

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMISOARA

TEZA DE DOCTORAT

ing. Constantin B L A J

**"STUDIUL SI MODELAREA LEVITATIEI MAGNETICE  
CU APLICARE LA OPTIMIZAREA  
LAGARELOR MAGNETICE CU POLI ALTERNANTI"**

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

Conducator științific:

prof. dr. ing. Ioan DE SABATA

1999

624.724  
181 8



## C U P R I N S

INTRODUCERE . . . . .	5
<b>Capitolul 1. ACTIUNI PONDEROMOTOARE IN LICHIDE MAGNETICE</b>	
1.1. Forțe de volum exercitate asupra lichidelor magnetice	9
1.1.1. Densitatea de volum a forțelor exercitate de câmpul electromagnetic . . . . .	9
1.1.2. Presiunea de natură electromagnetică exercitată în lichide magnetice . . . . .	10
1.2. Forțe de suprafață . . . . .	11
1.3. Forța exercitată de câmpul magnetic asupra unui corp imersat în lichid magnetic . . . . .	13
1.4. Levitațiile magnetice de ordinul I și II . . . . .	19
1.4.1. Levitația magnetică de ordinul I; evaluarea forțelor	19
1.4.2. Levitația magnetică de ordinul II . . . . .	20
<b>Capitolul 2. CALCULUL CAMPULUI MAGNETIC IN MEDII NELINIARE</b>	
2.1. Ecuațiile câmpului în funcție de potențiale . . . . .	23
2.1.1. Ecuațiile fundamentale ale câmpului electromagnetic macroscopic în medii fixe . . . . .	23
2.1.2. Ecuațiile câmpului în funcție de potențialul magnetic scalar $V_H$	24
2.1.3. Ecuațiile câmpului magnetic în funcție de potențialul magnetic modificat . . . . .	25
2.1.4. Condițiile de interfață la suprafețele de separație . . . . .	26
2.2. Metode numerice de calcul . . . . .	27
2.2.1. Metoda diferențelor finite . . . . .	27
2.2.2. Metoda elementelor finite . . . . .	29
<b>Capitolul 3. CALCULUL FORTEI EXERCITATE DE CAMPUL MAGNETIC ASUPRA UNUI MAGNET PERMANENT IN FORMA DE DISC IMERSAT IN LICHID MAGNETIC</b>	
3.1. Calculul numeric al câmpului utilizând potențialul magnetic vector modificat $\bar{U}$ . . . . .	33
3.1.1. Determinarea câmpului magnetic cu MEF . . . . .	35
3.1.2. Compararea rezultatelor obținute prin programul de calcul cu soluții analitice ale problemei de câmp . . . . .	36
3.2. Calculul numeric al forței de levitație exercitată asupra discului	38
3.2.1. Metoda numerică de integrare pentru obținerea forței	41

3.2.2. Analiza expresiei forței de levitație magnetică de ordinul II . . . .	43
3.2.3. Considerarea geometriei reale a magnetului permanent . . . . .	46
3.3. Interpretarea rezultatelor obținute la calculul forței de levitație magnetică de ordinul II . . . . .	51
3.3.1. Compararea rezultatelor obținute prin modelare cu rezultate experimentale . . . . .	51
3.3.2. Ordinograma de calcul pentru forța de levitație de ordinul II . .	53
3.3.3. Rezultate obținute și interpretarea lor . . . . .	55
3.4. Calculul forței de readucere . . . . .	64
3.4.1. Rezultate obținute și interpretarea lor . . . . .	71
<b>Capitolul 4. CALCULUL LAGARELOR MAGNETICE CU POLI ALTERNANȚI</b>	
4.1. Etanșări și lagăre magnetice . . . . .	76
4.2. Calculul analitic al lagărelor magnetice cu poli alternanți . . . . .	82
4.3. Calculul numeric al lagărelor cu poli alternanți . . . . .	88
4.3.1. Modelarea lagărului cu poli alternanți și metodologia de calcul a forței de readucere . . . . .	88
4.3.2. Analiza câmpului și a forței de readucere pentru cazul unei singure perechi de poli . . . . .	93
4.3.3. Compararea câmpului și a forței de readucere ce se realizează sub un pol pentru diferite situații de plasare a acestuia . . . . .	97
4.4. Analiza influenței numărului de poli asupra forței de readucere	100
4.4.1. Interstițiu constant și număr variabil de perechi de poli . . . . .	100
4.4.2. Pastrarea proporției între lungimea activă și interstițiu . . . . .	104
4.4.3. Influența numărului de poli, identici, asupra forței axiale de readucere . . . . .	106
4.5. Influența tipurilor de magneți permanenți asupra performanțelor lagărelor cu poli alternanți . . . . .	109
4.5.1. Metodologia de lucru . . . . .	109
4.5.2. Analiza comparativă a câmpului magnetic pentru lagărul tip "sandwich" realizat cu diferite materiale magnetice . . . . .	111
4.5.3. Compararea performanțelor lagărelor de tip "sandwich" pentru diferite materiale magnetice utilizate . . . . .	123
4.5.4. Comparatie între rezultatele obținute prin modelare și din aplicarea metodei analitice . . . . .	133
<b>Capitolul 5. CONCLUZII SI SUBLINIAREA PRINCIPALELOR CONTRIBUTII</b>	<b>143</b>
<b>BIBLIOGRAFIE . . . . .</b>	<b>151</b>

## INTRODUCERE

Lichidele magnetice (LM) sunt alcătuite din minuscule particule magnetice solide (având dimensiuni de la 3 până la 15 nm) aflate în suspensie într-un lichid de bază. Numărul acestor particule este foarte mare, o valoare de referință fiind  $10^{23}$  particule pe metru cub. Câteva proprietăți remarcabile ale lichidelor magnetice au făcut ca studiul lor să evolueze mult față de anii de debut (anii '60) și să se concretizeze în variate și destul de larg răspândite aplicații. Câteva din aceste proprietăți sunt:

- posibilitatea materializării unor fenomene fizice prin realizarea unor "imagini" tridimensionale, ale câmpului magnetic spre exemplu.
- vâscozitate variabilă și controlată prin intermediul câmpului magnetic, cu aplicare în tribologie sau în realizarea unor cuplaje mecanice controlate magnetic
- levitația sau autolevitația unor corpuri imersate în lichid magnetic
- conversia energiei termice direct în energie mecanică (pompa magnetotermică)

Domeniul larg al cercetărilor legate de lichidele magnetice (numite în literatură și ferrofluide) cuprinde câteva subdomenii conturate precis, cum ar fi: comportamentul mecanic, magnetic și termic al lichidelor magnetice (LM), dinamica LM, proprietățile fizico-chimice ale LM, aplicațiile LM.

Cea mai prestigioasă manifestare mondială, organizată cu o periodicitate trienală și-a defășurat cea mai recentă ediție la Timisoara, International Conference on Magnetic Fluids, iulie 1998 (ICMF 8), organizată de colectivul de cercetare în domeniul LM condus de domnul academician dr.ing. Ioan Anton. Organizarea conferinței, sub responsabilitatea și conducerea executivă a domnului dr.fiz. L.Vekas, s-a constituit într-o incontestabilă reușită, prezența principalelor nume de referință în domeniu conferind lucrărilor desfășurate o ținută științifică de cel mai înalt nivel.

Secțiunile organizate au cuprins 7 domenii, care reprezintă, într-o oarecare măsură, atât interesul actual cât și tendința de dezvoltare a domeniului. Aceste secțiuni au fost:

1. Elemente fizico-chimice ale LM
2. Teoria LM
3. Proprietățile fizice ale LM
4. Transfer de căldură și masă
5. Magnetohidrodinamica LM
6. Aplicații ingineresti ale LM
7. Aplicații biomedicale

Cercetarea teoretică și experimentală privind aspectele fizico-chimice, confirmată și de numărul mare de articole prezentate, arată o uriașă concentrare a efortului științific creator în acest domeniu. În ceea ce privește latura aplicării tehnologice, deși utilizarea principalelor proprietăți ce au impus LM se face pe scară industrială și este finalizată în numeroase și larg răspândite dispozitive tehnice, numărul lucrărilor științifice publicate în literatură și a celor susținute cu ocazia ICMF8 este destul de redus.

Prezenta lucrare încearcă să aducă o contribuție privind cercetarea teoretică în domeniul aplicațiilor ingineresti, stabilind dependențe geometrice și de material la dispozitive magnetofluidice ce aplică proprietatea de levitație și de autoevitație ce se manifestă asupra corpurilor imersate în LM.

Aplicațiile tehnologice existente pot fi grupate în trei mari categorii:[Ba1]

-detecție magnetică cu lichide magnetice, utilizată la înclinometre, traductoare de presiune și debit

-poziționare magnetică a lichidelor magnetice pentru lubrefiere, antrenare sau amortizare vâscoasă, categorie în care se încadrează și etanșările și lagărele magnetofluidice

-dinamica lichidelor magnetice, cuprinzând, între altele, și imprimante cu jet de cerneală pe baza de LM, pompe magnetocalorice, ventile de gaz bi și tridirectionale s.a.

Lucrarea elaborată se referă la domeniul lagărelor și etanșărilor magnetofluidice și anume la probleme legate de modelarea pe calculator a unor dispozitive cu LM în vederea obținerii de informații pentru proiectarea optimă a

acestora.

Structurarea tezei urmărește atât aspecte legate de teoria acțiunilor ponderomotoare ce se manifestă în lichidele magnetice (cap.1), cât și cele legate de calculul câmpurilor magnetice în medii neliniare (cap.2).

Concretizarea acestora se face prin determinarea expresiilor și rezolvarea problemelor de calcul privind forța de levitație magnetică de ordinul II asupra unui magnet de tip disc (cap.3), precum și a forței de readucere ce se manifestă la plasarea excentrică a magnetului în formă de disc într-o incintă cilindrică (în același cap.3).

În continuare se prezintă elemente (atât principial cât și soluții tehnice validate prin brevete de invenție) legate de etanșări și lagăre magnetofluidice, calculul analitic referitor la forța de readucere ce se manifestă la lagărele cu poli alternanți, precum și modelarea și rezolvarea pe calculator a problemelor legate de aceste lagăre (cap.4). Tot în acest capitol se urmărește obținerea elementelor necesare unei proiectări optimizate a unor asemenea lagăre, atât în ceea ce privește geometria acestora, cât și privind influența proprietăților materialelor utilizate. În capitolul final (cap.5) se prezintă concluziile la care am ajuns în decursul studiului efectuat, fiind subliniate și contribuțiile personale pe care le-am adus în decursul activității (îndelungată și adesea anevoioasă) consacrată realizării acestei teme fascinante și științific incitante în același timp.

\*

\* \*

La încheierea acestei introduceri, deși poate părea ușor paradoxal, simt nevoia de face și un bilanț moral al perioadei ce a cuprins etapa de geneză a lucrării.

Doresc să exprim, în cuvinte încărcate de emoție, mulțumiri domnului profesor dr.ing. Ioan De Sabata, conducătorul științific al prezentei lucrări. Recunoștința mea se referă atât la conducerea și ajutorul direct în rezolvarea temei de doctorat, cât și la formarea mea profesională, începută încă în anii studenției și care continuă și astăzi.

Colegii din catedră sunt și ei prezenți în gândurile mele, acum când un drum este pe cale de a se încheia. Susținerea efectivă pe care o am permanent din partea lor m-a ajutat să depășesc momente extrem de dificile, care la un moment dat puneau sub semnul incertitudinii, în ceea ce mă privește, chiar mai mult decât eventuala finalizare a prezentei lucrări.

Familia este un fundamental suport în tot ceea ce fac și în egală măsură un mobil pentru a exista și a evolua. Această lucrare există, în special, datorită membrilor familiei mele și încrederii pe care mi-au insuflat-o.

Toți cei ce ați avut sentimente pozitive față de demersul meu, că n lung și anevoios, de a atinge o treaptă importantă în evoluția didactică, sunteți prezenți în gândurile mele, chiar dacă aceste cuvinte sunt prea sărace în conținut pentru a exprima sentimentele mele.

**VA MULTUMESC, TUTUROR!**



## CAP. 1. ACTIUNI PONDEROMOTOARE IN LICHIDE MAGNETICE

### 1.1. Forțe de volum exercitate asupra lichidelor magnetice

#### 1.1.1. Densitatea de volum a forțelor exercitate de câmpul electromagnetic

Pentru densitatea de volum a forței se pot obține mai multe expresii [Ro1],[Lu1],[DS1],[DS2], între care:

$$\begin{aligned} \bar{f}_v = & \rho_v \cdot \bar{E} + (\bar{D} \cdot \nabla) \cdot \bar{E} + (\bar{B} \cdot \nabla) \cdot \bar{H} - \text{grad} \left[ \int_0^E \bar{D} \cdot d_S E + \int_0^H \bar{B} \cdot d_S H - \right. \\ & \left. - \rho \int_0^E \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{\epsilon, \tau} \cdot E \cdot d_S E - \rho \int_0^H \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H, \tau} \cdot H \cdot d_S H \right] \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

în care, în afara vectorilor de câmp care au simbolizarile consacrate:

$\rho$  - reprezintă densitatea de masă a lichidului magnetic

$\rho_v$  - reprezintă densitatea sarcinii libere cu distribuție volumică în lichid

$\epsilon$  - reprezintă permitivitatea absolută a lichidului

$\mu$  - reprezintă permeabilitatea absolută a acestuia

$\tau$  - reprezintă temperatura

$d_s$  - simbolizează o diferențială substanțială

Sau:

$$\begin{aligned} \bar{f}_v = & \rho_v \cdot \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} + \bar{D} \cdot \text{grad} E + \bar{B} \cdot \text{grad} H - \\ & - \text{grad} \left[ \int_0^E \bar{D} \cdot d_S E + \int_0^H \bar{B} \cdot d_S H - \rho \int_0^E \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{\epsilon, \tau} \cdot E \cdot d_S E - \rho \int_0^H \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H, \tau} \cdot H \cdot d_S H \right] + \\ & + \frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} (\epsilon_r \mu_r \bar{S}) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

în care  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$  reprezintă patratul vitezei de propagare a luminii în vid.

Pentru cazul substanțelor paramagnetice, fără polarizare permanentă și izotrope se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} \bar{f}_v = & \rho_v \cdot \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} + \bar{P} \cdot \text{grad} E + \mu_0 \bar{M} \cdot \text{grad} H - \text{grad} \left[ \int_0^E \bar{P} \cdot d_S E + \mu_0 \int_0^H \bar{M} \cdot d_S H \right] \cdot \\ & + \text{grad} \left[ \rho \int_0^E \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E, \tau} \cdot d_S E + \rho \int_0^H \mu_0 \left( \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H, \tau} \cdot d_S H \right] + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\delta}{\delta t} (\epsilon_r \mu_r) \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Pentru cazul câmpurilor electrostatice, respectiv magnetice staționare, din medii izotrope, fără polarizări permanente, dar neliniare, densitățile de volum ale forțelor rezultă în formele :

$$\bar{f}_{v_e} = \rho_v \cdot \bar{E} + \rho \operatorname{grad} \int_0^E \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE \quad (1.1.4)$$

$$\bar{f}_{v_m} = \bar{J} \times \bar{B} + \rho \operatorname{grad} \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} d_s H \quad (1.1.5)$$

$$\bar{f}_{v_e} = \rho_v \cdot \bar{E} - \frac{E^2}{2} \operatorname{grad} \epsilon + \operatorname{grad} \left[ \frac{\bar{D} \cdot \bar{E}}{2} - \int_0^E D \cdot dE + \rho \int_0^E \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E \cdot dE \right] \quad (1.1.6)$$

De asemenea expresiile mai pot fi puse sub formele:

$$\bar{f}_{v_m} = \bar{J} \times \bar{B} - \frac{H^2}{2} \operatorname{grad} \mu + \operatorname{grad} \left[ \frac{\bar{B} \cdot \bar{H}}{2} - \int_0^H B \cdot dH + \rho \int_0^H \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H \cdot dH \right] \quad (1.1.7)$$

$$\bar{f}_{v_e} = \rho_v \cdot \bar{E} + D \cdot \operatorname{grad} E - \operatorname{grad} \left[ \int_0^E D \cdot dE - \rho \int_0^E \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E \cdot dE \right] \quad (1.1.8)$$

$$\bar{f}_{v_m} = \bar{J} \times \bar{B} + B \cdot \operatorname{grad} H - \operatorname{grad} \left[ \int_0^H B dH - \rho \int_0^H \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H dH \right] \quad (1.1.9)$$

### 1.1.2. Presiunea de natură electromagnetică exercitată în lichide

Considerând un lichid în care nu se găsește sarcină liberă distribuită și nici nu este caracterizat de densități de curenți de conducție, expresia densității de volum a forței ce se exercită, ținând seama de (1.1.4) și (1.1.5) este:

$$\bar{f}_v = \bar{f}_{v_e} + \bar{f}_{v_m} = \rho \operatorname{grad} \left[ \int_0^E \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \quad (1.1.10)$$

Admițând că densitatea de masă nu depinde de presiune, ipoteză satisfăcută cu o precizie suficientă de către lichide, se poate calcula componenta suplimentară a presiunii datorată câmpului electromagnetic pornind de la condiția de echilibru:

$$\bar{f}_{em} = \operatorname{grad} p_{em} \quad (1.1.11)$$

Cu aceasta se obține:

$$\operatorname{grad} p_{em} = \rho \operatorname{grad} \left[ \int_0^E \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] \quad (1.1.12)$$

Pentru mediile care au densitatea de masă constantă, soluția ecuației (1.1.12) este:

$$p_{em} = \rho \left[ \int_0^E \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] + C \quad (1.1.13)$$

în care C reprezintă o constantă de integrare.

Notând cu  $H_0$  și cu  $E_0$  valorile intensității câmpului magnetic și, respectiv, ale intensității câmpului electric la suprafața liberă a lichidului magnetic (lichid

paramagnetic) neliniar, dar lipsit de histereză și aflat în stare statică, constanta de integrare poate fi determinată [DS1] și prin aceasta se poate ajunge la expresia presiunii suplimentare, de natură electromagnetică ce se manifestă în lichidul magnetic sub forma:

$$p_{em} = \rho \left[ \int_0^E \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} dH \right] - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)^2}{2\epsilon_1^2 \epsilon_0} D_{10n_{12}}^2 - \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{2\mu_1^2 \mu_0} B_{10n_{12}}^2 - \int_0^{E_{10}} P dE - \mu_0 \int_0^{H_{10}} M dH \quad (1.1.14)$$

## 1.2 Forțe de suprafață

Tensorul tensiunilor fictive este, prin definiție, tensorul a cărui divergență este egală cu densitatea de volum a forțelor exercitate de către câmpul electromagnetic asupra mediilor corporale [Ra1]. Notând cu  $\vec{T}_f$  acest tensor și prin  $\vec{f}_v$  densitatea de volum a forței, se poate scrie:

$$\vec{f}_v = \text{div } \vec{T}_f \quad (1.2.1)$$

sau, în forma integrală:

$$\vec{F} = \int_{V_\Sigma} \vec{f}_v dv = \int_{V_\Sigma} \text{div } \vec{T}_f dv = \oint_{\Sigma} \vec{t}_f(\vec{n}) dS \quad (1.2.2)$$

unde  $\Sigma$  reprezintă suprafața ce delimitează volumul  $V_\Sigma$  de lichid ale cărui proprietăți au fost considerate continue, și  $\vec{t}_f(\vec{n})$  este valoarea vectorială a tensorului  $\vec{T}_f$ , asociată normalei exterioare  $\vec{n}$  la suprafața  $\Sigma$ .

În [DS3] se demonstrează că densitatea de volum a forțelor este egală și de semn contrar cu divergența tensorului câmpului electromagnetic  $\vec{T}$ . Componentele acestui tensor pot fi scrise după cum urmează (1.2.3), dacă ne situăm în medii lichide neliniare și fără histereză, dar izotrope, și, dacă polarizația permanentă precum și magnetizația permanentă a acestora este nulă.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{ij} = \vec{E} \cdot \vec{D} - \rho \int_0^E \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E d_s E + \vec{H} \cdot \vec{B} - \rho \int_0^H \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H d_s H - \\ \quad - w_{elm} - E_i D_j - H_i B_j \\ T_{ij} = -E_j D_i - H_j B_i \end{array} \right. \quad (1.2.3)$$

în care  $w_{elm}$  este densitatea de energie electromagnetică.

Deci:

$$\vec{f}_v = -\text{div } \vec{T}$$

și valoarea vectorială a tensorului  $\vec{T}$  este dată, așa cum se arată în [DS3] de:

$$\bar{t}(\bar{n}) = \left[ \bar{E} \cdot \bar{D} - \rho \int_0^E \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E d_s E + \bar{H} \cdot \bar{B} - \int_0^H \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H d_s H - w_{elm} \right] \cdot \bar{n} - \bar{E}(\bar{D} \cdot \bar{n}) - \bar{H}(\bar{B} \cdot \bar{n}) \quad (1.2.4)$$

Rezultă că suma tensorilor  $\bar{T}$  și  $\bar{T}_f$  poate fi reprezentată în mod unic de un tensor a cărui divergență este nulă. Mai mult, pentru că  $\bar{f}_v$  este funcție numai de marimile de stare ale câmpului magnetic, și tensorii  $\bar{T}$  și  $\bar{T}_f$  trebuie să depindă în mod exclusiv numai de aceste marimi. Impunând această condiție va rezulta un tensor solenoidal nul și, în consecință, așa cum se arată în [DS1]:

$$\bar{T}_f = -\bar{T} \quad (1.2.5)$$

adică, tensorul tensiunilor fictive introdus în teoria Maxwell, pentru a calcula rezultanta forțelor de volum exercitate asupra mediilor, este egal și de semn contrar cu tensorul câmpului electromagnetic introdus în [DS3].

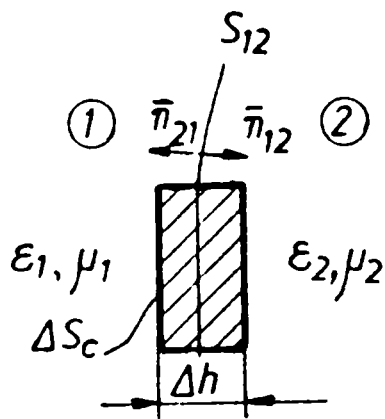


Figura 1.2.1.

Formulele obținute anterior sunt dezvoltate în [DS1] pentru a stabili expresia forței superficiale ce se exercită la suprafața de separație între două medii având proprietăți de material, electrice și magnetice diferite, cele două medii fiind separate prin suprafața  $S_{12}$ . Cu indicele 1 sunt notate marimile corespunzătoare mediului 1 și cu 2 cele corespunzătoare mediului 2, în același punct al suprafeței  $S_{12}$ , dar pe fețele corespunzătoare. Cu  $\bar{n}_{12}$  este notată normala la suprafața  $S_{12}$ , în același punct și orientată de la mediul 1 spre mediul 2. Cu aceste notații și în condițiile în care suprafața de separație este lipsită de sarcină electrică liberă, precum și densitatea unor eventuali curenți superficiali pe suprafața  $S_{12}$  este nulă, prin raționamente de trecere la limită aplicate volumului cilindric infinitezimal reprezentat hașurat în figura 1.2.1, se obține pentru densitatea de suprafață a forței expresia [DS1]:

$$\begin{aligned} \bar{f}_s = & - \left[ \rho_1 \int_0^{E_1} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E d_s E - \int_0^{E_1} D d_s E + \rho_1 \int_0^{H_1} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H d_s H - \int_0^{H_1} B d_s H \right] \cdot \bar{n}_{12} - \\ & - \left[ -\rho_2 \int_0^{E_2} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{E,\tau} E d_s E + \int_0^{E_2} D d_s E - \rho_2 \int_0^{H_2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{H,\tau} H d_s H + \int_0^{H_2} B d_s H \right] \cdot \bar{n}_{12} + \\ & + \left[ \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) D_{2n_{12}}^2 + \left( \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) B_{2n_{12}}^2 \right] \cdot \bar{n}_{12} \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

### 1.3. Forța exercitată de câmp magnetic asupra unui corp imersat în lichid magnetic

Forța rezultantă exercitată asupra unui corp nemagnetic imersat într-un lichid magnetic, în prezența unui câmp magnetic, are expresia:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 \oint_{\Sigma} \left[ \frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M_n dH \right] d\bar{S} \quad (1.3.1)$$

expresie care, sub diferite forme echivalente, poate fi găsită în literatura [Ro1], [DS1], [DS2].

În relația (1.3.1) semnificația mărimilor este următoarea:

**H** - intensitatea câmpului magnetic

$\mu_0$  - permeabilitatea magnetică a vidului

$\Sigma$  - suprafața ce delimitează corpul imersat

$M_n$  - componenta normală a magnetizației  $\bar{M}$ , la suprafața corpului

Deoarece această forță poate compensa greutatea aparentă a corpului fără magnetizație permanentă, fenomenul este cunoscut în literatură sub denumirea de levitație magnetică de ordinul I.

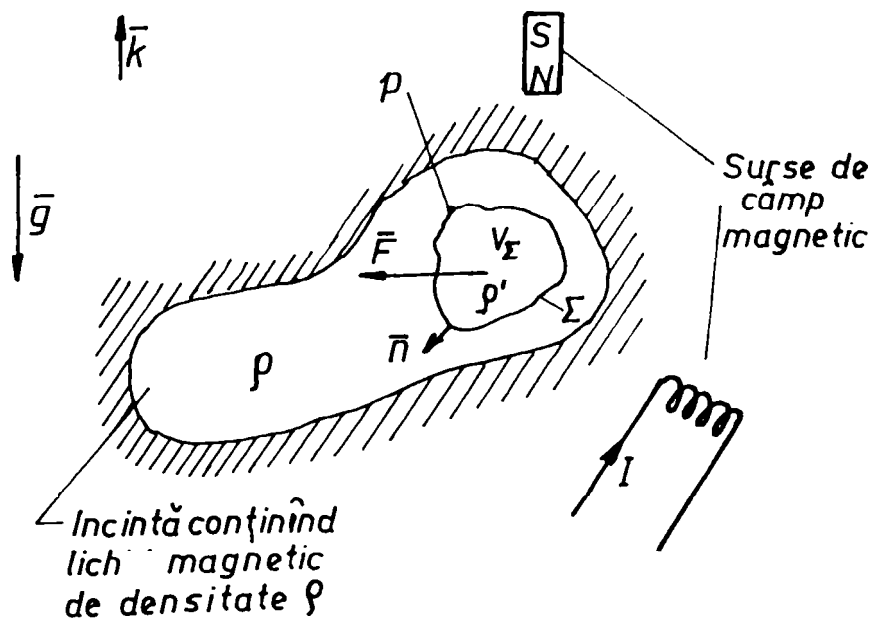


Figura 1.3.1.

Pentru cazul în care corpul imersat are magnetizație permanentă, în literatură este recomandată metoda de a calcula forța de levitație pe calea integrării valorii vectoriale a tensorului fictiv al tensiunilor maxwelliene. În cele ce urmează se prezintă modul în care s-a demonstrat [DS4] faptul că forța de levitație poate fi calculată determinând forța care se exercită asupra vasului ce conține lichidul

magnetic în care este imersat corpul ce prezintă magnetizație permanentă.

Sursa de câmp o reprezintă magnetul permanent imersat în lichidul magnetic, câmpul produs de eventuale surse exterioare este presupus nul, iar fenomenul este denumit levitație magnetică de ordinul II.

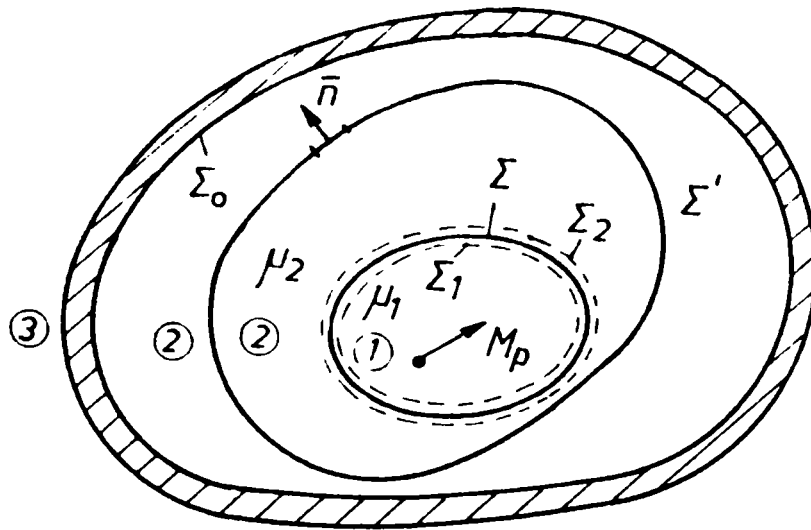


Figura 1.3.2.

Considerând un corp ce prezintă magnetizația permanentă  $\bar{M}_p$  și permeabilitate magnetică  $\mu_1$  și care este imersat într-un lichid magnetic având permeabilitatea magnetică  $\mu_2 = \mu_2(H)$ , situație prezentată în figura 1.3.2, se fac următoarele notații:

$\Sigma_1$  - suprafața atașată ce aparține corpului imersat

$\Sigma_2$  - suprafața atașată lichidului

$\Sigma$  - suprafața de separație între cele două medii

Deoarece proprietățile de material suferă un salt la trecerea prin  $\Sigma$ , prin raționamente de limită se ajunge la concluzia că:

$$\bar{f}_{s_{12}} = \bar{f}_{s_1} + \bar{f}_{s_2} = \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1) + \bar{t}_{f_2}(\bar{n}_2) \quad (1.3.2)$$

în care  $\bar{f}_{s_{12}}$  este densitatea de suprafață rezultantă a forțelor ce se exercită pe cele două suprafețe  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$

$\bar{f}_{s_1}$  este densitatea de suprafață a forțelor ce se exercită pe  $\Sigma_1$

$\bar{f}_{s_2}$  este densitatea de suprafață a forțelor ce se exercită pe  $\Sigma_2$

Pentru valorile vectoriale ale tensorului fictiv corespunzătoare normalelor interioare s-au folosit notațiile:

$\bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1)$  pentru puncte situate pe  $\Sigma_1$

$\bar{t}_{f_2}(\bar{n}_2)$  pentru puncte situate pe  $\Sigma_2$

Privitor la forța rezultantă a acțiunii câmpului magnetic asupra corpului

imersat, pot fi distinse trei componente:

$\int_{V_{\Sigma_1}} \bar{f}_{v_1} dv$  - rezultanta forțelor volumice repartizate cu densitatea  $\bar{f}_{v_1}$

$\oint_{\Sigma} \bar{f}_{s_{12}} dS$  - rezultanta forțelor de suprafață

$-\int_{\Sigma_1} p_m d\bar{S}$  - forța exercitată de presiunea magnetică  $p_m$

Presiunea magnetică este generată de prezența câmpului magnetic în lichidul magnetic și se exercită asupra corpului.

Forța ce se exercită asupra corpului va fi:

$$\bar{F} = \int_{V_{\Sigma_1}} \bar{f}_{v_1} dv + \oint_{\Sigma} \bar{f}_{s_{12}} dS - \oint_{\Sigma_1} p_m d\bar{S} \quad (1.3.3)$$

în care:

$$\oint_{\Sigma} \bar{f}_{s_{12}} dS = \oint_{\Sigma_1} \bar{f}_{s_1} dS + \oint_{\Sigma_2} \bar{f}_{s_2} dS$$

În acord cu definiția tensorului fictiv al tensiunilor maxwelliene:

$$\int_{V_{\Sigma_1}} \bar{f}_{v_1} dv = \oint_{\Sigma_1} \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1) dS$$

astfel încât relația (1.3.3) se poate scrie, ținând seama și de (1.3.2), sub forma:

$$\bar{F} = \oint_{\Sigma_1} \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1) dS - \oint_{\Sigma_1} \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1) dS + \oint_{\Sigma_2} \bar{t}_{f_2}(\bar{n}_1) dS - \oint_{\Sigma_2} \bar{t}_{f_2}(\bar{n}_1) dS$$

și prin urmare:

$$\bar{F} = \oint_{\Sigma_2} \bar{t}_{f_2}(\bar{n}_1) dS - \oint_{\Sigma_1} p_m d\bar{S} \quad (1.3.4)$$

În scrierea relației (1.3.4) s-a ținut seama și de proprietatea:

$$\bar{t}_f(\bar{n}) = -\bar{t}_f(-\bar{n})$$

iar pentru versorul normal s-a utilizat indicele superior ' pentru a-i marca orientarea spre interiorul mediului la care se referă indicele inferior. Astfel:

$$\bar{n}_1 = -\bar{n}_1' = \bar{n}_2'$$

indica versorul normal orientat spre exteriorul corpului (mediul 1) și în același timp spre lichidul magnetic (mediul 2).

Densitatea de volum a forței pe care câmpul magnetic o exercită asupra lichidului magnetic are expresia [Ro1], [DS2] :

$$\bar{f}_v = \rho_2 \nabla \cdot \left[ \mu_0 \int_0^M \left( \frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H, \tau} dH \right] \quad (1.3.5)$$

în care  $\rho_2$  - reprezintă densitatea de masă a lichidului, presupusă constantă

$\bar{M}$  - reprezintă vectorul magnetizație

$\tau$  - reprezintă temperatura absolută

La efectuarea derivatei în raport cu densitatea de masă, variabilele  $H$  și  $\tau$  sunt menținute constante.

Pentru starea de echilibru a lichidului  $\bar{f}_v = \nabla \cdot \rho_m$ , deci pentru presiunea generată de câmpul magnetic rezultă expresia:

$$\rho_m = \rho_2 \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH + p_c \quad (1.3.6)$$

în care  $p_c$  este o constantă de integrare.

La deducerea expresiei presiunii s-a presupus densitatea de masă independentă de  $\rho_m$ , ipoteză acceptabilă în calcule deoarece coeficientul de compresibilitate izotermă este foarte mic.

Dacă se consideră puncte dintr-un mediu lipsit de histerezis, dar în care vectorii câmpului magnetic sunt continui, valoarea vectorială a tensorului fictiv corespunzător normalei  $\bar{n}$  este dată de:

$$t_i(\bar{n}) = - \left[ \bar{H} \cdot \bar{B} - \rho_2 \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH - \int_0^B H dB \right] \bar{n} + \bar{H}(\bar{B} \cdot \bar{n}) \quad (1.3.7)$$

Cum lichidele magnetice sunt medii paramagnetice, pentru acestea este valabila relația:

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{M}{H} \right) \quad \text{și deci}$$

$$\left( \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} = \mu_0 \left( \frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} \cdot \frac{1}{H}$$

Ca urmare, relația (1.3.7) se mai poate scrie:

$$t_i(\bar{n}) = - \left[ \bar{H} \cdot \bar{B} - \rho_2 \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH - \int_0^B H \cdot dB \right] \bar{n} + \bar{H}(\bar{B} \cdot \bar{n}) \quad (1.3.8)$$

Folosind cele arătate în relațiile (1.3.8) și (1.3.6), expresia forței (1.3.4) devine:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & \oint_{\Sigma_2} \left[ \rho_2 \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH + \int_0^B H \cdot dB - \bar{H} \cdot \bar{B} \right] d\bar{S} + \oint_{\Sigma_2} \bar{H}(\bar{B} \cdot \bar{n}) dS - \\ & - \oint_{\Sigma_1} \left[ \rho_2 \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial \rho_2} \right)_{H,\tau} dH \right] d\bar{S} - \oint_{\Sigma_2} p_c d\bar{S} \end{aligned} \quad (1.3.4')$$

și cum  $\oint_{\Sigma_2} p_c d\bar{S} = 0$ , iar  $\int_0^B H dB - BH = \int_0^H B dH$ , rezultă acum:

$$\bar{F} = - \oint_{\Sigma_2} \left( \int_0^H B dH \right) d\bar{S} + \oint_{\Sigma_2} \bar{H}(\bar{B} \cdot \bar{n}) dS \quad (1.3.9)$$



în care  $\bar{dS} = \bar{n}_1 dS$  și  $\bar{n} = \bar{n}_1$ .

În legătură cu suprafața de integrare din expresia (1.3.9) se poate menționa, că pentru lichide omogene și aflate în echilibru, această suprafață poate fi trasată arbitrar prin lichid. Această observație este utilă întrucât ea permite să se aleagă cele mai potrivite forme pentru  $\Sigma_2$  astfel încât volumul de calcule să fie minim [DS3].

Expresia (1.3.9) poate fi adusă și la o alta formă, [DS4], punându-se în evidență două componente ale forței și, anume:

- un termen ce se referă la forțele exercitate asupra sarcinilor magnetice fictive și

- un al doilea termen determinat de o tensiune normală.

În acest scop, mărimile ce se referă la magnetul permanent se vor nota cu indicele 1, iar cele ce se referă la lichidul magnetic cu indicele 2 (fapt utilizat și în relații anterioare).

Cum  $\bar{B}_1 = \mu_1 \bar{H}_1 + \mu_0 \bar{M}_p$ , iar componentele tangente ale lui  $\bar{H}$  și cele normale ale lui  $\bar{B}$  sunt, respectiv, egale la suprafața de trecere magnet-lichid, avem succesiv:

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma_2} (\bar{B} \cdot \bar{n}_1) \bar{H} dS &= \oint_{\Sigma_2} B_{2n} \bar{H}_{2n} dS + \oint_{\Sigma_2} B_{2t} \bar{H}_{2t} dS = \oint_{\Sigma_2} B_{2n} H_{2n} d\bar{S} + \oint_{\Sigma_2} B_{2n} (\bar{H}_1 - \bar{H}_{1n}) dS = \\ &= \oint_{\Sigma_2} B_{2n} H_{2n} d\bar{S} - \oint_{\Sigma_2} B_{2n} \left( \frac{B_{1n}}{\mu_1} - \frac{\mu_0}{\mu_1} M_{pn} \right) dS + \oint_{\Sigma_1} B_{1n} \bar{H}_1 dS \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Tinând seama de transformarea:

$$\oint_{\Sigma} (\bar{n} \cdot \bar{F}) \bar{G} dS = \int_{V_{\Sigma}} [\bar{G} \operatorname{div} \bar{F} + (\bar{F} \cdot \nabla) \bar{G}] dv \quad (1.3.11)$$

în care se face  $\bar{F} = \bar{B}$  și  $\bar{G} = \bar{H}$ , și considerând  $\operatorname{div} \bar{B} = 0$ , egalitatea

(1.3.11) devine:

$$\oint_{\Sigma_1} B_{1n} \bar{H}_1 dS = \int_{V_{\Sigma}} (\bar{B}_1 \cdot \nabla) \bar{H}_1 dv \quad (1.3.12)$$

Dat fiind că:

$$(\bar{B}_1 \cdot \nabla) \bar{H}_1 = [(\mu_1 \bar{H}_1 + \mu_0 \bar{M}_p) \cdot \nabla] \bar{H}_1 = \frac{\mu_1}{2} \nabla H_1^2 + \mu_0 (M_p \cdot \nabla) H_1 \quad (1.3.13)$$

și utilizând acum din nou transformarea (1.3.12) se obține:

$$\begin{aligned} \int (\bar{M}_p \cdot \nabla) H_1 dv &= \oint_{\Sigma_1} (\bar{M}_p \cdot \bar{n}) H_1 dS - \int_{V_{\Sigma_1}} \bar{H}_1 \operatorname{div} \bar{M}_p dv = \\ &= - \oint_{\Sigma_1} \bar{H}_1 \operatorname{div}_s \bar{M}_p dS - \int_{V_{\Sigma_1}} \bar{H}_1 \operatorname{div} \bar{M}_p dv \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

În deducerea relației (1.3.14) s-a ținut seama și de faptul că:

$$-(\bar{n} \cdot \bar{M}_p) = \text{div}_s \bar{M}_p$$

Folosind transformarea lui Gauss - Ostrogradski, referitoare la gradient, și presupunând permitivitatea magnetică  $\mu$ , a magnetului permanent ca fiind constantă se poate obține acum:

$$\begin{aligned} \int_{V_{\Sigma_1}} (\bar{B}_1 \nabla) H_1 dv &= \frac{\mu_1}{2} \nabla H_1^2 dv - \mu_0 \oint_{\Sigma} \bar{H}_1 \text{div} \bar{M}_p dS - \mu_0 \int_{V_{\Sigma}} \bar{H}_1 \text{div} \bar{M}_p dv = \\ &= \oint_{\Sigma_1} \left[ \frac{\mu_1}{2} H_1^2 \bar{n} - \mu_0 \bar{H}_1 \text{div}_s \bar{M}_p \right] dS - \mu_0 \int_{V_{\Sigma_1}} \bar{H}_1 \text{div} \bar{M}_p dv \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Rezultă în continuare:

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma_2} (\bar{B} \cdot \bar{n}_1) \bar{H} dS &= \oint_{\Sigma_2} \left[ B_{2n} H_{2n} - \frac{B_{2n}^2}{\mu_1} + \frac{\mu_0}{\mu_1} B_{2n} M_{pn} + \frac{\mu_1}{2} \left( \frac{B_{2n}}{\mu_1} - \frac{\mu_0}{\mu_1} M_{pn} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu_1 H_{1t}^2 \right] d\bar{S} - \\ &- \mu_0 \oint_{\Sigma} \bar{H}_1 \text{div} \bar{M}_p dv = \oint_{\Sigma} \left[ B_{2n} H_{2n} - \frac{B_{2n}^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_0^2}{2\mu_1} M_{pn}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_{1t}^2 \right] d\bar{S} - \\ &- \mu_0 \oint_{\Sigma_1} \bar{H}_1 \text{div}_s \bar{M}_p dS - \mu_0 \int_{V_{\Sigma}} \bar{H}_1 \text{div} \bar{M}_p dv \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Utilizând: 
$$\int_0^H B dH = \int_0^H (\mu_0 H + \mu_0 M) dH = \mu_0 \frac{H^2}{2} + \mu_0 \int_0^H M dH \quad (1.3.17)$$

și  $H^2 = H_n^2 + H_t^2$  se obține:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= - \oint_{\Sigma_2} \left( \int_0^{H_2} B dH \right) d\bar{S} + \oint_{\Sigma_2} \bar{H} (\bar{B} \cdot \bar{n}) dS = \\ &= \oint_{\Sigma_2} \left[ -\mu_0 \frac{H_{2n}^2 + H_{2t}^2}{2} - \mu_0 \int_0^{H_2} M_2 dH_2 + B_{2n} H_{2n} - \frac{B_{1n}^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_0^2}{2\mu_1} M_{pn}^2 + \frac{1}{2} \mu_1 H_{1t}^2 \right] d\bar{S} - \\ &- \mu_0 \int_{\Sigma} \bar{H}_1 \text{div}_s \bar{M}_p dS - \mu_0 \int_{V_{\Sigma}} \bar{H}_1 \text{div} \bar{M}_p dv \end{aligned}$$

Deoarece:  $B_{1n} = B_{2n} = \mu_0 H_{2n} + \mu_0 M_{2n}$  și  $H_{1t} = H_{2t}$

egalitatea anterioară mai poate fi pusă și sub forma:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[ \frac{1-\mu_{r1}}{2} \left( \frac{H_{2n}^2}{\mu_{r1}} + H_{2t}^2 + 2 \frac{M_{2n} H_{2n}}{\mu_{r1}} \right) + \frac{1}{2\mu_{r1}} (M_{2n}^2 - M_{pn}^2) + \int_0^{H_2} M_2 dH_2 \right] d\bar{S} - \\ &- \mu_0 \oint_{\Sigma_1} \bar{H}_1 \text{div}_s \bar{M}_p dS - \mu_0 \int_{V_{\Sigma_1}} \bar{H}_1 \text{div} \bar{M}_p dv \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

Dacă magnetul are magnetizare temporară neglijabilă,  $\mu_{r1} = 1$ , forța rezultantă dobândește expresia mai simplă:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[ \frac{1}{2} (M_{2n}^2 - M_{pn}^2) + \int_0^{H_2} M_2 \cdot dH \right] d\bar{S} - \\ &- \mu_0 \oint_{\Sigma_1} \bar{H}_1 \cdot \text{div}_s \bar{M}_p dS - \mu_0 \int_{V_{\Sigma_1}} \bar{H}_1 \cdot \text{div} \bar{M}_p dv \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

## 1.4. Levitațiile magnetice de ordinul I și II

### 1.4.1. Levitația magnetică de ordinul I; evaluarea forțelor

Fenomenul de levitație magnetică de ordinul I se produce în cazul imersării unui corp alcătuit din material de natură nemagnetică într-un lichid magnetic în care este stabilit (din exterior) un câmp magnetic. Deși densitatea corpului este mai mare decât cea a lichidului magnetic, efectul ce se manifestă asupra acestuia este deplasarea sa până la atingerea unei stări de echilibru, echilibru ce se realizează de către un câmp tridimensional de forțe. Greutatea (aparentă) a corpului este echilibrată de rezultanta unor forțe de tip magnetic.

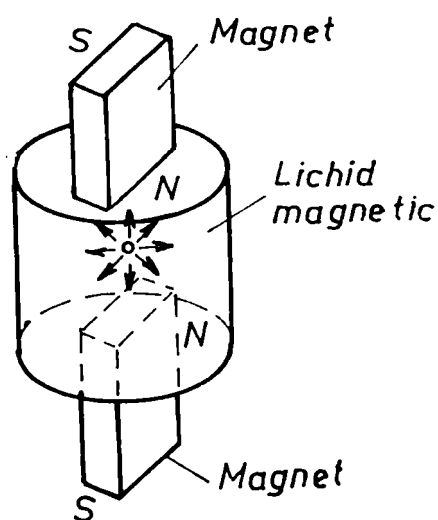


Figura 1.4.1.

O justificare intuitivă, privind existența și modul de acționare a forțelor de natură magnetică, poate fi sugerată de următorul experiment [Lu1]: considerăm o incintă complet umplută cu un lichid magnetic, plasată într-un domeniu imponderabil (de gravitație nulă). Acceptăm că, inițial, câmpul magnetic este absent, astfel că presiunea este uniformă, având o valoare constantă în regiunea (incinta) complet ocupată de lichidul magnetic. Două surse de câmp magnetic "polarizat" crează un câmp magnetic în

sensuri opuse și sunt plasate simetric în proximitatea incintei, așa cum arată figura 1.4.1. Aceste două surse crează o distribuție de câmp care are valoare nulă în centrul dispozitivului, câmp ce crește în orice direcție ne-am îndepărta față de acest punct.

Pentru că lichidul magnetic este atras spre regiunile cu câmp magnetic mai intens, el va fi supus unei tendințe de a fi îndepărtat din centrul dispozitivului.

Deoarece lichidul magnetic este practic incompresibil și pentru că el ocupă complet incinta, efectul pe care îl crează este creșterea presiunii pe măsură ce ne îndepărtăm de centrul dispozitivului.

Să presupunem acum un corp sferic, nemagnetic imersat în această incintă. Dacă este plasat în centrul dispozitivului, în absența unor alte forțe, corpul va rămâne acolo pentru că rezultanta forțelor ce acționează la suprafața sa (datorate presiunii și forțelor superficiale) va fi nulă ca urmare a distribuției lor simetrice.

Altfel spus, distribuția presiunii integrate pe suprafața corpului nu poate conduce la apariția vreunei forțe, deoarece rezultatul acestei integrale este nul.

Dacă acest obiect este deplasat din punctul (zona) de echilibru, asupra sa va acționa o forță de readucere în poziția centrală, datorată distribuției nesimetrice (cel puțin pe direcția deplasării) a presiunii și forțelor superficiale.

Acesta este un fenomen de levitație pasivă a unui corp nemagnetic.

Dacă experimentul are loc în prezența unui câmp gravitațional vertical, corpul se va fixa într-un punct (zonă) pe axa verticală de simetrie, pentru care se realizează echilibrul tuturor forțelor. Rezultanta forțelor de natură magnetică va fi orientată vertical și împreună cu forța arhimedica vor echilibra greutatea corpului.

#### 1.4.2. Levitația magnetică de ordinul II

Levitația de ordinul II se referă la "autolevitația" unui magnet permanent imersat (în anumite condiții) în lichide magnetice. Denumirea de autolevitație este sugestivă și potrivită, căci sursa de câmp este în același timp și elementul asupra caruia se manifestă și fenomenul de levitație magnetică.

În situația în care magnetul (în formă de disc, spre exemplu) este imersat într-un lichid magnetic ce ocupă o incintă cilindrică și de extensie foarte mare, câmpul magnetic pe care-l crează este dispus simetric față de el și magnetul se află în echilibru, din punctul de vedere al forțelor magnetice. Dacă însă magnetul este deplasat din punctul (zona) care asigură simetria câmpului și spectrul câmpului devine nesimetric, intensitatea câmpului magnetic devine mai mare în zonele mai îndepărtate de fostul centru de simetrie. În baza aceleiași concluzii, prezentată la levitația de ordinul I (conform căreia presiunea de natură magnetică pe care lichidul o exercită este cu atât mai mare cu cât câmpul este mai intens), vom constata existența unor forțe ce tind să readucă magnetul în zona inițială. Problema se poate

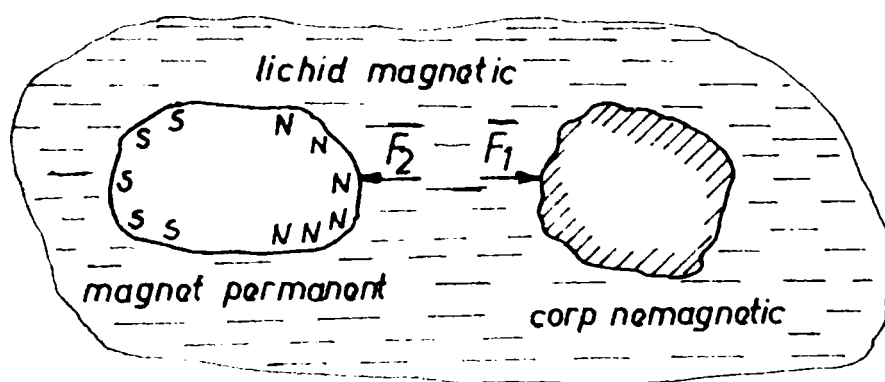


Figura 1.4.2.

extinde și în cazul, prezentat în figura 1.4.2., al interacțiunii unui magnet cu un corp nemagnetic, ambele imersate în lichid magnetic și îndepărtate

de frontiera (limita) fluidului magnetic. Trebuie remarcat ca această interacțiune este fără echivalent în magnetostatica uzuală, unde pentru a exista interacțiune ambele corpuri trebuie să poseze momente magnetice. Desigur interacțiunea prezentată în figura 1.4.2 nu este datorată direct acțiunii reciproce a corpurilor, ci este determinată de comportarea lichidului magnetic ce se găsește între corpuri și în jurul lor.

Revenind la problema magnetului permanent imersat într-un lichid magnetic presupus de extensie infinită, pentru această situație, magnetul nu are nici o poziție preferențială, deci deplasarea sa în interiorul lichidului nu va influența spectrul câmpului și, în consecință, asupra sa nu va acționa nici o forță de natură magnetică.

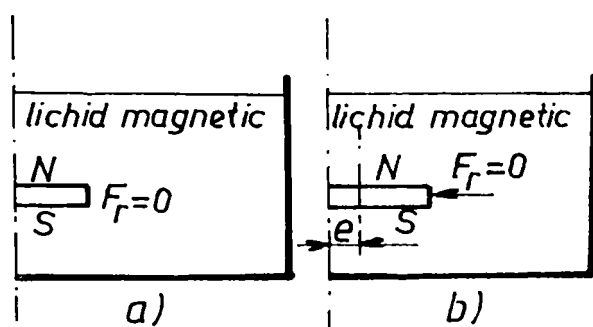


Figura 1.4.3.

deplasare radială a magnetului (excentricitatea magnetului față de axul vasului devenind  $e$ ), se va manifesta o forță radială  $F_r \neq 0$ , cu tendința de a readuce magnetul în poziția anterioară ( $e=0$ ). Aceasta este o forță restauratoare (de readucere) ce are drept efect (sau tendință) coaxialitatea celor două elemente cilindrice (magnet și lichid magnetic).

Din punct de vedere al forțelor ce acționează pe direcție verticală ( $Oz$ ), pe măsură ce apropiem magnetul de fundul vasului (pastrând coaxialitatea între magnet și vas), presiunea pe fața inferioară a magnetului (pol S în exemplul considerat) va fi mai mare decât cea de pe fața superioară. Rezultatul integrării acestei presiuni pe cele două fețe ale magnetului, paralele cu fundul vasului, va fi o forță ascensională. Integrarea pe suprafața laterală va fi, din condiții de simetrie, evident nulă. Pentru o anumită poziție relativă față de fundul vasului,  $z_0$ , se realizează echilibrarea greutății aparente a magnetului de către rezultanta forțelor de natură magnetică.

Dacă presupunem magnetul în forma de disc imersat într-un vas cilindric, poziționat suficient de îndepărtat de suprafața lichidului și de fundul vasului și plasat coaxial cu vasul (figura 1.4.4.a), pe direcție radială nu va acționa nici o forță asupra discului magnetic. La o

$$\begin{aligned}\bar{F}_z + \bar{G} + \bar{F}_A &= 0 \\ F_z - G - F_A &= (\rho - \rho') \cdot V \cdot g\end{aligned}\tag{1.3.20}$$

Verificarea experimentală s-a făcut [Ro1] pentru un caz în care densitatea de masă a magnetului permanent era de circa 4 ori mai mare decât a lichidului magnetic în care el se găsea imersat (repectiv  $4700 \text{ kg/m}^3$  față de  $1220 \text{ kg/m}^3$ ).

Intr-un dispozitiv cilindric de genul celui amintit anterior, cu magnetul plasat coaxial (echidistant față de peretele lateral cilindric al vasului) s-a realizat experimentul descris în cele ce urmează.

Discul magnetic cilindric, magnetizat pe direcția perpendiculară pe fețele sale plane, are următoarele caracteristici:

- diametrul magnetului  $d = 1,9 \text{ cm}$
- grosimea (înălțimea) sa  $h = 0,46 \text{ cm}$
- densitatea de masă  $\rho' = 4700 \text{ kg/m}^3$

Lichidul magnetic utilizat, cu densitatea de masă  $\rho = 1220 \text{ kg/m}^3$  prezenta magnetizația la saturație de  $28400 \text{ A/m}$ .

Intensitatea câmpului magnetic în imediata vecinătate a feței plane a discului magnetic a fost de  $31600 \text{ A/m}$ .

Rezultatul experimentului a fost levitarea magnetului și menținerea sa în echilibru la o distanță de  $0,58 \text{ cm}$  de fundul vasului.

Poziția discului în lichidul magnetic nu a putut fi detectată prin mijloace optice datorită opacității lichidului. Detectarea poziției s-a făcut pe cale mecanică și apoi aceasta a fost confirmată prin fotografii realizate cu raze X. Discul magnet permanent este plasat coaxial cu incinta ce conține lichidul magnetic, la aceasta contribuind și forța de readucere ce se exercită asupra sa; determinarea expresiei forței de readucere, precum și calculul numeric al acesteia sunt tratate în cap.3.

Masuratorile forței au fost făcute cu ajutorul unei balanțe de precizie. Magnetului suspendat cu un fir de cupru de unul din bratele balanței i s-a măsurat greutatea aparentă, aceasta conținând și componenta de forță datorată fenomenului de levitație magnetică de ordinul II. În acest fel au putut fi determinate, prin calcul, forțele de sustentație magnetică corespunzătoare diferitelor poziții relative față de baza incintei ce conține lichidul magnetic, până la o poziție de minim, corespunzătoare autolevitației magnetului în lichid. Pentru această poziție greutatea aparentă măsurată a devenit zero.

## CAP.2. CALCULUL CAMPULUI MAGNETIC IN MEDII NELINIARE

### 2.1. Ecuațiile câmpului în funcție de potențiale

#### 2.1.1. Ecuațiile fundamentale ale câmpului electromagnetic macroscopic în medii fixe

Ecuațiile de bază, reprezentând sub formă locală legile generale ale câmpului electromagnetic în medii fixe și, respectiv, condițiile de trecere la suprafețele de discontinuitate sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \text{div } \bar{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \\ \text{div } \bar{D} = \rho_v \\ \text{div } \bar{B} = 0 \end{array} \right. \quad \text{și} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_s \bar{E} = 0 \\ \text{div}_s \bar{B} = 0 \\ \text{rot}_s \bar{H} = \bar{J}_s \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Pentru regimul cvasistationar de tip magnetic avem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \bar{H} = \bar{J} \\ \text{div } \bar{J} = 0 \\ \text{div } \bar{D} = \rho_v \\ \text{div } \bar{B} = 0 \end{array} \right. \quad \text{și} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_s \bar{E} = 0 \\ \text{div}_s \bar{B} = 0 \\ \text{rot}_s \bar{H} = \bar{J}_s \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

În regim magnetostatic, ecuațiile se reduc la:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \bar{H} = 0 \\ \text{div } \bar{B} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.3)$$

iar relațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_s \bar{H} = 0 \\ \text{div}_s \bar{B} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.4)$$

scrise pentru suprafețe de discontinuitate arată conservarea componentelor tangente ale lui  $\bar{H}$  și, respectiv, conservarea componentelor normale ale lui  $\bar{B}$ , la trecerea prin aceste suprafețe.

Relațiile (2.1.3) și (2.1.4) se completează cu condițiile de material fixate prin

ecuația constitutivă. Pentru cazul mediilor imobile, neliniare, izotrope magnetic, neomogene și cu inducție magnetică remanentă, această ecuație constitutivă poate fi scrisă:

$$\bar{B} = \mu \cdot \bar{H} + \mu_0 \bar{M}_p \quad (2.1.5)$$

### 2.1.2. Ecuațiile câmpului în funcție de potențialul magnetic scalar $V_H$

Specificul problemei abordate conține ca unice surse de câmp prezența unor medii ce prezintă magnetizație permanentă (respectiv, inducție magnetică remanentă), deci mediile vor fi lipsite de curenți de conducție. Ca urmare, în forma de scriere a ecuațiilor de rezolvare, termenii datorăți prezenței acestora vor fi nuli. Pentru rezolvarea numerică a problemei distribuției câmpului magnetic poate fi utilizat potențialul magnetic scalar  $V_H$ .

În baza relației: 
$$\text{rot} \bar{H} = 0 \quad (2.1.6)$$

se poate scrie 
$$\bar{H} = -\text{grad} V_H \quad (2.1.7)$$

Ținând cont de ecuația constitutivă de material

$$\bar{B} = \mu \bar{H} + \bar{B}_{rem} \text{ cu } \bar{B}_{rem} = \mu_0 \bar{M}_p \quad (2.1.8)$$

ecuația diferențială a potențialului magnetic scalar este [M1]:

$$\text{div}(\mu \cdot \text{grad} V_H) = \text{div} \bar{B}_{rem} \quad (2.1.9)$$

### 2.1.2. Ecuațiile câmpului în funcție de potențialul magnetic vector

În regim magnetic staționar, utilizând condiția de etalonare a lui Coulomb, se poate defini univoc potențialul magnetic vector,  $\bar{A}$ .

$$\begin{cases} \text{rot} \bar{A} = \bar{B} \\ \text{div} \bar{A} = 0 \\ \text{div}_p \bar{A} = 0 \end{cases} \quad (2.1.10)$$

La stabilirea câmpului magnetic în medii fixe, izotrope dar neomogene și magnetizate permanent, ecuația diferențială a potențialului magnetic vector este: [M1]

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \cdot \text{rot} \bar{A} \right) = \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \cdot \bar{B}_{rem} \right) \quad (2.1.11)$$

în care  $\bar{B}_{rem}$  reprezintă inducția magnetică remanentă.

În condițiile concrete ale problemelor ce au fost rezolvate am lucrat cu o configurație plan-meridiană a câmpului magnetic.



Pentru o asemenea configurație plan-meridiană a câmpului magnetic, potențialul magnetic vector posedă doar componenta după coordonata  $\theta$ .

$$\vec{A} = A_\theta \cdot \vec{u}_\theta \quad (2.1.12)$$

iar vectorii  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  și  $\vec{M}$  au componente numai în planul  $z - r$ .

$$\begin{cases} \vec{H} = H_z \cdot \vec{u}_z + H_r \cdot \vec{u}_r \\ \vec{B} = B_z \cdot \vec{u}_z + B_r \cdot \vec{u}_r \end{cases} \quad (2.1.13)$$

în care

$$\begin{cases} B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \\ B_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} \end{cases} \quad (2.1.14)$$

În ceea ce privește magnetizația permanentă cazurile analizate au presupus că aceasta are componentă fie numai după axa Oz, fie numai componentă radială.

În acest caz, în locul unei ecuații vectoriale se operează cu o ecuație scalară, corespunzătoare componentei după coordonata  $\theta$  a potențialului magnetic vector:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \cdot \{B_{rem}\}_r \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \cdot \{B_{rem}\}_z \right) \quad (2.1.15)$$

$$\vec{M}_p = M_{p_z} \cdot \vec{u}_z \text{ fie } \vec{M}_p = \vec{M}_{p_r} \cdot \vec{u}_r, \text{ în care } M_{p_r} = \frac{1}{\mu_0} \{B_{rem}\}_r \text{ iar } M_{p_z} = \frac{1}{\mu_0} \{B_{rem}\}_z$$

### 2.1.3. Ecuațiile câmpului magnetic în funcție de potențialul magnetic modificat

Utilizarea potențialului magnetic modificat prezintă avantaje în rezolvare :

$$U = rA_\theta \quad (2.1.16)$$

unde  $U$ , potențialul magnetic modificat, este întâlnit în literatură și sub numele de momentul potențialului magnetic vector în raport cu axa de simetrie Oz [M1].

Ecuația diferențială scalară scrisă cu variabila  $U$ , pentru determinarea spectrului câmpului magnetic este:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\mu \cdot r \cdot \partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial U}{\mu \cdot r \cdot \partial r} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M_{p_r}}{\mu} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{M_{p_z}}{\mu} \right) \quad (2.1.17)$$

Condiția de etalonare a lui Coulomb este automat satisfăcută.

Potențialul magnetic modificat,  $U$ , prezintă câteva proprietăți remarcabile, foarte

utile pentru facilitarea rezolvării problemei de câmp:

-pe axa  $r=0$  potențialul  $U(z,r)$  este nul (condiție la limită naturală)

-liniile de inducție magnetică sunt linii de  $U(z,r) = \text{const.}$

-derivata funcției scalare de potențial  $U(z,r)$ , după direcția vectorului inducție magnetică este nulă.

#### 2.1.4. Condițiile de interfață la suprafețele de separație

Cazurile concrete abordate au presupus existența unor suprafețe de separație între medii cu magnetizare permanentă (inducție magnetică remanentă) și lichid magnetic, pe de o parte, și suprafețe de separație între lichidul magnetic (paramagnetic) și medii nemagnetizabile ( $\mu_0$ ).

La rezolvarea problemei distribuției câmpului magnetic prin utilizarea potențialului magnetic scalar,  $V_H$ , condițiile de interfață rezultă din continuitatea potențialului scalar la suprafața  $S_{12}$ , ce separă cele două medii, precum și din faptul că divergența superficială a inducției magnetice este nulă pe suprafața respectivă de separație [M1]:

$$\begin{aligned} (V_H)_1 &= (V_H)_2 \\ \bar{n}_{12} \cdot \left[ -\mu \text{grad} V_H + \bar{B}_{rem} \right]_{S_{12}} &= 0 \quad \text{pe } S_{12} \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

în care cu indicele 1 s-au notat mărimile din mediul 1, la suprafața de separație cu mediul 2, iar cu indicele 2 mărimile din mediul 2, la aceeași suprafață de separație. Cei doi indici ai normalei la suprafața de separație între cele două medii arată că normală este orientată de la mediul 1 către mediul 2.

Pentru cazul potențialului magnetic vector, condițiile de interfață, în situația absenței densităților curenților de conducție (menționată anterior):

$$\begin{aligned} \text{rot}_s \bar{H} &= 0 \\ \text{div}_s \bar{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

pot fi scrise, pentru un câmp plan paralel, astfel [M1]:

$$\begin{aligned} \bar{n}_{12} \times \left[ \frac{1}{\mu} (\text{rot} \bar{A} - \bar{B}_{rem}) \right]_{S_{12}} &= 0 \quad \text{pe } S_{12} \\ (A_z)_1 &= (A_z)_2 \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Pentru cazul câmpurilor plan-meridiane este mai indicat, așa cum s-a aratat anterior, să se opereze cu potențialul magnetic vector modificat. Condițiile de interfață pentru acest caz, cu care am operat efectiv vor fi prezentate în detaliu la

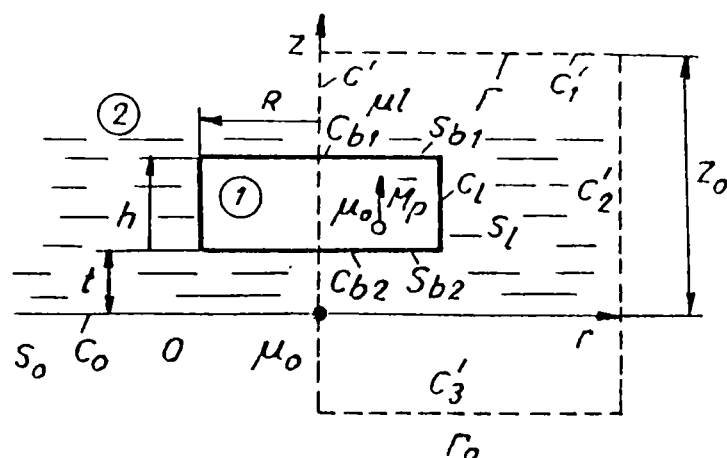
cazurile concrete modelate.

## 2.2. Metode numerice de calcul

Pentru rezolvarea problemei distribuției câmpului magnetic produs de magneti permanenți în prezența lichidelor magnetice s-au utilizat atât metoda diferențelor finite (MDF), cât și metoda elementelor finite (MEF)

### 2.2.1. Metoda diferențelor finite

Aceasta a fost utilizată în [DS5], pentru a calcula forța exercitată asupra unui magnet permanent în formă de disc imersat în lichid magnetic, lichidul magnetic fiind presupus de extensie laterală (radială) infinită.



Situația rezolvată este prezentată în figura 2.2.1. Este cazul unui magnet permanent uniform magnetizat doar după direcția  $\bar{u}_z$ ,  $\bar{M}_p = M_p \cdot \bar{u}_z$ .

Considerând situația unui magnet permanent cu magnetizație temporară neglijabilă  $\mu_1 = \mu_0$  și a unui lichid magnetic care în condițiile date are permeabilitatea

Figura 2.2.1.

magnetică constantă  $\mu_2$  (întrucât se lucrează pe porțiunea nesaturată a curbei de magnetizare), din ecuațiile câmpului:

$$\begin{cases} \bar{B} = \mu \bar{H} + \mu_0 \bar{M}_p \\ \text{div} \bar{B} = 0 \\ \bar{H} = -\text{grad} V_H \end{cases} \quad (2.2.1)$$

se obține:

$$\nabla^2 V_H = \nabla \cdot \bar{M}_p \quad (2.2.2)$$

pentru puncte situate în interiorul magnetului permanent și:

$$\nabla^2 V_H = 0 \quad (2.2.3)$$

pentru puncte din mediul lichid.

Magnetul permanent fiind de tip disc, magnetizat doar după axa Oz, în

rezolvarea problemei se utilizează coordonatele cilindrice și în aceste condiții expresia laplaceanului aplicat potențialului magnetic scalar este:

$$\nabla^2 V_H = \frac{\partial^2 V_H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_H}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_H}{\partial z^2} \quad (2.2.4)$$

Condițiile la limita, pe  $C_{o_1}$  și  $C_{o_2}$ , sunt:

$$\left( \frac{\partial V_H}{\partial z} \right)_1 - \mu_{r_2} \left( \frac{\partial V_H}{\partial z} \right)_2 = M_p \quad (2.2.5)$$

pe  $C_1$ ,

$$\left( \frac{\partial V_H}{\partial r} \right)_1 = \left( \frac{\partial V_H}{\partial r} \right)_2 \cdot \mu_{r_2} \quad (2.2.6)$$

și pe  $C_o$

$$\mu_{r_2} \left( \frac{\partial V_H}{\partial z} \right)_2 = \left( \frac{\partial V_H}{\partial z} \right)_0 \quad (2.2.7)$$

În ultima relație, (2.2.7) s-a folosit indicele 0 pentru mediul 3,  $\mu_3 = \mu_o$ . Extinderea domeniului de calcul este delimitată de  $C_1 \cup C_2 \cup C_3$  (pe care potențialul se consideră nul) și  $C_o$ . Din motive de simetrie și cunoscând că  $M_p$  este constant și orientat doar după axa Oz, rezultă:

$$\left( \frac{\partial V_H}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (2.2.8)$$

În rezolvarea practică s-a utilizat discretizarea cu pași inegali și variabili,  $h_r$  și, respectiv,  $h_z$ . În figura 2.2.2. este prezentat cazul unui punct (0), nod al discretizării. Nodurile vecine, 1, 2, 3 și 4, sunt plasate la distanța  $S_k h_k$ .

Expresia laplaceanului în diferențe finite poate fi exprimată, în condițiile de rezolvare a problemei amintite anterior, sub forma:

$$C \cdot (V_H)_0 = \sum_{k=1}^4 C_k \cdot (V_H)_k \quad (2.2.9)$$

în care:

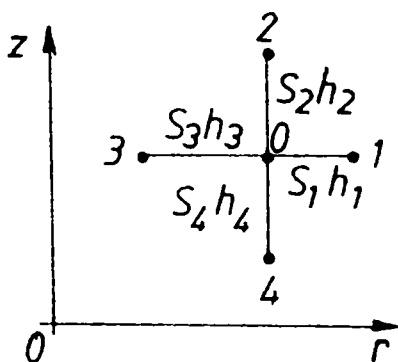


Figura 2.2.2.

$$C = \left[ \frac{2}{S_1 S_3 h_r^2} + \frac{2}{S_2 S_4 h_z^2} \right] + \frac{S_3 - S_4}{S_1 S_3 h_r} \cdot \frac{1}{r_0};$$

$$C_1 = \left( \frac{2}{h_r} + \frac{S_3}{r_0} \right) \frac{1}{S_1 (S_1 + S_3) h_r};$$

$$C_2 = \frac{2}{S_2 h_z^2 (S_2 + S_4)} \quad (2.2.10)$$

$$C_3 = \left( \frac{2}{h_r} - \frac{S_1}{r_0} \right) \frac{1}{S_3 (S_1 + S_3) h_r};$$

$$C_4 = \frac{2}{S_4 h_z^2 (S_2 + S_4)}$$

Cu  $r_0$  a fost notată coordonata radială a punctului 0.

Pentru cazul punctelor situate pe axa Oz, la care  $r = 0$ , expresia laplaceanului

devine:

$$\nabla^2 V_H = 2 \frac{\partial^2 V_H}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_H}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2.11)$$

coeficienții  $C_k$  modificându-se și ei corespunzător [DS5].

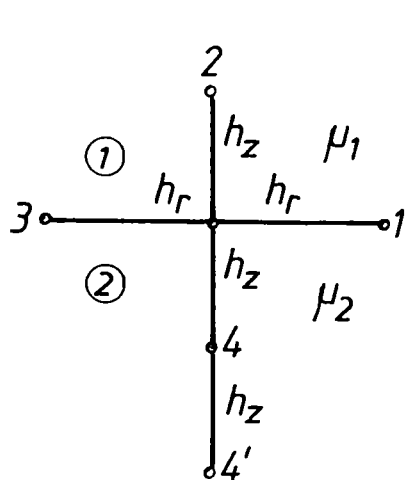
Punctelor care sunt situate pe suprafețele de discontinuitate le sunt asociate

ecuații de forma:

$$V_0 = \frac{1}{C} \cdot \left[ \sum_{k=1}^4 C_k V_k + M_p h_z \right] \quad (2.2.12)$$

în care coeficienții  $C_k$  țin seama și de diferența proprietăților materialelor mediilor în care sunt plasate punctele respective.

Pentru a efectua calculele de determinare a forței ce acționează asupra magnetului trebuie cunoscute valorile câmpului magnetic pentru punctele situate pe suprafața de separație magnet-lichid magnetic. Valorile componentelor lui H se calculează pentru aceste puncte așa cum este exemplificat în figura 2.2.3.



$$(H_r)_0 = - \left( \frac{\partial V_H}{\partial r} \right)_0 = \frac{V_{H_3} - V_{H_1}}{2h_r} \quad (2.2.13)$$

$$(H_z)_0 = - \left( \frac{\partial V_H}{\partial z} \right)_0 = \frac{3V_{H_0} + V_{H_4'} - 4V_{H_4}}{2h_z}$$

Cu valorile astfel obținute se poate trece la calculul forței: se efectuează integralele pe suprafața de separație magnet-lichid magnetic, operând cu valorile vectorilor în puncte aparținând acestei suprafețe atașată lichidului (fața dinspre lichid a acestei suprafețe).

Figura 2.2.3.

### 2.2.2. Metoda elementelor finite

Soluția ecuațiilor câmpului electromagnetic poate fi obținută și prin metoda elementelor finite (MEF). Aceasta este aplicabilă și geometriilor complicate (situații ce apar frecvent în aplicațiile tehnice) asociate și cu o eventuală neliniaritate a mediilor implicate. MEF are la bază formularea variațională a problemei de câmp și înlocuirea rezolvării sistemului de ecuații cu derivate parțiale prin minimizarea unei funcționale energetice.

În cazul câmpurilor bidimensionale, operând cu potențialul magnetic vector,  $\vec{A} = A \cdot \vec{u}_z$ , ecuația cu derivate parțiale a câmpului magnetic (scalară, pentru că potențialul magnetic vector nu are decât componenta după axa oz), este:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} (B_{rem})_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} (B_{rem})_x \right) \quad (2.2.14)$$

pentru puncte din interiorul mediilor ce conțin magnetizație permanentă (sursa de câmp fiind magneți permanenți). Pentru punctele din exteriorul magneților permanenți termenul liber (sursă) este zero. Domeniul de calcul, acceptat ca fiind

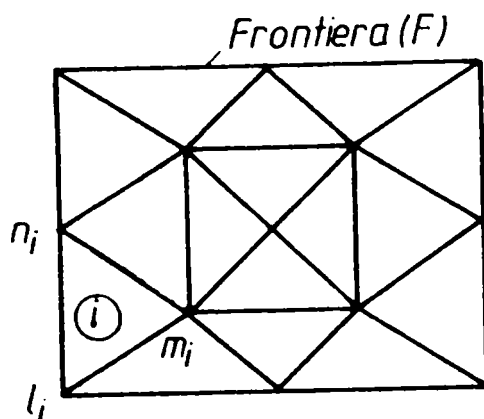


Figura 2.2.4.

limita de extensie a câmpului în condițiile de frontieră date, este mărginit de frontiera (F), figura 2.2.4. Elementul marcat în figură prin nodurile l, m și n, care-l determină, este elementul cu numărul de ordine "i" dintre cele "M" elemente în care a fost partiționat domeniul de lucru.

În interiorul fiecărui element potențialul magnetic vector este exprimat printr-o funcție polinomială de interpolare. Pentru elementul "i" această funcție de interpolare este dată de relația (2.2.15).

$$A_i(x,y) = \frac{1}{2\Delta_i} \sum_{j=l,m,n} (p_j + q_j \cdot x + r_j \cdot y) \cdot A_j \quad (2.2.15)$$

$\Delta_i$  fiind aria elementului, iar l, m, n sunt numerele nodurilor elementului "i", rezultate în urma numerotării tuturor nodurilor domeniului de lucru (figura 2.2.4).

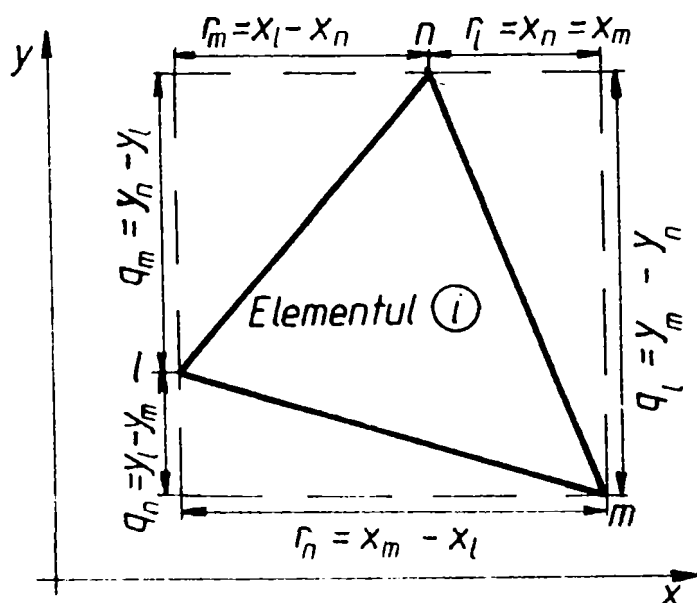


Figura 2.2.5.

Coeficienții geometrici  $p_j$ ,  $q_j$  și  $r_j$  sunt funcție de coordonatele nodurilor elementului respectiv și valorile lor sunt precizate pe figura 2.2.5, corespunzător cotelor geometrice pe care le reprezintă. Sub forma matricială, setul de ecuații ce aproximează minimizarea funcționalei poate fi scris ca:

$$[S]_{N \times N} \cdot [A]_N = [I]_N \quad (2.2.16)$$

în care N este numărul total de noduri,  $[S]$  este matricea patrată a

coeficienților,  $[A]$  este matricea a valorilor potențialului în cele  $N$  noduri,  $A_{\lambda, v}, v = \overline{1, N}$  este un element al matricei, iar  $[I]$  este matricea surselor de câmp.

În completare, pe frontiera (F) sunt date condițiile de frontieră de tip Neumann sau Dirichlet, prin formularea problemei fiind asigurate condițiile de unicitate.

Unul din cele  $N^2$  elemente ale matricei coeficienților este dat de:

$$S_{\lambda, v} = \sum_e \frac{1}{4\mu_e \Delta_e} (q_\lambda \cdot q_v + r_\lambda \cdot r_v) \quad (2.2.17)$$

la care indicele "e" se referă la toate elementele ce conțin nodurile  $\lambda$  și  $v$ . Termenul sursă în nodul  $v$  rezultă că o contribuție nodală a tuturor elementelor ce conțin nodul respectiv:

$$I_v = \sum_e I_{v e} \quad (2.2.18)$$

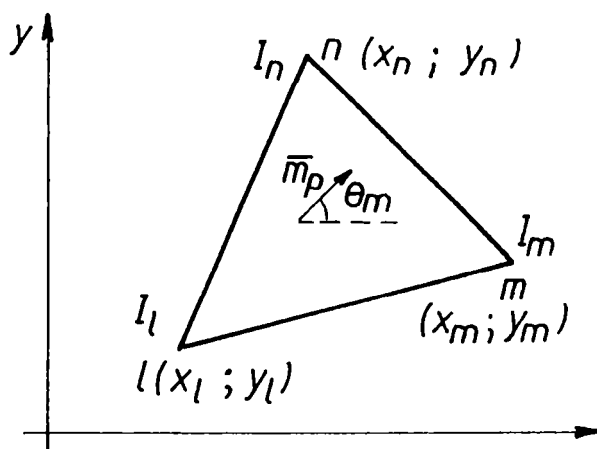


Figura 2.2.6

Una din modalitățile de modelare în cazul elementelor ce se găsesc în interiorul subdomeniului reprezentând un mediu cu magnetizație permanentă poate fi cea din figura 2.2.6 [A-1]. Aici este prezentat un element pentru care direcția de magnetizare este reprezentată de versorul  $\vec{m}_p$ .

În coordonate carteziene termenul  $S_{\lambda, v}$  este formal identic cu (2.2.17), cu

mențiunea că permeabilitatea magnetică pe elementul "e" se poate lua  $\mu_e = \frac{B_r}{H_c}$ , în care  $B_r$  este inducția magnetică remanentă, iar  $H_c$  este câmpul coercitiv. Contribuția unui element la valoarea termenilor sursă în nodurile triunghiului

(elementului) este:

$$\begin{cases} I_{le} = \frac{1}{2} H_c [m_x r_l - m_y q_l] \\ I_{me} = \frac{1}{2} H_c [m_x r_m - m_y q_m] \\ I_{ne} = \frac{1}{2} H_c [m_x r_n - m_y q_n] \end{cases} \quad (2.2.19)$$

în care:

$$m_x = \cos \theta_m \quad \text{și} \quad m_y = \sin \theta_m$$

Cum geometria cazurilor studiate conduce la configurații de câmp plan-

meridian (asa cum s-a prezentat în capitolul 1), în locul potențialului magnetic vector este mai avantajos să se lucreze cu potențialul magnetic vector modificat. Ecuația diferențială pentru determinarea potențialului magnetic modificat este (2.1.17); aplicând această relație rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\mu \cdot r \cdot \partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial U}{\mu \cdot r \cdot \partial r} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M_{pr}}{\mu} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{M_{pz}}{\mu} \right)$$

Principial, partiția domeniului asupra căruia se extinde studiul câmpului (de data aceasta situat în planul  $z - r$ ) se face tot prin elemente triunghiulare de ordinul I și aproximarea distribuției pe fiecare element al potențialului magnetic modificat se realizează analog cazului plan paralel, astfel:

$$U_{\theta}(z,r) = \frac{1}{2\Delta_{\theta}} \sum_{j=l,m,n} (a_j + b_j z + c_j r) U_j \quad \text{cu} \quad (2.2.20)$$

$$rB_{z\theta} = \frac{\partial U_{\theta}}{\partial r} = \frac{1}{2\Delta_{\theta}} \sum_{j=l,m,n} c_{j\theta} U_{j\theta} = \text{const.} \quad \text{și} \quad (2.2.21)$$

$$rB_{r\theta} = -\frac{\partial U_{\theta}}{\partial z} = -\frac{1}{2\Delta_{\theta}} \sum_{j=l,m,n} b_{j\theta} U_{j\theta} = \text{const.} \quad (2.2.22)$$

Mediile în care am calculat distribuția câmpului magnetic staționar fiind considerate izotrope și partiționarea fiind făcută prin elemente finite tringhiulare suficient de mici, se poate accepta că:  $\mu_{z\theta} = \mu_{r\theta} = \mu_{\theta}$ , în care  $\mu_{\theta}$  este permeabilitatea magnetică corespunzătoare centrului de greutate al triunghiului (element finit). Coordonata radială a centrului de greutate al elementului este:

$$r_{c\theta} = \frac{1}{3} \sum_{j=l,m,n} r_{j\theta}$$

Ecuația matricială (2.2.16) devine  $[S]_{N \times N} \cdot [U]_N = [I]_N \quad (2.2.23)$

Termenul  $S_{\lambda\nu}$  devine acum:  $S_{\lambda\nu} = \sum_{\theta} \frac{\pi}{2\mu_{\theta}\Delta_{\theta}r_{c\theta}} [c_{\lambda}c_{\nu} + b_{\lambda}b_{\nu}] \quad (2.2.24)$

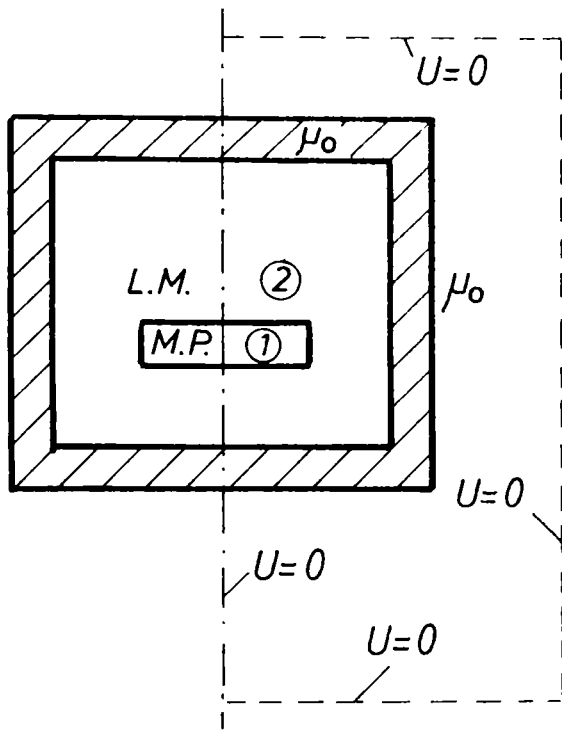
iar pentru termenul sursă se poate scrie:  $I_{\nu} = \sum_{\theta} \frac{\pi}{r_{c\theta}} [b_{\nu}H_{c_r} - c_{\nu}H_{c_z}] \quad (2.2.25)$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații prezentat în formă matricială de (2.2.23) se obțin valorile nodale,  $U_{\lambda}$ , ale modulului potențialului magnetic modificat, în toate cele  $N$  noduri care au stat la baza discretizării domeniului studiat.



## CAP.3.CALCULUL FORTEI EXERCITATE DE CAMPUL MAGNETIC ASUPRA UNUI MAGNET PERMANENT IN FORMA DE DISC IMERSAT IN LICHID MAGNETIC

### 3.1. Calculul numeric al câmpului utilizând potențialul magnetic vector modificat



**Figura 3.1.1.**

În incinta nemagnetică prezentată în figura 3.1.1. se găsește (L.M.) lichidul magnetic, notat cu indicele 2, iar cu indicele 1 este notat (M.P.) magnetul permanent. Pentru rezolvarea numerică a problemei de câmp am utilizat următoarele ipoteze :

- magnetul în formă de disc are numai magnetizație permanentă după axa Oz
- magnetizarea temporară a magnetului a fost considerată neglijabilă ( $\mu_r = 1$ )
- caracteristica magnetică a lichidului magnetic a fost acceptată ca fiind liniară în domeniul de utilizare

Pentru rezolvare am utilizat un program de calcul bazat pe metoda elementelor finite și am folosit ecuațiile câmpului magnetostatic bazate pe potențialul magnetic vector modificat.

Pentru determinarea spectrului câmpului magnetic, ecuația diferențială scalară scrisă cu variabila  $U$  este :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\mu \cdot r \cdot \partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial U}{\mu \cdot r \cdot \partial r} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M_{Pr}}{\mu} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{M_{Pz}}{\mu} \right) \quad (2.1.17)$$

Din condiții de simetrie, este suficientă aplicarea MEF pe jumătate din domeniu. Frontiera este alcătuită din axa de simetrie Oz, în punctele care a sunt îndeplinite, în mod natural, condiții de tip Dirichlet ( $U = 0$ ) - și conturul trasat cu linie întreruptă, suficient de îndepărtat de sursa de câmp; și pe acesta s-a considerat că sunt îndeplinite condiții de tip Dirichlet, luându-se  $U = 0$ .

Problema este de tip plan-meridian, cu extensie considerată finită a câmpului magnetic. Limitarea domeniului s-a făcut, ținând seama de proporțiile și dimensiunile geometrice ale subdomeniilor [GrBl].

Condițiile de limită (interfață) pentru funcția scalară  $U$  pe suprafețele  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S'_1$ ,  $S'_2$ ,  $S'_3$ , și  $S'_4$  se obțin din condițiile de continuitate ale componentelor normale

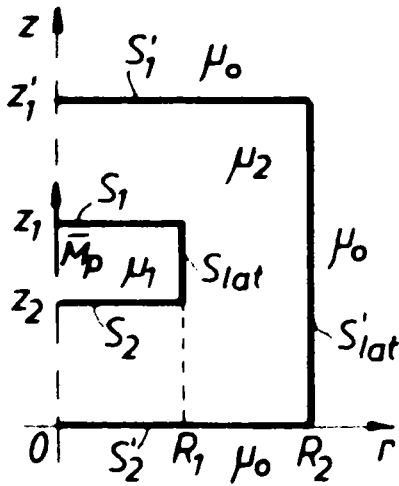


Figura 3.1.2.

ale lui  $\vec{B}$  și cele tangente ale lui  $\vec{H}$ . Primele sunt asigurate prin condițiile de continuitate ale potențialului magnetic vector:

$$\vec{A}_i = \vec{A}_{i+1}, \quad i=1,2 \quad \text{adică} \quad U_i = U_{i+1}, \quad i=1,2 \quad (3.1.1)$$

Pentru continuitatea componentelor tangente ale lui  $\vec{H}$ , având în vedere că  $\vec{M}_p$  are componente numai după  $\vec{u}_z$ , avem pe suprafețele  $S_1 \cup S_2$

$$(\text{rot } \vec{A}_1) \cdot \vec{u}_r = \frac{1}{\mu_{r2}} (\text{rot } \vec{A}_2) \cdot \vec{u}_r \quad (3.1.2)$$

iar pe  $S_{lat}$  se obține:

$$(\text{rot } \vec{A}_1) \cdot \vec{u}_z - \mu_0 M_p = \frac{1}{\mu_{r2}} (\text{rot } \vec{A}_2) \cdot \vec{u}_z \quad (3.1.3)$$

În coordonate cilindrice relațiile (3.1.2) și (3.1.3) devin:

$$\left( \frac{\partial A_1}{\partial z} \right)_P = \frac{1}{\mu_{r2}} \left( \frac{\partial A_2}{\partial z} \right)_P, \quad P \in S_1 \cup S_2 \quad (3.1.4)$$

$$\frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_1) \right)_{r=R_1} - \mu_0 M_p = \frac{1}{\mu_{r2} R_1} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_2) \right)_{r=R_1}, \quad p \in S_{lat} \quad (3.1.5)$$

Analog, condițiile de limită (interfață) pe suprafața vasului sunt:

$$\left( \frac{\partial A_2}{\partial z} \right)_{z=z_1} = \mu_{r2} \left( \frac{\partial A_3}{\partial z} \right)_{z=z_1}, \quad p \in S'_1 \quad (3.1.6)$$

$$\left( \frac{\partial A_2}{\partial z} \right)_{z=0} = \mu_{r2} \left( \frac{\partial A_3}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad p \in S'_2 \quad (3.1.7)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_2) \right)_{r=R_2} = \mu_{r2} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right)_{r=R_2}, \quad p \in S'_{lat} \quad (3.1.8)$$

Condițiile de interfață pentru  $U$  rezulta din cele pentru  $A$ , făcându-se înlocuirea  $\vec{A} = \frac{1}{r} \vec{U}$ . Rezulta astfel:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{1}{\mu_{r_2}} \left( \frac{\partial U_2}{\partial z} \right), \text{ pe } S_1 \cup S_2 \quad (3.1.9)$$

$$\left( \frac{\partial U_1}{\partial r} \right)_{r=R_1} - \mu_0 M_P = \left( \frac{\partial U_2}{\partial r} \right)_{r=R_1}, \text{ pe } S_1 \quad (3.1.10)$$

$$\left( \frac{\partial U_2}{\partial z} \right)_{z=z'_1} = \mu_{r_2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial z} \right)_{z=z'_1}, \text{ pe } S'_1 \quad (3.1.11)$$

$$\left( \frac{\partial U_2}{\partial z} \right)_{z=0} = \mu_{r_2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial z} \right)_{z=0}, \text{ pe } S'_2 \quad (3.1.12)$$

$$\left( \frac{\partial U_2}{\partial r} \right)_{r=R_2} = \mu_{r_2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial r} \right)_{r=R_2}, \text{ pe } S'_{lat} \quad (3.1.13)$$

### 3.1.1. Determinarea câmpului magnetic cu MEF

Pentru calcularea forței de levitație magnetică de ordinul II, care va fi tratată în paragrafele următoare, este necesară cunoașterea valorilor câmpului magnetic

la suprafața de separație magnet permanent-lichid magnetic, pentru diferite poziții relative de plasare a magnetului în lichidul magnetic. Modificarea

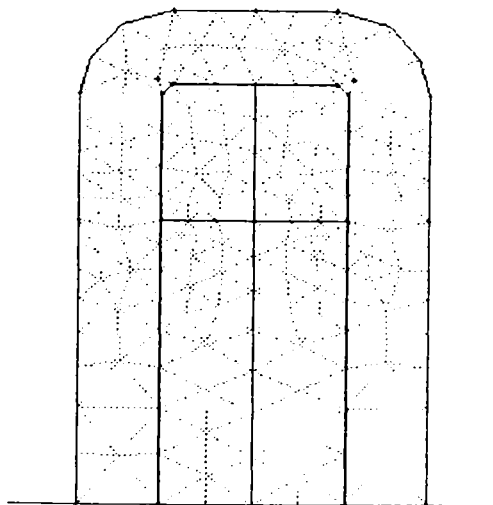
succesivă a geometriei conduce și la modificarea modului de discretizare a domeniului de calcul.

Zona de interes, interfața MP-LM, a fost discretizată mai fin și, pentru ca prin modificarea

poziției și a discretizării în ansamblul său, să nu se modifice din acest motiv valorile obținute, magnetul

a fost înconjurat cu o "pelicula" de lichid magnetic. Ansamblul MP-LM din zona imediat limitrofă

acestuia, a fost păstrat cu o aceeași discretizare, la modificarea geometriei și/sau a proprietăților de



**Figura 3.1.3.**

modificarea geometriei și/sau a proprietăților de material, în cadrul aceleiași probleme investigate prin modelare.

De asemenea, conform situației tehnologice reale și pentru a evita efectul denaturant în obținerea soluției al muchiilor ascuțite (la  $90^\circ$ ) aceste muchii au fost modelate rotunjite. În modelarea efectivă, arcele de racord au fost înlocuite prin segmente de dreaptă (coarde) care prin succesiunea lor aproximează aceste arce. În figura 3.1.3 este arătat modul de discretizare al MP și al zonei de LM imediat vecine magnetului. În figura 3.1.1 este indicată și extinderea domeniului la care s-a

aplicat calculul câmpului magnetic. Sursa de câmp, MP, a fost plasată simetric față de extinderea verticală a domeniului indiferent de poziția relativă MP - LM, pentru ca poziția frontierelor față de sursă să rămână aceeași și în acest fel să nu influențeze soluția de câmp pe cele două fețe ale magnetului permanent.

### 3.1.2. Compararea rezultatelor obținute prin programul de calcul cu soluții analitice ale problemei de câmp

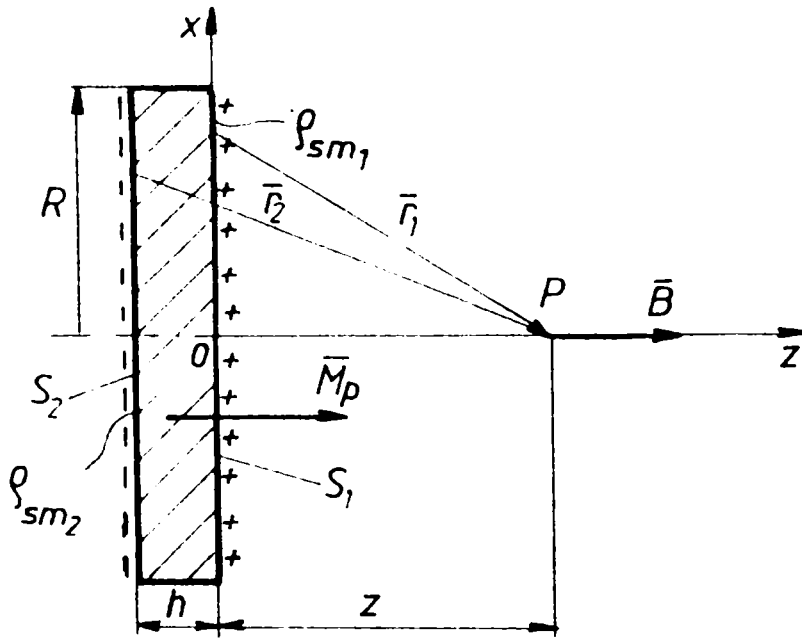


Figura 3.1.4.

Pentru cazul plasării simetrice a magnetului în configurația cilindrică a problemei, soluția analitică pentru valorile câmpului magnetic se poate obține simplu în puncte particulare, plasate pe axa de simetrie a problemei.

Pentru a face o verificare, s-a rezolvat cu același program de calcul situația reprezentată în figura 3.1.4. Este cazul unui magnet permanent, magnetizat

permanent după axa Oz, magnet a cărui permeabilitate magnetică a fost aproximată a fi  $\mu_1 = \mu_0$ .

Extinderea domeniului în care magnetul produce câmpul (cu  $\mu_2 = \mu_0$ ) se alege suficient de mare pentru a modela cât mai fidel situația analitică, situație în care extinderea spațiului exterior magnetului se consideră infinită.

Luând în considerare sarcinile magnetice fictive  $\rho_{sm1}$  și  $\rho_{sm2}$ , de pe suprafețele de separație  $S_1$  și  $S_2$ , se poate determina expresia inducției magnetice în puncte situate pe axa de simetrie Oz. Valorile determinate prin program pot fi comparate cu valorile în aceleași puncte ale axei Oz, calculate cu expresia analitică a lui B.

Astfel, pe suprafața  $S_1$ , se poate scrie:

$$\operatorname{div}_S \bar{M} = \operatorname{div}_S \bar{M}_p = - \frac{\rho_{sm1}}{\mu_0} \quad (3.1.14)$$

iar cum  $\bar{M}_p = M_p \cdot \bar{u}_z$ , rezultă  $\rho_{sm1} = \mu_0 M_p$  (3.1.15)

În mod analog, pe fața cealaltă a magnetului,  $S_2$ :

$$\rho_{Sm_2} = -\mu_0 M_p \quad (3.1.16)$$

Potențialul magnetic scalar generat în punctul P, situat la distanța z de sarcinile magnetice distribuite pe  $S_1$ , este:

$$V_{H_1} = \int_{S_1} \frac{\rho_{Sm_1} \cdot dS}{4\pi\mu_0 r_1} = \frac{\rho_{Sm_1}}{4\pi\mu_0} \int_0^R \frac{2\pi r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\rho_{Sm_1}}{2\mu_0} \left[ \sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R$$

$$V_{H_1} = \frac{M_p}{2} (\sqrt{R^2 + z^2} - z) \quad (3.1.17)$$

Analog pentru sarcinile de pe  $S_2$ :

$$V_{H_2} = -\frac{M_p}{2} \left[ \sqrt{R^2 + (z+h)^2} - (z+h) \right] \quad (3.1.18)$$

Potențialul magnetic rezultat va avea expresia:

$$V_H = V_{H_1} + V_{H_2} = \frac{M_p}{2} \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{R^2 + (z+h)^2} + h \right] \quad (3.1.19)$$

Tabelul 3.1

z/h	$H_{calc}$ [A/m]	$H_{analt}$ [A/m]	$\epsilon$ [%]
0,000	62523	62469,5	-0,08
0,025	60212	61942,2	2,79
0,050	59709	61408,4	2,77
0,100	58704	60322,4	2,68
0,250	55688	56946,1	2,20
0,500	50287	51099,1	1,69
1,000	39072	39923,8	2,13

Această expresie permite calculul inducției magnetice

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla V_H = \frac{\mu_0 M_p}{2} \left[ -\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{z+h}{\sqrt{R^2 + (z+h)^2}} \right] \cdot \vec{u}_z \quad (3.1.20)$$

sau, a intensității câmpului magnetic

$$\vec{H} = -\nabla V_H = \frac{M_p}{2} \left[ -\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{z+h}{\sqrt{R^2 + (z+h)^2}} \right] \cdot \vec{u}_z \quad (3.1.21)$$

în puncte de pe axa Oz și compararea cu rezultatele obținute prin modelare și rezolvare numerică. Această verificare a fost făcută și rezultatele sunt prezentate în tabelul 3.1.

Se observă că eroarea este mai mică de 3% și, mai ales în zona de interes, pe suprafața magnetului disc această eroare este chiar foarte mică ( $< 0,1\%$ ).

Una din problemele ce apar la modelarea numerică a unei situații în care extinderea reală a câmpului are loc până la infinit este cea legată de plasarea frontierelor.

Limita de extensie a domeniului de calcul a fost aleasă corespunzător unei valori a lui  $H < 1\%$  din valoarea sa, pe axă, la suprafața discului.

### 3.2. Calculul numeric al forței de levitație exercitată asupra discului

Expresia forței utilizată pentru cazul concret modelat a fost:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[ \frac{1}{2} (M_{2n}^2 - M_p^2) + \int_0^{H_2} M_2 dH \right] d\bar{S} - \\ & -\mu_0 \oint_{\Sigma_1} \bar{H}_1 \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} - \mu_0 \int_{V_2} \bar{H}_1 \cdot \text{div} \bar{M}_p \cdot dv \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

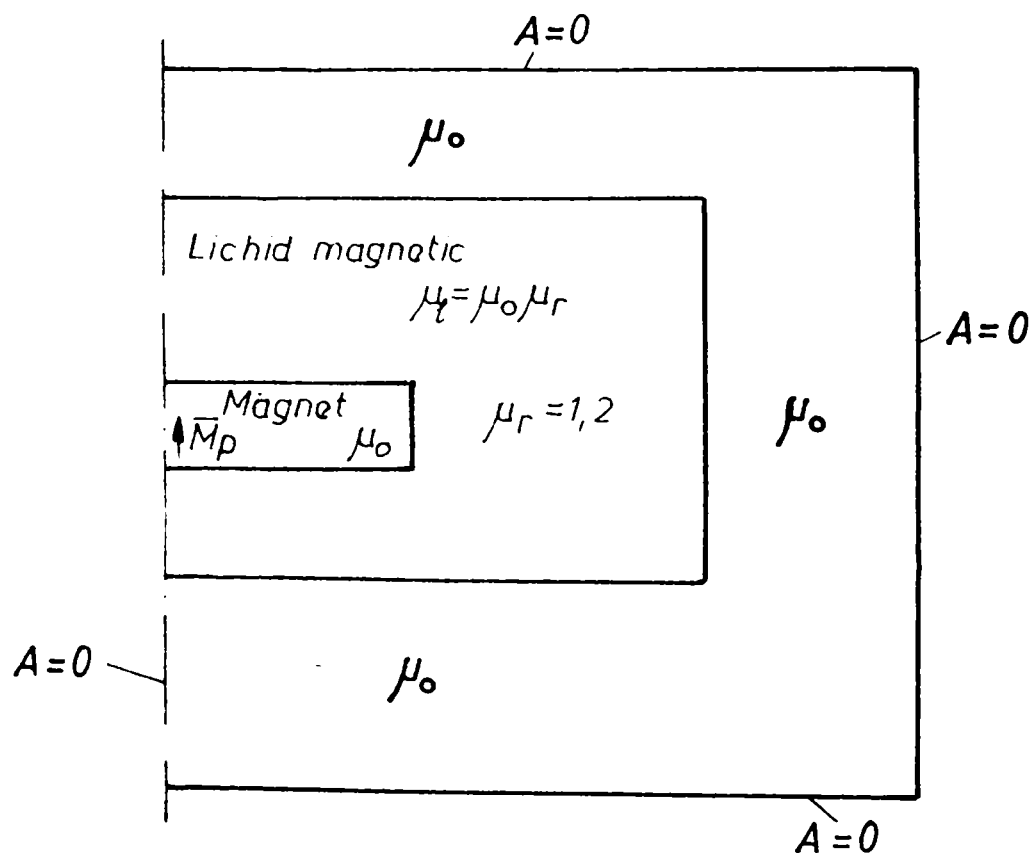


Figura 3.2.5.

Pornind de la expresia forței dată de relația precedentă și ținând seama că prin programul de calcul se obțin valorile potențialului magnetic vector în toate punctele domeniului și, apoi, din acestea inducția magnetică, s-a adus expresia forței la o formă calculabilă pe baza valorilor componentelor  $B_x$  și  $B_y$  ale inducției magnetice, din lichidul magnetic.

De asemenea, s-a ținut seama de geometria problemei și de ipotezele anterior enunțate.

Suprafața  $\Sigma$  pe care se efectuează integralele de suprafață și, respectiv, care mărginește domeniul  $v_i$  pe care se efectuează integrala de volumi, este reuniunea suprafețelor bazelor discului magnet ( $S_1$  și  $S_2$ ) și a suprafeței sale laterale ( $S$ ).

Mărimile cu indicele 2 sunt cele ce se referă la lichidul magnetic, iar cele cu indicele 1 se referă la discul magnet permanent.

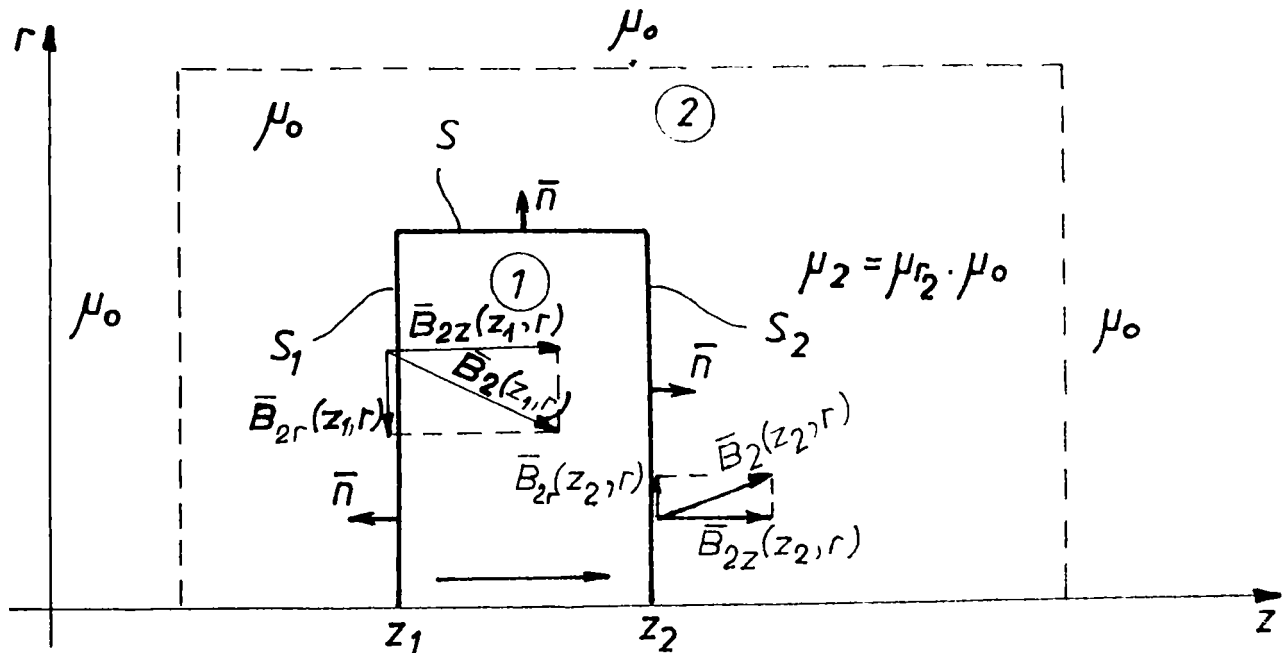


Figura 3.2.6.

În figura 3.2.6 sunt explicitate cele prezentate anterior, fiind reprezentat și vectorul inducție magnetică (cu componentele sale) în mediul 2, pe suprafețele  $S_1$  și  $S_2$ .

Frontiera întregului domeniu ocupat de câmp, precizată în figura 3.2.5. nu a mai fost explicitată, determinarea expresiei forței fiind legată numai de suprafața  $\Sigma$ .

Ținând seama ca magnetizația permanentă este constantă, termenii:

$$\int_{v_{\Sigma}} H_1 \operatorname{div} M_p dv \quad \text{și} \quad \oint_{\Sigma_2} M_p^2 \cdot dS$$

sunt zero, iar pentru restul termenilor rezultă:

$$\int_0^{H_2} M_2 dH = \frac{\mu_{r_2} - 1}{2} H_2^2 \quad (3.2.2.)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \mathbf{M}_{2n}^2 \cdot d\bar{\mathbf{S}} &= \int_{S_1} \mathbf{M}_{2z}^2(z_1, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \int_{S_1} \mathbf{M}_{2r}^2(z, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \int_{S_2} \mathbf{M}_{2z}^2(z_2, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \\ &= \int_{S_1} \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} B_{2z}^2(z_1, \eta) d\bar{S} + \int_{S_2} \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} B_{2z}^2(z_2, \eta) d\bar{S} \end{aligned} \quad (3.2.3.)$$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{H}_2^2 \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_{S_1} \mathbf{H}_2^2(z_1, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \int_{S_2} \mathbf{H}_2^2(z_2, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (3.2.4.)$$

Datorită simetriei nu poate să apară o componentă radială a forței și deci integrala pe suprafața laterală, în 3.2.4. este nulă. Termenul referitor la  $\text{div}_s \mathbf{M}_p$  devine:

$$\oint_{\Sigma} \bar{H}_1 \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_{S_1} \bar{H}_1(z_1, \eta) \cdot (0 + M_p) \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \int_{S_2} \bar{H}_1(z_2, \eta) \cdot (0 - M_p) \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (3.2.5.)$$

Pe suprafața laterală divergența superficială a lui  $M_p$  este nulă și în consecință nu apare în expresia forței termenul din (3.2.5) corespunzător acestei suprafețe.

În final, se obține pentru forță expresia:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= -\frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} \left[ \int_{S_1} B_{2z}^2(z_1, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} - \int_{S_2} B_{2z}^2(z_2, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} \right] \bar{u}_z - \\ &- \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(\mu_{r_2} - 1)}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} \left[ \int_{S_2} B_{2r}^2(z_2, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \int_{S_2} B_{2z}^2(z_2, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{S_1} B_{2r}^2(z_1, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} - \int_{S_1} B_{2z}^2(z_1, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} \right] \bar{u}_z - \\ &- M_p \left[ \int_{S_2} B_{1z}(z_2, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} - \int_{S_1} B_{1z}(z_1, \eta) \cdot d\bar{\mathbf{S}} \right] \bar{u}_z \end{aligned} \quad (3.2.6.)$$

Pentru situația plasării discului exact la jumătatea coloanei de lichid magnetic am obținut valori egale pentru vectorii câmp din puncte simetrice și în consecință rezultă valoarea zero pentru forța corespunzătoare acestei poziții, așa cum era de așteptat. Cu expresia 3.2.6. se poate acum calcula forța, utilizând valorile componentelor inducției magnetice determinate prin programul de calcul. Această expresie a forței a fost adusă la o formă calculabilă utilizând numai componentele după axe ale inducției magnetice, acestea rezultând imediat din valorile potențialului magnetic modificat care este calculat în întregul domeniu de extensie al câmpului magnetic prin metoda elementelor finite în câmp plan meridian (problema axisimetrică).



### 3.2.1. Metoda numerică de integrare pentru obținerea forței

În calculele de determinare a forței am utilizat formula de cuadratură de ordinul trei:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \frac{b-a}{2} \left\{ \varphi(a) + \varphi(b) - \frac{b-a}{6} [\varphi'(b) - \varphi'(a)] \right\} \quad (3.2.7)$$

Formula este utilizabilă și pentru cazul când funcțiile de integrat sunt cunoscute tabelar. Avantajul formulei constă în faptul că pentru expresii de integrat ce sunt reprezentate de polinoame de grad  $\leq 3$  rezultatul integrării este valoarea exactă.

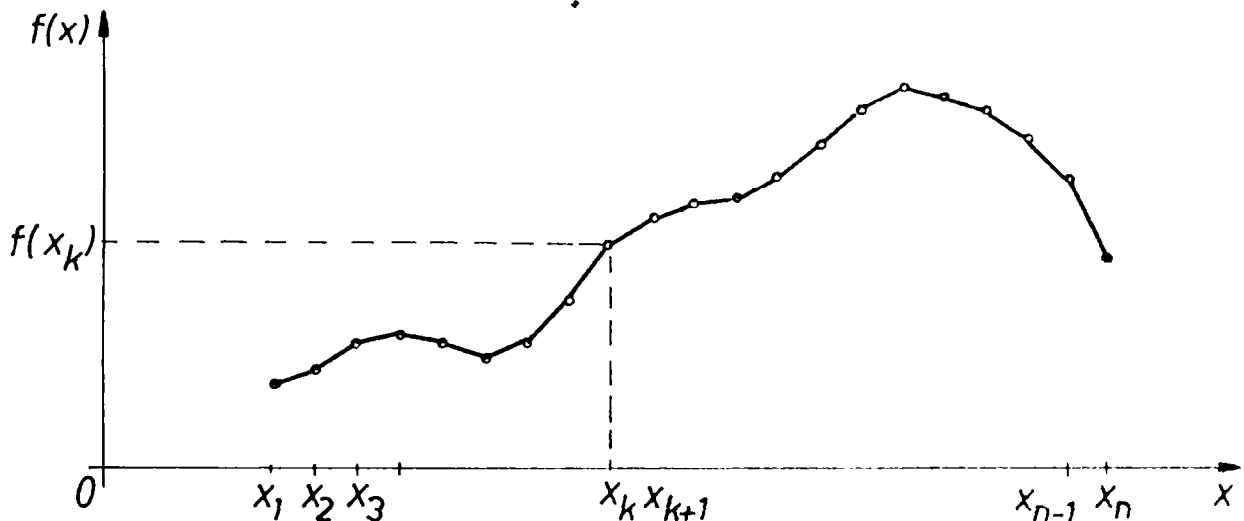


Figura 3.2.7.

Prin specificul metodei de rezolvare a distribuției câmpului magnetic valorile pentru  $B_z$  sau  $B$ , sunt cunoscute tabelar, iar între două puncte cu valori cunoscute ale funcției, aceasta este acceptată, prin principiul de soluționare a problemei de câmp (MEF), ca variind liniar. Deci funcția  $f(x)$ , reprezintă o funcție cunoscută tabelar în puncte  $[x_k, f(x_k)]$  în urma soluționării problemei de distribuție a câmpului magnetic. Dacă  $a = x_k$  și  $b = x_{k+1}$  sunt două puncte foarte apropiate, imediat vecine, funcția  $f(x)$  este acceptată ca având o variație liniară între  $a$  și  $b$  (figura 3.2.7.):

$$f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a}, \quad a \leq x \leq b \quad (3.2.8)$$

Integralele ce urmează a fi rezolvate numeric conțin funcții de tipul:

$$\varphi_1(x) = x \cdot f(x) \quad \text{și} \quad \varphi_2(x) = x \cdot [f(x)]^2$$

Notând cu  $I_1 = \int_a^b \varphi_1(x) dx$  și  $I_2 = \int_a^b \varphi_2(x) dx$  cele două tipuri de integrale ce trebuiesc calculate, așa cum se regăsesc ele în formula (3.2.7), valoarea lor rezultă:

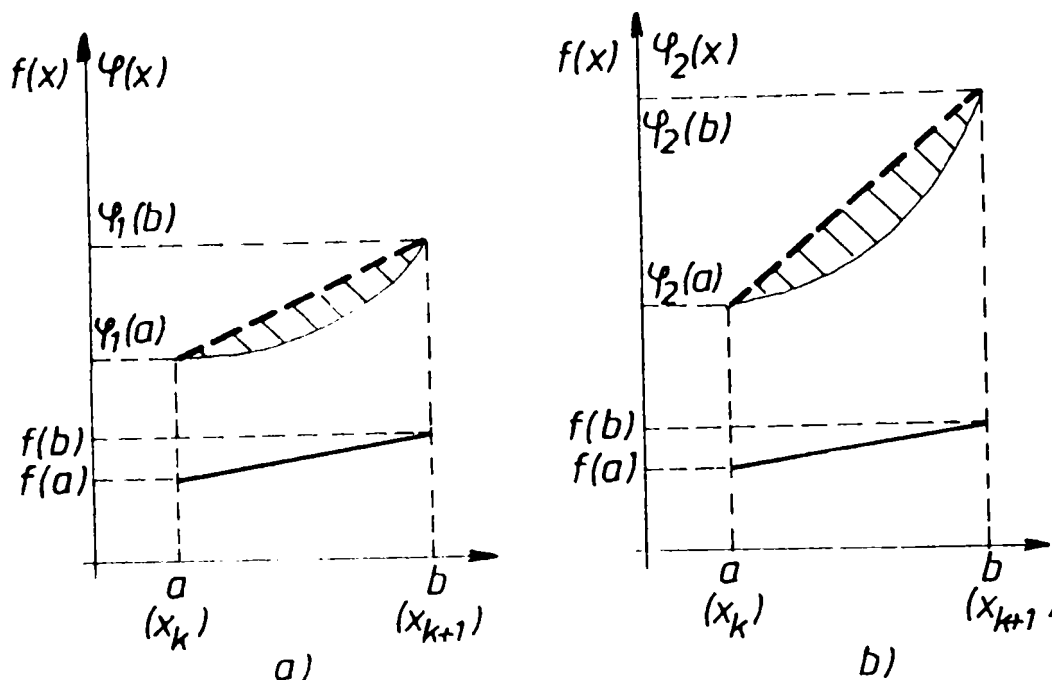


Figura 3.2.8 a și b

$$I_1 = \frac{b-a}{2} \left\{ a \cdot f(a) + b \cdot f(b) - \frac{b-a}{3} [f(b) - f(a)] \right\} \quad (3.2.9)$$

$$I_2 = \frac{b-a}{2} \left\{ a \cdot f^2(a) + b \cdot f^2(b) - \frac{f(b) - f(a)}{6} \cdot [(3b-a) \cdot f(b) - (3a-b) \cdot f(a)] \right\} \quad (3.2.10)$$

În ambele cazuri, față de situația când s-ar fi integrat prin metoda trapezelor funcțiile tabelare  $\varphi_1(x_k)$  și  $\varphi_2(x_k)$  presupunând că acestea au o variație liniară între valorile calculate în punctele  $x_k$  ( $k = 1, n$ ), calculul utilizând metoda de cuadratura de ordinul trei, așa cum s-a prezentat, asigură o precizie de calcul superioară.

Tabelul 3.2.1.

	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$	$x_{k+1}$	...	$x_n$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(a)$	$f(b)$		$f(x_n)$
$\varphi_1(x)$	$x_1 f(x_1)$	$x_2 f(x_2)$		$a f(a)$	$b f(b)$		$x_n f(x_n)$
$\varphi_2(x)$	$x_1 f^2(x_1)$	$x_2 f^2(x_2)$		$a f^2(a)$	$b f^2(b)$		$x_n f^2(x_n)$

Notând cu  $\Delta I_1$  și  $\Delta I_2$  corecțiile ce rezultă față de calculul cu metoda trapezelor aplicată funcțiilor în cazul celor două integrale se obține:

$$\Delta I_1 = -\frac{(b-a)^2}{6} |f(b) - f(a)| \quad \text{și respectiv}$$

$$\Delta I_2 = -\frac{b-a}{12} [f(b) - f(a)] \cdot [(3b-a) \cdot f(b) - (3a-b) \cdot f(a)] \quad (3.2.11)$$

În figurile 3.2.8, a și b, suprafețele hasurate corespund lui  $\Delta I_1$  și, respectiv,  $\Delta I_2$ . Având în vedere că valorile integralelor ( conținând atât integrale de tipul  $I_1$ , cât și de tipul  $I_2$  ) pe fiecare din cele două suprafețe pe care se face integrarea sunt de valori apropiate, iar mărimea ce interesează este diferența între rezultatele integralelor pe cele două suprafețe, creșterea preciziei de calcul a celor două integrale este deosebit de utilă și metoda prezentată este apreciată a fi una din căile prin care acest lucru poate fi realizat.

### 3.2.2. Analiza expresiei forței de levitație magnetică de ordinul II

În expresia (3.2.6) a forței de levitație ce se exercită asupra magnetului permanent în formă de disc imersat în lichid magnetic se pot distinge trei componente, care deși nu au o semnificație fizică independentă, permit să se identifice elementele care au ponderea cea mai mare în valoarea acestei forțe.

$$\bar{F}_1 = -\frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{\mu_0^2 \mu_{r_2}^2} \left[ \int_{S_1} B_{2z}^2(z_1, r) \cdot d\bar{S} - \int_{S_2} B_{2z}^2(z_2, r) d\bar{S} \right] \cdot \bar{u}_z \quad (3.2.12)$$

$$\bar{F}_2 = -\frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(\mu_{r_2} - 1)}{\mu_0^2 \mu_{r_2}^2} \left[ \int_{S_2} B_{2r}^2(z_2, r) d\bar{S} + \int_{S_2} B_{2z}^2(z_2, r) d\bar{S} - \int_{S_1} B_{2r}^2(z_1, r) d\bar{S} - \int_{S_1} B_{2z}^2(z_1, r) d\bar{S} \right] \cdot \bar{u}_z \quad (3.2.13)$$

$$\bar{F}_3 = -M_p \left[ \int_{S_2} B_{1z}(z_1, r) d\bar{S} - \int_{S_1} B_{1z}(z_1, r) d\bar{S} \right] \cdot \bar{u}_z \quad (3.2.14)$$

Se poate observa că fiecare din cele trei componente după care a fost grupată expresia forței conține diferențe între termeni formal identici, ca rezultat al unor integrale de același tip pe cele două fețe ale magnetului permanent. Diferența între acești termeni depinde esențial de diferența între componentele radială și, respectiv, axială ale inducției magnetice pe cele două fețe ale magnetului disc. Aceasta diferență este determinată atât de geometrie cât și de proprietățile de material (magnet, lichid magnetic).

Însă pe lângă aceasta, atât la  $F_1$  cât și la  $F_2$ , mai intervin coeficienți ce depind

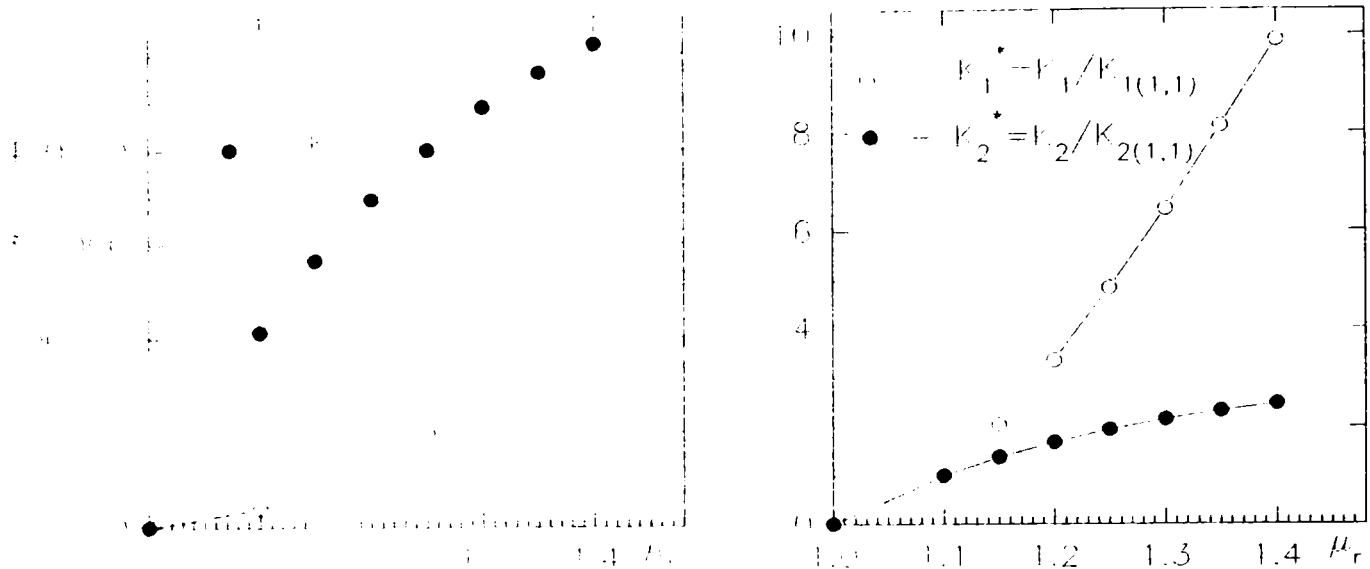


Figura 3.2.9a și b

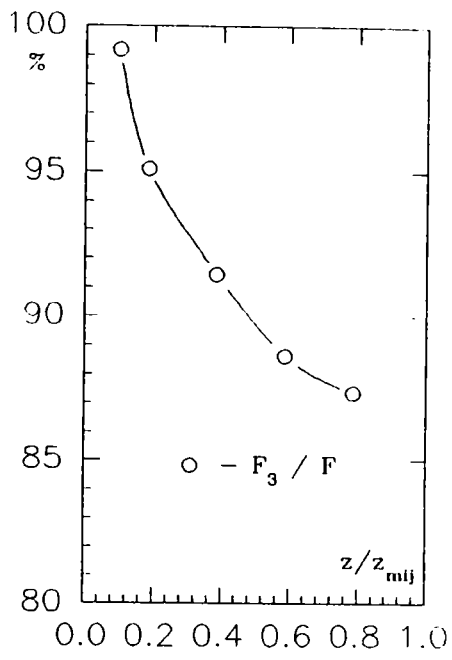
exclusiv de proprietățile lichidului magnetic. Notând cu  $k_1$  și  $k_2$  coeficienții respectivi (se păstrează indicele corespunzător componente de forță a căreia coeficientul  $i$  se aplică) în figurile 3.2.9 a și b este reprezentată variația acestor coeficienți în funcție de permeabilitatea magnetică relativă a lichidului magnetic. Se poate observa că valoarea coeficientului  $k_2$  este sensibil mai mare decât a coeficientului  $k_1$  (figura 3.2.9 a) dar creșterea relativă a acestui coeficient este mai redusă odată cu creșterea permeabilității relative. Așa cum este prezentat și în figura 3.2.9 b, valorile raportate ale coeficienților au fost notate cu:

$$K_v^* = \frac{K_v}{K_{v(\mu_r=1,1)}} ; v = \overline{1,2} \quad (3.2.15)$$

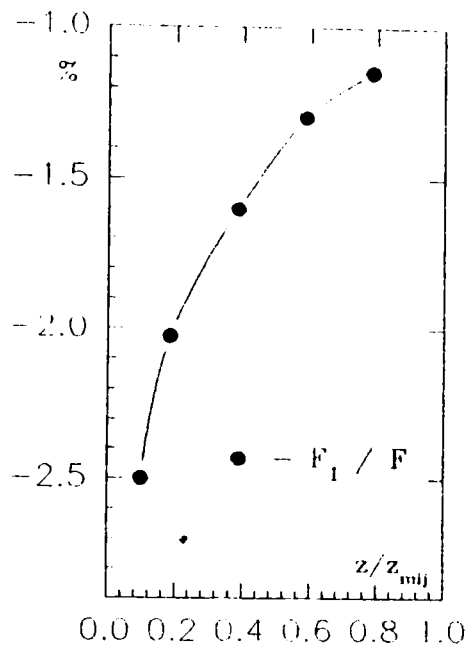
Domeniul investigat (până la  $\mu_r = 1,4$ ) corespunde valorilor rezonabile ale permeabilității relative ale lichidelor magnetice, în domeniul de utilizare corespunzător aplicațiilor avute în vedere.

În figurile 3.2.10 a, b, c, d se poate vedea ponderea procentuală din forța totală de susținere, a componentelor  $F_1$  (a),  $F_2$  (b) și  $F_3$  (c), reprezentate independent, în procente, și apoi împreună în figura 3.2.10 d.

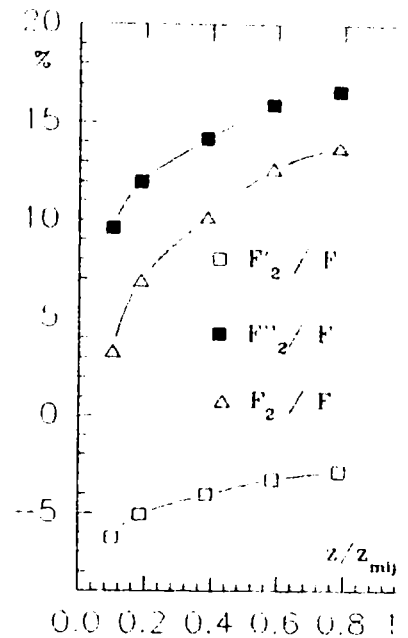
Se poate observa că dacă la o deplasare redusă față de poziția centrală ponderea componente  $F_2$  este mai importantă, la apropierea de baza incintei ce conține lichidul magnetic (situație uzuală în aplicațiile practice când și valoarea absolută a forței este mult mai importantă, practic) componenta  $F_3$ , dependentă de proprietățile magnetului și de valorile câmpului pe cele două fețe, este cea preponderentă.



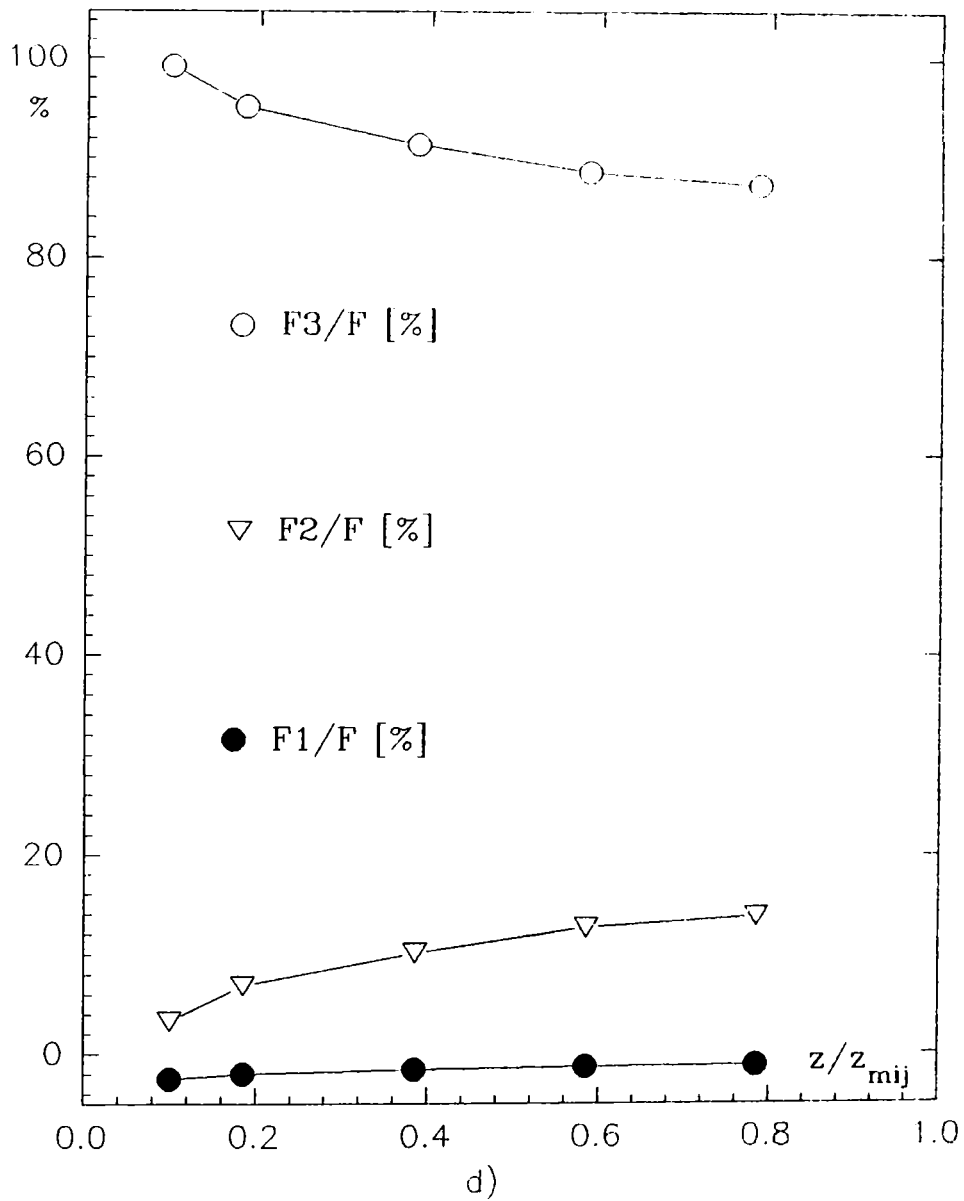
a)



b)



c)



d)

Figura 3.2.10

### 3.2.3. Considerarea geometriei reale a magnetului permanent

Asa cum s-a amintit anterior, în modelarea situației reale a unui magnet imersat în incinta de dimensiuni finite s-a ținut seama și de faptul că muchiile magnetului nu sunt în unghi drept. Existența unei raze de racord între suprafețele plane și suprafața cilindrică corespunde situației reale fiind impusă de considerente tehnologice. Modelarea cu muchii ascuțite ar conduce la o soluție de câmp denaturată față de cea reală. În expresia de calcul a forței, (3.2.6), integrala este presupusă a fi efectuată doar pe suprafețele plane ale magnetului.

Calcul corect trebuie să țină seama și de contribuția suprafețelor teșite (racorduri).

Deci, pornind de la:

$$\bar{F} = \int_{V_1} \bar{f}_{v_1} \cdot dV + \oint_{\Sigma} \bar{f}_{12} \cdot dS + \oint_{\Sigma} p_m \cdot d\bar{S} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{F} = & -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[ \frac{1}{2} (M_{2n}^2 - M_p^2) + \int_0^{H_2} M_2 dH \right] \cdot d\bar{S} - \\ & - \mu_0 \int_{\Sigma} \bar{H}_1 \operatorname{div}_s \bar{M}_p \cdot dS - \mu_0 \int_{V_2} \bar{H}_1 \operatorname{div} \bar{M}_p \cdot dV \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Pentru că problema abordată este rezolvată în condițiile  $\bar{M}_p = \text{const.}$ ,

$$\int_{V_2} \bar{H}_1 \cdot \operatorname{div} \bar{M}_p \cdot dV = 0 \quad (3.2.17)$$

rezultă pentru forța următoarea expresie aplicată în cazul geometriei reale:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & -\mu_0 \oint_{\Sigma_2} \left[ \frac{1}{2} (M_{2n}^2 - M_p^2) + \int_0^{H_2} M_2 dH \right] \cdot d\bar{S} - \mu_0 \int_{\Sigma} \bar{H}_1 \operatorname{div}_s \bar{M}_p \cdot dS = \\ = & -\frac{\mu_0}{2} \oint_{\Sigma_2} M_{2n}^2 d\bar{S} + \frac{\mu_0}{2} \int_{\Sigma_2} M_p^2 \cdot d\bar{S} - \mu_0 \oint_{\Sigma_2} \int_0^{H_2} (M_2 dH) \cdot d\bar{S} - \mu_0 \oint_{\Sigma} \bar{H}_1 \cdot \operatorname{div}_s \bar{M}_p \cdot dS \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Sunt patru termeni (notați cu  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  și  $F_4$ ) ce compun forța de susținere; modul lor de calculare și expresia lor explicită în condițiile concrete de aplicare fiind:

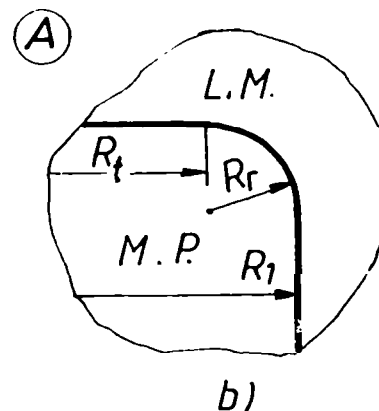
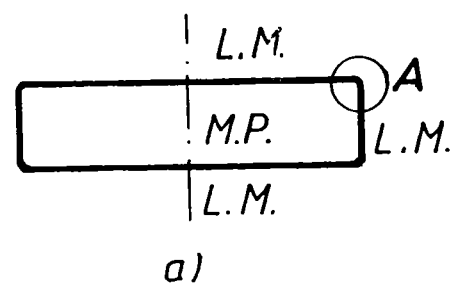


Figura 3.2.11.

$$\begin{aligned}
\bar{F}_1 &= -\frac{\mu_0}{2} \left[ \oint_{\Sigma} M_{2n}^2 \cdot d\bar{S} = \right. \\
&= -\frac{\mu_0}{2} \left[ \int_{S_1} M_{2z}^2(z_1, r) \cdot d\bar{S} + \right. \\
&\quad + \int_{S_{lat}} M_{2r}^2(z, R_1) \cdot d\bar{S} + \quad (3.2.19) \\
&\quad + \int_{S_2} M_{2z}^2(z_2, r) \cdot d\bar{S} + \\
&\quad \left. \left. \int_{S_1} M_{2n}^2(z, r) \cdot d\bar{S} \right] \right.
\end{aligned}$$

în care  $S_f = S_{f_1} \cup S_{f_2}$  reprezintă cele două suprafețe ale teșiturilor, iar  $M_{2n}$  reprezintă componenta magnetizației normală la suprafața teșiturii (racordului).

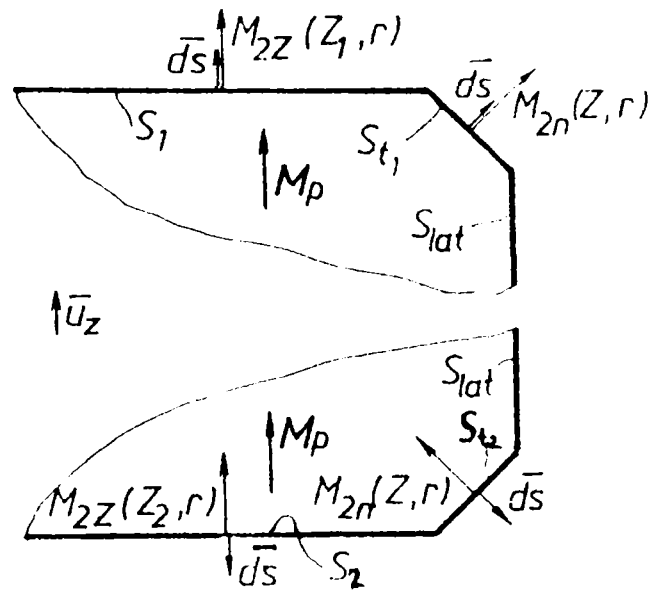


Figura 3.2.12.

Integrala pe suprafața laterală a magnetului, din condiții de simetrie, este nulă.

$$\int_{S_{lat}} M_{2r}^2(z, R_1) \cdot d\bar{S} = 0 \quad (3.2.20)$$

Modelarea pentru rezolvarea problemei de câmp prin metoda elementelor finite, cu o partiționare triunghiulară a domeniului conduce la aproximarea arcelor de racord prin segmente de dreaptă. În cazul concret rezolvat, arcul de cerc de racord s-a aproximat prin coarda subîntinsă de acesta. Deci  $S_l$  reprezintă suprafața laterală a unui trunchi de con, suprafața pe care se face integrarea pentru a obține contribuția acestei porțiuni la forța totală de susținere. Pentru suprafețele pe care integrala va rezulta nenulă, în corelație cu cele stabilite prin (3.2.6), se obține:

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} M_{2z}^2(z_1, r) \cdot d\bar{S} &= \int_{S_1} \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} B_{2z}^2(z_1, r) \cdot d\bar{S} = \\
&= \int_{S_1} \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} B_{2z}^2(z_1, r) dS \cdot (\bar{u}_z) \quad (3.2.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} M_{2z}^2(z_2, r) \cdot d\bar{S} &= \int_{S_2} \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} B_{2z}^2(z_2, r) \cdot d\bar{S} = \\
&= \int_{S_2} \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} B_{2z}^2(z_2, r) dS \cdot (-\bar{u}_z) \quad (3.2.22)
\end{aligned}$$

$$\int_{S_{f_1}} M_{2n}^2(z, r) \cdot d\bar{S} = \int_{S_{f_1}} M_{2n}^2(z, r) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\bar{u}_z) \quad (3.2.23)$$

$$\int_{S_2} M_{2n}^2(z,r) \cdot d\bar{S} = \int_{S_2} M_{2n}^2(z,r) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\bar{u}_z) \quad (3.2.24)$$

Componentele radiale ale forței și pe  $S_1$  vor fi nule. Deci:

$$\bar{F}_1 = \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{2\mu_0\mu_{r_2}^2} \left[ \int_{S_1} B_{2z}(z_1,r) \cdot d\bar{S} - \int_{S_2} B_{2z}(z_2,r) \cdot d\bar{S} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{S_1} B_{2n}^2(z,r) \cdot d\bar{S} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{S_2} B_{2n}^2(z,r) \cdot d\bar{S} \right] \cdot \bar{u}_z \quad (3.2.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 &= -\mu_0 \int_{\Sigma_2} \int_0^{H_2} (M_2 dH) \cdot d\bar{S} = -\mu_0 \int_{\Sigma_2} \frac{\mu_{r_2} - 1}{2} H_2^2 \cdot d\bar{S} = -\mu_0 \frac{\mu_{r_2} - 1}{2} \int_{\Sigma_2} H_2^2 \cdot d\bar{S} = \\ &= -\mu_0 \frac{\mu_{r_2} - 1}{2} \left[ \int_{S_1} \frac{B_2^2(z_1,r)}{\mu_0^2 \mu_{r_2}^2} dS(\bar{u}_z) + \int_{S_2} \frac{B_2^2(z_2,r)}{\mu_0^2 \mu_{r_2}^2} (-\bar{u}_z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{S_1} \frac{B_2^2(z,r)}{\mu_0^2 \mu_{r_2}^2} dS(\bar{u}_z) + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{S_2} \frac{B_2^2(z,r)}{\mu_0^2 \mu_{r_2}^2} dS(-\bar{u}_z) \right] \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\mu_{r_2} - 1}{\mu_0 \mu_{r_2}^2} \left[ \int_{S_1} B_{2z}^2(z_1,r) dS + \int_{S_1} B_{2r}^2(z_1,r) dS - \int_{S_2} B_{2z}^2(z_2,r) dS - \right. \\ &\quad \left. - \int_{S_2} B_{2r}^2(z_2,r) dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{S_1} B_2^2(z,r) dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{S_2} B_2^2(z,r) dS \right] \cdot (\bar{u}_z) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

$$\bar{F}_3 = \frac{\mu_0}{2} \int_{\Sigma_2} M_{pn}^2 \cdot d\bar{S} = 0 \quad \bar{M}_p \text{ fiind constantă}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_4 &= -\mu_0 \oint_{\Sigma} \bar{H}_1 \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} = -\mu_0 \left[ \int_{S_1} \bar{H}_{1s_1} \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{H}_{1s_2} \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_1} \bar{H}_{1s_1} \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{H}_{1s_2} \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} \right] \cdot \bar{u}_z \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

în care:

$$\int_{S_1} \bar{H}_{1s_1} \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{H}_{1s_1} (0 - M_p) \cdot d\bar{S} = -M_p \int_{S_1} \bar{H}_{1s_1} \cdot d\bar{S} \quad (3.2.29)$$

$$\int_{S_2} \bar{H}_{1s_2} \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} = \int_{S_2} \bar{H}_{1s_2} (0 + M_p) \cdot d\bar{S} = M_p \int_{S_2} \bar{H}_{1s_2} \cdot d\bar{S} \quad (3.2.30)$$

$$\int_{S_1} \bar{H}_{1s_1} \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{H}_{1s_1} (0 - \frac{\sqrt{2}}{2} M_p) \cdot d\bar{S} = -\frac{\sqrt{2}}{2} M_p \int_{S_1} \bar{H}_{1s_1} \cdot d\bar{S} \quad (3.2.31)$$

$$\int_{S_2} \bar{H}_{1s_2} \cdot \text{div}_s \bar{M}_p \cdot d\bar{S} = \int_{S_2} \bar{H}_{1s_2} (0 + \frac{\sqrt{2}}{2} M_p) \cdot d\bar{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} M_p \int_{S_2} \bar{H}_{1s_2} \cdot d\bar{S} \quad (3.2.32)$$



cu:

$$\bar{H}_{1s_1} = H_{1z}(z_1, r) \bar{u}_z + H_{1r}(z_1, r) \bar{u}_r \quad (3.2.33)$$

$$\bar{H}_{1s_2} = H_{1z}(z_2, r) \bar{u}_z + H_{1r}(z_2, r) \bar{u}_r \quad (3.2.34)$$

$$\bar{H}_{1s_1} = H_{1z}(z, r) \cdot \bar{u}_z + H_{1r}(z, r) \cdot \bar{u}_r \quad (3.2.35)$$

Și în cazul forței  $F_4$  componenta radială este nulă, rămânând doar componenta orientată după direcția Oz:

$$\begin{aligned} \bar{F}_4 = -\mu_0 M_p \left[ \int_{S_1} H_{1z}(z_1, r) dS - \int_{S_2} H_{1z}(z_2, r) dS + \right. \\ \left. \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{S_1} H_{1z}(z, r) dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{S_2} H_{1z}(z, r) dS \right] \bar{u}_z \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

$$\Rightarrow \bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 \quad (3.2.37)$$

cu  $F_3 = 0$ , astfel încât:

$$\begin{aligned} \bar{F} = - \left\{ \frac{(\mu_{r_2} - 1)^2}{2\mu_0 \mu_{r_2}^2} \left[ \int_{S_1} B_{2z}^2(z_1, r) dS - \int_{S_2} B_{2z}^2(z_2, r) dS \right] + \Delta F_1 + \right. \\ \left. + \frac{\mu_{r_2} - 1}{2\mu_0 \mu_{r_2}^2} \left[ \int_{S_1} B^2(z_1, r) dS - \int_{S_2} B^2(z_2, r) dS \right] + \Delta F_3 + \right. \\ \left. + M_p \left[ \int_{S_1} B_{2z}(z_1, r) dS - \int_{S_2} B_{2z}(z_2, r) dS \right] + \Delta F_4 \right\} \cdot \bar{u}_z \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Deci, corecțiile ce se impun a fi făcute față de valoarea forței ce s-a obținut cu (3.2.6), corespunzătoare contribuției suprafețelor de racord (tesitura la  $45^\circ$ , în cazul acesta) sunt:

$$\Delta F_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \int_{S_1} B_{2n}^2(z, r) dS - \int_{S_2} B_{2n}^2(z, r) dS \right] \frac{k_1}{2\pi} \quad (3.2.39)$$

$$\Delta F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \int_{S_1} B_2^2(z, r) dS - \int_{S_2} B_2^2(z, r) dS \right] \frac{k_2}{2\pi} \quad (3.2.40)$$

$$\Delta F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \int_{S_1} B_{2z}(z, r) dS - \int_{S_2} B_{2z}(z, r) dS \right] \cdot M_p \quad (3.2.41)$$

În cazul tehnic real, când suprafața de racord este un arc de cerc de  $90^\circ$ , contribuția suprafeței  $S_{11}$  în valoarea componentei  $F_1$  ar fi:

$$\Delta F_{11} = - \frac{\mu_0}{2} \int_{S_{11}} M_{2n}^2 \cdot d\bar{S} \quad (3.2.42)$$

în care al doilea indice 1 arată că este vorba doar de contribuția lui  $S_{11}$ , parte a lui

$$S, \text{ iar} \quad d\vec{S} = dS \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_z + dS \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_r \quad (3.2.43)$$

$$\text{cu:} \quad dS = 2\pi (R_t + R_r \sin \theta) \cdot R_r \cdot d\theta \quad (3.2.44)$$

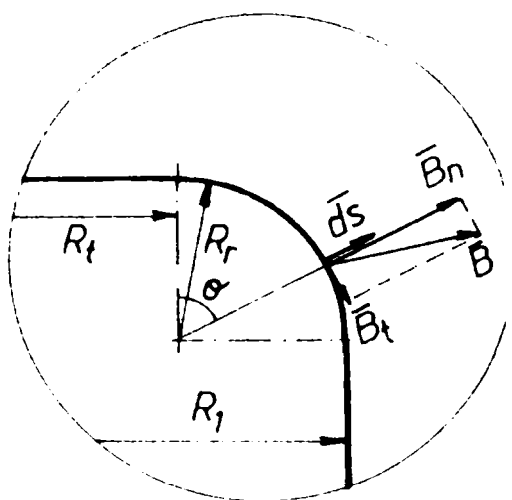
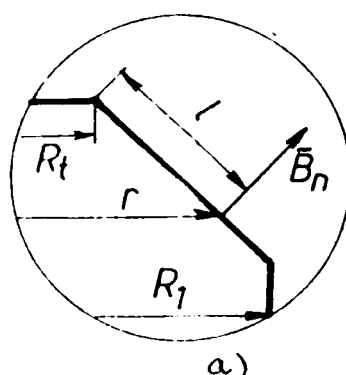
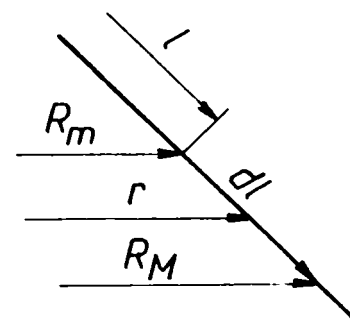


Figura 3.2.13.



a)



b)

Figura 3.2.14.

Componenta după direcția radială este nulă din motive de simetrie și deci:

$$\Delta F_{11} = -\frac{\mu_0}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{2n}^2(\theta) \cdot 2\pi (R_t + R_r \sin \theta) R_r \cdot d\theta \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_z \quad (3.2.45)$$

Modelarea efectivă a fost făcută înlocuind racordul arc de cerc prin coarda subîntinsă de acesta. În acest fel, așa cum este arătat și în figura 3.2.14 a, integrarea se face pe suprafața laterală a unui trunchi de con, iar din figura 3.2.14 b se vede că elementul de integrare  $dS$  este reprezentat de suprafața laterală a unui trunchi de con de raze  $R_m$  și  $R_M$  și, respectiv, de generatoarea  $dl$ .

$$dS = \pi \cdot dl (R_M + R_m) = \pi \cdot dl \left( R_m + R_m + \frac{\sqrt{2}}{2} dl \right) \quad \text{și deci se poate aproxima:}$$

$$dS = 2\pi r \cdot dl \quad (3.2.46)$$

În acest fel contribuția suprafeței  $S_{11}$  rezulta:

$$\Delta F_{11} = \frac{k_1}{2\sqrt{2}\pi} \left[ \int_{S_{11}} B_{2n}^2(l_1) dS \right] \quad (3.2.47)$$

iar:

$$\int_{S_1} B_{2n}^2(l_1) \cdot dS = \int_0^{R_r \sqrt{2}} B_{2n}^2(l_1) \cdot 2\pi \left[ R_r \cdot l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cdot dl_1 =$$

$$= 2\pi \left[ \int_0^{R_r \sqrt{2}} B_{2n}^2(l_1) R_r \cdot dl_1 + \int_0^{R_r \sqrt{2}} B_{2n}^2 \cdot l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} dl_1 \right] \quad (3.2.48)$$

în care indicele 1 atașat variabilei  $l_1$  arată că integrarea se face pe  $S_{11}$ .

O integrală de aceeași formă rezultă și pentru suprafața  $S_{12}$ . Cele două integrale sunt de același tip cu cele prezentate anterior pentru  $S_1$  și  $S_2$ , componenta normală a inducției magnetice fiind cunoscută tabelar,  $B(l_1)$  și, respectiv,  $B(l_2)$ , în urma rezolvării problemei de câmp prin MEF. Pentru celelalte componente ale forței se procedează analog, calculele conducând la integrale de același tip cu cele prezentate pentru cazul componentei forței notată cu  $F_{11}$ .

### 3.3. Interpretarea rezultatelor obținute la calculul forței de levitație magnetică de ordinul II

#### 3.3.1. Compararea rezultatelor obținute prin modelare cu rezultate experimentale

În literatură sunt prezentate mai multe rezultate obținute experimental privind forța de levitație magnetică ce se exercită asupra unui magnet permanent imersat într-o incintă conținând lichid magnetic. Între acestea, în [Lu1] este prezentat în detaliu un experiment constând în imersarea unui magnet în formă de disc în lichid magnetic conținut de o incintă cilindrică, pentru care sunt prezentate următoarele date:

- diametrul magnetului  $d = 1,9$  cm
- grosimea magnetului (înălțimea)  $H_1 = 0,46$  cm
- densitatea de masă a magnetului  $\rho_1 = 4700$  kg/m<sup>3</sup>

Pentru lichidul magnetic se cunosc:

- densitatea de masă  $\rho_2 = 1220$  kg/m<sup>3</sup>
- permeabilitatea magnetică relativă  $\mu_r = 1,2$  considerată constantă în domeniul de utilizare
- intensitatea câmpului magnetic la suprafața magnetului, în centrul uneia din fețele plane este  $H_0 = 31600$  A/m.

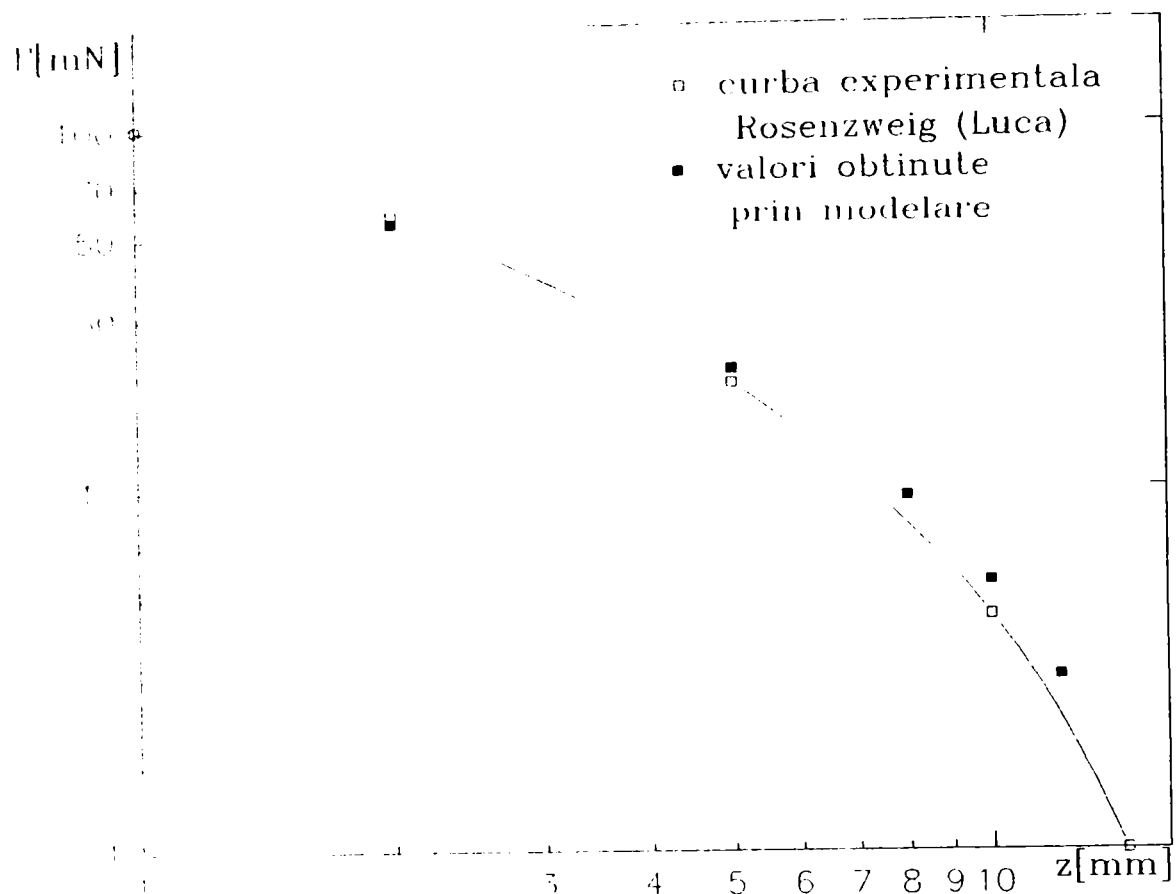


Figura 3.3.1.

Considerând magnetul ca având magnetizația permanentă uniformă, orientată după generatoarea discului magnet permanent, valoarea lui  $H_0$  este calculabilă

analitic [GrBl]:

$$H_0 = \frac{M_p \cdot h}{2\sqrt{R^2 + h^2}} \quad (3.3.1)$$

De aici rezultă acum pentru

$$M_p = H_0 \cdot \frac{2\sqrt{R^2 + h^2}}{h} = 146 \text{ kA/m} \quad (3.3.2)$$

În modelare am lucrat cu:

$$\bar{M}_p = M_p \cdot \bar{u}_z; \quad M_p = 150 \text{ kA/m} \quad (3.3.3)$$

Volumul cilindric de lichid magnetic are dimensiunile  $R_2 = 30 \text{ mm}$  și  $H_2 = 46 \text{ mm}$ .

În aceste condiții se obține curba experimentală din figura 3.3.1 [Lu1].

În aceeași figură sunt prezentate și valorile obținute de către mine, prin modelare și calcul numeric. Se poate observa buna concordanță între rezultate, ceea ce confirmă că ipotezele simplificatorii cu care s-a lucrat în modelare sunt rezonabile și deci în acest fel rezultatele ce vor fi prezentate în continuare pot fi creditate cu un grad ridicat de încredere.

Reprezentarea curbelor de dependență a forței de distanță până la baza incintei ce conține lichidul magnetic s-a făcut în axe de tip logaritmic, forma agreată în literatura datorită limitelor largi în care forța de susținere variază. Se poate

observa că diferențele mai mari apar la deplasări mici din poziția centrală, deplasări la care valoarea forței este mai mică și deci erorile introduse prin modelare au o pondere mai mare. În zona de interes, cea corespunzătoare poziției pentru care se obține autolevitația (aprox. 4 - 5 mm) rezultatele sunt cele mai bune.

### 3.3.2. Ordinograma de calcul pentru forța de levitație de ordinul II

Cu programul de calcul realizat s-au urmărit mai multe dependențe între mărimi geometrice și influența acestora asupra forței de sustentație magnetică. Proprietățile de material ale magnetului permanent ca și ale lichidului magnetic au fost și ele variate, pentru a obține corelații necesare în abordarea calculului de proiectare. În figura 3.3.2. este prezentată ordinograma de calcul utilizată în conducerea calculului. Pornind de la o anumită poziție a magnetului permanent față de incinta cu lichid magnetic, s-au introdus toate elementele geometrice necesare pentru descrierea problemei. Stabilirea frontierei s-a făcut suficient de departe pentru ca prin impunerea condițiilor de frontieră să se obțină valori cât mai apropiate de soluția analitică (în puncte particulare), în zona de interes.

După efectuarea calculului pentru o anumită poziție și cu anumite proprietăți de material rezultă o valoare a forței ce se exercită asupra magnetului imersat. În funcție de dependența urmărită se modifică, așa cum este precizat în ordinograma, acel parametru funcție de care se dorește stabilirea curbei respective.

În rezolvarea problemei de câmp s-a lucrat așa cum a fost precizat la paragraful 3.1, și anume:

- poziția magnetului față de frontieră a fost păstrată aceeași, simetrică, indiferent de poziția relativă magnet - lichid magnetic. Permeabilitatea magnetică a lichidului magnetic fiind foarte redusă (1,1 - 1,2) apropierea magnetului de una din frontiere (implicit îndepărtarea de o altă frontieră) cu păstrarea aceluiași condiții de frontieră ar fi condus la rezultate afectate de o eroare sistematică importantă.
- zona imediat limitrofă magnetului permanent (situată în lichid magnetic) ca și magnetul permanent în sine au fost păstrate cu o aceeași discretizare (fină) pentru oricare din situațiile studiate. În acest fel modificarea condițiilor geometrice nu se manifestă și prin modificarea discretizării la suprafața magnetului, modificare care ar fi influențat și rezultatul obținut pentru distribuția de câmp și, mai ales valorile integralelor pe suprafețele de interes.

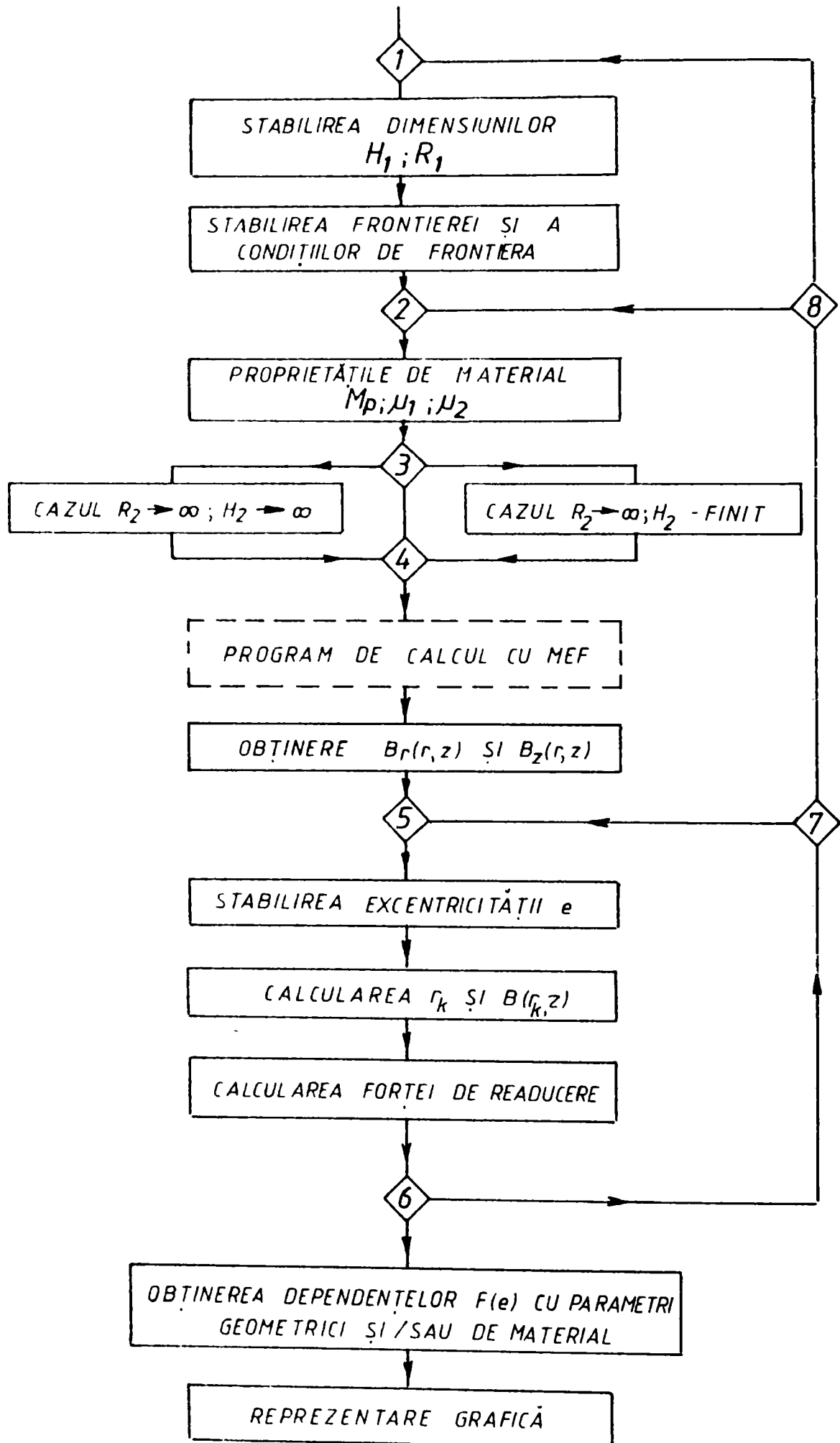


Figura 3.3.2.

Valorile componentelor câmpului magnetic au fost depuse într-un fișier de date din care apoi au fost importate în programul de calcul al forței. Stabilirea modului de integrare (aplicarea cuadraturii de ordinul trei) ca și programul efectiv de calcul reprezintă contribuții personale.

De asemenea, reluarea calculelor cu parametrii modificați și sensul modificării acestora au reprezentat decizii și operații ce-mi aparțin. Rezultatele obținute au fost introduse într-un program de reprezentare grafică cu ajutorul căruia au fost realizate graficele ce prezintă sintetic dependențele forței de levitație în funcție de diverși parametrii.

### 3.3.3. Rezultate obținute și interpretarea lor

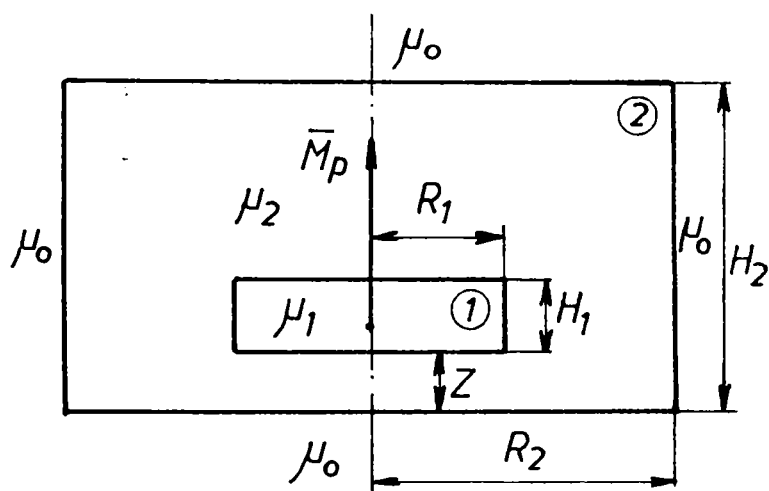


Figura 3.3.3.

Privind forța de sustentare magnetică ce se exercită asupra magnetului în formă de disc într-o incintă cilindrică ce conține lichid magnetic, se poate remarca faptul că există mai mulți factori ce influențează valoarea acestei forțe, precum și modul în care ea variază la modificarea parametrilor ce definesc problema.

În figura 3.3.3. sunt evidențiați parametrii geometrici  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $R_1$  și  $R_2$ , care au fost modificați pentru a stabili câteva dependențe ce sunt utile în demararea calculelor de proiectare a lagărelor magneto-fluidice. Poziția relativă a magnetului față de lichidul magnetic, distanța  $z$ , este de asemenea un parametru important.

Proprietățile de material sunt luate în calcul prin magnetizația permanentă  $M_p$  a discului magnet permanent și prin  $\mu_2$ , permeabilitatea magnetică a lichidului magnetic, presupusă constantă în domeniul de utilizare.

În cazul acestor reprezentări s-au utilizat atât axele liniare, cât și cele de tip logaritm.

În figurile 3.3.4., 3.3.5. și 3.3.6. este reprezentată variația forței în raport cu distanța  $z$ . Reprezentarea în axe de tip logaritm conduce la forme de variație întâlnite și în literatură, [Lu1], dar obținute pe cale experimentală.

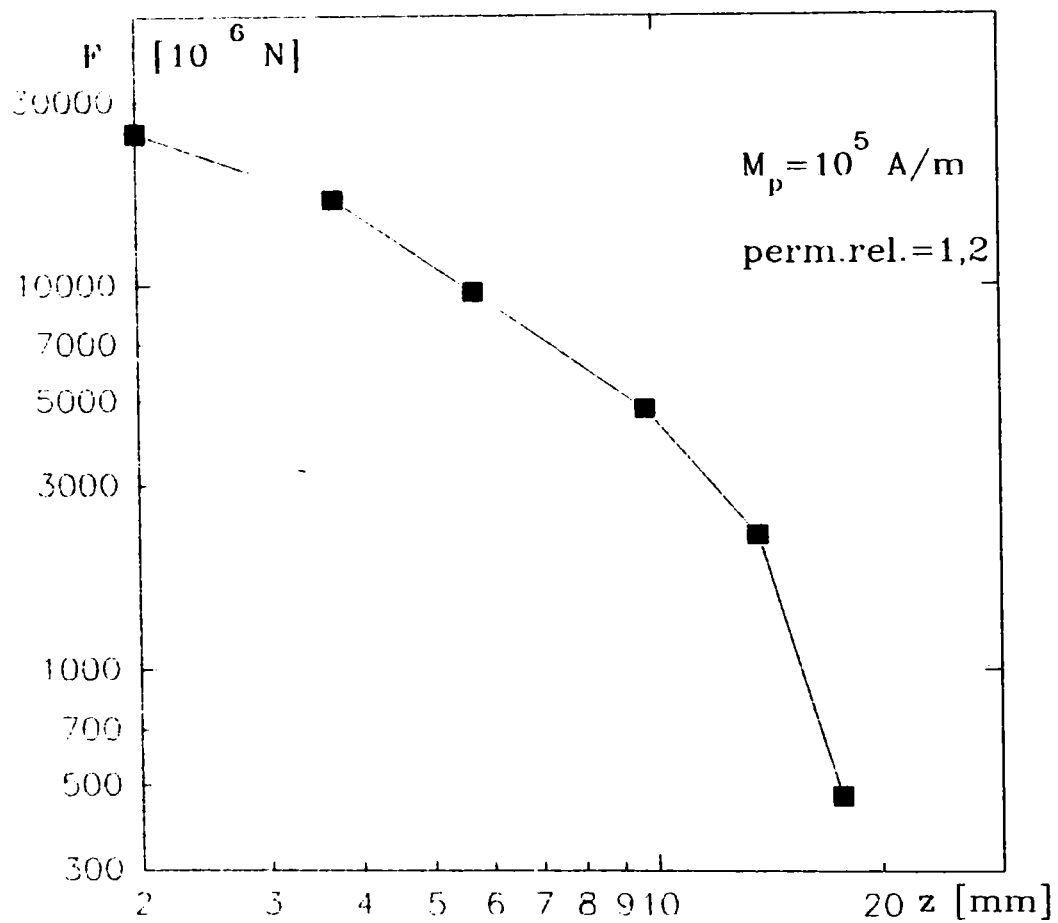
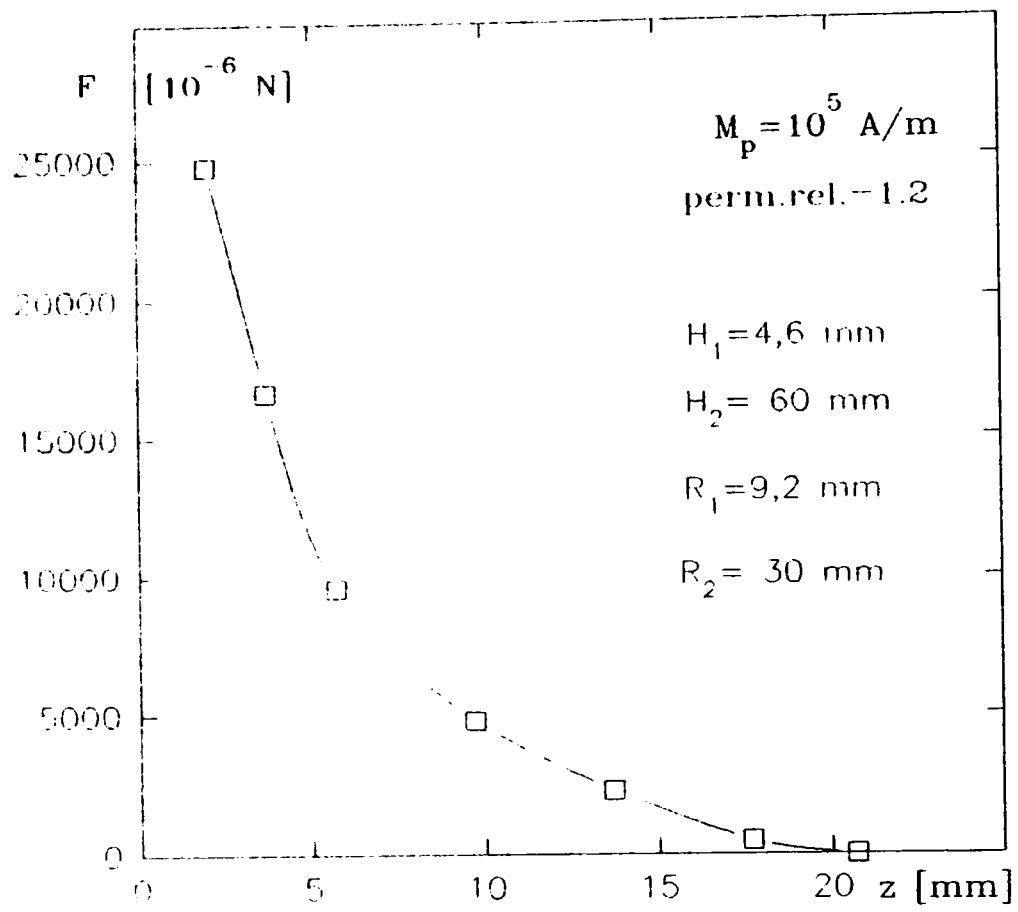


Figura 3.3.4.



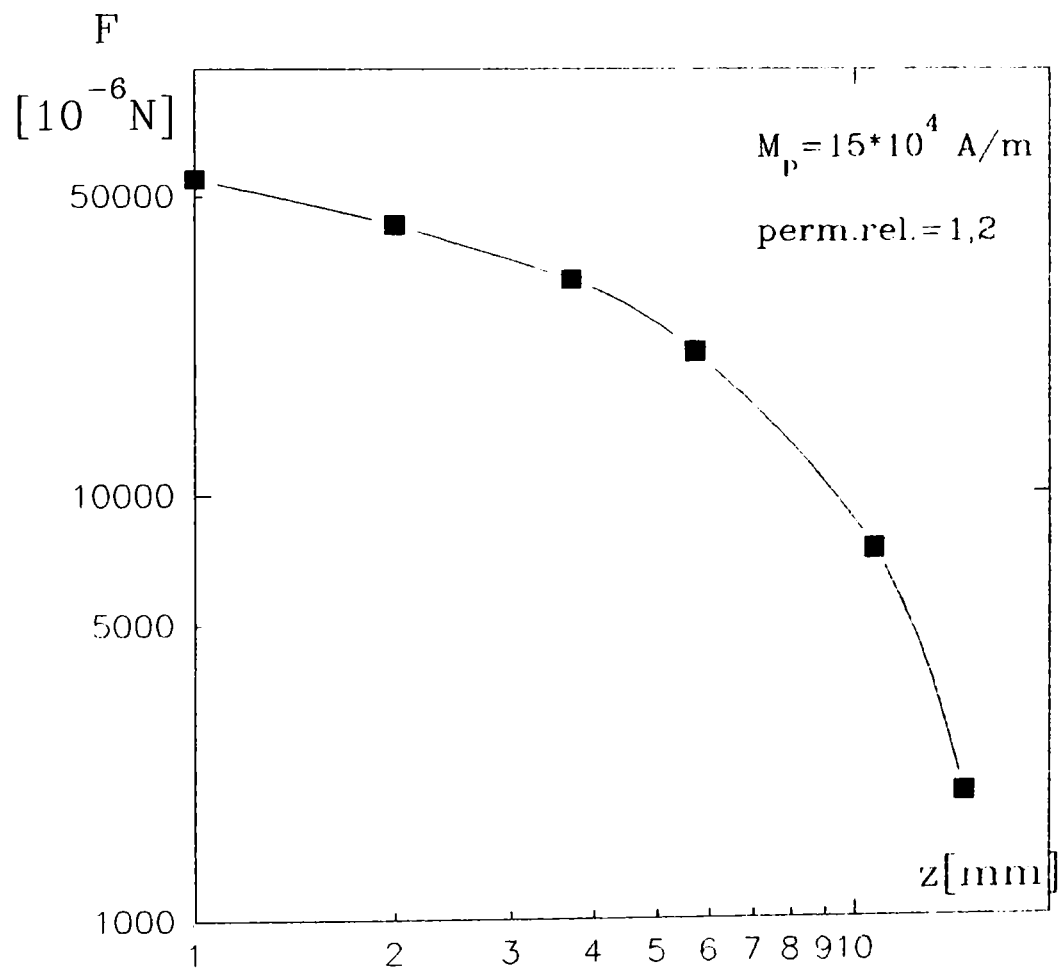
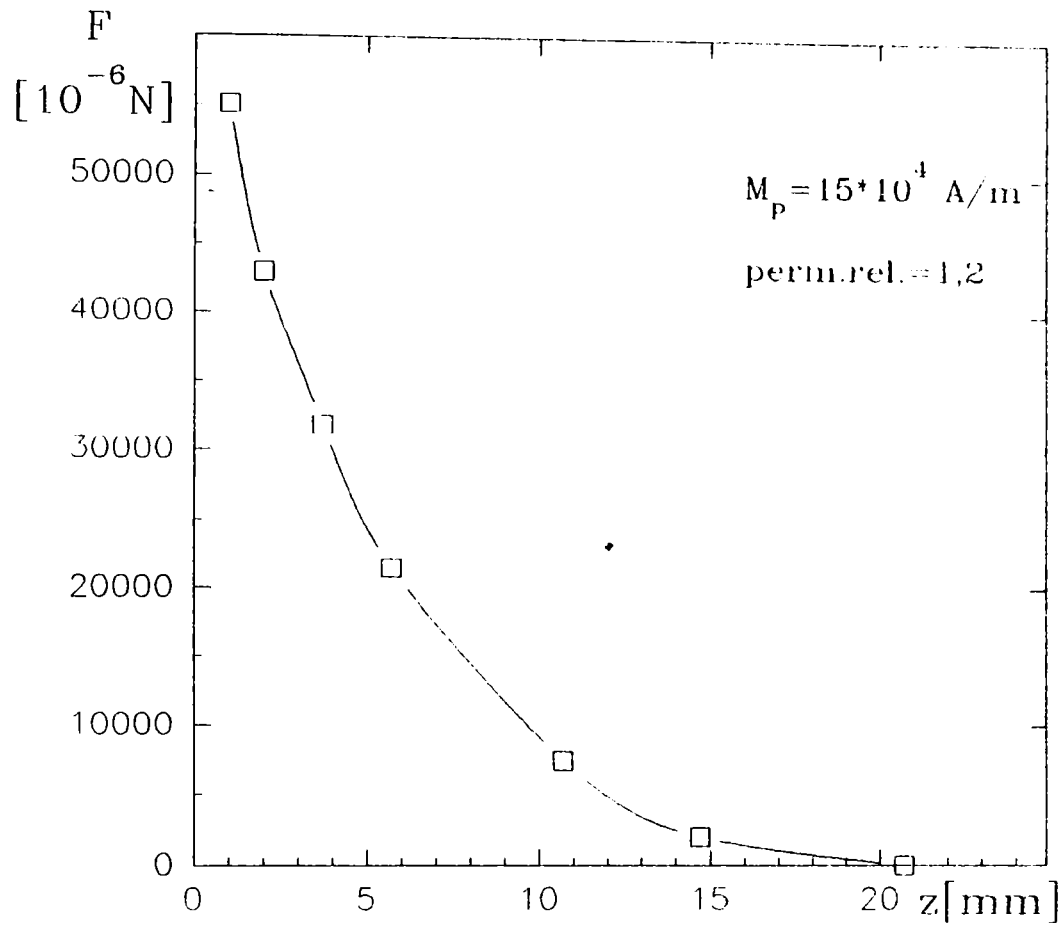


Figura 3.3.5.

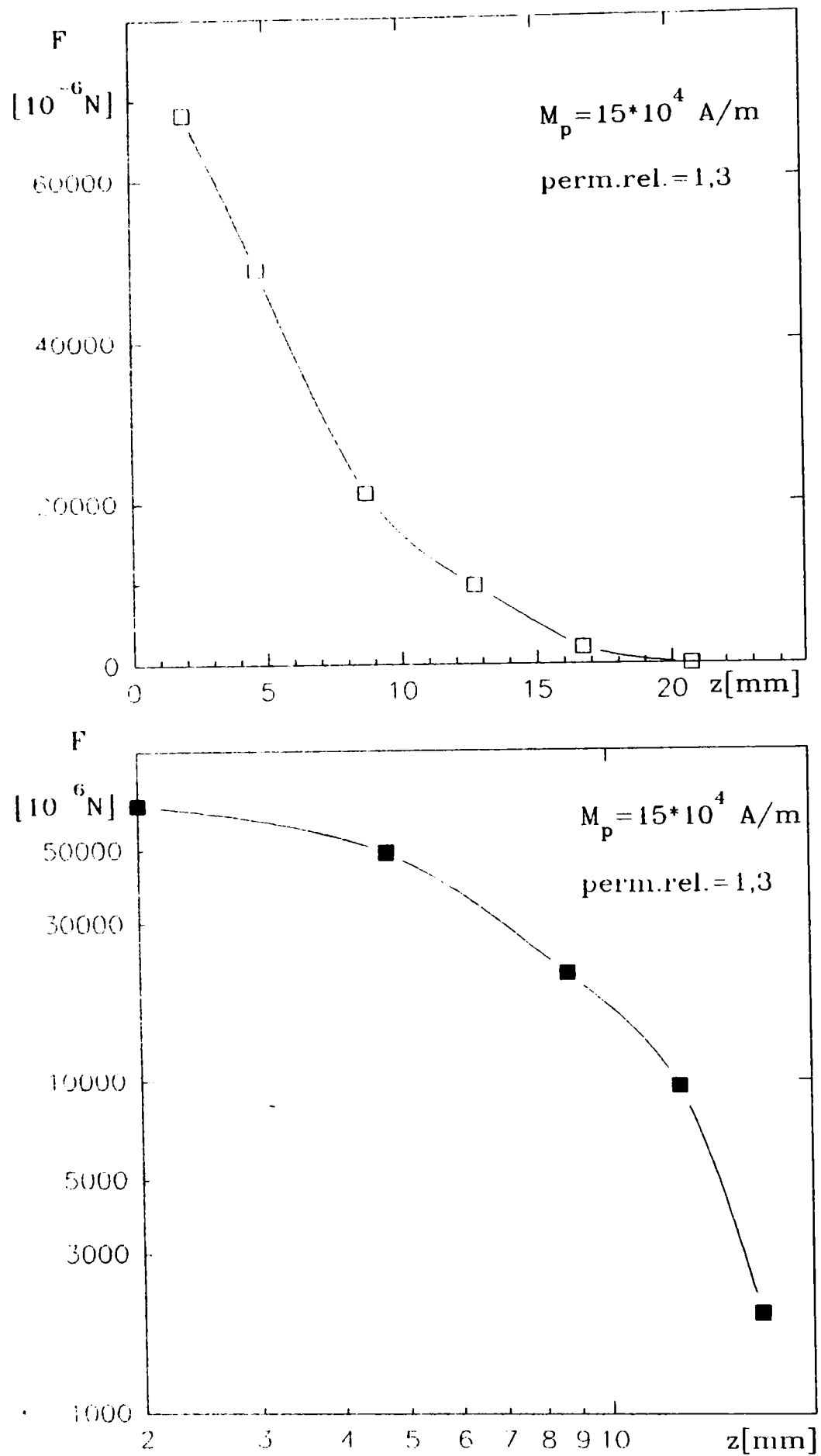


Figura 3.3.6.

Forma de variație a acestor curbe, obținute prin programele de calcul pentru alte valori și corelații ale parametrilor decât cele accesibile în literatură, păstrează aceeași alură ca și curbele experimentale, confirmând și în acest fel acuratețea calculului realizat prin modelare. Discretizarea magnetului și a "peliculei" de lichid magnetic din imediata lui vecinătate au fost menținute aceleași. De asemenea poziția relativă a magnetului față de frontiere a fost menținută aceeași, așa cum s-a precizat la capitolul privitor la calculul distribuției câmpului magnetic cu MEF.

În continuare au fost urmărite corelații între forța rezultantă de susținere magnetică și proporțiile geometrice ale magnetului disc și ale incintei cu lichid magnetic pe de o parte, și, respectiv, proprietățile de material ale magnetului și ale lichidului magnetic. Curbele obținute sunt prezentate în figurile 3.3.7. - 3.3.10. În toate cazurile poziția magnetului tip disc a fost coaxială cu incinta cilindrică ce conține lichidul magnetic.

În figura 3.3.7. se pun în evidență, la geometrie dată, curbele forței pentru diverse valori ale magnetizației permanente, luându-se permeabilitatea relativă a lichidului magnetic ca parametru, parametru ce variază de la 1,1 până la 1,4 conform proprietăților lichidelor magnetice folosite în acest gen de aplicații. Dimensiunile magnetului disc sunt raza  $R_1 = 9,2$  mm și înălțimea sa  $H_1 = 4,6$  mm. Incinta are raza  $R_2 = 30$  mm și  $H_2 = 60$  mm. Calculele pentru determinarea forței au fost efectuate pentru o poziție relativă verticală disc - incintă caracterizată de  $z = 2$  mm.

În figura 3.3.8. se pune în evidență influența geometriei magnetului (prin raportul  $R_1/H_1$ ), pentru trei valori ale magnetizației permanente a magnetului, care în toate calculele efectuate a fost considerată uniformă și orientată doar după axa  $Oz$  (verticală). În fapt, ca mod de lucru efectiv, am menținut constantă valoarea înălțimii magnetului disc și s-au făcut calculele pentru diferite raze  $R_1$  ale magnetului. Se poate observa că la creșterea raportului  $R_1/H_1$ , peste valoarea 2,5 creșterea în forță devine din ce în ce mai mică, creșterea dimensiunii radiale nefiind justificată peste această limită.

Constatarea este adevărată pentru oricare din cele trei valori ale magnetizației permanente ale magnetului luate în calcul.

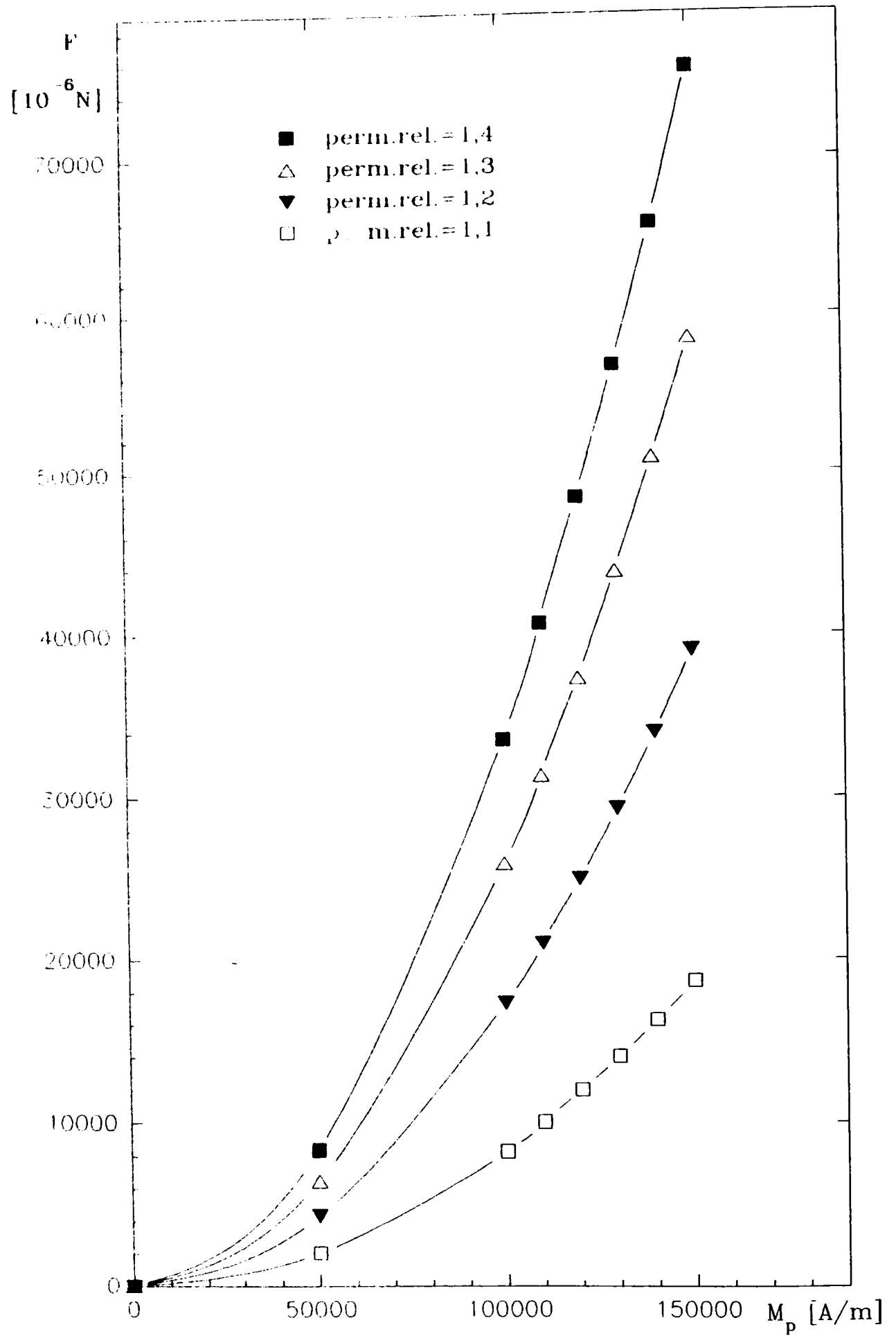


Figura 3.3.7.

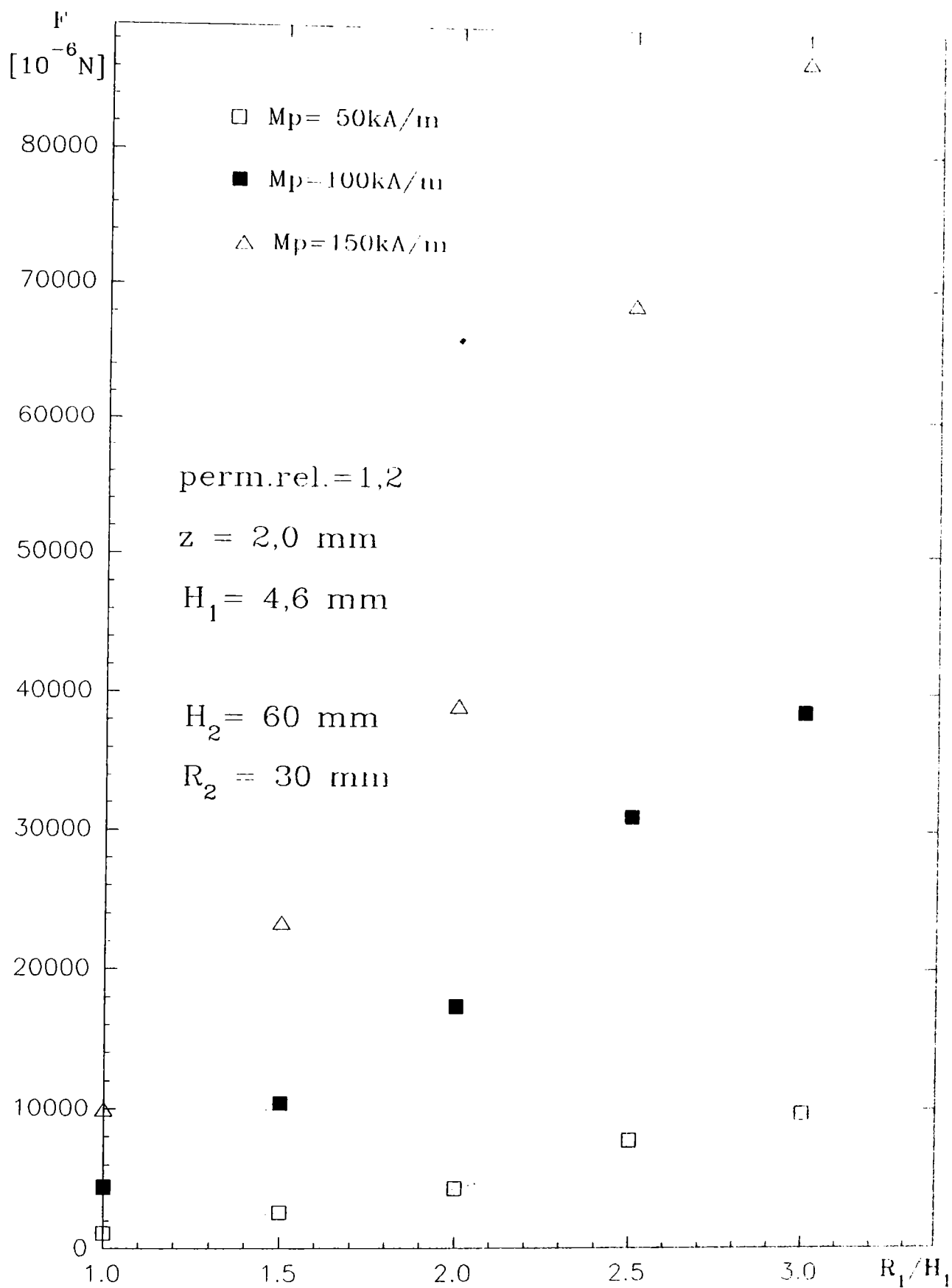


Figura 3.3.8.

În figura 3.3.9. este prezentată dependența forței de susținere de poziția magnetului,  $z$ , față de baza incintei cu lichid magnetic. Curbele au fost obținute pentru trei proporții geometrice ale magnetului disc, cu menținerea geometriei incintei la aceleași valori. De asemenea magnetizația permanentă a magnetului a fost constantă,  $M_p = 150 \text{ kA/m}$ , iar permeabilitatea magnetică relativă a lichidului magnetic a fost și ea menținută la o aceeași valoare,  $\mu_r = 1,2$ . Se poate observa că, în condițiile date, forța specifică, pe unitatea de volum a celor trei magneți investigați, are aceeași alură, cu valori apropiate. Se poate trasa o curbă medie a forței specifice, utilă în abordarea calculului de proiectare.

În figura 3.3.10 este prezentată dependența forței de proporțiile geometrice ale incintei. Calculul a fost făcut pentru doi magneți permanenți la diverse raporturi ale dimensiunilor incintei. Se constată că raportul  $R_2/H_2$  dacă este modificat peste valoarea 1, conduce la o scădere bruscă a forței ce se obține. În reprezentarea forței specifice, pe unitatea de volum a magnetului permanent, se poate observa confirmarea concluziei precedente, fiind pus în evidență și faptul că și forța specifică este mai mare pentru cazul magnetului cu raportul marimilor  $R_1/H_1 = 2,5$ .

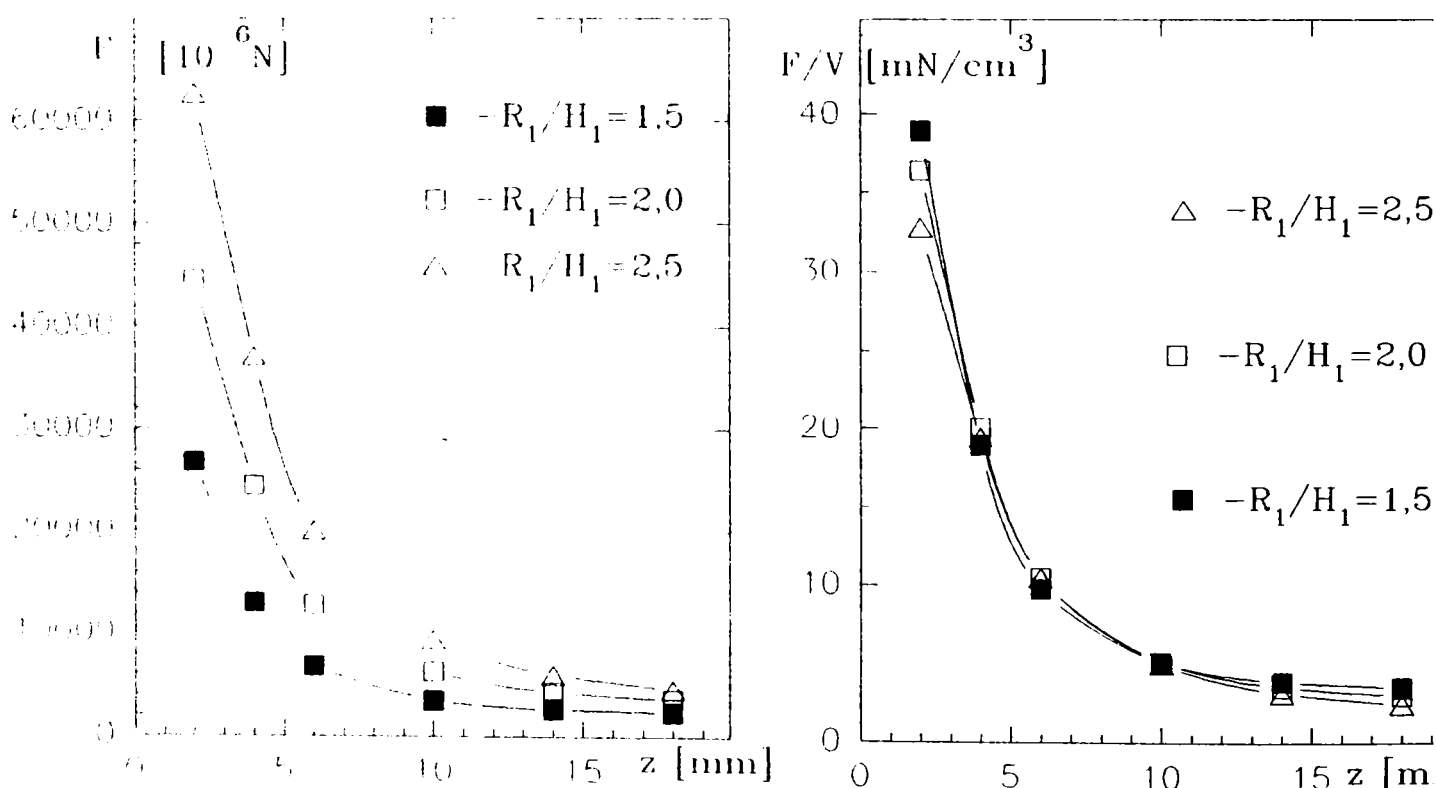


Figura 3.3.9.

Pentru condițiile investigate, se poate aprecia că raportul optim al dimensiunilor magnetului  $R_1/H_1$  se situează în jurul valorii de 2,5 iar raportul dimensiunilor incintei,  $R_2/R_1$ , are un domeniu de optim cuprins între 0,5 și 0,8.

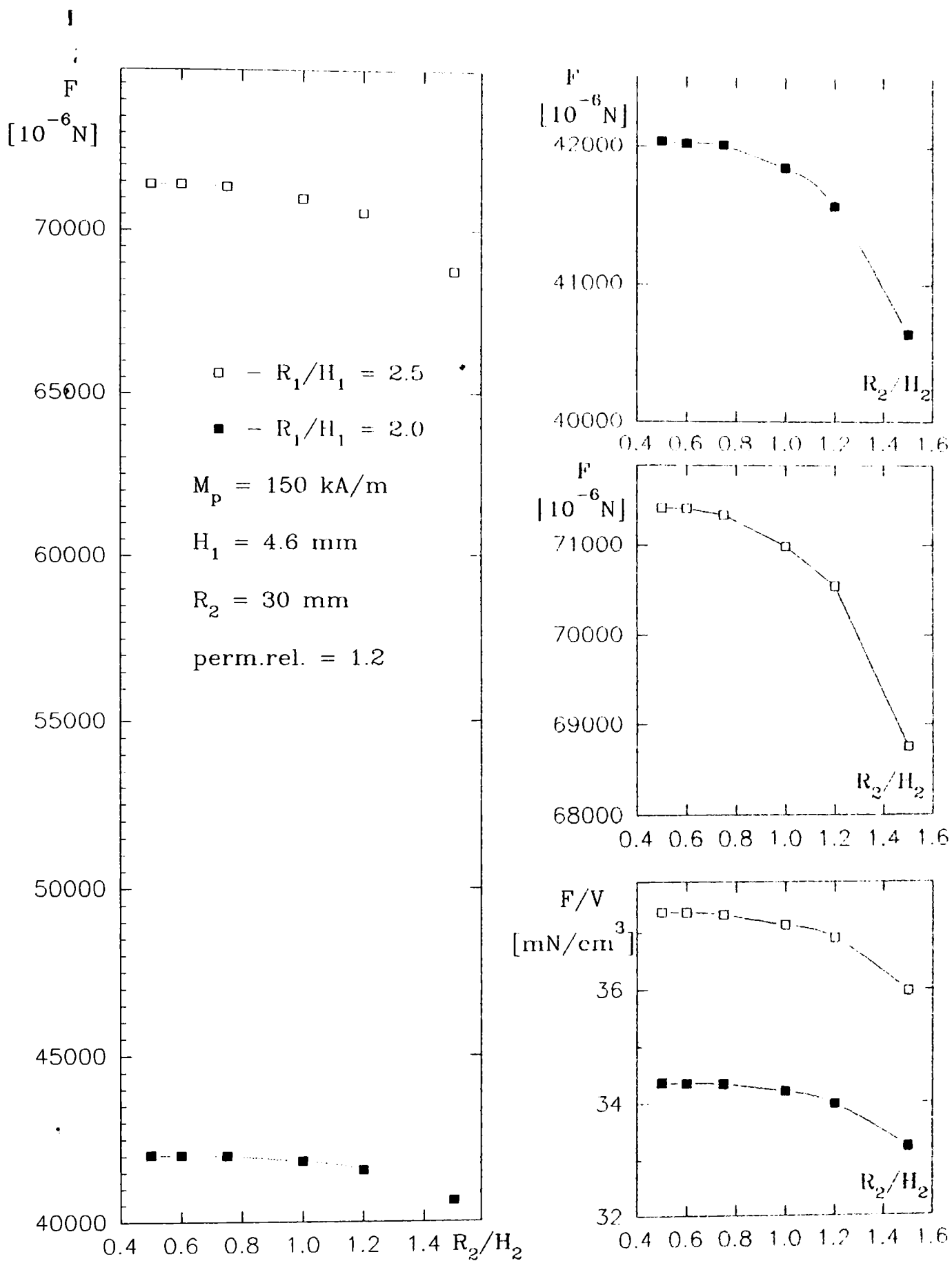


Figura 3.3.10.

### 3.4. Calculul forței de readucere

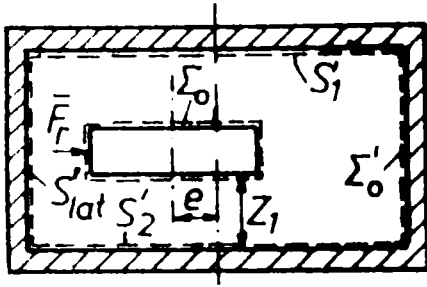


Figura 3.4.1.

Prin plasarea magnetului în poziție centrală pe verticala ( $z_1 = (H_2 - H_1)/2$ ), asupra acestuia nu va acționa o forță de susținere, așa cum s-a arătat anterior. Dar dacă discul magnet permanent este plasat excentric față de axa incintei cilindrice (figura 3.4.1.), asupra magnetului se exercită o forță de readucere, cu tendința de a refăce coaxialitatea ansamblului disc-lichid magnetic cuprins în incinta cilindrică. Forța magnetică de readucere ce acționează asupra magnetului plasat excentric față de axa incintei conținând lichidul magnetic poate fi calculată, dacă se cunosc valorile câmpului magnetic, efectuând integrala pe suprafața de lichid atașată magnetului, cu:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[ \frac{M_n^2}{2} + \int_0^H MdH \right] \cdot \bar{ds} \quad (3.4.1)$$

Dar forța magnetică rezultantă ce acționează asupra sistemului magnet-lichid magnetic-vas este nulă, sistemul fiind în echilibru:

$$\bar{F}_R = \bar{F}_m + \bar{F}_v + \bar{F}' = 0 \quad (3.4.2)$$

$F_v$  este rezultanta forțelor de volum exercitate asupra lichidului,

iar:

$$\bar{F}' = \mu_0 \oint_{\Sigma'_0} \left[ \frac{M_n^2}{2} + \int_0^H MdH \right] \cdot \bar{ds} \quad (3.4.3)$$

este forța exercitată asupra pereților incintei cilindrice.

Pentru ca  $F_v$  este zero, așa cum s-a arătat în [DS2], rezultă că:

$$\bar{F}_m = -\bar{F}' \Rightarrow \bar{F}_m = -\mu_0 \oint_{\Sigma'_0} \left[ \frac{M_n^2}{2} + \int_0^H MdH \right] \cdot \bar{ds} \quad (3.4.4)$$

Deci calculul forței de readucere ce acționează asupra magnetului disc poate fi înlocuit cu calculul forței ce acționează asupra pereților incintei ce conține lichidul magnetic. Rezolvarea problemei presupune determinarea câmpului, prin MEF3D și apoi efectuarea calculelor pentru integralele din expresia (3.4.1) sau (3.4.4).

Integralele pe suprafețele bazelor  $S_1$  și  $S_2$  vor da o rezultantă nulă, din condiții de simetrie, discul fiind deplasat lateral (excentric) din poziția centrală.



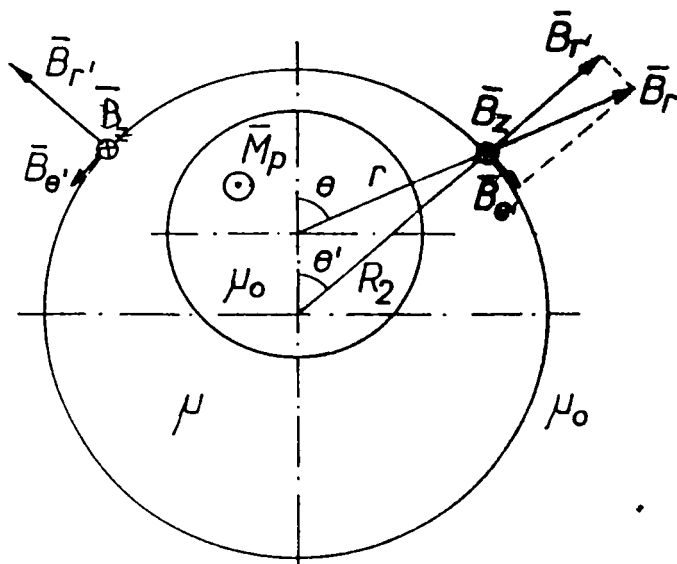


Figura 3.4.2.

cilindrice câmpul este tridimensional:

- Componenta  $\bar{B}_z$  este aceeași cu  $\bar{B}_z$
- Componenta  $\bar{B}_\theta$ , din condiții de simetrie, nu va produce nici un efect în forța ce acționează asupra incintei cilindrice conținând lichid magnetic
- Componenta radială, în referențialul legat de incinta cilindrică, este:

$$\begin{cases} \bar{B}_r = B_r \cdot \cos \alpha \cdot \bar{u}_r' & ; \quad \alpha + \theta' = \theta \\ \bar{B}_r = B_r \cdot \cos(\theta - \theta') \cdot \bar{u}_r' \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Tinând seama de faptul că:

$$\int_0^H M dH = \frac{\mu_r - 1}{2} H^2 = \frac{\mu_r - 1}{2} \left( \frac{B_r^2}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B_z^2}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \mu_r} \right), \text{ iar } M_n = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \cdot B_n, \quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_m &= -\frac{\mu_0}{2} \oint_{\Sigma_0'} \left[ \frac{(\mu_r - 1)^2}{\mu_0 \mu_r} B_r^2 + \frac{(\mu_r - 1)}{\mu_0 \mu_r} (B_r^2 + B_z^2 + B_\theta^2) \right] d\bar{S}' = \\ &= -\frac{\mu_0}{2} \int_{S_{lat}} \left[ \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} B_r^2 \mu_r + \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} B_z^2 \right] d\bar{S}' = \\ &= -\frac{(\mu_r - 1)}{2 \mu_0 \mu_r} \int_{S_{lat}} [B_r^2 \mu_r + B_z^2] d\bar{S}' \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

În relația (3.4.5) s-a ținut seama de faptul că în forța de readucere ce acționează asupra magnetului, contribuția componentei  $\bar{B}_\theta$ , din condiții de simetrie, este nulă.

Integralul va trebui efectuat doar pe suprafața laterală  $S_{lat}$ , parte a suprafeței  $\Sigma_0$ .

Într-un punct al suprafeței  $S_{lat}$  există trei componente ale câmpului față de referențialul legat de axa incintei cilindrice cu lichid magnetic, așa cum se vede în figura 3.4.2.

Față de suprafața laterală a incintei

Lucrând în 2D nu există posibilitatea de a determina valorile câmpului pe suprafața laterală a magnetului atunci când acesta este plasat excentric față de axa incintei cilindrice, care conține și lichidul magnetic.

Dacă se calculează forța de readucere prin intermediul forței ce se exercită asupra incintei, acest lucru poate fi realizat prin determinarea aproximativă a distribuției câmpului pe o suprafață laterală cilindrică plasată excentric față de axa magnetului disc.

Intr-o primă aproximație se poate obține o soluție pentru câmp pornind de la situația plasării magnetului în lichid magnetic de extensie foarte mare. Datorită valorii foarte apropiate de 1 a permeabilității magnetice (1,1 - 1,2) soluția de câmp va diferi puțin de soluția din situația concretă existentă (lichid de extensie finită și plasare excentrică a discului magnetic, sursa de câmp).

Se pot obține astfel valorile câmpului, tabelar, pe suprafața laterală a lichidului magnetic.

Pentru diferite distanțe " $r_k$ " față de axa discului magnet plasat complet în lichid magnetic (figura 3.4.3b) se determină valorile câmpului magnetic. Aceste valori corespund, cu aproximarea acceptată anterior, valorilor câmpului pe suprafața laterală a incintei, din situația reală, când în lichidul magnetic conținut de incintă este plasat excentric magnetul disc (figura 3.4.3a).

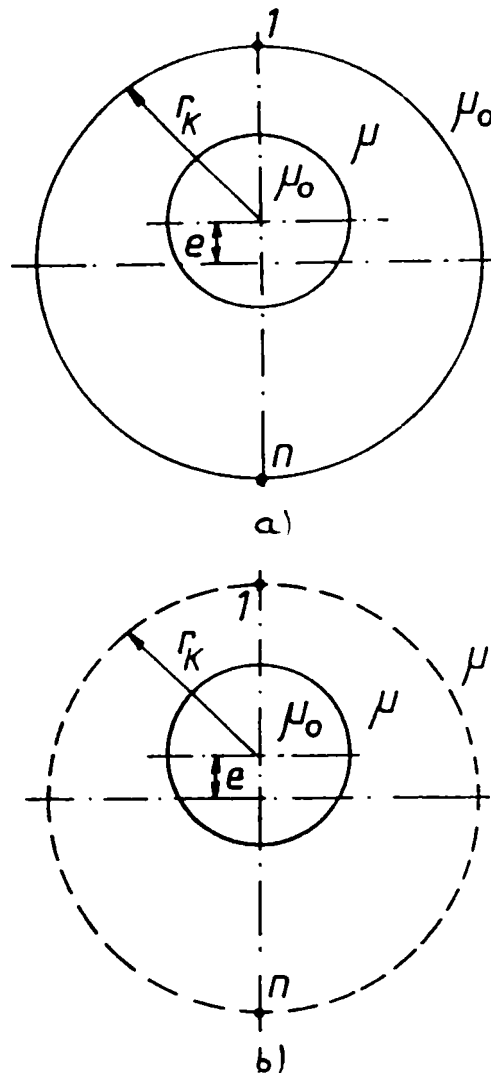


Figura 3.4.3

Tinând cont ca:

$$\vec{F} = \mu_0 \int_{\Sigma_0} \left[ \frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] \vec{ds} \quad (3.4.6)$$

în care  $\Sigma_0$  este suprafața ce separă lichidul de incintă (suprafața dinspre vas) și  $\vec{ds}$  este normala la aceasta, pentru calculul forței se utilizează componentele vectorilor de câmp obținute prin procedeul (aproximativ) descris anterior.

Pentru determinarea forței de readucere, a cărei orientare este în direcția

excentricității, se efectuează integrala doar pe suprafața laterală a suprafeței cilindrice a lichidului conținut de incintă. În aceste condiții calculul forței ce se exercită asupra incintei este dat de relația (3.4.7) cu valorile câmpului determinate conform precizărilor anterioare.

$$\bar{F} = \frac{\mu_r^{-1}}{2\mu_0\mu_r^2} \int_{S'_{lat}} (B_r^2 \cdot \mu_r + B_z^2) d\bar{s}' = \frac{\mu_r^{-1}}{2\mu_0\mu_r^2} \int_{S'_{lat}} [B_r^2 \cdot \mu_r \cdot \cos^2(\theta - \theta') + B_z^2] d\bar{s}' \quad (3.4.7)$$

în care: 
$$d\bar{s}' = R_2 d\theta' dz \cdot \bar{u}_r' \quad (3.4.8)$$

deci: 
$$\bar{F} = \frac{\mu_r^{-1}}{2\mu_0\mu_r^2} R_2 \cdot 2 \int_0^{\pi} \int_{z_a}^{z_b} [B_r^2 \cdot \mu_r \cdot \cos^2(\theta - \theta') + B_z^2] dz \cdot d\theta' \cdot \bar{u}_r' \quad (3.4.9)$$

Rezultatul integrării este forța de readucere și, în condițiile problemei, orientată numai pe direcția excentricității. Notând cu  $\bar{F}_r = F_r \cdot \bar{u}_\theta$  forța de readucere,

se poate scrie: 
$$F_r = \bar{F}_m \cdot \bar{u}_\theta \quad (3.4.10)$$

iar cum: 
$$d\bar{s}' \cdot \bar{u}_\theta = R_2 d\theta' dz \cdot \cos\theta' \quad (3.4.11)$$

rezultă acum: 
$$F_r = - \frac{\mu_r^{-1}}{2\mu_0\mu_r^2} \int_{S'_{lat}} [B_r^2 \mu_r + B_z^2] ds' \cdot \cos\theta' \quad (3.4.12)$$

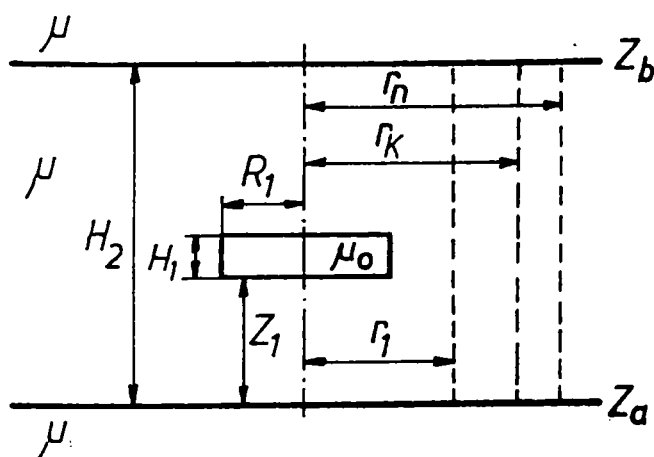


Figura 3.4.4.

Calculul integralei din relația (3.4.12) s-a făcut pe cale numerică, discretizând semicercul de rază  $R_2$  în "n" intervale, de unghi la centru  $\theta'$ . Fiecărui punct de pe cercul de rază  $R_2$  îi corespunde o anumită distanță (rază)  $r_k$  pâna la axa magnetului disc. Valorile componentelor câmpului magnetic, corespunzătoare acestor puncte se obțin tabelar, în urma rezolvării

prin MEF a problemei de câmp. Valorile obținute pentru cele "n" puncte de rază  $r_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) din fiecare din cele "m" secțiuni plane (echidistante) între  $z_a$  și  $z_b$ , stau la baza calculului numeric efectuat pe suprafața  $S'_{lat}$ , pentru determinarea

forței. Calculul numeric al integralei din expresia (3.4.12) poate fi făcut în mai multe moduri.

Așa cum rezultă din relația (3.4.9) integrala pentru determinarea forței se poate efectua, fie întâi după  $\theta'$  și apoi după  $z$ , fie întâi după  $z$  (pentru un anumit  $r_k$ ) și apoi după  $\theta'$ .

Dacă se notează cu  $B_{rc}^2$ , valoarea "corectată" a componentei radiale, la patrat,

$$B_{rc}^2 = \mu_r B_r^2 \cos^2(\theta - \theta') \quad (3.4.13)$$

această valoare se calculează pentru toate punctele determinate prin  $k$ , ( $1 \leq k \leq n$ ) și pentru un anumit  $z_\lambda$ , cu  $z_a \leq z_\lambda \leq z_b$ .

Rezultă pentru forța de readucere:

$$F_r = - \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} R_2 \int_{z_a}^{z_b} dz \cdot \int_0^\pi [B_{rc}^2(\theta', z) + B_z^2(\theta', z)] \cos \theta' d\theta \quad (3.4.14)$$

și apoi, în continuare, efectuând întâi integrala după  $\theta'$ :

$$\begin{aligned} I_\lambda(\theta') &= \int_0^\pi [B_{rc}^2(\theta', z) + B_z^2(\theta', z)] \cdot \cos \theta' d\theta = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{B_{rc}^2(k, \lambda) + B_z^2(k, \lambda)}{2} \cos \theta'_k + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_{rc}^2(k+1, \lambda) + B_z^2(k+1, \lambda)}{2} \cos \theta'_{k+1} (\theta'_{k+1} - \theta'_k) \right] \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Dacă se lucrează cu  $n-1$  intervale egale, determinate de cele  $n$  puncte:

$$\theta'_{k+1} - \theta'_k = \frac{\pi}{n-1} \quad (3.4.16)$$

$$I_\lambda(\theta') = \frac{\pi}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{B_{rc}^2(k, \lambda) + B_z^2(k, \lambda)}{2} \cos \theta'_k + \frac{B_{rc}^2(k+1, \lambda) + B_z^2(k+1, \lambda)}{2} \cos \theta'_{k+1} \right] \quad (3.4.17)$$

Pentru forța va rezulta acum:

$$F_r = - \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} R_2 \sum_{\lambda=1}^{m-1} \frac{I_\lambda(\theta') + I_{\lambda+1}(\theta')}{2} \Delta z_\lambda \quad (3.4.18)$$

iar dacă și pe  $z$  se lucrează cu " $m-1$ " intervale egale:

$$F_r = - \frac{\mu_r - 1}{2 \mu_0 \mu_r} \frac{z_b - z_a}{m-1} R_2 \sum_{\lambda=1}^{m-1} [I_\lambda(\theta') + I_{\lambda+1}(\theta')] \quad (3.4.19)$$

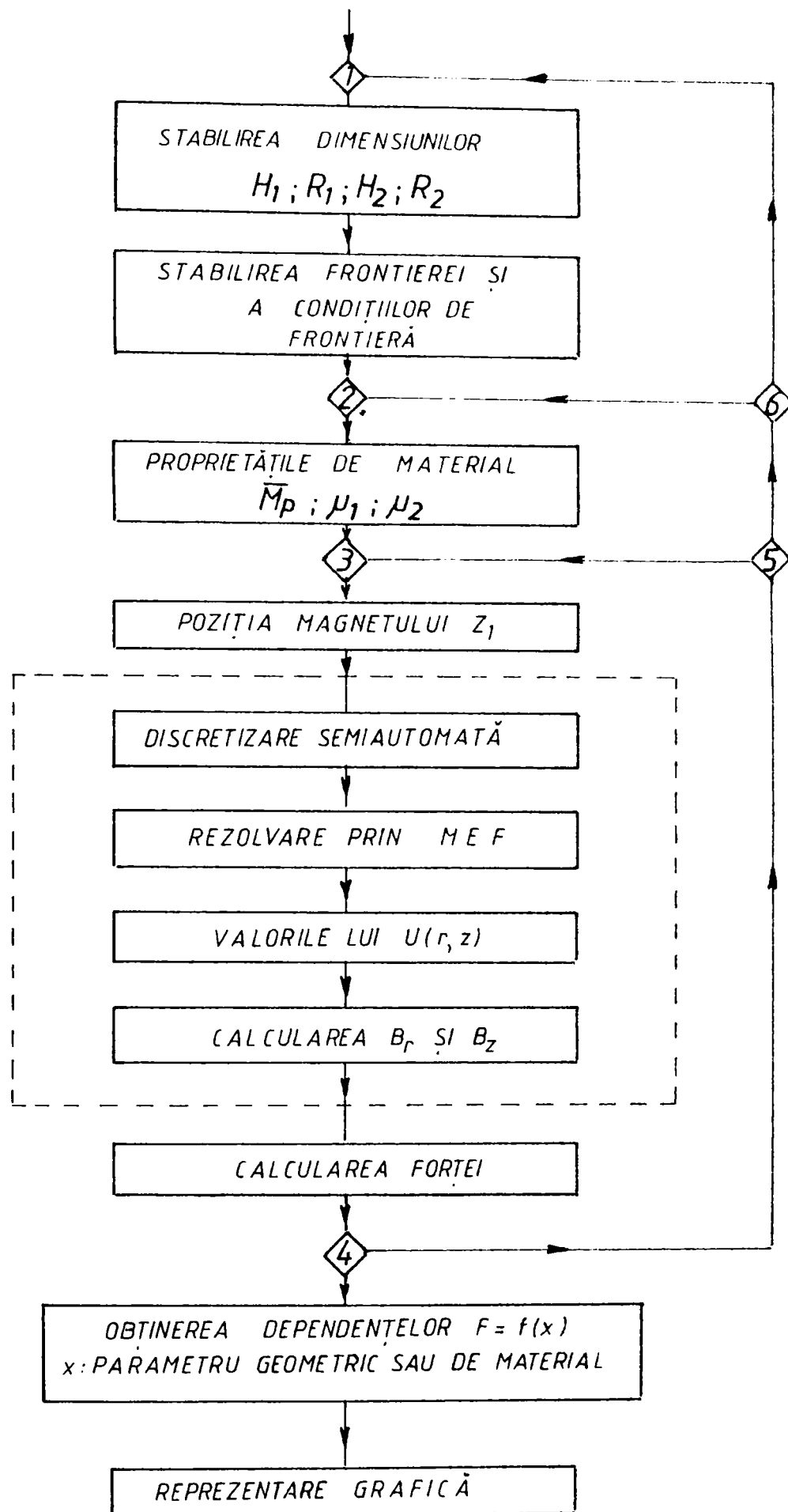


Figura 3.4.5.

Ordinograma din figura 3.4.5. arata modul de efectuare al calculelor. In punctul de bifurcare marcat cu 3 în ordinogramă, se găsesc două căi alternative pentru determinarea câmpului magnetic.

Fața de situația când se consideră ca extensia pe verticală a lichidului este foarte mare (ramura din stânga), o altă aproximare pentru a determina valorile câmpului pe peretele incintei cilindrice conținând lichidul magnetic este cea în care se determină câmpul pentru cazul plasării magnetului în lichid magnetic de extensie radială foarte mare ( $R_2 \rightarrow \infty$ ),

dar de extensie verticală finită,  $H_2$ , situație prezentată în figura 3.4.6.

Modalitatea de preluare a valorilor din spectrul de câmp determinat prin MEF2D rămâne aceeași, la fel și calculul integralelor pe suprafețele laterale ale incintei, așa cum se poate observa și din ordinograma de calcul prezentată în figura 3.4.5.

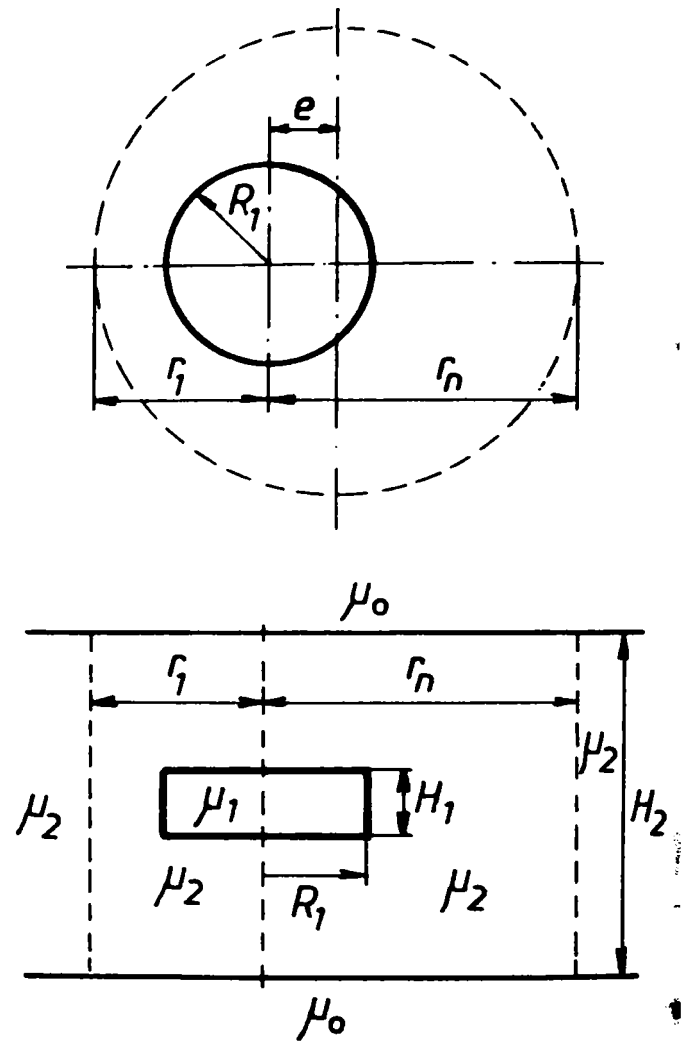


Figura 3.4.6.

Raza incintei cilindrice ce conține lichidul magnetic este luată în calcul cu aceeași valoare din cazul prezentat anterior, și anume când s-a considerat, pentru modelare, că discul magnet permanent este imersat într-un spațiu complet ocupat de lichid magnetic, de extensie foarte mare în toate direcțiile.

Valoarea reală a razei incintei, fizic existentă, și de dimensiuni finite, ce conține lichidul magnetic este dată de oricare din relațiile:

$$r_1 + e - r_n - e = \frac{r_1 + r_n}{2} \quad (3.4.20)$$

Am lucrat cu mai multe valori ale excentricității  $e$ , pentru ambele modalități de modelare numerică, rezultatele obținute pentru forța de readucere fiind prezentate în cele ce urmează.

### 3.4.1. Rezultate obținute și interpretarea lor

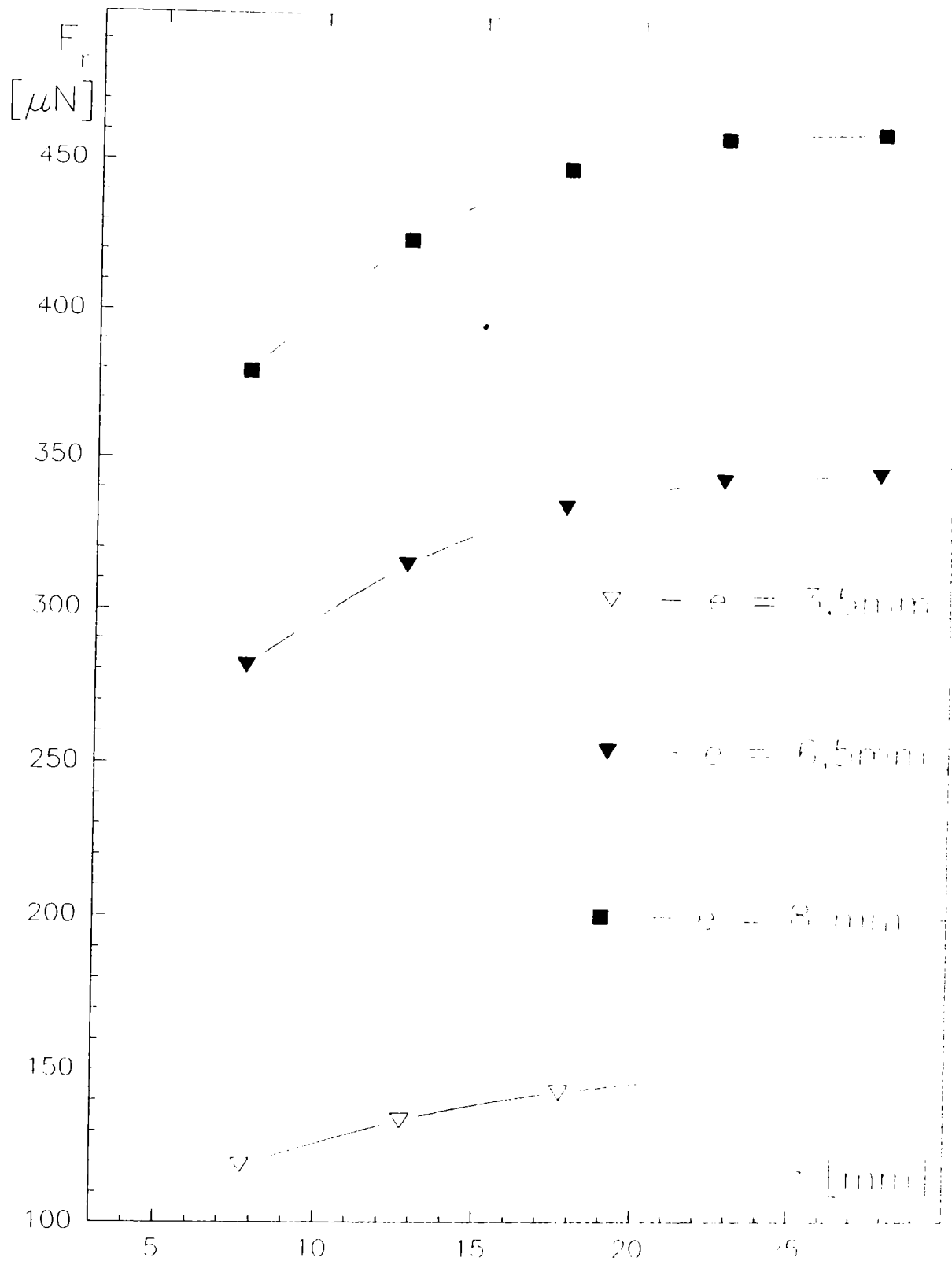


Figura 3.4.7.

În figurile 3.4.7 și 3.4.8 sunt reprezentate rezultate obținute prin modelarea problemei de câmp considerând extensia lichidului magnetic (pentru calculul componentelor câmpului magnetic) ca fiind infinită (foarte mare, relativ la dimensiunile sistemului).

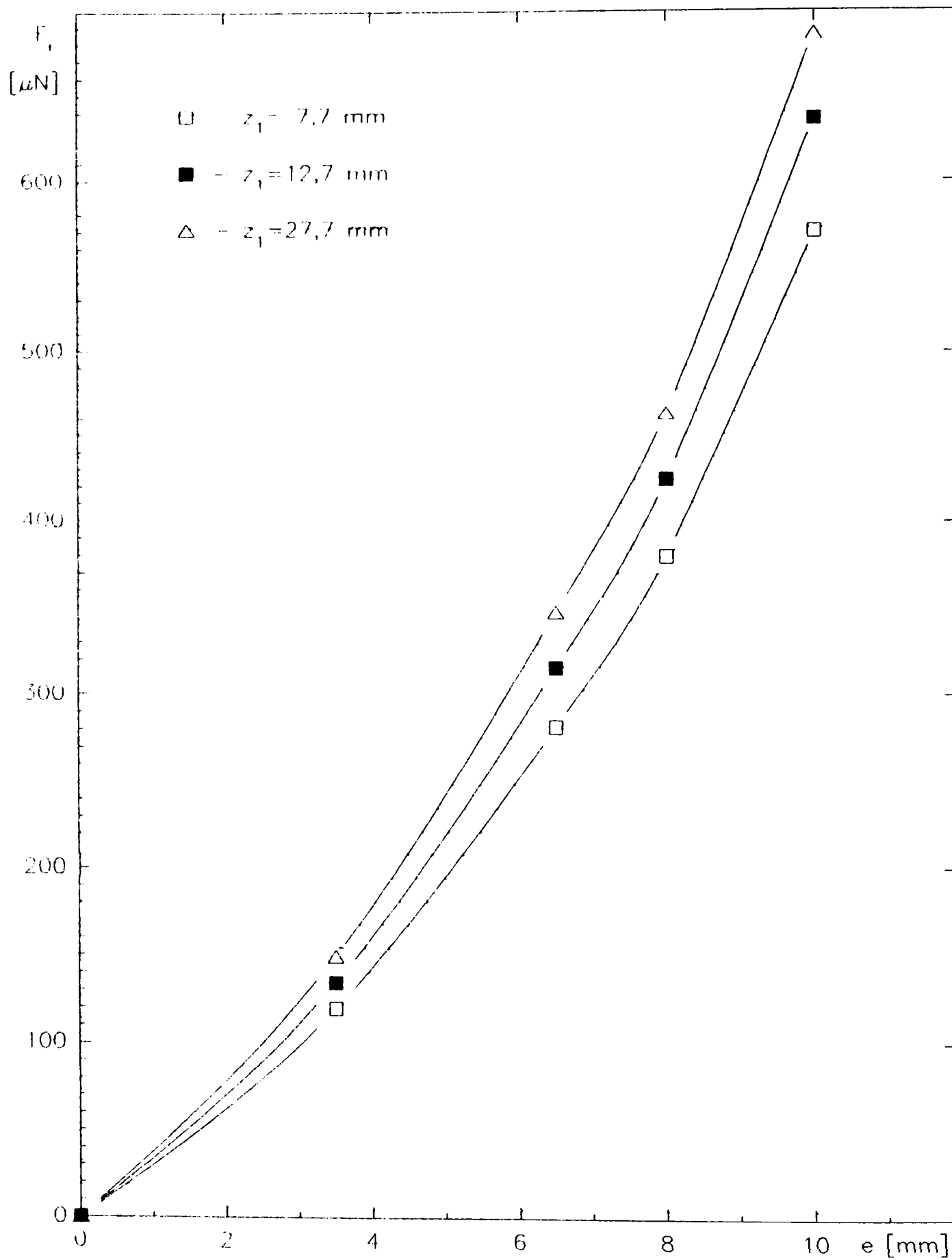


Figura 3.4.8.



În continuare sunt prezentate rezultate comparative pentru cele două tipuri de modelare abordate. Figurile 3.4.9 și 3.4.10 prezintă această comparație pentru o poziție coborâtă, apropiată de baza incintei conținând lichid magnetic, și respectiv, pentru cazul plasării centrale, pe verticală, a magnetului disc. Condițiile geometrice și proprietățile de material, atât pentru magnetul permanent, cât și pentru lichidul magnetic sunt precizate pe graficele respective.

Figurile 3.4.11a și 3.4.11b sunt realizate în valori raportate. Pentru fiecare din cele două cazuri de modelare s-a luat în calcul, ca referință, valoarea forței de readucere corespunzătoare excentricității minime ( $e = 3,5 \text{ mm}$ ).

Figura 3.4.12. prezintă în detaliu diferențele ce apar la calculul forței de readucere prin utilizarea celor două metode de modelare pentru determinarea câmpului magnetic. Prin faptul că ține seama că extensia pe verticală a lichidului magnetic este finită, de dimensiune  $H_2$ , această metoda de modelare poate fi creditată cu un grad de încredere superior. Lucrând cu MEF2D, rămâne aproximarea privind extensia presupusă foarte mare a lichidului magnetic pe direcție radială. În calculul forței ponderea cea mai importantă o are componenta pe direcție radială și, în mod esențial, diferența ce există între valorile acestor componente din zona de apropiere la distanța minimă ( $r_1$ ) și valorile acestor componente din zona distanței maxime ( $r_n$ ) între suprafața laterală a magnetului plasat excentric și suprafața laterală a incintei ce conține lichidul magnetic. Cum componentele radiale ale câmpului magnetic, atât pentru  $r_1$  cât și pentru  $r_n$ , sunt orientate după direcția excentricității ele vor fi normale, în punctele situate pe generatoarele respective ale incintei cilindrice ce conține lichidul magnetic, pe suprafața incintei. Ținând cont de faptul că permeabilitatea magnetică relativă a lichidului magnetic este foarte apropiată de unu ( $1,1 - 1,2$ ) se poate aprecia că spectrul câmpului magnetic din situația reală este foarte puțin diferit față de situația modelată.

În consecință, fiind limitat prin posibilitățile de calcul la o metodă de element finit bidimensională, se poate aprecia că această modalitate de aproximare este rezonabil de apropiată de situația reală.

Modalitatea de calcul privind determinarea forței de readucere ce acționează asupra magnetului permanent plasat excentric în incinta cilindrică ce conține lichidul magnetic rămâne valabilă și în cazul când pentru determinarea componentelor câmpului magnetic se folosește o MEF tridimensională.

Din rezultatele obținute se pot reține concluziile:

- pentru excentricități reduse ( $e/R_1 < 1$ ), rezultatele obținute prin cele două metode, practic, coincid;
- forța de readucere crește cu excentricitatea și pentru o aceeași excentricitate este maximă la plasarea centrală a magnetului, pe verticala coloanei de lichid magnetic.

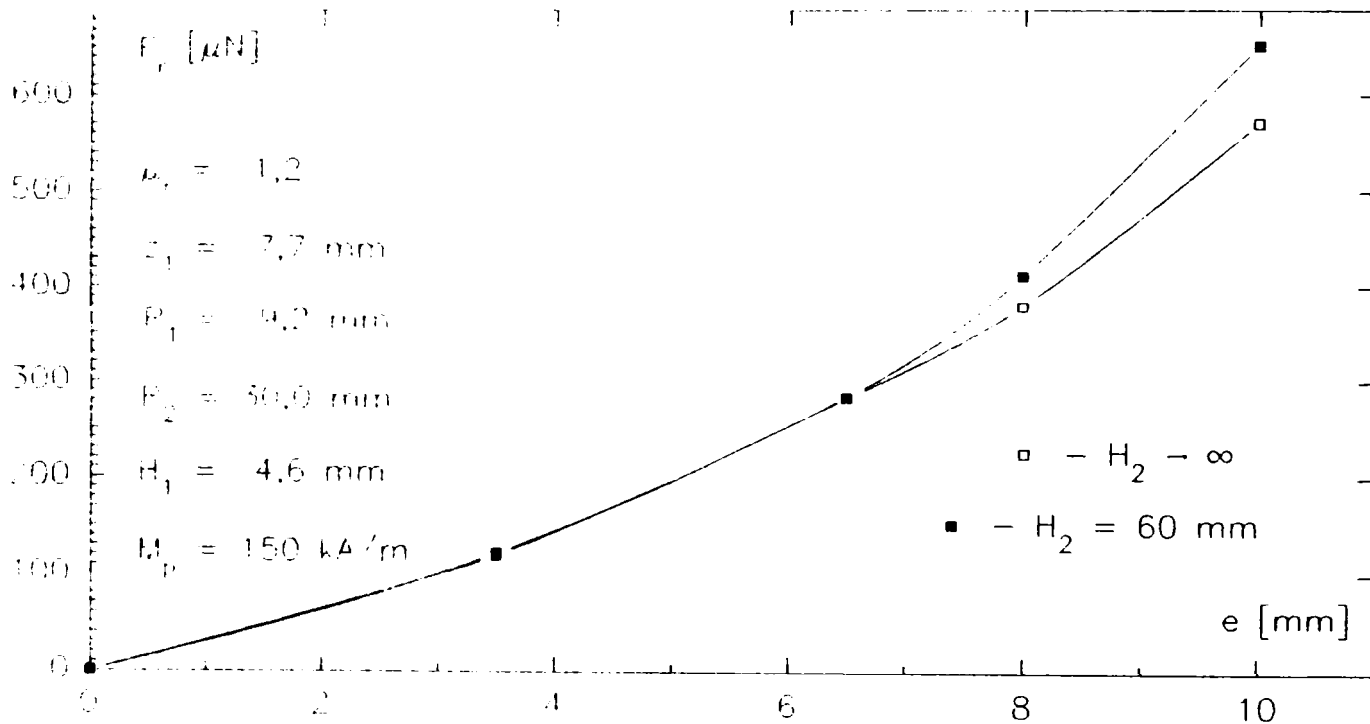


Figura 3.4.9.

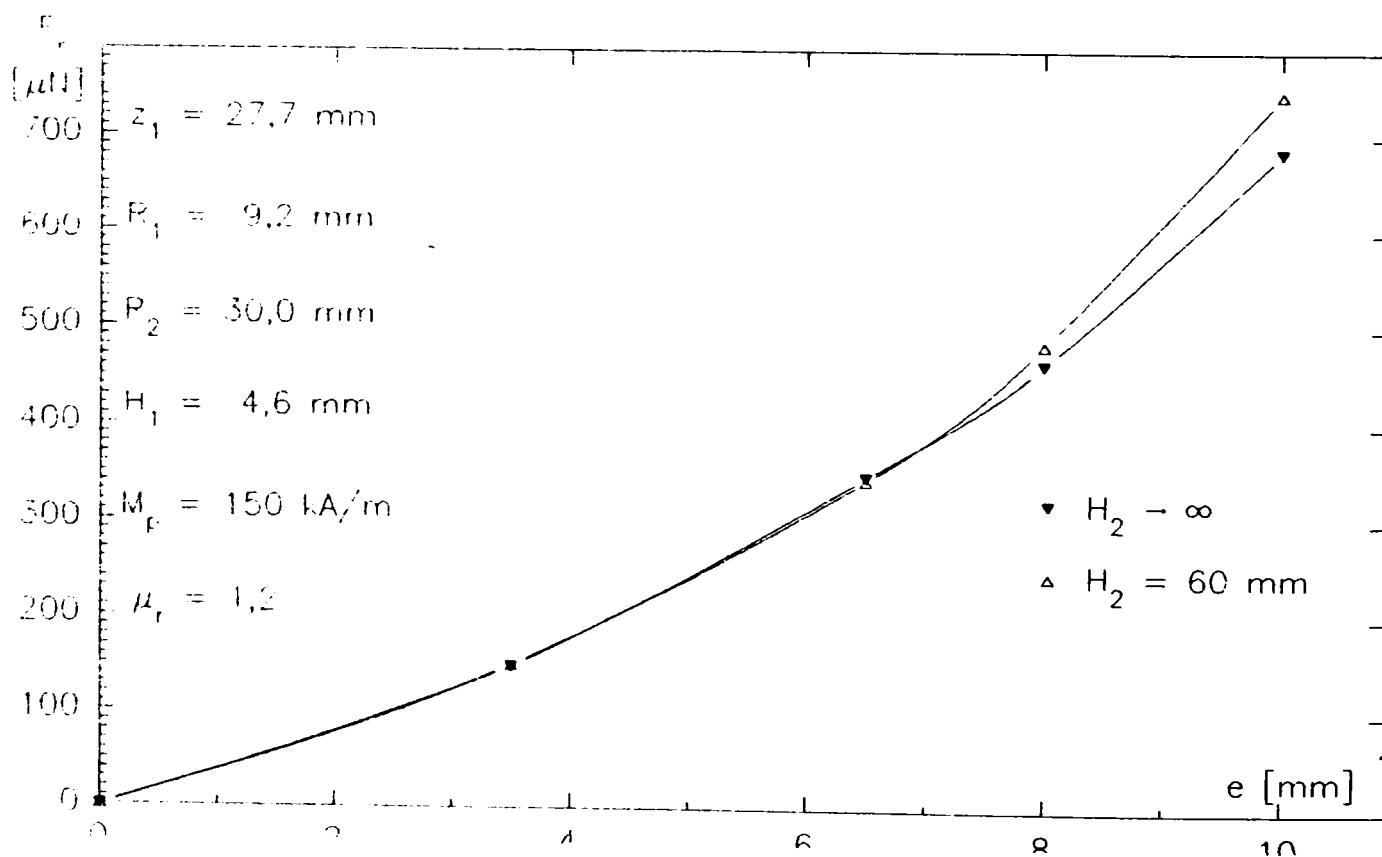
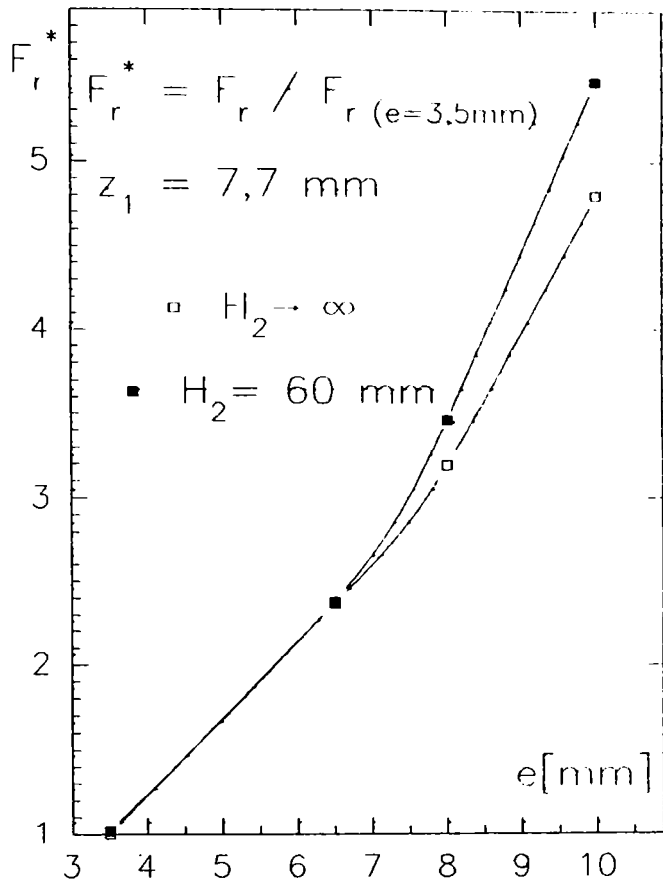
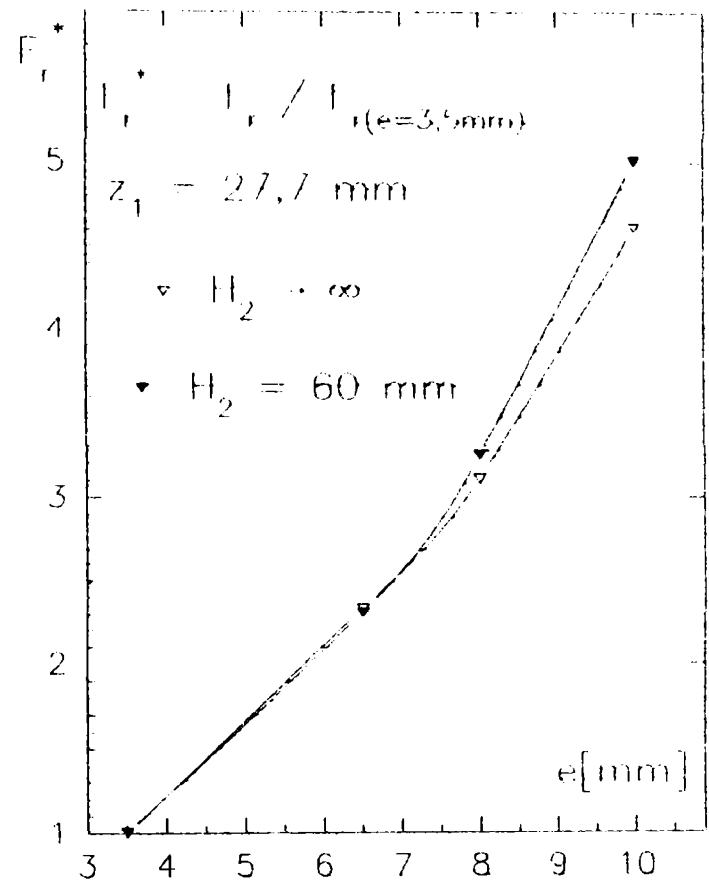


Figura 3.4.10.



a)



b)

Figura 3.4.11.

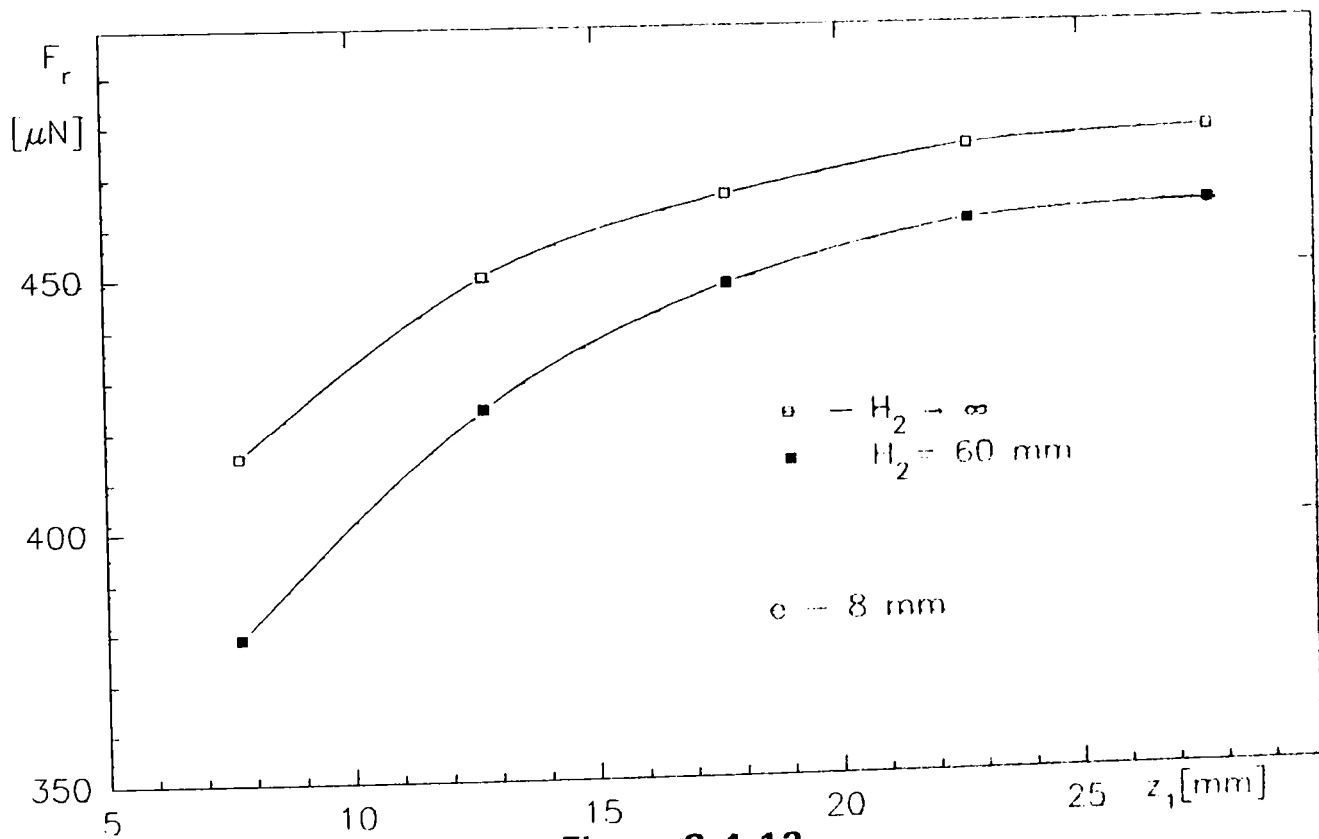


Figura 3.4.12.

## CAP.4 CALCULUL LAGARELOR MAGNETICE CU POLI ALTERNANTI

### 4.1. Etanșări și lagare magnetice

Etanșările magnetice, simple și multiple, au fost și sunt utilizate ca etanșări ferme, totale, pentru a proteja o incintă de un mediu ostil, sau de a izola complet două medii incompatibile. Avantajul acestor etanșări este că ele sunt perfect funcționale și în cazul în care sunt dispuse în jurul unui ax (arbore mecanic) în mișcare de rotație, chiar dacă turația acestuia este superioară a 3000 rot/min. Ca prim domeniu în care s-au impus cu pregnanță, atât ca și număr de produse, cât și prin calitatea superioară față de etanșările clasice, este cel legat de industria computerelor, izolând perfect zona discurilor de memorie de mediul înconjurător.

Ca mod tipic, principal de prezentare a unei etanșări magnetice, aceasta conține un magnet permanent de formă toroidală adaptat să cuprindă, coaxial, axul în mișcare de rotație, magnet care este cuprins între două piese polare, identice, care oferă calea de închidere a circuitului magnetic. Aceste piese polare, în formă de discuri, conțin în centrul lor un orificiu circular a cărui diametru excede cu puțin diametrul axului în jurul căruia este plasată etanșarea, realizând un interstițiu circular.

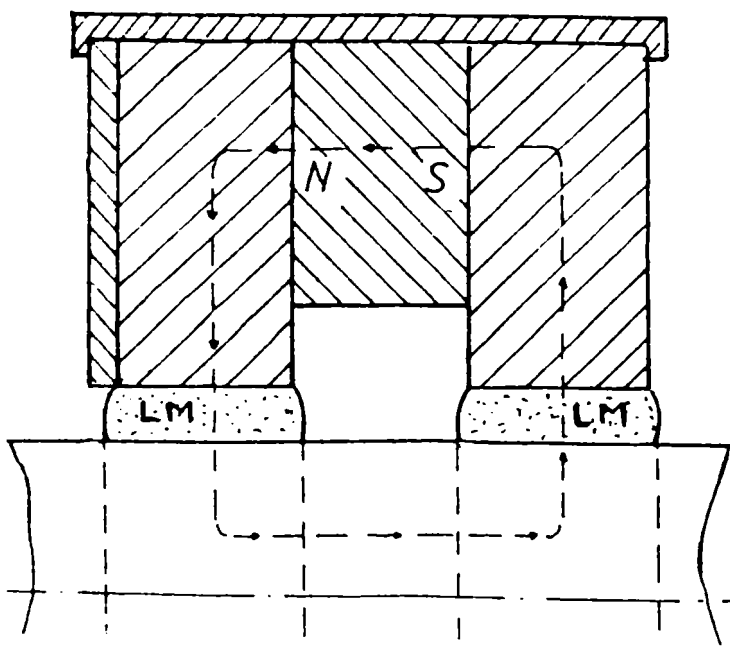


Figura 4.1.1.

complet mediile situate axial de o parte și de cealaltă a inelului de lichid magnetic.

Figura 4.1.1. prezintă o schiță a unei asemenea etanșări.

Acest interstițiu mic (de până la zecimi de mm în cazul considerat) face să nu existe contact mecanic între piesele polare și ax, dar este parte integrantă în circuitul magnetic. Un lichid magnetic este plasat și menținut pe cale magnetică în aceste întrefieruri de sub tălpile polare, realizând un volum inelar (toroidal) de lichid magnetic care ocupă complet întrefierul de sub fiecare talpa polară, izolând astfel

Indeplinirea funcției pentru care este destinată etanșarea se realizează prin plasarea unei cantități optime, bine determinată de lichid magnetic în întrefier. În mod uzual lichidele magnetice utilizate pentru acest gen de aplicații sunt caracterizate de o scăzută valoare a presiunii de vapori, fiind realizate pe baza unor diesteri lichizi, a fluorurii de carbon, a polifenileterului sau a altor substanțe, toate caracterizate de o tendință foarte redusă de evaporare. Aceasta în scopul reducerii la minim a pierderilor masice din lichidul magnetic ce realizează inelul lichid de etanșare, ceea ce permite o lungă durată de utilizare a etanșării cu menținerea proprietăților inițiale.

Spre exemplu, în condiții de temperatură moderată, la viteze de rotație de cca. 3600 rot/min și la un diametru al axului de 1,8 inch (4,5 cm), durata de viață a etanșării va fi de mai mulți ani [Rj1].

Este de dorit să se extindă durata de funcționare operațională a etanșării atât la condiții de temperatură mai dificile ( spre ex. peste 50 °C), cât și la turații cât mai mari, sau la combinarea acestor două tipuri de solicitări.

În figurile 4.1.2. și 4.1.3. sunt prezentate alte variante constructive ale etanșării prezentate în figura 4.1.1.

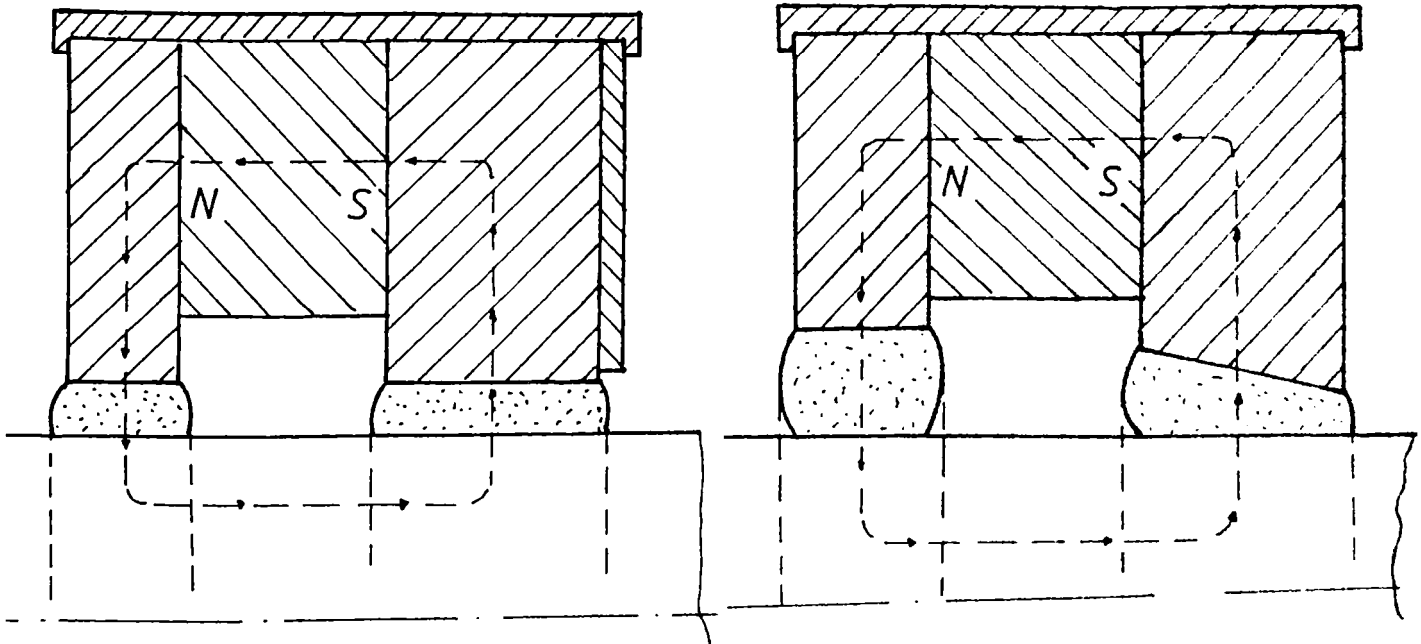


Figura 4.1.2.

Figura 4.1.3.

Etanșarea magnetică prezentată în figura 4.1.2. este caracterizată de grosimi diferite ale celor două piese polare, element esențial care o diferențiază de cea din figura 4.1.1.

În proiectarea unei etanșări magnetice sunt două considerente de bază:

- unul privind dimensionarea magnetică, ce are drept urmare stabilirea unei anumite diferențe de presiune între cele două zone izolate prin etanșare

- cel de-al doilea are în vedere dezvoltarea de căldură în etanșare, care are în final rolul de a determina durata de viață a etanșării

În mod uzual, la etanșările de tipul prezentat se poate realiza o diferență de presiune 30 până la 60 inch col. apă (75 cm - 150 cm), în mod aproximativ egal repartizată sub cele două piese polare. Cerințele efective pentru domeniul computerelor sunt de numai 5 inch col. apă, ceea ce arată că există o largă marjă de siguranță din punct de vedere al presiunii la care este supusă etanșarea. În mod practic și un singur inel de etanșare este suficient să rețină diferența de presiune cerută.

Atât pentru siguranța, cât și pentru completarea circuitului magnetic, se prevăd două inele de lichid magnetic.

Producerea căldurii în lichidul magnetic este datorată frecării vâscoase între acesta și axul în mișcare de rotație, pe de o parte, și porțiunea interioară a pieselor polare. O parte a acestei călduri este condusă prin piesele polare și arbore.

Deci, temperatura în timpul funcționării unei etanșări, este dependentă și de capacitatea de conducție a căldurii și de rata de evaporare a lichidului magnetic, ceea ce determină, în final, durata de viață a etanșării. Temperatura inelelor magnetice este mai mare dacă sunt plasate două asemenea inele, câte unul sub fiecare talpă polară, decât dacă este plasat un singur inel, sub cealaltă talpă polară rămânând întrefierul neocupat. Aceasta se întâmplă pentru că fiecare inel de lichid magnetic se constituie ca o sursă separată de căldură.

Cu toate acestea, existența a două inele de etanșare mărește durata de viață operațională a etanșării (deși sursa de căldură este marită). Acest lucru se petrece pentru că în urma evaporării lichidului magnetic de sub o talpă polară, restul de lichid magnetic se strânge sub cealaltă talpă polară. În acest scop, soluția constructivă cu lățimi inegale ale tălpilor polare se dovedește benefică.

Față de o etanșare cu piese polare identice, de lățime cuprinsă între 0,7 și 1,2 mm, este preferabil să se utilizeze tălpi polare inegale.

Din punct de vedere a duratei de funcționare, dimensiunea optimă (lățimea) a unei tălpi polare s-a dovedit a fi cuprinsă între 1,3 și 2 mm, cea ce conduce la o creștere cu 90% a duratei de operare a etanșării.

În consecință, inelul de lichid magnetic de sub talpa polară mai îngustă se consumă mai rapid (mai repede chiar decât în situația când ar fi fost singur), dar inelul rămas sub talpa polară mai lată va acționa în continuare singur, asigurând etanșarea în mod corespunzător.

Testarea comparativă a celor două tipuri de etanșări a condus la următoarele rezultate:

- poli egali, de câte 0,8 mm, - 180 de ore de funcționare continuă.
- poli inegali (0,65 și, respectiv, 1,4 mm) - 155 de ore de funcționare pentru inelul " subțire " și, etanșarea continuând să fie funcțională, - 265 ore de funcționare continuă pentru inelul de lichid magnetic de grosime mai mare.

Lichidul magnetic utilizat a avut la bază o hidrocarbură lichidă, prezentând la saturație o inducție magnetică de 200 gauss ( 20 mT ). Întrefierul, cu aceeași dimensiune radială sub ambele talpi polare, a avut 0,15 mm.

Varianta prezentată în figura 4.1.3. este o îmbunătățire a variantei cu talpi polare inegale, forma tronconică a inelului de lichid magnetic mai gros conducând la creșterea suplimentară a duratei de funcționare a etanșării, în ansamblul său.

Plasarea unor piese nemagnetice ( aluminiu sau oțel inoxidabil), la exteriorul circuitului magnetic are rol nu numai de asamblare și rigidizare, ci, aceste piese au și rolul de a facilita eliminarea căldurii produse în etanșare.

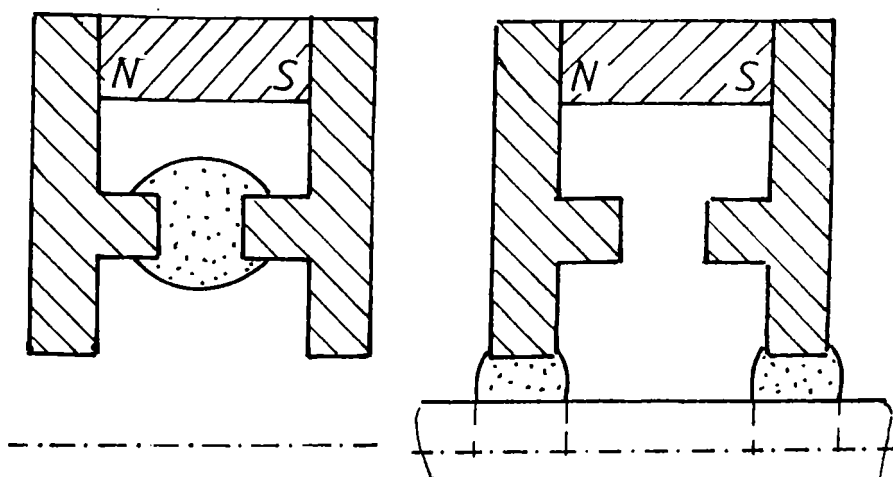


Figura 4.1.4 a și b

Figurile 4.1.4.a și 4.1.4.b arată soluția principală de autoactivare a etanșărilor cu lichid magnetic, la introducerea (cazul b) arborelui feromagnetic, coaxial cu etanșarea.

Dispozitivele de etanșare cu posibilitate de autoactivare, conțin un întrefier între proeminențele pieselor polare și în acest întrefier se află orificiul de comunicare cu un rezervor tubular ce conține exact cantitatea necesară de lichid magnetic pentru realizarea etanșării magnetice.

Întrefierul realizat de proximitatea proeminențelor pieselor polare reține

întreaga cantitate de lichid magnetic, până la introducerea arborelui feromagnetic. La introducerea arborelui feromagnetic, ce înlocuiește o piesă nemagnetică de etanșare statică, are loc modificarea spectrului câmpului magnetic, întrefierul radial realizat sub tălpile polare fiind sensibil mai mic decât cel dintre proeminențele pieselor polare. Concentrarea câmpului magnetic în întrefierurile radiale are drept urmare umplerea acestora cu lichidul magnetic ce este eliberat dintre piesele polare.

Dimensionarea circuitului magnetic trebuie astfel condusă încât fluxul de dispersie facilitat de proeminențele pieselor polare să fie complet neglijabil față de fluxul magnetic principal, care se închide prin întrefierurile radiale, umplute cu lichid magnetic. Dar, în egală măsură, fluxul magnetic stabilit inițial între piesele polare (proeminențele acestora) trebuie să fie suficient pentru a reține în totalitate lichidul magnetic eliberat din rezervor, înaintea introducerii arborelui feromagnetic.

Raportul între distanța minimă dintre piesele polare și întrefierul radial ce se realizează între tălpile polare și axul feromagnetic este recomandat a fi cuprins între 1,5 (minim) și 5. Această limită largă ține seama de geometria circuitului magnetic.

Tinând seama de faptul că tehnologiile actuale de producere a circuitelor magnetice permit, fie sinterizarea din pulberi, fie chiar injectarea în forme (matrițe) de orice geometrie, și deci este posibilă realizarea circuitelor magnetice cu magnet permanent înglobat, în formele cele mai variate, se prezintă și variantele constructive din figurile 4.1.5. și 4.1.6.

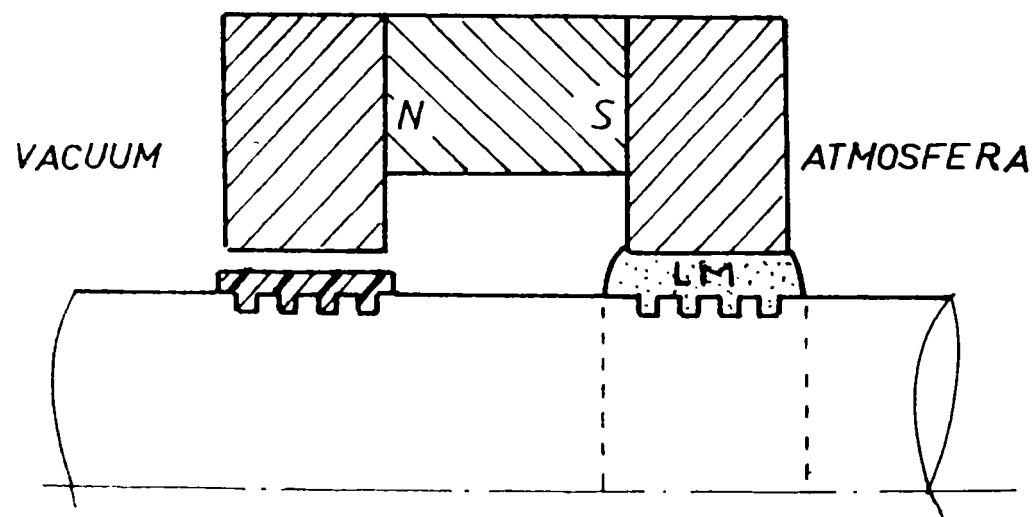


Figura 4.1.5.

Dacă un arbore (ax) în mișcare de rotație cu turație ridicată trebuie să facă legătura mecanică între două medii cu diferență mare de presiune între ele, una din soluțiile posibile este cea prezentată în figura 4.1.5.



Sub talpa polara dinspre zona de presiune scazuta (vacuum) se realizeaza un interstițiu radial de aer foarte mic (sub 50 microni) prin plasarea unei rășini epoxidice. Acest interstițiu poate fi creat și fara plasarea rășinii epoxidice, dar este preferabila din punct de vedere mecanic, realizarea interstițiului cu rășina epoxidica, deși din punct de vedere magnetic întrefierul este marit astfel. Lichidul magnetic se plasează numai sub talpa polara dinspre zona de presiune ridicata și el va realiza o succesiune de inele de lichid magnetic care vor prelua diferența de presiune. Realizarea în-terstițiului extrem de mic sub talpa polara dinspre zona de presiune redusa constituie și o protecție împotriva unor cureni de fluid (aer) care ar putea afecta stabilitatea etanșării cu lichide magnetice plasata în zona de presiune ridicata.

Plasarea succesivă a unor dispozitive de etanșare este benefica, având drept efect creșterea capacitații de etanșare a ansamblului. Un asemenea dispozitiv multiplu de ghidare și etanșare este prezentat în figura 4.1.6.

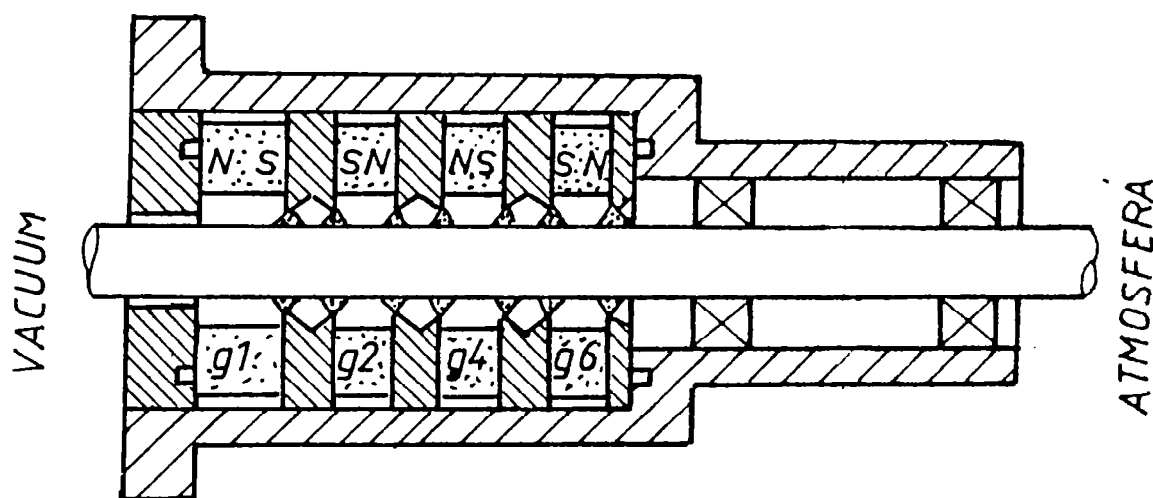


Figura 4.1.6.

Carcasa cilindrică a dispozitivului este din material nemagnetic, axul aflat în mișcare de rotație, coaxial cu carcasa, este ghidat și prin lagare de rotație clasice.

Piesele magnetice toroidale sunt magnetizate axial și sunt despartite între ele de piese polare feromagnetice. Aceste piese feromagnetice au formă toroidală și pe suprafața lor interioară circulară, au practicat un canal (sau mai multe), care crează în apropierea axului o concavitate ale cărei muchii sunt concentratoare de câmp magnetic. În aceste zone de câmp magnetic intens se realizează inelele etanșare de lichide magnetice.

Inelul (sau inelele, în cazul când se realizează mai multe cavități la un disc),

localizat în zona adiacentă mediului vacuumat, este caracterizat de un câmp magnetic mai intens. Acest exemplu se apropie de configurația studiată, și anume, lagăr tip sandwich cu poli alternanți alcătuiți din magneți permanenți cu magnetizare în direcție radială.

În literatura consultată se pot găsi și alte aplicații legate de etanșările magnetice: [Rj2-8], [Ri1], [Ri2], [Sa1], [Sc1], [BI1], [Ch1], [Fu1], [Go1-3], [Li1], [Me1], [Ya1], [Hi1], s.a. Lucrările colectivului de lichide magnetice din cadrul Institutului de Studiu al Fluidelor Complexe (Universitatea "Politehnica" Timisoara), între care [An1-2], [Pt1-3], [Vé1], au constituit pentru autor puncte de referință în abordarea temei.

Din prezentarea principială a celor câteva lagăre și etanșări magnetice se poate constata gama largă de aplicabilitate practică a acestora, tipodimensiunile din cele mai variate (diametre de la ordinul 1 mm și până la ordinul zecilor de cm), precum și destinații din cele mai diverse (supape bi și tridirecționale, dispozitive de menținere a condițiilor de lubrefiere chiar în cazul unor poziții defavorabile și turație ridicată, etc).

#### 4.2. Calculul analitic al lagărelor magnetice cu poli alternanți

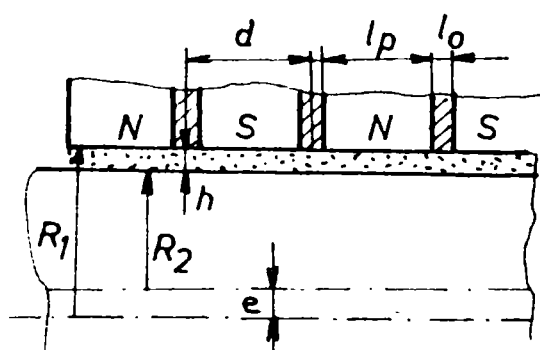


Figura 4.2.1.

Un asemenea lagăr este prezentat schematic în figura 4.2.1., figură în care sunt precizate atât dimensiunile geometrice, precum și pozițiile axelor, cât și excentricitatea  $e$  în situația când axul nemagnetic iese din coaxialitatea cu partea fixă, datorită magnetizării radiale a magneților permanenți.

În cazul acestui tip de lagăr se disting următoarele domenii:

- magneții permanenți, de formă toroidală, cu magnetizare radială și plasați alternant (N-S-N-S) pe carcasa, ansamblu pe care îl voi denumi stator
- lichidul magnetic
- axul (arborele) nemagnetic, pe care îl voi denumi rotor.

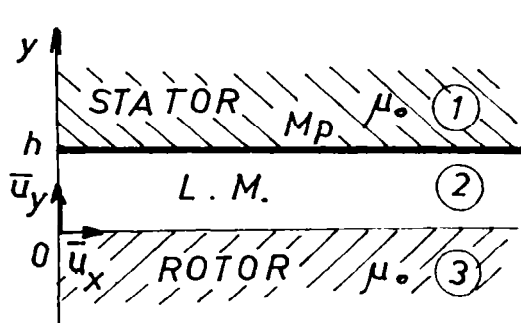
Așa cum se precizează în [DS4], la un astfel de dispozitiv magnetizarea permanentă poate fi descrisă cu o funcție redată de ecuația 4.2.1.

$$\vec{M}_p = M_0 \cdot e^{-k(y-h)} [\cos kx \cdot \vec{u}_x - \sin kx \cdot \vec{u}_y], \text{ cu } y > h \quad (4.2.1)$$

în care  $M_0 = \text{constantă}$ ,  $k = \pi/d$  și  $d = l_p + l_o$

În toate cele trei domenii, vectorul intensității câmpului magnetic este irotațional și, în consecință poate fi pus ca derivând dintr-un potențial magnetic scalar  $V_H$ .

Tinând cont de relațiile satisfăcute de vectorii de câmp magnetic, se poate deduce ușor că potențialul magnetic scalar satisface ecuația Laplace:



$$\frac{\partial^2 V_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_H}{\partial y^2} = 0 \quad (4.2.2)$$

Condițiile de frontieră pe suprafețele de separație între cele trei medii, precizate în figura 4.2.2. sunt:

$$V_{H_1} = V_{H_2}$$

Figura 4.2.2.

$$\mu_0 \cdot \left( \frac{\partial V_{H_1}}{\partial y} \right) = \mu_2 \cdot \left( \frac{\partial V_{H_2}}{\partial y} \right) = -\mu_0 M_0 \sin kx \quad (4.2.3)$$

pentru  $y = h$ , și

$$V_{H_2} = V_{H_3}$$

pentru  $y = 0$

$$\mu_2 \cdot \left( \frac{\partial V_{H_2}}{\partial y} \right) = \mu_0 \cdot \left( \frac{\partial V_{H_3}}{\partial y} \right) \quad (4.2.4)$$

Prin metoda separării variabilelor s-a obținut soluția pentru expresiile intensității câmpului magnetic în cele trei medii sub forma:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= M_0 \cdot \frac{e^{k(h-y)}}{1 + \mu_{r_2}} (-\cos kx \bar{u}_x + \sin kx \bar{u}_y) \\ \bar{H}_2 &= M_0 \cdot \frac{e^{-k(h-y)}}{1 + \mu_{r_2}} (-\cos kx \bar{u}_x - \sin kx \bar{u}_y) \\ \bar{H}_3 &= -M_0 \cdot \frac{e^{-kh}}{1 + \mu_{r_2}} [(\mu_{r_2} shky + chky) \cos kx \bar{u}_x + \\ &\quad + (\mu_{r_2} chky + shky) \sin kx \bar{u}_y] \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Se cunosc astfel vectorii câmp în cele trei medii, dat fiind că pentru  $\bar{B}$  se determină expresiile sale aplicând legea legăturii între  $\bar{B}$ ,  $\bar{M}$  și  $\bar{H}$  în forma specifică fiecărui mediu.

Pentru o valoare curentă a excentricității  $e$  voi folosi notația  $\delta$ , iar pentru valoarea maximă a excentricității,  $e_{\max} = R_2 - R_1$ , notația  $\Delta$ .

Forța netă exercitată asupra unui corp amagnetic, imersat într-un lichid magnetic, supus unui câmp magnetic ( efectul levitației de ordinul I ) se poate exprima:

$$\bar{F} = -\mu_0 \oint_{\Sigma} \left[ \frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M \cdot dH \right] d\bar{S} \quad (4.2.6)$$

Presupunând că în cazul studiat condițiile corespund porțiunii liniare a curbei de magnetizare a lichidului, atunci:

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H} = (\mu_{r_2} - 1) \bar{H} \quad (4.2.7)$$

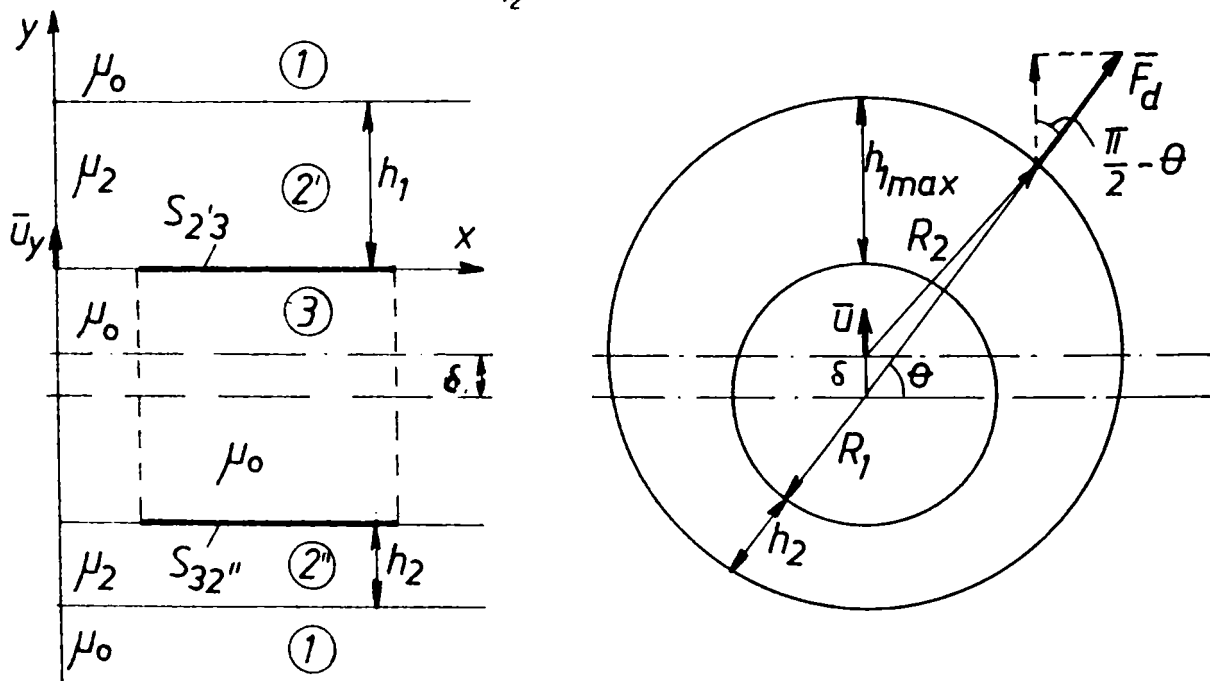
$$\bar{F} = -\frac{\mu_2 - \mu_0}{2} \oint_{\Sigma} (\mu_{r_2} H_n^2 + H_t^2) d\bar{S} \quad (4.2.8)$$

Rezultă că pe suprafața de separație, tensiunea este:

$$\bar{t}(\bar{n}) = -\frac{\mu_2 - \mu_0}{2} (\mu_{r_2} H_n^2 + H_t^2) \bar{n} \quad (4.2.9)$$

În particular, pe suprafața  $S_{2,3}$  (figura 4.2.3a), tensiunea este:

$$\begin{aligned} \bar{t}_1(\bar{n}) &= \bar{t}_1(\bar{u}_y) = -\frac{\mu_2 - \mu_0}{2} (\mu_{r_2} H_{2y}^2 + H_{2x}^2) \bar{u}_y = \\ &= -\frac{\mu_2 - \mu_0}{2} \cdot \frac{M_0^2 e^{-2kh_1}}{(1 - \mu_{r_2})^2} (\mu_{r_2} \sin^2 kx + \cos^2 kx) \bar{u}_y \end{aligned} \quad (4.2.10)$$



Figurile 4.2.3.a și 4.2.3.b

Tensiunea pe suprafața  $S_{32}$  este:

$$\bar{t}_2(\bar{u}_y) = \frac{\mu_2 - \mu_0}{2} \cdot \frac{M_0^2 e^{-2kh_2}}{(1 + \mu_{r_2})^2} (\mu_{r_2} \sin^2 kx + \cos^2 kx) \bar{u}_y \quad (4.2.11)$$

Tensiunea rezultantă va fi:

$$\bar{t}_r(\bar{U}_y) = \bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{2} \cdot \frac{M_0^2 (e^{-2kh_2} - e^{-2kh_1})}{(1 - \mu_{r_2})^2} \cdot (\mu_{r_2} \sin^2 kx + \cos^2 kx) \bar{U}_y \quad (4.2.12)$$

Forța exercitată pe lungimea  $d$  a arborelui este dată de:

$$\bar{F}_d = \int_0^d \bar{t}_r dx = \frac{\mu_0(\mu_{r_2}^2 - 1)}{4(1 - \mu_{r_2})^2} \cdot M_0^2 d (e^{-2kh_2} - e^{-2kh_1}) \bar{U}_y \quad (4.2.13)$$

Pentru a calcula  $h_1$  și  $h_2$ , considerăm fig.4.2.3.b, unde  $R_1 = D_1 / 2$  și  $R_2 = D_2 / 2$ .

Rezultă ca: 
$$R_2^2 = (R_1 + h_1)^2 + \delta^2 - 2\delta(h_1 + R_1)\sin\theta \quad (4.2.14)$$

și neglijând termenii de ordinul doi  $\delta^2$ ,  $\delta h_1$ ,  $h_1^2$ , se obține:

$$\begin{aligned} h_1 &= \Delta + \delta \cdot \sin\theta \\ h_2 &= \Delta - \delta \cdot \sin\theta \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

unde  $\Delta = (R_2 - R_1) = e_{\max}$  reprezintă și grosimea stratului de lichid magnetic, corespunzătoare poziției de echilibru a arborelui. Introducând expresiile lui  $h_1$  și  $h_2$ ,

se obține :

$$\bar{F}_d = \frac{\mu_0(\mu_{r_2}^2 - 1)}{2(1 + \mu_{r_2})} \cdot M_0^2 d \cdot e^{-2k\Delta} \operatorname{sh}(2k\delta \sin\theta) \bar{U}_y \quad (4.2.16)$$

Forța de readucere rezultantă corespunzătoare lungimii "d" a arborelui se obține însumând componentele verticale ale lui  $F_d$ , după cum se poate urmări în figura 4.2.3.b. Se obține:

$$\bar{F}_{rd} = \bar{U} \int_0^\pi F_d \cdot \sin\theta \cdot R_1 d\theta, \quad (4.2.17)$$

unde  $\bar{U}$  este vectorul unitar corespunzător lui  $F_{rd}$ , direcția sa fiind determinată de maximul lui  $h_1$ , în timp ce sensul său este spre exteriorul arborelui.

Forma integrală de mai sus ia aceleași valori când  $\theta \in [0, \pi/2]$  și  $\theta \in [\pi/2, \pi]$  astfel că poate fi scrisă ca:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{rd} &= \bar{U} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} R_1 F_d \cdot \sin\theta d\theta = \bar{U} \frac{\mu_0(\mu_{r_2}^2 - 1) \cdot M_0^2 \cdot d \cdot R_1}{(1 + \mu_{r_2})^2} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-2k\Delta} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \operatorname{sh}(2k\delta \cdot \sin\theta) \cdot d\theta \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Efectuând o dezvoltare în serie a funcției  $\text{sh}(2k\delta \sin\theta)$ , rezultă:

$$\bar{F}_{rd} = \bar{u} \cdot \frac{\mu_0(\mu_{r_2}^2 - 1) \cdot M_0 \cdot d \cdot R_1}{(1 + \mu_{r_2})^2} e^{-2k\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k\delta)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta \quad (4.2.19)$$

$$\int \sin^{2n} \theta d\theta = -\frac{\cos\theta}{2n} \left[ \sin^{2n-1} \theta + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)}{2^k(n-1)(n-2)\dots(n-k)} \sin^{2n-2k-1} \theta \right] + \frac{(2n-1)!}{2^n \cdot n!} \quad (4.2.20)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Relația (4.2.19) devine:

$$\bar{F}_{rd} = \bar{u} \cdot \frac{\mu_0(\mu_{r_2}^2 - 1) M_0^2 d R_1 \pi e^{-2k\delta} k\delta}{2(1 + \mu_{r_2})^2} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} (k\delta)^{2(n-1)}}{(n-1)! n!} \right] \quad (4.2.21)$$

Pentru valoarea cea mai mare a excentricității  $\delta \rightarrow \Delta$  și forța de readucere medie pe unitatea de lungime a arborelui va fi:

$$\bar{F}_{rd}^* = \frac{\bar{F}_{rd}}{d} = \bar{u} \cdot \frac{\mu_0(\mu_{r_2}^2 - 1) M_0^2 R_1 \pi}{2(1 + \mu_{r_2})^2} \cdot (k\Delta) \cdot e^{(-2k\Delta)} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} (k\Delta)^{2(n-1)}}{(n-1)! n!} \right] \quad (4.2.22)$$

Pentru cazul  $k\Delta \ll 1$ , ne putem rezuma la primii doi termeni ai dezvoltării, și în acest mod, expresia pentru  $F_{rd}^*$  se reduce la următoarea formă utilă pentru proiectarea lagărelor cu fluid magnetic:

$$\bar{F}_{rd}^* = \bar{u} \cdot \frac{\mu_0(\mu_{r_2}^2 - 1) M_0^2 R_1 \pi}{2(1 + \mu_{r_2})^2} \cdot f(x) \quad (4.2.23)$$

în care

$$f(x) = e^{-2x} \left( x + \frac{x^3}{2} \right)$$

Maximul pentru  $f(x)$  rezultă din condiția  $f'(x) = 0$  și se obține ecuația:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (4.2.24)$$

$$z = x - \frac{1}{2} \rightarrow z^3 + \frac{5}{4}z - \frac{1}{4} = 0$$

Așa cum s-a arătat în [DS4], ecuația (4.2.24) în  $z$  are o soluție reală pentru  $z_1 = 0,194$ , ceea ce corespunde pentru  $x_1 = 0,694$ , și atunci  $f(x_1) = 0,215$ , valoare ce corespunde forței de readucere maximă. Funcția  $f(x)$  este reprezentată

în figura 4.2.4. Se poate observa că aceasta variază lent în jurul valorii maxime. Astfel, pe un interval de variație a lui  $x$  cuprins între 0,55 - 0,80,  $f(x)$  variază doar de la 0,211 la 0,213, cu maximum amintit, de 0,215.

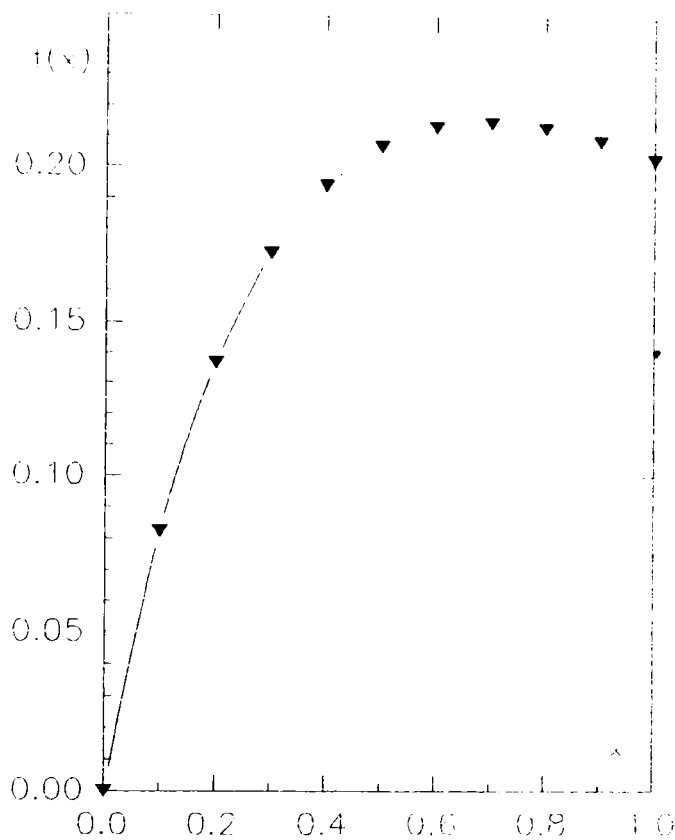


Figura 4.2.4.

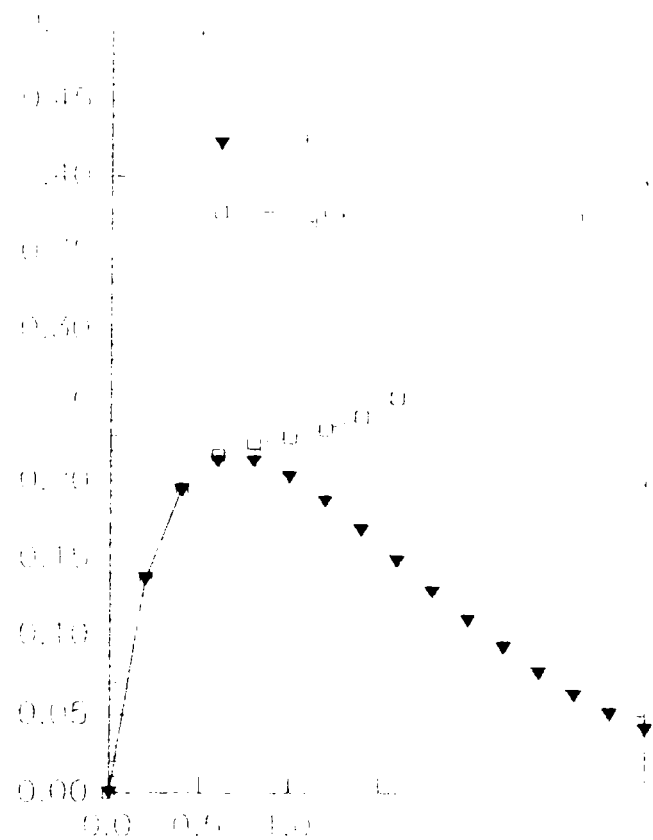


Figura 4.2.5.

Dacă se investighează și domeniul corespunzător valorilor lui  $x > 1$ , în dezvoltarea în serie nu mai pot fi neglijați termenii de ordin superior lui 2 și în acest caz se poate observa din reprezentarea grafică din figura 4.11. că există practic un palier corespunzător unei valori aproximativ constante (foarte lent crescătoare) a lui  $g(x)$ . Funcția  $g(x)$  s-a obținut prin luarea în calcul a primilor 6 termeni din dezvoltarea în serie din expresia (4.2.22), cu  $x = k\Delta$ , având forma:

$$g(x) = e^{(-2x)} \cdot x \cdot \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^8}{720} + \frac{x^{10}}{5400} \right) \quad (4.2.25)$$

Acest fapt confirmă concluziile prezentate anterior, privind un optim local în zona valorilor lui  $x \in (0,5;0,9)$ . Valori mari ale lui  $x$  corespund la dimensiuni axiale foarte reduse ale discurilor magnetice ce alcătuiesc sandwich-ul alternant de magneți toroidali, lucru greu de realizat tehnologic. Concluziile acestei metode de aproximare analitică a forței radiale de readucere au fost foarte utile în demararea și conducerea calculelor pe cale numerică. Aceste calcule numerice au confirmat

cele prezentate anterior completând concluziile cu unele considerații privind elemente ce nu au putut fi luate în calcul la aproximarea ce a condus la o soluție analitică.

### 4.3. Calculul numeric al lagărelor cu poli alternanți

#### 4.3.1. Modelarea lagărului cu poli alternanți și metodologia de calcul a forței de readucere

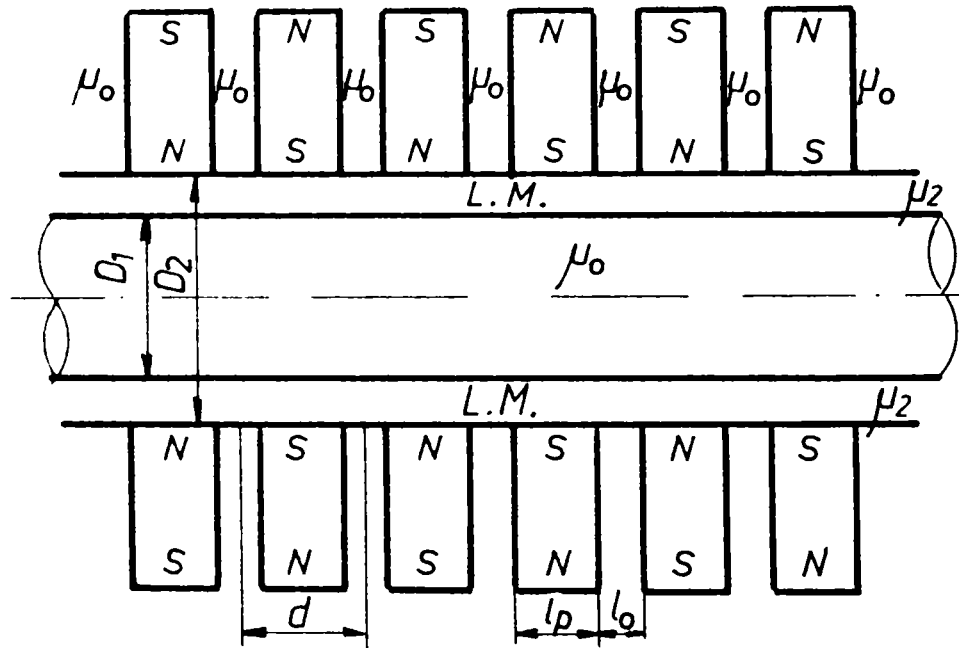


Figura 4.3.1.

Principial, poate fi făcută o departajare între două tipuri de lagăre cu lichid magnetic și poli alternanți, după locul unde este plasată sursa de câmp reprezentată de magneți permanenți. Această sursă de câmp poate fi plasată în stator sau în rotor. Aplicabilitatea mai largă a lagărelor cu sursa de câmp plasată în stator face ca prezenta lucrare să se refere la acest caz. Modul de punere al problemei și căile de rezolvare fiind echivalente, prin utilizarea aceluiași programe de calcul, dar cu adaptările corespunzătoare, rezultatele prezentei lucrări pot fi adaptate și/sau aplicate și la cazul plasării în rotor a surselor de câmp, magneți permanenți.

În figura 4.3.1. este prezentată schița unui lagăr cu lichid magnetic având polii alternanți plasați în stator. Magneții permanenți de forma toroidală au magnetizația permanentă orientată radial și constantă în modul în orice punct al magneților. Sunt prezentate în figură principalele caracteristici geometrice ale unui asemenea lagăr, unele din acestea fiind utilizate și în paragraful precedent. Alți parametri geometrici vor fi explicați la momentul utilizării lor.



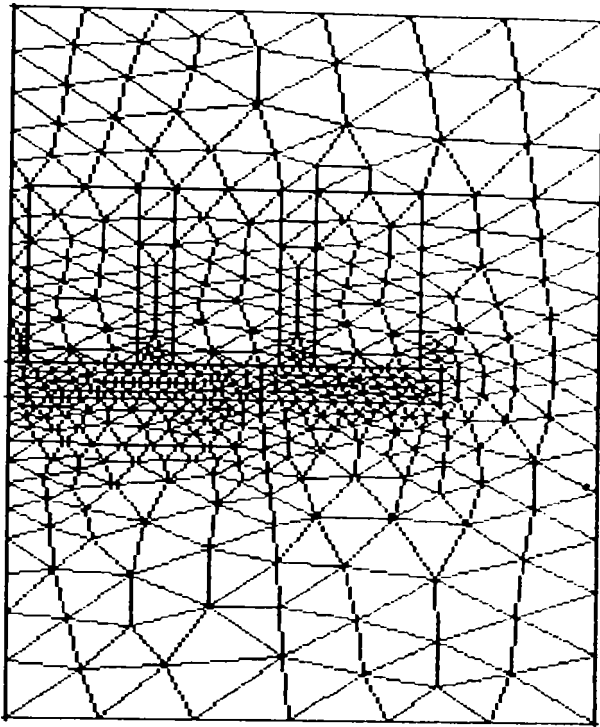


Figura 4.3.2.

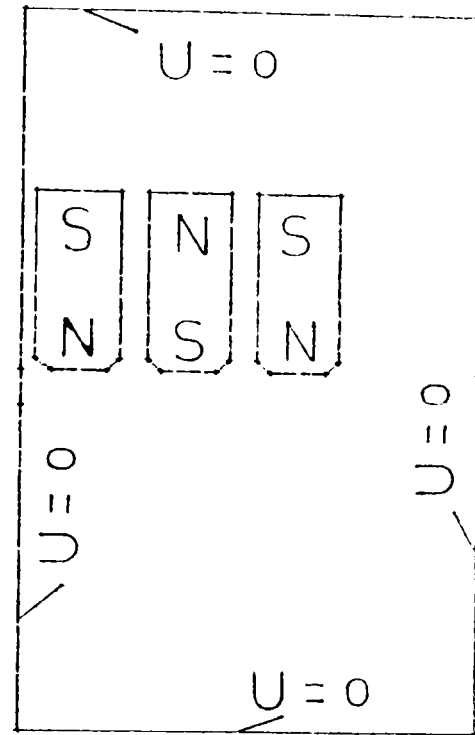


Figura 4.3.3.

În figura 4.3.2 este prezentat, principial, felul în care s-a făcut modelarea lagărului. Câmpul plan - meridian s-a modelat, ținând seama și de planul de simetrie al lagărului, pentru un sfert dintr-o secțiune în lungul axei acestuia, așa cum se vede în figura 4.3.2. Materialul magnetic din care sunt realizați magnetii toroidali are  $M_p = 150 \text{ kA/m}$  și orientare radială.

$$\bar{M}_p = M_p \cdot \bar{u}_r \quad \text{sau} \quad \bar{M}_p = -M_p \cdot \bar{u}_r$$

după cum magnetul toroidal are polul N spre exteriorul lagărului sau spre interiorul său.

Permeabilitatea magnetică relativă a fost considerată  $\mu_r = 1$ .

Acest tip de magnet permanent este denumit idealizat în prezenta lucrare.

Ca și în cazurile anterioare (magnet permanent imersat în lichid magnetic) și aici s-a ținut seama de geometria reală (racord, în loc de muchii ascuțite), modelarea arcelor de cerc făcându-se prin segmente de dreaptă, în limita numărului de noduri a programului de calcul prin MEF a câmpului magnetic.

Modul de discretizare a fost adaptat cerințelor de calcul, dimensiunile elementelor finite triunghiulare fiind mai reduse în zona de interes.

Condițiile de frontieră sunt prezentate în figura 4.3.3.

În urma soluționării problemei distribuției câmpului magnetic, se obțin valorile componentelor inducției magnetice  $B_r$  și  $B_z$ .

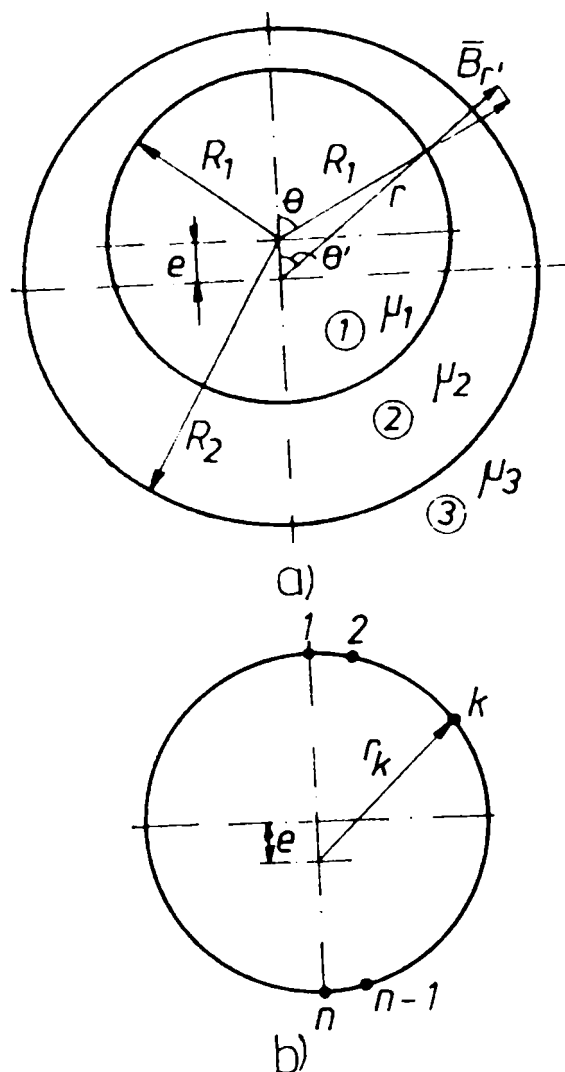


Figura 4.3.4.

Aplicând aceeași metodă de aproximare prezentată la calculul forței de readucere ce acționează asupra unui magnet permanent imersat excentric într-o incintă ce conține lichid magnetic (paragraful 3.4), se poate calcula forța de readucere ce acționează asupra axului lagărului (rotor) la plasarea sa excentrică (cu excentricitatea  $e$ ) în interiorul lagărului cu lichid magnetic având polii plasați în stator.

În figurile 4.3.4 a și b este precizat felul în care s-a realizat modelarea, fiind marcate și elementele geometrice utilizate în modelare și, respectiv, pentru calculul forței de readucere.

Pentru calculul forței de readucere se aplică relația (3.4.1).

$$\bar{F}_m = -\mu_0 \oint_{\Sigma_0} \left[ \frac{M_n^2}{2} + \int_0^H M dH \right] \cdot \bar{ds} \quad (3.4.1)$$

Calculul acestei integrale se reduce la calculul integralei pe suprafața laterală a axului rotor ( $S_{lat}$ ).

Și în acest caz integrala componentei  $\bar{B}_\theta$ , din considerente de simetrie va da rezultanta nulă în forța de readucere.

$$\bar{F}_m = -\frac{\mu_r - 1}{2\mu_0\mu_r^2} \int_{S_{lat}} (B_r^2 \cdot \mu_r + B_z^2) \bar{ds} = -\frac{\mu_r - 1}{2\mu_0\mu_r^2} \int_{S_{lat}} [B_r^2 \cdot \mu_r \cdot \cos^2(\theta - \theta') + B_z^2] \bar{ds} \quad (4.3.1)$$

Mărimile cu indicele superior " ' " din relația 4.3.1 sunt cele determinate în referențialul legat de stator. Metoda de aproximare, pentru calculul câmpului magnetic cu MEF2D, este aceeași cu cea prezentată în paragraful 3.4. Metoda se bazează pe faptul că permeabilitatea magnetică a lichidului magnetic este foarte apropiată de 1 ( 1,1 - 1,2 ) și deci prezenta lichidului magnetic modifică puțin valoarea câmpului magnetic ce se stabilește în absența sa în spațiul dintre rotor și stator.

Plasarea excentrică a rotorului ar presupune calculul în 3D, câmpul nernaifiind plan-meridian. Acceptând că prin rezolvarea în 2D, în absența lichidului magnetic, se obține o distribuție a câmpului magnetic puțin modificată față de situația în care acesta este prezent, se pot obține valorile câmpului în toate punctele din interiorul lagărului magnetic. De prezența lichidului magnetic se ține seama în expresia forței ce se calculează prin integrare numerică.

Se acceptă că rotorul ocupă o poziție excentrică față de axa lagărului, în distribuția de câmp magnetic obținută prin MEF2D, câmp plan - meridian. În acest fel, punctele de pe periferia rotorului, în orice secțiune perpendiculară pe axa lagărului, se vor găsi la diferite distanțe față de axă. Această distanță este cuprinsă între o valoare minimă ( $r_{\min} = r_n = R_1 - e$ ) și o valoare maximă ( $r_{\max} = R_1 + e$ ). O valoare curentă a acestei distanțe, corespunzătoare punctului "k", am notat-o cu  $r_k$ . După rezolvarea problemei de tip plan - meridian, utilizând MEF2D, se culeg valorile componentelor câmpului magnetic la diferite valori  $r_k$  ale distanței față de axa de referință a statorului (fig.4.3.4b).

Aceste valori sunt atribuite tabelar componentelor  $B_r$  și  $B_z$ , creditate cu valori pe suprafața laterală a axului rotoric. Se procedează analog celor prezentate în paragraful 3.4. Notând cu  $\bar{F}_r = F_r \cdot \bar{u}_\theta$  forța de readucere, se poate scrie:

$$F_r = \bar{F}_m \cdot \bar{u}_\theta \quad (4.3.2)$$

rezultă acum:

$$F_r = -\frac{\mu_r - 1}{2\mu_0\mu_r^2} \int_{S_{lat}} [B_r^2 \mu_r + B_z^2] ds \cdot \cos \theta \quad (4.3.3)$$

Integrala pe  $S_{lat}$  se poate efectua fie întâi după  $\theta$  și apoi după  $z$ , fie invers. Ca modalitate de integrare, numerică, a fost aleasă integrarea întâi după  $\theta$  și apoi după  $z$ . În felul acesta forța de readucere calculată pentru un pol, de extensie axială  $d$ , va fi:

$$F_r = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_0\mu_r^2} R_1 \int_0^d dz \cdot \int_0^\pi [B_{rc}^2(\theta, z) + B_z^2(\theta, z)] \cos \theta d\theta \quad (4.3.4)$$

Integrala

$$I_\theta(z) = \int_0^\pi [B_{rc}^2(\theta, z) + B_z^2(\theta, z)] \cos \theta d\theta \quad (4.3.5)$$

se efectuează pentru un anumit  $z$ , după ce în prealabil se utilizează formula

integrării prin părți:

$$I(z, \theta_k) = \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} f(z, \theta) \cdot \cos \theta \, d\theta = f(z, \theta) \cdot \sin \theta \Big|_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} - \frac{f(z, \theta_{k+1}) - f(z, \theta_k)}{\theta_{k+1} - \theta_k} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \sin \theta \, d\theta \quad (4.3.6)$$

în care s-a presupus că pe intervalul de integrare,  $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ , funcția  $f(z, \theta)$  variază liniar. În continuare:

$$I_0(z) = \sum_{k=1}^{k=n-1} I(z, \theta_k) \quad (4.3.7)$$

și

$$I_{\theta, z_v} = \int_{z_v}^{z_{v+1}} I_0(z) \cdot dz = \frac{I_0(z_{v+1}) - I_0(z_v)}{2} \cdot (z_{v+1} - z_v) \quad (4.3.8)$$

Efectuând integrala pentru un pol se obține:

$$I_{\theta, z} = \sum_{v=1}^{v=m-1} I_{\theta, z_v} ; z_1 = 0 \quad z_m = d \quad (4.3.9)$$

Lungimea axială corespunzătoare unui pol ( $d$ ) este divizată prin " $m$ " puncte în " $m-1$ " intervale (egale între ele sau inegale). Pentru a obține forța pe unitatea de lungime a axului lagărului cu lichid magnetic, forța calculată (numeric) cu expresia (4.3.4) se raportează la lungimea polului:

$$F_r^* = \frac{F_r}{d} \quad (4.3.10)$$

Ordinograma de calcul pentru determinarea forței axiale de readucere ce acționează asupra axului lagărului cu lichid magnetic este cuprinsă în ordinograma prezentată în figura 3.4.5., elementele suplimentare ce apar fiind legate de modificarea unor dimensiuni și/sau proporții ale unor dimensiuni geometrice ale lagărelor cu lichid magnetic, cu magneți permanenți toroidali plasați (cu polaritate alternantă) în stator.

Particularitățile ce apar în calculul forței în cazul lagărului au fost menționate în acest paragraf. Principial cele prezentate în paragraful 3.4. rămân valabile și în cazul calculelor ce se vor efectua în cele ce urmează. Astfel lichidul magnetic este utilizat în porțiunea liniară a curbei sale de magnetizare, permeabilitatea sa magnetică fiind constantă și de valoare foarte apropiată de 1.

#### 4.3.2. Analiza câmpului și a forței de readucere pentru cazul unei singure perechi de poli

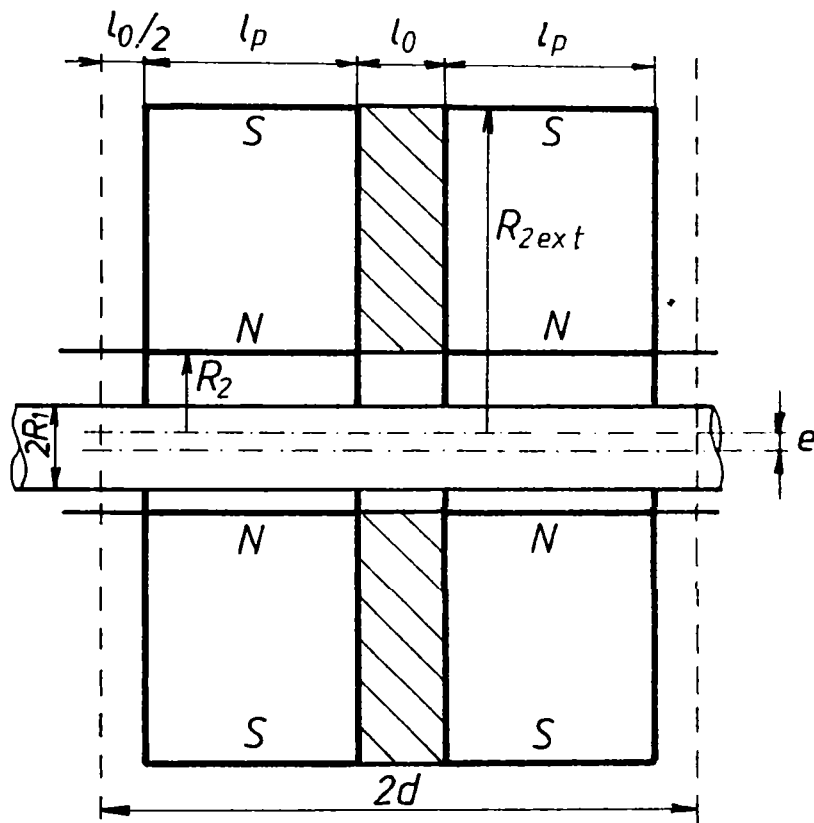


Figura 4.3.5.

facuta pentru o distanță radială față de axa statorului lagărului corespunzătoare la 92,5% din  $R_2$  ( $r/R_2 = 0,925$ ).

Dacă se considera cazul în care lagărul ferofluidic este alcătuit dintr-o singură pereche de magneti (poli) de configurație toroidală, situație reprezentată în figura 4.3.5., formele de variație a componentelor câmpului magnetic sunt reprezentate în figura 4.3.6.

Modelarea și calculul s-au facut pentru  $l_p/l_0 = 6$ , cu  $R_{2ext} = 2 \cdot R_2$ . Reprezentarea valorilor componentelor inducției magnetice este

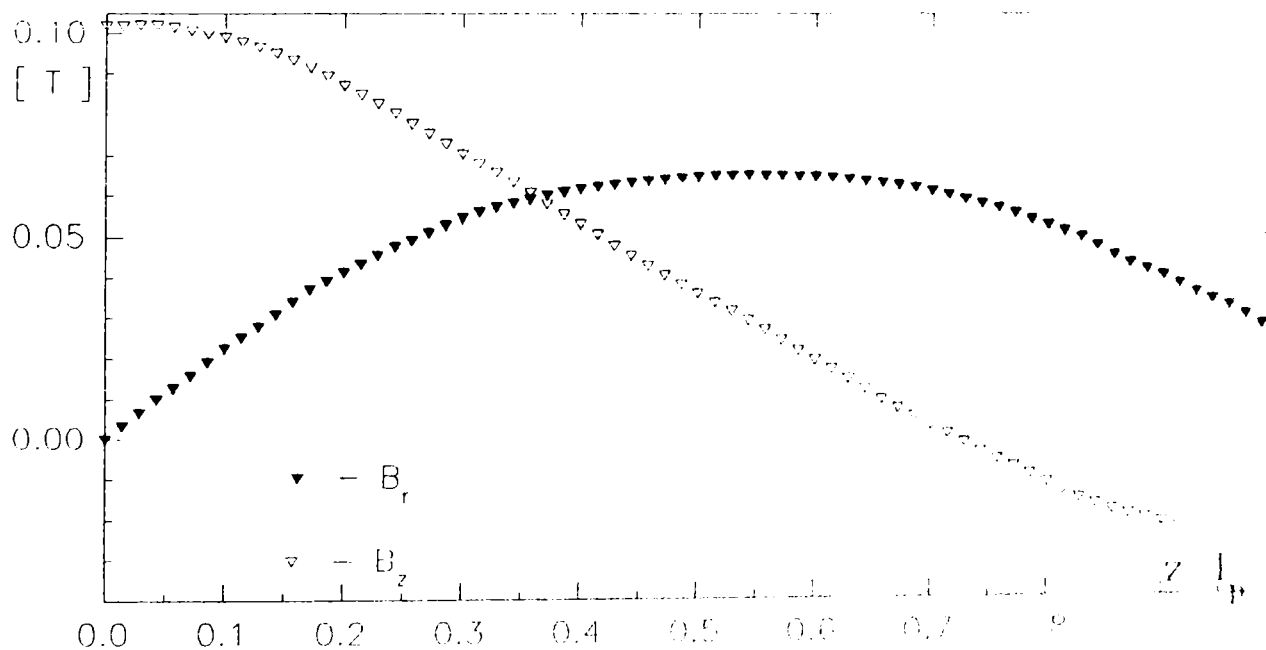


Figura 4.3.6.

Se poate observa că aceste curbe sunt, în mod firesc, destul de îndepărtate de forma de variație cosinusoidală și, respectiv sinusoidală, așa cum este acceptat în literatură [DS4] pentru cazul unui lagăr de tip sandwich, cu un număr mare de perechi de poli și, în același timp, extensie radială foarte mare a magneților ( $R_{2ext} \rightarrow \infty$ ).

Pentru configurația bipolară (o singură pereche de poli), a fost investigată influența pe care raportul între dimensiunea axială a polului ( $l_p$ ) și dimensiunea axială a interstițiului dintre doi poli succesivi ( $l_0$ ) o are asupra forței de readucere ce se exercită asupra axului lagărului. În figura 4.3.7 este reprezentată această variație.

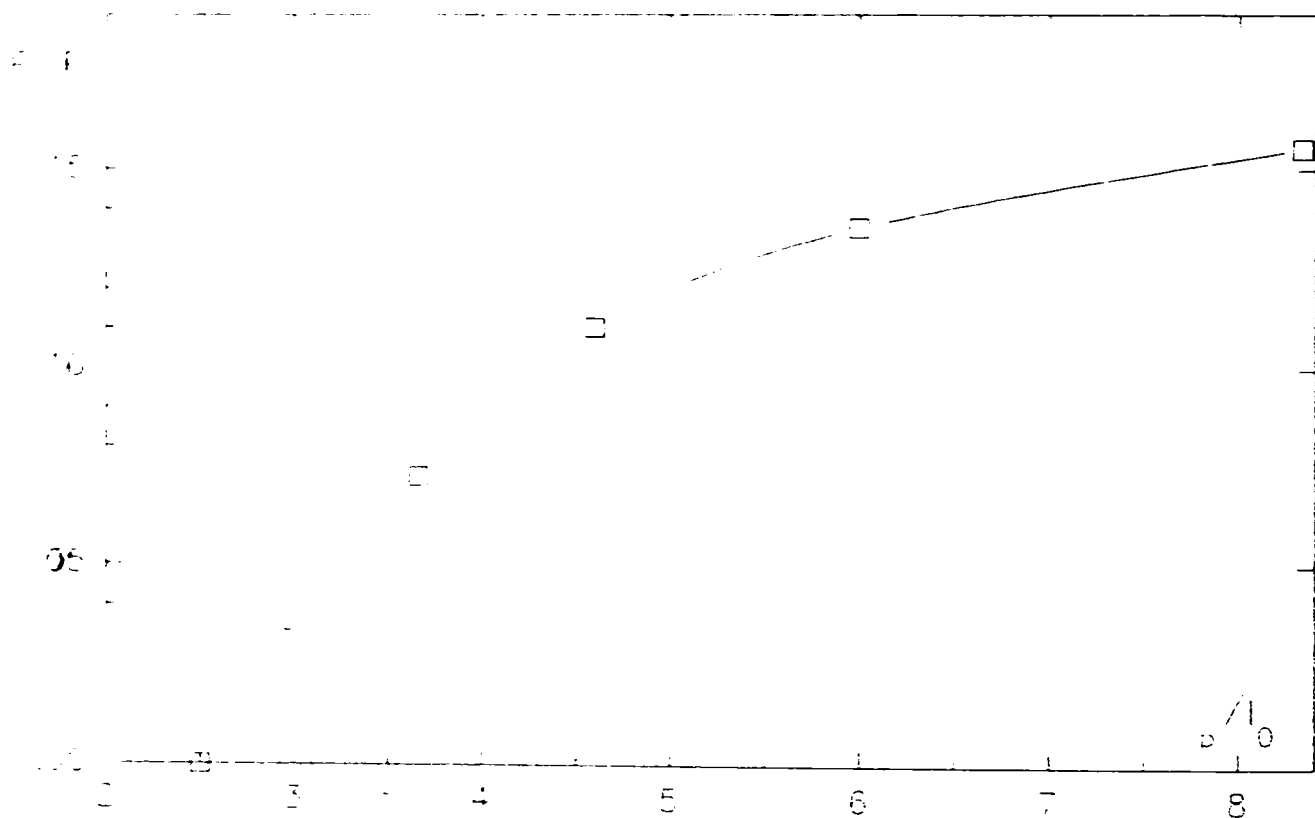


Figura 4.3.7.

Calculul s-a efectuat în ipotezele menționate la determinarea aproximativă a forței de readucere, prin MEF2D.

Calculul aproximativ al câmpului s-a făcut pentru situația când în interiorul lagărului ar fi doar aer, acceptând că prezența lichidului magnetic de  $\mu$ , foarte apropiat de 1 (1,1 - 1,2) nu modifică esențial distribuția câmpului magnetic. În calculul forței de readucere, așa cum s-a arătat la capitolul respectiv, se ține seama de prezența lichidului magnetic.

Pentru un grad mai mare de generalitate s-a lucrat cu mărimi raportate, forța

de referință, notată în grafic cu  $F_r$ , fiind cea obținută pentru un raport  $I_p/I_0 = 2,5$ .

Așa cum se poate observa din grafic forța obținută crește pe măsura ce ponderea interstițiului scade, la menținerea constantă a pasului polar (în acest caz chiar jumătate din extinderea axială a lagărului,  $L$ ). Peste valoarea 5 - 6 a acestui raport, creșterea este mai puțin importantă și problemele tehnice de realizare a unui interstițiu de valoare foarte mică pot fi foarte dificile sau chiar imposibil de rezolvat. Aceasta, în special, în situația în care trebuie menținută coaxialitatea unor magneți toroidali, de dimensiuni axiale reduse.

În figurile 4.3.8a, 4.3.8b și 4.3.8c sunt prezentate rezultatele obținute la modificarea proporțiilor geometrice ale lagărului și în situația unor excentricități diferite ale axului lagărului precum și a variației razei "statorului",  $R_2$ .

Au fost investigate diferite combinații între  $R_1$  și  $R_2$ , care conduc la excentricități raportate diferite. În toate cazurile, forța relativă reprezentată este raportul între forța specifică pe unitatea de lungime din situația corespunzătoare punctului din grafic și o forță specifică de referință (minima din cazul respectiv), corespunzătoare curbei pe care se găsește punctul.

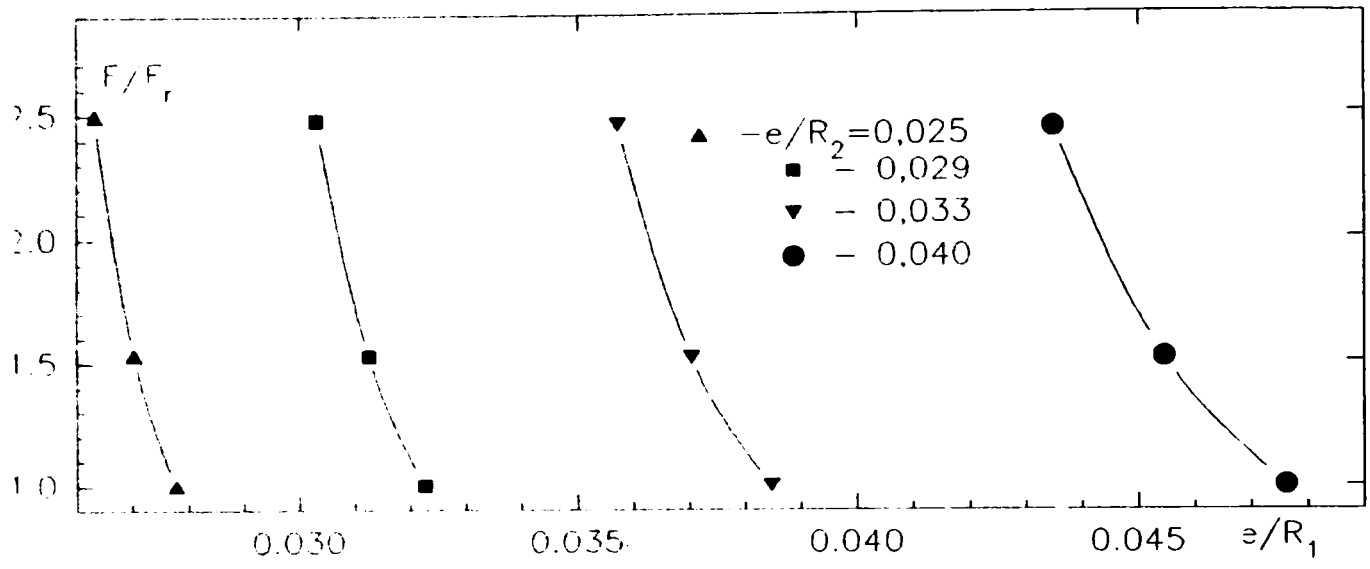
În figura 4.3.8a se poate constata că cele patru curbe reprezentate au o formă de variație asemanătoare, cu o variație mai pronunțată pentru o excentricitate relativă mai mare (ceea ce arată că la o excentricitate absolută constantă, la raze mai mici creșterea forței cu excentricitatea este mai rapidă).

În reprezentarea din fig 4.3.8b,  $\Delta = R_2 - R_1$  reprezintă excentricitatea maximă ce poate fi realizată la  $R_1$  și  $R_2$  fixați; se observă o variație aproximativ liniară a forței relative, care crește cu creșterea raportului  $R_1/\Delta$ .

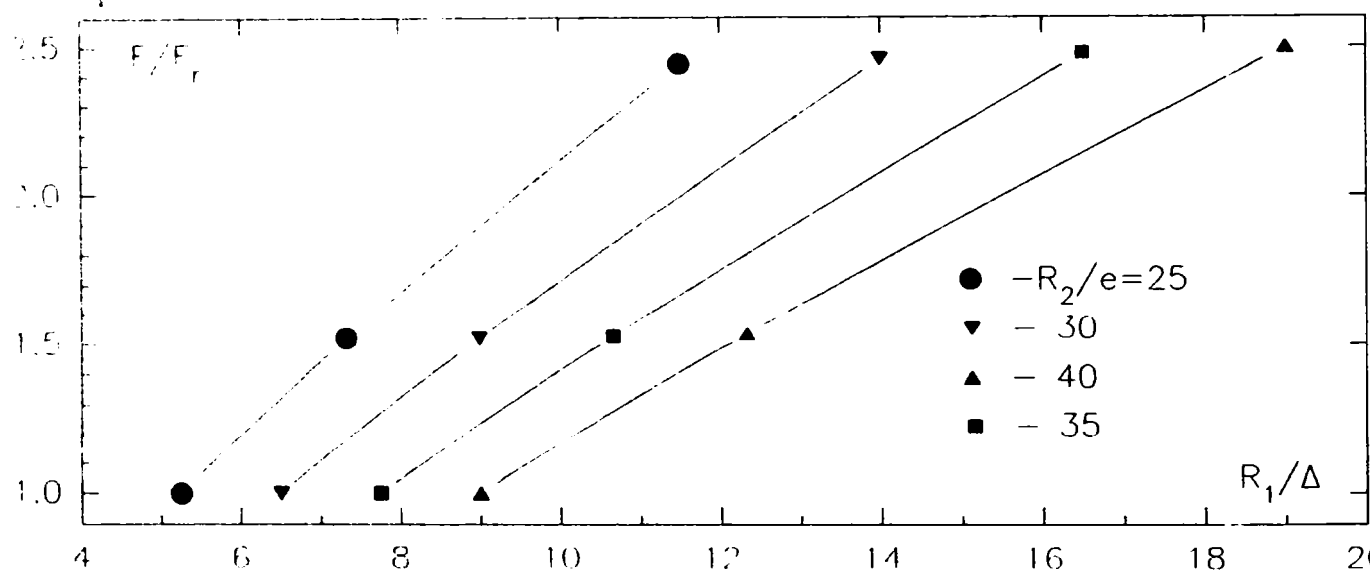
Curbele reprezentate în figura 4.3.8c arată că odată cu creșterea raportului  $R_2/R_1$ , deci și creșterea lui  $\Delta$ , pentru o aceeași pondere a excentricității e din raza statorică  $R_2$ , forța de readucere ce se obține scade.

Cele mai mari valori ale forței de readucere se obțin pentru valori apropiate între  $R_2$  și  $R_1$  (deci un  $\Delta$  mai mic), ceea ce face ca ponderea excentricității e, menținută constantă în valoare absolută, să crească față de excentricitatea maxim realizabilă în cazul respectiv.

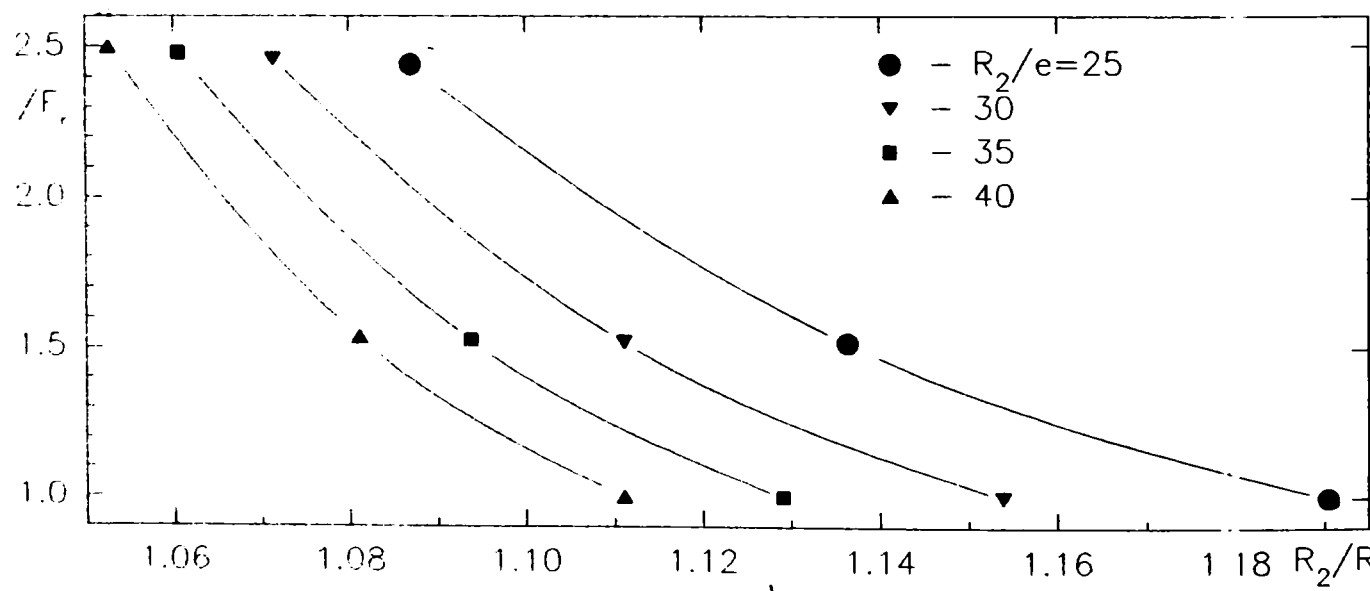
Observațiile și concluziile obținute pentru un lagăr cu lichid magnetic cu o singură pereche de poli (lagăr teoretic) sunt utile și la lagărul tip sandwich, lagăr ce apare efectiv în aplicațiile practice.



a)



b)



c)

Figura 4.3.8.



### 4.3.3. Compararea câmpului și a forței de readucere ce se realizează sub un pol pentru diferite situații de plasare a acestuia

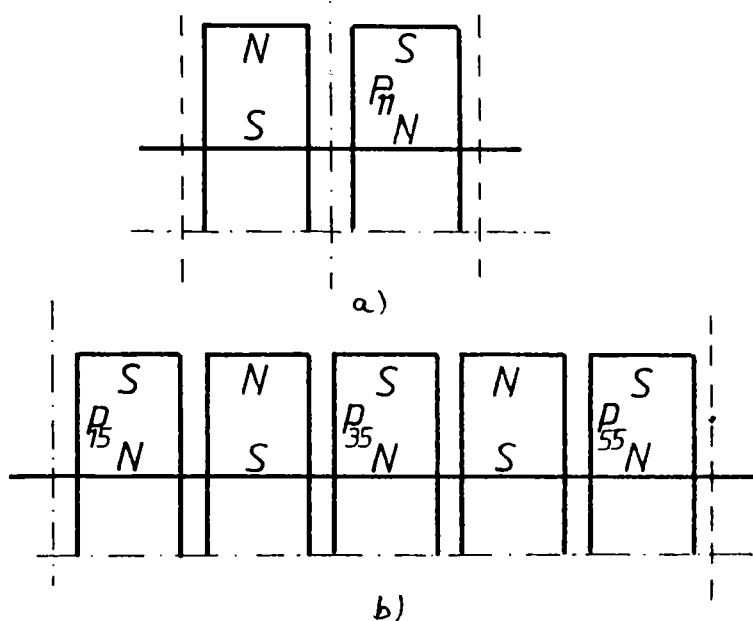


Figura 4.3.9.

față de axa de simetrie din cadrul lagărului cu cinci perechi de poli (fig.4.3.9b).

Forma de variație a componentelor câmpului magnetic sub pol este reprezentată în figurile 4.3.10a și 4.3.10b.

S-au menținut aceleași proprietăți de material și aceleași dimensiuni pentru pol și interstițiu. Atât pentru componenta axială  $B_z$  cât și pentru componenta radială  $B_r$ , în cazul  $p_{11}$  se obțin valorile cele mai mari, dar și cele mai îndepărtate de o variația cosinusoidală și, respectiv, sinusoidală. În cazul polilor  $p_{kn}$ , cu  $k < n$  (aici  $n = 5$ ) valorile absolute (pentru ambele componente) sunt mai reduse, dar forma de variație este mai apropiată de cea așteptată. Chiar dacă valorile sunt mai reduse în valoare absolută, variația acestora cu raza este mai accentuată pentru polii ce fac parte din lagăre cu un număr mai mare de poli și, în același timp, acești poli nu reprezintă poli marginali ai lagărului.

În continuare am analizat și comparat contribuția în forța axială de readucere pentru un pol, aflat în diferite situații. În figurile 4.3.11a, 4.3.11b și 4.3.11c este prezentată contribuția în forța de readucere a unui pol funcție de poziția pe care acesta o ocupă în cadrul lagărului. În figura 4.3.11a se poate observa că valoarea forței obținută pentru polul central este superioară forței medii pe pol ce se obține pentru întregul lagăr cu lichid magnetic analizat, cu cinci perechi de poli. Pentru polul marginal se obține o forță sensibil mai mică, chiar față de cazul polului din lagărul bipolar. Figurile 4.3.11b și 4.3.11c reflectă aceleași concluzii pentru polii

În figura 4.3.9. este prezentată situația care a stat la baza comparării câmpului ce se regăsește sub un pol, funcție de încadrarea sa în lagăr. Astfel,  $p_{11}$  este denumit polul ce face parte din lagărul cu o singură pereche de poli (fig.4.3.9a). Cu  $p_{k5}$  a fost notat polul ce ocupă poziția "k" în lagărul cu 5 perechi de poli. Deci polul  $p_{35}$ , de exemplu, este cel de-al treilea pol

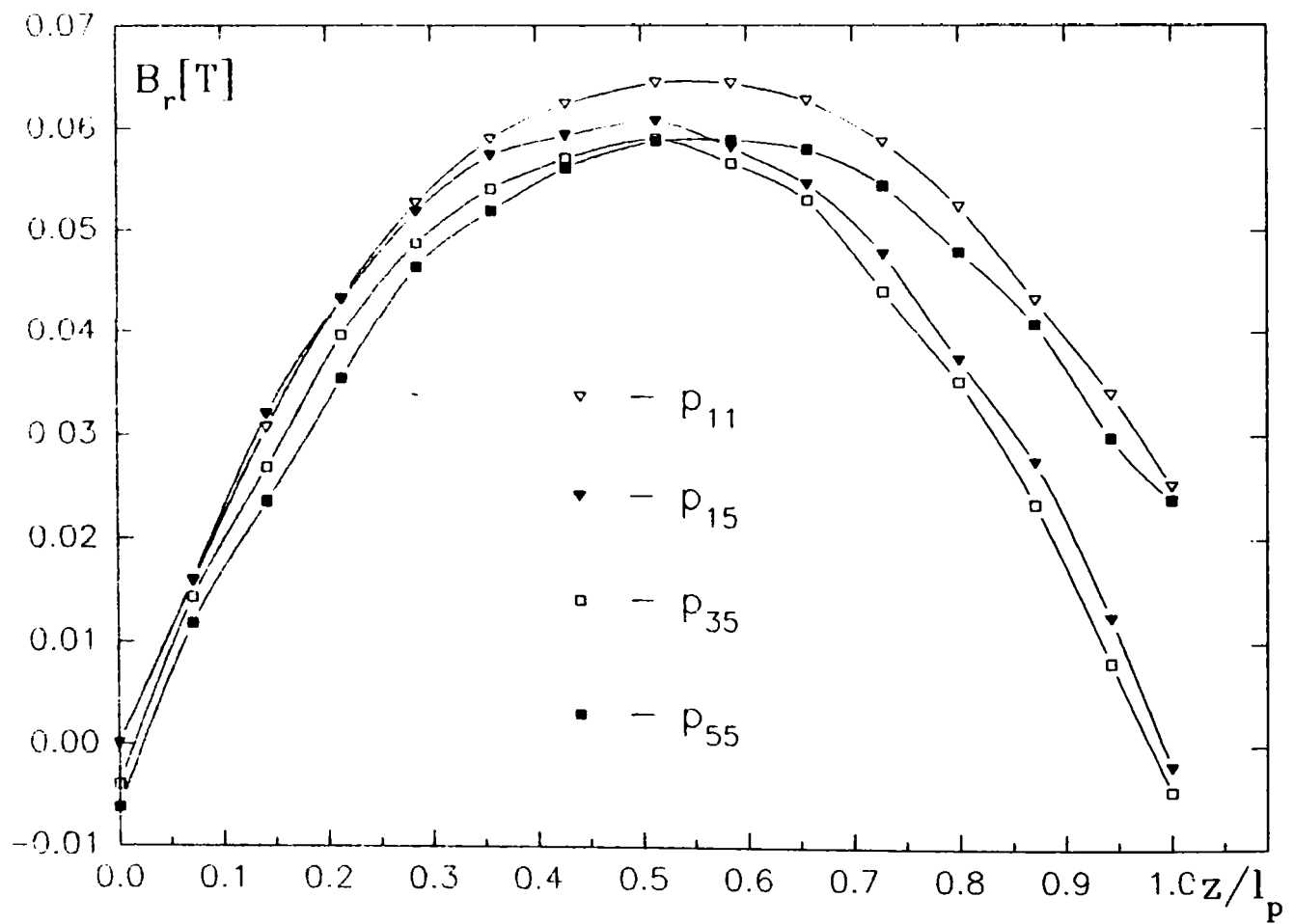
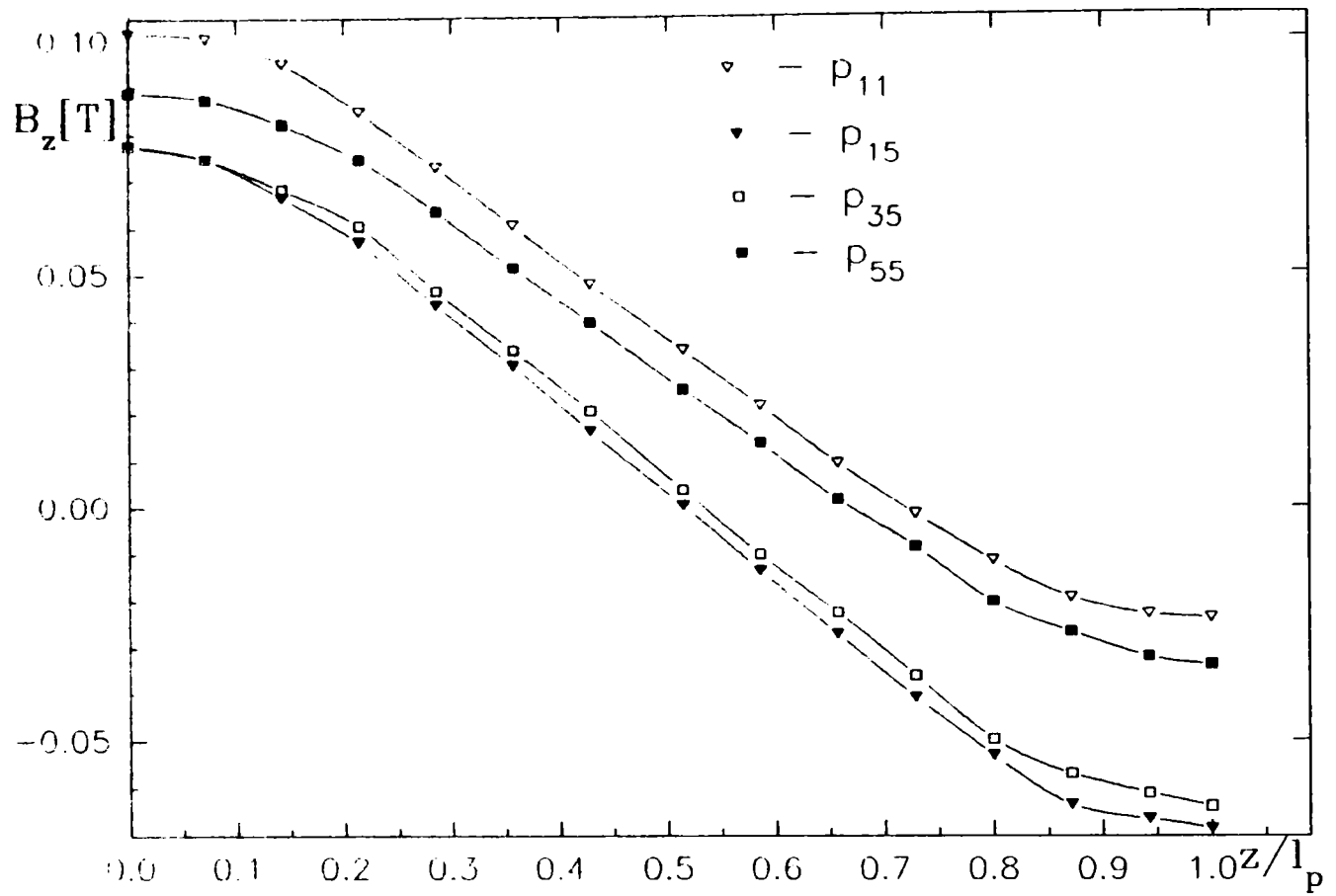


Figura 4.3.10.

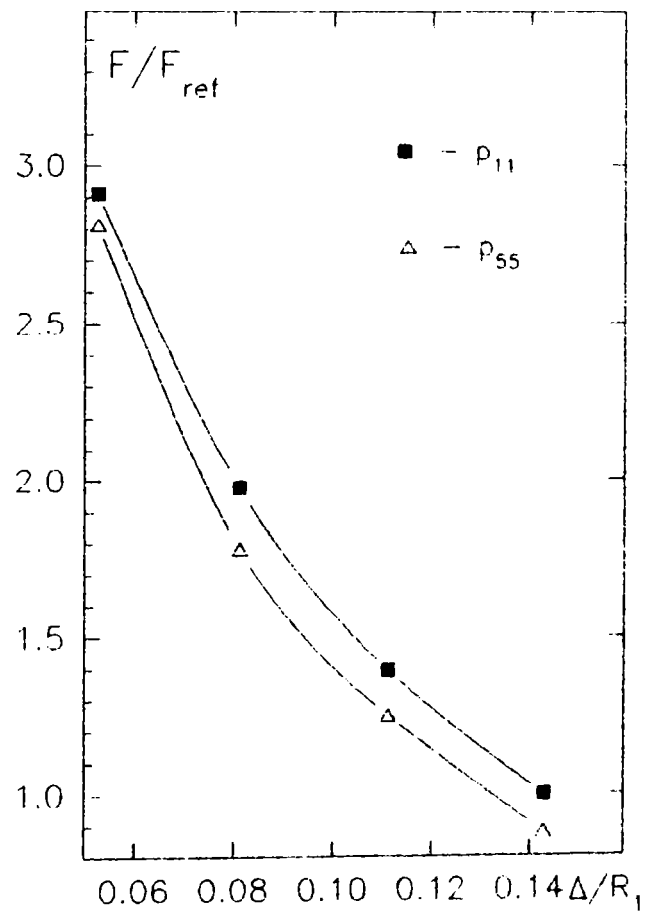
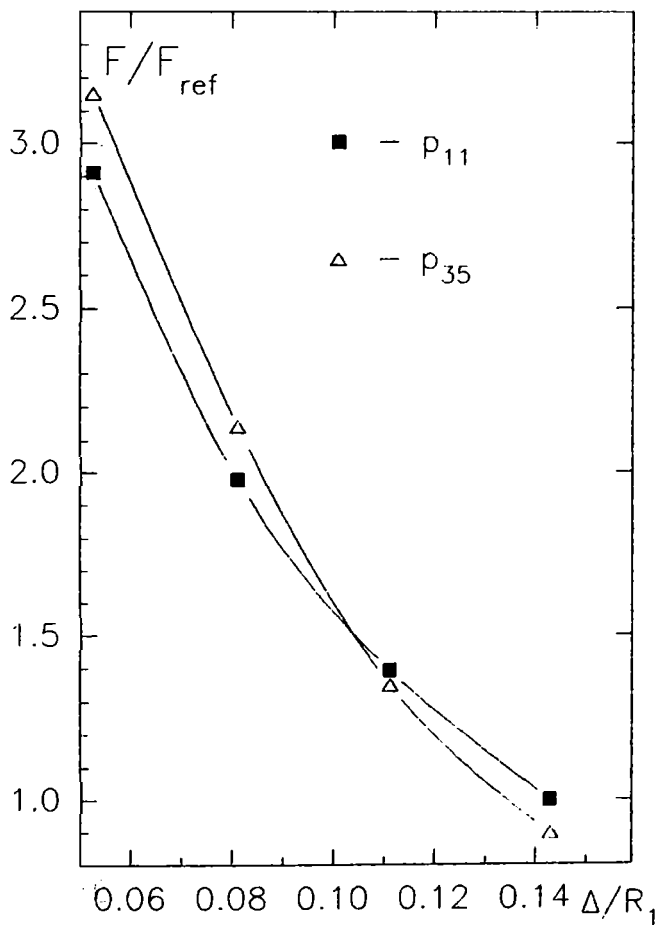
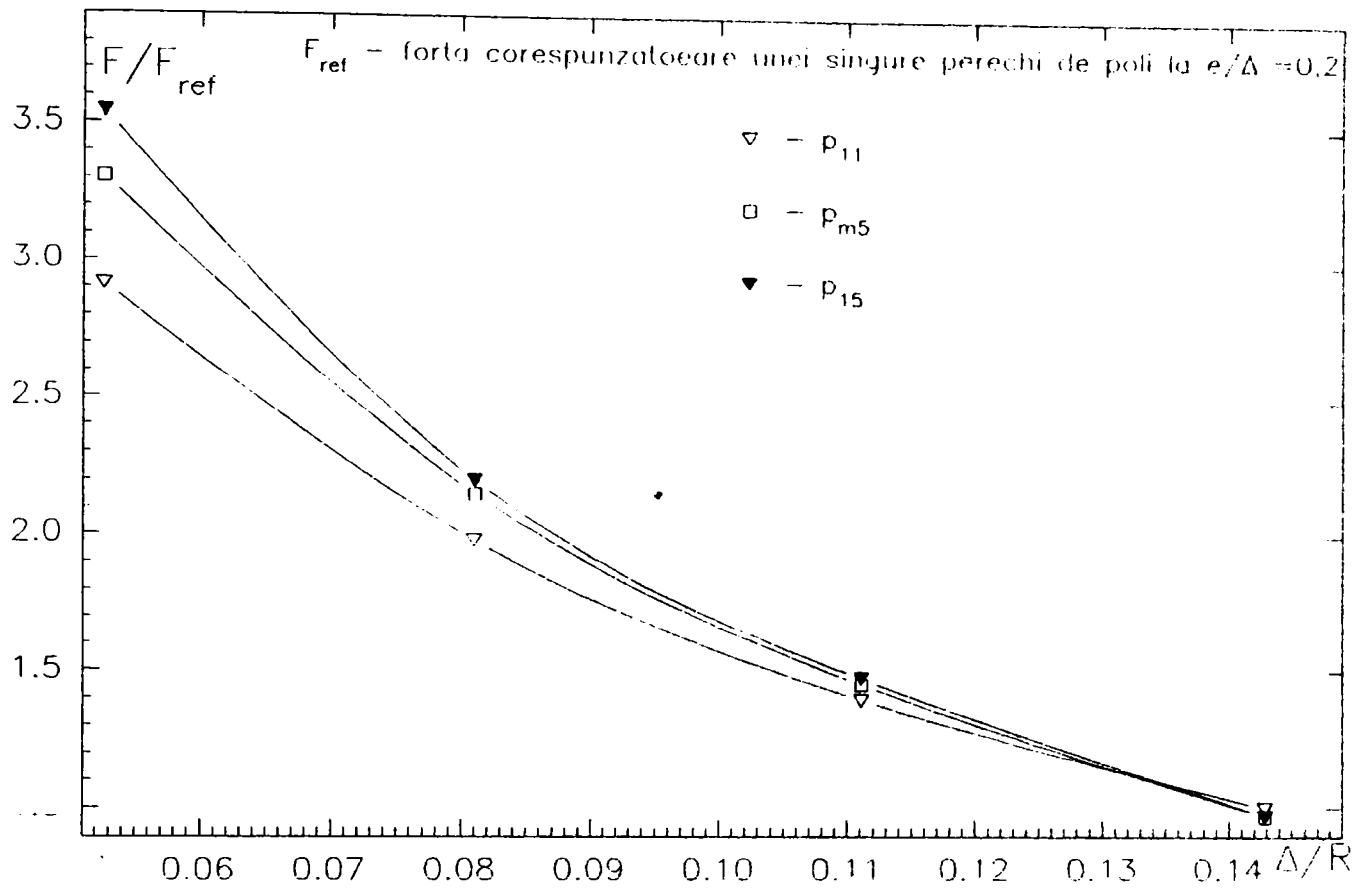


Figura 4.3.11.

marcați pe grafic. Se poate remarca faptul că poziția polului în cadrul lagărului influențează asupra formei de variație a componentelor câmpului și, implicit, asupra forței de readucere corespunzătoare porțiunii din lagăr cuprinsă între limitele de extensie a polului respectiv.

#### **4.4. Analiza influenței numărului de poli asupra forței de readucere**

În multe situații, din condiții tehnologice, se impune încadrarea lagărului cu lichid magnetic într-o dimensiune axială dată ( $2L$ ). Am modelat diverse situații de acest gen și am urmărit influența pe care o are numărul perechilor de poli ( $n$ ) ce se extind pe distanța considerată (menținută fixă).

##### **4.4.1. Interstițiu constant și număr variabil de perechi de poli**

Distanța între oricare doi magneți toroidali succesivi (interstițiul  $l_0$ ) este limitată la o valoare impusă, din considerente de fixare și rigidizare a magneților toroidali pentru a le menține coaxialitatea.

În cele ce urmează am lucrat cu o valoare  $l_0/R_2 = 0,4$ . Această valoare poate fi făcută și mai mică pentru lagăre de dimensiuni radiale importante ( $R_2$  mari).

În figurile 4.4.1a, 4.4.1b și 4.4.1c este sugerat modul de variație al dimensiunilor cu care am lucrat. Figura 4.4.1a corespunde la un lagăr cu lichid magnetic cu patru perechi de poli, iar situația din figura 4.4.1b corespunde la 2 perechi de poli. Figura 4.4.1c corespunde cazului general cu  $n$  perechi de poli cu polaritate alternantă; pentru magneții " $n-1$ " și " $n$ ", polaritatea depinde de faptul că  $n$  este par sau impar, dar oricum și polaritățile acestora sunt, respectiv, opuse.

În figura 4.4.1a s-a reprezentat jumătate din lungimea axială a lagărului, dar s-a reprezentat atât partea fixă ("satorul"), cât și partea mobilă ("rotorul"). Rotorul este deplasat din axa părții fixe cu o excentricitate  $e$ , marcată și ea în fig.4.4.1a.

La figurile 4.4.1b și 4.4.1c, reprezentarea s-a făcut numai pentru partea fixă a lagărului.

Pentru fiecare situație s-a rezolvat problema distribuției câmpului magnetic cu MEF. La aplicarea MEF pentru calcularea potențialului magnetic modificat  $U$ , am utilizat aceeași metodologie ca și cea prezentată în paragraful 3.1.1. (muchii rotunjite, păstrarea aceleiași discretizări (fină) în zona de interes în toate cazurile modelate și comparate între ele, considerentele de stabilire a limitelor domeniului modelat s.a.m.d.)

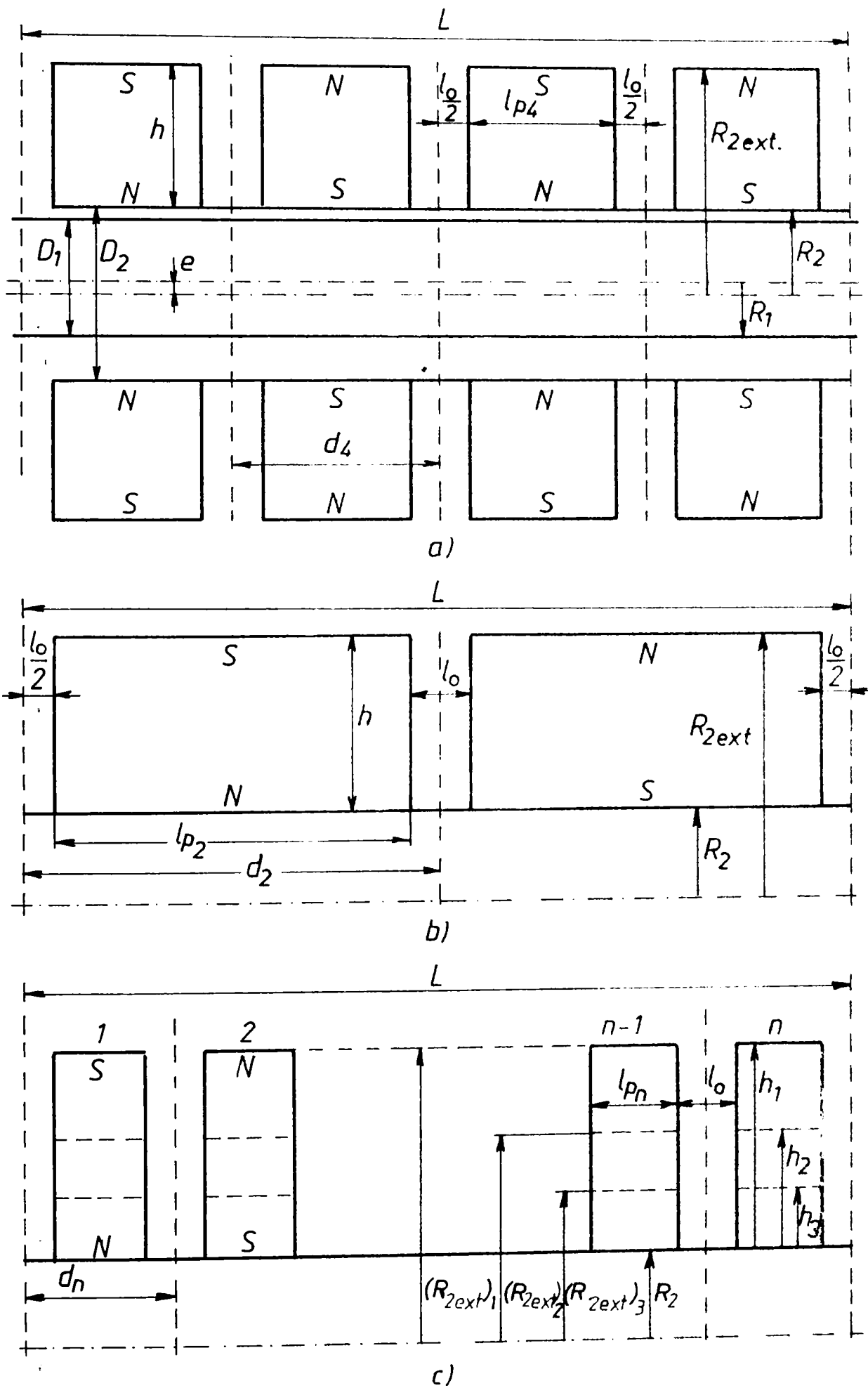


Figura 4.4.1.

Valorile componentelor inducției magnetice au fost calculate apoi pentru toate punctele aparținând unor generatoare ale suprafeței cilindrice imediat vecină rotorului deplasat din poziția de coaxialitate cu excentricitatea  $e$ . Pentru aceasta am aplicat cele prezentate în paragraful 3.4.

Apoi, cu valorile componentelor câmpului magnetic obținute tabelar s-a calculat forța de readucere ce acționează asupra axului. Metodologia de calcul este aceeași cu cea prezentată în ordinograma din figura 3.4.5.

Modelarea și calculele pentru determinarea forței axiale ce acționează asupra rotorului au fost efectuate pentru situații caracterizate de o excentricitate relativă  $e/R_2 = 0,05$ . Așa cum arată și figura 4.4.1c, calculele s-au făcut și pentru trei valori ale extensiei radiale a magneților toroidali, mărime notată cu  $h_i$  [ $h_i = (R_{2ext})_i - R_2$ ,  $i = 1, 2, 3$ ].

Notând cu  $l_{pn}$  lungimea polului în cazul acoperirii lungimii  $L$  prin  $n$  poli și cu  $d_n$  pasul polar corespunzător, rezultă:

$$L = n \cdot (l_0 + l_{pn}) \quad (4.4.1)$$

În acest fel, pentru fiecare din situațiile considerate, din valoarea impusă  $L$  și din cea aleasă pentru  $l_0$  rezultă  $l_p$ :

$$l_{pn} = \frac{L}{n} - l_0 \quad (4.4.2)$$

Rezultatele calculate pentru forțele de readucere au fost raportate la o valoare de referință, aceasta fiind în acest caz forța corespunzătoare situației cu 2 perechi de poli și extensie radială relativă,  $h/R_2 = 1,25$ . Calculele s-au făcut considerând sursa de câmp (magneții toroidali) fiind alcătuită din materialul magnetic idealizat,  $\mu_r = 1$  și  $M_p = 150$  kA/m, constant în modul și orientat pe direcția radială.

Se poate observa din rezultatele prezentate sub forma grafică în figura 4.4.2a faptul că o creștere a numărului perechilor de poli peste 4 - 5 conduce la o creștere mai redusă a forței de readucere, în condițiile specificate la început, și anume o extensie axială limitată, fixată, indiferent de numărul perechilor de poli, prin care aceasta lungime este acoperită. Peste 8 perechi de poli, în situația considerată, nu se mai obține o creștere a forței. În valori raportate, aceasta corespunde la  $l_p/R_2 \approx 3$ , așa cum se vede și din figura 4.4.2b. În figură se observă (ca și din graful din

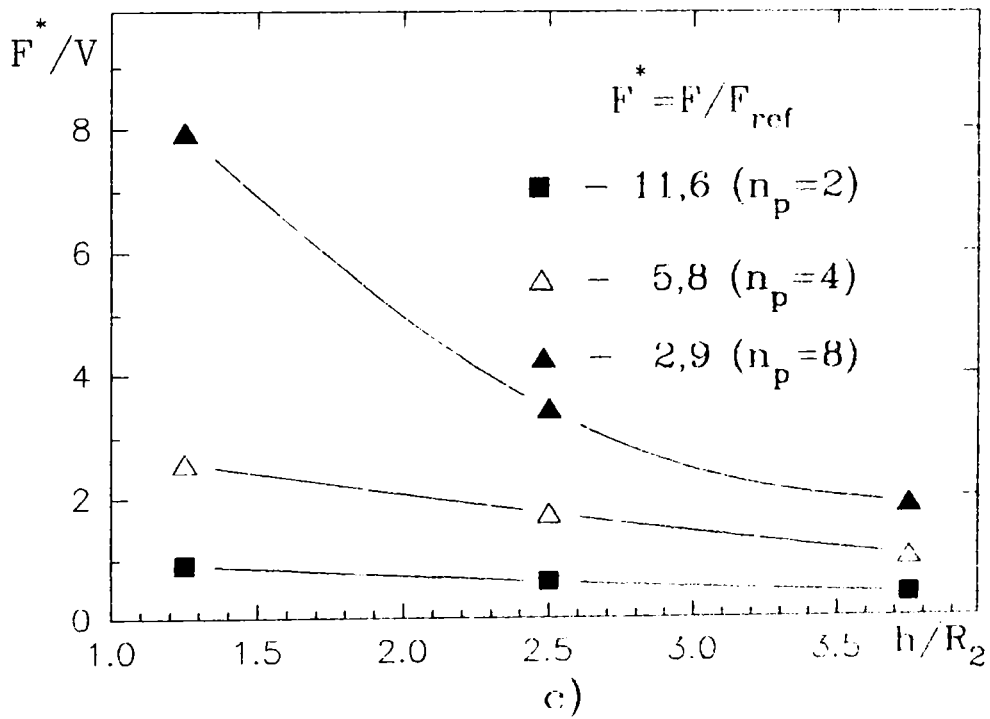
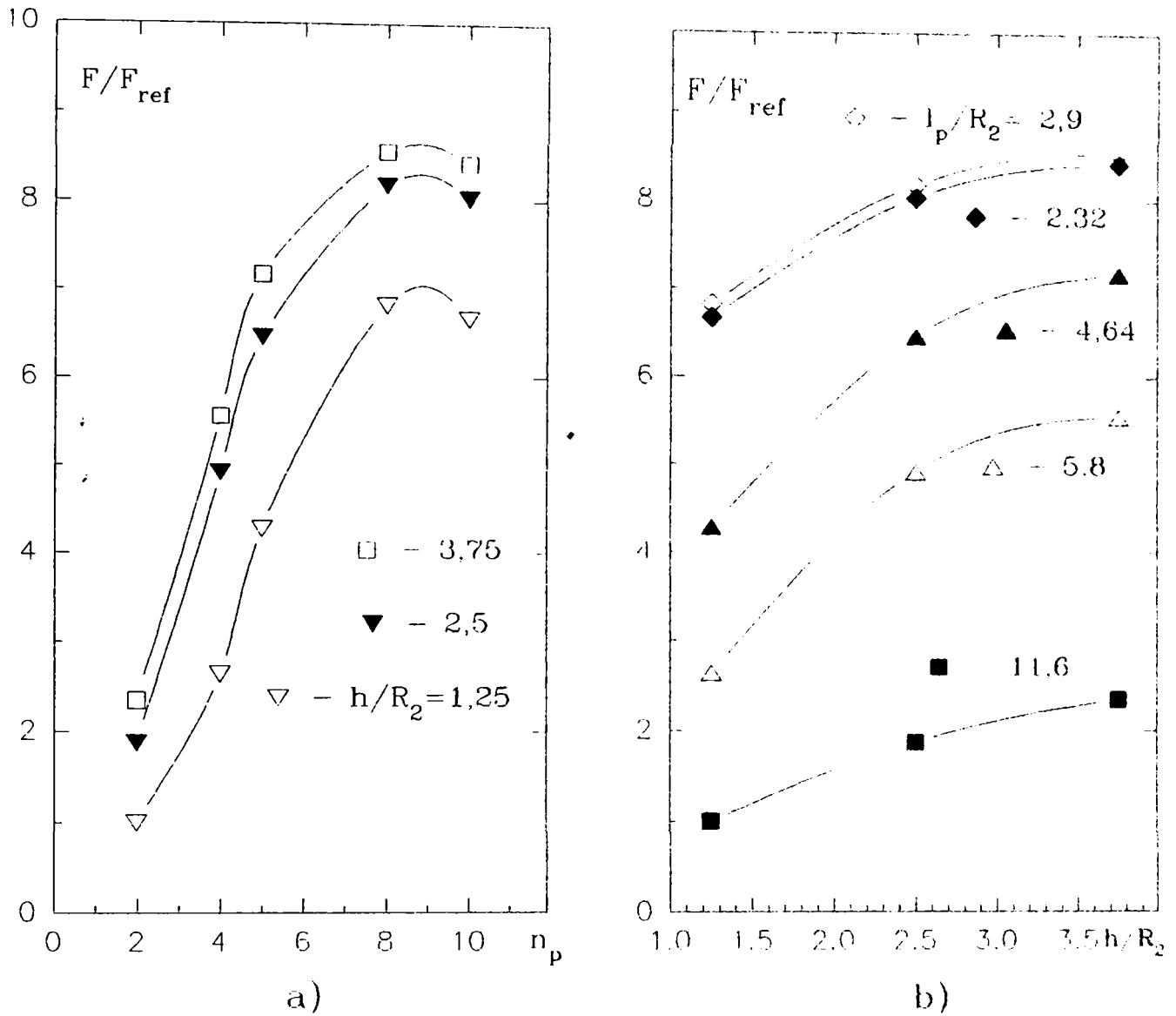


Figura 4.4.2.

figura 4.4.2a) faptul că o creștere a dimensiunii radiale relative ( $h/R_2$ ) peste 2,5 nu se justifică printr-un câștig semnificativ în forța de readucere, curbele aplatizându-se dincolo de această valoare.

În figura 4.4.2c este reprezentată forța specifică (relativă) raportată la unitatea de volum de material activ (magnet permanent). Pentru un număr mai mare de perechi de poli se obține o utilizare mai bună a materialului magnetic, cu mențiunea că realizarea unui număr mare de perechi de poli, într-o lungime dată ridică probleme tehnologice mai complicate prin dificultatea realizării unor discuri magnetice foarte subțiri, magnetizate radial. Oricum, această eficiență de utilizare scade (pentru fiecare caz în parte), la creșterea dimensiunii radiale a magnetului toroidal.

#### 4.4.2. Păstrarea proporției între lungimea activă și interstițiu

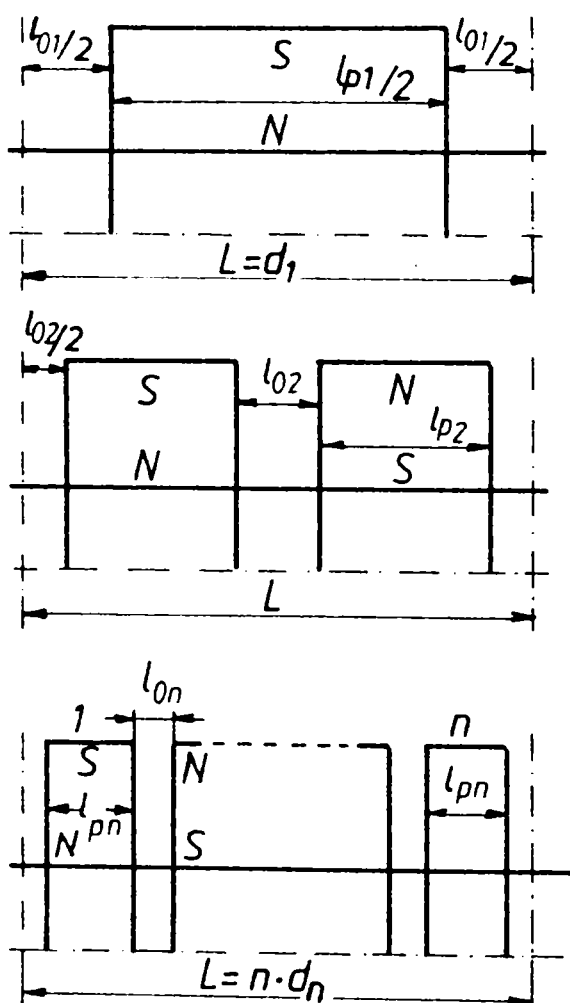


Figura 4.4.3.

În condițiile enunțate la începutul paragrafului 4.4., și anume că lungimea totală a lagărului tip sandwich se menține constantă ( $2L$  - impus de rațiuni tehnologice) și se modifică numărul perechilor de poli cu care se acoperă această lungime, am urmărit influența acestei modificări asupra forței axiale de readucere dacă se păstrează constantă proporția dimensiunilor pentru poli (pe direcție axială), indiferent de numărul acestora. În acest fel, desigur, interstițiul dintre doi poli succesivi devine variabil în funcție de numărul polilor.

$$\frac{l_{pk}}{l_o} = \text{constant} \quad , \quad k=1, \dots, n \quad (4.4.3)$$

În situația în care numărul polilor crește, pentru o aceeași extindere axială, pasul polar scade:

$$d_n = \frac{L}{n} ; \quad l_{on} + l_{pn} = d_n \quad (4.4.4)$$

În aceste cazuri, modelările au fost făcute pentru o excentricitate relativă



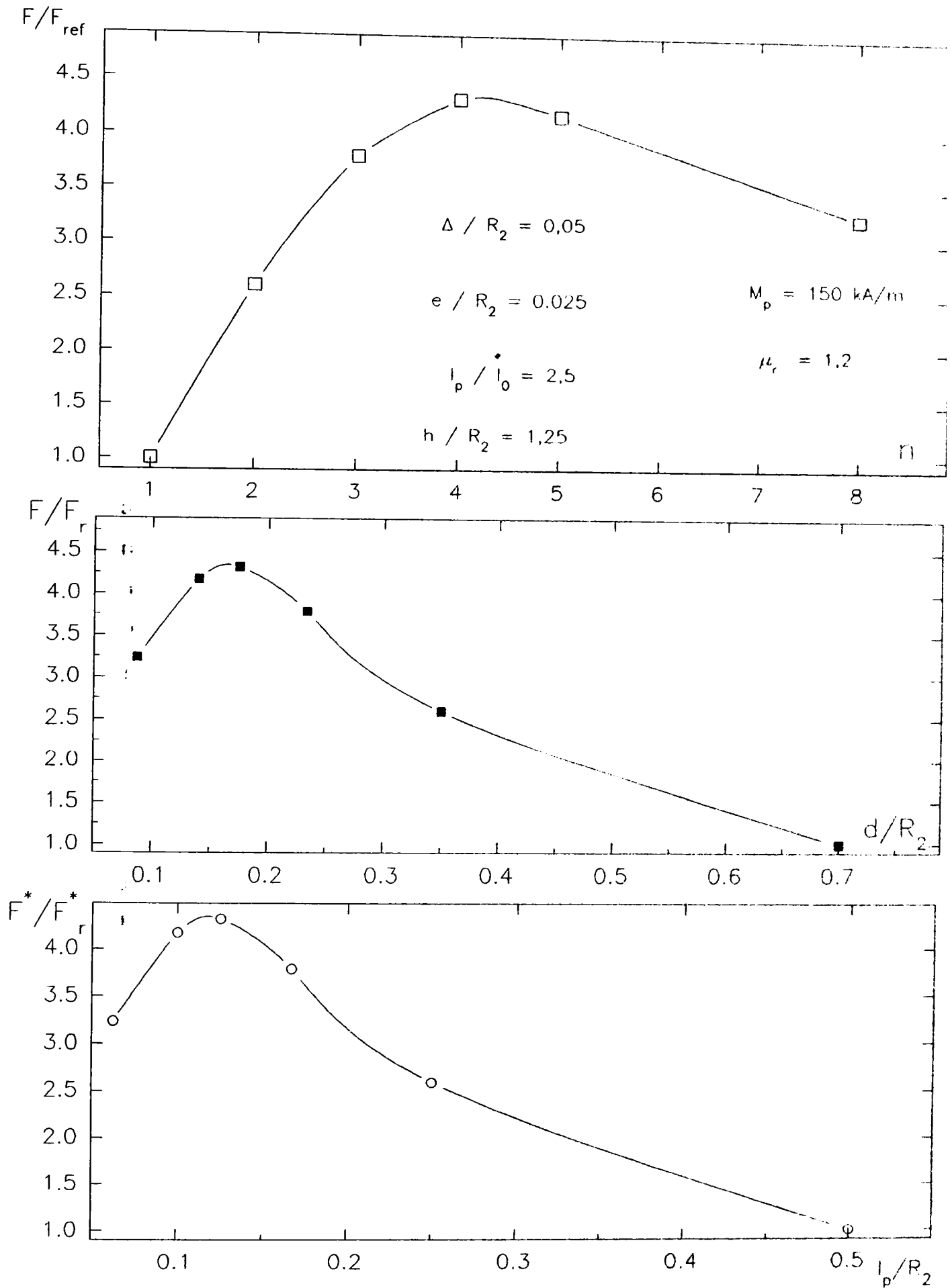


Figura 4.4.4.

$e/R_2 = 0,025$  față de o valoare maxim posibilă a acesteia de  $\Delta/R_2 = 0,05$  (când excentricitatea ar deveni  $\Delta = e_{\max} = R_2 - R_1$ ).

În graficele din figura 4.4.4. sunt prezentate câteva concluzii ale acestei analize. Forța de referință a fost aleasă forța ce corespunde acoperirii întregii lungimi a lagărului printr-o singură pereche de poli ( $n = 1$ ). Situația aleasă în modelare pentru raportul între dimensiunea axială a părții active ( $l_p$ ) și interstițiu ( $l_0$ ) a fost de 2,5.

Valoarea maximă a forței axiale de readucere se obține pentru un raport  $d/R_2$  de aproximativ 0,2. Aceasta corespunde, pentru situația modelată, unui număr de 4 perechi de poli. În graficul din figura 4.4.4c s-a pus în evidență și modul în care este utilizat materialul magnetic, calculându-se și forța specifică, pe unitatea de volum a materialului magnetic. Cum în această modelare, extinderea radială,  $R_{2\text{ext}} - R_{2\text{int}} = h$  a fost menținută constantă, prin păstrarea aceluiași raport  $l_p/l_0$ , și curba de dependență a forței păstrează aceeași alură ca și cea din figura 4.4.4b. Maximul se obține pentru  $l_p/R_2 \approx 0,15$ , ceea ce corespunde în situația dată la un număr de 4 - 5 perechi de poli.

#### 4.4.3. Influența numărului de poli identici asupra forței axiale de readucere

Prin situațiile modelate am urmărit efectul pe care îl are extinderea axială a lagărului asupra forței totale de readucere ce se manifestă în lagăr, precum și forța specifică pe pol, ce se obține prin adăugarea unui număr variabil de poli (perechi) identici. Pornind de la un lagăr ce conține o singură pereche de poli ( $k = 1$ ), se adaugă noi perechi de poli identice cu cele precedente.

În acest fel dimensiunea axială a lagărului crește liniar cu numărul perechilor de poli:

$$L_k = k(l_0 + l_p) ; k = 1, \dots, n \quad (4.4.5)$$

În această situație, am presupus ca există, tehnologic, spațiu suficient pentru o extindere axială dorită a lagărului. Adăugarea unei perechi suplimentare ( $k$ ) de magneți permanenți modifică spectrul câmpului magnetic față de situația anterioară, pe întreaga lungime a axului, inclusiv pe porțiunea în care existau ( $k-1$  perechi) magneți toroidali. Am investigat un număr variabil de perechi de poli ( $n = 1 \div 10$ ) și pentru fiecare  $n$  s-au investigat trei extinderi radiale ale magneților ( $h$ ).

Și în acest caz, pentru o mai mare generalitate, am lucrat cu mărimi raportate. Excentricitatea relativă pentru care am făcut calculul forței de readucere

axială a fost  $e/\Delta = 0,5$ , iar raportul  $R_1/R_2 = 0,9$ . Materialul magnetic și lichidul magnetic au fost păstrate cu aceleași caracteristici ca în situațiile anterior analizate.

În figura 4.4.5 sunt prezentate câteva rezultate ale acestei modelări.

Figura 4.4.5a prezintă valoarea forței obținută într-o situație dată, raportată la forța ce se obține pentru o singură pereche de poli ( $n = 1$ ), având o extindere radială relativă  $h/R_{2int} = 1,25$ . Aceasta din urmă forță a fost considerată forța de referință. Pentru simplificarea notațiilor, cu  $R_2$  a fost notată  $R_{2int}$ . Prin precizarea parametrului  $h$ ,  $R_{2ext}$  este precizată implicit.

Din analizarea celor trei curbe ale graficului 4.4.5a, se constată că variația (creșterea) forței este aproximativ liniară odată cu creșterea numărului de perechi de poli, așa cum era de așteptat. Fiind de dorit o forță axială de readucere cât mai mare se poate merge cu extinderea radială la limita maximă, tehnologic disponibilă. Și în această situație se poate constata că o extindere radială peste o anumită limită nu aduce un spor semnificativ în forță. Creșterea dimensiunii radiale a lagărului,  $h$ , nu este eficientă peste o anumită limită ( $h/R_2 \approx 2,5$ ), utilizarea materialului magnetic fiind neeconomică. Creșterea lui  $h$  determină o creștere pronunțată (patrică) a volumului de material magnetic, la un  $R_2$  dat (impus).

În figura 4.4.5b este reprezentată forța medie pe pol. A fost figurată și valoarea raportată a forței, în fiecare din cazurile analizate ( $h/R_2 = 1,25 ; 2,5 ; 3,75$ ), ca forță de referință alegându-se forța corespunzătoare unui singure perechi de poli din cazul respectiv. În acest fel, cele trei curbe pleacă toate din punctul (1;1).

Forța specifică pe pol este maximă pentru  $n = 2$ . Este un rezultat așteptat, pentru că în cazul unei singure perechi de poli, efectul de capăt ce apare la polii marginali se manifestă în totalitate la singurul magnet prezent pe semilungimea  $L$  a lagărului. Peste un număr de 4 - 5 perechi de poli, forța specifică pe pol se păstrează aproximativ constantă. Atât efectul de capăt (ce devine repartizat asupra unui număr mai mare de poli), cât și adăugarea unei noi perechi de poli influențează mai puțin distribuția câmpului din situația anterioară.

În figura 4.4.5c este urmărită contribuția porțiunii ( de lungime axială  $d$  ) aflată sub un anumit pol în forța totală de readucere axială a lagărului. Trebuie menționat că aceasta nu reprezintă, desigur, contribuția polului respectiv în forță, dar dă o imagine privind contribuția zonală în realizarea forței totale. Au fost

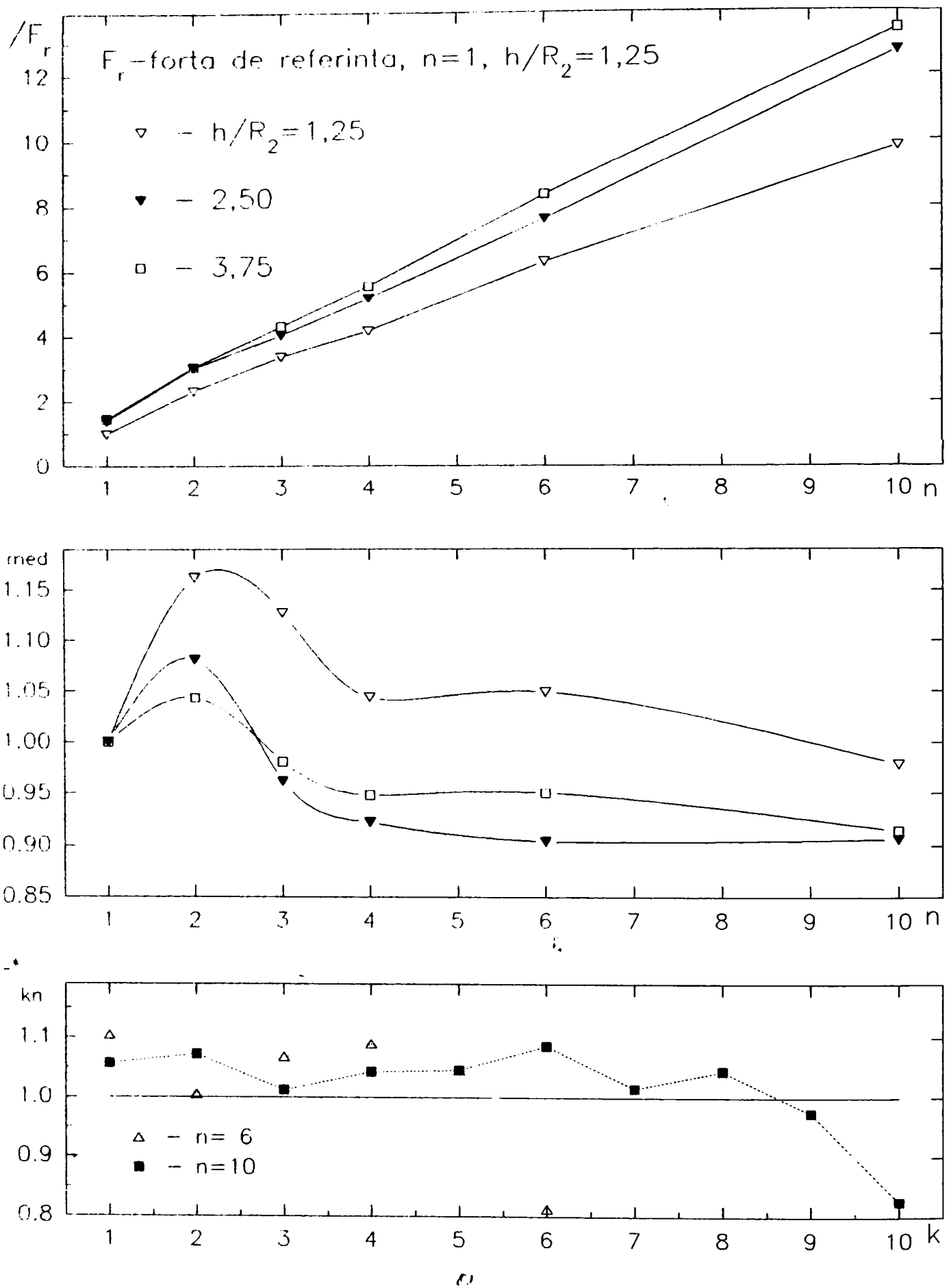


Figura 4.4.5.

reprezentate două cazuri: pentru un număr  $n = 6$  perechi de poli prezenți în lagăr și, respectiv, pentru  $n = 10$  perechi de poli. Punctele corespunzătoare zonei aflate sub polul  $k$  din cei  $n$  sunt marcate pe axa absciselor. Reprezentarea s-a făcut în valori raportate, ca referință luându-se forța  $F_{m,n}$  (forța medie pe pol în cazul când sunt folosite  $n$  perechi de poli pentru realizarea lagărului). În acest fel, valoarea 1 este folosibilă ca referință pentru ambele reprezentări grafice. Pentru toate porțiunile (mai puțin cea aflată sub polul marginal) se obțin contribuții de ordinul de mărime al forței medii, cu ceva mai mari decât aceasta. Pentru polul marginal la care se manifestă efectul de capat, contribuția porțiunii subîntinse este cu cca. 20% mai mică decât forța medie pe pol din cazul respectiv. Câmpul sub un pol (și implicit și contribuția porțiunii respective în forța totală) este influențat atât de numărul total al polilor ce alcătuiesc lagărul, cât și de poziția relativă pe care polul respectiv o deține în cadrul ansamblului de tip "sandwich".

#### **4.5. Influența tipurilor de magneți permanenți asupra performanțelor lagărelor cu poli alternanți**

##### **4.5.1. Metodologia de lucru**

Pentru a investiga și influența proprietăților de material ale magneților permanenți utilizați am urmărit, pentru un caz geometric dat, cum se modifică spectrul câmpului magnetic prin utilizarea diferitelor tipuri de magneți permanenți.

Ca situație de referință am ales un lagăr tip "sandwich", cu poli alternanți, la care sursa de câmp o reprezintă magneți de formă toroidală, cu magnetizația permanentă radială și constantă în modul. Acest tip de material magnetic a fost denumit magnet permanent idealizat, utilizat de altfel și în unele din cazurile anterior modelate și calculate, pentru care  $M_p = 150$  kA/m și  $\mu_r = 1$ . Pentru a compara soluțiile de câmp ( $B$ ,  $B_z$  și  $B_r$ ) și apoi a evalua performanțele ce se obțin, cu cele corespunzătoare lagărului echipat cu magneți permanenți confecționați din materialul magnetic de referință, s-au utilizat mai multe materiale magnetice ale căror proprietăți au fost preluate din catalog [Po1]. Curbele de demagnetizare pentru materialele utilizate sunt prezentate în figura 4.5.1.

Lagărul de tip sandwich analizat are următoarele caracteristici:

- numărul perechilor de poli:  $n = 4$

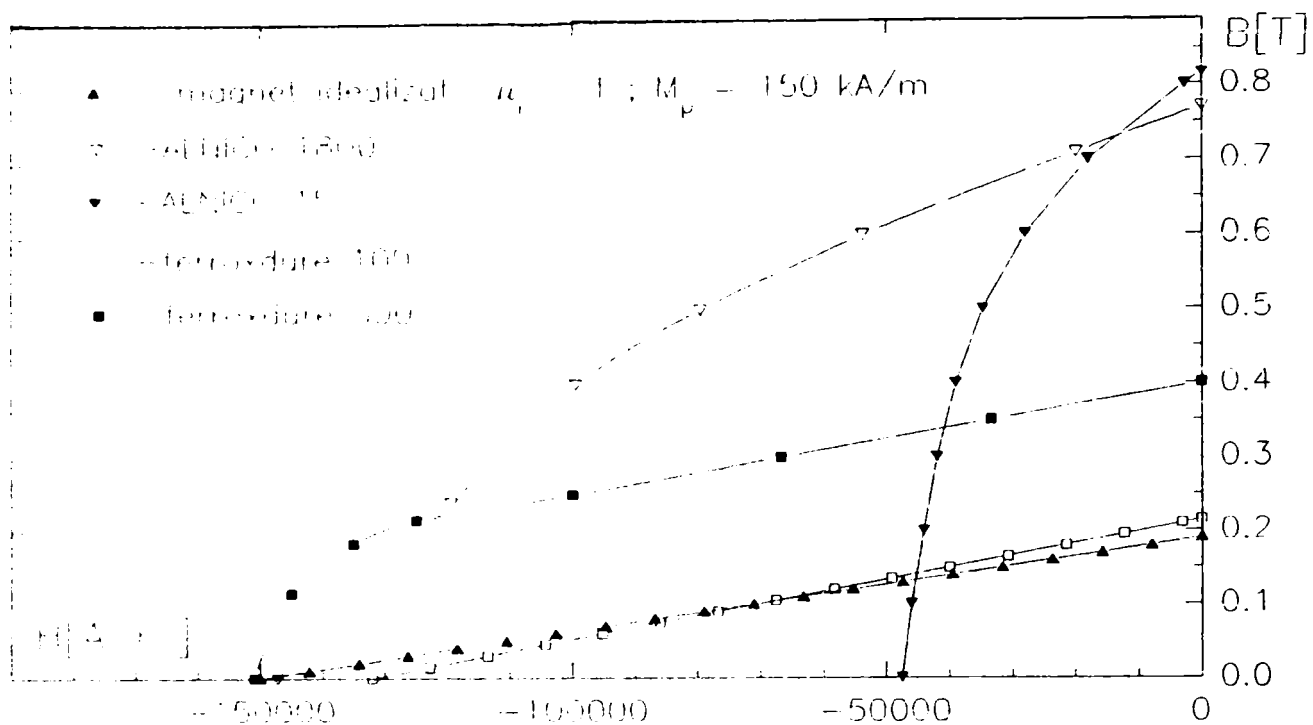


Figura 4.5.1.

- proporțiile dimensiunilor geometrice sunt:

$$l_p / R_2 = 2,8$$

$$h / R_2 = 2, \text{ în care } h = R_{2\text{ext}} - R_2 \quad (4.5.1)$$

$$l_0 / l_p = 0,138$$

Lichidul magnetic a fost considerat liniar în tot domeniul de utilizare, în toate cazurile modelate. Am urmărit influența tipului de material magnetic din care este alcătuit magnetul permanent asupra formei de variație a curbelor ce reprezintă componentele câmpului magnetic în lungul lagărului. Am urmărit, de asemenea și felul în care aceste curbe se modifică pentru diferite distanțe față de axa de simetrie a lagărului. Pentru modelare am avut în vedere o excentricitate  $e/R_2 = 0,05$  față de o excentricitate maxim posibilă, în cazul modelat,  $\Delta/R_2 = 0,1$ .

Modul în care au fost alese materialele magnetice pentru analiza și compararea performanțelor, a fost următorul:

- materialul ferroxidure 100 a fost ales pentru că este un material magnetic cu  $\mu_r$  apropiat de 1 ( $\mu_r = 1,26$ ) și constant, iar câmpul său coercitiv,  $H_c = -132$  kA/m, are o valoare destul de apropiată de cei 150 kA/m, situație avută în vedere la cazul magnetului idealizat ( $\mu_r = 1$ ).

- materialul ferroxidure 300 are un câmp coercitiv practic egal cu cel al materialului magnetic de referință ( $H_c = 151000$  A/m), dar  $\mu_r \approx 1$  doar pentru valori ale

inducției magnetice  $B$  mai mari de  $0,25\text{ T}$ ; în domeniul de lucru, la valori reduse ale inducției magnetice, acest tip de material magnetic prezintă o neliniaritate pronunțată.

- materialul ALNICO 1800 (  $1840\text{ Oe}$  ) este un material magnetic a cărui curba de demagnetizare este caracterizată de  $H_c = 147220\text{ A/m}$  și  $B_r = 0,77\text{ T}$ .

- materialul ALNICO 15 (  $550\text{ Oe}$  ) este un material cu o inducție magnetică remanentă  $B_r$  apropiată de valoarea celei caracteristice pentru materialul ALNICO 1800 ( $B_r = 0,816\text{ T}$ ), dar cu un câmp coercitiv sensibil mai mic ( $H_c = -47500\text{ A/m}$ ).

Pentru soluționarea numerică a distribuției câmpului magnetic a fost utilizată MEF2D, conform metodologiei prezentate în paragrafele 3.4 și 4.4.

Caracteristicile neliniare ale materialelor magnetice au fost introduse în program, astfel încât calculele de determinare a potențialului magnetic modificat cuprind de data aceasta două cicluri iterative, cel exterior fiind datorat modificării succesive a permeabilității magnetice.

Din valorile potențialului magnetic modificat se obțin componentele inducției magnetice,  $B_r$  și  $B_z$  și apoi prin calcule, așa cum a fost precizat anterior (paragraful 4.4.), se poate obține forța axială de readucere, corespunzătoare unei anumite excentricități, la geometria lagărului luată în considerare.

#### **4.5.2. Analiza comparativă a câmpului magnetic pentru lagărul tip "sandwich" realizat cu diferite materiale magnetice**

Compararea performanțelor ce se obțin pentru diferite tipuri de materiale magnetice am făcut-o pentru cazul unui lagăr cu lichid magnetic având 4 perechi de poli. Curbele ce prezintă forma de variație a câmpului magnetic, în valori raportate  $B/B_{ref}$ , pentru materialele magnetice utilizate în modelare, este prezentată în figura 4.5.2. Se observă că, deși au aproximativ aceeași alură, valorile câmpului magnetic diferă mult în funcție de materialul magnetic utilizat pentru confecționarea magneților toroidali ce realizează statorul lagărului tip "sandwich".

Reprezentarea s-a făcut pentru o jumătate ( $L = 4d$ ) din lungimea axială ( $2L$ ) a lagărului cu patru perechi de poli.

Pe axa absciselor a fost utilizată o marime raportată,  $z/d$ , în care  $z$  reprezintă distanța până la planul de simetrie al lagărului. Valorilor întregi ale acestei variabile îi corespund puncte situate la o departare de planul median al lagărului egală cu un

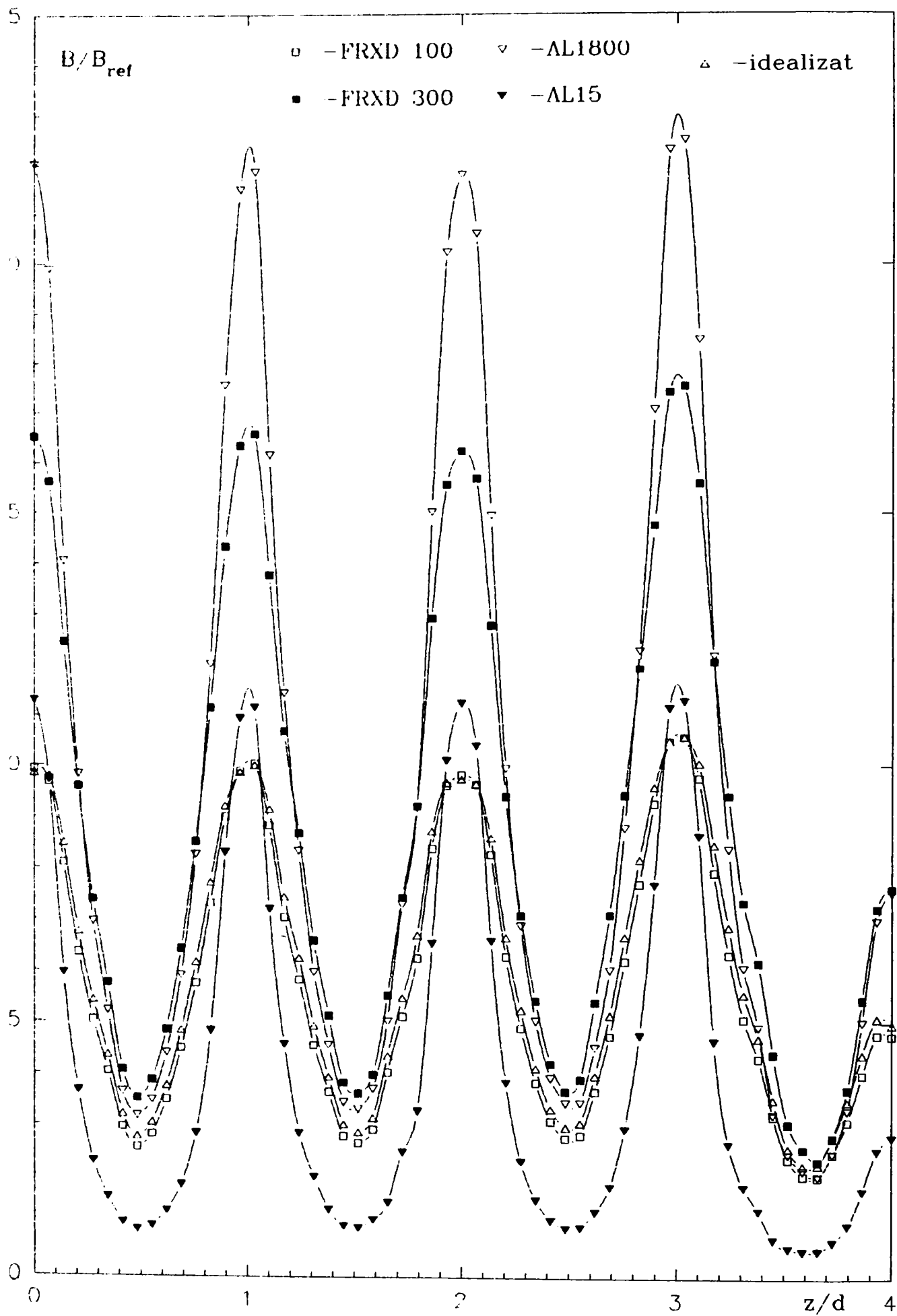


Figura 4.5.2.



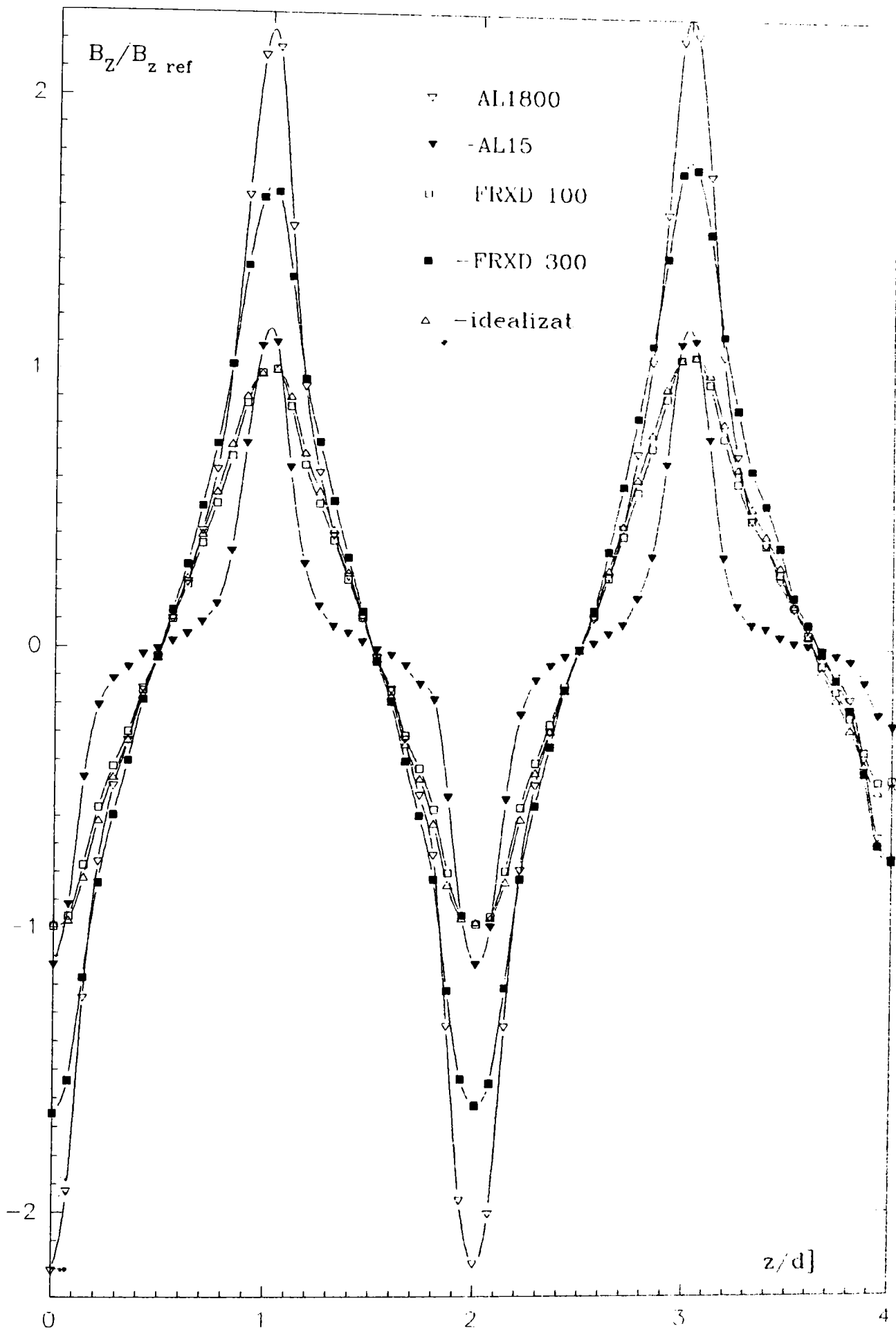


Figura 4.5.3.

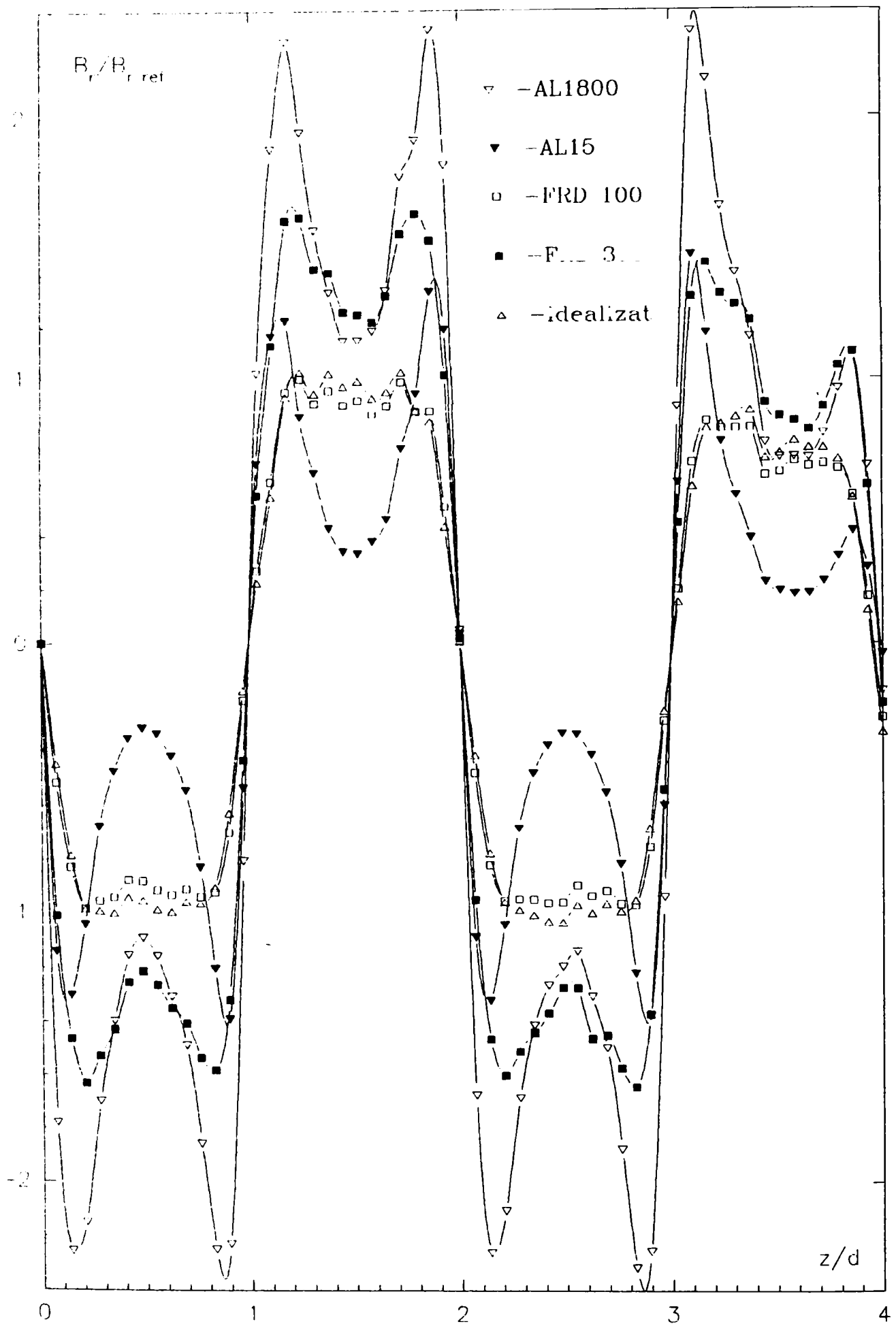


Figura 4.5.4.

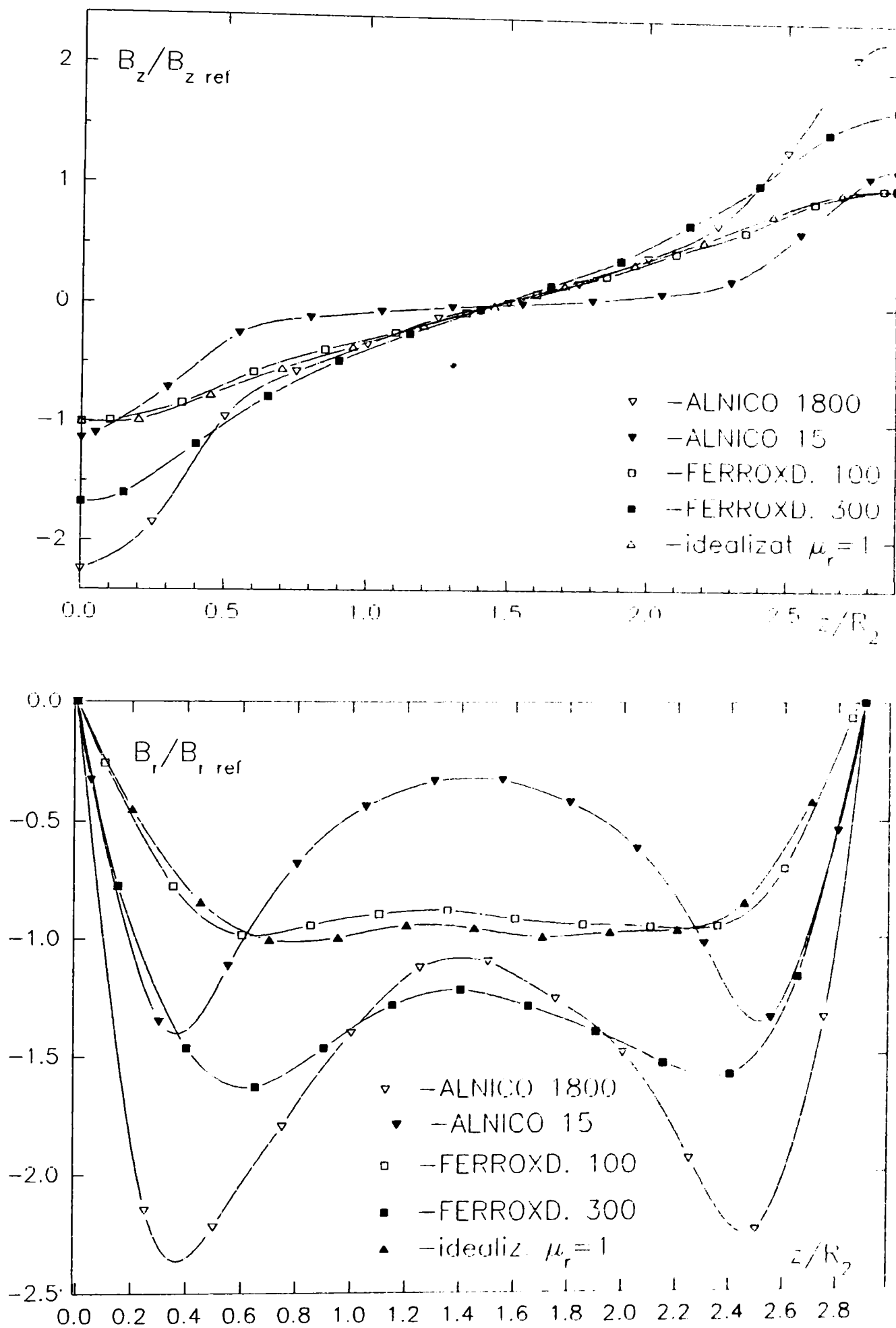


Figura 4.5.5.

număr întreg de lungimi polare. Reprezentarea s-a făcut pentru o distanță relativă față de axa lagărului,  $r/R_2 = 0,8$ . Valoarea  $B_{r,ref}$  reprezintă cea mai mare valoare a inducției magnetice realizată pe intervalul  $0 < z < d$ , cu magneți alcătuiți din materialul idealizat ( $M_p = 150 \text{ kA/m}$ , radială, și  $\mu_r = 1$ ).

Figurile 4.5.3 și 4.5.4 prezintă, tot pe o lungime egala cu  $L$ , situația în valori raportate a componentelor  $B_z/B_{z,ref}$  și  $B_r/B_{r,ref}$ . Valorile luate ca referință ( $B_{z,ref}$  și  $B_{r,ref}$ ) corespund valorilor maxime ale componentelor câmpului magnetic ce se realizează pe prima lungime polară,  $d$  ( $p_{1,4}$ ), în cazul magnetului idealizat (referință). Este evidențiat efectul de capăt ce se manifestă la polii marginali, indiferent de tipul de material folosit. Pentru o mai bună urmărire a diferențelor ce apar între câmpurile produse de diferitele materiale magnetice utilizate, în figura 4.5.5 se prezintă, mai în detaliu, formele de variație ale componentelor (raportate) ale câmpului magnetic, sub un singur pol.

Din analizarea acestor reprezentări grafice se pot trage câteva concluzii referitoare la felul în care diferitele tipuri de magneți permanenți utilizați produc câmp magnetic, într-o aceeași configurație geometrică, de tip "sandwich" cu poli alternanți. Pentru figurile 4.5.2. - 4.5.5., formele de variație ale mărimilor reprezentate corespund unei distanțe relative față de axul lagărului,  $r/R_2 = 0,8$ . La această distanță relativă, pentru configurația geometrică modelată, se poate observa că forma de variație sinusoidală (pentru  $B_r$ , implicit și pentru  $B_r/B_{r,ref}$ ) și, respectiv cea cosinusoidală (pentru  $B_z/B_{z,ref}$ ) nu sunt îndeplinite. În literatură se acceptă o formă de tip sinusoidal pentru aceste mărimi la suprafața interioară a magneților toroidali ce alcătuiesc statorul lagărului, dacă numărul perechilor de poli este mare, și în plus, presupunând o extensie infinită (teoretic) pe direcție radială a acestora ( $h \rightarrow \infty$ ).

Revenind la figurile 4.5.2 - 4.5.5, se mai pot face câteva observații. Materialele magnetice cu  $\mu_r$  constant, ferroxdure 100 și magnetul idealizat, conduc la forme de variație line în lungul lagărului, cu o alură ce se apropie de o formă de variație cosinusoidală și, respectiv, sinusoidală, atât pentru valorile raportate ale lui  $B_z$  cât și pentru cele ale lui  $B_r$ .

Pentru materialul ferroxdure 300 variația sub pol este mai accentuată, pentru  $B_r/B_{r,ref}$  având loc o scădere importantă a valorii sale în zona centrală a polului, iar pentru  $B_z/B_{z,ref}$  variația este mai accentuată, dar pastrează o alură asemănătoare

celelalte obținute pentru materialele cu  $\mu$ , apropiat sau egal cu unu.

Pentru materialele de tip ALNICO variațiile au loc între limite mai largi decât pentru celelalte tipuri de materiale magnetice. Pentru mărimea raportată  $B_r/B_{r,ref}$ , scăderea valorii (comparată cu cea pentru  $B_z/B_{z,ref}$ ), în zona centrală a polului, este foarte pronunțată. Rezultă astfel două extreme locale pentru zonele corespunzătoare trecerii de la pol magnetic la interstițiul dintre poli, și invers, la trecerea de la interstițiu la pol. Componenta axială este caracterizată de vârfuri foarte pronunțate în zonele interstițiilor dintre poli și, de asemenea, în zona centrală a fiecărui pol valoarea lui  $B_z/B_{z,ref}$  este foarte redusă, apropiată de 0, în special pentru ALNICO 15. Aici ies cel mai puternic în evidență diferențele între caracteristicile magnetice ale celor două materiale ALNICO.

În figurile 4.5.5a și 4.5.5b sunt reprezentate, comparativ, valorile componentelor inducției magnetice sub unul din polii centrali ai lagărului ( $p_{1,4}$  conform notațiilor din paragraful 4.3.3.). În fiecare figură, așa cum rezultă și din legendă, este făcută reprezentarea pentru materialele investigate. Pentru fiecare din materialele utilizate sunt reprezentate (pe un același grafic),  $B_z/B_{z,ref}$  și respectiv,  $B_r/B_{r,ref}$ , corespunzătoare unei excentricități relative  $e/R_2 = 0,05$  și pentru punctele de pe generatoarea suprafeței laterale a axului, puncte situate la distanța minimă de axa lagărului,  $r = R_2 - e$ .

Dacă pentru magnetul de referință și pentru materialul ferroxdure 100 (apropiat prin caracteristici de cel idealizat), curbele obținute, atât pentru componenta radială cât și pentru cea axială, sunt foarte apropiate, pentru celelalte materiale se poate observa o îndepărtare pronunțată față de caracteristicile celor două materiale (liniare). În compararea forței axiale de centrare ce acționează asupra rotorului lagărului nu influențează, în mod special, forma acestor curbe în sine. Contează mai ales felul în care are loc variația componentelor inducției magnetice pentru diferite distanțe față de ax, pornind de la cea minimă ( $r_{min} = R_2 - e$ ) și până la cea maximă ( $r_{max} = R_2 + e$ ). Așa cum s-a arătat în paragraful 4.4. la prezentarea metodei de integrare, aceste distanțe corespund la  $r_1$  și, respectiv  $r_n$ .

În orice secțiune perpendiculară pe axa lagărului ne situăm, contribuția unei porțiuni de extindere axială (infinitesimală)  $dl$  se poate calcula, așa cum am prezentat în paragraful 4.4., efectuând integrarea expresiei forței întâi după  $\theta$ , pe periferia incintei cilindrice a lagărului (de raza  $R_2$ ). Se obține astfel forța ce

acționează asupra încălțete suprafața cilindrică interioară a statorului lagărului), pe o lungime axială  $dl$ . Această forță este egală și de sens contrar cu forța magnetică de centrare axială ce acționează în direcția radială (a excentricității) asupra axului lagărului, pentru aceeași lungime  $dl$ . În continuare se efectuează integrala după direcția axei  $Oz$  (paragraful 4.4.) și se obține forța totală în direcție radială (a excentricității) ce acționează asupra axului lagărului.

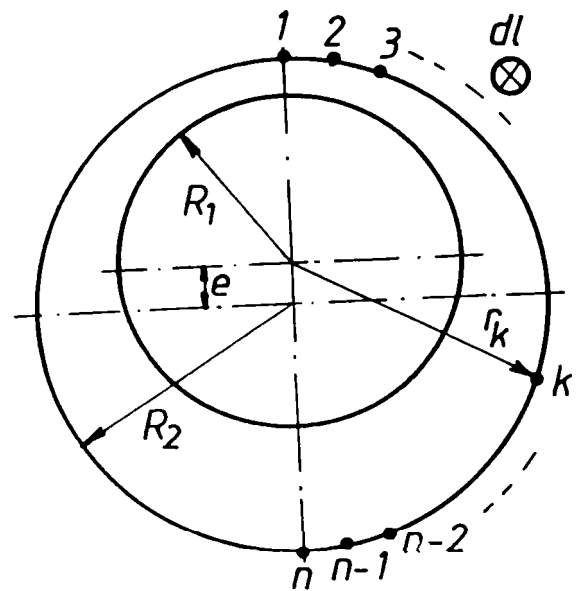


Figura 4.5.6.

Contribuția unei suprafețe elementare, cuprinsă între punctele  $k$  și  $k+1$ , cu  $k = 1, \dots, n$  (figura 4.5.6), este diferită în forța totală, în funcție de poziția pe periferia axului lagărului. Astfel, pentru suprafața cuprinsă între punctele notate cu 1 și 2 în figura 4.5.6, contribuția este maximă și orientată în sens contrar față de excentricitate. Va exista un punct  $k$  situat pe periferia axului, pentru care contribuția porțiunilor din jurul său este nulă (se compensează) și apoi, pe măsură ce ne apropiem de punctul  $n$ , contribuția este contrară ca sens celei corespunzătoare punctelor  $1, 2, \dots, k$ . Pentru suprafața delimitată de punctele  $n-1$  și  $n$  (și de extindere axială  $dl$ ) contribuția este maximă, în valoare absolută, și orientată în sensul excentricității.

Fără a reprezenta o măsură directă a forței obținute ca și contribuție în forța de readucere corespunzătoare cilindrului infinitezimal de extindere  $dl$  în lungul axului lagărului, totuși diferența între valorile componentelor câmpului corespunzătoare distanței minime ( $r_1 = R_2 - e$ ) și cele corespunzătoare distanței maxime ( $r_n = R_2 + e$ ) reprezintă un indicator privind forța de readucere. Din acest motiv consider că prezintă interes reprezentarea, comparativ, pe câte un același grafic, pentru fiecare material utilizat în modelare, a componentelor  $B_z/B_{z,ref}$  și, respectiv,  $B_r/B_{r,ref}$ , corespunzătoare distanței minime  $r_1 = R_2 - e$  precum și distanței maxime  $r_n = R_2 + e$ .

În figurile 4.5.7a și 4.5.7b este reprezentată, pentru cazul materialului magnetic de referință (idealizat), variația componentelor inducției magnetice sub un pol central funcție de distanța relativă ( $z/d$ ) față de planul de simetrie al lagărului.

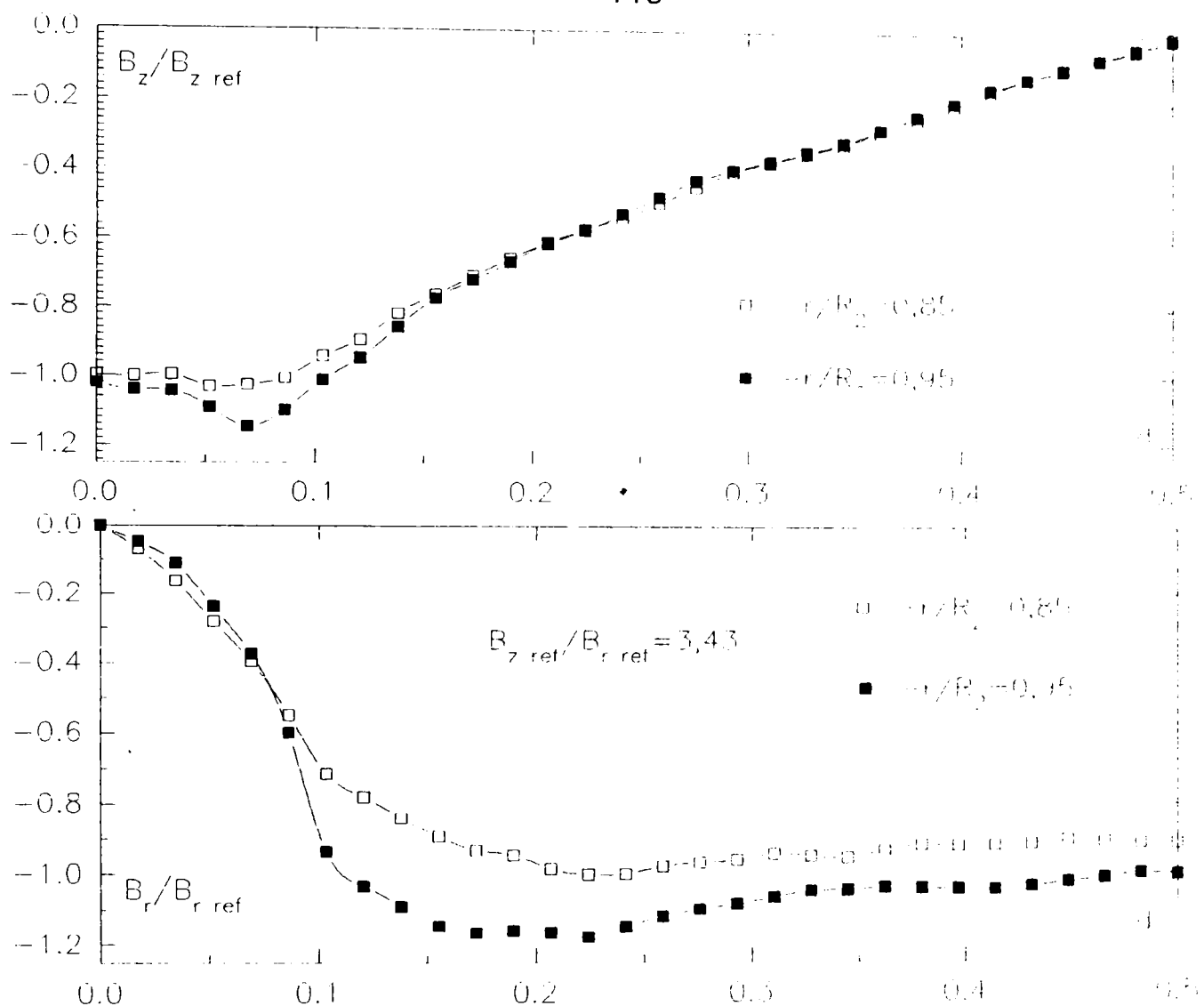


Figura 4.5.7.

Reprezentarea este făcută pentru  $r_1$  și  $r_n$ , distanțele minimă și maximă față de axă, fapt ce este marcat în legendă. Graficele se rezumă la investigarea unei jumătăți a primului pol. Pentru componenta axială maximă, diferența ce se obține corespunde interstițiului dintre poli; sub pol valorile pentru cele două raze (distanțe) diferind în mod nesemnificativ. La componenta radială, deși diferența între cele două valori scade pe măsura ce ne apropiem de centrul polului ( $z/d = 0,5$ ), totuși partea de sub pol are o contribuție la forța de readucere axială. Trebuie avută în vedere și ponderea pe care o are fiecare din componente,  $B_r$  și  $B_z$ . Pentru cazul geometriei lagărului utilizat, cu materialul magnetic idealizat, raportul componentelor de referință este  $B_{z,ref}/B_{r,ref} = 3,43$ .

Pastrând același mod de reprezentare a câmpului (pentru distanța minimă și pentru cea maximă), dar extinzând distanța până la care se face reprezentarea până la lungimea unui pas polar ( $z/d = 1$ ), în figurile 4.5.8 și 4.5.9 se prezintă situațiile

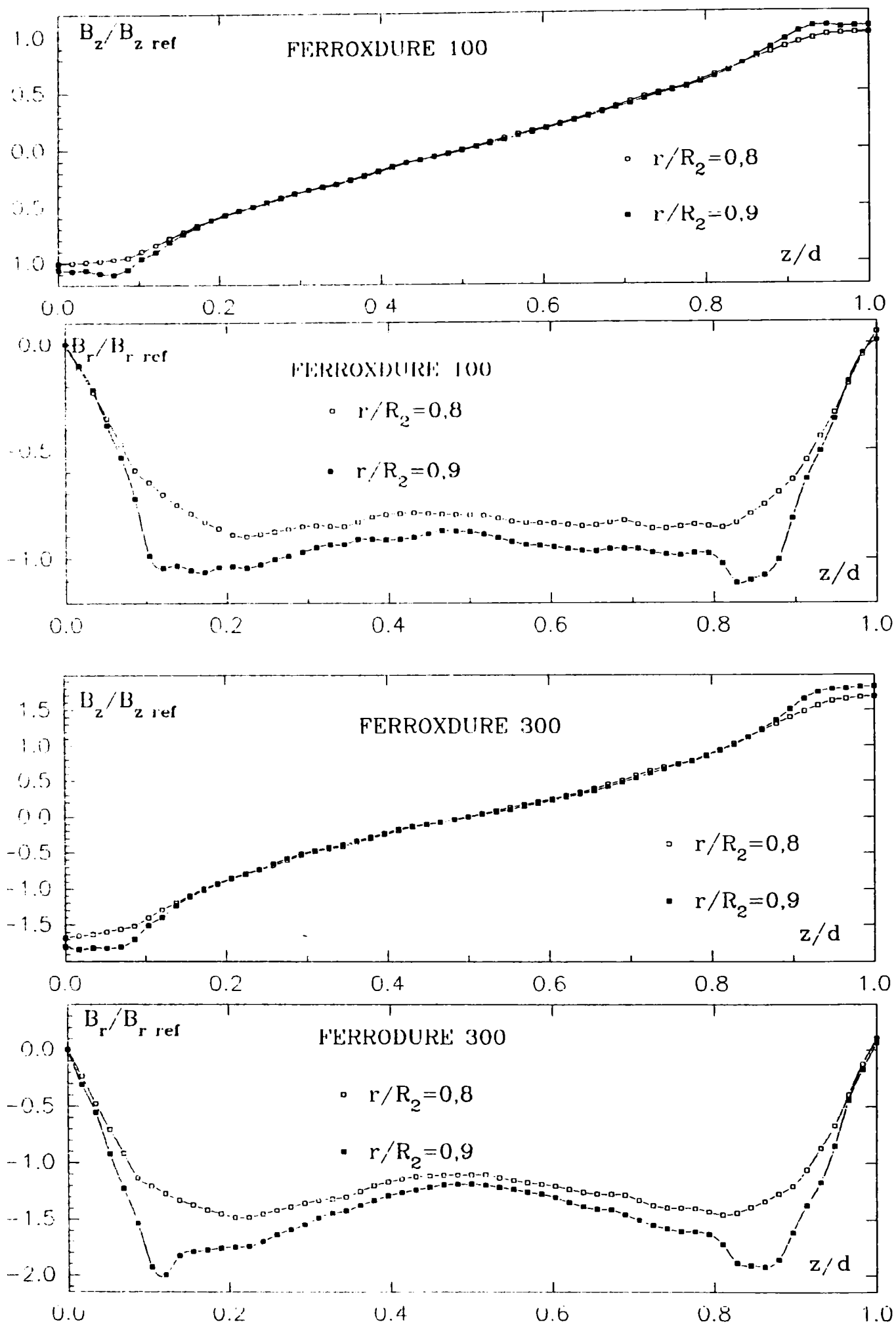


Figura 4.5.8.



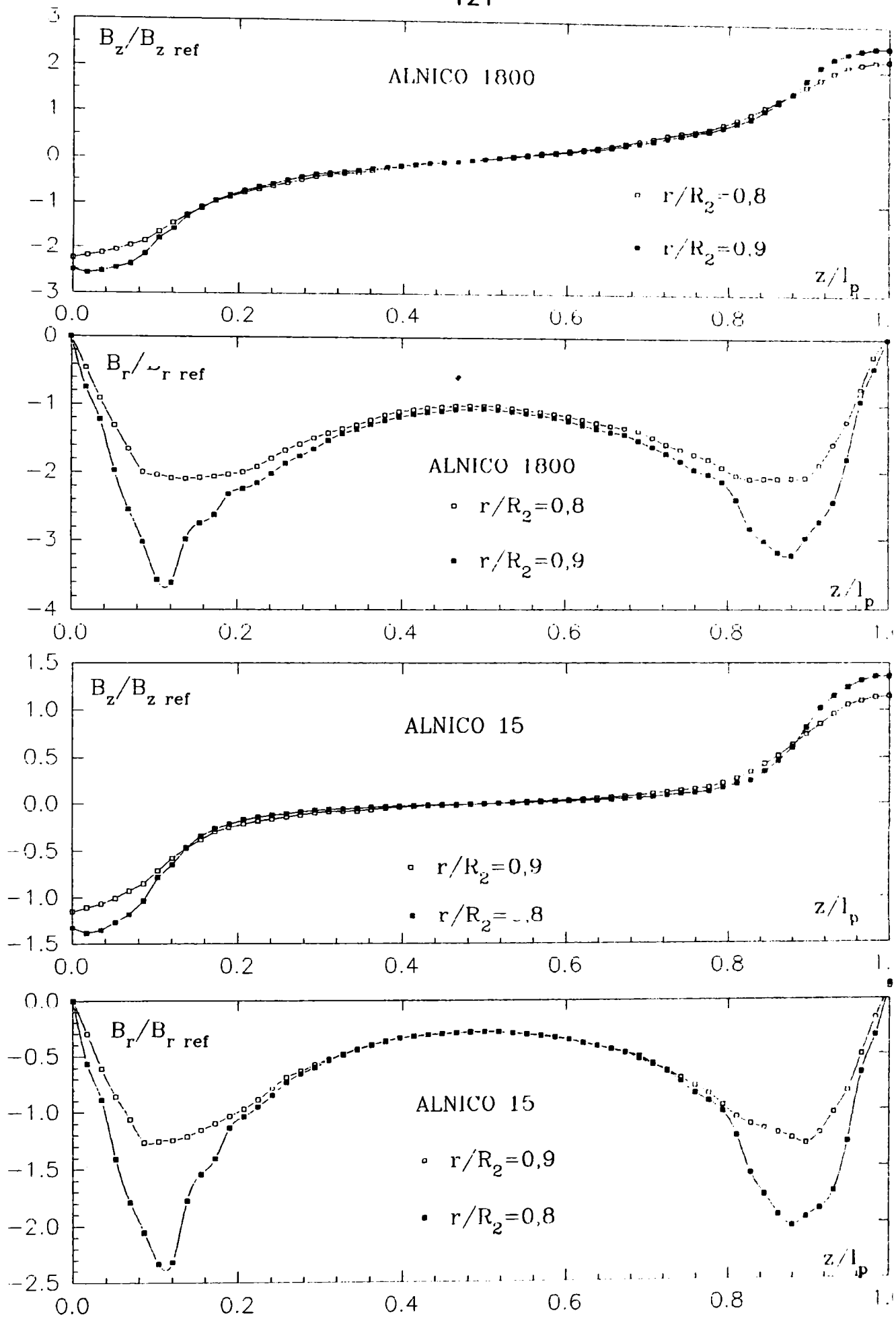
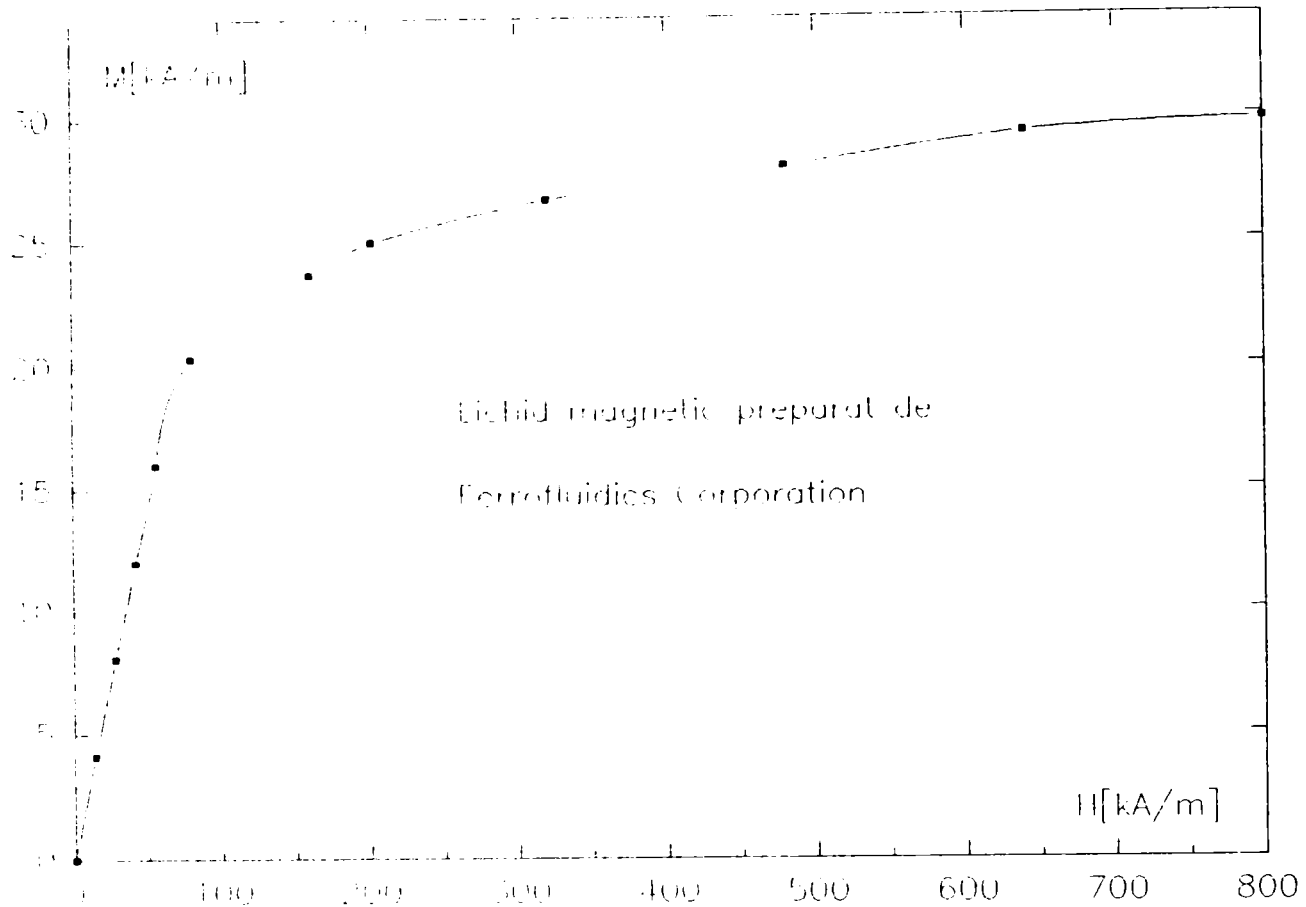


Figura 4.5.9.



**Figura 4.5.10.**

pentru materialele magnetice, reale, utilizate în modelare ca tipuri de materiale magnetice.

Pentru toate cazurile analizate cea mai mare variație relativă între valorile corespunzătoare distanței minime și a cele maxime, pentru unul și același pol, se obține în zona interstițiului dintre poli, atât pentru  $B_r/B_{r,ref}$  cât și pentru  $B_z/B_{z,ref}$ . Sub piesa polară, pentru materialele de tip ALNICO, în special, între valorile reprezentate se observă o diferență ne semnificativă, deci contribuția acestei porțiuni în forța de readucere este redusă. Se confirmă și în acest fel faptul că în funcție de posibilitățile tehnologice este de dorit ca raportul  $l_p/l_0$  să fie mai mic.

În toate situațiile de modelare și de calcul avute în vedere s-a presupus că lichidul magnetic este utilizat în porțiunea liniară a caracteristicii sale magnetice. Liniaritatea caracteristicii de magnetizare este acceptabilă ca ipoteza de lucru pentru valori reduse ale inducției magnetice și limita până la care se poate accepta aceasta ipoteză depinde de tipul de lichid magnetic utilizat. Pentru un lichid magnetic produs de Ferrofluidics Corporations [Lu1] având curba de magnetizare prezentată în figura 4.5.10, această limita este de cca. 0,1 T. Valoarea  $\mu_r = 1,2$  a permitivității utilizată în calcule corespunde unui lichid magnetic de acest tip.

#### 4.5.3. Compararea performanțelor lagărelor de tip sandwich pentru diferite materiale magnetice utilizate

Considerentele prezentate în paragraful 4.5.2. au fost făcute, așa cum s-a specificat, pentru un lagăr de dimensiune radială mică, la care raportul între lungimea activă a unei piese magnetice și raza lagărului este relativ mare ( $l_p/R_2 = 2,8$ ). Unui astfel de tip de lagăr îi corespunde și deformarea pronunțată a componentelor câmpului magnetic prezentată în detaliu în paragraful 4.5.2. La un asemenea tip de lagăr nu este practic aplicabilă metoda de calcul analitic și calculul corespunzător determinării forței radiale de readucere la coaxialitate se poate face doar cu metode numerice.

Dacă se analizează un lagăr cu extensie radială mai mare și la care se ține seama de necesitatea ca dimensiunea axială ( $l_p$ ) a polilor să fie cât mai mică, raportul  $l_p/R_2$  dobândește valori mai mici. În cele ce urmează vor fi analizate situațiile corespunzătoare unui lagăr cu extindere radială medie și a unuia cu extindere radială mare. Corespunzător acestei din urmă situații, se va arăta că ipotezele utilizate în calculul analitic sunt aplicabile cu foarte bună aproximație.

O situație intermediară analizată este cea la care raportul  $l_p/R_2 = 1,0$  și în acest caz modelarea numerică conduce la rezultate pentru componentele câmpului magnetic mai apropiate de forma sinusoidală, respectiv cosinusoidală, dar încă este prezentă deformarea câmpului față de situația teoretică, avută în vedere la soluția analitică a determinării forței de readucere. Alura curbelor poate fi urmărită în figura 4.5.11. De data aceasta s-au folosit pentru reprezentarea grafică un număr mai redus de puncte ( am urmărit numai alura curbei ) și ca valoare de referință a fost aleasă valoarea inducției magnetice din planul de simetrie al lagărului în cazul realizării excitației cu magnetul de tip idealizat. Aceste reprezentări au fost făcute la o distanță relativă față de axul lagărului de  $r/R_2 = 0,85$ . Curba pentru materialul idealizat nu a mai fost reprezentată separat, alura ei fiind, și pentru acest caz , foarte asemănătoare cu cea a materialului magnetic liniar ferroxdure 100 ( $\mu_r = 1,26$ ).

La această reprezentare se poate observa ca și ponderea relativă a componentelor radială și, respectiv, axială este aproximativ aceeași la toate materialele investigate, raportul  $(B_z)_{\max}/(B_r)_{\max}$  fiind aproximativ 2. Extinderea radială relativă a acestui lagăr modelat este  $h/R_2 = 1,0$  și  $h/l_p = 1,0$ . Efectul de capăt este și aici prezent, pentru fiecare material utilizat în modelare, câmpul magnetic fiind

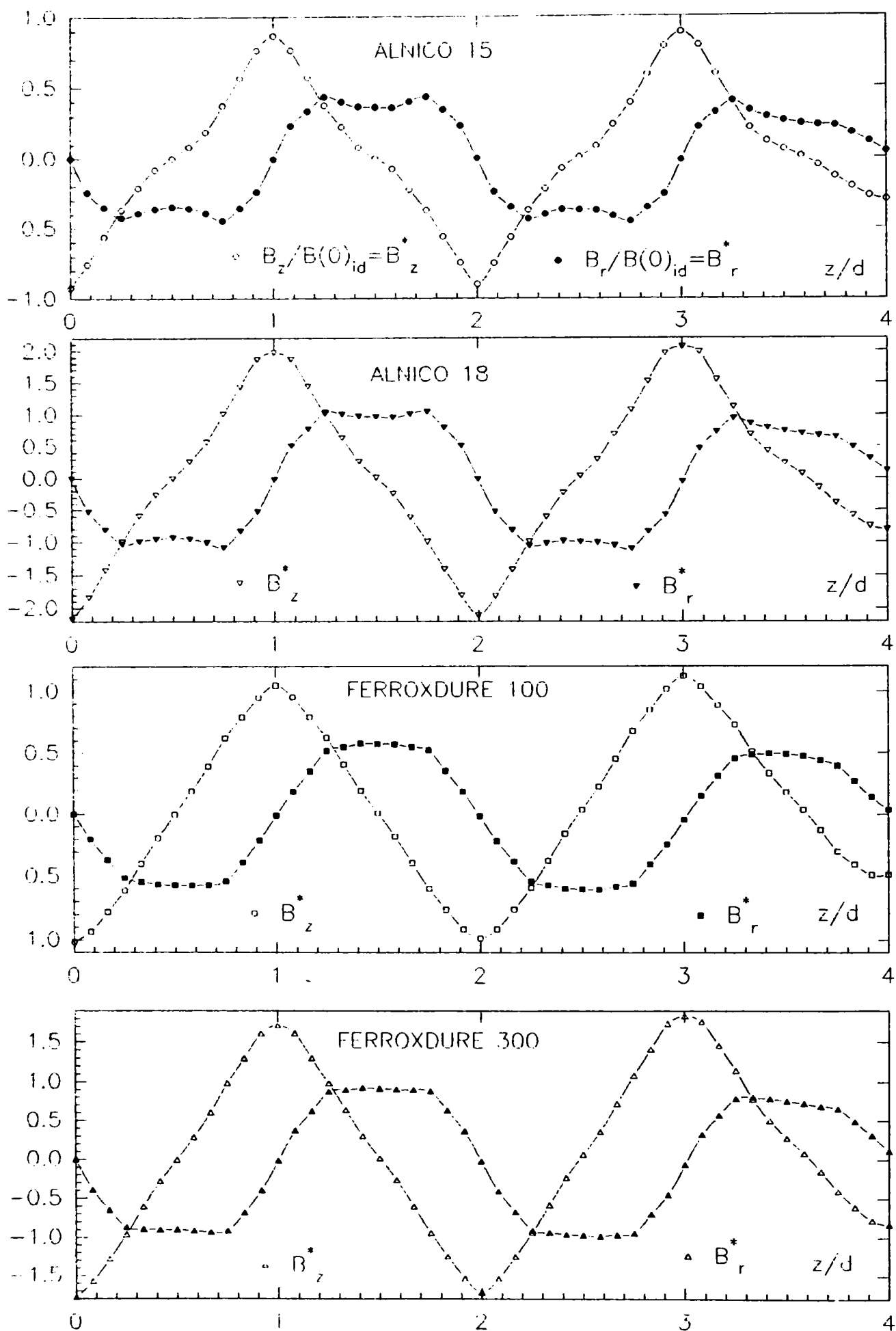


Figura 4.5.11.

mult diferit în cazul polului marginal ( $p_{44}$ ) față de ceilalți poli ce alcătuiesc lagărul tip "sandwich" cu poli alternanți.

Pentru a investiga și un lagăr cu extindere radială mare, a fost considerat cazul unui lagăr la care raportul  $l_p/R_2 = 0,125$  și  $l_p/l_0 = 2,5$ . Analiza făcută privind formele de variație a componentelor câmpului magnetic arată că acestea se apropie de formele sinusoidală și, respectiv, cosinusoidală. Reprezentarea este făcută pentru o extindere radială relativă caracterizată de  $h/R_2 = 0,25$  și  $h/l_p = 2$ .

Figurile 4.5.12 - 4.5.16 prezintă formele de variație pentru fiecare din materialele analizate. Reprezentarea s-a făcut pentru o distanță față de axa lagărului  $r/R_2 = 0,95$ . În fiecare din aceste figuri este reprezentată (figura a) forma de variație a componentelor axială și radială, raportate la valoarea inducției magnetice din punctul respectiv. Se poate astfel observa ponderea pe care fiecare componentă o are față de valoarea inducției rezultante. În figurile b este reprezentată valoarea raportată a fiecăreia din componente, obținută prin calcul. Ca valoare de referință este aleasă valoarea inducției în planul central al lagărului,  $B(0)$ .

Această valoare este comparată cu forma de variație sinusoidală, respectiv, cosinusoidală.  $B^*(0)$ , valoarea aleasă pentru această reprezentare, este practic egală cu 1. Fiecare din cele cinci figuri, pentru cele cinci tipuri de materiale investigate, arată că pentru polul marginal se manifestă o abatere pronunțată față de variația sinusoidală. Această abatere diferă de la un material la altul, dar este prezentă la fiecare caz analizat. Pentru polii centrali concordanța este foarte bună și se poate trage concluzia că se poate aplica, cu o bună aproximație, și metoda de calcul analitic prezentată în paragraful 4.2.

Față de situația analitică pentru care calculul a fost efectuat corespunzător excentricității maxime, prin metodologia propusă se poate efectua calculul pentru diferite excentricități și pentru extinderi radiale ale magnetilor permanenți diferite, la o aceeași dimensiune radială  $R_2$ .

Poate prezenta interes și analizarea magneților utilizați prin intermediul produsului  $(BH)_{\max}$ . Această mărime ce caracterizează prin comparație globală proprietățile magneților permanenți poate fi întâlnită în literatura [Po1] și sub numele de indice de calitate al magneților permanenți.

În figura 4.5.17 este reprezentat, pentru tipurile de magneți permanenți utilizați în modelare, produsul  $(BH)_{\max}$ .

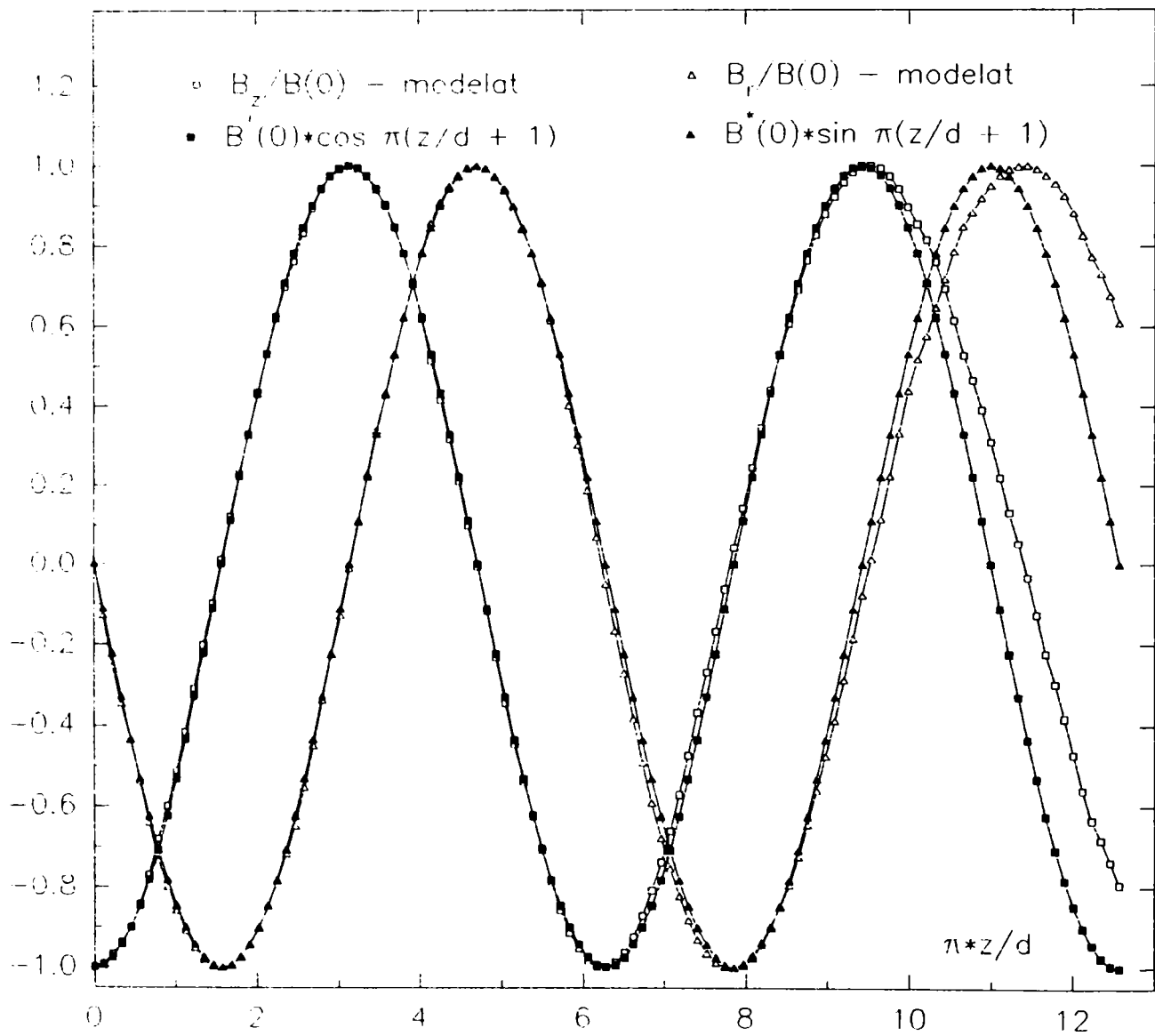
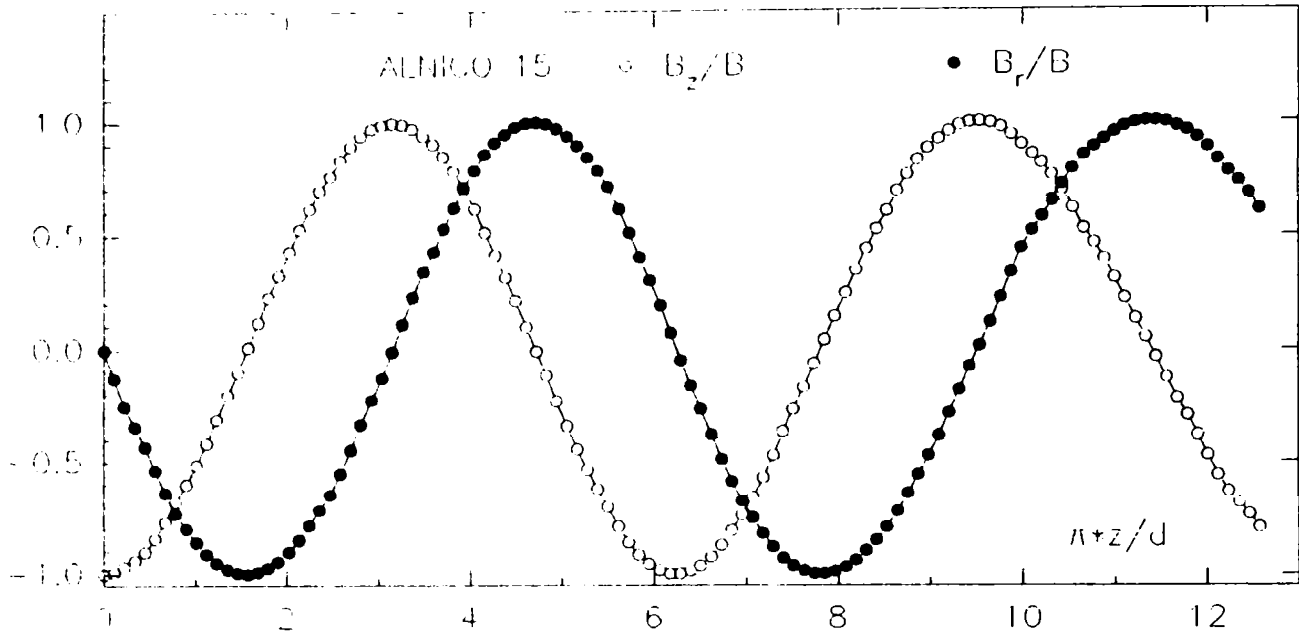


Figura 4.5.12.

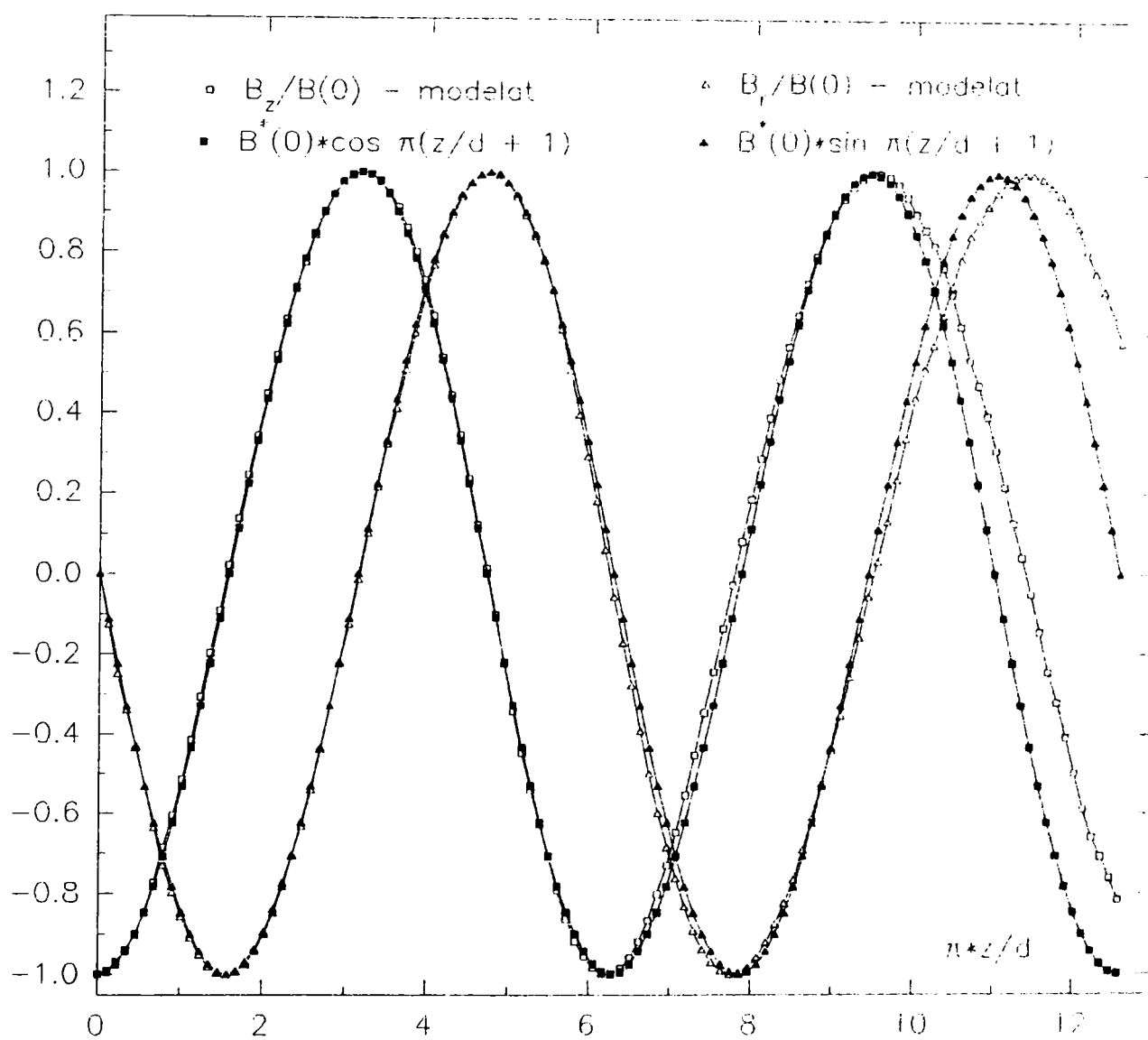
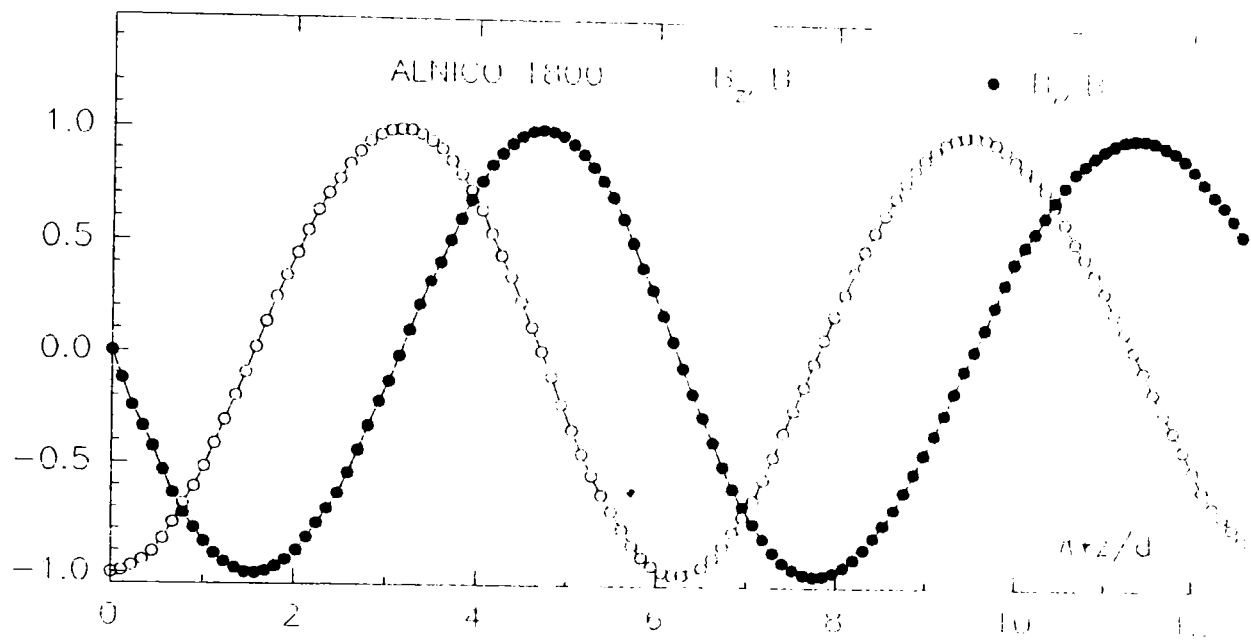


Figura 4.5.13.

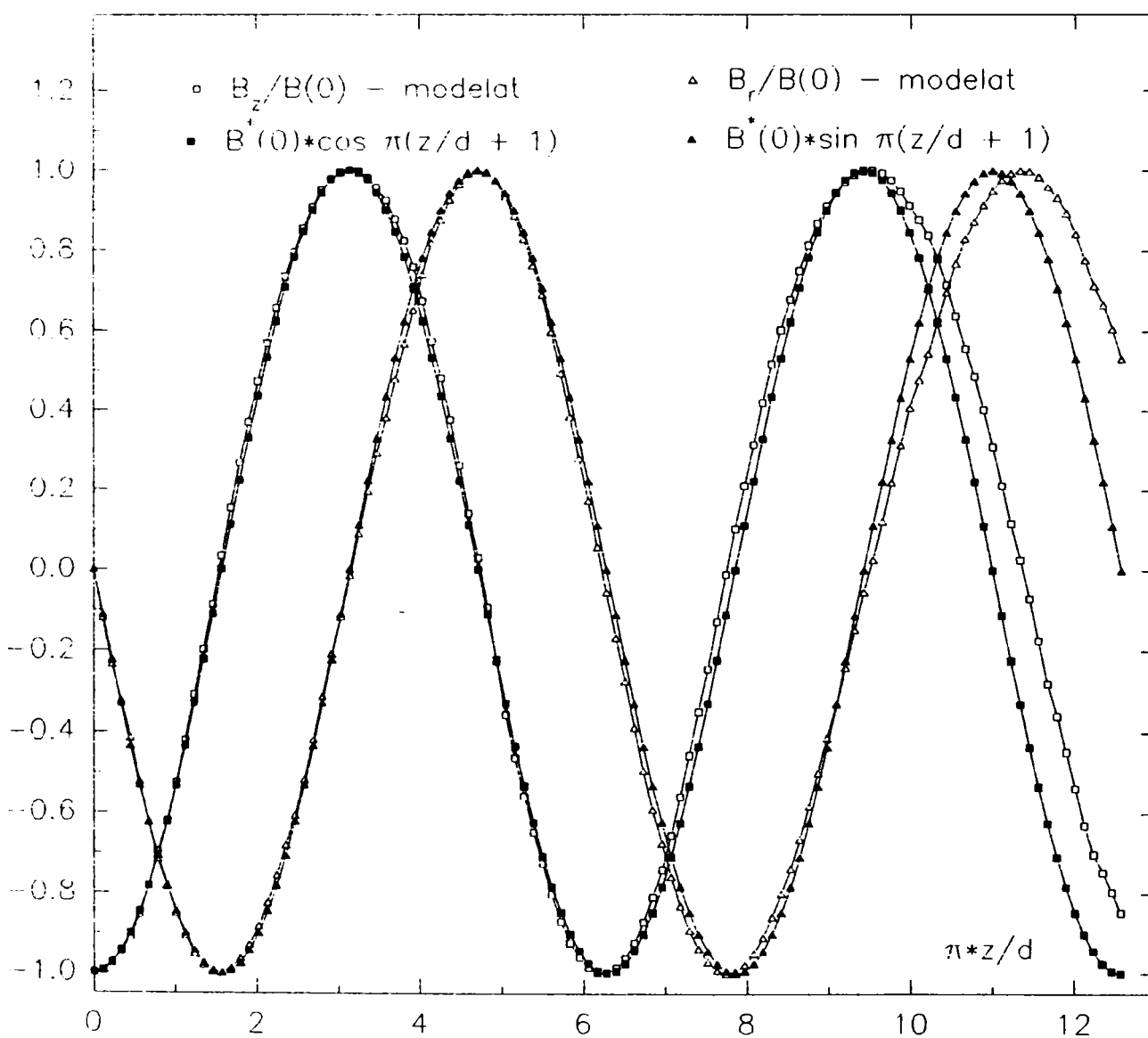
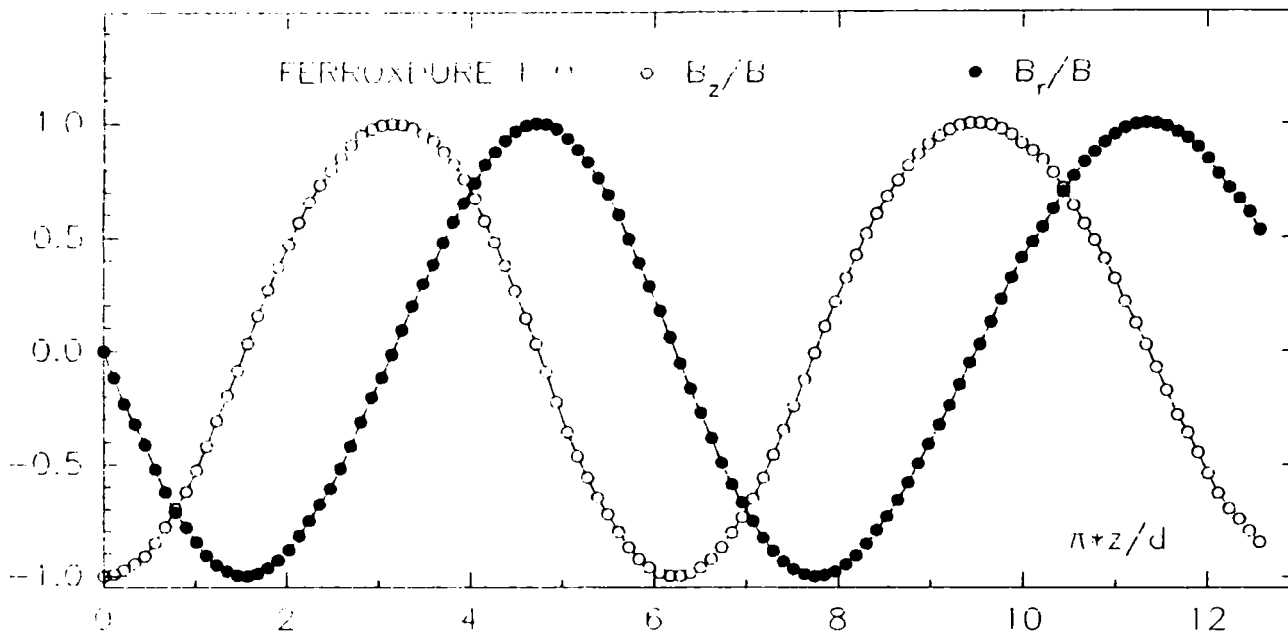


Figura 4.5.14.



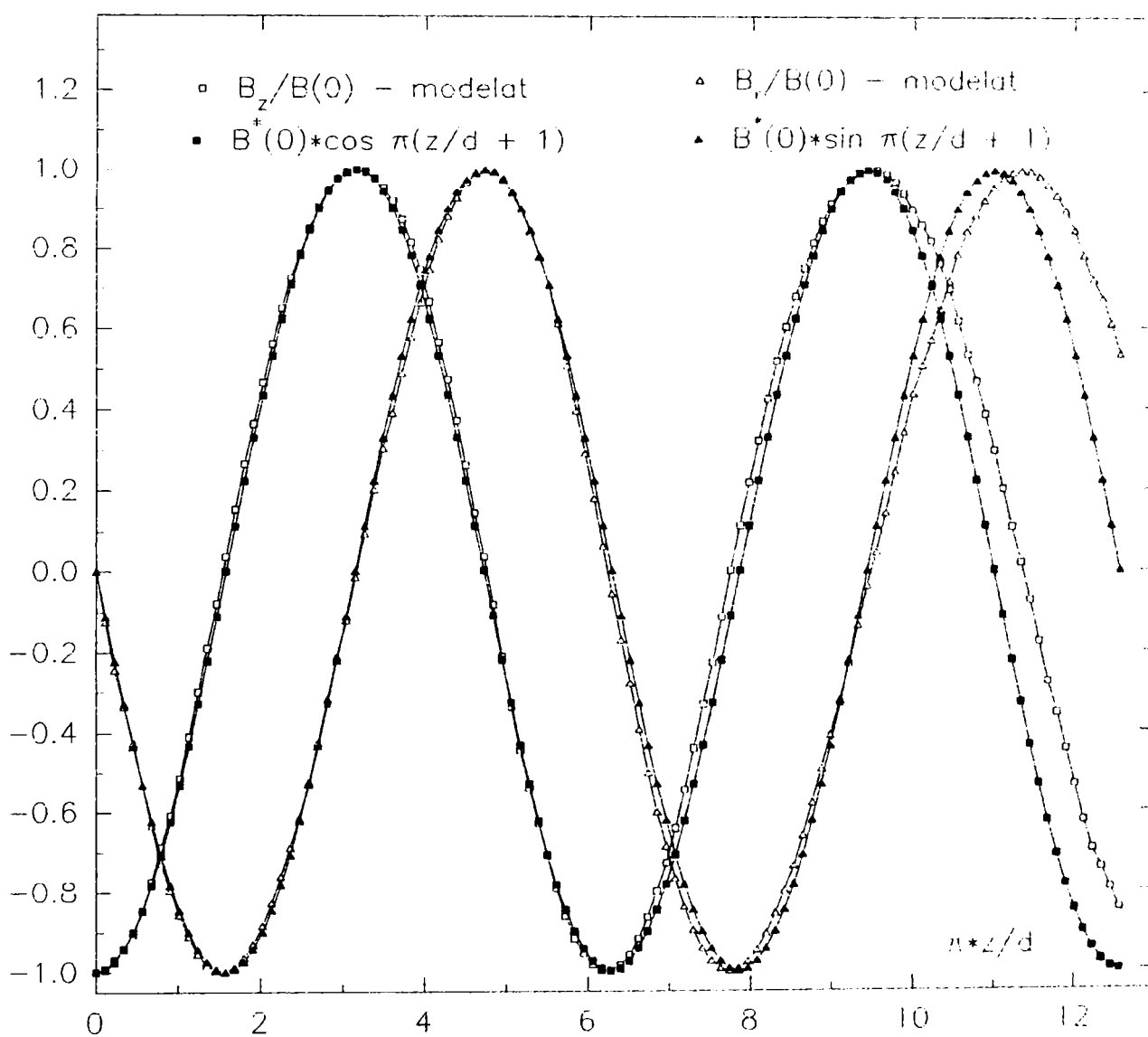
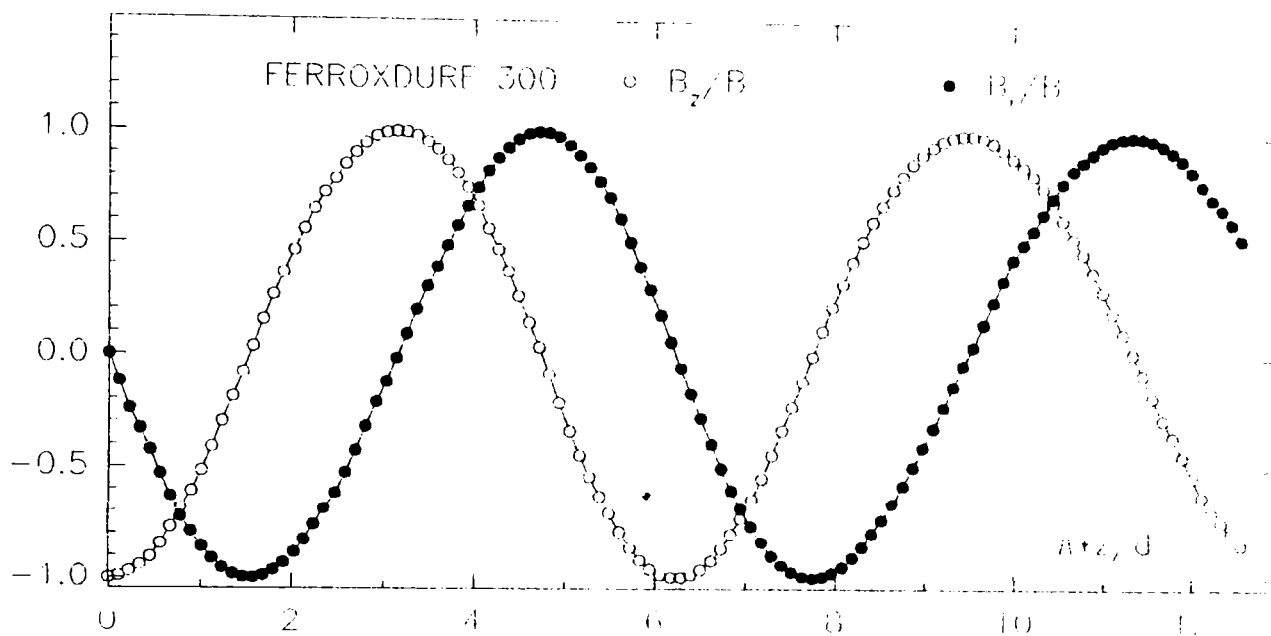


Figura 4.5.15.

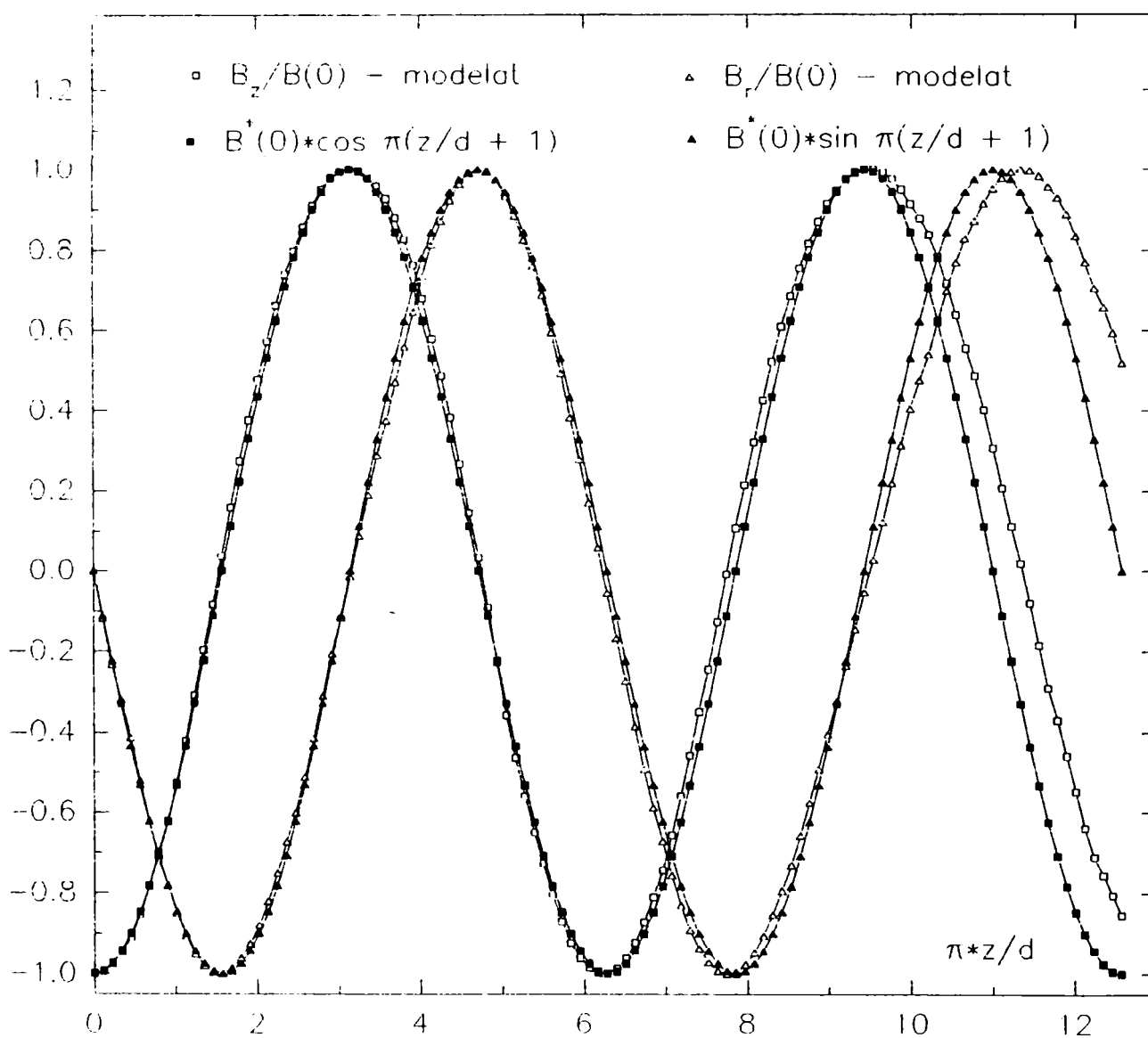
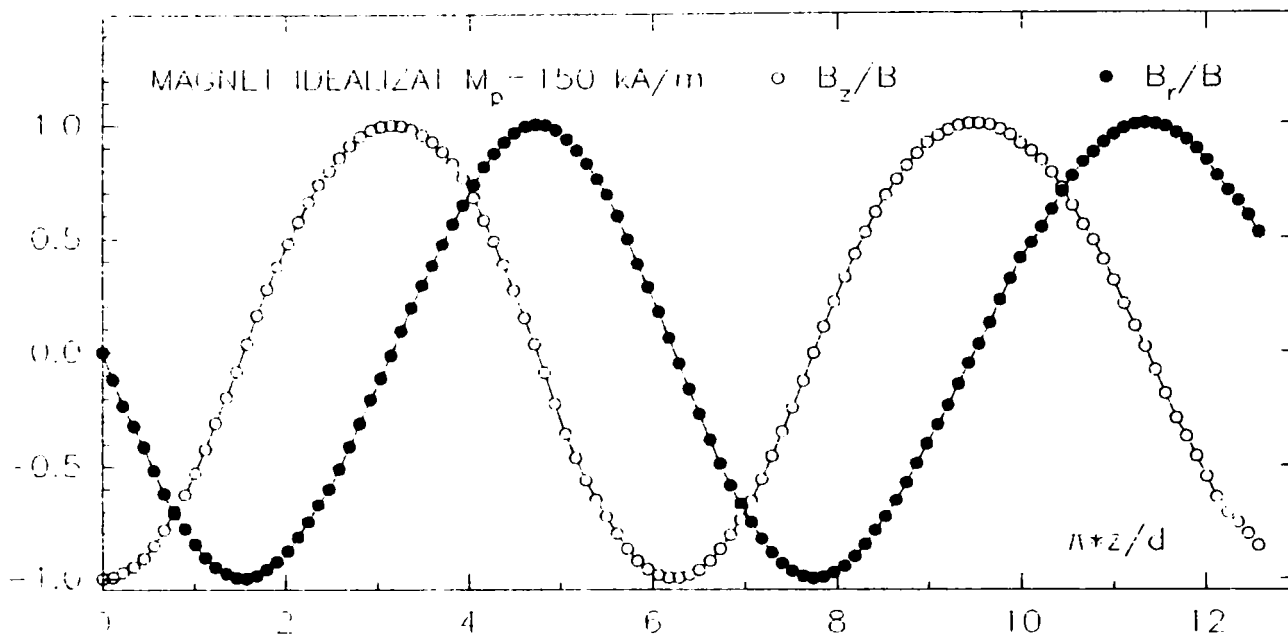


Figura4.5.16.

Domeniul de lucru al magneților utilizați la lagăre cu lichid magnetic este impus de proprietățile lichidului magnetic utilizat, a cărui liniaritate este îndeplinită până la valori ale inducției magnetice de până la 100 mT (aproximativ). Se poate observa că deși magnetul utilizat pentru referință (denumit idealizat), precum și cel cu proprietăți apropiate de acesta, ferroxdure 100, au o valoare maximă a produsului (BH) doar de circa  $7,1 \text{ kJ/m}^3$ , punctul lor optim de funcționare este situat în jurul valorii inducției de 0,1 T. Acest aspect va fi pus în evidență la reprezentarea forței de readucere raportată la indicele de calitate al materialului magnetic folosit (fig. 4.5.18b).

Forța de readucere a fost calculată pentru o excentricitate relativă  $e/\Delta = 0,5$  în cazul lagărului cu patru perechi de poli pentru care a fost analizată forma de variație a componentelor câmpului magnetic (figurile 4.5.12 - 4.5.16).

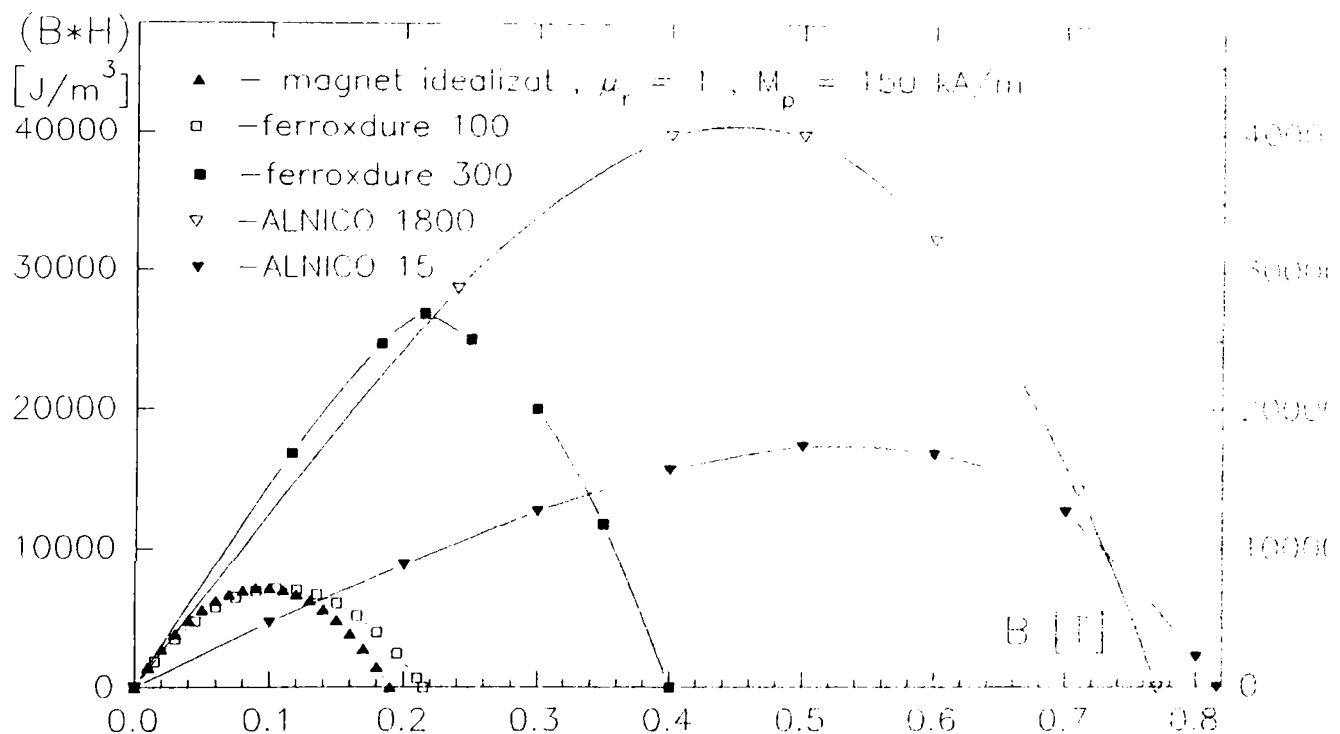


Figura 4.5.17.

Pe baza rezultatelor obținute prin modelare și conform modului de calcul prezentat la începutul acestui capitol, s-au putut calcula (numeric) valorile forței de readucere ce acționează asupra axului (rotor) lagărului.

Calcululele au fost efectuate pentru mai multe valori ale extensiei radiale ( $h = R_{2\text{ext}} - R_{2\text{int}}$ ) a magneților permanenți toroidali, pentru fiecare din materialele magnetice avute în vedere la compararea performanțelor. În figura 4.5.18a a fost aleasă ca forță de referință, forța de readucere axială ce se manifestă în cazul

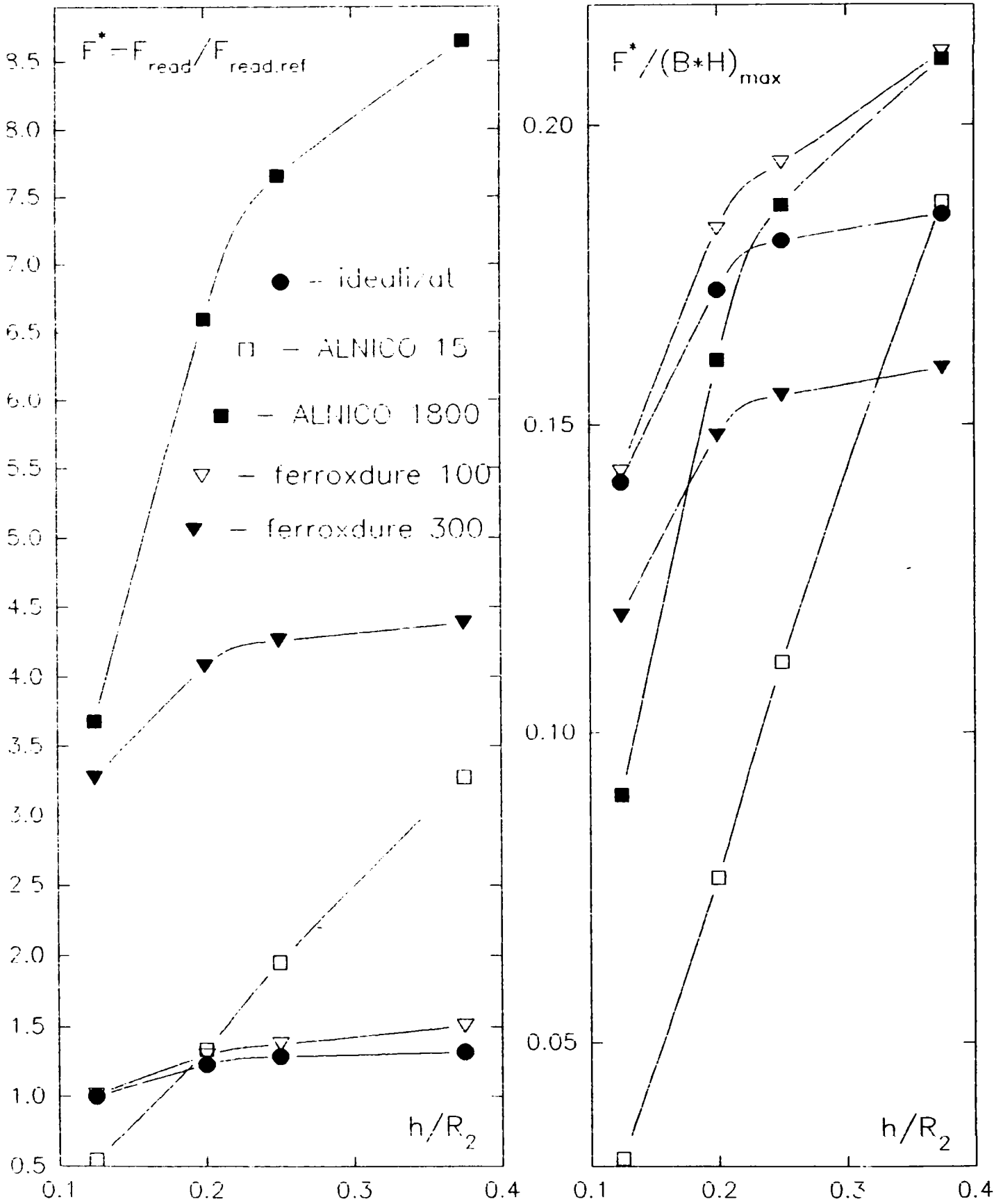


Figura 4.5.18.

materialului magnetic idealizat, la o extindere axială relativă  $h/R_2 = 0,125$ . Această extindere radială a fost cea minimă avută în vedere în analiză. Se poate constata că toate valorile pentru forța axială de readucere sunt mai mari decât forța aleasă ca referință, cu excepția uneia. Valoarea corespunzătoare extinderii axiale radiale minime a materialului magnetic pentru ALNICO 15, rezultă chiar mai mică decât valoarea de referință.

Pentru acest caz de modelare, volumul masei magnetice este minim și la fel sunt și valorile componentelor inducției magnetice stabilite în interiorul lagărului cu lichid magnetic. După cum se poate vedea din curba de demagnetizare prezentată în figura 4.5.1., precum și din figura 4.5.17, materialul ALNICO 15 este caracterizat de un câmp coercitiv mic și produsul (BH), la valori reduse ale inducției magnetice, are și el valori mici. De altfel, conform datelor de catalog, acest tip de magnet permanent este recomandat pentru a funcționa la inducții magnetice de cca. 0,5 - 0,6T (foarte mari pentru cazul lagărelor cu lichid magnetic).

Cu excepția curbei ce reprezintă variația relativă a forței de readucere pentru același tip de material (ALNICO 15), pentru toate celelalte materiale magnetice se manifestă tendința de creștere mai lentă a forței odată cu creșterea extensiei radiale peste o anumită valoare (specifică fiecărui material în parte, și, corespunzând configurației modelate). La început, pentru creșterea lui  $h$  se obține o creștere liniară a forței, după care curba se aplatizează. Pentru materialul ALNICO acest fenomen s-ar produce la valori mai mari ale extinderii radiale decât cele investigate, dar aceasta ar conduce la stabilirea unor câmpuri magnetice ce ar depăși domeniul de liniaritate al lichidelor magnetice.

Figura 4.5.17b prezintă aceleași curbe de variație, dar raportate la indicele de calitate al materialelor magnetice folosite. Materialul ferroxidure 100 rezultă cu o valoare raportată maximă, predictibilă din analiza curbelor de demagnetizare și a produsului (BH). Pentru obținerea unei forțe maxime se pot utiliza materiale capabile să producă o asemenea forță, chiar dacă utilizarea lor nu se situează în domeniul optim de funcționare.

#### **4.5.4. Comparație între rezultatele obținute prin modelare și din aplicarea metodei analitice**

După cum se poate observa din analiza câmpului magnetic, forma sinusoidală de variație a componentelor  $B_z$  și  $B_r$  ale inducției magnetice este îndeplinită pentru

un anumit raport al mărimilor geometrice ce determină configurația lagărului, iar pentru alte configurații, alura curbelor este deformată.

Pentru a putea aprecia în ce domeniu al dimensiunilor geometrice se poate lucra cu formula determinată prin metoda analitică de aproximare (care presupune variația sinusoidală) am urmărit valoarea coeficientului de distorsiune al curbelor ce reprezintă variația în lungul direcției axiale a componentelor inducției magnetice.

În paragrafele anterioare am arătat că, cu excepția polului marginal și în oarecare măsură, a celui ce îl precede ( $p_{n,n}$  și, respectiv,  $p_{n-1,n}$  conform notației introdusă în paragraful 4.3.), pentru toți ceilalți poli ai lagărului, curbele componentelor inducției magnetice sunt periodice. Pe o lungime  $2d$ , măsurată pe axa  $Oz$ , se realizează o variație completă, aproximativ sinusoidală pentru  $B_r$  și, respectiv, aproximativ cosinusoidală pentru  $B_z$ , corespunzând unei perioade ( $2\pi$ ).

În acest fel, cele două funcții ce reprezintă variația componentelor inducției magnetice pot fi exprimate, în cazul ideal, sub forma:

$$\begin{aligned}\bar{B}_z &= (B_z)_k \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{z}{d}\right) \cdot \bar{u}_z \\ \bar{B}_r &= (B_r)_k \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{z}{d}\right) \cdot \bar{u}_r\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

în care semnul valorilor  $(B_z)_k$  și  $(B_r)_k$  este "+" sau "-" după cum are loc alternanța polilor magnetilor toroidali (S-N-S... sau N-S-N...) începând de la planul de simetrie al lagărului. Modulul acestora depinde de tipul de material folosit, de dimensiunea radială a lagărului ( $R_2$ ) și de distanța față de axa lagărului pentru care se face reprezentarea componentelor inducției magnetice ( $r_k$ ).

Am luat în evaluare componentele câmpului ce se găsesc sub primii doi poli,  $p_{1,n}$  și  $p_{2,n}$ , cei mai apropiați de planul de simetrie al lagărului. Este investigată în acest fel o perioadă a funcțiilor ce reprezintă componentele inducției magnetice. Distanța relativă,  $r_k/R_2$ , pentru care s-a făcut investigația a fost 0,95. Pentru această modelare, materialul din care sunt confecționați magnetii permanenți este ferroxdure 100. Lagărul considerat are o excentricitate relativă maximă,  $\Delta/R_2 = 0,05$ .

Așa cum este arătat în [DS4] și a fost prezentat și în paragraful 4.2., o mărime relativă (denumită factor geometric),  $x = 2\pi\Delta/d$ , poate sta la baza unei metode analitice estimative privind calculul forței de readucere în condiții de

material date. Pentru a putea conduce un calcul analitic al forței de readucere, una din ipotezele necesare a fi adoptate este aceea că variația componentelor câmpului magnetic în lungul axei este de tip sinusoidal ( $B_r$ ) și, respectiv, cosinusoidal ( $B_z$ ).

La configurație radială menținută constantă ( $R_1$ ,  $R_2$  și, implicit,  $\Delta = R_2 - R_1$ ) am efectuat modelări ale lagărului pentru diferite valori ale pasului polar,  $d$ . În acest fel am obținut curbele de variație ale componentelor inducției magnetice în lungul direcției axiale.

Prin realizarea unui program de calcul, conținând un subprogram de aproximare prin serii Fourier, am evaluat gradul de deformare al funcțiilor periodice în funcție de parametrul geometric  $x$ . În seria Fourier s-au utilizat termeni până la ordinul 7, criteriul de limitare fiind legat de ponderea armonicilor superioare. În ordinograma din figura 4.5.19. este prezentat modul de efectuare a calculelor.

După soluționarea problemei distribuției câmpului magnetic, valorile componentelor inducției magnetice au fost stocate în fișiere de date din care apoi au fost transferate în subprogramul de descompunere în serie Fourier.

Pentru componenta  $B_r$  am lucrat cu valoarea raportată  $B_r^*$ , iar pentru componenta axială  $B_z$  am lucrat cu valoarea raportată  $B_z^*$ .

$$B_r^* = \frac{B_r(z)}{B_r(\frac{d}{2})} \quad ; \quad B_z^* = \frac{B_z(z)}{B_z(0)} \quad (4.5.3)$$

În acest fel, pentru cele două componente am utilizat seriile Fourier:

$$B_r^* = a_1 \sin\left(\frac{\pi Z}{d}\right) + a_2 \sin 2\left(\frac{\pi Z}{d}\right) + \dots + a_k \sin k\left(\frac{\pi Z}{d}\right) \quad (4.5.4)$$

$$B_z^* = b_1 \cos\left(\frac{\pi Z}{d}\right) + b_2 \cos 2\left(\frac{\pi Z}{d}\right) + \dots + b_k \cos k\left(\frac{\pi Z}{d}\right) \quad (4.5.5)$$

Dezvoltarea în serie a fost limitată la un număr de  $k$  termeni, condiția fiind

$$a_{k+1} < 0,01 \cdot a_1 \quad ; \quad b_{k+1} < 0,01 \cdot b_1 \quad (4.5.6)$$

Pentru cazul cu câmpul cel mai deformat dintre cele analizate, în mod concret, acest număr de termeni a fost 7.

Fiecărui caz modelat îi corespunde o anumită valoare a coeficientului geometric  $x$ . Relațiile utilizate sunt:

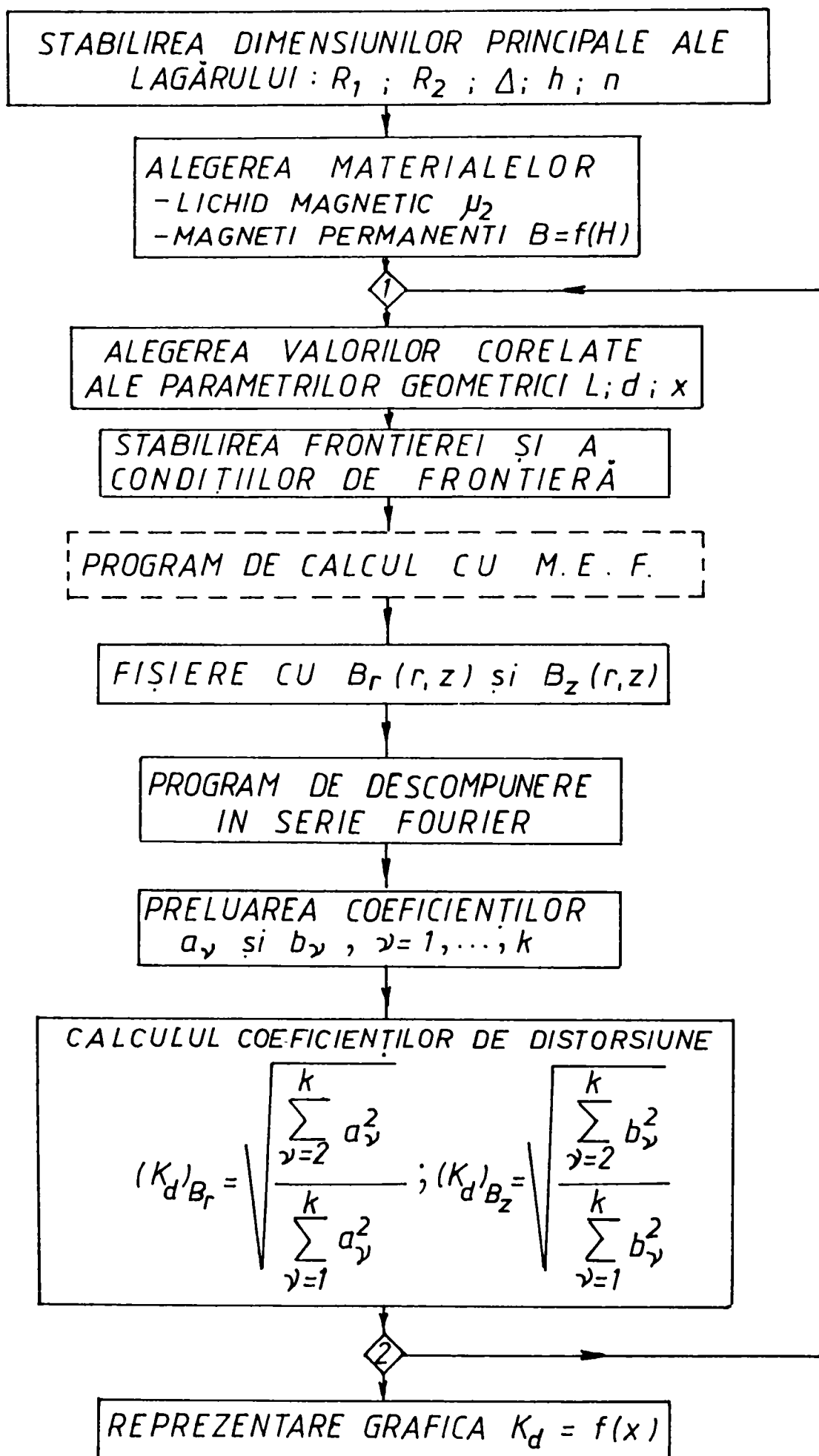


Figura 4.5.19.



$$(k_d)_{B_r} = \sqrt{\frac{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2}} \quad (4.5.7)$$

$$(k_d)_{B_z} = \sqrt{\frac{b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2}} \quad (4.5.8)$$

Coeficienții de deformare sunt calculați pentru fiecare caz în parte, valoarea lor fiind trecută în tabelul 4.5.1.

Tabelul 4.5.1.

x	1.05	0.89	0.78	0.63	0.54	0.45	0.39	0.35	0.31
$(k_d)_{B_r}$ [%]	3.86	2.58	2.54	3.84	9.38	11.56	14.64	17.04	19.43
$(k_d)_{B_z}$ [%]	3.22	2.42	1.46	4.15	8.66	11.54	14.63	15.66	16.48

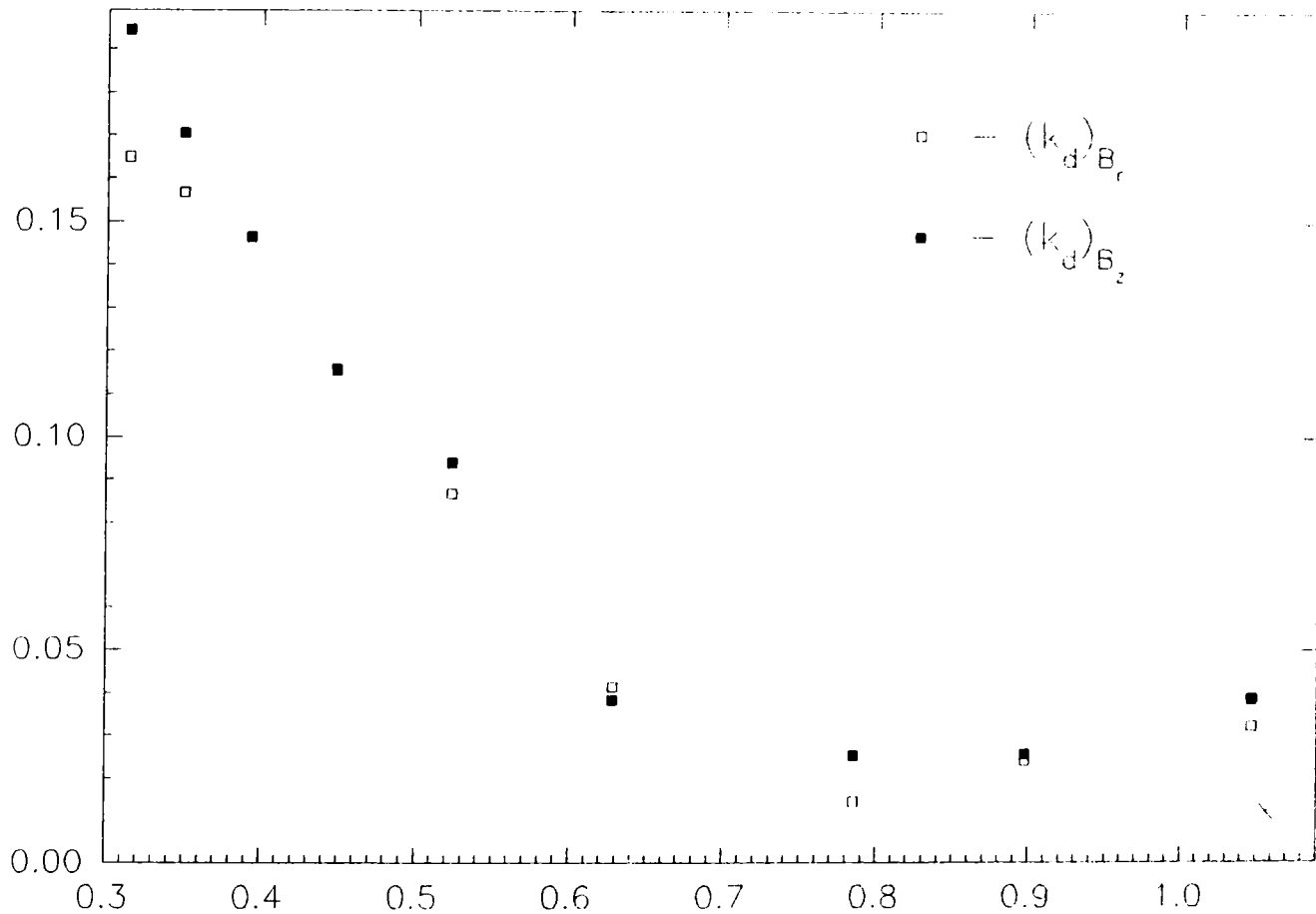


Figura 4.5.20

O reprezentare grafică a acestor coeficienți în funcție de parametrul geometric  $x$  este realizată în figura 4.5.20.

Apreciind că un coeficient de distorsiune de până la 5% permite considerarea variației mărimilor ca fiind sinusoidală, se poate constata că de la valori ale lui  $x > 0,6$ , acest lucru este îndeplinit. Nu am continuat investigarea pentru valori ale lui  $x > 1$ , pentru că aceste valori se produc pentru dimensiuni ale pasului polar  $d$  foarte mici, greu de realizat practic.

Trebuie de asemenea precizat că aceste calcule au fost realizate pentru un lagăr cu o anumită corelare a dimensiunilor principale:

$$\Delta/R_2 = 0,05 \quad \text{și} \quad h/\Delta = 7,5 \quad (4.5.9)$$

De asemenea, investigarea formei de variație a componentelor inducției a fost făcută pentru o distanță relativă față de axa lagărului  $r/R_2 = 0,95$ , corespunzătoare unei excentricități  $e = 0,5 \Delta$  (jumătate din excentricitatea maximă realizabilă la lagărul considerat). Așa cum este arătat și în [DS4], forța de readucere și corelațiile stabilite între mărimi prin intermediul coeficientului geometric  $x$ , sunt influențate de  $R_1$  și  $R_2$  (implicit  $\Delta = R_2 - R_1$ ), precum și de proprietățile de material ale magneților permanenți din care se realizează statorul tip "sandwich".

Prezenta lucrare și-a propus să stabilească corelații între parametrii geometrici (o parte fixați inițial prin destinația lagărului) pentru obținerea unei forțe de readucere cât mai mari, în condițiile utilizării unor anumite tipuri de materiale magnetice.

Pentru a realiza comparația între metoda analitică de aproximare a forței de readucere [DS4], cu metoda ce utilizează modelarea și calculul numeric pentru evaluarea acestei forțe, trebuie să se realizeze o apropiere între ipotezele (premizele) care stau la baza celor două metode.

Comparația s-a realizat pentru un tip de lagăr la care coeficienții de distorsiune ai curbelor de variație a componentelor inducției magnetice au valorile cele mai mici. În același timp, la acest tip de lagăr cu o dimensiune radială  $R_2$  mare ( $R_2 \gg R_2 - R_1$ ), este îndeplinită și condiția de a putea aproxima (pentru metoda analitică) câmpul la suprafața interioară a lagărului ( $R_2$ ) ca fiind plan paralel.

De asemenea, la metoda analitică, una din ipotezele simplificatorii necesar a fi utilizată presupune o extensie radială infinită a materialului magneților permanenți.

Modelarea numerică a fost făcută pentru geometria dată, cu o extensie finită a magneților toroidali pe direcție radială. În cursul modelării au fost investigate influențele pe care dimensiunea de gabarit radial le produce asupra forței de readucere.

Așa cum a fost arătat în paragraful 4.3., peste o anumită extensie radială ( $h = R_{2\text{ ext}} - R_2$ ) a magneților toroidali plasați alternant în statorul lagărului nu se mai obține o creștere semnificativă a forței de readucere ce se exercită la o anumită excentricitate.

Modelând lagărul realizat cu magneți permanenți din ferroxdure 100, pentru acea geometrie la care forma de variație a componentelor inducției magnetice este cel mai puțin deformată față de formele de variație sinusoidală (cosinusoidală), aceasta se realizează (în condițiile prezentate la începutul acestui paragraf) pentru o valoare a coeficientului geometric  $x = 0,785$ .

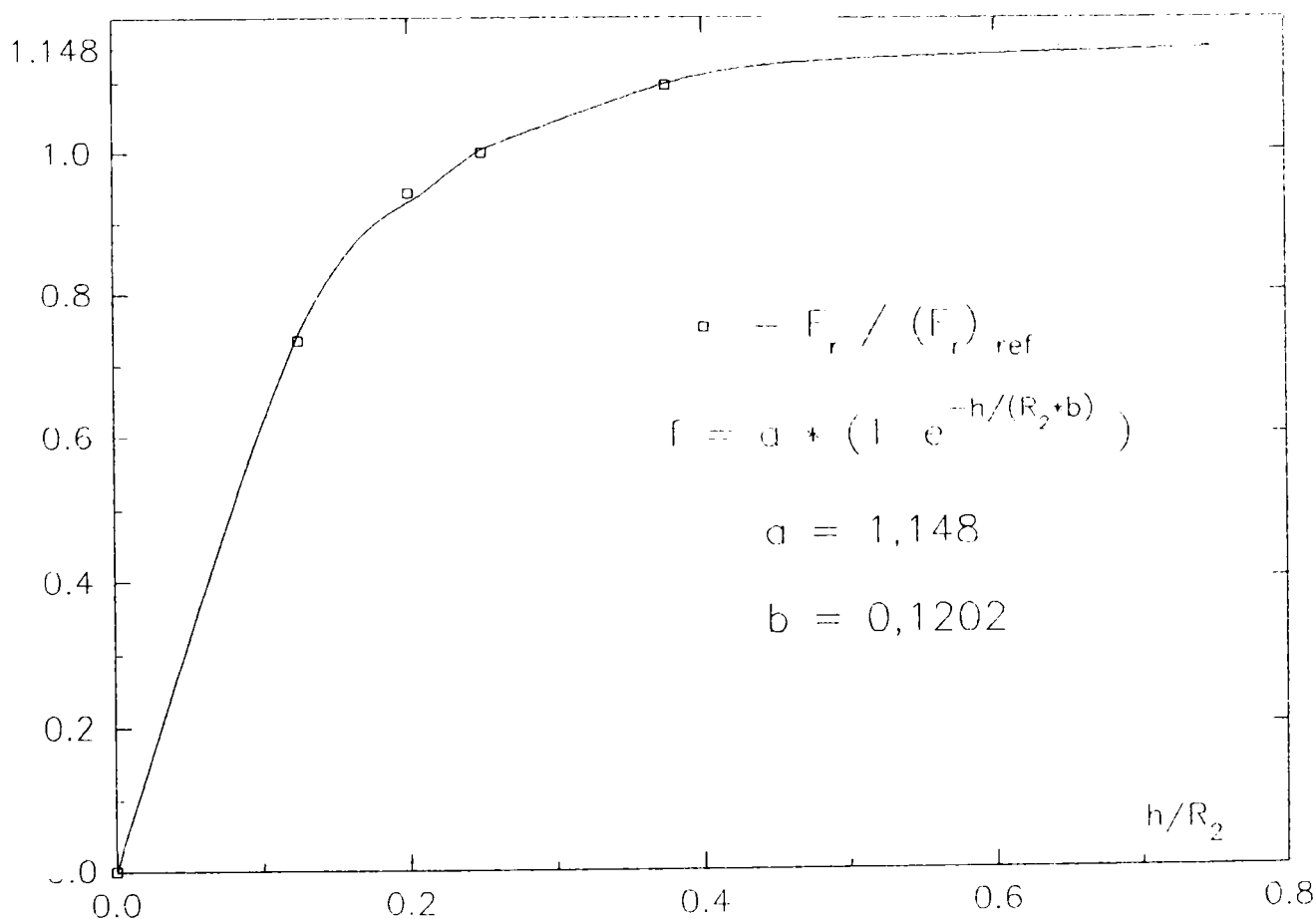


Figura 4.5.21.

Reluând calculul de determinare al câmpului magnetic pentru această configurație geometrică de bază, dar cu diferite extensii radiale ale magneților toroidali ( $h = R_{2\text{ ext}} - R_2$ ) și calculând valoarea forței de readucere pentru o excentricitate relativă de  $e/\Delta = 0,5$  se obține o curbă de variație a forței de

readucere  $F = f(h)$ . O estimare a forței ce s-ar obține dacă extensia radială ar fi infinită (nerealizabilă prin modelare numerică) poate fi făcută dacă se găsește funcția ce aproximează corelația tabelară  $F_k = f(h_k)$ , obținută prin modelări și calcule succesive pentru diferiți  $h_k$ .

În figura 4.5.21 sunt reprezentate elementele care stau la baza echivalării rezultatelor obținute prin cele două metode, prin evaluarea forței ce se obține prin modelare dacă acest calcul s-ar face pentru o extensie (teoretic) infinită pe direcție radială a magneților toroidali. Valorile calculate pentru coeficienții funcției de aproximare sunt precizate în figura. Ca valoare de referință a fost aleasă forța de readucere ce se obține pentru o extensie radială, în valori relative,  $h/R_2 = 0,250$ . Pentru a determina forța corespunzătoare unei extensii foarte mari a magneților pe direcție radială, valoarea corespunzătoare situației de referință se va multiplica cu  $a = 1,148$ .

Pentru un caz concret se poate face comparația care să permită verificarea concordanței rezultatelor obținute prin cele două metode.

Cazul luat pentru comparație are următoarele caracteristici geometrice:

$$\Delta/R_2 = 0,05 \quad ; \quad d/R_2 = 0,175 \quad \text{și} \quad R_1/R_2 = 0,95$$

Proprietățile de material folosite în modelarea acestui lagăr sunt:

\*  $M_p = 167,113 \text{ kA/m}$ , radial și  $\mu_r = 1,23$  corespunzând materialului magnetic liniar, ferroxdure 100

\* lichid magnetic liniar, în domeniul de utilizare, de tipul celui a cărui caracteristică este prezentată în figura 4.5.10, cu  $\mu_r = 1,2$ .

Pentru aceste condiții este aplicabilă formula:

$$\bar{F}_{rd}^* = \frac{\bar{F}_{rd}}{d} = \bar{u} \cdot \frac{\mu_0 (\mu_{r2}^2 - 1) M_0^2 R_1 \pi}{2(1 + \mu_{r2})^2} \cdot (k\delta) \cdot e^{(-2k\delta)} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n-2} (k\delta)^{2(n-1)}}{(n-1)! n!} \right] \quad (4.2.22)$$

Pornind de la relația 4.2.22 se poate introduce o mărime specifică

$$F_{San}^* = \frac{F_{rd}^*}{2\pi R_1} = \frac{\mu_0 (\mu_{r2}^2 - 1) M_0^2}{4(1 + \mu_{r2})^2} \cdot (k\delta) \cdot e^{(-2k\delta)} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n-2} (k\delta)^{2(n-1)}}{(n-1)! n!} \right] \quad (4.5.10)$$

Această forță specifică arată valoarea medie a forței de readucere ce se manifestă asupra axului lagărului, pe unitatea de suprafață (laterală) a acestuia.

Forța acționează în direcția excentricității și tinde să refacă coaxialitatea componentelor lagărului cu lichid magnetic.

Pentru calculul forței de readucere specifică, dată de relația 4.5.10 am lucrat cu o excentricitate relativă  $e/\Delta = 0,5$  (aceeași ca și cea utilizată la modelarea numerică), iar din dezvoltarea în serie este suficient să se utilizeze primii 5 termeni (seria este rapid convergentă).

Valoarea determinată prin metoda analitică de aproximare a forței de readucere, pentru cazul menționat este de  $132,485 \text{ N/m}^2$ .

Pentru aceeași configurație a lagărului, prin metoda de modelare numerică și utilizând relația 4.3.4

$$F_r = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r^2} R_1 \int_0^d dz \cdot \int_0^\pi [B_{rc}^2(\theta, z) + B_z^2(\theta, z)] \cos \theta d\theta \quad (4.3.4)$$

se poate defini o mărime raportată

$$F^*_{S_{\text{mod}}} = \frac{F_r}{2\pi d R_1} = -\frac{\mu_r - 1}{2\pi \mu_0 \mu_r^2} \frac{1}{d} \int_0^d dz \cdot \int_0^\pi [B_{rc}^2(\theta, z) + B_z^2(\theta, z)] \cos \theta d\theta \quad (4.5.11)$$

care poate fi comparată cu cea dată de relația 4.5.10.

Prin calculele numerice valoarea acestei forțe specifice obține o valoare de  $126,533 \text{ N/m}^2$ , în condițiile în care extensia radială a polilor este  $h/R_2 = 0,25$ . Estimarea rezultatului pentru extensie radială a polilor mare, poate fi făcută dacă se multiplică rezultatul precedent cu  $a = 1,148$ , așa cum a fost arătat anterior. În acest fel, forța specifică calculată prin modelare, în condiții comparabile cu cele avute în vedere la metoda de aproximare analitică, va conduce la o valoare de  $145,26 \text{ N/m}^2$ . Deci:

$$(F^*_S)_{\text{analitic}} = 132,485 \text{ N/m}^2$$

$$(F^*_S)_{\text{modelare}} = 145,260 \text{ N/m}^2$$

Diferența reprezintă  $8,795\%$  din rezultatul obținut prin modelare.

Cele două valori ale forței specifice au fost calculate prin metode diferite și, pentru comparație, cele două metode au fost aplicate într-o situație la care ipotezele simplificatorii (principal necesare în fiecare din cele două metode) au fost "armonizate".

Reluând calculele (și modelarea) pentru aceeași situație geometrică, dar în cazul în care se lucrează cu un lichid magnetic având  $\mu_r = 1,1$  se obține:

$$(F_s^*)_{\text{analitic}} = 68,776 \text{ N/m}^2$$

$$(F_s^*)_{\text{modelare}} = 64,911 \text{ N/m}^2$$

În acest caz diferența între valorile calculate prin cele două metode reprezintă doar 5,95% din valoarea obținută prin modelare.

Ambele metode reprezintă metode aproximative de determinare a forței de readucere ce acționează asupra axului lagărului cu lichid magnetic, având poli magnetici alternanți plasați în stator. Atât la prezentarea metodei analitice, cât și la fiecare din etapele de modelare și calcul pe cale numerică, au fost prezentate ipotezele de lucru în abordarea problemelor. Desigur, fiecare din ipotezele simplificatorii utilizate au introdus o anumită aproximare. Deși rezolvată în condițiile bidimensionale, metoda bazată pe modelare și calcul numeric poate fi creditată ca fiind mai precisă, condițiile restrictive impuse în rezolvare fiind mai apropiate de situația reală. În special în cazul când valoarea permeabilității magnetice relative a lichidului magnetic este  $\mu_r = 1,1$ , se poate aprecia că valoarea determinată prin modelare este mai apropiată de cazul real, ipoteza folosită la calculul aproximativ al câmpului magnetic fiind mai bine îndeplinită pentru o valoare mai mică a lui  $\mu_r$ .

Dar obiectivul acestor două metode nu constă atât în calculul, în valoare absolută și foarte precis, al forței de readucere, cât în stabilirea unor corelații între parametrii geometrici și de material, care să conducă la o forță maximă în condițiile date. Din acest punct de vedere se poate afirma că se confirmă și prin modelare și calcul numeric, concluziile prezentate în paragraful 4.2. (metoda analitică).

Modelarea și calculul numeric au permis luarea în calcul și a altor mărimi variabile, de care nu s-a putut ține seama la metoda analitică. A putut fi investigată influența extensiei radiale a magneților, influența dimensiunilor axiale ale polilor alternanți (prin raportul  $l_p/l_0$ ), influența (contribuția diminuată) polilor marginali, influența unor tipuri de materiale magnetice pentru confecționarea magneților permanenți ș.a.m.d.

Pentru fiecare din situațiile analizate s-au putut trage concluzii privind corelări ce sunt utile în calcule de proiectare.

## CAP.5. CONCLUZII SI SUBLINIAREA PRINCIPALELOR CONTRIBUTII

În cadrul acestui ultim capitol se prezintă concluzii privind obiectivele atinse prin prezenta lucrare, cu sublinierea contribuțiilor autorului. Această prezentare urmărește structura lucrării referindu-se, sintetic, la cele prezentate în capitolele respective.

În capitolul 1 este prezentată tratarea teoretică a problemei forțelor de natură magnetică ce se exercită asupra corpurilor imersate în lichid magnetic și care se găsesc în prezența unor câmpuri magnetice. În redactarea acestui capitol au fost folosite, în special, lucrări publicate de conducătorul lucrării de doctorat, lucrări menționate la referințele bibliografice. Problema este tratată pentru cazul general, atât privind sursele de câmp magnetic, cât și privind caracteristicile lichidelor magnetice și a materialelor corpurilor imersate. Având în vedere aplicarea calculelor la modele de lagăre magnetice cu magneți permanenți cu poli alternanți, din expresiile forței rezultante ce se exercită în cazul general în lichide magnetice, s-a reținut expresia (1.3.19). Cu această expresie, transformată și adaptată situațiilor concrete la care ea se aplică, s-au abordat calculele prezentate în capitolele 3 și 4. Tot în cadrul primului capitol au fost prezentate fenomenele de levitație magnetică de ordinul I și ordinul II, ca o concretizare a elementelor teoretice prezentate.

Capitolul al doilea se referă la problema calculului câmpului magnetic în medii neliniare. Paragraful 2.1. are ca subiect ecuațiile câmpului magnetic ce guvernează fenomenele ce se produc în diversele situații când lichidele magnetice sunt implicate. Aceste ecuații sunt prezentate sub mai multe forme, în funcție de potențiale. Dependent de tipul și geometria specifică problemei investigate, se pot utiliza ecuațiile ce se bazează pe potențialul magnetic scalar ( $V_M$ ), sau potențialul magnetic vector  $\vec{A}$ , sau potențialul magnetic modificat ( $U$ ), cel preponderent utilizat în prezenta lucrare.

Una din problemele pentru care s-au făcut calculele prin metode numerice, utilizând modele implementate pe calculator, este cea a determinării forței de levitație magnetică de ordinul II. Cazul studiat se referă la forța ce se exercită asupra unui magnet permanent sub formă de disc, având magnetizația permanentă constantă și orientată în sensul generatoarei, magnet permanent care este imersat într-o incintă nemagnetică ce conține lichid magnetic. Privitor la metodele numerice

cu care această problemă este abordată, sunt prezentate două metode, consacrate deja: metoda diferențelor finite (MDF) și metoda elementelor finite (MEF).

Cu MDF a fost abordată problema forței ce se exercită asupra magnetului în condițiile în care se poate presupune că extinderea radială a lichidului magnetic este infinită [DS7]. Principiul și modul de aplicare a acestei metode de calcul (utilizând potențialul magnetic scalar) sunt prezentate în paragraful 2.2.1.

Principiul de aplicare a MEF (utilizând potențialul magnetic vector) și forma concretă de aplicare a MEF în condițiile unei configurații de câmp plan meridian (utilizând potențialul magnetic modificat) sunt prezentate în paragraful 2.2.2.

Capitolele 3 și 4 cuprind rezolvarea efectivă, prin modelare, a unor probleme legate de fenomenul de levitație magnetică. În paragraful 3.1. este prezentat modul de aplicare a MEF pentru calculul câmpului magnetic produs de un disc, magnet permanent, imersat în lichid magnetic. Pentru rezolvare a fost utilizat un program de calcul cu discretizare semiautomată al domeniului de extensie al câmpului.

Corectitudinea calculelor efectuate pe cale numerică a fost verificată prin aplicarea programului la situații particulare pentru care, în puncte particulare, se poate determina pe cale analitică expresia și, deci, valoarea soluției de câmp. Limitele de extindere (plasarea frontierelor) a câmpului avute în vedere la modelare s-au fixat tot prin compararea unor situații rezolvate cu același program- cu probleme cu soluție analitică cunoscută. Acestea reprezintă contribuții personale, fiind cuprinse și în lucrări la care sunt autor sau coautor [Bl1],[GrBl].

Pentru a reduce influența erorilor produse de discretizarea diferită a domeniilor în cazul că se modifică poziția relativă disc magnet-lichid magnetic, am utilizat în discretizarea semiautomată o idee proprie, privind păstrarea identică a discretizării pentru magnet (în mod normal), dar și a unei "pelicule" de lichid magnetic ce înconjoară discul (fig. 3.1.3). A putut fi redusă astfel influența unor erori de determinare a valorilor componentelor câmpului magnetic pe suprafața discului, erori datorate unei eventuale discretizări diferite în zona de interes (imediat vecină suprafeței discului) la modificarea geometriei situației modelate.

Pentru calculul pe cale numerică a forței exercitate asupra discului, am determinat o expresie a acesteia (3.2.6) funcție numai de componentele forței de la suprafața de separație lichid magnetic - disc, pe fața dinspre lichid. Am determinat expresiile contribuțiilor aduse de suprafețele de racord între bazele



cilindrului (disc) și suprafața laterală a acestuia (paragraful 3.2.3). Luarea în calcul a acestor suprafețe, atât la calculul câmpului (mai ales), cât și la calculul forței a fost necesară pentru asigurarea unei soluții cât mai precise. Pentru a reduce erorile de calcul la determinarea forței prin integrare numerică am utilizat o metodă de cuadratură de ordinul trei (paragraful 3.2.1). În condițiile de determinare a soluțiilor de câmp ca valori cunoscute tabelar în puncte ale suprafețelor de interes, această metodă asigură soluția exactă a rezultatului integrării numerice. Ideea utilizării acestei metode precum și modul concret de aplicare a acesteia reprezintă contribuții care îmi aparțin.

Programul de calcul al forței este un program propriu și este cuprins în ordinograma de calcul din figura 3.3.2. Rezultatele experimentale avute la dispoziție (fig.3.3.1) au permis, prin modelarea aceleiași situații, verificarea metodei și a programelor de calcul numeric. Buna concordanță a acestora, cu precădere în zona de interes, a permis abordarea prin modelare a altor situații (modificări ale geometriei și ale proprietăților de material). Rezultatele prezentate în paragraful 3.3.3 sunt o bună bază pentru abordarea altor situații din domeniul levitației (unele au fost investigate chiar în prezenta lucrare), iar curba obținută prin modelare și prezentată în figura 3.3.9 (forța pe unitatea de volum) poate constitui o bază de plecare în calcule de proiectare. Rezultate din acest paragraf au fost prezentate și publicate (în rezumat) în volumul ICMF8 - Timișoara 1998 (Conferința Internațională de Fluide Magnetice), cea mai prestigioasă manifestare științifică din domeniu. Lucrarea în extenso a fost reținută pentru a fi publicată în volumul consacrat acestui eveniment științific.

În paragraful 3.4 a fost abordată problema forței axiale de centrare (refacere a coaxialității ansamblului magnet permanent în formă de disc, imersat în poziție excentrică în incinta cilindrică ce conține lichid magnetic). Această forță a fost denumită în lucrare forță de readucere. Calculele efectuate pentru determinarea acesteia pregătesc calculele efectuate la lagărele de tip "sandwich", problemă abordată în capitolul 4. Pe baza unei idei de determinare aproximativă a componentelor câmpului pe suprafața incintei prin MEF2D, am stabilit o metodologie de calcul a acestei forțe (ordinograma din figura 3.4.5).

Cum se poate observa și din aceasta, am găsit o metodă de calcul ce ține seama de extinderea finită pe verticală a lichidului magnetic. Rezultatele prezentate

fac comparație între cele două posibilități de modelare. Considerațiile din acest paragraf precum și o parte din rezultatele obținute prin modelare și calcul numeric au fost introduse în două lucrări științifice [DS8], [BI3].

În capitolul 4 se prezintă elemente legate de soluții constructive ale lagărelor și etanșărilor cu lichide magnetice. Sinteza realizată în paragraful 4.1 are la bază brevete de invenție internaționale, menționate la bibliografie, cât și realizări ale colectivului de Lichide Magnetice (Universitatea "Politehnica" Timișoara și Filiala Timișoara a Academiei Române), de a cărui sprijin și colaborare am beneficiat.

Lucrarea [DS4] a stat la baza redactării paragrafului 4.2, în aproximarea bidimensională determinată de ipotezele de calcul menționate și stabilirea unor corelații între dimensiuni geometrice ale lagărelor cu lichid magnetic, în vederea realizării unei forțe de readucere mai mari.

Paragraful 4.3 și cele care urmează sunt consacrate calculului numeric al forței de readucere la lagare cu lichid magnetic, modelate pe ordinator. Sunt precizate condițiile de aplicare a MEF, în aproximare bidimensională, și calculul numeric pentru determinarea forței. Metodele de calcul numeric utilizate, concepute sau adaptate, caută să minimizeze erorile de calcul, în condițiile de aproximare date de soluția pentru componentele câmpului. Modul concret de aplicare a MEF și programele de calcul pentru forța de readucere sunt contribuții ale autorului. Acestea au fost prezentate și explicitate la paragrafele respective.

În stabilirea pe cale numerică a corelațiilor între dimensiunile geometrice, am pornit de la analiza unui lagăr (ipotetic) cu o singură pereche de poli (bipolar). Magnetizația permanentă a celor doi magneți permanenți este radială și constantă în modul în orice punct al acestora, dar polaritatea celor doi magneți este opusă. Perechea de magneți din acest lagăr este de fapt o unitate din excitația lagărelor multipolare, cu poli alternanți. Concluziile ce au rezultat din această analiză au fost utile în modelarea lagărelor (reale) cu un număr mare de poli alternanți. În acest caz, numărul parametrilor geometrice ce trebuiesc luați în calcul este mai mare.

Problema determinării câmpului magnetic sub fiecare din cei doi poli ai lagărului bipolar a arătat particularitățile pe care polii marginali dintr-un lagăr tip sandwich le au în cadrul structurii acestora. Pentru evidențierea acestor particularități a fost analizată și contribuția pe care o are un anumit pol în stabilirea câmpului magnetic, în funcție de poziția sa în cadrul lagărului cu "n" perechi de poli

( $p_{k,n}$  cu  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Implicit, contribuția unui pol este diferită și în forța totală de readucere la nivelul lagărului.

Paragraful 4.4 investighează corelații între numărul polilor, proporțiile dimensiunilor polilor și câmpul magnetic pe care configurația îl realizează. Pornind de la o lungime axială dată ( $2L$ ), impusă de condițiile tehnologice determinate de destinația lagărului, este urmărit rezultatul ce se obține în două cazuri de realizare a excitației lagărului prin magneți permanenți cu poli alternanți:

- spațiul de distanțare între oricare doi poli succesivi, de polarități opuse, este menținut constant. Acest spațiu este denumit în lucrare interstițiu axial și păstrarea constantă a acestuia poate fi impusă de condiții tehnologice privind menținerea coaxialității magneților toroidali.

- proporția între dimensiunea porțiunii active a polului ( $l_p$ ) și dimensiunea axială a interstițiului ( $l_o$ ) este păstrată constantă indiferent de numărul perechilor de poli cu care se acoperă lungimea axială ( $2L$ ) a lagărului.

Pentru ambele ipoteze de calcul, numărul polilor cu care se realizează statorul lagărului magnetic a fost variabil în modelare.

Pentru fiecare ipoteză de lucru utilizată și pentru condiții de gabarit axial date, s-a pus în evidență un domeniu de optim privind numărul perechilor de poli cu care distanța  $2L$  poate fi acoperită.

Criteriul de optimizare a fost obținerea unei valori maxime pentru forța de refacere a coaxialității axului plasat excentric în lagărul cu lichid magnetic.

Am urmărit și efectul plasării unui număr oricât de mare de perechi de poli, în situația când nu există o limitare pe direcție axială a dimensiunii lagărului magnetic. Contribuția polilor alternanți din cadrul unui asemenea șir de magneți permanenți cu care se realizează excitația este urmărită atât privind felul în care se modifică spectrul câmpului magnetic, cât și privind forța de readucere totală și cea medie pe pol.

În cadrul paragrafului 4.4 a fost urmărită și influența extinderii pe direcție radială a magneților permanenți ( $R_{2_{ext}}$ ), la menținerea constantă a dimensiunii interioare a statorului ( $R_2$ ). S-a pus în evidență, în toate situațiile studiate, că peste un anumit prag, această extindere nu mai aduce un spor semnificativ în forța de readucere (deși în acest fel gabaritul radial al lagărului crește și crește și masa de material magnetic utilizat). Această investigație s-a făcut pentru mai multe proporții

generale ale lagărului, care se influențează reciproc cu extinderea radială a polilor. Din aceste cercetări a rezultat că poate fi acceptată, ca o limită orientativă, valoarea raportată  $h/l_p \approx 3$ , valoare peste care sporul obținut în forța de readucere nu mai este semnificativ.

În paragraful 4.5 am urmărit influența unor tipuri de materiale magnetice utilizate pentru realizarea polilor alternanți ce creează câmpului magnetic. În modelare s-a urmărit și efectul utilizării unui anumit material magnetic (magnet permanent). Fiecare din materialele considerate a reprezentat o anumită categorie de material magnetic și nu neapărat o soluție tehnică anume.

A fost luat ca referință un material magnetic liniar ideal (numit idealizat în prezenta lucrare). Acest material de referință prezintă magnetizație permanentă numai pe direcție radială, constantă în modul în orice punct al materialului magnetic și are permeabilitatea magnetică relativă  $\mu_r = 1$ . Față de acest material s-au mai utilizat în modelare încă un material liniar ( $\mu_r = 1,23$ ) și mai multe materiale neliniare, cu diferite particularități ale curbelor de demagnetizare. Criteriile ce au stat la baza stabilirii tipurilor de materiale magnetice au fost prezentate în detaliu în paragraful 4.5.1.

În realizarea temei s-au folosit mijloacele tehnice la care autorul a avut acces. Rezolvarea problemei distribuției câmpului magnetic în spațiul lagărului magnetic cu polii de excitație alternanți plasați în stator și pentru o poziție excentrică a rotorului își gasește o soluție mai corectă prin rezolvarea cu MEF3D. Metodele prezentate (cea analitică, preluată din [DS4], și cea numerică, dezvoltată în prezenta lucrare în 2D) permit obținerea unor soluții aproximative pentru soluția de câmp, dar toate considerațiile și procedeele de calcul stabilite rămân valabile. Așa cum s-a precizat în paragrafele 4.1 și 4.3, toate considerațiile legate de modelarea problemei și apoi toate calculele privind forța axială de readucere rămân valabile și pentru cazul lagărelor magnetice care au magnetii permanenți plasați pe axul mobil (rotor).

În vederea obținerii unor concluzii cu un grad de generalitate mai ridicat (pentru o gamă de tipuri de lagăre cu lichid magnetic, caracterizate prin anumite corelări între dimensiunile caracteristice acestor lagăre) majoritatea calculelor ce s-au efectuat au implicat utilizarea unor mărimi raportate.

În abordarea calculelor de proiectare, aceste corelații permit stabilirea caracteristicilor geometrice și de material, pornind de la unele valori impuse prin

tema de proiectare (2L, R<sub>1</sub>, gabarit radial, etc).

Această lucrare aduce contribuții la modelarea fenomenului de levitație magnetică (subiect puțin abordat în literatura de specialitate), completând tematica aplicațiilor ce implică utilizarea lichidelor magnetice. Modelarea propusă se aplică la determinarea performanțelor lagărelor cu lichide magnetice. Covârșitoarea majoritate a articolelor ce abordează domeniul lichidelor magnetice se referă fie la lichidele magnetice în sine (proprietăți, preparare), fie la aplicații tehnice, eventual experimente.

Tema abordată nu este epuizată prin cele prezentate și, pentru viitor, este posibil să se considere și alte aspecte. Aceasta presupune o tratare teoretică a acestor probleme, modelarea lor, precum și aplicarea lor la cazuri concrete. Unele din acestea ar putea fi:

- utilizarea lichidului magnetic și în afara domeniului liniar, cu determinarea câmpului magnetic, stabilirea expresiilor de calcul a forței și calculul efectiv pentru această situație

- stabilirea unor expresii analitice pentru componentele  $B_r(r,z)$  și  $B_z(r,z)$ , acestea având valori (sub formă tabelară) obținute în urma modelării. Analiza poate fi extinsă la diferite materiale magnetice și lichide magnetice (liniare și neliniare) concretizându-se prin calcule pentru determinarea forței de readucere axială (prin metode analitice și numerice)

- modelarea unui lagăr prin utilizarea aproximării de configurație de câmp plan paralel și stabilirea echivalenței față de situația modelării cu o configurație de tip plan meridian (ambele cazuri cu o pelicula de lichid magnetic între stator și rotor) și apoi calculele forței de readucere în cele două cazuri de modelare.

Toate problemele legate de modelare își găsesc o rezolvare mai precisă dacă se dispune de un program de MEF3D, cu un număr mare de noduri, care să permită o modelare foarte fină, atât pentru cazul excentricităților foarte mici, cât și pentru cazul excentricităților maxime.

Obținerea unor contracte de cercetare științifică care să permită dezvoltarea cercetării pare iluzorie în conjunctura economică actuală, dar ar fi, fără nici o îndoială, un impuls capabil să conducă la soluționarea unora din problemele concrete care se pot pune în domeniu, putând genera și noi idei și/sau soluții tehnice. Pentru prezent, cel puțin, colaborarea cu specialiștii încadrați în colectivele

ce se ocupă și cu studiul lichidelor magnetice din cadrul Institutului pentru Fluide Complexe, Universitatea "Politehnica" Timisoara și Centrul pentru Cercetări Tehnice Fundamentale, Filiala Timișoara a Academiei Române, este singura modalitate de a susține, în oarecare măsură dezvoltarea prezentei teme.



## BIBLIOGRAFIE

- [An1] **Anton, I., De Sabata, I.s.a.** Etanșari cu fluid magnetic. Aspecte fundamentale. Conf. Mas. Hidraulice și Hidrodinamică, Timișoara, (CMHHT) 1985
- [An2] **Anton, I., De Sabata, I.s.a.** Magnetic fluid seals: some design problems and applications, Journal of Magn. and Magnetic Materials 65 (1987)
- [Ar1] **Arkadan, A.A.** A Graduate Course of Finite Element Analysis for Electromagnetic Applications, IEEE Transactions on Education, vol.36, no.2, 1993
- [Ba1] **Bailey, R. L.** Lesser known applications of ferrofluids, Journal of Magnetism and Magnetic Materials 39, 178-182, North Holland Publ. Company, 1993
- [Ba1] **Bastovai, V.G., Berkovschi, B.M., Vislovici.** Vedenie vtermomechaniku magnetik jidkosti, Moscova 1985
- [Bk1] **Blak, Jr. & a.** Self-activating ferrofluid seal apparatus and method, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1984
- [Bl1] **Blaj, C., și a.** Stabilirea forței de sustentare în funcție de caracteristicile fluidului și ale magneților permanenți în cazul unui lagăr magnetofluidic cu magneți permanenți, Subcontract nr.606/ 1997, Institutul pentru fluide complexe, U.P.Timișoara
- [Bl2] **Blaj, C., Greconici, M.** Computer modelization for the calculation of the second order levitation force, Bul.St. U.P.Timișoara Tom 44(58) Fasc.1, 1999
- [Bl3] **Blaj, C., Greconici, M.** Analiza formei bobinelor de excitație la un generator unipolar supraconductor, prin metode numerice de determinare a câmpului, Acta Universitatis, CIBINIENSIS, vol XX, Sibiu, 1995
- [Bl4] **Blaj, C., Greconici, M.** Calculation of the restoring force exerted on a permanent magnet immersed in a magnetic liquid, Acta Universitatis CIBINIENSIS Sibiu, 1998
- [Bl5] **Blaj, C.,** Determinarea prin modelare a câmpului electrocinetic în benzi conductoare înguste și subțiri, alimentate prin contacte masive, Lucr. Ses. de Com. Stiințifice, Universitatea "Aurel Vlaicu" Arad, 1997
- [Bl6] **Blaj, C.,** Influența contactelor masive asupra rezistenței electrice măsurate la benzi conductoare masive Lucr. Ses. de Com. Stiințifice, Universitatea "Aurel Vlaicu", Arad, 1997
- [Bl7] **Blaj, C.,** Etanșari și lagăre magnetice; calculul câmpului magnetic, Referat doctorat, Timișoara, 1994
- [Bl8] **Blaj, C.,** Studiul teoretic și experimental al levitației în lichide magnetice, Referat doctorat, Timișoara, 1994
- [Bl9] **Blaj, C, Greconici, M.,** Modelări pentru calculul numeric al forțelor exercitate în sisteme electrostatice, Ses. St. Jubiliară Petroșani 1998

- [By1] **Byrne, J.V.**, Force on a Magnet Immersed in a Ferrofluid, IEEE, vol.Mag. - 14, No.5, September 1978.
- [Ch1] **Chorney, A.F.** Ferrofluid- pole- piece- magnet apparatus, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1983
- [Cw1] **Cowley, M.D., Rosenzweig, R.E.**, The interfacial stability of a ferromagnetic fluid, Jurnal of Fluid Mech., (30)19, Cambridge University Press, 1967
- [Co1] **Colțeu, A.**, Proprietăți ale lichidelor magnetice în câmpuri electromagnetice staționare, Teză de doctorat, IPTVT, 1980
- [DS1] **De Sabata, I.** Les forces de surface et la pression, exercees par le champ electromagnetique dans les liquides nonlinaires, isotropes et sans hysteresis, Bul.IPTVT Tom 29(43) 1984
- [DS2] **De Sabata, I.** Forta exercitată de câmpul magnetic asupra unui corp având magnetizație permanentă și temporară, imersat in lichid magnetic si în câmp magnetic, Analele Univ. Oradea 1991
- [DS3] **De Sabata, I.** Asupra forțelor de volum în teoria Maxwell-Hertz, Bul.St. și Tehn, IPTVT, 1981, Seria Electrotehnică, Fasc.2, Tom 26(40), Timișoara.
- [DS4] **De Sabata, I.** On the restoring force of magnetic fluid bearing. Acad. R.S.R., Revue Roumaine des sciences techniques, Serie de Mecanique Appliquee, tom 34, no.1, 1989
- [DS5] **De Sabata, I. s.a.** Aplicațiile ferofluidelor, Seminar tehnico- științific, I.P.Timisoara, 1980, pg.31-53
- [DS6] **De Sabata, I., Colteu, A.**, Acțiuni ponderomotoare ale câmpului electro-magnetic asupra lichidelor magnetice și unele consecințe ale acestora, Sem. Tehn. St. Aplicațiile ferofluidelor, Timișoara, 1980
- [DS7] **De Sabata, I. s.a.** Calculul numeric al forței exercitate asupra unui magnet permanent în formă de disc, imersat în lichid magnetic, CMHHT
- [DS8] **De Sabata, I.** Questions concernant les dimensions principales des pôles d'un scellement magnéto-fluide, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Tome 30, 1985
- [DS9] **De Sabata, I., Blaj, C., Greconici, M.** The numeric calculation of the force exerted on a magnetized disc immersed in a magnetic liquid, ICMF8, Timișoara, 1998
- [DS10] **De Sabata, I., Blaj, C., Greconici, M.** Calculul numeric al forței de centrare axială exercitată asupra unui disc uniform magnetizat imersat într-o incintă cu lichid magnetic (eng) EMES '99, Oradea
- [Ez1] **Ezekiel, Frederick D.** Magnetic disc liquid supporting, Lexington, Massachusets, 1985
- [Fe1] **Fertman, V.E.**, Magnitnîc jidkosteï - estestnennaia konvekciia i teploobmen, Nauka i tehnika, Minsk 1978



- [Fu1] **Furumura, K. & a.** Sealing and bearing means by use of ferrofluid. Nippon Seiko K.K. Tokio, Japan, 1986
- [Fu2] **Furumura, K.** Sealing and bearing means by use of ferrofluid, Nippon Seiko K.K. Tokio, Japan, 1984
- [Go1] **Gowda, H.L. & a.** High pressure ferrofluid seal apparatus. Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1985
- [Go2] **Gowda, H.L.** Single pole piece multiple stage ferrofluidic seal apparatus, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1985
- [Go3] **Gowda, H.L.,** Ferrofluid linear seal apparatus, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1984
- [GrBl] **Greconici, M., Blaj, C.** Asupra stabilirii geometriei domeniului la probleme cu magneti permanenți, soluționate numeric, Simpozion St. Jubiliar Petroșani 1998
- [Ha1] **Hart, Jr. & a.** Low friction ferrofluid bearing arrangement, Spectra-Physics, Inc., San Jose, California, 1988
- [He1] **Heshmat, H.** Magnetic fluid devices such as magnetic fluid bearings, seals, and the like, and an automatic magnetic fluid supply control system therefor, Mechanical Technology Incorp. N.Y., 1986
- [Hi1] **Higgins, D.W.** Coaxial, multiple- shaft ferrofluid seal apparatus, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1984
- [Iv1] **Iversen, Arthur H.** Liquid cooled ferrofluid- type rotating seals, Saratoga, California, 1986
- [Ko1] **Korovin, V.M.,** Modified thermodynamic approach for calculation of ponderomotive force on a body in ferrofluid, JMMM nr.89, North-Holland 1990
- [Li1] **Lind, B.** Seal with pressure fluid feed, SKF Nova AB, Goteborg, Sw., 1985
- [Lu1] **Luca, E. s.a.** Ferofluidale și aplicațiile lor industriale, Ed.Tehnică, 1978
- [Me1] **Merrimack, H.H.** Ferofluid- rotary shaft seal apparatus and method, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1982
- [Mî1] **Mîndru, Gh. s.a.** Analiza numerică a câmpului electromagnetic, Editura Dacia, Cluj- Napoca, 1986
- [Pe1] **Pedu, A.A.** Magnetic seal for magnetic particle clutches and brakes. Lake Placid, N.Y., 1986
- [Po1] **Popescu, Chr. s.a.** Materiale electrotehnice, Ed.Did. si Ped. Bucuresti 1985
- [Pt1] **Potencz I., Vékás L.s.a.** Influența unor parametri geometrici asupra performanțelor etanșarilor cu lichid magnetic, CMHHT 1985
- [Pt2] **Potencz, I., Fábíán, St. s.a.** Realizarea și experimentarea unor modele si prototipuri de etanșari magnetofluidice, CMHHT 1985
- [Pt3] **Potencz, I., Vékás, L.,s.a.** Aplicarea etanșărilor magnetofluidice în tehnica vidului, CMHHT 1985

- [Rd1] **Radulet, R.**, Bazele teoretice ale electrotehnicii vol II, Editura energetica de stat 1954
- [Ri1] **Ritter, K. & a.** Magnetic liquid shaft seal. BASF Aktiengesellschaft, 1987
- [Ri2] **Ritter, K.** Magnetic liquid shaft seal, BASF Aktiengesellschaft, Ludwigsfallen, FRG, 1986
- [Rj1] **Raj, K. & a.**, Radially polarized multiple- stage ferrofluid seal apparatus, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1985
- [Rj2] **Raj, K. & a.** Nonbursting magnetic liquid seals for high vacuum applications, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1984
- [Rj3] **Raj, K.** Ferrofluid seal apparatus and method, Ferrofluidics Corporation, N.H., 1984
- [Rj4] **Raj, K.** Ferrofluid rotary- shaft seal apparatus and method, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1982
- [Rj5] **Raj, K.** Coaxial, multiple- shaft ferrofluid seal apparatus, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1984
- [Rj6] **Raj, K.** Self activating ferrofluid seal apparatus and method of use, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1984
- [Rj7] **Raj, K.** Stabilized ferrofluid- ferrofluid seal apparatus and method, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1984
- [Rj8] **Raj, K.** Single pole piece multiple- stage ferrofluid seal apparatus, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1984
- [Rj9] **Raj, K. & a.** Commercial applications of ferrofluids, JMMM nr.85 1990
- [Rj10] **Raj, K. & a.** A review of damping applications of ferrofluids, IEEE Transactions, Mag-16, nr.2 1980
- [Ro1] **Rosensweig, R. E.**, Ferrohydrodynamics, Cambridge, University Press 1985
- [Sa1] **Sato, K.** Magnetic fluid sealing device, R.K.K.K., Japan, 1983
- [Sc1] **Schwartzman, A.** Ferrofluid rotary- shaft seal apparatus and method, Ferrofluidic Corporation, Nashua, N.H., 1982
- [St1] **Stahl P.**, Ferrofluid thrust and radial bearing assembly, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1983
- [Vé1] **Vékas L.,s.a.** Concentration and composition dependence of the rheological behaviour of some magnetic fluids ICMF8, Timisoara, 1998
- [Vi1] **Vislovici, A.N., Krakov, M.S.**, Krascetni sil, deistvuiusih na magnit, vzvşennî v magnitnoi jidkosti, Odinnadţatoc sovesceanie po magnitnai gidrodinamike, Riga 1984
- [Ya1] **Yamamura, A.** Ferrofluid rotary- shaft seal apparatus and method, Ferrofluidics Corporation, Nashua, N.H., 1982