

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA
BIBLIOTECA CENTRALĂ

Nr. Inv. 42.143 UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA
Dulap 41 Lit. 0 DE ELECTRONICĂ ȘI TELECOMUNICAȚII
DEPARTAMENTUL DE COMUNICAȚII

CONTRIBUȚII PRIVIND STUDIUL SISTEMELOR NELINIARE UTILIZÂND SERIILE VOLTERRA

Teză de doctorat

Conducător științific
Prof. dr. ing IOAN Naforniță

Doctorand
ing. GEORGETA Budura

TIMIȘOARA, 1999

Cuvânt înainte

125. 10,
181 L

Filtrele liniare au jucat un rol important în dezvoltarea diverselor tehnici de prelucrare a semnalelor, proiectarea, analiza și implementarea acestora fiind, la ora actuală, o sarcină clară pentru majoritatea aplicațiilor.

Liniaritatea este însă un caz particular în lumea reală și nici un sistem fizic nu este cu adevărat liniar. Este adevărat că unele fenomene pot fi studiate aproximându-le ca fiind liniare și se pot da exemple în acest sens.

Ce semnifică noțiunea de *neliniar*? În geometrie neliniaritatea se referă la obiectele euclidiene: dreaptă, plan, spațiu tridimensional, etc. Aceste obiecte apar la fel din orice punct le-am examina. Un obiect neliniar, sfera de exemplu, se aseamănă, cu un plan când este privită de aproape, respectiv cu un punct când este examinată de la o distanță foarte mare. În algebră neliniaritatea se definește în termeni de funcții care satisfac proprietățile: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ și $f(ax) = af(x)$. Neliniarul se definește ca fiind negația a ceea ce este liniar. În timp ce obiectele liniare pot fi enumerate, cele neliniare sunt nenumărabile și, uneori, chiar imposibil de clasificat.

Nu există metode de analiză generale pentru sistemele neliniare care să ne ofere informații cantitative detaliate asupra comportării acestora.

Lucrarea de față prezintă contribuțiile autoarei în domeniul studiului sistemelor neliniare, mai exact al sistemelor modelate cu ajutorul seriilor Volterra.

*

* *

Doresc să exprim cele mai sincere și recunoscătoare mulțumiri domnului profesor dr. ing. Ioan Naforniță sub a cărui îndrumare mi-am început activitatea de cercetare și care mi-a oferit un sprijin constant și susținut pe parcursul elaborării tezei. Sfaturile și sugestiile domniei sale au contribuit într-o manieră decisivă la finalizarea acestei lucrări.

Tuturor colegilor de la disciplinele de Semnale Circuite și Sisteme, Circuite de Telecomunicații și Comunicații de Date le datorez mii de mulțumiri pentru faptul că, într-un mod sau altul, prin discuții științifice, materiale bibliografice sau sfaturi, au contribuit la ducerea la bun sfârșit a tezei.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

CAPITOLUL 1. INTRODUCERE	1
1.1. Motivație privind necesitatea filtrării neliniare	1
1.2. Scurt istoric privind filtrarea neliniară	2
CAPITOLUL 2. FILTRE VOLTERRA	5
2.1. Filtre Volterra pentru semnale în timp continuu	5
2.1.1. Operatori Volterra	5
2.1.2. Operatori polinomiali	8
2.1.3. Transformata Fourier a nucleului de ordinul al-II-lea	13
2.1.4. Transformata Fourier a nucleului de ordin p	16
2.2. Filtre Volterra numerice	19
2.2.1. Filtrul Volterra numeric de ordinul al doilea	20
2.3. Proprietăți ale filtrelor Volterra	24
2.3.1. Proprietăți structurale ale nucleelor	24
2.3.2. Proprietăți structurale ale relației intrare-ieșire în cazul filtrelor Volterra	25
CAPITOLUL 3. MODELAREA SISTEMELOR NELINIARE PRIN SERII VOLTERRA ȘI SERII WIENER	29
3.1. Determinarea nucleelor Volterra asociate unui sistem neliniar continuu	29
3.1.1. Măsurarea nucleului Volterra asociat unui operator de un anumit ordin	29
3.2 Determinarea nucleelor Volterra în cazul unui sistem neliniar discret	31
3.2.1 Estimator Volterra de ordinul al-II-lea pentru un semnal de intrare cu distribuție de probabilitate normală	34
3.3 Limitări ale seriilor Volterra	40
3.4 Utilizarea funcționalelor G pentru caracterizarea unui sistem neliniar	41
3.5 Relația între reprezentarea unui sistem neliniar prin funcționale Wiener și funcționale Volterra	43
3.6 Măsurarea nucleelor Wiener	45
3.7 Determinarea sistemului optim de un anumit ordin ce modelează un sistem neliniar continuu	50
3.8 Identificarea sistemelor neliniare cu semnal colorat gaussian	54
3.8.1 Funcționale ortogonale ale unui proces colorat gaussian	58
3.9 Aprecieri privind eroarea medie pătratică în modele optimale	59
3.10 Măsurări ale neliniarității unui sistem	62
3.11 Avantaje și dezavantaje ale metodei Wiener	63
CAPITOLUL 4. REPREZENTĂRI ORTOGONALE ALE NUCLEELOR WIENER. MODELUL GENERAL WIENER	67
4.1 Sinteza unui sistem de ordinul întâi cu ajutorul funcțiilor Laguerre	67
4.2 Sinteza operatorilor Volterra de ordin superior utilizând funcțiile Laguerre	69
4.3 Dezvoltarea ortogonală a funcționalelor G	72
4.4 Sisteme analitice	77
4.5 Modelul Wiener detaliat	80

CAPITOLUL 5. PROBLEMA APROXIMĂRII OPERATORILOR NELINIARI PRIN SERII VOLTERRA	89
5.1 Formularea problemei	89
5.2 Notatii și definiții	90
5.3 Aproximarea sistemelor neliniare discrete	95
CAPITOLUL 6. METODE DE DETERMINARE A NUCLEELOR ASOCIATE UNUI SISTEM NELINIAR ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ	98
6.1 Generalități	98
6.2 Estimarea numerică a funcțiilor de transfer	98
6.3 Relația intrare-ieșire din punct de vedere al puterii	104
6.4 Modelul Volterra ortogonalizat în domeniul frecvență	107
6.4.1 Vector de intrare pentru sistemul Volterra ortogonalizat	107
CAPITOLUL 7. APLICAȚII ALE MODELELOR VOLTERRA ȘI WIENER ÎN IDENTIFICAREA SISTEMELOR NELINIARE	117
7.1 Estimarea nucleelor Volterra și Wiener prin metoda Lee Schetzen	117
7.2 Estimarea nucleelor Wiener prin metoda Lee Schetzen	118
7.2.1 Calitatea oferită de modelarea prin serii Volterra	119
7.3 Metode adaptive folosite în determinarea nucleelor Volterra	143
7.3.1 Algoritmul LMS în cazul filtrării liniare	143
7.3.2 Utilizarea algoritmului LMS pentru estimarea nucleelor Volterra	145
7.3.3 Estimarea nucleelor Volterra cu ajutorul algoritmului LMS	149
CAPITOLUL 8. CONCLUZII FINALE	159
BIBLIOGRAFIE	163

CAPITOLUL 1. INTRODUCERE

1.1 Motivație privind necesitatea filtrării neliniare

Filtrele liniare au jucat un rol crucial în dezvoltarea diverselor tehnici de prelucrare, analiza, proiectarea și implementarea acestora constituind la ora actuală o sarcină clară în majoritatea aplicațiilor.

Avantajul major al procesării liniare îl constituie simplitatea sa atât din punct de vedere al analizei teoretice cât și în ceea ce privește implementarea tehnologică.

Studiul experimental a pus însă în evidență o serie de situații în care performanțele filtrelor liniare sunt inacceptabile. Un exemplu în acest sens este oferit de încercarea de a modela sau controla sisteme neliniare cu metode de procesare liniară.

Sistemele neliniare s-au dovedit a manifesta fenomene complexe, surprinzătoare și de cele mai multe ori imposibil de prezis pentru un cercetător învățat a manevra doar tehnici liniare. Studiul acestor sisteme și-a găsit aplicații în numeroase domenii, de la matematică, fizică, chimie și biologie, la economie, medicină și inginerie, fiind surprinzător faptul că cercetători din arii de interese total diferite au ajuns să folosească un limbaj comun.

Analiza sistemelor neliniare s-a dezvoltat major în ultimele trei decenii, încercându-se închegarea unei teorii care să ofere un model matematic de abordare cât mai general, capabil să trateze unitar o clasă cât mai largă de tipuri de neliniarități. Cu toate acestea nu putem vorbi la ora actuală de o teorie unitară în ceea ce privește sistemele neliniare. Spre deosebire de sistemele liniare complet caracterizate de funcția răspuns la impuls, cele neliniare nu pot fi caracterizate într-un mod unitar. Diferitele modele de sisteme neliniare s-au dezvoltat în strânsă legătură cu aplicațiile care au stat la baza generării lor.

Cele mai frecvente domenii care necesită utilizarea modelelor neliniare sunt:

- Studiul sistemelor care prezintă neliniarități de tip saturație în legătura intrare-ieșire. În această categorie sunt incluse: legăturile de transmisie prin sateliți care conțin amplificatoare de semnal ce lucrează în regiunea de saturație [1]-[3]. Canalele de comunicații ce operează la viteze mai mari de 4800 biți/sec, realizate pe cablu coaxial prezintă deasemenea o comportere neliniară de tip saturație. S-a demonstrat experimental că probabilitatea de apariție a erorii în aceste sisteme de transmisie a datelor este datorată în mare măsură distorsiunilor neliniare ce nu pot fi înlăturate de egalizoarele liniare. Numeroase cercetări au fost dedicate implementării egalizoarelor de canal bazate pe structuri neliniare [4], [5].

- Problema anulării ecoului în telecomunicații a dezvăluit necesitatea utilizării modelelor neliniare și în acest domeniu. Un număr mare de aplicații abordează reducerea adaptivă a ecoului cu ajutorul structurilor neliniare [6].

- În caracterizarea dispozitivelor semiconductoare se apelează adesea la modelele neliniare [7]-[11].

- Modelarea fenomenelor biologice, prelucrarea semnalelor electromiografice necesită de asemenea modele neliniare [12], [13].
- Modelarea oscilațiilor de drift ce se manifestă în sistemele supuse interacțiunii cu valurile maritime [14], [15].

O clasificare a filtrelor neliniare, la ora actuală, pe baza unor modele matematice de tratare evidențiază următoarele tipuri de filtre [16], [17].

- A. Filtre de ordonare statistică
- B. Filtre homomorfe
- C. Filtre morfologice
- D. Filtre polinomiale

Filtrele polinomiale ocupă, în clasificarea prezentată mai sus, un loc aparte, ele reușind modelarea celei mai largi clase de sisteme neliniare.

Filtrele polinomiale modelează sistemul neliniar printr-un operator de tip polinomial. În cadrul familiei de filtre polinomiale o largă utilizare au cunoscut modelele bazate pe seriile Volterra.

Lucrarea de față prezintă contribuțiile autoarei în domeniul sistemelor neliniare, mai exact al sistemelor modelate cu ajutorul seriilor Volterra. Materialul cuprins se dorește a constitui fundamentul unei activități de cercetare care urmează să fie continuată, studiul sistemelor neliniare fiind un domeniu care oferă largi perspective.

1.2. Scurt istoric privind filtrarea neliniară

Scopul acestui paragraf este de a realiza un scurt istoric al cercetărilor care au dus la dezvoltarea tehnicii de filtrare neliniară considerată în cadrul tezei.

Primii pași în acest domeniu au fost făcuți în încercarea de a modela sistemele neliniare fără memorie. Ulterior tehnicile de modelare au fost extinse asupra sistemelor neliniare cu memorie.

Modelul elementar în tratarea sistemelor neliniare fără memorie îl reprezintă seria Taylor. Seria Taylor constituie o reprezentare polinomială a unui sistem neliniar fără memorie și a fost publicată de către Brook Taylor în 1717.

În 1903, Weierstrass a publicat o teoremă conform căreia sistemele neliniare fără memorie nepolinomiale, pot fi reprezentate cu o anumită precizie prin modele polinomiale, pentru un anumit domeniu al semnalului de intrare. Teorema este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de teorema de aproximare a lui Weierstrass.

În anii '50 Dawenport și Rice au folosit metoda pentru a determina proprietățile statistice ale semnalului de la ieșirea unui sistem neliniar fără memorie [18].

Abia în anii '60, Blackman a demonstrat că o neliniaritate fără memorie poate fi reprezentată similar unei descompunerii Fourier generalizate, utilizând o sumă de polinoame ortogonale [19], [20]. Ortogonalitatea polinoamelor pentru anumite semnale de intrare permite determinarea coeficienților atașați utilizând metode de intercorelație.

Tehnicile de modelare neliniară bazate pe seria Taylor și cele bazate pe seriile de polinoame ortogonale se adresează așa cum s-a arătat mai sus sistemelor neliniare fără memorie. Dezvoltarea modelelor mai complexe destinate tratării sistemelor neliniare cu memorie s-a făcut în paralel cu acestea și datează din secolul al-XIX-lea.

În 1887 Volterra a publicat o dezvoltare în serie de funcționale, cunoscută sub numele de serie Volterra. Ea reprezintă o formă generalizată a seriilor Taylor și permite reprezentarea sistemelor neliniare cu memorie. Partea cea mai însemnată a lucrării lui Volterra se găsește în traducerea în engleză datând din 1959 [21].

O contribuție importantă privind reprezentarea sub forma seriilor Volterra aparține lui Frechet și datează din 1910. Tot el a fost acela care a generalizat teorema de aproximare a lui Weierstrass, extinzând aplicabilitatea ei și în cazul funcționalelor, adică în cazul în care polinoamele sunt înlocuite de așa numitele funcționale polinomiale [22].

Potrivit teoremei Weierstrass generalizate, sistemele neliniare fără memorie, de natură nepolinomială, pot fi reprezentate prin modele polinomiale bazate pe funcționale, pentru un anumit domeniu al semnalului de intrare.

Potrivit importantei bibliografii a lui Schetzen [23], Wiener a fost primul care a aplicat modelul Volterra în analiza unui sistem neliniar în anul 1942.

În 1957 Barrett a publicat un studiu mult mai sistematic privind aplicațiile seriilor Volterra în modelarea sistemelor neliniare, rezultat în urma aplicării teoriei în analiza ecuațiilor diferențiale neliniare și a sistemelor neliniare cu reacție [24].

În 1958 Brilliant a întreprins primele studii privind cascada sistemelor modelate Volterra precum și convergența în cazul modelării prin serii Volterra.

Metodele privind măsurarea nucleelor Volterra atașate unui sistem neliniar au fost publicate de către Schetzen în 1965 și s-au dovedit deosebit de dificile datorită cuplărilor între nuclee. Acesta a constituit unul din principalele motive care l-au determinat pe Wiener să abordeze o reprezentare ortogonală a sistemelor neliniare cu memorie precum și dezvoltarea unor metode pentru măsurarea nucleelor Wiener.

Seriile polinomiale de funcționale ortogonale ale lui Wiener își au originea în studiile întreprinse de către acesta privind transformările liniare ale mișcării Browniene (apărute în lecțiile 1 și 2 ale [25] în 1958). Aceste studii i-au condus pe Cameron și Martin care au demonstrat că setul de polinoame de funcționale ortogonale Fourier-Hermite este complet. Folosind rezultatele lui Cameron și Martin, Wiener a formulat o metodă pentru analiza și sinteza sistemelor neliniare, bazată pe o dezvoltare în serie de funcționale ortogonale publicată în 1959 ([25], lecțiile 3 și 4).

O importantă parte în ceea ce privește modelarea prin intermediul modelelor Volterra și Wiener o constituie exactitatea măsurării coeficienților sau a nucleelor modelului. Introducerea modelului Wiener a constituit un important pas legat de măsurarea nucleului. Ortogonalitatea funcționalelor Wiener în cazul unui semnal de intrare gaussian a permis determinarea nucleelor Wiener asociate sistemului neliniar prin utilizarea tehnicilor bazate pe intercorelația dintre semnalul de intrare și cel de ieșire al sistemului.

Cercetările întreprinse de Lee și Schetzen în acest domeniu au condus la metoda de identificare Lee-Schetzen [26] prezentată în 1961.

Mai târziu, Schetzen a generalizat teoria Wiener extinzând-o în cazul intrărilor gaussiene colorate și elaborând metode de măsurare ale nucleelor în cazul unor astfel de semnale de intrare. Schetzen a fost cel care a introdus și dezvoltat teoria sistemului Volterra invers de un anumit ordin și ulterior a publicat o carte privind aplicarea teoriilor Volterra și Wiener în cazul sistemelor neliniare [23].

În literatura română de specialitate numărul publicațiilor consacrate studiului sistemelor neliniare este relativ restrâns [27], [28], [29]. În [29] este realizată o tratare unitară a metodei Volterra de analiză a circuitelor neliniare pentru semnale deterministe, în domeniile timp și frecvență.

Modele Volterra și Wiener au fost aplicate în numeroase domenii cum ar fi:

- Modelarea sistemelor biologice [30]
- Studiul interacțiunilor dintre valurile oceanice și platformele prionite [14]
- Legăturile digitale prin sateliți, în care amplificatoarele de semnal operează în apropierea punctului de saturație, prezentând caracteristici puternic neliniare [31], [32].
- Canalele de comunicații de înaltă viteză (peste 4800bps) care prezintă neliniarități de tip saturație. S-a demonstrat experimental că probabilitatea de apariție a erorii în aceste sisteme de transmisie a datelor este datorată în mare măsură distorsiunilor neliniare, distorsiuni ce nu pot fi înlăturate de egalizoare liniare [33], [34].
- Compensarea neliniarității difuzoarelor [19]
- Compensarea amplificatoarelor de putere [7]-[11]

CAPITOLUL 2. FILTRE VOLTERRA

Așa după cum s-a arătat în introducere, nu există la ora actuală o teorie unică pentru tratarea sistemelor neliniare. Se poate vorbi, mai degrabă, de existența anumitor modele de sisteme neliniare. În cadrul acestor modele un loc aparte îl ocupă modelul polinomial care include acele sisteme neliniare ale căror semnale de ieșire pot fi exprimate în funcție de semnalele de intrare printr-o serie Volterra trunchiată sau printr-o ecuație recursivă neliniară cu diferențe finite [36].

2.1. Filtre Volterra pentru semnale în timp continuu

2.1.1. Operatori Volterra

Un sistem neliniar continuu în timp, fără memorie, poate fi descris cu anumite restricții, prin intermediul unei serii Taylor.

În cazul sistemelor neliniare invariante în timp, cu memorie, legătura ieșire-intrare se poate exprima generalizând dezvoltarea în serie Taylor prin aplicarea ei unei funcții de mai multe variabile. Relația intrare ieșire în cazul acestor sisteme, cunoscută sub numele de serie Volterra este de forma [23]:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & h_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1)x(t - \tau_1)d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_p)d\tau_1 \dots d\tau_p
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

unde $x(t)$ și $y(t)$ reprezintă semnalul de intrare, respectiv cel de ieșire la momentul t iar $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$ este nucleul Volterra de ordin p .

Așa după cum rezultă din relația 2.1, sistemul neliniar este complet caracterizat de funcțiile multidimensionale $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$, numite nuclee Volterra. Nucleul de ordin zero, h_0 , este o constantă, nucleul de ordinul întâi, $h_1(\tau_1)$, reprezintă răspunsul la impuls al sistemului, iar nucleele de ordin $p \geq 2$ sunt funcții simetrice în raport cu argumentele lor. Astfel, cele $p!$ permutări posibile ale variabilelor t_1, \dots, t_p nu modifică nucleul $h_p(t_1, \dots, t_p)$.

Se obișnuiește să se noteze integrala p -dimensională din relația 2.1 cu $H_p[x(t)]$, unde H_p este numit operator Volterra de ordin p . Relația 2.1 devine în acest caz:

$$y(t) = h_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} H_p[x(t)]
 \tag{2.2}$$

Fréchet, care s-a ocupat cu studiul funcționalelor continue, a dat o fundamentare matematică riguroasă seriilor Volterra arătând că orice funcțională continuă poate fi reprezentată printr-o serie de funcționale de ordin întreg. Această serie este convergentă uniform pe orice set compact de funcții continue. O funcțională de ordin întreg este echivalentă cu o funcțională Volterra.

Rezultatul obținut de Fréchet se datorează generalizării teoremei lui Weierstrass care afirmă că orice funcție continuă poate fi reprezentată printr-o serie polinomială care converge uniform pe orice interval închis, adică setul de funcții $\{f_n(x)=x^n\}$ este complet [33]. Problema aproximării operatorilor neliniari prin serii Volterra va fi discutată pe larg în cadrul Capitolului al-V-lea.

Seriile Volterra au fost aplicate pentru prima dată în studiul sistemelor neliniare de către Norbert Wiener. Pentru un sistem cauzal limitele inferioare ale integralelor din relația 2.1 sunt puse pe zero, iar limitele superioare au o valoare finită, reprezentând memoria sistemului.

Pentru reprezentarea sistemelor reale se utilizează în general serii Volterra trunchiate:

$$y(t) = h_0 + \sum_{p=1}^N H_p [x(t)] \quad (2.3)$$

În relația de mai sus N este numit, în general, ordinul sau gradul seriei.

Relația 2.1 poate fi interpretată ca o extensie a reprezentării integrale a operatorilor liniari, acest caz corespunzând primului termen al seriei.

Spre deosebire de cazul sistemelor liniare, complet caracterizate de funcția răspuns la impuls, în cazul sistemelor neliniare, reprezentate prin serii Volterra trunchiate, funcția răspuns la impuls nu oferă o caracterizare completă a acestora. Într-adevăr, răspunsul unui astfel de sistem la semnalul de intrare :

$$x(t) = A\delta(t) \quad (2.4)$$

este:

$$h(t) = h_0 + Ah_1(t) + A^2h_2(t, t) + \dots + A^p h_p(t, \dots, t) + \dots \quad (2.5)$$

După cum se poate observa din relația de mai sus răspunsul la impuls este determinat de valorile nucleelor în puncte situate pe diagonala nucleelor, adică la acele momente de timp pentru care: $t_1 = t_2 = \dots = t_p$.

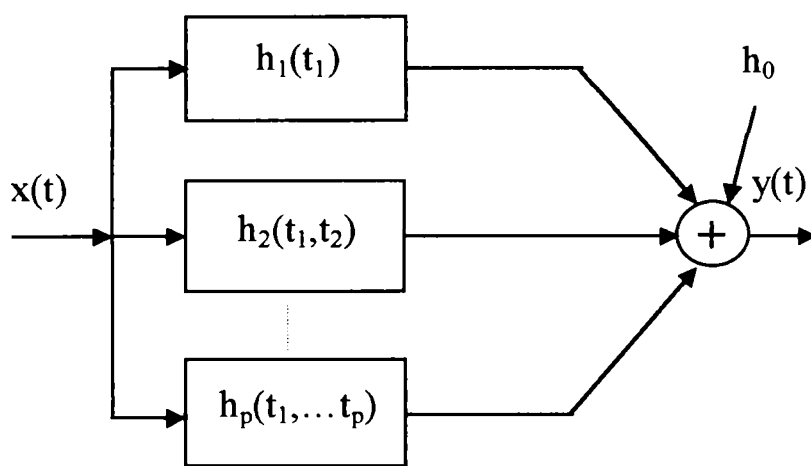


Figura 2.1 Reprezentarea unui sistem neliniar cu ajutorul operatorilor omogeni H_p

Sistemul neliniar se poate reprezenta prin operatorii neliniari omogeni H_p de nuclee $h_p(t_1, \dots, t_p)$ ca în figura 2.1. Un caz particular de operator neliniar se obține când semnalul de ieșire este exprimabil în serie de puteri:

$$y(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p x^p(t) \quad (2.6)$$

În acest caz nucleele Volterra se pot scrie sub forma simplificată:

$$h_p(t_1, \dots, t_p) = \alpha_p \delta(t_1) \times \dots \times \delta(t_p) \quad (2.7)$$

și sunt caracteristice unor operatori neliniari fără memorie. În relația 2.7 operatorul notat “ \times ” reprezintă produsul direct.

O altă categorie de operatori neliniari se poate evidenția dacă considerăm cazul sistemelor neliniare ce pot fi modelate prin legarea în cascadă a două sau trei sisteme așa după cum se indică în figura 2.2.

Cele trei sisteme indicate în figura 2.2 trebuie să fie separabile.

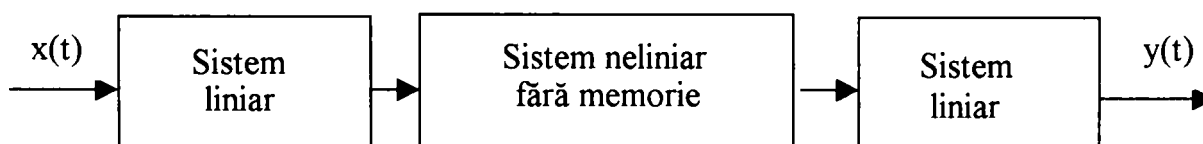


Figura 2.2 Structura unui sistem neliniar ce se poate reprezenta prin operatori liniari și neliniari separabili

Având în vedere cele prezentate mai sus se poate face o clasificare a operatorilor neliniari în trei categorii [38]:

- operatori neliniari fără memorie
- operatori neliniari separabili
- operatori neliniari neseparabili

Se va prezenta în continuare cea de-a doua categorie de operatori întrucât aceasta își găsește numeroase aplicații în modelarea sistemelor fizice. Pentru caracterizarea acestui tip de operatori M.Schetzen a dezvoltat teoria Volterra din punctul de vedere al operatorilor p -liniari [23].

2.1.2. Operatori p -liniari

M. Schetzen și-a construit teoria de abordare a sistemelor neliniare cu ajutorul operatorilor p -liniari. Pentru simplitate se va prezenta în continuare cazul operatorului de ordinul al II-lea, bilinear ($p=2$).

Fie $x(t)$ un semnal de intrare de forma:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \quad (2.8)$$

Un operator bilinear T_2 se definește ca fiind un operator al cărui răspuns la o combinație liniară de semnale de intrare (vezi rel.2.8) este o operație biliniară asupra fiecărui semnal de intrare, așa după cum se vede din relația 2.9.

$$\begin{aligned} y(t) = T_2[x(t)] &= T_2\left[\sum_{n=1}^N c_n x_n(t)\right] = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N T_2\{c_m x_m(t), c_n x_n(t)\} = \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m c_n T_2\{x_m(t), x_n(t)\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Operatorul $T_2\{ \}$ este numit bilinear întrucât este liniar în raport cu x_m pentru un anumit x_n și este liniar în raport cu x_n pentru un anumit x_m dat.

Cel mai simplu sistem de ordinul al doilea îl constituie sistemul a cărui relație ieșire-intrare este exprimabilă prin relația: $y(t) = x^2(t)$. Răspunsul acestui sistem la semnalul din relația 2.8 este dat de relația 2.10:

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m c_n x_m(t) x_n(t) \quad (2.10)$$

Expresia operatorului bilinear este în acest caz:

$$T_2\{x_m(t), x_n(t)\} = x_m(t) x_n(t) \quad (2.11)$$

În cazul în care sistemul de ordinul al II-lea este și invariant în timp, $T_2[]$ devine $H_2[]$, numit operator Volterra de ordinul al II-lea.

$$y(t) = H_2[x(t)] \quad (2.12)$$

Descrierea funcțională a operatorului $H_2[]$ se poate obține în mod analog celei pentru operatorul liniar și anume considerând pentru semnalul de intrare aproximarea:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(t) \quad (2.13)$$

unde:

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{k\Delta=-\infty}^{\infty} \Delta x(k\Delta) \delta(t - k\Delta) \quad (2.14)$$

Răspunsul sistemului Volterra de ordinul al II-lea este în acest caz:

$$y_{\Delta}(t) = H_2[x_{\Delta}(t)] = \sum_{m\Delta=-\infty}^{\infty} \sum_{n\Delta=-\infty}^{\infty} \Delta \cdot x(m\Delta) \Delta \cdot x(n\Delta) H_2\{\delta(t - m\Delta), \delta(t - n\Delta)\} \quad (2.15)$$

unde $H_2\{ \}$ este operatorul bilinear invariant în timp. Funcția de timp corespunzătoare fiecărei operații biliniare este dată de relația:

$$h_2(t - m\Delta, t - n\Delta, \Delta) = H_2\{\delta(t - m\Delta), \delta(t - n\Delta)\} \quad (2.16)$$

Ținând cont de relația 2.16, y_{Δ} se poate exprima sub forma:

$$y_{\Delta}(t) = \sum_{m\Delta=-\infty}^{\infty} \sum_{n\Delta=-\infty}^{\infty} \Delta x(m\Delta) \Delta x(n\Delta) h_2(t - m\Delta, t - n\Delta, \Delta) \quad (2.17)$$

Când $\Delta \rightarrow 0$, $y_{\Delta}(t) \rightarrow y(t)$ și relația 2.17 devine:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma_1) x(\sigma_2) h_2(t - \sigma_1, t - \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (2.18)$$

unde s-au folosit notațiile:

$$h_2(t - \sigma_1, t - \sigma_2) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} h_2(t - m\Delta, t - n\Delta, \Delta) = H_2\{\delta(t - \sigma_1), \delta(t - \sigma_2)\} \quad (2.19)$$

Relația 2.19 constituie reprezentarea funcțională a unui operator Volterra. Făcând înlocuirile $\tau_1=t-\sigma_1$ și $\tau_2=t-\sigma_2$ se poate scrie relația sub forma unei integrale de convoluție bidimensionale:

$$y(t) = H_2[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.20)$$

unde $h_2(\tau_1, \tau_2)$ reprezintă nucleul Volterra de ordinul al II-lea. Pentru un sistem de ordinul al II-lea se poate determina întotdeauna $h_2(\tau_1, \tau_2)$ ca o funcție simetrică în raport cu argumentele sale. Importanța existenței nucleului simetric pentru un sistem dat constă în faptul că el este unic.

Ca o ilustrare a celor de mai sus se determină în continuare nucleul Volterra de ordinul al-II-lea al sistemului din figura 2.3.

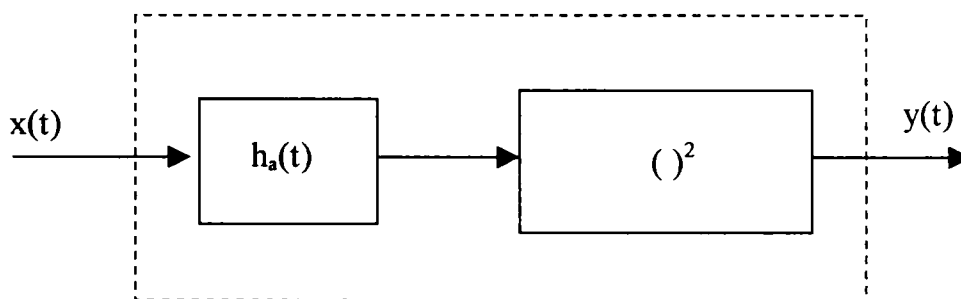


Figura 2.3 Sistem de ordinul al-II-lea

Răspunsul sistemului $y(t)$ e dat de relația:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(\tau) x(t - \tau) d\tau \right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(\tau_2) x(t - \tau_2) d\tau_2 \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(\tau_1) h_a(\tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Comparând rezultatul dat de 2.21 cu cel general exprimat de relația 2.20 se obține:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = h_a(\tau_1) h_a(\tau_2) \quad (2.22)$$

De exemplu, în cazul în care $h_a(t)$ este de forma:

$$h_a(t) = Ee^{-at} \sigma(t) \quad (2.23)$$

nucleul Volterra de ordinul al-II-lea al sistemului neliniar devine:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = E^2 e^{-a(\tau_1 + \tau_2)} \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) \quad (2.24)$$

Așa după cum se observă din relația 2.24, $h_2(\tau_1, \tau_2)$ e diferit de zero numai în primul cadran al semiplanului $\tau_1 - \tau_2$ caracteristică specifică oricărui nucleu Volterra de ordinul al-II-lea cauzal.

Interpretarea fizică a nucleului atașat operatorului Volterra de ordinul al-II-lea

Nucleul Volterra ordinul al-II-lea $h_2(\tau_1, \tau_2)$ caracterizează operatorul Volterra $H_2[\cdot]$, întrucât permite determinarea răspunsului sistemului oricare ar fi semnalul de intrare. Se pune problema găsirii unei semnificații fizice funcției $h_2(\tau_1, \tau_2)$. Așa după cum se știe $h_1(\tau)$, nucleul de ordinul întâi atașat operatorului $H_1[\cdot]$, reprezintă răspunsul la impuls al acestui sistem.

Răspunsul la impuls al sistemului de ordinul al-II-lea poate fi dedus imediat pe baza relației 2.16 și este:

$$y(t) = H_2[\delta(t)] = h_2(t, t) \quad (2.25)$$

Relația 2.25 subliniază imposibilitatea caracterizării sistemului de ordinul al-II-lea prin răspunsul său la impuls.

Funcției $h_2(\tau_1, \tau_2)$ i se poate găsi o interpretare și anume aceea de răspuns al sistemului biliniar Volterra, caracterizat de operatorul, $H_2\{\cdot, \cdot\}$, la un semnal de intrare constând în două impulsuri Dirac, la momente de timp diferite. Pentru a demonstra această afirmație se consideră răspunsul $y(t)$ al unui sistem Volterra de ordinul al-II-lea la o sumă de semnale:

$$y(t) = H_2[x_1(t) + x_2(t)] = H_2[x_1(t)] + H_2\{x_1(t), x_2(t)\} + H_2[x_2(t)] \quad (2.26)$$

unde $H_2[\cdot]$ este operatorul Volterra caracterizat de 2.20, iar $H_2\{\cdot, \cdot\}$ este operatorul biliniar având reprezentarea funcțională:

$$H_2\{x_1(t), x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.27)$$

Dacă cele două semnale de intrare sunt: $x_1(t) = \delta(t - T_1)$; $x_2(t) = \delta(t - T_2)$, răspunsul sistemului bilinear devine:

$$H_2 \{ \delta(t - T_1), \delta(t - T_2) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \delta(t - T_1 - \tau_1) \delta(t - T_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = h_2(t - T_1, t - T_2) \quad (2.28)$$

Rezultă că relația 2.28 oferă deasemenea posibilitatea măsurării nucleului Volterra $h_2(\tau_1, \tau_2)$, utilizând un sistem cu răspunsul $H_2\{x_1(t), x_2(t)\}$, la intrarea căruia se aduc semnalele $x_1(t) = \delta(t - T_1)$ și $x_2(t) = \delta(t - T_2)$.

Schema de măsură reprezentată în figura 2.4 are la bază relația existentă între operatorul bilinear Volterra de ordinul al-II-lea și operatorul Volterra de ordinul al-II-lea:

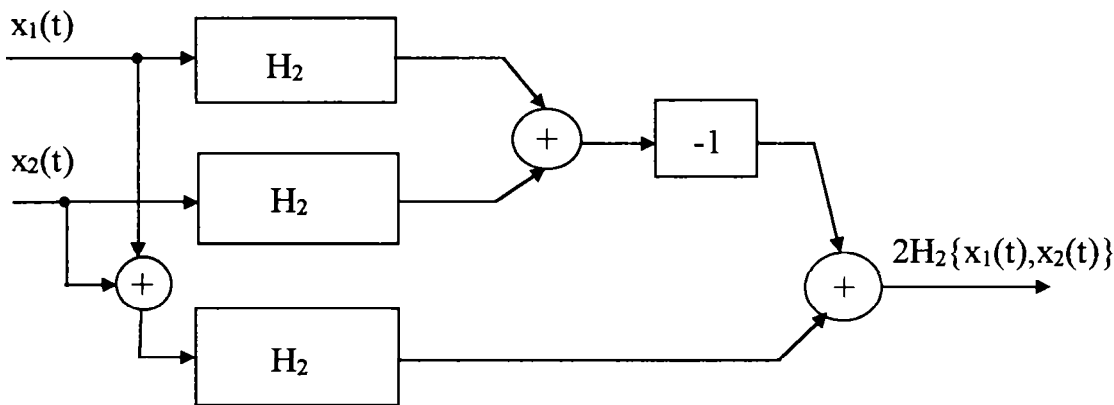


Figura 2.4 Schema bloc pentru sinteza operatorului Volterra bilinear conform cu rel. 2.29.

$$2H_2 \{ x_1(t), x_2(t) \} = H_2 [x_1(t) + x_2(t)] - H_2 [x_1(t)] - H_2 [x_2(t)] \quad (2.29)$$

Conform schemei de sinteză a operatorului bilinear, dacă la intrare se aduc semnalele

$x_1(t) = \delta(t - T_1)$ și $x_2(t) = \delta(t - T_2)$, răspunsul sistemului bilinear va fi:

$$g_2(t) = 2H_2 \{ \delta(t - T_1), \delta(t - T_2) \} = 2h_2(t - T_1, t - T_2) \quad (2.30)$$

Funcția $g_2(t)$ reprezintă răspunsul la impuls bidimensional al sistemului de ordinul al-II-lea. Valoarea sa este dublul valorii nucleului de-a lungul unei linii înclinate la 45° în planul $\tau_1 - \tau_2$, așa după cum e indicat în figura 2.5.

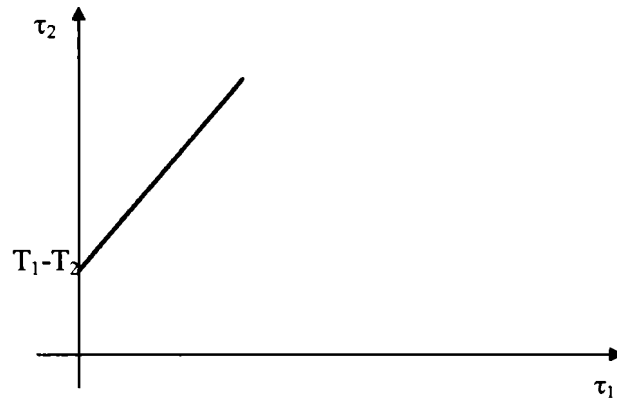


Figura 2.5 Graficul funcției $g_2(t)$

Pentru sistemul de ordinul al-II-lea, cu schema din figura 2.3, avem:

$$g_2(t) = \begin{cases} E^2 e^{-a(T_1+T_2)} e^{-2at} & \text{pt } t \geq \max(T_1, T_2) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.31)$$

Folosind schema din figura 2.4 nucleul de ordinul al-II-lea se poate determina măsurând valorile $g_2(t)$, obținute pentru diferite valori T_1, T_2 .

În mod asemănător introducerii operatorului de ordinul al-II-lea se poate proceda pentru a defini operatorul p -liniar:

$$y_p(t) = H_p[x(t)] \quad (2.32)$$

a cărei descriere funcțională are forma dată de relația 2.33:

$$H_p[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_p) d\tau_1 \cdots d\tau_p \quad (2.33)$$

În relația 2.36 $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$ este o funcție simetrică în raport cu argumentele sale.

2.1.3. Transformata Fourier a nucleului de ordinul al-II-lea

Se definește transformata Fourier bidimensională a nucleului $h_2(\tau_1, \tau_2)$, sau simplu transformata nucleului, ca fiind:

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.34)$$

Condiția de existență a transformatei Fourier bidimensionale este asigurată de relația:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_2(\tau_1, \tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 < \infty \quad (2.35)$$

Transformata inversă având ca rezultat $h_2(\tau_1, \tau_2)$ se deduce cu ajutorul relației:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.36)$$

Utilizarea Transformatei în determinarea răspunsului unui sistem de ordinul al-II-lea la un semnal sinusoidal

Fie: $x(t) = A \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} A e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} A e^{-j\omega_0 t} = x_a(t) + x_b(t)$, cu proprietatea că: $x_b(t) = x_a^*(t)$. Răspunsul sistemului de ordinul al-II-lea se calculează pornind de la relația:

$$y(t) = H_2[x(t)] = H_2[x_a(t) + x_b(t)] = H_2[x_a(t)] + H_2[x_b(t)] + H_2\{x_a(t), x_b(t)\} + H_2\{x_b(t), x_a(t)\} \quad (2.37)$$

Întrucât $h_2(\tau_1, \tau_2)$ este o funcție simetrică în raport cu argumentele sale, avem: $H_2\{x_a(t), x_b(t)\} = H_2\{x_b(t), x_a(t)\}$. Analizând fiecare termen din 2.37 obținem:

$$H_2[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x_a(t - \tau_1) x_a(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \frac{A^2}{4} H_2(\omega_0, \omega_0) e^{2j\omega_0 t} \quad (2.38)$$

În mod similar se poate deduce:

$$H_2[x_b(t)] = \frac{A^2}{4} H_2(-\omega_0, -\omega_0) e^{-2j\omega_0 t} \quad (2.39)$$

Pentru termenul al-III-lea respectiv al-IV-lea relațiile sunt:

$$H_2\{x_a(t), x_b(t)\} = \frac{A^2}{4} H_2(\omega_0, -\omega_0) \quad (2.40)$$

$$H_2\{x_b(t), x_a(t)\} = \frac{A^2}{4} H_2(-\omega_0, \omega_0)$$

Însumând cei 4 termeni dați de relațiile 2.38, 2.39 și 2.40 obținem:

$$y(t) = 2 \left(\frac{A}{2} \right)^2 \operatorname{Re} \left\{ H_2(\omega_0, \omega_0) e^{2j\omega_0 t} \right\} + 2 \frac{A^2}{2} \operatorname{Re} \left\{ H_2(\omega_0, -\omega_0) \right\} \quad (2.41)$$

După cum se poate observa din relația 2.41, răspunsul constă dintr-o constantă dată de cel de-al II-lea termen al relației și un semnal sinusoidal de frecvență $2\omega_0$ și amplitudine:

$$\frac{A^2}{2} |H_2(\omega_0, \omega_0)|.$$

Utilizarea Transformatei în determinarea răspunsului unui sistem de ordinul al-II-lea la un semnal aperiodic

Răspunsul unui sistem Volterra de ordinul al-II-lea la un semnal de intrare oarecare e dat de relația:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.42)$$

Se dorește în cele ce urmează stabilirea unei legături între transformata Fourier a răspunsului $Y(\omega)$, transformata Fourier a semnalului $X(\omega)$ și transformata nucleului $H_2(\omega_1, \omega_2)$. Se introduce în acest scop funcția $y_{(2)}(t_1, t_2)$ conform relației:

$$y_{(2)}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t_1 - \tau_1) x(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.43)$$

Substituind în ecuația de mai sus $t_1 = t_2 = t$, obținem: $y_{(2)}(t, t) = y(t)$. Transformata Fourier bidimensională a lui $y_{(2)}(t_1, t_2)$ este:

$$\begin{aligned} Y_{(2)}(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_{(2)}(t_1, t_2) e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t_1 - \tau_1) x(t_2 - \tau_2) e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} d\tau_1 d\tau_2 dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Făcând schimbarea de variabilă: $\sigma_1 = t_1 - \tau_1$ și $\sigma_2 = t_2 - \tau_2$ se obține în final:

$$Y_{(2)}(\omega_1, \omega_2) = H_2(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1) X(\omega_2) \quad (2.44')$$

Pentru determinarea lui $y(t)$ se aplică transformarea inversă:

$$y(t) = y_{(2)}(t, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{(2)}(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.45)$$

Substituind: $\omega = \omega_1 + \omega_2$, obținem în final:

$$y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{(2)}(\omega_1, \omega - \omega_1) e^{j\omega t} d\omega d\omega_1 \quad (2.46)$$

Anlizând 2.46, rezultă că $y(t)$ se poate exprima ca transformata Fourier inversă a funcției:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{(2)}(\omega_1, \omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (2.47)$$

Un rol important în sinteza operatorilor de ordinul al-II-lea îl joacă transformata Laplace bidimensională a nucleului de ordinul al-II-lea definită de relația:

$$H_2(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-(s_1\tau_1 + s_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.48)$$

unde: $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ și $s_2 = \sigma_2 + j\omega_2$.

2.1.4. Transformata Fourier a nucleului de ordin p

În cadrul paragrafului 2.1.3. s-a introdus transformata Fourier bidimensională, atașată nucleului Volterra de ordinul al-II-lea. În continuare se generalizează noțiunea de transformată Fourier în cazul funcțiilor de mai multe variabile. Fie nucleul de ordin p , $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$, atașat operatorului Volterra de același ordin așa cum se indică în relația 2.33, o funcție de p variabile care satisface relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)| d\tau_1 \dots d\tau_p < \infty \quad (2.49)$$

Aplicând transformarea Fourier funcției $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$, în raport cu fiecare din variabilele τ_1, \dots, τ_p , pe rând, se ajunge în final la:

$$H_p(\omega_1, \dots, \omega_p) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_p\tau_p)} d\tau_1 \dots d\tau_p \quad (2.50)$$

Funcția $H_p(\omega_1, \dots, \omega_p)$ este numită transformata Fourier a nucleului de ordin p și este simetrică în raport cu argumentele sale, dacă $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$ este o funcție simetrică. Transformarea Fourier inversă se definește pe baza relației:

$$h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_p(j\omega_1, \dots, j\omega_p) e^{j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_p\tau_p)} d\omega_1 \dots d\omega_p \quad (2.51)$$

Utilizarea transformatei în determinarea răspunsului unui sistem de ordin p la un semnal de intrare sinusoidal

Determinarea răspunsului unui sistem de ordin p la un semnal de intrare sinusoidal se va exemplifica, din motive de simplificare a calculului, pentru cazul $p=3$. Fie și în acest caz semnalul de intrare de forma:
 $x(t) = A \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} A e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} A e^{-j\omega_0 t} = x_a(t) + x_b(t)$, cu proprietatea că:
 $x_b(t) = x_a^*(t)$. Răspunsul sistemului de ordinul al-III-lea la acest semnal de intrare este dat de:

$$y_3(t) = H_3[x_a(t) + x_b(t)] \quad (2.52)$$

și conduce la relația:

$$y_3(t) = H_3[x_a(t)] + H_3[x_b(t)] + 3H_3\{x_a(t), x_a(t), x_b(t)\} + 3H_3\{x_a(t), x_b(t), x_b(t)\} \quad (2.53)$$

unde:

$$\begin{aligned} H_3[x_a(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &= \left(\frac{A}{2}\right)^3 H_3(j\omega_0, j\omega_0, j\omega_0) e^{3j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} 3H_3\{x_a(t), x_a(t), x_b(t)\} &= 3 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_a(t-\tau_1) x_a(t-\tau_2) x_b(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &= 3 \left(\frac{A}{2}\right)^3 H_3(j\omega_0, j\omega_0, -j\omega_0) e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.55)$$

b25.109/1842

$$\begin{aligned}
 3H_3\{x_a(t), x_b(t), x_b(t)\} &= 3 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_a(t - \tau_1) x_b(t - \tau_2) x_b(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
 &= 3 \left(\frac{A}{2}\right)^3 H_3(j\omega_0, -j\omega_0, -j\omega_0) e^{j\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
 H_3[x_b(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_b(t - \tau_1) x_b(t - \tau_2) x_b(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
 &= \left(\frac{A}{2}\right)^3 H_3(-j\omega_0, -j\omega_0, -j\omega_0) e^{-3j\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Însumând termenii dați de relațiile: 2.54, 2.55, 2.56 și 2.57 se obține:

$$\begin{aligned}
 y_3(t) &= 2 \left(\frac{A}{2}\right)^3 \operatorname{Re}\{H_3(j\omega_0, j\omega_0, j\omega_0) e^{3j\omega_0 t}\} \\
 &+ 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^3 \operatorname{Re}\{H_3(j\omega_0, j\omega_0, -j\omega_0) e^{j\omega_0 t}\}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Din relația 2.58 se poate observa că semnalul de ieșire conține armonicile întâia și a treia a semnalului de intrare.

În mod asemănător se poate deduce expresia răspunsului la semnal sinusoidal a unui filtru Volterra caracterizat de operatorul de ordin IV.

$$\begin{aligned}
 y_4(t) &= H_4[A \cos \omega_0 t] = 2 \left(\frac{A}{2}\right)^4 \operatorname{Re}\{H_4(j\omega_0, j\omega_0, j\omega_0, j\omega_0) e^{j4\omega_0 t}\} \\
 &+ 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^4 \operatorname{Re}\{H_4(j\omega_0, j\omega_0, j\omega_0, -j\omega_0) e^{2j\omega_0 t}\} \\
 &+ 6 \left(\frac{A}{2}\right)^4 H_4(j\omega_0, j\omega_0, -j\omega_0, -j\omega_0)
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

2.2. Filtre Volterra numerice

Modelul Volterra discret a fost introdus la începutul anilor '80 [39] și interesul manifestat față de el a devenit de atunci din ce în ce mai mare.

Prin analogie cu cazul continuu, un sistem neliniar, invariant în timp, cu memorie este descris de o serie Volterra discretă dată de relația 2.60:

$$y[n] = h_0 + \sum_{p=1}^{\infty} H_p[x[n]] \quad (2.60)$$

obținută prin eșantionarea ecuațiilor 2.1 și 2.2, unde $y[n]$ și $x[n]$ rezultă din eșantionarea lui $y(t)$ respectiv $x(t)$ cu pasul de eșantionare normalizat: $T=1$ și :

$$H_p[x[n]] = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{\infty} h_p[m_1, \dots, m_p] x[n - m_1] \cdots x[n - m_p] \quad (2.61)$$

dacă variabilele m_1, \dots, m_p au un suport strict cauzal.

Termenul constant h_0 este un termen de polarizare, $h_1[m_1]$ reprezintă răspunsul la impuls al unui filtru IIR și $h_p[m_1, \dots, m_p]$ poate fi considerat ca răspunsul sistemului la impulsul p -dimensional.

Ca și în cazul liniar se pot construi modele recursive de ordin finit care conțin termeni de ieșire întârziți și se pot obține dezvoltări polinomiale recursive. Acest lucru poate fi realizat prin alegerea limitei de însumare finită (N) în 2.60. În acest caz $h_1[m_1]$ reprezintă răspunsul la impuls al unui filtru FIR, iar efectul neliniarității este caracterizat la ieșire de valori prezente și trecute ale semnalului de intrare.

În plus, s-a demonstrat că un sistem discret, cauzal și invariant în timp, cu memorie finită, având proprietatea de a răspunde la variații mici ale semnalului de intrare prin variații mici ale semnalului de ieșire poate fi aproximat uniform, în concordanță cu teorema Stone-Weierstrass, pentru un set de semnale de intrare uniform mărginit, de către o serie Volterra finită, de forma [39]:

$$y[n] = h_0 + \sum_{p=0}^N H_p[x[n]] \quad (2.62)$$

unde:

$$H_p[x[n]] = \sum_{m_1=0}^{M-1} \cdots \sum_{m_p=0}^{M-1} h_p[m_1, \dots, m_p] x[n - m_1] \cdots x[n - m_p] \quad (2.63)$$

Modelele nerecursive au fost de asemenea intens studiate în literatură datorită simplității lor.

2.2.1. Filtrul Volterra discret de ordinul al-II-lea (FV2)

Ca și în cazul continuu se va prezenta în cele ce urmează filtrul Volterra discret de ordinul al-II-lea, el constituind un prototip în cadrul filtrelor Volterra numerice. Relația ce caracterizează filtrul în domeniul timp este:

$$y[n] = h_0 + \sum_{k_1=0}^{N-1} h_1[k_1]x[n-k_1] + \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2]x[n-k_1]x[n-k_2] \quad (2.64)$$

unde $h_1[k_1]$, reprezintă coeficienții nucleului liniar de filtrare, iar $h_2[k_1, k_2]$, reprezintă coeficienții nucleului pătratic de filtrare. În cele ce urmează nucleul pătratic va fi considerat o funcție simetrică în raport cu argumentele, adică: $h_2[k_1, k_2] = h_2[k_2, k_1]$.

Transformata Fourier a nucleului de ordinul al-II-lea se definește cu relația:

$$H_2(\Omega_1, \Omega_2) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2] e^{-j\Omega_1 k_1} e^{-j\Omega_2 k_2} \quad (2.65)$$

Transformata nucleului, $H_2(\Omega_1, \Omega_2)$ își găsește numeroase aplicații în determinarea răspunsului FV2 la diferite semnale de intrare.

Răspunsul în frecvență al FV2 la un semnal de intrare determinist

Pentru determinarea răspunsului în frecvență, $Y(\Omega)$, al unui FV2 este necesară mai întâi găsirea răspunsului bispectral al nucleului pătratic la un semnal de intrare cu Transformata $X(\Omega)$. Fie $y_2[n]$, contribuția termenului pătratic la răspunsul în timp al filtrului:

$$y_2[n] = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2]x[n-k_1]x[n-k_2] \quad (2.66)$$

Ca și în cazul continuu, se definește semnalul teoretic:

$$y_{(2)}[n_1, n_2] = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2]x[n_1-k_1]x[n_2-k_2] \quad (2.67)$$

Transformata Fourier bidimensională a lui $y_{(2)}[n_1, n_2]$ e dată de relația [40]:

$$Y_{(2)}(\Omega_1, \Omega_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2]x[n_1-k_1]x[n_2-k_2] e^{-j\Omega_1 n_1} e^{-j\Omega_2 n_2} \quad (2.68)$$

făcând schimbarea de variabilă: $u_1 = n_1 - k_1$ și $u_2 = n_2 - k_2$, se obține în final:

$$Y_{(2)}(\Omega_1, \Omega_2) = H_2(\Omega_1, \Omega_2)X(\Omega_1)X(\Omega_2) \quad (2.69)$$

$Y_{(2)}(\Omega_1, \Omega_2)$ se numește răspunsul bispectral al nucleului pătratic la excitația $X(\Omega)$.
Ținând cont de relația: $y_2[n] = y_{(2)}[n, n]$ se poate deduce:

$$\begin{aligned} y_2[n] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{2\pi} H_2(\Omega_1, \Omega_2)X(\Omega_1)X(\Omega_2)e^{j\Omega_1 n} e^{j\Omega_2 n} d\Omega_1 d\Omega_2 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{2\pi} H_2(\Omega_1, \Omega_2)X(\Omega_1)X(\Omega_2)e^{j(\Omega_1 + \Omega_2)n} d\Omega_1 d\Omega_2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Analizând relația de mai se observă că $y_2[n]$, reprezintă transformata Fourier inversă a funcției:

$$Y_2(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} Y_{(2)}(\Omega_1, \Omega - \Omega_1) d\Omega_1 \quad (2.71)$$

Relația 2.71 realizează o combinare a frecvențelor întrucât funcția $Y_{(2)}$ e integrată în lungul drepte de ecuație: $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$.

Răspunsul în frecvență al nucleului liniar fiind:

$$H_1(\Omega) = \sum_{k_1=0}^{N-1} h_1[k_1]e^{-j\Omega k_1} \quad (2.72)$$

rezultă răspunsul în frecvență al FV2:

$$Y(\Omega) = H_1(\Omega)X(\Omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} Y_{(2)}(\Omega_1, \Omega - \Omega_1) d\Omega_1 \quad (2.73)$$

Răspunsul în frecvență al FV2 la un semnal de intrare aleator

Acest paragraf va trata cazul particular al semnalului de intrare având distribuție de probabilitate gaussiană. Cazul general necesită calcule deosebit de laborioase fiind obiectul de studiu al unor lucrări recente.

Asupra semnalului de intrare se fac următoarele ipoteze: se consideră că acesta e ergodic având medie nulă și momente statistice finite pentru $k \leq 4$. Momentul statistic de ordin k e dat de relația:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx \quad (2.74)$$

Se definește funcția de autocorelație temporală a variabilei aleatoare x conform cu relația de mai jos:

$$r_{xx}[k_1 - k_2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x[n - k_1]x[n - k_2] \quad (2.75)$$

Pentru ca semnalul $y[n]$, definit de relația 2.64 să aibe media nulă e necesar ca:

$$h_0 = - \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2] r_{xx}[k_1 - k_2] \quad (2.76)$$

Relația 2.64 devine în acest caz:

$$y[n] = \sum_{k_1=0}^{N-1} h_1[k_1]x[n - k_1] + \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2] \{x[n - k_1]x[n - k_2] - r_{xx}[k_1 - k_2]\} \quad (2.77)$$

Funcția de autocorelație a lui $y[n]$ este:

$$r_{yy}[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N y[n + k]y[n] \quad (2.78)$$

Relația de mai sus se poate scrie:

$$\begin{aligned} r_{yy}[k] = & \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_1[k_1]h_1[k_2]r_{xx}[k_1 - k_2 + k] - \\ & - 2 \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2]h_2[l_1, l_2]r_{xx}[k_1 - k_2 + k]r_{xx}[l_1 - l_2 + k] \end{aligned} \quad (2.79)$$

În deducerea relației de mai sus s-a ținut cont de proprietatea variabilelor aleatoare cu densitate de probabilitate gaussiană referitoare la medierea statistică a produsului conținând un număr impar, respectiv par de variabile aleatoare, precum și de faptul că $x[n]$ fiind un semnal ergodic, medierile statistice sunt egale cu cele temporale, corespunzătoare. În cazul relației 2.79 s-au folosit relațiile de mai jos:

$$\begin{aligned} \overline{x_1 x_2 x_3} &= 0 \\ \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} &= \overline{x_1 x_2} + \overline{x_3 x_4} + \overline{x_1 x_3} + \overline{x_2 x_4} + \overline{x_1 x_4} + \overline{x_2 x_3} \end{aligned} \quad (2.80)$$

În relația 2.80 prin bară s-a notat operatorul de mediere temporală.

Densitățile spectrale de putere pentru semnalele $x[n]$ și $y[n]$ se definesc în mod uzual:

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k] e^{-j\Omega k} \\ \Phi_{yy}(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{yy}[k] e^{-j\Omega k}\end{aligned}\quad (2.81)$$

Printr-o procedură similară celei prezentate în cazul determinării răspunsului FV2 la un semnal de intrare determinist, relația dintre $\Phi_{xx}(\Omega)$ și $\Phi_{yy}(\Omega)$ devine:

$$\Phi_{yy}(\Omega) = |H_1(\Omega_1)|^2 \Phi_{xx}(\Omega) + 2 \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \Phi_{(2)yy}(\Omega_1, \Omega - \Omega_1) d\Omega_1 \quad (2.82)$$

unde s-au folosit notațiile:

$$\Phi_{(2)yy}(\Omega_1, \Omega_2) = |H_2(\Omega_1, \Omega_2)|^2 \Phi_{xx}(\Omega_1) \Phi_{xx}(\Omega_2) \quad (2.83)$$

Densitatea de putere interspectrală este definită ca fiind:

$$\Phi_{xy}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{yx}[k] e^{-jk\Omega} \quad (2.84)$$

unde:

$$r_{yx}[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N y[n] x[n+k] \quad (2.85)$$

Efectuând calculele se obține:

$$\begin{aligned}r_{yx}[k] &= \sum_{k_1=0}^{N-1} h_1[k_1] r_{xx}[k+k_1] \\ \Phi_{xy}(\Omega) &= H_1(\Omega) \Phi_{xx}(\Omega)\end{aligned}\quad (2.86)$$

Această relație similară celei obținute în cazul filtrării liniare se datorește proprietăți variabilelor aleatoare gaussiene specificată în 2.80.

Densitatea de putere inter-bispectrală, se va defini conform relației:

$$S_{xy}(\Omega_1, \Omega_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} t_{yx}[k_1, k_2] e^{-j(k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2)} \quad (2.87)$$

unde:

$$t_{yx}[k_1, k_2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N y[n] x[n+k_1] x[n+k_2] \quad (2.88)$$

reprezintă intercorelația între secvența $y[n]$ și $x[n+k_1]x[n+k_2]$.

$S_{xy}(\Omega_1, \Omega_2)$ devine:

$$S_{xy}(\Omega_1, \Omega_2) = 2H_2(\Omega_1, \Omega_2)\Phi_{xx}(\Omega_1)\Phi_{xx}(\Omega_2) \quad (2.89)$$

Relațiile 2.86 și 2.87 dovedesc faptul că în cazul semnalului de intrare gaussian, funcțiile de transfer $H_1(\Omega)$, respectiv $H_2(\Omega_1, \Omega_2)$, pot fi cunoscute în măsura în care se cunosc $\Phi_{xy}(\Omega)$, $S_{xy}(\Omega_1, \Omega_2)$ și $\Phi_{xx}(\Omega)$. Această proprietate facilitează proiectarea filtrului optimal Volterra.

Analizând relațiile 2.62 și 2.63 și făcând presupunerea că nucleele $h_p[m_1, \dots, m_p]$ sunt funcții simetrice în raport cu argumentele m_i , rezultă că ieșirea filtrului Volterra discret constă din convoluții multidimensionale între coeficienții filtrului și semnalul de intrare,

Ca o consecință a acestui fapt este posibil și adeseori util să interpretăm filtrul în domeniul frecvență, utilizând transformata Z. De exemplu, dacă notăm $y_p[n]$, termenul de ordin p din relația 2.62:

$$y_p[n] = \sum_{S_p} h_p[m_1, \dots, m_p] x[n-m_1] \dots x[n-m_p] \quad (2.90)$$

Transformata Z a lui y_p poate fi exprimată cu ajutorul lui $X(z)$ și a lui $H_p(z_1, \dots, z_p)$:

$$Y_p(z) = F[H_p(z_1, \dots, z_p)] X(z_1) \dots X(z_p) \quad (2.91)$$

unde:

$$H_p(z_1, \dots, z_p) = \sum_{S_p} h_p(m_1, \dots, m_p) z_1^{m_1} \dots z_p^{m_p} \quad (2.92)$$

și reprezintă transformata Z p -dimensională a nucleului h_p , iar F este operația prin care transformata Z p -dimensională este redusă la o transformată Z unidimensională. Operația poate fi interpretată ca un combinator de frecvențe și a fost prezentată anterior pentru cazul $p=2$.

2.3 Proprietăți ale filtrelor Volterra

2.3.1. Proprietăți structurale ale nucleelor

Dezvoltarea în serie Volterra prezintă proprietăți importante atât în timp continuu cât și în timp discret. Se prezintă în continuare unele dintre aceste proprietăți pentru dezvoltarea în timp discret.

- Așa după cum s-a specificat în prezentarea filtrului Volterra în timp continuu, nucleele Volterra sunt funcții simetrice în raport cu argumentele și în consecință toate cele $p!$ permutări posibile ale argumentelor m_1, \dots, m_p

păstrează nucleul nemodificat. Această proprietate a nucleelor Volterra reduce mult complexitatea calculului în cadrul dezvoltării în serie Volterra. Complexitatea calculului este dată de lungimea memoriei utilizate precum și de ordinul filtrului. Astfel nucleul de ordin p al modelului conține, în cazul unei ferestre de filtrare de lungime N , N^p coeficienți. Numărul acestora poate fi redus datorită proprietății de simetrie la C_N^p .

- În ceea ce privește identificarea nucleelor Volterra s-a arătat deasemenea că răspunsul la impuls al sistemului de un anumit ordin nu e suficient pentru a identifica toate elementele nucleului corespunzător. Pentru identificarea nucleului de ordin p e necesar un semnal de intrare constând din produsul a p impulsuri unitate plasate corespunzător pe suportul filtrului.
- Nucleele Volterra reprezintă o extensie directă a conceptului de răspuns la impuls din teoria sistemelor liniare în cazul sistemelor multidimensionale. Această observație permite atribuirea unei semnificații fizice nucleelor Volterra; ele caracterizează sistemul nelinier fiind analogul multidimensional al răspunsului la impuls.
- O altă caracteristică impusă uneori în modelarea și realizabilitatea filtrelor Volterra o constituie proprietatea nucleelor de a fi separabile. Această proprietate se poate exprima astfel:

$$h_p(m_1, \dots, m_p) = \prod_{j=1}^p h_j(m_j) \quad (2.93)$$

2.3.2. Proprietăți structurale ale relației intrare - ieșire în cazul filtrelor Volterra

Aceste proprietăți sunt deosebit de importante pentru a caracteriza comportarea neliniară a filtrelor Volterra.

- Prima proprietate se referă la liniaritatea relației intrare-ieșire în raport cu nucleele, privite ca și coeficienți ai filtrului, așa după cum se vede din relațiile 2.62 și 2.63. În expresia semnalului de ieșire, neliniaritatea se reflectă în produsele multiple între valori ale semnalului de intrare întârziate, în timp ce, relația e liniară în raport cu coeficienții filtrului. Această proprietate specifică permite extinderea diverselor concepte și proceduri aplicate în cazul filtrării liniare și sistemelor neliniare. Este vorba de principiul proiecției ortogonale, teoria filtrării optimale precum și a implementării algoritmilor de filtrare adaptivă.
- A doua proprietate pornește de la observația făcută asupra relațiilor 2.61, 2.63, și anume că neliniaritatea sistemului se reflectă în nucleele multidimensionale care apar în relația intrare-ieșire și a căror dimensiune(ordin) e dată de numărul de factori în produsele între valorile întârziate ale semnalului de intrare. Astfel relația intrare-ieșire poate fi privită

ca o sumă de convoluții multidimensionale. Comparând termenul de ordinul p al dezvoltării, dat de relația 2.63, cu expresia unei convoluții p -dimensionale :

$$\omega[n_1, \dots, n_p] = \sum_{m_1=0}^{M-1} \dots \sum_{m_p=0}^{M-1} h_p[m_1, \dots, m_p] v[n_1 - m_1, \dots, n_p - m_p] \quad (2.94)$$

se poate observa că, pentru : $n_1 = \dots = n_p = n$, se obține:

$$y[n] = \omega[n, \dots, n] \quad (2.95)$$

Relația 2.95 arată că ieșirea unui sistem nelinier este dată de particularizarea convoluției multidimensionale la elementele diagonalei principale ale suportului filtrului multidimensional corespunzător.

Cea de-a doua proprietate permite deasemenea o interpretare în domeniul frecvență a filtrelor Volterra. În acest scop, pornind de la expresia răspunsului în frecvență al unui sistem p -dimensional, liniar, se poate deduce comportarea în frecvență a filtrului caracterizat de un nucleu de ordin p .

Răspunsul sistemului p -dimensional, liniar, caracterizat de funcția $h_p(m_1, \dots, m_p)$, la semnalul $v(n_1, \dots, n_p) = e^{j\Omega_1 n_1} \dots e^{j\Omega_p n_p}$

este:

$$w(n_1, \dots, n_p) = H_p(e^{j\Omega_1}, \dots, e^{j\Omega_p}) e^{j\Omega_1 n_1} \dots e^{j\Omega_p n_p} \quad (2.96)$$

unde :

$$H_p(e^{j\Omega_1}, \dots, e^{j\Omega_p}) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} h_p[m_1, \dots, m_p] e^{-j\Omega_1 m_1} \dots e^{-j\Omega_p m_p} \quad (2.97)$$

Ieșirea filtrului Volterra caracterizat de nucleul de ordin p se poate obține pe baza relației 2.95 presupunând:

$$v[n_1, \dots, n_p] = x[n_1] \dots x[n_p] \quad ; \quad n_1 = \dots = n_p = n \quad (2.98)$$

Se obține astfel:

$$y[n] = w[n, \dots, n] = H_p(e^{j\Omega_1}, \dots, e^{j\Omega_p}) e^{j(\Omega_1 + \dots + \Omega_p)n} \quad (2.99)$$

Relația 2.99 arată prezența în semnalul de ieșire a frecvenței $\Omega_1 + \dots + \Omega_p$, neprezentă în semnalul de intrare.

Dacă semnalul de intrare este un semnal de timp continuu, având spectrul $X(\omega)$, se poate deduce pentru semnalul de ieșire expresia:

$$y(t) = w(t, \dots, t) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_p(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_p}) \cdot X(\omega_1) \dots X(\omega_p) e^{j(\omega_1 + \dots + \omega_p)t} d\omega_1 \dots d\omega_p \quad (2.100)$$

Relația 2.100 indică prezența în semnalul de ieșire a unei componente având frecvența $\omega_1 + \dots + \omega_p$. În cazul în care semnalul de la intrare este o sinusoidă în semnalul de ieșire apar componente având frecvența multiplii sau submultiplii ai frecvenței semnalului de intrare. Dacă semnalul de intrare este o combinație liniară de sinusoides, în semnalul de ieșire apar termeni de intermodulație.

Aceste considerații generale confirmă una din particularitățile ce atestă comportarea neliniară a filtrelor Volterra și anume: apariția în semnalul de ieșire a unor componente având frecvența diferită de cea a semnalului de intrare.

CONCLUZII Acest capitol a fost dedicat prezentării filtrelor Volterra atât pentru semnale în timp continuu cât și pentru semnale în timp discret.

În cadrul paragrafului întâi:

- S-a introdus caracterizarea sistemelor neliniare continue, invariante în timp, prin intermediul seriei Volterra. Dezvoltarea teoriei Volterra în caracterizarea sistemelor neliniare s-a făcut pe baza operatorilor p -liniari [23] ceea ce permite o mai bună înțelegere a modului în care operatorii Volterra acționează asupra semnalului de intrare. Pornind de la operatorul Volterra de ordinul întâi, $H_1[x(t)]$, asimilabil unui operator liniar, caracterizat de nucleul Volterra de ordinul întâi, $h_1(\tau)$, sau funcția răspuns la impuls, s-au introdus operatorii Volterra de ordin superior.

Elementul prototip l-a constituit operatorul Volterra de ordinul al-II-lea, $H_2[x(t)]$, pentru care s-a dedus reprezentarea funcțională (relația 2.19), pe baza nucleului Volterra de ordinul al-II-lea: $h_2(\tau_1, \tau_2)$.

-S-a specificat semnificația fizică a nucleului de ordinul al-II-lea și anume aceea de răspuns a sistemului biliniar Volterra la un semnal de intrare constând din două impulsuri Dirac la momente de timp diferite.

-S-a definit transformata Fourier bidimensională a nucleului $h_2(\tau_1, \tau_2)$, sau simplu transformata nucleului: $H_2(\omega_1, \omega_2)$. Utilitatea ei în cazul analizei sistemelor neliniare a fost ilustrată prin calculul răspunsului unui sistem neliniar la un semnal de intrare sinusoidal precum și la un semnal aperiodic oarecare.

-S-a definit transformata Laplace a nucleului de ordinul al-II-lea ce joacă un rol important în sinteza operatorilor de ordinul al-II-lea.

Cel de-al-II-lea paragraf este dedicat modelului Volterra pentru sistemele în timp discret. Materialul prezentat se poate structura după cum urmează:

-S-a prezentat filtrul Volterra discret de ordinul al-II-lea, el constituind un prototip în cadrul filtrelor neliniare discrete.

-S-a definit transformata nucleului de ordinul al-II-lea: $h_2[n_1, n_2]$ și anume funcția: $H_2(\Omega_1, \Omega_2)$. Pe baza transformatei nucleului s-a calculat răspunsul filtrului Volterra de ordinul al-II-lea la un semnal de intrare determinist.

-S-a dedus răspunsul în frecvență al FV₂ la un semnal de intrare aleator având distribuție de probabilitate gaussiană (rel.2.86 și rel.2.89). Acest lucru a necesitat introducerea noțiunilor de: densitate de putere interspectrală $\Phi_{xy}(\Omega)$ (rel. 2.84) și densitate de putere inter-bispectrală: $S_{xy}(\Omega_1, \Omega_2)$ (rel.2.87).

-Asimilând expresia ieșirii filtrului Volterra discret unei convoluții multidimensionale, s-a introdus transformata Z a nucleului Volterra de ordin p : $H_p(z_1, \dots, z_p)$.

În paragraful al-III-lea au fost expuse câteva din proprietățile filtrelor Volterra atât în cazul filtrelor Volterra în timp continuu cât și a celor în timp discret:

-simetria nucleelor în raport cu argumentele, fapt ce contribuie la reducerea complexității calculului, în cadrul dezvoltării în serie Volterra. Complexitatea calculului este dată de lungimea memoriei utilizate precum și de ordinul filtrului. Astfel nucleul de ordin p al modelului conține, în cazul unei ferestre de filtrare de lungime N , N^p coeficienți. Numărul acestora poate fi redus datorită proprietății de simetrie la C_N^p .

-imposibilitatea identificării nucleelor de diferite ordine prin răspuns la impuls al sistemului de ordin corespunzător.

-proprietatea nucleelor de a fi separabile în anumite aplicații.

S-au prezentat deasemenea proprietăți structurale ale relației intrare-ieșire în cazul filtrelor Volterra:

-liniaritatea relației intrare-ieșire în cazul FV în timp discret, în raport cu nucleele, privite ca și coeficienți ai filtrului.

-neliniaritatea sistemului este reflectată în relația intrare-ieșire de produsele multiple între valorile întârziate ale semnalului de intrare, precum și de nucleele multidimensionale, a căror dimensiune e dată de numărul de factori în produsele între valorile întârziate ale semnalului de intrare.

-relația 2.84 arată că ieșirea unui sistem neliniar este dată de particularizarea convoluției multidimensionale la elementele diagonalei principale ale suportului filtrului multidimensional.

Pe baza proprietății anterior prezentate se deduce comportarea în frecvență a filtrului caracterizat de un nucleu de ordin p (rel.2.97), pornind de la expresia răspunsului în frecvență a unui sistem p -dimensional. Se calculează răspunsul sistemului de ordin p la un semnal de intrare sinusoidal, fapt ce evidențiază prezența în semnalul de ieșire a unor componente având frecvențele multipli ai frecvenței semnalului de intrare.

CAPITOLUL 3. MODELAREA SISTEMELOR NELINIARE PRIN SERII VOLTERRA ȘI SERII WIENER

3.1. Determinarea nucleelor Volterra asociate unui sistem neliniar continuu

Identificarea unui sistem neliniar continuu printr-o dezvoltare în serie Volterra se reduce la estimarea nucleelor Volterra de diferite ordine. Să presupunem că estimarea nucleelor se face în sensul reducerii erorii medii pătratice între ieșirea sistemului supus identificării și ieșirea modelului. Nucleele astfel rezultate constituie soluții ale unui set de ecuații integrale.

O alternativă a acestei metode o constituie abordarea unui model de forma unei cutii negre și determinarea unor parametrii specifici, care permit modelului să descrie sistemul neliniar. Schetzen a introdus o metodă de determinare a nucleelor Volterra, pentru sisteme al căror ordin e cunoscut apriori și e finit. Metoda permite măsurarea nucleului Volterra asociat unui operator de un anumit ordin.

S-a arătat deasemenea că seria Volterra poate fi văzută ca o soluție generală a unei ecuații diferențiale neliniare [41].

Cu toate acestea nu se poate vorbi la ora actuală de o metodă generală pentru descrierea sistemelor neliniare cu ajutorul ecuațiilor diferențiale și nici pentru calculul nucleelor Volterra asociate unui sistem neliniar dinamic de ordin necunoscut.

3.1.1. Măsurarea nucleului Volterra asociat unui operator de un anumit ordin

În continuare se prezintă metoda de determinare a nucleelor Volterra pentru un sistem al cărui ordin e cunoscut apriori și e finit, metodă propusă de M. Schetzen [23].

Nucleul asociat operatorului Volterra de ordinul întâi, $h_1(\tau)$ poate fi determinat experimental utilizând schema din figura 3.1, la intrarea căreia se aduce un semnal $x(t)$ de tip zgomot alb, cu funcția de autocorelație dată de:

$$R_{xx}(\tau) = A\delta(\tau) \quad (3.1)$$

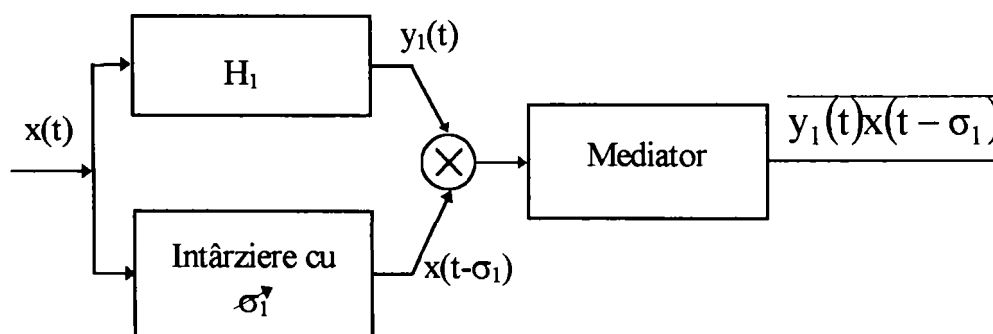


Figura 3.1 Schema pentru determinarea experimentală a nucleului $h_1(t)$

Asupra semnalelor $x(t)$ și $y_1(t)$ se face ipoteza că sunt staționare și ergodice.

Semnalul de la ieșirea sistemului e dat de relația:

$$\overline{y_1(t)x(t-\sigma_1)} = R_{xy_1}(\sigma_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t-\sigma_1)y_1(t)dt = Ah_1(\sigma_1) \quad (3.2)$$

Rezultă pentru $h_1(\sigma_1)$ relația:

$$h_1(\sigma_1) = \frac{1}{A} \overline{y_1(t)x(t-\sigma_1)} \quad (3.3)$$

Acest procedeu de măsurare poate fi extins pentru determinarea nucleelor de ordin superior. În cazul nucleului de ordinul al-II-lea schema de măsură este cea din figura 3.2.

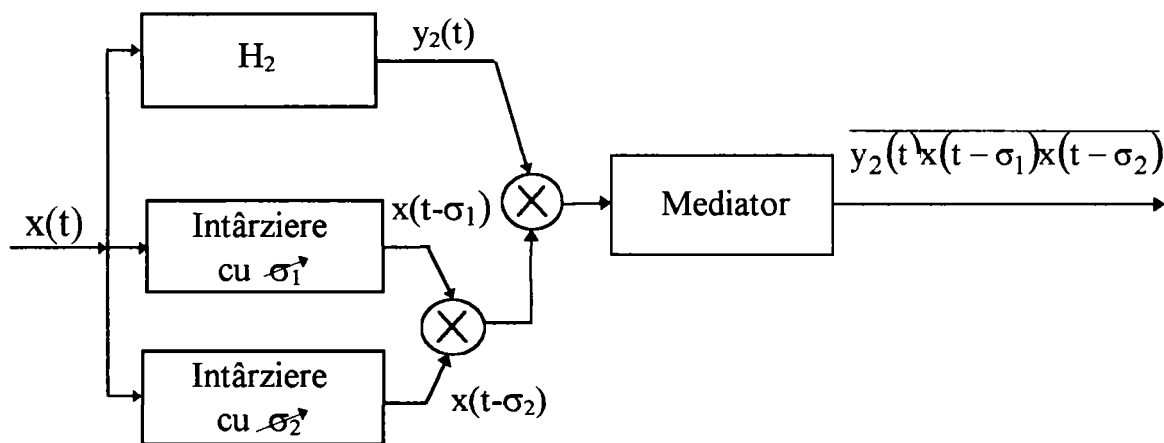


Figura 3.2 Schemă pentru determinarea experimentală a nucleului de ordinul al-II-lea

Semnalul de la ieșirea sistemului din fig. 3.2 este :

$$\begin{aligned} \overline{y_2(t)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= 2A^2 h_2(\sigma_1, \sigma_2) + \left[A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau, \tau) d\tau \right] \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pentru $\sigma_1 \neq \sigma_2$ relația 3.4 devine:

$$h_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2A^2} \overline{y_2(t)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)} \quad (3.5)$$

Relația 3.5. permite determinarea nucleului de ordinul al II-lea în întreg planul σ_1 - σ_2 mai puțin în punctele ale căror coordonate satisfac relația: $\sigma_1 = \sigma_2$.

Metoda se poate extinde și în cazul măsurării nucleului atașat operatorului Volterra de ordin n și conduce la rezultatul exprimat de relația:

$$h_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! A^n} \overline{y_n(t)x(t-\sigma_1)\cdots x(t-\sigma_n)} \quad (3.6)$$

unde prin $y_n(t)$ s-a notat răspunsul sistemului caracterizat de operatorul $H_n[]$, la semnalul de intrare $x(t)$. Relația 3.6 este valabilă numai în cazul când nu există două variabile σ_i egale în șirul $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Metoda de măsurare anterior prezentată are un dezavantaj major legat de necesitatea separării contribuției fiecărui operator în răspunsul total al sistemului.

3.2. Determinarea nucleelor Volterra în cazul unui sistem neliniar discret

Pentru simplificarea calculelor ne referim la un filtru Volterra de ordinul al-II-lea. Determinarea coeficienților filtrului Volterra se va obține ca o soluție în problema estimării optimale a unei variabile aleatoare. Relațiile găsite vor avea un grad de generalitate mult mai mare decât soluțiile oferite de estimarea liniară.

Fie B , spațiul Hilbert al variabilelor aleatoare cu momente statistice m_k ($k \leq 4$) finite, construit peste corpul R al numerelor reale.

Fie $A_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_N, s\}$ o mulțime de $N+1$ variabile aleatoare aparținând spațiului B . Se știe că estimarea liniară a unei variabile aleatoare tratează următoarea problemă: găsirea funcției $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ce minimizează funcționala:

$$\|s - f(x_1, x_2, \dots, x_N)\|^2 \quad (3.7)$$

Asupra elementelor mulțimii A_1 se fac următoarele ipoteze:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i = 0 \text{ implică } \alpha_i = 0, \text{ pt. } i = \overline{1, N} \\ (i, i) \quad & p(s, x_1, x_2, \dots, x_N) \neq p(s)p(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Produsul scalar între elementele mulțimii A_1 e de forma:

$$(i, i, i) \quad \langle x_i, x_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_i) p(x_j) dx_i dx_j \quad \forall x_i, x_j \in A_1 \quad (3.9)$$

Acest produs scalar va induce norma:

$$(iv) \quad \|x_i\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 p(x_i) dx_i \quad (3.10)$$

Variabila aleatoare $\hat{s} = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ se numește estimarea variabilei aleatoare s .

Având în vedere toate acestea relația 3.7 se poate pune sub forma:

$$\|s - f(x_1, x_2, \dots, x_N)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [s - f(x_1, x_2, \dots, x_N)]^2 p(s, x_1, \dots, x_N) \prod_{i=1}^N dx_i \quad (3.11)$$

Soluția optimă este cunoscută ca fiind:

$$f_{opt}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot p(s / x_1, x_2, \dots, x_N) ds \quad (3.12)$$

și este numită media probabilității condiționate.

O situație cu totul remarcabilă se întâlnește în cazul în care distribuția mutuală de probabilitate $p(s, x_1, x_2, \dots, x_N)$ este de tip gaussian., având următoarea formă:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N, s) = \frac{|C|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} Y^T C^{-1} Y\right\} \quad (3.13)$$

unde:

$$C = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_N \rangle & \langle x_1, s \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_N, x_1 \rangle & \dots & \langle x_N, x_N \rangle & \langle x_N, s \rangle \\ \langle s, x_1 \rangle & \dots & \langle s, x_N \rangle & \langle s, s \rangle \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Introducând notațiile suplimentare:

$$R_{sx}^T = [\langle s, x_1 \rangle, \langle s, x_2 \rangle, \dots, \langle s, x_N \rangle] \quad (3.15)$$

$$C_{xx} = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_N \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_N, x_1 \rangle & \dots & \langle x_N, x_N \rangle \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$Y^T = [x_1, x_2, \dots, x_N, s] \quad ; \quad X^T = [x_1, x_2, \dots, x_N] \quad (3.17)$$

$$r_{sx}(i) = \langle s, x_i \rangle \quad r_{xx}(i, j) = \langle x_i, x_j \rangle \quad (3.18)$$

funcția $f_{opt}(x_1, x_2, \dots, x_N, s)$ devine în acest caz:

$$f_{opt}(x_1, x_2, \dots, x_N, s) = X^T C_{xx}^{-1} R_{sx} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{xx}(1,1) & \dots & r_{xx}(1,N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(N,1) & \dots & r_{xx}(N,N) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{sx}(1) \\ \vdots \\ r_{sx}(N) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

unde matricea C_{xx} este simetrică și pozitiv definită, deci inversabilă[42].

Notând:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = C_{xx}^{-1} R_{sx} \quad (3.20)$$

relația 3.19 devine:

$$f_{opt}(x_1, x_2, \dots, x_N, s) = \sum_{i=1}^N h_i x_i \quad (3.21)$$

deci o combinație liniară a variabilelor aleatoare (x_1, x_2, \dots, x_N) .

Concluziile formulate mai sus au un impact puternic în practică asupra estimării calității predicției făcute prin filtrare liniară de tip FIR în cazul semnalelor ergodice .

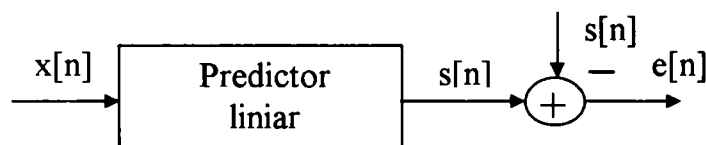


Figura 3.3 Sistem de predicție

Să considerăm un astfel de sistem reprezentat în figura 3.3.

Semnalul de intrare și semnalul model $s[n]$ sunt semnale aleatoare în timp discret, ergodice. Răspunsul acestui sistem va fi:

$$\hat{s}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x[n-i] \quad (3.22)$$

unde coeficienții h_i sunt definiți conform relației 3.20.

Condiția ca densitatea mutuală de probabilitate a semnalelor $x[n]$ și $y[n]$ să fie de tip gaussian este deosebit de restrictivă, în practică, aceste cazuri fiind foarte rare.

Un alt exemplu în care aplicarea estimării liniare va da rezultate cu totul nesatisfăcătoare este oferit de semnalele $x[n]$ și $s[n]$ ale căror densități spectrale de putere sunt

repartizate în benzi care nu se suprapun. Densitatea spectrală de putere a estimatorului $\hat{s}[n]$ va fi dată de relația:

$$\Phi_{\hat{s}\hat{s}}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \Phi_{xx}(\Omega) \quad (3.23)$$

unde:

$$H(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j\Omega k} \quad (3.24)$$

și reprezintă răspunsul în frecvență al filtrului liniar folosit. Se poate observa că prin filtrare liniară nu se va reuși “apropierea” densității spectrale de putere a semnalului $x[n]$ de cea a semnalului $s[n]$.

Eroarea medie pătratică introdusă de estimator este:

$$\|e\|^2 = \|s\|^2 - R_{sx}^T C_{xx}^{-1} R_{sx} \quad (3.25)$$

Este evident faptul că simpla ipoteză de ortogonalitate pe spațiul B a semnalului de eroare nu va asigura întotdeauna o dispersie mică a acestuia. În cazul limită în care semnalele $x[n]$ și $s[n]$ sunt ortogonale R_{sx} este identic nul și:

$$\|e\|^2 = \|s\|^2 \quad (3.26)$$

Această situație corespunde unei densități interspectrale de putere: $\Phi_{sx}(\Omega) = 0$

Un alt caz în care soluția oferită de estimatorul liniar nu este satisfăcătoare este acela în care $x[n]$ și $s[n]$ nu sunt independente, dar valorile foarte scăzute ale intercorelațiilor $r_{sx}(i)$ și implicit ale densității spectrale de putere $\phi_{xs}(\Omega)$ fac ca eroarea medie pătratică să fie mare[36].

Această situație a condus la căutarea unor estimatori neliniari.

3.2.1. Estimator Volterra de ordinul al-II-lea pentru semnal de intrare cu distribuție de probabilitate normală

Fiind dat semnalul “model” $s[n]$ se caută un estimator obținut de data aceasta printr-o filtrare neliniară.

Presupunând că funcția:

$$f_{opt}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{\infty} s p(s / x_1, x_2, \dots, x_N) ds \quad (3.27)$$

este continuă, cu derivate continue până la ordinul k , ea admite o aproximare prin dezvoltare în serie Taylor trunchiată de forma:

$$\begin{aligned}
 f_{opt}(x_1, x_2, \dots, x_N) &\cong f_{opt}(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{opt}(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_i} x_i + \\
 &+ \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \frac{\partial^2 f_{opt}(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} x_{i_1} x_{i_2} + \dots + \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_k=1}^N \frac{\partial^k f_{opt}(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} x_{i_1} \dots x_{i_k} + R_{N+1}
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Funcția fiind de clasă C_k valoarea $\frac{\partial^m f_{opt}(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$ cu $m \leq k$ este constantă la

orice permutare a ordinii de derivare.

Examinând dezvoltarea în serie Taylor pare natural a căuta soluția în subspațiile generate de produse de variabile aleatoare de tipul $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ cu $i_j \in 1 \dots N$, $k < N$. Pentru simplificare se consideră în continuare cazul $k = 2$.

Se definește mulțimea: $A_2 = \{x_1 x_1, x_1 x_2, \dots, x_1 x_N, \dots, x_N x_N\}$, mulțimea tuturor produselor de forma $x_i x_j$, între elementele mulțimii A_1 , luate o singură dată. Se va căuta soluția $f_{opt}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, în subspațiul generat de A_1 și A_2 . Acest lucru este realizabil prin utilizarea unui filtru neliniar cu structură Volterra de ordinul al-II-lea. Semnalele $x[n]$ și $s[n]$ sunt considerate ergodice și având media nulă. Răspunsul sistemului este în acest caz:

$$\hat{s}[n] = h_0 + \sum_{i=0}^{N-1} h_i x[n-i] + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1-N} h_{ij} x[n-i] x[n-j]
 \tag{3.29}$$

unde h_i, h_{ij} sunt coeficienții nucleului liniar respectiv pătratic de filtrare. Termenul liber h_0 , va fi ales astfel încât media semnalului $s[n]$ să fie nulă:

$$h_0 = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1-N} h_{ij} r_{xx}[i-j]
 \tag{3.30}$$

Datorită distribuției de probabilitate gaussiene a semnalului de intrare, $x[n]$ și $x[n-i]x[n-j]$ sunt ortogonale.

$$\langle x[n-k], x[n-i]x[n-j] \rangle = 0 \quad \text{pt. } k \neq i \neq j
 \tag{3.31}$$

Aceasta face ca spațiile A_1 și A_2 definite mai sus să fie ortogonale. În acest caz minimul erorii medii medii pătratice poate fi aflat utilizând teoria liniară aplicată asupra spațiului generalizat: $A = A_1 \cup A_2$. Soluția va rezulta și în acest caz în urma aplicării teoremei proiecției în spațiul generalizat A .

Eroarea medie pătratică se poate scrie sub forma:

$$\|e\|^2 = \left\| s - \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_i x_i + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} h_{ij} (x_i x_j - r_{xx}(i-j)) \right] \right\|^2 \quad (3.32)$$

Soluțiile pentru coeficienții h_i , respectiv h_{ij} sunt oferite de relațiile:

$$\begin{aligned} \langle e, x_i \rangle &= 0, & \text{pt. } i = \overline{1, N} \\ \langle e, x_i x_j \rangle &= 0, & \text{pt. } i, j = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Se introduc notațiile suplimentare:

$$\begin{aligned} \langle s, x_i x_j \rangle &= t_{sx}(i, j) \\ T_{sx} &= \begin{bmatrix} t_{sx}(0,0) & \cdots & t_{sx}(0, N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{sx}(N-1,0) & \cdots & t_{sx}(N-1, N-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Matricea intercorelațiilor între elementele $x_i, x_i x_j$ devine:

$$C = \begin{bmatrix} \langle x_i, x_j \rangle & \cdots & \langle x_i, x_j x_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_j x_k, x_i \rangle & \cdots & \langle x_i x_j, x_k, x_m \rangle - r_{xx}(i, j)r_{xx}(k, m) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Dacă ținem cont de proprietatea variabilelor aleatoare cu distribuție mutuală de probabilitate de tip gaussian:

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_j x_k \rangle &= 0 \\ \langle x_i x_j, x_k x_m \rangle &= r_{xx}(i, j)r_{xx}(k, m) + r_{xx}(i, k)r_{xx}(j, m) + r_{xx}(i, m)r_{xx}(j, k) \end{aligned} \quad (3.36)$$

matricea C devine:

$$C = \begin{bmatrix} r_{xx}(i, j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{xx}(i, j)r_{xx}(j, m) + r_{xx}(i, m)r_{xx}(j, k) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Coeficienții filtrului Volterra vor fi dați de următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} r_{xx}(i, j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{xx}(i, j)r_{xx}(j, m) + r_{xx}(i, m)r_{xx}(j, k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{N-1} \\ h_{00} \\ \vdots \\ h_{N-1N-1} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} r_{sx}(0) \\ \vdots \\ r_{sx}(N-1) \\ t_{sx}(0,0) \\ \vdots \\ t_{sx}(N-1, N-1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow CH = R \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

În cazul gaussian matricea C este inversabilă. Se notează cu R_{xx} matricea autocorelațiilor dintre elementele x_i .

Rezolvarea sistemului duce la următoarea soluție:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix} = R_{xx}^{-1} R_{sx} R_{xx} \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-10} & h_{N-11} & \cdots & h_{N-1N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} R_{xx}^{-1} T_{sx} R_{xx} \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Din relația 3.39 se poate observa că operatorul de filtrare liniar, ce intră în componența FV2 și ai cărui coeficienți sunt conținuți de matricea H_1 , este același ca și în cazul filtrării liniare optimale. În consecință, pentru a construi filtrul Volterra de ordinul al-II-lea e suficient să conectăm în paralel cu filtrul liniar, filtrul pătratic ai cărui coeficienți sunt conținuți de matricea H_2 .

Schema filtrului Volterra de ordinul al-II-lea e indicată de figura 3.4.

Analizând 3.39 se observă că pentru calculul coeficienților operatorului pătratic e necesar calculul inversei R_{xx}^{-1} , rezultat ce poate fi preluat din operația de determinare a coeficienților operatorului liniar.

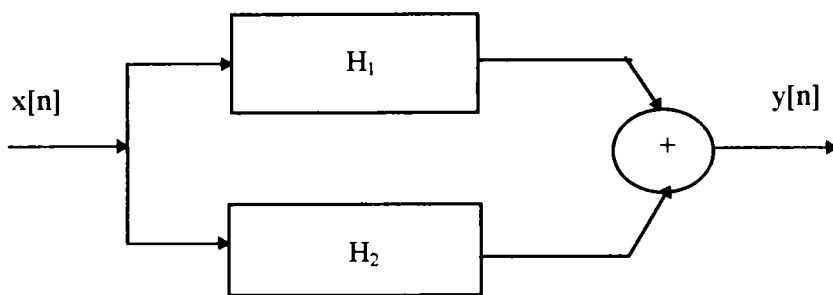


Figura 3.4 Filtru Volterra de ordinul al-II-lea

Întrucât matricea autocorelațiilor semnalului de intrare este o matrice Toeplitz, numărul operațiilor necesare pentru calculul inversei este N^2 , unde N reprezintă rangul matricei R_{xx} [14].

În cazul general, al unui semnal de intrare care nu e

gaussian, matricea ce trebuiește inversată are dimensiunea: $\frac{N(N+3)}{2} \times \frac{N(N+3)}{2}$ și are ca elemente funcțiile de corelație de ordine II, III și IV ale lui $x[n]$. Numărul de operații necesar pentru calculul acestei inverse este de ordinul lui N^6 .

Pentru a evalua performanțele filtrului Volterra de ordinul al-II-lea optimal se calculează eroarea medie pătratică definită conform relației de mai jos [14]:

$$\xi_{opt} = r_s(0) - R_{sx}^T R_{xx}^{-1} R_{sx} - \frac{1}{2} tr \left\{ R_{xx}^{-1} T_{sx} R_{xx}^{-1} T_{sx} \right\} \quad (3.40)$$

unde: $r_s(0) = E \left[s^2[n] \right]$, R_{xx}^T reprezintă transpusa matricei R_{xx} , iar prin $tr \{ \}$ s-a notat urma (trasa) matricei.

Primii doi termeni din relația 3.40 sunt aceeași cu cei întâlniți în expresia erorii în cazul filtrării liniare optimale, al-III-lea termen care este nenegativ reprezintă reducerea produsă asupra erorii prin introducerea operatorului pătratic. În cazul în care $x[n]$ și $s[n]$ au densitate mutuală de probabilitate gaussiană, al-III-lea termen este nul ($T_{sx} = 0_{(NxN)}$) și filtrul optimal linear reprezintă cea mai bună soluție posibilă. Construcția FV2 necesită în plus față de construcția filtrului linear cunoașterea funcției de inter-bicorelație, cu elementele $t_{xx}[k_1, k_2]$, sau a unor estimatori ai acesteia [14].

Semnalul de la ieșirea filtrului din figura 3.4 este dat de relația:

$$y[n] = \sum_{k_1=0}^{N-1} h_1[k_1] x[n-k_1] + \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2[k_1, k_2] (x[n-k_1] x[n-k_2] - r_{xx}[k_1 - k_2]) \quad (3.41)$$

Calculul acestuia în fiecare moment necesită operații de ordinul lui N^2 , unde N este fereastra de filtrare. Se reamintește că în cazul filtrării liniare optimale, folosind un filtru linear de aceeași lungime, sunt necesare N operații pentru calculul răspunsului.

Complexitatea implementării unui astfel de filtru se poate diminua numai prin scăderea performanțelor sale.

Se prezintă în continuare două clase de filtre numerice Volterra, ale căror implementări necesită operații de ordinul lui N și care se bazează pe forme particulare pe care le poate lua nucleul pătratic $h_2 [k_1, k_2]$ [14]:

1. Clasa filtrelor al căror operator de ordinul al-II-lea corespunde conectării în serie a unui multiplicator și a unui filtru liniar(fig.3.5). Semnalul de la ieșirea sistemului este:

$$y[n] = \sum_{k_1=0}^{N-1} h_1[k_1] (x^2[n - k_1] - r_{xx}[0]) \quad (3.42)$$

Matricea H_2 ce conține coeficienții filtrului pătratic este în acest caz o matrice diagonală, adică: $h_2 [k_1, k_2] = 0$ pt $k_1 \neq k_2$.

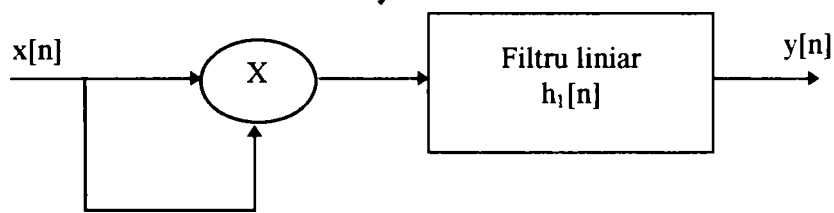


Figura 3.5 Schema bloc a filtrului corespunzător clasei 1.

2. Clasa filtrelor al căror operator de ordinul al-II-lea corespunde conectării a două sisteme liniare conform schemei din figura 3.6.

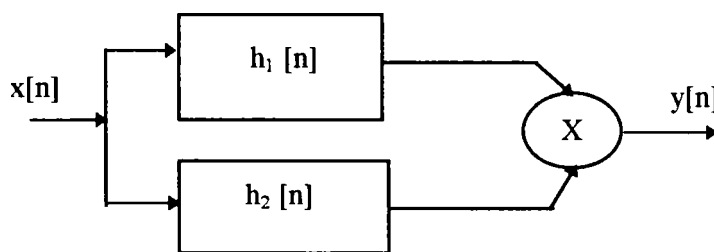


Figura 3.6 Schema bloc a filtrului corespunzător clasei 2

Semnalul de intrare este în acest caz:

$$y[n] = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_1[k_1] h_2[k_2] (x[n - k_1] x[n - k_2] - r_{xx}[k_1 - k_2]) \quad (3.42')$$

În acest caz elementele operatorului pătratic sunt de forma:

$$h_2 [k_1, k_2] = \frac{h_1[k_1] h_2[k_2] + h_1[k_2] h_2[k_1]}{2}$$

Extinderea tehnicilor mai sus prezentate pentru filtrele Volterra de ordin superior ridică unele probleme. Din punct de vedere teoretic ne așteptăm ca această extindere să fie directă întrucât structura bazată pe operația de convoluție se transmite filtrelor Volterra de ordin superior. Trebuie remarcat că, în acest cazuri, datorită cuplării statistice între termenii de ordin par sau impar apar probleme în plus. O posibilă tehnică de a înlătura aceste probleme constă în utilizarea unui set de funcționale ortogonale formate cu ajutorul polinoamelor Hermite [44]. Ortogonalitatea termenilor unui filtru Volterra de ordin superior poate simplifica substanțial analiza și proiectarea lui. De fapt, expresia ieșirii FV2, în cazul unui semnal de intrare gaussian, constă în o formă ortogonalizată.

O altă problemă importantă pe care o ridică FV de ordin superior este cea legată de complexitatea calculului, care crește exponențial cu ordinul filtrului devenind critică chiar și în cazul unui filtru de lungime moderată. De aceea, comparația între complexitatea calculului și îmbunătățirea performanțelor trebuie făcută cu multă atenție.[92],[93].

3.3. Limitări ale seriilor Volterra

Există în principal două probleme în legătură cu aplicarea în practică a modelării sistemelor neliniare cu ajutorul seriilor Volterra.

Prima problemă constă în dificultatea procedurii de măsurare a nucleelor Volterra ale unui sistem dat, întrucât acesta presupune separarea contribuției fiecărui operator în cadrul răspunsului sistemului. În cazul sistemelor de ordin finit metoda de măsurare se bazează pe separarea succesivă a operatorilor Volterra, începând cu operatorul având ordinul cel mai mare [23]. Această metodă nu este aplicabilă la modul general întrucât ordinul sistemului neliniar nu este cunoscut apriori.

Cea de-a doua problemă o constituie convergența seriilor Volterra. Modelarea cu ajutorul seriilor Volterra a unui sistem fizic este validă numai pentru un domeniu limitat al semnalului de intrare. Acest lucru se datorește convergenței seriei Volterra, similară convergenței seriei Taylor. Datorită convergenței limitate a seriei, reprezentarea cu ajutorul ei a sistemelor care prezintă neliniarități pronunțate, ca de exemplu sisteme ce conțin elemente de saturație, nu este posibilă. Rezultă de aici o trăsătură importantă și anume: seriile Volterra pot fi aplicate, cu rezultate bune, numai în cazul sistemelor neliniare "slabe" care se reprezintă prin funcții analitice.

Convergența seriilor Volterra atât pentru semnale deterministe cât și pentru semnale aleatoare a fost intens studiată în literatura de specialitate[37], [43].

Cele două probleme pe care seriile Volterra le introduc în modelarea sistemelor neliniare au fost depășite de către Norbert Wiener (1958). Metoda de modelare propusă de Wiener are la bază aproximarea unei funcții cu ajutorul unei sume de polinoame ortogonale de diferite ordine. Astfel, utilizând tehnica de ortogonalizare Gram-Schmidt, Wiener a ortogonalizat seria Volterra folosind presupunerea importantă că intrarea e un proces brownian [25], care reprezintă integrala unui proces alb gaussian. În mod uzual, însă, se prezintă metoda introdusă de Wiener în ipoteza unui semnal de intrare gaussian.

Principalele probleme pe care Wiener le-a rezolvat prin introducerea seriilor care-i poartă numele sunt:

- A extins posibilitatea de modelare asupra sistemelor reprezentate prin funcții neanalitice lucru imposibil de realizat cu ajutorul seriei Taylor întrucât calculul coeficienților seriei presupune ca funcția ce urmează a se aproxima să fie analitică.
- A rezolvat problema introdusă de trunchiere. Seria Taylor trunchiată la n termeni nu reprezintă, în general, cea mai bună aproximare de grad n .
- Wiener și-a construit modelul introducând utilizarea polinoamelor ortogonale în analiza funcțională [25]. Aplicând-o seriei Volterra a rezultat astfel o dezvoltare în serie ai cărei termeni sunt funcționale ortogonale, cunoscută sub numele de seria Wiener. Ortogonalitatea funcționalelor este adevărată doar în cazul unui semnal de intrare de tip zgomot alb gaussian, de unde și numele acestora: funcționale-G. Ortogonalitatea funcționalelor atrage după sine două proprietăți importante: seria Wiener trunchiată la un anumit număr de termeni reprezintă cea mai bună aproximare, de ordin egal cu numărul de termeni ai seriei, a sistemului; nucleele sistemului se pot calcula independent.

3.4. Utilizarea funcționalelor-G pentru caracterizarea unui sistem neliniar

Pentru a elimina principalele probleme pe care le ridică aplicarea seriei Volterra în caracterizarea unui sistem neliniar, N. Wiener a definit, pornind de la funcționalele Volterra, un nou set de funcționale. El a numit setul de funcționale " funcționale-G", datorită proprietății lor de a fi ortogonale atunci când semnalul de intrare e zgomot alb gaussian.

Introducerea funcționalelor-G necesită definirea funcționalelor Volterra omogene, ca fiind acele funcționale care satisfac relația: $H_n [cx(t)] = c^n H_n [x(t)]$, unde c este o constantă. Dacă condiția de mai sus nu este îndeplinită, funcționala este neomogenă.. O funcțională Volterra neomogenă de gradul întâi este definită de relația:

$$g_1 [h_1, h_{0(1)}; x(t)] = H_1 [x(t)] + H_{0(1)} [x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 + h_{0(1)} \quad (3.43)$$

Funcționalele-G sunt un set de funcționale Volterra neomogene, notat $g_n [k_n, k_{n-1(n)}, \dots, k_{0(n)}; x(t)]$ și care se bucură de proprietatea:

$$\overline{H_m [x(t)] g_n [k_n, k_{n-1(n)}, \dots, k_{0(n)}; x(t)]} = 0 \quad ; \quad m < n \quad (3.44)$$

În relația 3.44 $H_m[x(t)]$ reprezintă operatorul Volterra omogen de ordin m , iar $k_n, k_{n-1(n)}, \dots, k_{0(n)}$ reprezintă nucleele operatorilor G . Pentru semnalul $x(t)$ s-a făcut presupunerea că este de tip zgomot alb având funcția de autocorelație dată de relația: $R_{xx}(\tau) = A\delta(\tau)$.

Setul de funcționale astfel definit $g_n[k_n, k_{n-1(n)}, \dots, k_{0(n)}; x(t)]$ este ortogonal pe orice funcțională Volterra de grad mai mic decât n când semnalul de intrare este zgomot alb gaussian. Se obișnuiește să se noteze setul de funcționale astfel definit prin $G_n[k_n; x(t)]$, marcând numai nucleul de ordin superior întrucât nuclee de ordin inferior se pot determina pe baza acestuia. Pentru a deduce expresiile pentru G_1, G_2, \dots, G_n , se definește:

$$G_0[k_0; x(t)] = k_0 \quad (3.45)$$

unde k_0 este o constantă a cărei valoare depinde de semnalul de intrare.

Condiția de ortogonalitate exprimată de relația 3.44 permite determinarea funcționalelor de diferite ordine. Astfel, $G_1[k_1; x(t)]$ definită de relația :

$$G_1[k_1; x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(\tau_1)x(t - \tau_1)d\tau_1 + k_{0(1)} \quad (3.46)$$

se bucură de proprietatea :

$$\overline{H_0[x(t)]g_1[k_1, k_{0(1)}; x(t)]} = 0 \quad (3.47)$$

Condiția din relația 3.47 conduce la următoarea expresie pentru G_1 :

$$G_1[k_1; x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(\tau_1)x(t - \tau_1)d\tau_1 \quad (3.48)$$

care reprezintă răspunsul unui sistem liniar și invariant în timp, caracterizat de funcția răspuns la impuls $k_1(\tau_1)$, la semnalul de intrare $x(t)$.

Funcționala $G_2[k_2; x(t)]$ este funcționala Volterra neomogenă definită prin:

$$\begin{aligned} G_2[k_2; x(t)] = & k_{0(2)} + \int_{-\infty}^{+\infty} k_{1(2)}(\tau_1)x(t - \tau_1)d\tau_1 + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\tau_1, \tau_2)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Impunând și în acest caz condiția de ortogonalitate, obținem relațiile :

$$\begin{aligned} \overline{H_0[x(t)]G_2[k_2; x(t)]} &= 0 \\ \overline{H_1[x(t)]G_2[k_2; x(t)]} &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Rezolvând ecuațiile din relația 3.50, rezultă:

$$G_2[k_2; x(t)] = -A \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.51)$$

3.5. Relația între reprezentarea unui sistem neliniar prin funcționale Wiener și funcționale Volterra

Reprezentarea unui sistem neliniar cu ajutorul funcționalelor Volterra se face conform relației:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n[x(t)] \quad (3.52)$$

unde operatorul Volterra H_n poate fi descris cu ajutorul nucleului h_n după cum s-a arătat în relația 2.33. Reprezentarea prin funcționale Wiener pentru același sistem e de forma:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[k_n; x(t)] \quad (3.53)$$

În cele prezentate mai sus prin h_n , respectiv prin k_n s-au notat nuclee Volterra respectiv nucleele Wiener.

În general nucleele Wiener atașate unui sistem neliniar sunt diferite de cele Volterra. Pentru a ilustra această diferență se consideră un sistem neliniar de ordinul cinci reprezentat prin:

$$y(t) = \sum_{n=0}^5 G_n[x(t)] \quad (3.54)$$

Pentru a obține nuclee Volterra ale aceluiași sistem este necesară gruparea tuturor nucleelelor de același ordin în 3.54. Lucrul acesta se poate realiza simplu pe baza tabelului de mai jos:

TABELUL I

Funcționala-G	Nuclee de ordin zero	Nuclee de ordin I	Nuclee de ordin II	Nuclee de ordin III	Nuclee de ordin IV	Nuclee de ordin V
G ₀	K ₀					
G ₁		K ₁				
G ₂	K ₀₍₂₎		K ₂			
G ₃		K ₁₍₃₎		K ₃		
G ₄	K ₀₍₄₎		K ₂₍₄₎		K ₄	
G ₅		K ₁₍₅₎		K ₃₍₅₎		K ₅

După cum se poate observa diagonala principală conține nuclee Wiener de diverse ordine. Celelalte sunt nuclee Wiener derivate.

Adunând nucleele situate pe aceeași coloană se obține nucleul Volterra de un anumit ordin:

$$\begin{aligned}
 h_5 &= k_5 \\
 h_4 &= k_4 \\
 h_3 &= k_3 + k_{3(5)} \\
 h_2 &= k_2 + k_{2(4)} \\
 h_1 &= k_1 + k_{1(3)} + k_{1(5)} \\
 h_0 &= k_0 + k_{0(2)} + k_{0(4)}
 \end{aligned}
 \tag{3.55}$$

După cum se poate observa nucleul Volterra de un anumit ordin se obține adunând la nucleul Wiener de același ordin, toate nucleele derivate de același ordin.

Relația pune în evidență un rezultat important și anume acela că nucleele Wiener depind de puterea semnalului de intrare. Într-adevăr, din relația 3.55 se poate deduce:

$$k_3 = h_3 - k_{3(5)} \tag{3.56}$$

Dar întrucât: $k_5 = h_5$, se obține în final pentru k_3 expresia:

$$k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - 10A \int_{-\infty}^{+\infty} h_5(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_4) d\tau_4 \tag{3.57}$$

Deși nucleele Wiener depind de puterea zgomotului alb gaussian utilizat pentru determinarea lor, reprezentarea unui sistem neliniar cu ajutorul funcționalelor-G este validă indiferent de semnalul de intrare. Acest lucru se datorează faptului că

reprezentările 3.52 și 3.53 sunt echivalente, iar nucleele Volterra nu depind de semnalul de intrare.

3.6. Măsurarea nucleelor Wiener

Se prezintă în continuare procedeul de măsurarea a nucleelor Wiener utilizate în reprezentarea cu ajutorul funcționalelor- G a unui sistem neliniar. Pentru exemplificare s-a ales sistemul neliniar necunoscut, al cărui răspuns $y(t)$ este dat de relația:

$$y(t) = \sum_{i=0}^n G_i [k_i; x[t]] \quad (3.58)$$

Determinarea nucleelor k_i , se realizează impunând condițiile de ortogonalitate. Astfel, pentru determinarea nucleului k_0 avem condiția:

$$\overline{h_0 G_n [k_n; x(t)]} = 0 \quad , \quad pt. \quad n \geq 1 \quad (3.59)$$

care conduce la soluția:

$$k_0 = \overline{y(t)} \quad (3.60)$$

presupunând că: $h_0=1$.

Nucleul de ordinul întâi se poate măsura folosind schema din figura 3.7. Semnalul de la ieșirea mediatorului este în acest caz:

$$\overline{y(t) D_1 [x(t)]} = \overline{\sum_{i=0}^n G_i [k_i; x(t)] D_1 [x(t)]} = A k_1 (\sigma_1) \quad (3.61)$$

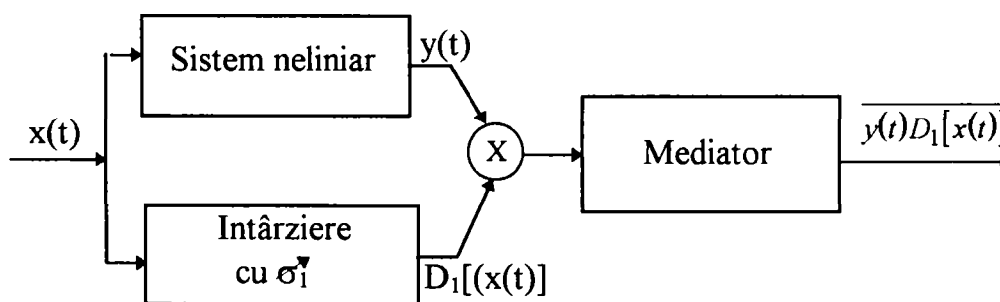


Figura 3.7 Schema de măsurare a nucleului Wiener de ordinul întâi pentru un sistem neliniar necunoscut

În deducerea relației 3.61 s-a ținut cont de următoarele considerații:

-sistemului de întârziere i se poate atașa un operator Volterra omogen de ordinul întâi : $D_1 [x(t)] = x(t - \sigma_1)$, care poate fi descris cu ajutorul integralei de convoluție:

$$D_1[x(t)] = \int_0^{\infty} \delta(\tau_1 - \sigma_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (3.62)$$

Într-adevăr, nucleul Volterra al operatorului este:

$$d_1(\tau_1) = \delta(\tau_1 - \sigma_1) \quad (3.63)$$

Condiția de ortogonalitate se poate scrie în acest caz:

$$\overline{D_1 G_n[k_n; x(t)]} = 0 \quad \text{pt. } n \geq 2 \quad (3.64)$$

Din relația 3.61 se poate deduce :

$$k_1(\sigma_1) = \frac{1}{A} \overline{y(t) D_1[x(t)]} \quad (3.65)$$

În practică nucleul este determinat într-un număr finit de puncte σ_i .

Măsurarea nucleului k_2 se poate realiza utilizând schema din figura 3.8, semnalul de la ieșirea mediatorului este în acest caz:

$$\overline{y(t) D_2[x(t)]} = \overline{\sum_{i=0}^n G_i[k_i; x(t)] D_2[x(t)]} \quad (3.66)$$

În conformitate cu 3.44 funcționalele Wiener G_i de rang $i > 2$ sunt ortogonale pe $D_2[x(t)] = x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)$ care constituie un operator Volterra omogen de ordinul al-II-lea, cu nucleul: $d_2(\tau_1, \tau_2) = \delta(\tau_1 - \sigma_1)\delta(\tau_2 - \sigma_2)$. Ca urmare a acestui fapt au loc relațiile:

$$\overline{G_0[k_0; x(t)] D_2[x(t)]} = \overline{k_0 x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)} = k_0 A \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \overline{G_1[k_1; x(t)] D_2[x(t)]} &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(\tau_1) \overline{x(t - \tau_1)x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)} d\tau_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Rezultatul nul în relația de mai sus se datorește medierii unui produs ce conține un număr impar de termeni variabile gaussiene de medie nulă.

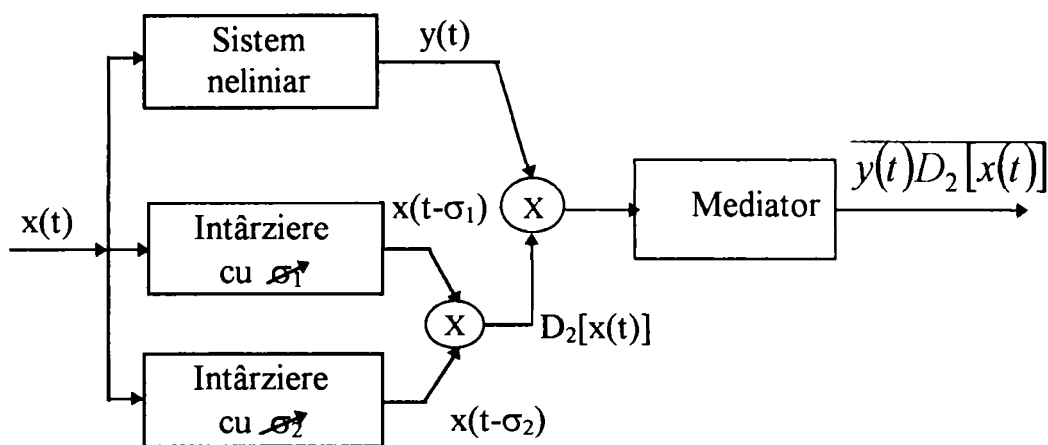


Figura 3.8 Schema de măsurare a nucleului Wiener de ordinul al-II-lea pentru un sistem neliniar

În final, pentru: $i = 2$, obținem:

$$\overline{G_2[k_2; x(t)]D_2[x(t)]} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - A \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1}{2} x(t - \sigma_1) x(t - \sigma_2) = 2A^2 k_2(\sigma_1, \sigma_2) \quad (3.69)$$

Semnalul la ieșirea mediatorului are expresia:

$$\overline{y(t)D_2[x(t)]} = 2A^2 k_2(\sigma_1, \sigma_2) + k_0 A \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.70)$$

cea ce conduce la relația de determinare a nucleului Wiener de ordinul al-II-lea:

$$k_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2! A^2} \overline{y(t)D_2[x(t)]} \quad pt. \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad (3.71)$$

Într-o manieră similară celei utilizate pentru determinarea nucleelor de ordin întâi și doi se pot determina și celelalte nuclee Wiener de ordin superior. Astfel, nucleul de ordinul al-III-lea se poate determina potrivit relației:

$$k_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{3! A^3} \overline{y(t)D_3[x(t)]} \quad pt. \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \quad (3.72)$$

unde: $D_3[x(t)] = x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)x(t - \sigma_3)$.

În final pentru nucleul de ordin n se obține relația:

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! A^n} \overline{y(t) D_n[x(t)]} \quad \text{pt. } \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \neq \sigma_n \quad (3.73)$$

cu: $D_n[x(t)] = x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2) \cdots x(t - \sigma_n)$.

Relațiile 3.71, 3.72 și 3.73 permit determinarea prin puncte a nucleelor Wiener cu anumite restricții referitoare la punctele σ_i . În cazul nucleului de ordinul al-II-lea restricția se referă la acele puncte pentru care $\sigma_1 = \sigma_2$ și se poate anula dacă semnalul aplicat mediatorului este $\{y(t) - G_0[k_0; x(t)]\} D_2[x(t)]$. Semnalul la ieșirea mediatorului este în acest caz:

$$\overline{\{y(t) - G_0[k_0; x(t)]\} D_2[x(t)]} = 2! A^2 k_2(\sigma_1, \sigma_2) \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \quad (3.74)$$

Rezultă:

$$k_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2! A^2} \overline{\{y(t) - G_0[k_0; x(t)]\} D_2[x(t)]} \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \quad (3.75)$$

În mod similar, pentru înlăturarea restricțiilor în măsurarea nucleului de ordinul al-III-lea, se aplică mediatorului semnalul: $\{y(t) - G_1[k_1; x(t)]\} D_3[x(t)]$. Nucleul k_3 se poate determina în acest caz conform relației de mai jos oricare ar fi punctele $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$k_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{3! A^3} \overline{\{y(t) - G_1[k_1; x(t)]\} D_3[x(t)]} \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad (3.76)$$

Având în vedere cele prezentate mai sus putem desprinde următoarele caracteristici referitoare la nucleele Wiener:

1). Nucleele Wiener nu sunt, în general, aceleași cu nucleele Volterra de ordin corespunzător.

De exemplu nucleul Volterra de ordin zero este ieșirea sistemului când intrarea e zero, în timp ce nucleul Wiener de ordin zero este ieșirea mediată pentru un semnal de intrare zgomot alb gaussian. Totuși nucleele de ordin I și II sunt identice când sistemul nu are nuclee de ordin superior. Dacă sistemul constă dintr-o conectare în cascadă a unui sistem liniar dinamic, o neliniaritate statică și o a-II-a componentă dinamică (un sistem LNL), în acest caz nucleele Wiener sunt proporționale cu nucleele Volterra de ordin corespunzător, presupunând că ambele reprezentări există [12].

2). Se afirmă adesea că seria Wiener este mult mai generală decât seria Volterra, pentru că seria Volterra infinită există numai pentru sisteme analitice. Tipul de convergență în cazul seriei Volterra este convergența punctuală. O serie Wiener este o serie ortogonală și converge în medie, în sensul că eroarea medie pătratică poate fi

făcută arbitrar de mică prin includerea unui număr suficient de funcționale în seria trunchiată care aproximează ieșirea sistemului. Astfel se explică afirmația că un număr mai mare de sisteme pot fi tratate prin metoda Wiener cu prețul unei convergențe mai slabe. De exemplu, sistemele ce prezintă regiuni de saturație pot fi reprezentate printr-o serie Wiener infinită în timp ce nu pot fi reprezentate prin serii Volterra. Această importantă distincție teoretică are mai puțină semnificație în practică pentru că reprezentarea unui sistem neliniar prin metoda seriilor de funcționale implică întotdeauna o reprezentare printr-un număr finit de termeni. Tot ceea ce poate fi obținut în practică este o serie Wiener trunchiată care poate fi transformată întotdeauna într-o serie Volterra trunchiată.

3). Modelul Hammerstein (constând dintr-o neliniaritate statică urmată de un sistem liniar dinamic) nu poate fi reprezentat în general de dezvoltarea în serie de funcționale. Ca un exemplu, să considerăm un ridicător la pătrat urmat de un sistem liniar dinamic. Dacă semnalul de intrare în acest sistem Hammerstein e zgomotul alb gaussian, așa după cum cere dezvoltarea în serie de funcționale, atunci ieșirea ridicătorului la pătrat va avea medie infinită. Acest lucru va implica o funcțională Wiener de ordin zero infinită (nucleul de ordin I e zero pentru acest sistem). Pe de altă parte, sisteme Hammerstein în care neliniaritatea statică este descriptibilă printr-un polinom, au reprezentări în serie Volterra. Acest lucru arată că, clasa sistemelor ce pot fi descrise prin serii Wiener, nu este, cel puțin într-un sens, mai largă decât clasa sistemelor ce pot fi descrise prin serii Volterra. Într-adevăr, există un număr infinit de sisteme (numeroase modele Hammerstein) care au dezvoltări Volterra dar care nu au dezvoltări Wiener. Aceste sisteme pot avea însă o dezvoltare Wiener generalizată, numită dezvoltare Wiener-Hermite, construită pentru un semnal de intrare colorat gaussian. Cel mai adesea, dificultatea teoretică de a calcula seria Wiener pentru un model Hammerstein dispare când timpul e discretizat și nu e o problemă practică.

4) După cum este bine cunoscut, intrarea gaussiană este nemărginită și în consecință derivata semnalului gaussian nu e definită. Într-adevăr, din punct de vedere teoretic intrarea utilizată pentru identificarea nucleelor Wiener nu face parte din cadrul semnalelor uniform mărginite și echicontinue la care face referire teorema lui Fréchet când e vorba de aproximarea prin serii Volterra de ordin finit. Din nou acest lucru constituie o diferență fără multă relevanță din punct de vedere practic, pentru că orice intrare fizică este mărginită și suficient de netedă și se întinde numai pe un interval de timp finit. În practică, desigur, identificarea de sistem utilizează versiuni eșantionate ale intrării și ieșirii și pentru astfel de semnale seriile funcționale trunchiate devin un polinom multidimensional. Mai important este faptul că există condiții mai slabe referitor la convergența aproximărilor prin polinoame.

5). Teoria Wiener a fost extinsă pentru analiza sistemelor stochastice neliniare ca și pentru sisteme neliniare cu intrări inaccesibile și cu ieșiri multiple [45].

3.7. Determinarea sistemului optim de un anumit ordin ce modelează un sistem neliniar continuu

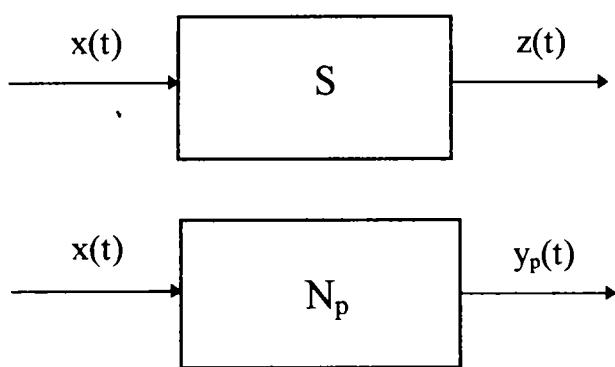


Figura 3.9 Determinarea sistemului model optim de un anumit ordin

Fiind dat sistemul neliniar S din figura 3.9 a cărui comportare o cunoaștem doar prin răspunsul său $z(t)$, la semnalul de intrare $x(t)$, se pune problema găsirii unui sistem invariant în timp, de ordin p care să modeleze sistemul.

Alegând pentru sistemul N_p modelul Volterra de ordin p , putem exprima răspunsul y_p cu relația:

$$y_p(t) = \sum_{n=0}^p H_n[x(t)] \quad (3.77)$$

Întrucât sistemul model se dorește a fi unul cauzal, rezultă: $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0; \forall \tau_i < 0; i = 1, 2, \dots, n$. Eroarea introdusă de modelul considerat în raport cu $z(t)$ este dată de relația:

$$e_p(t) = z(t) - y_p(t) \quad (3.78)$$

Problema constă în determinarea nucleelor $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ astfel încât eroarea medie pătratică să fie minimă. Presupunând că semnalul de intrare este de tip zgomot alb gaussian și exprimând nucleele h_n cu ajutorul nucleelor Wiener k_n se obține pentru $y_p(t)$ expresia:

$$y_p(t) = \sum_{n=0}^p G_n[k_n; x(t)] \quad (3.79)$$

Pe baza nucleelor Wiener se pot calcula nucleele Volterra dacă însumăm toate nucleele Wiener de același ordin în 3.79.

Se va arăta în continuare că nucleele Wiener ale modelului optim de ordin p , al unui sistem având ca intrare un semnal zgomot alb gaussian se obțin prin intercorelație între semnalul de intrare și răspunsul corespunzător. Trebuie remarcat faptul că nu s-a făcut nici o ipoteză în ceea ce privește sistemul ce urmează a fi modelat.

Un procedeu de măsurare a nucleelor Wiener este ilustrat în figura 3.10.

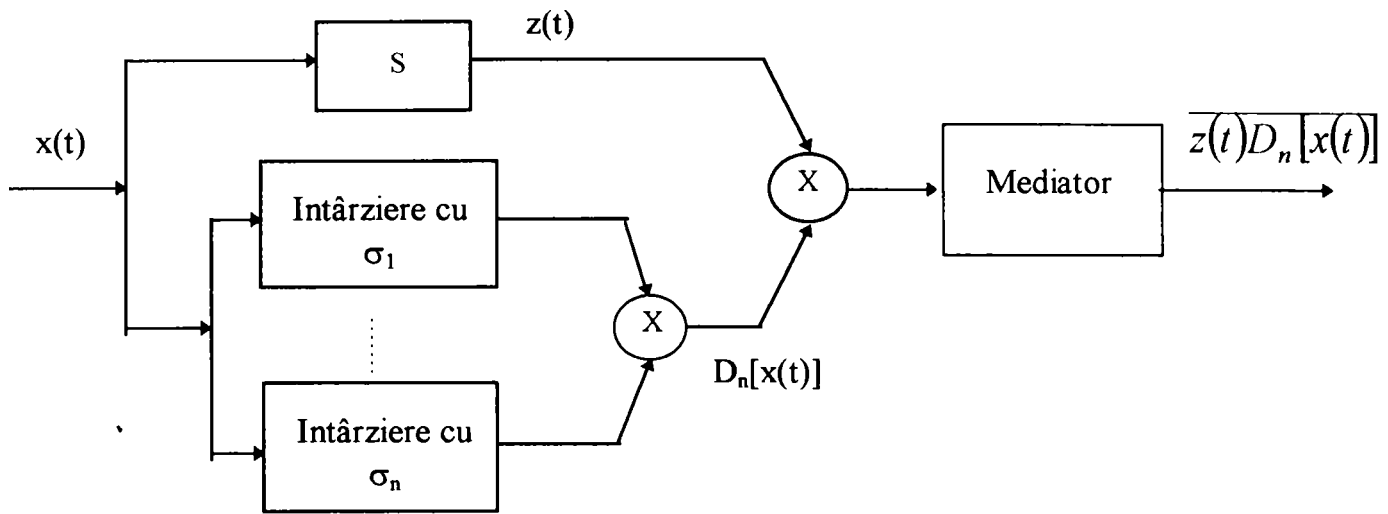


Figura 3.10 Schema de măsurare a nucleului Wiener de ordin n pentru un sistem neliniar S

Formăm setul de funcționale Wiener conform cu relațiile de mai jos:

$$\begin{aligned} G_0[d_0; x(t)] &= 1 \\ G_n[d_n; x(t)] &= D_n[x(t)] + F[x(t)] \end{aligned} \quad (3.80)$$

unde prin $D_n[x(t)]$ s-a notat operatorul:

$$D_n[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.81)$$

cu nucleul: $d_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \delta(\tau_1 - \sigma_1) \dots \delta(\tau_n - \sigma_n)$, iar $F[x(t)]$ reprezintă o sumă de funcționale de ordin mai mic decât n . Ținând cont de proprietatea de ortogonalitate a funcționalelor G se obține:

$$\overline{y_p(t)G_n[d_n; x(t)]} = n! A^n k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.82)$$

pentru $n = 0, 1, \dots, p$, unde $y_p(t)$ este dat de 3.79.

Problema aproximării se reduce la construcția sistemului N_p , având nucleele k_n date de:

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} \frac{1}{n! A^n} \overline{z(t)G_n[d_n; x(t)]}; & \text{pt } \sigma_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \text{pt } n = 0, 1, \dots, p \\ 0 & \text{pt } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad (3.83)$$

Pe de altă parte:

$$\overline{z(t)D_n[x(t)]} = n! A^n k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.84)$$

Se arată în continuare că sistemul N_p astfel determinat reprezintă cea mai bună aproximare a sistemului S în sensul minimizării erorii medii pătratice. Din relațiile 3.82 și 3.84 rezultă:

$$\overline{y_p(t)G_n[d_n; x(t)]} = \overline{z(t)G_n[d_n; x(t)]} \quad ; \sigma_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.85)$$

$$n = 0, 1, \dots, p$$

de unde se obține:

$$\overline{e_p(t)G_n[d_n; x(t)]} = 0; \quad \sigma_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.86)$$

$$n = 0, 1, \dots, p$$

Din 3.86 se pot deduce următoarele relații:

$$\overline{e_p(t)G_0[d_0; x(t)]} = \overline{e_p(t)} = 0$$

$$\overline{e_p(t)G_1[d_1; x(t)]} = \overline{e_p(t)x(t - \sigma_1)} = 0 \quad (3.87)$$

$$\overline{e_p(t)G_2[d_2; x(t)]} = \overline{e_p(t)x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2) + e_p(t)F[x(t)]} = 0$$

Întrucât $F[x(t)]$ este o sumă de funcționale de ordin mai mic decât 2 rezultă în urma aplicării rezultatelor stabilite în 3.87:

$$\overline{e_p(t)x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)} = 0 \text{ pt. } \sigma_1, \sigma_2 \geq 0 \quad (3.88)$$

Prin inducție completă se poate stabili relația:

$$\overline{e_p(t)x(t - \sigma_1) \dots x(t - \sigma_n)} = 0; \sigma_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n; n = 0, 1, \dots, p \quad (3.89)$$

care conduce la următoarea proprietate a lui $e_p(t)$: medierea produsului între $e_p(t)$ și orice funcțională Volterra cauzală a lui $x(t)$, de ordin n , unde $n \leq p$, este zero. În virtutea acestei proprietăți are loc relația:

$$\overline{e_p(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \overline{e_p(t)x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n = 0 \quad (3.90)$$

Folosind acest rezultat se poate arăta că nici un alt sistem model de ordin p nu poate da o eroare medie pătratică mai mică decât $\overline{e_p^2(t)}$, sau altfel spus sistemul N_p reprezintă modelul optim de ordin p pentru sistemul S . Considerăm în acest scop sistemul Q_p , cu ieșirea $w_p(t)$ și setul de nuclee Wiener $\{q_n\}$ ce caracterizează acest sistem. Avem:

$$w_p(t) = \sum_{n=0}^p G_n [q_n; x(t)] \quad (3.91)$$

Eroarea obținută prin modelarea sistemului S cu ajutorul lui Q_p este dată de:

$$\tilde{e}_p(t) = z(t) - w_p(t) = z(t) - y_p(t) + y_p(t) - w_p(t) = e_p(t) + y_p(t) - w_p(t) \quad (3.92)$$

Eroarea medie pătratică este în acest caz:

$$\overline{\tilde{e}_p^2(t)} = \overline{e_p^2(t)} + \overline{(y_p(t) - w_p(t))^2} + 2\overline{e_p(t)(y_p(t) - w_p(t))} \quad (3.93)$$

Utilizând proprietatea de liniaritate a funcționalelor G se poate exprima în final:

$$y_p(t) - w_p(t) = \sum_{n=0}^p G_n [k_n - q_n; x(t)] \quad (3.94)$$

Ținând cont de 3.94 și de proprietatea stabilită în 3.90, expresia erorii devine:

$$\overline{\tilde{e}_p^2(t)} = \overline{e_p^2(t)} + \overline{(y_p(t) - w_p(t))^2} \quad (3.95)$$

Întrucât termenul $\overline{(y_p(t) - w_p(t))^2}$ este strict pozitiv, valoarea minimă pentru $\overline{\tilde{e}_p^2(t)}$ se obține pentru $y_p(t) = w_p(t)$, ceea ce conduce la:

$$\left(\overline{\tilde{e}_p^2(t)}\right)_{\min} = \overline{e_p^2(t)} \quad (3.96)$$

Metoda de identificare mai sus prezentată poate fi extinsă și în cazul unui semnal de intrare gaussian care însă nu e alb [23].

3.8. Identificarea sistemelor neliniare cu semnal colorat gaussian

În practică semnalul de intrare al sistemului care se cere identificat nu este întotdeauna un zgomot alb gaussian. În aceste cazuri se pune problema determinării sistemului optim de ordin p care modelează un astfel de sistem neliniar.

Criteriul de optimizare aplicat și în acest caz îl constituie minimizarea erorii medii pătratice.

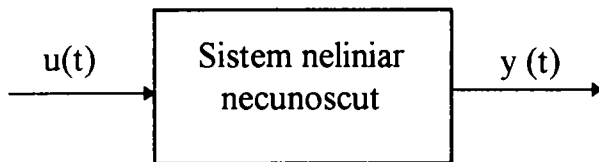


Figura 3.11 Sistem neliniar supus identificării

Se va considera în cele ce urmează identificarea unui sistem neliniar necunoscut, conform schemei din figura 3.11, al cărui semnal de intrare este un semnal colorat gaussian.

Asupra semnalului de intrare se face ipoteza că are densitatea spectrală de putere de forma:

$$\Phi_{uu}(\omega) = \Phi(\omega)\Phi^*(\omega) \quad (3.97)$$

unde funcțiile $\Phi(\omega)$ și $\Phi^*(\omega)$ sunt complex conjugate și funcția $\Phi_{uu}(\omega)$ are polii și zerourile în semiplanul stâng, ceea ce implică că atât $\Phi(\omega)$ cât și $\Gamma(\omega) = \frac{1}{\Phi(\omega)}$ pot fi funcții de transfer ale unor sisteme liniare, cauzale și stabile. Presupunerea făcută asupra densității spectrale de putere a semnalului de intrare corespunde cazurilor practice.

Dacă la intrarea unui sistem caracterizat de funcția $\Phi_{uu}(\omega)$ se aduce un semnal de tip zgomot alb, caracterizat de funcția, $\Phi_{xx}(\omega) = 1$, atunci densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieșirea sa devine:

$$\Phi_{yy}(\omega) = |\Phi(\omega)|^2 \Phi_{xx}(\omega) = \Phi_{uu}(\omega) \quad (3.98)$$

Pentru sistemul cu funcția de transfer $\Gamma(\omega)$ se poate scrie relația:

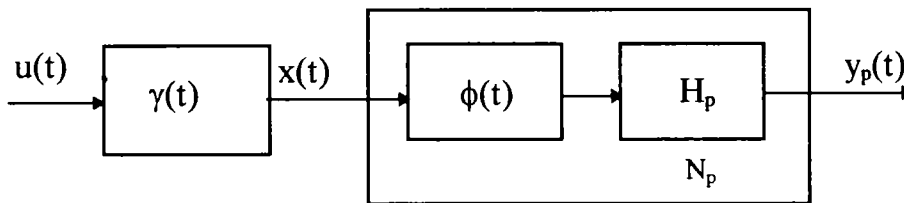
$$|\Gamma(\omega)|^2 = \frac{1}{|\Phi(\omega)|^2} = \frac{1}{\Phi_{uu}(\omega)} \quad (3.99)$$

În cazul în care la intrarea acestui sistem se aduce semnalul $u(t)$, densitatea spectrală a semnalului de la ieșirea sa este:

$$\Phi_{yy}(\omega) = \Phi_{uu}(\omega) |\Gamma(\omega)|^2 = 1 \quad (3.100)$$

În mod uzual filtrul cu funcția de transfer $\Gamma(s)$ și răspuns la impuls $\gamma(t)$ se numește filtru de albire.

Având în vedere că filtrarea liniară conservă caracterul gaussian al semnalului, rezultă că $\Phi_{yy}(\omega)$ din relația 3.100 reprezintă densitatea spectrală de putere a unui zgomot alb gaussian. Rezultă că identificarea sistemului neliniar se va aborda conform schemei din figura 3.12, unde prin H_p s-a notat sistemul model optim de ordin p .



Conform celor arătate anterior, semnalul $x(t)$ este un zgomot alb gaussian. Sistemul N_p se construiește astfel încât să aibe loc relația:

Figura 3.12 Schema de conexiune pentru identificarea cu semnal colorat gaussian

$$e_p^2(t) = [y(t) - y_p(t)]^2 \quad (3.101)$$

În relația 3.101 prin $y(t)$ s-a notat semnalul de la ieșirea sistemului care trebuie identificat conform schemei din figura 3.11.

Conform cu cele prezentate în paragraful 3.7, referitor la identificarea sistemelor neliniare cu semnal de intrare alb gaussian, nucleele Wiener ale sistemului N_p sunt date de:

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} \frac{1}{n!} \overline{y(t)x(t - \sigma_1) \cdots x(t - \sigma_n)}; & \text{pt } \sigma_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \text{pt } n = 0, 1, \dots, p \\ 0 & \text{pt } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad (3.102)$$

Vom arăta în cele ce urmează că sistemul H_p rezultat prin intercalarea filtrului de albire cu răspunsul $\gamma(t)$, ca în figura 3.12, reprezintă modelul optim de ordin p pentru sistemul neliniar.

Folosind relația:

$$u(t) = \int_0^\infty \phi(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (3.103)$$

și ținând cont de:

$$\overline{e_p(t)x(t - \sigma_1) \cdots x(t - \sigma_n)} = 0 \quad \begin{matrix} \text{pt } \sigma_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ n = 0, 1, \dots, p \end{matrix} \quad (3.104)$$

se obține:

$$\overline{e_p(t)u(t-\sigma_1)\cdots u(t-\sigma_n)} = 0 \quad \text{pt. } \sigma_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.105)$$

$$n = 0, 1, \dots, p$$

Vom demonstra în cele ce urmează că sistemul având nucleele date de 3.102 este optim. În acest scop considerăm un alt sistem Q_p având ieșirea $w_p(t)$ când la intrare se aplică $u(t)$ și fie $\{q_n\}$ setul nucleeelor Wiener corespunzătoare lui Q_p . În acest caz avem:

$$w_p(t) = \sum_{n=0}^p G_n [q_n; x(t)] \quad (3.106)$$

Eroarea corespunzătoare lui Q_p este:

$$e_{pq}(t) = y(t) - w_p(t) = e_p(t) + y_p(t) - w_p(t) \quad (3.107)$$

Eroarea medie pătratică va avea expresia:

$$\overline{e_{pq}^2(t)} = \overline{e_p^2(t)} + \overline{[y_p(t) - w_p(t)]^2} + 2e_p(t) \overline{[y_p(t) - w_p(t)]} \quad (3.108)$$

Utilizând liniaritatea funcționalelor G se poate scrie:

$$y_p(t) - w_p(t) = \sum_{n=0}^p G_n [k_n - q_n; x(t)] \quad (3.109)$$

În final se obține:

$$\overline{e_{pq}^2(t)} = \overline{e_p^2(t)} + \overline{[y_p(t) - w_p(t)]^2} \quad (3.110)$$

Termenul al-II-lea al relației 3.110 fiind nenegativ, eroarea medie pătratică minimă se obține în cazul: $y_p(t) = w_p(t)$.

Funcția de intercorelație care intervine în calculul nucleeelor din relația 3.102 poate fi exprimată în funcție de $u(t)$, utilizând relația:

$$x(t) = \int_0^{\infty} \gamma(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (3.111)$$

obținându-se:

$$\begin{aligned}
 R_{yx^n}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \overline{y(t)x(t-\sigma_1)\cdots x(t-\sigma_n)} = \\
 &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \gamma(\tau_1)\cdots\gamma(\tau_n)R_{yu^n}(\sigma_1 + \tau_1, \dots, \sigma_n + \tau_n)d\tau_1 \dots d\tau_n
 \end{aligned}
 \tag{3.112}$$

unde s-a folosit notația:

$$R_{yu^n}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \overline{y(t)u(t-\sigma_1)\cdots u(t-\sigma_n)}
 \tag{3.113}$$

Ecuția 3.113 poate fi exprimată în domeniul frecvență sub forma:

$$\Phi_{yx^n}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \Gamma^*(\omega_1)\dots\Gamma^*(\omega_n)\Phi_{yu^n}(\omega_1, \dots, \omega_n)
 \tag{3.114}$$

unde Φ_{yu^n} este transformata Fourier n dimensională a funcției de intercorelație: $R_{yu^n}(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Dar întrucât: $\Gamma^*(\omega) = \frac{1}{\Phi^*(\omega)}$, relația 3.114 se poate scrie sub forma:

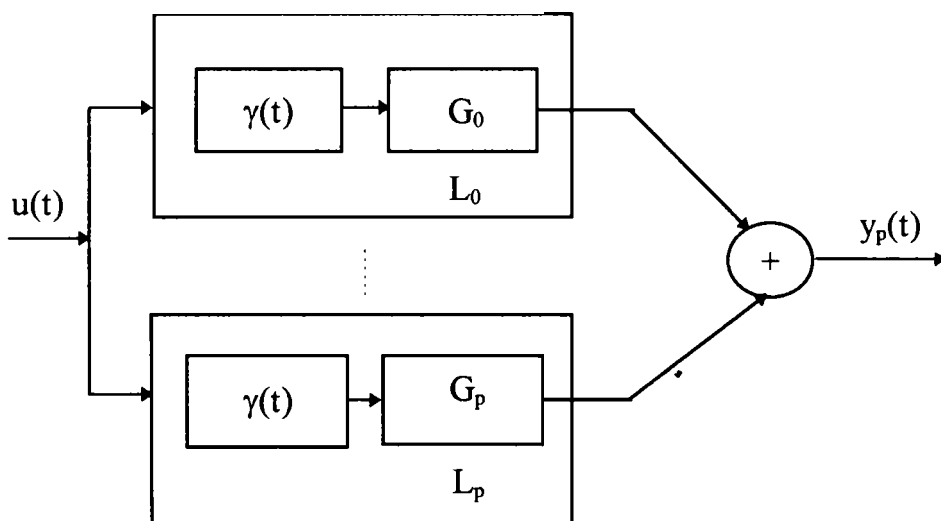
$$\Phi_{yx^n}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{\Phi_{yu^n}[\omega_1, \dots, \omega_n]}{\Phi^*(\omega_1)\cdots\Phi^*(\omega_n)}
 \tag{3.115}$$

În final relația 3.112 devine:

$$R_{yx^n}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi_{yu^n}(\omega_1, \dots, \omega_n)}{\Phi^*(\omega_1)\cdots\Phi^*(\omega_n)} e^{j(\omega_1\sigma_1 + \cdots + \omega_n\sigma_n)}
 \tag{3.116}$$

3.8.1. Funcționalele ortogonale ale unui proces colorat gaussian

Reprezentarea sistemului H_p ale cărui nuclee au fost anterior determinate este arătată în figura 3.13 care pune în evidență setul de funcționale L_i , ortogonale când



semnalul de intrare e un semnal colorat gaussian și are densitatea spectrală de putere $\Phi_{uu}(\omega)$.

Expresiile funcționalelor L_i au fost deduse impunând condițiile de ortogonalitate și sunt:

$$L_0[k_0; u(t)] = k_0 \tag{3.117}$$

Figura 3.13 Reprezentarea modelului cu ajutorul funcționalelor L , conform rel. 3.120

$$L_1[k_1; u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma_1) \gamma(\tau_1 - \sigma_1) u(t - \tau_1) d\sigma_1 d\tau_1 \tag{3.118}$$

Se poate observa că în acest caz, nucleul lui $L_1[k_1; u(t)]$, notat $h_1(t)$, îl reprezintă convoluția dintre $k_1(t)$ și $\gamma(t)$.

Pentru nucleul de ordin n , $h_n(t)$, al funcționalei $L_n[k_n; u(t)]$ s-a găsit expresia:

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \int \dots \int k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \gamma(\tau_1 - \sigma_1) \dots \gamma(\tau_n - \sigma_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \tag{3.119}$$

Semnalul la ieșirea sistemului optim de ordin p se poate scrie ca în relația:

$$y_p(t) = \sum_{n=0}^p L_n[k_n; u(t)] \tag{3.120}$$

în care funcționalele L_n satisfac proprietatea de ortogonalitate:

$$\overline{L_m[k_m; u(t)] L_n[k_n; u(t)]} = 0, \quad \text{pt. } m \neq n \tag{3.121}$$

Transformata în domeniul frecvență a nucleului $h_n(t)$ este:

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = K_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \Gamma(\omega_1) \dots \Gamma(\omega_n) \quad (3.122)$$

Ca o ilustrare a metodei anterior prezentate se va exemplifica determinarea unui sistem model de ordin $p=1$, pentru un sistem neliniar necunoscut. În acest caz răspunsul sistemului model este:

$$y_1(t) = L_0[k_0; u(t)] + L_1[k_1; u(t)] \quad (3.123)$$

Aplicând relațiile 3.102 și 3.117 se obține:

$$L_0[k_0; u(t)] = k_0 = \overline{y(t)} \quad (3.124)$$

Al-II-lea termen din membrul drept al relației 3.123 reprezintă răspunsul la impuls al unui sistem liniar:

$$h_1(\tau) = \int_0^{\infty} k_1(\sigma) y(\tau - \sigma) d\sigma \quad (3.125)$$

și funcție răspuns în frecvență:

$$H_1(\omega) = \frac{K_1(\omega)}{\Phi(\omega)} = \frac{1}{\Phi(\omega)} \int_0^{\infty} R_{yx}(\sigma) e^{-j\omega\sigma} d\sigma \quad (3.126)$$

Relația reprezintă soluția ecuației Wiener-Hopf privind filtrul liniar optimal cu intrare $u(t)$ și ieșire $y(t)$.

3.9. Aprecieri privind eroarea medie pătratică în modelele optimale

O problemă importantă în identificarea unui sistem o constituie analiza erorii. S-a arătat anterior că expresia erorii medii pătratice introduse de sistemul optim de ordin p , H_p , este cea dată de relația 3.101. În continuare se va evalua analitic această eroare fără a fi necesară determinarea modelului optim de ordin p . Expresiile deduse vor putea fi utilizate pentru determinarea ordinului p al modelului astfel încât aproximarea să fie suficient de bună.

Potrivit relațiilor 3.105 și 3.119 se obține:

$$\overline{y_p(t) e_p(t)} = \sum_{n=0}^p \overline{L_n[k_n; u(t)] e_p(t)} = 0 \quad (3.127)$$

astfel încât putem scrie:

$$\overline{y_p(t)y(t)} = \overline{y_p^2(t)} \quad (3.128)$$

și:

$$\overline{e_p^2(t)} = \overline{y^2(t)} - \overline{y_p^2(t)} \quad (3.129)$$

Pentru a obține o expresie a erorii care să nu necesite determinarea modelului optim de ordin p pornim de la relația:

$$\overline{y_p^2(t)} = \overline{y(t)^2} + \sum_{n=1}^p \overline{L_n^2[k_n; u(t)]} \quad (3.130)$$

și exprimăm $\overline{e_p^2(t)}$ conform relației de mai jos:

$$\begin{aligned} \overline{e_p^2(t)} &= \overline{y^2(t)} - \overline{y(t)^2} - \sum_{n=1}^p \overline{L_n^2[k_n; u(t)]} = \\ &= \sigma_y^2 - \sum_{n=1}^p \overline{L_n^2[k_n; u(t)]} \end{aligned} \quad (3.131)$$

Având în vedere modul de construcție al funcționalelor L , conform figurii 3.13, avem: $L_n[k_n; u(t)] = G_n[k_n; x(t)]$, unde: $\Gamma_{xx}(\omega) = 1$. Astfel relația 3.131 devine:

$$\overline{e_p^2(t)} = \sigma_y^2 - \sum_{n=1}^p \overline{G_n^2[k_n; x(t)]} \quad (3.132)$$

Ținând cont de expresia mediei pătratului unei funcționale G [23], obținem:

$$\overline{e_p^2(t)} = \sigma_y^2 - \sum_{n=1}^p n! \int_0^\infty \dots \int_0^\infty k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.133)$$

Relația 3.133 se poate scrie cu ajutorul funcțiilor de intercorelație:

$$\overline{e_p^2(t)} = \sigma_y^2 - \sum_{n=1}^p n! \int_0^\infty \dots \int_0^\infty R_{yx^n}^2(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.134)$$

unde R_{yx^n} e dată de relația:

$$R_{yx^n}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \overline{y(t)x(t-\sigma_1) \dots x(t-\sigma_n)} \quad (3.135)$$

Astfel eroarea medie pătratică pentru sistemul optim de ordinul întâi este:

$$\overline{e_1^2(t)} = \sigma_y^2 - L_1^2[k_1; u(t)] = \sigma_y^2 - \int_0^\infty R_{yx}^2(\tau) d\tau \quad (3.136)$$

În relația 3.136 $R_{yx}(\tau)$ se poate determina pe baza relației:

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^\infty \gamma(\sigma) R_{yu}(\sigma + \tau) d\sigma \quad (3.137)$$

unde:

$$\gamma(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Gamma(\omega) e^{j\omega\sigma} d\omega \quad (3.138)$$

Wiener a stabilit clasa sistemelor neliniare ce pot fi reprezentate cu ajutorul funcționalelor G . Astfel, în problema identificării sistemelor neliniare cu semnal alb gaussian, dacă: $p \rightarrow \infty$, se obține sistemul model optim M_∞ al sistemului S . Eroarea introdusă de acest model este cea mai mică posibilă și e dată de relația:

$$\overline{e_\infty^2(t)} = \sigma_y^2 - \sum_{n=1}^\infty \overline{L_n^2[k_n; u(t)]} \quad (3.139)$$

Relația de mai sus permite precizarea clasei de sisteme fizice pentru care $\overline{e_\infty^2} = 0$, adică a acelor sisteme neliniare ce pot fi reprezentate exact prin funcționale G . Se va prezenta în continuare o abordare euristică a problemei urmând ca ea să fie reluată în Capitolul al-V-lea. Pentru început se poate observa că eroarea dată de 3.139 este finită dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &< \infty \\ \overline{L_n^2[k_n; u(t)]} &< \infty \end{aligned} \quad (3.140)$$

Prima condiție cere ca răspunsul sistemului să aibe dispersia finită, cea de-a doua se poate interpreta dacă ținem cont de expresia funcționalei $L_n[k_n; u(t)]$:

$$\overline{L_n^2[k_n; u(t)]} = \overline{G_n^2[k_n; x(t)]} = n! \int_0^\infty \dots \int_0^\infty k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.141)$$

În deducerea relației 3.141 s-a ținut cont de expresia mediei statistice a produsului între două funcționale G dată în [23]. Întrucât $k_n^2 > 0$, condiția ca integrala din relația de mai sus să aibe o valoare finită impune $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \rightarrow 0$, atunci când $\tau_i \rightarrow \infty$, pentru: $i = 1, 2, \dots, n$. Această concluzie impune o anumită caracteristică operatorilor Volterra după cum se va vedea în cele ce urmează. Termenul principal al funcționalei: $L_n[k_n; u(t)] = G_n[k_n; x(t)]$, este dat de:

$$K_n[x(t)] = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.142)$$

În Capitolul al-II-lea s-a arătat că expresia funcționalei Volterra de ordin n poate fi văzută ca o convoluție n -dimensională și deci valoarea ieșirii la un moment dat se obține ponderând în expresia de mai sus valoarea intrării la un moment de timp T , în trecut este ponderată de valoarea nucleului $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ în punctul de coordonate $\tau_i = T$, $i = 1, 2, \dots, n$. Această valoare de ponderare reprezintă, memoria operatorului Volterra la momentul T în trecut. Având în vedere această interpretare, condiția impusă anterior nucleelor: $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \rightarrow 0$ când $\tau_i \rightarrow \infty$, pentru $i = 1, 2, \dots, n$ stabilește o caracteristică importantă a sistemului și anume aceea de a avea memoria finită.

În concluzie putem afirma că, eroarea medie pătratică introdusă de sistemul model este finită, oricare ar fi ordinul p al modelului, dacă:

- sistemul modelat are dispersia ieșirii finită și
- nu are memorie infinită.

Dacă în plus sistemul este cauzal și invariant în timp, $\overline{e_\infty^2(t)} = 0$, întrucât setul de funcționale Wiener este complet relativ la această clasă de sisteme.

3.10. Măsuri ale neliniarității unui sistem

În paragraful anterior s-a arătat că eroarea introdusă prin utilizarea în identificarea sistemelor neliniare a modelelor aparținând clasei Wiener se bucură de proprietatea că: $\overline{e_\infty^2(t)} = 0$. Aplicând acest rezultat relației 3.139 rezultă :

$$\sigma_y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{L_n^2[k_n; u(t)]} \quad (3.143)$$

Relația de mai sus exprimă Teorema lui Parseval în cazul sistemelor neliniare. Înlocuind acest rezultat în relația 3.132 obținem :

$$\overline{e_p^2(t)} = \sum_{n=p+1}^{\infty} \overline{L_n^2[k_n; u(t)]} \quad (3.144)$$

Ținând cont de cele prezentate în paragraful 3.9, rezultă că $\overline{e_p^2(t)} = 0$ pentru un sistem S de ordin p . Rezultă deci că putem utiliza $\overline{e_p^2(t)}$, pentru a măsura cât de departe este sistemul model S față de un sistem de ordin p . În acest scop se definește o măsură a neliniarității de ordin p conform cu relația de mai jos :

$$\mu_p = 1 - \frac{1}{\sigma_y^2} \overline{e_p^2(t)} = \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} R_{yx^n}^2(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.145)$$

Din relația 3.145 se poate remarca că : $0 \leq \mu_p \leq 1$ și că : $\mu_p = 1$, dacă sistemul S este un sistem de ordin p .

Potrivit relației 3.145, o măsură a liniarității sistemului S este :

$$\mu_1 = \frac{1}{\sigma_y^2} \int_0^{\infty} R_{yx}^2(\tau) d\tau \quad (3.146)$$

unde :

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^{\infty} \gamma^*(\sigma) R_{yu}(\sigma + \tau) d\sigma \quad (3.147)$$

3.11. Avantaje și dezavantaje ale modelării prin seriile Wiener

-Ortogonalitatea funcționalelor G permite obținerea nucleelor Wiener fără a fi necesară rezolvarea setului de ecuații integrale, cum era cazul nucleelor Volterra obținute prin intercorelație.

-Rearanjarea nucleelor Wiener de un anumit ordin duce la obținerea seriei Volterra de ordin finit care aproximează cel mai bine în sensul celor mai mici pătrate, pentru un ordin dat și zgomot alb gaussian utilizat.

-Extinderea aproximării prin serii Wiener trunchiate, prin includerea de funcționale- G de ordin superior nu afectează valorile funcționalelor- G deja determinate.

-Identificarea nucleelor Wiener de ordin superior prin intercorelație este greoaie din punct de vedere al calculului, consumă mult timp și poate determina doar mici modificări ale estimatorului.

CONCLUZII În cadrul primului paragraf a fost abordată problema identificării sistemelor neliniare prin estimarea nucleelor în seria de funcționale.

Ca primă metodă este prezentată metoda de determinare a nucleelor Volterra, pentru sisteme al căror ordin e cunoscut apriori și e finit, metodă propusă de Martin Schetzen [23]. Sunt deduse relațiile de calcul pentru nucleele $h_1(t_1), h_2(t_1, t_2), \dots, h_n(t_1, \dots, t_n)$, asociate sistemelor neliniare caracterizate de operatorii $H_1[]$, $H_2[]$, respectiv $H_n[]$.

Determinarea nucleelor Volterra în cazul unui sistem neliniar în timp discret este realizată într-o manieră originală, ca soluție în problema estimării optimale a unei variabile aleatoare. Pentru simplificarea calculelor s-a ales un filtru Volterra de ordinul al-II-lea. Pornind de la unele limitări pe care le prezintă aplicarea în practică a predicției prin filtrare liniară se introduce noțiunea de estimator Volterra de ordinul al II-lea pentru un semnal de intrare cu distribuție de probabilitate gaussiană.

Coeficienții filtrului Volterra folosit în estimare sunt oferii de relația 3.39. Ca o particularitate se remarcă posibilitatea determinării independente a coeficienților filtrului liniar și a celui pătratic ce intră în structura estimatorului Volterra.

Sunt evaluate performanțele estimatorului Volterra prin calculul erorii medii pătratice (rel. 3.40). În expresia erorii se remarcă prezența unui termen care reprezintă reducerea produsă asupra erorii prin introducerea operatorului pătratic $H_2[]$.

Analizând expresia erorii medii pătratice se remarcă că, în cazul în care $x[n]$ și $s[n]$ au densitatea mutuală de probabilitate gaussiană, filtrarea liniară optimală reprezintă cea mai bună soluție.

Construcția operatorului Volterra necesită în plus, față de construcția filtrului liniar, cunoașterea funcției de inter-bicorelație, cu elementele: $t_{xx}[k_1, k_2]$ (rel 3.39 și rel. 3.34), sau a unor estimatori ai acesteia.

Complexitatea calculului în cazul unui operator Volterra de ordinul al-II-lea e dată de numărul operațiilor necesare pentru calculul inversei matricei R_{xx} . În cazul unui semnal $x[n]$, gaussian, numărul operațiilor necesare pentru calculul inversei este N^2 unde N este lungimea ferestrei de filtrare.

Sunt prezentate două clase de filtre Volterra numerice ale căror implementări necesită operații de ordinul lui N și care se bazează pe forme particulare pe care le poate lua nucleul pătratic. Calculul erorii medii pătratice conduce însă, în ambele cazuri la valori mai mari decât în cazul general prezentat așa după cum se indică în [14].

În cazul unui semnal aleator oarecare dimensiunea matricei R_{xx} fiind $\frac{N(N+3)}{2} \times \frac{N(N+3)}{2}$, numărul operațiilor necesare calculului inversei este de ordinul lui N^6 . În plus matricea R_{xx} poate deveni în unele cazuri singulară.

Soluția în cazul estimatorilor neliniari de ordin superior constă în utilizarea unui set de funcționale ortogonale formate cu ajutorul polinoamelor Hermite [44].

Ortogonalitatea termenilor unui filtru Volterra de ordin superior simplifică substanțial analiza și proiectarea lui.

În paragraful 3.3 sunt prezentate două limitări importante în ceea ce privește aplicarea în practică a modelării sistemelor neliniare cu ajutorul seriilor Volterra și anume:

- dificultatea procedurii de măsurare a nucleelor Volterra ale unui sistem dat
- convergența seriilor Volterra, care restrânge clasa sistemelor neliniare reprezentabile prin serii Volterra la acele sisteme reprezentabile prin funcții analitice.

Norbert Wiener a fost cel care a sesizat primul limitările practice ale reprezentării sistemelor neliniare prin seria de funcționale Volterra. Utilizând tehnica de ortogonalizare Gram-Schmidt, Wiener a ortogonalizat seria Volterra pentru un proces de intrare brownian [25], care e integrala unui proces alb gaussian.

În cadrul paragrafului 3.4 sunt introduse funcționalele-G, ca metodă de caracterizare a sistemelor neliniare. Se dau relațiile de calcul pentru funcționalele de ordin 0, 1 și 2 (rel. 3.45, rel.3.48, rel. 3.49), potrivit condițiilor de ortogonalitate.

Legătura între nucleele Wiener și Volterra, deduse pe baza echivalenței între cele două reprezentări ale aceluiași sistem, este dedusă în paragraful 3.5 și ilustrată de Tabelul 1.

În paragraful 3.6 este prezentată tehnica pentru determinarea în domeniul timp a nucleelor Wiener, introdusă de către Lee și Schetzen [42], [43]. Sunt deduse expresiile pentru nucleele de ordin 0, 1 și 2. Tehnica prezentată va fi dezvoltată în cadrul Capitolului al-VII-lea.

Sunt prezentate deasemenea unele proprietăți ale nucleelor Wiener.

În pagraful 3.7. se demonstrează că modelul Wiener de un anumit ordin reprezintă un sistem modelator optim pentru un sistem neliniar. Modelul optim este obținut pe baza minimizării erorii medii pătratice.

Metoda de identificare a sistemelor neliniare, bazată pe dezvoltarea în serie de funcționale ortogonale este extinsă în cazul unui semnal de intrare gaussian care însă nu e alb. În paragraful 3.8 sunt prezentate funcționalele ortogonale ale unui proces colorat gaussian. Schema de conexiune pentru identificare cu semnal colorat gaussian este indicată în figura 3.12. Se remarcă prezența în acest caz a filtrului de albire a cărui funcție de transfer $\Gamma(\omega)$, satisface relația 3.99. Se demonstrează că și în acest caz sistemul modelator de ordin p , având nucleele date de 3.102 este optim. Funcția de intercorelație care intervine în relația 3.102 are expresia în timp 3.113 sau în frecvență ea poate fi calculată potrivit relației 3.115. Reprezentarea modelului cu ajutorul funcționalelor L, care constituie funcționalele ortogonale ale procesului colorat gaussian este indicată în figura 3.13. Ca o ilustrare a tehnicii prezentate se determină sistemul model de ordin $p = 1$ (rel.3.123), având nucleele date de 3.124 și 3.125.

În paragraful 3.9 sunt făcute aprecieri privind eroarea medie pătratică în modelele optimale, prezentate în cadrul capitolului. Relația 3.133 dă expresia erorii

medii pătratice pentru modelul optim de ordin p , iar relația 3.136 ia în considerare cazul $p = 1$. Pornind de la relația erorii medii pătratice pentru modelul optim de ordin p și trecând la limită pentru $p \rightarrow \infty$, Wiener a stabilit clasa sistemelor neliniare ce pot fi reprezentate cu ajutorul funcționalelor G și anume:

-sistemele să aibe dispersia ieșirii finită

-sistemele să nu aibe memoria infinită

-dacă în plus sistemele sunt cauzale și invariante în timp, $\overline{e_{\infty}^2} = 0$, întrucât setul de funcționale Wiener este complet relativ la această clasă de sisteme.

În paragraful 3.10 se introduce o măsură a neliniarității unui sistem, rel.3.145, pe baza cărei se poate determina ordinul p al sistemului folosit pentru a modela un anumit sistem neliniar.

CAPITOLUL 4. REPREZENTĂRI ORTOGONALE ALE NUCLEELOR WIENER. MODELUL GENERAL WIENER

Se va deduce în continuare modelul general Wiener, bazându-ne pe dezvoltarea nucleelor Wiener cu ajutorul unei serii de funcții ortogonale. Acest lucru va permite o mai bună înțelegere a modului în care sistemele neliniare din clasa Wiener acționează asupra semnalului de intrare. Alegerea funcțiilor Laguerre ca elemente ale seriei de funcții ortogonale este justificată de larga lor utilizare în sinteza operatorilor cauzali.

4.1. Sinteza unui sistem de ordinul întâi cu ajutorul funcțiilor Laguerre

Pornind de la setul de funcții liniar independente $\{v_n(t)\}$ se poate construi un set complet de funcții ortonormale, $\{l_n(t)\}$, unde prin $l_n(t)$, s-a notat funcția Laguerre de ordin n :

$$v_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{pt } t \leq 0 \\ (pt)^n e^{-pt} & \text{pt. } t > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Constanta reală și pozitivă p reprezintă un factor de scalare care permite compresia sau dilatarea funcțiilor $v_n(t)$ pe axa timpului.

Setul de funcții Laguerre $\{l_n(t)\}$, se definește pe baza funcțiilor $v_n(t)$ astfel [48]:

$$l_n(t) = \sum_{m=0}^n c_{mn} v_m(t) \quad (4.2)$$

având proprietatea de ortonormalitate:

$$\int_0^{\infty} l_m(t) l_n(t) dt = \delta_{mn} \quad (4.3)$$

În relația 4.3 prin δ_{mn} s-a notat simbolul lui Kronecker.

Determinarea coeficienților c_{mn} se face astfel încât să fie satisfăcută relația 4.3, care se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} l_n(t) v_m(t) dt &= 0 \quad \text{pt. } m < n \\ \int_0^{\infty} l_n^2(t) dt &= 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aplicând condițiile date de relația 4.4 se pot deduce expresiile funcțiilor Laguerre de diferite ordine. Pentru exemplificare se prezintă mai jos funcțiile Laguerre de ordine 0, 1 și 2.

$$\begin{aligned} l_0(t) &= \sqrt{2p} e^{-pt} \sigma(t) \\ l_1(t) &= \sqrt{2p}(2pt - 1)e^{-pt} \sigma(t) \\ l_2(t) &= \sqrt{2p}[2(pt)^2 - 4(pt) + 1]e^{-pt} \sigma(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Metoda de determinare a funcțiilor Laguerre anterior prezentată poartă denumirea de procedeu de ortogonalizare Gram-Schmidt. Principalul inconvenient al procedurii mai sus amintit constă în dificultatea obținerii unei formule generale pentru $l_n(t)$.

Obținerea formulei generale pentru $l_n(t)$ și deasemenea a unei metode de sinteză a unui sistem liniar invariant în timp (SLIT), cu răspunsul la impuls $l_n(t)$, se poate realiza lucrând în domeniul variabilei complexe $s = \sigma + j\omega$. Transformata Laplace a funcției $l_n(t)$ este definită de relația:

$$L_n(s) = \int_0^{\infty} l_n(t) e^{-st} dt \quad ; \quad \sigma > p \quad (4.6)$$

Expresia din relația 4.2 devine în domeniul s de forma:

$$L_n(s) = \sum_{m=0}^n c_{mn} V_m(s) \quad (4.7)$$

unde $V_m(s)$ reprezintă transformata Laplace a funcției $v_m(t)$. Impunând condiția de ortogonalitate se obține în final:

$$L_m(s) = \sqrt{2p} \frac{(p-s)^n}{(p+s)^{n+1}} \quad \sigma > -p \quad (4.8)$$

Întrucât fiecare funcție Laguerre este zero pentru $t < 0$, este posibilă construirea unui sistem cauzal, liniar și invariant în timp, având răspunsul la impuls $l_n(t)$.

Pentru determinarea schemei bloc a sistemului având funcția de transfer $L_n(s)$, expresia din relația 4.8 se poate scrie sub forma:

$$L_n(s) = \left(\frac{\sqrt{2p}}{p+s} \right) \left(\frac{p-s}{p+s} \right)^n \quad ; \quad \sigma > -p \quad (4.9)$$

Schema bloc a SLIT, având răspunsul la impuls $l_n(t)$ este arătată în figura 4.1

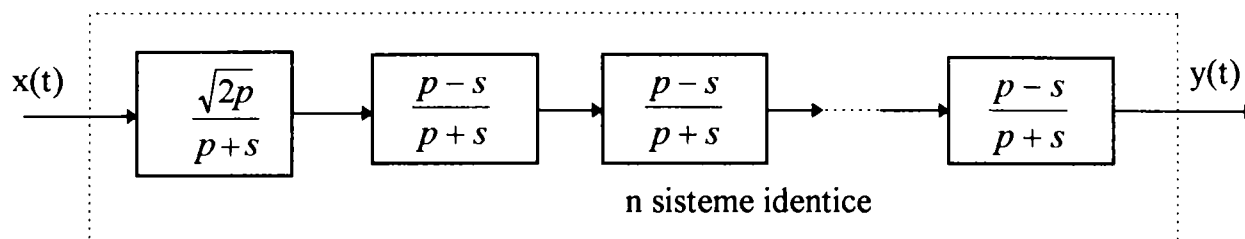


Figura 4.1 Sinteza sistemului cu răspunsul la impuls $l_n(t)$

Întrucât setul funcțiilor Laguerre este un set complet de funcții pe domeniul: $0 \leq t < \infty$, el constituie o bază pentru analiza și sinteza oricărui sistem cauzal, liniar și invariant în timp, al cărui răspuns la impuls satisface relația:

$$\int_0^{\infty} h^2(t) dt < \infty \quad (4.10)$$

Răspunsul la impuls $h(t)$, al sistemului se poate exprima cu ajutorul funcțiilor Laguerre conform relației de mai jos:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n l_n(t) \quad (4.11)$$

unde:

$$a_n = \int_0^{\infty} h(t) l_n(t) dt \quad (4.12)$$

Relația 4.11 exprimă pe $h(t)$ ca o combinație liniară a funcțiilor Laguerre și în consecință schema ce sintetizează un astfel de sistem este cea din figura 4.2.

Sistemul din figura 4.2 reprezintă un model general pentru un sistem Volterra de ordinul întâi, al cărui răspuns la impuls satisface relația: $\int_0^{\infty} h_1^2(t) dt < \infty$.

4.2. Sinteza operatorilor Volterra de ordin superior utilizând funcțiile Laguerre

Conceptul dezvoltat în paragraful 4.1 privind caracterizarea și sinteza unui sistem liniar cu ajutorul funcțiilor ortogonale poate fi extins și pentru sistemele de ordin superior. Considerăm în cele ce urmează un sistem caracterizat de un operator Volterra de ordinul al-II-lea având nucleul $h_2(\tau_1, \tau_2)$. Se presupune îndeplinită relația:

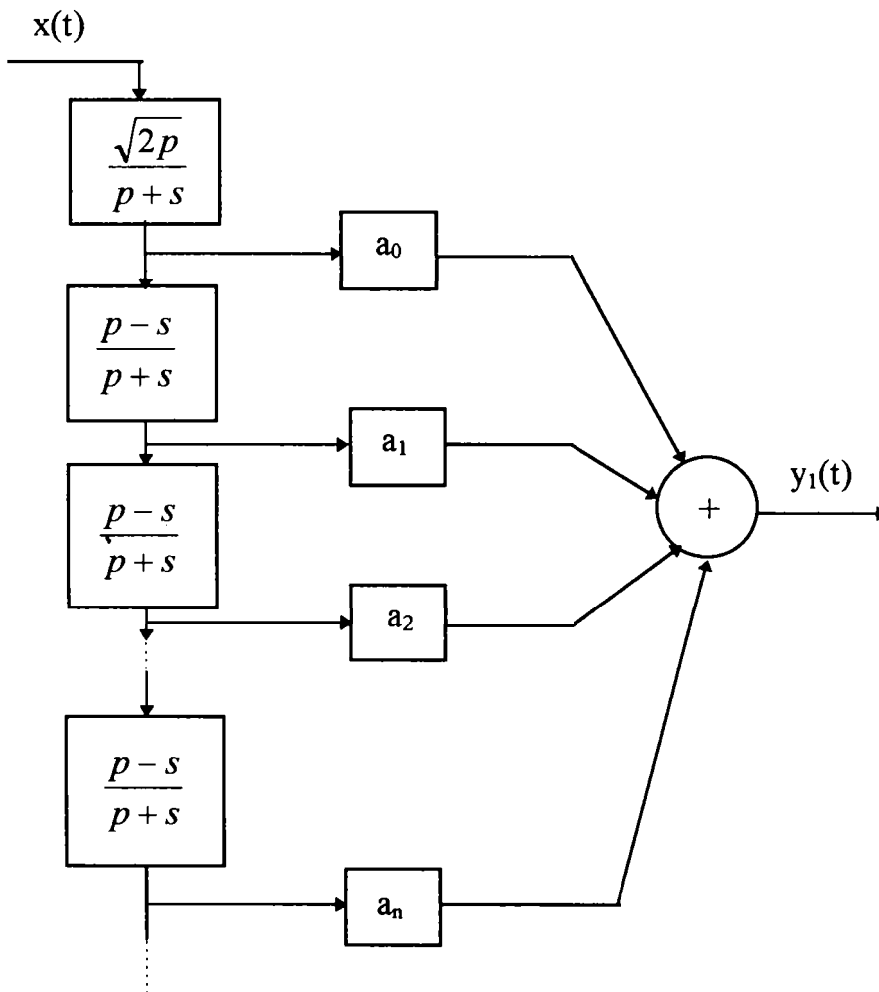
$$\int_0^\infty \int_0^\infty h_2^2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 < \infty \quad (4.13)$$

În aceste condiții putem reprezenta nucleul Volterra cu ajutorul funcțiilor Laguerre conform cu relația de mai jos:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n_1=0}^\infty \sum_{n_2=0}^\infty a_{n_1 n_2} l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) \quad (4.14)$$

unde:

$$a_{n_1 n_2} = \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.15)$$



Relația 4.14 reprezintă dezvoltarea funcției $h_2(\tau_1, \tau_2)$, cu ajutorul seriei Laguerre bidimensionale. Ea s-a obținut aplicând dezvoltarea în serie Laguerre funcției $h_2(\tau_1, \tau_2)$, în raport cu fiecare din cele două variabile τ_1 și τ_2 . Astfel pentru o anumită valoare τ_2 , fixată, $h_2(\tau_1, \tau_2)$, este o funcție numai de τ_1 și în consecință ea poate fi dezvoltată în serie Laguerre conform relației:

Figura 4.2 Sinteza unui sistem LIT în concordanță cu rel. 4.11

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n_1=0}^\infty b_{n_1}(\tau_2) l_{n_1}(\tau_1) \quad (4.16)$$

unde:

$$b_{n_1}(\tau_2) = \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) l_{n_1}(\tau_1) d\tau_1 \quad (4.17)$$

În continuare putem exprima coeficienții $b_{n_1}(\tau_2)$, cu ajutorul seriei Laguerre:

$$b_{n_1}(\tau_2) = \sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} l_{n_2}(\tau_2) \quad (4.18)$$

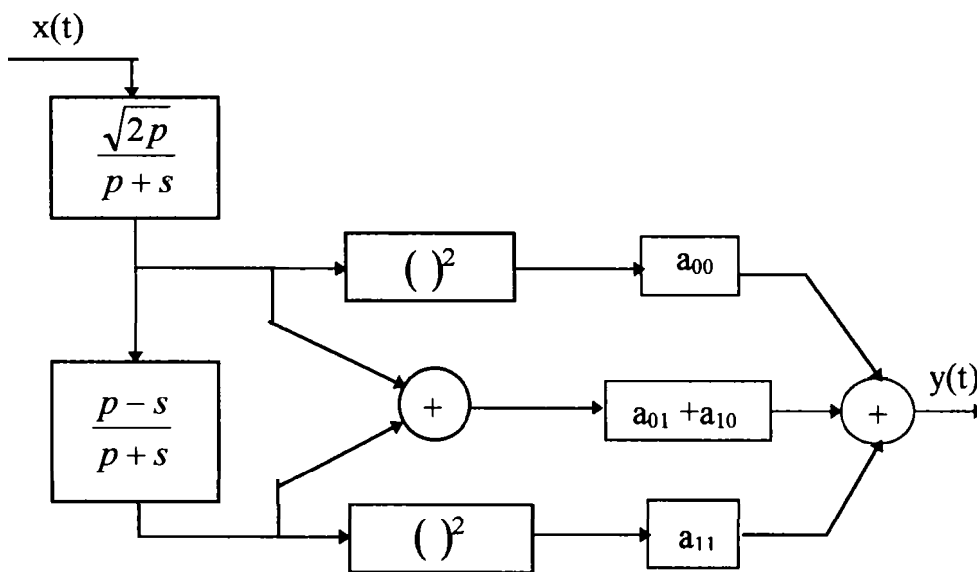
În relația 4.18, coeficienții $a_{n_1 n_2}$ se obțin conform cu:

$$a_{n_1 n_2} = \int_0^{\infty} b_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) d\tau_2 \quad (4.19)$$

Pentru a ilustra modul în care un operator Volterra de ordinul al-II-lea poate fi sintetizat conform relației 4.14, se consideră cazul particular ($n=1$) potrivit căruia avem :

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 a_{n_1 n_2} l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) \quad (4.20)$$

Acest operator se poate sintetiza cu ajutorul schemei din figura 4.3.



Metoda de sinteză anterior prezentată poate fi extinsă și în cazul operatorilor Volterra de ordin superior.

Figura 4.3 Sinteza unui operator Volterra de ordinul al-II-lea având nucleul dat de rel. 4.20

4.3. Dezvoltarea ortogonală a funcționalelor-G

Reprezentarea operatorilor Volterra cu ajutorul funcțiilor ortogonale, anterior prezentată, este utilizată în acest paragraf pentru a obține o dezvoltare ortogonală a funcționalelor-G. Acest lucru va conduce în final la obținerea unui model general pentru un sistem aparținând clasei de sisteme neliniare Wiener.

În cadrul capitolului 3 s-a arătat că nuclee Wiener, k_p , ale unui sistem aparținând clasei de modele Wiener satisfac condiția :

$$\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} k_p^2(\tau_1, \dots, \tau_p) d\tau_1 \dots d\tau_p < \infty \quad (4.21)$$

Această condiție face posibilă reprezentarea nucleului k_p cu ajutorul funcțiilor Laguerre conform relației:

$$k_p(\tau_1, \dots, \tau_p) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_p=0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_p} l_{n_1}(\tau_1) \dots l_{n_p}(\tau_p) \quad (4.22)$$

unde:

$$c_{n_1 \dots n_p} = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} k_p(\tau_1, \dots, \tau_p) l_{n_1}(\tau_1) \cdots l_{n_p}(\tau_p) d\tau_1 \dots d\tau_p \quad (4.23)$$

Bazându-ne pe relația 4.23, și ținând cont de proprietatea de liniaritate a funcționalelor-G, se poate scrie:

$$G_p[k_p; x(t)] = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_p=0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_p} G_p[l_{n_1} \cdots l_{n_p}; x(t)] \quad (4.24)$$

Potrivit relației 4.23, funcționala G_p este complet caracterizată prin coeficienții $c_{n_1 \dots n_p}$. Bazându-ne pe acest rezultat se va prezenta în continuare o metodă de analiză și sinteză a unui sistem neliniar aparținând clasei Wiener.

Fie sistemul neliniar S , cu răspunsul $y(t)$ la un semnal de intrare alb gaussian, caracterizat de setul de nuclee Wiener $\{k_p\}$. Răspunsul sistemului se poate scrie sub forma:

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} G_p[k_p; x(t)] \quad (4.25)$$

Fie sistemul neliniar m -dimensional , având răspunsul $v_m(t)$, la semnalul de intrare $x(t)$. Se reprezintă acest sistem printr-o singură funcțională G , de nucleu g_m , conform relației de mai jos:

$$v_m(t) = G_m [g_m; x(t)] \quad (4.26)$$

Ținând cont de proprietatea de ortogonalitate a funcționalelor G , în cazul unui semnal de intrare gaussian, avem următoarea relație:

$$\begin{aligned} \overline{y(t)v_m(t)} &= \sum_{p=0}^{\infty} \overline{G_p [k_p; x(t)] G_m [g_m; x(t)]} = \\ &= \overline{G_m [k_m; \dot{x}(t)] G_m [g_m; x(t)]} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Dacă privim pe $y(t)$ ca pe un vector în spațiul funcționalelor, cu subspațiile ortogonale G_p , atunci $\overline{y(t)v_m(t)}$ reprezintă proiecția lui $y(t)$ pe $v_m(t)$. Astfel privită problema, sinteza sistemelor neliniare aparținând clasei Wiener se va baza pe determinarea unui set de funcționale ortogonale care formează o bază pentru fiecare subspațiu ortogonal G_p .

Se realizează în acest mod o extensie a spațiului vectorial ordinar definit pe spațiul unei funcții.

Nucleul Wiener de ordin zero: k_0 , se va alege și în acest caz conform relației:

$$k_0 = \overline{y(t)} \quad (4.28)$$

Se va prezenta în cele ce urmează analiza și sinteza nucleului de ordinul întâi, conform dezvoltării:

$$k_1(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l_n(\tau) \quad (4.29)$$

unde $\{l_n\}$ reprezintă setul de funcții Laguerre , iar coeficienții c_n sunt dați de relația:

$$c_n = \int_0^{\infty} k_1(\tau) l_n(\tau) d\tau \quad (4.30)$$

Pentru determinarea experimentală a lui c_n , în 4.27 se va alege $m=1$ și g_1 egal cu funcția Laguerre de ordin n . Rezultă:

$$v_1(t) = G_1 [l_n; x(t)] = \int_0^{\infty} l_n(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (4.31)$$

$$\overline{y(t)v_1(t)} = A \int_0^{\infty} k_1(\tau) l_n(\tau) d\tau = Ac_n \quad (4.32)$$

$$c_n = \frac{1}{A} \overline{y(t)v_1(t)} \quad (4.33)$$

Relația 4.33 sugerează schema din figura 4.4 pentru determinarea experimentală a coeficientului c_n .

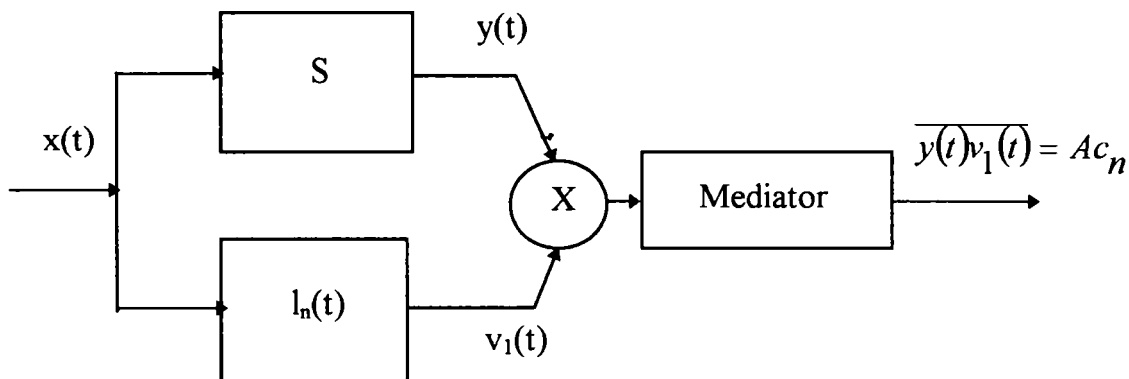


Figura 4.4 Schema pentru determinarea experimentală a coeficienților implicați în sinteza funcționalei G_1

Sinteza funcționalei G de ordinul întâi, G_1 , a cărei expresie e dată de relația 4.34 se va realiza conform schemei din figura 4.5.

$$G_1[k_1; x(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_1[l_n; x(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^{\infty} l_n(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (4.34)$$

Pentru sinteza lui $G_2[k_2; x(t)]$ se va proceda în mod analog. Dezvoltarea Laguerre a nucleului k_2 este:

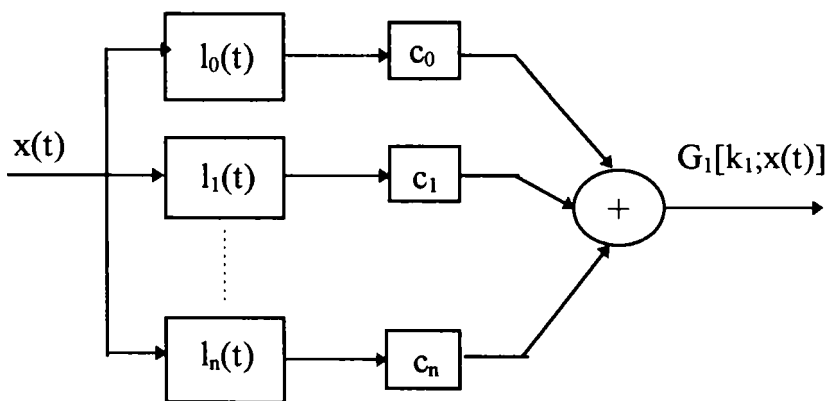


Figura 4.5 Sinteza funcționalei G_1 în concordanță cu rel. 4.34

$$k_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} c_{n_1 n_2} l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) \quad (4.35)$$

cu coeficienții $c_{n_1 n_2}$ dați de relația:

$$c_{n_1 n_2} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.36)$$

Pentru determinarea coeficienților $c_{n_1 n_2}$, se va alege $m=2$, în relația 4.27 și $g_2 = l_{n_1} l_{n_2}$. Rezultă :

$$v_2(t) = G_2[g_2; x(t)] = G_2[l_{n_1} l_{n_2}; x(t)] \quad (4.37)$$

unde pentru expresia lui $g_2(\tau_1, \tau_2)$ s-a folosit relația 4.38. Acest lucru este impus de necesitatea obținerii unui nucleu simetric:

$$g_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} [l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) + l_{n_1}(\tau_2) l_{n_2}(\tau_1)] \quad (4.38)$$

Rezultă:

$$v_2(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - A \delta_{n_1 n_2} \quad (4.39)$$

Sinteza lui $G_2[l_{n_1} l_{n_2}; x(t)]$, în concordanță cu relația 4.39, este arătată în figura 4.6. Pentru obținerea coeficienților $c_{n_1 n_2}$ trebuie pornit în acest caz de la calculul expresiei $\overline{y(t)v_2(t)}$, în care se înlocuiește $v_2(t)$ cu expresia dată de relația 4.39.

$$\overline{y(t)v_2(t)} = 2! A^2 \frac{1}{2} [c_{n_1 n_2} + c_{n_2 n_1}] \quad (4.40)$$

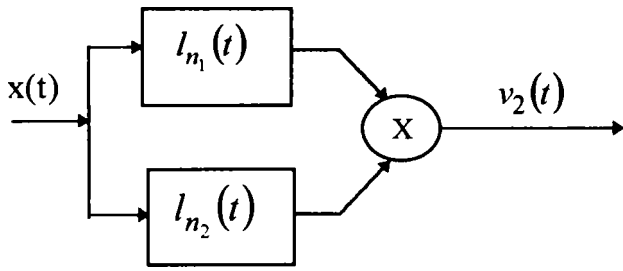
Întrucât $k_2(\tau_1, \tau_2)$ este o funcție simetrică în raport cu argumentele sale rezultă:

$$c_{n_1 n_2} = c_{n_2 n_1}.$$

În aceste condiții relația 4.40 devine:

$$c_{n_1 n_2} = \frac{1}{2! A^2} \overline{y(t)v_2(t)} \quad (4.41)$$

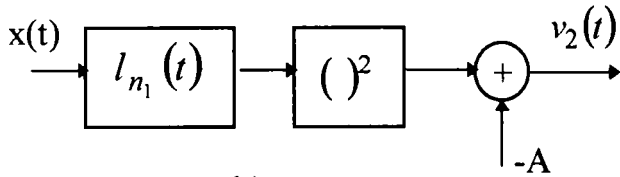
Schema de măsurare a coeficienților $c_{n_1 n_2}$ este prezentată în figura 4.7.



a)

În acest caz funcționalele Wiener de ordinul al-II-lea se pot determina folosind relația:

$$G_2[k_2; x(t)] = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} c_{n_1 n_2} G_2[l_{n_1} l_{n_2}; x(t)] \quad (4.42)$$



b)

Pentru sinteză se va considera cazul special în care :

$$k_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} c_{n_1 n_2} l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) \quad (4.43)$$

Figura 4.6 Sinteza funcționalei

$G_2[l_{n_1} l_{n_2}; x(t)]$. a) $n_1 \neq n_2$. b) $n_1 = n_2$

cea ce conduce la schema din figura 4.8.

Analiza și sinteza funcționalelor G de ordin

superior decurge în mod asemănător.

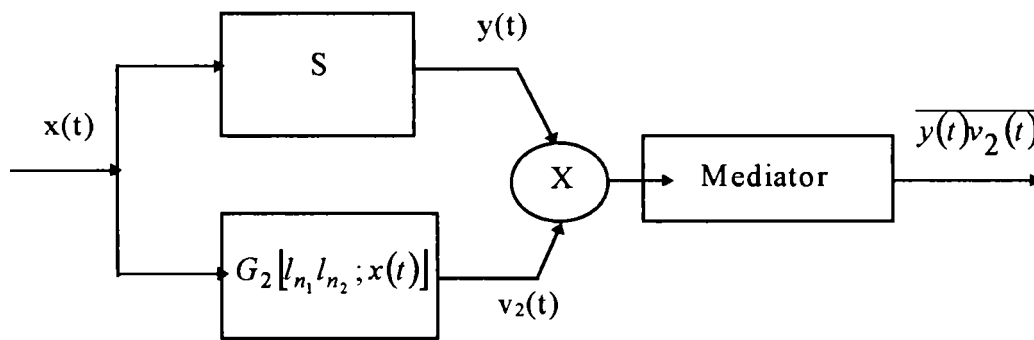


Figura 4.7 Determinarea experimentală a coeficienților $c_{n_1 n_2}$ în concordanță cu rel. 4.41

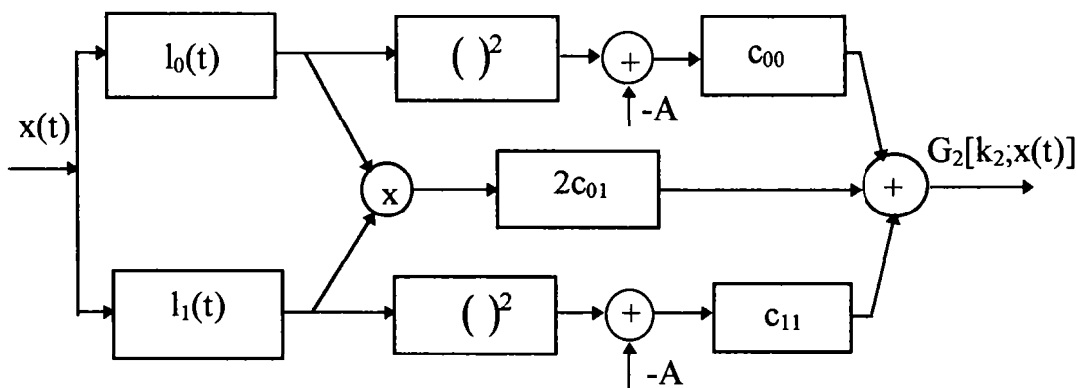


Figura 4.8 Sinteza funcționalei $G_2[k_2; x(t)]$ în concordanță cu rel. 4.42

Prin procedura prezentată anterior se poate realiza analiza și sinteza oricărei funcționale G. Orice sistem nelinier poate fi modelat în acest mod.

Modelul obținut după procedeul anterior descris poate fi reprezentat ca în figura 4.9 în care sunt evidențiate principalele componente și este cunoscut în literatura de specialitate ca “Modelul general Wiener”.

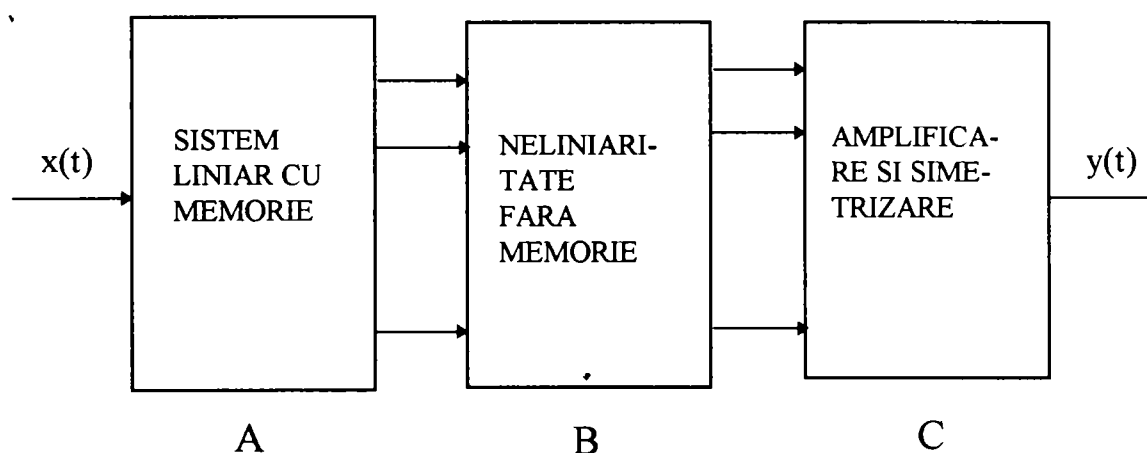


Figura 4.9 Modelul general Wiener

Secțiunea notată cu A în figura 4.9 reprezintă partea ce conține memorie în cadrul modelului. Ea este modelată de un sistem liniar cu o singură intrare și mai multe ieșiri.

Cea de-a doua secțiune B reprezintă un sistem neliniar fără memorie cu intrări și ieșiri multiple. În fine, secțiunea notată pe figură cu C constituie un sistem cu intrări multiple și o singură ieșire care grupează elementele de amplificare și sumatorul ce intervin în sinteza funcționalelor G. Valorile amplificărilor sunt numeric egale cu coeficienții dezvoltării cu ajutorul funcțiilor Laguerre a nucleelor Wiener de diferite ordine.

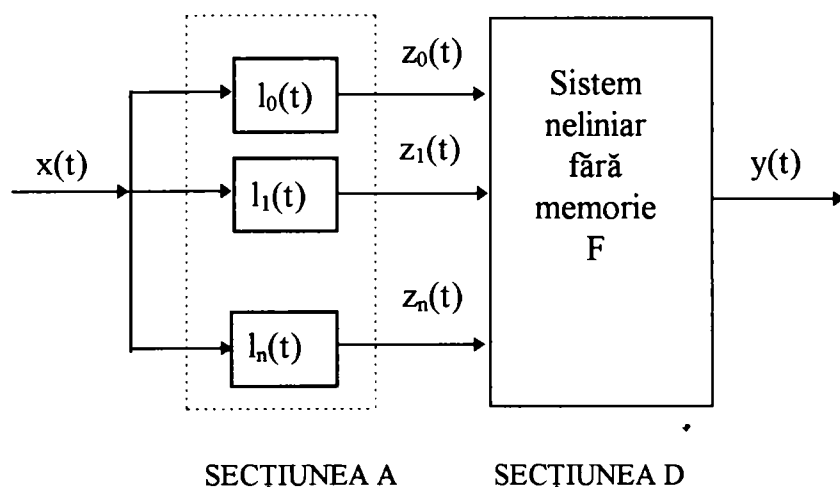
Întrucât fiecare nucleu Wiener poate fi dezvoltat cu ajutorul funcțiilor Laguerre, conform cu relația 4.22, rezultă că orice sistem neliniar aparținând clasei Wiener poate fi modelat exact cu ajutorul unui sistem având structura indicată în figura 4.9. Trebuie remarcat că secțiunile A și B sunt identice oricare ar fi sistemul neliniar care se modelează prin modelul general Wiener, secțiunea C fiind aceea ce diferă de la un sistem neliniar la altul întrucât ea conține coeficienții dezvoltării în serie Laguerre ai nucleelor.

Așa după cum s-a arătat în paragraful 4.3 acești coeficienți se pot determina pe cale experimentală, utilizând ca semnal de intrare zgomotul alb gaussian. Modelul care rezultă reprezintă o caracterizare exactă a sistemului neliniar și poate fi folosit pentru a descrie comportarea sistemului indiferent de semnalul de intrare.

4.4 Sisteme analitice

În cele ce urmează se vor studia condițiile ce trebuiesc impuse modelului general Wiener pentru ca acesta să poată modela sisteme reprezentabile prin serii Volterra. În acest scop se va considera o versiune redusă a modelului așa cum apare

în figura 4.10, unde secțiunea D reprezintă conectarea în cascadă a secțiunilor B și C prezentate în cadrul modelului general Wiener.



Întrucât secțiunea D reprezintă un sistem fără memorie, răspunsul său se poate exprima sub forma unei funcții F , aplicată semnalelor de intrare $z_n(t)$. În consecință avem:

$$y(t) = F[z_0(t), \dots, z_n(t), \dots] \quad (4.44)$$

Figura 4.10

Asupra funcției F se face presupunerea că este analitică,

adică poate fi dezvoltată sub forma unei serii multidimensionale de puteri ce converge pentru toate valorile variabilelor. Dezvoltarea în serie de puteri a lui F este de forma:

$$y(t) = h_0 + \sum_{n_1=0}^{\infty} d_{n_1} z_{n_1}(t) + \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} d_{n_1} d_{n_2} z_{n_1}(t) z_{n_2}(t) + \dots$$

$$+ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} d_{n_1 n_2 n_3} z_{n_1}(t) z_{n_2}(t) z_{n_3}(t) + \dots \quad (4.45)$$

În această dezvoltare prima sumă grupează toți termenii în care funcția $z_n(t)$ apare la puterea întâi, cea de-a doua sumă grupează termenii ce conțin pe $z_n(t)$ la puterea a-II-a, ș.a.m.d.

Examinând fiecare sumă în dezvoltarea din relația 4.45 se poate atăta că ea reprezintă un operator Volterra de un anumit ordin.

Fie prima sumă:

$$y_1(t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} d_{n_1} z_{n_1}(t) \quad (4.46)$$

și întrucât:

$$z_n(t) = \int_0^{\infty} l_n(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (4.47)$$

avem:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} d_{n_1} \int_0^{\infty} l_{n_1}(\tau) x(t-\tau) d\tau = \\
 &= \int_0^{\infty} \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} d_{n_1} l_{n_1}(\tau) \right] x(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau
 \end{aligned}
 \tag{4.48}$$

În relația 4.48 s-a ținut cont de expresia nucleului Volterra de ordinul întâi:

$$h_1(\tau) = \sum_{n_1=0}^{\infty} d_{n_1} l_{n_1}(\tau)
 \tag{4.49}$$

Conform celor mai sus arătate, coeficienții d_{n_1} din relația 4.45 reprezintă coeficienții dezvoltării în serie Laguerre ai nucleului Volterra de ordinul întâi.

Pentru cea de-a-II-a sumă avem:

$$y_2(t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} d_{n_1 n_2} z_{n_1}(t) z_{n_2}(t)
 \tag{4.50}$$

Folosind și în acest caz relația 4.47 găsim:

$$\begin{aligned}
 z_{n_1}(t) z_{n_2}(t) &= \int_0^{\infty} l_{n_1}(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\infty} l_{n_2}(\tau_2) x(t-\tau_2) d\tau_2 = \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned}
 \tag{4.51}$$

Introducând expresia dedusă pentru $z_{n_1}(t) z_{n_2}(t)$ în relația 4.50 și urmând o procedură similară celei utilizate în deducerea relației 4.48 se ajunge la:

$$y_2(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2
 \tag{4.52}$$

unde:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} d_{n_1 n_2} l_{n_1}(\tau_1) l_{n_2}(\tau_2)
 \tag{4.53}$$

Conform relației 4.53 coeficienții dezvoltării în serie de puteri $d_{n_1 n_2}$ reprezintă coeficienții dezvoltării în serie Laguerre a nucleului Volterra de ordinul al-II-lea $h_2(\tau_1, \tau_2)$.

Se poate demonstra că suma ce grupează termenii $z_n(t)$ la puterea p reprezintă dezvoltarea Laguerre a nucleului de ordin p . Bazat pe aceste considerații putem scrie relația 4.45 sub forma:

$$y(t) = h_0 + \sum_{n_1=0}^{\infty} y_{n_1}(t) = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} H_n[x(t)] \quad (4.54)$$

Având în vedere că singura condiție impusă funcției F a fost aceea de a fi analitică, se obișnuiește să se numească sistemele neliniare reprezentabile prin serii Volterra, sisteme analitice.

4.5 Modelul Wiener detaliat

Așa după cum s-a arătat în paragraful 3.7, Wiener a rezolvat problema convergenței asociate reprezentării sub forma unei serii de puteri a unui sistem neliniar introducând funcționalele G , care sunt ortogonale când semnalul de intrare $x(t)$ este alb și gaussian. Având în vedere cele prezentate în paragraful anterior se va arăta în cele ce urmează că această ortogonalitate corespunde unei dezvoltări ortogonale a funcției F definită de relația 4.44.

În paragraful 4.3 s-a demonstrat că orice funcțională G , al cărei nucleu satisface 4.21 poate fi dezvoltată în serie Laguerre conform relației 4.24.

Dezvoltarea în serie de funcții ortogonale a lui F se obține dezvoltând fiecare termen din relația 4.24 într-un produs de termeni elementari. Pentru a obține această dezvoltare se pornește de la proprietatea funcționalelor G dată de relația:

$$G_{m+n} = [l_i^{(m)} l_j^{(n)}; x(t)] = G_m [l_i^{(m)}; x(t)] G_n [l_j^{(n)}; x(t)] \quad (4.55)$$

unde $l_i^{(m)}$, $l_j^{(n)}$ arată că funcția Laguerre de ordin i apare de m ori în dezvoltare, respectiv că funcția Laguerre de ordin j apare de n ori. Demonstrația acestei proprietăți este făcută în [23], la pagina 392.

Pentru dezvoltarea fiecărui termen din relația 4.24 în termeni elementari se introduc în prealabil următoarele notații:

$$l_{n_1} l_{n_2} \dots l_{n_p} = \prod_{i=1}^p l_{n_i} \quad (4.56)$$

unde l_{n_i} poate apărea de mai multe ori și, în consecință, se notează acest lucru conform relației:

$$\prod_{i=1}^p l_{n_i} = \prod_{j=1}^N l_{m_j}^{(k_j)} \quad \text{unde: } m_i \neq m_j \quad (4.57)$$

În relația 4.57 N reprezintă numărul funcțiilor Laguerre diferite, k_j arată de câte ori apare funcția Laguerre de ordin m_j în cadrul dezvoltării și $\sum_{j=1}^N k_j = p$. Un anumit termen al dezvoltării din relația 4.24 se poate scrie:

$$G_p [l_{n_1} l_{n_2} \dots l_{n_p}; x(t)] = G_{\sum_{i=1}^N k_i} \left[\prod_{j=1}^N l_{m_j}^{(k_j)}; x(t) \right] \quad (4.58)$$

Având în vedere proprietatea enunțată de relația 4.55, un termen particular al dezvoltării se poate exprima conform:

$$G_p [l_{n_1} l_{n_2} \dots l_{n_p}; x(t)] = \prod_{i=1}^N G_{k_i} [l_{m_i}^{(k_i)}; x(t)] \quad (4.59)$$

și, în consecință, relația 4.24 devine:

$$G_p [k_p; x(t)] = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} c_{n_1} \dots c_{n_p} \prod_{i=1}^N G_{k_i} [l_{m_i}^{(k_i)}; x(t)] \quad (4.60)$$

În continuare analizând 4.60 se va demonstra că în această dezvoltare partea neliniară, cu intrări și ieșiri multiple, corespunzătoare secțiunii B a modelului din figura 4.9 este într-adevăr reprezentată prin polinoame ortogonale. Astfel în teoria lui Wiener funcția F este dezvoltată într-un set de polinoame ortogonale. Ulterior se va arăta că aceste polinoame sunt polinoame Hermite.

Înainte de a prezenta modelul Wiener detaliat al unui sistem neliniar, pe baza relației 4.60, vom face mai întâi analiza termenului elementar. Acest termen este de forma: $G_p [l_i^{(p)}; x(t)]$ și poate fi reprezentat sub forma unei serii Volterra conform relației:

$$G_p [l_i^{(p)}; x(t)] = \sum_{m=0}^{[p/2]} \frac{(-1)^m p!}{m!(p-2m)!} \left(\frac{A}{2}\right)^m \left[\int_0^{\infty} l_i(\tau) x(t-\tau) d\tau \right]^{p-2m} \quad (4.61)$$

Deducerea relației 4.61 este făcută în [23] și pornește de la dezvoltarea unei funcționale $G_p [k_p; x(t)]$, în serie Volterra potrivit relației:

$$G_p [k_p; x(t)] = \sum_{i=0}^p K_{i(p)} [x(t)] \quad (4.62)$$

În relația 4.62 $K_{i(p)}$ reprezintă operatori Volterra de nuclee egale cu nucleele Wiener derivate ale lui k_p . Deducerea expresiilor nucleelor derivate se face pornind de la condiția de ortogonalitate:

$$\sum_{i=0}^p \overline{K_{i(p)}[x(t)]} D_n[x(t)] = 0 \quad \text{pt. } n < p \quad (4.63)$$

unde $D_n []$ reprezintă un operator Volterra de ordin n , iar $x(t)$ este un zgomot alb gaussian. Expresia dedusă pentru nucleele derivate este dată de relația:

$$k_{p-2m(p)}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-2m}) = \frac{(-1)^m p! A^m}{(p-2m)! (m)! 2^m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} k_p(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \dots, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-2m}) d\tau_1 \dots d\tau_m \quad (4.64)$$

În deducerea relației 4.64 s-a ținut cont de faptul că avem: $\overline{K_{i(p)}[x(t)]} D_n[x(t)] = 0$ pentru $n > i$ și deasemenea pentru $i + n$ un întreg impar. Relația 4.64 corespunde cazului în care $i = n + 2q$ și $q = 0, 1, 2, \dots, [(p-n)/2]$.

Sinteza sistemului descris de relația 4.61 se poate realiza în conformitate cu schema din figura 4.11.

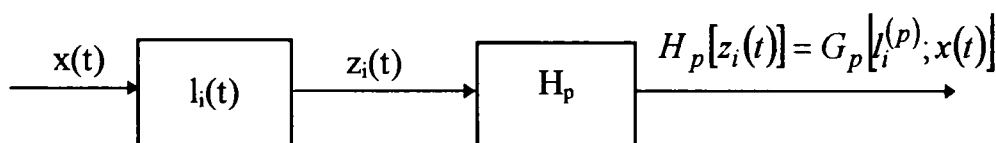


Figura 4.11 Sinteza funcționalei $G_p[l_i^{(p)}; x(t)]$

Ieșirea sistemului nelinier H_p este un polinom de grad p în $z_i(t)$, ai cărui coeficienți coincid cu cei ai polinomului Hermite de ordin p :

$$H_p[z_i(t)] = \sum_{m=0}^{[p/2]} \frac{(-1)^m p!}{m!(p-2m)!} \left(\frac{A}{2}\right)^m [z_i(t)]^{p-2m} \quad (4.65)$$

Se poate deci exprima $G_p[k_p; x(t)]$ cu ajutorul polinoamelor H_p conform relației:

$$G_p[k_p; x(t)] = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_p} \prod_{i=1}^N H_{k_i}[z_{m_i}(t)] \quad (4.66)$$

Sinteza funcției $G_p[k_p; x(t)]$ este arătată în figura 4.12.

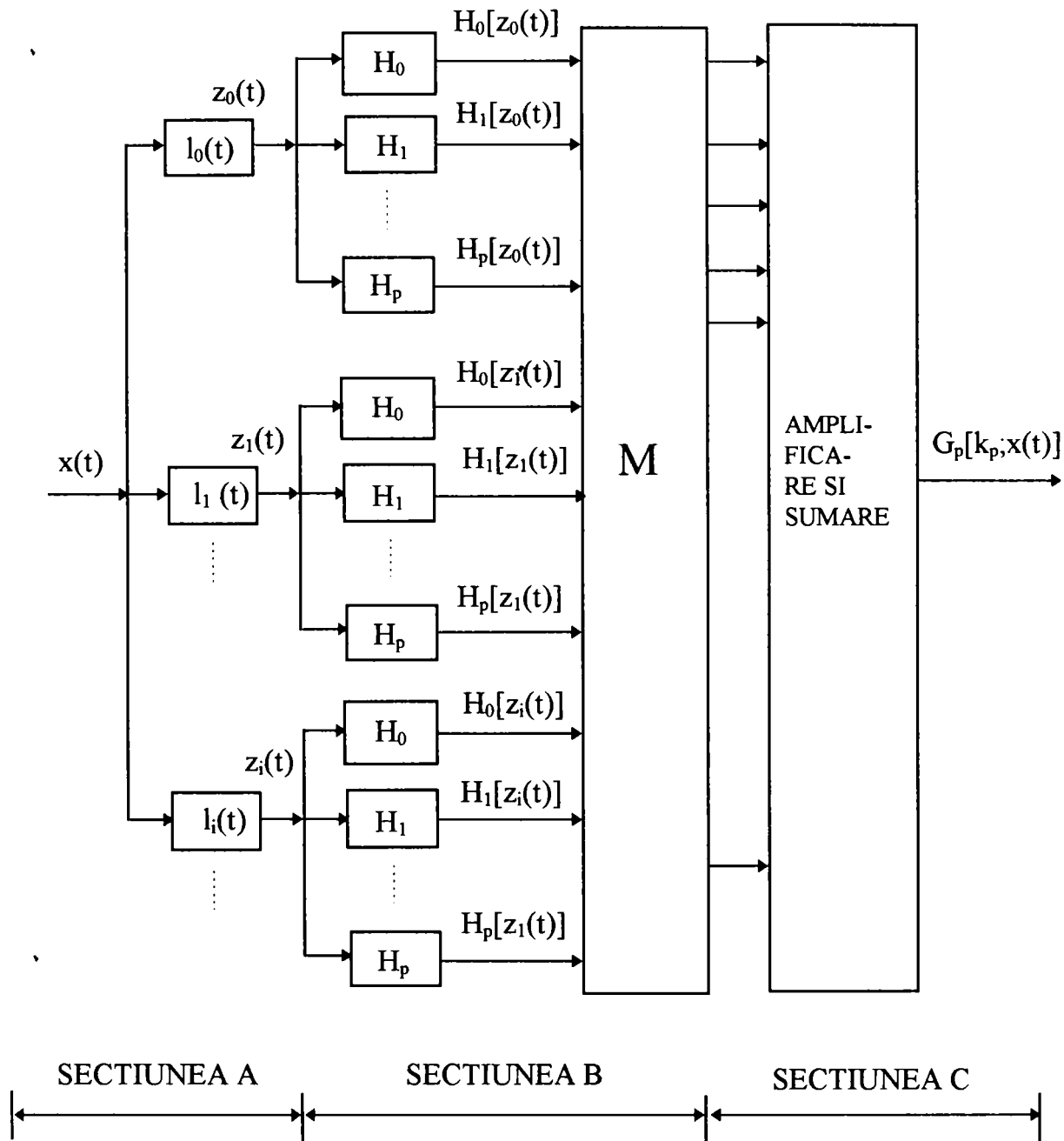


Figura 4.12 Modelul Wiener pentru $G_p[k_p; x(t)]$

Secțiunea B a modelului reprezintă un sistem neliniar fără memorie cu intrări și ieșiri multiple alcătuit din două părți. Prima parte este compusă din operatorii polinomiali Hermite H_0, H_1, \dots, H_p . Ieșirea fiecărui sistem Laguerre constituie intrare pentru un grup de operatori Hermite. De exemplu ieșirea sistemului Laguerre l_i notată pe figură $z_i(t)$ constituie intrare pentru un grup de operatori Hermite având răspunsurile: $H_n[z_i(t)]$, pentru $n=0, 1, \dots, p$. Potrivit relației 4.61 aceste răspunsuri sunt tocmai funcțiile $G_n[l_i^{(n)}; x(t)]$, adică:

$$H_n[z_i(t)] = G_n[l_i^{(n)}; x(t)] \quad (4.67)$$

Cea de-a doua parte a secțiunii B a modelului este un multiplicator M. Fiecare ieșire a multiplicatorului M reprezintă un produs de forma: $\prod_{i=1}^N H_{k_i}[z_{m_i}(t)]$, unde:

$m_i \neq m_j$ pentru $i \neq j$ și $\sum_{i=1}^N k_i = p$. Numărul N este egal cu numărul diferitelor sisteme Laguerre utilizate. Așa după cum se poate observa, secțiunea B, reprezentând partea neliniară, fără memorie, a modelului a fost descompusă în produse de polinoame Hermite.

Se va arăta în continuare că polinoamele Hermite ce intervin în modelul Wiener detaliat se bucură de proprietatea de ortogonalitate, atunci când semnalul de intrare este un zgomot alb gaussian.

Acest lucru se bazează pe proprietatea de ortogonalitate a funcționalelor G și poate fi demonstrată pe baza relației de mai jos:

$$\overline{G_p[l_i^{(p)}; x(t)]G_q[l_j^{(q)}; x(t)]} = p! A^p \delta_{pq} \delta_{ij} \quad (4.68)$$

unde:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{pt. } m = n \\ 0 & \text{pt. } m \neq n \end{cases} \quad (4.69)$$

Demonstrație:

1. Media din relația 4.68 este nulă pentru $p \neq q$ datorită ortogonalității funcționalelor G .
2. Pentru a evalua media în cazul în care $p = q$, se utilizează formula pentru calculul mediei a două funcționale ținându-se cont de ortogonalitatea funcțiilor Laguerre:

$$\begin{aligned} G_p[l_i^{(p)}; x(t)]G_p[l_j^{(p)}; x(t)] &= p! A^p \int_0^\infty l_i(\tau_1) \dots l_i(\tau_p) l_j(\tau_1) \dots l_j(\tau_p) d\tau_1 \dots d\tau_p \\ &= p! A^p \left[\int_0^\infty l_i(\tau) l_j(\tau) d\tau \right]^p = p! A^p \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Media din relația 4.69 poate fi exprimată cu ajutorul polinoamelor Hermite astfel:

$$\overline{H_p[z_i(t)]H_q[z_j(t)]} = p! A^p \delta_{ij} \delta_{pq} = 0 \quad (4.71)$$

Astfel, polinoamele Hermite $H_p[z_i(t)]$ și $H_q[z_j(t)]$ sunt ortogonale dacă $p \neq q$ întrucât ele sunt de ordine diferite. În cazul în care $p = q$ ele sunt ortogonale dacă $i \neq j$, întrucât $z_i(t)$ și $z_j(t)$ sunt ortogonale ele reprezentând ieșirile unor sisteme Laguerre de ordine diferite și având ca semnal de intrare un zgomot alb gaussian. Proprietății de ortogonalitate i se va da în cele ce urmează o interpretare statistică. Fie $x(t)$ un semnal alb gaussian, de medie nulă, având funcția de autocorelație $R_{xx}(\tau) = A\delta(\tau)$ și $z_i(t)$ răspunsul unui sistem Laguerre de ordin i la acest semnal:

$$z_i(t) = \int_0^{\infty} l_i(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (4.72)$$

unde $z_i(t)$ este deasemenea un semnal gaussian de medie nulă. Funcția $z_i(t)$ se bucură de următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} \overline{z_i(t)z_j(t)} &= A\delta_{ij} \\ \overline{z_i^m(t)z_j^n(t)} &= \overline{z_i^m(t)}\overline{z_j^n(t)} \quad \forall i \neq j, \forall m, n > 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Considerăm ansamblul funcțiilor cvasiergodice al cărui membru este $z_i(t)$ și fie ξ_i o variabilă aleatoare reprezentând valoarea funcției $z_i(t)$ la un moment de timp t_0 . Se poate astfel crea un nou ansamblu de variabile aleatoare pe baza valorilor corespunzătoare indicelui i . În plus funcțiile în cadrul fiecărui ansamblu sunt astfel ordonate încât membrul de rang k al fiecărui ansamblu este răspunsul sistemului Laguerre pentru aceeași intrare $x(t)$. Întrucât fiecare funcție de timp $z_i(t)$ este o variabilă aleatoare de medie nulă, fiecare variabilă aleatoare ξ_i e o variabilă aleatoare gaussiană de medie nulă. Variabilele aleatoare ξ_i se bucură de câteva proprietăți. Astfel:

$$\overline{\xi_i \xi_j} = \overline{z_i(t)z_j(t)} = A\delta_{ij} \quad (4.74)$$

Cele două medii, cea statistică din membrul stâng și cea temporală din membrul drept sunt egale întrucât ansamblele implicate sunt cvasi-ergodice. Întrucât media fiecărei variabile aleatoare ξ_i e nulă avem:

$$\sigma_i^2 = \overline{\xi_i^2} - (\overline{\xi_i})^2 = A \quad (4.75)$$

Deasemenea din 4.73 rezultă că pentru fiecare $i \neq j$ și fiecare întreg pozitiv m, n avem:

$$\overline{\xi_i^m \xi_j^n} = \overline{\xi_i^m} \overline{\xi_j^n} \quad (4.76)$$

ceea ce ne permite să concluzionăm că variabilele aleatoare sunt independente. În aceste condiții densitatea de probabilitate a fiecărei variabile aleatoare este:

$$P_{\xi}(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} \exp\left[\frac{-z_i^2}{2A}\right] \quad (4.77)$$

Întrucât variabilele aleatoare sunt independente din punct de vedere statistic, densitatea mutuală de probabilitate este egală cu produsul densităților de probabilitate individuale.

$$P_{\xi_i \xi_j}(z_i, z_j) = P_{\xi_i}(z_i) P_{\xi_j}(z_j) \quad \text{pt. } i \neq j \quad (4.78)$$

Considerăm acum polinomul Hermite al variabilelor aleatoare ξ_i , $H_p[\xi_i]$:

$$H_p(\xi_i) = \sum_{m=0}^{[p/2]} \frac{(-1)^m p!}{m!(p-2m)!} \left(\frac{A}{2}\right)^m (\xi_i)^{p-2m} \quad (4.79)$$

Utilizând 4.71 și faptul că mediile temporale și cale statistice sunt egale obținem:

$$\overline{H_p(\xi_i) H_q(\xi_i)} = \overline{H_p(z_i) H_q(z_i)} = p! A^p \delta_{pq} \quad (4.80)$$

Polinoamele Hermite reprezintă un set de polinoame ortogonale în raport cu variabila aleatoare ξ_i .

Polinoamele Hermite apar în mod natural în cadrul modelului atunci când semnalul de intrare utilizat este o funcție gaussiană de timp.

CONCLUZII Pornind de la ideea găsirii unei metode practice pentru determinarea nucleelor în reprezentarea cu ajutorul funcționalelor- G , Wiener a introdus reprezentarea nucleelor cu ajutorul funcțiilor ortogonale. Setul de funcții ortogonale ales de Wiener a fost setul funcțiilor Laguerre, larg utilizat în sinteza operatorilor cauzali.

Conceptul dezvoltat în paragraful 4.1 privind caracterizarea și sinteza unui sistem liniar cu ajutorul funcțiilor ortogonale este extins și pentru sistemele Volterra

de ordin superior. Exemplificarea se face în cazul unui nucleu Volterra de ordinul al-II-lea, $h_2(\tau_1, \tau_2)$, care este dezvoltat în relația 4.14, cu ajutorul seriei Laguerre bidimensionale. Se ilustrează modul în care un operator Volterra de ordinul al-II-lea poate fi sintetizat, conform relației 4.14, considerând cazul particular $n = 1$ (fig. 4.3).

Reprezentarea operatorilor Volterra cu ajutorul funcțiilor ortogonale constituie punctul de plecare pentru obținerea unei dezvoltări ortogonale în cazul funcționalelor- G , în paragraful 4.3. Relațiile 4.25, 4.26 și 4.27 permit definirea unui set de funcționale ortogonale care formează o bază pentru fiecare subspațiu ortogonal G_p . Se realizează în acest mod o extensie a spațiului vectorial ordinar, definit pe spațiul unei funcții. Sinteza funcționalei G_1 în concordanță cu relația de descompunere 4.34 este ilustrată în figura 4.5.

Reprezentarea funcționalei $G_2[k_2; x(t)]$, cu ajutorul setului de funcționale ortogonale este dată de relația 4.42 și ilustrată într-un caz particular de figura 4.8.

În concluzie putem afirma că procedura de descompunere prezentată poate sta la baza analizei și sintezei oricărei funcționale G .

Modelul obținut după procedeul anterior descris, este cunoscut sub numele de “Modelul general Wiener” și este reprezentat în figura 4.9. Trebuie remarcat că secțiunile A și B ale modelului sunt identice oricare ar fi sistemul neliniar care se modelează. Secțiunea C este cea care diferă de la un sistem neliniar la altul întrucât ea conține coeficienții dezvoltării în serie Laguerre ai nucleelor. Așa după cum s-a arătat în paragraful 4.3 acești coeficienți se pot determina, pe cale experimentală, utilizând ca semnal de intrare zgomotul alb gaussian [49]. Modelul care rezultă poate fi folosit pentru a descrie comportarea sistemului indiferent de semnalul de intrare.

În paragraful 4.4 sunt studiate condițiile pe care trebuie să le îndeplinească modelul general Wiener pentru ca acesta să poată modela sisteme reprezentabile prin serii Volterra. Separând, în cadrul modelului general Wiener, partea de sistem care conține memorie, A, de celelalte două, fără memorie, B+C, și admitând pentru acestea o reprezentare sub forma unei funcții F , de mai multe variabile, se arată că, dacă F este analitică și admite o dezvoltare sub forma unei serii de puteri multidimensională, atunci modelul general Wiener poate reprezenta sisteme Volterra. Având în vedere condiția impusă funcției F de a fi analitică, se obișnuiește să se numească sistemele reprezentabile prin serii Volterra, sisteme analitice.

În cadrul paragrafului 4.5 este prezentat modelul detaliat Wiener. S-a arătat că reprezentarea sistemului neliniar prin intermediul seriei de funcționale- G , ortogonale când semnalul de intrare e zgomot alb gaussian, corespunde în cadrul modelului general anterior prezentat unei dezvoltări ortogonale a funcției F . Dezvoltarea în serie de funcții ortogonale a lui F se obține dezvoltând fiecare termen din relația 4.24 într-un produs de termeni elementari. Pentru exemplificare se alege $G_p[k_p; x(t)]$ care se descompune în termeni elementari de forma: $G_p[l_i^{(p)}; x(t)]$. Ulterior acești termeni elementari vor fi reprezentați sub forma unei serii Volterra, conform relației 4.61. Analizând această relație se desprinde concluzia că ieșirea

sistemului neliniar este un polinom de grad p în $z_i(t)$, ai cărui coeficienți coincid cu cei ai polinomului Hermite de ordin p . Sinteza funcționalei $G_p[k_p; x(t)]$ este arătată în figura 4.12.

CAPITOLUL 5. PROBLEMA APROXIMĂRII OPERATORILOR NELINIARI PRIN SERII VOLTERRA

5.1. Formularea problemei

Așa după cum s-a arătat în capitolul al-II-lea, un operator de tip serie Volterra este de forma:

$$y(t) = H[f(t)] = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) f(t - \tau_1) \cdots f(t - \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad (5.1)$$

și reprezintă o generalizare a descrierii prin convoluție a operatorilor liniari și invarianți în timp, extinsă asupra operatorilor neliniari și invarianți în timp.

Aproximarea operatorilor neliniari prin serii Volterra ridică două probleme importante:

a) Ce tipuri de operatori se pot reprezenta prin serii Volterra?

Sandberg a arătat că pot fi reprezentate prin exact prin serii Volterra neliniaritățile analitice [50].

În cazul unui sistem modelat prin următoarea relație intrare-ieșire:

$$y(x) = \begin{cases} \text{sign } x & ; |x| \geq 1 \\ x & ; |x| < 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

nu putem vorbi de o reprezentare exactă printr-un operator tip serie Volterra ci doar de una aproximativă, rezultată în urma înlocuirii elementului de saturație descris de relația 5.2 cu o aproximare polinomială.

Problema care se pune, deasemenea, este cea referitoare la domeniul semnalului de intrare.

b) Ce condiții trebuie să îndeplinească operatorii aproximabili prin serii Volterra?

Ideea aproximării operatorilor neliniari prin serii Volterra a fost discutată pentru prima oară de Volterra care a sesizat analogia dintre polinoamele ordinare și seria Volterra finită și deci posibilitatea aplicării teoremei Weierstrass în aproximarea operatorilor neliniari prin serii Volterra..

Problema a fost reluată de către Norbert Wiener în anii '40-'50 [23] și de atunci ea continuă să trezească interesul a numeroși cercetători.

O abordare a celor două probleme poate fi găsită în cartea lui Rugh [51]. Rezultatul la care ajunge Rugh în problema aproximării operatorilor neliniari prin serii Volterra este conținut de următoarea teoremă:

Teoremă Fie K o submulțime compactă a spațiului $L^2[0, T]$ și $H : K \rightarrow C[0, T]$, un operator neliniar continuu, cauzal și invariant în timp. Fie $\varepsilon > 0$. Există un operator \hat{H} , de tip serie Volterra care se bucură de proprietatea că pentru orice funcție $f(t) \in L^2[0, T]$ și $0 \leq t \leq T$, avem :

$$\left| H[f(t)] - \hat{H}[f(t)] \right| \leq \varepsilon \quad (5.3)$$

Teorema formulată de Rugh are următoarele restricții:

- K trebuie să fie o submulțime compactă
- aproximarea are loc numai pe intervale de timp finite
- semnalele de intrare sunt diferite de zero pe un interval finit de timp.

Ultimele două condiții sunt impuse de aplicarea teoremei Stone-Weierstrass.

Principalul dezavantaj al teoremei lui Rugh îl constituie compactizarea spațiului de intrare.

Problema aproximării operatorilor neliniari a fost reluată de L.Chua [52] care a adăugat condiției de continuitate a operatorului neliniar cea de memorie descrescătoare ("fading memory"), ceea ce a permis extinderea domeniului semnalului de intrare la intervalul $[0, \infty)$. În felul acesta Chua a creat condițiile necesare aplicării corolarului teoremei Stone-Weierstrass, referitor la aproximarea unei funcționale, în cazul operatorilor neliniari.

5.2. Notății și definiții

Se notează $C_M(K)$, mulțimea funcțiilor mărginite și Lipschitz continue definite pe submulțimea compactă $K \subset R^N$:

$$C_M(K) = \left\{ f \mid f : K \rightarrow R ; K \subset R^N ; \forall f, |f(t)|_{t \in K} < M \right\} \quad (5.4)$$

Continuitatea funcțiilor f în sens Lipschitz presupune că ele satisfac relația [53] :

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|_K \quad (5.5)$$

unde x și y sunt două puncte din K .

Se notează operatorul de întârziere cu:

$$U_t[f(\tau)] = f(t - \tau) \quad (5.6)$$

Un operator $H : C_M \rightarrow C(R)$ este invariant în timp (IT), dacă :

$$H[U_\tau[f(t)]] = U_\tau[H[f(t)]] \quad (5.7)$$

Fiecărui operator H îi vom asocia funcționala $\xi_0 : C_M \rightarrow R$ definită astfel:

$$\xi_0 \{f(t)\} = \langle \delta, H[f(t)] \rangle \quad (5.8)$$

unde prin δ s-a notat distribuția Dirac.

Operatorul H poate fi reconstituit pornind de la funcționala ξ_0 asociată astfel:

$$H[f(t)] = \xi_0 \{U_t[f(\tau)]\} \quad (5.9)$$

Punctul de plecare al teoremei enunțate de Chua îl constituie teorema Stone-Weierstrass [49]:

Teoremă : Orice funcțională continuă, definită pe un compact E , înzestrat cu norma $\| \cdot \|$, poate fi aproximată oricât de bine de o algebră de funcționale continue pe E , care în plus au proprietatea de a separa puncte în E .

Proprietatea de a separa puncte în E implică că oricare ar fi u și v două elemente din E cu proprietatea: $u(t) \neq v(t)$, rezultă că există o funcțională ξ , aparținând algebrei de funcționale astfel încât : $\xi\{u(t)\} \neq \xi\{v(t)\}$.

În aplicarea teoremei Stone-Weierstrass, Chua și Boyd au plecat de la compactizarea spațiului $C_M(-\infty, 0]$. Acest lucru s-a realizat prin introducerea normei uniform ponderate conform relației 5.10 :

$$\|f(t)\|_w = \|f(t)w(t)\| = \sup|f(t)w(t)| \quad (5.10)$$

unde:

$$\begin{aligned} w(t) &: R_- \rightarrow (0, 1] \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Funcția $w(t)$ se numește funcție de ponderare. În continuare se notează: $C_M(-\infty, 0] = E$.

Pe spațiul $\{E, \| \cdot \| \}$ se definește familia de funcționale:

$$\xi = \left\{ \xi_k : E \rightarrow R \mid \xi_k \{f(t)\} = \int_0^{\infty} g_k(t) f(-t) dt ; f(t) \in E \right\} \quad (5.12)$$

unde $g_k(t)$ aparține sistemului complet de funcții $\{g_k, k \in N\}$ pe $L^2[0, \infty)$ și îndeplinește condiția:

$$\int_0^{\infty} \frac{|g_k(t)|}{w(-t)} dt \leq M \quad ; \quad M \in R_+ \quad (5.13)$$

Funcționalele ξ_k se bucură de următoarele proprietăți:

(i) Sunt continue pe $\{E, \| \cdot \|_w\}$.

Demonstrație [54]: fie $f(t)$ și $h(t)$ două funcții din E . Demonstrăm că $\forall \varepsilon > 0$, se poate determina δ_ε , astfel încât, dacă:

$$|f(t) - h(t)|w(t) \leq \delta_{(\varepsilon)} \quad (5.14)$$

atunci:

$$|\xi_k \{f(t)\} - \xi_k \{h(t)\}| < \varepsilon \quad (5.15)$$

Avem:

$$\begin{aligned} |\xi_k \{f(t)\} - \xi_k \{h(t)\}| &\leq \int_0^\infty |g_k(t)[f(-t) - h(-t)]| dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{|g_k(t)|}{w(-t)} |f(-t) - h(-t)| w(-t) dt \leq \\ \sup\{f(-t) - h(-t)\}w(-t) \int_0^\infty \frac{|g_k(t)|}{w(-t)} dt &\leq M \|f(t) - h(t)\|_w \end{aligned}$$

Condiția din enunț referitoare la $g_k(t)$ atrage după sine proprietatea nucleelor Volterra de a avea memorie descrescătoare după cum se va vedea în cele ce urmează.

(ii) Separă puncte în E .

Demonstrație [54]: fie $f(t)$ și $h(t)$ două funcții din E și $f(t) \neq h(t)$. Notăm: $f(-t) - h(-t) = u(t)$

$$\xi_k \{u(t)\} = \langle u(t), g_k(t) \rangle \quad (5.16)$$

Întrucât $\{g_k(t), k \in N\}$ este un sistem complet pe $L^2[0, \infty)$, iar $u(t)$ nu este funcția identic nulă, rezultă că cel puțin pentru un g_k , vom avea: $\langle u(t), g_k(t) \rangle \neq 0$ ceea ce implică:

$$\xi_k \{f(t)\} \neq \xi_k \{h(t)\} \quad (5.17)$$

deci ξ_k separă puncte în E .

Folosind un corolar al teoremei lui Stone-Weierstrass se poate demonstra că pentru orice funcțională φ , continuă pe E și $\forall \varepsilon > 0$, există un polinom de grad N , astfel încât:

$$|\varphi\{f(t)\} - P(\xi_1 \{f(t)\} \dots \xi_N \{f(t)\})| < \varepsilon \quad (5.18)$$

Explicitând polinomul P se obține:

$$\begin{aligned}
 P(\xi_1, \dots, \xi_N) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^K \sum_{i_1, \dots, i_n \leq N} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \xi_{i_1} \{f(t)\} \cdots \xi_{i_n} \{f(t)\} = \\
 &= h_0 + \sum_{n=1}^K \int \cdots \int h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) f(-\tau_1) \cdots f(-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$

unde: $h_0 \hat{=} \alpha_0$ și :

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \hat{=} \sum_{n=1}^K \sum_{i_1, \dots, i_n \leq N} \alpha_{i_1, \dots, i_n} g_{i_1}(\tau_1) \cdots g_{i_n}(\tau_n)
 \tag{5.20}$$

Funcțiile g_i sunt numite nucleele funcționalelor ξ_k .

Așa cum s-a menționat anterior, $g_{k_n} \in L^1[0, \infty)$ ceea ce conduce la concluzia că:

$h_n \in L^1[0, \infty)$ și constituie nucleele unui operator Volterra pe care-l vom nota \hat{H} .

Vom arăta în final că \hat{H} reprezintă operatorul atașat seriei Volterra ce aproximează operatorul neliniar H . Folosind formula de reconstrucție indicată de relația 5.9 se obține:

$$|\xi_0 \{H_{-t}[f(\tau)]\} - P(\xi_1 \{H_{-t}[f(\tau)]\}, \dots, \xi_N \{H_{-t}[f(\tau)]\})| = |H[f(t)] - \hat{H}[f(t)]| \leq \varepsilon
 \tag{5.21}$$

Întrucât relația e adevărată oricare ar fi $t \in [0, \infty)$, rezultă că oricare ar fi $f(t) \in E$, avem:

$$\|H[f(t)] - \hat{H}[f(t)]\| \leq \varepsilon
 \tag{5.22}$$

Schema bloc a sistemului descris de operatorul $\hat{H}[\]$ este arătată în figura 5.1.

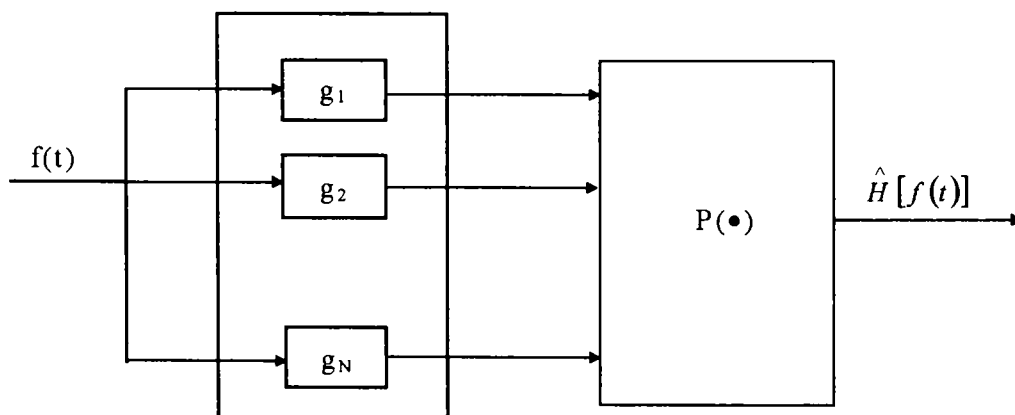


Figura 5.1 Structura unui sistem caracterizat de operatorul serie Volterra

Chua și Boyd au enunțat teorema care permite aproximarea oricărui operator neliniar, invariant în timp, cu memorie descrescătoare printr-un sistem dinamic, finit

dimensional și un sistem neliniar fără memorie [52].

Teoremă: Fie $\varepsilon > 0$ și $\{E, \|\cdot\|_w\}$. Presupunem că H este un operator invariant în timp, cu memorie descrescătoare, definit pe E . Există un operator \hat{H} , de tip serie Volterra, astfel încât oricare ar fi $f(t) \in E$, avem:

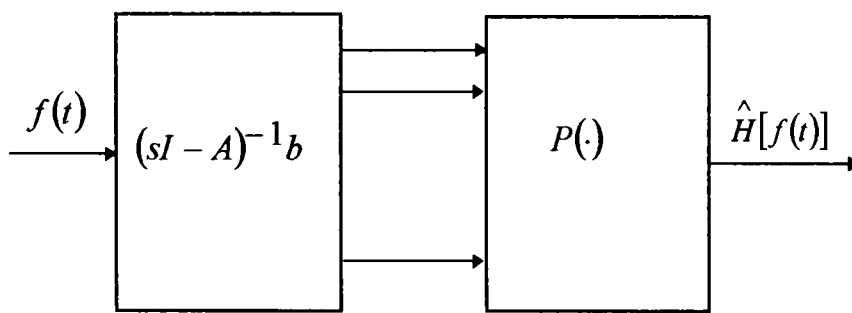
$$\|H[f(t)] - \hat{H}[f(t)]\| \leq \varepsilon \quad (5.23)$$

unde \hat{H} este operatorul atașat sistemului dinamic:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf \\ y &= P(x) \end{aligned} \quad (5.24)$$

unde A este o matrice de dimensiune $N \times N$ și P este un polinom: $P: R^N \rightarrow R$.

Teorema enunțată de Chua și Boyd afirmă că, un sistem de forma celui descris de relația 5.24 și a cărei schemă este indicată în figura 5.2, poate fi utilizat ca macromodel pentru un sistem neliniar atâta timp cât acesta are memorie descrescătoare.



Ideea de a aproxima operatori neliniari cu sisteme de tipul celui indicat în figura 5.2 a fost introdusă de către Wiener care a utilizat pentru implementarea sistemului liniar dinamic, un set de filtre Laguerre.

Figura 5.2 Sistem aproximant constând dintr-un sistem liniar dinamic și un sistem neliniar fără memorie

În acest caz sistemul liniar, dinamic, ia forma particulară indicată în relația [52]:

$$(sI - A)^{-1} b = \sqrt{2} \left[\frac{1}{s+1} \frac{1-s}{(1+s)^2} \dots \frac{(1-s)^{N-1}}{(1+s)^N} \right]^T \quad (5.25)$$

Lee a implementat sistemul sub forma filtrului lattice din figura 5.3.

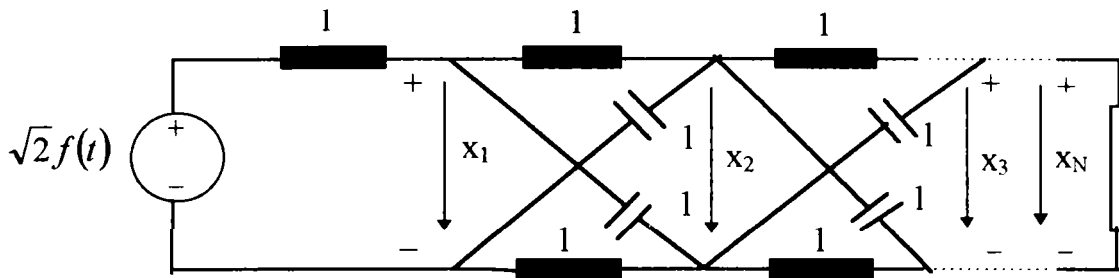


Figura 5.3 Structura filtrului lattice Wiener Lee

5.3 Aproximarea sistemelor neliniare discrete

Se vor prezenta în cele ce urmează rezultate similare pentru sistemele discrete.

Subspațiul $C_M[0, \infty)$ este înlocuit de l^∞ , spațiul secvențelor mărginite, definite pe Z_+ cu valori în R , înzestrat cu norma:

$$\|f[n]\| \triangleq \sup_n |f[n]| \tag{5.26}$$

Definirea cauzalității, invarianței în timp și a memoriei descrescătoare pentru sistemele discrete implică modificări doar în ceea ce privesc notațiile.

Un operator invariant în timp, $N : l^\infty \rightarrow l^\infty$ are memorie descrescătoare pe un compact $K \in l^\infty$ dacă există o secvență $w[n] : Z_+ \rightarrow (0, 1]$ cu proprietatea: $\lim_{n \rightarrow \infty} w[n] = 0$, astfel încât oricare ar fi $f[n] \in K$ și $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $v[n] \in K$ avem:

$$\sup_{n \leq 0} |f[n] - h[n]| w[-n] < \delta \rightarrow |N[f(0)] - N[v(0)]| < \varepsilon \tag{5.27}$$

Un operator serie Volterra finit discret $N : l^\infty \rightarrow l^\infty$ este de forma:

$$H[f[n]] = h_0 + \sum_{n=1}^K \dots \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} h_n[i_1, \dots, i_n] f[n - i_1] \dots f[n - i_n] \tag{5.28}$$

unde: $h_n \in l^1(Z_+^n)$, adică se bucură de proprietatea:

$$\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} |h_n(i_1, \dots, i_n)| < \infty \tag{5.29}$$

Teorema de aproximare a unui operator neliniar discret. Fie $\varepsilon > 0$ și K mulțimea funcțiilor mărginite definite pe l^∞ :

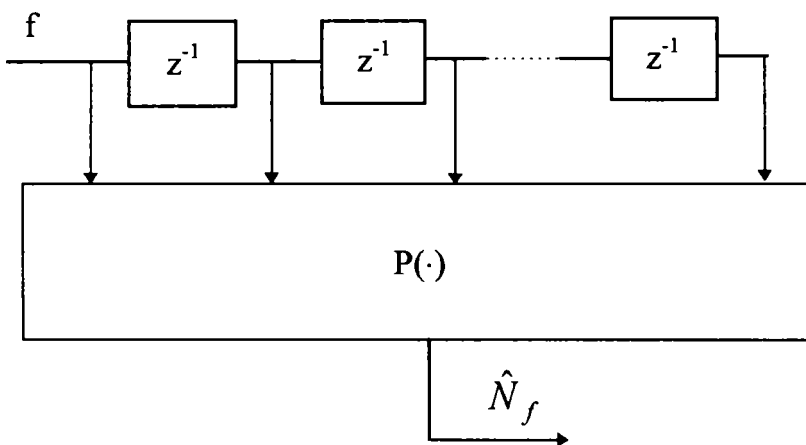
$$K \triangleq \{f[n] \in l^\infty \mid \|f[n]\| \leq M_1\} \quad (5.30)$$

Fie H un operator invariant în timp: $H : l^\infty \rightarrow l^\infty$ cu memorie descrescătoare pe K . Există o serie Volterra finită astfel încât, oricare ar fi $f[n] \in K$ avem îndeplinită relația:

$$\left| H[f[n]] - \hat{H}[f[n]] \right| \leq \varepsilon \quad (5.31)$$

Ca și în cazul continuu, sistemul aproximant \hat{H} se poate realiza ca un sistem liniar cu memorie și un sistem neliniar fără memorie. Pentru sistemul liniar dinamic se poate alege o formă particulară extrem de simplă după cum se indică în figura 5.4. În acest caz sistemul liniar poate avea forma particulară indicată de relația:

$$H_f(z) = \left[1 \quad z^{-1} \quad \dots \quad z^{-M+1} \right]^T \quad (5.32)$$



În relația 5.32 prin $H_f(z)$ s-a notat funcția de transfer a sistemului liniar. După cum se poate observa, \hat{H} este în acest caz un mediator alunecător neliniar.

Figura 5.4 Schema bloc a operatorului mediator alunecător neliniar

Teorema aproximării cu ajutorul mediatorului alunecător neliniar. Fie $\varepsilon > 0$ și K mulțimea secvențelor mărginite: $\{K, \| \cdot \| \}$, definite pe l^∞ . Presupunem că H este un operator invariant în timp, $H : l^\infty \rightarrow l^\infty$ cu memorie descrescătoare pe K .

Există un polinom $P : R^N \rightarrow R^N$ astfel încât oricare ar fi $f[n] \in K$ avem:

$$\left\| H[f[n]] - \hat{H}[f[n]] \right\| \leq \varepsilon \quad (5.33)$$

unde \hat{H} este operatorul neliniar alunecător descris de relația:

$$\hat{H}[f[n]] \triangleq P(f[n], f[n-1], \dots, f[n-M+1]) \quad (5.34)$$

Demonstrația teoremei aparține lui Chua și Boyd și se găsește în [52].

CONCLUZII În cadrul capitolului este prezentată o fundamentare din punct de vedere matematic a aproximării operatorilor neliniari prin serii Volterra. Teoremele formulate de Chua și Boyd stabilesc condiții clare în ceea ce privește aproximarea operatorilor neliniari prin serii Volterra. Nici una din lucrările lui Volterra nu a abordat problemele de aproximare în maniera prezentată de Chua și Boyd.

Punctul de plecare îl constituie teorema lui Rugh care stabilește condițiile în care un operator neliniar, continuu, cauzal și invariant în timp poate fi aproximat de un operator serie Volterra pe o submulțime compactă K .

La baza teoremelor de aproximare a stat posibilitatea extinderii corolarului Teoremei Stone-Weierstrass referitor la aproximarea funcționalelor definite pe $C(\mathbb{R})$ asupra operatorilor invariante în timp definiți pe un compact K prin introducerea noțiunii de memorie descrescătoare (fading memory) a operatorului.

Chua și Boyd au enunțat teorema care permite aproximarea oricărui operator neliniar, invariant în timp, cu memorie descrescătoare printr-un sistem dinamic, finit dimensional și un sistem neliniar fără memorie. Schema sistemului aproximat descris de relația 5.24 este arătată în figura 5.2.

Ideea aproximării operatorilor neliniari cu sisteme de tipul celui indicat în figura 5.2 a fost introdusă de către Wiener care a utilizat pentru implementarea sistemului liniar dinamic un set de filtre Laguerre [23].

Lee a implementat sistemul sub forma filtrului lattice din figura 5.3.

În cadrul paragrafului 5.3 sunt prezentate două teoreme importante referitoare la aproximarea sistemelor neliniare discrete. Este vorba de teorema de aproximare a unui operator neliniar discret și de teorema aproximării cu ajutorul mediatorului alunecător neliniar.

Voi încheia cu unele remarci în ceea ce privește aplicarea în practică a materialului prezentat aici. Deși aproximările sunt suficient de puternice pentru a fi utile în aplicații ca macromodelarea sistemelor complicate sau în identificarea sistemelor neliniare, nu se cunosc la ora actuală metode prin care aproximarea poate fi făcută numai prin măsurători asupra intrării și ieșirii sistemului.

CAPITOLUL 6. METODE DE DETERMINARE A NUCLEELOR ASOCIATE UNUI SISTEM NELINIAR ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ

6.1. Generalități

În cadrul capitolelor III și IV s-au prezentat câteva metode de determinare ale nucleelor Volterra și Wiener în domeniul timp. Așa după cum s-a prezentat, presupunerea referitoare la statisticile gaussiene ale semnalului de intrare au adus simplificări importante în aparatul matematic. Totuși, în numeroase cazuri practice, excitația de intrare în sistemul neliniar nu poate fi controlată direct de către cel ce face identificarea. Ca atare datele de intrare trebuiesc utilizate așa cum există.

În astfel de situații se poate apela la metodele de determinare ale transformatei nucleelor în domeniul frecvență.

Capitolul de față își propune prezentarea unor metode de determinare a funcțiilor de răspuns în frecvență ale nucleelor de diferite ordine.

S-a arătat deasemenea că pentru un semnal de intrare având statistici gaussiene și medie nulă expresiile funcțiilor de transfer liniară și pătratică sunt funcție de momentele spectrale până la ordinul al-IV-lea care pot fi obținute pe baza secvențelor de date de intrare și de ieșire [55].

Când, însă, se aplică sistemului neliniar o excitație aleatoare ale cărei statistici nu se cunosc este dificil de a găsi expresiile funcțiilor de transfer.

Ritz și Powers [56] au arătat că atunci când intrarea e ușor negaussiană, funcțiile de transfer ale unui sistem pătratic pot fi estimate în domeniul frecvenței discrete prin metode iterative.

În cele ce urmează se prezintă o tehnică numerică de determinare a funcțiilor de transfer care se dovedește a fi mai exactă decât tehnicile iterative. Ea conduce la ecuații scrise sub formă matricială ale căror soluții nu prezintă probleme de convergență. Metoda se bazează pe calculul funcției de transfer pentru fiecare frecvență și prezintă comparativ cu metoda iterativă ce calculează întregul răspuns în frecvență un volum de calcul mai redus.

Prezentarea metodei se va face în cazul modelării unui sistem de ordinul al-II-lea, în domeniul frecvență, prin conectarea în paralel a unui sistem liniar și a unui sistem pătratic. Determinarea funcțiilor de transfer liniară și pătratică se bazează pe secvențele de date de la intrarea și ieșirea sistemului.

6.2. Estimarea numerică a funcțiilor de transfer

Sistemul model studiat este descris în domeniul frecvență de relația:

$$Y(f_m) = H_1(f_m)X(f_m) + \sum_{\substack{i=-(M-1) \\ i+j=m}}^M \sum_{j=-(M-1)}^M H_2(f_i, f_j)X(f_i)X(f_j) \quad (6.1)$$

unde:

- $X(f_m)$ și $Y(f_m)$ reprezintă Transformatele Fourier Discrete (TFD) ale semnalelor de intrare respectiv de ieșire ale sistemului modelat de seria Volterra de ordinul al-II-lea.

- $f_M = f_{N/2}$ și reprezintă frecvența Nyquist asociată eșantionării în domeniul timp a semnalelor.

- $H_1(f_m)$ și $H_2(f_i, f_j)$, reprezintă funcțiile de transfer liniară și pătratică calculate pentru un set de frecvențe: $\left\{ f_n = \frac{n}{N} \mid n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \right\}$.

Fără a pierde din generalitate, funcția $H_2(f_i, f_j)$ se poate scrie sub forma simetrică: $H_2(f_i, f_j) = H_2(f_j, f_i)$.

Funcțiile de transfer liniară și pătratică se pot exprima cu ajutorul caracteristicilor secvențelor de date de intrare și ieșire rezolvând setul de ecuații obținut prin multiplexarea relației 6.1 cu $X^*(f_m)$ respectiv cu $X^*(f_k)X^*(f_l)$ și aplicând medierea statistică în fiecare membru. Pentru simplificare se vor folosi notațiile: $X(m)$ în loc de $X(f_m)$ și $Y(m)$ în loc de $Y(f_m)$ etc.

$$E[X^*(m)Y(m)] = H_1(m)E[|X(m)|^2] + \sum_{i+j=m} \sum_j H_2(i, j)E[X^*(m)X(i)X(j)] \quad (6.2)$$

$$E[X^*(k)X^*(l)Y(m)] = H_1(m)E[X^*(k)X^*(l)X(m)] + \sum_{i+j=m} \sum_j H_2(i, j)E[X^*(k)X^*(l)X(i)X(j)] \quad (6.3)$$

Trebuie remarcat faptul că membrul drept al relației 6.3 se anulează pentru $k + l \neq i + j = m$ datorită proprietăților momentelor spectrale de ordin superior [40] și astfel relația are loc numai pentru: $k + l = i + j = m$.

Când semnalul de intrare este gaussian, de medie nulă, termenii ce conțin momente de ordinul al-III-lea, din relațiile 6.2 și 6.3 se anulează. Rezultă că în acest caz $H_1(m)$ și $H_2(i, j)$ se pot determina separat [14]:

$$H_1(m) = \frac{E[X^*(m)Y(m)]}{E[|X(m)|^2]} \quad (6.4)$$

$$H_2(i, j) = \frac{E[X^*(i)X^*(j)Y(i+j)]}{2E[|X(i)|^2]E[|X(j)|^2]} \quad i + j \neq 0 \quad (6.5)$$

În cazul general ecuațiile 6.2 și 6.3 trebuiesc rezolvate simultan, găsirea soluției fiind extrem de dificilă.

În continuare se prezintă o metodă de rezolvare a ecuațiilor 6.2 și 6.3 ce poate fi implementată numeric. Pentru un proces real: $Y(m) = Y^*(-m)$, de aceea e suficient să considerăm $Y(m)$ în relația 6.1 doar pentru frecvențe pozitive. Dezvoltând relația 6.1 pentru $m \geq 0$ obținem:

$$\begin{aligned}
 Y(m) &= H_1(m)X(m) \\
 &+ \underbrace{H_2(m-M, M)X(m-M)X(M) + \dots + H_2(-1, m+1)X(-1)X(m+1) + H_2(0, m)X(0)X(m)}_{a)} \\
 &+ \underbrace{H_2(1, m-1)X(1)X(m-1) + \dots + H_2(m-1, 1)X(m-1)X(1)}_{b)} \\
 &+ \underbrace{H_2(m, 0)X(m)X(0) + H_2(m+1, -1)X(m+1)X(-1) + \dots + H_2(M, m-M)X(M)X(m-M)}_{c)}
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

În ecuația 6.6 termenii conținuți de a) și c) reprezintă componente rezultate ca urmare a interacțiunii între componente de diferite frecvențe ale semnalului de intrare care conduc la diferențe de frecvențe. Termenii marcați prin b) au rezultat ca urmare a sumei între componentele de diferite frecvențe.

În continuare se va arăta că simetria funcției $H_2(i, j)$ ne permite să scriem ecuația 6.6 astfel încât termenii din partea pătratică să fie reduși la jumătate. Reducerea termenilor părții pătratice este importantă întrucât este direct legată de dimensiunea matricei ce trebuie inversată, după cum se va vedea în continuare.

Există $(m-1)$ termeni rezultați ca sume de frecvențe, marcați prin b), în relația 6.6.

Dacă m este impar, termenii în 6.6 se pot reduce la jumătate întrucât partea pătratică din relația 6.6 nu conține termeni având argumentele i și j egale.

Exemplu: pentru $m = 5$, în $H_2(i, j)$ apar următorii termeni de tip b):

$$H_2(1, 4)X(1)X(4) + H_2(2, 3)X(2)X(3) + H_2(3, 2)X(3)X(2) + H_2(4, 1)X(4)X(1)$$

Pentru m impar termenii marcați prin b) în 6.6 sunt conform exemplului de mai jos.

Exemplu: pentru $m = 6$

$$\begin{aligned}
 &H_2(1, 5)X(1)X(5) + H_2(2, 4)X(2)X(4) + H_2(3, 3)X(3)X(3) \\
 &+ H_2(4, 2)X(4)X(2) + H_2(5, 1)X(5)X(1)
 \end{aligned}$$

Din exemplele prezentate se observă că, dacă m este par, termenul $H_2\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$ nu

poate fi încorporat pentru a reduce termenii. Rezultă că putem exprima $Y(m)$ în funcție de valorile pare, respectiv impare ale lui m astfel:

-pentru m impar avem relația:

$$Y(m) = H_1(m)X(m) + 2 \left[H_2\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) X\left(\frac{m+1}{2}\right) X\left(\frac{m-1}{2}\right) + \dots \right. \\ \left. + H_2(m-1, 1) X(m-1) X(1) + H_2(m, 0) X(m) X(0) + \dots + H_2(M, m-M) X(M) X(m-M) \right] \quad (6.7)$$

-pentru m par avem relația:

$$Y(m) = H_1(m)X(m) + H_2\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) X\left(\frac{m}{2}\right) X\left(\frac{m}{2}\right) + 2 \left[H_2\left(\frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} - 1\right) X\left(\frac{m}{2} + 1\right) X\left(\frac{m}{2} - 1\right) + \dots \right. \\ \left. + H_2(m-1, 1) X(m-1) X(1) + H_2(m, 0) X(m) X(0) + \dots + H_2(M, m-M) X(M) X(m-M) \right] \quad (6.8)$$

Trebuie remarcat faptul că în relațiile 6.7 și 6.8 ieșirea sistemului e exprimată numai ca termeni sumă și diferență de frecvență. Domeniul pentru termenii sumă este:

$$S = \left\{ (f_i, f_j); 0 \leq f_j \leq f_i, f_i + f_j \leq f_M \right\}$$

Domeniul termenilor diferență este:

$$D = \left\{ (f_i, f_j); -f_i \leq f_j \leq 0, 0 \leq f_i \leq f_M \right\}$$

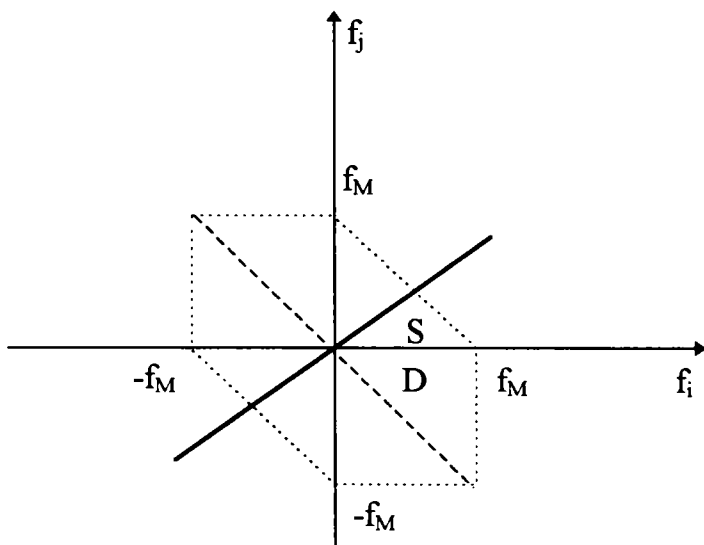


Figura 6.1 Planul frecvențelor f_i, f_j

Domeniile D și S sunt ilustrate în figura 6.1. În definierea domeniilor s-a ținut cont de condițiile impuse de teorema eșantionării în cazul sistemelor neliniare [57], [58].

Utilizând notația vectorială, relațiile 6.7 și 6.8 se pot scrie sub forma:

$$Y(m) = H^T X = X^T H$$

unde $()^T$ reprezintă transpusa matricei, iar pentru H^T și X^T avem relațiile:

$$H^T = \begin{cases} \left[H_1(m) 2H_2\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) \cdots 2H_2(m,0) \cdots 2H_2(M, m-M) \right] & \text{pt. } m \text{ impar} \\ \left[H_1(m) H_2\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) 2H_2\left(\frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right) \cdots 2H_2(m,0) \cdots 2H_2(M, m-M) \right] & \text{pt. } m \text{ par} \end{cases} \quad (6.9)$$

$$X^T = \begin{cases} \left[X(m) X\left(\frac{m+1}{2}\right) X\left(\frac{m-1}{2}\right) \cdots X(m)X(0) \cdots X(M)X(m-M) \right] & \text{pt. } m \text{ impar} \\ \left[X(m) X\left(\frac{m}{2}\right) X\left(\frac{m}{2}\right) X\left(\frac{m}{2}+1\right) X\left(\frac{m}{2}-1\right) \cdots X(m)X(0) \cdots X(M)X(m-M) \right] & \text{pt. } m \text{ par} \end{cases} \quad (6.10)$$

Rezolvarea simultană a ecuațiilor 6.2 și 6.3 este echivalentă cu rezolvarea ecuațiilor matriciale obținute prin înmulțirea relației 6.6 cu $X^*(m)$ respectiv cu $X^*(k)X^*(l)$, unde: $k + l = m$.

Prin mediere statistică se obține:

$$E[X^*Y(m)] = E[X^* X^T] H \quad (6.11)$$

Relația 6.11 este liniară în raport cu H, deci rezultă:

$$H = \{E[X^* X^T]\}^{-1} E[X^*Y(m)] \quad (6.12)$$

dacă: $E[X^* X^T]$ nu e singulară.

Soluția dată de 6.12 poate fi considerată rezultatul unei regresii liniare multivariabilă [59] și astfel, funcțiile de transfer, obținute în această manieră, sunt optime în sensul erorii medii pătratice când nu există zgomot aditiv la ieșire.

Trebuie remarcat că $E[X^* X^T]$ este o matrice hermitică constând din diverse momente spectrale ale intrării. Cu excepția primului element, elementele $E[X^*(i)X^*(j)X^*(i+j)]$ din prima coloană (și complex conjugatele lor din primul rând) ale acestei matrici reprezintă cumulanți de ordinul al-III-lea, ai transformării TFD a semnalului de intrare, cunoscuți sub denumirea de bispectru, în timp ce primul element $E[|X(m)|^2]$ este spectrul de putere al intrării. Restul elementelor sunt momente spectrale de ordinul al-IV-lea ale intrării.

Pentru a găsi valorile funcțiilor de transfer trebuie să calculăm 6.12 pentru fiecare m , unde $m = 0, 1, \dots, M$ și de fiecare dată vom găsi $H_1(f_m)$ și $H_2(f_i, f_j)$ la

o combinație de frecvențe de-a lungul liniei $f_i + f_j = f_m$, în interiorul regiunilor S și D.

Dimensiunea matricei $E[X^* X^T]$ ce trebuie inversată depinde de numărul de termeni aflați în membrul drept în 6.7 respectiv în 6.8 și de numărul de date ($N=2M$) pentru calculul TFD, precum și de m . De exemplu, dimensiunea ei este:

$$\left(M + 2 - \frac{m}{2}\right) \times \left(M + 2 - \frac{m}{2}\right) \quad \text{dacă } m \text{ este par și:}$$

$$\left(M + 2 - \frac{m+1}{2}\right) \times \left(M + 2 - \frac{m+1}{2}\right) \quad \text{dacă } m \text{ este impar. Se observă că}$$

dimensiunea matricei scade cu creșterea lui m . Cea mai mare dimensiune este $(M + 2) \times (M + 2)$, când $m = 0$ și cea mai mică este: $\left(\frac{M}{2} + 2\right) \times \left(\frac{M}{2} + 2\right)$, când $m = M - 1$ sau $m = M$.

Se poate arăta că dacă intrarea e un semnal gaussian de medie nulă, se pot deduce din 6.12 aceleași expresii pentru funcțiile de transfer liniară și pătratică ca și cele date de 6.4 și 6.5. Se exprimă $E(X^* X^T)$, de exemplu pentru m par, sub forma:

$$\begin{bmatrix} E[X(m)^2] & E[X^*(m)X\left(\frac{m}{2}\right)X\left(\frac{m}{2}\right)] & E[X^*(m)X\left(\frac{m}{2}+1\right)X\left(\frac{m}{2}-1\right)] & \dots & E[X^*(m)X(M)X(m-M)] \\ E[X^*\left(\frac{m}{2}\right)X^*\left(\frac{m}{2}\right)X(m)] & E\left[X\left(\frac{m}{2}\right)^4\right] & E[X^*\left(\frac{m}{2}\right)X^*\left(\frac{m}{2}\right)X\left(\frac{m}{2}+1\right)X\left(\frac{m}{2}-1\right)] & \dots & \\ E[X^*\left(\frac{m}{2}+1\right)X^*\left(\frac{m}{2}-1\right)X(m)] & & E\left[X\left(\frac{m}{2}+1\right)^2 X\left(\frac{m}{2}-1\right)^2\right] & \dots & \\ \vdots & & & \vdots & \\ E[X^*(M)X(m-M)X(m)] & & & \dots & E[X(M)^2 X(m-M)^2] \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Cu excepția primului element, prima coloană și prima linie a matricei se anulează. Se poate arăta că și celelalte elemente, cu excepția celor de pe diagonala principală, se anulează pentru semnal de intrare gaussian, datorită următoarei proprietăți [59] :

$$E[X^*(i)X^*(m-i)X(j)X(m-j)] = \begin{cases} E[|X(i)X(m-i)|^2], & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6.14)$$

Matricea din relația 6.13 devine o matrice diagonală și în acest caz avem:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_1(m) \\ H_2\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \\ \vdots \\ 2H_2(M, m-M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[|X(m)|^2] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E\left[|X\left(\frac{m}{2}\right)|^4\right] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E[|X(M)|^2|X(m-M)|^2] \end{bmatrix}^{-1} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} E[X^*(m)Y(m)] \\ E\left[X^*\left(\frac{m}{2}\right)X^*\left(\frac{m}{2}\right)Y(m)\right] \\ \vdots \\ E[X^*(M)X^*(m-M)Y(m)] \end{bmatrix} \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

și funcțiile de transfer sunt date de :

$$H_1(m) = \frac{E[X^*(m)Y(m)]}{E[|X(m)|^2]} \quad (6.16)$$

$$H_2(i, j) = \begin{cases} \frac{E[X^*(i)X^*(i)Y(2i)]}{E[|X(i)|^4]} = \frac{E[X^*(i)X^*(i)Y(2i)]}{2E[|X(i)|^2]E[|X(i)|^2]}, & i = j \neq 0 \\ \frac{E[X^*(i)X^*(j)Y(i+j)]}{E[|X(i)|^2|X(j)|^2]} = \frac{E[X^*(i)X^*(j)Y(i+j)]}{2E[|X(i)|^2]E[|X(j)|^2]}, & i \neq \pm j \end{cases} \quad (6.17)$$

În concluzie, soluțiile date de relația 6.12 reprezintă funcțiile de transfer liniară și pătratică pentru un sistem al cărui semnal de intrare are densitatea de probabilitate arbitrară și include cazul când aceasta e gaussiană de medie nulă.

6.3. Relația intrare-ieșire din punct de vedere al puterii

Pentru un sistem neliniar modelat conform relației 6.1, puterea la ieșire, la frecvența f_m poate fi exprimată conform relației[55]:

$$\begin{aligned}
 E[|Y(m)|^2] &= |H_1(m)|^2 E[|X(m)|^2] + 2 \operatorname{Re} \left\{ H_1(m) \sum_i H_2^*(i, m-i) E[X^*(i)X^*(m-i)X(m)] \right\} \\
 &+ \sum_i \sum_j H_2^*(i, m-i) H_2(j, m-j) E[X^*(i)X^*(m-i)X(j)X(m-j)] \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

Dacă intrarea e un semnal gaussian de medie nulă, contribuția răspunsului părții liniare și a celei pătratice pot fi separate din răspunsul global al sistemului întrucât termenii liniari și pătratici din 6.1 sunt mutual ortogonali. În plus avem:

$$E[X^*(i)X^*(m-i)X(m)] = 0 \quad (6.19)$$

și proprietatea dată de 6.14.

Substituind 6.4, 6.5, 6.14 și 6.19 în 6.18 și împărțind ambii membri prin $E[|Y(m)|^2]$, obținem:

$$1 = \gamma_{yx}^2(m) + \frac{1}{2} \sum_i \gamma_{yxx}^2(-i, -m+i), \quad m \neq 0 \quad (6.20)$$

unde:

$$\gamma_{yx}^2(m) = \frac{|E[X^*(m)Y(m)]|^2}{E[|X(m)|^2]E[|Y(m)|^2]} \quad (6.21)$$

și:

$$\gamma_{yxx}^2(-i, -m+i) = \frac{|E[X^*(i)X^*(m-i)Y(m)]|^2}{E[|X(i)|^2]E[|X(m-i)|^2]E[|Y(m)|^2]} \quad (6.22)$$

Primul termen în membrul drept al relației 6.20, numit și coerența liniară reprezintă partea din puterea de ieșire datorată sistemului liniar. Suma din membrul drept al relației 6.20, numită bicoerență, reprezintă partea din puterea de ieșire la frecvența f_m datorată interacțiunii componentelor de frecvențe f_i și $f_m - f_i$, prezente în semnalul de intrare.

În concluzie, putem afirma că, în cazul semnalului de intrare gaussian, componentele în puterea de la ieșire datorate răspunsurilor liniar și pătratic sunt reprezentate de coerența liniară $\gamma_{yx}(m)$ și respectiv bicoerența $\gamma_{yxx}(-i, -m+i)$. Ambii termeni din membrul drept al relației 6.20 sunt cuprinși între 0 și 1, suma lor fiind egală cu 1.

În cazul unui semnal de intrare având statistici oarecare, relațiile 6.14 și 6.19 nu pot fi aplicate și în consecință avem:

$$1 = \xi_l(m) + \xi_{lq}(m) + \xi_q(m) \quad (6.23)$$

unde :

$$\xi_l(m) = \frac{|H_1(m)|^2 E[|X(m)|^2]}{E[|Y(m)|^2]} \quad (6.24)$$

$$\xi_{lq}(m) = \frac{2 \operatorname{Re} \left\{ H_1(m) \sum_i H_2^*(i, m-i) E[X^*(i)X^*(m-i)X(m)] \right\}}{E[|Y(m)|^2]} \quad (6.25)$$

$$\xi_q(m) = \frac{E \left[\left| \sum_i H_2(i, m-i) X(i)X(m-i) \right|^2 \right]}{E[|Y(m)|^2]} \quad (6.26)$$

În relația 6.23 $\xi_l(m)$ reprezintă partea din puterea de la ieșire asociată funcției de transfer liniară, iar $\xi_q(m)$ reprezintă partea din puterea de ieșire asociată funcției de transfer pătratică. $\xi_{lq}(m)$ reprezintă acea parte din puterea de ieșire datorată atât părții liniare, $H_1(m)$, cât și celei pătratică, $H_2(i,j)$. Apariția ei se datorează faptului că modelul descris de relația 6.1 nu reprezintă un model ortogonal pentru intrări negausiene.

$\xi_l(m)$ și $\xi_q(m)$ au numai valori pozitive, dar $\xi_{lq}(m)$ poate lua valori negative.

Pătratul funcției de coerență liniară în cazul unui semnal de intrare oarecare se poate deduce pornind de la relația 6.21 explicitând membrul drept al relației. Se obține:

$$\begin{aligned} \gamma_{yx}^2(m) &= \frac{|H_1(m)|^2 E[|X(m)|^2]}{E[|Y(m)|^2]} + \frac{2 \operatorname{Re} \left\{ H_1(m) \sum_i H_2^*(i, m-i) E[X^*(i)X^*(m-i)X(m)] \right\}}{E[|Y(m)|^2]} \\ &+ \frac{\left| \sum_i H_2(i, m-i) E[X^*(m)X(i)X(m-i)] \right|^2}{E[|X(m)|^2] E[|Y(m)|^2]} \\ &= \xi_l(m) + \xi_{lq}(m) + \frac{\left| \sum_i H_2(i, m-i) E[X^*(m)X(i)X(m-i)] \right|^2}{E[|X(m)|^2] E[|Y(m)|^2]} \end{aligned} \quad (6.27)$$

După cum se poate observă din relația 6.27, coerența liniară conține în acest caz termeni aparținând funcției de transfer pătratică. De aceea în cazul aplicării unui

semnal de intrare oarecare sistemului de ordinul al-II-lea, funcția de coerență nu indică acea parte a puterii la ieșire datorată componentei liniare a modelului. În mod asemănător se poate demonstra că funcția de bicoerență conține termeni datorati componentei liniare a modelului. Deasemenea, în acest caz, pătratul funcției de bicoerență nu e cuprins între 0 și 1.

Se poate aprecia calitatea unui model pe baza coerenței sistemului definită ca raport între puterea dată de 6.18 și cea calculată pe baza datelor obținute la ieșirea sistemului real. Cu cât valoarea acestei funcții este mai aproape de unitate cu atât modelul este mai bun.

6.4. Modelul Volterra ortogonalizat în domeniul frecvență

Kim și Powers [60] au dezvoltat un algoritm pentru estimarea funcțiilor de transfer ale unui sistem Volterra, fără a presupune semnalul de intrare de tip gaussian. Modelul rezultat oferă o bună aproximare a spectrului de putere al răspunsului sistemului. După cum s-a văzut, lipsa ortogonalității modelului face dificilă descompunerea spectrului de putere al răspunsului global al sistemului, pe baza unei semnificații fizice atașate fiecărui termen. Acest lucru se datorește termenilor de interferență corespunzători produselor între componentele de diferite ordine ale modelului. Acești termeni pot conduce la o funcție de coerență negativă sau de valoare mai mare ca unitatea. Situația devine și mai complicată în cazul sistemelor Volterra de ordin superior.

În cele ce urmează se va prezenta o metodă care conduce la un model Volterra ortogonal în domeniul frecvență pentru intrări negausiene și care elimină din funcția de coerență termenii de interferență asociați modelelor neortogonale.

Metoda se bazează pe aplicarea rezultatelor obținute de Dodds și Robson [61] și Bendat [62] în identificarea sistemelor liniare cu intrări și ieșiri multiple în cazul sistemelor Volterra de ordin superior.

Seria Volterra se poate reprezenta în spațiul vectorial multidimensional sub forma unui vector ale cărui elemente sunt constituite din produse multiple între eșantioanele parțial corelate ale semnalului de intrare.

Modelul Volterra ortogonalizat în domeniul frecvență se bazează pe transformarea aplicată vectorului de intrare de ordin superior, cu elemente corelate. Rezultatul transformării îl constituie un vector de intrare având elementele ortogonale. Ca urmare a acestei transformări vor rezulta expresii noi pentru transformatele nucleelor în domeniul frecvență.

6.4.1. Vector de intrare pentru sistemul Volterra ortogonalizat

Se admite următoarea reprezentare în domeniul frecvență pentru un sistem Volterra de ordin superior:

$$\begin{aligned}
 Y(m) = & H_1(m)X(m) + \sum_{i+j=m} H_2(i, j)X(i)X(j) + \sum_{i+j+k=m} H_3(i, j, k)X(i)X(j)X(k) + \\
 & \dots + \sum_{i_1+\dots+i_r=m} H_r(i_1, \dots, i_r)X(i_1)\dots X(i_r) + N(m) = H(m)X(m) + N(m)
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

unde $X(m)$ și $N(m)$ reprezintă Transformatele Fourier Discrete ale semnalului de intrare și respectiv a zgomotului (semnalului de eroare), $n(t)$.

Se notează prin $H(m)$, respectiv prin $X(m)$ vectorii :

$$\begin{aligned}
 H(m) &= [H_1, H_2, \dots, H_r] \\
 X^T(m) &= [X_1, X_2, \dots, X_r]
 \end{aligned}
 \tag{6.29}$$

Elementele vectorului $H(m)$ sunt transformatele nucleelor de ordinul $1, 2, \dots, r$: H_1, H_2, \dots, H_r , pe care le vom numi în continuare funcții de transfer de ordinul $1, 2, \dots, r$. Vectorii coloană X_1, X_2, \dots, X_r conțin produse de diferite ordine ale Transformatei Fourier Discrete a intrării. De exemplu:

$$\begin{aligned}
 H_1(m) &= [H_1(m)] \\
 X_1^T(m) &= [X_1(m)]
 \end{aligned}
 \tag{6.30}$$

unde: $0 \leq m \leq M$ și M reprezintă frecvența Nyquist.

$$\begin{aligned}
 H_2(m) &= [\dots H_2'(i, j) \dots] \\
 X_2(m) &= \begin{bmatrix} \vdots \\ X(i)X(j) \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{6.31}$$

unde: $\left[\frac{m+1}{2} \right] \leq i = m - j \leq M$ și $[l]$ reprezintă cel mai mare întreg mai mic decât l .

Domeniul de variație al indicilor i și j ținând cont de teorema eșantionării [57] și de simetria funcției $H_2(i, j)$ este și în acest caz $S \cup D$, după cum apare marcat în figura 6.1. Prin $H_2'(i, j)$ s-a notat $I(i, j)H_2(i, j)$, unde $I(i, j)$ este factorul de simetrie pătratic definit de relația:

$$I(i, j) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}
 \tag{6.32}$$

Funcția de transfer de ordinul III și vectorul de intrare de același ordin sunt dați de relația:

$$\begin{aligned} H_3(m) &= [\dots H_3'(i, j, k) \dots] \\ X_3(m) &= \begin{bmatrix} \vdots \\ X(i)X(j)X(k) \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.33)$$

unde indicii i, j și k aparțin domeniilor definite de relațiile:

$$\begin{aligned} \lceil (m+2)/3 \rceil = m_1 \leq i \leq M \\ \lceil (m-m_1+1)/2 \rceil \leq j \leq m \quad \text{pt. fiecare } i \\ k = m - i - j \end{aligned} \quad (6.34)$$

În relația 6.34 s-a folosit notația: $H_3'(i, j, k) = I(i, j, k)H_3(i, j, k)$, unde $I(i, j, k)$, reprezintă factorul de simetrie cubic definit conform relației:

$$I(i, j, k) = \begin{cases} 6, & \text{dacă } i \neq j \neq k \\ 3, & \text{dacă } i = j \text{ sau } j = k \text{ sau } i = k \\ 1, & \text{dacă } i = j = k \end{cases} \quad (6.35)$$

Fie acum vectorul de ieșire Y , în spațiul $(r+1)$ dimensional: $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_r, N]$ unde: $Y_i = H_i X_i$ și ieșirea Y este suma tuturor componentelor Y_i și N :

$$Y = \sum_{i=1}^r Y_i + N \quad (6.36)$$

În aceste condiții se poate determina un vector ieșire model $\hat{Y} \equiv Y - N$ conform criteriului ce minimizează eroarea medie pătratică, $E[N^2]$. Aceasta constituie o problemă de regresie liniară și are ca soluție un vector H optim, obținut prin derivarea lui $E[N^2]$, în raport cu H .

Acest lucru este echivalent cu găsirea unui vector model \hat{Y} , în spațiul r dimensional, având drept bază vectorii nenormali X_1, X_2, \dots, X_r , de coordonate H .

Ca un exemplu, să considerăm un sistem Volterra de ordinul al-II-lea ilustrat geometric în figura 6.2. Prin X_1, X_2 și N , s-au notat vectorii liniar, pătratic și de eroare în spațiul tridimensional ($r=3$).

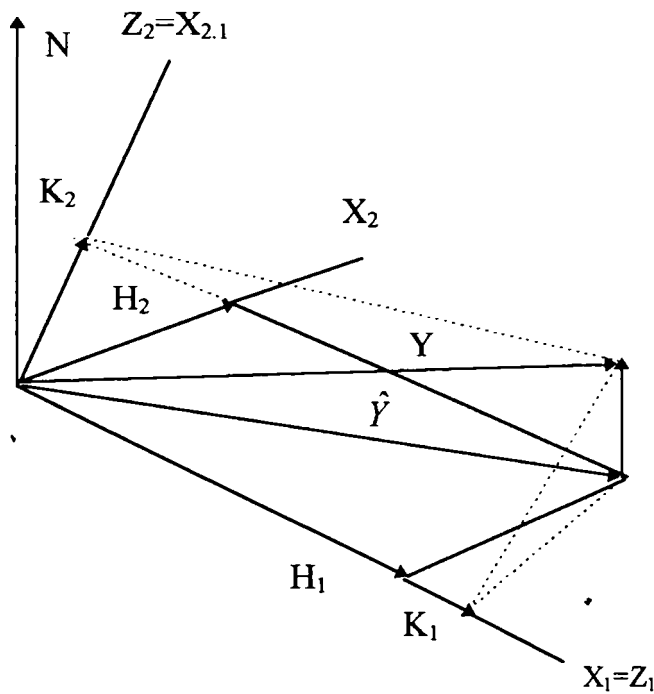


Figura 6.2 Ilustrarea geometrică a unui sistem Volterra de ordinul al-II-lea

Ax N este perpendiculară pe planul compus de X_1 și X_2 , unde X_1 și X_2 nu sunt ortogonale. Vectorul model \hat{Y} poate fi reprezentat ca un punct al acestui spațiu bidimensional, având coordonatele H_1 și H_2 , funcțiile de transfer ale sistemului Volterra.

Există totuși o anumită ambiguitate în descrierea ieșirii, observate fie ca liniară, fie ca pătratică, în concordanță cu datele de intrare pentru că X_1 și X_2 nu sunt ortogonale. De exemplu, X_2 poate fi descompus într-o componentă coliniară cu X_1 și alta perpendiculară pe X_1 .

În concluzie putem afirma că soluția constă în introducerea unui sistem de coordonate ortogonal așa cum se vede din figura 6.2.

Din punct de vedere matematic modelul ortogonal poate fi construit prin înlocuirea datelor de intrare $\{X_i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$, prin seturi ordonate de intrări condiționate: $\{Z_i = X_{i,i-1}\}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Intrările condiționate Z_i se construiesc pe baza intrărilor X_i , prin înlăturarea corelațiilor cu X_1, \dots, X_{i-1} printr-un procedeu de ortogonalizare Gram-Schmidt.

Ieșirea sistemului poate fi reprezentată pe baza unei combinații liniare a acestor vectori de intrare ortogonali.

Se prezintă în continuare modul de construcție al sistemului vectorilor ortogonali. Fie:

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 \\ Z_2 &= X_2 - L_{21}Z_1 \end{aligned} \tag{6.37}$$

L_{21} se poate determina din condiția de ortogonalitate a vectorilor Z_1 și Z_2 : $\langle Z_2 \cdot Z_1^* \rangle = 0$. Rezultă că:

$$L_{21} = \langle X_2 \cdot Z_1^* \rangle \langle Z_1 \cdot Z_1^* \rangle^{-1} = S_{21}S_{11}^{-1} \tag{6.38}$$

unde S_{21} este format din elementele de intercorelație $B(i,j)$ ale intrării $X_2(m)$, unde: $i + j = m$, iar S_{11} reprezintă spectrul de putere al intrării. Se poate afirma că L_{21} conține aceea parte din X_2 care e corelată cu X_1 și în consecință Z_2 ca fiind egal cu

X_2 din care s-a eliminat corelația cu X_1 : $Z_2 = X_{2,1}$, așa după cum apare și în figura 6.2.

Procedura de ortogonalizare se poate repeta adăugând un nou vector ortogonal bazei conform tehnicii anterior prezentate. Pentru un sistem Volterra de ordin r , se poate scrie vectorul de ordin j , al bazei ortogonale astfel:

$$Z_j = X_j - \sum_{i=1}^{j-1} L_{ji} Z_i \quad \text{pt. } j=1, \dots, r \quad (6.39)$$

cu: $\langle Z_i \cdot Z_j^* \rangle = 0$ pt. $i \neq j$. În ecuația 6.39 L_{ji} este dat de relația:

$$L_{ji} = \langle X_j \cdot Z_i^* \rangle \cdot \langle Z_i \cdot Z_i^* \rangle^{-1} = S_{ji \cdot i-1} S_{ii \cdot i-1} \quad (6.40)$$

unde: $S_{ji \cdot i-1}$ este o matrice polispectrală condiționată obținută pe baza vectorilor de intrare de ordin j și i din care au fost eliminate corelațiile cu $X_1 \dots X_{i-1}$. Mai mult chiar, în relația 6.40 L_{jj} este o matrice identitate întrucât: $\langle X_j \cdot Z_j^* \rangle = \langle Z_j \cdot Z_j^* \rangle$. De aceea se poate scrie vectorul original X_j conform relației:

$$X_j = \sum_{i=1}^j L_{ji} Z_i \quad (6.41)$$

Incluzând toți vectorii X_j , se poate scrie ecuația transformării de coordonate astfel:

$$X = L \cdot Z \quad (6.42)$$

unde vectorul de intrare bază ortogonal este dat de:

$$Z^T = [Z_1, Z_2, \dots, Z_r] \quad (6.43)$$

Matricea transformării L este de forma:

$$L = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & I_{22} & 0 & \dots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & I_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{r1} & L_{r2} & L_{r3} & \dots & I_{rr} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

unde; $I_{ii} (= L_{ii})$ este o matrice identitate și L_{ji} este dată de relația 6.40.

Pentru o intrare X gaussiană, L_{ji} se anulează când $i + j$ este impar și transformarea conduce la modelul Wiener în domeniul frecvență.

Trecerea de la sistemul Volterra original la cel ortogonalizat este echivalentă cu o transformare de coordonate care înlocuiește baza având elementele neortogonale X_j , cu cea de componente Z_i ortogonale. Utilizând cele două tipuri de coordonate X_j , respectiv Z_i , ieșirea sistemului se poate scrie sub forma:

$$Y - N = K \cdot Z = H \cdot Z = H \cdot L \cdot Z \quad (6.45)$$

unde vectorul K este dat de:

$$K = [K_1, K_2, \dots, K_r] \quad (6.46)$$

Vectorii linie K_1, K_2, \dots, K_r reprezintă funcțiile de transfer liniară, pătratică și de ordin r corespunzătoare sistemului ortogonal caracterizat de vectorii bază Z_1, Z_2, \dots, Z_r . Pe baza relației 6.45 se poate obține noul set de funcții de transfer K al sistemului ortogonalizat:

$$K = H \cdot L \quad (6.47)$$

De exemplu, pentru un sistem de ordinul al-II-lea funcțiile de transfer ortogonale sunt date de:

$$\begin{aligned} K_1 &= H_1 + H_2 L_{21} + H_3 L_{31} \\ K_2 &= \quad H_2 \quad + H_3 L_{32} \\ K_3 &= \quad \quad \quad H_3 \end{aligned} \quad (6.48)$$

Cele două funcții de transfer de ordinul al-III-lea sunt egale, datorită structurii matricii asociate transformării de coordonate.

Expresia noilor funcții de transfer depinde și de punctul de plecare în procedura de ortogonalizare Gram-Schmidt. În cazul de față s-a ales $X_1 \equiv Z_1$, ceea ce conduce la o componentă liniară a modelului egală cu cea obținută pe calea identificării convenționale a sistemului liniar.

Se vor deduce în continuare spectrele de putere asociate sistemului ortogonal, funcție de cele ale sistemului Volterra clasic. Întrucât acestea corespund interacțiunii între vectori de intrare de diferite ordine, se vor denumi în continuare multispectre.

Pornind de la relația 6.39 scrisă sub forma:

$$X_{j,j-1} = X_j - \sum_{i=1}^{j-1} L_{ji} X_{i,i-1} \quad (6.49)$$

se poate scrie:

$$X_{jk} = X_{j \cdot k-1} - L_{jk} X_{k \cdot k-1} \quad (6.50)$$

Înmulțind ambii membrii cu X și făcând medieri statistice pentru $j \geq i \geq k$ obținem:

$$\begin{aligned} S_{ji \cdot k} &= S_{ji \cdot k-1} - L_{jk} S_{ki \cdot k-1} = \\ &= S_{ji \cdot k-1} - S_{jk \cdot k-1} S_{kk \cdot k-1}^{-1} S_{ki \cdot k-1} \end{aligned} \quad (6.51)$$

unde $\dot{S}_{ji \cdot k}$ reprezintă matricea ce conține multispectrele corespunzătoare vectorilor de intrare de ordin j și i din care au fost înlăturate corelațiile cu X_l până la X_k .

Utilizând ecuația recursivă 6.51 se pot deduce expresii pentru funcțiile de transfer K și H , în funcție de spectrele vectorilor de intrare. Pentru aceasta se pornește de la relația:

$$K_i = \langle Y \cdot Z_i^* \rangle \langle Z_i Z_i^* \rangle^{-1} = S_{yi \cdot i-1} S_{ii \cdot i-1}^{-1} \quad (6.52)$$

Pentru a ilustra acest lucru se va folosi din nou sistemul pătratic. Pe baza relațiilor 6.40 și 6.51 se poate scrie:

$$\begin{aligned} S_{y2 \cdot 1} &= S_{y2} - S_{y1} S_{11}^{-1} S_{12} \\ S_{22 \cdot 1} &= S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} \end{aligned} \quad (6.53)$$

unde: S_{11} - reprezintă spectrul de putere al intrării

S_{12} - reprezintă vectorul ce conține elementele bispectrale

S_{y1} - reprezintă interspectrul de putere

S_{y2} - reprezintă vectorul ce conține elementele interbispectrale

Ținând cont de 6.48, 6.52 și 6.53 se poate scrie:

$$H_2 = K_2 = [S_{y2} - S_{y1} S_{11}^{-1} S_{12}] [S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}]^{-1} \quad (6.54)$$

$$H_1 = K_1 - H_2 L_{21} = [S_{y1} - H_2 S_{21}] S_{11}^{-1} \quad (6.55)$$

În ecuația 6.55 se poate observa că suma dintre H_1 și termenul de corecție $H_2 S_{21} S_{11}^{-1}$, ce caracterizează interferența între componenta liniară și cea pătratică, este K_1 . Deci K_1 conține întreaga contribuție a părții liniare.

Când intrarea e gaussiană, bispectrul intrării (S_{21}) se anulează și relațiile 6.54 și 6.55 devin:

$$H_1 = K_1 = G_1 = S_{y1} S_{11}^{-1} = \left[\frac{S_{yx}(m)}{S_{xx}(m)} \right] \quad (6.56)$$

$$H_2 = K_2 = G_2 = S_{y2} S_{22}^{-1} = \left[\cdots \frac{B_{yxx}(i, m-i)}{S_{xx}(i) S_{xx}(m-i)} \cdots \right] \quad (6.57)$$

unde G_1 și G_2 reprezintă funcțiile de transfer liniară și pătratică ale sistemului Wiener de ordinul al-II-lea.

Deci pentru un semnal de intrare gaussian cele trei modele: Volterra, Volterra ortogonalizat și Wiener devin identice.

În continuare se va extinde noțiunea de funcție de coerență a sistemului liniar și în cazul sistemelor Volterra de ordin superior. Punctul de plecare îl constituie raportul între puterea semnalului la ieșirea modelului și puterea semnalului la ieșirea sistemului real.

$$\gamma(m) = \frac{\langle |\hat{Y}(m)|^2 \rangle}{\langle |Y(m)|^2 \rangle} = S_{\hat{y}\hat{y}}(m) S_{yy}^{-1}(m) \quad (6.58)$$

Pentru un sistem liniar relația 6.58 ia forma dată de relația 6.24, sau, folosind noile notații:

$$\gamma_1(m) = \frac{|S_{yx}(m)|^2}{S_{xx}(m) S_{yy}(m)} \quad (6.59)$$

Explicitând $S_{\hat{y}\hat{y}}(m)$, se obține:

$$S_{\hat{y}\hat{y}} = H \langle XX^* \rangle H^* = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r H_i S_{ij} H_j^* \equiv \sum_{i=1}^r P_i^n + 2 \sum_{i < j} \text{Re} [P_{ij}^n] \quad (6.60)$$

unde P_i^n reprezintă puterea la ieșirea sistemului Volterra de ordin i : $P_i^n = H_i S_{ii} H_i^*$. Cel de-al-II-lea termen al relației $\text{Re} [P_{ij}^n] = \text{Re} [H_i S_{ij} H_j^*]$ pentru $i \neq j$, reprezintă interferența între vectorii de intrare de ordin i și j și poate fi negativ sau pozitiv, în funcție de fazele relative ale intrărilor ce interacționează. Prezența acestor termeni de interferență îngreunează, așa după cum s-a arătat în paragraful 6.3, interpretarea fizică a modelului Volterra.

Pe de altă parte, puterea la ieșirea sistemului Volterra este dată de:

$$S_{\hat{y}\hat{y}} = K \langle Z \cdot Z^* \rangle K^* = \sum_{i=1}^r S_{y^{i-1}} S_{ii-1}^{-1} S_{iy^{i-1}} \equiv \sum_{i=1}^r P_i^0 \quad (6.61)$$

unde P_i^0 reprezintă puterea la ieșirea modelului de ordin i .

Întrucât puterile definite de 6.60 și 6.61 sunt egale, rezultă că funcția de coerență a sistemului Volterra se poate exprima:

$$\gamma = \sum_{i=1}^r \gamma_i^n + \sum_{i < j} \gamma_{ij}^n = \sum_{i=1}^r \gamma_i^0 \quad (6.62)$$

CONCLUZII Capitolul de față își propune prezentarea unor metode de determinare ale transformatelor nucleelor în domeniul frecvență.

Prima metodă prezentată se bazează pe o tehnică numerică de determinare a funcțiilor de transfer care se dovedește a fi mai exactă decât tehnicile iterative. Ea conduce la ecuații matriciale ale căror soluții nu prezintă probleme de convergență. Metoda se bazează pe calculul funcției de transfer pentru fiecare frecvență în parte, ținând cont de simetria acestei funcții precum și de condițiile impuse de teorema eșantionării în cazul sistemelor neliniare. Metoda prezintă, comparativ cu metoda iterativă [56], un volum de calcul mai redus.

Prezentarea metodei se face în cazul unui sistem de ordinul al-II-lea. Determinarea funcțiilor de transfer liniară și pătratică se bazează pe secvențele de date de la intrarea și ieșirea sistemului. Soluțiile pentru cele două funcții de transfer sunt oferite de relația 6.12 și ele sunt optime în sensul minimizării erorii medii pătratice. Matricea $E[X^* X^T]$ care intervine în calculul funcțiilor de transfer și a cărei expresie este dată de relația 6.13 conține ca elemente spectrele de putere ale intrării, cumulanți de ordinul al-III-lea ai TFD ai semnalului de intrare, cunoscuți ca bispectre precum și momente spectrale de ordinul al-IV-lea.

Soluțiile date de 6.12 includ cazul în care semnalul de intrare e gaussian de medie nulă, după cum se observă din relațiile 6.16 și 6.17.

În cadrul paragrafului 6.3 este dedusă relația intrare-ieșire din punct de vedere al puterii. În cazul unui semnal gaussian de medie nulă contribuția părții liniare și a celei pătratice pot fi separate în expresia puterii semnalului la ieșirea sistemului neliniar (rel.6.20). Partea din puterea la ieșire datorată sistemului liniar, numită pătratul coerenței liniare (γ_{yx}^2), are expresia dată de relația 6.21. Contribuția în puterea de la ieșire a părții neliniare, pătratice este caracterizată de pătratul funcției de bicoerență (γ_{yxx}^2), relația 6.22.

În cazul unui semnal de intrare având statistici oarecare puterea normată la ieșire este dată de relația 6.23. În relația 6.23 $\xi_l(m)$ reprezintă partea din puterea de la ieșire asociată funcției de transfer liniară, $\xi_q(m)$ reprezintă partea din puterea

de ieșire asociată funcției de transfer pătratice, iar $\xi_{lq}(m)$, reprezintă partea din puterea de ieșire asociată atât funcției de transfer pătratice cât și celei liniare.

Calculul puterii la ieșirea modelului este extrem de importantă întrucât se poate aprecia calitatea unui model pe baza coerenței sistemului definită ca raport între puterea calculată pe baza modelului (rel 6.18) și cea calculată pe baza datelor obținute la ieșirea sistemului real. Cu cât valoarea acestei funcții este mai aproape de unitate, cu atât modelul este mai bun.

În cadrul paragrafului 6.4 este prezentat un model Volterra ortogonal în domeniul frecvență care oferă o mai bună aproximare a spectrului de putere al răspunsului sistemului pentru intrări negausiene. Modelul ortogonal elimină din funcția de coerență termenii de interferență asociați modelelor neortogonale.

Modelul Volterra ortogonalizat în domeniul frecvență se bazează pe transformarea aplicată vectorului de intrare de ordin superior, cu elemente corelate. Rezultatul transformării îl constituie un vector de intrare având elementele ortogonale. Ca urmare a acestei transformări vor rezulta noi expresii pentru transformatele nucleelor în domeniul frecvență.

Expresiile noilor funcții de transfer, K_2 , respectiv, K_1 , sunt date de relațiile 6.54, respectiv 6.55. Se poate observa că suma dintre H_1 și termenul de corecție ce caracterizează întreaga contribuție a părții liniare este K_1 . Deci K_1 conține întreaga contribuție a părții liniare. Când intrarea e gaussiană, funcțiile de transfer ale modelului Volterra ortogonalizat devin egale cu cele ale modelului Volterra și cu cele ale modelului Wiener (rel 6.56 și rel.6.57).

În continuare se extinde noțiunea de funcție de coerență a sistemului liniar și în cazul sistemelor Volterra de ordin superior. Funcția de coerență a sistemului Volterra se poate exprima pe baza relației 6.62.

CAPITOLUL 7. APLICAȚII ALE MODELELOR VOLTERRA ȘI WIENER ÎN IDENTIFICAREA SISTEMELOR NELINIARE

7.1. Estimarea nucleelor Volterra și Wiener prin metoda Lee-Schetzen

Reprezentarea sistemelor prin intermediul seriilor Volterra și Wiener se reduce în mod esențial la determinarea nucleelor Volterra respectiv Wiener ale celor două dezvoltări.

Precizia cu care sunt determinate nucleele va determina în final calitatea sistemului model. Un lucru deosebit de important îl constituie rapiditatea procesului de estimare. O metodă de estimare rapidă va permite utilizatorului construirea unui model de ordin superior ceea ce înseamnă o aproximare mai bună a sistemului nelinier. Există numeroase metode de estimare ale nucleelor Wiener și Volterra. Câteva dintre acestea se vor prezenta pe scurt în cele ce urmează.

O metodă fundamentală dar fără posibilități de implementare practică, privind determinarea nucleelor Volterra se bazează pe seturile de funcții răspuns la impuls și a fost introdusă de Schetzen [23]. Această metodă a fost prezentată în paragraful 2.1.2 cu scopul de a da o interpretare fizică a nucleelor Volterra prin lărgirea conceptului de răspuns la impuls al unui sistem.

Introducerea modelului Wiener a constituit, așa după cum s-a văzut, un avantaj major în măsurarea nucleelor întrucât a permis aplicarea tehnicilor bazate pe intercorelație în acest scop.

Cercetările întreprinse de Lee și Schetzen au condus la tehnica de identificare cunoscută sub numele de metoda Lee-Schetzen [23, pag.271-297]. Mai multe detalii privind această tehnică se vor prezenta în paragraful 7.2. Această tehnică cunoaște o versiune ce permite determinarea nucleelor în domeniul frecvență și aceasta este prezentată în [63].

Așa după cum s-a arătat în paragraful 2.1, funcționalele Volterra sunt omogene, și în general neortogonale. Totuși, pentru un semnal de intrare având o densitate de repartiție simetrică, cum este cazul zgomotul gaussian, funcționalele Volterra de ordin impar sunt ortogonale în raport cu funcționalele Volterra de ordin par. Rezultă că în cazul unui semnal de intrare Gaussian, modelul Volterra de ordinul al-II-lea fără componentă continuă, este un model ortogonal. Într-adevăr, în cazul modelului de ordinul al-II-lea, nucleele Volterra și Wiener sunt identice. Acest lucru conduce la posibilitatea de a măsura direct nucleele Volterra prin intercorelație, în cazul unui astfel de sistem.

Principalul dezavantaj pe care-l prezintă tehnicile bazate pe intercorelație este acela că ele necesită un generator de semnal Gaussian de înaltă calitate.

În ultimii ani, datorită creșterii puterii de calcul, metodele adaptive de determinare ale nucleelor au devenit deosebit de atractive. Dintre tehnicile de filtrare adaptivă neliniară cele ce utilizează algoritmi LMS și RLS precum și diferite variante ale acestora au cunoscut o largă dezvoltare [36], [64]-[67], [92].

Așa după cum s-a arătat în Capitolul al-VI-lea, unii autori au preferat

reprezentarea modelului Volterra în domeniile frecvență ceea ce a condus la dezvoltarea tehnicilor de estimare a nucleelor în domeniul frecvență [68]-[71].

Recent au fost dezvoltați algoritmi bazați pe tehnici ortogonale de căutare, ce operează atât în domeniul timp [72]-[75], [95] cât și în domeniul frecvență [7], [82].

Se cunosc deasemenea metode ce permit estimarea nucleelor Volterra prin utilizarea semnalelor de intrare sinusoidale [76]-[78], precum și a tehnicilor bazate pe reprezentarea mixtă timp-frecvență a nucleelor [79].

În continuare se vor prezenta detaliat tehnicile bazate pe intercorelație precum și cele bazate pe filtrarea adaptivă neliniară.

7.2. Determinarea nucleelor Volterra și Wiener în cazul unor sisteme neliniare

Metoda de determinare a nucleelor Wiener prin tehnica intercorelației, introdusă de către Lee și Schetzen se bazează pe proprietatea funcționalelor G de a fi ortogonale în cazul unui semnal de intrare zgomot alb-Gaussian. Potrivit acestei tehnici, nucleul de ordin n , $k_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ al funcționalei Wiener $K_n[k_n; x(t)]$ se poate determina dacă la intrarea sistemului neliniar necunoscut se aduce un semnal alb gaussian având dispersia σ^2 potrivit formulei:

$$k_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n! \sigma^{2n}} \overline{\{y(t) - S_n[x(t)]\} D_n[x(t)]} \quad (7.1)$$

unde: $S_n[x(t)] = \sum_{m=0}^{n-2} K_m[k_m; x(t)]$ și $D_n[x(t)] = x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n)$.

Schema de măsurare este indicată în figura 7.1.

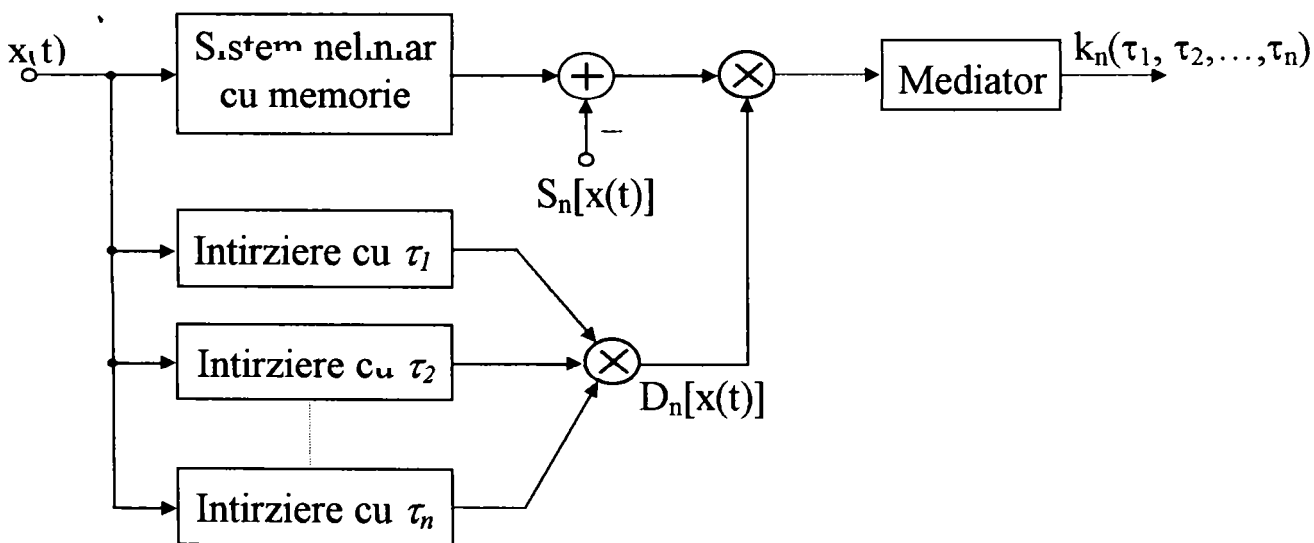


Figura 7.1. Determinarea nucleelor Wiener prin metoda Lee-Schetzen

Metoda prezentată se bazează pe implementarea unui algoritm ce operează asupra a două seturi de date: de intrare $x(t)$ și de ieșire $y(t)$. Determinarea nucleelor Wiener începe întotdeauna cu nucleele de ordin inferior. Termenul notat cu $S_n[x(t)]$ în relația 7.1. conține răspunsul sistemului corespunzător nucleelor de ordin k_m , unde $m < n$, nucleee care au fost determinate anterior nucleului de ordin n . Prezența sa în formule permite determinarea corectă a nucleelor Wiener pentru toate valorile $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ [80], [91].

Tehnica de identificare prezentată are un avantaj major: nu ridică probleme de convergență cum este cazul metodelor adaptive. Precizia metodei depinde de calitatea semnalului de intrare Gaussian. Cu cât ordinul nucleului ce trebuie estimat este mai mare, cu atât proprietățile generatorului gaussian trebuie să fie mai bune.

În cazul determinării nucleului de ordin N , statisticile de ordin superior ale semnalului de intrare trebuie să-și păstreze proprietățile până la ordinul $2N$. În mod uzual în problemele de identificare se utilizează generatoare de semnal gaussian aflate în bibliotecile programelor de simulare.

Se va prezenta în cele ce urmează implementarea modelului Volterra în cazul mai multor sisteme neliniare a căror structură e cunoscută. Implementarea modelului presupune determinarea nucleelor de diferite ordine. O atenție deosebită va fi acordată calculului răspunsului sistemului Volterra la diferite semnale de intrare. Calitatea modelului va fi apreciată pe baza comparației răspunsului sistemului model la diferite semnale de intrare și răspunsul sistemului real.

- Modelarea unui sistem de ordinul al-II-lea

Sistemul neliniar ales are schema din figura 7.2 și aparține clasei de sisteme Wiener.

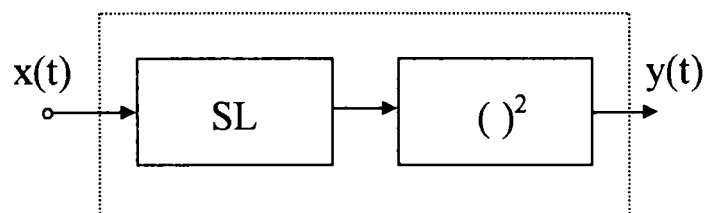


Figura 7.2 Schema sistemului de ordinul al-II-lea supus identificării

Sistemul liniar (SL) este caracterizat de răspunsul la impuls $h(t)$ reprezentat în figura 7.3. și având expresia dată de relația:

$$h(t) = \frac{1256}{0.98} \exp(-251.2t) \sin(1231t) \sigma(t) \quad (7.2)$$

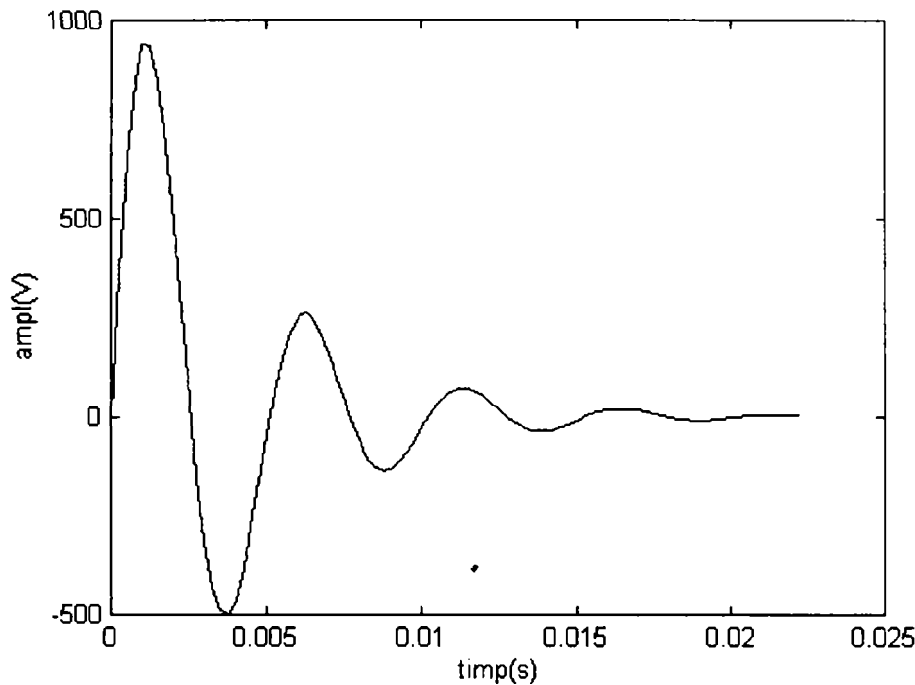


Figura 7.3 Răspunsul la impuls al sistemului liniar din figura 7.2

Sistemul astfel ales reprezintă un sistem neliniar fără componentă continuă așa după cum rezultă în continuare:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)x(t-\tau_2)d\tau_2 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Comparând această relație cu cea obținută modelând sistemul cu un sistem Volterra de ordinul al-II-lea:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \tag{7.4}$$

se obține:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = h(\tau_1)h(\tau_2) \tag{7.5}$$

În concluzie, potrivit celor afirmate în paragraful 7.2., pentru sistemul considerat nucleele Wiener și Volterra sunt identice. Acest lucru ne permite determinarea în continuare a nucleului Volterra de ordinul al-II-lea prin intermediul nucleului Wiener de ordinul al-II-lea.

Modelarea sistemului neliniar s-a făcut în MATLAB. La intrarea sistemului a fost adus un semnal zgomot alb gaussian de medie zero.

Cele două serii de timp $x[n]$ și $y[n]$ implicate în calculul nucleelor Wiener de diferite ordine s-au obținut prin eșantionarea semnalelor de la intrarea respectiv ieșirea sistemului utilizând un pas de eșantionare $T_e = 500 \mu s$. Pentru calculul nucleelor s-au folosit serii de timp de câte 6000 de eșantioane. Pentru calculul nucleului de ordin I s-a folosit formula:

$$k_1[n] = \frac{1}{\sigma^2 \cdot N} \sum_{i=0}^N y[i] x[i-n] \quad (7.6)$$

unde $N=6000$, iar σ^2 reprezintă dispersia zgomotului alb de la intrarea sistemului, egală cu densitatea spectrală de putere.

Calculul nucleului de ordin al-II-lea, $k_2[n_1, n_2]$, s-a făcut utilizând formula:

$$k_2[n_1, n_2] = \frac{1}{2(\sigma^2)^2 N} \sum_{i=1}^N y[i] x[i-n_1] x[i-n_2] \quad (7.7)$$

Ambele nuclee au fost calculate în câte 40 de puncte folosind programe scrise în MATLAB.

Așa după cum rezultă din teoria anterior prezentată, relația 7.5 este aplicabilă doar în cazul punctelor $n_1 \neq n_2$. Pentru a elimina această restricție s-a înlocuit $y[n]$ cu $y[n] - \overline{y[n]}$ în formula lui Lee-Schetzen. Graficul nucleului de ordinul al-II-lea e indicat în figura 7.4

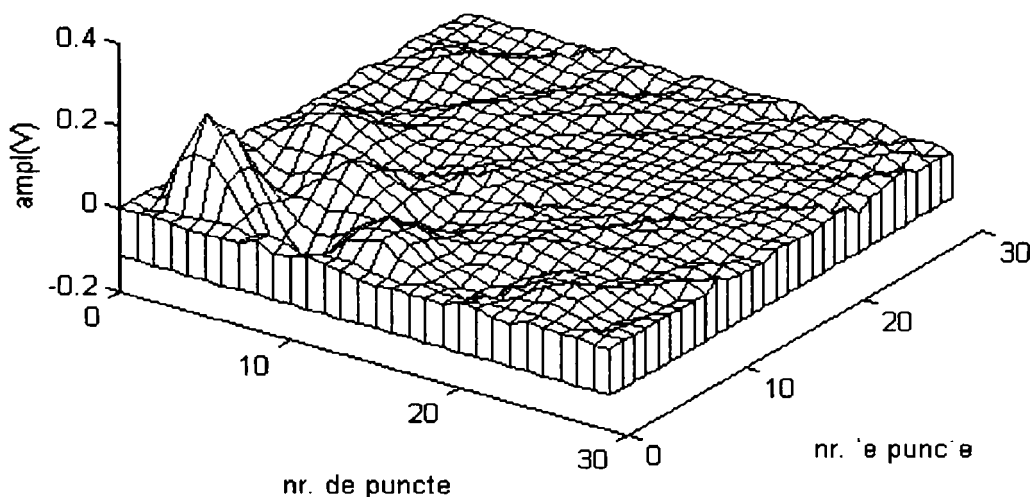


Figura 7.4 Nucleul de ordinul al-II-lea determinat experimental

În figura 7.5 s-a reprezentat nucleul Wiener de ordinul I, $k_1[n]$, nul din punct

de vedere teoretic.

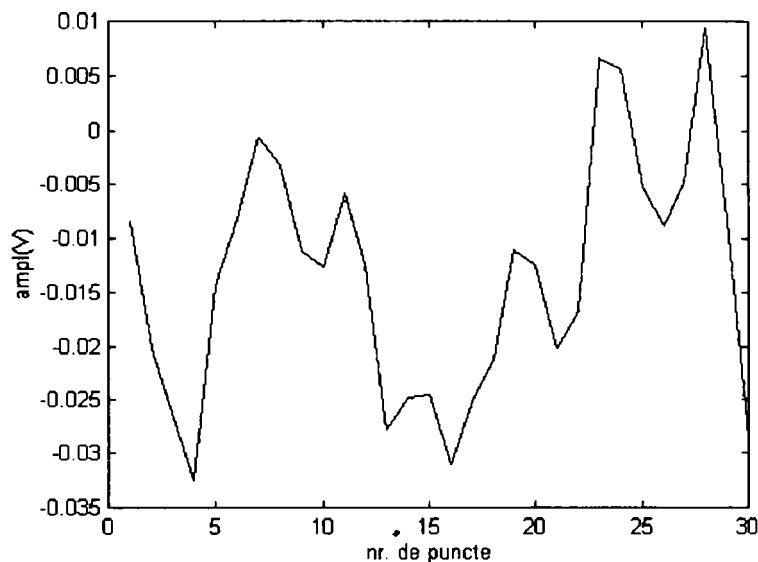


Figura 7.5 Nucleul de ordinul I determinat experimental

Așa după cum se poate observa, valorile determinate experimental în cazul nucleului de ordinul I se apropie de cele teoretice.

Nucleul de ordinul al-II-lea determinat în acest mod a fost comparat cu nucleul Volterra de ordinul al-II-lea corespunzător, dedus prin eșantionarea lui $h_2(t_1, t_2)$.

$$h_2[n_1, n_2] = T_e^2 h[n_1] h[n_2] \quad (7.8)$$

și care e reprezentat în figura 7.6.

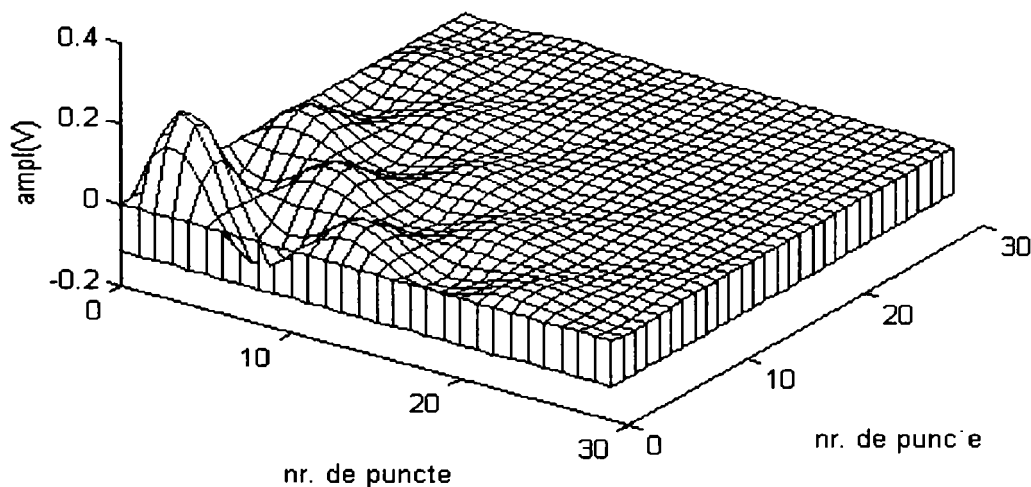


Figura 7.6 Nucleul real de ordinul al-II-lea

Comparând cele două figuri se poate aprecia calitativ acuratețea metodei

implementate.

Pentru a aprecia cantitativ modelul astfel creat s-a calculat în continuare răspunsul sistemului Volterra de ordin al-II-lea precum și al sistemului neliniar modelat la diferite semnale de intrare constând din unde sinusoidale de diferite frecvențe precum și din zgomot alb.

Pentru calculul răspunsului Volterra formula folosită a fost:

$$\hat{y}[n] = \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=0}^{M-1} k_2[m_1, m_2] x[n - m_1] x[n - m_2] \quad (7.9)$$

Răspunsurile sistemului real și ale celui model la diferite semnale de intrare sunt ilustrate cu linie continuă respectiv cu linie punctată în figurile 7.7-7.12.

Pentru a aprecia calitatea modelării s-a calculat, în fiecare caz, eroarea potrivit relației:

$$e[\%] = \frac{\sum_{k=1}^N (y[k] - \hat{y}[k])^2}{\sum_{k=1}^N y^2[k]} \cdot 100\% \quad (7.10)$$

De fiecare dată s-a făcut și calculul erorilor de aproximare, valorile respective fiind trecute în Tabelul II.

Deasemenea au fost calculate răspunsurile în frecvență ale nucleelor de ordinul al-II-lea real și estimat care au fost reprezentate în figura 7.13 și 7.14.

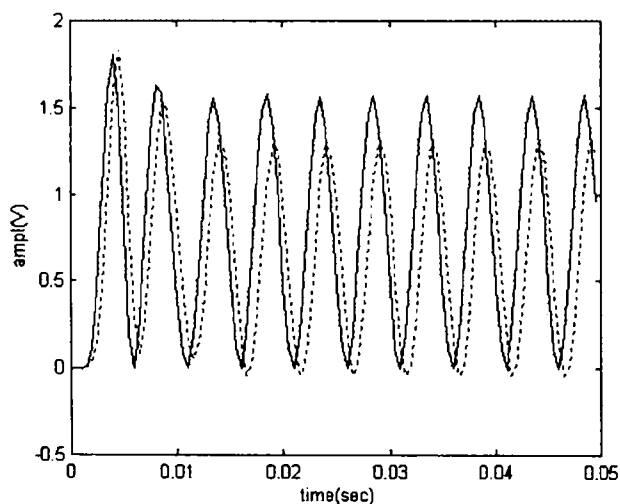


Figura 7.7 Răspunsul real și calculat al sistemului de ordinul al-II-lea la semnal sinusoidal($f=100\text{Hz}$)

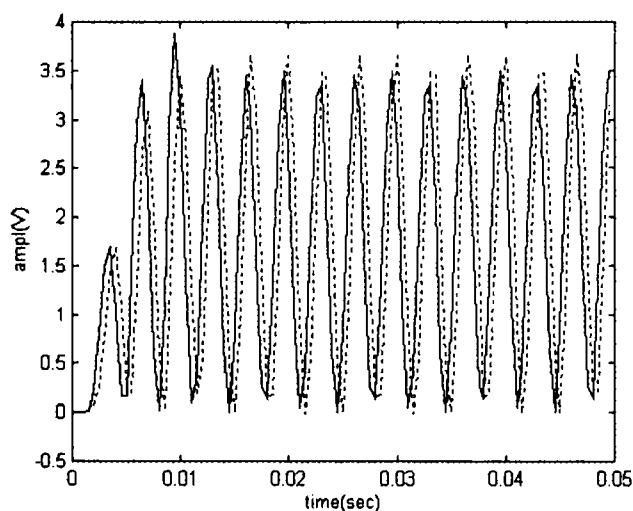


Figura 7.8 Răspunsul real și calculat al sistemului de ordinul al-II-lea la semnal sinusoidal($f=150\text{Hz}$)

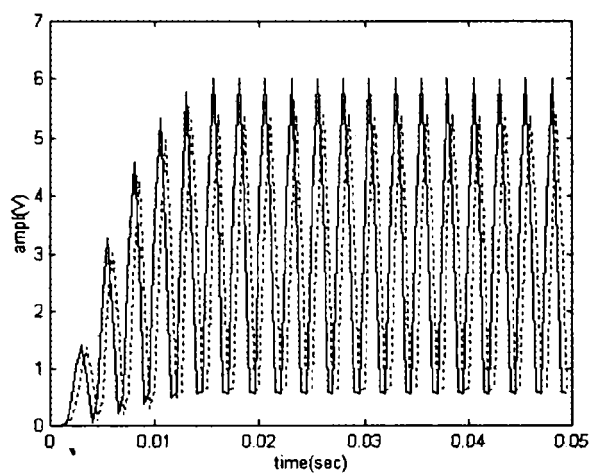


Figura 7.9 Răspunsul real și calculat al sistemului de ordinul al-II-lea la semnal sinusoidal($f=200\text{Hz}$)

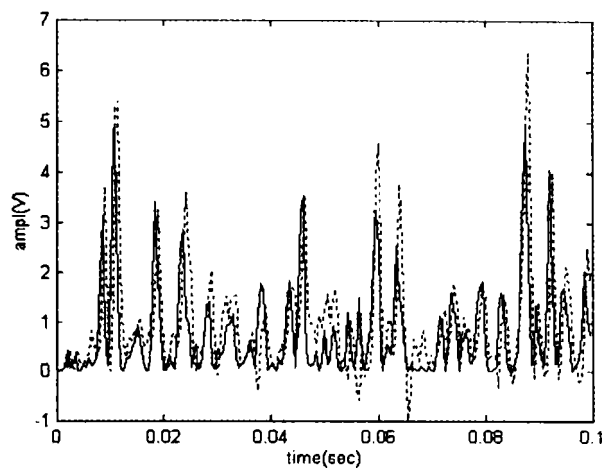


Figura 7.12 Răspunsul real și calculat al sistemului de ordinul al-II-lea la semnal zgomot alb gaussian

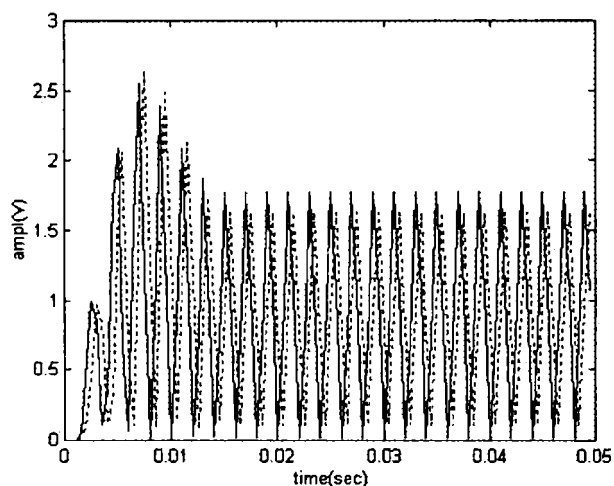


Figura 7.10 Răspunsul real și calculat al sistemului de ordinul al-II-lea la semnal sinusoidal($f=250\text{Hz}$)

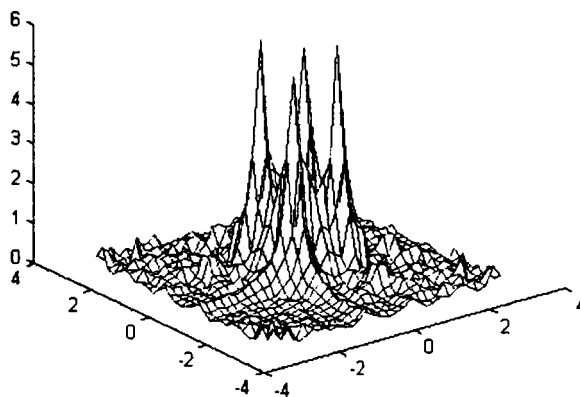


Figura 7.13 Răspunsul în frecvență al sistemului model

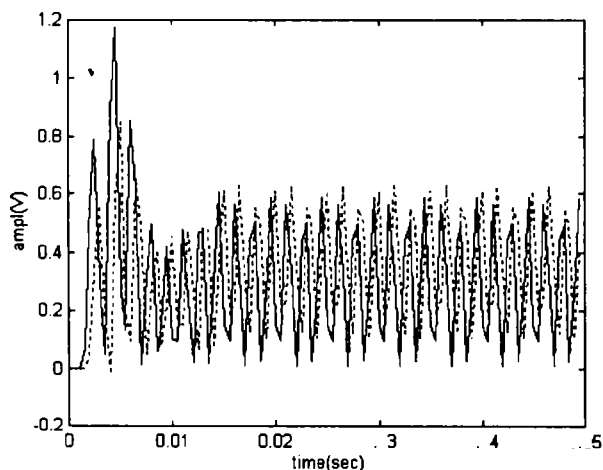


Figura 7.11 Răspunsul real și calculat al sistemului de ordinul al-II-lea la semnal sinusoidal($f=300\text{Hz}$)

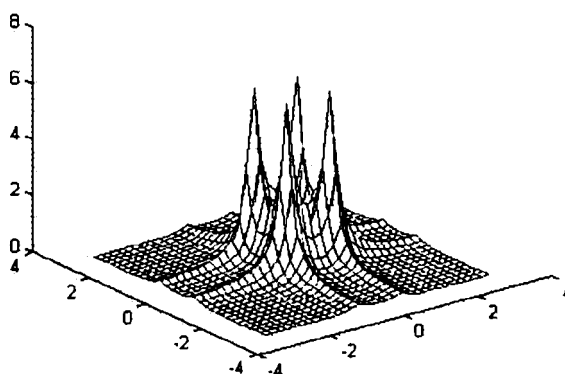


Figura 7.14 Răspunsul în frecvență al sistemului real

TABELUL II

Semnal de intrare	e[%]
semn. Sinusoidal: f=100Hz	0.612
semn. Sinusoidal: f=150Hz	0.49
semn. Sinusoidal: f=200Hz	0.9
semn. Sinusoidal: f=250Hz	0.92
semn. Sinusoidal: f=300Hz	0.71

Examinând figurile 7.7-7.11 concluzia care se desprinde este că sistemul modelat prin intermediul nucleelor Volterra reproduce cu o acuratețe suficient de bună comportarea sistemului real. Utilizarea semnalelor de test sinusoidale evidențiază comporatarea în frecvență a sistemului considerat.

Deasemenea, formula 7.9, propusă pentru calculul răspunsului sistemului oferă o bună reconstrucție a semnalului pe baza nucleelor Volterra. Formula a fost dedusă particularizând operația de convoluție în spațiul bidimensional:

$$y[n_1, n_2] = \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=0}^{M-1} k_2[m_1, m_2] x[n_1 - m_1] x[n_2 - m_2], \text{ la cazul în care: } n_1 = n_2 = n.$$

- Modelarea unui sistem de ordinul al-III-lea

Sistemul neliniar ales are schema din figura 7.6.

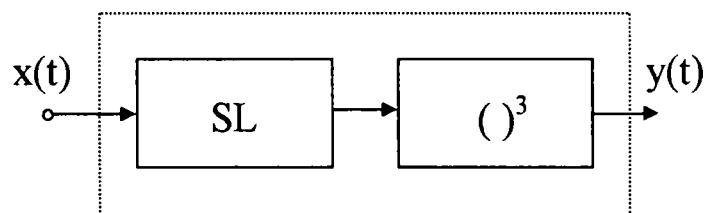


Figura 7.15. Sistem neliniar de ordinul al-III-lea supus identificării

Sistemul liniar utilizat în cadrul schemei de mai sus este identic cu cel folosit în cadrul schemei din figura 7.2, și are răspunsul la impuls dat de relația 7.2. Modelarea s-a făcut în acest caz cu ajutorul modelului Wiener. În acest caz însă, nucleele Wiener nemaifiind egale cu cele Volterra, în calculul răspunsului a trebuit ținut cont de relațiile existente între cele două tipuri de nucleee.

Calculul nucleelor Wiener a început și în acest caz cu nucleul de ordinul cel mai mic, calculat potrivit formulei 7.6. Pentru calculul nucleului de ordinul al-III-lea formula folosită este cea indicată în relația 7.11.

$$k_3[n_1, n_2, n_3] = \frac{1}{3!(\sigma^2)^3} \sum_{k=\max(n_1, n_2, n_3)}^N \{y[k] - K_1[k_1; x[k]]\} x[k - n_1] x[k - n_2] x[k - n_3] \quad (7.11)$$

Prin $K_1[k_1; x[k]]$ s-a notat răspunsul sistemului corespunzător nucleului Wiener de ordinul I. Utilizarea formulei 7.11. permite determinarea nucleului în orice punct de coordonate: (n_1, n_2, n_3) .

Calculul nucleului Wiener de ordinul al-III-lea potrivit formulei 7.11 conduce întotdeauna la nuclee simetrice. Întrucât o reprezentare în spațiul cu patru dimensiuni a nucleului nu este posibilă, pentru a ilustra simetria nucleului s-a realizat un calcul formal pentru cazul unor secvențe de date particulare:

$x[n] = [1111111111]$ și $y[n] = [1111111111]$. Nucleul de ordinul al-III-lea calculat potrivit formulei 7.11, este reprezentat în figura 7.16. Calculul s-a făcut pentru

$n_1, n_2, n_3 = \overline{0,3}$. Reprezentarea din figura 7.16 a permis evidențierea în cadrul nucleului a unor matrici notate S_0, S_1, S_2, \dots , cu o structură de asemenea simetrică. S-a creat astfel posibilitatea vizualizării prin intermediul acestor matrici a nucleelelor de ordinul al-III-lea. Această structură a permis implementarea calculului răspunsului sistemului de ordinul al-III-lea utilizând facilitățile oferite de lucrul cu matrici, specific programului MATLAB.

În figurile 7.17, 7.18 și 7.19 sunt ilustrate matricile de ordin 2, 10 și 40 din structura nucleului real de ordinul al-III-lea atașat sistemului din figura 7.15.

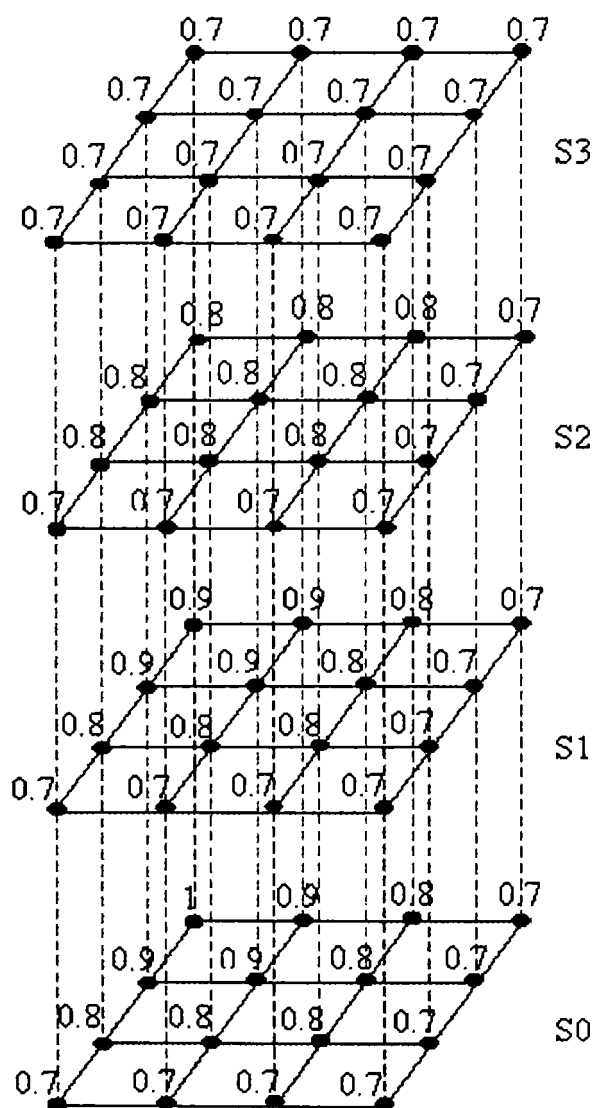


Figura 7.16 Nucleu de ordinul al-III-lea

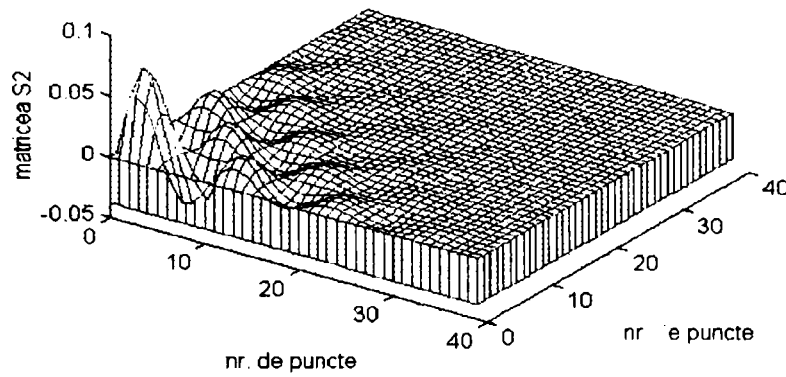


Figura 7.17 Matricea S_2 din structura nucleului de ordinul al-III-lea

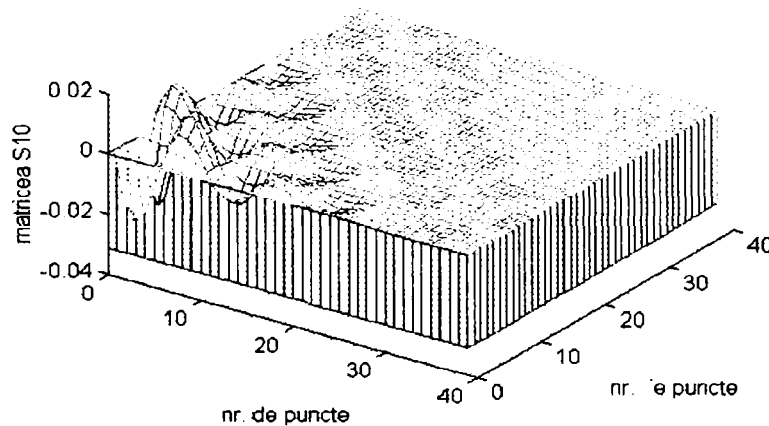


Figura 7.18 Matricea S_{10} din structura nucleului de ordinul al-III-lea

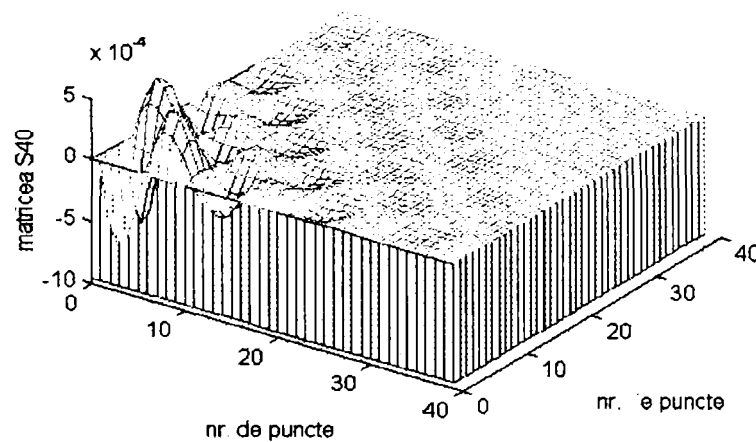


Figura 7.19 Matricea S_{40} din structura nucleului de ordinul al-III-lea

Pentru calculul nucleului de ordinul al-III-lea s-au folosit secvențe de date de intrare și ieșire având lungimea de 6000 de eșantioane. S-au efectuat determinări repetate folosind de fiecare dată un alt set de date de intrare. Valoarea finală a lui $k_3[n_1, n_2, n_3]$, utilizată ulterior în reconstrucția semnalului este rezultatul medierii a 100 de astfel de experimente. Calculele au fost realizate în acest caz utilizând

programe scrise în limbajul C, rulate pe o stație RISC 6000. Pentru generarea zgomotului alb cu distribuție gaussiană s-a folosit funcția *random* din biblioteca UNIX, care generează o secvență de numere aleatoare cu distribuție uniformă, ulterior prelucrată cu un algoritm ce transformă distribuția normală în distribuție gaussiană [81].

Dimensiunea nucleului de ordinul al-III-lea determinat s-a ales 40x40x40.

Nucleele de ordin par, zero și respectiv doi, în acest caz, sunt nule.

Pentru calculul răspunsului s-a ținut cont de faptul că nucleele astfel determinate sunt simetrice precum și de observația referitoare la nucleee de ordin zero și doi. În consecință:

$$\hat{y}[n] = K_1[k_1; x[n]] + K_3[k_3; x[n]] \quad (7.12)$$

$$K_1[k_1; x[n]] = \sum_{m_1=0}^{M-1} k_1[m_1] x[n - m_1] \quad (7.13)$$

$$K_3[k_3; x[n]] = \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=0}^{M-1} \sum_{m_3=0}^{M-1} k_3[m_1, m_2, m_3] x[n - m_1] x[n - m_2] x[n - m_3] - \\ - 3\sigma^2 \sum_{m_1=0}^{M-1} k_3[m_1, m_1, m_1] x[n - m_1] - \sigma^2 \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{\substack{m_2=0 \\ m_2 \neq m_1}}^{M-1} k_3[m_1, m_2, m_2] x[n - m_1] \quad (7.14)$$

În deducerea relației 7.14 s-a ținut cont de expresia nucleului derivat de ordinul întâi atașat nucleului de ordinul al-III-lea:

$$k_{1(3)}[m_1] = -3\sigma^2 \sum_{m_2=0}^{M-1} k_3[m_1, m_2, m_2] \quad (7.15)$$

precum și de faptul că nucleele determinate cu ajutorul formulei 7.11 sunt simetrice.

Răspunsul sistemului modelat cu ajutorul funcționalelor Wiener la diferite semnale de intrare, constând din unde sinusoidale de diferite frecvențe precum și la semnal alb gaussian, a fost comparat cu răspunsul sistemului real.

Rezultatele cele mai semnificative sunt indicate în figurile 7.20-7.38. În figurile 7.20-7.23 este prezentat în mod gradat contribuția fiecărui termen al relației 7.14 în constituirea răspunsului sistemului cu ajutorul funcționalelor Wiener ale căror nucleee au fost determinate pe cale experimentală. Astfel în figura 7.20 este prezentată acea parte a răspunsului datorată nucleului $k_3[n_1, n_2, n_3]$, notată y_3 (corespunzătoare primului termen din membrul drept al relației 7.14). În figura 7.21 lui y_3 i se adaugă contribuția datorată nucleului de ordinul întâi $k_1[n]$, y_1

(corespunzător membrului drept al relației 7.13). În figura 7.22 lui $y_3 + y_1$ i se adaugă contribuția în cadrul răspunsului a părții datorate nucleului derivat $k_{1(3)}$, notată cu z (corespunzătoare celui de-al-II-lea termen din membrul drept al relației 7.14). În fine, în figura 7.23 lui $y_3 + y_1 - z$ i se adaugă termenul $-c$ (corespunzător termenului al-III-lea din membrul drept al relației 7.14), datorat modului de aplicare al formulei pentru determinarea experimentală a lui $k_3[n_1, n_2, n_3]$, așa cum rezultă din relația 7.11. În toate aceste patru figuri, prin linie continuă s-a reprezentat răspunsul sistemului real, notat cu y .

În figurile 7.24-7.29, sunt reprezentate transformatele Fourier ale semnalelor implicate în graficele 7.20-7.24. În toate aceste reprezentări s-a făcut o normare în raport cu transformata Fourier a semnalului de intrare, unda sinusoidală având amplitudinea 1 și frecvența de 200Hz.

În figurile 7.30-7.32, 7.33-7.35, 7.36-7.38 este prezentată comportarea sistemului model în domeniul timp și frecvență în prezența unor semnal de intrare de frecvențe 150Hz, 100Hz și respectiv 300Hz.

Se poate lesne observa că modelul astfel construit urmărește foarte bine dinamica sistemului.

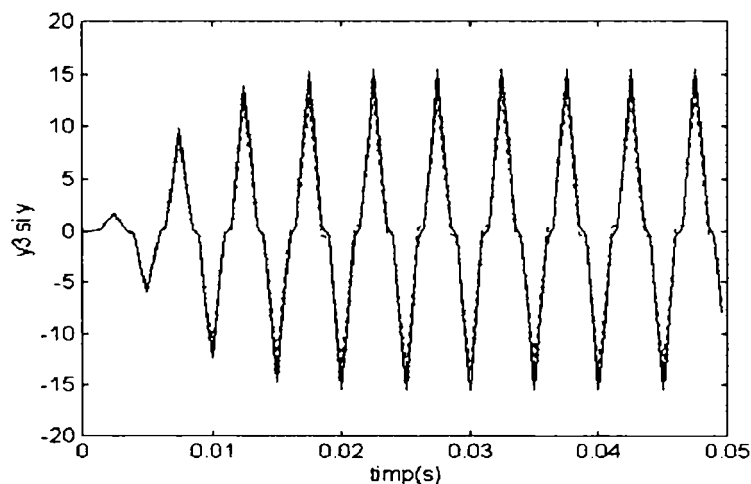


Figura 7. 20 Răspunsul real al sistemului (y) și cel corespunzător nucleului k_3 (y_3) la semnal sinusoidal(200Hz)

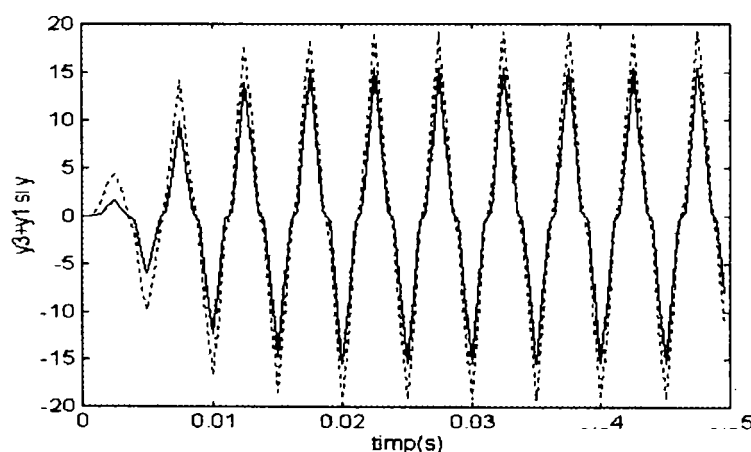


Figura 7.21 Răspunsul sistemului real (y) și cel datorat nucleelor k_3 și k_1 (y_3+y_1) la semnal sinusoidal(200Hz)

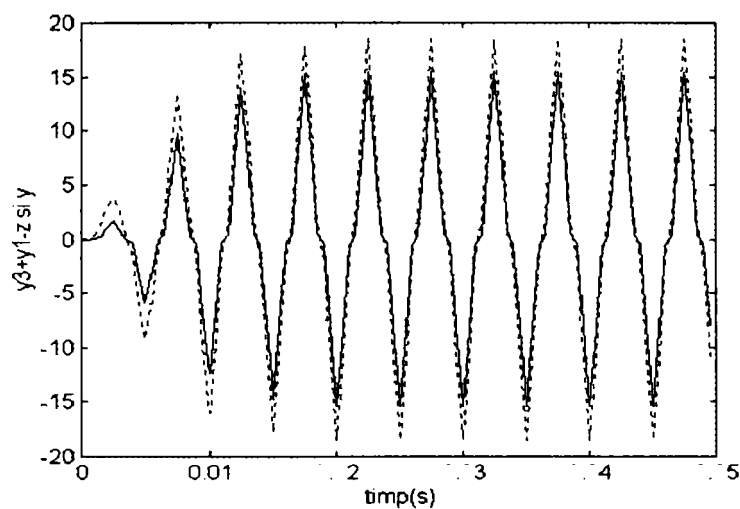


Figura 7.22 Răspunsul sistemului real (y) și cel datorat nucleelor k_3 și k_1 (y_3+y_1)- z la semnal sinusoidal(200Hz)

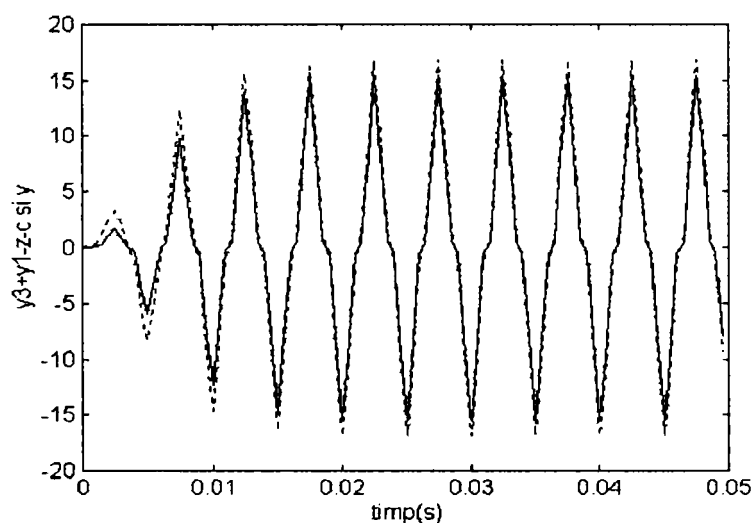


Figura 7.23 Răspunsul sistemului real (y) și cel calculat pe baza modelului (y_3+y_1)- z - c la semnal sinusoidal(200Hz)

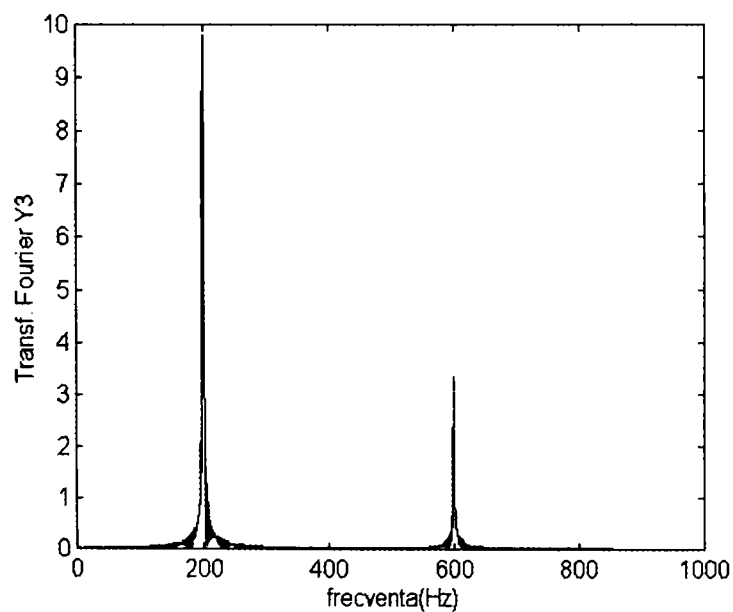
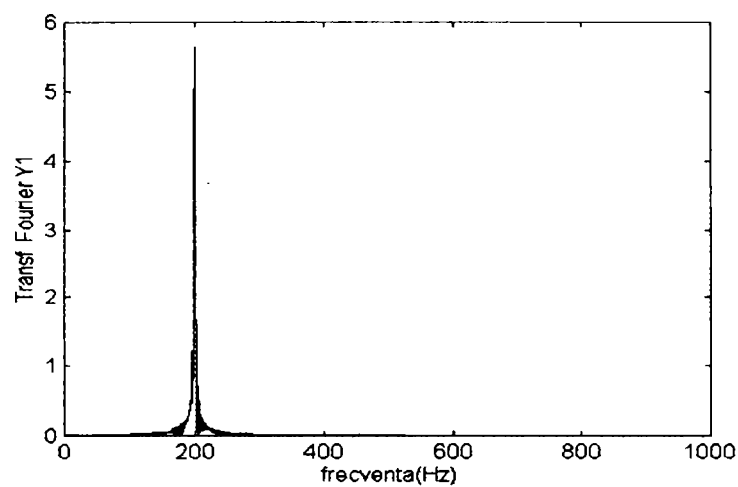
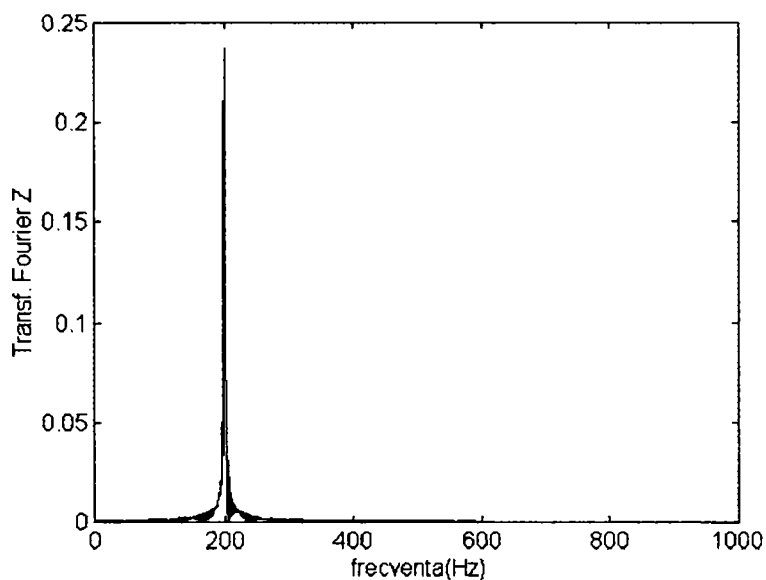
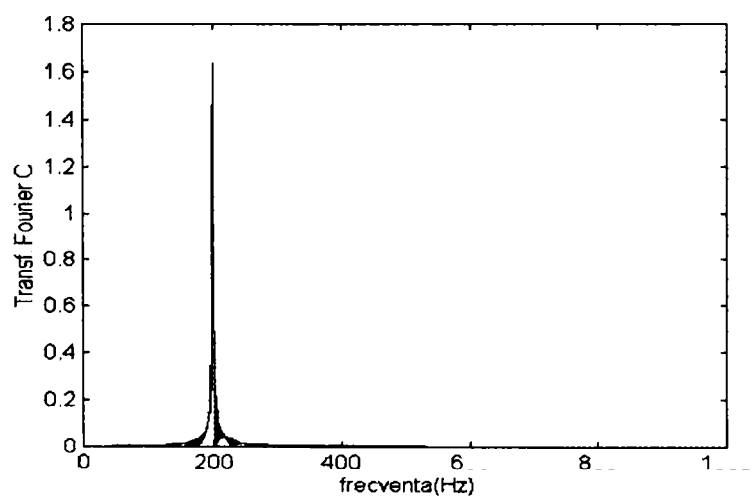


Figura 7.24 Transformata Fourier a lui y_3 ($f=200$ Hz)

Figura 7.25 Transformata Fourier a lui $y_1(f=200\text{Hz})$ Figura 7.26 Transformata Fourier a lui $z(f=200\text{Hz})$ Figura 7.27 Transformata Fourier a lui $c(f=200\text{Hz})$

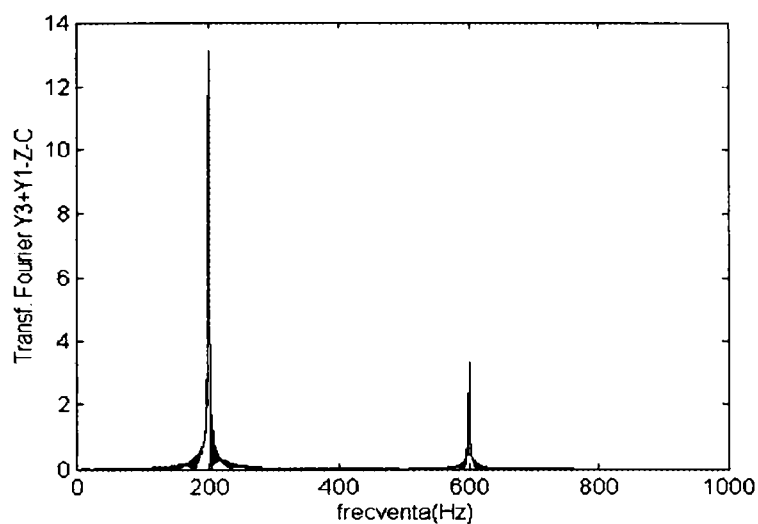


Figura 7.28 Transformata Fourier a rãspunsului calculat pe baza modelului($f=200\text{Hz}$)

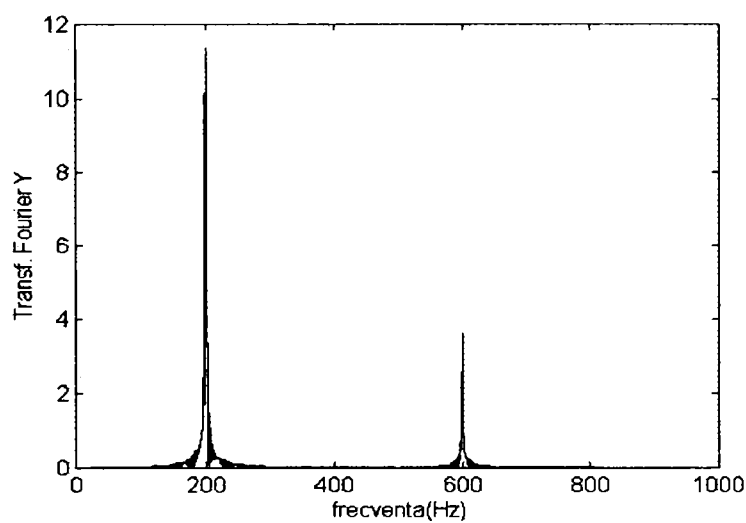


Figura 7.29 Transformata Fourier a rãspunsului sistemului real($f=200\text{Hz}$)

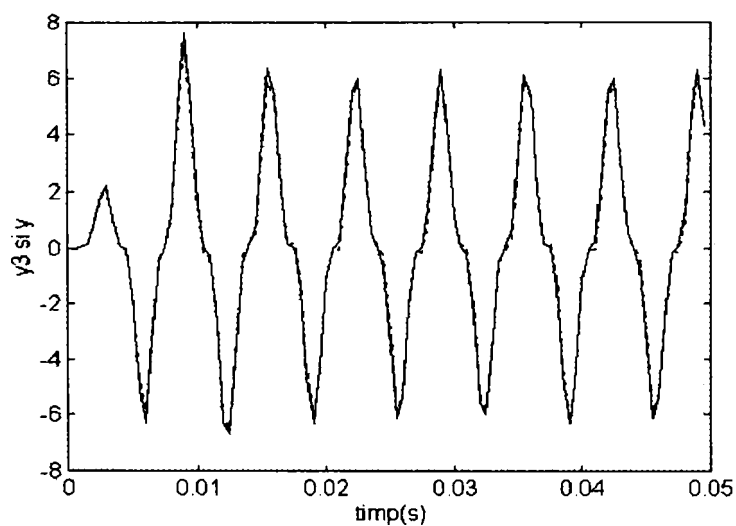


Figura 7.30 Rãspunsul sistemului real (y) și cel calculat pe baza modelului (y_3+y_1-z-c) la semnal sinusoidal(150Hz)

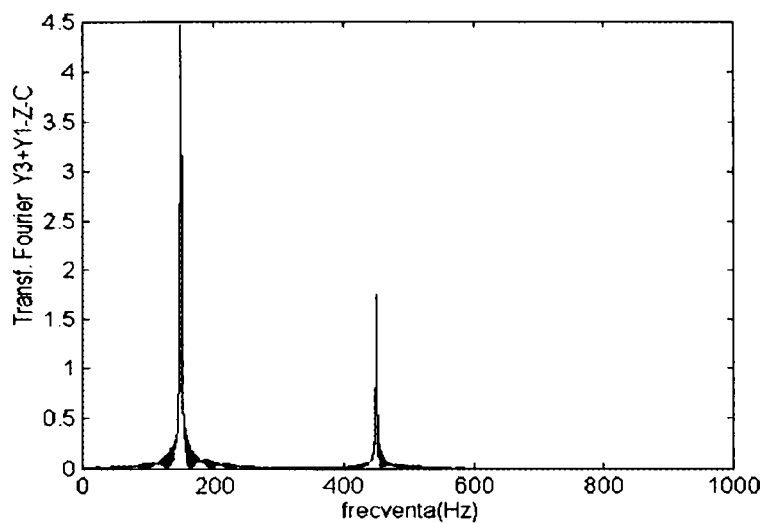


Figura 7.31 Transformata Fourier a rãspunsului calculat pe baza modelului($f=150\text{Hz}$)

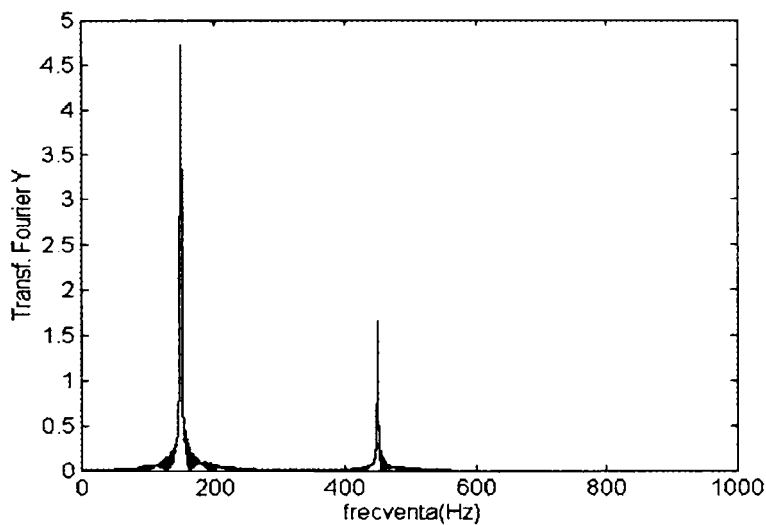


Figura 7.32 Transformata Fourier a rãspunsului sistemului real($f=150\text{Hz}$)

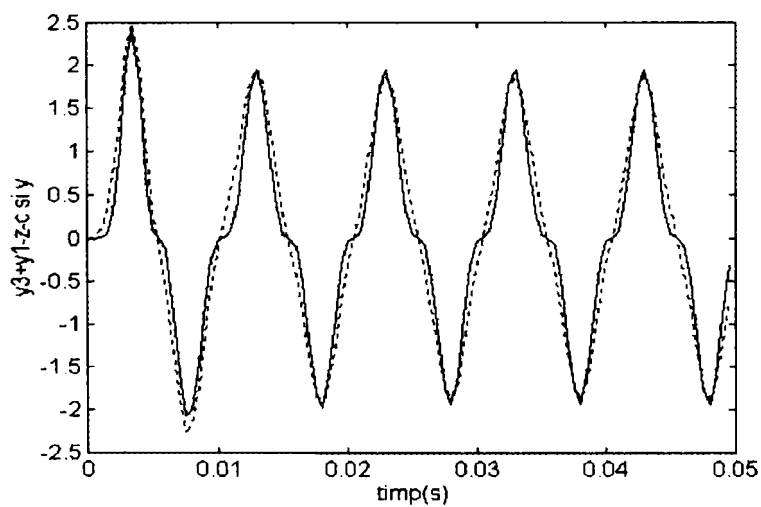


Figura 7.33 Rãspunsul sistemului real (y) și cel calculat pe baza modelului (y_3+y_1-z-c) la semnal sinusoidal(100Hz)

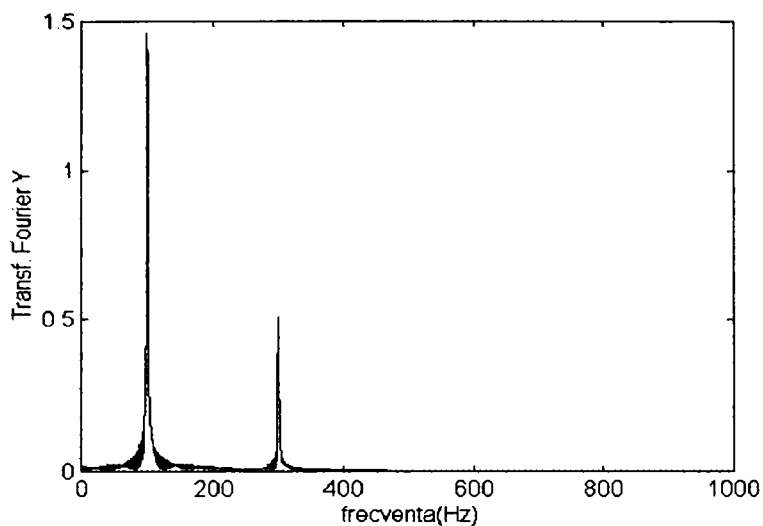


Figura 7.34 Transformata Fourier a răspunsului sistemului real($f=100\text{Hz}$)

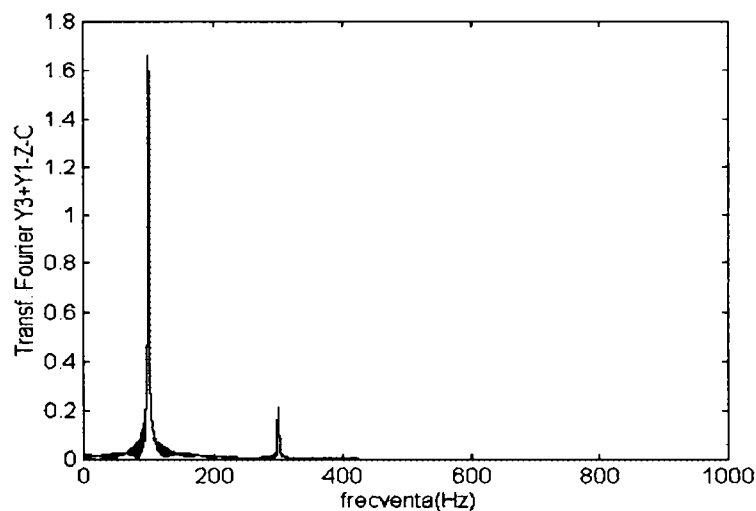


Figura 7.35 Transformata Fourier a răspunsului calculat pe baza modelului($f=100\text{Hz}$)

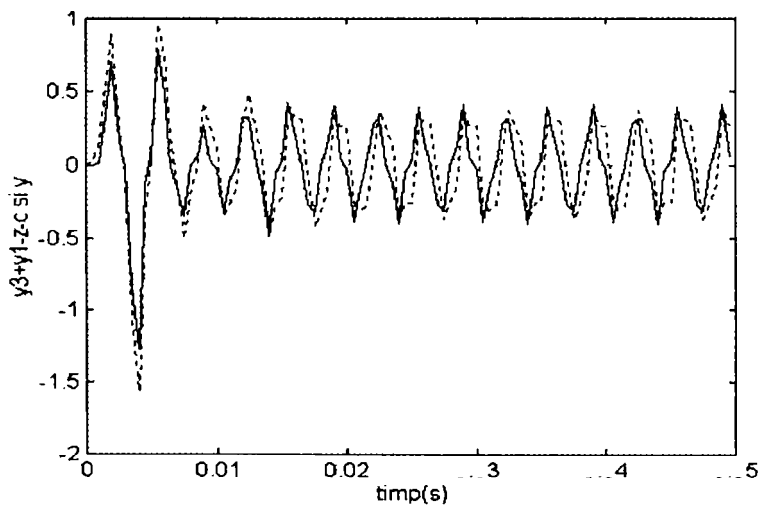


Figura 7.36 Răspunsul sistemului real (y) și cel calculat pe baza modelului (y_3+y_1-z-c) la semnal sinusoidal(300Hz)

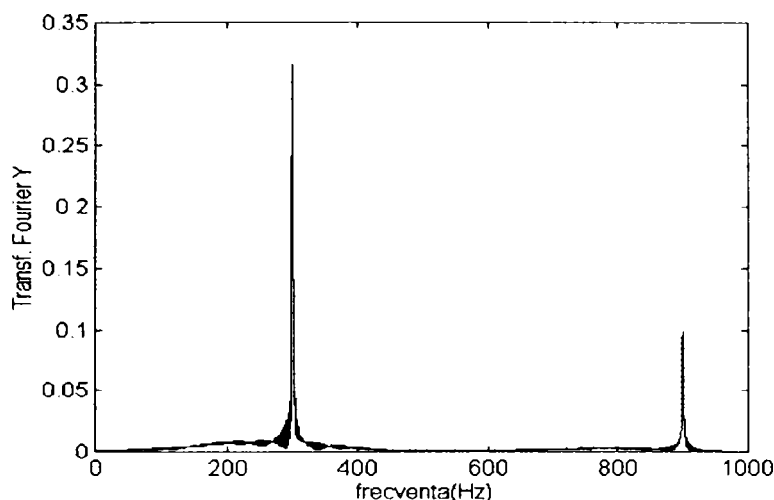


Figura 7.37 Transformata Fourier a răspunsului sistemului real($f=300\text{Hz}$)

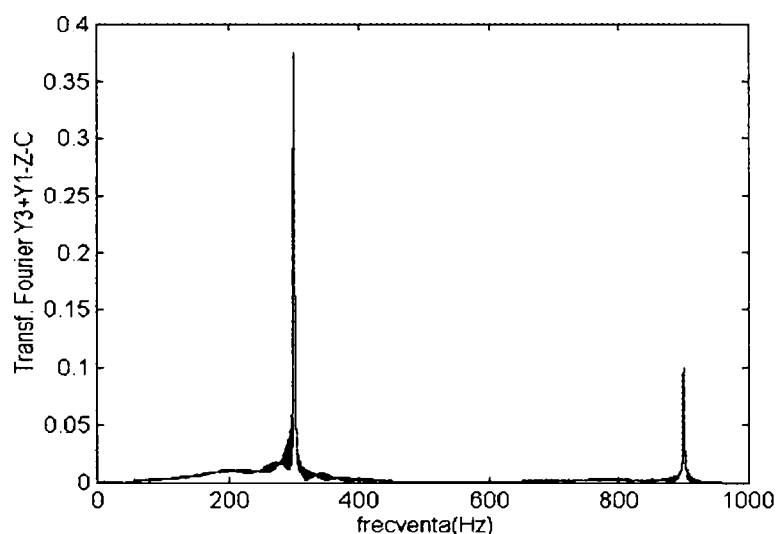


Figura 7.38 Transformata Fourier a răspunsului calculat pe baza modelului($f=300\text{Hz}$)

Studiul întreprins asupra modelării cu ajutorul seriilor Volterra a sistemelor neliniare nu cunoaște până la ora actuală preocupări în ceea ce privește calculul răspunsului sistemului modelat pe baza nucleelor Wiener. Singurele observații în acest domeniu se referă la faptul că, deși nucleele Wiener depind de puterea zgomotului alb utilizat pentru determinarea lor, răspunsul sistemului calculat pe baza acestor nuclee este unic.

În [83] este propusă o formulă de reconstrucție care ține cont de simetria nucleelor. De asemenea formulele propuse de diverși autori sunt în strânsă legătură cu structura particulară a sistemului supus modelării. Chiar și în cazul implementării tehnicilor de filtrare adaptive am putut constata utilizarea unor formule simplificate pentru calculul răspunsului sistemului [36].

• Modelarea unui sistem neliniar al cărui ordin e necunoscut

Se consideră în cele ce urmează un sistem neliniar cu memorie, rezultat prin conectarea în cascadă a unui sistem linear cu memorie și a unei neliniarități fără memorie. S-a ales ca și sistem linear sistemul constituit din etajul trece jos (R_1, C_1). Elementul neliniar îl constituie o diodă (D) polarizată pentru a lucra în regiunea neliniară a caracteristicii. Sistemul astfel realizat este prezentat în figura 7.39.

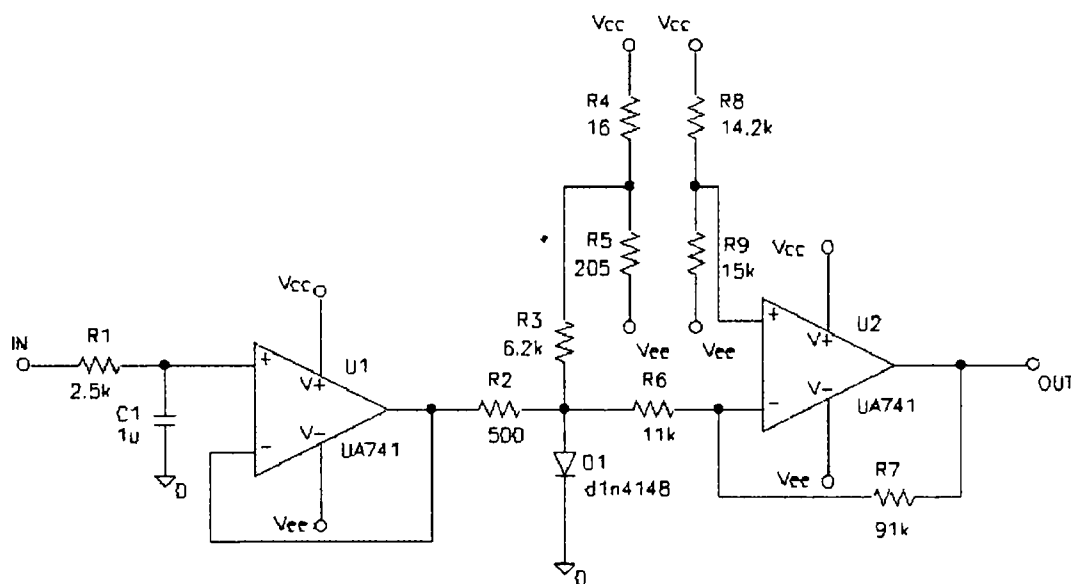


Figura 7.39 Sistem neliniar cu memorie

Metoda de determinare a nucleelor Wiener în cazul acestui sistem, presupune trecerea prin acest sistem a unui semnal gaussian. În acest scop sistemul a fost modelat cu ajutorul programului PSPICE. Secvențele de zgomot alb trecute prin sistem au fost generate în mod similar celor utilizate în cadrul modelării sistemelor de ordin II și III. Pentru determinarea nucleelor Wiener s-au folosit formulele 7.6, 7.7 și 7.11. Calculul nucleelor s-a oprit la nucleul de ordinul al-III-lea. În figurile 7.40 și 7.41 sunt reprezentate nucleele de ordinul întâi și respectiv doi ale sistemului.

În calculul răspunsului sistemului astfel modelat s-a ținut cont de contribuția fiecărui nucleu:

$$\hat{y}(t) = K_1[k_1; x(t)] + K_2[k_2; x(t)] + K_3[k_3; x(t)] \quad (7.16)$$

unde K_1 și K_3 sunt date de 7.13 respectiv 7.14. Pentru K_2 relația de calcul folosită a fost:

$$K_2[k_2; x[n]] = \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=0}^{M-1} k_2[m_1, m_2] x[n - m_1] x[n - m_2] - \sigma^2 \sum_{m_1=0}^{N-1} k_2[m_1, m_1] \quad (7.17)$$

În expresia funcționalei $K_2[k_2; x(t)]$ s-a ținut cont de contribuția datorată nucleului derivat $k_{2(0)}$.

Calculul răspunsului sistemului model s-a făcut și în acest caz la un semnal de intrare sinusoidal. Răspunsul sistemului model a fost comparat cu cel obținut prin modelare în PSPICE. Rezultatul este prezentat în figura 7.42.

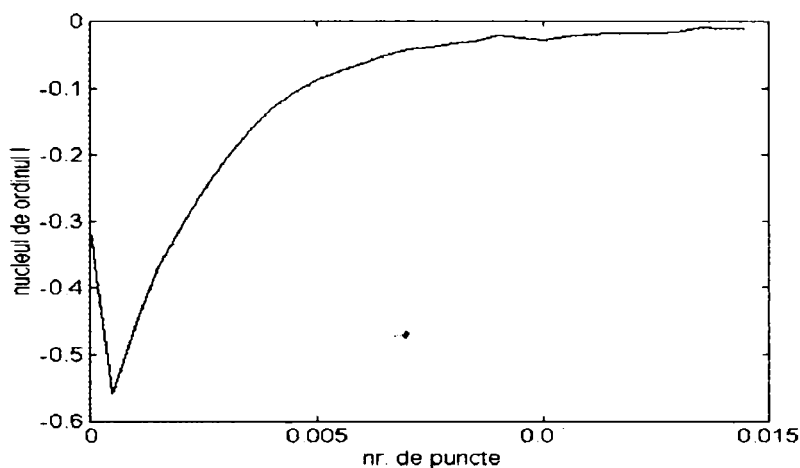


Figura 7.40 Nucleul de ordinul întâi al sistemului din figura 7.39

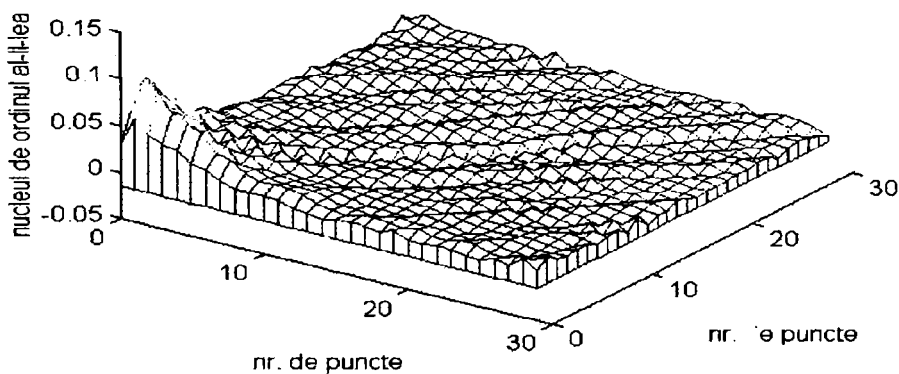


Figura 7.41 Nucleul de ordinul al-II-lea al sistemului din figura 7.39

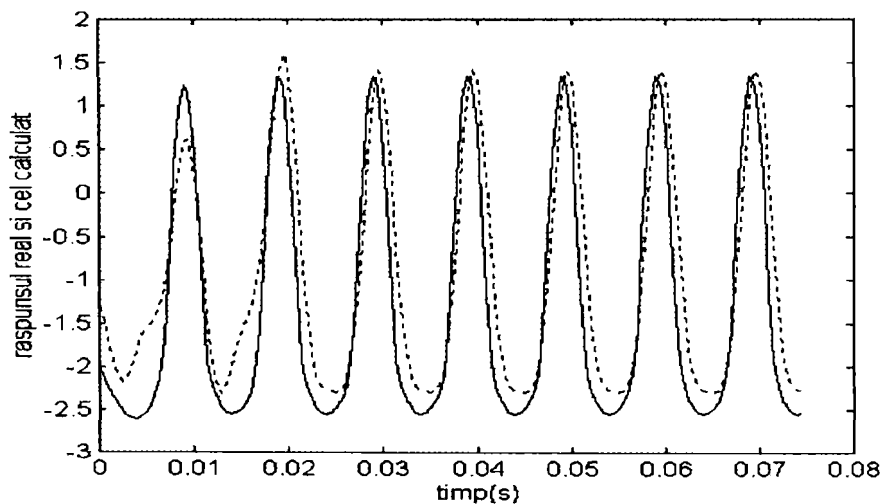


Figura 7.42 Răspunsul real și cel calculat al sistemului din fig.7.36

În figurile 7.43 – 7.46 este reprezentat răspunsul în frecvență al sistemului real precum și răspunsul datorat funcționalelor de diferite ordine.

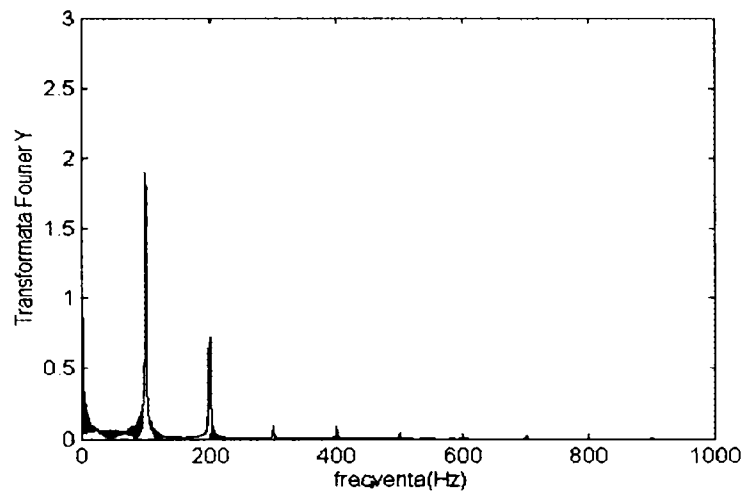


Figura 7.43 Transformata Fourier a răspunsului sistemului real

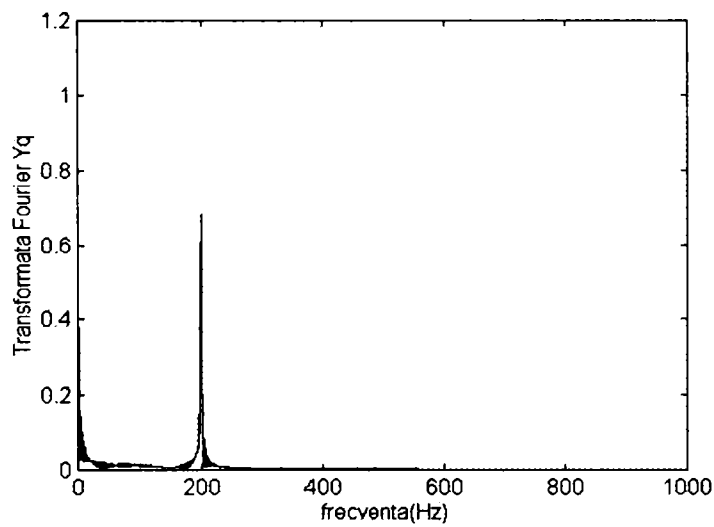


Figura 7.44 Transformata Fourier a componentei răspunsului datorate funcționalei K_2

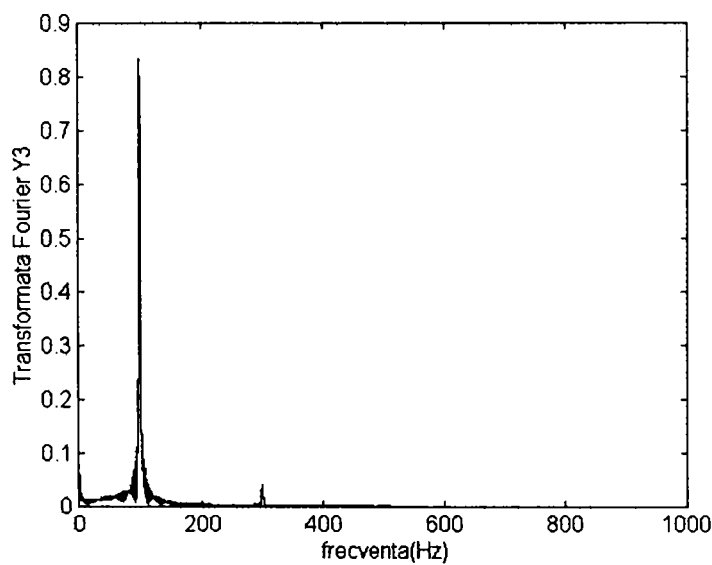


Figura 7.45 Transformata Fourier a componentei răspunsului datorate funcționalei K_3

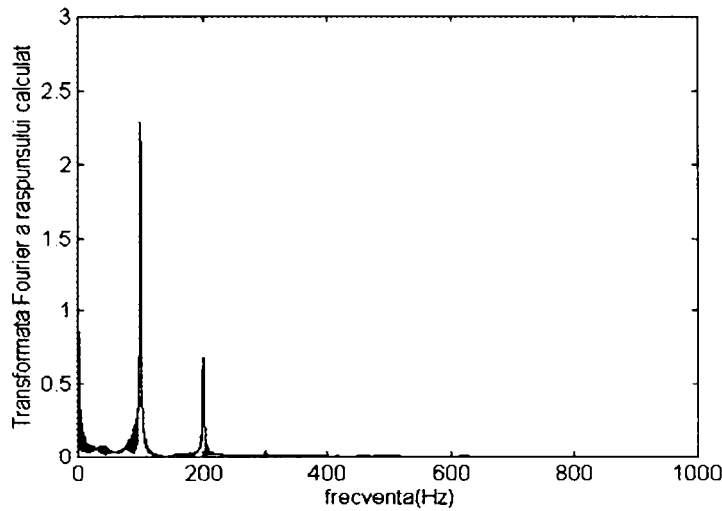


Figura 7.46 Răspunsul în frecvență calculat al sistemului din figura 7.39

- Modelarea unui sistem neliniar reprezentat de un amplificator cu tranzistor JFET ce operează în regiunea de saturație

Pentru validarea modelării făcute cu ajutorul seriilor Volterra precum și a formulelor stabilite au fost calculate nucleele de diferite ordine pentru amplificatorul cu JFET, în conexiune sursă comună din figura 7.47.

Polarizarea tranzistorului a fost făcută pentru a asigura funcționarea acestuia în regiunea de saturație, determinându-se pentru valorile schemei din figura 7.47 $U_{DS}=1.78V$ și $I_D=2.15mA$. Pentru tranzistorul 2N3819 utilizat se cunoaște, ca dată de catalog, $V_P= -3V$.

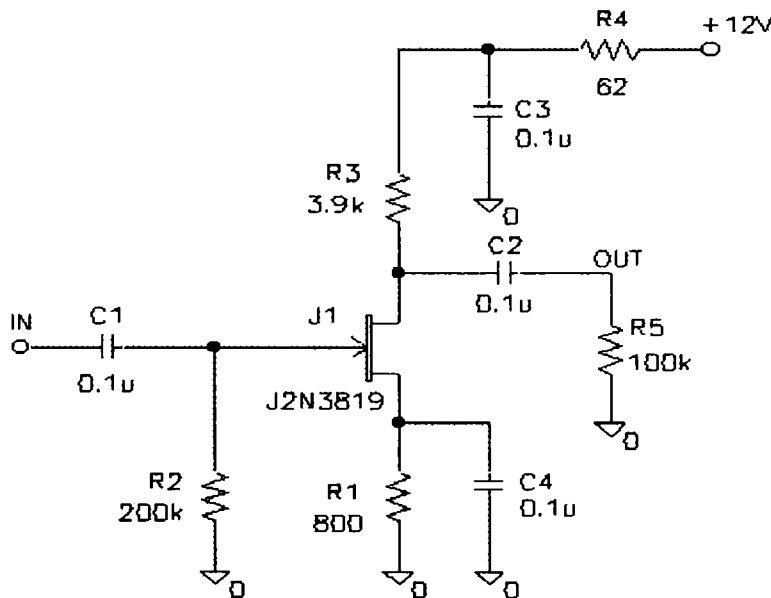


Figura 7.47 Sistem neliniar cu tranzistor JFET

Polarizarea tranzistorului a fost făcută pentru a asigura funcționarea acestuia în regiunea neliniară. În această schemă de polarizare, tensiunea U_{GS} este obținută prin căderea dată de curentul de drenă pe rezistența de polarizare automată R_1 .

Calculul nucleelor a fost realizat aducând la intrarea sistemului zgomot alb gaussian.

În figurile 7.48 și 7.49 sunt reprezentate nucleele de ordin I, respectiv II, determinate pe cale experimentală.

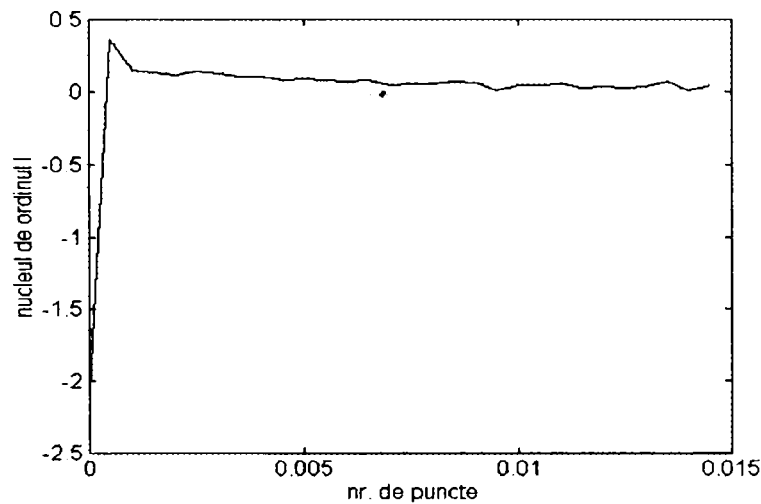


Figura 7.48 Nucleul de ordinul întâi al sistemului din figura 7.47

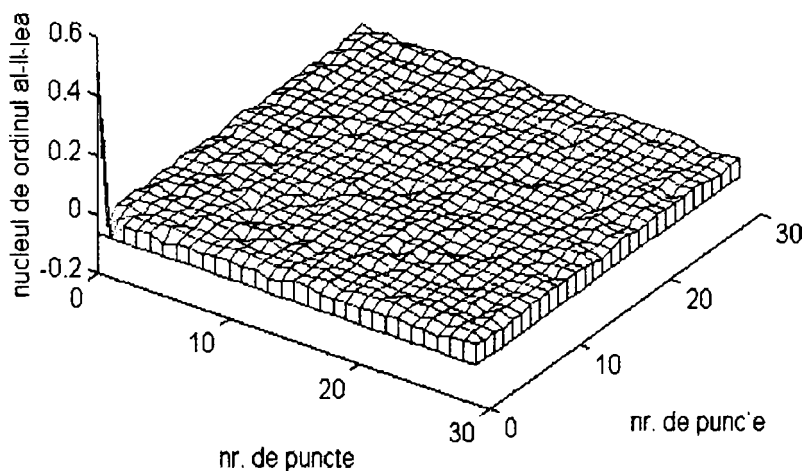


Figura 7.49 Nucleul de ordinul al-II-lea al sistemului din figura 7.47

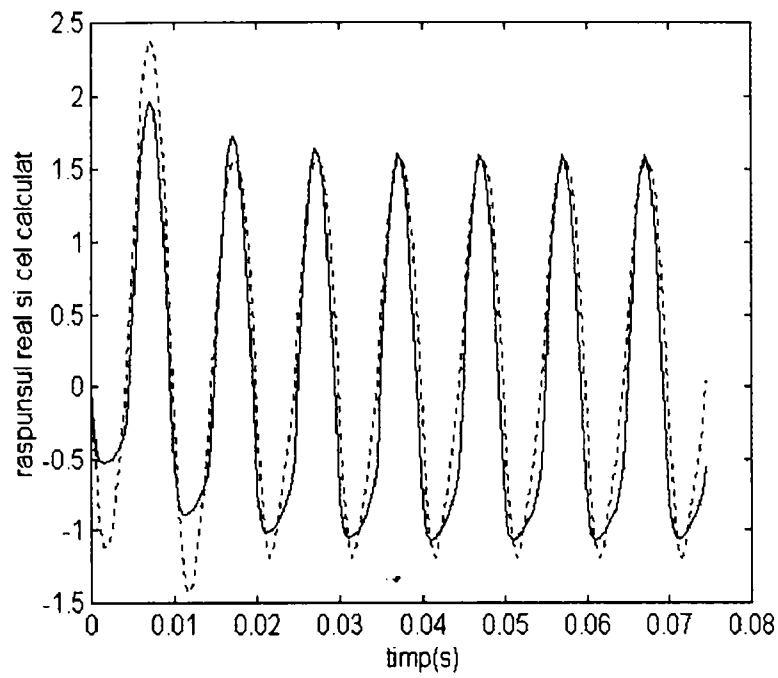


Figura 7.50 Răspunsul real și cel calculat al sistemului cu tranzistor JFET

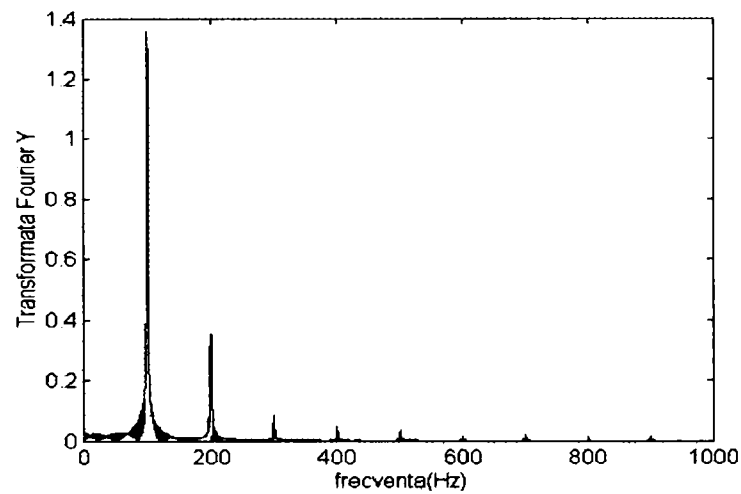


Figura 7.51 Transformata Fourier a răspunsului sistemului real

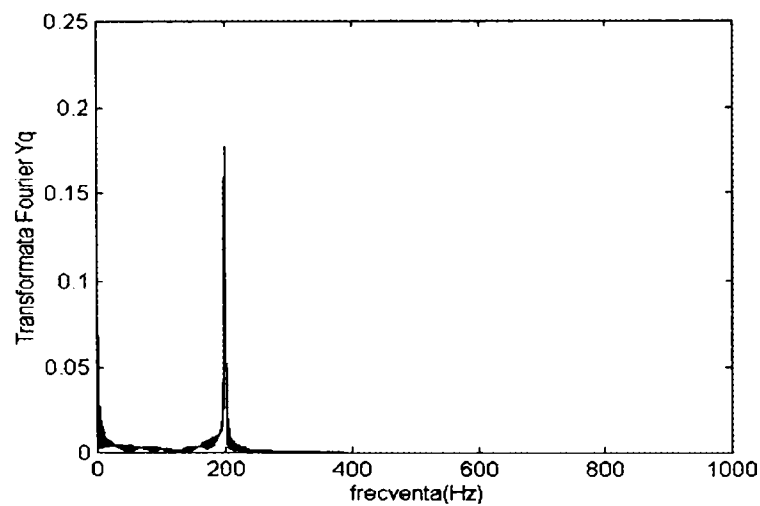


Figura 7.52 Transformata Fourier a componentei răspunsului datorate funcției K_2

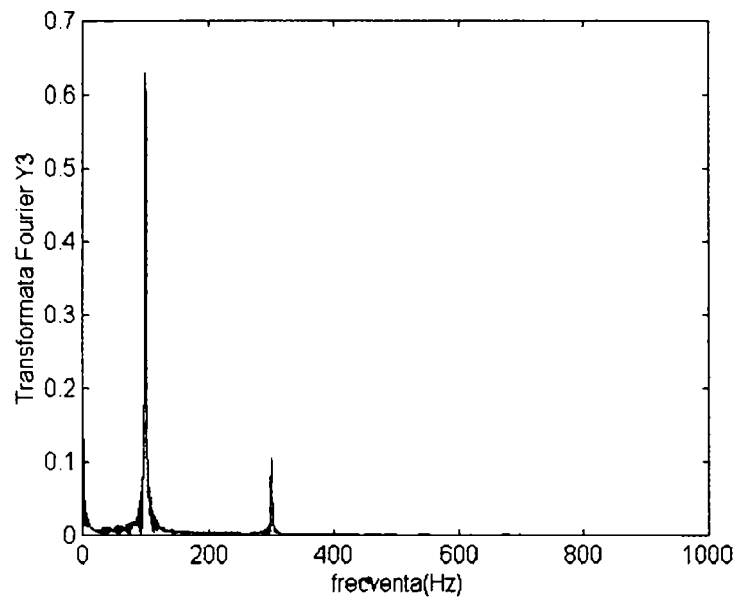


Figura 7.53 Transformata Fourier a componentei răspunsului datorate funcționalei K_3

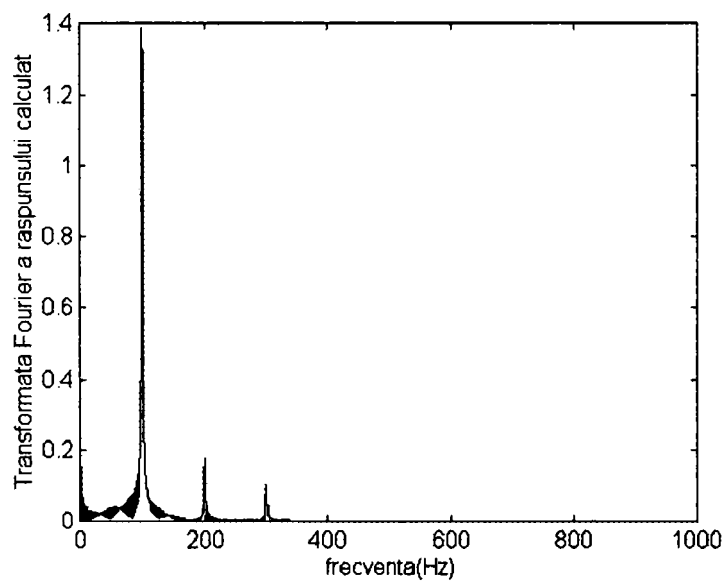


Figura 7.54 Transformata Fourier a răspunsului calculat pe baza modelului

7.3. Metode adaptive folosite în determinarea nucleelor Volterra

Caracterul linear ale relației intrare-ieșire în raport cu coeficienții filtrului, în cazul sistemelor modelate prin serii Wiener și Volterra, permite implementarea tehnicilor de filtrare adaptivă în cazul acestor sisteme.

Metodele și algoritmi adaptivi cunosc o largă utilizare în estimarea nucleelor Wiener și Volterra. În figura 7.55 este prezentată o tehnică de adaptare tipică. Un filtru Volterra de ordin fix și memorie finită este ales pentru a construi cu ajutorul algoritmilor adaptivi, un model pentru sistemul nelinier fără memorie.

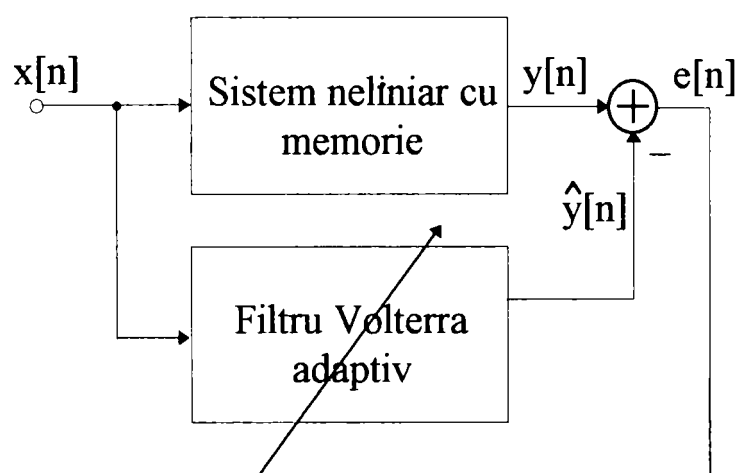


Figura 7.55 Sistem nelinier adaptiv

Utilizarea tehnicilor de filtrare adaptivă pentru estimarea nucleelor Volterra a cunoscut o largă răspândire, cercetările în acest domeniu abordând cu mult succes filtre Volterra de ordinul al-II-lea și, în unele cazuri pe cele de ordin superior [36],[14], [72], [16], [64]-[67], [84].

Dintre tehnicile de filtrare adaptivă două au cunoscut o utilizare largă și vor fi prezentate în cadrul acestui paragraf. Este vorba despre algoritmi LMS și RLS. În [85], [86] sunt studiate performanțele unui estimator Volterra de ordinul al-II-lea realizat printr-un procedeu de filtrare adaptivă RLS.

7.3.1. Algoritmul LMS în cazul filtrării liniare

Tehnica filtrării liniare adaptive ce utilizează algoritmul LMS se bucură la ora actuală de un suport teoretic bine fundamentat [87], [88].

Pentru prezentarea tehnicilor de filtrare adaptivă în continuare se vor adopta notații vectoriale referitoare la răspunsul la impuls al sistemului liniar, cu memorie M și la semnalul de intrare așa după cum se indică în relațiile:

$$\underline{h}_k^{(1)T} = [h_k^{(1)}[0] \quad h_k^{(1)}[1] \quad \dots \quad h_k^{(1)}[M-1]] \quad (7.17)$$

$$\underline{x}_k^{(1)T} = [x_k \quad x_{k-1} \quad \dots \quad x_{k-M+1}] \quad (7.18)$$

În aceste condiții ieșirea sistemului adaptiv e dată de relația:

$$\hat{y}_k = \underline{h}_k^{(1)T} \cdot \underline{x}_k^{(1)} \quad (7.19)$$

Coeficienții filtrului liniar adaptiv se obțin prin minimizarea erorii medii pătratice la momentul k , calculate între y_k și \hat{y}_k .

$$E[e_k^2] = E\left[\left[y_k - \underline{h}_k^{(1)T} \cdot \underline{x}_k^{(1)}\right]^2\right] \quad (7.20)$$

și reprezintă soluția ecuației normale:

$$\underline{h}^* = R_2^{-1} \cdot \underline{g} \quad (7.21)$$

unde:

$$R_2 = E\left[\underline{x}_k^{(1)} \underline{x}_k^{(1)T}\right] \quad (7.22)$$

reprezintă matricea de autocorelație a semnalului de intrare și conține momentele de ordin I și II ale acestuia, iar:

$$\underline{g} = E\left[\underline{x}_k^{(1)} y_k\right] \quad (7.23)$$

este vectorul intercorelațiilor între semnalul de intrare și ieșirea dorită.

Ecuția de adaptare a coeficienților filtrului potrivit algoritmului LMS este de forma [88]:

$$\underline{h}_{k+1}^{(1)} = \underline{h}_k^{(1)} + \mu e_k \underline{x}_k^{(1)} \quad (7.24)$$

unde: $\underline{h}_k^{(1)}$ reprezintă vectorul coeficienților filtrului la momentul k , $e_k = y_k - \underline{h}_k^{(1)T} \cdot \underline{x}_k^{(1)}$, iar μ este o constantă de valoare mică, pozitivă, ce reprezintă mărimea pasului ce determină viteza de convergență și influențează eroarea finală.

Un rol important în procedeul descris mai sus îl joacă semnalul de intrare. Mai întâi, fiind vorba de un procedeu de identificare semnalul de intrare trebuie să permită antrenarea sistemului pe întreg domeniul de interes referitor la amplitudinea și frecvența acestuia. În al doilea rând, cu cât eșantioanele acestui semnal sunt mai puțin corelate, cu atât algoritmul LMS converge mai rapid. S-a demonstrat că, cu cât valorile proprii ale matricei de autocorelație (λ_i) a semnalului de intrare sunt mai

puțin dispersate ($\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ mai mic), cu atât algoritmul converge mai rapid. Pentru a asigura o convergență rapidă în cadrul algoritmului LMS e necesară utilizarea unui semnal de intrare alb (necorelat) pentru care raportul $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ este minim. În cazul algoritmului LMS liniar, în care e implicată matricea R_2 (rel 7.22), raportul valorilor proprii extreme atinge această valoare minimă când semnalul de intrare e alb gaussian și algoritmul prezintă o bună convergență.

Extinderea algoritmului LMS în cazul filtrului Volterra implică câteva schimbări: mai întâi, vectorul coeficienților filtrului trebuie modificat astfel încât să conțină coeficienții filtrului Volterra. În al doilea rând în vectorul de intrare vor apare produse de diferite ordine între eșantioanele semnalului de intrare întârziate care constiuie elemente neliniare. Prezența acestor neliniarități în semnalul de intrare va determina un raport între valorile extreme ale matricii de autocorelație a semnalului de intrare de valoare mare, chiar și în prezența unui semnal de intrare necorelat [67].

7.3.2. Utilizarea algoritmului LMS pentru estimarea nucleelor Volterra

În cele ce urmează se va considera un filtru Volterra ale cărui nuclee sunt simetrice. Pentru a reprezenta filtrul Volterra adaptiv în formă vectorială se vor introduce următoarele notații vectoriale:

- nucleul Volterra de ordin n și memorie M , la momentul k :

$$\underline{h}_k^{(n)T} = [h_k^{(n)}[0,0,\dots,0] \quad h_k^{(n)}[0,0,\dots,1] \quad \dots \quad h_k^{(n)}[M-1,M-1,\dots,M-1]] \quad (7.25)$$

- vectorul Volterra ce conține nuclee de diferite ordine:

$$\underline{h}_k^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \underline{h}_k^{(0)T} & \underline{h}_k^{(1)T} & \underline{h}_k^{(2)T} & \dots & \underline{h}_k^{(n)T} & \dots & \underline{h}_k^{(N)T} \end{array} \right] \quad (7.26)$$

- vectorul de intrare corespunzător neliniarității de ordin n :

$$\underline{x}_k^{(n)T} = [x_k^n \quad x_k^{n-1} x_{k-1} \quad \dots \quad x_k^{n-1} x_{k-M-1} \quad \dots \quad x_{k-M-1}^n] \quad (7.27)$$

- vectorul de intrare corespunzător filtrului Volterra de ordin n :

$$\underline{x}_k^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & \underline{x}_k^{(1)T} & \underline{x}_k^{(2)T} & \dots & \underline{x}_k^{(n)T} & \dots & \underline{x}_k^{(N)T} \end{array} \right] \quad (7.28)$$

În consecință, ieșirea filtrului Volterra adaptiv la momentul k este:

$$\hat{y}_k = \underline{h}_k^T \cdot \underline{x}_k \quad (7.29)$$

iar eroarea medie pătratică este dată de:

$$E[e_k^2] = E\left[\left[y_k - \underline{h}_k^T \underline{x}_k\right]^2\right] \quad (7.30)$$

Vectorul coeficienților filtrului care minimizează eroarea medie pătratică poate fi exprimat și în acest caz cu ajutorul ecuației normale:

$$\underline{h}^* = R_2^{-1} \cdot \underline{g} \quad (7.31)$$

unde $R = E[\underline{x}_k \underline{x}_k^T]$ reprezintă matricea autocorelațiilor semnalului de intrare și conține momentele semnalului de intrare până la ordinul $2N$, pentru un model de ordin N , iar $\underline{g} = E[\underline{x}_k y_k]$.

Ecuația de actualizare a coeficienților filtrului Volterra este din punct de vedere formal aceeași ca și în cazul filtrului liniar:

$$\underline{h}_{k+1} = \underline{h}_k + \mu e_k \underline{x}_k \quad (7.32)$$

Ca și în cazul liniar μ controlează viteza de convergență a algoritmului și influențează valoarea finală a erorii. Valoarea sa maximă se află în strânsă legătură cu valorile proprii maxime și minime ale matricii de autocorelație a semnalului de intrare.

Alegerea mărimii pasului μ în cazul implementării algoritmului LMS filtrului Volterra a fost îndelung studiată în literatură fără însă a se forma o părere unanim recunoscută la ora actuală [32], [83].

Se vor prezenta în cele ce urmează câteva din aspectele cele mai importante în problematica alegerii mărimii pasului μ . În acest scop vectorii \underline{h}_k și \underline{x}_k vor fi înlocuiți de matricele H respectiv X iar scalarul μ va fi înlocuit de către matricea M . Trebuie făcută observația că vectorii ce alcătuiesc matricile H și X , având dimensiuni diferite, locurile rămase libere vor fi completate cu zerouri. Matricea H va conține ca linii vectorii nucleu $\underline{h}_k^{(n)}$:

$$H_k^T = \left[\underline{h}_k^{(0)} \quad \underline{h}_k^{(1)} \quad \underline{h}_k^{(2)} \quad \dots \quad \underline{h}_k^{(n)} \quad \dots \quad \underline{h}_k^{(N)} \right] \quad (7.33)$$

În mod similar matricea X are liniile formate din vectori ce conțin produse de același ordin ale semnalului de intrare.

$$X_k^T = \left[\mathbf{1} \quad \underline{x}_k^{(1)} \quad \underline{x}_k^{(2)} \quad \dots \quad \underline{x}_k^{(n)} \quad \dots \quad \underline{x}_k^{(N)} \right] \quad (7.34)$$

Matricea pasului de adaptare M este de forma:

$$M = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_N \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

În aceste condiții ecuația de actualizare a coeficienților filtrului devine de forma:

$$H_{k+1} = H_k + e_k M X_k \quad (7.36)$$

adică:

$$\begin{bmatrix} \underline{h}_{k+1}^{(0)} \\ \underline{h}_{k+1}^{(2)} \\ \underline{h}_{k+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \underline{h}_{k+1}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_k^{(0)} \\ \underline{h}_k^{(2)} \\ \underline{h}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \underline{h}_k^{(N)} \end{bmatrix} + e_k \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{x}_k \\ \underline{x}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \underline{x}_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

Această reprezentare permite alegerea unor pași de adaptare diferiți pentru nucleele de diferite ordine.

Unii autori implementează algoritmul LMS în cazul filtrului Volterra alegând același pas de adaptare pentru nucleele de diferite ordine. Semnificative în acest domeniu sunt cercetările lui J. Matthews [36]. Potrivit acestui autor pentru filtrele Volterra de ordin al-II-lea cu componentă continuă, alegerea pașilor de adaptare se poate face conform relațiilor:

$$0 < \mu_1 \quad ; \quad \mu_2 < \frac{2}{1 + 4\sigma_x^4} \quad (7.38)$$

Dacă componenta continuă a sistemului e cunoscută și nu intervine în procesul de adaptare, condițiile impuse pentru μ_1, μ_2 sunt date de relația:

$$\begin{aligned} 0 < \mu_1 \quad ; \quad \mu_2 < \frac{2}{4\sigma_x^4} \quad ; \quad pt \quad 0 < \sigma_x^2 < 0.5 \\ 0 < \mu_1 \quad ; \quad \mu_2 < \frac{2}{2\sigma_x^2} \quad ; \quad pt \quad \sigma_x^2 > 0.5 \end{aligned} \quad (7.39)$$

În ambele cazuri, cu sau fără componentă continuă, convergența în medie pătratică e asigurată dacă e impusă o margine superioară tuturor pașilor de adaptare conform relației:

$$0 < \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N < \frac{2}{3tr[R_{2N}]} \quad (7.40)$$

unde $tr[R_{2N}]$ reprezintă urma matricei R_{2N} , adică suma elementelor de pe diagonală.

Un număr mare de autori abordează filtrul Volterra adaptiv stabilind margini superioare diferite pentru pașii de adaptare corespunzători nucleelor de diferite ordine. Astfel, pentru un semnal de intrare având densitatea de amplitudine simetrică, potrivit cu [14] și [89] avem:

$$0 < \mu_1 < \frac{2}{\lambda_{\max}} \text{ și } 0 < \mu_2 < \frac{1}{\lambda_{\max}^2} \quad (7.41)$$

unde λ_{\max} este valoarea proprie maximă a matricei de intercorelație R_{2N} .

În [87] sunt stabilite margini mai concrete, ținând cont de memoria filtrului:

$$0 < \mu_1 < \frac{2}{M\sigma_x^2} \text{ și } 0 < \mu_2 < \frac{2}{(M\sigma_x^2)^2} \quad (7.42)$$

Un filtru Volterra LMS este considerat deasemenea în [65]. În acest caz, componenta continuă se presupune necunoscută și este deci inclusă în procesul de adaptare. Filtrul considerat fiind de ordinul al-II-lea nu există cuplaj între funcționalele de ordin par (zero și doi) pe de o parte și cele de ordin impar (unu) pe de altă parte.

Limitele superioare stabilite pentru nucleele de ordin impar în cazul convergenței în medie pătratică sunt:

$$0 < \mu_1 < \frac{2}{M\sigma_x^2} \text{ și } 0 < \mu_2 < \frac{1}{0.5[M^2 + 5M] \sigma_x^4 + 1} \quad (7.43)$$

Diferențele care apar în (7.42) și (7.43) între limitele superioare ale lui μ_2 , se datoresc includerii componentei continue în cazul al-II-lea (rel 7.43) fapt ce determină modificarea matricei autocorelațiilor semnalului de intrare și în consecință a valorilor proprii ale acesteia. Influența pe care componenta continuă o are asupra limitelor impuse pașilor de adaptare este semnificativă în special în cazul unor semnale de intrare pentru care $\sigma_x^2 < 1$.

Analiza limitelor impuse pașilor de adaptare a fost extinsă la filtrul Volterra de ordinul al-III-lea. Numărul lucrărilor care abordează acest subiect este până la ora actuală extrem de redus. În [90] sunt prezentate rezultatele obținute referitoare la un filtru Volterra adaptiv de ordinul al-III-lea. În cadrul algoritmului de adaptare sunt utilizați doi pași de adaptare diferiți, unul pentru nuclee de ordin par, iar celălalt pentru nuclee de ordin impar ($\mu_0 = \mu_2 = \mu_{par}$; $\mu_1 = \mu_3 = \mu_{impar}$):

$$0 < \mu_{par} < \frac{2}{(M+2)\sigma_x^4 + 1} \quad (7.44)$$

și

$$0 < \mu_{impar} < \frac{2}{\sigma_x^2 + (M+16)\sigma_x^6} \quad (7.45)$$

În [83] (anexa D) sunt deduse limitele superioare ale pașilor de adaptare pentru nucleele de ordin superior ($N > 3$). Metoda de deducere se bazează pe aplicarea teoriei lui Gerschgorin în aproximarea valorii proprii maxime a matricei de autocorelație ce conține momentele de ordin $2N$ ale semnalului de intrare.

Constatările efectuate prin realizarea practică a filtrelor adaptive neliniare relevă faptul că utilizarea unor pași de adaptare în apropierea limitelor superioare conduc întotdeauna la instabilitate și la divergența algoritmului. Chiar dacă sistemul este stabil și algoritmul converge, eroarea finală este mare. Trebuie făcută deasemenea observația că valoarea pasului de adaptare depinde și de valorile inițiale ale nucleelor. Dar întrucât, în practică, nu există cunoștințe apriori referitoare la nucleu, se alege pentru această valoare de pornire valoarea zero.

În concluzie, putem afirma că, pentru a obține stabilitate și o eroare relativ redusă, în practică se utilizează întotdeauna valori ale pașilor de adaptare mult sub limitele stabilite din punct de vedere teoretic.

7.3.3. Estimarea nucleelor Volterra cu ajutorul algoritmului LMS în cazul unui sistem de ordinul al-III-lea

În cele ce urmează se va prezenta utilizarea algoritmului LMS pentru identificarea nucleelor Volterra. Sistemul ale cărui nuclee vor fi identificate este sistemul neliniar cu memorie a cărui schemă a fost prezentată în figura 7.15. Structura adoptată pentru filtrul Volterra adaptiv este formată din nuclee de ordinul întâi și trei.

Alegerea acestei structuri s-a făcut ținând cont de structura sistemului neliniar fără memorie. Excluderea nucleului de ordinul al-II-lea a fost realizată în mod voit. În cazul în care nu există cunoștințe apriori referitoare la structura sistemului, includerea nucleului de ordinul al-II-lea în model e necesară. Excluderea se poate face ulterior în urma constatării unor valori nesemnificative pentru nucleul de ordinul al-II-lea.

Structura matricei de date de intrare, la momentul k , e prezentată în relația:

$$X_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k^{(1)} \\ \underline{x}_k^{(3)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_k & x_{k-1} & \cdots & x_{k-N+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_k^3 & x_k^2 x_{k-1} & \cdots & x_k^2 x_{k-N+1} & x_k x_{k-1}^2 & x_k x_{k-1} x_{k-2} & \cdots & x_k x_{k-M-1}^2 & \cdots & x_{k-M-1}^3 \end{bmatrix}$$

(7.46)

Dimensiunea vectorului de date, este determinată de lungimea vectorului $\underline{x}_k^{(3)}$ și este în acest caz M^3 .

Pentru matricea coeficienților filtrului la momentul k s-a adoptat următoarea structură:

$$H_k = \begin{bmatrix} \underline{h}_k^{(1)} \\ \underline{h}_k^{(3)} \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

unde:

$$\underline{h}_k^{(1)T} = [h_k^{(1)}[0] \quad h_k^{(1)}[2] \quad \cdots \quad h_k^{(1)}[N-1]] \quad (7.48)$$

$$\underline{h}_k^{(3)T} = [h_k^{(3)}[0,0,0] \quad h_k^{(3)}[0,0,1] \quad \cdots \quad h_k^{(3)}[M-1, M-1, M-1]] \quad (7.49)$$

Ecuția de actualizare a coeficienților filtrului este:

$$\begin{bmatrix} \underline{h}_{k+1}^{(1)} \\ \underline{h}_{k+1}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_k^{(1)} \\ \underline{h}_k^{(3)} \end{bmatrix} + e_k \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{x}_k^{(3)} \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

unde prin e_k s-a notat eroarea la momentul k , calculată pe baza relației :

$$e_k = y_k - \hat{y}_k \quad (7.51)$$

unde y_k reprezintă ieșirea sistemului neleniar cu memorie ale cărui nuclee se estimează, iar \hat{y}_k reprezintă ieșirea fitrului Volterra adaptiv de ordin III la momentul k :

$$\hat{y}_k[n] = \underline{h}_k^{(1)T} \cdot \underline{x}_k^{(1)} + \underline{h}_k^{(3)T} \cdot \underline{x}_k^{(3)} \quad (7.52)$$

Având în vedere că în structura filtrului intervin nuclee de aceeași paritate, s-a ales $\mu_1 = \mu_3$.

Pentru a asigura o eroare cât mai mică la ieșirea filtrului s-a folosit un pas de adaptare mult mai mic decât cel impus de limitele teoretice discutate în paragraful 7.3.2

În figura 7.56 este reprezentată evoluția eroarii medii pătratice pentru un număr de 140 de pași:

$$e = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y[n] - \hat{y}[n])^2 \quad (7.53)$$

Calitatea aproximării a fost apreciată pe baza erorii calculate ca diferență între coeficienții reali și cei estimați cu ajutorul algoritmului adaptiv, conform relației [36]:

$$eh = 10 \lg \left(\sum_{k_1=0}^{M-1} \sum_{k_2=0}^{M-1} \sum_{k_3=0}^{M-1} (h_3[k_1, k_2, k_3] - \hat{h}_3[k_1, k_2, k_3])^2 \right) \quad (7.54)$$

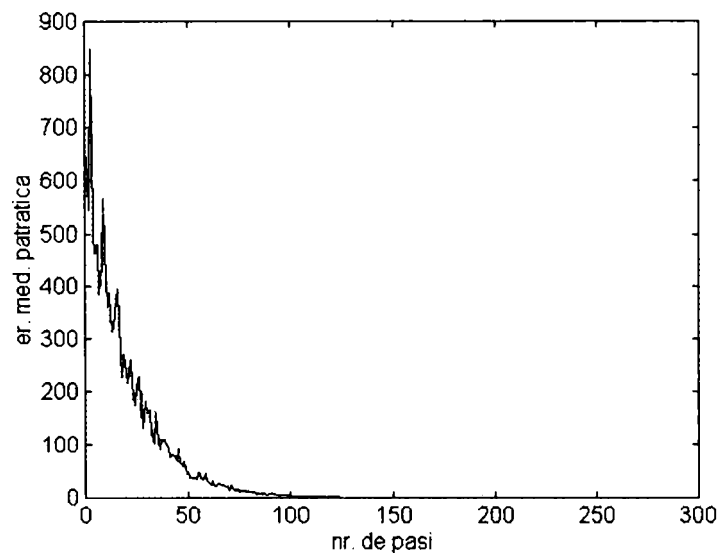


Figura 7.56 Eroarea medie pătratică

Curba de adaptare a coeficienților filtrului este reprezentată în figura 7.57

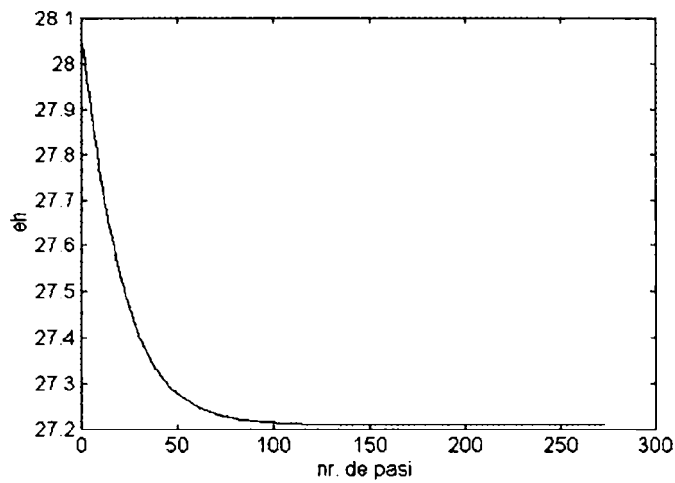
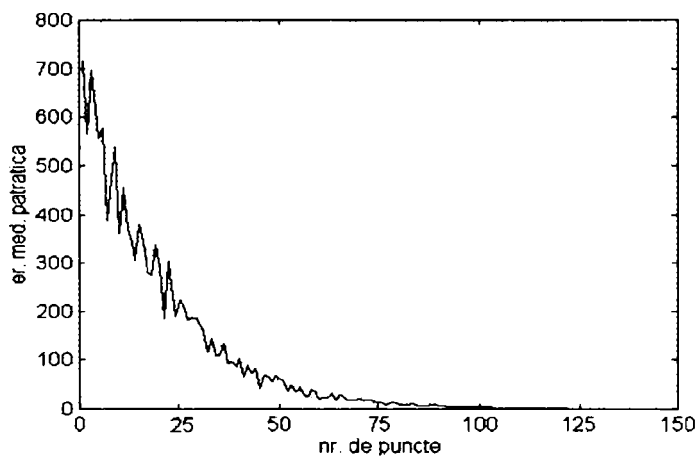
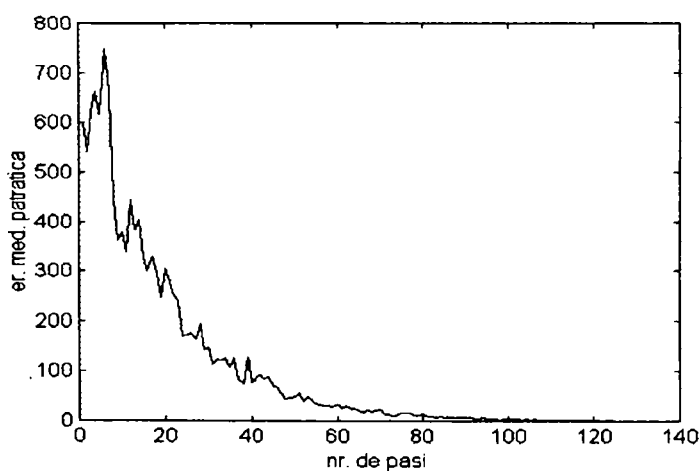


Figura 7.57 Curba de adaptare a coeficienților filtrului Volterra

Pentru a verifica robustețea algoritmului procedeul de adaptare a fost reluat în condițiile în care semnalului de ieșire $y[n]$ i s-a adăugat un zgomot inerent oricărei măsurări. S-au efectuat experimentele în două cazuri: zgomot aditiv având $\sigma^2 = 0.01$ și respectiv cu $\sigma^2 = 0.1$. Eroarea medie pătratică corespunzătoare celor două cazuri considerate este reprezentată în figura 7.58, respectiv 7.59.

Figura 7.58 Eroarea medie pătratică ($\sigma^2 = 0.01$)Figura 7.59 Eroarea medie pătratică ($\sigma^2 = 0.1$)

În figura 7.60 apar cele trei curbe de adaptare:

- cu linie punctată - $\sigma^2 = 0.1$
- cu linie continuă- $\sigma^2 = 0.01$
- cu linie și punct - fără zgomot

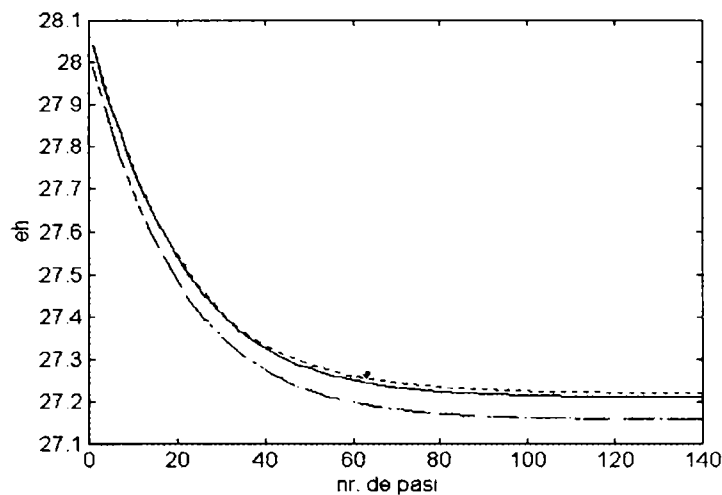


Figura 7.60 Curbele de adaptare a coeficienților în cele trei cazuri

Pentru ambele nuclee lungimea ferestrei a fost aleasă aceeași: $M=40$. Alegerea acestei valori a fost impusă de crearea posibilității de comparare a exactității metodei de estimare a nucleelor cu ajutorul tehnicii adaptive comparativ cu cea bazată pe tehnica intercorelației între semnalul de intrare și cel de ieșire ale sistemului.

Lucrul acesta a fost posibil prin compararea răspunsului sistemului Volterra de ordinul al-III-lea, ai cărui coeficienți au fost determinați prin algoritmul LMS la diferite semnale de intrare, cu răspunsul sistemului ale cărui nuclee au fost calculate pe baza intercorelațiilor. Deși în acest din urmă caz, calculul pentru determinarea nucleelor s-a făcut luând în considerare nucleele Wiener, ($k_1[n]$ și $k_3[n_1, n_2, n_3]$), formula de reconstrucție a semnalului pe baza atât a nucleelor Wiener cât și a nucleelor Wiener derivate este similară unei dezvoltări Volterra. Și în acest caz au fost folosite ca și semnale de intrare sinusoide de diferite frecvențe. Rezultatele experimentărilor sunt ilustrate în figurile 7.61- 7.72.

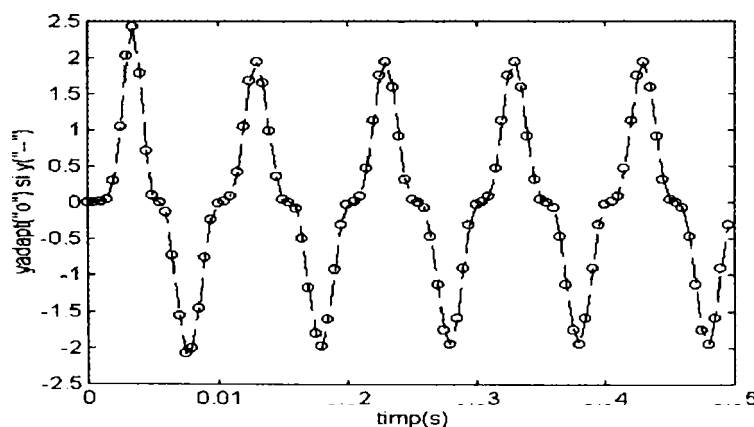


Figura 7.61 Răspunsul sistemului adaptiv și al celui real la un semnal sinusoidal ($f=100\text{Hz}$)

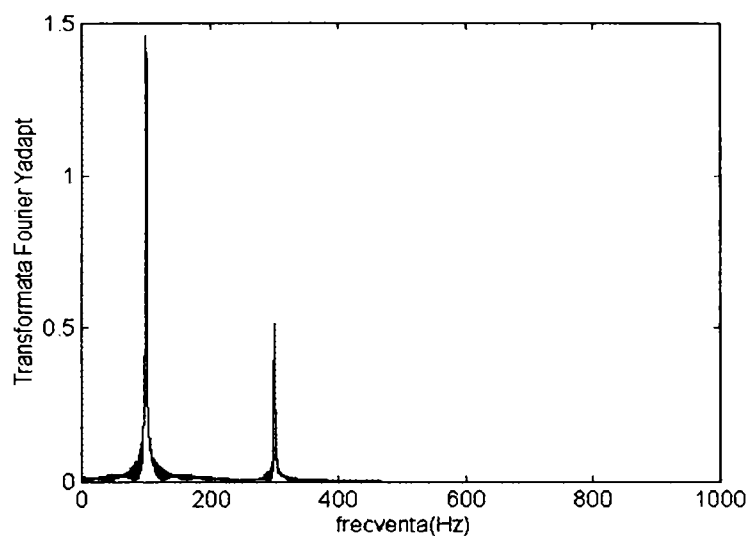


Figura 7.62 Transformata Fourier a semnalului la ieșirea filtrului adaptiv($f=100\text{Hz}$)

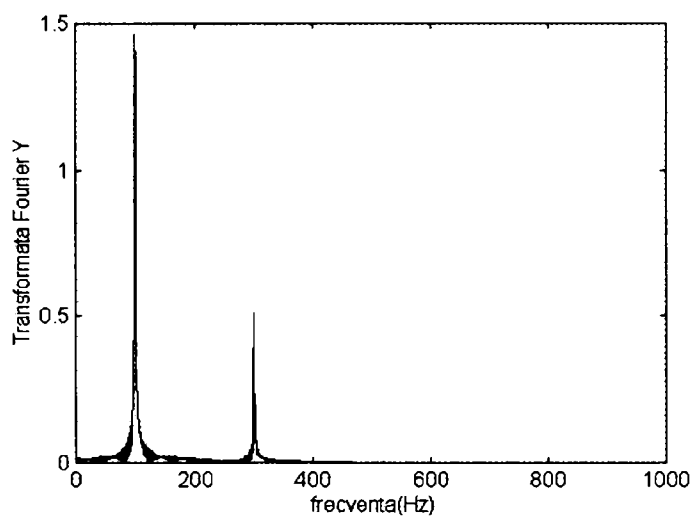


Figura 7.63 Transformata Fourier a semnalului la ieșirea sistemului real($f=100\text{Hz}$)

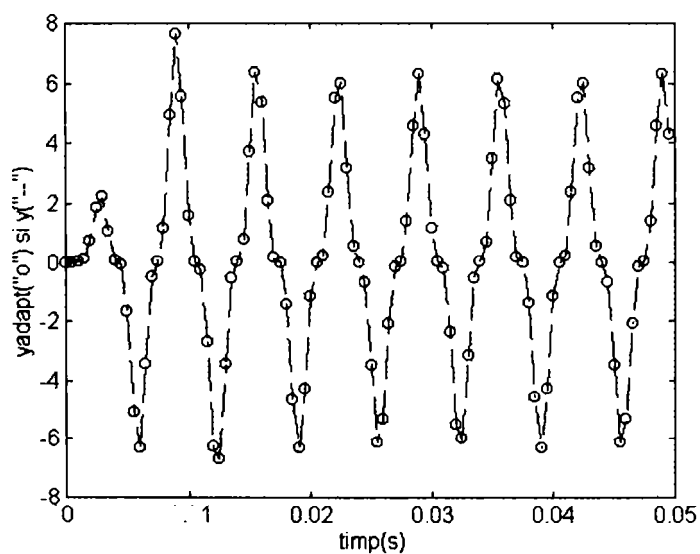


Figura 7.64 Răspunsul sistemului adaptiv și al celui real la un semnal sinusoidal($f=150\text{Hz}$)

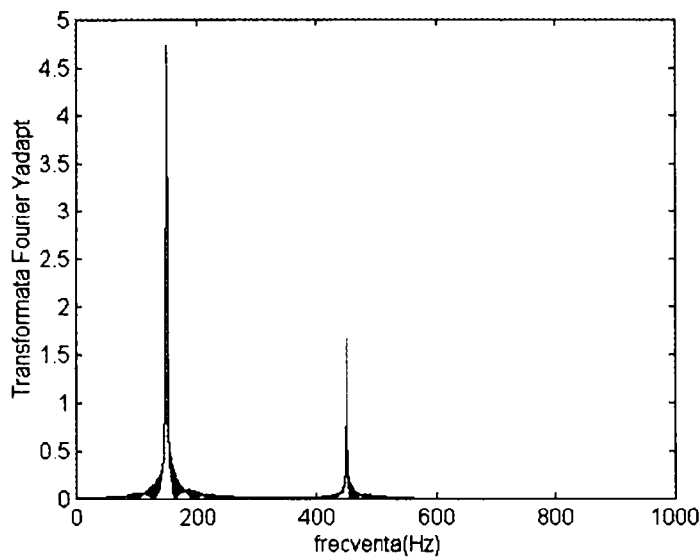


Figura 7.65 Transformata Fourier a semnalului la ieșirea filtrului adaptiv($f=150\text{Hz}$)

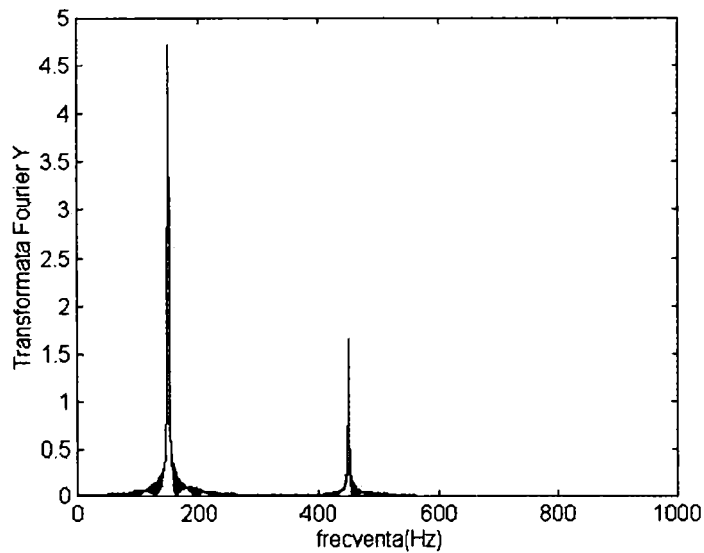


Figura 7.66 Transformata Fourier a semnalului la ieșirea sistemului real($f=150\text{Hz}$)

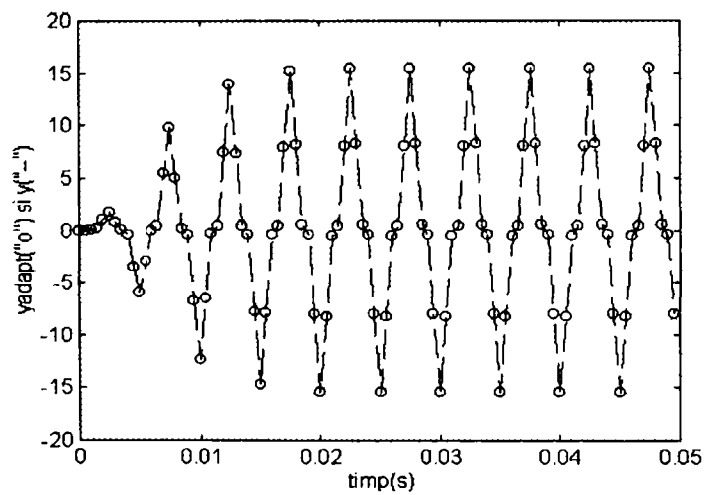


Figura 7.67 Răspunsul sistemului adaptiv și al celui real la un semnal sinusoidal($f=200\text{Hz}$)

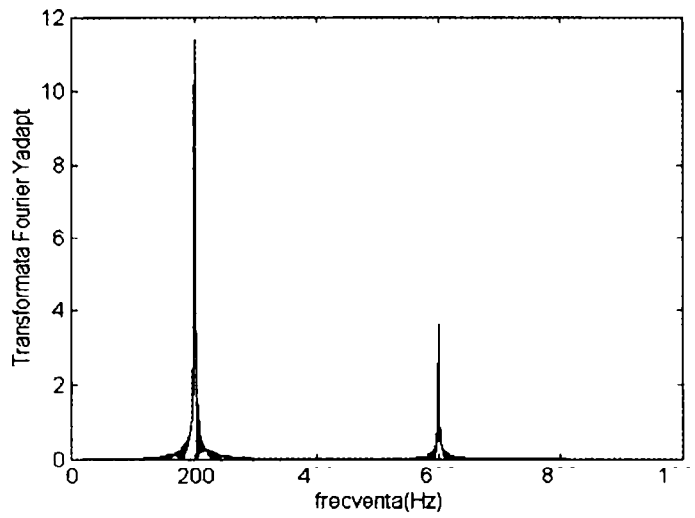


Figura 7.68 Transformata Fourier a semnalului la ieșirea filtrului adaptiv($f=200\text{Hz}$)

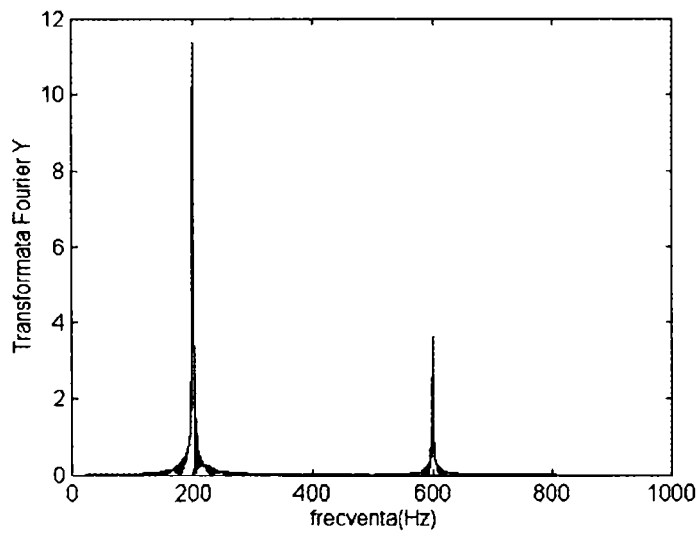


Figura 7.69 Transformata Fourier a semnalului la ieșirea sistemului real($f=200\text{Hz}$)

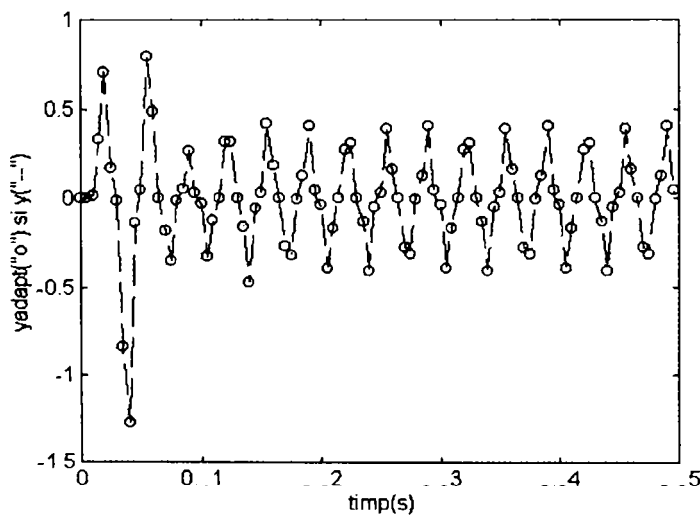


Figura 7.70 Răspunsul sistemului adaptiv și al celui real la un semnal sinusoidal($f=300\text{Hz}$)

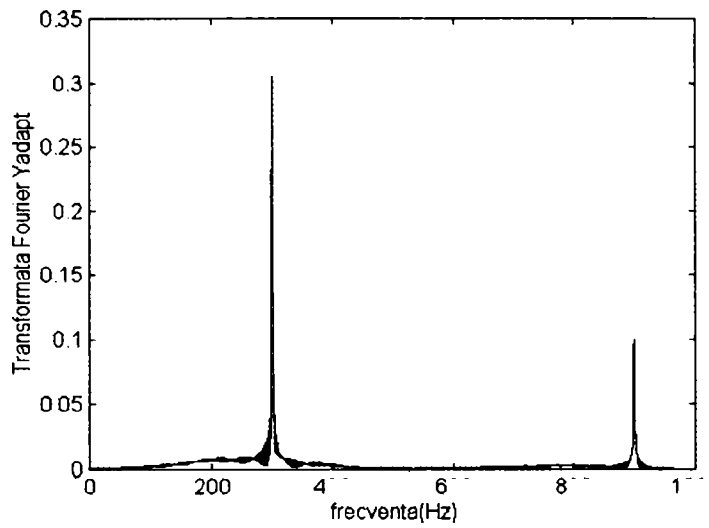


Figura 7.71 Transformata Fourier a semnalului la ieșirea filtrului adaptiv($f=300\text{Hz}$)

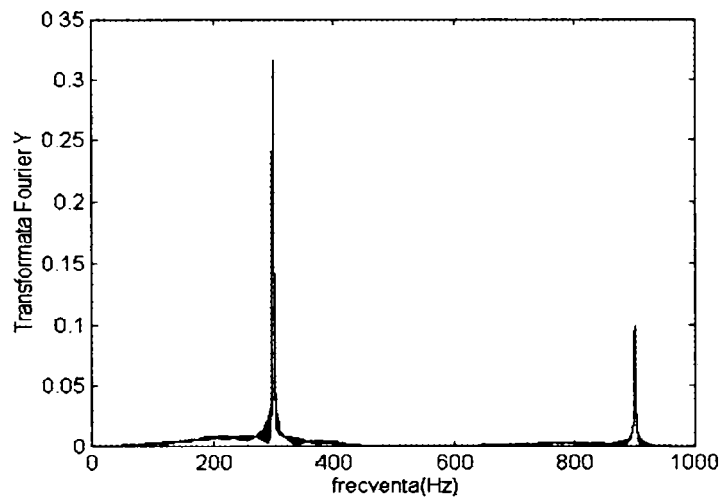


Figura 7.72 Transformata Fourier a semnalului la ieșirea sistemului real($f=300\text{Hz}$)

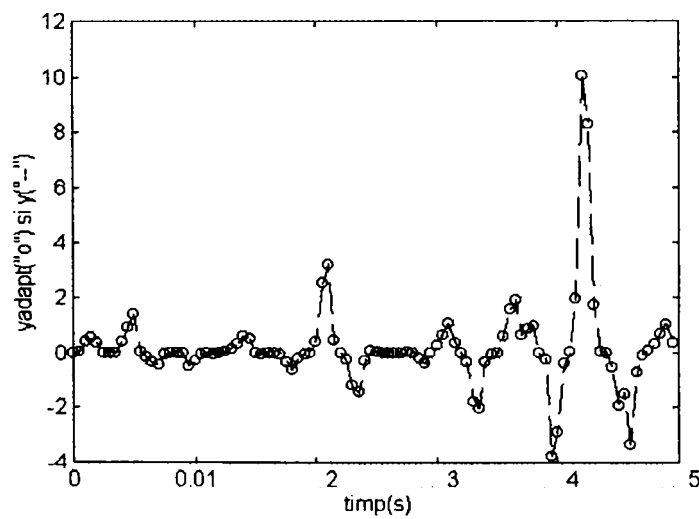


Figura 7.73 Răspunsul sistemului adaptiv și al celui real la un semnal un semnal zgomot alb

În urma analizei rezultatelor, se poate trage concluzia că nucleele determinate prin tehnica adaptivă prezentată, sunt calitativ superioare celor determinate prin metoda Lee-Schetzen. Problema pe care o ridică însă tehnicile adaptive constă în alegerea corectă a mărimii pasului de adaptare μ .

CONCLUZII Este implementată într-o manieră originală tehnica de identificare a nucleelor Wiener prin metoda Lee-Schetzen. Pentru perfectarea tehnicii s-au luat în studiu două sisteme neliniare al căror ordin e cunoscut apriori și e finit: un sistem neliniar cu memorie de ordinul al-II-lea respectiv un sistem neliniar cu memorie de ordinul al-III-lea. În primul caz s-au determinat nuclee de ordinul întâi și doi. Pe baza nucleelor determinate experimental s-a calculat răspunsul sistemului la diferite semnale de intrare. Calitatea modelului a fost apreciată pe baza erorii între răspunsul sistemului real și al celui model la același semnal de intrare. În cazul sistemului de ordinul al-III-lea, au fost determinate nucleele de ordinul I și al-III-lea și s-a propus o metodă originală de vizualizare a nucleului de ordinul al-III-lea, bazată pe simetria acestuia (fig.:7.16, 7.17, 7.18, 7.19.). S-a propus o formulă de calcul a răspunsului sistemului ce ține cont de metoda de identificare a nucleelor, precum și de simetria acestora (rel.7.13). Performanțele modelului au fost apreciate și în acest caz pe baza erorii între răspunsul sistemului real și al celui model la același semnal de intrare.

Tehnica de identificare prezentată a fost aplicată în modelarea unui sistem neliniar cu memorie al cărui ordin e necunoscut (fig.7.39) și în cazul unui sistem neliniar reprezentat de un amplificator cu tranzistor JFET ce operează în regiunea de saturație.

În cadrul paragrafului 7.3 este prezentată o metodă adaptivă de determinarea a nucleelor Volterra, ce se bazează pe algoritmul LMS. Implementarea metodei este precedată de un amplu studiu privind filtrarea neliniară adaptivă bazată pe algoritmul LMS. Sunt prezentate concluzii importante referitoare la alegerea pasului de adaptare.

Sunt determinate cu ajutorul algoritmului LMS nucleele Volterra ale unui sistem de ordinul al-III-lea cu memorie. Calitatea aproximării a fost apreciată pe baza erorii calculate ca diferență între coeficienții reali și cei estimați cu ajutorul algoritmului adaptiv. S-a calculat și comparat răspunsul sistemului model cu cel al sistemului real. Deși metoda de identificare prezentată ridică probleme de convergență, precizia ei depinde în mai mică măsură de calitatea semnalului gaussian utilizat spre deosebire de metodele bazate pe intercorelație.

CAPITOLUL 8. CONCLUZII FINALE

În teză se face un studiu detaliat al filtrelor Volterra, modele ce cunosc la ora actuală o largă aplicabilitate în tratarea sistemelor neliniare.

În cadrul lucrării a fost urmărit nu atât aspectul de noutate al metodei ci disponibilitățile acesteia în aplicații. Acest lucru a atras de la sine un amplu studiu al filtrelor Volterra atât în domeniul timp cât și în frecvență. O atenție deosebită a fost acordată metodelor de identificare ale nucleelor Volterra implicate în modelarea sistemelor neliniare. Urmărindu-se aplicabilitatea modelării prin intermediul seriilor Volterra s-a ajuns în mod firesc la abordarea seriilor de funcționale-G, serii cunoscute în literatura de specialitate sub numele de serii Wiener. Metodelor de identificare ale nucleelor Wiener le-a fost acordat un spațiu relativ mare în cadrul lucrării. În final atenția s-a concentrat asupra reconstrucției semnalului pe baza modelului și a calității oferite de modelarea Volterra-Wiener. Performanțele modelului au fost evaluate într-un număr de aplicații tipice domeniilor de utilizare ale acestuia: modelarea unui sistem neliniar cu memorie, modelarea unui dispozitiv semiconductor ce operează în zona de saturație, implementarea tehnicilor de filtrare adaptivă, în speță a algoritmului LMS.

Analiza Volterra este o metodă analitică de studiu a sistemelor neliniare, continue sau discrete, cu sau fără memorie, pentru semnale deterministe sau aleatoare.

Originalitatea prezentei lucrări constă în următoarele aspecte:

1. Prezentarea filtrului Volterra în timp continuu, capabil să modeleze un sistem neliniar, invariant în timp, cu memorie. Introducerea modelului Volterra s-a făcut pe baza operatorilor p-liniari, ceea ce a permis o mai bună înțelegere a modului în care operatorii Volterra acționează asupra semnalului de intrare. Caracterizarea filtrelor Volterra analogice s-a făcut atât în domeniul timp, prin intermediul nucleelor Volterra atașate operatorilor cu același nume, cât și în domeniul frecvență cu ajutorul transformatei Fourier ale nucleelor. Utilitatea transformatei nucleului a fost demonstrată prin calculul răspunsului unui sistem de ordinul al-II-lea în cazul unui semnal de intrare sinusoidal precum și în cazul unui semnal de intrare aperiodic.
2. S-a prezentat filtrul Volterra în timp discret, care stă la baza implementării algoritmilor de filtrare neliniară adaptivă în cadrul capitolului VII. Elementul prototip l-a constituit filtrul Volterra de ordinul al-II-lea. S-a definit transformata Fourier a nucleului de ordinul al-II-lea cu ajutorul căreia s-a calculat răspunsul filtrului la un semnal de intrare determinist precum și răspunsul la un semnal de intrare aleator.

3. S-au evidențiat o serie de proprietăți ale nucleelor și operatorilor Volterra, care stau la baza modelării sistemelor neliniare precum și a implementării tehnicilor de filtrare neliniară adaptivă.
4. S-a prezentat metoda de determinare a nucleelor Volterra pentru un sistem al cărui ordin e cunoscut apriori și e finit, metodă ce a fost ulterior implementată în cadrul capitolului VII.
5. S-au dedus într-o manieră originală coeficienții filtrului Volterra în timp discret, ca soluție la problema estimării optimale a unei variabile aleatoare. Pentru simplificarea calculelor s-a ales un filtru Volterra de ordinul al-II-lea. Punctul de plecare l-a constituit limitările pe care le prezintă aplicarea în practică a predicției bazate pe filtrarea liniară. S-a introdus noțiunea de estimator Volterra de ordinul al-II-lea. Coeficienții filtrului Volterra folosit în estimare sunt oferți de relația 3.39. Ca o particularitate se remarcă posibilitatea determinării independente a coeficienților filtrului liniar și a celui pătratic ce intră în structura estimatorului Volterra. Sunt evaluate performanțele estimatorului Volterra prin calculul erorii medii pătratice (rel.3.40).
6. În cadrul paragrafului 3.4 sunt introduse funcționalele-G, ca metodă de caracterizare a sistemelor neliniare. Deducerea expresiilor funcționalelor de diferite ordine s-a făcut printr-un procedeu de ortogonalizare Gram-Schmidt, aplicat unor funcționale Volterra neomogene. Sunt deduse expresiile funcționalelor de ordin 0,1,2 și 3.
7. Sunt deduse relațiile între nucleele Wiener și Volterra pe baza echivalenței între cele două reprezentări.
8. Metoda de modelare a sistemelor neliniare bazată pe dezvoltarea în serie de funcționale ortogonale este extinsă în cazul unui semnal de intrare gaussian, care însă nu e alb. În structura modelului sunt introduse funcționalele-L, care constituie funcționalele ortogonale ale unui proces colorat gaussian.
9. În paragraful 3.9 sunt făcute aprecieri privind eroarea medie pătratică pentru modelul optim de ordin p , iar în paragraful 3.10 se introduce noțiunea de măsură a neliniarității unui sistem.
10. Pornind de la ideea găsirii unei metode practice pentru determinarea nucleelor atașate funcționalelor-G, este introdusă reprezentarea nucleelor cu ajutorul funcțiilor ortogonale. Setul de funcții ortogonale propus de Wiener este cel al funcțiilor Laguerre, larg utilizat în sinteza operatorilor cauzali. Reprezentarea operatorilor Volterra cu ajutorul funcționalelor ortogonale

constituie punctul de plecare pentru obținerea unei dezvoltări ortogonale în cazul funcționalelor-G. Procedura de descompunere prezentată în cazul funcționalei G_2 (rel.4.42) poate fi extinsă și în cazul funcționalelor de ordin superior și conduce la “Modelul general Wiener” (fig.4.9.). Secțiunea C a modelului, ce diferă de la un sistem neliniar la altul, conține tocmai coeficienții dezvoltării în serie Laguerre ai nucleelor. Acești coeficienți se pot determina pe cale experimentală (paragraful 4.3), utilizând ca semnal de intrare zgomotul alb gaussian.

11. Separând în cadrul modelului general Wiener partea de sistem care conține memorie, A, de cele două părți, fără memorie, B+C, și admitând pentru acestea o reprezentare sub forma unei funcții F, de mai multe variabile, se arată că, dacă F este analitică și admite o dezvoltare sub forma unei serii multidimensionale de puteri, atunci modelul general Wiener poate reprezenta sisteme Volterra. De aici provine numele de sisteme analitice, atribuit sistemelor reprezentabile prin serii Volterra.
12. În cadrul capitolului V este prezentată o fundamentare din punct de vedere matematic a aproximării operatorilor neliniari prin serii Volterra. La baza teoremelor de aproximare stă extinderea corolarului teoremei Stone-Weierstrass, referitor la aproximarea funcționalelor definite pe $C(\mathbb{R}_+)$, asupra operatorilor invariabili în timp, definiți pe un compact K, prin introducerea noțiunii de memorie descrescătoare (fading memory), a operatorului. Demonstrațiile teoremelor sunt făcute într-o manieră originală.
13. Este implementată într-o manieră originală tehnica de identificare a nucleelor Wiener prin metoda Lee-Schetzen. Pentru perfectarea tehnicii s-au luat în studiu două sisteme neliniare al căror ordin e cunoscut apriori și e finit: un sistem neliniar cu memorie de ordinul II respectiv un sistem neliniar cu memorie de ordinul III. În primul caz s-au determinat nuclee de ordinul întâi și doi. Pe baza nucleelor determinate experimental s-a calculat răspunsul sistemului la diferite semnale de intrare. Calitatea modelului a fost apreciată pe baza erorii între răspunsul sistemului real și al celui model la același semnal de intrare. În cazul sistemului de ordinul al-III-lea, au fost determinate nucleele de ordin I și III și s-a prezentat o metodă originală de reprezentare a nucleului de ordinul al-III-lea, bazată pe simetria acestuia (fig.:7.16, 7.17, 7.18, 7.19.). S-a propus o formulă de calcul a răspunsului sistemului ce ține cont de metoda de identificare a nucleelor, precum și de simetria acestora (rel.7.13). Performanțele modelului au fost apreciate și în acest caz pe baza erorii între răspunsul sistemului real și al celui model la același semnal de intrare.

14. Tehnica de identificare prezentată a fost aplicată în modelarea unui sistem neliniar cu memorie al cărui ordin e necunoscut (fig.7.39), și în cazul unui sistem neliniar reprezentat de un amplificator cu tranzistor JFET ce operează în regiunea de saturație.
15. În cadrul paragrafului 7.3 este prezentată o metodă adaptivă de determinarea a nucleelor Volterra, ce se bazează pe algoritmul LMS. Implementarea metodei este precedată de un amplu studiu privind filtrarea neliniară adaptivă bazată pe algoritmul LMS. Sunt prezentate concluzii importante referitoare la alegerea pasului de adaptare.
16. Sunt determinate cu ajutorul algoritmului LMS nucleele Volterra ale unui sistem de ordinul al-III-lea cu memorie. Calitatea aproximării a fost apreciată pe baza erorii calculate ca diferență între coeficienții reali și cei estimați cu ajutorul algoritmului adaptiv. S-a calculat și comparat răspunsul sistemul model cu cel al sistemului real. Deși metoda de identificare prezentată ridică probleme de convergență, precizia ei depinde în mai mică măsură de calitatea semnalului gaussian utilizat spre deosebire de metodele bazate pe intercorelație. Nucleele determinate prin tehnica adaptivă prezentată, sunt calitativ superioare celor determinate prin metoda Lee-Schetzen.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Karani, G., Sari, H., "Analysis of Predistorsion, Equalization and ISI Cancellation Techniques in Digital Radio Systems with Nonlinear Transmit Amplifiers", IEEE Trans. on Comms., Vol. 37, No. 12, pag.1245-1253, decembrie 1989.
- [2] Benedetto, S., Biglieri, E., Daffara, R., "Modeling and Performance Evaluation of Nonlinear Satellite Links – A Volterra Series Approach", IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 15, No. 4, pag. 494-507, iulie 1979.
- [3] Lazarin, G., Pupolin, S., Sarti, A., "Nonlinearity Compensation in Digital Radio Systems" IEEE Trans. on Comms., Vol. 42, No. 2./3/4, pag. 988-999, februarie / martie / aprilie 1994.
- [4] Lin, N., Unbehauen, R., "2-D Adaptive Volterra Filter and 2-D Nonlinear Channel Equalization and Image Restoration", Electronic Letters, Vol.28, No.2, pag.180-182, ian.1992.
- [5] Gin-Kou Ma, Junghsi, Lee, "A RLS Bilinear Filter for Channel Equalization", Proceedings IEEE, Vol.3, pag. 257-259, martie 1994.
- [6] Stapleton, J., C., Bass, S., C., "Adaptive Noise Cancellation for a Class of Nonlinear Dynamic Reference Channels", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-32, No. 2, pag. 143-150, februarie 1985.
- [7] Mc Rory, J., G., Johnson, R., "Volterra Kernel Estimation for Mildly Nonlinear Amplifiers", Electronic Letters, Vol.29, No. 23, pag 2007-2008, noiembrie 1993.
- [8] Samelis, A., Pehlke, D., R., Pavlidis, D., "Volterra Series Band Nonlinear Simulation of HBTs using Analytically Extracted Models", Electronic Letters, Vol.30, No. 13, pag 1098-1100, iunie 1994.
- [9] Reiss W., "Nonlinear Distorsion Analysis of p-i-n Diode Attenuator using Volterra Series Representation", IEEE Trans on Circuits and Systems, Vol.CAS-31 No. 6, pag. 535-542, iunie 1984.
- [10] Ewen, E., J., Weiner, Donalds, "Identification of Weakly Nonlinear Systems using Input and Output Measurement", IEEE Trans on Circuits and Systems, Vol.CAS-27, No.12, decembrie 1980.
- [11] Reiss, W., "Volterra Series Representation of a Forward-Biased p-i-n Diode", IEEE Trans on Electronic Devices, Vol. ED-28, No. 12, pag. 1495-1500, decembrie 1980.
- [12] Korenberg, M., J., Hunter, I., W., "The Identification of Nonlinear Biological Systems: Wiener Kernel Approaches", Annals of Biomedical Engineering, Vol.18, pag. 629-654, Pergamon Press, 1990.
- [13] Chan, Ki H., Chen Yu-Ming, Holstein-Rathlon, N. H., Marmarelis, V., Z., "Nonlinear System Analysis of Renal Autoregulation in Normotensive and

- Hypertensive Rats”, IEEE Trans. on Biomedical Engineering, Vol. 45, No.3, pag. 342-353, martie 1998.
- [14] Koh, T., Powers, E., J., “Second Order Volterra Filtering and its Application to Nonlinear System Identification” IEEE Trans on ASSP, Vol. ASSP-33, No. 6, pag.1445-1455, decembrie 1985.
- [15] Kim, K., I., Powers, E., J., “A Digital Method of Modeling Quadratic Nonlinear Systems with a General Random Input”, IEEE Trans on ASSP, vol.36, No. 11, pag. 1758-1769, Noiembrie 1988.
- [16] Pitas, T., Venetsanopoulos, A., N., “ Nonlinear Digital Filters; Principles and Application”, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [17] Budura, G., “Tehnici de filtrare adaptivă-Cazul neliniar”, referat de doctorat nr.1, Timișoara 1995.
- [18] Weierstrass, K., “Über die analytische Darstellbarkeit, sogenanter willkürlicher Funktionen reeler Argumente”, Math. Werke, III Bd., 1903, citată în [83].
- [19] Blachman. “The Signal x Signal, Noise x Noise, and Signal x Noise Output of a Nonlinearity”, IEEE Trans. On Information Theory, Vol.IT-14, No.1, pag 21-27, ianuarie 1968.
- [20] Blachman. “The Uncorrelated Output Components of a Nonlinearity”, IEEE Trans. On Information Theory, Vol.IT-14, No.2, pag 250-225, ianuarie 1968.
- [21] Volterra, V., “Sopra le Funzioni che Dipendono de Altre Funzioni”, Rend. R. Accademia dei Lincei 2° Sem, pag. 97-105, 141-149, 153-158, 1887, citată în [83].
- [22] Fréchet, M., “Sur les Functionelles Continués”, Annals Scientifiques de L’Ecole Normale Superieure, Third Series, Vol.27, pag. 193-216, 1910, citată în [83].
- [23] Schetzen, M., “The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems, Reprint Edition, Krieger, Malabar, Florida, 1989.
- [24] Barrett, J., F., “The Use of Functionals in the Analysis of Nonlinear Physical Systems”, Journal of Electronics and Control, Vol. 15(6), pag. 567-615, 1963, citată în [83].
- [25] Wiener, N., “Nonlinear Problems in Random Theory”, The Technology Press of MIT and John Wiley and Sons, 1958.
- [26] Schetzen, M., ”Measurement of the Wiener Kernels of a Non-linear System by Cross-correlation”, Int. Journal of control, Vol.2, pag 237-254, 1965 citată în [83]
- [27] Săvescu, M., “Metode în analiza circuitelor electronice”, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985
- [28] Săvescu, M., Borda, M., Gavrea, I., “Metode moderne de analiză a circuitelor electronice, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1991

- [29] Borda, M., "Contribuții la analiza aproximativă a circuitelor electrice", Teză de doctorat, București, 1987
- [30] Wray, J., Green G.G.R., "Calculation of Volterra Kernels of Non-Linear dynamic Systems using an Artificial Neural Network", Biological Cybernetics, Vol.71, pag.187-195, 1994.
- [31] Stonick, V.L., Moura J.M.F., "Memoryless Polynomial Adaptive Predistorsion", Proceedings IEEE, Vol.5, pag. 981-984.
- [32] Kang, H. W., Cho, Y.S., Youn, D.H., "Adaptive Precompensation of Wiener Systems", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.46, No.10, pag. 2825-2829, octombrie 1998.
- [33] Cowan, C.F.N., "Application of Adaptive Volterra Filters to Equalization", Proceedings IEEE, Vol. 1 Pag, 67-70, 1993.
- [34] Giannakis, G.B., Serpedin, E., "Linear Multichannel Blind Equalizers of Nonlinear FIR Volterra Channels, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.45, No.1, pag. 67-81, ianuarie 1997.
- [35] Frank, W.A., "Low Complexity 3rd Order Nonlinear Filtering, frank@sunny.et.unibw.-muenchen.de.
- [36] Mattews, V. J., "Adaptive Polynomial Filters", IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 8, No. 3, pag. 10-26, iulie 1991.
- [37] Krene, A., Lesiah, C. "The Existance and Uniqueness of Volterra Series for Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AI-23, No.6, pag.1090-1095, decembrie 1978.
- [38] Coulon, F., "Théorie et traitement des signaux", Ed. Georgi, 1984
- [39] Sicuranza, G. L., "Theory and Approximation of Polinomial Filters, Proc. IEEE, Vol.3, pag. 931-937,1993.
- [40] Morthensen, R.E., "Random Signals and Systems", John Wiley & Sons, 1987.
- [41] Fliess M, Lamnabhi, M, Lamnabhi-Lagarrigue, "An Algebraic Approach to Nonlinear Functional Expansions", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-30, No 8, pag.554-570, august 1983.
- [42] Bellman, F., "Analiza matricială" Ed. Tehnică, București, 1965
- [43] Rudko, M., "Volterra Systems with Random Inputs: A Formalized Approach, IEEE Trans, on communications, Vol.COM-26, No.2,pag. 217-227, februarie 1978.
- [44] Schetzen, M., "Nonlinear System Modeling based on the Wiener Theory", Proc. IEEE, Vol. 69, pag 1557-1573, decembrie 1981.
- [45] Korenberg, M. J., Hunter, I. W., "Identification of Nonlinear Biological Systems: LNL Cascades Models, Biological Cybernetics, Vol. 5, pag. 125-134, 1986.

- [46] Lee, Y.W., Schetzen, M., "Measurement of the Wiener Kernels of a Non-Linear System by Cross-Correlation, Int. Journal of Control, Vol. 2, pag. 237-254, februarie 1965.
- [47] Ku, Y.H., "Theory of Nonlinear Systems", Journal of the Franklin Institute, Vol.315, No.1, pag.1-26, ianuarie 1983.
- [48] Angot, A., "Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații", Ed. Tehnică, București 1965.
- [49] Marmarelis, V., "Identification of Nonlinear Biological Systems using Laguerre Expansions of Kernels", Annals of Biomedical Engineering, Vol.21, pag.573-589, 1993.
- [50] Sandberg, I.W., "Series Expansions for Nonlinear Systems", Circuits, Systems and Signal Processing, Vol. 2, No. 1, pag. 77-87, februarie 1983.
- [51] Rugh, W. J., "Nonlinear System Theory: The Volterra Wiener Approach", John Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1981.
- [52] Boyd, S., Chua, L., O., "Fading Memory and the Problem of Approximating Nonlinear Operator With Volterra Series", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-32, No. 11, pag. 1150-1161, noiembrie 1985.
- [53] Kantorovici, L.V., Akilov, G.P., "Analiză funcțională", Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [54] Budura, G., Crișan, S., "Over a Class of Nonlinear Operational Estimation", Proc. of the sixth Symposium of Mathematics and it's Application pag 45-51, 1995.
- [55] Kim, B.J., Powers, E.J., "Utilization of Conditioned Higher-Order Spectra for Nonlinear System Identification", Proceedings IEEE, Vol.5, pag 493-496, 1992.
- [56] Ritz, Ch. P., Powers, E.J., "Estimation of Nonlinear Transfer Functions for Fully Developed Turbulence", Physica 20D, pag. 320-334, 1986.
- [57] Tsimbinos, J., Lever, K.V., "Input Nyquist Sampling Suffices to Identify and Compensate Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.46, No.10, pag. 2833-2837, octombrie 1998.
- [58] Walter, A.F., "MMD-An Efficient Approximation to the 2nd Order Volterra Filter", IEEE Proceedings, pag. 517-520, 1994.
- [59] Priestley, M. B., "Spectral Analysis and Time Series", London Academic Press, 1981.
- [60] Kim, K. IL., Powers, E. J., "A Digital Method of Modeling Quadratic Nonlinear Systems with a General Random Input", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 36, pag. 1758-1769, noiembrie, 1988.
- [61] Dodds, C. J., Robson, J. D., "Partial Coherence in Multivariate Random Processes", Journal of Sound and Vibration, Vol. 42, pag. 243-249, 1975.

- [62] Bendat, J. S., "System Identification from Multiple Input-Output Data", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 49, pag. 293-308, 1976.
- [63] French, A. S., Butz, E. G., "Measuring the Wiener Kernels of a Non-linear System using The Fast Fourier Transform Algorithm", *Int. Journal of Control*, Vol.17, Nr.3, pag.529-539,1973
- [64] Mathews, V.J., Lee, J., "A Fast Recursive Least-Squares Second Order Volterra Filter", *Proceedings of IEEE Int. Conf. on ASSP, (ICASSP 1988)*, New-York, pag. 1383-1386, aprilie 1988.
- [65] Dokic, M.V., Clarkson, P.M., "On the Performance on a Second-Order Adaptive Volterra Filter", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 41, No 5. pag. 1944-1947, mai 1993.
- [66] Sicuranza, G., L., Ramponi, G., "A Variable-Step Adaptive Algorithm for Memory-Oriented Volterra Filters", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. ASSP 35, No. 10, pag.1492-1494, octombrie 1987.
- [67] Clarkson, P. M., Dokic, M. V., "Stability and Convergence Behaviour of Second-Order LMS Volterra Filter", *Electronics Letters*, Vol. 27, No. 5, pag. 441-443, februarie 1991.
- [68] Cho, Y. S., "Estimation of Nonlinear Distorsion using Digital Higher – order Spectra and Volterra Series", *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, (ISCAS'92)*, pag 2781-2784, mai 1992
- [69] Amblard, P.O., Moisan E., "Frequency Domain Volterra Filters in Terms of Distributions", *Signal Processing Letters*, Vol.1, No.11, noiembrie 1994.
- [70] Amblard, P.O., Moisan E., "On the Use of Frequency Domain Volterra Filters" amblard@cephag.observ-gr.fr.
- [71] Im, S., Powers, E.J., "A Third Order Frequency-Domain Volterra Filter", *NISP '95*, <http://poseidon.csd.auth.gr/workshop/papers/s-5html>.
- [72] Korenberg, M. J., Paarmann, L. D., " Orthogonal Approaches to Time-Series Analysis and System Identification", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 8, No. 3, pag. 29-43, iulie 1991.
- [73] Korenberg, M. J., "Exact Orthogonal Kernel Estimation from Finite Data Records; Extending Wiener's Identification to Nonlinear Systems", *Annals of Biomedical Eng.*, Vol. 16, pag 201-214, 1998
- [74] Korenberg, M. J., "Parallel Cascade Identification and Kernel Estimation for Nonlinear Systems", *Annals of Biomedical Eng.*, Vol 19, pag. 429-455, 1991.
- [75] Mulgrew, B., "Orthonormal Functions for Nonlinear Signal Processing and Adaptive Filtering", *Proceedings IEEE*, Vol.3, pag.509-512, 1993.
- [76] Ushida, A., Chua, L.O., "Frequency-Domain Analysis of Nonlinear Circuits driven by Multi-Tone Signals", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, No.9, pag.766-779, septembrie 1984.

- [77] Evans, C., Rees, D., Jones, L., Weiss M., "Periodic Signals for Measuring Nonlinear Volterra Kernels", IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol.45, No.2, pag. 362-371 aprilie, 1996.
- [78] Boyd, S., Tang, Y. S., Chua, L. O., "Measuring Volterra Kernels", IEEE Trans. on Circuits and Systems", Vol. CAS-30, No.8, pag 571-577, august 1983
- [79] Thapar, H.K., Leon, B.J., "Transform-Domain and Time-Domain Characterisation of Nonlinear Systems with Volterra Series", IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol. CAS-31, No.10, pag. 321-337, octombrie 1984.
- [80] Budura, G., "Nonlinear System Identification using the Volterra – Wiener Theories", Proc. of The Symposium on Electronic and Telecommunications, pag. 95-101, Timișoara, 1994
- [81] Press, W., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., "Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, 1992.
- [82] Tseng, C.H., Powers, E.J., "Application of Orthogonal –Search Method to Volterra Modeling of Nonlinear Systems", Proceedings IEEE, Vol.4, pag.512-515, 1993.
- [83] Tsimbinos J., "Identification and Compensation of Nonlinear Distorsion", Thesis, University of South Australia, School of Electronic Engineering, feb. 1995.
- [84] Morhac M., "A fast Algorithm of Nonlinear Volterra Filtering", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 39, No. 10, pag. 2353-2356, octombrie 1991.
- [85] Budura, G., "Metode și tehnici de filtrare adaptivă în telecomunicații- Problema identificării sistemelor neliniare", Referat de doctorat nr. 2, Timișoara, 1996.
- [86] Budura, G., Crișan, S., "Utilizarea estimatorilor neliniari în identificarea sistemelor", Academia Tehnică Militară a 26-a sesiune de comunicări științifice cu participare internațională, vol.6, pag. 322-330, București, 1995
- [87] Bellanger, M. G., Adaptive Digital Filters and Signal Analysis, Marcel Dekker, Inc, Cap.4, pag.97-129, 1987.
- [88] Widrow, B., Stearns, S.D., "Adaptive Signal Processing", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [89] Sicuranza, G. L., "Quadratic Filters for Signal Processing" Proc. of the IEEE, Vol. 80, Nr.8, pag 1263-1285, august 1992
- [90] Clarkson P.M., Dokic, M.V., "Performance Characteristics of a Third Order Adaptive Volterra Filter", Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, (ISCAS 1992), Vol. 6, pag. 2785-2788, mai, 1992.

- [91] Budura, G., Naforniță, I., “Measuring the Wiener Kernels of a Nonlinear System by use of the Cross-Correlation approach”, Proc. of The Symposium on Electronic and Telecommunications, pag. 76-83, Timișoara, 1998
- [92] Mathews, J. “Adaptive Volterra Filters Using Orthogonal Structures”, IEEE Signal Processing Letters, Vol.3, nr. 12, pag 307-309, decembrie 1996.
- [93] Raz, G.M., Van Veen, B.D., “Baseband Volterra Filters for Implementing Carrier Based Nonlinearities”, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 46, No. 1, pag. 103-114, ianuarie 1998.
- [94] Panicker, T.M., Mathews, V.J., “Parallel-Cascade Realisation and Approximation of Truncated Volterra Systems”, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 46, No. 10, pag. 2829-2832, octombrie 1998.
- [95] Scott, I., Mulgrew, B., “Nonlinear System Identification and Prediction Using Orthonormal Functions”, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 45, No. 7, pag. 1842 -1853, iulie 1997.
- [96] Tseng, C.H. “A Mixed-Domain Method for Identification of Quadratically Nonlinear Systems”, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 45, No. 4, pag. 1013 -1024, aprilie 1997.