



r. Inv. 025.407

ulap 181 Lit. E

UNIVERSITATEA *POLITEHNICA* TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

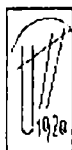
ing. Eugen BĂRBULESCU

*Contribuții privind analiza comportării transformatorului  
de curent ținând seama de saturație și pierderi, în  
regimuri tranzitorii ale sistemului electroenergetic*

## TEZĂ DE DOCTORAT

Conducător științific:

Prof.univ.dr.doc.ing. Constantin ȘORA



UNIVERSITATEA *POLITEHNICA* TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

ing. Eugen BĂRBULESCU

*Contribuții privind analiza comportării transformatorului  
de curent ținând seama de saturație și pierderi, în  
regimuri tranzitorii ale sistemului electroenergetic*

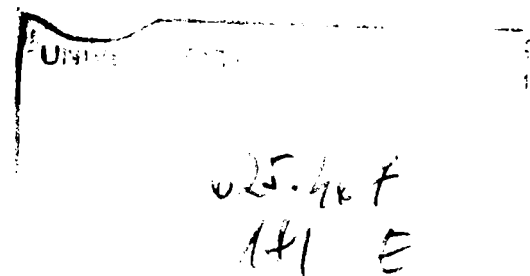
# TEZĂ DE DOCTORAT

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

Conducător științific:

Prof.univ.dr.doc.ing. Constantin ȘORA

– 1999 –



*All exact science is dominated  
by the idea of approximation.*

Dr. Bertrand Russel, Nobel Prize 1950 [147]

# CUPRINS

<i>Cuprins</i> .....	1
<i>Introducere</i> .....	4
<b>Capitolul 1</b> Ecuatiile de funcționare ale transformatorului de curent	
1.1 Generalități .....	9
1.2 Principiul de funcționare .....	11
1.3 Caracteristica magnetică a circuitului feromagnetic .....	14
1.4 Analiza funcționării transformatorului de curent în regim tranzitoriu .....	21
1.5 Concluzii .....	33
<b>Capitolul 2</b> Calculul transformatorului de curent cu saturație și pierderi în regim tranzitoriu	
2.1 Generalități .....	36
2.2 Modelarea fenomenelor de saturație și de histereză magnetică .....	39
2.2.1 Modele de tip clasic ale caracteristicii de magnetizare .....	39
2.2.2 Interpolare prin funcții polinomiale pe porțiuni .....	47
2.2.2.1 Interpolare osculatorie .....	48
2.2.2.2 Interpolare segmentar polinomială cubică .....	50
2.2.2.3 Interpolare prin funcții <i>spline</i> .....	52
2.2.2.4 Ajustare prin funcții <i>spline</i> . Metoda celor mai mici pătrate .....	67
2.2.2.5 Aproximare prin funcții <i>spline</i> tensionate .....	80
2.3 Răspunsul transformatorului de curent în condiții de saturație .....	90
2.4 Concluzii .....	100



<b>Capitolul 3</b> Calcule și verificări experimentale	
3.1 Generalități .....	104
3.2 Determinarea parametrilor transformatorului de curent	106
3.3 Calculul funcționării transformatorului de curent în regimuri tranzitorii .....	113
3.4 Studii parametrice .....	122
3.4.1 Explorări funcționale .....	122
3.4.2 Dependența erorii transformatorului de curent de factori externi .....	125
3.4.3 Considerații practice de exploatare referitoare la funcționarea transformatorului de curent în regim tranzitoriu .....	133
3.5 Aspecte legate de dimensionarea transformatorului de curent pentru regim tranzitoriu .....	136
3.6 Concluzii .....	139
<b>Sinteză asupra rezultatelor cercetării</b> .....	142
<b>Bibliografie</b> .....	147
<b>Index de nume citate</b> .....	161
<b>Anexe</b>	
<b>Anexa nr. 1</b> Notățiile matematice utilizate .....	163
Metode speciale de aproximare prin funcții <i>spline</i> .....	168
<b>Anexa nr. 2</b> Teorema lui <i>Weierstrass - Stone</i> .....	169
<b>Anexa nr. 3</b> Identificarea polinoamelor $f_i(\phi)$ și $f_p(\phi)$ cu ajutorul datelor experimentale.....	171
<b>Anexa nr. 4</b> STAS 4324-62 referitor la erorile tolerate ale transformatorului de curent .....	173
<b>Anexa nr. 5</b> Program pentru evaluarea unei funcții și/sau a derivatelor ei din reprezentarea polinomială pe porțiuni ( <i>pp</i> ) .....	174
<b>Anexa nr. 6</b> Program de calcul simultan în punctul $x$ a celor $k$ funcții <i>B-spline</i> de ordinul $k$ ce pot fi nenule .....	176

<b>Anexa nr. 7</b>	Program de construire a reprezentării <i>pp</i> a unei funcții <i>f</i> pe baza descrierii ei cu ajutorul funcțiilor <i>B-spline</i> .....	177
<b>Anexa nr. 8</b>	Program de plasare optimală a nodurilor .....	179
<b>Anexa nr. 9</b>	Program de interpolare prin funcții <i>spline</i> polinomiale .....	180
	Subprograme de soluționare a unui sistem algebric liniar cu matrice bandă .....	181
<b>Anexa nr. 10</b>	Program pentru calculul secvenței de noduri $t$ pentru $\tau$ cu metoda lui <i>Newton</i> .....	182
	Program pentru evaluarea unei funcții și/sau a derivatelor ei din <i>B-reprezentarea</i> acesteia .....	183
<b>Anexa nr. 11</b>	Program pentru ajustare („smoothing“) cu funcții <i>spline</i> .....	184
	Subprograme pentru funcția <i>spline</i> de ajustare („smoothing“) .....	185
	Program principal și rezultate pentru tehnica ajustării .....	186
<b>Anexa nr. 12</b>	Program pentru aproximarea <i>spline</i> prin metoda celor mai mici pătrate .....	187
	Programe auxiliare pentru aproximarea <i>spline</i> în sensul celor mai mici pătrate .....	188
	Rezultate pentru aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate cu plasarea optimală a nodurilor .....	190
	Subprograme de soluționare a unui sistem algebric liniar prin factorizare <i>Choleski</i> .....	191
<b>Anexa nr. 13</b>	Subprograme necesare construirii sistemului liniar <i>aproximativ</i> bloc diagonal .....	192
	Subprograme pentru rezolvarea unui sistem liniar <i>aproximativ</i> bloc diagonal prin factorizare PLU .....	194
<b>Anexa nr. 14</b>	Program pentru calculul funcțiilor <i>B-spline</i> și a derivatelor acestora .....	198
<b>Anexa nr. 15</b>	Program pentru soluționarea iterativă prin cologație a unei ecuații diferențiale neliniare .....	199



# *INTRODUCERE*

## **Scopul tezei**

Pe parcursul lucrării sunt abordate aspecte fundamentale ale teoriei și probleme ale tehnicii de utilizare a transformatorului de curent, aducându-se unele precizări asupra comportamentului acestuia în regim tranzitoriu al rețelei în care funcționează ca traductor.

Obiectivul tezei este de a obține răspunsul transformatorului de curent, considerat ca un dispozitiv neliniar cu histereză și pierderi, la un curent de defect al sistemului electroenergetic. Deoarece acest curent constituie o mărime de intrare în calcule, el trebuie cunoscut (fie ca expresie analitică, fie ca formă experimentală de variație).

Deși intrat în practică de peste un secol, transformatorul de curent (pe tot parcursul textului va fi identificat prin sigla TC), fiind un dispozitiv tehnic ce conține elemente neliniare este departe de a fi cunoscut exhaustiv. Există multe aspecte neabordate analitic, cu toate că experiența de exploatare sugerează uneori abordări calitative.

În teză se prezintă o metodă analitică de descriere a caracteristicii magnetice neliniare a TC ținându-se cont de pierderile în miezul feromagnetic datorate curenților turbionari. Determinarea curentului secundar și a erorii TC în condițiile saturării miezului său magnetic și ținând seama de pierderile menționate pe timpul regimului tranzitoriu sunt abordate pe baza unor metode numerice adecvate, folosind funcțiile *spline*. Se prezintă, pentru comparație, caracteristici magnetice calculate cu alte metode, precum și determinări experimentale.

Studiul TC este aprofundat pe direcție verticală, ca subiect în sine, dar conține și abordări pe direcție orizontală, deoarece, oricât de specializat ar fi, el reprezintă o componentă funcțională în cadrul sistemului electroenergetic și necesită cunoașterea comportării tuturor echipamentelor implicate în producerea, transportul și distribuția energiei electrice.

Teza încearcă abordarea analizei comportamentului TC în regim tranzitoriu pe baze analitice, cu scopul de a oferi un răspuns cât mai complet asupra acestei problematice și asupra implicațiilor produse prin luarea în considerare concomitent a neliniarității caracteristicii magnetice, a pierderile din miezul feromagnetic și a răspunsului TC la excitații caracteristice multor cazuri de exploatare, în care apare o componentă periodică peste care se suprapune o componentă aperiodică amortizată [37], [62], [91], [105], [112], [143], [187].

Pentru a avea o finalizare concretă a studiului, s-a luat în considerare participarea TC în cadrul protecției prin relee a sistemului electroenergetic. Aceasta reprezintă o parte vitală a oricărei rețele de putere; rolul său este aproape neglijabil în timpul funcționării normale, dar devine foarte important atunci când apar avarii, defecțiuni sau regimuri anormale de funcționare.

Răspunsul TC nu poate fi folosit pe deplin fără o cunoaștere a funcționării întregului sistem, atât în condiții normale, cât și în timpul avariilor. Adăugate acestor informații, rezultatele obținute pe baza contribuțiilor din teză ar putea constitui fundamentul unor studii specializate în unele domenii de interes, cum ar fi exploatarea, dezvoltarea sau managementul sistemului electroenergetic. Abordarea unei arii de cunoștințe atât de extinse nefiind posibilă în cadrul tezei, am luat în calcul, dintre toate avariile care pot apare în rețea, numai regimuri tranzitorii de tipul scurtcircuitului. Acestea constituie în mod nemijlocit regimuri ale căror componente aperiodice pot avea o influență importantă asupra funcționării corecte a TC, considerat ca traductor pentru protecția prin relee [37], [58], [59].

# Planul lucrării

Teza este structurată în trei capitole. Primul dintre ele este dedicat prezentării ecuațiilor TC, a modului de luare în considerare a caracteristicii magnetice neliniare a acestuia, a pierderilor prin curenți turbionari în miezul său feromagnetic, precum și a schemei echivalente aferente. Este prezentată analiza liniară a TC în regim tranzitoriu al rețelei și o discuție privind influența caracteristicilor sistemului în care acesta este introdus asupra plajei de valori luate în considerare la calculul coeficienților de supraîncărcare. Stadiul actual al metodelor de calcul folosite în domeniu a fost concretizat într-un referat de doctorat, în teză fiind avansate unele soluții de sinteză noi.

Capitolul al doilea se referă la modelarea fenomenelor de saturație și histereză magnetică, pornind de la analiza unui număr mare de exemple de calcul analitic întâlnite în literatură. Firește că tentativa de abordare a acestei chestiuni a debutat cu o încercare de sinteză și ordonare a cunoștințelor actuale în domeniu; rezultatele care au finalizat etapa preliminară a studiului sunt prezentate într-un alt referat de doctorat. Majoritatea abordărilor au fost făcute asupra unor cercetări care permit generalizări. Există în acest sens câteva lucrări care pot fi considerate clasice – [7], [49], [95], [96], [182]. Modelele uzuale întâlnite neputând modela caracteristica magnetică a TC pe domenii extinse, este efectuat un studiu asupra posibilităților de a descrie caracteristica magnetică neliniară a miezului TC cu ajutorul mai multor metode bazate pe funcții *spline*, exploatând la maximum informațiile oferite de datele experimentale.

În ultimul sfert de secol, teoria precum și practica funcțiilor *spline* în diferite compartimente ale analizei numerice au cunoscut o dezvoltare considerabilă. Apariția unor cercetări noi, împreună cu aplicarea altora mai vechi în diverse ramuri ale tehnicii și științelor naturii face ca numărul lucrărilor accesibile în domeniu să se cifreze la ordinul miilor. De aceea, încercarea de a face o sinteză ordonată din punct de vedere ingineresc a rezultatelor cu caracter aplicativ a presupus un efort serios, amplificat, pe de o parte de necesitatea explorării multor domenii în care teoria funcțiilor *spline* și-a găsit aplicații multiple, și pe de alta de faptul că există direcții în care această teorie nu

este (încă) completă. Aceste funcții constituie ustensile adecvate aproximării optime a datelor experimentale. În încheierea capitolului se prezintă o metodă originală de calcul a răspunsului TC cu saturație și pierderi pentru regimul tranzitoriu de scurtcircuit din rețeaua în care este conectat.

Capitolul al treilea prezintă calcule și verificări experimentale, rezultatul obținut cu ajutorul lanțului de programe elaborate fiind validat prin utilizarea expresiei analitice a soluției pentru cazuri particulare. Se fac studii funcționale asupra dependenței erorii și se evidențiază considerații referitoare la alegerea unui transformator după criteriul de asigurare a preciziei în regim tranzitoriu.

Metoda originală de analiză și simulare a TC care face obiectul tezei se pretează ca adecvare și relevanță la a fi folosită și în alte domenii care conțin elemente neliniare. Lanțul de programe utilizat poate fi întrebuințat la obținerea soluției oricărei ecuații diferențiale neliniare, reducând în acest fel numărul problemelor care nu pot fi rezolvate în întregime și satisfăcător. Metodele originale de descriere a caracteristicii magnetice pe domenii extinse pot fi preluate în orice domeniu unde acest lucru este necesar (Mașini electrice, Automatică, etc.), în funcție de datele existente, constrângeri și precizia dorită a rezultatului.

Citatele care deschid capitolele ca motto marchează recunoașterea adevărului că nu există cunoaștere finală, că orice aprofundare deschide o nouă problemă, precum și faptul că dualitatea abordării, atât analitică cât și numerică, poate conduce la o construcție coerentă printr-o abordare în esență discontinuă. Cele două fațete complementare ale fenomenului, una fatalistă și alta constructivă sunt bazate pe aceeași structură discretă a realității percepute sub formă de continuu.

Lucrarea este însoțită de o bibliografie de două sute de titluri (care însumează tratatele, monografiile și articolele consultate pentru cercetare), de un index de nume citate și de anexe. Este adoptat sistemul zecimal anglo-saxon al numerotării capitolelor și al diviziunilor acestora introdus de *Peano*. Notățiile matematice utilizate sunt explicate în Anexa nr. 1.

# Mulțumiri

Doresc să exprim mulțumiri conducătorului științific, Profesorului *Constantin Șora*, sub a cărui îndrumare atentă a fost elaborată teza de doctorat.

Profesorului *Mircea Chivu* îi mulțumesc pentru relevanța observațiilor asupra modelului matematic și pentru sprijinul acordat în finalizarea studiului.

În mod special țin să-mi exprim recunoștința profesorilor și colegilor din cadrul Catedrei de Electrotehnică pentru înalta competență științifică și calitatea raporturilor umane de care am beneficiat în repetate rânduri.

Profesorilor *Michel Lajoie-Mazenc* de la ENSEEIHT Toulouse – LEEI, director de cercetare al CNRS și *Henri Marquant*, director de studii la ILMH Bruxelles le sunt recunoscător pentru posibilitatea accesării unei vaste bibliografii în domeniul de interes.

Domnului *Aurel Ercuța*, fizician la Universitatea de Vest din Timișoara îi mulțumesc pentru ajutorul și sfaturile pe care mi le-a oferit de-a lungul unui șir de determinări experimentale.

În afara cadrului profesional, elaborarea tezei nu ar fi putut fi posibilă fără sprijinul familiei. Îi mulțumesc pe această cale soției și tuturor celor care mi-au fost aproape.



Dacă posibilitatea de a greși este mereu prezentă, explorarea este potențial nelimitată. Această indeterminare a cunoașterii noastre implică o oarecare imprecizie.

*Charles S. Peirce, 1984 [127]*

## *Capitolul 1*

# **ECUAȚIILE DE FUNCȚIONARE ALE TRANSFORMATORULUI DE CURENT**

## **1.1 GENERALITĂȚI**

Primul brevet de invenție având ca obiect un transformator de curent datează din anul 1882, iar prima teză de doctorat cu un subiect din acest domeniu a fost susținută în anul 1909, conform [50].

Transformatorul de curent este un dispozitiv electromagnetic de largă utilizare în regim permanent sinusoidal, care servește la extinderea domeniului instrumentelor de măsură, având un raport de transformare cunoscut și menținut cu mare precizie, putând fi realizat cu erori mici, atât de modul cât și de fază. De asemenea, el reprezintă un mijloc de separație galvanică, izolând circuitele de măsură și protecție de cele de înaltă tensiune în care circulă curenții care trebuie măsurați.

Ținând seama de aceste avantaje, este firească dorința de a utiliza TC și în evaluarea caracteristicilor curenților tranzitorii din rețele, aparate și mașini electrice, pentru a cerceta funcționarea acestora în diferite regimuri.

O situație asemănătoare există și în cazul TC folosite ca traductoare pentru echipamentele de protecție cu acțiune rapidă din rețelele de înaltă tensiune. Aceste



echipamente au rolul să sesizeze și să înlăture defecte în intervale de timp foarte scurte, atingând în unele condiții valori mai mici decât două perioade ale tensiunii alternative de frecvență industrială, începând cu momentul apariției defectului (timp în care este inclusă sesizarea avariei și comanda întreruptorului principal din circuit, declanșarea acestuia depinzând de inerția echipamentului fizic existent).

Între TC pentru echipamentele de protecție cu acțiune rapidă și acelea pentru protecție cu acțiune întârziată există, evident, o diferență importantă. În timp ce pentru ultimele timpul de întârziere al protecției (peste 1 s) este atât de mare încât componenta aperiodică a curentului primar de scurtcircuit se amortizează înainte ca protecția să acționeze, la TC pentru echipamentele de protecție cu acțiune rapidă comportarea lor sub acțiunea componentei aperiodice are un rol esențial, în special dacă principiul de lucru se bazează pe diferența sau suma curenților, cum este cazul protecției diferențiale sau a celei de distanță [37], [91].

Problema comportării TC în regim tranzitoriu a fost abordată până în prezent de obicei pe baza unor aproximații simplificatoare, în ipoteza unei caracteristici de magnetizare liniare și a neglijării pierderilor în miezul feromagnetic [62], [112].

Pe lângă aceste aproximații, unii autori simplifică și mai mult studiul, divizându-l în două probleme parțiale și suprapunând apoi soluțiile particulare obținute. Astfel, sunt considerate separat comportările TC în regim permanent periodic la frecvență industrială și în regim aperiodic amortizat, aceste situații suprapuse dând tocmai regimul tranzitoriu corespunzător unui scurtcircuit în cazul teoriei liniare [143]. În cazul idealizat al regimului liniar se poate obține o rezolvare analitică a problemei funcționării TC în regim tranzitoriu de scurtcircuit [112], a erorilor care apar și a parametrilor ce intervin în alegerea sau dimensionarea transformatorului destinat să funcționeze în regimuri de scurtcircuit [105].

## 1.2 PRINCIPIUL DE FUNCȚIONARE

TC este format dintr-un circuit feromagnetic (3) pe care se găsesc plasate cele două înfășurări, primară (1) și secundară (2), conform figurii nr. 1.1. Înfășurările sunt

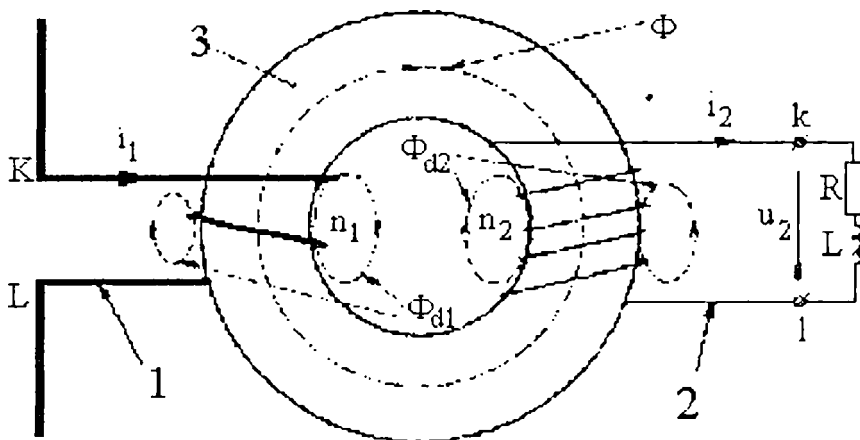


Figura nr. 1.1

Reprezentarea schematică a TC

străbătute de fluxul magnetic comun  $\Phi$ , fiecare dintre ele prezentând și un flux de dispersie,  $\Phi_{d1}$  și respectiv  $\Phi_{d2}$ . TC alimentează un consumator cu caracter inductiv.

În tot cuprinsul tezei se va considera că TC funcționează în regim cvasistaționar,

adică se neglijează densitatea curentului de deplasare  $\vec{J}_D = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  față de densitatea curentului de conducție  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . În metale, presupunerea este admisibilă la frecvențe de lucru  $f \ll 10^{16}$  Hz [180]. Frecvența industrială ( $f = 50$  Hz), la care lucrează TC, justifică abordările care țin seama de această ipoteză.

În secundar, înfășurarea fiind realizată din conductor cu secțiune mică, influența efectului pelicular este neglijabilă, fiind posibilă acceptarea ipotezei repartiției uniforme a curentului pe secțiunea acestuia. Supraîncărcarea TC se consideră a fi în mod practic de scurtă durată, în așa fel încât se poate neglija modificarea rezistenței înfășurării în raport cu temperatura. Se neglijează, deasemenea, pierderile suplimentare în izolația TC. Se presupune că în apropierea TC nu există piese feromagnetice prin care să se închidă linii din câmpul magnetic de dispersie al acestuia.

Pentru precizarea ecuațiilor de funcționare ale TC vom folosi notațiile din figura nr. 1.1, tensiunile, curenții și fluxurile fiind exprimate în valori instantanee.

Legea inducției electromagnetice, aplicată pe un contur care merge de-a lungul firului înfășurării secundare și se închide de la un capăt la altul după o linie a tensiunii la borne, se poate scrie:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -n_2 \frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{d\Psi_2}{dt}, \quad (1.1)$$

în care  $\Psi_2$  este fluxul magnetic total care străbate înfășurarea secundară. Integrala de linie a intensității câmpului electric de-a lungul acestei curbe, între punctele  $k$  și  $l$ , este chiar tensiunea la borne, adică:

$$\int_k^l \vec{E} \cdot \vec{dl} = u_2. \quad (1.2)$$

Considerând relațiile (1.1) și (1.2) și aplicând teorema a doua a lui *Kirchhoff* în secundarul TC, se obține:

$$R_2 i_2 + u_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt}, \text{ sau:} \quad (1.3)$$

$$R_2 i_2 + u_2 = u_{e2}, \text{ unde} \quad (1.4)$$

$$u_{e2} = -\frac{d\Psi_2}{dt} \quad (1.5)$$

reprezintă tensiunea electromotoare indusă de fluxul magnetic total ce străbate înfășurarea secundară.

Fluxul magnetic total care traversează înfășurarea secundară poate fi descompus după cum urmează:

$$\Psi_2 = \Psi_{u2} + \Psi_{d2}, \quad (1.6)$$

unde  $\Psi_{u2}$  este fluxul magnetic util, care traversează ambele înfășurări, iar  $\Psi_{d2}$  este fluxul magnetic de dispersie secundar, care traversează numai înfășurarea secundară.

Calea de închidere a fluxului de dispersie fiind prin aer, prezintă o reluctanță magnetică de valoare mare și practic constantă [180]. De aceea, acest flux este proporțional cu curentul care îl generează și permite definirea unei inductivități de dispersie, de asemenea constante:

$$\Psi_{d2} = L_2 i_2. \quad (1.7)$$

În cazul în care amândouă înfășurările sunt parcurse simultan de curenți, fluxul magnetic rezultat comun ambelor,  $\phi$ , se numește flux magnetic principal sau flux magnetic rezultat util [180].

Notând cu  $R_2$  rezistența înfășurării secundare a TC între bornele  $k$  și  $l$  și ținând seama de (1.3), (1.6), (1.7) și de faptul că:

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2, \quad (1.8)$$

se poate scrie ecuația circuitului secundar al TC:

$$(L + L_2) \frac{di_2}{dt} + (R + R_2) i_2 = -n_2 \frac{d\phi}{dt}, \quad (1.9)$$

$L$  și  $R$  reprezentând parametrii sarcinii.

Pe de altă parte, legea circuitului magnetic aplicată de-a lungul unei linii de flux magnetic principal (vezi figura nr. 1.1) conduce la:

$$\oint \overline{H} \cdot \overline{dl} = n_1 i_1 + n_2 i_2 = n_1 i_{10}. \quad (1.10)$$

Curentul echivalent  $i_{10}$  este o mărime uzual folosită în literatura de specialitate ([50], [125], [129], [130]). Ea este introdusă în principal din rațiuni de calcul și are semnificația unui curent care trecând prin înfășurarea primară ar produce aceeași stare de magnetizare ca și în situația reală, în care cele două înfășurări sunt parcurse de curenții  $i_1$  și respectiv  $i_2$ .

### 1.3 CARACTERISTICA MAGNETICĂ A CIRCUITULUI FEROMAGNETIC

Deoarece circuitul magnetic al TC conține un miez feromagnetic, caracteristica de magnetizare nu este liniară. Legătura între ecuațiile (1.9) și (1.10) este dată de proprietățile circuitului feromagnetic pe baza caracteristicii magnetice neliniare, căreia îi corespund relații de forma:

$$i_{10} = i_{10}[\phi_0, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \dots, D^n \phi(t)]. \quad (1.11)$$

Formula scoate în evidență faptul că valoarea momentană a curentului echivalent  $i_{10}$  depinde de valoarea inițială a fluxului magnetic, de valoarea lui momentană și de modul său de variație în timp (aceasta din urmă fiind luată în considerare în formulă în ipoteza că  $\phi(t)$  este o funcție derivabilă de  $n$  ori).

În literatură există și relații similare cu (1.11), dar în care dependența este inversă, flux – curent, [49], [57], [75], [84], [87], [90].

În cazul TC, regimului permanent periodic al curentului primar îi corespunde un regim permanent periodic de magnetizare a miezului. Ridicând experimental caracteristica (1.11) corespunzătoare acestui regim, se obțin cicluri de magnetizare care pot fi simetrice sau nesimetrice, după cum magnetizarea miezului are loc în același fel în ambele sensuri, sau nu. Magnetizarea periodică nesimetrică a TC poate fi cauzată de o magnetizare remanentă importantă a miezului său [19], [165].

La un circuit feromagnetic dat, aspectul și dimensiunile ciclurilor de magnetizare depind de frecvență și de forma de variație în timp a fluxului magnetic [90], [180].

Un studiu al fenomenului neliniar legat de prezența în circuit a miezului TC necesită o expresie analitică a ciclului de magnetizare. Foarte mulți autori au propus un număr imens de relații cu această finalitate [49], [50], [57], [75], [84], [87], [122], [124], [136], [152], [166], [189]. Bazându-ne pe toată această bibliografie, extinsă pe mai mult

de un secol, se poate obține o formulă de tip (1.11) care generalizează rezultatele cunoscute, fiind totodată simplă, ușor de aplicat, precisă, coeficienții necesari calculându-se imediat din setul de date experimentale.

Pentru a putea descrie analitic pierderile prin curenți turbionari care apar în miezul feromagnetic al TC vom porni de la o analiză simplificată aproximativă a relației (1.10), care poate fi pusă sub forma:

$$\theta = \oint \overline{H} \cdot \overline{dl} \cong H \cdot l, \quad (1.12)$$

unde  $H$  este intensitatea câmpului magnetic din miez, presupusă constantă pe secțiunea acestuia, iar  $l$  este lungimea liniei de câmp mijlocii. În regim staționar, această solenație este datorată curentului echivalent:

$$\theta = \theta_s = n_1 i_{10}. \quad (1.13)$$

În regim variabil, la solenația  $\theta_s$  a înfășurării primare trebuie adăugată contribuția curenților turbionari induși în miezul feromagnetic de variația în timp a fluxului magnetic. În cazul TC, miezul fiind alcătuit din tole subțiri, izolate între ele și dispuse longitudinal față de liniile de câmp magnetic, căile de închidere ale curenților turbionari, care sunt situate în planuri transversale, prezintă o rezistență de valoare mare. La frecvență industrială, reactanțele acestor căi de închidere sunt neglijabile în raport cu rezistențele lor, iar curenții turbionari rezultă proporționali și aproape sinfazici cu tensiunea electromotoare indusă în miez [180]. De aceea, contribuția lor la magnetizarea miezului este practic echivalentă cu o solenație,  $\theta_r$ , în fază și proporțională cu tensiunea electromotoare corespunzătoare fluxului fascicular util:

$$\theta_r = -k \frac{d\phi}{dt} = -\frac{k}{n_1} \frac{d\Psi}{dt}, \quad (1.14)$$

unde  $k > 0$  este o constantă proporțională cu lungimea circuitului și invers proporțională cu rezistivitatea materialului miezului. Ținând seama de această solenație suplimentară, legea circuitului magnetic (1.12) se poate scrie:

$$\theta = \theta_s + \theta_r = n_1 i_{10} - \frac{k}{n_1} \frac{d\Psi}{dt} = H \cdot l, \quad \text{sau:} \quad (1.15)$$

$$n_1 i_{10} = H \cdot l + \frac{k}{n_1} \frac{d\Psi}{dt}. \quad (1.16)$$

Din relația (1.16) se poate observa că din cauza curenților turbionari ciclul de magnetizare este mai lat decât cel ridicat în prin puncte: dacă  $di/dt \geq 0$  și deci  $d\Psi/dt \geq 0$ , la curentul  $i_{10} = H \cdot l / n_1$  se adaugă o cantitate pozitivă. Vârfurile ciclului își păstrează locul, deoarece fiind puncte de extrem  $d\Psi/dt = 0$  și curentul este egal cu cel corespunzător ridicării în puncte a ciclului de histereză al materialului,  $i_{10} = H \cdot l / n_1$ .

Conform acestei analize rezultă că ciclul de magnetizare al TC depinde de frecvență (este cu atât mai lat cu cât frecvența e mai mare, respectiv cu cât  $|d\Psi/dt|$  e mai mare) și de modul de variație în timp a fluxului magnetic.

Această primă aproximare poate fi îmbunătățită, luând în calcul neliniaritatea caracteristicii de magnetizare. Cu ajutorul ciclului de magnetizare al miezului se poate determina curentul echivalent. În regimul permanent periodic sinusoidal simetric de magnetizare a miezului, din cauza pierderilor în fier, curentul echivalent  $i_{10}$  nu este în fază cu fluxul  $\phi$ ; el se poate descompune într-o componentă în fază cu fluxul:

$$i_{10\mu} = i_{10\mu}(t), \quad (1.17)$$

numită componentă de magnetizare (sau reactivă) și o componentă ortogonală cu fluxul:

$$i_{10a} = i_{10a}(t), \quad (1.18)$$

numită componentă activă (sau disipativă). Unghiul dintre  $i_{10}$  și  $\phi$  se numește unghi de pierderi, mărimea lui depinzând de calitatea materialului magnetic și de inducția maximă în miez [191].

Relația (1.17) corespunde caracteristicii de magnetizare a circuitului magnetic al TC, iar relația (1.18) rezultă cunoscând dependența:

$$p_f = p_f(\phi_m, \omega) \quad (1.19)$$

a pierderilor prin curenți turbionari în miez în funcție de pulsație, cu amplitudinea fluxului ca parametru.

Dacă fenomenul de histereză nu ar avea loc, curba (1.17) s-ar putea construi ușor, determinând pe caracteristica de magnetizare pentru fiecare valoare a fluxului valoarea corespunzătoare a curentului echivalent și așezând această valoare a lui  $i_{10}$  pe aceeași ordonată cu fluxul magnetic. Unind extremitățile acestor ordonate se obține curba curentului magnetizant; ea este cu atât mai ascuțită cu cât saturația miezului este mai mare. Atunci când are loc fenomenul de histereză construcția este mai complicată, dar se face în mod similar, apărând în plus și o distrugere a simetriei curbei pe sferturile de perioadă. Ca urmare a fenomenului apar pierderile prin histereză,  $p_h$ , în miezul feromagnetic al TC. Acestea sunt proporționale cu aria suprafeței delimitate de ciclul de histereză determinat prin puncte [129], [180], [191].

Caracteristica fundamentală de magnetizare [191] a circuitului feromagnetic al TC se poate aproxima analitic prin polinoame impare [49], [75]. Componenta activă corespunzătoare pierderilor prin curenți turbionari în miez are expresia [50]:

$$i_{10a} = \frac{a_0}{\omega} \frac{d\Psi}{dt}, \quad (1.20)$$

astfel încât ajungem la aproximarea ciclului de magnetizare printr-o expresie de forma:

$$i_{10}(\Psi) = \frac{a_0}{\omega} \frac{d\Psi}{dt} + a_1\Psi + a_{2k+1}\Psi^{2k+1}. \quad (1.21)$$

Determinarea coeficientului  $a_0$  trebuie să se facă ținându-se cont de ambele componente ale curentului  $i_{10}$ :

$$i_{10}(\phi) = i_{10a}(\phi) + i_{10\mu}(\phi) = a_0 \left( \pm \sqrt{\phi_m^2 - \phi^2} \right) + i_{10\mu}(\phi). \quad (1.22)$$

Atunci când fluxul se anulează, curentul  $i_{10}$  are valoarea corespunzătoare câmpului coercitiv al circuitului feromagnetic al TC, adică:

$$i_{10}(0) = i_c \quad ; \text{ în acest caz, relația (1.22) devine:} \quad (1.23)$$

$$i_c = i_{10\mu}(0) + a_0\phi_m. \quad (1.24)$$

Întrucât caracteristica fundamentală de magnetizare trece prin originea axelor de coordonate, înseamnă că  $i_{10\mu}(0) = 0$ , și deci:

$$a_0 = i_c / \phi_m. \quad (1.25)$$

625.467 (81E)



Valorile optime ale coeficienților  $a_1$  și  $a_{2k+1}$  din aproximarea analitică (1.21) se determină prin metoda erorii relative pătratice minime [8], cunoscând coordonatele a cel puțin două puncte de pe curba fundamentală de magnetizare (1.17).

Raționând în același mod și utilizând rezultate obținute în [49], [50], [75], [87], [90], [123], [182] se poate obține o generalizare a acestei formule. Ca o primă observație, expresiile în care amplitudinea fluxului în miez,  $\phi_m$ , nu apare explicit nu pot fi luate în considerare decât pentru o anumită valoare a lui  $\phi_m$ . Deși acest lucru este cunoscut, de multe ori nu este aplicat conform. Dacă se dorește reprezentarea caracteristicii magnetice printr-o funcție analitică, în afara argumentului  $\phi$  aceasta trebuie să conțină și fluxul maxim  $\phi_m$  ca parametru.

Adoptând ipoteza fluxului armonic [50], [63], [170], putem scrie:

$$\phi = \phi_m \cos \omega t. \quad (1.26)$$

Ținând seama și de cele precizate anterior, ciclul de magnetizare este o curbă periodică și simetrică, deci curentul  $i_{10}$  poate fi exprimat printr-o serie *Fourier* incompletă de forma [181]:

$$i_{10} = \sum_{k=1}^n a_k \sin(2k-1)\omega t + \sum_{k=1}^n b_k \cos(2k-1)\omega t. \quad (1.27)$$

Dacă în această relație se exprimă armonicile ca puteri ale pulsației  $\omega$  se obține, conform [50]:

$$i_{10} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^p (-1)^{m-1} a_k C_{2m-1}^{2k-1} \sin^{2m-1} \omega t \cos^{2(p-m)} \omega t + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^p (-1)^{m-1} b_k C_{2m-2}^{2k-1} \sin^{2(m-1)} \omega t \cos^{2(p-m)+1} \omega t. \quad (1.28)$$

Se poate afirma că ecuația (1.26), împreună cu una din relațiile (1.27) sau (1.28) reprezintă ecuațiile parametrice ale ciclului de magnetizare. Eliminând variabila *time*, se poate obține o relație de tip (1.11). Pentru a realiza acest lucru, relația (1.26) se scrie sub forma:

$$\sin^{2(m-1)} \omega t = \left[ 1 - \left( \frac{\phi}{\phi_m} \right)^2 \right]^{m-1} = \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n C_n^{q-1} \left( \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{2n} \quad (1.29)$$

Substituind funcțiile circulare date de relațiile (1.26) și (1.29) în ecuația (1.28), se obține în final:

$$i_{10} = \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \left[ (-1)^{j+k-1} C_{2(j-1)}^{2n-1} C_k^{j-1} \frac{b_{2n-1}}{\phi_m^{2(k-j+n)+1}} \right] \phi^{2(k-j+n)+1} \pm \pm \sqrt{\phi_m^2 - \phi^2} \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \left[ (-1)^{j+k-1} C_{2(j-1)}^{2n-1} C_k^{j-1} \frac{a_{2n-1}}{\phi_m^{2(k-j+n)+1}} \right] \phi^{2(k-j+n)} \quad (1.30)$$

Ecuția (1.30) reprezintă în principiu ciclul de magnetizare. Deși este relativ complexă, ea poate fi simplificată în diverse moduri. Experimental se constată că termenii din parantezele pătrate depind numai de natura materialului magnetic, fiind independenți de  $\phi_m$  [152]. În aceste condiții și bazându-ne pe o consecință a teoremei lui *Weierstrass-Stone* (vezi Anexa nr. 2), care afirmă că o funcție continuă poate fi aproximată cu orice precizie printr-un polinom ([19], [64]), relația (1.30) devine:

$$i_{10} = \sum_{k=1}^n c_{2k-1} \phi^{2k-1} \pm \sqrt{\phi_m^2 - \phi^2} \sum_{k=0}^{n-1} d_{2k} \phi^{2k}, \quad (1.31)$$

în care coeficienții  $c_{2k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$  și  $d_{2k}$ ,  $k = \overline{0, n-1}$  sunt obținuți din combinațiile termenilor din parantezele pătrate ale relației (1.30).

Se observă că  $\phi_m$  apare doar în factorul  $(\phi_m^2 - \phi^2)^{1/2}$ . Semnul acestuia este pozitiv pentru valorile crescătoare ale fluxului magnetic și negativ pentru cele descrescătoare, corespunzând celor două ramuri ale ciclului de magnetizare. Într-un mod mai sintetic, relația (1.31) poate fi scrisă sub forma:

$$i_{10} = f_i(\phi) \pm \sqrt{\phi_m^2 - \phi^2} f_p(\phi), \quad (1.32)$$

unde  $f_i(\phi)$  și  $f_p(\phi)$  sunt polinoame impare și respectiv, pare.

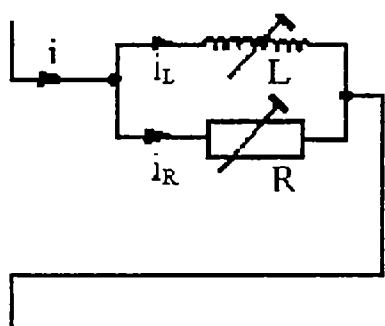
Pentru a rezolva problema dublului semn din fața radicalului, care face ca expresia (1.32) să fie mai complicată și deci mai greu de utilizat, se derivează ecuația (1.26) în raport cu variabila  $\omega t$  și prin combinarea cu ea însăși, pentru eliminarea funcțiilor circulare, se obține:

$$\frac{d\phi}{d(\omega t)} = \sqrt{\phi_m^2 - \phi^2}. \quad (1.33)$$

Substituind rezultatul obținut în relația (1.32), rezultă în final:

$$i_{10} = f_i(\phi) + \frac{1}{\omega} f_p(\phi) \frac{d\phi}{dt}. \quad (1.34)$$

Această ecuație are avantajul de a nu mai conține explicit dublul semn, el fiind inclus implicit în factorul  $d\phi/dt$ . Fenomenologic, primul termen din relația (1.34)



poate fi interpretat ca un curent care străbate o bobină neliniară ideală, în timp ce al doilea corespunde unui curent printr-un rezistor neliniar. Această observație permite folosirea schemei echivalente din figura nr. 1.2, în care  $i_L = f_i(\phi)$  și  $R = \omega/f_p(\phi)$ .

Figura nr. 1.2

Schema echivalentă a TC

În cazurile practice, datorită circuitului magnetic executat tehnologic cu precauții deosebite, se pot obține precizii bune utilizând un număr mic de termeni în polinoamele

expresiei (1.34). În Anexa nr. 3 se indică modalitatea concretă de identificare a polinoamelor  $f_i(\phi)$  și  $f_p(\phi)$  din datele experimentale existente. Pentru polinoame cu numai doi termeni este posibilă determinarea coeficienților direct din punctele caracteristice ale ciclului de histereză al materialului, date furnizate de producătorul miezului feromagnetic.

## 1.4 ANALIZA FUNCȚIONĂRII TRANSFORMATORULUI DE CURENT ÎN REGIM TRANZITORIU

Modul de calcul al răspunsului TC cu saturație și pierderi ca element al sistemului electroenergetic nu este de regulă abordat, pentru că nu a fost posibilă până în prezent evidențierea unei soluții analitice. Pentru un caz concret dat și anumite ipoteze simplificatoare ar putea fi abordată o modelare numerică a dispozitivului, cu ajutorul unor pachete de programe specializate de Teoria sistemelor (Simulink, Matlab/Control, ș.a.) [125].

Pentru a avea o referință, vom analiza mai întâi comportamentul TC considerat ca dispozitiv liniar și fără a ține seama de pierderi. Ulterior, vom putea puncta mai ușor modificările care apar în funcționarea sa prin luarea în considerare a acestor elemente suplimentare și totodată va rezulta dacă luarea în calcul a lor este utilă sau nu, influența acestora relevându-se a fi semnificativă sau neglijabilă.

În caracterizarea TC, privit ca traductor, nu interesează numai curentul secundar ci și eroarea lui în raport cu cel primar. Din legea circuitului magnetic aplicată circuitului TC (figura nr. 1.1) avem:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = H \cdot l. \quad (1.35)$$

Plecând de la condiția satisfăcută în transformatorul ideal:

$$i_1 + \frac{n_2}{n_1} i_2 = 0, \quad (1.36)$$

se poate defini o măsură a erorii absolute sub forma:

$$i_{10\mu} = i_1 + \frac{n_2}{n_1} i_2, \quad (1.37)$$

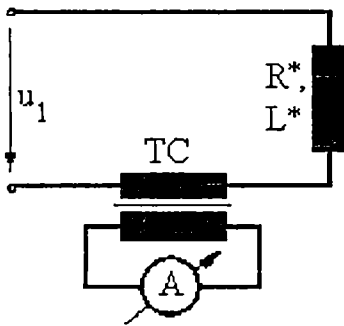
modul de notare (corelat cu (1.17)) fiind ales astfel deoarece (1.37) reflectă, de fapt, o măsură a intensității câmpului magnetic în miezul TC (corelată cu (1.35)), adică:

$$i_{10\mu} = l/n_1 \cdot H. \quad (1.38)$$

Introducând în (1.37) expresiile curenților primar și secundar, se obține măsura erorii absolute introduse de TC. Pentru aprecierea măsurii erorii relative totale, aceasta va fi definită prin raportul  $i_{10\mu}/I_{1m}$ , evitându-se raportarea la valoarea instantanee a curentului primar, ceea ce ar duce la valori infinite pentru momentele în care acesta se anulează.

TC fiind un element larg folosit în sistemul electroenergetic, ni s-a părut util de a nu-l izola de context, adică de a-l trata numai ca traductor în sine. De aceea, vom folosi, ori de câte ori este necesar, această referință, atât pentru a obține informații suplimentare, cât și pentru a transpune concluzii trase în urma identificării unui anumit tip de comportament specific al TC.

În figura nr. 1.3 s-a reprezentat o schemă echivalentă a circuitului în care este montat primarul TC, unde  $u_1$  este tensiunea rețelei de putere, iar  $R^*$  și respectiv  $L^*$



sunt parametrii echivalenței ai circuitului, dependenți de surse, linii și receptoarele din rețea, în regimul normal de funcționare. Se consideră că la un moment dat ( $t=0$ ) se produce o schimbare de regim. În aceste condiții, ecuația diferențială a circuitului este:

Figura nr. 1.3

$$L_1^* \frac{di_1}{dt} + R_1^* i_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.39)$$

TC montat în rețea

unde  $L_1^*$  și  $R_1^*$  reprezintă inductivitatea și respectiv rezistența

echivalente ale rețelei în care este conectat primarul TC după ce s-a produs avaria,  $E_{1m}$  fiind amplitudinea tensiunii de fază inițială  $\alpha$  a rețelei în aceleași condiții și poate fi pusă sub forma:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{T_1} i_1 = \frac{E_{1m}}{L_1^*} \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.40)$$

în care  $T_1 = L_1^*/R_1^*$  reprezintă constanta de timp a circuitului primar. Aplicând ecuației diferențiale (1.40) transformarea *Laplace*, se obține:

$$s \mathcal{L}(i_1) - i_1(0) + \frac{1}{T_1} \mathcal{L}(i_1) = \frac{E_{1m}}{L_1^*} \cdot \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}, \quad \text{de unde:} \quad (1.41)$$

$$\mathcal{L}(i_1) = \frac{\frac{E_{1m}}{L_1^*} \frac{s \sin \alpha + \omega \cos \alpha}{s^2 + \omega^2} + i_1(0)}{s + \frac{1}{T_1}} = \frac{\frac{E_{1m}}{L_1^*} (s \sin \alpha + \omega \cos \alpha) + (s^2 + \omega^2) i_1(0)}{\left(s + \frac{R_1^*}{L_1^*}\right) (s^2 + \omega^2)}. \quad (1.42)$$

Expresia obținută este de forma unei fracții raționale  $h(s)/g(s)$ , în care rădăcinile numitorului sunt distincte; se poate aplica deci teorema dezvoltării a lui Heaviside, obținându-se ca original pentru  $i_1$  o expresie de tipul:

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{h(s_k)}{g'(s_k)} e^{s_k t}, \quad \text{unde:} \quad (1.43)$$

$s_1 = -R_1^*/L_1^*$  și  $s_{2,3} = \pm j\omega$ . În urma calculelor, rezultă pentru  $i_1$  expresia generală:

$$i_1(t) = I_{1m} \left[ \sin(\omega t + \beta) - \left( \sin \beta - \frac{i_1(0)}{I_{1m}} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \right], \quad \text{în care:} \quad (1.44)$$

$$\beta = \alpha - \alpha_1, \quad (1.45)$$

cu  $\alpha_1 = \arctg(\omega L_1^*/R_1^*)$ , iar  $i_1(0)$  reprezintă valoarea curentului în circuitul primar la momentul imediat anterior apariției schimbării de regim.

În figura nr. 1.4 este prezentată forma de variație a lui  $i_1(t)$  dată de (1.44) în si-

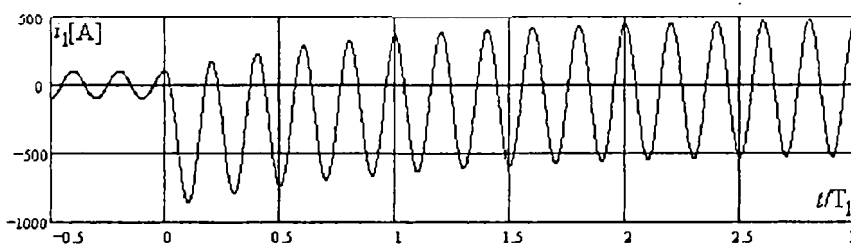


Figura nr. 1.4

Curentul de defect în rețeaua de putere dat de (1.44)

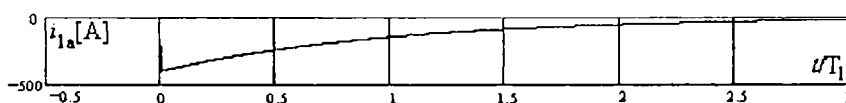


Figura nr. 1.5

Componenta aperiodică

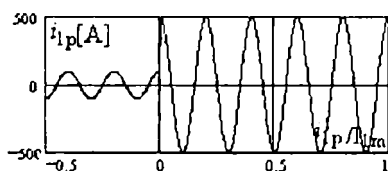


Figura nr. 1.6

Componenta periodică

tu... f... b... ( $\beta = \pi/2$ ) și presupunând că, dacă inițial curentul în rețea era de 100 A, după apariția defectului, curentul de regim permanent s-a mărit de cinci ori; calculul a fost făcut pentru

$T_1 = 0,1$  s, ceea ce corespunde unui raport  $X^*/R^* \cong 31,5$ .

Se observă că există o componentă aperiodică suprapusă peste cea de regim permanent, amândouă fiind redată și separat în figurile nr. 1.5, respectiv nr. 1.6.

Pentru a caracteriza comportamentul TC vom folosi ca și semnal primar un curent de tipul (1.44), calculând răspunsul acestuia, respectiv erorile introduse.

Aplicarea legii inducției electromagnetice și a teoremei a doua a lui *Kirchhoff* în secundarul TC (vezi figura nr. 1.1) conduce la ecuațiile:

$$\begin{cases} R_2 i_2 + u_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} & , \psi_2 = \psi_{u_2} + \psi_{d_2} = n_2 \phi + L_2 i_2 \\ u_2 = L \frac{di_2}{dt} + R i_2 \end{cases} \quad , \text{din care rezultă:} \quad (1.46)$$

$$(L + L_2) \frac{di_2}{dt} + (R + R_2) i_2 = -\frac{d\psi_{u_2}}{dt} = -n_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (1.47)$$

Pe de altă parte, legea circuitului magnetic și legea fluxului magnetic conduc la relațiile aproximative (1.35) și:

$$\phi = B \cdot S = \mu H S, \quad (1.48)$$

pe care, utilizându-le în (1.47), aceasta ia forma:

$$(L + L_2) \frac{di_2}{dt} + (R + R_2) i_2 = -n_2 \frac{d}{dt} \left( \mu S \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{l} \right), \quad (1.49)$$

sau, după gruparea termenilor:

$$\left( L + L_2 + \frac{\mu n_2^2 S}{l} \right) \frac{di_2}{dt} + (R + R_2) i_2 = -\frac{\mu n_1 n_2 S}{l} \frac{di_1}{dt} \quad (1.50)$$

Introducând notațiile:

- $L_\mu = \frac{\mu n_2^2 S}{l}$  – inductivitatea de magnetizare;
- $T_2 = \frac{L + L_2 + L_\mu}{R + R_2}$  – constanta de timp globală a circuitului secundar;
- $n_{12} = \frac{n_1}{n_2} \frac{L_\mu}{L + L_2 + L_\mu}$  – raportul corectat al numărului de spire,

ecuația diferențială (1.50) primește următoarea formă simplă:

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{T_2} i_2 = -n_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (1.51)$$

Se observă apariția constantei de timp  $T_2$ , asupra căreia este greu să ne pronunțăm

aprioric în ceea ce privește plaja de valori în care ar putea să se situeze. Pentru a remedia această lipsă de informație și a obține unele indicații utile am folosit unele reglementări metrologice [72] și STAS 4324-62 (Anexa nr. 4), care indică erorile tolerate ale TC în regim permanent.

În regim sinusoidal de pulsație  $\omega$  poate fi folosit calculul cu mărimi complexe. Înlocuirile formale  $d/dt \rightarrow j\omega$ ,  $i_1 \rightarrow \underline{I}_1$  și  $i_2 \rightarrow \underline{I}_2$  în (1.51) conduc la:

$$\frac{1}{T_2} \underline{I}_2 + j\omega \underline{I}_2 = -j\omega n_{12} \underline{I}_1. \quad (1.52)$$

Pentru aprecierea preciziei TC ca traductor de curent se definește eroarea:

$$\underline{\gamma} = \frac{\Delta I}{I_1} \cdot 100 = \frac{I_1 + k_{in} I_2}{I_1} \cdot 100 = \left( 1 + k_{in} \frac{I_2}{I_1} \right) \cdot 100, \quad (1.53)$$

formulă în care sunt incluse atât eroarea de modul  $\varepsilon$ , cât și cea de unghi  $\delta$ ;  $k_{in}$

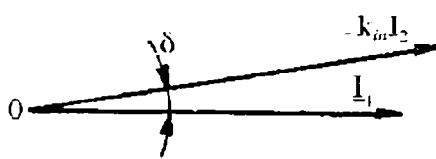


Figura nr. 1.7

poate scrie, deci:

$$-k_{in} I_2 = \underline{I}_1 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{100} \right) e^{j\delta}, \quad (1.54)$$

Definirea erorii globale a TC notațiile fiind asociate conform figurii nr. 1.7.

Introducând (1.54) în (1.53), rezultă:

$$\underline{\gamma} = \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\varepsilon}{100} \right) e^{j\delta} \right] \cdot 100 = \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\varepsilon}{100} \right) (\cos \delta + j \sin \delta) \right] \cdot 100 \cong - \left( \frac{\varepsilon}{100} + j\delta \right) \cdot 100, \quad (1.55)$$

formulă în care s-au neglijat infiniții mici de ordin superior, considerându-se  $\cos \delta \cong 1$  și  $\sin \delta \cong \delta$ , dată fiind valoarea mică a unghiului  $\delta$  (minute).

Pe de altă parte, combinând (1.52) cu (1.53), rezultă:

$$\underline{\gamma} = \left( 1 - k_{in} n_{12} \frac{j\omega}{1/T_2 + j\omega} \right) \cdot 100 = \left[ 1 - k_{in} n_{12} \frac{j\omega T_2 (1 - j\omega T_2)}{\omega^2 T_2^2 + 1} \right] \cdot 100, \quad (1.56)$$

astfel încât erorile  $\varepsilon$  și  $\delta$  sunt date de relațiile:

$$\left\{ \varepsilon = - \frac{\omega^2 T_2^2 (k_{in} n_{12} + 1) + 1}{\omega^2 T_2^2 + 1} \cdot 100 \quad [\%] \quad ; \quad \delta = \frac{k_{in} n_{12} \omega T_2}{\omega^2 T_2^2 + 1} \cong \frac{1}{\omega T_2} \quad [\%], \quad (1.57) \right.$$

considerând  $\omega T_2 \gg 1$  și  $k_{in} n_{12} \cong 1$ .



În acest mod devine posibilă aprecierea constantei de timp globale a circuitului secundar al TC. Spre exemplu, pentru un TC de clasă 0,1 crorile normalizate sunt  $\varepsilon = 0,1\%$  și  $\delta = 6'$ , pentru  $I_1/I_{1n} = 1 \div 1,2$  și  $Z_2/Z_{2n} = 0,25 \div 1$  la  $\cos \varphi = 0,8$  (Anexa nr. 4), rezultând  $\delta = 6' = 0,1^\circ = 0,1 \frac{\pi}{180} = 0,17453$  rad, deci:  $T_2 \cong \frac{1}{\omega \delta} = \frac{1}{100\pi \cdot 0,1\pi} = 1,82378$  s.

Pe baza ecuațiilor (1.44) și (1.51), care exprimă expresia generală a curentului  $i_1$  în cazul unui regim tranzitoriu în rețeaua în care se află conectat primarul TC și, respectiv, legătura dintre curenții  $i_1$  și  $i_2$ , se obține ecuația de funcționare a transformatorului în acest regim:

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{T_2} i_2 = -n_{12} I_{1m} \left[ \omega \cos(\omega t + \beta) + \frac{\sin \beta - \frac{i_1(0)}{I_{1m}}}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \right]. \quad (1.58)$$

Prin aplicarea transformatei *Laplace*, această ecuație ia forma:

$$s \mathcal{L}(i_2) - i_2(0) + \frac{1}{T_2} \mathcal{L}(i_2) = -n_{12} I_{1m} \left[ \omega \frac{s \cos \beta + \omega \sin \beta}{s^2 + \omega^2} + \frac{\sin \beta - \frac{i_1(0)}{I_{1m}}}{T_1} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right], \quad (1.59)$$

sau:

$$\mathcal{L}(i_2) = \frac{\boxed{i_2(0) \left( s + \frac{1}{T_2} \right) (s^2 + \omega^2) - \omega n_{12} I_{1m} \frac{s \cos \beta + \omega \sin \beta}{s^2 + \omega^2} \left( s + \frac{1}{T_1} \right) - n_{12} I_{1m} \frac{\sin \beta - \frac{i_1(0)}{I_{1m}}}{T_1} (s^2 + \omega^2)}}{\left( s + \frac{1}{T_1} \right) \left( s + \frac{1}{T_2} \right) (s^2 + \omega^2)}. \quad (1.60)$$

Expresia (1.60) este de tip fracție rațională  $h(s)/g(s)$ , numitorul având toate rădăcinile distincte. În acest caz se poate aplica teorema dezvoltării a lui *Heaviside*, originalul fiind de forma:

$$i_2(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{h(s_k)}{g'(s_k)} e^{s_k t} \quad , \text{ unde:} \quad (1.61)$$

$s_1 = -1/T_1$ ,  $s_2 = -1/T_2$  și  $s_{3,4} = \pm j\omega$ . Efectuând calculele, pentru curentul secundar se obține expresia:

$$i_2(t) = i_2(0)e^{-\frac{t}{T_2}} - n_{12}I_{1m} \left[ T_2 \frac{\sin \beta - \frac{i_1(0)}{I_{1m}}}{T_1 - T_2} (e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}) - \cos \delta \sin(\beta + \delta) e^{-\frac{t}{T_2}} + \cos \delta \sin(\omega t + \beta + \delta) \right]. \quad (1.62)$$

Soluția (1.62) este nedeterminată pentru  $T_1 = T_2 = T$ . În acest caz se calculează  $\lim_{T_2 \rightarrow T_1} i_2(t)$  și prin utilizarea teoremei lui *l'Hôpital* se ajunge la expresia:

$$i_2(t) = i_2(0)e^{-\frac{t}{T}} - n_{12}I_{1m} \left[ \frac{\sin \beta - \frac{i_1(0)}{I_{1m}}}{T} t e^{-\frac{t}{T}} - \cos \delta \sin(\beta + \delta) e^{-\frac{t}{T}} + \cos \delta \sin(\omega t + \beta + \delta) \right], \quad (1.63)$$

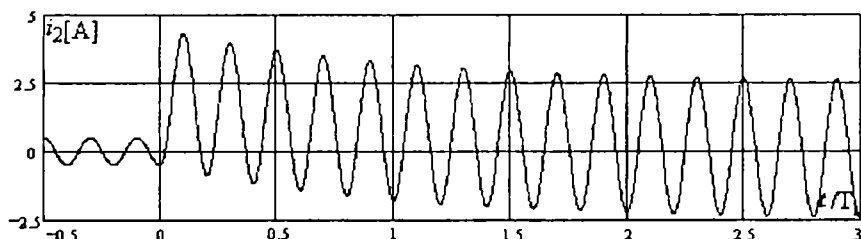


Figura nr. 1.8  
Curentul în secundarul TC, dat de (1.62)

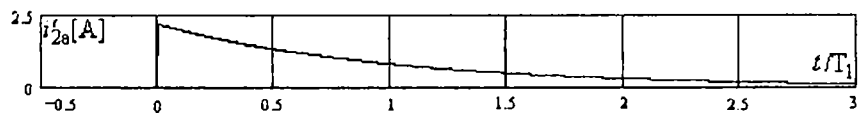


Figura nr. 1.9  
Componenta aperiodică dependentă de  $T_1$

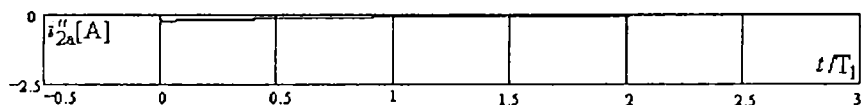


Figura nr. 1.10  
Componenta aperiodică dependentă de  $T_2$

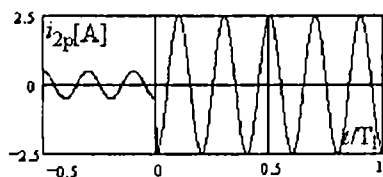


Figura nr. 1.11  
Componenta periodică

în care  $i_2(0)$  reprezintă valoarea curentului din secundarul TC la momentul imediat anterior apariției schimbării de regim ( $t(0^-)$ ).

Luând în considerare un TC cu  $k_m = 1000/5$  și  $T_2 = 1$  s, în figura nr. 1.8 s-a trasat  $i_2(t)$  dat de (1.62), pentru  $\beta = \pi/2$  și  $T_1/T_2 = 0,1$ . Curentul prezintă două componente aperiodice, care sunt reprezentate în figurile nr.

1.9 și nr. 1.10 și una de regim permanent (figura nr. 1.11).

Introducând în (1.37) expresiile (1.44) și (1.62) ale curenților  $i_1$  și  $i_2$ , se obține expresia măsurii erorii pentru curentul de avarie:

$$i_{10\mu}(t) = I_{lm} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega t + \beta) - \left( \sin\beta - \frac{i_1(0)}{I_{lm}} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{n_2}{n_1} n_{12} \left[ \frac{T_2}{T_1 - T_2} \left( \sin\beta - \frac{i_1(0)}{I_{lm}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) - \cos\delta \sin(\beta + \delta) e^{-\frac{t}{T_2}} + \cos\delta \sin(\omega t + \beta + \delta) \right] \end{array} \right\} + \frac{n_2}{n_1} i_2(0) e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (1.64)$$

Pentru a simplifica expresia analitică a mărimii erorii, dată de (1.64), se poate admite că  $\frac{n_2}{n_1} n_{12} = \frac{L_\mu}{L + L_2 + L_\mu} \cong 1$ , neglijând prin aceasta influența dispersiei secundare și inductivitatea de sarcină față de inductivitatea de magnetizare, ceea ce în această fază de aproximare o acceptăm ca fiind posibilă, în ipoteza caracteristicii liniare. În afară de aceasta, observând că  $\sin(\omega t + \beta) - \cos\delta \sin(\omega t + \beta + \delta) = \sin\delta \cos(\omega t + \beta + \delta)$  și că  $\cos\delta \sin(\beta + \delta) = \sin\beta + \sin\delta \cos(\beta + \delta)$ , termenii se restrâng, pentru ca în final să se obțină:

$$i_{10\mu}(t) = I_{lm} \left[ \sin\delta \cos(\omega t + \beta + \delta) - \sin\delta \cos(\beta + \delta) e^{-\frac{t}{T_2}} + T_1 \sin\beta \frac{e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \right] + \\ + i_1(0) e^{-\frac{t}{T_1}} + T_2 i_1(0) \frac{e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} + \frac{n_2}{n_1} i_2(0) e^{-\frac{t}{T_2}} \quad (1.65)$$

Efectuând în aceleași condiții calculele pentru  $T_1 = T_2 = T$ , după ridicarea nedeterminării relației (1.65), rezultă expresia:

$$i_{10\mu}(t) = I_{lm} \left[ \sin\delta \cos(\omega t + \beta + \delta) - \sin\delta \cos(\beta + \delta) e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} \sin\beta e^{-\frac{t}{T}} \right] + \\ + i_1(0) e^{-\frac{t}{T}} \left( 1 + \frac{t}{T} \right) + \frac{n_2}{n_1} i_2(0) e^{-\frac{t}{T}} \quad (1.66)$$

Expresiile (1.65) și (1.66) se simplifică dacă se consideră nule condițiile inițiale:  $i_1(0) = 0$ ,  $i_2(0) = 0$ , deci  $i_\mu(0) = 0$ , aproximație justificată de faptul că  $I_{lm}$  depășește în general cu cel puțin un ordin de mărime orice valoare a curentului  $i_1$  de dinainte de apariția scurtcircuitului. În acest caz, eroarea de curent poate fi exprimată sub una din formele următoare:

$$i_{10\mu}(t) = I_{1m} \left[ \sin \delta \cos(\omega t + \beta + \delta) - \sin \delta \cos(\beta + \delta) e^{-\frac{t}{T_2}} + T_1 \sin \beta \frac{e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \right], \quad (1.67)$$

sau, respectiv, pentru cazul în care  $T_1 = T_2 = T$ :

$$i_{10\mu}(t) = I_{1m} \left[ \sin \delta \cos(\omega t + \beta + \delta) - \sin \delta \cos(\beta + \delta) e^{-\frac{t}{T}} + \frac{\sin \beta}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right]. \quad (1.68)$$

În condițiile exemplului de calcul anterior, în care curenții în primar și secundar, dați de (1.44) și (1.62) sunt reprezentați în figurile nr. 1.4 și nr. 1.8, aspectul erorii, a cărei mărime o descrie (1.65), este arătat în figura nr. 1.12.

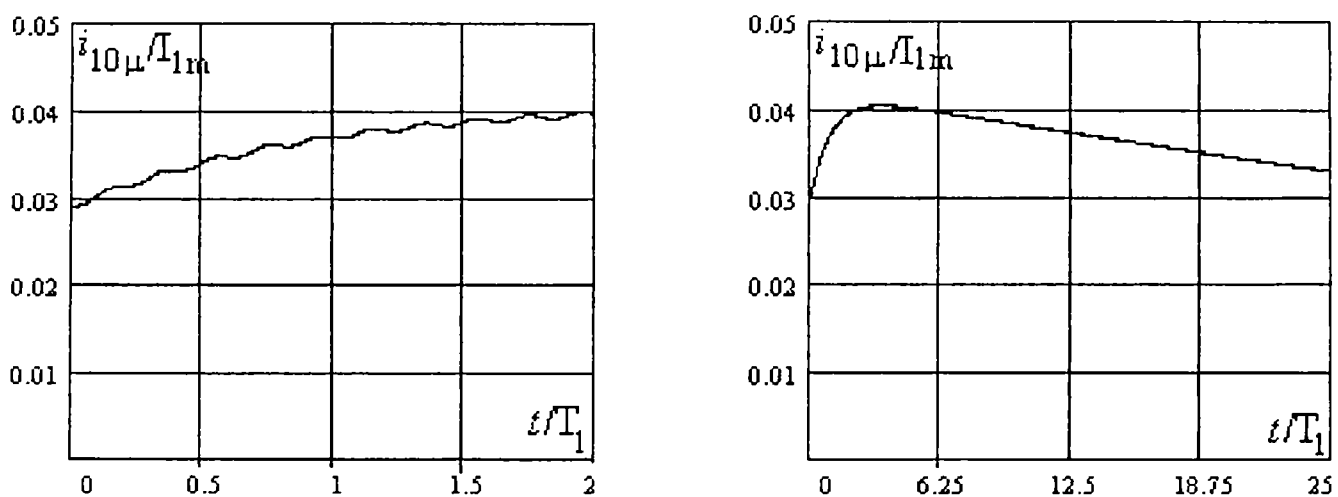


Figura nr. 1.12

Variația erorii relative a TC pentru exemplul de calcul considerat

Pe baza celor prezentate până acum se pot trage câteva concluzii privind funcționarea TC în regim tranzitoriu de scurtcircuit:

- eroarea de curent are două componente: una alternativă, dată de primul termen din (1.67) sau (1.68) și una aperiodică amortizată, dată de ceilalți doi termeni, dintre care ultimul are ponderea cea mai mare, luând în considerare valoarea mică a unghiului  $\delta$ . Neglijând deocamdată primii doi termeni, pentru eroarea de curent rezultă expresiile:

$$i_{10\mu}(t) \cong i_{10\mu\text{aper}} = I_{1m} \frac{T_1}{T_2 - T_1} \sin \beta \left( e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad \text{respectiv:} \quad (1.69)$$

$$i_{10\mu}(t) \cong i_{10\mu\text{aper}} = I_{1m} \frac{\sin \beta}{T} e^{-\frac{t}{T}}; \quad (1.70)$$

- componenta aperiodică a erorii de curent depinde de faza inițială  $\beta$  a curentului de scurtcircuit din primar, fiind maximă pentru  $\beta = \alpha - \alpha_1$ , deci când  $\alpha = \pi/2 + \alpha_1$ . Aceasta poate fi o cauză a funcționărilor incorecte ale TC din unele circuite de protecție [112];

- pe de altă parte, aceeași componentă aperiodică variază în timp, având maximum la timpul  $t = t_m$ , obținut din anularea primei derivate, de unde rezultă:

$$\frac{t_m}{T_1} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}, \text{ și respectiv:} \quad (1.71)$$

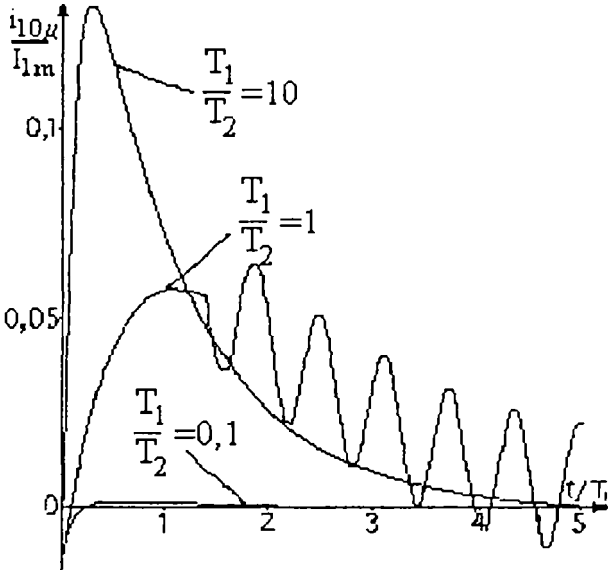


Figura nr. 1.13

Variația erorii relative a TC

$$\left. \frac{t_m}{T} \right|_{T_1=T_2=T} = 1. \quad (1.72)$$

Pentru aceste valori rezultă mărimea erorii aperiodice maxime:

$$i_{10\mu \text{ aperi m}} = I_{1m} \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_2}}}, \quad (1.73)$$

care depinde de raportul  $T_1/T_2$ , variind între  $(0 \div 1)I_{1m}$  atunci când  $T_1/T_2$  ia valori între 0 și  $\infty$ . Pentru  $T_1 = T_2 = T$  se obține:

$$i_{10\mu \text{ aperi m}} = e^{-1} I_{1m} \cong 0,36788 I_{1m}. \quad (1.74)$$

În figura nr. 1.13 s-au reprezentat câteva curbe  $i_{10\mu}/I_{1m}$  în funcție de  $t/T_1$  pentru diferite valori ale raportului  $T_1/T_2$ . Componenta de curent alternativ este figurată numai local, pe curba corespunzătoare raportului unitar al constantelor de timp;

- pentru valori foarte mici ale timpului, eroarea este nulă,  $i_{10\mu}|_{t=0} = 0$ , iar pentru valori mari, ea se reduce la termenul periodic  $\lim_{t \rightarrow \infty} i_{10\mu} = i_{10\mu \sim} = I_{1m} \sin \delta \cos(\omega t + \beta)$ . Amplitudinea ei fiind  $i_{10\mu \sim m} = I_{1m}/\omega T_2$ , rezultă că depinde doar de  $T_2$ , scăzând odată cu creșterea acesteia;

- eroarea relativă maximă nu apare la începutul procesului tranzitoriu, ci după un anumit timp, aproximativ egal cu  $t_m$ , care depinde, de asemenea, de raportul  $T_1/T_2$ .

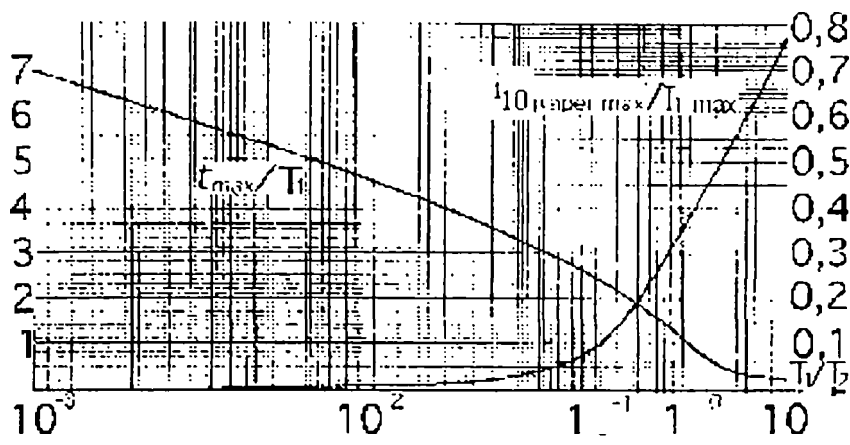


Figura nr. 1.14

Variația timpului relativ de apariție a erorii maxime la TC

În figura nr. 1.14 s-au reprezentat curbele  $i_{10\mu\text{aper max}}/I_{1m}$  și  $t_m/T_1$  în coordonate semilogaritmice;  $t_m$  scade aproximativ proporțional cu logaritmul zecimal al raportului  $T_1/T_2$ .

Din cele expuse rezultă că prezintă interes situațiile în care  $T_2 > T_1$ , sau când  $T_2$  în

sine are valoare absolută mare. Pentru TC din sistemul electroenergetic, la modul practic,  $T_1$  are valori cuprinse între 0,1 și 0,6 secunde, turbogeneratoarele având  $T = (0,1 \div 0,25) s$ , iar hidrogeneratoarele  $T = (0,15 \div 0,6) s$  [112]. Calculând valorile lui  $T_2$  cu a doua relație din (1.57) pentru clasele de precizie uzuale ale TC, se obține (la  $f = 50 \text{ Hz}$ ):

clasa de precizie	0,05	0,1	0,2	0,5	1	3	5	10
$T_2$ [ms]	3647,6	1823,8	1094,3	364,8	182,4	61	36,5	18,2

Practic,  $T_2$  are valori mai mari decât  $T_1$ , mai ales în cazul înfășurărilor de măsură ale TC. Pentru înfășurărilor de protecție, însă,  $T_2$  are valori mici, de ordinul a  $(20 \div 200) \text{ ms}$ . În cazul unei rețele cu o constantă de timp  $T_1$  foarte mică, spre exemplu 50 ms, rezultă (figura nr. 1.14) că eroarea aperiodică maximă poate avea valori de  $(15 \div 55)\%$  și apare la timpul  $t_m = (0,6 \div 1,85) I_{1m} \cong (0,03 \div 0,1) s$ . Dacă  $T_1$  este mai mare, spre exemplu 0,2 s, erorile maxime cresc la  $(75 \div 100)\%$ , iar timpul la care apar crește, deasemenea, la  $(0,05 \div 1) s$ . Această comportare explică suficient unele funcționări incorecte ale TC din circuitele de protecție cu acțiune rapidă ( $t_{\text{protecție}} = (0,02 \div 0,1) s$ ), în special dacă este vorba de o protecție diferențială sau de distanță [37], [91].

Fluxul magnetic maxim în miezul TC poate fi calculat pe baza relațiilor (1.38) și (1.48), obținându-se (în modul):

$$\phi_m = \mu S H_m = \mu S \frac{n_1 i_{10\mu m}}{l} = \frac{n_1}{n_2} L_\mu i_{10\mu m}. \quad (1.75)$$

Din figura nr. 1.13 și relațiile (1.64) și (1.71) se constată că  $i_{10\mu m}$  poate avea, în cazul limită al coincidenței maximelor componentelor sale, valoarea:

$$i_{10\mu m} = I_{1m} \left[ \sin \delta \cos(\omega t + \beta + \delta) + \sin \beta \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{1-\frac{T_1}{T_2}}} \right]_{\max} = I_{1m} \left[ \sin \delta + \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{1-\frac{T_1}{T_2}}} \right], \quad (1.76)$$

care, pentru  $T_2 > T_1$  și  $\sin \delta \cong \delta \cong 1/\omega t$ , devine:

$$i_{10\mu m} \cong I_{1m} \left( \frac{1}{\omega T_2} + \frac{T_1}{T_2} \right) = I_{1m} \frac{\omega T_1 + 1}{\omega T_2}. \text{ Dacă } T_1 = T_2 = T \text{ se obține:} \quad (1.77)$$

$$i_{10\mu m} \cong I_{1m} \left( \frac{1}{\omega T} + \frac{1}{e} \right) = I_{1m} \frac{\frac{\omega T}{e} + 1}{\omega T}, \text{ care, față de (1.77), este mai mare.} \quad (1.78)$$

Fluxul alternativ maxim în regim permanent sinusoidal ajunge la valoarea:

$$\phi_{m\sim} = \frac{n_1}{n_2} L_\mu i_{10\mu m\sim} = \frac{n_1}{n_2} L_\mu I_{1m} \frac{1}{\omega T_2}, \text{ rezultă:} \quad (1.79)$$

$$\phi_m \cong \phi_{m\sim} (\omega T_1 + 1), \text{ iar în cazul în care } T_1 = T_2 = T: \quad (1.80)$$

$$\phi_m \cong \phi_{m\sim} \frac{\omega T}{e}. \quad (1.81)$$

Se constată că fluxul maxim crește odată cu  $T_1$ . Valoarea factorului  $k = \omega T_1 + 1$ , pentru  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$  și  $T_1 = 50 \text{ ms}$  este  $k = 16,7 \cong 20$ , iar pentru  $T_1 = 0,1 \text{ s}$ ,  $k = 32,4 \cong 30$ . Rezultă că fluxul magnetic maxim datorat componentei aperiodice îl depășește pe cel datorat componentei alternative. Această creștere importantă a fluxului magnetic maxim în miezul TC constituie cauza principală a erorilor care apar la funcționarea acestuia în regim tranzitoriu.

Dacă condițiile inițiale nu sunt nule, adică  $i_1(0) \neq 0$  și  $i_2(0) \neq 0$ , din (1.37) rezultă:

$$i_{10\mu}(0) = i_1(0) + \frac{n_2}{n_1} i_2(0) \neq 0, \text{ iar în baza relației (1.76):} \quad (1.82)$$

$$\phi(0) = \frac{n_1}{n_2} L_\mu i_{10\mu}(0), \text{ relație care exprimă fluxul remanent în miez.} \quad (1.83)$$

## 1.5 CONCLUZII

S-a arătat că eroarea care apare în regim permanent este depășită cu mult de eroarea din regimul tranzitoriu, condiționată de componenta aperiodică a curentului tranzitoriu, dacă constanta de timp secundară este mică față de cea primară și, în special, dacă transformatorul este saturat. În acest caz, ipoteza  $L_{\mu} \cong \text{constant}$  nu mai este valabilă, inductivitatea scăzând rapid o dată cu apariția saturației și făcând prin aceasta să crească mult curentul  $i_{10\mu}$ , adică eroarea TC, în acele intervale de timp când curentul primar  $i_1$  are valori mari, care saturează miezul.

Fenomenul este îndeosebi pronunțat atâta timp cât componenta aperiodică a curentului  $i_1$  produce un flux magnetic destul de mare pentru ca, adunându-se cu cel alternativ, să mărească saturația. După ce componenta aperiodică scade sub o anumită valoare, saturația încetează (în ipoteza că fluxul alternativ maxim nu produce, el singur, această saturație) și funcționarea redevine normală, curentul secundar fiind din nou imaginea destul de fidelă a celui primar, iar eroarea TC scade mult, rămânând, totuși, mai mare decât în regimul normal de funcționare.

În ceea ce privește ecuațiile stabilite, acestea sunt deduse pe baza unor ipoteze simplificatoare, dar care permit sesizarea calitativă a fenomenelor ce intervin atunci când un curent de avarie trece prin primarul TC. La cercetarea funcționării transformatorului în regimuri în care miezul acestuia este saturat se impune stabilirea unor ecuații neliniare care să descrie analitic caracteristica sa magnetică. Numai după această etapă se poate trece la rezolvarea sistemului de ecuații care descrie funcționarea TC pentru a putea identifica răspunsul acestuia la un semnal de intrare (curent primar) dat.



În consecință, pentru a putea modela matematic funcționarea TC, trebuie obținută o expresie analitică pentru caracteristica sa magnetică, relație care să fie simplă, ușor de calculat, de derivat, iar erorile de aproximare obținute prin utilizarea ei să fie cel mult de același ordin de mărime cu cel al preciziei de determinare a punctelor caracteristicii neliniare experimentale.

Funcționarea TC este descrisă de ecuațiile (1.9) și (1.10), legătura dintre ele făcând-o relația (1.11):

$$\begin{cases} n_1 i_1 + n_2 i_2 = n_1 i_{10} \\ i_{10} = f(\phi, \phi_m) \\ (L + L_2) \frac{di_2}{dt} + (R + R_2) i_2 = -n_2 \frac{d\phi}{dt} \end{cases} \quad (1.84)$$

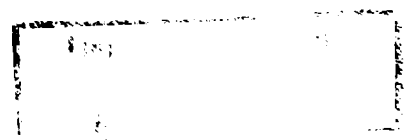
În cadrul sistemului (1.84), ecuația centrală, care descrie caracteristica de magnetizare a miezului TC, dedusă în § 1.3:

$$i_{10} = \sum_{k=1}^p a_{2k-1} \phi^{2k-1} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=0}^{p-1} a_{2k} \phi^{2k} \frac{d\phi}{dt} \quad (1.85)$$

reprezintă o generalizare a formulelor cu care se operează curent în domeniu (relațiile (1.16) [180] și (1.21) [50]).

Se apreciază că formula (1.85), care descrie caracteristica de magnetizare a miezului TC este destul de simplă, neutilizând decât polinoame, spre deosebire de altele [49], [87] ce folosesc funcții putere complicate, funcții trigonometrice sau transcendente. Polinoamele fiind funcții care pot fi ușor tratate matematic și numeric, integrate, derivate, etc. fac din (1.85) o relație ușor de implementat în programe de calcul, cu atât mai simplu cu cât poate asigura precizia dorită pentru un număr relativ mic de termeni. Se poate afirma, deci, că sistemul (1.84) caracterizează comportarea TC în orice regim, ținând cont și de câmpul magnetic generat de curenții turbionari.

Evaluarea pierderilor prin histereză presupune cunoașterea datelor constructive ale TC, cu ajutorul cărora s-ar putea calcula inducția magnetică  $B$  în miez, precum și intensitatea câmpului magnetic  $H$ . Exprimând  $H = f(B)$  în maniera indicată în Anexa nr. 3 (formula (A.11)), este posibil calculul pierderilor de energie asociate ciclului de



histereză, sub forma  $\rho_h = \frac{1}{4\pi} \oint H dB$  J/m<sup>3</sup>/ciclu. Folosind relația (A.10), aceste pierderi

pot fi puse sub forma  $\rho_h = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-B_m}^{B_m} f_i(B) dB + \int_{-B_m}^{B_m} f_p(B) (B_m^2 - B^2)^{1/2} dB \right]$ . Deoarece  $f_i(B) =$

$= \sum_{k=1}^n a_{2k-1} B^{2k-1}$  sunt polinoame impare, prima dintre integrale este nulă și ținând seama

că  $f_p(B) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} B^{2k}$ , rezultă  $\rho_h = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} I_{2k} \right)$ , în care  $I_{2k} = \int_{-B_m}^{B_m} B^{2k} (B_m^2 - B^2)^{1/2} dB$ .

Integrala poate fi evaluată folosind relația de recurență  $I_{2k} = \frac{2k-1}{2(k+1)} B_m^2 I_{2(k-1)}$ , cu  $I_0 =$

$= \frac{\pi}{2} B_m^2$ . Cu aceste precizări, pierderile prin histereză în funcție de parametrii  $a_{2k}$  și  $B_m$

pot fi calculate sub următoarea formă:  $\rho_h = \frac{B_m^2}{2} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} a_{2k} B_m^{2k} \right]$ . Rezultatele

obținute pe această cale reflectă o foarte bună concordanță cu cele obținute din determinarea ariei ciclurilor de histereză prin integrare, folosind un procedeu de tip *Simpson*.

Nu am folosit această dezvoltare pentru că nu există garanția cunoașterii datelor tehnice constructive ale TC în exploatarea curentă (număr de spire al înfășurărilor, dimensiuni geometrice, etc.).



Aproximarea *spline* conține paradoxul delicios al Simfoniei Clasice a lui *Prokofiev*: pare scrisă cu multe secole în urmă, deși, firește, acest lucru nu e posibil.

*Philip Davis, 1963 [70]*

## *Capitolul 2*

# CALCULUL TRANSFORMATORULUI DE CURENT CU SATURAȚIE ȘI PIERDERI ÎN REGIM TRANZITORIU

## 2.1 GENERALITĂȚI

Sunt prezentate încercări și modele matematice ale caracteristicii magnetice neliniare a TC, precum și răspunsul transformatorului în regim tranzitoriu.

În unele calcule sunt folosite funcții *spline* polinomiale. În principal, este urmărită reprezentarea funcțiilor *spline* ca și combinații liniare de *B-spline*, făcându-se referiri doar la aspecte teoretice care sunt utile calculelor ce vor fi efectuate. Selecția literaturii de specialitate date în bibliografie este făcută după aceleași criterii, conținând doar titluri la care se fac referiri în text pentru un rezultat preluat sau pentru demonstrații ori informații suplimentare, fără a fi reprezentativă pentru acoperirea domeniului respectiv. Pentru o imagine completă a teoriei funcțiilor *spline* trebuie consultate tratate care oferă prezentări exhaustive, [1], [47], [48], [83], [121], [134], [154], [162], [163].

Anexa nr. 1 cuprinde o listă detaliată a tuturor notațiilor matematice utilizate, majoritatea fiind cele uzuale.

În Matematicile moderne există două direcții în definirea funcțiilor *spline*. Prima se bazează pe proprietatea funcției *spline* de a fi soluția unei probleme variaționale de minim cu anumite restricții precizate. Abordarea este esențial mai abstractă și prezintă un număr de avantaje în precizarea condițiilor de existență și unicitate a soluției. A doua direcție se bazează pe noțiunea intuitivă că o funcție *spline* este formată din mai multe funcții definite pe segmente adiacente, care aparțin unor anumite clase precizate și care sunt racordate în noduri într-un anumit fel. Această abordare are mai mult un caracter algebric și a fost preferată pentru faptul că favorizează obținerea mai rapidă a unor rezultate care să poată fi exploatare practic.

O mare parte din literatura existentă referitoare la funcțiile *spline* se bazează pe faptul că ele reprezintă soluții ale unor probleme variaționale. Acest aspect nu este prezentat aproape deloc în teză, cu excepția unor considerații făcute asupra ajustării prin funcții *spline* utilizată în cadrul metodei celor mai mici pătrate (§2.2.2.4), deoarece nu a fost folosită, în mod practic, proprietatea respectivă. Aceeași afirmație poate fi făcută și pentru aproximarea optimală a funcționalelor liniare, care începând cu *Golomb & Weinberger* [82] și *Sard* [154] a produs multe exprimări elegante, folosind tehnici matematice dintre cele mai avansate, în special în domeniile legate de cvadratura optimală. De asemenea, funcțiile *spline* generalizate, care sunt o consecință firească a aspectului variațional al funcțiilor *spline* [121] nu și-au găsit locul în ceea ce am selecționat, cu excepția unor sumare referiri la funcții segmentar exponențiale și raționale.

Este destul de dificil de explicat omiterea aproximării optimale în alte norme decât aceea a metodei celor mai mici pătrate, atâta timp cât există o teorie complet pusă la punct a aproximării optimale prin funcții *spline* cu noduri fixe și flotante în norma uniformă  $\|\phi\| := \max\{\phi(x) \mid a \leq x \leq b\}$  [141], în afara concluziei practice că pentru majoritatea covârșitoare a aplicațiilor, aproximații *spline* polinomiale obținuți prin interpolare au dat rezultate satisfăcătoare. În plus, precizia suplimentară obținută prin

folosirea unei aproximări optimale în locul uneia bune nu justifică efortul considerabil de a o construi.

Caracterul strict aplicativ al tezei nu a permis abordarea multor aspecte ale teoriei funcțiilor *spline*, o parte dintre ele rămânând chiar neamintite, deși fac obiectul unui număr însemnat de articole și lucrări de specialitate. În schimb, au fost prezentate sumar, dar consistent, proprietăți de bază, structurale și intrinseci ale mulțimilor de funcții *spline* ce formează un spațiu liniar și mai ales aplicarea funcțiilor *spline* la procesele de interpolare, la aproximarea optimală a unor funcționale liniare și la rezolvarea numerică a unor clase de ecuații diferențiale.

Funcțiile *spline* cubice au beneficiat de o mare mediatizare, afirmându-se că pot modela o bandă elastică ce este constrânsă să treacă prin anumite puncte din plan [161]; de fapt, ele pot face acest lucru doar pentru curburi mici, soluția problemei în condiții oarecare fiind oferită numai de funcțiile *spline* care nu formează un spațiu liniar (denumite în mod impropriu funcții *spline* neliniare) [111]. Nu am explorat acest domeniu, nici pe cel al aproximării cu constrângeri, pentru că în problemele de interes practic abordate am obținut rezultate satisfăcătoare utilizând funcții *spline* liniare. De altfel, acest domeniu este presărat cu dificultăți majore, atât matematice, cât și de calcul. Spre exemplu, nu numai că este greu de definit din punct de vedere matematic o aproximare „reușită“, dar chiar proprietăți de bază ale acesteia, cum ar fi monotonia sau convexitatea, nu sunt de loc ușor de controlat. Câteva aspecte legate de aceste afirmații pot fi urmărite în §2.2.2.5.

Datorită caracterului lor polinomial, funcțiile *spline* prezintă din punct de vedere aplicativ avantajul de a permite ducerea până la capăt a calculelor, programarea algoritmică la calculator făcându-se fără dificultate.

Pe tot parcursul tezei, acolo unde se apreciază că este necesar, vor fi prezentate, în majoritatea cazurilor fără demonstrație, noțiuni de bază despre funcții *spline*, interpolare polinomială și calcul cu diferențe divizate. Procedeele prin care este abordat domeniul sunt constructive.

## 2.2 MODELAREA FENOMENELOR DE SATURAȚIE ȘI DE HISTEREZĂ MAGNETICĂ

Miezul magnetic al TC este neliniar, caracteristica sa fiind reprezentată de relația (1.11). O analiză a acestui fenomen evidențiază două aspecte fundamentale: saturația și histereza, ele putând fi considerate global pe baza unor dependențe funcționale neliniare (un exemplu este relația (1.34)). Acestea sunt relații neunivoce, dar uneori, când efectele histerezei pot fi neglijate, se poate lua în considerare exclusiv fenomenul de saturație. În acest caz, dependența neliniară este o funcție univocă, obținută prin restricția ciclului de histereză la curba de magnetizare.

Funcție de caracterul concret al aplicației, regimul de funcționare și materialul magnetic al miezului, se adoptă o reprezentare a fenomenului de neliniaritate care să corespundă optim cerințelor. Într-unul din referatele de doctorat au fost prezentate cele mai reprezentative modele matematice deterministe clasice ale saturației și ale histerezei magnetice, precum și aspecte legate de practica utilizării lor.

Vor fi detaliate, în cele ce urmează, rezultatele practice referitoare la modelarea matematică a caracteristicii magnetice neliniare a TC, plecând de la formule clasice și până la modele obținute prin prisma folosirii aspectelor fundamentale ale funcțiilor *spline* polinomiale.

### 2.2.1 Modele de tip clasic ale caracteristicii de magnetizare

Modelul matematic cel mai simplu al caracteristicii de magnetizare este dreapta. Dacă, pentru un interval mai extins, aproximația introdusă este mare, soluția poate fi îmbunătățită folosind aproximarea liniară pe porțiuni [50]. Dezavantajul esențial al procedurii este faptul că modelul nu e o curbă netedă, punctele

caracteristicii fiind legate prin segmente de dreaptă. Consecința imediată este imposibilitatea evaluării corecte a derivatelor, necesară rezolvării ecuațiilor diferențiale sau algebrice neliniare.

Caracteristica de magnetizare a miezului TC este cunoscută prin 28 de perechi de puncte, determinate experimental (valorile numerice se găsesc în § 3.2, tabelul nr. 3.1). Pentru că funcționarea TC va fi descrisă de sistemul de ecuații (1.84), dependența mărimilor luate în considerare este  $i = f(\phi)$ .

Pentru modelarea matematică a caracteristicilor de magnetizare au fost propuse un număr considerabil de expresii, bibliografia consacrată acestui subiect extinzându-se pe o perioadă mare de timp. Din punct de vedere istoric, prima formulă de acest tip a fost dată de *Fröhlich*, conform [87].

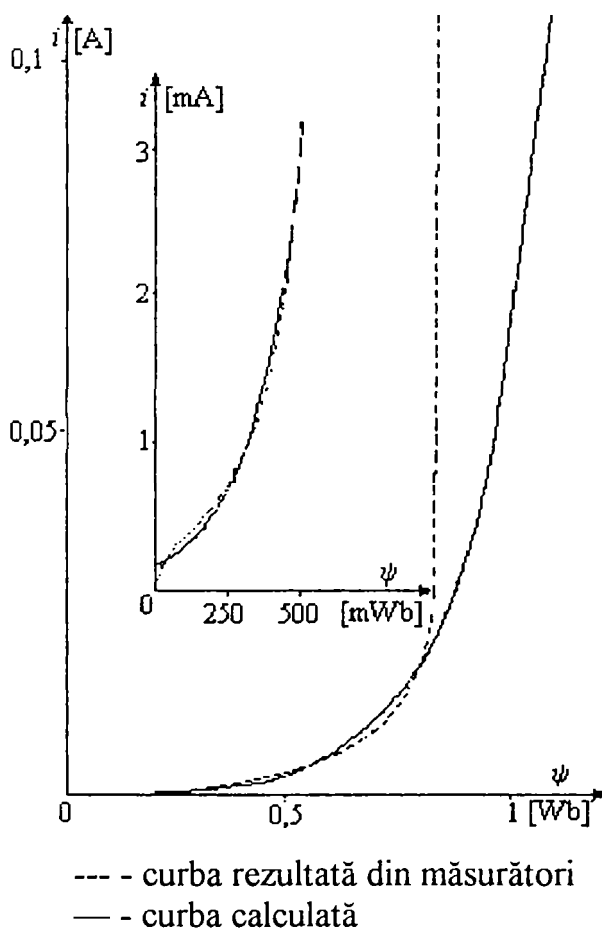


Figura nr. 2.1

$$i = a e^{b\psi}; \text{ a și b dați de (2.2)}$$

În ideea unei reprezentări care să aibă avantajele unui efort mic de evaluare, prima tentativă a fost făcută utilizând relația [49]:

$$i = a e^{b\psi} \quad (2.1)$$

Coeficienții, determinați prin metoda celor mai mici pătrate, au valorile:

$$\begin{cases} a = 1,580487932 \cdot 10^{-4} \\ b = 5,9310814 \end{cases} \quad (2.2)$$

iar rezultatul este reprezentat în figura nr. 2.1.

În fața evidentelor curențe ale acestei reprezentări, următoarea încercare s-a făcut cu o formulă utilizată în proiectare [93]:

$$i = a \operatorname{sh} b\psi \quad (2.3)$$

Experimentând metodologia de calcul a constantelor propusă de autori nu poate fi obținută o aproximație satisfăcătoare pe tot

domeniul de interes. Prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate, valorile fiind:

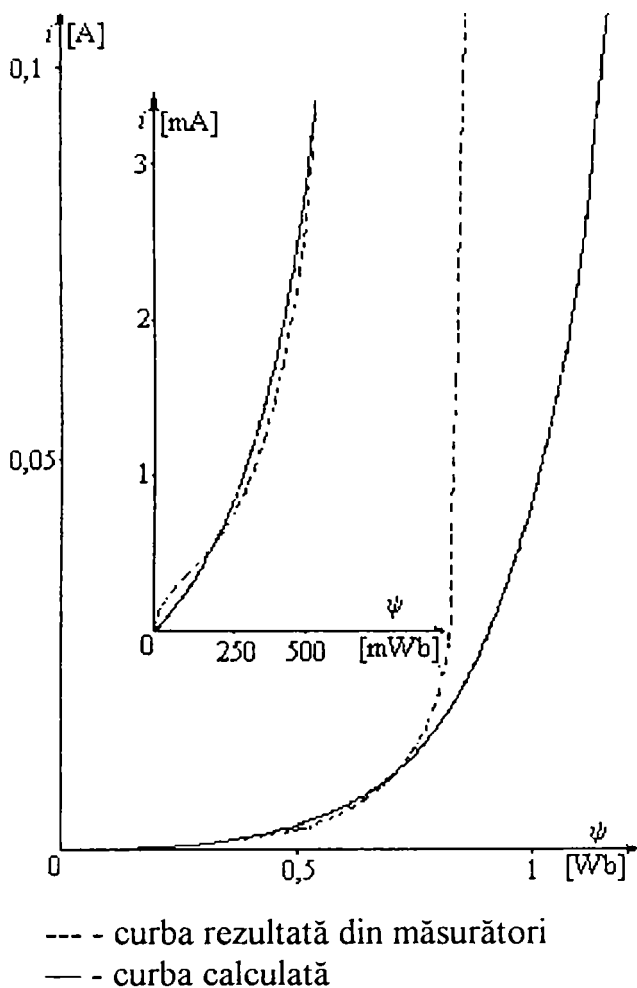


Figura nr. 2.2

$$i = a \operatorname{sh} b\Psi ; a \text{ și } b \text{ dați de (2.4)}$$

lui *Weierstrass-Stone*, redată în Anexa nr. 2, am experimentat posibilitatea redării caracteristicii de magnetizare în acest mod. Tre-când peste alte modele cu un număr mai redus de termeni, dar care furnizează precizii insuficiente, în figura nr. 2.3 este redată o aproximare făcută printr-un polinom complet de gradul zece:

$$i = \sum_{k=1}^{10} a_k \Psi^k , \quad (2.5)$$

cu coeficienții:

$$\begin{cases} a = 4,666812267 \cdot 10^{-4} \\ b = 5,274880589 \end{cases} , \quad (2.4)$$

se obține o modelare satisfăcătoare, cu excepția zonei de saturație, în care erorile devin considerabile (figura nr. 2.2).

Deoarece este relativ frecvent făcută afirmația că o funcție continuă poate fi aproximată cu orice precizie printr-un polinom, baza aserțiunii constituind-o teorema

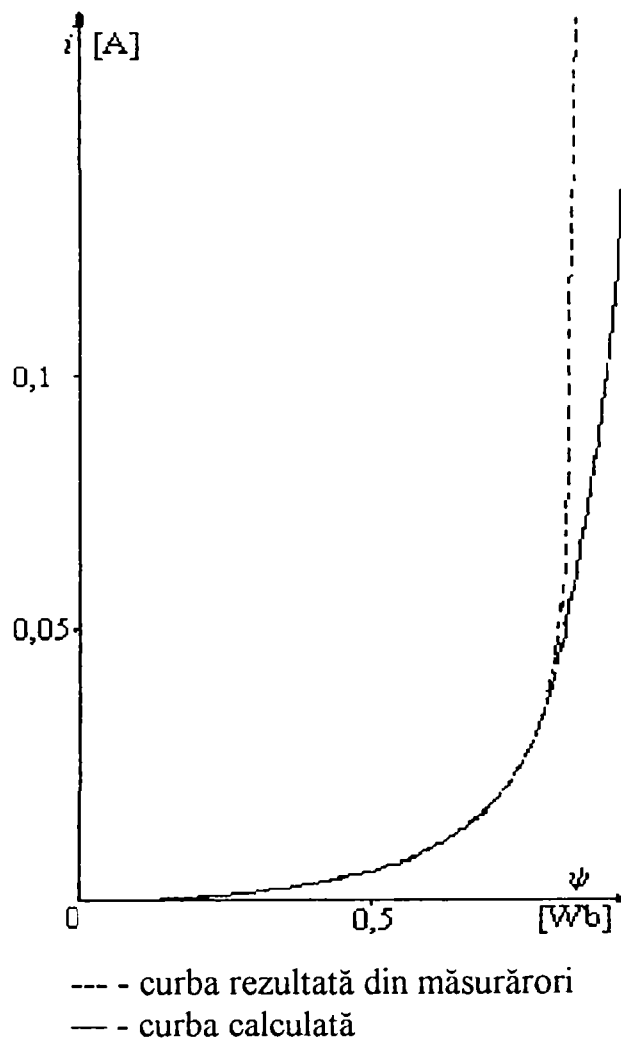


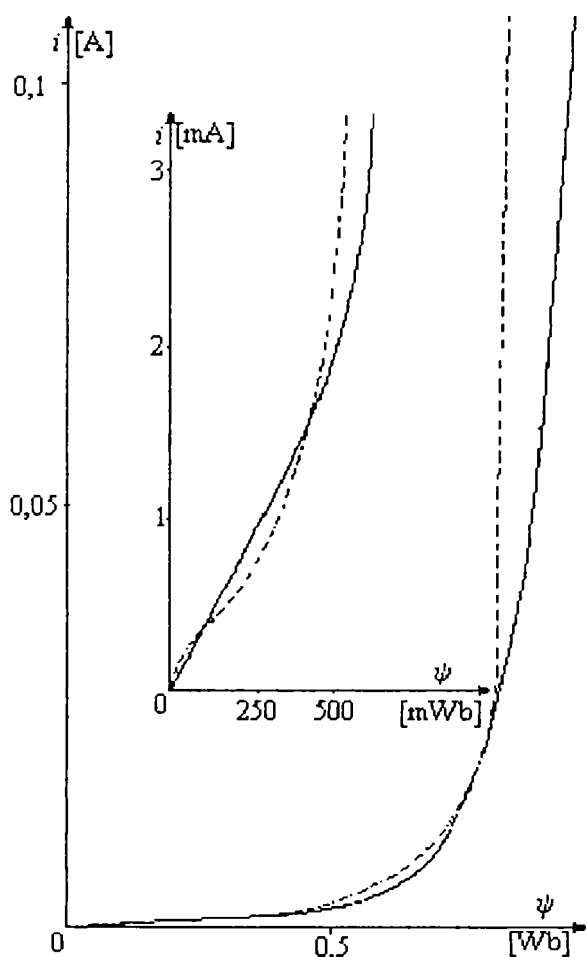
Figura nr. 2.3

$$i = \sum_{k=1}^{10} a_k \Psi^k ; a_k \text{ dați de (2.6)}$$



$$\begin{cases} a_1 = 1,0285827 \cdot 10^{-2}; & a_6 = -58,487878; \\ a_2 = -1,8656523 \cdot 10^{-1}; & a_7 = -36,64546; \\ a_3 = 2,1562117; & a_8 = 2,194966 \cdot 10^2; \\ a_4 = -13,319591; & a_9 = -2,554106 \cdot 10^2; \\ a_5 = 43,221678; & a_{10} = 1,7052074 \cdot 10^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

determinați prin metoda celor mai mici pătrate. Se vede că rezultatul nu corespunde din punct de vedere calitativ. O precizie de ordinul  $\varepsilon = 10^{-3}$  se obține prin însumarea a circa două sute de termeni, ceea ce face ca formula să nu prezinte interes practic.



--- - curba rezultată din măsurători  
 — - curba calculată

Figura nr. 2.4

$$i = a_1 \psi + a_9 \psi^9; \quad a_1, a_9 \text{ dați de (2.8)}$$

În [75] se afirmă că, pentru a avea o precizie satisfăcătoare pentru modelarea caracteristicii de magnetizare, gradul polinomului de aproximare trebuie să fie ridicat. În [50], autorul, citând acest lucru, precizează că, respectând această indicație, se pot obține aproximări analitice suficient de precise prin polinoame cu numai doi termeni:

$$i = a_1 \psi + a_{2k+1} \psi^{2k+1}, \quad (2.7)$$

valorile optime ale coeficienților fiind determinate prin metoda erorii relative pătratice minime. Am făcut acest lucru pentru cazul luat în considerare, obținând (pentru  $k = 4$ ):

$$\begin{cases} a_1 = 3,878960978 \cdot 10^{-3} \\ a_9 = 1,326737359 \cdot 10^{-1} \end{cases}; \quad (2.8)$$

rezultatul este evidențiat în figura nr. 2.4.

Am mai testat și alte formule cunoscute și frecvent utilizate, fără a obține o aproximare satisfăcătoare pe domenii mari de variație a mărimilor. Concluzia care se impune din acest studiu este că o caracteristică de magnetizare nu poate fi aproximată în bune condiții pe domenii extinse, toate aceste

Concluzia care se impune din acest studiu este că o caracteristică de magnetizare nu poate fi aproximată în bune condiții pe domenii extinse, toate aceste

formule dând rezultate corespunzătoare doar pentru abateri relativ mici față de un punct static de referință. În proiectarea mașinilor electrice, de multe ori, acesta este cazul, punctul nominal de funcționare fiind fixat undeva pe curbă (în zona cotului curbei de magnetizare la transformatoarele de putere și în porțiunea liniară la TC), în situații normale de utilizare nefiind vizate decât intervale restrânse din vecinătatea acestuia, pentru care oricare dintre formulele menționate mai sus poate oferi deplină satisfacție.

Pentru cazul care ne interesează, însă, se dorește aproximarea în condiții de precizie suficientă a unui domeniu extins, sau a întregii caracteristici de magnetizare. Aceasta se poate obține numai cu formule mai sofisticate și mai greoaie la utilizare, ale

căror coeficienți se obțin dificil din datele experimentale. Presentăm câteva dintre ele, pentru a da o idee asupra celor afirmate.

Pentru o eroare relativă standard de ordinul  $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ , pot fi folosite următoarele formule:

$$i = \frac{a + b\psi}{1 + c\psi}, \text{ în care:} \quad (2.9)$$

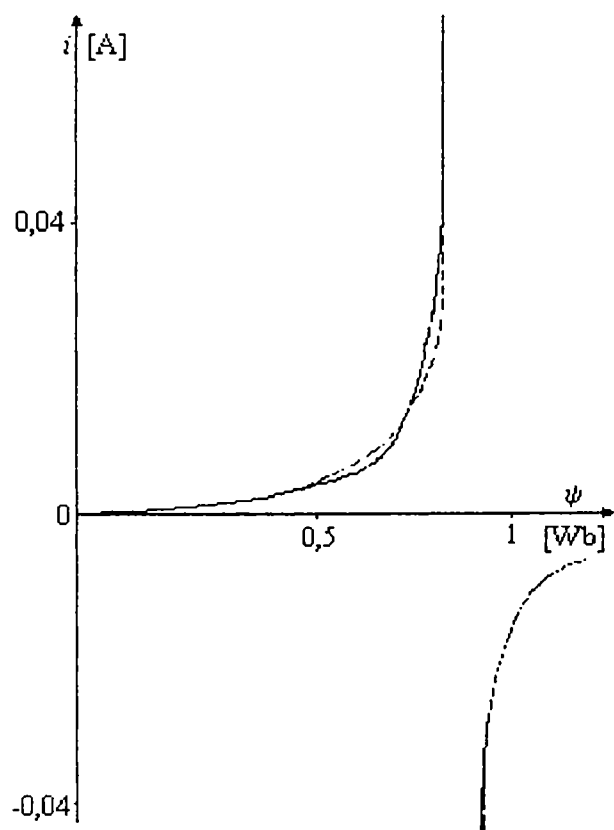
$$\begin{cases} a = 1,1599667 \cdot 10^{-4} \\ b = 2,0601864 \cdot 10^{-3}, \\ c = -1,1650839 \end{cases} \quad (2.10)$$

( $\varepsilon = 4,586 \cdot 10^{-3}$ ) și:

$$i = a + b\psi^c, \text{ în care:} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} a = 3,6810058 \cdot 10^{-3} \\ b = 8,3773357 \cdot 10^4, \\ c = 76,851014 \end{cases} \quad (2.12)$$

( $\varepsilon = 4,208 \cdot 10^{-3}$ ), reprezentările lor putând fi



--- - curba rezultată din măsurători  
— - curba calculată

Figura nr. 2.5

$$i = \frac{a + b\psi}{1 + c\psi}; a, b \text{ și } c \text{ dați de (2.10)}$$

urmărite în figurile nr. 2.5 și, respectiv, nr. 2.6.

Pentru o precizie de două ori mai bună, formulele devin mai complexe, cum ar fi, spre exemplu:

$$\frac{1}{i} = a + b\Psi + c\Psi^2 + d\Psi^3, \quad (2.13)$$

( $\varepsilon = 1,992 \cdot 10^{-3}$ ), în care:

$$\begin{cases} a = 2,9701821 \cdot 10^3 \\ b = -1,0355821 \cdot 10^4 \\ c = 1,3053008 \cdot 10^4 \\ d = -5,8494013 \cdot 10^3 \end{cases}, \text{ sau: } (2.14)$$

$$\frac{1}{i} = a + \frac{b}{\ln \Psi} + \frac{c \ln \Psi}{\Psi} \quad (2.15)$$

( $\varepsilon = 1,987 \cdot 10^{-3}$ ), în care:

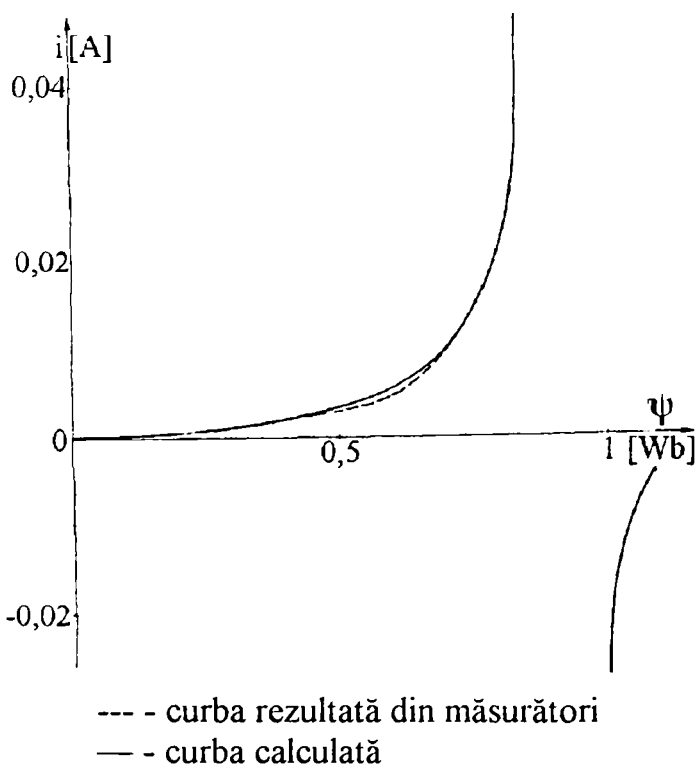


Figura nr. 2.7

$$\frac{1}{i} = a + b\Psi + c\Psi^2 + d\Psi^3; a, b, c, d \text{ dați de (2.14)}$$

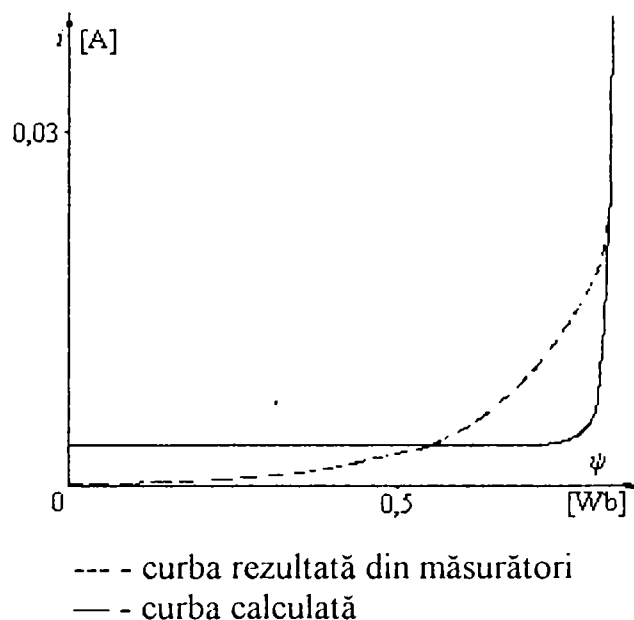


Figura nr. 2.6

$$i = a + b\Psi^c; a, b \text{ și } c \text{ dați de (2.12)}$$

$$\begin{cases} a = 39,370792 \\ b = 11,772122 \\ c = -2,061805 \cdot 10^2 \end{cases}, \quad (2.16)$$

reprezentările asociate acestora putând fi urmărite în figurile nr. 2.7 și nr. 2.8. Aceste formule sunt cele mai simple care oferă o asemenea precizie, fiind de preferat altora, mai greoaie, care aduc doar îmbunătățiri ne semnificative (spre exemplu:

$$i = \frac{a + b\Psi}{1 + c\Psi + d\Psi^2}, \text{ în care } (2.17)$$

$$\begin{cases} a = -9,5201449 \\ b = 11,102214 \\ c = 0,10116385 \\ d = -1,4314774 \end{cases} \quad (2.18)$$

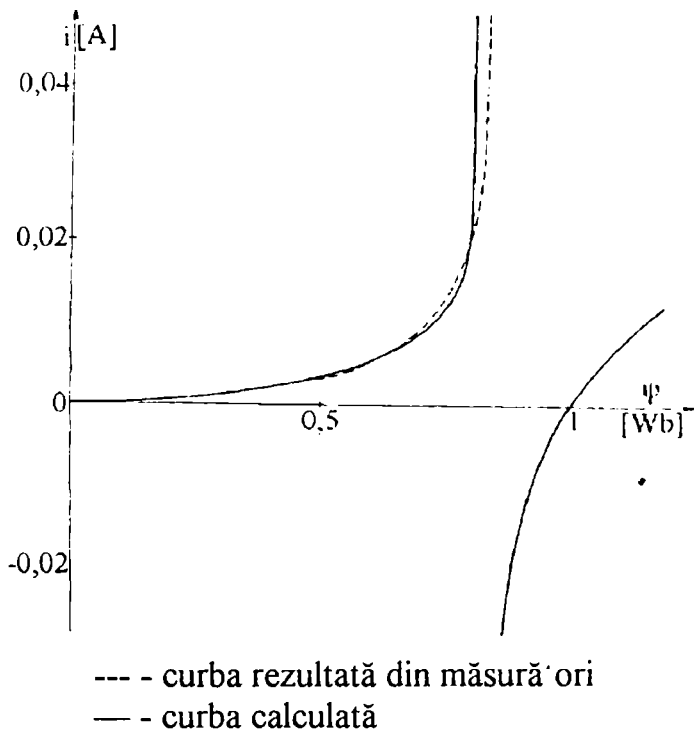


Figura nr. 2.8

$$\frac{1}{i} = a + \frac{b}{\ln \Psi} + \frac{c \ln \Psi}{\Psi}; \text{ a,b,c,d dați de (2.16)}$$

( $\epsilon = 1,729 \cdot 10^{-3}$ ), cu reprezentarea în figura nr. 2.9).

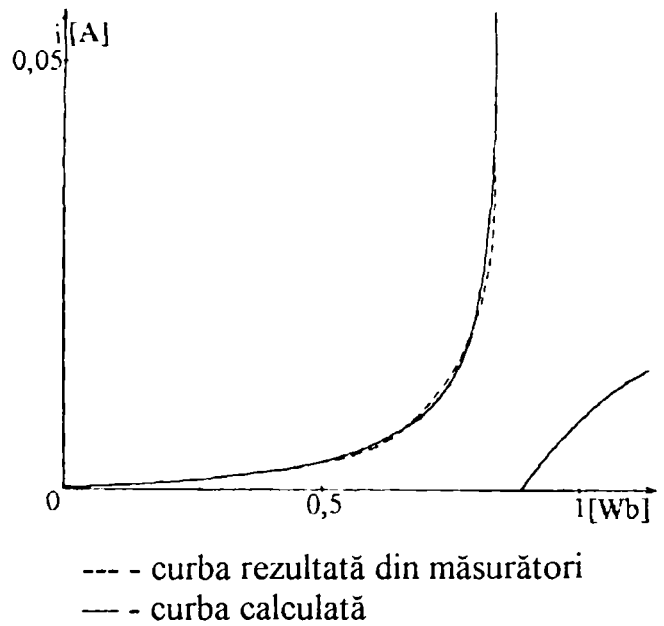


Figura nr. 2.9

$$i = \frac{a + b\Psi}{1 + c\Psi + d\Psi^2}; \text{ a,b,c,d dați de (2.18)}$$

Se pare că pragul  $\epsilon = 10^{-3}$  reprezintă o limită pentru o aproximare analitică rezonabilă prin formule clasice, orice tentativă de a coborî sub el implicând exprimări și calcule fastidioase. Ultimul exemplu pe care îl dăm pentru ilustrare, cu  $\epsilon = 10^{-3}$ , este (figura nr. 2.10):

$$i = \sum_{k=0}^5 (a_k \ln^k \Psi - b_k \ln^{-k} \Psi), \text{ în care: (2.19)}$$

$$\begin{cases} a_0 = 7,145258 \cdot 10^{-1} & b_0 = 8,936 \cdot 10^{-1} \\ a_1 = 3,9265067 \cdot 10^{-1} & b_1 = 6,204 \cdot 10^{-1} \\ a_2 = 4,5496091 \cdot 10^{-1} & b_2 = 4,855 \cdot 10^{-1} \\ a_3 = 2,0359529 \cdot 10^{-1} & b_3 = 1,764 \cdot 10^{-1} \\ a_4 = 4,193089 \cdot 10^{-2} & b_4 = 3,03 \cdot 10^{-2} \\ a_5 = 3,2828977 \cdot 10^{-3} & b_5 = 1,98 \cdot 10^{-3} \end{cases} \quad (2.20)$$

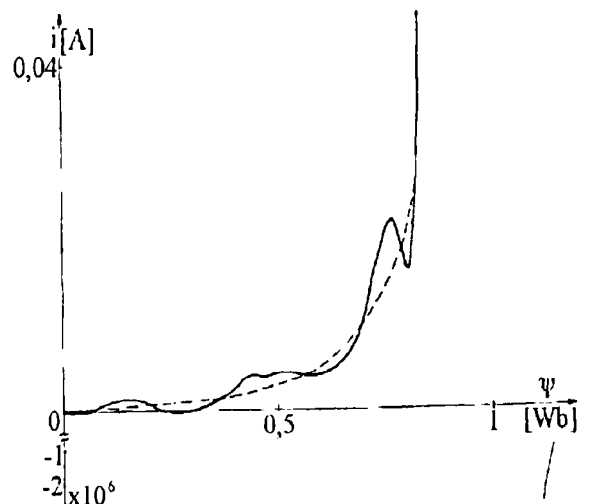


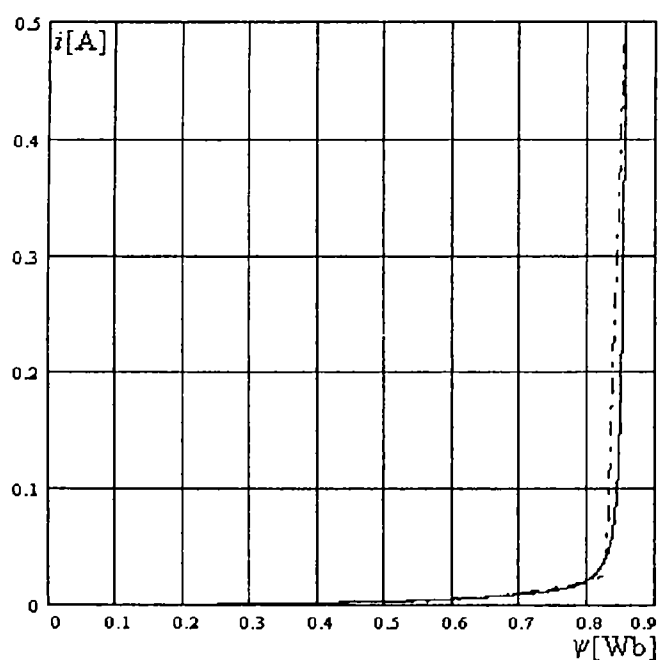
Figura nr. 2.10

$$i = \sum_{k=0}^5 (a_k \ln^k \Psi - b_k \ln^{-k} \Psi);$$

$a_k, b_k, k = \overline{0,5}$  dați de (2.20)

Din analiza rezultatelor practice ale încercărilor precedente se desprinde ideea că nici o formulă de tip clasic nu este adecvată pentru aproximarea corectă a caracteristicii de magnetizare pe domenii largi; deasemenea, determinarea parametrilor este o operație dificilă și e foarte puțin probabil ca la un alt set de date să nu fie mai indicate cu totul alte expresii, ceea ce înseamnă că nu pot fi trase concluzii cu caracter general, fiecare caz în parte trebuind tratat separat (cele zece expresii prezentate anterior sunt selecționate ca fiind cele mai potrivite din totalul unui mare număr analizate). În plus, formulele care oferă o precizie acceptabilă nu sunt cele mai adecvate pentru o evaluare repetată a valorii funcției și a derivatelor acesteia.

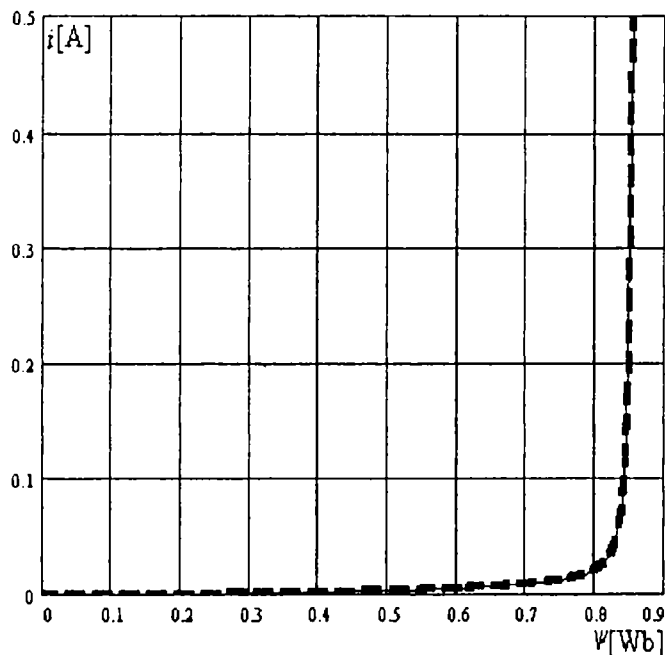
Pe această cale se ajunge la necesitatea utilizării funcțiilor segmentar polinomiale și de aceea am abordat cu prioritate metode locale de obținere a funcțiilor *spline* polinomiale, care asigură o precizie bună în aproximarea caracteristicii de magnetizare, indiferent de plaja de variație a mărimilor. Pentru a exemplifica afirmația, în figura nr. 2.11 prezentăm o aproximare făcută cu funcții *spline* cubice. Se observă o



--- - curba rezultată din măsurători  
 — - curba calculată

Figura nr. 2.11

Aproximare prin funcții *spline* cubice



--- - curba rezultată din măsurători  
 — - curba calculată

Figura nr. 2.12

Aproximare prin funcții *spline* de gradul șase

oarecare dificultate în reproducerea porțiunii liniare din zona de saturație a curbei. În figura nr. 2.12, această deficiență este rezolvată prin folosirea unor polinoame de gradul șase (suprapunerea este atât de bună, încât am folosit o îngroșare a liniei punctate a determinărilor experimentale pentru a le putea evidenția față de curba de calcul).

### 2.2.2 Interpolare prin funcții polinomiale pe porțiuni

Pentru calculele care urmează, vom considera caracteristica de magnetizare exprimată prin relația (2.9), aceasta fiind o expresie de tip *Fröhlich*, una dintre cele mai utilizate în practică [95]; compararea valorilor obținute prin interpolare se va face cu valorile obținute astfel. Acest lucru este folosit doar pentru exemplificare, ulterior demonstrându-se capacitatea funcțiilor *spline* de a aproxima orice funcție netedă, deci și pe aceea conținută în mod implicit de setul discret de date obținute experimental pentru caracteristica de magnetizare.

Primele încercări de a interpola între valori determinate experimental s-au făcut utilizând polinoame clasice de interpolare (*Lagrange*, *Newton*, *Cebâșev*, etc.). Din rezultatele obținute este vizibilă tendința interpolanților de a avea între puncte oscilații care pot fi foarte mari. Folosind formula (2.9) avem la dispoziție valori de referință continue, nu un referențial discret; în acest mod putem evalua abaterea formulei de interpolare în orice punct din intervalul de interes. Se pot lua astfel în considerare interpolanți care utilizează puncte echidistante sau nu, precum și comportarea lor când distribuția punctelor de interpolare este foarte inegală, existând distanțe mari între unele dintre acestea. După fixarea concluziilor asupra interpolanților, aceștia vor putea fi folosiți asupra oricărui set de date experimentale, având certitudinea unui anumit comportament și garanția preciziei de estimare.

### 2.2.2.1 Interpolare osculatorie

Coeficienții polinomului de interpolare *Newton*,  $[\tau_1]f$ ,  $[\tau_1, \tau_2]f$ , ...,  $[\tau_1, \dots, \tau_n]f$  pot fi calculați în mod eficient cu ajutorul unei tabele de diferențe divizate.

Se presupune că toate punctele de interpolare sunt ordonate în așa fel încât punctele multiple apar succesiv. Acest lucru face posibilă calcularea tabelului de diferențe divizate coloană cu coloană, începând cu datele furnizate, fiecare componentă fiind calculată din cele două anterioare învecinate.

Ca un exemplu de utilizare a polinomului de interpolare al lui *Newton* și a obținerii coeficienților acestuia din tabelul diferențelor divizate, pentru

$$i = \frac{1,15997 \cdot 10^{-4} + 2,06019 \cdot 10^{-3} \Psi}{1 - 1,6508 \Psi}$$

vom estima  $i(0,35)$  prin numărul  $p_4(0,35)$ ,  $p_4$  fiind

polinomul cubic care coincide cu  $i(\Psi)$  în punctele 0,3, 0,3, 0,4, 0,4 (adică există o coincidență a valorilor celor două funcții și a primei lor derivate în punctele 0,3 și 0,4.

Tabelul corespunzător diferențelor divizate este:

$\Psi$	$i(\Psi)$	1 dd	2 dd	3 dd
0,3	$1,12849 \cdot 10^{-3}$			
		$6,25939 \cdot 10^{-3}$		
0,3	$1,12849 \cdot 10^{-3}$		$-5,62734 \cdot 10^{-3}$	
		$6,3205 \cdot 10^{-4}$		$1,26949 \cdot 10^{-2}$
0,4	$1,176054 \cdot 10^{-3}$		$7,06759 \cdot 10^{-3}$	
		$7,69964 \cdot 10^{-3}$		
0,4	$1,176054 \cdot 10^{-3}$			

Tabelul nr. 2.1

$$\text{Diferențele divizate pentru } i = \frac{1,15997 \cdot 10^{-4} + 2,06019 \cdot 10^{-3} \Psi}{1 - 1,6508 \Psi}$$

De remarcat este faptul că prima și a treia valoare din coloana primei diferențe divizate trebuie introduse ca date de intrare datorită coincidenței punctelor considerate în calcul. Luând diagonala superioară a tabelului, putem scrie:

$$p_4(x) = 1,1249 \cdot 10^{-3} + (\Psi - 0,3) \cdot 6,25939 \cdot 10^{-3} + (\Psi - 0,3)^2 (-5,62734 \cdot 10^{-3}) + (\Psi - 0,3)^3 (\Psi - 0,4) \cdot 1,26949 \cdot 10^{-2} \quad (2.21)$$

și apoi calcula:

$$p_4(0,35) = 1,4258 \cdot 10^{-3} \cong 1,41343 \cdot 10^{-3} = i(0,35). \quad (2.22)$$

Se vede că se impune, alături de evaluarea polinomului în anumite puncte, și calculul derivatei (derivatelor) acestuia. Deoarece aceasta este metoda care va fi folosită în continuare, vom exemplifica modul de calcul al derivatelor unui polinom scris sub forma *Newton*. Se folosește un algoritm de multiplicare în serie [42] pentru a adăuga tabelului diferențelor divizate trei diagonale suplimentare, utilizând de fiecare dată punctul 0,35 ca fiind nou - introdus. În aceste condiții, ultima diagonală calculată conține derivatele scalate ale lui  $p_4$  în punctul 0,35, adică coeficienții seriei *Taylor* trunchiate. La modul practic, tabelul de calcul are următoarea aparență:

$\Psi$	$i(\Psi)$	1 dd	2 dd	3 dd
0,35	$1,4258 \cdot 10^{-3}$			
		$5,66492 \cdot 10^{-3}$		
0,35	$1,4258 \cdot 10^{-3}$		$-4,99261 \cdot 10^{-3}$	
		$5,66492 \cdot 10^{-3}$		$1,26949 \cdot 10^{-2}$
0,35	$1,4258 \cdot 10^{-3}$		$-5,62735 \cdot 10^{-3}$	
		$5,94629 \cdot 10^{-3}$		$1,26949 \cdot 10^{-2}$
0,3	$1,12849 \cdot 10^{-3}$		$-6,26209 \cdot 10^{-3}$	
		$6,25939 \cdot 10^{-3}$		$1,26949 \cdot 10^{-2}$
0,3	$1,12849 \cdot 10^{-3}$		$-5,62734 \cdot 10^{-3}$	
		$6,3205 \cdot 10^{-4}$		$1,26949 \cdot 10^{-2}$
0,4	$1,176054 \cdot 10^{-3}$		$7,06759 \cdot 10^{-3}$	
		$7,69964 \cdot 10^{-3}$		
0,4	$1,176054 \cdot 10^{-3}$			

Tabelul nr. 2.2

Exemplificare pentru algoritmul de multiplicare în serie

Algoritmul de multiplicare în serie este cea mai eficientă metodă (cunoscută) de deplasare a originii pentru polinoamele scrise sub formă canonică.



Polinomul de interpolare poate fi scris, în aceste condiții, sub forma:

$$p_4 = 1,4258 \cdot 10^{-3} + 5,66492 \cdot 10^{-3}(\Psi - 0,35) - 4,99261 \cdot 10^{-3}(\Psi - 0,35)^2 + 1,26949 \cdot 10^{-2}(\Psi - 0,35)^3 \quad (2.23)$$

### 2.2.2.2 Interpolare segmentar polinomială cubică

Interpolantul polinomial pe porțiuni (*pp*) cubic a fost unul dintre cele mai mediatizate mijloace de calcul cu ajutorul funcțiilor *spline*. Pentru a testa capacitatea sa de modelare în cazul caracteristicii de magnetizare a fost construit un program, scris în Fortran, care calculează interpolantul cubic *spline* - *Alfa*. Acesta acceptă ca și condiții pe frontieră valori ale primei sau ale celei de-a doua derivate; dacă nu dispunem de nici un fel de informații de acest tip se utilizează condiția „not-a-knot” [39] (primul și ultimul nod interior nu sunt active [38]). Ca o anticipare a dezvoltărilor ulterioare, cel de-al *i*-lea segment polinomial,  $p_i$ , este scris sub forma:

$$p_i(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x - \tau_i) + c_{3,i}(x - \tau_i)^2/2 + c_{4,i}(x - \tau_i)^3/6. \quad (2.24)$$

Rezultatele rulării programului sunt reprezentate de valorile  $c_{i,j}$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , acestea constituind de fapt coeficienții interpolantului *spline* cubic cu nodurile interioare  $\overline{\tau_2, \tau_{n-1}}$ . Mai exact, în intervalul  $(\tau_i, \tau_{i+1})$ , funcția *spline*  $f$  este dată de relația:

$$f(x) = c_{1,i} + h \cdot (c_{2,i} + h \cdot (c_{3,i} + h \cdot c_{4,i}/3)/2) \quad , \text{ în care:} \quad (2.25)$$

$$h = x - \tau(i). \quad (2.26)$$

Atât pentru evaluarea funcției  $f$  sau a derivatelor acesteia, cât și pentru scopuri ulterioare, a fost scris un program în Fortran, *Beta* (Anexa nr. 5), care folosește pentru evaluarea derivatei de ordinul  $j$  a funcției  $f$  relația:

$$D^j f(x) = \sum_{m=j}^{k-1} c_{m+1,i} (x - \xi_i)^{m-j} / (m-j)!. \quad (2.27)$$

Programul furnizează valoarea derivatei de ordinul  $j$  a funcției  $f$  în punctul  $x$ .

Indicele  $i$  al intervalului în care se găsește  $x$  este identificat cu ajutorul unui subprogram - *Gama* (Anexa nr. 5), apelat de funcția *Beta*, pentru ca apoi derivata să fie evaluată conform formulei:

$$D^j f(x) = c_{j+1,i} + h \cdot (c_{j+2,i} + h \cdot (\dots (c_{k-1,i} + h \cdot c_{k,i}) / (k-j-1) / (k-j-2) \dots) / 2) / 1 \quad (2.28)$$

prin algoritmul de multiplicare în serie.

Alegerea derivatelor  $C_{j,i} := D^{j-1} f(x_i^+)$  în locul coeficienților polinomiali  $c_{j,i} := D^{j-1} f(x_i^+) / (j-1)!$  în reprezentarea *pp* conduce la o tratare uniformă a funcției  $f$  și a tuturor derivatelor sale în timpul evaluării. Dacă interesează numai valoarea funcției  $f$  este mai eficientă utilizarea coeficienților polinomiali uzuali  $c_{j,i}$ , acest lucru divizând munca în două prin evitarea calculelor repetate și a împărțirii cu numerele  $\overline{1, k-1}$ . Pe de altă parte, evaluarea derivatei de ordinul  $j$  ( $j > 0$ ) devine mult mai dificilă:

$$D^j f(x) = \sum_{m=j}^{k-1} c_{m+1,i} (x - \xi_i)^{m+j} \cdot m! / (m-j)! \quad , \xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}. \quad (2.29)$$

Pentru a caracteriza modul în care interpolantul *pp* cubic descrie caracteristica de magnetizare, reprezentarea grafică nu mai este adecvată, erorile fiind în general mici. De aceea, trebuie imaginat un procedeu care să ofere indicații asupra preciziei de modelare. Intuitiv, ne putem aștepta ca eroarea maximă:

$$\|e_n\| := \max |f(x) - I_4 f(x)| \quad (2.30)$$

să tindă la zero atunci când numărul punctelor interioare crește. Eroarea maximă  $\|e_n\|$  poate fi estimată ca fiind valoarea absolută a diferenței  $f - I_4 f(x)$  în 20 de puncte echidistante din interiorul fiecăruia din cele  $n-1$  intervale  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ ,  $i = \overline{2, n}$ . Am făcut presupunerea că  $\|e_n\|$ , luată ca și funcție de  $n$ , tinde la zero similar cu  $\beta n^\alpha$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  fiind constante ( $\alpha < 0$ ). Dacă  $\|e_n\| = \beta n^\alpha$ , atunci  $\|e_n\| / \|e_m\| \cong \|n/m\|^\alpha$  și putem estima exponentul de diminuare din două erori cu ajutorul formulei:

$$\alpha = (\lg \|e_n\| - \lg \|e_m\|) / \lg(n/m). \quad (2.31)$$

A fost construit un program care calculează pe această cale exponentul de diminuare din erorile maxime succesive. Rezultatul obținut în urma rulării sale este prezentat mai

jos. Se observă că eroarea scade cu mărirea numărului de puncte  $n$ . Această scădere este, însă, insuficientă atunci când dorim o precizie bună. Se vede că, pentru cazul

$n$	er. max	exp.	prezentat, $\ e_n\  \cong \text{const} \cdot n^{1/2}$ .
2	3.92291E-01	.000	
4	3.22407E-01	-.283	$10^{-3}$ , aceasta înseamnă că:
6	2.92181E-01	-.243	
8	2.68860E-01	-.289	$10^{-3} = \ e_n\  = (\ e_n\ /\ e_{20}\ ) \cdot \ e_{20}\  \cong (n/20)^{-1/2} \cdot 0,18595,$ (2.32)
10	2.48487E-01	-.353	
12	2.31766E-01	-.382	
14	2.18787E-01	-.374	adică:
16	2.06911E-01	-.418	
18	1.95999E-01	-.460	$n/20 \cong 10^6 \cdot (0,18595)^2 = 3,45774 \cdot 10^4$ (2.33)
20	1.85947E-01	-.500	

Cu alte cuvinte, pentru realizarea acestui obiectiv,  $n \cong 35.000$ , ceea ce nu prezintă nici un interes din punct de vedere practic.

$n$	er. max	exp.	Dacă reluăm calculul, punctele nemaifiind repartizate e-
2	4.09674E-03	.000	chidistant, ci astfel încât să coincidă cu zerourile polinomului lui
4	1.17916E-02	1.525	<i>Cebâșev</i> , conform formulei:
6	2.02827E-02	1.338	
8	2.53510E-02	.775	$\tau_j = (a + b - (a - b)\cos((2j - 1)\pi / (2n))) / 2, j = \overline{1, n}$ (2.34)
10	2.64860E-02	.196	
12	2.49296E-02	-.332	
14	2.21490E-02	-.767	
16	1.88354E-02	-1.214	se obține rezultatul alăturat. Se vede că eroarea maximă $\ e_n\ $
18	1.55530E-02	-1.626	
20	1.25982E-02	-2.000	

descrește acum cu  $n^{-2}$ , ceea ce este satisfăcător. Totuși, în general, este dificil ca determinările experimentale să fie făcute strict în aceste puncte.

### 2.2.2.3 Interpolare prin funcții *spline*

Am folosit reprezentarea funcțiilor *pp* sub formă de *B-spline*. Relația de recurență [39]:

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i-1}} B_{i-1,k-1}(x) \quad (2.35)$$

conduce nemijlocit la un algoritm pentru generarea simultană în punctul  $x$  a celor  $k$  funcții *B-spline* de ordinul  $k$  ce pot fi nenule.

Să presupunem că  $t_i < t_{i+1}$  și  $x \in [t_i, t_{i+1}]$ . Valorile tuturor funcțiilor *B-spline* nenule în punctul  $x$  pot fi aranjate sub forma triunghiulară următoare (în care s-a notat

			0	
		...	$B_{i-k+1,k}$	
	0		$B_{i-k+2,k-1}$	
	0	...	$B_{i-k+2,k}$	
0	$B_{i-2,3}$		$B_{i-k+3,k-1}$	
	$B_{i-1,2}$	...	$B_{i-k+3,k}$	
$B_{i,1}$	$B_{i-1,3}$		$\vdots$	
	$B_{i,2}$	...	$\vdots$	
0	$B_{i,3}$		$B_{i-1,k-1}$	
	0	...	$B_{i-1,k}$	
	0		$B_{i,k-1}$	
		...	$B_{i,k}$	
			0	
			0	

Tabelul nr. 2.3

Funcțiile *B-spline* nenule în punctul  $x \in [t_i, t_{i+1}]$

în mod simplificat  $B_{j,r}$  în loc de  $B_{j,r}(x)$ . Șirul de zerouri care mărginește prezentarea alăturată reamintește faptul că toate celelalte funcții *B-spline* (de ordin  $\leq k$ ), în afara celor din tabel, se anulează în punctul  $x$ .

Structura triunghiulară poate fi generată coloană cu coloană, prima dintre ele fiind obținută din relația:

$$B_{j,r} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t_j \leq x \leq t_{j+1} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad (2.36)$$

Este evident că la obținerea funcțiilor  $B_{i,j}$  și  $B_{i-j+1,j}$  se ia în

considerare faptul că un termen învecinat este nul. Dacă că am calculat cele  $j$  numere  $\overline{B_{i-j+1,j}(x), B_{i,j}(x)}$  în vectorul  $b := (b_r)'$  și vectorul  $b' := (b'_r)'^{+1}$  conține cele  $j+1$  numere  $\overline{B_{i-j,j+1}(x), B_{i,j+1}(x)}$  ale coloanei următoare, atunci din (2.35) rezultă:

$$\begin{cases} b_0 := b_{j+1} = 0; \\ b'_r = (x - t_{i-j+r-1}) \frac{b_{r-1}}{t_{i+r-1} - t_{i-j+r-1}} + (t_{i+r} - x) \frac{b_r}{t_{i+r} - t_{i-j+r}} \end{cases}, r = \overline{1, j+1} \quad (2.37)$$

Introducând notațiile  $\delta_r^S := x - t_{i-r+1}$  și  $\delta_r^D := t_{i+r} - x$ ,  $r = \overline{1, k-1}$ , (2.37) se scrie sub forma:

$$b'_r := \delta_{j-r+2}^S \frac{b_{r-1}}{\delta_{r-1}^D + \delta_{j-r+2}^S} + \delta_r^D \frac{b_r}{\delta_r^D + \delta_{j-r+1}^S}, r = \overline{1, j+1} \quad (2.38)$$

Datorită ipotezei adoptate ( $t_i < t_{i+1}$ ), nici unul din numitorii expresiei (2.38) nu se anulează, oricare din ei având cel puțin valoarea  $\Delta t_i$ . Modul de calcul al valorilor  $(b'_r)$  din  $(b_r)$  precizat în relația (2.38) este următorul: în memoria calculatorului,  $b'$  se stochează peste  $b$ , utilizând o locație de salvare temporară; pornind cu  $j-1$ , caz în

care  $b$  are o singură valoare,  $b_1 = 1$ , repetarea ciclului:

```

b1 := 1
for j = 1, k - 1 do
  δ1D := t1,j - x
  δ1S := x - t1-j,1
temp := 0
for r = 1, j do
  a := br / (δrD + δj-r+1S)
  br := temp + δrD * a
  temp := δj-r+1S * a
bj,1 := temp
    
```

din algoritm introduce în vectorul  $b$  valorile celor  $k$  numere  $\overline{B_{i-k+1,k}(x)}, B_{i,k}(x)$ . Algoritmul prezentat a fost scris în Fortran sub forma unei subrutine - *Delta*, conținute în Anexa nr. 6.

Cu aceste pregătiri preliminare, a fost scris în Fortran un program - *Epsilon* (Anexa nr. 7), care construiește reprezentarea  $pp$  a unei funcții  $f$  pe baza descrierii ei cu ajutorul funcțiilor  $B$ -*spline*.

În cele ce urmează, vor fi prezentate câteva idei de bază ale aproximării locale, cu scopul de a preciza cât de bine poate fi modelată o funcție netedă prin funcții polinomiale de un anumit ordin.

Se dă secvența de noduri  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ , cu  $t_i < t_{i+k}$ ,  $\forall i$  și  $t_1 = \dots = t_k = a$ ,  $t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b$ , astfel încât  $[a, b] = [t_k, t_{n+1}]$ . Ne interesează aproximarea unei funcții  $g$  pe intervalul  $[a, b]$  prin funcții *spline* polinomiale de ordinul  $k$ , având secvența de noduri  $t$ , adică prin elemente ale spațiului liniar  $\mathcal{S}_{k,t}$ . Vor fi folosite norma  $\|g\| := \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$  și modulul de continuitate  $\omega(g; h) := \max\{|g(x) - g(y)| \mid |x - y| \leq h, x, y \in [a, b]\}$  al funcției  $g$ . (Pentru notații vezi Anexa nr. 1.)

Fiind dată secvența fortuită  $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_n$  pe intervalul  $[a, b]$ , vom considera aproximarea prin funcții *spline* polinomiale de ordinul  $k$  a funcției continue  $g$  pe  $[a, b]$ ,  $Ag$ , construită în felul următor:

$$Ag := \sum_{i=1}^n g(\tau_i) B_i \quad \text{pe } [a, b]. \quad (2.39)$$

Transformarea  $A$  conservă constantele, adică  $Ag = g$ , în cazul în care  $g$  este funcția constantă  $g(x) = c$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Acest lucru este posibil datorită proprietății funcțiilor *B-spline* de a fi partiții ale unității; adăugându-le pe acelea de a fi nenegative și de a avea suport redus, putem stabili un estimator al erorii în formula (2.39), rezultând [40]:

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t}) := \min\{\|g - s\| \mid s \in \mathcal{S}_{k,t}\} \leq \text{const}_k \cdot \omega(g; |t|). \quad (2.40)$$

Dacă adoptăm  $\tau_i = t_i^* = (t_{i+1} + t_{i,k-1})/(k-1)$ ,  $\forall i$ , transformarea A (2.39) devine metoda de aproximare V a lui Schoenberg prin ajustare [16]. O analiză sofisticată a erorii  $g - \mathbf{V}g$  [114] produce următorul rezultat:

$$\text{dist}(g, \mathbf{S}_{k,t}) \leq \|g - \mathbf{V}g\| \leq \omega(g; \min\{(2k-2)^{-1}, |t| \cdot (k/12)^{1/2}\}), \quad (2.41)$$

care leagă ordinul funcției *spline* de mărimea rețelei secvenței de noduri  $|t|$ , stabilind o conexiune între estimatorul (2.39) și teorema lui Jackson [141].

Estimatorul (2.40) demonstrează că distanța oricărei funcții continue  $g$  față de  $\mathbf{S}_{k,t}$  tinde spre zero odată cu micșorarea mărimii rețelei,  $|t|$ . Aceasta înseamnă că orice funcție continuă poate fi aproximată oricât de precis prin funcții *spline* de ordin impus, dacă avem libertatea de a alege numărul de noduri. De asemenea, formula (2.40) arată că  $\text{dist}(g, \mathbf{S}_{k,t})$  tinde spre zero cel puțin la fel de repede pe cât o face modulul de continuitate  $\omega(g; |t|)$  al funcției  $g$  cu scăderea lui  $|t|$ .

Estimarea distanței unei funcții netede față de  $\mathbf{S}_{k,t}$  poate fi făcută în mai multe feluri. Cea mai rapidă este următoarea [41]. Distanța unei funcții  $g$  față de  $\mathbf{S}_{k,t}$  este aceeași cu distanța funcției  $g - s$  față de  $\mathbf{S}_{k,t}$ ,  $s$  fiind o funcție *spline* de ordinul  $k$  cu secvența de noduri  $t$ , adică:

$$\text{dist}(g, \mathbf{S}_{k,t}) = \text{dist}(g - s, \mathbf{S}_{k,t}), \quad \forall s \in \mathbf{S}_{k,t}. \quad (2.42)$$

În aceste condiții, din (2.40) rezultă:

$$\text{dist}(g, \mathbf{S}_{k,t}) \leq \text{const}_k \cdot \omega(g - s; |t|), \quad \forall s \in \mathbf{S}_{k,t} \cap \mathbf{C}[a, b]. \quad (2.43)$$

Adăugând unele informații din teoria aproximării funcțiilor continue în sensul lui Lipschitz, putem scrie:

$$\omega(g - s; h) \leq h \cdot \|g' - Ds\|, \quad (2.44)$$

dacă  $g$  și  $s$  sunt funcții suficient de netede. Urmează că:

$$\text{dist}(g, \mathbf{S}_{k,t}) \leq \text{const}_k |t| \cdot \|g' - Ds\|, \quad \forall s \in \mathbf{S}_{k,t} \cap \mathbf{C}[a, b], \quad (2.45)$$

la care, adăugând funcția  $s$  astfel încât să micșorăm atât cât este posibil limitele și amintind că:

$$\mathcal{S}_{k-1,t} = \{Ds \mid s \in \mathcal{S}_{k,t} \cap C[a,b] \text{ pe } [a,b]\}, \quad (2.46)$$

în final se obține estimarea:

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t}) \leq \text{const}_k \cdot |t| \cdot \text{dist}(g', \mathcal{S}_{k-1,t}), \quad (2.47)$$

în ipoteza că  $g$  are o derivată continuă pe porțiuni.

Bineînțeles, formula (2.40) poate fi utilizată din nou, de data aceasta pentru a estima  $\text{dist}(g', \mathcal{S}_{k-1,t})$ , dacă  $g'$  este o funcție continuă, obținând:

$$\text{dist}(g', \mathcal{S}_{k-1,t}) \leq \text{const}'_k \cdot |t| \cdot \omega(g''; |t|), \quad (2.48)$$

în care  $\text{const}'_k := \text{const}_k \cdot \text{const}_{k-1}$ . Dacă funcția  $g$  o permite și dacă  $k-1 > 1$ , putem repeta procedura, pentru a găsi că:

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t}) \leq \text{const}''_k \cdot |t|^2 \cdot \omega(g'''; |t|), \quad (2.49)$$

în care  $\text{const}''_k := \text{const}'_k \cdot \text{const}_{k-2}$ .

Se poate arăta că eroarea făcută în aproximarea funcției  $g$  prin  $Ag$  nu este, în general, mai mică decât  $\mathcal{O}(|t|^2)$ , oricât de netedă este funcția  $g$  [39].

Din rațiuni practice, am urmărit influența plasării nodurilor asupra acurateței tehnic realizabile la o aproximare prin funcții *spline* polinomiale. Anterior am folosit formulele care exprimă limitarea erorii doar pentru a descrie  $\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t})$  în termenii măsurii (globale a) rețelei  $|t| = \max \Delta t_i$ . În literatura de specialitate există însă și informații specifice care pot conduce la alegerea secvenței  $|t|$  în așa fel încât mărginirea să fie redusă.

Prelucrând date obținute în [103], se poate obține limitarea:

$$\|g - Ag\|_{[t_j, t_{j+1}]} \leq \text{const}_k \cdot |I_j|^k \cdot \|g^{(k)}\|_{I_j}, \quad (2.50)$$

în care  $I_j$  semnifică intervalul  $[t_{j-k+2}, t_{j+k-1}]$ , iar  $|I_j|$  lungimea acestuia. Este evident că alegând intervalul  $I_j$  relativ mic putem reduce limitarea, dacă derivata de ordinul  $k$  a funcției  $g$  prezintă variații mari, dar modul exact în care trebuie procedat este destul de incert.

Minimizarea formulei (2.50) ca și funcție de  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  pentru  $n$  fixat este o operațiune destul de dificilă. Problema poate fi abordată și în alt mod, încercând să determinăm  $t$  pentru  $n$  fixat, astfel încât  $\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t})$  să fie cea mai mică posibil. Și această chestiune este delicată și merită efortul doar dacă  $\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t})$  este sensibilă la plasarea tuturor, sau a unora dintre noduri; pe de altă parte, este de dorit ca funcția  $g$  să poată fi bine aproximată printr-o funcție *spline* cu un număr cât mai mic de noduri. În orice caz, nu putem găsi o plasare optimală a nodurilor decât în ipoteza că funcția este suficient de bine cunoscută pentru a putea evalua  $\|g - f\|$ .

În situațiile practice tipice, funcția  $g$  este cunoscută doar aproximativ sau implicit, motiv pentru care nu poate fi elaborată o strategie de plasare optimală a nodurilor. Cel mai bun lucru pe care-l putem spera este de a găsi o distribuție optimală a nodurilor. Pentru aceasta, vom propune niște ipoteze de plasare a nodurilor, care să facă mai ușoară analiza (această simplificare nu afectează semnificativ rezultatele, o analiză riguroasă putând fi urmărită în [18]). Nodurile din intervalul  $(a, b)$  vor fi împărțite în grupuri de  $k-1$  fiecare, în cadrul fiecărui grup admitând că nodurile se contopesc într-unul singur, cu ordinul de multiplicitate  $k-1$  (dacă numărul total de noduri nu este un multiplu exact de  $k-1$ , pur și simplu se adaugă atâtea câte mai sunt necesare). Fie aceste puncte în care au fost grupate și contopite nodurile  $\xi_2 < \dots < \xi_m$  (conținute în intervalul  $(a, b)$ ), punând  $\xi_1 := a$  și  $\xi_{m+1} := b$ . Cu acestea,  $\mathcal{S}_{k,t}$  coincide pe  $[a, b]$  cu  $\mathbf{P}_{k,\xi} \cap \mathbf{C}[a, b]$ , iar formula (2.50) devine:

$$\|g - Ag\|_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} \leq \text{const}_k \cdot \|g^{(k)}\|_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} |\Delta \xi_j|^k, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.51)$$

Formula obținută sugerează o tentativă de a plasa  $\xi_2, \dots, \xi_m$  în așa fel încât să minimizăm:

$$\max_j \|g^{(k)}\|_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} |\Delta \xi_j|^k. \quad (2.52)$$

Deoarece  $s(\alpha, \beta) := \|g^{(k)}\|_{[\alpha, \beta]} |\beta - \alpha|^k$  este o funcție continuă de variabilele  $\alpha$  și  $\beta$  (dacă  $g^{(k)}$  este continuă) și monotonă, crescătoare în  $\beta$  și descrescătoare în  $\alpha$ , formula



(2.52) este minimizată (pentru  $m$  fixat) dacă  $\xi_2, \dots, \xi_m$  sunt alese astfel încât  $\|g^{(k)}\|_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} |\Delta \xi_j|^k = \text{const}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Determinarea exactă a punctelor  $\xi_2, \dots, \xi_m$  este o sarcină grea și nu este justificată, datorită ipotezelor pe care le-am adoptat și pentru că, în mod obișnuit nu avem informații despre derivata de ordinul  $k$  a funcției  $g$ .

O abordare echivalentă determinării punctelor  $\xi_2, \dots, \xi_m$  astfel încât  $\left(\|g^{(k)}\|_{[\xi_j, \xi_{j+1}]}\right)^{1/k} \Delta \xi_j = \text{const}$ ,  $j = \overline{1, m}$  constă în determinarea acestora de așa manieră încât  $\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} |g^{(k)}(x)|^{1/k} dx = \frac{1}{m} \int_a^b |g^{(k)}(x)|^{1/k} dx$ ,  $j = \overline{1, m}$ , aceeași distribuție fiind produsă sub formă asimptotică.

Ultima formulare este mai ușor de rezolvat, mai ales dacă înlocuim funcția  $|g^{(k)}|$  printr-o aproximare constantă pe porțiuni  $h \cong |g^{(k)}|$ . Cu acestea,  $G(x) := \int_a^x (h(s))^{1/k} ds$  devine o funcție continuă și monoton crescătoare segmentar liniară, ușor de evaluat.

Rămâne de stabilit cum se poate obține o aproximare constantă pe porțiuni  $h$  a funcției  $|g^{(k)}|$ . O soluție este propusă în [53], și anume aceea de a calcula mai întâi o aproximare *pp* de ordinul  $k+1$  a funcției  $g$  (utilizând orice combinație convenabilă pentru punctele de racordare) și de a utiliza valoarea absolută a derivatei de ordinul  $k$  a acesteia pentru aproximarea  $h$ . O altă variantă este propusă în [185] și constă în construirea funcției  $h$  dintr-o aproximare *pp* curentă  $f$  de ordinul  $k$  a funcției  $g$ , așa cum urmează.

Din punct de vedere practic, nu există nici o diferență între modul în care este construită funcția constantă pe porțiuni  $h$  sau funcția liniară pe porțiuni  $H(x) := \int_a^x h(s) ds$ , oricare dintre ele putând fi ușor obținută din cealaltă. Dacă  $h$  aproximează funcția  $|g^{(k)}|$ , integrala ei,  $H$ , va aproxima funcția

$\text{var}_{[a,x]}g^{(k-1)} := \int_a^x |g^{(k)}(s)| ds$ , aceasta putând fi calculată (în principiu) din derivata de ordinul  $k-1$  a funcției  $g$ ; cu alte cuvinte, putem calcula o aproximație a ei dintr-o aproximație a funcției  $g^{(k-1)}$ .

Mai concret, să presupunem că avem o aproximare *ppf* de ordinul  $k$  a funcției  $g$ . Derivata ei de ordinul  $k-1$ ,  $D^{(k-1)}f$  este o funcție constantă pe porțiuni și poate fi scrisă sub forma  $(D^{(k-1)}f)(x) = \alpha_1 + \sum_{j=2}^l \alpha_j (x - \xi_j)_+^0$ , în care  $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{l+1}$  este secvența punctelor de racordare a funcției  $f$ . Numărul  $\alpha_j$  reprezintă saltul funcției  $D^{(k-1)}f$  în punctele de racordare  $\xi_j$ ,  $j = \overline{2, l}$ . Variația totală a funcției  $D^{(k-1)}f$ , considerată ca o aproximație a funcției  $\text{var}_{[a,x]}g^{(k-1)}$ , fiind  $\text{var}_{[a,x]}D^{(k-1)}f = \sum_{j=2}^l |\alpha_j| (x - \xi_j)_+^0$ , se poate construi funcția *spline* de ordinul doi  $H$  ca fiind o aproximare a funcției  $\text{var}_{[a,x]}D^{(k-1)}f$ . Concret, vom face alegerea  $h = H' \in \mathbf{P}_{l,\xi}$ , astfel încât pentru  $h[\xi_i, \xi_{i+1}]$  se ia ca valoare panta în  $\xi_{i+1/2}$  a parabolei care interpolează funcția  $\text{var}_{[a,x]}D^{(k-1)}f$  în punctele  $\xi_{i-1/2}$ ,  $\xi_{i+1/2}$  și  $\xi_{i+3/2}$ :

$$h(x) = \begin{cases} 2|\Delta\varphi_{3/2}|/(\xi_3 - \xi_1) & \text{pe } [\xi_1, \xi_2] \\ |\varphi_{i-1/2}|/(\xi_{i+1} - \xi_{i-1}) + |\varphi_{i+1/2}|/(\xi_{i+2} - \xi_i) & \text{pe } [\xi_i, \xi_{i+1}] \\ 2|\Delta\varphi_{i-1/2}|/(\xi_{i+1} - \xi_{i-1}) & \text{pe } [\xi_l, \xi_{l+1}] \end{cases}, i = \overline{2, l-1}, \quad (2.53)$$

în care  $\varphi_{i+1/2} := D^{(k-1)}f$  pe  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ ,  $\forall i$ .

În baza acestui algoritm de plasare optimală a nodurilor a fost construit programul *Zeta* (Anexa nr. 8). Testele făcute arată că această tehnică aduce numai îmbunătățiri de relativ mică importanță. Am reluat programul folosit anterior pentru construcția interpolantului *spline* cubic. Schema inițială, care se bazează pe o secvență uniformă de  $n$  puncte, este urmată de un ciclu: interpolantul curent este folosit în *Zeta* pentru a obține o posibilă distribuție mai bună a nodurilor, iar pe baza acesteia se calculează în *Alfa* un nou interpolant *spline* cubic. Ciclul poate fi repetat de un număr specificat de ori.

cicluri prin zeta = 0			cicluri prin zeta = 1			cicluri prin zeta = 2			cicluri prin zeta = 12			Rezultatele
n	er.max.	exp.	n	er.max.	exp.	n	er.max.	exp.	n	er.max.	exp.	alăturate prezintă
2	.392	.000	2	.392	.000	2	.392	.000	2	.392	.000	eroarea maximă de interpolare, calculată funcție de numărul de
4	.322	-.203	4	.310	-.304	4	.310	-.341	4	.305	-.362	
6	.292	-.243	6	.301	-.132	6	.300	-.016	6	.305	.002	
8	.269	-.289	8	.279	-.269	8	.281	-.317	8	.267	-.463	
10	.248	-.353	10	.250	-.330	10	.250	-.302	10	.239	-.506	
12	.232	-.382	12	.239	-.439	12	.238	-.441	12	.223	-.384	
14	.219	-.374	14	.221	-.504	14	.219	-.540	14	.198	-.773	
16	.207	-.418	16	.205	-.562	16	.203	-.504	16	.173	-.994	
18	.196	-.460	18	.189	-.704	18	.186	-.721	18	.162	-.547	
20	.186	-.500	20	.176	-.679	20	.172	-.722	20	.148	-.895	

puncte date, atât pentru puncte echidistante, cât și pentru alte distribuții, îmbunătățite prin apelarea repetată a subprogramului *Zeta*. Pentru cazul punctelor echidistante, exponentul de scădere este  $(-0,5)$ , în concordanță cu (2.40) (reamintim din exemplul anterior că pentru funcția dată  $i(\psi)$  (2.9), modulul de continuitate este  $\omega(i;h) = h^{1/2}$ ). Chiar după repetarea de 12 ori a lui *Zeta*, exponentul de scădere este în jurul lui  $(-0,9)$ , în timp ce așteptările noastre (conform [39], [53], [117] și [157]) erau ca acestea să fie de ordinul  $(-4)$ , exponentul tipic pentru aproximarea de ordinul patru (cubică). Fără o analiză atentă, nu este clar de ce există această neconcordanță. *Zeta* folosește salturile în cea de-a treia derivată a funcției pentru a estima derivata a patra, un salt important determinând plasarea unui număr mare de noduri în proximitatea sa. În cazul funcției (2.9), derivata sa de ordinul patru crește către sfârșitul intervalului, în zona de saturație, și aici ar fi trebuit plasate cele mai multe puncte. În urma unor determinări se vede că *Zeta* nu a făcut acest lucru, pentru faptul că în *Alfa* condiția „not-a-knot“ forțează primul și ultimul salt în cea de-a treia derivată la valoarea zero, situație ce a creat interpretarea de către *Zeta* că derivata de ordinul patru este de valoare foarte mică în zonele de frontieră, deci inclusiv în porțiunea saturată.

În urma multor încercări, folosind alte funcții de descriere a caracteristicii de magnetizare și diferite condiții de frontieră, se constată că pentru  $n > 4$  aproximarea „optimizată“ poate să fie de calitate mai proastă decât cea cu noduri echidistante. Obținerea sistematică a unor erori mai mari decât cele avansate teoretic sugerează o explicație cu caracter general. Alături de interpolantul *spline* cubic  $I_4g$  al funcției  $g$ , vom introduce norma procesului de interpolare, definită după cum urmează:

$$\|I_4\| := \max \{ \|I_4 f\| / \|f\| \mid f \in C, \|f\| \neq 0 \}. \quad (2.54)$$

Pentru orice funcție  $f \in \mathcal{S}_4$ ,  $I_4 f = f$ , iar de aici:

$$g - I_4 g = (g - f) - I_4(g - f), \forall f \in \mathcal{S}_4, \text{ deci:} \quad (2.55)$$

$$\|g - I_4 g\| \leq \|g - f\| + \|I_4(g - f)\| \leq \|g - f\| + \|I_4\| \cdot \|g - f\|. \quad (2.56)$$

Alegând  $f \in \mathcal{S}_4$  pentru a minimiza termenul din dreapta, obținem următoarea condiție de mărginire a erorii:

$$\|g - I_4 g\| \leq (1 + \|I_4\|) \cdot \text{dist}(g, \mathcal{S}_4). \quad (2.57)$$

Cu cât secvența punctelor este mai neuniformă, cu atât numărul  $\|I_4\|$  este mai mare. Firește că acest lucru nu atrage după sine în mod automat creșterea erorii de interpolare, pentru că (2.57) este numai o limită, dar explică de ce eroarea poate deveni mare în anumite condiții.

Pe de altă parte, este intuitiv faptul că dacă  $\|I_4\|$  devine din ce în ce mai mare, procesul de aproximare devine din ce în ce mai puțin local. Prin această afirmație înțelegem, printre altele, faptul că eroarea într-un punct poate depinde de comportamentul funcției pe tot domeniul  $[a, b]$ . Dar, din moment ce schema de aproximare are această proprietate, adaptarea secvenței de noduri la comportamentul **local** al funcției își pierde sensul. Cu alte cuvinte, plasarea optimă a nodurilor bazată pe comportamentul local al funcției care se aproximează are sens numai dacă utilizăm un procedeu de aproximare care este local, adică, pentru care obținem (cel puțin aproximativ) o mărginire de forma (2.50).

Legătura dintre neuniformitatea repartiției punctelor în secvența de date și mărimea numărului  $\|I\|$  este destul de nebuloasă. Pentru a putea evalua cantitativ această influență, am folosit un program special conceput. Luând aceeași funcție (2.9), valorile  $i = f(\psi)$  au fost perturbate cu erori de o anumită mărime; am luat  $n = 7$  și  $\tau_1 < \dots < \tau_7$  egal distanțate pe domeniul  $[0, 0,855]$ , cu excepția lui  $\Delta\tau_3 =: h$ , care inițial este egal cu  $1/6$ , dar care ulterior se modifică.

Pentru a putea trece la utilizarea unor scheme de interpolare *spline* de ordin arbitrar, a fost conceput un subprogram - *Eta* (Anexa nr. 9), care folosește funcțiile

*B-spline*. Concret,  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  reprezintă secvența nedescrescătoare a nodurilor, cu  $t_i < t_{i+k}, \forall i$ , iar  $(B_i)_i^n$  este secvența corespunzătoare de *B-spline* de ordinul  $k$ . Spațiul ei liniar,  $\text{span}(B_i)_i^n$ , este  $n$ -dimensional ( $S_{k,t}$ ) [121]; de aceea, în general, pot fi satisfăcute  $n$  condiții de interpolare. Dacă notăm prin  $\tau = (\tau_i)_i^n$  secvența strict crescătoare a datelor furnizate, atunci funcția *spline* coincide cu funcția  $g$  (definită prin valorile obținute experimental în punctele  $(\tau_i)_i^n$ ) dacă, și numai dacă:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j B_j(\tau_i) = g(\tau_i), i = \overline{1, n}. \quad (2.58)$$

Relația reprezintă un sistem liniar de  $n$  ecuații, în care  $\alpha = (\alpha_i)_i^n$  este vectorul  $n$ -dimensional al necunoscutelor, iar  $(B_j(\tau_i))$  reprezintă matricea coeficienților. Totala pozitivitate a matricii  $(B_j(\tau_i))$  [97] este interesantă, pentru că s-a demonstrat că un sistem de ecuații liniare care posedă o matrice (inversabilă) a coeficienților total pozitiv definită poate fi rezolvat prin eliminare gaussiană fără pivotare [78]. Deoarece  $(B_j(\tau_i))$  este, deasemenea, o matrice bandă, sistemul de ecuații (2.58) poate fi rezolvat utilizând eficient și spațiul de stocare pentru cele  $2k-1$  benzi posibil nenule. Subprogramul *Eta* formează sistemul de ecuații liniare (2.58), atunci când se dau  $t$  și  $\tau$  și îl rezolvă prin procedeul precizat, utilizând două rutine (Anexa nr. 9).

Cu aceste precizări, prezentăm datele obținute în urma rulării programului utilizat pentru evidențierea modului în care neuniformitatea distribuției nodurilor

amplitudinea zgomotului = .001    amplitudinea zgomotului = .01    amplitudinea zgomotului = .1

h	eroarea maxima	h	eroarea maxima	h	eroarea maxima
.17	2.60E-01	.17	2.48E-01	.17	2.48E-01
8.33E-02	2.63E-01	8.33E-02	2.76E-01	8.33E-02	4.10E-01
4.17E-02	2.60E-01	4.17E-02	2.43E-01	4.17E-02	6.79E-01
2.08E-02	2.64E-01	2.08E-02	2.87E-01	2.08E-02	1.58E+00
1.04E-02	2.57E-01	1.04E-02	3.45E-01	1.04E-02	3.42E+00
5.21E-03	2.69E-01	5.21E-03	7.10E-01	5.21E-03	7.12E+00
2.60E-03	2.40E-01	2.60E-03	1.46E+00	2.60E-03	1.45E+01
1.30E-03	2.92E-01	1.30E-03	2.94E+00	1.30E-03	2.94E+01
6.51E-04	5.94E-01	6.51E-04	5.91E+00	6.51E-04	5.91E+01
3.26E-04	1.18E+00	3.26E-04	1.18E+01	3.26E-04	1.19E+02

influențează eroarea maximă. Se vede că amplificarea „zgomotului” introdus este remarcabilă, aceasta fiind de ordinul  $1/h$ , ceea ce confirmă faptul că marginea inferioară pentru  $\|1\|$  [40]:

$$\|I\| = \text{const}_k \max \frac{\min \{t_{j+k-1} | (t_j, t_{j+k-1}) \cap (\tau_i, \tau_{i+1}) \neq \emptyset\}}{\Delta\tau_i} \quad (2.59)$$

este corectă. Teorema originală a lui Schoenberg și Whitney (1953) ia în considerare funcții putere trunchiată și nu *B-spline*. O demonstrație elementară a ei, care nu folosește ca instrument matematic decât teorema lui Rolle poate fi găsită în [55]. Într-o formă foarte simplificată, fenomenele care se petrec sunt următoarele: Derivarea numerică poate fi considerată ca o funcțională liniară:

$$\lambda_h g = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}, \quad \forall g \in C[a, b], \quad (2.60)$$

a cărei normă este:

$$\|\lambda_h\| := \max \{|\lambda_h g| / \|g\| \mid g \in C[a, b] \setminus \{0\}\} = 2/h. \quad (2.61)$$

Se observă că norma poate deveni oricât de mare atunci când se micșorează  $h$ ; acest aspect corespunde relației (2.59). Pentru o funcție continuu diferentiabilă  $g$  însă,  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\lambda_h\| = g'(a)$  și în acest caz, chiar dacă  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\lambda_h\| = \infty$ , pentru o funcție netedă  $g$ ,  $|\lambda_h g|$  este mărginit [42].

Pe lângă aceasta, valorile calculate ale funcției sunt afectate și de erorile datorate împărțirii trunchiate cu virgulă mobilă din calculatorul numeric. Atunci când setul de date este afectat de perturbații, valoarea calculată  $\lambda_h g$  devine  $\lambda_h g + \varepsilon/h$ ,  $\varepsilon$  reprezentând „zgomotul“ rezultat în valorile calculate. Cu micșorarea lui  $h$ ,  $\lambda_h g$  se mărește, dar rămâne mărginit, fenomenul perturbator dominant fiind cel datorat afectării datelor de intrare.

După lămurirea acestei chestiuni, putem finaliza și cercetările legate de

cicluri prin zeta = 0		cicluri prin zeta = 1		cicluri prin zeta = 2	
n	er.max. exp.	n	er.max. exp.	n	er.max. exp.
4	.332 .000	4	.332 .000	4	.332 .000
6	.292 -.318	6	.280 -.418	6	.274 -.470
8	.250 -.535	8	.206 -1.068	8	.170 -1.659
10	.217 -.631	10	.145 -1.568	10	.095 -2.621
12	.191 -.714	12	.106 -1.722	12	.044 -4.200
14	.169 -.787	14	.075 -2.243	14	.019 -5.309
16	.151 -.853	16	.052 -2.768	16	.008 -6.531
18	.139 -.710	18	.036 -3.090	18	.004 -6.717
20	.128 -.764	20	.025 -3.497	20	.002 -7.328

algoritmul de plasare optimă a nodurilor, *Zeta*. Pentru aceasta, vom folosi interpolarea *spline* cubică cu valori medii, care are o normă redusă [40], rezultatele fiind prezentate alăturat. Este necesar să se

precizeze valoarea inițială și cea finală pentru numărul  $n$  de puncte de date care vor fi

utilizate. Pentru fiecare  $n$ , nodurile sunt inițial plasate echidistant, pentru ca apoi să fie afectate de  $itermx$  cicluri prin  $Zeta$ ; rezultatele sunt prezentate pentru  $n = \overline{4,20}$  și  $itermx = 0, 1$  și  $2$ . Este cât se poate de evident, de această dată, că pe măsură ce  $Zeta$  este utilizat se îmbunătățesc atât erorile, cât și coeficientul de diminuare a acestora.

Dificultatea majoră în ceea ce privește interpolarea cu valori medii este faptul că, în general, nu putem alege secvența  $t$  pentru valori  $(\tau_i)$  date. În principal pentru această rațiune au fost abordate diverse tehnici de interpolare optimală.

În materialul prezentat până acum au fost evidențiate mai multe exemple de estimare a erorii, sub forma:

$$\|g - Sg\| \leq \text{const}_s \|g^{(k)}\|, \quad (2.62)$$

în care  $S$  reprezintă diverse metode de aproximare. *Micchelli, Rivlin și Winograd* au determinat (1976) o metodă de interpolare  $S$  pentru secvența de date  $\tau$ , la care  $\text{const}_s$  din formula (2.62) este cea mai mică posibilă [119].

Interpolarea se face pe secvența de date  $\tau$  prin funcții *spline* polinomiale de ordinul  $k$ , având secvența de noduri  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  determinată după cum urmează. Fie  $[a, b] := [\tau_1, \tau_n]$ , cu  $t_1 = \dots = t_k = a$  și  $t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b$ . Cele  $n - k$  puncte  $t_{k+1}, \dots, t_n$  în intervalul  $[a, b]$  se aleg ca fiind punctele de racordare ale funcției treaptă univoc determinate  $h$ , pentru care  $|h(x)| = 1, \forall x \in [a, b]$ , cu  $h(a^+) = 1$ . Funcția  $h$  are mai puțin de  $n - k$  schimbări de semn pe intervalul  $[a, b]$  și  $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0, \forall f \in \mathcal{S}_{k,1}$ .

Există și o abordare independentă a acestei chestiuni, datorată lui *Gaffney și Powell* (1976) [79]. Termenul de „interpolare optimală“ le aparține de fapt acestora, *Micchelli, Rivlin și Winograd* folosindu-l pe acela de „distribuire optimă“ („optimal recovery“). *Gaffney și Powell* ajung la această finalitate pe filiera înfășurătorilor, făcând legătura între noțiunile de bază ale interpolării optimale prin funcții *spline* și ideea că o funcție poate fi făcută mai netedă micșorându-i variația derivatei.

În mod practic, am construit un program - *Teta* (Anexa nr. 10), care calculează



secvența de noduri  $t$  pentru  $\tau$  folosind metoda lui *Newton*, alegerea inițială fiind:

$$t_{k+1} = \frac{\tau_{i+1} + \dots + \tau_{i+k-1}}{k-1}, \quad i = \overline{1, n-k}. \quad (2.63)$$

În literatura de specialitate se arată că această distribuție este de multe ori foarte apropiată de cea optimă [119]. Afirmatia sugerează alternativa rezonabilă de a utiliza direct (2.63) împreună cu alegerea uzuală a primelor și a ultimelor  $k$  noduri „de frontieră”. O astfel de alegere satisface cu certitudine condițiile teoremei *Schoenberg-Whitney*.

*Teta* folosește o procedură, *Iota* (Anexa nr. 10), analoagă subprogramului *Beta*, în sensul că e capabilă de a furniza valoarea derivatei de ordinul  $j$  a unei funcții *spline* în orice punct, dar folosind  $B$ -reprezentarea acesteia și nu reprezentarea *pp*.

*Teta* a fost folosită pentru aproximarea caracteristicii de magnetizare cu ajutorul punctelor ridicate experimental (tabelul nr. 3.1), fiind apelată de un program principal. Prezentăm rezultatele de calcul obținute pentru  $n = 7$  și  $k = 4$ . Valoarea nulă produsă

n	psi	i	interpolant	eroare
1	.00000	.00000	.00000	.00000
2	1.87500E-02	1.37500E-04	-1.33437E-02	1.34812E-02
3	2.92500E-02	1.87500E-04	-1.90897E-02	1.91972E-02
4	7.20000E-02	3.04167E-04	-3.05663E-02	3.08704E-02
5	.13050	4.25000E-04	-2.40130E-02	2.44380E-02
6	.16580	5.00000E-04	-1.30234E-02	1.35234E-02
7	.20175	6.04167E-04	6.04166E-04	1.22236E-09
8	.24225	7.29167E-04	1.39111E-02	-1.31820E-02
9	.27750	8.66667E-04	2.05902E-02	-1.97235E-02
10	.31875	1.09375E-03	1.83007E-02	-1.72069E-02
11	.36000	1.31250E-03	1.31251E-03	-6.40284E-09
12	.37875	1.48750E-03	-1.00811E-02	1.14886E-02
13	.40875	1.72500E-03	-2.78275E-02	2.87525E-02
14	.41625	1.83750E-03	-3.03603E-02	3.21978E-02
15	.47625	2.58750E-03	-2.58222E-02	2.84097E-02
16	.50250	3.22500E-03	3.22502E-03	-1.69966E-08
17	.56250	3.78750E-03	.13441	-.13062
18	.57000	4.52500E-03	.15146	-.14693
19	.59250	4.78125E-03	.19439	-.18961
20	.62625	6.09375E-03	.21771	-.21161
21	.67125	7.87500E-03	.11912	-.11124
22	.67875	8.18750E-03	8.54538E-02	-7.72663E-02
23	.68625	8.62500E-03	4.04330E-02	-3.90800E-02
24	.69000	8.81250E-03	2.89786E-02	-2.01661E-02
25	.69375	9.06250E-03	9.06251E-03	-9.31323E-09
26	.79125	1.08750E-02	-.25091	.27779
27	.82125	2.50000E-02	-4.50809E-02	7.00809E-02
28	.82875	4.52500E-02	4.52500E-02	-4.47035E-08
29	.85500	.50000	.00000	.50000

nodurile optimale =

1	.33875
2	.50807
3	.66122

de interpolant în punctul  $\psi = 0,855$  Wb, cu toate că acesta este punct de interpolare ( $i = 0,5$  A) se datorează faptului că *Iota* este utilizată pentru evaluarea lui în condițiile în care toate programele folosite produc funcții continue la dreapta. Deoarece 0,855 este nod de multiplicitate  $k$  pentru interpolant, limita la dreapta a acestuia în punctul respectiv este, în consecință, nulă. O valoare corectă în punct se poate obține fie construind variante pentru *Teta* și *Iota* care produc funcții continue la stânga, fie mu-

tând nodurile de frontieră în afara domeniului de interes.



În afara valorilor calculate, în figura nr. 2.13 este prezentată caracteristica de magnetizare (cu linie punctată), precum și aproximarea realizată. Chiar dacă punctele

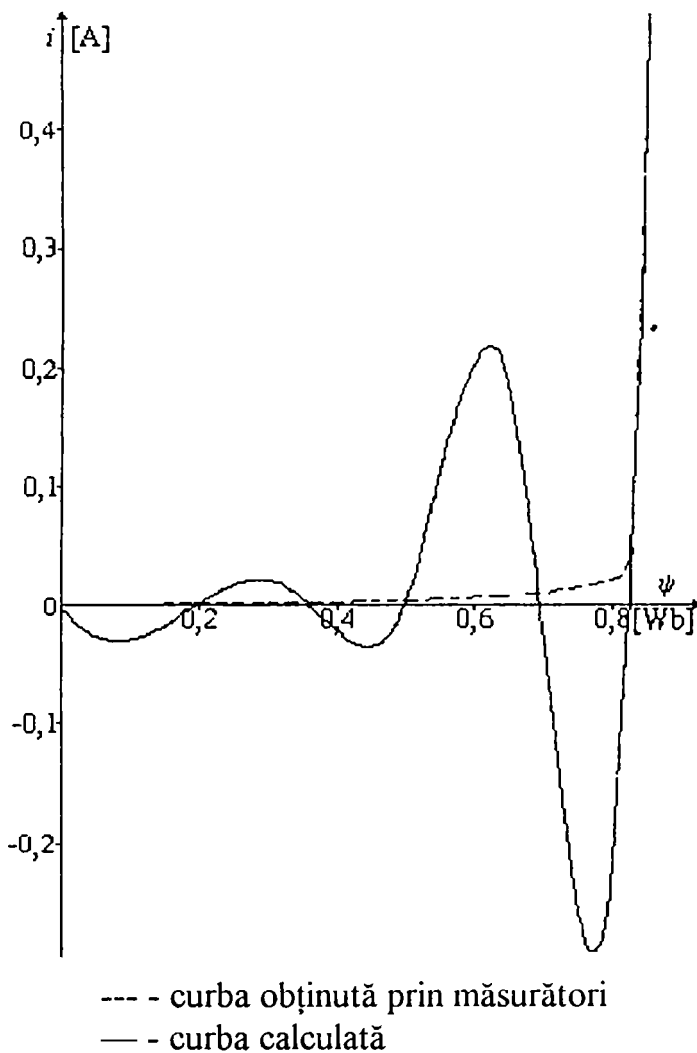


Figura nr. 2.13

Interpolare optimală ( $n = 7, k = 4$ )

zului 1... c aproximarea optimală nu este o aproximare „bună”. În [79] se demonstrează că orice interpolant optimal se situează între două înfășurătoare, puternic oscilante, ceea ce limitează utilitatea practică a acestui demers, în pofida denumirii atât de promițătoare a procedurii.

...e an...are su... e...e...o... curba oscilează foarte mult, în special pe porțiunea liniară inițială. În mod cât se poate de clar, trebuie folosită mai multă informație pentru reprezentare. În figura nr. 2.14 este prezentată aproximarea realizată pentru  $n = 29$  și  $k = 5$ . Re-

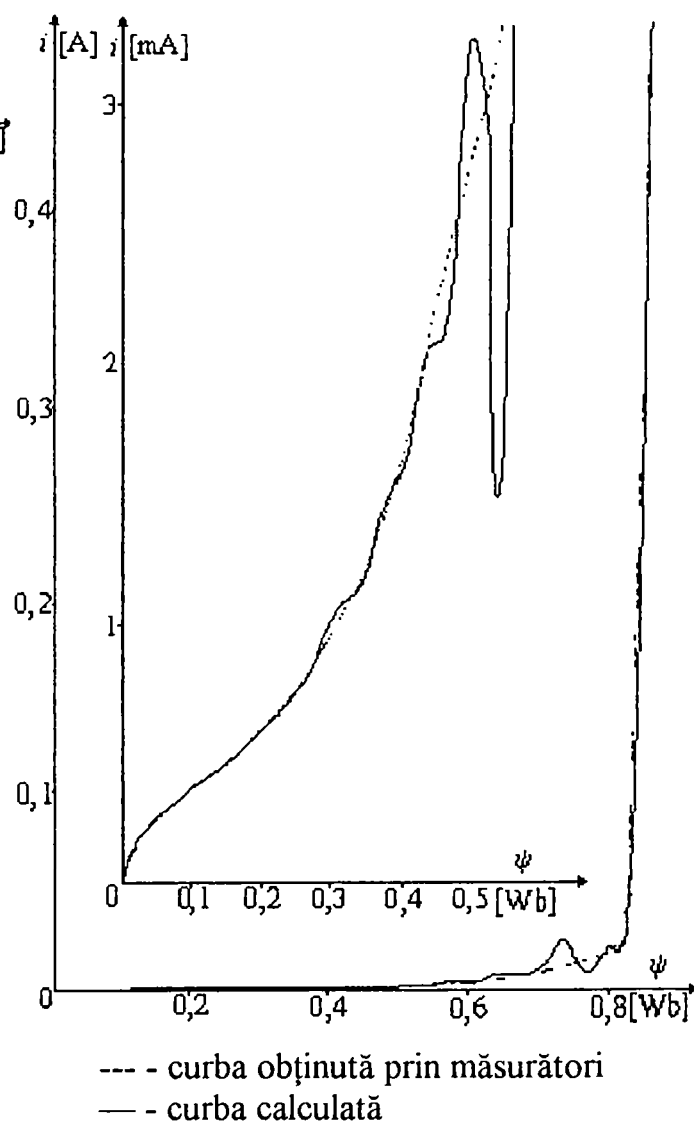


Figura nr. 2.14

Interpolare optimală ( $n = 29, k = 5$ )

### 2.2.2.4 Ajustare prin funcții *spline*. Metoda celor mai mici pătrate

Practic, se constată că interpolarea este o metodă eficientă de construire a aproximării prin funcții *spline* numai dacă dispunem de valori experimentale determinate cu mare precizie. În cazul contrar (care este aproape întotdeauna de luat în considerare când se fac determinări ale unor mărimi magnetice), trebuie folosite alte metode de aproximare. În cadrul tezei am luat în considerare funcțiile de ajustare („smoothing“) și aproximarea (discretă) în sensul celor mai mici pătrate prin funcții *spline* de ordin arbitrar.

Având la dispoziție valorile aproximative ale unei funcții presupus netede,  $y_i = g(x_i) + \varepsilon_i$  în punctele  $x_1, \dots, x_n$  și o estimare  $\delta y_i$  a variației în  $y_i$ , funcția  $g$  va fi reconstituită din aceste date, construind funcția  $f_p$  din mulțimea funcțiilor  $f$  cu  $m$  derivate, care, pentru un parametru dat  $p \in [0,1]$  (trebuind a fi ales într-un mod care va fi discutat), minimizează expresia:

$$p \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i)}{\delta y_i} \right]^2 + (1-p) \int_{x_1}^{x_n} [f^{(m)}(t)]^2 dt. \quad (2.64)$$

Acest lucru stabilește un compromis între dorința de a obține o funcție netedă și aceea de a urmări cât mai exact datele experimentale, alegerea parametrului  $p$  ponderând căreia dintre cele două cerințe i se dă o importanță mai mare.

Soluția  $f_p$  este o funcție *spline* de ordinul  $k := 2m$ , cu noduri simple în punctele  $x_2, \dots, x_{n-1}$  și satisfăcând condițiile la limită „naturale“  $f_p^{(j)}(x_1) = f_p^{(j)}(x_n) = 0$ ,  $j = \overline{m, k-2}$ , deci  $f_p \in \mathcal{S}_{k,x}^{\text{nat}}$ , aceasta pentru că înlocuirea ei în (2.64) nu modifică suma și micșorează valoarea integralei datorită proprietăților de minimizare a interpolării *spline*.

Dacă  $p = 0^+$ ,  $f_p$  este  $L_2$ -aproximantul din  $\mathbf{P}_m$  al datelor  $y$  (corelat cu produsul cartezian  $\langle g, h \rangle := \sum_i g(x_i)h(x_i)/(\delta y_i)^2$ ), iar dacă  $p = 1^-$  devine interpolantul *spline*

„natural“ din  $\mathcal{S}_{k,x}^{\text{nat}}$ . Introducând  $S(f) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i)}{\delta y_i} \right]^2$ ,  $S(f_p)$  descrește când  $p$  variază

de la  $0^+$  la  $1^-$ , anulându-se pentru  $1^-$ . Este posibil să fie determinată, pentru  $S$  dat, funcția  $f_S$  care minimizează  $\int_a^b [f^{(m)}(x)]^p dx$  din mulțimea funcțiilor  $f$  pentru care  $S(f) \leq S$ , în aceste condiții având loc egalitatea  $f_S = f_p$ .

Unii autori [39] denumesc  $f_p$  funcția *spline* a lui *Whittaker*, deoarece propunerea de a ajusta datele prin minimizarea unei expresii de tip (2.64) îi aparține acestuia (1923). Mai precis, *Whittaker* a luat în considerare numai puncte echidistante și propunea utilizarea pătratelor diferențelor de ordinul  $m$ , introducerea integralei  $\int [f^{(m)}(x)]^p dx$  fiind făcută de *Schoenberg* (1964); în mod independent, *Reinsch* avansează o metodă asemănătoare (1967) [138].

Mărimea  $S$  reprezintă un mijloc de a obține o aproximare satisfăcătoare. Acest număr trebuie ales cumva. *Reinsch* propune încercarea unei valori între  $\sqrt{2}$  și  $n$  [138], în timp ce alți autori propun metode foarte sofisticate, bazate pe estimarea „zgomotului” prezent în datele experimentale. Firește, dacă nu ne putem face nici o idee care să ne conducă la o valoare pentru acest parametru, ne putem dispensa de el, operând direct cu  $p$ .

Bazându-ne pe ideile avansate de *Reinsch*, putem elabora construcția unei funcții *spline* cubice de ajustare, după cum urmează. Am punctat faptul că funcția care minimizează expresia (2.64),  $f_p$ , trebuie să fie conținută în  $\mathcal{S}_{4,x}^{\text{nat}}$ , adică în  $\mathbf{P}_{4,x} \cap \mathbf{C}^{(2)}$  și să satisfacă simultan și condițiile  $f_p''(x_1) = f_p''(x_n) = 0$ . Deoarece sunt cunoscute  $f_p$  și  $f_p''$  în  $x_i$  și  $x_{i+1}$ , putem descrie complet funcția  $f_p$  pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$ . Dacă facem notațiile  $a_i := f_p(x_i)$  și  $c_i := f_p''(x_i)/2$ ,  $i = \overline{1, n}$ , atunci condițiile la limită naturale și necesitatea ca  $f_p$  să aibă o derivată de ordinul întâi continuă conduc la următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{cases} c_i = 0 \\ c_{i-1}\Delta x_{i-1} + 2c_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) + c_{i+1}\Delta x_i = 3(\Delta a_i/\Delta x_i - \Delta a_{i-1}/\Delta x_{i-1}), i = \overline{2, n-1}. \\ c_n = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Dacă luăm  $\mathbf{a} := (a_i)_1^n$  și  $\mathbf{c} := (c_i)_2^{n-1}$ , sistemul linear (2.65) poate fi scris sub forma matricială  $R\mathbf{c} = 3Q'\mathbf{a}$ , în care  $R$  este o matrice tridiagonală simetrică de ordinul  $n-2$ , cu liniile constituite după schema:  $(\Delta x_i, 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i), \Delta x_i)$ , iar  $Q'$  este o matrice tridiagonală de ordinul  $(n-2) \times n$ , cu liniile construite după schema:  $(1/\Delta x_i, -1/\Delta x_{i-1}, -1/\Delta x_i, 1/\Delta x_i)$ .

Astfel, expresia (2.64) poate fi exprimată în funcție de  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{c}$ . Pentru orice dreaptă  $l$ :

$$\int_0^h [l(x)]^2 dx = \frac{h}{3} \{ [l(0)]^2 + l(0)l(h) + [l(h)]^2 \}. \quad (2.66)$$

În aceste condiții, pentru  $f = f_p$ , expresia (2.64) are valoarea:

$$p \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - a_i}{\delta y_i} \right)^2 + \frac{4(1-p)}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i (c_i^2 + c_i c_{i+1} + c_{i+1}^2), \quad (2.67)$$

sau, sub formă matricială:

$$[l(x)]^2 dx [l(x)]^2 dx \quad p(\mathbf{y} - \mathbf{a})' D (\mathbf{y} - \mathbf{a}) + \frac{2}{3} (1-p) \mathbf{c}' R \mathbf{c}, \quad (2.68)$$

unde  $D$  este matricea diagonală  $[\delta y_1, \dots, \delta y_n]$ . Dar din (2.65) rezultă că  $\mathbf{c} = 3R^{-1}Q'\mathbf{a}$ , astfel încât (2.64) poate fi scrisă numai ca funcție de  $\mathbf{a}$ :

$$p(\mathbf{y} - \mathbf{a})' D^{-2} (\mathbf{y} - \mathbf{a}) + 6(1-p) (R^{-1}Q'\mathbf{a})' R (R^{-1}Q'\mathbf{a}). \quad (2.69)$$

Deoarece atât  $D^{-2}$ , cât și  $(R^{-1}Q'\mathbf{a})' R (R^{-1}Q'\mathbf{a})$  sunt simetrice și pozitiv definite, relația (2.69) este minimizată atunci când satisface condiția:

$$-2pD^{-2}(\mathbf{y} - \mathbf{a}) + 12(1-p)(R^{-1}Q')' R (R^{-1}Q')\mathbf{a} = 0, \quad (2.70)$$

sau, folosind faptul că  $R^{-1} = (R^{-1})'$  și simplificând:

$$pD^{-2}(\mathbf{y} - \mathbf{a}) = 2(1-p)Q\mathbf{c}. \quad (2.71)$$

În particular:

$$S(f_p) = (\mathbf{y} - \mathbf{a})' D^{-2} (\mathbf{y} - \mathbf{a}) = [2(1-p)/p]^2 \|DQ\mathbf{c}\|_2^2, \quad (2.72)$$

cu  $\|\mathbf{b}\|_2^2 := \sum_i |b_i|^2$ , ceea ce ne permite să calculăm  $S(f_p)$  dacă ne este cunoscut  $\mathbf{c}$ .

În scopul de a obține un sistem liniar pentru  $c$  vom multiplica ambele părți ale egalității (2.71) cu  $3Q^1D^2$ , iar folosind (2.66), rezultă:

$$p(3Q^1y - Rc) = 6(1-p)Q^1D^2Qc \quad , \text{ ceea ce este echivalent cu:} \quad (2.73)$$

$$\left[6(1-p)Q^1D^2Q + pR\right]c = 3pQ^1y \quad . \quad (2.74)$$

Luând în continuare  $u$  astfel încât  $c = 3pu$ , obținem:

$$\left[6(1-p)Q^1D^2Q + pR\right]u = Q^1y \quad , \text{ și:} \quad (2.75)$$

$$S(f_p) = [6(1-p)]^2 \|DQu\|_2^2, \quad . \quad (2.76)$$

iar în continuare, făcând uz de (2.71):

$$a = y - 6(1-p)D^2Qu \quad . \quad (2.77)$$

Din toate cele prezentate, informațiile pentru reprezentarea  $pp$  a lui  $f_p$  pot fi scrise după cum urmează:

$$\begin{cases} f_p(x_i) = a_i \\ f'_p(x_i) = \Delta a_i / \Delta x_i - [f''_p(x_i)/2]\Delta x_i - [f'''_p(x_i^+)/6](\Delta x_i)^2 \\ f''_p(x_i) = 6pu_i \\ f'''_p(x_i^+) = [f''_p(x_{i+1}) - f''_p(x_i)] / \Delta x_i \end{cases} \quad . \quad (2.78)$$

Ecuatiile (2.75)÷(2.78) constituie baza obținerii lui  $f_s (= f_p)$  pentru un  $p \in [0,1]$  adecvat, atunci când se dă  $S$ , în programul *Kapa* (Anexa nr. 11); acesta construiește funcția *spline* de ajustare  $f$  pentru setul de date de intrare  $(x_i), (y_i), i = \overline{1, n}$  în așa fel încât acesta să aibă derivata a doua cea mai mică posibilă ca valoare.

În scopul de a avea idee asupra modului în care acționează tehnica ajustării și efectul pe care îl are alegerea unor valori pentru  $S$ , am încercat ajustarea unor date echispațiate pe intervalul  $[0, 0,855]$ , obținute din exemplele anterioare, în care am introdus funcțiile *B-spline*, prin rotunjirea valorilor la un anumit număr de cifre semnificative. Concret, pentru  $n$  dat,  $y_i = \lfloor g(x_i) \cdot 10^n \rfloor / 10^n$  vor fi valorile funcției rotunjite la  $n$  zecimale; în mod corespunzător, se alege  $\delta y_i = 0,5 \cdot 10^{-n}, \forall i$ . Programul folosit, împreună cu rezultatele de calcul sunt prezentate în Anexa nr. 11.

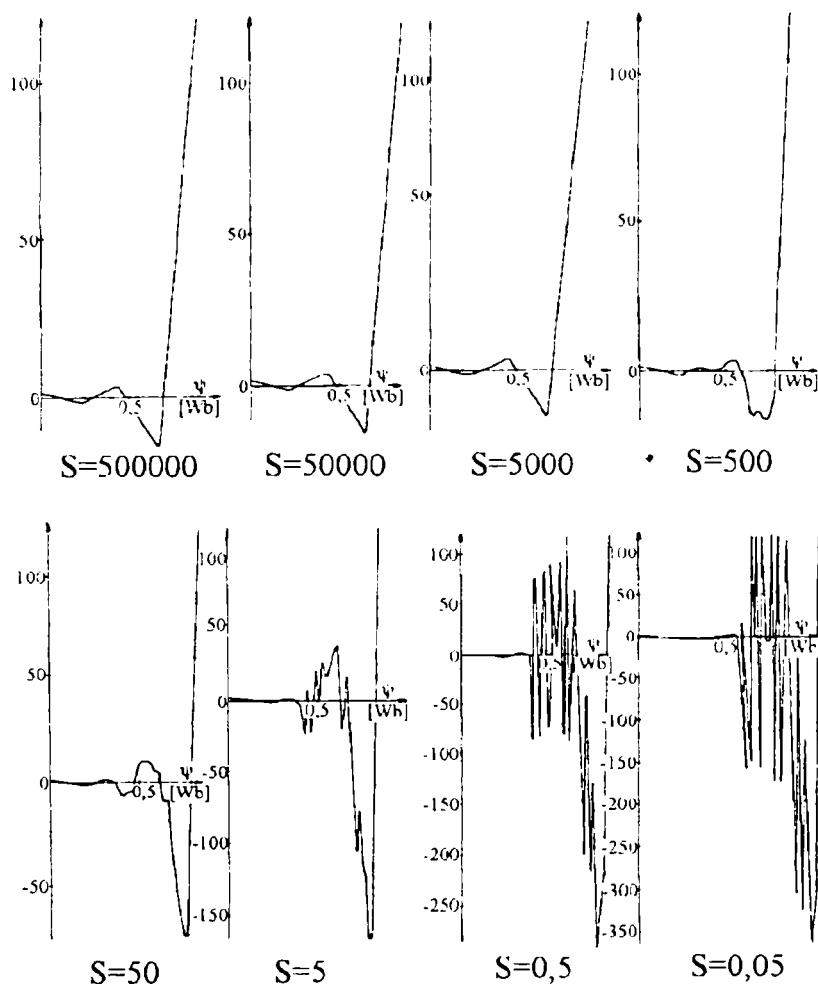


Figura nr. 2.15

Eroarea prezentă în derivata a doua a funcției *spline* de ajustare  $f_s$ , față de cea de-a doua derivată a funcției  $g$

cum funcția de ajustare le netezește în funcția *B-spline*  $g$ . Dacă  $S$  scade sub valoarea 50 încep să apară neregularități, care se accentuează pe măsură ce acesta scade în continuare. Oscilațiile rapide indică faptul că „zgomotul“ prezent în datele de măsurare este aproximat din ce în ce mai mult. Pentru  $S < 5$  eroarea este de ordinul de mărime al simplei aproximări, iar pentru  $S < 1$  începe să ia forma „zgomotului“ pe care îl reprezintă.

În [138] se estimează că valorile potrivite pentru  $S$  sunt cuprinse între 50 și 72, fără a se da explicații suplimentare. În urma celor prezentate se vede că în această zonă de valori aproximarea este suficient de apropiată de original, atât în valorile funcției, cât și în cele ale derivatelor sale, justificând valoarea de 60, propusă de alți autori [17].

În figura nr. 2.15 este trasată eroarea prezentă în derivata a doua a funcției *spline* de ajustare  $f_s$  față de cea de-a doua derivată a funcției  $g$ , neafectată de „zgomotul“ care a fost introdus prin trunchiere. Este vizibil că pentru valori mari ale lui  $S$ ,  $f_s$  este o linie frântă. Eroarea se reduce la derivata a doua,  $g''$ , forma ei arătând în mod clar că  $g$  este o funcție *spline* cubică cu noduri simple. Pe măsură ce  $S$  scade,  $g''$  devine o aproximare din ce în ce mai bună a lui  $g''$ . De remarcat vârfurile din reprezentarea erorii pentru nodurile funcției  $g$ ; se observă

În afara datelor prezentate, au mai fost făcute multe determinări și există concluzii care se impun în urma lor. În primul rând, se constată sistematic faptul că prima derivată a funcției *spline* de ajustare,  $f'_s$ , nu este atât de „continuă” pe cât ar trebui să fie (acest lucru este evident pentru  $S = 500.000$ , în care  $f_s$  este o linie frântă, iar  $f'_s$  ar trebui să fie constantă pe porțiuni). Chiar efectuând calculele în dublă precizie (15 zecimale exacte), se constată o imprecizie de 3-4 ordine de mărime în valorile primei derivate, eroare care nu poate fi pusă pe seama trunchierilor inerente ce apar la folosirea unui număr limitat de zecimale. Sursa acestor erori ar putea fi găsită în însăși modalitatea conceptuală de introducere a funcției *spline* de ajustare. Aceasta face parte dintr-o familie de funcții de aproximare cu mai multe grade de libertate decât numărul punctelor de date; reprezentarea ei *pp* conține  $5n$  termeni, față de  $2n$  valori de intrare. Excesul de grade de libertate este controlat de prezența integralei  $\int (f''(x))^2 dx$  în expresia care se minimizează, dar ar putea fi o cauză de apariție a neregularităților menționate.

Legat de aceste aspecte, apare ideea seducătoare de a trata datele experimentale imprecise (în măsurătorile magnetice precizia este, de regulă, mai mică decât în alte determinări [171]) cu aproximări din familii cu mai puține grade de libertate decât numărul punctelor de date, în așa fel încât acestea să fie suficiente pentru redarea corectă a funcției  $g$ , dar insuficiente pentru aproximarea „zgomotului”, care are oscilații rapide. Funcțiile *spline* se încadrează în această categorie, iar metoda celor mai mici pătrate a fost preferată pentru că necesită doar soluționarea unui sistem de ecuații liniare cu matrice bandă.

Folosind metoda celor mai mici pătrate, cea mai bună aproximare posibilă se obține luând în considerare norma ce derivă dintr-un produs scalar. Practic, vom aborda numai produsul scalar discret, de forma [64]  $\langle g, h \rangle := \sum_{i=1}^n g(\tau_i)h(\tau_i)w_i$ , în care  $\tau$  este secvența nedescrescătoare de date, cuprinsă într-un interval  $[a, b]$ . Secvența  $w = (w_i)_1^n$  a ponderilor este presupusă a fi nenegativă. Un aranjament tipic este:

$$w_i := \begin{cases} \Delta\tau_i/2 & , i = 1, n \\ (\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i)/2 & , i = \overline{2, n-1} \end{cases} \quad (2.79)$$

caz în care  $\langle g, h \rangle$  este o aproximare rezonabilă a produsului  $\int_{\tau_1}^{\tau_n} g(x)h(x)dx$ .

Vom folosi simbolul uzual  $\|h\|_2 := \langle h, h \rangle^{1/2}$  pentru „norma“ derivată din produsul scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ghilimelele sunt puse pentru a preveni protestul (justificat), pentru că din punct de vedere riguros matematic, ea este numai o seminormă (există, de exemplu, și alte funcții decât cea identic nulă pentru care  $\|h\|_2 = 0$ ). Fie  $\mathcal{S}$  un spațiu liniar finit dimensional de funcții, toate fiind definite pe intervalul  $[a, b]$ . Trebuie căutată cea mai bună aproximare din  $\mathcal{S}$  pentru funcția „ $g$ “ derivată din norma  $\|\cdot\|_2$ , adică o funcție  $f^* \in \mathcal{S}$ , astfel încât  $\|g - f^*\|_2 = \min \|g - f\|_2$ . Faptul că  $\mathcal{S}$  este finit dimensional garantează existența lui  $f^*$ . Funcția  $g$  a fost pusă între ghilimele deoarece nu este cunoscută ca expresie analitică. Ori de câte ori este nevoie de o valoare  $g(\tau_i)$ , în locul ei va fi folosită valoarea aproximativă  $g_i$ .

Se arată că funcția  $f^*$  este cea mai bună aproximare din  $\mathcal{S}$  derivată din norma  $\|\cdot\|_2$  a funcției „ $g$ “ dacă și numai dacă funcția eroare  $(g - f^*)$  este ortogonală cu  $\mathcal{S}$ :

$$\langle f, g - f^* \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{S}. \quad (2.80)$$

O demonstrație poate fi urmărită în [39], din care rezultă faptul că cea mai bună aproximare a lui „ $g$ “ în  $\mathcal{S}$  este unică dacă și numai dacă  $\|\cdot\|_2$  este normă în spațiul  $\mathcal{S}$  (adică numai dacă singura funcție  $f \in \mathcal{S}$  pentru care  $\|f\|_2 = 0$  este  $f = 0$ ).

Presupunând că  $\|\cdot\|_2$  este normă în spațiul liniar  $\mathcal{S}$  și că  $(\varphi_i)_1^n$  este o bază pentru aceasta, este demonstrat că (2.80) are soluția unică  $f^*$  în  $\mathcal{S}$ . Se poate verifica faptul că formula (2.80) este echivalentă cu  $\langle \varphi_i, g - f \rangle = 0, i = \overline{1, n}$ , deoarece și acest sistem de ecuații admite soluția unică  $f^* \in \mathcal{S}$ . Rezultă că  $f^*$  are o reprezentare univocă  $\sum_1^n \alpha_i \varphi_i$ ,

în funcție de termenii bazei  $(\varphi_i)_1^n$ , deoarece sistemul liniar  $\left\langle \varphi_i, g - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right\rangle =$



$= 0, i = \overline{1, n}$  are soluția unică  $(\alpha_i)$ . Ultima relație reprezintă ecuațiile normale, uzual scrise sub forma [117]:

$$\sum_{j=1}^n \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \alpha_j = \langle \varphi_i, "g" \rangle, i = \overline{1, n} \quad (2.81)$$

Determinarea lui  $f^*$  pe baza ecuațiilor normale nu se poate face întotdeauna comod, depinzând de baza  $(\varphi_i)$  aleasă. Dacă această bază este ortogonală, adică  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0, i \neq j$ , ecuațiile normale pot fi rezolvate relativ ușor, soluția fiind  $\alpha_j = \langle \varphi_j, "g" \rangle / \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle, j = \overline{1, n}$ . Pe de altă parte, baza  $(\varphi_i)$  poate fi rău condiționată. Un exemplu clasic îl reprezintă baza  $\varphi_i(x) = x^{i-1}, i = \overline{1, k}$  pentru spațiul liniar  $P_k$  în intervalul  $[0, 1]$ .

Utilizând produsul scalar  $\langle g, h \rangle = \int_0^1 g(x)h(x)dx$ , matricea coeficienților pentru ecuațiile normale (2.81) este o matrice *Hilbert*, exemplu tipic de matrice rău condiționată [104].

Pentru spațiile liniare specifice  $S = S_{k,t}$ , cu  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ , baza funcțiilor *B-spline*,  $(B_i)_i^n$ , este convenabilă, deoarece este relativ bine condiționată, cel puțin pentru valori moderate ale lui  $k$  [103]. Coeficienții pentru ecuațiile normale:

$$\sum_{j=1}^n \langle B_i, B_j \rangle \alpha_j = \langle B_i, "g" \rangle, i = \overline{1, n} \quad (2.82)$$

formează o matrice bandă de lățime inferioară lui  $k$ , în sensul că  $\langle B_i, B_j \rangle = 0$  pentru  $|i - j| \geq k$ . Deoarece matricea  $(\langle B_i, B_j \rangle)$  este în plus simetrică și pozitiv semidefinită, sistemul (2.82) poate fi rezolvat prin factorizare *Choleski*.

Este necesară verificarea faptului că „norma“ discretă utilizată este într-adevăr o normă în spațiul  $S_{k,t}$ , pentru a putea garanta că sistemul de ecuații (2.82) are soluție

unică. Se demonstrează [121] că „norma“  $\|f\|_2 = \left\{ \sum_i w_i [f(\tau_i)]^2 \right\}^{1/2}$ , cu  $w_i > 0, \forall i$  și

secvența  $(\tau_i)$  nedescrescătoare este normă pe  $S_{k,t}$ , dacă și numai dacă  $t_i < \tau_{j_i} < t_{i+k}, i = \overline{1, n}$ , în care  $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n$ . Dacă nu sunt îndeplinite condițiile enunțate,  $\|f\|_2 =$

$= \left\{ \sum_i w_i [f(\tau_i)]^2 \right\}^{1/2}$  nu este o normă în  $\mathcal{S}_{k,t}$ , iar sistemul de ecuații (2.82) este singular.

Deoarece el are întotdeauna soluții, conform (2.80), înseamnă că există o multitudine de soluții, toate coincidând ca valoare în punctele  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Reluând problema celei mai bune aproximări prin funcții *spline* cu noduri variabile în contextul metodei celor mai mici pătrate, aceasta face parte din clasa funcțiilor  $\mathcal{S}_{k,n} := \cup \{ \mathcal{S}_{k,t} \mid \dim \mathcal{S}_{k,t} = n \}$ . Lucrurile sunt aici mai dificil de abordat, această clasă fiind neliniară, în general suma a două funcții din  $\mathcal{S}_{k,n}$  nefiind conținută în  $\mathcal{S}_{k,n}$ , ceea ce face imposibilă caracterizarea celei mai bune aproximări, în sensul de a oferi criterii de calcul prin care ea să fie recunoscută printre altele. Similar cazului liniar, unde cea mai bună aproximare satisface ecuațiile normale, și în cel neliniar se poate da un echivalent al acestora; totuși, nu orice soluție a lor va fi cea mai bună aproximare, chiar dacă aceasta face parte dintre ele.

La modul practic, pentru spațiul liniar  $\mathcal{S}_{k,t}$ , cu  $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ , baza  $(B_i)_i^n$  este convenabilă, folosirea ei conducând la sistemul de ecuații (2.82). În cazul uzual, acest sistem are mai multe soluții, fiind singular. Într-o astfel de situație, „cea mai bună aproximare“ prin metoda celor mai mici pătrate este selecționată pe baza a diverse criterii adiționale. Concret, problema singulară este transformată în una nesingulară prin impunerea de condiții suplimentare soluției. Acest procedeu, denumit „regularizare“ [104] este folosit, de asemenea, pentru soluționarea cazurilor rău condiționate, sau a celor din vecinătatea imediată a unor singularități.

Modalitatea adoptată pentru a rezolva problema în programul *Lambda* (Anexa nr. 12) este oarecum diferită. Dacă  $\|\cdot\|_2$  este normă pe  $\mathcal{S}_{k,t}$ , atunci baza de funcții *B-spline*  $(B_i)_i^n$  pentru  $\mathcal{S}_{k,t}$  nu este liniar independentă, adică una sau mai multe din funcțiile  $B_j$  depind (pe secvența  $\tau$ ) de funcțiile  $B_i$  care le preced. „Cea mai bună aproximare“ în sensul celor mai mici pătrate este aleasă forțând coeficienții corespunzători funcțiilor dependente  $B_j$  să fie nuli.

Pentru calculul aproximării prin metoda celor mai mici pătrate trebuie introduse datele de intrare, construită secvența de noduri adecvată pentru secvența (dată) de puncte de joncțiune, evaluată aproximarea, precum și calculate/imprimare erorile. Este necesar, deasemenea, un program care să monitorizeze toate aceste activități, inclusiv calculul unor serii de aproximări diferind prin numărul și poziționarea nodurilor; acestea sunt realizate de rutinele specificate tot în Anexa nr. 12.

Pachetul de programe a fost folosit pentru efectuarea unor experiențe care au întregit datele interesante identificate în literatura de specialitate. În primul rând se poate dovedi faptul că la fel ca și în aproximarea continuă cu ajutorul celor mai mici pătrate, și în cazul celei discrete eroarea  $e := "g" - f^*$  trebuie să aibă cel puțin  $n$  schimbări de semn. Conform (2.80), eroarea  $e$  este ortogonală la  $\mathcal{S}_{k,t}$ , adică  $\langle f, e \rangle = 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{S}_{k,t}$ . Acest lucru implică faptul că matricea  $A := (B_i(\tau_j))_{i=1, j=1}^n$  face ca  $n$ -vectorul  $e := (e(\tau_j))_1^n$  să tindă către zero. Conform [97], matricea  $A$  este total pozitiv definită, iar din anumite considerații impuse rezultă:

$$\text{rang } A \leq S^+(e), \quad (2.83)$$

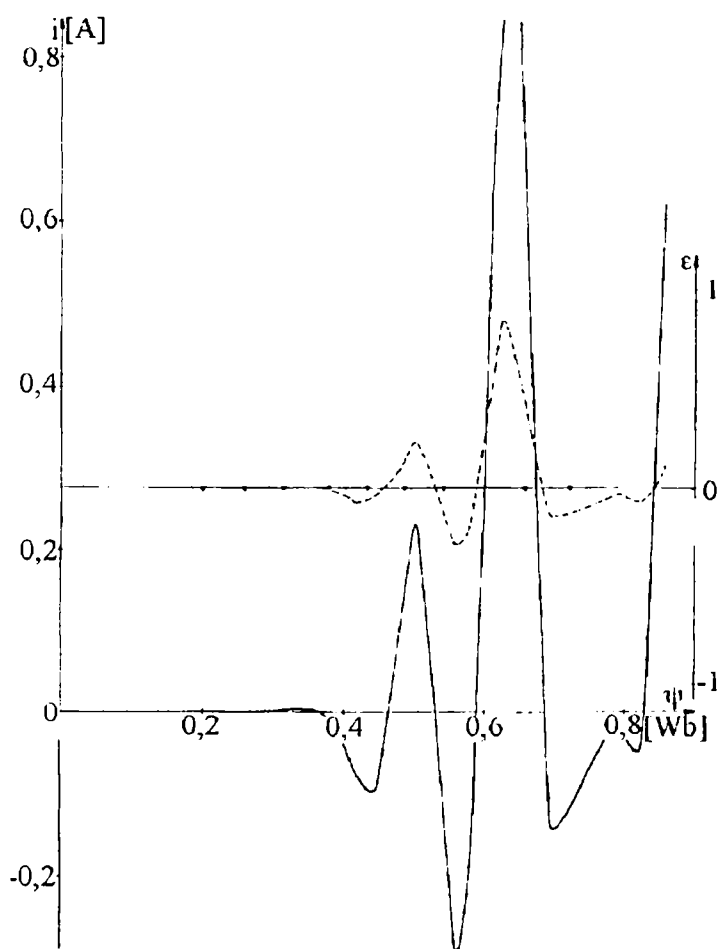
dacă  $e$  nu este identic nul.  $S^+(e)$  marchează numărul de schimbări slabe de semn în secvența  $e$ , adică luând în considerare și valorile nule din  $e$ . O demonstrație a formulei (2.83) poate fi dedusă din [97], teorema V.2.2.

Presupunând că  $\|\cdot\|_2$  este normă în spațiul  $\mathcal{S}_{k,t}$  (adică  $\text{rang } A = n$ ) și că eroarea  $e := "g" - f^*$  nu este identic nulă pe  $\tau$ , din faptul că  $A$  este o matrice bandă rezultă că secvența  $(e(\tau_j))_1^n$  prezintă cel puțin  $n$  schimbări (slabe) de semn, schimbarea  $i$  din cele  $n$  fiind prezentă „în suportul“ lui  $B_i$ ,  $i = 1, n$ . Concluzia ne oferă o posibilitate simplă de verificare a corectitudinii modului în care acționează programul *Lambda*.

Așa cum am mai punctat, aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate este potrivită pentru „extragerea“ unei funcții continue din „zgomotul“ generat de către determinările (curent) imprecise. Datele  $g_i$  pot fi descrise sub forma  $g_i = g(\tau_i) + \delta_i$ , în care  $g$  este o funcție „netedă“ cu variație (relativ) lentă, care trebuie aproximată,

secvența  $(\delta_i)$  reprezentând „zgomotul“, cu o variație rapidă, cu valori atât pozitive, cât și negative, dar de amplitudine mai mică decât  $g$ . Ideea este de a alege aproximarea dintr-o clasă de funcții  $\mathcal{S}$ , care este îndeajuns de flexibilă pentru a putea reda informația referitoare la funcția  $g$ , dar, în același timp, să rămână ortogonală la „zgomot“, adică să fie incapabilă a urmări variațiile rapide ale acestuia.

Ținând cont de cele precizate, ne putem aștepta ca vectorul eroare al unei aproximări reușite să aibă aspectul „zgomotului“, adică să aibă mai multe schimbări de semn decât gradele de libertate ale clasei de funcții folosite; eroarea nu trebuie să varieze mult atunci când mărim ușor numărul gradelor de libertate. Altfel, se constată



--- - curba erorii  
— - curba calculată

Figura nr. 2.16

Aproximarea *spline* în sensul celor mai mici pătrate

că măbind numărul intervalelor (sau al segmentelor polinomiale), eroarea descrește până când atinge un palier, a cărui valoare este dată de amplitudinea „zgomotului“ prezent în datele de intrare. Determinarea acestui lucru s-a făcut prin aceeași metodă, folosită anterior, a perturbării prin rotunjire la un număr de cifre semnificative.

Ca și exemplificare am folosit algoritmul de plasare optimală a nodurilor prezentat anterior pentru interpolarea punctelor din caracteristica magnetică a TC, folosind însă o aproximare în sensul celor mai mici pătrate. Procedul este iterativ, de fiecare dată măbind numărul de noduri cu 2 și folosind subprogramul *Zeta*

pentru a obține o distribuție corectă a lor. Programul folosit este prezentat în Anexa nr. 12 și este destinat de a fi apelat de *Lambda*. În locul unui listing (existent și el în Anexa nr. 12), am preferat o reprezentare grafică a caracteristicii magnetice approximate și a erorilor (reprezentate suprapus, cu linie întreruptă, având scara în dreapta), vizibilă în figura nr. 2.16. Pe linia de zero a erorilor sunt indicate, deasemenea, punctele de joncțiune. Aproximarea inițială, care folosește 13 noduri, este mai bună decât cea obținută prin interpolare, dar aspectul curbei indică în mod clar că ea nu conține toate informațiile existente în datele de intrare, iar curba erorii are un comportament prea regulat.

Din listing (Anexa nr. 12) se poate vedea că spațiul *spline* este de dimensiune  $n+k+l-1=15$ , motiv pentru care ne așteptăm la cel puțin 15 schimbări de semn în eroare. În realitate, nu găsim decât 12, chiar luând valorile 1, 5 și 10 din vectorul erorilor ca fiind nule (cât ar fi în calcul exact) și în acest mod obținând trei schimbări slabe de semn. Analizând mai atent datele furnizate de program, se observă că  $B_4$ ,  $B_6$  și  $B_{15}$  din secvența de funcții *spline* pentru  $t$  sunt nule pe  $\tau$ , adică sunt liniar dependente de celelalte la modul trivial. De aceea, în fapt,  $S_{k,t}$  este numai de dimensiune 12 atunci când e restrâns la  $\tau$ , iar (2.83) permite în aceste circumstanțe numai 12 schimbări de semn.

Listingul arată că solverul *Choleski* construit (Anexa nr. 12) este echipat corespunzător pentru a face față acestor situații singulare în sistemul de

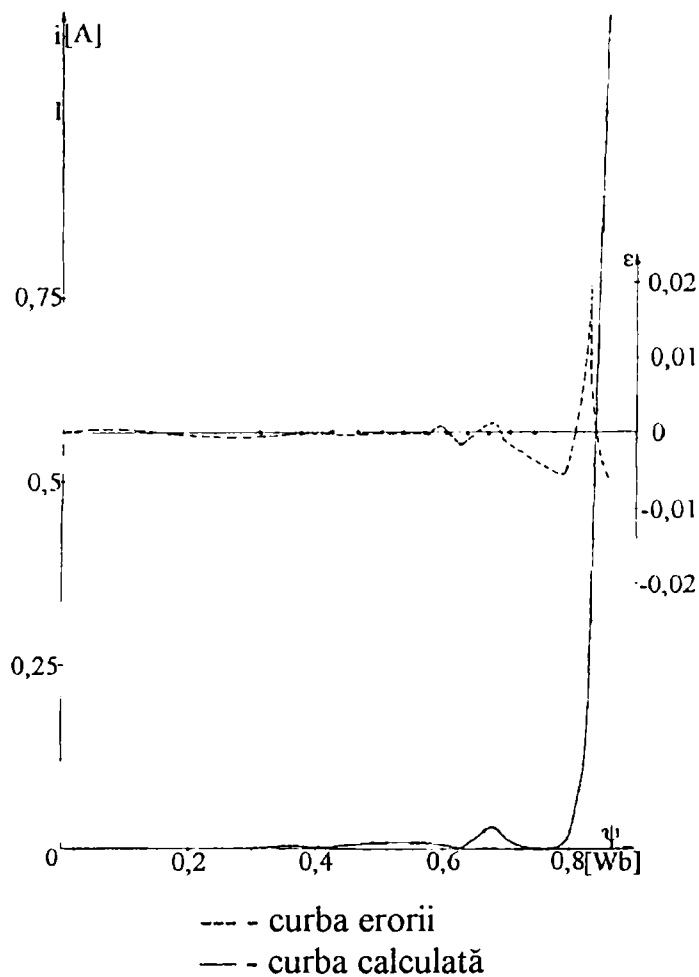
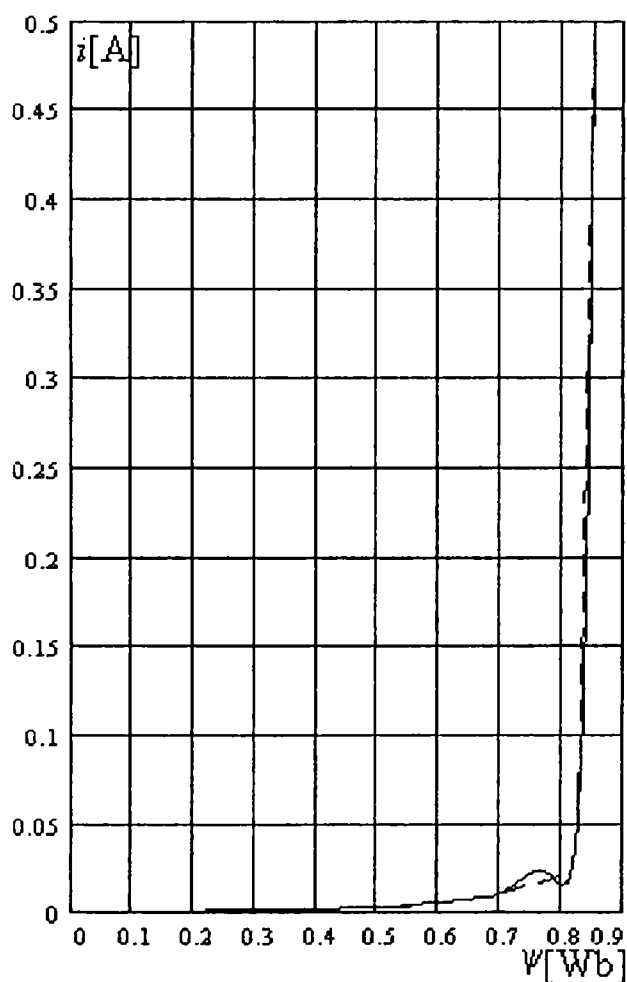


Figura nr. 2.17

Aproximare *spline* în sensul celor mai mici pătrate cu plasare optimală a nodurilor

ecuații normale, dar rezultatele de calcul pot să nu corespundă așteptărilor inițiale. După o singură trecere prin *Zeta* (figura nr. 2.17) se observă că aproximarea arată deja mult mai satisfăcător. Eroarea are 14 schimbări de semn, depășind dimensiunile spațiului *spline* de aproximare. La o primă vedere, s-ar părea că o aproximare cu mai puține grade de libertate (cu funcții *spline* de ordinul 3 sau 4, sau chiar de ordinul 5, dar numai în  $C^1$  sau  $C^2$ ) ar fi mai eficientă.

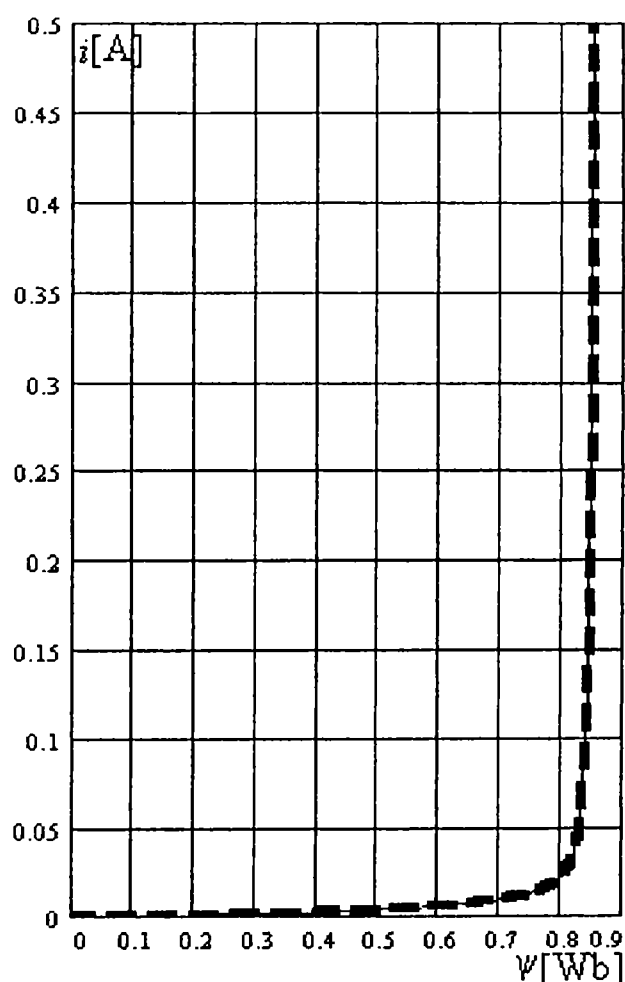
În figura nr. 2.18 se poate vedea confirmarea acestei presupunerii, aproximarea cu funcții *spline* de ordinul 4 în  $C^2$  fiind vizibil mai precisă. În figura nr. 2.19 este prezentat rezultatul după două treceri prin *Zeta*.



--- - curba rezultată din măsurători  
— - curba calculată

Figura nr. 2.18

Aproximare cu funcții *spline* de ordinul 4 în  $C^2$  în sensul celor mai mici pătrate



--- - curba rezultată din măsurători  
— - curba calculată

Figura nr. 2.19

Aproximarea din figura nr. 2.18 după plasarea optimă a nodurilor

### 2.2.2.5 Aproximare prin funcții *spline* tensionate

Vom aborda câteva chestiuni practice legate de aproximarea curbilor. Nu au fost luate în considerare decât curbe plane, adică având punctele în planul  $(x, y)$ , de forma  $C_c := \{(c_x(s), c_y(s)) \mid a \leq s \leq b\}$ , pentru un interval  $[a, b]$  și reprezentări parametrice  $c_x, c_y$  (în general continue).

Problema tipică este de a construi o curbă  $C_c$  care conține setul de date  $(P_i)_1^n$ ; în principal există două aspecte care pot genera dificultăți, acestea fiind alegerea corectă a parametrizării și lipsa de informație.

**Lipsa de informație** este un termen intuitiv și imprecis care descrie următoarea situație. O curbă sau o funcție a fost aproximată printr-un mijloc oarecare, folosind datele experimentale existente, dar, în mod mai mult sau mai puțin evident, rezultatul nu satisface așteptările. De cele mai multe ori, datele furnizate nu sunt suficiente pentru obținerea unei aproximări care să satisfacă (toate) cerințele.

Există situații în care aproximarea poate fi îmbunătățită prin simpla furnizare suplimentară de date în zonele în care acestea sunt insuficiente. Există însă cazuri în care deficiențele nu pot fi corectate pe această cale, atunci când apar puncte de inflexiune „suplimentare“ („extraneous“, „extrinsic“, „foreign“, „étrangers“, „fremde“ - după diverși autori). Să presupunem că avem la dispoziție setul de date  $(\tau_i, g(\tau_i))_1^n$  pentru a fi interpolate. Fie  $f$  o funcție netedă de interpolare a acestor date. Se știe, conform proprietăților diferențelor divizate, că pentru orice  $i$  există un punct  $\eta_i$  în intervalul  $(\tau_{i-1}, \tau_{i+1})$ , astfel încât  $[\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}]g = f''(\eta_i)/2$ . Fiecărei schimbări de semn din secvența  $(\delta_i)_2^{n-1}$ , în care  $\delta_i := [\tau_i, \tau_{i+1}]g - [\tau_i, \tau_{i-1}]g$  îi corepunde o schimbare de semn în derivata a doua a funcției  $f$ , adică un punct de inflexiune al funcției  $f$ . Am denumit mai sus „suplimentar“ orice punct de inflexiune al interpolantului pe domeniul  $(\tau_i, \tau_{i+1})$ , dacă  $\delta_i \delta_{i+1} > 0$ . Ar fi de dorit ca interpolantul să păstreze curbura datelor, în următorul sens: dacă interpolantul poligonal al datelor este convex (concav) pe intervalul



$[\tau_{i-1}, \tau_{s+1}]$ , un „bun“ interpolant trebuie să fie convex (concav) pe intervalul  $[\tau_i, \tau_s]$ . Această prescripție permite existența unui singur interpolant pe intervalul  $[\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$  dacă  $\delta_i = 0$ , acesta fiind o linie dreaptă.

*Schweikert* a fost primul care a tratat problema punctelor de inflexiune nedorite [164]. Modelul propus de el constă în imaginarea (graficului) interpolantului sub forma unei benzi elastice care alunecă pe niște cuie bătute în punctele de interpolare și care este întinsă până când punctele de inflexiune suplimentare dispar. La limită, cu o tensionare foarte puternică, se obține un interpolant cu linii frânte. Matematic, modelul de interpolant tensionat are două derivate continue și satisface între două puncte ecuația diferențială  $(D^2 - p^2)D^2y = 0$ , în care  $p$  este parametrul de tensionare. Pentru  $p = 0$  interpolantul este segmentar polinomial cubic, pentru  $p > 0$  însă, fiecare segment este o construcție liniară de patru funcții:  $1, x, e^{px}, e^{-px}$ .

Algoritmi pentru construcția acestor funcții *spline* tensionate au fost propuși și de alți autori, încercându-se modificarea parametrului de la un segment la altul, în ideea de a sensibiliza procedura la comportamentul local al datelor. În [172] se operează cu interpolanți generalizați, care pe intervalul  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  sunt de forma:  $f(x) = A_i u + B_i v + C_i \varphi_i(u) + D_i \varphi_i(v)$ , în care  $u = u(x) := (x - \tau_i) / \Delta\tau_i$ ,  $v := 1 - u$ ;  $\varphi_i$  este o funcție pe intervalul  $[0, 1]$ , cu  $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$  și  $(\varphi_i'(0))^2 \neq (\varphi_i'(1))^2$ . Pentru  $\varphi_i(s) = s^3 - s$ ,  $\forall s$ , se regăsește interpolantul *spline* cubic familiar. Funcția *pp spline* tensionată se obține, în acest cadru, punând  $\varphi_i(s) = s \operatorname{sh}(p_i s) - s \operatorname{sh} p_i$ , în care  $p_i$  este parametrul de tensionare pentru intervalul  $i$ .

O altă metodă este expusă în [171] și utilizează pe intervalul  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  un interpolant de forma  $f(x) = A_i u + B_i v + C_i u^{m_i} + D_i v^{n_i}$ , în care exponenții  $m_i$  și  $n_i$ , posibil fracționari, urmează a fi determinați într-un mod adecvat. Pentru  $m_i = n_i = 3$  se obține interpolantul segmentar *spline* cubic. Din punct de vedere tehnic, pentru fiecare punct al secvenței de date trebuie să fie introdus raportul  $m_{i-1}/n_i$ .

Singura obiecție reală care poate fi adusă acestor metode este că folosesc funcții



exponențiale și nu polinoame, în spiritul argumentației făcute de la bun început. Același efect (conservarea convexității/concavității datelor) ar putea fi obținut însă folosind funcții *spline* cu noduri adiționale, plasate de așa manieră încât interpolantul să-și poată modifica raza de curbură în caz de nevoie, fără a avea consecința nedorită a unor oscilații între puncte.

În ceea ce privește parametrizarea, aceasta poate fi făcută, bincînțele, în multe feluri. Experiența arată că o parametrizare eficientă este cea care aproximează lungimea arcului curbei rezultante; calculul exact este de multe ori fastidios, în general fiind suficient să se pună  $s_i = 0$ ,  $s_{i+1} = s_i + \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ . Construcția aproximării unei curbe nu este limitată la procesul de interpolare. Orice proces de aproximare a funcțiilor poate fi aplicat celor două componente ale curbei. În [16] este discutată, spre exemplu, o astfel de alternativă de obținere a unei funcții *spline* tensionate care are doar prima derivată continuă, dar produce o curbă având variație continuă a tangentei atunci când este aplicată celor două componente ale unei funcții reprezentate parametric.

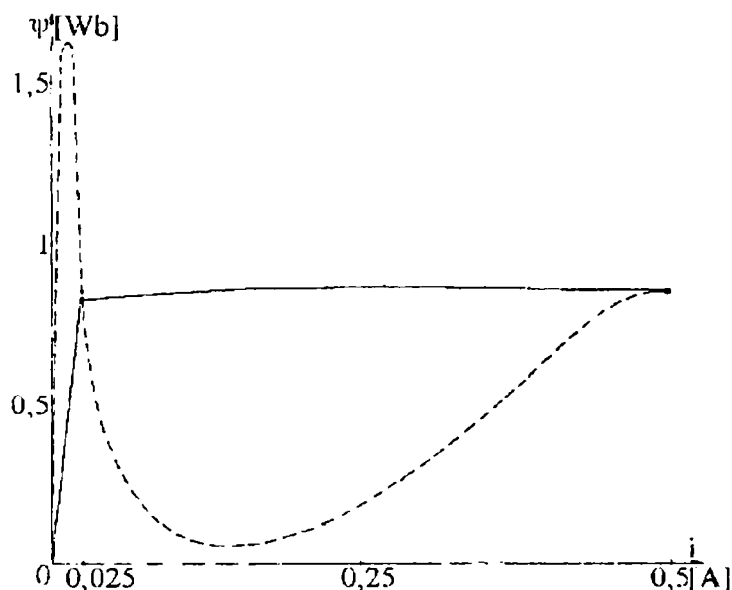


Figura nr. 2.20

Interpolare *spline* cubică (lipsă de date)

experimental (tabelul nr. 3.1) numai următoarele date:  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi'(0) = 20$ ,  $\psi(0,025) = 0,82125$ ,  $\psi(0,5) = 0,855$ ,  $\psi'(0,5) = 0,05$ . Interpolarea *spline* cubică completă a acestor

Există afirmații în literatura de specialitate care susțin că nu este posibilă interpolarea cu funcții *spline* cubice în așa fel încât să fie păstrată convexitatea/concavitatea curbei datelor de intrare [172]. Vom evidenția faptul că acest lucru este posibil prin folosirea punctelor adiționale. Pentru exemplificare, putem lua cazul unei caracteristici de magnetizare idealizate, extrăgând din tabelul datelor ridicate exper-

date (incomplete) produce o curbă cu două puncte de inflexiune (cu linie întreruptă în figura nr. 2.20). Explicația este dată de faptul că în primul interval polinomul cubic nu „se poate” curba suficient de repede; el poate fi „ajutat” adăugând un nod în proximitatea zonei de interes. În acest mod se suplinese informația deficitară („lipsa de date” analizată anterior). Cu ajutorul punctului adițional  $(0,005, 0,165)$ , noul interpolant devine convex (cu linie plină în figură).

Tranziția de la o derivată de valoare mare pe frontieră și comportamentul moderat al funcției în restul intervalului poate fi făcută mai puțin abrupt prin furnizarea mai multor date. Obținerea rezultatului discutat anterior a fost făcută după câteva încercări prealabile cu valori dictate de experiența acumulată. Pentru a fi în posesia unei metode riguroase și nu a unor încercări empirice, am încercat introducerea nodurilor adiționale necesare într-un mod mai sistematic.

În scopul unei argumentări mai ușoare, vom considera că avem de interpolat printr-un polinom cubic următoarele date:  $f(0)=0$ ,  $f'(0)=s_0$ ,  $f(1)=0$ ,  $f'(1)=s_1$ . Folosind forma canonică a polinomului *Newton* de interpolare (2.24), putem deduce:

$$f(x) = s_0x - (2s_0 + s_1)x^2 + (s_0 + s_1)x^3. \quad (2.84)$$

Deoarece  $[0,0,1]f = -s_0$  și  $[0,1,1]f = -s_1$ , orice punct de inflexiune în  $[0,1]$  va fi „suplimentar” în cazul în care  $s_0s_1 < 0$ . Pe de altă parte:

$$\begin{cases} f''(0) = -2(2s_0 + s_1) \\ f''(1) = 2(s_0 + s_1) \end{cases}. \quad (2.85)$$

Acestea fiind precizate,  $f$  nu are puncte de inflexiune „suplimentare” pe  $[0,1]$  dacă și numai dacă  $(2s_0 + s_1)(s_0 + 2s_1) \leq 0$ . Această condiție poate fi pusă sub forma:

$(2(s_0 - s_1) + 3s_1)(s_0 - s_1 + 3s_1) \leq 0$ , sau, împărțind cu  $(s_0 - s_1)^2$  și folosind abrevierea  $z := s_1/(s_1 - s_0)$ , sub forma:  $(2 - 3z)(1 - 3z) \leq 0$ . Concluzia care se impune este că în acest

caz interpolantul cubic reproduce convexitatea/concavitatea datelor numai dacă  $\frac{1}{3} \leq$

$\leq z = \frac{s_1}{s_1 - s_0} \leq \frac{2}{3}$ . Acest lucru nu este întotdeauna valabil pentru un set de date reale.

Pentru valori ale lui  $z$  în afara intervalului specificat va trebui modificată funcția de interpolare.

Mai întâi vom lua în considerare cazul  $z > 2/3$ . Aceasta presupune că interpolantul să flexioneze în proximitatea frontierei din dreapta mai rapid decât o poate face o funcție cubică monotonă. Printre funcțiile bază din  $P_4$ :  $x$ ,  $1-x$ ,  $x^3$ ,  $(1-x)^3$ , pe  $x^3$  o înlocuim cu o funcție *spline* cubică  $\Theta$  cu un singur nod, care se curbează în apropierea frontierei din dreapta a domeniului mai rapid decât o poate face  $x^3$ . Deasemenea, vom impune suplimentar ca  $\Theta(0) = \Theta'(0) = \Theta''(0) = 0$ ,  $\Theta(1) = 1$  și  $\Theta'' \geq 0$  pe  $[0,1]$  dacă și numai dacă coeficientul lui  $\Theta$  și al lui  $(1-x)^3$  sunt de semne opuse. Funcția rezultantă  $\Theta$  este dată de expresia:

$$\Theta(x) = \Theta(x, z) := \alpha x^3 + (1 - \alpha) \left( \frac{x - \xi}{1 - \xi} \right)_+^3, \quad (2.86)$$

în care  $\xi = \xi(z)$  reprezintă nodul adițional, iar  $\alpha = \alpha(z)$  este un număr în  $[0,1]$ . Atât  $\xi$ , cât și  $\alpha$  vor fi condiționate ca fiind funcții continue și monotone de  $z$ , cu  $\alpha(2/3) = 1$  (pentru conectarea continuă cu funcția cubică precedentă în cazul în care  $z \leq 2/3$ ) și cu  $\xi(1^-) = 1$ .

În termenii acestei noi baze, interpolantul are următoarea structură:

$$f(x) = Ax + B(1-x) + C\Theta(x, z) + D(1-x)^3, \quad \text{în care:} \quad (2.87)$$

$$\begin{cases} -A = C = (s_0 + 2s_1)/[3(2p-1)] \\ -B = D = -[(3p-1)s_0 + s_1]/[3(2p-1)] \end{cases}, \quad \text{cu:} \quad (2.88)$$

$$p := \Theta'(1, z)/3 = \alpha + (1 - \alpha)/(1 - \xi). \quad (2.89)$$

Se poate calcula că  $f''(x) = 6\{C[\alpha x + (1 - \alpha)(x - \xi)_+/(1 - \xi)^3] + D(1 - x)\}$ , funcție care nu schimbă de semn pe intervalul  $[0,1]$  dacă și numai dacă  $C$  și  $D$  sunt de același semn. Condiția ca  $f$  să nu aibă puncte de inflexiune „suplimentare“ pe  $[0,1]$  devine (în cazul  $s_0 s_1 < 0$ ) astfel:

$$[(3p-1)s_0 + s_1](s_0 + 2s_1) \leq 0. \quad (2.90)$$

Rearanjând termenii, împărțind cu  $(s_0 - s_1)^2$  și introducând  $z$  obținem condiția:

$$[(3p-1)-3pz](1-3z) \leq 0. \quad (2.91)$$

Conservarea convexității/concavității datelor cere ca  $\frac{1}{3} \leq z \leq \frac{3p-1}{3p}$ , adică  $3p \geq \frac{1}{1-z}$ , ceea ce impune ca  $\alpha = \{1 - (1-\xi)/[3(1-z)]\}/\xi$ . Alegând  $\alpha$  în așa fel încât să fie cel mai mare posibil, obținem relația:  $\alpha(z) = \{1 - (1-\xi)/[3(1-z)]\}/\xi$ . Dacă luăm în calcul condiția  $\alpha(2/3) = 1$ , acest lucru impune  $3(1-z) \geq 1-\xi$  (pentru a obține  $\alpha \geq 0$ ), condiție satisfăcută pentru  $1-\xi(z) = \gamma(1-z)$  atâta timp cât  $\gamma \leq 3$ .

Cazul  $z < 1/3$  poate fi tratat într-un mod cât se poate de asemănător, funcția bază  $(1-x)^3$  fiind înlocuită cu  $\Theta(1-x, 1-z)$ , aceasta din urmă putând fi determinată după metodologia avansată pentru  $z > 2/3$ .

Ambele situații pot fi descrise simultan în cadrul aceluiași formalism matematic, considerând aproximarea de forma:

$$f(x) = Ax + B(1-x) + C\Theta(x, z) + D(1-x, 1-z) \quad , \text{ în care:} \quad (2.92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(x, z) := \alpha x^3 + (1-\alpha) \left( \frac{x-\xi}{1-\xi} \right)_+^3 \\ \alpha(z) := \frac{1-\gamma}{\xi} \\ \xi(z) := 1 - \gamma \cdot \min\left(1-z, \frac{1}{3}\right) \end{array} \right. , \text{ cu } \gamma \in [0, 3]. \quad (2.93)$$

Pe măsură ce  $\gamma$  ia valori mai mari, atât  $\alpha$  cât și  $\xi$  descresc, la  $z$  fixat. Efectul global este că „rotunjirea“ racordurilor e cu atât mai mare cu cât  $\gamma$  are valori mai ridicate.

Cazul mai general de interpolare  $f(0) = f_0$ ,  $f'(0) = s_0$ ,  $f(1) = f_1$ ,  $f'(1) = s_1$  poate fi redus la precedentul deplasând axele cu cantitatea  $f_0 + (f_1 - f_0)x$ . Transformarea nu afectează convexitatea/concavitățile datelor, modificând cantitățile  $s_0$  și  $s_1$  utilizate în argumentația anterioară în  $s_0 - (f_1 - f_0)$  și  $s_1 + (f_1 - f_0)$ . Considerând un caz și mai general, în care interpolăm datele  $f(\tau_j) = f_j$ ,  $f'(\tau_j) = s_j$ ,  $j = \overline{1, i+1}$ , atunci în loc de  $s_0$  și

$s_i$  vom avea  $s_i - [\tau_i, \tau_{i+1}]f$  și  $s_{i+1} - [\tau_i, \tau_{i+1}]f$ .

Toate aceste considerente preliminare sunt utilizate în construirea unui interpolant *spline* cubic „strâns” al datelor inițiale  $(\tau_i, g(\tau_i))_i^n$  prin alegerea bazei pe fiecare subinterval  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  așa cum vom arăta în continuare, rolul valorilor  $s_i$  și  $s_{i+1}$  fiind jucat de diferențele divizate  $[\tau_{i-1}, \tau_i]f$  și  $[\tau_{i+1}, \tau_{i+2}]f$ . Interpolantul pe  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  va fi, deci, o funcție de forma:

$$A_i + B_i u + C\Theta(u, z) + D_i \Theta(1-u, 1-z) \quad , \text{ în care:} \quad (2.94)$$

$$\begin{cases} u(x) := (x - \tau_i) / \Delta\tau_i \\ z := \begin{cases} \delta_{i+1} / (\delta_i + \delta_{i+1}) & \text{dacă } \delta_i \delta_{i+1} \geq 0 \\ 1/2 & \text{altfel} \end{cases} \end{cases} \quad , \text{ cu:} \quad (2.95)$$

$$\delta_j := [\tau_j, \tau_{j+1}]f - [\tau_j, \tau_{j-1}]f \quad , \forall j. \quad (2.96)$$

Pentru cazurile  $i = 1$  sau  $i = n - 1$ ,  $z = 1/2$ .

Această alegere (inițială) a lui  $z$  face din interpolant o funcție discontinuă în raport cu datele experimentale furnizate, lucru care semnifică, printre altele, că o alterare minoră a intrărilor ce schimbă semnul unui (unor) produs(e) de tipul  $\delta_i \delta_{i+1}$  poate provoca modificări drastice în interpolant. Pentru aceasta, în programele de calcul a fost folosită alegerea:

$$z := \begin{cases} |\delta_{i+1}| / (|\delta_i| + |\delta_{i+1}|) & \text{dacă } |\delta_i| + |\delta_{i+1}| > 0 \\ 1/2 & \text{altfel} \end{cases} \quad , \quad (2.97)$$

care înlătură sursa discontinuităților.

În funcție de cantitățile  $f_j$ ,  $f_j''$ ,  $j = \overline{1, i+1}$  și de numărul  $h := \Delta\tau_i$ , coeficienții interpolantului pot fi calculați după cum urmează:

$$\begin{cases} A_i = f_i - D_i \\ B_i = h \cdot [\tau_i, \tau_{i+1}]f - (C_i - D_i) \\ C_i = h^2 \cdot f_{i+1}'' / \Theta(1, z) \\ D_i = h^2 \cdot f_i''' / \Theta(1, 1-z) \end{cases} \quad . \quad (2.98)$$

Deoarece  $\Theta''(1, z) = 6[(1-\alpha)/(1-\xi)^2]$ , rezultă că:

$$1/\Theta(1,z) = (1/6) \left\{ (1-\xi)^2 / [\alpha(1-\xi)^2 + (1-\alpha)] \right\}. \quad (2.99)$$

Vectorul  $(f_i'')^n$  este determinat în așa fel încât interpolantul rezultat să aibă două derivate continue. Aceasta înseamnă că pentru fiecare punct interior  $\tau_i$  este valabilă relația  $f'(\tau_i^-) = f'(\tau_i^+)$ , adică:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau_{i-1}}{\Theta''(1,1-z_{i-1})} f_{i-1}'' + \left[ \frac{\Theta'(1,z_{i-1})-1}{\Theta''(1,1-z_{i-1})} \Delta\tau_{i-1} + \frac{\Theta'(1,z_i)-1}{\Theta''(1,1-z_i)} \Delta\tau_i \right] f_i'' + \\ + \frac{\Delta\tau_i}{\Theta''(1,z_i)} f_{i+1}'' = \delta_i, \quad , i = \overline{2, n-1} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Se poate calcula că:

$$\frac{\Theta'(1,z)-1}{\Theta''(1,z)} = \frac{1-\xi}{6} \frac{(3\alpha-1)(1-\xi) + 3(1-\alpha)}{\alpha(1-\xi)^2 + (1-\alpha)}. \quad (2.101)$$

Evaluarea coeficienților din (2.100) și (2.101) se face cu acuratețe maximă dacă  $\xi \rightarrow 1$ .

Fără noduri adiționale (adică dacă  $\alpha = 1$ ), din (2.99) și (2.101) rezultă că (2.100) se reduce la  $(\Delta\tau_{i-1}/6)f_{i-1}'' + (\Delta\tau_{i-1}/3 + \Delta\tau_i/3)f_i'' + (\Delta\tau_i/6)f_{i+1}'' = \delta_i$ , relație care nu este altceva decât (2.24) transformată, segmentul cubic  $P_i$  fiind scris în funcție de valorile sale și ale celei de-a doua derivate a lui  $\tau_i$  și  $\tau_{i+1}$ , cu condițiile  $P'_{i-1}(\tau_i) = P'_i(\tau_i)$ ,  $i = \overline{2, n-1}$ .

Avem nevoie de încă două relații pentru a obține un sistem în care numărul ecuațiilor să fie egal cu cel al necunoscutelor,  $(f_i'')^n$ . Din multitudinea de posibilități existente în literatura consacrată subiectului [30], am considerat numai condiția „not-a-knot“ [39], sub forma următoare:

$$\text{jump}_{\tau_2} f''' = 0 = \text{jump}_{\tau_{n-1}} f'''. \quad (2.102)$$

Mai explicit, cu ajutorul formulelor (2.94) și (2.98), prima dintre condiții se scrie:

$$\frac{f_2'' - f_1''}{\Delta\tau_1} = \frac{\frac{\Theta'''(0,z_2)}{\Theta''(1,z_2)} f_3'' + \frac{\Theta'''(1,1-z_2)}{\Theta''(1,1-z_2)} f_2''}{\Delta\tau_2}, \quad (2.103)$$

cealaltă arătând similar. De remarcat este faptul că:

$$\frac{\Theta''(1,z)}{\Theta'''(1,z)} = (1-\xi) \frac{\alpha(1-\xi)^2 + (1-\alpha)}{\alpha(1-\xi)^3 + (1-\alpha)}, \quad (2.104)$$

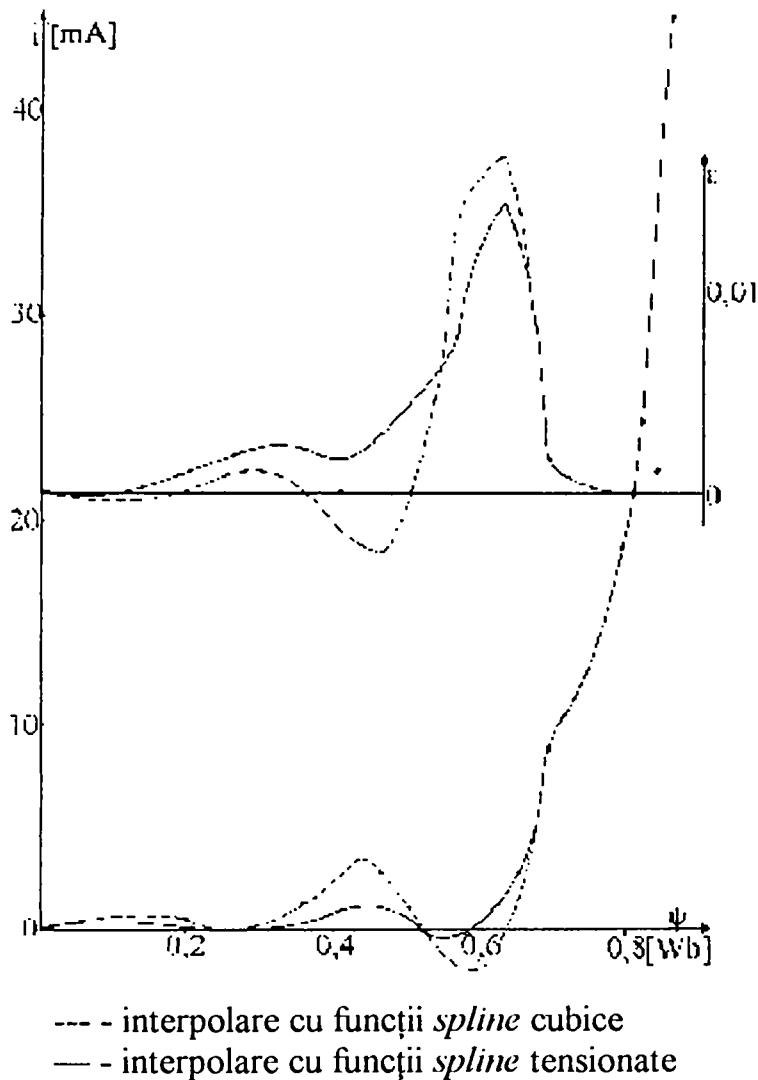


Figura nr. 2.21

Interpolare *spline* tensionată ( $\gamma = 2,5$ )

ecuația  $\text{jump}_{\tau_{n-1}} f''' = 0$ .

Pe baza acestor considerente a fost scris un program - *Miu*, care construiește interpolantul *spline* cubic pentru un set de date de intrare; în figura nr. 2.21 am prezentat un rezultat obținut în urma rulării acestuia. Drept date de intrare am folosit același set care a provocat în figura nr. 2.13 oscilația puternică a interpolantului optimal de ordinul patru. Prima interpolare a fost

ceea ce duce la imposibilitatea evaluării ecuației pentru  $z_2 = 0$ . Din acest motiv, pentru ecuația de frontieră a fost folosită forma:

$$\frac{\Theta''(1,1-z_2)}{\Theta'''(1,1-z_2)} \Delta\tau_2 (f_2'' - f_1'') = \left[ \frac{\Theta''(1,1-z_2)}{\Theta'''(1,1-z_2)} \times \right. \quad (2.105)$$

$$\left. \times \frac{\Theta'''(0,z_2)}{\Theta''(1,z_2)} f_3'' - f_2'' \right] \Delta\tau_1$$

o variantă analogă figurând pentru

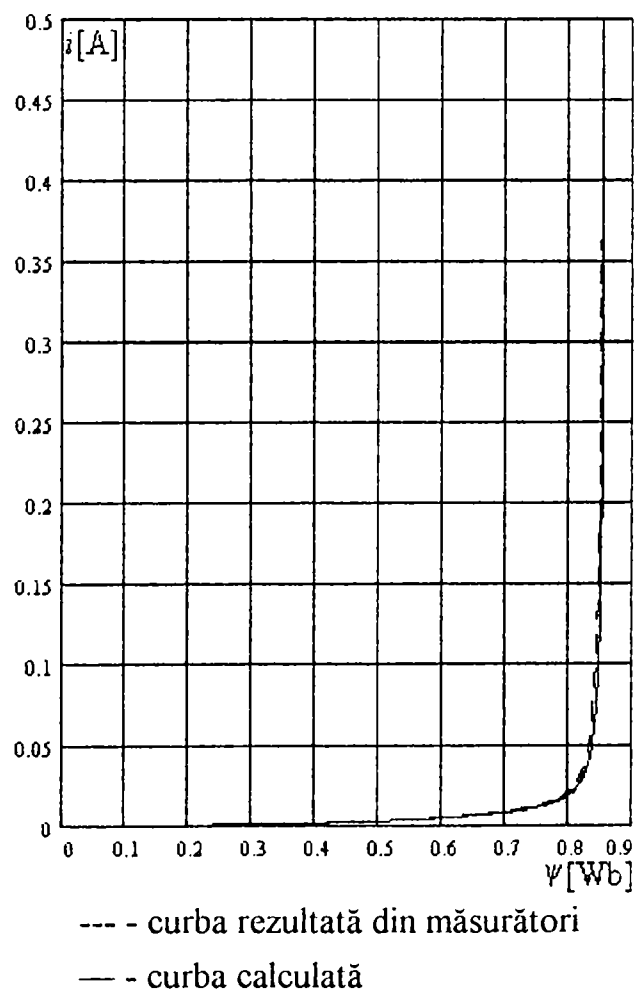


Figura nr. 2.22

Aproximarea setului de date de măsurare al TC prin funcții *spline* tensionate

făcută cu funcții *spline* cubice, utilizând condiția „not-a-knot“ [39] și obținând același comportament oscilant (cu linie întreruptă în figură, atât caracteristica de magnetizare, cât și eroarea). După aceasta am folosit interpolarea prin funcții *spline* tensionate, cu  $\gamma = 2,5$  (cu linie plină pe figură). Se poate remarca faptul că oscilațiile se reduc în amplitudine, fiind vizibil caracterul „tensionat“ al curbei.

În figura nr. 2.22 poate fi văzută aproximarea prin procedeul descris pentru setul de date de măsurare al TC (tabelul nr. 3.1). Este indiscutabil faptul că linia curbei de interpolare *spline* urmărește cât se poate de strâns punctele de date, nefiind puse în evidență nici un fel de oscilații între acestea.



## 2.3 RĂSPUNSUL TRANSFORMATORULUI DE CURENT ÎN CONDIȚII DE SATURAȚIE

Pentru a putea rezolva sistemul ce caracterizează funcționarea TC am încercat obținerea soluției numerice a unei ecuații diferențiale neliniare prin cologație, cu ajutorul funcțiilor *B-spline*.

Până relativ recent, teoria aproximării nu avea nimic în comun cu teoria ecuațiilor diferențiale. Între timp, s-a constatat faptul că tehnicile tradiționale, cum ar fi metodele *Rayleigh-Ritz* sau *Galerkin* pot fi modificate în sensul utilizării de funcții *pp* în locul funcțiilor triale obișnuite. Corespunzător acestor tendințe, vom prezenta o discuție asupra soluționării numerice a unei ecuații diferențiale ordinare privity ca un proces de interpolare [44].

Idea de pornire este aceea de a aproxima pe intervalul  $[a, b]$  funcția  $g$ , care este dată în mod implicit, ca soluție a ecuației diferențiale:

$$[D^{(m)}g](x) = F\{x, g(x), \dots, [D^{(m-1)}g](x)\}, x \in [a, b], \quad (2.106)$$

având condițiile la limită:

$$\beta_i g = c_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.107)$$

Aici,  $F = F(x, z_0, \dots, z_{m-1})$  este o funcție reală în  $\mathfrak{R}^{m+1}$ , presupusă a fi suficient de netedă.

Condițiile la limită pot fi scrise sub forma:

$$\sum_{j=1}^m w_{ij} [D^{(j-1)}g](x_i) := \beta_i g = c_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.108)$$

în care  $w_{ij}$  sunt constante și  $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_m \leq b$ .

Deoarece relația (2.106) este neliniară, în general ne putem aștepta ca sistemul (2.106) ÷ (2.107) să aibă mai multe soluții. Fără a face exces de determinare matematică, specificăm ca o necesitate existența unei vecinătăți a soluției specifice  $g$  care să nu conțină o alta. Speranța practică este de a porni metoda iterativă (necesară, deoarece

ecuația (2.106) este neliniară) în vecinătatea postulată, pentru ca procesul să convergă spre soluția particulară prezumată.

Funcția  $g$  va fi aproximată prin funcții  $pp$  folosind colocația. Aceasta înseamnă că vom determina o funcție  $pp$  care satisface ecuația în anumite puncte, denumite puncte de colocație. Într-un anumit sens, acestea reprezintă niște puncte de interpolare, dar în contrast cu concepția tradițională în interpolare, aici nu vom face să coincidă valori ale funcției și/sau ale derivatelor acesteia, ci anumite combinații ale lor.

La modul concret, dându-se punctele de racordare  $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{l+1}$  (cu  $\xi_1 = a$  și  $\xi_{l+1} = b$ ), vom construi funcția  $f \in \mathbf{P}_{k,m} \cap \mathbf{C}^{m-1}$ , pentru care:

$$\begin{cases} [D^{(m)}f](\tau_i) = F\{\tau_i, f(\tau_i), \dots, [D^{(m-1)}f](\tau_i)\} & , i = \overline{1, kl} \\ \beta_i f = c_i & , i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (2.109)$$

Punctele de colocație  $(\tau_i)_{i=1}^{kl}$  sunt în număr de  $kl$  pe fiecare subinterval și egal distribuite, adică pentru  $-1 \leq \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_k \leq 1$ , identificate cumva, punem  $\tau_{(i-1)k+v} := [\xi_i + \xi_{i+1} + \rho_v(\xi_{i+1} - \xi_i)]/2$ ,  $v = \overline{1, k}$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Pentru scopul propus în teză, am apreciat că este avantajos ca  $\rho$  să fie zerourile polinomului lui *Legendre* de ordinul  $k$ , adică tocmai punctele utilizate în metoda *Gauss* standard de cvadratură numerică.

Presupunând că funcția  $F$  din relația (2.106) este suficient de netedă într-o vecinătate a curbei:

$$\{[a, b] \Rightarrow \mathfrak{R}^{m+1} \mid x \rightarrow \{x, g(x), \dots, [D^{(m-1)}g](x)\}\} \quad (2.110)$$

și alegând punctele de colocație  $\rho = (\rho_i)_{i=1}^k$  în intervalul standard  $[-1, 1]$ , astfel încât:

$$\int_{-1}^1 q(x) \prod_{i=1}^k (x - \rho_i) dx = 0, \quad \forall q \in \mathbf{P}_s, \quad (2.111)$$

atunci, dacă există, soluția  $f$  a problemei aproximative (2.109) apropiată de  $g$  satisface relația [44]:

$$\|D^{(j)}g - D^{(j)}f\| \leq \text{const} \cdot |\xi|^{k+\min(s, m-1)}, \quad j = \overline{0, m}. \quad (2.112)$$

În punctele de racordare aproximarea poate fi chiar mai bună, adică:

$$|D^{(i)}(g-f)(\xi_j)| \leq \text{const} \cdot |\xi|^{k+s}, \quad j = \overline{1, l+1}, i = \overline{0, m-1}. \quad (2.113)$$

Constanta depinde de  $F, g, k$ , dar nu și de  $\xi$ .

Deoarece  $D^{(i)}f$  este funcție *pp* de ordinul  $k+m-i$ , limitarea (2.112) arată că ea reprezintă o aproximare optimală pentru  $D^{(i)}g$  în sensul precizat în §§ 2.2.2.3, deoarece  $s > m-i$ . Limitarea (2.113) arată, însă, că în punctele  $\xi_1, \dots, \xi_{l+1}$  aproximarea este mai bună decât cea optimală (dacă  $s > m$ ). Acest fenomen este denumit în literatura de specialitate *superconvergență*; a discuta de o convergență mai bună decât cea optimală poate părea paradoxal, dar nu este. Rezultatul obținut anterior, și anume că cel mai bun ordin posibil pentru  $\text{dist}(g, P_{k+m, \xi})$  este  $O(|\xi|^{k+m})$  se referă la norma erorii și nu contrazice posibilitățile de a obține o aproximare mai bună în anumite puncte. (În definitiv, putem obține eroare nulă în unele puncte pur și simplu folosindu-le ca puncte de interpolare.)

Problema aproximativă (2.109) este, în general, neliniară și necesită pentru a fi soluționată o metodă iterativă. Am ales din [44] o metodă de tip *Newton*, având nevoie de o soluție inițială și suficient de apropiată (cu ipotezele că  $F$  este suficient de netedă și  $|\xi|$  suficient de mic). În aceste condiții:

$$f = \lim_{r \rightarrow \infty} f_r, \quad (2.114)$$

$f_{r+1}$  fiind soluția  $y \in P_{k+m, \xi} \cap C^{m-1}$  a problemei liniare:

$$\begin{cases} [D^{(m)}y](\tau_i) + \sum_{j < m} v_j(\tau_i) [D^{(j)}y](\tau_i) = h(\tau_i), & i = \overline{1, kl} \\ \beta_i y = c_i, & i = \overline{1, m} \end{cases}, \text{ în care:} \quad (2.115)$$

$$v_j(x) := - \left( \frac{\partial F}{\partial z_j} \right) \{x, f_r(x), \dots, [D^{(m-1)}f_r](x)\}, \quad j = \overline{0, m-1} \quad \text{și} \quad (2.116)$$

$$h(x) := F\{x, f_r(x), \dots, [D^{(m-1)}f_r](x)\} + \sum_{j < m} v_j(x) [D^{(j)}f_r](x). \quad (2.117)$$

Funcția necunoscută  $y$  din relația (2.115) ÷ (2.117) poate fi exprimată printr-o combinație potrivită de funcții *B-spline*. Mai concret, fie  $t := (t_i)_{i=1}^{k+m+n}$  secvența

nedescrescătoare (generată de subprogramul *Bloc* (Anexa nr. 13) pe baza  $\xi$ ,  $k$  și  $m$ ), care conține  $\xi_1$  și  $\xi_{k+l}$  de  $k+m$  ori și fiecare punct de joncțiune interior,  $\overline{\xi_2, \xi_l}$  de  $k$  ori.

În acest mod,  $n = kl + m$ , și:

$$P_{k+m, \xi} \cap C^{m-1} = S_{k+m, t} \quad (\text{pe } [\xi_1, \xi_{l+1}]). \quad (2.118)$$

Soluția  $y$  poate fi scrisă, deci, sub forma:

$$y = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j, k+m, t}, \quad (2.119)$$

cu alte cuvinte,  $z$  poate fi explicat prin determinarea vectorului  $B$ -coeficienților,  $\alpha$ .

Acesta furnizează sistemul liniar:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (LB_j)(\tau_i) \alpha_j = h(\tau_i) & , i = \overline{1, kl} \\ \sum_{j=1}^n (\beta_i B_j)(\tau_i) \alpha_j = c_i & , i = \overline{1, m} \end{cases}, \text{ unde:} \quad (2.120)$$

$$Ly := D^{(m)}y + \sum_{j < m} v_j(\cdot) D^{(j)}y, \quad (2.121)$$

în care  $h$  și  $v$  sunt dați explicit de (2.117) și de (2.116), iar  $\beta_i$  de (2.107) și (2.108).

Ca urmare a unei distribuții corespunzătoare a condițiilor pe frontieră printre punctele de cologație, sistemul (2.120) are un caracter *aproximativ* bloc diagonal. Pentru a explica mai clar acest termen, să presupunem că avem de a face cu o ecuație diferențială de ordinul doi, soluția ei fiind aproximată prin funcții *pp* de ordinul 6 cu 4 segmente polinomiale. În aceste condiții (matricea) sistemul(ui) liniar (2.120) are forma indicată în partea stângă a figurii nr. 2.23 (fiind luate în considerare numai componentele posibil nenule). Blocul  $i$  corespunde celui de-al  $i$ -lea polinom, adică intervalului  $(\xi_i, \xi_{i+1})$ . Coloanele blocului  $i$  corespund celei de-a  $(k+m)$ -a funcții *B-spline* care conține în suportul său acest interval, liniile sale fiind constituite cu ajutorul celor  $k$  ecuații de cologație în punctele intervalului  $(\xi_i, \xi_{i+1})$ , împreună cu condițiile pe frontieră, judicios intercalate.

Să presupunem că folosim eliminarea gaussiană cu pivotare parțială [78] pentru rezolvarea sistemului (2.120). După  $k$  pași de eliminare, în primul bloc trebuie operată

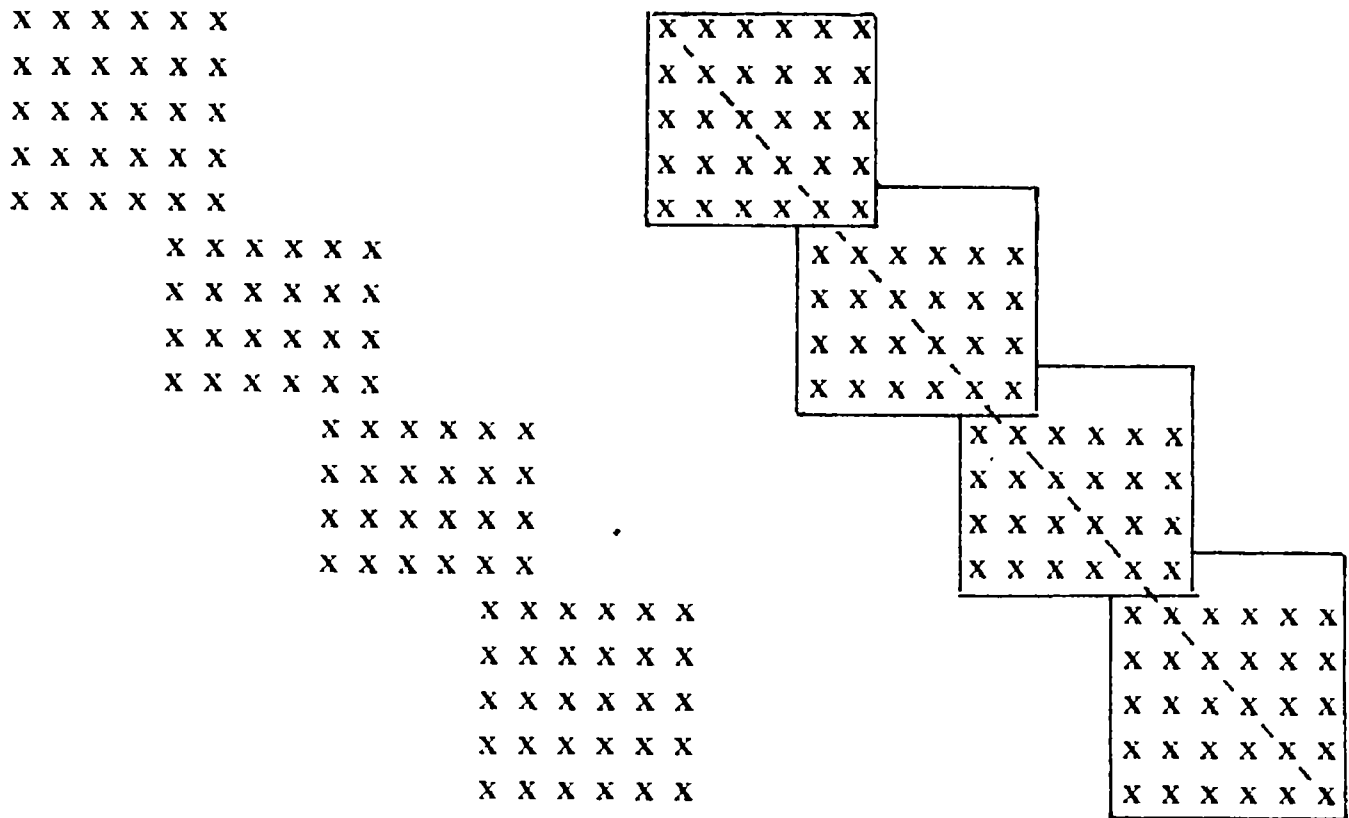


Figura nr. 2.23

Structura sistemului liniar *aproximativ* bloc diagonal

deplasarea tuturor ecuațiilor care nu au fost folosite ca pivot în blocul următor (în cazul considerat în figura nr. 2.23, una singură). Operațiunea este cu sens, deoarece ecuațiile respective au termeni nenuli doar în următorii  $k$  pași în cel de-al doilea bloc, iar apoi toate ecuațiile nefolosite ca pivot se transferă în cel de-al treilea bloc, etc.

Se observă că spațiul total necesar fiecărui bloc poate fi calculat considerându-l format din  $k+m$  coloane și liniile asociate intervalului curent, extinzându-l către partea superioară până când elementul său din colțul superior stânga devine element component al diagonalei principale a întregii matrici a sistemului. Pentru exemplul luat în considerare, acest lucru este figurat în partea dreaptă a figurii nr. 2.23. Liniile care se adaugă la începutul fiecărui bloc nu este necesar să fie completate inițial, ele completându-se în timpul procedurii de eliminare.

Operațiunile descrise până acum sunt realizate cu ajutorul subprogramului *Sistem* și al subrutinei sale, *Bloc* (Anexa nr. 13). Cele  $k$  ecuații de colocație pentru intervalul  $(t_{ns}, t_{ns+1})$  se construiesc cu ajutorul subrutinei furnizate *Difequ(2,.)*,

intercalând printre ele (dacă există) și condițiile de frontieră, folosind *Difequ*(3,.). Blocul  $q$  are  $kpm$  coloane, corespunzând celor  $k + m$  funcții *B-spline* de ordinul  $k + m$  care conțin în suportul lor intervalul  $(t_{ns}, t_{ns+1})$ . Diagonala principală a acestuia este parte componentă a diagonalei principale a sistemului total. Prima ecuație netransferată din blocul precedent este dată de numărul condițiilor de frontieră existente în intervalele (blocurile) precedente.

Odată constituit sistemul liniar *aproximativ* bloc diagonal, el este rezolvat eficient cu ajutorul unui pachet de subprograme (Anexa nr. 13). Pentru a economisi spațiul de stocare în calculator și a accelera procedura de calcul, ținând seama de structura specială a sistemului, este folosită factorizarea PLU [78].

Construirea sistemului (2.120) pentru *B*-coeficienții procedurii iterativ de tip *Newton* presupune cunoașterea valorilor tuturor funcțiilor *B-spline* de ordinul  $k + m$  și a primelor lor  $m$  derivate pe secvența  $t$  în punctele de colocație și în cele de frontieră. În acest scop, subrutina *Bloc* (Anexa nr. 13) apelează un program numit *Calc* (Anexa nr. 14).

Din analiza bibliografiei de specialitate [121], rezultă clar modul în care pot fi obținute valorile celor  $k$  funcții *B-spline* de ordinul  $k$  într-un punct dat conținut în suportul acestora. Pentru obținerea derivatelor acestor funcții au putut fi identificate două căi. Una este aceea de a folosi relația de recurență pentru derivatele unei funcții *B-spline* [67]. Această relație de recurență poate fi obținută prin aplicarea formulei lui *Leibniz* pentru diferența divizată de ordinul  $k$  a unui produs produsului particular  $(t - x)_+^{j-1} = (t - x)(t - x)_+^{j-2}$ . Deoarece:

$$\frac{D^{(j)}B_{i,k}(x)}{t_{i+k} - t_i} = (k - 1) \dots (k - j) (-1)^j \prod_{i, \dots, t_{i+k}} (t - x)_+^{k-j-1}, \text{ se obține:} \quad (2.122)$$

$$\frac{k - j - 1}{k - 1} D^{(j)}B_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} D^{(j)}B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} D^{(j)}B_{i+1,k-1}(x). \quad (2.123)$$

O altă cale este de a considera că funcția *B-spline* este o funcție *spline* cu o secvență redusă de coeficienți *B-spline* și de a folosi formula [98]:

$$D^{(j)}\left(\sum_i \alpha_i B_{i,k}\right) = \sum_i \alpha_i^{(j+1)} B_{i,k-j}, \quad \text{unde:} \quad (2.124)$$

$$\alpha_r = \begin{cases} \alpha_r & \text{pentru } j = 0; \\ \left[\alpha_r^{(j)} - \alpha_{r-1}^{(j)}\right] / (t_{r+k+j} - t_r) / (k-j) & \text{pentru } j > 0 \end{cases} \quad (2.125)$$

pentru a exprima derivate de ordinul  $j$  a ei sub forma unei combinații liniare de funcții  $B$ -spline de ordinul  $k-j$ . Pentru calcul, în subrutina *Calc* (Anexa nr. 14), am ales această ultimă alternativă; un argument suplimentar pentru alegere, bazat pe analiza erorilor de rotunjire, poate fi găsit în [55], unde, printre variantele de calcul analizate se (re)găsesc și cele două enunțate deja.

Pentru obținerea soluției sistemului (2.109) se folosește o metodă de tip *Newton*, care conduce la procedura iterativă de tip (2.115). În acest scop a fost elaborat programul *Coloc* (Anexa nr. 15), programul principal folosind subrutina *Convert* (Anexa nr. 14) pentru transformarea secvenței de puncte de joncțiune în secvență de noduri și subrutina *Nod* (Anexa nr. 15) pentru generarea secvenței punctelor de colocație  $p$  în intervalul standard  $[-1,1]$  ca și puncte de tip *Gauss-Legendre*. El folosește, deasemenea, subrutinele *Sistem + Bloc* (Anexa nr. 13) pentru generarea sistemului liniar (2.120) și pachetul de programe supervizat de subrutina *Slyblk* (Anexa nr. 13) la rezolvarea acestuia. Pentru optimizarea secvenței de noduri este apelată subrutina *Zeta* (Anexa nr. 8); fiecare ecuație diferențială a cărei soluție se caută este descrisă de subrutina *Difequ*.

Cu aceste precizări, putem aborda descrierea formală a TC cu saturație, luând în considerare pierderile. Funcționarea TC este descrisă de următoarele relații:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 i_1 + n_2 i_2 = n_1 i_{10} \\ i_1 = s(t) \\ i_{10} = f(\Psi) \\ -\frac{d\Psi}{dt} = (L + L_2) \frac{di_2}{dt} + (R + R_2) i_2 \end{array} \right. , \quad (2.126)$$

în care curentul primar este o funcție analitică de timp iar legătura de tip (1.11) între curentul echivalent și înălțuirea magnetică este dată de relația (1.34):

$$i_{10} = f(\Psi) = f_1(\Psi) + \frac{1}{\omega} f_p(\Psi) \frac{d\Psi}{dt} = f_1(\Psi) + \Psi' f_2(\Psi). \quad (2.127)$$

Din prima ecuație a sistemului (2.126), ținând cont și de celelalte două care îi succed, explicităm curentul secundar:

$$i_2 = k_m [\Psi' f_2(\Psi) + f_1(\Psi) - s(t)]. \quad (2.128)$$

Relația (2.128), împreună cu derivata ei, se înlocuiesc în ultima ecuație din sistemul (2.126), rezultatul fiind aranjat sub forma cerută de (2.106):

$$\Psi''(t) = - \frac{\{(L+L_2) [\Psi' f_2(\Psi) + f_1'(\Psi)] + (R+R_2) f_2(\Psi) + k_{in}\} \Psi' + (R+R_2) [f_1(\Psi) - s(t)] - (L+L_2) s'(t)}{(L+L_2) f_2(\Psi)}. \quad (2.129)$$

Problema liniară (2.115) pentru determinarea lui  $y = f_{r+1}$  pe baza iterației precedente,  $f_r$ , devine:

$$\begin{cases} y''(\tau_i) + v_1(\tau_i) y'(\tau_i) + v_0(\tau_i) y(\tau_i) = h(\tau_i), & i = \overline{1, k/l}; \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0 \end{cases}, \text{ în care:} \quad (2.130)$$

$$F(\Psi'(t), \Psi(t), t) = - \frac{\{(L+L_2) [\Psi' f_2(\Psi) + f_1'(\Psi)] + (R+R_2) f_2(\Psi) + k_{in}\} \Psi' + (R+R_2) [f_1(\Psi) - s(t)] - (L+L_2) s'(t)}{(L+L_2) f_2(\Psi)}, \quad (2.131)$$

$$v_1 = - \frac{\partial F}{\partial \Psi'} = \frac{(L+L_2) [2\Psi' f_2'(\Psi) + f_1'(\Psi)] + (R+R_2) f_2(\Psi) + k_{in}}{(L+L_2) f_2(\Psi)}, \quad (2.132)$$

$$v_0 = - \frac{\partial F}{\partial \Psi} = \frac{((L+L_2) \{ [f_2(\Psi) f_2''(\Psi) - f_1'^2(\Psi)] \Psi' + f_2''(\Psi) f_2(\Psi) - f_1'(\Psi) \times \\ \times f_2'(\Psi) - k_{in} f_2'(\Psi) \} \Psi' + (R+R_2) [f_1'(\Psi) f_2(\Psi) - f_1(\Psi) \times \\ \times f_2'(\Psi)] + f_2'(\Psi) [(R+R_2) s(t) + (L+L_2) s'(t)]}{(L+L_2) f_2^2(\Psi)} \text{ și:} \quad (2.133)$$

$$h = F + v_1 \Psi' + v_0 \Psi = \frac{[(L+L_2) \{ [f_2(\Psi) f_2''(\Psi) - f_2'^2(\Psi)] \Psi + f_2(\Psi) f_2'(\Psi) \} \Psi' + \\ + \{(L+L_2) [f_1''(\Psi) f_2(\Psi) - f_1'(\Psi) f_2'(\Psi)] - k_{in} f_2'(\Psi) \} \Psi \times \\ \times \Psi' + (R+R_2) [f_1'(\Psi) f_2(\Psi) - f_1(\Psi) f_2'(\Psi) \Psi - f_1(\Psi) \times \\ \times f_2(\Psi)] + [\Psi f_2'(\Psi) + f_2(\Psi)] [(R+R_2) s(t) + (L+L_2) s'(t)]}{(L+L_2) f_2^2(\Psi)}. \quad (2.134)$$



În final, ecuația diferențială care descrie evoluția înălțurii magnetice ca funcție de timp este:

$$\begin{aligned}
 & (L + L_2)f_2^2(\Psi)y'' + f_2(\Psi)\{(L + L_2)[2\Psi'f_2'(\Psi) + f_1'(\Psi)] + (R + R_2)f_2(\Psi) + \\
 & + k_m\}y' + \{(L + L_2)[f_2(\Psi)f_2''(\Psi) - f_1'^2(\Psi)]\Psi' + f_1''(\Psi)f_2(\Psi) - f_1'(\Psi) \times \\
 & \times f_2''(\Psi)\} - k_m f_2'(\Psi)\Psi' + (R + R_2)[f_1'(\Psi)f_2(\Psi) - f_1(\Psi)f_2'(\Psi)] + f_2'(\Psi) \times \\
 & \times [(R + R_2)s(t) + (L + L_2)s'(t)]y = \{(L + L_2)[f_2(\Psi)f_2''(\Psi) - f_1'^2(\Psi)]\Psi + \\
 & + f_2(\Psi)f_2'(\Psi)\}\Psi' + \{(L + L_2)[f_1''(\Psi)f_2(\Psi) - f_1'(\Psi)f_2''(\Psi)] - k_m f_2'(\Psi)\}\Psi \times \\
 & \times \Psi' + (R + R_2)\{[f_1'(\Psi)f_2(\Psi) - f_1(\Psi)f_2'(\Psi)]\Psi - f_1(\Psi)f_2(\Psi)\} + [\Psi f_2'(\Psi) + \\
 & + f_2(\Psi)]\{(R + R_2)s(t) + (L + L_2)s'(t)\}
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Privind ecuația (2.135), în care  $f$  sunt polinoame și  $s$  combinații de funcții armonice și exponențiale, este cu totul evident că o abordare analitică a ei este cu totul exclusă. Aplicarea metodelor numerice standard (*Euler-Cauchy, Heun, Fox, Runge-Kutta, Gill, Merson, Curtis, Milne, Hamming, Adams-Moulton, etc.*) [184] nu conduce la rezultate satisfăcătoare, algoritmi iterativi fiind în general neconvergenți, sau, chiar dacă acest lucru nu se întâmplă, apărând erori cumulate de valoare mare, care fac imposibilă vreo utilizare a rezultatelor. După epuizarea acestor posibilități, metoda care a oferit satisfacție a fost cea a cologației, în care soluția este o funcție *spline*

```

subroutine difequ(mod,x,v)
parameter (i=25,j=500)
dimension a(i),b(j),c(19),v(20),xfr(10)
common/aprox/a,b,k,l'fr/m,n,xfr/rest/i1,j1,c
go to (1,3,4,9),mod
1 m=2
xfr(1)=
xfr(2)=
do 2 k1=1,1
2 h(k1)=.0
i1=
return
3 v(1)=
v(2)=
v(3)=
v(4)=
return
4 v(m+1)=.0
go to (5,6,8),n
5 v(1)=
v(2)=
v(4)=
go to 7
6 v(1)=
v(2)=
v(4)=
7 n=n+1
8 return
9 write (*,11)
x=
do 10 i1=1,...
x=x+
solutn=
error=solutn-ppvalu(a,b,k,1,x,0)
10 write (*,12) x,solutn,error
return
11 format(30hx, g(x) si g(x)-f(x) in punctele date:)
12 format(3e20.10)
end

```

obținută printr-o metodă iterativă de tip *Newton*, detaliile fiind cele prezentate anterior. Informațiile necesare, sub forma așteptată în *Coloc și Bloc*, sunt furnizate de procedura de mai jos, care va fi apelată prin call *difequ(mod,x,v)*. Datele de intrare sunt *mod*, un întreg care indică operațiunea dorită:

- 1 - inițializare;
- 2 - evaluare în punctul  $x$ ;
- 3 - specificarea condițiilor pe frontieră;
- 4 - analizarea aproximării efectuate,

și  $x$  - punctul în care se dorește efectuarea

calculului.  $v$  este un vector de ieșire, al cărui conținut depinde de *mod* așa cum este arătat în continuare.

La inițializare se fixează ordinul  $m$  al ecuației diferențiale, secvența nedescrescătoare  $xfr(i)$ ,  $i = \overline{1, m}$  a punctelor în care sunt date condițiile de frontieră și orice alte date necesare ulterior. Pentru evaluare, *Difequ* furnizează coeficienții sistemului (2.120) și termenii liberi, pentru punctul  $x$ . Mai exact, ecuația diferențială în punctul  $x$  este de forma:

$$v_{m+1} \frac{d^m y}{dx^m} + v_m \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + v_1 y = v_{m+2}, \quad (2.136)$$

coeficienții  $v$  fiind calculați de procedură. Condițiile la limită necesare evaluării unei ecuații diferențiale sunt egale la număr cu ordinul acesteia. Ele sunt descrise tot de formule de tip (2.136),  $i = \overline{1, m+2}$  trebuind specificate; în mod uzual,  $v_{m+1} = 0$ . Analiza aproximării realizate ne dă valorile funcției calculate în punctele de interes (și, dacă este cazul, erorile).

Prin acest procedeu se obține funcția  $\Psi(t)$ , care poate fi evaluată în orice punct al intervalului de lucru. Procedeu de calcul se mai aplică o dată pentru ultima ecuație diferențială a sistemului (2.126), obținându-se, în final, funcția  $i_2(t)$ , care descrie variația curentului secundar, valoarea  $(-d\Psi/dt)$  în orice moment fiind calculată cu ajutorul procedurii *Beta* (Anexa nr. 5).

## 2.4 CONCLUZII

Estimările făcute în acest capitol conduc la concluzia că aproximarea unei funcții printr-un polinom este foarte sensibilă la alegerea punctelor în care se face interpolarea. Interpolarea în puncte selecționate după anumite criterii (spre exemplu, punctele *Cebâșev*) produce o aproximare care, pentru scopuri practice diferă neesențial de cea făcută cu cel mai bun aproximant dintre polinoamele de același ordin.

Limitarea esențială este reprezentată de faptul că polinomul nu este cel mai potrivit instrument de aproximare a unei funcții date. Acest rezultat negativ este exprimat de teorema lui *Faber* [121], stabilită în anul 1914. Dependența globală de comportarea locală poate fi evitată folosind aproximarea polinomială pe porțiuni. Funcția de interpolare care are proprietatea de a converge către funcția continuă pe care o interpoalează este funcția *spline*, aceasta fiind o funcție segmentar polinomială, segmentele racordându-se în noduri împreună cu un anumit număr de derivate.

Teoria aproximării funcțiilor conține afirmații precise cu privire la măsura în care distanța dintre funcția necunoscută  $g$  și polinomul de interpolare tinde spre zero pentru diverse clase de funcții  $g$ . Cea mai potrivită clasificare pentru scopuri ingineresti este aceea bazată pe numărul de derivate continue pe care le are funcția, iar în interiorul clasei  $C^n[a,b]$  a funcțiilor cu  $n$  derivate continue, pe modulul de continuitate al celei de-a  $n$ -a derivate.

Un exemplu tipic de utilizare a acestei clasificări este oferit de teorema lui *Jackson* [141], care afirmă că dacă  $g \in C^r[a,b]$ , adică  $g$  are  $r$  derivate continue pe intervalul  $[a,b]$  și  $n > r+1$ , atunci:

$$\text{dist}_\infty(g, \mathbf{P}_n) \leq k_r \left( \frac{b-a}{n-1} \right)^r \omega \left( g^{(r)}, \frac{b-a}{2(n-r-1)} \right). \quad (2.137)$$

Relația descrie cât de bine poate fi aproximată prin polinoame de ordinul  $n$  o funcție  $g$  cu  $r$  derivate. O analiză a relației (2.137) arată că singura cale de a asigura o eroare mică în general este de a minimiza raportul  $\frac{b-a}{n-1}$ . Acest lucru se poate realiza crescând  $n$  sau/și micșorând  $b-a$ . Dacă intervalul  $[a,b]$  este dat, acesta poate fi partiționat în subintervale de mărime mică, pe fiecare din acestea  $g$  fiind aproximată printr-un polinom convenabil, adică folosind aproximarea polinomială pe porțiuni.

Din punct de vedere teoretic, partiționarea intervalului  $[a,b]$  în  $k$  subintervale sau folosirea unor polinoame de gradul  $kn$  are același efect asupra mărginirii erorii exprimate de relația (2.137), corespunzând unei creșteri pe o cale sau pe alta a gradelor de libertate. Din punct de vedere practic însă, evaluarea unui polinom de ordinul  $kn$  necesită  $kn$  coeficienți și calcule care se amplifică cu cât  $kn$  este mai mare, pe când evaluarea unei funcții polinomiale pe porțiuni de ordinul  $n$  cu  $k$  componente necesită doar  $n$  coeficienți și calcule de o complexitate fixă, independentă de  $k$ . Această diferență structurală influențează și aparatul de calcul necesar; în cazul polinomului este necesară rezolvarea unui sistem complet, pe când în cazul funcției segmentar polinomiale se necesită (de cele mai multe ori) rezolvarea unui sistem cu matrice bandă. Având un număr mare de puncte, folosirea de polinoame ce depășesc gradul 20 necesită precauții speciale pentru a combate tendința acestora de a oscila puternic între puncte, utilizând, de regulă, dezvoltări în polinoame *Cebâșev* sau alte polinoame ortogonale, în timp ce folosirea unui număr mare de polinoame de grad mic nu este mult mai greu de implementat decât utilizarea unuia singur dintre ele.

Pentru aceste rațiuni și a altora, nespecificate aici, în mod obișnuit este mai eficientă micșorarea lui  $b-a$  decât creșterea lui  $n$ ; acest lucru a condus la utilizarea în teză a aproximării polinomiale pe porțiuni (*pp*).

Capitolul a introdus o sinteză a principalelor rezultate referitoare la funcțiile *spline* și a aplicațiilor acestora în analiza numerică și teoria aproximării. Scopul principal a fost parcurgerea unui număr minim de rezultate teoretice fundamentale, care și-au găsit aplicații importante la aproximarea caracteristicii magnetice neliniare.

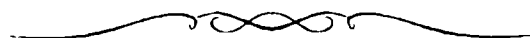
Firește că nu au fost abordate multe aspecte ale teoriei funcțiilor *spline*, o parte dintre ele rămânând chiar neamintite, deși fac obiectul unui număr însemnat de articole. Spre exemplu, toate considerațiile făcute s-au restrâns la cazul funcțiilor *spline* de variabilă reală, cele de variabilă complexă nefiind nici măcar pomenite. Studiul s-a limitat la proprietățile de bază, structurale și intrinseci ale mulțimilor de funcții *spline* care formează un spațiu liniar și mai ales, la aplicarea acestora la procesele de interpolare și aproximare optimală a unor funcționale liniare și la rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale neliniare. Datorită caracterului lor polinomial, funcțiile *spline* prezintă din punct de vedere aplicativ avantajul de a permite o abordare ușoară a calculelor, programarea algoritmică făcându-se fără dificultăți majore.

După prezentarea principalelor rezultate referitoare la modelarea de tip clasic a caracteristicii magnetice s-a impus concluzia că nici unul dintre ele nu este potrivit în cazul aproximării acesteia pe domenii extinse, iar ca soluție constructivă este oferită tratarea acestei probleme cu ajutorul funcțiilor *spline*.

Au fost abordate practic multiple aspecte legate de interpolarea prin funcții *spline*, de ajustare și de aproximare, inclusiv folosind metoda celor mai mici pătrate, din dorința de a putea prelucra eficient informația conținută în setul de date de măsurare. Dezvoltările teoretice și programele de calcul nu se limitează la determinările efectuate, ele având un grad mare de aplicabilitate; din acest motiv s-au făcut analize detaliate și corecții ale unor soluții nesatisfăcătoare, în așa fel încât să se obțină o metodă puternică de modelare a caracteristicii magnetice neliniare, care să poată fi folosită fără restricție asupra oricăror date de intrare, neimpunând nici un fel de constrângeri (spre exemplu, ca punctele să fie echidistante) și valorificând cât mai complet informația conținută, extrăgând esențialul din date afectate de erori de măsurare (care în cazul măsurătorilor magnetice nu pot fi evitate) și având o distribuție nefavorabilă a punctelor. Flexibilitatea procedurilor și a diferitelor unghiuri de abordare fac să fie posibilă tratarea datelor experimentale conform oricărei exigențe dorite în raport cu diverse finalități practice. Se obține o funcție simplă, continuă, fără

puncte de inflexiune nedorite, cu orice număr de derivate continue, care modelează caracteristica magnetică pe domenii extinse cu mare precizie, satisfăcând toate cerințele rezultate din implementarea unor metode numerice de calcul a câmpului electromagnetic care necesită date referitoare la materialul magnetic utilizat.

Scopul tuturor abordărilor matematice prezentate a fost, în final, modelarea unei curbe pe baza datelor furnizate experimental. Utilizarea mai departe a acestor informații prezintă, pe de o parte, un exemplu de finalizare practică în cazul modelării caracteristicii magnetice a TC pe domeniu extins, imposibil de făcut precis prin alte modalități, iar pe de alta, rezolvarea sistemului de ecuații de funcționare a TC în regim tranzitoriu ținând seama de pierderi și de neliniaritatea materialului magnetic al miezului, operațiune ce reprezintă o noutate în domeniu. Rezolvarea sistemului de ecuații (2.126) a fost abordată nu numai prin modelarea cu ajutorul funcțiilor *spline* a ecuației caracteristicii magnetice, ci și prin soluționarea efectivă a ecuațiilor diferențiale într-o manieră derivată din teoria funcțiilor *spline*.



Since no object in the universe can ever be fully determinate with respect to its having or nor having every known property, it follows that any proposition about is vague in the sense that it cannot hope to fully specify a determinate set of properties.

*Robert Almeder, 1983 [6]*

## *Capitolul 3*

# **CALCULE ȘI VERIFICĂRI EXPERIMENTALE**

## **3.1 GENERALITĂȚI**

Verificarea experimentală a funcționării TC în regim permanent periodic cu miezul nesaturat se face conform procedeelelor descrise în literatura de specialitate [19] și a reglementărilor metodologice legale [72]. Testarea funcționării TC în condiții similare celor care pot apare în sistemele electroenergetice este dificilă, în principal datorită faptului că puterea sursei trebuie să fie uneori foarte mare, iar transformatorul este supus unori solicitări termice și dinamice excepționale.

Pentru studiul comportării TC în regimuri care provoacă saturația miezului, în general se conectează în secundarul acestuia o sarcină cu impedanța mai mare decât cea nominală, în aceste condiții saturația având loc sub acțiunea curentului primar, a cărui valoare efectivă nu depășește curentul nominal [50]. Față de situația reală de exploatare, în care saturația este determinată de valoarea ridicată a curentului primar, este evident că magnetizarea circuitului feromagnetic al TC în cele două regimuri este diferită.

Considerarea acestor aspecte conduce la încercarea de a simula o situație cât

mai aproape de realitate. În acest scop am ales pentru experimente un transformator cu domeniu mic în primar, care să poată fi saturat în condiții de laborator, fără ca acest lucru să necesite o sursă de putere foarte mare.

TC de tip TL-20, fabricat de firma *Metra Blansko* utilizat pentru verificarea experimentală a metodelor de calcul propuse în teză are următoarele date tehnice:

- curentul nominal primar:  $I_{1n} = 0,5 \text{ A}, 1 \text{ A}, 2 \text{ A}, 5 \text{ A}, 10 \text{ A}, 20 \text{ A}, 50 \text{ A}, 100 \text{ A}$ ;
- curentul nominal secundar:  $I_{2n} = 5 \text{ A}$ ;
- frecvența nominală:  $f_n = 50 \text{ Hz}$ ;
- impedanța nominală a sarcinii secundare:  $Z_{2n} = 0,2 \Omega$ ;
- puterea nominală secundară:  $S_{2n} = 5 \text{ VA}$ ;
- clasa de precizie: 0,05.

Verificările experimentale s-au făcut folosind înfășurarea primară corespunzătoare curentului nominal primar  $I_{1n} = 0,5 \text{ A}$ . Raportul de transformare nominal este, în acest caz:

$$k_m = \frac{I_{1n}}{I_{2n}} = \frac{0,5}{5} = 0,1. \quad (3.1)$$



## 3.2 DETERMINAREA PARAMETRILOR TRANSFORMATORULUI DE CURENT

Rezistența  $R_2$  a înfășurării secundare și rezistența  $R$  a sarcinii (în care se includ rezistențele firelor de legătură și ale contactelor) au fost măsurate cu ajutorul unei punți digitale automate cu precizia de 0,01%;  $R_2 = 0,239 \Omega$ .

Pentru determinarea inductivității de dispersie,  $L_2$ , a înfășurării secundare a fost folosit montajul din figura nr. 3.1. Pentru a se evita deformarea formei de undă a inducției magnetice în miez nu a fost folosit nici un rezistor pentru reglarea tensiunii primare, ci exclusiv autotransformatorul [191].

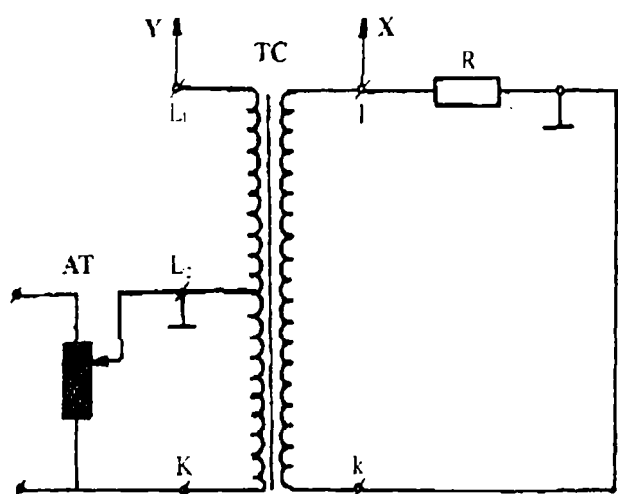


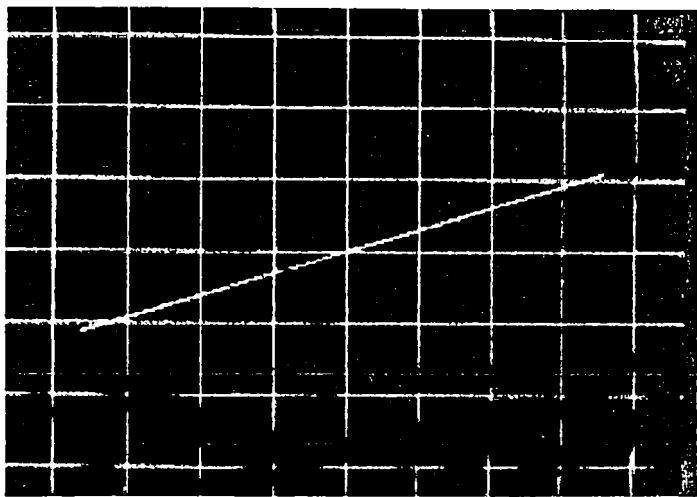
Figura nr. 3.1

Montajul folosit pentru determinarea valorii inductivității de dispersie a TC

util în porțiunea de înfășurare primară cuprinsă între bornele  $L_1$  și  $L_2$ . În locul semnalului generat de baza de timp, pe orizontală se aplică căderea de tensiune pe rezistența etalon  $R = 0,2 \Omega$ , conectată în secundarul TC.

Pe ecranul osciloscopului catodic s-a obținut un segment de dreaptă (figura nr. 3.2). Concluzia este că tensiunea electromotoare indusă în porțiunea de înfășurare cuprinsă între bornele  $L_1$  și  $L_2$  și tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea

secundară sunt în fază cu căderea de tensiune de pe rezistența  $R$ , respectiv curentul din secundar.



$x - 0,5 \text{ V/div}$      $y - 2 \text{ V/div}$

Figura nr. 3.2

Oscilograma pentru montajul din figura nr. 3.1 secundară și curentul în secundarul TC este:

$$\varphi = \arcsin \left( d \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xy} \right) = \arcsin \left( 0,05 \cdot \frac{\sqrt{3,6^2 + 4,4^2}}{3,6 \cdot 4,4} \right) = 1,79465 \cdot 10^{-2} \text{ rad.} \quad (3.2)$$

Știind că rezistența totală a circuitului secundar este  $R + R_2 = 0,445 \Omega$ , valoarea maximă a inductivității de dispersie este:

$$L_2 = \text{tg } \varphi \frac{R + R_2}{2\pi f} = 0,445 \cdot \frac{1,96435 \cdot 10^{-2}}{100\pi} = 2,54205 \cdot 10^{-5} \text{ H,} \quad (3.3)$$

căreia îi corespunde reactanța de dispersie:

$$X_2 = \omega L_2 = 2\pi f L_2 = 100\pi \cdot 2,54205 \cdot 10^{-5} = 7,98565 \cdot 10^{-3} \Omega. \quad (3.4)$$

Valoarea redusă a reactanței (3.4) justifică, în general, neglijarea ei în raport cu impedanța totală a circuitului secundar, ipoteză care se adoptă în majoritatea covârșitoare a cazurilor [50]. În calculele ce se vor efectua în cadrul tezei va fi adoptată pentru inductivitatea de dispersie a circuitului secundar valoarea dată de relația (3.3).

TC folosit este de tip toroidal, miezul fiind constituit din bandă înfășurată continuu. Între înfășurările primară și secundară, repartizate în mod omogen pe circumferința miezului, există un cuplaj strâns. În aceste condiții, curentul echivalent

introdus în (1.10) este reprezentat de curentul de mers în gol redus la înfășurarea primară. Pentru a ridica la modul concret caracteristica de magnetizare a circuitului magnetic al TC a fost folosită schema din figura nr. 3.3.

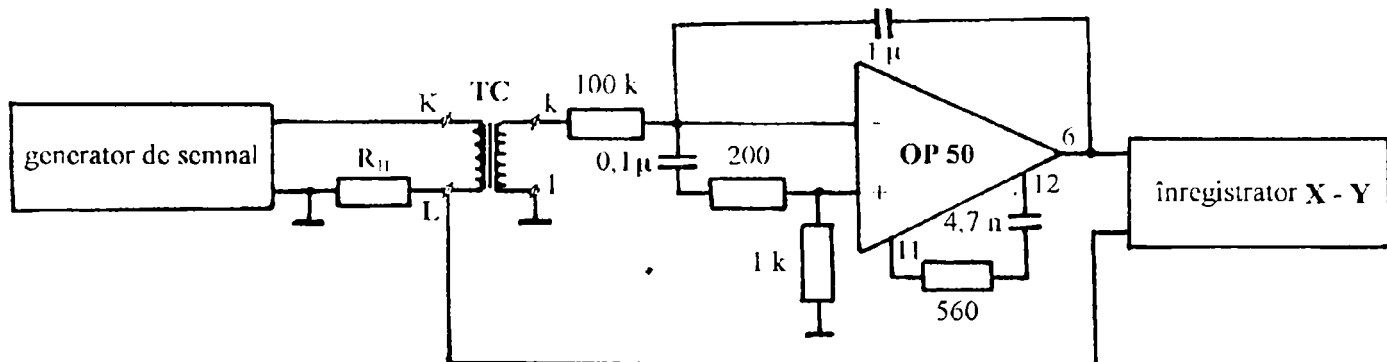


Figura nr. 3.3

Schema montajului folosit la ridicarea ciclului de magnetizare dinamic al TC

Căderea de tensiune de pe rezistența etalon  $R_H$ , proporțională cu  $i_{10}$ , a fost aplicată bornelor x, în timp ce la bornele y ale înregistratorului în coordonate carteziene s-a aplicat o tensiune proporțională cu înălțuirea magnetică  $\Psi$ , obținută prin integrarea tensiunii din secundarul TC.

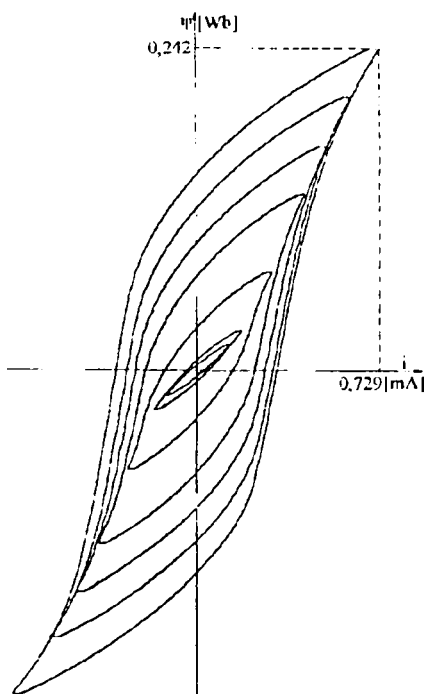


Figura nr. 3.4

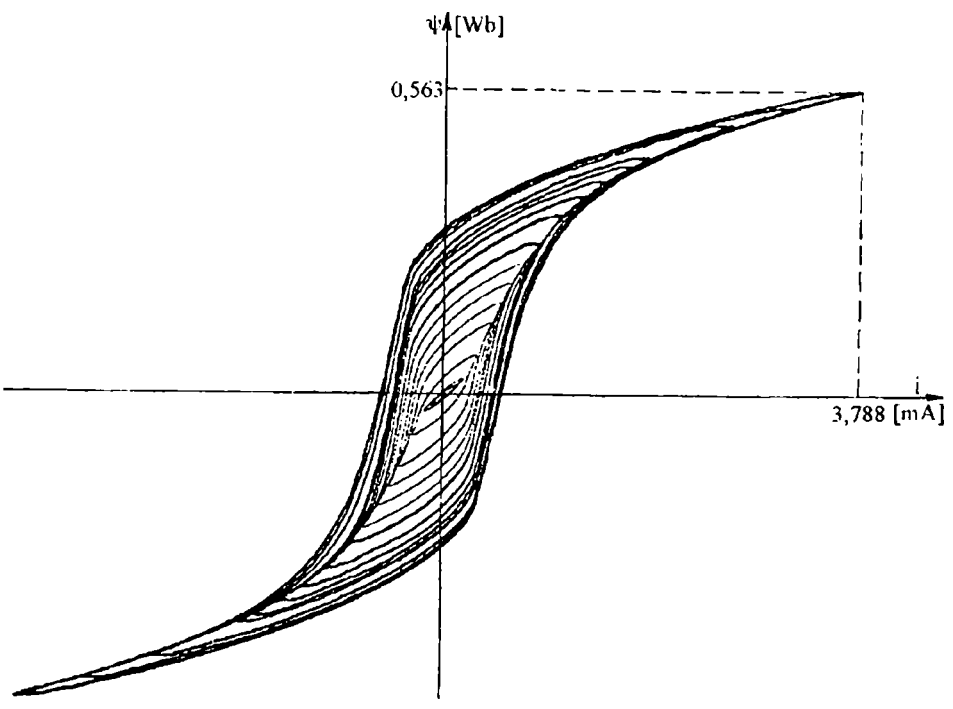


Figura nr. 3.5

Cicluri de magnetizare ale TC

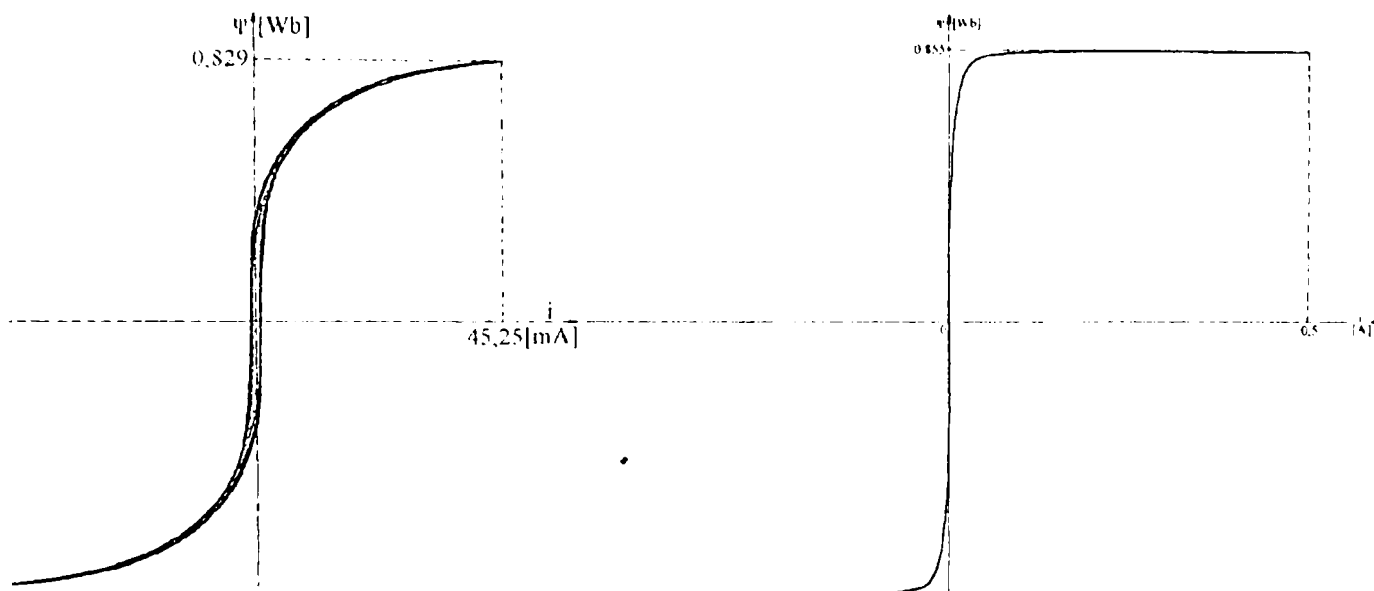


Figura nr. 3.6

Figura nr. 3.7

Cicluri de magnetizare ale TC

În figurile nr. 3.4 ÷ 3.7 sunt reprezentate câteva din ciclurile de magnetizare obținute pentru valori din ce în ce mai mari ale curentului de magnetizare. Se observă că pornind de la o magnetizare redusă, când ciclul este eliptic, se ajunge la saturarea puternică a materialului magnetic, evidențiindu-se comportarea TC în acest regim.

Pentru înălțări magnetice care depășesc valoarea de 0,83 Wb lățimea

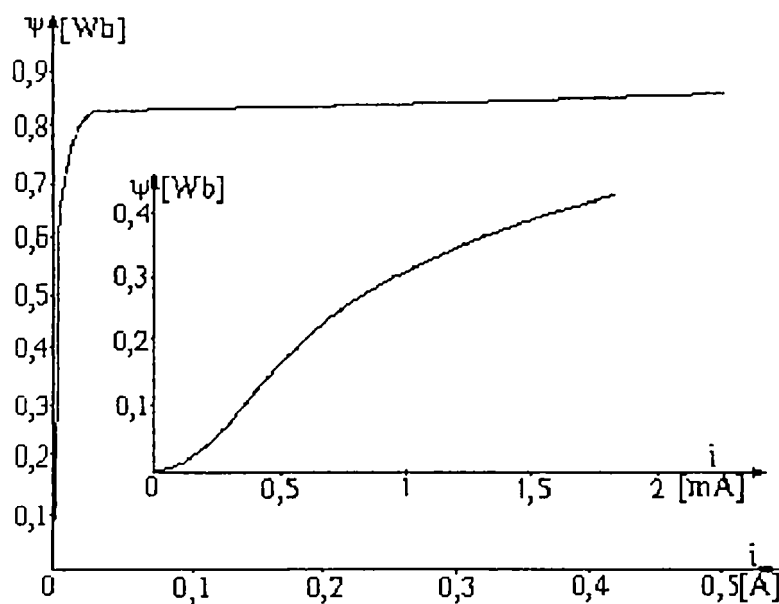


Figura nr. 3.8

Caracteristica de magnetizare a TC

ciclurilor de magnetizare rămâne practic nemodificată, astfel încât ultima curbă din figura nr. 3.6 reprezintă ciclul de magnetizare limită. Caracterizarea cantitativă exactă a comportării miezului TC a fost făcută prin ridicarea a 28 de cicluri de magnetizare.

Figura nr. 3.8 evidențiază porțiunea din cadranul întâi a ca-

racteristicii fundamentale de magnetizare, reprezentând locul geometric al vârfurilor ciclurilor de magnetizare. Porțiunea din cadranul al III-lea este simetrică față de origine cu cea din figură. Curba este obținută prin prelucrarea datelor ridicate experimental. Valorile numerice pe baza cărora a fost construită figura nr. 3.8 sunt:

$\psi$	[Wb]	0,01875	0,02925	0,072	0,1305	0,165	0,20175	0,24225
$i$	[mA]	0,1375	0,1875	0,30417	0,425	0,5	0,60417	0,72917
		0,2775	0,31875	0,36	0,37875	0,40875	0,41625	0,47625
		0,86667	1,09375	1,3125	1,4875	1,725	1,8375	2,5875
		0,5025	0,5625	0,57	0,5925	0,62625	0,67125	0,67875
		3,225	3,7875	4,525	4,78125	6,09375	7,875	8,1875
		0,68625	0,69	0,69375	0,79125	0,82125	0,82875	0,855
		8,625	8,8125	9,0625	18,875	25	45,25	500

Tabelul nr. 3.1 Caracteristica fundamentală de magnetizare a TC

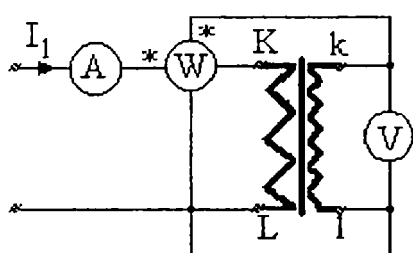


Figura nr. 3.9

Schema montajului pentru determinarea pierderilor în miezul TC

Pentru determinarea pierderilor datorate histerezei și curenților turbionari a fost realizat montajul din figura nr. 3.9. Ansamblul constituie un transformator, iar wattmetrul indică pierderile sale efective. Scăzând pierderile datorate efectului Joule-Lenz, se poate demonstra că restul reprezintă pierderile din curenți turbionari și datorate histerezei [191].

Puterea măsurată de wattmetrul electrodinamic de construcție specială ( $\cos \varphi = 0,1$ ) este:

$$P = U_2 I_1 \cos \varphi \quad , \text{ în care:} \quad (3.5)$$

$U_2$  este tensiunea indusă în secundar (înfășurarea de măsură),  $I_1$  este curentul în primar (înfășurarea de magnetizare), iar  $\varphi$  este defazajul între  $U_2$  și  $I_1$ .

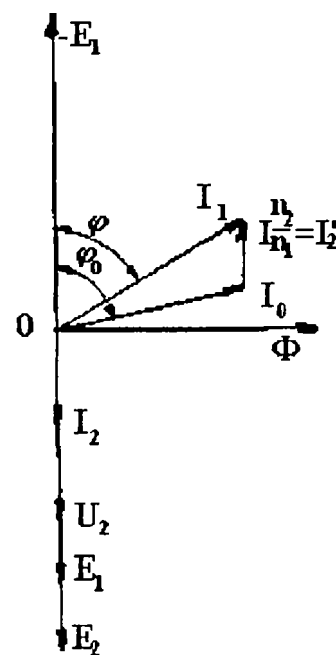


Figura nr. 3.10

Diagrama fazorială a TC la mers în gol

Diagrama fazorială a transformatorului monofazat astfel constituit este reprezentată în figura nr. 3.10. La rândul lor, pierderile în miezul transformatorului pot fi exprimate prin relația:

$$p = U_{e1} I_0 \cos \varphi_0 \quad , \text{ în care:} \quad (3.6)$$

$p$  este suma pierderilor prin histereză și curenți turbionari,  $U_{e1}$  este tensiunea electromotoare în primar, iar  $I_0$  este curentul de mers în gol al TC (cu circuitul înfășurării secundare întrerupt).

Pentru a stabili corelația dintre (3.5) și (3.6), trebuie determinate relațiile între  $U_{e1}$  și  $U_2$ , pe de o parte, și între  $I_0 \cos \varphi_0$  și  $I_1 \cos \varphi$ , pe de alta.

Din ecuațiile de funcționare ale transformatorului, se obține [180]:

$$U_{e1} = \frac{n_1}{n_2} U_{e2}, \quad (3.7)$$

iar pe baza celei de-a doua teoreme a lui *Kirchhoff*, aplicate circuitului secundar al instalației:

$$U_{e2} = U_2 + R_2 I_2 \quad , \text{ unde:} \quad (3.8)$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R + R_2}. \quad (3.9)$$

Efectuând substituția formulei (3.7) în relația (3.8), se obține:

$$U_{e1} = \frac{n_1}{n_2} (U_2 + R_2 I_2). \quad (3.10)$$

În același timp, din diagrama fazorială (figura nr. 3.10), rezultă:

$$I_0 \cos \varphi_0 = I_1 \cos \varphi - \frac{n_2}{n_1} I_2. \quad (3.11)$$

Introducând relațiile (3.10) și (3.11) în expresia (3.6), obținem, în final:

$$\begin{aligned} p &= \frac{n_1}{n_2} (U_2 + R_2 I_2) \left( I_1 \cos \varphi - \frac{n_2}{n_1} I_2 \right) = \frac{n_1}{n_2} U_2 I_1 \cos \varphi - \frac{U_2^2}{R + R_2} \left( 1 + \frac{R_2}{R + R_2} \right) = \\ &= \left( \frac{n_1}{n_2} P - \frac{U_2^2}{R + R_2} \right) \left( 1 + \frac{R_2}{R + R_2} \right) \end{aligned}, \quad (3.12)$$

adică pierderile prin histereză și curenți turbionari din miezul feromagnetic pot fi

determinate pe baza indicațiilor wattmetrului; introducând unele corecții pentru consumul din circuitul secundar.

În figura nr. 3.11 sunt reprezentate pierderile măsurate în funcție de curentul de mers în gol. Între valorile obținute pe această cale și cele calculate din înregistrările ciclurilor de magnetizare există o bună concordanță.

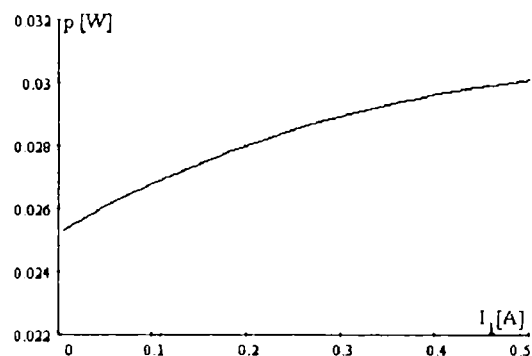


Figura nr. 3.11

Pierderile măsurate ale TC în funcție de curentul de mers în gol

Caracteristica magnetică neliniară a circuitului feromagnetic al TC este determinată în regimul armonic al fluxului  $\Psi$  cu pulsația  $\omega$  a curentului primar. În procesul funcționării TC cu saturarea miezului magnetic, forma de variație în timp a fluxului magnetic  $\Psi$  se abate întrucâtva de la cea armonică, ceea ce ar putea determina, în principiu, modificări ale caracteristicii. În [50], citând și alți autori, se apreciază că aceste modificări sunt neesențiale, astfel încât în calcule le vom considera neglijabile, evitând complicarea nejustificată a metodelor și procedurilor folosite, Pierderile de energie în miez vor fi luate în considerare prin termenul  $\frac{1}{\omega} f_p(\Psi) \frac{d\Psi}{dt}$  al aproximării analitice date de relația (2.127).

### 3.3 CALCULUL FUNCȚIONĂRII TRANSFORMATORULUI DE CURENT ÎN REGIMURI TRANZITORII

Informațiile teoretice avansate, precum și pachetul de programe descrise în capitolul 2 au avut drept scop realizarea unei proceduri de calcul cu ajutorul căreia să se obțină răspunsul TC în regimul tranzitoriu al rețelei în care este conectat.

În urma încercărilor s-a ajuns la ideea soluționării problemei prin colocație, detaliile importante fiind deja precizate. Pentru a valida rezultatele obținute, am rulat un exemplu simplificat de calcul, comparând soluția cu cea analitică avansată în §1.4.

TC se consideră montat în circuitul din figura nr. 1.1, într-o rețea industrială având constanta de timp  $T_1 = 0,36474$  s și se consideră că prin primar trece un curent de 0,1 A. În momentul producerii unei avarii, curentul primar crește de cinci ori, ajungând la valoarea curentului nominal al TC – 0,5 A. Momentul apariției evenimentului este ales astfel încât componenta aperiodică a curentului în primarul TC să fie maximă, ecuația care descrie fenomenul fiind (1.44). Reprezentarea grafică a acestui proces tranzitoriu în rețea este realizată în figura nr. 3.12.

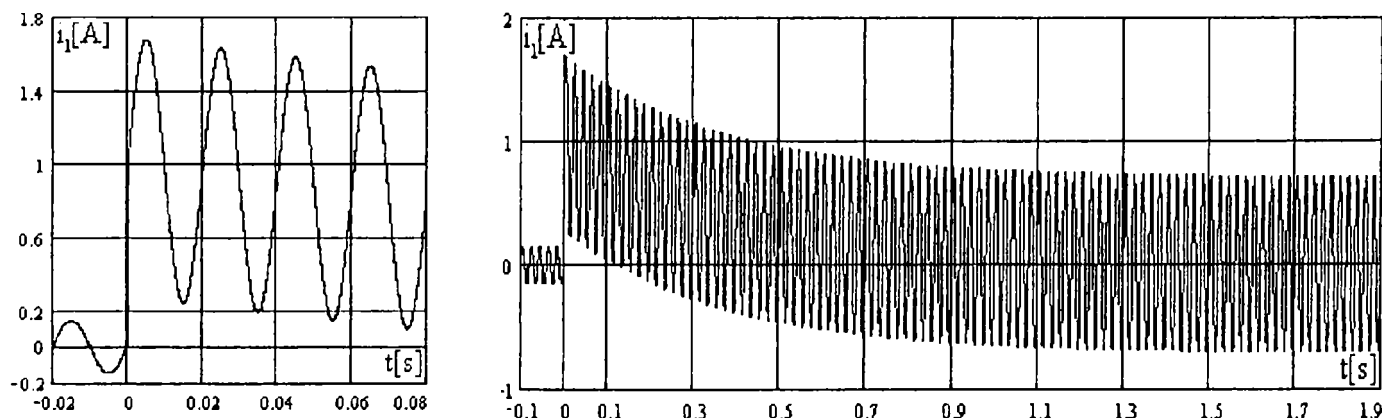


Figura nr. 3.12

Procesul tranzitoriu din rețeaua în care este conectat primarul TC



Dacă legătura dintre curentul echivalent și fluxul magnetic este liniară, sistemul de ecuații care descrie funcționarea transformatorului se banalizează, fiind compus din ecuații diferențiale de gradul întâi cu coeficienți constanți, și poate fi ușor rezolvat printr-o procedură ODEI (*Ordinary Differential Equation Integration*) standard de tip *Runge-Kutta (-Gill)*. Pentru ca acest lucru să nu se întâmple, va trebui să introducem și o componentă care să caracterizeze pierderile din miez, în ideea că abaterile față de modelul liniar nu vor fi mari din punct de vedere cantitativ, dar vom conserva caracterul ecuațiilor diferențiale. Cu aceste precizări, având în vedere datele obținute din măsurări, se poate scrie:

$$i_{10} = 1,36739 \cdot 10^{-3} \Psi + 3,49074 \cdot 10^{-6} \frac{d\Psi}{dt}, \quad (3.13)$$

Funcțiile ce intervin în ecuația diferențială care descrie comportamentul înlănțuirii magnetice în funcție de timp (2.135) devin, în aceste condiții:

$$\begin{cases} f_1 = 1,36739 \cdot 10^{-3} \Psi & , f_1' = 1,36739 \cdot 10^{-3} & , f_1'' = 0 ; \\ f_2 = 3,49074 \cdot 10^{-6} & , f_2' = 0 & , f_2'' = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Ca să funcționeze în zona saturată în condițiile nedepășirii curenților nominali, în secundarul TC a fost plasat un consumator de zece ori mai mare decât impedanța sa nominală de sarcină. În aceste condiții,  $T_2 = 10T_1$ , iar soluția analitică (1.62) generează pentru curentul în secundarul TC forma de variație prezentată în figura nr. 3.13.

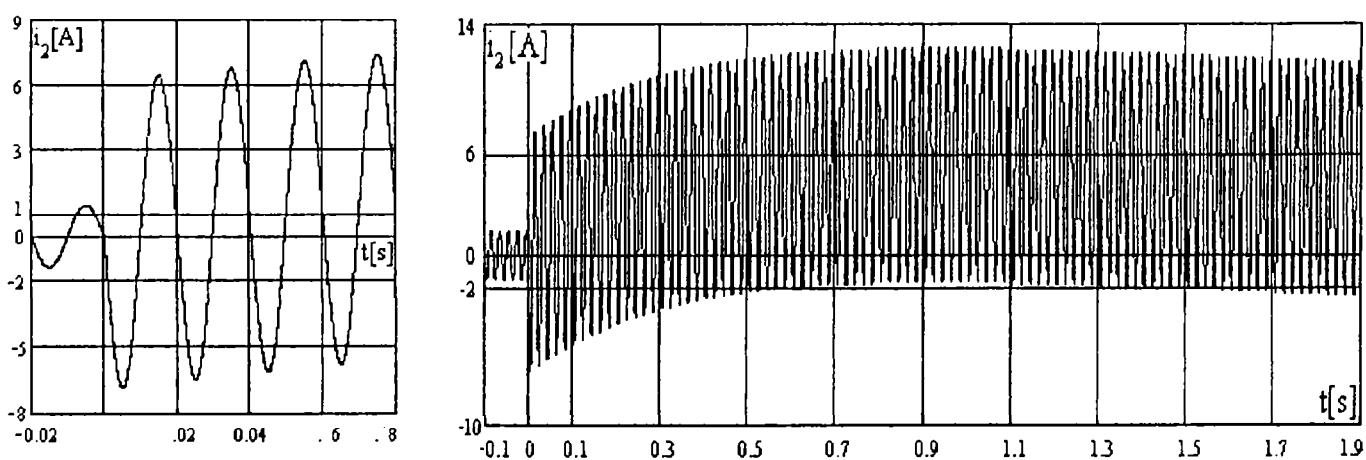


Figura nr. 3.13

Curentul în secundarul TC calculat pe baza ipotezei liniare

Chiar pentru cazul simplificat luat în considerare, rezolvarea numerică prezintă dificultăți. Ținând cont de relațiile precedente, ecuația diferențială (2.135) poate fi adusă la forma:

$$(L + L_2)f_2(\psi)y'' + ((R + R_2)f_2(\psi) + (L + L_2)f_1'(\psi) + k_m)y' + (R + R_2)f_1'(\psi)y = (R + R_2)(\psi f_1'(\psi) - f_1(\psi) + s(t)) + (L + L_2)s'(t) \quad , \text{adică: (3.15)}$$

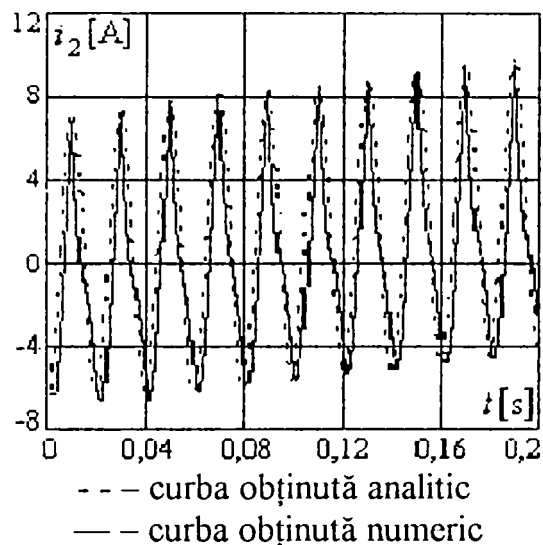


Figura nr. 3.14

Curentul calculat în secundarul TC

constitui, după derivare, termenul din dreapta egalității al ecuației diferențiale ce descrie curentul în circuitul secundar al TC. Neputându-se obține cu alte metode soluții care să conserve măcar semnul valorii reale, pe baza celor amintite în capitolul 2 a fost pus în operă un program de calcul pe bază de colocație (Anexa nr. 15). Rezultatele obținute sunt prezentate în figura nr. 3.14, alături de cele calculate cu formula (1.62). În figura nr. 3.15 s-a reprezentat curentul în secundarul TC pe prima perioadă care urmează momentului de apariție a defectului. Se observă deformarea formei de undă

$$5,6660441751 \cdot 10^{-6} y'' + 0,1022 \cdot 10486 y' + 6,0848766 \cdot 10^{-4} y = 0,31466251762 \times \sin(100\pi t - 1,56206990204) + 360,5766351 \cos(100\pi t - 1,56206990204) + 4,449999389 e^{-\frac{t}{0,3647562611}} \quad (3.16)$$

Se observă că ecuația constituie un exemplu de sistem rău condiționat, diferențele între coeficienți atingând opt ordine de mărime; în plus, soluția nu poate fi evaluată în simplă precizie pe un calculator numeric din cauza depășirii flotante.

Rezultatul care

se obține va

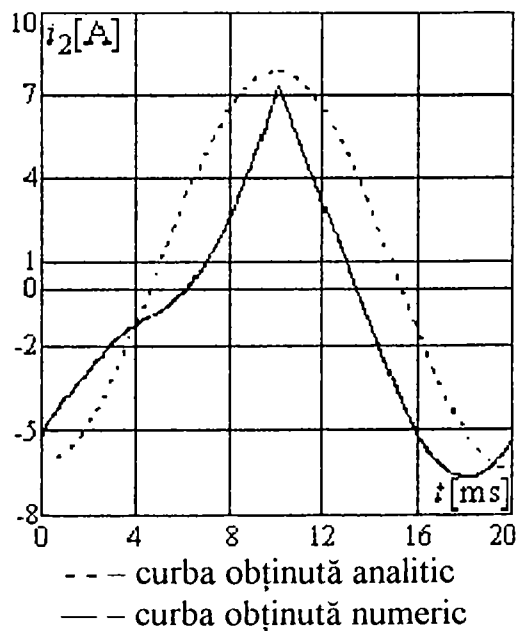


Figura nr. 3.15

Curentul în secundarul TC pe prima perioadă a regimului tranzitoriu

datorată saturației și pierderea simetriei pe sferturile de perioadă ale componentei periodice datorată histerezei. Este vizibilă, deasemenea, decalarea înainte a fundamentalei curbei calculate numeric, ceea ce era de așteptat în urma apariției saturației. În listing sunt redate cantitativ rezultatele, evaluarea curentului secundar

Aproximare prin functii spline de ordinul 6 pe 4 intervale, într-un spatiu de dimensiune 21. Punctele de jonctiune sunt:

.5000000000D-02 .1000000000D-01 .1500000000D-01

Dupa 1 din cele 20 iteratii permise, reprezentarea segmentar polinomiala a aproximarii este:

.000000 - .325811648934126D+00 - .930890425526071D+01 - .430402339865827D+07  
 .646007012405129D+10 - .569636421252410D+13 .223579030003369D+16  
 .50000E-02 - .970696660597400D+01 - .122920216535962D+04 - .205136715934272D+07  
 .427625067312224D+10 - .374332152820057D+13 .144006104906055D+16  
 .10000E-01 - .123872529600650D+02 .148275253483540D+04 - .925839655633958D+06  
 .250942086550485D+10 - .243110678124202D+13 .944715007216154D+15  
 .15000E-01 - .297481623260520D+01 .217520746440967D+04 - .130616101593571D+07  
 .140209374437700D+10 - .147444705649101D+13 .601797655905002D+15

făcându-se pe timpul primei perioade care urmează momentului de apariție a defectului. Intervalul de timp  $[0, 0,2]$  s a fost împărțit în sferturi de perioadă, fiecare fiind modelat cu

ajutorul unui segment polinomial. Variația curentului secundar este suficient de complicată ca să fie insuficient aproximată de un segment de parabolă; pentru a nu fragmenta subintervalele, am mărit gradul polinoamelor de interpolare. Urmărind listingul, se observă precizarea utilizării polinoamelor de gradul șase, urmată de specificarea pe cele patru intervale a coeficienților acestora. Ecuațiile diferențiale fiind cu coeficienți constanți, procedura de tip *Newton* nu are sens, programul oprind automat evaluarea după o singură iterație.

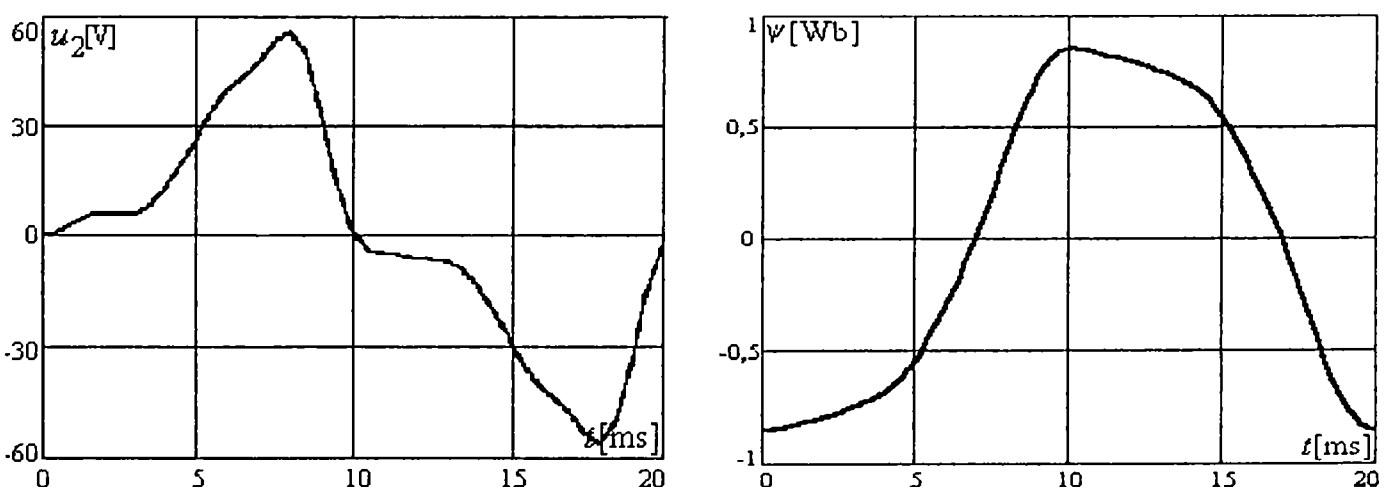


Figura nr. 3.16

Formele de undă ale tensiunii în secundar și fluxului în miez ale TC, calculate pentru exemplul considerat în prima perioadă a regimului tranzitoriu

În completarea datelor obținute cu ajutorul programelor de calcul am obținut forma de variație a tensiunii în secundarul TC și a fluxului în miez. Acestea pot fi

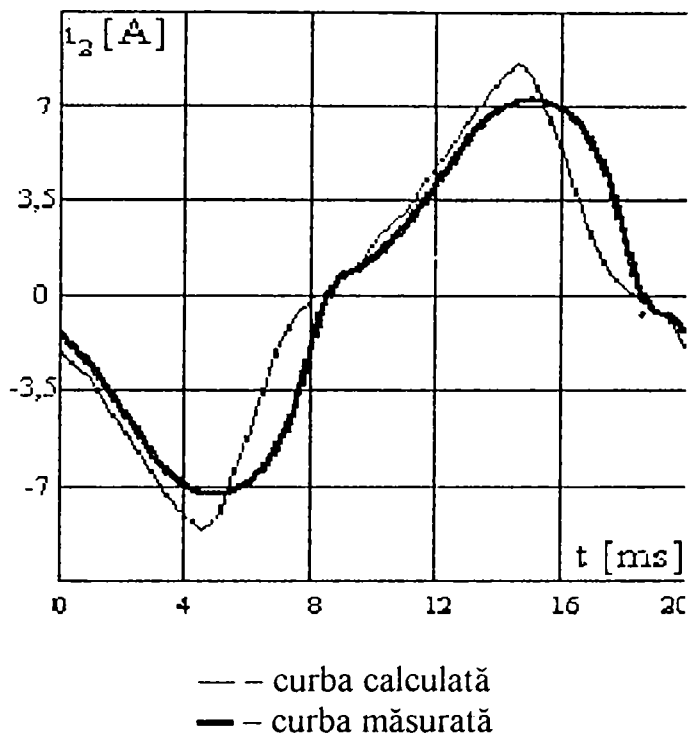


Figura nr. 3.17

Curentul în secundarul TC pentru modelul analitic al caracteristicii de magnetizare prin cinci segmente de dreaptă

Exemplul anterior demonstrează că soluția calculată respectă forma generală de variație a semnalului pe perioada tranzitorie. Pentru a testa calitatea rezultatelor, am studiat posibilitatea unor comparații cu soluții obținute pe alte căi. În [50] sunt prezentate determinări experimentale și calculul curentului secundar al TC saturat în regim permanent. Am reluat două din cazuri, comparând rezultatele după trecerea unui minut de la apariția

văzute în figura nr. 3.16.

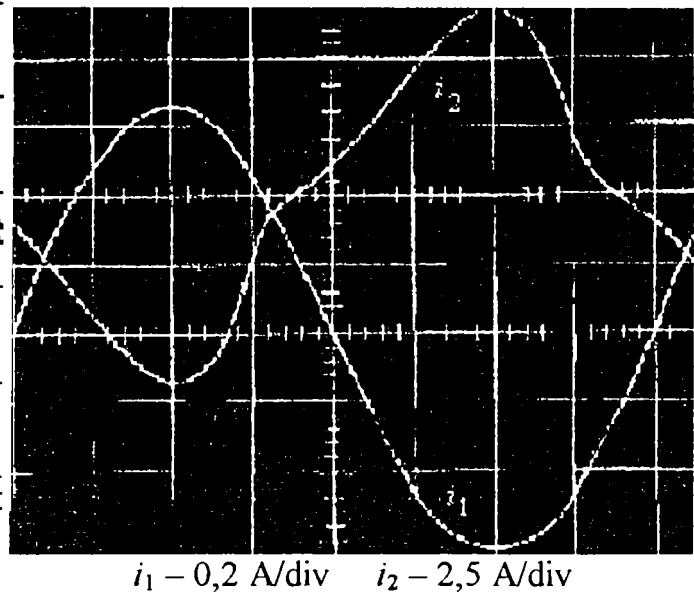


Figura nr. 3.18

Oscilograma curentilor în înfășurările TC pentru sarcină rezistivă ( $R + R_s = 8,3 \Omega$ )

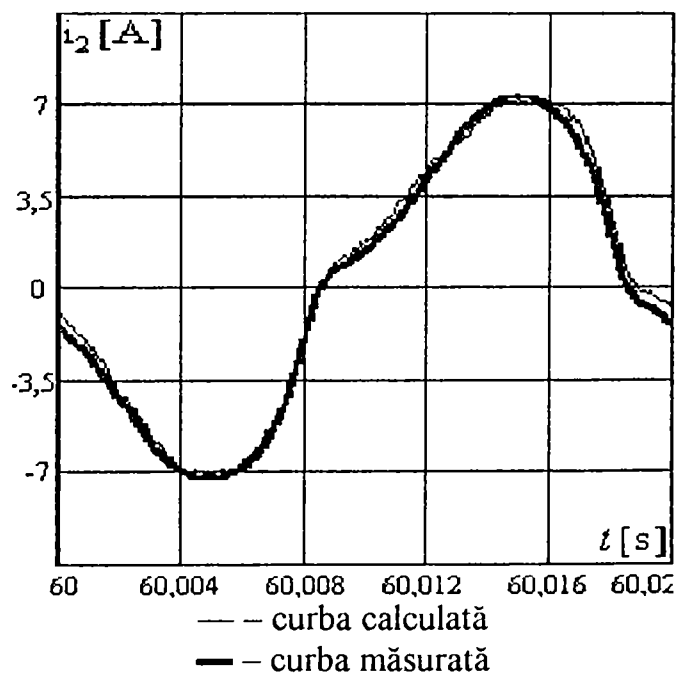


Figura nr. 3.19

Curentul în secundarul TC calculat prin cologație

modificării în rețea, când se consideră că pot fi neglijate componentele tranzitorii față de cea permanentă. În figura nr. 3.17 este prezentată soluția [50] pentru un model

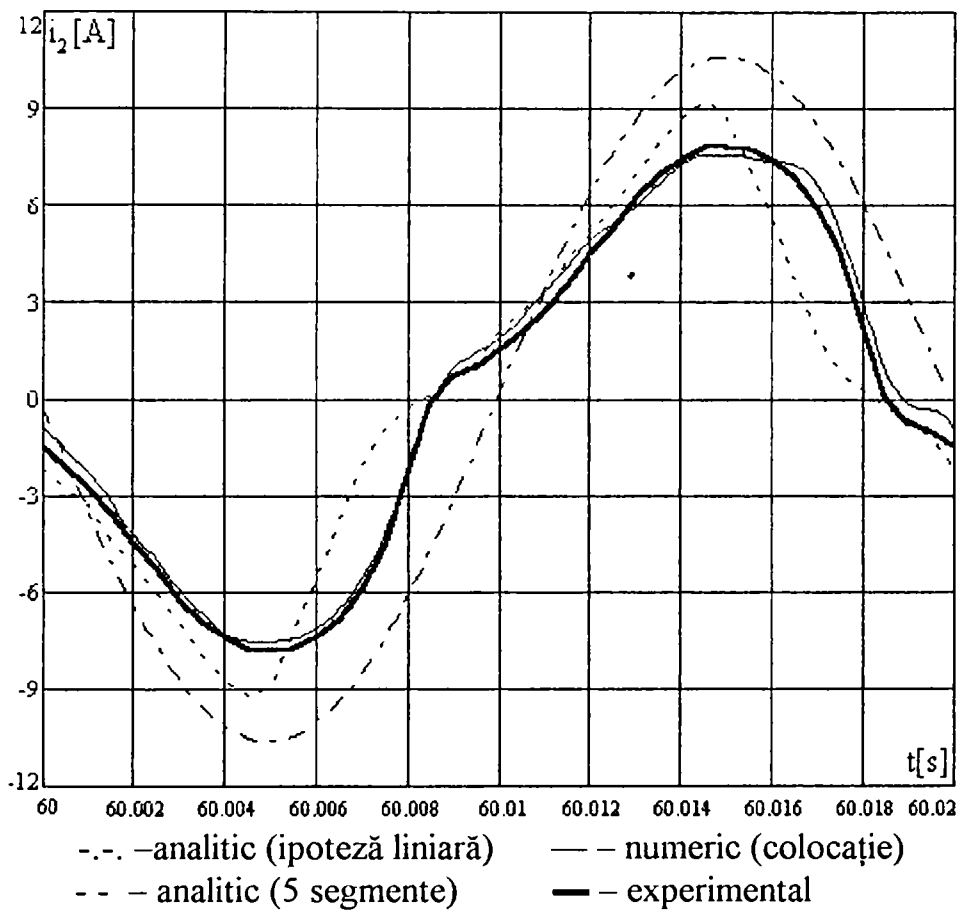


Figura nr. 3.20

Comparație între metodele de calcul al curentului secundar la TC

analitic realizat prin cinci segmente de dreaptă al caracteristicii de magnetizare și sarcină rezistivă în secundarul TC, având sarcina  $R + R_2 = 8,3 \Omega$ .

Oscilograma obținută în cadrul determinării experimentale poate fi văzută în figura nr. 3.18. Rulând cu aceleași date de intrare programul bazat pe colocație, am obținut curba din figura nr. 3.19. Suprapunând

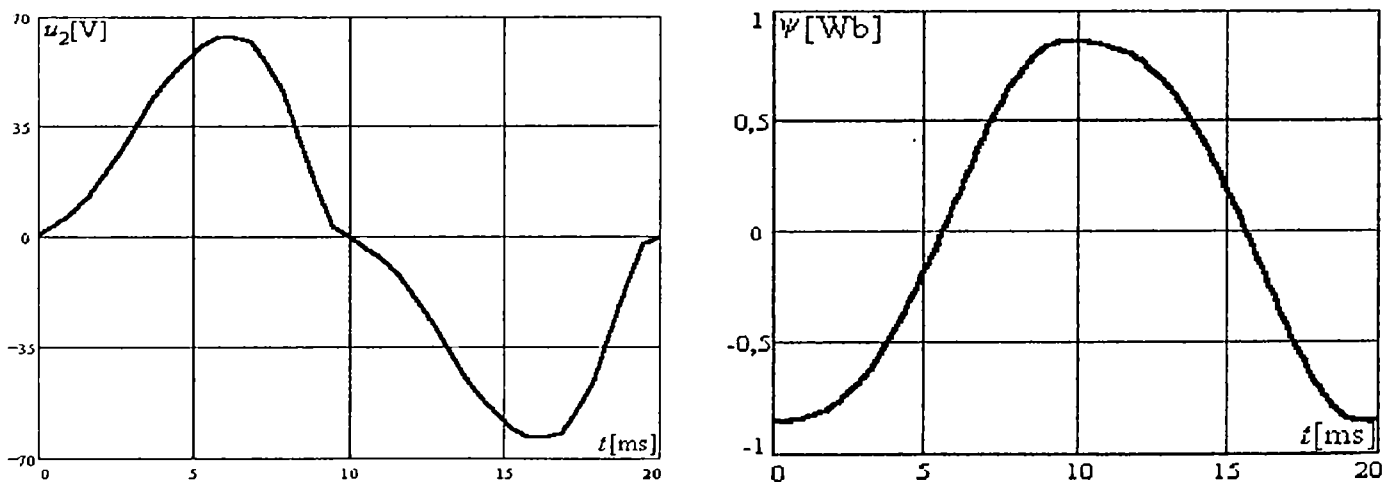


Figura nr. 3.21

Tensiunea în secundar și fluxul în miez ale TC, înregistrate pentru sarcină rezistivă

rezultatele (ca în figura nr. 3.20), se poate constata cu ușurință faptul că programul de calcul pe bază de colocație dă o aproximare mai bună a curentului în secundarul TC.

Tensiunea în secundarul TC a putut fi înregistrată, iar prin integrarea ei s-a obținut fluxul în miezul acestuia. Rezultatele determinărilor pot fi urmărite în figura nr. 3.21.

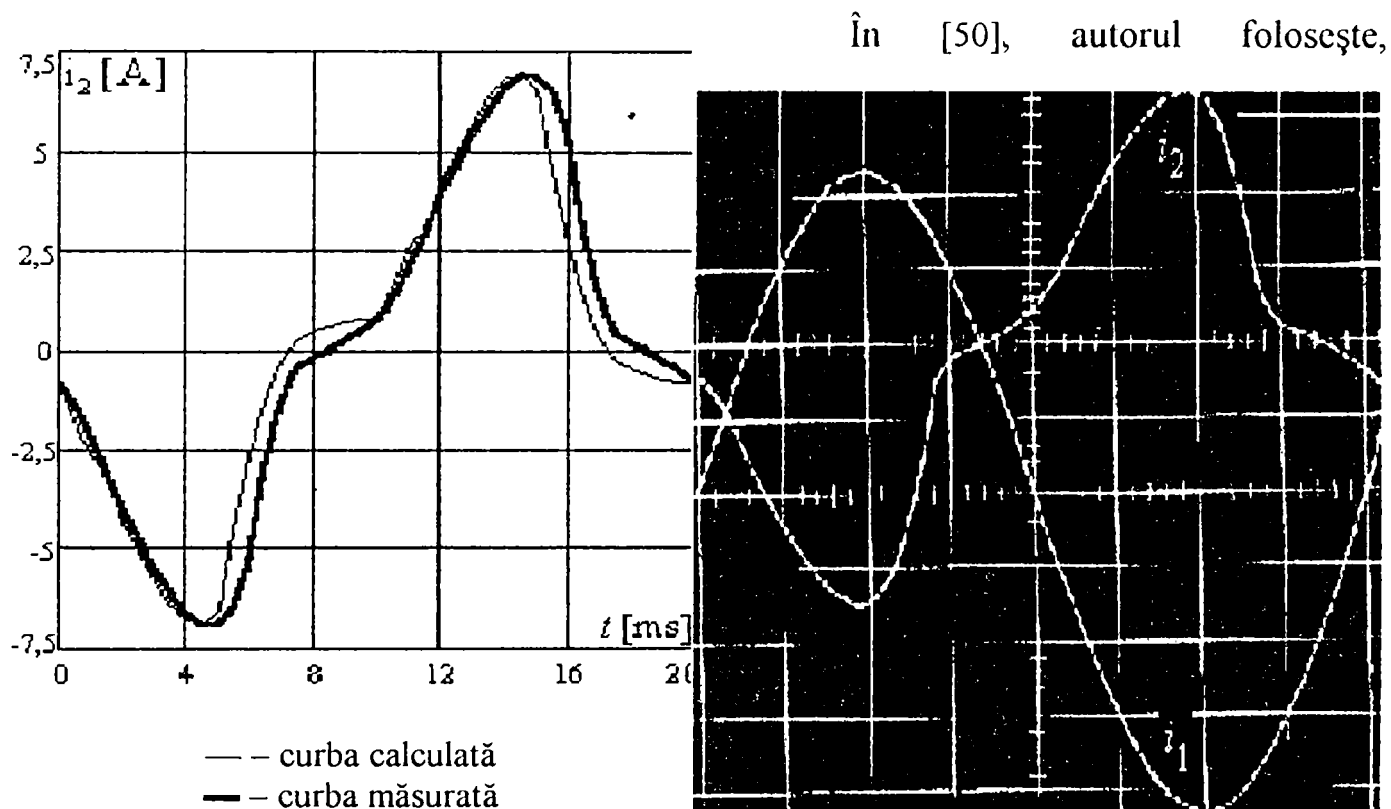
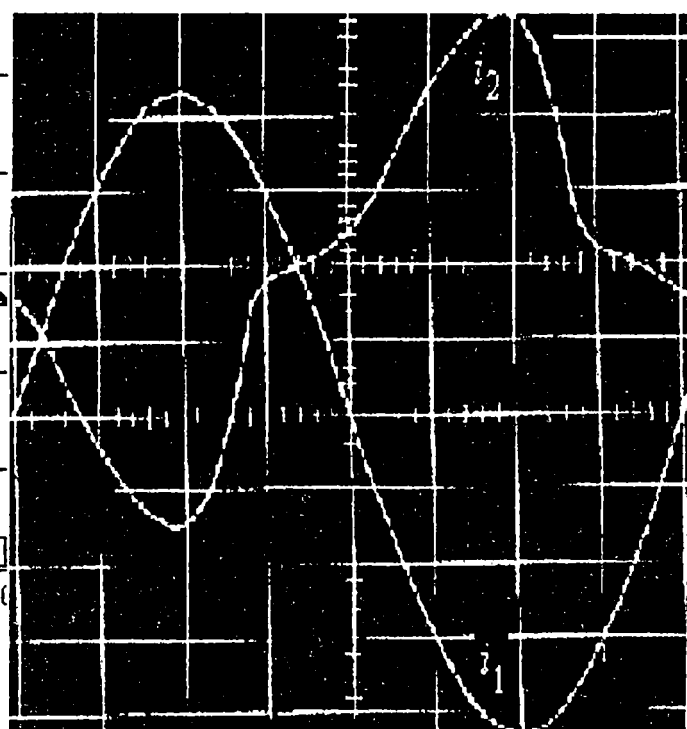


Figura nr. 3.22

Curentul în secundarul TC pentru aproximarea polinomială a caracteristicii de magnetizare și balanța armonică

deasemenea, o metodă analitică ce ține

seama și de pierderile în miezul feromagnetic al TC. În figura nr. 3.22 este prezentat rezultatul calculelor efectuate cu caracteristica magnetică aproximată printr-un polinom de gradul 11 și un termen care ține seama de pierderile în miez în cazul unei sarcini secundare care are și o componentă inductivă ( $L = 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ H}$  și  $R + R_2 = 8,95 \Omega$ ).

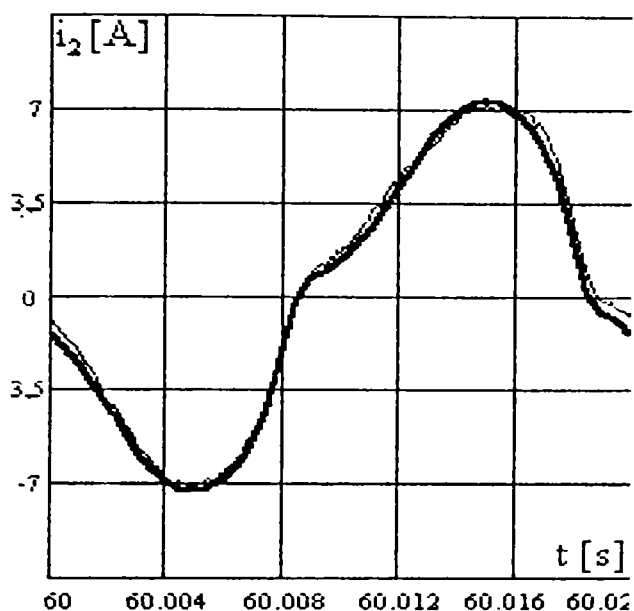


$i_1 - 0,2 \text{ A/div}$      $i_2 - 2 \text{ A/div}$

Figura nr. 3.23

Oscilograma curenților în înfășurările TC pentru sarcină inductivă și rezistivă ( $L = 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ H}$  și  $R + R_2 = 8,95 \Omega$ )

În figura nr. 3.23 este prezentată oscilograma ridicată experimental, figura nr. 3.24 conține forma de undă obținută prin rularea programului bazat pe colocație, iar



— — curba calculată  
 — — curba măsurată

Figura nr. 3.24

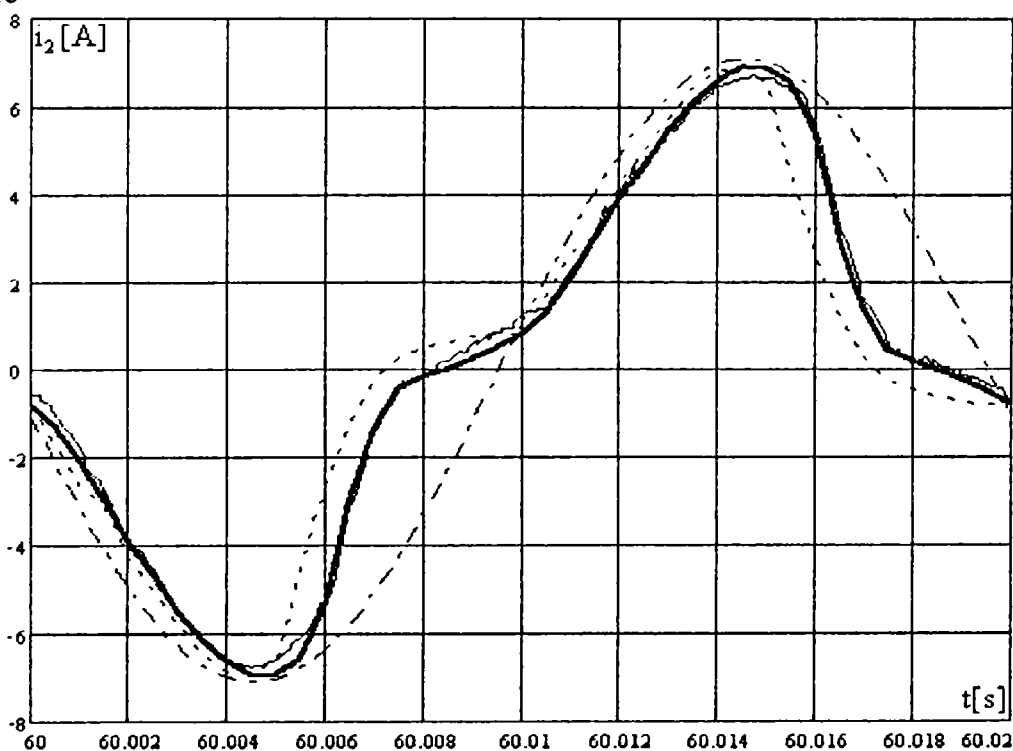
Curentul în secundarul TC calculat prin  
 colocație

prins în modul cel  
 mai corect cu  
 puțință.

Cu precizările  
 făcute până acum,  
 concluzia este că  
 lanțul de programe  
 funcționează corect,  
 putându-se miza pe  
 faptul că și în  
 condiții neidealizate  
 se obțin soluții  
 apropiate de situația  
 reală.

în figura nr. 3.25 se poate vedea  
 suprapunerea rezultatelor. În figura nr. 3.26  
 sunt reprezentate formele de undă ale  
 tensiunii secundare și fluxului în miez.

Din analiza formei de variație a  
 curbei curentului în secundarul TC se vede  
 că programul de calcul oferă soluții  
 apropiate de cele înregistrate experimental.  
 Datorită saturației, curentul secundar este  
 deformat, impunându-se cu necesitate  
 adaptarea parametrilor de setare a  
 programelor în așa fel încât fenomenul să fie



-.-. - analitic (ipoteză liniară)      — — numeric (colocație)  
 - - - analitic (balanță armonică)      — — experimental

Figura nr. 3.25

Comparație între metodele de calcul al curentului secundar la TC

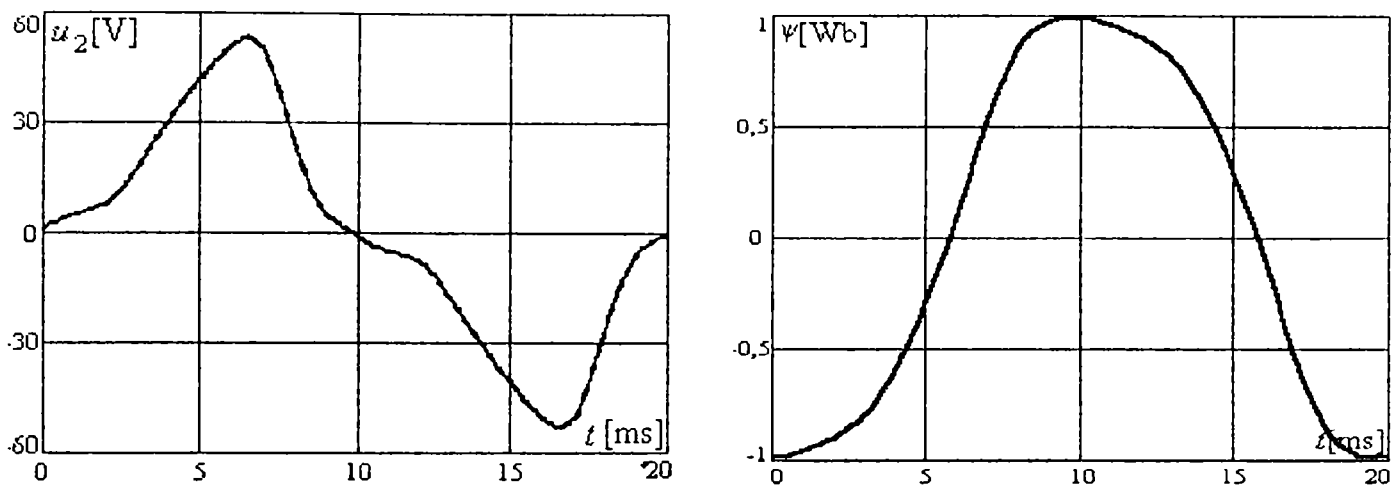


Figura nr. 3.26

Tensiunea în secundar și fluxul în miez ale TC, înregistrate pentru sarcină inductivă

După toate verificările făcute, poate fi abordată problema calculului TC în regim tranzitoriu, ținând seama de saturația miezului magnetic și de pierderile datorate curenților turbionari. Pentru calcule va fi folosit pachetul de programe conceput special cu această finalitate, validat în cele prezentate anterior, ținând seama de modelul matematic al legăturii între curentul echivalent și fluxul din miez ce a fost precizat în § 1.3.

În urma prelucrării datelor experimentale, caracteristica magnetică a circuitului feromagnetic al TC poate fi exprimată în modul următor:

$$i_{10} = a_1 \Psi + a_3 \Psi^3 + (a_0 + a_2 \Psi^2) \frac{d\Psi}{dt} \quad , \text{ în care:} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} a_0 = 2,137935119 \cdot 10^{-6} & , & a_1 = 4,017759376 \cdot 10^{-4}; \\ a_2 = 3,963506925 \cdot 10^{-6} & , & a_3 = 7,506931356 \cdot 10^{-3} \end{cases} \quad (3.18)$$

Pentru evidențierea modului de acțiune al programului de calcul și pentru studiul comportamentului TC în diverse situații, se impune efectuarea unor studii parametrice.



## 3.4 STUDII PARAMETRICE

Evaluările au fost direcționate pe două axe importante: aceea a influenței setărilor diverselor programe de calcul care se înlănțuie, sau a preciziei modelului caracteristicii de magnetizare și aceea a influenței caracteristicilor TC și ale circuitului său de utilizare.

### 3.4.1 Explorări funcționale

Pentru a lămurii alegerea unora dintre setările programelor de calcul, în ideea de a nu lăsa impresia că sunt ne semnificative, sau obținute în mod fortuit, vom aborda pentru început problema dependenței erorilor de gradul funcției *spline* de interpolare și de numărul punctelor de joncțiune din interiorul unui interval. Am renunțat la includerea în această evaluare a funcțiilor *spline* de interpolare liniare și cubice, segmentele de dreaptă creind probleme la calculul derivatelor în punctele de joncțiune, iar cele de parabolă furnizând sistematic erori mari datorită insuficienței posibilității de adaptare la forma relativ complicată a curbei. Deasemeni, din marea cantitate de testări făcute s-a impus cu certitudine concluzia că erorile mici nu trebuie căutate în zonele polinoamelor de grad mare, acestea având o tendință puternică de oscilație între punctele de joncțiune (în genul prezentat de figura nr.2.13) sau ale numărului mare de puncte în interval (datorită teoremei lui *Faber* și a erorilor de trunchiere cumulate).

În consecință, în figura nr. 3.27 prezentăm modul de variație procentual al erorilor în funcție de gradul polinoamelor de interpolare ( $3 \div 10$ ) și al punctelor de joncțiune pe domenii ( $1 \div 10$ ), adică în zona unde comportamentul global al simulatorului corespunde cel mai bine caracteristicilor semnalului. Fixând toți ceilalți parametri, se vede că evoluția erorii este foarte complicată și nu se poate renunța la o operațiune anterioară calculului de setare a caracteristicilor optime (nu există

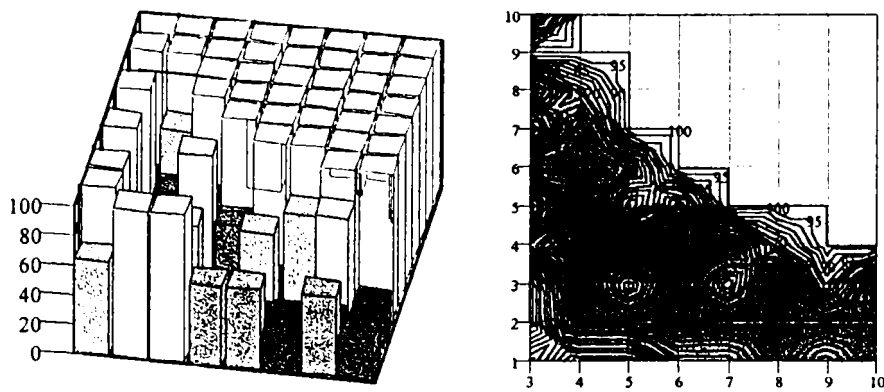


Figura nr. 3.27

Erorile de calcul în funcție de  $(1 \div 10)$  de numărul punctelor de joncțiune și de gradul polinoamelor de interpolare  $(3 \div 10)$

metrilor). O singură privire asupra variației erorilor funcție de parametri menționați justifică alegerea pentru aproximare a polinoamelor de gradul 6, în 4 intervale pe fiecare perioadă a componentei periodice a semnalului din primarul TC. Această setare este vizibilă, spre exemplu, în listingul de la pagina nr. 116.

În ceea ce privește influența programului *Zeta* asupra stabilirii locului optim al punctelor de joncțiune pe interval, nu prezentăm rezultate numerice, deoarece nedispunând de soluția analitică în cazul neliniar (când funcționează procedura iterativă de tip *Newton*) nu putem face o analiză pertinentă a erorilor. Testând lanțul de programe pe exemple neliniare de altă natură, cu soluție analitică cunoscută, se dovedește că în urma acțiunii programului *Zeta*, numărul de iterații necesar obținerii soluției scade și calitatea erorii se îmbunătățește (se obțin mai multe schimbări de semn în valorile succesive ale erorii pe întinderea unui interval). În cazul rulării datelor TC, în urma unei singure treceri prin *Zeta*, a fost posibilă evoluția de la cazuri de neconvergență sau convergență lentă (sute de iterații pentru atingerea preciziei impuse) la situația în care convergența se obține în sub 10 iterații! Nu se poate afirma însă că aplicarea sa repetată îmbunătățește comportamentul cu aceeași eficiență; convergența devine fluctuantă în jurul primei valori mici obținute. Este deci inutil abuzul de acest program, utilizarea sa fiind limitată la 1-2 treceri.

O altă concluzie practică a rulării programului este că se preferă fragmentarea

în porțiuni mai mici a domeniului de calcul dorit, care să fie calculate succesiv, folosind rezultatele obținute de cel anterior ca valori de pornire (condiții la limită) pentru următorul. Această tehnică nu numai că economisește timp de calcul și permite efectuarea unui calcul oricât de lung (cu neputință de efectuat simultan, pentru că la un moment dat matricile de lucru devin imposibil de stocat și accesat). Chiar atunci când calculul este posibil la o singură trecere, am preferat fragmentarea, deoarece pe intervale mari de timp valorile funcției sunt mult diferite, obținându-se nu numai matrici de mari dimensiuni pentru coeficienți, dar și o dispersie chiar de 80 de ordine de mărime între aceștia. În aceste condiții, necesitatea de a efectua  $80 \div 90$  de iterații pentru a obține soluția dă timpi de calcul prohibitivi, pe când lucrul cu matrici de (relativ) mici dimensiuni, în care valorile coeficienților nu sunt atât de diferite ca ordin de mărime permite obținerea unor soluții rapide. Fenomenul ar putea fi considerat similar (intelectual) cu tehnica modelării unei linii lungi printr-un lanț de cuadripoli.

Vom încheia studiul cu influența pe care o are luarea unui număr variabil de termeni în modelul caracteristicii de magnetizare neliniare și al pierderilor în miezul

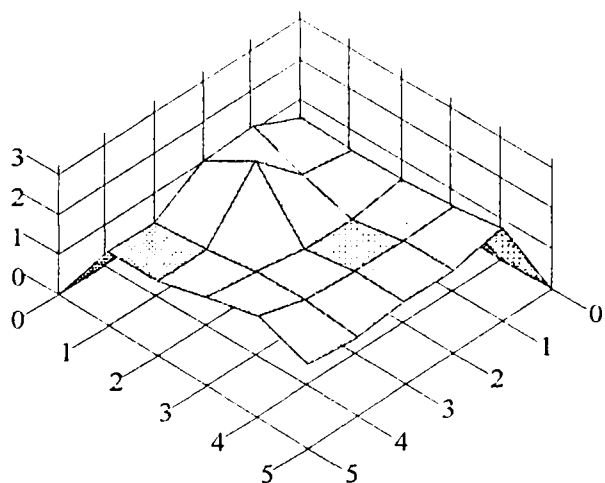


Figura nr. 3.28

Variația mărimii erorii maxime a TC în funcție de numărul de termeni luați în aproximarea caracteristicii magnetice

TC. În figura nr. 3.28 este prezentată variația erorii maxime relative a TC în funcție de numărul de termeni luați în aproximarea caracteristicii magnetice a miezului (2.127). Evaluarea s-a făcut pentru toate combinațiile posibile ale polinoamelor  $f_1$  și  $f_2$ , de la cazul liniar la cel în care caracteristica este modelată prin zece componente. Se observă că modelul nu este sensibil față de numărul de termeni, un optim între precizia evaluării și timpul necesar calculelor obținându-se în cazul în care  $f_1$  și  $f_2$  au două componente. Adăugarea al-

toră crește substanțial timpul de calcul, fără a provoca modificări notabile în sensul ameliorării valorii obținute pentru eroarea maximă.

### 3.4.2 Dependența erorii transformatorului de curent de factori externi

Studiul ia în considerare toți acei factori care influențează comportamentul TC din exteriorul său, fiind fie fortuiți, fie depinzând de parametrii rețelei în care funcționează acesta.

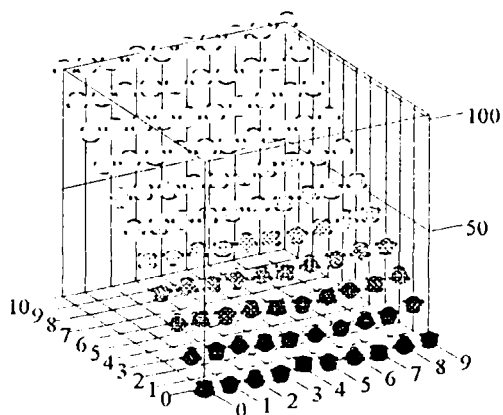


Figura nr. 3.29

Variația mărimii erorii TC în funcție de faza tensiunii primare

Pentru a urmări modul de acțiune al programului am luat pentru început în studiu o dependență previzibilă: aceea a mărimii erorii în funcție de curentul primar inițial  $i_1(0)$ , având parametrul fizic tensiunii primare în momentul apariției defectului. Rezultatele sunt prezentate în figura nr. 3.29, pentru  $i_1(0) = (0 \div 1) I_{lmax}$  și  $\varphi = 0 \div 360^\circ$ , dependența dovedindu-se aproape liniară. În figura nr. 3.30 am selecționat una dintre curbele de nivel din figura nr. 3.29, reprezentând-o mai detaliat. Se vede cât se poate de

explicit că maximum erorii se obține pentru  $\beta = \varphi -$

$$- \arctg \frac{\omega L_1}{R_1} = \frac{\pi}{2} \text{ radiani; un rezultat asemănător se}$$

poate obține, deasemenea, și din analiza expresiei (1.64).

Faza tensiunii primare în momentul apariției defectului este o mărime fortuită, iar faptul că ea influențează mărimea erorii TC explică în bună parte funcționările aleatoare constatate pentru relele de protecție [112]. În toate exemplele următoare va fi considerat cazul cel mai defavorabil, și anume  $\beta = \pi/2$  rad.

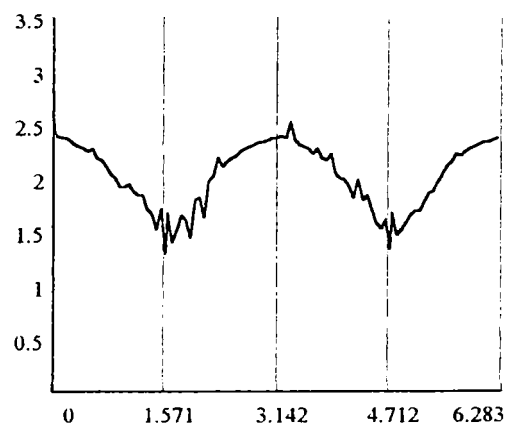


Figura nr. 3.30

Variația mărimii erorii TC în funcție de faza tensiunii primare pentru  $i_1(0) = 0$

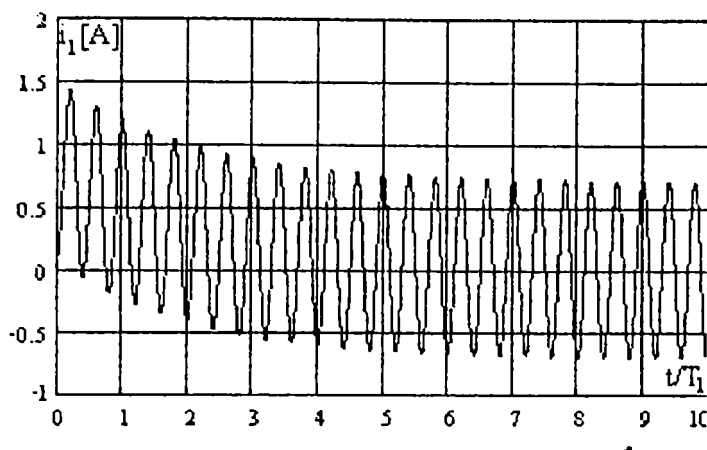


Figura nr. 3.31  
Curentul în primarul TC

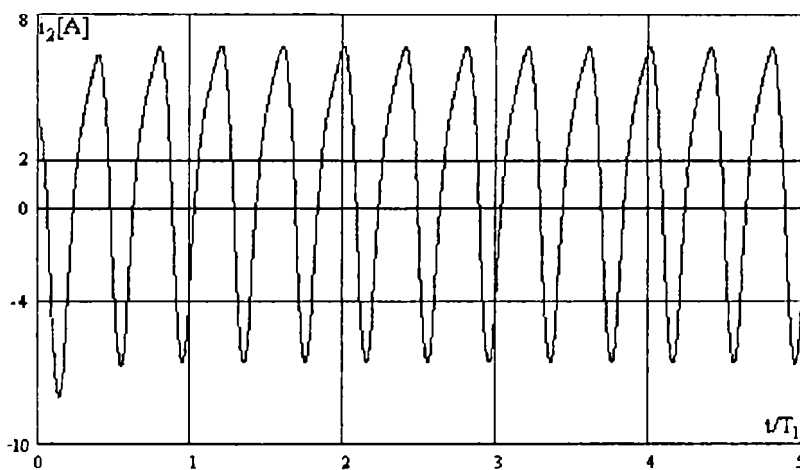


Figura nr. 3.32  
Curentul în secundarul TC

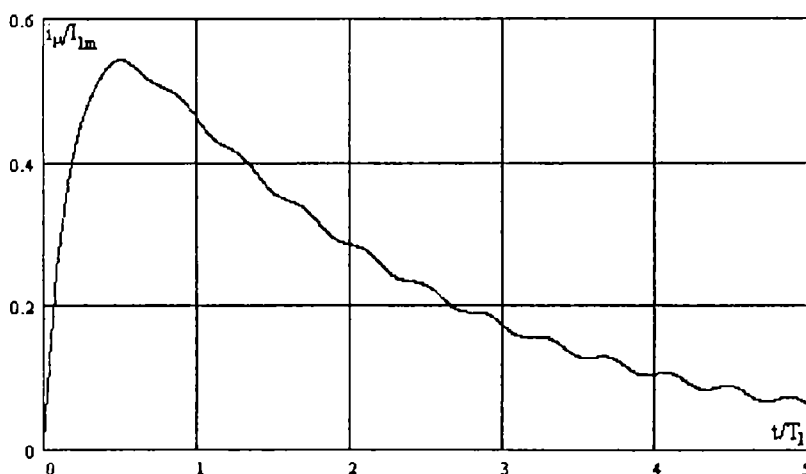


Figura nr. 3.33  
Eroarea calculată a TC

În ceea ce privește influența rețelei în care este conectat TC, formele de variație ale mărimilor caracteristice nu diferă în mod semnificativ față de cele analizate în §1.4. Prezentăm alăturat forma de variație pentru curentul primar (figura nr. 3.31) și pentru curentul secundar (figura nr. 3.32), într-o rețea cu raportul  $X/R = 30$  pentru cazul în care

$T_1/T_2 = 10$ . În figura nr. 3.33 este prezentat modul în care evoluează eroarea TC.

Din analiza formei de undă se vede că există o perioadă în care TC poate servi sesizării semnalului de defect, înainte ca miezul să se satureze. Standardul american ANSI/IEEE C57.13-1978 stabilește această valoare în momentul în care eroarea depășește cu 10% valoarea nominală, în literatura de specialitate existând recomandări în sensul alegerii unui TC corespunzător din acest punct de vedere. În general este considerată caracteristica externă a TC,  $u_2 = f(i_2)$ , care are avantajul că poate fi ridicată ex-

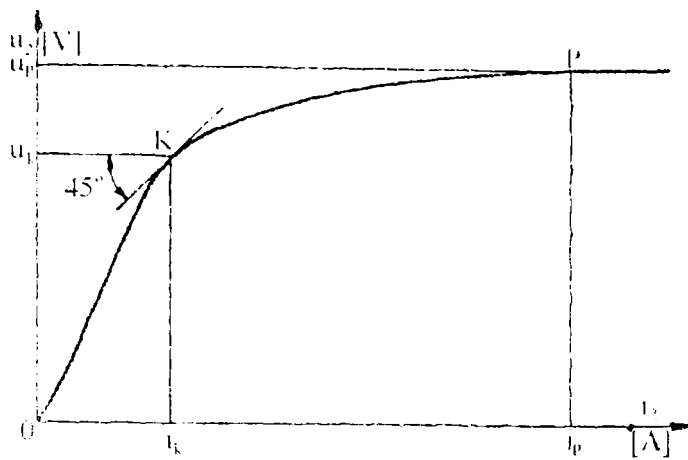


Figura nr. 3.34  
Caracteristica externă a TC

secundare unitare  $I_0 = k_m i_k$ ). Deasemenea, se mai definește reactanța de magnetizare unitară a TC ca fiind  $X_m = \frac{u_k}{i_k} = k_m^2 X_0$ .

Aspectul calitativ al mecanismului saturării miezului TC sub acțiunea curentului de magnetizare este prezentat în figura nr. 3.35, unde este reprezentată variația curenților, toate mărimile fiind reduse la secundar. Notățiile folosite sunt următoarele:

- $i_m = \sqrt{2}i_k$  – amplitudinea curentului de magnetizare redus la secundar;
- $i_a$  – componenta aperiodică a curentului de magnetizare;
- $i_p$  – amplitudinea componentei periodice a curentului de scurtcircuit;
- $t_s$  – timpul la care apare saturația miezului TC față de momentul defectului;
- $t_{max}$  – momentul la care apare maximum curentului;
- $t_n$  – timpul după care miezul devine din nou nesaturat.

Pentru cazurile practice, în general se poate considera că  $T_1/T_2 \rightarrow 0$ , iar durata pe care miezul TC este saturat ( $t_n$ ) este direct proporțională cu constanta de timp a

experimental fără a necesita aparatură specializată (figura nr. 3.34). Acceptând poziționarea cotului curbei ca fiind punctul în care tangenta este înclinată la  $45^\circ$ , se poate defini tensiunea unitară la cot în secundarul TC ca fiind  $V_0 = \frac{u_k}{k_m}$  (corespunzând solenăției magnetizante

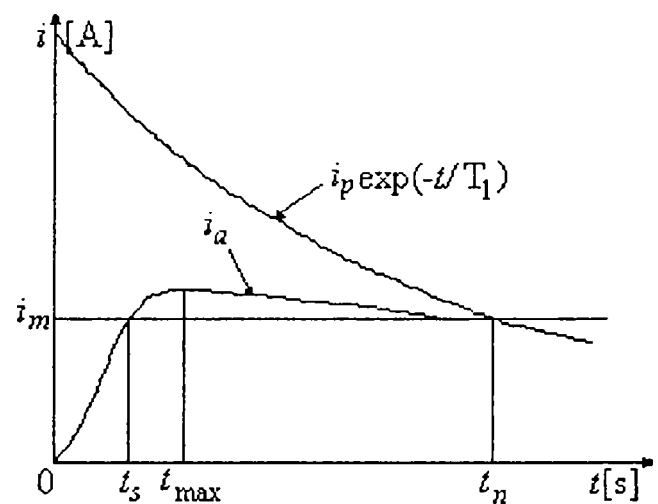


Figura nr. 3.35  
Mecanismul de saturare al miezului TC

circuitului de utilizare,  $T_1$ , variind logaritmnic cu raportul  $I_{sc}/I_0$  și fiind independentă de raportul nominal de transformare  $k_m$  pentru un miez dat (cu alte cuvinte, modificarea raportului de transformare al unui TC dat nu are efect asupra duratei perioadei de saturație a miezului acestuia).

Dependența erorii TC funcție de parametrii rețelei în care este conectat a fost multă vreme acceptată doar sub aspectul empiric al cunoștințelor de exploatare (*Rule of the thumb*: „High short circuit currents combined with high burdens and low CT ratios will result in false relay operations, particularly for systems with large X/R ratios“ [115]). Ulterior, faptul că saturarea TC datorată componentei aperiodice a curentului de scurtcircuit poate fi evitată în primele  $n$  cicluri ale componentei periodice, a fost exprimată sub forma unui factor tranzitoriu,  $F$  [107]:

$$F = \frac{k_m U_0}{I_{sc} R^2}, \text{ în care:} \quad (3.19)$$

$I_{sc}$  este valoarea efectivă a curentului periodic de scurtcircuit în primarul TC, iar  $R_2$  este rezistența sarcinii secundare a TC, incluzând și înfășurarea acestuia (releele statice rapide apar în scheme simbolizate printr-o rezistență). Argumentarea acestei formule se face în corelație cu figurile nr. 3.34 și nr. 3.35, evidențiind că factorul tranzitoriu  $F$  arată cât de sus trebuie să fie cotul curbei,  $K$ , pe caracteristica externă a TC, astfel ca  $i_m$  să fie mai mare decât  $i_a$  în timpul primelor  $n$  perioade ale componentei periodice. Factorul tranzitoriu se determină pe bază de încercări și este folosit de practicieni [37].

Pentru rațiuni de proiectare, pe baza datelor oferite de programul de calcul, am calculat factorul tranzitoriu  $F$  pentru TC folosit:

$n$ [perioade] $T_1$ [s]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,01	2,6	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8
0,02	3,8	5,2	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6
0,03	4,5	6,7	7,7	8,2	8,4	8,4	8,4	8,4	8,4	8,4
0,04	4,8	7,7	9,3	10,3	10,8	11,1	11,1	11,2	11,2	11,2
0,05	5,1	8,4	10,5	11,9	12,8	13,4	13,7	13,8	13,9	13,9
0,06	5,2	8,9	11,5	13,3	14,5	15,3	15,9	16,2	16,5	16,6



$n$ [perioade] $T_1$ [s]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,07	5,3	9,3	12,2	14,4	15,9	17	17,8	18,4	18,8	19
0,08	5,4	9,6	12,8	15,3	17,1	18,5	19,6	20,3	20,9	21,3
0,09	5,5	9,9	13,3	16	18,1	19,8	21,1	22,1	22,8	23,4
0,1	5,6	10,1	13,7	16,7	19	20,9	22,4	23,6	24,3	24,3

Tabelul nr. 3.2 Factorul tranzitoriu al.TC

Aceste considerații asupra saturării miezului TC pot fi sintetizate prin aceea că dacă se constată într-un caz practic faptul că  $F > F_n$ , TC se va satura de la momentul  $t = t_s > n$  cicluri de la apariția scurtcircuitului până la momentul  $t = t_n$ , iar dacă  $F < F_n$  timpul de saturație va fi între momentele  $t = t_s < n$  cicluri de la apariția scurtcircuitului până la același  $t = t_n$ . În perioada de saturație nu este posibilă funcționarea corectă a protecției prin rele. În cazul unui TC cu raport de transformare nominal mic, se poate întâmpla ca factorul tranzitoriu să fie foarte mic, astfel încât  $F \ll F_1$ , dacă sarcina acestuia este mare și  $t_n$  mare (dacă în circuitul primar cu constantă de timp mare apare un curent de scurtcircuit important), miezul acestuia va fi saturat de la  $t = 0$  la  $t = t_n$  și defectul nu va fi sesizat corect în acest interval de timp. Aplicând această „regulă a egalității ariilor“, poate fi determinat momentul în care miezul TC se va satura din nou, putând fi explicată pe această cale deformarea formei de undă a curentului secundar.

Tranziția de la starea de saturare pozitivă la una de saturare negativă în timpul  $t_z$  necesită satisfacerea următoarei egalități [170]:

$$\int_0^{t_z} u_2 dt = \int_0^{t_z} R_2 i_2 dt = 2\sqrt{2} k_m S B_k, \quad i_2 = i_{2m} \sin \omega t, \quad \text{unde:} \quad (3.20)$$

$S$  este aria suprafeței miezului magnetic, iar  $B_k$  inducția corespunzătoare cotului curbei (vezi figura nr. 3.34). Presupunând că tranziția se face în exact o perioadă, tensiunea  $U_k$  poate fi determinată din relația precedentă pentru  $t_z = \frac{\pi}{\omega}$ :  $U_k = R_2 I_2$ .

Dacă  $t_z < \frac{\pi}{\omega}$ , miezul TC se saturează în mai puțin de jumătate de perioadă, această



situație apărând pentru  $R_2 I_2 > U_k$ . În aceste condiții, porțiunea curbei curentului  $i_2$  cuprinsă între  $t_2$  și  $\frac{\pi}{\omega}$  este deformată atât pentru semiperioadele pozitive, cât și pentru cele negative. Acest tip de saturație apare pentru  $t > t_n$  (figura nr. 3.35), când încetează efectul componentei aperiodice, dacă mărimea curentului de scurtcircuit este suficientă pentru a provoca  $R_2 I_2 > U_k$ . Analiza făcută nu a luat în considerare efectul reactanței sarcinii TC,  $X_2$ , care nu afectează semnificativ momentele de timp la care apare saturația, ea influențând numai viteza de variație a curentului secundar după încetarea saturației, o valoare mai mare a ei cauzând o inerție mai mare în evoluția acestuia.

Existența fluxului remanent în miezul TC și efectele aproximative pe care le are asupra performanțelor acestuia sunt cunoscute de mult. În [114] și [187] se precizează faptul că acest fenomen este responsabil de saturarea mai rapidă a miezului în cazul apariției unui scurtcircuit, fără a indica modalități de măsurare a sa, ori de diminuare. În [165] se arată modul în care acesta poate provoca erori în regim tranzitoriu în unele circuite de protecție. În [51] se afirmă că fluxul remanent este anulat de suprapunerea fluxului alternativ și că acesta nu are nici o influență asupra performanțelor metrologice ale TC. Există recomandări referitoare la demagnetizarea completă a miezului înaintea verificării metrologice a erorilor acestuia (de modul și de unghi), dar nu am întâlnit informații care să cuprindă analize cantitative în ceea ce privește influența fluxului remanent asupra erorilor transformatorului.

Am început prin a căuta în literatura de specialitate notificări asupra mărimii fluxului remanent. În [51] se menționează măsurarea unui flux rezidual de 90% din fluxul maxim, ceea ce indică domeniul în care acesta poate varia. Prin rularea programului de calcul cu diferite valori inițiale ale fluxului în momentul apariției defectului am obținut variația erorii relative maxime în funcție de acest parametru. Modul de variație dovedește o dependență complexă, ceea ce a constituit punctul de plecare a unor serii de încercări suplimentare, destinate în principal clarificării mecanismului prin care influența fluxului remanent este diminuată de fluxul alternativ.

Au fost făcute o serie de măsurători pe TC, variația curentului secundar al

acestua datorată fluxului remanent fiind prezentată în figura nr.3.36, pentru o valoare inițială a inducției remanente de 1,6T. Punctele 1÷9 indică succesiunea temporală a

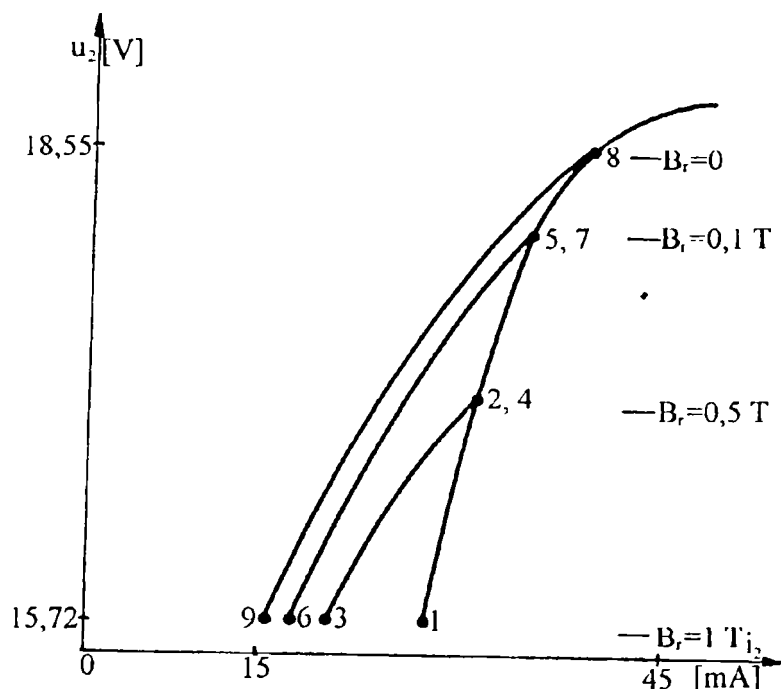


Figura nr. 3.36

Variația curentului secundar al TC în funcție de fluxul remanent în miez

variației, iar rezultatul acțiunii este că pe măsură ce valoarea fluxului alternativ crește, saturația miezului este diminuată, cu tendința de a reveni către curba ce corespunde cazului când nu există remanență. În mod practic, atunci când valoarea fluxului alternativ atinge jumătatea valorii necesare pentru saturație, fluxul remanent este eliminat. Acest lucru demonstrează că se vor obține erori mai mari atunci când TC cu miezul saturat operează cu curenți sub cei nominali, în timp ce

valori mai mari ale acestora provoacă diminuarea fluxului rezidual și a erorii cauzate de acesta, fapt confirmat de datele de exploatare [63].

Dacă luăm în considerare comportamentul TC în regim tranzitoriu, efectul fluxului remanent este de a reduce curentul necesar saturării miezului de la valoarea  $i_m$  la  $i_m - i_r$ . Acest lucru permite saturarea la un nivel mai redus al componentei aperiodice a curentului de scurtcircuit. Dacă dorim să conservăm cele  $n$  perioade de răspuns neafectat de saturație, trebuie micșorată sarcina în secundarul TC de la valoarea  $Z_2$  la  $Z'_2$ , în așa fel încât să se mențină valoarea  $i_s$ . În urma unor calcule, cu ipoteza  $T_1 \ll T_2$  (întotdeauna valabilă în condiții de exploatare), rezultă un loc geometric eliptic:

$$\frac{Z'_2}{Z_2} + \frac{i_r}{i_m} = 1. \quad (3.21)$$

La modul practic, o remanență de 75% a miezului magnetic conduce la o reducere cu 25% a impedanței de sarcină pentru a conserva același factor tranzitoriu.

O altă influență externă asupra erorii TC în regim tranzitoriu o poate constitui modul de acțiune al reanclanșărilor rapide. În momentul în care protecția intervine în

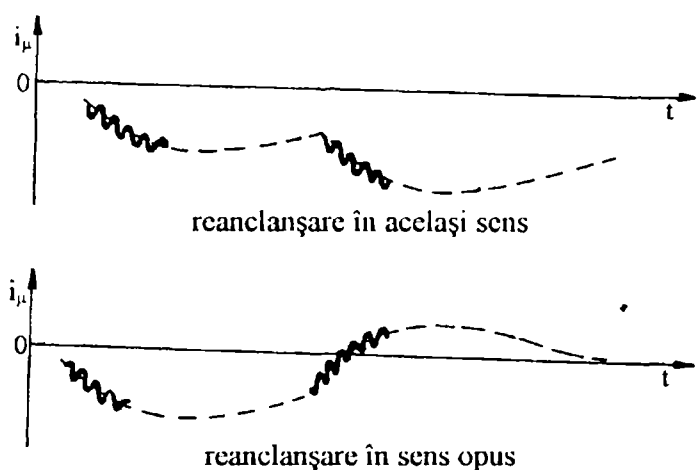


Figura nr. 3.37

Influența reanclanșărilor rapide asupra erorii TC de semn și scade în cazul opoziției (figura nr. 3.37).

circuitul primar, întrerupând curentul  $i_1$ , fluxul în miezul TC nu se anulează instantaneu, ci, pornind de la fluxul remanent, se diminuează cu constanta de timp  $T_2$ . Dacă în acest interval de timp este restabilit curentul primar, valoarea fluxului remanent se adaugă, în mărime și sens, noului regim tranzitoriu care se stabilește. Eroarea TC crește astfel în cazul concordanței

Pentru a încheia studiul influențelor posibile ale diversilor factori asupra erorii TC în regim tranzitoriu, vom încerca o evaluare a influenței clasei de precizie a transformatorului asupra acesteia. Corelând STAS 4640-2-74, care indică erorile de bază admise cu figura nr. 3.26, până în punctul P, corespunzător unui curent egal cu 10% din de douăzeci de ori curentul secundar nominal (conform standardelor americane, C57.13 și A C400, standardele românești neavând specificații de acest tip), sarcina secundară admisibilă este  $Z_2 = \frac{U_p}{100}$  pentru a rămâne în clasa de precizie. În practică, se poate compara această valoare cu cea rezultată din considerente de precizie tranzitorie. Ținând cont de notațiile din figura nr. 3.34, de faptul că între punctele K și P variația este liniară și acceptând completa saturare a miezului magnetic, rezultă:

$$\begin{cases} U_p = U_K + (I_p - I_m) k_{in}^2 \frac{X_0}{\mu_{rK}} , & \text{sau :} \\ U_p = U_K + (I_p - I_m) k_{in}^2 \omega \left( \frac{A}{l} \right) \mu_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

în funcție de datele cele mai accesibile ( $\mu_{rK}$  sau  $\frac{A}{l}$ ).

### 3.4.3 Considerații practice de exploatare referitoare la funcționarea transformatorului de curent în regim tranzitoriu

Evaluările făcute anterior pot servi la alegerea unui TC într-un caz concret în așa fel încât să satisfacă necesitățile protecției prin relec.

Se presupune că TC trebuie amplasat într-un circuit primar de utilizare cu  $T_1 = 0,1$  s (raportul  $\frac{X}{R} \cong 315$ ), într-un punct în care valoarea maximă a curentului permanent de scurtcircuit este  $I_{sc} = 1000$  A. Releul de protecție conectat în secundarul său necesită  $n = 2$  perioade de curent corect redade după apariția scurtcircuitului pentru a acționa.

Factorul tranzitoriu  $F$  este destul de puțin sensibil față de valoarea  $T_2$ , de aceea vom folosi tabelul calculat anterior. Pentru  $n = 2$  și  $T_1 = 0,1$  s, se citește  $F_2 = 10,1$ . Din relația (3.19) rezultă, în consecință,  $k_m^2 U_0 = 10100$ , iar deoarece TC uzuale au  $U_0 = 0,9$  V/spiră [170], se poate calcula raportul de transformare nominal necesar,

$$k_m = \sqrt{\frac{10100}{0,9}} = 105,9. \text{ Dacă se alege un TC cu } \frac{I_{1n}}{I_{2n}} = \frac{500}{5} \text{ A, rezultă un factor tranzitoriu}$$

$F = 9$  și  $n = 1,76$  perioade corect redade. Presupunem că acest lucru este acceptabil (în

caz contrar se va alege un TC cu  $\frac{I_{1n}}{I_{2n}} = \frac{600}{5}$  A, rezultând  $n = 2$  și  $F = 12,96 > 2$

perioade). În acest caz, cotul curbei caracteristicii externe a TC este dat de  $U_K =$

$= k_m U_0 = 90$  V și  $I_K = \frac{I_0}{k_m} = 0,12$  A. Deoarece  $I_A = 10$  A și estimând  $\mu_{rK} \cong 1000$ , rezultă

$$U_A = 90 + 9,88 \cdot \frac{100^2 \cdot 0,075}{1000} = 97,41 \text{ V. (În lipsa unei referințe suficient de clare asupra}$$

valorii lui  $\mu_{rK}$ , calculul valorii  $U_A$  se face mai ușor pe baza datelor geometrice  $\frac{A}{l}$ ,

posibil de evaluat în practică). Se vede clar că impedanța secundară admisibilă pentru

a avea precizia necesară în regim tranzitoriu este de  $1\ \Omega$ , în timp ce impedanța secundară nominală a TC este, pentru  $S_{2n} = 60\ \text{VA}$  de  $Z_{2n} = \frac{S_{2n}}{I_{2n}^2} = \frac{60}{25} = 2,4\ \Omega$ .

Miezul TC rămâne saturat timp de  $t_n \approx T_1 \ln \frac{I_{sc}}{I_0} = 0,1 \ln \frac{1000}{12} = 0,45\ \text{s} = 22,1$

perioade. Dacă protecția prin relee nu acționează în primele 2 perioade ale curentului de scurtcircuit, în următoarele 20 de perioade va fi incapabilă să sesizeze defectul datorită saturării miezului TC. Această întârziere este în principal consecința valorii mari a raportului  $X/R$  în circuitul primar în care se produce scurtcircuitul. Constanta

de timp în circuitul secundar al TC este  $T_2 = \frac{X_m}{\omega R_2} = \frac{k_m X_0}{\omega R_2} = \frac{100^2 \cdot 0,075}{100\pi} = 2,4\ \text{s}$ , destul

de aproape de valoarea pentru care a fost calculat tabelul pentru factorul tranzitoriu  $F$  (recalculând valoarea lui  $F$  pentru această cifră se obține o diferență care este mai mică de 0,3%).

Pentru considerente de proiectare, dacă se dorește utilizarea unui TC cu raportul de transformare nominal inferior lui 100, trebuie avută în vedere o valoare mărită pentru  $U_0$ , ceea ce conduce la alegerea unui TC cu o secțiune a miezului mai mare (pentru aceeași calitate a materialului magnetic). Pentru TC  $\frac{500}{5}\ \text{A}$ , curentul secundar de scurtcircuit este  $I_2 = 10\ \text{A}$ , ceea ce pentru o sarcină  $R_2 = 1\ \Omega$  conduce la o cădere de tensiune  $R_2 I_2 = 10\ \text{V}$ , care este mult inferioară cotului caracteristicii externe ( $U_k = 90\ \text{V}$ ). În aceste condiții se poate sconta pe erori de măsură neglijabile datorate saturației în curent alternativ, înainte de saturarea miezului datorită componentei tranzitorii, după aproximativ 2 perioade de la apariția defectului.

Dacă dorim să apreciem influența remanenței în miezul TC, acest lucru poate fi făcut pe baza ecuației (3.21) sub următoarea formă. Să presupunem că trebuie asigurată funcționarea corectă a protecției admitând posibilitatea unei remanențe de 75% în miezul magnetic. Impedanța secundară nominală a TC fără a ține seama de remanență

este de  $2,4 \Omega$ . Pentru același  $n$ ,  $I_{sc}$  și  $T_1$ , această valoare duce la  $k_m^2 U_0 = 24\ 240$ , ceea ce se traduce fie printr-un raport nominal de transformare o dată și jumătate mai mare, fie printr-o secțiune dublă a miezului. Se vede că prețul care trebuie plătit pentru a neutraliza efectul remanenței se traduce în scumpirea TC (mai mult fier și cupru), de aceea este de înțeles de ce foarte multe firme au preferat liniarizarea caracteristicii TC prin practicarea unui întrefier, care are efect și asupra reducerii valorii remanenței.

În final, pe lângă cele menționate, s-ar mai putea lua în considerare efectul rapidității releului asupra caracteristicilor necesare ale TC. Considerațiile făcute anterior indică necesitatea unui TC  $\frac{500}{5}$  A pentru  $n=2$  perioade, fără luarea în considerare a remanenței. În eventualitatea în care putem miza pe faptul că o singură perioadă este suficientă pentru ca releul să sesizeze scurtcircuitul, se poate deduce succesiv:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 0,1 \text{ s;} \\ I_{sc} = 1000 \text{ A;} \\ R_2 = 1 \Omega; \\ n = 1 \text{ perioadă;} \\ F_1 = 5,6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_m U_0 = 1000 \cdot 5,6 = 5\ 600; \\ U_0 = 0,9 \text{ V/spiră;} \\ k_m = \sqrt{\frac{5\ 600}{0,9}} = 78,9; \\ \rightarrow \text{TC } \frac{400}{5} \text{ A} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

$$U_k = 80 \cdot 0,9 = 72 \text{ V};$$

$$I_m = \frac{12}{80} = 0,15 \text{ A};$$

$$t_r = 0,45 \text{ s (nemodificat, saturația în curent alternativ este neglijabilă);}$$

$$T_2 = 1,53 \quad (F_1 = 5,55 \rightarrow \text{O.K!})$$

$$I_2 R_2 = \frac{1000}{80} = 12,5 \text{ V} \ll U_k.$$

Se vede că folosind relee mai rapide putem utiliza TC mai economice (pentru cazul luat în considerare, creșterea vitezei releului de la 1,76 la 1 perioadă permite reducerea raportului nominal de transformare de la 100 la 80 pentru aceeași secțiune a miezului, deci o economie de cupru de 20%).

### 3.5 ASPECTE LEGATE DE DIMENSIONAREA TRANSFORMATORULUI DE CURENT PENTRU REGIM TRANZITORIU

Formulele și considerațiile precedente arată că eroarea TC crește o dată cu:

- apariția saturației în miezul feromagnetic;
- constanta de timp a circuitului de utilizare (pentru componenta aperiodică a curentului primar);
- impedanța din secundar.

Pentru a permite funcționarea în regim nesaturat trebuie aleasă o valoare foarte mică a inducției în regim permanent nominal în raport cu cea de saturație:

$$B_{tranz} = k \cdot m \cdot B_{n\max} \leq B_s, \text{ unde:} \quad (3.24)$$

- $B_{tranz}$  – inducția maximă ce poate apare în regim tranzitoriu de scurtcircuit;
- $B_{n\max}$  – inducția maximă nominală (adică în regim permanent sinusoidal,  $f = 50$  Hz, curent și impedanță secundară nominale,  $\cos\varphi_2 = 0,8$ );
- $k = 1 + \omega T_1$ ;
- $m$  – factorul de supracurent (raportul dintre valoarea maximă a curentului de scurtcircuit și amplitudinea curentului primar nominal);
- $B_s$  – inducția magnetică de saturație.

Relația neglijează influența fluxului remanent și aceea datorată reanclanșării rapide, ținând seama de cele precizate referitor la contribuția lor redusă în cazul apariției curenților de defect. Există și soluții care să evite efectele acestora, cum ar fi [143]:

- comandarea întreruptoarelor cu dispozitive de reanclanșare sincronă;
- inserierea unei rezistențe de câteva zeci de ohmi în circuitul secundar al TC pe parcursul întreruperii, cu scopul de a reduce valoarea constantei  $T_2$  și de a crește viteza de demagnetizare.

Acestea însă introduc costuri și riscuri care nu justifică investiția, motiv pentru care nu s-au răspândit; dispozitivele sincrone pot cauza probleme la reanclanșări pe linia în



gol, iar deschiderea circuitului secundar al TC poate avea consecințe nefaste.

Folosind formula avansată, pentru un material magnetic ce se saturează la 1,85 T, un factor de supracurent  $m=40$  și constanta de timp  $T_1=0,1$  s, rezultă  $B_{n_{\max}} \approx 1,5$  mT, o valoare surprinzător de mică la prima vedere (TC uzuale funcționează la inducții de  $(0,05 \div 0,1)$  T, adică de cel puțin  $30 \div 50$  de ori mai mari [130]). La o privire mai atentă, însă, se poate vedea că la un curent de 40 de ori mai mare decât cel nominal, puterea ce trebuie vehiculată cu precizie prin transformator este de aproape 100 kVA, în timp ce  $S_{2n}$  nu depășește 60 VA!

Pe baza relațiilor (1.78) și (1.80) se poate deduce că:

$$\phi_{\max} = \frac{n_1}{n_2^2} L_{\mu} I_{1\max} \left( 1 + \frac{\omega T_1}{\omega T_2} \right) \approx \frac{n_1}{n_2^2} L_{\mu} \left( 1 + \frac{\omega T_1}{\frac{\omega L_{\mu}}{R_2}} \right) \quad \text{și:} \quad (3.25)$$

$$B_{\max} = \frac{\phi_{\max}}{S} \approx \frac{n_1}{n_2^2} \frac{R_2}{\omega S} I_{1\max} (1 + \omega T_1), \quad (3.26)$$

relații care arată că reducerea inducției de funcționare duce la creșterea secțiunii fierului și a numărului de spire. Având în vedere și faptul că impedanța internă a secundarului este de dorit să aibă valori cât mai reduse, se conturează calitativ faptul că un TC capabil să vehiculeze corect componentele asimetrice va prezenta deopotrivă un volum mare, atât de fier, cât și de cupru.

Se știe [130] că reducerea erorii TC în regim permanent se face și printr-o corecție a numărului de spire. O astfel de tehnică ar putea avea influență și asupra componentei de regim permanent a curentului de scurtcircuit, dar este inoperantă asupra celei tranzitorii, care dă contribuția majoritară asupra erorii.

Putem exemplifica preluând din datele oferite de *Émile Haefely* Entreprise [105] pentru un TC destinat măsurătorilor în regim tranzitoriu de 220 kV, 250/5 A,  $S_{2n} = 50$  VA,  $\cos \varphi_2 = 0,8$ , precizie 5%, factorul de suprasarcină  $m=40$  și  $I_{1n} = 10\,000$  A), folosit într-un circuit de utilizare cu  $T_1 = 60$  ms, comparându-le cu cele ale unui TC clasic (pentru care factorul de supracurent este  $m=15$ ). În timp ce TC



uzual are o greutate totală de 780 kg (din care 200 kg ulei), înălțimea de 3,06 m și diametrul de 0,83 m, cel cu execuția specială are peste 1,5 t (0,5 t ulei), înălțimea de 3,82 m și diametrul de 1,5 m, având deci un volum de aproape patru ori mai mare și o greutate dublă. Calcule preliminare arată că gabaritul ar putea fi menținut cu condiția reducerii puterii secundare nominale la 10 VA.

O metodă practică de liniarizare a caracteristicii miezului și de diminuare a fluxului remanent, pe lângă utilizarea de tolă cu remanența slabă (Supermalloy –  $B_r = 0,6 T$  sau Sendust –  $B_r = 0,5 T$  [129]) este introducerea unui întrefier în circuitul magnetic, în literatură putând fi găsite multe referințe și tehnici de realizare („step lap

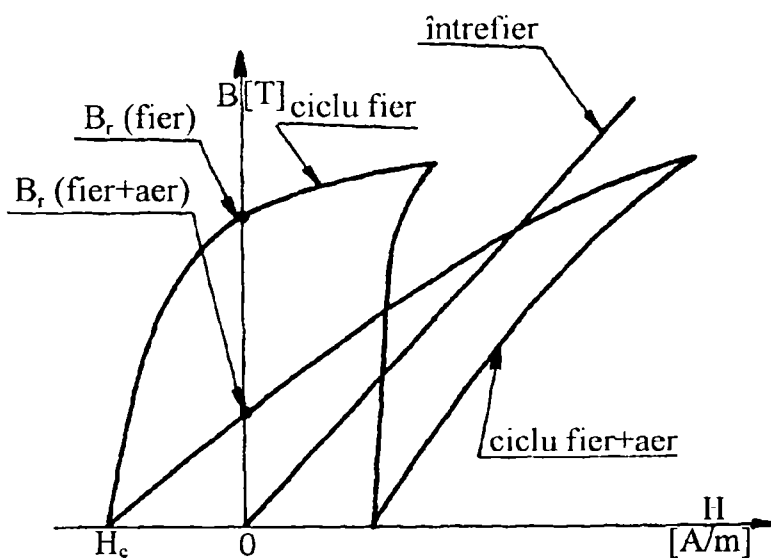


Figura nr. 3.38

Mecanismul principal de reducere a fluxului rezidual în miezul TC prin practicarea unui întrefier

core joint“ [63], etc.). Consecințele existenței întrefierului pot fi urmărite în figura nr. 3.40. Soluțiile alese de firmele constructoare sunt tehnologic diferite (multe sunt brevete), majoritatea folosind întrefieruri de dimensiuni mici, care reduc fluxul remanent la maximum 10% și fac miezul mult mai greu saturabil. Există și variante cu întrefier de dimensiune mare [170], proiectate cu scopul de a crește reluctanța la o valoare atât de ridicată încât să facă imposibilă saturarea miezului, chiar în cazul curenților asimetrice de scurtcircuit, care au însă dezavantajul de a putea opera numai la sarcini mici în secundar. Pentru cazurile în care a fost necesară o caracteristică total liniară la curenți foarte mari, s-au construit chiar TC fără miez de fier [88]. Ca și exemplificare, putem aminti un TC fabricat de societatea *Alhstom-Savoisienne* [143] pentru 220 kV și  $T_1 = 60$  ms ale cărui erori se mențin sub 5% pentru  $m = 30$  la  $S_{2n} = 50$  VA și sub 3% pentru  $m = 40$  la  $S_{2n} = 25$  VA (timpul la care apare eroarea maximă fiind  $t_m = 0,18$  s).

### 3.6 CONCLUZII

În acest capitol s-au prezentat rezultatele rulării unor programe de calcul concepute cu scopul de a obține caracteristica tranzitorie a unui TC, atunci când în sistemul în care este conectat are loc o avarie. Programele pot fi folosite fără nici o modificare pentru calculul răspunsului TC în cazul unor variații (cunoscute) ale curentului primar. Studiul a fost făcut pentru cazul unei avarii în rețeaua unde este conectat primarul, deoarece răspunsul TC în aceste condiții este important pentru sistemele de protecție care folosesc relee ultrarapide, ce acționează mult înainte de stabilirea regimului permanent care urmează defectului.

Un TC cu flux rezidual mare se poate satura în primele perioade ce urmează apariției defectului înainte de diminuarea sa ca o consecință a acțiunii fluxului alternativ. Chiar dacă curentul de defect este simetric, fluxul remanent influențează valoarea fluxului de regim staționar; el poate provoca apariția unei valori de până la dublul celei datorate regimului permanent de scurtcircuit.

Este prezentată o procedură de alegere a TC care ține seama de performanțele dorite în regim tranzitoriu, bazată pe numărul de perioade după apariția scurtcircuitului în care semnalul este reprodus cu precizia necesară operațiunilor așteptate din partea protecției prin relee. A fost aleasă această cale tocmai pentru a corela calculul performanțelor TC în regim tranzitoriu cu necesitățile releelor la izolarea cu mare rapiditate a defectelor care pot apare. Procedura de alegere poate fi aplicată în orice ocazie, necesitând doar cunoașterea parametrilor fizici fundamentali ai TC:  $k_m$ ,  $S$ ,  $l$  ( $\mu_k$ ) și permite estimarea sarcinii secundare în așa fel încât transformatorul să își păstreze clasa de precizie în primele  $n$  perioade ce urmează defectului. Ea permite deasemenea selectarea TC potrivit pentru a face față cerințelor impuse de păstrarea clasei de precizie atunci când se manifestă remanența în miezul magnetic. Se poate evalua și influența exercitată de viteza releului alimentat asupra alegerii TC care-l deservește.

Acțiunile releelor deservite de TC astfel selecționat pot fi verificate față de efectele saturării miezului magnetic. Pentru evitarea falselor acționări, releele rapide trebuie să opereze înainte de  $t_s$ , iar cele lente numai după  $t_r$  (pentru notații vezi figura nr. 3.37), cu o precizie determinată de saturația respectivă în curent alternativ.

Sistemul de calcul prezentat poate fi folosit și la evaluarea performanțelor în regim tranzitoriu ale unui TC existent, luat în considerare alături de releele pe care le deservește. În particular, dacă  $F \ll F_1$  și  $t_r$  este mare există mari șanse ca releele să nu poată sesiza defectul în intervalul de timp cuprins între  $t \approx 0$  și  $t = t_r$ , iar după  $t_r$  pot interveni acțiuni false datorită saturației în curent alternativ.

În general, performanța TC în regim tranzitoriu este critică în stabilirea pragului de acționare al releului pe care-l deservește. În protecția diferențială de curent, acest prag de acționare este dat de un curent de scurtcircuit de valoare ridicată. TC trebuie să-l poată reproduce, pentru ca el să poată fi comparat cu alți curenți, din secundarele altor TC, care sunt străbătute numai de o fracțiune a curentului total. Din acest motiv, schemele respective necesită TC cu performanțe ridicate. Deoarece este posibil ca acționarea releului să fie incertă din cauza saturației miezului TC, în practică există mai multe soluții constructive care folosesc diverse tehnici pentru a preveni nesesizarea defectului [37].

Performanțele TC în regim tranzitoriu nu sunt critice pentru multe alte tipuri de protecții, neinfluențându-le mult comportarea din punct de vedere practic; în general, este necesară doar o verificare a acestui lucru.

Multe defecte apar în apropierea momentului când tensiunea trece prin maxim, iar curentul de dinainte de defect are valori mici, în sisteme cu caracter inductiv. Această conjunctură minimizează valoarea componentei aperiodice a curentului de defect, care, în plus și descrește rapid datorită constantei mici (în general) a circuitului de putere, în care este conectat și primarul TC. Pentru protecții de altă natură decât cea diferențială, punctul de acționare al releului nu este fixat la valori mari ale curentului de defect. Spre exemplu, în cazul protecției liniilor electrice aeriene de înaltă tensiune,

există posibilitatea ca locul unde s-a produs avaria să fie departe de TC, astfel încât curentul de defect să fie de mică valoare, contribuția sa fiind micșorată și de rezistența liniei. În aceste cazuri, performanța de regim tranzitoriu a TC nu este critică, avariile îndepărtate fiind izolate, în general, numai după timpi de execuție apreciabili. Cu totul alta este situația atunci când avaria apare în apropiere (pe bare), iar curenții de defect au valori care depășesc de multe ori pragul de declanșare al protecției. Tendința actuală pentru protecțiile moderne este de a acționa, cu ajutorul unor rele ultrarapide, înainte de saturația miezului TC datorită componentei aperiodice, performanța acestuia în regim tranzitoriu fiind importantă [37].

Ca și precauție generală, este bine dacă saturația poate fi evitată. Apariția ei reduce curentul secundar și micșorează drastic sensibilitatea releului. Pentru avarii grave, saturația nu constituie o problemă decât dacă devine atât de mare încât să provoace întâzieri mari în sesizarea acestora. Deformarea formei de undă a curentului nu are o influență prea mare asupra releelor electromecanice, dar la unele rele electronice trebuie luată în considerare [37].

Modul de acțiune descris deschide o cale de comunicare între proiectantul sistemelor de protecție și proiectantul de TC, permițând evidențierea soluției constructive optime a transformatorului prin modificarea parametrilor fizici ai acestuia, avându-se în vedere și constrângeri de natură tehnică sau considerații de factură economică.



# *SINTEZĂ ASUPRA REZULTATELOR CERCETĂRII*

Primele lucrări de specialitate consacrate transformatorului de curent (TC) au abordat comportamentul acestuia în regimuri idealizate. Problematika a fost tratată în bune condiții cu ajutorul aparatului matematic al Electrotehnicii liniare.

În a doua jumătate a secolului 20 încep să apară lucrări de specialitate care analizează procesele ce au loc în TC cu miezul feromagnetic saturat, apelând în acest scop la metodele Electrotehnicii neliniare. Majoritatea acestora descriu comportamentul TC alimentat cu un curent primar permanent periodic sinusoidal, pe baza unor ipoteze simplificatoare. O parte din ele, admitând neliniaritatea caracteristicii magnetice, consideră totuși curenții în primar și secundar ca fiind mărimi ce variază armonic [19], [129], [130]. În alte lucrări se determină forma de variație nesinusoidală a curentului secundar, circuitului feromagnetic al TC atribuindu-i-se o caracteristică magnetică liniarizată pe porțiuni [50], [62]. Și în aceste cazuri au apărut abateri destul de mari între rezultatele calculelor și verificările experimentale [28], [37], [88]. În regimul permanent periodic al curentului primar, magnetizarea circuitului feromagnetic al TC are tot un caracter permanent periodic, caracteristica magnetică având aspectul unui ciclu simetric. Forma acesteia depinde de viteza de variație în timp a magnetizării și scoate în evidență existența a două componente ale curentului total echivalent: una de magnetizare și una de pierderi [177], [180]. Curba de magnetizare redă dependența între înălțuirea magnetică și componenta de magnetizare a curentului, fără a evidenția transformările energetice ireversibile [191]. Necesitatea obținerii unor soluții analitice a impus înlocuirea reprezentărilor grafice ale caracteristicilor magnetice prin aproximări analitice și astfel s-au dezvoltat unele metode care admit neliniaritatea caracteristicii magnetice a TC ce funcționează în regim permanent periodic cu saturarea miezului, precum și

distorsionarea formei de variație în timp a curentului secundar față de cea a curentului primar sinusoidal.

Urmând această linie s-au dezvoltat ulterior metode de calcul ale TC pe baza datelor constructive ale acestora și a sarcinii conectate în circuitul secundar. În vederea ameliorării preciziei TC la funcționarea în regimul normal descris mai sus, în decursul timpului s-au elaborat o serie de strategii de proiectare și de construcție.

Utilizarea TC în schemele de protecție prin relee și automatizare ale sistemelor electroenergetice a scos în evidență importanța cunoașterii regimului de funcționare în care miezul magnetic al acestora se saturează pronunțat, situație care poate apărea fie datorită unui curent primar care pe lângă componenta permanent periodică sinusoidală prezintă și o componentă tranzitorie exponențială amortizată [62], [91], [143], [183], fie datorită unui curent primar permanent periodic a cărui valoare depășește de câteva ori valoarea nominală [165], [187]; al doilea regim îi succede de regulă primului la un interval de  $(0,5 \div 15)$  s de la apariția unei avarii în primar [112]. Aplicarea metodelor de calcul liniar în aceste cazuri au condus la rezultate neconfirmate de verificările experimentale [50], [88].

Apreciem că în practica de exploatare, acțiunea defectuoasă a protecției prin relee poate fi de trei tipuri: falsă acționare, nesesizarea unei avarii sau sesizarea acesteia cu o întârziere care face imposibilă intervenția utilă (spre exemplu, în prevenirea pierderii stabilității sistemului). Toate aceste tipuri de (in)acțiuni pot avea consecințe extrem de serioase, în special dacă avariile nu sunt anticipate sau sesizate de alte relee. Multe dintre erorile de acționare pot fi puse pe seama saturației miezului TC, depinzând de tipul releului acționat și de natura conexiunilor acestuia cu TC.

Spre ilustrare, vom menționa câteva exemple de false acționări: un releu maximal de curent în montaj homopolar poate sesiza o punere la pământ inexistentă datorită curentului rezidual ce apare ca efect al saturației diferite a miezurilor TC în cazul unui scurtcircuit trifazat; un releu diferențial, sau un releu maximal de curent conectat în montaj diferențial pentru protecția unui transformator de mare putere poate



semnaliza un defect intern (inexistent) al acestuia pe baza curentului diferențial apărut datorită saturării în mod diferit a miezurilor TC conectate diferențial în cazul unui scurtcircuit extern important; un releu de distanță e posibil să nu sesizeze o avarie în zona sa de protecție din cauza micșorării curentului secundar al TC datorită saturației miezului acestuia; un releu maximal de curent poate acționa cu o întârziere nepermisă datorită aceleiași cauze.

Pentru a înțelege în mod corect unele dintre cauzele disfuncționalităților s-a impus abordarea fundamentală a funcționării TC în regim de saturație și evaluarea performanțelor sale în regim tranzitoriu. Rezultatele studiului conduc spre soluții concrete care pot reduce numărul evenimentelor nedorite.

Complexitatea problemelor de analiză a acestor obiective a solicitat o abordare mixtă, atât analitică și numerică, cât și din punct de vedere experimental. Studiul TC în regim tranzitoriu al rețelei de putere în care este conectat s-a făcut pe baza unui sistem de ecuații algebrice și diferențiale, unele dintre ele fiind neliniare. Rezolvarea acestui sistem este dificilă datorită neliniarității ecuației caracteristicii magnetice a circuitului feromagnetic, precum și datorită lipsei unei expresii analitice exacte a ei. Un prim rezultat al cercetării a fost elaborarea unei metode de exprimare analitică a neliniarității caracteristicii magnetice a TC ținând seama de pierderile în miez datorate curenților turbionari. Concluziile la care s-a ajuns permit generalizarea modelului uzual și a schemei echivalente. În continuare, au fost elaborate și verificate experimental o serie de metode de modelare a fenomenului de saturație magnetică bazate pe utilizarea funcțiilor *spline*. Modelele dezvoltate sunt satisfăcătoare atât din punctul de vedere al adecvării (surprinderea elementelor esențiale ale realității modelate), cât și din acela al relevanței (capacitatea de a furniza concluzii noi, greu de obținut pe alte căi).

Concluziile prezente la sfârșitul fiecărui capitol evidențiază aprecieri asupra posibilităților de aplicare a metodelor de calcul dezvoltate.

\*

În viziunea noastră, conținutul tezei include următoarele contribuții originale:

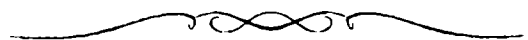
- realizarea unei modalități concrete de descriere a caracteristicii de magnetizare a miezului magnetic al TC, compatibile cu necesitățile calculului numeric și a determinării practice a componentelor sale;
- implementarea modelării caracteristicii magnetice prin funcții *spline*, precizia fiind superioară celei obținute prin mijloace tradiționale pe un domeniu extins de variație a mărimilor;
- analiza modului de utilizare cât mai completă a informațiilor conținute în datele de intrare (plasarea optimală a nodurilor de interpolare, studiul neuniformității repartiției punctelor în secvența de date, ajustarea, aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate, evitarea punctelor suplimentare de inflexiune);
- stabilirea ipotezelor necesare abordării comportamentului TC în regim tranzitoriu, ținând cont de neliniaritatea și de pierderile din miezul magnetic pe baza combinării neuzuale a teoriei aproximării cu cea a soluționării numerice a ecuațiilor diferențiale;
- implementarea aproximării prin funcții *spline* a soluției sistemului de ecuații diferențiale neliniare ce caracterizează funcționarea TC pe baza unei metode de colocație;
- realizarea concretă a unor programe de calcul specifice (solvere pentru sisteme cu matrice bandă rău condiționate, rutine de derivare a funcțiilor *spline* în diverse reprezentări, unități de generare a coeficienților sistemului *aproximativ* bloc diagonal și a secvențelor de noduri cerute de împrejurări, etc.);
- determinarea practică a factorului tranzitoriu al TC, necesar evaluării comportamentului său în regim de avarie;
- evidențierea unor concluzii utile proiectării, atât în sensul evaluării performanțelor în regim tranzitoriu al unor instalații existente, cât și în cel al selecționării unui TC care să îndeplinească solicitările impuse într-un caz concret.

\*



Cercetările efectuate de autor în vederea elaborării tezei s-au concretizat în comunicări științifice acceptate la manifestări prestigioase desfășurate în țară și în străinătate, [21] ÷ [26], [28], [30] ÷ [33].

Lucrarea de față nu are pretenția epuizării sau a rezolvării definitive a analizei comportamentului TC în regimuri tranzitorii ale sistemului electroenergetic, existând posibilitatea extinderii cercetării, de exemplu în direcția evaluării caracteristicii magnetice neliniare pe baza aproximării bidimensionale rezultate din produsul tensorial (contribuții proprii în această direcție pot fi urmărite în [25]).



## **BIBLIOGRAFIE**

- [1] AHLBERG, J.H.; NILSON, E.N.; WALSH, J.L. – *The Theory of Splines and Their Applications*, Academic Press, New York, 1967;
- [2] AKIMA, H. – *A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures*, Journal ACM, nr.17, 1970, p.53;
- [3] AKIRA, Y. – *A System for Measuring Magnetic Core Noise as a Function of the Magnetisation Level*, IEEE Transactions on Magnetics, vol.31, nr.4., 1982, p.2389;
- [4] ALBASINY, E.L.; HOSKINS, W.D. – *Cubic Spline Solutions to Two-Point Boundary Value Problems*, Computational Journal, nr.12, 1969, p.151;
- [5] ALLEN III, M.B.; HERRERA, I.; PINDER, G.F. – *Numerical Modelling in Science and Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1988;
- [6] ALMEDER, R. – *The Philosophy of Meaning*, Blackwell, Oxford, 1983;
- [7] AMES, W.F. – *Nonlinear Problems in Engineering*, Academic Press, New York, 1964;
- [8] ANGOT, A. – *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații*, Editura Tehnică, București, 1965;
- [9] ARNDT, H. – *Interpolation mit regularen Splines*, Journal of Approximation Theory, nr.20, 1977, p.23;
- [10] ASTOR, P.H.; DURIS, C.S. – *Discrete L-Splines*, Numerical Mathematics, nr.22, 1974, p.393;
- [11] ATKINSON, K.E. – *On the Order of Convergence of Natural Cubic Spline Interpolation*, SIAM Journal of Numerical Analysis, nr.5, 1968, p.89;
- [12] ATTÉÏA, K. – *Fonctions „spline“ avec contraintes linéaires de type inégalité*, Actes du 6° Congrès de l'AFIRO (Nancy, 1967), Association Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Paris, 1967, p.42;
- [13] ATTÉÏA, K. – *Fonctions „spline“ définies sur un ensemble convexe*, Numerical Mathematics, nr.12, 1968, p.192;
- [14] ATTÉÏA, K. – *Généralisation de la définition et des propriétés des „spline fonctions“*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Série A, n°260, Paris, 1965, p.3550;

- [15] BALQUIÈRE, A. – *Nonlinear System Analysis*, Academic Press, New York, 1966;
- [16] BARNHILL, R.E. – *Representation and Approximation of Surfaces*, Academic Press, New York, 1977;
- [17] BARNHILL, R.E.; RIESENFELD, R.F. – *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York – London, 1974;
- [18] BARROW, D.L. ; SMITH, P.W. – *Asymptotic Properties of Best  $L_2[0,1]$  Approximation by Splines with Variable Knots*, Academic Press, New York, 1977;
- [19] BAUER, R. – *Die Messwandler*, Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1953;
- [20] BAUMEISTER, J. – *Über die Extremaleigenschaft nichtlinearer interpolierender Splines*, Numerische Mathematik, nr.25, 1976, p.433;
- [21] BĂRBULESCU, E. – *A Comparative Study of Two Methods of Considering Motion in the Calculation of Variable Electromagnetic Fields*, Proceedings of the International 93 Malta Conference of the AMSE, 28-30 dec. 1993;
- [22] BĂRBULESCU, E. – *An Analysis of Some Transient States in Transformers*, Proceedings of the Scientific Communications Meeting of „Aurel Vlaicu“ University, Third Edition, Arad, 16<sup>th</sup>-17<sup>th</sup> of May 1996, Vol. 8, p.15;
- [23] BĂRBULESCU, E. – *Aplicarea metodei macroelementului la calculul câmpului într-o mașină electrică*, în volumul lucrărilor celui de-al II-lea Seminar Național de Electrotehnică Teoretică, editori Cioflec, P. și Panaitescu, A., București, 1997, p.118;
- [24] BĂRBULESCU, E. – *Aproximarea pe domenii extinse a curbei de magnetizare pentru materiale magnetice*, în volumul lucrărilor celui de-al II-lea Seminar Național de Electrotehnică Teoretică, editori Cioflec, P. și Panaitescu, A., București, 1997, p.183;
- [25] BĂRBULESCU, E. – *Aproximarea 2D a caracteristicii magnetice a materialelor feromagnetice*, în volumul lucrărilor celui de-al III-lea Seminar Național de Electrotehnică Teoretică, editori Cioflec, P. și Panaitescu, A., București, 1997, p.68;
- [26] BĂRBULESCU, E. – *Comparaison de deux techniques de prise en compte du mouvement dans un logiciel de calcul des champs électromagnétiques évolutifs*, thèse DEA, INPT et UPST, Toulouse, 1991;
- [27] BĂRBULESCU, E. – *Metode de calcul al transformatorului de curent cu saturarea miezului feromagnetic*, Referat de doctorat, UPT, Timișoara, 1994;

- [28] BĂRBULESCU, E. – *Model pentru fenomenul de histereză magnetică*, în volumul lucrărilor celui de-al III-lea Seminar Național de Electrotehnică Teoretică, editori Cioflec, P. și Panaitescu, A., București, 1997, p.76;
- [29] BĂRBULESCU, E. – *Modele pentru analiza fenomenelor de saturație și histereză magnetică*, Referat de doctorat, UPT, Timișoara, 1993;
- [30] BĂRBULESCU, E. – *Numerical Modelling of a Synchronous Machine Taking Into Account the Rotor Movement*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Optimisation of Electric and Electronic Equipments, Brașov, May 12-14, 1994, p.283;
- [31] BĂRBULESCU, E.; ARCEREANU, G.; ANTON, I. – *Aparat pentru determinarea caracteristicilor magnetice la materiale feromagnetice*, Lucrările premiate ale celei de-a XIII-a Conferințe naționale de cercetare științifică, Brașov, 6-7 martie 1976;
- [32] BĂRBULESCU, E.; LĂPUȘAN, V. – *Asupra determinării pierderilor în fier la tole silicioase*, *Metologia aplicată*, secțiunea Măsurări magnetice, nr. 1/1977, p.39;
- [33] BĂRBULESCU, E.; VETREȘ, I – *Influence of the Material Quality in Hall Transducers Design*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Optimisation of Electric and Electronic Equipments, Brașov, May 12-14, 1994, p.85;
- [34] BEZIER, P. – *Numerical Control Mathematics and Applications*, Wiley, New York, 1972;
- [35] BIRKHOFF, G.; GORDON, W.J. – *The Draftsman's and Related Equations*, *Journal of Approximation Theory*, nr.1, 1968, p.199;
- [36] BJÖRK, A.; DAHLQUIST, G. – *Numerische Methoden*, R.Oldenbourg Verlag, München, 1972;
- [37] BLACKBURN, J.L. – *Protective Relaying. Principles and Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1990;
- [38] de BOOR, C. – *Bounding the Error in Spline Interpolation*, *SIAM Review*, vol.16, nr.4, p.531;
- [39] de BOOR, C – *Lectures on Splines Delivered at Redstone Arsenal in September, 1976, and at White Sands Missile Range in October, 1977*, sursă particulară;
- [40] de BOOR, C. – *On Bounding Spline Interpolation*, *Journal of Approximation Theory*, nr.14, 1975, p.191;
- [41] de BOOR, C. – *On Calculating with B-Splines*, *Journal of Approximation Theory*, nr.6, 1972, p.50;

- [42] de BOOR, C. – *On Uniform Approximation by Splines*, Journal of Approximation Theory, nr.1, 1968, p.219;
- [43] de BOOR, C., FIX, G. – *Spline Approximation by Quasi-Interpolants*, Journal of Approximation Theory, nr.8, 1973, p.19;
- [44] de BOOR, C., SWARTZ, B. – *Collocation at Gaussian Points*, SIAM Journal of Numerical Analysis, nr.10, 1973, p.278;
- [45] BOSSAVIT, A.; EMSON, C.; MAYERGOYZ, I. – *Méthodes numériques en électromagnétisme*, Eyrolles, Paris, 1991;
- [46] BÖHM, W. – *Parameterdarstellung kubischer und bikubischer Splines*, Computing, nr.17, 1976, p.87;
- [47] BÖHMER, K. – *Spline-Funktionen*, Teubner-Studienbücher, Stuttgart, 1974;
- [48] BÖHMER, K.; MEINARDUS, G.; SCHEMPP, W. – *Spline Functions*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976;
- [49] BÖNING, W. – *Analytische Darstellung der Kennlinien nichtlinearer Zweipole*, Archiv für Elektrotechnik, XLV.Band, Heft 4, Berlin, 1969, p.265;
- [50] BRAȘOVAN, I. – *Contribuții la studiul și calculul transformatoarelor de curent în regim permanent cu saturarea miezului feromagnetic*, Teză de doctorat, IPTVT, Timișoara, 1971;
- [51] BRUCE, R.G.; WRIGHT, A. – *Remanent Flux in Current-Transformer Cores*, Proceedings of the IEE, vol.113, 1966, p.915;
- [52] BRUTMAN, L. – *On the Lebesgue Function for Polynomial Interpolation*, SIAM Journal of Numerical Analysis, 1978, p.27;
- [53] BURCHARD, H.G. – *On the Degree of Convergence of Piecewise Polynomial Approximation on Optimal Meshes*, Transactions of the American Mathematical Society, nr.234, 1977, p.183;
- [54] BURCHARD, H.G.; HALE, D.E. – *Piecewise Polynomial Approximation on Optimal Meshes*, Journal of Approximation Theory, vol.14, nr.2, 1975, p.128;
- [55] BUTTERFIELD, K.R. – *The Computation of All Derivatives of a B-Splines Base*, Journal of the Institute of Applied Mathematics, vol.17, nr.1, 1976, p.288;
- [56] CARASSO, C. – *Méthode générale de construction de fonctions spline*, Révue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, 1, nr.5, 1967, p.119;

- [57] CAUER, W. – *Wirksame Permeabilität und Eisenverluste in Blächen und Drähten bei schwachen magnetischen Feldern*, Archiv für Elektrotechnik, nr.15, 1925, p.308;
- [58] CĂLIN, S.; MARCU, S. – *Protecția prin releu a sistemelor electrice*, Editura Tehnică, București, 1975;
- [59] CHERNOBROVOW, M.I. – *Protective Relaying*, MIR Publishers, Moscow, 1979;
- [60] CHUI, C.K., SMITH, P.W.; WARD, I.D. – *On the Smoothness of Best  $L_2$ -Approximants From Nonlinear Spline Manifolds*, Mathematical Computations, vol.31, nr.137, 1977, p.17;
- [61] COLLATZ, L.; MEINARDUS, G. – *Numerische Methoden der Approximationstheorie*, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1976;
- [62] CONCORDIA, C.; WEYGANDT, C.N.; SHOTT, H.S. – *Transient Characteristics of Current Transformers During Faults*, Transactions of the AIEE, vol.61, 1942, p.280;
- [63] CONNER, E.E.; GREB, R.G.; WENTZ, E.C. – *Control of Residual Flux in Current Transformers*, IEEE Transactions on PAS, vol.PAS-92, nr.4, 1973, p.1226;
- [64] CONTE, S.; de BOOR, C. – *Elementary Numerical Analysis*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1980;
- [65] COX, M.G. – *An Algorithm for Spline Interpolation*, Journal of the Institute of Applied Mathematics, nr.15, 1975, p.95;
- [66] COX, M.G. – *Curve Fitting With Piecewise Polynomials*, Journal of the Institute of Applied Mathematics, nr.8, 1973, p.36;
- [67] COX, M.G. – *The Numerical Evaluation of B-Splines*, Journal of the Institute of Applied Mathematics, nr.10, 1972, p.130;
- [68] CRIȘAN O. – *Optimizări decizionale în sisteme electroenergetice*, Editura Facla, Timișoara, 1975;
- [69] CURRY, H.B.; SCHOENBERG, I.J. – *On Pólya Frequency Functions. IV: The Fundamental Spline Functions and Their Limits*, Journal d'Analyse Mathématique, nr.17, 1966, p.115;
- [70] DAVIS, P.J. – *Interpolation and Approximation*, Blaisdell, New York, 1963;

- [71] DeVORE, R.; RICHARDS, F. – *Saturation and Inverse Theorems for Spline Approximation*, în *Spline Functions and Approximation Theory*, ISNM, vol.21, Birkhäuser Verlag, Basel, 1973, p.73;
- [72] DIRECȚIA GENERALĂ PENTRU METROLOGIE, STANDARDE ȘI INVENȚII – *Instrucțiuni 69-67 pentru verificarea transformatoarelor de curent*, Editura de stat pentru imprimate și publicații, București, 1967;
- [73] DOGARU, D. – *Elemente de grafică 3D*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1988;
- [74] ENGELS, H. – *Allgemeine interpolierende Splines vom Grade 3*, Computing, nr. 10, 1972, p.365;
- [75] FISCHER, J.; MOSER, H. – *Die Nachbildung von Magnetisierungskurven durch einfache algebraische oder transzendente Funktionen*, Archiv für Elektrotechnik, XLII.Band, Heft 5, 1956, p.286;
- [76] FLANDERS, H. – *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York, 1963;
- [77] FLYNN, M.J. – *Some Computer Organisations and Their Effectiveness*, IEEE Transactions on Computers, nr.21, 1972, p.948;
- [78] FORSYTHE, G.; MOLER, C. – *Computer Solutions of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1967;
- [79] GAFFNEY, P.W.; POWELL, J.D. – *Optimal interpolation*, în *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, 1976;
- [80] GARABEDIAN, H.L. – *Approximation of Functions*, Elsevier, Amsterdam, 1985;
- [81] GAUTSCHI, W. – *The Condition of Ortogonal Polynomials*, Mathematical Computations, nr.26, 1972, p.923;
- [82] GOLOMB, M.; WEINBERGER, H. – *Optimal Approximation and Error Bounds*, University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 1959;
- [83] GREVILLE, T.N.E. – *Theory and Applications of Spline Functions*, Academic Press, New York, 1972;
- [84] GROBE, G. – *Ein Analytischer Ausdruck für die Hystereseschleife*, Elektrotechnische Zeitschrift, vol.55, 1934, p.559;



- [85] HALL, C.A. – *On Error Bounds for Spline Interpolation*, Journal of Approximation Theory, nr.1, 1968, p.68;
- [86] HALL, C.A.; MEYER, W.W. – *Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation*, Journal of Approximation Theory, nr.16, 1976, p.68;
- [87] HALLO, H.S.; BORKENT, R.H. – *Beitrag zur Kenntnis der Wechselstrommagnetisierung von Eisen*, Archiv für Elektrotechnik, XXV.Band, Berlin, 1931, p.796;
- [88] HARDER, E.L.; KLEMMER, E.H.; SONNEMANN, W.K.; WENTZ, E.C. – *Linear Couplers for Bus Protection*, AIEE Transactions, vol.61, 1942, p.241;
- [89] HAYES, J.G. – *Numerical Approximation to Functions and Data*, The Institute of Mathematics and its Applications, The Athlone Press, 1970;
- [90] HEMMER, N. – *Über den Einfluß von Formfaktor und Kurvenform der Induktionsspannung auf die Verluste von Elektroblechen*, Elektrotechnische Zeitschrift, bd.56, Heft.12, 1965, p.396;
- [91] HODGKISS, J.W. – *Comportement des transformateurs d'intensité soumis à des courants assymétriques reliés à ces transformateurs*, Bulletin CIGRÉ, tom III, rapport n°329, 1960;
- [92] HOLTZMAN, J.M. – *Nonlinear System Theory – A Functional Analysis Approach*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1970;
- [93] HORTOPAN, G.; PANAIT, V.; DINCULESCU, P.; TITZ, G.; TRUȘCĂ, V.; PAVELESCU, D. – *Probleme de aparate electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976;
- [94] ISAACSON, E.; KELLER, H. – *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1966;
- [95] JUFER, M.; APOSTOLIDES, A. – *An Analysis of Eddy Current and Hysteresis Losses in Solid Iron Based Upon Simulation of Saturation and Hysteresis Characteristics*, IEEE Transactions on PAS, vol.PAS-95, nr.6, 1976, p.1786;
- [96] KALMAN, R.E.; FALB, P.L.; ARBIB, M.A. – *Topics in Mathematical System Theory*, Mc.Graw-Hill, Inc., New York, 1969;
- [97] KARLIN, S. – *Total Positivity*, vol.1, Stanford University Press, Stanford, California, 1968;
- [98] KARLIN, S.; MICCHELLI, C.A.; PINKUS, A.; SCHOENBERG, I.J. – *Studies in Spline Functions and Approximation Theory*, Academic Press, New York, 1976;



- [99] KARLIN, S.; ZIEGLER, Z. – *Tschebyscheffian Spline Functions*, SIAM Journal of Numerical Analysis, Series B, nr.3, 1966, p.228;
- [100] KENNEDY, L.F.; SINKS, A.T. – *New Current Transformer for Bus Differential Protection*, AIEE Transactions, vol.60, 1941, p.1180;
- [101] LAURENT, P.J. – *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972;
- [102] LAURENT, P.J. – *Représentation de données expérimentales à l'aide de fonction-spline d'ajustement et évaluation optimale de fonctionnelles linéaires continues*, Applications Mathématiques, nr.13, 1978, p.154;
- [103] LAW, A.G.; SAHNEY, B.N. – *Theory of Approximation with Applications*, Academic Press, New York, 1976;
- [104] LAWSON, C.L.; HANSON, R.J. – *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1974;
- [105] LEFEBVRE, M. – *Calcul et réalisation d'un maquette de transformateur de courant 220 kV destiné à la mesure en regime transitoire*, Revue Générale de l'Électricité, n°75, 1966, p.1112;
- [106] LORENZ, G.G. – *Approximation Theory*, Academic Press, New York-London, 1973;
- [107] LORENZ, G.G.; CHUI, C.K.; SCHUMAKER, L.L. – *Approximation Theory II*, Academic Press, New York-London, 1976;
- [108] LUCAS, T.R.; REDDIEN, Jr., G.W. – *Some Collocation Methods for Non-linear Boundary Values Problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis, nr.9, 1972, p.341;
- [109] LYCHE, T.; SCHUMACHER, L.L. – *Computation of Smoothing and Interpolating Natural Splines Via Local Basis*, SIAM Journal of Numerical Analysis, vol.10, nr.6, 1973, p.1027;
- [110] LYCHE, T.; WINTERS, R. – *A Stable Recurrence Relation for Trigonometric B-Splines*, Journal of Approximation Theory, nr.15, 1975, p.294;
- [111] MALCOLM, M.A. – *On the Computation of Nonlinear Spline Functions*, SIAM Journal of Numerical Analysis, nr.14, 1977, p.320;
- [112] MANOLESCU, P. – *Analiza liniară a funcționării transformatorului de curent în regim tranzitoriu de scurtcircuit*, Electrotehnica, vol.16, nr.5, 1968, p.189;
- [113] MARSDEN, J. – *On Uniform Spline Approximation*, Journal of Approximation Theory, nr.6, 1972, p.167;

- [114] MARSHALL, D.E.; LANGGUTH, P.O. – *Current Transient Excitation Under Transient Conditions*, AIEE Transactions, vo.48, 1929, p.1464;
- [115] MASON, C.R. – *The Art and Science of Protective Relaying*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1956;
- [116] MEINARDUS, G. – *Über die Norm des Operators der Kardinalen Spline-Interpolation*, Journal of Approximation Theory, vol.16, nr.4, 1976, p.289;
- [117] MEIR, A.; SARMA, A., eds. – *Spline Functions and Approximation Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1973;
- [118] MELKMAN, A.A. – *Hermite-Birkhoff Interpolation by Splines*, Journal of Approximation Theory, vol.19, nr.3, 1977, p.259;
- [119] MICCHELLI, C.A.; RIVLIN, T.J. – *Optimal Estimation in Approximation Theory*, Plenum Publishers, New York, 1977;
- [120] MICCHELLI, C.A.; RIVLIN, T.J.; WINOGRAD, S. – *The Optimal Recovery of Smooth Functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, nr.18, 1976, p.189;
- [121] MICULA, G. – *Funcții spline și aplicații*, seria *Matematici moderne aplicate*, Editura Tehnică, București, 1978;
- [122] MIDDLETON, F.H. – *Analytic Hysteresis Function*, Journal of Applied Physics, nr.32 (suppl.), 1961, p.2518;
- [123] MING-LEI, L. – *Spline Fit Made Easy*, IEEE Transactions on Computers, vol.25, nr.1976, p.522;
- [124] MÜLLENDORF, E. – *Erfahrungsformel für die Hysteresenkurve*, Elektrotechnische Zeitschrift, vol.28, 1907, p.361;
- [125] ONG, C.-M. – *Dynamic Simulation of Electric Machinery with MATLAB/SIMULINK*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, 07458, 1998;
- [126] PAVLIDIS, T.; MAIKA, A.P. – *Uniform Piecewise Polynomial Approximation With Variable Joints*, Journal of Approximation Theory, nr.12, 1974, p.61;
- [127] PEIRCE, C.S. – *Le 'legi dell'ipotesi* (a cura di Massimo Bonfantini et al.), Bompiani, Milano, 1984;
- [128] POLLACK, S.V. – *Structured FORTRAN 77 Programming with Hewlett-Packard Computers*, Boyd & Fraser Publishing Company, Boston, 1983;
- [129] POP, E.; CHIVU, M. – *Măsurii electrice și magnetice*, 2 vol., Lito IPTV, Timișoara, 1969;

- [130] POP, E.; STOICA, V.; CRIȘAN, S. – *Măsurări în energetică*, Editura Facla, Timișoara, 1981;
- [131] POPPER, K. – *Conjectures and Refutations*, Routledge & Kegan Paul, London, 1969;
- [132] POPPER, K. – *Logik der Forschung*, Wien, 1934;
- [133] POWELL, M.J.D. – *On the Maximum Error of Polynomial Approximations Defined by Interpolation and by Least Square Criteria*, Computational Journal, nr.9, 1967, p.404;
- [134] PRENTER, P.M. – *Splines and Variational Methods*, Wiley, New York-London, 1975;
- [135] RANCEA, D. – *Limbajul TurboPascal*, 2 vol., Editura Libris, Cluj-Napoca, 1993;
- [136] RAYLEIGH, lord KELVIN, J.W.S. – *The Behaviour of Iron and Steel Under the Operation of Feeble Magnetic Forces*, Phil. Mag., vol.23, 1887, p.225;
- [137] RĂDULEȚ, R.; TIMOTIN, A.; ȚUGULEA, A. – *Introducerea parametrilor tranzitorii în studiul circuitelor electrice liniare având elemente nefiliforme și pierderi suplimentare*, Studii și cercetări de electroenergetică și electrotehnică, vol.16, nr.4, 1966, p.857;
- [138] REINSCH, J.H. – *Smoothing by Spline Functions*, Numerical Mathematics, nr.10, 1967, p.237;
- [139] RENKEMA, J. – *Discourse Studies*, John Benjamins Publishing Company, Amsterdam/Philadelphia, 1993;
- [140] RICE, J.R. – *Characterization of Chebyshev Approximation by Splines*, SIAM Journal of Numerical Analysis, nr.4, 1967, p.361;
- [141] RIVLIN, T.J. – *An Introduction to the Approximation of Functions*, Blaisdell Publishers Company, Waltham, Massachusetts, 1969;
- [142] RÎJIC, I.M.; GRADȘTEIN, I.S. – *Tabele de integrale, sume, serii și produse*, Editura Tehnică, București, 1955;
- [143] ROMIER, R. – *Réponse d'un transformateur de courant en régime transitoire*, Revue Générale de l'Électricité, n°75, 1966, p.1139;
- [144] ROSENBLATT, M. – *Asimptotics and Representation of Cubic Spline*, Journal of Approximation Theory, nr.17, 1976, p.332;

- [145] ROSENBLATT, M. – *The Local Behavior of the Derivative of a Cubic Spline Interpolator*, Journal of Approximation Theory, nr.15, 1975, p.382;
- [146] RUNGE, C. – *Theorie und Praxis der Reihen*, Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig, 1904;
- [147] RUSSEL, B. – *Introduction to Mathematical Philosophy*, Macmillan, London, New York, 1930;
- [148] RUSSELL, R.D. – *Collocation for Systems of Boundary Value Problems*, Numerical Mathematics, nr.23, 1974, p.119; \*
- [149] RUSSELL, R.D.; SHAMPINE, L.F. – *A Collocation Method for Boundary Value Problems*, Numerical Mathematics, nr.19, 1972, p.1;
- [150] SALVADORI, M.G.; BARON, M.L. – *Metode numerice în tehnică*, Seria *Matematici moderne aplicate*, Editura Tehnică, București, 1972;
- [151] SANSONE, G.; CONTI, R. – *Non-Linear Differential Equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964;
- [152] SANTESMASSES, J.G.; AYALA, J.; CACHERO, A.H. – *Analytical Approximation of Dynamic Hysteresis Loop and Its Application to a Series Ferroresonant Circuit*, Proceedings of the AIEE, vol.117, 1970, p.234;
- [153] SARD, A. – *Linear Approximation*, American Mathematic Society, Providence, 1963;
- [154] SARD, A.; WEINTRAUB, S. – *A Book of Splines*, Wiley, New York, 1971;
- [155] SĂVESCU, M.; BORDA, M.-E.; GAVREA, I. – *Metode moderne de analiză a circuitelor electronice*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1991;
- [156] SCHERER, K. – *On the Best Approximation of Continuous Functions by Splines*, SIAM Journal of Numerical Analysis, nr.7, 1970, p.418;
- [157] SCHOENBERG, I.J. – *Approximation with Special Emphasis on Spline Functions*, Academic Press, New York, 1969;
- [158] SCHOENBERG, I.J. – *Cardinal Spline Interpolation*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1973;
- [159] SCHOENBERG, I.J. – *Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions. Part A: On the Problem of Smoothing of Graduations. A First Class of Analytic Approximation Formulae*, Quarterly Applied Mathematics, vol.4, 1946, p.45;

- [174] STĂNCIULESCU, F. – *Analiza și simularea sistemelor neliniare*, Editura Academiei, București, 1974;
- [175] STRATTON, J.A. – *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941;
- [176] ȘCHIOP, A. – *Metode aproximative în analiza neliniară*, Editura Academiei, București, 1972;
- [177] ȘORA, C. – *Bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982;
- [178] TĂNĂSESCU, A.; CONSTANTINESCU, R.; MARINESCU, I.; BUSUIOC, L. – *Grafică asistată*, Editura Tehnică, București, 1989;
- [179] TEODORESCU, D. – *Describing-Function Series: A New Means for Nonlinear Control System Analysis*, Proceedings of the IEEE, vol.117, nr.11, 1970, p.2175;
- [180] TIMOTIN, A. HORTOPAN, V.; IFRIM, A.; PREDA, M. – *Lecții de Bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970;
- [181] TOLSTOV, G.P. – *Serii Fourier*, Editura Tehnică, București, 1955;
- [182] TRUTT, F.C.; ERDÉLYI, E.A.; HOPKINS, R.E. – *Representation of the Magnetisation Characteristic of DC Machines for Computer Use*, IEEE Transactions on PAS, vol.PAS-87, nr.3, 1968, p.665;
- [183] ULIANOV, S.A. – *Regimuri tranzitorii ale sistemelor electrice*, Editura Tehnică, București, 1967;
- [184] VRACIU, G.; POPA, A. – *Metode numerice cu aplicații în tehnica de calcul*, vol.I, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1982;
- [185] WATSON, G.A. – *Numerical Analysis*, Springer Verlag, 1974;
- [186] WATSON, G.A., ed. – *Numerical Solution of Differential Equations*, seria *Lecture Notes in Mathematics*, n° 363, Springer Verlag, 1974;
- [187] WENTZ, E.C.; SONNEMANN, W.K. – *Current Transformers and Relays for High Speed Differential Protection With Particular Reference to Offset Transient Currents*, AIEE Transactions, vol.59, 1940, p.481;
- [188] WEST, J.C.; JAYAWANT, B.V.; REA, D.P. – *Transition Characteristics of the Jump Phenomenon in Nonlinear Resonant Circuits*, Proceedings of the IEE, vol.114, nr.3, 1967, p.381;
- [189] WEYGANDT, C.N.; CHARP, S. – *An Analytic Approach to the Hysteresis Loop*, Electrical Engineer, vol.61, 1942, p.387;

- [190] WHITTAKER, E.T.; WATSON, G.N. – *A Course of Modern Analysis*, Fourth Edition Reprinted, University Press, Cambridge, 1963;
- [191] WIENER, U. – *Măsurări electrice industriale. Vol II – Măsurarea mărimilor magnetice*, Editura Tehnică, București, 1969;
- [192] WIRTH, N. – *Algorithms + Data Structures = Programs*, Prentice Hall, Inc., New York, 1976;
- [193] ZAVIALOV, S.I. – *Metodi splain funkții, Vîcisliteniie sistemî 65 (Sbornik Trudov)*, Acad. Nauk SSSR, Novossibirsk, 1973;
- [194] \*\*\* – <http://www.eecs.wsu.edu/schneidj/fdtd-bib.html>;
- [195] \*\*\* – *Mathcad User's Guide*, Mathcad Plus 6.0 Professional Edition, MathSoft Inc., Collabra Software Inc., 1995;
- [196] \*\*\* – *Microsoft FORTRAN Compiler for the MS-DOS Operating System*, Microsoft Corporation, 1985;
- [197] \*\*\* – *Microsoft FORTRAN. Reference Manual*, Microsoft Corporation, 1985;
- [198] \*\*\* – *MS-FORTRAN Reference Manual*, Microsoft Inc., Bellevue, 1981;
- [199] \*\*\* – *PMI Catalogue*, Precision Monolithics Inc., 1985;
- [200] \*\*\* – *TableCurve for Windows*, Jandel Scientific Laboratories, AISN Software, 1992.



# INDEX DE NUME CITATE

- Adams, C.F.* - 98  
*Alhstom-Savoisienne* - 138  
*Almeder, R.* - 104
- Bărbulescu, E.* - *i*  
*Birkhoff, G.* - 155
- Cauchy, A.L.* - 198  
*Cebâșev, P.L.* - 47, 52, 100, 101,  
156, 167  
*Chivu, M.* - 8  
*Choleski, P.* - 3, 74, 78, 187, 191(3)  
*Curry, H.B.* - 177  
*Curtis, G.H.* - 98
- Davis, P.* - 36
- Émile Haefely* Entreprise - 137  
*Ercuța, A.* - 8  
*Euler, L.* - 98
- Faber, J.* - 100, 122  
*Fortran* - 51(2), 55, 155, 160  
*Fourier, J-B.J.* - 18, 159  
*Fox, C.J.* - 98  
*Fröhlich, K.* - 40, 47
- Gaffney, P.W.* - 64(2)  
*Galerkin, P.* - 90  
*Gauss, K.F.* - 91, 96  
*Gill, P.* - 98, 114  
*Golomb, S.* - 37
- Hamming, T.* - 98  
*Heaviside, O.* - 23, 26  
*Hermite, C.* - 155  
*Heun, T.* - 98  
*Hilbert, D.* - 74  
*Hölder, L.* - 168  
*Hollerith, R.* - 188
- Jackson, R.H.* - 55, 100  
*Joule, J.P.* - 110
- Kirchhoff, G.R.* - 12, 24, 111  
*Kronecker, L.* - 166  
*Kutta, M.* - 98, 114
- Lagrange, J.L.* - 47, 165  
*Lajoie-Mazenc, M.* - 8  
*Laplace, P.S.* - 22, 26  
*Lebesgue, H.* - 150  
*Legendre, A.M.* - 91, 96, 200

- Leibniz, G.W.* - 95  
*Lenz, E.H.* - 110  
*L'Hôpital, J.-B.* - 27  
*Lipschitz, W.N.* - 55, 168
- Marquant, H.* - 8  
Mathcad - 160  
Matlab - 21, 155  
*Merson, J.* - 98  
Metra-Blansko - 105  
*Micchelli, C.A.* - 64(2)  
Microsoft - 160(2)  
*Milne, A.A.* - 98  
*Moulton, R.* - 98
- Newton, I., Sir* - 3, 47, 48(2), 49, 65, 83, 92, 95, 96, 98, 116, 123, 165, 182, 183, 200  
*Nobel, A.* - ii
- Peano, G.* - 7  
*Peirce, C.S.* - 9  
*Pólya, J.* - 151  
*Powell, J.D.* - 64(2)  
*Prokofiev, S.S.* - 36
- Rayleigh, J.W.S., Lord Kelvin* - 90  
*Redstone Arsenal,* - 149
- Reinsch, C.H.* - 68(3), 185, 186  
*Ritz, C.* - 90  
*Rivlin, T.J.* - 64(2)  
*Rolle, M.* - 63  
*Runge, F.F.* - 98, 114  
*Russel, B.* - ii
- Sard, A.* - 37  
*Schoenberg, I.J.* - 55, 63, 68, 168, 177, 185, 186  
*Schweikert, D.G.* - 81  
*Simpson, R.* - 35  
Simulink - 21, 155  
*Stone, E.D.* - 2, 19, 41, 169
- Sora, C.* - i, 8
- Taylor, B.* - 49  
TurboPascal - 156
- Vlaicu, A.* - 148
- Weierstrass, K.* - 2, 19, 41, 169  
*Weinberger, S.* - 37  
White Sands - 149  
*Whitney, J.D.* - 63, 65  
*Whittaker, E.T.* - 68(2)  
*Winograd, E.* - 64(2)



## ANEXA nr. 1

### Notățiile matematice utilizate

$:=$  – semnifică „egal prin definiție“. A fost adoptat acest semn pentru că este nesimetric (spre deosebire de  $\equiv$ ,  $\stackrel{\text{def}}{=}$ ,  $\triangleq$ , etc.). Utilizare: „ $a := b$ “ indică faptul că  $a$  este cantitatea care este definită sau explicată,  $b$  constituind definiția sau explicația; „ $b =: a$ “ are strict același înțeles;

$\{x, y, z, \dots\}$  – mulțimea ale cărei elemente componente sunt  $x, y, z$ , etc.;

$\{x \in X \mid P(x)\}$  – mulțimea elementelor din  $X$  care au proprietatea  $P(x)$ ;

$\emptyset$  – mulțimea vidă;

$A \cap B$  –  $\{a \in A \mid a \in B\}$ ;

$A \setminus B$  –  $\{a \in A \mid a \notin B\}$ ;

$\mathbf{N}$  –  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , mulțimea numerelor naturale;

$\mathbf{Z}$  –  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , mulțimea numerelor întregi;

$\mathfrak{R}$  – mulțimea numerelor reale;

$\mathfrak{R}_+$  – mulțimea numerelor reale pozitive;

$\mathbf{C}$  – mulțimea numerelor complexe;

$\underline{z}^*$  – numărul complex conjugat al numărului complex  $\underline{z}$ ;

$[a, b]$  –  $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ , interval închis;

$(a, b)$  –  $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ , interval deschis;

$k_{\alpha, \dots, \omega}$  – constantă care depinde de  $\alpha, \dots, \omega$ ;

$f: A \rightarrow B \mid a \rightarrow f(a)$  – descrie funcția  $f$  ca fiind definită pe mulțimea  $A =: \text{dom } f$  (domeniul său de definiție) și luând valori în mulțimea  $B$ , transformând elementul tipic  $a \in A$  în elementul  $b \in B$ . De exemplu,  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid x \rightarrow \exp(x)$  descrie funcția exponențială. Uneori notația se reduce numai la  $f: a \rightarrow f(a)$ , dacă domeniul și mulțimea valorilor funcției  $f$  sunt evidente sau rezultă din context. De exemplu,  $F: f \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$  descrie funcționala liniară  $F$ , a cărei valoare este numărul  $\int_0^1 f(x) dx$ , funcția  $f$  fiind presupusă definită și integrabilă pe domeniul  $[0, 1]$ ;

$\text{supp } f$  –  $\{x \in \text{dom } f \mid f(x) \neq 0\}$ , suportul funcției  $f$ ;

$f|_I$  –  $g: I \rightarrow B \mid a \rightarrow f(a)$ , restricția funcției  $f$  la (sub)domeniul  $I$ ;

$h \rightarrow 0^+$  ( $h \rightarrow 0^-$ ) –  $h$  tinde spre zero cu valori pozitive (negative);

$f(a^+): = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a+h)$   
 $f(a^-): = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(a+h)$  } – limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $a$ ;

$\text{jump}_a f$  –  $f(a^+) - f(a^-)$ , saltul funcției  $f$  în punctul  $a$ ;

$g(x) = \mathcal{O}(f(x))$  – („ $g(x)$  este de ordinul lui  $f(x)$ “), dacă  $x$  tinde către  $a$ , există o constantă pentru care poate fi scrisă relația  $|g(x)| \leq k_{g,f,a} |f(x)|$ ,  $\forall x$ ;

$g(x) = \mathcal{o}(f(x))$  – („ $g(x)$  este de ordin superior lui  $f(x)$ “),  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ ;

$f(\cdot, y)$  – funcția de o singură variabilă care se obține din funcția  $f: X \times Y \rightarrow Z$  calând cea de-a doua variabilă la o valoare fixată  $y$ . Deasemenea,  $\int_a^b G(\cdot, y) g(y) dy$  descrie funcția care rezultă din aplicarea unui anumit operator integral funcției  $g$ .

$(x)_+$  –  $\max\{x, 0\}$ , funcția trunchiere;

$\ln x$  – funcția logaritm natural din  $x$ ;

$\lg x$  – funcția logaritm zecimal din  $x$ ;

$\lfloor x \rfloor$  –  $\max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq x\}$ , funcția *floor*;

$l_i$  – polinomul de interpolare al lui *Lagrange*;

$C_n^k$  –  $\frac{k!}{n!(k-n)!}$ , coeficientul binomial al lui *Newton*;

$\mathbf{a}$  – mărimea reprezintă o secvență de puncte sau un vector. Cel de-al  $i$ -lea element este notat cu aceeași literă în scriere normală, având indicele  $i$ . Astfel,  $\tau, (\tau_i), (\tau_i)_1^n, (\tau_i)_{i=1}^n, (\tau_1, \dots, \tau_n)$  sunt diverse moduri de a descrie același vector  $n$ -dimensional;

$X^n$  –  $\{(x_i)_1^n \mid x_i \in X, \forall i\}$ ;

$\Delta\tau_i$  –  $\tau_{i+1} - \tau_i$ , diferența înainte;

$\nabla\tau_i$  –  $\tau_{i+1} - \tau_i$ , diferența înapoi;

$S^-(\tau)$  – numărul de schimbări tari de semn în  $\tau$ . Reprezintă cel mai mare întreg,  $r$ , cu proprietatea că pentru  $1 \leq j_1 < \dots < j_{r+1} \leq n$ ,  $\tau_{j_i} \cdot \tau_{j_{i+1}} < 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ . Similar, pentru o funcție  $f$ ,  $S^-f$  reprezintă numărul schimbărilor sale de semn și se definește ca fiind cel mai mare dintre toate numerele  $S^-(f(\tau_1), \dots, f(\tau_r))$ , cu  $r$  și  $\tau_1 < \dots < \tau_r$  arbitrare pe tot domeniul funcției  $f$ ;

$S^-(\tau)$  – numărul de schimbări slabe de semn în  $\tau$ , adică maximum schimbărilor de semn ce se pot obține atribuind valorilor nule din secvența  $\tau$  semnele  $+$  sau  $-$ ;

$$\sum_{i=r}^s \tau_i = \begin{cases} \tau_r + \tau_{r+1} + \dots + \tau_s, & r \leq s \\ 0, & r > s \end{cases};$$

$$\sum_i \tau_i = \sum_{i=r}^s \tau_i, \text{ cu } r \text{ și } s \text{ rezultând din context};$$

$$\prod_{i=r}^s \tau_i = \begin{cases} \tau_r + \tau_{r+1} + \dots + \tau_s, & r \leq s \\ 0, & r > s \end{cases};$$

$$\left. \begin{aligned} |\tau| &:= \max_i \Delta\tau_i - \text{pasul rețelei;} \\ M_\tau &:= \max_{i,j} \frac{\Delta\tau_i}{\Delta\tau_j} - \text{constanta globală a rețelei;} \\ m_\tau &:= \max_{|i-j|=1} \frac{\Delta\tau_i}{\Delta\tau_j} - \text{constanta locală a rețelei;} \\ \tau_{i+1/2} &:= \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2} \end{aligned} \right\} - \text{pentru secvențe sau rețele de discretizare nedescrescătoare}$$

A – mărimea reprezintă o matrice. Elementele ei se marchează cu aceeași literă, dar mică și în scriere obișnuită, cu doi indici  $(a_{i,j})$ ,  $(a_{i,j})_1^{m,n}$ ,  $(a_{i,j})_{i=1;j=1}^{m,n}$ ,  $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$  sunt diferite moduri de a descrie aceeași matrice de dimensiune  $(m \times n)$ ;

$$A^t - (a_{ji})_{j=1;i=1}^{n,m}, \text{ transpusa matricii } A;$$

$$A^{II} - (a_{ji}^*)_{j=1;i=1}^{n,m}, \text{ matricea conjugată transpusă sau hermitianul matricii } A;$$

$\det A$  – determinantul matricii A;

$\text{rang } A$  – rangul matricii A;

$$\delta_{ij} - \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \text{ simbolul lui } Kronecker;$$

$$\text{span}(\phi_i)_1^n - \left\{ \sum_i \alpha_i \phi_i \mid \alpha \in \mathfrak{R}^n \right\}, \text{ spațiul linear format din toate combinațiile liniare ale}$$

secvențelor de elemente  $(\phi_i)_1^n$  ale spațiului linear X. O astfel de secvență reprezintă o bază pentru span dacă acesta este linear independent, adică dacă  $\sum_i \alpha_i \phi_i = 0$  implică  $\alpha = 0$ .

Independența liniară a unei astfel de secvențe  $(\phi_i)_1^n$  este de regulă probată prin explicitarea unei secvențe corespunzătoare de funcționale liniare pe X,  $(\lambda_i)_1^n$ , pentru care  $\lambda_i \phi_j = \delta_{ij}$ ,  $\forall i, j$ .

Într-un astfel de caz, se demonstrează că  $\dim \text{span}(\phi_i)_1^n = n$ ;

$P_k$  – spațiul linear al polinoamelor de ordinul k;

$P_{k,\xi}$  – spațiul linear al funcțiilor polinomiale pe porțiuni (pp) de ordinul k cu secvența punctelor de racordare  $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{l+1}$ . Dimensiunea sa este kl, deoarece fiecare element este format

din  $l$  polinoame, fiecare având  $k$  coeficienți aleatori. Abstract,  $P_{k,\xi}$  este de  $l$  ori suma lui  $P_k$ ;

$$D^{(i)}f - \frac{d^i f}{dx^i} = f^{(i)}, i \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \text{ derivata de ordinul } i \text{ a funcției } f \in P_{k,\xi}. \text{ Reprezintă}$$

o funcție *pp* de ordinul  $k-j$  cu aceeași secvență de puncte de racordare ca și  $f$  și este compusă din suma derivatelor de ordinul  $j$  ale segmentelor polinomiale care compun funcția  $f$ ;

$P_{k,\xi,v}$  - subspațiul liniar al lui  $P_{k,\xi}$  care consistă din acele elemente care satisfac condițiile de continuitate specificate de vectorul  $v = (v_i)_2$ , compus din întregi ne-negativi;

$S_{k,t}$  - span  $(B_{i,k,t})$ , spațiul liniar al funcțiilor *spline* de ordinul  $k$  cu secvența de noduri  $t$ .  $S_{k,t} := \left\{ \sum_i \alpha_i B_{i,k,t} \mid \alpha_i \text{ real}, \forall i \right\}$ ;

$B_i - B_{i,k,t}$ , cea de-a  $i$ -a funcție *B-spline* (normalizată) de ordinul  $k$  cu secvența de noduri  $t$ .  $B_{i,k,t}(x) := (t_{i+k} - t_i) [t_i, \dots, t_{i+k}] (-x)_+^{k-1}$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}$ ;

$S_{k,n} - \bigcup \{S_{k,t} \mid \dim S_{k,t} = n\}$ . Reprezintă reuniunea tuturor funcțiilor *spline* de ordinul  $k$  cu secvența de noduri  $t = (t_i)_1^{k+n}$ , cu  $t_1 = \dots = t_k = a$ ,  $t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b$  și  $n$  fixat;

$S_{k,x}^{\text{nat}}$  - funcțiile *spline* „naturale“ de ordinul  $k$ . Sunt funcții *spline*  $f$  de ordinul  $k := 2m$ , cu noduri simple în punctele  $x_2, \dots, x_{n-1}$ , satisfăcând condițiile la limită „naturale“  $f^{(j)}(x_1) = f^{(j)}(x_n) = 0$ ,  $j = \overline{m, k-2}$ ;

$$C[a,b] - \{f : [a,b] \rightarrow \mathfrak{R} \mid f \text{ continue}\};$$

$\|f\| - \max \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ , norma uniformă a funcției  $f \in C[a,b]$ . (Se cunosc relațiile  $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$  și  $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ , pentru  $f, g \in C[a,b]$ ,  $\alpha \in \mathfrak{R}$ );

$$\|f\|_\infty - \max \{f(x) \mid x \in [a,b]\}, \text{ norma uniformă (Cebășev) a funcției } f;$$

$$\|f\|_2 - \text{norma în spațiul } L_2;$$

$\omega(f;h) - \left\{ \max |f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a,b], |x-y| \leq h \right\}$ , modulul de continuitate al funcției  $f \in C[a,b]$ . Este monoton și subaditiv în  $h$  (adică  $\omega(g;h+k) \leq \omega(g;h) + \omega(g;k)$ ) și  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \omega(g;h) = 0$ ,  $\forall g \in C[a,b]$  (pentru un interval finit  $[a,b]$ ), dar viteza cu care  $\omega(f;h)$  se

apropie de zero, atunci când  $h \rightarrow 0$  poate diferi mult de la o funcție la alta. În literatură se găsesc diverse considerații asupra acestei viteze, cea mai mare posibilă pentru o funcție  $g$ , care nu este constantă pe domeniul luat în considerare, fiind [39]:  $\omega(g; h) \leq kh$ ,  $h > 0$ . Orice funcție pentru care este adevărată această relație se spune că este continuă în sensul lui *Lipschitz* și această viteză de scădere este caracteristică oricărei funcții  $g$  care are prima derivată continuă, adică:  $\omega(g; h) \leq \|g'\|h$ , dacă  $g \in C^1[a, b]$ . O clasă mai largă o reprezintă funcțiile continue pe  $[a, b]$  care satisfac condiția lui *Hölder*:  $\omega(g; h) \leq \|g'\|h^\alpha$ ,  $k > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

$\text{dist}(g, S) = \min\{\|g - f\| \mid f \in S\}$ , distanța funcției  $g \in C[a, b]$  de submulțimea  $S$  a mulțimii  $C[a, b]$ ;

$C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ diferențiabile de } n \text{ ori}\}$ ;

$[\tau_1, \dots, \tau_j]f$  – diferența divizată de ordinul  $(j-1)$  a funcției  $f$  în punctele  $(\tau_1, \dots, \tau_j)$ .

Reprezintă coeficientul termenului  $x^k$  al polinomului de ordinul  $(k+1)$  care coincide cu funcția  $f$  în punctele  $\tau_1, \dots, \tau_{k+1}$ . În particular,  $[\tau_i] : f \rightarrow f(\tau_i)$ .

### Metode speciale de aproximare prin funcții *spline*

$I_k$  – interpolare prin funcții *spline* de ordinul  $k$ . Spre exemplu, pentru  $k = 2m$ , nodurile pot fi selectate dintre punctele de date. Se alege secvența  $t_{k+1}, \dots, t_n$  astfel încât  $t_k = a \leq \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1}, \tau_{m+j} = \tau_{k+j}$ ,  $j = \overline{1, n-k}$  și  $t_n < \tau_{n-m+1} < \dots < \tau_n \leq b = t_{n+1}$ ;

$L_k$  – aproximare cu funcții *spline* de ordinul  $k$  prin metoda celor mai mici pătrate;

$V$  – transformarea  $V$  a lui *Schoenberg*, folosită mult în CAD (*Computer Aided Design*) ca și metodă de aproximare cu păstrarea formei funcției („shape preserving“). Pentru o funcție dată,  $g$ , este definită de  $Vg := \sum_{i=1}^n g(\tau_i^*) B_i$  pe intervalul  $[a, b]$ , în care  $\mathbf{t}^* := (t_i^*)_1^n$  este o secvență de puncte specială, dată de relația  $t_i^* := (t_{i+1} + \dots + t_{i+k-1}) / (k-1)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

## ANEXA nr. 2

### Teorema lui *Weierstrass - Stone*

**Enunț:** Orice funcție  $f \in C^{(m)}[a, b]$  poate fi aproximată uniform până la ordinul  $m$  printr-un polinom de gradul  $m$ , derivatele ei fiind approximate, respectiv, prin derivatele polinomului, până la ordinul  $m$ .

**Demonstrație:** Fie  $f \in C^{(m)}[a, b]$ . Deoarece  $f^{(m)} \in C[a, b]$ , ea poate fi aproximată uniform pe  $[a, b]$  printr-o funcție în scară, continuă la dreapta și având punctele de discontinuitate pe  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ . Notăm această funcție în scară cu  $h_m$ . Considerăm următoarea problemă diferențială: să se determine funcția  $g$  care satisface relațiile:

$$\begin{cases} g^{(m)}(x) = h_m(x) & , \quad x \in [a, b] \\ g^{(r)}(a) = f^{(r)}(a) & , \quad r = 0, m-1 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Soluția acestei probleme pe intervalul  $[a, b]$  este:

$$g(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} h_m(t) dt. \quad (\text{A.2})$$

În mod evident, funcția  $g$  este un polinom de gradul  $m$ , ce are noduri punctele  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , deoarece  $h_m$  este egală cu o constantă pe fiecare subinterval  $(x_i, x_{i+1})$ .

Pe de altă parte, deoarece  $f \in C^{(m)}[a, b]$ , se poate scrie:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(t) dt. \quad (\text{A.3})$$

Din egalitățile (A.2) și (A.3) se obține:

$$f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{m-r-1}}{(m-r-1)!} [f^{(m)}(t) - h_m(t)] dt, \quad r = \overline{0, m-1}, \text{ sau:} \quad (\text{A.4})$$

$$\|f^{(r)} - g^{(r)}\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{m-r}}{(m-r)!} \|f^{(m)} - h_m\|_\infty, \quad r = \overline{0, m-1}. \quad (\text{A.5})$$

Deoarece  $f^{(m)}$  poate fi aproximată uniform pe  $[a, b]$  prin  $h_m$ , rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  poate fi scrisă relația  $|f^{(m)} - h_m| < \varepsilon$  și astfel teorema este demonstrată.

.

**Consecințe:** Orice funcție  $f \in C[a, b]$  poate fi aproximată uniform printr-un polinom de gradul  $m$ .

Oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  și  $f \in C[a, b]$ , există un polinom  $p_f$  astfel încât  $\|f - p_f\| < \varepsilon$ .



## ANEXA nr. 3

### Identificarea polinoamelor $f_i(\phi)$ și $f_p(\phi)$ cu ajutorul datelor experimentale

Deoarece fluxul  $\phi$  este luat ca variabilă independentă, este mai naturală reprezentarea ciclului de magnetizare sub forma din figura nr. A1, cu două ramuri, identificate de funcțiile  $i_1 = f_1(\phi)$  și, respectiv,  $i_2 = f_2(\phi)$ .

Curbele  $i_1(\phi)$  și  $i_2(\phi)$  sunt obținute pe cale experimentală, fiind date prin puncte. Cu ajutorul unor prelucrări matematice, din ele se pot obține polinoamele  $f_i(\phi)$  și  $f_p(\phi)$  din

formula (1.34). Utilizând relația (1.32) se poate scrie:

$$\begin{cases} i_1(\phi) = f_i(\phi) + \sqrt{\phi_m^2 - \phi^2} \cdot f_p(\phi) \\ i_2(\phi) = f_i(\phi) - \sqrt{\phi_m^2 - \phi^2} \cdot f_p(\phi) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

de unde rezultă imediat:

$$f_i(\phi) = \frac{i_1(\phi) + i_2(\phi)}{2} \quad (\text{A.7})$$

Deasemenea, din (A.6) se mai poate obține:

$$\frac{i_1(\phi) - i_2(\phi)}{2} = \sqrt{\phi_m^2 - \phi^2} \cdot f_p(\phi), \quad (\text{A.8})$$

de unde rezultă celălalt polinom:

$$f_p(\phi) = \frac{i_1(\phi) - i_2(\phi)}{2\sqrt{\phi_m^2 - \phi^2}}$$

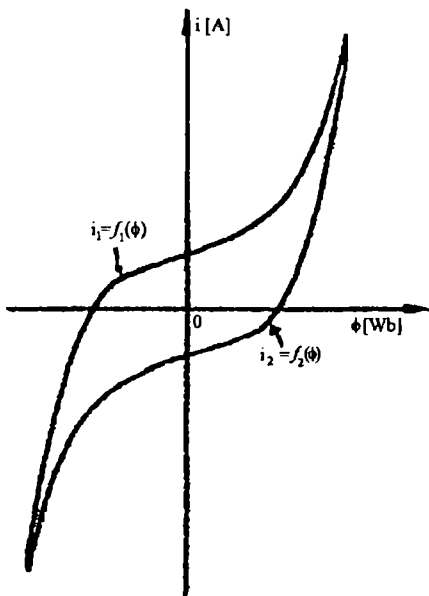


Figura nr. A1

Relațiile (A.7) și (A.9) reprezintă formulele care definesc polinoamele  $f_i(\phi)$  și  $f_p(\phi)$  în funcție de datele experimentale existente.

Deoarece, pentru necesități practice, fluxul poate fi considerat proporțional cu inducția magnetică  $B$ , iar curentul proporțional cu intensitatea câmpului magnetic  $H$ , în ecuația (1.32)

se pot opera aceste înlocuiri, obținând:

$$H = f_i(B) \pm \sqrt{B_m^2 - B^2} \cdot f_p(B), \quad (\text{A.10})$$

în care  $B_m$  este inducția maximă, iar  $f_i(B)$  și  $f_p(B)$  sunt aceleași polinoame de variabilă  $B$  ca și  $f_i(\phi)$  și, respectiv,  $f_p(\phi)$ , dar cu alți coeficienți.

În cazul TC sunt suficiente polinoame cu doi termeni, în acest caz relația (A.10) putând fi scrisă sub forma:

$$H = a_1 B + a_3 B^3 \pm \sqrt{B_m^2 - B^2} \cdot (a_0 + a_2 B^2). \quad (\text{A.11})$$

În formula (A.11), coeficienții  $a_k$ ,  $k = \overline{0,3}$  pot fi deduși din datele furnizate în mod obișnuit de constructorul miezului magnetic, conform procedurii următoare. Pentru  $B = 0$ ,  $H$  reprezintă valoarea câmpului coercitiv  $H_c$ , deci:

$$a_0 = \frac{H_c}{B_m}. \quad (\text{A.12})$$

Derivând expresia (A.11) în raport cu variabila  $B$  în punctul  $B = 0$ ,  $H = H_c$  se obține:

$$a_1 = \left( \frac{dH}{dB} \right)_{B=0} = \frac{1}{\mu_d}, \quad (\text{A.13})$$

unde  $\mu_d$  este permeabilitatea diferențială în punctul de coordonate  $B = 0$ ,  $H = H_c$ .

Pentru punctul  $B = B_m$ ,  $H = H_m$  se obține:

$$a_3 = \frac{H_m - a_1 B_m}{B_m^3}. \quad (\text{A.14})$$

În sfârșit, pentru punctul  $B = B_r$ ,  $H = 0$ :

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3 B_r}{B_r \sqrt{B_m^2 - B_r^2}} - \frac{a_0}{B_r^2}, \quad (\text{A.15})$$

în care  $B_r$  este inducția remanentă.

## ANEXA nr. 4

### STAS 4324-62 referitor la erorile tolerate ale transformatorului de curent

Clasa de precizie	$\frac{I_1}{I_{1n}} \cdot 100$ [%]	Erori tolerate		Sarcina secundară
		de curent [%]	de unghi [minute]	
		0,1	10	
	20	$\pm 0,15$	$\pm 10$	
	100 ÷ 120	$\pm 0,1$	$\pm 6$	
0,2	10	$\pm 0,5$	$\pm 20$	
	20	$\pm 0,35$	$\pm 15$	
	100 ÷ 120	$\pm 0,2$	$\pm 10$	
0,5	10	$\pm 1$	$\pm 60$	
	20	$\pm 0,72$	$\pm 40$	
	100 ÷ 120	$\pm 0,5$	$\pm 30$	
1	10	$\pm 2$	$\pm 120$	
	20	$\pm 1,5$	$\pm 80$	
	100 ÷ 120	$\pm 1$	$\pm 60$	
3	50 ÷ 100	$\pm 3$	-	$Z_2 = (0,5 + 1) \cdot Z_{2n}$ la $\cos \varphi_2 = 0,8$
5	50 ÷ 100	$\pm 5$	-	

## Program pentru evaluarea unei funcții și/sau a derivatelor ei din reprezentarea polinomială pe porțiuni (pp)

O funcție *pp* poate fi stocată în calculator în mai multe feluri. Deoarece pentru scopurile propuse în teză funcția *f* și derivatele ei trebuie evaluate în multe puncte, am apreciat că o reprezentare convenabilă și eficientă este următoarea.

Reprezentarea *pp* pentru  $f \in \mathbf{P}_{k,\xi}$  este dată de:

- întregii *k* și *l* care definesc ordinul și numărul segmentelor polinomiale;
- secvența strict crescătoare  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l+1}$  a punctelor de joncțiune;
- matricea  $\mathbf{c} = (c_{ji})_{j=1; i=1}^{k \ l}$  a derivatelor ei la dreapta în punctele de joncțiune, adică

numerele  $c_{ji} = D^{(j-1)}f(\xi_i^+)$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $i = \overline{1, l}$ .

În termenii expuși, valoarea derivatei de ordinul *j* a funcției *f*,  $D^{(j)}f$ , în punctul *x* este dată de relația:

$$D^{(j)}f(x) = \sum_{m=j}^{k-1} c_{m+1,j} \frac{(x - \xi_i)^{m-j}}{(m-j)!}, \quad (\text{A.16})$$

în care, conform convențiilor adoptate, *i* este un întreg dat de :

<pre> real function beta(a,b,i,j,c,k) dimension a(i),b(j,i) beta=.0 d=j-k if (d.le..0) return call gama(a,i,c,l,m) e=c-a(l) do 1 m=j,k+1,-1 beta=b(m,l)+beta/d*e 1 d=d-1. return end                 </pre>	$\begin{cases} i=1 & , \quad x < \xi_2 \\ 1 < i < l & , \quad \xi_i \leq x \leq \xi_{i+1} \\ i=l & , \quad \xi_i \leq x \end{cases} \quad (\text{A.17})$
---	--

Ca date de intrare pentru acest program, function

beta(ajonct,coef,l,k,x,jderiv) trebuie specificați

întregii *k* și *l*, vectorul *ajonct*, care conține secvența  $\xi$  și matricea coeficienților *c*. Derivata de ordinul *j* a funcției *f* este calculată sub forma (2.28), în care:

$$h = x - \text{ajonct}(i) \quad , \text{ și respectiv:} \quad (\text{A.18})$$

$$i = \max(1, \max(j, \text{ajonct}(j) < x, 1 \leq j \leq l)). \quad (\text{A.19})$$

$x$  reprezintă punctul în care se face evaluarea, iar  $j_{deriv}$  este un întreg ne-negativ care dă ordinul derivatei ce se dorește a fi evaluată (evaluarea funcției se face pentru  $j = 0$ ).

Ca și date de ieșire, programul furnizează valoarea derivatei de ordinul  $j$  a funcției  $f$  în punctul  $x$ . Indicele  $l$  al intervalului în care se găsește  $x$  este identificat cu ajutorul unui subprogram - *Gama*, apelat de funcția *Beta*, pentru ca apoi derivata să fie evaluată conform formulei (2.28) prin algoritmul de multiplicare în serie.

```

subroutine gama(a, i, b, j, k)
dimension a(i)
data l/1/
save l
m=l+1
if (i.ge.m) go to 1
if (a(i).lt.b) go to 11
if (i.le.1) go to 9
l=i-1
m=i
1 if (a(m).lt.b) go to 4
if (a(1).lt.b) go to 10
n=1
2 m=1
l=m-n
if (l.le.1) go to 3
if (a(l).lt.b) go to 7
n=n*2
go to 2
3 l=1
if (a(1).ge.b) go to 9
go to 7
4 n=1
5 l=m
m=l+n
if (i.lt.m) go to 6
if (a(m).ge.b) go to 7
n=n*2
go to 5
6 if (a(i).lt.b) go to 11
m=i
7 n=(l+m)/2
if (l.eq.n) go to 10
if (a(n).ge.b) go to 8
l=n
go to 7
8 m=n
go to 7
9 k=-1
j=1
return
10 k=0
j=1
return
11 k=1
j=i
return
end
    
```

Subrutina *Gama* este apelată conform următoarei proceduri: `call gama(xt, lxt, x, indice1, indice2)`. Datele de intrare sunt secvența reală  $xt$  de dimensiune  $lxt$ , presupusă a fi nedescrescătoare și  $x$  (punctul a cărui poziție relativ la secvența  $xt$  trebuie stabilită). Datele de ieșire sunt reprezentate de întregii *indice1* și *indice2*, care pot lua următoarele valori:

$$\begin{array}{lll}
 1 & -1 & \text{dacă } x < xt(1) \\
 i & 0 & \text{dacă } xt(i) \leq x \leq xt(i+1). \\
 lxt & 1 & \text{dacă } xt(lxt) \leq x
 \end{array} \quad (\text{A.20})$$

Se observă că *indice2* = 0 este cazul „uzual”.

Subprogramul este scris ca să fie eficient în cazul unor apeluri repetate, cu  $x$  variind într-o secvență (des)crescătoare, situație care apare, spre exemplu, la reprezentarea grafică a funcției  $f$  pe un interval. Alegerea inițială pentru *indice1* este valoarea returnată în apelul anterior și reținută în variabila locală  $l$ , apoi se verifică dacă  $l \leq lxt$  (acest lucru este necesar deoa-rece apelul poate să nu aibă nimic comun cu cel anterior). Apoi, dacă  $xt(l) \leq x \leq xt(l+1)$  se pune *indice1* = 1 și rezultatul este obținut doar după evaluarea a trei inegalități. În cazul contrar, se dublează în mod repetat pasul de căutare până când  $x$  se încadrează în interval și se utilizează metoda înjumătățirii intervalului pentru a obține limitele sale.

## ANEXA nr. 6

### Program de calcul simultan în punctul $x$ a celor $k$ funcții $B$ -spline de ordinul $k$ ce pot fi nenule

Pe linia de comandă, call `delta(t, indice1, indice2, x, indice3, bi)`, intrările sunt date de:

```
subroutine delta(a, i, j, b, k, c)
parameter (l=20)
dimension a(1), c(i), d(1), e(1)
data m/1/
go to (1,2), j
1 m=1
  c(1)=1.
  if (i.lt.m) return
2 n=m+1
  e(m)=a(k+m)-b
  d(m)=b-a(k-m+1)
  f=.0
  do 3 i1=1, m
    g=c(i1)/(d(n-i1)+e(i1))
    c(i1)=e(i1)*g+f
3 f=d(n-i1)*g
  c(n)=f
  m=n
  if (i.ge.m) go to 2
return
end
```

- $t$  - secvența de noduri de lungime  $indice1+indice2$ , presupusă a fi strict crescătoare;

- $indice1$  și  $indice2$  - întregi care determină ordinul  $n = \max(indice1, (j+1) \cdot (indice2-1))$  al funcțiilor  $B$ -spline a căror valori în punctul  $x$  se vor calcula.  $indice2$  este utilizat pentru a evita recalcularea atunci când sunt necesare mai multe coloane ale formației triunghiulare. Mai precis, dacă  $indice2=1$  sunt distruse toate datele anterioare și întreaga structură triunghiulară de funcții  $B$ -spline este generată ordin

cu ordin (coloană cu coloană), pentru  $\overline{1, indice1}$ ; dacă  $indice2=2$ , se calculează numai valorile funcțiilor  $B$ -spline de ordinele  $\overline{j+1, n}$ , făcându-se ipoteza că restul datelor din structură sunt cele existente la apelarea anterioară;

- $x$  - punctul în care se dorește evaluarea funcțiilor  $B$ -spline;
- $indice3$  - un întreg ales astfel încât  $t_{indice3} \leq x \leq t_{indice3+1}$ .

Datele de ieșire sunt reprezentate de vectorul  $bi$ , de lungime  $n$ ,  $bi(i)$  conținând valoarea în  $x$  a polinomului de ordinul  $n$  care coincide cu funcția  $B$ -spline  $B_{i+indice3-n, n, t}$  pe intervalul  $(t_{indice3}, t_{indice3+1})$ .

## Program de construire a reprezentării $pp$ a unei funcții $f$ pe baza descrierii ei cu ajutorul funcțiilor $B$ -spline

Pe linia de apel, call `epsilon(t,bcoef,n,k,date,ajonct,coef,l)`, datele de intrare sunt:

```

subroutine epsilon(a,b,i,j,c,d,e,k)
parameter (l=20)
dimension a(1),b(i),c(j,j),d(1),e(j,1),f(1)
m=0
d(1)=a(j)
do 6 n=j,i
if (a(n).eq.a(n+1)) go to 6
m=m+1
d(m+1)=a(n+1)
if (j.gt.1) go to 1
e(1,m)=b(n)
go to 6
1 do 2 i1=1,j
2 c(i1,1)=b(i1-j+n)
do 3 i1=2,j
j1=i1-1
k1=j-j1
g=float(k1)
do 3 l1=1,k1
h=a(l1+n)-a(l1-k1+n)
3 if (h.gt..0) c(l1,i1)=(c(l1+1,j1)-c(l1,j1))/h*g
call delta(a,1,1,a(n),n,f)
e(j,m)=c(1,j)
do 5 i1=2,j
call delta(a,i1,2,a(n),n,f)
j1=i1+j+1
o=.0
do 4 k1=1,i1
4 o=c(k1,j1)*f(k1)+o
5 e(j1,m)=o
6 continue
k=m
return
end

```

- $t$  - secvența nodurilor, de lungime  $n+k$ ;

- $bcoef$  - secvența coeficienților  $B$ -spline, de lungime  $n$ ;

- $k$  - ordinul funcției  $spline$ .

Matricea `date`, de dimensiune  $k \times k$ , este folosită pentru stocarea coeficienților `bcoef` ai unui segment al funcției  $spline$ , precum și a primelor sale  $k-1$  derivate.

Datele de ieșire sunt:

- `ajonct` - secvența punctelor de joncțiune, de dimensiune  $l+1$ ; conține, în ordine crescătoare,

punctele distincte din secvența  $t_k, t_{n+1}$ ;

- `coef` - matrice de ordinul  $k \times n$ , în care `coef(i,j)` caracterizează cea de-a  $(i-1)$ -a derivată la dreapta a funcției  $spline$  în punctul `ajonct(j)`;

- $l$  - numărul segmentelor polinomiale care constituie funcția  $spline$  pe intervalul  $(t_k, t_{n+1})$ ;

Așa cum precizează teorema *Curry & Schoenberg* [69], trebuie găsite cele  $l+1$  puncte

distincte  $\xi_1 < \dots < \xi_{l+1}$  printre numerele  $\overline{t_k, t_{n+1}}$ , apoi acestea trebuie stocate (în ordine crescătoare) în  $\overline{ajonct(1), ajonct(n+1)}$ ; pentru  $i = \overline{1, l}$  și  $j = \overline{1, k}$  trebuie calculată valoarea  $D^{(j-1)}f(\xi_i^+)$  și stocată în  $coef(j, i)$ .

Să presupunem că  $\xi_i = t(m) < t(m+1)$  pentru  $i \leq l$ . În aceste condiții,  $\xi_{i+1} = t(m+1)$  și  $f = \sum_{r=1}^k \alpha_{m-k+r} B_{m-k+r, k}$  pe intervalul  $[\xi_i^+, \xi_{i+1}^-]$ . Derivata de ordinul  $j$  a unei funcții *spline* este [121]:

$$D^{(j)}\left(\sum_i \alpha_i B_{i, k}\right) = \sum_i \alpha_i^{(j+1)} B_{i, k-j}, \text{ unde:} \quad (\text{A.21})$$

$$\alpha_r^{(j-1)} = \begin{cases} \alpha_r & \text{pentru } j = 0 \\ \frac{\alpha_r^{(j)} - \alpha_{r-1}^{(j)}}{(t_{r+k-j} - t_r)/(k-j)} & \text{pentru } j > 0 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Din (A.22) rezultă că:

$$f^{(j)} = \sum_{r=j+1}^k \alpha_{m-k+r}^{(j+1)} B_{m-k+r, k-j} \quad (\text{A.23})$$

pe intervalul  $[\xi_i^+, \xi_{i+1}^-]$ ,  $j = \overline{0, k-1}$ ,  $\alpha_r^{(j)}$  fiind explicată în (A.22). Dacă plasăm cele  $k-j$  numere  $\alpha_{m-k+r}^{(j+1)}$  în cea de-a  $(j+1)$ -a coloană a unei matrici  $a$ , după cum urmează:

$$a(r, j+1) \leftarrow \alpha_{m-k+j+r}^{(j+1)}, \quad r = \overline{1, k-j}, \quad (\text{A.24})$$

atunci formula de definire a lui  $\alpha_r^{(j)}$  devine:

$$\begin{cases} a(r, 1) \leftarrow \alpha_{m-k+r}^{(j+1)}, & r = \overline{1, k}; \\ a(r, j+1) \leftarrow (k-j) \cdot \frac{a(r+1, j) - a(r, j)}{t(m+r) - t(m+j-k+r)}, & r = \overline{1, k-j}, \quad j = \overline{1, k-1}. \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Odată calculați acești coeficienți, se găsește că:

$$f^{(j)}(\xi_i^+) = \sum_{r=1}^{k-j} a(r, j+1) \cdot b_r, \quad \text{în care:} \quad (\text{A.26})$$

$b_r := B_{m-k+r, k-j}(\xi_i^+)$ ,  $r = \overline{1, k-j}$  se obține cu ajutorul subrutinei anterioare (Anexa nr. 6) prin apelul `call delta(t, j+1, l, x_i, m, b)`.



## ANEXA nr. 8

### Program de plasare optimală a nodurilor

Pe linia de comandă, call `zeta(ajonct,coef,l,k,ajn,ln,coefg)`, ca date de intrare sunt următoarele:

```
subroutine zeta(a,b,i,j,c,k,d)
dimension a(1),b(j,i),c(1),d(2,i)
data 1/0/
c(1)=a(1)
c(k+1)=a(i+1)
if (i.le.1) go to 6
e=1./float(j)
d(1,1)=.0
f=abs(b(j,2)-b(j,1))/(a(3)-a(1))
do 1 m=2,i
g=abs(b(j,m)-b(j,m-1))/(a(m+1)-a(m-1))
d(2,m-1)=(f+g)**e
d(1,m)=d(1,m-1)+d(2,m-1)*(a(m)-a(m-1))
1 f=g
d(2,i)=(f*2.)**e
g=((a(i+1)-a(i))*d(2,i)+d(1,i))/float(k)
if (1.ne.0) print 8,g,(m,d(1,m),d(2,m),m=1,i)
if (g.le..0) go to 6
m=1
do 5 n=2,k
h=float(n-1)*g
2 if (i.eq.m) go to 3
if (d(1,m+1).gt.h) go to 3
m=m+1
go to 2
3 if (d(2,m).eq..0) go to 4
c(n)=a(m)+(h-d(1,m))/d(2,m)
go to 5
4 c(n)=(a(m)+a(m+1))/2.
5 continue
return
6 g=(a(i+1)-a(1))/float(k)
do 7 m=2,k
7 c(m)=a(1)+float(m-1)*g
return
8 format(8h pasul=,e16.7/(i5,2e16.5))
end
```

- *ajonct*, *coef*, *l*, *k* - reprezintă *pp* de ordinul *k* a unei funcții *f*.  $D^{(k-1)}f(x) = \text{coef}(k,i)$  pentru  $\text{ajonct}(i) \leq x < \text{ajonct}(i+1)$ ;
- *ln* - numărul de intervale în care va fi divizat intervalul  $(a,b)$  prin noua secvență de puncte de joncțiune *ajn*;
- *ajn* - vector de lungime *ln*+1, care conține noua secvență de puncte de joncțiune;
- *coefg* - coeficienții reprezentării *pp* a funcției monotone *g*.

## Program de interpolare prin funcții *spline* polinomiale

Subprogramul *Eta* formează sistemul de ecuații liniare (2.58) și îl rezolvă prin eliminare gaussiană fără pivotare, utilizând două rutine.

Pe linia de comandă, `call eta(tau,gtau,t,n,k,q,bcoef,index)`, datele de intrare sunt:

```

subroutine eta(a,b,c,i,j,d,e,k)
dimension a(i),b(i),c(1),d(1),e(i)
l=i+1
m=j-1
n=m*2
i1=j
j1=i*(j+m)
do 1 k1=1,j1
1 d(k1)=.0
do 4 k1=1,i
f=a(k1)
l1=min0(j+k1,l)
i1=max0(i1,k1)
if (c(i1).ge.f) go to 7
2 if (c(i1+1).ge.f) go to 3
i1=i1+1
if (i1.lt.l1) go to 2
i1=i1-1
if (c(i1+1).le.f) go to 7
3 call delta(c,j,l,f,i1,e)
m1=(i1-j)*(j+m)-i1+k1+1
do 4 n1=1,j
m1=m1+n
4 d(m1)=e(n1)
call banfac(d,j+m,i,m,m,k)
go to (5,8),k
5 do 6 k1=1,i
6 e(k1)=b(k1)
call banslv(d,j+m,i,m,m,e)
return
7 k=2
8 print 9
return
9 format(45h sistemul liniar din eta nu este inversabil)
end

```

- *tau* - vector de lungime  $n$ , conținând abscisele punctelor de date (în ordine strict crescătoare);

- *gtau* - vector de lungime  $n$ , conținând ordonatele punctelor;

- *t* - secvența de noduri, de lungime  $n+k$ ;

- $n$  - numărul punctelor de date (și dimensiunea spațiului  $\mathcal{S}_{k,t}$ );

- $k$  - ordinul funcțiilor *spline* utilizate în aproximare.

Datele de ieșire sunt constituite din:

- $q$  - vector de dimensiunea  $(2k-1) \cdot n$ , conținând factorizarea triunghiulară a matricii coeficienților pentru  $B$ -coeficienții interpolantului *spline*;

- *bcoef* - vector de lungime  $n$  conținând  $B$ -coeficienții interpolantului *spline*;

- *indice* - indică succesul (= 1) sau eșecul (= 2) rezolvării sistemului. Printre altele, sistemul are (teoretic) soluție dacă și numai dacă  $t(i) < \tau(i) < t(i+k)$ ,  $\forall i$  [78]. Violarea acestei condiții conduce cu certitudine la *indice* = 2.

## Subprograme de soluționare a unui sistem algebric liniar cu matrice bandă

```

subroutine banfac(a, i, j, k, l, m)
dimension a(i, j)
m=1
n=l+1
i1=j-1
if (i1) 9, 8, 1
1 if (k.gt.0) go to 3
do 2 j1=1, i1
2 if (a(n, j1).eq..0) go to 9
go to 8
3 if (l.gt.0) go to 5
do 4 j1=1, i1
b=a(n, j1)
if (b.eq..0) go to 9
k1=min0(j-j1, k)
do 4 l1=1, k1
4 a(l1+n, j1)=a(l1+n, j1)/b
go to 8
5 do 7 j1=1, i1
b=a(n, j1)
if (b.eq..0) go to 9
k1=min0(j-j1, k)
do 6 l1=1, k1
6 a(l1+n, j1)=a(l1+n, j1)/b
m1=min0(j-j1, l)
do 7 n1=1, m1
i2=j1+n1
j2=n-n1
c=a(j2, i2)
do 7 k3=1, k1
7 a(j2+k3, i2)=a(j2+k3, i2)-a(k3+n, j1)*c
8 if (a(n, j).ne..0) return
9 m=2
return
end
subroutine banslv(a, i, j, k, l, b)
dimension a(i, j), b(j)
m=l+1
if (j.eq.1) go to 6
n=j-1
if (k.eq.0) go to 2
do 1 i1=1, n
j1=min0(j-i1, k)
do 1 k1=1, j1
1 b(i1+k1)=b(i1+k1)-a(k1+m, i1)*b(i1)
2 if (l.gt.0) go to 4
do 3 n=1, j
3 b(n)=b(n)/a(1, n)
return
4 do 5 n=j, 2, -1
b(n)=b(n)/a(m, n)
i1=min0(1, n-1)
do 5 j1=1, i1
5 b(n-j1)=b(n-j1)-a(m-j1, n)*b(n)
6 b(1)=b(1)/a(m, 1)
return
end

```

Subprogramele *Banfac* și *Banslv* sunt utilizate de programul *Eta* pentru rezolvarea unui sistem liniar de ecuații algebrice cu matrice bandă prin eliminare gaussiană fără pivotare. Această metoda de soluționare nu necesită pivotarea liniilor în timpul factorizării pentru matricile bandă total pozitive care apar în calculele cu funcții *spline*.

*Banfac* primește în  $a$  porțiunea nenulă a matricii bandă de ordinul  $j$ , având  $k+l+1$  benzi ( $k$  sub și  $l$  deasupra diagonalei principale).  $m=1$  indică succesul, iar  $m=2$  semnifică eșecul (fie  $j-1$ ,  $k$  sau  $l$  sunt ne-negative, fie unul din pivoții potențiali a fost găsit nul, ceea ce arată că matricea inițială nu poate fi factorizată LU, fiind singulară). La ieșire,  $a$  conține factorizarea LU a matricii bandă.

*Banslv* returnează soluția  $x$  a sistemului algebric liniar  $a \cdot x = b$  în locul vectorului  $b$ ,  $a$  conținând factorizarea LU a matricii bandă inițiale. Cu  $a = L \cdot U$ , sistemul unitar triunghiular inferior  $L(U \cdot x) = b$  este rezolvat pentru  $y = U \cdot x$ , rezultatul fiind stocat în  $b$ ; apoi se rezolvă sistemul triunghiular superior  $U \cdot x = y$ , obținându-se soluția  $x$ . Calculele

se fac de așa natură încât instrucțiunile de ciclare sunt cuprinse numai în cadrul câte unei coloane.

## ANEXA nr. 10

### Program pentru calculul secvenței de noduri $t$ pentru $\tau$ cu metoda lui Newton

Pe linia de comandă, call teta(tau,n,k,date,t,index), datele de intrare sunt:

•  $\tau$  - vector de lungime  $n$  conținând punctele de interpolare; secvența trebuie să fie nedescrescătoare, cu  $\tau(i) < \tau(i+k)$ ,  $\forall i$ ;

```
subroutine teta(a,i,j,b,c,k)
dimension a(i),b(1),c(1)
data 1,d/10,.1e-5/
open(4,file='out.txt',status='new')
m=i-j
if(m) 1,25,2
1 write(4,28)i,j
go to 27
2 if(j.gt.2) go to 3
write(4,29)j
go to 27
3 e=j
n=j+j
i1=j+1
j1=j-1
k1=n-1
l1=i+j
f=-1.
if(m.gt.(m/2)*2) f=1.
m1=i+n+1
n1=m+m1+1
i2=i+n1
j2=i2+m
k2=i1+j2
l2=k1*m
do 4 m2=1,j
b(m2)=a(1)
4 b(l1+m2)=a(i)
do 5 m2=1,i
5 b(j+m2)=a(m2)
b(m1)=a(1)
b(m+m1+1)=a(i)
do 7 m2=1,m
g=.0
do 6 n2=1,j1
6 g=a(m2+n2)+g
7 b(m2+m1)=g/float(j1)
b(i+n1)=.5
m2=1
g=(a(i)-a(1))*d/float(m)
8 do 9 n2=1,l2
9 b(k2+n2)=.0
do 10 n2=2,i
10 b(n1+n2-1)=.0
h=f
n2=i1
do 15 i3=1,m
o=b(i3+m1)
11 if(b(n2+1)ge.o) go to 12
n2=n2+1
if(l1.ge.n2) go to 11
n2=n2-1
12 call bsp1vb(b,j,1,o,n2,b(j2+1))
j3=n2-j
k3=(i3-1)*k1-i3+j3+k2
l3=max0(j-j3,1)
m3=min0(i-j3,j)
do 13 n3=l3,m3
13 b(k3+n3)=b(j2+n3)
call bsp1vb(b,i1,2,o,n2,b(1+j2))
n3=max0(j3-i1,0)
l3=1-min0(j3-i1,0)
do 14 i4=l3,i1
n3=n3+1
14 b(n1+n3)=b(n1+n3)-b(i4+j2)*h
15 h=-h
call banfac(b(k2+1),k1,m,j1,j1,k)
go to(17,16),k
16 write(4,30)
return
17 do 18 n2=i,2,-1
18 b(n1+n2-1)=b(n1+n2)+b(n1+n2-1)
do 19 n2=1,m
19 b(i2+n2)=(a(j+n2)-a(n2))*b(n1+n2)/e
call banslv(b(k2+1),k1,m,j1,j1,b(i2+1))
o=.0
h=f
do 22 n2=1,m
p=b(i2+n2)*h
o=amax1(abs(p),o)
if(p.gt..0) go to 20
p=amax1((b(m1+n2-1)-b(m1+n2))/3.,p)
go to 21
20 p=amin1((b(m1+n2+1)-b(m1+n2))/3.,p)
21 h=-h
22 b(m1+n2)=b(m1+n2)+p
if(g.ge.o) go to 23
m2=m2+1
if(l.gt.m2) go to 8
write(4,31)l
23 do 24 n2=1,m
24 c(j+n2)=b(m1+n2)
25 do 26 n2=1,j
c(n2)=a(1)
26 c(i+n2)=a(i)
return
27 k=2
return
28 format(13h argument n =,i3,24h in teta inferior lui k=,i3)
29 format(13h argument k =,i3,24h in teta mai mic decat 3)
30 format(39h matricea c in teta nu este inversabila)
31 format(34h procedeul Newton nu converge dupa,i3,5h pasi)
end
```

- $n$  - numărul punctelor de date;
- $k$  - ordinul schemei de acoperire optimală care se va utiliza.

$Date$  reprezintă un vector de lucru de dimensiune  $(n-k)(2k+3)+5k+3$ . Programul furnizează vectorul  $t$  de lungime  $n+k$ , ce conține secvența optimală de noduri,  $t(1)=\dots=t(k)=tau(1)$  și  $t(n+1)=\dots=t(n+k)=tau(n)$ , cele  $n-k$  puncte interioare fiind calculate prin metoda lui *Newton* în așa fel încât funcția *signum*, care schimbă de semn numai în punctele  $\overline{t(k+1), t(n)}$  pe intervalul  $(tau(r), tau(n))$  să fie ortogonală pe acest interval cu spațiul  $S_{k,r}$ .

## Program pentru evaluarea unei funcții și/sau a derivatelor ei din $B$ -reprezentarea acesteia

Apelul și rezultatele furnizate sunt similare celor discutate pentru *Beta* (Anexa nr. 5).

```

real function iota(a,b,i,j,c,k)
parameter (l=20)
dimension a(1),b(i),d(1),e(1),f(1)
iota=.0
if (j.lt.k) return
call gama(a,i+j,c,m,n)
if (n.ne.0) return
n=j-1
if (n.gt.0) go to 1
iota=b(m)
return
1 i1=1
j1=m-j
if (j1.ge.0) go to 4
i1=1-j1
do 2 k1=1,m
2 e(k1)=c-a(m-k1+1)
do 3 k1=1,n
d(j-k1)=.0
3 e(k1)=e(m)
go to 6
4 do 5 k1=1,n
5 e(k1)=c-a(m-k1+1)
6 k1=j
l1=i-m
if (l1.ge.0) go to 9
k1=j+l1
do 7 l1=1,k1
7 f(l1)=a(l1+m)-c
do 8 l1=k1,n
d(l1+1)=.0
8 f(l1)=f(k1)
go to 11
9 do 10 l1=1,n
10 f(l1)=a(l1+m)-c
11 do 12 l1=i1,k1
12 d(l1)=b(j1+l1)
if (k.eq.0) go to 14
do 13 i1=1,k
j1=j-i1
g=float(j1)
k1=j1
do 13 l1=1,j1
d(l1)=((d(l1+1)-d(l1))/(e(k1)+f(l1))) * g
13 k1=k1-1
14 if (k.eq.n) go to 16
do 15 l1=k+1,n
j1=j-l1
k1=j1
do 15 m1=1,j1
d(m1)=(d(m1)*f(m1)+d(m1+1)*e(k1))/(e(k1)+f(m1))
15 k1=k1-1
16 iota=d(1)
return
end

```

## ANEXA nr. 11

### Program pentru ajustare („smoothing“) cu funcții *spline*

Apelul se face la comanda `function kapa(x,y,dy,n,s,v,a)`. Datele de intrare sunt:

- $\overline{x(1),x(n)}$  - abscisele punctelor de date, constituind o secvență strict crescătoare;
- $\overline{y(1),y(n)}$  - secvența corespunzătoare a ordonatelor;

```

real function kapa(a,b,c,i,d,e,f)
real a(i),b(i),c(i),e(i,7),f(i,4)
call setq(a,c,b,i,e,f(1,4))
if (d.gt..0) go to 2
1 g=1.
call chls(g,e,f(1,4),i,1,f(1,3),f(1,1))
h=.0
go to 7
2 g=.0
call chls(g,e,f(1,4),i,1,f(1,3),f(1,1))
h=.0
do 3 j=1,i
3 h=(c(j)*f(j,1))**2+h
h=h*36.
if (d.gt.h) go to 7
o=.0
p=h
q=.0
do 4 j=2,i
4 q=e(j-1,4)*(f(j-1,3)*(f(j-1,3)+f(j,3))+f(j,3)**2)+q
g=(h-d)/q/24.
5 call chls(g,e,f(1,4),i,1,f(1,3),f(1,1))
h=.0
do 6 j=1,i
6 h=(c(j)*f(j,1))**2+h
h=h*(1.-g)**2*36.
if (d*1.01.gt.h) go to 7
if (h.ge.p) go to 1
r=(g-o)*(h-d)/(h-p)
o=g
g=g-r
p=h
if (g.lt.1.) go to 5
g=1.-sqrt(d/p)*(1.-o)
go to 5
7 kapa=h
h=(1.-g)*6.
do 8 j=1,i
8 f(j,1)=b(j)-c(j)**2*f(j,1)*h
o=g*6.
do 9 j=1,i
9 f(j,3)=f(j,3)*o
j=i-1
do 10 k=1,j
f(k,4)=(f(k+1,3)-f(k,3))/e(k,4)
10 f(k,2)=(f(k+1,1)-f(k,1))/e(k,4)-e(k,4)*(e(k,4)*f(k,4)/3.+f(k,3))
*/2.
return
end

```

- $\overline{dy(1),dy(n)}$  - secvență de estimări asupra incertitudinii datelor de intrare;

- $n$  - numărul punctelor de date ( $n > 1$ );

- $s$  - marginea superioară a distanței pătratice medii a funcției  $f$  față de setul de date.

*Kapa* folosește două subprograme prezentate în continuare.  $a(n,4)$  și  $v(n,7)$  sunt matrici de lucru. La ieșire,  $a(:,1)$  conține secvența ordonatelor ajustate, iar  $a(i,j) = d^{(j-1)} f(x(i))$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = 2, 3, 4$ , adică primele trei derivate ale

funcției *spline* de ajustare  $f$  la capătul din stânga al fiecăruia dintre intervalele de date.

## Subprograme pentru funcția *spline* de ajustare („smoothing“)

```

subroutine setq(a,b,c,i,d,e)
dimension a(i),b(i),c(i),d(i,7),e(i)
j=i-1
d(1,4)=a(2)-a(1)
do 1 k=2,j
d(k,4)=a(k+1)-a(k)
d(k,1)=b(k-1)/d(k-1,4)
d(k,2)=-b(k)/d(k,4)-b(k)/d(k-1,4)
1 d(k,3)=b(k+1)/d(k,4)
d(i,1)=.0
do 2 k=2,j
2 d(k,5)=d(k,1)**2+d(k,2)**2+d(k,3)**2
if (j.lt.3) go to 4
do 3 k=3,j
3 d(k-1,6)=d(k-1,2)*d(k,1)+d(k-1,3)*d(k,2)
4 d(j,6)=.0
if (j.lt.4) go to 6
do 5 k=4,j
5 d(k-2,7)=d(k-2,3)*d(k,1)
6 d(j-1,7)=.0
d(j,7)=.0
f=(c(2)-c(1))/d(1,4)
do 7 k=2,j
g=(c(k+1)-c(k))/d(k,4)
e(k)=g-f
7 f=g
return
end
subroutine chls(a,b,c,i,j,d,e)
real b(i,7),c(i),d(i),e(i)
k=i-1
f=(1.-a)*6.
g=a*2.
do 1 l=2,k
b(1,1)=(b(1-1,4)+b(1,4))*g+b(1,5)*f
b(1,2)=a*b(1,4)+b(1,6)*f
1 b(1,3)=b(1,7)*f
m=i-2
if (m.ge.2) go to 2
d(1)=.0
d(2)=c(2)/b(2,1)
d(3)=.0
go to 6
2 do 3 n=2,m
h=b(n,2)/b(n,1)
b(n+1,1)=b(n+1,1)-b(n,2)*h
b(n+1,2)=b(n+1,2)-b(n,3)*h
b(n,2)=h
h=b(n,3)/b(n,1)
b(n+2,1)=b(n+2,1)-b(n,3)*h
3 b(n,3)=h
d(1)=.0
b(1,3)=.0
d(2)=c(2)
do 4 n=2,m
4 d(n+1)=c(n+1)-b(n,2)*d(n)-b(n-1,3)*d(n-1)
d(i)=.0
d(k)=d(k)/b(k,1)
do 5 n=m,2,-1
5 d(n)=d(n)/b(n,1)-b(n,2)*d(n+1)-b(n,3)*d(n+2)
6 h=.0
do 7 n=2,i
e(n)=(d(n)-d(n-1))/b(n-1,4)
e(n-1)=e(n)-h
7 h=e(n)
e(i)=-e(i)
return
end

```

Funcția *spline* de ajustare a lui *Schoenberg* și *Reinsch* care construiește aproximantul cubic cu cea mai mică derivată a doua posibilă, descrisă în §§ 2.2.2.4 și implementată sub numele de *Kapa* folosește două subrutine, *Setq* și *Chls*.

Dacă facem notația  $d = x(\cdot+1) - x(\cdot)$  și notăm cu  $Q$  matricea tridiagonală de ordinul  $(i-2 \times i)$  cu linia generală de tipul:

$$1/d(x) \quad -1/d(x) \quad -1/d(x+1) \quad 1/d(x+1)$$

și respectiv cu  $D$  matricea diagonală cu linia generală  $d_i$ , *Setq* plasează  $d$  în  $d(\cdot,4)$ , cele trei benzi ale matricii  $Q^t \cdot D$  în  $d(\cdot,1 \div 3)$  și cele trei benzi ale matricii  $(D \cdot Q)^t \cdot (D \cdot Q)$  în  $d(\cdot,5 \div 7)$ .

*Chls* construiește cele trei diagonale superioare ale matricii  $6 \cdot (1 - P) \cdot Q^t \cdot D^2 \cdot Q + P \cdot R$ , pe care le stochează în  $b(k,l)$ ,  $k = \overline{2, i-1}$ ,  $l = \overline{1, 3}$ , o factorizează LL, tot în  $b$  stocând  $LL^t$ , iar apoi, folosind substituția înainte și înapoi în matricea  $(Q^t \cdot Y)$  (poziționată în  $c$ ) pentru a calcula soluția, pe care o returnează în  $d$ .

# Program principal și rezultate pentru tehnica ajustării

Programul și rezultatele de calcul pentru alegerea numărului S în funcția de ajustare a lui Schoenberg și Reinsch sunt date mai jos.

```

real a(51,4),b(7),c(5),d(4,4),e(4,50),f(51),g(20),h(357),o(11),
* p(51),q(51)
equivalence (e,h)
open (4,file='out.txt',status='new')
data b/.1159967e-3,-.1781917e-2,.1093247e-1,-.311456e-1,.1255647
*,-.24949,.4872382/
data g/500000,.500000,.500000,.500000,.500000,.500000,.500000,.500000,12*.0/
data o/4*.0,.21375,.4275,.64125,4*.855/
call epsilon(o,b,7,4,h,c,d,1)
i=51
j=2
k=8
write (4,6) j
r=10.**j
s=.5/r
do 1 j=1,i
p(j)=float(j-1)*.0171
q(j)=beta(c,d,j,4,p(j),0)
q(j)=float(ifix(q(j)*r+.5))/r
1 f(j)=s
do 2 j=1,i,5
do 2 l=1,4
2 a(j,l)=beta(c,d,j,4,p(j),l-1)
write (4,7) (j,(a(j,l),l=1,4),j=1,i,5)
do 5 j=1,k
s=kapa(p,q,f,i,g(j),h,a)
j=i-1
do 3 m=1,l
do 3 n=1,4
3 e(n,m)=a(m,n)
do 4 m=1,i,5
do 4 n=1,4
4 a(m,n)=beta(p,e,l,4,p(m),n-1)
5 write (4,8) g(j),s,(m,(a(m,n),n=1,4),m=1,k,5)
stop
6 format(10x,26hvalori rotunjite la 12,9h zecimale,/)
7 format(54h valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
**/(12,4e14.7))
8 format(//9hs impus =,e8.3,33h s (functia spline de ajustare) =,
*o8.3//54h valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
**/(12,4e14.7))
end
link
run

valori exacte rotunjite la 2 zecimale
valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
1 .1159967E-03 -.2663738E-01 .1084081E+01 -.1133318E+02
6 .6283619E-03 .2462734E-01 .1150938E+00 -.1133318E+02
11 .1966091E-02 -.6956340E-02 -.0530934E+00 -.1133310E+02
16 -.2436196E-02 -.8671071E-01 -.2005304E+00 .2661653E+02
21 -.7810254E-02 -.6569315E-02 .2075183E+01 .2661653E+02
26 .1985794E-02 .2681456E+00 .4350096E+01 -.9400750E+02
31 .3102245E-01 .2965300E+00 -.3686745E+01 -.9400750E+02
36 .3310000E-01 -.3622879E+00 -.1172439E+02 -.9400750E+02
41 -.4093727E-01 -.1036247E+01 .1160053E+02 .6414910E+03
46 -.2081700E-01 .2307168E+01 .6652802E+02 .6414910E+03
51 .4072301E+00 .1034004E+02 .1213755E+03 .6414910E+03

s impus =.500E+06 s (functia spline de ajustare) =.133E+05
valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
1 -.3389254E-01 .1350006E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
6 -.2228124E-01 .1358146E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
11 -.1867023E-01 .1357303E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
16 .9299378E-03 .1355419E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
21 .1251621E-01 .1354776E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
26 .2410004E-01 .1355401E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
31 .3569152E-01 .1355018E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
36 .4720430E-01 .1350647E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
41 .5009750E-01 .1362406E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
46 .7054216E-01 .1364072E+00 .0000000E+00 .0000000E+00
51 .0221120E-01 .1365175E+00 .0000000E+00 .0000000E+00

s impus =.500E+04 s (functia spline de ajustare) =.500E+04
valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
1 -.1159962E-03 -.3237904E-02 .0000000E+00 .6817573E-01
6 -.3780040E-03 -.2545738E-02 .2515384E-01 .7797569E+00
11 -.4041062E-03 .3435577E-02 .1305215E+00 .1984487E+01
16 .5762145E-03 .2206735E-01 .3081966E+00 .1757043E+01
21 .3710230E-02 .5171430E-01 .3107214E+00 -.4070661E+01
26 .0657670E-02 .5191303E-01 -.5329606E+00 -.2130319E+02
31 .0879920E-02 -.6657090E-01 -.1907308E+01 .5394913E+01
36 -.1969555E-02 -.1397517E+00 .1543020E+01 .9620301E+02
41 -.2874555E-02 .3962569E+00 .1139913E+02 .1032199E+03
46 .0613438E-01 .1581182E+01 .1331813E+02 .1212361E+03
51 .2545772E+00 .2155292E+01 .0000000E+00 -.1221311E+03

s impus =.500E+03 s (functia spline de ajustare) =.501E+03
valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
1 -.3040903E-05 .1314345E-04 .0000000E+00 .3209783E-01
6 .3652511E-05 .2401907E-03 .6473531E-02 .5855713E-01
11 .4315906E-04 .3612386E-03 -.1083407E-01 -.1291824E+01
16 -.1631219E-03 -.7521161E-02 -.1723195E+00 .1462291E+00
21 -.1050711E-02 -.6360104E-03 .7904913E+00 .3007179E+02
26 .6250002E-02 .2237044E+00 .4045106E+01 -.5551844E+02
31 .3253075E-01 .2624073E+00 -.4517493E+01 -.1470207E+03
36 .2644934E-01 -.4967994E+00 .1067917E+02 .5615747E+02
41 -.3918239E-01 -.6912966E+00 .1406862E+02 .6431326E+03
46 .1619131E-01 .2600132E+01 .5619064E+02 -.4518756E+02
51 .4077599E+00 .5660794E+01 .0000000E+00 -.8680509E+03

s impus =.500E+02 s (functia spline de ajustare) =.501E+02
valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
1 -.3691294E-08 .5792072E-07 .0000000E+00 .3302950E-03
6 .3942972E-07 .9046603E-06 -.1011808E-04 -.5714064E-02
11 -.7315074E-06 -.2474427E-04 .8931051E-04 .9265077E-01
16 .1277416E-04 .5427317E-03 .9017240E-02 -.1379045E+01
21 -.2004762E-03 -.1091373E-01 -.2057330E+00 .1007034E+02
26 .3131569E-02 .2048157E+00 .7046785E+01 -.1032554E+03
31 .3291042E-01 .3175071E+00 -.3509311E+01 .2300053E+03
36 .3201461E-01 -.3942032E+00 .9290019E+01 .1799259E+03
41 -.3303433E-01 -.9548171E+00 .6102059E+01 .9303467E+03
46 -.1135501E-01 .2277796E+01 .6090116E+02 .9004059E+03
51 .4644016E+00 .7006673E+01 .0000000E+00 -.2290267E+04

s impus =.500E+01 s (functia spline de ajustare) =.500E+01
valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
1 -.2404071E-14 -.2720194E-12 .0000000E+00 .2007231E-00
6 -.4335254E-12 -.6296005E-10 -.4939329E-00 .3212220E-06
11 .0237127E-11 -.1040200E-07 -.1354925E-05 -.0347620E-04
16 .2990609E-07 .9503901E-07 .1063521E-03 .5030931E-01
21 .1036942E-04 .6052176E-03 .1630464E-01 .1312195E+02
26 .1916211E-02 .2433962E+00 .1749920E+02 .1651216E+04
31 .3272446E-01 .3018342E+00 .1091873E+02 .1621076E+04
36 .3293145E-01 .3427526E+00 .4547662E+01 .2270933E+04
41 .3071994E-01 .1150034E+01 .2270957E+01 .2266215E+04
46 .1203260E-01 .1907362E+01 .4977004E+02 .2556495E+04
51 .4059257E+00 .9193920E+01 .0000000E+00 -.4093099E+04

s impus =.500E-01 s (functia spline de ajustare) =.501E-01
valoarea functiei si a primelor sale trei derivate
1 .3070474E-20 .9404155E-17 .0000000E+00 .2317507E-12
6 .1463430E-16 .1199597E-13 .2140330E-11 .7242034E-09
11 .3595126E-13 .2946979E-10 .5277601E-08 .1779305E-05
16 .0031942E-10 .7239674E-07 .1296530E-04 .4371118E-02
21 .2169666E-06 .1770524E-03 .3105122E-01 .1073012E+02
26 .2368208E-03 .3707716E+00 .7110520E+02 .8079528E+04
31 .3029220E-01 .2955569E+00 .0057565E+02 .0026041E+04
36 .3039720E-01 .2049001E+00 .9600945E+02 .1300461E+05
41 .2996706E-01 .1276630E+01 .4070757E+01 .1234341E+04
46 .1023014E-01 .2019000E+01 .3374634E+01 .7634170E+04
51 .4090700E+00 .9702391E+01 .0000000E+00 -.7423407E+04

```



## ANEXA nr. 12

### Program pentru aproximarea *spline* prin metoda celor mai mici pătrate

Pe linia de comandă, call `lambda(t,n,k,q,diag,bcoef)`, datele de intrare sunt secvența de noduri  $\overline{t(1),t(n+k)}$ ,  $n$  - dimensiunea spațiului de funcții *spline* de ordinul  $k$  cu secvența de noduri  $t$  și  $k$ .  $q$  și  $diag$  sunt vectori de lucru de dimensiuni (cel puțin)  $k \times n$ , respectiv  $n$ . Programul furnizează la ieșire vectorul *bcoef*, conținând coeficienții funcțiilor *B-spline* ale aproximării prin metoda celor mai mici pătrate (*bcoef(1),bcoef(n)*). Sunt utilizate prin blocul `common/date/ntau,tau,gtau`, pondere următoarele informații:

```
subroutine lambda(a,i,j,b,c,d)
parameter (k=20,l=200)
real a(1),b(j,i),c(i),d(i),e(1),f(1),g(1),h(k)
common/date/m,e,f,g
do 1 n=1,i
d(n)=.0
do 1 i1=1,j
1 b(i1,n)=.0
i1=j
j1=0
do 4 k1=1,m
2 if (i.eq.i1) go to 3
if (a(i1+1).ge.e(k1)) go to 3
i1=i1+1
j1=j1+1
go to 2
3 call delta(a,j,i,e(k1),i1,h)
do 4 l1=1,j
o=g(k1)*h(l1)
m1=j1+l1
d(m1)=d(m1)+f(k1)*o
n1=1
do 4 i2=1,j
b(n1,m1)=b(n1,m1)+h(i2)*o
4 n1=n1+1
call bchfac(b,j,i,c)
call bchslv(b,j,i,d)
return
end
```

- *ntau* - numărul punctelor de date disponibile;

- $\tau(i), g\tau(i), i = \overline{1,ntau}$  - abscisele și respectiv ordonatele punctelor de date;

- *pondere(i), i =  $\overline{1,ntau}$*  - ponderile afectate valorilor corespunzătoare.

Programul folosește pentru rezolvarea sistemului liniar prin factorizare *Choleski* două subrutine, *Bchfac* și *Bchslv*, prezentate în mai jos.

# Programe pentru aproximarea *spline* în sensul celor mai mici pătrate

Calculul aproximării prin metoda celor mai mici pătrate se face cu ajutorul programului *Lambda*, prezentat anterior. În afara calculului propriu-zis trebuie introduse datele de intrare, construită secvența de noduri adecvată pentru secvența (dată) de puncte de joncțiune, evaluată aproximarea, precum și calculate/imprimare erorile. Deasemenea, este necesar un program principal pentru gestiunea tuturor acestor activități înlănțuite, care să permită și posibilitatea calculului unor serii de aproximări diferind prin numărul și poziționarea nodurilor. Toate aceste rutine sunt prezentate în cele ce urmează.

```

parameter (i=100,j=200,k=2000)
dimension a(i),b(i),c(k),d(j),e(k),f(j),g(j),h(j),o(j)
common/aprox/b,c,l,m/date/n,h,d,o,p
data q/2hon/
open (4,file='out.txt',status='new')
i1=0
1 call setdat(i1)
  call nod(b,l,m,g,j1)
  k1=2
  r=2.
  s=q
  t=q
  u=q
  l1=1
  m1=1
2 call lambda(g,j1,m,e,f,a)
  if (q.eq.s) write (4,5) (a(n1),n1=1,j1)
  call epsilon(g,a,j1,m,e,b,c,l)
  write (4,6) m,l,(b(n1),n1=2,l)
  if (q.ne.t) go to 4
  write (4,7)
  do 3 n1=1,l
    i2=m*(n1-1)
3 write (4,8) b(n1),(c(i2+j2),j2=1,m)
4 call eroare(u,f,e)
  if (k1.lt.m1) go to 1
  k2=float(m1)*r+l1
  call zeta(b,c,l,m,f,k2,g)
  call nod(f,k2,m,g,j1)
  m1=m1+1
  go to 2
stop
5 format(29x,21hcoeficientii B-spline//(1pg14.7,4g15.7))
6 format(//33haproximare prin spline de ordinul,i2,3h pe,i3,
  *33h intervale: puncte de jonctiune -//(1pg14.7,4g15.7))
7 format(//23x,34hrepresentarea pp pentru aproximare/)
8 format(f4.3,1pg15.7,4g15.7/(9x,5g15.7))
end

subroutine nod(a,i,j,b,k)
dimension a(1),b(1)
l=j-1
do 5 m=1,l
5 b(m)=a(1)
do 6 m=1,i
6 b(l+m)=a(m)
k=i+1
do 7 m=1,j
7 b(k+m)=a(i+1)
return
end

```

Programul principal este tipic pentru aproximările polinomiale pe porțiuni ale unei funcții date prin puncte. Subprogramul *Lambda* de aproximare în sensul celor mai mici pătrate poate fi înlocuit cu unul care să efectueze orice altă formă de aproximare. Subrutina *Setdat* conține datele ce urmează a fi approximate, precum și secvența punctelor de joncțiune a aproximării polinomiale pe porțiuni care va fi folosită. *m1* este un număr citit în programul principal și indică numărul de treceri prin *Zeta* cu scopul optimizării plasării nodurilor. La fiecare trecere sunt adăugate *r* noduri suplimentare (spre

exemplu, dacă  $r = 0,34$ , se adaugă câte un nod la fiecare trei treceri, atât timp cât nu este depășit  $m1$ ). Imprimarea erorilor este opțională, fiind controlată de variabila *Hollerith*  $u$ ; dacă valoarea acesteia este „on“, vor fi calculate și tipărite aproximarea și erorile în fiecare punct de date.

Subrutina *Nod* realizează conversia secvenței de puncte de joncțiune  $a$  într-o secvență de noduri  $b$  pentru a permite reprezentarea unei funcții  $pp$  de ordinul  $j$  cu  $j-2$  derivate continue ca o funcție *spline* de ordinul  $j$  (aceasta însemnând  $b(1), \dots, b(n+j) = a(1)$  de  $j$  ori, apoi  $a(i), i = \overline{2, l}$  și în final  $a(l+1)$  de  $j$  ori). Programul mai furnizează și dimensiunea  $k$ ,

```

subroutine eroare(a,b,c)
parameter (i=100,j=200,k=2000)
dimension b(1),c(1),d(i),e(k),f(j),g(j),h(j)
common/aprox/d,e,l,m/date/n,g,f,h,o
data p,q,r,s/2hon,3*.0/
do 1 i1=1,n
b(i1)=beta(d,e,l,m,g(i1),0)
c(i1)=f(i1)-b(i1)
t=abs(c(i1))
if (s.lt.t) s=t
q=h(i1)*t+q
1 r=h(i1)*t+t+r
q=q/o
r=sqrt(r/o)
write (4,5) r,q,s
if (a.ne.p) return
i1=0
t=1.
if (s.ge.10.) go to 3
do 2 i1=1,9
t=t*10.
2 if (s*t.ge.10.) go to 3
3 do 4 j1=1,n
4 c(j1)=c(j1)*t
write (4,6) i1,(j1,g(j1),b(j1),c(j1),j1=1,n)
write (4,7)
return
5 format(/5x,25heroarea medie patratica =,1pg15.7/15x,15heroarea
*medie =,g15.7/14x,16heroarea maxima =,g15.7)
6 format(/8x,34hvalorile aproximarii si ale erorii//7x,7hpunctul
*6x,11haproximarea,3x,15habaterea x 10**,i1/(i2,1pg15.7,g15.7,
*g17.7))
7 format(//)
end

```

corespunzătoare spațiului *spline* de ordinul  $k$ ,  $k = j + l - 1$ .

Subrutina *eroare* calculează diverse erori pentru aproximarea  $L_2$  curentă, a cărei reprezentare  $pp$  este conținută în blocul *aprox*. În cazul în care acest lucru este dorit sunt tipărite eroarea medie, eroarea medie pătratică și eroarea maximă.

# Rezultate pentru aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate cu plasarea optimală a nodurilor

coeficientii B-spline

9.3821210E-05	3.1464590E-05	-5.4294110E-05	.0000000	2.6844360E-04
.0000000	1.9950670E-02	-.3510005	.8532863	-1.421575
2.324268	-.0940025	-.1324150	2.2305730E 03	.0000000

aproximare prin spline de ordinul 5 pe 11 intervale. Puncte de jonctiune

.2035271	.2618821	.3207812	.3792071	.4356466
.4099141	.5445120	.6010435	.6622070	.7231008

reprezentarea pp pentru aproximare

.143	9.3821210E-05	-4.0566430E-03	5.8000070E-02	1.491791	-37.69119
.204	-1.1928610E-05	0.1230640E-04	7.9205670E-02	-.7959552	-40.45901
.262	1.2057040E-04	2.4742620E-03	-4.9751190E-02	-3.623701	1077.377
.321	9.988210E-04	5.7191520E-02	2.993221	106.9521	-40507.43
.379	-6.7386520E-03	-.9366594	-60.87669	-2262.971	244573.7
.436	-.1196439	-.6193342	200.8145	11521.80	-763719.1
.490	.1733341	6.900550	-290.5269	29924.04	1507643.
.545	-.1483650	-13.10342	314.8160	52391.34	-2053215.
.602	.3309563	26.56241	-55.81305	-65320.87	1906334.
.662	.5431130	-23.02013	-375.5305	54741.69	-1371977.
.723	-.2013100	3.967670	414.8243	-20011.97	610110.1

Sunt prezentate rezultatele rulării pachetului de programe descris anterior pentru interpolarea caracteristicii magnetice a TC, folosind aproximarea în sensul celor mai mici pătrate ca procedeu iterativ, la fiecare trecere măbind numărul de noduri cu 2 și folosind subprogramul

eroarea medie patratica = .1957411  
 eroarea medie = .1012002  
 eroarea maxima = .0356258

curbele aproximarii si a erorii

punctul	aproximarea	abaterea x 10**2
1	.0000000	-1.1311060E-04
2	1.8750000E-02	1.9631060E-04
3	2.9250000E-02	3.0279410E-04
4	7.2000000E-02	3.9010620E-04
5	.1300000	1.4695200E-04
6	.1650000	1.9690710E-05
7	.2017500	-1.3230400E-05
8	.2422500	6.6677000E-05
9	.2775000	1.5549000E-04
10	.3107500	0.8706000E-04
11	.3600000	2.6252000E-03
12	.3707500	-6.2441000E-03
13	.4007500	-6.2377500E-02
14	.4162500	-8.2425000E-02
15	.4762500	6.2790000E-02
16	.5025000	.2201729
17	.5625000	-.2912713
18	.5700000	-.2716151
19	.5925000	9.6562190E-02
20	.6262500	.0417195
21	.6712500	.3270470
22	.6707500	.1496379
23	.6062500	-9.0235010E-03
24	.6900000	-7.8793700E-02
25	.6937500	-.1391420
26	.7912500	-1.3647000E-02
27	.0212500	-4.0215330E-02
28	.0207500	-6.2604710E-03
29	.0550000	.6156129

coeficientii B-spline

4.0592000E-04	9.4150000E-05	-4.2054770E-04	.0000000	2.2015960E-03
.0000000	2.0614460E-03	4.0609510E-03	1.9077000E-03	6.1723600E-03
.0000000	.0000000	2.9697030E-02	-3.9173200E-02	-1.1065150E-04
3.4309410E-05	.0000000			

aproximare prin spline de ordinul 5 pe 13 intervale. Puncte de jonctiune

.3100012	.3754499	.4230534	.4630221	.5010796
.5355552	.5600973	.6018416	.6352144	.6690109
.7046282	.7411922			

reprezentarea pp pentru aproximare

.143	4.0592000E-04	-7.4565190E-03	-2.5003350E-02	2.509669	-13.53620
.310	3.0707000E-04	1.4027130E-02	.2107900	.3257210	-455.7702
.375	1.4390000E-03	7.8076500E-03	-.7336760	-29.46735	2636.311
.423	1.0145670E-03	-1.3107510E-02	.0506433	96.03042	-4760.067
.464	1.7220030E-03	4.7529310E-02	.0032063	-90.35755	1423.350
.501	3.3175690E-03	2.1457530E-02	-1.073453	-45.32601	0294.164
.536	3.1226240E-03	-1.3423540E-02	1.492954	240.6192	-20636.57
.569	3.9207100E-03	4.2615520E-02	-1.955099	-447.4470	27193.72
.602	2.9399400E-03	-.1025539	-1.930932	440.4292	3014.925
.635	1.4127960E-03	.1060091	15.15004	575.7440	-105125.4
.669	1.1640530E-02	.2705932	-25.42020	-2977.125	215666.4
.705	-2.0007900E-03	-.0993661	5.330091	4704.329	-230266.3
.741	-1.1547050E-02	.4990130	10.06754	-4007.652	106342.3

eroarea medie patratica = 1.4763570E-02  
 eroarea medie = 5.7041490E-03  
 eroarea maxima = 6.4125910E-02

curbele aproximarii si a erorii

punctul	aproximarea	abaterea x 10**3
1	.0000000	-2.7644010E-04
2	1.8750000E-02	1.0045730E-04
3	2.9250000E-02	3.6529000E-04
4	7.2000000E-02	7.0370740E-04
5	.1300000	4.9514490E-04
6	.1650000	2.3904000E-04
7	.2017500	4.6760000E-06
8	.2422500	-0.9927010E-05
9	.2775000	4.3675000E-05
10	.3107500	5.1602500E-04
11	.3600000	1.2407300E-03
12	.3707500	1.4615000E-03
13	.4007500	1.2460270E-03
14	.4162500	1.1106250E-03
15	.4762500	2.3454600E-03
16	.5025000	3.3461370E-03
17	.5625000	3.6341710E-03
18	.5700000	3.9744230E-03
19	.5925000	3.7610620E-03
20	.6262500	1.0024350E-03
21	.6712500	1.2177330E-02
22	.6707500	1.2692420E-02
23	.6062500	1.0770410E-02
24	.6900000	0.8740700E-03
25	.6937500	6.4066020E-03
26	.7912500	1.0379250E-03
27	.0212500	6.2510760E-02
28	.0207500	.1093759
29	.0550000	.4001949

Zeta pentru a obține o distribuție mai eficientă a lor.

Reprezentările grafice pentru caracteristica magnetică și erori sunt prezentate la pagina nr. 80, împreună cu comentariile aferente.

## Subprograme de soluționare a unui sistem algebric liniar prin factorizare *Choleski*

Bazele teoretice specifice metodei celor mai mici pătrate au fost prezentate în §§2.2.2.4, iar modalitatea aleasă pentru a rezolva problema, precum și implementarea ei în programul *Lambda*. Acesta folosește pentru rezolvarea sistemului liniar prin factorizare *Choleski* două subrutine, *Bchfac* și *Bchslv*, prezentate alăturat.

```

subroutine bchfac(a, i, j, b)
dimension a(i, j), b(j)
if (j.gt.1) go to 1
if (a(1,1).gt..0) a(1,1)=1./a(1,1)
return
1 do 2 k=1, j
2 b(k)=a(1, k)
do 7 k=1, j
if (a(1, k)+b(k).gt.b(k)) go to 4
do 3 l=1, i
3 a(1, k)=.0
go to 7
4 a(1, k)=1./a(1, k)
l=min0(i-1, j-k)
if (l.lt.1) go to 7
m=l
do 6 n=1, l
c=a(1, k)*a(n+1, k)
do 5 j=1, m
5 a(j, k+n)=a(j, k+n)-a(j+1, k)*c
m=m-1
6 a(n+1, k)=c
7 continue
return
end
subroutine bchslv(a, i, j, b)
dimension a(i, j), b(j)
if (j.gt.1) go to 1
b(1)=a(1, 1)*b(1)
return
1 k=i-1
do 3 l=1, j
m=min0(j-1, k)
if (m.lt.1) go to 3
do 2 n=1, m
2 b(n+1)=b(n+1)-a(n+1, 1)*b(1)
3 continue
do 5 l=j, 1, -1
b(1)=a(1, l)*b(1)
m=min0(j-1, k)
if (m.lt.1) go to 5
do 4 n=1, m
4 b(1)=b(1)-a(n+1, l)*b(n+1)
5 continue
return
end

```

*Bchfac* construiește factorizarea *Choleski*

$C = L \cdot D \cdot L^T$ , în care  $L$  este unitară triunghiular inferior, iar  $D$  diagonală, pentru o matrice  $C$  de ordinul  $j$ , în cazul în care aceasta este o matrice bandă (simetric) pozitiv semidefinită, având  $i$  diagonale peste și sub cea principală. Metoda de lucru este eliminarea gaussiană, adaptată condițiilor precizate. Pivoții de valoare foarte mică suferă un tratament special. Elementul diagonal  $c_{nn} = a(1, n)$  este inițial stocat în  $b(n)$ ,  $\forall n$ . La cel de-al  $n$ -lea pas de eliminare, pivotul curent,  $a(1, n)$ , este comparat cu valoarea sa inițială,  $b(n)$ . Dacă valoarea sa, ca urmare a pașilor de eliminare anteriori, s-a redus foarte mult (adică dacă  $a(1, n) + b(n) \leq b(n)$ ), atunci este declarat nul și întreaga linie  $n$  este considerată a fi liniar dependentă de cele precedente.

Subrutina *Bchslv* obține soluția sistemului

liniar de ordinul  $j$   $C \cdot x = b$ , furnizată la ieșire în vectorul  $b$ .

## ANEXA nr. 13

### Subprograme necesare construirii sistemului liniar *aproximativ* bloc diagonal

Rezolvarea este efectuată de subprogramul *Sistem* și de subrutina sa *Bloc*. El poate fi apelat sub forma `call sistem(t,n,kpm,work1,work2,bloks,l,intg,nbloks,b)`. Datele care trebuiesc furnizate programului sunt:

```
subroutine sistem(a,i,j,b,c,d,k,l,m,e)
dimension a(1),b(1),c(1),d(1),e(1),f(10),g(19),l(3,1)
common/fr/n,i1,f/rest/j1,k1,g
l1=1
m1=1
n1=0
i1=1
do 4 i2=j,i,k1
n1=n1+1
l(2,n1)=j
if(i.ge.i2) go to 1
l(3,n1)=j
j2=n
go to 3
1 l(3,n1)=k1
j2=i1-1
2 if(j2.eq.n) go to 3
if(f(j2+1).ge.a(i2+1)) go to 3
j2=j2+1
go to 2
3 k2=k1+j2
l(1,n1)=k2
if(k.lt.j*k2+l1-1) go to 5
call bloc(a,j,i2,b,c,d(l1),k2,e(m1))
l1=j*k2+l1
4 m1=k2+m1
m=n1
return
5 write(*,6) k
6 format(11h *****/21h dimensiunea indicata,i3,
*37h pentru D in COLOC este insuficienta.)
return
end
```

- $t$  - secvența de noduri, de dimensiune  $kpm + n$ ;

- $n$  - dimensiunea spațiului *spline* de aproximare, egală cu ordinul sistemului liniar care trebuie asamblat;

- $kpm - k + m$ , ordinul funcției *spline* de aproximare;

- $l$  - lungimea maximă a șirului de blocuri.

*work1* și *work2* reprezintă matrici de lucru, iar datele de ieșire sunt:

- *bloks* - matricea coeficienților sistemului liniar, stocată sub forma

*aproximativ* bloc diagonală, având dimensiunile  $\left( kpm \times \sum_{i=1}^{nbloks} intg(1,i) \right)$ ;

- *intg* - matrice de întregi, cu dimensiunile  $3 \times nbloks$ , care descrie structura blocurilor:

- $intg(1,i)$  - numărul liniilor din blocul  $i$ ;

- $intg(2,i)$  - numărul coloanelor din blocul  $i$ ;

-  $intg(3,i)$  - numărul pașilor de eliminare ce pot fi efectuați în blocul  $i$  înainte ca pivotarea să transfere ecuații din blocul anterior;

- $nbloks$  - numărul de blocuri, egal cu numărul segmentelor polinomiale;

- $b$  - vector de dimensiune  $\sum_{i=1}^{nbloks} intg(1,i)$ , care conține termenii din dreapta semnelor de egalitate ai ecuațiilor sistemului linear sub forma *aproximativ* bloc diagonală.

Metoda folosită în eșalonarea operațiilor este cea descrisă în §2.3.

Subrutina bloc ( $t, kpm, ns, work1, work2, q, nl, b$ ) assemblează ecuațiile corespunzătoare sistemului de colocație pentru blocul curent; datele de intrare fiind:

```

subroutine bloc(a,i,j,b,c,d,k,e)
dimension a(1),b(1),c(i,1),d(k,i),e(1),f(10),g(19),h(20)
common/fr/1,m,f/rest/n,i1,g
j1=1+1
do 1 k1=1,i
do 1 l1=1,k
1 d(l1,k1)=.0
o=(a(j)+a(j+1))/2.
p=(a(j+1)-a(j))/2.
k1=1
l1=m
do 6 m1=l1,k
if(i1.le.k1) go to 2
n1=2
q=g(k1)*p+o
k1=k1+1
if(1.le.m) go to 3
if(f(m).gt.q) go to 3
k1=k1-1
2 n1=3
q=f(m)
3 call difequ(n1,q,h)
call calc(a,i,q,j,b,c,j1)
do 5 k1=1,i
r=.0
do 4 l1=1,j1
4 r=c(k1,l1)*h(l1)+r
5 d(m1,k1)=r
6 e(m1)=h(1+2)
return
end
    
```

- $t$  - secvența de noduri (de dimensiune cel puțin  $kpm + ns$ );

- $kpm$  - ordinul funcției *spline* de interpolare;

- $ns$  - număr întreg ce indică intervalul de lucru,  $(t_{ns}, t_{ns+1})$ ;

- $nl$  - numărul de linii din bloc ce trebuie asamblate împreună.

$work1$  și  $work2$  sunt matrici de lucru, subprogramul furnizând următoarele date de ieșire:

- $q$  - blocul curent, matrice de dimensiuni  $nl \times kpm$ ;

- $b$  - vector de dimensiune  $nl$ , corespunzător părții din dreapta a semnelui *egal*.

Cele  $k$  ecuații de colocație pentru intervalul  $(t_{ns}, t_{ns+1})$  se construiesc cu subrutina *difequ(2,;)*, intercalând printre ele și condițiile de frontieră (dacă există), folosind *difequ(3,;)*. Blocul  $q$  are  $kpm$  coloane, corespunzând celor  $kpm$  funcții *B-spline* de ordinul  $kpm$  care conțin în suportul lor intervalul  $(t_{ns}, t_{ns+1})$ . Diagonala principală a acestuia este parte componentă a diagonalei principale a sistemului total. Prima ecuație netransferată din blocul precedent este dată de numărul condițiilor de frontieră existente în intervalele (blocurile) precedente.

## Subprograme pentru rezolvarea unui sistem linear *aproximativ* bloc diagonal prin factorizare PLU

Rezolvarea sistemului linear *aproximativ* bloc diagonal este efectuată eficient cu ajutorul unui pachet de subprograme. Programul principal, `slvblk(bloks, intg, nbloks, b, npivot, x, index)` apelează alte subrutine cu scopul de a rezolva sistemul linear  $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$ , în

```

subroutine slvblk(a, i, j, b, k, c, l)
dimension a(1), b(1), c(1), i(3, j), k(1)
call fcblok(a, i, j, k, c, l)
if (l.eq.0) return
call sbblok(a, i, j, k, b, c)
return
end

```

care  $\mathbf{a}$  este o matrice *aproximativ* bloc diagonală; astfel de matrici apar frecvent în aproximarea sau interpolarea segmentar polinomială. Pentru a economisi spațiul de

stocare în calculator și a accelera procedura de calcul, ținând seama de structura specială a sistemului, este folosită factorizarea PLU [78]. Parametrii prezenți pe linia de comandă sunt:

- *bloks* - vector de dimensiune  $\sum_{i=1}^{nbloks} \prod_{j=1}^2 intg(j, i)$ ; la apel conține matricea

*aproximativ* bloc diagonală  $\mathbf{a}$  (structura blocurilor fiind descrisă de *intg*), iar la ieșire factorizarea PLU a acesteia (dacă *index*  $\neq 0$ ), unii termeni fiind arbitrari (acolo unde blocurile se suprapun);

- *intg* - matrice de întregi care descrie structura blocurilor matricii  $\mathbf{a}$ :

$$\left. \begin{array}{l} -intg(1, i) - \text{numărul liniilor blocului } i = nl \\ -intg(1, i) - \text{numărul coloanelor blocului } i = nc \\ -intg(1, i) - \text{numărul pașilor de eliminare în blocul } i = nr \end{array} \right\} i = \overline{1, nbloks}.$$

Cu toate că sistemul linear este de ordinul  $n = \sum_{i=1}^{nbloks} intg(3, i)$ , numărul total al liniilor conținute

în toate blocurile este  $nbl = \sum_{i=1}^{nbloks} intg(1, i)$ ;

- *nbloks* - numărul blocurilor;
- *b* - vectorul din dreapta semnelui *egal* al sistemului, de dimensiune *nbl*; anumiți termeni, corespunzând liniilor comune blocurilor care se suprapun, sunt arbitrari;
- *npivot* - vector întreg de dimensiune *nbl*, care conține la ieșire secvența de pivotare utilizată;
- *x* - vector de ieșire, de dimensiune *n*, care conține soluția calculată (dacă *index*  $\neq 0$ );



- $index: \begin{cases} = (-1)^{**}(\text{numărul transferurilor în timpul factorizării}), \text{dacă } a \text{ este inversabilă;} \\ = 0, \text{dacă matricea } a \text{ este singulară.} \end{cases}$

Programele auxiliare apelate sunt următoarele:

- *fcblok* - factorizează matricea  $a$ ;
- *sbblok* - rezolvă sistemul  $ax = b$  după ce matricea acestuia este factorizată.

Cele  $nbloks$  blocuri sunt stocate consecutiv în vectorul *bloks*. Primul dintre ele are termenul (1,1) plasat pe locația *bloks*(1), ș.a.m.d.; dacă blocul numărul  $i$  are termenul (1,1) pe locația *bloks*( $index(i)$ ), atunci  $index(i+1) = nl(i) \cdot nc(i)$ . Blocurile sunt asamblate după cum urmează.

Pentru  $i = \overline{1, nbloks-1}$ , termenul (1,1) al blocului următor (blocul ( $i+1$ )) corespunde termenului ( $nr+1, nr+1$ ) al blocului curent (blocul  $i$ ). Reamintim faptul că  $nr = intg(3, i)$ , acest lucru însemnând că:

- fiecare bloc începe pe diagonala principală a matricii  $a$ ;
- blocurile se suprapun (de regulă). Liniile celui de-al ( $i+1$ )-lea bloc care se suprapun peste cele ale blocului  $i$  pot fi arbitrar inițializate; ele vor fi completate în timpul procesului de eliminare. Termenii care formează partea dreaptă a egalității în blocul  $i$  sunt stocați într-o porțiune de dimensiune  $nl (= intg(1, i))$  care urmează celei corespunzătoare blocului anterior, prima ecuație din primul bloc având termenul liber stocat în  $b(1)$ .

```

subroutine fcblok(a, i, j, k, b, l)
dimension a(1), b(1), i(3, j), k(1)
l=1
m=1
n=1
i1=1
1 j1=n
k1=i(1, i1)
l1=i(2, i1)
m1=i(3, i1)
call factrb(a(j1), k(m), b, k1, l1, m1, l)
if(i1.eq.j.or.l.eq.0) return
i1=i1+1
n=j1+k1*l1
call shiftb(a(j1), k(m), k1, l1, m1, a(n), i(1, i1), i(2, i1))
m=k1+m
go to 1
end

```

Subrutina *fcblok* (*bloks*, *intg*, *nbloks*, *npivot*, *work*, *index*) controlează factorizarea PLU cu pivotare a liniilor normalizate ale matricii sistemului *aproximativ* bloc diagonal stocată în *bloks* și *intg*. Argumentele de pe linia de comandă au semnificații identice cu cele din

*Slyblk*, *work* fiind o matrice de lucru. *Fcblok* folosește subrutinele *Factrb*, care efectuează pașii  $\overline{1, nr}$  din eliminarea gaussiană cu pivotare pentru fiecare bloc și *Shiftb*, care deplasează liniile rămase la începutul blocului următor. *Factrb*( $w, npivot, d, nl, nc, nr, index$ ) efectuează factorizarea PLU parțială corespunzătoare pașilor  $\overline{1, nr}$  din eliminarea gaussiană cu pivotare pentru matricea  $w$ ; aceasta conține matricea parțială de dimensiuni  $nl \times nc$  și o

```

subroutine factrb(a, i, b, j, k, l, m)
dimension a(j, k), b(j), i(j)
do 2 n=1, j
i(n)=n
c=.0
do 1 i1=1, k
1 c=amax1(abs(a(n, i1)), c)
if(c.eq..0) go to 8
2 b(n)=c
n=1
3 i1=i(n)
if(j.eq.n) go to 7
j1=n
k1=n+1
d=abs(a(i1, n))/b(i1)
do 4 l1=k1, j
m1=i(l1)
e=abs(a(m1, n))/b(m1)
if(d.gt.e) go to 4
d=e
j1=l1
4 continue
if(j1.eq.n) go to 5
i1=i(j1)
n1(j1)=n1(n)
n1(n)=i1
m=-m
5 if(abs(a(i1, n))+b(i1).le.b(i1)) go to 8
do 6 l1=k1, j
m1=n1(l1)
a(m1, n)=a(m1, n)/a(i1, n)
f=-a(m1, n)
do 6 j1=k1, k
6 a(m1, j1)=a(i1, j1)*f+a(m1, j1)
n=k1
if(l.gt.n) go to 3
return
7 if(abs(a(i1, j))+b(i1).gt.b(i1)) return
8 m=0
return
end
    
```

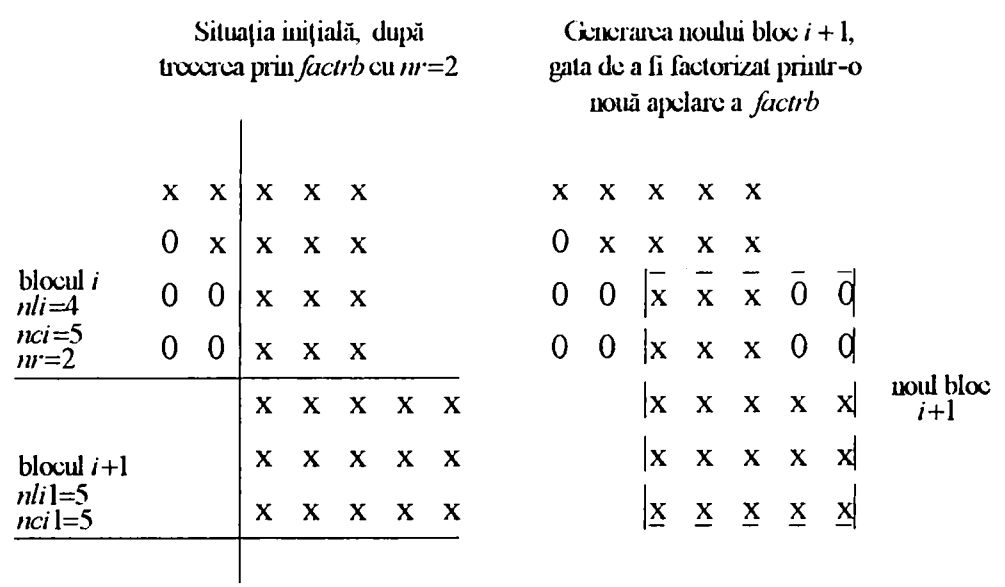
returnează sub  
formă factorizată.  
 $N_{pivot}$ ,  $n_l$ ,  $n_c$ ,  $n_r$   
și  $index$  au aceeași  
semnificație ca în  
 $S_{lvblk}$ ,  $d$  fiind o  
matrice de lucru.

```

subroutine shiftb(a, i, j, k, l, b, m, n)
dimension a(j, k), b(m, n), i(j)
i1=j-1
j1=k-1
if (i1.lt.1.or.j1.lt.1) return
do 1 k1=1, i1
l1=i(k1+1)
do 1 m1=1, j1
1 b(k1, m1)=a(l1, l+m1)
if (j1.eq.k) return
k1=j1+1
do 2 l1=k1, n
do 2 m1=1, i1
2 b(m1, l1)=.0
return
end
    
```

Shiftb ( $a_i, n_{pivot}, n_{li}, n_{ci}, n_r, a_{i1}, n_{li1}, n_{ci1}$ )  
transferă liniile nefolosite ca linii de pivotare din  
blocul curent (dacă există), adică liniile  
 $\overline{n_{pivot}(nr+1), n_{pivot}(n_{li})}$  în primele  $n_{max} = n_l - n_r$   
linii ale blocului următor,  $a_{i1}$ , coloanele  $(n_r + j)$  din  
 $a_i$  devenind coloanele  $j$ ,  $j = \overline{1, j_{max}}$ ,  $j_{max} = n_{ci} -$   
 $- n_r$ . În coloanele rămase neocupate ale acestor linii  
se inserează zerouri. Modul de acțiune descris poate fi  
urmărit și pe exemplul din figura de mai jos.

Subrutina sbblok  
(blocs, intg, nblocs,  
 $n_{pivot}, b, x$ ) conduce  
procesul de obținere a  
soluției sistemului  
liniar  $ax = b$ , cu  
matricea  $a$  factorizată  
de  $Fcblok$ , prin  
substituție înainte și  
înapoi. Blocurile de  
ecuații sunt prelucrate



cu ajutorul subprogramelor *Subfor* și *Subbak*. *Subfor*( $n, n_{pivot}, n_l, n_r, b, x$ ) execută pasul înainte al substituției pentru blocul curent, adică operațiunile în partea dreaptă corespunzătoare eliminării operate în *factrb* pentru blocul respectiv. În urma acestuia,  $x(j)$  conține partea din dreapta a celei de-a  $n_{pivot}(j)$ -a ecuații transformate din blocul respectiv,

```

subroutine sbblok(a, i, j, k, b, c)
dimension a(1), b(1), c(1), i(3, j), k(1)
l=1
m=1
n=1
do 1 i1=1, j
j1=i(1, i1)
k1=i(3, i1)
call subfor(a(1), k(m), j1, k1, b(m), c(n))
l=i(2, i1)*j1+1
m=j1+m
1 n=k1+n
i1=j+1
do 2 j1=1, j
k1=i1-j1
l1=i(1, k1)
m1=i(2, k1)
n1=i(3, k1)
l=l-l1*m1
m=m-l1
n=n-n1
2 call subbak(a(1), k(m), l1, m1, n1, c(n))
return
end

```

$j = \overline{1, nl}$ . Apoi, deoarece  $b(nl+i)$ ,  $i = \overline{1, nl-nr}$  va fi folosit în partea dreaptă a ecuației  $i$  din blocul următor (transferată acolo în timpul efectuării factorizării), acesta primește valoarea  $x(nr+i)$ .  $Npivot$ ,

```

subroutine subfor(a, i, j, k, b, c)
dimension a(j, k), b(j*2-k), c(j), i(j)
l=i(1)
c(1)=b(1)
if (j.eq.1) return
do 2 m=2, j
l=i(m)
n=amin0(k, m-1)
d=.0
do 1 i1=1, n
1 d=a(1, i1)*c(i1)+d
2 c(m)=b(1)-d
m=j-k
if (m.eq.0) return
n=k+1
do 3 i1=n, j
3 b(i1+m)=c(i1)
return
end

```

$nl$  și  $nr$  și  $w$  sunt cei returnați de *factrb*.  $B(j)$  conține la

apelare partea dreapta a ecuației  $j$  pentru blocul curent,  $j = \overline{1, nl}$ .  $B(nl+j)$  returnează partea

dreaptă a ecuației  $j$  din blocul următor,  $j = \overline{1, nl-nr}$ , iar  $x(j)$  partea dreaptă modificată

```

subroutine subbak(a, i, j, k, l, b)
dimension a(j, k), b(k), i(j)
m=1
n=i(m)
c=.0
if (k.eq.m) goto 3
i1=m+1
1 do 2 j1=i1, k
2 c=a(n, j1)*b(j1)+c
3 b(m)=(b(m)-c)/a(n, m)
if (m.eq.1) return
i1=m
m=m-1
n=i(m)
c=.0
goto 1
end

```

corespunzător a ecuației  $npivot(j)$  din blocul curent,

$j = \overline{1, nr}$ . Subbak ( $w, npivot, nl, nc, nr, x$ ) realizează

substituția înapoi în blocul curent. Parametrii  $w, npivot, nl,$

$nc, nr$  sunt cei returnați de *factrb*.  $\overline{x(1), x(nc)}$  conțin la

apelare partea dreaptă a ecuațiilor blocului, iar la ieșire

componentele soluției calculate.

În caz de necesitate, există posibilitatea de a calcula determinantul matricii  $a$ . Datorită pericolului depășirilor flotante, uzual se folosește logaritmul natural al acestuia. În teză acest element nu a fost utilizat, el intervenind în unele calcule bazate pe MEF.

## Program pentru calculul funcțiilor *B-spline* și a derivatelor acestora

Programul este apelat prin call `calc(t,k,x,ns,work,db,nderiv)`. Datele de intrare sunt:

```

subroutine calc(a,i,b,j,c,d,k)
dimension a(1),c(i,i),d(i,k)
l=max0(min0(i,k),1)
m=i+1
call delta(a,m-1,1,b,j,d)
if (l.eq.1) return
n=1
do 2 i1=2, l
j1=1
do 1 k1=n, i
d(k1,n)=d(j1,1)
1 j1=j1+1
n=n-1
2 call delta(a,m-n,2,b,j,d)
n=1
do 4 i1=1, i
do 3 j1=n, i
3 c(j1,i1)=.0
n=i1
4 c(i1,i1)=1.
do 8 i1=2, l
j1=m-i1
e=float(j1)
k1=j
l1=i
do 6 m1=1, j1
f=e/(a(k1+j1)-a(k1))
do 5 n1=1, l1
5 c(l1,n1)=(c(l1,n1)-c(l1-1,n1))*f
k1=k1-1
6 l1=l1-1
do 8 l1=1, i
g=.0
n=max0(i1,l1)
do 7 m1=n, i
7 g=c(m1,l1)*d(m1,i1)+g
8 d(l1,i1)=g
return
end

```

- $t$  - secvența de noduri, vector de dimensiune cel puțin  $k + ns$ ;
- $k$  - ordinul funcției *B-spline* care se evaluează;
- $x$  - punctul în care se face calculul;
- $ns$  - număr întreg care indică punctul extrem din stânga al intervalului de interes; sunt luate în considerare cele  $k$  funcții *B-spline* al căror suport conține intervalul  $(t_{ns}, t_{ns+1})$ ; se presupune că  $t(ns) < t(ns+1)$ ;
- $nderiv$  - întreg care indică faptul că se cere calculul valorii funcțiilor *B-spline* și al derivatelor acestora până la  $nderiv$ , exclusiv.

$work$  este o matrice de lucru, iar ieșirea este constituită de matricea  $db(k \times nderiv)$ ; termenul  $db(i, m)$  conține valoarea celei de-a  $(m-1)$ -a derivate a celei de-a  $(ns-k+i)$ -a funcții *B-spline* de ordinul  $k$  pentru secvența

de noduri  $t$ ,  $i = \overline{m, k}$ ,  $k = \overline{1, nderiv}$ .

## ANEXA nr. 15

### Program pentru soluționarea iterativă prin cologație a unei ecuații diferențiale neliniare

```

subroutine coloc(a,b,i,j,k,c,d)
parameter (l=25,m=500,n=500,i1=500)
dimension h(m),c(m),f(m),g(i1),h(10),j1(m),k1(3,1),o(m),p(10)
equivalence (g,q)
common/aprox/r(1),s(n),l1,m1/fr/n1,i2,p/rest/j2,k2,h
m1=j
if(i*m1.gt.n) go to 8
call difequ(1,j1(1),j1)
k2=m1-n1
call nod(k2,h)
t=(b-a)/float(i)
j1(1)=a
do 1 l2=2,i
1 j1(l2)=j1(l2-1)+t
j1(i+1)=b
call convert(j1,i,m1,o,n)
l2=1
2 call sistem(o,n,m1,j1,e,g,i1,k1,m2,b)
call slvblk(g,k1,m2,b,ipivot,e,iflag)
m2=1
if(j2.le.1)goto 6
3 call epsilon(o,e,n,m1,q,r,s,l1)
do 4 n2=1,n
4 f(n2)=e(n2)
call sistem(o,n,m1,j1,e,g,i1,k1,n2,h)
call slvblk(g,k1,n2,b,ipivot,e,iflag)
t=.0
u=.0
do 5 n2=1,n
u=amax1(abs(e(n2)),u)
5 t=amax1(abs(e(n2)-f(n2)),t)
if(t.le.d*u) go to 6
m2=m2+1
if(j2.ge.m2) go to 3
6 write(*,9)m1,l1,n,(r(n2),n2=2,l1)
if(j2.gt.0) write(*,10)m2,j2
call epsilon(o,e,n,m1,q,r,s,l1)
write(*,11)
do 7 n2=1,l1
i3=m1*(n2-1)
7 write(*,12)r(n2),(s(i3+j3),j3=1,m1)
call difequ(4,j1(1),j1)
if(k.le.l2) return
n2=i+ifix(c*float(l2))
if(m1*n2.gt.n) go to 8
call zeta(r,s,l1,m1,j1,n2,q)
call convert(j1,n2,m1,o,n)
l2=l2+1
go to 2
8 i3=n
write(*,13)i3
return
9 format(45hAproximare printr-un spatiu SPLINE de ordinul, i3,
*4h pe ,i3,11h intervale,/14h de dimensiune,i4,
*23h. Puncte de jonctiune -/(5e20.10))
10 format(4hDupa,i3,4h din,i3,10h iteratii permise.)
11 format(55h reprezentarea segmentar polinomiala a aproximarii este)
12 format(f9.3,e13.6,10e11.3)
13 format(11h,*****/29h Dimensiunea data in program,,i4,
*29h pentru S nu este suficienta.)
end

```

Coloc (s,d,l,i,n, a,e) necesită furnizarea următoarelor date de intrare la fiecare apelare:

- s, d - limitele (din stânga și din dreapta ale intervalului de aproximare;

- l - numărul inițial de segmente polinomiale ale aproximării; este aleasă o secvență uniformă a punctelor de jonctiune;

- i - ordinul polinoamelor care realizează aproximarea pp;

- n - numărul de apelări ale rutinei Zeta;

- a - numărul de puncte de jonctiune ce se adaugă la fiecare trecere prin Zeta - (de exemplu, pentru  $a = 0,34$  va fi adăugat un punct la fiecare a treia apelare);

•  $\epsilon$  - toleranța acceptată; procedeul iterativ *Newton* este întrerupt atunci când în care diferența între  $B$ -coeficienții a două iterații succesive nu depășește valoarea ei multiplicată cu cea mai mare valoare absolută identificată printre ei.

Programul furnizează soluția aproximativă sub formă de reprezentare  $pp$  și valorile erorilor în punctele cerute. Soluția aproximativă a ecuației diferențiale de ordinul  $m$ , cu condiții pe frontieră (specificate în *Difequ*) este obținută prin colocație. Aproximarea  $f$  a soluției  $g$  este o funcție  $pp$  de ordinul  $k+m$  cu  $l$  segmente polinomiale și  $m-1$  derivate continue; este determinată impunându-i-se condiția de a satisface ecuația diferențială în  $k$  puncte ale fiecărui interval (furnizate de *Nod*) și cele  $m$  condiții pe frontieră.

```

subroutine nod(i,a)
dimension a(i)
if(i.gt.8) go to 9
go to(1,2,3,4,5,6,7,8),
1 a(1)=.0
return
2 a(2)=.577350269189626d0
a(1)=-a(2)
return
3 a(3)=.774596669241483d0
a(1)=-a(3)
a(2)=.0
return
4 a(3)=.339981043584856d0
a(2)=-a(3)
a(4)=.061136311594053d0
a(1)=-a(4)
return
5 a(4)=.538469310105603d0
a(2)=-a(4)
a(5)=.906179845938664d0
a(1)=-a(5)
a(3)=.0
return
6 a(4)=.238619186083197d0
a(3)=-a(4)
a(5)=.661209386466265d0
a(2)=-a(5)
a(6)=.932469514203152d0
a(1)=-a(6)
return
7 a(5)=.405845151377397d0
a(3)=-a(5)
a(6)=.741531185599394d0
a(2)=-a(6)
a(7)=.949107912342759d0
a(1)=-a(7)
a(4)=.0
return
8 a(5)=.10343464249565d0
a(4)=-a(5)
a(6)=.5255324099916329d0
a(3)=-a(6)
a(7)=.796666477413627d0
a(2)=-a(7)
a(8)=.960289856497536d0
a(1)=-a(8)
return
9 write(*,11) i
b=float(i-1)/2.
do 10 j=1,i
10 a(j)=float(j-1)/b-1.
return
11 format(11H *****/57hSe folosesc puncte de colocatie echispati
**ate, deoarece K=, i2, 20h este mai mare ca 8.)
end
    
```

Subrutina `convert(ajonct, l, kpm, t, n)` construiește secvența de noduri  $t$  din secvența furnizată a punctelor de joncțiune  $ajonct$ . Aceasta este o funcție *spline* de ordinul  $k+m$  cu secvența de noduri  $t$ , având  $m-1$  derivate continue

```

subroutine convert(a,i,j,b,k)
dimension a(1),b(1),c(10)
common/fr/m,n,c
l=j-1
k=i*1+m
i1=j+k
j1=i+1
do 1 k1=1,j
b(i1)=a(j1)
1 i1=i1-1
do 2 j=1,i
j1=j1-1
do 2 k1=1,l
b(i1)=a(j1)
2 i1=i1-1
do 3 i1=1,j
3 b(i1)=a(1)
return
end
    
```

(reamintim că aceasta presupune  $\overline{t(1), t(n+kpm)} = \overline{ajonct(1)}$  de  $kpm$  ori, apoi  $\overline{ajonct(2), ajonct(l)}$  de  $k$  ori și în final  $ajonct(l+1)$  de  $kpm$  ori. Datele de intrare sunt:

- $\overline{ajonct(1), ajonct(l+1)}$  - secvența punctelor de joncțiune;
- $l$  - numărul intervalelor (și al segmentelor polinomiale);
- $kpm$  -  $k+m$ , ordinul funcției *spline* (sau a funcției  $pp$ ).

Programul furnizează ca date de ieșire secvența de noduri  $\overline{t_1, t_{n+kpm}}$  și dimensiunea funcției *spline* de aproximare.

Subrutina `nod(k, ro)` generează cele  $k$  puncte de colocație pentru intervalul standard  $[-1,1]$ , sub formă de zerouri ale polinomului *Legendre* de gradul  $k$  pentru  $k \leq 8$  și ca puncte

echidistante pentru  $k > 8$ .