

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ

ica" Timișoara  
că și Telecomunicații

Nr. Inv. \_\_\_\_\_

Dulap 369 Lit. A

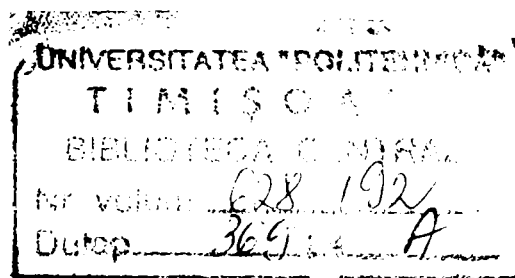
*Modele generale de studiu ale influenței perturbațiilor fizice locale  
asupra spectrului de vibrație al rezonatoarelor piezoelectrice*

**Teză de Doctorat**

Doctorand: ing. *Silviu Crișan*

Conducător științific: prof. dr. ing. *Eugen Pop*

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA



Introducere		1
<b>Capitolul 1</b>	<b>Asupra modelării undelor electroelastice într-un volum piezoelectric finit prin ecuațiile liniare clasice</b>	<b>6</b>
§1.1	Ecuatiile generale de modelare a câmpului elastic și electromagnetic în solidul piezoelectric	7
§1.2	Influența factorilor de perturbație fizici asupra frecvențelor de rezonanță – o analiză calitativă	18
§1.3	Ecuatiile electroelastice în variabilele de stare $\bar{u}$ și $\phi$	24
§1.3.1	<i>Ecuatiile piezoelectrice clasice în situația condițiilor pe frontieră impuse</i>	24
§1.3.2	<i>Ecuatiile piezoelectrice clasice în situația condițiilor pe frontieră guvernate de o ecuație diferențială ordinară</i>	28
§1.3.3	<i>Funcționala Lagrange asociată mediului piezoelectric</i>	32
§1.4	Modelul de perturbație Sinha-Tiersten	36
§1.5	Concluzii	42
<b>Capitolul 2</b>	<b>Aplicarea teoriei de perturbație liniară în situații de alterare neuniformă spațial a parametrilor ce definesc spectrul de vibrație al rezonatoarelor piezoelectrice cu undă de volum</b>	<b>44</b>
§2.1	Relația de perturbație obținută pe baza relației de reciprocitate a ecuațiilor de câmp elastic și electromagnetic	45
§2.2	Condițiile elastice pe frontiera unui solid piezoelectric în contact cu un mediu compozit de tip film subțire-mediul semiinfinit.	52
§2.3	Utilizarea relației de perturbație de ordinul unu în estimarea influenței perturbațiilor locale asupra spectrului de vibrație al rezonatoarelor piezoelectrice	63
§2.3.1	<i>Perturbații termice</i>	67
§2.3.2	<i>Perturbații ale constantelor de material datorate câmpului elastic sau electric staționar, supraimpus vibrațiilor piezoelectrice</i>	75
§2.3.3	<i>Echivalarea micro-deformațiilor geometrice cu perturbații ale constantelor de material</i>	82
§2.3.4	<i>Perturbații ale condițiilor pe frontieră mecanice</i>	91
§2.3.5	<i>Perturbații ale condițiilor pe frontieră electrice</i>	104
§2.4	Concluzii	109

<b>Capitolul 3</b>	<b>Ecuțiile electroelastice hiperbolice și teoria de perturbație asociată acestora</b>	<b>112</b>
§3.1	Motivația acestui capitol	113
§3.2	Ecuțiile electroelastice de tip hiperbolic	115
§3.3	Studiul ecuațiilor electroelastice de tip hiperbolic pe un domeniu piezoelectric finit	124
§3.4	Analiza de perturbație a operatorului electroelastic	131
§3.5	Concluzii	136
<b>Capitolul 4</b>	<b>Complemente matematice</b>	<b>138</b>
§4.1	Ecuții eliptice abstracte	139
§4.2	Ecuția piezoelectrică staționară liniară	146
§4.3	Ecuția piezoelectrică staționară patratică	152
<b>Concluziile tezei</b>		<b>159</b>
<b>Bibliografie</b>		<b>165</b>

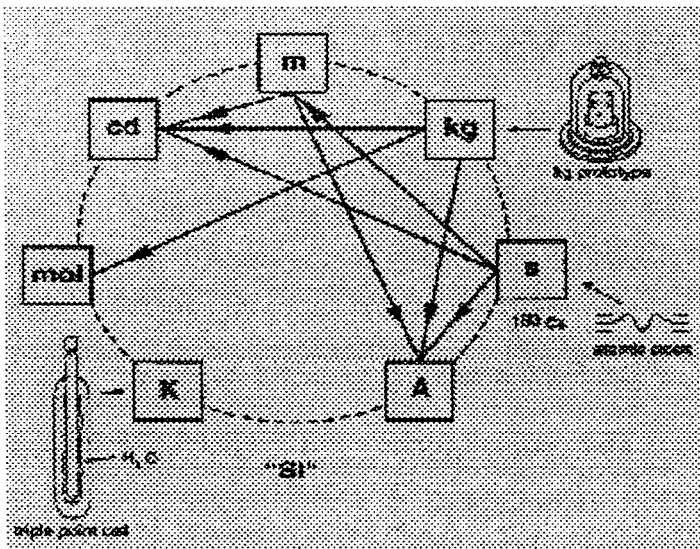
# Introducere

“Dacă dorim să obținem standarde pentru lungime, timp și masă ce vor fi absolut permanente, trebuie să le căutăm nu în dimensiunea, mișcarea sau masa planetei noastre ci în lungimea de undă, perioada de vibrație și masa absolută a acestor nepieritoare, ncalterabile și perfect similare molecule” trad. aut.<sup>1</sup>

James Clerk Maxwell, 1870

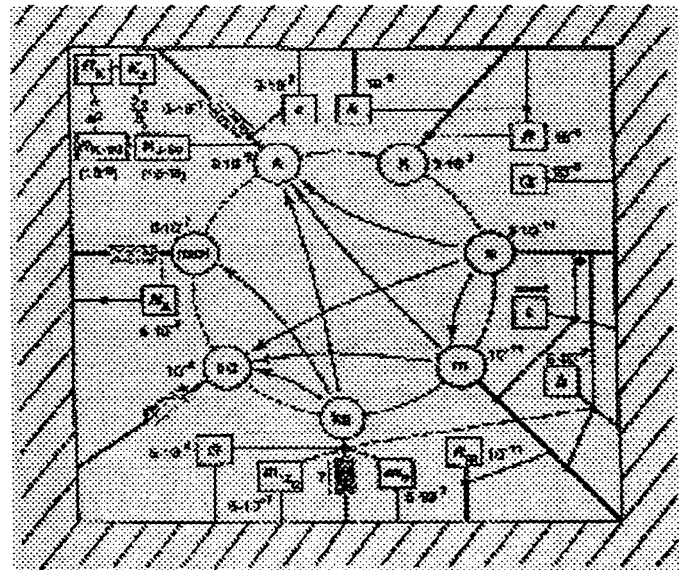
În 1960, cea de a unsprezecea Conferință Generală de Metrologie adopta Sistemul Internațional de Unități (SI), sistem care, începând cu acea dată, avea să fie acceptat la nivel mondial. Sistemul este bazat pe șapte unități de bază, unități alese din rațiuni istorice și practice. Toate unitățile de măsură fizico-chimice derivate pot fi exprimate prin combinarea unităților de bază. Dintre unitățile de bază stabilite în 1960 doar trei rămân determinate independent la ora actuală: este vorba de kilogram, secundă și Kelvin. Figura I1 schițează interdependențele ce există între unitățile de bază.

Figura I1 –preluată din [18]



Cele 7 unități de bază ale SI împreună cu sistemul de interdependențe existente între acestea

Figura I2 –preluată din [18]



Unitățile de bază ale SI, constantele fizice fundamentale și gradul de incertitudine în cunoașterea valorii exacte a acestora

O caracteristică metrologică fundamentală a acestor unități de bază este gradul de incertitudine în cunoașterea valorii absolute a acestora relativ la fenomenul fizic utilizat în definirea lor. Figura alăturată I2, prezintă acest grad de incertitudine pentru aceste unități și o serie de constante fizice fundamentale împreună cu legăturile de interdependență între acestea. Analiza atentă a acestei diagrame relevă încercarea de a construi un sistem de măsură universal plecând de la singura mărime relativistic constantă și considerată a fi cunoscută apriori exact –viteza luminii în vid.

Nivelul științific și tehnologic actual permite cunoașterea cu cea mai mare precizie a unității de măsură pentru timp:  $10^{-14}$ . Gradul de certitudine în cunoașterea celorlalte două unități

<sup>1</sup> “If we wish to obtain standards of length, time and mass which shall be absolutely permanent, we must seek them not in the dimension or motion, or the mass of our planet, but in the wavelength, the period of vibration and the absolute mass of these imperisable, unalterable and perfectly similar molecules”



independente de bază, kilogramul și Kelvinul, este cu mult mai mic comparativ cu secunda- 6-7 ordine zecimale de mărime. Această diferență uriașă între gradul de cunoaștere al timpului, vis a-vis de incertitudinea existentă în determinarea unităților de masă și temperatură, apare probabil datorită incapacității actuale de a lega definirea kilogramului și gradului Kelvin de un fenomen cuantic cu efecte macroscopice stabile și măsurabile așa cum s-a reușit în cazul standardelor atomice pentru timp sau a joncțiunii Josephson cu efect Hall cuantic pentru rezistența electrică. Previziunea asupra necesității căutării în domeniul atomic a fenomenelor fizice de definire a unităților metrologice fundamentale, previziune enunțată acum mai bine de un secol de către Maxwell, se dovedește a fi veridică.

Nivelul de incertitudine al cunoașterii unităților fundamentale ale SI oferă o margine superioară pentru stabilitatea temporală a fenomenelor fizice ce concură la definirea acestor unități - un fenomen fizic ce va fluctua impredictibil cu  $10^{-7}$  relativ la valoarea sa de echilibru, nu va putea fi utilizat în a defini o unitate de măsură cu precizie mai bună de  $10^{-7}$ . Din acest punct de vedere, standardele metrologice de timp secundare (ceasurile pe baza dezexcitării stimulate a atomilor de Cesium sau Rubidiu) sau chiar oscilatoarele electronice pilotate cu dispozitive piezoelectrice de cuarț, ating nivele de stabilitate superioare gradului de incertitudine al majorității unităților din SI și implicit al fenomenelor fizice ce definesc aceste unități. Motivația efortului științific și tehnologic depus în ultima jumătate a acestui secol de a traduce și a măsura o multitudine de mărimi fizice în domeniul timp-frecvență, devine în acest sens evidentă.

Utilizarea unui rezonator piezoelectric la măsurarea unor mărimi fizice altele decât timpul sau frecvența face inerent apel la studiul influenței acestor mărimi asupra frecvențelor proprii de vibrație ale dispozitivului. Pentru a specifica influența stabilității temporale foarte bună a acestor oscilatoare asupra preciziei de calcul necesare a fi atinse în proiectarea unui astfel de traductor, vom considera următorul exemplu generic. Presupunem un rezonator piezoelectric având frecvența proprie de vibrație  $f_0$  cu o stabilitate relativă de  $\delta(t) \leq \delta_{\max}$  pentru intervalele de timp comparabile cu timpul de desfășurare al experimentului. Supus unei mărimi fizice exterioare  $X$  ce acționează brusc la momentul de timp  $t_A$  cu amplitudinea  $A$ , rezonatorul își va modifica frecvența proprie de vibrație cu o valoare  $\Delta_A f$ . Stabilitatea relativă în frecvență o presupunem nemodificată pentru acesta stare:  $\delta(t) \leq \delta_{\max}$ . După cum arată și graficul I3 vom putea decela cu confidență de 100% acțiunea mărimii fizice  $X$  dacă acesta conduce la o modificare a frecvenței de rezonanță de  $\Delta_A f > 2\delta_{\max} f_0$ .

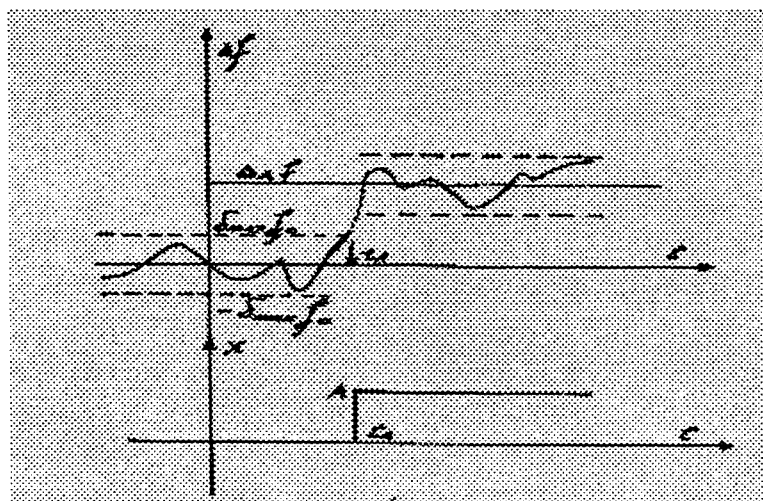


Figura I3

*Modificarea frecvenței de rezonanță sub acțiunea mărimii fizice perturbatoare X*

Acum, să presupunem că prin calcul avem posibilitatea de a afla frecvența proprie  $f_0$  atât în absența mărimii perturbatoare  $X$  cât și în prezența ei, cu precizia relativă de  $\delta_N$ . Pentru a estima cu același grad de precizie ca și în cazul experimentului fizic, prezența sau absența mărimii fizice  $X$  cu amplitudinea  $A$ , este necesar ca  $\delta_N \leq \delta_{\max}$ . Valorile tipice pentru stabilitatea relativă  $\delta_{\max}$  pe termen de  $\approx 100$  secunde, la rezonatoarele cu undă de volum (BAW<sup>2</sup>) pe substrat piezoelectric, sunt cuprinse între  $10^{-6} - 10^{-9}$ . Acest interval de valori reprezintă zona de precizie în care ar trebui adusă proiectarea oricărui traductor de acest tip pentru a aduce o informație fiabilă asupra comportării spectrale a respectivului rezonator sub acțiunea mărimii de perturbație  $X$ .

Cu excepția unor modele aproximative foarte simple ce permit soluții analitice, calculul frecvențelor proprii de vibrație pentru rezonatoarele piezoelectrice, face apel la metode numerice de minimizare variațională a funcționalei Lagrange atașată sistemului de ecuații piezoelectrice. Structura tridimensională a problemei, anizotropia cristalină, cuplajul de câmp electroelastic, condițiile neomogene pe frontieră și geometria volumului rezonatorului, conferă acestei funcționale o complexitate deosebită ce conduce la eforturi computaționale greu sustenabile cu tehnica actuală de calcul, cu scopul de a atinge ordine de precizie, în determinarea frecvențelor proprii, comparabile cu cele ale stabilității fizice a acestor rezonatoare.

Analiza comportării frecvențelor proprii de vibrație în funcție de mărimea de interacțiune  $X$  este totuși posibilă, teoretic, cu o precizie oricât de bună, pentru o vecinătate restrânsă în jurul valorilor  $f_0$ , neperturbate, presupuse a fi cunoscute în acest caz. Această analiză se realizează cu ajutorul metodelor matematice de perturbație, aplicarea acestora în domeniul analizei senzorilor piezoelectrice fiind adeseori singura metodă de abordare.

Metodele de perturbație au o dezvoltare formală riguroasă și au fost aplicate frecvent în calculul evoluției vectorilor și valorilor proprii ale operatorilor autoadjuncți în funcție de o modificare “mică” a unui parametru al ecuației. Acest tip de operatori și probleme, apar adeseori în teoria câmpului electromagnetic, teoria solidului elastic, mecanica cuantică. Dinamica câmpului electro-elastic în solidul piezoelectric este guvernată de un sistem de trei ecuații hiperbolice cuplate cu o ecuație eliptică:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) & u_i, \quad i=1,2,3 \text{ componentele elongației elastice} \\ & \phi \text{ potențialul electric} \\ & \rho \text{ densitatea masică} \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \epsilon_{kj} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( e_{kji} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) & c_{ijkl}, e_{ijk}, \epsilon_{ij} \text{ cu } i, j, k, l \in \{1,2,3\} \text{ tensorii de} \\ & \text{material} \end{cases}$$

Această formă este nestandard în ecuațiile fizicii matematice, sistemul nu poate fi adus la o ecuație funcțională abstractă de tipul:  $\psi = L\psi$ , cu  $L$  un operator autoadjunct; forma tipică, de exemplu, în cazul modelării dinamicii elastice liniare în solidul fără proprietăți de cuplaj electro-elastic sau magnetoelastic.

Această situație este parțial rezolvată în 1977 prin dezvoltarea unei teorii de perturbație pentru ecuațiile piezoelectrice de către B. Sinha și H.F.Tiersten, însă modul de deducere permite practic doar o estimare a frecvențelor proprii perturbate de ordinul 1 (aproximația liniară). După

<sup>2</sup> Bulk Acoustic Waves

cunoștințele autorului nu există până în prezent un formalism riguros de deducere a relațiilor de perturbație de ordin superior, pentru ecuațiile de dinamică electroelastică în solidul piezoelectric.

Relațiile de perturbație Sinha-Tiersten, deși de un potențial teoretic important, nu au fost folosite frecvent în studiul aplicațiilor concrete datorită complexității de prezentare a acestora; multe din fenomenele de modificare a frecvenței de rezonanță sub acțiunea a diverse excitații fizice externe sunt în schimb explicate pe baza unor modele de calcul aproximative, simplificate, dezvoltate în mod specific pentru a furniza date de predicție conforme cu un anumit experiment, o anumită mărime fizică de interacțiune. Dacă aceste modele de calcul, chiar multiple și specifice, ar fi acoperitoare pentru situațiile întâlnite în proiectarea și analiza senzorilor piezoelectrice, un efort de dezvoltare și unificare teoretică ar rămâne o problemă de estetică. Situația este însă alta. Simplificarea regăsită cvasigeneral în aceste modele este ignorarea spațialității fenomenelor de vibrație și interacțiune cu factorii fizici externi de perturbație. Soluția exclude *ab initio* orice tratare a unor perturbații fizice având o distribuție spațială neuniformă în volumul sau pe suprafața rezonatorului: câmpuri termice sau de stress mecanic, impedanțe distribuite electrice sau mecanice. În acest sens, o serie de fenomene cărora repetabilitatea experimentală le-a conferit statutul de regulă sau teoremă – legătura între energia de vibrație la suprafața rezonatorului, zona de încărcare maximă preponderentă și deviația de frecvență, spre exemplu – nu au o explicație sau o relație de predicție riguroasă.

Explicarea și predicția influenței perturbațiilor fizice neuniform distribuite în volumul sau suprafața rezonatorului pe baza unitară a teoriei de perturbație liniară, împreună cu dezvoltarea unui nou formalism teoretic pentru ecuațiile câmpului electroelastic în solidul piezoelectric, formalism ce va permite deducerea relațiilor de perturbație de ordin superior, sunt cele două direcții principale de dezvoltare a acestei teze.

Structura lucrării este următoarea.

În **primul capitol** sunt prezentate principalele rezultate teoretice referitoare la analiza ecuațiilor electroelastice clasice pentru un domeniu piezoelectric tridimensional finit. Sunt tratate teorema de conservare a energiei în ipoteza condițiilor pe frontieră variaționale, funcționala Holland-EerNisse de tip Lagrange asociată mediului piezoelectric și teoria de perturbație Sinha-Tiersten. Studiul funcționalei Holland-EerNisse reliefează importanța deosebită a acesteia ca fiind singura metodă riguroasă ce permite calculul spectrului de vibrație piezoelectric dar și o serie de discrepante (subliniate chiar de autori) între proprietățile acesteia și proprietățile funcționalelor Lagrange clasice. Teoria de perturbație Sinha-Tiersten este analizată plecând de la o formulare abstractă, demonstrându-se imposibilitatea practică de a deduce, pe baza acesteia, relațiile de estimare a frecvențelor perturbate pentru ordine superioare celui liniar.

În **capitolul doi** se propune un model unidimensional local, pentru estimarea impedanțelor de undă elastice la suprafața solidului piezoelectric, considerat a fi în contact cu un film subțire urmat de un mediu exterior infinit. Se reia cursul demonstrației teoriei de perturbație, propusă de Auld [1] și se generalizează rezultatele existente prin renunțarea la ipoteza câmpului electric irotațional, admitând prezența pierderilor energetice la suprafața rezonatorului. Relațiile de estimare liniară a frecvențelor proprii complexe sunt utilizate pentru a studia efectele principalilor factori de perturbație (temperatură, câmpuri electrice și mecanice staționare, sarcini electromecanice de suprafață) asupra spectrului electroacustic al dispozitivului piezoelectric. Se insistă cu precădere asupra explicării unor fenomene legate de caracterul de neuniformitate spațială a acestor mărimi de perturbație precum și a generalizării relațiilor deduse anterior pe baza unor modele unidimensionale mai simple.

Cel de **al treilea capitol** propune un formalism de studiu a dinamicii electro-elastice în solidul piezoelectric pe baza renunțării parțiale la aproximația câmpului electric cvasistaționar. Se obține un sistem de patru ecuații hiperbolice cuplate, ale cărui rezultate de modelare sunt validate din punct de vedere al concordanței câmpului electroelastic în regiunea acustică de cele obținute prin utilizarea ecuațiilor clasice. Sistemul permite o abstractizare sub forma  $\dot{\psi} = L\psi$  cu  $L$  un operator pozitiv definit cu invers compact și încadrarea într-un caz cvasi-standard de studiu matematic. Deducerea riguroasă a relației de perturbație în aproximația liniară și cea patratică, pe baza unui model standard pentru acest caz matematic, altul decât cel utilizat de Sinha-Tiersten, este o consecință firească a acestei situații.

Demonstrațiile matematice lungi ce ar fi fragmentat cursul tezei au fost grupate într-un **capitol de complemente matematice** în finalul lucrării. Parte din aceste demonstrații oferă un suport riguros unor relații direct utilizate în lucrare (relațiile de perturbație pentru operatorul  $L$  - spre exemplu), altele încearcă să ofere o bază de studiu ulterioară în acest domeniu (teorema de existență și unicitate pentru ecuația piezoelectrică staționară în aproximația energiei cubice – spre exemplu).

## **Capitolul 1 Asupra modelării undelor electroelastice într-un volum piezoelectric finit prin ecuațiile liniare clasice**

Sunt prezentate principalele rezultate teoretice referitoare la analiza ecuațiilor electroelastice clasice pentru un domeniu piezoelectric tridimensional finit. Cele trei paragrafe tratează teorema de conservare a energiei în ipoteza condițiilor pe frontieră variaționale, funcționala Holland-EerNisse de tip Lagrange asociată mediului piezoelectric și teoria de perturbație Sinha-Tiersten. Studiul funcționalei Holland-EerNisse reliefează importanța deosebită a acesteia ca principala metodă riguroasă ce permite calculul spectrului de vibrație piezoelectric dar și o serie de discrepanțe (unele subliniate chiar de autori) între proprietățile acesteia și proprietățile funcționalelor Lagrange clasice. Teoria de perturbație Sinha-Tiersten este analizată plecând de la o formulare abstractă demonstrându-se imposibilitatea practică de a deduce pe baza acesteia relațiile de estimare a frecvențelor perturbate pentru ordine superioare celui liniar.



## § 1.1 Ecuatiile generale de modelare ale câmpului elastic și electromagnetic în solidul piezoelectric

Acest paragraf introduce ecuațiile generale de modelare a câmpului elastic și electromagnetic în solidul piezoelectric împreună cu legile de material și principalele ipoteze simplificatorii ce vor fi utilizate în lucrare. Prezentarea este făcută introductiv, asupra unor noțiuni ce sunt formalizate într-o manieră diferită de cea clasică, se va reveni cu argumente și detalii pe parcursul tezei.

Piezoelectricitatea<sup>1</sup> este un fenomen fizic ce cuplează variabilele macroscopice ale câmpului elastic cu cele de câmp electromagnetic în materialele solide anizotrope în care nu se manifestă proprietăți centro-simetrice locale. Explicit acest cuplaj se face prin dependența polarizației electrice de câmpul electric și de deformațiile mecanice - fenomenul direct. Există reciprocitate, câmpul electric prezent în solidul piezoelectric producând tensiuni și deformații elastice. Spre deosebire de electrostricțiune și magnetostricțiune ce prezintă deasemenea proprietăți de cuplaj elasto-electromagnetic, patratice însă, piezoelectricitatea este un fenomen preponderent liniar. Piezoelectricitatea a fost întotdeauna asociată fazelor solide de agregare (monocristaline, ceramice, polimeri), există însă un fenomen similar (de intensitate mult mai slabă), flexoelectricitatea, ce se manifestă în diverse faze de ordonare a cristalelor lichide atât liotrope cât și termotrope. În această lucrare vor fi tratate în exclusivitate fenomene legate de piezoelectricitatea mediilor solide.

În cele ce urmează vom formula ecuațiile de modelare a câmpului elastic și electromagnetic în solidul piezoelectric. O atenție deosebită se va acorda relațiilor de material ce cuplează mărimile electrice cu cele mecanice, forma de aproximare a acestui cuplaj impunând practic includerea sau ignorarea unei caracteristici a dinamicii electroelastice: de exemplu neliniaritatea sau pierderile energetice în volum.

### Ecuatiile de câmp electromagnetic

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} \quad (\text{em1})$$

$$\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} \quad (\text{em2})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (\text{em3})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{em4})$$

$\vec{E}$  vectorul intensității câmpului electric,  $\vec{D}$  vectorul inducției câmpului electric

$\vec{B}$  vectorul inducției câmpului magnetic,  $\vec{H}$  vectorul intensității câmpului magnetic

$\rho_e$  densitatea volumică a sarcinii electrice

$\vec{j}$  vectorul densității de curent electric

---

<sup>1</sup> *piezein* (gr.)=a apăsa, presiune

Legea de conservare a impulsului mecanic:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \nabla T_{ij} + f_i \quad (\text{el1})$$

Legea de conservare a masei:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{el2})$$

$u_i$  componentele elongației elastice

$T_{ij}$  tensorul simetric al tensiunilor elastice,  $f_i$  forțele de volum externe,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$\rho_m$  densitatea masică

Relațiile de material

**A. Introducerea clasică**

Fenomenul piezoelectric implică existența unor legături de forma:

$$\begin{aligned} T_{ij} = T_{ij}(S_{kl}, E_k) \quad S_{ij} = S_{ij}(T_{kl}, E_k) \\ D_i = D_i(S_{jk}, E_j) \quad \text{sau} \quad D_i = D_i(T_{jk}, E_j) \end{aligned} \quad \text{cu } S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \nabla_s^{ij} u_i \quad (\text{mat1})$$

$T_{ij}(S_{kl}, E_k), D_i(S_{jk}, E_j), S_{ij}(T_{kl}, E_k), D_i(T_{jk}, E_j)$  operatori neliniari, continui, cauzali ce acționează asupra istoriei temporale a variabilelor de definiție.

Se urmărește aproximarea parametrică a acestor operatori pentru a permite scrierea ecuațiilor de câmp electromagnetic și elastic într-o formă solvabilă și cât mai comodă de rezolvare. Modalitatea clasică de introducere a relațiilor de material pornește de la expresia de conservare a energiei într-un solid piezoelectric în următoarele ipoteze:

- Mediul este presupus a fi fără pierderi energetice în volumul său – matematic această ipoteză revine la aproximarea operatorilor  $T_{ij}(S_{kl}, E_k), D_i(S_{jk}, E_j)$  sau  $S_{ij}(T_{kl}, E_k), D_i(T_{jk}, E_j)$  prin funcții ce acționează asupra valorilor instantanee ale mărimilor de definiție:  $(S_{kl}(t), E_k(t))$  spre exemplu.
- Transferul energetic elastic și electromagnetic prin frontiera acestui mediu este presupus a fi nul.
- Deformațiile elastice sunt presupuse suficient de mici pentru a considera constantă geometria corpului în cursul acestora.
- Câmpul electric este presupus irotational:  $\vec{E} = -\nabla\phi$ ,  $\phi$  potentialul electric.

Variația temporală a energiei electroelastice se determină a fi [52]:  $\dot{U} = T_{ij}\dot{S}_{ij} + E_i\dot{D}_i$

Se definește entalpia electrică:  $H_e = U - E_i D_i$ .

Variația temporală a acesteia este:  $\dot{H}_e = T_{ij}\dot{S}_{ij} - D_i\dot{E}_i$  și implică o dependență  $H_e = H_e(S_{ij}, E_i)$  cu

$$T_{ij}(S_{ij}, E_k) = \frac{\partial H_e}{\partial S_{ij}} \quad \text{și} \quad D_i(S_{ij}, E_k) = -\frac{\partial H_e}{\partial E_i}$$



Aproximarea parametrică a acestor funcții se face prin dezvoltarea lor în serie Taylor în jurul originii. În teoria piezoelectricității liniare această aproximare se limitează la termenii de ordinul I:

$$T_{ij} \approx \frac{\partial^2 H_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} S_{kl} + \frac{\partial^2 H_e}{\partial S_{ij} \partial E_k} E_k$$

$$D_k \approx -\frac{\partial^2 H_e}{\partial E_k \partial E_j} E_j - \frac{\partial^2 H_e}{\partial E_k \partial S_{ij}} S_{ij}$$

Entalpia electrică  $H_e$  și energia electroelastică  $U$  au, în aceasta situație, următoarele expresii:

$$H_e = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j$$

$$U = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j$$

cu  $c_{ijkl} = \frac{\partial^2 H_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}}$  tensorul elastic

$e_{kij} = -\frac{\partial^2 H_e}{\partial S_{ij} \partial E_k} = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k} = \frac{\partial D_k}{\partial S_{ij}}$  tensorul piezoelectric

$\epsilon_{ij} = -\frac{\partial^2 H_e}{\partial E_i \partial E_j} = \frac{\partial D_i}{\partial E_j}$  tensorul dielectric

Cu aceste notații relațiile de material se scriu astfel:

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \tag{mat2}$$

$$D_k = e_{kij} S_{ij} + \epsilon_{jk} E_j$$

Într-un mod analog se pot determina relațiile ce consideră câmpul electric și tensiunile elastice ca mărimi primare plecând de la entalpia mecanică:  $H_m = U - T_{ij} S_{ij}$

$$S_{ij} = s_{ijkl} T_{kl} + d_{kji} E_k$$

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j + d_{ijk} T_{jk}$$

În situațiile fizice reale tensorii  $c_{ijkl}$ ,  $s_{ijkl}$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $d_{ijk}$  sunt funcții de clasă cel puțin  $C^1(\Omega)$  în volumul piezoelectric, local fiind îndeplinite următoarele relații de simetrie:

i)  $c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{klij}$ ,  $s_{ijkl} = s_{ijlk} = s_{klij}$  21 componente independente

ii)  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$  6 componente independente

iii)  $e_{ijk} = e_{ikj}$  18 componente independente

iv)  $d_{ijk} = d_{ikj}$  18 componente independente

Tensorii de material sunt dați în raport cu axele cristalografice (100), (010), (001). O schimbare ortonormală a bazei duce la modificarea acestor tensori după regula:

$$f_{mnpq} = \alpha_m^i \alpha_n^j \alpha_p^k \alpha_q^l f_{ijkl} \text{ cu } \alpha_m^i \text{ matricea de trecere de la vechea bază la noua bază.}$$

O aproximare mai bună a funcțiilor  $T_{ij}(S_{ij}, E_k) = \frac{\partial H_e}{\partial S_{ij}}$  și  $D_i(S_{ij}, E_k) = -\frac{\partial H_e}{\partial E_i}$  se obține prin

considerarea și a termenilor patratici în dezvoltarea în serie Taylor – sunt acoperite în acest mod efectele electrostrictive spre exemplu.

$$T_{ij} \approx \frac{\partial^2 H_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} S_{kl} + \frac{\partial^2 H_e}{\partial S_{ij} \partial E_k} E_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 H_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial S_{mn}} S_{kl} S_{mn} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 H_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial E_m} S_{kl} E_m + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 H_e}{\partial S_{ij} \partial E_k \partial E_m} E_k E_m$$

$$D_k \approx - \left( \frac{\partial^2 H_e}{\partial E_k \partial E_j} E_j + \frac{\partial^2 H_e}{\partial E_k \partial S_{ij}} S_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 H_e}{\partial E_k \partial E_j \partial E_i} E_j E_i + \frac{\partial^3 H_e}{\partial E_k \partial E_j \partial S_{mn}} E_j S_{mn} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 H_e}{\partial E_k \partial S_{ij} \partial S_{mn}} S_{ij} S_{mn} \right)$$

Utilizând o notație tensorială, relațiile anterioare se scriu sub forma:

$$T_{ij} \approx c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k + \frac{1}{2} c_{ijklmn} S_{kl} S_{mn} + g_{ijklm} S_{kl} E_m - \frac{1}{2} f_{ijkl} E_k E_l \quad (\text{mat3})$$

$$D_k \approx \varepsilon_{kj} E_j + e_{kij} S_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kji} E_j E_i + f_{kjmn} E_j S_{mn} - \frac{1}{2} g_{kijmn} S_{ij} S_{mn}$$

$$c_{ijklmn} = \frac{\partial^3 H_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial S_{mn}} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial S_{kl} \partial S_{mn}} \quad \text{tensorul elastic de ordinul doi}$$

$$\varepsilon_{kji} = - \frac{\partial^3 H_e}{\partial E_k \partial E_j \partial E_i} = \frac{\partial^2 D_k}{\partial E_j \partial E_i} \quad \text{tensorul dielectric de ordinul doi}$$

$$g_{ijklm} = \frac{\partial^3 H_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial E_m} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial S_{kl} \partial E_m} = - \frac{\partial^2 D_i}{\partial S_{jk} \partial S_{lm}} \quad \text{tensor electrostrictiv}$$

$$f_{ijkl} = - \frac{\partial^3 H_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial E_m} = - \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial E_k \partial E_l} = \frac{\partial^2 D_i}{\partial S_{kl} \partial E_j} \quad \text{tensor electrostrictiv}$$

Energia piezoelectrică are în această aproximare următoarea expresie:

$$U = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{2} c_{ijklmn} S_{ij} S_{kl} S_{mn} + \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} E_i E_j E_k$$

Această formă cubică a energiei piezoelectrice asigură o aproximare mai fină a fenomenului piezoelectric însă ridică o serie de probleme de ordin teoretic întrucât ea este pozitiv definită doar pentru valori "mici" a valorilor de câmp elastic și electric. Implicațiile acestui aspect asupra existenței și unicității soluției sistemului de ecuații stationare (echilibrul piezoelectric) va fi studiat în paragraful 4.3 al capitolului de complemente matematice

Dependența de tip funcție utilizată pentru a aproxima relațiile  $T_{ij}(S_{kl}, E_k), D_i(S_{jk}, E_j)$  sau  $S_{ij}(T_{kl}, E_k), D_i(T_{jk}, E_j)$  presupune un răspuns imediat, o concomitență între apariția unei schimbări în mărimile considerate primare ( $T_{ij}$  și  $E_k$  spre exemplu) și apariția răspunsului materialului  $S_{ij}$  și  $D_k$ . Chiar dacă nu evident, această situație conduce la neputința cuprinderii pierderilor energetice în volumul materialului piezoelectric – pierderi existente întotdeauna. Pentru a se reuși modelarea acestui aspect, se introduc termeni suplimentari în relațiile parametriche de material (mat1), (mat2) sau (mat3), termeni ce forțează o dependență ce ține cont și de istoria temporală a mărimilor primare. Ecuația cu derivate ordinare de ordinul 1 următoare se consideră a fi suficientă pentru a modela pierderile energetice în mediul piezoelectric în domeniul acustic al vitezelor de undă electroelastice. Motivația alegerii acestei forme nu este imediată, ea ține cu precădere de posibilitatea identificării

experimentale a tensorului de vâscozitate și de obținerea unor date de modelare conforme cu cele experimentale [8]

$$c_{ijkl}S_{kl} + \eta_{ijkl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial t} - e_{kij} \dot{E}_k = T_{ij} \quad \eta_{ijkl} \text{ vâscozitatea elastică} \quad (\text{mat4})$$

Forma algebrică complexă a relațiilor de material liniare ce țin cont de pierderi se obține prin aplicarea transformatei Fourier ecuațiilor (mat2) și (mat4):

$$\hat{T}_{ij}(j\omega) = [c_{ijkl}(j\omega) + j\omega\eta_{ijkl}(j\omega)]\hat{S}_{kl}(j\omega) - e_{kij}\hat{E}_k(j\omega)$$

$$\hat{D}_i(j\omega) = \varepsilon_{ij}\hat{E}_j(j\omega) + e_{ikj}\hat{S}_{kj}(j\omega)$$

Dacă pentru cazul liniar forma termenului de vâscozitate în manieră clasică poate fi ușor dedusă și argumentată nu aceeași este situația dacă se dorește modelarea simultană a fenomenelor neliniare și de pierderi energetice. Intuitiv, în domeniul timp ecuația (mat4) impune o legătură de tip convoluțional cu nucleu exponențial descrescător (figura 1.1) între mărimile considerate primare și cele de răspuns pentru material. Plecând de la această observație propunem o metodă de formalizare a legilor de material piezoelectrice utilizând seriile convoluționale Volterra. Pentru aceasta există o teorie bine pusă la punct de determinare a nucleelor convoluționale neliniare ce aproximează astfel de fenomene fizice neliniare de tip cauză-efect.

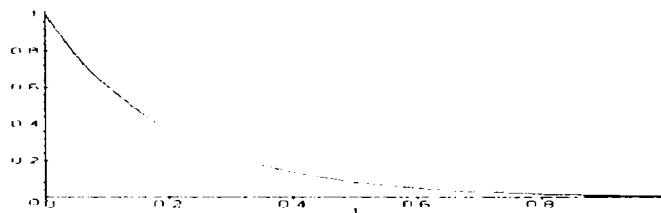


Figura 1.1 Forma tipică pentru un coeficient de material văzut ca un nucleu convoluțional de relaxare

## B. Metoda de introducere relațiilor de material în solidul piezoelectric utilizând formalismul Volterra

Dependențele  $T_{ij}(S_{kl}, E_k)$ ,  $D_i(S_{jk}, E_j)$ ,  $S_{ij}(T_{kl}, E_k)$ ,  $D_i(T_{jk}, E_j)$  puse în evidență în mod experimental și văzute din punct de vedere matematic sub forma unor operatori au următoarele proprietăți:

- i. continuitate în raport cu mărimile de definiție – presupuse de energie finită
- ii. neliniaritate
- iii. memorie temporală descrescătoare

Intuitiv, această ultimă proprietate semnifică dependența predominantă a valorii prezente  $T_{ij}(t)$  de valorile prezente sau din trecutul imediat al variabilelor de definiție  $(S_{kl}, E_k)$  și mult atenuată față de valorile trecutului îndepărtat. Pentru clasa foarte largă de operatori ce posedă proprietățile i-iii

Boyd și Chua în 1985 [9] au demonstrat posibilitatea aproximării parametrice a acestora cu o precizie oricât de bună prin serii de convoluție Volterra. Pentru cazul specific studiat această descompunere se prezintă sub forma (este scrisă desfășurat doar descompunerea pentru  $D_i(S_{jk}, E_j)$ ):

$$D_i(t) = \int_0^t [\tilde{\varepsilon}_{ij}(t-\tau)E_j(\tau) + \tilde{e}_{ijk}(t-\tau)S_{kj}(\tau)]d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \tilde{\varepsilon}_{ijk}(t-\tau_1, t-\tau_2)E_j(\tau_1)E_k(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \\ - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \tilde{g}_{ijklm}(t-\tau_1, t-\tau_2)S_{jk}(\tau_1)S_{lm}(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \int_0^t \int_0^t \tilde{f}_{ijkl}(t-\tau_1, t-\tau_2)E_j(\tau_1)S_{kl}(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \dots$$

Sau compact:

$$T_{ij} = \tilde{c}_{ijkl} * S_{kl} - \tilde{e}_{kij} * E_k + \frac{1}{2} \tilde{c}_{ijklmm} (** ) S_{kl} S_{mn} + \tilde{g}_{ijklm} (** ) S_{kl} E_m - \frac{1}{2} f_{ijkl} (** ) E_k E_l + \dots \quad (\text{mat5})$$

$$D_i = \tilde{\varepsilon}_{ij} * E_j + \tilde{e}_{ijk} * S_{jk} + \tilde{\varepsilon}_{ijk} (** ) E_j E_k + \tilde{g}_{ijklm} (** ) S_{kj} S_{lm} + \tilde{f}_{ijkl} (** ) E_j S_{kl} + \dots$$

respectiv

$$S_{ij} = s_{ijkl} * T_{kl} + d_{ijk} * E_k + q_{ijklmm} (** ) T_{kl} T_{mn} + r_{ijkl} (** ) E_k E_l + w_{ijkl} (** ) T_{jk} E_l + \dots$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} * E_j + d_{ijk} * T_{jk} + \tilde{q}_{ijklm} (** ) T_{jk} T_{lm} + \tilde{r}_{ijk} (** ) E_j E_k + \tilde{w}_{ijkl} (** ) T_{jk} E_l + \dots$$

A fost păstrată o formă similară de scriere cu cea dedusă anterior prin metoda clasică a funcțiilor de entalpie electrică sau mecanică întrucât la limită, dacă se ignoră efectul istoriei temporale a mărimilor primare asupra mărimilor de răspuns a materialului, vom găsi o formă identică cu cea dedusă (mat2). În acest caz, nucleele Volterra se identifică cu tensorii de material deduși în următoarea manieră:

$$\tilde{c}_{ijkl}(t) = c_{ijkl} \delta(t) \quad \text{cu } \delta(t) \text{ distribuția Dirac}$$

Din punct de vedere fizic relațiile de material (mat5) ar acoperi cu finețe atât caracterul neliniar al cuplajului electroelastic cât și fenomenele de pierderi energetice. Determinarea experimentală generală a nucleelelor Volterra este însă dificilă dacă nu imposibilă iar tratarea matematică a ecuațiilor de câmp electroelastic ar ridica serioase probleme de natură teoretică. Renunțarea la neliniaritate aduce o simplificare majoră.

$$D_i(t) = \int_0^t e_{ikj}(t-\tau)S_{kj}(\tau)d\tau + \int_0^t \varepsilon_{ij}(t-\tau)E_j(\tau)d\tau = e_{ikj} * S_{kj} + \varepsilon_{ij} * E_j$$

$$T_{ij}(t) = \int_0^t c_{ijkl}(t-\tau)S_{kl}(\tau)d\tau - \int_0^t e_{kij}(t-\tau)E_k(\tau)d\tau = c_{ijkl} * S_{kl} - e_{kij} * E_k$$

$$S_{ij}(t) = \int_0^t s_{ijkl}(t-\tau)T_{kl}(\tau)d\tau + \int_0^t d_{kij}(t-\tau)E_k(\tau)d\tau = s_{ijkl} * T_{kl} + d_{ijk} * E_k$$

$$D_i(t) = \int_0^t \varepsilon_{ij}(t-\tau)E_j(\tau)d\tau + \int_0^t d_{ijk}(t-\tau)T_{jk}(\tau)d\tau = \varepsilon_{ij} * E_j + d_{ijk} * T_{jk}$$

Pentru mărimile fizice ce intuitiv se află într-o relație de tip cauză-efect, tensiuni elastice-stress mecanic sau intensitate electrică-inducție electrică, forma tipică pentru nucleele convoluționale este una de relaxare exponențială. Ea modelează dependența efectului de istoria temporală a cauzei (cu memorie descrescătoare) și implică o anumită retardare a acestuia față de cauză.

În domeniul vitezelor acustice interacțiunile electrice pot fi considerate cu o foarte bună aproximație ca fiind instantanee față de cele elastice. Gradul mic de cuplare electroelastic permite deasemenea neglijarea vâscozității piezoelectrice față de cea elastică. În consecință,

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij} \delta(t), \quad e_{ijk}(t) = e_{ijk} \delta(t) \quad \varepsilon_{ij}, e_{ijk} \in R$$

Această ultimă observație împreună cu forma de variație exponențială pentru nucleul tensorial de convoluție  $c_{ijkl}(t)$  sugerează o formă echivalentă de scriere a relațiilor de material:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + e_{ikj} S_{kj}, \quad \varepsilon_{ij}, e_{ikj} \in R$$

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} + \eta_{ijkl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial t} - e_{kij} E_k, \quad c_{ijkl}, \eta_{ijkl} \in R$$

$\eta_{ijkl}$  tensorul de vâscozitate elastică

Am regăsit astfel relațiile (mat 4) introduse anterior pe baza unor considerente de altă natură.

Aceste ultime relații sunt cel mai adesea folosite în modelarea fenomenelor piezoelectrice întrucât oferă, în majoritatea aplicațiilor, un compromis acceptabil între complexitatea ecuațiilor de câmp și acuratețea rezultatelor de modelare.

Datorita slabei cuplări a fenomenelor elastice cu cele magnetice în solidul piezoelectric, din punct de vedere magnetic, mediul poate fi presupus a avea proprietăți izotrope, liniare și fără histerezis:

$$B = \mu H \quad \text{cu } \mu \text{ un scalar} \quad (\text{mat6})$$

### Ecuatiile de modelare a câmpului elastic și electromagnetic în solidul piezoelectric - principalele aproximații folosite în lucrare

Setul de ecuații generale pentru câmpul elastic și cel electromagnetic împreună cu forma generală (mat5) pentru relațiile de material sunt prea complicate pentru a fi utilizate în mod eficient la analiza acestor câmpuri în solidul piezoelectric. În funcție de cazul concret analizat o serie de aproximații s-au impus ca și compromisuri între complexitatea analizei matematice a ecuațiilor rezultate și concordanța cu datele experimentale a rezultatelor de predicție. Prezintă pe scurt principalele sisteme de ecuații utilizate în lucrare împreună cu ipotezele simplificatorii ce au fost presupuse. Următoarele două supoziții sunt comune:

- deformațiile elastice sunt presupuse suficient de mici pentru a considera constant volumul corpului și densitatea masică  $\rho_m$  în cursul acestora
- solidul piezoelectric este presupus a fi un dielectric perfect  $\sigma = 0$

### **Ecuatiile de câmp elasto – electromagnetic de ordinul întâi**

Variabilele de stare în această situație sunt alese a fi  $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ ,  $T_{ij}$ ,  $H_i$  și  $E_i$ .

Relațiile de material sunt presupuse a fi liniare și independente de istoria procesului fizic. O notație compactă pentru aceste relații este următoarea:  $S = d \cdot E + s : T$ ,  $D = \varepsilon \cdot E + d : T$ . Ea permite scrierea compactă a ecuațiilor de câmp sub forma matricială:

$$\begin{pmatrix} 0 & \nabla \cdot & 0 & 0 \\ \nabla \cdot s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla \times \\ 0 & 0 & \nabla \times & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ T \\ H \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s : & 0 & d \cdot \\ 0 & 0 & \mu \cdot & 0 \\ 0 & d : & 0 & \varepsilon \cdot \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ T \\ H \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ec 1})$$

Relațiile de divergență nulă pentru vectorul inducției electrice  $\vec{D}$  și cel al inducției magnetice  $\vec{B}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{ij} E_j + e_{ik} S_{kj}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu H_i) = 0$$

sunt impuse ca și condiții prealabile asupra spațiilor de definiție a variabilelor de stare  $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ ,  $T_{ij}$ ,  $H_i$  și  $E_i$ .

Acest formalism propus de Auld [1] este utilizat în cel de al doilea capitol pentru studiul relațiilor de perturbație a frecvențelor proprii de vibrație în aproximația de ordinul 1.

### Ecuatiile electroelastice clasice

Ipoteza de lucru suplimentară utilizată în această situație este cea a câmpului electric irotațional:  $\vec{E} \approx -\nabla\phi$ . Relațiile de material considerate sunt cele liniare, dependente de istoria procesului fizic (pentru mărimile de câmp elastic). Ceea ce se obține este o ecuație de evoluție de ordinul doi pentru deplasarea elastică  $\vec{u}$  cuplată cu ecuația de divergență nulă  $div D = 0$ .

$$\begin{cases} \rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \eta_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kjp} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \epsilon_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - e_{kjp} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{ec } 2)$$

Aproximația câmpului electric irotațional conduce la ignorarea fenomenelor de cuplaj între câmpul elastic și cel electromagnetic, ceea ce se obține fiind în fapt o undă acustică însoțită de un câmp electric ce are o variație temporală suficient de lentă astfel încât câmpul electromagnetic de radiație generat are o energie neglijabilă în raport cu energia acustică. Această supoziție este pe deplin acoperită din punct de vedere al concordanței între datele experimentale și cele de calcul însă conduce la o analiză matematică dificilă a sistemului și la rezultate mai slabe decât cele similare obținute în studiul ecuațiilor clasice ale undelor elastice sau electromagnetice liniare.

### Ecuatiile de câmp electroelastice hiperbolice

Acest sistem modelează dinamica electroelastică în aceleași variabile de stare  $(u_i, \phi)$  precum cel clasic prezentat anterior. Ne vom rezuma doar a-l aminti în acest paragraf introductiv. El este propus de autor ca un model alternativ de studiu celui clasic. Asupra motivației, deducerii și rezultatelor obținute pe baza acestuia ne vom referi în detaliu pe parcursul tezei, cu precădere în capitolul trei.

$$\begin{cases} \rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - e_{kjp} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = f_i \\ \mu \epsilon_m^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \epsilon_{jk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} + e_{jkp} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \rho_e \end{cases} \quad (\text{ec } 3)$$

$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}$  e valoarea medie a tensorului piezoelectric în sistemul de axe în care acesta are o formă diagonală.

### Forma staționară neliniară pentru ecuațiile piezoelectrice

În condițiile în care dinamica piezoelectrică a încetat, este studiată situația de echilibru neliniar obținut prin impunerea unor anumite condiții statice pe frontiera solidului. Este un caz oarecum tangent scopului central al lucrării, el servește în principal pentru demonstrarea unei teoreme de existență și unicitate pentru ecuațiile piezoelectrice staționare în situația aproximării energiei piezoelectrice printr-o formă cubică (paragraful 4.4). Această demonstrație autorul nu a găsit-o în literatura de specialitate și o considerăm utilă întrucât stabilește un cadru riguros și general de studiu pentru determinarea câmpului electroelastic neliniar. Amintim că un astfel de câmp staționar este un factor de perturbație a frecvențelor proprii de vibrație pentru rezonatoarele piezoelectrice. Acest subiect este abordat pe parcursul paragrafelor 1.2 și 2.3.2.

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \varepsilon_{jki} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - e_{jki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{ec } 4)$$

Cursul demonstrației va conduce la punerea în evidență a unei limite energetice pentru condițiile pe frontiera solidului piezoelectric pentru a putea fi folosită aproximația cubică a energiei piezoelectrice.

### Geometria mediului piezoelectric și condițiile pe frontieră

Din punct de vedere geometric, pe parcursul tezei, mediul piezoelectric se presupune a fi localizat într-un domeniu  $\Omega \subset R^3$  finit, conex și convex având frontiera  $f\Omega$  netedă. Situațiile când aceste supoziții nu sunt îndeplinite vor fi descrise în mod explicit.

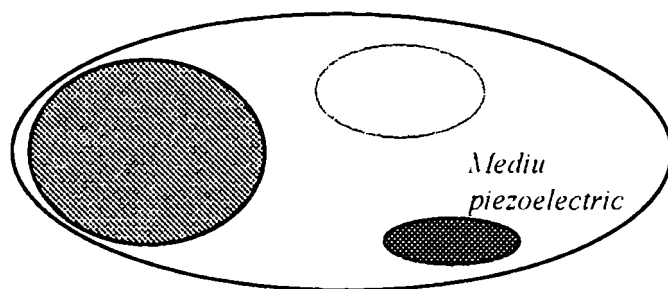


Figura 1.2 Forma generală a unui dispozitiv piezoelectric

Solidul piezoelectric este considerat a fi în contact cu un număr arbitrar de medii fizice externe pasive (suprafețele hașurate din figură sugerează aceste zone de contact). Transferul energetic între solidul piezoelectric și mediile de contact este modelat prin condițiile pe frontieră impuse câmpului elastic și electromagnetic pe frontiera  $f\Omega$ .



## Condițiile pe frontiera solidului piezoelectric

Pentru mediile externe ce intră în contact cu solidul piezoelectric se presupun a fi îndeplinite următoarele proprietăți:

- i) nu au proprietăți de cuplare a câmpului elastic cu cel electromagnetic - piezoelectrice, electrostrictive, magnetostrictive.
- ii) relațiile de material sunt liniare pentru mărimile de câmp elastic și electromagnetic

Două ipoteze suplimentare sunt utilizate întotdeauna în ceea ce privește câmpul electromagnetic radiat din solidul piezoelectric în mediile de contact:

- i) câmpul electric este presupus a fi irotațional  $\vec{E} = -\nabla\phi$  pe  $f\Omega$ .
- ii) mediile de contact sunt presupuse a avea constanta dielectrică mult mai mică decât a materialului piezoelectric astfel încât sarcina electrică la suprafață poate fi aproximată astfel:  
$$\sigma_s = (D_i^{ext} - D_i^{piezo} n_i) \approx -(D_i^{piezo})$$

Întrucât fenomenul piezoelectric stabilește o legătură directă doar între componenta electrică a câmpului electromagnetic și mărimile elastice, ecuațiile ce descriu dinamica câmpurilor cuplate elastic și electromagnetic în zona acustică a vitezelor de propagare vor neglija în general partea de interacțiune magnetică. În consecință va fi suficientă formularea condițiilor de continuitate pentru componentele câmpului elastic, deplasări sau tensiuni mecanice, a potențialului electric  $\phi$  și a componenteii normale a inducției electrice pe frontiera  $f\Omega$ :

Condițiile de continuitate

$$u_i \Big|_{piezoelectric} = u_i \Big|_{exterior}$$

$$T_{ij} n_j \Big|_{piezoelectric} = T_{ij} n_j \Big|_{exterior}$$

$$\phi \Big|_{piezoelectric} = \phi \Big|_{exterior}$$

$$\sigma_s \Big|_{f\Omega} = (D_i^{ext} - D_i^{piezo} n_i) \approx -(D_i^{piezo})$$

Modelarea transferului energetic la suprafața solidului piezoelectric ar necesita cunoașterea exactă a valorilor de câmp elastic și electric pe frontiera  $f\Omega$  - ceea ce evident este imposibil fără rezolvarea în prealabil a ecuațiilor elastice și electromagnetice într-un mediu compozit solid piezoelectric - medii de contact cu condiții de anulare la infinit a câmpurilor. Această abordare ce evită practic enunțarea explicită a relațiilor pe frontiera  $f\Omega$  (condiții pe frontieră transparente) are o acuratețe de modelare a situației reale foarte bună însă conduce la dificultăți majore de abordare matematică atât formală cât mai ales computațională. Două căi de compromis s-au impus în acest caz:

- A. valorile de câmp elastic și electric sunt impuse pe suprafața de frontieră; de exemplu tensiune mecanică nulă, scurtcircuit electric.
- B. componentele de câmp elastic respectiv electric respectă o lege de variație temporală pe  $f\Omega$  impusă de o ecuație diferențială ordinară.

Prima metodă are avantajul unei tratări matematice facile însă neglijează schimbul de energie pasiv prin suprafața de frontieră. Cea de a doua aproximează acest schimb energetic, alegerea ecuațiilor diferențiale ordinare ca model, având argumentație teoretică și experimentală. Dificultățile acestei metode rezidă în modelarea matematică fiabilă a proceselor fizice de interacțiune la suprafața rezonatorului. Întrucât o mare parte a acestei lucrări va fi dedicată investigării influenței perturbațiilor locale de suprafață asupra spectrului de vibrație electro-elastic vom utiliza preponderent cea de a doua metodă, prima fiind prin definiție inutilizabilă în acest gen de probleme.

În finalul acestui paragraf vom da definițiile noțiunilor matematice ce le considerăm necesare pentru o parcurgere facilă a primelor trei capitole ale tezei. Capitolul de complemente matematice a fost conceput într-o manieră autonomă față de partea principală a lucrării, noțiunile matematice, cu precădere din analiza funcțională, ce le utilizăm, sunt definite și folosite strict local.

$[L^2(\Omega)]^m$  spațiul Hilbert al funcțiilor vectoriale  $m$ -dimensionale de patrat integrabil pe  $\Omega$

$$\langle u, v \rangle_{[L^2(\Omega)]^m} = \int_{\Omega} u_i(x) v_i(x) d\Omega \quad \forall u, v \in [L^2(\Omega)]^m \quad i=1..m, \text{ produsul scalar pe acest spațiu}$$

$[H^p(\Omega)]^m$  spațiul Sobolev de ordinul  $p$ ,  $p \geq 0$  pentru funcțiile vectoriale  $m$ -dimensionale.

$$[H^p(\Omega)]^m = \left\{ u_i \in L^2(\Omega), D^\alpha u_i = \frac{\partial^{|\alpha|} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq p \right\}$$

$\alpha$  fiind un multi-index cu  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha_i \geq 0$

$$\langle u, v \rangle_{[H^p(\Omega)]^m} = \sum_{|\alpha| \leq p} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{[L^2(\Omega)]^m} \quad \forall u, v \in [H^p(\Omega)]^m \text{ produsul scalar pe acest spațiu Hilbert}$$

Spațiile Sobolev  $H^p(\Omega)$  constituie o extindere naturală a spațiilor liniare ale funcțiilor de clasă  $C^p(\Omega)$  ele reprezentând închiderea acestei mulțimi în  $L^2(\Omega)$ .

Pentru o suprafață  $S \in \overline{\Omega}$  de clasă  $C^1$  și o funcție  $u \in H^1(\Omega)$  se definește urma funcției  $u$  pe  $S$  ca fiind  $\gamma_0 u = u|_S$ . Imaginea operatorului linear  $\gamma_0: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(S)$  se notează cu  $H^{1/2}(S)$ . Acesta este spațiul Banach cu norma:  $\|\varphi\|_{H^{1/2}(S)} = \inf_{\gamma_0 u = \varphi} \|u\|_{H^1(\Omega)}$ .

Analog, pentru o suprafață  $S \in \overline{\Omega}$  de clasă  $C^2$  și o funcție  $u \in H^2(\Omega)$  se definește urma derivatei după direcția versorului  $\vec{v}$  a funcției  $u$  pe  $S$ :  $\gamma_\nu u = \frac{du}{dv}|_S$ .

## § 1.2 Influența factorilor de perturbație fizici asupra frecvențelor de rezonanță – o analiză calitativă

Este prezentat într-o manieră calitativă modul de acțiune al temperaturii, al câmpului elastic și electric staționar, al radiațiilor X și al mediilor vecine solidului piezoelectric asupra parametrilor ce determină frecvențele proprii de vibrație ale rezonatorului.

Experimental se constată că frecvențele proprii de vibrație ale unui rezonator elastic sau electromagnetic depind întotdeauna de următoarele caracteristici:

- i. *Geometria volumului în care apar fenomenele de oscilație*
- ii *Legile de material:  $D_k(E_k, S_{ij}), T_{ij}(S_{kl}, E_k), H_i(B_i)$  - spre exemplu*
- iii *Comportarea câmpului elastic sau electromagnetic pe frontiera rezonatorului*

Descrierea matematică a dependenței frecvențelor proprii de oscilație de caracteristicile fizice i-iii enumerate necesită ca un prim pas parametrizarea acestora. Pentru geometria volumului rezonatorului se poate găsi întotdeauna o descriere parametrică. Legile de material se aproximează uzual prin descompuneri polinomiale. Cea de a treia caracteristică poartă însă o nedeterminare intrinsecă: valorile câmpului la frontiera rezonatorului nu pot fi aflate precis decât prin rezolvarea ecuațiilor de câmp elastic și electromagnetic pe un domeniu  $\Omega' \subset \Omega$  ce include domeniul rezonatorului, considerat suficient de mare pentru a se putea presupune anularea câmpului la frontiera sa. Aceasta ar conduce implicit și la aflarea frecvențelor proprii de oscilație. Condiția iii pare din acest punct de vedere nepotrivită. Din acest punct de vedere ea ar trebui înlocuită cu specificarea *mediilor fizice aflate într-o anumită vecinătate a rezonatorului*. Motivele pentru care foarte rar se utilizează acest formalism al studiului rezonanței (metoda condițiilor la frontieră transparente) într-o vecinătate largă a domeniului propriu  $\Omega$  țin de dificultăți de ordin teoretic și mai ales computațional. Calea aleasă în majoritatea aplicațiilor este de a găsi apriori o aproximație a comportării câmpului pe frontieră. Matematic situația cea mai convenabilă este de a impune valoarea câmpului sau a derivatelor acestuia pe frontieră. Fizic, în cazul rezonatoarelor piezoelectrice aceasta revine la a considera situații de tensiune mecanică nulă sau încastrare respectiv scurt circuit electric sau gol electric. Metoda este complet inutilizabilă în cazul studiului efectului mediilor de contact asupra frecvențelor de vibrație a rezonatorului, analiza acestui fenomen fiind încă o problemă deschisă cel puțin pentru rezonatoarele piezoelectrice. Paragraful 2.1 al tezei propune un model de aproximare al comportării câmpului electroelastic la frontiera solidului piezoelectric pe baza rezolvării ecuațiilor de câmp electroelastic într-o aproximație unidimensională locală pentru o structură compozită mediu piezoelectric-film subțire-mediu semi-infinit (o problemă cu condiții la limită transparente unidimensională). Relațiile găsite pe această cale sunt apoi considerate ca fiind impuse câmpului electro-elastic pe frontieră în problema reală tridimensională. Metoda pune în evidență o ecuație diferențială de ordinul doi în raport cu timpul existentă între tensiunea mecanică și stress. O ecuație similară poate fi considerată ca fiind suficientă pentru a modela legătura între sarcina electrică pe o suprafață metalizată și potențialul electric. Coeficienții

acestor ecuații vor fi considerați ca și parametrii ai celei de a treia caracteristici fizice din descrierea de început a dependenței frecvențelor proprii de rezonanță.

Dacă notăm generic cu:

$I_G$  mulțimea parametrilor geometrici

$I_M$  mulțimea parametrilor specifici relațiilor de material

$I_S$  mulțimea parametrilor specifici condițiilor pe frontieră

vom putea descrie matematic spectrul rezonatorului ca depinzând de aceste mulțimi de parametri:

$$\sigma = \sigma(I_G, I_M, I_F).$$

Influența factorilor fizici precum temperatura, câmpul elastic sau electric staționar supra-impus oscilației, asupra frecvențelor proprii de rezonanță este posibilă în acest sens în două etape distincte: prima se referă la analiza efectului acestor factori fizici asupra parametrilor de geometrie, material și condiții pe frontieră; cea de a doua vizează studiul propriuzis al dependenței spectrului de rezonanță de mulțimile de parametri ( $I_G, I_M, I_F$ ). În acest paragraf ne vom referi pe scurt asupra influenței factorilor fizici considerați de interes asupra parametrilor rezonatorului.

## Temperatura

Temperatura influențează întotdeauna parametrii geometrici și cei de material ai corpului piezoelectric. Volumul se modifică prin dilatare sau contracție termică iar legile macroscopice de material  $D_k(E_k, S_{ij})$ ,  $T_{ij}(S_{kl}, E_k)$  depind de temperatură datorită influenței temperaturii asupra mărimilor microscopice ce concură la definirea valorilor mediate  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $S_{ij}$  sau  $T_{ij}$ . Pentru a avea o descriere analitică a acestor afirmații să presupunem o deformație elastică  $\xi$ ,  $x \rightarrow \xi(x)$  generată termic, prezentă în solidul piezoelectric. Pentru intervalele tehnic uzuale (-125...+500 grade C) dependența deformațiilor elastice cu temperatura în materialele monocristaline folosite frecvent în aplicații piezoelectrice poate fi considerată a fi foarte bine aproximată de o lege de variație cubică:

$$S_{ij}(\theta) = \alpha_{ij}^{(1)}(\theta - \theta_0) + \alpha_{ij}^{(2)}(\theta - \theta_0)^2 + \alpha_{ij}^{(3)}(\theta - \theta_0)^3$$

cu  $\alpha_{ij}^{(1)}$ ,  $\alpha_{ij}^{(2)}$ ,  $\alpha_{ij}^{(3)}$  coeficienții termici de ordinul I, II și III. Temperatura de referință  $\theta_0$  este în general considerată a fi 20 grade Celsius.

Efectul deformației elastice  $\xi$  asupra unui volum infinitezimal  $dv = dx_1 dx_2 dx_3$  din solidul nedeformat este:  $dv^\xi = \det \left[ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right] dv = \det [S_{ij}] dv = J dv$ , unde prin  $dv^\xi$  s-a notat volumul infinitezimal deformat iar prin  $J$  Jacobianul transformării  $\xi$ .

Legea de conservare a masei face ca densitatea materialului după deformație să fie  $\rho_m^\xi = J^{-1} \rho_m$ .

Dilatarea sau contracția materialului după direcția unui versor arbitrar  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  se face după relația:  $dx_i^\xi = S_{ij} dx_j$  sau  $dx_i^\xi n_i = S_{ij} n_i n_j |dx|$ , prin  $|dx|$  s-a notat modulul vectorului infinitezimal poziționat după direcția  $\vec{n}$ .

Cunoașterea acestor mărimi diferențiale face posibilă cunoașterea volumului și formei corpului după deformația  $\xi$  în măsura în care sunt cunoscuți parametrii de expansiune termică  $\alpha_{ij}^{(1)}$ ,  $\alpha_{ij}^{(2)}$ ,  $\alpha_{ij}^{(3)}$  ai materialului și diferența de temperatură  $\theta - \theta_0$ . Ordinul de mărime a acestor

coeficienți pentru materialele piezoelectrice monocristaline este de:  $10^{-6}$ ,  $10^{-9}$  și  $10^{-12}$  pentru  $\alpha_{ij}^{(1)}$ ,  $\alpha_{ij}^{(2)}$  respectiv  $\alpha_{ij}^{(3)}$ .

Dependența cu temperatura a legilor de material  $D_k(E_k, S_{ij})$ ,  $T_{ij}(S_{kl}, E_k)$  este descrisă considerând că tensorii de material  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  și  $c_{ijklmn}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$ ,  $f_{ijkl}$ ,  $g_{ijklm}$  sunt funcții polinomiale cubice de temperatură. Coeficienții acestor dezvoltări sunt determinați cu acuratețe pentru tensorii ce descriu comportarea piezoelectrică liniară  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , pentru cei patratici  $c_{ijklmn}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$ ,  $f_{ijkl}$ ,  $g_{ijklm}$  măsurătorile sunt mult mai aproximative – standardul IEEE de piezoelectricitate spre exemplu nu face referire la aceste valori.

Dezvoltarea cubică generală pentru acești tensori are forma:

$$a(\theta) = a(\theta_{ref}) \left[ 1 + \alpha_a^{(1)}(\theta - \theta_{ref}) + \alpha_a^{(2)}(\theta - \theta_{ref})^2 + \alpha_a^{(3)}(\theta - \theta_{ref})^3 \right]$$

$$\alpha_a^1 = \frac{1}{a(\theta_{ref})} \frac{\partial a(\theta_{ref})}{\partial \theta}, \quad \alpha_a^2 = \frac{1}{2! a(\theta_{ref})} \frac{\partial^2 a(\theta_{ref})}{\partial \theta^2}, \quad \alpha_a^3 = \frac{1}{3! a(\theta_{ref})} \frac{\partial^3 a(\theta_{ref})}{\partial \theta^3}$$

Parametrii condițiilor pe frontieră se modifică în măsura în care temperatura afectează semnificativ caracteristicile de material ale mediilor aflate în contact cu solidul piezoelectric. Dacă proprietățile electrice pot fi considerate constante în intervale largi de temperatură pentru majoritatea materialelor de contact întâlnite în practică, proprietățile mecanice se pot modifica mult pe intervale mici de temperatură (grade Celsius). Este situația tranzițiilor de fază în filmele subțiri de polimeri depuse la suprafața rezonatorului în aplicații de senzori chimici.

### Câmpul elastic și electric staționar

Să presupunem o solicitare mecanică cu o variație temporală de forma unei trepte unitate exercitată pe o regiune a suprafeței unui domeniu piezoelectric aflat într-o stare de echilibru manifestată prin absența deformațiilor mecanice și a câmpului electric macroscopic intern. Asimptotic, mărimile mecanice și cele electrice vor atinge o nouă stare de echilibru în care sunt prezente deformațiile mecanice și un câmp electric în interiorul cristalului. O situație similară apare dacă considerăm că asupra corpului se aplică un câmp electric extern cu o aceeași variație în timp. Vom nota cu indicele  $\gamma$  mărimile corespunzătoare acestei stări și cu  $\theta$  cele corespunzătoare stării fundamentale. Pentru o mică perturbație în jurul noii stări de echilibru  $\gamma$  vom aproxima relațiile de material  $D_k(E_k, S_{ij})$ ,  $T_{ij}(S_{kl}, E_k)$  în două moduri:

1. printr-o dezvoltare în serie Taylor (patratică) într-o vecinătate a stării de echilibru fundamentale (mat 3):

$$T_{ij} \approx c_{ijkl}^0 S_{kl} - e_{kij}^0 E_k + \frac{1}{2} c_{ijklm}^0 S_{kl} S_{mn} + g_{mijkl}^0 S_{kl} E_m - \frac{1}{2} f_{ijkl}^0 E_k E_l$$

$$D_k \approx \varepsilon_{kj}^0 E_j + e_{kji}^0 S_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kji}^0 E_j E_l + f_{kmij}^0 E_m S_{ij} - \frac{1}{2} g_{kijmn}^0 S_{ij} S_{mn}$$

2. printr-o dezvoltare în serie Taylor (liniară) într-o vecinătate a stării de echilibru  $\gamma$ :

$$T_{ij}(S_{kl}, E_k) \approx T_{ij}(S_{kl}^\gamma, E_k^\gamma) + c_{ijkl}^\gamma (S_{kl} - S_{kl}^\gamma) - e_{ijk}^\gamma (E_k - E_k^\gamma)$$

$$D_k(S_{ij}, E_j) \approx D_k(S_{ij}^\gamma, E_j^\gamma) + \varepsilon_{ij}^\gamma (E_j - E_j^\gamma) + e_{ijk}^\gamma (S_{jk} - S_{jk}^\gamma)$$

cu  $c_{ijkl}^\gamma = \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}}(S_{kl}^\gamma, E_k^\gamma)$ ,  $e_{kji}^\gamma = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k}(S_{kl}^\gamma, E_k^\gamma) = \frac{\partial D_k}{\partial S_{ij}}(S_{kl}^\gamma, E_k^\gamma)$ ,  $\varepsilon_{kj}^\gamma = \frac{\partial D_k}{\partial E_j}(S_{ij}^\gamma, E_j^\gamma)$

Rescrierea acestor relații de definiție pentru tensorii de material în starea  $\gamma$  considerând relațiile de material patratice (mat 3) conduce la următoarele expresii:

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^\gamma &= c_{ijkl}^0 + c_{ijklmn}^0 S_{mn}^\gamma + g_{ijklm}^0 E_m^\gamma \\ e_{kji}^\gamma &= e_{kji}^0 - g_{kijlm}^0 S_{lm}^\gamma + f_{ijkl}^0 E_l^\gamma = e_{kji}^0 + f_{kmij}^0 E_m^\gamma - g_{kjlmn}^0 S_{mn}^\gamma \\ \varepsilon_{kj}^\gamma &= \varepsilon_{kj}^0 + \varepsilon_{kji}^0 E_j^\gamma + f_{kijm}^0 S_{im}^\gamma \end{aligned}$$

Valorile tensorilor  $c_{ijklmn}^0, \varepsilon_{kji}^0, g_{ijklm}^0, f_{ijkl}^0$  sunt cunoscute cu suficientă precizie pentru materialele monocristaline piezoelectrice de uz aplicativ. Problema dificilă în estimarea concretă a modificării tensorilor liniari este aflarea câmpului electroelastic intern în starea de echilibru  $\gamma$ . Pentru aceasta este necesară rezolvarea ecuației piezoelectrice staționare neliniare. În acest paragraf doar vom formula această problemă, paragraful 4.3 oferind un studiu riguros al acestei ecuații. Un rezultat important al acelei analize este o limită energetică pentru condițiile pe frontieră ce pot fi impuse pentru a se garanta existența și unicitatea soluției. Din acest punct de vedere aproximarea patratcă a relațiilor de material este mai fină însă nu conduce necondiționat la o problemă bine pusă matematic. O situație similară este cunoscută în teoria elasticității neliniare [7]. Intuitiv fenomenul apare datorită faptului că energia elastică sau electroelastică în formă cubică nu mai este pozitiv definită pentru valori oricât de mari ale câmpului elastic respectiv electroelastic. Sistemul de ecuații în volumul piezoelectric  $\Omega$  ce trebuie rezolvat este următorul:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} c_{ijklmn} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \varepsilon_{jki} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - e_{jki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = 0 \end{cases}$$

Din motive de simplitate a abordării matematice cât și datorită efectelor neliniare neglijabile aduse de tensorii  $g_{ijklm}^0, f_{ijkl}^0$  s-a ignorat efectul acestora. Tensorul  $\varepsilon_{kji}^0$  intră în aceeași categorie, el a fost păstrat doar pentru a marca o simetrie în sistem între componentele elongației elastice și potențialul electric.

Tensorii de material  $c_{ijkl}, c_{ijklmn}, e_{kji}, \varepsilon_{jk}, \varepsilon_{kji}$  sunt funcții reale de clasă  $C^1$  pe domeniul  $\Omega \in R^3$  mărginit, conex, cu frontiera  $fr\Omega$  regulată.

### Condițiile pe frontieră

*Câmpul elastic:*

- zona în care sunt specificate tensiunile mecanice:

$$\Sigma_T^{mec} = \left\{ S_m \in \Pi_{fr\Omega} \mid \left( T_{ij} n_j \right)_{|S_m} = {}_m \bar{T}_i \right\} \quad \text{cu } {}_m \bar{T} : S_m \rightarrow R \text{ funcție continuă}$$

- zona în care sunt impuse deplasările elastice

$$\Sigma_u^{mec} = \left\{ S_n \in \Pi_{fr\Omega} \mid u_i|_{S_n} = {}_n \bar{u}_i \right\} \quad \text{cu } {}_n \bar{u}_i : S_n \rightarrow R \text{ funcție contiună}$$

$$\Sigma_T^{mec} \cup \Sigma_u^{mec} = fr\Omega$$



## Câmpul electric:

- zona echipotențială electric în care există un strat infinit subțire de conductor ideal

$$\Sigma^{met} = \left\{ S_i \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_i} = \Phi \in R \right\}$$

potențialul electric impus

$$\Sigma_{\Phi}^{met} = \left\{ S_p \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_p} = \bar{\Phi} \right\}$$

sarcina electrică impusă:

$$\Sigma_Q^{met} = \left\{ S_r \in \Pi_{fr\Omega} \mid \int_{S_r} \bar{D} \cdot \bar{n} ds = -r \bar{Q} \right\}$$

- zona dielectrică

impusă o funcție de potențial

$$\Sigma_{\phi}^{die} = \left\{ S_k \in fr\Omega \mid \phi|_{S_k} = \phi \right\}, \phi: S_k \rightarrow R \text{ o funcție continuă}$$

impusă o distribuție de sarcină electrică superficială

$$\Sigma_{\sigma}^{die} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid -\bar{D} \cdot \bar{n}|_{S_j} = \bar{\sigma} \right\}, \bar{\sigma}: S_j \rightarrow R \text{ o funcție continuă}$$

$$\Sigma^{met} \cup \Sigma^{die} = fr\Omega$$

$$\text{cu } \Sigma^{met} = \Sigma_{\Phi}^{met} \cup \Sigma_Q^{met}, \Sigma^{die} = \Sigma_{\phi}^{die} \cup \Sigma_{\sigma}^{die}$$

Această ecuație a fost formulată în ipoteza unei modificări de volum datorită solicitărilor mecanice și elastice pe frontieră ce pot fi neglijate.

Abordarea rezolvării numerice a acestui sistem de ecuații este de dată foarte recentă – 1999, [29] - și a fost posibilă doar prin utilizarea unor sisteme de calcul paralel masive. Încercările de estimare anterioare s-au realizat pe baza unor aproximații simplificatoare precum: ignorarea efectului piezoelectric, ipoteza de izotropie a materialului, geometrii particulare a plăcuței piezoelectrice [50] sau [60]. Chiar în aceste ipoteze mai puțin precise rezultatele au fost foarte bune, permițând de exemplu predicția teoretică a unei tăieturi cristalografice pentru rezonatoarele de cuarț foarte puțin sensibilă în frecvență la apariția stressului elastic în planul de vibrație – tăietura SC, 197\* EerNisse [17].

Câmpul electroelastic staționar  $(S_j^{\gamma}, E_k^{\gamma})$  ce se stabilește în material este, în general, neuniform, această neuniformitate implicând variația constantelor elastice  $c_{ijkl}^{\gamma}, e_{kji}^{\gamma}, \epsilon_{kj}^{\gamma}$  în funcție de vectorul de poziție  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Dacă în cristal se generează unde electroelastice ca o perturbație de mică amplitudine peste starea de echilibru  $\gamma$ , ele vor fi soluție, în volumul corpului, pentru un sistem de ecuații de formă identică cu cel obișnuit pentru dinamica electroelastică (ec 2), paragraful 1.1:

$$\begin{cases} \rho_m^{\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijk}^{\gamma} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_k} + e_{kji}^{\gamma} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_k} \right) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \epsilon_{kj}^{\gamma} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} - e_{kji}^{\gamma} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_j} \right) \end{cases} \quad \text{cu notațiile:} \quad \begin{cases} \tilde{u}_i = u_i - u_i^{\gamma} \\ \tilde{\phi} = \phi - \phi^{\gamma} \end{cases}$$



În relațiile anterioare am folosit supraindexul  $\gamma$  pentru a marca și modificarea densității corpului în noua stare de echilibru  $\gamma$ . Modificarea geometriei și implicit a densității masice și a volumului în funcție de solicitările electrice sau elastice pe frontieră este o problemă foarte delicată. Problema de echilibru neliniar anterior enunțată ar trebui reformulată cu condiții pe o frontieră de echilibru necunoscută pentru a găsi funcția de deplasare  $x \rightarrow \gamma(x)$  din starea fundamentală  $\theta$  în starea de echilibru  $\gamma$ -situație foarte dificil de formalizat matematic. Dacă pentru corpurile cristaline masive modificările geometrice induse de solicitările electrice sau mecanice au un rol semnificativ sau nu asupra frecvențelor de rezonanță este o problemă discutabilă și în general dependentă de specificul aplicației; nu același lucru se poate afirma despre efectul unor astfel de solicitări asupra filmelor subțiri piezoelectrice, structuri a căror mecanism senzitiv rezidă tocmai în astfel de modificări. Asupra acestui aspect se va mai reveni pe parcursul tezei în paragraful dedicat studiului influenței perturbațiilor geometrice asupra frecvențelor de rezonanță.

În ceea ce privește efectul câmpului electroelastic  $(S_{ij}^\gamma, E_k^\gamma)$  asupra parametrilor ce descriu condițiile pe frontieră pentru vibrațiile supraimpuse stării de echilibru  $\gamma$  acesta este dependent de specificul fiecărei aplicații într-o măsură prea mare pentru a se încerca o tratare generală; de exemplu, modificarea PSF<sup>1</sup> oricărui circuit electric neliniar din circuitul oscilatorului aduce o astfel de alterare a condițiilor pe frontieră, însă o tensiune mecanică manifestată într-o zonă de vibrație inactivă a rezonatorului poate fi considerată ca fiind total neutră din acest punct de vedere.

## Razele X

Expunerea unui monocristal la radiații electromagnetice având o lungime de undă comparabilă cu distanțele interatomice din celula cristalografică de bază poate conduce la modificări structurale importante în zonele în care apar defecte de la ordinea cristalină – predominant dislocații. Aceste alterări ale structurii cristaline în zonele de defecte se manifestă la nivel macroscopic prin modificarea locală a proprietăților elastice, piezoelectrice și dielectrice. Modificările cristaline structurale sunt puternic dependente de doza de radiație și timpul de expunere. Distribuția aleatoare a defectelor de dislocație și gradul lor de stabilitate energetică face imposibilă stabilirea unei legi deterministe de estimare a modificării tensorilor de material în funcție de iradierea X.

În măsura în care mediile de contact a corpului piezoelectric au o structură internă alterabilă la iradiere X, parametrii condițiilor pe frontieră vor depinde și ei de prezența sau absența acestui tip de radiație. Este situația filmelor subțiri organice folosite ca și acoperiri senzitive în aplicații ale rezonatoarelor piezoelectrice ca și senzori chimici sau biochimici.

Geometria corpului cristalin nu este modificată prin iradiere X.

În acest paragraf am atins doar principalii factori fizici ce influențează setul de parametri  $(I_G, I_M, I_F)$ . Condițiile pe frontieră cu precădere sunt influențate de o multitudine de alți factori fizico-chimici (umiditate, gradul de interacțiune chimică a filmelor subțiri de acoperire cu gazul ambiant, parametrii circuitelor electrice exterioare rezonatorului); această influență ține însă de comportarea mediilor de contact ale corpului piezoelectric în funcție de acești factori.

---

<sup>1</sup> Punct Static de Funcționare

### § 1.3 Ecuațiile electroelastice clasice în variabilele de stare $\bar{u}$ și $\phi$

Paragraful prezintă rezultatele de bază privind modelarea câmpului electroelastic în solidul piezoelectric pornind de la ecuațiile în variabilele de stare  $\bar{u}$  și  $\phi$ . Sunt detaliate condițiile pe frontiera corpului piezoelectric și sunt expuse trăsăturile principale de rezolvare numerică a acestor ecuații prin calculul punctelor critice pentru funcționala de tip Lagrange asociată mediului piezoelectric.

În prima parte a acestui paragraf urmărim formularea ecuațiilor clasice de modelare a câmpului electroelastic în solidul piezoelectric în ipoteza condițiilor pe frontieră impuse. Vom preciza fără a demonstra, principalele rezultate obținute prin studiul acestor ecuații: teorema de unicitate a soluțiilor și teorema de ortogonalitate a modurilor elastice. Prin admiterea unor relații pe frontieră mai generale, de tipul unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi, se vor pune în evidență particularitățile ce apar față de cele enunțate în cazul clasic. Acesta va constitui subiectul celui de al doilea subparagraf.

În paragraful precedent s-a admis pe baza unor considerente de ordin intuitiv că, pentru un anumit nivel de aproximare, spectrul propriu de vibrație al unui rezonator piezoelectric depinde de mulțimea  $(I_G, I_M, I_S)$  a parametrilor geometrici, de material și ai condițiilor pe frontieră. Ultimul subparagraf pune în evidență în mod explicit această dependență prin prezentarea metodei de calcul a spectrului cu ajutorul funcționalei Lagrange asociată mediului piezoelectric. Sunt discutate deasemenea o serie de particularități teoretice și de ordin computațional a acestei metode.

#### § 1.3.1 Ecuațiile piezoelectrice clasice în situația condițiilor pe frontieră impuse

În primul paragraf al tezei au fost detaliate ipotezele simplificatorii ce conduc la forma clasică a ecuațiilor electroelastice într-un solid piezoelectric (ec 3). Menținem în continuare aceste ipoteze pentru volumul  $\Omega$  al dispozitivului.

$$\begin{cases} \rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kji} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \epsilon_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - e_{jki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$$

Condițiile pe frontieră le vom considera a fi impuse atât pentru componentele câmpului elastic cât și pentru cele electrice. Materialul piezoelectric este presupus a avea un tensor dielectric cu valori mult mai mari decât cel al mediilor exterioare astfel încât condiția de continuitate a vectorului  $\bar{D}$  pe  $fr\Omega$   $(\bar{D}_{ext} - \bar{D}_{int})\bar{n}_{ext} = \sigma_s$  o vom aproxima prin  $\bar{D}_{int}\bar{n}_{ext} = -\sigma_s$ ,  $\sigma_s$  fiind densitatea sarcinii electrice superficiale.

Detaliam aceste condiții pe frontieră și vom păstra notațiile introduse în cele ce urmează întotdeauna când vom face referire la o situație similară. Pentru a evita rescrierea acestor relații pe parcursul lucrării și pentru a face distincție între acest tip de comportare pe suprafața de frontieră și cel prezentat în următorul subparagraf vom nota generic aceste relații cu  $(\mathbf{A})_{(t)}$

Fie  $\Pi_{fr\Omega} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid \bigcup_j S_j = fr\Omega \right\}$  o partiție a suprafeței de frontieră a domeniului;

pe orice suprafață  $S_j \in \Pi_{fr\Omega}$  sunt specificate una din următoarele combinații de mărimi fizice:

- potențial electric - tensiune mecanică
- potențial electric - deplasare elastică
- inducție electrică - tensiune mecanică
- inducție electrică - deplasare elastică

- valorile impuse poartă un superscript “bară”, de exemplu:  $\bar{\Phi}, \bar{u}_i$
- apartenența unei mărimi de frontieră la o suprafață  $S_i \in fr\Omega$  se marchează cu un subscript stânga, de exemplu:  ${}_i\Phi$

(A)<sub>(t)</sub>

## 1. Condițiile electrice

- zona echipotențială electric în care există un strat infinit subțire de conductor ideal

$$\Sigma^{met} = \left\{ S_i \in fr\Omega \mid \Phi|_{S_i} = {}_i\Phi(t) \right\}, \Phi(t) \in C^2(0, \infty) \quad \text{o funcție arbitrară}$$

Pentru această zonă se impune :

$$\text{- fie potențialul electric: } \Sigma_{\Phi}^{met} = \left\{ S_p \in fr\Omega \mid \Phi|_{S_p} = {}_p\bar{\Phi}(t) \in C^2(0, \infty) \right\}$$

$$\text{- fie sarcina electrică: } \Sigma_Q^{met} = \left\{ S_r \in fr\Omega \mid \int_{S_r} \bar{D} \cdot \bar{n} ds = {}_r\bar{Q}(t) \in C^2(0, \infty), \Phi|_{S_r} = {}_r\Phi(t) \right\}$$

- zona de sarcină electrică superficială nulă

$$\Sigma^{die} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid \bar{D} \cdot \bar{n}|_{S_j} = 0 \right\}$$

## 2. Condițiile mecanice

- zona în care sunt specificate tensiunile mecanice externe

$$\Sigma_T^{mec} = \left\{ S_m \in fr\Omega \mid (T_{ij} n_j)|_{S_m} = {}_m\bar{T}_i(t) \in C^2(0, \infty) \right\}$$

- zona în care sunt impuse deplasările elastice

$$\Sigma_u^{mec} = \left\{ S_n \in fr\Omega \mid u_i|_{S_n} = {}_n\bar{u}_i(t) \in C^2(0, \infty) \right\}$$

Pentru a obține o problemă matematică bine pusă în studiul evoluției temporale a câmpului electroelastic în solidul piezoelectric este necesară precizarea condițiilor initiale:

$$u_i(x, 0) = U_i(x) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = V_i(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\phi(x, 0) = \Phi(x) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = \Xi(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$U, \Phi, V, \Xi$  sunt funcții definite pe volumul  $\Omega$  ce sunt presupuse a avea o energie finită și o anumită regularitate.

Utilizând următoarele notații putem reformula ecuațiile piezoelectrice într-o formă abstractă.

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} = L_{jk}\dot{\xi} \\ \text{condiții pe frontiera } (A)_{(t)} \\ \xi(0) = \xi_0, \dot{\xi}(0) = \xi_1 \end{cases} \quad (1)$$

cu:

$$\xi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} c_{1jk1} & c_{ijk2} & c_{ijk3} & e_{kj1} \\ c_{2jk1} & c_{2jk2} & c_{2jk3} & e_{kj2} \\ c_{3jk1} & c_{3jk2} & c_{3jk3} & e_{kj3} \\ -e_{kj1} & -e_{kj2} & -e_{kj3} & \epsilon_{jk} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \Phi \end{pmatrix} = \xi_0 \quad \text{și} \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \Xi \end{pmatrix} = \xi_1$$

Simpla observare a acestui sistem relevă o anumită particularitate matematică ce constă în cuplarea ecuațiilor de ordinul doi asociate câmpului elastic cu o ecuație independentă ce provine din condiția de divergență nulă a inducției electrice. Formal această situație se regăsește în matricea singulară  $M$ .

Deși este probabil ca un studiu matematic sistematic asupra ecuațiilor (1) să fi fost efectuat, un astfel de demers nu este cunoscut autorului, o teoremă de existență și caracterizare a soluțiilor nefiind cunoscută în literatura de specialitate de largă circulație. Studiul matematic al acestui sistem este dificil datorită formei singulare a matricii  $M$  care face imposibilă situarea acestuia într-un caz clasic al ecuațiilor de undă ce apar în fizica matematică.

Prezentăm în continuare, fără a da și demonstrația, relația de conservare a energiei electroelastice în solidul piezoelectric. Această relație are un caracter general și nu ține cont de modul de alegere a condițiilor pe frontieră.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\rho |v_i|^2 + c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \epsilon_{kj} E_k E_j^*) d\Omega = \text{Re} \left\{ \int_{f\Omega} T_{ij} n_j v_i^* ds \right\} - \text{Re} \left\{ \int_{f\Omega} \left( \Phi \frac{\partial D_k^*}{\partial t} n_k \right) ds \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (w_{EL}^{cin} + w_{EL}^{pot} + w_{ES}) d\Omega = l_{EL} + l_{ES}$$

$$w_{EL}^{cin} = \frac{1}{2} \rho_m |v_i|^2 \quad \text{densitatea volumică de energie cinetică, elastică}$$

$$w_{EL}^{pot} = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* \quad \text{densitatea volumică de energie potențială elastică}$$

$$w_{ES} = \frac{1}{2} \epsilon_{kj} E_k E_j^* \quad \text{densitatea volumică de energie electrostatică}$$

$$l_{EL} = \text{Re} \int_{f\Omega} T_{ij} n_j v_i^* ds \quad \text{fluxul energiei elastice în unitatea de timp}$$

$$l_{ES} = -\text{Re} \int_{f\Omega} \left( \Phi \frac{\partial D_k^*}{\partial t} n_k \right) ds \quad \text{fluxul energiei electrice în unitatea de timp}$$

Dacă fluxul energetic elastic și electric prin  $fr\Omega$  este nul pentru orice moment de timp  $t > 0$ , energia se conservă rămânând egală cu energia din momentul initial  $t=0$ . Această ipoteză este îndeplinită pentru condițiile pe frontieră  $(\mathbf{A})_{(t)}$  omogene, condiții întotdeauna utilizate în studiul fenomenelor de rezonanță

$$\int_{\Omega} (W_{EL}^{cin} + W_{EL}^{pot} + W_{ES})_t d\Omega = \int_{\Omega} (W_{EL}^{cin} + W_{EL}^{pot} + W_{ES})_{t=0} d\Omega$$

Pe baza relației de conservare a energiei se demonstrează unicitatea soluțiilor  $(u_i^{sol}, \phi^{sol})$  ecuației (1) până la o constantă arbitrară pentru potențialul electric sau o mișcare de translație sau rotație rigidă pentru elongațiile  $u_i$ . Vom da această demonstrație în subparagraful următor pentru cazul mai general în care condițiile pe frontieră sunt de tip diferențial.

O simplificare majoră în studiul ecuației (1) este adusă prin admiterea decuplării componente spațiale de cea temporală și presupunerea variației armonice a acesteia din urmă (ipotezele Fourier):  $\xi(x, t) = \xi_s(x) e^{jst}$   $s \in C$

Se obține astfel o ecuație independentă de timp pentru componenta spațială  $\xi_s$ .

$$\begin{cases} -s^2 M \xi_s = L_{jk} \xi_s \\ \text{conditii pe frontiera } (A)_{(s)} \end{cases} \quad (3)$$

$(\mathbf{A})_{(s)}$

(pentru a nu complica și mai mult notațiile nu s-a mai trecut subscriptul "s" pentru a marca faptul că este vorba doar de componentele spațiale ale variabilelor)

$$\Sigma^{met} = \left\{ S_i \in fr\Omega \mid \phi_{|S_i} = \Phi(j_s) \right\}, \Phi(j_s) \in C \quad \text{o constantă complexă arbitrară}$$

$$\Sigma_{\Phi}^{met} = \left\{ S_p \in fr\Omega \mid \phi_{|S_p} = \bar{\Phi}(j_s) \in C \right\}$$

$$\Sigma_Q^{met} = \left\{ S_r \in fr\Omega \mid \int_{S_r} \bar{D} \bar{n} ds = -\bar{Q}(j_s), \phi_{|S_r} = \Phi(j_s) \in C \right\}$$

$$\Sigma^{die} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid \bar{D} \cdot \bar{n}_{|S_j} = 0 \right\}$$

$$\Sigma_T^{mec} = \left\{ S_m \in fr\Omega \mid (T_{ij} n_j)_{|S_m} = \bar{T}_i(j_s) \in C \right\}$$

$$\Sigma_u^{mec} = \left\{ S_n \in fr\Omega \mid u_i|_{S_n} = \bar{u}_i(j_s) \in C \right\}$$

O consecință imediată a teoremei de conservare a energiei este următoarea proprietate: dacă fluxul energiei electroelastice prin suprafața de frontieră  $fr\Omega$  este nul la orice moment de timp atunci parametrul  $s$  nu poate avea decât valori reale.

Dacă admitem această ipoteză (de exemplu, presupunem a fi nule toate valorile impuse componentelor elastice și electrice pe frontieră) energia inițială a sistemului se conservă și rezolvarea ecuației (3) ar furniza stările staționare pentru câmpul electroelastic. Ecuația (3) nu poate fi însă pusă sub forma unei probleme clasice de valori și vectori proprii ( $-s^2 \xi_s = M^{-1} L_{jk} \xi_s$ ) întrucât matricea  $M$  nu este inversabilă. Pentru calculul stărilor staționare proprii sistemului (3) a fost necesară descrierea unei funcționale de tip Lagrange ale cărei puncte critice sunt soluții ale sistemului. Întrucât această metodă de calcul este singura riguroasă și aplicabilă pentru orice configurație geometrică și condiții

pe frontieră o vom detalia în subparagraful final al acestei părți a lucrării. În plus, ea demonstrează existența și caracterul numărabil al stărilor staționare asociate sistemului (3). O relație generală în care intervine produsul scalar între componentele elastice asociate la două stări staționare distincte (notate  $m$  și  $n$ ) este următoarea:

$$\rho_m (s_n^2 - s_m^2) \int_{\Omega} \rho_m u_i^m u_i^n d\Omega + \int_{\partial\Omega} (u_i^n T_{ij}^m - u_i^m T_{ij}^n) n_j ds + \int_{\partial\Omega} (D_i^m \phi^n - D_i^n \phi^m) n_j ds = 0$$

În ipoteza enunțată a condițiilor pe frontieră omogene este evidentă relația de ortogonalitate  $\int_{\Omega} \rho_m u_i^m u_i^n d\Omega = 0$ .

În final, vom sumariza rezultatele obținute (cele cunoscute autorului) prin studiul sistemelor de ecuații (1) printr-o comparație față de proprietățile soluțiilor ce apar în cazul unei ecuații abstracte  $\xi = K\xi$  cu operatorul  $K$  un operator autoadjunct, pozitiv definit, cu invers compact. La acest tip de ecuație abstractă pot fi aduse majoritatea situațiilor în care se studiază fenomene de rezonanță în domeniul elasticității liniare sau a electromagnetismului într-un volum finit.

$$M\xi = L\xi$$

$$\xi = K\xi$$

*Teorema de existență a soluțiilor pentru condiții inițiale arbitrare*

Nu există

Există

*Există o teoremă de unicitate a soluțiilor în ambele cazuri*

*Caracterizarea spectrală*

$$-s^2 M\xi = L\xi$$

$$-s^2 \xi = K\xi$$

*Mulțimea valorilor proprii este înfinit numărabilă în ambele cazuri*

*Mulțimea vectorilor proprii generează un subspațiu liniar dens în spațiul de definiție al problemei*

Nu

Da

rezultatul lui Lewis preluat în [25] pag 134

*Ortogonalitate între subspațiile liniare asociate la două valori proprii distincte*

Relație de ortogonalitate doar pentru componentele câmpului elastic

Da

Aceste diferențe, oarecum neașteptate, apar datorită aproximării irotazionale a câmpului electric. Din punct de vedere al caracterizării spectrale prin metode de perturbație a fost imposibilă utilizarea metodei clasice (partea finală a paragrafului 4.1) fiind necesară dezvoltarea unui model aparte, restrâns însă practic doar la aproximația liniară. Acest aspect va constitui subiectul următorului paragraf.

### § 1.3.2 Ecuațiile piezoelectrice clasice în situația condițiilor pe frontieră guvernate de o ecuație diferențială ordinară

Așa cum am precizat în primul paragraf al tezei, impunerea comportării câmpului electroelastic pe suprafața de frontieră a solidului piezoelectric conduce la imposibilitatea abordării problemelor ce țin de estimarea influenței mediilor exterioare asupra frecvențelor proprii de vibrație ale rezonatorului. Pentru a putea face o astfel de estimare este necesară modelarea interacțiunii între unda piezoelectrică și mediile externe la suprafața solidului piezoelectric într-o manieră mai generală. În mod uzual această interacțiune se admite a fi aproximată de o ecuație diferențială ordinară între componentele de câmp elastic respectiv electric. Dacă pentru câmpul electric acest gen de



aproximare este natural, el revenind la a descrie comportarea circuitului electric exterior (cu parametrul concentrați) la bornele dispozitivului piezoelectric, nu aceeași este situația pentru câmpul elastic unde dezvoltarea unui astfel de model este mult mai dificilă. În paragraful 2.1 al tezei va fi dezvoltat și discutat un astfel de model. Ordinul ecuației diferențiale ordinare ce guvernează comportarea câmpului electroelastic pe frontieră se presupune a fi mai mic sau egal cu doi; această alegere s-a făcut cu precădere ca un compromis între acuratețea rezultatelor obținute prin teoria perturbației și dificultățile de ordin matematic ce apar dacă se admite un ordin superior.

Condițiile pe suprafața de frontieră în această situație sunt următoarele (păstrăm aceleași notații pentru suprafețele partitiei  $\Pi_{\Gamma\Omega}$ ).

**(B)<sub>(t)</sub>**

pentru  $S_p \in \Sigma^{met}$ :

$${}_p\Phi(t) + {}_p q(t) {}_p\Gamma + {}_p \dot{q}(t) {}_p R + {}_p \ddot{q}(t) {}_p L = {}_p V(t)$$

$${}_p q(t) = - \int_{S_m} \vec{D} \cdot \vec{n} ds \quad {}_p\Gamma = \frac{1}{{}_p C}$$

$${}_p T_{ij}(x,t) n_j + {}_p u_i(x,t) {}_p k_i(x) + {}_p \dot{u}_i(x,t) {}_p v_i(x) + {}_p \ddot{u}_i(x,t) {}_p m_i(x) = {}_p M_i(t)$$

pentru o suprafață  $S_r \in \Sigma^{die}$

$$\vec{D}(x,t) \cdot \vec{n}(x) = 0$$

$${}_r T_{ij}(x,t) n_j + {}_r u_i(x,t) {}_r k_i(x) + {}_r \dot{u}_i(x,t) {}_r v_i(x) + {}_r \ddot{u}_i(x,t) {}_r m_i(x) = {}_r M_i(t)$$

Parametrii electrici  $C, R$  și  $L$  sunt cei obișnuiți în teoria circuitelor electrice și aproximează comportarea circuitului electric văzut la bornele dispozitivului (suprafețele de metalizare) cu un circuit  $RLC$  serie. Parametrii mecanici  $k, v$  și  $m$  modelează comportarea elastică, vâscoasă și inerțială a frontierei, descrierea în detaliu a rolului acestora o vom prezenta în paragraful 2.1 al tezei.

Este de remarcat faptul ca situația condițiilor pe frontieră impuse **(A)<sub>(t)</sub>** reprezintă o particularizare a cazului **(B)<sub>(t)</sub>** pentru o alegere particulară (valori nule sau infinite) a parametrilor ecuațiilor diferențiale.

Cu aceleași notații utilizate în subparagraful precedent, putem scrie în mod abstract problema de dinamică electroelastică în solidul piezoelectric având condiții pe frontieră de tip **(B)<sub>(t)</sub>** astfel:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} = L {}_k \dot{\xi} \\ \text{conditii pe frontiera } (B)_{(t)} \\ \xi(0) = \xi_0, \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_1 \end{cases} \quad (4)$$

Vom reformula teorema de unicitate a soluțiilor și relația de ortogonalitate a componentelor elastice pentru modurile staționare în aceasta nouă ipoteză a condițiilor frontieră.

Să presupunem că funcțiile de excitație  $V(t)$  și  $M(t)$  sunt nule iar solidul piezoelectric este la momentul inițial într-o stare inițială  $\xi_0$  sau  $\dot{\xi}_1$  nenulă. Relația (2) a conservării energiei rămâne valabilă, fluxul electric și cel elastic pot fi rescrise ținând cont de ecuațiile diferențiale pe frontieră.

$$\begin{aligned} I_{EL} &= \text{Re} \int_{\Gamma\Omega} T_{ij} n_j v_i^* ds = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma\Omega} (u_i u_i^* k_i + \dot{u}_i \dot{u}_i^* m_i) ds - \int_{\Gamma\Omega} \dot{u}_i \dot{u}_i^* v_i ds \\ I_{ES} &= -\text{Re} \int_{\Gamma\Omega} \phi \frac{\partial D_k^*}{\partial t} n_k ds = -\text{Re} \sum_r \left( {}_r \phi \int_{S_r \in \Sigma^{met}} \frac{\partial D_k^*}{\partial t} n_k ds \right) = \text{Re} \sum_r {}_r \phi {}_r \dot{q}^* = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_r ({}_r \Gamma {}_r q_r \dot{q}_r^* + {}_r L {}_r \dot{q}_r \dot{q}_r^*) - \sum_r {}_r R {}_r \dot{q}_r \dot{q}_r^* \end{aligned}$$



Relația de conservare a energiei devine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (w_{EL}^{cin} + w_{EL}^{pot} + w_{ES}) d\Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma\Omega} (k_i u_i u_i^* + m_i \dot{u}_i \dot{u}_i^*) ds + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_r (\Gamma_r q_r q_r^* + L_r \dot{q}_r \dot{q}_r^*) = - \int_{\Gamma\Omega} v_i \dot{u}_i \dot{u}_i^* ds - \sum_r R_r \dot{q}_r \dot{q}_r^* \quad (5)$$

Interpretarea acestei relații este imediată: alături de energia electroelastică în volumul piezoelectric există înmagazinată energie și la suprafața rezonatorului (situație diferită față de cazul anterior studiat când această energie era întotdeauna nulă) în parametrii reactivi ai ecuațiilor diferențiale ce guvernează dinamica pe frontieră. Pierderile energetice se manifestă deasemenea la suprafața volumului piezoelectric și apar datorită disipării în rezistența electrică și vâscozitatea mecanică asociate mediilor exterioare. Condiția de conservare a energiei sau de rezonanță implică ca aceste pierderi să fie nule:  $\int_{\Gamma\Omega} v_i \dot{u}_i \dot{u}_i^* ds - \sum_r R_r \dot{q}_r \dot{q}_r^* = 0$ .

Relația de conservare a energiei sub această formă, alături de aceste precizări, conduce la o importantă observație în legătură cu modul de studiu al rezonanței în această situație vis-a-vis de modul clasic al condițiilor pe frontieră impuse. În această ultimă situație, proiectarea unui oscilator electronic stabilizat în frecvență cu un rezonator piezoelectric trece prin următoarele două mari etape distincte:

- Analiza frecvențelor de rezonanță pentru dispozitivul piezoelectric într-un mod ideal presupunând impedanțe electrice nule sau infinite la nivelul electrozilor; stabilirea unui model electric echivalent cu parametrii concentrați ce aproximează comportarea rezonatorului piezoelectric în jurul unei frecvențe proprii de vibrație
- Proiectarea unui oscilator electronic având ca model pentru dispozitivul piezoelectric circuitul cu parametrii concentrați amintit.

Frecvența de oscilație reală se va găsi întotdeauna între o frecvență de rezonanță serie (scurt-circuit electric) și una paralel (gol electric) în funcție de impedanța electrică a circuitului electronic ce apare la bornele dispozitivului. Sursa de eroare în stabilirea precisă a frecvenței reale de oscilație este în acest caz sistematică și apare datorită cunoașterii exacte numai a două puncte (rezonanța serie și cea paralel) în traiectul frecvenței de rezonanță, frecvența de oscilație ce apare din calcul fiind o interpolare între aceste două valori în funcție de impedanța circuitului electronic în acel punct, interpolare ce poate fi bună sau mai puțin bună.

În cazul în care proiectarea pleacă de la cunoașterea impedanței circuitului electronic la bornele dispozitivului piezoelectric (situația condițiilor pe frontiera  $(\mathbf{B})_{(t)}$ ) această eroare sistematică nu mai apare, frecvența de rezonanță fiind calculată direct, în funcție de această impedanță. Devine vizibil din acest punct de vedere rolul jucat de rezistența electrică negativă simulată de componenta activă a circuitului electronic, rezistență ce preia pierderile energetice atât în volumul cât și la suprafața rezonatorului.

Relația de conservare a energiei în forma (4) permite formularea unei teoreme de unicitate a soluțiilor (în ipoteza că ele există).

### Teoremă

Dacă  $\int_{\Gamma\Omega} v_i \dot{u}_i \dot{u}_i^* ds - \sum_r R_r \dot{q}_r \dot{q}_r^* \geq 0$  și parametrii  $C$ ,  $L$ ,  $k$  și  $m$  sunt pozitivi, atunci ecuația (4) are cel mult o soluție.

Demonstrație:

Presupunem existența a două soluții  $\xi_a$  respectiv  $\xi_b$ ,  $\xi_a \neq \xi_b$  pentru ecuația (4). Notăm cu  $\chi = \xi_a - \xi_b$  diferența dintre aceste soluții. Întrucât ecuația (4) este liniară,  $\chi$  este soluție pentru o

ecuație descrisă identic în volumul domeniului  $\Omega$  dar având condiții pe frontieră  $(\mathbf{B})_{(t)}$  omogene și stări inițiale nule  $\chi(0) = 0$ ,  $\dot{\chi}(0) = 0$ .

$$\begin{cases} M\ddot{\chi} = L_{,k} \chi \\ \text{condiții pe frontiera } (B)_{(t)} \text{ omogene} \\ \chi(0) = 0, \dot{\chi}(0) = 0 \end{cases}$$

Suma dintre energia în volumul și pe suprafața solidului piezoelectric este o cantitate pozitivă ce devine nulă doar dacă soluția  $\chi$  este identic nulă pe domeniul  $\Omega$

$$\int_{\Omega} (w_{EL}^{cin} + w_{EL}^{pot} + w_{ES}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (k_i u_i u_i^* + m_i \dot{u}_i \dot{u}_i^*) ds + \sum_r (\Gamma_r q_r q_r^* + L_r \dot{q}_r \dot{q}_r^*) > 0 \text{ întrucât } \chi \neq 0$$

Cum  $\int_{\partial\Omega} v_i \dot{u}_i \dot{u}_i^* ds - \sum_r R_r \dot{q}_r \dot{q}_r^* \geq 0$  ar rezulta că energia soluției  $\chi$  este o funcție monoton descrescătoare. Întrucât  $\chi(0) = 0$  și  $\dot{\chi}(0) = 0$  singura posibilitate de îndeplinire a relației de conservare a energiei este ca soluția  $\chi$  să fie identic nulă pe domeniului  $\Omega$ ; ceea ce este evident în contradicție cu ipoteza de plecare în demonstrație.

◆

Observație: Dacă  $\int_{\partial\Omega} v_i \dot{u}_i \dot{u}_i^* ds - \sum_r R_r \dot{q}_r \dot{q}_r^* > 0$  atunci funcționala

$$\int_{\Omega} (w_{EL}^{cin} + w_{EL}^{pot} + w_{ES}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (k_i u_i u_i^* + m_i \dot{u}_i \dot{u}_i^*) ds + \sum_r (\Gamma_r q_r q_r^* + L_r \dot{q}_r \dot{q}_r^*) \text{ este o funcțională}$$

Lyapunov pentru sistemul (4) și singurul punct de stabilitate asimptotică este funcția identic nulă pe domeniul  $\Omega$ .

Cu ipotezele Fourier pentru un regim armonic permanent, sistemul de ecuații (4) devine:

$$\begin{cases} -s^2 M \xi_s = L_{,jk} \xi_s \\ \text{condiții pe frontiera } (B)_{(s)} \end{cases} \quad (6)$$

$(\mathbf{B})_{(s)}$

$$S_p \in \Sigma^{met} :$$

$${}_p \Phi(js) + [{}_p \Gamma + (js)_p R - s^2 {}_p L] {}_p q(js) = {}_p V(js)$$

$${}_p q(js) = - \int_{S_p} \bar{D}(js) \bar{n} ds$$

$${}_p T_{ij}(x, js) n(x)_j + {}_p u_i(x, js) \cdot [{}_p k_i + js {}_p v_i - s^2 {}_p m_i] = {}_p M_i(js)$$

$$S_r \in \Sigma^{die}$$

$$\bar{D} \cdot \bar{n} = 0$$

$${}_r T_{ij}(x, js) n(x)_j + {}_r u_i(x, js) \cdot [{}_r k_i + js {}_r v_i - s^2 {}_r m_i] = {}_r M_i(js)$$

Pentru condiții  $(\mathbf{B})_{(s)}$  omogene, se demonstrează precum în paragraful precedent o relație de ortogonalitate ce există între componentele câmpului elastic asociate la două stări staționare distincte ale sistemului (6).

$$\rho_m (s_n^2 - s_m^2) \int_{\Omega} u_i^m u_i^n d\Omega + \int_{\partial\Omega} (u_i^n T_{ij}^m - u_i^m T_{ij}^n) n_j ds + \int_{\partial\Omega} (D_i^m \phi^n - D_i^n \phi^m) n_i ds = 0 \text{ de aici rezultând}$$

$$\int_{\Omega} u_i^m u_i^n d\Omega = 0.$$

### §1.3.3 Funcționala Lagrange asociată mediului piezoelectric

Formulate sub forma sistemului (1) încă de la începutul acestui secol în lucrările fizicianului francez Langevin, ecuațiile ce descriu dinamica electroelastică într-un solid piezoelectric nu au avut până relativ recent (1969) o metodă variațională de studiu și calcul numeric; aceasta în situația în care pentru ecuațiile câmpului elastic sau electromagnetic astfel de formulări au fost în mod natural dezvoltate plecând de la teoria funcționalelor Lagrange și Hamilton într-o fază incipientă a descrierii câmpului elastic sau electromagnetic. Motivul pentru care o astfel de formulare variațională a fost mult mai dificilă s-ar putea să fie legat deasemenea de imposibilitatea integrării acestor ecuații în cazul standard de studiu al ecuațiilor de undă liniare într-un domeniu finit; facem referire aici la ecuația abstractă  $\dot{\xi} = K\xi$  cu operatorul  $K$  autoadjunct și pozitiv definit. Funcționala dezvoltată de Holland și EerNisse în 1969 are caracteristica principală a unei funcționale Lagrange clasice, punctele sale critice sunt soluții ale sistemului de ecuații (1), însă îi lipsesc o serie de alte proprietăți ale aceluiași gen de funcționale.

Scopul acestui paragraf este de a pune în evidență aceste particularități și de a descrie pe scurt metoda de calcul numeric asociată formalismului variațional. Pe această cale, afirmația făcută în cel de al doilea paragraf conform căreia frecvențele proprii de vibrație sunt funcții de ansamblul parametrilor  $(I_G, I_M, I_S)$  va avea o argumentație explicită.

Forma de definire a funcționalelor Hamilton și Lagrange în mecanica teoretică este următoarea.

$$H = \int_{t_{\text{min}}}^{t_{\text{max}}} (W_{\text{potentia}} + W_{\text{cinetic}}) dt \quad \text{funcționala Hamilton}$$

$$L = \int_{t_{\text{min}}}^{t_{\text{max}}} (W_{\text{cinetic}} - W_{\text{potentia}}) dt \quad \text{funcționala Lagrange}$$

Încercarea de a utiliza aceste definiții și a le particulariza pentru cazul piezoelectric este de la început nepotrivită întrucât ele conduc la expresii în care termenii de cuplaj piezoelectri dispar (datorită antisimetriei operatorului  $L_{jk}$  în constantele  $e_{ijk}$ ); densitatea energiei electroelastice potențiale nu depinde de tensorul piezoelectric.  $w_{\text{potentia}} = c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \epsilon_{kj} E_k E_j^*$

Dar, soluțiile sistemului de ecuații (1) sunt cunoscute ca depinzând și de aceste valori. În consecință, punctele critice pentru o funcțională precum următoarea nu vor fi soluții pentru ecuațiile piezoelectrice.

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_{\text{min}}}^{t_{\text{max}}} (W_{\text{cinetic}} - W_{\text{potentia}}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_m v_i^2 - T_{ij} S_{ij} - D_j E_j) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_m v_i^2 - c_{ijkl} S_{kl} S_{ij} - \epsilon_{ij} E_i E_j) d\Omega \end{aligned}$$

Punctul de plecare în deducerea unei funcționale ale cărei puncte critice să fie soluții ale ecuațiilor piezoelectrice în regim armonic permanent având condiții pe frontieră de tip  $\mathbf{A}_{(s)}$  sau  $\mathbf{B}_{(s)}$  este observația că prima variație a funcționalei următoare se anulează pentru o soluție a ecuațiilor piezoelectrice cu condiții Dirichlet pe frontieră.

$$\begin{aligned} I_v &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [h_e - \rho_m s^2 u_i^2] d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(T_{ij} S_{ij} - D_j E_j) - \rho_m s^2 u_i^2] d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + 2e_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \epsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) - \rho_m s^2 u_i^2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

$h_e$  fiind densitatea volumică a entalpiei electrice.

Întrucât entalpia electrică nu este o funcțională pozitiv definită o serie de proprietăți ale funcționalelor Lagrange clasice nu mai apar. Ne referim concret la faptul că punctele critice ale relației (7) nu sunt puncte și iar frecvența fundamentală nu minimizează funcționala următoare (câțul Rayleigh):

$$s^2 = \frac{\int_{\Omega} h_e d\Omega}{\int_{\Omega} \rho_m u_i^2 d\Omega} \quad (8)$$

Întreprins la o dată mult mai recentă, un studiu prezentat în [59] reia problema caracterizării variaționale a dinamicii electroelastice și găsește două funcționale similare celei construită de Holland și EerNisse pe baza entalpiei electrice. Prima dintre acestea folosește entalpia mecanică iar cea de a doua energia potențială internă. Aceasta din urmă are forma și proprietățile funcționalei Lagrange clasice însă ecuația  $div\bar{D} = 0$  nu mai apare explicit ca o condiție pentru punctele critice ale funcționalei ci este presupusă a fi îndeplinită automat de către funcțiile din spațiul de definiție al problemei.

$$\begin{cases} I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [w_{potentuala} - \rho_m s^2 u_i^2] d\Omega \\ div\bar{D} = 0 \end{cases}$$

De remarcat că în această situație, frecvența fundamentală minimizează câțul Rayleigh, energia potențială fiind pozitiv definită.

$$\begin{cases} s^2 = \inf_{u_i} \frac{\int_{\Omega} w_{potentuala} d\Omega}{\int_{\Omega} \rho_m u_i^2 d\Omega} \\ div\bar{D} = 0 \end{cases}$$

Abordarea numerică a expresiei de mai sus este însă greu abordabilă întrucât funcțiile  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ , din spațiul de test ar trebui să îndeplinească condiția corespunzătoare divergenței nule a inducției câmpului electric:

$$\frac{1}{2} e_{ijk} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) + \epsilon_{ij} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_j} = 0$$

Revenind la construcția propusă de Holland și EerNisse, pentru a obține și condițiile pe frontieră generale, funcționalei (7) acestea i se atașează o serie de integrale pe suprafață.

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ (T_{ij} S_{ij} - D_k E_k) - \rho s^2 u_i u_i \right] d\Omega - \sum_n \int_{S_n^*} [T_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i)] ds - \\ & \left. \sum_m \int_{S_m^T} (\bar{T}_i u_i) ds - \sum_p \int_{S_p^{\Phi}} [D_k n_k (\Phi - \bar{\Phi})] ds - \sum_r \left\{ \int_{S_r^f} [D_k n_k (\Phi - \bar{\Phi})] ds + \bar{q}_r \Phi \right\} \right. \end{aligned} \quad (9)$$

sau desfășurat:

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + 2e_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \epsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) - \rho s^2 u_i^2 \right] d\Omega - \\ & - \sum_n \int_{S_n^*} \left[ \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{kij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) n_j (u_i - \bar{u}_i) \right] ds - \sum_m \int_{S_m^T} (\bar{T}_i u_i) ds \end{aligned}$$

$$+ \sum_p \int_{S_p^\phi} \left( \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} - e_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left[ n_k (\Phi - \bar{\Phi}) \right] ds +$$

$$+ \sum_r \left\{ \int_{S_r'} \left[ \left( \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} - e_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_k (\Phi - \Phi) \right] ds + \bar{q}_r \Phi \right\}$$

Funcționala  $I$  este definită pe  $[H^1(\Omega)]^4 \cup C^K$  și ia valori în  $C$ ;  $K$  reprezintă numărul suprafețelor metalizate  $S_r$ , pe care este impusă valoarea sarcinii electrice.

Pentru a estima punctele critice ale acestei funcționale să considerăm o suită de mulțimi aproximante  $X_n$  pentru spațiul de definiție  $[H^2(\Omega)]^4 \cup C^K$ . Structura acestor mulțimi este următoarea:

$$X_n = V_n^{\bar{u}} \cup V_n^\phi \cup C^K$$

cu  $V_n^{\bar{u}} \subset [H^1(\Omega)]^3$  un subspațiu liniar de dimensiune  $M$

$V_n^\phi \subset [H^1(\Omega)]$  un subspațiu liniar de dimensiune  $N$

Spațiile  $V_n^{\bar{u}}$  și  $V_n^\phi$  sunt alese astfel încât, la limita pentru  $M \rightarrow \infty$  și  $N \rightarrow \infty$  reuniunea lor constituie un spațiu liniar dens în  $[H^1(\Omega)]^4$ . Acelor spații aproximante le asociem o bază astfel:

$$B_n^{\bar{u}} = \{u_{i\alpha}^n \quad \alpha \in 1 \dots M\} \text{ pentru } V_n^{\bar{u}}$$

$$B_n^\phi = \{\phi_\beta^n \quad \beta \in 1 \dots N\} \text{ pentru } V_n^\phi$$

Proiecția unei funcții arbitrare  $\xi \in [H^1(\Omega)]^4$  pe  $V_n^{\bar{u}} \cup V_n^\phi$  o notăm cu  $\xi^n$ .

$$u_i^n = \sum_{\alpha=1}^M a_\alpha^n u_{i\alpha}^n$$

$$\phi^n = \sum_{\alpha=1}^N b_\alpha^n \phi_\alpha^n$$

Notăm cu  $I^n$  aproximanta funcționalei  $I$ ,  $I^n: M_n \rightarrow C$ . Expresia acesteia în funcție de funcțiile bazelor  $B_n^{\bar{u}}$ ,  $B_n^\phi$  și necunoscutele  $\phi^r$  este următoarea:

$$I_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^M a_\alpha^n a_\beta^n [P_{EL}(\alpha, \beta) - s^2 C_{EL}(\alpha, \beta)] - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N b_\alpha^n b_\beta^n P_{ES}(\alpha, \beta)$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^N a_\alpha^n b_\beta^n J(\alpha, \beta) + F_{EL}(\alpha, \beta) + F_{ES}(\alpha, \beta, \phi_r)$$

$$P_{EL}(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial u_{i\alpha}^n}{\partial x_j} \frac{\partial u_{k\beta}^n}{\partial x_l} d\Omega \quad \text{matricea potențială elastică}$$

$$C_{EL}(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} \rho_m u_{i\alpha}^n u_{i\beta}^n d\Omega \quad \text{matricea cinetică elastică}$$

$$P_{ES}(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi_{\alpha}^n}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_{\beta}^n}{\partial x_j} d\Omega \quad \text{matricea potențială electrostatică}$$

$$J(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} e_{kij} \frac{\partial u_{i\alpha}^n}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_{\beta}^n}{\partial x_k} d\Omega \quad \text{matricea de transfer piezoelectrică}$$

$$F_{EL}(\alpha, \beta) = - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^M a_{\alpha}^n a_{\beta}^n \sum_n \int_{S_n} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial u_{k\alpha}^n}{\partial x_l} n_j (u_{i\beta}^n - \bar{u}_i) \right] ds +$$

$$- \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^M b_{\alpha}^n a_{\beta}^n \sum_n \int_S \left[ e_{kij} \frac{\partial \phi_{\alpha}^n}{\partial x_k} n_j (u_{i\beta}^n - \bar{u}_i) \right] ds - \sum_{\alpha=1}^M a_{\alpha}^n \sum_m \int_{S_m^T} \left( \bar{T}_i u_{i\alpha}^n \right) ds$$

$F_{EL}(\alpha, \beta)$  matricea de frontieră elastică

$$F_{ES}(\alpha, \beta) = - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^N a_{\alpha}^n b_{\beta}^n \sum_p \int_{S_p} e_{kij} \frac{\partial u_{i\alpha}^n}{\partial x_j} n_k (\Phi_{\beta}^n - \bar{\Phi}) ds + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N b_{\alpha}^n b_{\beta}^n \sum_p \int_{S_p} \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi_{\alpha}^n}{\partial x_j} n_k (\Phi_{\beta}^n - \bar{\Phi}) ds$$

$$- \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\beta=1}^N a_{\alpha}^n b_{\beta}^n \sum_r \int_S e_{kij} \frac{\partial u_{i\alpha}^n}{\partial x_j} n_k (\Phi_{\beta}^n - \bar{\Phi}) ds + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N b_{\alpha}^n b_{\beta}^n \sum_r \int_S \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi_{\alpha}^n}{\partial x_j} n_k (\Phi_{\beta}^n - \bar{\Phi}) ds + \bar{q}_r \Phi$$

$F_{EL}(\alpha, \beta, r, \phi)$  matricea de frontieră electrică

Prin înlocuirea în expresiile matricilor de frontieră a relațiilor de legătură corespunzătoare condițiilor  $\mathbf{B}_{(t)}$  dependența frecvențelor de rezonanță de parametrii ecuațiilor diferențiale ce guvernează dinamica electroelastică la suprafața solidului devine imediat vizibilă. Punctele critice

pentru funcționala  $I^n$  se află printre soluțiile sistemului linear:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_n}{\partial a_{\alpha}^n} = 0, \alpha = 1 \dots M \\ \frac{\partial I_n}{\partial b_{\beta}^n} = 0, \beta = 1 \dots N \\ \frac{\partial I_n}{\partial \bar{\phi}_r} = 0, r = 1 \dots K \end{cases}$$

Pentru cazurile de interes practic s-a demonstrat [25] că rezolvarea sistemului anterior revine la rezolvarea unei probleme de vectori și valori proprii pentru o matrice simetrică deci întotdeauna diagonalizabilă. De aici, prin trecere la limită pentru  $n \rightarrow \infty$  rezultatul important al existenței soluțiilor sistemelor de ecuații (1) sau (3).



## §1.4 Modelul de perturbație Sinha-Tiersten

Se prezintă deducerea expresiei de perturbație liniare prin utilizarea relațiilor de reciprocitate a ecuațiilor piezoelectrice și cea a potențialelor Green. Această metodă din urmă este analizată în detaliu pe un caz abstract pentru a se reliefa dificultățile în determinarea estimatorilor de ordin superior pentru frecvențele proprii perturbate.

În paragraful precedent s-au reliefat o serie de particularități ce apar în studiul ecuațiilor electroelastice în solidul piezoelectric, particularități ce se datorează formei nestandard a acestora ca și ecuații de undă. Această formă nestandard conduce deasemenea la imposibilitatea aplicării teoriei de perturbație spectrale specifică fenomenelor clasice ondulatorii. Din acest motiv, pentru studiul influenței ce o are ușoara alterare a parametrilor de material  $I_M$  și suprafață  $I_S$  asupra spectrului de rezonanță al unui rezonator piezoelectric a fost dezvoltată o metodă teoretică specifică de către Sinha și Tiersten la sfârșitul anilor 70 [56]. Punctul de pornire al construcției acestui model de studiu îl constituie o metodă generală de analiză a perturbațiilor în operatorii specifici mecanicii cuantice, metodă bazată pe formalismul funcțiilor Green [38]. Principalul neajuns al acestui model de perturbație îl constituie imposibilitatea deducerii practice a unei relații de estimare de ordin superior celui liniar pentru spectrul de vibrație alterat al rezonatorului piezoelectric. Demonstrarea explicită a acestei ultime afirmații va constitui subiectul principal al acestui paragraf.

Ipotezele de lucru utilizate în articolul lui Sinha și Tiersten pot părea dintr-un punct de vedere strict matematic, extinse asupra unor rezultate insuficient cunoscute (ne referim aici la cele discutate în paragraful precedent, pagina 26) însă relația finală obținută este, în limitele aproximației câmpului electric irotațional, corectă. Această siguranță provine din concordanța cu rezultatul ce provine din relațiile de reciprocitate obținute pentru ecuațiile elasto-electromagnetice în solidul piezoelectric, relații [1] obținute anterior modelului de perturbație Sinha-Tiersten. Aceste relații de reciprocitate se pot deduce ușor plecând și de la ecuațiile electroelastice în materiale piezoelectrice, însă modul de deducere comportă în începutul raționamentului o ambiguitate majoră. Vom începe acest paragraf prin a prezenta pe scurt această deducere. Încercăm pe această cale să motivăm interesul pentru ridicarea neclarităților specifice acestor metode clasice prin reformularea ecuațiilor electroelastice într-o manieră compatibilă cu teoria clasică a fenomenelor ondulatorii. Așa cum am precizat în paragraful introductiv al tezei, capitolul trei va fi dedicat acestei teme.

### Relația de reciprocitate pentru ecuațiile electroelastice:

Păstrăm notațiile utilizate în paragrafele precedente și scriem ecuațiile electroelastice în volumul piezoelectric  $\Omega$  în ipoteza unui regim armonic permanent. Condițiile pe frontieră le considerăm arbitrare însă liniare și nu le vom specifica în mod explicit.

$$\begin{cases} \rho_m s^2 u_i^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_k} D_k = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

Să presupunem că materialul și condițiile pe frontieră suferă o modificare ușoară astfel încât noile frecvențe proprii de vibrație rămân apropiate de valorile originale. Domeniul  $\Omega$  și densitatea

masică  $\rho_m$  rămân invariante. Mărimile specifice acestor noi stări staționare ale sistemului le vom nota cu superscriptul  $\sim$ .

$$\begin{cases} \rho_m \tilde{s}^2 \tilde{u}_i^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{T}_{ij} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{D}_k = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \Omega \quad (2)$$

Prima operație necesară în deducerea relațiilor de reciprocitate corecte este arbitrară. Este vorba de înmulțirea cu  $-1$  a ecuației ce provine din relația de conservare a sarcinii electrice  $div \tilde{D} = 0$ . În continuare, relația (1) se înmulțește scalar cu  $\tilde{\xi} = (\tilde{u}_i, \tilde{\phi})$  iar relația (2) cu  $\xi = (u_i, \phi)$ .

$$\left\langle \rho_m s^2 u_i, \tilde{u}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}, \tilde{u}_i \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} D_k, \tilde{\phi} \right\rangle = 0 \quad (3)$$

$$\left\langle \rho_m \tilde{s}^2 \tilde{u}_i, u_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{T}_{ij}, u_i \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{D}_k, \phi \right\rangle = 0 \quad (4)$$

Prin scăderea relației (3) din relația (4) și utilizarea aproximațiilor liniare pentru tensiunile mecanice și inducția electrică se obține următoarea relație aproximativă pentru deviația relativă a unei frecvențe de vibrație asociate unei stări staționare a sistemului perturbat.

$$\frac{\Delta s}{s} \approx -\frac{P_V}{2W_{cin}} - \frac{P_S}{2W_{cin}} = -\frac{P_V + P_S}{W} \quad (5)$$

cu:

$$\Delta s = \tilde{s} - s, \quad \Delta c_{ijkl} = \tilde{c}_{ijkl} - c_{ijkl}, \quad \Delta e_{kij} = \tilde{e}_{kij} - e_{kij}, \quad \Delta \epsilon_{jk} = \tilde{\epsilon}_{jk} - \epsilon_{jk}$$

$$P_V = \int_{\Omega} \left[ \Delta c_{ijkl} S_{ij}^* S_{kl} - \Delta e_{kij} (S_{ij}^* E_k + S_{ij} E_k^*) - \Delta \epsilon_{jk} E_j E_k^* \right] d\Omega \quad \text{termenul perturbației de volum}$$

$$P_S = \int_{f\Omega} \left[ (t_{ij} n_j \tilde{u}_i^* - \tilde{t}_{ij} n_j u_i^*) + (D_k n_k \tilde{\phi}^* - \tilde{D}_k n_k \phi^*) \right] ds \quad \text{termenul perturbației de suprafață}$$

$$W_{cin} = \int_{\Omega} (\rho_m |v_i|^2) d\Omega = s^2 \int_{\Omega} (\rho_m |u_i|^2) d\Omega \quad \text{energia cinetică pentru starea neperturbată}$$

$$W = \int_{\Omega} (\rho_m |v_i|^2 + S_{ij}^* T_{ij} + D_k E_k^*) d\Omega = \int_{\Omega} (\rho_m |v_i|^2 + c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \epsilon_{jk} E_j E_k^*) d\Omega \quad \text{energia totală}$$

În cursul deducerii (o prezentare în detaliu se găsește în [1] sau [52]) nu se fac presupuneri referitoare la forma de “apropiere” dintre stările staționare originale și perturbate ci doar se consideră că această distanță este suficient de mică pentru ca relația (5) să aibă o valoare de adevăr suficientă. Încercarea de a deduce această formă de apropiere pe baza unui formalism de perturbație polinomială relevă însă imediat că relația (5) este veridică doar pentru o vecinătate de tip liniar între stările staționare ale sistemului.

Am afirmat că această demonstrație are în începutul raționamentului o operație arbitrară. Dacă înmulțirea cu  $-1$  a relației de conservare a sarcinii electrice nu se face și se procedează într-un mod analog celui descris, se obține un rezultat de perturbație eronat ce nu conține termenii de cuplaj electroelastic  $\Delta e_{kij} (S_{ij}^* E_k + S_{ij} E_k^*)$ . Relația (5) poate fi scrisă sub următoarea formă sugestivă din punct de vedere al comparației cu cea regăsită în cazul relației de perturbație liniară specifică ecuațiilor generale de undă.

$\frac{\Delta s}{s} \approx -\frac{\Delta H + P_s}{W}$  prin  $\Delta H = P_v$ , notându-se diferența între valoarea entropiei electrice specifice celor două stări staționare.

Pentru ecuațiile generale de undă relația de perturbație are următoarea formă:

$\frac{\Delta s}{s} \approx -\frac{\Delta W_{pot} + P_s}{W}$   $\Delta W_{pot}$  fiind diferența între energiile potențiale specifice celor două stări staționare.

Regăsim astfel o situație similară celei întâlnite în deducerea funcționalei Lagrange când energia potențială este înlocuită cu entalpia electrică.

### Teoria de perturbație Sinha-Tiersten

Ideea demonstrației utilizate de cei doi cercetători americani provine de la o metodă de perturbație utilizată în mecanica cuantică [38]. Prezentăm punctele principale ale acestei metode adaptate pentru o ecuație abstractă similară celei piezoelectrice și particularizăm cele obținute pentru cazul concret piezoelectric doar în faza finală a demonstrației fără a relua deducerea clasică a acesteia. Din modul de construcție al estimatorului pentru o funcție proprie perturbată vom pune în evidență ineficiența acestei metode în determinarea corecțiilor de ordin superior celui liniar.

Există ipoteze matematice în cele ce urmează ce nu sunt explicit specificate. Întrucât scopul urmărit este de a demonstra dificultatea utilizării acestei metode în construcția estimatorilor de ordin superior vom insista asupra unor argumente aplicabile relației finale și nu vom insista asupra rigurozității matematice.

Fie  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un operator liniar cu valori într-un spațiu Hilbert  $H$  de funcții definite pe un domeniu  $\Omega \subset R$ . Presupunem că acest operator are un spectru discret  $\sigma(A) = \{\lambda_i \in R\}_{i \in N}$ , și că mulțimea combinațiilor lineare ale funcțiilor proprii atașate acestui operator  $\psi^j$  constituie un subspațiu dens în  $H$ . În plus, admitem existența unei soluții, în sensul distribuțiilor pentru  $\forall \lambda \in R$ , a ecuației funcționale:

$$(A - \lambda I) \chi_R(\lambda) = \delta_R \quad (6)$$

$\delta_R$  funcționala Dirac "poziționată" într-un punct arbitrar  $R$  în domeniul  $\Omega$ .

Distribuția  $G_R(x) = G(x - R)$  o presupunem de tip funcție și reprezintă potențialul Green, translatat în punctul  $R$ , al operatorului  $A$ .

Descompunem funcția de potențial  $G$  după mulțimea funcțiilor proprii  $\psi^j$ :

$$G(\lambda) = \sum_j g_j(\lambda) \psi^j$$

Aplicarea egalității funcționale (6) asupra unei funcții proprii  $\psi^k$  duce la următoarea relație pentru coeficienții descompunerii  $g_j(\lambda)$ :  $g_k(\lambda) = \frac{\psi^k(0)}{\lambda_k - \lambda}$  în ipoteza că setul de funcții proprii  $\psi^j$  este ortonormat.

Să considerăm în continuare un operator  $A_p$  având caracteristici similare operatorului  $A$ . Operatorul  $A_p$  se presupune a fi "apropiat" de operatorul  $A$  în sensul existenței unei relații de apropiere între valorile și funcțiile proprii corespunzătoare acestor doi. Următorul raționament ce

pornește de la egalitatea funcțională (6) și identitatea spectrală  $(A_p - \lambda_j^p I)\psi_p^j = 0$  determină o relație utilă în construcția unui estimator liniar pentru valorile proprii  $\lambda_j^p$  în funcție de  $\lambda_j$ .

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)G_R(\lambda)\{\psi_p^k\} &= \delta_R\{\psi_p^k\} \\ \langle (A_p - \lambda_k^p I)\psi_p^k, G_R(\lambda) \rangle_H &= 0 \\ (A - \lambda I)G_R(\lambda)\{\psi_p^k\} - \langle (A_p - \lambda_k^p I)\psi_p^k, G_R(\lambda) \rangle_H &= \psi_p^k(R) \end{aligned}$$

Subscriptul  $R$  atașat unei funcții proprii înseamnă translatarea acesteia cu vectorul  $R$ :  $\psi_R^j(x) = \psi^j(x - R)$

$$\sum_j g_j(\lambda) \left[ \langle A\psi_R^j, \psi_p^k \rangle_H - \langle A_p\psi_p^k, \psi_R^j \rangle_H + (\lambda_k^p - \lambda) \langle \psi_p^k, \psi_R^j \rangle_H \right] = \psi_p^k(R) \quad \text{relații adevărate pentru}$$

$$\forall \lambda \in R - \sigma\{A\}$$

$$\text{Se alege } \lambda = \lambda_k^p \Rightarrow \psi_p^k(R) = \sum_j \frac{\psi^j(0)}{\lambda_j - \lambda_k^p} \left[ \langle A\psi_R^j, \psi_p^k \rangle_H - \langle A_p\psi_p^k, \psi_R^j \rangle_H \right] \quad (7)$$

Operatorul perturbat îl scriem în forma:  $A_p = A + \varepsilon P$ ,  $\varepsilon \in (0,1)$  cu  $P$  operatorul de perturbație aditivă, iar valorile proprii  $\lambda_j^p$  și funcțiile proprii  $\psi_j^p$  le considerăm a avea o dependență analitică de parametrul  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \lambda_j^p &= \lambda_j + \varepsilon \lambda_j^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^m \lambda_j^{(m)} + \dots \\ \psi_p^j &= \psi^j + \varepsilon \psi_{(1)}^j + \varepsilon^2 \psi_{(2)}^j + \dots + \varepsilon^m \psi_{(m)}^j + \dots \end{aligned}$$

Expresia (7) devine:

$$\begin{aligned} \psi_p^k(R) + \varepsilon \psi_{(1)}^k(R) + \varepsilon^2 \psi_{(2)}^k(R) + \dots &= \sum_j \frac{\psi^j(0)}{\lambda_j - (\lambda_k + \varepsilon \lambda_k^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_k^{(2)} + \dots)} \left[ \langle A\psi_R^j, (\psi^k + \varepsilon \psi_{(1)}^k + \varepsilon^2 \psi_{(2)}^k + \dots) \rangle_H \right. \\ &\left. - \langle (A + \varepsilon P)(\psi^k + \varepsilon \psi_{(1)}^k + \varepsilon^2 \psi_{(2)}^k + \dots), \psi_R^j \rangle_H \right] = \sum_j \psi^j(0) \frac{\varepsilon \langle P(\psi^k + \varepsilon \psi_{(1)}^k + \varepsilon^2 \psi_{(2)}^k + \dots), \psi_R^j \rangle_H}{\lambda_j - (\lambda_k + \varepsilon \lambda_k^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_k^{(2)} + \dots)} \end{aligned} \quad (8)$$

Superscriptul ! aplicat ultimei egalități marchează îndeplinirea ipotezei de simetrie a operatorului  $A$ ; simetrie întotdeauna prezentă în cazul operatorilor de tip Hamilton din fizică însă absentă în cazul ecuațiilor piezoelectrice. Simetria în acest caz apare doar pentru componentele câmpului elastic.

Termenul drept al egalității este o funcție rațională de  $\varepsilon$  de tipul  $\frac{Q(\varepsilon)}{R(\varepsilon)}$  cu  $Q$  și  $R$  polinoame de același grad. Teoretic această funcție rațională poate fi rescrisă sub o formă polinomială însă forma complicată a dezvoltării împiedică orice manipulare ulterioară a coeficienților (ne referim aici cu precădere la cazul specific al ecuațiilor piezoelectrice) pentru a fi format un sistem util în evaluarea corecțiilor  $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \lambda_j^{(3)} \dots$  și  $\psi_{(1)}^j, \psi_{(2)}^j, \psi_{(3)}^j \dots$ . Fără a recurge la această descompunere explicită, există o metodă simplă de aflare a corecției de ordinul întâi pentru  $\lambda_j^{(1)}$ . Etapele acestei metode sunt următoarele:

- i. valoarea proprie perturbată  $\lambda_k^p$  este considerată suficient de apropiată de valoarea inițială  $\lambda_k$  pentru ca în suma  $\sum_j \psi^j(0) \frac{\varepsilon \langle P(\psi^k + \varepsilon \psi_{(1)}^k + \varepsilon^2 \psi_{(2)}^k + \dots), \psi_R^j \rangle_H}{\lambda_j - (\lambda_k + \varepsilon \lambda_k^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_k^{(2)} + \dots)}$  termenii corespunzători la  $j \neq k$  să poată fi ignorați
- ii.  $\psi^k(R) \approx \psi^k(0) \frac{\langle P\psi^k, \psi_R^k \rangle}{\lambda_k^{(1)}} \quad \forall R \in \Omega$
- iii.  $\lambda_k^{(1)} \approx \langle P\psi^k, \psi_R^k \rangle$

Să revenim acum la situația concretă a sistemului de ecuații electroelastic clasic pentru solidul piezoelectric în ipoteza absenței oricăror pierderi în volumul sau pe suprafața rezonatorului. Se consideră sistemul într-o stare staționară armonică cu pulsația  $\omega$ .

$$\begin{cases} \rho_m \omega^2 u_i^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kji} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \varepsilon_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - e_{kji} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$$

În forma abstractă  $(\omega^2 M + L_{jk}) \xi = 0$  menținem notațiile utilizate în paragraful precedent.

Întrucât s-a presupus că fluxul energetic la suprafața rezonatorului este nul,

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\mu\Omega} T_{ij} n_j v_i^* ds \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \int_{\mu\Omega} \left( \Phi \frac{\partial D_k^*}{\partial t} n_k \right) ds \right\} = 0$$

între componentele câmpului elastic există relația de ortonormalitate precizată în paragraful precedent:  $\int_{\Omega} \rho_m u_i^m u_i^n d\Omega = \delta_{mn}$ .

Pe baza supoziției că mulțimea combinațiilor liniare ale părții elastice a funcțiilor proprii -  $\psi^j = (u_1^j, u_2^j, u_3^j, \phi^j)$  generează un subspațiu dens în  $[L^2(\Omega)]^3$  Sinha și Tiersten construiesc o metodă de perturbație pentru ecuațiile piezoelectrice urmând o cale similară algoritmului prezentat. Ecuațiile funcționale de la care demonstrația pornește sunt următoarele:

$$\begin{aligned} [\tilde{L}_{jk} + \tilde{\omega}_m^2 M] \tilde{\psi}^m &= 0 & \tilde{L}_{jk} &= L_{jk} + P \\ [L_{jk} + \omega^2 M] G_R(\omega) &= \delta_R \end{aligned}$$

Relația finală (forma concretă a relației 7 corespunzătoare ecuațiilor piezoelectrice) de la care se pleacă în evaluarea estimatorului liniar pentru pulsația perturbată  $\tilde{\omega}$  se deduce a fi:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^m(R) &= \sum_n \frac{u_i^n}{(\omega_n^2 - \tilde{\omega}_m^2)} \left[ \int_{\Omega} \Delta c_{ijkl} \tilde{S}_{kl}^m(x) S_{ij}^n(x-R) - \Delta e_{kij} (\tilde{S}_{ij}^m(x-R) E_k^n(x) + S_{ij}^n(x) \tilde{E}_k^m(x-R)) - \Delta \varepsilon_{jk} \tilde{E}_j^m(x) E_k^n(x-R) \right] d\Omega \\ &+ \int_{\mu\Omega} \left( t_{ij}^m(x) n_j \tilde{u}_i^n(x-R) - \tilde{t}_{ij}^n(x-R) n_j u_i^m \right) + \left( D_k^m(x) n_k \tilde{\phi}^n(x-R) - \tilde{D}_k^n(x-R) n_k \phi^m(x) \right) ds \end{aligned}$$

Variația de ordinul I a pulsației perturbate se obține din ecuația:  $\frac{H_m}{(\omega_m^2 - \tilde{\omega}_m^2)} = 1$  unde prin  $H_m$  s-a notat variația entalpiei electrice în starea staționară  $m$ .

$$H_m = \int_{\Omega} \Delta c_{ijkl} \tilde{S}_{kl}^m S_{ij} - \Delta e_{kij} (\tilde{S}_{ij}^m E_k^m + S_{ij} \tilde{E}_k^m) - \Delta \epsilon_{jkl} \tilde{E}_j^m E_k^m d\Omega + \int_{\Gamma\Omega} (t_{ij}^m n_j \tilde{u}_i^m - \tilde{t}_{ij}^m n_j u_i^m) + (D_k^m n_k \tilde{\phi}^m - \tilde{D}_k^m n_k \phi^m) ds$$

Ținând cont că:  $\tilde{\omega}_m^2 - \omega_m^2 \approx 2\omega_m(\tilde{\omega}_m - \omega_m)$  expresia finală pentru deviația liniară a pulsației este identică cu cea obținută în cazul deducerii prin metoda relațiilor de reciprocitate:

$$\frac{\tilde{\omega}_m - \omega_m}{\omega_m} = \frac{\int_{\Omega} \Delta c_{ijkl} \tilde{S}_{kl}^m S_{ij} - \Delta e_{kij} (\tilde{S}_{ij}^m E_k^m + S_{ij} \tilde{E}_k^m) - \Delta \epsilon_{jkl} \tilde{E}_j^m E_k^m d\Omega}{2\omega_m^2} + \frac{\int_{\Gamma\Omega} (t_{ij}^m n_j \tilde{u}_i^m - \tilde{t}_{ij}^m n_j u_i^m) + (D_k^m n_k \tilde{\phi}^m - \tilde{D}_k^m n_k \phi^m) ds}{2\omega_m^2} \quad (9)$$



Piezoelectricitatea este un fenomen ce cuplează componenta electrică a câmpului electromagnetic cu câmpul elastic în cristalele ce nu au o celulă cristalografică centro-simetrică. Ipotezele simplificatoare ce sunt acceptate pentru a ajunge la un set de ecuații ce poate fi analizat matematic cu o relativă ușurință sunt aproximația câmpului electric irotațional și invarianța geometriei solidului piezoelectric în cursul mișcării. Acest prim capitol a fost dedicat precizării cadrului actual de studiu în care este abordată modelarea dinamicii electroelastice în solidul piezoelectric admițând ipotezele simplificatoare amintite.

Întrucât subiectul tezei necesită o formulare precisă a chestiunilor legate de analiza spectrului de vibrație în rezonatoarele cu undă de volum, am descris ce determină acest spectru și cum îl putem calcula. Mai precis, legile de material, comportarea câmpului electroelastic pe frontieră și forma geometrică a rezonatorului fiind caracteristicile ce definesc în mod exclusiv acest spectru am convenit să le privim sub forma a trei mulțimi de parametri  $I_M$ ,  $I_S$  și  $I_G$  fiecare dintre acestea contribuind la aproximarea după o anumită legitate a fenomenului sau realității fizice ce le-a generat.

Parametrii de material sunt cei ce provin din modelarea legilor piezoelectrice de interdependență între  $S_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $E_i$  și  $D_i$ . În ipoteza în care între aceste mărimi considerăm a exista o simultaneitate de tip cauză-efect, relațiile de aproximare general acceptate și utilizate sunt cele polinomiale. În măsura în care se dorește un nivel mai fin de acoperire a realității fizice, de exemplu pierderile energetice în volumul piezoelectric, această ipoteză de simultaneitate nu mai poate fi aplicată, retardarea cauză-efect este strict necesar a fi luată în calcul iar relațiile de legătură trebuie scrise în această situație sub forma ecuațiilor diferențiale ordinare. Față de acest tip de aproximare clasic, propunem unul alternativ bazat pe seriile convoluționale Volterra. Această manieră de a modela legile de material privindu-le ca operatori neliniari continui cu memorie descrescătoare (de exemplu  $T_{ij}(S_{kl}, E_k)$  și  $D_i(S_{jk}, E_j)$ ) și apoi de a-i aproxima printr-o dezvoltare trunchiată într-o serie convoluțională Volterra, a fost folosită în teoria elasto-plasticității și a câmpului electromagnetic ea făcând vizibilă matematic relația fizică generală de retardare între fenomenele de tip cauză-efect.

Parametrizarea geometrică nu am tratat-o întrucât reprezintă un fenomen bine cunoscut și studiat, în plus pentru cele urmează nu are o relevanță deosebită.

Condițiile pe frontieră am convenit să le privim sub forma unor ecuații diferențiale ordinare de ordin maxim 2 între mărimile de câmp elastic respectiv electric. Motivația acestui model am prezentat-o intuitiv ca fiind legată de interacțiunile de tip elastic, disipativ și inerțial sau corespondențele lor electrice ce există între unda electroelastică la suprafața de contact între solidul piezoelectric și mediile externe. Un studiu riguros de motivare a acestei alegeri pentru componentele elastice este întreprins în paragraful 2.2 al celui de al doilea capitol.

Problema spectrală a fost formulată în această manieră a dependenței de cele trei seturi de parametri  $I_M$ ,  $I_S$  și  $I_G$  întrucât în capitolul următor efectul factorilor fizici externi de perturbație (temperatură, câmpuri elastice sau electrice staționare supraimpuse vibrațiilor piezoelectrice, modificări ale mediilor de contact) a fost privit ca alterând în primul rând acești parametri, perturbarea frecvențelor proprii de vibrație fiind o consecință. Studiul problemei spectrale în acest mod decorelat sperăm să fie unitar și să aducă un plus de claritate întrucât de la un anumit nivel al analizei nu mai interesează ce factor fizic a modificat parametrii  $I_M$ ,  $I_S$  și  $I_G$  ci doar efectul lui asupra acestora.

Pentru calculul spectrului de vibrație al unui rezonator piezoelectric am prezentat metoda funcționalei Lagrange asociată dinamicii electroelastice liniare propusă de Holland și EerNisse aceasta fiind probabil unica metodă aplicabilă problemelor tridimensionale fundamentată teoretic riguros.

Paragraful din finalul capitolului este dedicat teoriei de perturbație Sinha-Tiersten. Modul în care am redat această teorie este diferit de cel prezentat în articolul original al lui Sinha și Tiersten întrucât și scopul urmărit este altul. Am reluat întreaga construcție teoretică la un nivel abstract, și am arătat pe această cale că este imposibilă practic construcția estimatorilor de ordin mai mare ca cel liniar pornind de la aceasta teorie.

Ceea ce a fost expus în acest capitol este în mare măsură cunoscut în literatura de specialitate, efortul autorului fiind îndreptat cu precădere în a identifica zonele în care teoria clasică a dinamicii electroelastice în solidul piezoelectric este incertă în comparație cu rezultatele similare clare ce sunt oferite de studiul ecuațiilor de undă abstracte într-un domeniu fizic finit -ecuațiile electromagnetice sau ale elasticității fără pierderi de exemplu. Este vorba concret, de absența unei teoreme de existență generală pentru soluțiile ecuațiilor piezoelectrice, de lipsa unui rezultat în ceea ce privește completitudinea spațiului liniar generat de modurile proprii de vibrație, o formă neobișnuită a funcționalei Lagrange (partea energiei potențiale electroelastice este înlocuită cu entalpia electrică, o funcțională ce nu este pozitiv definită), imposibilitatea practică de a construi estimatori spectrali de ordin superior (patratric sau cubic) pentru teoria de perturbație asociată acestor ecuații (teoria Sinha-Tiersten sau Auld). Motivul acestor neajunsuri poate fi intuit a fi legat de asimetria prezentă în operatorul de unda piezoelectric și de forma sistemului de ecuații electroelastice clasice în care cele trei ecuații de tip hiperbolic corespunzătoare legii de conservare a impulsului mecanic în solidul continuu sunt cuplate cu o ecuație independentă de timp ce provine din legea lui Gauss în electrostatică.

Ridicarea parțială a acestor nederminări prin formularea problemei de dinamică elastoelectrică în solidul piezoelectric cu ajutorul unui set de ecuații hiperbolice în aceleași variabile  $u_i$  - elongațiile elastice și  $\varphi$  - potențialul electric ca și abordarea clasică este subiectul celui de al treilea capitol.

## **Capitolul 2    **Aplicarea teoriei de perturbație liniară în situații de alterare neuniformă spațial a parametrilor ce definesc spectrul de vibrație al rezonatoarelor piezoelectrice cu undă de volum****

Se propune un model unidimensional local pentru estimarea impedanțelor de undă elastice la suprafața solidului piezoelectric considerat a fi în contact cu un film subțire urmat de un mediu exterior infinit. Se reia cursul demonstrației teoriei de perturbație propusă de Auld [1] și sunt generalizate rezultatele existente prin renunțarea la ipoteza câmpului electric irotațional admitând prezența pierderilor energetice la suprafața rezonatorului. Relațiile de estimare liniară a frecvențelor proprii complexe sunt utilizate pentru a studia efectele principalilor factori de perturbație (temperatură, câmpuri electrice și mecanice staționare, încărcări electromecanice de suprafață) asupra spectrului electroelastic al dispozitivului piezoelectric. Se insistă cu precădere asupra explicării unor fenomene legate de caracterul neuniform spațial al acestor mărimi de perturbație precum și a generalizării relațiilor deduse anterior pe baza unor modele unidimensionale mai simple.

## §2.1 Relația de perturbație obținută pe baza relației de reciprocitate a ecuațiilor de câmp elastic și electromagnetic.

Paragraful reia deducerea relației de perturbație de ordinul unu plecând de la ecuațiile câmpului elasto-electromagnetic într-un solid piezoelectric și oferă o extindere a cazului clasic admitând existența pierderilor pe suprafața rezonatorului

Demonstrația originală a teoremei de perturbație Sinha-Tiersten consideră mediul piezoelectric ca neavând pierderi în volum sau pe suprafață. Această presupunere ușurează scrierea relațiilor matematice necesare raționamentului întrucât se lucrează cu funcții reale. Transpunerea acestei teorii în cadrul mai general al funcțiilor cu valori complexe este fără îndoială posibilă însă nu este o extindere trivială. Modelul de perturbație Sinha-Tiersten a fost folosit pentru predicția efectelor de atenuare a undelor electroelastice în [56] sau [1] însă în cazuri particulare ale condițiilor pe frontieră, cazuri în care această extindere este posibilă datorită unei foarte bune intuiții fizice a fenomenului analizat. În acest sens, este un fapt de interes deducerea unei expresii de perturbație care să fie veridică într-o situație cât mai generală a condițiilor pe frontieră, pierderile pe suprafață fiind cele ce ridică probleme de modelare mult mai delicate decât cele în volum. Pentru deducerea unei astfel de expresii, mai ușoară din punct de vedere al complexității calculelor algebrice implicate, este reluarea demonstrației propusă de Auld [1] pentru relațiile de reciprocitate ale câmpului cuplat elasto-electromagnetic în cazul în care variabilele fizice se consideră a avea valori în corpul complex. Relațiile de reciprocitate deduse de Auld plecând de la forma generală a ecuațiilor lui Maxwell nu prezintă acea ambiguitate a înmulțirii cu  $-1$  a ecuației de conservare a sarcinii electrice, ambiguitate prezentă în deducerea clasică pentru ecuațiile electroelastice.

Așa cum am precizat în primul paragraf, variabilele de stare pentru ecuațiile câmpului cuplat elastic-electromagnetic sunt alese a fi  $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ ,  $T_{ij}$ ,  $H_i$  și  $E_i$  și sunt presupuse a avea valori într-o submulțime a spațiului funcțiilor complexe de energie finită pentru care sunt întotdeauna adevărate relațiile:  $div \vec{D} = 0$  și  $div \vec{B} = 0$ . Vom nota cu  $V$  în continuare această mulțime de definiție. Relațiile de material se presupun a fi liniare și independente de istoria procesului fizic (deci fără pierderi în volumul piezoelectric); cu o notație compactă pentru aceste relații,  $S = d \cdot E + s : T$ ,  $D = \epsilon \cdot E + d : T$  putem scrie următoarea ecuație matricială:

$$\begin{pmatrix} 0 & \nabla \cdot & 0 & 0 \\ \nabla_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla \times \\ 0 & 0 & \nabla \times & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ T \\ H \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s : & 0 & d \\ 0 & 0 & \mu \cdot & 0 \\ 0 & d : & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ T \\ H \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Pentru ușurința și claritatea expunerii vom reformula ecuația (1) sub o formă abstractă

$$\begin{cases} M\dot{\xi} = L\xi + \chi \\ \xi(0) = \xi_0 \in V \\ A_f \dot{\xi} + B_f \xi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Modul de definiție al variabilei globale  $\xi$  și a operatorilor de volum  $M$  și  $L$  este imediat vizibil prin comparație cu ecuația (1); operatorii  $A_f$  și  $B_f$  sunt operatori ce stabilesc condițiile pe

frontieră. Întrucât forma explicită a acestor relații pe frontieră nu este de mare importanță în cele ce urmează nu vom exemplifica o formă particulară a acestor operatori. O teoremă de existență și caracterizare a soluțiilor pentru ecuația (1) nu există în literatura de specialitate cunoscută de autor, presupunerile ce vor fi făcute în continuare asupra existenței unor soluții decuplate de tip Fourier  $\xi(x,t) = e^{st} \xi_s(x)$  se bazează exclusiv pe argumente fizice. În acest caz, componenta spațială a acestor soluții satisface ecuația:

$$\begin{cases} s\xi_s = M^{-1}L\xi_s \\ sA_f \xi_s + B_f \xi_s = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Proprietățile demonstrate în următoarea propoziție caracterizează din punct de vedere energetic operatorii  $M$  și  $L$ . Produsele scalare sunt considerate a fi în spațiul Hilbert  $[L^2(\Omega)]^6$  acesta fiind spațiul ce conține mulțimea de definiție  $V$

Propoziția 1:

Operatorii  $L$  și  $M$  au următoarele proprietăți:

- i) operatorul  $M$  este simetric  $\langle M\psi, \xi \rangle = \langle \psi, M\xi \rangle$
- ii) operatorul  $M$  este inversabil cu invers mărginit  $\|\xi\|^2 \mu_{\min} \leq \langle M\xi, \xi \rangle \leq \mu_{\max} \|\xi\|^2$
- iii)  $\text{Re}\{\langle L\xi, \xi \rangle\} = \text{Re}\left\{\int_{r\Omega} t_{ij} v_i^* n_j ds\right\} + \text{Re}\left\{\int_{r\Omega} -(\bar{E} \times \bar{H}^*) \cdot \bar{n} ds\right\}$

Demonstrație:

i), ii)

$$\begin{aligned} \langle M\tilde{\xi}, \xi \rangle &= \int_{\Omega} (\rho_m \tilde{v}_i v_i^* + \tilde{S}_{ij} T_{ij}^* + \tilde{D}_i E_i^* + \mu \tilde{H}_i H_i^*) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (\rho_m \tilde{v}_i v_i^* + c_{ijkl} \tilde{S}_{ij} S_{kl}^* - e_{kij} \tilde{S}_{ij} E_k^* + e_{ikj} \tilde{S}_{kj} E_i^* + \epsilon_{ij} \tilde{E}_j E_i^* + \mu \tilde{H}_i H_i^*) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\rho_m \tilde{v}_i v_i^* + c_{ijkl} \tilde{S}_{ij} S_{kl}^* + \epsilon_{ij} \tilde{E}_j E_i^* + \mu \tilde{H}_i H_i^*) d\Omega = \langle \tilde{\xi}, M\xi \rangle \end{aligned}$$

în consecință:

$$\begin{aligned} \langle M\xi, \xi \rangle &= \int_{\Omega} (\rho_m |v_i|^2 + S_{ij} T_{ij}^* + D_i E_i^* + \mu |H|^2) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (\rho_m |v_i|^2 + c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}^* + \epsilon_{ij} E_j E_i^* + \mu |H|^2) d\Omega = 2(W_{EL} + W_{EM}) \end{aligned} \quad (4)$$

energia elastică  $W_{EL} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_m |v_i|^2 + c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}^* d\Omega$

energia electromagnetică  $W_{EM} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_{ij} E_j E_i^* + \mu |H|^2 d\Omega$

Produsul scalar  $\langle M\xi, \xi \rangle$  reprezintă energia câmpului elastic și electromagnetic înmagazinată în mediul piezoelectric și este întotdeauna o mărime reală și pozitivă pentru  $\xi \neq 0$ .

Pentru energia elastică respectiv electromagnetică, sunt demonstrate în [3] și [6] relații de tipul:

$$\begin{aligned} C_{\min}^{EL} \int_{\Omega} (v_i^2 + T_{ij}^2) d\Omega &\leq W_{EL} \leq C_{\max}^{EL} \int_{\Omega} (v_i^2 + T_{ij}^2) d\Omega \\ C_{\min}^{EM} \int_{\Omega} (|E|^2 + |H|^2) d\Omega &\leq W_{EM} \leq C_{\max}^{EM} \int_{\Omega} (|E|^2 + |H|^2) d\Omega \end{aligned}$$

Devine evidentă în acest caz relația  $\|\xi\|^2 \min(C_{\min}^{EL} + C_{\min}^{EM}) < \langle M\xi, \xi \rangle < \max(C_{\max}^{EL} + C_{\max}^{EM}) \|\xi\|^2$

Ținând cont de simetria matricii de definiție a operatorului  $M$  și de proprietatea de mai sus, este adevărată o inegalitate mai "fină":

$$\langle \xi, \eta \rangle \mu_{\min} \leq \langle M\xi, \eta \rangle \leq \mu_{\max} \langle \xi, \eta \rangle$$

cu  $\mu_{\min}$ ,  $\mu_{\max}$  valorile minimă respectiv maximă a valorilor proprii pentru matricea  $M$ .

iii)

$$\begin{aligned} \langle L\xi, \xi \rangle &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} v_i^* + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) t_{ij}^* - \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{H}^* + \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{E}^* \right] d\Omega \\ \langle L\xi, \xi \rangle^* &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial t_{ij}^*}{\partial x_j} v_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i} \right) t_{ij} - \nabla \times \vec{E}^* \cdot \vec{H} + \nabla \times \vec{H}^* \cdot \vec{E} \right] d\Omega \\ \langle L\xi, \xi \rangle + \langle L\xi, \xi \rangle^* &= 2 \operatorname{Re} \{ \langle L\xi, \xi \rangle \} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (t_{ij} v_i^*) d\Omega \right\} - 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega} \nabla (\vec{E} \times \vec{H}^*) d\Omega \right\} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{fr\Omega} t_{ij} v_i^* n_j ds \right\} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{fr\Omega} -(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{n} ds \right\} = 2l_{EL} + 2l_{EM} \end{aligned} \quad (5)$$

unde:  $l_{EL} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{fr\Omega} t_{ij} v_i^* n_j ds \right\}$  fluxul de energie elastică prin frontiera mediului

$l_{EM} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{fr\Omega} -(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{n} ds \right\}$  fluxul de energie electromagnetică prin frontieră

Dacă presupunem câmpul electric ca fiind cvasistaționar  $\vec{E} = -\nabla\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \approx -\nabla\phi$ , o formă

alternativă de scriere a fluxului de energie electromagnetică poate fi obținută făcând apel la următoarea identitate:

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi \times H) = H \cdot \nabla \times (-\nabla\phi) + \nabla\phi \cdot \nabla \times H = H \cdot \nabla \times (-\nabla\phi) + \nabla\phi \cdot \nabla \times H = \nabla\phi \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (-\nabla\phi) = 0$$

$$l_{EM} \approx l_{ES} = -\operatorname{Re} \left\{ \int_{fr\Omega} \phi \frac{\partial D_j^*}{\partial t} n_j ds \right\} \quad \text{fluxul de energie electrică}$$

◆

Relația de conservare a energiei elasto-electromagnetice în solidul piezoelectric poate fi ușor dedusă plecând de la proprietățile demonstrate

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle M\xi, \xi \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle L\xi, \xi \rangle + \langle L\xi, \xi \rangle^* \right) + \frac{1}{2} \left( \langle \chi, \xi \rangle + \langle \chi, \xi \rangle^* \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle M\xi, \xi \rangle = \operatorname{Re} \langle L\xi, \xi \rangle + \operatorname{Re} \langle \chi, \xi \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \rho_m |v_i|^2 + c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}^* + \varepsilon_{ij} E_j E_i^* + \mu |H|^2 \right) d\Omega \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \int_{fr\Omega} \left( t_{ij} v_i^* n_j ds - (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{n} ds \right) \right\} + \\ &+ \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega} f_i v_i^* d\Omega \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (W_{EL} + W_{EM}) = l_{EL} + l_{EM} + l_{ext} \quad (6)$$



Sau, în varianta aproximației câmpului electric cvasistaționar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \rho_m |v_i|^2 + c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}^* + \epsilon_{ij} E_j E_i^* + \mu |H|^2 \right) d\Omega \right\} = \operatorname{Re} \int_{f\Omega} \left( t_{ij} v_i^* n_j ds - \left( \phi \frac{\partial \bar{D}^*}{\partial t} \right) \cdot \bar{n} \right) ds +$$

$$+ \operatorname{Re} \int_{\Omega} f_i v_i^* d\Omega$$

$I_{ext} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega} f_i v_i^* d\Omega \right\}$  lucrul mecanic efectuat de forțele de volum în unitatea de timp

### Observatie

Relația de conservare a energiei în solidul piezoelectric este identică cu relația de conservare pentru un material fără proprietăți piezoelectrice. Lipsa unor termeni energetici care să înglobeze energia de interacțiune piezoelectrică  $e_{kij} S_{ij} E_k^*$  sugerează caracterul “reactiv” al acestei interacțiuni.

Perturbația ce o vom presupune apare atât în parametrii materialului piezoelectric cât și în condițiile impuse pe frontieră. Pentru cele ce vor fi expuse, convenim să utilizăm superscriptul “~” pentru mărimile ce corespund ecuației perturbate.

- perturbarea caracteristicilor de material revine la o modificare a operatorului  $M$ ; notăm cu  $\tilde{M}$  acest operator.

$$\tilde{M} = M + p_M = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{s} & 0 & \tilde{d} \\ 0 & 0 & \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{d} & 0 & \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & d \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & d & 0 & \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{\rho_m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_s & 0 & p_d \\ 0 & 0 & p_{\mu} & 0 \\ 0 & p_d & 0 & p_{\epsilon} \end{pmatrix}$$

- perturbația de frontieră o punem în evidență prin modificarea operatorilor de frontieră  $A_f$  și  $B_f$ ;  $\tilde{A}_f$  și  $\tilde{B}_f$  îi presupunem a rămâne operatori liniari

Pentru ecuația perturbată presupunem de asemenea existența soluțiilor decuplate:  $\tilde{\xi}(x, t) = e^{\tilde{s}t} \tilde{\xi}_s(x)$ . Acestea sunt soluții pentru:

$$\begin{cases} \tilde{s} \tilde{\xi}_s = \tilde{M}^{-1} L \tilde{\xi}_s \\ \tilde{s} \tilde{A}_f \tilde{\xi}_s + \tilde{B}_f \tilde{\xi}_s = 0 \end{cases}$$

Atât pentru ecuațiile de bază cât și pentru cele perturbate considerăm pentru început condiții de frontieră ce conduc la un operator  $L$  conservativ. În această ipoteză ecuațiile ce vor fi prelucrate sunt:

$$\begin{cases} j\omega \xi_s = M^{-1} L \xi_s \\ j\omega A_f \xi_s + B_f \xi_s = 0 \end{cases} \quad (7)$$

și

$$\begin{cases} j\tilde{\omega} \tilde{\xi}_s = \tilde{M}^{-1} L \tilde{\xi}_s \\ j\tilde{\omega} \tilde{A}_f \tilde{\xi}_s + \tilde{B}_f \tilde{\xi}_s = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Pentru ecuația de bază considerăm o soluție  $\psi$  ce corespunde valorii proprii  $\omega$  iar pentru ecuația perturbată soluția  $\tilde{\psi}$  corespunzătoare valorii proprii  $\tilde{\omega}$ . Perturbația este considerată a fi “mică” astfel încât  $\tilde{\omega}$  și  $\tilde{\psi}$  provin din  $\omega$  respectiv  $\psi$ . Ordinul de multiplicitate se consideră a fi 1 atât pentru valorile proprii de bază cât și pentru cele perturbate. Pentru a nu complica notațiile

renunțăm la a indica în mod explicit în relațiile următoare că avem în vedere un anumit mod de vibrație. Vom face această precizare doar în formula finală desemnând cu  $\nu$  modul nostru ipotetic.

Punctul de plecare în deducerea expresiei de perturbație îl constituie înmulțirea scalară “încrucișată” a ecuațiilor de volum corespunzătoare ecuațiilor (7) respectiv (8).

$$\langle L\psi, \tilde{\psi} \rangle = j\omega \langle M\psi, \tilde{\psi} \rangle = j\omega \langle \psi, M\tilde{\psi} \rangle$$

$$\langle L\psi, \tilde{\psi} \rangle^* = -j\omega \langle \psi, M\tilde{\psi} \rangle^* = -j\omega \langle M\tilde{\psi}, \psi \rangle$$

$$\langle L\tilde{\psi}, \psi \rangle = j\tilde{\omega} \langle \tilde{M}\tilde{\psi}, \psi \rangle$$

Însumăm egalitățile anterioare:

$$\langle L\tilde{\psi}, \psi \rangle + \langle L\psi, \tilde{\psi} \rangle^* = j\tilde{\omega} \langle \tilde{M}\tilde{\psi}, \psi \rangle - j\omega \langle M\tilde{\psi}, \psi \rangle \quad (9)$$

Această ultimă relație va fi prelucrată astfel încât să poată fi pusă în evidență o relație explicită pentru  $\Delta\omega = \tilde{\omega} - \omega$ .

Explicităm termenii implicați în egalitatea (9):

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle L\psi, \tilde{\psi} \rangle^* &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial t_{ij}^*}{\partial x_j} \tilde{v}_i + \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \tilde{t}_{ij} - \nabla \times \tilde{E} \cdot \tilde{H} + \nabla \times \tilde{H} \cdot \tilde{E} \right) d\Omega \\ \bullet \quad \langle \tilde{L}\tilde{\psi}, \psi \rangle &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \tilde{t}_{ij}}{\partial x_j} v_i^* + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tilde{t}_{ij} - \nabla \times \tilde{E} \cdot \tilde{H} + \nabla \times \tilde{H} \cdot \tilde{E} \right) d\Omega \\ \langle M\tilde{\psi}, \psi \rangle^* &= \int_{\Omega} \left( \rho_m v_i^* \tilde{v}_i + S_{ij}^* \tilde{T}_{ij} + D_i^* \tilde{E}_i + \mu \tilde{H} \cdot \tilde{H} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left( \rho_m \tilde{v}_i v_i^* + \tilde{c}_{ijkl} S_{ij}^* \tilde{S}_{kl} - \tilde{e}_{kij} S_{ij}^* \tilde{E}_k + e_{ikj} S_{kj}^* \tilde{E}_i + \epsilon_{ij} E_j^* \tilde{E}_i + \mu \tilde{H} \cdot \tilde{H} \right) d\Omega = \\ \bullet \quad &= \int_{\Omega} \left( \rho_m \tilde{v}_i v_i^* + c_{ijkl} S_{ij}^* \tilde{S}_{kl} - e_{kij} S_{ij}^* \tilde{E}_k + e_{ikj} S_{kj}^* \tilde{E}_i + \epsilon_{ij} E_j^* \tilde{E}_i + \mu \tilde{H} \cdot \tilde{H} \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left( p_{c_{ij\mu}} S_{ij}^* \tilde{S}_{kl} - p_{e_{kj}} S_{ij}^* \tilde{E}_k \right) d\Omega \end{aligned}$$

Utilizăm ipoteza diferenței mici între soluția de bază  $\psi$  și cea perturbată  $\tilde{\psi}$  pentru a aproxima produsul scalar anterior astfel:

$$\begin{aligned} \langle M\tilde{\psi}, \psi \rangle^* &\approx \int_{\Omega} \left( \rho_m v_i v_i^* + c_{ijkl} S_{ij}^* S_{kl} - e_{kij} S_{ij}^* E_k + e_{ikj} S_{kj}^* E_i + \epsilon_{ij} E_j^* E_i + \mu \tilde{H} \cdot \tilde{H} \right) d\Omega + \\ &\int_{\Omega} \left( p_{c_{ij\mu}} S_{ij}^* \tilde{S}_{kl} - p_{e_{kj}} S_{ij}^* \tilde{E}_k \right) d\Omega = \langle M\psi, \psi \rangle + \int_{\Omega} \left( p_{c_{ij\mu}} S_{ij}^* \tilde{S}_{kl} - p_{e_{kj}} S_{ij}^* \tilde{E}_k \right) \\ \langle \tilde{M}\tilde{\psi}, \psi \rangle &= \int_{\Omega} \left( \tilde{\rho}_m \tilde{v}_i v_i^* + \tilde{S}_{ij} \tilde{T}_{ij} + \tilde{D}_i E_i^* + \mu \tilde{H} \cdot \tilde{H} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left( \tilde{\rho}_m \tilde{v}_i v_i^* + c_{ijkl} \tilde{S}_{ij} S_{kl}^* - e_{kij} \tilde{S}_{ij} E_k^* + \tilde{e}_{ikj} \tilde{S}_{kj} E_i^* + \tilde{\epsilon}_{ij} \tilde{E}_j E_i^* + \mu \tilde{H} \cdot \tilde{H} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left( \rho_m \tilde{v}_i v_i^* + c_{ijkl} \tilde{S}_{ij} S_{kl}^* - e_{kij} \tilde{S}_{ij} E_k^* + e_{ikj} \tilde{S}_{kj} E_i^* + \epsilon_{ij} \tilde{E}_j E_i^* + \mu \tilde{H} \cdot \tilde{H} \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left( p_{\rho_m} \tilde{v}_i v_i^* + p_{e_{kj}} \tilde{S}_{kj} E_i^* + p_{\epsilon_{ij}} \tilde{E}_j E_i^* + p_{\mu} \tilde{H} \cdot \tilde{H} \right) d\Omega \end{aligned}$$

Această egalitate o aproximăm pe baza aceleași ipoteze de apropiere între  $\psi$  și  $\tilde{\psi}$ .

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{M}\tilde{\psi}, \psi \rangle &= \int_{\Omega} \left( \rho_m v_i v_i^* + c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}^* - e_{kij} S_{ij} E_k^* + e_{ikj} S_{kj} E_i^* + \epsilon_{ij} E_j E_i^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right) d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} \left( p_{\rho_m} \tilde{v}_i v_i^* + p_{e_{kl}} \tilde{S}_{kl} E_i^* + p_{e_{ij}} \tilde{E}_j E_i^* + p_{\mu} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right) d\Omega = \\
&= \langle M\psi, \psi \rangle + \int_{\Omega} \left( p_{\rho_m} \tilde{v}_i v_i^* + p_{e_{kl}} \tilde{S}_{kl} E_i^* + p_{e_{ij}} \tilde{E}_j E_i^* + p_{\mu} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right) d\Omega
\end{aligned}$$

Suma termenilor din membrul stâng al egalității (9) este următoarea:

$$\begin{aligned}
\langle L\tilde{\psi}, \psi \rangle + \langle L\psi, \tilde{\psi} \rangle^* &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \tilde{t}_{ij}}{\partial x_j} v_i^* + \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} t_{ij}^* + \frac{\partial t_{ij}^*}{\partial x_j} \tilde{v}_i + \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \tilde{t}_{ij} \right) d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} \left( -\nabla \times \vec{\tilde{E}} \cdot \vec{H}^* + \nabla \times \vec{\tilde{H}} \cdot \vec{E}^* - \nabla \times \vec{E}^* \cdot \vec{\tilde{H}} + \nabla \times \vec{H}^* \cdot \vec{\tilde{E}} \right) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{t}_{ij} v_i^*) + \frac{\partial}{\partial x_j} (t_{ij}^* \tilde{v}_i) - \nabla (\vec{\tilde{E}} \times \vec{H}^*) - \nabla (\vec{E}^* \times \vec{\tilde{H}}) \right) d\Omega = \\
&= \int_{\Gamma \cap \Omega} \left[ (\tilde{t}_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \tilde{v}_i n_j) - (\vec{\tilde{E}} \times \vec{H}^* \cdot \vec{n}) - (\vec{E}^* \times \vec{\tilde{H}} \cdot \vec{n}) \right] ds
\end{aligned}$$

Rescriem egalitatea (9) ținând cont de aproximațiile făcute și obținem relația de perturbație liniară pentru ecuațiile elasto-electromagnetice:

$$\begin{aligned}
j(\tilde{\omega} - \omega) &= \frac{\langle L\tilde{\psi}, \psi \rangle + \langle L\psi, \tilde{\psi} \rangle^*}{\langle M\psi, \psi \rangle} - \\
&- j\omega \frac{\int_{\Omega} \left( p_{\rho_m} \tilde{v}_i v_i^* - p_{e_{ijkl}} \tilde{S}_{kl} S_{ij}^* + p_{e_{ki}} \tilde{E}_k S_{ij}^* + p_{e_{ijk}} \tilde{S}_{jk} E_i^* + p_{e_{ij}} \tilde{E}_j E_i^* + p_{\mu} \vec{H}^* \cdot \vec{H} \right) d\Omega}{\langle M\psi, \psi \rangle} = \\
&= \frac{\int_{\Gamma \cap \Omega} \left[ (\tilde{t}_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \tilde{v}_i n_j) - (\vec{\tilde{E}} \times \vec{H}^* \cdot \vec{n}) - (\vec{E}^* \times \vec{\tilde{H}} \cdot \vec{n}) \right] ds}{2(W_{EL} + W_{EM})} - \\
&- j\omega \frac{\int_{\Omega} \left( p_{\rho_m} \tilde{v}_i v_i^* - p_{e_{ijkl}} \tilde{S}_{kl} S_{ij}^* + p_{e_{ki}} \tilde{E}_k S_{ij}^* + p_{e_{ijk}} \tilde{S}_{jk} E_i^* + p_{e_{ij}} \tilde{E}_j E_i^* + p_{\mu} \vec{H}^* \cdot \vec{H} \right) d\Omega}{2(W_{EL} + W_{EM})}
\end{aligned} \tag{10}$$

Pentru problemele în care interesează zona acustică a spectrului de vibrație se admite ipoteza câmpului electric irotațional. Relația de perturbație se rescrie astfel:

$$\begin{aligned}
j(\tilde{\omega}_v - \omega_v) &\approx \frac{\int_{\Gamma \cap \Omega} \left[ (\tilde{t}_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \tilde{v}_i n_j) - \left( \vec{\Phi} \frac{\partial \vec{D}^*}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) - \left( \vec{\Phi}^* \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) \right] ds}{2(W_{EL} + W_{EM})_v} - \\
&- j\omega \frac{\int_{\Omega} \left( p_{\rho_m} \tilde{v}_i v_i^* - p_{e_{ijkl}} \tilde{S}_{kl} S_{ij}^* + p_{e_{ki}} \tilde{E}_k S_{ij}^* + p_{e_{ijk}} \tilde{S}_{jk} E_i^* + p_{e_{ij}} \tilde{E}_j E_i^* \right) d\Omega}{2(W_{EL} + W_{EM})_v}
\end{aligned} \tag{11}$$

Aceasta este relația generală de perturbație cunoscută în literatura de specialitate pentru operatorii  $L$  și  $\tilde{L}$  presupuși conservativi. În cursul demonstrației nu s-a făcut în nici un loc vreo referire la "modul" de apropiere al stărilor staționare perturbate  $\tilde{\psi}$  și a valorilor proprii  $\tilde{\omega}$  de mărimile similare originale. Încercarea de a folosi o dezvoltare polinomială a mărimilor perturbate în jurul mărimilor originale în funcție de un parametru scalar:

$$\tilde{\omega} = \omega + \varepsilon \Delta_1 \omega + \varepsilon^2 \Delta_2 \omega + \dots$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \varepsilon \Delta_1 \psi + \varepsilon^2 \Delta_2 \psi + \dots$$

relevă imediat faptul că relațiile (10) sau (11) reprezintă corecția liniară  $\Delta_1 \omega$  și că mai departe teoria nu este aplicabilă.

În continuare vom renunța la ipoteza conservării energiei în volumul piezoelectric  $\Omega$  și vom admite că pe frontieră pot apare pierderi energetice. Perturbația externă vom presupune că afectează doar condițiile pe frontieră lăsând neschimbat setul parametrilor de material  $I_M$ .

$$L\psi^v = s_v M\psi^v$$

$$L\tilde{\psi}^v = \tilde{s}_v M\tilde{\psi}^v$$

$$\langle L\psi^v, \tilde{\psi}^v \rangle^* = s_v^* \langle M\psi^v, \tilde{\psi}^v \rangle^* = s^* \langle M\tilde{\psi}^v, \psi^v \rangle$$

$$\langle L\tilde{\psi}^v, \psi^v \rangle = \tilde{s}_v \langle M\tilde{\psi}^v, \psi^v \rangle$$

Prin sumarea egalităților anterioare se obține:

$$\langle L\tilde{\psi}^v, \psi^v \rangle + \langle L\psi^v, \tilde{\psi}^v \rangle^* = \tilde{s}_v \langle M\tilde{\psi}^v, \psi^v \rangle + s_v^* \langle M\tilde{\psi}^v, \psi^v \rangle = (2\sigma_v + \Delta\sigma_v + j\Delta\omega_v) \langle M\tilde{\psi}^v, \psi^v \rangle$$

Folosind proprietățile demonstrate în Propoziția 1 este imediat rezultatul:

$$\sigma = \frac{\text{Re} \langle L\psi^v, \psi^v \rangle}{\langle M\psi^v, \psi^v \rangle} = \frac{\langle L\psi^v, \psi^v \rangle + \langle L\psi^v, \psi^v \rangle^*}{2 \langle M\psi^v, \psi^v \rangle}$$

În consecință,

$$\Delta\sigma_v + j\Delta\omega_v \approx \frac{\langle L(\tilde{\psi}^v - \psi^v), \psi^v \rangle + \langle (\tilde{\psi}^v - \psi^v), L\psi^v \rangle}{\langle M\psi^v, \psi^v \rangle}$$

$$\Delta\sigma_v + j\Delta\omega_v \approx \frac{\int_{\Gamma\Omega} \left[ (\Delta t_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \Delta v_i n_j) - \left( \Delta\Phi \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{n} \right) - \left( \Phi^* \Delta \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{n} \right) \right] ds}{2(W_{EL} + W_{EM})_v} \quad (12)$$

Această ultimă relație aproximează liniar modificarea frecvenței proprii de vibrație și a atenuării în funcție de alterarea valorilor câmpului electroelastic pe frontiera solidului piezoelectric. Ea reprezintă un rezultat pe care autorul nu l-a găsit sub această formă generală în lucrările de specialitate. Particularizarea acestei expresii în cazul stabilirii unor relații algebrice între componentele spațiale ale câmpului elastic  $(t_{ij}, u_i)$  și electric  $(\phi, D_i)$  va permite estimarea variațiilor  $\Delta\sigma_v$  și  $\Delta\omega_v$  în funcție de parametrii acelor relații, parametrii notați generic în paragrafele anterioare cu  $I_S$ .

## §2.2 Condițiile elastice pe frontiera unui solid piezoelectric în contact cu un mediu compozit de tip film subțire-mediu semiînfnit.

Paragraful oferă un model unidimensional de estimare a impedanțelor de undă acustice pentru un mediu compozit film subțire – mediu semiînfnit. Legătura între tensiunile și deplasările elastice la suprafața solidului piezoelectric se demonstrează a fi suficient de bine aproximată (în acest model) printr-o ecuație diferențială liniară ordinară de ordinul 2

În paragrafele precedente s-a argumentat necesitatea estimării și parametrizării relației ce există între tensiunile și deplasările elastice respectiv potențial electric și sarcina electrică de suprafață în studiul influenței ce o au diverse medii de contact asupra frecvențelor proprii de vibrație ale unui rezonator piezoelectric. Fără a argumenta în mod riguros, am considerat că aceste relații de legătură sunt de forma unei ecuații diferențiale de ordinul 2. Pentru potențialul și sarcina electrică la suprafața unei metalizări a dispozitivului o astfel de lege de variație temporală este intuitivă întrucât ea se rezumă la aproximarea impedanței circuitului electric exterior (care este în general specificat utilizând parametri concentrați) printr-un circuit  $RLC$  serie sau paralel. Principial, un raționament similar ce face apel la modelarea impedanțelor de undă elastice la suprafața solidului piezoelectric și apoi aproximarea acestora cu un polinom de ordinul doi (aproximarea se referă la un regim armonic permanent) este aplicabil și componentelor câmpului elastic. Dificultatea unui astfel de demers constă în deducerea impedanțelor de undă într-o situație cât mai generală, care să acopere cât mai mult din configurațiile și natura mediilor exterioare ce apar în situații de interes. Scopul principal al acestui paragraf este de a descrie un astfel de model pentru un caz în care mediul de contact se prezintă sub forma unui film subțire de grosime variabilă urmat de un mediu omogen solid, lichid sau gazos semiînfnit.

În prima parte vom preciza o serie de rezultate referitoare la propagarea undelor elastice în medii nemărginite cu diverse proprietăți fizice, rezultate ce sunt apoi folosite pentru deducerea expresiilor impedanțelor acustice. Vom începe cu un solid elastic având proprietăți piezoelectrice. Relațiile de material sunt presupuse a fi liniare și independente de istoria procesului electroelastic.

$$\begin{cases} \rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kjl} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \epsilon_{kj} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - e_{kjl} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

Clasa de soluții  $F = (u_i, \phi)$  pentru aceste ecuații se determină sub forma undelor plane ce se propagă într-o direcție definită de versorul  $\vec{n}$ .

$$\begin{aligned} u_i &= p_i f \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v} \right) \\ \phi &= \phi_0 f \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v} \right) \text{ cu } f \text{ o funcție reală continuă arbitrară.} \end{aligned}$$

Înlocuirea acestor relații în ecuațiile de mai sus conduce la următorul sistem liniar

$$\begin{aligned} \rho v^2 p_i &= \Gamma_{il} p_l + \gamma_i \Phi_0 \\ \gamma_l p_l - \epsilon \Phi_0 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

în care  $\Gamma_{ijl}$  (tensorul Christoffelson elastic),  $\gamma_i$  și  $\varepsilon$  sunt tensori definiți astfel:

$$\Gamma_{il} = c_{ijkl}^E n_j n_k \quad \gamma_i = e_{kji} n_j n_k \quad \varepsilon = \varepsilon_{jkl} n_j n_k$$

Eliminarea potențialului electric  $\phi_0$  în relațiile (1) conduce la ecuația seculară:

$$\rho v^2 p_i = \left( \Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \right) p_l \quad (2)$$

Relațiile generale de simetrie pentru constantele de material generează un tensor simetric

$$\Gamma_{il}^{piezzo} = \left( \Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \right) \text{ (tensorul Christoffelson piezoelectric). Din considerații energetice (paragraful$$

2.1) el este și pozitiv definit.

Consecințele acestor proprietăți ale tensorului  $\Gamma_{il}^{piezzo}$  sunt următoarele:

- i) valorile sale proprii sunt strict pozitive  $\Rightarrow$  viteze de undă reale, propagare fără atenuare.
- ii) în cazul de multiplicitate 1 al fiecărei valori proprii există trei vectori proprii ortogonali  $\Rightarrow$  trei unde elastice cu viteze distincte și polarizații ortogonale.
- iii) în cazul în care una din valorile proprii este rădăcina dublă a ecuației apare un subspațiu vectorial  $V_2$  propriu acesteia de dimensiune 2  $\Rightarrow$  o undă cu polarizație ortogonală pe  $V_2$  și o altă undă cu polarizație arbitrară în planul  $V_2$ ; situație similară cazului elastic al solidului isotrop când apar două unde cu viteze distincte: cea longitudinală și cea transversală, aceasta din urmă fiind polarizată arbitrar în planul perpendicular direcției de propagare.

Fiecare din cele trei unde elastice poate fi însoțită de o undă de potențial electric cu amplitudinea  $\phi_0 = \frac{\gamma_i p_i}{\varepsilon}$ . Cuplarea potențialului electric cu câmpul elastic este determinată de vectorul  $\gamma_i = e_{kji} n_j n_k$ .

Cele trei unde elastice sunt cunoscute, în general, astfel:

- unda cu polarizația cea mai apropiată de versorul  $\vec{n}$  este unda cvasi-longitudinală sau modul A; este unda cea mai rapidă;  $p_3$  în figura 1.1
- unda pentru care proiecția polarizației pe versorul  $\vec{n}$  are valoare minimă este unda cvasi-transversală lentă sau modul C; este unda cea mai lentă;  $p_2$  în figura 1.1
- cea de a treia undă este unda cvasi-transversală rapidă sau modul B;  $p_1$  în figura 1.1

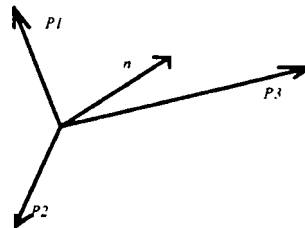


Figura. 1

*Polarizațiile ortogonale pentru cele trei moduri de propagare ale undelor de volum*

Soluția generală sub forma undelor plane ce se propagă în direcția versorului  $\vec{n}$  pentru ecuațiile electroelastice poate fi scrisă sub forma generală:

$$u_i(t, \vec{r}) = \sum_{s=1}^3 \alpha_s p_s^l f\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^s}\right) \quad p_s^l \text{ este proiecția versorului de polarizare } \vec{p}_s \text{ pe axa } l$$

$$\phi(t, \vec{r}) = \frac{\gamma_l}{\varepsilon} u_l(t, \vec{r})$$



Pentru un sistem cartezian având versorii axelor identici cu versorii polarizațiilor  $p_i$  relația are o formă mai simplă:

$$u_i(t, \vec{r}) = \alpha_i p_i f\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^i}\right)$$

Vom nota acest sistem cartezian particular, în continuare, cu  $Sp$ .

Utilizând această ultimă relație, se determină o relație de proporționalitate existentă între tensiunile elastice ce apar într-o suprafață perpendiculară direcției de propagare și vitezele undei electroelastice.

$$\begin{aligned} T_{in} &= T_{ij} n_j = c_{ijkl} n_j S_{kl} + e_{kji} n_j \frac{\partial \phi}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u_i(t, \vec{r})}{\partial x_k} &= -\frac{n_k}{v^s} \alpha_i p_i f'\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^i}\right) \\ \frac{\partial \phi(t, \vec{r})}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\gamma_l}{\epsilon} u_l(t, \vec{r}) = -\frac{n_k}{v^s} \alpha_l \frac{\gamma_l}{\epsilon} p_l f'\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^s}\right) \\ T_{in} &= -\left(\Gamma_{il} + \frac{\gamma_l \gamma_i}{\epsilon}\right) \left(\frac{\alpha_i p_i}{v^i}\right) f'\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^i}\right) \end{aligned}$$

În sistemul cartezian  $Sp$  tensorul  $\Gamma_{ii}^{piezo} = \left(\Gamma_{il} + \frac{\gamma_l \gamma_i}{\epsilon}\right)$  are forma diagonală  $\rho(v^i)^2 \delta_{il}$  și deci,

$$\begin{aligned} T_{in} &= -\left(\Gamma_{il} + \frac{\gamma_l \gamma_i}{\epsilon}\right) \left(\frac{\alpha_i p_i}{v^i}\right) f'\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^i}\right) = -\rho v^i \alpha_i p_i^s f'\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^i}\right) = -\rho v^i \frac{\partial u_i(t, \vec{r})}{\partial t} \\ T_{in} &= -\rho v^i \delta_{ij} \frac{\partial u_j(t, \vec{r})}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

$Z_i^{not}$  =  $\rho v^i$  impedanța acustică pentru unda electroelastice ce se propagă cu viteza  $v^i$

Reamintim că aceste calcule au fost făcute pentru un sistem de axe particular  $Sp$  determinat de versorii polarizațiilor. Pentru un reper cartezian arbitrar (notat  $Sa$ ), relația (3) devine:

$$T_{sn}(t, \vec{r}) = \left[ m_{is} \left( \rho v^i \delta_{ij} \right) m_{qj} \right] \frac{\partial u_q}{\partial t}(t, \vec{r}) = Z_{sq} \frac{\partial u_q}{\partial t}(t, \vec{r})$$

$m_{si}$  este matricea de trecere de la  $Sp$  la  $Sa$

$Z_{sq}^{not} = \left[ m_{is} \left( \rho v^i \delta_{ij} \right) m_{qj} \right]$  este matricea impedanțelor acustice în  $Sa$

O proprietate a matricii  $Z_{sq}$  ce va fi folosită pe parcursul lucrării este următoarea:

$$\rho \min_{i=1,2,3} (v^i) |u|^2 \leq u_s Z_{sq} u_q \leq \rho \max_{i=1,2,3} (v^i) |u|^2 \quad \forall u \in R^3$$

Vom explicita în aceeași manieră impedanța acustică pentru un mediu elastic în care apar pierderi prin vâscozitate. Ecuația de dinamică pentru acest caz este:

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + \eta_{ijkl} \frac{\partial^2 \dot{u}_l}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$u_i \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^i} \right) = p_i e^{j\omega \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^i} \right)}$$

$$\rho v^2 p_i = \Gamma_{ii}^c p_i$$

$$\Gamma_{ii}^c = (c_{ijkl} + j\omega \eta_{ijkl}) n_j n_k$$

$$v^i = v_{re}^i + jv_{im}^i$$

$$u_i \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v^i} \right) = p_i e^{j\omega \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v_{re}^i + jv_{im}^i} \right)} = p_i e^{-\omega \frac{v_{im}^i}{(v_{re}^i)^2 + (v_{im}^i)^2} \vec{r} \cdot \vec{n}} e^{j \left( \omega t - \omega \frac{v_{re}^i}{(v_{re}^i)^2 + (v_{im}^i)^2} \vec{r} \cdot \vec{n} \right)} = p_i e^{-\alpha \vec{r} \cdot \vec{n}} e^{j(\omega t - \beta \vec{r} \cdot \vec{n})}$$

$$\alpha^i = \omega \frac{v_{im}^i}{(v_{re}^i)^2 + (v_{im}^i)^2} > 0 \text{ factorul de atenuare}$$

$$\beta^i = \omega \frac{v_{re}^i}{(v_{re}^i)^2 + (v_{im}^i)^2} > 0 \text{ factorul de fază}$$

pentru o undă ce se propagă cu atenuare în sensul versorului  $n$ .

$$Z_i^a = \rho_m v^i \text{ complexă}$$

Pentru cazul specific al unui fluid vâscos, compresibil:

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial^2 \dot{u}_k}{\partial x_k \partial x_i} + 2\mu \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial^2 x_k}$$

$\lambda$  este coeficientul de compresibilitate longitudinal

$\mu$  coeficientul de vâscozitate al lichidului

$$\Gamma_{ik}^c = \left( \lambda - j\omega \frac{2\mu}{3} \right) n_k n_i + 2j\omega \mu \delta_{ik} \text{ tensorul Christoffelson}$$

Valorile proprii ale acestuia sunt:

$$\left( \lambda + j\omega \frac{4\mu}{3}, 2j\omega \mu, 2j\omega \mu \right) \approx (\lambda, 2j\omega \mu, 2j\omega \mu) \text{ pentru } \mu \ll \lambda$$

$$v^L = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}, Z^L = \sqrt{\lambda \rho} \text{ viteza și impedanța de undă longitudinală}$$

$$v^T = \sqrt{\omega \frac{\mu}{\rho}} (1 + j) \text{ (undă cu atenuare în sensul versorului } n), Z^T = -\sqrt{\omega \mu \rho} (1 + j)$$

viteza și impedanța de undă transversală

Aceste expresii ne vor fi utile în deducerea relațiilor pentru impedanțele de undă la suprafața solidului piezoelectric pentru structura film subțire-mediu semiinfinit. Următoarele presupuneri definesc mai exact situația fizică concretă ce dorim să o modelăm.

Filmul subțire se consideră a fi perfect aderent solidului piezoelectric, omogen și isotrop și nu prezintă proprietăți piezoelectrice sau magnetostrictive. Grosimea acestui film subțire este variabilă (eventual zero) însă întotdeauna va fi cu mult mai mică ca lungimile de undă ale undelor elastice ce

sunt așteptate a se propaga în film. Mediul exterior semiinfinite este de asemenea omogen și izotrop, fără proprietăți de cuplaj electroelastic sau magnetoelastic. Vom căuta să determinăm impedența mecanică locală la suprafața substratului piezoelectric pentru undele acustice ce se deplasează în direcția versorului normalei exterioare acestei suprafețe. Fie  $\vec{n}_x$  versorul normalei exterioare într-un punct arbitrar  $x$  și fie  $\Pi_x$  planul tangent suprafeței  $f\Omega$  în acel punct. Pentru o vecinătate suficient de restrânsă a punctului  $x$  planul  $\Pi_x$  aproximează bine suprafața  $f\Omega$  iar undele elastice ce se propagă în cilindrul cu bază în această vecinătate și generatoarea dată de versorul  $\vec{n}_x$  le vom aproxima ca fiind unde plane, singura variație spațială semnificativă fiind pe direcția  $\vec{n}_x$ .

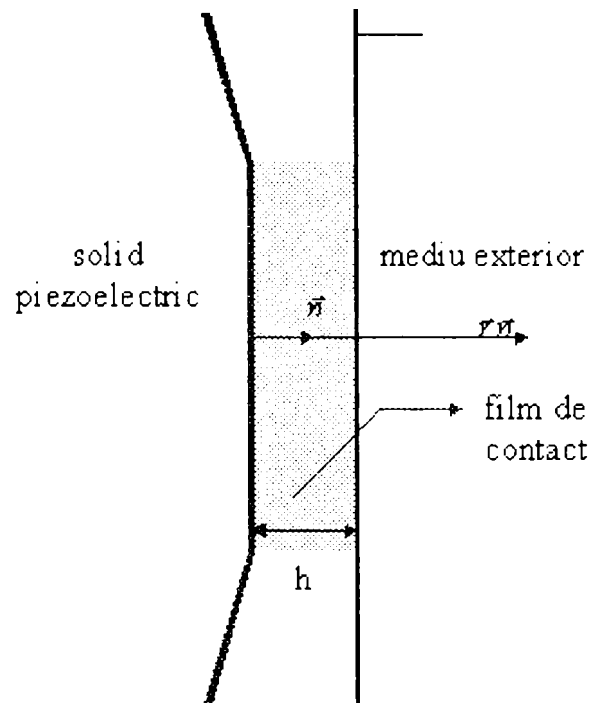


Figura 2

*Geometria locală a structurii solid piezoelectric-film subțire-mediul exterior semiinfinite*

Sistemul cartezian în care vom lucra este unul local și coincide cu sistemul de referință  $S_p$  în care polarizațiile undelor elastice ce se propagă în filmul subțire au forma canonică. Expresia generală a undelor plane ce se propagă în filmul subțire este următoarea:

$$u_i(\vec{r}) = p_i^+ e^{-j\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f}} + p_i^- e^{j\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f}} \quad p_i^+ \text{ - amplitudinea undei emergente "i"}$$

$$T_m(\vec{r}) = j\omega \rho_f v_f' \left( -p_i^+ e^{-j\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f}} + p_i^- e^{j\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f}} \right) \quad p_i^+ \text{ - amplitudinea undei divergente "i"}$$

Impunem continuitatea elongațiilor elastice și a tensiunilor la suprafața de separație film subțire-mediul exterior și determinăm expresiile polarizațiilor în funcție de valorile pe frontieră  $u_i^0$  și  $T_m^0$ :

$$u_i(0) = u_i^0 \Rightarrow \begin{cases} p_i^- = \frac{1}{2} \left( u_i^0 + \frac{T_{in}^0}{j\omega \rho v_f^i} \right) \\ T_{in}(0) = T_{in}^0 \Rightarrow \begin{cases} p_i^+ = \frac{1}{2} \left( u_i^0 - \frac{T_{in}^0}{j\omega \rho v_f^i} \right) \end{cases} \end{cases}$$

$$u_i(\vec{r}) = u_i^0 \cos\left(\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f^i}\right) + \frac{T_{in}^0}{\omega \rho v_f^i} \sin\left(\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f^i}\right)$$

$$T_{in}(\vec{r}) = -u_i^0 (\omega \rho v_f^i) \sin\left(\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f^i}\right) + T_{in}^0 \cos\left(\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f^i}\right)$$

Pentru mediul exterior presupus semiinfinit, avem o singură undă emergentă:

$$T_{in}(\vec{r}) = -j\omega \rho_{ext} v_{ext}^i u_i(\vec{r})$$

$$\text{pentru: } \vec{r} = 0 \Rightarrow T_{in}^0 = -j\omega \rho_{ext} v_{ext}^i u_i^0 = -j\omega Z_{ext}^i u_i^0$$

Facând raportul între  $T_{in}^0(\vec{r})$  și  $u_i^0(\vec{r})$  și ținând cont de legătura dintre  $u_i^0$  și  $T_{in}^0$  impusă de caracteristica de propagare în mediul exterior semiinfinit obținem:

$$\frac{T_{in}(\vec{r})}{u_i(\vec{r})} = -(\omega \rho v_f^i) \frac{\sin\left(\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f^i}\right) + j \frac{Z_{ext}^i}{Z_f^i} \cos\left(\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f^i}\right)}{\cos\left(\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f^i}\right) - j \frac{Z_{ext}^i}{Z_f^i} \sin\left(\omega \frac{\vec{r}\vec{n}}{v_f^i}\right)}$$

Particularizăm această expresie pentru  $\vec{r} = -h\vec{n}$ , aceasta fiind distanța la care se află interfața cu solidul piezoelectric.

$$\frac{T_{in}(-h\vec{n})}{u_i(-h\vec{n})} = -(\omega \rho v_f^i) \frac{-\sin\left(\omega \frac{h}{v_f^i}\right) + j \frac{Z_{ext}^i}{Z_f^i} \cos\left(\omega \frac{h}{v_f^i}\right)}{\cos\left(\omega \frac{h}{v_f^i}\right) + j \frac{Z_{ext}^i}{Z_f^i} \sin\left(\omega \frac{h}{v_f^i}\right)} = -H_i^m \quad (4)$$

Aceasta este expresia generală a impedanțelor de undă elastice pentru mediul compozit analizat în sistemul de referință particular  $S_p$ . Pentru un sistem cartezian oarecare, relațiile între tensiuni și elongații au forma:

$$T_{in}(-h\vec{n}) = -(H_i^m \delta_{ij}) u_j(-h\vec{n})$$

$$T_{sn}(-h\vec{n}) = -[m_{is} (H_i^m \delta_{ij}) m_{qj}] u_q(-h\vec{n}) = -H_{sq}^m u_q(-h\vec{n})$$

cu  $m_{is}$  matricea de trecere de la vechiul la noul sistem cartezian.

$$H_{sq}^m = [m_{is} (H_i^m \delta_{ij}) m_{qj}]$$

Din considerente de claritate a expunerii vom păstra ca reper cartezian de lucru sistemul particular în care matricea  $H_{ij}^m$  are forma diagonală. După cum a fost menționat, spațiul fizic în care facem aceste aproximații este unul local (planul tangent la suprafața de frontieră a solidului piezoelectric), sistemul cartezian  $S_p$  fiind deci dependent de punct. Pentru evaluarea globală a funcțiilor  $H_{ij}^m$  ar fi necesară cunoașterea matricilor de rotație  $m_{is}$  de la acest sistem local la reperul cartezian în care sunt scrise ecuațiile electroelastice. Anumite particularități ale geometriei

rezonatoarelor cu undă de volum uzuale în practică (suprafețe mari cu versorul normalei constant în orientare) conduc însă la ușurarea acestui efort de calcul al funcției  $H_i^m$ .

Vom exprima funcția  $H_i^m$  în funcție de variabilele următoare, variabile ce fac ușor vizibile aproximațiile ulterioare motivate de considerente de ordin fizic:

$$\omega \frac{h}{v_f^i} = 2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}, \quad \frac{h}{\lambda_f^i} = \alpha^i, \quad \zeta_i = \frac{Z_{ext}^i}{Z_f^i}$$

$$H_i^m = (\omega Z_f^i) \frac{-\sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) + j\zeta_i \cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right)}{\cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) + j\zeta_i \sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right)}$$

Funcției complexe  $H_i^m$  de argument real  $\omega$  îi corespunde în domeniul timp o funcție definită pentru valori  $t \geq 0$ . Această afirmație se verifică ușor întrucât:

$$\text{Re}\{H_i^m\} = (1 - \zeta_i^2) \omega Z_f^i \frac{-\sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) \cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right)}{\cos^2\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) + \zeta_i^2 \sin^2\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right)} \quad \text{funcție pară de frecvență}$$

$$\text{Im}\{H_i^m\} = \omega Z_f^i \frac{\zeta_i}{\cos^2\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) + \zeta_i^2 \sin^2\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right)} \quad \text{funcție impară de frecvență}$$

Graficele următoarele prezintă partea reală și cea imaginară a funcției  $H_i^m$  pentru valori ce sunt de așteptat în aplicațiile practice. Prin  $\alpha$  s-a notat raportul  $\frac{h}{\lambda_f^i}$

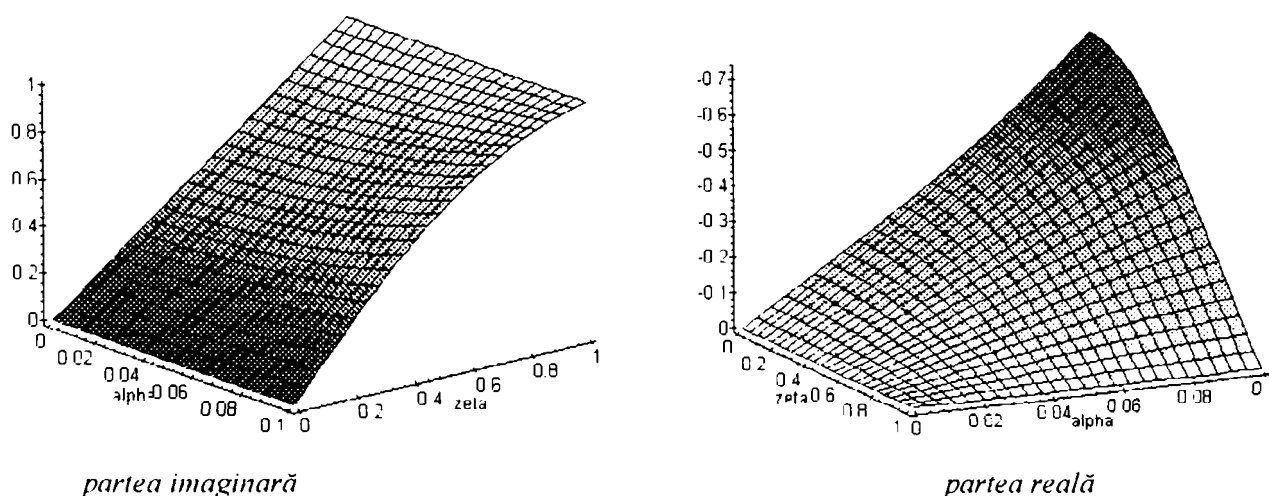


Figura 3 Graficul funcției  $H_i^m$  în funcție de  $\alpha$  și  $\zeta$

Din acest punct de vedere putem privi legătura temporală dintre tensiuni și elongațiile elastice ca fiind de tip convoluțional:  $T_{in} = h_i^m * u_i$  cu nucleul  $h_i^m$  cauzal. Aproximării optime a acestui tip de relație în domeniul timp (ecuații diferențiale liniare ordinare) sau în frecvență (funcții raționale în variabila  $\omega$ ) îi sunt dedicate numeroase studii amănunțite. În cele ce urmează ne vom mărgini a face o serie de considerații de ordin general plecând de la aproximarea acestei relații pe baza dezvoltării în serie Taylor în jurul unei pulsații de referință  $\omega_0$  și de a prezenta forma particulară ce o ia partea reală și cea imaginară a expresiei pentru cazurile așteptate a fi întâlnite în practică.

Să presupunem o vecinătate a pulsației de referință  $\omega_0$  suficient de restrânsă pentru a aproxima expresia (4) cu seria sa Taylor asociată, trunchiată la ordinul 2:

$$H_i^m(\omega) \cong H_i^m(\omega_0) + \frac{dH_i^m(\omega_0)}{d\omega}(\omega - \omega_0) + 0.5 \frac{d^2 H_i^m(\omega_0)}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)^2 =$$

$$= \left[ H_i^m(\omega_0) - \frac{dH_i^m(\omega_0)}{d\omega} \omega_0 + \frac{d^2 H_i^m(\omega_0)}{d\omega^2} \omega_0^2 \right] - j \left[ \frac{dH_i^m(\omega_0)}{d\omega} + \frac{d^2 H_i^m(\omega_0)}{d\omega^2} \omega_0 \right] (j\omega) - 0.5 \frac{d^2 H_i^m(\omega_0)}{d\omega^2} (j\omega)^2$$

Notăm cu:

$$k_i(\omega_0) = \left[ H_i^m(\omega_0) - \frac{dH_i^m(\omega_0)}{d\omega} \omega_0 + \frac{d^2 H_i^m(\omega_0)}{d\omega^2} \omega_0^2 \right]$$

$$v_i(\omega_0) = -j \left[ \frac{dH_i^m(\omega_0)}{d\omega} + \frac{d^2 H_i^m(\omega_0)}{d\omega^2} \omega_0 \right]$$

$$m_i(\omega_0) = -0.5 \frac{d^2 H_i^m(\omega_0)}{d\omega^2}$$

Dependența între tensiuni și elongații va fi descrisă de:

- o dependență polinomială de ordinul doi în domeniul pulsațiilor

$$- T_i^m(j\omega) = (j\omega)^2 m_i(\omega_0) + j\omega v_i(\omega_0) + k_i(\omega_0) u_i(j\omega) \quad (5)$$

- o ecuație diferențială ordinară de ordinul doi în timp

$$- T_i^m(t) = m_i(\omega_0) \ddot{u}_i(t) + v_i(\omega_0) \dot{u}_i(t) + k_i(\omega_0) u_i(t)$$

#### Observatii:

- Sensul fizic al parametrilor  $m_i$ ,  $v_i$  și  $k_i$  este, după cum se va vedea în continuare, bine definit.  
 $m_i$  - aproximează efectul inerțial al mediului extern asupra undei de polarizare "i"  
 $v_i$  - aproximează efectul disipativ al mediului extern asupra undei de polarizare "i"  
 $k_i$  - aproximează efectul elastic al mediului extern asupra undei de polarizare "i"
- Puterea dominată a variabilei  $\omega_0$  în expresiile  $(j\omega_0)^2 m_i(\omega_0)$ ,  $(j\omega_0) v_i(\omega_0)$ ,  $k_i(\omega_0)$  este constantă și egală cu 2

Pentru majoritatea cazurilor întâlnite în practică nu este nevoie să se recurgă la metoda descompunerii polinomiale a funcției  $H_i^m(\omega)$ , caracteristicile fizice ale filmului subțire și ale mediului exterior făcând posibilă o aproximare directă a părții reale și imaginare a acestei funcții.

- $Z_{ext}^i = 0$  suprafață mecanică liberă pentru solicitările mecanice ce se manifestă pe direcția "i"

$$\frac{T_{in}(-h\bar{n})}{u_i(-h\bar{n})} = (\omega \rho v_i') g \left( \omega \frac{h}{v_i'} \right) = (\omega \rho v_i') g \left( 2\pi \frac{h}{\lambda_i'} \right) \approx \omega^2 \rho_i h \text{ dacă } h \ll \lambda_i'$$



- $Z_{ext}^i \rightarrow \infty$  suprafață mecanică încastrată pentru solicitările mecanice ce se manifestă pe direcția "i"

$$\frac{T_m(-h\bar{n})}{u_i(-h\bar{n})} = -(\omega \rho v_f^i) \text{ctg} \left( \omega \frac{h}{v_f^i} \right) = (\omega \rho_f v_f^i) \text{ctg} \left( 2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} \right) \approx \frac{\rho_f (v_f^i)^2}{h} \text{ dacă } h \ll \lambda_f^i$$

- Să presupunem că filmul subțire are o grosime  $h$  mult mai mică decât lungimea de undă a unei electroacustice ce se propagă în acesta  $h \ll \lambda_f^i$  iar impedanța de undă are valori semnificativ mai mari decât cele ale impedanței de undă a mediului exterior  $\zeta_i \ll 1$ .

$$\text{Re}\{H_i^m\} \approx -(1 - \zeta_i^2) \rho_f h \omega^2 \quad (6)$$

$$\text{Im}\{H_i^m\} = \zeta_i Z_f^i \omega = Z_{ext}^i \omega$$

Rezultatele obținute până la acest punct au presupus ca propagarea în filmul subțire și în mediul exterior se face fără pierderi energetice  $\Leftrightarrow \zeta' \in R$ . În situația în care spre exemplu mediul exterior este un lichid sau filmul subțire este un polimer aflat într-o fază cu proprietăți de vâscozitate puternice această ipoteză nu mai poate fi menținută. Scriind  $\zeta' = \zeta_{re}^i + i\zeta_{im}^i$  cu  $\zeta_{re}^i$  și  $\zeta_{im}^i$  reali, obținem următoarele relații pentru partea reală și imaginară a funcției  $H_i^m$ :

$$H_i^m = (\omega Z_f^i) \frac{-\sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) + j\zeta_{re}^i \cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) - \zeta_{im}^i \cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right)}{\cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) + j\zeta_{re}^i \sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) - j\zeta_{im}^i \sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right)}$$

$$\zeta_{im}^i \stackrel{def}{=} \text{tg}\varphi$$

$$H_i^m = (\omega Z_f^i) \frac{-\sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} + \varphi\right) + j\zeta_{re}^i \cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) \cos(\varphi)}{\cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} + \varphi\right) + j\zeta_{re}^i \sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) \cos(\varphi)}$$

$$\text{Re}\{H_i^m\} = \frac{1}{2} (\omega Z_f^i) \frac{-\sin\left(4\pi \frac{h}{\lambda_f^i} + 2\varphi\right) + (\zeta_{re}^i)^2 \sin\left(4\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) \cos^2(\varphi)}{\cos^2\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} + \varphi\right) + (\zeta_{re}^i)^2 \sin^2\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) \cos^2(\varphi)}$$

$$\text{Im}\{H_i^m\} = (\omega Z_f^i) \zeta_{re}^i \frac{\cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} + \varphi\right) \cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) \cos(\varphi) + \sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} + \varphi\right) \sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) \cos(\varphi)}{\cos^2\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} + \varphi\right) + (\zeta_{re}^i)^2 \sin^2\left(2\pi \frac{h}{\lambda_f^i}\right) \cos^2(\varphi)}$$

Aproximația  $|\zeta^i| \ll 1$  utilizată în cazul mediilor de contact nedisipative rămâne și în această situație valabilă pentru materialele ce sunt de așteptat a constitui filmul subțire și mediul exterior. În consecință:  $1g(\varphi) \approx \varphi$

$$\operatorname{Re}\{H_i^m\} \approx -(\omega Z_f^i) \left( 2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} (1 - (\zeta_{re}^i)^2) + \zeta_{im}^i \right) \quad (7)$$

$$\operatorname{Im}\{H_i^m\} \approx (\omega Z_f^i) \zeta_{re}^i \left( 1 + 2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} \zeta_{im}^i + \left( 2\pi \frac{h}{\lambda_f^i} \right)^2 \right)$$

Întrucât în lucrare vom analiza în amănunt influența caracteristicilor de vâscozitate ale unui lichid presupus a fi mediul exterior semiinfini, vom specifica relațiile anterioare pentru o undă evanescentă de polarizație transversală pe direcția versorului  $n$  ce se propagă în lichid:

$$\zeta_{re}^i = \zeta_{im}^i = \frac{\sqrt{\omega \mu \rho_{ext}}}{Z_f^i} \ll 1$$

$$\operatorname{Re}\{H_i^m\} \approx -(\omega^2 \rho_f h + \omega \sqrt{\omega \mu \rho_{ext}}) \quad (8)$$

$$\operatorname{Im}\{H_i^m\} \approx \omega \sqrt{\omega \mu \rho_{ext}}$$

Următorul grafic și tabel oferă argumentele numerice pentru aproximația  $|\zeta^i| \ll 1$  utilizată în cele prezentate. Datele vor fi utilizate în experimentele de simulare a unor experimente fizice de perturbație a frecvențelor proprii de rezonanță pentru un rezonator piezoelectric.

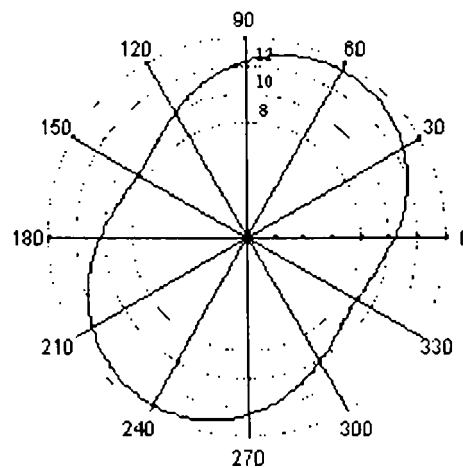


Figura 4

Impedanța de undă pentru modul transversal lent (C) în cuarț, pentru tăieturile cristalografice Y rotite

$$Z^T = \rho v^T \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \right]$$

**T1 Medii solide**

material	$\rho$ $10^3 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	$v^L = \sqrt{\frac{c_{1111}}{\rho}}$ [m/s]	$v^T = \sqrt{\frac{c_{2323}}{\rho}}$ [m/s]	$Z^L = \rho v^L$ $10^6 \left[ \frac{kg}{m^2 s} \right]$	$Z^T = \rho v^T$ $10^6 \left[ \frac{kg}{m^2 s} \right]$
Al	2.69	6417	3045	17.3	8.2
Cu	8.93	5013	2276	44.6	20.2
Ag	10.40	3662	1611	38.1	16.7
Au	19.30	3274	1215	63.1	23.4
Tungsten	19.40	5200	2900	101	56.3
sticlă	$\approx 2.3$	$\approx 5000$	$\approx 2.8$	$\approx 12$	$\approx 6$

**T2 Medii lichide și gazoase**

fluid	$\rho$ $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	$\lambda$ $10^6 \left[ \frac{N}{m^2} \right]$	$\mu$ $10^{-6} \left[ \frac{Ns}{m^2} \right]$	$Z^L = \sqrt{\rho \lambda}$ $10^3 \left[ \frac{kg}{m^2 s} \right]$	$Re\{Z^T\} = \sqrt{\omega \mu \rho}$ $\omega = 1MHz, \left[ \frac{kg}{m^2 s} \right]$
aer	1.21	0.1422	18.22	0.414	4.7
apă	1000	2190	1000	1480	1000
alcool	790	1760	1800	950	1192
mercur	13530	$28447 \cdot 10^3$	1560	19600	4594

## §2.3 Utilizarea relației de perturbație de ordinul întâi în estimarea influenței perturbațiilor locale asupra spectrului de vibrație al rezonatoarelor piezoelectrice

Va fi studiat efectul ce îl are perturbarea parametrilor de material  $I_M$ , ai condițiilor pe frontieră  $I_S$  și ai geometriei rezonatorului  $I_G$  asupra frecvențelor proprii de rezonanță utilizându-se relațiile descrise în paragraful precedent. Fiecare din aceste cazuri va fi acoperit cu exemple de simulare și predicție a datelor experimentale obținute de autor sau existente în literatura de specialitate. Se va insista asupra cazurilor ce nu au un model teoretic de explicare, acestea fiind cu precădere cele în care distribuția perturbațiilor în volumul sau suprafața rezonatorului nu este uniformă.

În această parte introductivă a paragrafului vom preciza o serie de ipoteze și notații ce le utilizăm pe parcursul acestuia. În plus, vom detalia expresiile de calcul ce apar prin înlocuirea condițiilor pe frontieră de tipul ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul 2 în relația de perturbație (12) dedusă în paragraful 2.1 pentru cazul pierderilor energetice la suprafața solidului piezoelectric. Întrucât perturbațiile de geometrie ale volumului piezoelectric le vom echivala printr-o perturbație a parametrilor de material  $I_M$  vom clasifica, pentru început, perturbațiile ca fiind fie ale constantelor de material fie ale parametrilor de suprafață. Notațiile referitoare la operatori ce au fost utilizate în paragraful 2.1 le menținem și în continuare.

### Perturbații locale ale constantelor de material

Luăm în considerare doar alterarea operatorului  $M$ , condițiile pe frontieră rămânând nealterate

$$\tilde{M} = M + p_M = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{s} & 0 & \tilde{d} \\ 0 & 0 & \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{d} & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & d \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & d & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta s & 0 & \Delta d \\ 0 & 0 & \Delta\mu & 0 \\ 0 & \Delta d & 0 & \Delta\varepsilon \end{pmatrix}$$

și detaliem perturbația de material astfel:

$$\tilde{s}_{ijkl}(x) = s_{ijkl} + \Delta s_{ijkl} = s_{ijkl} + \alpha_{ijkl}^s(x) s_{ijkl} \quad \text{respectiv} \quad \tilde{c}_{ijkl}(x) = c_{ijkl} + \Delta c_{ijkl} = c_{ijkl} + \alpha_{ijkl}^c(x) c_{ijkl}$$

$$\tilde{d}_{kji}(x) = d_{kji} + \Delta d_{kji} = d_{kji} + \alpha_{kji}^d(x) d_{kji} \quad \text{respectiv} \quad \tilde{e}_{kji}(x) = e_{kji} + \Delta e_{kji} = e_{kji} + \alpha_{kji}^e(x) e_{kji}$$

$$\varepsilon_{kj}(x) = \varepsilon_{kj} + \Delta\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{kj} + \alpha_{kji}^e(x) \varepsilon_{kj}$$

$$\rho_m(x) = \rho_m + \Delta\rho_m = \rho_m + \alpha^p(x) \rho_m$$

Asupra funcțiilor de perturbație  $\alpha$  vom face câteva precizări în finalul paragrafului.

### Observație

Perturbația magnetică nu este luată în considerare întrucât vom utiliza aproximația câmpului electric cvasi-staționar. Ca și observație vom nota totuși că o perturbație magnetică a coeficientului de permeabilitate  $\mu$  influențează frecvențele de rezonanță, însă foarte slab. O explicare acestui fenomen, cel puțin calitativă, ar face apel la forma generală a relației de perturbație dedusă în paragraful 2.1.

Variația relativă a pulsației de rezonanță pentru un mod  $\nu$  este estimată liniar astfel:

$$\frac{\Delta\omega_\nu}{\omega_\nu} \equiv - \frac{\int_{\Omega} \left( \omega^2 \Delta\rho_m u_i^2 - \Delta c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \Delta e_{k\bar{n}} E_k S_{ij}^* + \Delta e_{ijk} S_{jk} E_i^* + \Delta \varepsilon_{ij} E_j E_i^* \right) d\Omega}{2\rho_m \omega_\nu^2 \int_{\Omega} |u_i^\nu|^2 d\Omega} \quad (1)$$

### Perturbații ale condițiilor pe frontieră.

Relația de plecare este cea dedusă în paragraful 2.1 în ipoteza existenței pierderilor energetice pe suprafața rezonatorului.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_\nu + j\Delta\omega_\nu &\equiv \frac{\int_{\bar{\nu}\Omega} \left[ (\Delta t_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \Delta v_i n_j) - \left( \Delta\Phi \frac{\partial \bar{D}^*}{\partial t} \cdot \bar{n} \right) - \left( \Phi^* \Delta \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{n} \right) \right]^\nu ds}{2(W_{EL} + W_{EM})^\nu} = \\ &= \frac{\int_{\bar{\nu}\Omega} \left[ (\Delta t_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \Delta v_i n_j) - \left( \Delta\Phi \frac{\partial \bar{D}^*}{\partial t} \cdot \bar{n} \right) - \left( \Phi^* \Delta \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{n} \right) \right]^\nu ds}{2s_\nu^2 \int_{\Omega} u_i^2 d\Omega} \quad (2) \end{aligned}$$

Vom dezvolta această expresie ținând cont de relațiile formale pe frontieră existente între tensiunile și deformații elastice respectiv potențial electric și sarcina electrică de suprafață.

- partea elastică  $t_m(x, s) = -H_{il}^m(x, s)u_l(x, s)$  sau  $u_l(x, s) = -G_{il}^m(x, s)t_{ln}(x, s)$
- partea electrică  $\Phi_n(s) = -H_n^e(s)q_n(s)$  sau  $q_n(s) = -G_n^e(s)\Phi_n(s)$

Înlocuim aceste expresii în relația (2) și efectuăm o serie de aproximații rezonabile fizic.

$$\begin{aligned} (\Delta t_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \Delta v_i n_j) &= \left[ -\tilde{H}_{il}^m(x, s)\tilde{u}_l + H_{il}^m(x, s)u_l \right] s^* u_i^* - (H_{il}^m(x, s))^* u_l^* (\tilde{s}\tilde{u}_i - s u_i) = \\ &\approx -s^* \left( u_i^* \Delta H_{il}^m(x, s) u_l + u_i^* \tilde{H}_{il}^m(x, s) \Delta u_l \right) - s \Delta u_i (H_{il}^m(x, s))^* u_l^* \approx \\ &\approx -s^* \left( u_i^* \Delta H_{il}^m(x, s) u_l \right) - \Delta u_i \operatorname{Re}\{H_{il}^m(x, s)\} u_l^* (s + s^*) \approx j\omega \left( u_i^* \Delta H_{il}^m(x, j\omega) u_l \right) \end{aligned}$$

În calculele anterioare am folosit succesiv următoarele supoziții:

$$\tilde{s}\tilde{u}_i = s\tilde{u}_i + \Delta s\tilde{u}_i \approx s\tilde{u}_i$$

$$\operatorname{Im}\{s\} \gg \operatorname{Re}\{s\} \text{ iar de aici, } H_{il}^m(x, s) \approx \operatorname{Re}\{H_{il}^m(x, s)\}$$

Această ultimă ipoteză de aproximație, mai puțin evidentă, este veridică datorită caracterului predominant conservativ energetic al relațiilor pe frontieră (partea reală a impedanței) față de pierderi (partea imaginară a impedanței).

Un raționament analog conduce la exprimarea în funcție de admitanțele mecanice a factorului elastic din relația de perturbație.

$$\begin{aligned} (\Delta t_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \Delta v_i n_j) &= -s^* \Delta t_m (G_{il}^m(x, s))^* t_{ln}^* - t_m^* (\tilde{s}\tilde{G}_{il}^m(x, s)\tilde{t}_{ln} - s G_{il}^m(x, s)t_{ln}) \approx \\ &\approx -s^* \Delta t_m (G_{il}^m(x, s))^* t_{ln}^* - s (t_m^* \Delta G_{il}^m(x, s)t_{ln} + t_m^* G_{il}^m(x, s)\Delta t_{ln}) \approx -j\omega t_m^* \Delta G_{il}^m(x, j\omega) t_{ln} \end{aligned}$$

Pentru partea electrică urmăm aceeași cale de deducere. Toate mărimile ce apar și poartă subscriptul  $n$  se referă la o suprafață de metalizare  $S_n \in fr\Omega$

$$\begin{aligned} & \left[ - \left( \Delta \Phi \frac{\partial \bar{D}^*}{\partial t} \cdot \bar{n} \right) - \left( \Phi^* \Delta \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{n} \right) \right]_{S_n} = s^* (q_n^* \Delta \Phi_n) + \Phi_n^* (\tilde{s} \tilde{q}_n - s q_n) = \\ & = -s^* (\Delta H_n^e(s) |q_n|^2 + q_n^* \tilde{H}_n^e(s) \Delta q_n) - s \Delta q_n H_n^{e*}(s) q_n^* = \\ & \approx -s^* \Delta H_n^e(s) |q_n|^2 - \Delta q_n \operatorname{Re} \{ H_n^e(s) \} q_n^* (s + s^*) \approx j\omega \Delta H_n^e(j\omega) |q_n|^2 \end{aligned}$$

Sau, pentru o legătură  $q_n(s) = -G_n^e(s) \Phi_n(s)$

$$\begin{aligned} s^* (q_n^* \Delta \Phi_n) + \Phi_n^* (\tilde{s} \tilde{q}_n - s q_n) & \approx -s^* \Delta \Phi_n (G_n^e(s) \Phi_n^* - s \Phi_n^* (\tilde{G}_n^e(s) \tilde{\Phi}_n - G_n^e(s) \Phi_n)) \approx \\ & \approx -(s^* + s) \Delta \Phi_n \operatorname{Re} \{ G_n^e(s) \} \Phi_n^* - s \Delta G_n^e(s) |\Phi_n|^2 \approx -j\omega \Delta G_n^e(s) |\Phi_n|^2 \end{aligned}$$

Cele patru forme echivalente în care se prezintă relația de perturbație în funcție de modul de exprimare al condițiilor pe frontieră sunt următoarele:

$$\Delta \sigma_v + j\Delta \omega_v \approx j\omega_v \left[ \frac{\int_{fr\Omega} (u_i^* \Delta H_{il}^m(j\omega) u_l)^\vee ds}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^\vee|^2 d\Omega} + \frac{\sum_n (\Delta H_n^e(j\omega) |q|^2)^\vee}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^\vee|^2 d\Omega} \right] \quad (3)$$

$$\Delta \sigma_v + j\Delta \omega_v \approx j\omega_v \left[ - \frac{\int_{fr\Omega} (t_{in}^* \Delta G_{il}^m(j\omega) \gamma_{in})^\vee ds}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^\vee|^2 d\Omega} + \frac{\sum_n (\Delta H_n^e(j\omega) |q|^2)^\vee}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^\vee|^2 d\Omega} \right] \quad (4)$$

$$\Delta \sigma_v + j\Delta \omega_v \approx j\omega_v \left[ \frac{\int_{fr\Omega} (u_i^* \Delta H_{il}^m(j\omega) u_l)^\vee ds}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^\vee|^2 d\Omega} - \frac{\sum_n (\Delta G_n^e(j\omega) |\Phi|^2)^\vee}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^\vee|^2 d\Omega} \right] \quad (5)$$

$$\Delta \sigma_v + j\Delta \omega_v \approx j\omega_v \left[ - \frac{\int_{fr\Omega} (t_{in}^* \Delta G_{il}^m(j\omega) \gamma_{in})^\vee ds}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^\vee|^2 d\Omega} - \frac{\sum_n (\Delta G_n^e(j\omega) |\Phi|^2)^\vee}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^\vee|^2 d\Omega} \right] \quad (6)$$

În cele ce urmează, vom înțelege și apela în mod global funcțiile  $\alpha_{ijkl}^s, \alpha_{kji}^d, \alpha_{kj}^e, \alpha^p$  precum și variațiile impedanțelor sau admitanțelor mecanice sau electrice prin funcții de perturbație. Pentru a pune în evidență în mod explicit legătura ce există între zona de manifestare preponderentă a unei perturbații fizice, energia electroelastică de vibrație din acea zonă și deviația frecvențelor de rezonanță se va dovedi util să considerăm că funcțiile admit o reprezentare de forma:

$p(x) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i f(x - x_i)$  unde prin  $p(x)$  a fost notată o funcție de perturbație arbitrară de suprafață sau volum.  $f(x)$  reprezintă funcția de localizare a cărei alură generală este prezentată în figura 1,  $x,$



sunt punctele de localizare a acestor funcții iar  $p_i$  amplitudinile acestora. O astfel de reprezentare are sens din punct de vedere al clasei de funcții ce este generată prin combinația liniară a funcțiilor de formă poziționate în punctele  $x_i$ . Amintim în acest sens reprezentările de tip scară ce se obțin prin utilizarea ca și funcții de formă a impulsurile dreptunghiulare sau spațiile generate în teoria analizei multirezoluție de funcțiile “mamă”.

Funcția de formă este presupusă a avea o foarte bună localizare în jurul unui punct  $x_0 \in \Omega$ , sau  $x_0 \in \partial\Omega$  vecinătatea  $V_{x_0}$  pe care ele sunt presupuse a avea valori semnificative fiind mult mai mică decât volumul sau suprafața activă a rezonatorului. Figura 1 prezintă alura generală a funcțiilor de formă.

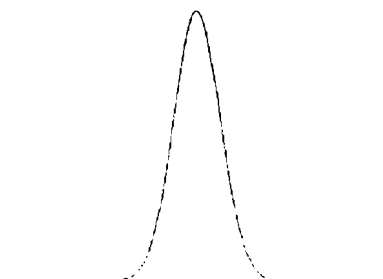


Figura 1. Alura generală a funcțiilor de localizare.

Această descriere calitativă a măsurii volumului sau suprafeței în care valorile semnificative ale funcției de formă sunt concentrate va fi explicată prin compararea cu “detaliile” spațiale ale funcțiilor proprii de vibrație în paragrafele următoare.

### § 2.3.1 Perturbații termice neuniforme

În acest subparagraf este pusă în evidență în mod explicit corelația ce există între punctul de aplicație al unei perturbații termice cu o bună localizare în volumul rezonatorului, densitatea energiei de vibrație în zona perturbată și deviația frecvenței de rezonanță. Relațiile teoretice sunt folosite pentru estimarea modificării frecvențelor proprii de vibrație și compararea cu datele experimentale în cazul unui rezonator pe substrat de cuarț încălzit neuniform de un fascicol laser de mică putere.

În paragraful 1.2 a fost discutată influența temperaturii asupra constantelor de material, condițiilor pe frontieră și geometriei unui rezonator piezoelectric. Evaluarea cantitativă precisă a acestor efecte termice este însă foarte dificilă în cazul aplicațiilor în care apar distribuții de temperatură neuniforme. În cele ce urmează nu ne vom referi la efectul temperaturii asupra condițiilor pe frontieră, acesta fiind specific fiecărei aplicații în parte, ci vom urmări doar o parte din efectele pe care temperatura le produce în volumul cristalului.

O distribuție termică neuniformă în interiorul cristalului piezoelectric conduce întotdeauna la un câmp de tensiuni și deformații elastice neuniform iar geometria volumului piezoelectric este alterată într-o manieră mult mai neregulată decât în cazul încălzirii uniforme. În consecință, constantele de material se modifică nu doar după legea polinomială descrisă în paragraful 1.2 (valabile doar în cristalul infinit) ci și în funcție de câmpul elastic și electric generat termic în solidul piezoelectric prin cuplaj neliniar. Teoretic, în situația cunoașterii distribuției de temperatură și a transformării de material indusă termic  $x \rightarrow \xi(x)$ , aceste efecte sunt convertibile (pentru funcții de deformație  $\xi$  “mici”) în modificări ale coeficienților de material prin aplicarea unei transformări inverse transformării termice  $\xi$  scrierea ecuațiilor electroelastice în noile coordonate curbilinii și revenirea la geometria inițială a volumului piezoelectric. Această abordare este deosebit de încărcată, ea a fost utilizată doar în situația încălzirii uniforme a cristalului și pentru tăieturi cristalografice particulare, în plus cu o serie de aproximații importante [54][55]. Întrucât acest subparagraf încearcă să ofere o explicație în primul rând calitativă unor fenomene de încălzire locală a căror distribuție termică este intuibilă ca formă dar nu măsurabilă cu precizie, nu vom urma această cale atât datorită caracterului ei greu matematic cât și datorită imposibilității validării certe a rezultatelor. În plus, situațiile ce le vom investiga prin simulare se referă în exclusivitate la încălziri locale ale cristalului cu maxim 1 Kelvin și gradienti termici rezonabil, ceea ce face posibilă neglijarea, într-o primă aproximație, a efectele neliniare și de modificare geometrică. Aceste efecte le vom trata în mod individual în paragrafele următoare fără a ține cont neapărat de mărimea fizică ce le-a provocat.

Pentru funcțiile de perturbație  $\alpha_{ijkl}^c, \alpha_{kji}^e, \alpha_{kj}^e, \alpha^p$  vom admite o dependență liniară de temperatura  $\theta - \theta_0$  ( $\theta_0$  este temperatura de referință, uzual 20 grade C) și o distribuție spațială oarecare  $p(x): \Omega \rightarrow [0,1]$  ( $\gamma$  fiind coeficienții liniari de expansiune termică)

$$\alpha_{ijkl}^c(x, \theta) = \gamma_{ijkl}^c (\theta - \theta_0) p(x)$$

$$\alpha_{kji}^e(x, \theta) = \gamma_{kji}^e (\theta - \theta_0) p(x)$$

$$\alpha_{ij}^e(x, \theta) = \gamma_{ij}^e (\theta - \theta_0) p(x)$$

$$\alpha^p(x, \theta) = \gamma^p (\theta - \theta_0) p(x)$$

Presupunând funcția de perturbație decompozabilă într-o combinație liniară de funcții de forma  $f(x - x_i)$ :  $p(x) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i f(x - x_i)$  vom evalua pentru început relația (1) din începutul acestui paragraf pentru o funcție de perturbație identică cu o funcție de formă poziționată într-un punct  $x_0$  arbitrar din interiorul domeniului  $\Omega$

$$\frac{\Delta\omega_v}{\omega_v} = \frac{(\theta - \theta_0) \int_{\Omega} f(x) (\gamma^{\rho_m} \omega_v \rho_m u_i^2 - \gamma_{ijkl}^c c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \gamma_{kjp}^e e_{kjp} E_k S_{ij}^* + \gamma_{kjp}^e e_{kjp} S_{jk} E_i^* + \gamma_j^e \epsilon_j E_j E_i^*) d\Omega}{2\omega_v^2 \int_{\Omega} \rho_m u_i^2 d\Omega}$$

Dacă ținem cont de buna localizare a funcției de formă  $f$  pe vecinătatea  $V_{x_0}$  aplicând teorema de medie integralei de volum din relația anterioară obținem pentru deviația de frecvență corespunzătoare modului propriu  $v$  următoarea expresie:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega_v}{\omega_v} &= -(\theta - \theta_0) \frac{\left[ f(\xi) (\gamma^{\rho_m} \omega_v^2 \rho_m u_i^2 - \gamma_{ijkl}^c c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \gamma_{kjp}^e e_{kjp} E_k S_{ij}^* + \gamma_{kjp}^e e_{kjp} S_{jk} E_i^* + \gamma_j^e \epsilon_j E_j E_i^*) \right]_{\xi \in V_{x_0}} \text{vol}(V_{x_0})}{2\omega_v^2 \int_{\Omega} \rho_m u_i^2 d\Omega} \approx \\ &\approx -(\theta - \theta_0) \frac{\left[ (\gamma^{\rho_m} \omega_v^2 \rho_m u_i^2 - \gamma_{ijkl}^c c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \gamma_{kjp}^e e_{kjp} E_k S_{ij}^* + \gamma_{kjp}^e e_{kjp} S_{jk} E_i^* + \gamma_j^e \epsilon_j E_j E_i^*) \right]_{x_0} \text{vol}(V_{x_0})}{2\omega_v^2 \int_{\Omega} \rho_m u_i^2 d\Omega_v} \end{aligned}$$

În aceasta ultimă aproximație am utilizat ipoteza conform căreia localizarea funcției de formă  $f$  este mult mai bună decât cele mai fine detalii ce le așteptăm pentru modul de vibrație investigat.

$$\begin{aligned} F[\psi^v(x)] &= (\gamma^{\rho_m} \omega_v^2 \rho_m u_i^2 - \gamma_{ijkl}^c c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \gamma_{kjp}^e e_{kjp} E_k S_{ij}^* + \gamma_{kjp}^e e_{kjp} S_{jk} E_i^* + \gamma_j^e \epsilon_j E_j E_i^*) (x). \\ \frac{\Delta\omega_v}{\omega_v} &= -(\theta - \theta_0) \frac{F[\psi(x_0)] \text{vol}(V_{x_0})}{2\omega_v^2 \int_{\Omega} \rho_m u_i^2 d\Omega_v} \end{aligned} \quad (1)$$

Concluziile imediate ce se desprind din simpla analiză calitativă a acestei ultime relații sunt următoarele:

- deviația de frecvență relativă este proporțională cu variația temperaturii
- existența unei corelații (prin funcția  $F[\psi(x)]$ ) între deviația de frecvență relativă și amplitudinea de vibrație în punctul de aplicație  $x_0$  al perturbației termice.

Pentru cunoașterea formei de variație a funcției  $F[\psi^v(x)]$  sunt necesare expresiile analitice sau estimările numerice pentru modul de vibrație  $\psi^v$  neperturbat. Expresii analitice aproximative există pentru rezonatoarele BAW pe substrat de cuarț (sau izomorfe,  $AlPO_4$ ,  $GaPO_4$ ) cu excitație transversală în tăietura  $Y$  rotită în următoarele ipoteze simplificatoare:

- placuța piezoelectrică are fețele plan paralele
- câmpul elastic și cel electric se presupun a se anula la marginile metalizărilor

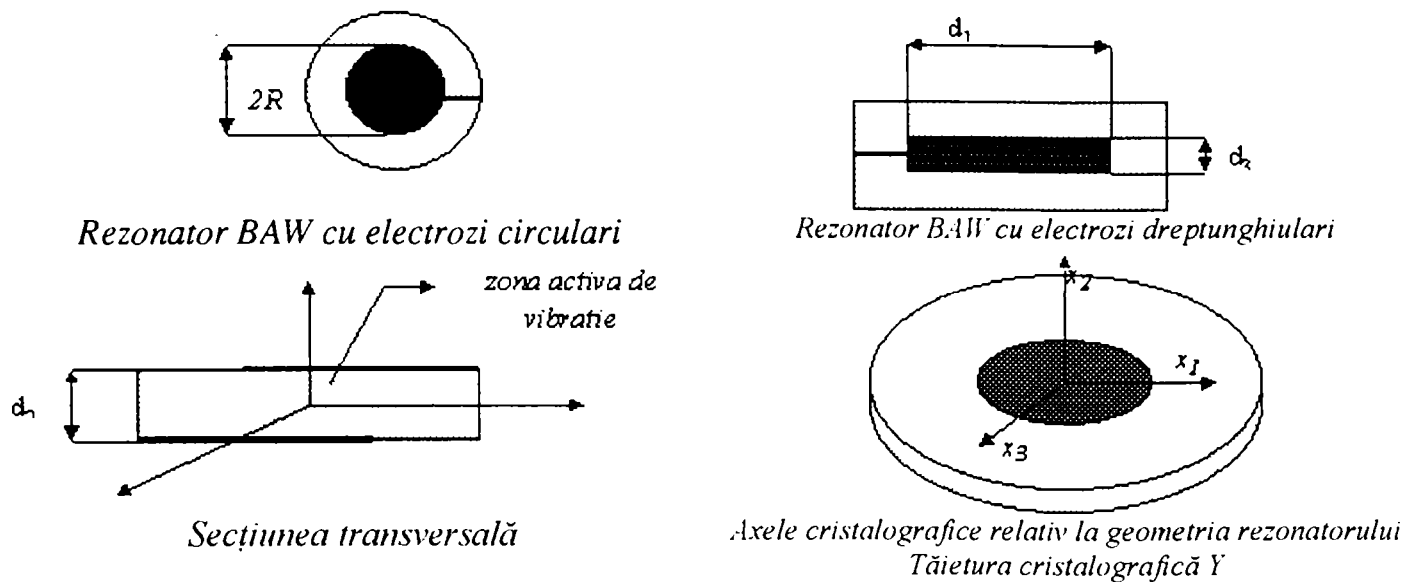


Figura 1 Rezonatoare BAW cu excitație transversală

Întrucât pentru tăieturile  $Y$  rotite este excitabil un singur mod piezoelectric, modul transversal  $B$  sau  $C$ , câmpul elastic poate fi descris printr-o singură funcție de elongație elastică  $u_Y(x_1, x_2, x_3)$  expresia generală pentru aceasta fiind următoarea:

$$u_Y^{mkn}(x_1, x_2, x_3) = g^{mk}(x_1, x_3) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{d_2} x_2\right)$$

setul de numere naturale  $(mkn)$  stabilind modul propriu de vibrație

Componenta activă piezoelectric  $u_Y$  este orientată întotdeauna după axa rotită  $X$  (cu unghiul  $\Theta$  față de direcția cristalografică  $X=(100)$  a cristalului). În această situație, frecvențele proprii de vibrații pentru modurile fundamentale  $(0,0,n)$  sunt bine approximate de relația:

$$\omega_n = (2n+1) \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{c_{1212}}{\rho_m}}$$

$$c_{1212} \approx \bar{c}_{1212} \cos^2 \Theta + \bar{c}_{2323} \sin^2 \Theta + 2\bar{c}_{1212} \bar{c}_{2323} \cos \Theta \sin \Theta$$

(s-a ignorat cuplajul piezoelectric) unde superscriptul – marchează constantele elastice din sistemul cristalografic canonic.

Concret, pentru o geometrie rectangulară sau circulară a electrozilor elongația elastică  $u_Y^{kmn}(x_1, x_2, x_3)$  ia următoarea formă:

$$u_Y^{kmn}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{kmn} a_{mkn} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{d_1} x_1\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{d_2} x_3\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{d_3} x_2\right)$$

pentru electrozi de formă dreptunghiulară.

$$u_C^{kmn}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{kmn} a_{mkn} J_m \left( s_k \cdot \frac{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}}{R} \right) \sin \left( \frac{(2n+1)\pi}{d_2} x_2 \right) \text{ pentru electrozi de formă circulară.}$$

$J_m$  este funcția Bessel de ordinul  $m$  iar  $s_k$  este rădăcina de ordinul  $k$ .

Expresiile anterioare reprezintă de asemenea o foarte bună aproximare pentru cazul tăieturilor dublu rotite având un mod  $C$  cvasi-transversal foarte aproape de cazul modului transversal pur; este cazul tăieturii cristalografice  $SC$ .

Figura următoare prezintă modurile  $(0,0,n)$ ,  $(0,1,n)$ ,  $(1,0,n)$  și  $(1,1,n)$  pentru geometria circulară:

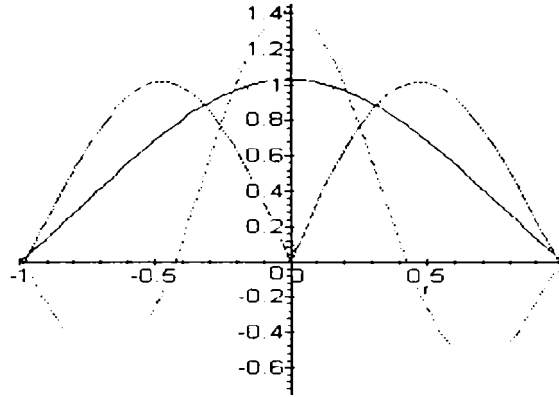


Figura 2 Modurile  $(0,0,n)$ ,  $(0,1,n)$ ,  $(1,0,n)$  și  $(1,1,n)$  pentru geometria circulară

Pentru rezonatorii cu undă de volum cu geometrie uzuală (figura 1) grosimea plăcuței cristaline este întotdeauna mult mai mică decât celelate două dimensiuni. Această inegalitate conduce la preponderența componentelor de stress transversal (pentru modurile având valori  $k$ ,  $m$  și  $n$  apropiate)  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  și  $S_{32}$  față de celelate componente ale tensorului de stress elastic.  $S_{ij}$

Dacă ignorăm efectele cuplajului piezoelectric și ținem cont de inegalitatea existentă între componentele de stress, putem aproxima funcția  $F[u_Y^{kmn}(x_1, x_2, x_3)]$  astfel:

$$\begin{aligned} F[u_Y^{kmn}(x_1, x_2, x_3)] &= (\omega_v^2 \gamma^{\rho_m} \rho_m |u_i|^2 - \gamma^{c_{ikl}} c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^*) = \\ &= \omega_v^2 \gamma^{\rho_m} \rho_m u_1^2 - \gamma^{c_{11l}} c_{1jll} S_{1l} S_{1j}^* \approx \omega_v^2 \gamma^{\rho_m} \rho_m u_1^2 - \gamma^{c_{1212}} c_{1212} S_{12}^2 \approx \\ &\approx \omega_v^2 \rho_m \left[ \gamma^{\rho_m} \sin^2 \left( (2n+1) \frac{\pi}{d_2} x_2 \right) - \gamma^c \cos^2 \left( (2n+1) \frac{\pi}{d_2} x_2 \right) \right] g^2(x_1, x_3) \end{aligned}$$

Să presupunem acum câmpul termic în interiorul rezonatorului a avea o distribuție ce se poate descompune în forma:

$$p(x_1, x_2, x_3) = p_d(x_2) p_s(x_1, x_3) \quad (2)$$

Această descompunere permite scrierea relației de perturbație astfel:

$$\frac{\Delta\omega_v}{\omega_v} \approx -\Delta\theta \frac{\int_{-d/2}^{d/2} p_d(x_2) \left[ \gamma^\rho \sin^2\left((2n+1)\frac{\pi}{d_2} x_2\right) - \gamma^{c_{1212}} \cos^2\left((2n+1)\frac{\pi}{d_2} x_2\right) \right] dx_2 \int_{S_{sup}} p_s(x_1, x_3) g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{2 \int_{-d/2}^{d/2} \sin^2\left((2n+1)\frac{\pi}{d_2} x_2\right) dx_2 \int_{S_{sup}} \rho_m g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} =$$

$$= -\Delta\theta \int_{-d/2}^{d/2} p_d(x_2) \left[ \gamma^\rho \sin^2\left((2n+1)\frac{\pi}{d_2} x_2\right) - \gamma^{c_{1212}} \cos^2\left((2n+1)\frac{\pi}{d_2} x_2\right) \right] dx_2 \frac{\int_{S_{sup}} p_s(x_1, x_3) g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{d_2 \int_{S_{sup}} \rho_m g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} \quad (3)$$

prin  $S_{sup}$  am notat una din suprafețele metalizate ale rezonatorului.

Analiza acestei ultime relații duce la următoarele concluzii teoretice în ceea ce privește efectul perturbațiilor termice de forma (2) asupra rezonatoarelor BAW investigate.

- factorul  $\frac{\int_{S_{sup}} p_s(x_1, x_3) g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{d_2 \int_{S_{sup}} \rho_m g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}$  pune în evidență în mod explicit corelația ce există între

forma de variație a perturbației termice la suprafața rezonatorului  $p_s(x_1, x_2)$  și distribuția energiei de vibrație pe suprafață  $g^2(x_1, x_3)$

- pentru o distribuție termică transversală constantă regăsim, cu suficientă precizie, tăieturile cristalografice pentru care există compensație termică:  $\gamma^{\rho_m} = \gamma^{c_{1212}}$ .

Relația (3) o vom utiliza în continuare pentru a valida concluziile mai sus amintite și a explica fenomenul de deviație a frecvenței de oscilație pentru tipul amintit de rezonatoare la baleierea unei suprafețe a electrodului cu un fascicol laser de mică putere. Fenomenul are o dinamică aparent surprinzătoare pentru tăieturile AT unde se constată salturi de frecvență pozitive deși o încălzire uniformă a acestor rezonatoare este în general însoțită de o ușoară scădere a frecvențelor proprii de vibrație.

Datele experimentale preluate din [10]:

Rezonator de cuarț, AT, geometrie cilindrică.

Raza electrozilor  $R=7\text{ mm}$ , frecvența modului fundamental este de 4.27MHz la 24 grade Celsius

Un electrod al rezonatorului este încălzit în centru cu un laser cu: HeNe (632.8nm) de 10mW

Diametrul fascicolului laserului la incidența pe electrodul rezonatorului aproximativ 1mm

Influența grosimii electrozilor asupra fenomenului este sumarizată în următorul tabel.

Grosimea electrodului de Ag	Frecvența de rezonanță (modul fundamental)	Variația absolută a frecvenței de rezonanță
Scade ↓	4,264 MHz	2Hz
	4,268 MHz	8Hz
	4,274 MHz	11Hz



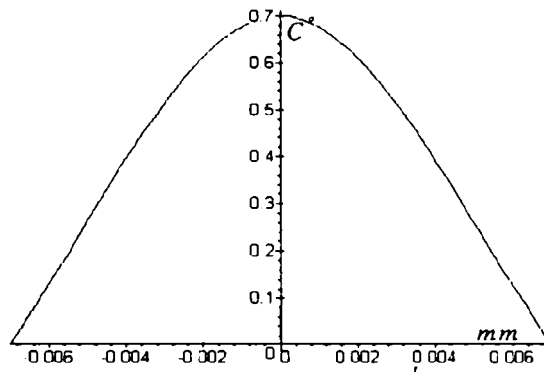


Figura 3 Profilul termic în lungul diametrului electrodului  
-date experimentale și calcul [10]

Ca o observație importantă notăm faptul că la o încălzire globală și uniformă a rezonatorului piezoelectric, frecvența de rezonanță scade cu aproximativ 0.25ppm/C.

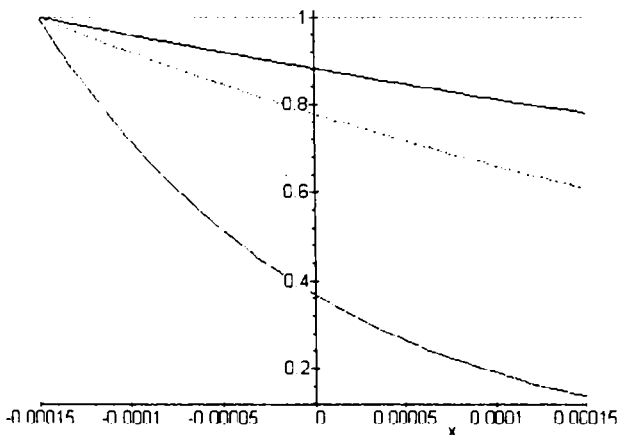
Trecem acum la prelucrarea acestor date experimentale cu ajutorul relației (3) în situația unui mod de vibrație fundamental. Pentru o iluminare în centrul electrodului, factorul

$$\frac{\int_{S_{\text{sup}}} p_s(x_1, x_3) g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{d_2 \int_{S_{\text{sup}}} \rho_m g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}$$

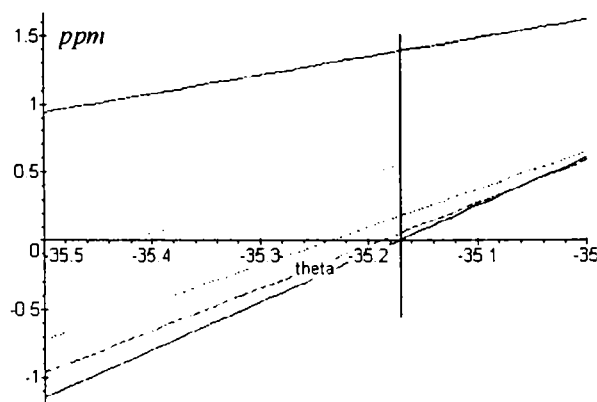
are valoare de 0.7 și scade pentru funcții de distribuție termică  $p_s(x_1, x_3)$  ce nu sunt poziționate în centrul metalizării.

Rezultatele simulării (încălzire centrală a electrodului)

Întrucât pentru distribuția termică transversală nu dispunem de date experimentale sau de calcul am considerat câteva cazuri diferite (fizic posibile) pentru a pune în evidență rolul profilului acestei distribuții în deviația de frecvență relativă ce apare.



profilul distribuției termice transversale  $p_a$



variația frecvenței pentru  $\Theta \in -35.5..-35$

Figura 4

Linia verticală punctată marchează unghiul  $\Theta$  pentru care expresia (3) se anulează (compensare termică).

O dispunere total diferită a deviațiilor de frecvență ar apare în cazul unei orientări cristalografice Y rotite necompensată termic. În această situație efectul termic asupra densității masice și asupra coeficientului elastic echivalent este cumulativ. Figura următoare prezintă datele de simulare pentru un astfel de caz. Unghiul de rotație  $\Theta$  este presupus a lua valori între  $-5 \dots +5$  grade.

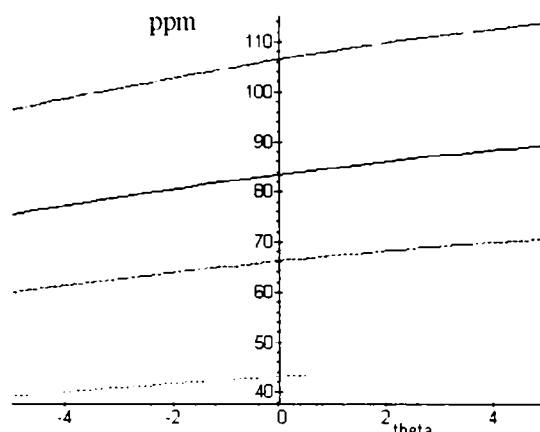


Figura 5 Variația frecvenței pentru  $\Theta \in -5.5$

O primă concluzie ce o putem formula se referă la influența majoră ce o are distribuția termică transversală asupra deviației de frecvență în astfel de situații. Acest efect este suplimentar celui pus în evidență și explicat de A. Budura în [10] ca datorându-se în principal neuniformității termice la suprafața rezonatorului. În acest sens, o sursă de eroare certă în acest model de predicție apare datorită ignorării influenței temperaturii asupra componentelor de stress lateral din formula de estimare (3).

În modelul prezentat aici fenomenul de modificare a deviației de frecvență la baleierea electrodului cu spotul laser apare prin modularea efectului gradientului termic transversal de către

$$\text{factorul } \frac{\int_{S_{\text{aip}}} \rho_s(x_1, x_3) g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{d_2 \int_{S_{\text{aip}}} \rho_m g^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}$$

Vom compara în cele ce urmează o serie de date experimentale cu rezultatele de predicție ce le-am obținut utilizând ca bază de calcul relația (3). Următoarele grafice, (preluate din [10] și [13]) sunt pentru rezonatoare AT și SC cu excitație transversală baleiate cu un fascicol laser HeNe de 10mW. Rezonatoarele au o geometrie lenticulară pentru a facilita efectul de concentrare a energiei de vibrație către centrul electrozilor. Pentru această geometrie, măsurători precise efectuate prin topografie în raze X au relevat o distribuție a amplitudinilor de vibrație apropiată de clopotul gaussian pentru modurile fundamentale de oscilație.

Axele carteziene precizează următoarele mărimi:

axa X - poziția spotului laser

axa Y - deviația de frecvență a rezonatorului

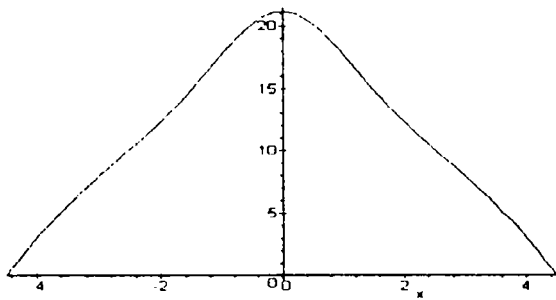


Figura 6.a

*Date experimentale pentru un rezonator BAW pe substrat de cuarț în tăietură SC, mod (0,0,0) scanat cu un fascicul laser în lungul unui diametru; frecvența de rezonanță neperturbată a fost de 4 989 768 Hz*

*Dimetrul electrodului 9mm*

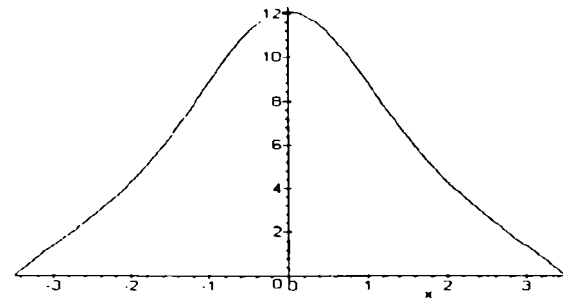


Figura 6.b

*Date experimentale pentru un rezonator BAW pe substrat de cuarț în tăietură AT, mod (0,0,0) scanat cu un fascicul laser în lungul unui diametru; frecvența de rezonanță neperturbată a fost de 4 273 235 Hz*

*Dimetrul electrodului 7mm*

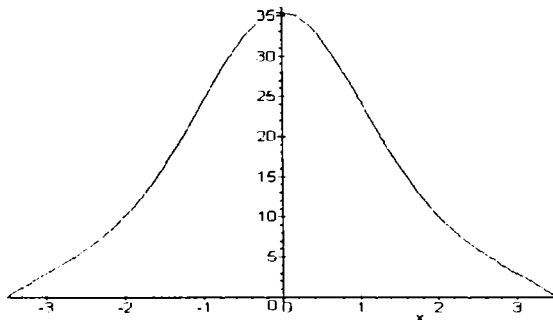


Figura 6.c

*Date experimentale pentru un rezonator BAW pe substrat de cuarț în tăietură AT, mod (0,0,1) scanat cu un fascicul laser în lungul unui diametru; frecvența de rezonanță neperturbată a fost de 11 125 556Hz – armonica a treia*

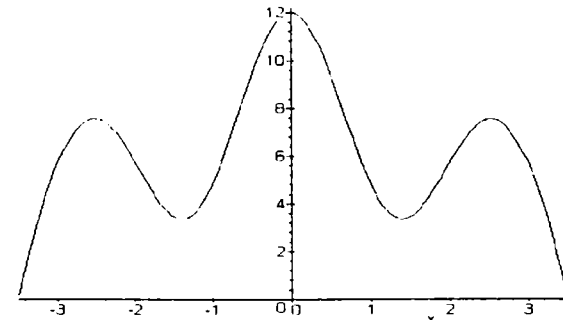


Figura 6.d

*Date experimentale pentru un rezonator BAW pe substrat de cuarț în tăietură AT, mod (0,1,0) scanat cu un fascicul laser în lungul unui diametru; frecvența de rezonanță neperturbată a fost de 4 347 665Hz*

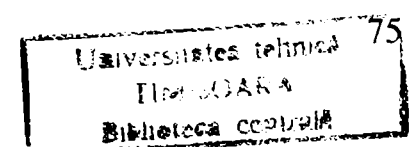
Graficele prezentate au fost obținute prin medierea mai multor scanări și prin interpolare. Aceste grafice împreună cu valorile obținute prin simulare în situația iluminării centrale conduc la concluzia că prin modelul propus de explicare a acestui fenomen se reușește o bună estimare a formei de variație a deviației relative de frecvență și plasarea mărimii acestor modificări de frecvență în același ordin de mărime cu datele experimentale.

### §2.3.2 Perturbarea constantelor de material prin efect neliniar datorită câmpului elastic sau electric staționar supraimpus vibrațiilor piezoelectrice

Este prezentat un studiu calitativ al influenței ce o au câmpurile elastice sau electrice staționare neuniforme asupra spectrului de vibrație al unui rezonator piezoelectric. Ipoteza ce permite utilizarea relației de perturbație pentru descrierea acestei influențe este aceea a invarianței domeniului piezoelectric la solicitările mecanice sau electrice externe. Ultima parte a paragrafului renunță la această ipoteză și calculează pe baza unui model simplificat unidimensional modificarea de frecvență la apariția unei solicitări mecanice.

Să presupunem că la suprafața unui rezonator piezoelectric considerat inițial a fi într-o stare de echilibru se exercită presiuni mecanice sau apare un câmp electric exterior. Forma de variație temporală a acestor încărcări mecanice și electrice pe frontiera solidului piezoelectric o considerăm a fi de tip treaptă unitate. Aflarea riguroasă a noii stări de echilibru a solidului piezoelectric ar necesita rezolvarea ecuațiilor electroelastice neliniare în ipoteza unei frontiere de material ce se modifică în cursul dinamicii electroelastice. Rigiditatea foarte mare a cristalelor piezoelectrice precum și solicitările mecanice sau electrice de mică intensitate ce sunt de așteptat în aplicații au condus la ignorarea modificărilor geometrice ce apar în astfel de situații. Noua stare de echilibru se poate afla în acest caz prin rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare staționare pe un domeniu identic cu cel inițial  $\Omega' \equiv \Omega$ . În consecință, spectrul frecvențelor de rezonanță pentru solidul piezoelectric aflat în aceasta nouă stare de echilibru se presupune ca s-a modificat doar datorită alterării coeficienților de material  $I_M$  prin mecanismul neliniar ce a fost explicat în paragraful 1.2. Motivația ipotezei de ignorare a modificărilor geometrice se sprijină exclusiv pe intuiția fizică și concordanța rezultatelor de predicție cu datele experimentale. Un calcul matematic pentru o structură tridimensională nu a fost făcut în cazul admiterii unei frontiere mobile. Teoretic, aceasta influență a modificării geometrice a domeniului piezoelectric asupra spectrului de vibrație este posibilă și a fost făcută într-o serie de articole de Tiersten și Sinha, însă numai cu prezumția cunoașterii *a priori* a funcției  $\Omega \xrightarrow{\xi} \Omega'$  ce descrie transformarea domeniului inițial  $\Omega$  [54],[55]. În modul de analiză propus de aceștia efectele modificărilor geometrice sunt traduse în expresiile tensorilor piezoelectrice atât liniari cât și neliniari (construcția tensorilor Piola-Kirchoff) și aplicarea apoi a relațiilor clasice de perturbație. Eleganța teoretică a acestei abordări are inconvenientul unui formalism destul de greu aplicabil unor situații concrete. În plus, această tratare simultană a efectelor geometrice cu cele neliniare maschează influența fiecăruia asupra spectrului de vibrație, cunoașterea lor decorelată putând fi foarte utilă în măsurători ale constantelor piezoelectrice neliniare sau a proiectării optime a suprafețelor rezonatorului (acest subiect va fi atins în paragraful 2.3.3).

În cele ce urmează, nu vom urma aceeași cale de studiu ca a articolelor mai sus citate ci vom trata aceste efecte separat. Acest paragraf se va focaliza asupra a două aspecte. Primul dintre acestea pune în evidență, într-o manieră principal calitativă, efectul câmpurilor electroelastice neuniforme asupra spectrului de vibrație utilizând relația de perturbație de ordinul întâi, cel de al doilea dă o motivație prin calcul (pe un model unidimensional simplificat) regulei acceptate, că la aplicarea unor tensiuni mecanice sau câmpuri electrice rezonabile spectrul de vibrație se modifică în principal datorită cuplajului neliniar și doar într-o mică măsură datorită alterării geometrice. Simplificările admise în acest model vor releva însă și limita de aplicabilitate a acestui studiu în situații reale tridimensionale.



Pentru a fixa cadrul concret de analiză vom considera următoarele:

Ecuatiile electroelastice generale pe domeniul piezoelectric  $\Omega$

$$\begin{cases} \rho_m \ddot{u}_i^g = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^g \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_j} D_j^g \end{cases} \quad (1)$$

Condițiile pe frontieră generale (prin superscriptul  $\bar{\quad}$  se notează valorile impuse extern):

*Câmpul elastic*

$$\begin{aligned} \Sigma_T^{mec} &= \left\{ S_m \in \Pi_{fr\Omega} \left| (T_{ij}^g n_j)_{|S_m} = {}_m \bar{T}_i^g \right. \right\} && \text{cu } {}_m \bar{T}_i^g(x, t): S_m \times (0, \infty) \rightarrow R \text{ continuă} \\ \Sigma_u^{mec} &= \left\{ S_n \in \Pi_{fr\Omega} \left| u_i^g|_{S_n} = {}_n \bar{u}_i^g \right. \right\} && \text{cu } {}_n \bar{u}_i^g: S_n \times (0, \infty) \rightarrow R \text{ continuă} \\ \Sigma_{T_u}^{mec} &\in \Pi_{fr\Omega} \\ T_{ij}^g(x, t) n_i(x) + k_{il}(x) u_i^g(x, t) &= \bar{M}_i^g(x, t) \text{ cu } \bar{M}_i^g(x, t): \Sigma_{T_u}^{mec} \times (0, \infty) \rightarrow R \text{ funcții continue} \end{aligned}$$

*Câmpul electric:*

$$\begin{aligned} \Sigma^{met} &= \left\{ S_i \in \Pi_{fr\Omega} \left| \Phi^g|_{S_i} = {}_i \Phi^g(t) \right. \right\} && {}_i \Phi^g(t) \text{ funcție continuă de timp pe } \Sigma^{met} \\ \Sigma_{\Phi}^{met} &= \left\{ S_p \in \Pi_{fr\Omega} \left| \Phi^g|_{S_p} = {}_p \bar{\Phi}^g(t) \right. \right\} && {}_p \bar{\Phi}^g(t) \text{ funcție continuă} \\ \Sigma_Q^{met} &= \left\{ S_r \in \Pi_{fr\Omega} \left| \int_{S_r} \bar{D}^g \cdot \bar{n} ds = -{}_r \bar{Q}^g(t) \right. \right\} && {}_r \bar{Q}^g(t) \text{ funcție continuă} \\ \Sigma_{q\Phi}^{met} &= \left\{ S_c \in \Pi_{fr\Omega} \left| {}_c \Phi^g(t) + {}_c q^g(t) (C^{-1}) = {}_c \bar{V}^g(t) \right. \right\} && \text{cu } {}_c \bar{V}^g(t) \text{ continuă} \\ &&& {}_c q^g = - \int_{S_c} \bar{D}^g \cdot \bar{n} ds \\ \Sigma_{\phi}^{die} &= \left\{ S_k \in fr\Omega \left| \phi^g|_{S_k} = {}_k \bar{\phi}^g \right. \right\} && {}_k \bar{\phi}: S_k \times (0, \infty) \rightarrow R \text{ continuă} \\ \Sigma_{\sigma}^{die} &= \left\{ S_j \in fr\Omega \left| -\bar{D}^g \cdot \bar{n}|_{S_j} = {}_j \bar{\sigma}^g \right. \right\} && {}_j \bar{\sigma}^g: S_j \times (0, \infty) \rightarrow R \text{ continuă} \end{aligned}$$

Să presupunem că mărimile impuse pe frontieră  ${}_m \bar{T}_i^g, {}_n \bar{u}_i^g, \bar{M}_i^g, {}_p \bar{\Phi}^g, {}_r \bar{Q}^g, {}_c \bar{V}^g, {}_k \bar{\phi}$  și  ${}_j \bar{\sigma}^g$  au toate următoarea formă generică de variație în timp:  $X^g(t) = Xh(t) + x(t)$  cu  $X$  o valoare constantă în timp,  $h(t)$  treapta unitate iar  $x(t)$  o funcție continuă pe  $(0, \infty)$  cu proprietatea că  $\int_0^\infty x(t) dt = 0$ .

Efectul saltului în origine  $Xh(t)$  asupra mărimilor de stare ale câmpului electroelastic în volumul piezoelectric se stinge asimptotic către  $+\infty$  datorită pierderilor energetice în volumul piezoelectric. Practic, după un timp mai mare ca 4~5 constanta de relaxare a nucleelor de convoluție pentru parametrii elastici (definiți în paragraful 1.1) dinamica câmpului electroelastic în solidul piezoelectric este guvernată exclusiv de funcția generică  $x(t)$ . Media nulă acestei funcții face ca vibrațiile piezoelectrice să se desfășoare în jurul noilor poziții de echilibru impuse de mărimea constantă  $X$ .

Aceste considerații permit scrierea mărimilor de stare a câmpului electroelastic în forma:  $u_i^s(t) = U_i h(t) + u_i$ ,  $\phi^s = \Phi h(t) + \phi(t)$  și descompunerea sistemului de ecuații inițial în două sisteme distincte.

$$\text{a. } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} D_j = 0 \end{cases} + \text{ condițiile pe frontieră impuse de mărimile staționare } X$$

$$\text{b. } \begin{cases} \rho_m \ddot{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ij} \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_j} d_j \end{cases} + \text{ condițiile pe frontieră impuse de funcțiile } x(t)$$

Rezolvarea primului sistem de ecuații (neaparat nelinier, altfel nu apare o modificare a coeficienților de material în cel de al doilea sistem presupus uzual linier) va furniza nouă stare de echilibru  $(S_{ij}^f, E_i^f)$ . Coeficienții liniari de material în această stare se modifică conform relațiilor (mat 3) prezentate în paragraful 1.1. Analiza spectrală a rezonatorului în aceasta nouă stare revine la studiul sistemului celui de al doilea sistem de ecuații în ipoteza unui regim armonic permanent și a anulării funcțiilor  $x(t)$ .

Sistemul de ecuații staționare este analizat din punct de vedere al condițiilor de existență și unicitate ale soluției în paragraful 4.3 al capitolului de complemente matematice admițându-se o neliniaritate patrată în aproximarea tensiunilor elastice și a inducției electrice de tipul următor:

$$T_{ij} \approx c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k + \frac{1}{2} c_{ijklmn} S_{kl} S_{mn}$$

$$D_k \approx \varepsilon_{kj} E_j + e_{kij} S_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kji} E_j E_i$$

Cel de al doilea sistem de ecuații este sistemul ecuațiilor electroelastice clasice:

$$\begin{cases} \rho_m s^2 u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl}^p \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kji}^p \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \varepsilon_{kj}^p \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - e_{kji}^p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

cu:

$$c_{ijkl}^p = c_{ijkl}^0 + c_{ijklmn}^0 S_{mn}^f + g_{ijklm}^0 E_m^f$$

$$e_{kji}^p = e_{kji}^0 - g_{kijlm}^0 S_{lm}^f + f_{ijkl}^0 E_l^f = e_{kji}^0 + f_{knij}^0 E_m^f - g_{kjmn}^0 S_{mn}^f$$

$$\varepsilon_{kj}^p = \varepsilon_{kj}^0 + \varepsilon_{kji}^0 E_i^f + f_{kijm}^0 S_{im}^f$$

tensorii de material liniari în noua stare de echilibru.

În ipoteza amintită a invarianței domeniului  $\Omega$  deviația frecvențelor de rezonanță este aproximată de relația de perturbație de ordinul întâi:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\int_{\Omega} (-\Delta c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \Delta e_{kij} E_k S_{ij}^* + \Delta e_{ijk} S_{jk} E_i^* + \Delta \varepsilon_{ij} E_j E_i^*) d\Omega}{2\omega^2 \int_{\Omega} \rho_m |u_i|^2 d\Omega} \quad (2)$$

$$\Delta c_{ijkl} = c_{ijklmn}^0 S_{mn}^f + g_{ijklm}^0 E_m^f$$



$$\Delta e_{kji} = -g_{kijlm}^0 S_{lm}^f + f_{ijkl}^0 E_l^f = f_{kmij}^0 E_m^f - g_{kjmn}^0 S_{mn}^f \quad (3)$$

$$\Delta \varepsilon_{kj}^p = \varepsilon_{kjp}^0 E_i^f + f_{kjp}^0 S_{im}^f$$

Problemele de ordin computațional ce apar în calculul stării de echilibru  $(S_{ij}^f, E_i^f)$  au făcut ca această relație să fie foarte puțin utilizată deși ea oferă o explicație riguroasă, tridimensională unor rezultate ce au fost deduse pe baza unor modele de calcul unidimensionale simplificate – este vorba în principal de studiile [16],[17] legate de tăietura cristalografică SC pentru care  $\Delta c_{ijkl} \approx c_{ijklmn}^0 S_{mn}^f$  în situația unui stress mecanic  $S_{ij}^f$  conținut în planul electrozilor plăcuței piezoelectrice.

Relația (2) împreună cu (3) relevă în mod clar dependența pulsațiilor de rezonanță de neuniformitățile câmpului de echilibru  $(S_{ij}^f, E_i^f)$  însă un rezultat mai ușor analizabil nu se poate da în această situație generală. O expresie de calcul mai directă există numai pentru câmpuri de stress uniform în cazul particular al rezonatoarelor de cuarț în orientare Y rotită. Pentru rezonatoarele de acest tip, s-a constatat experimental că între deviația de frecvență și mărimea solicitării mecanice există o dependență liniară până aproape de 95% din limita de rupere a cristalului [16]. O formulă aproximativă pentru variația relativă a frecvențelor de oscilație pentru o geometrie de disc a rezonatorului (figura 1) este următoarea:

$$\frac{\Delta f}{f^0} \approx 40 * 10^{-6} \frac{\eta(\theta)F}{2hD} \quad (4)$$

unde:  $F$  este forța ce se aplică radial rezonatorului

$D$  este diametrul rezonatorului

$2h$  este grosimea rezonatorului

$\eta$  un factor de proporționalitate ce ține cont de direcția de aplicare a forței  $F$  (orientarea cristalografică a plăcuței piezoelectrice - după unghiul  $\theta$ )

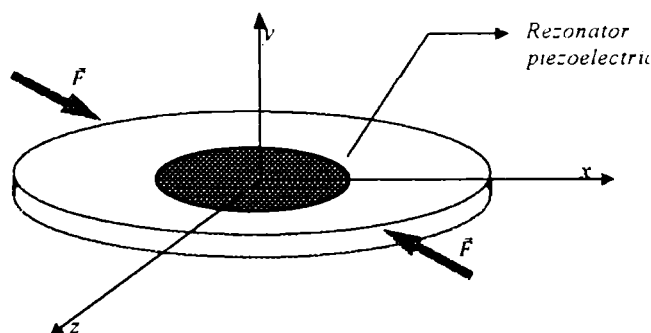


Figura 1

Senzor piezoelectric rezonant BAW pentru solicitări mecanice

Efectul maxim ( $\eta$  maxim) se obține atunci când direcția de aplicare a forței  $F$  este coliniară cu axa  $X$  a cristalului.

Un rezultat calitativ în ceea ce privește legătura dintre energia vibrațională locală și deviația relativă de frecvență putem obține în ipoteza ca funcția de distribuție a stressului staționar  $S_{ij}^f$  (acesta are o influență mult mai mare decât câmpul electric  $E_i^f$ ) are forma unei funcții de formă cu o bună localizare spațială în jurul unui punct  $x_0$  din volumul piezoelectric:

$$S_{mn}^f(x) = \max_{x \in \Omega} (S_{mn}^f) f(x - x_0). \text{ În consecință, } \Delta c_{ijkl} \approx c_{ijklmn}^0 \max_{x \in \Omega} (S_{mn}^f) f(x - x_0)$$

Această distribuție a stressului permite aproximarea deviației relative de frecvență astfel:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{\int_{\Omega} c_{ijkl} S_{mn}^f S_{kl} S_{ij}^* d\Omega}{2\omega^2 \int_{\Omega} \rho_m |u_i|^2 d\Omega} \approx \frac{c_{ijkl} \max_{x \in \Omega} (S_{mn}^f) S_{kl}(x_0) S_{ij}^*(x_0) V_0}{2\omega^2 \int_{\Omega} \rho_m |u_i|^2 d\Omega} \quad (5)$$

$$\text{cu } V_0 = \int_{\Omega} f(x - x_0) d\Omega$$

Să presupunem că rotim sistemul de referință în care sunt exprimați tensorii de material astfel încât orice element  $c_{ijkl} \neq 0$ . În acest caz putem scrie relația anterioară astfel:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{\left[ \frac{c_{ijkl} \max_{x \in \Omega} (S_{mn}^f)}{c_{ijkl}} \right] [c_{ijkl} S_{kl}(x_0) S_{ij}^*(x_0)] V_0}{2\omega^2 \int_{\Omega} \rho_m |u_i|^2 d\Omega} \quad (6)$$

Scriind această relație în acest fel am încercat să evidențiem dependența deviației relative de frecvență de termenii  $c_{ijkl} S_{kl}(x_0) S_{ij}^*(x_0)$  aceștia definind densitatea volumică a energiei potențiale elastice în punctul  $x_0$ .

În continuare, vom calcula și compara frecvențele de vibrație longitudinale ale unei bare elastice încastrată la o extremitate în două poziții de echilibru. În prima, un capăt al barei este liber, în cea de a doua, se exercită o solicitare axială statică ce modifică lungimea barei. Problema o vom trata strict unidimensional în lungul axei  $Ox$  – figura 2. Încercăm prin acest model simplu să analizăm cât greșim calculând frecvența de rezonanță în bară luând în calcul doar câmpul elastic nelinier nu și modificarea lungimii și implicit a densității.

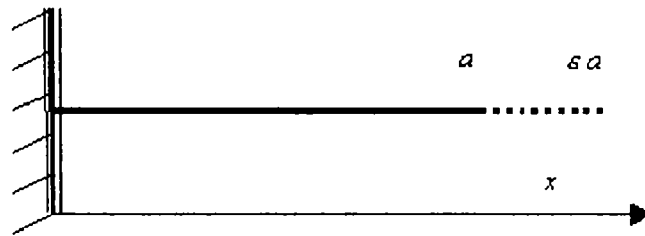


Figura 2  
Bara elastică supusă unui efort longitudinal

Să precizăm pentru început mărimile și notațiile ce le vom utiliza.

$\Omega_0 = (0, a)$  domeniul inițial al barei

$u(x)$  elongația pentru vibrațiile elastice în lungul axei  $Ox$

$k_1^0, k_2^0$  coeficientul de elasticitate liniar și cel patratric pentru poziția de echilibru cu domeniul  $\Omega_0$ ;

$\eta$  vâscozitatea elastică ce o considerăm foarte mică

$x \rightarrow f(x)$  funcția de modificare a domeniului  $\Omega_0$  datorită solicitării mecanice statice

$\Omega = (0, f(a))$  noul domeniu al barei

$\xi(x) = f(x) - x$  elongația elastică datorată solicitării mecanice statice

$\varphi(x, t) = \xi(x) + u(x, t)$  elongația elastică compusă

$T(x) = k_1 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} k_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x)$  tensiunea elastică în bară

$$f_0 = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{k_1^0}{\rho_0}} \quad \text{frecvența fundamentală de vibrație pentru domeniul } \Omega_0$$

Relația de conservare a impulsului în bară are următoarea expresie.

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} = \left( k_1 + k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

$$\text{cu } \left( k_1^0 + k_2^0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = k_1^0 + k_2^0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + k_2^0 \frac{\partial u}{\partial x} \approx k_1^0 + k_2^0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Pentru  $t \rightarrow \infty$  această ecuație o putem descompune în două ecuații independente, cea a echilibrului static și cea a micilor vibrații liniare; vom ignora în continuare efectul vâsozității elastice. Următoarele ecuații sunt valabile în domeniul  $\Omega$ .

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( k_1^0 + k_2^0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \left( k_1^0 + k_2^0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Să presupunem în continuare că funcția  $f(x)$  are această formă simplă:  $f(x) = \varepsilon x$  cu  $\varepsilon$  o constantă pozitivă apropiată de 1.

Densitatea elastică se va modifica conform legii de conservare a masei:  $\rho = \frac{\rho_0}{J_f} = \frac{\rho_0}{\varepsilon}$ .

Ecuația ce se obține pentru micile vibrații în domeniul  $\Omega$  este următoarea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \frac{(k_1 + (\varepsilon - 1)k_2)}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Efectuăm o schimbare de variabilă  $y(x) = f^{-1}(x)$  pentru a reveni în domeniul inițial  $(0, a)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

În consecință,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k_1}{\rho_0} \frac{\left( 1 + (\varepsilon - 1) \frac{k_2}{k_1} \right)}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  pentru domeniul inițial  $\Omega_0$ . O soluție

fundamentală a acestei ecuații este:  $u(x, t) = \sin(2\pi f) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$

De aici, frecvența de oscilație  $f = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{k_1}{\rho_0}} \sqrt{\frac{\left( 1 + (\varepsilon - 1) \frac{k_2}{k_1} \right)}{\varepsilon}}$

În această situație, deviația relativă de frecvență are următoarea expresie:

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \sqrt{\frac{1 + (\varepsilon - 1) \frac{k_2}{k_1}}{\varepsilon}} - 1 \approx \frac{1 + \frac{1}{2}(\varepsilon - 1) \frac{k_2}{k_1}}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \quad (8)$$

Dacă presupunem că modificarea barei s-a datorat unei forțe  $F \approx k_1 \xi(a) = k_1(\varepsilon - 1)a$  atunci,

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \sqrt{\frac{1 + \frac{F k_2}{k_1 a k_1}}{1 + \frac{F}{k_1 a}}} - 1$$

Reluăm acum deducerea acestei deviații relative de frecvențe ignorând de această dată efectul alungirii asupra densității și a domeniului  $\Omega_0$  (atunci când calculăm în final frecvența de rezonanță) și luând în seamă doar efectul modificării coeficientului de elasticitate prin cuplaj neliniar. În aceste ipoteze,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (k_1 + (\varepsilon - 1)k_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ pentru } x \in (0, a)$$

iar pentru deviația de frecvență obținem expresia:

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \sqrt{1 + (\varepsilon - 1) \frac{k_2}{k_1}} - 1 \approx \frac{1}{2}(\varepsilon - 1) \frac{k_2}{k_1} \quad (9)$$

Comparând cele două expresii (8) și (9) se observă că ele sunt foarte apropiate, dubla aproximare ce am făcut-o neglijând modificarea lungimii barei și a densității a condus la un rezultat foarte apropiat de cel corect. Această situație se datorează efectului contrar ce îl au asupra frecvențelor de rezonanță modificarea densității și a lungimii barei.

Această scurtă prezentare nu constituie însă o demonstrație că într-o situație tridimensională și pentru un câmp electroelastic staționar  $(S'_{ij}, E'_{ij})$  cu o distribuție neuniformă în volumul piezoelectric va exista întotdeauna o situație similară. Ea poate fi utilizată ca argument doar acolo unde dinamica electroelastică poate fi aproximată ca fiind asemănătoare celei dintr-o bară unidimensională.

Pe parcursul acestui paragraf vom prezenta o metodă de analiză a influenței perturbațiilor geometrice asupra frecvențelor de rezonanță prin echivalarea acestor perturbații cu modificări ale parametrilor de material  $I_M$  în volumul piezoelectric inițial. Cursul raționamentului va conduce la deducerea formei optimale (după un criteriu de ecart între modul fundamental și modurile adiacente parazite) pentru suprafețele active ale rezonatoarelor BAW pe substrat de cuarț într-o orientare cristalografică  $Y$  rotită.

Creșterea sau scăderea temperaturii mediului piezoelectric duce la modificarea volumului  $\Omega$  printr-un fenomen de expansiune sau contracție termică. Câmpurile electrice sau mecanice acționând pe frontiera dispozitivului provoacă de asemenea deformații de geometrie ale volumului  $\Omega$ . În paragrafele precedente am prezentat motivele pentru care vom trata efectul deformațiilor geometrice separat de cauza ce le-a produs. O vom face în acest paragraf prin revenirea în domeniul inițial și echivalarea deformației geometrice (presupusă a nu avea o componentă neliniară importantă) cu o alterare a coeficienților de material  $I_M$ .

Din punct de vedere matematic, transformarea domeniului  $\Omega$  în  $\Omega'$  revine la aplicarea unei funcții  $\xi: R^3 \rightarrow R^3$  inversabile asupra punctelor  $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ , imaginea acestora prin transformarea  $\xi$  reprezentând noul domeniu  $\Omega'$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \xrightarrow{\xi} (x'_1, x'_2, x'_3) \in \Omega'.$$

Dacă fenomenul ce conduce la modificarea domeniului  $\Omega$  are o dinamică temporală mult mai lentă decât vibrațiile electroelastice din interiorul volumului piezoelectric, aplicația  $\xi$  poate fi considerată ca fiind independentă de timp. În cele ce urmează, vom considera această ipoteză ca fiind îndeplinită.

Ecuatiile electroelastice clasice le scriem inițial pentru domeniul  $\Omega'$  presupunând că tensorii de material  $c'_{ijkl}, e'_{kji}, \epsilon'_{kj}, \rho'_m$  au valori constante în acest domeniu.

$$\begin{cases} \rho'_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c'_{ipql} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x'_p \partial x'_q} + e'_{qip} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'_p \partial x'_q} \\ 0 = \epsilon'_{qp} \frac{\partial \phi}{\partial x'_p \partial x'_q} - e'_{qpi} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x'_p \partial x'_q} \end{cases} \quad (1)$$

Rescriem ecuațiile de mai sus pentru variabilele  $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  urmând ca în ipoteza îndeplinirii unei inegalități de variație asupra funcției de transformare  $\xi^{-1}$  să determinăm relațiile de transformare pentru  $c'_{ijkl}, e'_{kji}, \epsilon'_{kj}, \rho'_m$  din sistemul  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  în  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Presupunem aplicația  $\xi^{-1}$  ca fiind de clasă  $C^2(\Omega)$ .

Operatorul diferențial  $\frac{\partial^2}{\partial x'_p \partial x'_q}$  în  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  are următoarea formă în  $(x_1, x_2, x_3)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x'_p \partial x'_q} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \frac{\partial x_k}{\partial x'_q} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 x_j}{\partial x'_p \partial x'_q} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2)$$

Dacă funcțiile de transformare îndeplinesc următoarea inegalitate:

$$\left| \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \frac{\partial x_k}{\partial x'_q} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 x_j}{\partial x'_p \partial x'_q} \right| \quad (3)$$

relația (2) se poate aproxima astfel:  $\frac{\partial^2}{\partial x'_p \partial x'_q} \approx \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \frac{\partial x_k}{\partial x'_q} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$

În consecință, tensorii de material în sistemul  $(x_1, x_2, x_3)$  se vor transforma după următoarea lege similară unei transformări liniare:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ijkl} &\approx \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \frac{\partial x_k}{\partial x'_q} c'_{ipql} \\ \tilde{e}_{kji} &\approx \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \frac{\partial x_k}{\partial x'_q} e'_{qip} \\ \tilde{\varepsilon}_{jk} &\approx \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \frac{\partial x_k}{\partial x'_q} \varepsilon'_{pq} \end{aligned} \quad (4)$$

Relația de modificare a densității materialului se obține din legea conservării masei la trecerea din sistemul  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  în  $(x_1, x_2, x_3)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} [\rho'_m(x'_1, x'_2, x'_3)] dv' &= \int_{\Omega} [\tilde{\rho}_m(x_1, x_2, x_3)] dv = \\ &= \int_{\Omega'} [\tilde{\rho}_m(x_1(x'_1, x'_2, x'_3), x_2(x'_1, x'_2, x'_3), x_3(x'_1, x'_2, x'_3))] \det \left( \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \right) dv' \\ \rho'_m &= \tilde{\rho}_m \left| \det \left( \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \right) \right| \end{aligned} \quad (5)$$

Ecuatiile (2) în noile variabile  $(x_1, x_2, x_3)$  devin:

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \left( \tilde{c}_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \right) + \left( \tilde{e}_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) \\ 0 = \left( \tilde{\varepsilon}_{kj} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) - \left( \tilde{e}_{kji} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \end{cases} \quad (6)$$

tensorii de material  $\tilde{c}_{ijkl}$ ,  $\tilde{e}_{kji}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{kj}$  fiind în acest caz funcții de  $(x_1, x_2, x_3)$ .

În concluzie, fenomenul fizic a provocat o deformare ușoară a geometriei domeniului  $\Omega$  prin funcția de transformare  $\xi$ , deformare "îndreptată" de aplicarea unei transformări de variabilă  $\xi^{-1}$  domeniului imagine  $\Omega'$  și revenirea în domeniul inițial  $\Omega$ . Relația de perturbație pentru deviația relativă de frecvență va fi aplicată pe acest domeniu între starea inițială neperturbată și starea finală

obținută prin echivalarea perturbației geometrice cu o alterare a parametrilor de material  $c_{ijkl}$ ,  $e_{kji}$ ,  $\varepsilon_{kj}$  și  $\rho_m$ ; formal, expresia obținută este identică cu cea pentru perturbațiile de material:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = - \frac{\int_{\Omega} (\Delta\rho_m |u_i|^2 - \Delta c_{ijkl} S_{kl} S_{ij}^* + \Delta e_{kji} E_k S_{ij}^* + \Delta e_{ijk} S_{jk} E_i^* + \Delta \varepsilon_{ij} E_j E_i^*) d\Omega}{2\omega^2 \int_{\Omega} \rho_m |u_i|^2 d\Omega} \quad (7)$$

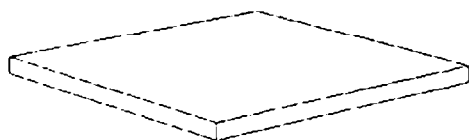
Întrebarea firească ce apare este dacă în mulțimea funcțiilor ce îndeplinesc inegalitatea (3) se găsesc funcții de deformație posibil de întâlnit în situații practice. Un prim răspuns la această chestiune poate fi dat observându-se că toate funcțiile analitice  $\gamma_i: \Omega \rightarrow R$  semnificativ liniare (a căror dezvoltare în serie Taylor au termenul liniar dominant față de cei neliniari) îndeplinesc relația de inegalitate (3). Această clasă de funcții poate fi semnificativ lărgită dacă renunțăm la geometria foarte generală a volumului piezoelectric  $\Omega$  și vom specifica că avem în vedere doar plăci foarte subțiri, plan paralele. Pentru o astfel de geometrie undele electroelastice de volum vor avea variații semnificative doar după direcția axei perpendiculare suprafețelor de bază. O aproximație uzuală ce conduce însă la ignorarea totală a spațialității fenomenului ondulatoriu este nesocotirea în ecuația undelor piezoelectrice a termenilor ce conțin derivate după direcții conținute în planul suprafețelor de bază (ipoteza plăcii infinite). Aproximarea ce o propunem nu este atât de drastică ci ignoră doar derivatele de ordinul doi după direcțiile conținute în respectivul plan. Să notăm cu  $X_2$  axa reperului cartezian ce este colineară cu normala la suprafețele de bază ale plăcii. Relațiile ce redau aproximarea ce o vom folosi sunt următoarele:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \text{ pentru } \forall i = 1, 2, 3 \text{ și } j, k = 1, 3 \quad (8)$$

Să construim un exemplu ce transformă un domeniu inițial având o geometrie de placă plan paralelă într-unul cu geometrie lenticulară. Deformația  $\xi$  o vom considera de următoarea formă:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 [1 + ap(x_1, x_3)], \quad 0 < a \ll 1, \quad x_2 \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad h \text{ fiind grosimea plăcii piezoelectrice plane} \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \quad (9)$$

Funcția  $p(x_1, x_3)$  este de clasă  $C^2$  pe intersecția domeniului  $\Omega$  cu planul  $(x_1, x_3)$  (vom nota cu  $S_{baza}$  această suprafață), nulă pe frontieră și cu  $\max_{x \in S_{baza}} p(x_1, x_3) = 1$ . Dacă suprafața de bază a cilindrilor este un disc de rază  $r$  iar  $p(x_1, x_3) = \frac{(r^2 - x_1^2 - x_3^2)}{r^2}$  se obține geometria uzuală a unei lentile parabolice.



Placa piezoelectrică nedeformată  $\Omega$



Suprafața  $x'_3(x_1, 0, 5h, x_3) = \frac{h}{2} [1 + ap(x_1, x_3)]$   
a plăcii piezoelectrice deformată  $\Omega'$

Figura 1



Relațiile de transformare inversă  $\xi^{-1}$  sunt următoarele:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = \frac{x'_2}{1 + ap(x'_1, x'_3)} \approx x'_2 [1 - ap(x'_1, x'_3)] \\ x_3 = x'_3 \end{cases} \quad (11)$$

Derivatele ce intră în inegalitățile (3) sunt:

$$\frac{\partial}{\partial x'_p} = -ax'_2 \frac{\partial p}{\partial x'_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x'_2} = 1 - ap(x_1, x_3) \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2}{\partial x'^2_2} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x'_p \partial x'_2} = -a \frac{\partial p}{\partial x'_p},$$

$p$  fiind egal cu 1 sau 3

Inegalitățile (3) necesare echivalării perturbației geometrice cu o perturbație a parametrilor de material sunt satisfăcute într-o zonă  $|x'_2| > \varepsilon$  cu  $\varepsilon$  oricât de mic pentru un  $a$  suficient de mic întrucât funcția  $p(x_1, x_3)$  este mărginită și are derivatele parțiale de ordinul I mărginite pe suprafața  $S_{baza}$ .

Cu aceste aproximații, matricea transformării inverse  $\xi^{-1}$  devine:

$$\left( \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \right) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ax'_2 \frac{\partial p}{\partial x'_1} & \frac{1}{1 + ap(x'_1, x'_3)} & ax'_2 \frac{\partial p}{\partial x'_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

iar în ipoteza acceptată, că  $\left| a \frac{\partial p}{\partial x_i} \right| \ll |1 + ap(x_1, x_3)| \quad i = 1, 3$

$$\text{jacobianul } J^{-1} = \det \left( \frac{\partial x_j}{\partial x'_m} \right) \approx \frac{1}{|1 + ap(x_1, x_3)|} \quad (13)$$

În consecință, parametrii de material perturbați vor avea următoarele expresii (superscriptul ~ marchează la fel ca în paragrafele anterioare valorile perturbate):

$$\tilde{\rho}_m = \rho'_m |1 + ap(x_1, x_3)| \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ijkl} &= c'_{ijkl} & \tilde{e}_{kji} &= e'_{kji} & \tilde{\varepsilon}_{jk} &= \varepsilon'_{jk} \quad j, k = 1, 3 \\ \tilde{c}_{i12l} &= \frac{1}{1 + ap(x_1, x_3)} c'_{i12l} & \tilde{e}_{2ji} &= \frac{1}{1 + ap(x_1, x_3)} e'_{2ji} & \tilde{\varepsilon}_{2j} &= \frac{1}{1 + ap(x_1, x_3)} \varepsilon'_{2j} \quad j = 1, 3 \\ \tilde{c}_{i22l} &= \frac{1}{[1 + ap(x_1, x_3)]^2} c'_{i22l} & \tilde{e}_{22i} &= \frac{1}{[1 + ap(x_1, x_3)]^2} e'_{22i} & \tilde{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{[1 + ap(x_1, x_3)]^2} \varepsilon'_{22} \end{aligned}$$

Tensorii de material  $c'_{ijkl}, e'_{kji}, \varepsilon'_{kj}, \rho'_m$  în domeniul deformat  $\Omega'$  au aceleași valori precum  $c_{ijkl}, e_{kji}, \varepsilon_{kj}$  și  $\rho_m$  în domeniul  $\Omega$  - aceasta fiind supoziția că perturbația geometrică  $\xi$  alterează doar forma volumului piezoelectric nu și constantele sale de material.

Pentru valori  $|ap(x_1, x_3)| \ll 1$  variația constantelor de material se poate exprima mai simplu utilizând aproximațiile:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad \text{și} \quad \frac{1}{(1+x)^2} \approx 1-2x \quad \text{pentru } 0 < x \ll 1 \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\Delta c_{i2ki} &= -ap(x_1, x_3) c_{i2ki} & \Delta e_{k2i} &= -ap(x_1, x_3) e_{k2i} & \Delta \varepsilon_{k2} &= -ap(x_1, x_3) \varepsilon_{k2} \\
\Delta c_{ij2i} &= -ap(x_1, x_3) c_{ij2i} & \Delta e_{2ji} &= -ap(x_1, x_3) e_{2ji} & \Delta \varepsilon_{2j} &= -ap(x_1, x_3) \varepsilon_{2j} \\
\Delta c_{i22i} &= -2ap(x_1, x_3) c_{i22i} & \Delta e_{22i} &= -2ap(x_1, x_3) e_{22i} & \Delta \varepsilon_{22} &= -2ap(x_1, x_3) \varepsilon_{22}
\end{aligned}
\quad j, k = 1, 3$$

Scrierea sub această formă a funcțiilor de perturbație permite reefectuarea cu ușurință a calculelor pentru estimarea deviației de frecvență într-o manieră similară celei prezentate în situația aproximării influenței termice localizate asupra spectrului de vibrație a rezonatoarelor BAW plan paralele în tăietura  $Y$  rotită. Înainte de a trece la această chestiune, vom face două remarci calitative referitoare la influența acestor perturbații geometrice asupra frecvențelor proprii de vibrație. Aceste remarci sunt intuitive fizic, relația de perturbație (4) împreună cu expresiile (14) sau (15) aducând doar o demonstrație analitică a lor.

- pentru o dilatare locală  $ap(x_1, x_3) > 0$  a volumului piezoelectric va avea loc o scădere a frecvenței relative de rezonanță;
- între vecinătatea maximului funcției  $ap(x_1, x_3)$  și energia de vibrație în acea zonă există o certă corelație.

Acest fenomen poate duce, de exemplu, la estomparea efectului de creștere a frecvenței de oscilație în experimentele de scanare cu fascicul laser a rezonatoarelor BAW plan paralele.

Reamintim acum principalele ipoteze utilizate în lucrare pentru studiul perturbațiilor parametrilor de material  $I_M$  în rezonatorii BAW pe substrat de cuarț, tăietura cristalografică  $Y$  rotită:

- $u_Y^{mkn}(x_1, x_2, x_3) = g^{mk}(x_1, x_3) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{h} x_2\right)$  unda elastică transversală excitabilă electric

setul de numere naturale  $(mkn)$  stabilind modul propriu de vibrație

- Frecvențele proprii de vibrații pentru modurile fundamentale  $(0,0,n)$  sunt bine approximate de relația:

$$\omega_n = (2n+1) \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{c_{1212}}{\rho_m}}$$

$c_{1212} \approx \bar{c}_{1212} \cos^2 \Theta + \bar{c}_{2323} \sin^2 \Theta + 2\bar{c}_{1212} \bar{c}_{2323} \cos \Theta \sin \Theta$  (s-a ignorat cuplajul piezoelectric) superscriptul – marchează constantele elastice din sistemul cristalografic canonic

- Preponderența componentelor de stress transversal (pentru modurile având valori  $k, m$  și  $n$  apropiate)  $S_{12}, S_{22}$  și  $S_{32}$  față de celelate componente ale tensorului de stress elastic.  $S_{ij}$

Cu aceste precizări expresia deviației relative de frecvență pentru un mod arbitrar  $v$  este următoarea:

$$\frac{\Delta \omega_v}{\omega_v} \approx - \frac{\int_{\Omega} \left[ \Delta \rho_m \sin^2 \left( (2n+1) \frac{\pi}{h} x_2 \right) - \Delta c_{1212} \cos^2 \left( (2n+1) \frac{\pi}{h} x_2 \right) \right] g_v^2(x_1, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{2 \rho_m \int_{-h/2}^{h/2} \sin^2 \left( (2n+1) \frac{\pi}{d_2} x_2 \right) dx_2 \int_{S_{bazn}} g_v^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} \quad (16)$$

Efectuând calculele obținem:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \approx - \frac{1}{2} a \frac{\int_{S_{bazn}} p(x_1, x_3) g_v^2(x_1, x_3) ds}{\int_{S_{bazn}} g_v^2(x_1, x_3) ds} \quad (17)$$

Pentru cazul trivial în care  $p(x_1, x_3) = 1$  regăsim un rezultat ce poate fi obținut prin calcul direct, cel al alungirii uniforme a cilindrului cu  $a$  (finalul paragrafului 2.3.2).

Această ultimă relație face ușor interpretabilă (pentru acest tip de rezonatoare și în ipotezele acceptate) legătura ce există între forma perturbației geometrice  $p(x_1, x_3)$  și distribuția energiei de vibrație la suprafața rezonatorului.

Vom analiza în continuare situația întrutotul similară în care volumul piezoelectric  $\Omega$  nu are o forma lenticulară datorită unei perturbații, ci această geometrie a fost dorită din fabricație. Sunt bine cunoscute avantajele acestei geometrii de lentilă convexă în confinarea energetică a modurilor proprii de vibrație în zona centrală a volumului piezoelectric și mărirea ecartului între frecvența unui mod fundamental ( $00n$ ) și modurile secundare ( $mkn$ ). Aflarea frecvențelor proprii pentru aceste geometrii este posibilă însă doar prin metode numerice și acestea dificil de aplicat datorită suprafețelor curbe ce trebuie bine aproximate de rastrul punctelor de calcul. Apare utilă, cel puțin din această perspectivă, utilizarea relației de perturbație dedusă pentru estimarea deviațiilor de frecvență ce apar prin trecerea de la o geometrie plană la una lenticulară.

Dacă în relația (17) funcția de perturbație  $p(x_1, x_3)$  o privim ca fiind un element arbitrar al unei mulțimi de funcții o întrebare firească este pentru care dintre aceste funcții deviația relativă de frecvență are un punct de extrem. Răspunsul la această întrebare depinde în primul rând de modul de definire al mulțimii funcțiilor de perturbație. Să notăm cu  $P$  această mulțime; vom formula această problemă pentru trei situații în care mulțimea  $P$  este o submulțime a spațiului Hilbert  $L^2(S_{baza})$ -spațiul funcțiilor de energie finită construit pe o suprafață de bază a rezonatorului.

- a)  $P_a = \left\{ p \in L^2(S_{baza}) \mid \max_{(x_1, x_3) \in S_{baza}} p(x_1, x_3) \leq m \right\}$   
 b)  $P_b = \left\{ p \in L^2(S_{baza}) \mid \|p(x_1, x_3)\|_{L^2(S_{baza})}^2 \leq n \right\}$   
 c)  $P_c = \left\{ p \in L^2(S_{baza}) \mid \|\nabla p(x_1, x_3)\|_{L^2(S_{baza})}^2 = d \right\}$ ,  $m, n, d$  sunt constante pozitive

Modul de definire al mulțimilor  $P_a, P_b, P_c$  încearcă să țină cont de constrângerile ce pot fi impuse practic la prelucrarea suprafețelor cristalului piezoelectric. Cu siguranță însă, pentru o aplicație concretă acest spațiu de definiție este mai restrictiv, ceea ce urmărim prin aceste definiții este doar prezentarea unor situații generale, ușor de analizat matematic.

Cazul a) corespunde căutării unei funcții de perturbație a cărei maxim are o valoare mai mică cel mult egală cu o valoare prestabilită  $m$ . Se limitează astfel abaterea maximă admisă față de planeitatea plăcii piezoelectrice.

Maximul funcționalei (17) se obține pentru următoarea funcție de perturbație:

$$p_a(x_1, x_3) = m \frac{g_v^2(x_1, x_3)}{\max_{(x_1, x_3) \in S_{baza}} g_v^2(x_1, x_3)} \quad (18)$$

În această situație, deviația relativă a frecvenței de rezonanță este:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{a}{2} \frac{m}{\max_{(x_1, x_3) \in S_{baza}} g_v^2(x_1, x_3)} \frac{\|g_v^2\|_{L^2_S}^2}{\|g_v\|_{L^2_S}^2} \quad (19)$$

Cazul b) este cel în care energia funcției de perturbație o limităm la o anumită valoare  $n$ . Punctele critice în acest caz le aflăm prin diferențierea următoarei funcționale:

$$F(p) = \langle p, g_v^2 \rangle_{L^2_S} - \lambda \left( \|p\|_{L^2_S}^2 - n \right) \quad \lambda \text{ este un multiplicator Lagrange} \quad (20)$$

$$\text{Efectuând calculele vom afla un punct de extrem pentru } p_b = \sqrt{n} \frac{g_v^2}{\|g_v^2\|^2}. \quad (21)$$

$$\text{Deviația relativă de frecvență maximă se obține ca fiind: } \frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{2} \sqrt{n} \frac{1}{\|g_v^2\|_{L_3^2}} \quad (22)$$

În cazul c) se impune o condiție de limitare a energiei gradientului funcției de perturbație. Încercăm pe această cale să găsim funcții de perturbație cu un grad de regularitate mai mare (mai netede) decât distribuția energiei  $g(x_1, x_3)$ .

Diferențierea următoarei funcționale  $G(p) = \langle p, g_v^2 \rangle_{L_3^2} - \lambda (\|\nabla p\|_{L_3^2}^2 - d)$  oferă soluția acestui ultim caz analizat ca fiind dată de ecuația  $c\Delta p = g_v^2$ ,  $c$  fiind o constantă pozitivă de scalare a soluției astfel încât  $\|\nabla p\|_{L_3^2}^2 = d$ . Condițiile naturale pe frontiera suprafeței  $S_{baza}$  sunt de tip Dirichlet.

Relațiile anterioare definesc funcțiile de perturbație pentru care deviația relativă de frecvență a unui mod arbitrar  $v$  este maximă. Nu știm însă ce se întâmplă (fără un calcul separat) cu modurile apropiate acestui mod  $v$ . În proiectarea rezonatoarelor piezoelectrice unul din criteriile majore de performanță este distanța în frecvență între un mod fundamental de vibrație și modurile adiacente parazite. Relația (7) ne va permite descrierea suprafeței active a unui rezonator pentru care această distanță este maximizată.

Să definim pentru aceasta ecartul dintre frecvența unui mod fundamental  $(0, 0, n)$  și primele  $N$  frecvențe adiacente secundare  $(m, k, n)$  ca fiind  $e_n = f_{00n} - \frac{1}{N} \sum_{m,k}^N f_{mkn}$ . Pentru o geometrie plan paralelă a rezonatorului acest ecart are o valoare bine stabilită  $e_n^0$ . Dorim să ajungem la o funcție de perturbație geometrică  $p(x_1, x_3)$  care să maximizeze după un anumit criteriu această diferență.

Să notăm cu  $\tilde{e}_n = \tilde{f}_{00n} - \frac{1}{N} \sum_{m,k}^N \tilde{f}_{mkn}$  ecartul corespunzător volumului piezoelectric cu geometria alterată.

$$\tilde{e}_n = (\tilde{f}_{00n} - f_{00n}^0) - \frac{1}{N} \sum_{m,k}^N (\tilde{f}_{mkn} - f_{mkn}^0) + e_n^0 = f_{00n}^0 \delta f_{00n} - \frac{1}{N} \sum_{m,k}^N f_{mkn}^0 \delta f_{mkn} + e_n^0 \quad (23)$$

Întrucât modul fundamental are frecvența cea mai joasă mărimea  $f_{00n}^0 \delta f_{00n} - \frac{1}{N} \sum_{m,k}^N f_{mkn}^0 \delta f_{mkn}$  este întodeauna negativă pentru situațiile ce au un sens aplicativ. În consecință, ecartul  $\tilde{e}_n$  va avea o valoare negativă maximă atunci când funcționala următoare atinge un minim.

$$E(p) = - \int_{S_{baza}} \left[ \frac{f_{00n}^0}{\|g_{00n}\|^2} g_{00n}^2(x_1, x_3) - \frac{1}{N} \sum_{m,k}^N \frac{f_{mkn}^0}{\|g_{mkn}\|^2} g_{mkn}^2(x_1, x_3) \right] p(x_1, x_3) dx_1 dx_2 \quad (24)$$

Această funcțională are o formă similară cu cea analizată anterior (relația 17) pentru cele trei cazuri de definiție a spațiului funcțiilor de perturbație geometrică. Nu mai reluăm aceste calcule, ci vom preciza doar expresia ce se obține pentru o limitare uniformă (cazul  $\alpha$ ) a amplitudinii funcției  $p(x_1, x_3)$ . În această situație, ecartul maxim de frecvență se obține pentru funcții de tipul:

$$p^{opt}(x_1, x_3) = a^{opt} \left[ \frac{f_{00n}^0}{\|g_{00n}\|^2} g_{00n}^2(x_1, x_3) - \frac{1}{N} \sum_{m,k} \frac{f_{mkn}^0}{\|g_{mkn}\|^2} g_{mkn}^2(x_1, x_3) \right] \quad (25)$$

$a^{opt}$  fiind o constantă pozitivă arbitrară ce ține cont de limitarea impusă amplitudinilor funcției de perturbație.

Figura următoare prezintă forma suprafeței ce ar trebui (conform relației 25) să asigure un ecart de frecvență maxim între modul fundamental  $(0,0,n)$  și modurile adiacente parazite  $(0,1,n)$ ,  $(1,0,n)$ , și  $(1,1,n)$  pentru un rezonator cu o geometrie inițial cilindrică cu fețe plan paralele (moduri ilustrate în figura 2, paragraful 2.3.1).

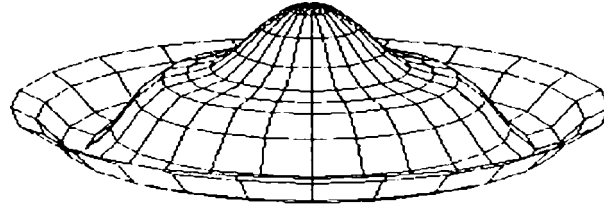


Figura 2

Forma suprafeței ce ar asigura un ecart maxim de frecvență între modul fundamental  $(0,0,n)$  și modurile adiacente parazite  $(0,1,n)$ ,  $(1,0,n)$ ,  $(1,1,n)$ ,  $(2,0,n)$  și  $(2,1,n)$  pentru un rezonator cu o geometrie inițial cilindrică cu fețe plan paralele

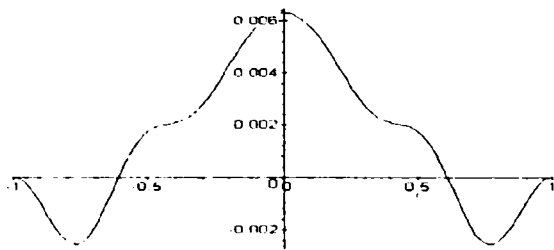
În cele ce urmează vom încerca să analizăm cantitativ rezultatul teoretic al suprafeței optime pentru ecartul de frecvență. Pentru aceasta, vom face o comparație între ecartul de frecvență provocat de o deformare clasică a suprafeței de bază sub forma sferică și o deformare de tip optimal. Vom presupune că rezonatorul în stare de bază neperturbată are o geometrie plan paralelă iar funcțiile de perturbație ale suprafeței sunt fie  $p^{opt}(x_1, x_3)$ , deformarea optimală, fie  $p^{sf}(x_1, x_3)$ , o deformare uzuală sferică.

$$p^{sf}(x_1, x_3) = a^{sf} (b^{sf} - x_1^2 - x_3^2) \quad - \text{deformația sferică} \quad (26)$$

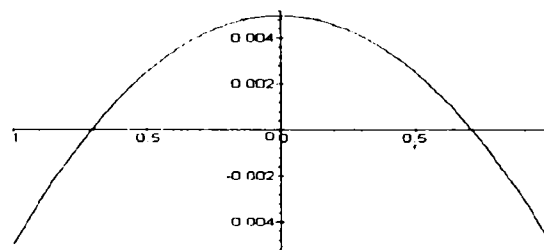
Pentru a face o comparație rezonabilă între ecartul de frecvență provocat de cele două perturbații trebuie stabilit un criteriu de alegere al parametrilor de scalare  $a^{sf}$ ,  $b^{sf}$  și  $a^{opt}$ . Întrucât modul de definire al funcției de perturbație optimală  $p^{opt}(x_1, x_3)$  asigură întotdeauna o integrală pe suprafața de vibrație egală cu ecartul de frecvență al rezonatorului neperturbat  $e_n^0$  vom considera această proprietate ca și criteriu de definire și a funcției de perturbație sferică  $p^{sf}(x_1, x_3)$ .

$$\int_{S_{baza}} p^{sf}(x_1, x_3) dx_1 dx_3 = \int_{S_{baza}} p^{opt}(x_1, x_3) dx_1 dx_3 = e_n^0 \quad (27)$$

Figura alăturată prezintă graficele funcțiilor radiale  $p^{opt}(r)$  și  $p^{sf}(r)$  pentru o rază unitară a suprafeței de vibrație și un ecart (ipotetic) de  $e_n^0 = 0$ . Amplitudinea maximă a fost aleasă prin similitudine cu valorile întâlnite tehnologic în rezonatoarele cu geometrie cilindrică – la o rază de 1cm a electrodului corespunzând o abatere sferică maximă de zeci de microni.



Profilul radial pentru funcția de perturbație optimală  $p^{opt}(x_1, x_3)$



Profilul radial pentru funcția de perturbație sferică  $p^{sf}(x_1, x_3)$

Figura 3

O observație utilă, ce poate fi imediat demonstrată printr-un calcul simplu, este că diferența dintre ecartul rezonatorului perturbat printr-o geometrie optimală  $\tilde{e}_n^{opt}$  și una sferică  $\tilde{e}_n^{sf}$  nu depinde de valoarea ecartului neperturbat  $e_n^0$ . Evaluarea integralei (24) pentru cele două cazuri propuse (optimal și sferic,  $e_n^0 = 0$ ) furnizează următoarele valori :

$$\tilde{e}_n^{opt} \approx e_n^0 - 13.29 * 10^{-6} f_{00n}^0$$

$$\tilde{e}_n^{sf} \approx e_n^0 - 13.10 * 10^{-6} f_{00n}^0$$

sau,  $\tilde{e}_n^{opt} - \tilde{e}_n^{sf} = -0.19 * 10^{-6} f_{00n}^0$ , o valoare foarte mică în comparație cu valorile ce le putem considera a fi uzuale în rezonatoarele BAW pentru ecartul de frecvență neperturbat:

$$e_n^0 \approx -10^{-2} \dots 10^{-4} f_{00n}$$

În încheierea acestui paragraf, e necesar să menționăm că rezultatele numerice obținute trebuie privite doar ca o încercare de stabilire a ordinului de mărime pentru fenomenul discutat și o minimă verificare numerică a celor prezise teoretic. Criteriul de alegere al parametrilor de normare  $a^{sf}, b^{sf}$  și  $a^{opt}$  poate fi ales un altul, însă, în opinia autorului, pentru situațiile abordabile tehnologic diferența dintre ecartul de frecvență corespunzător unei suprafețe optimale și respectiv sferice va fi nesemnificativ. Pe această cale am demonstrat quasi-optimalitatea formei lenticular sferice din punctul de vedere al ecartului de frecvență, rezultat ce nu era cunoscut în literatura de specialitate.



### §2.3.4 Perturbații ale condițiilor pe frontieră mecanice

Paragraful prezintă rezultatele de predicție cu privire la comportarea frecvențelor proprii de rezonanță în situația modificării impedanțelor mecanice de frontieră prin încărcare masică neuniformă. Sunt analizate concret situații de scufundare a rezonatorului într-un lichid vâscos și atingere a suprafeței active de vibrație cu un fir elastic. Datele de simulare sunt comparate cu rezultatele experimentale proprii sau existente în literatura de specialitate.

Acest paragraf împreună cu următorul studiază influența perturbațiilor ce afectează condițiile pe frontiera rezonatorului piezoelectric. După cum am precizat pe parcursul tezei, modificarea condițiilor pe frontieră o vom considera la nivelul setului de valori  $I_s$  ce parametrizează comportarea câmpului electroelastic la suprafața solidului piezoelectric. Întrucât relațiile de perturbație ce le utilizăm (expresiile 2-5 din §2.3) sunt liniare iar mediile externe le-am presupus a nu avea proprietăți de cuplaj electroelastic putem trata decorelat influența factorilor de perturbație mecanici de cei electrici. Pe parcursul acestui paragraf vom analiza partea mecanică a acestei probleme. Relația generală de la care vom pleca este cea obținută prin particularizarea expresiei generale de perturbație a condițiilor pe frontieră (relația 12 §2.1) în situația păstrării neschimbate a comportării câmpului electric la suprafață  $fr\Omega$

$$\Delta\sigma_v + j\Delta\omega_v \approx \frac{\int_{fr\Omega} [(\Delta t_{ij} v_i^* n_j) + (t_{ij}^* \Delta v_i n_j)] ds}{2\omega_v^2 \int_{\Omega} \rho_m |u_i^v|^2 d\Omega} \quad (1)$$

Modelarea propagării undelor elastice în mediile externe solidului piezoelectric printr-o ecuație diferențială ordinară permite rescrierea acestei relații în funcție de diferența coeficienților acestor ecuații, aceste calcule au fost efectuate în paragraful 2.3, relațiile următoare păstrează aceleași notații.

$$\Delta\sigma_v + j\Delta\omega_v = j \left[ \frac{\int_{fr\Omega} (u_i^* \Delta H_{il}^m(x, \omega) u_l) ds}{2\omega_v^2 \int_{\Omega} \rho_m |u_i^v|^2 d\Omega} \right] \quad (2)$$

$$\Delta\sigma_v + j\Delta\omega_v = j \left[ - \frac{\int_{fr\Omega} (t_{im}^* \Delta G_{il}^m(x, \omega) u_{ln}) ds}{2\omega_v^2 \int_{\Omega} \rho_m |u_i^v|^2 d\Omega} \right] \quad (3)$$

Aceste relații le vom utiliza pentru a explica o parte din fenomenele legate de distribuția spațială neuniformă a funcțiilor de perturbație  $\Delta H_{il}^m(x, \omega)$  sau  $\Delta G_{il}^m(x, \omega)$  la suprafața rezonatorului. Atât calculele teoretice cât și verificările experimentale sunt realizate pe rezonatoare cu excitație transversală sau laterală având una din dimensiunile plăcii piezoelectrice mult mai mică decât celelalte două. Pentru aceste rezonatoare, este întotdeauna posibilă descompunerea elongațiilor

elastice în forma:  $u_i^v = u_i^{(kmn)} = g_i^{(km)}(x_1, x_3) r_i^n(x_2) = g_i^{(km)}(x_1, x_3) \sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{d_2} x_2 \right]$ .



Pentru început nu vom particulariza natura perturbației ce duce la modificarea funcțiilor  $\Delta H_{ii}^m(x, \omega)$  sau  $\Delta G_{ii}^m(x, \omega)$ . Vom presupune doar că această alterare poate fi scrisă sub forma  $\Delta H_{ii}^m(x, \omega) = -\omega_v^2 a f(x - x_0)$  cu  $f$  o funcție de localizare pe suprafață de genul celei prezentate în paragraful 2.3 figura 1 iar  $a$  amplitudinea perturbației. Înmulțirea cu  $\omega_v^2$  este motivată de cele convenite și motivate în paragraful 2.2 (relația 5 și observația ulterioară) de a utiliza o ecuație diferențială de ordinul 2 pentru legătura între tensiunile și deformațiile elastice:

$T_i^m(j\omega) = -[(j\omega)^2 m_i(\omega_0) + j\omega v_i(\omega_0) + k_i(\omega_0)] u_i(j\omega)$  în care puterea dominantă a variabilei  $\omega_0$  în expresiile  $(j\omega_0)^2 m_i(\omega_0)$ ,  $(j\omega_0) v_i(\omega_0)$ ,  $k_i(\omega_0)$  este constantă și egală cu 2.

Modificarea frecvențelor de rezonanță în această situație depinde aproape punctual de energia de vibrație în punctul  $x_0$  în jurul căruia se află suportul funcției  $f(x - x_0)$ . Această afirmație devine imediat vizibilă în expresia următoare:

$$\frac{\Delta\omega_v}{\omega_v} = \left[ -\frac{a(g_i^{(km)})^2(x_0)A(S_{x_0})}{2\int_{\Omega} \rho_m |u_i^v|^2 d\Omega} \right] \tag{4}$$

unde  $A(S_{x_0})$  este aria suprafeței de suport a funcției  $f(x - x_0)$ .

Acesta este motivul pentru care sunt de așteptat profile ale sensibilității de frecvență în funcție de o modificare punctuală a impedanței elastice de forma densității energiei de vibrație la suprafața rezonatorului. Figurile următoare prezintă aceste densități de energie pentru rezonatoarele convenționale având o geometrie circulară a electrozilor.

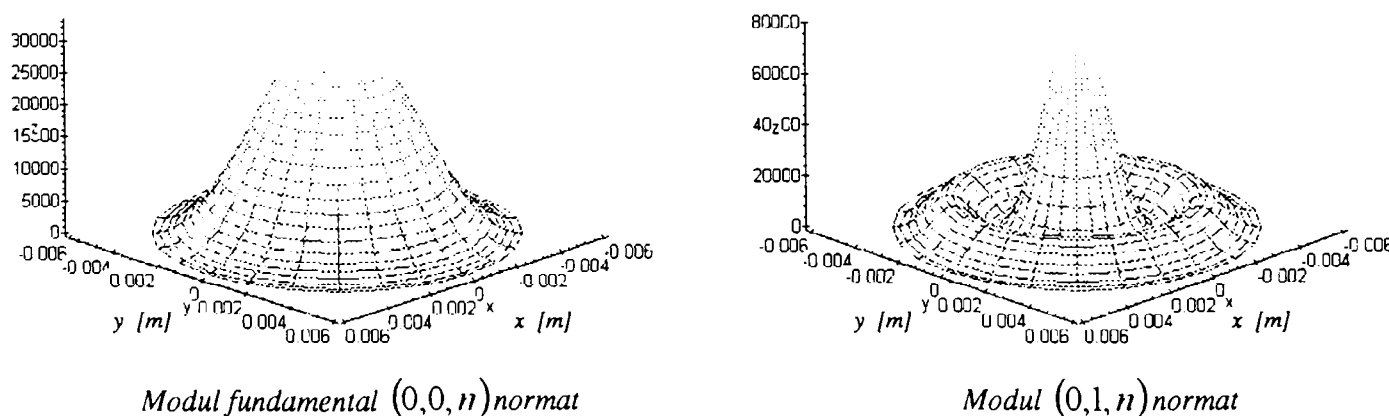


Figura 1

Normarea se referă la condiția ca:  $\int_{\Omega} |u_i^v|^2 d\Omega = 1$

Vom analiza în continuare principalele fenomene ce pot fi modelate ca și cazuri de încărcare mecanică neuniformă a rezonatoarelor piezoelectrice. Studiul se va limita la situațiile în care mediile externe solidului piezoelectric pot fi considerate a fi de forma unui strat subțire urmat de un mediu semiinfini. Vom folosi astfel rezultatele paragrafului 2.2 în care am studiat propagarea undelor

elastice într-o astfel de structură. Pe această cale, vom încerca să oferim expresii de calcul, utilizând această abordare generală de perturbație, unor fenomene ce nu au o descriere analitică sau ale căror relații de predicție au fost deduse pe baza unor modele mai simple, cel mai adesea unidimensionale.

## Încărcarea masică

Scăderea fină a frecvențelor de vibrație a rezonatoarelor piezoelectrice cu undă de volum prin depunerea de masă pe electrozii de excitație este metoda principală și adeseori singura utilizabilă industrial de calibrare a acestor rezonatoare. Creșterea grosimii metalizărilor conduce însă întotdeauna la o disipare energetică mărită pe aceste suprafețe, fenomen datorat în special frecărilor mecanice în stratul adițional de metal. O soluție parțială la acest neajuns o constituie depunerea unei mase suplimentare doar în centrul suprafeței electrodului; aceasta duce la modificări ale frecvenței de oscilație comparabile cu cele obținute printr-o depunere uniformă având o masă sensibil mai mare și implicit pierderi mai mari. Deși acceptată, verificată experimental și utilizată intensiv această metodă nu are în literatura de specialitate (după cunoștința autorului) o motivație explicită, analitică. Ceea ce se știe cu siguranță este că între energia de vibrație la suprafața electrozilor și sensibilitatea locală în frecvență la depuneri punctiforme de masă există o proporționalitate. Graficul din figura alăturată preluat din [37] prezintă acest factor de proporționalitate pentru rezonatoare cu excitație transversală oscilând în modurile fundamentale  $(0,0,n)$ .

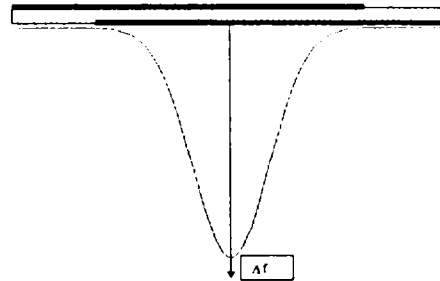


Figura 2

*Sensibilitatea locală în frecvență pentru depuneri punctiforme de masă*

În continuare, vom demonstra concordanța acestor date experimentale cu rezultatele de predicție oferite de modelul de perturbație utilizat în teză pentru un rezonator BAW. Pentru început, să precizăm două ipoteze ce le folosim în calculele ce urmează; prima se referă la adoptarea unui sistem de referință în care matricea  $H_{ii}^m$  are forma diagonală iar cea de a doua consideră că depunerea masică este suficient mică pentru a putea aproxima modificarea funcției de transfer mecanice la suprafață ca fiind:  $\Delta H_i^m(\omega, x) = \omega^2 \rho_f h(x)$ ,  $\rho_f$  este densitatea filmului metalic depus (doar pe o suprafață activă a rezonatorului) iar  $h(x)$  grosimea acestui film.

Înlocuirea acestei ultime relații în expresia de perturbație (2) conduce la următorul rezultat de estimare a deviației relative de frecvență:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &\approx - \frac{\omega^2 (d_2/2) \int_{S_{\text{sup}}} \rho_f h(x_1, x_3) g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{2 \rho_m \int_{-d_2/2}^{d_2/2} \omega^2 (x_2) dx_2 \int_{S_{\text{sup}}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} = - \frac{\rho_f \int_{S_{\text{sup}}} h(x_1, x_3) g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{\rho_m d_2 \int_{S_{\text{sup}}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} = \\ &= - \frac{\rho_f h(\xi_1, \xi_3) \int_{S_{\text{sup}}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{\rho_m d_2 \int_{S_{\text{sup}}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} = - \frac{\rho_f h(\xi_1, \xi_3)}{\rho_m d_2} \end{aligned} \quad (5)$$

cu  $(\xi_1, \xi_2) \in S_{\text{sup}}$  una din suprafețele active de vibrație ale rezonatorului.

Renunțând la aproximarea funcției de transfer mecanice la suprafață prin  $\omega^2 \rho_f h(x)$  și considerând expresia dedusă în paragraful 2.2 pentru această situație  $H_i^m = -(\omega \rho_f v_f') g \left( \omega \frac{h}{v_f'} \right)$  obținem următoarea expresie de estimare a deviației relative de frecvență:

$$\frac{\Delta f}{f} \approx - \frac{\rho_f v_f' \int_{S_{sup}} \frac{tg \left( \omega \frac{h}{v_f'} \right)}{\omega} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{\rho_m d_2 \int_{S_{sup}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} = - \frac{\rho_f v_f' tg \left[ \omega \frac{h(\xi_1, \xi_3)}{v_f'} \right]}{\omega \rho_m d_2} \quad (6)$$

Pentru o încărcare masică uniformă:  $h=constant$ , Lu și Lewis au dezvoltat în [37] un model de calcul direct a deviației relative de frecvență pe baza aproximării unidimensionale (transversale) a fenomenelor oscilatorii într-o plăcuță piezoelectrică de cuarț într-o orientare cristalografică  $Y$  rotită.

La pagina 41 în [37] este dedusă următoarea relație de legătură între mărimile

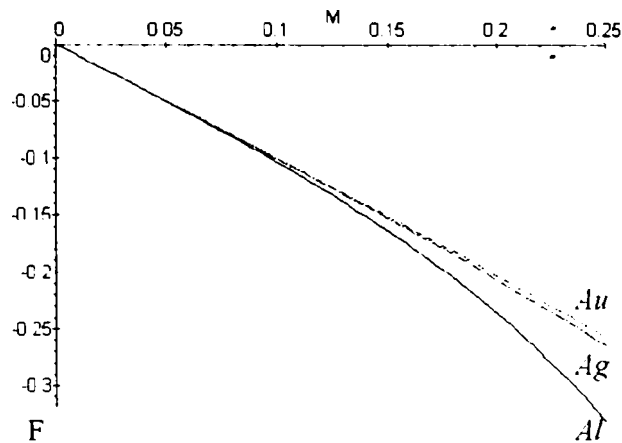
$$M = \frac{\rho_f h}{\rho d_2} \text{ și } F = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{\Delta f}{f}$$

$$M = - \frac{\arctg \left( \frac{Z_q}{Z_f} tg(\pi F) \right)}{\pi \frac{Z_q}{Z_f} (1 + F)} \quad (7)$$

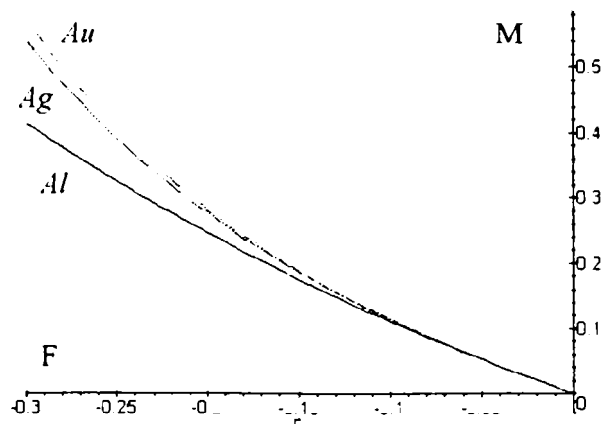
$Z_q$  este impedanța acustică a modului excitabil electric ce se propagă în substratul piezoelectric  
 $Z_f$  este impedanța acustică a undei transversale ce se propagă în filmul metalic

Această expresie de calcul a dat rezultate de predicție foarte bune – erori sub 1% pentru greutatea ale stratului de metal de uniform de până la 70% din greutatea rezonatorului de cuarț. Compararea relațiilor (5) și (6) cu expresia (7) relevă o foarte bună concordanță pentru valori  $F \frac{Z_q}{Z_f}$  apropiate de zero.

Graficele următoare prezintă curbele de variație pentru curbele  $F(M)$  construite plecând de la modelul Lu-Lewis și de la relația de perturbație (6) pentru un rezonator de cuarț în tăietura  $AT$  având frecvența inițială ( $h=0$ )  $f \approx 6 * 10^6 Hz$ . Grosimea plăcuței piezoelectrice este de aproximativ  $d_2=0.277mm$



a) Modelul Lu-Lewis



b) Modelul de perturbație utilizat în lucrare

$$\Delta H_i^m = (\omega \rho v_f') g \left( \omega \frac{h}{v_f'} \right)$$

Figura 3

Deviația frecvenței fundamentale de rezonanță la o încărcare masică uniformă

Pentru predicția comportării în frecvență a unui rezonator încărcat masic neuniform vom pleca de la relația generală:

$$\frac{\Delta f}{f} \approx - \frac{\rho_f \int_{S_{sup}} h(x_1, x_3) g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{\rho_m d_2 \int_{S_{sup}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}$$

și vom încerca să dăm o explicație analitică profilului factorului de proporționalitate existent între depunerile punctuale de masă și deviația relativă de frecvență – figura 1. Pentru aceasta, presupunem o depunere uniformă pe coroane circulare de lățime  $r_c$  poziționate la o distanță arbitrară față centrul electrodului – figura 4. Înălțimea de depunere pentru o astfel de coroană circulară este de

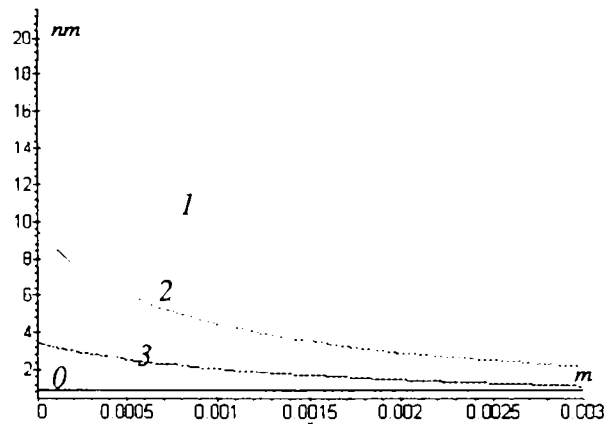
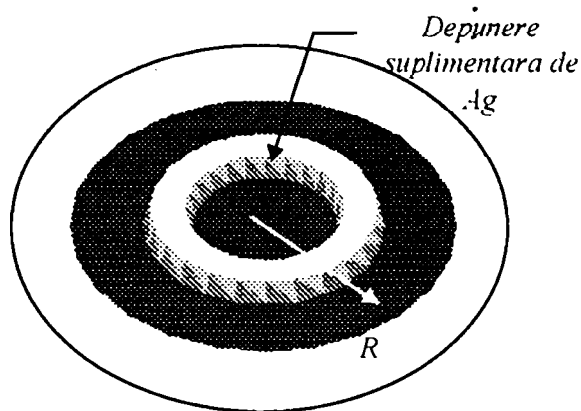
$$h = \frac{m}{\rho_f \pi \left[ (r + r_c)^2 - r^2 \right]}$$

Această formă a depunerii de masă nu perturbă geometria cilindric circulară (o presupunem astfel) a rezonatorului.

Concret, se consideră depusă o masă de  $1 \mu g$ , Ag cu lățimea de:

(1)  $r_c = 0.2R$ , (2)  $r_c = 0.3R$ , (3)  $r_c = 0.5R$ .

Linia marcată cu 0 servește ca referință și reprezintă înălțimea de depunere în cazul unei depuneri uniforme -  $h_0 = 0.85 nm$



depunerea de material în coroane circulare

profilul înălțimii de depunere

Figura 4

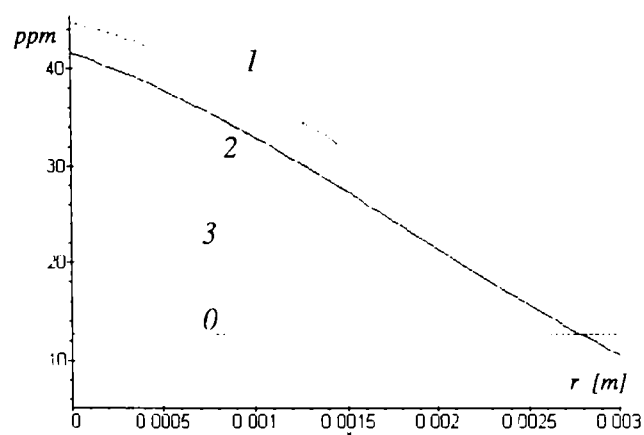
Efectuând calculele obținem următoarea relație generală pentru acest caz.

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{\rho_f \int_{S_{sup}} h(x_1, x_3) g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{\rho d \int_{S_{sup}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} = \frac{\frac{m}{\pi [(r+r_c)^2 - r^2]} \int_r^{r+r_c} a g_i^2(a) da}{\rho d \int_0^R a g_i^2(a) da} \quad (8)$$

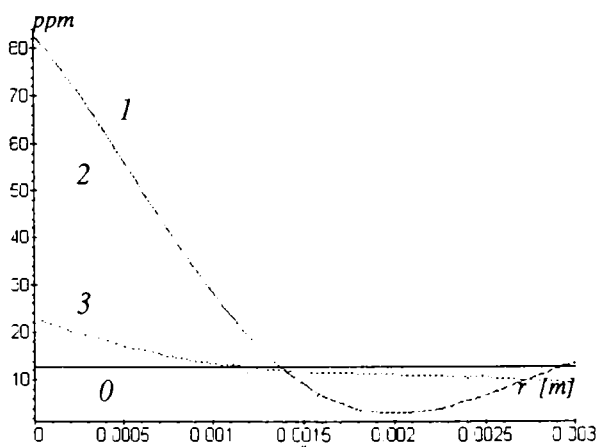
cu  $m$  masa de substanță depusă.

Această expresie pune explicit în evidență proporționalitatea ce există între sensibilitatea masică locală a deviației relative de frecvență și energia de vibrație la suprafața rezonatorului.

Graficele următoare prezintă curbele de variație pentru deviația relativă de frecvență la depunerea de masă în coroane circulare pentru modul fundamental (0,0,1) și pentru modul adiacent parazit (0,1,1). Rezonatorul piezoelectric a fost presupus a fi pe substrat de cuarț în tăietură AT cu o rază a electrozilor de 3cm.



modul fundamental (0,0,1)



primul mod parazit (0,1,1)

Figura 5

Alura acestor grafice este ușor interpretabilă, ea este similară profilului factorului de proporționalitate obținut experimental și prezentat în figura 1. Pentru modul fundamental valorile deviației de frecvență prezise sunt în același ordin de mărime cu cele prezentate în [10] sau [57] ;

pentru modul parazit înșă, nu au fost găsite date experimentale, datele graficului rămând din acest punct de vedere doar o predicție.

Este vizibilă din aceste grafice o sursă de erori majore ce apare în aplicațiile de măsură a masei de substanță depusă în cazul depunerii unui strat subțire de material a cărui uniformitate nu este cunoscută.

## Contactul cu un fluid vâcos

Vom fi interesați în acest caz atât de modificarea părții imaginare a pulsațiilor proprii de rezonanță cât și de scăderea factorului de calitate al rezonatorului. Să presupunem pentru aceasta că rezonatorul este situat inițial (starea neperturbată) într-un mediu exterior cu care nu schimbă energie electroelastică -  $Z_i'' = 0$ . Scufundarea acestuia într-un lichid vâcos va conduce la apariția unei impedanțe complexe nenule dedusă în paragraful 2.2:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{Z_i''\} &\approx -\omega\sqrt{\omega\mu\rho_{ext}} \\ \operatorname{Im}\{Z_i''\} &\approx \omega\sqrt{\omega\mu\rho_{ext}} \quad \text{cu } \mu \text{ coeficientul de vâscozitate al lichidului newtonian considerat și } \\ &\rho_{ext} \text{ densitatea sa masică.} \end{aligned}$$

Modificarea părții reale și imaginare a pulsațiilor proprii de rezonanță este dată de relațiile:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{\omega} &\approx -\frac{\omega\sqrt{\omega\mu\rho_{ext}}(2tr^2(d/2))\int_{S_{sup}} g_i^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{2\rho\omega^2 \int_{-d/2}^{d/2} tr^2(x_3) dx_3 \int_{S_{sup}} g_i^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2} = -\frac{\sqrt{\omega\mu\rho_{ext}}}{0.5d\rho\omega} \quad (9) \\ \Delta\omega &\approx -2\frac{\sqrt{\omega\mu\rho_{ext}}}{\rho d} = \Delta\sigma \approx -2\frac{\sqrt{\omega\mu\rho_{ext}}}{\rho d} \end{aligned}$$

Relațiile obținute generalizează cele deduse pe baza unui model unidimensional transversal pentru plăci piezoelectrice  $Y$  rotite în cristale izomorfe cu cuarțul [44]:

$$\Delta f = -\frac{f_m^{3/2} \sqrt{\rho_{ext} \eta}}{(2n+1)\sqrt{\pi \lambda_c \rho}} \quad \eta = 2\mu \quad \text{relația din articolul [44]} \quad (10)$$

Ținând cont de modul de definire al frecvențelor proprii de rezonanță pentru astfel de plăci:

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{2n+1}{2d} \sqrt{\frac{\lambda_c}{\rho}} \quad n \in N \\ \rho v_C^2 &= \lambda_C = (c_{66}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + 2c_{14}n_2n_3) + \frac{e^2}{\epsilon} = (c_{66}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + 2c_{14}n_2n_3) + \frac{(e_{11}n_2^2 + e_{14}n_2n_3)^2}{\epsilon_{11}n_2^2 + \epsilon_{33}n_3^2} \end{aligned}$$

echivalentă cu relația (9) dedusă prin utilizarea relației de perturbație generale devine imediată.

Relația 10 a fost utilizată pentru a prezice modificarea frecvenței de oscilație a unui rezonator piezoelectric scufundat în lichide cu diverse proprietăți vâscoelastice. Erorile de predicție raportate au fost sub 0.3% [44].

Modelul utilizat în articolul citat nu ia în considerare modificarea factorului de calitate  $Q = \frac{\omega}{2\Delta\sigma}$  datorită pierderilor energetice în lichid la suprafața rezonatorului. În aplicații de măsură factorul de calitate are o importanță majoră întrucât stabilitatea în frecvență a oscilatorului în ipoteza unor condiții de funcționare staționare este invers proporțională cu acest factor. Figura următoare prezintă formele curbelor de rezonanță pentru un rezonator pe substrat de cuarț în tăietura SC oscilând în aer (1), cu o față activă imersată în apă (2) și scufundat complet în apă (3).

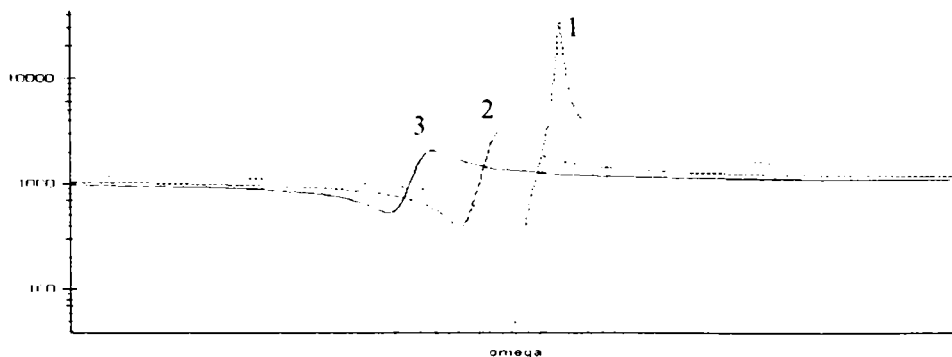


Figura 6  
Curbele de rezonanță pentru oscilatorul SC

Scăderea pronunțată a factorului de calitate, mult mai pregnantă decât în cazul rezonatoarelor cu undă pur transversală AT sau BT se datorește existenței unei proiecții longitudinale în unda electroelastică ce apare în rezonatoarele SC, aceasta ducând la disipații energetice importante în lichid. Graficele următoare prezintă datele de simulare pentru un rezonator AT având frecvența fundamentală de rezonanță  $f = 6 \cdot 10^6 \text{ Hz}$  în funcție de modulul unei unde transversale evanescente generate în lichidul în care este scufundat oscilatorul

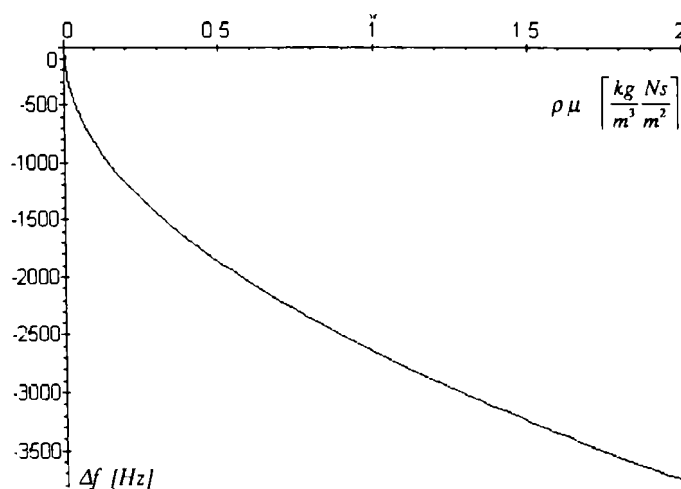
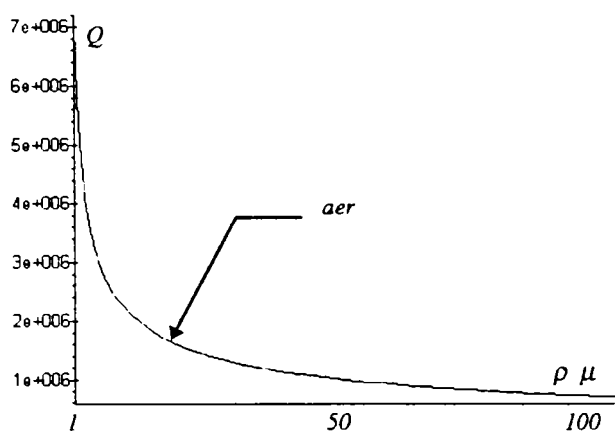
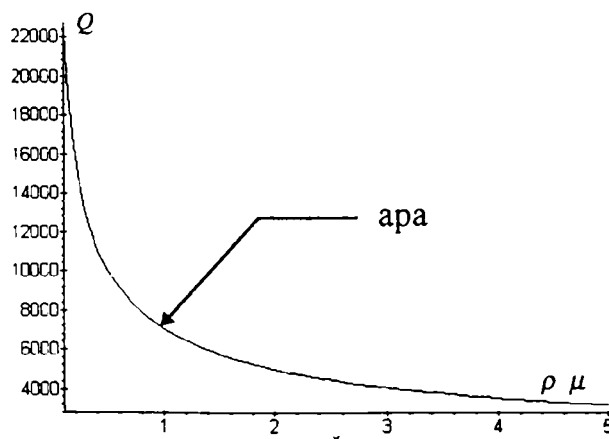


Figura 7  
Variația frecvenței de rezonanță





zona fluid gazos  $\rho \mu \in (1 \dots 100) * 10^{-6}$



zona fluid lichid  $\rho \mu \in (0.1 \dots 5)$

Figura 8

Graficul variației factorului de calitate - aceleași date de rezonator

## Atingerea cu fir elastic

Contactul “fin” dintre un fir foarte subțire cu bune proprietăți elastice cu suprafața vibrantă a unui rezonator piezoelectric conduce întotdeauna la un salt pozitiv de frecvență proporțional cu energia de vibrație a punctului de contact. Această constatare experimentală a condus la utilizarea acestei metode simple pentru a investiga forma distribuției de energie elastică la suprafața rezonatorului și implicit investigarea modurilor proprii de vibrație [10],[57]. Amintim că investigarea modurilor proprii de vibrație este posibilă pentru undele transversale doar prin utilizarea topografiilor în raze X, o tehnică ce necesită o aparatură complexă. Până în prezent nu a fost dat un model de predicție capabil să explice și să confere rezultate de simulare conforme cu cele experimentale. Dificultatea acestei modelări constă parțial în necunoașterea certă a naturii interacțiunii ce apare între suprafața vibrantă (elongația elastică este conținută în planul suprafeței și are valori tipice de ordinul zecilor de nm) a dispozitivului piezoelectric și firul elastic. Concret, nu se poate afirma cu siguranță ce fel de mișcare guvernată de vibrația piezoelectrică execută capătul firului: este aderent suprafeței rezonatorului, nu aderă și acționează ca un element de frecare, execută o mișcare cvasi-aleatorie guvernată de micro-excrescențele rugoase în mișcare de oscilație aflate pe suprafața cristalului sau a electrodului – se agață din când în când de acestea. Cea mai probabilă este o situație intermediară acestor trei, dependentă de presiunea de contact a firului elastic pe suprafața vibrantă. În sprijinul acestor afirmații oferim datele experimentale prezentate în [10] pentru un rezonator pe substrat de cuarț în tăietură AT supus unei atingeri cu presiune variabilă cu un fir elastic de tombac.

Tablul T2.

Dreapta	Frecvența rezonatorului MHz	Deviația relativă de frecvență la presiunea maximă
(1)	4.247	$\approx 22 * 10^{-6}$
(2)	11.152	$\approx 28 * 10^{-6}$

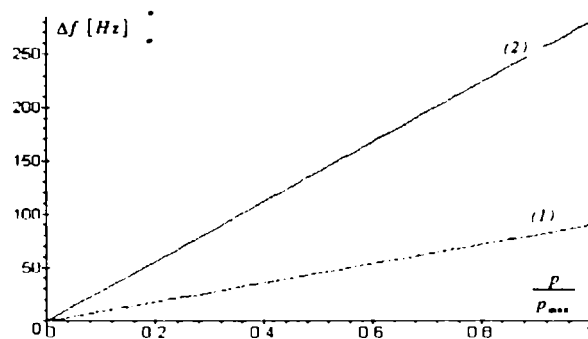


Figura 9

Influența presiunii de contact asupra deviației frecvenței de rezonanță într-un experiment de atingere cu fir elastic.

Graficele următoare reprezintă rezultatele experimentale obținute în experimente de scanare a suprafeței electrodului pentru rezonatoare de cuarț în tăietură AT și SC.

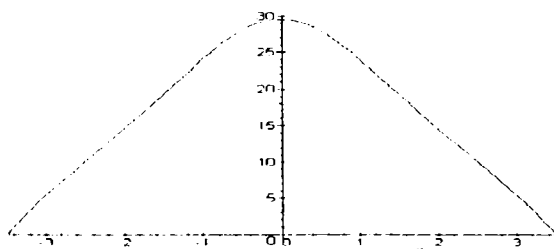


Figura 10.a

Date experimentale pentru un rezonator BAW pe substrat de cuarț în tăietură AT, mod (0,0,0) scanat cu fir elastic în lungul unui diametru; frecvența de rezonanță neperturbată a fost de 4.273 MHz, diametrul electrodului 7mm

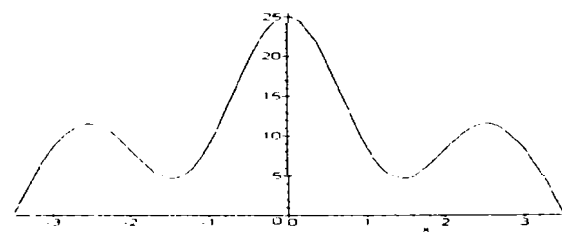


Figura 10.b

Date experimentale pentru un rezonator BAW pe substrat de cuarț în tăietură AT, mod (0,1,0) scanat cu fir elastic în lungul unui diametru; frecvența de rezonanță neperturbată a fost de 4.283 MHz, diametrul electrodului 7mm

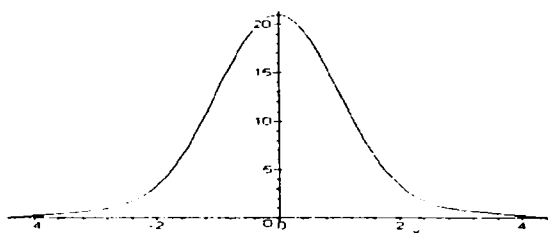


Figura 10.c

Date experimentale pentru un rezonator BAW pe substrat de cuarț în tăietură SC, mod (0,0,0) scanat cu un fir elastic în lungul unui diametru; frecvența de rezonanță neperturbată a fost de 4 989 MHz, diametrul electrodului 9mm

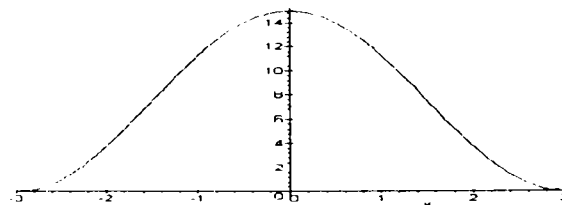


Figura 10.d

Date experimentale pentru un rezonator BAW cu excitație laterală pe substrat de cuarț în tăietură SC, scanat cu un fir elastic în lungul unui diametru; frecvența de rezonanță neperturbată a fost de 4 999800 Hz, lungimea traseului de scanare 6mm

Figura 10.d prezintă datele obținute la scanarea cu fir elastic a suprafeței active de vibrație pentru un rezonator SC cu excitație laterală în lungul liniei “----” marcată în figura 11.

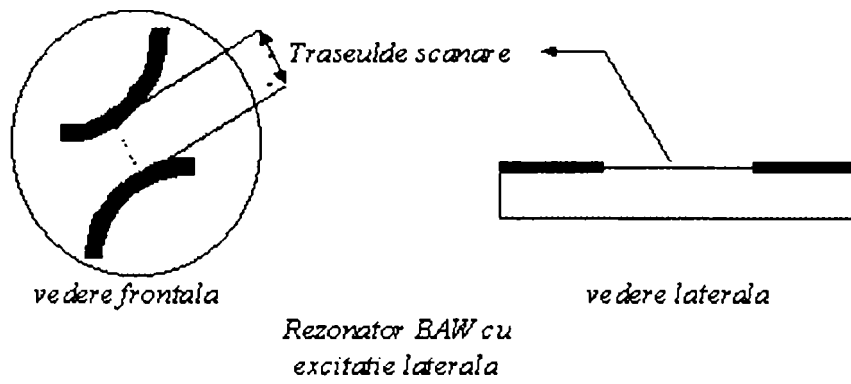


Figura 11

Explicativă la experimentul de scanare cu fir elastic a unui rezonator SC cu excitație laterală

Graficele prezentate au fost obținute prin medierea mai multor scanări și prin interpolare spline.

Toate aceste date experimentale sugerează considerarea unei alterări a impedanței elastice  $Z_i^m$  de forma  $\Delta Z_i^m(x, \omega) = \omega_i^2 a f(x - x_0)$  presupusă în începutul acestui paragraf cu  $a$  o valoare negativă ce ține cont de natura interacției fir elastic-suprafață vibrantă. Cele ce urmează vor presupune că firul elastic este aderent suprafeței vibrante și vor utiliza relațiile de calcul deduse în paragraful 2.2 considerând firul elastic ca mediu semi-inifinit. Rezultatele obținute se încadrează ca sens și ordin de mărime în datele experimentale și oferă o descriere, adevărat parțială, a constantei de interacțiune  $a$ . Modelul de bază în simulare este cel al rezonatoarelor de cuarț Y rotite cu o geometrie circulară a electrozilor având un reper cartezian în care elongația elastică a undei este coliniară cu axa  $X_2$  a rezonatorului – situație identică cu cea din paragraful dedicat perturbațiilor termice.

Să considerăm pentru început că rezonatorul este situat într-un fluid având caracteristici de încărcare neglijabile: aer, Ar, etc. Variația impedanței mecanice de suprafață este de forma:

$$\Delta(\text{Re}\{Z_i^m(x_1, x_3)\}) \approx -(1 - \zeta_i^2(x_1, x_3))\rho_f h \omega^2 + \rho_f h \omega^2 = \zeta_i^2(x_1, x_3)\rho_f h \omega^2$$

Deviația relativă de frecvență:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &\approx \frac{\rho_f h \int_{S_{\text{sup}}} \zeta_T^2(x_1, x_3) g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{2\rho \int_{-d/2}^{d/2} t r^2(x_2) dx_2 \int_{S_{\text{sup}}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} = \frac{\rho_f h \int_{S_{\text{sup}}} \zeta_T^2(x_1, x_3) g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{\rho d \int_{S_{\text{sup}}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} = \\ &\approx \frac{\rho_f h}{\rho d} (\zeta_T^2)_{\text{val}} \frac{g_i^2(\xi_1, \xi_3) S_c}{\int_{S_{\text{sup}}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\xi_T(x_1, x_2) = \begin{cases} (\xi_T)_{\text{val}} & (x_1, x_3) \in S_c \\ 0 & \text{in rest} \end{cases}$$

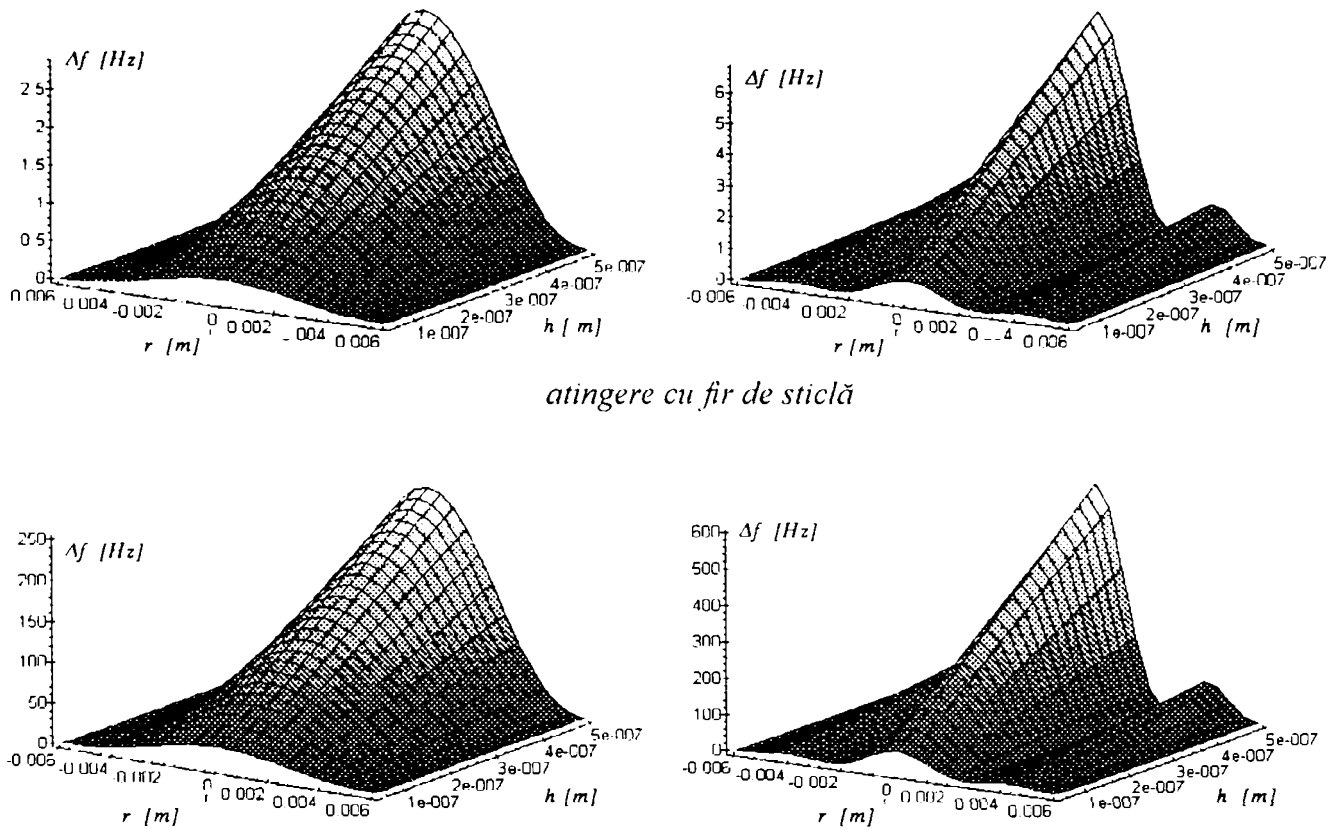
Pentru funcții  $g(x_1, x_3)$  cu simetrie radială și  $S_c \ll S_{\text{sup}}$  relația anterioară ia o formă mai simplă:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \approx \frac{\rho_f h}{\rho d} (\zeta_T^2)_{\text{val}} \frac{\int_{S_c} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r g_i^2(r, \theta) dr d\theta} \approx \frac{\rho_f h}{\rho d} (\zeta_T^2)_{\text{val}} \frac{g_i^2(r) \pi r_c^2}{2\pi \int_0^R r g_i^2(r) dr} \text{ cu: } S_c = \pi r_c^2 \quad (12)$$

Pentru simulare considerăm următoarele date de concrete:  
 frecvența fundamentală  $f=4.34MHz$

Raza  $R=6mm$ , grosimea plăcuței de cuarț  $d=0.4mm$ , raza de contact cu firul elastic  $r_c=0.1 mm$ , grosimea depunerii electrodului de Ag  $h=0.1..0.5\mu m$

Graficele alăturate prezintă datele de simulare pentru scanarea suprafeței unui astfel de rezonator cu un fir de sticlă și altul de tungsten. De remarcat saltul net superior de frecvență în situația firului de tungsten, salt datorat caracteristicilor elastice superioare ale acestuia.



atingere cu fir de sticlă

Figura 12

atingere cu fir de Tungsten

O situație interesantă apare în cazul în care rezonatorul este situat într-un fluid având caracteristici de încărcare apreciabile: apa, alcool, etc. Pentru un astfel de experiment de scanare într-un lichid vâcos se constată o deviație de frecvență sensibil mai mare decât în situația plasării experimentului în aer. Graficul următor preia din [44] datele experimentale obținute în urma unui astfel de experiment.

Caracteristicile rezonatorului:

- tăietura AT electrozi de Au
- Raza electrodului:  $R=10 mm$
- Frecvența fundamentală  $f=10MHz$

Materialul firului elastic este tungstenul

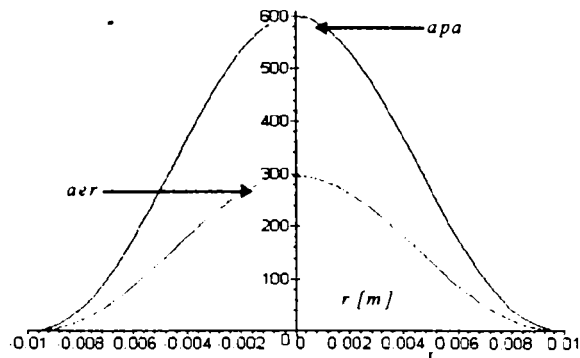


Figura 13

Graficul comparativ al experimentului de scanare în aer și apă – după [44]

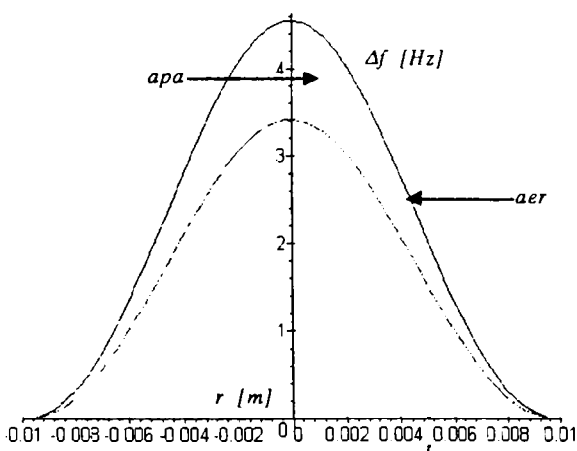
Simularea experimentului:

Raza suprafeței de contact între suprafața electrodului și firul elastic  $r_c=0.1\text{mm}$

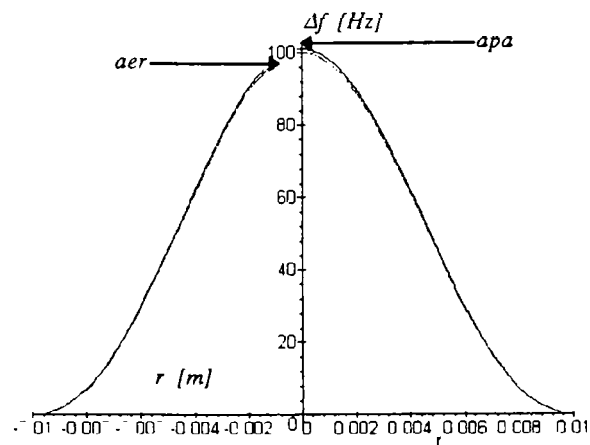
$$\Delta(\text{Re}\{Z_i^m(x_1, x_3)\}) \approx -(\rho_f h \omega^2 + \omega \sqrt{\omega \mu \rho_{ext}})_{S_{sup}-S_c} - [(1 - (\zeta_i^2)_{val}) \rho_f h \omega^2]_{S_c} + (\rho_f h \omega^2 + \omega \sqrt{\omega \mu \rho_{ext}})_{S_{sup}}$$

$$\Delta \text{Re}\{Z_i^m(x_1, x_3)\} = \begin{cases} \rho_f h \omega^2 (\zeta_i^2)_{val} + \omega \sqrt{\omega \mu \rho_{ext}} & (x_1, x_3) \in S_c \\ 0 & (x_1, x_3) \notin S_c \end{cases}$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \approx \left[ \frac{\rho_f h}{\rho d} (\zeta_T^2)_{val} + \frac{\sqrt{\omega \mu \rho_{ext}}}{\omega \rho d} \right] \frac{g_i^2(x_1, x_3) S_c}{\int_{S_{sup}} g_i^2(x_1, x_3) dx_1 dx_3} \quad (13)$$



atingere cu fir de sticlă



atingere cu fir de tungsten

Figura 14

Graficele datelor de simulare

Simularea efectuată pe baza ipotezelor și relațiilor deduse în paragraful 2.2 relevă inegalitatea ce apare între cele două curbe ale deviației de frecvență însă la o scară mult mai redusă. Veridicitatea modelului utilizat în această situație pentru estimarea interacțiunii elastice între suprafața vibrantă a dispozitivului piezoelectric și firul elastic nu este decât parțială.

### §2.3.5 Perturbații ale condițiilor pe frontieră electrică

Paragraful prezintă o analiză în principal calitativă a influenței condițiilor pe frontieră electrică asupra frecvențelor de rezonanță. Rezultatele acestei analize sunt comparate cu cele obținute prin calculul clasic al frecvențelor de vibrație pentru un oscilator Colpits stabilizat cu un rezonator piezoelectric.

Perturbațiile ce le vom trata în acest paragraf vor influența doar setul de constante electrice al mulțimii  $I_S$  ce parametrizează comportarea câmpului electroelastic pe frontiera rezonatorului. Parametrii de material  $I_M$  precum și cei geometrici îi vom considera invariabili. Situațiile practice în care această ipoteză este în mod rezonabil acoperită sunt cele ale modificării parametrilor circuitului electric în care este plasat dispozitivul piezoelectric. În acest caz nu vom avea de studiat perturbații cu o distribuție neuniformă la suprafața metalizărilor rezonatorului întrucât conductivitatea acestora este suficient de mare pentru a distribui în mod uniform, practic instantaneu, sarcina electrică schimbată cu circuitul extern. O altă situație apare atunci când mediul exterior aflat în contact direct cu suprafața cristalului piezoelectric are proprietăți ce nu mai permit o condiție pe frontieră de tipul  $\vec{D}^{piezo} \cdot \vec{n} \approx 0$ . Pentru rezonatorii cu undă de volum acest mecanism sensibil al parametrilor mediului extern este foarte slab întrucât, în general, regiunile suprafeței unde energia de vibrație are valori semnificative sunt regiunile acoperite de metalizări. Recent, un astfel de senzor bazat pe un rezonator cu excitație laterală a fost investigat [33] însă sensibilitatea atinsă este mult mai slabă decât cea a senzorilor similari bazați pe rezonatoare cu undă de suprafață. În cele ce urmează, vom trata doar modificările parametrilor concentrați ai circuitului electric extern acestea fiind de așteptat a avea o influență sesizabilă asupra frecvențelor proprii de vibrație. Cursul expunerii va conduce la demonstrarea inegalității ce există între frecvența de rezonanță în gol electric și cea în scurtcircuit. Această inegalitate dedusă prin calcul pentru modelul simplificat al plăcii piezoelectrice infinite a fost acceptată ca o regulă pentru orice structură piezoelectrică tridimensională însă nu avea o argumentare explicită.

Să notăm cu  $\Sigma^{met}$  suprafața rezonatorului unde există depuneri metalice și  $\Sigma^{die}$  suprafața de contact cu medii dielectrice;  $f \cdot \Omega = \Sigma^{met} \cup \Sigma^{die}$ . Dispunerea geometrică a suprafețelor  $\Sigma^{met}$  respectiv  $\Sigma^{die}$  pentru rezonatorul perturbat rămâne identică cu aceea a rezonatorului de bază. Vom analiza influența modificării impedanțelor electrice ce corespund fiecărui electrod în parte în două situații distincte:

**S** - impedanțele sunt approximate printr-un circuit serie  $LC$ ; frecvența de rezonanță a dispozitivului piezoelectric în această situație o vom considera a fi foarte aproape de frecvența critică a circuitului  $LC$ . Vom simula în acest mod situarea rezonatorului (sau doar a unei metalizări) într-un punct de impedanță foarte mică însă diferită de zero.

**P** - impedanțele sunt approximate printr-un circuit paralel  $LC$ ; similar cazului S frecvența de rezonanță a dispozitivului piezoelectric o presupunem apropiată de frecvența critică a circuitului paralel  $LC$  deci într-un punct de impedanță foarte mare.

Partea rezistivă se neglijează sau se consideră compensată de rezistența negativă introdusă de componentele active ale circuitului.

### Cazul S

- pentru o suprafață conexă  $S_m \in \Sigma^{met}$  condițiile electrice pe frontieră se presupun a fi de forma:

$$\phi_m(t) + q_m(t)C_m^{-1} + \ddot{q}_m(t)L_m = 0$$

$$q_m(t) = -\int_{S_m} \vec{D} \cdot \vec{n} ds \quad C_m > 0, L_m > 0 \quad \text{rezonatorul de bază}$$

$$\tilde{\phi}_m(t) + \tilde{q}_m(t)\tilde{C}_m^{-1} + \tilde{\ddot{q}}_m(t)\tilde{L}_m = 0$$

$$\tilde{q}_m(t) = -\int_{S_m} \vec{\tilde{D}} \cdot \vec{n} ds \quad \tilde{C}_m > 0, \tilde{L}_m > 0 \quad \text{rezonatorul perturbat}$$

Pentru un regim armonic permanent cu o variație temporală de forma  $e^{st}$  diferența dintre potențialul electric pe suprafață  $S_m$  va fi:

$$\tilde{\phi}_m(s) - \phi_m(s) \approx -\left[ (\tilde{C}_m^{-1} - C_m^{-1}) + s^2(\tilde{L}_m - L_m) \right] q_m(s) = -(\Delta C_m^{-1} + s^2 \Delta L_m) q_m(s)$$

$$\Delta \phi_m(s) = -\Delta H_m^e q_m(s)$$

Pentru a ajunge la expresia anterioară s-a făcut apel la aproximația,  $\Delta q_m(s^2 L_m + C_m^{-1}) \approx 0$  întrucât am presupus că în cazul S pulsația de rezonanță se află aproape de frecvența serie a circuitului  $L_m C_m$ .

- pentru  $\Sigma^{die}$  admitem ca și condiție electrică pe frontieră inexistența sarcinii electrice adevărate

$$0 = -\int_{S_m} \vec{D} \cdot \vec{n} ds$$

### Cazul P

- $S_n \in \Sigma^{met}$

$$q_n(t) + \phi_n(t)C_n + \ddot{\phi}_n(t)L_n^{-1} = 0$$

$$q_n(t) = -\int_{S_n} \vec{D} \cdot \vec{n} ds \quad L_n^{-1} > 0, C_n \geq 0 \quad \text{rezonatorul de bază}$$

$$\tilde{q}_n(t) + \tilde{\phi}_n(t)\tilde{C}_n + \tilde{\ddot{\phi}}_n(t)\tilde{L}_n^{-1} = 0$$

$$\tilde{q}_n(t) = -\int_{S_n} \vec{\tilde{D}} \cdot \vec{n} ds \quad \tilde{L}_n^{-1} > 0, \tilde{C}_n \geq 0 \quad \text{rezonatorul perturbat}$$

$$\tilde{q}_n(s) - q_n(s) \approx -\left[ (\tilde{C}_n - C_n) + s^2(\tilde{L}_n^{-1} - L_n^{-1}) \right] \phi_n(s) = -(\Delta C_n + s^2 \Delta L_n^{-1}) \phi_n(s)$$

$$\Delta q_n(s) = -\Delta G_n^e \phi_n(s)$$

Din rațiuni analoage celor explicate cazului S cu distincția că ne aflăm cu frecvența de rezonanță aproape de frecvența paralelă a circuitului P am putut folosi aproximația:  $\Delta \phi_n(s^2 L_n^{-1} + C_n) \approx 0$

- pentru  $\Sigma^{die}$  admitem de asemenea ca și condiție electrică pe frontieră inexistența sarcinii electrice adevărate,  $0 = -\int_{S_n} \vec{D} \cdot \vec{n} ds$

Aceste condiții electrice pe frontieră conduc în ambele cazuri la conservarea energiei electroelastice în solidul piezoelectric (în ipoteza unui flux de energie elastică nul prin frontiera

domeniului  $\Omega$ ) întrucât: 
$$\text{Re} \left\{ \int_{fr\Omega} \left( \phi \frac{\partial D_j^*}{\partial t} n_j \right) ds \right\} = 0.$$

Înlocuirea relațiilor anterioare în expresiile de perturbație (3-6) deduse în paragraful 2.3 conduce la următoarele estimări pentru deviația de frecvență:



$$\frac{\Delta\omega_v}{\omega_v} \approx \left[ \frac{\sum_n (\Delta H_m^e(j\omega_v) |q|^2)^{\Upsilon}}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^v|^2 d\Omega} \right] = \frac{\sum_m ((\Delta C_m^{\Upsilon-1} - \omega_v^2 \Delta L_m) |q|^2)^{\Upsilon}}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^v|^2 d\Omega} \quad \text{cazul S} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta\omega_v}{\omega_v} \approx - \left[ \frac{\sum_n (\Delta G_n^e(j\omega) |\Phi|^2)^{\Upsilon}}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^v|^2 d\Omega} \right] = - \frac{\sum_n ((\Delta C_n - \omega_v^2 \Delta L_n^{-1}) |\phi|^2)^{\Upsilon}}{2\rho_m \omega_v^2 \int_{\Omega} |u_i^v|^2 d\Omega} \quad \text{cazul P} \quad (2)$$

Simpla analiză calitativă a acestor relații permite formularea următoarelor observații:

- pentru o variație de inductanță nulă  $\Delta L = 0$  la terminalele dispozitivului, creșterea capacității ( $\Delta C > 0$ ) provoacă întodeauna o scădere a frecvenței de rezonanță
- pentru o variație de capacitate nulă  $\Delta C = 0$  la terminalele dispozitivului, creșterea inductanței  $\Delta L > 0$  duce întodeauna la o scădere a frecvenței de rezonanță.
- dacă presupunem că impedanța externă rezonatorului piezoelectric este pur capacitivă, frecvența de rezonanță serie ( $\phi = 0$ ) apare atunci când  $C \rightarrow \infty$  iar frecvența de rezonanță paralel ( $q = 0$ ) atunci când  $C \rightarrow 0$ .

Aceste observații oferă o explicație analitică rezultatului bine cunoscut în practică referitor la inegalitatea existentă între frecvența de rezonanță serie  $f_s$  ( $\phi = 0$ ) și cea paralel  $f_p$  ( $q = 0$ ):  $f_s < f_p$ . Relațiile (1) și (2) nu pot fi însă utilizate pentru a prezice global forma de variație a frecvenței de rezonanță în funcție de mărimea impedanței externe întrucât ele aproximează doar panta liniară locală în jurul valorilor neperturbate  $q$  sau  $\phi$ . O estimare numerică precisă a expresiilor (1,2) este dificil de dat întrucât termenul  $\int_{\Omega} |u_i^v|^2 d\Omega$  face apel la amplitudinea de vibrație elastică, mărime greu măsurabilă și care diferă în limite destul de largi de la un rezonator la altul. În exemplul ce îl prezentăm în continuare vom verifica prin analiza unui oscilator Colpitts doar cele afirmate, în observațiile anterioare, ce se referă la semnul variațiilor de frecvență în funcție de creșterea sau scăderea impedanței externe.

Schema simplificată a unui astfel de oscilator este următoarea:

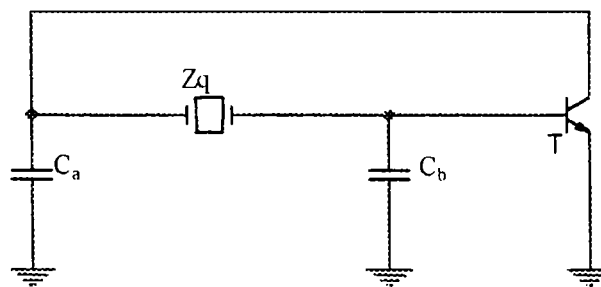


Figura 1

Schema de bază pentru un oscilator Colpitts cu rezonator piezoelectric

Pentru schema de semnal mic a circuitului, tranzistorul bipolar este modelat prin rezistența sa de emitor  $r_{BE}$  și transconductanța  $g_m = \frac{i_c}{u_{BE}}$ . Impedanța rezonatorului piezoelectric este aproximată

prin circuitul clasic serie-paralel (fără pierderi):  $Z_Q = \frac{1}{j\omega(C+C_0)} \cdot \frac{1-\omega^2 LC}{1-\omega^2 L \frac{CC_0}{C+C_0}}$

$C_0$  este capacitatea serie iar  $C$  cea paralel

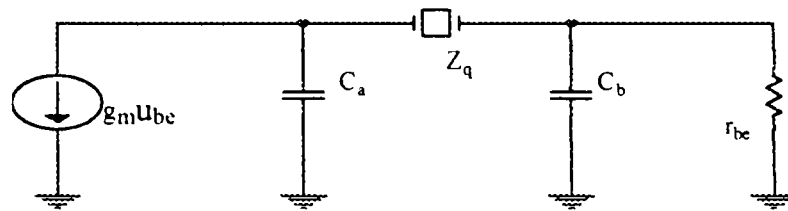


Figura 2  
Schema de semnal mic pentru oscilatorul Colpits

Pentru o scriere compactă a ecuațiilor de stare ale circuitului, notăm cu:  $Z_{BE} = \frac{r_{BE}}{1 + j\omega r_{BE} C_b}$

impedanța corespunzătoare electrodului "b" al dispozitivului piezoelectric.

Sistemul cu parametru  $\omega$  obținut prin metoda potențialelor la noduri pentru necunoscutele  $V_a$  și  $V_b$  este următorul:

$$\begin{cases} \left( g_m - \frac{1}{Z_Q} \right) V_b + (j\omega C_a) V_a = 0 \\ \left( 1 + \frac{Z_{BE}}{Z_Q} \right) V_b + \left( -\frac{Z_{BE}}{Z_Q} \right) V_a = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Valorile pulsațiilor  $\omega$  pentru care determinantul acestui sistem este nul reprezintă pulsațiile proprii de oscilație ale circuitului.

$$\begin{vmatrix} g_m - \frac{1}{Z_Q} & j\omega \\ 1 + \frac{Z_{BE}}{Z_Q} & -\frac{Z_{BE}}{Z_Q} \end{vmatrix} = 0$$

Să presupunem, pentru simplitatea calculului, că valorilor componentelor de circuit  $C_a$ ,  $C_b$ ,  $g_m$  și  $r_{BE}$  sunt alese astfel încât  $g_m r_{BE} = \frac{C_a}{C_b}$ . În această situație, determinantul caracteristic

$$\text{sistemului este nul pentru: } 1 - \omega^2 L \frac{C \frac{C_a C_b}{C_a + C_b} + C C_0}{\frac{C_a C_b}{C_a + C_b} + C + C_0} = 0 \quad (4)$$

Frecvența proprie de rezonanță este în acest caz:

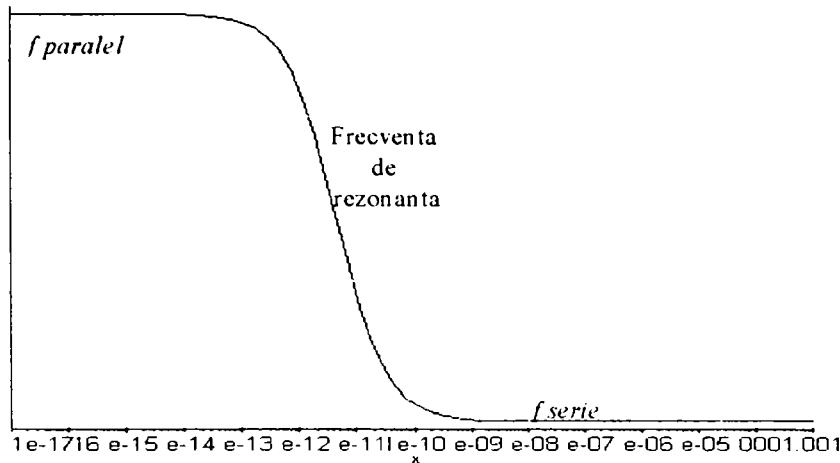
$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC_{echiv}}} \quad \text{cu } C_{echiv}^{not} = \frac{C \frac{C_a C_b}{C_a + C_b} + C C_0}{\frac{C_a C_b}{C_a + C_b} + C + C_0} \quad (5)$$

Funcția  $C_{echiv}(C_a, C_b)$  este strict crescătoare, cazurile extreme conducând la situațiile de rezonanță paralel respectiv serie:

$$\frac{C_a C_b}{C_a + C_b} = 0 \Rightarrow C_{echiv} = \frac{C C_0}{C + C_0} \quad \text{corespunzător frecvenței de rezonanță paralel } q = 0$$

$$\frac{C_a C_b}{C_a + C_b} \gg C_0 \Rightarrow C_{echiv} = C \quad \text{corespunzător frecvenței de rezonanță serie } \phi = 0$$

În figura 3 prezentăm graficul frecvenței de rezonanță funcție de capacitatea paralelă  $C_a = C_b = C_x$



$$f_{paralel} = 10,92029558 \text{ MHz}$$

$$f_{serie} = 10.90000084 \text{ MHz}$$

Figura 3

graficul frecvenței de rezonanță funcție de capacitatea externă  $C_x$

Valorile concrete ale componentelor circuitului au fost:

Tranzistorul bipolar:  $g_m = r_{BE}^{-1}$

Rezonatorul piezoelectric:  $C_0 = 2.2 \text{ pF}$ ,  $C = 8.2 * 10^{-15} \text{ F}$ ,  $L = 0.026 \text{ H}$  (rezonator clasic BAW, pe substrat de în tăietura AT)- datele sunt preluate din [8].

Am probat astfel, cel puțin calitativ, printr-un calcul direct bazat pe modelarea clasică unidimensională a impedanței electrice a rezonatorului în jurul unui dublet de rezonanță  $f_s - f_p$  predicția ce am formulat-o cu privire la comportarea frecvențelor de rezonanță în funcție de valoarea impedanței externe. Să remarcăm însă că relațiile de perturbație (1) și (2) sunt generale ele putând fi aplicate vibrațiilor tridimensionale.

Acest capitol constituie partea centrală a tezei. El abordează problema influenței perturbațiilor cu o distribuție spațială neuniformă asupra spectrului de vibrație al rezonatoarelor piezoelectrice cu undă de volum utilizând ca model de studiu teoria de perturbație liniară existentă. Literatura de specialitate consacrată acestui subiect recurge adesea la o serie de simplificări, cea mai frecventă fiind cea a neglijării caracterului tridimensional al vibrației și al distribuției perturbației în volumul și pe suprafața rezonatorului. Această ipoteză, a reducerii dimensiunii spațiului problemei la una sau două dimensiuni, permite un calcul direct al spectrului, adesea teoria de perturbație nefiind necesară. Principalul dezavantaj al acestor metode este însă imposibilitatea analizării și predicției corelațiilor stabilite experimental ce există între neuniformitatea câmpului de perturbație și distribuția energetică a modului rezonant. Ne referim concret aici la fenomene precum încărcarea masică, încălzirea neuniformă, scufundarea parțială într-un fluid vâscos sau microdeformațiile geometrice. Un domeniu pe care l-am considerat deasemenea insuficient tratat este cel al comportării câmpului electroelastic pe frontiera solidului piezoelectric, în situațiile când acesta se află în contact cu diverse medii. Menționăm că, pentru ușurința analizei matematice, ipotezele unor condiții pe frontieră de tip Dirichlet sau Neuman sunt frecvent folosite, însă acestea anulează din start orice încercare de estimare a influenței mediilor externe asupra frecvențelor de rezonanță. Ceea ce s-a încercat, și sperăm reusit, în acest capitol, este tratarea unitară a majorității fenomenelor de perturbație neuniformă de volum sau suprafață prin utilizarea exclusivă a teoriei de perturbație spectrală liniară în forma sa generală, tridimensională. Rezultatele obținute sunt în parte originale, de exemplu cazul încărcării masice, al microdeformațiilor geometrice, sau generalizează relațiile de calcul obținute pe baza aproximărilor uni sau bidimensionale pentru perturbații cu o distribuție uniformă; aceasta este situația contactului cu un lichid vâscos, cu un fir elastic sau al încărcării electrice. Pentru a duce la bun sfârșit acest studiu, au fost necesare o serie de extensii teoretice în ceea ce privește relațiile de perturbație pentru condiții pe frontieră disipative de tipul ecuațiilor diferențiale de ordinul 2 precum și construcția unui model de estimare al comportării câmpului electroelastic la frontiera dintre solidul piezoelectric și un corp compozit de tip film subțire-mediul exterior semi-infinit.

Relațiile de calcul obținute pentru estimarea influenței unor factori fizici diverși, acționând ca perturbații în volumul sau pe suprafața rezonatorului piezoelectric, pe baza unitară a teoriei de perturbație liniare, furnizează o demonstrație analitică unui raționament fizic intuitiv verificat experimental în multe situații. Este vorba de următoarea concluzie:

*Deviația frecvenței de rezonanță a unui rezonator piezoelectric cu undă de volum, datorată unui factor perturbator extern, este o funcție (adesea liniară) de corelația ce există între distribuția perturbației și distribuția energiei de vibrație a modului respectiv, în volumul sau suprafața cristalului.*

Prezentăm în continuare desfășurarea pe paragrafe și principalele rezultate obținute în acestea.

Primul paragraf al capitolului are ca punct de plecare ecuațiile cuplate elasto-electromagnetice în solidul piezoelectric, urmează o cale similară celei propusă de Auld pentru construcția relației de reciprocitate electro-elastice, regăsește expresia de perturbație ce derivă din aceasta și extinde rezultatul asupra cazului când condițiile pe frontieră sunt energetic disipative.

Cel de al doilea paragraf a fost dedicat în exclusivitate formulării unui model parametric care să aproximeze suficient de bine comportarea câmpului elastic la suprafața de contact dintre solidul piezoelectric și un film subțire de grosime neuniformă urmat de un mediu omogen semi-infinit, fără a genera însă dificultăți matematice majore de tratare a dinamicii electro-elastice. Studiul propagării undelor acustice, într-o aproximație local unidimensională și un regim armonic permanent, pentru o astfel de structură compozită, a permis deducerea relațiilor de legătură între tensiunile și deplasările elastice generate de aceste unde la interfața dintre solidul piezoelectric și filmul subțire. O serie de aproximații rezonabile, relativ la grosimea filmului subțire și impedența mediului exterior, au permis simplificarea acestor relații până la un polinom de ordinul 2 în pulsația regimului armonic. Trecerea în domeniul timp relevă o dependență între tensiuni și deplasări de forma unei ecuații cu derivate ordinare de ordinul doi ai cărei coeficienți sunt ușor de interpretat fizic:  $T_{ij}^m(t)u_j + m_{il}(\omega_0)\ddot{u}_l(t) + v_{il}(\omega_0)\dot{u}_l(t) + k_{il}(\omega_0)u_l(t) = 0$  cu  $m_{il}$  tensorul inerțial,  $v_{il}$  tensorul disipativ și  $k_{il}$  tensorul elastic. O relație similară poate fi considerată a modela comportarea câmpului electric pe frontieră:  $\Phi + L_c \ddot{q} + R_c \dot{q} + C_c^{-1} q = 0$

Mulțimea valorilor  $m_{il}, v_{il}, k_{il}$  și  $R, L, C$  constituie setul de parametri  $I_S$  cu ajutorul cărora se aproximează comportarea câmpului elastic la suprafața solidului piezoelectric.

Ceea ce se studiază în detaliu pe parcursul paragrafului 2.3 este situația în care parametrii ce influențează spectrul rezonatorului  $I_M, I_S$  și  $I_G$  devin, datorită unor perturbații fizice neuniforme distribuite în volumul sau suprafața rezonatorului, funcții de coordonatele spațiale. Concret, sunt analizate perturbațiile neuniforme datorate câmpului termic, elastic sau electric staționar, condițiilor pe frontiera și deformațiilor geometrice slabe. Pentru fiecare din acest caz sumarizăm în cele ce urmează trăsăturile esențiale.

*a) perturbația termică neuniformă – este afectat setul parametrilor de material  $I_M$*

Este dedusă expresia generală de perturbație corespunzătoare acestei situații și particularizată pentru rezonatoarele pe substrat de cuarț (sau izomorfe) în tăietura  $Y$  rotită. Se demonstrează astfel influența distribuției termice transversale ca un factor suplimentar de perturbație alături de gradientul termic lateral, caz analizat de A. Budura în [10].

*b) perturbațiile generate nelinier de câmpuri elastice sau electrice staționare supra-impuse vibrațiilor electroelastice- este afectat setul parametrilor de material  $I_M$*

A fost pusă în evidență expresia generală de perturbație ce apare în acest caz, ca fiind o funcție de distribuția câmpului staționar în volumul cristalului și de tensorii de material neliniari.

c) *perturbații ale condițiilor pe frontieră – este afectat setul parametrilor de material  $I_S$*

**c1) parametrii mecanici**

**c11) depunerea masică neuniformă**

Se demonstrează analitic regula acceptată empiric ce definea sensibilitatea locală în frecvență pentru depunerile suplimentare de masă pe suprafața activă de oscilație a rezonatorului ca fiind proporțională cu densitatea energiei de vibrație la frontiera solidului piezoelectric.

**c12) contactul cu un fluid vâscos**

Sunt deduse relațiile ce estimează modificarea frecvenței de oscilație și factorul de calitate al unui rezonator aflat în contact total sau parțial cu un fluid. Este regăsită și generalizată pe această cale o expresie de estimare a deviației frecvențelor de oscilație pentru rezonatoare pe substrat de cuarț într-o orientare cristalografică, expresie dedusă în [44] pornind de la un model de calcul direct unidimensional.

**c13) contactul cu un fir elastic**

Este explicată analitic, într-o manieră preponderent calitativă, corelația, pusă în evidență experimental, între zona de contact a firului, densitatea energiei de vibrație în acea zonă și deviația frecvențelor proprii de oscilație.

**c2) parametrii electrici**

Perturbarea condițiilor pe frontieră electrice poate fi socotită a fi preponderent uniformă pentru frecvențele uzuale de lucru. Paragraful dedicat acestui subiect a fost introdus pentru a demonstra concordanța și în această situație a rezultatelor de predicție obținute cu ajutorul relațiilor de perturbație liniară cu datele experimentale. S-a demonstrat pe această cale relația de inegalitate ce există între frecvența de oscilație corespunzătoare unui scurtcircuit electric și cea proprie golului electric. Relația este larg acceptată în practică, este aproximată de modelul unidimensional al plăcilor piezoelectrice însă, după cunoștința autorului, nu avea o explicație analitică generală pentru o geometrie tridimensională.

d) *perturbații generate de modificarea ușoară a geometriei rezonatorului - este afectat setul parametrilor de material  $I_G$*

Această situație este abordabilă prin aplicarea unei schimbări curbilinii de variabilă domeniului piezoelectric deformat și revenirea, ca domeniu de calcul, în volumul inițial, neperturbat. Pentru deformații având o parte neliniară mult mai mică decât cea liniară (dar nu neglijabilă) se echivalează prin această schimbare de variabilă perturbațiile geometrice cu perturbații ale parametrilor de material  $I_M$ . Analiza de perturbație ce se efectuează pentru un rezonator pe substrat de cuarț în orientare  $Y$  rotită pentru deformații ale suprafeței de tip lenticular, duce la concluzii ce, calitativ, sunt în concordanță cu intuiția fizică a fenomenului de capcană energetică. Expresia de perturbație astfel dedusă apare ca o funcțională dependentă de deformația suprafețelor active de vibrație. Această funcțională face posibil un calcul ce vizează maximizarea deviației de frecvență pentru un anumit mod de oscilație precum și aflarea suprafeței optime din punct de vedere al ecartului între o frecvență fundamentală de oscilație și modurile adiacente parazite. Calculul comparativ al ecartului de frecvență efectuat pentru o suprafață optimală și una uzuală, lenticular sferică, a furnizat diferențe nesemnificative, demonstrând pe această cale quasi-optimalitatea formei lenticular sferice.

### Capitolul 3      **Studiul ecuațiilor electroelastice hiperbolice și teoria de perturbație asociată acestora**

Pe parcursul acestui capitol, se va introduce un sistem de ecuații hiperbolice pentru studiul dinamicii electroelastice în solidul piezoelectric. Vom ajunge la această formă de analiză alternativă sistemului clasic prin renunțarea parțială la ipoteza câmpului electric irotațional.

Studiul acestei ecuații într-un mediu piezoelectric infinit va demonstra concordanța foarte bună a soluțiilor (undele plane) din domeniul acustic cu cele ce se obțin prin rezolvarea ecuațiilor electroelastice clasice.

Analiza acestui sistem de ecuații într-un domeniu piezoelectric finit având condiții pe frontieră ce nu au un caracter dinamic relevă situarea acestuia într-un caz quasi-clasic al ecuațiilor fizicii matematice pentru care există o teoremă de existență și unicitate a soluțiilor în domeniul timp.

Caracterizarea spectrală a operatorului electroelastic specific sistemului de ecuații având condiții pe frontieră de tip variațional (B), conduce la dezvoltarea unei teorii de perturbație riguroasă și completă ce permite scrierea explicită a estimatorilor de ordin superior pentru frecvențele proprii perturbate.



### §3.1 Motivația acestui capitol

Modul de definire al dipolului electric elementar în celula cristalină pune imediat în evidență dependența acestuia de distanțele inter-atomice ce structurează unitatea cristalografică. Orice deformare a celulei ce este însoțită de o variație accelerată în timp a dipolului electric generează o excitație cuantică colectivă în rețeaua cristalină - polaritonul - sub forma unei unde cuplate elasto-electromagnetice. Aceasta se întâmplă la un nivel microscopic de analiză. O condiție suficientă pentru ca acest cuplaj să aibă coerență la scară microscopică este ca celula cristalină să nu posede o simetrie cu centru de inversie. Această proprietate cristalografică este definitorie pentru fenomenul de piezoelectricitate. Datorită gradului foarte mic de interacțiune între partea elastică și cea electromagnetică a undelor cuplate, atât la nivel microscopic cât și macroscopic, o aproximație comodă din punctul de vedere al analizei matematice o constituie ignorarea cuplajului și studiul decorelat al câmpurilor. Privită din perspectiva interesului preponderent către ramura acustică sau electromagnetică a câmpului sau a concordanței între rezultatele modelării și datele experimentale, această ipoteză este în marea majoritate a cazurilor motivată. Atunci când însă, o astfel de aproximație nu este rezonabilă sau este exclusă din start de natura problemei ce se studiază (de exemplu dispozitivele piezoelectrice sau polaritonii) analiza matematică devine deosebit de complexă și greoaie. În astfel de situații se speculează diverse proprietăți precum caracterul quasi-irotațional al câmpului electric pentru partea acustică a dinamicii electroelastice sau diverse proprietăți geometrice ce reduc caracterul tridimensional al problemei. Abordarea generală a problemei de elasto-electromagnetism în solidul piezoelectric, fără a recurge la simplificări, este de dată recentă [58] sau [27] și ea nu reușește să treacă de un anumit nivel abstract. În aceste studii legătura între partea matematică și cea fizică a analizei este mult mai puțin vizibilă decât în cazul elastic sau electromagnetic. Formalismul propus de Mindlin sau Auld și prezentat în primul paragraf al celui de al doilea capitol este intuitiv fizic, permite deducerea unor rezultate importante precum o teoremă de reciprocitate sau unicitate a câmpului cuplat și relațiile de perturbație liniare. Dezavantajul major al acestei abordări îl constituie includerea relațiilor  $div\vec{D}=0$  și  $div\vec{B}=0$  în mulțimea de definiție a problemei din acest motiv o analiză mai fină sau dezvoltarea unor algoritmi numerici nu este posibilă. O serie de rezultate fundamentale precum ortogonalitatea modurilor elasto-electromagnetice, o funcțională Lagrange sau caracterul simetric al operatorului de undă se deduc în [58] dar, în opinia autorului, modul de definire al variabilelor de stare face greu intuibile semnificațiile fizice ale modelului iar dezvoltarea unui algoritm numeric dificilă datorită dimensiunii foarte mari a spațiului de lucru al ecuației - o submulțime a lui  $[L^2(\Omega)]^{n_0}$ . Redăm în cele ce urmează definirea ecuației de piezoelectromagnetism așa cum este ea prezentată în [58] pentru un regim armonic permanent de pulsație  $s$ .

$$L\xi = sM\xi \quad (1)$$

cu notațiile:

$$\xi = \{u_i, v_i, T_{ij}, D_i, H_i, \phi, A_i, S_{ij}, E_i, B_i\}$$

$$L\xi = \left\{ divT_{ij}, -\rho_m v_i, S_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), div\vec{D}, -\vec{E} - \nabla\phi, \vec{B} - \nabla \times \vec{A}, -\nabla \times \vec{H}, \right.$$

$$\left. T_{ij} - \frac{\partial \Xi}{\partial S_{ij}}, -D_i - \frac{\partial \Xi}{\partial E_i}, H_i - \frac{\partial \Xi}{\partial B_i} \right\}$$

$$M\xi = \{\rho_m u_i, \rho_m v_i, 0, A_i, 0, 0, D_i, 0, 0, 0\}$$

Funcția de entalpie a procesului piezoelectromagnetic se definește astfel:

$$\Xi(S_{ij}, E_i, B_j) = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - e_{ijk} E_i S_{jk} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{2} \mu^{-1} B_i B_i$$

De remarcat că operatorul  $M$  nu este inversabil, această particularitate prezentă și în cazul ecuațiilor piezoelectrice clasice face improbabilă continuarea analizei matematice mai departe de rezultatele amintite. Să amintim că ecuațiile necuplate ale elasticității liniare sau ale electromagnetismului într-un volum finit pot fi ambele privite sub forma abstractă  $\psi = L\psi$ , cu  $L$  un operator autoadjunct și pozitiv definit. Pentru această ecuație există dezvoltată o teorie completă plecând de la teorema de existență și terminând cu relațiile de perturbație de ordin superior celui liniar.

Fie că se abordează studiul câmpurilor cuplate în maniera propusă de Mindlin și Auld fie se încearcă prin ecuațiile anterioare, dificultățile atât teoretice cât și numerice sunt imediate și o metodă generală și facilă de a le trata încă nu există. De ce totuși interesul pentru acest domeniu al piezoelectromagnetismului chiar pentru aplicații în care interesează predominant partea acustică a fenomenului? În această situație, aproximația câmpului electric quasi-staționar împreună cu ecuațiile clasice în  $u_i$  și  $\phi$  dau rezultate de predicție excelente. Răspunsul, în opinia autorului, este că, alături de un nivel evident mai fin de cunoaștere a realității fizice, o serie de aspecte teoretice incerte asociate modelului electroelastic clasic de studiu motivează găsirea unor modele de analiză care să apropie abordarea dinamicii cuplate elasto-electromagnetice de ecuația abstractă amintită a undelor. Referindu-ne acum la aspectele teoretice mai puțin clare, ele pun în discuție concret, absența unei teoreme de existență a soluțiilor, incertitudinea completitudinii spațiului liniar generat de modurile proprii de vibrație electroelastice, modul de deducere al funcționalei Lagrange și dificultățile legate de construcția relațiilor de perturbație de ordin superior.

Prin cele expuse am reușit, sperăm, să motivăm interesul pentru dezvoltarea unui set de ecuații de modelare a câmpului elasto-electromagnetic în solidul piezoelectric, ecuații care să reprezinte o soluție de mijloc între ușurința interpretării fizice, a analizei matematice implicate și a posibilității de a dezvolta algoritmi numerici. Fără îndoială, există mai multe soluții la acest deziderat. Întrucât subiectul tezei este legat în general de manifestarea în domeniul acustic a vibrațiilor piezoelectrice studiul ce îl vom desfășura în acest ultim capitol este dedicat găsirii unui compromis între a nu neglija total cuplajul elasto-electromagnetic și a ajunge totuși, printr-o serie de aproximații rezonabile fizic, la un sistem de ecuații comprehensibil matematic și compatibil cu condițiile pe frontieră uzuale. Pe această cale, vom reuși formularea unui sistem de ecuații hiperbolic în aceleași mărimi de stare  $u_i$  și  $\phi$  precum sistemul clasic, sistem ce admite o exprimare sub forma unei ecuații abstracte  $\psi = L\psi$ , cu  $L$  un operator pozitiv definit. Faptul că acest model de analiză conduce la rezultate corecte în ceea ce privește comportarea câmpului electroelastic în zona vitezelor de undă acustice ne conferă încredința în sensul său fizic cel puțin pentru acest domeniu de viteze al undelor cuplate. Principalul avantaj al acestui model teoretic constă în posibilitatea integrării studiului ecuațiilor de dinamică electroelastică în formalismul cunoscut al ecuațiilor de undă uzuale. Deducerea unei funcționale utile în analiza spectrală și formularea expresiilor de perturbație de ordinul I (aceasta identică cu cea clasică) și II sunt cele două consecințe majore ale acestei integrări.

### §3.2 Ecuațiile electroelastice de tip hiperbolic

În acest paragraf este propusă și motivată fizic o formă hiperbolică pentru ecuațiile electroelastice într-un solid piezoelectric. Aceste ecuații le vom deduce renunțând la ipoteza câmpului electric irotațional, admitând doar necuplarea câmpului elastic cu potențialul magnetic vector.

Pentru claritatea expunerii reluăm legile fundamentale pentru câmpul electromagnetic și cel elastic (notațiile sunt identice cu cele utilizate pe parcursul lucrării):

#### Ecuațiile de câmp electromagnetic

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{E} \\ \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_e \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

#### Ecuațiile câmpului elastic

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) &= \nabla T_{ij} + f_i \\ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Vibrațiile elastice le vom presupune suficient de mici pentru a ignora deformațiile de volum induse. Aceasta implică neglijarea legii de conservare a masei și considerarea densității masice ca fiind constantă în timp

Relațiile de material le admitem a fi liniare și independente de timp (fără pierderi):

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \\ D_k &= e_{kij} S_{ij} + \epsilon_{jk} E_j \end{aligned}$$

Pentru început, vom deduce ecuațiile cuplate pentru câmpul elastic și câmpul electromagnetic utilizând ca variabile de stare elongațiile elastice  $u_i$  și potențialele câmpului electromagnetic  $\phi$  și  $\vec{A}$ :

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \text{ considerând ca și sistem canonic de referință sistemul în care tensorul dielectric are forma diagonală.}$$

Pentru partea electromagnetică a relațiilor cursul expunerii urmează calea clasică a deducerii ecuațiilor în variabilele de potențial pentru mediile izotrope fără proprietăți piezoelectrice [41].

a) relația inițială  $\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k) = \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl} S_{kl} + e_{kji} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + e_{kji} \frac{\partial A_k}{\partial t})$$

a) relația finală

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - e_{kji} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \right) - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - e_{kji} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (1)$$

b) relația inițială  $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \text{grad}(\text{div} \vec{A}) = \mu \vec{j} + \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$-\Delta A_j + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_k} = \mu j_j + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{jj} E_j + e_{jki} S_{ki}) = \mu j_j + \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_{jj} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \epsilon_{jj} \frac{\partial A_j}{\partial t} + e_{jki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$$

$$\mu \epsilon_{jj} \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} - \Delta A_j - \mu e_{jki} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial A_k}{\partial x_k} + \mu \epsilon_{jj} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = \mu j_j$$

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \epsilon_{jj}} \Delta A_j - \frac{e_{jki}}{\epsilon_{jj}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \left( \frac{1}{\mu \epsilon_{jj}} \text{div} A + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{j_j}{\epsilon_{jj}}$$

O etalonare Lorentz clasică nu este posibilă în solidul anizotrop. Ea ar implica satisfacerea simultană a următoarelor trei condiții distincte pentru cazul general (clasa cristalografică trigonală):

$$\text{div} A + \mu \epsilon_{jj} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Considerăm însă adevărată relația:  $\text{div} A + \mu \epsilon_m \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$  cu  $\epsilon_m = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{3}$

b) relația finală

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \epsilon_{jj}} \Delta A_j - \frac{e_{jki}}{\epsilon_{jj}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \left( \frac{1}{\mu \epsilon_m} \text{div} A + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \left[ \left( \frac{1}{\mu \epsilon_{jj}} - \frac{1}{\mu \epsilon_m} \right) \text{div} A \right] = \frac{j_j}{\epsilon_{jj}} \quad (2)$$

c) relația inițială  $\nabla D = \rho_e$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{jj} E_j + e_{jki} S_{ki}) = \rho_e$$

$$-\epsilon_{jj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} - \epsilon_{jj} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + e_{jki} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \rho_e$$

$$-\epsilon_{jj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} + e_{jki} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \epsilon_m \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} A + \mu \epsilon_m \frac{\partial \Phi}{\partial t}) + \mu \epsilon_m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [(\epsilon_{jj} - \epsilon_m) \frac{\partial A_j}{\partial x_j}] = \rho_e$$

sau, cu etalonarea admisă:

c) relația finală

$$-\epsilon_{jj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} + e_{jki} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \epsilon_m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [(\epsilon_{jj} - \epsilon_m) \frac{\partial A_j}{\partial x_j}] = \rho_e \quad (3)$$

În consecință, sistemul de ecuații ce descrie câmpurile cuplate elastic-electromagnetic are următoarea formă:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{e_{kij}}{\rho_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) - \frac{c_{ijkl}}{\rho_m} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{e_{kij}}{\rho_m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = f_i \\ \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \epsilon_{jj}} \Delta A_j - \frac{e_{jki}}{\epsilon_{jj}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \left( \frac{1}{\mu \epsilon_{jj}} - \frac{1}{\mu \epsilon_{mm}} \right) \text{div} A = \frac{j_j}{\epsilon_{jj}} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\epsilon_{jj}}{\mu \epsilon_m^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} + \frac{e_{jki}}{\mu \epsilon_m^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\epsilon_{jj} - \epsilon_m}{\mu \epsilon_m^2} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} \right] = \frac{\rho_e}{\mu \epsilon_m^2} \end{cases} \quad (4)$$

Un caz remarcabil este cel al cristalelor piezoelectrice cu simetrie cubică: *GaAs*, *InSb*, *Te* care din punct de vedere al tensorului dielectric sunt izotrope:  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ . Pentru acestea, sistemul de ecuații anterior ia o formă mult mai simplă:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{e_{kij}}{\rho_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) - \frac{c_{ijkl}}{\rho_m} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{e_{kij}}{\rho_m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = f_i \\ \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \epsilon_{jj}} \Delta A_j - \frac{e_{jki}}{\epsilon_{jj}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \frac{j_j}{\epsilon_{jj}} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\epsilon_{jj}}{\mu \epsilon_m^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} + \frac{e_{jki}}{\mu \epsilon_m^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\rho_e}{\mu \epsilon_m^2} \end{cases} \quad (5)$$

Pentru cristalele din clasa tetragonală precum cuarțul sau izomorfe ale acestuia *AlPO4* și *GaPO4*, două dintre valorile tensorului dielectric în forma diagonală sunt egale. Prima aproximație ce o vom impune ecuațiilor (4) constă în neglijarea termenilor corespunzători etalonării Lorentz ce provin din existența a trei valori distincte  $\epsilon_{jj}$ . După cum vom demonstra în continuare această aproximație va avea o foarte mică influență asupra ramurii acustice a undelor cuplate; ea va afecta doar partea optică a acestora prin "izotropizarea" materialului în domeniul optic. Cele ce urmează vor clarifica aceste afirmații.

Relațiile ce se obțin prin neglijarea existenței valorilor distincte în tensorul dielectric diagonal sunt identice cu cele exacte pentru clasa cubică cu singura diferență de notatie  $\epsilon = \epsilon_m$

Vom căuta soluțiile sistemului (5) sub forma undelor plane ce se deplasează în direcția versorului  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  în ipoteza excitațiilor de volum  $\left( f_i, \frac{j_j}{\epsilon}, \frac{\rho_e}{\mu \epsilon_m^2} \right)$  nule:

$$u_i = p_u^i f \left( t - \frac{r \cdot \vec{n}}{v} \right), \quad A_i = p_A^i f \left( t - \frac{r \cdot \vec{n}}{v} \right), \quad \phi = p_\phi f \left( t - \frac{r \cdot \vec{n}}{v} \right) \text{ funcția } f \text{ fiind funcția de undă}$$

Sistemul în necunoscutele vectorilor de polarizație  $(p_u^1 \ p_u^2 \ p_u^3 \ p_A^1 \ p_A^2 \ p_A^3 \ p_\phi)$  este următorul:

$$\begin{cases} p_u^1 \frac{c_{ijkl} n_j n_k}{\rho_m v^2} p_u^l - \frac{e_{kji} n_j}{\rho_m v} p_A^k - \frac{e_{kji} n_j n_k}{\rho_m v^2} p_\phi = 0 \\ p_A^j - \frac{e_{kji} n_k}{\epsilon_m v} p_u^i - \frac{1}{\mu \epsilon_m} \frac{n_j^2}{v^2} p_A^j = 0 \\ p_\phi + \frac{e_{kji} n_j n_k}{\mu \epsilon_m^2 v^2} p_u^i - \frac{\epsilon_{kji} n_j n_k}{\mu \epsilon_m^2 v^2} p_\phi = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Soluțiile nenule pentru acest sistem se obțin dacă determinantul acestuia este nul. Rezolvarea ecuației (7) ofera vitezele de undă pentru excitațiile cuplate elasto-electromagnetice.

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{c_{1k1}n_jn_k}{\rho_m v^2} & \frac{c_{1k2}n_jn_k}{\rho_m v^2} & \frac{c_{1k3}n_jn_k}{\rho_m v^2} & -\frac{e_{1j1}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{2j1}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{3j1}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{kj1}n_jn_k}{\rho_m v^2} \\ \frac{c_{2k1}n_jn_k}{\rho_m v^2} & 1 - \frac{c_{2k2}n_jn_k}{\rho_m v^2} & \frac{c_{2k3}n_jn_k}{\rho_m v^2} & -\frac{e_{1j2}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{2j2}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{3j2}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{kj2}n_jn_k}{\rho_m v^2} \\ \frac{c_{3k1}n_jn_k}{\rho_m v^2} & \frac{c_{3k2}n_jn_k}{\rho_m v^2} & 1 - \frac{c_{3k3}n_jn_k}{\rho_m v^2} & -\frac{e_{1j3}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{2j3}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{3j3}n_j}{\rho_m v} & -\frac{e_{kj3}n_jn_k}{\rho_m v^2} \\ \frac{e_{k11}n_k}{\epsilon_m v} & \frac{e_{k12}n_k}{\epsilon_m v} & \frac{e_{k13}n_k}{\epsilon_m v} & 1 - \frac{1}{\mu\epsilon_m v^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e_{k21}n_k}{\epsilon_m v} & \frac{e_{k22}n_k}{\epsilon_m v} & \frac{e_{k23}n_k}{\epsilon_m v} & 0 & 1 - \frac{1}{\mu\epsilon_m v^2} & 0 & 0 \\ \frac{e_{k31}n_k}{\epsilon_m v} & \frac{e_{k32}n_k}{\epsilon_m v} & \frac{e_{k33}n_k}{\epsilon_m v} & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\mu\epsilon_m v^2} & 0 \\ \frac{e_{kj1}n_jn_k}{\mu\epsilon_m v^2} & \frac{e_{kj2}n_jn_k}{\mu\epsilon_m v^2} & \frac{e_{kj3}n_jn_k}{\mu\epsilon_m v^2} & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\mu\epsilon_m v^2} \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

Vom analiza calitativ ecuația seculară (7) pentru a descrie spectrul de viteze al excitațiilor elasto-electromagnetice. Să presupunem pentru început că  $v = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon_m}}$ . În această situație determinantul este nul întrucât ultima linie poate fi scrisă ca și o combinație liniară a precedentelor trei linii:

$$\frac{n_1}{\mu v} \frac{e_{k11}n_k}{\epsilon_m v} + \frac{n_2}{\mu v} \frac{e_{k21}n_k}{\epsilon_m v} + \frac{n_3}{\mu v} \frac{e_{k31}n_k}{\epsilon_m v} = \frac{e_{kj1}n_jn_k}{\mu\epsilon_m v^2}$$

Să presupunem că pentru această valoare proprie pe care convenim să o notăm cu  $v_0$  undele plane ce se propagă sunt pur electromagnetice:  $p_u^i = 0$ . Verificăm dacă această ipoteză conduce la soluții nenule pentru componentele câmpului electromagnetic. Sistemul de ecuații ce se obține este următorul:

$$-\frac{e_{k\beta}n_j}{\rho_m v} p_A^k - \frac{e_{k\beta}n_jn_k}{\rho_m v^2} p_\phi = 0 \quad (8)$$

Soluțiile acestui sistem sunt  $p_A^k = \frac{n_k}{v_0}$  și  $p_\phi = -1$ .

În consecință, în cristal va exista o undă electromagnetică pură, necuplată cu câmpul elastic, ce se propagă cu  $v_0$  și polarizațiile  $p_A^k = \frac{n_k}{v_0}$ ,  $p_\phi = -1$  în orice direcție. Să remarcăm coincidența acestui rezultat cu cel ce se obține în studiul propagării undelor electromagnetice într-un mediu fără proprietăți piezoelectrice. Neglijarea valorilor distincte  $\epsilon_{jj}$  pentru tensorul dielectric în expresia provenită din etalonarea Lorentz a condus la un caracter izotrop al cristalului pentru aceasta ramură pur optică a soluțiilor sistemului (7). Această undă, evident ipotetică, s-ar propaga în cristal ca o medie între cele trei unde electromagnetice reale existente în cristalul anizotrop.

Găsirea celorlalte valori proprii nu mai este posibilă pe cale analitică; în cazul cel mai general vom avea 6 valori distincte pentru undele cuplate elasto-electromagnetic. Considerând efectul piezoelectric ca fiind o perturbație a cazului pur elastic și electromagnetic se pot exprima însă aceste valori în funcție de viteza optică  $v_0$  și valorile proprii ale matricii acustice



$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{c_{1jk1}n_jn_k}{\rho_m v^2} & \frac{c_{1jk2}n_jn_k}{\rho_m v^2} & \frac{c_{1jk3}n_jn_k}{\rho_m v^2} \\ \frac{c_{2jk1}n_jn_k}{\rho_m v^2} & 1 - \frac{c_{2jk2}n_jn_k}{\rho_m v^2} & \frac{c_{2jk3}n_jn_k}{\rho_m v^2} \\ \frac{c_{3jk1}n_jn_k}{\rho_m v^2} & \frac{c_{3jk2}n_jn_k}{\rho_m v^2} & 1 - \frac{c_{3jk3}n_jn_k}{\rho_m v^2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Să notăm cu  $(v_a^1, v_a^2, v_a^3)$  cele trei viteze pur elastice ce apar. Dacă privim determinantul matricii (7) ca fiind o funcție de valorile tensorului piezoelectric pentru o direcție de propagare  $\vec{n}$  bine definită, vom obține rădăcinile polinomului caracteristic sub forma:  $v^r = v^r(e_{kji})$  cu  $r=1..7$ . O formă alternativă în care putem exprima aceste funcții este următoarea:

$$v^r(e_{kji}) = v^r(0) + \frac{\partial v^r}{\partial e_{kji}}(\xi_{kji})e_{kji} \quad \text{cu } \xi_{kji} \in (0, e_{kji}) \quad (10)$$

Vectorul vitezelor în absența cuplajului piezoelectric este  $v(0) = [(v_a^1, v_a^2, v_a^3), (v_o)_4]$  viteza optică fiind o rădăcină quadruplă. O expresie analitică mai explicită pentru  $v^r(e_{kji})$  este însă dificil de găsit dacă nu imposibil chiar făcând apel la programe de calcul simbolic. Prin diagonalizarea numerică a matricii (7) pentru câteva cristale piezoelectrice uzuale într-o orientare cristalografică arbitrară se constată apariția a 6 valori proprii distincte în afara celei corespunzătoare unei electromagnetice pure (piezoelectricitatea ridică degenerarea rădăcinii optice quadruple) și gruparea vitezelor de undă în două zone distincte. Prima zonă este cea în care 3 unde colective elasto-electromagnetice se propagă cu viteze superioare însă apropiate vitezelor acustice  $(v_a^1, v_a^2, v_a^3)$ . Cea de a doua zonă se află în vecinătatea vitezei electromagnetice  $v_o$ , mărginită superior de aceasta. Dacă în locul tensorului piezoelectric  $e_{kji}$  în matricea (7) înlocuim aceste valori cu  $e = \text{sign}(e_{kji}) \max_{(kji)}(|e_{kji}|)$  și diagonalizăm matricea astfel obținută se determină pentru exemplele investigate o margine superioară și inferioară de localizare pentru vitezele de undă :

$$\text{vitezele cvasi-acustice } v'_{ca} \in \left( v_a^i, v_a^i \left( 1 + \frac{e^2}{\epsilon} \right) \right) \text{ și vitezele cvasi-optice } v'_{co} \in \left( v_o \left( 1 - \frac{e^2}{\epsilon} \right), v_o \right) \quad i=1,2,3.$$

De notat că un rezultat similar apare în teoria polaritonilor [38].

Figura 1 prezintă intuitiv dispunerea vitezelor de undă pentru excitațiile colective elasto-electromagnetice în raport cu vitezele acustice și viteza optică.

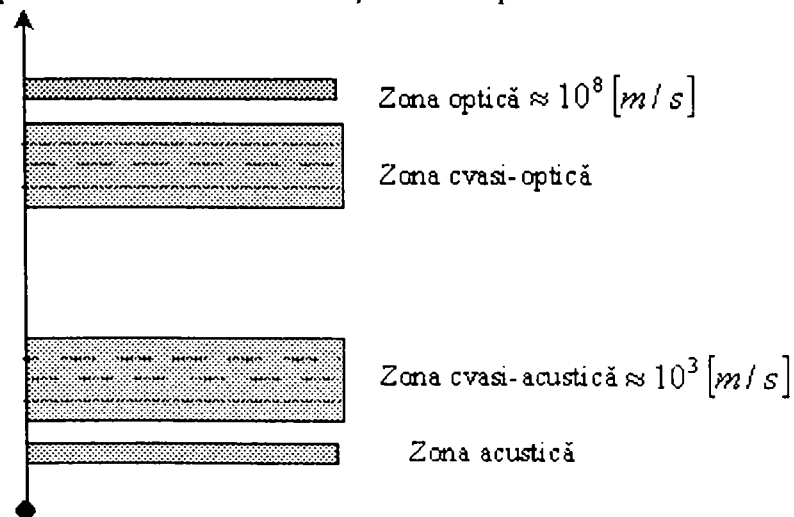


Figura 1 Vitezele de undă ale excitațiilor colective elasto-electromagnetice într-un cristal piezoelectric



Această distribuție a vitezelor este în concordanță cu rezultatele obținute în [38]; în această lucrare, punctul de plecare în analiză este însă un sistem de ecuații în variabilele  $(u_i, E_i, B_i)$ .

Modelului teoretic prezentat este necesar a i se face o importantă corecție întrucât unele corespunzătoare ramurii cvasioptice a spectrului de viteze sunt practic inexistente pentru frecvențele uzuale în electronică. Această discrepanță apare datorită ignorării pierderilor energetice în volumul piezoelectric. Renunțând la această ipoteză și privind relațiile de material ca fiind convoluții, pentru un regim armonic permanent am obține prin analiza determinantului (7) o imagine mult mai veridică asupra propagării undelor cuplate elasto-electromagnetic. Rezultatul acestei analize este intuitiv și nu mai reluăm un raționament similar cu cel expus până acum: ramura corespunzătoare regiunii cvasioptice a spectrului de viteze este atenuată până la dispariție întrucât vibrațiile elastice nu pot urmări fără pierderi foarte mari dinamica electromagnetică în aceasta zonă de viteze. Mai concret, dacă considerăm a fi dispersivă doar legătura între tensiunile și stressul elastic,

$$T_{ij} = \left( c_{ijkl} + \eta_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_{kl} - e_{kij} E_k, \text{ pentru vitezele de variație specifice propagării electromagnetice}$$

termenul disipativ  $\eta_{ijkl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial t}$  ar fi net dominant față de cel proporțional.

Să revenim acum la sistemul (5) în forma sa generală și să încercăm să suprimăm într-o manieră artificială, fără a recurge la exprimarea convoluțională a relațiilor de material, unele cvasioptice. Acest artificiu îl putem realiza doar dacă renunțăm la cuplajul între potențialul magnetic vector și câmpul elastic. Această supoziție chiar dacă matematic pare a fi pentru început arbitrară ea poate fi motivată fizic, fenomenul piezoelectric fiind un fenomen ce cuplează direct doar componenta electrică a câmpului electromagnetic de câmpul elastic. Ceea ce obținem sunt două sisteme de ecuații. Primul, în aceleași variabile  $(u_i, \phi)$  precum sistemul clasic de ecuații piezoelectrice va modela cu acuratețe comportarea câmpului electroelastic în domeniul acustic iar cel de al doilea sistem redă corect caracteristicile de propagare ale câmpului electromagnetic în cristalul anizotrop.

$$\begin{cases} \rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - e_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = f_i \\ \mu \epsilon_m^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \epsilon_{jk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} + e_{jki} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \rho_e \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{și } \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \epsilon_{jj}} \Delta A_j = \frac{j_j}{\epsilon_{jj}} \quad (11)$$

Sistemul (10) este identic cu sistemul ecuațiilor piezoelectrice clasice până la termenul  $\mu \epsilon_m^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ , termen ce îl putem privi din punct de vedere strict matematic ca un termen de perturbație

foarte mic adăugat ecuației  $-\epsilon_{jk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} + e_{jki} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \rho_e$  ce se obține din relația de conservare a

sarcinii electrice în ipoteza câmpului electric quasi-stationar. Rămâne să demonstrăm că soluțiile acestui sistem redau corect realitatea fizică cel puțin în zona acustică a fenomenelor electroelastice. Pentru aceasta, considerăm un mediu piezoelectric infinit și comparăm unele plane ce le obținem ca și soluții ale acestui sistem cu soluțiile ecuațiilor piezoelectrice clasice.

În ipoteza excitațiilor de volum  $\left(f_i, \frac{\rho_e}{\mu \epsilon_m^2}\right)$  nule și a propagării undelor plane într-o direcție arbitrară dată de versorul  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , soluțiile sistemului (10) sunt de forma:

$$u_i = p_u^i f\left(t - \frac{r \cdot \vec{n}}{v}\right), \quad \phi = p_\phi f\left(t - \frac{r \cdot \vec{n}}{v}\right) \quad \text{funcția } f \text{ fiind funcția de undă.}$$

Sistemul de ecuații liniar în necunoscutele vectorilor de polarizație  $(p_u^1, p_u^2, p_u^3, p_\phi)$  este următorul:

$$\begin{cases} \rho_m p_u^i - c_{ijkl} \frac{n_j n_k}{v^2} p_u^l - e_{kji} \frac{n_j n_k}{v^2} p_\phi = 0 \\ \mu \epsilon_m^2 p_\phi + e_{kji} \frac{n_j n_k}{v^2} p_u^i - \epsilon_{kj} \frac{n_j n_k}{v^2} p_\phi = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Anularea determinantului caracteristic acestui sistem furnizează vitezele și polarizațiile undelor electroelastice. Să comparăm acest determinant cu cel ce oferă vitezele și polarizațiile undelor electroelastice în cazul ecuațiilor piezoelectrice clasice.

$$\begin{bmatrix} \rho_m - c_{ijkl} \frac{n_j n_k}{v^2} & -e_{kji} \frac{n_j n_k}{v^2} \\ e_{kji} \frac{n_j n_k}{v^2} & \mu \epsilon_m^2 - \epsilon_{kj} \frac{n_j n_k}{v^2} \end{bmatrix}$$

determinantul sistemului (12)

$$\begin{bmatrix} \rho_m - c_{ijkl} \frac{n_j n_k}{v^2} & -e_{kji} \frac{n_j n_k}{v^2} \\ e_{kji} \frac{n_j n_k}{v^2} & -\epsilon_{kj} \frac{n_j n_k}{v^2} \end{bmatrix}$$

determinantul sistemului clasic

Valorile mărimii  $\frac{1}{v^2}$  pentru care determinantul sistemului clasic se anulează sunt

$\left(0, \frac{1}{v_i^2}\right)$  vitezele  $v_i$  fiind vitezele celor trei unde electroelastice ce le-am descris la începutul paragrafului 2.2. Termenul  $\mu \epsilon_m^2$  ce apare în plus în determinatul sistemului (12) are o valoare foarte, foarte mică relativ la celelalte valori ale determinantului; privit ca o simplă perturbație a determinantului clasic acesta va conduce la o alterare insignifiantă a valorilor  $\left(0, \frac{1}{v_i^2}\right)$ . În general, ne

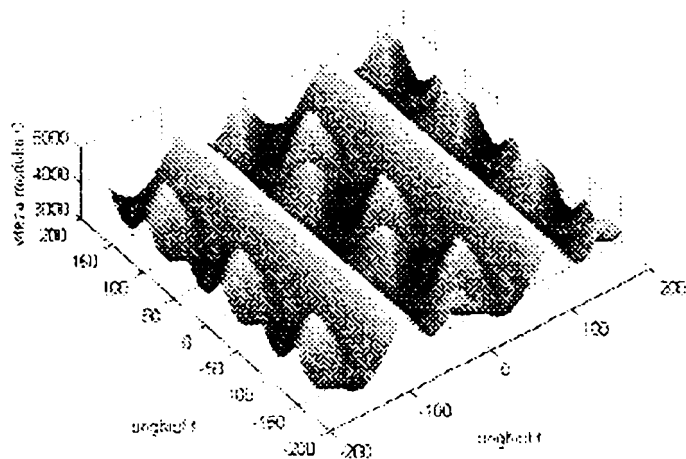
așteptăm la apariția a 4 valori distincte pentru rădăcinile  $\frac{1}{v^2}$  și anume  $\left(\frac{1}{v_{co}^2}, \frac{1}{(v_i^2)_{ca}}\right)$  cu:

$$\frac{1}{v_{co}^2} \approx \epsilon_m \mu \quad \text{ramura corespunzătoare domeniului optic}$$

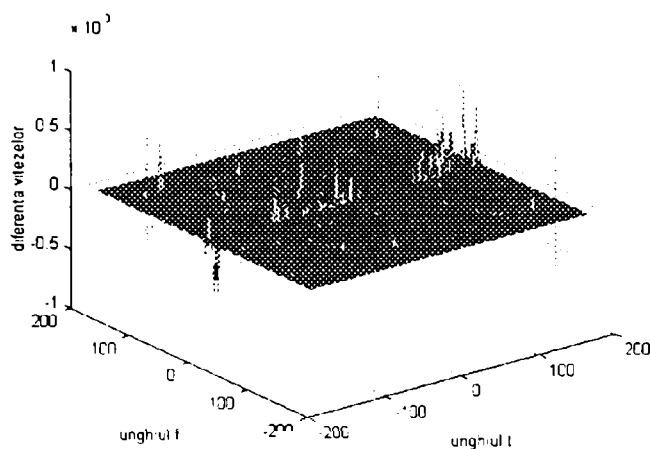
$$\frac{1}{(v_i^2)_{ca}} \approx \frac{1}{v_i^2} \quad \text{ramura corespunzătoare domeniului acustic}$$

Calcululele numerice efectuate pentru un cristal de cuarț și *GaAs* relevă o foarte bună concordanță ce există între valorile vitezelor electroelastice calculate pe baza acestui sistem și cele clasice. Figura următoare prezintă valorile vitezei electroelastice pentru modul transversal lent C ce se propagă într-un cristal de cuarț, valori calculate pe baza ecuațiilor clasice și alăturat diferența ce

există între acestea și vitezele calculate utilizând determinantul sistemului (12). Domeniul unghiurilor de orientare cristalografică  $\theta$  și  $\varphi$  acoperă complet cristalul. Forma de variație a acestei diferențe precum și valoarea sa predominantă de aproximativ  $10^{-5}$  relevă mai degrabă erorile cvasialeatoare ale algoritmului numeric decât o eroare semnificativă și sistematică.



Viteza modulului transversal lent în cuarț



Diferența între viteza modulului C calculată prin cele două metode

Figura 2

O clarificare din punct de vedere al sensului fizic al sistemului (10) vom obține printr-o schimbare de variabilă. Pentru început, să rescriem acest sistem sub o formă alternativă operatorială similară celei utilizate în situația ecuațiilor piezoelectrice clasice.

$$M\ddot{\eta} + L_{jk}\partial_{jk}\eta = \chi \tag{13}$$

$$\text{cu: } \eta = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \rho_e \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_m^2 \mu \end{pmatrix} \text{ și } L_{jk} = \begin{pmatrix} c_{1jk1} & c_{1jk2} & c_{1jk3} & e_{kj1} \\ c_{2jk1} & c_{2jk2} & c_{2jk3} & e_{kj2} \\ c_{3jk1} & c_{3jk2} & c_{3jk3} & e_{kj3} \\ -e_{kj1} & -e_{kj2} & -e_{kj3} & \epsilon_{jk} \end{pmatrix}$$

Făcând schimbarea de variabilă:  $\eta = M^{-1/2}\xi$ , se obține următoarea ecuație funcțională:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + (M^{-1/2}L_{jk}M^{-1/2})\partial_{jk}\xi &= M^{-1/2}\chi \\ \ddot{\xi} + V\xi &= M^{-1/2}\chi \text{ cu } V = V_{jk}\partial_{jk} \end{aligned} \tag{14}$$

matricile  $V_{jk}$  având următoarea expresie generală:

$$V_{jk} = \begin{pmatrix} \frac{c_{1jk1}}{\rho_m} & \frac{c_{1jk2}}{\rho_m} & \frac{c_{1jk3}}{\rho_m} & \frac{e_{jk1}}{\varepsilon_m \sqrt{\rho\mu}} \\ \frac{c_{2jk1}}{\rho_m} & \frac{c_{2jk2}}{\rho_m} & \frac{c_{2jk3}}{\rho_m} & \frac{e_{jk3}}{\varepsilon_m \sqrt{\rho\mu}} \\ \frac{c_{3jk1}}{\rho_m} & \frac{c_{3jk2}}{\rho_m} & \frac{c_{3jk3}}{\rho_m} & \frac{e_{jk3}}{\varepsilon_m \sqrt{\rho\mu}} \\ -\frac{e_{kj1}}{\varepsilon_m \sqrt{\rho\mu}} & -\frac{e_{kj2}}{\varepsilon_m \sqrt{\rho\mu}} & -\frac{e_{kj3}}{\varepsilon_m \sqrt{\rho\mu}} & \frac{\varepsilon_{jk}}{\varepsilon_m^2 \mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} va_{1jk1} & va_{1jk2} & va_{1jk3} & ve_{kj1} \\ va_{2jk1} & va_{2jk2} & va_{2jk3} & ve_{kj2} \\ va_{3jk1} & va_{3jk2} & va_{3jk3} & ve_{kj3} \\ -ve_{jk1} & -ve_{jk2} & -ve_{jk3} & vo_{jk} \end{pmatrix}$$

De remarcat faptul că dimensional valorile acestei matrici sunt patrate de viteze: zona superioară stânga reprezintă zona vitezelor acustice, termenul  $\frac{\varepsilon_{jk}}{\varepsilon_m^2 \mu}$  viteza optică, iar linia respectiv coloana de bordură a zonei acustice este ocupată de elementele de cuplaj piezoelectric ce pot fi scrise sub forma:  $\frac{e_{jki}}{\sqrt{c_{ijkl} \varepsilon_m}} \sqrt{\frac{c_{ijkl}}{\rho_m}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m \mu}}$  - primul factor este chiar tensorul factorului de cuplaj piezoelectric, cel de al doilea sugerează o viteză acustică iar ultimul este viteza optică.

Cu aceste notații, ecuația (14) în variabila  $\xi$  poate fi pusă într-o formă similară ecuației electroelastice clasice:

$$\begin{cases} \xi_i = \frac{\partial T_{ij}^\xi}{\partial x_j} & i, j = 1, 2, 3 \\ \xi_4 = \frac{\partial D_k^\xi}{\partial x_j} & j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} T_{ij}^\xi = va_{ijkl} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} - ve_{kij} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_k} \\ D_k^\xi = ve_{kij} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + vo_{kj} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_j} \end{cases} \quad (15)$$

Se poate ușor verifica că legătura între valorile reale ale tensiunilor elastice și inducției electrice  $T_{ij}$ ,  $D_k$  și mărimile corespunzătoare variabilei  $\xi$ ,  $T_{ij}^\xi$  și  $D_k^\xi$  este dată de următoarele relații:

$$T_{ij}^\xi = \frac{T_{ij}}{\sqrt{\rho_m}}, \quad D_k^\xi = \frac{D_k}{\varepsilon_m \sqrt{\mu}} \quad (16)$$

Am obținut și sperăm, argumentat, un sistem de ecuații alternativ pentru studiul dinamicii electroelastice în solidul piezoelectric. Așa cum aminteam în paragraful ce motiva acest capitol avantajul acestuia constă în similaritatea ce o are cu ecuația abstractă uzuală a undelor elastice sau electromagnetice. Paragrafele următoare vor demonstra caracterul hiperbolic al acestui sistem și vor atinge aspectele importante ale analizei acestuia pentru situația unui volum piezoelectric finit.

### §3.3 Studiul ecuațiilor electroelastice de tip hiperbolic pe un domeniu piezoelectric finit

Paragraful atinge următoarele aspecte în studiul ecuațiilor electroelastice de tip hiperbolic pe un domeniu finit: existența și unicitatea soluțiilor, caracterizarea spectrală și formularea unei funcționale biliniare utile în calculul modurilor proprii de vibrație. Aceste chestiuni sunt tratate fără a recurge la o dezvoltare matematică laborioasă, o serie de rezultate intermediare ce sunt folosite sunt demonstrate în capitolul de complemente matematice al tezei.

Ecuației electroelastice din precedentul paragraf:  $\xi + V_0 \xi = M^{1/2} \chi$  cu  $V_0 \xi = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} V_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \xi$  valabile în volumul piezoelectric, îi vom atașa pentru început condiții pe frontieră în variabilele  $u_i, T_{ij}, \phi$  și  $q$  sub forma unor relații liniare între acestea fără a avea însă și expresii conținând derivatele lor. Domeniul piezoelectric  $\Omega \subset R^3$  îl presupunem finit, simplu conex și cu frontiera  $fr\Omega$  regulată. Vom demonstra că sistemul de ecuații electroelastice hiperbolice împreună cu aceste condiții pe frontieră aparține unui tip de ecuații de evoluție de ordinul doi studiat în ecuațiile fizicii matematice, pentru care există o teoremă de existență și unicitate a soluției și o teoremă de caracterizare spectrală care, spre deosebire de cazul clasic, nu face apel la o desfășurare numerică a problemei.

Notațiile folosite pentru noțiunile ce au fost definite sau utilizate în capitolele precedente sunt neschimbate.

Condițiile pe frontieră:

Fie  $\Pi_{fr\Omega} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid \bigcup_{jr} S_j = fr\Omega \right\}$  o partiție a suprafeței de frontieră a domeniului.

*Câmpul elastic:*

- zona în care sunt specificate tensiuni mecanice nule:

$$\Sigma_T^{mec} = \left\{ S_m \in \Pi_{fr\Omega} \mid (T_{ij} n_j)_{|S_m} = 0 \right\}$$

- zona în care sunt impuse deplasări elastice nule

$$\Sigma_u^{mec} = \left\{ S_n \in \Pi_{fr\Omega} \mid u_i|_{S_n} = 0 \right\}$$

- zona legăturii variaționale de tip elastic:

$$\Sigma_{Tu}^{mec} \in \Pi_{fr\Omega}$$

$$T_{ij}(x)n_j + k_{il}(x)u_l(x,t) = 0, \quad k_{il}(x) \text{ este o matrice simetrică și pozitiv definită}$$

*Câmpul electric:*

- zona echipotențială electric în care există un strat infinit subțire de conductor ideal

$$\Sigma^{mct} = \left\{ S_i \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_i} = \Phi_i \in R \right\}$$

Pentru această zonă se impun :

- fie potențial electric nul :

$$\Sigma_{\Phi}^{met} = \left\{ S_p \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_p} = 0 \right\}$$

- fie sarcina electrică nulă:

$$\Sigma_Q^{met} = \left\{ S_r \in \Pi_{fr\Omega} \mid \int_{S_r} \vec{D} \cdot \vec{n} ds = 0 \right\}$$

- fie o legătură de tip capacitiv între potențialul și sarcina electrică:

$$\Sigma_{q\Phi}^{met} = \left\{ S_c \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi_c + q_c(t)(C_c^{-1}) = 0 \right\} C_c > 0$$

$$q_c = - \int_{S_c} \vec{D} \cdot \vec{n} ds$$

- zona dielectrică

Sunt impuse fie un potențial nul fie o sarcină electrică superficială nulă:

$$\Sigma_{\Phi}^{die} = \left\{ S_k \in fr\Omega \mid \phi|_{S_k} = 0 \right\}$$

$$\Sigma_{\sigma}^{die} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid -\vec{D} \cdot \vec{n}|_{S_j} = 0 \right\}$$

Precizarea condițiilor pe frontiera domeniului  $\Omega$  pentru câmpul electroelastic conduce la delimitarea următoarelor suprafețe:

$$\Sigma_T^{mec} \cup \Sigma_u^{mec} \cup \Sigma_{T_u}^{mec} = fr\Omega. \text{ - câmpul elastic}$$

$$\Sigma^{met} \cup \Sigma^{die} = fr\Omega \quad \text{- câmpul electric cu } \Sigma^{met} = \Sigma_{\Phi}^{met} \cup \Sigma_q^{met} \cup \Sigma_{q\Phi}^{met}, \Sigma^{die} = \Sigma_{\Phi}^{die} \cup \Sigma_{\sigma}^{die}$$

Sumarizăm formal aceste relații în următoarea expresie:  $B_f \eta = 0$  unde  $B_f$  este un operator liniar ce acționează asupra valorilor pe frontieră ale funcției  $\eta = (u, \phi)$ . Aplicând transformarea de variabilă din paragraful anterior:  $\eta = M^{-1/2} \xi$  și ținând cont de relațiile (16) din finalul paragrafului precedent ajungem la o ecuație funcțională pe frontieră în variabila  $\xi$ :  $A_f \xi = 0$  cu  $A_f = B_f M^{-1/2}$ . Concret relațiile pe frontieră se modifică astfel.

- partea mecanică:  $T_{ij}^{\xi}(x) n(x)_j + \frac{k_{11}}{\rho_m}(x) \xi_t(x, t) = 0$

- partea electrică:  $\xi_s + q_e^{\xi} \frac{C^{-1}}{\epsilon_m^2 \mu} = 0$  unde  $q_e^{\xi} = - \int_S \vec{D}^{\xi} \cdot \vec{n} ds$

Cu aceste precizări, ecuațiile ce determină evoluția temporală a câmpului elastic și a potențialului electric în solidul piezoelectric se pot formula astfel:

$$\begin{cases} \dot{\xi} + V_0 \xi = M^{1/2} \chi \\ A_f \xi = 0 \\ \xi(0) = \xi_0, \dot{\xi}(0) = \xi_1 \end{cases} \quad (1)$$

funcțiile  $\xi_0$  și  $\xi_1$  fiind condițiile inițiale ale ecuației.

Acest sistem de ecuații se demonstrează (paragrafele 1 și 2 ale capitoului 4) a fi echivalent cu o ecuație funcțională abstractă:

$$\dot{\xi} + V \xi = M^{1/2} \chi \quad (2)$$

operatorul  $V$  fiind identic cu  $V_0$  pe submulțimea funcțiilor  $\xi$  ce îndeplinesc pe frontieră relația  $A_f \xi = 0$ .

Problema spectrală atașată sistemului (1) se obține prin anularea funcției de excitație  $\chi$  și separarea variabilei  $\xi(x, t) = \alpha(t)\psi(x)$  într-o parte temporală și una spațială.

$$\begin{cases} V_0 \psi = \lambda \psi \\ A_j \psi = 0 \end{cases} \text{ sau } V \psi = \lambda \psi \quad (3)$$

Caracterizarea soluțiilor ecuației (2) este legată aproape în exclusivitate de proprietățile operatorului  $V$ . Datorită caracterului specific al acestei analize precum și implicarea oarecum colaterală a acesteia în subiectul tezei o vom prezenta în capitolul de complemente matematice.

Pentru acest paragraf vom reține trei rezultate importante referitoare la acest operator:

- i. Operatorul  $V$  este liniar și pozitiv definit:  $\langle V\xi, \xi \rangle > 0$  oricare ar fi o funcție  $\xi$  nenulă din spațiul de definiție al problemei; această proprietate definește caracterul hiperbolic al sistemului de ecuații (1)
- ii. Spectrul operatorului  $V$  este finit sau infinit numărabil cu  $\infty$  singurul punct de acumulare al spectrului (teorema Riesz-Schauder prezentată în paragraful 4.2)
- iii. Funcționala biliniară atașată acestui operator  $v(\xi, \eta) = \langle V\xi, \eta \rangle$  este pentru  $\xi = \eta$  dublul energiei potențiale asociată unei electroelastice în volumul și pe suprafața domeniului  $\Omega$

$$v(\xi, \xi) = \int_{\Omega} v a_{ijkl} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_i^*}{\partial x_j} + v o_{jk} \frac{\partial \xi_+}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_+^*}{\partial x_k} d\Omega +$$

$$+ (\rho_m)^{-1} \int_{\Sigma_{Tn}^{mec}} k_{il}(x, s) \gamma(\xi_l) \gamma(\xi_l^*) da + (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} \sum_{S_c \in \Sigma_{\sigma\Phi}^{meI}} C_c^{-1} \gamma(\xi_+) \gamma(\xi_+^*) \int_{S_c} da$$

sau, după ce revenim în variabilele inițiale  $(u_i, \phi)$ :

$$W_{pot}^{total} = \frac{1}{2} v(\xi, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} + \epsilon_{ij} E_i E_j d\Omega + \int_{\Sigma_{Tn}^{mec}} k_{il}(x, s) u_i u_i^* da + \sum_{S_c \in \Sigma_{\sigma\Phi}^{meI}} C_c^{-1} |\Phi|^2 \int_{S_c} da$$

$$W_{pot}^{volum} = \frac{1}{2} \langle V_0 \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} + \epsilon_{ij} E_i E_j d\Omega - \text{energia potențială doar în volumul piezoelectric}$$

Această proprietate a funcționalei  $v$  de a fi pozitiv definită conduce imediat la unicitatea soluțiilor pentru sistemul (3). Dacă operatorul  $V$  ar fi și simetric, (absența acestei proprietăți este ușor vizibilă în forma matricilor  $V_{jk}$ ), am avea de a face cu ecuația abstractă clasică a undelor. Această lipsă a simetriei nu conduce însă din punct de vedere al analizei matematice pentru ecuația (2) la probleme teoretice deosebite, o serie de lucrări dintre care cităm [35] sau [49] oferă o teoremă de existență și unicitate a soluțiilor pentru acest tip de ecuații abstracte. Marele neajuns, dacă ne putem exprima astfel, al acestei asimetriei rezidă în faptul că operatorul  $V$  nu este autoadjunct și de aici incertitudinea în ceea ce privește o serie de proprietăți referitoare la spectrul său. Reamintim că în cazul operatorilor autoadjuncți specifici propagării undelor elastice sau electromagnetice spectrul acestora este infinit numărabil cu  $\infty$  singurul punct de acumulare iar setul funcțiilor proprii generează prin combinații liniare o submulțime ce aproximează oricât de bine spațiul de definiție al problemei. În această situație a ecuației (2) nu putem afirma decât că spectrul este nevid, finit sau infinit numărabil – proprietatea ii. Lipsește deci certitudinea, foarte utilă într-o serie de dezvoltări teoretice (teoria perturbației de exemplu), că funcțiile proprii operatorului  $V$  sunt o bază pentru spațiul de definiție al ecuației.



Vom trece în cele ce urmează la analiza ecuațiilor electroelastice de tip hiperbolic admitând ca și condiții pe frontieră ecuații diferențiale ordinare de ordinul 2 între  $u_i, T_{ij}$  și  $\phi, q$  de forma celor ce le-am utilizat pe parcursul capitolului precedent. Pentru a păstra o expunere concisă vom da aceste condiții pe frontieră direct în mărimile corespunzătoare variabilei  $\xi$ .

Condițiile pe frontieră:

*Câmpul elastic:*

$$\begin{aligned} \Sigma_T^{mec} &= \left\{ S_m \in \Pi_{fr\Omega} \mid (T_{ij}^\xi n_j)_{|S_m} = 0 \right\} \\ \Sigma_u^{mec} &= \left\{ S_n \in \Pi_{fr\Omega} \mid \xi_{i|S_n} = 0 \right\} \\ \Sigma_{T_u}^{mec} &\in \Pi_{fr\Omega} \quad T_{ij}^\xi(x) n(x)_j + \rho_m^{-1} [m_{il}(x) \xi_{,l} + v(x)_{,il} \xi_l + k_{il}(x) \xi_{,l}] = 0 \end{aligned}$$

*Câmpul electric:*

$$\begin{aligned} \Sigma_\Phi^{met} &= \left\{ S_p \in \Pi_{fr\Omega} \mid \xi_{4|S_p} = 0 \right\} \\ \Sigma_Q^{met} &= \left\{ S_r \in \Pi_{fr\Omega} \mid \int_{S_r} \bar{D}^\xi \bar{n} ds = 0 \right\} \\ \Sigma_{q\Phi}^{met} &= \left\{ S_c \in \Pi_{fr\Omega} \mid \xi_{,4} + (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} [L_c \ddot{q}^\xi + R_c \dot{q}^\xi + C_c^{-1} q^\xi] = 0 \right\} \\ \Sigma_\sigma^{die} &= \left\{ S_k \in fr\Omega \mid \xi_{4|S_k} = 0 \right\} \\ \Sigma_\sigma^{dve} &= \left\{ S_j \in fr\Omega \mid -\bar{D}^\xi \bar{n}_{|S_j} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Relațiile impuse câmpului electroelastic pe frontieră pot fi formulate astfel:  
 $M_f \ddot{\xi} + N_f \dot{\xi} + K_f \xi = 0$ ,  
operatorii liniari  $M_f, N_f$  și  $K_f$  fiind ușor de identificat din relațiile de mai sus.

Cu aceste notații sistemul de ecuații electroelastic va avea următoarea formă:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + V_0 \dot{\xi} = M^{-1/2} \chi \\ M_f \ddot{\xi} + N_f \dot{\xi} + K_f \xi = 0 \\ \xi(0) = \xi_0, \dot{\xi}(0) = \xi_1 \end{cases} \quad (4)$$

Acest tip de ecuații (ecuații vâsco-elastice abstracte) este investigat în detaliu în [49] sau [35], o serie de rezultate ce le-am considerat utile sunt reluate în paragraful 1 și 2 al capitolului 4. Pentru un operator de vâscozitate pe frontieră nul  $N_f = 0$  este posibilă echivalarea sistemului (4) cu o ecuație funcțională de tipul  $\ddot{\psi} + W\dot{\psi} = f$  însă între spațiul de definiție al funcțiilor  $\psi$  și valorile reale  $(u_i, \phi)$  nu mai există o legătură fizică intuitivă așa cum exista în cazul prezentat anterior când nu interveneau derivatele temporale ale mărimilor de câmp pe frontieră. Cu mai multă ușurință se poate face însă analiza spectrală a sistemului de ecuații (4), această problemă fiind în fapt o generalizare a celei descrise în cazul anterior –relația (3). Suntem conduși astfel la o ecuație de valori proprii care pentru un regim armonic cu pulsația  $s$  este identică formal cu ecuația (3):

$$\begin{cases} V_0 \psi = \lambda(s) \psi \\ A_f(s) \psi = 0 \end{cases} :$$

$$\text{cu: } (s^2 M_f s + s N_f + K_f) \xi = A_f(s) \xi$$

Un astfel de regim armonic permanent cu o pulsație  $s_k^2 = -\lambda_k$  va avea o funcție proprie  $\psi_k$  ce reprezintă partea spațială pentru soluțiile ecuației (soluțiile de relaxare):

$$\begin{cases} s_k^2 \xi_k + V_0 \xi = 0 \\ A_f(s) \xi_k = 0 \quad \text{cu } \xi_k(t) = e^{st} \psi_k \\ \xi(0) = \xi_0, \dot{\xi}(0) = s \xi_0 \end{cases} \quad (5)$$

Primul și cel de al doilea paragraf al capitolului de complemente matematice demonstrează echivalența problemei de valori proprii (3) cu următoarea ecuație funcțională:  $v^c(\xi, \eta) = \lambda \langle \xi, \eta \rangle_{[L^2(\Omega)]^4} \quad \forall \xi, \eta \in V$ ,  $V$  fiind mulțimea de funcții inclusă în  $[L^2(\Omega)]^4$  pentru care problema este bine definită:

$$V = \left\{ \xi \in [H_1(\Omega)]^4 \mid \begin{cases} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0 & x \in \Sigma_u^{mec} \\ \xi_4 = 0 & x \in \Sigma_\phi^{die} \cup \Sigma_\phi^{met} \end{cases} \right\}$$

$[H_1(\Omega)]^4$  este spațiul Sobolev de ordinul 1 pentru funcții vectoriale cu 4 componente.

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = & \int_{\Omega} v a_{ijkl} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_i^*}{\partial x_j} + v o_{jk} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_4^*}{\partial x_k} + v e_{kjl} \left( \frac{\partial \xi_4}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_l^*}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_4^*}{\partial x_k} \right) d\Omega + \\ & + (\rho_m)^{-1} \int_{\Sigma_u^{mec}} H_{ii}^m(x, s) \gamma(\xi_i) \gamma(\eta_i^*) da + (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} \sum_{S_c \in \Sigma_{\phi}^{met}} H_c^e(s) \gamma(\xi_4) \gamma(\eta_4^*) \int_{S_c} da \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{cu: } H_{ii}^m(x, s) = [k_{ii}(x) + v_{ii}(x)s + m_{ii}(x)s^2]$$

$$H_c^e(s) = (C_c^{-1} + R_c s + L_c s^2)$$

$$\gamma(\xi) = \xi_{i, \Gamma\Omega} \quad \text{restricția funcțiilor } \xi \text{ pe frontieră - } \gamma \text{ este operatorul de urmă}$$

Căutarea valorilor și vectorilor proprii acestei funcționale nu poate fi făcută decât prin metode numerice. Înainte de a trece la detalierea acestei metode de căutare numerică, să notăm faptul că față de metoda Lagrange există un rezultat teoretic referitor la structura discretă a spectrului acestei funcționale (anterior oricărei desfășurări numerice) pentru situația în care coeficienții de material ce modelează pierderile de suprafață  $R$  și  $v$  sunt nuli. În acest caz, pentru  $\eta = \xi$  funcțională  $v$  este reală și există cu siguranță un interval real  $(\omega_{\min} \omega_{\max})$  pentru care această funcțională este pozitiv definită; pulsația  $s$  în această situație este pur complexă  $s = j\omega$ . Ne aflăm în această situație în ipotezele teoremei Riesz-Schauder ce a fost utilizată și în caracterizarea spectrală operatorului  $V_0$  din ecuația (3) a începutului paragrafului.

Metoda de căutare a valorilor și vectorilor proprii este standard, ea revine la scufundarea problemei infinit dimensionale (6) într-un spațiu finit dimensional  $V_N \subset V$  și rezolvarea sistemului liniar ce rezultă. Cu cât complementul spațiului  $V_N$  în spațiul  $V$  este mai mic cu atât așteptăm o

aproximație mai bună a vectorilor și valorilor proprii căutați. Întrucât prin desfășurarea problemei în spațiul aproximant  $V_N$  sunt puse în evidență o serie de particularități ale acestei metode numerice vis-a-vis de metoda clasică Lagrange vom expune în detaliu algoritmul de construcție al matricii rezolvente pentru aceasta metodă.

Să facem o primă observație asupra mulțimii de definiție  $V$  și a spațiului aproximant  $V_N$ .

$$\text{Îndeplinirea condițiilor} \begin{cases} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0 & x \in \sum_u^{mec} \\ \xi_4 = 0 & x \in \sum_\phi^{die} \cup \sum_\phi^{met} \end{cases} \text{ pentru funcțiile aparținând mulțimii } V$$

implică necesitatea ca funcțiile din spațiul aproximant  $V_N$  să se anuleze pe suprafețele de frontieră precizate mai sus. Amintim că în cazul funcționalei tip Lagrange (§1.3.2) asociată mediului piezoelectric mulțimea de definiție  $V$  era întreg spațiul Sobolev  $[H_1(\Omega)]^4$  și nu o restricție a acestuia precum în situația de față. Din acest detaliu, apare un avantaj al metodei Lagrange întrucât asupra funcțiilor ce definesc spațiul de aproximație nu este necesară impunerea niciunei condiții referitoare la comportarea lor pe frontieră. Pentru funcționala  $v$  acest dezavantaj poate fi evitat prin lărgirea spațiului de definiție la întreg  $[H_1(\Omega)]^4$ . Această lărgire necesită impunerea oarecum artificială (“oarecum artificială” întrucât din punct de vedere fizic condiții de încastrare mecanică sau scurtcircuit perfect nu sunt posibile) a unor condiții pe frontieră de tipul:

$$\begin{aligned} T_{ij}(x)n(x)_j + k_{il}(x)u_l(x,t) &= 0 && \text{pentru } x \in \sum_u^{mec} \\ \Phi_c + q_c(t)(C_c^{-1}) &= 0 && \text{pentru } x \in \sum_\phi^{die} \cup \sum_\phi^{met} \end{aligned}$$

cu valori foarte mari ale coeficienților  $k_{il}$  și  $C_c^{-1}$  astfel încât să impunem valori reduse ale deplasărilor elastice respectiv a potențialului electric în aceste zone.

Să considerăm o bază  $\{\xi^\alpha\}_{\alpha=1\dots N}$  a spațiului  $V_N$ . Un vector arbitrar  $\xi \in V_N$  în acest spațiu se

scrie ca:  $\xi = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \xi^\alpha$ , ecuația funcțională în spațiul  $V_N$  fiind echivalentă cu următorul sistem liniar de ecuații:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha [v^c(\xi^\alpha, \xi^\beta) - s^2 \langle \xi^\alpha, \xi^\beta \rangle] &= 0 \quad \beta = 1 \dots N \\ \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \int_{\Omega} \left[ v a_{ijkl} \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j^\beta}{\partial x_l} + v e_{kji} \left( \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j^\beta}{\partial x_l} - \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_j^\beta}{\partial x_k} \right) + v o_{kj} \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial x_j} \right] d\Omega &+ \\ + \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \int_{\sum_{\tau u}^{mec}} \rho_m^{-1} H_{il}^m(x, s) \gamma(\xi_i^\alpha) \gamma(\xi_i^\beta) ds &+ \sum_{\alpha=1}^N \sum_{s_c \in \sum_{\tau \phi}^{met}} (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} H_c^e(s) \gamma(\xi_4^\alpha) \gamma(\xi_4^\beta) \int_{s_c} ds - s^2 \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \langle \xi^\alpha, \xi^\beta \rangle \end{aligned}$$

Notațiile următoare permit o scriere condensată a acestui sistem astfel:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ v a_{ijkl} \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j^\beta}{\partial x_l} + v e_{kji} \left( \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j^\beta}{\partial x_l} - \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_j^\beta}{\partial x_k} \right) + v o_{kj} \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial x_j} \right] d\Omega &= w_{\alpha\beta}^{not} \\ + (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} \sum_{s_c \in \sum_{\tau \phi}^{met}} H_c^e(s) \gamma(\xi_4^\alpha) \gamma(\xi_4^\beta) \int_{s_c} ds &+ \rho_m^{-1} \int_{\sum_{\tau u}^{mec}} H_{il}^m(x, s) \gamma(\xi_i^\alpha) \gamma(\xi_i^\beta) ds = w_{\alpha\beta}^{sup}(s) \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha=1}^N (w_{\alpha\beta}^{vol} + w_{\alpha\beta}^{sup}(s) - s^2 \delta_{\alpha\beta}) p_{\alpha} = 0 \text{ sau, cu o notație matricială: } W_N(s) - s^2 I = 0 \quad (7)$$

Întrucât spațiul  $V$  are o structură cuadridimensională  $(\bar{u}, \phi)$ ,  $V = V_{u_1} \cup V_{u_2} \cup V_{u_3} \cup V_{\phi}$  pentru componentele elastice și cea electrică nefiind impuse condiții la frontieră similare, un mod comod de definire a unei baze pe  $V_N$  este de a construi o bază separată pentru partea elastică și o alta pentru potențialul electric. Acest mod de definire a bazei pentru spațiul  $V_N$  conduce la o structură de matrice mai simplă pentru  $W_N$ . Prin adoptarea unei notații multiindex pentru numerele  $\alpha$  și  $\beta$ , termenii nuli în structura elementelor  $w_{\alpha\beta}^{vol}$  și  $w_{\alpha\beta}^{sup}$  vor deveni ușor vizibili:

$$\alpha = s\bar{m} = s m_1 m_2 m_3 \quad s = 1..4 \quad m_i = 1..T$$

$$\beta = r\bar{n} = s n_1 n_2 n_3$$

“s” cuantifică structura cuadridimensională a spațiului  $V_N$

$(m_1, m_2, m_3)$  modelează structura tridimensională a domeniului  $\Omega$

“T” este numărul de aproximare pe o dimensiune a spațiului  $V_N$ .

Cardinalul bazei  $\xi_N$  în funcție de aceste dimensiuni este:  $4T^3$

Elementele bazei  $\{\xi^{s\bar{m}}\}$  vor fi de forma:

$(\xi_1^{1\bar{m}}, 0, 0, 0)$  pentru componenta elastică  $u_1$  -  $\xi_1^{1\bar{m}}$  baza pentru  $V_{u_1}$

$(0, \xi_2^{2\bar{m}}, 0, 0)$  pentru componenta elastică  $u_2$  -  $\xi_2^{2\bar{m}}$  baza pentru  $V_{u_2}$

$(0, 0, \xi_3^{3\bar{m}}, 0)$  pentru componenta elastică  $u_3$  -  $\xi_3^{3\bar{m}}$  baza pentru  $V_{u_3}$

$(0, 0, 0, \xi_4^{4\bar{m}})$  pentru componenta potențialului electric  $\phi$  -  $\xi_4^{4\bar{m}}$  baza pentru  $V_{\phi}$

$$\int_{\Omega} \left[ v_{ijkl} \delta_{sl} \delta_{rn} \frac{\partial \xi_l^{s\bar{m}}}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_l^{r\bar{n}}}{\partial x_j} + v e_{kpn} \left( \frac{\partial \xi_+^{s\bar{m}}}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_+^{r\bar{n}}}{\partial x_j} \delta_{s+} \delta_{r-} - \frac{\partial \xi_+^{s\bar{m}}}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_+^{r\bar{n}}}{\partial x_j} \delta_{s-} \delta_{r+} \right) + v o_{kj} \delta_{s+} \delta_{r+} \frac{\partial \xi_+^{s\bar{m}}}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_+^{r\bar{n}}}{\partial x_j} \right] d\Omega = w_{s\bar{m}r\bar{n}}^{vol}$$

$$+ (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} \sum_{s_c \in \Sigma_{\sigma^c}} H_c^e(s) \delta_{s+} \delta_{r+} \gamma(\xi_+^{s\bar{m}}) \gamma(\xi_+^{r\bar{n}}) \int_{S_c} ds + \rho_m^{-1} \int_{\Sigma_{\tau^c}} H_{il}^m(x, s) \delta_{sl} \delta_{rn} \gamma(\xi_l^{s\bar{m}}) \gamma(\xi_l^{r\bar{n}}) ds = w_{s\bar{m}r\bar{n}}^{sup}(s)$$

Această detaliere a construcției matricii  $W_N$  relevă structura de matrice rară a acesteia precum și transmiterea vizibilă a proprietăților de cuplaj ale fenomenului elastic de cel electric prin intermediul coeficienților  $v e_{kpn}$ , din problema reală (6) formulată în spațiul  $V$  asupra problemei de aproximare (7) din spațiul  $V_N$ .

Din punctul de vedere al calcului numeric problema este întrutotul comparabilă cu metoda Lagrange, construcția matricii rezolvente  $W_N$  este însă mai directă și facilă.

În acest paragraf sunt deduse relațiile generale de perturbație pentru ecuațiile electroelastice hiperbolice folosind o metodă specifică ecuațiilor clasice de undă în ipoteza acțiunii perturbației asupra parametrilor de material  $I_M$  și ai celor de suprafață  $I_S$ . Este regăsită expresia de calcul pentru estimatorul liniar din teoria Sinha-Tiersten și se construiește în mod explicit cea pentru estimatorul patrat.

În paragraful 1.4 dedicat prezentării teoriei clasice de perturbație Tiersten-Sinha, demonstrăm incapacitatea practică de a ajunge pe baza acestei metode la expresia estimatorilor de ordin superior pentru frecvențele proprii de vibrație perturbate. Găsirea unui formalism alternativ de descriere a dinamicii electroelastice, echivalent cu cel clasic în zona vitezelor acustice, care să permită deducerea acestor estimatori într-o manieră cât mai clară și concisă a fost unul din motivele principale ce au generat studiul întreprins în acest capitol. În cele ce urmează, prezentăm raționamentul ce conduce la construcția estimatorului de ordinul întâi și doi pentru ecuațiile electroelastice hiperbolice, raționament în care folosim ideea metodei clasice de perturbație aplicabilă în cazul ecuațiilor de undă uzuale. Diferența majoră ce apare față de această situație este necesitatea utilizării și a operatorului electroelastic adjunct și a funcțiilor sale proprii, aceasta datorită absenței simetriei în operatorul  $V$ . Pentru a nu încărca excesiv acest paragraf cu un material matematic ce nu este imediat necesar unei înțelegeri corecte a analizei ce o propunem, vom deduce în finalul paragrafului 4.1 al capitolului de complemente matematice expresiile estimatorilor liniar și patrat pentru funcționale biliniare eliptice într-o formă generală. În cele ce urmează ne vom concentra cu precădere asupra prelucrării și particularizării acestor expresii în cazul concret al operatorului electroelastic.

Toate mărimile la care vom face referire în cele ce urmează sunt reale, inclusiv spațiul Hilbert  $[L^2(\Omega)]^4$  al funcțiilor vectoriale în care vom aplica rezultatele analizei de perturbație dezvoltată în paragraful 4.1. Această supoziție este echivalentă cu ignorarea pierderilor în volumul și pe suprafața rezonatorului însă a fost necesară întrucât teoria construită în paragraful 4.1 este construită pentru funcționale biliniare reale.

Să considerăm următoarea problemă de perturbație asociată ecuației de vectori și valori proprii (3) din paragraful precedent:

$$\begin{cases} V_0^{(0)} \xi^{(0)} = \lambda^{(0)} \xi^{(0)} \\ A_f^{(0)} \xi^{(0)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_0^{(p)} \xi^{(p)} = \lambda^{(p)} \xi^{(p)} \\ A_f^{(p)} \xi^{(p)} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Superscriptul  $0$  marchează problema originală, neperturbată iar superscriptul  $p$  cea perturbată. Alterarea coeficienților de material se regăsește în perturbația operatorului  $V_0$ .

$$V_{jk}^{(0)} \xi = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} V_{jk}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \xi$$

$$V_{jk}^{(p)} \xi = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} V_{jk}^{(p)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \xi$$

$$V_{jk}^{(0)} = \begin{pmatrix} va_{1,jk1}^{(0)} & va_{1,jk2}^{(0)} & va_{1,jk3}^{(0)} & ve_{kj1}^{(0)} \\ va_{2,jk1}^{(0)} & va_{2,jk2}^{(0)} & va_{2,jk3}^{(0)} & ve_{kj2}^{(0)} \\ va_{3,jk1}^{(0)} & va_{3,jk2}^{(0)} & va_{3,jk3}^{(0)} & ve_{kj3}^{(0)} \\ -ve_{jk1}^{(0)} & -ve_{jk2}^{(0)} & -ve_{jk3}^{(0)} & vo_{jk}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$V_{jk}^{(p)} = \begin{pmatrix} va_{1,jk1}^p & va_{1,jk2}^p & va_{1,jk3}^p & ve_{kj1}^p \\ va_{2,jk1}^p & va_{2,jk2}^p & va_{2,jk3}^p & ve_{kj2}^p \\ va_{3,jk1}^p & va_{3,jk2}^p & va_{3,jk3}^p & ve_{kj3}^p \\ -ve_{jk1}^p & -ve_{jk2}^p & -ve_{jk3}^p & vo_{jk}^p \end{pmatrix}$$

Perturbarea condițiilor pe frontieră impune câmpului electroelastic la suprafața solidului piezoelectric o presupunem a fi parametrizată în modificarea funcțiilor transfer mecanic  $H_{ii}^m$  și electric  $H^e$ . Topografia suprafețelor de metalizare și geometria volumului piezoelectric le considerăm a rămâne invariante de la starea originală la cea perturbată. Formal, am marcat această perturbație a parametrilor  $I_S$  în operatorul de frontieră  $A_f$ .

Ecuatiile operatoriale ale valorilor proprii (1) sunt echivalente cu următoarele ecuații funcționale:

$$v^{(0)}(\xi^{(0)}, \eta) = \lambda^{(0)} \langle \xi^{(0)}, \eta \rangle_{[L^2(\Omega)]^4} \quad v^{(p)}(\xi^{(p)}, \eta) = \lambda^{(p)} \langle \xi^{(p)}, \eta \rangle_{[L^2(\Omega)]^4} \quad (2)$$

$\forall \eta \in V$  spațiul de definiție al problemei

Funcționalele biliniare  $v^{(0)}(\xi, \eta)$  și  $v^{(p)}(\xi, \eta)$  sunt definite astfel:

$$v^{(0)}(\xi, \eta) = \int_{\Omega} v\alpha_{ijkl}^{(0)} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + v\alpha_{jk}^{(0)} \frac{\partial \xi_+}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_+}{\partial x_k} + ve_{kji}^{(0)} \left( \frac{\partial \xi_+}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_+}{\partial x_k} \right) d\Omega +$$

$$+ (\rho_m)^{-1} \int_{\Sigma_{Ti}^{mc}} H_{il}^{m(0)}(x, s) \xi_l \eta_i s + (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} \sum_{S_c \in \Sigma_{\varphi}^{me}} H_c^{e(0)}(s) (\xi_+)_c (\eta_+)_c \int_{S_c} ds \quad (3)$$

$$v^{(p)}(\xi, \eta) = \int_{\Omega} v\alpha_{ijkl}^{(p)} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + v\alpha_{jk}^{(p)} \frac{\partial \xi_+}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_+}{\partial x_k} + ve_{kji}^{(p)} \left( \frac{\partial \xi_+}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_+}{\partial x_k} \right) d\Omega +$$

$$+ (\rho_m)^{-1} \int_{\Sigma_{Ti}^{mc}} H_{il}^{m(p)}(x, s) \xi_l \eta_i s + (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} \sum_{S_c \in \Sigma_{\varphi}^{me}} H_c^{e(p)}(s) (\xi_+)_c (\eta_+)_c \int_{S_c} ds \quad (4)$$

Deducerea relațiilor de estimare ale valorilor proprii  $\lambda^{(p)}$  în funcție de cele originale  $\lambda^{(0)}$  pornește de la scrierea funcționalei  $v^{(p)}(\xi, \eta)$  în funcție de funcționala originală  $v^{(0)}(\xi, \eta)$  și un parametru real  $h \in (0, 1)$  astfel:  $v^{(p)} = v^{(0)} + h\Delta v$

$$\Delta v(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \Delta v\alpha_{ijkl} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \Delta v\alpha_{jk} \frac{\partial \xi_+}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_+}{\partial x_k} + \Delta ve_{kji} \left( \frac{\partial \xi_+}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_+}{\partial x_k} \right) d\Omega +$$

$$+ (\rho_m)^{-1} \int_{\Sigma_{Ti}^{mc}} \Delta H_{il}^m(x, s) \xi_l \eta_i s + (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} \sum_{S_c \in \Sigma_{\varphi}^{me}} \Delta H_c^{e(0)}(s) (\xi_+)_c (\eta_+)_c \int_{S_c} ds \quad (5)$$

Valorile și funcțiile proprii perturbate sunt descompuse într-o sumă de puteri ale acestui parametru  $h$ :

$$\lambda_j^{(p)} = \lambda_j^{(0)} + h\lambda_j^{(1)} + h^2\lambda_j^{(2)} + \dots + h^m\lambda_j^{(m)} + \dots \quad (6)$$

$$\psi_j^{(p)} = \psi_j^{(0)} + h\psi_j^{(1)} + h^2\psi_j^{(2)} + \dots + h^m\psi_j^{(m)} + \dots \quad (7)$$

Deducerea expresiilor de calcul pentru coeficienții  $\lambda_j^{(n)}$  și  $\psi_j^{(n)}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , în funcție de mărimile presupuse cunoscute în problemă,  $\lambda_j^{(0)}$ ,  $\psi_j^{(0)}$ , modificările parametrilor de material și cei ai condițiilor pe frontieră, urmează pașii unei metode binecunoscute în teoria perturbației aplicată operatorilor autoadjuncți cu invers compact. Întrucât funcționalele  $v$  nu sunt simetrice este necesar însă să recurgem și la funcțiile proprii funcționalei adjuncțe  $v^{(0)*}(\xi, \eta) = v^{(0)}(\eta, \xi)$  (valorile proprii sunt comune):

$$v^{(0)*}(\psi_j^{(0)*}, \eta) = \lambda_j^{(0)} \langle \psi_j^{(0)*}, \eta \rangle_{[L^2(\Omega)]^4} \quad (8)$$



între aceste funcții și cele ale funcționalei originale  $v^{(0)}(\psi_j^{(0)}, \eta)$  existând o relație de biortogonalitate strict necesară dezvoltării teoriei de perturbație:  $\langle \psi_i^{(0)}, \psi_j^{(0)*} \rangle_{[L^2(\Omega)]^4} = \delta_{ij}$

Așa cum aminteam în începutul paragrafului vom prezenta în detaliu această metodă de perturbație pentru funcționalele biliniare și eliptice în paragraful 4.1 al capitolului de complemente matematice, în cele ce urmează preluăm doar rezultatele teoretice generale și le particularizăm pentru funcționala  $v$ .

Estimatorul de ordinul unu și cel de ordinul doi al problemei de perturbație enunțate au următoarele expresii:

$$\lambda_j^{(1)} = \Delta v(\psi_j^{(0)}, \psi_j^{(0)*}) \quad (9)$$

$$\lambda_j^{(2)} = \sum_{k \neq j} \frac{\Delta v(\psi_j^{(0)}, \psi_k^{(0)*}) \Delta v(\psi_k^{(0)}, \psi_j^{(0)*})}{\lambda_j^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \quad (10)$$

Argumentul major în utilitatea practică a acestor relații îl constituie posibilitatea aflării foarte ușoare a funcțiilor proprii adjuncte  $\psi_j^{(0)*}$  în funcție de funcțiile proprii  $\psi_j^{(0)}$ . Cele ce urmează vor lămurii această chestiune.

Să scriem desfășurat funcționala adjunctă:

$$v^{(0)*}(\xi, \eta) = v^{(0)}(\eta, \xi) \\ v^{(0)*}(\xi, \eta) = \int_{\Omega} va_{ijkl}^{(0)} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + vo_{jk}^{(0)} \frac{\partial \xi_{+}}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_{+}}{\partial x_k} + ve_{kp}^{(0)} \left( -\frac{\partial \xi_{+}}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_{+}}{\partial x_k} \right) d\Omega + \\ + (\rho_m)^{-1} \int_{\Sigma_{\Gamma u}^{mec}} H_{il}^{m(0)}(x, s) \xi_i \eta_l ds + (\epsilon_m^2 \mu)^{-1} \sum_{S_c \in \Sigma_{\varphi\phi}^{mec}} H_c^{e(0)}(s) (\xi_{+})_c (\eta_{+})_c \int_{S_c} ds \quad (11)$$

Ecuatiei funcționale  $v^{(0)*}(\psi_j^{(0)*}, \eta) = \lambda_j^{(0)} \langle \psi_j^{(0)*}, \eta \rangle_{[L^2(\Omega)]^4}$  îi corespunde următorul sistem de

ecuații:

$$\begin{cases} V^{(0)*} = \lambda^{(0)} \psi_j^{(0)*} \\ A_j^{(0)}(\psi_j^{(0)*}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Pentru a sesiza cu ușurință modificările ce apar în mărimile adjuncte față de cele originale le scriem alăturat pe ambele:

$$V_0^{(0)} = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} V_{jk}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \quad V_0^{(0)*} = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} V_{jk}^{(0)*} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ V_{jk}^{(0)} = \begin{pmatrix} va_{1jk1}^{(0)} & va_{1jk2}^{(0)} & va_{1jk3}^{(0)} & ve_{kj1}^{(0)} \\ va_{2jk1}^{(0)} & va_{2jk2}^{(0)} & va_{2jk3}^{(0)} & ve_{kj2}^{(0)} \\ va_{3jk1}^{(0)} & va_{3jk2}^{(0)} & va_{3jk3}^{(0)} & ve_{kj3}^{(0)} \\ -ve_{jk1}^{(0)} & -ve_{jk2}^{(0)} & -ve_{jk3}^{(0)} & vo_{jk}^{(0)} \end{pmatrix} \quad V_{jk}^{(0)*} = \begin{pmatrix} va_{1jk1}^{(0)} & va_{1jk2}^{(0)} & va_{1jk3}^{(0)} & -ve_{kj1}^{(0)} \\ va_{2jk1}^{(0)} & va_{2jk2}^{(0)} & va_{2jk3}^{(0)} & -ve_{kj2}^{(0)} \\ va_{3jk1}^{(0)} & va_{3jk2}^{(0)} & va_{3jk3}^{(0)} & -ve_{kj3}^{(0)} \\ ve_{jk1}^{(0)} & ve_{jk2}^{(0)} & ve_{jk3}^{(0)} & vo_{jk}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Acești operatori provin din relațiile:  $\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}, \frac{\partial}{\partial x_j} D_j$  respectiv:  $\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^*, \frac{\partial}{\partial x_j} D_j^*$

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k$$

$$D_j = e_{jki} S_{ik} + \epsilon_{jk} E_k$$

$$T_{ij}^* = c_{ijkl} S_{kl}^* + e_{kij} E_k^*$$

$$D_j^* = -e_{jki} S_{ki}^* + \epsilon_{jk} E_k^*$$



Relațiile pe frontieră (le vom scrie pentru un regim armonic permanent de pulsație  $s$ ; acestea sunt formal identice însă în variabilele specifice fiecărui caz în parte:

*Câmpul elastic:*

$$\begin{aligned} \Sigma_T^{mec} &= \left\{ S_m \in \Pi_{fr\Omega} \mid (T_{ij} n_j)_{|S_m} = 0 \right\} & \left| (T_{ij}^* n_j)_{|S_m} = 0 \right. \\ \Sigma_u^{mec} &= \left\{ S_n \in \Pi_{fr\Omega} \mid u_i|_{S_n} = 0 \right\} & \left| u_i^*|_{S_n} = 0 \right. \\ \Sigma_{Tu}^{mec} &\in \Pi_{fr\Omega} \\ T_{ij}(x)n(x)_j + H_{il}^m(x,s)u_i(x,s) &= 0 & T_{ij}^*(x)n(x)_j + H_{il}^m(x,s)u_i^*(x,s) = 0 \end{aligned}$$

*Câmpul electric:*

$$\begin{aligned} \Sigma_\Phi^{met} &= \left\{ S_p \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_p} = 0 \right\} & \left| \Phi|_{S_p} = 0 \right. \\ \Sigma_Q^{met} &= \left\{ S_r \in \Pi_{fr\Omega} \mid \int_{S_r} \bar{D} \bar{n} ds = 0 \right\} & \int_{S_r} \bar{D}^* \bar{n} ds = 0 \\ \Sigma_{q\Phi}^{met} &= \left\{ S_c \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi_c + q_c(t)(C_c^{-1}) = 0 \right\} & \Phi_c^* + H_c^e q_c^*(s) = 0 \\ q_c &= - \int_{S_c} \bar{D} \bar{n} ds & q_c^* &= - \int_{S_c} \bar{D}^* \bar{n} ds \\ \Sigma_\phi^{die} &= \left\{ S_k \in fr\Omega \mid \phi|_{S_k} = 0 \right\} & \phi^*|_{S_k} = 0 \\ \Sigma_\sigma^{die} &= \left\{ S_j \in fr\Omega \mid \bar{D} \bar{n}|_{S_j} = 0 \right\} & \bar{D}^* \bar{n}|_{S_j} = 0 \end{aligned}$$

Motivul pentru care am detaliat și condițiile pe frontieră este de a face vizibil în mod explicit același spațiu de definiție  $V$  comun atât funcționalei  $v^{(n)}$  cât și  $v^{(n)*}$ . Acesta este un subspațiu al spațiului Sobolev  $[H^1(\Omega)]^\dagger$  cu proprietatea suplimentară că funcțiile lui se comportă pe frontieră astfel:  $\Sigma_u^{mec} = \left\{ S_n \in \Pi_{fr\Omega} \mid u_i|_{S_n} = 0 \right\}$ ,  $\Sigma_\Phi^{met} = \left\{ S_p \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_p} = 0 \right\}$  și  $\Sigma_\phi^{die} = \left\{ S_k \in fr\Omega \mid \phi|_{S_k} = 0 \right\}$ .

Această proprietate împreună cu forma particulară a matricilor  $V_{jk}$  ne permite să demonstrăm următoarea propoziție.

### Propoziție

Dacă  $\psi_j^{(n)} = (u, \phi)_j$  este o funcție proprie a funcționalei  $v^{(n)}(\xi, \eta)$  atunci funcțiile proprii ale funcționalei adjuncte  $v^{(n)*}(\xi, \eta)$  sunt de forma  $\psi_j^{(n)*} = (u, -\phi)_j$ .

Demonstrația este imediată.

Să presupunem îndeplinită relația  $v^{(n)}(\psi_j^{(n)}, \eta) = \lambda_j^{(n)} \langle \psi_j^{(n)}, \eta \rangle_{[L^2(\Omega)]^\dagger} \forall \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in V$

Forma particulară a funcționalei  $v$  face ca pentru  $\eta^* = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, -\eta_4) \in V$ , relația  $v^{(n)*}(\psi_j^{(n)*}, \eta^*) = \lambda_j^{(n)} \langle \psi_j^{(n)*}, \eta^* \rangle_{[L^2(\Omega)]^\dagger}$  să fie echivalentă cu relația presupusă adevărată. Cum funcția  $\eta$  a fost aleasă arbitrar propoziția este demonstrată.

•

Cu această determinare a funcțiilor proprii funcționalei adjuncte, estimatorii liniar și cel patratric vor avea următoarele expresii:

$$\lambda_j^{(1)} = \Delta v(\psi_j^{(0)}, \psi_j^{(0)*}) \quad :$$

$$\lambda_v^{(1)} = \int_{\Omega} \Delta v \alpha_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_i^v}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{u}_j^v}{\partial x_l} + \Delta v e_{kjl} \left( \frac{\partial \hat{\phi}^v}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{u}_i^v}{\partial x_k} + \frac{\partial \hat{u}_i^v}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\phi}^v}{\partial x_k} \right) - \Delta v o_{jk} \frac{\partial \hat{\phi}^v}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\phi}^v}{\partial x_k} d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \int_{\Sigma_{T_u}^{mec}} \Delta H_{il}^m(x) \hat{u}_i^v \hat{u}_l^v ds - \frac{1}{\epsilon_m^2 \mu} \sum_{S_c \in \Sigma_{\phi}^{mei}} \Delta H^e \hat{\Phi}_c^v \hat{\Phi}_c^v \int_{S_c} ds$$

Am notat cu  $\hat{u}$  funcțiile transformate:  $\hat{u} = \sqrt{\rho} u$   $\hat{\phi} = \epsilon_m \sqrt{\mu} \phi$ . Pentru variabilele originale  $(u_i, \phi)$  regăsim relația de perturbație liniară obținută în teoria Sinha-Tiersten.

$$\lambda_v^{(1)} = \int_{\Omega} \Delta c_{ijkl} S_{ij}^{(0)v} S_{kl}^{(0)v} - \Delta e_{kjl} (E_j^{(0)v} S_{kl}^{(0)v} + S_{ij}^{(0)v} E_k^{(0)v}) - \Delta \epsilon_{jk} E_j^{(0)v} E_k^{(0)v} d\Omega + \int_{\Sigma_{T_u}^{mec}} \Delta H_{il}^{elast}(x) u_i^{(0)v} u_l^{(0)v} ds$$

$$- \sum_{S_c \in \Sigma_{\phi}^{mei}} \Delta G^{elect} \Phi_c^{(0)v} \Phi_c^{(0)v} \int_{S_c} ds - \quad (13)$$

Pentru estimatorul de ordinul doi se deduce următoarea expresie:

$$\lambda_v^{(2)} = \sum_{\chi \neq v} \frac{\Delta v_p^c(\psi_v^{(0)}, \psi_{\chi}^{(0)*}) \Delta v_p^c(\psi_{\chi}^{(0)}, \psi_v^{(0)*})}{\lambda_v^{(1)} - \lambda_{\chi}^{(1)}}$$

$$\lambda_v^{(2)} = \sum_{\chi \neq v} \left( \frac{1}{\lambda_v^{(1)} - \lambda_{\chi}^{(1)}} \right) \left[ \int_{\Omega} \Delta c_{ijkl} S_{ij}^{(0)v} S_{kl}^{(0)\chi} - \Delta e_{kjl} (E_j^{(0)v} S_{kl}^{(0)\chi} + S_{ij}^{(0)v} E_k^{(0)\chi}) - \Delta \epsilon_{jk} E_j^{(0)v} E_k^{(0)\chi} d\Omega + \right.$$

$$\left. + \int_{\Sigma_{T_u}^{mec}} \Delta H_{il}^{elast}(x) u_i^{(0)v} u_l^{(0)\chi} ds - \sum_{S_c \in \Sigma_{\phi}^{mei}} \Delta G^{elect} \Phi_c^{(0)v} \Phi_c^{(0)\chi} \int_{S_c} ds \right]^2 \quad (14)$$

Expresia corecției de ordinul doi (14) pentru valorile proprii perturbate nu era disponibilă, după cunoștința autorului, pentru cazul general tridimensional al ecuațiilor ce modelează dinamica electroelastică în solidul piezoelectric. Teoria prezentată în paragraful 4.1 poate fi extinsă pentru a furniza și estimatorul de ordinul 3, expresia acestuia este disponibilă pentru funcționale biliniare eliptice și simetrice [30] sau [38] însă pentru cazul specific al ecuațiilor piezoelectrice acesta ar rămâne credem, un rezultat teoretic, fiind foarte greu de aplicat.

Două observații se impun la sfârșitul acestui paragraf. Prima este legată de dificultatea utilizării relației estimatorului patric pentru cazul general tridimensional al problemelor de rezonanță piezoelectrică cel puțin pentru capacitatea de calcul numeric actuală. Motivul este ușor vizibil și îl constituie necesitatea aflării funcțiilor proprii  $\psi_j^{(0)}$  teoretic pentru toate modurile posibile, practic pentru cele decelabile în spațiul aproximant  $V_N$  finit dimensional pe care se proiectează problema generală și apoi calculul expresiei (14). Pentru cazul unidimensional problema este abordabilă din punct de vedere computațional însă irelevantă întrucât pentru aproximația unidimensională există soluții analitice pentru vibrațiile electroelastice.

Cea de a doua observație subliniază rolul formei funcțiilor proprii conjugate  $\psi_j^{(0)*} = (u_i, -\phi)_j$ .

O analiză atentă sugerează de ce a fost necesară înmulțirea cu  $-1$  a relației  $\frac{\partial}{\partial x_j} D_j = 0$  pentru

deducerea relației de perturbație plecând de la formula de reciprocitate a ecuațiilor piezoelectrice clasice; s-a ajuns astfel la o formă a ecuației electroelastice clasice similară celei adjuncte din acest paragraf. O situație întrutotul similară apare în deducerea funcționalei Lagrange.

În paragraful de început al acestui capitol descriam motivele ce au condus la studiul efectuat în această parte finală a tezei și prezentam ușurința înțelegerii matematice ce ar decurge din reformularea ecuațiilor ce modelează dinamica electroelastică în solidul piezoelectric într-o formă compatibilă cu ecuația abstractă a undelor staționare  $\dot{\psi} = L\psi$  cu  $L$  un operator autoadjunct cu invers compact. Dacă este posibilă o astfel de reformulare rămâne o întrebare deschisă. Sistemul de ecuații hiperbolice în necunoscutele  $(u, \phi)$  la care am ajuns în urma raționamentului expus în paragrafele 3.2 și 3.3 a avut ca idee de pornire găsirea unui compromis între a nu neglija complet cuplajul elasto-electromagnetic și a ajunge totuși printr-o serie de aproximații fizice rezonabile la un sistem de ecuații comprehensibil matematic și compatibil cu condițiile pe frontieră uzuale. S-a ajuns pe aceste considerente la un sistem ce are expresia abstractă  $\dot{\psi} = V\psi$  cu  $V$  un operator eliptic cu invers compact căruia îi lipsește însă proprietatea de simetrie. Să reamintim etapele principale ce au condus la definirea și validarea acestui model de studiu pentru vitezele electroelastice din domeniul acustic:

- a) au fost formulate ecuațiile cuplate elasto-electromagnetice în solidul piezoelectric în variabilele  $u, \vec{A}$  (potențialul magnetic vector) și  $\phi$ .
- b) prin renunțarea la cuplajul dintre partea magnetică și cea elastică s-a ajuns la sistemul de ecuații electroelastice hiperbolice
- c) s-a demonstrat echivalența până la o diferență neglijabilă a vitezelor de undă, din domeniul acustic, prezise de acest sistem și cel clasic.

Revenind la absența simetriei în operatorul de undă  $V$  ea se datorează fenomenului piezoelectric acesta doar cuplând câmpul elastic și cel electric. Prin intermediul lui, cele două câmpuri schimbă dinamic energie între ele. Nu excludem însă posibilitatea ca, apelând la o schimbare de variabilă, operatorul  $V$  să poată fi simetrizat. O astfel de simetrizare ar ridica incertitudinea ce există asupra generării sau nu a unei mulțimi de funcții densă în spațiul de definiție al problemei de către setul de vectori proprii operatorului  $V$ . Amintim că o astfel de incertitudine face ca atât teoria de perturbație clasică dezvoltată de Sinha și Tiersten cât și cea propusă în paragraful 3.4 pentru sistemul ecuațiilor electroelastice hiperbolice să fie riguros valabile doar în ipoteza în care vectorii proprii perturbați se află în subspațiul liniar generat de vectorii proprii ai ecuației originale.

Alături de o certă ușurință teoretică a analizei soluțiilor electroelastice în domeniul timp pentru acest sistem de ecuații hiperbolice vis a-vis de cazul clasic, proprietățile operatorului  $V$  și ale funcționalei sale asociate permit calculul numeric al spectrului de vibrație prin metoda clasică Galerkin. Efortul computațional este similar celui necesar în situația utilizării funcționalei de tip Lagrange. Pe această cale este oferit un instrument teoretic de analiză spectrală alternativ singurei metode riguroase existente până în prezent. Teoria de perturbație construită pe baza acestei funcționale este similară celei dezvoltate pentru funcționalele eliptice și simetrice corespunzătoare operatorilor clasici de undă ea permițând deducerea practică a estimatorilor pentru frecvențele proprii alterate de ordin superior celui liniar. În acest sens, în paragraful 3.4 a fost dedusă expresia

concretă pentru estimatorul patrat, iar cea pentru estimatorul liniar s-a demonstrat a fi identică cu cea cunoscută din teoria Sinha-Tierster.

Vom sintetiza rezultatele obținute prin teoria ecuațiilor piezoelectrice hiperbolice în comparație cu cea clasică și cea a ecuațiilor de undă clasice în urmatorul tabel.

Proprietăți	Ecuațiile piezoelectrice clasice	Ecuațiile piezoelectrice hiperbolice	Ecuația clasică a undelor elastice sau electromagnetice
Teoremă de existență a soluțiilor	nu	da	da
Teoremă de unicitate a soluțiilor	da	da	da
Operatorul de undă $M^{-1}L$	$M$ nu este inversabil	Continuu, eliptic, invers compact	Autoadjunct cu invers compact
Spectrul	Infinit numărabil	Infinit numărabil	Infinit numărabil
Funcțiile proprii operatorului de undă	Există ortogonalitate între componentele câmpului elastic; completitudine incertă	Nu există ortogonalitate; există biortogonalitate cu funcțiile proprii operatorului adjunct; completitudine incertă	Există ortogonalitate și completitudine

În final, două observații importante se impun referitoare la estimatorii de perturbație construiți pe baza acestei teorii. Prima se referă la rolul operatorului de undă adjunct  $V^*$  în această teorie de estimare spectrală și a formei funcțiilor proprii conjugate  $\psi_j^{(0)*} = (u_i, -\phi)_j$  ca unică modalitate de a trata proprietatea inerentă de asimetrie a câmpului piezoelectric. Cea de a doua subliniază dificultatea utilizării relației estimatorului patrat pentru cazul general tridimensional al problemelor de rezonanță piezoelectrică cel puțin pentru capacitatea de calcul numeric actuală. Motivul este ușor vizibil și îl constituie necesitatea aflării funcțiilor proprii  $\psi_j$  teoretic pentru toate modurile posibile, practic pentru cele decelabile în spațiul aproximant finit dimensional pe care se proiectează problema generală.

:

## Capitolul 4 **Complemente Matematice**

Această ultimă parte a lucrării grupează o serie de demonstrații și noțiuni matematice ce au un caracter colateral subiectului tezei însă au fost folosite ca și rezultate intermediare pe parcursul celor trei capitole anterioare. Este vorba de echivalarea sistemelor de ecuații eliptice cu o ecuație variațională, existența și unicitatea soluției ecuației piezoelectrice liniare staționare, teoria de perturbație pentru funcționalele biliniare eliptice și un studiu asupra soluțiilor ecuației piezoelectrice staționare neliniare de tip patrat. Toate aceste subiecte, cu excepția celui dedicat ecuației neliniare, există într-o formă mai mult sau mai puțin apropiată în referințele de bibliografie matematică citate, efortul și atenția autorului fiind îndreptate spre a le modifica și adapta cazului specific al ecuațiilor piezoelectrice. Analiza ecuației staționare neliniare reprezintă o excepție și este un studiu pe care autorul nu l-a găsit în literatura de specialitate, studiu ce îl considerăm util întrucât oferă limita maximă a energiei câmpului elastic și electric impus pe frontiera solidului piezoelectric pentru care există o soluție unică a ecuației și deci aproximația cubică a energiei poate fi folosită.

Prezentăm principalele rezultate în ceea ce privește existența și unicitatea soluțiilor pentru sistemele de ecuații eliptice pe spații Hilbert. Acestea reprezintă o abstractizare a ecuațiilor de valori proprii din teoria elasticității liniare, a celei electromagnetice sau piezoelectrice, sisteme ce pot fi echivalate cu ecuații variaționale în care intervine o funcțională biliniară continuă și eliptică. În final, ne vom referi la caracterizarea spectrală a acestor funcționale și prezentăm teoria de perturbație asociată acestora, ducând analiza până la deducerea estimatorilor de ordinul întâi și doi pentru valorile proprii perturbate.

Cele ce urmează reprezintă ipoteze pentru teorema lui Green generalizată. Această teoremă ne va permite definirea riguroasă a operatorilor eliptici abstracti ce înglobează atât ecuațiile în volum cât și cele pe suprafața de frontieră pentru modelele de studiu ale rezonanței elastice, electromagnetice sau piezoelectrice.

Fie  $V$  și  $H$  două spații Hilbert astfel încât:

- aplicația injectivă canonică  $V \rightarrow H$  este continuă
- $V$  este dens în  $H$

O consecință a acestor proprietăți este următoarea triadă Hilbert:  $V \subset H \equiv H' \subset V'$

Fie  $\gamma: V \rightarrow B$  o aplicație liniară, continuă și surjectivă definită pe  $V$  cu valori într-un spațiu Hilbert  $B$  astfel încât:

- $\text{Ker}\{\gamma\} = V_0$ ,  $V_0 \subseteq V$  un subspațiu închis al lui  $V$ ,  $V_0$  dens în  $H$
- aplicația definită pe spațiul cât  $\hat{\gamma}: V/V_0 \rightarrow B$  păstrează norma  $\|\cdot\|_{V/V_0} = \|\cdot\|_B$

Între spațiile  $V_0$  și  $H$  se poate stabili deasemenea o triadă Hilbert:  $V_0 \subset H \equiv H' \subset V_0'$

Fie  $a(u, v): V \times V \rightarrow C$  o funcțională sesquiliniară și continuă.

Se definește  $\langle A_0 u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} a(u, v) \quad \forall v \in V_0, A_0: D(A_0) \rightarrow H$  cu

$$D(A_0) = \left\{ u \in V \mid |a(u, v)| < K_a^0 \|v\|_H, \forall v \in V_0 \right\}$$

Explicație:  $a(u, v)$  cu  $v \in V_0$  pentru un  $u \in V$  arbitrar ales este o funcțională ce aparține lui  $V_0'$ . Din întreg spațiul de definiție  $V$  pentru  $u$  se selectează doar aceia pentru care  $a(u, v) \in H'$ . Această selectare se rezumă la continuitatea funcționalei  $a(u, v)$  în raport cu norma spațiului  $H$  liniaritatea fiind implicită. În această situație,  $a(u, \cdot)$  se identifică Riesz cu un element  $A_0 u \in H$ . Legătura  $u \mapsto A_0 u$  este liniară.

### $T_1$ Teorema lui Green generalizată

În ipotezele ce au fost făcute pentru un  $u \in D(A_0)$  arbitrar ales are loc egalitatea:

$$a(u, v) - \langle A_0 u, v \rangle = \partial(u)(\gamma v) \quad \forall v \in V, \text{ aplicația } \partial: D_0 \rightarrow B' \text{ fiind liniară.}$$

Demonstrația teoremei este dată în [49] pag. 135

•

Această teoremă este utilizată pentru a demonstra o teoremă de echivalare a unei ecuații eliptice abstracte având condiții pe frontieră variaționale cu o ecuație funcțională.

Fie  $b(x, y): B \times B \rightarrow C$  sesquiliniară și continuă. Se definește operatorul liniar și continuu  $\beta(x): B \rightarrow B'$ ,  $\beta(x)(y) \stackrel{\text{def}}{=} b(x, y) \quad \forall y \in B$ .

### $P_1$ Propozitie

Presupunem că există și este unică soluția ecuației eliptice abstracte:

$$\begin{cases} A_0 u = f & f \in H \\ \partial(u) + \beta(\gamma u) = g & g \in B' \end{cases}$$

Atunci această soluție îndeplinește și ecuația funcțională:

$$a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v) = \langle f, v \rangle + g(\gamma v) \quad \forall v \in V$$

### Demonstrație

$\langle A_0 u, v \rangle = \langle f, v \rangle$  pentru un  $v \in V$  arbitrar ales

Relația  $\partial(u)(x) + \beta(\gamma u)(x) = g(x)$  scrisă pentru un  $x = \gamma v$  și ținând cont de modul de definire al operatorului  $\beta$  devine:  $\partial(u)(\gamma v) + b(\gamma u, \gamma u) = g(\gamma v)$ .

Prin sumarea celor două egalități se obține ecuația funcțională:

$$a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v) = \langle f, v \rangle + g(\gamma v) \quad \forall v \in V$$

•

Observație: dacă există, soluția ecuației eliptice abstracte aparține domeniului  $D(A_0)$

### $P_2$ Propozitie

Presupunem că soluția ecuației funcționale există, este unică și aparține domeniului  $D(A_0)$ .

$$a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v) = \langle f, v \rangle + g(\gamma v) \quad \forall v \in V \text{ iar } u \in D(A_0)$$

Atunci această soluție este soluție și pentru ecuația eliptică abstractă:

$$\begin{cases} A_0 u = f & f \in H \\ \partial(u) + \beta(\gamma u) = g & g \in B' \end{cases}$$

### Demonstrație

Pentru  $\forall v \in V_0$  ecuația funcțională devine:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \Leftrightarrow \langle A_0 u - f, v \rangle = 0 \Rightarrow A_0 u = f \text{ întrucât } V_0 \text{ este dens în } H$$

Prin înlocuirea ultimei egalități în ecuația funcțională se obține:

$$a(u, v) - \langle A_0 u, v \rangle + b(\gamma u, \gamma v) = g(\gamma v) \quad \forall v \in V$$

$$\partial(u)(\gamma v) + b(\gamma u, \gamma u) = g(\gamma v)$$

Întrucât aplicația  $\gamma$  este surjectivă la parcurgerea spațiului  $V$  cu variabila  $v$  se acoperă în întregime spațiul  $B$ . Această observație permite scrierea egalității funcționale anterioare sub forma operatorială:

$$\partial(u) + \beta(\gamma u) = g$$

•



### P<sub>3</sub> Propozitie

O condiție necesară și suficientă ca soluția ecuației funcționale (dacă există):  
 $a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v) = \langle f, v \rangle + g(\gamma v) \quad \forall v \in V$  să aparțină domeniului  $D(A^c) \subseteq D(A_0)$  (operatorul  $A^c$  este definit în cursul demonstrației) este ca  $g \equiv 0$

### Demonstrație

i.  $g \equiv 0 \Rightarrow u \in D(A^c)$

$a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$  Existența unei soluții pentru această ecuație implică apartenența funcționalei  $a(u, \cdot) + b(\gamma u, \cdot) \in H'$ .

Întrucât aplicația  $\gamma$  a fost presupusă a fi continuă, funcționala  $b(x, y)$  este continuă și pe  $V \times V$ :

$$\|\gamma u\|_B \leq K_\gamma \|u\|_V$$

$$|b(\gamma u, \gamma v)| \leq C_b \|\gamma u\|_B \|\gamma v\|_B \leq K_\gamma^2 C_b \|u\|_V \|v\|_V$$

În consecință funcționala:  $a^c(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v)$  este sesquiliniară și continuă pe  $V \times V$ .

Se definesc operatorii:

$$\langle A^c u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} a^c(u, v) \quad \forall v \in V, A^c : D(A^c) \rightarrow H \text{ cu}$$

$$D(A^c) = \{u \in V \mid |a^c(u, v)| < K_{a^c} \|v\|_H, \forall v \in V\}$$

$$\langle A_0^c u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} a^c(u, v) \quad \forall v \in V, A_0^c : D(A_0^c) \rightarrow H \text{ cu } D(A_0^c) = \{u \in V \mid |a^c(u, v)| < K_{a^c}^0 \|v\|_H, \forall v \in V_0\}$$

Relația  $|a^c(u, v)| < K_{a^c} \|v\|_H$  este adevărată pentru  $\forall v \in V$  deci implicit și pentru  $V_0 \Rightarrow D(A^c) \subseteq D(A_0^c)$

Întrucât  $a^c(u, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V_0 \Rightarrow A_0^c \equiv A_0$  și deci  $\Rightarrow D(A^c) \subseteq D(A_0)$

ii.  $u \in D(A^c) \Rightarrow g \equiv 0$

Pentru  $u \in D(A^c)$  ecuația funcțională  $a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v) = \langle f, v \rangle + g(\gamma v)$  are forma echivalentă:

$\langle A^c u, v \rangle = \langle f, v \rangle + g(\gamma v)$ . Această egalitate ar implica apartenența funcționalei  $(g \circ \gamma) : V \rightarrow C$  la  $H'$  - dar: funcționala  $(g \circ \gamma) \in V_0'$  este identic nulă pe  $V_0$  și  $H' \subset V_0'$ . În consecință  $g \equiv 0$ .

•

Propozițiile **P<sub>1</sub>**, **P<sub>2</sub>**, **P<sub>3</sub>** demonstrează teorema următoare:

### T<sub>2</sub> Teoremă

Din punct de vedere al existenței și unicității soluțiilor ecuația eliptică abstractă

$$\begin{cases} A_0 u = f & f \in H \\ \partial(u) + \beta(\gamma u) = 0 \end{cases}$$

este echivalentă cu ecuația funcțională:

$$a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$$

Lema următoare oferă o condiție suficientă de existență și unicitate a soluțiilor pentru ecuația funcțională  $a(u, v) + b(\gamma u, \gamma v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$

### $L_1$ Lema Lax-Milgram

O condiție suficientă pentru existența și unicitatea soluției ecuației funcționale:

$$a^c(u, v) = \langle f, v \rangle \quad f \in H, \quad \forall v \in V$$

este ca funcționala  $a^c(u, v): V \times V \rightarrow C$  biliniară și continuă să fie coercitivă pe  $V$ :

$$|a^c(u, u)| \geq C_{a^c}^{\max} \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

O demonstrație a acestei leme se găsește în [49] sau [24].

• Cursul demonstrației acestei teoreme conduce la o serie de rezultate importante referitoare la caracterizarea operatorilor  $A_0$  și  $A^c$  definiți anterior.

i.  $D(A^c)$  este dens în  $H$

ii.  $Rg(A^c) \equiv H$

iii.  $(A^c)^{-1}$  este continuu.

Următoarea propoziție stabilește o condiție suficientă de identificare a operatorului  $A^c$  cu restricția operatorului  $A_0$  la domeniul  $D(A) = \{u \in D(A_0) \mid \partial u + \beta(\gamma u) = 0\}$ .

### $P_4$ Propoziție

Dacă funcționala  $a^c(u, v): V \times V \rightarrow C$  biliniară și continuă este coercitivă pe  $V$  atunci  $A^c \equiv A$  operatorul  $A$  fiind restricția operatorului  $A_0$  la domeniul  $D(A) = \{u \in D(A_0) \mid \partial u + \beta(\gamma u) = 0\}$

### Demonstrație

i. Egalitățile 
$$\begin{cases} A_0 u = Au \\ \partial(u) + \beta(\gamma u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle A_0 u, v \rangle = \langle Au, v \rangle \\ \partial(u)(\gamma v) + b(\gamma u, \gamma v) = 0 \end{cases} \quad \forall v \in V \quad \text{sunt adevărate } \forall u \in D(A).$$

Prin sumarea lor se obține:  $a^c(u, v) = \langle Au, v \rangle$

Această ultimă egalitate implică:  $a^c(u, \cdot) \in H' \Leftrightarrow a^c(u, v) = \langle A^c u, v \rangle$ .

În consecință:  $A^c \equiv A$  pentru  $D(A) \subseteq D(A^c)$

ii. Pentru  $u \in D(A^c)$  lema Lax-Milgram asigură o corespondență biunivocă între domeniul  $D(A^c)$  și  $H$  prin operatorul  $A^c$ :  $A^c u = f, f \in H$

Teorema de echivalare  $T_2$  stabilește următoarea implicație:

$$A^c u = f \Rightarrow \begin{cases} A_0 u = f \\ \partial(u) + \beta(\gamma u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Au = f$$
 Această ultimă relație conduce la identificarea operatorilor

$A$  și  $A^c$  pe domeniul  $D(A^c) \subseteq D(A)$ .

• Propoziția  $P_4$  demonstrează următorul corolar:

### $C_1$ Corolar

Pentru o funcțională  $a^c(u, v): V \times V \rightarrow C$  biliniară, continuă și coercitivă pe  $V$  există echivalență între ecuațiile:

$$\begin{cases} A_0 u + Xu = f \\ \partial(u) + \beta(\gamma u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Au + Xu = f \text{ și } A^c u + Xu = f \Leftrightarrow a^c(u, v) + \langle Xu, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$$

pentru  $f \in H$  și  $X: D(X) \subseteq D(A) \rightarrow H$  un operator oarecare.

Un studiu detaliat, pentru cazul ecuațiilor piezoelectrice, se va face pe parcursul paragrafelor ce urmează în cazurile particulare 1 și 2:

1.  $X \equiv 0$  - situația va corespunde ecuațiilor piezoelectrice liniare staționare
2.  $X$  un operator neliniar ce provine din partea cubică a energiei piezoelectrice:  
 $(Xu, v) \stackrel{def}{=} x(u, u, v) \quad \forall v \in V$ , cu  $x(u, v, w): V \times V \times V \rightarrow R$  funcțională liniară și continuă pe  $V \times V \times V$ ; în această situație operatorul de frontieră  $\beta(\gamma u)$  va fi considerat nul.
3.  $X = -\lambda I|_{u \in D(A)}$ ,  $f \equiv 0$ , ceea ce corespunde analizei spectrale pentru operatorul  $A$

În ceea ce privește caracterizarea spectrală a operatorului  $A$  ce provine din ecuațiile piezoelectrice hiperbolice am indicat în paragraful 3.3 metoda de calcul asociată acestei probleme. Cele două teoreme ce le prezentăm în continuare oferă o imagine calitativă asupra valorilor și vectorilor proprii operatorului  $A$  fără a face apel la aproximarea lor printr-o desfășurare numerică.

### $T_y$ Teorema de caracterizare spectrală a operatorilor compacti (Riesz-Schauder)

Fie  $S$  un operator compact definit pe spațiul Hilbert  $H$ . Atunci:

- i. Spectrul operatorului  $S$ ,  $\sigma(S)$  este finit sau numărabil; 0 aparține lui  $\sigma(S)$  și este singurul punct de acumulare al spectrului
- ii. Dacă  $\mu \in \sigma(S) - \{0\}$  atunci ordinul de multiplicitate al valorii proprii  $\mu$  este finit;  $Rg(S - \mu I)$  este închis și de dimensiune egală cu ordinul de multiplicate al lui  $\mu$

O demonstrație a acestei teoreme se găsește în [48] paginile 79-80.

•  
Un caz remarcabil, din punct de vedere al spectrului operatorului  $S$ , apare atunci când acesta este autoadjunct.

### $T_x$ Teorema de caracterizare a operatorilor compacti, autoadjuncti

Fie  $S$  un operator compact, autoadjunct definit pe spațiul Hilbert  $H$ . Atunci

- i. Spectrul operatorului  $S$ ,  $\sigma(S)$  este finit sau numărabil; 0 aparține lui  $\sigma(S)$  și este singurul punct de acumulare al spectrului
- ii. Dacă  $\mu \in \sigma(S) - \{0\}$  atunci ordinul de multiplicitate al valorii proprii  $\mu$  este finit;  $Rg(S - \mu I)$  este închis și de dimensiune egală cu ordinul de multiplicate al lui  $\mu$
- iii.  $W = \bigoplus_{k=0}^{\infty} W_k$  este dens în  $H$

cu  $W_k$  subspațiul invariant atașat valorii proprii  $\mu_k$ .

Demonstrația se găsește în [6], pag. 100

•  
În cazul unui operator ce provine dintr-o funcțională biliniară, continuă și eliptică dar nu și simetrică, nu avem certitudinea că mulțimea combinațiilor liniare construite pe setul vectorilor proprii este densă în spațiul  $V$ . Această consecință ce apare prin compararea celor două teoreme face ca dezvoltarea teoriei de perturbație ce o propunem în continuare pentru funcționalele  $a(\xi, \eta): V \times V \rightarrow R$  biliniare, continue și eliptice pe spațiul de definiție să fie riguroasă doar pentru vectorii proprii perturbați ce se află în mulțimea combinațiilor liniare generată de vectorii proprii funcționalei originale. Cursul expunerii urmează etapele metodei clasice de construcție a estimatorilor polinomiali pentru vectorii și valorile proprii specifici funcționalelor simetrice; acesta este cazul obișnuit pentru ecuațiile câmpului elastic sau electromagnetic. Absența simetriei, cu

ipoteza suplimentară enunțată mai sus, va implica recurgerea la vectorii proprii funcționalei adjuncte, între aceștia și cei ai funcționalei originale existând o relație de biortogonalitate. Să presupunem în continuare două sisteme de ecuații abstracte ce îndeplinesc ambele condițiile corolarului  $C1$ . Valorile proprii ale acestor ecuații sunt apropiate în măsura în care să putem presupune că unul dintre acestea descrie o situație fizică originală iar celălalt o ușoară perturbație a acesteia. Mărimile sistemului original convenim să le marcăm cu superscriptul  $(0)$  iar cele ale sistemului perturbat  $(p)$ .

$$\begin{cases} A_0^{(0)}\xi = \lambda^{(0)}\xi \\ \partial^{(0)}(\xi) + \beta^{(0)}(\gamma\xi) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_0^{(p)}\xi = \lambda^{(p)}\xi \\ \partial^{(p)}(\xi) + \beta^{(p)}(\gamma\xi) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ambele sisteme pot fi echivalate cu ecuația variațională asociată. Pentru a rămâne concisi, nu mai marcăm cazul original  $(0)$  sau cel perturbat  $(p)$ , ele fiind formal întrutotul identice:

$$a^c(\xi, \eta) = a(\xi, \eta) + b(\gamma\xi, \gamma\eta) \quad (2)$$

Operatorii ce se definesc plecând de la funcționala  $a^c(\xi, \eta)$  și de la funcționala adjunctă  $a^{c*}(\xi, \eta) = a^c(\eta, \xi)$  sunt următorii:

$$a^c(\xi, \eta) = \langle A^c \xi, \eta \rangle \quad a^{c*}(\xi, \eta) = \langle A^{c*} \xi, \eta \rangle \quad (3)$$

Problema de valori proprii (1) poate fi exprimată astfel:

$$A^c \psi_j = \lambda_j \psi_j \text{ sau } a^c(\psi_j, \eta) = \lambda_j \langle \psi_j, \eta \rangle \quad \forall \eta \in V \quad (4)$$

Similar, poate fi formulată problema de valori asociată funcționalei adjuncte:

$$A^{c*} \psi_j^* = \lambda_j \psi_j^* \text{ sau } a^{c*}(\psi_j^*, \eta) = \lambda_j \langle \psi_j^*, \eta \rangle \quad \forall \eta \in V \quad (5)$$

Întrucât funcționala  $a^c$  nu este simetrică, setul de funcții proprii  $\psi_j$  nu este ortogonal, o proprietate de biortogonalitate apare cu setul de funcții proprii funcționalei adjuncte.

$$\langle A^c \psi_j, \psi_k^* \rangle = \lambda_j \langle \psi_j, \psi_k^* \rangle = \langle \psi_j, A^{c*} \psi_k^* \rangle = \lambda_k \langle \psi_j, \psi_k^* \rangle \Rightarrow \langle \psi_j, \psi_k^* \rangle = \delta_{jk} \quad (6)$$

Să presupunem în continuare că funcționala perturbată depinde de cea originală după cum urmează:

$$a_p^c(\xi, \eta) = a_0^c(\xi, \eta) + h \Delta a^c(\xi, \eta) \text{ cu } h \in (0, 1) \quad (7)$$

iar funcțiile și valorile proprii  $\psi_j(h)$ ,  $\lambda_j(h)$  admit o aproximare oricât de bună prin o dezvoltare în serie de puteri a parametrului mic  $h$ .

$$\lambda_j^p = \lambda_j^{(0)} + h \lambda_j^{(1)} + h^2 \lambda_j^{(2)} + \dots + h^m \lambda_j^{(m)} + \dots \quad (8)$$

$$\psi_j^p = \psi_j^{(0)} + h \psi_j^{(1)} + h^2 \psi_j^{(2)} + \dots + h^m \psi_j^{(m)} + \dots \quad (9)$$

Înlocuirea acestor relații în (7) conduce la următoarele egalități:

$$\text{Ordinul zero: } a_{(0)}^c(\psi_j^{(0)}, \eta) = \lambda_j^{(0)} \langle \psi_j^{(0)}, \eta \rangle$$

$$\text{Ordinul 1: } a_{(0)}^c(\psi_j^{(1)}, \eta) + \Delta a^c(\psi_j^{(0)}, \eta) = \lambda_j^{(0)} \langle \psi_j^{(1)}, \eta \rangle + \lambda_j^{(1)} \langle \psi_j^{(0)}, \eta \rangle$$

$$\text{Ordinul 2: } a_{(0)}^c(\psi_j^{(2)}, \eta) + \Delta a^c(\psi_j^{(1)}, \eta) = \lambda_j^{(0)} \langle \psi_j^{(2)}, \eta \rangle + \lambda_j^{(1)} \langle \psi_j^{(1)}, \eta \rangle + \lambda_j^{(2)} \langle \psi_j^{(0)}, \eta \rangle$$

O prelucrare algebrică simplă a acestora conduce la găsirea valorilor pentru  $\lambda_j^{(1)}, \psi_j^{(1)}$  și  $\lambda_j^{(2)}$  după cum urmează:

Perturbația de ordinul 1:

$$\psi_j^{(1)} = \sum_k c_{jk}^{(1)} \psi_k^{(0)}$$

Se alege  $\eta = \psi_j^{(0)*}$

$$\sum_k c_{jk}^{(1)} a_{(0)}^c(\psi_k^{(0)}, \psi_j^{(0)*}) + \Delta a^c(\psi_j^{(0)}, \psi_j^{(0)*}) = \lambda_j^{(0)} \sum_k c_{jk}^{(1)} \langle \psi_k^{(0)}, \psi_j^{(0)*} \rangle + \lambda_j^{(1)} \langle \psi_j^{(0)}, \psi_j^{(0)*} \rangle$$

iar de aici:

$$\lambda_j^{(1)} = \Delta a^c(\psi_j^{(0)}, \psi_j^{(0)*}) \quad (10)$$

Se alege  $\eta = \psi_l^{(0)*} \quad l \neq j$

$$\sum_k c_{jk}^{(1)} a_{(0)}^c(\psi_k^{(0)}, \psi_l^{(0)*}) + \Delta a^c(\psi_j^{(0)}, \psi_l^{(0)*}) = \lambda_j^{(0)} \sum_k c_{jk}^{(1)} \langle \psi_k^{(0)}, \psi_l^{(0)*} \rangle$$

$$c_{jl}^{(1)} = \frac{\Delta a^c(\psi_j^{(0)}, \psi_l^{(0)*})}{\lambda_j^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \quad (11)$$

Perturbația de ordinul 2:

$$\eta = \psi_j^{(0)*}$$

$$a_{(0)}^c(\psi_j^{(2)}, \psi_j^{(0)*}) + \Delta a^c(\psi_j^{(1)}, \psi_j^{(0)*}) = \lambda_j^{(0)} \langle \psi_j^{(2)}, \psi_j^{(0)*} \rangle + \lambda_j^{(1)} \langle \psi_j^{(1)}, \psi_j^{(0)*} \rangle + \lambda_j^{(2)} \langle \psi_j^{(0)}, \psi_j^{(0)*} \rangle$$

$$\lambda_j^{(2)} = a_p^c(\psi_j^{(1)}, \psi_j^{(0)*}) - \lambda_j^{(1)} \langle \psi_j^{(1)}, \psi_j^{(0)*} \rangle = \sum_k c_{jk}^{(1)} [\Delta a^c(\psi_k^{(0)}, \psi_j^{(0)*}) - \Delta a^c(\psi_j^{(0)}, \psi_j^{(0)*}) \langle \psi_k^{(0)}, \psi_j^{(0)*} \rangle]$$

$$\lambda_j^{(2)} = \sum_{k \neq j} \frac{\Delta a^c(\psi_j^{(0)}, \psi_k^{(0)}) \Delta a^c(\psi_k^{(0)}, \psi_j^{(0)})}{\lambda_j^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \quad (12)$$

## §4.2 Ecuația piezoelectrică staționară liniară

Acest paragraf prezintă o demonstrație a teoremei de existență și unicitate a soluției pentru ecuația piezoelectrică staționară liniară cu condiții pe frontieră variaționale. Cursul expunerii urmează următoarele puncte:

- Ecuația piezoelectrică staționară liniară - forma concretă
- Condițiile pe frontieră
- Ecuația piezoelectrică liniară - forma abstractă
- Existența și unicitatea soluției pentru ecuația funcțională piezoelectrică liniară
- Metoda numerică de calcul a câmpului electroelastic staționar

Ecuația piezoelectrică staționară liniară - forma concretă:

Vom porni de la sistemul de ecuații ce descriu echilibrul electroelastic în solidul piezoelectric.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + e_{kji} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -e_{jki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \epsilon_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Tensorii de material  $c_{ijkl}$ ,  $e_{kji}$ ,  $\epsilon_{jk}$  îi considerăm a fi funcții reale de clasă  $C^1$  pe domeniul  $\Omega \in R^3$  mărginit, conex, cu frontiera  $fr\Omega$  regulată.

Condițiile pe frontieră:

Fie  $\Pi_{fr\Omega} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid \bigcup_{jr} S_j = fr\Omega \right\}$  o partiție a suprafeței de frontieră a domeniului.

Precizări:

- valorile impuse poartă un superscript "bară", de exemplu:  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{u}_i$
- apartenența unei mărimi de frontieră la o suprafață  $S_i \in \Pi_{fr\Omega}$  se marchează cu un subscript superior, de exemplu:  $\Phi^i$

*Câmpul elastic:*

$\sum_T^{mec} = \left\{ S_m \in \Pi_{fr\Omega} \mid (T_{ij} n_j)_{S_m} = \bar{T}_i^m \right\}$  cu  $\bar{T}_i^m: S_m \rightarrow R$  funcții continue

$\sum_u^{mec} = \left\{ S_n \in \Pi_{fr\Omega} \mid u_i|_{S_n} = \bar{u}_i^n \right\}$  cu  $\bar{u}_i^n: S_n \rightarrow R$  funcție continuă

$\sum_{Tu}^{mec} \in \Pi_{fr\Omega}$

$T_{ij}(x) n_j + k_{il}(x) u_l(x, t) = \bar{M}_i(x)$  cu  $\bar{M}_i, k_{il}: \sum_{Tu}^{mec} \rightarrow R$  funcții continue

$k_{il}(x)$  este o matrice simetrică și pozitiv definită

Câmpul electric:

$$\Sigma^{met} = \left\{ S_i \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_i} = \Phi^i \in R \right\}$$

$$\Sigma_{\Phi}^{met} = \left\{ S_p \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_p} = \bar{\Phi}^p \right\}$$

$$\Sigma_Q^{met} = \left\{ S_r \in \Pi_{fr\Omega} \mid \int_{S_r} \bar{D} \cdot \bar{n} ds = -\bar{q}^r \right\}$$

$$\Sigma_{q^c}^{met} = \left\{ S_c \in \Pi_{fr\Omega} \mid {}_c \Phi + q^c(t)(C^{-1})^c = \bar{V}^c \right\} \text{ unde } q^c = -\int_{S_c} \bar{D} \cdot \bar{n} ds, \bar{V}^c \in R \text{ și } C^c > 0$$

$$\Sigma_{\phi}^{die} = \left\{ S_k \in fr\Omega \mid \phi|_{S_k} = \bar{\phi}^k \right\} \phi^k: S_k \rightarrow R \text{ o funcție continuă}$$

$$\Sigma_{\sigma}^{die} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid -\bar{D} \cdot \bar{n}|_{S_j} = \bar{\sigma}^j \right\} \bar{\sigma}^j: S_j \rightarrow R \text{ o funcție continuă}$$

Precizarea condițiilor pe frontiera domeniului  $\Omega$  pentru câmpul electroelastic conduce la delimitarea următoarelor suprafețe:

$$\Sigma_T^{mec} \cup \Sigma_u^{mec} \cup \Sigma_{Tu}^{mec} = fr\Omega. \quad \text{- câmpul elastic}$$

$$\Sigma^{met} \cup \Sigma^{die} = fr\Omega \quad \text{- câmpul electric}$$

$$\text{cu } \Sigma^{met} = \Sigma_{\Phi}^{met} \cup \Sigma_q^{met} \cup \Sigma_{q^c}^{met} \text{ și } \Sigma^{die} = \Sigma_{\phi}^{die} \cup \Sigma_{\sigma}^{die}$$

### Ecuatia piezoelectrică staționară liniară - forma abstractă

Spațiile Hilbert abstracte  $H, V, V_0, B$  din paragraful precedent le particularizăm pentru ecuația concretă astfel:

$$H = [L^2(\Omega)]^4$$

$$V = \left\{ \xi \in [H^1(\Omega)]^4 \mid \gamma \bar{u}|_{\Sigma_u^{mec}} = 0, \gamma \phi|_{\Sigma_{\Phi}^{met} \cup \Sigma_q^{die}} = 0, \gamma \phi|_{S_j \in (\Sigma_q^{met} \cup \Sigma_{q^c}^{met})} = h_j \in R \text{ arbitrare} \right\}$$

$$V_0 = [H_0^1(\Omega)]^4, \quad B = [H^{1/2}(fr\Omega)]^4$$

Operatorul  $\gamma: V \rightarrow B$  se identifică cu aplicația de urmă pentru spațiul Sobolev  $[H^1(\Omega)]^4$  pe spațiul  $V$ . Astfel definite spațiile Hilbert și aplicația  $\gamma$  îndeplinesc condițiile teoremei Green generalizate prezentate în paragraful anterior. Pentru domeniul  $\Omega$  considerat teorema de scufundare Sobolev [21] asigură compacitatea aplicației injective  $V \rightarrow H$ .

Operatorul  $A_0: [H^2(\Omega)]^4 \equiv D(A_0) \rightarrow [L^2(\Omega)]^4$  este definit în modul următor:

$$A_0 \xi = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} L_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \xi \quad \forall \xi \in [H^2(\Omega)]^4 \quad (2)$$

$$L_{jk} = \begin{pmatrix} c_{1jk1} & c_{1jk2} & c_{1jk3} & e_{kj1} \\ c_{2jk1} & c_{2jk2} & c_{2jk3} & e_{kj2} \\ c_{3jk1} & c_{3jk2} & c_{3jk3} & e_{kj3} \\ -e_{jk1} & -e_{jk2} & -e_{jk3} & \epsilon_{jk} \end{pmatrix}$$

Aplicațiile  $\partial: D_0 \rightarrow B'$  și  $\beta(\gamma \xi): B \rightarrow B'$ ,  $g \in B'$  nu le scriem în mod explicit, ele se identifică cu ușurință direct din condițiile pe frontieră. Se obține astfel o formă abstractă a ecuației identică cu cea analizată în paragraful precedent.



$$\begin{cases} A_0 \xi = f & f \in H \\ \partial(\xi) + \beta(\gamma \xi) = g & g \in B' \end{cases} \quad (3)$$

Pentru a evita situația condițiilor pe frontieră neomogene efectuăm o schimbare de variabilă aditivă cu o funcție de omogenizare  $o: \xi = \bar{\xi} + o \quad \forall \xi \in V \quad o \in D(A_0)$  astfel încât:  $\partial(o) + \beta(\gamma o) = g$ . Se obține astfel:

$$\begin{cases} A_0 \bar{\xi} = \bar{f} & \bar{f} \in H \\ \partial(\bar{\xi}) + \beta(\gamma \bar{\xi}) = 0 \end{cases} \quad \text{cu notația } \bar{f} = f - A_0 o \quad (4)$$

### Teorema de existență și unicitate a soluției pentru ecuația funcțională piezoelectrică liniară

Paragraful precedent a demonstrat echivalența acestui tip de ecuație cu ecuația funcțională  $a^c(\xi, \eta) = a(\xi, \eta) + b(\gamma \xi, \gamma \eta) = \langle f, \eta \rangle_H \quad \forall \eta = (v_1, v_2, v_3, \psi) \in V$ .

Forma concretă a funcționalei  $a^c(\xi, \eta)$  în cazul studiat devine:

$$\begin{aligned} a^c(\hat{\xi}, \eta) &= - \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} + \varepsilon_{jk} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + e_{kpn} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma \cap \Omega} (c_{ijkl} \hat{S}_{kl} - e_{kpn} \hat{E}_k n_j) v_i ds + \int_{\Gamma \cap \Omega} (-\varepsilon_{jk} \hat{E}_j - e_{kpn} \hat{S}_{ij}) n_k \psi ds \\ a^c(\bar{\xi}, \eta) &= - \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} + \varepsilon_{jk} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + e_{kpn} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) d\Omega + \\ &- \int_{\Sigma_{\Gamma}^{mrc}} k_{il}(x) \hat{u}_i v_l ds - \sum_{S_c \in \Sigma_{\Gamma}^{mrc}} C^c \hat{\Phi}^c \Psi^c \int_{S_c} ds \end{aligned} \quad (5)$$

#### Ps Propozitie

Funcționala  $a^c(\xi, \eta)$  este continuă și eliptică pe  $V \times V$

$$a^c(\hat{\xi}, \eta) = -[w(\hat{\xi}, \eta) + r(\hat{\xi}, \eta) + b(\gamma \hat{\xi}, \gamma \eta)]$$

Demonstrație:

Studiem pe rând termenii funcționalei  $a^c(\hat{\xi}, \eta)$

- Funcționala energetică patratcă pentru solidul piezoelectric

$$w(\hat{\xi}, \eta) = \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} + \varepsilon_{jk} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d\Omega$$

Proprietăți:

simetrică:  $w(\hat{\xi}, \eta) = w(\eta, \hat{\xi})$

continuă pe  $V \times V$ :

$$|w(\hat{\xi}, \eta)| \leq \int_{\Omega} \left| c_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \right| + \left| \varepsilon_{jk} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right| d\Omega \leq K_{M}^{elast} \|\hat{u}\|_{[H^1(\Omega)]^3} \|\psi\|_{[H^1(\Omega)]^1} + K_{M}^{elect} \|\hat{\phi}\|_{[H^1(\Omega)]^1} \|\psi\|_{[H^1(\Omega)]^1}$$

$$|w(\hat{\xi}, \eta)| < \max(K_{\max}^{elast}, K_{\max}^{elect}) \|\hat{\xi}\|_{V'} \|\eta\|_{V'}$$

$$\text{pozitiv definită: } |w(\hat{\xi}, \hat{\xi})| \geq K_{\min}^{elast} \|\hat{u}\|_{[H^1(\Omega)]^3}^2 + K_{\min}^{elect} \|\hat{\phi}\|_{[H^1(\Omega)]^1}^2 > \min(K_{\min}^{elast}, K_{\min}^{elect}) \|\hat{u}\|_{V'}^2$$

- Funcționala de energie “reactivă”:

$$r(\hat{\xi}, \eta) = - \int_{\Omega} e_{kpn} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) d\Omega$$

Proprietăți:

antisimetrică:  $r(\xi, \eta) = r(\eta, \xi) \Rightarrow r(\xi, \xi) = 0$

continuă pe  $V \times V$

$$|r(\xi, \eta)| \leq \max_{kji} |e_{kji}| \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right| + \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right| d\Omega \leq 2 \max_{kji} |e_{kji}| \|u\|_{[H^1(\Omega)]^3} \|v\|_{[H^1(\Omega)]^3} \|\phi\|_{[H^1(\Omega)]} \|\psi\|_{[H^1(\Omega)]}$$

$$|r(\xi, \eta)| \leq 2 \max_{kji} |e_{kji}| \|\xi\|_V \|\eta\|_V$$

• Funcționala de frontieră:

$$b(\gamma \xi, \gamma \eta) = \int_{\Sigma_{\bar{n}}^{mec}} k_{ij}(x) \bar{n}_i v_j ds + \sum_{S_c \in \Sigma_{\bar{q}}^{mei}} C^c \bar{\Phi}^c \Psi^c \int_{S_c} ds$$

Proprietăți:

simetrică:  $b(\gamma \xi, \gamma \eta) = b(\gamma \eta, \gamma \xi)$

continuă pe  $B \times B$ :

$$|b(\gamma \xi, \gamma \eta)| \leq \int_{\Sigma_{\bar{n}}^{mec}} |k'_{ij}(x) u_i v_j| ds + \sum_{S_c \in \Sigma_{\bar{q}}^{mei}} |C^c| |\Phi^c| |\Psi^c| \int_{S_c} ds \leq \int_{\Sigma_{T_u}^{mec}} |\lambda_M^{elast}(x) u_i v_i| ds +$$

$$\max_c |C^c| \sum_{S_c \in \Sigma_{\bar{q}}^{mei}} |\Phi^c| |\Psi^c| \int_{S_c} ds \leq \sup_{x \in \Sigma_{T_u}^{mec}} |\lambda_M^{elast}(x)| \int_{\Sigma_{T_u}^{mec}} |u_i v_i| ds + \max_c |C^c| \sum_{S_c \in \Sigma_{\bar{q}}^{mei}} |\Phi^c| |\Psi^c| \int_{S_c} ds$$

$$|b(\gamma \xi, \gamma \eta)| \leq K_b^{elast} \|\gamma u\|_{[H^1(fr\Omega)]^3} \|\gamma v\|_{[H^1(fr\Omega)]^3} + K_b^{elect} \|\gamma \phi\|_{[H^1(fr\Omega)]} \|\gamma \xi\|_{[H^1(fr\Omega)]} \leq \max(K_b^{elast}, K_b^{elect}) \|\gamma \xi\|_B \|\gamma \eta\|_B$$

$\lambda_{\max}^{elast}(x)$  este cea mai mare dintre valorile proprii tensorului  $k_{ij}(x)$

eliptică pe  $B \times B$

$|b(\gamma \xi, \gamma \xi)| \geq \min(K_{b \min}^{elast}, K_{b \min}^{elect}) \|\gamma \xi\|_B^2$  - șirul inegalităților urmează o cale analogă celei utilizată pentru continuitate

Continuitatea și elipticitatea funcționalei  $a^c(\xi, \eta) = -[w(\xi, \eta) + r(\xi, \eta) + b(\gamma \xi, \gamma \eta)]$  pe  $V \times V$  se verifică cu ușurință pe baza proprietăților demonstrate pentru fiecare din termeni și a continuității aplicației  $\gamma$ .

•

Proprietățile de continuitate și elipticitate pe  $V \times V$  ale funcționalei  $a^c(\xi, \eta)$  asigură, prin lema Lax-Milgram, existența și unicitatea soluției ecuației funcționale,

$$a^c(\bar{\xi}, \eta) = \langle \bar{f}, \eta \rangle_H \quad \forall f \in H \text{ pentru } \xi \in D(A^c) \text{ și implicit a sistemului: } \begin{cases} A_0 u = f \\ \partial(u) + \beta(\gamma u) = g' \end{cases}$$

Reamintim un rezultat important al paragrafului precedent:

$$D(A^c) = \{u \in D(A_0) \mid \partial u + \beta(\gamma u) = 0\}$$

### Metoda numerică de estimare a câmpului electroelastic staționar

Metoda clasică de rezolvare numerică a ecuațiilor funcționale de tipul  $a^c(\xi, \eta) = \langle f, \eta \rangle_H$  este de a proiecta funcțiile  $\xi, \eta, f$  într-un spațiu finit dimensional  $V_N \subset V$  și de estimare a unei soluții  $\xi_N$  în acest spațiu. Pentru funcționale  $a^c(\xi, \eta)$  continue și eliptice se poate demonstra într-o manieră similară cazului infinit dimensional, existența și unicitatea soluției problemei puse în

spațiul aproximant  $V_N$  precum și convergența șirului soluțiilor parțiale  $\xi_N$  pentru  $N \rightarrow \infty$  către soluția din  $V$ . În continuare se va prezenta aplicarea metodei în cazul concret al funcționalei piezoelectrice liniare urmărindu-se a se evidenția similaritatea formală de abordare a acestei probleme numerice cu aceea a analizei spectrale a operatorului electroelastic, analiza făcută în paragraful 3.3

Să considerăm o bază  $\{\xi^\alpha\}_{\alpha=1 \dots N}$  a spațiului  $V_N$ . Un vector arbitrar  $\xi \in V_N$  în acest spațiu

se scrie ca:  $\xi = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \xi^\alpha$ , ecuația funcțională în spațiul  $V_N$  fiind echivalentă cu următorul sistem

liniar de ecuații:

$$\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha a^c(\xi^\alpha, \xi^\beta) = \langle f, \xi^\beta \rangle_H \quad \beta = 1 \dots N \quad (6)$$

Acest sistem ia forma particulară următoare pentru funcționala piezoelectrică liniară:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \int_{\Omega} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial \xi_l^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial x_j} + e_{kji} \left( \frac{\partial \xi_4^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial x_j} - \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_4^\beta}{\partial x_j} \right) + \epsilon_{kj} \frac{\partial \xi_4^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_4^\beta}{\partial x_j} \right] d\Omega + \\ & + \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \int_{\Sigma_{T_u}^{mec}} C_{il}^{elast}(x) \xi_l^\alpha \xi_i^\beta ds + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{S_c \in \Sigma_{T_u}^{elec}} C^{elect} \gamma(\xi_4^\alpha) \gamma(\xi_4^\beta) \int_{S_c} ds = \langle f, \xi^\beta \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

Notațiile următoare permit o scriere condensată a acestui sistem astfel:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial \xi_l^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial x_j} + e_{kji} \left( \frac{\partial \xi_4^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial x_j} - \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_4^\beta}{\partial x_j} \right) + \epsilon_{kj} \frac{\partial \xi_4^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_4^\beta}{\partial x_j} \right] d\Omega \stackrel{not}{=} w_{\alpha\beta}^{volum} \\ & + \sum_{S_c \in \Sigma_{T_u}^{mec}} C^c \gamma(\xi_4^\alpha) \gamma(\xi_4^\beta) \int_{S_c} ds + \int_{\Sigma_{T_u}^{mec}} k_{il}(x) \xi_l^\alpha \xi_i^\beta ds \stackrel{not}{=} w_{\alpha\beta}^{suprafata} \\ & \langle f, \xi^\beta \rangle \stackrel{not}{=} f_\beta \\ & \sum_{\alpha=1}^N \left( w_{\alpha\beta}^{volum} + w_{\alpha\beta}^{suprafata} \right) p_\alpha = f_\beta \text{ sau, cu o notație matricială: } W_N P_N = F_N \end{aligned} \quad (8)$$

Întrucât spațiul  $V$  are o structură cuadridimensională  $(\bar{u}, \phi)$ ,  $V = V_{u_1} \cup V_{u_2} \cup V_{u_3} \cup V_\phi$  pentru componentele elastice și cea electrică nefiind impuse condiții la frontieră similare, un mod comod de definire a unei baze pe el este de a construi o bază separată pentru partea elastică și o alta pentru potențialul electric. Fiecare din aceste baze are o structură tridimensională datorată domeniului  $\Omega$ . Acest mod de definire a bazei pentru spațiul  $V_N$  conduce la o structură de matrice mai simplă (matrice rară) pentru  $W_N$ . Prin adoptarea unei notații multiindex pentru numerele  $\alpha$  și  $\beta$ , termenii nuli în structura elementelor  $w_{\alpha\beta}^{volum}$  și  $w_{\alpha\beta}^{suprafata}$  devin ușor vizibili:

$$\alpha = s\bar{m} = s m_1 m_2 m_3 \quad s = 1 \dots 4 \quad m_i = 1 \dots T$$

$$\beta = r\bar{n} = s n_1 n_2 n_3$$

“s” cuantifică structura cuadridimensională a spațiului  $V$

“(m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub>, m<sub>3</sub>)” modelează structura tridimensională a domeniului  $\Omega$

“T” este numărul de aproximare pe o dimensiune a spațiului  $V$ .

Cardinalul bazei  $\xi_N$  în funcție de aceste dimensiuni este:  $4T^3$

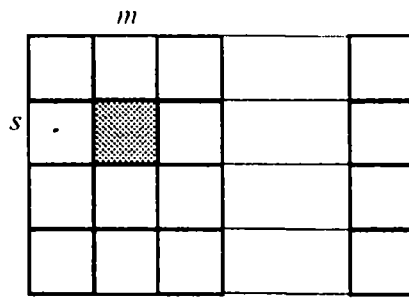


Figura 1 Explicativă pentru structura bazei spațiului aproximant  $V_N$

Elementele bazei  $\{\xi^{s\bar{m}}\}$  vor fi de forma:

- $(\xi_1^{1\bar{m}}, 0, 0, 0)$  pentru componenta elastică  $u_1$  -  $\xi_1^{1\bar{m}}$  baza pentru  $V_{u_1}$
- $(0, \xi_2^{2\bar{m}}, 0, 0)$  pentru componenta elastică  $u_2$  -  $\xi_2^{2\bar{m}}$  baza pentru  $V_{u_2}$
- $(0, 0, \xi_3^{3\bar{m}}, 0)$  pentru componenta elastică  $u_3$  -  $\xi_3^{3\bar{m}}$  baza pentru  $V_{u_3}$
- $(0, 0, 0, \xi_4^{4\bar{m}})$  pentru componenta potențialului electric  $\phi$  -  $\xi_4^{4\bar{m}}$  baza pentru  $V_\phi$

Desenul din figura 1 sugerează prin hașura un element al bazei  $\{\xi^{s\bar{m}}\}$  nenul pentru  $s$  și  $\bar{m}$  fixați. Elementele constitutive ale matricii  $W_N$  devin în această situație:

$$\int_{\Omega} \left[ c_{ijkl} \delta_{sl} \delta_{ri} \frac{\partial \xi_4^{s\bar{m}}}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_4^{r\bar{n}}}{\partial x_j} + e_{kji} \left( \frac{\partial \xi_4^{s\bar{m}}}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_4^{r\bar{n}}}{\partial x_j} \delta_{s4} \delta_{r4} - \frac{\partial \xi_4^{s\bar{m}}}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_4^{r\bar{n}}}{\partial x_j} \delta_{sl} \delta_{r4} \right) + \epsilon_{kj} \delta_{s4} \delta_{r4} \frac{\partial \xi_4^{s\bar{m}}}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_4^{r\bar{n}}}{\partial x_j} \right] d\Omega = w_{s\bar{m}r\bar{n}}^{volum}$$

$$+ \sum_{S_r \in \Sigma_{\phi}^{me}} C_c^{-1} \delta_{s4} \delta_{r4} \gamma(\xi_4^{s\bar{m}}) \gamma(\xi_4^{r\bar{n}}) \int_{S_r} ds + \int_{\Sigma_{\phi}^{me}} k_{il}(x) \delta_{sl} \delta_{rn} \xi_4^{s\bar{m}} \xi_4^{r\bar{n}} ds = w_{s\bar{m}r\bar{n}}^{sup\ ra\hat{f}ata}$$

Principalul dezavantaj al acestei metode față de abordarea calcului numeric cu ajutorul funcționalei piezoelectrice de tip Lagrange constă în necesitatea ca funcțiile bazei spațiului aproximant  $V_N$  să îndeplinească condițiile de definiție ale spațiului  $V$ :

$$V = \left\{ \xi \in [H^1(\Omega)]^4 \mid \gamma \bar{u} \Big|_{\Sigma_{\phi}^{mec}} = 0, \gamma \phi \Big|_{\Sigma_{\phi}^{me} \cup \Sigma_{\phi}^{de}} = 0, \gamma \phi \Big|_{S_j \in (\Sigma_{\phi}^{me} \cup \Sigma_{\phi}^{de})} = h_j \in R \text{ arbitrare} \right\}$$

Acest dezavantaj poate însă ridicat cu ușurință utilizând metoda indicată în paragraful 3.3 în cazul analizei spectrale a operatorului elastic. Este vorba de lărgirea spațiului de definiție la întreg  $[H_1(\Omega)]^4$  prin impunerea unor condiții pe frontieră de tipul:

$$T_{ij}(x) n(x)_j + k_{il}(x) u_l(x, t) = 0 \quad \text{pentru } x \in \Sigma_{\phi}^{mec}$$

$$\Phi_c + q_c(t) (C_c^{-1}) = 0 \quad \text{pentru } x \in \Sigma_{\phi}^{de} \cup \Sigma_{\phi}^{me}$$

cu valori foarte mari ale coeficienților  $k_{il}$  și  $C_c^{-1}$  astfel încât să forțăm valori reduse ale deplasărilor elastice respectiv a potențialului electric în aceste zone.

În afara unor configurații de geometrie și metalizări simple pentru dispozitivul piezoelectric care să conducă la situații de condiții omogene pe frontieră (în aceste situații pot fi utilizate baze armonice, Bessel, Chebisev, etc) problema necesită baze de aproximare de tip element finit. Efortul de calcul, chiar pentru discretizări modeste ale domeniului,  $\Omega$  este însă deosebit de mare. Pentru un  $T-10$  spre exemplu matricea rezolventă  $W_N$  are  $4000 \times 4000$  elemente.

### §4.3 Ecuația piezoelectrică staționară patratrică

În acest paragraf este demonstrată existența și unicitatea soluției pentru ecuația piezoelectrică neliniară ce apare prin aproximarea cubică a energiei piezoelectrice. Condițiile impuse pe frontiera solidului piezoelectric sunt presupuse a nu depăși un prag energetic determinat explicit în cursul demonstrației.

Pentru a putea utiliza teoria de perturbație piezoelectrică liniară în situația unor câmpuri elastice sau electrice staționare supraimpuse oscilațiilor electroelastice de mică amplitudine este necesar calculul acestor câmpuri staționare în situația aproximării legilor de material  $T_{ij}(S_{kl}, E_k)$ ,  $D_i(S_{kl}, E_j)$  prin polinoame de un grad mai mare ca unu. Un compromis acceptabil între modelarea cât mai precisă a fenomenului fizic și complexitatea matematică îl constituie aproximările patratrice ale acestor legi:

$$T_{ij} \approx c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij}^0 E_k + \frac{1}{2} c_{ijklm} S_{kl} S_{mn} + g_{mijkl} S_{kl} E_m \quad (1)$$

$$D_k \approx \varepsilon_{kj} E_j + e_{kji} S_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kjil} E_j E_l + f_{kmij} E_m S_{ij}$$

Din punct de vedere fizic, neliniaritatea de tip par a fenomenului piezoelectric apare în proporție covârșitoare datorită termenului de cuplaj patratric elastic  $\frac{1}{2} c_{ijklmn} S_{kl} S_{mn}$  restul termenilor conducând la efecte mult mai slabe și fiind de obicei neglijați, aceste considerații au fost discutate mai în detaliu în paragrafele 1.2 și 2.3.2. Cu precădere din rațiuni de simetrie matematică a funcționalelor ce sunt utilizate în cursul demonstrației vom introduce explicit și termenul de cuplaj electric  $\frac{1}{2} \varepsilon_{kijl}^0 E_j E_l$ . Relațiile de aproximare a fenomenului electroelastic iau în această situație forma:

$$T_{ij} \approx c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k + \frac{1}{2} c_{ijklm} S_{kl} S_{mn} \quad (2)$$

$$D_k \approx \varepsilon_{kj} E_j + e_{kji} S_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kjil} E_j E_l$$

Densitatea de volum a energiei electroelastice corespunzătoare acestor relații este identică cu cea ce s-ar obține prin considerarea și a termenilor de cuplaj  $g_{mijkl} S_{kl} E_m$  și  $f_{kmij} E_m S_{ij}$ .

$$w = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{6} c_{ijklmn} S_{ij} S_{kl} S_{mn} + \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} E_i E_j E_k$$

Înainte de a începe cursul propriuzis al demonstrației este necesar să facem o observație imediată și deosebit de importantă asupra acestei forme polinomiale: ea nu este pozitiv definită pentru orice valori ale variabilelor  $E_i$  și  $S_{ij}$  așa cum este cazul în situația aproximării liniare.

Această aproximație cubică reușește o aproximare mai bună în jurul originii însă pierde proprietatea esențială oricărei forme energetice de  $\alpha$  fi pozitiv definită. Aceasta particularitate va provoca absența unei teoreme de existență și unicitate a soluțiilor în situația unor condiții pe frontieră arbitrare; intuitiv aceste soluții se vor găsi într-un interval energetic cuprins între origine și un prag aflat în strânsă corelație cu zona de pozitivitate a acestei forme energetice.

În consecința acestei scurte introduceri, ecuația neliniară staționară patrică ce o vom studia pe parcursul acestui paragraf este următoarea:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + c_{ijklmn} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -e_{jki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \epsilon_{kj} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \epsilon_{kjm} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_m} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Tensorii de material  $c_{ijkl}$ ,  $c_{ijklmn}$ ,  $e_{kji}$ ,  $\epsilon_{jk}$ ,  $\epsilon_{kji}$  sunt presupuși a fi funcții reale de clasă  $C^1$  pe domeniul  $\Omega \in R^3$  mărginit, conex, cu frontiera  $fr\Omega$  regulată.

Acestei ecuații îi vom asocia un set de condiții pe frontieră pentru câmpul elastic și electric, acestea fiind considerate având valori impuse pe diferite suprafețe  $fr\Omega$  - condiții mixte Neuman-Dirichlet

### Condițiile pe frontieră

#### *Câmpul elastic:*

- zona în care sunt specificate tensiunile mecanice:

$$\sum_T^{mec} = \left\{ S_m \in \Pi_{fr\Omega} \mid (T_{ij} n_j)_{S_m} = \bar{T}_i^m \right\} \text{ cu } \bar{T}_i^m : S_m \rightarrow R \text{ funcții continue}$$

- zona în care sunt impuse deplasările elastice

$$\sum_u^{mec} = \left\{ S_n \in \Pi_{fr\Omega} \mid u_i|_{S_n} = \bar{u}_i^n \right\} \text{ cu } \bar{u}_i^n : S_n \rightarrow R \text{ funcție continuă}$$

$$\sum_T^{mec} \cup \sum_u^{mec} = fr\Omega$$

#### *Câmpul electric:*

- zona echipotențială electric în care există un strat infinit subțire de conductor ideal

$$\sum^{met} = \left\{ S_i \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_i} = \Phi^i \in R \right\}$$

potențialul electric impus

$$\sum_{\Phi}^{met} = \left\{ S_p \in \Pi_{fr\Omega} \mid \Phi|_{S_p} = \bar{\Phi}^p \right\}$$

sarcina electrică impusă:

$$\sum_Q^{met} = \left\{ S_r \in \Pi_{fr\Omega} \mid \int_{S_r} \bar{D} \bar{n} ds = -\bar{Q}^r \right\}$$

• zona dielectrică

impusă fie o funcție de potențial

$$\sum_{\phi}^{die} = \left\{ S_k \in fr\Omega \mid \phi|_{S_k} = \bar{\phi}^k \right\} \phi^k: S_k \rightarrow R \text{ o funcție continuă}$$

impusă fie o distribuție de sarcină electrică superficială

$$\sum_{\sigma}^{die} = \left\{ S_j \in fr\Omega \mid -\bar{D} \cdot \bar{n}|_{S_j} = \bar{\sigma}^j \right\} \bar{\sigma}^j: S_j \rightarrow R \text{ o funcție continuă}$$

$$\sum^{met} \cup \sum^{die} = fr\Omega$$

$$\sum^{met} = \sum_{\phi}^{met} \cup \sum_q^{met}, \quad \sum^{die} = \sum_{\phi}^{die} \cup \sum_{\sigma}^{die}$$

Ecuatia piezoelectrică staționară patratrică - forma abstractă

Pentru a demonstra existența și unicitatea soluției ecuației (3) împreună cu condițiile pe frontieră expuse vom abstractiza această problemă într-un mod consecvent cu cel utilizat pe parcursul acestui capitol. Următoarele noțiuni se definesc și sunt notate identic cu cele din paragraful 4.2:

i. spațiile Hilbert abstracte  $H, V_0, B$

ii. operatorii  $L_0$  și  $\gamma: V \rightarrow B$

Spațiul  $V$  se definește astfel:

$$V = \left\{ \xi \in [H^1(\Omega)]^4 \mid \gamma(\bar{u})|_{\sum_{ii}^{met}} = 0, \gamma(\phi)|_{\sum_{\phi}^{met} \cup \sum_{\phi}^{die}} = 0, \gamma(\phi)|_{S_j \in \sum_q^{met}} = h_j \in R \text{ arbitrare} \right\}$$

Aplicațiile  $\partial: D_0 \rightarrow B'$  și  $g \in B'$  se identifică cu ușurință direct din condițiile pe frontieră.

Operatorul neliniar  $Q: [H^2(\Omega)]^4 \equiv D(Q) \rightarrow [L^2(\Omega)]^4$  este definit astfel:

$$Q(\xi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (u_l, \phi) L_{jkm} \begin{pmatrix} u_n \\ \phi \end{pmatrix} \right] \quad \forall \xi = (u_1, u_2, u_3, \phi) \in [H^2(\Omega)]^4 \quad (4)$$

$$Q_{jkm} = \begin{pmatrix} c_{1jk1m1} & c_{1jk1m2} & c_{1jk1m3} & 0 \\ c_{2jk2m1} & c_{2jk2m2} & c_{2jk2m3} & 0 \\ c_{3jk3m1} & c_{3jk3m2} & c_{3jk3m3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{jkm} \end{pmatrix} \quad (5)$$

matricea corespunzătoare cuplajului patratric

Cu aceste notații putem formula după cum urmează ecuația abstractă:

$$\begin{cases} L_0 \xi + Q\xi = 0 \\ \partial(\xi) = g \quad g \in B' \end{cases} \quad (6)$$

Pentru a evita situația condițiilor pe frontieră neomogene facem o schimbare de variabilă aditivă cu o funcție de omogenizare  $o$ ,  $\xi = \bar{\xi} + o \quad \forall \xi \in V, o \in [H^2(\Omega)]^4$  astfel încât:  $\partial(o) = g$ .



Această schimbare de variabilă conduce la apariția unor termeni suplimentari în ecuația inițială.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\hat{u}_l + o_l, \hat{\phi} + o_4) Q_{jkm} \left( \begin{matrix} \hat{u}_n + o_n \\ \hat{\phi} + o_4 \end{matrix} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\hat{u}_l, \hat{\phi}) Q_{jkm} \left( \begin{matrix} \hat{u}_n \\ \hat{\phi} \end{matrix} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (o_l, o_4) Q_{jkm} \left( \begin{matrix} \hat{u}_n \\ \hat{\phi} \end{matrix} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\hat{u}_l, \phi) Q_{jkm} \left( \begin{matrix} o_n \\ o_4 \end{matrix} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (o_l, o_4) Q_{jkm} \left( \begin{matrix} o_n \\ o_4 \end{matrix} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (o_l, o_4) Q_{jkm} \left( \begin{matrix} \hat{u}_n \\ \hat{\phi} \end{matrix} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\hat{u}_l, \phi) Q_{jkm} \left( \begin{matrix} o_n \\ o_4 \end{matrix} \right) \right]^{not} &= L^{om} \xi \end{aligned} \quad (7)$$

Sistemul de ecuații la care ajungem după această schimbare de variabilă este următorul:

$$\begin{cases} L_0 \bar{\xi} + L^{om} \bar{\xi} + Q \bar{\xi} = \bar{f} & \bar{f} \in H \\ \partial(\bar{u}) = 0 \end{cases} \quad \text{cu notația } \bar{f} = f - L_0 o - Q o \quad (8)$$

Procedăm în maniera descrisă în primul paragraf pentru a ajunge la ecuația variațională echivalentă cu acest sistem de ecuații (produsele scalare  $\langle \cdot \rangle$  sunt în spațiul  $H$ ).

$$\begin{aligned} \langle L_0 \bar{\xi}, \zeta \rangle + \langle L^{om} \bar{\xi}, \zeta \rangle + \langle Q \bar{\xi}, \zeta \rangle &= \langle \bar{f}, \zeta \rangle \quad \forall \zeta \in V \\ a(\hat{\xi}, \zeta)^{not} &= l(\hat{\xi}, \zeta) + l^{om}(\hat{\xi}, \zeta) + q(\hat{\xi}, \hat{\xi}, \zeta) \\ a(\hat{\xi}, \zeta) &= \langle \hat{f}, \zeta \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

Explicit, componentele funcționalei  $a(\hat{\xi}, \zeta)$  sunt următoarele:

- funcționala piezoelectrică biliniară

$$l(\xi, \zeta) = \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_k} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{jk} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_4}{\partial x_k} d\Omega - \int_{\Omega} e_{kji} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_4}{\partial x_k} \right) d\Omega \quad (10)$$

funcționala piezoelectrică triliniară

$$q(\xi, \eta, \zeta) = \int_{\Omega} c_{ijklmn} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{jkm} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_4}{\partial x_m} \frac{\partial \zeta_4}{\partial x_k} d\Omega \quad (11)$$

funcționala piezoelectrică ce apare din omogenizarea condițiilor pe frontieră cu ajutorul funcției  $o$  poate fi rescrisă într-o formă redusă datorită simetriei existente în matricile  $Q_{jkm}$

$$l^{om}(\xi, \zeta) = q(o, \xi, \zeta) + q(\xi, o, \zeta) = 2q(o, \xi, \zeta) \quad (12)$$

Următoarele proprietăți pentru funcționalele  $l$  și  $q$  au fost demonstrate în paragraful 4.2 sau sunt ușor vizibile și nu mai recurgem la demonstrarea lor.

i) Funcționala  $I(\xi, \zeta)$  este continuă și eliptică pe  $V \times V$

$$|I(\xi, \zeta)| \leq K'_{\max} \|\xi\|_{V'} \|\zeta\|_{V'}$$

$$|I^{om}(\xi, \zeta)| \geq K'_{\min} \|\xi\|_{V'} \|\zeta\|_{V'}$$

ii) Funcționala trilineară  $q(\xi, \eta, \zeta) : V \times V \times V \rightarrow R$  este continuă pe  $V \times V \times V$

$$|q(\xi, \eta, \zeta)| \leq K^q_{\max} \|\xi\|_{V'} \|\eta\|_{V'} \|\zeta\|_{V'}$$

$$q(\xi, \xi, \zeta) = \langle Q(\xi), \zeta \rangle_{V'} \quad Q : V' \rightarrow V' \text{ continuu}$$

iii) Funcționala biliniară  $I^{om}(\xi, \zeta) : V \times V \rightarrow R$  este continuă și eliptică pe  $V \times V$

$$|I^{om}(\xi, \zeta)| \leq 2K^q_{\max} \|o\|_{V'} \|\xi\|_{V'} \|\zeta\|_{V'}$$

$$|I^{om}(\xi, \zeta)| \geq K^{om}_{\min} \|o\|_{V'} \|\xi\|_{V'} \|\zeta\|_{V'}$$

În consecință, funcționala  $a(\xi, \zeta)$  este continuă:

$$|a(\xi, \zeta)| \leq K^a_{\max} \|\xi\|_{V'} \|\zeta\|_{V'}$$

(13)

$$K^a_{\max} = \max(K'_{\max}, 2K^q_{\max} \|o\|_{V'}, K^q_{\max})$$

Putem defini astfel un operator continuu neliniar  $A : V' \rightarrow V'$  plecând de la funcționala  $a$

$$a(\xi, \zeta) = \langle A\xi, \zeta \rangle_{V'}$$

(14)

Pentru demonstrarea teoremei de existență a soluțiilor vom face apel la teorema lui Browder.

Teorema lui Browder [21] sau [35]

Fie  $A : V_n \rightarrow V_n$  un operator neliniar continuu pe un spațiu linear  $V_n$  finit dimensional.

Dacă pentru orice  $\xi \in V_n$  cu proprietatea că  $\|\xi\|_{V_n} = p > 0$  și orice  $\zeta \in V_n$  are loc inegalitatea  $\langle A\xi, \zeta \rangle_{V_n} - \langle f, \zeta \rangle_{V_n} > 0$  atunci există cel puțin un  $\xi \in V_n$  cu proprietatea că  $\|\xi\|_{V_n} < p$  pentru care  $A\xi = f$

Teorema poate fi privită ca o generalizare infinit dimensională a teoremei lui Darboux pentru funcții continue.

Fie  $V_n$  un subspațiu linear, închis, finit dimensional al spațiului de definiție  $V$  pentru funcționala  $a$ . Notăm cu  $\xi_n$  proiecția unei funcții  $\xi \in V$  în acest spațiu și cu  $f_n$  proiecția termenului liber  $f$  (privit ca o funcțională din  $H' \subset V'$ ).

Verificăm condițiile teoremei lui Browder pentru funcționala  $a$  în spațiul  $V_n$  făcând apel la următoarele inegalități:

$$\begin{aligned} a(\xi_n, \xi_n) - \langle \hat{f}_n, \xi_n \rangle &> I(\xi_n, \xi_n) + I^{om}(\xi_n, \xi_n) - |q(\xi_n, \xi_n, \xi_n)| - \|\hat{f}_n\|_{V'} \|\xi_n\|_{V'} > \\ &> (K'_{\min} + K^{om}_{\min} \|o\|_{V'}) \|\xi_n\|_{V'}^2 - K^q_{\max} \|\xi_n\|_{V'}^3 - \|\hat{f}_n\|_{V'} \|\xi_n\|_{V'} \end{aligned}$$

și deci,

$$-K^q_{\max} \|\xi_n\|_{V'}^2 + (K'_{\min} + K^{om}_{\min} \|o\|_{V'}) \|\xi_n\|_{V'} - \|\hat{f}_n\|_{V'} > 0 \quad (15)$$

Inegalitatea (15) este valabilă dacă  $\|\xi_n\|_{V_n} \in (p_{\min}, p_{\max})$ , valorile  $p_{\min}$  și  $p_{\max}$  fiind definite astfel:

$$p_{\min} = \frac{K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'}}{2K_{\max}^q} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{K_{\max}^q \|\hat{f}_n\|_{V'}}{K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'}}} \right) \text{ și } p_{\max} = \frac{K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'}}{2K_{\max}^q} \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{K_{\max}^q \|\hat{f}_n\|_{V'}}{K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'}}} \right)$$

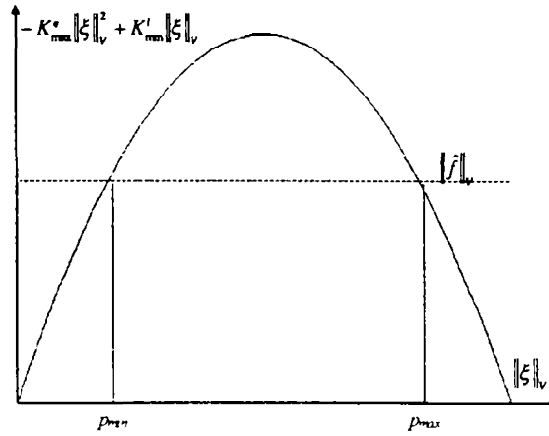


Figura 1  
Ilustrativă pentru inegalitatea (15)

Condiția ca intervalul  $(p_{\min}, p_{\max})$  să nu fie vid este și condiția de existență a soluțiilor în spațiul  $V_n$ :

$$\|\hat{f}_n\|_{V'} < \frac{(K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'})}{4K_{\max}^q} \quad (16)$$

Revenind acum la teorema Browder se poate trage următoarea concluzie: alegând un  $p \in (p_{\min}, p_{\max})$  rezultă că în intervalul  $(0, p)$  există cel puțin o soluție pentru ecuația funcțională  $a(\xi_n, \zeta_n) = \langle \hat{f}_n, \zeta_n \rangle$  în spațiul  $V_n$ .

Pentru a demonstra unicitatea soluției, vom presupune existența a două soluții distincte  $\xi_{sol}^{(1)}, \xi_{sol}^{(2)}$ . Această ipoteză implică satisfacerea următoarei relații:

$$a(\xi_{sol}^{(1)}, \eta) - a(\xi_{sol}^{(2)}, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in V_n \quad (17)$$

Alegem  $\eta = \xi_{sol}^{(2)} - \xi_{sol}^{(1)}$

$$\begin{aligned} & l(\xi_{sol}^{(1)}, \eta) - l(\xi_{sol}^{(2)}, \eta) + l^{om}(\xi_{sol}^{(1)}, \eta) - l^{om}(\xi_{sol}^{(2)}, \eta) + q(\xi_{sol}^{(1)}, \xi_{sol}^{(1)}, \eta) - q(\xi_{sol}^{(2)}, \xi_{sol}^{(2)}, \eta) = \\ & = l(\xi_{sol}^{(1)} - \xi_{sol}^{(2)}, \eta) + l^{om}(\xi_{sol}^{(1)} - \xi_{sol}^{(2)}, \eta) + q(\xi_{sol}^{(2)} - \xi_{sol}^{(1)}, \xi_{sol}^{(2)}, \eta) + q(\xi_{sol}^{(1)}, \xi_{sol}^{(2)} - \xi_{sol}^{(1)}, \eta) \geq \\ & \geq (K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'}) \|\eta\|_{V'}^2 - |q(\eta, \xi_{sol}^{(2)}, \eta)| - |q(\xi_{sol}^{(1)}, \eta, \eta)| > (K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'}) \|\eta\|_{V'}^2 - 2p_{\min} K_{\max}^q \|\eta\|_{V'}^2 = \\ & \|\eta\|_{V'}^2 \left[ (K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'}) - 2K_{\max}^q \frac{(K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'})}{2K_{\max}^q} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{K_{\max}^q}{(K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'})^2} \|\hat{f}_n\|} \right) \right] = \\ & = \|\eta\|_{V'}^2 (K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'}) \sqrt{1 - 4 \frac{K_{\max}^q}{(K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'})^2} \|\hat{f}_n\|} > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Această ultimă relație infirmă ipoteza celor două soluții distincte, unicitatea soluției pentru intervalul energetic  $\|\xi_{sol}\|_{V'} \in (0, p)$  fiind demonstrată.

Să analizăm mai în detaliu mărginirea acestei soluții. O inegalitate ce este necesar a fi îndeplinită de funcția  $\xi_{sol}$  este următoarea:

$$\begin{aligned} & \left( K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'} \right) \|\xi_{sol}\|_{V'}^2 - K_{\max}^q \|\xi_{sol}\|_{V'}^3 \leq \left[ l(\xi_{sol}, \xi_{sol}) + l^{om}(o, \xi_{sol}, \xi_{sol}) \right] + q(\xi_{sol}, \xi_{sol}, \xi_{sol}) = \\ & = \langle f_n, \xi_{sol} \rangle_{V'} < \|f_n\|_{V'} \|\xi_{sol}\|_{V'} \\ & \left( K_{\min}^l \|\xi_{sol}\|_{V'} + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'} \right) \|\xi_{sol}\|_{V'} - K_{\max}^q \|\xi_{sol}\|_{V'}^2 - \|f\|_{V'} < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{Această inegalitate este adevărată dacă } \|\xi_{sol}\|_{V'} \in (0, p_{\min}) \cup (p_{\max}, \infty) \quad (20)$$

Această ultimă relație stabilește intervalul în care există o soluție pentru ecuația funcțională  $a(\xi_n, \zeta_n) = \langle \hat{f}_n, \zeta_n \rangle$  ca fiind  $(0, p_{\min})$ .

Dacă considerăm în continuare o iterare a problemei  $a(\xi_n, \zeta_n) = \langle \hat{f}_n, \zeta_n \rangle$  într-un spațiu  $V_n$  din ce în ce mai amplu vom obține un șir  $\{\xi_{sol}\}_n$  mărginit în spațiul  $V$ . Întrebarea uzuală în acest punct al demonstrației este dacă acest șir tinde la o soluție pentru ecuația funcțională analizată în spațiul  $V$  atunci când spațiile aproximante  $V_n$  tind la o acoperire densă a spațiului  $V$ .

Mărginirea șirului  $\{\xi_{sol}\}_n$  în  $V$  și proprietatea acestui spațiu de a fi scufundat în spațiul pivot  $H$  printr-o aplicație injectivă compactă conduc la următoarele două proprietăți [21]:

- i) convergența acestuia în topologia \*slabă pe  $V$
- ii) din șirul infinit  $\{\xi_{sol}\}_n$  mărginit în  $V$  se poate extrage cel puțin un subșir convergent în  $H$ .

Mai rămâne să demonstrăm că limita șirului  $\{\xi_{sol}\}_n$  este o soluție pentru ecuația studiată.

Fie  $w_k$  elementele unei baze în  $V_n$ . Funcțiile  $\xi_{sol}, \xi_{sol}^n, w_k$  sunt mărginite în  $V$  iar relațiile următoare sunt o consecință a continuității funcționalelor  $l$  și  $q$ :

$$\begin{aligned} & l(\xi_{sol}, w_k) - l(\xi_{sol}^n, w_k) = l(\xi_{sol} - \xi_{sol}^n, w_k) \leq K_{\max}^l \|\xi_{sol} - \xi_{sol}^n\|_{V'} \|w_k\|_{V'} \rightarrow 0 \\ & |q(\xi_{sol}, \xi_{sol}, w_k) - q(\xi_{sol}^n, \xi_{sol}^n, w_k)| = |q(\xi_{sol} - \xi_{sol}^n, \xi_{sol}, w_k) + q(\xi_{sol}^n, \xi_{sol} - \xi_{sol}^n, w_k)| \leq \\ & \leq 2K_{\max}^q \|\xi_{sol} - \xi_{sol}^n\|_{V'} \|\xi_{sol}\|_{V'} \|w_k\|_{V'} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Printr-un argument întrutotul similar celui prezentat în relațiile (17-18) limita  $\xi_{sol}$  este unică.

În final să reamintim un rezultat important al acestei demonstrații și anume inegalitatea energetică ce trebuie îndeplinită pentru ca soluția ecuației (14) să existe și să fie unică:

$$\|f - L_o o - Qo\|_{V'} - \frac{\left( K_{\min}^l + K_{\min}^{om} \|o\|_{V'} \right)}{4K_{\max}^q} < 0 \quad (22)$$

Având în vedere modul în care a fost definită funcția de omogenizare  $o$  (energia acestei funcții este întotdeauna mai mare decât energia funcțiilor impuse pe frontiera solidului piezoelectric), devine evidentă implicarea energiei condițiilor pe frontieră în această inegalitate.

În acest paragraf final vom rezuma parcursul tezei, reliefând contribuțiile pe care aceasta le aduce, în opinia autorului, la analiza influenței factorilor fizici externi asupra frecvențelor proprii de vibrație ale rezonatoarelor piezoelectrice cu undă de volum, prin metode generale de perturbație spectrală. Întrucât studiul acestui subiect specific a generat o serie de rezultate originale ce vizează domeniul mai larg al modelării dinamicii electroelastice în solidul piezoelectric, le vom descrie pe scurt și pe acestea.

Piezoelectricitatea este un fenomen ce cuplează componenta electrică a câmpului electromagnetic cu câmpul elastic în cristale ce nu au o celulă cristalografică centro-simetrică. Ipotezele simplificatoare ce sunt acceptate pentru a ajunge la un set de ecuații ce poate fi analizat matematic cu o relativă ușurință sunt aproximația câmpului electric irotațional și invarianța geometriei solidului piezoelectric în cursul mișcării. În primul capitol sunt prezentate trăsăturile esențiale ale analizei ecuațiilor piezoelectrice clasice în aceste ipoteze.

Întrucât subiectul tezei necesită o formulare precisă a noțiunilor legate de analiza spectrului de vibrație în rezonatoarele cu undă de volum, am descris mărimile fizice ce determină acest spectru și cum anume îl putem calcula. Mai precis, legile de material, comportarea câmpului electroelastic pe frontieră și forma geometrică a rezonatorului, fiind caracteristicile ce definesc în mod exclusiv acest spectru, am convenit să le privim sub forma a trei mulțimi de parametrii  $I_M$ ,  $I_S$  și  $I_G$ , fiecare dintre acestea contribuind la aproximarea după o anumită legitate a fenomenului sau realității fizice ce le-a generat.

Parametrii de material sunt cei ce provin din modelarea legilor piezoelectrice de interdependență între  $S_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $E_i$  și  $D_i$ . În ipoteza în care între aceste mărimi considerăm a exista o simultaneitate de tip cauză-efect, relațiile de aproximare general acceptate și utilizate sunt cele polinomiale. În măsura în care se dorește un nivel mai fin de acoperire a realității fizice, de exemplu pierderile energetice în volumul piezoelectric, această ipoteză de simultaneitate nu mai poate fi aplicată. Este strict necesar de a lua în calcul retardarea cauză-efect iar relațiile de legătură trebuie redată în această situație sub forma ecuațiilor diferențiale ordinare. Față de acest tip de aproximare clasic, propunem unul, alternativ, bazat pe seriile convoluționale Volterra. Această manieră de a modela legile de material, privindu-le ca operatori neliniari continuui cu memorie descrescătoare (de exemplu  $T_{ij}(S_{kl}, E_k)$  și  $D_i(S_{jk}, E_j)$ ) și apoi de a-i aproxima printr-o dezvoltare trunchiată într-o serie convoluțională Volterra, a fost folosită în teoria elasto-plasticității și a câmpului electromagnetic. Ea face vizibilă matematic relația fizică generală de retardare între fenomenele de tip cauză-efect.

Parametrizarea geometrică nu am tratat-o întrucât reprezintă un subiect bine cunoscut și studiat. În plus, în desfășurarea tezei el nu are o relevanță deosebită.

Am convenit să privim condițiile pe frontieră sub forma unor ecuații diferențiale ordinare de ordin maxim doi, între mărimile de câmp elastic, respectiv electric. Motivația acestui model am prezentat-o intuitiv ca fiind legată de interacțiunile de tip elastic, disipativ și inerțial sau corespondențele lor electrice ce există între unda electroelastică la suprafața de contact între solidul piezoelectric și mediile externe. În paragraful 2.2 al celui de al doilea capitol este întreprins un studiu riguros de motivare a acestei alegeri pentru componentele elastice.

Problema spectrală a fost formulată în această manieră, a dependenței de cele trei seturi de parametrii  $I_M$ ,  $I_S$  și  $I_G$ , întrucât în capitolul următor, efectul factorilor fizici externi de perturbație (temperatură, câmpuri elastice sau electrice staționare supraimpuse vibrațiilor piezoelectrice, modificări ale mediilor de contact) a fost privit ca alterând în primul rând acești parametrii,

perturbarea frecvențelor proprii de vibrație fiind o consecință. Studiul problemei spectrale în acest mod decorelat sperăm să fie unitar și să aducă un plus de claritate întrucât de la un anumit nivel al analizei nu mai interesează ce factor fizic a modificat parametrii  $I_M$ ,  $I_S$  și  $I_G$  ci doar efectul lui asupra acestora.

Pentru calculul spectrului de vibrație al unui rezonator piezoelectric am prezentat metoda funcționalei Lagrange asociată dinamicii electroelastice liniare propusă de Holland și EerNisse, aceasta fiind probabil unica metodă aplicabilă problemelor tridimensionale ce este fundamentată teoretic riguros.

Paragraful din finalul capitolului este dedicat teoriei de perturbație Sinha-Tiersten. Modul în care am redat această teorie este diferit de cel prezentat în articolul original al lui Sinha și Tiersten întrucât și scopul urmărit este altul. Am reluat întregul raționament la nivelul unor ecuații abstracte de tipul celor piezoelectrice și am demonstrat că este imposibilă practic construcția estimatorilor de ordin mai mare ca cel liniar pornind de la aceasta teorie.

Ceea ce a fost expus în acest capitol este în mare măsură cunoscut în literatura de specialitate. Efortul autorului a fost îndreptat cu precădere în a identifica aspectele care în teoria clasică a dinamicii electroelastice în solidul piezoelectric sunt incerte în comparație cu cele similare ce sunt oferite de studiul ecuațiilor de undă elastice sau electromagnetice într-un domeniu fizic finit. Concret, este vorba de: absența unei teoreme de existență generală pentru soluțiile ecuațiilor piezoelectrice, de lipsa unui rezultat în ceea ce privește completitudinea spațiului liniar generat de modurile proprii de vibrație, o formă neobișnuită a funcționalei Lagrange (partea energiei potențiale electroelastice este înlocuită cu entalpia electrică, o funcțională ce nu este pozitiv definită) și imposibilitatea practică de a construi estimatori spectrali de ordin superior (patric sau cubic) pentru teoria de perturbație asociată acestor ecuații (teoria Sinha-Tiersten sau Auld). Motivul acestor neajunsuri poate fi intuit a fi legat de asimetria prezentă în operatorul de undă piezoelectric și de forma sistemului de ecuații electroelastice clasice. Reamintim că în acest sistem cele trei ecuații de tip hiperbolic corespunzătoare legii de conservare a impulsului mecanic în solidul continuu sunt cuplate cu o ecuație independentă de timp ce provine din legea lui Gauss în electrostatică.

Subiectul celui de al treilea capitol îl constituie ridicarea parțială a acestor nederminări prin formularea problemei de dinamică elastoelectrică în solidul piezoelectric cu ajutorul unui set de ecuații hiperbolice în aceleași variabile ( $u$ , - elongațiile elastice și  $\varphi$  - potențialul electric) ca și ecuațiile clasice.

Cel de al doilea capitol constituie partea centrală a tezei. El abordează problema influenței perturbațiilor cu o distribuție spațială neuniformă asupra spectrului de vibrație al rezonatoarelor piezoelectrice cu undă de volum utilizând ca model de studiu teoria de perturbație liniară existentă. Literatura de specialitate consacrată acestui subiect recurge adesea la o serie de simplificări, cea mai frecventă fiind cea a neglijării caracterului tridimensional al vibrației și al distribuției perturbației în volumul și pe suprafața rezonatorului. Această ipoteză, a reducerii dimensiunii spațiului problemei la una sau două dimensiuni, permite un calcul direct al spectrului, adesea teoria de perturbație nefiind necesară. Principalul dezavantaj al acestor metode este însă imposibilitatea analizării și predicției corelațiilor stabilite experimental ce există între neuniformitatea câmpului de perturbație și distribuția energetică a modului rezonant. Ne referim concret aici la fenomene precum încărcarea masică, încălzirea neuniformă, scufundarea parțială într-un fluid vâcos sau microdeformațiile geometrice. Un domeniu pe care l-am considerat de asemenea insuficient tratat este cel al comportării câmpului electroelastice pe frontiera solidului piezoelectric, în situațiile când acesta se află în contact cu diverse medii. Menționăm că, pentru ușurința analizei matematice, ipotezele unor condiții pe frontieră de tip Dirichlet sau Neuman sunt frecvent folosite, însă acestea anulează din start orice încercare de estimare a influenței mediilor externe asupra frecvențelor de rezonanță. Ceea ce s-a încercat, și sperăm reușit, în acest capitol, este tratarea unitară a majorității fenomenelor de



perturbație neuniformă de volum sau suprafață prin utilizarea exclusivă a teoriei de perturbație spectrală liniară în forma sa generală, tridimensională. Rezultatele obținute sunt în parte originale, de exemplu cazul încărcării masice, al microdeformațiilor geometrice, sau generalizează relațiile de calcul obținute pe baza aproximărilor uni sau bidimensionale pentru perturbații cu o distribuție uniformă; aceasta este situația contactului cu un lichid vâscos, cu un fir elastic sau al încărcării electrice. Pentru a duce la bun sfârșit acest studiu, au fost necesare o serie de extensii teoretice în ceea ce privește relațiile de perturbație pentru condiții pe frontieră disipative de tipul ecuațiilor diferențiale de ordinul 2 precum și construcția unui model de estimare al comportării câmpului electroelastic la frontiera dintre solidul piezoelectric și un corp compozit de tip film subțire-mediul exterior semi-infinit.

Relațiile de calcul obținute pentru estimarea influenței unor factori fizici diverși, acționând ca perturbații în volumul său pe suprafața rezonatorului piezoelectric, pe baza unitară a teoriei de perturbație liniare, furnizează o demonstrație analitică unui raționament fizic intuitiv verificat experimental în multe situații. Este vorba de următoarea concluzie:

*Deviația frecvenței de rezonanță a unui rezonator piezoelectric cu undă de volum, datorată unui factor perturbator extern, este o funcție (adesea liniară) de corelația ce există între distribuția perturbației și distribuția energiei de vibrație a modului respectiv, în volumul sau suprafața cristalului.*

Prezentăm în continuare desfășurarea pe paragrafe și principalele rezultate obținute în acestea.

Primul paragraf al capitolului are ca punct de plecare ecuațiile cuplate elasto-electromagnetice în solidul piezoelectric, urmează o cale similară celei propusă de Auld pentru construcția relației de reciprocitate electro-elastice, regăsește expresia de perturbație ce derivă din aceasta și extinde rezultatul asupra cazului când condițiile pe frontieră sunt energetic disipative.

Cel de al doilea paragraf a fost dedicat în exclusivitate formulării unui model parametric care să aproximeze suficient de bine comportarea câmpului elastic la suprafața de contact dintre solidul piezoelectric și un film subțire de grosime neuniformă urmat de un mediu omogen semi-infinit, fără a genera însă dificultăți matematice majore de tratare a dinamicii electro-elastice. Studiul propagării undelor acustice, într-o aproximație local unidimensională și un regim armonic permanent, pentru o astfel de structură compozită, a permis deducerea relațiilor de legătură între tensiunile și deplasările elastice generate de aceste unde la interfața dintre solidul piezoelectric și filmul subțire. O serie de aproximații rezonabile, relativ la grosimea filmului subțire și impedanța mediului exterior, au permis simplificarea acestor relații până la un polinom de ordinul 2 în pulsația regimului armonic. Trecerea în domeniul timp relevă o dependență între tensiuni și deplasări de forma unei ecuații cu derivate ordinare de ordinul doi ai cărei coeficienți sunt ușor de interpretat fizic:  $T_{ij}^m(t)u_j + m_{ij}(\omega_0)\ddot{u}_i(t) + v_{ij}(\omega_0)\dot{u}_i(t) + k_{ij}(\omega_0)u_i(t) = 0$  cu  $m_{ij}$  tensorul inerțial,  $v_{ij}$  tensorul disipativ și  $k_{ij}$  tensorul elastic. O relație similară poate fi considerată a modela comportarea câmpului electric pe frontieră:  $\Phi + L_c \ddot{q} + R_c \dot{q} + C_c^{-1} q = 0$

Mulțimea valorilor  $m_{ij}$ ,  $v_{ij}$ ,  $k_{ij}$  și  $R$ ,  $L$ ,  $C$  constituie setul de parametri  $I_S$  cu ajutorul cărora se aproximează comportarea câmpului elastic la suprafața solidului piezoelectric.

Ceea ce se studiază în detaliu pe parcursul paragrafului 2.3 este situația în care parametri ce influențează spectrul rezonatorului  $I_M$ ,  $I_S$  și  $I_G$  devin, datorită unor perturbații fizice neuniform distribuite în volumul sau suprafața rezonatorului, funcții de coordonatele spațiale. Concret, sunt analizate perturbațiile neuniforme datorate câmpului termic, elastic sau electric staționar, condițiilor



pe frontieră și deformațiilor geometrice slabe. Pentru fiecare din acest caz sumarizăm în cele ce urmează trăsăturile esențiale.

*a) perturbația termică neuniformă – este afectat setul parametrilor de material  $I_M$*

Este dedusă expresia generală de perturbație corespunzătoare acestei situații și particularizată pentru rezonatoarele pe substrat de cuarț (sau izomorfe) în tăietura  $Y$  rotită. Se demonstrează astfel influența distribuției termice transversale ca un factor suplimentar de perturbație alături de gradientul termic lateral, caz analizat de A. Budura în [10].

*b) perturbațiile generate nelinier de câmpuri elastice sau electrice staționare supra-impuse vibrațiilor electroelastice - este afectat setul parametrilor de material  $I_M$*

A fost pusă în evidență expresia generală de perturbație ce apare în acest caz, ca fiind o funcție de distribuția câmpului staționar în volumul cristalului și de tensorii de material neliniari.

*c) perturbații ale condițiilor pe frontieră – este afectat setul parametrilor de material  $I_S$*

*c1) parametrii mecanici*

*c11) depunerea masivă neuniformă*

Se demonstrează analitic regula acceptată empiric ce definea sensibilitatea locală în frecvență pentru depunerile suplimentare de masă pe suprafața activă de oscilație a rezonatorului ca fiind proporțională cu densitatea energiei de vibrație la frontiera solidului piezoelectric.

*c12) contactul cu un fluid vâscos*

Sunt deduse relațiile ce estimează modificarea frecvenței de oscilație și factorul de calitate al unui rezonator aflat în contact total sau parțial cu un fluid. Este regăsită și generalizată pe această cale o expresie de estimare a deviației frecvențelor de oscilație pentru rezonatoare pe substrat de cuarț într-o orientare cristalografică, expresie dedusă în [44] pornind de la un model de calcul direct unidimensional.

*c13) contactul cu un fir elastic*

Este explicată analitic, într-o manieră preponderent calitativă, corelația, pusă în evidență experimental, între zona de contact a firului, densitatea energiei de vibrație în acea zonă și deviația frecvențelor proprii de oscilație.

*c2) parametrii electrici*

Perturbarea condițiilor pe frontieră electrice poate fi socotită a fi preponderent uniformă pentru frecvențele uzuale de lucru. Paragraful dedicat acestui subiect a fost introdus pentru a demonstra concordanța și în această situație a rezultatelor de predicție obținute cu ajutorul relațiilor de perturbație liniară cu datele experimentale. S-a demonstrat pe această cale relația de inegalitate ce există între frecvența de oscilație corespunzătoare unui scurtcircuit electric și cea proprie golului electric. Relația este larg acceptată în practică, este aproximată de modelul unidimensional al plăcilor piezoelectrice însă, după cunoștința autorului, nu avea o explicație analitică generală pentru o geometrie tridimensională.

*d) perturbații generate de modificarea ușoară a geometriei rezonatorului - este afectat setul parametrilor de material  $I_G$*

Această situație este abordabilă prin aplicarea unei schimbări curbilinii de variabilă domeniului piezoelectric deformat și revenirea, ca domeniu de calcul, în volumul inițial, neperturbat. Pentru deformații având o parte neliniară mult mai mică decât cea liniară (dar nu neglijabilă) se echivalează prin această schimbare de variabilă perturbațiile geometrice cu perturbații ale parametrilor de material  $I_M$ . Analiza de perturbație ce se efectuează pentru un rezonator pe substrat de cuarț în

orientare  $Y$  rotită pentru deformații ale suprafeței de tip lenticular, duce la concluzii ce, calitativ, sunt în concordanță cu intuiția fizică a fenomenului de capcană energetică. Expresia de perturbație astfel dedusă apare ca o funcțională dependentă de deformația suprafețelor active de vibrație. Această funcțională face posibil un calcul ce vizează maximizarea deviației de frecvență pentru un anumit mod de oscilație precum și aflarea suprafeței optime din punct de vedere al ecartului între o frecvență fundamentală de oscilație și modurile adiacente parazite. Calculul comparativ al ecartului de frecvență efectuat pentru o suprafață optimală și una uzuală, lenticular sferică, a furnizat diferențe ne semnificative, demonstrând pe această cale quasi-optimalitatea formei lenticular sferice.

În paragraful de început al celui de al treilea capitol descriem motivele ce au generat studiul efectuat în această parte finală a tezei și prezentăm ușurința înțelegerii matematice ce ar decurge din reformularea ecuațiilor ce modelează dinamica electroelastică în solidul piezoelectric într-o formă compatibilă cu ecuația abstractă a undelor staționare  $\psi = L\psi$  cu  $L$  un operator autoadjunct cu invers compact. Dacă este posibilă o astfel de reformulare rămâne o întrebare deschisă. Sistemul de ecuații hiperbolice în necunoscutele  $(u, \phi)$  la care am ajuns în urma raționamentului expus în paragrafele 3.2 și 3.3 a avut ca idee de pornire găsirea unui compromis între a nu neglija complet cuplajul elasto-electromagnetic și a ajunge totuși printr-o serie de aproximații fizice rezonabile la un sistem de ecuații comprehensibil matematic și compatibil cu condițiile pe frontieră uzuale. S-a ajuns pe aceste considerente la un sistem ce are expresia abstractă  $\psi = V\psi$  cu  $V$  un operator eliptic cu invers compact căruia îi lipsește însă proprietatea de simetrie. Să reamintim etapele principale ce au condus la definirea și validarea acestui model de studiu pentru vitezele electroelastice din domeniul acustic:

- a) au fost formulate ecuațiile cuplate elasto-electromagnetice în solidul piezoelectric în variabilele  $u, \bar{A}$  (potențialul magnetic vector) și  $\phi$ .
- b) prin renunțarea la cuplajul dintre partea magnetică și cea elastică s-a ajuns la sistemul de ecuații electroelastice hiperbolice
- c) s-a demonstrat echivalența până la o diferență neglijabilă a vitezelor de undă, din domeniul acustic, prezise de acest sistem și cel clasic.

Revenind la absența simetriei în operatorul de undă  $V$  ea se datorează fenomenului piezoelectric acesta doar cuplând câmpul elastic și cel electric. Prin intermediul lui, cele două câmpuri schimbă dinamic energie între ele. Nu excludem însă posibilitatea ca, apelând la o schimbare de variabilă, operatorul  $V$  să poată fi simetrizat. O astfel de simetrizare ar ridica incertitudinea ce există asupra generării sau nu a unei mulțimi de funcții densă în spațiul de definiție al problemei de către setul de vectori proprii operatorului  $V$ . Amintim că o astfel de incertitudine face ca atât teoria de perturbație clasică dezvoltată de Sinha și Tiersten cât și cea propusă în paragraful 3.4 pentru sistemul ecuațiilor electroelastice hiperbolice să fie riguros valabile doar în ipoteza în care vectorii proprii perturbați se află în subspațiul liniar generat de vectorii proprii ai ecuației originale.

Alături de o certă ușurință teoretică a analizei soluțiilor electroelastice în domeniul timp pentru acest sistem de ecuații hiperbolice vis a-vis de cazul clasic, proprietățile operatorului  $V$  și ale funcționalei sale asociate permit calculul numeric al spectrului de vibrație prin metoda clasică Galerkin. Efortul computațional este similar celui necesar în situația utilizării funcționalei de tip Lagrange. Pe această cale este oferit un instrument teoretic de analiză spectrală alternativ singurei metode riguroase existente până în prezent. Teoria de perturbație construită pe baza acestei funcționale este similară celei dezvoltate pentru funcționalele eliptice și simetrice corespunzătoare operatorilor clasici de undă ea permițând deducerea practică a estimatorilor pentru frecvențele proprii alterate de ordin superior celui liniar. În acest sens, în paragraful 3.4 a fost dedusă expresia concretă pentru estimatorul patric, iar cea pentru estimatorul liniar s-a demonstrat a fi identică cu cea cunoscută din teoria Sinha-Tiersten.

Vom sintetiza rezultatele obținute prin teoria ecuațiilor piezoelectrice hiperbolice în comparație cu cea clasică și cea a ecuațiilor de undă clasice în următorul tabel.

Proprietăți	Ecuațiile piezoelectrice clasice	Ecuațiile piezoelectrice hiperbolice	Ecuația clasică a undelor elastice sau electromagnetice
Teoremă de existență a soluțiilor	nu	da	da
Teoremă de unicitate a soluțiilor	da	da	da
Operatorul de undă $M^{-1}L$	$M$ nu este inversabil	Continuu, eliptic, invers compact	Autoadjunct cu invers compact
Spectrul	Infinit numărabil	Infinit numărabil	Infinit numărabil
Funcțiile proprii operatorului de undă	Există ortogonalitate între componentele câmpului elastic; completitudine incertă	Nu există ortogonalitate; există biortogonalitate cu funcțiile proprii operatorului adjunct; completitudine incertă	Există ortogonalitate și completitudine

În final, două observații importante se impun referitoare la estimatorii de perturbație construiți pe baza acestei teorii. Prima se referă la rolul operatorului de undă adjunct  $V^*$  în această teorie de estimare spectrală și a formei funcțiilor proprii conjugate  $\psi_j^{(0)*} = (u, -\phi)_j$ , ca unică modalitate de a trata proprietatea inerentă de asimetrie a câmpului piezoelectric. Cea de a doua subliniază dificultatea utilizării relației estimatorului patratric pentru cazul general tridimensional al problemelor de rezonanță piezoelectrică cel puțin pentru capacitatea de calcul numeric actuală. Motivul este ușor vizibil și îl constituie necesitatea aflării funcțiilor proprii  $\psi_j$ , teoretic pentru toate modurile posibile, practic pentru cele decelabile în spațiul aproximant finit dimensional pe care se proiectează problema generală.

Ultimul capitol grupează o serie de demonstrații și noțiuni matematice ce au un caracter colateral subiectului tezei însă au fost folosite ca și rezultate intermediare pe parcursul celor trei capitole anterioare. Este vorba de echivalarea sistemelor de ecuații eliptice cu o ecuație variațională, existența și unicitatea soluției ecuației piezoelectrice liniare, teoria de perturbație pentru funcționalele biliniare eliptice și un studiu asupra soluțiilor ecuației piezoelectrice staționare neliniare ce provine din aproximarea cubică a energiei interne electroelastice. Toate aceste subiecte, cu excepția celui dedicat ecuației neliniare, există într-o formă mai mult sau mai puțin apropiată în referințele de bibliografie matematică citate, efortul și atenția autorului fiind îndreptate spre a le modifica și adapta cazului specific al ecuațiilor piezoelectrice. Analiza ecuației staționare neliniare reprezintă o excepție. Este un studiu ce nu a fost găsit în literatura de specialitate, studiu ce îl considerăm util întrucât oferă limita maximă a energiei câmpului elastic și electric impus pe frontiera solidului piezoelectric pentru care există o soluție unică a ecuației și deci aproximația cubică a energiei poate fi folosită.

## Bibliografie

- [1] B.A. Auld, *Acoustic fields and waves in solids*, vol I și II, John Wiley & Sons, New York 1972
- [2] S. Balint, *Lectii de Mecanică Teoretică*, Tipografia Universității de Vest, Timișoara, 1996
- [3] R.C. Batra, *A second-order solution of Saint-Venant's problem for a piezoelectric circular bar using Signorini's perturbation method*, Journal of Elasticity, 1998, vol. 52, no1, pag. 75-90
- [4] S. Bauer, S. Filipov, B. Semenov, P. Tovstik, Y. Vorochovsky, *The effect of the temperature on the vibration frequencies of plano-convex plate of quartz resonators*, IEEE Freq. Cont. Symp, 1992
- [5] J.C. Baumhauer, H.F. Tiersten, *Nonlinear electroelastic equations for small fields superposed on a bias*, J. Acoust. Soc. Am., vol.54, nr. 4, Oct 1973
- [6] A. Borrelli, M. C. Patria, *Saint-Venants principle for a piezoelectric body*, SIAM J.Sci.Comput., Martie 1999, vol. 59, nr. 3, pag 1098-1111
- [7] J. Bonet, *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge University Press. 1997
- [8] V. E. Bottom, *Introduction to Quartz Crystal Unit Design* Van Nostrand Reinhold Company, New Nostrand Reinhold Company, New York, 1982
- [9] S. Boyd, L. Chua, *Fading Memory and the Problem of Approximating Nonlinear Operators with Volterra Series*, IEEE Trans. Circuits and Systems, nr. 11, Nov. 1985
- [10] A.Budura, *Studii asupra rezonatoarelor piezoelectrice pe cuarț, cu aplicații în domeniul senzorilor*, teză de doctorat, Univ. Politehnica, Timișoara, 1993
- [11] W. Chenhao, Z. Zheyang, *The effect of electric load on the characteristics for piezoelectric vibrational system*, Chinese Journal of Acoustics, vol.3. nr.3, 1984
- [12] S. Crișan, A. Budura, M. Codrin, *A Mathematical Model for the BAW Piezoelectric Resonators under Weak Local Perturbations*, Proceedings of the 9<sup>th</sup> Conference on Piezoelectric Materials and Devices, Waplewo, Polonia, 2-5 Octombrie 1996
- [13] S. Crișan, A. Budura, E. Pop, *Influence of Non-Uniform, Surface Mechanical Loads Over Vibrational Spectra of BAW Piezoelectric Resonators*, vol. 3, Proceedings of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology IMTC/2000 Conference, Baltimore, Maryland, USA, Mai 1-4, 2000

- [14] M. Dieulesaint, D. Royer, Ondes élastiques dans les solides, applications au traitement du signal, Mason et C<sup>ie</sup>, Paris 1974
- [15] J. Duterte, P. Joly, Ondes guidées par une perturbation géométrique locale du demi-espace élastique homogène, Rapport de Recherche, No 2324 Programme 6, INRIA, 1995, France
- [16] E. Eernisse, V. Lukaszek, M. Ballato, Variational calculation of force-frequency constants of doubly rotated quartz resonators, IEEE Transactions on Sonics and ultrasonics, vol. SU-25, nr3, Mai, 1978
- [17] E. P. Eernisse, Calculation on the stress-compensated (SC-cut) quartz resonator, Proc. 30<sup>th</sup> Int. Freq. Cont. Symp., 1976
- [18] J. Graham, Notes from the Measurement Science Conference, J. of Internat. Metrology, Jan-Feb 1998, nr. 1, pag 12-24
- [19] C. Greebe, Electromagnetic, elastic and electroelastic waves, Philips tech. Rev. 33, No 11/12, 1978
- [20] A. Guichardet, Integration, Analyse Hilbertienne, Ed. Ellipses, Paris 1989
- [21] D. Hărăguș, Variational Methods in Fluid Dynamics - Lecture Notes, Tipografia Universității de Vest Timișoara, 1996
- [22] D. Hărăguș, Ecuatii cu derivate parțiale - Rezumat -, Tipografia Universității de Vest, Timișoara, 1994
- [23] J.H. He, A variational approach to electroelastic analysis of piezoelectric ceramics with surface electrodes, Mechanics Research Communications 2000, Iulie-Aug. vol.27, nr 4, pag. 445-450
- [24] V. Hiriș, Ecuatii cu derivate parțiale în 10 lectii, Timișoara, 1997
- [25] R. Holland, E. EerNisse Design of Resonant Piezoelectric Devices Research Monograph No. 56, M.I.T. Press 1969
- [26] A. H. Hughes TJR, Finite element method for piezoelectric vibration, Int. J. Numer. Methods Eng., 2,151-157, 1970
- [27] D. Iesan, Reciprocity, uniqueness and minimum principles in the linear theory of piezoelectricity, Internat. J. Eng. Sci. 1990, vol.28, 1139-1149
- [28] H. Jensen, Calculation for piezoelectric ultrasonic transducers, RISØ National Laboratory, DK 4000, May 1986
- [29] M. Jones, P. Plassmann, Modeling Piezoelectric Crystals, Applied Mathematics Sciences subprogram, U.S. Department of Energy, under Contract W-31-109-Eng-3, raport Internet, [www.unix.mcs.anl.gov/~freitag/SC94demo/project/motorola.html](http://www.unix.mcs.anl.gov/~freitag/SC94demo/project/motorola.html)



- [30] Kittell G. , *Physique de l'état solide*, 3<sup>e</sup> edition , Dunod , Paris , 1986
- [31] L. Landau, E. Lifschitz, *Mecanique des Fluides*, Editions Mir Moscou, 1989
- [32] P. C. Y. Lee, *A Variational principle for the equations of piezoelectromagnetism in elastic dielectric crystals*, J. Appl Phys. 1991, (69) 11, pag. 7470-7473
- [33] Y. Lee, D. Everhart, and F.Josse, *The Quartz Crystal Resonator as Detector of Electrical Loading: An Analysis of Sensing Mechanism*, Proceedings IEEE, Frequency Control Symposium, 1996, pag. 577
- [33] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-homogenous Boundary Values Problems and Applications*, vol.1-3, Springer Verlag, 1972
- [34] C. Lu, A.W. Czaderna editors, *Applications of piezoelectric quartz crystal microbalances* Elsevier, Amsterdam 1984
- [35] C. Lu, O. Lewis, *Investigation of film thickness determination by oscillating quartz resonators*, J. Appl. Phys. 43 (11), Nov. 1972
- [36] O. Madelung, *Introduction to Solid-State Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1978
- [37] R. D. Mindlin, *Electromagnetic Radiation from an AT-cut quartz plate*, *Internat. J. Solids Structures*, Sept-Oct. 1973 pag. 697-702
- [38] R. Nellya, *The Theory of piezoelectric shells and plates*, N. Boca Raton, Fla., CRC Press. 1994
- [39] V. Novacu, *Bazele teoretice ale fizicii*, vol.2 Electrodinamica, Ed. Tehnică, București 1993
- [40] V.Z. Parton, B.A. Kudryavtsev, *Electromagnetoelasticity of Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*, Gordon & Breach Science Publ, Iulie 1988
- [41] *Piezoelectricity*, New York, American Institute of Physics. 1992
- [42] C. Reed, K. Kanazawa, J. Kaufman, *Physical description of a viscoelastically loaded AT-cut quartz resonator*, J. Appl. Phys., 68 (5), Sept. 1990
- [43] M. Renardy, R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer Verlag New York, 1993
- [44] D. Salt, *Quartz Crystal Resonators* , T.J. Press Ltd., Padstow, Cornwall, 1987
- [45] Y. Sato, S. Kodama, *An analysis of unwanted frequency oscillation in a crystal controlled oscillator*, IEEE UFFC, Proceedings 1986.
- [46] M. Schechter, *Spectra of Partial Diferential Equations*, North Holland series in Applied Mathematics and Mechanics, New York 1986
- [47] R. E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Monografie, Electronic Journal of Partial Equations, 1994

- [48] R. C. Smith, *A Galerkin method for linear PDE systems in circular geometries with structural acoustic applications*, SIAM J.Sci.Comput., vol. 18, No. 2, pp 371-402, March 1997
- [49] I. Takuro, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, 1990
- [50] H. Tiersten, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press, New York 1969
- [51] H. Tiersten, R. Smythe, *An analysis of contoured crystal resonators operating in overtones of coupled thickness shear and thickness twist*, J.Acoust.Soc.Am., vol. 65, 1979
- [52] H. F. Tiersten, *Perturbation theory for linear electroelastic equations for small fields superposed on a bias*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 64 (3), 1978
- [53] H. F. Tiersten, B.K. Sinha, *Temperature dependence of the resonant frequency of electroded doubly rotated quartz thickness-mode resonators*, J. Appl. Phys., vol. 50, Dec., 1979
- [54] H. F. Tiersten, B.K. Sinha, *A perturbation analysis of the attenuation and dispersion of surface waves*, J. Appl. Phys., vol. 49, Jan. 1978
- [55] L. Wimmer, S. Hertl, J.Hemetsberger, E. Benes, *New Method of measuring vibration amplitudes of quartz crystals*, Rev. Sci. Instrum. 55 (4), Aprilie, 1984
- [56] J. Wang, Y. Yong, and T. Imai, *Finite Element Analysis Of The High Frequency Vibrations Of Contoured Cristal Plates With Higher-Order Plate Theory*, IEEE Frequency Control Symposium 1998, Proceedings, pag. 909
- [57] J.S.Yang, *Variational formulations for the vibration of a piezoelectric body*, Quarterly of Applied Mathematics, Martie 1995 vol 53, nr.1 pag. 95-104
- [58] J. S Yang, X. Y. Wu, *The vibration of an elastic dielectric with piezoelectromagnetism*, *Quarterly of Appl. Math.*, Dec. 1995, vol 53, nr.4, pages 753-760
- [59] Y.K. Yong, J. Wang, T. Imai, *On the Accuracy of Mindlin Plate Predictions for the Frequency-Temperature Behavior of Resonant Modes in AT- and SC-Cut Quartz Plates*, 1999 IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control vol. 46, pag .1-13, 1999
- [60] J. Zelenka, *Piezoelectric Resonators and their Applications* Elsevier Science Ltd, 1986