}{r^3} \quad (4.68)$$

$$v_\theta = \frac{P_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{\left(1 + \frac{r}{b}\right) e^{-\frac{r}{b}} - \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} + \frac{r^2}{b^2} e^{-\frac{r}{b}}}{r^3} \quad (4.69)$$

Expresiile impulsurilor tensiunilor dintr-un plan perpendicular pe raza $OM=r$ vor fi

$$p_{rr} = \frac{P_0 \cos \theta}{4\pi r^4} \left\{ -(\lambda_0 + 2G_0) \left(\frac{1}{a} \right) \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{a}} + \right. \\ \left. + 2G_0 \left[2 \frac{r^2}{b^2} e^{-\frac{r}{b}} - 2 \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{a}} - 6 \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}} + 6 \left(1 + \frac{r}{b} \right) e^{-\frac{r}{b}} \right] \right\} \quad (4.70)$$

$$p_{r\theta} = \frac{P_0 \sin \theta}{4\pi r^4} G_0 \left\{ \left(1 + \frac{r}{b} \right) \frac{r^2}{b^2} e^{-\frac{r}{b}} + 2 \frac{r^2}{b^2} e^{-\frac{r}{b}} - 2 \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{a}} + \right. \\ \left. + 6 \left(1 + \frac{r}{b} \right) e^{-\frac{r}{b}} - 6 \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}} \right\} \quad (4.71)$$

$$p_{r\varphi} = 0 \quad (4.72)$$

Sistemul de impulsuri aplicat suprafeței sferei se reduce la rezultanta H

$$H = -\frac{P_0}{3r^2} \left[(\lambda_0 + 2G_0) \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}} \frac{r^2}{a^2} + 2G_0 \left(1 + \frac{r}{b} \right) \frac{r^2}{b^2} e^{-\frac{r}{b}} \right] \quad (4.73)$$

Se observă că această rezultantă nu este egală cu ρP_0 și scade cu creșterea razei sferei.

Pentru $r \rightarrow 0$, la limită rezultă

$$\lim_{r \rightarrow 0} H = -\rho P_0 \quad (4.74)$$

În continuare se compară expresiile găsite pentru v_r și v_θ cu expresiile deplasărilor punctelor unui mediu înfinit într-unul din punctele căruia se aplică forța concentrată P . Deplasările se notează cu

$$u_r = \frac{P_0 \cos \theta}{4\pi G_0 r} \quad ; \quad u_\theta = -\frac{\lambda + 3G_0}{2(\lambda_2 G_0)} \frac{P \sin \theta}{4\pi G_0 r} \quad (4.75)$$

iar pentru tensiunile din planul perpendicular pe OM rezultă

$$\sigma_{rr} = -\frac{3\lambda_0 + 4G_0}{\lambda_0 + 2G_0} \frac{P_0 \cos\theta}{4\pi r^2} \quad (4.76)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{G}{\lambda_0 + 2G_0} \frac{P_0 \sin\theta}{4\pi r^2} \quad (4.77)$$

Rezultă că vitezele punctelor în cazul impulsului concentrat scad cu distanța mult mai repede decât deplasările punctelor sub acțiunea forței statice [P4], [M3].

Tensiunile se comportă similar. Astfel, impulsul concentrat are o acțiune vizibilă într-un domeniu mult mai îngust decât forța aplicată static. În cazul ciocnirii a două corpuri, când contactul se face pe o suprafață mică, variațiile vitezelor în timpul ciocnirii scad odată cu creșterea distanței acestor puncte de locul ciocnirii.

4.5. Transmisia longitudinală și transversală a impulsului în mediul elastic nelimitat

În continuare se va studia cazul mediului elastic nelimitat supus fenomenului de ciocnire. Astfel nu mai intervin condițiile limită de la suprafața de separație a corpului, ceea ce simplifică mult rezolvarea.

În cazul câmpurilor longitudinale de impulsuri, având direcția axei Ox , se admit legile de variație a vitezelor

$$V_x = V_x(x), \quad V_y = 0, \quad V_z = 0 \quad (4.78)$$

Drept urmare, se poate scrie

$$e'_v = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{dV_x}{dx}, \quad \frac{\partial e'_v}{\partial x} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = \frac{d^2 V_x}{dt^2}, \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial e'_v}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial e'_v}{\partial z} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} = 0$$

și

$$\nabla^2 V_x = \frac{d^2 V_x}{dx^2}, \quad \nabla^2 V_y = 0, \quad \nabla^2 V_z = 0 \quad (4.80)$$

Tinând seama de egalitățile (4.79) și (4.80) ultimele două ecuații sunt identic verificate, iar prima devine

$$\rho V_x = G_0 \frac{d^2 V_x}{dx^2} + (\lambda_0 + G_0) \frac{d^2 V_x}{dx^2} \quad (4.81)$$

sau

$$(\lambda_0 + 2G_0) \frac{d^2 V_x}{dx^2} = \rho V_x \quad (4.82)$$

Astfel se ajunge la ecuația

$$a^2 \frac{d^2 V_x}{dx^2} = V_x \quad (4.83)$$

unde

$$a^2 = \frac{\lambda_0 + 2G_0}{\rho} \quad (4.84)$$

Soluția ecuației diferențiale (4.83) este de forma

$$V_x = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}}, \quad (4.85)$$

C_1 și C_2 fiind constante de integrare ce rezultă din condiții limită. De exemplu presupunând în origine ($x = 0$) saltul de viteză V_0 , iar la infinit nulă, rezultă $C_1 = 0$ și $C_2 = V_0$.

Alt caz se referă la câmpul de impulsuri transversal definit prin salturi de viteze având proiecțiile

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = V_z(x) \quad (4.86)$$

În condițiile date se deduce

$$e'_v = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (4.87)$$

și

$$\nabla^2 V_x = 0, \quad \nabla^2 V_y = 0, \quad \nabla^2 V_z = \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} = \frac{d^2 V_z}{dx^2} \quad (4.88)$$

Conform egalităților (4.87) și (4.88) se observă că primele două ecuații (4.79) sunt identic verificate, iar ultima devine

$$\rho V_z = G_0 \frac{d^2 V_z}{dx^2} \quad (4.89)$$

ceea ce conduce la ecuația

$$b^2 \frac{d^2 V_z}{dx^2} = V_z, \quad b^2 = \frac{G_0}{\rho} \quad (4.90)$$

Deoarece ecuațiile (4.83) și (4.90) sunt de aceeași formă, soluția V_z are tot expresia (4.85) în care se înlocuiește constanta a prin b . În esență trebuie remarcat că toate concluziile obținute se referă la stabilirea distribuției salturilor de viteză ce intervin drept condiții inițiale în problemele dinamice corespunzătoare ale teoriei elasticității.

4.6. Acțiunea exploziei

Se presupune un mediu elastic nelimitat în care se practică o cavitate sferică cu centrul în punctul O.

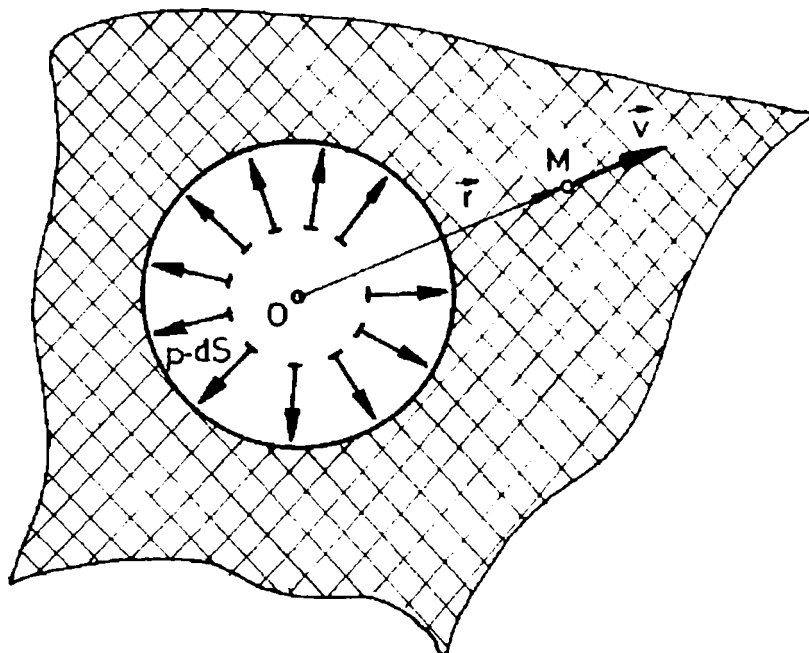


Fig.4.10

Fie pe suprafața sferei impulsurile uniform distribuite $p dS$. Se notează cu r distanța unui punct M aflat în exteriorul sferei de centrul O și se admite că viteza acestui punct dependentă de r este dirijată de-a lungul dreptei OM, adică

$$\bar{v} = v(r) \frac{\bar{r}}{r} \quad (4.91)$$

Funcția $\bar{v}(x,y,z)$ trebuie să satisfacă relația

$$\rho V = G_0 \nabla^2 V + (\lambda_0 G_0) \nabla e'_v \quad (4.92)$$

în care $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $V = v - v_0$ - variația vitezei punctului M. $e'_v = e'_{xx} + e'_{yy} + e'_{zz}$ -

variația vitezei specifice de deformație volumică.

Se consideră

$$\bar{v} = \bar{\nabla}\varphi + \bar{\nabla} \times \bar{l} \quad (4.93)$$

pentru acest caz $\bar{l} = 0$, iar funcția φ trebuie să satisfacă ecuația

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{a^2} \varphi = 0 \quad (4.94)$$

unde

$$a^2 = \frac{\lambda_0 + 2G_0}{\rho} \quad (4.95)$$

Soluția generală a acestei ecuații are forma

$$\varphi = A_1 \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} + B_1 \frac{e^{\frac{r}{a}}}{r} \quad (4.96)$$

deoarece pentru

$$r \rightarrow \infty \quad ; \quad \varphi \rightarrow 0 \quad (4.97)$$

rezultă

$$B_1 = 0 \quad (4.98)$$

Se consideră

$$\bar{v} = A \bar{\nabla} \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \quad (4.99)$$

și pentru determinarea constantei A se pune condiția ca pe suprafața sferei impulsurile tensiunilor să fie egale cu p.

După efectuarea calculelor rezultă

$$\bar{v} = \frac{pr_0 e^{-\frac{r}{a}}}{\rho + 4G_0} \frac{1 + \frac{r}{a}}{r_0} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r^2} \frac{\bar{r}}{r} \quad (4.100)$$

Se compară valoarea găsită cu soluția unei alte probleme.

Dacă pe suprafața unei sfere se aplică presiunea uniform distribuită qdS.

deplasarea unui punct de pe această suprafață rezultă

$$\bar{u} = \frac{qr_0^3}{4G_0} \frac{1}{r} \bar{r} \quad (4.101)$$

Comparând aceste expresii rezultă că deplasările punctului sub acțiunea presiunilor statice scad odată cu creșterea distanței mai încet decât vitezele punctului în cazul când presiunile se aplică instantaneu.

Se scrie expresia impulsului tensiunilor pe suprafața perpendiculară pe OM

$$\sigma_{rr} = -p \frac{r_0}{r} l^{\frac{r_0-r}{a}} \quad (4.102)$$

Presiunea scade cu atât mai repede cu cât constanta "a" este mai mică [M3].

4.7. Teoreme generale

4.7.1. Variația energiei cinetice a unui corp elastic căruia i se imprimă impulsuri superficiale

Din teorema energiei cinetice pentru un punct material de masă m a cărei variație de viteză este $V=v_1-v_0$, rezultă

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = m\bar{V} \frac{-\bar{v} + \bar{v}_0}{2} \quad (4.103)$$

Expresia $m\bar{V} \frac{-\bar{v} + \bar{v}_0}{2}$ ca sens fizic și dimensiuni reprezintă un lucru mecanic.

Pentru un sistem de puncte materiale variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic al impulsurilor exterioare și interioare.

Fie un corp căruia i se imprimă impulsuri superficiale $\bar{p}dS$ și pentru care impulsurile forțelor masice se notează cu $\rho\bar{P}dV$ (dV - element diferențial de volum cu dimensiunile dx, dy, dz).

Dacă ecuațiile fundamentale ale ciocnirii corpului deformabil ce poate fi considerat sub acțiunea unui câmp de impulsuri presupuse transmise instantaneu întregului corp

$$\begin{aligned} \rho V_x &= \rho P_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \\ \rho V_y &= \rho P_y + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \\ \rho V_z &= \rho P_z + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.104)$$

se scriu pentru punctele 1,2,3,..., se înmulțesc cu

$$\frac{v_1 + v_{01}}{2} \quad ; \quad v \nabla \frac{v_2 + v_{02}}{2} \quad ; \quad \frac{v_3 + v_{03}}{2} \quad ; \quad \dots \quad (4.105)$$

și se adună, după transformări rezultă

$$\left[E_c + \int_V W dV \right] - \left[E_{c0} + \int_V W dV \right] = \int_V \rho \bar{P} \frac{\bar{v} + \bar{v}_0}{2} + \int_S \bar{p} \frac{\bar{v} + \bar{v}_0}{2} dS \quad (4.106)$$

Funcția W , energia specifică a vitezelor de deformație are următoarea valoare

$$W = \frac{1}{2} [\lambda_0 e_v^2 + 2G_0(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + G_0(e_{yz}^2 + e_{xz}^2 + e_{xy}^2)] \quad (4.107)$$

în care sunt folosite notațiile

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dots \\ e_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \dots \end{aligned} \right\} \text{viteze specifice de deformație}$$

$$e_v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ -viteza specifică de deformație volumică}$$

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\mu_0)} \quad ; \quad \lambda_0 = \frac{E_0 \mu_0}{(1+\mu_0)(1-2\mu_0)} \quad (4.108)$$

E_0 și μ_0 sunt constante din legea generalizată a lui Hooke pentru ciocniri.

Se notează cu $E = E_c + \int W dv$ energia totală, deci variația energiei totale $E - E_0$ este egală cu lucrul mecanic al impulsurilor aplicate.

Fie două corpuri elastice care se ciocnesc. Scriind aceeași ecuație pentru fiecare din aceste corpuri și considerând că înainte de ciocnire se mișcau ca două corpuri rigide, iar pentru forțele masice obișnuite, neavând caracter percutant, percuția corespunzătoare $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$ este neglijabilă

$$\left[E_{c1} + \int_{V_1} W_1 dv \right] - E_{c01} = \int_S \bar{p}_1 \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_{01}}{2} dS \quad (4.109)$$

$$\left[E_{c2} + \int_{V_2} W_2 dv \right] - E_{c-2} = \int_S \bar{p}_2 \frac{\bar{v}_2 + \bar{v}_{02}}{2} dS$$

rezultă ținând cont că $\bar{p}_1 = -\bar{p}_2 = \bar{p}$

$$E_C - E_{C0} = - \int_V W dv + \frac{1}{2} \bar{p} (\bar{v}_1 + \bar{v}_{01} - \bar{v}_2 - \bar{v}_{02}) \quad (4.110)$$

Diferența $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ poate fi nulă sau $(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \perp \bar{p}_1$. Produsul $\bar{p}_1(\bar{v}_{01} - \bar{v}_{02})$ este întotdeauna negativ.

Rezultă

$$E_C - E_{C0} < 0 \quad (4.111)$$

In cazul ciocnirii corpurilor cu asperități

$$(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \bar{p}_1 < 0 \quad (4.112)$$

și inegalitatea $E_C - E_{C0}$ își păstrează sensul.

4.7.2. Energia cinetică datorată variației vitezelor de deformație

Se notează cu E_C' energia cinetică datorată variației vitezelor de deformație (energia cinetică a vitezelor pierdute)

$$E_C' = \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_i - \bar{v}_{0i})^2 \quad (4.113)$$

Fie W' - energia specifică datorată variației vitezelor de deformație

$$W' = \frac{1}{2} \left[\lambda_0 e_v'^2 + 2G_0 (e_{xx}'^2 + e_{yy}'^2 + e_{zz}'^2) + G_0 (e_{yz}'^2 + e_{xz}'^2 + e_{xy}'^2) \right] \quad (4.114)$$

Din ecuațiile fundamentale ale ciocnirii corpului deformabil ce poate fi considerat sub acțiunea unui câmp de impulsuri presupuse transmise instantaneu întregului corp b), după transformări, rezultă

$$E'_C + \int_V W' dv = \int_V \rho \bar{P} dV + \int_S \bar{P} \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{2} dS \quad (4.115)$$

În cazul ciocnirii a două corpuri, rezultă

$$\left(E_C + \int_V W dv \right) - \left(E_{C_0} + \int_V W_0 dv \right) = - \left[E'_C + \int_V W' dv \right] \quad (4.116)$$

De aici rezultă că pierderea de energie totală la ciocnire este egală cu energia totală a vitezelor pierdute.

4.7.3. Teorema unicității

Variația vitezelor punctelor corpului sub acțiunea impulsurilor este dată de funcția

$$\bar{V}(x,y,z) = \bar{v}(x,y,z) - \bar{v}_0(x,y,z) \quad (4.117)$$

care satisface, în orice punct din interiorul corpului elastic supus câmpului de impulsuri, ecuațiile

$$\begin{aligned} e_{xx} - e_{xx}^o &= \frac{1}{E_0} [p_{xx} - \mu_0(p_{yy} + p_{zz})] \\ e_{yy} - e_{yy}^o &= \frac{1}{E_0} [p_{yy} - \mu_0(p_{zz} + p_{xx})] \\ e_{zz} - e_{zz}^o &= \frac{1}{E_0} [p_{zz} - \mu_0(p_{xx} + p_{yy})] \end{aligned} \quad (4.118)$$

în care p_{xx}, \dots sunt impulsurile tensiunilor

$$e_{xx} - e_{xx}^o = e'_{xx} = \frac{\partial(v_x - v_x^o)}{\partial x}$$

variația vitezei specifice de deformație

.....

E_0 și μ_0 sunt constantele din legea generalizată a lui Hooke pentru ciocniri.

Se demonstrează că funcția $\bar{V} = \bar{v} - \bar{v}_0$ care satisface ecuația (4.118) este unică. Dacă ar exista două funcții $\bar{V}' = (\bar{v}' - \bar{v}_0)$ și $\bar{V}'' = (\bar{v}'' - \bar{v}_0)$, atunci funcția $\bar{v}' - \bar{v}''$ ar dispărea de pe suprafața corpului, respectiv impulsurile tensiunilor corespunzătoare acestei funcții ar dispărea.

Pentru funcția $(\bar{v}' - \bar{v}'')$ egalitatea (4.115) în care forțele masice obișnuite neavând caracter percutant percuția $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$ se neglijează, devine

$$E'_c + \int_V W' dv = \int_S \bar{p} \frac{\bar{v}' - \bar{v}''}{2} dS \quad (4.119)$$

Deoarece membrul drept este nul, rezultă

$$E'_c + \int_V W' dv = 0 \quad (4.120)$$

Tinând cont că E'_c și W' au forme pătratice pozitive, rezultă

$$\bar{v}' - \bar{v}'' = 0 \quad (4.121)$$

4.7.4.. Ecuația în variații

Din egalitatea (4.115) rezultă că funcția π'

$$\pi' = E'_c + \int_V W dv - \int_V \rho \bar{P} \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{2} dv - \int_S \bar{p} \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{2} dS = 0 \quad (4.122)$$

pentru distribuția reală a vitezelor, adică dacă $\bar{V} = \bar{v} - \bar{v}_0$ satisface ecuațiile

$$\begin{aligned} p_{xx} &= \lambda_0 e'_v + 2G_0 e'_{xx} & p_{yz} &= p_{zy} = G_0 e'_{yz} \\ p_{yy} &= \lambda_0 e'_v + 2G_0 e'_{yy} & p_{zx} &= p_{xz} = G_0 e'_{xz} \\ p_{zz} &= \lambda_0 e'_v + 2G_0 e'_{zz} & p_{xy} &= p_{yx} = G_0 e'_{yz} \end{aligned} \quad (4.123)$$

unde

$$\begin{aligned}
 e'_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} & ; & & e'_{yy} &= \frac{\partial V_y}{\partial y} & ; & & e'_{zz} &= \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
 e'_{xy} &= e'_{yx} &= & \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \\
 e'_{yz} &= e'_{zy} &= & \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \\
 e'_{zx} &= e'_{xz} &= & \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{4.124}$$

iar

$$e'_v = e'_{xx} + e'_{yy} + e'_{zz} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{4.125}$$

Paralel cu starea cinematică reală se imaginează o stare posibilă pentru legăturile date și se notează cu $\bar{v}^*(x,y,z)$ vitezele punctelor pentru această stare.

Funcția π nu va mai fi nulă. Variația funcției π' la trecerea de la starea cinematică reală la starea cinematică posibilă și se notează cu

$$V^* = \bar{v}^* - \bar{v} \tag{4.126}$$

variația vitezei.

După transformări și notând cu (n) direcția normalei comune în punctul considerat rezultă

$$\begin{aligned}
 \delta \pi' &= \int_V \left[\left(\rho V_x^* - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) V_x^* + \left(\rho V_y^* - \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right) V_y^* + \right. \\
 &+ \left. \left(\rho V_z^* - \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) V_z^* \right] dV + \int_S \{ [p_{xx} \cos(xn) + p_{xy} \cos(yn) + p_{xz} \cos(zn)] V_x^* + \\
 &+ [p_{yx} \cos(xn) + \dots] V_y^* + [p_{zx} \cos(xn) + \dots] V_z^* \} dS
 \end{aligned} \tag{4.127}$$

relație din care evident

$$\delta \pi' = 0 \quad (4.128)$$

Această relație este o ecuație în variații și se poate folosi pentru deducerea altor ecuații și pentru rezolvarea aproximativă a problemelor.

În cazul ciocnirii a două corpuri, pentru fiecare din ele se poate scrie

$$\delta E_1' - \bar{P}_1 \bar{V}_1^* = 0 \quad \text{unde} \quad \bar{V}_1^* = \bar{v}_1^* - \bar{v}_1 \quad (4.129)$$

$$\delta E_2' - \bar{P}_2 \bar{V}_2^* = 0 \quad \text{unde} \quad \bar{V}_2^* = \bar{v}_2^* - \bar{v}_2$$

Tinând cont că $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2 = \bar{P}$ și adunând rezultă

$$\delta E' - \bar{P}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = 0 \quad (4.130)$$

Alegând $\bar{v}_1^* - \bar{v}_2^*$ astfel încât să fie satisfăcute legăturile impuse, adică componentele vitezelor după normala comună (n) să fie egale, rezultă

$$\delta E' = 0 \quad (4.131)$$

deoarece

$$\bar{P}_1(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = 0 \quad (4.132)$$

Deci, în momentul ciocnirii vitezele punctelor corpurilor vor avea astfel de valori în energia totală a vitezelor pierdute va prezenta o valoare extremă în comparație cu alte viteze posibile care satisfac legăturile impuse.

4.7.5. Teorema reciprocității

Dacă unui corp i se aplică pe rând două sisteme de impulsuri $\bar{P}_v' dS$ și $\bar{P}_v'' dS$, fiecare din aceste sisteme va produce variația vitezelor $\bar{v}' - \bar{v}_0$ și respectiv $\bar{v}'' - \bar{v}_0$.

Se arată că

$$\int_s \bar{P}_v' \frac{\bar{v}'' - \bar{v}_0}{2} dS = \int_s \bar{P}_v'' \frac{\bar{v}' - \bar{v}_0}{2} dS \quad (4.133)$$

Toate teoremele demonstrate reprezintă generalizarea teoremelor existente din teoria elementară a ciocnirii, de asemenea există o asemănare între aceste teoreme și teoremele din teoria elasticității.

4.8. Considerații energetice

În cazul ciocnirii aplicate corpului presupus deformabil, forțele interioare percutante efectuează un lucru mecanic. Într-adevăr pentru studiul ciocnirii în locul tensiunilor se vor considera impulsurile acestora încât la calculul lucrului mecanic trebuie considerate vitezele.

Astfel, dacă pe direcția axei Ox viteza de deformare specifică este e_{xx} , corespunzător elementului dx viteza de deformare va fi $e_{xx}dx$ iar creșterea posibilă de viteză $\delta(e_{xx}dx)$. Analog vitezei de deformare unghiulară e_{xy} îi va corespunde creșterea $\delta(e_{xy}dx)$. Deoarece variația impulsului tensiunilor pe elementul considerat poate fi neglijată, iar lucrul mecanic rezultă

$$p_{xx} \delta(e'_{xx} dx) dydz = p_{xx} \delta e'_{xx} dv \quad (4.134)$$

respectiv

$$p_{xy} \delta(e'_{xy} dx) dydz = p_{xy} \delta e'_{xy} dv \quad (4.135)$$

Procedând la fel pentru toate deformațiile posibile rezultate din creșterea vitezei de deformare, rezultă lucrul mecanic

$$\delta L = (p_{xx} \delta e'_{xx} + p_{yy} \delta e'_{yy} + p_{zz} \delta e'_{zz} + p_{xy} \delta e'_{xy} + p_{yz} \delta e'_{yz} + p_{zx} \delta e'_{zx}) dv \quad (4.136)$$

Lucrul mecanic specific de deformare raportat la unitatea de volum aflată în vecinătatea punctului considerat din corp, este

$$\delta L_1 = \frac{\delta L}{dv} = p_{xx} \delta e'_{xx} + p_{yy} \delta e'_{yy} + p_{zz} \delta e'_{zz} + p_{xy} \delta e'_{xy} + p_{yz} \delta e'_{yz} + p_{zx} \delta e'_{zx} \quad (4.137)$$

În continuare se va introduce ipoteza existenței potențialului forțelor percutante interioare. Acesta determinat de impulsurile tensiunilor, se va exprima prin energia specifică W a vitezei de deformare.

Evident, odată cu dispariția deformației energia acumulată se restituie sub forma lucrului mecanic de deformare, adică $\delta L_1 = \delta W$. Dar energia introdusă este

funcție de componentele vitezei de deformare încât se poate scrie

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial e'_{xx}} \delta e'_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e'_{yy}} \delta e'_{yy} + \frac{\partial W}{\partial e'_{zz}} \delta e'_{zz} + \frac{\partial W}{\partial e'_{xy}} \delta e'_{xy} + \frac{\partial W}{\partial e'_{yz}} \delta e'_{yz} + \frac{\partial W}{\partial e'_{zx}} \delta e'_{zx} \quad (4.138)$$

Comparând relațiile (4.137) cu (4.138) în care oricare ar fi creșterile componentelor vitezei de deformare, trebuie să coincidă, se deduce

$$p_{xx} = \frac{\partial W}{\partial e'_{xx}}, \quad p_{yy} = \frac{\partial W}{\partial e'_{yy}}, \quad p_{zz} = \frac{\partial W}{\partial e'_{zz}} \quad (4.139)$$

$$p_{xy} = \frac{\partial W}{\partial e'_{xy}}, \quad p_{yz} = \frac{\partial W}{\partial e'_{yz}}, \quad p_{zx} = \frac{\partial W}{\partial e'_{zx}} \quad (4.140)$$

Pe de altă parte odată precizate legile constitutive (3)-(4) se poate deduce expresia pentru energia vitezei de deformare W . Presupunând că se exprimă printr-o funcție omogenă de gradul doi în raport cu componentele vitezei de deformare.

$$W = \frac{1}{2} (p_{xx} e'_{xx} + p_{yy} e'_{yy} + p_{zz} e'_{zz} + p_{xy} e'_{xy} + p_{yz} e'_{yz} + p_{zx} e'_{zx}) \quad (4.141)$$

Pentru aplicații este necesar să se deducă expresia energiei W fie ca funcție numai de componentele vitezei de deformare, fie numai de impulsurile tensiunilor.

Introducând în relația (4.141) impulsurile tensiunilor date prin legile constitutive inversate (5), energia W rezultă funcție numai de componentele vitezei de deformare, sub forma

$$W = \left[\lambda_0 e_v^2 + 2\mu_0 (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \mu_0 (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2) \right] \quad (4.142)$$

Analog pe baza legilor constitutive (3)-(4), expresia energiei vitezei de deformare (11) funcție de componentele vitezei de deformare rezultă

$$W = \frac{1}{2E_0} \left[p_{xx}^2 + p_{yy}^2 + p_{zz}^2 - 2\mu_0 (p_{xx} p_{yy} + p_{yy} p_{zz} + p_{zz} p_{xx}) + 2(1 + \mu_0) (p_{xy}^2 + p_{yz}^2 + p_{zx}^2) \right] \quad (4.143)$$

Este ușor de observat din relația (4.142) că energia vitezei de deformare este pozitiv definită ($W > 0$).

CAPITOLUL 5

SISTEME ELASTICE PERCUTANTE

5.1. Sistem vibrant bară - masă fixată elastic

Se consideră o bară elastică încastrată la una din extremități și având la cealaltă extremitate o masă legată elastic.

Pentru studiu se adoptă modelul din fig.5.1, format din bara verticală de lungime L , încastrată la extremitatea inferioară și având legat la cealaltă extremitate un sistem elastic cu un grad de libertate.

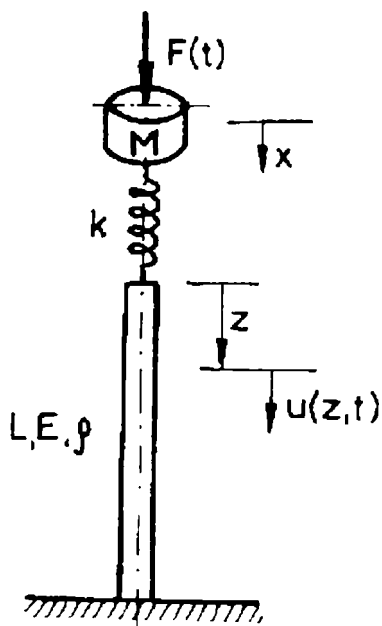


Fig.5.1

Sistemul elastic este format din masa M legată prin arcurile cu constantă elastică k . Asupra masei m acționează forța perturbatoare

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.1)$$

Se notează cu x deplasarea masei M din poziția de echilibru static și cu $u(z,t)$ deplasările punctelor barei aflate la cota z față de extremitatea barei.

Vibrațiile longitudinale ale barei sunt descrise de ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.2)$$

unde s-a notat cu a^2 raportul dintre E și ρ (E este modulul de elasticitate al materialului iar ρ masa specifică).

Ecuația diferențială a mișcării masei M va fi

$$M\ddot{x} + k[x - u(L,t)] = F_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.3)$$

Vibrațiile barei se determină integrând ecuația (5.2) și ținând seama de condițiile la limită ce se stabilesc în continuare. Astfel la extremitatea încastrată ($z=0$) se determină

$$u(0,t)=0 \quad (5.4)$$

iar în cealaltă extremitate ($z=L$) se poate scrie

$$k[x-u(L,t)]=ES\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right)_{z=L} \quad (5.5)$$

unde S este secțiunea transversală a barei.

Eliminând pe x din relațiile (5.3) și (5.5), rezultă

$$ES\left[\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right)_{z=L} + \frac{M}{k}\left(\frac{\partial \ddot{u}(z,t)}{\partial z}\right)_{z=L}\right] + M\ddot{u}(L,t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.6)$$

Așadar vibrațiile longitudinale ale barei se determină din ecuația (5.2) cu condițiile la limită (5.4) și (5.6). De asemenea se presupun date și condițiile inițiale ale mișcării.

Pentru studiul vibrațiilor proprii ale barei se presupune că asupra masei m nu acționează forța perturbatoare, caz în care în relația (5.6) se va considera $F(t)=0$. Prin urmare este necesar să se determine soluția ecuației (5.2) cu condițiile la limită:

$$u(0,t)=0 \quad (5.7)$$

$$ES\left[\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right)_{z=L} + \frac{M}{k}\left(\frac{\partial \ddot{u}(z,t)}{\partial z}\right)_{z=L}\right] + M\ddot{u}(L,t) = 0 \quad (5.8)$$

Pentru integrarea ecuației (5.2) se folosește metoda separării variabilelor. Considerăm soluția de forma

$$u(z,t)=Z(z)T(t) \quad (5.9)$$

Dacă se substituie soluția (5.9) în ecuația (5.2), rezultă

$$Z\ddot{T}=a^2Z''T \quad (5.10)$$

sau după împărțirea prin a^2ZT

$$\frac{\ddot{T}}{a^2T} = \frac{Z''}{Z} \quad (5.11)$$

Este necesar ca fiecare din cei doi membri ai ecuației (5.11) să fie egal cu una și aceeași constantă negativă notată prin $-\lambda^2$.

Astfel se obține:

$$\ddot{T} + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad (5.12)$$

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0 \quad (5.13)$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații sunt:

$$Z = A \cos \lambda z + B \sin \lambda z \quad (5.14)$$

$$T = C \cos \lambda at + D \sin \lambda at \quad (5.15)$$

Tinând seama de condiția (5.7), se obține $Z(0)=0$, deci $A=0$, iar din condiția (5.8) rezultă

$$\operatorname{tg} \lambda L - \frac{ES}{M\lambda a^2} \left[1 - \frac{M}{k} \lambda^2 a^2 \right] = 0 \quad (5.16)$$

Ecuația caracteristică (5.16) este o ecuație transcendentă care permite determinarea valorilor proprii λ_n ($n=1,2,3,\dots$).

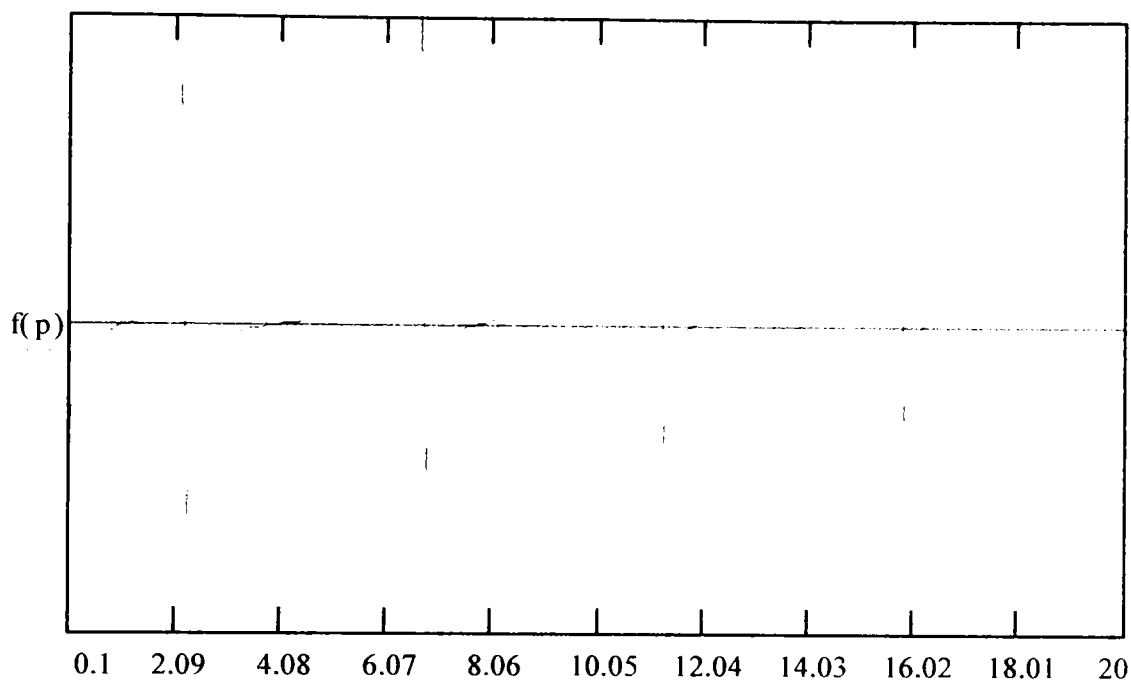
Soluția generală rezultă însumând soluții de forma (5.9) corespunzătoare fiecărei valori λ_n , adică

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_n (C_n \cos \lambda_n at + D_n \sin \lambda_n at) \quad (5.17)$$

Rădăcinile ecuației caracteristice pot fi localizate în primă aproximație după reprezentarea grafică a funcției de λ dată de relația (5.16). Reprezentarea corespunzătoare este prezentată în fig.5.2.

Graficul obținut corespunde unui modul de elasticitate $E=21 \cdot 10^4$ N/mm², lungimea barei $L=0,7$ m, raza acesteia $r=0,01$ m, densitatea $\rho=7.85$ kg/dm³, precum și o constantă elastică $k=3125 \cdot 10^5$ N/m.

Odată localizate aproximativ aceste rădăcini, se poate trece la determinarea precisă a acestora, folosind programul SOLUTION1, special conceput pentru rezolvarea exactă a unei astfel de ecuații transcendente. Soluțiile valorilor proprii



p
Fig.5.2

λ_n astfel obținute prezintă o eroare de 10^{-14} , ceea ce este mai mult decât suficient din punctul de vedere al calculelor tehnice ingineresti.

Tabloul complet al primelor nouă valori proprii obținute cu ajutorul programului SOLUTION1 pentru lungimi ale barei cuprinse între 0,5 m și 0,9 m este prezentat în tabelul 5.1. În reprezentarea grafică din fig.5.3 se poate urmări variația valorilor proprii λ_n pentru diferite lungimi ale barei.

Tabelul 5.1

	L=0,5	L=0,6	L=0,7
λ_1	1,541934249139538	1,307692492951169	1,13524262565951
λ_2	3,141592653589793	2,617993773961768	2,243994790779141
λ_3	5,087546121033773	4,39838031633158	3,882053208795002
λ_4	9,424777960769379	7,853981321885305	6,731984372337425
λ_5	10,35490851898603	8,758210953955279	7,609129524524374
λ_6	15,70796326794897	13,08996886980884	11,21997395389571
λ_7	16,29357451106635	13,66859653052648	11,79078994724976
λ_8	21,99114857512855	18,32595641773238	15,70796353545399
λ_9	22,41542268120765	18,74750759385349	16,12639216186945

	L=0,8	L=0,9
λ_1	1,002973487584374	0,8983050769585765
λ_2	1,963495379235259	1,745329298229766
λ_3	3,4785095191111117	3,153273783459132
λ_4	5,890486137705778	5,235987894689298
λ_5	6,740061969638218	6,058034331505149
λ_6	9,817476896176297	8,726646491148831
λ_7	10,37979999896395	9,279934249542537
λ_8	13,74446765464682	12,21730508760836
λ_9	14,15941131185784	12,62843951005175

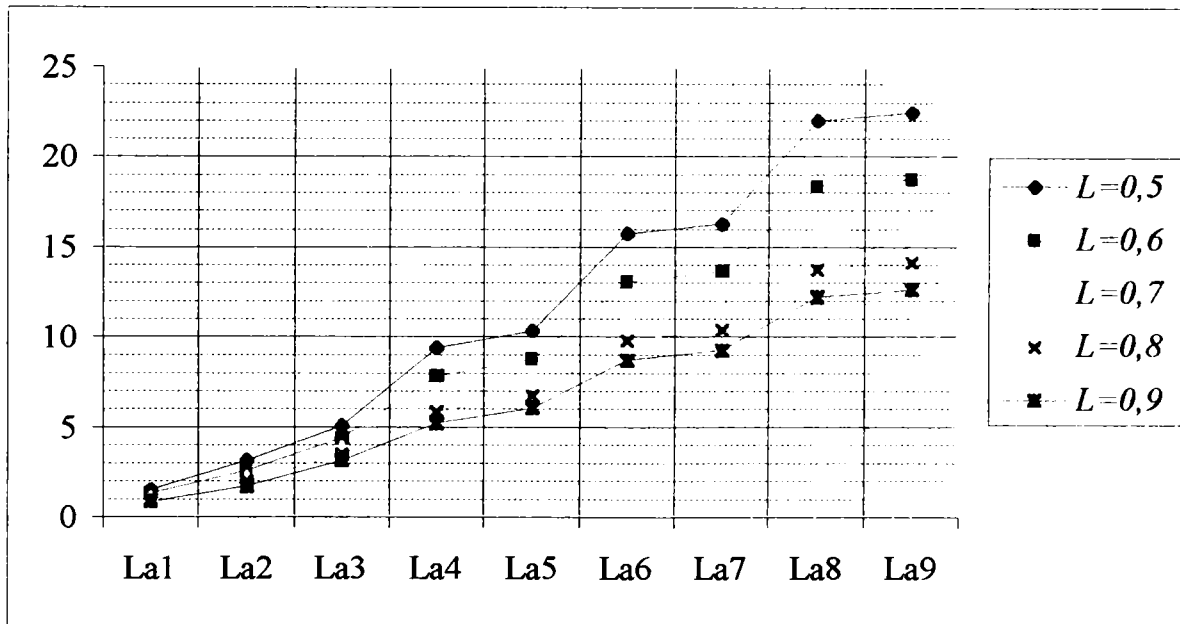


Fig.5.3

5.2. Sistem vibrant cu excitare prin deplasarea capătului superior al unei bare elastice asimilată cu un arc cu masa uniform distribuită

Se consideră bara din fig.5.4 de masă m , secțiune transversală S , lungime L și modul de elasticitate E . O secțiune a barei este definită prin coordonata z . Capătul superior al barei execută o mișcare oscilatorie periodică sub acțiunea unei forțe excitatoare, deplasarea sa fiind $x_e(t)$. La celălalt capăt ($z=L$), bara are atașată o masă rigidă M .

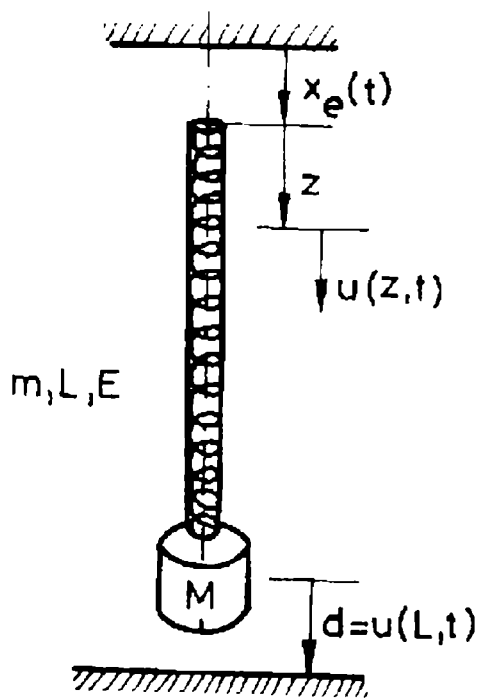


Fig.5.4

Deplasarea unei secțiuni a barei de coordonată z este $u(z,t)$ măsurată din poziția pe care o ocupă în echilibru static, pentru $x_0=0$.

Vibrațiile longitudinale ale barei sunt descrise de ecuația cunoscută:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (5.18)$$

unde a^2 este raportul dintre E (modulul de elasticitate) și ρ (densitatea materialului).

În continuare se vor stabili condițiile la limită, necesare integrării ecuației vibrațiilor barei. Astfel, pentru $z=0$ deplasarea u este identică cu deplasarea

capătului 0 și se poate determina

$$u(0,t) = x_e(t) \quad (5.19)$$

Pentru cealaltă extremitate, ($z=L$), se poate scrie condiția:

$$M \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} = -ES \left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right)_{z=L} \quad (5.20)$$

Dacă se notează cu r amplitudinea și cu ω pulsația mișcării vibratorii a

capătului 0, $[x_c = x_c(t)]$, se pot introduce următoarele notații:

$$\begin{aligned} z_0 = \frac{z}{L} \quad u_0 = \frac{u}{r} \quad x_{0e} = \frac{x_e}{r} \quad t_0 = t\omega \\ \omega_0 = \omega \sqrt{\frac{ML}{ES}} \quad m_0 = \frac{m}{M} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Din relațiile (5.18), (5.19) și (5.20), ținând seama de notațiile (5.21) rezultă:

$$\frac{\partial^2 u(z_0, t_0)}{\partial t_0^2} - \frac{1}{m_0 \omega_0^2} \cdot \frac{\partial^2 u(z_0, t_0)}{\partial z_0^2} = 0 \quad (5.22)$$

$$u_0(0, t_0) = x_{0e}(t_0) \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial^2 u_0(1, t_0)}{\partial t_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial u_0(1, t_0)}{\partial z_0} = 0 \quad (5.24)$$

O soluție a ecuațiilor (5.22)-(5.24) poate fi exprimată astfel

$$u_0(z_0, t_0) = \sum_{i=1}^n T_i(t_0) \sin p_{0i} z_0 + x_{0e}(t_0) \quad (5.25)$$

Se observă imediat că această soluție satisface condiția (5.23). Celelalte două ecuații (5.22) și (5.24) sunt satisfăcute dacă funcțiile $T_i(t_0)$, $i=1, 2, \dots, n$, satisfac

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{T}_i(t_0) + \frac{p_{0i}^2}{m_0 \omega_0^2} T_i(t_0) \right] \sin p_{0i} z_0 = \ddot{x}_{0e}(t_0) \quad (5.26)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{T}_i(t_0) + \frac{p_{0i}^2}{\omega_0^2 t g p_{0i}} T_i(t_0) \right] \sin p_{0i} = \dot{x}_{0e}(t_0) \quad (5.27)$$

Dacă valorile pulsațiilor proprii ale sistemului arc-masă sunt luate ca soluții succesive ale ecuației

$$p_0 \operatorname{tg} p_0 = m_0 \quad (5.28)$$

condiția de legătură (5.27) este satisfăcută dacă ecuația (5.26) este satisfăcută.

Ecuația (5.28) este ecuația în pulsații pentru sistemul arc-masă. Pulsațiile acestui sistem pentru vibrațiile libere neamortizate (pulsațiile proprii) sunt

$$p_i = p_{0i} \sqrt{\frac{ES}{mL}} = \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0}} \sqrt{\frac{ES}{ML}}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.29)$$

Reprezentarea grafică funcției $f(p_0) = p_0 \operatorname{tg} p_0 - m_0$ dată de relația (5.28), pentru $L=0,5$ se prezintă în fig.5.5, unde se pot localiza aproximativ valorile rădăcinilor p_{0i} .

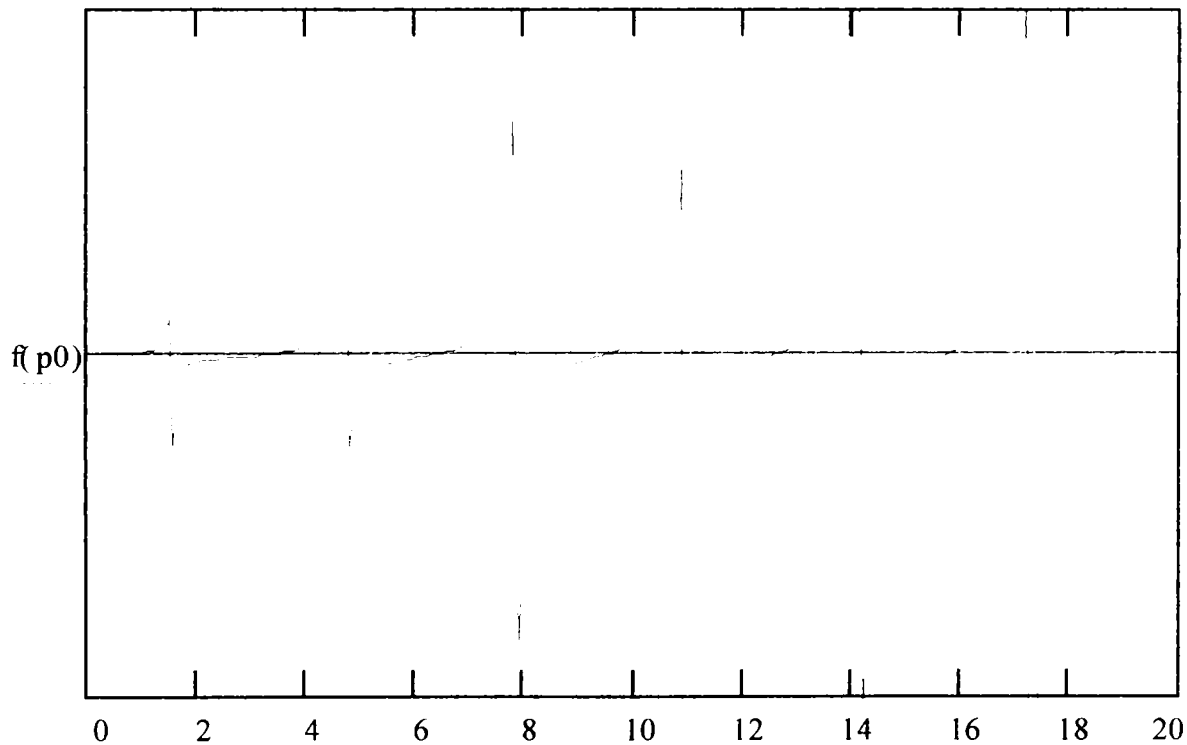


Fig.5.5

Pentru determinarea precisă a rădăcinilor p_{0i} , se folosește programul SOLUTION2, special conceput pentru rezolvarea exactă a unei astfel de ecuații transcendente. Soluțiile astfel obținute prezintă o eroare de 10^{-14} , ceea ce este mai mult decât suficient din punctul de vedere al calculelor tehnice inginerești.

După obținerea rădăcinilor p_{0i} , cu relația (5.29) se obțin valorile pulsațiilor proprii p_i . Tabloul complet al primelor nouă pulsații proprii pentru diferite valori ale lui L este prezentat în tabelul 5.2.

Tabelul 5.2

	L=0,5	L=0,6	L=0,7	L=0,8	L=0,9
p_1	8226,002	7655,443	7188,305	6796,904	6462,873
p_2	16248,93	16248,93	16248,93	16248,93	16248,93
p_3	34935,69	34562,36	34287,6	34077,08	33910,71
p_4	48746,78	48746,78	48746,78	48746,78	48746,78
p_5	66297,73	66085,94	65933,26	65818,02	65727,98
p_6	81244,63	81244,63	81244,63	81244,63	81244,63
p_7	98373,59	98228,52	98124,48	98046,22	97985,21
p_8	113742,5	113742,5	113742,5	113742,5	113742,5
p_9	130654,7	130544,8	130466,2	130407,1	130361,1

Funcția $\sin p_{0i}z_0$ pentru $i=1,2,\dots,n$ nu este ortogonală. Cu toate acestea funcția $f(z_0)$ poate fi dezvoltată în seria

$$f(z_0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin p_{0i} z_i \quad \text{pentru } 0 < z \leq 1 \quad (5.30)$$

Ecuția (5.26) cu valorile pulsațiilor p_{0i} din (5.28) este satisfăcută dacă funcțiile $T_i(t_0)$ satisfac

$$\ddot{T}_i(t_0) + \frac{p_{0i}^2}{m_0 \omega_0^2} T_i(t_0) = \ddot{x}_{0e}(t_0) \frac{2(m_0^2 + p_{0i}^2)}{p_{0i}(m_0 + m_0^2 + p_{0i}^2)} \quad (5.31)$$

unde $i=1,2,\dots,n$.

Soluția fiecăreia din aceste ecuații conține două părți, una omogenă și o soluție particulară. Pentru scrierea soluției particulare trebuie cunoscută legea

mişcării forțate $x_{0c}(t)$, care va fi de formă armonică

$$x_{0e} = \cos(t_0 + \varphi) \quad (5.32)$$

Soluția $T_i(t_0)$ a ecuației (5.31) va fi

$$T_i(t_0) = C_{1i} \cos \left(\sqrt{\frac{p_{0i}^2}{m_0 \omega_0^2}} t_0 + C_{3i} \right) + C_{2i} \cos(t_0 + \varphi) \quad (5.33)$$

unde C_{1i} , C_{2i} și C_{3i} sunt constante de integrare.

Soluția completă $u_0(z_0, t_0)$ a ecuațiilor (5.22)-(5.24) va fi:

$$u_0(z_0, t_0) = \sum_{i=1}^n C_{1i} \cos \left(\frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0} \omega_0} t_0 + C_{3i} \right) \sin p_{0i} z_0 + \sum_{i=1}^n C_{2i} \cos(t_0 + \varphi) \sin p_{0i} z_0 + \cos(t_0 + \varphi) \quad (5.34)$$

Punctul de impact $d_0 = d/r$ (fig. 5.4) este măsurat din poziția de echilibru static. Impactul este caracterizat prin coeficientul de restituire R .

În general soluția (5.34) trebuie să satisfacă următoarele condiții de periodicitate.

$$u_0(z_0, 0) = u_0(z_0, 2n\pi) \quad (5.35)$$

$$u_0(1, 0) = d_0 \quad (5.36)$$

$$\dot{u}_0(z_0, 0) = \dot{u}_0(z_0, 2n\pi) \quad ; \quad z_0 < 1 \quad (5.37)$$

$$\dot{u}_0(1, 0) = RV_0 \quad (5.38)$$

$$\dot{u}_0(1, 2n\pi) = V_0 \quad (5.39)$$

Se consideră $t_0 = 0$ ca început al fiecărui ciclu. Cu V_0 s-a notat viteza

adimensională de impact

$$V_0 = \frac{V}{r\omega} \quad (5.40)$$

Mărimile necunoscute V_0 , φ , C_{1i} , C_{3i} ($i=1,2,\dots,n$) se pot determina din condițiile (5.35)-(5.39).

Cu notația

$$\alpha_i = 2\pi n \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0} \omega_0} \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.41)$$

condiția (5.35) este satisfăcută dacă

$$C_{3i} = \operatorname{arctg} \frac{\cos \alpha_i - 1}{\sin \alpha_i} \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.42)$$

Pentru satisfacerea condițiilor (5.37)-(5.39) este necesar ca

$$\dot{u}_0(z_0, 0) - \dot{u}_0(z_0, 2n\pi) = \begin{cases} 0 & ; \quad z < 1 \\ -(1-R)V_0 & ; \quad z_0 = 1 \end{cases} \quad (5.43)$$

Notând

$$C_{1i}^* = -\frac{C_{1i}}{(1-R)V_0} \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.44)$$

condiția (5.43) devine

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0} \omega_0} C_{1i}^* \frac{\sin \alpha_i}{\cos(\alpha_i + \gamma_i)} \sin p_{0i} z_0 = \begin{cases} 0 & \text{pt. } z < 1 \\ 1 & \text{pt. } z = 1 \end{cases} \quad (5.45)$$

Soluția acestei ecuații este:

$$C_{1i}^* = \frac{\sqrt{m_0} \omega_0 \cdot \cos(\alpha_i + C_{3i})}{p_{0i} \sin \alpha_i} \cdot \frac{2 \sin p_{0i} (m_0^2 + p_{0i}^2)}{m_0 (m_0 + m_0^2 + p_{0i}^2)} \quad (5.46)$$

condițiile (5.36) și (5.38) vor fi

$$(1-R)V_0 \sum_{i=1}^n C_{1i}^* \cos C_{3i} \sin p_{0i} + \sum_{i=1}^n C_{2i} \cos \varphi \sin p_{0i} + \cos \varphi = d_0 \quad (5.47)$$

$$-(1-R)V_0 \sum_{i=1}^n \frac{P_{0i}}{\sqrt{m_0} \omega_0} C_{1i}^* \sin C_{3i} \sin p_{0i} - \sum_{i=1}^n C_{2i} \sin \varphi \sin p_{0i} - \sin \varphi = R V_0 \quad (5.48)$$

Inlocuind notațiile

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = \sum_{i=1}^n C_{1i}^* \cos C_{3i} \sin p_{0i} \\ \Delta_2 = \sum_{i=1}^n \frac{P_{0i}}{\sqrt{m_0} \omega_0} C_{1i}^* \sin C_{3i} \sin p_{0i} \\ \Delta_3 = \sum_{i=1}^n C_{2i} \sin p_{0i} + 1 \\ \Delta_4 = \sum_{i=1}^n C_{2i} \sin p_{0i} \end{array} \right. \quad (5.49)$$

Ecuțiile (5.47) și (5.48) vor deveni

$$\cos \left(\varphi + \operatorname{arctg} \frac{\Delta_4}{\Delta_3} \right) = \frac{d_0 + (1-R)V_0 \Delta_1}{\sqrt{\Delta_3^2 + \Delta_4^2}} \quad (5.50)$$

$$\sin \left(\varphi + \operatorname{arctg} \frac{\Delta_4}{\Delta_3} \right) = \frac{[-R + (1-R)\Delta_2]V_0}{\sqrt{\Delta_3^2 + \Delta_4^2}} \quad (5.51)$$

Dacă se elimină φ rezultă ecuația de ordinul doi în V_0

$$A V_0^2 + 2d_0 B V_0 + [d_0^2 - (\Delta_3^2 + \Delta_4^2)] = 0 \quad (5.52)$$

unde s-a notat cu

$$B=(1-R)\Delta_1 \quad (5.53)$$

$$A=B^2+[-R+(1-R)\Delta_2]^2 \quad (5.54)$$

Dacă se cunosc m_0 , ω_0 , k și d_0 se pot determina V_0 , φ și se poate calcula soluția (5.35) a mișcării periodice unde

$$C_{1i} = -(1-R)V_0 \frac{\sqrt{m_0}\omega_0}{p_{0i}} \cdot \frac{1}{\sin n\pi \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0}\omega_0}} \cdot \frac{\sin p_{0i}(m_0^2 + p_{0i}^2)}{m_0(m_0 + m_0^2 + p_{0i}^2)} \quad (5.55)$$

$$C_{2i} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{p_{0i}^2}{m_0\omega_0^2} \right|} \cdot \frac{2(m_0^2 + p_{0i}^2)}{p_{0i}(m_0 + m_0^2 + p_{0i}^2)} \quad (5.56)$$

$$C_{3i} = -n\pi \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0}\omega_0} \quad (5.57)$$

Partea particulară a soluției poate fi scrisă

$$\sum_{i=1}^n C_{2i} \cos(t_0 + \varphi) \sin p_{0i} z_0 = \left(\frac{\omega_0 \sqrt{m_0} + m_0 \operatorname{tg} \omega_0 \sqrt{m_0}}{m_0 - \omega_0 \sqrt{m_0} \operatorname{tg} \omega_0 \sqrt{m_0}} \sin \omega_0 \sqrt{m_0} z_0 + \cos \omega_0 \sqrt{m_0} z_0 - 1 \right) \cos(t_0 + \varphi) \quad (5.58)$$

și sumele definite în (5.49) se reduc la

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m_0} \omega_0}{p_{0i}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \left(n\pi \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0} \omega_{0i}} \right)} \cdot \frac{m_0}{m_0 + m_0^2 + p_{0i}^2} \\ \Delta_2 = -\frac{1}{2} \\ \Delta_3 = \frac{m_0}{m_0 \cos \omega_0 \sqrt{m_0} - \omega_0 \sqrt{m_0} \sin \omega_0 \sqrt{m_0}} \\ \Delta_4 = 0 \end{array} \right. \quad (5.59)$$

Rezonanța va apare când

$$\omega_0 = \frac{n}{q} \cdot \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0}} \quad ; \quad q=1,2,\dots,n \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.60)$$

Dacă $q \neq n$, viteza de impact devine $V_0 \equiv 0$ și nu există soluții periodice. Când $q=n$, viteza V_0 poate fi calculată ca o valoare limită din ecuația (5.52).

Dacă nu apare rezonanța pe parcursul unui ciclu valoarea limită a vitezei V_0 pentru

$$\omega_0 = \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0}} \quad (5.61)$$

este

$$V_0 = \pm \frac{n\pi}{1-R} \cdot \frac{1}{\cos p_{0i}} \quad (5.62)$$

5.3. Sistem vibrant excitat prin acțiunea unei forțe $F(t)$ asupra masei M

Când sistemul vibrant este excitat cu o forță aplicată masei M care suportă ciocnirea, soluția ecuației de mișcare este foarte apropiată cu cea obținută în cazul excitației prin deplasarea capătului arcului, soluție prezentată anterior.

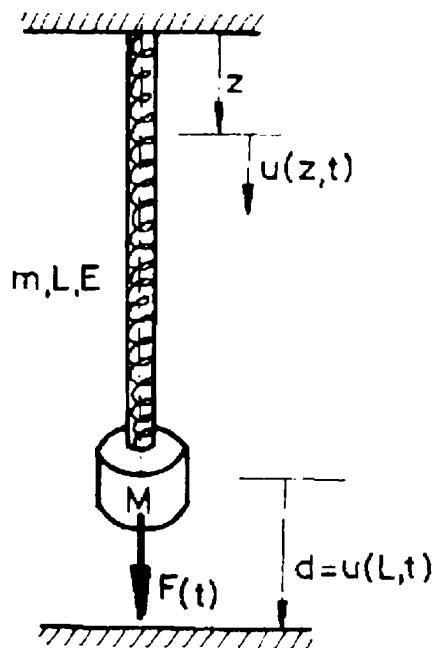


Fig. 5.6

Pentru sistemul vibrant din fig. 5.5 ecuația de mișcare, respectiv condițiile la limită sunt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.63)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (5.64)$$

$$M \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} = -ES \frac{\partial u(L, t)}{\partial z} + F(t) \quad (5.65)$$

Cantitățile adimensionale au fost alese anterior cu excepția deplasării u și a forței $F(t)$:

$$\begin{cases} u_0 = u \frac{M\omega^2}{F_{\max}} \\ F_0(t_0) = \frac{F(t)}{F_{\max}} \end{cases} \quad (5.66)$$

unde ω este pulsația fundamentală și F_{\max} valoarea maximă (de vârf) a funcției $F(t)$. Ecuțiile (5.63)-(5.65) vor deveni rezultă:

$$\frac{\partial^2 u(z_0, t_0)}{\partial t_0^2} - \frac{1}{m_0 \omega_0^2} \cdot \frac{\partial^2 u(z_0, t_0)}{\partial z_0^2} = 0 \quad (5.67)$$

$$u_0(0, t_0) = 0 \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial^2 u_0(1, t_0)}{\partial t_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial u_0(1, t_0)}{\partial z_0} = F_0(t_0) \quad (5.69)$$

cu o posibilă soluție

$$u_0 = \sum_{i=1}^n T_i(t_0) \sin p_{0i} z_0 \quad (5.70)$$

care satisface condiția (5.68)

Pentru a fi satisfăcute ecuațiile (5.67)-(5.69), p_{0i} se alege în concordanță cu (5.28). Funcțiile $T_i(t_0)$, $i=1,2,3,\dots$ trebuie să satisfacă următoarea egalitate

$$\ddot{T}_i(t_0) + \frac{p_{0i}^2}{m_0 \omega_0^2} T_i(t_0) = F_0(t_0) \frac{2 \sin p_{0i} (m_0^2 + p_{0i}^2)}{m_0 (m_0 + \omega_0^2 + p_{0i}^2)} \quad (5.71)$$

Dacă forța excitatoare este armonică

$$F(t_0) = \cos(t_0 + \varphi) \quad (5.72)$$

soluția generală (5.68) devine

$$u_0(z_0, t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} \cos\left(\frac{p_{0i}}{\omega_0 \sqrt{m_0}} t_0 + C_{3i}\right) \sin p_{0i} z_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_{2i} \cos(t_0 + \varphi) \sin p_{0i} z_0 \quad (5.73)$$

unde

$$C_{2i} = \frac{1}{1 - \frac{p_{0i}^2}{m_0 \omega_0^2}} \cdot \frac{2 \sin p_{0i} (m_0^2 + p_{0i}^2)}{m_0 (m_0 + m_0^2 + p_{0i}^2)} \quad (5.74)$$

constantele de integrare C_{1i} și C_{3i} au fost precizate anterior (5.55), (5.57).

Când se derivează soluția periodică, rezultatele obținute în paragraful precedent sunt direct aplicabile, precizând că suma Δ_3 (notațiile 5.49) este calculată ca

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{\infty} C_{2i} \sin p_{0i} \quad (5.75)$$

iar forma soluției particulare va fi

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i} \cos(t_0 + \varphi) \sin p_{0i} z_0 = \frac{\omega_0 \sqrt{m_0} \sin \omega_0 \sqrt{m_0} z_0 \cos(t_0 + \varphi)}{m_0 \cos \omega_0 \sqrt{m_0} - \omega_0 \sqrt{m_0} \sin \omega_0 \sqrt{m_0}} \quad (5.76)$$

rezultând

$$\Delta_3 = \frac{\omega_0 \sqrt{m_0} \sin \omega_0 \sqrt{m_0}}{m_0 \cos \omega_0 \sqrt{m_0} - \omega_0 \sqrt{m_0} \sin \omega_0 \sqrt{m_0}} \quad (5.77)$$

La rezonanță, când $\omega_0 = \frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0}}$ viteza de impact este

$$V_0 = \pm \frac{n\pi}{1-k} \quad (5.78)$$

valoare independentă de mărimea m_0 .

Caracteristica soluției periodice

Caracteristicile de bază ale soluțiilor periodice rezultă în concordanță cu cele obținute în literatura de specialitate pentru cazuri similare. Se vor considera în continuare câteva diferențe ale acestor soluții.

Când masa arcului este neglijabilă, deci nulă, pulsația proprie a sistemului arc-masă percutantă M este $p = \sqrt{\frac{K}{M}}$ unde $K = \frac{ES}{L}$

Pentru masa arcului $m > 0$ sunt un număr infinit de pulsații proprii date de relațiile (5.28) și (5.29).

Soluțiile succesive ale ecuației (5.28) pot varia între limitele

$$(i-1)\pi \leq p_{0i} \leq (i-\frac{1}{2})\pi, \quad i=1,2,3,\dots \quad (5.79)$$

Pentru $m=0$ corespunde limita inferioară, iar pentru $m_0=\infty$, ($M=0$) corespunde limita superioară.

La o creștere a masei arcului (K și M rămânând constante) rezultă o descreștere a pulsației p_{0i} proporțional cu $\frac{p_{0i}}{\sqrt{m_0}}$. Aceste efecte asupra pulsației

fundamentale p_1 sunt prezentate în fig.5.7. Dezvoltând seria $\text{tg}(p_0)$ rezultă o expresie aproximativă pentru p_{01}

$$p_{01} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_0}{3}}} \quad (5.80)$$

Pentru $m_0 < 2$, eroarea acestei aproximări este mai mică de 2%.

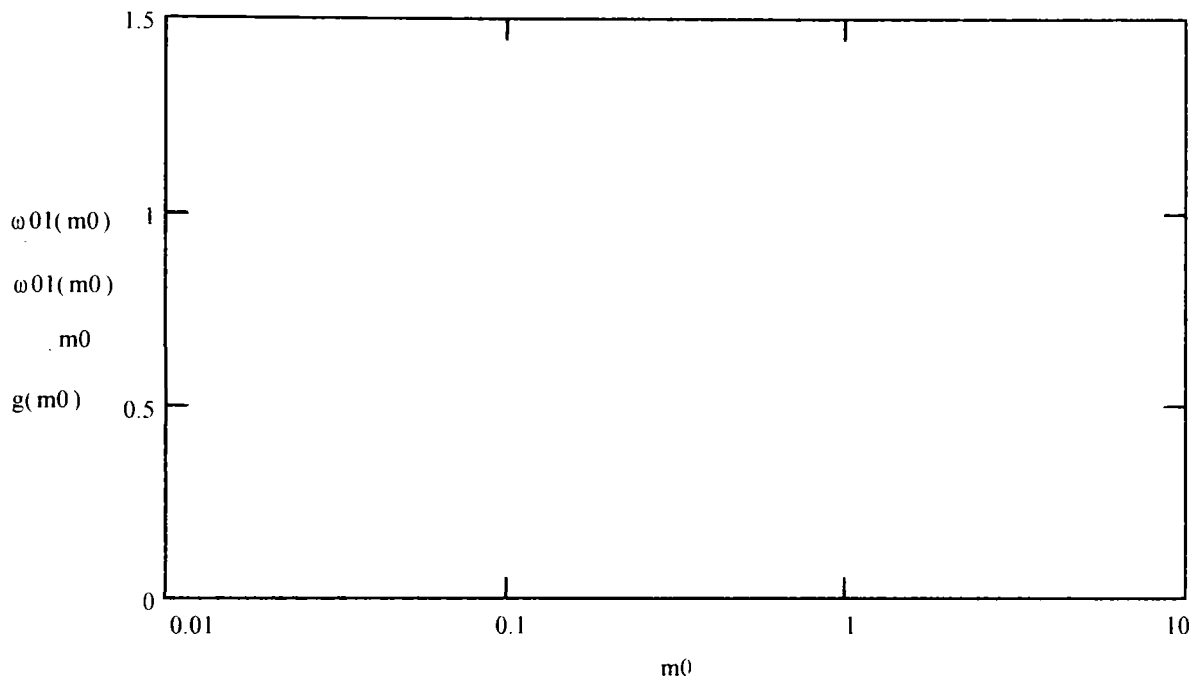


Fig.5.7.

Limita vitezei de impact V_0 pentru $\omega = p_1$ (ecuațiile 5.62 și 5.78) poate fi folosită ca măsură generală pentru limita vitezei V_0 . La excitația forțată viteza V_0 este independentă de mărimea m_0 , pe când la excitarea prin deplasarea capătului arcului, viteza V_0 crește proporțional cu $\frac{1}{\cos p_{01}}$ dacă mărimea m_0 crește.

Modul în care variază termenul $\frac{1}{\cos p_{01}}$ este prezentat în fig.5.7.

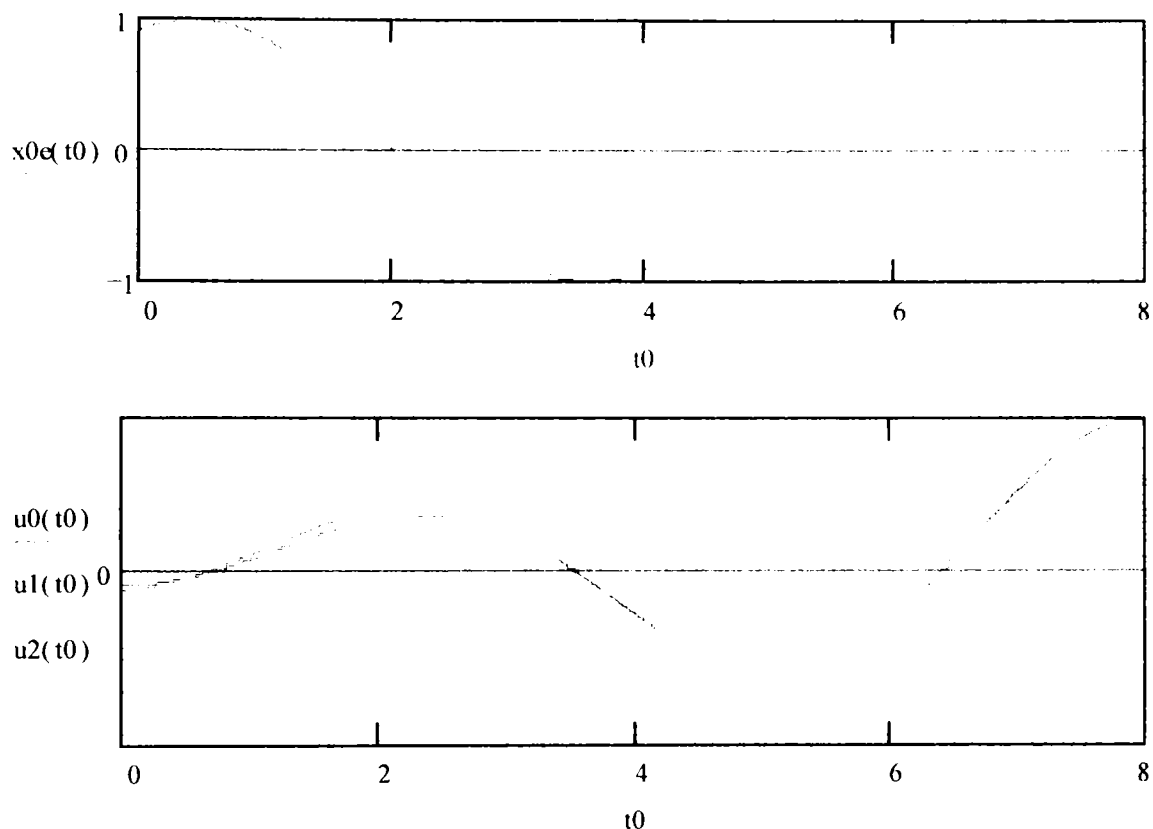


Fig.5.8

În fig.5.8. sunt prezentate exemple ale mișcării masei percutante ($z_0=1$) pentru diferite valori ale mărimii m_0 în cazul excitării sistemului prin deplasarea capătului arcului. Amplitudinea mișcării este relativ constantă dar viteza de impact pentru $m_0=2$ este dublă față de cazul când $m_0=0$.

Pentru determinarea mișcării sistemului vibrant este recomandată derivarea soluției (5.34) din moment ce pentru $z_0=1$ seria converge cu factorul p_{0i}^3 . Pentru $z_0<1$ seria converge cu factorul p_{0i}^2 . Probleme apar când trebuie determinată forța sau tensiunea din arc. Pentru a determina aceste mărimi se calculează derivata $u_0'(z_0, t_0)$. Se obține o serie care converge cu p_{0i} , dar în cazul rezonanței coroborată cu expresia (5.58) fiecare termen poate fi foarte dezvoltat. Pentru a se obține un rezultat corect sistemul vibrant trebuie acordat încât să evite toate rezonanțele.

5.4. Bara elastică excitată prin deplasarea unei extremități

În fig.5.9 este prezentat modelul barei elastice, considerată uniformă, subțire, de masă m și lungime L , având secțiunea transversală S , densitate ρ și modul de elasticitate E .

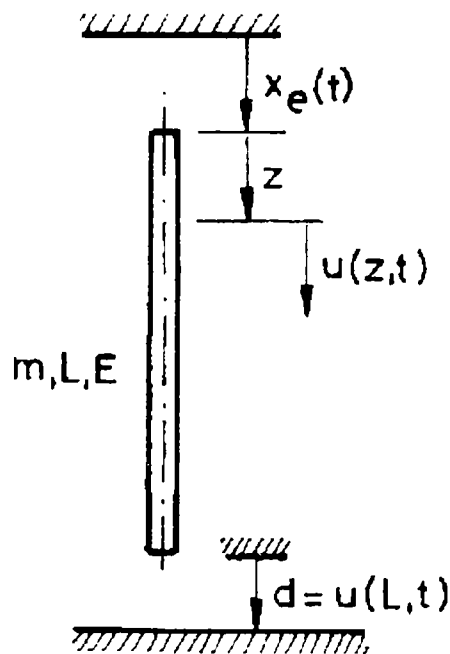


Fig.5.9

Capătul superior al barei, $z=0$, efectuează o mișcare armonică după legea $x_e(t)=r\cos(\omega t+\varphi)$, cu amplitudinea r și pulsația ω . Capătul inferior al barei, $z=L$, lovește o suprafață situată la distanța d față de poziția de echilibru. Se notează cu $u(z,t)$ deplasarea unei secțiuni de coordonată z la momentul t .

F_k este forța de impact dintre capătul inferior al barei și suprafața lovită. Pentru a avea loc o transmisie de energie capătul inferior al barei trebuie să penetreze suprafața lovită. Energia transmisă va fi

$$\int F_k \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \quad (5.81)$$

integrarea făcându-se pe intervalul de timp cât durează contactul.

Dacă se neglijează amortizarea, ecuația de mișcare a barei este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.82)$$

și condițiile la limită sunt

$$u(0,t) = x_e(t) = r \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.83)$$

$$ES \frac{\partial u(L,t)}{\partial z} = -F_k \quad (5.84)$$

În continuare, introducând mărimile adimensionale

$$\begin{aligned} z_0 = \frac{z}{L}, \quad u_0 = \frac{u}{L}, \quad z_{0e} = \frac{x}{r}, \quad t_0 = \omega t \\ \omega_0 = \omega \sqrt{\frac{mL}{ES}}, \quad F_{0k} = \frac{L}{ES} \frac{F_k}{r} \end{aligned} \quad (5.85)$$

expresiile (5.82)-(5.84) devin

$$\frac{\partial^2 u_0(z_0, t_0)}{\partial t_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 u_0(z_0, t_0)}{\partial z_0^2} = 0 \quad (5.86)$$

$$u_0(0, t_0) = \cos(t_0 + \varphi) \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial u_0(1, t_0)}{\partial z_0} = -F_{0k} \quad (5.88)$$

Soluția periodică

Fig. 5.10 prezintă o posibilă mișcare periodică de impact.

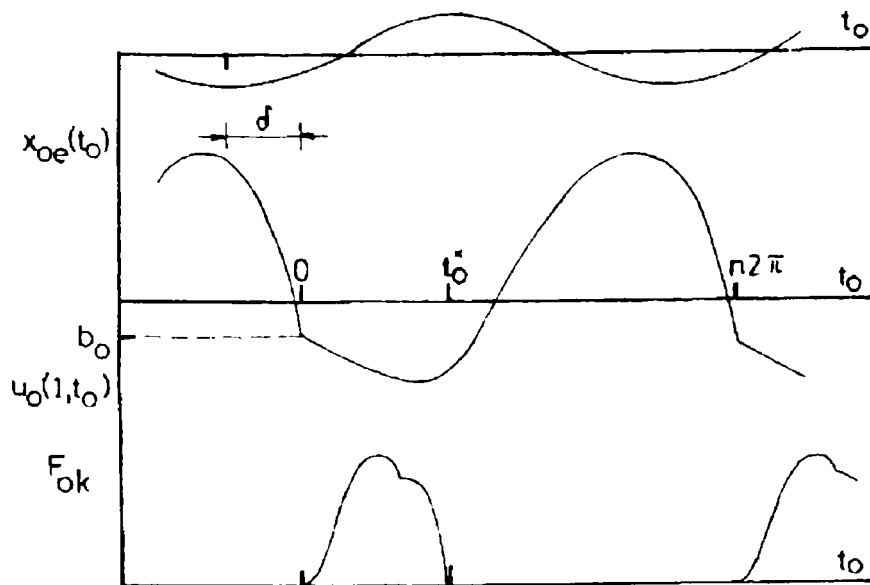


Fig.5.10

Capătul inferior al barei lovește suprafața la timpul $t_0=0$. În intervalul de timp $0 < t_0 < t_0^*$ bara penetrează suprafața ($F_{ok} > 0$). La momentul $t_0=t_0^*$ contactul încetează și capătul inferior al barei se mișcă liber până la momentul $t_0=2n\pi$ (un impact în timp de n cicluri pentru x_{0e}) când se produce un nou impact. Suprafața lovită a revenit în poziția inițială sau bara a fost mutată în jos la o distanță potrivită. Soluția periodică trebuie să îndeplinească condițiile

$$u_0(z_0, 0) = u_0(z_0, 2n\pi) \quad (5.89)$$

$$\left. \frac{\partial u_0(z_0, t_0)}{\partial t_0} \right|_{t_0=0} = \left. \frac{\partial u_0(z_0, t_0)}{\partial t_0} \right|_{t_0=2n\pi} \quad (5.90)$$

$$u_0(1, 0) = d_0 \quad (5.91)$$

În fig.5.10 curba inferioară prezintă o posibilă variație a forței de contact F_{ok} . Forma și mărimea acestei forțe depinde de natura materialelor implicate în impact dar și de mișcarea capătului inferior al barei. Condiția (5.88) devine

$$\frac{\partial u_0(1, t_0)}{\partial t_0} = -F_{0k} \left[u_0(1, t_0), \frac{\partial u_0(1, t_0)}{\partial t_0} \right] \quad (5.92)$$

În general astfel de soluții sunt dificil de prelucrat analitic. Pentru rezolvare se apelează la o dezvoltare aproximativă iterativă. Dacă forța F_{0k} se presupune cunoscută și anume de forma $F_{0k} = F_{0k}(t_0)$, soluția periodică se poate deduce.

Forța $F_{0k}(t_0)$ poate fi întotdeauna dezvoltată într-o serie Fourier completă pe intervalul $0 < t_0 < 2n\pi$

$$F_{0k}(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos \frac{i}{n} t_0 + b_i \sin \frac{i}{n} t_0 \right) \quad (5.93)$$

cu coeficienții

$$\begin{cases} a_i = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2n\pi} F_{0k}(t_0) \cos \frac{i}{n} t_0 dt_0 \\ b_i = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2n\pi} F_{0k}(t_0) \sin \frac{i}{n} t_0 dt_0 \end{cases} \quad (5.94)$$

Se poate formula o soluție a ecuației (5.86) care satisface condițiile la limită (5.87) și (5.88)

$$\begin{aligned} u_0(z_0, t_0) = & -\frac{a_0}{2} z_0 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{\omega_0^i} \left(a_i \cos \frac{i}{n} t_0 + b_i \sin \frac{i}{n} t_0 \right) \frac{\sin \frac{i}{n} \omega_0 z_0}{\cos \frac{i}{n} \omega_0} + \\ & + (tg \omega_0 \sin \omega_0 z_0 + \cos \omega_0 z_0) \cos(t_0 + \varphi) \end{aligned} \quad (5.95)$$

Aceasta este o suprapunere a două soluții ce descriu vibrații forțate. Prima parte a soluției (5.95) aparține mișcării produse de acțiunea forței $F_{0k}(t_0)$ și a doua mișcării produse de deplasarea $x_{0c}(t_0)$. Condițiile de periodicitate (5.89) și (5.90) sunt satisfăcute din momentul în care cele două părți ale soluției (5.95) au perioada $2n\pi$. Condiția (5.91) poate fi satisfăcută dacă se alege corespunzător faza φ .

$$\cos \varphi = \cos \omega_0 \left(b_0 + \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{\omega_0^i} a_i \operatorname{tg} \frac{i \omega_0}{n} \right) \quad (5.96)$$

Pulsațiile proprii ale barei, când aceasta vibrează liber ($F_{0k}=0$) sunt

$$p_j = p_{0j} \sqrt{\frac{ES}{Lm}} \quad , \quad j=1,2,3,\dots \quad (5.97)$$

cu

$$p_{0j} = (2j-1) \frac{\pi}{2} \quad , \quad j=1,2,3,\dots \quad (5.98)$$

Rezonanțele au loc când pulsația ω_0 este

$$\omega_0 = \frac{np_{0j}}{q} \quad , \quad j=1,2,3,\dots \quad , \quad q=1,2,3,\dots \quad (5.99)$$

La aceste rezonanțe valorile din expresia (5.95) tind spre infinit. Din moment ce valorile pulsațiilor proprii sunt în progresie aritmetică se pot ușor determina valorile pulsațiilor ω_0 dacă se evită rezonanța. Cum pulsația ω_0 este aproape de prima pulsație proprie p_{01} , se evită rezonanța dacă raportul

$$\frac{\omega_0}{np_{01}} \quad (5.100)$$

are valori din seria 0,8; 0,88; 0,96; 1,04; 1,12, sau din seria 0,816; 0,832; 0,848 etc.

Exemple ale soluției periodice

Suprafața ce urmează a fi lovită se consideră constituită dintr-un material rigid, perfect plastic. Considerând că forța de contact este

$$F_{0k}(t_0) = \begin{cases} F_{0k} & \text{pt. } 0 < t_0 < t_0^* \\ 0 & \text{pt. } t^* < t_0 < 2n\pi \end{cases} \quad (5.101)$$

Coeficienții (5.94) sunt

$$\begin{aligned}
 a_0 &= F_{0k} \frac{t_0^*}{n\pi} \\
 a_i &= F_{0k} \frac{1}{i\pi} \sin \frac{i}{n} t_0^* \quad i=1,2,3,\dots \\
 b_i &= F_{0k} \frac{1}{i\pi} \left(1 - \cos \frac{i}{n} t_0^* \right) \quad , \quad i=1,2,3,\dots
 \end{aligned}
 \tag{5.102}$$

Bara lovește suprafața la momentul $t_0=0$ cu viteza $\dot{u}_0(1,0)$. Dacă această viteză este destul de mare, $\dot{u}_0(1,0) > F_{0k}/\omega_0$, forța constantă F_{0k} este acceptabilă și bara poate penetra suprafața. Atâta timp cât forța poate fi menținută la o valoare mare și $\dot{u}_0(1,0) > 0$, penetrarea continuă. În momentul $t_0=t_0^*$ are loc o descărcare și viteza capătului inferior al grinzii își schimbă sensul. Timpul t_0^* poate fi determinat din condiția

$$\dot{u}_0(1,t_0) \begin{cases} >0 & \text{pt. } 0 < t_0 < t_0^* \\ <0 & \text{la } t_0 = t_0^* \end{cases}
 \tag{5.103}$$

O soluție acceptabilă trebuie să satisfacă și

$$u_0(1,t_0) < u_0(1,t_0^*) \quad \text{când} \quad t_0^* < t_0 < 2n\pi
 \tag{5.104}$$

Un exemplu de soluție bazată pe acest model pentru $F_{0k}(t_0)$ este prezentată în fig.5.11 unde se arată mișcarea diferitelor secțiuni ale barei în intervalul a două perioade ale excitației pentru diferite valori ale lui z_0 (0; 0,25; 0,5 respectiv 0,75).

Dacă se urmărește, spre exemplu, procesul de perforare într-o rocă dură se constată că doar o parte a energiei adusă de dispozitivul de perforare este transmisă rocii. Restul de energie rămâne în oțelul masei percutante ca unde de tensiune care sunt amortizate încet și transformate în căldură înainte de următorul impact. Dacă o bară vibrantă ar putea fi folosită la un astfel de proces aceste pierderi ar putea fi evitate deoarece energia reflectată la impact este folosită la următorul impact. Pentru a ilustra consecințele soluțiilor arătate în fig.5.11 se rezolvă un exemplu numeric.

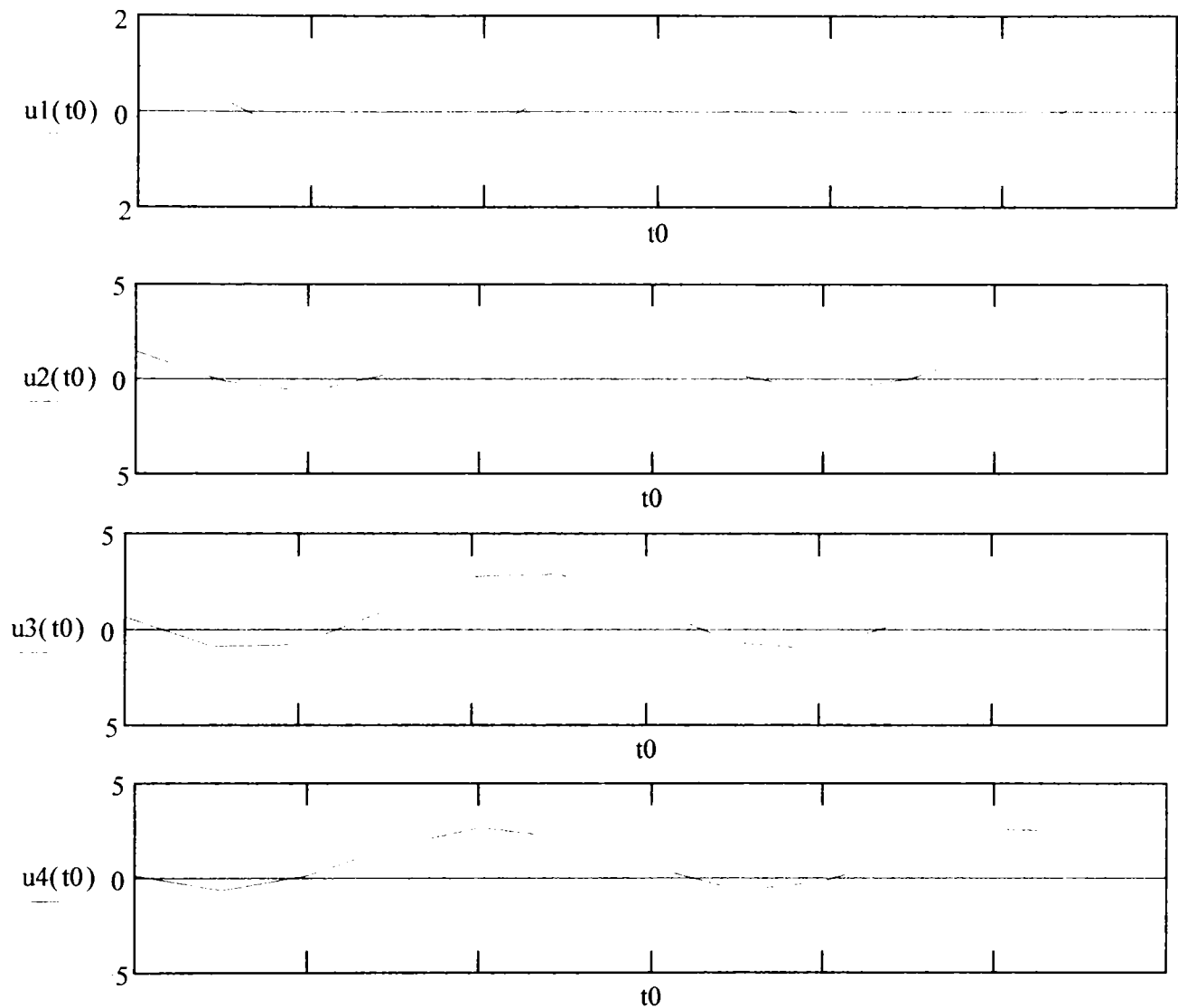


Fig.5.11

Exemplu numeric

Se consideră o bară cu lungimea $L=4$ m, secțiune transversală $S=114$ mm² (diametrul $d=20$ mm) care la ciocnire suportă o forță de lovire $F_k=60000$ N. Materialul barei este OL52 cu densitatea $\rho=7800$ kg/m³ și modul de elasticitate

$E=2 \cdot 10^{11}$ N/m². Toate celelalte mărimi pot fi calculate. Masa barei este $m=\rho SL=9,8$ kg; rigiditatea $SE/L=1,6 \cdot 10^7$ N/m, deplasarea barei este

$$\frac{F_k}{\frac{SE}{L} F_{0k}} = 0,38 \text{ mm}$$

și pulsația excitației

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{ES}{Lm}} = \omega_0 \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2400 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Frecvența este 380 Hz și viteza de impact 6,7 m/s. La fiecare lovitură capătul inferior al barei penetrează suprafața lovită cu 1,4 mm și furnizează o energie de 86 Nm care corespunde unei puteri totale de 33 kw. Bara trebuie să avanseze cu viteza de 0,54 m/s ceea ce presupune o forță de reacție de 12000 N. Amplitudinea maximă a tensiunii în bară este de 390 N/mm². Frecvența și puterea consumată pentru penetrarea barei vibrante în suprafața lovită sunt funcție de natura materialelor aflate în contact. O obiecție ce poate fi ridicată împotriva folosirii barelor vibrante la perforări este necesitatea folosirii unor frecvențe foarte mari în procesul de lovire. Aceasta depinde în special de lungimea barei și de natura materialului din care este executată. Un material ideal pentru astfel de bare ar fi

acela în care viteza undei, $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, ar fi de cel puțin trei ori mai mică decât în oțel.

în timp ce rezistența și proprietățile de amortizare să fie identice oțelului.

5.5. Sistem vibrant arc-masă-bară elastică

Se consideră modelul prezentat în fig.5.12

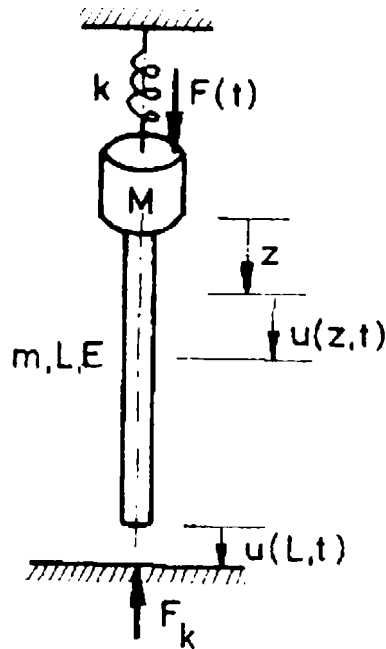


Fig.5.12

Metoda folosită pentru constituirea soluțiilor ecuației mișcării periodice a barei atașată de masa M suspendată de un arc este similară cu cea aplicată la majoritatea sistemelor vibrante prezentate în acest capitol.

Bara este atașată de o masă rigidă M care este suspendată de un arc cu rigiditatea k . Sistemul este acționat de o forță armonică $F(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \delta)$. Pulsațiile proprii ale acestui sistem sunt mai joase decât ale barei în sine. Aceasta presupune că se poate reduce frecvența loviturilor.

Ecuația mișcării barei și condițiile la capetele barei sunt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.105)$$

$$M \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = F_{\max} \cos(\omega t + \varphi) - k u(0,t) + ES \frac{\partial u(0,t)}{\partial z} \quad (5.106)$$

$$ES \frac{\partial u(L,t)}{\partial z} = F_k(t) \quad (5.107)$$

Se fac următoarele notații pentru cantitățile adimensionale

$$z_0 = \frac{z}{L}, \quad u_0 = \frac{um\omega^2}{F_{\max}}, \quad t_0 = t\omega, \quad \omega_0 = \omega \sqrt{\frac{mL}{ES}} = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (5.108)$$

$$F_0 = \frac{F}{F_{\max}}, \quad F_{0k} = \frac{F_k}{F_{\max}}, \quad K_0 = \frac{ES}{Lk}, \quad M_0 = \frac{M}{m}$$

Astfel ecuațiile (5.105)-(5.107) vor deveni

$$\frac{\partial^2 u_0(z_0, t_0)}{\partial t_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 u_0(z_0, t_0)}{\partial z_0^2} = 0 \quad (5.109)$$

$$M_0 \frac{\partial^2 u_0(0, t_0)}{\partial t_0^2} + \frac{K_0}{\omega_0^2} u_0(0, t_0) - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial u_0(0, t_0)}{\partial z_0} = \cos(t_0 + \varphi) \quad (5.110)$$

$$\frac{\partial u_0(1, t_0)}{\partial t_0} = \omega_0^2 F_{0k}(t_0) \quad (5.111)$$

Dacă $F_{0k}(t_0)$ are forma (5.93) se poate deriva soluția periodică ce presupune un impact în cadrul a n cicluri ale forței. Soluția are două părți, una datorată forței periodice care produce mișcarea și cealaltă datorată forței reacțiune $F_{0k}(t_0)$:

$$u_0(z_0, t_0) = -\frac{a_0}{2} \omega_0^2 \left(z_0 + \frac{1}{K_{0M}} \right) -$$

$$-\omega_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(a_i \cos \frac{i}{n} t_0 + b_i \sin \frac{i}{n} t_0 \right) \left[\cos \frac{\omega_0 i}{n} z_0 + \frac{n}{\omega_0 i} \left(K_0 - M_0 \left(\frac{\omega_0 i}{n} \right)^2 \right) \sin \frac{\omega_0 i}{n} z_0 \right]}{\left(K_0 - M_0 \left(\frac{\omega_0 i}{n} \right)^2 \right) \cos \frac{\omega_0 i}{n} - \frac{\omega_0 i}{n} \sin \frac{\omega_0 i}{n}} \quad (5.112)$$

$$+ \omega_0^2 \frac{\cos(\omega_0 z_0 - \omega_0)}{(K_0 - M_0 \omega_0^2) \cos \omega_0 - \omega_0 \sin \omega_0} \cos(t_0 + \varphi)$$

Pulsațiile proprii pentru acest sistem vibrant sunt determinate din ecuația pulsațiilor

$$p_0 \operatorname{tg} p_0 = K_0 - M_0 p_0^2 \quad (5.113)$$

Această ecuație este înrudită îndeaproape cu (5.28) corespunzătoare sistemului arc-masă. Rezonanțele apar când pulsațiile ω_0 satisfac ecuația (5.99).

Un exemplu de soluție periodică pentru acest sistem este arătat în fig. 5.13. Se consideră forța de impact constantă, conform cu (5.101) și timpul t_0^* este determinat din condiția (5.103). În exemplul de mai jos se încearcă o posibilă interpretare a acestei soluții.

Exemplu numeric

Se presupune că bara și forța de lovire sunt aceleași ca și în exemplul numeric din capitolul 5.4. Rigiditatea arcului este $k=K_0ES/L=4 \cdot 10^6$ N/m. Amplitudinea și pulsația forței perturbatoare sunt $F_{\max}=F_k/F_{0k}=7500$ N și

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{ES}{Lm}} = 830 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Frecvența cu care se succed loviturile este de 130 Hz și viteza de impact 8,3 m/s. La fiecare lovitură vârful barei penetrează 2,8 mm și aduce o energie de 110 Nm. Aceasta necesită o putere suplimentară de 22 kw. Bara trebuie să avanseze cu viteza de 0,37 m/s și cu o forță de 12000 N. Amplitudinea mișcării arcului este de 7,8 mm și tensiunea în bară 130 N/mm².

Acest exemplu de grindă vibrantă introduce în studiul fenomenului relativ puține erori - 80% din viteza de impact provine din mișcarea de corp rigid a barei. Din moment ce pulsațiile proprii ale barei sunt mult mai înalte comparativ cu pulsația excitației bara influențează puțin vibrațiile, ea mai mult servește la transmiterea energiei între arc și suprafața lovită.

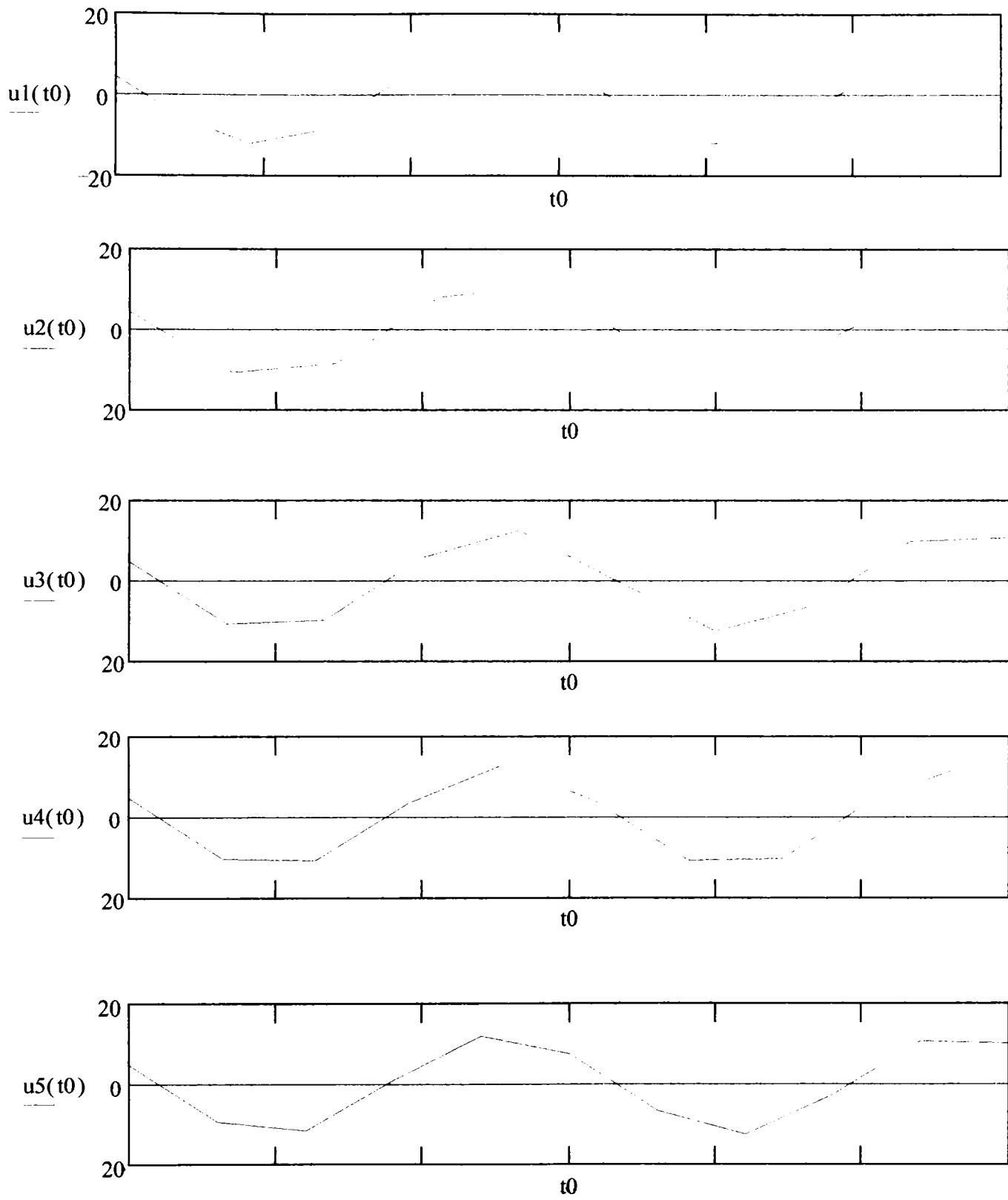


Fig.5.13

5.6. Considerații constructive

În componența sistemelor vibropercutante intră arcuri elastice pentru care se pune problema uzurii lor în timp. În acest sens, sistemul trebuie conceput astfel încât tensiunea de forfecare din arc, τ să fie cât mai mică.

Va fi luat ca exemplu sistemul vibropercutant din fig.5.4.

Pentru ca arcul elicoidal să înmagazineze energia potențială W_p , masa lui trebuie să fie

$$m = W_p \frac{4\rho G}{\tau^2} \quad (5.114)$$

unde:

ρ - densitatea materialului

G - modulul de elasticitate transversal

τ - tensiunea transversală maximă din arc

Energia maximă înmagazinată în sistemul elastic percutant este

$$W_p = \frac{1}{2} k |x - x_e|_{\max}^2 = \frac{1}{2} k r^2 |x - x_e|_{\max}^2 \quad (5.115)$$

și energia produsă la fiecare lovitură va fi

$$W = \frac{1}{2} (1 - R^2) M V^2 = \frac{1}{2} k r^2 (1 - R^2) \omega_0^2 V_0^2 \quad (5.116)$$

Deci pentru a asigura energia fiecărei lovituri masa arcului este

$$m = \frac{4\rho G}{\tau^2} \cdot W \cdot W_{op} \quad (5.117)$$

unde

$$W_{op} = \frac{W_p}{W} = \frac{|x_{oe} - x_o|_{\max}^2}{(1 - R^2) \omega_0^2 V_0^2} \quad (5.118)$$

este o cantitate adimensională care depinde doar de ω_0 , b_0 și R .

Minimizând pe W_{op} , pentru o anumite tensiune de forfecare τ se poate calcula masa minimă a arcului, sau, pentru o anumită masă m a arcului se poate determina tensiunea de forfecare din arc.

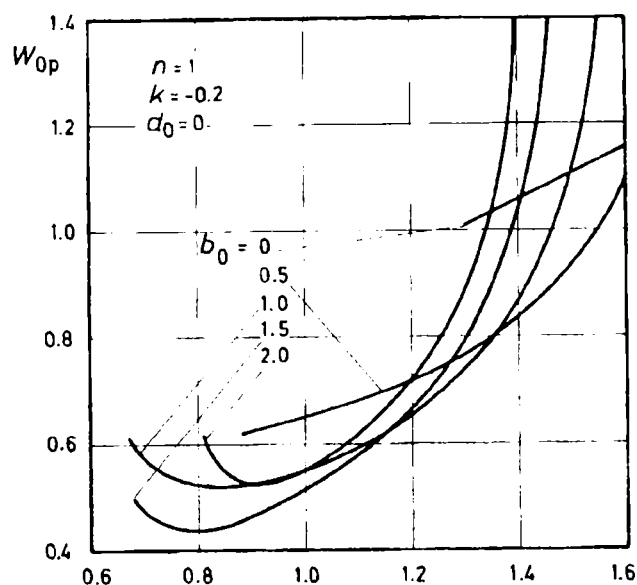


Fig 5.14

Fig.5.14. prezintă energia non-dimensională a arcului pentru diferite valori ale mărimilor b_0 și ω_0 pentru un coeficient de restituire $R=-0,2$ și $n=1$. Regimul optim de funcționare se obține pentru $\omega_0=0,8$, $b_0=1,5$, pentru care $W_{op}=0,44$. Se observă că masa optimă a arcului este independentă de frecvența loviturilor. Prin mărirea pulsației ω puterea poate fi mărită fără a majora masa arcului.

De exemplu, un sistem elastic percutant folosit la perforarea rocilor, cu o putere $P=2000$ w, frecvență $\nu=32$ Hz și pulsație $\omega=200$ rot/sec, coeficient de restituire la ciocnire $R=0,2$, poate fi conceput utilizând fig.5.14.

Energia folosită la fiecare lovitură este

$$W = \frac{2000}{32} = 63 \text{ Nm}$$

Dacă oțelul arcului are densitatea $\rho=7800$ kg/m³, modulul de elasticitate transversal $G=8 \cdot 10^{10}$ N/m², pentru o tensiune de forfecare $\tau=250 \cdot 10^6$ N/mm², masa minimă necesară a arcului se obține cu relația (5.117)

$$m = \frac{4 \cdot 7800 \cdot 8 \cdot 10^{10}}{(250 \cdot 10^6)^2} \cdot 63 \cdot 0,44 = 1,1 \text{ kg}$$

Dacă se dublează masa arcului, tensiunea maximă de forfecare se reduce la $\tau = 180 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$.

Dacă este precizată viteza de impact V , se pot determina masa M a sistemului percutant, r - amplitudinea vibrațiilor și rigiditatea k a arcului

$$M = \frac{2E}{(1-R^2)V^2} \quad ; \quad r = \frac{V}{\omega V_0} \quad ; \quad k = M \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$$

În tabelul alăturat sunt date valorile obținute pentru diferite viteze de impact.

Viteza V [m/s]	Masa M [kg]	Amplitudinea r [m]	Rigiditatea k [N/m]
3	15	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$940 \cdot 10^3$
6	3,6	$13 \cdot 10^{-3}$	$230 \cdot 10^3$
9	1,6	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$100 \cdot 10^3$

În calculele anterioare s-a considerat un arc cu masa $m=1,1$, care poate fi considerată neglijabilă comparativ cu masa atașată, dacă această masă este mult mai mare, de exemplu $M=15 \text{ kg}$.

Concepția constructivă a sistemului vibropercutant elastic cu arc elicoidal a fost elaborată astfel încât masa arcului să asigure energia la care a fost calculată energia sistemului vibrant.

Pentru sistemul vibropercutant elastic, tensiunea de forfecare τ se exprimă funcție de deformația specifică cu relația

$$\tau = \sqrt{2\rho G} r \omega \frac{1}{\omega_0 \sqrt{m_0}} \frac{\partial u_0}{\partial z_0} \quad (5.119)$$

unde ρ este densitatea și G modulul de elasticitate transversal al materialului din arc. Pentru masa arcului se folosește expresia aproximativă

$$m = \rho n_a D \frac{\pi^2 d^2}{4} \quad (5.120)$$

Evident maximul valorii $\frac{\partial u_0}{\partial z_0}$ pentru $0 \leq z_0 \leq 1$ și $0 \leq t_0 \leq 2n\pi$ va determina o

valoare maximă pentru tensiunea de forfecare τ .

Energia eliberată la fiecare lovitură este

$$w = \frac{1}{2}(1-R^2)MV^2 = \frac{1}{2}(1-R^2)M(r\omega V_0)^2 \quad (5.121)$$

Dacă $r\omega$ se exprimă din relația (5.114) rezultă energia

$$w = \frac{m\tau^2}{4\rho G} w_0 \quad (5.122)$$

unde w_0 este energia non-dimensională pentru o lovitură

$$w_0 = (1-R^2) \left(\frac{\omega V_0}{\frac{\partial u_0}{\partial z_0}} \right)^2 \quad (5.123)$$

Mărimea w_0 depinde de coeficientul de restituire R , m_0 , ω_0 și b_0 și poate fi mărită cu respectarea acestor parametri. Pentru un anumit arc și pentru o anumită tensiune τ , se poate calcula valoarea maximă a energiei w .

Arcul care lucrează este supus unei excitații pulsatorii și ruperea sa se va produce datorită oboselii materialului. Nivelul excitației curente este mic comparativ cu amplitudinea tensiunii de forfecare admise τ_a , amplitudinea τ_a fiind folosită aici ca o măsură a excitației. Valoarea experimentală pentru w_0 poate fi calculată cu expresia (5.123) și cu deformația specifică din (5.119).

Pentru sistemul vibrant idealizat ($m_0=0$), mărimea w_0 este obținută sub forma:

$$w_0 = \frac{1}{w_{0p}} = (1-R^2) \left(\frac{\omega_0 V_0}{|x_0 - x_{0e}|} \right)^2 \quad (5.124)$$

Dacă se folosesc datele: $\omega_0=1$, $b_0=1$ și $R=-0,6$, se vor obține

- viteza de impact $V_0=1,96$
- amplitudinea deformației arcului $|x_0-x_{0c}|=0,67$
- energia adimensională $w_0=5,4$

De asemenea se constată că dacă un capăt al arcului, aflat în repaus, primește brusc o viteză axială V apare în acest punct o tensiune

$$\tau = \sqrt{2\rho G} V \quad (5.125)$$

Tensiunea se va propaga în arc ca o undă. După un timp $\sqrt{\frac{m}{k}}$ unda ajunge

la celălalt capăt al arcului. Dacă acest capăt este rigid unda de tensiuni este reflectată iar mărimea tensiunii la reflexie este dublă, 2τ . Aceste rezultate care derivă dintr-o soluție a ecuației undei sunt cunoscute și folosite la dispozitive de perforat roci.

Utilizând expresia (5.125) pentru determinarea amplitudinii tensiunii în sistemul vibrant elastic (unde V este viteza de impact), energia eliberată la fiecare lovitură va fi:

$$w = \frac{1}{2}(1-R^2)MV^2 = \frac{m\tau^2}{4\rho G}(1-R^2)\frac{1}{m_0} \quad (5.126)$$

și energia adimensională va fi

$$w_0 = (1-R^2)\frac{1}{m_0} \quad (5.127)$$

Rezultatele obținute cu cele trei abordări menționate sunt prezentate în fig.5.15. Pentru a neutraliza variația experimentală a coeficientului de restituire R s-a considerat pe ordonată $w_0' = w_0/(1-R^2)$ în loc de w_0 .

Chiar dacă aceste rezultate sunt bazate pe un material experimental redus, ele pot fi folosite pentru o bună estimare a capacității maxime a arcului. Diagrama poate fi ușor modificată pentru alte arcuri a căror mișcare este ghidată de ecuația unei unde.

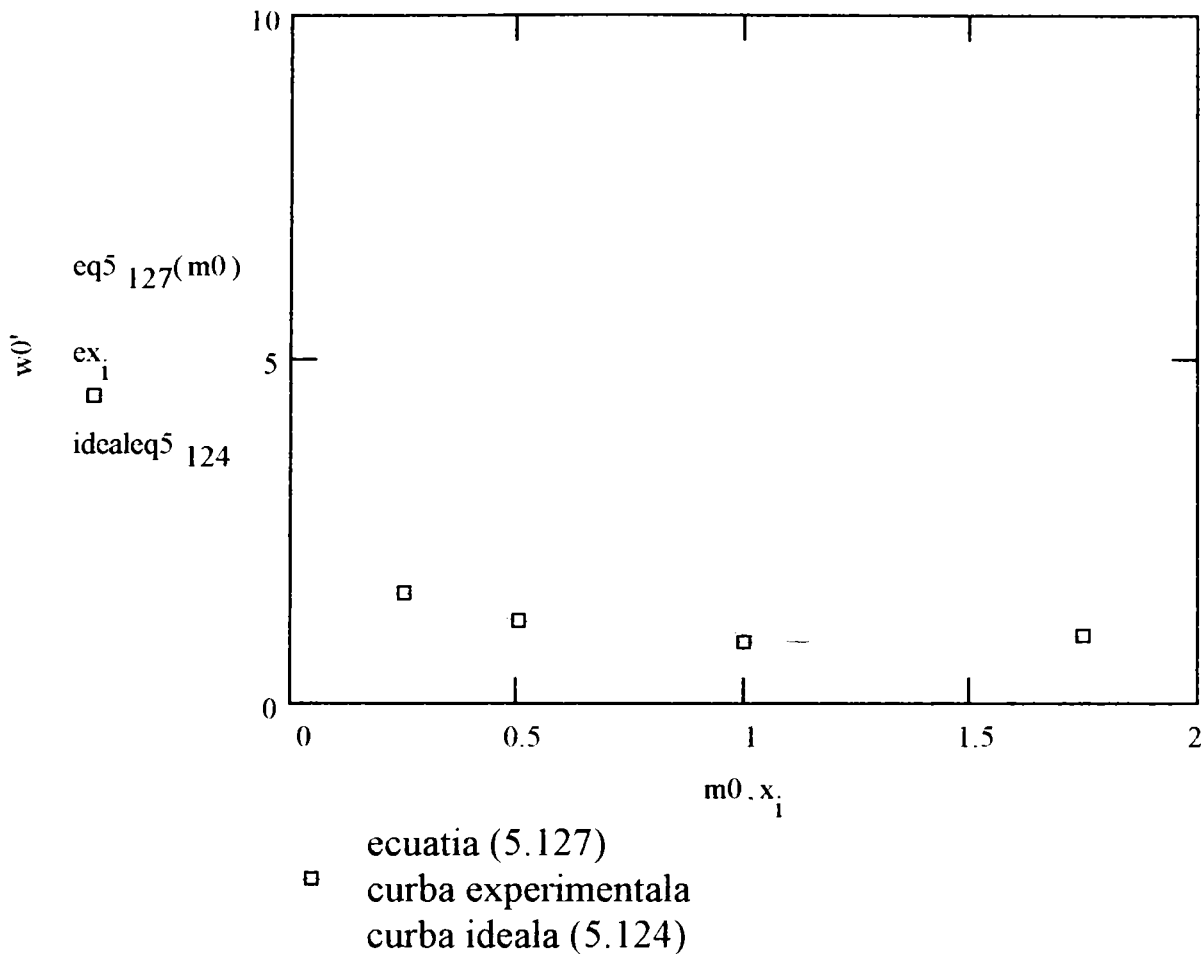


Fig.5.15

Exemplu numeric

Pentru $w_0/(1-R^2)=1$, $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$, $G=8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$, $\tau_a=200 \text{ N/mm}^2$ energia disponibilă la fiecare lovitură este

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{w_0}{1-R^2} \frac{m\tau_a^2}{4\rho G} = 16 \text{ Nm}$$

pentru fiecare kg de masă a arcului.

Dacă $m_0=0,5$ (2 kg de masă percutantă pentru fiecare kg de masă a arcului), atunci viteza de impact este $V=4 \text{ m/s}$. Dacă $m_0=2$ rezultă $V=8 \text{ m/s}$.

Tinând cont de teoria dezvoltată pentru arcul ideal, expresia (5.119), energia eliberată la fiecare lovitură va fi 136 Nm pentru fiecare kg de masă a arcului.

Concluzii

S-a prezentat în cele de mai sus sistemul vibrant elastic a cărui mișcare s-a exprimat prin ecuația unei unde. S-au discutat soluțiile ecuației mișcării, derivatele lor și caracteristicile ce apar.

În final, verificarea rezultatelor teoretice s-a făcut comparativ cu rezultatele experimentelor efectuate cu un sistem vibrant elastic cu arc elicoidal excitat cu un motor electric a cărei pulsație putea fi variată. Când greutatea sistemului vibrant este mare comparativ cu masa arcului mișcarea sistemului vibrant este periodică sau aproape periodică pentru majoritatea valorilor pulsației. Pentru greutăți mai mici ale sistemului vibrant, acesta trebuie reglat astfel încât să se obțină o mișcare periodică. Dacă nu este reglat corespunzător apare o mișcare foarte neregulată a sistemului vibrant și în arc se produc tensiuni foarte mari.

De asemenea, bazat pe tensiunea din arc, s-a determinat masa arcului necesară producerii unei anumite cantități de energie la fiecare lovitură. S-a constatat că pentru o tensiune de 200 N/mm^2 energia maximă obținută este de 16 Nm la fiecare lovitură pentru fiecare kg de masă a arcului.

CAPITOLUL 6

CONCLUZII FINALE

Datorită creșterii vitezelor de funcționare a mașinilor și utilajelor, apar perturbații ce pot duce la solicitări dinamice distructive, motiv pentru care studiul dinamic al corpului elastic este în atenția cercetătorilor. Din cauza complexității problemei studiile devin eficiente doar prin introducerea unor modele și ipoteze simplificatoare.

În afară de studiile ce au la bază ipotezele lui Newton privind ciocnirile corpurilor presupuse rigide, există formulate și alte direcții de abordare a dinamicii structurilor mecanice în mai mare măsură apropiate de situația reală încât conduc la rezultate aplicabile în condiții tehnice curente.

În esență, s-a urmărit în teză generalizarea ipotezei ciocnirii corpului elastic presupunând propagarea instantanee a discontinuității vitezelor de ciocnire, așa cum a fost inițiată de F. Conforto [C1], [C2] și dezvoltată de A. Metelnițin [M3], iar apoi continuată printr-o nouă abordare în lucrarea [B7].

Urmând aceeași linie s-a fundamentat un nou mod de tratare a sistemelor vibropercutante, acestea ne mai fiind considerate ca elemente discrete, ci fiind înlocuite prin medii continue de tip bară pentru care s-au determinat mișcările periodice. Astfel s-a abordat studiul sistemelor dinamice vibropercutante ale unor utilaje ca de exemplu ciocanele vibropercutante, continuându-se preocupări anterioare [B2], [B6].

În scopul de a evidenția principalele realizări obținute în studiul dinamicii corpului elastic, sunt prezentate concluziile rezultate în urma documentării, cercetării teoretice și experimentale efectuate pe parcursul elaborării tezei.

Lucrarea este structurată pe șase capitole și conține rezultate prezentate

sintetic în continuare.

În **introducere** se prezintă succint problemele generale ale ciocnirilor, teoriile și metodele propuse de cercetătorii care s-au apropiat de-a lungul timpului de aceste fenomene. De asemenea este subliniat aportul colectivului Catedrei de Mecanică a Universității "Politehnica" din Timișoara la studiul ciocnirilor și al vibropercuțiilor.

În continuare sunt prezentate **ecuațiile generale ale corpurilor elastice**. Se prezintă elementele de bază din teoria dinamicii corpurilor elastice, elementele care se regăsesc în metodologia de calcul din următoarele capitole.

- ◆ Inițial se introduc ipotezele adoptate și condițiile în care se acceptă valabilitatea lor.

- ◆ Geometria deformației se referă la deplasările, deformațiile specifice și relațiile dintre mărimile caracteristice.

- ◆ Se dezvoltă cinematica deformației unde sunt definite mărimi cinematice (viteze și accelerații) corespunzătoare deplasărilor.

- ◆ Referitor la tensiuni și micromomente se precizează starea de tensiuni dintr-un punct al elementului structural atât în cazul clasic cât și în cazul corpurilor de tip Cosserat. Se indică forțele și momentele volumice și tensorul tensiune respectiv tensorul micromomentelor.

- ◆ Pornind de la ecuațiile de echilibru dinamic ale unui element infinitesimal sunt scrise ecuațiile micilor mișcări amortizate, respectiv neamortizate, pentru cazul clasic și pentru corpurile de tip Cosserat în coordonate carteziane ortogonale respectiv în coordonate cilindrice.

- ◆ De asemenea sunt date legi constitutive, adică relațiile între tensiuni și deformații specifice, atât în cazul clasic, cât și în cazul corpurilor de tip Cosserat cu precizarea constantelor elastice ce intervin în cadrul legilor respective.

Un capitol special este consacrat **ecuațiilor fundamentale ale ciocnirii corpului elastic** unde sunt formulate ipotezele ce stau la baza teoriei elaborate privind propagarea instantanee a impulsurilor percutante în întreg corpul elastic izotrop propagare ce generează brusc în corpul elastic izotrop variația tuturor vitezelor.

- ◆ Pe baza ecuațiilor de echilibru dinamic folosind noțiunea de impuls al tensiunilor, se scriu ecuațiile fundamentale ale ciocnirii corpului deformabil sub

acțiunea unui câmp de impulsuri transmise instantaneu în întregul corp. Se precizează principalele mărimi caracteristice ca viteza specifică de deformație și variația acesteia.

◆ Legile constitutive în cazul ciocnirilor se introduc pornind de la legile lui Hooke din teoria elasticității, exprimate prin relații liniare între tensiuni și deformații. Ținând seama că există deosebiri fundamentale în comportarea corpului elastic în timpul ciocnirii, s-au considerat legi constitutive, tot liniare, dar între impulsurile tensiunilor și vitezele de deformație. Evident, în aceste relații apar constante specifice ciocnirilor.

◆ Pe baza precizărilor anterioare s-au stabilit ecuațiile diferențiale pentru determinarea variației vitezelor punctelor din corp, variație datorată aplicării unui câmp de impulsuri, acestea sunt tocmai ecuațiile lui Lamé pentru cazul ciocnirilor.

◆ Noțiunile stabilite anterior și legile stabilite, specifice ciocnirilor, au condus la ecuațiile de tip Beltrani-Michell pentru corpul elastic supus percuției.

◆ Față de cazul clasic al ciocnirilor corpurilor elastice la corpurilor de tip Cosserat mai intervin impulsurile micromomentelor precum și vitezele și accelerațiile aferente rotațiilor corespunzătoare acestor corpuri. Pe baza teoriei dezvoltate anterior s-au scris ecuațiile fundamentale pentru studiul ciocnirii corpurilor de acest tip.

În continuare teoria elaborată anterior este aplicată în mai multe **cazuri particulare ale ciocnirii corpurilor elastice**. Deosebirea esențială a soluțiilor obținute față de soluțiile din teoria clasică a lui Saint-Venant constă în faptul că vitezele elementelor barelor ciocnite și tensiunile în diferitele secțiuni variază continuu în timp. În toate cazurile studiate trebuie remarcat că rezultatele obținute se referă la stabilirea distribuției salturilor de viteze ce intervin drept condiții inițiale în problemele dinamice corespunzătoare teoriei elasticității.

◆ În primul rând se consideră ciocnirea longitudinală a barei drepte, și anume:

- ciocnirea longitudinală dintre o bară și un reper fix
- ciocnirea dintre o bară liberă și una cu o extremitate fixă
- ciocnirea longitudinală a barelor libere

Din calculele efectuate se constată că prin aplicarea unei solcitări axiale impulsive asupra capătului unei bare elastice drepte, indiferent de materialul barei

și de valoarea constantei E_0 , salturile de viteză în diferitele secțiuni ale barei nu variază esențial.

◆ În cazul impulsului transversal aplicat barei drepte s-au determinat expresiile momentului încovoietor, forței tăietoare și în final s-a determinat soluția generală pentru transmisia vitezelor de ciocnire.

◆ Pentru impulsul aplicat într-un punct oarecare al mediului nelimitat rezultă că vitezele punctelor mediului scad cu distanța mult mai repede decât deplasările punctelor sub acțiunea forțelor statice. Tensiunile se comportă similar. Astfel, impulsul concentrat are o acțiune vizibilă într-un domeniu mult mai îngust decât forța aplicată static.

◆ Atunci când nu mai intervin condițiile la limită de la suprafața de separație a corpului, la transmisia longitudinală și transversală a impulsului în mediu elastic nelimitat, rezolvarea este mult simplificată.

◆ Acțiunea exploziei este analizată tot cu această teorie ceea ce duce la concluzia că deplasările unui punct sub acțiunea presiunilor statice scad odată cu creșterea distanței la care se află, mai încet decât vitezele punctului în cazul când presiunile se aplică instantaneu.

◆ În general, pentru corpul elastic aflat sub acțiunea unui câmp de impulsuri s-au formulat următoarele legi generale:

- teorema variației energiei cinetice
- energia cinetică datorată variației vitezelor de deformație
- teorema unicității
- ecuația în variații
- teorema reciprocității

◆ În mod special sunt fundamentate considerații energetice. Astfel, pentru corpul elastic acționat prin impulsuri, s-au calculat lucrul mecanic elementar datorat deformațiilor rezultate din creșterea vitezei de deformație, lucrul mecanic specific de deformație raportat la unitatea de volum și energia vitezei de deformație.

În continuare s-a prezentat o nouă metodologie de tratare a **sistemelor elastice percutante**, acestea fiind compuse din elemente de tip medii continue ce înlocuiesc clasicele elemente discrete. Se analizează sistemele elastice vibropercutante următoare:

- sistem vibrant bară-masă fixată elastic
- sistem vibrant cu excitare prin deplasarea capătului superior al unei bare elastice asimilată cu un arc cu masa uniform distribuită
- sistem vibrant excitat prin acțiunea unei forțe ce acționează asupra masei percutante
- bară elastică excitată prin deplasarea unei extremități
- sistem vibrant arc-masă-bară elastică
- ◆ S-au determinat ecuațiile diferențiale ale mișcării, condițiile la limită corespunzătoare.
- ◆ S-au studiat vibrațiile proprii ale barelor determinând pulsațiile proprii
- ◆ S-au determinat soluțiile mișcărilor vibratorii forțate, s-au discutat caracteristicile ce apar și s-au determinat vitezele de impact.
- ◆ Pentru crearea condițiilor dezvoltării unor metode și mijloace de optimizare a regimurilor de mișcare ale acestor tipuri de sisteme vibropercutante s-au dezvoltat programe specifice de calculator prin intermediul cărora s-a analizat soluția obținută pe baza ecuațiilor diferențiale ale mișcării ținând seama de condițiile la limită corespunzătoare. Pornind de la această analiză a soluției mișcării se pot trage concluzii pragmatice referitoare la măsurile concrete ce pot fi luate pentru a interveni rapid și eficient în schimbarea unor parametri constructivi sau funcționali pentru realizarea anumitor caracteristici legate de viteza de impact, amplitudinea mișcării, frecvența și intensitatea loviturilor, etc.
- ◆ În cazul primelor două sisteme prezentate s-au dezvoltat programele de calculator "solution_1" și "solution_2" (special concepute pentru rezolvarea exactă a ecuațiilor transcendente) cu ajutorul cărora s-a prezentat variația valorilor proprii pentru diferite lungimi ale barelor, evidențiindu-se și reprezentările grafice corespunzătoare.
- ◆ În final verificarea rezultatelor teoretice s-a făcut comparativ cu rezultatele experimentale efectuate cu un sistem vibrant elastic cu arc elicoidal excitat cu un motor electric a cărui pulsație putea fi variată.

BIBLIOGRAFIE

- A1. Aidanpaa J.O., Gupta R.B.: "Periodic and chaotic behaviour of a threshold-limited two-degree-of-freedom system", *Journal of Sound and Vibration*, 165(2), 1993
- A2. Anders Walin "On vibrating hammers", Lund, 1978
- B1. Brîndeu L. VIBRATII. Mecanică analitică, Vibrații mecanice, Institutul Politehnic Timișoara, 1979
- B2. Brîndeu L., Buzilă T., Herișanu N. "Vibrații. Teme și exemple de calcul-proiectare", Ed. Păunescu, Timișoara, 1992
- B3. Brîndeu L., Tămășdan C., Anghelescu V., Tămășdan M. "Metode și tehnici de calcul în teoria vibrațiilor", Ed. Păunescu, Timișoara, 1992
- B4. Brîndeu L., Tămășdan C., Tămășdan M. "Mecanica și vibrații. Culegere de probleme (programe) pentru calculator", Univ. "Politehnica" Timișoara, 1993
- B5. Brîndeu L., **Popa Radovan S.**: "Determination of the Collision Velocities in Elastic Straight Bars", *Bul.St. și Tehn. al Univ. "Politehnica" Timișoara*, seria Mecanica, Tom 42(56), 1997
- B6. Brîndeu L., **Popa Radovan S.** "Efectul ciocnirii asupra corpului deformabil", *Analele Univ. Oradea, Sect. Mat. Rez.mat. și Vibrații*, 1997
- B7. Brîndeu L., **Popa Radovan S.**: "Study Regarding the Impact of Deformable Bodies", *Rev. Roum. Sci. Tech.-Mec. Appl*, Tom.43, No.1, Bucharest, 1998
- B8. Brîndeu L., **Popa Radovan S.**: "Determinarea vitezelor de ciocnire în bare drepte elastice", *Sesiune jubiliară 1948-1998, Univ. "Petrol-Gaze" Ploiești*, 1998

- B9. Brîndeu L., **Popa Radovan S.**: "Studiul efectului impulsului asupra unor corpuri elastice", Sesiunea de Com. St. Univ. Oradea, 1994
- B10. Brîndeu L., **Popa Radovan S.**: "Studiul ciocnirii corpurilor deformabile", Al 2-lea Colocviu național tehnic interdisciplinar, Brăila, 1995
- B11. Becherescu D., **Popa Radovan S.** "Studiul mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu amortizare avșnd două grade de libertate", Conf. Naț. de Vibrații, Timișoara, 1982
- B12. Bratu P. "Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje", Ed. Tehnică, București, 1990
- B13. Buzdugan Gh. "Izolarea antivibratorie a mașinilor", Ed. Academiei, București, 1979
- B14. Buzdugan Gh., Fetcu L., Radeș M. "Vibrații mecanice", Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
- B15. Buzdugan Gh., Mihăilescu E., Radeș M. "Măsurarea vibrațiilor mecanice", Ed. Academiei Române, București, 1979
- B16. BJORKEUSTAM U., "Impact vibration of a bar". Int. J. Mech. Sci., vol.19, 1977
- C1. Conforto F.: "Considerazioni sugli impulsi nei corpi elastici isotropi" Atti della R.Academia Naz.dei Lincei. Rendicenti. Vol.XV, Fasc.2, 1932.
- C2. Conforto F.: "Sugli impulsi nei corpi elastici isotropi". Atti della R.Academia dei Lincei. Rendicenti. Vol.XV. Fasc.8, 1932.
- C3. Cristescu N., Sulicui I. "Viscoplasticitate", Ed. Tehnică, București, 1976
- D1. Darabont Al., Văiteanu D., Iorga I., Simschevici H. "Socuri și vibrații. Aplicații în tehnică", Ed.Tehnică, București, 1988
- D2. Darabont Al., Văiteanu D. "Combaterea poluării sonore și a vibrațiilor", Ed.Tehnică, București, 1975
- D3. Darabont Al., Iorga I., Ciodaru M. "Măsurarea zgomotului și vibrațiilor în tehnică", Ed.Tehnică, București, 1983
- D4. Dincă Fl., Teodosiu C. "Vibrații neliniare și aleatoare", Ed. Academiei, București, 1969
- F1. Filonenco-Borodici M.M. "Teoria elasticității" (traducere din limba rusă). Ed.Tehnică, București,1952

- G1. Goldsmith W. "Impact. The theory and physical behaviour of colliding solids", Edward Arnold, London, 1960
- G2. Gafițanu M., Focșa V., Merticaru V., Biboros "Vibrații și zgomote", Ed. Junimea, Iași, 1980
- G3. Groșanu I., Brîndeu L. "Vibrații mecanice", Institutul Politehnic Timișoara, 1986
- G4. Groșanu I., **Popa Radovan S.** "Asupra vibrațiilor forțate ale unui rigid rezemat pe un mediu elastic", Conf. Naț. de Vibrații, Timișoara, 1982
- H1. Harris C.M., Creede Ch.E. "Socuri și vibrații", Ed. Tehnică, București, 1969
- H2. Hamdan M.N., Jurban B.A.: "Free and forced vibrations of a restrained uniform beam carrying an intermediate lumped mass and a rotary inertia", J. of Sound and Vibration, vol.150(2), 1991
- I1. Ivan M.: "Bazele calculului liniar al structurilor", Ed. Facla Timișoara, 1985
- I2. Ivan M. "Teoria elasticității", curs, I.P. Tr.V., Timișoara, 1983
- I2. Izvercean P.N., **Popa Radovan S.** "Prezentarea vibrațiilor amortizate prin elementele unei algebre", Conf. Naț. de Vibrații, Timișoara, 1982
- L1. Liu W.H., Huang C.C.: "Free vibrations of restrained beam carrying concentrated masses", Journal of Sound and Vibration, vol.123, 1988
- L2. Leissa W., Sonalla M.I.: "Vibrations of a cantilever beam with various initial conditions", Journal of Sound and Vibration, vol. 150(1), 1991
- M1. Mangeron D., Silaș Gh., Brîndeu L., Hegedus A., Enăchescu C: "Dinamica sistemelor vibropercutante", Bul. Inst. Polit. Iași, T.XII(XVI), fasc. 3-4, 1966
- M2. Mangeron D., Irimiciuc N. "Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie, vol.III, Mecanica vibrațiilor sistemelor rigide", Ed. Tehnică, București, 1981
- M3. Metelițin J.J.: "K voprosu ob uprugom udare". Ukrainsky Mat. Žurnal. Tom VI, No.2, 1954
- P1. **Popa Radovan S.** "Problema ciocnirii elasto-plastice a unei bare ținând seama de reflectarea undelor", A 7-a Conf. Internaț. de Vibrații, Timișoara, 1993

- P2. **Popa Radovan S.** "Metode de calcul la șoc longitudinal cu considerarea proceselor ondulatorii aplicate în cercetarea șocului în arcurile cilindrice", A 7-a Conf. Internaț. de Vibrații, Timișoara, 1993
- P3. **Popa Radovan S.**, Herișanu N. "Problema mediului elastic, suport al rigidului supus vibrațiilor forțate", A -a sesiune de Comunicări Stiințifice, Univ. Aurel Vlaicu, Arad, 1994
- P4. **Popa Radovan S.:** "Considerații asupra impulsurilor în corpurile elastice izotrope". Al 2-lea Simpozion de Acustică, Acad. Rom., Timișoara, 1994
- P5. **Popa Radovan S.:** "Despre influența inerției de rotație asupra deplasărilor în oscilațiile unei bare supusă șocului", Zilele Academice Timișene, mai 1995
- P6. **Popa Radovan S.:** "Asupra propagării impulsului în tuburi elastice neliniare", Zilele Academice Timișene, mai 1995
- P7. **Popa Radovan S.:** "Asupra dinamicii unei bare curbe supusă impactului longitudinal", Analele Univ. Oradea, 1996
- P8. **Popa Radovan S.:** "Considerații asupra vibrațiilor unei bare precurbate supusă impactului axial", A 8-a Conf. Internaț. de Vibrații, Timișoara, 1996
- P9. **Popa Radovan S.:** "Determinarea aproximativă a eforturilor dinamice într-o bară precurbată supusă impactului axial", A 8-a Conf. Internaț. de Vibrații, Timișoara, 1996
- P10. **Popa Radovan S.:** "Determinarea vitezelor de ciocnire în impactul transversal al unei bare elastice", A 9-a Conf. de Vibrații, Timișoara, 1999
- P11. Ponomariov S.D., ș.a.: Calculul de rezistență în construcția de mașini, vol.III, (traducere din limba rusă), Ed. Tehnică, București, 1964
- P12. Peterka F.: "Introduction to Vibration of Mechanical Systems with INTERNAL Impacts", Prague academia, 1981
- P13. Peterka F., Vacik J.: "Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts", Journal of Sound and Vibration, 154, 1992
- P14. Peterka F.: "Dynamics of mechanical systems with impacts", Doctoral Tehsis, Institute of Thermomechanics, Prague, 1990

- S1. Silaş Gh., Brîndeu L., Hegedus A.: "Determinarea coeficientului de restituire la ciocnire pe baza deformațiilor locale de contact", Bul. St. și Tehn. al Inst. Polit. Timișoara, T.12(26), fasc.2, 1967
- S2. Silaş Gh. "Mecanica. Vibrații mecanice", Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1968
- S3. Silaş Gh., Groșanu I. "Mecanica", Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981
- S4. Silaş Gh., Rădoi M., Brîndeu L., Klepp H., Hegedus A. "Culegere de probleme de vibrații mecanice", vol.2, Ed. Tehnică, București, 1973
- T1. Teodorescu P.P. "Dinamica corpurilor liniar elastice", Ed. Academiei Române, București, 1972
- T2. Toader M., **Popa Radovan S.**, Bereteu L. "Considerații asupra determinării aproximative a frecvențelor proprii ale unei grinzi continue prin metoda celor trei momente", Conf. Internaț., de Vibrații, Timișoara, 1985
- T3. Toader M., **Popa Radovan S.**, Bereteu L. "Aplicarea metodei Galerkin la determinarea frecvențelor proprii", Conf. Internaț., de Vibrații, Timișoara, 1985
- T4. Toader M., **Popa Radovan S.**, "Considerații privind aplicarea metodei celor mai mici pătrate la studiul identificării sistemelor dinamice", Conf. Internaț., de Vibrații, Timișoara, 1988
- T5. Timoshenko S.P.: "Vibration problem in engineering", third ed., D.van Nostrand, Co. Inc. N.Y., 1995
- V. Voinea R., Voiculescu D., Simion F.P., "Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie". Ed. Acad. Rom., București, 1989
- W1. Wang J.: "Vibration of stepped beams on elastic foundation", Journal of Sound and Vibration, vol.145(2), 1991
- **** STAS 10854-82 Socuri și vibrații. Terminologie

CUPRINS

1. Capitolul 1. Introducere	3
2. Capitolul 2. Ecuțiile generale ale dinamicii corpurilor elastice	8
2.1. Introducere. Ipoteze	8
2.2. Geometria deformației	9
2.2.1. Deformații și deformații specifice	9
2.2.2. Relații între deplasări și deformații specifice. Rotație locală de corp rigid. Roatații libere. Roatații constrânse	12
2.2.3. Ecuții de continuitate pentru corpuri de tip Cosserat cu rotații libere	19
2.2.4. Starea de deformație în coordonate cilindrice și sferice	24
2.3. Cinematica deformației	27
2.3.1. Cazul clasic	27
2.3.2. Cazul corpurilor de tip Cosserat	29
2.4. Tensiuni și micromomente	32
2.4.1. Tensorul tensiune	32
2.4.2. Tensorul micromoment	35
2.4.3. Forțe și momente volumice	37
2.4.4. Cazul corpurilor de tip Cosserat	38
2.5. Ecuții de mișcare	41
2.5.1. Cazul clasic	41
2.5.2. Cazul corpurilor de tip Cosserat	43
2.5.3. Ecuții de mișcare în coordonate cilindrice .	45
2.6. Legi constitutive	47
2.6.1. Cazul clasic	47
2.6.2. Cazul corpurilor de tip Cosserat	49
3. Capitolul 3. Ecuțiile fundamentale ale ciocnirii corpului elastic	53
3.1. Considerații generale	53
3.2. Ecuțiile fundamentale ale ciocnirii corpului deformabil	54

3.3. Viteza specifică de deformație. Variația vitezei specifice de deformație	57
3.4. Legi constitutive în cazul ciocnirilor	60
3.5. Ecuațiile lui Lamé în cazul ciocnirilor	61
3.6. Ecuațiile Beltrami-Michell în cazul ciocnirilor	63
3.7. Ecuațiile fundamentale ale ciocnirii în cazul corpurilor de tip Cosserat	68
4. Capitolul 4. Cazuri particulare ale ciocnirii corpurilor elastice	73
4.1. Impulsul longitudinal aplicat unei bare drepte	73
4.2. Ciocnirea longitudinală a barelor	85
4.3. Impulsul transversal aplicat barei drepte	96
4.4. Impulsul aplicat într-un punct oarecare al mediului elastic nelimitat	99
4.5. Transmisia longitudinală și transversală a impulsului în mediul elastic nelimitat	106
4.6. Acțiunea exploziei	108
4.7. Teoreme generale	111
4.7.1. Variația energiei cinetice a unui corp elastic căruia i se imprimă impulsuri superficiale	111
4.7.2. Energia cinetică datorată variației vitezelor de deformație	113
4.7.3. Teorema unicității	114
4.7.4. Ecuația în variații	115
4.7.5. Teorema reciprocității	117
4.8. Considerații energetice	118
5. Capitolul 5. Sisteme elastice percutante	120
5.1. Sistem vibrant bară - masă fixată elastic	120
5.2. Sistem vibrant cu excitație prin deplasarea capătului superior al unei bare elastice asimilată cu un arc cu masa uniform distribuită	125
5.3. Sistem vibrant excitat prin acțiunea unei forțe $F(t)$ asupra masei M	134
5.4. Bara elastică excitată prin deplasarea unei extremități	140
5.5. Sistem vibrant arc-masă-bară elastică	148
5.6. Considerații constructive	152
6. Capitolul 6. Concluzii și contribuții originale	159
Bibliografie	164
Cuprins . . .	169