

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

Ing. PETRU BRAD

INFLUENȚA FORMEI CRESTĂTURII
ASUPRA PARAMETRILOR ELECTRICI
LA MAȘINILE DE INDUCȚIE

TEZĂ DE DOCTORAT

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC

Acad. TOMA DORDEA

TIMIȘOARA
1999

UNIVERSITATEA

626.095
181 E

CUPRINS

1. Introducere	1
2. Metode matematice de calcul al câmpului electromagnetic	3
2.1. Generalități	3
2.2. Formularea matematică a problemelor de câmp electromagnetic	4
2.3. Metode de calcul al câmpului electromagnetic	7
2.3.1. Metode analitice de calcul al câmpului electromagnetic	8
2.3.1.1. Metoda directă	8
2.3.1.2. Metoda integrării ecuațiilor Poisson-Laplace prin separarea variabilelor	9
2.3.1.3. Metoda imaginilor magnetice	12
2.3.1.4. Metoda funcțiilor de variabilă complexă	14
2.3.1.5. Metoda transformării conforme	17
2.3.1.6. Metoda funcțiilor Green	21
2.3.2. Metode numerice de calcul al câmpului electromagnetic	24
2.3.2.1. Metoda diferențelor finite	25
2.3.2.2. Metoda elementelor finite	29
2.3.2.3. Metoda elementelor de frontieră	31
2.4. Concluzii	34
3. Parametrii electrici ai motorului de inducție	35
3.1. Generalități	35
3.2. Determinarea rezistențelor mașinii de inducție	35
3.2.1. Rezistența pe fază a înfășurării statorice	35
3.2.2. Rezistența pe fază a înfășurării rotorice	36
3.2.3. Rezistența de magnetizare	39
3.3. Determinarea reactanțelor mașinii de inducție	40
3.3.1. Reactanța de dispersie	40
3.3.1.1. Reactanța de dispersie a înfășurării statorice	40
3.3.1.2. Reactanța de dispersie a înfășurării rotorice	41
3.3.1.3. Permeanța specifică de dispersie a creștăturii	43
3.3.1.4. Permeanța specifică de dispersie diferențială	46
3.3.1.5. Permeanța specifică de dispersie în părțile frontale	46
3.3.2. Reactanța principală	47
3.4. Concluzii	48
4. Influența saturației asupra parametrilor electrici la mașina de inducție	49
4.1. Saturația magnetică la mașina de inducție	49
4.2. Efectele saturației magnetice	53
4.3. Parametrii saturați ai mașinii de inducție	59
4.3.1. Influența saturației asupra reactanțelor	59
4.3.1.1. Influența saturației asupra permeanței creștăturii	59
4.3.1.2. Influența saturației asupra dispersiei diferențiale	61
4.3.1.3. Influența saturației asupra inductanței principale	62
4.3.2. Influența saturației asupra rezistenței rotorice	63
4.4. Concluzii	63

5. Identificarea motorului de inducție utilizând modele matematice	64
5.1. Considerații teoretice	64
5.2. Modele matematice	65
5.3. Metode de modelare a curbei de magnetizare	68
5.4. Caracteristicile mașinii de inducție	73
5.5. Influența pierderilor în fier	74
5.6. Concluzii	77
6. Metodă de identificare a inducțiilor magnetice la motorul de inducție	78
6.1. Identificarea inducțiilor magnetice la funcționarea în gol	80
6.2. Identificarea inducțiilor magnetice la funcționarea în sarcină	84
6.3. Concluzii	88
7. Estimarea inducției magnetice la motorul de inducție	89
7.1. Sistem de achiziție și analiză	89
7.2. Estimarea inducției magnetice la funcționarea în gol	91
7.3. Estimarea inducției magnetice la scurtcircuit	96
7.4. Concluzii	98
8. Influența formei creștăturii asupra parametrilor electrici	99
8.1. Calculul parametrilor electrici	99
8.2. Studiul influenței formei creștăturii statorice	103
8.3. Studiul influenței formei creștăturii rotorice	107
8.4. Verificări experimentale	110
8.5. Concluzii	115
9. Variația caracteristicilor motorului de inducție la modificarea formei creștăturii	117
9.1. Program de calcul al caracteristicilor motorului de inducție	117
9.2. Variația caracteristicilor motorului de inducție la modificarea formei creștăturii stator	119
9.3. Variația caracteristicilor motorului de inducție la modificarea formei creștăturii rotor	122
9.4. Verificări experimentale	126
9.5. Concluzii	129
10. Concluzii generale	132
Bibliografie	134
ANEXA 1. Funcțiile cilindrice Bessel	140
ANEXA 2. Curbe de magnetizare	141
ANEXA 3. Variația potențialului vector și a inducției magnetice	143
ANEXA 4. Scheme de înfășurări ale motoarelor de inducție studiate	149
ANEXA 5. Fișiere cu datele constructive ale motoarelor de inducție studiate	152
ANEXA 6. Modificarea formei creștăturii statorice	156
Modificarea formei creștăturii rotorice	160
Notații utilizate	161

*Nici o armată nu poate rezista
forței unei idei căreia i-a venit timpul.*

Victor Hugo

1. INTRODUCERE

Lucrarea tratează unele aspecte privind posibilitățile de modelare a caracteristicilor mașinii de inducție, punând accent pe geometria creștăturilor.

Câteva din subiectele tratate sunt aprofundate mai puțin în literatura de specialitate.

Este considerat regimul staționar al mașinii de inducție caracterizat prin toate variabilele de stare constante. Regim staționar înseamnă staționar din punct de vedere mecanic, pentru care viteza de rotație a rotorului, ca și mărimile efective sau maxime ale variabilelor de stare (curenți, tensiuni, fluxuri, etc.), sunt constante.

Forma geometrică a creștăturilor este un factor esențial în modelarea parametrilor electrici și obținerea unor caracteristici optime de funcționare pentru mașinile de inducție.

Datorită variației parametrilor electrici cu poziția, saturația magnetică și temperatura, mașinile de inducție sunt descrise de un sistem de ecuații diferențiale neliniare.

În prezenta lucrare, prin motor de inducție se înțelege motorul trifazat cu rotorul în scurtcircuit.

Dezvoltarea explozivă a calculatoarelor digitale impune utilizarea exclusivă a acestora atât la rezolvarea ecuațiilor diferențiale prin metode numerice, cât și la simularea regimurilor de funcționare și la testarea motoarelor. Generația actuală de calculatoare este puternică și rapidă, capabilă să rezolve în timp util problemele de câmp și de modelare cu ajutorul metodei elementelor finite. În aceasta sunt incluse neliniaritățile introduse de creștere, distribuția înfășurărilor și caracteristicile de material. Multe dintre acestea produc armonici superioare al căror impact asupra funcționării mașinii este deosebit de important.

Armonicile care au viteza de rotație de sincronism identică cu cea a fundamentalei, produc cupluri utile mașinii de inducție. Acesta este cazul armonicilor de flux din întrefier produse de saturație.

Dacă viteza de rotație de sincronism a armonicilor este diferită de cea sincronă a fundamentalei apar cupluri parazite sincrone sau asincrone, cu efecte negative asupra funcționării mașinii de inducție.

În cazul alimentării de la o sursă nesinusoidală, conținutul în armonici se îmbogățește și pierderile în mașină cresc.

Metoda de studiu utilizată trebuie să ia în considerare fenomenele dintr-o mașină reală, influențată de saturație.

Mașina de inducție este un convertor electromecanic neliniar ai cărui parametri și caracteristici se pot exprima în diferite moduri în funcție de regimul de funcționare.

Motoarele de inducție sunt cele mai utilizate mașini electrice în domeniul conversiei energiei electromecanice. Echiparea sistemelor de acționare cu acest tip de motor are un serios impact economic asupra funcționării unităților industriale.

Construcția simplă și robustă precum și prețul scăzut fac motorul de inducție deosebit de atractiv pentru o gamă largă de acționări electrice, de la cele mai simple până la cele mai complexe.

Inconvenientul major al acestui motor alimentat de la rețea îl constituie imposibilitatea reglării turației fără un echipament suplimentar și pierderi de putere.

Constructorii de motoare de inducție proiectează aceste mașini pentru un domeniu larg de aplicații, cu diferite performanțe impuse. Utilizatorul, pe cât posibil, va folosi un motor de uz general care să îndeplinească cerințele acționării.

Proiectanții trebuie să țină cont atât de standardele în vigoare cât și de cerințele pieții, precum și de alte caracteristici.

Creșterea randamentului prin diminuarea pierderilor în mașina electrică, în special a celor cu emisie de căldură, constituie o preocupare pentru viitorul apropiat [41].

Prezenta lucrare este elaborată sub atenta și riguroasa îndrumare a domnului academician Toma Dordea, căruia îi aduc pe această cale sincere și respectuoase mulțumiri.

Exprim vii mulțumiri domnului prof. Gheorghe Atanasiu pentru baza tehnico-materială pusă la dispoziție în Laboratorul de Simulări Numerice, pentru efectuarea simulărilor și testărilor motoarelor de puteri cuprinse între 0,55 kW și 2,2 kW.

Mulțumesc conducerii S.C. Electromotor S.A. Timișoara pentru sprijinul acordat pentru efectuarea probelor la motoarele de inducție cu puteri cuprinse între 3,2 kW și 15 kW.

Calde mulțumiri domnului prof. Wilfried Markert, de la Universitatea Tehnică din Ilmenau, Germania și domnului prof. Daniel Ioan, de la Universitatea "Politehnica" din București, care au îndrumat și sprijinit material activitatea mea în domeniul modelării și simulării câmpului electromagnetic la motoarele de inducție.

Mulțumesc, de asemenea, tuturor colegilor care, prin observațiile și sugestiile lor, au contribuit la realizarea acestei lucrări.

2. METODE MATEMATICE DE CALCUL AL CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

2.1. Generalități

După o dezvoltare spectaculoasă în producerea, distribuția și utilizarea energiei electrice, omenirea a ajuns astăzi direct dependentă de electricitate.

Încă de mult a apărut necesitatea calculului câmpurilor electrice, magnetice și termice, pentru a ne forma o imagine asupra utilității, oportunității și randamentului mașinilor electrice. Din acest calcul pot fi deduse ulterior mărimi ca: puteri, momente, inductivități.

Izvoarele metodelor moderne de analiză în domeniul energiei electrice se găsesc la finele anilor treizeci ai acestui secol [31]. Din secolul trecut au fost descoperite principiile fizicii de bază ale electrostaticii și electrodinamicii. Nume cunoscute ca Tesla, Faraday, Volt și Maxwell și-au adus contribuția prin valoroase descoperiri. Principiile formulate de ei stau la baza unui mare număr de metode analitice de calcul a circuitelor magnetice cu ajutorul schemelor echivalente. Metodele numerice erau deja cunoscute, dar utilizarea practică era limitată de numărul mare de calcule. Din acest motiv modelele erau mult simplificate. Se puteau calcula doar anumite porțiuni, de exemplu câmpul din creștătură sau fluxul de dispersie al dinților. Modelele erau valabile doar pentru geometrii regulate simple.

În anii cincizeci au fost publicate primele lucrări privind utilizarea metodelor numerice la calculul mașinilor electrice. Metoda diferențelor finite s-a dovedit o unealtă potrivită, dar au trebuit să treacă încă douăzeci de ani până la utilizarea primelor calculatoare. Atunci metoda s-a dezvoltat rapid până în anii optzeci când a fost practic înlocuită de metoda elementelor finite.

Proiectarea sau optimizarea mașinilor electrice se poate efectua cu o precizie ridicată rezolvând ecuațiile care definesc comportarea câmpurilor electromagnetice din acestea. Prin urmare, cunoașterea acestor câmpuri prezintă o tot mai mare importanță.

Dacă regimul este variabil în timp, câmpului magnetic i se asociază inseparabil câmpul electric și împreună se condiționează reciproc alcătuind câmpul electromagnetic. Câmpului magnetic i se asociază regiunea din spațiu în care se exercită forțe și cupluri de natură magnetică și funcția de punct care îl caracterizează [55].

Câmpurile electromagnetice joacă un rol deosebit în studiul comportării mașinilor electrice. Este important ca proiectantul să cunoască evoluția cât mai precisă a acestor câmpuri pentru a dimensiona optim mașina și a obține un randament maxim de utilizare a instalației electrice. Aceasta este posibil când se cunosc toate câmpurile din mașină, lucru greu de îndeplinit. În principal există două posibilități: să fie măsurate sau să fie calculate. Măsurarea câmpurilor este anevoioasă și adesea inutilă. Se recomandă măsurarea efectelor directe produse de câmp.

Calculul câmpurilor prin simulare pe calculator înlocuiește cu succes încercările dificile care ar trebui efectuate.

Dacă se cunoaște câmpul în orice punct, atunci se pot determina toate celelalte mărimi.

Nu avem nici un organ specializat cu care să percepem și să diferențiem câmpurile electromagnetice, cu excepția luminii. Din această cauză trebuie să elaborăm un model, o teorie. Această teorie are pe de o parte o logică internă prin intermediul căreia putem să explorăm în mod abstract, iar pe de alta, o relație cu o parte a mediului pe care vrem să-l descriem cu ajutorul ei.

În electrotehnică, teoria lui Maxwell descrie în majoritatea cazurilor complet comportarea câmpurilor electromagnetice. Sunt patru variabile independente, trei coordonate spațiale și una de timp, precum și șaisprezece valori dependente: câte trei componente ale inducției magnetice, ale intensității câmpului magnetic, ale intensității câmpului electric, ale inducției electrice, și ale densității de curent și o componentă a densității de sarcină.

2.2. Formularea matematică a problemelor de câmp electromagnetic

O descriere fizică completă a oricărui câmp electromagnetic poate fi dată de cinci vectori de câmp, doi magnetici și trei electricsi [5], [88]. Vectorii magnetici sunt intensitatea câmpului magnetic \vec{H} și inducția magnetică \vec{B} . Cei trei vectori electricsi sunt intensitatea câmpului electric \vec{E} , inducția electrică \vec{D} și densitatea intensității de curent \vec{J} . Aceste mărimi se referă la distribuția spațială a densității de sarcină electrică, astfel încât să satisfacă ecuațiile lui Maxwell:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

și ecuațiile divergențelor:

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

La aceste relații diferențiale se adaugă legile de material:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.7)$$

Ecuațiile (2.5), (2.6) și (2.7) corespund materialelor în regiunea studiată prin intermediul permeabilității μ , permitivității ε și conductivității σ .

Cantitățile μ , ε și σ nu sunt neapărat constante, o excepție cunoscută fiind cazul materialelor feromagnetice pentru care funcția $B = f(H)$ poate fi o lege neliniară complicată. Mai mult, ε și μ pot defini materiale cu anizotropie, având funcții magnetice diferite de intensitățile de câmp corespunzătoare. În toate aceste cazuri constantele se vor scrie ca tensori.

O ecuație fundamentală, care se obține din relațiile (2.2) și (2.4) este ecuația de continuitate care exprimă conservarea sarcinii:

$$\text{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho_v}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

În regimurile staționare, relația devine $\text{div}\vec{J} = 0$. În situații variabile în timp, având conductoare foarte bune, putem presupune că $\text{div}\vec{J} \neq 0$.

Ecuațiile (2.1)...(2.4) există și sub formă matematică echivalentă integrală. Integrala se efectuează pe suprafața deschisă S sau pe conturul C al frontierei, după cum este ilustrat în figura 2.1. Cele două ecuații ale lui Maxwell devin:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.9)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (2.10)$$

Ecuațiile (2.3) și (2.4) corespund legilor fluxului lui Gauss:

$$\oint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \rho_v \cdot d\Omega \quad (2.11)$$

$$\oint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.12)$$

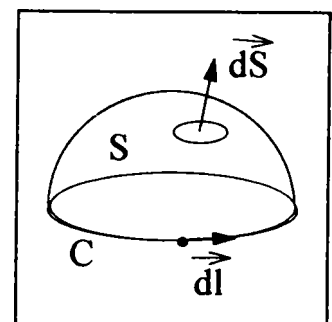


Fig.2.1. Suprafața S și conturul C

unde suprafața S' închide volumul Ω .

În multe cazuri problemele tratate se referă la regimul staționar al sistemelor alimentate cu mărimi sinusoidale. În astfel de cazuri este convenabil ca variabilele să fie reprezentate în complex prin fazori. Fiecare și oricare dintre variabilele electromagnetice este reprezentată printr-un fazor cantitativ, de exemplu intensitatea câmpului magnetic:

$$\vec{H}_p = \vec{H}_r + j\vec{H}_i$$

La variația sinusoidală în timp ecuațiile (2.1) și (2.2) devin:

$$\text{rot}\vec{E} = -j\omega\vec{B} \quad (2.13)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D} \quad (2.14)$$

La suprafața de separație între mediile 1 și 2 sunt valabile relațiile:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (2.15)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (2.16)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (2.17)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (2.18)$$

unde \vec{n} este vectorul normal la suprafață orientat de la mediul 2 spre mediul 1, ρ_s este densitatea superficială de sarcină electrică, \vec{J}_s reprezintă densitatea superficială de curent.

Ecuațiile (2.9)...(2.12) implică următoarele condiții la suprafața de separare a mediilor :

- componenta tangențială a lui \vec{E} este continuă;
- componenta tangențială a lui \vec{H} este discontinuă pentru densități superficiale de curent \vec{J}_s ;
- componenta normală a lui \vec{B} este continuă;
- componenta normală a lui \vec{D} este discontinuă, crespunzând sarcinii superficiale ρ_s .

Se ține seama de faptul că:

- intensitatea de câmp electric, D_n , este perpendiculară pe suprafața conductorului și corespunde sarcinii superficiale ρ_s ;
- intensitatea de câmp magnetic, H_t , este tangențială la suprafața conductorului și corespunde unei densități de curent superficial J_s .

În regiuni fără sarcină:

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad (2.19)$$

iar V satisface ecuația lui Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{și : } \vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.21)$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (2.22)$$

relații care definesc potențialul scalar V , respectiv, potențialul vector \vec{A} și care satisfac implicit ecuațiile (2.2) și (2.4). Aici există o mărime arbitrară constantă în reprezentarea lui \vec{E} și \vec{B} , din moment ce adunând gradientul oricărei funcții scalare de poziție, "grad C" la \vec{A} , nu este afectat rezultatul ecuației (2.22). O mai atentă analiză a acestei probleme arată că "div \vec{A} " trebuie specificat din cauza elementului arbitrar intervenit. De obicei se precizează criteriul de etalonare Lorentz:

$$\text{div}\vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.23)$$

Alt criteriu care poate fi ales este cel al lui Coulomb: $\text{div}\vec{A} = 0$.

Criteriul lui Lorentz are meritul de a conduce la un set de ecuații simple și simetrice, în care ecuațiile (2.2) și (2.3) sunt ordonate în funcție de potențialele V și \vec{A} . În cazul mediului liniar și omogen aceste ecuații devin:

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \quad (2.25)$$

Ecuațiile (2.24) și (2.25), recunoscute ca ecuații ale undei, sunt generalizări ale ecuației lui Poisson cu surse reprezentate de sarcină, respectiv, de curent. Pentru elementele localizate "pdΩ" și "JdΩ" este verificat că există soluțiile de potențial retardat:

$$dV = \frac{[\rho_v]d\Omega}{4\pi\epsilon \cdot r_1} \quad (2.26)$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu[\vec{J}]d\Omega}{4\pi \cdot r_1} \quad (2.27)$$

unde r_1 este amplitudinea vectorului rază de la punctul P, al cărui potențial trebuie determinat, la elementul de volum specificat. Parantezele pătrate semnifică faptul că ρ și \vec{J} trebuie date la un moment $t_1(\mu\epsilon)^{0,5}$ anterior celui la care au fost evaluați V sau \vec{A} , corespunzător timpului necesar unei perturbații electromagnetice să ajungă de la sursă la punctul P. De notat că, în regim static, potențialele V și \vec{A} sunt necuplate, perechile de ecuații (2.21), (2.24) și (2.22), (2.25), care definesc pe \vec{E} , respectiv, \vec{B} , sunt acum total independente. Relațiile (2.26) și (2.27) corespund legilor lui Coulomb, respectiv, Biot-Savart (figura 2.2):

$$dE_r = \frac{\rho_v \cdot d\Omega}{4\pi\epsilon \cdot r_1^2} \quad (2.28)$$

$$dH_\phi = \frac{J \cdot d\Omega \cdot \sin\theta}{4\pi \cdot r_1^2} \quad (2.29)$$

Mărimile independente E și H sunt reprezentate cu precizie la frecvențe joase, atunci când curentul de deplasare $\frac{\partial D}{\partial t}$ din ecuația lui Maxwell (2.2) și diferența dintre punctul sursă și punctul de măsurare sunt neglijabile.

O altă reprezentare utilă sub formă de potențial este dată de ecuația pentru câmp magnetic, similară ecuației (2.19):

$$\vec{H} = -\text{grad}V_m \quad (2.30)$$

în care V_m este potențialul magnetic scalar.

Regula calculului vectorial, prin care rotorul gradientului oricărei variabile scalare este zero, conduce la $\text{rot}\vec{H} = 0$. Din ecuația (2.2) a lui Maxwell rezultă că reprezentarea câmpului magnetic printr-un potențial scalar este valabilă doar în regiuni fără curent, la frecvențe joase, pentru care curentul de deplasare $\frac{\partial D}{\partial t}$ poate fi neglijat. Aceasta este o aproximație deosebit de utilă.

Ecuația de bază a potențialului magnetic scalar derivă din proprietatea solenoidală a lui \vec{B} , ecuația (2.3), proprietate care cere ca:

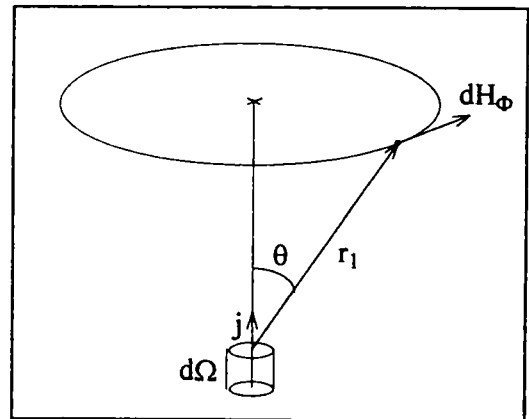


Fig.2.2. Explicativă la legea lui Biot - Savart

$$\operatorname{div}(\mu \cdot \operatorname{grad} V_m) = 0 \quad (2.31)$$

Interpretarea fizică a potențialului scalar este simplă în cazul static.

În cazul sistemelor variabile în timp, interpretarea și reprezentarea potențialului vector \vec{A} și a potențialului scalar V nu mai este simplă.

O proprietate folositoare a potențialului vector \vec{A} se obține aplicând teorema lui Stokes ecuației care definește fluxul magnetic prin suprafața S :

$$\varphi = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (2.32)$$

unde C reprezintă curba închisă care limitează suprafața deschisă S .

2.3. Metode de calcul al câmpului electromagnetic

Calculul câmpului magnetic presupune cunoscute configurația geometrică a mediilor și conductoarelor, proprietățile de material ale mediilor date prin curbele de magnetizare $B = f(H)$ pentru mediile neliniare, respectiv, permeabilitatea $\mu = f(r)$ pentru mediile liniare, precum și intensitățile curenților în conductoare. Suprafețele conductoarelor separă câmpul în subdomenii în care conductivitatea este nulă, numite subdomenii exterioare și în subdomenii ocupate de conductoare, numite subdomenii interioare. Problema determinării câmpului în exteriorul conductorului este o problemă exterioară, iar în interiorul acestuia, o problemă interioară [65].

Metodele de rezolvare a problemelor de câmp magnetic și în general a celor de câmp electromagnetic cvasistaționar, sunt în principal analitice, numerice, grafice și analogice.

Cu ajutorul metodelor analitice se obțin soluții sub formă de funcții cunoscute, având avantajul interpretării calitative a rezultatelor. Aceste metode pot fi aplicate unui număr restrâns de configurații de câmp. Metodele analitice mai importante sunt: metoda directă, metoda integrării ecuațiilor Poisson-Laplace prin separarea variabilelor, metoda imaginilor magnetice, metoda funcțiilor de variabilă complexă, metoda transformării conforme și metoda funcțiilor Green.

Metodele numerice se aplică pentru orice configurație de câmp cu o eroare care depinde de metoda de calcul aplicată și de capacitatea calculatorului de care se dispune. Dintre aceste metode, mai cunoscute sunt: metoda diferențelor finite, metode bazate pe principii variaționale (metoda elementelor finite) și metoda elementelor de frontieră.

Între metodele analitice și cele numerice nu este o distincție netă. Prin separarea variabilelor se obțin ecuații diferențiale a căror rezolvare este posibilă uneori numai numeric.

Metodele grafice constau din trasarea grafică a spectrelor liniilor de câmp și echipotențiale și din aproximarea formei liniilor de câmp prin segmente de dreaptă și arce de cerc.

Metodele analogice utilizează reprezentări ale câmpului magnetic pe modelele unor câmpuri de natură fizică diferită.

În general, soluțiile problemelor de câmp electromagnetic sunt funcții de toate coordonatele spațiale și problemele se numesc tridimensionale. Dacă soluțiile depind numai de două, respectiv, de o coordonată spațială, problemele sunt bidimensionale, respectiv, unidimensionale.

O clasă particulară de probleme bidimensionale o constituie cele plan paralele. În aceste probleme mărimile electrice și magnetice de câmp sunt aceleași în punctele poziționate identic în planele normale pe o axă și nu depind de coordonate în lungul axei.

O altă clasă de probleme bidimensionale o constituie problemele cu simetrie axială. Raportată la un sistem de coordonate cilindrice circulare (r, φ, z) , soluția unei probleme cu simetrie axială nu depinde de coordonata unghiulară φ .

2.3.1. Metode analitice de calcul al câmpului electromagnetic

2.3.1.1. Metoda directă

Metoda directă sau elementară are la bază teoremele lui Biot-Savart-Laplace și teorema lui Ampère [65]. Ea constă în aplicarea formulei lui Biot-Savart-Laplace, a potențialului logaritmice sau a potențialului magnetic scalar. Cu aceste formule se calculează câmpul magnetic pentru diferite repartiții de curent. În lipsa conductoarelor masive și a pânzelor de curent, teoremele menționate se aplică și pentru rezolvarea problemelor de câmp magnetic staționar și cvasistaționar stabilit de curenți filiformi.

Fie o bară magnetică de secțiune dreptunghiulară, $2a \times 2b$, de lungime foarte mare, parcursă de curent continuu (figura 2.3).

Problema fiind plan paralelă, se alege un sistem de coordonate cartezian cu axa Oz în axa longitudinală a barei și planele $x = 0$ și $y = 0$ paralele cu fețele.

Firul de secțiune $dx_0 dy_0$ a cărui urmă în plan este punctul $M(x_0, y_0)$ este parcurs de curentul I, a cărui derivată de ordinul doi este

$$d^2 I = \frac{I}{4ab} dx_0 dy_0 \quad (2.33)$$

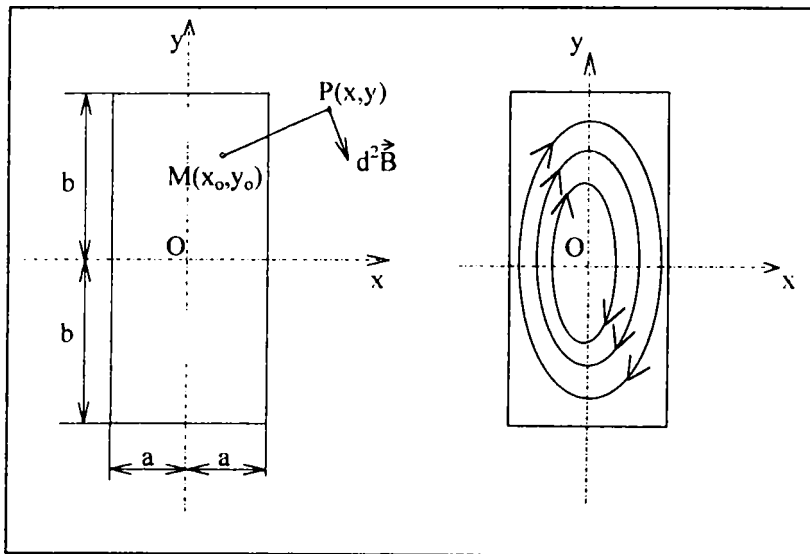


Fig.2.3. Câmpul magnetic al barei dreptunghiulare nemagnetice

Curentul stabilește în punctul $P(x,y)$ câmpul magnetic a cărui inducție $d^2 \vec{B}$ calculată cu formula lui Biot-Savart-Laplace are componentele:

$$d^2 B_x = \frac{\mu_0 I}{8\pi ab} \cdot \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 dy_0 \quad (2.34)$$

$$d^2 B_y = -\frac{\mu_0 I}{8\pi ab} \cdot \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 dy_0 \quad (2.35)$$

și necesită efectuarea a două integrale duble.

Considerând că permeabilitatea magnetică în interiorul și în exteriorul barei este aceeași, μ_0 , se poate aplica formula potențialului logaritmice, care are componentă numai după axa Oz:

$$d^2 A = \frac{\mu_0 I}{8\pi ab} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} dx_0 dy_0 + C \quad (2.36)$$

Integrând

rezultă:

$$A = \frac{\mu_0 I}{16\pi ab} \left\{ (a - x) \cdot (b - y) \cdot \ln \left[(a - x)^2 + (b - y)^2 \right] + (a + x) \cdot (b - y) \cdot \ln \left[(a + x)^2 + (b - y)^2 \right] + (a - x) \cdot (b + y) \cdot \ln \left[(a - x)^2 + (b + y)^2 \right] + (a + x) \cdot (b + y) \cdot \ln \left[(a + x)^2 + (b + y)^2 \right] + (a - x)^2 \cdot \left[\arctg \frac{b - y}{a - x} + \arctg \frac{b + y}{a - x} \right] + (a + x)^2 \cdot \left[\arctg \frac{b - y}{a + x} + \arctg \frac{b + y}{a + x} \right] + (b - y)^2 \cdot \left[\arctg \frac{a - x}{b - y} + \arctg \frac{a + x}{b - y} \right] + (b + y)^2 \cdot \left[\arctg \frac{a - x}{b + y} + \arctg \frac{a + x}{b + y} \right] \right\} \quad (2.37)$$

Pentru componenta B_x a inducției magnetice se obține:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{8\pi ab} \left[\frac{x+a}{2} \cdot \ln \frac{(x+a)^2 + (y+b)^2}{(x+a)^2 + (y-b)^2} - \frac{x-a}{2} \cdot \ln \frac{(x-a)^2 + (y+b)^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \right. \\ \left. + (y+b) \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y+b} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y+b} \right) - (y-b) \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y-b} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y-b} \right) \right] \quad (2.38)$$

iar pentru componenta B_y :

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{8\pi ab} \left[\frac{y+b}{2} \cdot \ln \frac{(x+a)^2 + (y+b)^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \frac{y-b}{2} \cdot \ln \frac{(x+a)^2 + (y-b)^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \right. \\ \left. + (x+a) \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{y+b}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x+a} \right) - (x-a) \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{y+b}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a} \right) \right] \quad (2.39)$$

Pe suprafața conductorului ambele componente ale câmpului magnetic sunt nule.

2.3.1.2. Metoda integrării ecuațiilor Poisson - Laplace prin separarea variabilelor

Principala dificultate care intervine la rezolvarea ecuațiilor vectoriale constă în faptul că numai în sistemul cartezian de coordonate este posibilă descompunerea în trei ecuații scalare, cărora li se poate aplica metoda separării variabilelor.

Pentru ecuația lui Laplace, de exemplu:

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (2.40)$$

se obțin:

$$\nabla^2 A_x = 0 ; \quad \nabla^2 A_y = 0 ; \quad \nabla^2 A_z = 0 . \quad (2.41)$$

În cazuri particulare în care, de exemplu, potențialul vector are numai una dintre componente nenulă și depinde de anumite coordonate, este posibilă separarea variabilelor și în alte sisteme de coordonate.

Câmpul magnetic al curenților de conducție în conductoare masive se poate calcula integrând ecuația Poisson-Laplace pentru potențialul vector \vec{A} sau pentru intensitatea câmpului magnetic \vec{H} , alegerea fiind impusă de particularitățile problemei.

În problema plan paralelă a câmpului magnetic, la curent de conducție în conductoare drepte, este preferabil să se rezolve ecuația pentru potențialul vector, acesta având numai componentă axială. Rezolvarea ecuației $\nabla^2 \vec{H} = 0$ nu este recomandabilă nici în coordonate carteziane, deoarece ar necesita integrarea a două ecuații: $\nabla^2 H_x = 0$ și $\nabla^2 H_y = 0$.

Metoda separării variabilelor se aplică integrând ecuațiile problemelor exterioare și separat ecuațiile problemelor interioare. Soluțiile care se obțin conțin constante de integrare, determinarea acestora fiind una dintre dificultățile cele mai mari care intervin în rezolvarea analitică exactă a problemelor prin separarea variabilelor.

Constantele de integrare se pot determina:

- din condiții de continuitate ale componentelor tangențiale ale intensității câmpului magnetic $H_{1t} = H_{2t}$, sau potențialului vector $A_{1t} = A_{2t}$, respectiv, ale componentelor

normale ale inducției magnetice $B_{1n} = B_{2n}$ și densității de curent $J_{1n} = J_{2n}$ pe suprafața de discontinuitate;

- din condiții de regularitate la infinit ale lui \vec{A} și \vec{H} ;
- din condiții de comportare în centre, axe și plane de simetrie;
- din date ale problemei privind sursele câmpului magnetic, la curent de conducție dat, respectiv, la câmp magnetic inductor dat.

Se recomandă ca alegerea sistemului de coordonate să se facă astfel încât una din suprafețele de coordonate să fie suprafața conductorului. Un astfel de sistem se numește atașat deoarece suprafața conductorului generează sistemul de coordonate. Pentru dreptunghi (placă), sistemul atașat este cel cartezian, pentru conductorul cu secțiune circulară sau sector de cerc este cel cilindric.

Soluțiile ecuațiilor Poisson-Laplace, în diferite sisteme de coordonate, se exprimă prin funcții specifice. de exemplu, în cel cartezian prin funcții trigonometrice și hiperbolice, iar în cel cilindric prin funcții de tip Bessel-Neumann.

Dacă în exemplul dat la metoda directă considerăm că materialul barei este feromagnetic liniar, de permeabilitate $\mu_{fe} \rightarrow \infty$, conturul secțiunii transversale a barei este linie de câmp magnetic. În acest caz în interiorul barei inducția magnetică este foarte mare, $\mu_{fe} \rightarrow \infty$, $B_{fe} \rightarrow \infty$ și $A_{fe} \rightarrow \infty$, fiind preferabil să se utilizeze mărimea $A_H = \frac{A_{fe}}{\mu_{fe}}$. Se obține astfel

ecuația lui Poisson pentru vectorul \vec{A}_H :

$$\frac{\partial^2 A_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_H}{\partial y^2} = -J \quad (2.42)$$

în care $J = \frac{I}{4ab}$ este densitatea curentului continuu în bară.

În acest caz $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}_H$, deci:

$$H_x = \frac{\partial A_H}{\partial y} ; \quad H_y = -\frac{\partial A_H}{\partial x} \quad (2.43)$$

care satisfac pe fețele barei condițiile:

$$H_x = \frac{\partial A_H}{\partial y} = 0 \quad \text{pentru } x = \pm a \text{ și } -b < y < b \quad (2.44)$$

$$H_y = -\frac{\partial A_H}{\partial x} = 0 \quad \text{pentru } y = \pm b \text{ și } -a < x < a \quad (2.45)$$

Soluția generală a ecuației (2.42) conține doi termeni aditivi:

$$A_H(x, y) = A_{H_0}(x, y) + A_{H_p}(x, y) \quad (2.46)$$

în care $A_{H_0}(x, y)$ este soluția ecuației omogene (Laplace) $\nabla^2 A_{H_0} = 0$,

iar $A_{H_p}(x, y)$ este soluția particulară a ecuației neomogene (Poisson) $\nabla^2 A_{H_p} = -J$.

Soluția A_{H_0} cu variabile separate este de forma:

$$A_{H_0}(x, y) = (A_0 x + B_0) \cdot (C_0 y + D_0) + \sum_{\lambda} [(A_{\lambda} \cdot \sin \lambda x + B_{\lambda} \cdot \cos \lambda x) \cdot (C_{\lambda} \cdot \text{sh} \lambda y + D_{\lambda} \cdot \text{ch} \lambda y)] \quad (2.47)$$

Din condiții de simetrie:

$$\begin{aligned} A_{H_0}(x_0, y) &= A_{H_0}(-x_0, y) \\ A_{H_0}(x, y_0) &= A_{H_0}(x, -y_0) \end{aligned} \quad (2.48)$$

și deci $A_0 = C_0 = A_\lambda = C_\lambda = 0$. Cu alte notații pentru constante rezultă:

$$A_{H_0}(x, y) = \sum_{\lambda} (C'_\lambda \cdot \cos \lambda x \cdot \operatorname{ch} \lambda y) + D_0 \quad (2.49)$$

Având în vedere că $A_{H_0}(x, y)$ este o serie trigonometrică în raport cu x , soluția particulară $A_{H_p}(x, y)$ este un polinom de gradul doi în x de forma:

$$A_{H_p}(x, y) = a_0 x^2 + b_0 x + c_0 \quad (2.50)$$

Din condiția $A_{H_p}(x_0) = A_{H_p}(-x_0)$ rezultă $b_0 = 0$, iar din ecuația $\nabla^2 A_{H_p} = -J$ rezultă $2a_0 = -J$, în consecință:

$$A_{H_p}(x, y) = -\frac{J}{2} x^2 + c_0 \quad (2.51)$$

Înlocuind expresiile lui A_{H_0} din (2.49) și A_{H_p} din (2.50) în relația (2.46), se obține:

$$A_H(x, y) = -\frac{J}{2} \cdot \left(x^2 + \sum_{\lambda} (C'_\lambda \cos \lambda x \cdot \operatorname{ch} \lambda y) \right) + D \quad (2.52)$$

unde $C'_\lambda = -\frac{JC_\lambda}{2}$ și $D = D_0 + c_0$.

Condiția (2.44) este îndeplinită dacă $\lambda \cdot a = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, deci:

$$\lambda = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2a} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (2.53)$$

În consecință:

$$A_H(x, y) = -\frac{J}{2} \cdot \left[x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \cdot \operatorname{ch} \left((2n + 1) \frac{\pi}{2a} y \right) \cdot \cos \left((2n + 1) \frac{\pi}{2a} x \right) \right) \right] + D \quad (2.54)$$

Din îndeplinirea condiției (2.45) rezultă seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n + 1)\pi}{2a} \cdot C_n \cdot \operatorname{ch} \left((2n + 1) \frac{\pi b}{2a} \right) \cdot \sin \left((2n + 1) \frac{\pi x}{2a} \right) = 2x \quad (2.55)$$

Se dezvoltă termenul "2x" în serie Fourier în intervalul $0 < x < a$:

$$2x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_n \cdot \sin \left((2n + 1) \frac{\pi x}{2a} \right) \right) \quad (2.56)$$

Se amplifică ambii membri ai ecuației (2.56) cu:

$$\sin \left((2n + 1) \frac{\pi x}{2a} \right)$$

$$2x \cdot \sin \left((2n + 1) \frac{\pi x}{2a} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_n \cdot \sin \left((2n + 1) \frac{\pi x}{2a} \right)^2 \right) \quad (2.57)$$

Rezultă coeficientul Fourier:

$$M_n = \int_{-a}^a 2x \cdot \sin \left((2n + 1) \frac{\pi x}{2a} \right) dx = (-1)^n \frac{16a}{(2n + 1)^2 \pi^2} \quad (2.58)$$

care, introdus în relația (2.56) și identificând coeficienții celor două serii, conduce la:

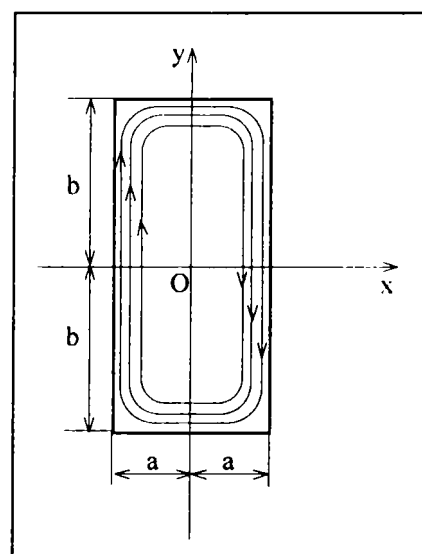


Fig.2.4. Spectrul liniilor de câmp

$$C_n = (-1)^n \frac{32a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\left((2n+1)\frac{\pi b}{2a}\right)} \tag{2.59}$$

Potențialul vector din (2.54) obține expresia:

$$A_H(x,y) = -\frac{J}{2} \cdot \left[x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{32a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \cdot \frac{\operatorname{ch}\left((2n+1)\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left((2n+1)\frac{\pi b}{2a}\right)} \cdot \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2a}\right) \right) \right] \tag{2.60}$$

Cele două componente ale intensității câmpului magnetic sunt în acest caz:

$$H_x = -\frac{J}{2} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{16a}{(2n+1)^2 \pi^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left((2n+1)\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left((2n+1)\frac{\pi b}{2a}\right)} \cdot \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2a}\right) \right] \tag{2.61}$$

$$H_y = \frac{J}{2} \cdot \left[2x - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{16a}{(2n+1)^2 \pi^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}\left((2n+1)\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left((2n+1)\frac{\pi b}{2a}\right)} \cdot \sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{2a}\right) \right] \tag{2.62}$$

În figura 2.4 este reprezentat spectrul calitativ al liniilor de câmp magnetic ale lui \vec{H} .

2.3.1.3. Metoda imaginilor magnetice

Se consideră o suprafață Σ a cărei urmă în plan este conturul închis Γ de lungime finită sau extins la infinit, care separă mediile magnetice de permeabilități constante μ_e și μ_i . Paralel cu suprafața Σ se găsește un fir parcurs de curent continuu [65].

Metoda imaginilor magnetice constă din determinarea unei configurații de curenți filiformi în număr finit sau o infinitate numărabilă, astfel încât în fiecare din cele două medii câmpul magnetic să poată fi calculat cu formulele Biot-Savart-Laplace, potențialului logaritmic sau cu teorema lui Ampère. Metoda se aplică în cazurile în care suprafața Σ este planul de separație al semispațiilor infinite (figura 2.5), sau o suprafață cilindrică circulară, curentul filiform fiind situat în interiorul sau în exteriorul acesteia.

În mediul magnetic 1 de permeabilitate μ_1 ocupând semispațiul $x < 0$ (figura 2.6), se găsește un fir rectiliniu lung F , parcurs de curentul continuu I , paralel cu planul $x = 0$, la distanța $x = -h$. Permeabilitatea mediului 2 care ocupă semispațiul $x > 0$ este μ_2 .

Pentru a calcula câmpul magnetic în mediul 1 se introduce în semispațiul $x > 0$ firul imagine F_2 parcurs de curentul I_2 la distanța $x = h$ de planul de separație.

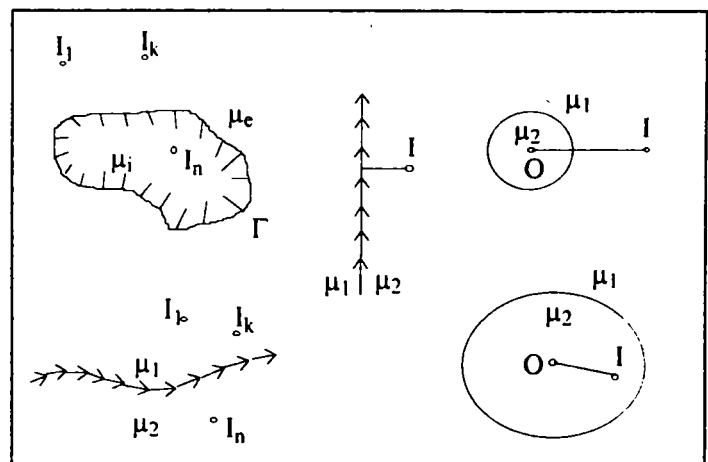


Fig.2.5. Exemplificări de cazuri în care se aplică metoda imaginilor magnetice

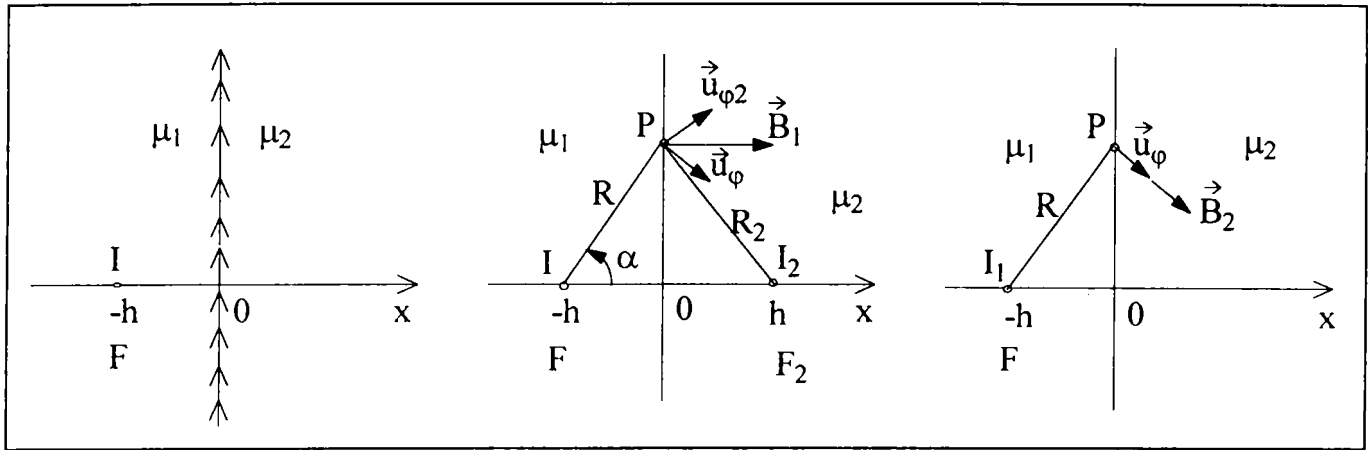


Fig.2.6. Metoda imaginilor magnetice în raport cu planul de separație a două medii cu permeabilități diferite

Pentru a calcula câmpul magnetic în mediul 2 se înlocuiește curentul din firul F cu I₁.

Într-un punct P situat în mediul 1 în imediata vecinătate a planului de separație, intensitatea câmpului magnetic \vec{H}_1 și inducția magnetică \vec{B}_1 stabilite de curenții filiformi I și I₁ sunt:

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{2\pi R} \cdot (I \cdot \vec{u}_\varphi + I_2 \cdot \vec{u}_{\varphi_2}) \tag{2.63}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_1}{2\pi R} \cdot (I \cdot \vec{u}_\varphi + I_2 \cdot \vec{u}_{\varphi_2})$$

Într-un punct P din imediata vecinătate a planului de separație în mediul 2, aceleași mărimi au expresiile:

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{2\pi R} \cdot I_1 \cdot \vec{u}_\varphi \tag{2.64}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_2}{2\pi R} \cdot I_1 \cdot \vec{u}_\varphi$$

Componentele normale ale inducției magnetice, respectiv, cele tangențiale ale intensității câmpului magnetic sunt:

$$B_{1n} = \frac{\mu_1(I + I_2)}{2\pi R^2} \cdot \sin \alpha \qquad B_{2n} = \frac{\mu_2 I_1}{2\pi R^2} \cdot \sin \alpha \tag{2.65}$$

$$H_{1t} = \frac{I - I_2}{2\pi R^2} \cdot \cos \alpha \qquad H_{2t} = \frac{I_1}{2\pi R^2} \cdot \cos \alpha$$

Din continuitatea componentelor normale ale inducțiilor $B_{1n} = B_{2n}$ și a componentelor tangențiale ale intensității câmpurilor $H_{1t} = H_{2t}$ se deduc curenții:

$$I_1 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot I \tag{2.66}$$

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot I$$

Rezultă intensitățile și inducțiile câmpului magnetic în cele două medii. În mediul în care nu este situat firul F, liniile de câmp magnetic sunt circulare.

Dacă mediul în care nu este situat firul este feromagnetic, de permeabilitate infinită, din relațiile (2.66) rezultă:

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} I_1 = 0 \qquad \text{și} \qquad \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} I_2 = I \tag{2.67}$$

deci, pentru a calcula câmpul magnetic în aer, stabilit de un fir parcurs de curentul I și situat la distanța h de semispațiul feromagnetic, se introduce un fir imagine parcurs de curent în același sens ca și în firul F , la distanța $-h$ de suprafața de separație a mediilor.

2.3.1.4. Metoda funcțiilor de variabilă complexă

Cu această metodă se poate studia câmpul magnetic staționar, plan paralel și laplacean, în prezența corpurilor feromagnetice de permeabilitate infinită [65].

În acest scop, se consideră o funcție armonică analitică $w(z)$.

Fie $w(z) = u + jv$ o funcție de variabilă complexă $z = x + jy$ în care $j = \sqrt{-1}$. Partea reală $\text{Re}\{w\} = u(x,y)$ și partea imaginară $\text{Im}\{w\} = v(x,y)$ sunt funcții de x și y . Fiecărui punct P_z din planul complex z îi corespund unul sau mai multe puncte în planul complex w , după cum $w(z)$ este sau nu funcție univocă de z .

O funcție $w(z)$ este analitică într-un domeniu de analiticitate dacă pentru orice punct z_0 din domeniu, admite dezvoltare în serie întreagă de $z = z_0$, convergentă în vecinătatea lui z_0 . Funcțiile analitice sunt continue și derivabile. Derivabilitatea funcției $w(z)$ presupune existența și continuitatea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor $u(x,y)$ și $v(x,y)$, precum și

independența derivatei $\frac{dw}{dz}$ de orientarea lui dz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial(jy)} &= \frac{\partial u}{\partial(jy)} + j \frac{\partial v}{\partial(jy)}\end{aligned}\tag{2.68}$$

Din egalitatea derivatelor $\frac{dw}{dz}$ după x și y rezultă condițiile lui Cauchy-Riemann, pe care trebuie să le satisfacă funcția $w(z)$ pentru a fi analitică în punctul z :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\tag{2.69}$$

Integrala curbilinie a lui $w(z)$ este:

$$\oint_{\Gamma} w(z) dz = \oint_{\Gamma} (u + jv) \cdot (dx + jdy) = \oint_{\Gamma} (udx - vdy) + j \oint_{\Gamma} (udy + vdx)\tag{2.70}$$

Părțile reală și imaginară ale integralei se transformă în integrale de suprafață:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} (udx - vdy) &= - \int_{S_{\Gamma}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy \\ \oint_{\Gamma} (udy + vdx) &= \int_{S_{\Gamma}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy\end{aligned}\tag{2.71}$$

Datorită condițiilor Cauchy-Riemann ambele integrale de suprafață sunt nule, deci:

$$\oint w(z) dz = 0\tag{2.72}$$

care este integrala lui Cauchy.

Integrala unei funcții analitice pe o curbă deschisă depinde numai de extremitățile curbei și nu de forma acesteia.

Derivând condițiile lui Cauchy-Riemann (2.69) și eliminând întâi derivatele lui v și apoi derivatele lui u , se obțin ecuațiile:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$
(2.73)

Funcțiile $u(x,y)$ și $v(x,y)$ satisfac ecuația lui Laplace fiind funcții armonice conjugate. Efectuând raportul membru cu membru al condițiilor lui Cauchy-Riemann (2.69), se obține:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial x}}$$
(2.74)

Rezultă că familiile de curbe $u(x,y) = \text{const.}$ și $v(x,y) = \text{const.}$ sunt ortogonale (figura 2.7).

Considerând câmpul magnetic staționar în regiuni fără curent, $\text{rot}\vec{H} = 0$. Conform relației $\vec{H} = -\text{grad}V_m$, rezultă potențialul magnetic scalar V_m . Liniile de câmp magnetic fiind normale pe suprafețele corpurilor feromagnetice, acestea sunt echipotențiale.

Fie funcția analitică $W_m(z) = U_m(x,y) + jV_m(x,y)$. Dacă partea imaginară $V_m(x,y)$ reprezintă în planul z potențialul magnetic al intensității câmpului magnetic

$$\vec{H} = H_x \vec{i} + H_y \vec{j} = -\text{grad}V_m(x,y)$$

rezultă pentru câmpul magnetic complex $H(z)$:

$$H(z) = H_x + jH_y = -\left(\frac{\partial V_m}{\partial x} + j\frac{\partial V_m}{\partial y}\right) = -j\left(\frac{\partial U_m}{\partial x} - j\frac{\partial V_m}{\partial x}\right)$$

$$H(z) = \left(j\frac{\partial W_m}{\partial z}\right)^* = -j\left(\frac{\partial W_m}{\partial z}\right)^*$$
(2.75)

Notând cu “dn” elementul de lungime al liniei de câmp și cu “dl” elementul de lungime al liniei echipotențiale obținut prin rotirea cu $\frac{\pi}{2}$ a lui “dn” în sens trigonometric, rezultă:

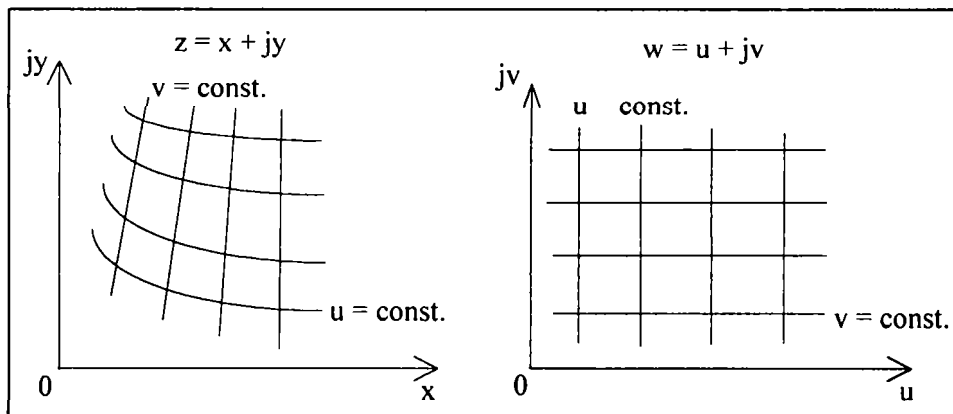


Fig.2.7. Configurațiile familiilor de curbe “u” și “v” în planul “z” și în planul “w”

$$H(z) = H_n + jH_l = -\frac{\partial V_m}{\partial n} = \frac{\partial U_m}{\partial l} \quad (2.76)$$

$$H_l = 0$$

în care s-a ținut cont de relațiile lui Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial U_m}{\partial n} = \frac{\partial V_m}{\partial l} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial U_m}{\partial l} = -\frac{\partial V_m}{\partial n} \quad (2.77)$$

Fluxul magnetic pe unitatea de lungime este:

$$\Phi_s = \mu \int_2^1 H_n dl = -\mu \int_2^1 \frac{\partial V_m}{\partial n} dl = \mu \int_{U_{m_2}}^{U_{m_1}} \frac{\partial U_m}{\partial l} dl = \mu (U_{m_1} - U_{m_2}) \quad (2.78)$$

Tensiunea magnetică în lungul liniei de câmp este:

$$U_{m_{12}} = \int_1^2 H_n dn = -\int_1^2 \frac{\partial V_m}{\partial n} dn = V_{m_1} - V_{m_2} \quad (2.79)$$

Permeanța pe unitatea de lungime (permeanța specifică) este:

$$\Lambda_s = \frac{\Phi_s}{U_{m_{12}}} = \mu \cdot \left| \frac{U_{m_1} - U_{m_2}}{V_{m_1} - V_{m_2}} \right| \quad (2.80)$$

Dacă partea reală $U_m(x,y)$ a funcției analitice $W_m(z)$ reprezintă potențialul magnetic al intensității câmpului magnetic

$$\vec{H} = H_x \vec{i} + H_y \vec{j} = -\text{grad} U_m(x,y)$$

atunci

$$H(z) = H_x + jH_y = -\left(\frac{\partial U_m}{\partial x} + j \frac{\partial U_m}{\partial y} \right) = -\left(\frac{\partial U_m}{\partial x} - j \frac{\partial V_m}{\partial x} \right) = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial z} \right)^* \quad (2.81)$$

În acest caz:

$$H(z) = H_n + jH_l = -\frac{\partial U_m}{\partial n} = -\frac{\partial V_m}{\partial l} \quad (2.82)$$

$$H_l = 0$$

în care relațiile lui Cauchy-Riemann (2.77) rămân valabile. Fluxul magnetic pe unitatea de lungime este în acest caz:

$$\Phi_s = \mu \int_1^2 H_n dl = -\mu \int_1^2 \frac{\partial U_m}{\partial n} dl = -\mu \int_{V_{m_1}}^{V_{m_2}} \frac{\partial V_m}{\partial l} dl = \mu (V_{m_1} - V_{m_2}) \quad (2.83)$$

Tensiunea magnetică are în acest caz expresia:

$$U_{m_{12}} = \int_1^2 H_n dn = -\int_{U_{m_1}}^{U_{m_2}} \frac{\partial U_m}{\partial n} dn = U_{m_1} - U_{m_2} \quad (2.84)$$

Rezultă permeanța specifică:

$$\Lambda_s = \frac{\Phi_s}{U_{m_{12}}} = \mu \cdot \left| \frac{V_{m_1} - V_{m_2}}{U_{m_1} - U_{m_2}} \right| \quad (2.85)$$

2.3.1.5. Metoda transformării conforme

Metoda se aplică pentru rezolvarea problemelor plan paralele de câmp magnetic [65], în domenii în care este satisfăcută ecuația lui Laplace.

În acest caz se consideră o funcție univocă $w(z)$, care asociază fiecărui punct z din planul $z = x + jy$ un punct w din planul $w = u + jv$. Din condiția de derivabilitate, rezultă că punctelor învecinate în planul z le corespund puncte învecinate în planul w și, în consecință, curbelor continue C_z le corespund curbe continue C_w . Fie z_1 și z_2 două puncte în vecinătatea punctului z și w_1 și w_2 punctele corespunzătoare din vecinătatea lui w (figura 2.8).

Dacă dz_1, dz_2 , respectiv, dw_1, dw_2 sunt distanțele dintre punctele z și z_1, z și z_2 , respectiv, w și w_1, w și w_2 , adică:

$$\begin{aligned} dw_1 &= ds_{w_1} e^{j\alpha_{w_1}} & dz_1 &= ds_{z_1} e^{j\alpha_{z_1}} \\ dw_2 &= ds_{w_2} e^{j\alpha_{w_2}} & dz_2 &= ds_{z_2} e^{j\alpha_{z_2}} \end{aligned} \tag{2.86}$$

atunci:

$$\frac{dw_1}{dz_1} = \frac{ds_{w_1}}{ds_{z_1}} e^{j(\alpha_{w_1} - \alpha_{z_1})} = \frac{dw_2}{dz_2} = \frac{ds_{w_2}}{ds_{z_2}} e^{j(\alpha_{w_2} - \alpha_{z_2})} = Me^{j\mu} \tag{2.87}$$

și în consecință: $\alpha_{w_1} - \alpha_{z_1} = \alpha_{w_2} - \alpha_{z_2} = \mu$, adică triunghiurile zz_1z_2 și ww_1w_2 sunt asemenea. Unghiul format de două elemente dz_1 și dz_2 din planul z este egal în mărime și în sens cu unghiul format de elementele corespunzătoare dw_1 și dw_2 din planul w . Vecinătăților infinitezimale ale punctelor z le corespund vecinătăți infinitezimale ale punctelor w rotite cu unghiul μ și amplificate de M ori. Unghiul de intersecție al curbelor C_{1z} și C_{2z} este egal cu unghiul de intersecție al curbelor corespunzătoare C_{1w} și C_{2w} . Familia de curbe ortogonale în planul z se transformă într-o familie de curbe ortogonale în planul w .

Notând cu $W_m(z)$ potențialul magnetic complex în planul z , din care derivă intensitatea câmpului magnetic $H(z)$, conform relației (2.81), câmpul $H(w)$ în planul w are expresia:

$$H(w) = -\left(\frac{dW_m}{dw}\right)^* = -\left(\frac{dW_m}{dz} \cdot \frac{dz}{dw}\right)^* = -\left(\frac{dW_m}{dz}\right)^* \left(\frac{dz}{dw}\right)^* \tag{2.88}$$

$$H(w) = H(z) \cdot \frac{1}{\left(\frac{dw}{dz}\right)^*} \tag{2.89}$$

și în modul:

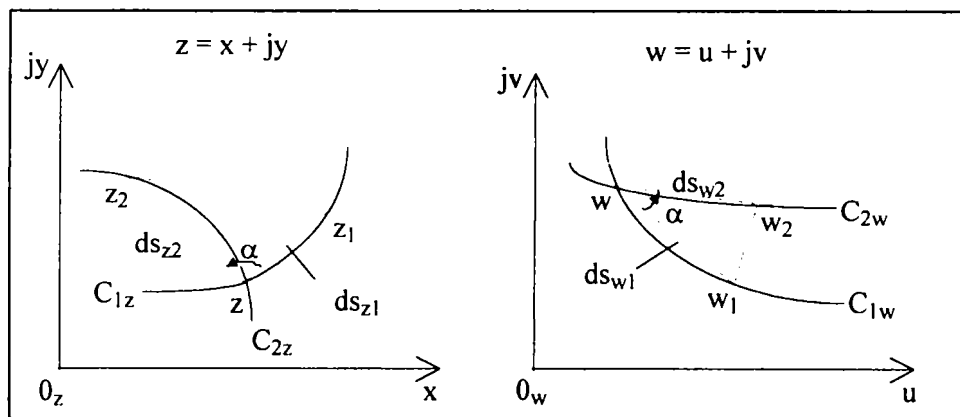


Fig.2.8. Metoda transformării conforme

626.095/180E

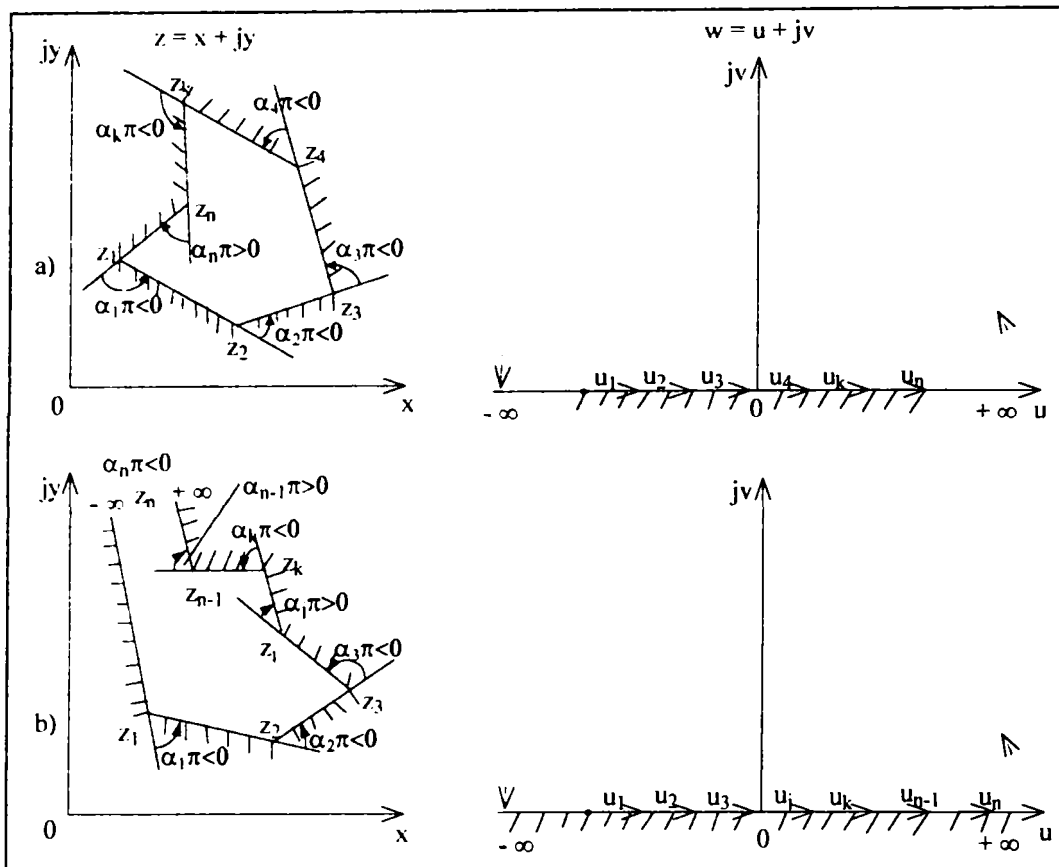


Fig.2.9. Transformarea conformă a interiorului poligonului
 a) pe semiplanul superior;
 b) cu un vârf la infinit, pe semiplanul superior.

$$|H(w)| = |H(z)| \cdot \frac{1}{\left| \frac{dw}{dz} \right|^*} \tag{2.90}$$

Conform relației (2.87), pentru perechile de elemente ortogonale care “corespund conform”, există relația:

$$dudv = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dx dy \tag{2.91}$$

Ridicând la pătrat relația (2.90) și multiplicând ambii membri cu $\frac{\mu}{2}$, rezultă:

$$\frac{\mu}{2} \cdot |H(w)|^2 dudv = \frac{\mu}{2} \cdot |H(z)|^2 dx dy \tag{2.92}$$

deci energia electromagnetică este invariantă prin transformarea conformă.

În cadrul transformării Schwarz-Christoffel, domeniile din interiorul sau exteriorul unui poligon cu n vârfuri, respectiv, cu unul din vârfuri la infinit în planul z, se transformă conform pe semiplanul superior w cu ajutorul funcțiilor z(w) (figura 2.9).

Transformarea conformă a interiorului poligonului finit pe semiplanul superior (figura 2.9.a) se efectuează cu relația:

$$\frac{dz}{dw} = A \prod_{k=1}^n (w - u_k)^{\alpha_k} ; \quad u_k \leq u_{k+1} ; \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2 .$$

Transformarea conformă a interiorului poligonului cu un vârf la infinit pe semiplanul superior (figura 2.9.b), se efectuează cu relația:

$$\frac{dz}{dw} = A \prod_{k=1}^{n-1} (w - u_k)^{\alpha_k}; \quad u_k < u_{k+1}; \quad \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k < 1.$$

Pentru domeniul finit delimitat de poligonul cu n vârfuri, integrala:

$$z(w) = A \int_0^w (w - u_1)^{\alpha_1} (w - u_2)^{\alpha_2} \dots (w - u_{k-1})^{\alpha_{k-1}} (w - u_k)^{\alpha_k} \dots (w - u_n)^{\alpha_n} dw + B \quad (2.93)$$

transformă conform domeniul din interiorul poligonului pe semiplanul superior $w = u + jv$. În ecuația (2.93) $A = |A| \cdot e^{j\alpha\pi}$ este o constantă complexă având argumentul $\alpha\pi$ egal cu unghiul format de prima latură a poligonului cu semiaxa pozitivă $0x$; $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_n$ sunt abscisele punctelor pe axa reală $0_w u$, care corespund prin integrala (2.93) vârfurilor $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n$.

Segmentele $z_{k-1}z_k$ se parcurg în sensul în care domeniul câmpului rămâne la stânga iar axa reală în planul w se parcurge de la $-\infty$ la $+\infty$, lăsând domeniul câmpului pe semiplanul superior.

Exponenții α_k sunt rapoartele prin π ale unghiurilor exterioare pe care le fac prelungirile segmentelor $z_{k-1}z_k$ cu segmentele $z_k z_{k+1}$, pozitive dacă unghiurile sunt în câmp și negative dacă sunt în exteriorul domeniului.

Constanta complexă B fixează originea 0_w a planului w în raport cu originea 0_z a planului z ($z = B$ pentru $w = 0$).

Se studiază, în acest caz, distorsiunea câmpului magnetic dintre armăturile unei mașini electrice. Presupunând permeabilitatea infinită, suprafețele armăturilor sunt echipotențiale. O aproximare a repartiției câmpului se obține considerând configurația constituită din polul neted (de extensie infinită) și flancurile a doi dintre dinții învecinați, care delimitează creștătura de adâncime infinită (figura 2.10).

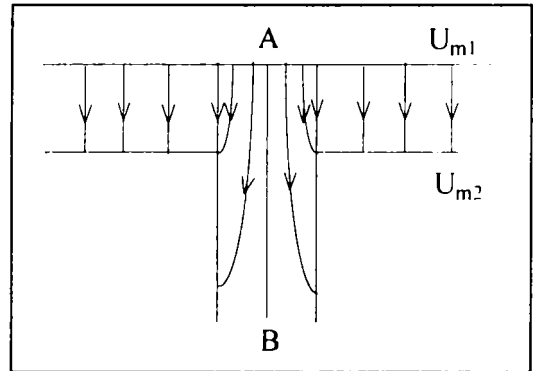


Fig.2.10. Repartiția câmpului magnetic între armăturile unei mașini electrice

Câmpul magnetic prezintă simetrie în raport cu linia de câmp AB, deci este suficient să se studieze o jumătate de configurație. În planul z , domeniul câmpului este delimitat de conturul $\Gamma_z(ABCC'OA'A)$ la parcurgerea căruia câmpul rămâne la stânga (figura 2.11).

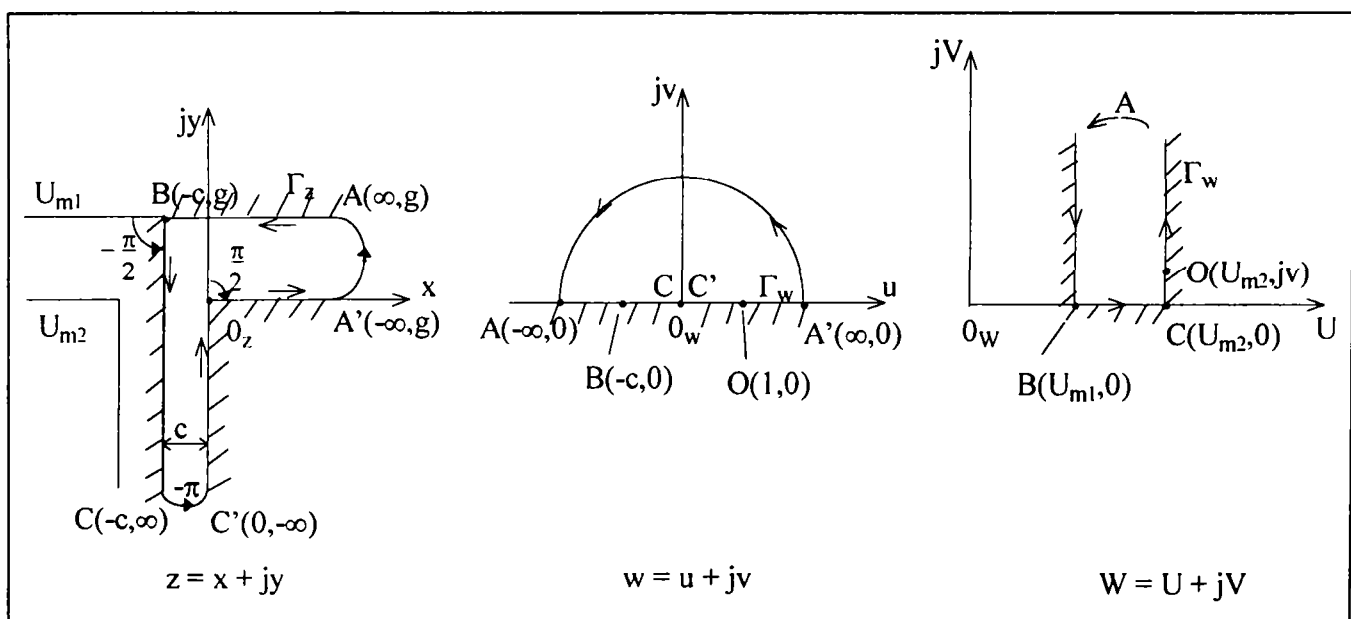


Fig.2.11. Studiul câmpului magnetic cu metoda transformării conforme

Funcția $z(w)$, care transformă conform câmpul din planul z pe semiplanul superior w , se calculează cu formula (2.93).

În acest caz:

$$dz = A(w + a)^{-0.5} w^{-1} (w - 1)^{0.5} dw \tag{2.94}$$

$$z = A \int \frac{1}{w} \sqrt{\frac{w-1}{w+a}} dw + B = A \cdot \left[-\frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{w-1}{w+a}} \right) + \ln \frac{\sqrt{w+a} + \sqrt{w-1}}{\sqrt{w+a} - \sqrt{w-1}} \right] + B \tag{2.95}$$

Calculând integrala pe porțiunea A'A în planul z și pe semicercul A'A în planul w , considerând $w = ue^{j\theta}$, rezultă:

$$\int_0^g dz = \lim_{u \rightarrow \infty} A \int_0^\pi \frac{1}{ue^{j\theta}} \sqrt{\frac{ue^{j\theta} - 1}{ue^{j\theta} + a}} jue^{j\theta} dv \tag{2.96}$$

$$jg = jA\pi \tag{2.97}$$

din care se deduce constanta $A = \frac{g}{\pi}$.

Procedând similar pe porțiunea CC', se obține:

$$\int_{-c}^0 dz = \lim_{u \rightarrow 0} A \int_\pi^0 \frac{1}{ue^{j\theta}} \sqrt{\frac{ue^{j\theta} - 1}{ue^{j\theta} + a}} jue^{j\theta} dv \tag{2.98}$$

$$c = A \frac{\pi}{\sqrt{a}} = \frac{g}{\sqrt{a}} \tag{2.99}$$

deci:

$$a = \left(\frac{g}{c} \right)^2 \tag{2.100}$$

Identificând punctul $0_z(0,0)$ din planul z cu punctul $0(1,0)$ din planul w , din relația (2.95) se deduce că $B = 0$. Cu valorile constantelor A , B și a introduse în relația (2.95), funcția $z(w)$ este complet determinată:

$$z = \frac{1}{\pi} \left[-2 \cdot c \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{g}{c} \sqrt{\frac{w-1}{w + \left(\frac{g}{c}\right)^2}} \right) + g \cdot \ln \frac{\sqrt{w + \left(\frac{g}{c}\right)^2} + \sqrt{w-1}}{\sqrt{w + \left(\frac{g}{c}\right)^2} - \sqrt{w-1}} \right] \tag{2.101}$$

Pentru calculul lui $H(z)$ cu relațiile (2.88) și (2.89):

$$H(z) = H(w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^* = \left(\frac{dW_m}{dw} \right)^* \left(\frac{dw}{dz} \right)^* \tag{2.102}$$

se efectuează transformarea conformă intermediară din planul $w = u + jv$ în planul $W = U + jV$. Domeniului câmpului din semiplanul superior w de contur Γ_w completat cu semicercul A'A îi corespunde domeniul din interiorul benzii semiinfinite din planul W de contur Γ_w (ABCOA).

Aplicând formula lui Schwarz-Christoffel:

$$dW_m = M(w + a)^{-0.5} w^{0.5} dw = \frac{M}{\sqrt{w(w + a)}} dw \tag{2.103}$$

prin integrare se obține:

$$W_m(w) = M \cdot \ln\left(w + \frac{a}{2} + \sqrt{w(w+a)}\right) + N \quad (2.104)$$

Calculând integrala pe porțiunea AA' din cele două plane, rezultă:

$$\int_{U_{m_2}}^{U_{m_1}} dW_m = \lim_{u \rightarrow \infty} M \int_0^\pi \frac{jue^{j\theta} dv}{\sqrt{ue^{j\theta}(ue^{j\theta} + a)}} \quad (2.105)$$

$$U_{m_1} - U_{m_2} = jM\pi \quad (2.106)$$

din care se deduce constanta M:

$$M = \frac{U_{m_1} - U_{m_2}}{j\pi} = j \frac{U_{m_2} - U_{m_1}}{\pi} \quad (2.107)$$

Având în vedere că punctele C(U_{m2},0) și C(0,0) verifică ecuația (2.104):

$$U_{m_2} = j \frac{U_{m_2} - U_{m_1}}{\pi} \cdot \ln \frac{a}{2} + N \quad (2.108)$$

se obține constanta N:

$$N = U_{m_2} - j \frac{U_{m_2} - U_{m_1}}{\pi} \cdot \ln \frac{g^2}{2c^2} \quad (2.109)$$

Funcția W_m(w) are în consecință forma:

$$W_m(w) = U_{m_2} + j \frac{U_{m_2} - U_{m_1}}{\pi} \cdot \ln \frac{w + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{g}{c}\right)^2 + \sqrt{w \left[w + \left(\frac{g}{c}\right)^2 \right]}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{g}{c}\right)^2} \quad (2.110)$$

Expresiile lui $\frac{dW_m}{dw}$ și $\frac{dw}{dz}$ introduse în relația (2.102) determină intensitatea câmpului magnetic:

$$H(z) = - \left(j \frac{U_{m_2} - U_{m_1}}{g} \sqrt{\frac{w}{w-1}} \right)^* \quad (2.111)$$

2.3.1.6. Metoda funcțiilor Green

Metoda se aplică la o clasă largă de ecuații cu derivate parțiale, scalare și vectoriale, care descriu fenomene staționare [65],[88]. În studiul câmpurilor magnetice intervine ecuația de tip eliptic neomogenă a lui Helmholtz, pentru câmpuri de scalari V_m și de vectori \vec{G} :

$$\nabla^2 V_m(\vec{r}) - k^2 \cdot V_m(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad (2.112)$$

$$\nabla^2 \vec{G}(\vec{r}) - k^2 \cdot \vec{G}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) \quad (2.113)$$

Dacă $k = 0$, se obțin ecuațiile lui Poisson, iar dacă $f(\vec{r}) = 0$ și $\vec{F}(\vec{r}) = 0$, ecuațiile lui Laplace. Soluțiile care se obțin prin separarea variabilelor sub formă de serii au uneori dezavantajul unei convergențe slabe și nu permit examinarea comportării în vecinătatea unor

discontinuități, muchii, vârfuri. Funcțiile lui Green elimină acest dezavantaj, pretându-se chiar în reprezentare integrală la interpretări fizice.

Metoda se bazează pe principiul superpoziției, consecință a liniarității ecuațiilor Poisson și Laplace. Potențialul unei repartiții de sarcini se poate calcula prin superpoziția potențialelor elementare stabilite de sarcini magnetice elementare. Dacă în spațiul V_∞ , $G_P(\vec{r}|\vec{r}')$ este potențialul în punctul de rază vectorie \vec{r} al sarcinii punctiforme unitate, situată în punctul de rază vectorie \vec{r}' (figura 2.12), potențialul scalar este dat de integrala:

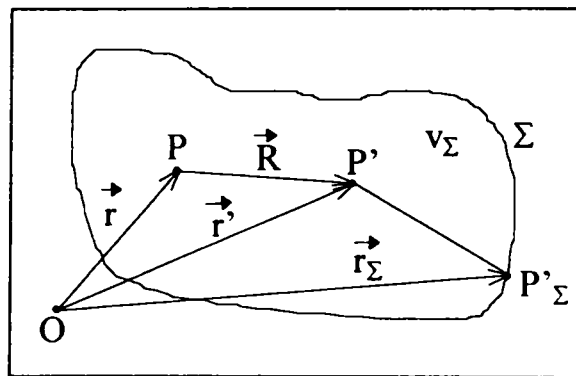


Fig.2.12. Domeniul de definiție a potențialului vector

$$V_m(\vec{r}) = \int_{V_\Sigma} G_P(\vec{r}|\vec{r}') \cdot \text{div} \vec{M}(\vec{r}') dv' \tag{2.114}$$

efectuată pe domeniul V_Σ . \vec{M} este vectorul magnetizație:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \tag{2.115}$$

În domenii finite V_Σ în interiorul cărora nu sunt sarcini magnetice, se determină funcția $G_L(\vec{r}|\vec{r}')$.

$G_P(\vec{r}|\vec{r}')$ este funcția lui Green pentru ecuația lui Poisson;

$G_L(\vec{r}|\vec{r}')$ este funcția lui Green pentru ecuația lui Laplace.

Expresia integrală a potențialului magnetic scalar este:

$$V_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \frac{\nabla \vec{M}(\vec{r}')}{R} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \vec{ds} \tag{2.116}$$

Aplicând termenului al doilea teorema divergenței, se obține:

$$V_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \frac{\nabla \vec{M}(\vec{r}')}{R} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \nabla \cdot \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} dv' = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{R} dv' \tag{2.117}$$

Funcțiile lui Green transformă expresia integrală (2.117) în soluții ale ecuațiilor Poisson-Laplace prin eliminarea, după caz, a valorii pe frontieră a potențialului sau a derivatei lui după normală.

În cazul în care în domeniul V_Σ , potențialul $V_m(\vec{r})$ satisface ecuația lui Poisson cu condiții pe frontieră neomogene de tip Dirichlet, atunci:

$$\nabla^2 V_m(\vec{r}) = \text{div} \vec{M}(\vec{r}) ; \quad V_m(\vec{r}_\Sigma) \text{ dat pe } \Sigma \tag{2.118}$$

În vederea eliminării termenului în care intervine gradientul potențialului pe frontieră, expresia (2.117) se descompune în suma a doi termeni:

$$V_m(\vec{r}) = V_{PD}(\vec{r}) + V_{LD}(\vec{r}) \tag{2.119}$$

Termenul $V_{PD}(\vec{r})$ este soluția ecuației lui Poisson cu condiții pe frontieră omogene de tip Dirichlet:

$$\nabla^2 V_{PD}(\vec{r}) = \text{div} \vec{M}(\vec{r}) ; \quad V_{PD}(\vec{r}_\Sigma) = 0 \tag{2.120}$$

având prin definiție forma:

$$V_{PD}(\vec{r}) = \int_{V_{\Sigma}} \text{div} \vec{M}(\vec{r}) \cdot G_{PD}(\vec{r}|\vec{r}') dv' \quad (2.121)$$

în care $G_{PD}(\vec{r}|\vec{r}')$ este funcția lui Green pentru ecuația lui Poisson în problema tridimensională cu condiții pe frontieră Dirichlet.

Termenul $V_{LD}(\vec{r})$ este soluție a ecuației lui Laplace cu condiții pe frontieră neomogene de tip Dirichlet:

$$\nabla^2 V_{LD}(\vec{r}) = 0 ; V_{LD}(\vec{r}_{\Sigma}) \text{ dat pe } \Sigma \quad (2.122)$$

având prin definiție forma:

$$V_{LD}(\vec{r}) = \oint_{\Sigma} V_{LD}(\vec{r}'_{\Sigma}) \cdot \xi_{LD}(\vec{r}|\vec{r}'_{\Sigma}) \cdot \vec{n} \cdot d\vec{s}' \quad (2.123)$$

în care $\xi_{LD}(\vec{r}|\vec{r}'_{\Sigma}) = \frac{\partial G_{LD}(\vec{r}|\vec{r}'_{\Sigma})}{\partial n}$ este funcția lui Green pentru ecuația lui Laplace în problema tridimensională, cu condiții pe frontieră Dirichlet.

Similar se definesc funcțiile lui Green în problema plană cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet.

În cazul în care în domeniul V_{Σ} potențialul $V_m(\vec{r})$ satisface ecuația lui Poisson cu condiții pe frontieră neomogene de tip Neumann, atunci:

$$\nabla^2 V_m(\vec{r}) = \text{div} \vec{M}(\vec{r}) ; \frac{\partial V_m(\vec{r}_{\Sigma})}{\partial n} \text{ dat pe } \Sigma \quad (2.124)$$

În vederea eliminării termenului în care intervine potențialul pe frontieră, expresia integrală (2.117) se descompune în suma a doi termeni:

$$V_m(\vec{r}) = V_{PN}(\vec{r}) + V_{LN}(\vec{r}) \quad (2.125)$$

Termenul $V_{PN}(\vec{r})$ este soluție a ecuației lui Poisson cu condiții pe frontieră Neumann:

$$\nabla^2 V_{PN}(\vec{r}) = \text{div} \vec{M}(\vec{r}) ; \frac{\partial V_{PN}(\vec{r}_{\Sigma})}{\partial n} = \text{const. pe } \Sigma \quad (2.126)$$

având prin definiție forma:

$$V_{PN}(\vec{r}) = \int_{V_{\Sigma}} \text{div} \vec{M}(\vec{r}) \cdot G_{PN}(\vec{r}|\vec{r}') dv' \quad (2.127)$$

$G_{PN}(\vec{r}|\vec{r}')$ fiind funcția lui Green pentru ecuația lui Poisson în problema tridimensională cu condiții pe frontieră de tip Neumann.

Termenul $V_{LN}(\vec{r})$ este soluție a ecuației lui Laplace cu condiții pe frontieră neomogene de tip Neumann:

$$\nabla^2 V_{LN}(\vec{r}) = 0 ; \frac{\partial V_{LN}(\vec{r}_{\Sigma})}{\partial n} = \frac{\partial V(\vec{r}_{\Sigma})}{\partial n} \text{ dat pe } \Sigma \quad (2.128)$$

având prin definiție forma:

$$V_{LN}(\vec{r}) = \oint_{\Sigma} \text{grad} V_m(\vec{r}'_{\Sigma}) \cdot G_{LN}(\vec{r}|\vec{r}'_{\Sigma}) \cdot \vec{n} \cdot d\vec{s}' + K \quad (2.129)$$

în care K este o constantă și $G_{LN}(\vec{r}|\vec{r}'_{\Sigma}) = \xi_{LN}(\vec{r}|\vec{r}'_{\Sigma})$ este funcția lui Green pentru ecuația lui Laplace în problema tridimensională cu condiții de frontieră de tip Neumann.

În cazul problemei plane funcțiile lui Green se definesc în mod asemănător pentru condiții pe frontieră de tip Neumann.

În problema cu condiții pe frontieră mixte, soluția generală este egală cu suma dintre soluția problemei Dirichlet, în care funcția lui Green se definește pe porțiunile de frontieră pe care sunt date valorile potențialului și soluția problemei Neumann, în care funcția lui Green se definește pe restul frontierei, în care sunt date valori ale derivatei potențialului după normală.

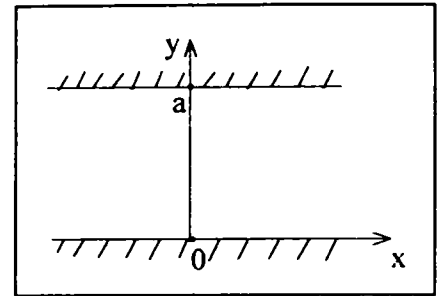


Fig.2.13. Bandă infinită de lățime “a”

Funcțiile lui Green pentru configurația plană din figura 2.13 sunt:

- pentru ecuația lui Laplace cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet

$$G_D(x,y|0,0) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{\sin \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{a} - \cos \frac{\pi y}{a}} \tag{2.130}$$

- pentru ecuația lui Laplace cu condiții pe frontieră de tip Neumann

$$G_N(x,y|0,0) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \left[\left(1 - e^{\frac{\pi x}{a}} \cdot \cos \frac{\pi y}{a} \right)^2 + e^{\frac{2\pi x}{a}} \cdot \sin \frac{2\pi y}{a} \right] \tag{2.131}$$

Formulele stabilite pentru funcțiile lui Green sunt expresii integrale. Pentru o configurație de câmp dată, ele se obțin aplicând oricare dintre metodele de calcul cunoscute: separarea variabilelor, metoda imaginilor, metoda transformării conforme. În cazul aplicării metodelor numerice se definesc funcții Green numerice.

2.3.2. Metode numerice de calcul al câmpului electromagnetic

Mașinile electrice au fost proiectate, prin tradiție, combinând reguli empirice bazate pe rezultate experimentale, cu modele simplificate de circuite magnetice [60]. Această tehnică se poate denumi “proiectare după reguli”. Dispozitivele au devenit între timp tot mai complexe și variate și, prin urmare, regulile de proiectare convențională nu au mai corespuns. A apărut astfel “proiectarea prin analiză” a problemelor fundamentale de câmp electromagnetic, bazată pe soluții detaliate, în limite rezonabile.

Proiectarea prin analiză înseamnă în realitate proiectarea prin analiză numerică, din moment ce nici o altă unealtă matematică nu poate trata complexitatea geometrică și neliniaritățile existente în mașini. Proiectarea prin analiză înseamnă astăzi analiza cu ajutorul calculatorului, devenind cu pași repezi “proiectare asistată de calculator”.

Analiza numerică a câmpurilor se utilizează la mașini construite cu materiale având caracteristici neliniare, pentru un calcul cât mai precis al câmpurilor magnetice [69]. Utilizarea metodelor numerice conduce la o activitate complexă care implică rezolvarea problemelor electrotehnice, matematice și de programare. Dezvoltarea rapidă a metodelor a impus următoarele probleme:

- căutarea unor metode de rezolvare corectă a ecuațiilor de câmp;
- dezvoltarea unor metode de rezolvare a sistemelor mari de ecuații liniare și neliniare;
- dezvoltarea unor programe de calcul cu ajutorul cărora se pot rezolva probleme practice, concrete, chiar de către nespecialiști în domeniu.

Modelul matematic de câmp electromagnetic poate fi de tip diferențial, variațional sau integral. Metodele analitice prezentate anterior sunt riguroase în domeniile lor de definiție, dar devin rapid inaplicabile la creșterea complexității spațiului variabilelor sau la neliniaritatea operatorului din ecuația modelului matematic de câmp.

Comparativ cu metodele analitice, metodele numerice prezintă o arie de aplicabilitate mai mare, fiind supuse la restricții mai puține. Deși aproximative, metodele numerice, dacă satisfac anumite criterii calitative de rigoare și convergență, conduc, ca și metodele directe de analiză, la rezultate acceptabile.

Modelul matematic de câmp electromagnetic, împreună cu metoda numerică de rezolvare a acestuia, conform unui algoritm programabil, definesc un model numeric de câmp electromagnetic [64]. Sunt considerate numai regimurile staționar și cvasistaționar magnetic ale câmpului microscopic, considerate ca aproximații satisfăcătoare în majoritatea aplicațiilor electrotehnice.

2.3.2.1. Metoda diferențelor finite

Primul pas constă în deducerea algoritmului de calcul al potențialului magnetic vector [74],[89]. Se utilizează forma integrală a ecuației:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_{\Gamma}} \vec{J} \cdot d\vec{s} \tag{2.132}$$

Relația se aplică într-o rețea de discretizare ce cuprinde domeniul D de existență a câmpului, rețea necesară pentru rezolvarea numerică a problemei de câmp. Figura 2.14 prezintă un fragment dintr-o rețea de discretizare rectangulară, utilizarea ei fiind cea mai răspândită.

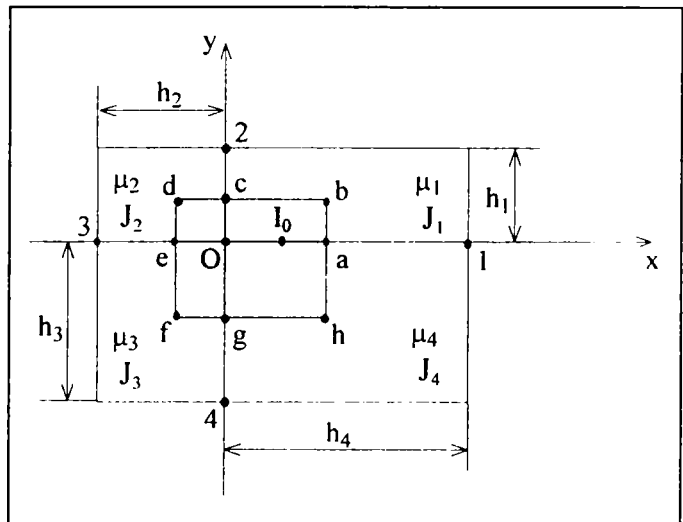


Fig.2.14. Segment de rețea rectangulară

Elementele din jurul nodului O sunt caracterizate prin:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = \text{const.} \tag{2.133}$$

$$J_1, J_2, J_3, J_4 = \text{const.} \tag{2.134}$$

densitatea de curent J fiind orientată în lungul axei Oz, pentru sistemul xOyz atașat planului de existență a câmpului și având originea în nodul O. Traseul de integrare este constituit de mediatoarele segmentelor O-1, O-2, O-3, O-4 ale rețelei.

Integrala (1) devine astfel (notațiile sunt cele din figura 2.14):

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_a^b H_y dy + \int_b^c H_x dx + \int_c^d H_x dx + \int_d^e H_y dy + \int_e^f H_y dy + \int_f^g H_x dx + \int_g^h H_x dx + \int_h^a H_y dy = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (J_1 h_1 h_4 + J_2 h_2 h_1 + J_3 h_3 h_2 + J_4 h_4 h_3) = I_0 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Componentele câmpului \vec{H} după cele două direcții sunt:

$$H_x = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \tag{2.136}$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \tag{2.137}$$

Expresia (2.135) se transformă atunci în:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{\mu_1} \int_a^b \frac{\partial A}{\partial x} dy + \frac{1}{\mu_1} \int_b^c \frac{\partial A}{\partial y} dx + \frac{1}{\mu_2} \int_c^d \frac{\partial A}{\partial y} dx - \frac{1}{\mu_2} \int_d^e \frac{\partial A}{\partial x} dy - \frac{1}{\mu_3} \int_e^f \frac{\partial A}{\partial x} dy +$$

$$+ \frac{1}{\mu_3} \int_f^g \frac{\partial A}{\partial y} dx + \frac{1}{\mu_4} \int_g^h \frac{\partial A}{\partial y} dx - \frac{1}{\mu_4} \int_h^a \frac{\partial A}{\partial x} dy = I_0 \quad (2.138)$$

Fiecare integrală din relația (2.138) se integrează în modul următor (notațiile din figura 2.14):

$$-\frac{1}{\mu_1} \int_a^b \frac{\partial A}{\partial x} dy \cong -\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{A_1 - A_0}{h_4} \cdot \frac{h_1}{2} \quad (2.139)$$

Relația (2.139) este aproximativă, dar pentru o rețea suficient de fină (h_1, h_2, h_3, h_4 suficient de mici), ea se poate utiliza cu erori acceptabile.

Însumând toate componentele din relația (2.138), se obține:

$$A_0 = \frac{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 + I_0}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \quad (2.140)$$

în care:

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{\mu_1} h_1 + \frac{1}{\mu_4} h_3 \right) \cdot \frac{h_4}{2} \quad \alpha_3 = \left(\frac{1}{\mu_3} h_3 + \frac{1}{\mu_2} h_1 \right) \cdot \frac{h_2}{2}$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{1}{\mu_2} h_2 + \frac{1}{\mu_1} h_4 \right) \cdot \frac{h_1}{2} \quad \alpha_4 = \left(\frac{1}{\mu_4} h_4 + \frac{1}{\mu_3} h_2 \right) \cdot \frac{h_3}{2} \quad (2.141)$$

$$I_0 = \frac{1}{4} (J_1 h_1 h_4 + J_2 h_2 h_1 + J_3 h_3 h_2 + J_4 h_4 h_3) \quad (2.142)$$

Relația de legătură între potențialul vector al punctului O și cel al punctelor vecine este liniară, putând fi pusă sub forma:

$$A_0 = C_1 A_1 + C_2 A_2 + C_3 A_3 + C_4 A_4 + C_0 \quad (2.143)$$

în care coeficienții C_i ($i = 1, 2, 3, 4, 0$) sunt determinați exclusiv de proprietățile de material, de sarcina electrică și de dimensiunile rețelei.

Relația (2.143) constituie nucleul algoritmului de calcul al potențialului magnetic vector prin metoda diferențelor finite. Aplicând relația fiecărui nod al rețelei, în ordinea dictată de numerotarea nodurilor, se obține un sistem liniar care se rezolvă prin metode iterative.

Aplicarea relației (2.140) în fiecare nod al rețelei de discretizare impune cunoașterea în fiecare nod a elementelor utilizate de expresiile (2.141).

În figura 2.15 se prezintă discretizarea domeniului D de existență a câmpului pentru o problemă de tip Dirichlet, prin intermediul a două tipuri de rețele:

- rețea uniformă cu pași egali pe direcția lui x și y și egali între ei (figura 2.15.a);
- rețea periodică cu pași egali pe direcția lui x și y dar inegali între ei (figura 2.15.b).

În figura 2.15.c este dat un segment de rețea rectangulară, generală. Punctul O poate fi oricare nod al rețelei. Potențialul A se poate exprima în funcție de potențialul nodurilor vecine și de proprietățile elementelor înconjurătoare. Dacă în noua poziție a punctului O, configurația

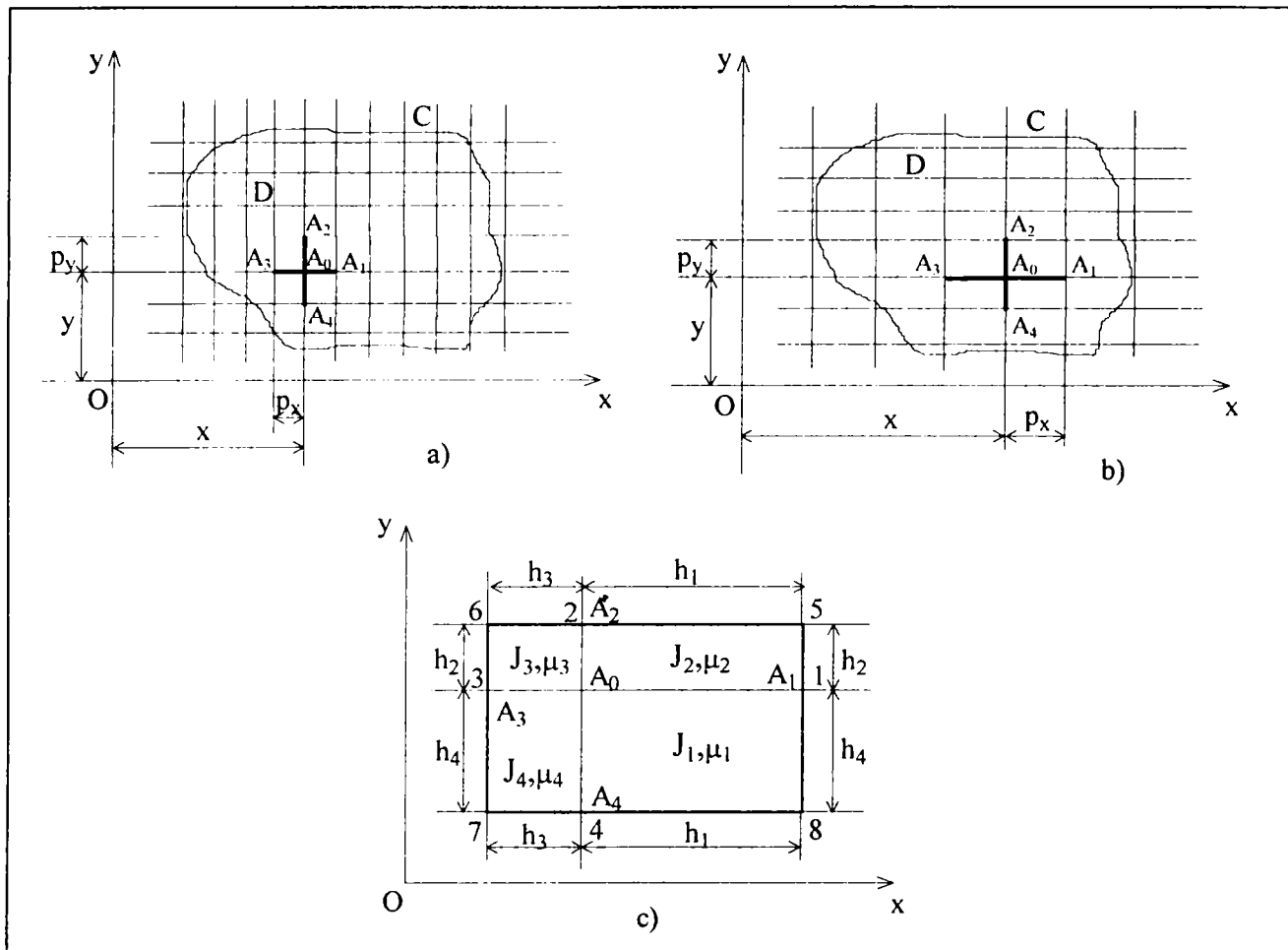


Fig.2.15. Discretizarea domeniului D prin rețele uniforme rectangulare:

- a) rețea uniformă cu pași egali;
- b) rețea periodică cu pași inegali;
- c) segment de rețea rectangulară.

rețelei nu va reproduce configurația pentru care au fost evaluate constantele α , expresia (2.140) nu mai poate fi utilizată ca bază a unui algoritm de calcul al potențialului vector în toate nodurile rețelei. Acesta este motivul pentru care rețelele de discretizare a domeniului D trebuie să fie rețele periodice cu laturile paralele la direcțiile definerii ale reperului.

Dacă există o direcție după care gradientul funcției potențial vector este mai mare, se alege o axă a reperului paralelă cu această direcție și se construiește o rețea care pe direcția respectivă să aibă pași egali, dar mai mici decât pe direcția perpendiculară.

Suprapunând o rețea unui domeniu D oarecare, frontiera reală C trebuie înlocuită cu o frontieră care să urmeze direcțiile laturilor rețelei. Aceeași constrângere se aplică și curbilor care delimitează zone ale domeniului D cu proprietăți diferite.

Problema alegerii formei rețelei și a pasului ei este complexă și nu se poate rezolva după reguli precise. Trebuie analizat fiecare caz în parte, decizia fiind de cele mai multe ori un compromis între mai multe tendințe contradictorii.

Din punct de vedere al deformării contururilor configurației și al reducerii erorilor de discretizare, ar fi necesară o rețea cât mai fină.

Din punct de vedere al erorii globale și al vitezei de convergență, un număr prea mare de puncte constituie un dezavantaj.

În final, calculatorul utilizat va defini numărul maxim de noduri ce poate fi ales, deci dimensiunea rețelei. Forma ei este singurul parametru ce rămâne la latitudinea utilizatorului.

Prima condiție pentru asamblarea sistemului de ecuații o constituie numerotarea nodurilor și explorarea lor într-o anumită ordine.

Algoritmeele bazate pe diferențe finite rezolvă sistemul de ecuații printr-un proces iterativ, aplicând relația (2.140) și repetând calculele până când diferența maximă între valori calculate succesiv în același punct este mai mică decât eroarea admisă pentru sistarea iterațiilor.

Primul algoritm a fost propus de Richardson. Pentru calculul potențialului vector în punctul (h,k) în iterația "n+1", se utilizează valorile potențialului vector din punctele (h,k-1), (h,k+1), (h-1,k), (h+1,k), calculate la iterația a "n"-a:

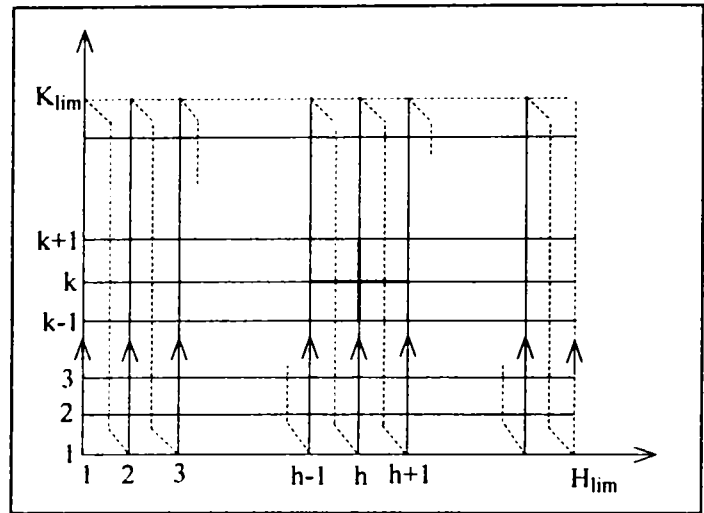


Fig.2.16. Explicativă la algoritmul Richardson

$$A_{h,k}^{n+1} = C_1 A_{h+1,k}^n + C_2 A_{h,k+1}^n + C_3 A_{h-1,k}^n + C_4 A_{h,k-1}^n + C_0 \quad (2.144)$$

În figura 2.16 este reprezentat domeniul D înscris într-un segment de rețea uniformă.

Algoritmul lui Richardson prezintă următoarele dezavantaje:

- convergență slabă a procesului;
- necesitatea stocării a două matrici, fiecare de dimensiunea $H_{lim} \times K_{lim}$, în memoria calculatorului, una conținând valorile iterației "n", cealaltă ale iterației "n+1".

Metoda Liebmann elimină al doilea dezavantaj, utilizând explorarea ordonată a punctelor în ordinea indicată în figura 2.16, luând fiecare coloană în același sens. Când se ajunge la punctul (h,k), punctele (h-1,k), (h,k-1) au fost deja explorate, deci:

$$A_{h,k}^{n+1} = C_1 A_{h+1,k}^n + C_2 A_{h,k+1}^n + C_3 A_{h-1,k}^{n+1} + C_4 A_{h,k-1}^{n+1} + C_0 \quad (2.145)$$

În acest caz este suficientă stocarea unei matrici de dimensiunea $H_{lim} \times K_{lim}$ în memorie, elementele ei fiind reevaluate progresiv pe măsura avansării explorării punctelor.

Convergența este mai bună decât în cazul algoritmului lui Richardson, dar este nesatisfăcătoare pentru matrici mari și pentru valori inițiale egale cu zero pentru potențialul magnetic vector \vec{A} .

Frankel și Young au perfecționat metoda Liebmann introducând suprar relaxarea valorii potențialului în punctul (h,k), după metoda indicată de Southwell. Dacă soluția este stabilă:

$$A_{h,k}^{n+1} = A_{h,k}^n \quad (2.146)$$

se obține algoritmul pentru metoda Liebmann extrapolată:

$$A_{h,k}^{n+1} = A_{h,k}^n + \omega \cdot (C_1 A_{h+1,k}^n + C_2 A_{h,k+1}^n + C_3 A_{h-1,k}^{n+1} + C_4 A_{h,k-1}^{n+1} + C_0 - A_{h,k}^n) \quad (2.147)$$

Factorul de relaxare ω este cuprins între 1 și 2. Pentru valori apropiate de 2 procesul este instabil, iar pentru $\omega = 1$ convergența este slabă. Există o valoare optimă pentru care viteza de convergență este maximă și eroarea de calcul acceptabilă. Valorile practice pentru ω_{optim} oscilează între 1,6 și 1,85.

Sistemul de ecuații asamblat pentru toate nodurile rețelei se poate pune sub forma matriceală:

$$\{A\}^{n+1} = [M] \cdot \{A\}^n + \{B\} \quad (2.148)$$

soluția urmând să se calculeze după un proces iterativ. [M] este matricea coeficienților, $\{A\}^{n+1}$ este vectorul valorilor potențialului la iterația "n+1".

2.3.2.2. Metoda elementelor finite

Formularea variațională a problemei de câmp electromagnetic este echivalentă cu formularea diferențială dezvoltată anterior. Construcția modelului matematic variațional de câmp presupune stabilirea unui principiu variațional, de tip lagrangean sau hamiltonian, capabil să furnizeze din condiția de staționaritate a unei funcționale adecvate, ecuațiile de bază ale câmpului electromagnetic în medii materiale [31],[64],[89],[104]. Formularea variațională de tip lagrangean asociată potențialelor electromagnetice are avantajul unui puternic suport fizic și intuitiv conferit de utilizarea funcționalelor naturale de energie.

Soluția este o funcție ce minimizează o funcțională definită printr-o integrare convenabilă a necunoscutelor pe întregul domeniu. În acest caz se minimizează energia electromagnetică conținută în domeniul studiat.

Se presupune planul xOy cu sistemul de coordonate cartezian asociat domeniului plan paralel D . Din relația $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ rezultă:

$$\vec{B} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{j} \quad (2.149)$$

deoarece axa Oz s-a presupus orientată în direcția curentului de conducție \vec{J} , potențialul \vec{A} având o singură componentă:

$$\vec{A} = A_z \vec{k} = A\vec{k} \quad (2.150)$$

Energia totală a domeniului D (figura 2.17) este dată de funcționala:

$$W = I(A) = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] - J(x,y) \cdot A \right\} dx dy \quad (2.151)$$

Energia W este o funcțională deoarece depinde de funcția $A(x,y)$. Orice funcție aparținând clasei din care face parte soluția dă prin integrarea relației (2.151) o valoare conținută în domeniul D . Aceasta este funcționala $I(A)$ ce trebuie minimizată printr-o metodă directă.

În cursul procesului de minimizare aproximativă a funcționalei pe porțiuni, se obține mulțimea finită a valorilor potențialului vector în nodurile rețelei de discretizare.

$A(x,y)$ fiind funcția necunoscută, se caută aproximarea ei pe porțiuni, la nivelul fiecărui element. Pentru simplificare se presupune că pentru toate elementele discretizării funcția de aproximare este de tip polinom de gradul întâi.

O problemă esențială o reprezintă asigurarea convergenței funcției de aproximare spre soluția unică a problemei de câmp, când dimensiunile elementelor se reduc, tinzând la limită la zero.

Discretizarea se poate face printr-o rețea de elemente triunghiulare sau patrulatere. Se preferă familia triunghiurilor datorită facilităților oferite la modelarea frontierelor și la stabilirea expresiilor de calcul.

Utilizând principiul energiei minime, rețeaua va fi amplificată în acele regiuni în care pot să apară erori mai mari de calcul.

Se consideră o rețea formată din elemente triunghiulare definite prin trei puncte, vârfurile triunghiului. Pentru aceste elemente triunghiulare s-a presupus că funcția $A(x,y)$ aparține clasei "polinom de gradul întâi în x și y ". Pentru triunghiul simplu definit prin trei puncte (figura 2.18), se obține un polinom de gradul întâi de forma:

$$A(x,y) = ax + by + c \quad (2.152)$$

Coeficienții a , b , c sunt determinați de valorile funcției $A(x,y)$ în vârfurile triunghiului. Necunoscutele problemei sunt valorile funcției în nodurile rețelei.

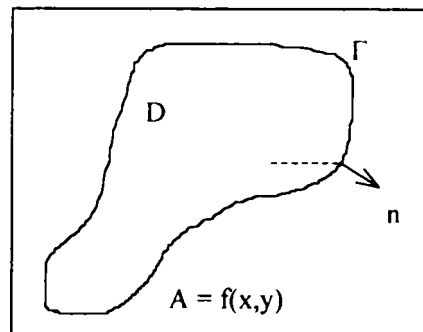


Fig.2.17. Problemă de câmp plan paralel de tip Dirichlet

Pentru un element oarecare "e" al discretizării, relația (2.152) devine:

$$\{A\} = [N] \cdot \{A\}^e \tag{2.153}$$

unde: $\{A\}$ - este vectorul valorilor funcției A în nodurile rețelei;

$[N]$ - este matricea linie a coeficienților valorilor funcției în noduri;

$\{A\}^e$ - este vectorul valorilor funcției asociate elementului "e".

Funcția A(x,y) are următoarele valori în nodurile i, j, k ale triunghiului din figura 2.18:

$$\begin{aligned} A_i &= ax_i + by_i + c \\ A_j &= ax_j + by_j + c \\ A_k &= ax_k + by_k + c \end{aligned} \tag{2.154}$$

Se determină coeficienții a, b, c rezolvând sistemul (2.154). Introducând valorile coeficienților în relația (2.152), se obține:

$$A(x,y) = N_i A_i + N_j A_j + N_k A_k \tag{2.155}$$

Coeficienții N_i, N_j, N_k , ce multiplică valorile funcției A(x,y) în noduri, sunt funcții de coordonatele v f l r $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ și r na l punctului P(x,y). Ei sunt numiți funcții de ponderație.

Având definită funcția necunoscută A(x,y) prin relația (2.155), se poate calcula contribuția elementului "e" la funcția energie totală:

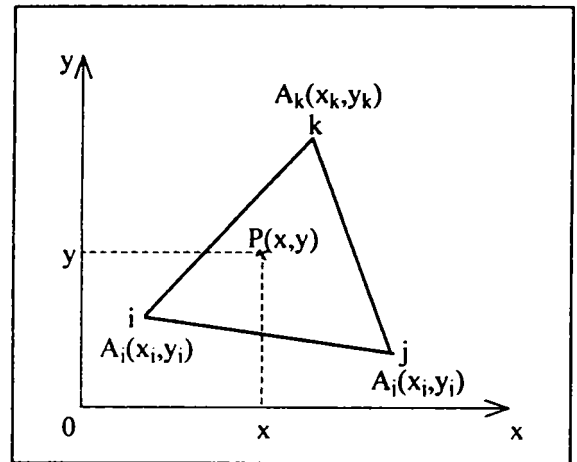


Fig.2.18. Definirea unui element triunghiular simplu

$$\begin{aligned} I(A)^e &= \iint_e \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} A_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} A_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} A_k \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} A_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} A_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} A_k \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - J(x,y) \cdot (N_i A_i + N_j A_j + N_k A_k) \right\} dx dy \end{aligned} \tag{2.156}$$

Parametrii de care depinde energia elementului "e" sunt A_i, A_j, A_k . Pentru ca energia elementului "e" să fie minimă, trebuie să fie îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(A)^e}{\partial A_i} &= 0 \\ \frac{\partial I(A)^e}{\partial A_j} &= 0 \\ \frac{\partial I(A)^e}{\partial A_k} &= 0 \end{aligned} \tag{2.157}$$

Se presupune că discretizarea aplicată domeniului D a generat un număr "n" finit de elemente și un număr "m" finit de noduri interne. Nodurile aparținând frontierei de tip Dirichlet au fost excluse din "m", deoarece valorile funcției A(x,y) sunt cunoscute pe frontieră.

Energia totală este suma energiilor tuturor elementelor:

$$I(A) = \sum_{e=1}^n I(A)^e \tag{2.158}$$

Exprimând condițiile de minim al energiilor (2.157) la nivelul fiecărui element și asamblând aceste relații pentru cele "n" elemente ale domeniului D, se obține sistemul de ecuații:

$$\frac{\partial I(A)}{\partial \{A\}} = 0 \tag{2.159}$$

în care $\{A\}$ este matricea din (2.153), corespunzătoare celor "n" elemente.

Trebuie anulate, în consecință, toate derivatele de ordinul întâi care se pot exprima separat pentru cei "m" parametri. Rezolvând sistemul de ecuații (2.159), se obțin valorile funcției $A(x,y)$ în cele "m" noduri interne.

Sistemul de ecuații obținut prin minimizarea energiei în toate elementele domeniului D este un sistem de ecuații liniare de tipul:

$$\frac{\partial I(A)}{\partial \{A\}} = [M] \cdot \{A\} \mp \{TL\} = 0 \tag{2.160}$$

Matricea coeficienților [M] se obține în procesul de baleiaj al elementelor rezultate prin discretizarea domeniului. Ea este o matrice pătrată cu multe elemente nule, de dimensiune "m" (m - numărul nodurilor interne).

Termenul liber {TL} este un vector de dimensiune "m", generat de funcția $J(x,y)$ și produsele $M_f \cdot A_f$, corespunzătoare nodurilor situate pe frontieră. Dacă domeniul D este delimitat de o curbă $A = 0$, contribuția produselor $M_f \cdot A_f$ este nulă.

Utilizarea metodei elementelor finite implică discretizarea cu deosebită atenție și fără erori a domeniului utilizat. Proprietățile de material trebuie să fie constante pe întreaga suprafață a elementului.

2.3.2.3. Metoda elementelor de frontieră

Modelul matematic integral de câmp electromagnetic poate fi descris prin ecuații integrale de domeniu sau de frontieră [64].

Formularea integrală a problemelor de câmp este echivalentă cu definirea prin ecuații diferențiale cu condiții la limită. Modelul ecuațiilor integrale de domeniu se asociază problemelor de câmp în medii neliniare și neomogene. Acest model matematic nu s-a consacrat în analiza numerică a câmpului electromagnetic deoarece rezolvarea lui este mai dificilă decât a modelului diferențial sau variațional.

Modelul ecuațiilor integrale de frontieră, mai des utilizat, se aplică problemelor de analiză a câmpului electromagnetic în medii liniare și omogene. El prezintă două avantaje față de modelul diferențial și cel variațional:

- reduce cu o unitate dimensiunea problemelor de câmp, deoarece necesită discretizarea exclusiv a frontierei domeniului, rezultând un număr mic de ecuații ale sistemului liniar obținut;
- are o aplicabilitate directă la probleme cu domenii de câmp infinit.

Metoda poate fi combinată avantajos cu metoda diferențelor finite sau cu metoda elementelor finite pentru a obține precizii mai bune ale soluției în diverse regiuni ale domeniului.

Metoda elementelor de frontieră se referă la modelul ecuațiilor integrale de frontieră. Algoritmul de rezolvare a modelului matematic de câmp electromagnetic prin metoda elementelor de frontieră este următorul:

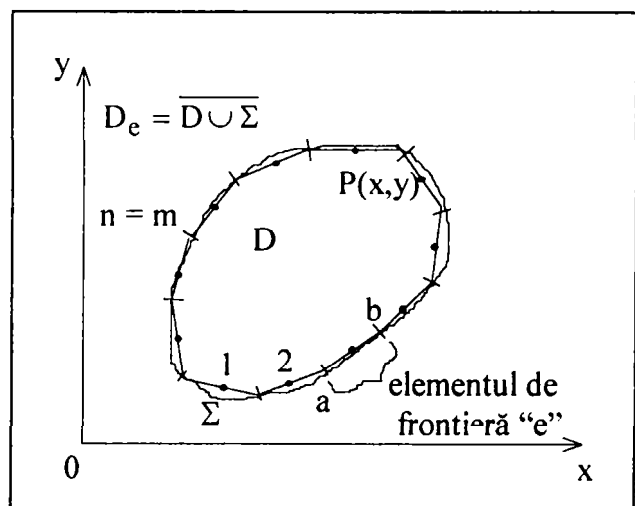


Fig.2.19. Discretizarea frontierei unui domeniu bidimensional prin elemente de frontieră constante

- ◆ se discretizează frontiera Σ a domeniului de câmp D (figura 2.19) în elemente finite, unidimensionale în cazul domeniilor, numite elemente de frontieră;
- ◆ se stabilesc nodurile caracteristice și reprezentarea geometrică pentru fiecare element de frontieră;
- ◆ se adoptă relațiile de aproximare pentru funcțiile de câmp corespunzătoare frontierei Σ discretizată;
- ◆ se transformă ecuațiile integrale de frontieră într-un sistem algebric liniar, având ca necunoscute mărimi asociate nodurilor de discretizare a frontierei Σ .

Studiul se efectuează utilizând funcția Green în problema tridimensională pentru domeniu infinit (conform pct. 2.3.1.6):

$$G(\vec{r}|\vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2.161}$$

sau funcția Green în problema plan paralelă pentru domeniu infinit:

$$G(x,y|x',y') = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \tag{2.162}$$

Se discretizează curba frontieră Σ a domeniului de câmp D în “ m ” elemente de frontieră constante, fiecare definit printr-un segment de dreaptă și printr-un nod caracteristic situat în mijlocul segmentului (figura 2.19).

La nivelul unui element de frontieră “ e ”, valorile funcției de potențial A_z^e și ale derivatei sale normale $\frac{\partial A_z^e}{\partial n_\Sigma}$ se admit constante și se asociază nodului median al fiecărui element (1,2,..., din figura 2.19).

Se scrie ecuația integrală de frontieră pentru $P(x,y)$ care coincide cu nodul curent j , $j = 1,2,\dots,n$ ($n = m$ în cazul elementelor de frontieră constante).

Se obține modelul de aproximare:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{p,j}}{2\pi} \cdot A_{z,j}^e(x,y) &= \int_{\Sigma^e} \left[G(x_j,y_j|x^e,y^e) \left(\frac{\partial A_z^e(x',y')}{\partial n_\Sigma} \right)_i - A_{z,i}(x',y') \frac{\partial G(x_j,y_j|x^e,y^e)}{\partial n_\Sigma} \right] d\Sigma^e - \\ &- \int_D \mu \cdot G(x_j,y_j|x',y') \cdot J_z(x',y') dx' dy' \end{aligned} \tag{2.163}$$

unde $j = 1,2,\dots,n$; cu indicele “ i ” s-au notat mărimile asociate nodului median “ i ” ale elementului de frontieră “ e ”. Se observă că valoarea funcției potențial în nodul “ j ” depinde de valorile lui A_z^e

și $\frac{\partial A_z^e}{\partial n_\Sigma}$ în toate nodurile de discretizare a frontierei Σ , inclusiv nodul “ j ”.

$$\alpha_p = -2\pi \int_{\Sigma} \frac{\partial G(x,y|x',y')}{\partial n_\Sigma} d\Sigma'$$

$$\alpha_p = 2\pi, \quad \text{dacă } P(x,y) \in D ;$$

$$\alpha_p = \pi, \quad \text{dacă } P(x,y) \in \Sigma_0 \text{ fiind partea netedă a curbei } \Sigma ;$$

$$\alpha_p = 0, \quad \text{dacă } P(x,y) \in D_e = \overline{D \cup \Sigma} .$$

α_p este unghiul plan sub care se vede curba frontieră Σ din punctul $P(x,y)$.

Ținând cont de definiția (2.162), modelul discretizat devine:

$$\alpha_{P,j} A_{z,j}(x,y) = \sum_{e=1}^m \left[\left(\frac{\partial A_z^e(x',y')}{\partial n_\Sigma} \right)_i \cdot \int_{\Sigma^e} \ln \frac{1}{\sqrt{(x_j - x^e)^2 + (y_j - y^e)^2}} d\Sigma^e - \right. \\ \left. - A_{z,i}(x',y') \cdot \int_{\Sigma^e} \frac{\partial}{\partial n_\Sigma} \ln \frac{1}{\sqrt{(x_j - x^e)^2 + (y_j - y^e)^2}} d\Sigma^e \right] + \quad (2.164) \\ + \frac{1}{2} \int_D \mu \cdot J_z(x',y') \cdot \ln \sqrt{(x_j - x')^2 + (y_j - y')^2} dx' dy'$$

Sistemul rezultat conține “n” ecuații algebrice liniare cu “2n” funcții nodale $A_{z,j}$, $\left(\frac{\partial A_z}{\partial n_\Sigma} \right)_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, asociate discretizării conturului Σ . Conform condițiilor mixte de frontieră, în fiecare nod “j” s-a prescris fie funcția de potențial (n_D valori date în nodurile situate pe $\Sigma_D \subset \Sigma$), fie derivata sa normală ($n_N = n - n_D$ valori date pe $\Sigma_N \subset \Sigma$), astfel încât cele “2n” funcții nodale se reduc la “n” necunoscute.

Transcris matriceal, sistemul linear (2.162) obține forma:

$$[g] \cdot \{A_z\} - [h] \cdot \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial n_\Sigma} \right\} + \{f\} = 0 \quad (2.165)$$

sau, grupând cele “n” necunoscute nodale, $n_N + n_D = n$, într-o singură matrice coloană $\{u\}$, rezultă:

$$[M] \cdot \{u\} + \{TL\} = 0 \quad (2.166)$$

unde $[M]$ reprezintă matricea globală a coeficienților și conține termenii din $[g]$ și $[h]$ asociați componentelor necunoscute ale matricilor coloană $\{A_z\}$ și $\left\{ \frac{\partial A_z}{\partial n_\Sigma} \right\}$. Spre deosebire de metoda diferențelor finite sau metoda elementelor finite, matricea $[M]$ are dimensiuni reduse, dar este plină, deoarece funcția necunoscută corespunzătoare nodului “j” depinde de toate elementele de discretizare a frontierei Σ .

Vectorul termenilor liberi $\{TL\}$, conține atât termenii din $[g]$ și $[h]$ asociați componentelor cunoscute ale matricilor coloană $\{A_z\}$ și $\left\{ \frac{\partial A_z}{\partial n_\Sigma} \right\}$, cât și termenii vectorului $\{f\}$ al funcțiilor de sursă. Pentru rezolvarea ecuației matriciale liniare (2.166) se poate aplica metoda de eliminare a lui Gauss. Înlocuind valorile funcției potențial în noduri și ale derivatei sale normale pe frontiera Σ discretizată în expresia integrală (2.164), pentru $P(x,y) \in D$ sau $P(x,y) \in D_e = \overline{D \cup \Sigma}$, se poate determina potențialul în puncte selectate din D sau D_e .

2.4. Concluzii

Proiectarea și mai ales optimizarea mașinilor electrice implică rezolvarea prioritară a problemelor referitoare la circuitele electromagnetice. Aceasta conduce la soluționarea ecuațiilor de tip Poisson sau Laplace.

Metodele numerice de analiză se impun tot mai mult datorită posibilităților de rezolvare cu precizie ridicată a sistemelor neliniare. Tehnica de calcul a făcut un salt spectaculos în ultimele decenii, permițând rezolvarea cu ajutorul analizei numerice a unor probleme de mari proporții. Relațiile care se stabilesc între cercetător și calculator în procesul de analiză a câmpului sunt ilustrate în figura 2.20.

În prezent metoda elementelor finite s-a impus în majoritatea programelor de calcul, programe cu ajutorul cărora se pot studia o mare diversitate de mașini electrice.

În acest sens se poate menționa preocuparea a numeroase firme de pe glob în elaborarea de programe de calcul specializate în calculul câmpului electromagnetic, pentru activitatea de proiectare și cercetare în domeniul mașinilor și aparatelor electrice.

Un program de calcul dă posibilitate proiectantului să calculeze în timp scurt câmpurile în multitudinea lor de configurații, astfel încât să poată aprecia comportarea și evoluția acestora. Formarea unui astfel de simț stă la baza analizei orientate a sistemelor complexe, deoarece cu toate programele performante existente, sunt necesare încă multe simplificări.

Chiar dacă ne limităm la electromagnetism, o simulare a lumii reale este încă departe de posibilitățile viitorului previzibil.

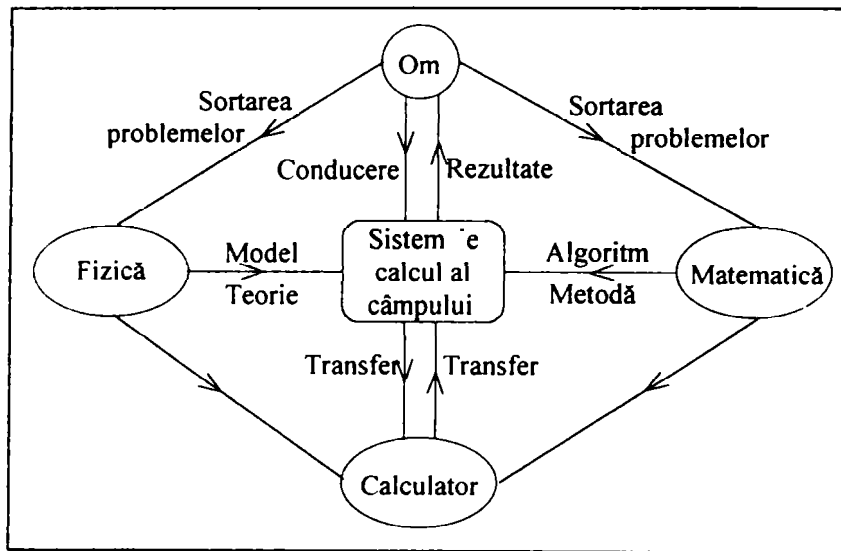


Fig.2.20. Relația om-calculator în procesul de calcul al câmpului electromagnetic

3. PARAMETRII ELECTRICI AI MOTORULUI DE INDUCȚIE

3.1. Generalități

Parametrii electrici ai unei mașini de inducție sunt rezistențele și reactanțele mașinii în regimuri staționare și dinamice. Totalitatea acestor parametri stabilesc caracteristicile și comportarea mașinii din punct de vedere energetic.

Cunoașterea parametrilor electrici ai mașinii de inducție reprezintă fundamentul analizei și proiectării unui sistem de acționare echipat cu un astfel de motor.

Toți parametrii electrici ai mașinii de inducție pot fi neliniari: rezistența înfășurării statorice variază cu temperatura, rezistența înfășurării rotorice se modifică cu temperatura și cu refularea curentului, reactanțele sunt influențate de saturația magnetică. Neliniaritatea parametrilor unui convertor electromecanic, care funcționează alimentat la o sursă de tensiune sinusoidală, este cauza apariției spectrului de armonici din întrefier [47]. Aceste armonici pot fi clasificate astfel:

- armonici de timp, care provin din tenșiuni asimetrice și nesinusoidale, precum și din modificările amplitudinii și frecvenței tensiunii; pot să apară și din modificarea neliniară a cuplului și turației;
- armonici de spațiu, care apar datorită creșterii, factorilor de prelucrare și neliniarității parametrilor.

Din infinitatea de armonici care apar doar câteva sunt mai importante și influențează caracteristicile mașinii electrice, având în vedere că majoritatea armonicilor au o amplitudine mică.

Inductanța principală corespunzătoare fluxului util contribuie la transferul de putere. Solenațiile înfășurărilor statorice și rotorice conțin fundamentala și armonicile superioare. Aceste armonici ale solenației înfășurării statorice au o interacțiune slabă cu înfășurările rotorice, formând dispersia diferențială a înfășurării statorice.

Interacțiunea dintre stator și rotor are loc preponderent prin armonica fundamentală a solenației. Inductanțele de dispersie corespunzătoare fluxurilor de dispersie înlănțuie numai înfășurările aflate de aceeași parte a mașinii și nu contribuie la transferul de putere. Tensiunile electromotoare induse de câmpurile de dispersie determină căderi de tensiune inductivă.

Pentru determinarea inductanțelor de dispersie fluxul total de dispersie se descompune în trei fluxuri parțiale:

- fluxul transversal prin creștătură;
- fluxul prin capetele dinților;
- fluxul capetelor de bobină.

Se calculează separat inductanțele de dispersie corespunzătoare fluxurilor de dispersie parțiale, la care se adaugă inductanța de dispersie diferențială corespunzătoare fluxului armonicilor superioare ale solenației înfășurării statorice.

Pentru determinarea cât mai exactă a reactanțelor, în literatură [3], [26], [46], se tratează o serie de metode care țin cont de tensiunea magnetică din fierul mașinii. Saturația magnetică este fenomenul neliniar care ridică cele mai multe și diferite probleme.

3.2. Determinarea rezistentelor mașinii de inducție

3.2.1. Rezistența pe fază a înfășurării statorice

Acest parametru nu ridică probleme deosebite. Poate fi determinat printr-o metodă analitică sau măsurându-l direct la bornele motorului, printr-o metodă volt-ampermetrică. Se

calculează sau se măsoară în "stare rece", la temperatura standard $\theta = 20^\circ\text{C}$. Având în vedere clasa de izolație în care este realizat motorul, se calculează rezistența și pentru temperatura maxim admisibilă, de exemplu $\theta = 95^\circ\text{C}$ pentru clasa de izolație B.

Rezistența înfășurării pe fază se calculează cu relația:

$$R_1 = \rho_\theta \cdot \frac{2 \cdot l_s \cdot N_1}{a_1 \cdot q_{\text{cu}}} \quad (3.1)$$

în care: ρ_θ este rezistivitatea materialului conductorului la temperatura de funcționare θ , l_s lungimea medie a unei jumătăți de spiră din înfășurarea statorului, N_1 numărul de spire pe o fază și o cale de curent a înfășurării statorului, a_1 numărul de căi de curent în paralel pentru o fază a statorului, q_{cu} secțiunea efectivă a unei spire.

Numărul de spire, N_1 , poate fi calculat cu:

$$N_1 = \frac{N_{\text{cl}} \cdot n_{\text{cl}}}{6 \cdot a_1} \quad (3.2)$$

cu N_{cl} numărul de creștături în stator și n_{cl} numărul de spire într-o creștătură.

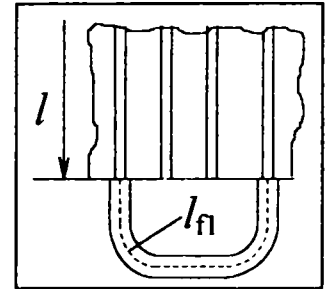


Fig.3.1. Partea frontală a bobinei

Lungimea medie a unei spire, l_s , se calculează conform figurii 3.1, cu relația:

$$l_s = l + l_{f1} \quad (3.3)$$

unde l este lungimea pachetului de tole și l_{f1} lungimea medie a părții frontale a bobinei.

Rezistivitatea materialului se modifică cu temperatura după legea:

$$\rho_\theta = \rho_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (\theta - 20)] \quad (3.4)$$

unde rezistivitatea la $\theta = 20^\circ\text{C}$ pentru conductorul de cupru este:

$$\rho_{20} = 1,784 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m} \quad (3.5)$$

iar coeficientul α pentru cupru electrolitic este:

$$\alpha_{\text{cu}} = 0,004 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (3.6)$$

Pentru determinarea caracteristicilor mașinii de inducție se consideră temperatura stabilizată la o anumită valoare. În calcule se utilizează valoarea rezistenței pentru temperatura maxim admisibilă.

3.2.2. Rezistența pe fază a înfășurării rotorice

Obiectul de studiu fiind mașina de inducție cu rotorul în scurtcircuit, rezistența unei faze se determină pe cale analitică. În creștăturile rotorice sunt plasate bare din aluminiu, rezistența acestora variind atât cu temperatura cât și cu efectul pelicular.

Rezistența pe fază se calculează, conform [21], cu relația:

$$R_2 = k_r \cdot R_b + \frac{R_i}{2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot p}{N_{c2}} \right)} \quad (3.7)$$

în care R_b este rezistența unei bare rotorice, R_i rezistența porțiunilor de inel de scurtcircuitare aferente unei bare, k_r factorul de majorare a rezistenței barei datorită refulării curentului în bară prin efect pelicular, p numărul de perechi de poli ai mașinii, N_{c2} numărul creștăturilor din rotor.

În cazul rotorului în scurtcircuit se ține cont de faptul că numărul de faze al rotorului este egal cu numărul de creștături din rotor:

$$m_2 = N_{c2} \tag{3.8}$$

deci fiecare bară constituie o fază și, în consecință, curentul de fază rotorice este chiar curentul din bară. Rezistența unei bare este:

$$R_b = \rho_b \cdot \frac{l_b}{q_b} \tag{3.9}$$

în care ρ_b este rezistivitatea barei rotorice, l_b lungimea barei (egală aici cu lungimea pachetului de tole, l), q_b secțiunea barei.

Rezistența porțiunii de inel aferent unei bare este:

$$R_i = \rho_i \cdot \frac{l_i}{q_i} \tag{3.10}$$

cu $l_i = \frac{\pi \cdot D_i}{N_{c2}}$ $q_i = a_i \cdot b_i$ (3.11)

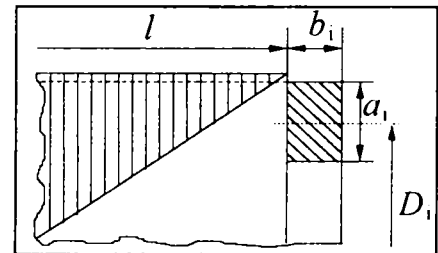


Fig.3.2. Secțiune prin inelul de scurtcircuitare

și ρ_i rezistivitatea inelului coliviei rotorice, inelul având dimensiunile a_i , b_i și D_i din figura 3.2. Având în vedere că barele rotorice ale motoarelor de inducție studiate sunt din aluminiu, rezistivitatea materialului la $\theta = 20^\circ\text{C}$ este:

$$\rho_{al20} = 3,1 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m} \tag{3.12}$$

iar coeficientul α pentru relația (3.4) este:

$$\alpha_{al} = 0,0037 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \tag{3.13}$$

Ca și în cazul rezistenței înfășurării statorice, pentru determinarea caracteristicilor mașinii de inducție se utilizează valoarea rezistenței calculată pentru temperatura maxim admisibilă.

Factorul de majorare a rezistenței barei, k_r , utilizat la considerarea influenței efectului pelicular, depinde în primul rând de frecvența fenomenelor din rotor:

$$f_2 = s \cdot f_1 \tag{3.14}$$

f_1 fiind frecvența tensiunii de alimentare și s alunecarea mașinii de inducție

- Dacă forma geometrică a barelor rotorice este dreptunghiulară, relația de calcul a factorului k_r conform [21] este:

$$k_r = w \cdot \frac{\text{sh}2w + \sin 2w}{\text{ch}2w - \cos 2w} \tag{3.15}$$

$$w = \alpha \cdot h, \tag{3.16}$$

h fiind înălțimea barei și

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega_2 \cdot \mu_0}{2 \cdot \rho_{al}}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot f_2 \cdot \mu_0}{2 \cdot \rho_{al}}} \tag{3.17}$$

cu μ_0 permeabilitatea magnetică a mediului ($\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$) și ρ_{al} rezistivitatea barei.

- În cazul în care barele rotorice sunt trapezoidale, calculul factorului de majorare a rezistenței barelor rotorice este mai complicat, depinzând și de raportul dimensiunilor bazelor trapezului:

$$v = \frac{b_2}{b_1} \tag{3.18}$$

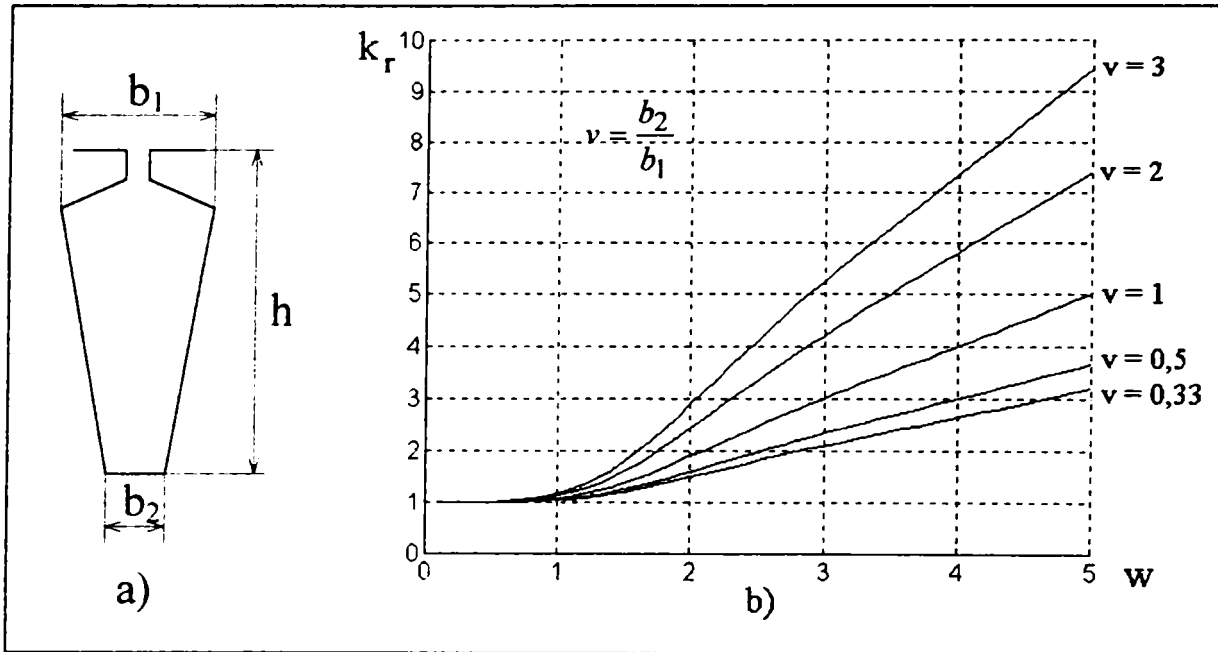


Fig.3.3.a. Crestătură rotorică;
 b. Curbele de variație ale factorului de majorare a rezistenței, k_r .

mărimile b_1 și b_2 fiind cele din figura 3.3.a.

Funcțiile $k_r = f(w)$ în funcție de parametrul v se obțin cu ajutorul funcțiilor cilindrice Bessel de ordinul întâi, $J_v(x)$ și a celor de ordinul doi, $Y_v(x)$, prezentate în anexa 1.

Dacă în aceste funcții necunoscuta x este:

$$x = x_e = \frac{w \cdot \sqrt{2}}{1 - v} \tag{3.19}$$

funcțiile Bessel primesc indicele "e".

Dacă în aceste funcții necunoscuta x este:

$$x = x_i = v \cdot x_e \tag{3.20}$$

funcțiile Bessel primesc indicele "i".

Introducând notațiile:

$$A = J_{01e}Y_{11i} + J_{12i}Y_{02e} - J_{02e}Y_{12i} - J_{11i}Y_{01e} \tag{3.21}$$

$$A' = J_{01i}Y_{11e} + J_{12e}Y_{02i} - J_{02i}Y_{12e} - J_{11e}Y_{01i} \tag{3.22}$$

$$B = J_{02e}Y_{11i} + J_{01e}Y_{12i} - J_{11i}Y_{02e} - J_{12i}Y_{01e} \tag{3.23}$$

$$B' = J_{02i}Y_{11e} + J_{01i}Y_{12e} - J_{11e}Y_{02i} - J_{12e}Y_{01i} \tag{3.24}$$

$$C = J_{11e}Y_{11i} + J_{12i}Y_{12e} - J_{12e}Y_{12i} - J_{11i}Y_{11e} \tag{3.25}$$

$$D = J_{12e}Y_{11i} + J_{11e}Y_{12i} - J_{11i}Y_{12e} - J_{12i}Y_{11e} \tag{3.26}$$

se poate calcula factorul de majorare a rezistenței barei rotorice în două cazuri:

a) când $b_1 > b_2$, bara este tip "pană", k_r se calculează cu relația:

$$k_r = -w \cdot \frac{1+v}{2} \cdot \frac{A(C-D) + B(C+D)}{C^2 + D^2} \tag{3.27}$$

b) când $b_1 < b_2$, bara este tip "trapez" (figura 3.3.a), k_r se calculează cu relația:

$$k_r = -w \cdot \frac{1+v}{2 \cdot v} \cdot \frac{A'(C-D) + B'(C+D)}{C^2 + D^2} \quad (3.28)$$

După cum se observă relațiile (3.27) și (3.28) nu sunt simple, conducând la un timp lung de calcul pentru rezistențele influențate de efectul pelicular.

Pentru raportul v cuprins în domeniul:

$$\frac{1}{3} < v < 3 \quad (3.29)$$

se poate utiliza următoarea relație pentru calculul factorului k_r :

$$k_r = E(v) \cdot w \cdot \frac{\text{sh}2w + \sin 2w}{\text{ch}2w - \cos 2w} - (E(v) - 1) \quad (3.30)$$

$$\text{cu } E(v) = -0,044 \cdot v^2 + 0,733 \cdot v + 0,311 \quad (3.31)$$

obținând rezultatele prezentate în figura 3.3.b, care aproximează funcțiile Bessel.

Pentru determinarea caracteristicilor mașinii de inducție se utilizează mărimile rotorice raportate la stator. Factorul de raportare a parametrilor (în tensiune și curent) este:

$$k_t = \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \left(\frac{N_1 k_{b1}}{N_2 k_{b2}} \right)^2} \quad (3.32)$$

Pentru mașina de inducție trifazată numărul de faze statorice este $m_1 = 3$;

k_{b1} este factorul total de înfășurare statoric.

Ținând cont că rotorul este în scurtcircuit

$$m_2 = N_{c2}, \quad N_2 = \frac{1}{2}, \quad k_{b2} = 1 \quad (3.33)$$

Cu aceste considerații factorul de raportare devine:

$$k_t = \sqrt{\frac{12(N_1 k_{b1})^2}{N_{c2}}} \quad (3.34)$$

iar rezistența rotorică raportată la stator este:

$$R_2' = k_t^2 \cdot R_2 \quad (3.35)$$

3.2.3. Rezistența de magnetizare

Rezistența de magnetizare este rezistența pe fază a unei înfășurări pur rezistive fictive, corespunzătoare pierderilor în fier.

Conform [28] ea se poate exprima sub forma:

$$R_m = K \cdot L_{1h} \cdot \omega_1^2 \quad (3.36)$$

în care: K este un coeficient care la o frecvență dată depinde de pierderile în fier, de variația câmpului magnetic și de viteza armăturii mobile (rotorului); ultima variație poate fi neglijată dacă nu se ia în considerare influența creșterii armăturilor, respectiv, se consideră reluctanța magnetică aproximativ constantă;

L_{1h} este inductanța ciclică principală determinată cu relația (3.98);

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1 \quad (3.37)$$

3.3. Determinarea reactanțelor mașinii de inducție

Distribuția spațială a câmpului în mașina de inducție este tridimensională și depinde de regimul de funcționare și de nivelul saturației magnetice. Distribuția tridimensională este importantă numai în zona frontală, a capetelor de bobină. În zona miezului feromagnetic se poate considera câmpul bidimensional.

Fluxul magnetic total Ψ_{11} care înlanțuie circuitul statoric este sumă a două componente:

$$\Psi_{11} = \Psi_{n1} + \Psi_{\sigma 1} \quad (3.38)$$

unde Ψ_{n1} este componenta care înlanțuie și celelalte circuite ale mașinii, numită flux util;

$\Psi_{\sigma 1}$ este componenta care înlanțuie numai spirele proprii, numită flux de dispersie.

Fiecărui flux îi corespunde o reactanță care intervine atât în ecuațiile de funcționare cât și în calculul caracteristicilor mașinii:

- fluxului util îi corespunde reactanța principală (utilă) sau de magnetizare, X_m ;
- fluxului de dispersie îi corespunde reactanța statorică de dispersie (scăpări), $X_{\sigma 1}$.

3.3.1. Reactanța de dispersie

Liniile câmpului magnetic de dispersie se închid în jurul conductoarelor fazei care îl produc prin întrefier, între capetele dinților celor două armături și în jurul capetelor frontale ale bobinelor.

În câmpul de dispersie se include de asemenea și câmpul magnetic corespunzător diferenței dintre câmpul magnetic real (rezultant) din întrefier și câmpul magnetic corespunzător armonicii fundamentale a inducției magnetice în întrefier. Câmpurile de dispersie determinate de această diferență sunt denumite dispersii diferențiale sau suplimentare.

Expresia reactanței de dispersie trebuie să conțină elemente care să caracterizeze fiecare parte componentă a fluxului de dispersie.

3.3.1.1. Reactanța de dispersie a înfășurării statorice

Pentru înfășurarea statorică reactanța de dispersie se calculează cu expresia:

$$X_{\sigma 1} = \omega_1 L_{\sigma 1} = 2\pi \cdot f_1 \cdot 2\mu_0 \cdot \frac{N_1^2}{p \cdot q_1} \cdot l \cdot \sum \lambda_1 \quad (3.39)$$

în care: f_1 este frecvența tensiunii de alimentare, μ_0 permeabilitatea magnetică a vidului, N_1 numărul de spire pe fază, p numărul de perechi de poli, q_1 numărul de creștături pe pol și fază, l lungimea activă a miezului feromagnetic.

Permeanța specifică totală a statorului se obține cu relația:

$$\sum \lambda_1 = \lambda_{c1} + \lambda_{d1} + \lambda_{z1} + \lambda_{f1} \quad (3.40)$$

cu: λ_{c1} permeanța specifică a dispersiei în creștătură;

λ_{d1} permeanța specifică a dispersiei diferențiale;

λ_{z1} permeanța specifică a dispersiei prin capetele de dinți;

λ_{f1} permeanța specifică a dispersiei în părțile frontale.

În cazul mașinilor de inducție cu întrefier mic (sub 1 mm) permeanța specifică λ_{z1} este inclusă în λ_{d1} [21]. În consecință, relația care se va utiliza în calcule este:

$$\sum \lambda_1 = \lambda_{c1} + \lambda_{d1} + \lambda_{f1} \quad (3.41)$$

Reactanța de dispersie pe fază a înfășurării statorice este afectată de saturația miezului feromagnetic. Ea se calculează cu relația:

$$X_{\sigma 1} = \omega_1 \cdot L_{\sigma 1} = 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot 2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N_1^2}{p \cdot q_1} \cdot l \cdot (\lambda_{c1}^* + \lambda_{d1}^* + \lambda_{f1}) \quad (3.42)$$

Mărimile notate cu asterisc (*) sunt afectate de saturație. Ele se determină pe cale analitică sau prin metode numerice.

3.3.1.2. Reactanța de dispersie a înfășurării rotorice

Pentru mașinile de inducție cu rotorul în scurtcircuit reactanța rotorică de dispersie se calculează ținând cont că:

$$N_2 = \frac{1}{2}; \quad m_2 = N_{c2}; \quad pq_2 = \frac{1}{2} \quad (3.43)$$

unde indicele 2 se referă la rotor, m_2 reprezintă numărul de faze, iar N_{c2} numărul de creștături din rotor.

Rezultă reactanța rotorică de dispersie pe fază:

$$X_{\sigma 2} = \omega_1 L_{\sigma 2} = 2\pi \cdot f_1 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot \sum \lambda_2 \quad (3.44)$$

Permeanța specifică rotorică λ_2 are aceleași componente ca și cea statorică. Este la rândul ei afectată de saturația magnetică, mărimile respective fiind notate cu asterisc (*).

Având în vedere că se studiază parametrii electrici ai motoarelor de inducție cu rotor în scurtcircuit, pentru mărimile rotorice sunt valabile relațiile (3.33). Cu acestea, reactanța de dispersie rotorică are expresia:

$$X_{\sigma 2} = \omega_1 \cdot L_{\sigma 2} = 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot (k_x \cdot \lambda_{c2}^* + \lambda_{d2}^* + \lambda_{f2}) \quad (3.45)$$

unde k_x este factorul de modificare a reactanței rotorice datorită efectului pelicular.

Ca și în cazul factorului de majorare a rezistenței barei rotorice și k_x se calculează diferit, în funcție de forma geometrică a barei rotorice.

- În cazul în care bara rotorică este dreptunghiulară, k_x se calculează, conform [21], cu relația:

$$k_x = \frac{3}{2w} \cdot \frac{\text{sh}2w - \sin 2w}{\text{ch}2w - \cos 2w} \quad (3.46)$$

în care w se determină cu relația (3.16).

- Dacă bara rotorică este trapezoidală, atunci se pot utiliza funcțiile cilindrice Bessel de ordinul întâi și doi, din anexa 1, pentru calculul factorului k_x .

Relația de calcul în cazul barei tip "pană" este:

$$k_x = \frac{2}{w} \cdot \frac{(1-v)^3(1+v)^2}{(1-3v^2) \cdot (1-v^2) - 4v^4 \ln v} \cdot \frac{A \cdot (C+D) - B \cdot (C-D)}{C^2 + D^2} \quad (3.47)$$

în care v este dat de relația (3.18), A de (3.21), B de (3.23), C de (3.25) și D de (3.26).

În cazul barei tip "trapez", k_x se calculează cu:

$$k_x = \frac{2}{v \cdot w} \cdot \frac{(1-v)^3(1+v)^2}{(v^2-3) \cdot (1-v^2) - 4 \ln v} \cdot \frac{A' \cdot (C+D) - B' \cdot (C-D)}{C^2 + D^2} \tag{3.48}$$

în care A' este dat de relația (3.22), iar B' de relația (3.24).

Relațiile de calcul (3.47) și (3.48), care utilizează funcții Bessel, conduc la un timp mare de calcul al factorului k_x .

Se poate utiliza o relație mai simplă pentru calculul factorului k_x :

$$k_x = F(v) \cdot \frac{3}{2w} \cdot \frac{\text{sh}2w - \sin 2w}{\text{ch}2w - \cos 2w} - (F(v) - 1) \tag{3.49}$$

în care F este o funcție de raportul v :

a) dacă $\frac{1}{3} < v < 1$, deci pentru bară tip "pană":

$$F(v) = -0,203 \cdot v^2 + 0,345 \cdot v + 0,858 \tag{3.50}$$

b) dacă $1 < v < 3$, deci pentru bară tip "trapez":

$$F(v) = 0,005 \cdot v^2 - 0,055 \cdot v + 1,05 \tag{3.51}$$

Se obține astfel variația factorului k_x în funcție de w la diferite valori ale parametrului v , prezentată în figura 3.4.a) pentru bara tip "pană", respectiv, în figura 3.4.b) pentru bara tip "trapez".

Pentru determinarea caracteristicilor mașinii de inducție se utilizează reactanța de dispersie rotorică raportată la stator:

$$X'_{\sigma 2} = k_t^2 \cdot X_{\sigma 2} \tag{3.52}$$

factorul de raportare k_t fiind cel dat de relația (3.32).

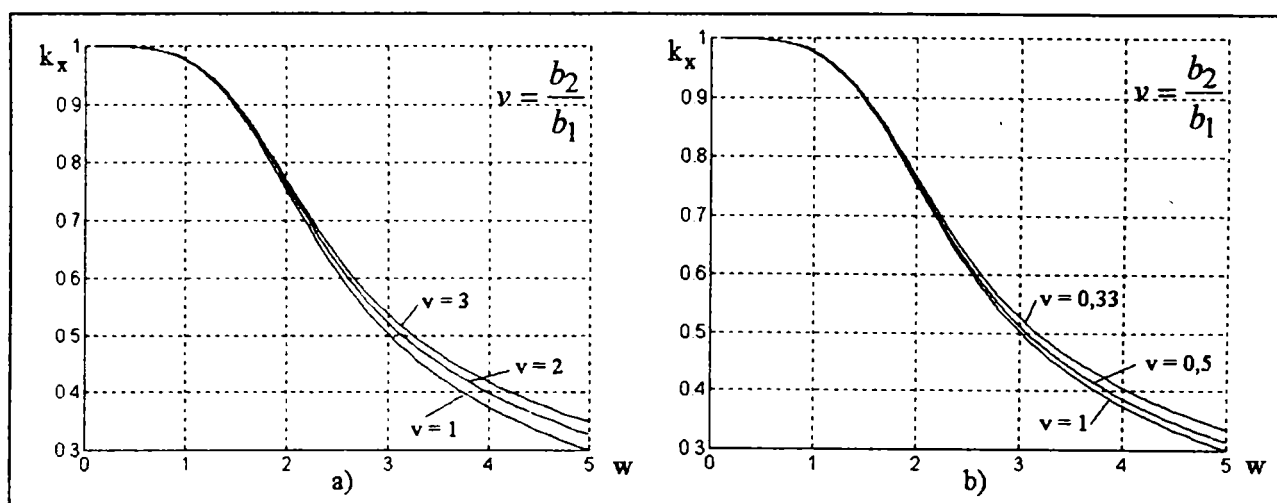


Fig.3.4. Variația factorului de modificare a reactanței rotorice, k_x , funcție de w din relația (3.16), având ca parametru pe v din (3.18)
 a) pentru bara tip "pană";
 b) pentru bara tip "trapez".

3.3.1.3. Permeanța specifică de dispersie a creștăturii

Valoarea nesaturată a acestei permeanțe se determină pe baza energiei magnetice de dispersie în creștătură:

$$W_{m\sigma c} = \frac{1}{2} L_{\sigma c} i^2 \quad (3.53)$$

unde $L_{\sigma c}$ este inductanța de dispersie în creștătură.

Pe de altă parte aceeași energie magnetică poate fi calculată cu:

$$W_{m\sigma c} = \frac{1}{2} \int_v BH dv = \frac{1}{2} \mu_0 \int_v H^2 dv \quad (3.54)$$

considerând în creștătură permeabilitatea magnetică $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$.

Inductanța de dispersie a creștăturii este:

$$L_{\sigma c} = \mu_0 \cdot n_c^2 \cdot l \cdot \lambda_c \quad (3.55)$$

cu n_c conductoare în creștătură înseriate, parcurse de curentul i :

$$n_c = \frac{N_1}{pq} \quad (3.56)$$

Având în vedere că o fază ocupă un număr de creștături egal cu:

$$\frac{N_c}{m} = 2pq \quad (3.57)$$

rezultă inductanța de dispersie a creștăturii pe o fază:

$$L_{\sigma c} = 2\mu_0 \cdot p \cdot q \cdot n_c^2 \cdot l \cdot \lambda_c = 2\mu_0 \cdot \frac{N_1^2}{p \cdot q} \cdot l \cdot \lambda_c \quad (3.58)$$

Permeanțele specifice de dispersie pentru creștăturile studiate în această lucrare, având următoarele forme geometrice, sunt:

a) creștătură dreptunghiulară cu n_c conductoare înseriate străbătute de curentul i , din figura 3.5.a); se aplică legea circuitului magnetic:

$$H(y) \cdot b = n_c \cdot i \cdot \frac{y}{h} \quad (3.59)$$

$$W_{m\sigma c} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot l \cdot b \cdot \int_0^h H^2(y) dy = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot l \cdot (n_c \cdot i)^2 \cdot \frac{h}{3b} \quad (3.60)$$

$$\lambda = \frac{h}{3b} \quad (3.61)$$

b) creștătură dreptunghiulară cu sursă exterioară, conform figurii 3.5.b):

$$H(y) \cdot a = n_c \cdot i \quad (3.62)$$

$$W_{m\sigma c} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot l \cdot a \cdot \int_0^h H^2(y) dy = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot l \cdot (n_c \cdot i)^2 \cdot \frac{h}{a} \quad (3.63)$$

$$\lambda = \frac{h}{a} \quad (3.64)$$

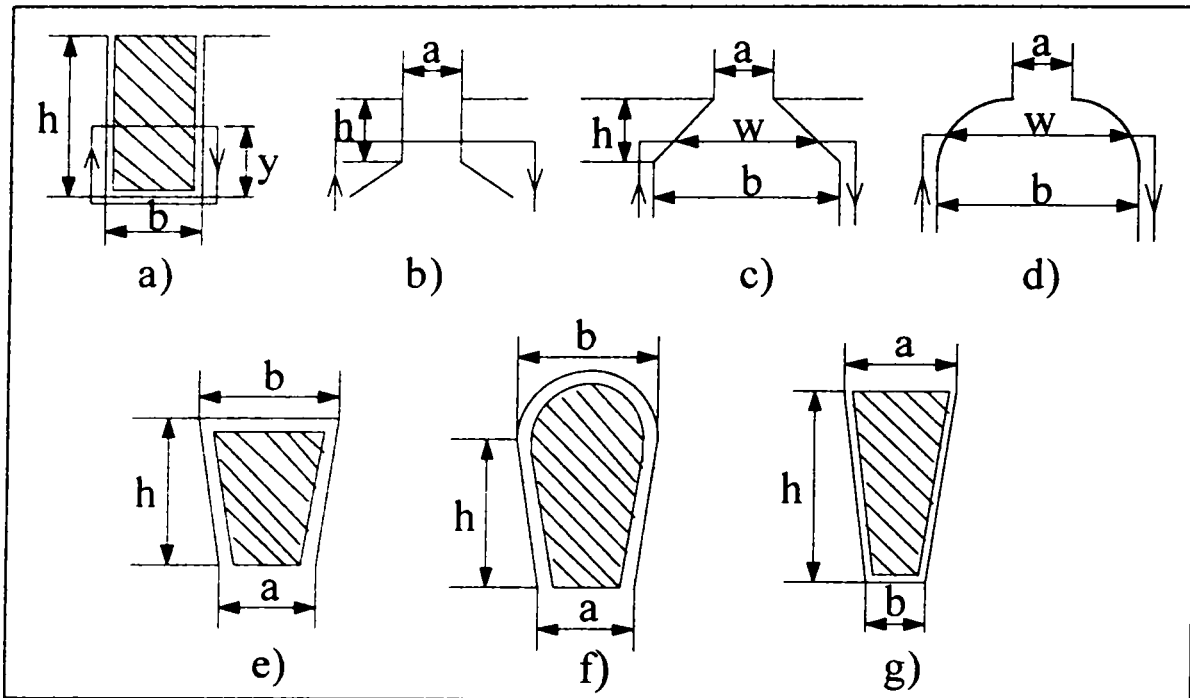


Fig.3.5. Determinarea permeanței specifice de dispersie pentru crestături cu diferite forme geometrice, utilizate la mașini de inducție

c) crestătură trapezoidală cu sursă exterioară (figura 3.5.c)); aplicând relația de definiție a permeanței magnetice a unei crestături [76], ca raport între fluxul magnetic și tensiunea magnetomotoare, se obține:

$$\Lambda = \frac{\Phi}{U_m} = \mu_0 \cdot l \cdot \lambda \tag{3.65}$$

$$w(y) = b + \frac{a-b}{h} \cdot y \tag{3.66}$$

$$\lambda = \int_0^h \frac{dy}{\frac{a-b}{h} \cdot y + b} = \frac{h}{a-b} \cdot \ln \frac{a}{b} \tag{3.67}$$

Pentru această geometrie, în literatură [21], [28], apar și următoarele relații aproximative, dar mai rapide, de calcul:

$$\lambda = \frac{3h}{b+2a} \quad \text{sau} \quad \lambda = \frac{2h}{b+a} \tag{3.68}$$

d) crestătură semicirculară cu sursă exterioară, conform figurii 3.5.d):

$$w(y) = 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \tag{3.69}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2}} = \frac{1}{2} \cdot \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \tag{3.70}$$

e) crestătură trapezoidală având conductoare înseriate parcurse de curent, conform figurii 3.5.e), [101]:

$$\lambda = \frac{h}{3 \cdot b_{ech}} \tag{3.71}$$

$$b_{ech} = a + (b - a) \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{(1 - c^2)^2}{(c^2 - 1) \cdot (3 - c^2) - 4b \cdot c} - \frac{c}{1 - c} \right], \text{ cu } c = \frac{a}{b} \tag{3.72}$$

f) crestătură având forma geometrică din figura 3.5.f), [101]:

$$\lambda = \frac{1}{[\pi + 4d(1 + c)]^2} \cdot \left\{ \frac{\pi^3}{12} - \frac{3\pi}{8} + 16d^3 \cdot \left[1 + \frac{1}{(1 - c)^3} \cdot \ln \frac{1}{c} - \frac{1}{(1 - c)^2} - \frac{1}{2(1 - c)} - \frac{1 - c}{4} \right] + \frac{\pi d}{1 - c} \cdot \left[\pi \cdot \ln \frac{1}{c} + \frac{8d}{1 - c} \cdot \ln \frac{1}{c} - 8d \right] \right\} \tag{3.73}$$

cu $c = \frac{a}{b}$ și $d = \frac{h}{b}$.

g) crestătură având forma trapezoidală din figura 3.5.g), [101]:

$$\lambda = \frac{h}{3 \cdot b_{ech}} \tag{3.74}$$

$$b_{ech} = a + (b - a) \cdot \left[\frac{1}{1 - c} - \frac{4}{3} \cdot \frac{(1 - c^2)^2}{(1 - c^2) \cdot (1 - 3c^2) - 4c^4 \cdot \ln c} \right] \tag{3.75}$$

cu $c = \frac{b}{a}$.

Se observă similitudinea între expresiile permeanțelor specifice determinate la a), e) și g). Conform [21], [28], pentru înclinări mici ale laturilor trapezului

$$\frac{\text{baza.mica}}{\text{baza.mare}} \geq 0,65 \tag{3.76}$$

se poate utiliza cu bună aproximație relația (3.61).

Formele geometrice mai complicate de crestături se pot discretiza în forme mai simple, prezentate anterior, pentru care se determină cu ușurință permeanța specifică.

Pe m_e se poate dispune în creșterea se obține însumând permeanțele determinate pentru fiecare zonă în parte. Pentru crestătura prezentată în figura 3.6, de exemplu, această permeanță, ținând cont de cele 4 zone, este:

$$\lambda_c = \frac{h_1}{3b_1} + \frac{h_2}{b_1} + \frac{h_3}{b_4 - b_1} \cdot \ln \frac{b_4}{b_1} + \frac{h_4}{b_4} \tag{3.77}$$

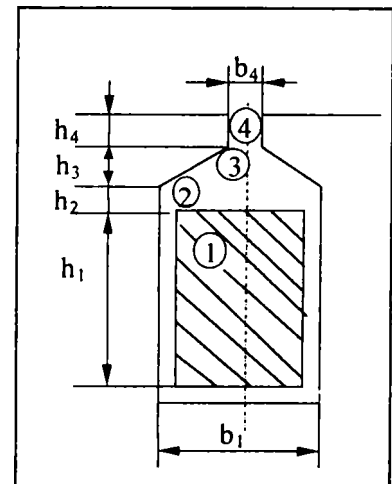


Fig.3.6. Crestătură dreptunghiulară

3.3.1.4. Permeanța specifică de dispersie diferențială

În funcție de factorul de însumare al armonicilor superioare:

$$\sum_v \left[\frac{k_{bv}}{v} \right]^2 \quad \text{pentru } v = 5, 7, 11, 13, \dots \quad (3.78)$$

permeanța specifică diferențială este dată de relația:

$$\lambda_d = \frac{mq}{\pi^2} \cdot \frac{\tau}{k_\delta \cdot \delta} \cdot k_{b1}^2 \cdot \sum_v \left[\frac{k_{bv}}{v \cdot k_{b1}} \right]^2 \quad (3.79)$$

unde m este numărul de faze, τ pasul polar, k_{b1} factorul total de înfășurare, δ întrefierul și k_δ factorul de întrefier (factorul lui Carter).

$$\text{Pentru o mașină de inducție trifazată } m = 3 \quad \text{și} \quad \tau_1 = 3q_1 \cdot \tau_{c1} \quad (3.80)$$

rezultă următoarea relație de calcul a permeanței specifice pentru înfășurarea statorului:

$$\lambda_{d1} = 0,912 \cdot \frac{\tau_{c1} \cdot (q_1 \cdot k_{b1})^2}{k_\delta \cdot \delta} \cdot \rho_{d1} \cdot k_{01} \cdot \sigma_{d1} \quad (3.81)$$

în care: τ_{c1} este pasul de crestătură statoric; ρ_{d1} coeficientul de amortizare a câmpului armonicilor superioare datorită reacției curenților din înfășurare; k_{01} un coeficient care depinde de deschiderea crestăturilor a_1 , de lățimea întrefierului și de pasul de crestătură:

$$k_{01} \approx 1 - 0,033 \cdot \frac{a_1^2}{\delta \cdot \tau_{c1}} \quad (3.82)$$

σ_{d1} este coeficientul dispersiei diferențiale al înfășurării statorului:

$$\sigma_{d1} = \sum_v \left[\frac{k_{bv}}{k_{b1}} \right]^2, \quad v = 5, 7, 11, 13, \dots \quad (3.83)$$

Cu ajutorul acestui coeficient se poate calcula reactanța de dispersie diferențială statorică $X_{\sigma d1}$, din reactanța utilă X_m :

$$X_{\sigma d1} = \sigma_{d1} \cdot X_m \quad (3.84)$$

$$\text{Pentru rotorul în scurtcircuit: } q_2 = \frac{N_{c2}}{6p}, \quad k_{b2} = 1, \quad \rho_{d2} \approx 1, \quad k_{02} \approx 1 \quad (3.85)$$

rezultă o relație mai simplă de calcul pentru permeanța specifică diferențială:

$$\lambda_{d2} = 0,912 \cdot \frac{\tau_{c2} \cdot q_2^2}{k_\delta \cdot \delta} \cdot \sigma_{d2} \quad (3.86)$$

unde τ_{c2} este pasul de crestătură rotoric.

3.3.1.5. Permeanța specifică de dispersie în părțile frontale

Liniile câmpului magnetic de dispersie în părțile frontale (a capetelor de bobină), au traiectorii spațiale complicate. De aceea calculul reactanțelor de dispersie în părțile frontale se face cu relații bazate pe rezultate experimentale.

Pentru înfășurarea statorică a mașinii de inducție sunt utilizate, conform [21], [28], [83], următoarele relații de calcul:

- pentru înfășurări într-un strat cu capetele de bobină în două etaje:

$$\lambda_{f1} = 0,67 \cdot \frac{q_1}{l} \cdot (l_{f1} - 0,64 \cdot \tau) \quad (3.87)$$

în care l_{f1} este lungimea medie a părții frontale a bobinei (figura 3.1).

- pentru înfășurări într-un strat cu capetele de bobină în trei etaje:

$$\lambda_{f1} = 0,47 \cdot \frac{q_1}{l} \cdot (l_{f1} - 0,64 \cdot \tau) \quad (3.88)$$

- pentru înfășurări în două straturi:

$$\lambda_{f1} = 0,34 \cdot \frac{q_1}{l} \cdot \left(l_{f1} - 0,64 \cdot \frac{y_1}{y_\tau} \cdot \tau \right) \quad (3.89)$$

în care y_1 este pasul înfășurării și y_τ pasul diametral.

Pentru rotorul în scurtcircuit este utilizată, conform [21], relația:

$$\lambda_{f2} = \frac{2,3 \cdot D_i}{N_{c2} \cdot l \cdot \left[2 \sin \frac{\pi \cdot p}{N_{c2}} \right]^2} \cdot \log \frac{4,7 \cdot D_i}{a_i + 2b_i} \quad (3.90)$$

unde D_i este diametrul mediu al inelului de scurtcircuitare, a_i și b_i sunt dimensiunile inelului, conform figurii 3.2.

3.3.2. Reactanța principală

Reactanța principală (de magnetizare) rezultă din fluxul util al mașinii de inducție. Inductanța principală are în acest caz, conform [28], expresia:

$$L_{11h} = \frac{\Psi_{11h}}{i} = \frac{\Psi_{11h}}{I\sqrt{2}} \quad (3.91)$$

Dacă se are în vedere numai armonica fundamentală, expresia fluxului magnetic este:

$$\Psi_{11h} = N_1 \cdot k_q \cdot k_y \cdot \Phi \quad (3.92)$$

unde k_q este factorul de zonă al înfășurării și k_y factorul de scurtare.

Fluxul polar are expresia:

$$\Phi = \frac{2}{\pi} \cdot B_\delta \cdot l \cdot \tau \quad (3.93)$$

iar inducția în întrefier:

$$B_\delta = \mu_0 \cdot \frac{\theta}{2p} \cdot \frac{1}{\delta''} \quad (3.94)$$

având întrefierul echivalent:

$$\delta'' = k_\delta \cdot k_s \cdot \delta \quad (3.95)$$

unde k_s este factorul de saturație.

Amplitudinea solenației pentru o fază este:

$$\theta = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot N_1 \cdot k_q \cdot k_y \cdot I \tag{3.96}$$

Rezultă inductanța principală:

$$L_{1lh} = \frac{4\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{(N_1 \cdot k_q \cdot k_y)^2}{p \cdot \delta''} \cdot l \cdot \tau \tag{3.97}$$

Pentru mașina de inducție trifazată se obține inductanța ciclică principală:

$$L_{1h} = \frac{3}{2} L_{1lh} = \frac{6 \cdot \mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{(N_1 \cdot k_q \cdot k_y)^2}{p \cdot \delta''} \cdot l \cdot \tau \tag{3.98}$$

Reactanța ciclică principală, denumită reactanță de magnetizare, este:

$$X_m = \omega_1 L_{1h} = \frac{12 \cdot \mu_0}{\pi} \cdot \frac{(N_1 \cdot k_q \cdot k_y)^2}{p \cdot \delta''} \cdot f_1 \cdot l \cdot \tau \tag{3.99}$$

Reactanța ciclică principală (reactanța de magnetizare) se poate calcula și cu ajutorul schemei electrice echivalente a mașinii de inducție din figura 3.7. Rezultă expresia:

$$X_m = \sqrt{\left(\frac{U_1}{I_0}\right)^2 - (R_1 + R_m)^2 - X_{\sigma 1}} \tag{3.100}$$

în care U_1 este tensiunea de alimentare de fază și I_0 curentul de magnetizare. Reactanța de dispersie statorică, $X_{\sigma 1}$, care intervine în formula de mai sus, este calculată cu relația (3.42). În acest caz saturația magnetică este luată în considerare prin curentul I_0 și reactanța $X_{\sigma 1}$.

Constanta complexă \underline{C}_1 din figura 3.7 este:

$$\underline{C}_1 = 1 + \frac{R_1 + jX_{\sigma 1}}{R_m + jX_m} \tag{3.101}$$

Relația (3.100) este mai rapidă și mai precisă decât relația (3.99), atunci când se pot determina parametrii electrice R_1 , R_m și $X_{\sigma 1}$.

3.4. Concluzii

Parametrii electrice ai mașinii de inducție sunt mărimi neliniare. Creșterea temperaturii în timpul funcționării, majorează rezistențele de fază.

La pornire și la viteze de rotație reduse trebuie considerat efectul pelicular, care majorează rezistența barei rotorice și micșorează reactanța de dispersie a crestăturii.

Calculul permeanței specifice de dispersie a crestăturii depinde în principal de forma geometrică a crestăturii.

Reactanța ciclică principală variază direct proporțional cu pătratul numărului de spire pe fază, variază liniar cu frecvența tensiunii de alimentare și cu dimensiunile geometrice ale pachetului și variază invers proporțional cu factorul de saturație.

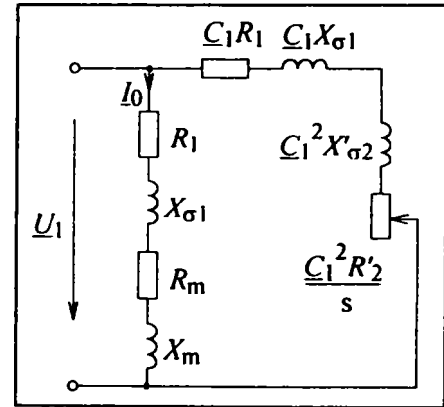


Fig.3.7. Schemă electrică echivalentă

4. INFLUENȚA SATURAȚIEI ASUPRA PARAMETRILOR ELECTRICI LA MAȘINA DE INDUCȚIE

4.1. Saturația magnetică la mașina de inducție

Pasul hotărâtor în proiectarea cu costuri minime a unei mașini electrice îl constituie în primul rând calculul, cu o anumită precizie, a solicitărilor magnetice ale circuitului feromagnetic.

Metodele clasice se bazează pe rezolvări aproximative, cu mulți factori de corecție, care sunt valabili pentru o situație concretă, într-un anumit domeniu.

Utilizate de peste 20 de ani calculatoarele numerice își dovedesc de abea astăzi avantajele în rezolvarea într-un timp util, cu ajutorul metodelor numerice sau a modelării și simulării, a problemelor ridicate de câmpul electromagnetic.

Materialele feromagnetice ocupă un loc esențial în construcția și funcționarea mașinilor electrice, deoarece prin intermediul lor, cu un curent mic, se poate obține un câmp magnetic suficient de mare. Proprietățile acestor materiale condiționează performanțele mașinilor. Forma neliniară a caracteristicii de magnetizare, a materialelor utilizate în construcția miezului feromagnetic, conduce la atingerea frecventă a stării de saturație, caracterizată prin limitarea fluxului produs. Saturația este un fenomen nedorit, însoțit de armonici superioare și pierderi suplimentare în fier.

Saturația magnetică este starea atinsă de un sistem fizic în care inducția magnetică a atins o valoare maximă [105]. Saturația unui convertor electromecanic variază cu tensiunea, frecvența și încărcarea, modificând caracteristicile de ieșire ale mașinii.

La majoritatea mașinilor de inducție punctul de funcționare este situat pe ramura neliniară a caracteristicii de magnetizare. Energia electromagnetică este înmagazinată, în cea mai mare măsură, în întrefierul dintre stator și rotor. Întrefierul, mic ca volum, poate concentra puteri foarte mari. Densitatea de putere la mașina de inducție poate atinge valoarea $0,5 \text{ W/mm}^3$ [47].

Dacă se ține cont de proprietățile neliniare ale fierului, toate ipotezele referitoare la mașina nesaturată își pierd valabilitatea. Ecuațiile liniare și schemele echivalente corespunzătoare oferă asemenea avantaje, la efectuarea studiilor și calculelor, încât este de dorit să fie păstrate, corectând după caz valorile parametrilor electrice (reactanțelor).

La funcționarea în gol, prin bobinele statorice trec doar curenții de magnetizare. Fundamentalsola solenației produce un câmp care, datorită saturației diferite a fierului în lungul căilor de integrare, nu mai este sinusoidal ci deformat. Pentru o cale de integrare care trece prin maximul inducției din întrefier, B_{\max} , se obține o cădere de tensiune magnetică care trebuie acoperită de fundamentalsola solenației. Amplitudinea fundamentalei inducției nu mai este în acest caz B_{\max} ci crește datorită deformării câmpului:

$$\hat{B}_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{B_{\max}}{\alpha} \quad (4.1)$$

unde \hat{B}_1 este amplitudinea câmpului magnetic, iar α factorul de deformare ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ la mașini nesaturate).

La sarcină nominală se poate aprecia că starea de saturație nu s-a modificat față de funcționarea în gol. Curenții nu sunt prea mari, deci reactanțele de dispersie nu sunt saturate. Reactanța principală se consideră cea de la mersul în gol.

La scurtcircuit câmpul din întrefier este mic. Reactanța principală nu are o mare influență asupra funcționării mașinii. În acest caz curenții sunt mari, deci se va considera influența saturației prin intermediul câmpurilor de dispersie [68]. Dintre fluxurile de dispersie doar cel al capetelor de bobină se formează în aer, celelalte fiind parțial în aer, parțial în fier.

La curenți mari, în dinții statorici și rotorici intervine saturația, care micșorează fluxul de dispersie, respectiv, reactanțele de dispersie.

Fluxul transversal al creștăturii se închide prin dinții care delimitează fiecare fază. În figura 4.1 se prezintă această situație la două momente diferite:

- Figura 4.1.a) corespunde momentului în care curentul unei faze are valoarea maximă. În acest caz există un dinte pe fază în lungul căruia se închide tot fluxul transversal al creștăturii φ_t și doi dinți în lungul cărora se închide jumătate din valoarea acestui flux.

- Figura 4.1.b) prezintă momentul în care curentul unei faze este nul. În acest caz doi dinți sunt străbătuți de fluxul de valoare $\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_t$

Prin dinții considerați se închide pe lângă fluxul transversal al creștăturii și fluxul principal. Din cauza dependenței neliniare dintre fluxul magnetic și curent, este foarte greu să se definească o formulă simplă

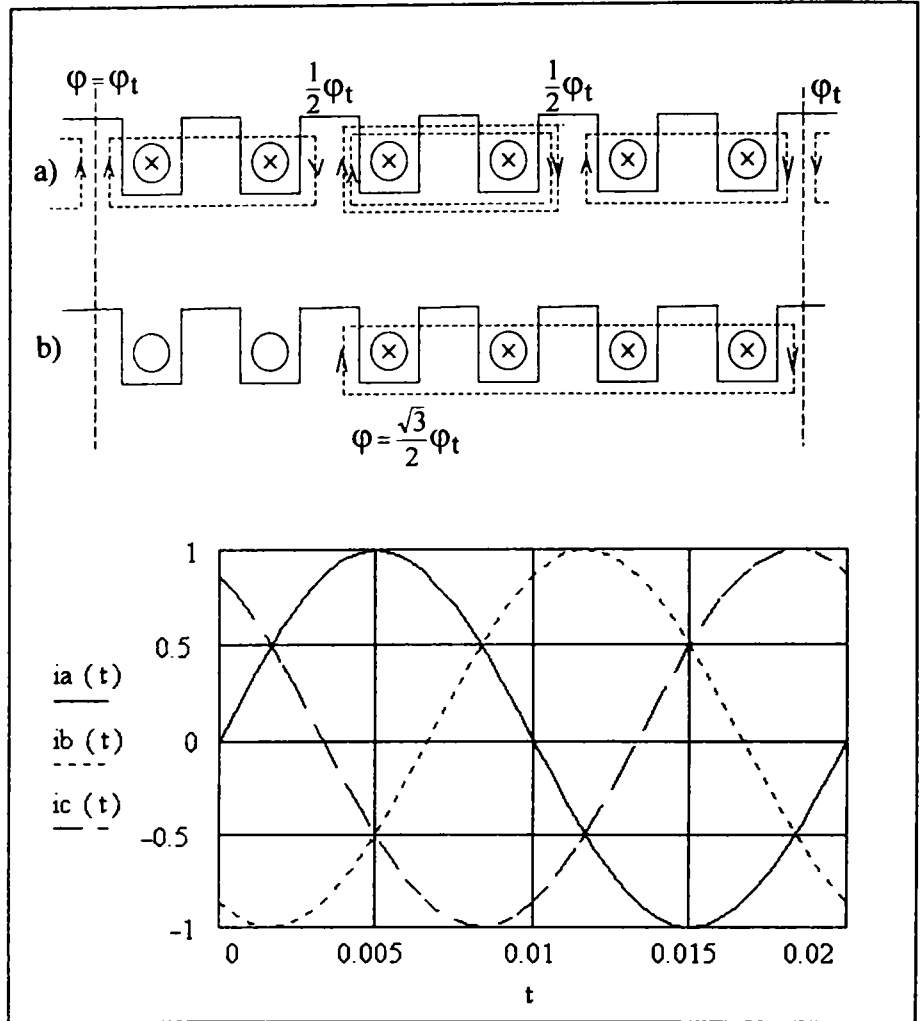


Fig.4.1. Acțiunea fluxului de dispersie asupra dinților mașinii:
a) când curentul unei faze trece prin maxim ($t = 0,005s$);
b) când curentul unei faze este nul ($t = 0$).

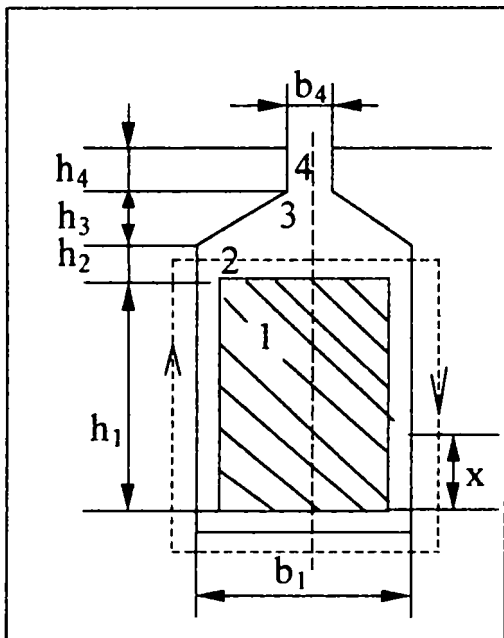


Fig.4.2. Crestătura și zonele ei semnificative (1,2,3,4)

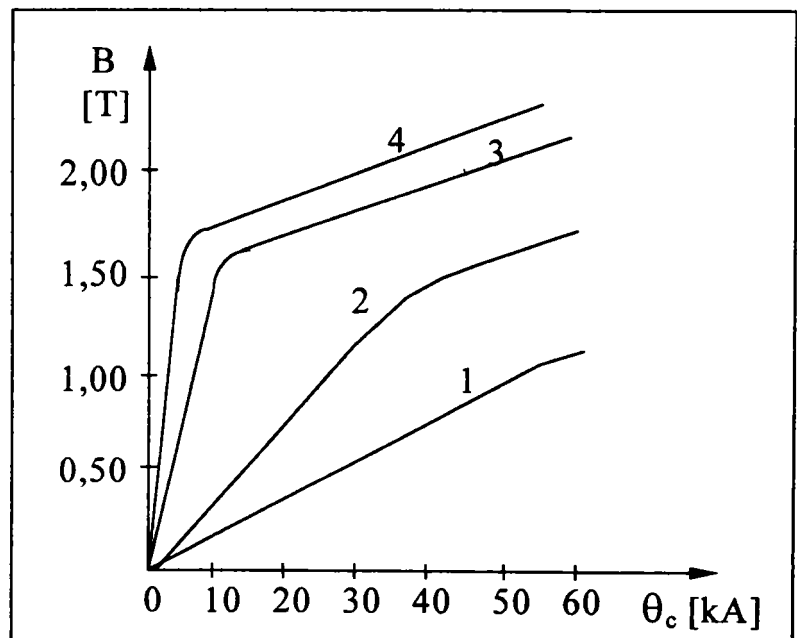


Fig.4.3. Caracteristicile câmpului transversal în zonele 1,2,3,4 din creștătură

pentru calculul reactanței de dispersie, considerând în același timp saturația fierului.

În figura 4.1.b) se face o mare aproximare. Dacă cei doi dinți considerați se saturează complet la de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ori valoarea fluxului de dispersie din crestătură, atunci ei descarcă dinții învecinați [87].

Richter consideră în alt mod influența saturației [83]. El calculează caracteristica magnetică a câmpului transversal din crestătură, pentru diferite zone ale crestăturii. Importante sunt considerate doar zonele situate deasupra conductoarelor din crestătură, respectiv, zonele 2, 3 și 4 din figura 4.2.

Inducția magnetică transversală, la permeabilitate $\mu \rightarrow \infty$, este:

$$B_t = \mu_0 \frac{\theta_c}{b} \quad (4.2)$$

în care θ_c este solenația crestăturii, iar b traiectoria prin aer.

La saturație se pornește de la inducția B_t , se determină tensiunea magnetică pentru traiectoriile în aer și în fier și se reprezintă această tensiune în funcție de solenația crestăturii. Caracteristicile câmpului transversal sunt prezentate în figura 4.3 pentru fiecare zonă a crestăturii din figura 4.2. Solenația crestăturii este obținută prin micșorarea permeanțelor din zonele 2,3 și 4 cu raportul dintre tangenta unghiului în punctul de funcționare considerat și tangenta unghiului în punctul zero. Metoda utilizează multe simplificări, cum ar fi

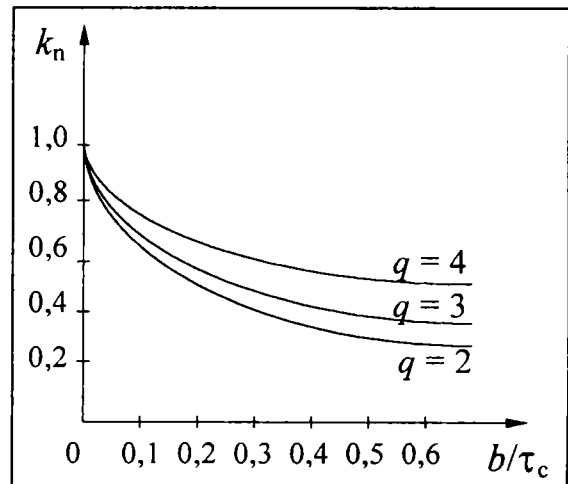


Fig.4.4. Variația factorului de micșorare a dispersiei în întrefier, k_n

neglijarea saturației dinților pe direcția longitudinală sau modificarea formei fluxului în timp.

Reactanța de dispersie a întrefierului este puternic dependentă de saturație, dependență care este foarte complicată. Armonicile superioare sunt micșorate parțial prin saturația dinților, parțial prin mărirea fictivă a lățimii crestăturii, datorită saturației capetelor de dinți. Micșorarea reactanței de dispersie a întrefierului prin saturația capetelor de dinți nu se poate nici ea ușor calcula. Efectul saturației poate fi considerat în acest caz prin mărirea lățimii crestăturii, cu ajutorul factorului k_n prezentat în figura 4.4. Acest factor este reprezentat în funcție de raportul b/τ_c (b este deschiderea crestăturii, iar τ_c pasul de crestătură).

În lipsa saturației $\frac{b}{\tau_c} \approx 0,15$, iar la saturarea capetelor de dinți $\frac{b}{\tau_c} \approx 0,45$.

În realitate aceste vârfuri nu se saturează complet. Saturația provoacă în celelalte părți ale dinților o diminuare a armonicilor superioare.

În consecință, se poate considera că dispersia întrefierului scade de aproximativ 0,5 ori datorită saturației miezului feromagnetic.

Bitter a stabilit, pe baza unui număr mare de măsurători efectuate pe mașini de inducție, următoarele diminuări ale reactanțelor de dispersie, în cazul conectării directe la rețea, la un curent $I = (4...6)I_n$:

- pentru dispersia crestăturii și a capetelor de bobină - de 0,9 ori;
- pentru dispersia întrefierului - de 0,5 ori.

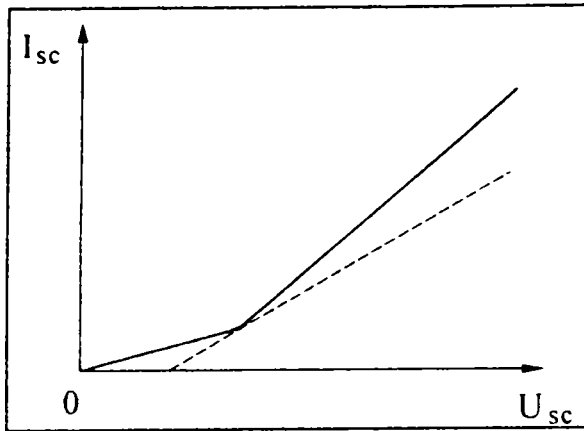


Fig.4.5. Caracteristica de scurtcircuit a mașinii de inducție

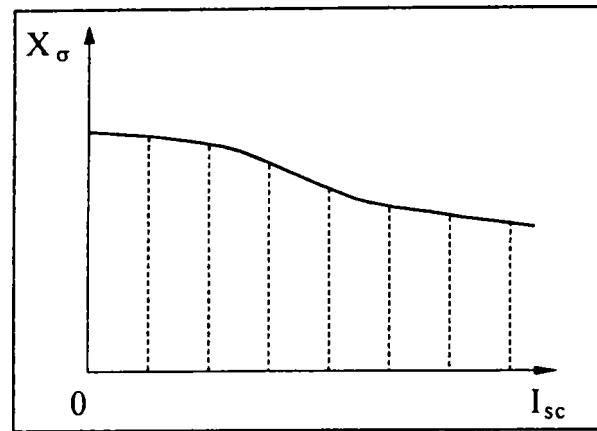


Fig.4.6. Dependența reactanței de dispersie de curent

La mașinile cu turație mare, la cele bipolare în special, dispersia capetelor de bobină este preponderentă în reactanța de dispersie. Dependența reactanței de curent este aici mai puțin sesizabilă.

La mașini cu turație mai mică, reactanța de dispersie constă, în principal, din reactanța de dispersie a creștăturii și a întrefierului. Din acest motiv, în acest caz se observă o dependență pronunțată a reactanței de curent.

Dependența reactanței totale de curent se stabilește prin încercarea la scurtcircuit a mașinii de inducție, la diferite tensiuni.

Caracteristica de scurtcircuit, prezentată în figura 4.5, este la început o dreaptă, ceea ce corespunde unei valori constante a reactanței. La creșterea curentului, caracteristica își modifică traiectoria. Rezultă că, dependența reactanței de curent nu se poate defini pe tot domeniul printr-o funcție simplă, liniară. Pentru domeniile extreme (la limită), la valoarea minimă, respectiv, maximă a curentului, reactanța poate avea expresii mai simple.

Pentru domeniul situat sub curentul nominal se acceptă o valoare constantă pentru reactanță, fără a lua saturația în considerare. În domeniul curentilor mari se utilizează tot o valoare constantă pentru reactanță, dar mai mică decât în cazul anterior. La conectare directă, micșorarea reactanței față de valoarea nesaturată este de 20% până la 50%, în unele cazuri chiar mai mult. La conectarea stea - triunghi, la curenti de 1,5 până la de 2 ori curentul nominal, micșorarea reactanței este de 10% până la 15%.

În figura 4.6 este prezentată variația reactanței de dispersie rezultată din considerentele anterioare.

Dacă se dorește să se obțină o dependență monotonă a reactanței de dispersie în funcție de curent, în domeniul valorilor mari ale curentului, se poate înlocui caracteristica de scurtcircuit printr-o dreaptă de forma:

$$U_{sc} = U_0 + X'_\sigma \cdot I \quad (4.3)$$

Considerarea fenomenului de saturație magnetică este posibilă numai prin metode numerice de rezolvare a problemelor de câmp sau prin aproximații analitice verificate pe modele. Sunt căutate soluții puțin costisitoare care se obțin în timp de calcul redus, cu posibilități de aplicare în simularea funcționării mașinii electrice.

Numai la curenti care depășesc de două ori valoarea curentului nominal se consideră că inductanța de dispersie este influențată de saturația căilor fluxului principal [6].

Magnetizarea miezurilor stator și rotor este în curent alternativ, dar la frecvențe diferite. În figura 4.7 se prezintă magnetizarea miezurilor stator și rotor la variații mici sinusoidale, față de un punct de funcționare permanent. Punctul de funcționare se deplasează pe vârfurile ciclurilor de histerezis, de la A la A' și înapoi.

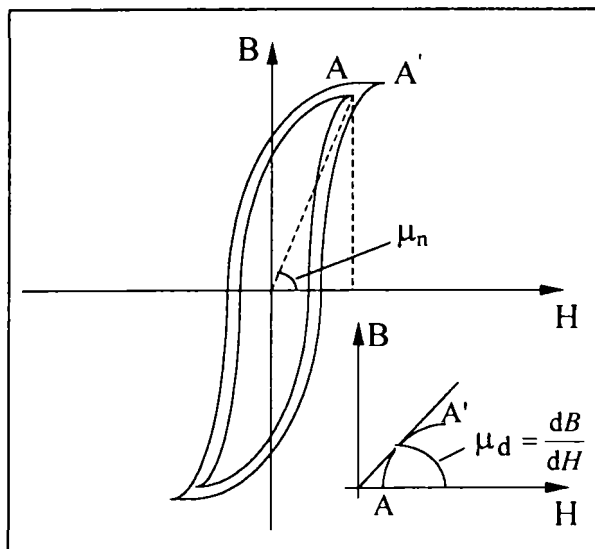


Fig.4.7. Magnetizarea miezului feromagnetic la perturbații mici

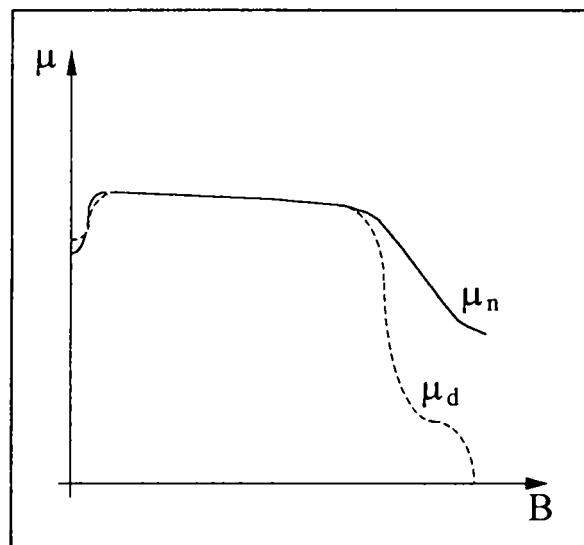


Fig.4.8. Permeabilitățile magnetice μ_n și μ_d la mașina de inducție

În regim permanent se consideră permeabilitatea magnetică normală μ_n determinată de extremitatea ciclului de histerezis (figura 4.7). La perturbații mari, se consideră că punctul de funcționare se deplasează pe curba medie de magnetizare. Permeabilitatea magnetică ce corespunde pantei curbei medii de magnetizare se numește permeabilitate magnetică diferențială μ_d . În figura 4.8 se observă că la niveluri ridicate ale saturației valorile permeabilității magnetice diferențiale scad față de cele ale permeabilității normale [6].

Când apare saturația în căile fluxului principal al mașinii de inducție, apare și armonica de ordinul trei a tensiunii, în fiecare fază statorică. Această armonică este în fază cu tensiunea fazei statorice și de aceea este prezentă în suma tensiunilor trifazate [97].

Armonica de ordinul trei a fluxului apare în mod natural atunci când armonica de ordinul trei a tensiunii, generată de armonica de ordinul trei a fluxului, nu poate produce o armonică de ordinul trei a unui curent care să se închidă prin înfășurări. Când prin înfășurări se pot închide armonici de ordinul trei ale curentului, atunci armonica de ordinul trei a fluxului nu poate să apară. De remarcat, că amplitudinea armonicii de ordinul trei a tensiunii din fiecare fază statorică este mai mică decât amplitudinea fundamentalei din faza respectivă, dar armonica de tensiune a dinților este de asemenea mică și de aceea armonica tensiunii de fază nu poate fi neglijată, chiar dacă motorul funcționează alimentat la tensiunea nominală.

4.2. Efectele saturației magnetice

Fenomenului de saturație magnetică trebuie să i se acorde o atenție deosebită, având în vedere cel puțin efectele acesteia asupra fluxului principal din întrefier.

Saturația circuitului magnetic, prin caracterul său neliniar, produce armonici în fluxul principal. Cunoscând cu o precizie mai bună inducția în întrefier, se pot determina caracteristicile mașinii electrice mult mai apropiate de realitate.

Tendința actuală este de a crește valoarea inducției magnetice în mașina de inducție, posibilă datorită îmbunătățirii calității materialelor (tole, izolații). O inducție mai mare are ca rezultat o saturare pronunțată a circuitului magnetic, respectiv, o creștere a ponderii armonicii de ordinul trei în căile fluxului magnetic. Acest efect are ca rezultat creșterea pierderilor în mașina electrică, cu efecte negative asupra randamentului și parametrilor mașinii.

La mașina de inducție conectată în stea, armonica de ordinul trei a fluxului atinge 18% din fundamentală în condiții de saturație la funcționarea în gol și 11% din fundamentală la funcționarea la sarcină nominală [42].

Mașina fiind conectată în stea, nu va avea armonici în secvența omopolară a curentului.

În figura 4.9 este prezentat un curent sinusoidal, I , care corespunde unei inducții cu repartiție nesinusoidală, $B(\theta)$, din cauza armonicilor prezente în flux. Printre acestea armonica fluxului de ordinul trei este dominantă.

Principiul modulației unei inducții magnetice cu armonica de ordinul trei este aplicabilă la toate secțiunile mașinii, dinți, juguri, întrefier.

În figura 4.10 este prezentat sumar acest principiu. Coordonata orizontală θ este poziția momentană a rotorului. Când distribuția este sinusoidală forma de undă a inducției, $B(\theta)$, este cea din figura 4.10.a). În cazul în care apare armonica de ordinul trei, cu un defazaj de 0° față de fundamentală, unda rezultantă $B(\theta)$, este aplatizată, având forma prezentată în figura 4.10.b). În figura 4.10.c), unda rezultantă este ascuțită, defazajul dintre armonica de ordinul trei și fundamentală fiind de 180° .

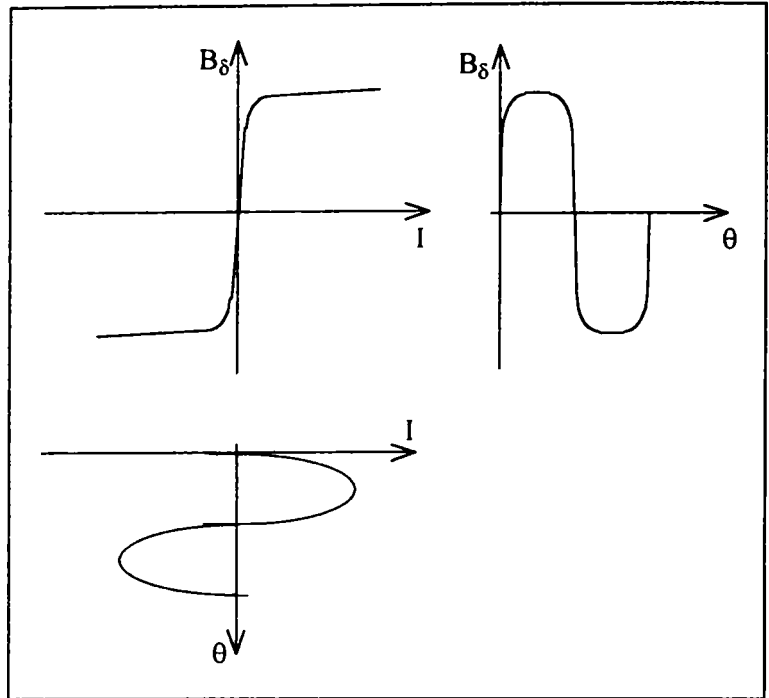
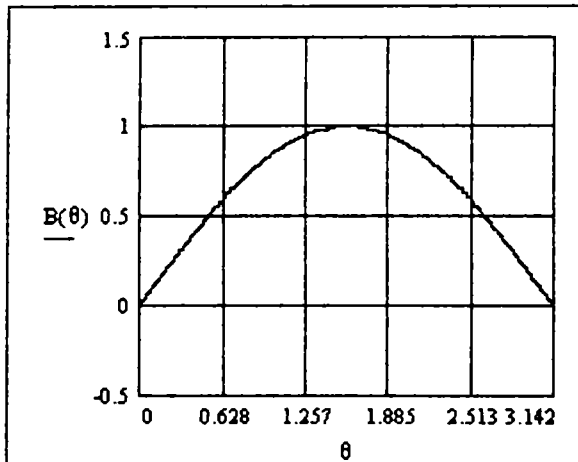
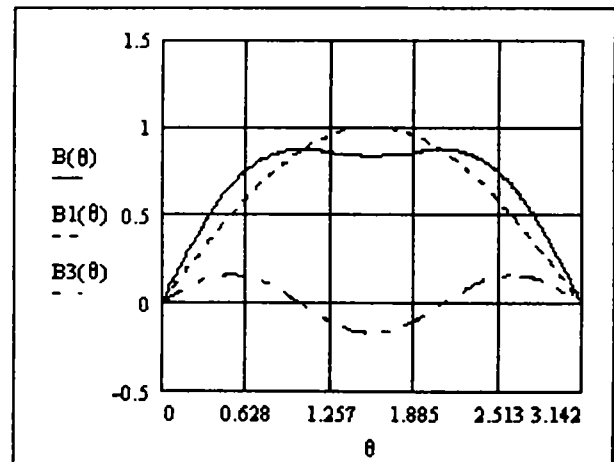


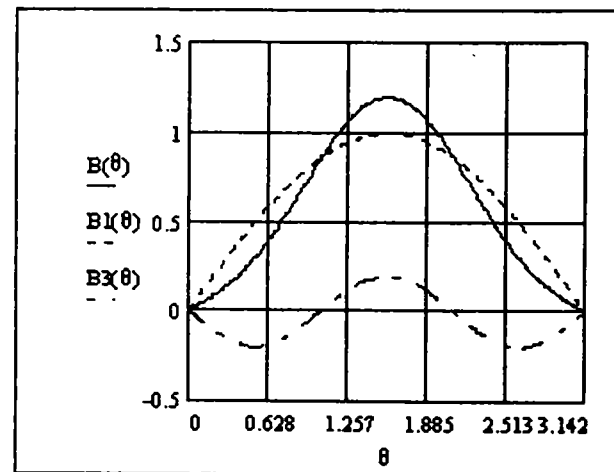
Fig.4.9. Curent de excitație distribuit sinusoidal care corespunde unei inducții nesinusoidale



a)



b)



c)

Fig.4.10. Modulația unei inducții magnetice

- a) distribuție sinusoidală a inducției $B(\theta)$;
- b) formă aplatizată a inducției $B(\theta)$;
- c) formă ascuțită a inducției $B(\theta)$;

$B_1(\theta)$ - unda fundamentală (linie întreruptă);
 $B_3(\theta)$ - armonica de ordinul trei (linie punctată).

Într-un motor de inducție, distribuția inducției magnetice în jug se obține integrând inducția magnetică în dinți. În figura 4.11 se observă defazajul de 90° dintre cele două unde.

Dacă distribuția inducției la baza dinților este o relație în cosinus:

$$B_{dint}(\theta) = A_1 \cdot \cos(\theta - \omega t) + A_3 \cdot \cos(3\theta - 3\omega t) \quad (4.1)$$

atunci inducția în jug este o funcție de sinus, obținută prin integrarea relației de mai sus:

$$B_{jug}(\theta) = C \int_0^\theta B_{dint}(\theta) \cdot \frac{Dc}{2} d\theta = C \cdot \frac{Dc}{2} \cdot \left[A_1 \cdot \sin(\theta - \omega t) + \frac{A_3}{3} \cdot \sin(3\theta - 3\omega t) \right] \quad (4.2)$$

unde: $C = \frac{b_{z3}}{\tau_{c3} \cdot h_j}$ cu b_{z3} lățimea dinților la bază, τ_{c3} pasul de crestătură la baza dinților,

h_j înălțimea jugului;

Dc diametrul la baza dinților;

A_1 amplitudinea fundamentalei inducției la baza dinților;

A_3 amplitudinea armonicii de ordinul trei a inducției la baza dinților.

Cât timp A_1 este pozitiv, A_3 poate fi pozitiv sau negativ, depinzând de forma inducției. Dacă A_3 este pozitiv atunci forma de undă a inducției în jug este aplatizată, iar când A_3 este negativ forma de undă a inducției este ascuțită.

Dacă se neglijează fluxul de dispersie al crestăturii, distribuția inducției în întrefier este identică cu distribuția inducției în dinte.

În funcție de locul în care apare saturația, se pot distinge două cazuri distincte[67]:

1. Când saturația apare în dinții statorici și rotorici, rezultanta inducției în întrefier produce o undă aplatizată (figura 4.10.b). Rezultanta inducției în întrefier are un conținut de armonici impare, multiplu de trei. Dezvoltarea în serie Fourier a inducției din întrefier indică faptul că armonica de ordinul trei este dominantă. Saturația căilor din dinți poate fi în consecință modelată prin superpoziția armonicii de ordinul trei la fundamentala inducției din întrefier. Armonica de ordinul trei a inducției străbate întrefierul cu aceeași turație de sincronism și în aceeași direcție cu fundamentala inducției.
2. Când saturația apare în jugul statoric și rotorice, producând de asemenea armonici ale inducției în întrefier, forma inducției în jug este cea a unui sinus aplatizat, în timp ce în întrefier are o formă ascuțită (figura 4.10.c). Această formă se explică prin faptul că inducția în întrefier este proporțională cu derivata de spațiu a inducției din jug. Armonica de ordinul trei este dominantă și în acest caz.

Saturația dinților statorici și rotorici este mai des întâlnită decât cea a jugurilor, unde volumul de miez magnetic este mult mai mare. Din acest motiv, în prezenta lucrare se consideră doar saturația dinților.

Prezența armonicii de ordinul trei este o condiție suficientă dar nu necesară pentru apariția fenomenului de saturație. Cele două cazuri de saturație expuse anterior au un efect opus, atâta timp cât se semnalează prezența armonicii de ordinul trei.

O mașină puternic saturată nu are neapărat un conținut ridicat de armonici de ordinul trei.

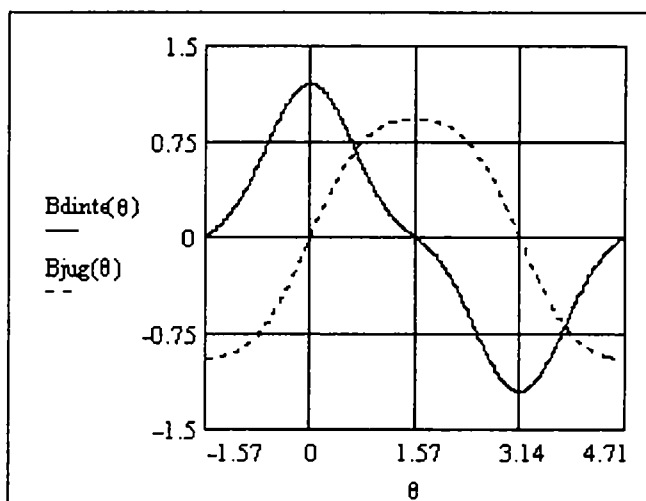


Fig.4.11. Distribuția inducției magnetice în dinte și jug

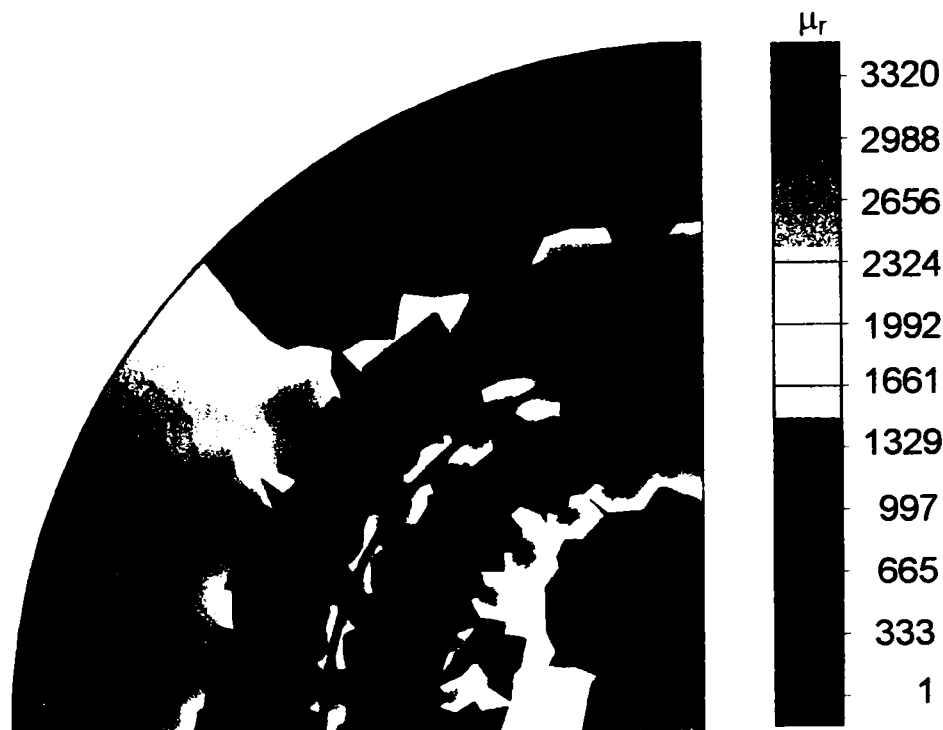


Fig.4.12. Secțiune transversală printr-o mașină cu doi poli;
permeabilitatea magnetică la funcționarea mașinii la putere nominală

Armonica de ordinul trei a inducției din întrefier înlănțuie înfășurarea statorică producând în fiecare fază secvența omopolară a armonicii de tensiune de ordinul trei. Având în vedere că într-o mașină de inducție cu conexiune stea la borne nu apar armonici de ordinul trei în curent, armonica de ordinul trei a tensiunii păstrează același defazaj cu armonica inducției, deci poate fi utilizată la localizarea inducției în întrefier.

Important de reținut este faptul că, armonica de ordinul trei a inducției păstrează defazajul zero față de componenta fundamentală a inducției, indiferent de încărcarea mașinii. Atunci când apare saturația, inducția din întrefier păstrează forma de sinus aplatizat, indiferent de sarcina mașinii.

Se poate afirma că armonica de ordinul trei a curenților rotorici nu este suficient de mare ca să producă o tensiune magnetomotoare care să modifice poziția armonicii de ordinul trei a inducției față de componenta fundamentală.

Observația este deosebit de importantă pentru mașinile de inducție la care reglajul după câmp este efectuat utilizând armonica de ordinul trei a tensiunii.

Reducerea valorii permeabilității magnetice a miezului feromagnetic este o consecință imediată a apariției saturației.

Figura 4.12 prezintă permeabilitatea magnetică relativă în secțiunea transversală a unei mașini de inducție cu doi poli, la funcționarea motorului încărcat la puterea nominală. În zonele colorate în roșu permeabilitatea magnetică relativă are valori mari, de aproximativ 3000. În zonele albastre din miezul feromagnetic, permeabilitatea magnetică relativă scade pronunțat, până la ordinul zecilor, sub influența saturației magnetice.

Saturația dinților statorici și rotorici apare doar în acele părți ale circuitului magnetic unde inducția este definită de componenta rezultantă a inducției magnetice în întrefier, B_{δ} . Având în vedere că rezultanta se rotește în întrefier și variația spațială a permeabilității magnetice se rotește la fel. Se poate recunoaște apariția saturației prin micșorarea permeabilității fierului, cu efect asupra creșterii reluctanței dinților în regiunile în care acționează componenta rezultantă a inducției în întrefier. Dacă prin ipoteză am considerat permeabilitatea fierului ca fiind infinită, variația reluctanței dinților poate fi considerată ca o variație a reluctanței întrefierului. Acesta

fiind aer are permeabilitatea constantă μ_0 , deci pentru a pune de acord variația reluctanței cu saturația, se va considera mărimea întrefierului variabilă. În consecință, în loc să considerăm variația permeabilității fierului, se presupune o mărire echivalentă a întrefierului ce variază cu saturația miezului feromagnetic. Întrefierul devine astfel o funcție de gradul de saturație și de poziția spațială a rezultantei câmpului. Variația întrefierului nu este de obicei sinusoidală, dar pentru a simplifica studiul se consideră că ar avea această formă. O variație tipică a întrefierului pe lungimea unui pas polar este prezentată în figura 4.13.

Dacă δ_0 este întrefierul în axa polului mașinii de inducție, întrefierul δ variază conform relației:

$$\frac{1}{\delta(\theta)} = k_e + k_m \cdot \cos(2\theta_m - 2\theta_f) \tag{4.3}$$

unde $k_e = \frac{1}{\delta_0} - k_m$ și $k_m = \frac{2}{3} \cdot \frac{k_{ns} - 1}{k_{ns}\delta_0}$

k_{ns} este raportul dintre valoarea nesaturată și cea saturată a tensiunii magnetice în întrefier;

θ_m reprezintă măsura unghiului pe periferia întrefierului;

θ_f unghiul pe care îl face inducția din întrefier cu direcția de rotație.

Inductanțele proprii și mutuale se calculează cu noua valoare a întrefierului. Dacă a, b, c sunt cele trei faze ale mașinii electrice, s înfășurarea statorică, r înfășurarea rotorică, iar indicii 1 și 3, fundamentala, respectiv, armonica de ordinul trei, atunci pentru cele 3 înfășurări se obțin funcțiile:

$$\begin{aligned} N_{as}(\theta_m) &= N_{s1} \cos\theta_m + N_{s3} \cos 3\theta_m \\ N_{bs}(\theta_m) &= N_{s1} \cos\left(\theta_m - \frac{2\pi}{3}\right) + N_{s3} \cos 3\theta_m \\ N_{cs}(\theta_m) &= N_{s1} \cos\left(\theta_m + \frac{2\pi}{3}\right) + N_{s3} \cos 3\theta_m \end{aligned} \tag{4.4}$$

Inductanța proprie a fazei statorice a se calculează:

$$L_a = \frac{\Psi_a}{i_a} = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} \frac{1}{\delta(\theta_m)} \cdot [N_{as}(\theta_m)]^2 d\theta_m \tag{4.5}$$

unde r este raza medie a motorului la întrefier și l lungimea pachetului de tole.

Inductanța mutuală între faza a și b se calculează cu relația:

$$L_{ab} = \frac{\Psi_{ab}}{i_b} = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} \frac{1}{\delta(\theta_m)} \cdot N_{as}(\theta_m) \cdot N_{bs}(\theta_m) d\theta_m \tag{4.6}$$

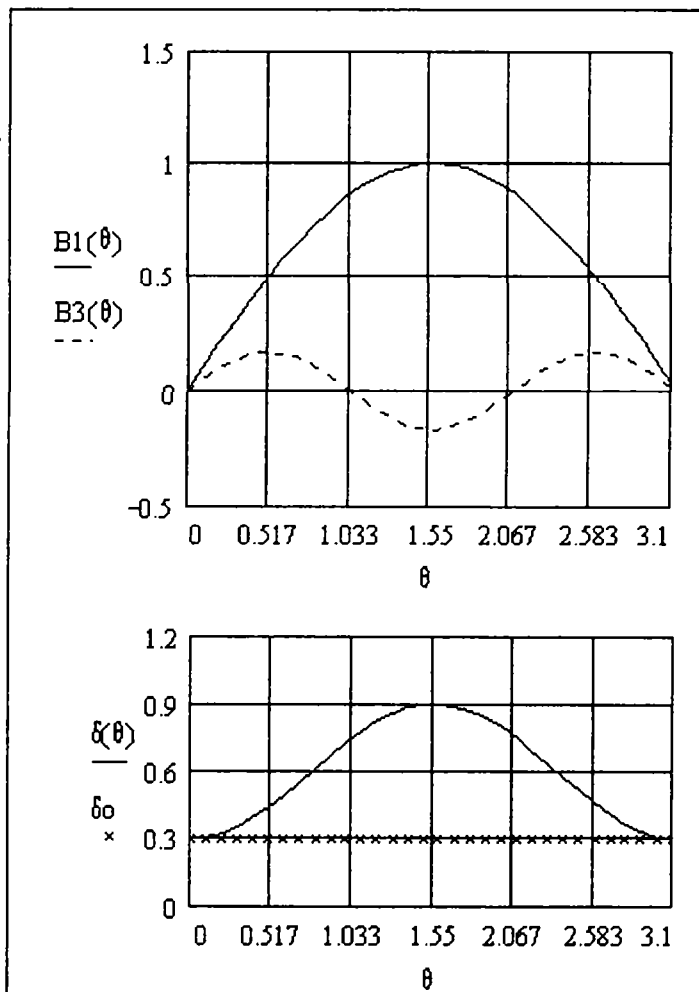


Fig.4.13. Variația întrefierului pe un pas polar

Reacția coliviei rotorice la apariția celor două componente ale inducției din întrefier (fundamentală și armonică de ordinul trei), este un curent cu două componente rotitoare: una cu frecvența fundamentală și alta cu o frecvență de trei ori mai mare. În consecință, o componentă fundamentală și o armonică de ordinul trei sunt induse în rotor, formând două componente ale tensiunii magnetomotoare rotorice. Practic, se consideră că rotorul conține două seturi de funcții polifazate:

$$\begin{aligned} N_{ar1} &= N_{r1} \cos(\theta_m - \theta_r) & N_{ar3} &= N_{r3} \cos(3\theta_m - 3\theta_r) \\ N_{br1} &= N_{r1} \cos\left(\theta_m - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & N_{br3} &= N_{r3} \cos\left(3\theta_m - 3\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ N_{cr1} &= N_{r1} \cos\left(\theta_m - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & N_{cr3} &= N_{r3} \cos\left(3\theta_m - 3\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pentru calculul inductanțelor statorice la o mașină trifazată sunt necesare 3 inductanțe proprii și 6 inductanțe mutuale, definite în matricea L_s . Inductanțele rotorice, care se calculează în mod similar, sunt dispuse în două matrici: una pentru funcția fundamentală, L_{r1} , și alta pentru armonică de ordinul 3, L_{r3} . Aceste inductanțe depind de timp și de viteza rotorului și sunt funcții de factorul de saturație.

Constantele N_{s1} , N_{r1} reprezintă numărul de spire ale circuitului statoric, respectiv, rotoric. N_{r3} este definit ca numărul de spire echivalent pentru circuitul cu armonică de ordinul trei.

Modelarea mașinii de inducție implică derivarea inductanțelor mutuale dintre înfășurările statorice și cele rotorice. Procesul de derivare conduce la obținerea a două matrici de inductanțe, L_{rs1} și L_{rs3} , conținând elementele de cuplaj mutual dintre fundamentală și armonicile de ordinul trei din stator și rotor.

Ecuatiile mașinii de inducție sunt, în acest caz:

$$\begin{aligned} u_{abcs} &= r_s i_{abcs} + \frac{d\Psi_{abcs}}{dt} \\ u_{abcr1} &= r_{r1} i_{abcr1} + \frac{d\Psi_{abcr1}}{dt} \\ u_{abcr3} &= r_{r3} i_{abcr3} + \frac{d\Psi_{abcr3}}{dt} \end{aligned} \quad (4.8)$$

în care u_{abc} este matricea tensiunilor, i_{abc} este matricea curenților și Ψ_{abc} este matricea fluxurilor de înlănțuire.

Ecuatiile fluxului de înlănțuire sunt:

$$\begin{aligned} \Psi_{abcs} &= L_s i_{abcs} + L_{sr1} i_{abcr1} + L_{sr3} i_{abcr3} \\ \Psi_{abcr1} &= L_{r1} i_{abcr1} + L_{rs1} i_{abcs} \\ \Psi_{abcr3} &= L_{r3} i_{abcr3} + L_{rs3} i_{abcs} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Din aceste ecuații rezultă că între fundamentală din rotor și armonicile de ordinul trei ale înfășurărilor nu există cuplaj [67].

Soluția modelului matematic implică cunoașterea valorilor din matricile tensiunilor u_{abcs} , u_{abcr1} și u_{abcr3} . Prezența armonicilor de ordinul trei în aceste tensiuni exclude posibilitatea considerării acestora ca variabile independente, fiind funcții de saturația mașinii.

4.3. Parametrii saturați ai mașinii de inducție

Fenomenele electromagnetice în mașinile electrice sunt descrise de ecuațiile lui Maxwell.

Condiționați de geometria complicată a tolelor statorului, respectiv rotorului, de înfășurările cu o anumită repartiție spațială și de proprietățile neliniare ale materialelor feromagnetice, trebuie să admitem ipoteze simplificatoare pentru rezolvarea ecuațiilor.

În practică se utilizează și astăzi metode semiempirice de calcul al tensiunilor de magnetizare cu ajutorul unor formule aproximative [37], [38].

Influența reală a miezului feromagnetic asupra câmpului este considerată prin factori de formă. La determinarea tensiunii magnetice în juguri se consideră factori de corecție determinați pe cale grafică. Toți acești factori au la bază fie aproximații mari, fie provin dintr-un mare număr de măsurători efectuate asupra mașinilor electrice.

Au fost determinate apoi noi funcții, îmbunătățite, cu considerarea influenței tensiunii magnetice a jugurilor asupra formei câmpului.

Modificarea calității tablei silicioase conduce la noi valori ale solicitărilor magnetice în mașină, deci la alți parametri electrici.

4.3.1. Influența saturației asupra reactanțelor

Relațiile de calcul prezentate în capitolul anterior, pentru determinarea reactanțelor de dispersie, au la bază ipoteza că tensiunea magnetică a fluxului de dispersie în fier este neglijabilă în raport cu cea din aer. Această ipoteză este valabilă atâta timp cât curenții din mașină nu depășesc de două ori valoarea curentului nominal (I_n).

La curenți mai mari, datorită saturației, crește reluctanța circuitului magnetic. Pe traiectoriile acestui circuit se închid atât câmpul transversal de dispersie în creștătură, cât și câmpul produs de armonicile superioare ale câmpului magnetic din întrefier.

În consecință, în funcție de gradul de saturație, de-a lungul liniei de câmp de dispersie se micșorează permeanța și deci reactanța de dispersie din stator și rotor. Pentru rotorul în repaus și cu înfășurarea statorică alimentată la tensiunea nominală (cazul pornirii prin cuplare directă la rețea, $I_p \approx 6,5 \cdot I_n$), reactanțele de dispersie pot să scadă cu până la 30%.

Micșorarea reactanțelor de dispersie ale statorului și rotorului în timpul pornirii se produce datorită micșorării atât a permeanțelor de dispersie în creștătură (λ_{c1} în stator, respectiv, λ_{c2} în rotor), cât și a permeanțelor de dispersie diferențială (λ_{d1} și λ_{d2}).

Un calcul exact al modificării acestor permeanțe este foarte dificil. Pentru aproximarea efectelor saturației se utilizează diferite metode analitice, bazate pe coeficienți și curbe experimentale.

4.3.1.1. Influența saturației asupra permeanței creștăturii

Mărirea reluctanței magnetice este echivalentă cu micșorarea lățimii dinților, respectiv, mărirea lățimii creștăturii, în funcție de valoarea tensiunii magnetice în dinți.

În [2] se propune modificarea lățimii fiecărei zone a creștăturii (figura 4.2), conform relației:

$$b_x^* = b_x + 2\mu_0 \cdot \frac{\int_0^x H(x) dx}{B_x} \quad (4.10)$$

unde toate valorile sunt cele măsurate la înălțimea x de la baza creștăturii.

Conform [73] și [80], influența saturației dinților asupra permeanței specifice de dispersie în creștătură se ia în considerație adăugând la lățimea creștăturii lățimea dintelui împărțită la permeabilitatea magnetică relativă a acestuia.

Analizând figura 4.1.a), se observă că pe înălțimea unui dinte liniile câmpului de dispersie a două creștături vecine sunt de sensuri opuse, astfel că efectul de saturație al dintelui pe înălțimea efectivă a creștăturii este neglijabil, considerând cele două fluxuri aproximativ în fază.

Rezultă că fluxul de dispersie al creștăturii influențează în special saturația istmului creștăturii. În consecință, micșorarea permeanței datorită fluxului transversal de dispersie a creștăturii ar fi echivalentă cu o creștere a lățimii istmului creștăturii (b_4 în figura 4.2).

Având în vedere că acest câmp de dispersie se suprapune peste câmpul magnetic principal în dinți, se poate admite o valoare echivalentă a permeabilității magnetice a dintelui, a cărei expresie, dacă se ține cont și de câmpul principal în dinți, este:

$$\mu' = \frac{B_{dcr}}{\mu_0 \left(H_{dcr} + \frac{I_p}{I_n} \mathcal{A}_n \right)} \quad (4.11)$$

în care \mathcal{A}_n este pătura de curent determinată pentru curentul nominal I_n , I_p este valoarea estimată sau măsurată a curentului de pornire, B_{dcr} , H_{dcr} sunt valorile critice pentru inducția magnetică, respectiv, intensitatea câmpului magnetic, determinate din curba de magnetizare după cotul de saturație al acesteia ($B_{dcr} \approx 2$ T).

În relațiile prezentate pentru determinarea permeanței specifice de dispersie în creștătură, lățimea istmului, a (din figura 3.5. b),c,d), va fi înlocuită cu a^* :

$$a^* = a + \frac{b_d}{\mu} \quad (4.12)$$

în care b_d este lățimea dintelui în dreptul deschiderii creștăturii:

$$b_d = \tau_c - a \quad (4.13)$$

unde τ_c este pasul creștăturii.

Cercetări recente [8] se bazează pe rezultate statistice și experimentale, simulând modificarea lățimii istmului creștăturii în funcție de încărcarea circuitului magnetic. În acest sens este utilă următoarea relație, atât pentru mărirea fictivă a deschiderii creștăturii statorice, cât și a celei rotorice:

$$a^* = (1 - s^2) \cdot a + \left(\frac{\pi D}{N_c} - b_d \right) \cdot s^2 \quad (4.14)$$

unde încărcarea este considerată prin intermediul alunecării s a mașinii de inducție.

Pentru creștătura prezentată în figura 4.2, rezultă următoarea relație pentru permeanța specifică de dispersie în creștătură:

$$\lambda_c^* = \frac{h_1}{3b_1} + \frac{h_2}{b_1} + \frac{h_3}{b_4^* - b_1} \cdot \ln \frac{b_4^*}{b_1} + \frac{h_4}{b_4^*} \quad (4.15)$$

în care b_4^* este deschiderea creștăturii modificată de saturație.

4.3.1.2. Influența saturației asupra dispersiei diferențiale

Studiul influenței saturației asupra dispersiei diferențiale se rezumă la considerarea influenței ei asupra armonicilor superioare și a armonicilor de creștătură. Datorită prezenței creștăturilor, repartiția inducției magnetice se modifică, în dreptul creștăturilor inducția fiind mai mică decât în dreptul dinților. Repartiția câmpului în acest caz este prezentată în figura 4.14.

Curba 2 reprezintă repartiția câmpului în cazul în care nu ar exista dinți. Curba reală 1 se poate descompune într-o curbă medie 3 și oscilațiile în jurul acesteia, reprezentate prin curba 5 cu înfășurătoarea 4.

Curba 5, cu perioada egală cu pasul creștăturii τ_c , se descompune într-o serie de armonici cu perioade egale cu fracțiune întreagă din τ_c :

$$\tau_v = \frac{1}{k} \tau_c \quad k \text{ număr întreg} \quad (4.16)$$

Dacă se notează cu B_k amplitudinea înfășurătorii armonicii cu perioada τ_v , inducția magnetică corespunzătoare acestei armonici în punctul x este:

$$B_{kx} = B_k \cdot \sin \frac{x}{\tau} \pi \cdot \sin \frac{x}{\tau_c} 2k\pi \quad (4.17)$$

Având în vedere că pasul de creștătură este:

$$\tau_c = \frac{2p\tau}{N_c} = \frac{2p\tau}{2mpq} = \frac{1}{mq} \tau \quad (4.18)$$

rezultă pentru inducție expresia:

$$B_{kx} = \frac{1}{2} B_k \cos(2kqm - 1) \frac{x}{\tau} \pi - \frac{1}{2} B_k \cos(2kqm + 1) \frac{x}{\tau} \pi \quad (4.19)$$

adică apar armonici de ordinul:

$$v = 2kqm \pm 1 = k \frac{N_c}{p} \pm 1 \quad (4.20)$$

Pentru valori mari ale solenației creștăturii aceste armonici saturează puternic o zonă îngustă a capetelor de dinți din apropierea întrefierului. Saturația este aici echivalentă cu o mărire fictivă a întrefierului, de la o valoare δ la o valoare echivalentă δ^* .

Legătura dintre amplitudinea reală a inducției, B_{vr} , și cea aparentă, B_{va} , pentru o armonică superioară de ordinul v este de forma [99]:

$$B_{vr} = B_{va} \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\tau_v}{\delta \cdot \mu_r}} \quad (4.21)$$

cu μ_r permeabilitatea magnetică relativă a dinților în dreptul istmului creștăturii.

Pentru determinarea întrefierului echivalent, se consideră primele două armonici din relația (4.20), cu $k = 1$. Se obține pentru noul întrefier:

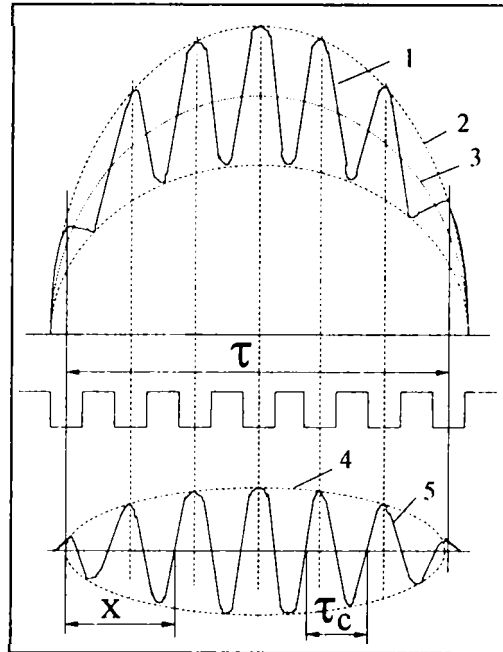


Fig.4.14. Repartiția câmpului magnetic polar

$$\delta^* = \delta + \frac{D}{2 \cdot \mu_r} \cdot \left(\frac{1}{N_{c1}} + \frac{1}{N_{c2}} \right) \quad (4.22)$$

Micșorarea lățimii istmului creștăturii, la valoarea a^* , la saturația câmpului de dispersie în creștătură, precum și majorarea întrefierului la δ^* , modifică factorul de întrefier (al lui Carter):

$$k_{\delta 1,2}^* = \frac{\tau_{c1,2}}{\tau_{c1,2} - \frac{w^2}{5 + w \cdot \delta^*}} \quad \text{cu} \quad w = \frac{a_{1,2}^*}{\delta^*} \quad (4.23)$$

atât din stator (indicele 1), cât și din rotor (indicele 2).

$$k_{\delta}^* = k_{\delta 1}^* \cdot k_{\delta 2}^* \quad (4.24)$$

Cu aceste noi valori introduse în relațiile de calcul a permeanței specifice de dispersie diferențială (3.94) și (3.99), se obține pentru stator:

$$\lambda_{d1}^* = 0,912 \cdot \frac{\tau_{c1} \cdot (q_1 \cdot k_{b1})^2}{k_{\delta}^* \cdot \delta^*} \cdot \rho_{d1} \cdot k_{01}^* \cdot \sigma_{d1} \quad (4.25)$$

$$\text{cu} \quad k_{01}^* \approx 1 - 0,033 \cdot \frac{(a_1^*)^2}{\delta^* \cdot \tau_{c1}} \quad (4.26)$$

și pentru rotor:

$$\lambda_{d2}^* = 0,912 \cdot \frac{\tau_{c2} \cdot q_2^2}{k_{\delta}^* \cdot \delta^*} \cdot \sigma_{d2} \quad (4.27)$$

În consecință, dacă se ține cont de influența saturației, reactanța de dispersie statorică va avea în final expresia:

$$X_{\sigma 1}^* = \omega_1 L_{\sigma 1}^* = 2\pi f_1 \cdot 2\mu_0 \frac{N_1^2}{pq_1} l \cdot (\lambda_{c1}^* + \lambda_{d1}^* + \lambda_{f1}) \quad (4.28)$$

iar reactanța de dispersie rotorică expresia:

$$X_{\sigma 2}^* = \omega_1 L_{\sigma 2}^* = 2\pi \cdot f_1 \cdot \mu_0 \cdot l \cdot (\lambda_{c2}^* + \lambda_{d2}^* + \lambda_{f2}) \quad (4.29)$$

4.3.1.3. Influența saturației asupra inductanței principale

Fluxul util, pe baza căruia se calculează inductanța ciclică principală, (3.111), este influențat de saturația circuitului feromagnetic.

În acest caz, conform relației (3.108), întrefierul echivalent afectat de saturație este:

$$\delta_{\text{sat}}'' = k_{\delta}^* \cdot k_s \cdot \delta^* \quad (4.30)$$

Valoarea modificată de saturație a inductanței principale se obține din relația (3.111):

$$L_{lh}^* = \frac{6 \cdot \mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{(N_1 \cdot k_q \cdot k_y)^2}{p \cdot \delta_{\text{sat}}''} \cdot l \cdot \tau \quad (4.31)$$

care are o variație mult mai pronunțată decât inductanțele de dispersie.

În cazul utilizării relației (3.113) pentru calculul reactanței principale (de magnetizare), se va înlocui reactanța de dispersie statorică cu expresia celei influențate de saturație $X_{\sigma 1}^*$ din (4.28).

4.3.2. Influența saturației asupra rezistenței rotorice

Conform [46] saturația magnetică influențează factorul de raportare k_t (3.34) și prin urmare și rezistența rotorică pe fază raportată la stator R_2' . Rezistența R_2' și factorul k_t sunt aproape constante până la o valoare ce depășește cu 20% fluxul corespunzător curentului nominal.

În acest context se propune următoarea relație de calcul pentru rezistența R_2' :

$$R_2' = \frac{\frac{I_1}{U_m} \sin \delta_1}{\left(\frac{I_1}{U_m} \sin \delta_1 \right)^2 + \left(\frac{1}{X_m} - \frac{I_1}{U_m} \cos \delta_1 \right)^2} \quad (4.32)$$

cu unghiul δ_1 între \underline{I}_1 și $\underline{\Psi}_m$:

$$\delta_1 = \arctan \frac{U_1 - R_1 I_1 \cdot \cos \varphi_1}{R_1 I_1 \cdot \sin \varphi_1} - \varphi_1 \quad (4.33)$$

$$U_m = \sqrt{(U_1 - R_1 I_1 \cdot \cos \varphi_1)^2 + (R_1 I_1 \cdot \sin \varphi_1)^2} \quad (4.34)$$

în care I_1 este curentul de fază statoric, U_m tensiunea de magnetizare, X_m reactanța principală, U_1 tensiunea de alimentare de fază, φ_1 unghiul dintre \underline{I}_1 și \underline{U}_1 .

4.4. Concluzii

Determinarea cu o precizie cât mai ridicată a inducțiilor în întrefier, juguri și dinți, este o condiție necesară pentru identificarea cu o precizie suficient de bună a parametrilor mașinii de inducție.

Saturația magnetică micșorează inductanța de dispersie statorică și inductanța de dispersie rotorică, prin permeanța specifică de dispersie a creștăturii și permeanța specifică de dispersie diferențială. Inductanța principală se micșorează și ea, în special la pornire și la viteze mici de rotație.

Rezistența fazei rotorice se micșorează, la valori mari ale curentului, datorită efectului saturației magnetice.

Forma și dimensiunile creștăturilor influențează solicitarea magnetică a dinților, în special la pornirea (scurtcircuitul) și la funcționarea în gol a motorului.

5. IDENTIFICAREA MOTORULUI DE INDUCȚIE UTILIZÂND MODELE MATEMATICE

5.1. Considerații teoretice

Formularea unor scheme electrice echivalente pentru mașina de inducție, precum și determinarea parametrilor electrici ai acestor scheme, sunt teme des abordate în prezent.

Odată cu implementarea tehnicii de calcul și utilizarea unor surse noi de alimentare (convertoare statice de putere), identificarea și estimarea parametrilor mașinii de inducție polarizează interesul unui mare număr de proiectanți și cercetători din domeniul acționărilor cu acest tip de motoare.

Schemele electrice echivalente pot să ia în considerare, în acest context:

- analiza unui spectru larg de caracteristici ale mașinii de inducție;
- efectul termic, fenomenul de saturație magnetică și cel de efect pelicular asupra parametrilor electrici ai motorului;
- efecte secundare sau de ordinul al treilea, prin detalierea modelului.

Utilizând și un sistem eficient de achiziție a datelor cu ajutorul calculatorului numeric, studiul mașinii de inducție devine un domeniu atractiv de analiză.

Studiul are ca punct de plecare sistemul de ecuații al mașinii de inducție, care sub formă matricială este:

$$[u] = [R] \cdot [i] + \frac{d}{dt} [\Psi] \quad (5.1)$$

$$[\Psi] = [L] \cdot [i] \quad (5.2)$$

unde: $[u]$ este matricea tensiunilor de fază, $[R]$ matricea rezistențelor pe fază, $[i]$ matricea curenților, $[\Psi]$ matricea fluxurilor și $[L]$ matricea inductanțelor.

Dacă se consideră o variație sinusoidală a tensiunilor și curenților în raport cu timpul și dacă mărimile din rotor sunt raportate (reduse) la stator, ecuațiile mașinii se pot scrie în complex simplificat:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{U}_{e1} \\ \underline{U}'_2 = -\underline{Z}'_2 \underline{I}'_2 + \underline{U}_{e1} \\ \underline{U}_{e1} = -\underline{Z}_{1m} \underline{I}'_0 \\ \underline{I}'_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2 \end{cases} \quad (5.3)$$

în care: \underline{U}_1 este tensiunea de alimentare de fază statorică, \underline{Z}_1 impedanța pe fază statorică, \underline{I}_1 curentul de fază absorbit de motor, \underline{U}'_2 tensiunea de fază din rotor redusă la stator, \underline{Z}'_2 impedanța pe fază rotorică redusă la stator, \underline{I}'_2 curentul de fază din rotor redus la stator, \underline{Z}_{1m} impedanța principală (de magnetizare).

Impedanța pe fază statorică este:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{\sigma 1} \quad (5.4)$$

Impedanța pe fază rotorică redusă la stator este:

$$\underline{Z}'_2 = \frac{R_2}{s} + jX'_{\sigma 2} \quad (5.5)$$

Impedanța principală are expresia:

$$\underline{Z}_{1m} = R_m + jX_m \quad (5.6)$$

Ținând cont de faptul că se studiază motorul de inducție cu rotor în scurtcircuit

$$\underline{U}'_2 = 0 \tag{5.7}$$

Rezolvând sistemul de ecuații (5.3), se obțin curenții:

$$\underline{I}_1 = \frac{\left(1 + \frac{\underline{Z}'_2}{\underline{Z}_{1m}}\right) \cdot \underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \left(1 + \frac{\underline{Z}'_1}{\underline{Z}_{1m}}\right) \cdot \underline{Z}'_2} \tag{5.8}$$

$$\underline{I}'_2 = - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \left(1 + \frac{\underline{Z}'_1}{\underline{Z}_{1m}}\right) \cdot \underline{Z}'_2} \tag{5.9}$$

$$\underline{I}_{01} = \frac{\underline{Z}'_2 \cdot \underline{U}_1}{\underline{Z}_{1m} \cdot \left[\underline{Z}_1 + \left(1 + \frac{\underline{Z}'_1}{\underline{Z}_{1m}}\right) \cdot \underline{Z}'_2\right]} \tag{5.10}$$

Pe baza relației (5.8) rezultă impedanța echivalentă pe fază a mașinii de inducție:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_{1m} \cdot \underline{Z}'_2}{\underline{Z}_{1m} + \underline{Z}'_2} \tag{5.11}$$

5.2. Modele matematice

Relația (5.11) conduce la schema electrică echivalentă pe fază a mașinii de inducție prezentată în figura 5.1. Această schemă este un model convențional (schema în "T"), utilizabil doar pentru acel domeniu în care parametrii electrici ai motorului sunt practic constanți, neținând cont de variația acestora cu temperatura, cu saturația magnetică sau cu efectul pelicular.

Schema electrică din figura 5.2 este echivalentă cu cea din figura 5.1. Conductanța \mathcal{G}_m corespunde ca și rezistența R_m , pierderilor totale în fier. \mathcal{B}_m este susceptanța circuitului de magnetizare. Datorită faptului că în motorul de inducție procesul de conversie a energiei se aplică întregii puteri care străbate întrefierul, pierderile în fierul statoric trebuie considerate separat de cele din rotor. Conform [12], pierderile în fierul rotoric pot fi reprezentate prin conductanța:

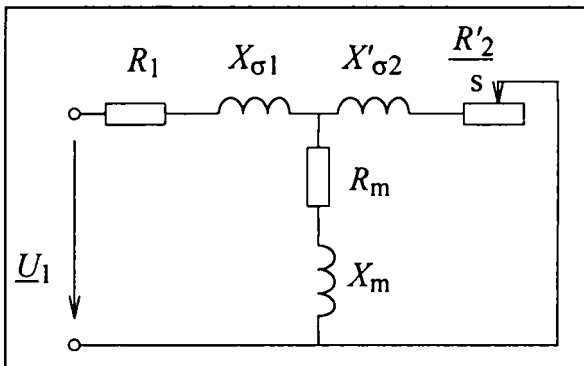


Fig.5.1. Schema electrică echivalentă pe fază a mașinii de inducție

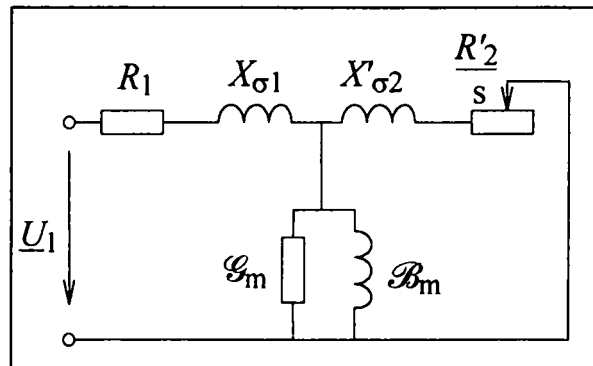


Fig.5.2. Schemă electrică utilizând un circuit de magnetizare echivalent

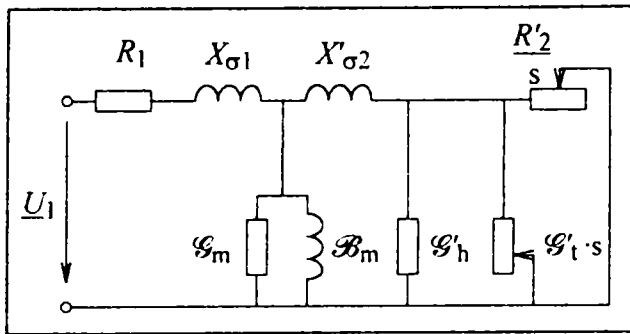


Fig.5.3. Schemă electrică considerând pierderile în fier rotorice

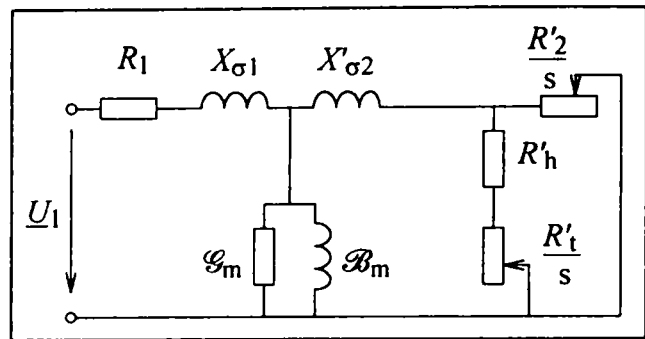


Fig.5.4. Varianta de schemă electrică pentru pierderile în fier rotorice

$$\mathcal{G}'_c = \mathcal{G}'_h + \mathcal{G}'_t \cdot s \tag{5.12}$$

prezentată în figura 5.3, în care \mathcal{G}'_h corespunde pierderilor prin histerezis, iar \mathcal{G}'_t pierderilor prin curenți turbionari. O astfel de formulare, deși atractivă, nu este în acord cu comportarea mașinii la pierderile în fier determinate. Ea sugerează că pierderile prin curenți turbionari la inducție constantă ar crește nelimitat cu creșterea frecvenței.

Dacă dependența de frecvență a pierderilor în miezul feromagnetic este modelată fără inductanțe, atunci se obține un circuit serie, mai ușor abordabil, prezentat în figura 5.4:

$$R'_c = R'_h + \frac{R'_t}{s} \tag{5.13}$$

Rezistența care modelează pierderile prin histerezis, R'_h , schimbă de semn la viteza de sincronism, fiind pozitivă la alunecare $s > 0$ (regim de motor) și negativă la $s < 0$ (regim de generator).

Din moment ce câmpurile de dispersie produc valori ridicate ale inducției magnetice în dinți, o mică parte a pierderilor în fier este asociată acestor câmpuri. Pierderile pot fi incluse în circuitul echivalent prin rezistența R'_h din figura 5.4. Efectul pierderilor fiind mic este convenabilă utilizarea unui circuit serie echivalent.

Se presupune că pierderile în fier sunt cauzate în primul rând de histerezis, astfel că rezistența echivalentă statorică este proporțională cu frecvența iar rezistența echivalentă rotorică este constantă având același semn cu alunecarea.

Pe lângă pierderile în fier descrise mai sus inducțiile mari în dinți produc saturația căilor de dispersie chiar și în cazul în care fluxul principal se află sub cotul curbei de magnetizare [6]. Reactanța de dispersie este din acest motiv micșorată odată cu creșterea curentului, acest efect putând fi modelat prin introducerea unei reactanțe negative, X'_s .

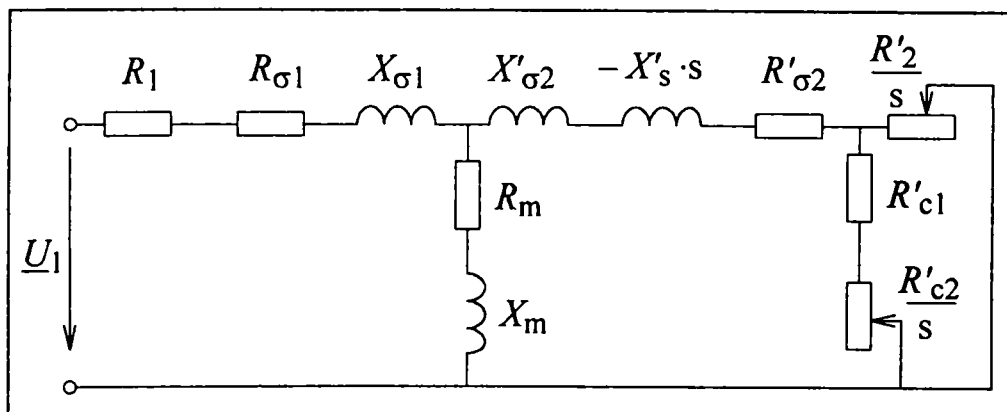


Fig.5.5. Schema electrică echivalentă cu considerarea pierderilor în fier și a saturației magnetice

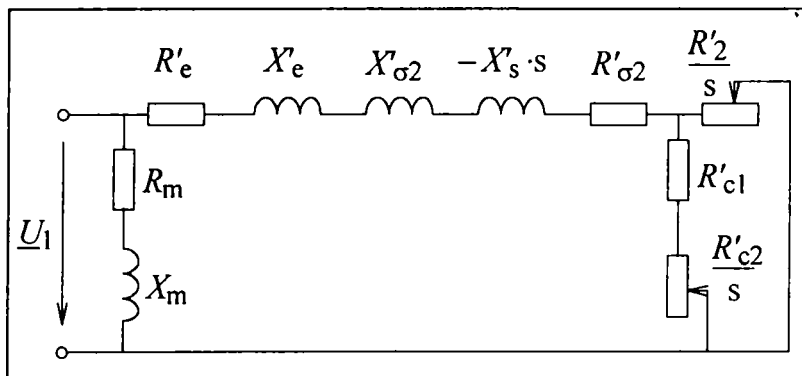


Fig.5.6. Schema echivalentă modificată tip Morris

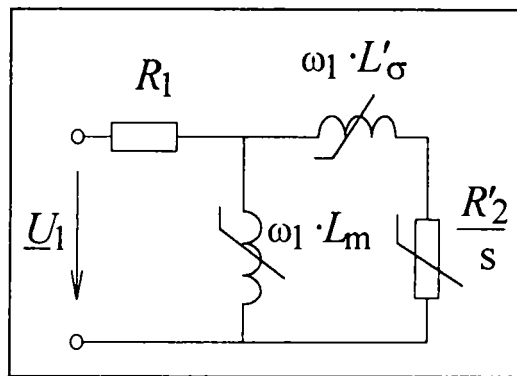


Fig.5.7. Schemă echivalentă tip Klaes

Având în vedere că plasarea reactanței de dispersie în schema electrică convențională produce mici diferențe în calculul performanțelor motorului de inducție, este suficient să se modeleze saturația folosind un singur parametru plasat în rotor.

În figura 5.5 se prezintă schema electrică echivalentă a mașinii de inducție cu parametrii electrici prezentați mai sus.

- R'_{c1} și R'_{c2} reprezintă pierderile în fier asociate fluxului principal;
- $R_{\sigma1}$ și $R'_{\sigma2}$ sunt pierderile în fier asociate fluxului de dispersie.

În cazul în care efectul armonicilor sau efectul pelicular sunt importante, se pot aduce modificări schemei astfel încât să se țină cont și de acestea.

O schemă electrică echivalentă celei din figura 5.5 este schema din figura 5.6, în care circuitul de magnetizare este conectat direct la borne. Modelul poate fi utilizat cu succes, dar unii parametri nu reflectă direct rezistența sau reactanța unei înfășurări.

O altă schemă electrică echivalentă [10], ce ține cont de efectul saturației asupra reactanțelor de fază ale mașinii de inducție, este prezentată în figura 5.7. Se observă că inductanța de dispersie L'_{σ} și inductanța principală (de magnetizare) L_m sunt variabile.

L_m depinde de fluxul principal Ψ_m , iar L'_{σ} de curentul statoric I_1 . Neliniaritatea rezistenței rotorice pe fază este dată de saturație prin intermediul factorului de raportare la stator, k_t .

În prezenta lucrare se studiază mașina de inducție trifazată cu rotor în scurtcircuit. Pentru forma constructivă cu "bare înalte" se pot utiliza schemele electrice pe fază prezentate mai sus. Pentru forma constructivă având "colivie dublă" se utilizează schema din figura 5.8. Mărimile

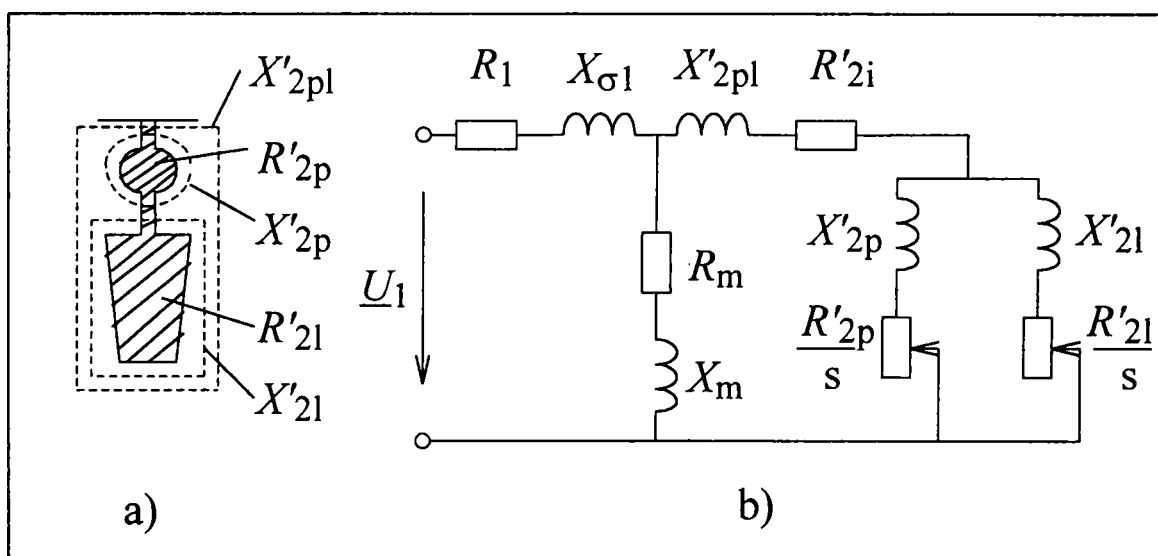


Fig.5.8.a) Crestătură rotorică pentru dublă colivie;
b) Schema electrică echivalentă pentru motor cu dublă colivie

care au ca indice litera "p" corespund coliviei de pornire, cele care au litera "l", coliviei de lucru (funcționare). R'_{2i} este rezistența porțiunii din inelul de scurtcircuitare corespunzător unei bare rotorice (faze), raportată la stator. X'_{2pl} este reactanța corespunzătoare cuplajului dintre colivia de lucru și cea de pornire, mărime raportată la stator.

Schema echivalentă prezentată în figura 5.8 se poate utiliza și la motoare de inducție de mare putere, cu "bare înalte", la care raportul dintre înălțimea crestăturii h și lățimea ei medie b este:

$$\frac{h}{b} > 6 \quad (5.14)$$

În acest caz colivia rotorică este practic divizată în două părți, partea de sus utilizată la pornire, respectiv, partea de jos (având suprafața cea mai mare), utilizată la funcționare.

5.3. Metode de modelare a curbei de magnetizare

Calculul reactanțelor mașinii de inducție, cu o precizie impusă, nu poate fi efectuat fără a ține cont de proprietățile materialelor feromagnetice utilizate. Chiar dacă se consideră, ca ipoteză simplificatoare, că aceste materiale sunt omogene și izotrope, neliniaritatea lor este pronunțată cu creșterea curentului din înfășurările mașinii, respectiv, cu creșterea solicitărilor magnetice.

Curba de magnetizare, $B = f(H)$, este o caracteristică a proprietăților magnetice ale materialelor utilizate în construcția pachetelor de tole stator și rotor.

Conform celor afirmate mai sus, definirea acestei caracteristici cu o precizie cât mai ridicată reprezintă cheia succesului în determinarea corectă a reactanțelor.

Nu trebuie neglijat faptul că mașinile de inducție sunt proiectate să funcționeze în cotul curbei de magnetizare. Curba de magnetizare furnizează valorile necesare studiului domeniilor saturate ale mașinii de inducție.

Curba este utilă, de asemenea, pentru determinarea permeabilităților magnetice μ_n și μ_d , prezentate în figura 4.8.

În mod obișnuit, firma producătoare de tablă pentru construcția miezurilor feromagnetice, furnizează caracteristica $B = f(H)$ sub formă tabelară. Un exemplu îl reprezintă curba din tabelul 1, în care intensitatea câmpului magnetic este dată în [A/m].

Pentru activitatea de proiectare, dar mai ales de simulare cu ajutorul calculatorului numeric, tabelul trebuie transpus într-o funcție matematică care să modeleze cât mai precis curba $B = f(H)$.

În procesul de calcul al tensiunii magnetomotoare se utilizează de obicei funcția inversă, $H = f(B)$, având în vedere necesitatea determinării intensității câmpului magnetic în funcție de inducția magnetică calculată în fiecare regiune activă a mașinii.

Pentru echivalarea curbei de magnetizare sunt propuse în literatură [31], [37], [76], [96], diferite polinoame și funcții transcendente, astfel încât curba obținută să fie cât mai aproape de realitate, dar și ușor calculabilă. De reținut este faptul că orice curbă de magnetizare este monoton crescătoare, astfel că se poate ușor aprecia succesiunea punctelor curbei.

Cea mai simplă metodă este aproximarea curbei prin segmente de dreaptă având ca extremități punctele de coordonate (B, H) date [37], [76].

Dacă mai multe drepte succesive au pante care diferă cu mai puțin de 2 grade, se va construi o singură dreaptă care este mărginită de punctul inițial și de cel final și trece printre celelalte puncte.

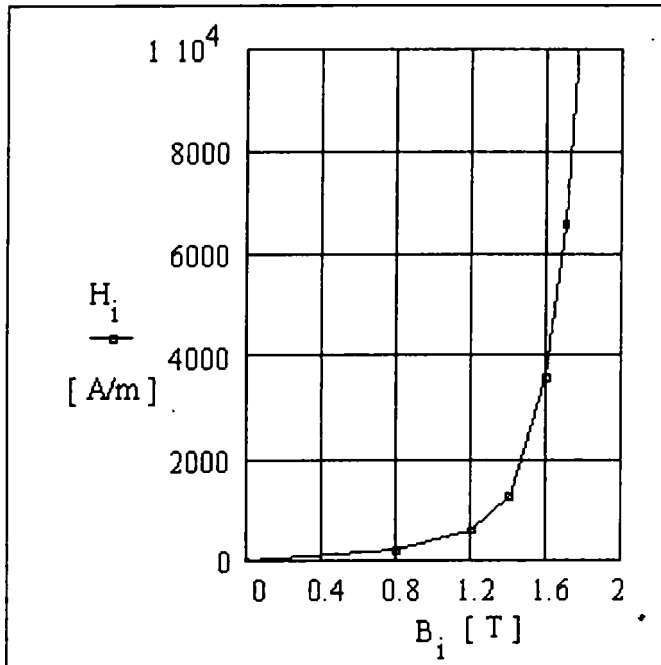


Fig.5.9. Curba $H = f(B)$ aproximată cu segmente de dreaptă

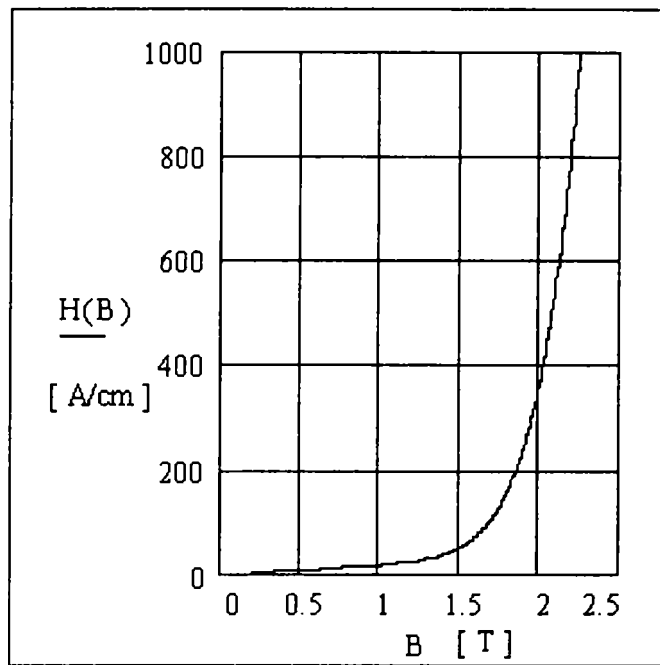


Fig.5.10. Curba $H = f(B)$ aproximată cu relația (5.16)

O astfel de aproximare este prezentată în figura 5.9 și nu este totdeauna de o precizie mulțumitoare.

Cercetătorii au căutat "formula magică și unică" cu ajutorul căreia să poată aproxima întreaga curbă de magnetizare [37]. În acest sens au încercat funcții de forma:

$$H = a_1 B + a_n B^n + a_m B^m \tag{5.15}$$

cu $n \geq 7$ și $m \geq 15$ pentru o aproximare cât mai bună a curbei. S-a obținut astfel o funcție utilizabilă cu bune rezultate sub $B = 2T$, prezentată în figura 5.10, având expresia:

$$H = a_1 B + a_9 B^9 + a_{15} B^{15} = 19,8 \cdot B + 0,6 \cdot B^9 + 0,19 \cdot 10^{-3} \cdot B^{15} \tag{5.16}$$

coeficienții a_1 , a_9 și a_{15} fiind calculați prin metoda celor mai mici pătrate.

În programele de calcul, o largă răspândire o au funcțiile cubice spline de interpolare, pentru obținerea punctelor (B, H) intermediare [31], [106], [107].

De o mare utilitate este și funcția

$$\frac{1}{\mu_r} = f(B^2), \quad \text{cu permeabilitatea relativă } \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{5.17}$$

deoarece se poate introduce direct B^2 în calcule, fără a mai extrage radicalul.

Regiunea saturată se aproximează în general cu o dreaptă.

În lucrarea [96] se propune o relație interesantă de modelare a curbei de magnetizare:

$$B(H) = a_1 \left(1 - e^{-a_2 H} \right) + a_3 H \tag{5.18}$$

având coeficienții determinați ca termeni ai seriei Fourier:

$$a_m = \sum_{k=0}^8 A_{mk} \cos(4k), \quad m = 1, 2, 3 \tag{5.19}$$

Relația (5.18) dă o bună aproximare curbei de magnetizare, dar este "răpitoare" de timp pentru calculator și nu permite un calcul ușor pentru funcția inversă, $H = f(B)$.

O altă variantă de modelare a curbei de magnetizare este propusă în [108]. După cum se observă în figura 5.11, curba este împărțită în trei zone, pentru fiecare existând o funcție de echivalare distinctă:

- zona ① denumită "cot":

$$B = \frac{\alpha_1 H + \beta_1}{H + \gamma_1} \quad (5.20)$$

- zona ② denumită "funcție de racordare":

$$B = B_c + \frac{(H - H_d)^2 \alpha_2 + \beta_2}{(H - H_d) + \gamma_2} \quad (5.21)$$

- zona ③ denumită "asimptotă":

$$B = \mu_0 H + J_s \quad (5.22)$$

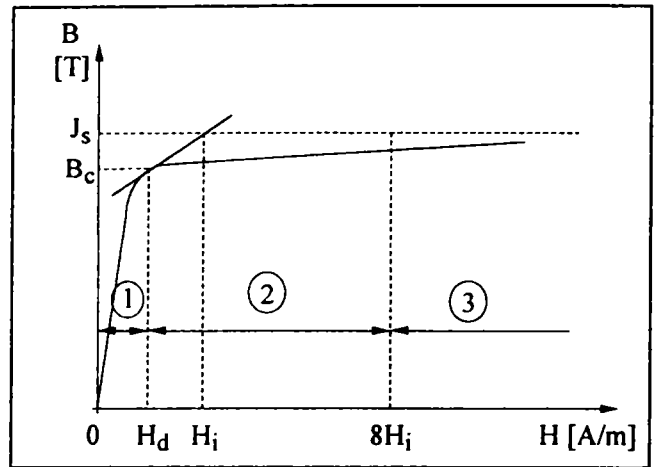


Fig.5.11. Curba de magnetizare cu 3 zone

Cu aceste funcții se pot obține puncte cu o eroare de până la 15%. Varianta are avantajul unei prelucrări rapide a datelor.

În prezenta lucrare este elaborat un model matematic pentru funcția inversă curbei de magnetizare, $H = f(B)$, utilizat într-un program de simulare BHN. Pornind de la punctele (B, H) date în tabelul 1 din Anexa 2, programul stabilește funcții liniare sau parabolice pentru intervalele în care este discretizată curba. Calculând permeabilitatea magnetică μ pentru aceste puncte, programul stabilește mai întâi gradul funcției de modelare pe intervalul respectiv.

Pentru porțiunea liniară a caracteristicii, până la 0,7 T, se consideră $\mu \cong \text{const.}$, respectiv un model de forma:

$$H = a \cdot B \quad \text{cu} \quad a = \frac{H_c}{B_c} \quad (5.23)$$

și (B_c, H_c) coordonatele oricărui punct de pe porțiunea liniară.

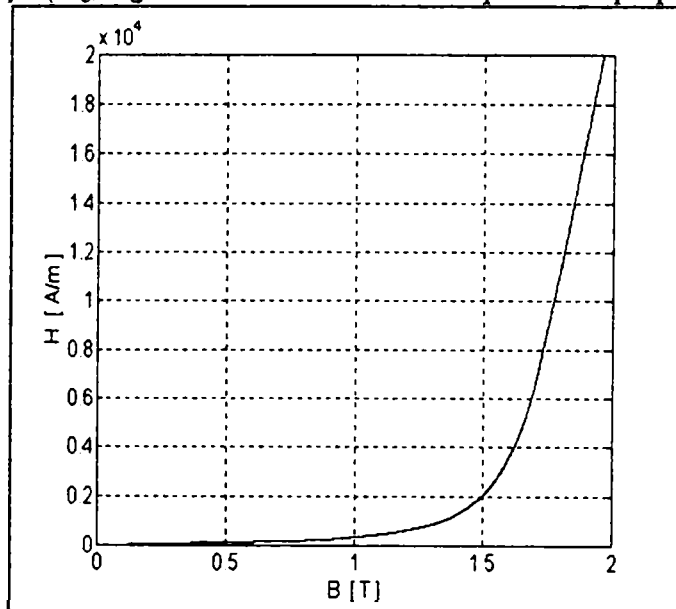


Fig.5.12. Curba $H = f(B)$ trasată cu programul BHN

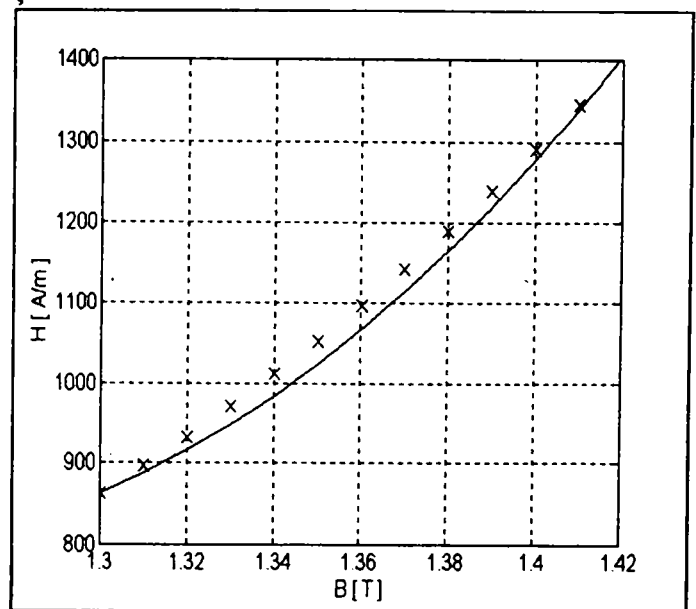


Fig.5.13. Detaliu la cotul curbei $H = f(B)$:

× × valori date tabelar;

— funcție modelată cu programul BHN

Dacă este detectată o porțiune neliniară cu μ diferit la trei puncte succesive (B_1, H_1) , (B_2, H_2) și (B_3, H_3) , se vor determina coeficienții b , c și d din următorul sistem de ecuații:

$$\begin{bmatrix} B_1^2 & B_1 & 1 \\ B_2^2 & B_2 & 1 \\ B_3^2 & B_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Rezultă un model de parabolă pentru acest interval:

$$H = b \cdot B^2 + c \cdot B + d \quad (5.25)$$

Dacă se ține cont de continuitatea derivatei în punctul "2":

$$2 \cdot b_2 \cdot B_1 + c_2 = 2 \cdot b_1 \cdot B_1 + c_1 \quad (5.26)$$

coeficienții b_1 și c_1 fiind determinați în calculul anterior pentru punctul "1", se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{bmatrix} B_1^2 & B_1 & 1 \\ B_2^2 & B_2 & 1 \\ 2B_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ 2b_1 B_1 + c_1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Pentru porțiunea finală, saturată, a caracteristicii, μ este aproximativ același pentru o succesiune de puncte. Programul va determina coeficienții e și f ai funcției liniare aferente acestui interval, luând în considerare punctul inițial (B_i, H_i) și punctul final (B_f, H_f) :

$$\begin{bmatrix} B_i & 1 \\ B_f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i \\ H_f \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Rezultă modelul liniar pentru acest interval:

$$H = e \cdot B + f \quad (5.29)$$

Conform acestui algoritm, curba de magnetizare a fost divizată în 10 intervale, pentru inducția B cuprinsă în domeniul $(0 \dots 2,2)T$. În funcție de mărimea inducției magnetice, ca valoare de intrare, este ales intervalul cu funcția de modelare respectivă, obținând intensitatea câmpului magnetic la ieșire. Caracteristica obținută prin modelarea efectuată cu programul BHN este prezentată în figura 5.12.

Eroarea cu care se obțin valorile la ieșire, pentru funcții parabolice, este mai mică de 2%. Pentru a mări precizia modelului, se pot subdiviza intervalele neliniare, obținând noi funcții și coeficienți pentru fiecare în parte. De remarcat că o decizie în acest sens trebuie luată, ținând cont că orice subdivizare suplimentară crește timpul de rulare a programului.

Pentru a observa precizia de aproximare asigurată de programul BHN, în figura 5.13 se prezintă un detaliu al curbei de magnetizare, în care cu "x" sunt afișate valorile date tabelar și cu linie continuă modelul dat de program.

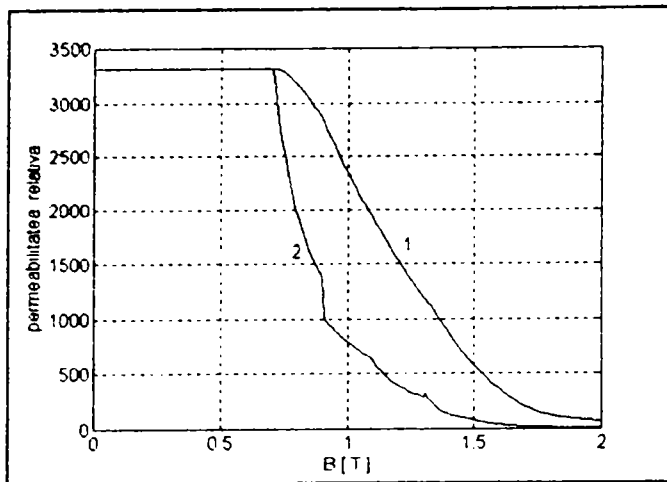


Fig.5.14. Variația permeabilităților magnetice:

- 1 - permeabilitatea normală, μ_n ;
- 2 - permeabilitatea diferențială, μ_d .

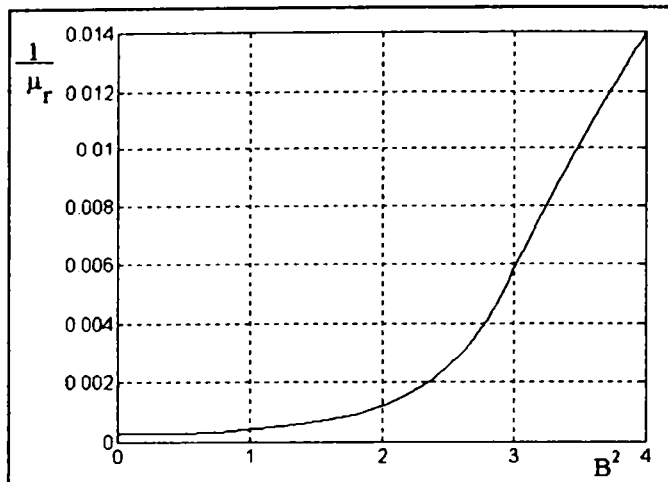


Fig.5.15. Curba de variație a lui $\frac{1}{\mu_r}$

Curbele de variație ale permeabilității magnetice normale, μ_n , și diferențiale, μ_d , în funcție de inducția magnetică, sunt prezentate în figura 5.14. Cu "1" este notată variația lui μ_n și cu "2" aceea a lui μ_d . Se remarcă o puternică micșorare a permeabilității magnetice cu creșterea inducției magnetice.

Pentru a determina această modificare, în figurile 5.16 și 5.17 sunt prezentate în detaliu curbele de variație a celor două permeabilități magnetice la inducții cuprinse în intervalul (1.5...2)T.

Funcția $\frac{1}{\mu_r} = f(B^2)$ din relația (5.17), se calculează ușor cu programul BHN și are forma

de variație prezentată în figura 5.15.

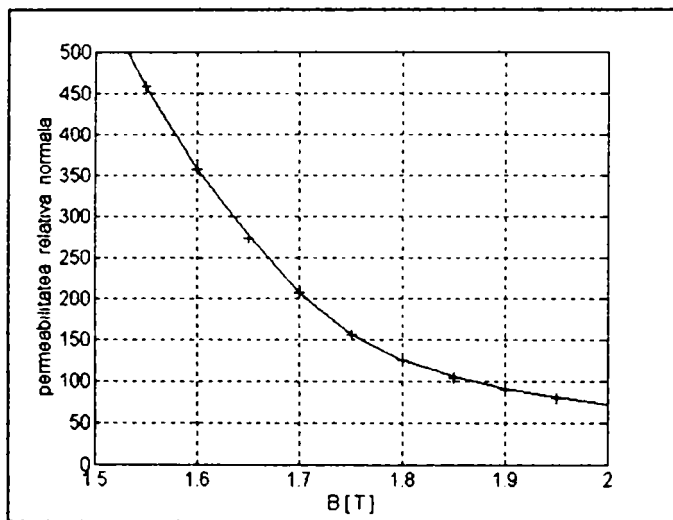


Fig.5.16. Detaliu de variație a lui μ_n la valori mari ale inducției

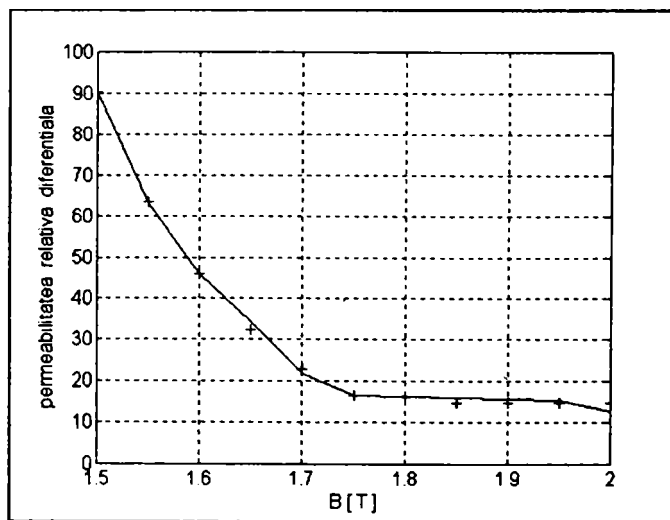


Fig.5.17. Detaliu de variație a lui μ_d la valori mari ale inducției

În Anexa 2 sunt date tabelar încă două curbe de magnetizare pentru alte sortimente de tablă de 0,5 mm pentru tole și o curbă de magnetizare pentru oțel.

5.4. Caracteristicile mașinii de inducție

În prezenta lucrare se urmărește variația curentului de fază absorbit de mașina de inducție, variația cuplului electromagnetic, precum și variația factorului de putere.

Curentul de fază \underline{I}_1 se determină din sistemul de ecuații (5.3):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{01} - \underline{I}'_2 \quad (5.30)$$

în care \underline{I}_{01} este curentul de funcționare în gol. În figura 5.19 sunt reprezentați acești curenți în planul complex.

Modulul curentului de fază absorbit în stator este în consecință:

$$I_1(s) = \sqrt{(I_{0a} + I'_{2a})^2 + (I_{\mu} + I'_{2r})^2} \quad (5.31)$$

I_{0a} este componenta activă a curentului de funcționare în gol și se determină cu:

$$I_{0a} = \frac{P_o}{3 \cdot U_1} \quad (5.32)$$

unde P_o este puterea activă măsurată la funcționarea în gol a mașinii de inducție.

I_{μ} este componenta reactivă (de magnetizare) a curentului de funcționare în gol și se calculează cu relația:

$$I_{\mu} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{12} \cdot \frac{p \cdot U_m}{N_1 \cdot k_b} \quad (5.33)$$

în care U_m este tensiunea magnetomotoare pe o pereche de poli, iar k_b factorul total de înfășurare.

Calculul tensiunii magnetomotoare se efectuează însumând tensiunile magnetice din întrefier, dinți și juguri, ținând cont de curba de magnetizare a materialului din care sunt ștanțate tolele.

I'_{2a} este componenta activă a curentului rotoric raportat la stator, care poate fi calculată cu ajutorul parametrilor electrice ai schemei echivalente din figura 5.1:

$$I'_{2a} = \frac{U_1 \cdot \left[R_1 + \left(1 + \frac{X_{\sigma 1}}{X_m} \right) \cdot \frac{R'_2}{s} \right]}{\left[R_1 + \left(1 + \frac{X_{\sigma 1}}{X_m} \right) \cdot \frac{R'_2}{s} \right]^2 + \left[X_{\sigma 1} + \left(1 + \frac{X_{\sigma 1}}{X_m} \right) \cdot X'_{\sigma 2} \right]^2} \quad (5.34)$$

în care s este alunecarea mașinii de inducție.

I'_{2r} este componenta reactivă a curentului rotoric raportat la stator, care se poate calcula în mod similar cu relația:

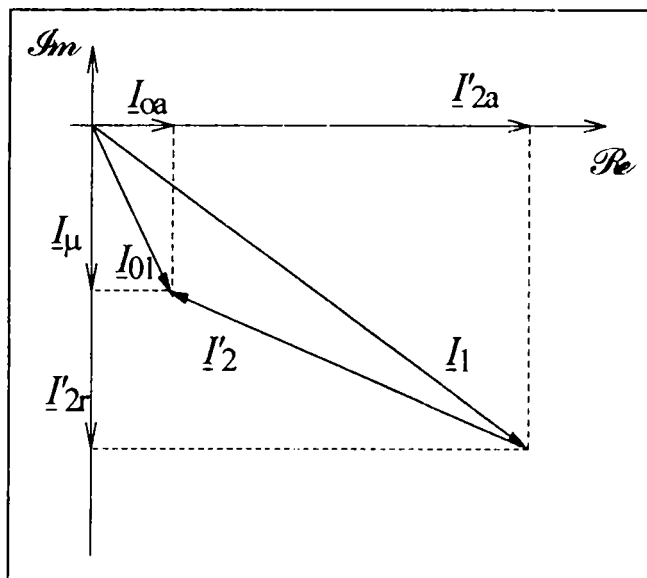


Fig.5.19. Curentii mașinii de inducție în planul complex

$$I'_{2r} = \frac{U_1 \cdot \left[X_{\sigma 1} + \left(1 + \frac{X_{\sigma 1}}{X_m} \right) \cdot X'_{\sigma 2} \right]}{\left[R_1 + \left(1 + \frac{X_{\sigma 1}}{X_m} \right) \cdot \frac{R'_2}{s} \right]^2 + \left[X_{\sigma 1} + \left(1 + \frac{X_{\sigma 1}}{X_m} \right) \cdot X'_{\sigma 2} \right]^2} \quad (5.35)$$

Cuplul electromagnetic se determină pe baza puterii electromagnetice transmise prin întrefier, P_{em} , raportată la viteza unghiulară a arborelui mașinii, Ω :

$$M(s) = \frac{P_{em}}{\Omega} = \frac{P_{cu2}}{s \cdot \Omega} = \frac{3p \cdot R'_2 \cdot I_2'^2}{2\pi \cdot f_1 \cdot s} = \frac{3p}{2\pi f_1} \cdot U_1^2 \cdot \frac{R'_2}{s} \cdot \frac{1}{\left[R_1 + \left(1 + \frac{X_{\sigma 1}}{X_m} \right) \cdot \frac{R'_2}{s} \right]^2 + \left[X_{\sigma 1} + \left(1 + \frac{X_{\sigma 1}}{X_m} \right) \cdot X'_{\sigma 2} \right]^2} \quad (5.36)$$

unde P_{cu2} reprezintă pierderile în barele coliviei rotorice.

Factorul de putere se poate determina, cu o precizie suficient de bună, considerând în figura 5.19 tensiunea de fază plasată în axa reală. El este în acest caz:

$$\cos \varphi = \frac{I_{0a} + I'_{2a}}{I_1} \quad (5.37)$$

relație în care I_{0a} este determinat cu (5.32), I'_{2a} cu (5.34) și I_1 cu (5.31).

5.5. Influența pierderilor în fier

La pornire, atunci când alunecarea motorului de inducție are valori apropiate de 1, pierderile în fier produse de armonicile superioare de spațiu, sunt influențate de factori care produc următoarele efecte:

- 1) apariția unui singur flux semnificativ în mașină, fluxul de dispersie;
- 2) pentru frecvențe la care adâncimea de pătrundere în miezul feromagnetic este mică în raport cu grosimea tolei, se consideră că câmpul magnetic penetrează capătul dinților aproximativ cu adâncimea de pătrundere;
- 3) modificarea căii de parcurgere a fluxului, ca urmare a distribuției neuniforme a curentului în barele rotorice, produsă de efectul pelicular;
- 4) un câmp important de reacție produs de curenții turbionari din miezul feromagnetic al mașinii.

Distribuția fluxului de dispersie pentru armonicile superioare este prezentată în figura 5.20. După cum se observă, fluxul din întrefier, ϕ_m (identic cu fluxul mutual), și fluxul rotor de dispersie, $\phi_{\sigma r}$, sunt aproximativ egale și în aceste condiții, nu există flux în miezul rotor (figura 5.20.b). Pierderile în miez tind să se concentreze în dinții statorului și în porțiunea din miezul statoric situată lângă baza creștăturii. Pierderi mai mici există și în dinții rotorici, cauzate de fluxul rotor de dispersie. Cu $\phi_{\sigma s}$ este notat fluxul statoric de dispersie.

Variațiile pierderilor în fier cu frecvența pot fi studiate cu modelul descris de relația:

$$P_{fe} = P_h + P_w = \left(k_h \cdot B^n \cdot f + k_w \cdot B^2 \cdot f^2 \right) \cdot V \quad (5.38)$$

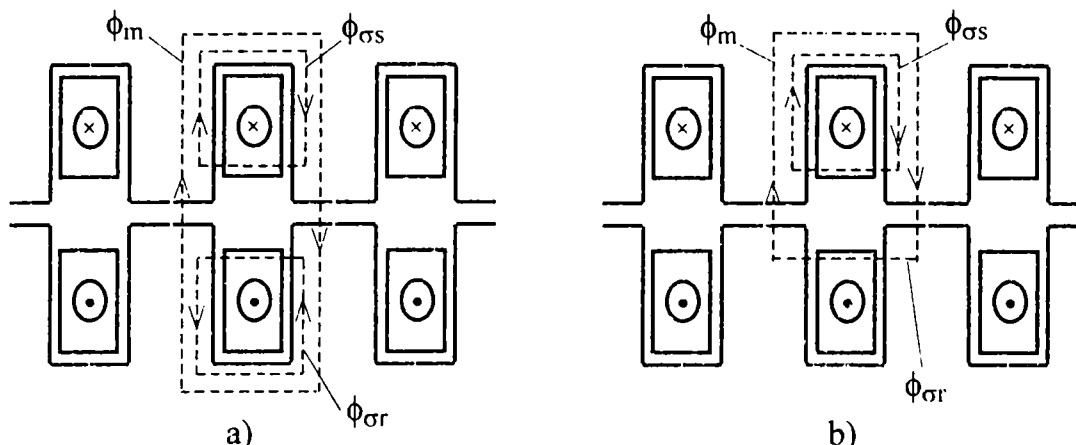


Fig.5.20.Traiectoriile fluxului magnetic la motorul de inducție
a) în regim nominal; b) la pornire.

- în care : P_{fe} - pierderile totale în miezul feromagnetic;
- P_h - pierderile prin histerezis;
- P_w - pierderile prin curenți turbionari;
- k_h și k_w - constante de material;
- $n = 1 \dots 1,5$ - exponent de histerezis;
- V - volumul miezului feromagnetic.

Acest model poate fi utilizat doar în cazuri simple, în care se neglijează câmpul de reacție produs de curenții turbionari și efectul pelicular.

În cazul existenței armonicilor, fluxul total de dispersie, $\phi_{\sigma v}$, este produs de armonica de ordinul v a tensiunii U_v :

$$\phi_{\sigma v} = k_v \frac{U_v}{f_v} \tag{5.39}$$

și inducția magnetică corespunzătoare este dată de relația:

$$B_v = \frac{\phi_{\sigma v}}{S_e} \tag{5.40}$$

cu S_e - suprafața efectivă a căii fluxului de dispersie. Această suprafață este diferită pentru fiecare porțiune a căii de dispersie. În general, pentru o analiză globală este suficient să se considere o suprafață medie pentru întreaga traiectorie.

Câmpul de reacție produs de curenții turbionari reduce inducția magnetică din mașină și redistribuie câmpul. Micșorarea câmpului nu va avea loc și pentru câmpul de dispersie, fluxul total de dispersie având o valoare fixă dată de relația (5.39). Orice tendință de a reduce acest flux conduce la creșterea curentului absorbit de motor pentru a menține fluxul la valoarea necesară.

În consecință, câmpul de reacție al curenților turbionari micșorează inductanțele de dispersie. Această reducere este amplificată și de efectul pelicular din bare.

Efectul de redistribuire a fluxului de dispersie limitează câmpul de dispersie în regiunile de lângă crestătură și în întrefier. Câmpul va penetra tola pe o adâncime de aproximativ:

$$\delta_{fe} = \sqrt{\frac{\rho_{fe}}{\pi \cdot \mu_{fe} \cdot f_v}} \tag{5.41}$$

unde ρ_{fe} - rezistivitatea fierului; μ_{fe} - permeabilitatea magnetică a fierului.

Inducția câmpului magnetic este presupusă uniformă peste această distanță. Pe baza acestor ipoteze se determină suprafața efectivă S_e funcție de frecvență.

Adâncimea de pătrundere a câmpului în conductor este :

$$\delta_{cu} = \sqrt{\frac{\rho_{cu}}{\pi \cdot \mu_{cu} \cdot f_v}} \tag{5.42}$$

unde ρ_{cu} - rezistivitatea conductorului; μ_{cu} - permeabilitatea magnetică a conductorului.

Dacă t este diametrul (grosimea) conductorului, iar d grosimea tolei, se pot distinge trei cazuri:

1) $\delta_{cu} \gg t$ și $\delta_{fe} \gg d$; cazul corespunde armonicilor de frecvență joasă. Pierderile în fier se calculează cu relația (5.38), cu inducția magnetică din relația (5.40), unde suprafața S_e este constantă. Rezultă:

$$P_{fe} = (k_{hl} \cdot U_v^n \cdot f^{1-n} + k_{wl} U_v^2) \cdot V \tag{5.43}$$

unde k_{hl} și k_{wl} sunt constante.

Pentru o tensiune de alimentare corespunzătoare armonicilor de ordinul v , $U_v = \text{const.}$, pierderile depind de n , exponentul pierderilor prin histerezis. Având în vedere că $n > 1$, pierderile se vor micșora cu creșterea frecvenței. Cum pierderile prin histerezis sunt mici în comparație cu pierderile produse de curenții turbionari, pierderile totale din fier, P_{fe} , sunt practic independente de armonicile superioare.

2) $\delta_{cu} < t$ și $\delta_{fe} \gg d$; în acest caz, efectul pelicular din barele rotorice are o influență majoră asupra pierderilor în fier. La fel cum efectul pelicular împinge curentul rotoric către vârful barei, tot așa și fluxul de dispersie rotoric este împins către suprafața rotorului (vârful dinților). Scăzând suprafața prin care se închide fluxul rotoric de dispersie, crește inducția magnetică. Se micșorează și volumul miezului feromagnetic care conduce fluxul. Inductanța de dispersie rotorică scade și fluxul total de dispersie este obligat să se închidă prin traiectoria fluxului statoric de dispersie. Aceasta conduce la creșterea fluxului statoric de dispersie. Rezultatul este creșterea pierderilor cu pătratul inducției magnetice. Considerând traiectoriile fluxului fixe, pierderile prin curenți turbionari sunt independente de frecvență, dacă creșterea frecvenței este compensată de scăderea inducției. În acest caz pierderile prin histerezis scad și devin neglijabile.

3) $\delta_{cu} < t$ și $\delta_{fe} < d$; dacă frecvența armonicilor este suficient de mare, astfel încât adâncimea de pătrundere în fier, δ_{fe} , este mică în comparație cu grosimea tolei, fluxul de dispersie poate fi considerat concentrat într-un strat egal cu adâncimea de pătrundere, conform figurii 5.21.

Zonele hașurate conduc fluxul de dispersie. Pierderile în fier sunt mari la baza creștăturii statorice, unde se află concentrat fluxul total de dispersie. Fluxul din întrefier și de pe suprafața rotorului reprezintă fluxul rotoric de dispersie. În această situație se pot neglija pierderile prin histerezis. Dacă l este lungimea axială a miezului feromagnetic, atunci suprafața efectivă este $S_e = l \delta_{fe}$ și inducția magnetică din relația (5.40) devine:

$$B_v = k_v \frac{U_v}{f_v \cdot l \cdot \delta_{fe}} = k_v \frac{U_v}{l \cdot \sqrt{\frac{\rho_{fe} \cdot f_v}{\pi \cdot \mu_{fe}}}} = k \cdot f_v^{-0,5} \cdot U_v \tag{5.44}$$

iar pierderile în fier :

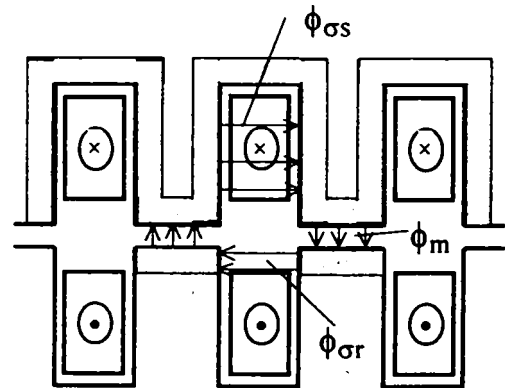


Fig.5.21. Traiectoria fluxului pentru armonici superioare de frecvență ridicată

$$P_{fev} \approx k_w \cdot B_v^2 \cdot f_v^2 \cdot V \approx k_1 \cdot U_v^2 \cdot f_v \quad (5.45)$$

Pentru o valoare fixă a tensiunii corespunzătoare armonicii v , pierderile prin curenți turbionari tind să crească lent cu f_v .

5.6. Concluzii

Pentru identificarea corectă a motorului de inducție pe întregul domeniu de viteze de rotație, se alege o schemă electrică echivalentă în care toți parametrii electrici sunt considerați variabili. Excepție poate face rezistența statorică de fază, a cărei valoare este stabilită pentru temperatura maximă de funcționare, corespunzătoare clasei de izolație a motorului.

Considerarea saturației magnetice și a pierderilor în fier este importantă pentru stabilirea modelului matematic.

Identificarea precisă și rapidă a curbei de magnetizare a materialului utilizat pentru tole, conduce la obținerea parametrilor și caracteristicilor motorului cu erori cât mai mici.

6. METODĂ DE IDENTIFICARE A INDUCȚIILOR MAGNETICE LA MOTORUL DE INDUCȚIE

În acest scop am utilizat un program [111], elaborat pe baza unei metode numerice de calcul, metoda elementelor finite. Primele studii de câmp le-am efectuat cu programul FEMAG [107], am continuat cu FLUX 2D [108] și cu ELCUT [106], prezentele rezultate fiind obținute cu QuickField [111]. Cu ajutorul acestor programe se determină potențialul vector în nodurile domeniului discretizat.

Dintre motoarele de inducție studiate, am ales exemple de la mașina de 1,5 kW cu 4 poli, produsă de Electromotor S.A. Timișoara.

Problema este considerată plan-paralelă și studiul este efectuat pe jumătate de pas polar. Se utilizează sistemul de coordonate carteziene. Porțiunea plană studiată este o porțiune din tola stator și din tola rotor. Din considerente de simetrie se analizează o jumătate de pas polar. Se desenează punctele care definesc geometria zonei considerate. Aceste puncte se unesc prin drepte sau arce de cerc, obținând configurația geometrică finală.

Figura obținută se împarte în blocuri, regiuni care conțin puncte cu aceleași proprietăți de material. Blocurile considerate în acest program sunt prezentate în figura 6.1:

1. "tola" - se referă la miezul feromagnetic din stator și din rotor; are o caracteristică neliniară, inducția magnetică obținându-se prin interpolarea valorilor date tabelar în anexa 2;
2. "cu" - se referă la bobinajul statoric, caracterizat prin densitatea de curent la un moment dat; se definește un număr corespunzător de astfel de blocuri (cu1, cu2, cu3, cu4), în funcție de numărul de bobine elementare, amplitudinea și sensul curentului prin ele;
3. "al" - se referă la barele coliviei rotorice; este caracterizat prin densitatea de curent considerată la același moment ca și cel din înfășurarea statorică; se definește un număr corespunzător de astfel de blocuri (al1, al2, al3, etc.), în funcție de amplitudinea și sensul curentului prin fiecare bară.

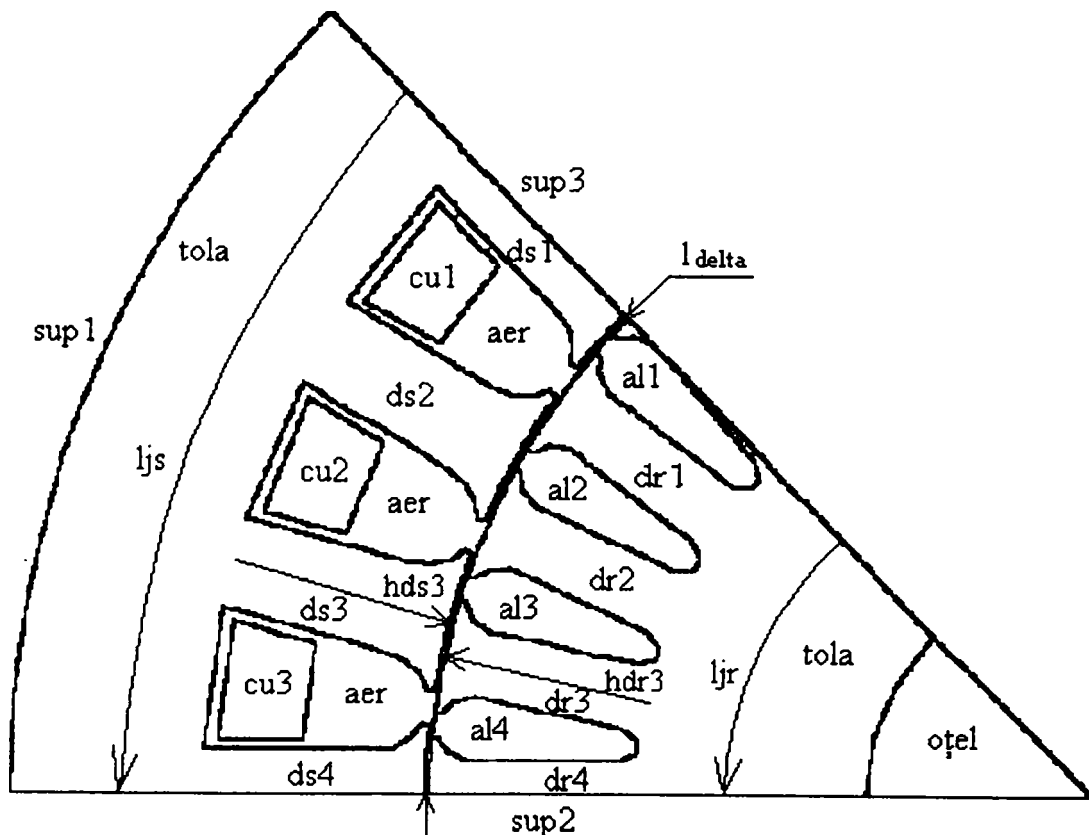


Fig.6.1. Blocurile și frontierele domeniului studiat

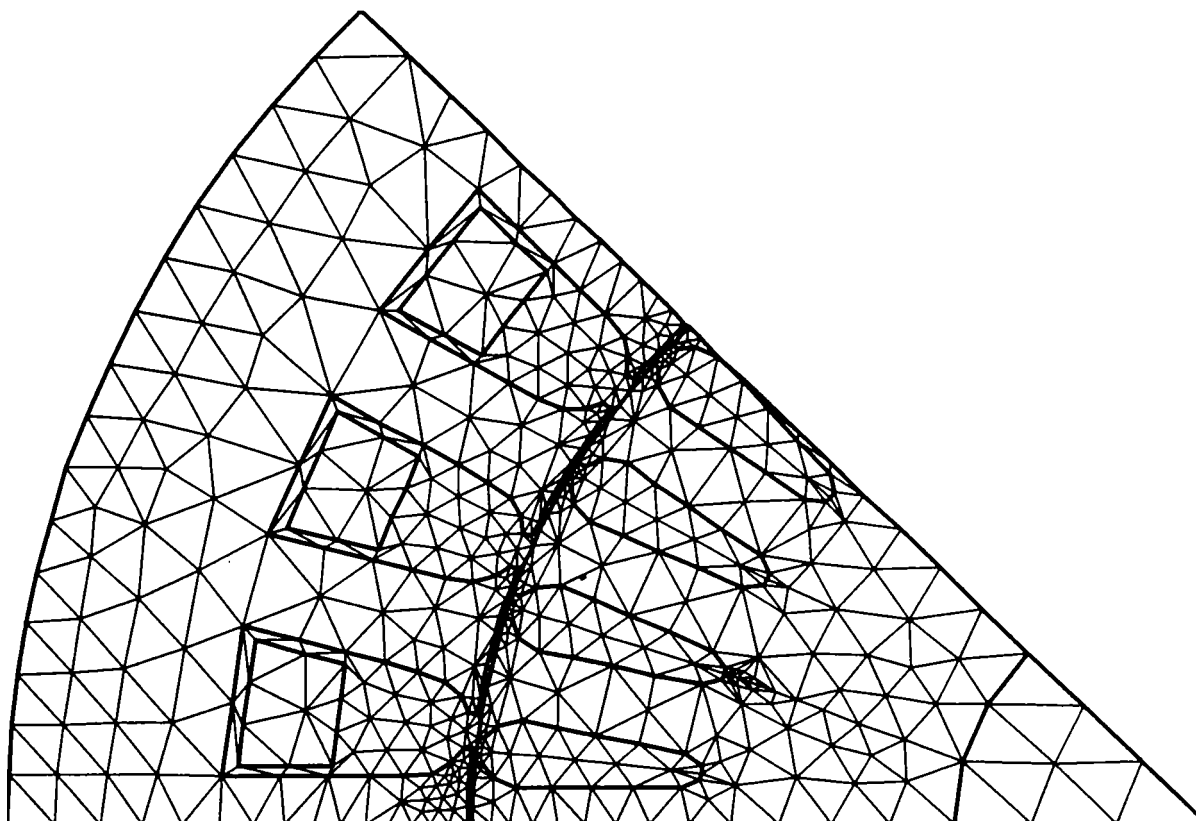


Fig.6.2. Rețea de discretizare

Stabilirea densității de curent în barele rotorice este o problemă dificilă, circuitul magnetic al domeniului de calcul fiind asimetric din punct de vedere al reluctanței magnetice. În cazul studiului magnetostatic al pornirii motorului (rotor în repaus), se consideră că solenația din stator este egală și de semn contrar cu cea din rotor, la momentul considerat [89]. Această observație simplifică determinarea densității de curent în barele rotorice.

La funcționarea în gol, când alunecarea $s \rightarrow 0$, densitatea de curent în bare $j \rightarrow 0$.

4. “aer” - se referă la spațiul ocupat de întrefier și de izolațiile și penele din creștăturile statorice; se poate considera și un mic spațiu în exteriorul tolei stator; caracterizat prin permeabilitate magnetică relativă unitară.
5. “oțel” - se referă la arborele mașinii, caracterizat printr-o caracteristică neliniară, valorile inducției fiind obținute prin interpolarea caracteristicii dată tabelar în anexa 2.

Se definesc, de asemenea, condițiile pe frontiera domeniului analizat, în două cazuri:

1) când se consideră densitatea de curent în “cu1” maximă, respectiv, în “cu2” și “cu3” pe jumătate (vezi figura 4.1.a):

- pe suprafețele “sup1” și “sup2” condiții de tip Dirichlet, $A = 0$;
- pe suprafața “sup3” condiții de tip Neumann, $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$. În acest caz “sup3” reprezintă axa de simetrie a liniilor de câmp.

2) când se consideră densitatea de curent în “cu1” nulă, iar în “cu2” și în “cu3” $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ din densitatea maximă (vezi figura 4.1.b):

- pe suprafețele “sup1” și “sup3” condiții de tip Dirichlet, $A = 0$;
- pe suprafața “sup2” condiții de tip Neumann, $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$. În acest caz “sup2” reprezintă axa de simetrie a liniilor de câmp.

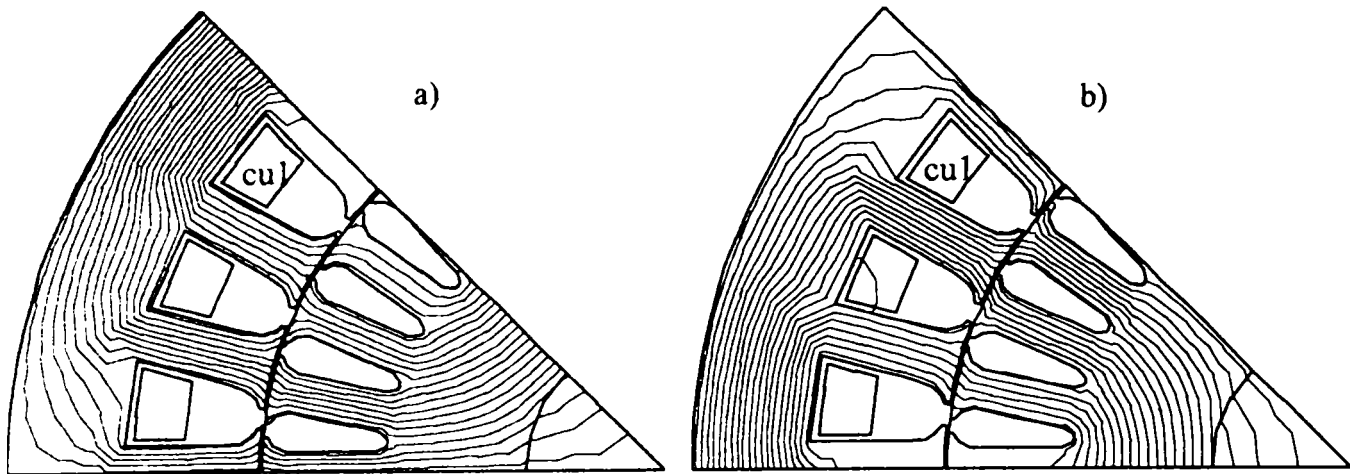


Fig.6.3. Configurația liniilor de câmp în domeniul studiat
 a) când densitatea de curent în "cu1" este maximă;
 b) când densitatea de curent în "cu1" este nulă.

Pentru obținerea unei rețele de discretizare sub formă triunghiulară (figura 6.2), dreptele și arcele de cerc se împart în subdiviziuni. Numărul acestora se alege cât mai mare în zonaș întrefierului.

Prin discretizarea domeniului se obțin "n" elemente triunghiulare. Pentru fiecare element se scrie sistemul de ecuații (2.157), ținând cont și de simplificările care se pot opera datorită condițiilor de frontieră impuse.

Se calculează potențialul vector, A , în fiecare nod considerat. Unind punctele echipotențiale ale lui A , se obțin configurațiile din figura 6.3.a) sau din figura 6.3.b), în funcție de amplitudinea și sensul curentului prin conductoarele statorice. În exemplele următoare se consideră doar primul caz, când câmpul magnetic are valoarea maximă.

Cunoscând valorile potențialului vector, se determină inducția magnetică (B_x și B_y), respectiv permeabilitatea magnetică relativă, în fiecare nod al domeniului studiat.

6.1. Identificarea inducțiilor magnetice la funcționarea în gol

În conductoarele statorice se introduc densitățile de curent corespunzătoare funcționării în gol a motorului de inducție alimentat la tensiunea nominală de linie, $U = 380$ V. Amplitudinea curentului de fază la mersul în gol este $I_{0max} = 3,02$ A . Dacă a, b, c, sunt cele trei faze ale mașinii, atunci $j_a = 4,838$ A/mm² (în "cu1" din figura 6.1) și $j_b = j_c = 2,419$ A/mm² (în "cu2" și "cu3"). Semnul curentului este pozitiv în cele trei crestături, conform figurii 4.1.a și schemei de înfășurare din Anexa 4, figura 2. Având în vedere că turația mașinii de inducție este foarte apropiată de sincronism, densitatea de curent în barele rotorice poate fi considerată nulă.

Rulând programul, se obțin valorile potențialului vector \vec{A} , prezentate în trepte de culoare, în figura A.3.1.a) din Anexa 3. În figură se pot observa liniile echipotențiale ale lui \vec{A} . În etapa următoare se calculează inducția magnetică \vec{B} , ale cărei valori sunt ilustrate prin trepte de culoare în figura A.3.2.a) din Anexa 3. Am determinat apoi inducția magnetică în cei patru dinți statorici, în cei patru dinți rotorici, în jugul statoric, în jugul rotoric și în întrefier.

Următoarea rulare a programului am efectuat-o pentru tensiunea de linie, $U = 300$ V, caz în care densitățile de curent pe cele trei faze sunt $j_a = 3,5$ A/mm², $j_b = j_c = 1,75$ A/mm².

Am determinat inducțiile magnetice în dinții statorici și rotorici, în juguri și în întrefier.

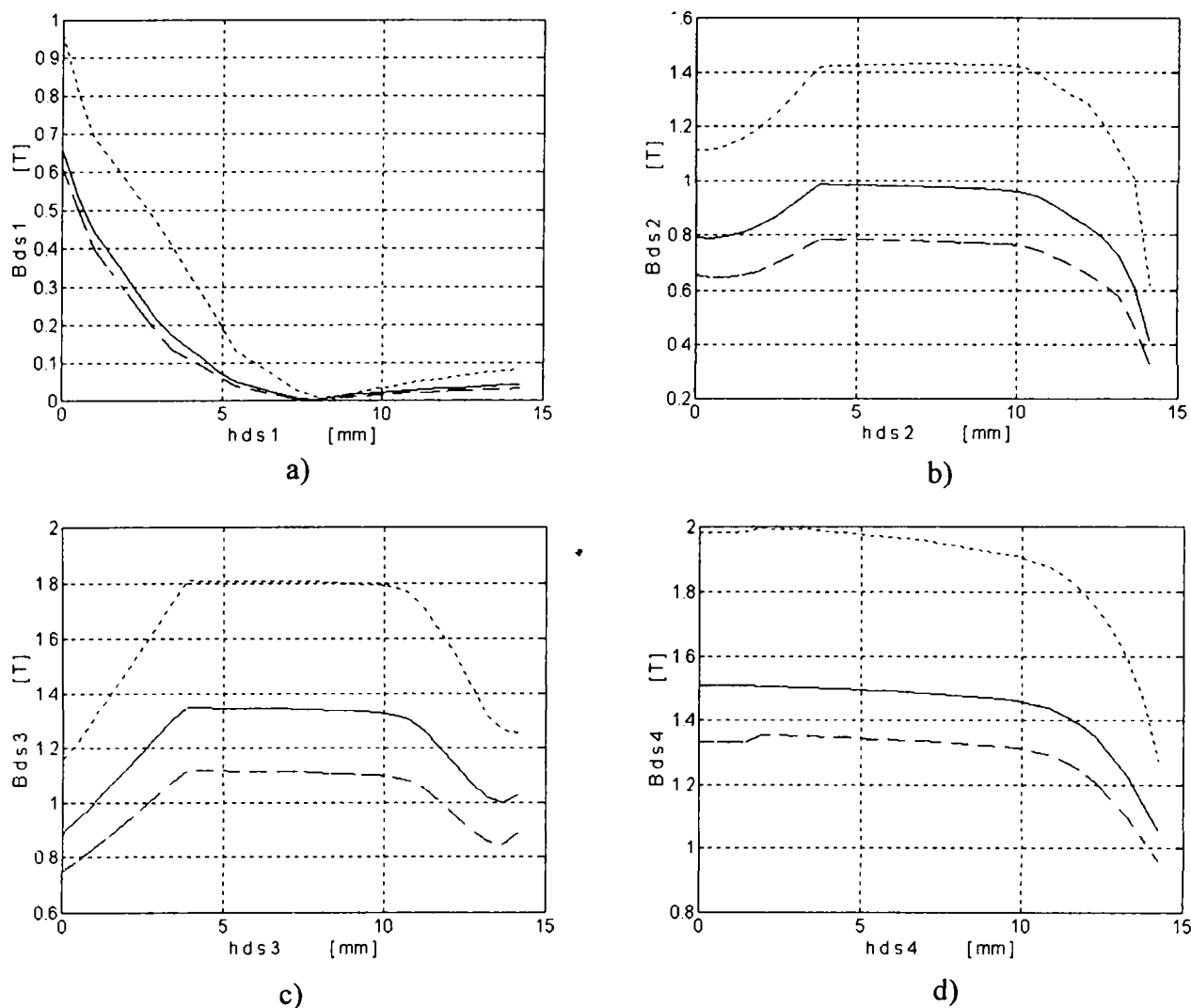


Fig.6.4. Variația inducției magnetice în dinții statorici : a) “ds1”; b) “ds2”; c) “ds3”; d) “ds4”; în raport cu înălțimea dinților, la funcționarea în gol a motorului de inducție alimentat la tensiunea
 -- $U_{linie} = 300$ V; — $U_{linie} = 380$ V; ··· $U_{linie} = 600$ V

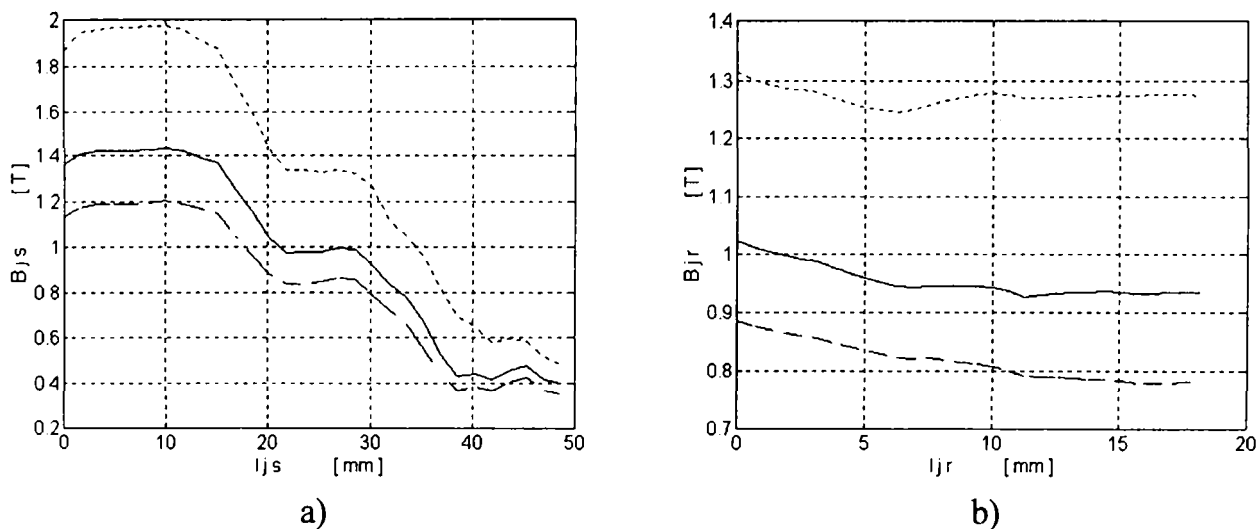


Fig.6.5. Variația inducției magnetice : a) în jugul statoric; b) în jugul rotoric; în raport cu lungimea jugului, la funcționarea în gol a motorului de inducție alimentat la tensiunea
 -- $U_{linie} = 300$ V; — $U_{linie} = 380$ V; ··· $U_{linie} = 600$ V

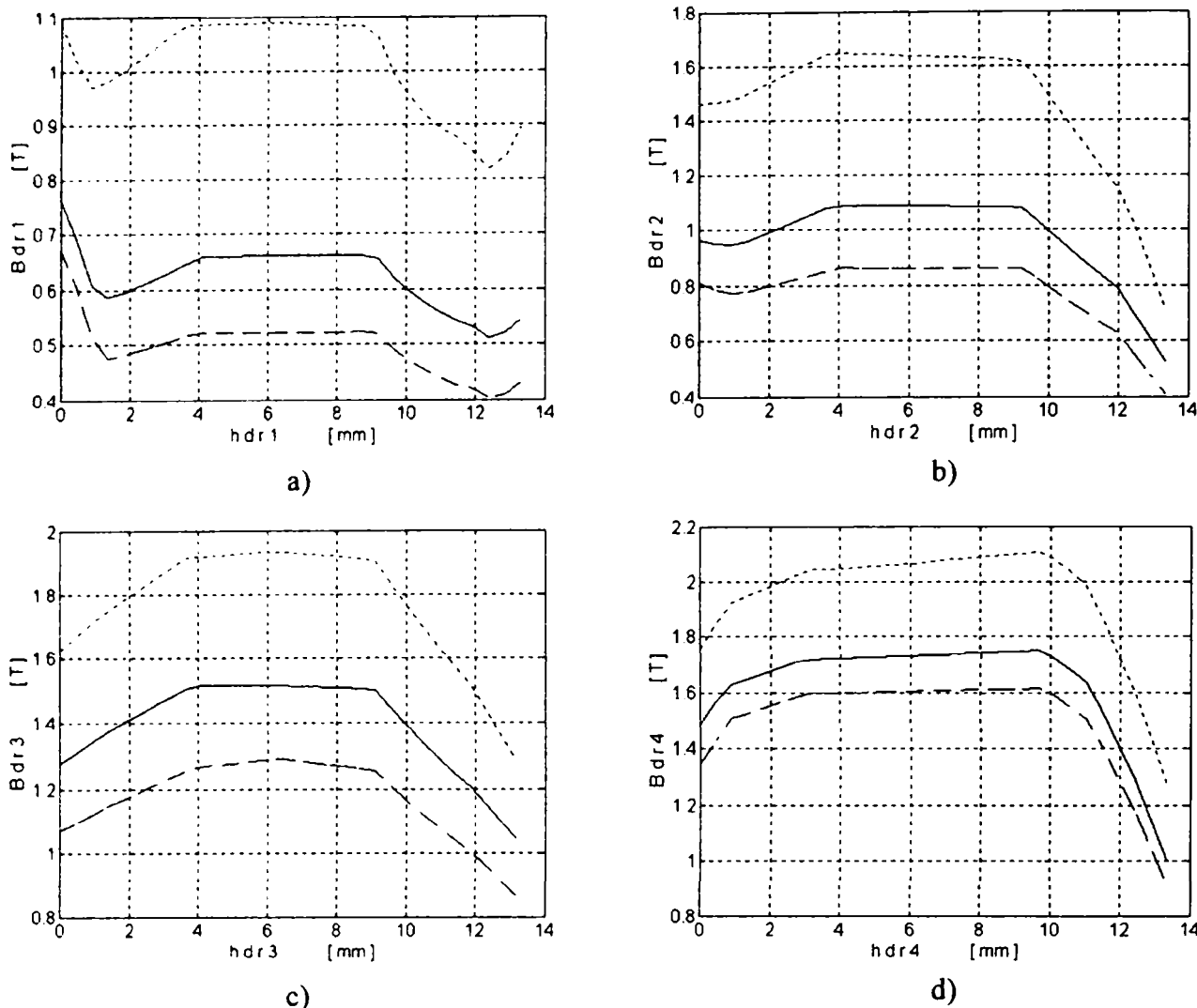


Fig.6.6. Variația inducției magnetice în dinții rotorici : a) “dr1”; b) “dr2”; c) “dr3”; d) “dr4”; în raport cu înălțimea dinților, la funcționarea în gol a motorului de inducție alimentat la tensiunea
 -- $U_{linie} = 300$ V; — $U_{linie} = 380$ V; ··· $U_{linie} = 600$ V

A treia rulare am efectuat-o pentru tensiunea de linie $U = 600$ V. Densitățile de curent pe cele trei faze sunt în acest caz $j_a = 18,768$ A/mm², respectiv, $j_b = j_c = 9,384$ A/mm². Variația potențialului vector în secțiunea analizată este prezentată în figura A.3.1.b) din Anexa 3, iar variația inducției magnetice în figura A.3.2.b) din Anexa 3. Ca și în cazurile anterioare, am determinat inducțiile magnetice în dinții statorici și rotorici, în juguri și în întrefier.

Variația inducției magnetice, B_{ds} , în dinții statorici, în funcție de înălțimea dintelui, h_{ds} , este prezentată în figura 6.4 pentru cele trei tensiuni de alimentare menționate anterior. Dinții sunt cei notați în figura 6.1. Pentru dinte statoric “ds1” variația inducției magnetice este cea din figura 6.4.a, pentru dinte “ds2” cea din figura 6.4.b, pentru dinte “ds3” cea din figura 6.4.c și pentru dinte “ds4” cea din figura 6.4.d. Originea axelor este considerată la baza dintelui, în mijlocul ei. În toate figurile inducțiile magnetice sunt cele maxime. Se remarcă solicitarea magnetică diferită a dinților. Dintele aflat la frontiera “sup3” (cu condiții tip Neumann), este cel mai puțin solicitat, pe când cel de lângă frontiera “sup2” (cu condiții tip Dirichlet), are inducția cea mai mare.

Solicitarea dinților la creșterea tensiunii de alimentare este următoarea: la 300 V mașina funcționează cu trei dinți (din patru, pe jumătate de pas polar), pe porțiunea liniară a caracteristicii de magnetizare, la 380 V cu doi dinți, iar la 600 V cu numai un dinte nesaturat.

Valorile maxime ale inducției magnetice B_{js} și B_{jr} , în jugurile mașinii sunt prezentate în figura 6.5 în funcție de lungimile l_{js} , respectiv, l_{jr} (reprezentate în figura 6.1). Inducția din stator, din figura 6.5.a este mai mare decât cea din rotor, din figura 6.5.b. Originea axelor este considerată pe frontiera “sup3”. În privința tensiunilor de alimentare, se remarcă valorile saturate de la mașina alimentată la 600 V.

Variația inducției magnetice, B_{dr} , în dinții rotorici, în funcție de înălțimea dintelui, h_{dr} , este prezentată în figura 6.6 pentru cele trei tensiuni de alimentare analizate. Dinții sunt cei din figura 6.1. Pentru dinte rotoric “dr1” variația inducției magnetice este cea din figura 6.6.a, pentru dinte “dr2” cea din figura 6.6.b, pentru dinte “dr3” cea din figura 6.6.c și pentru dinte “dr4” cea din figura 6.6.d. Originea axelor este considerată la baza dintelui, în mijlocul ei.

La fel ca și în cazul statorului, dinte rotoric situat la frontiera “sup3” are valorile cele mai scăzute ale inducției magnetice. Dinte rotoric situat la frontiera “sup2” are valorile cele mai ridicate ale inducției magnetice. Crescând tensiunea de alimentare a mașinii, se majorează și valorile inducției magnetice în fiecare dinte rotoric.

Variația inducției magnetice B_{delta} în întrefierul motorului, în funcție de lungimea l_{delta} , este prezentată în figura 6.7.a. Lungimea l_{delta} este măsurată de la frontiera “sup3” la frontiera “sup2” în planul median al întrefierului (figura 6.1). Se observă atât creșterea valorilor inducției cu creșterea tensiunii de alimentare, cât și influența puternică a creșterii armăturilor asupra curbei de variație a inducției magnetice. Inducția are maxime (vârfuri), acolo unde dinții statorici și rotorici sunt față în față. Rezultatele din figura 6.7.a sunt pentru o jumătate de pas polar. Pentru studiul curbei de variație a inducției magnetice pe un pas polar, sau chiar pe dublu pas polar, am realizat cu ajutorul programului LabVIEW [110] un instrument virtual care modelează inducția pe acest interval. Programul are la bază fișierul cu datele obținute din analiza numerică pe jumătate de pas polar. Rezultatul obținut pentru dublul pas polar, la motorul care funcționează în gol alimentat la tensiunea nominală, $U = 380$ V, este prezentat în figura 6.7.b.

Schema bloc a programului de simulare CURBADAT este redată în figura 6.8. Primul bloc citește fișierul de date “bdelg.txt” (inducția magnetică în întrefier la funcționarea în gol), obținut după rularea programului de analiză numerică a câmpului magnetic. Sunt selectate coloanele de date “0”, pentru lungimea intervalului studiat, respectiv “2”, pentru valorile inducției magnetice în punctele corespunzătoare acestui interval. La intervalul existent se adaugă încă trei intervale de lungimea unei jumătăți de pas polar, obținându-se, prin concatenare, dublul pas polar.

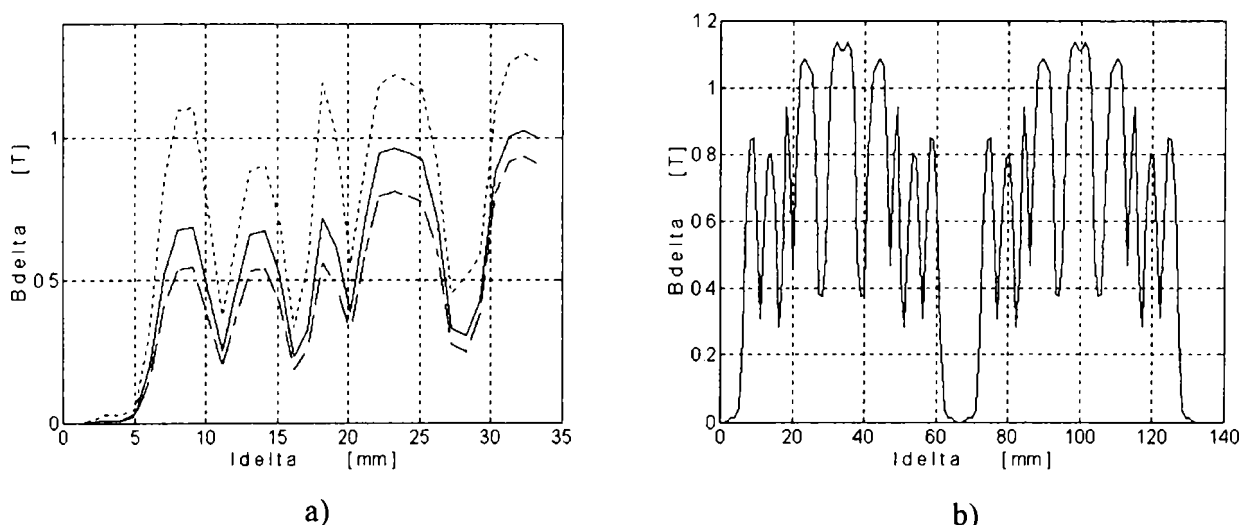


Fig.6.7. Inducția magnetică în întrefierul motorului de inducție în funcție de lungimea l_{delta}

a) pe jumătate de pas polar; la funcționarea în gol a motorului, alimentat la tensiunea

— — $U_{linie} = 300$ V; — $U_{linie} = 380$ V; ··· $U_{linie} = 600$ V

b) pe dublu pas polar, la funcționarea în gol a motorului, alimentat la $U_{linie} = 380$ V.

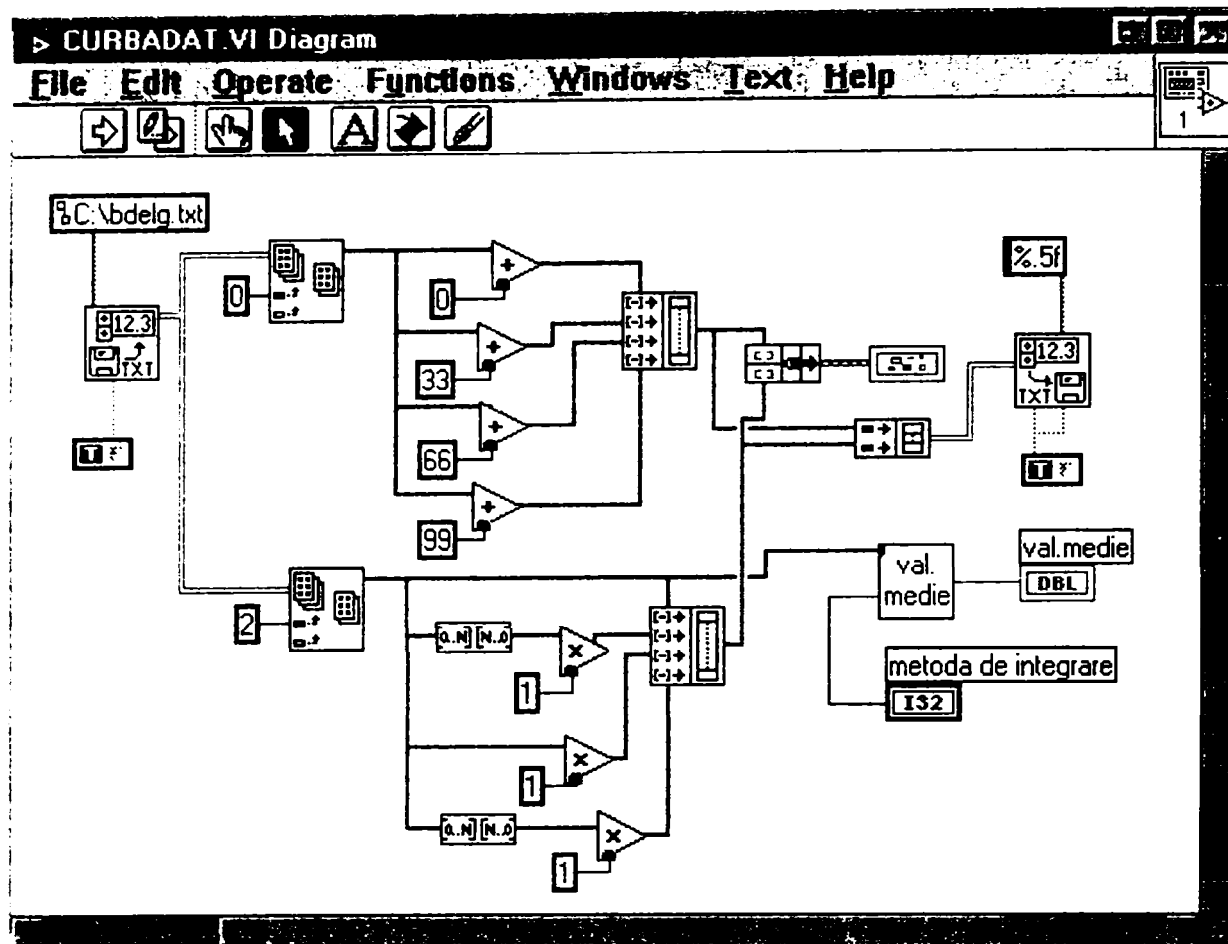


Fig.6.8. Schema bloc a instrumentului virtual de modelare a curbei de variație a inducției magnetice

La vectorul valorilor inducției magnetice se adaugă vectorul cu aceleași valori aranjate în ordine inversă, vectorul cu valorile inițiale și din nou un vector cu valorile ordonate invers. Acești vectori concatenați dau variația funcției pe dublul pas polar.

Programul CURBADAT conține și un subprogram pentru calculul valorii medii a inducției magnetice:

$$B_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T B(t)dt \tag{6.1}$$

Integrarea numerică este realizată cu formula trapezelor.

6.2. Identificarea inducțiilor magnetice la funcționarea în sarcină

În prima etapă am considerat motorul de inducție încărcat la puterea nominală. Tensiunea de alimentare de linie este cea nominală, $U = 380 \text{ V}$. Amplitudinea curentului de fază în acest regim este $I_{nmax} = 5,15 \text{ A}$. În conductoarele statorice se introduc densitățile de curent $j_a = 8,256 \text{ A/mm}^2$ (în “cu1” din figura 6.1) pentru faza a și $j_b = j_c = 4,128 \text{ A/mm}^2$ (în “cu2” și în “cu3”) pentru fazele b și c.

Rulând programul de calcul al câmpului electromagnetic, se obține variația potențialului vector \vec{A} , prezentată în trepte de culoare, în figura A.3.1.c) din Anexa 3. Se calculează apoi inducția magnetică \vec{B} , ale cărei valori sunt ilustrate prin trepte de culoare în figura A.3.2.c) din Anexa 3. Am determinat apoi inducția magnetică în cei patru dinți statorici, în cei patru dinți rotorici, în jugul statoric, în jugul rotorici și în întrefier.

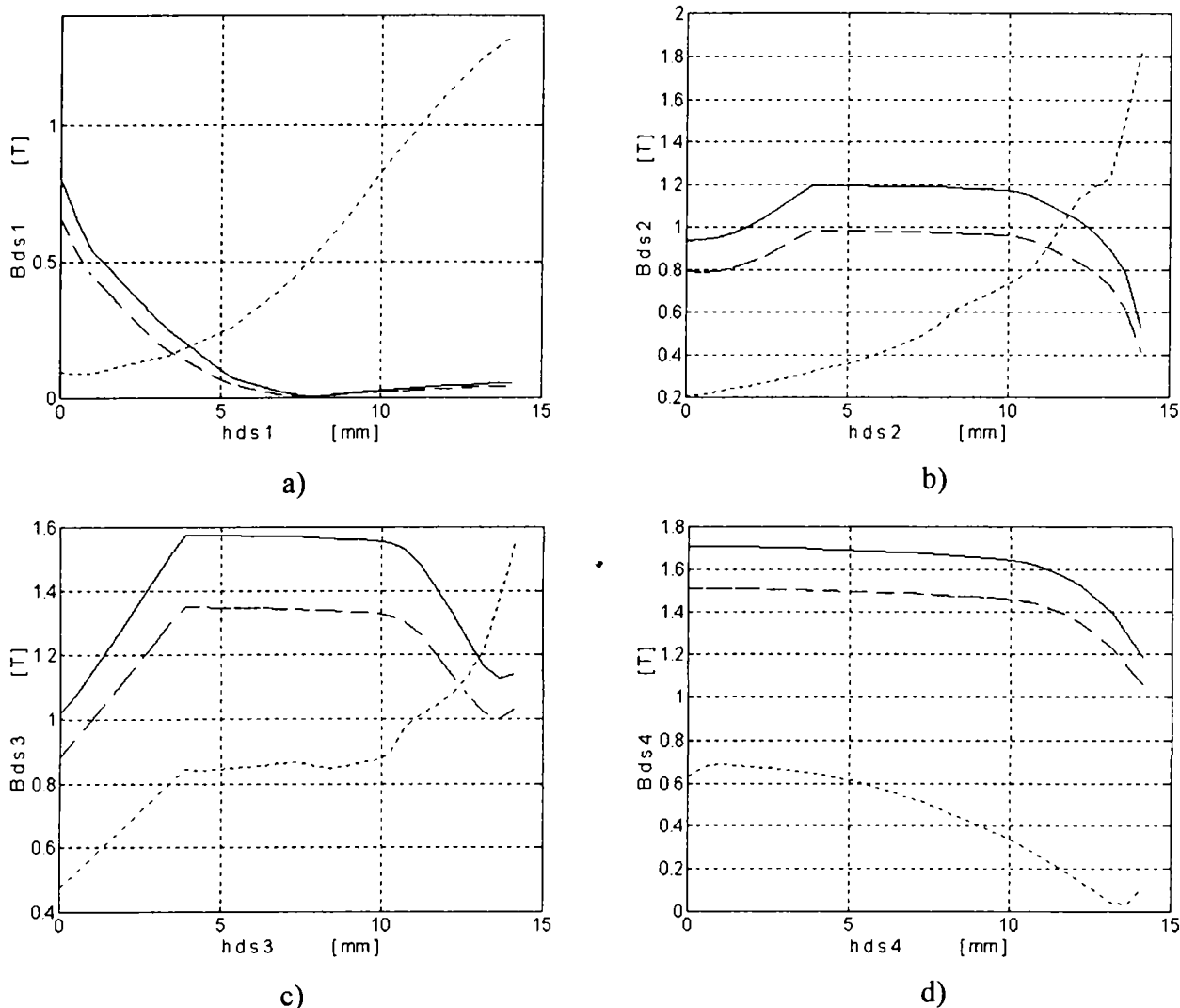


Fig.6.9. Variația inducției magnetice în dinții statorici : a) “ds1”; b) “ds2”; c) “ds3”; d) “ds4”;
 în funcție de înălțimea dinților, la funcționarea motorului de inducție
 alimentat la tensiunea $U_n = 380$ V
 -- în gol; — la putere nominală; ··· la scurtcircuit.

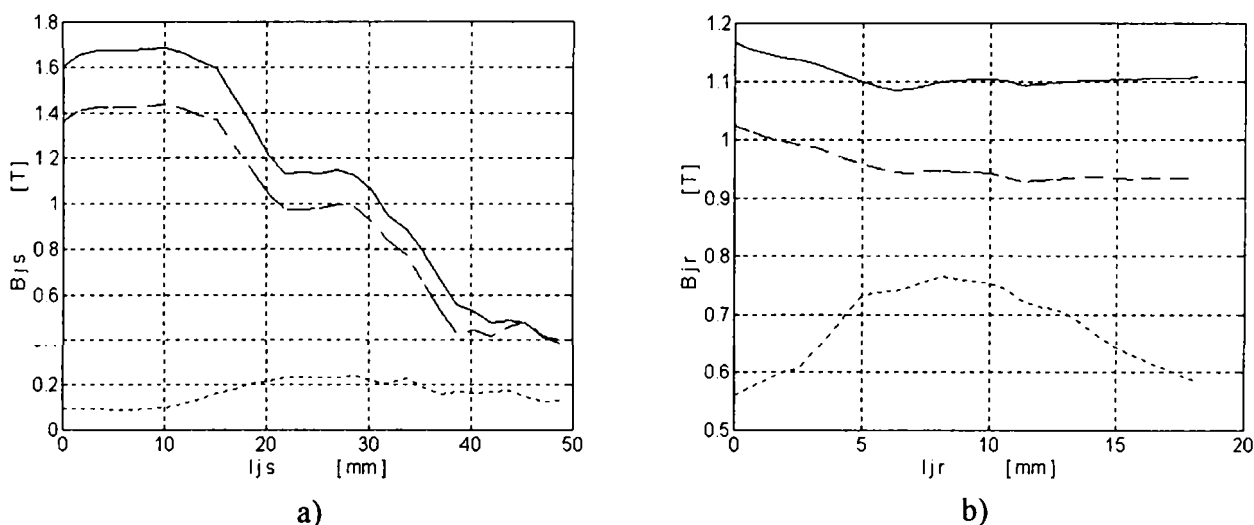


Fig.6.10. Variația inducției magnetice : a) în jugul statoric; b) în jugul rotoric;
 în funcție de lungimea jugului, la funcționarea motorului de inducție alimentat la tensiunea
 $U_n = 380$ V : -- în gol; — la putere nominală; ··· la scurtcircuit.

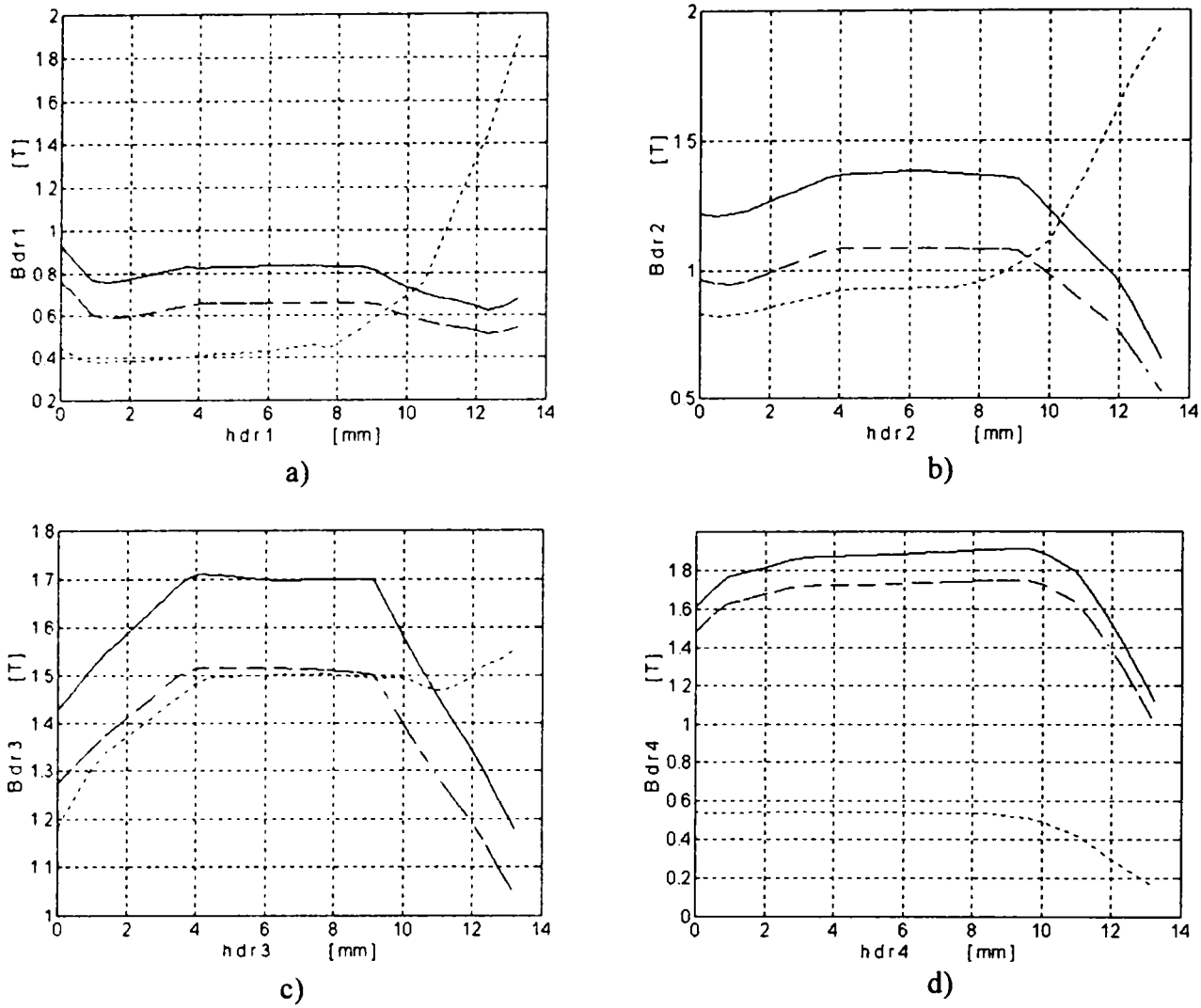


Fig.6.11. Variația inducției magnetice în dinții rotorici : a) “dr1”; b) “dr2”; c) “dr3”; d) “dr4”; în funcție de înălțimea dinților, la funcționarea motorului de inducție alimentat la tensiunea $U_n = 380 \text{ V}$: - - în gol; — la putere nominală; ··· la scurtcircuit.

În a doua etapă am considerat că mașina este încărcată cu sarcina maximă, respectiv, că este cu rotorul blocat. În acest regim de scurtcircuit mașina este alimentată cu tensiunea nominală. La o amplitudine a curentului de fază $I_{sccmax} = 29 \text{ A}$, se introduc în conductoarele din stator densitățile de curent $j_a = 46,58 \text{ A/mm}^2$ (în “cu1”) pe faza a , respectiv, $j_b = j_c = 23,29 \text{ A/mm}^2$ (în “cu2” și în “cu3”) pe fazele b și c.

Densitățile de curent din barele rotorice se determină considerând că solenația din rotor este egală și de semn contrar cu cea din stator. Se utilizează o metodă iterativă, cu o eroare impusă de 1%, astfel încât să se obțină în timp util curentul din bare. În algoritmul de calcul se ține cont și de refularea curentului din barele rotorice. Se determină o nouă înălțime a creștăturii rotorice, respectiv, o secțiune de calcul micșorată a barei, corespunzătoare porțiunii superioare a creștăturii. Împărțind curentul rezultat din solenație la secțiunea de calcul a barei se obține densitatea de curent utilizată în program. Valoarea densității introduse în barele “al1” și “al2” este $j = -29,25 \text{ A/mm}^2$, iar în barele “al3” și “al4” este $j = -17,12 \text{ A/mm}^2$.

Cu aceste valori am rulat programul de calcul al câmpului electromagnetic, obținând variația potențialului vector prezentată în figura A.3.1.d) din Anexa 3. Variația corespunzătoare a inducției magnetice este redată în figura A.3.2.d) din Anexa 3.

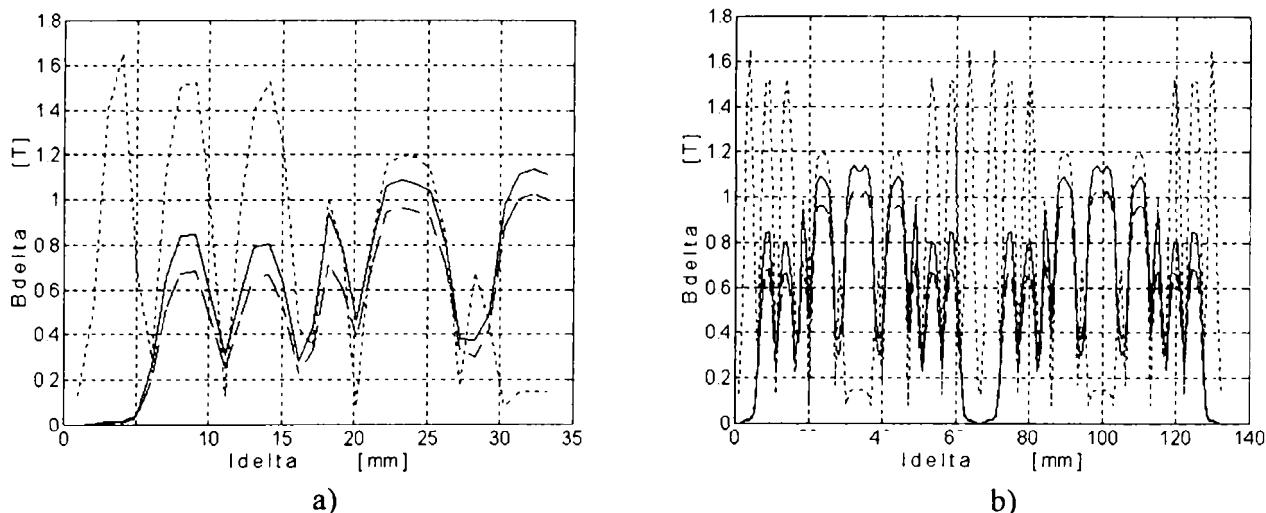


Fig.6.12. Inducția magnetică în întrefierul motorului de inducție în funcție de lungimea l_{delta}
 a) pe jumătate de pas polar; b) pe dublu pas polar
 la funcționarea motorului de inducție alimentat la tensiunea $U_n = 380 \text{ V}$:
 - - în gol; — la putere nominală; ··· la scurtcircuit.

Am determinat inducția magnetică în dinții statorici, în dinții rotorici, în jugul statoric, în jugul rotoric și în întrefier.

În figura 6.9 sunt prezentate comparativ inducțiile magnetice în dinții statorici la funcționarea în gol, la puterea nominală și la scurtcircuit. În toate cazurile motorul de inducție este alimentat la tensiunea nominală. Notațiile dinților sunt cele din figura 6.1. Se observă că, în cazul funcționării motorului la puterea nominală, inducția magnetică este în toți dinții mai mare decât în cazul funcționării în gol. Inducția magnetică în dintele de lângă frontiera “sup3” este foarte mică, pe când dintele de lângă frontiera “sup2” este mai solicitat.

La scurtcircuit, efectul câmpului de reacție din rotor este atât de mare încât micșorează pronunțat inducția magnetică din dinți și din juguri. Inducția în toți dinții este mică în corpul lor, valori mari semnalându-se doar în vârfurile dinților. Aceasta se poate observa mai bine în figura A.3.2.d) din Anexa 3.

Variația inducției magnetice în jugurile mașinii, la funcționarea în gol, la puterea nominală și la scurtcircuit, sunt prezentate în figura 6.10.a) pentru jugul statoric, respectiv, în figura 6.10.b) pentru jugul rotoric. Se constată o reducere pronunțată a inducției magnetice în jugul statoric, din aceleași cauze ca și în cazul dinților statorici.

În cazul dinților rotorici, variația inducției magnetice în funcție de înălțimea dintelui este prezentată comparativ, pentru aceleași regimuri de funcționare, în figura 6.11. La scurtcircuit, inducția magnetică în corpul dinților rotorici este aproape aceeași cu cea de la funcționarea în gol. Din figura A.3.2.d), din Anexa 3, se pot observa valorile mari ale inducției, de peste 2 T, care apar în vârfurile dinților.

Variația inducției magnetice în întrefierul mașinii în funcție de l_{delta} , în cele trei regimuri de funcționare studiate, este prezentată în figura 6.12. Conturul l_{delta} se află în planul median al întrefierului, având orientarea dinspre frontiera “sup3”, unde se află originea axelor, spre frontiera “sup2” (figura 6.1). În figura 6.12.a) se poate observa variația inducției pe o jumătate de pas polar, iar în figura 6.12.b) modelarea curbei de variație a inducției pe dublu pas polar. În acest scop este utilizat programul CURBADAT, din figura 6.8.

Variația inducției magnetice în întrefierul mașinii în funcție de l_{delta} , în cele trei regimuri de funcționare studiate, este prezentată în figura 6.12. Conturul l_{delta} se află în planul median al întrefierului, având orientarea dinspre frontiera “sup3”, unde se află originea axelor, spre

frontiera "sup2" (figura 6.1). În figura 6.12.a) se poate observa variația inducției pe o jumătate de pas polar, iar în figura 6.12.b) modelarea curbei de variație a inducției pe dublu pas polar. În acest scop este utilizat programul CURBADAT, din figura 6.8.

Același program este utilizat și pentru modelarea inducției magnetice în jugul statoric pe dublu pas polar. Rezultatele se pot observa în figura 6.13. De remarcat și în acest caz valoarea mică a inducției magnetice la scurtcircuitul mașinii.

6.3. Concluzii

Folosirea metodei elementelor finite este utilă la identificarea inducțiilor magnetice din dinții, jugurile și întrefierul motorului de inducție. Pentru obținerea unei viteze ridicate de calcul și de analiză, se impune alegerea unei porțiuni din circuitul magnetic al mașinii. Ținând cont de simetria existentă, în acest caz este utilă alegerea unei jumătăți de pas polar. Importantă este definirea corectă a condițiilor pe frontierele domeniului analizat, precum și a densităților de curent din conductoarele statorului și rotorului mașinii.

Metoda de identificare este asociată cu o metodă de modelare a variației inducției magnetice, ceea ce permite o apreciere mai bună a solicitărilor din mașină în regimurile de funcționare studiate. În acest caz s-au obținut curbele de variație a inducției în întrefier și în jugul statoric pe dublu pas polar.

Valorile inducțiilor astfel obținute sunt utilizate pentru determinarea parametrilor electrice și a caracteristicilor mașinii. Ele sunt utile, de asemenea, pentru o reproiectare sau optimizare a motorului de inducție.

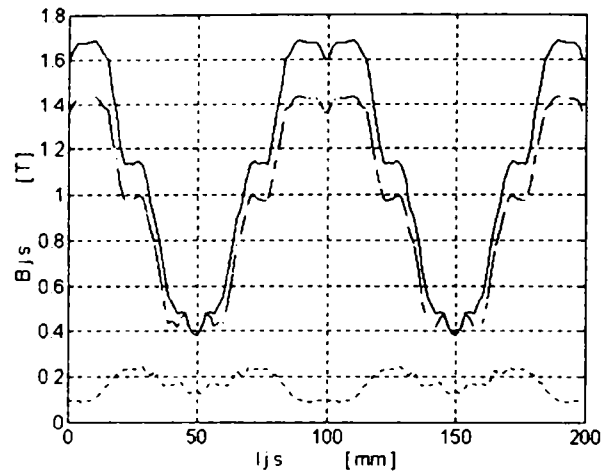


Fig.6.13. Inducția magnetică în jugul statoric în funcție de lungimea jugului, la funcționarea motorului de inducție
 -- în gol; — la putere nominală;
 ··· la scurtcircuit.

7. ESTIMAREA INDUCȚIEI MAGNETICE LA MOTORUL DE INDUCȚIE

7.1. Sistem de achiziție și analiză

Motorul studiat în acest caz este un motor de inducție cu rotorul în scurtcircuit, de putere $P_n = 1,5 \text{ kW}$, turație $n_n = 1390 \text{ rot/min}$, $U_n = 380 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, conexiune stea, fabricat de Electromotor S.A. Timișoara.

Măsurătorile sunt efectuate cu ajutorul unor bobine sondă plasate astfel:

- în întrefier, pe stator, pentru măsurarea inducției în întrefier, B_{delta} ;
- în jurul jugului stator, pentru măsurarea inducției în jug, B_{jug} ;
- în jurul unui dinte statoric, pentru măsurarea inducției în dinți, B_{dinte} .

Pentru culegerea și analiza semnalelor se utilizează un sistem de achiziție compus din:

- ◆ traductoare de tensiune, tip LV 25 P, LEM S.A. Elveția;
- ◆ traductoare de curent, tip LA 55 P, LEM S.A. Elveția;
- ◆ placă de achiziție PC+, National Instruments, 8 canale analogice de intrare semnal;
- ◆ calculator tip PC 586, 133 MHz, 8 MB RAM;
- ◆ program de interfață cu placa de achiziție, LabVIEW3.1.1., National Instruments;
- ◆ programe sub forma de instrumente virtuale, pentru vizualizarea, stocarea și studiul semnalelor achiziționate.

Analiza armonicilor produse de saturație se realizează cu instrumentul virtual ANARMON. În figura 7.1 este prezentată schema bloc a programului care achiziționează semnalul, îl descompune în armonici, apoi îl recompune pentru verificare [110]. Vizualizarea semnalului și a armonicilor se face pe un ecran virtual.

Subprogramul TIMP, prezentat în figura 7.2, realizează transformarea numărului de puncte achiziționate, în timp de măsurare a semnalului, pe baza ratei de scanare utilizate.

Pentru descompunerea semnalului achiziționat în armonici se utilizează subprogramul ARMONICA. În figura 7.3 este redată schema bloc a acestui subprogram, care utilizează descompunerea semnalului analizat în serie Fourier, ținând cont că acesta este periodic permanent sinusoidal:

$$f(t) = A_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda m} \sin(\lambda\omega t + \alpha_{\lambda}) \quad (7.1)$$

având coeficienții

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$A_{\lambda m} = \sqrt{a_{\lambda}^2 + b_{\lambda}^2} \quad (7.2)$$

$$\alpha_{\lambda} = \arctg \frac{b_{\lambda}}{a_{\lambda}}$$

cu T perioada funcției achiziționate (de regulă 2π), λ ordinul armonicilor considerate și

$$a_{\lambda} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(\lambda\omega t) dt$$

$$b_{\lambda} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(\lambda\omega t) dt \quad (7.3)$$

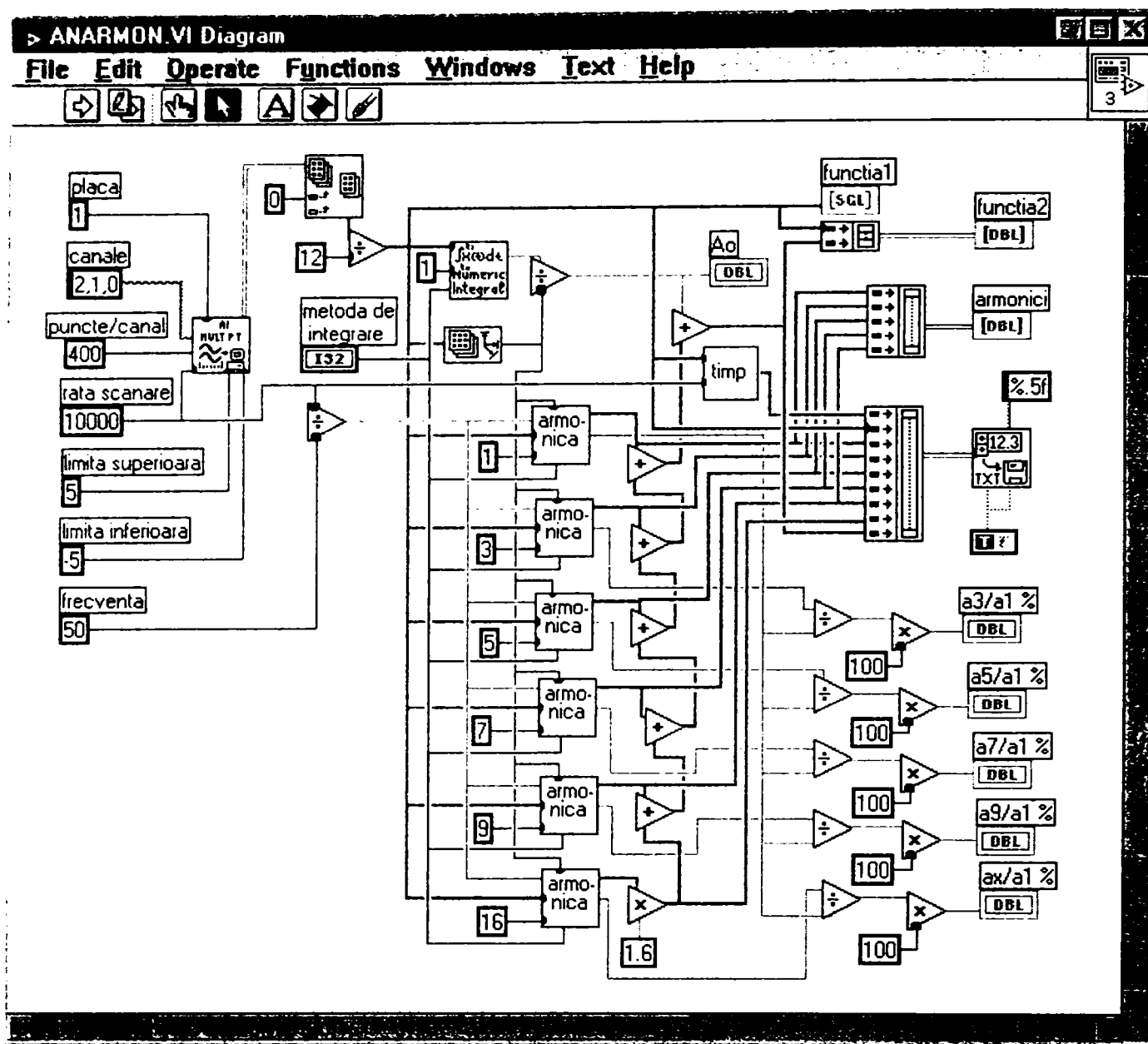


Fig.7.1. Schema bloc a instrumentului virtual pentru analiza armonicilor unui semnal

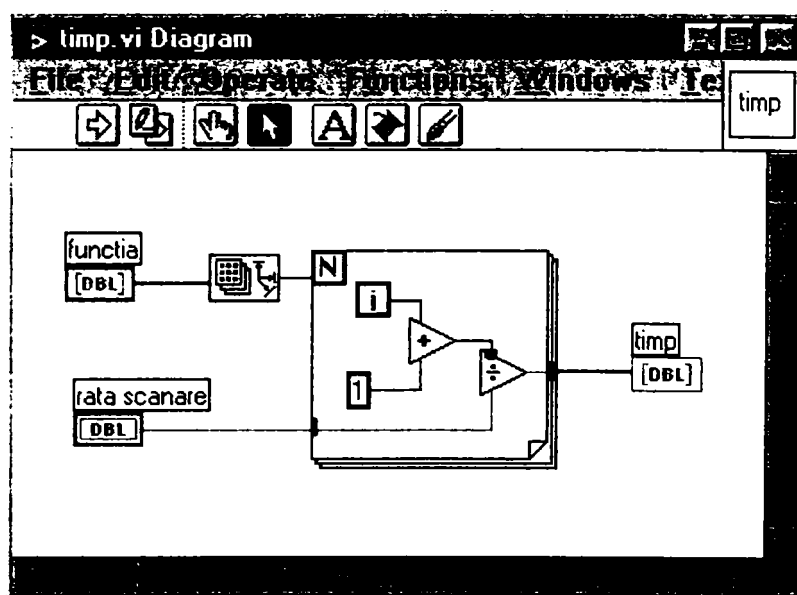


Fig.7.2. Schema bloc a subprogramului de transformare a punctelor în timp de măsurare

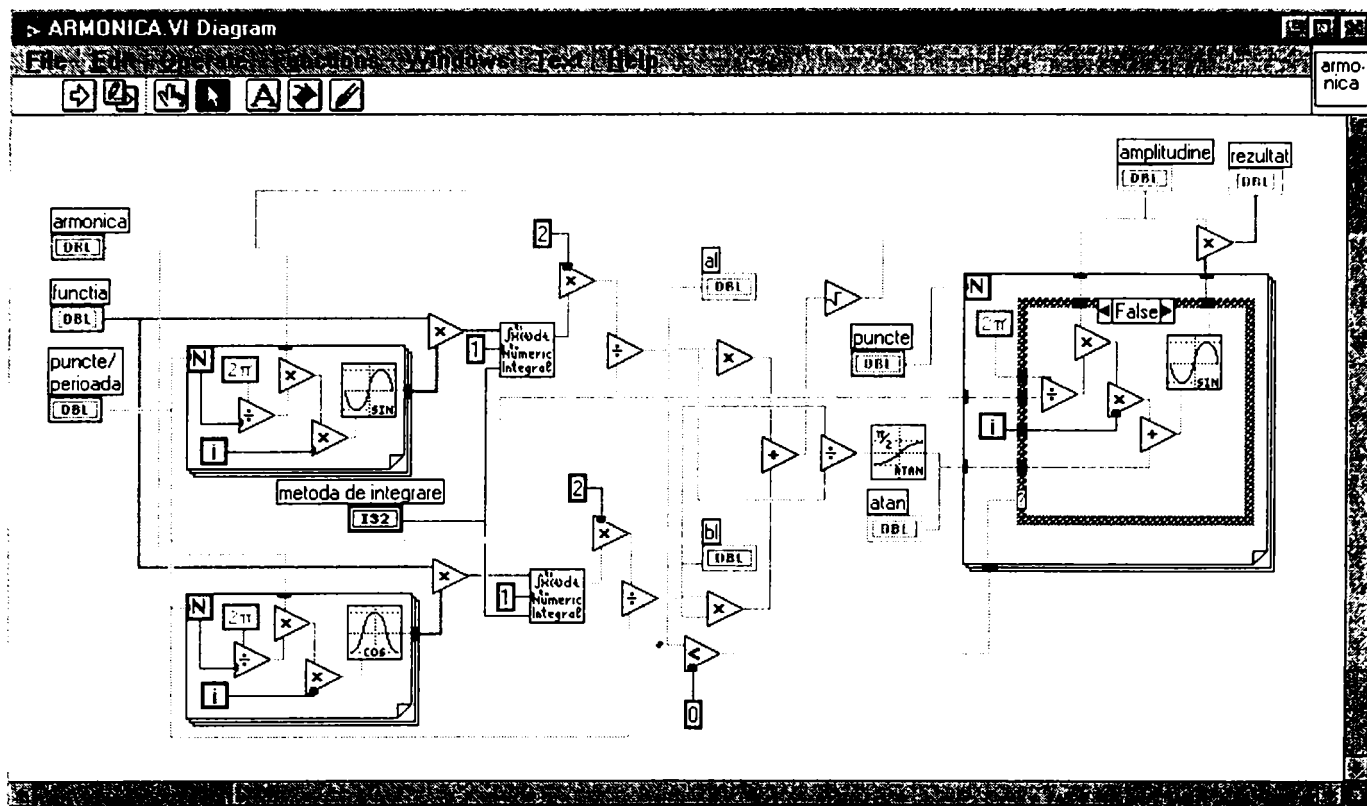


Fig.7.3. Schema bloc a subprogramului de descompunere a semnalului în armonici

În cazul studiului regimului de funcționare în gol și al pornirii, inducția obținută în întrefierul unui motor de inducție nu este o undă sinusoidală ci una distorsionată de saturația magnetică a dinților și jugurilor din stator și rotor.

7.2. Estimarea inducției magnetice la funcționarea în gol

La funcționarea în gol, când turația rotorului este aproape de sincronism, apare armonica de ordinul trei a inducției magnetice în întrefier.

În cazul alimentării motorului la tensiunea de linie $U = 380\text{ V}$, s-au măsurat următoarele semnale:

- inducția magnetică din întrefier, forma de undă fiind cea din figura 7.4.a); descompunând semnalul în armonici, se observă în figura 7.4.b) apariția armonicii de ordinul trei cu o amplitudine de 6,05% din amplitudinea fundamentalei;

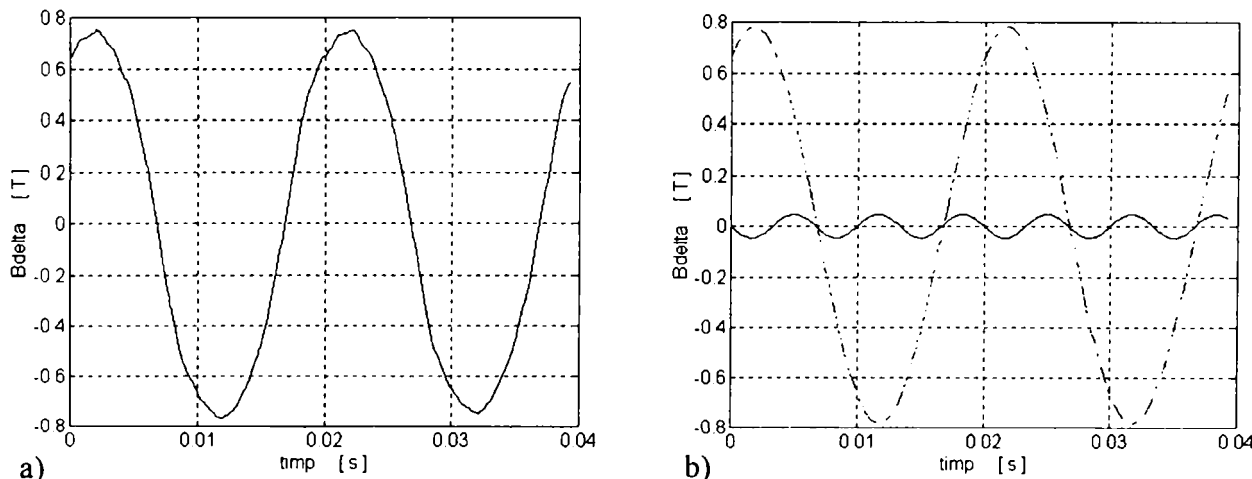


Fig.7.4. Inducția magnetică în întrefier la $U = 380\text{ V}$

a) semnalul achiziționat; b) semnalul descompus în fundamentală (-.-) și armonica de ordinul trei (—).

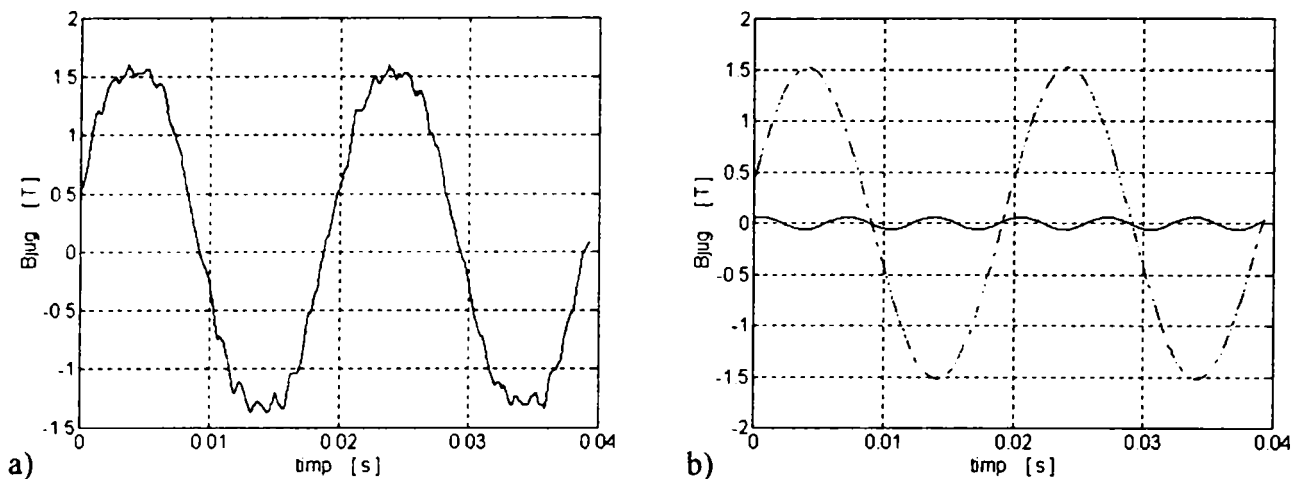


Fig.7.5. Inducția magnetică în jugul statoric la U = 380 V

- a) semnalul achiziționat;
- b) semnalul descompus în fundamentală (-.-) și armonica de ordinul trei (—).

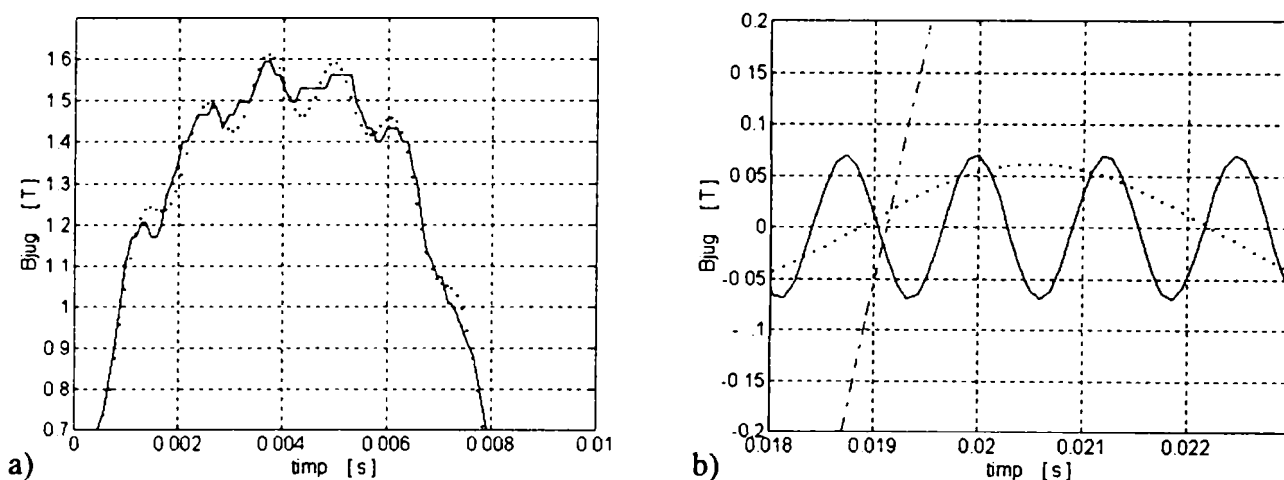


Fig.7.6. Detaliu la inducția magnetică în jugul statoric la U = 380 V

- a) semnalul achiziționat (—) și semnalul modelat (...);
- b) semnalul descompus în fundamentală (-.-), armonica de ordinul trei (...) și armonica de ordinul șaisprezece (—).

- pentru inducția magnetică din jugul statoric semnalul achiziționat este cel din figura 7.5.a), având o formă ușor aplatizată de armonici; descompunând semnalul în armonici, se obține în figura 7.5.b) o armonică de ordinul trei cu o amplitudine de 4% din cea a fundamentalei; privind un detaliu al inducției în jug în figura 7.6.a), se observă apariția unei armonici suplimentare, cu o amplitudine mai însemnată, 4,6% din amplitudinea fundamentalei; este o armonică de dinți, fiind produsă de dințarea rotorică (N_{c2}) și având ordinul:

$$v = 2qm + 1 = \frac{N_{c2}}{p} + 1 = \frac{30}{2} + 1 = 16 \tag{7.4}$$

Forma de undă este confirmată de modelarea și simularea semnalului prezentat cu linie punctată în figura 7.6.a).

- pentru inducția magnetică din dintele statoric semnalul măsurat este prezentat în figura 7.7.a); forma ascuțită este produsă de armonica de ordinul trei, prezentată în figura 7.7.b) în raport cu fundamentală; ea are o amplitudine de 16% din amplitudinea fundamentalei; privind la detaliul din figura 7.8.a) se constată și în acest caz prezența armonicii de dinți de ordinul șaisprezece, cu o amplitudine de 16,8% din amplitudinea fundamentalei (figura 7.8.b)).

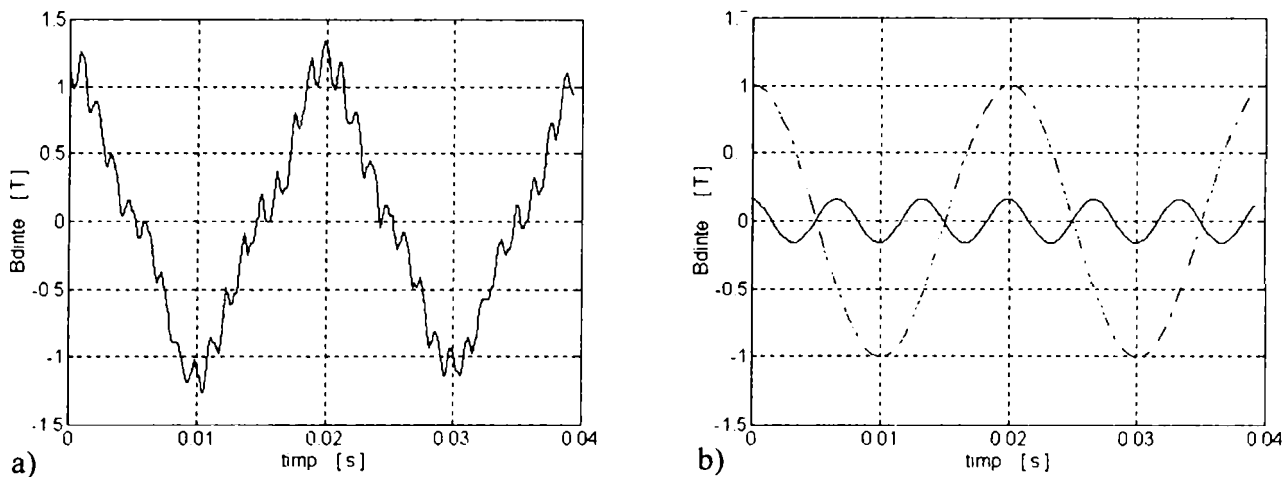


Fig.7.7. Inducția magnetică în dinte statoric la $U = 380 \text{ V}$

a) semnalul achiziționat;

b) semnalul descompus în fundamentală (-.-) și armonica de ordinul trei (—).

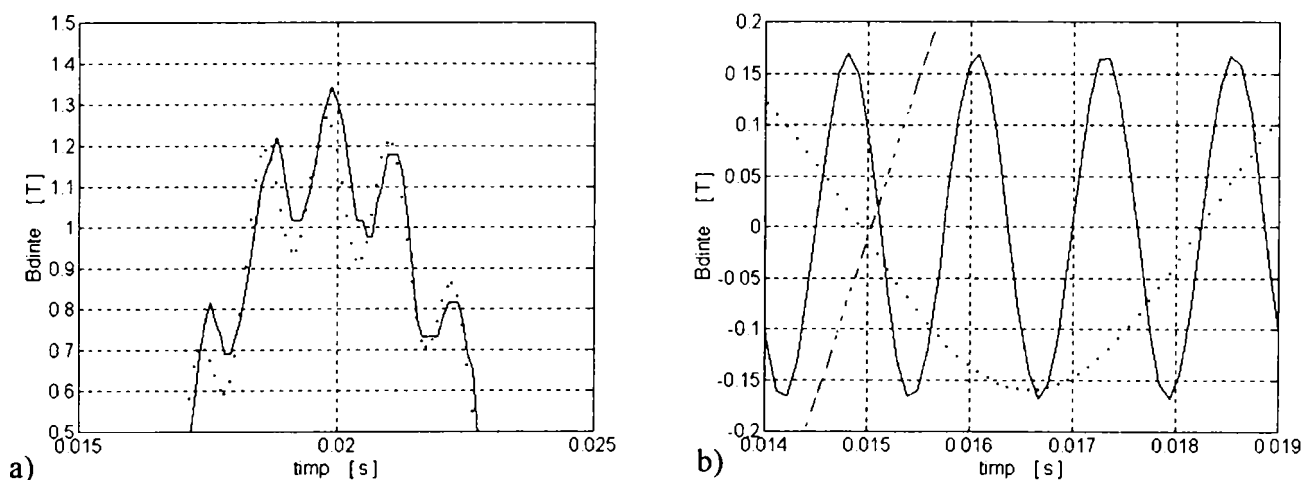


Fig.7.8. Detaliu la inducția magnetică în dinte statoric la $U = 380 \text{ V}$

a) semnalul achiziționat (—) și semnalul modelat (...);

b) semnalul descompus în fundamentală (-.-), armonica de ordinul trei (...) și armonica de ordinul șaisprezece (—).

În figura 7.9 se poate observa defazajul de aproximativ 90° existent între inducția în dinte și cea în jug.

La funcționarea în gol, pe măsură ce tensiunea de alimentare crește, se amplifică și armonica de ordinul trei, aplatizând unda inducției din întrefier. Având în vedere că dinții se saturează în principal, în acest regim de funcționare, forma inducției în dinți este întită, în care inducția în jug are o formă aplatizată.

Ridicând tensiunea de alimentare de linie la $U = 600 \text{ V}$, s-au achiziționat următoarele forme de undă:

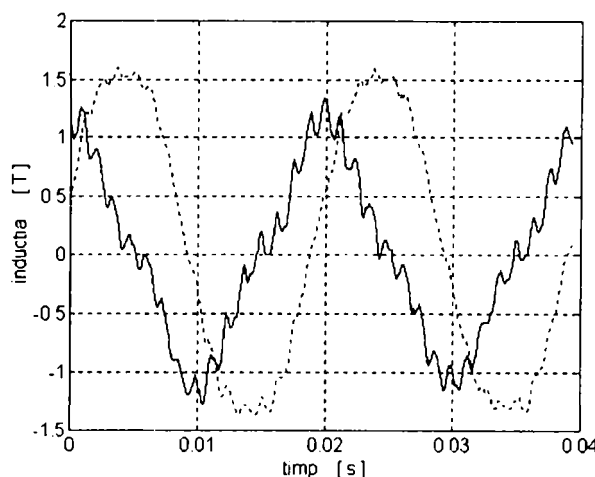


Fig.7.9. Inducția în dinte (—) și inducția în jugul statoric (...), la $U = 380 \text{ V}$

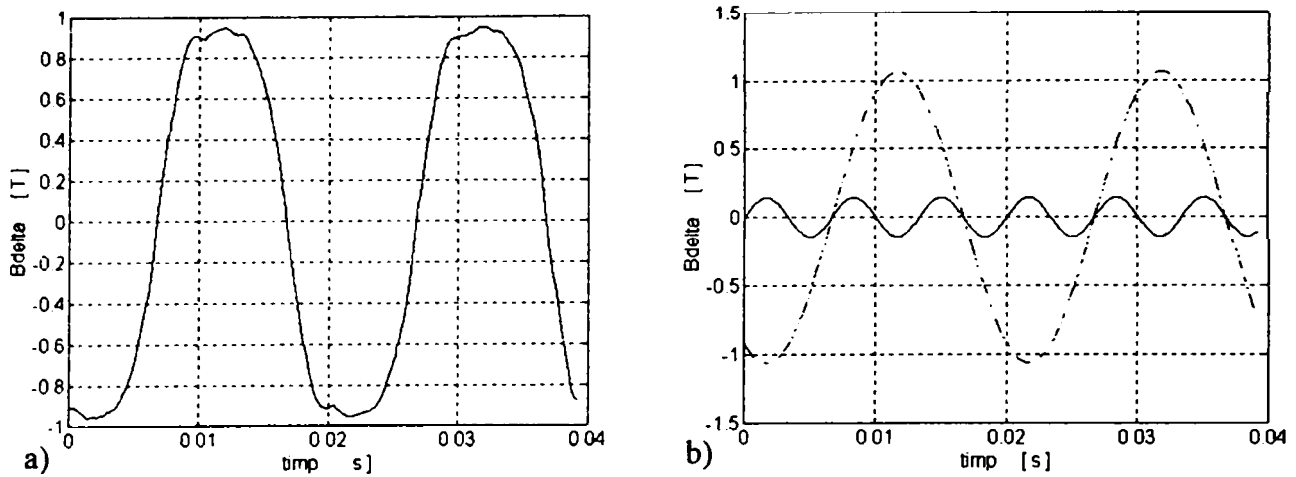


Fig.7.10. Inducția magnetică în întrefier la $U = 600$ V

- a) semnalul achiziționat;
- b) semnalul descompus în fundamentală (-.-) și armonica de ordinul trei (—).

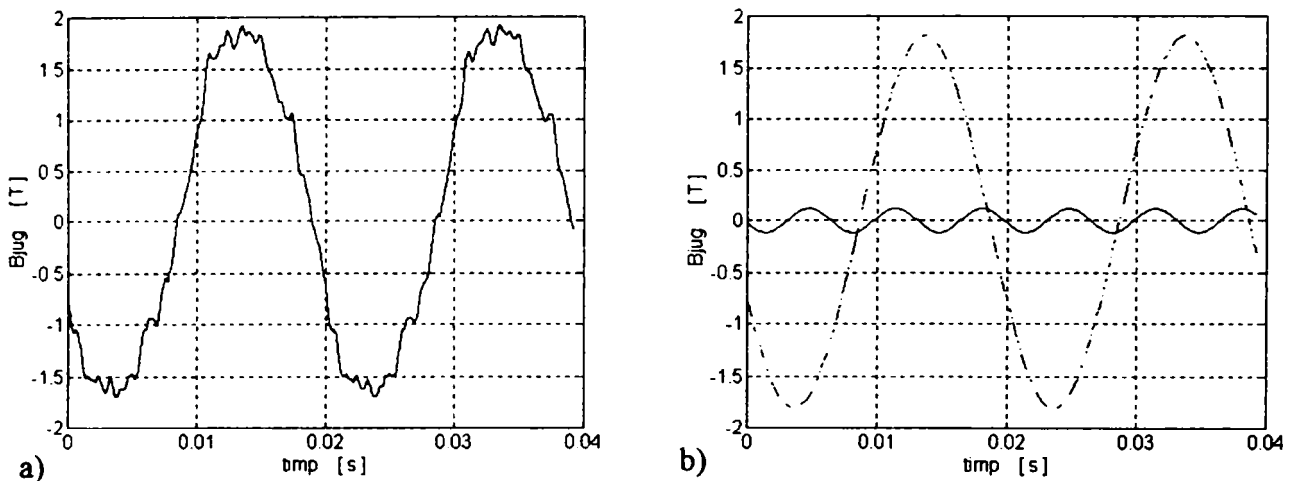


Fig.7.11. Inducția magnetică în jugul statoric la $U = 600$ V

- a) semnalul achiziționat;
- b) semnalul descompus în fundamentală (-.-) și armonica de ordinul trei (—).

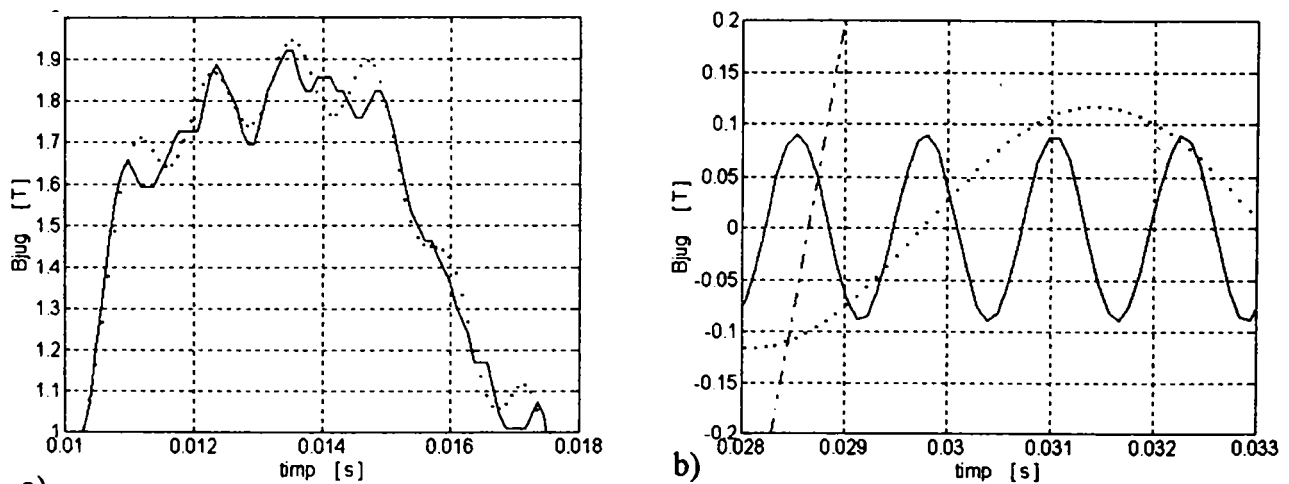


Fig.7.12. Detaliu la inducția magnetică în jugul statoric la $U = 600$ V

- a) semnalul achiziționat (—) și semnalul modelat (...);
- b) semnalul descompus în fundamentală (-.-), armonica de ordinul trei (...) și armonica de ordinul șaisprezece (—).

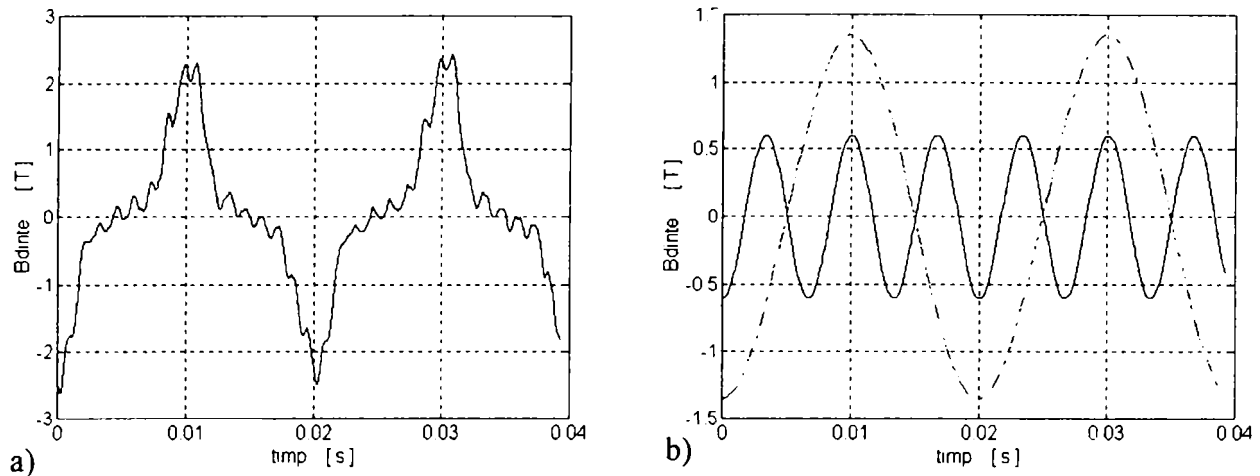


Fig.7.13. Inducția magnetică în dintele statoric la $U = 600 \text{ V}$

a) semnalul achiziționat;

b) semnalul descompus în fundamentală (-.-), și armonica de ordinul trei (—).

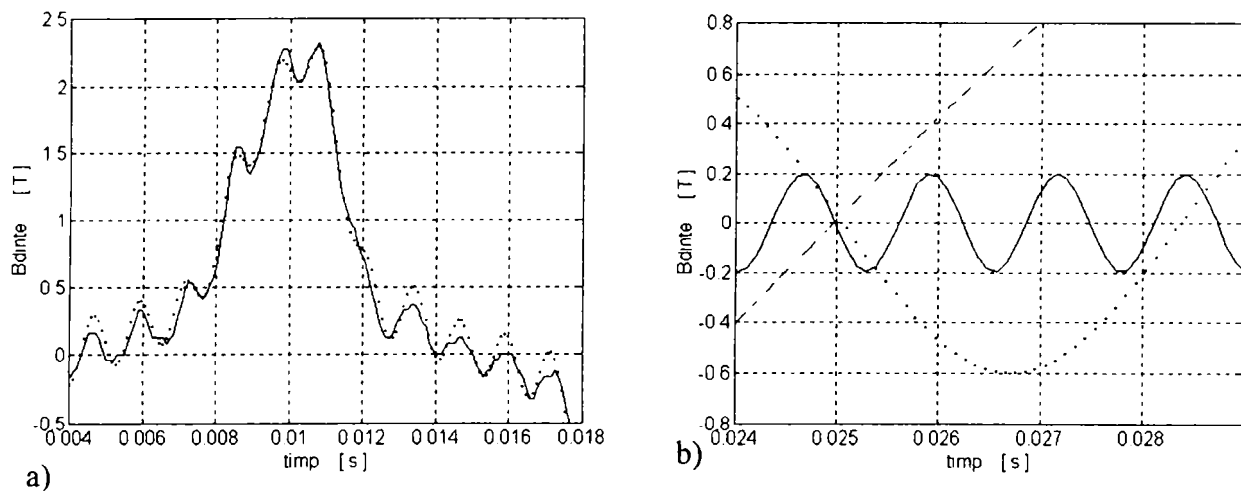


Fig.7.14. Detaliu la inducția magnetică în dintele statoric la $U = 600 \text{ V}$

a) semnalul achiziționat (—) și semnalul modelat (...);

b) semnalul descompus în fundamentală (-.-), armonica de ordinul trei (...) și armonica de ordinul șaisprezece (—).

- inducția magnetică din întrefier, prezentată în figura 7.10.a); se observă forma aplatizată a acestui semnal, de către armonica de ordinul trei, care în acest caz are o amplitudine de 13,53% din amplitudinea fundamentalei (figura 7.10.b));
- inducția magnetică din jugul statoric, prezentată în figura 7.11.a) are și ea o formă aplatizată produsă de armonica de ordinul trei, care se poate observa în figura 7.11.b); amplitudinea armoniciei de ordinul trei este 6,45% din amplitudinea fundamentalei; în detaliul din figura 7.12.a) se remarcă prezența armoniciei de dinți de ordinul șaisprezece în forma de undă a inducției din jugul statoric; amplitudinea armoniciei de ordinul șaisprezece este de 4,34% din amplitudinea fundamentalei (figura 7.12.b)); semnalul modelat și simulat prezentat cu linie punctată în figura 7.12.a), confirmă prezența acestor armonici în semnalul achiziționat;
- inducția magnetică din dintele statoric, prezentată în figura 7.13.a); se remarcă forma ascuțită a semnalului măsurat, din cauza armoniciei de ordinul trei, care are în acest caz o amplitudine de 44,7% din amplitudinea fundamentalei (figura 7.13.b)); în detaliul prezentat în figura 7.14.a) se observă prezența armoniciei de dinți de ordinul șaisprezece, a cărei amplitudine este 14,5% din amplitudinea fundamentalei;

În figura 7.15 se poate observa defazajul de aproximativ 90° existent între inducția din dintele statoric și inducția din jugul statoric situat la baza dintelui.

7.3. Es r du ț magnetice la scurtcircuit

Pornirea poate fi studiată ca o funcționare de scurtă durată a motorului în scurtcircuit, înfășurarea statorică fiind alimentată la tensiunea nominală. În acest caz s-au măsurat următoarele semnale:

- inducția magnetică în întrefier, din figura 7.16.a); forma de undă ascuțită este produsă de armon...; p r a în armonici din figura 7.16.b) evidențiază armonica de ordinul trei cu o amplitudine de 15.65% din a fundamentalei;
- inducția magnetică în jugul statoric, prezentată în figura 7.17.a); în figura 7.17.b) se observă descompunerea acestui semnal în armonici, armonica de ordinul cinci (6,23% din fundamentală) fiind chiar mai mare decât armonica de ordinul trei (2,31% din fundamentală);

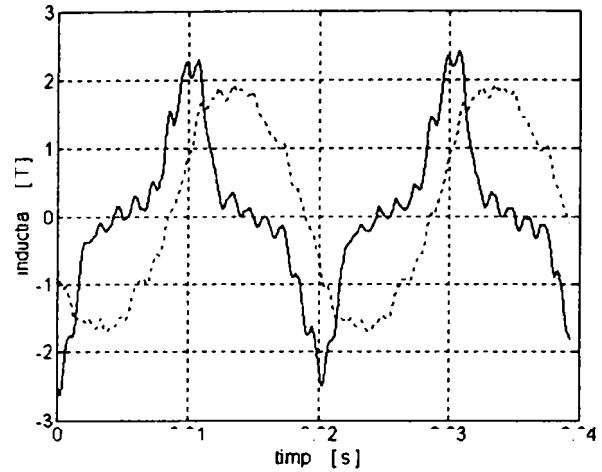


Fig.7.15. Inducția în dinte (—) și inducția în jugul statoric (...), la U = 600 V

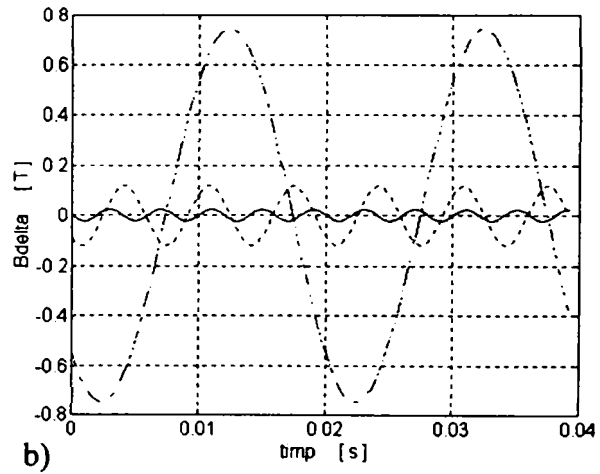
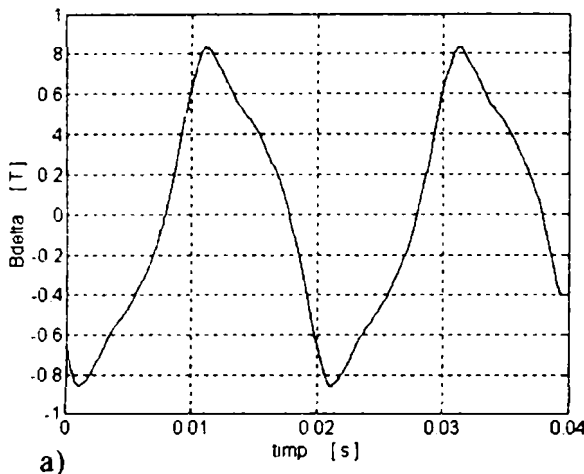


Fig.7.16. Inducția magnetică în întrefier la scurtcircuit

a) semnalul achiziționat;

b) semnalul descompus în fundamentală (-.), armonica de ordinul trei (—) și armonica de ordinul cinci (...).

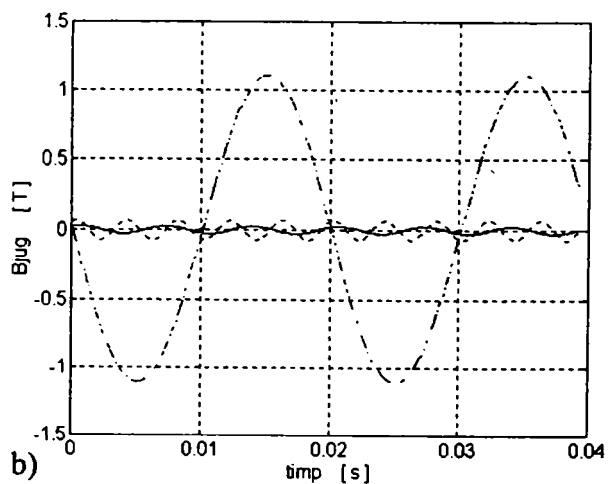
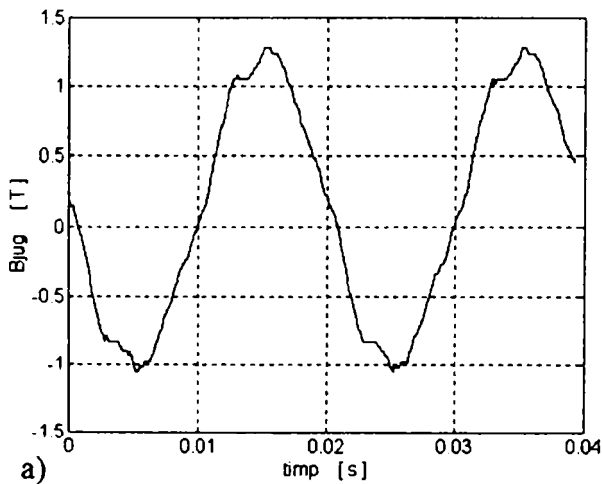


Fig.7.17. Inducția magnetică în jugul statoric la scurtcircuit

a) semnalul achiziționat;

b) semnalul descompus în fundamentală (-.), armonica de ordinul trei (—) și armonica de ordinul cinci (...).

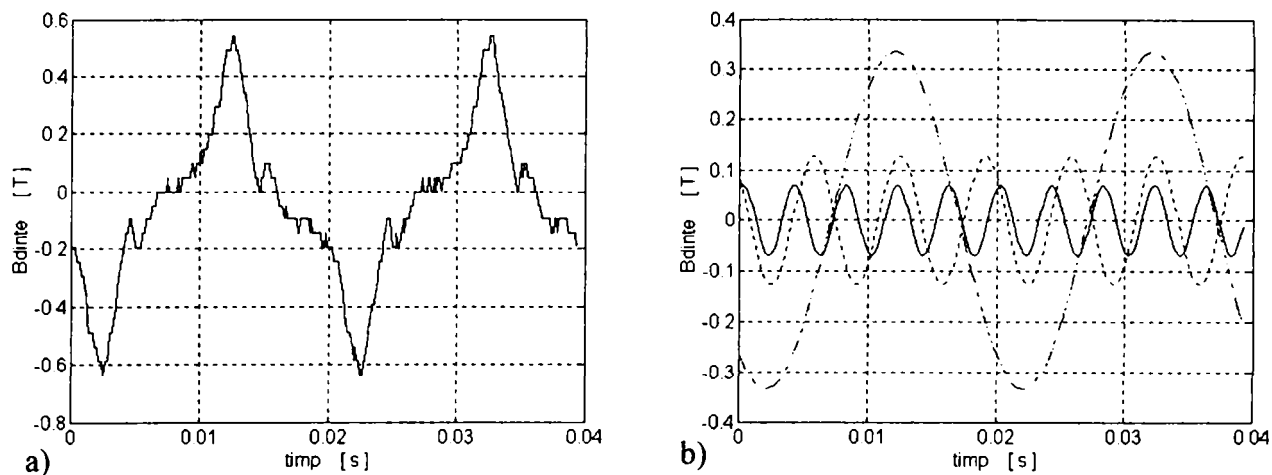


Fig.7.18. Inducția magnetică în dinte statoric la scurtcircuit

- a) semnalul achiziționat;
- b) semnalul descompus în fundamentală (---), armonica de ordinul trei (...) și armonica de ordinul cinci(—).

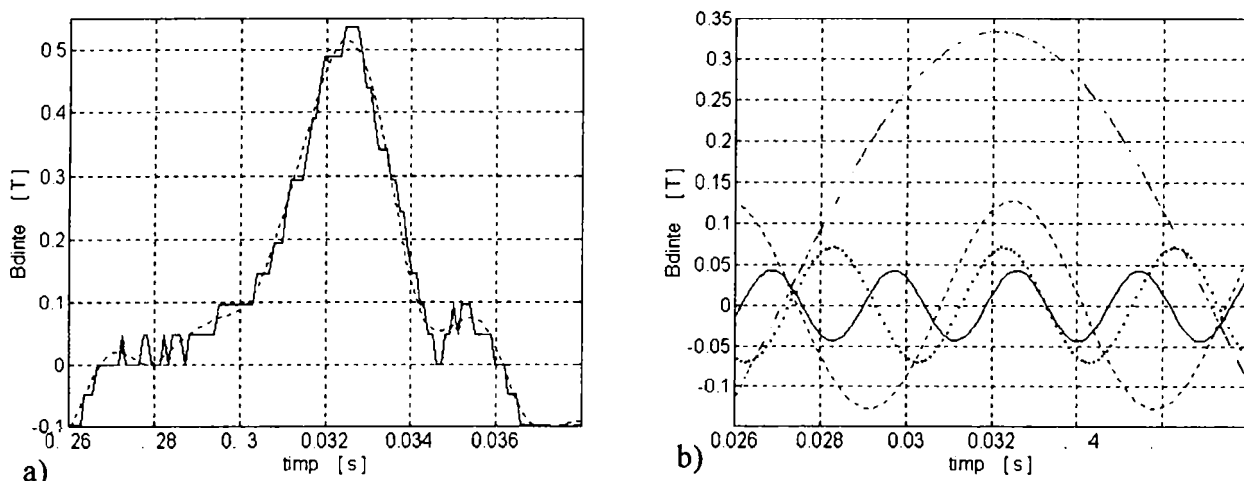


Fig.7.19. Detaliu la inducția magnetică în dinte statoric la scurtcircuit

- a) semnalul achiziționat (—) și semnalul modelat (...);
- b) semnalul descompus în fundamentală (---), armonica de ordinul trei (- - -), armonica de ordinul cinci (...) și armonica de ordinul șapte (—).

- inducția magnetică în dinte statoric este cea din figura 7.18.a); forma ascuțită a semnalului este produsă de spectrul larg de ω_{mon} prezențiat în figura 7.18.b); cele mai importante sunt armonica de ordinul trei (38,44% din fundamentală), armonica de ordinul cinci (21% din fundamentală) și armonica de ordinul șapte (12,95% din fundamentală); în detaliul din figura 7.19.a) se remarcă semnalul achiziționat în comparație cu cel modelat, pentru inducția din dinte statoric.

Inducția din jugul statoric este și în acest caz defazată cu 90° față de cea din dinții statorici învecinați, conform figurii 7.20.

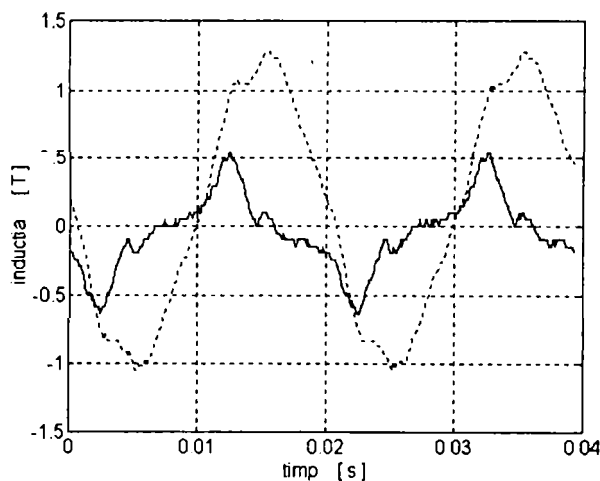


Fig.7.20. Inducția în dinte (—) și inducția în jug (...) la scurtcircuit

7.4. Concluzii

Creșterea de 3,65 ori a curentului de magnetizare la funcționarea în gol la $U = 600 \text{ V}$ față de $U = 380 \text{ V}$, are ca efect creșterea de aproximativ două ori a amplitudinii armonicii de ordinul trei a inducției magnetice în întrefier și în dinte.

La funcționarea în scurtcircuit valorile inducțiilor din stator sunt mai mici decât la funcționarea în gol, fluxurile în unele regiuni scăzând chiar la jumătate.

Configurațiile câmpurilor magnetice în cele trei regimuri de funcționare prezentate anterior (funcționarea în gol la 380 V, funcționarea în gol la 600 V, scurtcircuitul la 380 V), pot fi studiate cu ajutorul modelului de calcul care utilizează metoda elementelor finite. Se obțin rezultatele prezentate în figura A.3.2 din Anexa 3.

Funcționarea în gol la 380 V, figura A.3.2.a), este caracterizată de inducții mici și solicitări uniforme în tola mașinii de inducție.

Funcționarea în gol la 600 V, figura A.3.2.b), conduce la inducții mai mari în juguri și dinți. Saturația apare în dinți.

Scurtcircuitul la 380 V, figura A.3.2.d), produce inducții deosebit de mari în dinții rotorici și în vârfurile dinților statorici, zone în care apare saturația.

8. INFLUENȚA FORMEI CRESTĂTURII ASUPRA PARAMETRILOR ELECTRICI

8.1. Calculul parametrilor electrici

Pentru determinarea parametrilor electrici și a variației acestora cu alunecarea motorului asincron, am elaborat programul MASI, având ca suport softul Matlab & Simulink [109].

Dintre motoarele de inducție

exemplificare pe cel de 1,5 kW cu 4 poli, pe cel de 15 kW cu 4 poli și simplă colivie și pe cel de 15 kW cu 4 poli și dublă colivie, toate fiind din producția de serie a firmei Electromotor S.A.

În Anexa 5 sunt date fișierele "emt1_5", "emt15" și "emt15dc", cu principalele date constructive ale motoarelor: date geometrice generale, dimensiunile crestăturii statorice, dimensiunile crestăturii rotorice, date de bobinaj, date despre inelul de scurtcircuitare, curba de magnetizare pentru tole.

Programul principal MASI este prezentat în figura 8.1 Prin butonul "date inițiale", el încarcă unul din fișierele menționate anterior. În cadrul analizei sunt a elate, e rând, prin intermediul butoanelor "s1", "s2", "s3", "s4" sau "s5", fișierele cu dimensiunile crestăturilor statorice. Fișierele cu dimensiunile crestăturilor rotorice pot fi apelate cu butoanele "r1", "r2", "r31", "r32", pentru simplă colivie, respectiv, "r4", "r41", "r42", "r43", "r44" pentru dublă colivie. Aceste fișiere sunt date în Anexa 5 pentru motoarele studiate. Fișierul matrice A11, obținut în final după rularea programului MASI, conține variația parametrilor electrici ai motorului studiat. Parametrii electrici sunt calculați cu subprograme distincte, simbolizate prin blocuri în figura 8.2: R_1 (notat R1 în program) și $X_{\sigma 1}$ ($Xs1$) sunt determinați cu

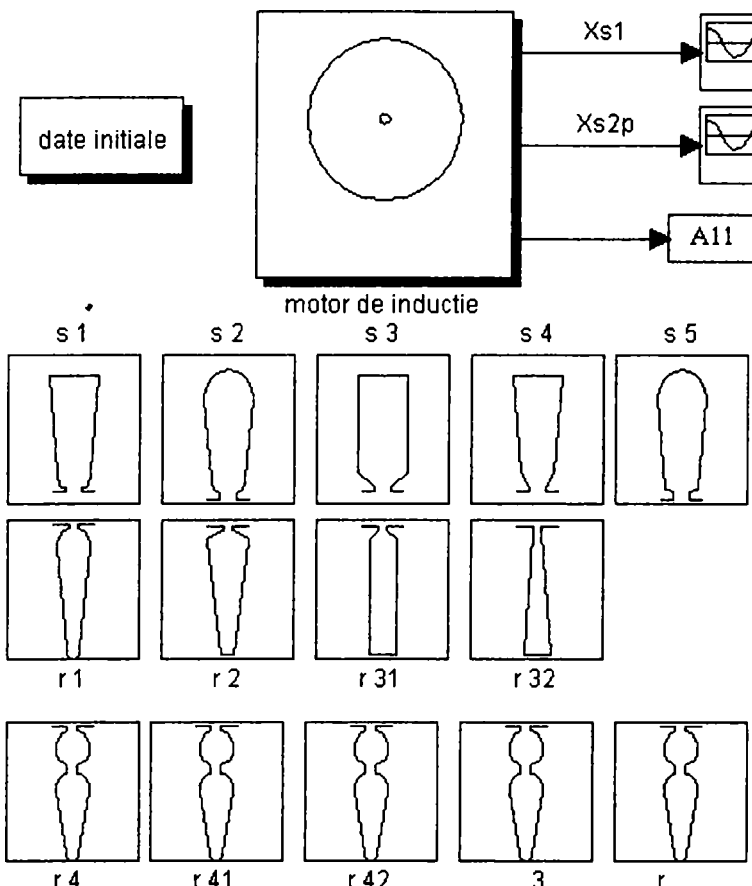


Fig.8.1. Schema bloc a programului MASI

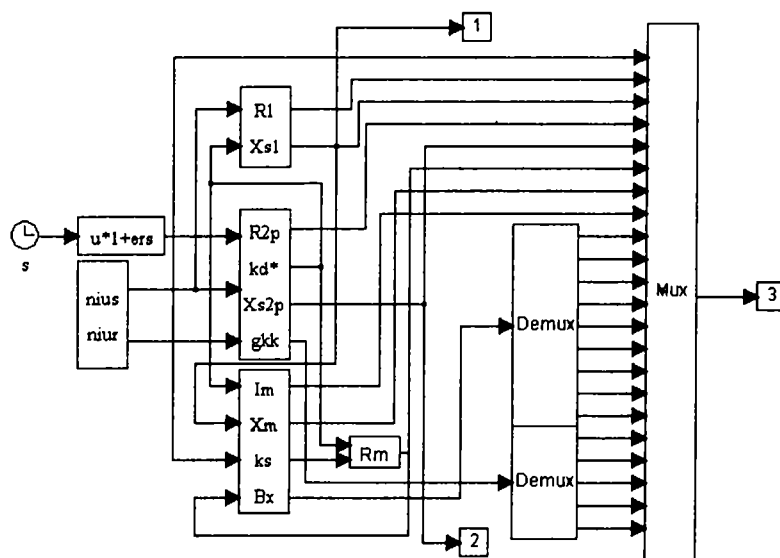


Fig.8.2. Schema bloc a subprogramelor de calcul al parametrilor electrici

ajutorul primului subprogram; al doilea subprogram determină parametrii rotorici R_2' (R_{2p}), $X_{\sigma 2}'$ (X_{s2p}) și factorul de întrefier k_d^* (k_d^*) influențat de saturație; cu al treilea subprogram se determină curentul de magnetizare I_μ (I_m), reactanța de magnetizare X_m (X_m), factorul de saturație k_s (k_s) și inducțiile în întrefier, în dinți și în juguri; cu un al patrulea subprogram se determină rezistența de magnetizare R_m (R_m). Blocul care calculează permeabilitatea magnetică a statorului μ_s (μ_s) și pe cea a rotorului μ_r (μ_r), modelează aceste mărimi pentru cazul apariției saturației magnetice în mașină.

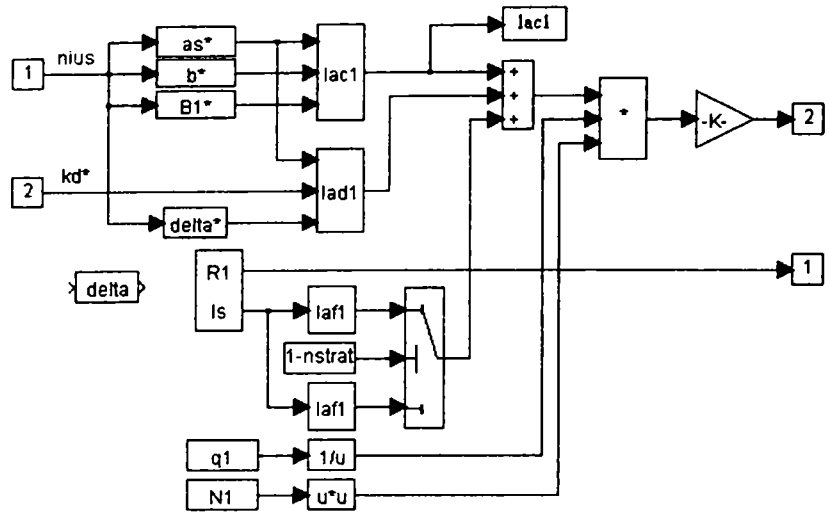


Fig.8.3. Schema bloc a subprogramului de calcul al parametrilor electrici statorici, R_1 și $X_{\sigma 1}$

Mărimea care variază în program este alunecarea, s , cu un pas de eșantionare minim de 0,001, pe intervalul (0,1]. Pentru a evita împărțirea cu zero, prima valoare a alunecării este "ers = 10⁻³".

Blocurile utilizate pentru calculul parametrilor rotorici sunt prezentate în figura 8.3. Pentru determinarea permeanței specifice de dispersie a creștăturii statorice λ_{c1} (λ_{c1}), se utilizează dimensiunile creștăturii statorice a_s^* , b^* și $B1^*$, din figura 8.11, modificate sub influența saturației. Pentru determinarea permeanței specifice de dispersie diferențială statorică λ_{d1} (λ_{d1}), se calculează un întrefier δ^* (δ^*) echivalent de calcul. Blocul " λ_{f1} " (λ_{f1}) calculează permeanța specifică de dispersie a capetelor de bobină (frontală) în funcție de numărul de straturi (n_{strat}) ale înfășurării, blocul "q1" determină numărul de creștături pe pol și fază, iar blocul "N1" numărul de spire pe fază. În alt bloc se calculează rezistența pe fază R_1 (R_1) și lungimea medie a unei spire, l_s .

g. 4

schema blocurilor de calcul al parametrilor electrici rotorici. În blocul "kr" se calculează factorul de majorare a rezistenței rotorice sub influența efectului pelicular. Blocul "kuki" calculează factorii de transformare în tensiune și în curent, precum și produsul acestora.

Modul în care se calculează reactanța rotorică de dispersie rezultă din schema bloc prezentată în figura 8.5. În blocul "kx" se calculează factorul de modificare a reactanței rotorice. Dimensiunile creștăturii rotorice (figura 8.12) care sunt modificate în program sub influența saturației, sunt b_r^* , b_{az}^*

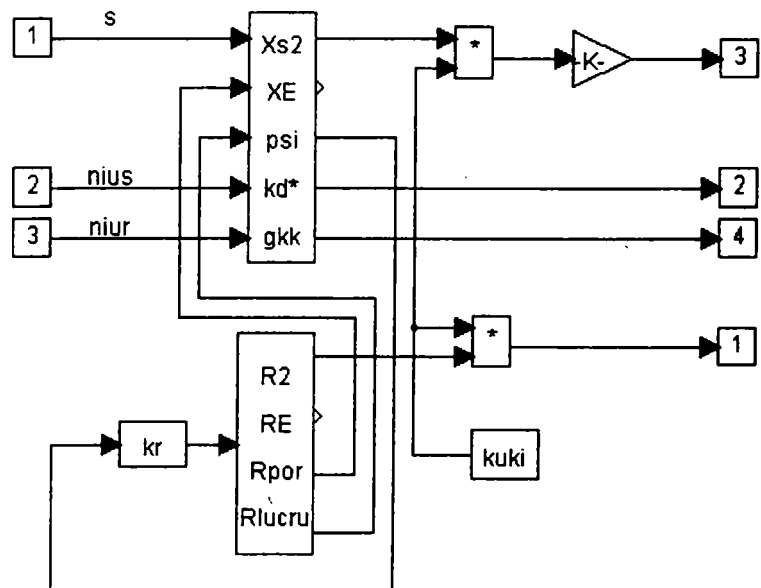


Fig.8.4. Schema bloc a subprogramului de calcul al parametrilor electrici rotorici, R_2' și $X_{\sigma 2}'$

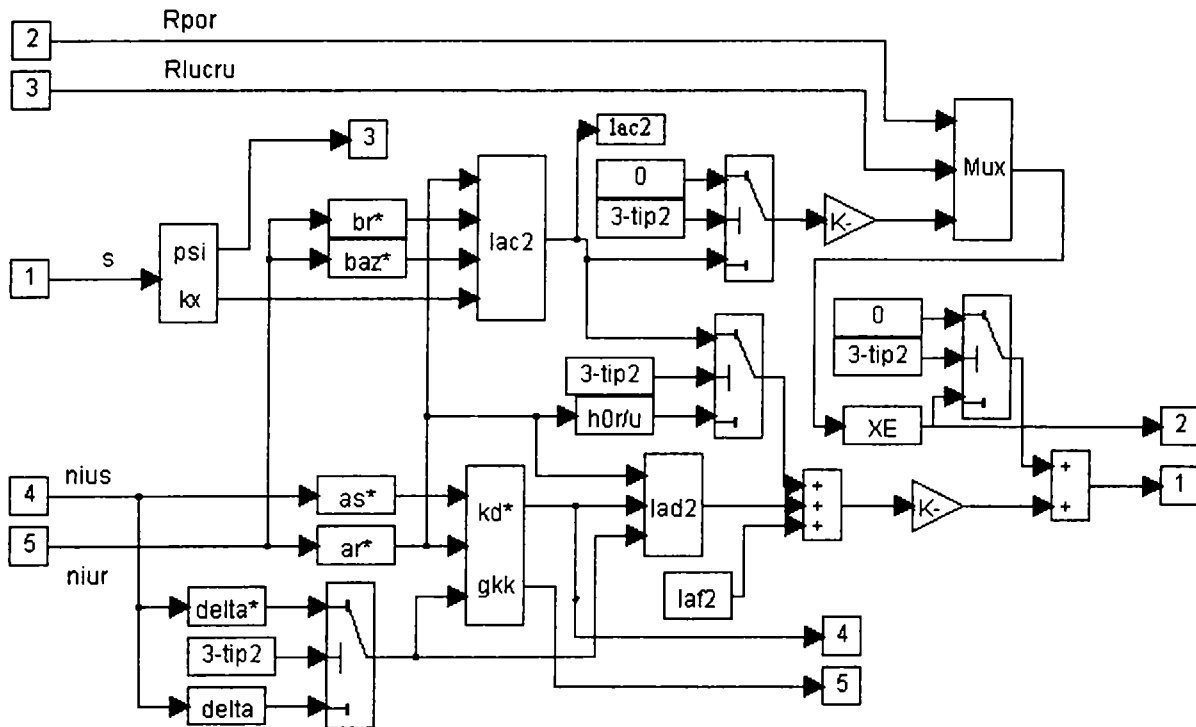


Fig.8.5. Schema bloc a subprogramului de calcul al reactanței rotorice de dispersie, $X_{\sigma 2}$

și ar^* . În funcție de crestătura rotorică utilizată, "tip2" ia valoarea 1 pentru crestătura "r1", 2 pentru "r2", 3 pentru "r31" și "r32", respectiv, 4 pentru crestăturile în dublă colivie, "r4", "r41", "r42" și "r43" (figura 8.27).

Permeanța specifică de dispersie a crestăturii rotorice λ_{c2} se calculează în blocul "lac2", permeanța specifică de dispersie diferențială rotorică λ_{d2} în blocul "lad2", iar permeanța de dispersie frontală (a coliviei) λ_{f2} în blocul "laf2".

În blocul "XE" se determină permeanța specifică echivalentă de dispersie a crestăturii rotorice în cazul coliviei duble. Factorul de întrefier, k_{δ} , (kd^* în program), se determină cu subprogramul din figura 8.6. Mărimile notate cu asterisc (*) sunt influențate de saturația magnetică. Blocul "tauc1" calculează pasul crestăturii statorice, iar blocul "tauc2", pasul crestăturii rotorice. Blocurile "gam1" și "gam2" calculează următoarele rapoarte:

$$\gamma_1 = \frac{\left(\frac{b_{14}}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{b_{14}}{\delta}}; \quad \gamma_2 = \frac{\left(\frac{b_{24}}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{b_{24}}{\delta}} \quad (8.1)$$

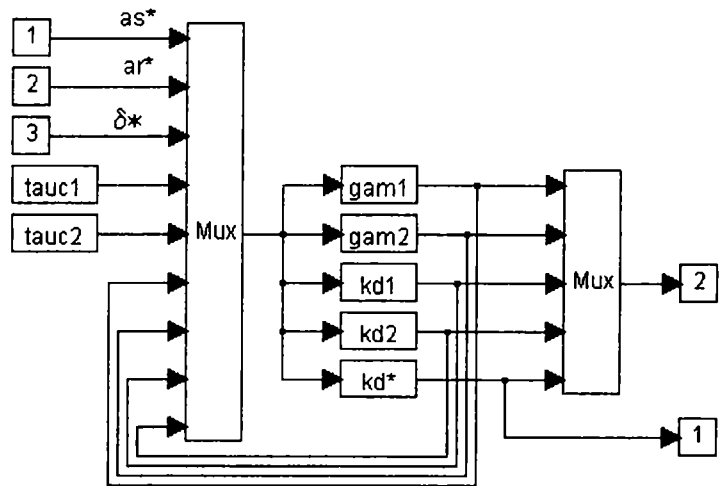


Fig.8.6. Schema bloc a subprogramului de calcul al factorului de întrefier, k_{δ}

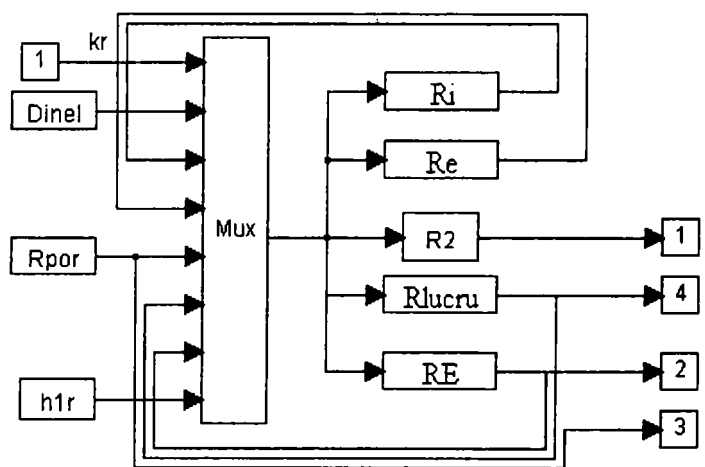


Fig.8.7. Schema bloc a subprogramului de calcul al rezistenței rotorice, R_2

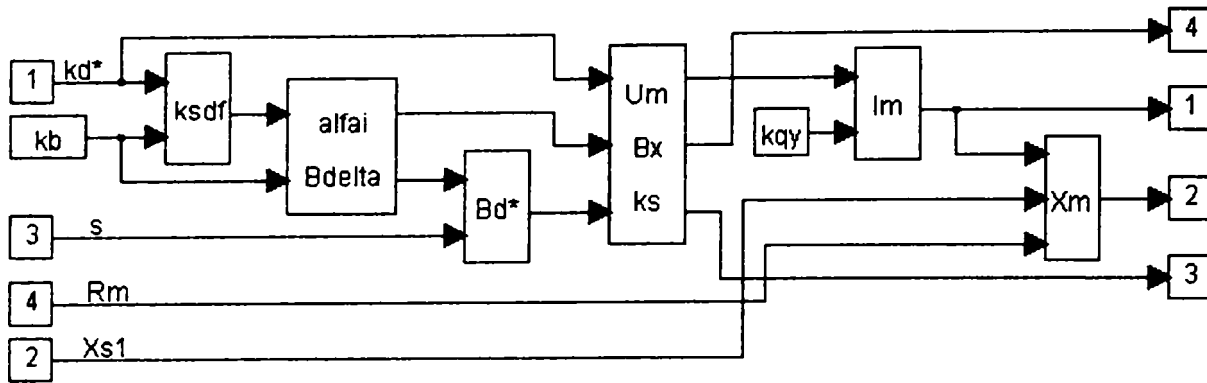


Fig.8.8. Schema bloc a subprogramului de calcul al curentului și reactanței de magnetizare

în care b_{14} este deschiderea crestăturii statorice și b_{24} a crestăturii rotorice.

În blocul "kd1" se determină factorul de întrefier statoric, în blocul "kd2" factorul de întrefier rotoric, iar în "kd" factorul total de întrefier.

În figura 8.7 se poate observa schema bloc de calcul a rezistenței rotorice pe fază, R_2 . Diametrul mediu al inelului de scurtcircuitare se determină în blocul "Dinel", rezistența barei din colivia de pornire în blocul "Rpor", înălțimea echivalentă a unei bare (de lucru) în blocul "h1r". În blocul "Ri" se calculează rezistența porțiunii de inel care corespunde unei bare, în blocul "Re" rezistența echivalentă a unei bare la simplă colivie, în blocul "Rlucru" rezistența barei din colivia de lucru, iar în "RE" rezistența echivalentă în cazul coliviei duble.

Determinarea curentului de magnetizare și a reactanței de magnetizare sunt prezentate în figura 8.8. În blocul "kb" se calculează factorul total de înfășurare. Calculul factorului parțial de saturație, "ksdf", este redat în figura 8.9. În următorul bloc se determină coeficientul de acoperire polară "alfai" și inducția magnetică în întrefier "Bdelta", modificată apoi, datorită saturației, în blocul "Bd*". Cu aceste date se determină tensiunea magnetică totală, U_m , inducțiile în dinți și juguri și factorul final de saturație, subprogram detaliat în figura 8.10.

În blocul "kqy" se calculează factorul de zonă, k_q , factorul de scurtare, k_y , precum și produsul acestora.

Schema bloc prezentată în figura 8.9 este realizată pentru calculul factorului parțial de saturație, ksdf. Ca mărimi de intrare, se calculează înălțimea crestăturii statorice, cu blocul "hc1", înălțimea crestăturii rotorice, cu blocul "hc2", lățimea dintelui statoric la mijlocul crestăturii, cu "bd1", lățimea dintelui rotoric la mijlocul crestăturii, cu "bd2", factorul de dispersie, cu blocul "kE", pasul polar, cu blocul "tau" și factorul de formă, cu blocul "kf". Se determină inducția magnetică în întrefier, Bdelta, tensiunea magnetică a întrefierului, Umdelta, inducția magnetică în dinte statoric, Bd1 și inducția magnetică în dinte rotorice, Bd2. Cu ajutorul subprogramului "tola", se determină intensitatea câmpului magnetic în dinte statoric,

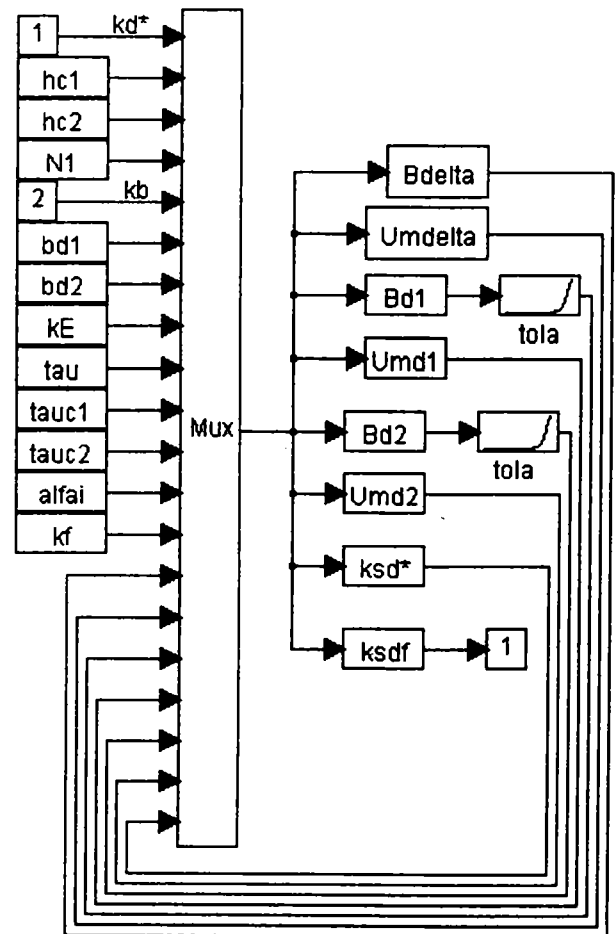


Fig.8.9. Schema bloc a subprogramului de calcul al factorului parțial de saturație

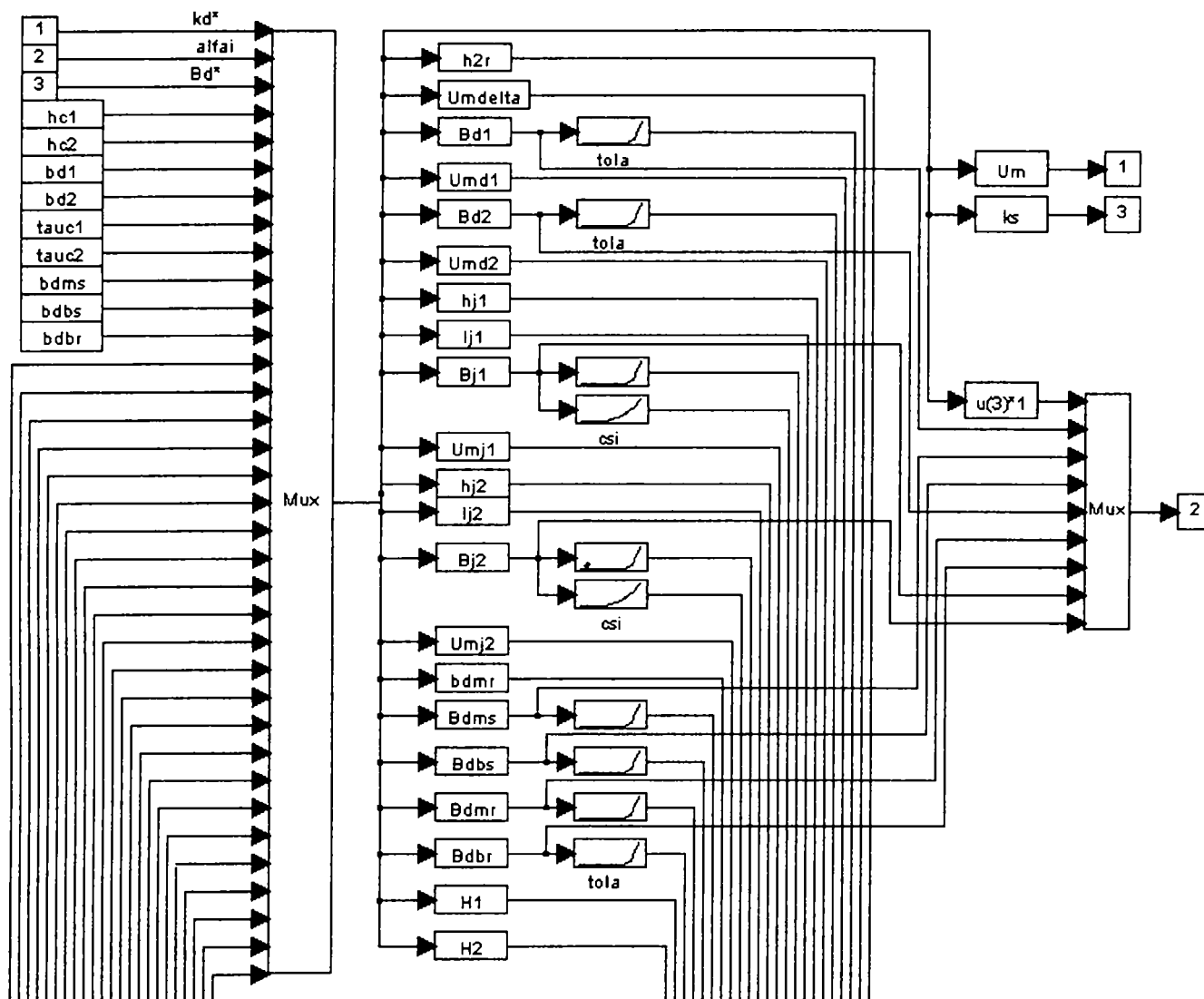


Fig.8.10. Schema bloc a subprogramului de calcul al inducțiilor magnetice și al tensiunii magnetice

cu ajutorul căreia se determină tensiunea magnetică în dintele statoric, U_{md1} . În mod similar se determină tensiunea magnetică în dintele rotorice, U_{md2} . Cu tensiunile magnetice astfel determinate se calculează factorul parțial de saturație, ksd , care se compară cu valoarea impusă și se determină valoarea finală a acestui factor, $ksdf$.

Subprogramul "tola" are la bază programul de modelare a curbei de magnetizare, BHN, descris în capitolul 5.3, iar rezultatul simulării este cel din figura 5.12. Un subprogram important este cel care calculează inducțiile magnetice, tensiunea magnetică totală, U_m și factorul de saturație final, ks , schema bloc fiind prezentată în figura 8.10. Blocul "bdms" calculează lățimea dintelui statoric la mijlocul lui, iar blocul "bdbbs" lățimea dintelui la bază. Blocurile "bdmr" și "bdbbr" efectuează calcule similare pentru lățimea dintelui rotorice. În blocul "hj1" se determină înălțimea jugului statoric, în "lj1", lungimea jugului statoric. Operații similare sunt efectuate în blocurile "hjr" și "ljr", pentru jugul rotorice. Inducțiile magnetice sunt calculate în dintele statorice, la vârf B_{d1} , la mijloc B_{dms} și la bază B_{dbs} , respectiv, în dintele rotorice, B_{d2} , B_{dmr} și B_{dbr} . "Bj1" calculează inducția în jugul statoric, iar "Bj2" în jugul rotorice.

8.2. Studiul influenței formei crestăturii statorice

Crestăturile statorice luate în considerare sunt cele din figura 8.11. Înlocuirea lor succesivă în calcul este echivalentă cu modificarea dimensiunilor crestăturii.

La motorul de 1,5 kW cu 4 poli, crestăturile de bază sunt "s1" în stator și "r1" în rotor. Rulările programului încep cu această variantă. Dimensiunile celorlalte crestături, "s2", "s3", "s4"

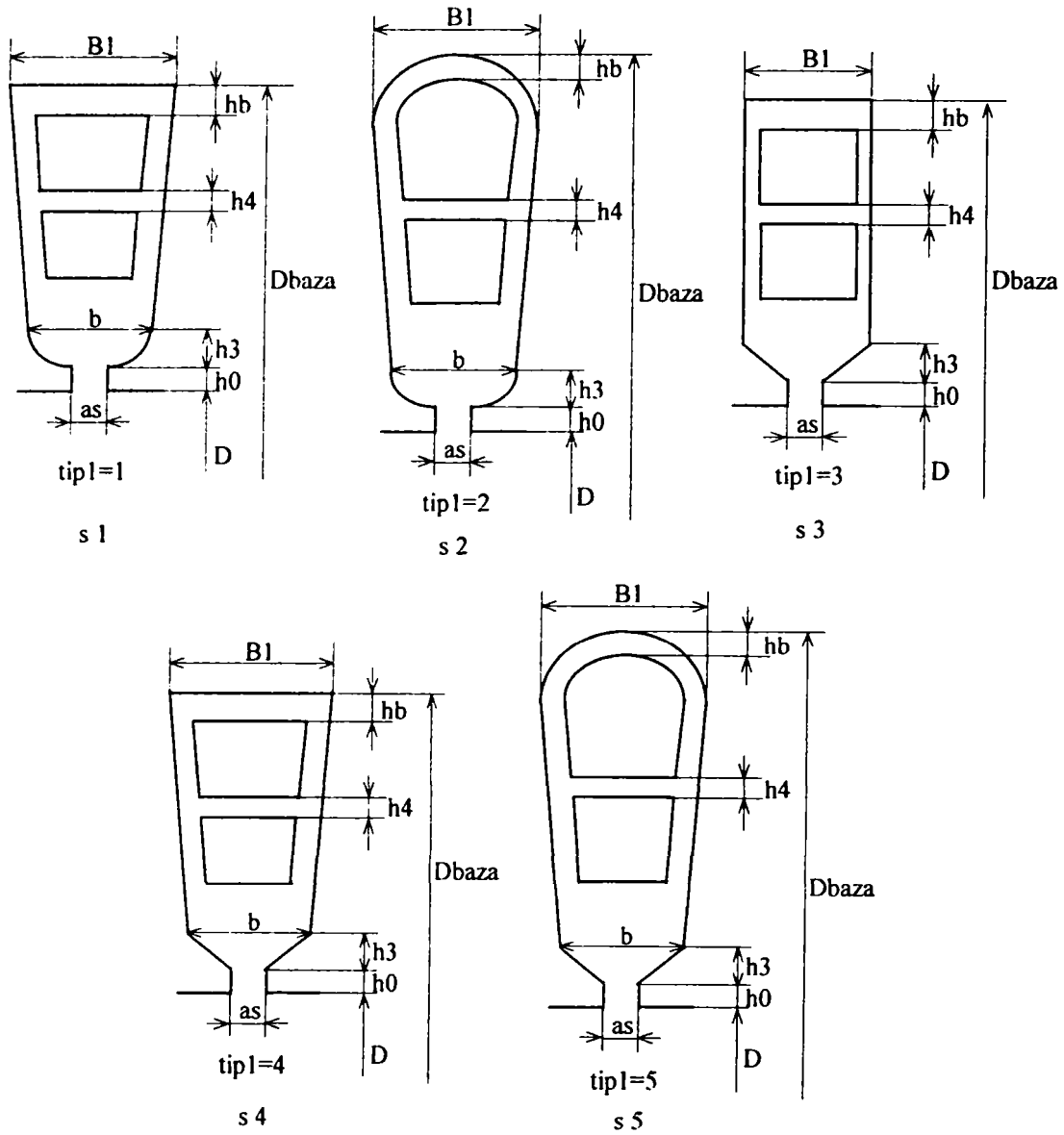


Fig.8.11. Crestături utilizate în stator la motoare de inducție

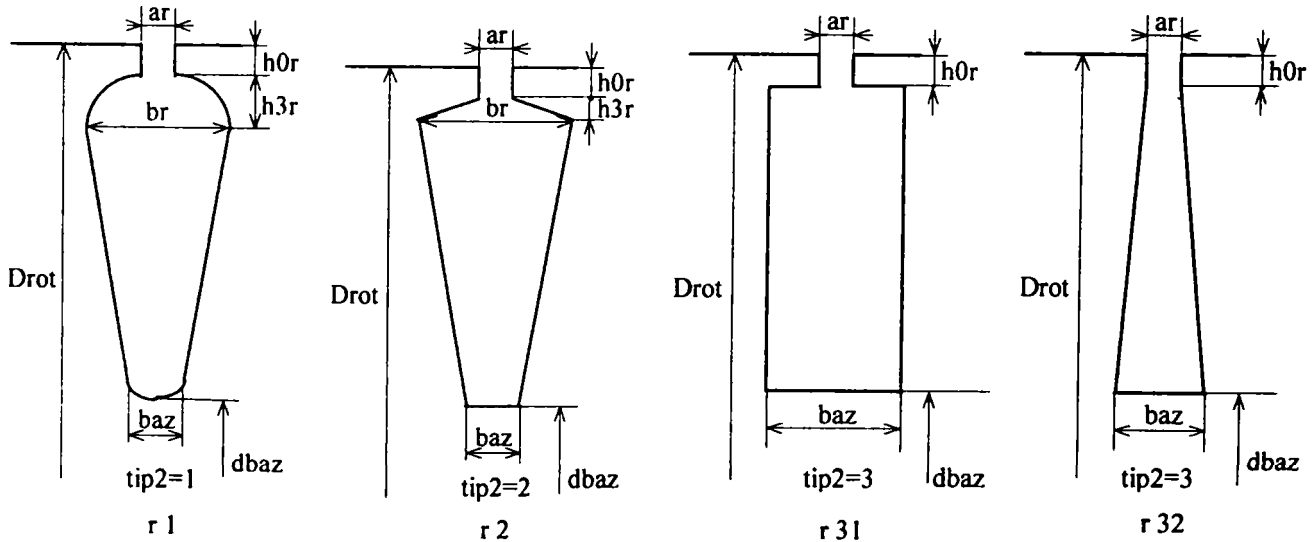


Fig.8.12. Crestături utilizate în rotor la motoare de inducție cu simplă colivie

și "s5", sunt determinate cu ajutorul unui program care menține suprafața creștăturii constantă, adică suprafața ocupată de conductoare, de izolații și de pană. Relațiile de calcul utilizate sunt prezentate în Anexa 6.

Tehnica de analiză este următoarea: programul MASI rulează în prima fază cu datele creștăturilor "s1" și "r1". Menținând apoi creștătura rotor "r1", sunt apelate, pe rând, fișierele cu datele creștăturilor "s2", "s3", "s4" și "s5". Parametrii electrici care se modifică, în acest caz, sunt reactanța de dispersie pe fază a înfășurării statorice, $X_{\sigma 1}$ (notată în program Xs1), rezistența de magnetizare, R_m (R_m) și reactanța de magnetizare, X_m (X_m).

Rezultatele sunt prezentate în figurile 8.13, 8.14 și 8.15. Reprezentarea grafică a curbelor de variație este următoarea:

- pentru creștătura "s1";
- pentru creștătura "s2";
- .-.- pentru creștătura "s3";
- .-.-.- pentru creștătura "s4";
- pentru creștătura "s5".

Examinând aceste figuri, se constată influența saturației magnetice asupra parametrilor electrici analizați. În cazul creștăturii "s1", reactanța $X_{\sigma 1}$ scade cu aproximativ 23%, la pornirea motorului în comparație cu funcționarea lui în gol. În schimb, R_m crește cu 15%, iar X_m crește cu 22%.

La funcționarea în gol este de remarcat că reactanța $X_{\sigma 1}$ a creștăturii "s5" este cu 6% mai mică decât cea a creștăturii de referință, "s1". Rezistența R_m la utilizarea creștăturii "s5" este cu 23% mai mică decât cea în cazul folosirii creștăturii "s1". Reactanța X_m în cazul utilizării creștăturii "s5" este cu 25% mai mică decât cea în cazul folosirii creștăturii "s1".

Valorile reactanțelor celorlalte creștături analizate se află între curbele de

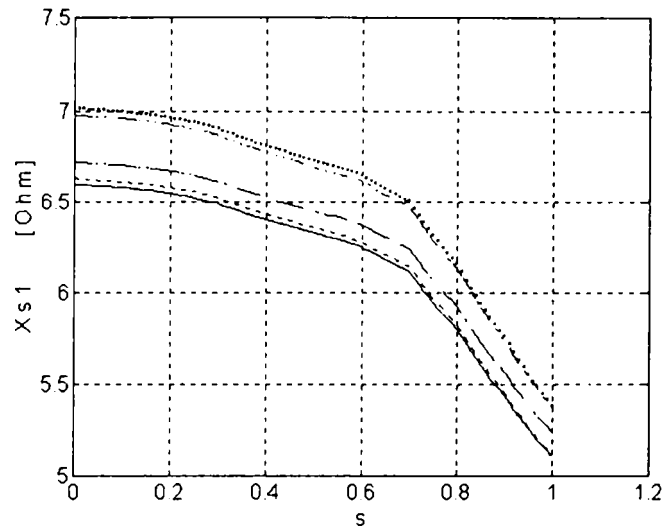


Fig.8.13. Variația reactanței statorice de dispersie la motorul de 1,5 kW

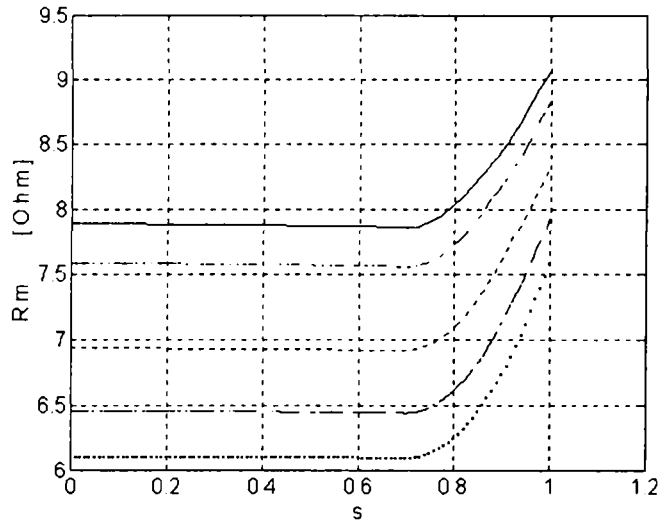


Fig.8.14. Variația rezistenței de magnetizare la motorul de 1,5 kW

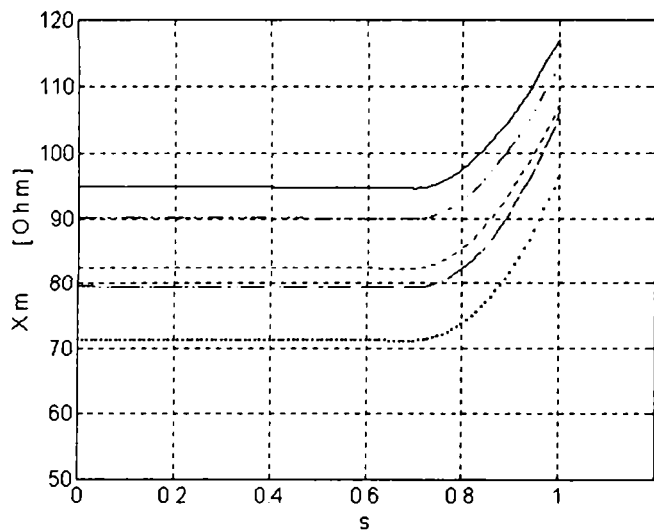


Fig.8.15. Variația reactanței de magnetizare la motorul de 1,5 kW

variația al. c.e. tatur. lor "s1" și "s5".

La pornire (rotor blocat), diferențele dintre valorile parametrilor obținuți în cazul utilizării crestăturii "s1" și "s5" scad, fiind de 5,5% pentru $X_{\sigma 1}$ și de 16% pentru X_m .

La motorul de 15 kW cu 4 poli, crestăturile de bază sunt "s5" în stator și "r1" în rotor. Crestăturile "s1", "s2", "s3" și "s4" sunt calculate cu ajutorul programului prezentat în Anexa 6.

Utilizând aceeași tehnică de analiză, în care pentru aceeași crestătură rotor, "r1", sunt apelate, pe rând, fișierele crestăturilor "s1", "s2", "s3" și "s4", se obțin parametrii electrici $X_{\sigma 1}$ (notată în program X_{s1}), R_m și X_m , a căror variație cu alunecarea este prezentată în figurile 8.16, 8.17 și 8.18.

Reactanța de dispersie $X_{\sigma 1}$ se modifică cu saturația și cu tipul crestăturii statorice, conform figura 8.16. La funcționarea în gol, ea este cu 9% mai mică în cazul utilizării crestăturii "s1", în locul crestăturii "s5". Notațiile grafice sunt identice cu cele de la motorul de 1,5 kW.

Rezistența de magnetizare crește cu 10%, la funcționare în gol, în cazul utilizării crestăturii "s1" în locul crestăturii "s5", iar reactanța de magnetizare crește cu 15%.

La pornire ($s = 1$), reactanța de dispersie, $X_{\sigma 1}$, se micșorează, în cazul crestăturii "s5", cu 6% față de funcționarea în gol, rezistența de magnetizare, R_m , crește cu 16%, iar reactanța de magnetizare, X_m , crește cu 25%.

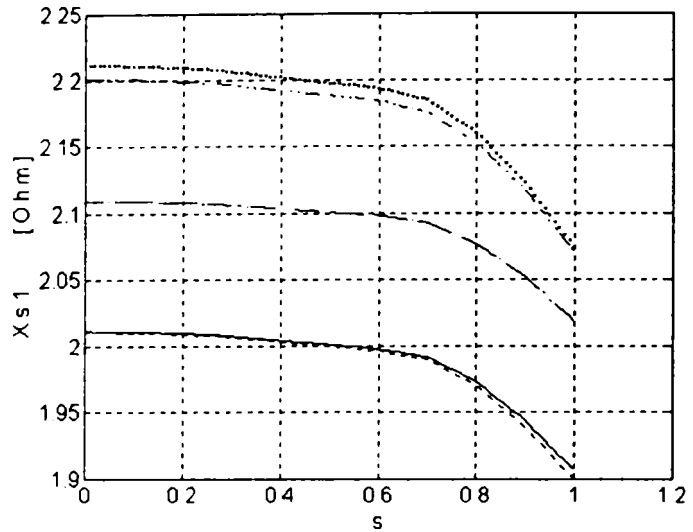


Fig.8.16. Variația reactanței statorice de dispersie la motorul de 15 kW

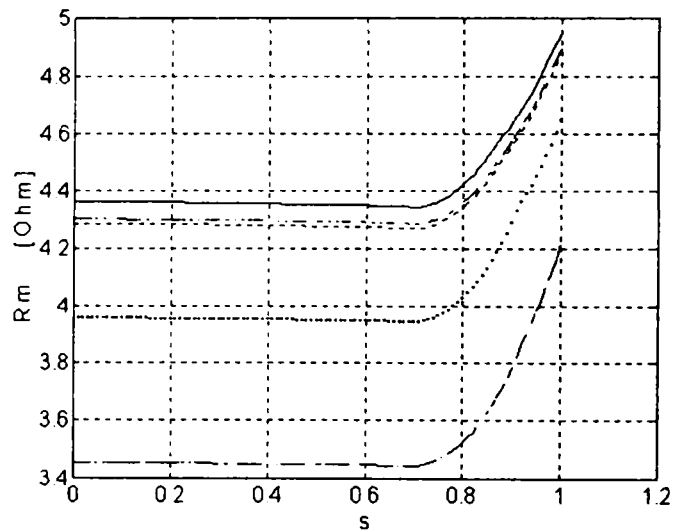


Fig.8.17. Variația rezistenței de magnetizare la motorul de 15 kW

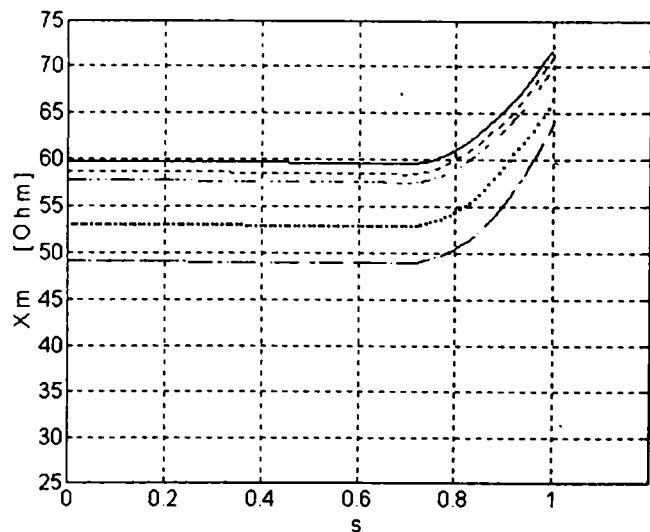


Fig.8.18. Variația reactanței de magnetizare la motorul de 15 kW

8.3. Studiul influenței formei crestăturii rotorice

Crestăturile rotorice analizate sunt cele din figura 8.12, pentru rotorul cu simplă colivie. Acesta este cazul motorului de 1,5 kW cu 4 poli. Dimensiunile crestăturilor “r2”, “r31” și “r32” sunt determinate ținând cont de secțiunea barei, de densitatea maximă de curent admisă în bară și de inducția maximă în dintele rotorice (Anexa 6).

Algoritmul de analiză menține crestătura din stator, “s1”, nemodificată, apelând pe rând fișierele cu datele crestăturilor “r2”, “r31” și “r32”. Varianta de bază este cea cu crestătura “s1” în stator, respectiv, “r1” în rotor.

Parametrii electrici care se modifică, în acest caz, sunt rezistența rotorice raportată la stator, R_2' (notată în figură R2p), reactanța de dispersie a barei rotorice raportată la stator, $X_{\sigma 2}'$ ($Xs2p$), rezistența de magnetizare, R_m (Rm) și reactanța de magnetizare, X_m (Xm).

Rezultatele sunt prezentate în figurile 8.19, 8.20, 8.21 și 8.22. Notarea curbelor de variație este următoarea:

- pentru crestătura “r1”;
- - - pentru crestătura “r2”;
- · - · pentru crestătura “r31”;
- · · · pentru crestătura “r32”.

Rezistența barei rotorice este influențată de efectul pelicular, majorarea cea mai pronunțată, la pornire, fiind de 11,5%, în cazul crestăturii “r32”, conform figurii 8.19.

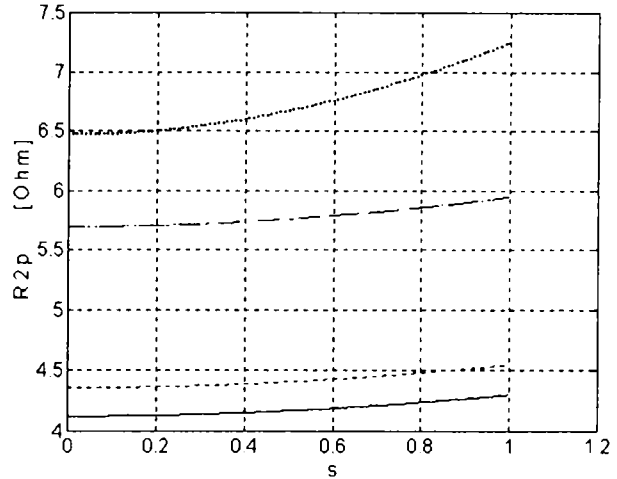


Fig.8.19. Variația rezistenței rotorice la motorul de 1,5 kW

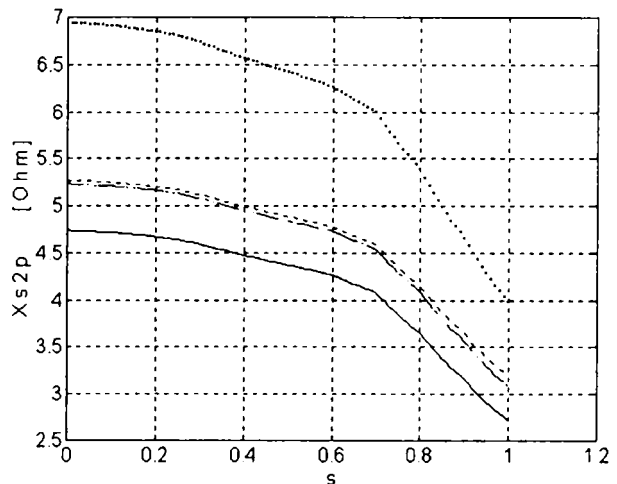


Fig.8.20. Variația reactanței rotorice de dispersie la motorul de 1,5 kW

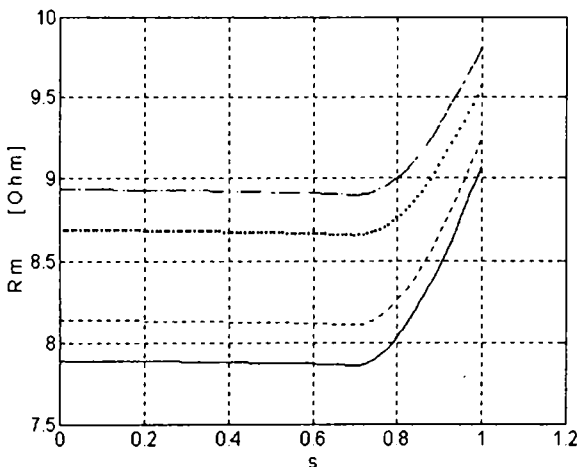


Fig.8.21. Variația rezistenței de magnetizare la motorul de 1,5 kW

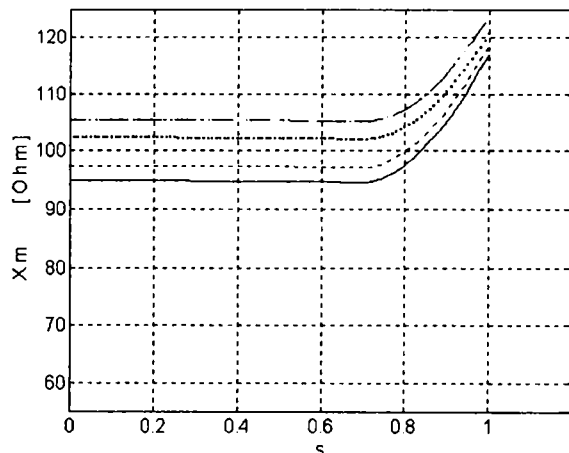


Fig.8.22. Variația reactanței de magnetizare la motorul de 1,5 kW

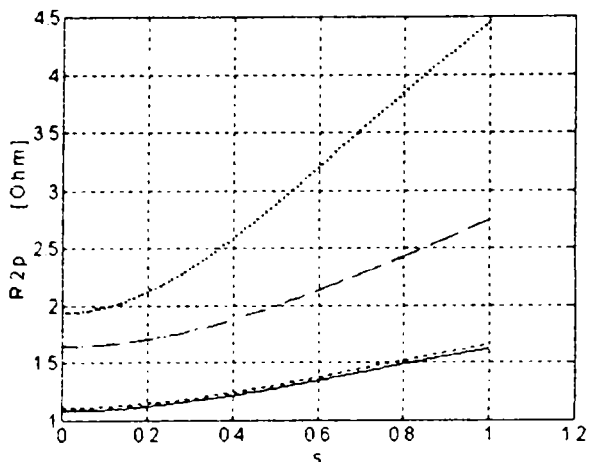


Fig.8.23. Variația rezistenței rotorice la motorul de 15 kW

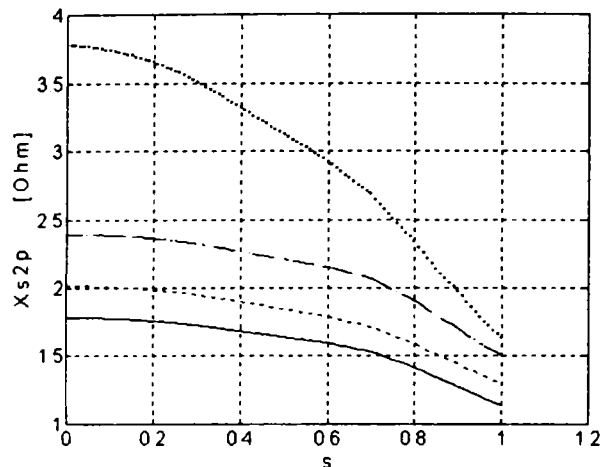


Fig.8.24. Variația reactanței rotorice de dispersie la motorul de 15 kW

Reactanța $X_{\sigma 2}'$ se micșorează atât datorită efectului pelicular din bare, cât și datorită saturației magnetice din dinții rotorici. Din figura 8.20 se observă că reactanța de dispersie scade la pornire cu aproximativ 42,5%, atât în cazul crestăturii “r1” cât și în cazul crestăturii “r32”.

Variația rezistenței de magnetizare cu alunecarea mașinii este prezentată în figura 8.21. În acest caz, rezistența crește, la pornire față de funcționarea în gol, cu 16% în cazul utilizării crestăturii rotorice “r1”, sau cu 10% în cazul crestăturii “r31”.

Reactanța de magnetizare este modificată de către saturație mai pronunțat, majorându-se la pornire față de funcționarea în gol, cu 25,5% în cazul utilizării crestăturii “r1”, sau cu 16,2% în cazul crestăturii “r31”, conform figurii 8.22.

În cazul motorului de 15 kW cu 4 poli și colivie simplă este utilizat un algoritm de modificare a crestăturii rotorice similar celui de la motorul de 1,5 kW. Crestăturile utilizate, “r1”, “r2”, “r31” și “r32” sunt prezentate în figura 8.12. Varianta de bază la acest motor este cea având crestătura “s5” în stator, respectiv, crestătura “r1” în rotor.

Rezultatele rulării programului MASI sunt prezentate în figurile 8.23, 8.24, 8.25 și 8.26. Reprezentarea grafică are aceleași notații ca și la motorul de 1,5 kW.

Figura 8.23 prezintă majorarea rezistenței barei rotorice, la pornirea motorului, sub influența efectului pelicular. Această creștere este, față de funcționarea în gol, de 57% în cazul crestăturii “r1” și de 137% în cazul crestăturii “r32”.

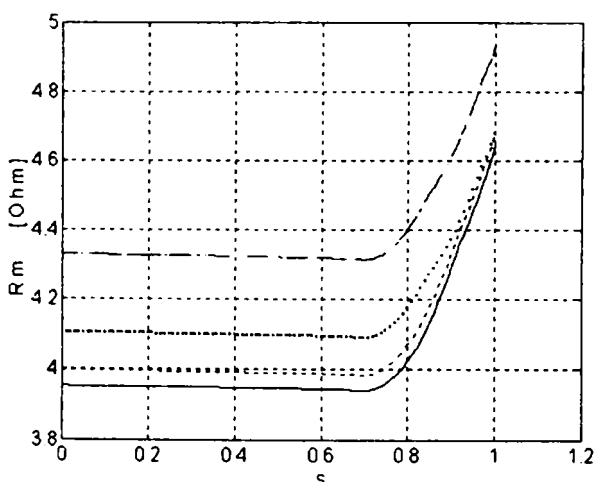


Fig.8.25. Variația rezistenței de magnetizare la motorul de 15 kW

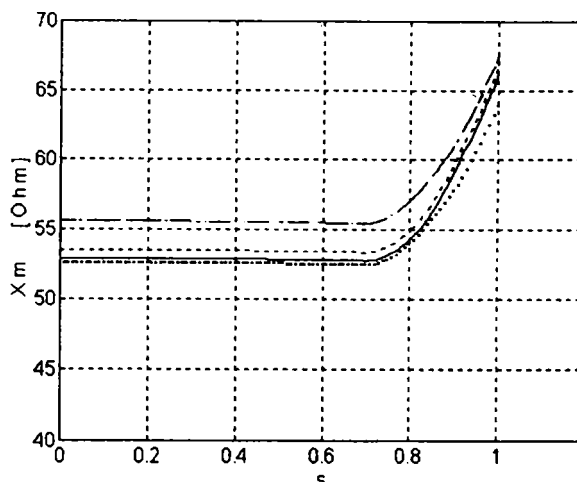


Fig.8.26. Variația reactanței de magnetizare la motorul de 15 kW

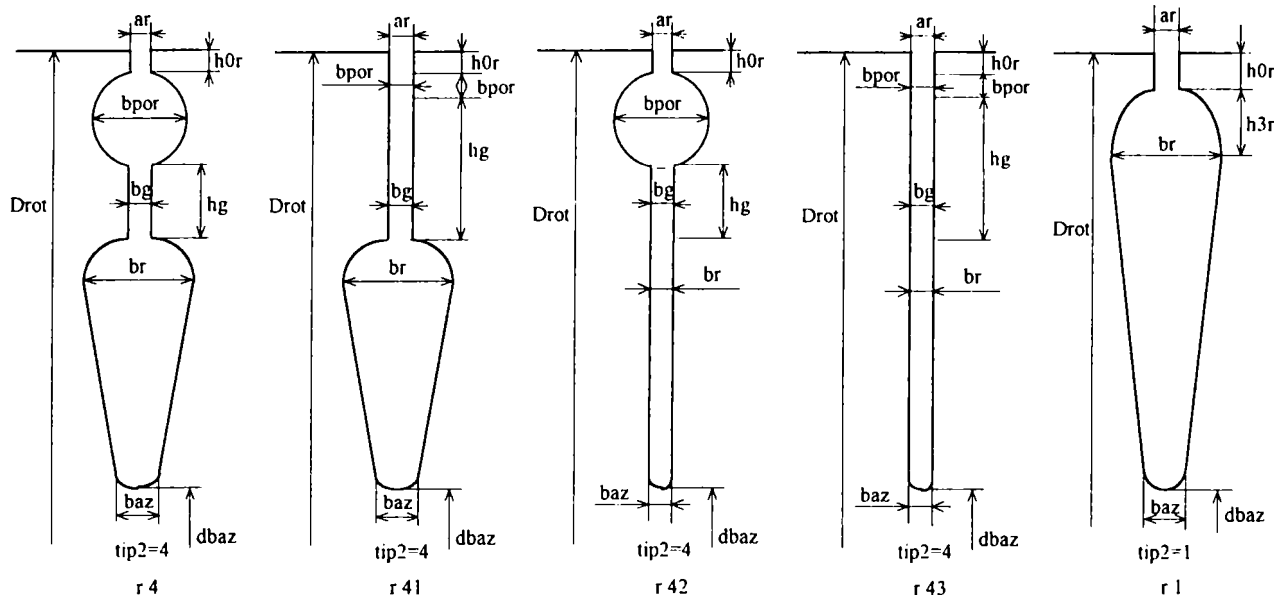


Fig.8.27. Variante de crestături rotorice pentru motorul de 15 kW cu dublă colivie

Variația reactanței de dispersie, $X_{\sigma 2}'$, cu alunecarea este prezentată în figura 8.24. În cazul utilizării crestăturii “r1” ea scade, la pornire față de funcționarea în gol, cu 33%, iar în cazul crestăturii “r32”, cu 56%.

În cazul rezistenței de magnetizare, curbele din figura 8.25 prezintă o majorare a valorii la pornire față de funcționarea în gol, cu aproximativ 18% pentru crestăturile “r1” și “r2”, și cu 14% pentru “r31”.

O evoluție similară se poate observa în figura 8.26, la reactanța de magnetizare. În acest caz, majorarea valorii la pornire față de funcționarea în gol este cu aproximativ 22% pentru crestăturile “r1”, “r2”, “r32”, și cu 19,5% pentru “r31”.

La motorul de 15 kW cu 4 poli și dublă colivie este utilizat un algoritm de modificare a crestăturii rotor, de la varianta “r4” cu dublă colivie, trecând prin formele geometrice “r41”, “r42” și “r43”, până la varianta “r1” cu simplă colivie.

Crestăturile menționate sunt cele din figura 8.27. Varianta de bază este cea având crestătura “s1” în stator, respectiv, crestătura “r4” în rotor.

Rezultatele rulării programului MASI sunt prezentate în figurile 8.28, 8.29, 8.30 și 8.31. Curbele de variație sunt astfel reprezentate: — pentru crestătura “r4”; - - - pentru crestătura “r41”; - · - pentru crestătura “r42”; - · · - pentru crestătura “r43”; · · · · pentru crestătura “r1”.

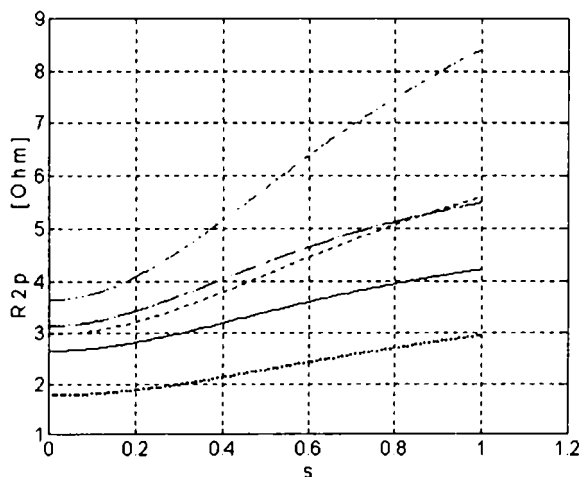


Fig.8.28. Variația rezistenței rotorice la motorul de 15 kW cu dublă colivie

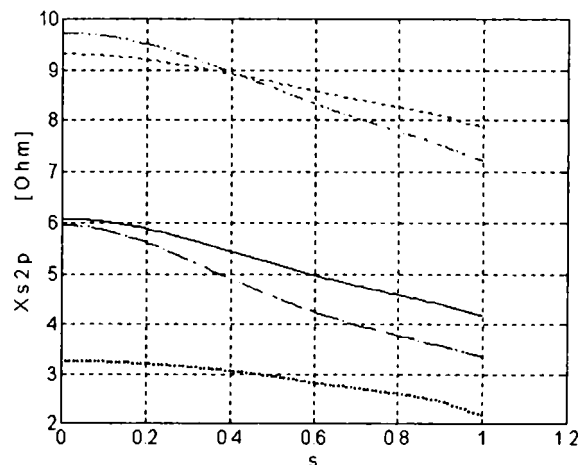


Fig.8.29. Variația reactanței rotorice de dispersie la motorul de 15 kW cu dublă colivie

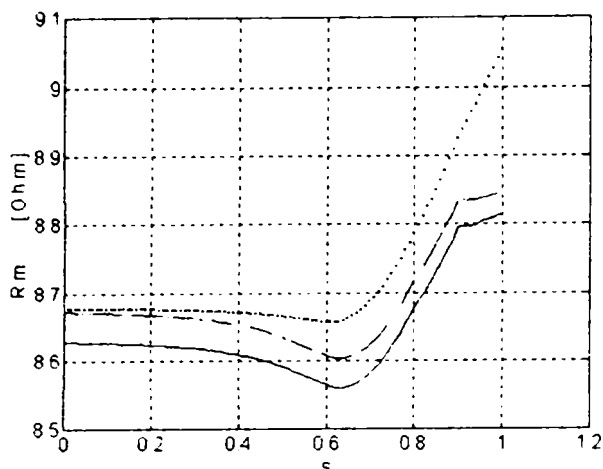


Fig. 8.30. Variația rezistenței de magnetizare la motorul de 15 kW cu dublă colivie

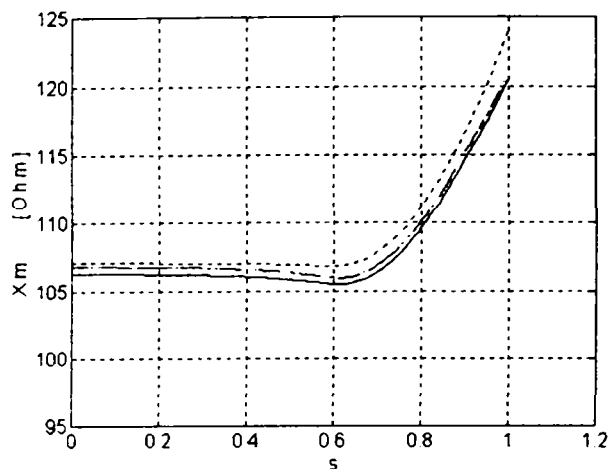


Fig. 8.31. Variația reactanței de magnetizare la motorul de 15 kW cu dublă colivie

Figura 8.28 prezintă majorarea rezistenței barei rotorice, în funcție de alunecare, sub influența efectului pelicular. Această creștere, față de funcționarea în gol, este cu 53% în cazul dublei colivii, “r4” și cu 124% în cazul barei înalte, “r43”.

Variația reactanței de dispersie, $X_{\sigma 2}'$, cu alunecarea este prezentată în figura 8.29. În cazul utilizării crestăturii “r4” ea scade, la pornire față de funcționarea în gol, cu 35,7%, iar în cazul crestăturii “r43”, cu 33,3%.

În cazul rezistenței de magnetizare, curbele prezentate în figura 8.30 prezintă o majorare la pornire, față de funcționarea în gol, cu aproximativ 2% pentru crestăturile “r4”, “r41”, “r42”, “r43” și cu 4% pentru “r1”.

Variația reactanței de magnetizare se poate observa în figura 8.31. În acest caz, majorarea valorii la pornire față de mersul în gol este cu aproximativ 12% pentru crestăturile “r4”, “r41”, “r42”, “r43” și cu 16% pentru “r1”.

Datorită valorilor aproape egale, în figurile 8.30 și 8.31 curba de variație pentru crestătura “r41” este suprapusă peste cea corespunzătoare crestăturii “r1”, iar curba de variație pentru crestătura “r43” este suprapusă peste cea corespunzătoare crestăturii “r42”.

8.4. Verificări experimentale

Măsurătorile sunt efectuate pentru determinarea parametrilor electrici la patru motoare de inducție și compararea rezultatelor cu cele obținute cu programul MASI. Ele sunt efectuate cu ajutorul sistemului de achiziție prezentat în capitolul 7.1. Mărimile măsurate sunt tensiunile de fază curenții de linie, tensiunea indusă într-o bobină plasată în întrefierul mașinii și rezistența de fază. Datele sunt achiziționate pe durata de 40 ms (două perioade) sau de 80 ms (patru perioade).

Pentru determinarea parametrilor electrici am elaborat programul “ACHIZPAR”, instrument virtual compus în mediul de programare LabVIEW [110].

Datele achiziționate “on - line” cu blocul “achiz”, din figura 8.32, sunt separate pe fiecare canal cu blocurile “ua”, “ub”, “uc”, “ia”, “ib”, “ic” și “ue”. Pentru obținerea valorilor reale ale tensiunilor și curenților mășurați, se amplifică valorile obținute pe fiecare canal, cu valorile indicate de producătorul traductoarelor. Se determină puterea activă pe fiecare fază a mașinii, utilizând subprogramul “val.medie”:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt \quad (8.2)$$

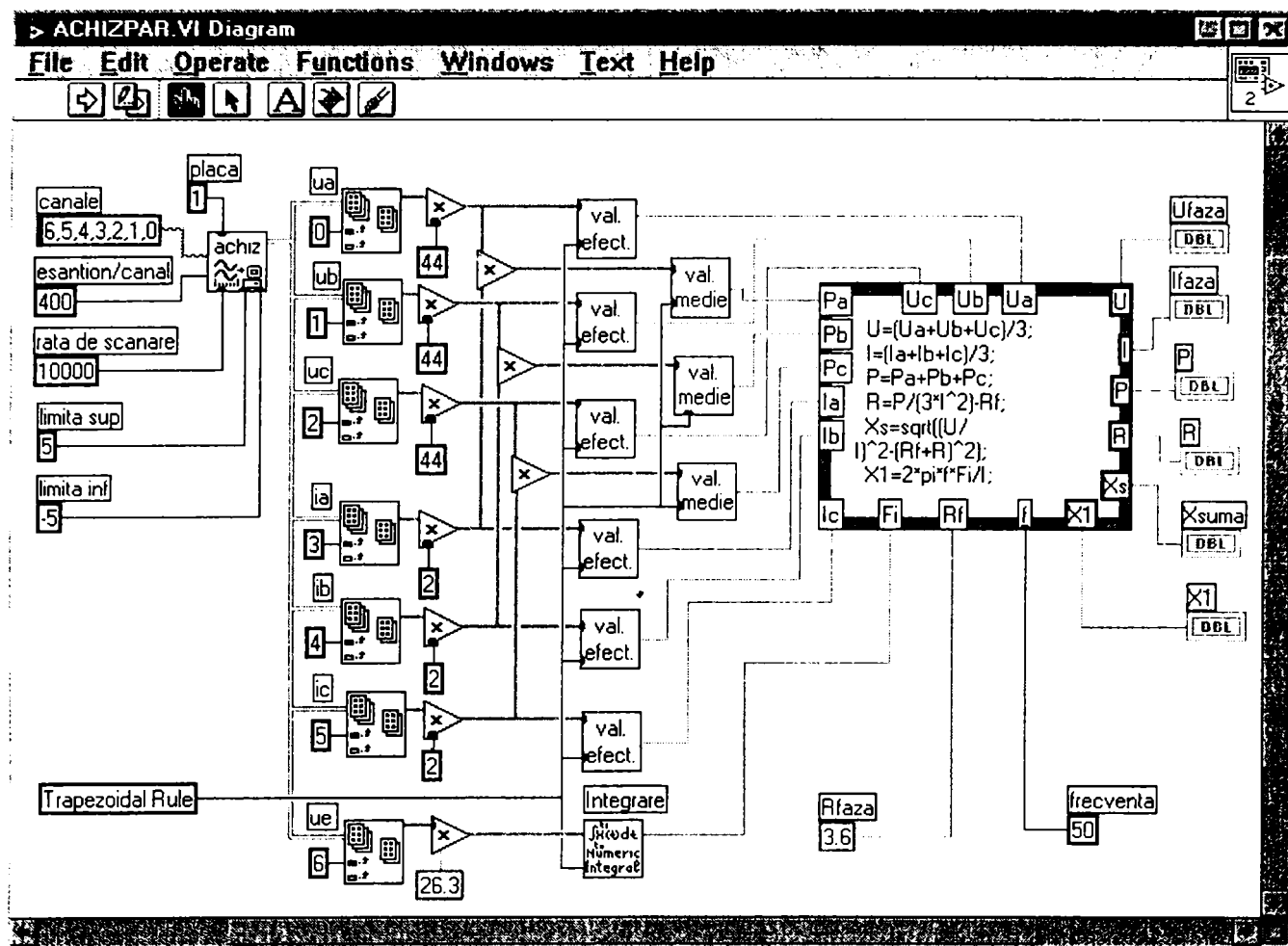


Fig.8.32. Programul ACHIZPAR de determinare on - line a parametrilor electrici

unde u și i sunt valorile momentane achiziționate pentru tensiune și curent. Se însumează valorile obținute pentru a obține puterea activă a mașinii. Cu ajutorul subprogramului "val.efect." se calculează valoarea efectivă a tensiunilor și curenților pe fiecare fază.

Cu ajutorul puterii active, a tensiunii și a curentului mediu pe fază se calculează următorii parametri electrici, în funcție de regimul de încercare al mașinii:

- la funcționarea în gol, R , din program (figura 8.32) este rezistența de magnetizare, iar X_{suma} reprezintă suma reactanței statorice de dispersie cu reactanța de magnetizare;
- la funcționarea în scurtcircuit, R este rezistența rotorică raportată la stator, iar X_{suma} reprezintă suma reactanței statorice de dispersie cu reactanța rotorică de dispersie raportată la stator.

Cu ajutorul bobinei plasate în întrefier se obține tensiunea electromotoare indusă "ue". Prin integrarea acestei tensiuni se calculează fluxul din întrefier "Fi", care împărțit la curentul de fază "I" și înmulțit cu pulsația $\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f$ determină reactanța "X1". Aceasta are valori apropiate de reactanța "Xsuma", fiind utilizată pentru verificare.

Tensiunea de alimentare de linie este variată în trepte, de la 600 V la 100 V la funcționarea în gol a tuturor motoarelor încercate, de la 20 V la 400 V la scurtcircuitul motoarelor de 1,5 kW și de la 20 V la 120 V la scurtcircuitul motoarelor de 15 kW.

Primul motor de inducție testat este cel de 1,5 kW cu 4 poli, având creștăturile "s1" în stator și "r1" în rotor. Punctele măsurate sunt marcate pe figuri cu "x", iar linia continuă reprezintă rezultatul modelării cu ajutorul programului MASI.

Pentru simularea funcționării în gol, în schema bloc din figura 8.2 se operează următoarele modificări:

- alunecarea se fixează la valoarea corespunzătoare vitezei de rotație de la funcționarea în gol (aproximativ 0.025);
- tensiunea de alimentare pe fază se consideră o mărime variabilă, care se modifică de la 0 la 350V.

În schema bloc din figura 8.8, în blocul “Bd*”, se modifică funcția de simulare a inducției în întrefier în conformitate cu estimarea efectuată la punctul 7.2.

În figura 8.33 este prezentată variația rezistenței de magnetizare, R_m , în funcție de tensiunea de alimentare de fază, $U_{fază}$.

Variația reactanței $X_{\sigma 1} + X_m$ (notată în figură $X_{s1} + X_m$) în funcție de aceleași valori ale tensiunii de fază, $U_{fază}$, este ilustrată în figura 8.34.

Valorile rezistenței rotorice R_2 (notată în figură R_{2p}) în funcție de curentul de fază, $I_{fază}$, sunt prezentate în figura 8.35.

Valorile reactanței $X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2}$ (notată în figură $X_{s1} + X_{s2p}$), în funcție de aceleași valori ale curentului, $I_{fază}$, sunt date în figura 8.36.

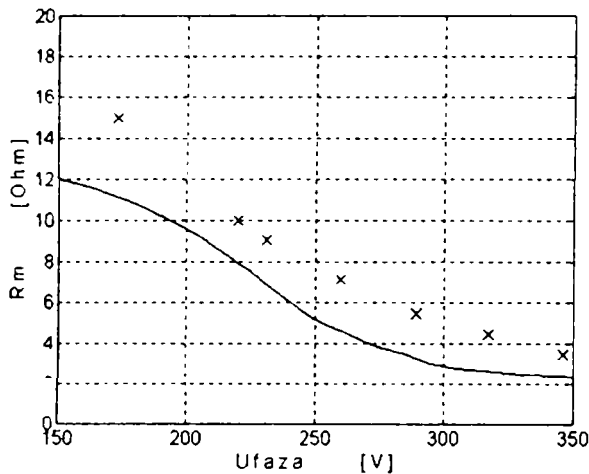


Fig.8.33. Variația rezistenței R_m în funcție de $U_{fază}$, la funcționarea în gol a motorului de 1,5kW, având creștăturile “s1” în stator și “r1” în rotor
 x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

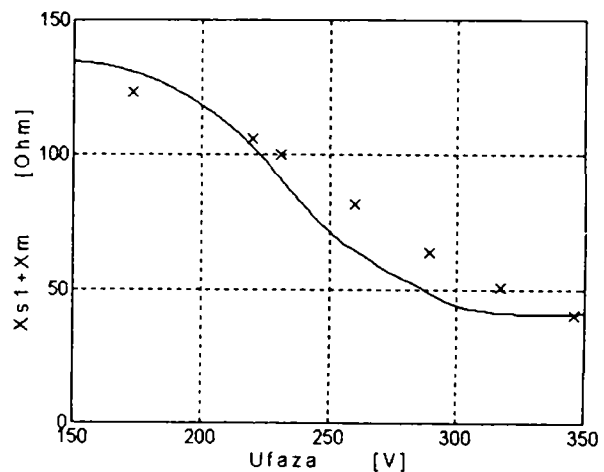


Fig.8.34. Variația reactanței $X_{s1} + X_m$ în funcție de $U_{fază}$, la funcționarea în gol a motorului de 1,5kW, având creștăturile “s1” în stator și “r1” în rotor
 x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

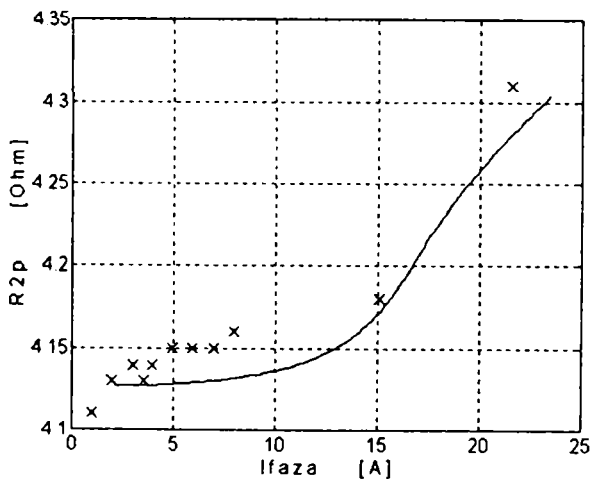


Fig.8.35. Variația rezistenței R_{2p} în funcție de $I_{fază}$, la scurtcircuitul motorului de 1,5 kW, având creștăturile “s1” în stator și “r1” în rotor,
 x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

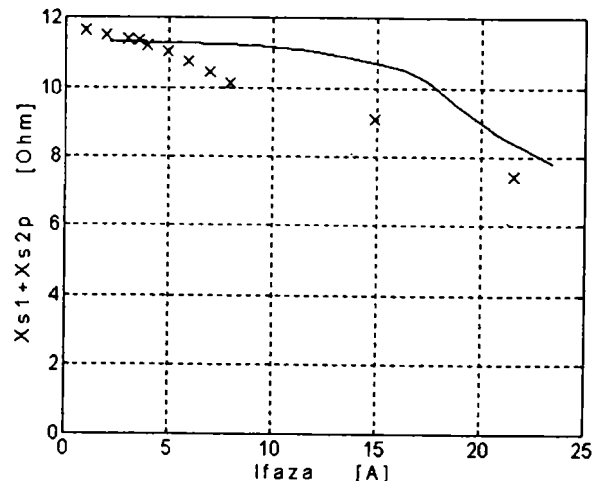


Fig.8.36. Variația reactanței $X_{s1} + X_{s2p}$ în funcție de $I_{fază}$, la scurtcircuitul motorului de 1,5 kW, vând creștăturile “s1” în stator și “r1” în rotor,
 x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

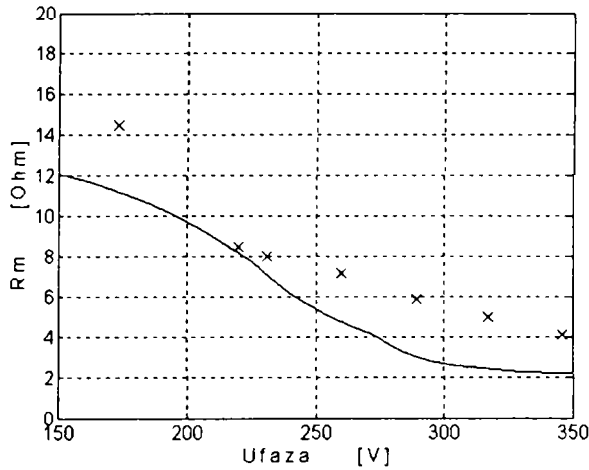


Fig.8.37. Variația rezistenței R_m în funcție de $U_{fază}$, la funcționarea în gol a motorului de 1,5kW, având crestăturile "s4" în stator și "r2" în rotor
x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

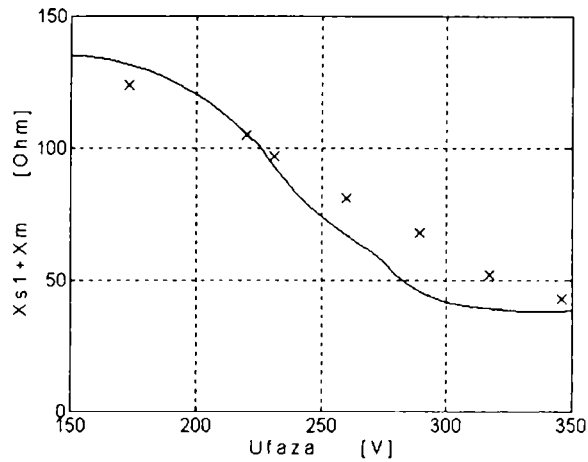


Fig.8.38. Variația reactanței $X_{s1}+X_m$ în funcție de $U_{fază}$, la funcționarea în gol a motorului de 1,5kW, având crestăturile "s4" în stator și "r2" în rotor
x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

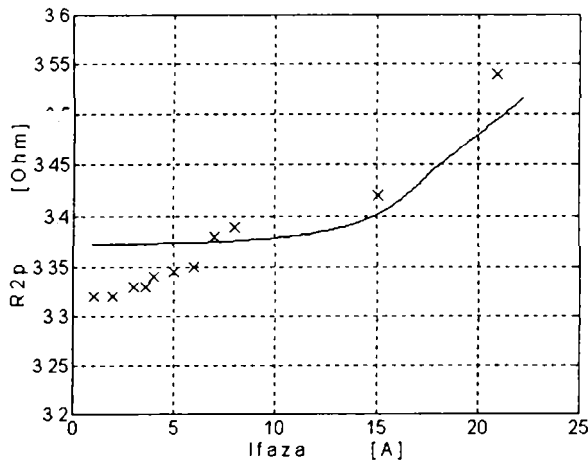


Fig.8.39. Variația rezistenței R_{2p} în funcție de $I_{fază}$, la scurtcircuitul motorului de 1,5 kW, având crestăturile "s4" în stator și "r2" în rotor,
x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

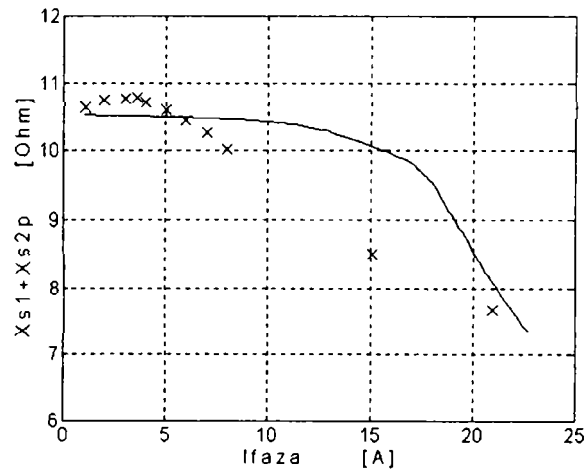


Fig.8.40. Variația reactanței $X_{s1}+X_{s2p}$ în funcție de $I_{fază}$, la scurtcircuitul motorului de 1,5 kW, având crestăturile "s4" în stator și "r2" în rotor,
x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

Cel de-al doilea motor de inducție încercat are aceeași putere nominală, 1,5 kW, același număr de poli, 4, dar geometria crestăturilor este diferită: "s4" în stator și "r2" în rotor. Variația parametrilor determinați din măsurători, în comparație cu cei obținuți din programul MASI, este prezentată în figurile 8.37, 8.38, 8.39 și 8.40.

Conform rezultatelor obținute cu programul MASI, prezentate în figurile 8.19, 8.20, 8.21 și 8.22 și comparate cu cele experimentale prezentate anterior, se confirmă existența doar a mici diferențe între cele două soluții constructive.

Motorul de 15 kW cu 4 poli și simplă colivie, este al treilea motor testat. Geometria crestăturii statorice este "s5", iar cea a crestăturii rotorice "r1".

Rezultatele obținute din datele măsurate, la determinarea rezistenței de magnetizare, R_m , în funcție de tensiunea de alimentare de fază, $U_{fază}$, sunt prezentate în figura 8.41. Cele obținute la determinarea reactanței $X_{\sigma 1}+X_m$, în funcție de tensiunea de alimentare de fază, $U_{fază}$, sunt redată în figura 8.42.

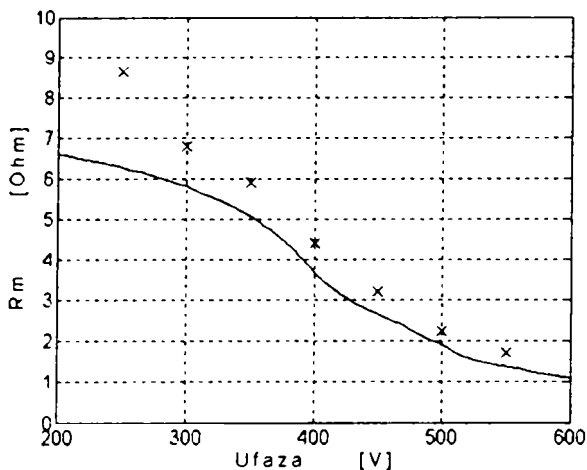


Fig.8.41. Variația rezistenței R_m în funcție de Ufază, la funcționarea în gol a motorului de 15 kW cu simplă colivie, având crestăturile "s5" în stator și "r1" în rotor
x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

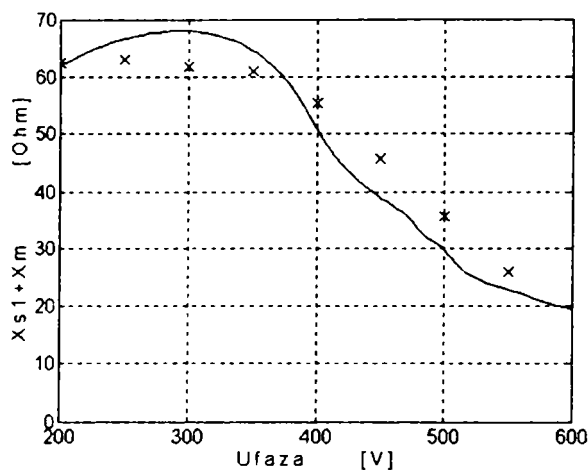


Fig.8.42. Variația reactanței $X_{s1} + X_m$ în funcție de Ufază, la funcționarea în gol a motorului de 15 kW cu simplă colivie, având crestăturile "s5" în stator și "r1" în rotor
x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

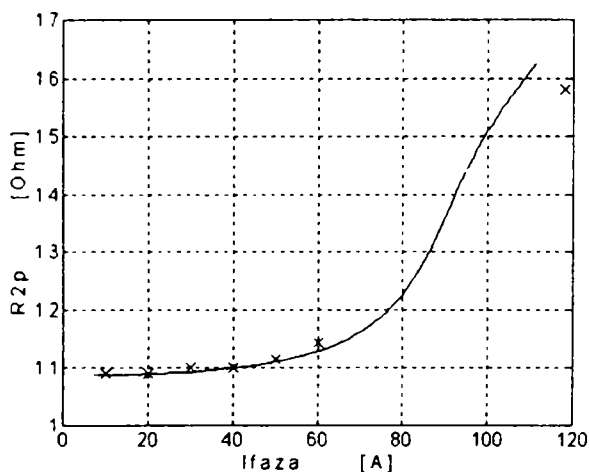


Fig.8.43. Variația rezistenței R_{2p} în funcție de Ifază, la scurtcircuitul motorului de 15 kW cu simplă colivie, având crestăturile "s5" în stator și "r1" în rotor
x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

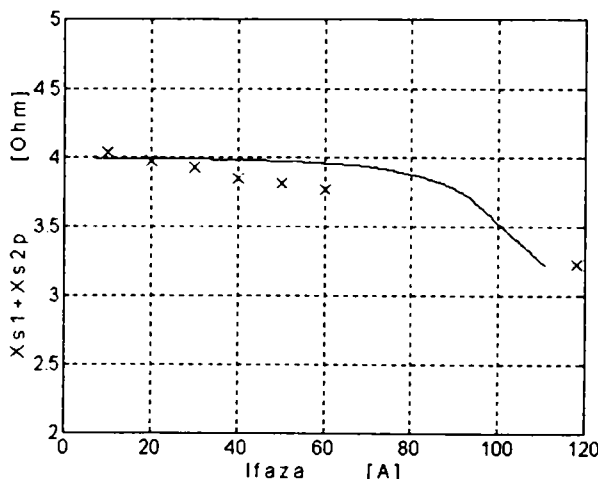


Fig.8.44. Variația reactanței $X_{s1} + X_{s2p}$ în funcție de Ifază, la scurtcircuitul motorului de 15 kW cu simplă colivie, având crestăturile "s5" în stator și "r1" în rotor
x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

În figura 8.43 se pot observa valorile rezistenței rotorice de fază, R_2' , în funcție de curentul de fază, I_{faza} , iar în figura 8.44 cele ale reactanței $X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2}$.

Motorul de inducție de 15 kW cu 4 poli și dublă colivie, este al patrulea motor încercat. Geometria crestăturii statorice este "s1", iar cea a crestăturii rotorice "r4".

În figura 8.45 sunt prezentate valorile obținute la determinarea rezistenței de magnetizare, R_m , în funcție de tensiunea de alimentare de fază, U_{faza} .

Rezultatele privind determinarea reactanței $X_{\sigma 1} + X_m$, în funcție de tensiunea de alimentare de fază, U_{faza} , sunt ilustrate în figura 8.46.

Valorile rezistenței rotorice R_2' în funcție de curentul de fază, I_{faza} , sunt cele din figura 8.47, iar cele ale reactanței $X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2}$ în funcție de curentul de fază, I_{faza} , sunt date în figura 8.48.

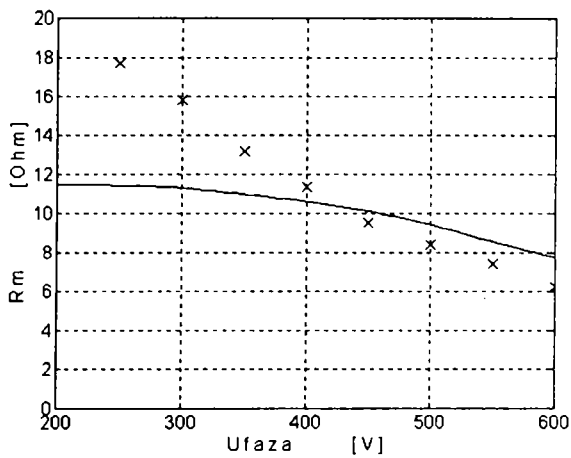


Fig.8.45. Variația rezistenței R_m în funcție de Ufază, la funcționarea în gol a motorului de 15 kW cu dublă colivie, având crestăturile "s1" în stator și "r4" în rotor
 x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

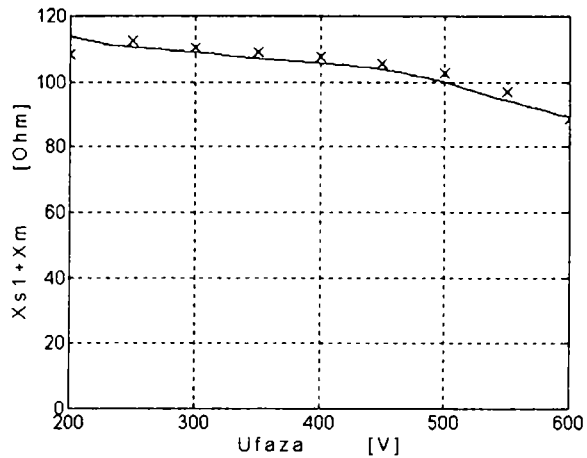


Fig.8.46. Variația reactanței $X_{s1}+X_m$ în funcție de Ufază, la funcționarea în gol a motorului de 15 kW cu dublă colivie, având crestăturile "s1" în stator și "r4" în rotor
 x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

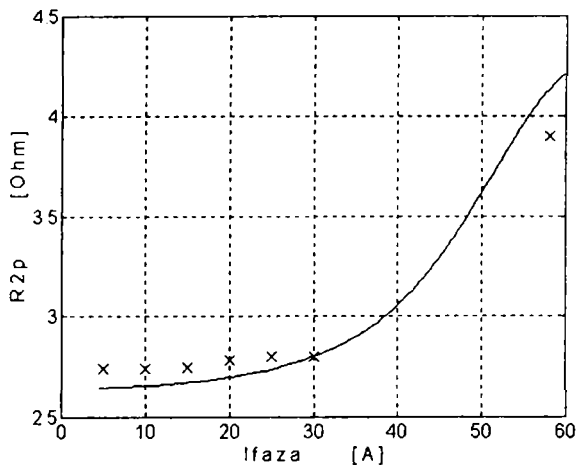


Fig.8.47. Variația rezistenței R_{2p} în funcție de Ifază, la scurtcircuitul motorului de 15 kW cu dublă colivie, având crestăturile "s1" în stator și "r4" în rotor
 x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

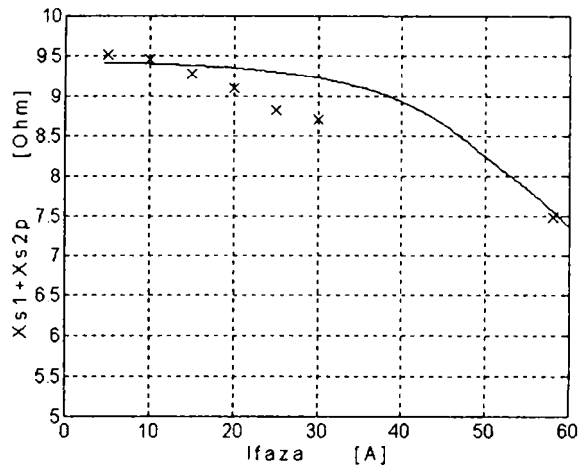


Fig.8.48. Variația reactanței $X_{s1}+X_{s2p}$ în funcție de Ifază, la scurtcircuitul motorului de 15 kW cu dublă colivie, având crestăturile "s1" în stator și "r4" în rotor
 x valori determinate cu ACHIZPAR; — variație obținută din rularea programului MASI

8.5. Concluzii

Cu ajutorul programului MASI se calculează parametrii electrici ai mașinilor de inducție cu simplă sau dublă colivie.

Din valorile obținute cu sistemul de achiziție de date, utilizând programul elaborat ACHIZPAR, se determină parametrii electrici ai motoarelor studiate.

Comparând rezultatele obținute prin cele două metode, se constată următoarele diferențe:

- la rezistența R_m , diferențe de la 5% până la 45% la tensiune ridicată de alimentare;
- la reactanța $X_{\sigma 1}+X_m$, diferențe de la 2% până la 25%;
- la rezistența R_2 , diferențe de la 0,2% la 2%;
- la reactanța $X_{\sigma 1}+X_{\sigma 2}$, diferențe de la 2% până la 22%.

La pornire ($s = 1$), reactanțele de dispersie ale mașinii de inducție scad iar rezistența și reactanța de magnetizare cresc, datorită câmpului magnetic care se concentrează în vârful dinților, descărcând jugurile și corpul dinților (figura 7.21.c).

Din analiza efectuată rezultă că, modificarea geometriei crestăturii statorice determină variații ale parametrilor electrici ai mașinii astfel: până la 10% pentru $X_{\sigma 1}$, până la 27% pentru R_m , până la 34% pentru X_m , în funcție de crestătura aleasă.

Utilizarea unei noi geometrii pentru crestăturile rotorice determină următoarele modificări ale parametrilor electrici: până la 106% pentru R_2' , până la 108% pentru $X_{\sigma 2}'$, până la 14% pentru R_m și până la 11% pentru X_m .

Determinarea parametrilor electrici este utilă pentru calculul caracteristicilor motoarelor de inducție și pentru realizarea schemelor de comandă și reglare a turației.

9. VARIAȚIA CARACTERISTICILOR MOTORULUI DE INDUCȚIE LA MODIFICAREA FORMEI CRESTĂTURII

9.1. Program de calcul al caracteristicilor motorului de inducție

Programul CARA l-am elaborat, cu ajutorul softului Matlab & Simulink [109], pentru calculul și reprezentarea caracteristicilor motoarelor de inducție cu rotorul în scurtcircuit.

În figura 9.1 este prezentată schema bloc a acestui program. Cu ajutorul blocului "parametri" se apelează fișierul care trebuie să conțină următoarele date ale motorului analizat:

- alunecarea s , între 0 și 1, cu pasul de eșantionare minim 0,001;
- parametrii electrici $R_1, X_{\sigma 1}, R_2, X_{\sigma 2}, R_m, X_m$;
- curentul de magnetizare I_m ;
- inducțiile magnetice: în întrefier B_δ (Bdelta);
 în dinții statorici, la vârf B_{z11} , la mijloc B_{z12} (Bdms), la bază B_{z13} ;
 în dinții rotorici, la vârf B_{z21} , la mijloc B_{z22} (Bdmr), la bază B_{z23} ;
 în jugul statoric B_{j1} și în jugul rotoric B_{j2} ;
- rapoartele "gam1" și "gam2" date de relațiile (8.1);
- factorul de întrefier statoric $k_{\delta 1}$ (kd1), factorul de întrefier rotoric $k_{\delta 2}$ (kd2) și factorul de întrefier total k_δ (kd).

Fișierele cu aceste date sunt cele obținute din rularea programului MASI.

Programul CARA calculează cuplul electromagnetic, M_e , viteza de rotație, n , curentul de fază statoric, I_1 , curentul de fază rotoric, I_2 , factorul de putere, $\cos\phi$, randamentul, η , și pierderile în motorul de inducție. Toate aceste date sunt salvate în fișierul "caracteristici".

Figura 9.2 prezintă schema bloc cu ajutorul căreia se calculează caracteristicile menționate mai sus.

Variabila este alunecarea, s , care ia valori în intervalul (0, 1]. Se evită valoarea 0, având în vedere operația de împărțire. În acest sens am atribuit alunecării prima valoare egală cu 10^{-3} .

Cuplul electromagnetic se calculează în blocul "Me", iar viteza de rotație în blocul "n".

Curentul de fază din rotor se obține din cel raportat la stator prin înmulțire cu factorul de transformare în curent, calculat în

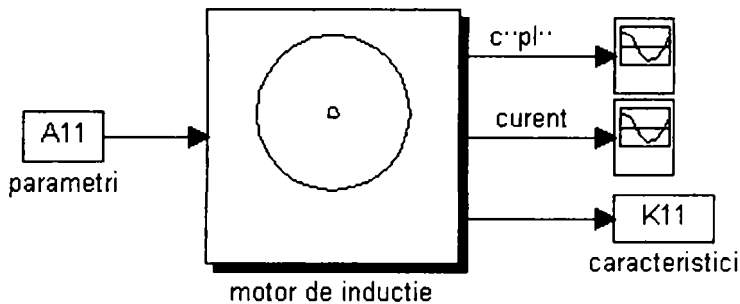


Fig.9.1. Schema bloc a programului CARA

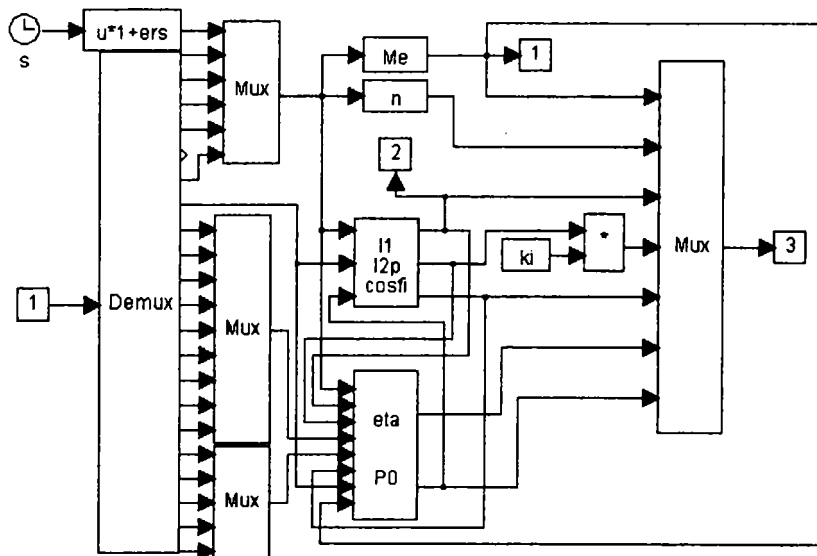


Fig.9.2. Schema bloc a subprogramelor de calcul al caracteristicilor motorului de inducție

blocul "ki".

Curentul de fază din stator (I_1), curentul de fază din rotor raportat la stator (I_2') și factorul de putere ($\cos\phi_i$), se calculează cu schema având blocurile din figura 9.3.

În figura 9.4 este prezentată schema bloc a subprogramului de calcul al pierderilor în motor, respectiv, al randamentului "eta". În blocul "Pcu0" sunt determinate pierderile motorului în înfășurarea statorică la funcționarea în gol. Acestea sunt însumate cu pierderile prin frecare, mecanice și de ventilație, P_{mv} , cu pierderile în juguri prin histereză, P_{jh} și prin curenți turbionari, P_{jw} , cu pierderile

principale în dinți, P_z și cu pierderile suplimentare de suprafață, P_o și de pulsație în dinți, P_p , pentru calculul componentei active a curentului de mers în gol, I_{oa} (din figura 9.3).

La determinarea masei dinților statorici, $Gz1$, se ține cont de tipul crestăturii considerate, "s1", "s2", "s3", "s4" sau "s5", geometrii prezentate în figura 8.11. În mod similar, la determinarea masei dinților rotorici, $Gz2$, se ține cont de geometria crestăturii "r1", "r2", "r31" sau "r32" pentru colivie simplă (figura 8.12) sau "r4", "r41", "r42", "r43" pentru colivie dublă (figura 8.27).

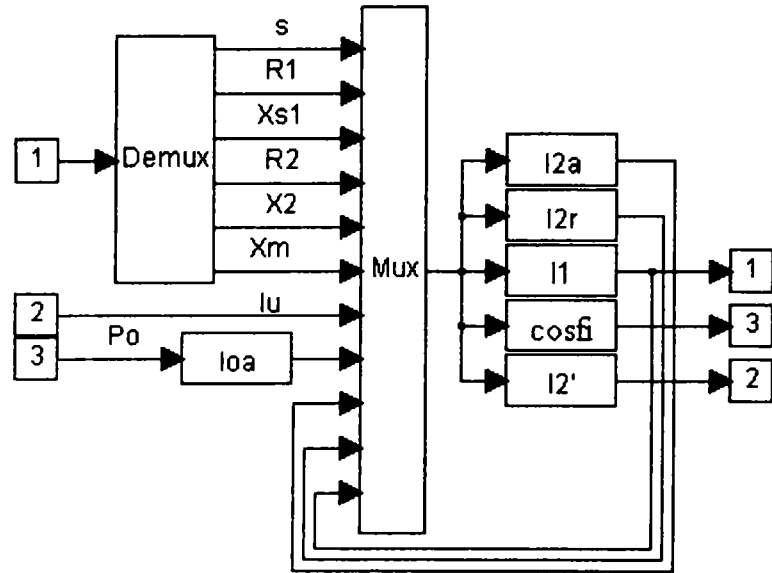


Fig.9.3. Schema bloc a subprogramelor de calcul al curentilor de fază din stator și rotor și al factorului de putere

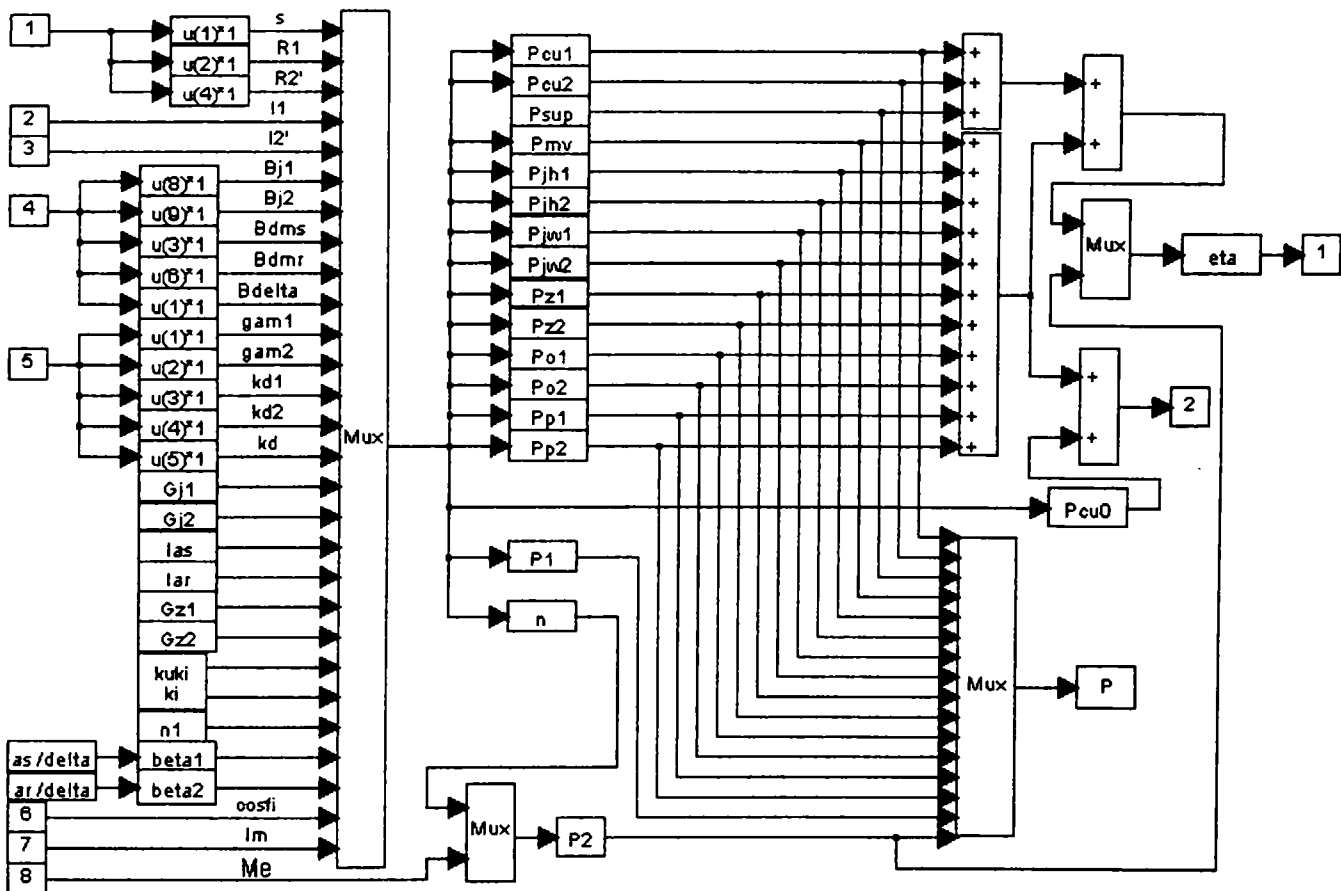


Fig.9.4. Schema bloc a subprogramelor de calcul al pierderilor în mașină și al randamentului

În blocul “Gj1” se determină masa jugului statoric, în blocul “Gj2” masa jugului rotoric, în blocul “kuki” factorii de transformare în tensiune și curent, în blocul “n1” viteza de rotație a câmpului magnetic învârtitor.

În fișierul “P” sunt salvate toate pierderile calculate din motor. Blocul “P1” calculează puterea activă absorbită de mașină de la rețea, iar blocul “P2” puterea la arbore.

9.2. Variația caracteristicilor motorului de inducție la modificarea formei creștăturii statorice

Metoda de analiză este similară celei pentru determinarea parametrilor electrici. În acest caz se utilizează fișierele obținute din rularea programului MASI, ca date de intrare pentru programul CARA.

Pentru motorul de 1,5 kW și 4 poli, modificând creștătura statorică de la forma de bază “s1”, la formele geometrice “s2”, “s3”, “s4” și “s5” și menținând creștătura rotorică “r1” neschimbată, se obțin caracteristicile prezentate în figurile 9.5, 9.6, 9.7 și 9.8. Creștăturile menționate sunt cele din figurile 8.11 și 8.12.

Reprezentarea grafică a curbelor de variație, în figurile 9.5 - 9.12, este următoarea:

- pentru creștătura “s1”; - - - pentru creștătura “s2”; - - pentru creștătura “s3”;
- · - pentru creștătura “s4”; · · · · pentru creștătura “s5”.

În figura 9.5 sunt prezentate caracteristicile mecanice, corespunzătoare celor cinci creștături. Diferențe mai importante se observă doar la valori mari ale alunecării. Cuplul critic scade cu 5,3% și cel de pornire cu 7% în cazul creștăturii “s5”.

Variația curentului de fază, I_1 , în funcție de viteza de rotație a arborelui, n , este redată în figura 9.6.a). Având în vedere diferențele mici care sunt între cele cinci curbe, am reprezentat un detaliu în figura 9.6.b). Domeniul de turații ales este între 1300 rot/min și turația de funcționare în gol (aproape de valoarea de sincronism, 1500 rot/min). La turația nominală de 1390 rot/min, curentul de fază în cazul creștăturii “s5” este cu 9% mai mare decât în cazul creștăturii de bază, “s1”.

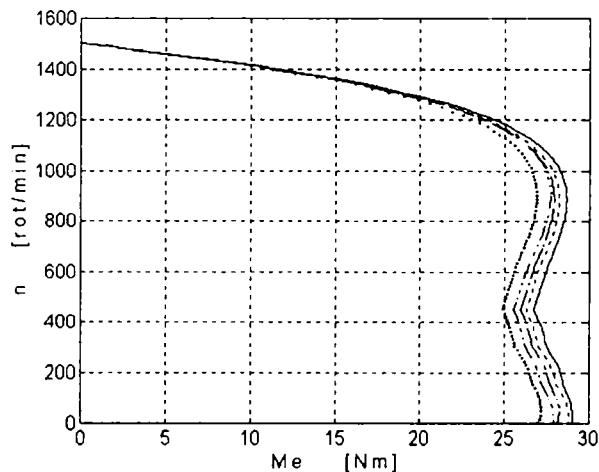


Fig.9.5. Caracteristici mecanice ale motorului de 1,5 kW

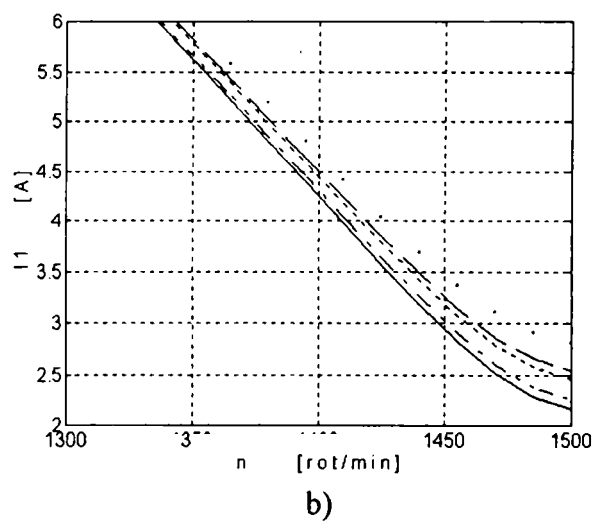
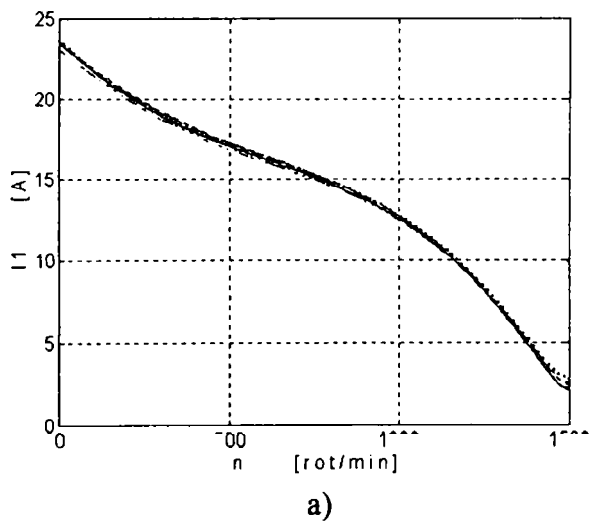


Fig.9.6.a) Variația curentului de fază la motorul de 1,5 kW;
b) Detaliu la variația curentului de fază.

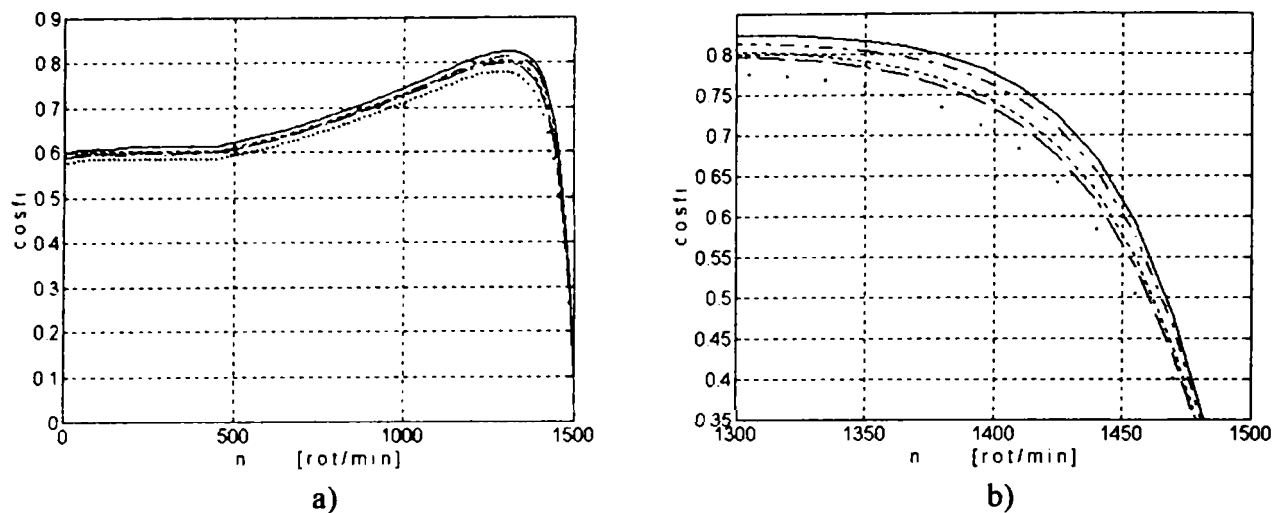


Fig.9.7.a) Variația factorului de putere cu viteza de rotație, la motorul de 1,5 kW;
b) Detaliu la variația factorului de putere.

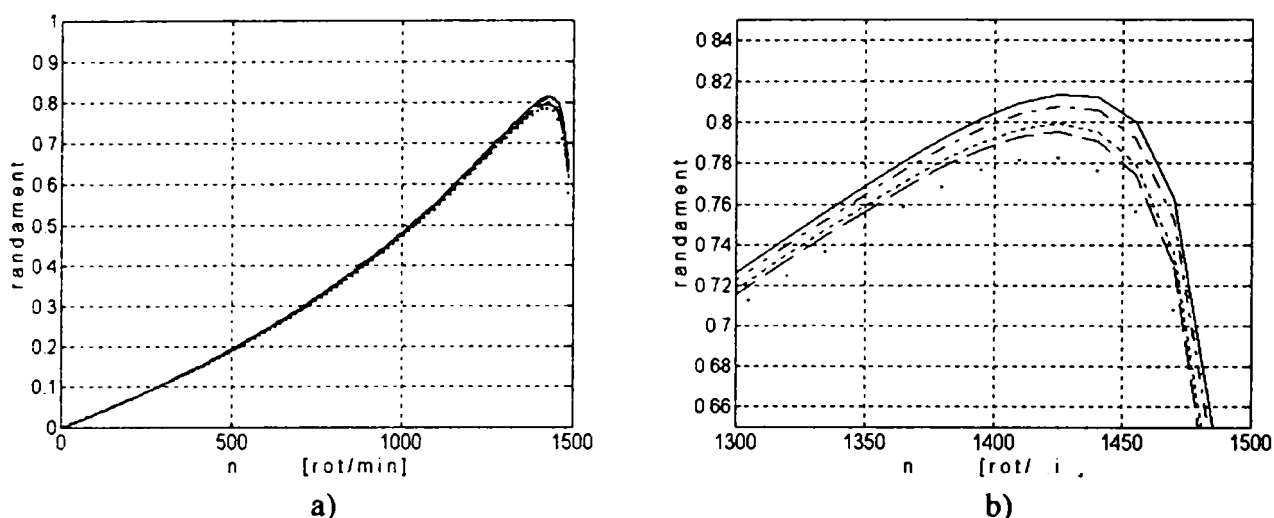


Fig.9.8.a) Variația randamentului cu viteza de rotație, la motorul de 1,5 kW;
b) Detaliu la variația randamentului.

Figura 9.7.a) ilustrează variația factorului de putere, $\cos\phi$, în funcție de viteza de rotație, n . Pentru analiza influenței geometriei crestăturii statorice, se utilizează detaliul reprezentat în figura 9.7.b). La turația nominală de 1390 rot/min, se observă o scădere a factorului de putere cu 6,7% în cazul crestăturii “s5”, față de crestătura “s1”.

Variația randamentului, η , cu viteza de rotație a mașinii, n , este redată în figura 9.8.a). Detaliul din figura 9.8.b) este necesar pentru aprecierea influenței crestăturilor utilizate. La turația nominală de 1390 rot/min, randamentul se micșorează cu 3,1% în cazul crestăturii “s5”, față de crestătura “s1”.

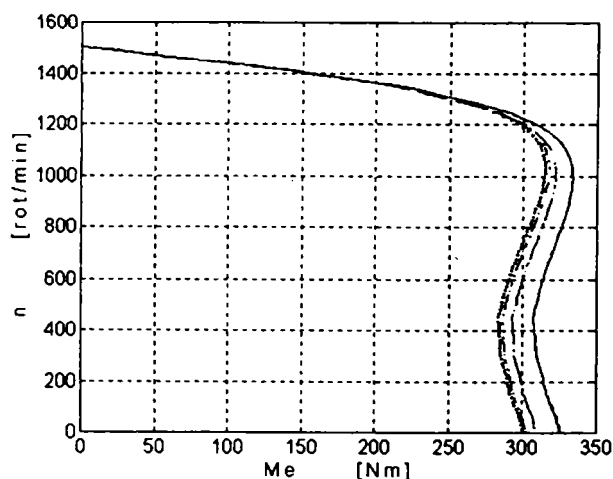


Fig.9.9. Caracteristici mecanice ale motorului de 15 kW

La motorul de 15 kW cu 4 poli și simplă colivie, crestătura statorică de bază este “s5”, fiind modificată, pe rând, în formele “s1”, “s2”, “s3” și “s4”.

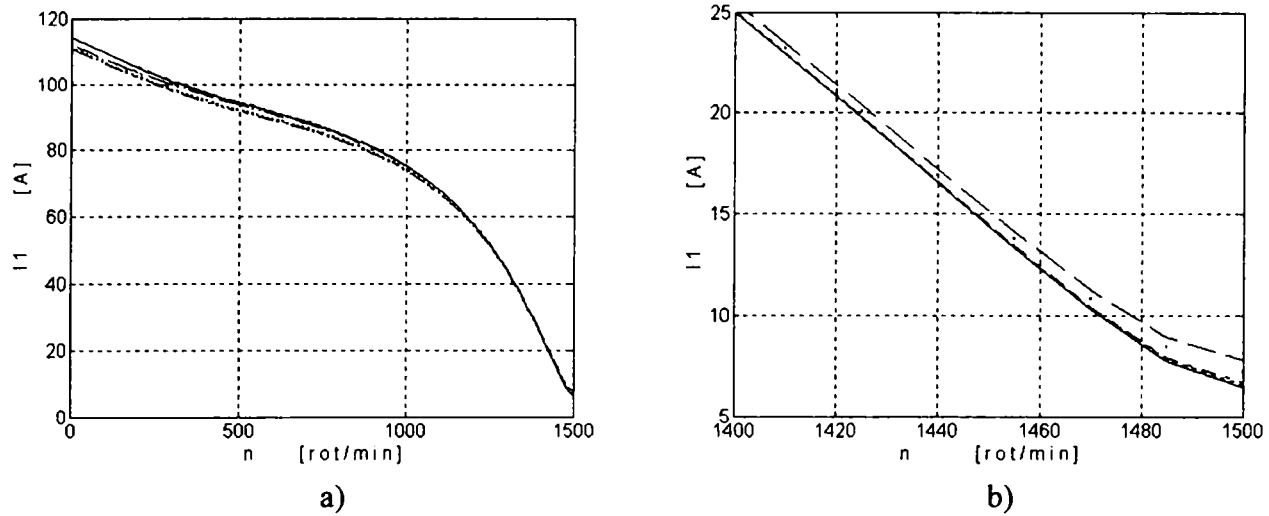


Fig.9.10.a) Variația curentului de fază la motorul de 15 kW;
b) Detaliu la variația curentului de fază.

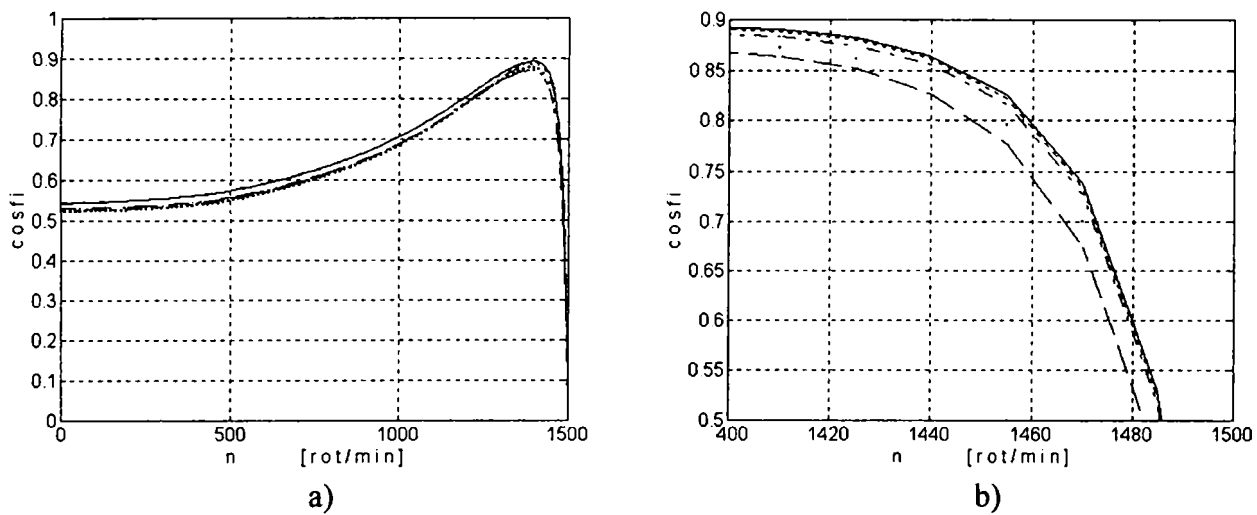


Fig.9.11.a) Variația factorului de putere cu viteza de rotație la motorul de 15 kW;
b) Detaliu la variația factorului de putere.

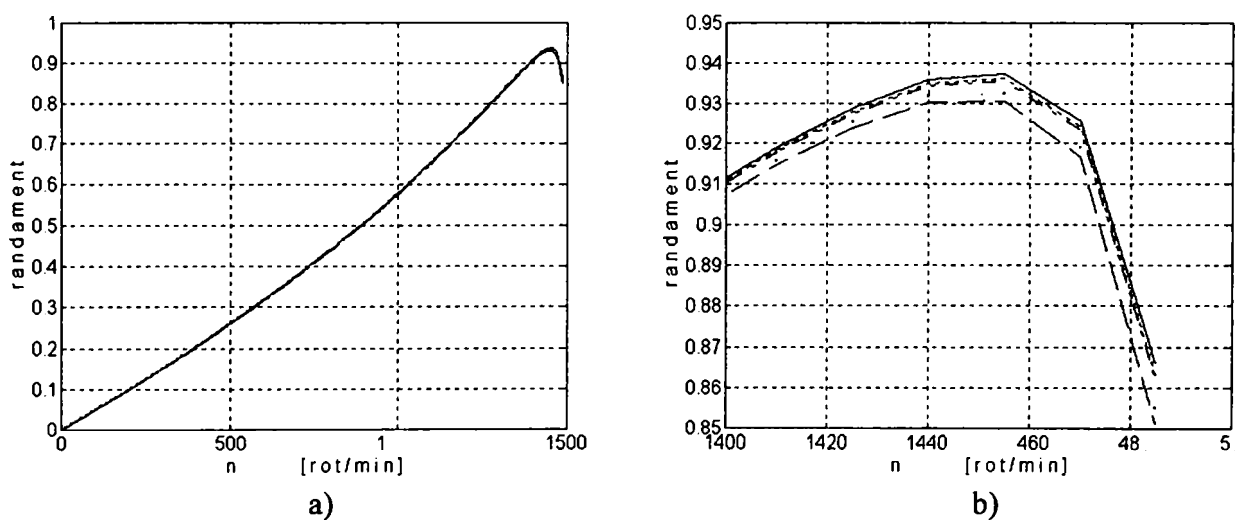


Fig.9.12.a) Variația randamentului cu viteza de rotație la motorul de 15 kW;
b) Detaliu la variația randamentului.

Crestătura rotorică "r1" rămâne nemodificată. Rulând programul CARA, se obțin caracteristicile motorului. Simbolizarea grafică a curbelor este identică cu cea de la motorul de 1,5 kW.

În figura 9.9 sunt prezentate caracteristicile mecanice, corespunzătoare celor cinci crestături statorice. Curba de variație corespunzătoare crestăturii "s5" are cuplul critic cu 4,5% mai mic și cuplul de pornire cu 9% mai mic decât cuplurile curbei de variație corespunzătoare crestăturii "s1".

Variația curentului de fază, I_1 , cu viteza de rotație, n , este redată în figura 9.10.a). Un detaliu este prezentat în figura 9.10.b), pentru domeniul de turații cuprins între 1400 rot/min și turația de funcționare în gol. La turația nominală de 1440 rot/min, curentul corespunzător crestăturii "s3" este cu 3% mai mare decât cel corespunzător crestăturii "s1".

Variația factorului de putere, $\cos\phi$, cu viteza de rotație, n , este cea din figura 9.11.a). În figura 9.11.b) este redat un detaliu al acestor caracteristici. La turația nominală de 1440 rot/min, factorul de putere corespunzător utilizării crestăturii "s3" este cu 5% mai mic decât în cazul utilizării crestăturii "s1".

În figura 9.12.a) sunt prezentate curbele de variație a randamentului, pentru cele cinci crestături considerate, iar în figura 9.12.b), un detaliu al acestor caracteristici. La turația nominală de 1440 rot/min, randamentul corespunzător utilizării crestăturii "s3" scade cu 1% față de cazul utilizării crestăturii "s1".

9.3. Variația caracteristicilor motorului de inducție la modificarea formei crestăturii rotorice

La motorul de 1,5 kW cu 4 poli, pentru crestătura de bază statorică se consideră, pe rând, crestăturile rotorice "r1", "r2", "r31" și "r32", din figura 8.12. Rulând programul CARA, se obțin caracteristicile din figurile 9.13, 9.14, 9.15 și 9.16.

Curbele de variație sunt astfel notate, în figurile 9.13 - 9.20:

— pentru crestătura "r1"; - - - pentru crestătura "r2"; - · - pentru crestătura "r31";
· · · · pentru crestătura "r32".

În figura 9.13 se pot observa caracteristicile mecanice ale motorului, obținute considerând cele patru crestături rotorice. Curba de variație corespunzătoare crestăturii "r31" are cuplul critic cu 3% mai mic, dar cuplul de pornire cu 12% mai mare decât cuplurile curbei de variație corespunzătoare crestăturii "r1".

Variația curentului de fază, I_1 , cu viteza de rotație a motorului, n , este redată în figura 9.14. Curentul de pornire corespunzător utilizării crestăturii "r32" este cu 23% mai mic decât curentul de pornire corespunzător crestăturii "r1".

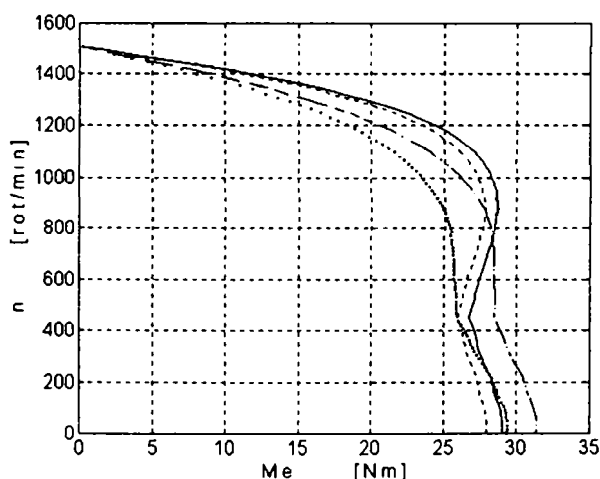


Fig.9.13. Caracteristici mecanice ale motorului de 1,5 kW

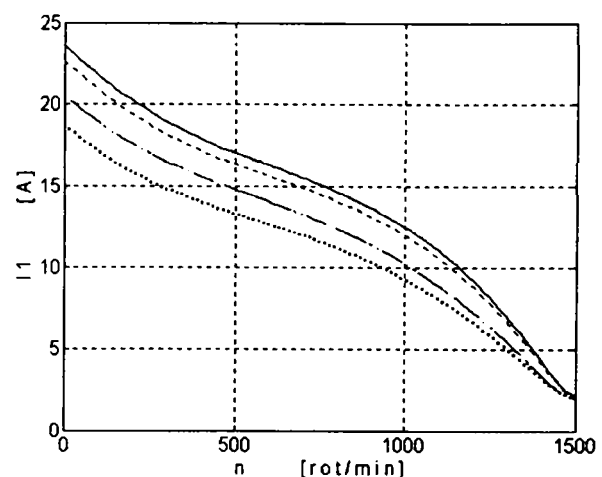


Fig.9.14. Variația curentului de fază la motorul de 1,5 kW

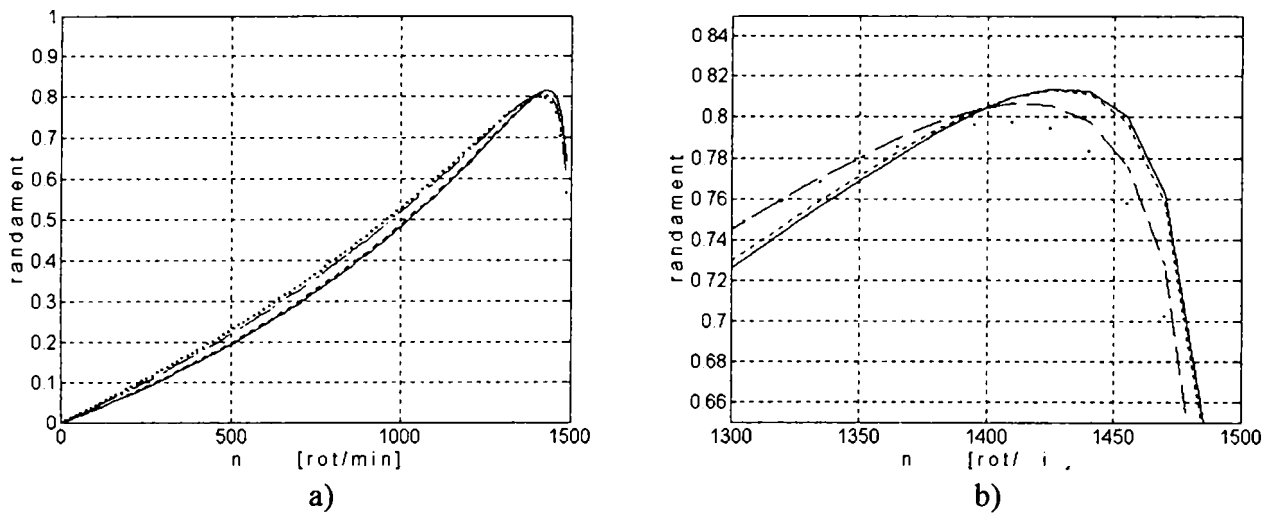
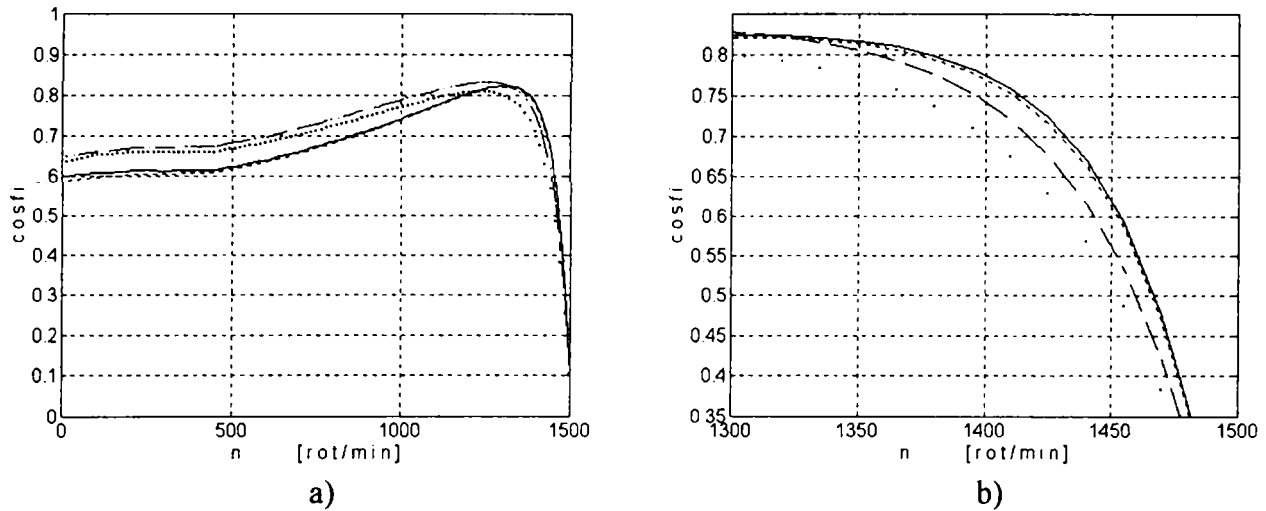


Fig.9.16.a) Variația randamentului cu viteza de rotație la motorul de 1,5 kW;
b) Detaliu la variația randamentului.

Factorul de putere, $\cos\phi$, variază cu turația mașinii, n , conform figurii 9.15.a). În figura 9.15.b) se observă un detaliu al variației factorului de putere în domeniul turațiilor cuprins între 1300 rot/min și turația de funcționare în gol a motorului. Folosind creștătura “r32” factorul de putere scade cu 6,5% la turația nominală (1390 rot/min), față de cazul utilizării creștăturii “r1”.

Variația randamentului, η , cu viteza de rotație, n , este prezentată în figura 9.16.a). Un detaliu, care facilitează studiul influenței creștăturilor rotorice, este prezentat în figura 9.16.b). La turația nominală (1390 rot/min), randamentul scade cu 1,3% în cazul utilizării creștăturii “r32” față de creștătura “r1”.

Pentru motorul de 15 kW cu 4 poli și colivie simplă se obțin caracteristicile din figurile 9.17, 9.18, 9.19 și 9.20. În acest caz, pentru creștătura statorică de bază “s5” se consideră creștăturile rotorice “r1”, “r2”, “r31” și “r32”. Notățiile grafice pentru curbele de variație sunt aceleași ca și în cazul motorului de 1,5 kW.

Caracteristicile mecanice ale motorului, obținute pentru cele patru creștături rotorice considerate, sunt prezentate în figura 9.17. Curba de variație pentru creștătura “r31” are cuplul critic cu 13% mai mic și cuplul de pornire cu 7,3% mai mare decât cuplurile obținute pentru “r1”.

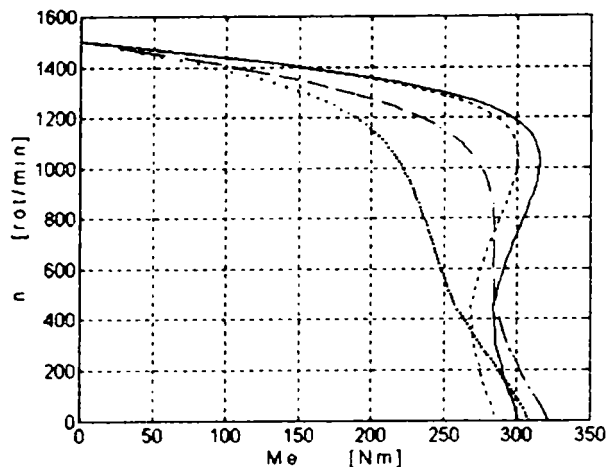


Fig.9.17. Caracteristici mecanice ale motorului de 15 kW cu simplă colivie

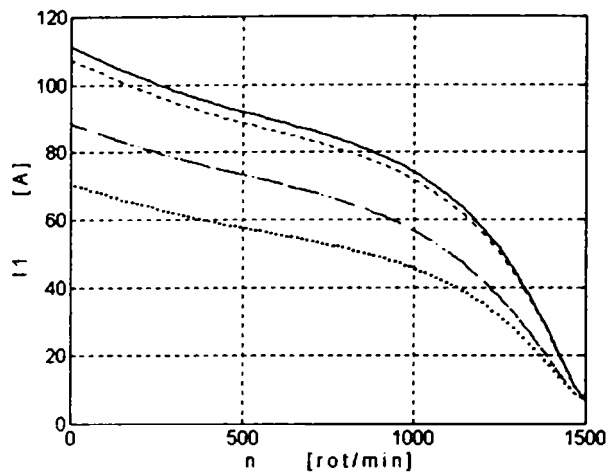
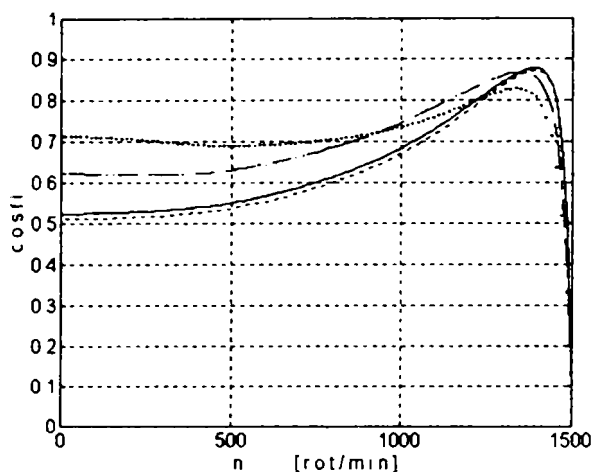
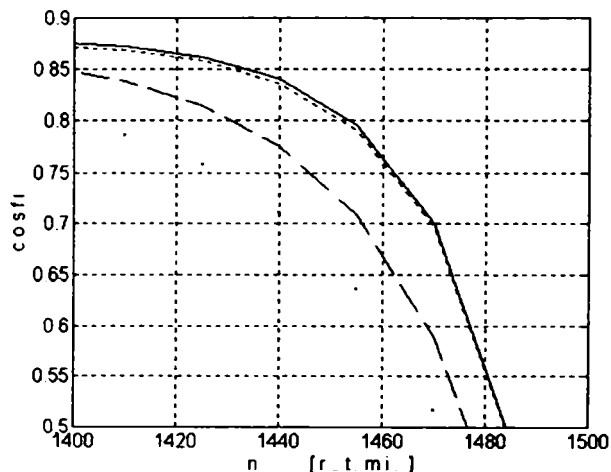


Fig.9.18. Variația curentului de fază la motorul de 15 kW cu simplă colivie

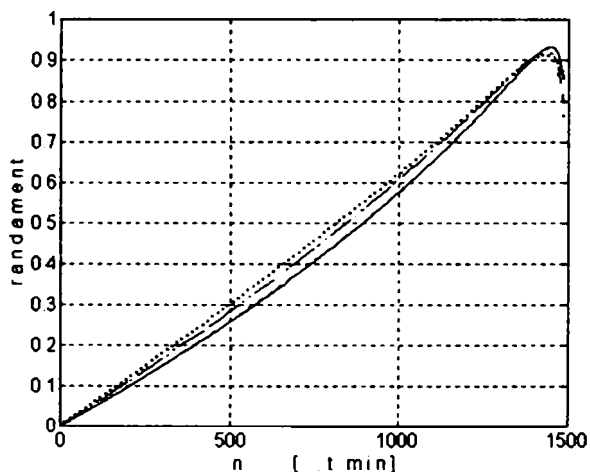


a)

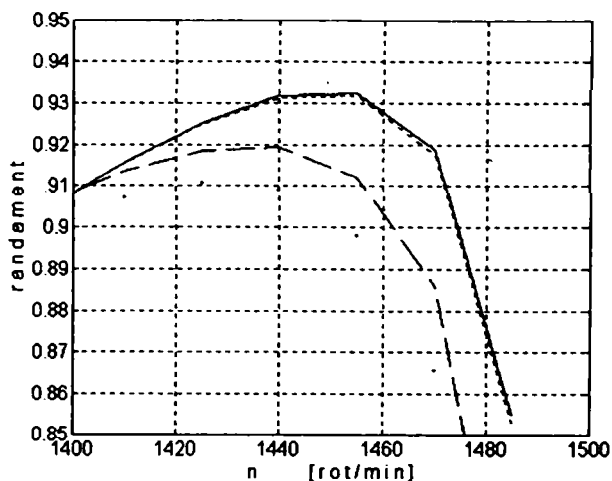


b)

Fig.9.19.a) Variația factorului de putere cu viteza de rotație, la motorul de 15 kW cu simplă colivie; b) Detaliu la variația factorului de putere.



a)



b)

Fig.9.20.a) Variația randamentului cu viteza de rotație la motorul de 15 kW cu simplă colivie; b) Detaliu la variația randamentului.

În figura 9.18 se poate observa variația curentului de fază, I_1 , cu viteza de rotație, n , a motorului. Curentul de pornire corespunzător crestăturii “r32” scade cu 36,4% față de cel corespunzător crestăturii “r1”.

Figura 9.19.a) redă variația factorului de putere, $\cos\phi$, cu viteza de rotație, n . În figura 9.19.b) este dat un detaliu al acestei variații în domeniul de turații cuprins între 1300 rot/min și turația de funcționare în gol. În cazul utilizării crestăturii “r32”, la turația nominală (1440 rot/min), factorul de putere scade cu 15,5% față de cazul crestăturii “r1”.

Variația randamentului, η , în funcție de viteza de rotație, n , este prezentată în figura 9.20.a). Un detaliu al acestei variații este redat în figura 9.20.b). Se poate observa că, la turația nominală de 1440 rot/min, randamentul corespunzător utilizării crestăturii “r32” este cu 2,3% mai mic decât în cazul crestăturii “r1”.

În cazul motorului de 15 kW cu 4 poli și dublă colivie, rulând programul CARA, se obțin caracteristicile din figurile 9.21, 9.22, 9.23 și 9.24. Pentru crestătura statorică de bază “s1”, sunt luate în considerare, pe rând, crestăturile rotorice cu geometriile “r4”, “r41”, “r42”, “r43” și “r1”, din figura 8.27.

În figura 9.21 se pot observa caracteristicile mecanice ale motorului pentru crestăturile rotorice considerate. La utilizarea crestăturii “r4” cuplul critic scade cu 26% și cuplul de pornire cu 22% față de cazul utilizării crestăturii “r1”.

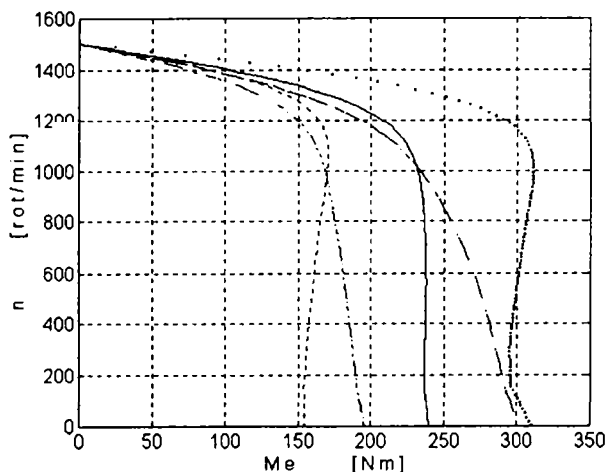


Fig.9.21. Caracteristici mecanice ale motorului de 15 kW cu dublă colivie

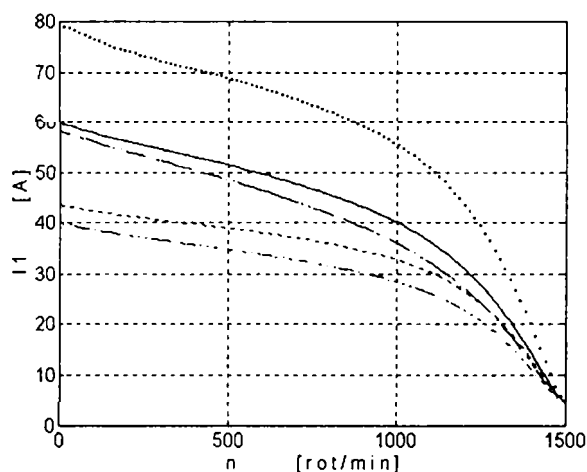
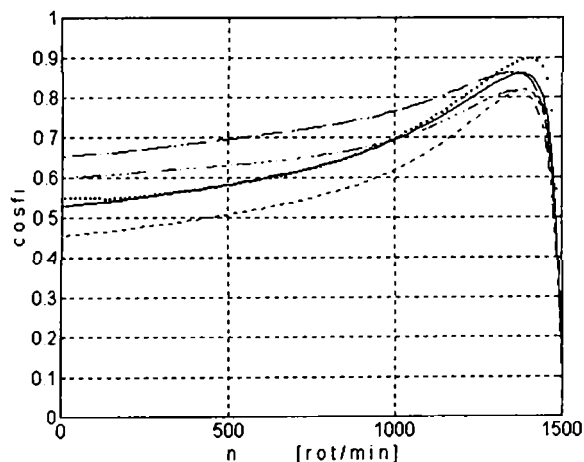
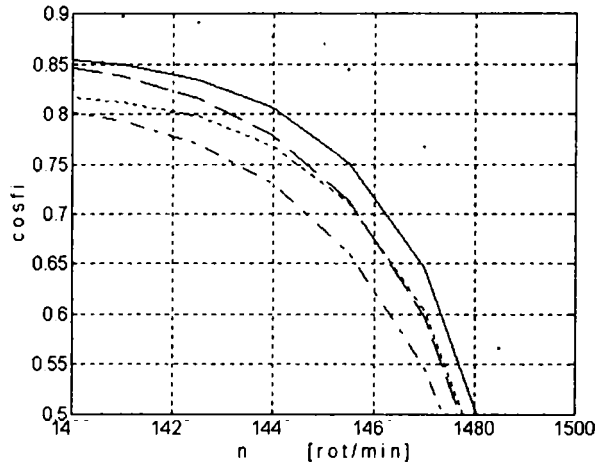


Fig.9.22. Variația curentului de fază la motorul de 15 kW cu dublă colivie



a)



b)

Fig.9.23.a) Variația factorului de putere cu viteza de rotație, la motorul de 15 kW cu dublă colivie;
b) Detaliu la variația factorului de putere.

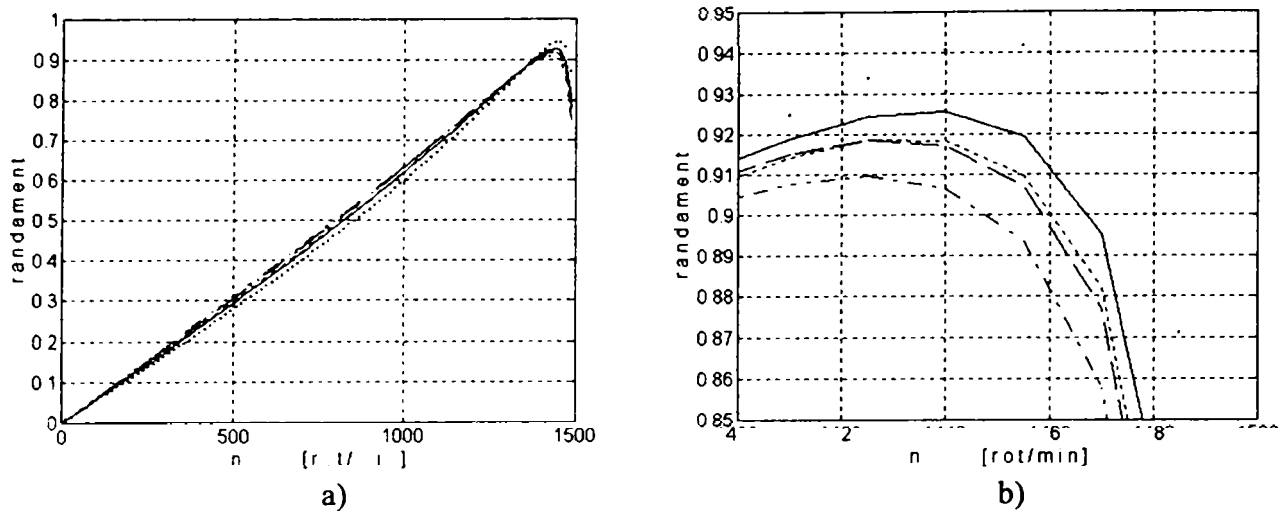


Fig.9.24.a) Variația randamentului cu viteza de rotație la motorul de 15 kW cu dublă colivie; b) Detaliu la variația randamentului.

Reprezentarea grafică a curbelor de variație în figurile 9.21 - 9.25 este următoarea:

- pentru crestătura “r4”; - - - pentru crestătura “r41”; - - - pentru crestătura “r42”;
- · - pentru crestătura “r43”; · · · · pentru crestătura “r1”.

Variația curentului de fază, I_1 , cu viteza de rotație, n , este prezentată în figura 9.22. Curentul de pornire, în cazul utilizării crestăturii “r4”, scade cu 25% față de varianta care utilizează crestătura “r1”.

În figura 9.23.a) este redată variația factorului de putere, $\cos\phi$, în funcție de viteza de rotație a motorului, n . Un detaliu al acestei variații este prezentat în figura 9.23.b), pentru domeniul de turații cuprins între 1400 rot/min și turația de funcționare în gol. Factorul de putere, la turația nominală de 1400 rot/min, scade cu 5,5% în cazul folosirii crestăturii “r4” față de cel al utilizării crestăturii “r1”.

Variația randamentului, η , în funcție de turația, n , este ilustrată în figura 9.24.a). Pentru facilitarea analizei se poate utiliza detaliul din figura 9.24.b). La turația nominală de 1400 rot/min, randamentul scade cu doar 0,6% în cazul crestăturii “r4” față de cel al crestăturii “r1”.

9.4. Verificări experimentale

Încercările sunt efectuate pentru determinarea cuplului, curentului de fază și factorului de putere. Motoarele electrice testate sunt cele prezentate în capitolul 8.4, la care s-au determinat parametrii electrice. Măsurătorile sunt efectuate cu ajutorul sistemului de achiziție prezentat în capitolul 7.1.

Pentru determinarea cuplului electromagnetic am elaborat programul “CUPLU”, în mediul de programare LabVIEW [110]. Programul, prezentat în figura 9.25, calculează “on-line” valoarea momentană a cuplului electromagnetic, permițând afișarea, sub formă de instrument virtual, sau stoacarea valorilor achiziționate. Programul utilizează valorile tensiunilor de fază achiziționate, “ua”, “ub” și “uc”, ale curenților de linie achiziționați “ia”, “ib” și “ic”, rezistența de fază a înfășurării statorice, “Rfaza”, și numărul de perechi de poli, “p1”.

Utilizând transformarea Clarke, sistemul trifazat este transpus în sistemul “dq”, obținând tensiunile “ud”, “uq” și curenții “id” și “iq”. Pentru determinarea fluxurilor după cele două axe, “psid” și “psiq”, se utilizează un bloc integrator. Pasul de integrare, “dt”, se determină astfel:

$$"dt" = \frac{"esantion / canal"}{"rata.de.scanare"} \cdot \frac{1}{"puncte"} \tag{9.1}$$

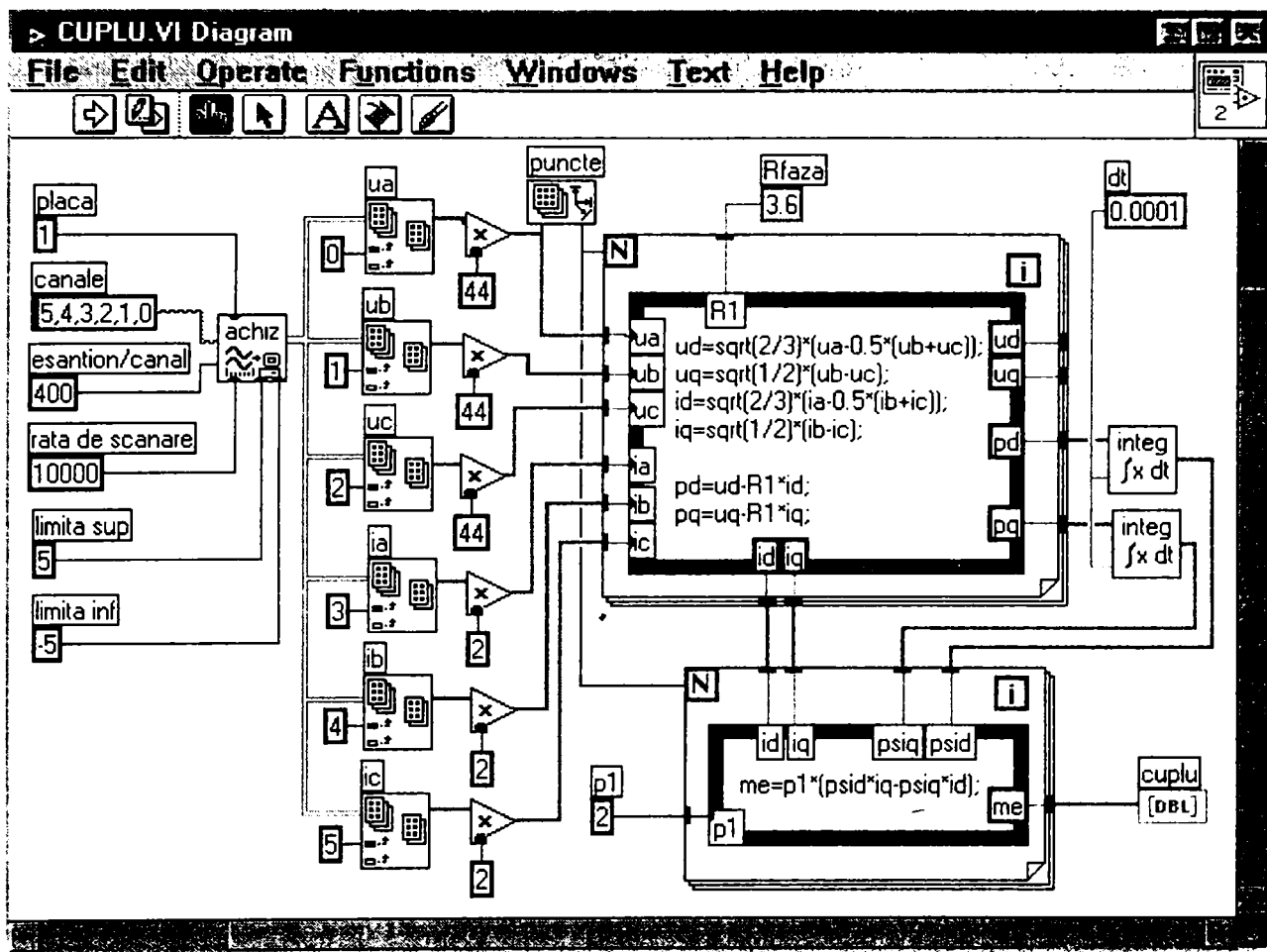


Fig.9.25. Programul CUPLU de determinare on - line a cuplului electromagnetic

unde “eșantion/canal”, “rata de scanare” și numărul de “puncte” sunt cele din figura 9.25.

Motorul de 1,5 kW cu 4 poli, având creștăturile “s1” în stator și “r1” în rotor, este primul motor încercat. Caracteristicile obținute sunt cele din figurile 9.26, 9.27 și 9.28. Punctele marcate cu “x” sunt obținute cu ajutorul sistemului de achiziție. Punctele marcate cu “o” sunt măsurate cu instrumente analogice de laborator, iar cuplul este determinat prin metoda dinamometrică. Caracteristica marcată cu linie continuă se obține din rularea programului CARA.

În figura 9.26 este reprezentată caracteristica mecanică, $n = f(M)$, în figura 9.27 variația curentului de fază, I_1 , iar în figura 9.28 variația factorului de putere, $\cos\phi$, în funcție de viteza de rotație a mașinii, n .

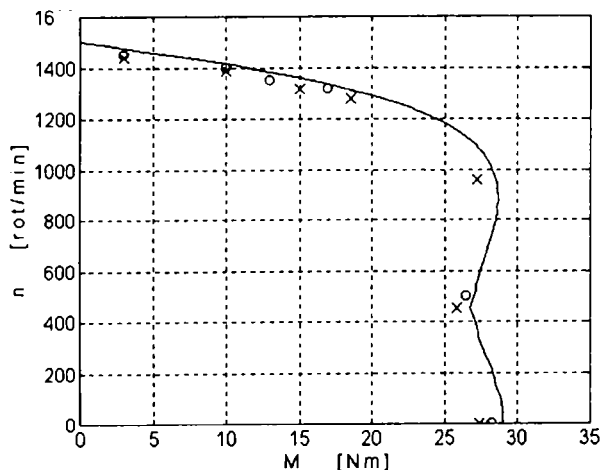


Fig.9.26. Caracteristica mecanică a motorului de 1,5 kW, având creștăturile “s1”, “r1”
o - instrumente analogice; x - sistem achiziție; — program CARA

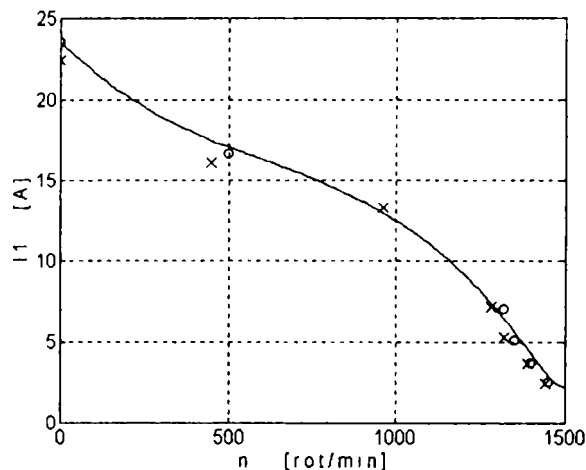


Fig.9.27. Variația curentului de fază la motorul de 1,5 kW, având creștăturile “s1”, “r1”
o - instrumente analogice; x - sistem achiziție; — program CARA

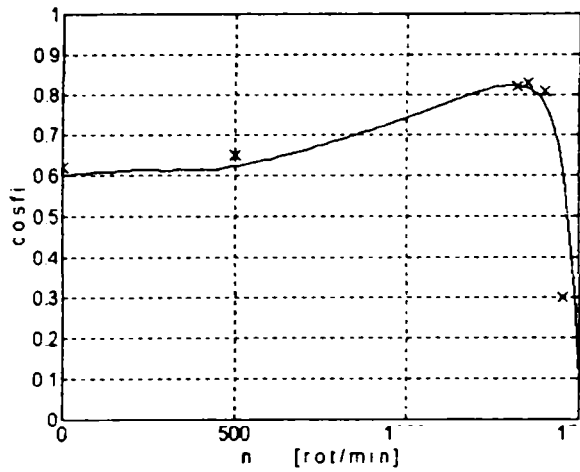


Fig.9.28. Variația factorului de putere la motorul de 1,5 kW, având creștăturile “s1”, “r1”
o - instrumente analogice; x - sistem achiziție; — program CARA

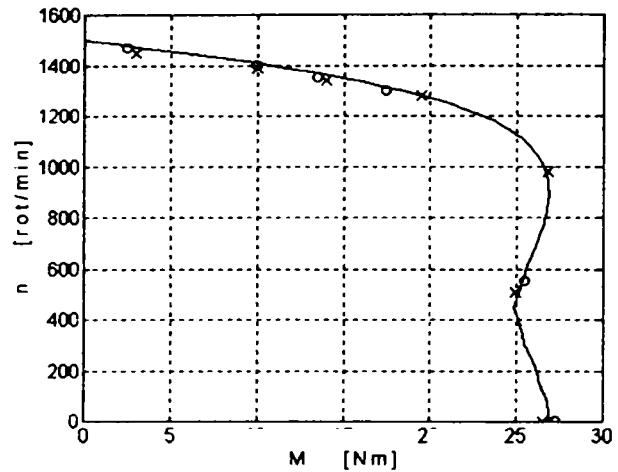


Fig.9.29. Caracteristica mecanică a motorului de 1,5 kW, având creștăturile “s4”, “r2”
o - instrumente analogice; x - sistem achiziție; — program CARA

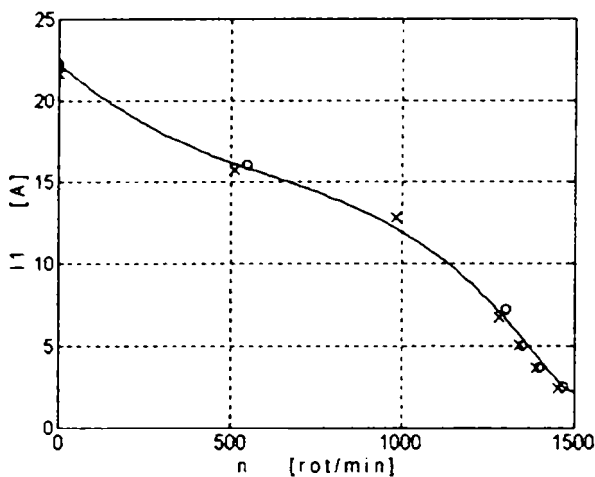


Fig.9.30. Variația curentului de fază la motorul de 1,5 kW, având creștăturile “s4”, “r2”
o - instrumente analogice; x - sistem achiziție; — program CARA

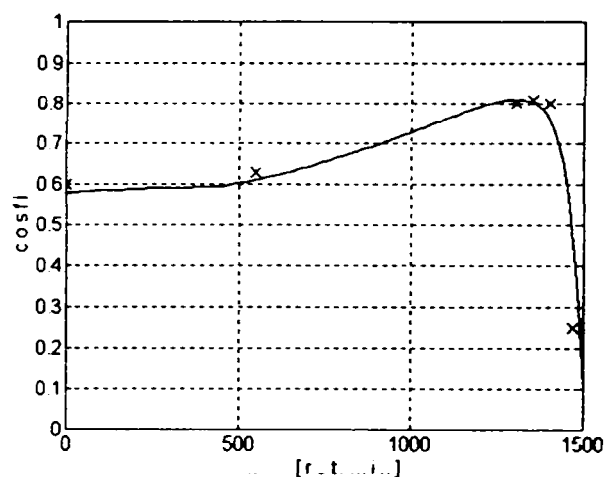


Fig.9.31. Variația factorului de putere la motorul de 1,5 kW, având creștăturile “s4”, “r2”
o - instrumente analogice; x - sistem achiziție; — program CARA

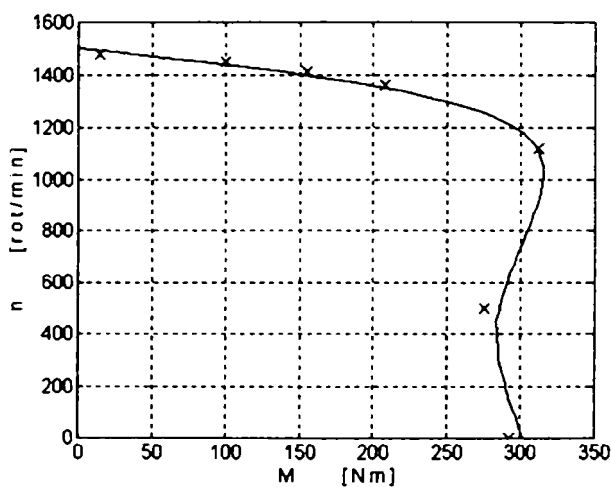


Fig.9.32. Caracteristica mecanică a motorului de 15 kW cu simplă colivie
x - sistem achiziție; — program CARA

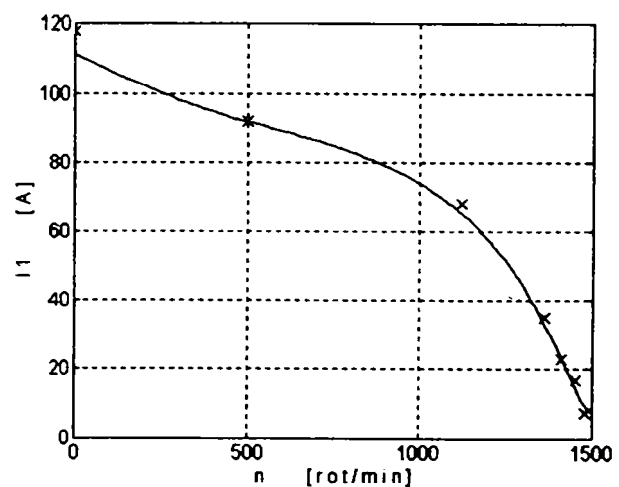


Fig.9.33. Variația curentului de fază la motorul de 15 kW cu simplă colivie
x - sistem achiziție; — program CARA

Al doilea motor testat este cel de 1,5 kW cu 4 poli, având creștăturile “s4” în stator și “r2” în rotor. Caracteristica mecanică este redată în figura 9.29, variația curentului de fază în figura 9.30 și variația factorului de putere în figura 9.31.

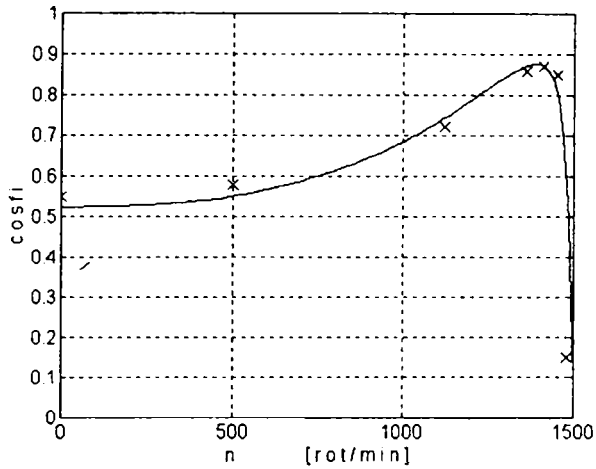


Fig.9.34. Variația factorului de putere la motorul de 15 kW cu simplă colivie

x - sistem achiziție; — program CARA

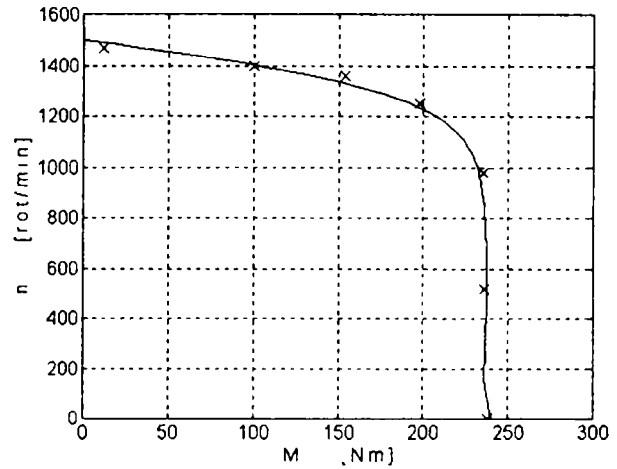


Fig.9.35. Caracteristica mecanică a motorului de 15 kW cu dublă colivie

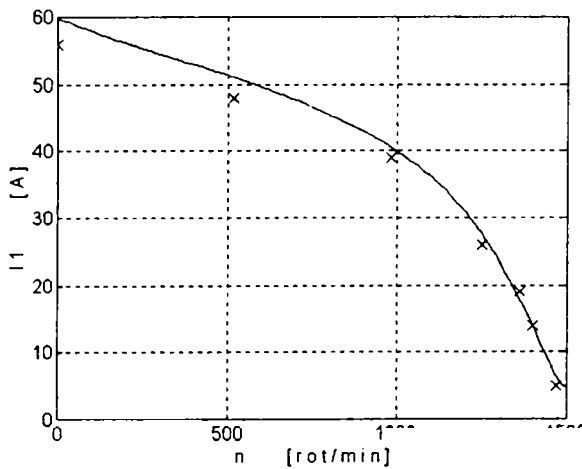


Fig.9.36. Variația curentului de fază la motorul de 15 kW cu dublă colivie

x - sistem achiziție; — program CARA

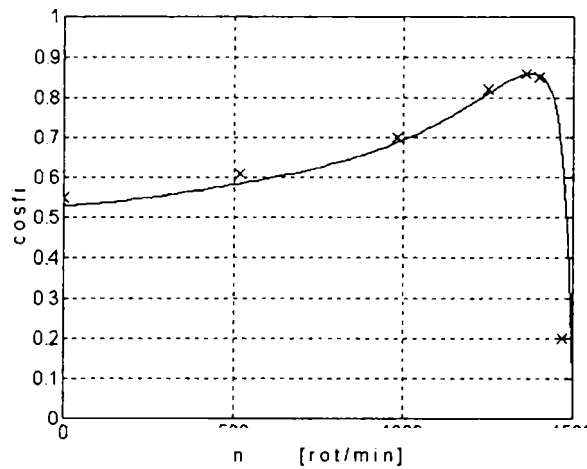


Fig.9.37. Variația factorului de putere la motorul de 15 kW cu dublă colivie

Motorul de 15 kW cu 4 poli și simplă colivie, având creștăturile “s5” în stator și “r1” în rotor, este următorul motor încercat. Figura 9.32 prezintă caracteristica mecanică, figura 9.33 variația curentului de fază, iar figura 9.34 variația factorului de putere.

În cazul încercării motorului de 15 kW cu 4 poli și dublă colivie, având creștăturile “s1” în stator și “r4” în rotor, se obțin caracteristica mecanică din figura 9.35, variația curentului de fază din figura 9.36 și variația factorului de putere din figura 9.37.

9.5. Concluzii

Cu ajutorul programului CARA se determină variația cuplului electromagnetic, a curentului de fază și a randamentului, la motoare de inducție cu rotorul în scurtcircuit. Colivia rotorică poate fi simplă sau dublă.

Programul CUPLU este elaborat pentru determinarea valorii momentane a cuplului electromagnetic, din valorile măsurate cu ajutorul sistemului de achiziție.

Modificarea geometriei creștăturii statorice conduce la variații mici ale caracteristicilor mașinii: maxim 9% la cuplu, 9% la curentul de fază, 7% la factorul de putere, 3% la randament.

Modificarea formei crestăturii rotorice produce variații mai importante ale caracteristicilor mașinii. La motoarele analizate, acestea sunt de 13% la cuplul motoarelor cu simplă colivie, ajungând la 26% la motoarele cu dublă colivie. Variațiile curentului de fază pot fi de 36%, ale factorului de putere de 15% și ale randamentului de maxim 3%.

Tabelul 9.1 Influența dimensiunilor crestăturii rotorice asupra caracteristicilor motorului de inducție cu dublă colivie

Caracte- ristici	Cuplu critic		Cuplu de pornire		Curent de fază			Factor de putere			Randament		
	↗	↘	↗	↘	↗	↘	-	↗	↘	-	↗	↘	-
bpor	↗	x		x		x		x				x	
	↘		x		x				x				x
bg	↗	x		x		x				x			x
	↘		x		x		x			x	x		
br	↗		x		x			x		x			x
	↘	x		x				x	x				x
hg	↗		x		x			x		x			x
	↘	x		x		x		x	x			x	
dbaz	↗		x		x			x	x			x	
	↘	x		x		x		x		x		x	

Utilizând programele MASI și CARA, se poate determina influența fiecărei dimensiuni a crestăturii considerate asupra caracteristicilor motorului de inducție. Pentru exemplificare, în tabelul 9.1, este considerată crestătura “r4” din figura 8.27, pentru mașina cu dublă colivie. Dimensiunile considerate sunt diametrul coliviei de pornire, “bpor”, lățimea istmului care face legătura între colivia de pornire și cea de lucru, “bg”, înălțimea acestui istm, “hg”, lățimea coliviei de lucru, “br” și diametrul la baza coliviei de lucru, “dbaz”. Mărirea unei dimensiuni este notată în tabel cu ↗, iar micșorarea unei dimensiuni cu ↘. Cu x sunt indicate în tabel dimensiunile care se modifică având ca rezultat variația caracteristicilor mașinii. Această variație poate fi crescătoare ↗, descrescătoare ↘, sau staționară -. Se poate astfel alege dimensiunea (sau dimensiunile) crestăturii care să fie modificată pentru obținerea caracteristicii necesare.

Încercările experimentale sunt efectuate pentru validarea programului de calcul al caracteristicilor. Diferențele care apar între rezultatele obținute prin rularea programului CARA și cele experimentale sunt:

- de maxim 13% în cazul determinării cuplului electromagnetic;
- de maxim 18% în cazul curentului de fază;
- de maxim 12% în cazul factorului de putere.

În tabelul 9.2 se poate observa influența fiecărei crestături rotorice studiate asupra caracteristicilor motorului de inducție cu simplă colivie. Valorile din tabel sunt mărimi raportate la valorile corespunzătoare ale crestăturii de referință “r1”.

Tabelul 9.2 Influența formei creștăturii rotorice asupra caracteristicilor motorului de inducție cu simplă colivie

Tip creștătură	Cuplu maxim	Cuplu de pornire	Curent de fază	Factor de putere	Randament
“r1”	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
“r2”	0,95	0,95	0,96	0,99	0,99
“r31”	0,90	1,10	0,82	0,95	0,99
“r32”	0,80	1,02	0,67	0,90	0,98

Influența creștăturilor rotorice asupra caracteristicilor motorului de inducție cu dublă colivie este prezentată în tabelul 9.3.

Tabelul 9.3 Influența formei creștăturii rotorice asupra caracteristicilor motorului de inducție cu dublă colivie

Tip creștătură	Cuplu maxim	Cuplu de pornire	Curent de fază	Factor de putere	Randament
“r4”	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
“r41”	0,73	0,66	0,72	0,96	0,99
“r42”	1,00	1,28	0,97	0,99	0,99
“r43”	0,68	0,82	0,67	0,94	0,99
“r1”	1,34	1,32	1,32	1,07	1,00

Valorile înscrise în tabel sunt mărimi raportate la cele corespunzătoare ale creștăturii de referință, “r4”. Comparând valorile obținute, se poate alege creștătura rotorică potrivită, pentru care mașina proiectată va avea caracteristicile dorite.

10. Concluzii generale

Lucrarea analizează influența geometriei creștăturilor statorice și rotorice asupra parametrilor electrici, respectiv, asupra caracteristicilor motoarelor de inducție trifazate cu simplă sau dublă colivie.

Principalele contribuții ale lucrării sunt:

- utilizarea unei scheme electrice echivalente cu parametri variabili, pentru determinarea caracteristicilor motoarelor de inducție trifazate cu colivie simplă sau dublă;
- determinarea potențialului vector, respectiv, a inducțiilor magnetice în dinții, în jugurile și în întrefierul motorului de inducție, cu ajutorul unui program de calcul care utilizează metoda elementelor finite;
- considerarea efectului pelicular prin funcții care modelează factorii k_r și k_x ;
- considerarea influenței saturației magnetice asupra rezistenței rotorice;
- stabilirea modelului de creștătură cu dimensiuni variabile sub influența saturației;
- elaborarea modelului de variație a curbelor $H = f(B)$, pentru diferite materiale utilizate în construcția tolelor;
- elaborarea unui program de modelare a curbei de variație a inducției magnetice în întrefier;
- metodă de estimare a inducțiilor magnetice și de analiză a armonicilor produse de dinți și de saturație;
- metodă experimentală de validare a inducțiilor magnetice utilizând bobine sondă;
- asocierea metodei numerice, a elementelor finite, cu metoda analitică pentru determinarea parametrilor electrici ai motorului de inducție;
- program de calcul al parametrilor electrici, elaborat pe baza geometriei creștăturilor;
- metodă de analiză a influenței geometriei creștăturilor statorice și rotorice asupra parametrilor electrici ai motorului de inducție;
- program de calcul al caracteristicilor motorului de inducție analizat;
- metodă de analiză a influenței geometriei creștăturilor statorice și rotorice asupra caracteristicilor motorului de inducție;
- modelarea caracteristicilor mașinii modificând dimensiunile creștăturii rotorice.

Dintre metodele de calcul al câmpului electromagnetic este aleasă o metodă numerică, și anume, metoda elementelor finite. Ea este utilizată pentru determinarea inducțiilor magnetice în dinții, jugurile și întrefierul motoarelor de inducție, la funcționarea în gol, la funcționarea în sarcină și la scurtcircuit.

Programele menționate în lucrare sunt testate pe motoare de inducție trifazate, din producția de serie a S.C. Electromotor S.A. Timișoara, având puteri nominale cuprinse între 0,55 kW și 15 kW. În lucrare, modelarea, simularea și verificările experimentale sunt prezentate pentru motoarele de 1,5 kW și 15 kW cu 4 poli și simplă colivie și pentru motorul de 15 kW cu 4 poli și dublă colivie.

Armonica de ordinul trei, la funcționarea în gol, produce aplatizarea inducției magnetice în juguri și în întrefier și o formă ascuțită a inducției în dinți.

Metoda de validare a inducțiilor magnetice evidențiază prezența armonicilor de dinți, la funcționarea în gol a motoarelor de inducție.

La scurtcircuit, forma ascuțită a inducției în întrefier și dinți este produsă, în principal, atât de armonica de ordinul trei cât și de armonicile de ordinul cinci și șapte.

Programul MASI, pe care l-am elaborat pe baza considerațiilor teoretice din prezenta lucrare, calculează parametrii electrici ai motorului de inducție ținând cont atât de efectul pelicular în barele rotorice, cât și de saturația magnetică care afectează reactanțele statorice și rotorice și rezistența rotorică a mașinii. Permeanțele specifice de dispersie a creștăturilor statorice și rotorice se determină pentru principalele forme geometrice întrebuintate de proiectanți, pe baza energiei magnetice de dispersie în creștătură.

Rezultatele simulărilor sunt verificate cu ajutorul unui sistem de achiziție de date și a unui program pe care l-am elaborat pentru determinarea parametrilor electrici. Sistemul de achiziție, deși "low cost" (cost redus), se dovedește performant în studiul regimurilor de funcționare a motoarelor de inducție alimentate de la un sistem trifazat simetric de tensiuni.

Inducțiile magnetice și parametrii electrici sunt mărimi de intrare în programul CARA pe care l-am elaborat pentru simularea variației caracteristicilor motoarelor de inducție studiate. Validarea programului este realizată cu același sistem de achiziție de date, care asigură măsurarea curentului de fază și determinarea cuplului electromagnetic și a factorului de putere.

Din rezultatele obținute se constată că nu am impus condiții deosebite privind precizia modelului utilizat în program, astfel încât pentru unii parametri electrici (de ex. $X_{\sigma 1} + X_m$) s-au obținut diferențe mai mari față de verificările experimentale.

Stabilirea unor condiții suplimentare impuse modelului, precum și creșterea preciziei rezultatelor, conduc la necesitatea unei unități de calcul cu o memorie mai mare și o viteză de lucru ridicată.

Rulările și verificările efectuate evidențiază rolul preponderent al creștăturii rotorice în modificarea caracteristicilor motoarelor de inducție.

Pentru dimensionarea statorului recomand utilizarea creștăturii "s1" (fig.8.11), în cazul mașinilor cu juguri înguste, sau "s2", în cazul celor cu juguri mai late.

În cazul motorului cu rotor în simplă colivie, recomand utilizarea creștăturii "r1" (fig.8.12), pentru obținerea unor caracteristici de cuplu mari, respectiv, creștătura "r32", pentru cuplu și curent de pornire mici.

La motorul cu rotorul în dublă colivie, recomand utilizarea creștăturii "r4" (fig.8.27), cu dimensiunile "br" mai mare și "dbaz" mai mic decât cele ale mașinii încercate, în vederea obținerii unui cuplu mai mare. Pentru un cuplu și curent de pornire mic, consider că trebuie aleasă creștătura "r4" cu "br" mai mic și "dbaz" mai mare.

Programele elaborate sunt utile pentru proiectarea, verificarea și optimizarea motoarelor de inducție trifazate. Utilizarea unor programe de calcul pentru modelarea și simularea funcționării motoarelor este mult mai rentabilă decât realizarea și testarea unor prototipuri costisitoare. Consider că dezvoltarea explozivă a sistemelor de calcul va permite, în scurt timp, asocierea pe scară largă a programelor de analiză numerică pe întreg domeniul analizat, cu cele de modelare.

Prezenta cercetare poate fi extinsă la motoare de inducție alimentate de la surse cu tensiunea și frecvența variabile.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Andrijenko V. - *Verbesserung der Berechnungsmethoden für die Bestimmung der Betriebsparameter von Asynchronmaschinen*, 40. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, TU Ilmenau, 18-21 September 1995, Band 4, pag. 606-611;
- [2] Atanasiu Gh. - *Metode de calcul a reactanțelor saturate ale mașinilor sincrone*, Buletinul Științific și Tehnic al Institutului Politehnic Timișoara, Tom 7(21), 1962;
- [3] Atkinson J.D., Acarnley P.P., Finch W.J. - *Observers for Induction Motor State and Parameter Estimation*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.27, No.6, November/December 1991; pag. 1119-1127;
- [4] Belmans R., Verdyck D., Geysen W., Findlay R.D., Szabados B., Spencer S., Lie S. - *Magnetic Field Analysis in Squirrel-Cage Induction Motors*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.28, No.2, March 1992, pag.1367-1370;
- [5] Binns K.J., Lawrenson P.J., Trowbridge C.W. - *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields*, John Wiley & Sons, 1992;
- [6] Boldea I. - *Parametrii mașinilor electrice, identificare, estimare și validare*, Editura Academiei Române, București, 1991;
- [7] Bonnett A.H. - *An Update on AC Induction Motor Efficiency*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.30, no.5, September/October 1994, pag.1362-1372;
- [8] Brad P. - *Berücksichtigungen zum Einfluss der Eisensättigung auf den Betrieb des Asynchronmotors*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Tomul XLI (XLV), Fasc.5, Secția III, 1995, pag.73-79;
- [9] Brad P., Atanasiu G. - *Some Aspects of Induction Machine Parameter Computation*, Conferința internațională "Optim'96", Brașov, 15-17 mai 1996, pag.1035-1040;
- [10] Brad P. - *Determinarea reactanțelor saturate la motorul asincron trifazat*, Simpozionul internațional, Electro'96, Chișinău, 16-17 octombrie 1996, vol.I, pag.171-176;
- [11] Brad P. - *Considerații privind parametrii saturați ai mașinii asincrone*, Analele Universității "Eftimie Murgu" Reșița, fascicola IV, octombrie 1996, pag.141-146;
- [12] Brad P. - *Model neliniar pentru simularea unui motor de inducție*, Analele Universității din Oradea, Fascicola de Energetică, 1997, pag.30-34;
- [13] Brad P. - *Influence of the B-H curve model on the optimal design of the induction machine*, Lucrările sesiunii de comunicări științifice ale Universității "Aurel Vlaicu" din Arad, vol.VIII, octombrie 1997, pag.115-120;
- [14] Brad P., Atanasiu G. - *Some Aspects about Modelling the Run-up of an Induction Motor*, 43.IWK, T.U.Ilmenau, septembrie 1998
- [15] Brad P. - *An Approach to the Starting Transient of a Squirrel Cage Induction Motor*, CNAE'98, Craiova, octombrie 1998
- [16] Brown J.E., Kovacs K.P., Vas P. - *A Method of Including the Effects of Main Flux Path Saturation in the Generalized Equations of A.C. Machines*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No.1, January 1983, pag.96-103;
- [17] Bucur C.M. - *Metode numerice*, Editura Facla, Timișoara, 1973;
- [18] Budig P.K. - *Nichtlinearitäten von Asynchronmaschinen*, 12. Internationale Fachtagung IAAA, 23-25 Februar 1993, TU Chemnitz-Zwickau, pag.293-296;

- [19] Câmpeanu A. - *Introducere în dinamica mașinilor electrice de curent alternativ*, Editura Academiei Române, București, 1998;
- [20] Chang S., Lloyd T. - *Saturation Effect of Leakage Reactance*, Transactions AIEE, Vol.68, Part II, 1949, pag. 1144-1147;
- [21] Cioc I., Bichir N., Cristea N. - *Mașini electrice, Îndrumar de proiectare*, vol.II, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1981;
- [22] Coloși T., Festilă R., Nașcu I., Raica P. - *Modelling and Numerical Simulation Alternative of Induction Motors in D-Q Axes*, Electromotion '95 Symposium, 25-26 May 1995, Cluj-Napoca, pag.101-106;
- [23] Covrig M., David F. - *Le modèle mathématique du rotor à cage obtenu à partir de la résolution du problème de champ électromagnétique*, Electromotion '95 Symposium, 25-26 May 1995, Cluj-Napoca, pag.107-111;
- [24] De Sabata I. - *Bazele Electrotehnicii*, vol.2, Litografia Institutului Politehnic "Traian Vuia", Timișoara, 1974;
- [25] De Weerd R., Tuinman E., De Heide R., Belmans R. - *Advanced Simulation of a Squirrel-Cage Induction Motor*, 12. Internationale Fachtagung IAAA, 23-25 Februar 1993, TU Chemnitz-Zwickau, pag.81-84;
- [26] De Weerd R., Hameyer K., Belmans R. - *Parameter Computation of Squirrel-Cage Induction Motor Models Using Finite Elements*, Proceedings COMPUMAG '95, 10-13 July 1995, Berlin, pag.140-141;
- [27] Dordea T. - *Mașini electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977;
- [28] Dordea T. - *Proiectarea și construcția mașinilor electrice*, vol.1 și 2, Institutul Politehnic "Traian Vuia", Timișoara, 1982;
- [29] Dragomir T.L., Preitl S. - *Elemente de teoria sistemelor și reglaj automat*, vol.I, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara, 1979;
- [30] Dymond J.H., Findlay R.D. - *Some Commentary on the Choice of Rotor Bar Material for Induction Motors*, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol.10, no.3, September 1995, pag.425-430;
- [31] Egli R. - *Über die Entwicklung eines interaktiven Systems zur numerischen Feldberechnung für Arbeitsplatzcomputer*, ETH Zürich, 1987;
- [32] Enokizono M., Todaka T. - *Flux Distributions in Three-phase Induction Motor with Disconnection Problem*, IEEE Transactions on Magnetics, vol.29, no.6, November 1993, pag.3165-3167;
- [33] Fetih N.H., El-Shewy H.M. - *Induction Motor Optimum Design, Including Active Power Loss Effect*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. EC-1, No.3, September 1986, pag.155-160;
- [34] Gawrylczyk K.M. - *Adaptiven Algorithmen auf der Basis der finiten Elemente*, IWK, TH Ilmenau, 1984;
- [35] Găvrută P., Lipovan O., Năslău P., Sturz I. - *Metode numerice*, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara, 1990;
- [36] Ghiță C., Schuster H.G., Vlaicu C., Ghiță O.M. - *Finding the Mechanical Characteristics of an 3-Phased Induction Motor Operating in Transitory State*, Proceedings PCIM'97, Intelligent Motion, Nürnberg, June 1997, pag.323-328;
- [37] Greilach P. - *Berücksichtigung der Eisensättigung bei der praktischen Berechnung rotierender elektrischen Maschinen*, Dissertation, TU Kaiserslautern, 1982;
- [38] Greilach P. - *Vorausberechnung des dynamischen Betriebsverhaltens der Asynchronmaschine mit Berücksichtigung der Sättigung*, 12.Internationale Fachtagung IAAA, 23-25 Februar 1993, TU Chemnitz-Zwickau, pag.275-278;

- [39] Hasenpusch A., Michalik W., Janiszewski A. - *Bestimmung der Läuferparameter von Asynchronmaschinen*, 12. Internationale Fachtagung IAAA, 23-25 Februar 1993, TU Chemnitz-Zwickau, pag. 297-300;
- [40] Hsu J.S. - *Monitoring of Defects in Induction Motors Through Air-Gap Torque Observation*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.31, no.5, September/October 1995, pag.1016-1021;
- [41] Hsu J.S., Kueck J.D., Olszewski M., Casada D.A., Otaduy P.J., Tolbert L.M. - *Comparison of Induction Motor Field Efficiency Evaluation Methods*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.34, no.1, January-February 1998, pag.117-125;
- [42] Hsu J.S., Liou S.P., Lin B.T., Weldon W.F. - *Losses Influenced by Third-harmonic Flux in Induction Motors*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.6, No.3, September 1991, pag.461-468;
- [43] Hsu J.S., Sorenson P.L. - *Field Assessment of Induction Motor Efficiency through Air-Gap Torque*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.11, No.3, September 1996, pag.489-494;
- [44] Huang S., Luo J., Leonardi F., Lipo T.A. - *A General Approach to Sizing and Power Density Equations for Comparison of Electrical Machines*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.34, no.1, January/February 1998, pag.92-97;
- [45] Jian T.W., Schmitz N.L., Novotny D.W. - *Characteristic Induction Motor Slip Values for Variable Voltage Part Load Performance Optimization*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No.1, January 1983, pag.38-46;
- [46] Klaes N.R. - *Parameter Identification of an Induction Machine with Regard to Dependencies on Saturation*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.29, No.6, November/December 1993; pag. 1135-1140;
- [47] Kopylov I.P. - *Mathematical Models of Electric Machines*, Mir Publishers, Moscow,1984;
- [48] Kovács K.P. - *Programmierung von Asynchronmotoren für Analogrechner unter Berücksichtigung der Sättigung*, Archiv für Elektrotechnik, Band 47, Heft 4, 1962, pag.193-206;
- [49] Kunze W., Kuß H., Binner H., Hahn M. - *Finite-Elemente-Methode ein modernes Berechnungswerkzeug des Ingenieurs*, Elektrische, Berlin, 43, 1989, pag.444-449;
- [50] Kuß H., Kunze W. - *Simulation ausgewählter Betriebszustände von Asynchronmaschinen mit FEM*, 11.Internationale Fachtagung IAAA, 1991,TU Chemnitz, P13-1;
- [51] Lavers J.D. - *Electromagnetic Field Computation in Power Engineering*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.29, No.6, November 1993, pag.2347-2352;
- [52] Legowski S.F., Sadrul Ula A.H.M., Trzynadlowski A.M. - *Instantaneous Power as a Medium for the Signature Analysis of Induction Motors*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.32, no.4, July/August 1996, pag.904-909;
- [53] Leonhard W. - *Control of Electrical Drives*, Springer Verlag, 1985;
- [54] Levi E. - *A Unified Approach to Main Flux Saturation Modelling in D-Q Axis Models of Induction Machines*, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol.10, no.3, September 1995, pag.455-461;
- [55] Leuchtman P., Hafner Ch. - *Ersetzt das Feldberechnungsprogramm den EMV-Spezialisten ?*, Technische Rundschau 9/1991, pag.48-51;

- [56] Lima A.M.N., Jacobina C.B., De Souza Filho E.B. - *Nonlinear Parameter Estimation of Steady-State Induction Machine Models*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol.44, no.3, June 1997, pag.390-397;
- [57] Lindsay J.F., Barton H.T. - *A Modern Approach to Induction Machine Parameter Identification*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, No.4, July-August 1972;
- [58] Lombard P., Meunier G. - *A General Method for Electric and Magnetic Coupled Problem in 2D and Magnetodynamic Domain*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.28, No.2, March 1992, pag.1291-1294;
- [59] Lowther D.A., Forghani B., Freeman E.M. - *A Benchmark Model for Comparing Induction Machine Analyses*, Proceedings COMPUMAG '95, 10-13 July 1995, Berlin, pag.154-155;
- [60] Lowther D.A., Silvester P.P. - *Computer Aided Design in Magnetics*, Springer Verlag, 1986;
- [61] Mahmoud A.M.A., Menzies R.W. - *A Complete Time Domain Model of the Induction Motor for Efficiency Evaluation*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. EC-1, No.1, March 1986, pag.68-75;
- [62] Maier R. - *Protection of Squirrel-Cage Induction Motor Utilizing Instantaneous Power and Phase Information*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.28, no.2, March/April 1992, pag.376-380;
- [63] Mihalache M. - *Calcul numérique des paramètres de régime transitoire de la machine synchrone; Paramètres de l'axe transversal*, Revue roumaine des sciences techniques, Série électrotechnique et énergétique, Tome 27, No.2, Avril-Juin 1982;
- [64] Mîndru Gh., Rădulescu M.M. - *Analiza numerică a câmpului electromagnetic*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1986;
- [65] Mocanu C.I. - *Teoria câmpului electromagnetic*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981;
- [66] Mohamadein A.L., El-Sulaiman A.A. - *Stability of Large Induction Motors as Influenced by Voltage Disturbances*, Electric Machines and Electromechanics, Vol.7, No.1, January-February 1982;
- [67] Moreira J.C., Lipo T.A. - *Modeling of Saturated ac Machines Including Air Gap Flux Harmonic Components*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.28, no.2, March/April 1992, pag.343-349;
- [68] Müller G. - *Elektrische Maschinen, Theorie rotierender elektrischen Maschinen*, VEB Verlag Technik Berlin, 1973;
- [69] Müller W. - *Numerische Feldberechnung als Instrument zur Entwicklung und Optimierung elektrischer Geräte*, Archiv für Elektrotechnik, 69, 1986, pag.295-300;
- [70] Muster J. - *PEMOVER-Entwurfsprogramm für stromrichter gespeiste Asynchronmotoren*, 11. Internationale Fachtagung IAAA, 1991, TU Chemnitz, E5-1;
- [71] Nene V.D. - *Optimal Tracking of the Dynamic Performance of an Induction Machine*, Electric Machines and Electromechanics, Vol.7, No.1, January-February 1982;
- [72] Nica E., Brad P., Țica L. - *Berechnung des magnetischen Skalarpotentials in der Nute einer elektrischen Maschine*, Buletinul Științific și Tehnic al Universității Tehnice Timișoara, Tom 38(52), 1993, pag.7-14;
- [73] Nicolaide A. - *Mașini electrice, Teorie, Proiectare*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1975;
- [74] Nicolaide A. - *Bazele fizice ale electrotehnicii*, vol.2, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1986;

- [75] Novac I., Micu E., Atanasiu Gh., Andreescu E., Bivol I., Codoiu R., Dudiță Gh., Roșu E., Babescu M., Irhașiu D., Pop I. - *Mașini și acționări electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982;
- [76] Ostović V. - *Dynamics of Saturated Electric Machines*, Springer Verlag, New York, 1989;
- [77] Paap G.C. - *The Analysis of 3-Phase Squirrel-Cage Induction Motors Including Space Harmonics and Mutual Slotting in Transient and Steady State*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.6, No.1, March 1991, pag.69-75;
- [78] Paap G.C. - *On the Theory of 3-Phase Squirrel-Cage Induction Motors Including Space Harmonics and Mutual Slotting*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.6, No.1, March 1991, pag.76-82;
- [79] Popovici C., Cira O. - *Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare*, Editura Signata, Timișoara, 1992;
- [80] Postnikov I.M. - *Proiectarea mașinilor electrice*, Editura Energetică de Stat, București, 1954;
- [81] Rehaoulia H., Poloujadoff M. - *Transient Behavior of the Resultant Airgap Field During Run-up of an Induction Motor*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.EC-1, No.4, December 1986, pag.92-98;
- [82] Reichert K. - *Über ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Magnetfeldern und Wirbelströmen in elektrischen*, Habilitationsschrift, TH Stuttgart 1968;
- [83] Richter R. - *Mașini electrice, vol.IV, Mașini asincrone*, Editura tehnică, București, 1960;
- [84] Roboam X., Kabbaj H., Faucher J., Tientcheu M. - *Leakage inductance on line identification for an induction motor drive*, Proceedings PCIM'97, Intelligent Motion, Nürnberg, June 1997, pag.205-213;
- [85] Rusek J. - *Inductances of AC Machines, Accounting for Eccentricities and Slotings*, 40. Internationales wissenschaftliches Kolloquium, TU Ilmenau, 18-21 septembrie 1995, Band 4, pag. 612-617;
- [86] Sabonnadierre J.C., Konrad A. - *Computing EM Fields*, IEEE Spectrum, November 1992, pag.52-56;
- [87] Schuisky W. - *Berechnung elektrischer Maschinen*, Springer Verlag, Wien, 1960;
- [88] Silvester P.P., Ferrari R.L. - *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, 1990;
- [89] Soran F.I. - *Studiul configurației câmpului magnetic în întrefierul mașinii de inducție și influența ei asupra parametrilor de pornire*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara, 1979;
- [90] Spée R., Wallace A.K. - *Comparative Evaluation of Power Factor Improvement Techniques for Squirrel Cage Induction Motors*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.28, no.2, March/April 1992, pag.381-386;
- [91] Stephan J., Bodson M. - *Real-Time Estimation of the Parameters and Fluxes of Induction Motors*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.30, no.3, May/June 1994, pag.746-759;
- [92] Sullivan C.R., Sanders S.R. - *Models for Induction Machines with Magnetic Saturation of the Main Flux Path*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol.31, no.4, July/August 1995, pag.907-917;
- [93] Șabac I.Gh. - *Matematici speciale*, vol.1, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981;
- [94] Șabac I.Gh., Cocârlan P., Stănășilă O., Topală A. - *Matematici speciale*, vol.2, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983;

- [95] Terțișco M., Stoica P., Popescu Th. - *Identificarea asistată de calculator a sistemelor*, Editura tehnică, București, 1987;
- [96] Torrey D.A., Lang J.H. - *Modelling a Nonlinear Variable-Reluctance Motor Drive*, IEE Proceedings, Vol.137, Pt.B, No.5, September 1990;
- [97] Vas P. - *Parameter Estimation, Condition Monitoring and Diagnosis of Electrical Machines*, Clarendon Press, Oxford, 1993;
- [98] Vas P., Hallenius K.E., Brown J.E. - *Cross-Saturation in Smooth-Air-Gap Electrical Machines*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. EC-1, No.1, March 1986, pag.103-112;
- [99] Vasilievici A. - *Studiul influenței saturației asupra parametrilor mașinilor de inducție*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara, 1979;
- [100] Vasilievici A. - *Determinarea experimentală a influenței saturației asupra pierderilor în fier la o mașină de inducție*, Buletinul Științific și Tehnic al Institutului Politehnic Timișoara, tom 13 (27), 1968, fasc.1, pag.219-228;
- [101] Viorel I.A. - *Influența formei crestăturilor, numărului crestăturilor și a repartiției înfășurărilor asupra parametrilor mașinii de inducție și considerarea acestora în studiul funcționării mașinii*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara, 1978;
- [102] Williamson S., McClay C.I. - *Optimization of the Geometry of Closed Rotor Slots for Cage Induction Motors*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.32, No.3, May/June 1996, pag.560-568;
- [103] Zhou K.M., Forbes I.P. - *Parameter Calculation Optimization in Simulating Dynamic Behaviour of Induction Motors in PSA Software*, UPEC-93, Proceedings, pag.138-141;
- [104] Zienkiewicz O.C. - *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw-Hill, London, 1971;
- [105] ***** Dicționar de fizică, Editura Enciclopedică Română, București, 1972.
- [106] ***** ELCUT - *Finite Element Analysis System*, Version 3.0, TOR Cooperative Enterprise, St. Petersburg, 1992;
- [107] ***** FEMAG - *Ein interaktives Programm zur numerischen Feldberechnung*, ETH Zürich, 1991;
- [108] ***** Flux 2 D - Version 7.06, *Analyse des dispositifs électriques, magnétiques et thermiques par la methode des elements finis*, MAGSOFT Corporation-CEDRAT S.A., 1993;
- [109] ***** MATLAB version 4.0 with SIMULINK version 1.2, The Math Works, 1993;
- [110] ***** LabVIEW version 3.1.1, National Instruments, 1993.
- [111] ***** QuickFIELD version 4.1, Tera Analysis Co., 1998.

ANEXA 1. Funcțiile cilindrice Bessel

Funcțiile cilindrice Bessel de ordinul întâi, $J_\nu(x)$ și de ordinul doi, $Y_\nu(x)$:

$$J_{01}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \left\{ \left[\frac{x}{2} \right]^{2\lambda} \frac{1}{(2\lambda)!} \right\}^2 \quad (\text{A1.1})$$

$$J_{02}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \left\{ \left[\frac{x}{2} \right]^{2\lambda+1} \frac{1}{(2\lambda+1)!} \right\}^2 \quad (\text{A1.2})$$

$$J_{11}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} \left\{ \left[\frac{x}{2} \right]^{4\lambda+1} \frac{1}{(2\lambda)! \cdot (2\lambda+1)!} + \left[\frac{x}{2} \right]^{4\lambda+3} \frac{1}{(2\lambda+1)! \cdot (2\lambda+2)!} \right\} \quad (\text{A1.3})$$

$$J_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \left\{ \left[\frac{x}{2} \right]^{4\lambda+1} \frac{1}{(2\lambda)! \cdot (2\lambda+1)!} - \left[\frac{x}{2} \right]^{4\lambda+3} \frac{1}{(2\lambda+1)! \cdot (2\lambda+2)!} \right\} \quad (\text{A1.4})$$

$$Y_{01}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot J_{01}(x) \cdot \ln \frac{\gamma \cdot x}{2} - \frac{3}{2} \cdot J_{02}(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} \left\{ \left[\frac{x}{2} \right]^{2\lambda} \frac{1}{(2\lambda)!} \right\}^2 \varphi_{2\lambda} \quad (\text{A1.5})$$

$$Y_{02}(x) = \frac{2}{\pi} J_{02}(x) \ln \frac{\gamma \cdot x}{2} + \frac{3}{2} J_{01}(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} \left\{ \left[\frac{x}{2} \right]^{2\lambda-1} \frac{1}{(2\lambda-1)!} \right\}^2 \varphi_{2\lambda-1} \quad (\text{A1.6})$$

$$Y_{11}(x) = \frac{2}{\pi} J_{11}(x) \ln \frac{\gamma \cdot x}{2} - \frac{3}{2} J_{12}(x) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \left\{ \left[\frac{x}{2} \right]^{4\lambda+1} \frac{\varphi_{2\lambda} + \varphi_{2\lambda+1}}{(2\lambda)! \cdot (2\lambda+1)!} + \left[\frac{x}{2} \right]^{4\lambda+3} \frac{\varphi_{2\lambda+1} + \varphi_{2\lambda+2}}{(2\lambda+1)! \cdot (2\lambda+2)!} \right\} \quad (\text{A1.7})$$

$$Y_{12}(x) = \frac{2}{\pi} J_{12}(x) \ln \frac{\gamma \cdot x}{2} + \frac{3}{2} J_{11}(x) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \left\{ \left[\frac{x}{2} \right]^{4\lambda+1} \frac{\varphi_{2\lambda} + \varphi_{2\lambda+1}}{(2\lambda)! \cdot (2\lambda+1)!} - \left[\frac{x}{2} \right]^{4\lambda+3} \frac{\varphi_{2\lambda+1} + \varphi_{2\lambda+2}}{(2\lambda+1)! \cdot (2\lambda+2)!} \right\} \quad (\text{A1.8})$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$\varphi_\lambda = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\lambda}$$

$$\gamma = \exp(0.577215664901)$$

ANEXA 2. Curbe de magnetizare

A 2.1. Curba de magnetizare pentru tabla laminată la rece NO 450-50 (C.S. Târgoviște)

B[T]	H1[A/m]	B[T]	H1[A/m]
0,0	0	0,05	12
0,1	24	0,15	36
0,2	48	0,25	60
0,3	72	0,35	84
0,4	96	0,45	106
0,5	120	0,55	132
0,6	144	0,65	156,5
0,7	169	0,75	181,9
0,8	194,9	0,85	217
0,9	250	0,95	291
1,0	339	1,05	391
1,1	453	1,15	529
1,2	621	1,25	728
1,3	863	1,35	1053
1,4	1290	1,45	1625
1,5	2065	1,55	2695
1,6	3560	1,65	4720
1,7	6540	1,75	8970
1,8	11420	1,85	13930
1,9	16485	1,95	19070
2,0	22210		
2,1	33425		
2,2	65015		
2,3	116975		
2,4	189310		
2,5	282020		

A 2.2. Curba de magnetizare pentru tabla laminată la rece D17 0,5x300 C3

B[T]	H2 [A/m]	B[T]	H2 [A/m]
0,0	0	0,05	15
0,4	140	0,45	153
0,5	171	0,55	191
0,6	211	0,65	236
0,7	261	0,75	287
0,8	318	0,85	352
0,9	397	0,95	447
1,0	502	1,05	570
1,1	647	1,15	739
1,2	843	1,25	976
1,3	1140	1,35	1340
1,4	1580	1,45	1950
1,5	2500	1,55	3280
1,6	4370	1,65	5880
1,7	7780	1,75	10100
1,8	12800	1,85	15900
1,9	19700	1,95	24600
2,0	31000	2,05	42000
2,1	65500	2,15	104000
2,2	144000	2,25	184000
2,3	224000	2,35	264000
2,4	304000	2,45	344000
2,5	384000	2,55	424000

A 2.3. Curba de magnetizare pentru tabla laminată la rece V [76]

B[T]	H3 [A/m]
0,0	0
0,7	630
0,8	740
0,9	850
1,0	960
1,1	1100
1,2	1280
1,3	1620
1,4	2200
1,5	3050
1,6	4620
1,7	7660
1,8	12500
1,9	19700
2,0	31000
2,1	54500
2,2	118000
2,3	198000
2,4	278000

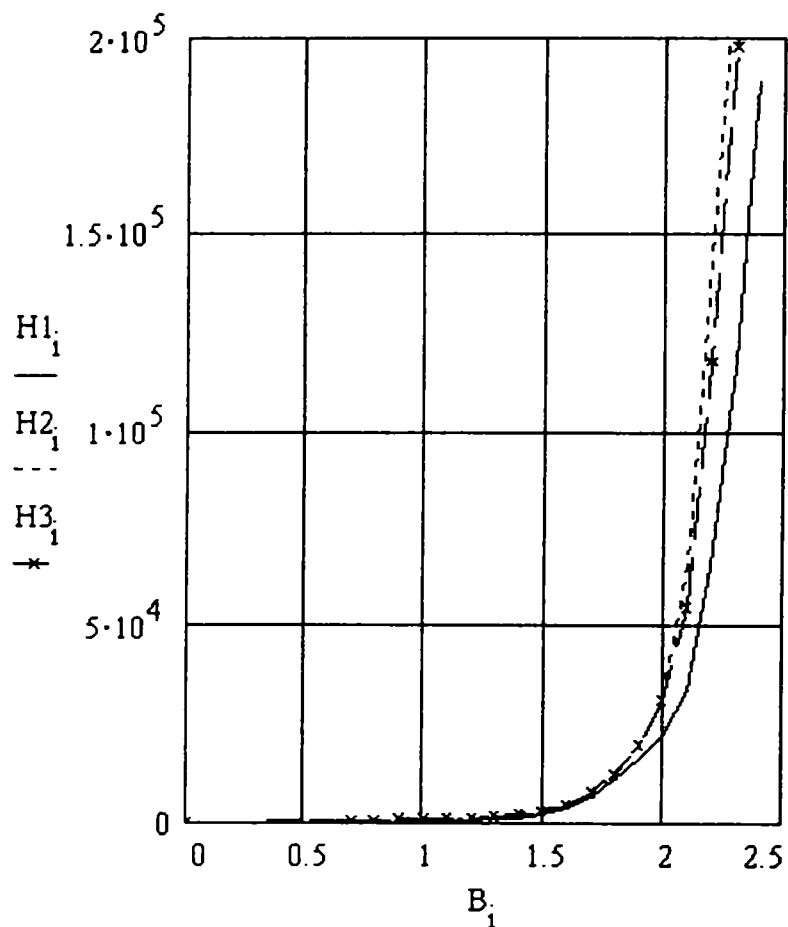


Fig.A.2.1. Curbele de magnetizare ale materialelor utilizate pentru tole: NO (H1), D17 (H2), V (H3)

A 2.4. Curba de magnetizare pentru oțel turnat

B[T]	H4 [A/m]
0,0	0
0,5	400
0,6	488
0,7	584
0,8	682
0,9	798
1,0	924
1,1	1090
1,2	1290
1,3	1590
1,4	2090
1,5	2890
1,6	4100
1,7	5700

ANEXA 3

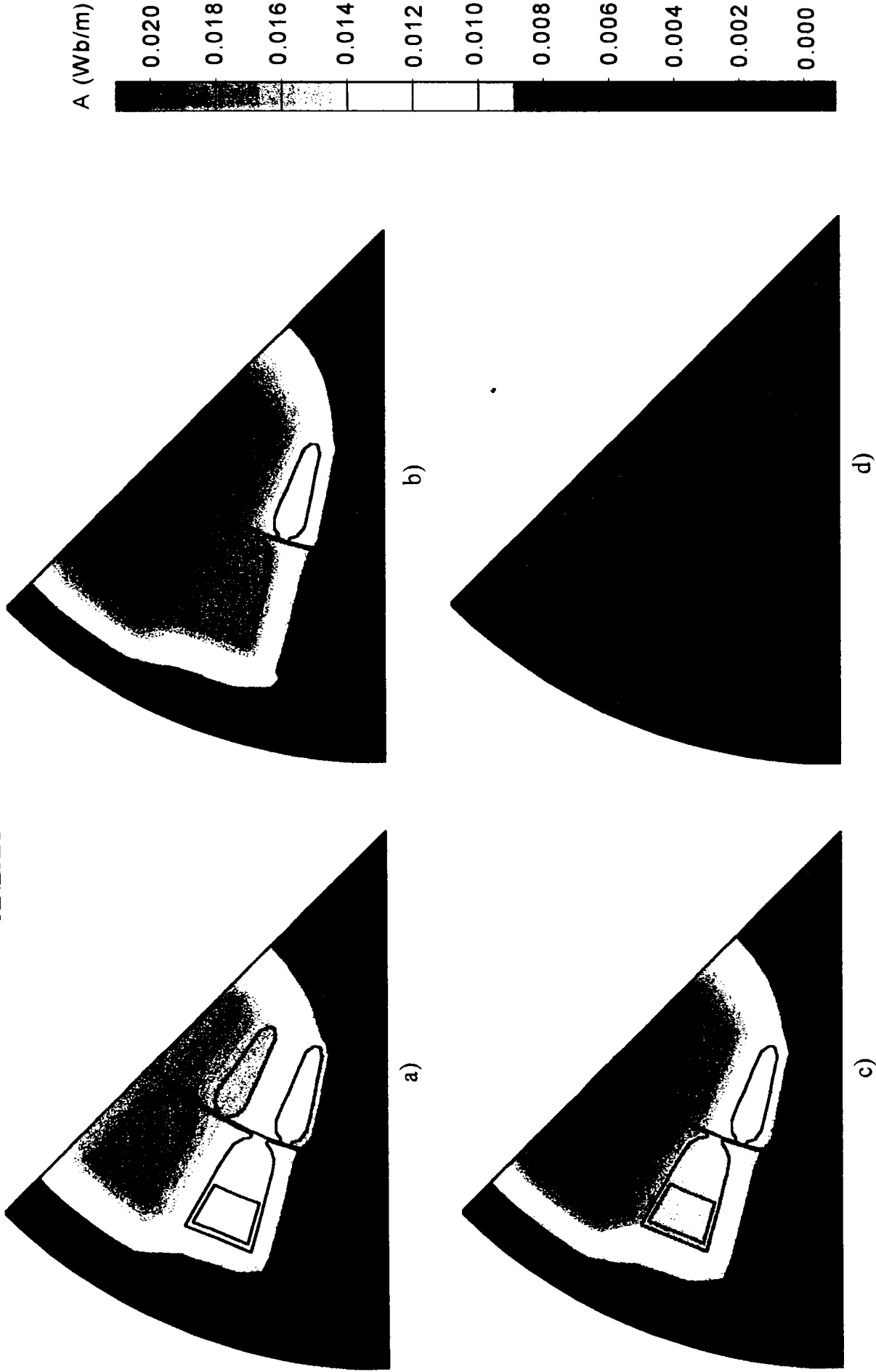


Fig.A.3.1. Valorile potențialului vector la motorul de 1,5 kW cu 4 poli: a) la funcționarea în gol, $U = 380$ V; b) la funcționarea în gol, $U = 600$ V; c) la funcționarea la putere nominală, $U = 380$ V; d) la scurtcircuit, $U = 380$ V.

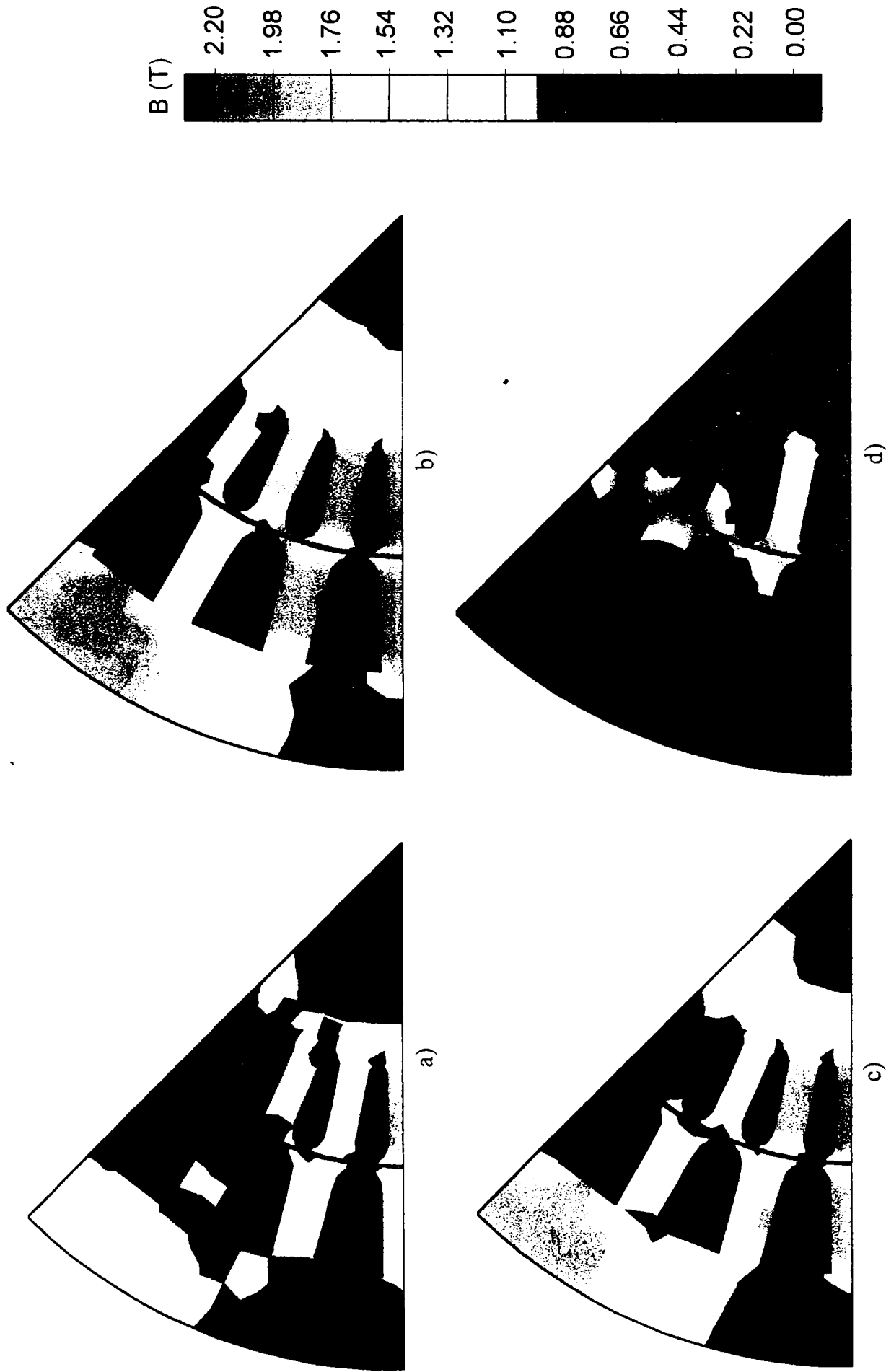
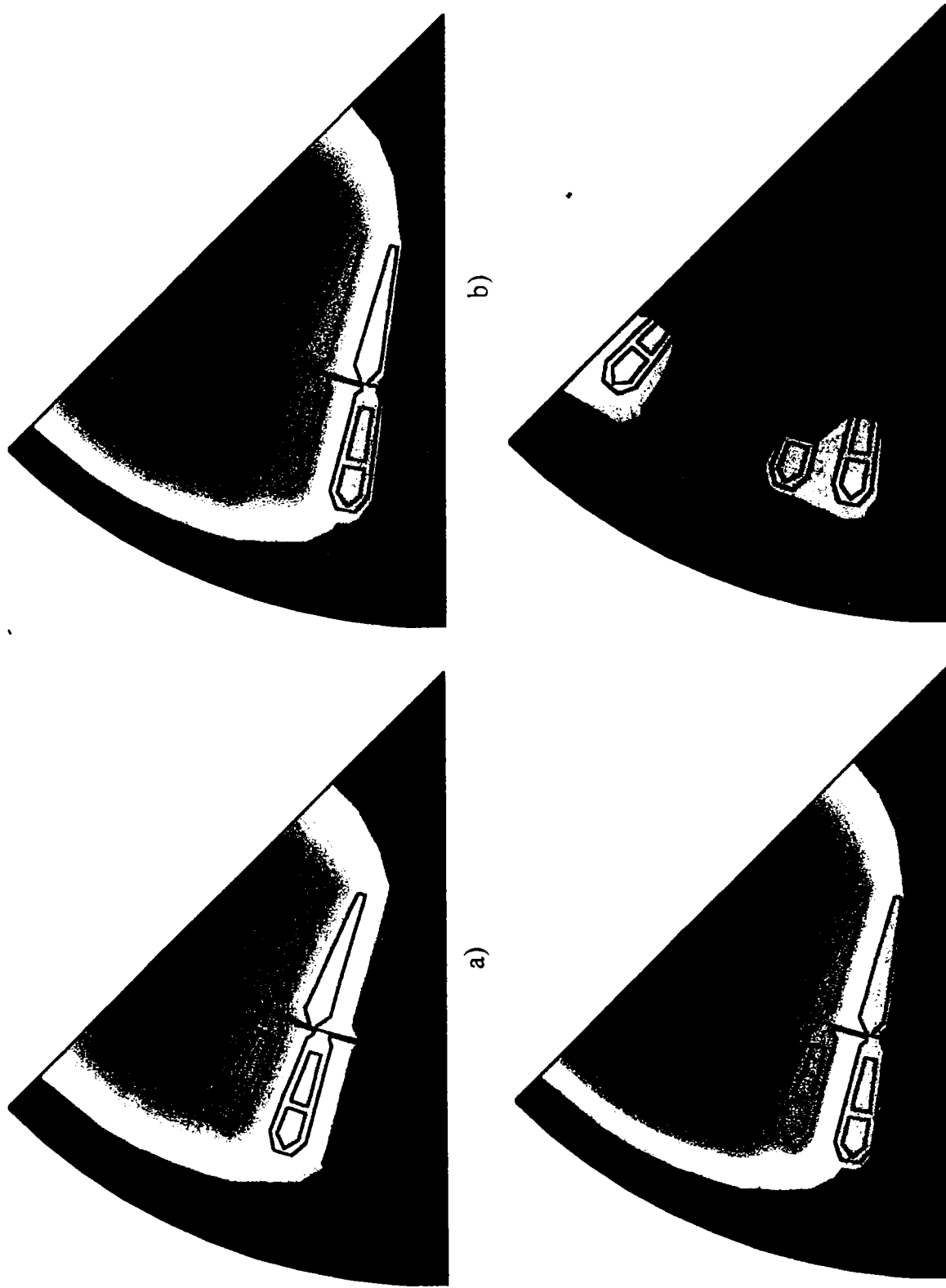


Fig.A.3.2. Valorile inducției magnetice la motorul de 1,5 kW cu 4 poli: a) la funcționarea în gol, $U = 380$ V; b) la funcționarea în gol, $U = 600$ V; c) la funcționarea la putere nominală, $U = 380$ V; d) la scurtcircuit, $U = 380$ V.



A (Wb/m)

0.030
0.027
0.024
0.021
0.018
0.015
0.012
0.009
0.006
0.003
0.000

Fig.A.3.3. Valorile potențialului vector la motorul de 15 kW cu 4 poli: a) la funcționarea în gol, $U = 400$ V; b) la funcționarea în gol, $U = 550$ V; c) la funcționarea la putere nominală, $U = 400$ V; d) la scurtcircuit, $U = 400$ V.

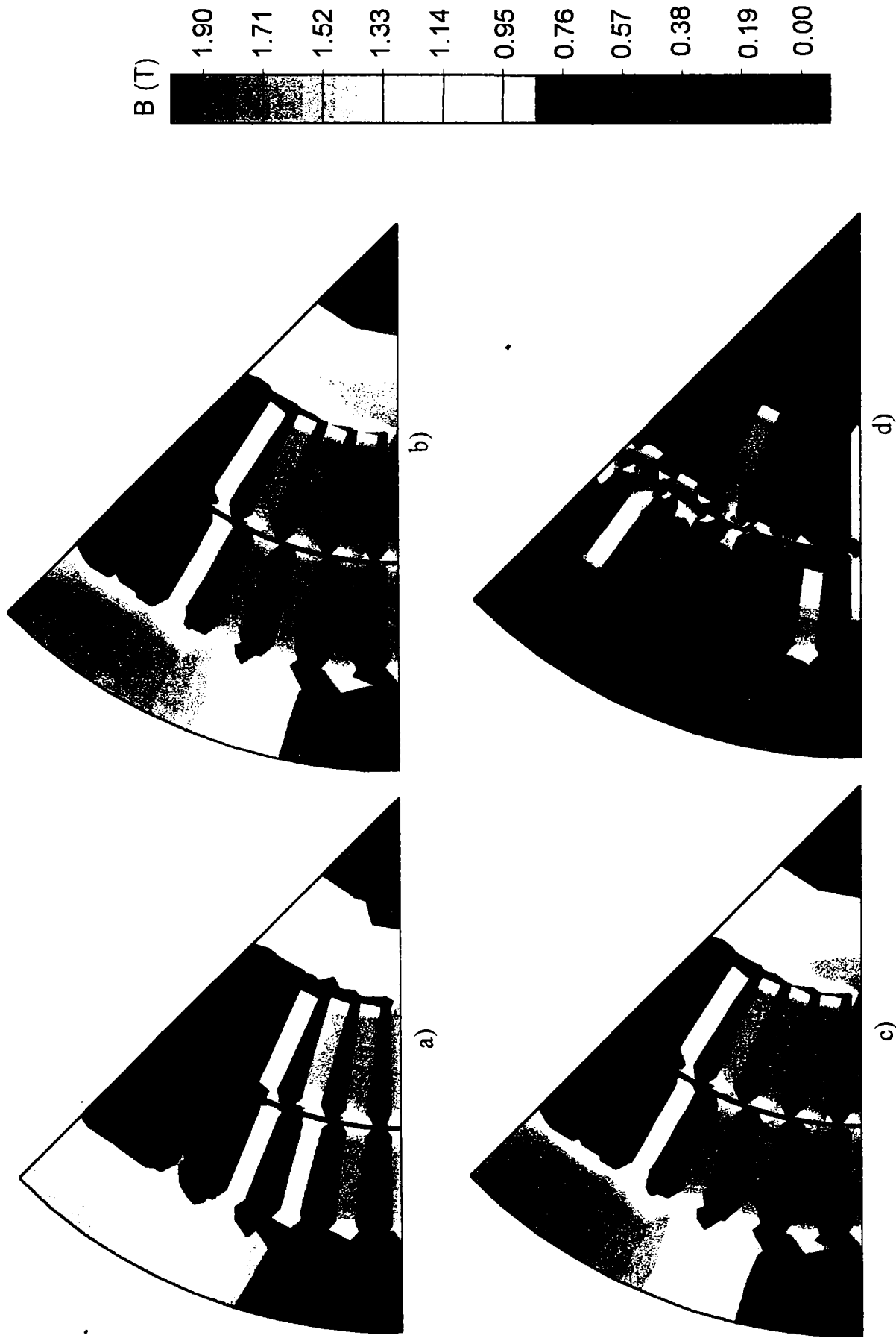


Fig.A.3.4. Valorile inducției magnetice la motorul de 15 kW cu 4 poli: a) la funcționarea în gol, $U = 400$ V; b) la funcționarea în gol, $U = 550$ V; c) la funcționarea la putere nominală, $U = 400$ V; d) la scurtcircuit, $U = 400$ V.

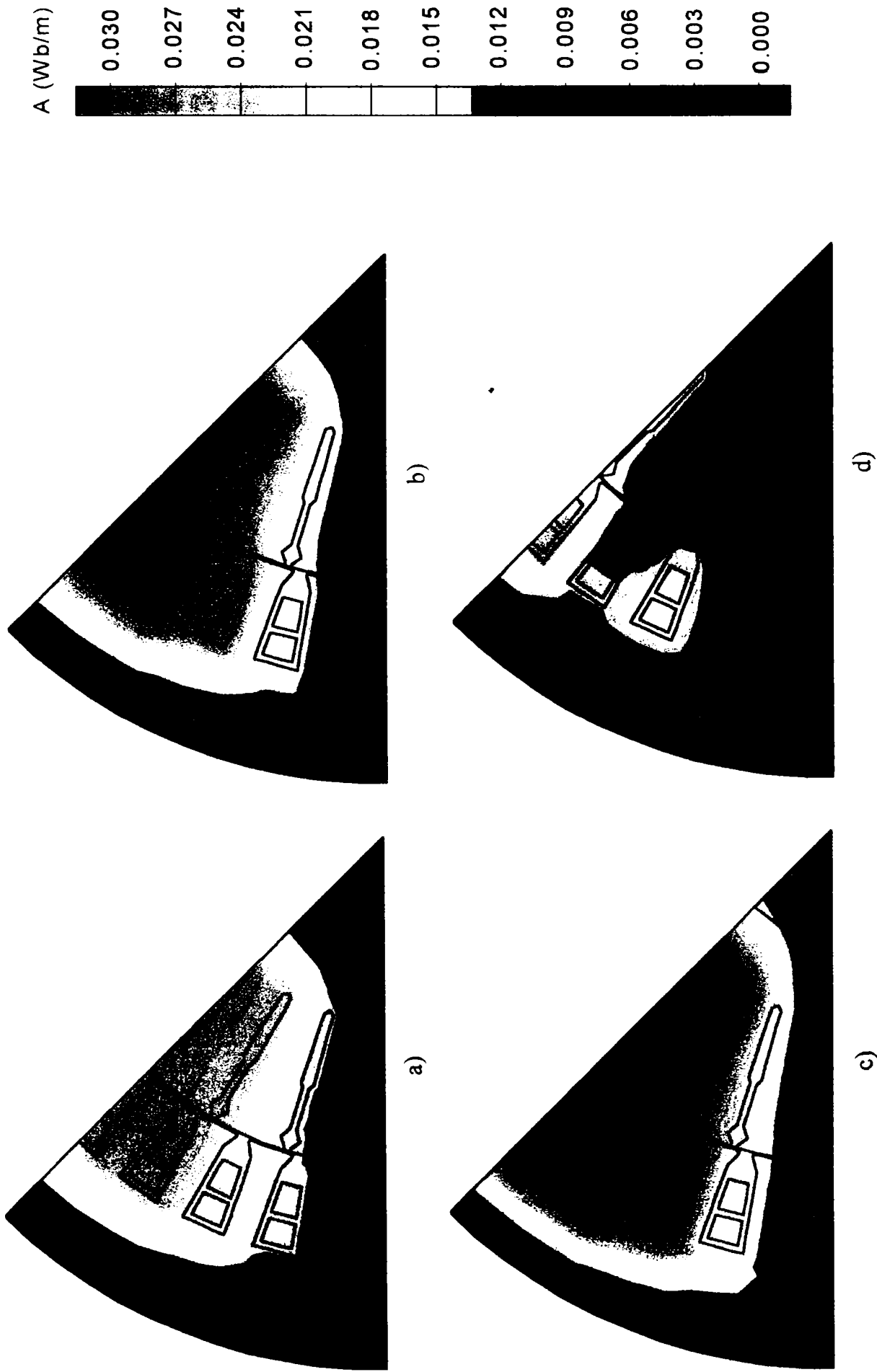


Fig.A.3.5. Valorile potențialului vector la motorul de 15 kW cu 4 poli și dublă colivie: a) la funcționarea în gol, $U = 400 \text{ V}$; b) la funcționarea în gol, $U = 600 \text{ V}$; c) la funcționarea la putere nominală, $U = 400 \text{ V}$; d) la scurtcircuit, $U = 400 \text{ V}$.

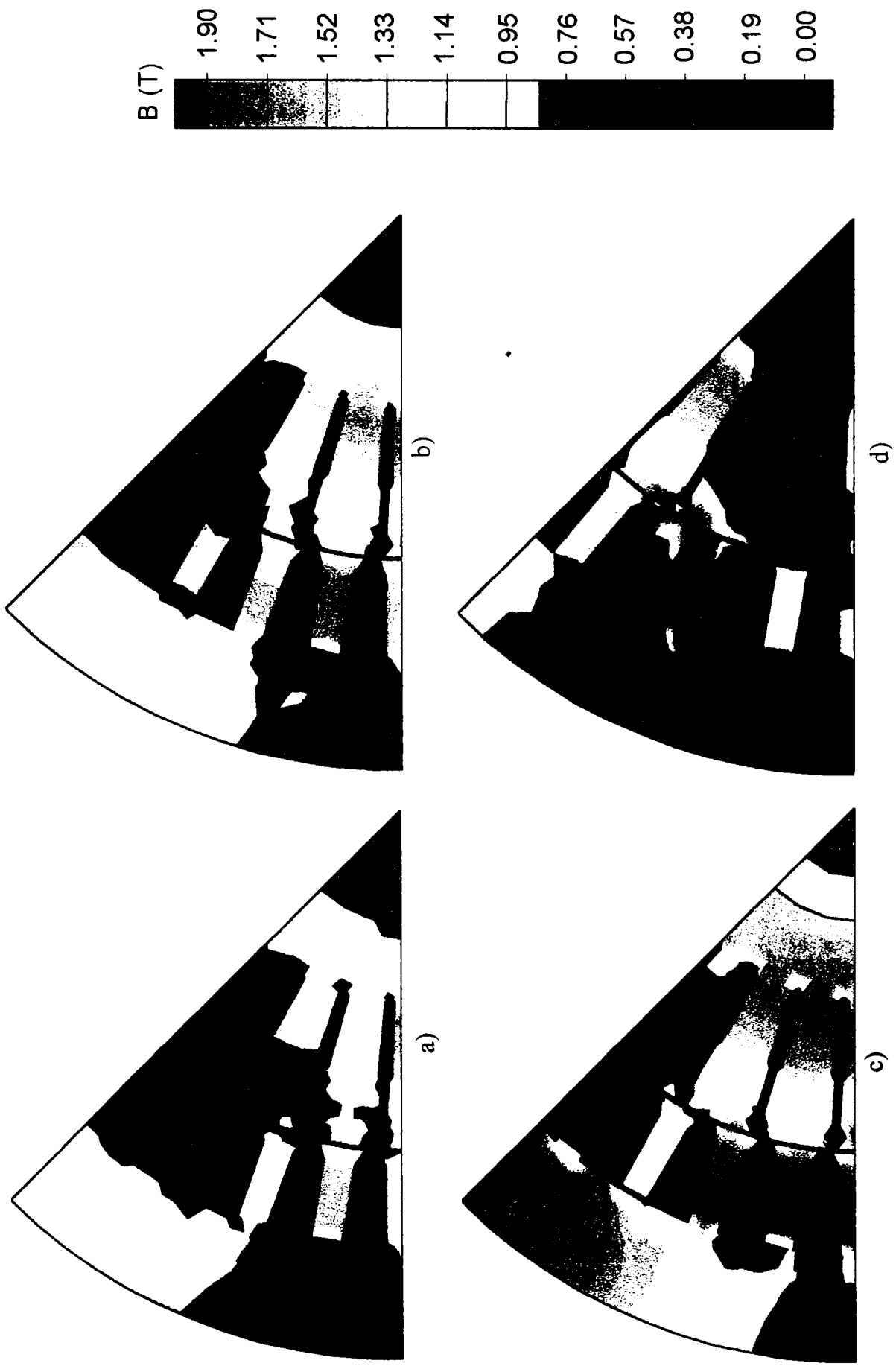


Fig.A.3.6. Valorile inducției magnetice la motorul de 15 kW cu 4 poli și dublă colivie: a) la funcționarea în gol, $U = 400$ V; b) la funcționarea în gol, $U = 600$ V; c) la funcționarea la putere nominală, $U = 400$ V; d) la scurtcircuit, $U = 400$ V.

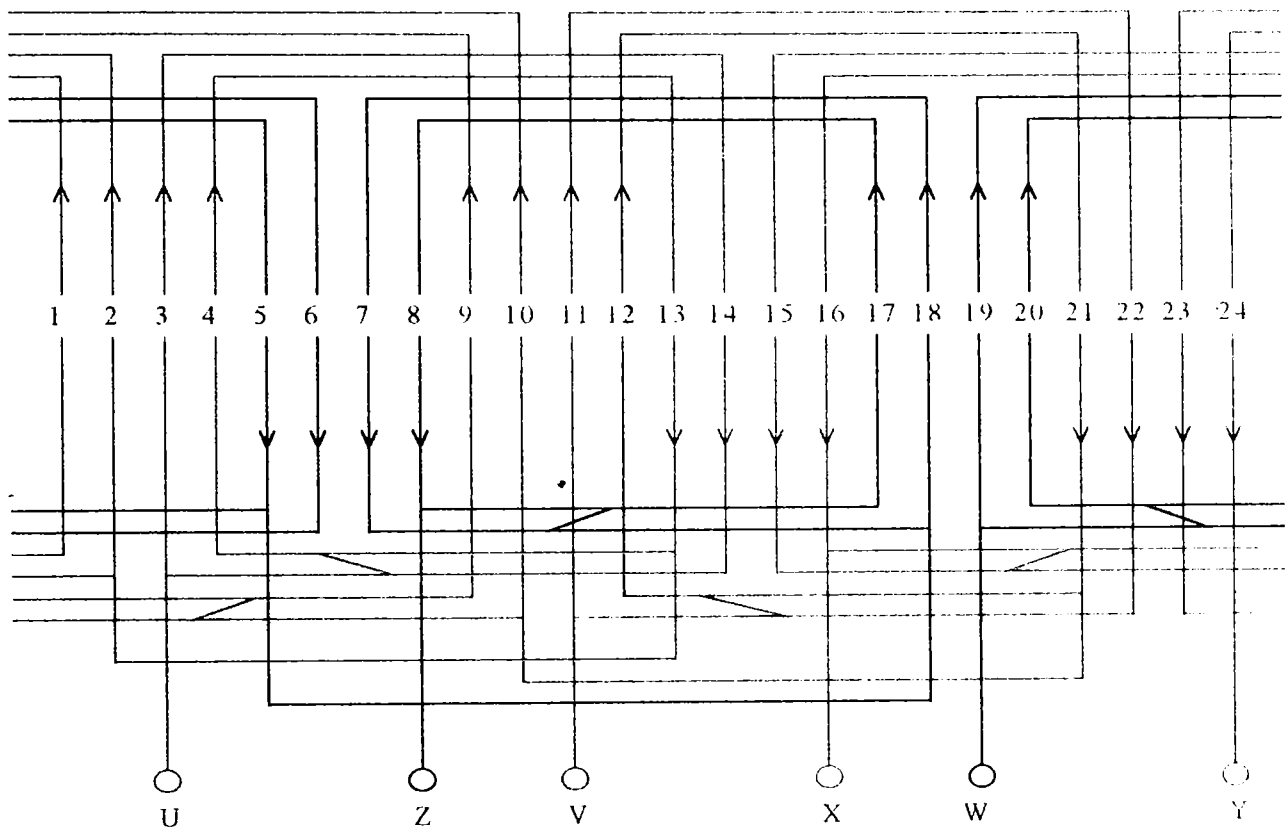


Fig.A.4.1. Schema electrică a motorului de inducție de 0,55 kW cu 2 poli

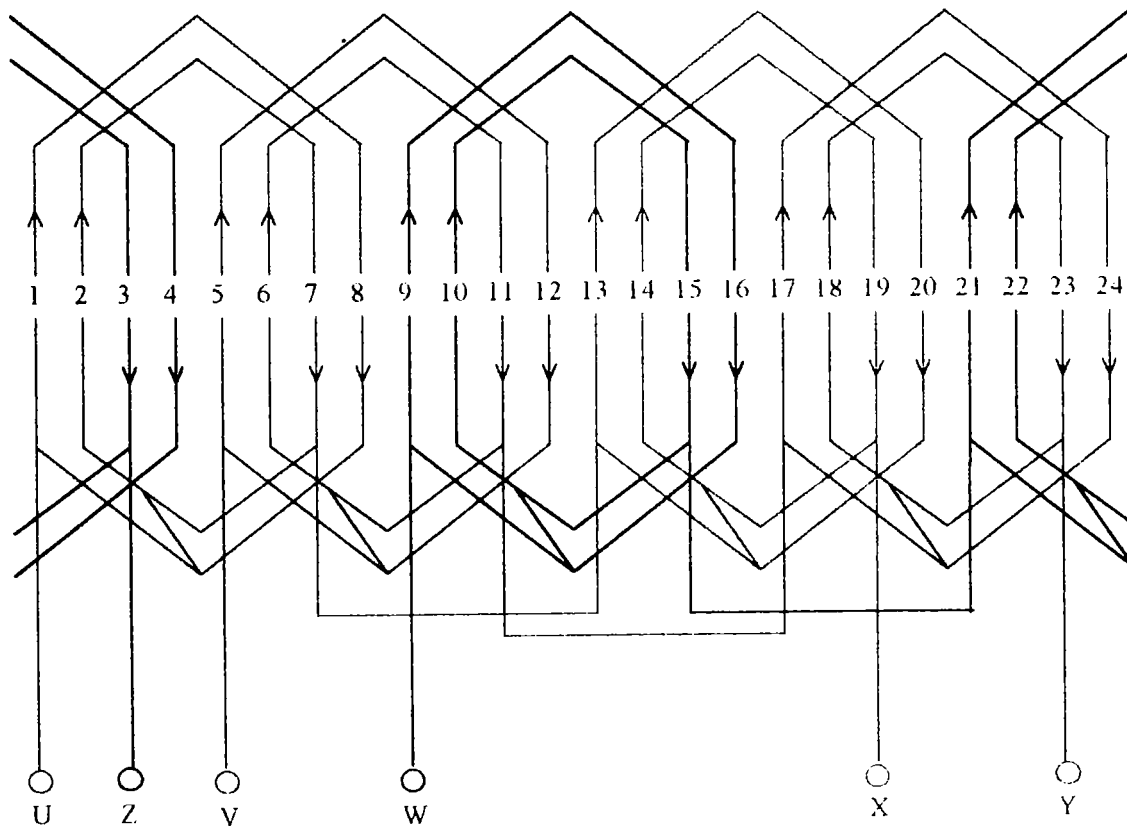


Fig.A.4.2. Schema electrică a motorului de inducție de 1,5 kW cu 4 poli

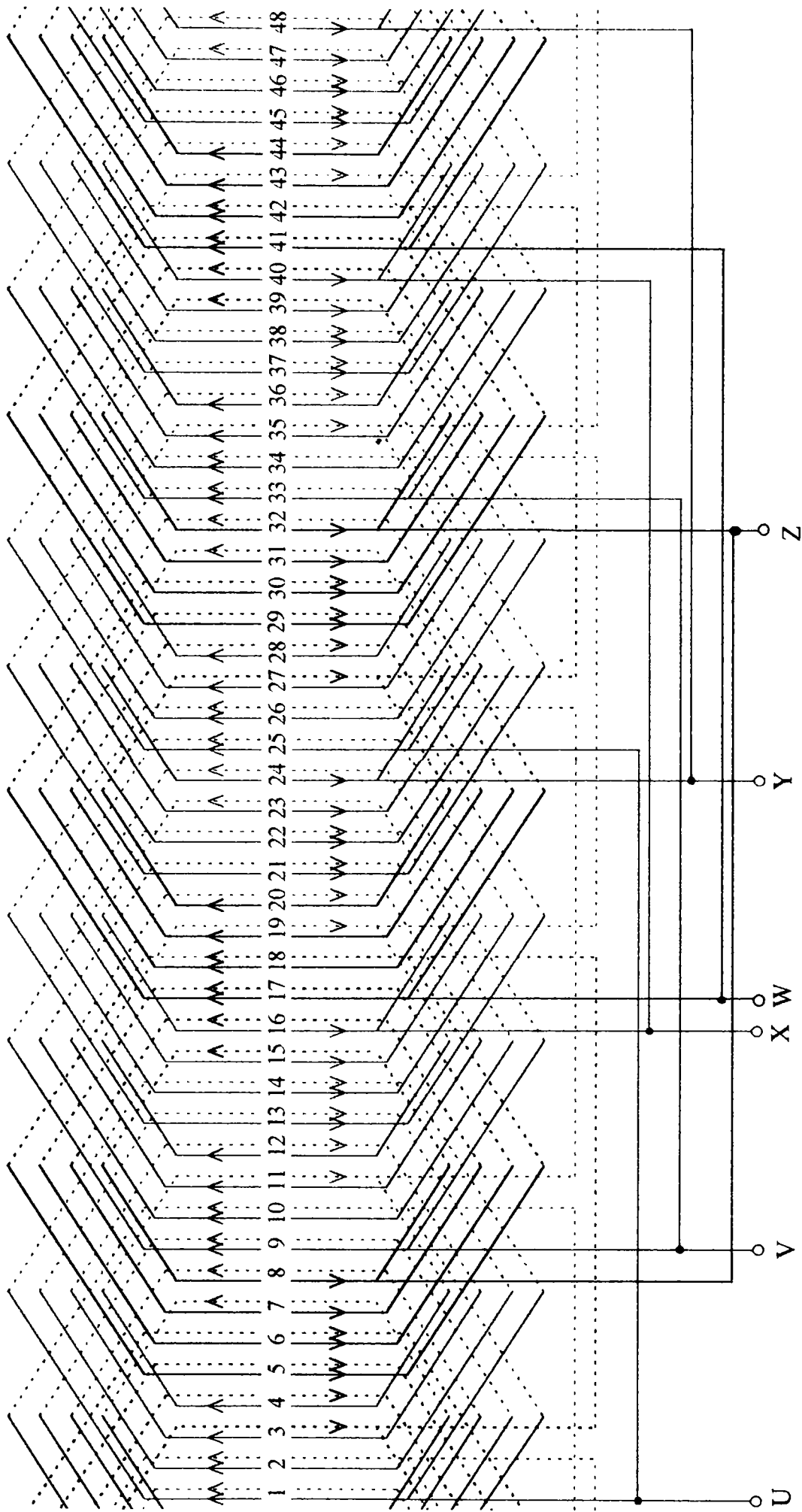


Fig.A.4.3. Schema electrică a motorului de inducție de 15 kW cu 4 poli și simplă colivie

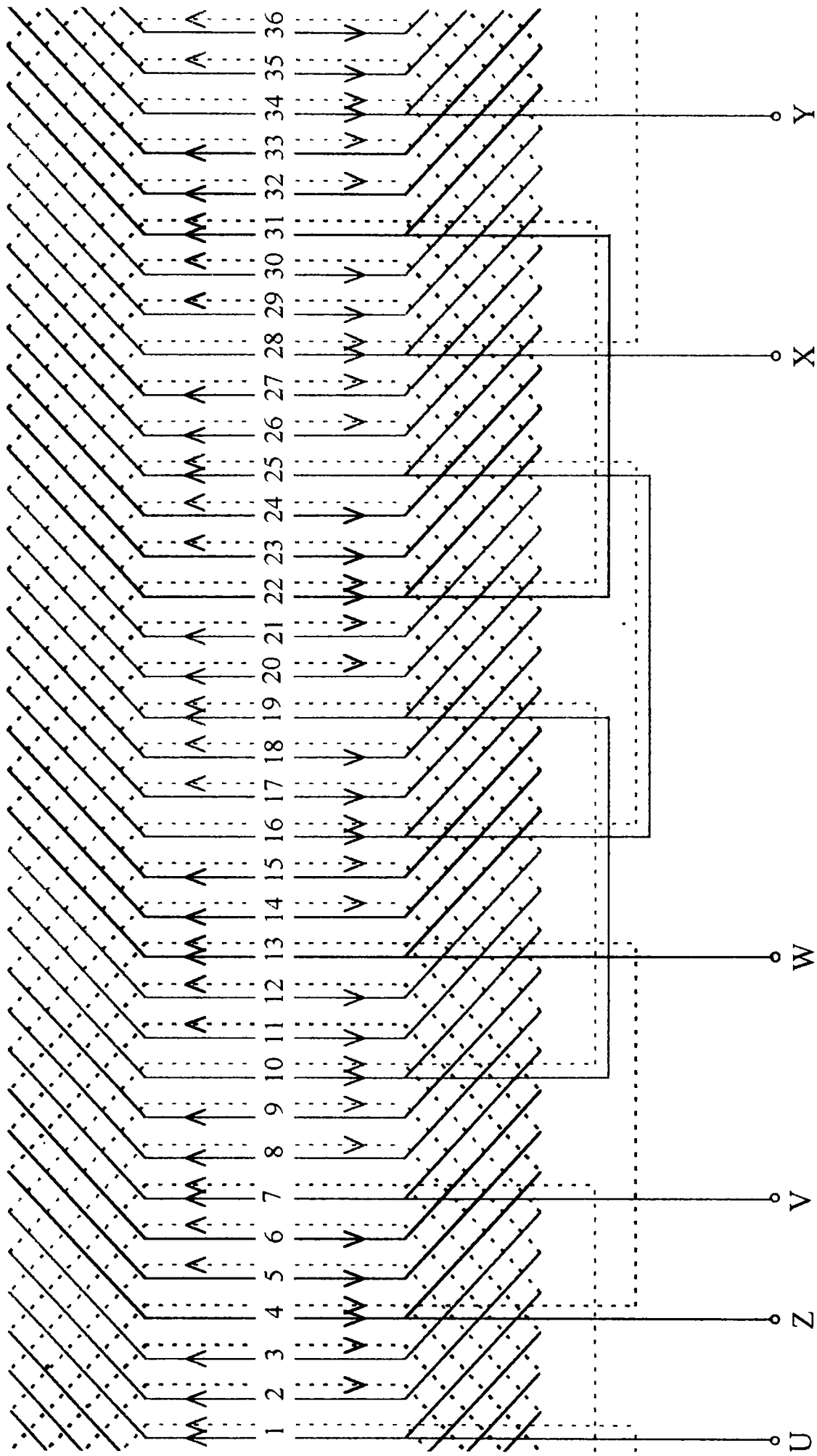


Fig.A.4.4. Schema electrică a motorului de inducție de 15 kW cu 4 poli și dublă coilvie

ANEXA 5. Fișiere cu datele constructive ale motoarelor de inducție studiate

Notațiile corespund creștăturilor prezentate în figurile 8.11, 8.12 și 8.27.

Unitățile de măsură sunt în sistemul internațional [S I].

A 5.1 Motorul de 0,55 kW cu 2 poli "emt0_55"

Pn=550; n1=3000;

DATE GEOMETRICE

Dext=0.116;
D=0.0632;
Drot=0.0625;
dint=0.02;
l=0.05;

CONSTANTE

p=1;
alfa=2.78333;
rod=0.95;
sigd1=0.014;
sigd2=0.018;
ksd=1.7;

DATE BOBINAJ

Ns=107;
rocu20=1.784e-8;
a=1;
pas=9;
nb=2;
nstrat=1;

RETEA ALIMENTARE

U=220;
f=50;
fi=0;

DATE INEL

ai=0.013;
bi=0.01;

fi1=0.00048;
fi2=0;

CRESTATURA STATOR "s1"

as=0.002;
h3=0.00275;
h0=0.00035;
Dbaza=0.0821;
b=0.0057;
B1=0.0074;
Nc1=24;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=1;

CRESTATURA ROTOR "r1"

ar=0.001;
h3r=0.0018;
h0r=0.00045;
dbaz=0.05429;
br=0.0036;
Nc2=29;
baz=0.0022;
bg=0; hg=0;
bpor=0; roal75=4e-8;
tip2=1;

DIVERSE

kR2=2;
kX1=0.9;
kX2=1;
kBdelta=0.93;
ers=0.000001;

Pn=1500; n1=1500;

DATE GEOMETRICE

Dext=0.138;
D=0.085;
Drot=0.0845;
dint=0.029;
l=0.11;

CONSTANTE

p=2;
alfa=2.33333;
rod=0.95;
sigd1=0.014;
sigd2=0.018;
ksd=1.7;

DATE BOBINAJ

Ns=65;
rocu20=1.784e-8;
a=1;
pas=5;
nb=2;
nstrat=1;

RETEA ALIMENTARE

U=220;
f=50;
fi=0;

DATE INEL

ai=0.0155;
bi=0.012;fi1=0.00063;
fi2=0.00063;

CRESTĂTURA STATOR

"s1"	"s2"	"s3"	"s4"	"s5"
as=0.00215;	as=0.00215;	as=0.00215;	as=0.00215;	as=0.00215;
h3=0.00315;	h3=0.00315;	h3=0.001575;	h3=0.001575;	h3=0.001575;
h0=0.0005;	h0=0.0005;	h0=0.0005;	h0=0.0005;	h0=0.0005;
Dbaza=0.113;	Dbaza=0.115;	Dbaza=0.1153;	Dbaza=0.114;	Dbaza=0.116;
b=0.0063;	b=0.0063;	b=0.00676;	b=0.00554;	b=0.00554;
B1=0.0091;	B1=0.0083;	B1=0.00676;	B1=0.00889;	B1=0.00807;
Nc1=24;	Nc1=24;	Nc1=24;	Nc1=24;	Nc1=24;
hb=0.0003;	hb=0.0003;	hb=0.0003;	hb=0.0003;	hb=0.0003;
h4=0;	h4=0.;	h4=0.;	h4=0.;	h4=0.;
tip1=1;	tip1=2;	tip1=3;	tip1=4;	tip1=5;

CRESTĂTURA ROTOR

"r1"	"r2"
ar=0.0015;	ar=0.0015;
h3r=0.00205;	h3r=0.0015;
h0r=0.00048;	h0r=0.00048;
dbaz=0.05838;	dbaz=0.05838;
br=0.0041;	br=0.004;
Nc2=30;	Nc2=30;
baz=0.0021;	baz=0.0021;
bg=0;	roal75=4e-8;
hg=0;	bpor=0;
bpor=0;	hg=0;
roal75=4e-8;	bg=0;
tip2=1;	tip2=2;

"r31"	"r32"
ar=0.0015;	ar=0.0015;
h3r=0.;	h3r=0.;
h0r=0.00048;	h0r=0.00048;
dbaz=0.061;	dbaz=0.0555;
br=0.0025;	br=ar;
Nc2=30;	Nc2=30;
baz=br;	baz=0.002;
roal75=4e-8;	roal75=4e-8;
bpor=0;	bpor=0;
hg=0;	hg=0;
bg=0;	bg=0;
tip2=3;	tip2=3;

DIVERSE

kR2=1.53;
kX1=1.1;
kX2=1.1;
kBdelta=0.97;
ers=0.000001;

Pn=15000; n1=1500;

DATE GEOMETRICE

Dext=0.2452;
D=0.152;
Drot=0.1511;
dint=0.05;
l=0.18;

CONSTANTE

p=2;
alfa=3.7333;
rod=0.82;
sigd1=0.007575;
sigd2=0.0068;
ksd=1.7;

DATE BOBINAJ

Ns=40;
rocu20=1.784e-8;
a=2;
pas=7;
nb=4;
nstrat=2;

RETEA ALIMENTARE

U=400;
f=50;
fi=0;

DATE INEL

ai=0.032;
bi=0.016;fi1=0.001;
fi2=0.001;

CREȘTĂTURA STATOR

"s5"

as=0.0032;
h3=0.0012;
h0=0.0007;
Dbaza=0.203;
b=0.005;
B1=0.0076;
Nc1=48;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=5;

"s1"

as=0.0032;
h3=0.003;
h0=0.0007;
Dbaza=0.1995;
b=0.00565;
B1=0.00828;
Nc1=48;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=1;

"s2"

as=0.0032;
h3=0.003;
h0=0.0007;
Dbaza=0.201;
b=0.00565;
B1=0.00789;
Nc1=48;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=2;

"s3"

as=0.0032;
h3=0.0012;
h0=0.0007;
Dbaza=0.203;
b=0.00622;
B1=b;
Nc1=48;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=3;

"s4"

as=0.0032;
h3=0.0012;
h0=0.0007;
Dbaza=0.2012;
b=0.005;
B1=0.00798;
Nc1=48;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=4;

CREȘTĂTURA ROTOR

"r1"

ar=0.0015;
h3r=0.00255;
h0r=0.0006;
dbaz=0.0933;
br=0.0051;
Nc2=44;
baz=0.0015;
roal75=4e-8;
bpor=0;
hg=0;
bg=0;
tip2=1;

"r2"

ar=0.0015;
h3r=0.0015;
h0r=0.0006;
dbaz=0.0933;
br=0.0051;
Nc2=44;
baz=0.0015;
roal75=4e-8;
bpor=0;
hg=0;
bg=0;
tip2=2;

"r31"

ar=0.0015;
h3r=0;
h0r=0.0006;
dbaz=0.101;
br=0.0025;
Nc2=44;
baz=br;
roal75=4e-8;
bpor=0;
hg=0;
bg=0;
tip2=3;

"r32"

ar=0.0015;
h3r=0;
h0r=0.0006;
dbaz=0.091;
br=ar;
Nc2=44;
baz=0.002;
roal75=4e-8;
bpor=0;
hg=0;
bg=0;
tip2=3;

DIVERSE

kR2=2.65;
kX1=1.1;
kX2=1.2;
kBdelta=0.905;
ers=0.000001;

Pn=15000; n1=1500;

DATE GEOMETRICE

Dext=0.2452;
D=0.152;
Drot=0.151;
dint=0.05;
l=0.28;

CONSTANTE

p=2;
alfa=0.9334;
rod=0.95;
sigd1=0.014;
sigd2=0.018;
ksd=1.7;

DATE BOBINAJ

Ns=26;
rocu20=1.784e-8;
a=1;
pas=5;
nb=3;
nstrat=2;

RETEA ALIMENTARE

U=400;
f=50;
fi=0;

DATE INEL

ai=0.016;
bi=0.016;fi1=0.0013435;
fi2=0.0013435;

CRESTĂTURA STATOR

"s1"

as=0.0032;
h3=0.0034;
h0=0.00075;
Dbaza=0.1965;
b=0.0068;
B1=0.0101;
Nc1=36;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=1;

"s2"

as=0.0032;
h3=0.0034;
h0=0.00075;
Dbaza=0.1988;
b=0.0068;
B1=0.00945;
Nc1=36;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=2;

"s3"

as=0.0032;
h3=0.0017;
h0=0.00075;
Dbaza=0.2;
b=0.0075;
B1=0.0075;
Nc1=36;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=3;

"s4"

as=0.0032;
h3=0.0017;
h0=0.00075;
Dbaza=0.1968;
b=0.006;
B1=0.00977;
Nc1=36;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=4;

"s5"

as=0.0032;
h3=0.0017;
h0=0.00075;
Dbaza=0.2;
b=0.006;
B1=0.00914;
Nc1=36;
hb=0.0003;
h4=0.0005;
tip1=5;

CRESTĂTURA ROTOR

"r4"

ar=0.0015;
h3r=0;
h0r=0.001;
dbaz=0.084;
br=0.003;
Nc2=26;
baz=0.002;
roal75=4e-8;
bpor=0.0045;
hg=0.0095;
bg=ar;
tip2=4;

"r41"

ar=0.0015;
h3r=0;
h0r=0.001;
dbaz=0.084;
br=0.003;
Nc2=26;
baz=0.002;
roal75=4e-8;
bpor=ar;
hg=0.0125;
bg=ar;
tip2=4;

"r42"

ar=0.0015;
h3r=0;
h0r=0.001;
dbaz=0.084;
br=ar;
Nc2=26;
baz=0.002;
roal75=4e-8;
bpor=0.0045;
hg=0.0095;
bg=ar;
tip2=4;

"r43"

ar=0.0015;
h3r=0;
h0r=0.001;
dbaz=0.084;
br=ar;
Nc2=26;
baz=0.002;
roal75=4e-8;
bpor=ar;
hg=0.0125;
bg=ar;
tip2=4;

DIVERSE

kR2=1.9;
kX1=0.95;
kX2=0.7;
kBdelta=0.96;
ers=0.000001;

MODIFICAREA FORMEI CRESTATURII STATORICE

CRESTATURA STATORICA TIP1=1

$$as := 0.00215 \quad h3 := 0.00315 \quad h0 := 0.0005 \quad Dbaza := 0.113 \quad b := 0.0063 \quad B1 := 0.0091$$

$$D := 0.085$$

$$h1 := \frac{Dbaza - D}{2} - h0 - h3$$

$$a := \frac{B1 - b}{2 \cdot h1} \quad a = 0.135266$$

$$S1 := as \cdot h0 \quad S2 := x \cdot \frac{b^2}{8} \quad S3 := \frac{as + b}{2} \cdot h3 \quad S4 := \frac{B1 + b}{2} \cdot h1 \quad S5 := x \cdot \frac{B1^2}{8}$$

$$S1 = 1.075 \cdot 10^{-6} \quad S2 = 1.558623 \cdot 10^{-5} \quad S3 = 1.330875 \cdot 10^{-5} \quad S4 = 7.9695 \cdot 10^{-5} \quad S5 = 3.251941 \cdot 10^{-5}$$

transformarea crestaturii tip1=1 in tip1=2

$$bn := b \quad h3n := h3$$

$$B1n := \sqrt{\frac{S2 + S4 + \left(\frac{1}{4a} - \frac{x}{8}\right) \cdot bn^2}{\left(\frac{x}{8} + \frac{1}{4a}\right)}} \quad h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot \left(h0 + h3n + h1n + \frac{B1n}{2}\right)$$

$$h1n = 0.007261$$

$$h3n = 0.00315 \quad Dbazan = 0.115086 \quad bn = 0.0063 \quad B1n = 0.008264$$

transformarea crestaturii tip1=1 in tip1=3

$$h3n := \frac{b}{4} \quad Dbazan := 1.02 \cdot Dbaza \quad h1n := \frac{Dbazan - D}{2} - h0 - h3n$$

$$B1n := \frac{S2 + S4 - \frac{as \cdot h3n}{2}}{h1n + \frac{h3n}{2}} \quad bn := B1n \quad h1n = 0.013055$$

$$h3n = 0.001575 \quad Dbazan = 0.11526 \quad bn = 0.006761 \quad B1n = 0.006761$$

transformarea crestaturii tip1=1 in tip1=4

$$h3n := \frac{b}{4} \quad bn := 0.88b$$

$$B1n := \sqrt{4a \cdot \left(S2 + S4 + \frac{bn^2}{4a} - \frac{as + bn}{2} \cdot h3n\right)} \quad h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot (h0 + h3n + h1n) \quad h1n = 0.012364$$

$$h3n = 0.001575 \quad Dbazan = 0.113878 \quad bn = 0.005544 \quad B1n = 0.008889$$

transformarea crestaturii tip1=1 in tip1=5

$$h3n := \frac{b}{4} \quad bn := 0.88 \cdot b$$

$$B1n := \frac{S2 + S4 + \frac{bn^2}{4 \cdot a} - \frac{as + bn}{2} \cdot h3n}{\sqrt{\left(\frac{1}{4 \cdot a} + \frac{x}{8}\right)}}$$

$$h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot \left(h0 + h3n + h1n + \frac{B1n}{2} \right) \quad h1n = 0.009346$$

$$h3n = 0.001575 \quad Dbazan = 0.115915 \quad bn = 0.005544 \quad B1n = 0.008072$$

CRESTATURA STATORICA TIP1=4

$$as := 0.0032 \quad h3 := 0.0017 \quad h0 := 0.00075 \quad Dbaza := 0.1984 \quad b := 0.006 \quad B1 := 0.00977$$

$$D := 0.152$$

$$h1 := \frac{Dbaza - D}{2} - h0 - h3$$

$$a := \frac{B1 - b}{2 \cdot h1} \quad a = 0.090843$$

$$S1 := as \cdot h0 \quad S2 := x \cdot \frac{b^2}{8} \quad S3 := \frac{as + b}{2} \cdot h3 \quad S4 := \frac{B1 + b}{2} \cdot h1 \quad S5 := x \cdot \frac{B1^2}{8}$$

$$S1 = 2.4 \cdot 10^{-6} \quad S2 = 1.413717 \cdot 10^{-5} \quad S3 = 7.82 \cdot 10^{-6} \quad S4 = 1.636137 \cdot 10^{-4} \quad S5 = 3.748427 \cdot 10^{-5}$$

transformarea crestaturii tip1=4 in tip1=1

$$h3n := 2 \cdot h3 \quad bn := 1.13 \cdot b$$

$$B1n := \sqrt{4 \cdot a \cdot \left[S3 + S4 + bn^2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot a} - \frac{x}{8} \right) \right]} \quad h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot (h0 + h3n + h1n)$$

$$h1n = 0.01819$$

$$h3n = 0.0034 \quad Dbazan = 0.196679 \quad bn = 0.00678 \quad B1n = 0.010085$$

transformarea crestaturii tip1=4 in tip1=2

$$bn := 4 \cdot h3 \quad h3n := 2 \cdot h3$$

$$B1n := \frac{S3 + S4 + \left(\frac{1}{4 \cdot a} - \frac{x}{8} \right) \cdot bn^2}{\sqrt{\left(\frac{x}{8} + \frac{1}{4 \cdot a} \right)}} \quad h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot \left(h0 + h3n + h1n + \frac{B1n}{2} \right)$$

$$h3n = 0.0034 \quad Dbazan = 0.19886 \quad bn = 0.0068 \quad B1n = 0.009445 \quad h1n = 0.014558$$

transformarea crestaturii tip1=4 in tip1=3

$$h3n := h3 \quad Dbazan := 1.01 \cdot Dbaza \quad h1n := \frac{Dbazan - D}{2} - h0 - h3n$$

$$B1n := \frac{S3 + S4 - \frac{as \cdot h3n}{2}}{h1n + \frac{h3n}{2}} \quad bn := B1n \quad h1n = 0.021742$$

$$h3n = 0.0017 \quad Dbazan = 0.200384 \quad bn = 0.007468 \quad B1n = 0.007468$$

transformarea crestaturii tip1=4 in tip1=5

$$h3n := h3 \quad bn := b$$

$$B1n := \sqrt{\frac{S3 + S4 + \frac{bn^2}{4 \cdot a} - \frac{as + bn}{2} \cdot h3n}{\left(\frac{1}{4 \cdot a} + \frac{x}{8}\right)}}$$

$$h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot \left(h0 + h3n + h1n + \frac{B1n}{2} \right) \quad h1n = 0.017281$$

$$h3n = 0.0017 \quad Dbazan = 0.200601 \quad bn = 0.006 \quad B1n = 0.00914$$

CRESTATURA STATORICA TIP1=5

$$as := 0.0032 \quad h3 := 0.0012 \quad h0 := 0.0007 \quad Dbaza := 0.203 \quad b := 0.005 \quad B1 := 0.0076$$

$$D := 0.152$$

$$h1 := \frac{Dbaza - D}{2} - h0 - h3 - \frac{B1}{2}$$

$$a := \frac{B1 - b}{2 \cdot h1} \quad a = 0.065657$$

$$S1 := as \cdot h0 \quad S2 := x \cdot \frac{b^2}{8} \quad S3 := \frac{as + b}{2} \cdot h3 \quad S4 := \frac{B1 + b}{2} \cdot h1 \quad S5 := x \cdot \frac{B1^2}{8}$$

$$S1 = 2.24 \cdot 10^{-6} \quad S2 = 9.817477 \cdot 10^{-6} \quad S3 = 4.92 \cdot 10^{-6} \quad S4 = 1.2474 \cdot 10^{-4} \quad S5 = 2.26823 \cdot 10^{-5}$$

transformarea crestaturii tip1=5 in tip1=1

$$bn := 1.13 \cdot b \quad h3n := \frac{bn}{2}$$

$$B1n := \sqrt{4 \cdot a \cdot \left[S3 + S4 + S5 + bn^2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot a} - \frac{x}{8} \right) \right]} \quad h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot (h0 + h3n + h1n)$$

h3n = 0.003 Dbazan = 0.199531 bn = 0.00565 B1n = 0.008285 h1n = 0.020066

transformarea crestaturii tip1=5 in tip1=2

$$B1n := \frac{\sqrt{S3 + S4 + S5 + \left(\frac{1}{4 \cdot a} - \frac{x}{8} \right) \cdot bn^2}}{\left(\frac{x}{8} + \frac{1}{4 \cdot a} \right)} \quad h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot \left(h0 + h3n + h1n + \frac{B1n}{2} \right)$$

h3n = 0.003 Dbazan = 0.201376 bn = 0.00565 B1n = 0.007888 h1n = 0.017044

transformarea crestaturii tip1=5 in tip1=3

$$h3n := h3 \quad Dbazan := Dbaza \quad h1n := \frac{Dbazan - D}{2} - h0 - h3n$$

$$B1n := \frac{S3 + S4 + S5 - \frac{as \cdot h3n}{2}}{h1n + \frac{h3n}{2}} \quad bn := B1n$$

h3n = 0.0012 Dbazan = 0.203 bn = 0.006216 B1n = 0.006216 h1n = 0.0236

transformarea crestaturii tip1=5 in tip1=4

$$h3n := h3 \quad bn := b$$

$$B1n := \sqrt{4 \cdot a \cdot \left(S3 + S4 + S5 + \frac{bn^2}{4 \cdot a} - \frac{as + bn}{2} \cdot h3n \right)}$$

$$h1n := \frac{B1n - bn}{2 \cdot a} \quad Dbazan := D + 2 \cdot (h0 + h3n + h1n)$$

h3n = 0.0012 Dbazan = 0.201223 bn = 0.005 B1n = 0.007982 h1n = 0.022711

CALCULUL CRESTĂTURILOR ROTORICE

$$ar := 0.0015 \quad h3r := 0.00205 \quad h0r := 0.00048 \quad dbaz := 0.05838 \quad br := 0.0041$$

$$Drot := 0.0845 \quad baz := 0.0021$$

$$\text{alfa} := \frac{br - baz}{2 \cdot \left(\frac{Drot - dbaz}{2} - h0r - \frac{br}{2} - \frac{baz}{2} \right)} \quad \text{alfa} = 0.105485$$

$$S := \pi \cdot \frac{br^2}{8} + \pi \cdot \frac{baz^2}{8} + \frac{br + baz}{2} \cdot \left(\frac{Drot - dbaz}{2} - h0r - h3r - \frac{baz}{2} \right) \quad S = 3.772107 \cdot 10^{-5}$$

$$h3m := 0.0015 \quad dbazn := 1$$

$$brn := 1$$

crestătura r2

$$\text{root} \left[\left[\frac{ar + brn}{2} \cdot h3m + \frac{brn + baz}{2} \cdot \left(\frac{Drot - dbaz}{2} - h0r - h3m \right) \right] - S, brn \right] = 0.003969$$

$$\text{root} \left[\left[brn - baz - 2 \cdot \text{alfa} \cdot \left(\frac{Drot - dbaz}{2} - h0r - h3m \right) \right], brn \right] = 0.004438$$

crestătura r31

$$brn := 0.0025$$

$$\text{root} \left[\left(\frac{Drot - dbazn}{2} - h0r \right) \cdot brn - 0.75 \cdot S, dbazn \right] = 0.060907$$

crestătura r32

$$bazn := 0.002$$

$$\text{root} \left[\left(\frac{ar + bazn}{2} \right) \cdot \left(\frac{Drot - dbazn}{2} - h0r \right) - 0.65 \cdot S, dbazn \right] = 0.055519$$

NOTAȚII UTILIZATE

\vec{A} - potențialul vector	$L_{\sigma 2}$ - inductanța rotorică de dispersie
\mathcal{A} - pătura de curent	L_{1h} - inductanța statorică ciclică principală
a_1 - numărul de căi de curent în paralel	L_{11h} - inductanța statorică principală
\vec{B} - inducția magnetică	M - cuplul electromagnetic
\mathcal{B}_m - susceptanța de magnetizare	m_1 - numărul de faze în stator
B_d - inducția în dinte	m_2 - numărul de faze în rotor
B_j - inducția în jug	N_{c1} - numărul de creștături în stator
B_δ - inducția magnetică în întrefier	n_{c1} - numărul de spire în creștătura statorică
$\cos\varphi$ - factorul de putere	N_{c2} - numărul de creștături în rotor
\vec{D} - inducția electrică	N_1 - numărul de spire pe fază în stator
D - diametrul interior al statorului	n_1 - viteza de rotație de sincronism
D_i - diametrul mediu al inelului de scurtcircuitare	N_2 - numărul de spire pe fază în rotor
\vec{E} - intensitatea câmpului electric	p - numărul de perechi de poli
f_1 - frecvența tensiunii de alimentare	P_0 - puterea absorbită la funcționarea în gol
f_2 - frecvența mărimilor din rotor	q_{Cu} - secțiunea unei spire
\mathcal{G}_m - conductanța de magnetizare	q_1 - numărul de creștături pe pol și fază în stator
\vec{H} - intensitatea câmpului magnetic	q_2 - numărul de creștături pe pol și fază în rotor
I_p - curentul de pornire de fază	R_b - rezistența unei bare rotorice
I_0 - curentul de fază la funcționarea în gol	R_i - rezistența porțiunilor de inel aferente unei bare
I_1 - curentul de fază statoric	R_m - rezistența de magnetizare
I_2' - curentul de fază rotoric raportat la stator	R_1 - rezistența statorică pe fază
\vec{J} - densitatea intensității de curent	R_2 - rezistența rotorică pe fază
J_s - densitatea superficială a intensității de curent	R_2' - rezistența rotorică pe fază raportată la stator
k_{b1} - factorul total de înfășurare statoric	s - alunecarea
k_{b2} - factorul total de înfășurare rotoric	t - timpul
k_q - factorul de zonă a înfășurării	U_m - tensiunea magnetică
k_r - factorul de majorare a rezistenței datorită efectului pelicular	U_1 - tensiunea de alimentare pe fază
k_s - factorul de saturație	V - potențialul scalar
k_t - factorul de raportare în tensiune și curent	V_m - potențialul magnetic scalar
k_x - factorul de modificare a reactanței datorită efectului pelicular	W_m - energia magnetică
k_y - factorul de scurtare a înfășurării	$W_{m\sigma c}$ - energia magnetică de dispersie în creștătură
k_δ - factorul de întrefier (Carter)	X_m - reactanța ciclică principală (reactanța de magnetizare)
l - lungimea pachetului de tole	$X_{\sigma 1}$ - reactanța statorică de dispersie pe fază
l_{f1} - lungimea medie a părții frontale a unei bobine	$X_{\sigma 2}$ - reactanța rotorică de dispersie pe fază
l_s - lungimea medie a unei spire	
$L_{\sigma 1}$ - inductanța statorică de dispersie	

$X'_{\sigma 2}$ - reactanța rotorică de dispersie pe fază raportată la stator

y_1 - pasul înfășurării

y_τ - pasul diametral al înfășurării

Z_1 - impedanța statorică pe fază

Z_{1m} - impedanța principală (de magnetizare)

Z_2 - impedanța rotorică pe fază raportată la stator

δ - întrefierul

ϵ - permitivitatea mediului

ϵ_0 - permitivitatea vidului

η - randamentul

θ - solenația

θ_c - solenația creștăturii

λ_c - permeanța specifică a dispersiei în creștătură

λ_d - permeanța specifică a dispersiei diferențiale

λ_f - permeanța specifică a dispersiei în părțile frontale

λ_2 - permeanța specifică a dispersiei prin capetele de dinți

λ_1 - permeanța specifică statorică

λ_2 - permeanța specifică rotorică

μ - permeabilitatea mediului

μ_r - permeabilitatea relativă

μ_0 - permeabilitatea vidului

ρ - rezistivitatea mediului

ρ_s - densitatea superficială a sarcinii electrice

ρ_v - densitatea de volum a sarcinii electrice

σ - conductivitatea mediului

τ - pasul polar

τ_{c1} - pasul de creștătură în stator

τ_{c2} - pasul de creștătură în rotor

ν - ordinul armonicii de timp

Φ - fluxul magnetic

Ψ - fluxul total de înlănțuire

Ω - viteza unghiulară

ω_1 - pulsația frecvenței statorice

ω_2 - pulsația frecvenței rotorice